CHAPTER 02 數位資料表示法



- 2-1 資料型態
- 2-2 二進位表示法
- 2-3 各種進位表示法的轉換
- 2-4 整數表示法
- 2-5 浮點數表示法
- 2-6 ASCII及Unicode





- 數位在電學上是指不連續變化的數量表示法。
- ➡ 何謂不連續變化?
 - ▶ 實數是連續變化的數量表示法,因為任兩數之間 還可以找到第三個數介於它們之間,而且到最後 是沒有空隙的。
 - 整數是不連續變化的數量表示法,例如整數1和整 數2之間,我們再也找不到任何整數是介於它們之 間的。









- ◆ 針對不連續變化的數量,可以用位元(binary digit; bit)的組合來計數。
- ◆ 位元是數位資訊的基本粒子,也是電腦儲存或傳 遞資料的最小單位,常用0或1來表示。
- 電腦會採用位元表示資料,主要是因為電子元件 的穩定狀態有兩種,單一的0或1稱為位元(bit)。
 - ▶ 「開」(通常用來表示 "1")
 - ▶ 「關」(通常用來表示 "0")









- ➡ 早期電腦以8個位元為存取單位,因此8個位元稱 為位元組(byte)。
- ➡ 兩個位元可以有 2的2次方 共4種組合(00, 01, 10, 11)。
- ◆ 每增加一個位元,組合數就加倍。
- ▶ n個位元可以有 2ⁿ 種不同的組合,就可用來表示 2ⁿ 種不同物件。

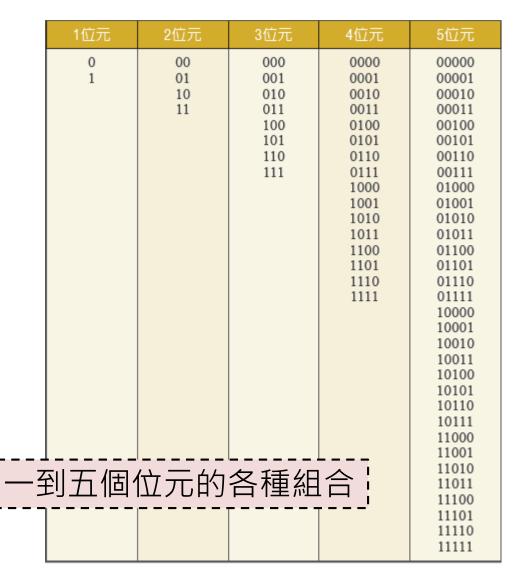
























- ▶ 8個位元可以有 2的8次方 共256種組合,足以表示每一個英文字母(大小寫共52個)、數字(0到9共10個)和標點符號。ASCII就是這類型組合的公定標準。
- ▶ 16個位元可以有 2的16次方 共65,536種組合, 遠超過常用的中文字數目,因此16個位元可表示 中文字。













- ➡ 為避免各國文字的位元表示方式有所衝突,萬國碼(Unicode)依實現方式不同,而以不同位元個數的組合來公定各國文字。
- ◆ 由於電腦的存取機制以位元組為基本單位,所以表示資料所需的位元數,通常是8、16及32等。













關於資料容量的單位,常見的有KB、MB、GB及TB四種。

「B」代表的是Byte(位元組),不是Bit(位元)。

「K」代表了210,為1,024,大約是一千左右。

「M」是 $2^{20} = 2^{10} \times 2^{10} = 1,048,576$,大約是百萬左右。

對於2×的估算,我們常以2¹⁰為簡化的捷徑,因為它和10³(也就是1000)非常接近。











02







縮寫單位	全名	精確位元組個數	大約位元組數	範例
KB	Kilo Byte	$2^{10} = 1,024$	一干(10³)	這個檔案的大小約 238 KB。
MB	Mega Byte	$2^{20} = 1,048,576$	一百萬(10 ⁶)	此大姆碟的容量為 512 MB。
GB	Giga Byte	$2^{30} = 1,073,741,824$	十億(10°)	本片D V D的容量為 4.7 GB。
ТВ	Tera Byte	$2^{40} = 1,099,511,627,776$	一岁と(10 ¹²)	這部高容量磁碟可儲 存20 TB的資料。



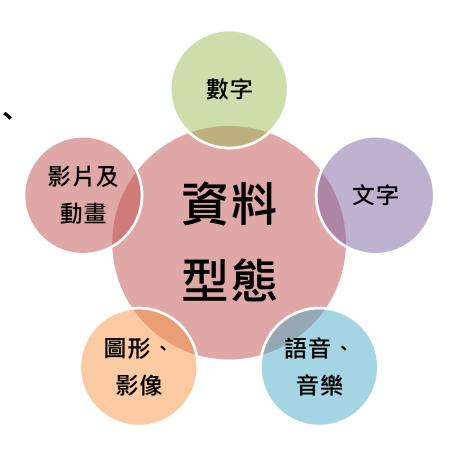


02



2-1 資料型態

● 電腦需要處理的資料型態(data type)有:數字、態(data type)有:數字文字、語音、音樂、圖形、影像、影片及動畫等,會編碼成位元字串儲存在電腦裡,等到顯不或列印時,再解碼成原來的資料格式。













2-1 資料型態

- ▶ 影像數位化
 - 以黑白照片為例,照片的一小部分記錄每個方格的灰度(0~255),每個方格可用八位元來表示(八個0與1可以有256種組合)。可依同樣道理將彩色圖片數位化。
- ▶ 聲音數位化
 - ▶ CD唱片上的取樣是每秒約四萬四千次,每一次取樣的聲波,都可轉化成相對應的位元。













2-1 資料型態

- ▶ 數位化的資訊方便編輯、處理、儲存、傳輸及播放,以便更有效精確地表達意念。
- ➡ 可用電腦編輯及整合不同的數位化資訊,精確安排各種複雜媒體出現的順序、時間及播放設備。
- ➡ 可利用電腦強大的處理及搜尋功能,提供多媒體的互動方式,加強虛擬實境的真實感。
- ▶ 透過網際網路無遠弗屆的牽引,使數位化資訊即時傳送到世界每一個角落。











- ➡ 古巴比倫人所用的數字系統是六十進位法,逢 「六十」進一,現在除了每分鐘六十秒及每小時 六十分外,此法已不多見。
- ➡ 現今公制是以十為基數,採用十進位法,滿「十」 進一。













→ 一個數字在不同的位置上所表示的數值也就不同。

523

5 在百位上則表示5個百

在十位上就表示2個十

在個位上表示3個一

 \Rightarrow 523 = 5×10² + 2×10¹ + 3 \circ













➡ 若以B為基數,則 d_nd_{n-1}...d₂d₁.r₁r₂...r_{m-1}r_m 所表示的數為:

$$d_n \times B^{n-1} + d_{n-1} \times B^{n-2} + ... + d_2 \times B^1 + d_1 \times B^0 + r_1 \times B^{-1} + r_2 \times B^{-2} + ... + r_{m-1} \times B^{-(m-1)} + r_m \times B^{-m}$$

◆ 在此 B⁰ = 1











- 電腦電子元件最穩定簡單的狀態為「開(1)」與「關(0)」,故目前通行電腦用二進位符號來儲存資料。
- ▶ 因為一個位元組有八個位元,可切成兩個十六進位 數,因此電腦系統也常使用十六進位數來顯示資料。
- → 十六進位系統的數字0到15,分別以阿拉伯數字的
 0~9及A~F表示。
- ➡ 二位元字串 11010011 可表示成 D3₁₆ 或 0xD3 (x起 頭,代表該數為十六進位數)。

















台北101大樓在2004年落成,號稱是當時世界第一大樓。本書作者趙老從上個世紀起,就住在1011樓了,什麼?1011?那不是超高樓層嗎?啊哈!其實是二進位的1011,也就是 $1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1=11$,是十進位的11樓啦!

為了要避免混淆,如果不是十進位表示的數字,我們通常會在數字的右下方註明它的基數,例如:1011₂就是指二進位的1011。









2-3 各種進位表示法的轉換

十六進位的數字符號及其所對應的十進位及二進位

十進位	二進位	十六進位	十進位	二進位	十六進位
0	0	0	8	1000	8
1	1	1	9	1001	9
2	10	2	10	1010	A
3	11	3	11	1011	В
4	100	4	12	1100	С
5	101	5	13	1101	D
6	110	6	14	1110	Е
7	111	7	15	1111	F













十進位數與二進位數的互換

→ 二進位數 d_nd_{n-1}...d₂d₁.r₁r₂...r_{m-1}r_m 所表示的數
為:

$$d_n \times 2^{n-1} + d_{n-1} \times 2^{n-2} + ... + d_2 \times 2^1 + d_1 + r_1 \times 2^{-1} + r_2 \times 2^{-2} + ... + r_{m-1} \times 2^{-(m-1)} + r_m \times 2^{-m}$$

→ 只要將每個二進位數字和它所對應的2的次方項 (以十進位表示)相乘即可。











10110101.11012所對應的十進位數為181.8125

$$2^7 \quad 2^6 \quad 2^5 \quad 2^4 \quad 2^3 \quad 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0 \qquad \qquad 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \quad 2^{-4}$$

$$2^{7}$$
 + 2^{5} + 2^{4} + 2^{2} + 2^{0} + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-4}

$$=$$
 128 + 32 + 16 + 4 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.0625

= 181.8125













十進位181所對應的二進位數為1011010122

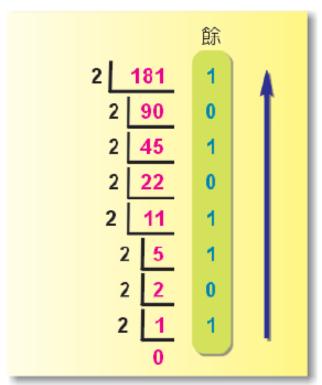
181÷2得商數90,餘數1

 $\rightarrow d_1$ 為 1

90÷2得商數45,餘數0

 $\rightarrow d_2$ 為 0

...以此類推。



得 10110101









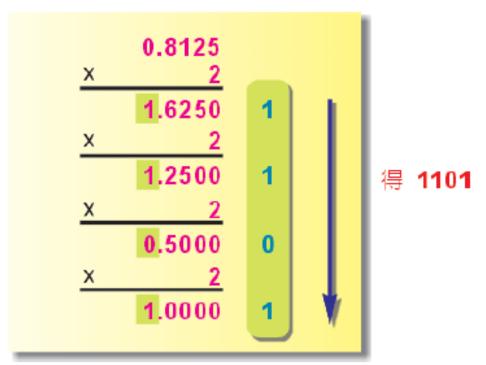


十進位0.8125所對應的二進位數為0.11012

$$0.8125 \times 2 = 1.625$$

剩下小數0.625×2=1.25

...以此類推。









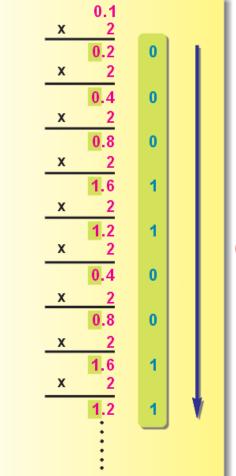




十進位 0.1 所對應的

二進位數為無窮位數

0.000110011...2



得 0.000110011...

(為循環小數 0.00011)













二進位數與十六進位數的互換

▶ 因為16為2的整數次方,所以二進位數和十六進位數可說是系出同門。

二進位數換成十六進位數時,每四個位數合成一項



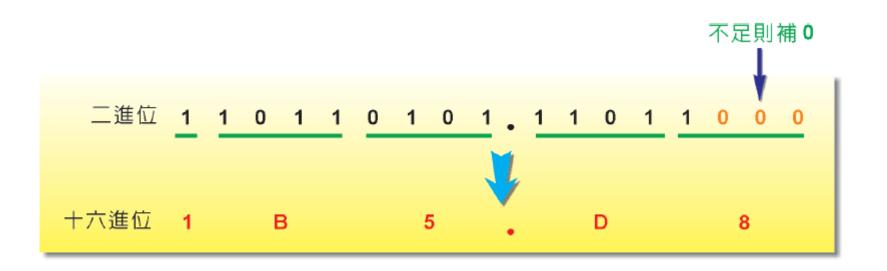








110110101.11011₂的十六進位表示法為 1B5.D8₁₆







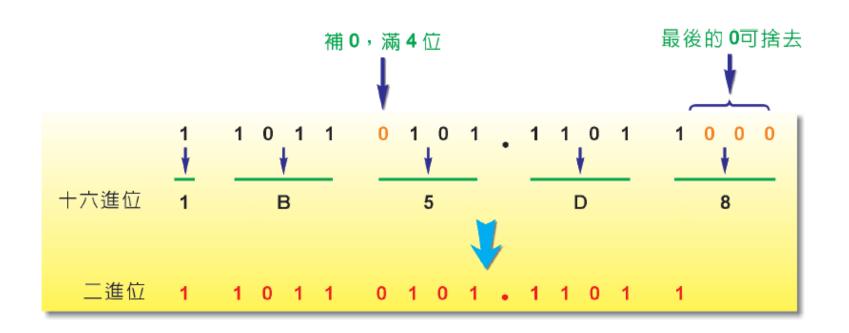








1B5.D8₁₆的二進位表示法為 110110101.11011₂





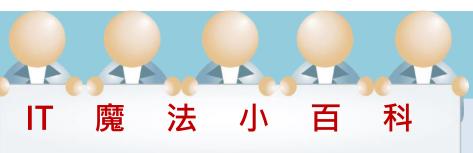














「二八年華」常被用來形容含苞待放的青春歲月,指的是「二乘以八」等於十六歲左右的年輕朋友們,本書作者趙老撰寫初版時已是百戰沙場的歐吉桑,居然號稱剛度過二八年華,這到底是怎麼一回事呢?原來是十六進位的二十八,也就是x28 = 2×16¹ + 8 = 40。有道是:「二八年華應猶在,只是進位改。」







2-4 整數表示法

- ➡ 只表示非負的整數,只要將最小的位元字串(亦即全為0的字串)給0,依序表示到最大的數即可。
- ▶ n 個位元就可表示 2^n 個數,所表示的整數範圍為 $0 \sim 2^n 1$ 。
- ▶ 例如:使用8個位元,可表示0~28-1間的所有整數,也就是從0~255的所有整數。











無正負符號的整數

▶ 位元字串與十進位數的對應表

以8位元所表示的「無正負符號的整數」

位元字串	十進位數
00000000	0
00000001	1
00000010	2
:	:
11111110	254
11111111	255











带正負符號大小表示法

- ◆ 若要同時表示正數和負數,最直接的作法是採用 「帶正負符號大小表示法」。
- ◆ 位元字串的最左邊位元當作符號位元(0為正數; 1為負數),剩下的n-1個位元用來表示數的大小。
 - ▶ 以位元0開頭的整數範圍為 0 ~ 2ⁿ⁻¹-1
 - ▶ 以位元1開頭的整數範圍為 0~-(2ⁿ⁻¹-1)











帶正負符號大小表示法

- ➡ 若使用8個位元,則可表示 -(2⁷-1)~2⁷-1 間的所 有整數(-127~127)。
- ▶ 此法的潛在問題:
 - ▶ 有兩個0,+0(000...00)和-0(100...00)。
 - ▶ 正數和負數的運算(例如加和減)並不直接。
- ▶ 目前電腦並不採用這種方法表示整數。













以8位元所表示的「帶正負符號大小表示法」

位元字串	十進位數
00000000	0
00000001	1
:	:
01111111	127
10000000	-0
10000001	-1
:	:
11111111	-127











- 補數的概念是指要補多少才滿。
- ▶ 假設到超級市場買東西,共買793元,若付千元 大鈔:
 - ▶ 將千元大鈔放一旁,嘴巴唸793,在另一旁拿出1元,唸794;再拿出1元,唸795;再拿出5元,唸800;再拿出100元,唸900;再拿出100元,唸1000。共拿出1+1+5+100+100=207元,正好是要找的錢。
 - ▶ 793元還差207元就可「補」成1000元。













一補數表示法

- → 「一補數表示法」與「二補數表示法」仍以位元 字串最左邊的位元當作符號位元(0為正數;1為 負數);其餘的n-1個位元則用來表示正負符號外 的數值大小。
- ➡ 其正數表示方式與「帶正負符號大小表示法」相同,負數表示法則有所不同。











一補數表示法

→ 十進位數值轉換成一補數表示法,步驟如下:

步驟1

先忽略其符號,將 數字的部分轉成二 進位數值。

步驟 2

· 若二進位數值超過
n-1個位元,則為溢位(overflow),無法進行轉換;否則在它的左邊補0,直到共有n個位元為止。

步驟 3

若所要轉換的數為 正數或零,則步驟2 所得數值即為所求; 若為負數,則將每 個位元做補數轉換 (原0轉1;原1轉0)。











41的一補數表示法為何?

第一步

將41轉成二進位數值101001。

第二步

在二進位數值左邊補上0,使00101001共有8個位元,因為要表示的數為正數,所以00101001 即為所求。











-41的一補數表示法為何?

第一步

將41轉成二進位數值101001。

第二步

在二進位數值左邊補上0,使00101001共有8個 位元;因要表示負數,所以將原為0的轉成1;原 為1的轉成0,得11010110。











-41的八位元一補數表示法為11010110

第一步: 將41轉成101001



第二步:在左邊補滿0,得00101001

第三步:做補數動作,得11010110

00101001



0變1&1變0

11010110













一補數「11010110」所表示的值為多少?

第一步

因為最左邊位元是1,所以將補數原0轉1;原1 轉0,得00101001。

第二步

再將二進位的00101001轉成十進位的41,然後 加上一個負號,得-41。











一補數表示法

- ➡ 一補數法也碰到「兩個O」的問題。 以八位元為例,00000000和11111111都是0, 會造成計算上的困擾。
- ➡ 其加減法也不是那麼直接。
- 所以一補數法並非目前電腦表示整數所用的方式。









二補數表示法

- ▶ 「二補數表示法」是目前電腦表示整數所用的方法。
- ▶ 補數方法:
 - ▶ 以位元字串最左邊的位元當作符號位元,以它來表示數的正負(0為正數;1為負數)。
 - ▶ 其餘n-1個位元則用來表示正負符號外的數值大小。













二補數表示法

→ 十進位數值轉換成二補數表示法,步驟如下:

步驟1

• 先忽略其符號,將數 字的部分轉成二進位 數值。

步驟 2

• 若二進位數值超過n-1 個位元・則為溢位 (overflow),無法進 行轉換;否則在它的 左邊補0,直到共有n 個位元為止。

步驟 3

• 若要轉換數為正數或 零,則步驟2所得數值 即為所求;若為負數, 則最右邊的那些0及最 右邊的第一個1保持不 變,將其餘位元做補 數轉換(原0轉1;原1 轉0)。











40的二補數表示法為何?

第一步

先將40轉成二進位數值101000。

第二步

在二進位數值左邊補0,使00101000共有8個位元,因要表示數為正數,故00101000即為所求。













-40的二補數表示法為何?

第一步

先將40轉成二進位數值101000。

第二步

在二進位數值左邊補0,使0010<u>1000</u>共有8個位元。因要表示數為負數,所以最右邊的三個0及第一個1維持不變,其餘將原0轉1;原1轉0,得11011000。









二補數「11011000」所表示的值為多少?

第一步

因為最左邊位元是1,所以先保留最右邊的三個0 及最右邊的第一個1,再將其他位元<u>原0轉1;原</u> 1轉0,得00101000。

第二步

再將二進位00101000轉成十進位的40,然後加上一個負號,得-40。









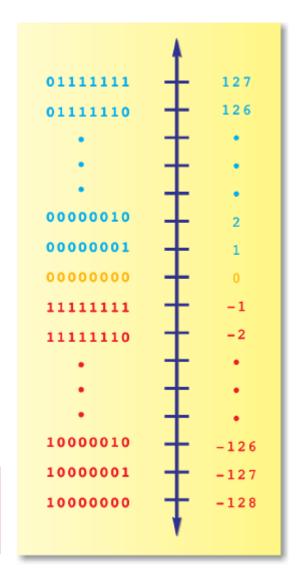




二補數表示法

➡ 二補數的0只有一個,以八位元 為例,就是0000000。

八位元二補數表示法的位元字串與數值之對應













- ◆ 先將所加的兩個數之二補數位元對齊,從最右邊的位元開始加起,若相對位置的位元相加為二或以上,則有進位。
- ➡ 若有進位,則往左邊傳遞;若最左邊位元相加有 進位,則忽略這個進位。
- ➡ 兩正數相加後,若最左邊符號位元為1,則有溢位(overflow);兩負數相加後,若最左邊符號位元為0,則有溢位(overflow)。













二補數表示法的兩正數相加

			1					← 進位		
	16	0	0	0	1	0	0	0	0	
+)	24	0	0	0	1	1	0	0	0	
	40	0	0	1	0	1	0	0	0	









二補數表示法的一正一負相加,且結果為正













二補數表示法的一正一負相加,且結果為負











二補數表示法的兩負數相加

最左邊的位元相加有進位, 忽略不管。















二補數表示法的兩正數相加結果超過正數儲存範圍,稱為溢位(overflow)。



符號位元相加結果為1,也就是兩正數相加反為負數。是因為8位元的二補數最大正數為2ⁿ⁻¹-1 (=127),而在此結果為129,已超過正數儲存範圍。













二補數表示法的兩負數相加結果小於負數儲存範圍,稱為溢位(overflow)。



符號位元相加結果為0,也就是兩負數相加反為正數。是因為8位元的二補數最小負數為 -2ⁿ⁻¹(=-128),而在此結果為-129,已小於負數儲存範圍。











- ▶ 牽涉到負數的二補數加法,情況比較複雜:
 - ▶ 40的二位元字串為00101000, -40的二補數字串是11011000,將位元符號視為數值的一部分,將二進位字串換成十進位,得216,正好是256-40,也就是28-40。
 - ▶ 24的二位元字串為00011000, -24的二補數字串是11101000,將位元符號視為數值的一部分,將二進位字串換成十進位,得232,正好是256-24,也就是28-24。











→ 28的二進位字串 = 1 0000 0000 ∘

```
      28
      1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

      -) 40
      0 0 1 0 1 0 0 0

      -40二補數表示法
      1 1 0 1 1 0 0 0

      0變1; 1變0
      維持不變
```

◆ 結論:一個二補數負數 -x 所表示成的二位元字 串數值為 2ⁿ-x。













◆ 令 x 和 y 為兩正數 · x + (-y) 就是一正一負相加的情況 · -y 的二補數表示法之數值為 2ⁿ-y ·

狀況一 x > y

- 相加結果 x-y 應為正數。
- 二補數相加,得到x+(2ⁿ-y)= 2ⁿ+(x-y),在此的 2ⁿ 會造成最左邊忽略掉的進位,故得 x-y。













狀況二

X = Y

- 相加結果 x-y 應為0。
- 二補數相加,得到 x+(2ⁿ-y)=2ⁿ+(x-y),在此
 的 2ⁿ 會造成最左邊忽略掉的進位,故得 x-y=0。

狀況三

x < y

- 相加結果 x-y 應為負數 · 其值為 -(y-x) ·
- 二補數相加,得到 x+(2ⁿ-y)=2ⁿ+(y-x),在此的 2ⁿ 會造成最左邊忽略掉的進位,-(y-x)的二補數數值正好就是 2ⁿ-(y-x)。











- → 浮點數表示法是電腦表示實數最常用的方式。
- 「536.87」表示成科學記號為「5.3687×10²」, 浮點數表示法的運作原理亦同,會移動小數點, 使其「浮動」到標準的位置。
- ◆ 在有限位元數的情況下,浮動小數點所能表示的 數值範圍比固定小數點位置的方式大許多。











科學記號標準化動作:

10110.100011



1.0110100011×24

- ▶ 小數點左邊的數值一定是1。
- ▶ 小數點右邊的0110100011稱為尾數(mantissa), 而指數(exponent)為4。





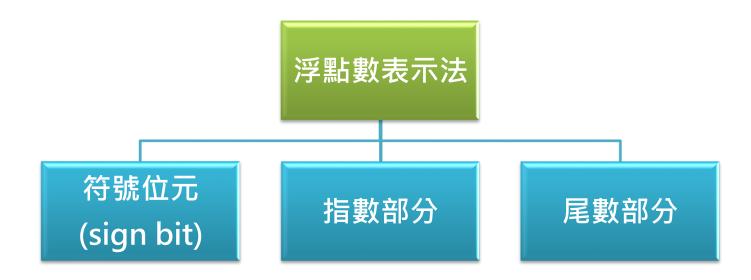








▶ 目前所採用的浮點數表示法以IEEE 754標準為主, 主要有三部分:













- ➡ 單倍精準數:以1個位元表示符號;8個位元表示 指數;23個位元表示尾數部分。
- ◆ 雙倍精準數:以1個位元表示符號;11個位元表 示指數;52個位元表示尾數部分。















單倍精準數

- → 符號位元:1個位元,以0表示正數;以1表示負數。
- → 指數部分:8個位元,以過剩127(Excess 127: 將位元數值減去127所得的值,才是真正所儲存 的值)方式表示。8個位元所存的數值可從0~255, 共有28種變化。
- ▶ 尾數部分:23個位元,從標準化的小數點後開始 存起,不夠的位元部分補0。













給定一實數 10110.100011·轉換成二進位為?

第一步

轉換成 1.0110100011×24 是正數,故符號位元為0,尾數部分為0110100011,指數部分為4,以過剩127方式儲存,須加上127,得131。

第二步













範例 2 O

給定一實數 -0.0010011,轉換成二進位為?

第一步

轉換成 -1.0011×2⁻³ 是負數,故符號位元為1, 尾數部分為0011,指數部分為-3,以過剩127方 式儲存,須加上127,得124。

第二步













010000101001010001100000000000000000 所儲存的數值為多少?

第一步

位元符號為0,所以是正數,指數部分是 10000101=十進位133,再減去127,得6。

第二步

010000101001010001100000000000000所儲存的數值為1.0010100011×26,也就是1001010.0011。











範例 2 2

100000101001010001100000000000000000 所儲存的數值為多少?

第一步

位元符號為1,所以是負數,指數部分是 00000101 = 十進位5,再減去127,得-122。

第二步

100000101001010001100000000000000所儲存的數值為-1.0010100011×2-122。











單倍精準數所能表示的數字範圍

- 其數值為 +2-126
- 其數值為 (2-2-23)×2127。
- 其數值為 -2-126
- 其數值為 -(2-2-23)×2127。









2-6 ASCII及Unicode

- ◆ 美國國家標準局在1963年時發表的ASCII(唸成 Asskey;美國國家資訊交換標準碼)是當今最普 及的公定標準。
- ➡ 標準ASCII以7個位元儲存一字符,共有2⁷=128
 種組合。電腦的儲存常用的位元組為8個位元,
 多出來的位元用來儲存錯誤檢驗位元(parity bit)。
- → 擴充型ASCII用8個位元儲存一字符,有2⁸=256 種組合,可儲存非英文符號、圖形符號及數學符 號等。















ASCII符號對照表

















- ➡ 美國萬國碼制訂委員會於1988-1991年間訂定的 Unicode (萬國碼) 字符編碼標準,已成為ISO認 證之標準(ISO10646)。
- ▶ Unicode發展出下列多種編碼方式:
 - ▶ UTF-8 在全球資訊網最通行。
 - ▶ UTF-16 為JAVA及Windows所採用。
 - ▶ UTF-32 則為一些UNIX系統使用。













Unicode

- ▶ Unicode前面128個符號為ASCII 字符,其餘則為英、中、日、韓 文以及其他非英語系國家之常用 文字。
- ▶ Unicode中最大宗的分類是CJK, 主要是中文、日文及韓文之漢字 集。















在http://www.unicode.org/charts/ 網址裡,提供了各種

不同類別字符的對照表。

代表的字符群
基本拉丁字符(與ASCII相同)
擴充的拉丁字符
希臘字符
泰文
寮文
數學符號
方塊圖形及幾何圖形
平假名及片假名
CJK;中文、日文及韓文之漢字













EBCDIC

- ▶ 除了ASCII和Unicode外,IBM的EBCDIC也是某 些機型上常用的編碼方式。
- 國際標準局(ISO)用四個位元組(也就是32位元)制定一種編碼方式,可以有232種組合,可表示多達4,294,967,296種字符。











Big5 / GB

- ▶ 以正體字而言,大五碼(Big5;約一萬六千字)是 廣受歡迎的一種編碼方式,盛行於台灣及香港。
- ▶ 以簡體字而言,國標(GB;約八千字)是廣受歡迎的編碼方式,盛行於大陸地區。
- → 這些字體已逐步被包含於Unicode的CJK字集中, 未來的整合一致化指日可待。

















在實際應用上,Unicode 並非皆以16位元儲存字元。 以UTF-8為例,傳統的ASCII字符仍以一個位元組儲存(位 元組首位為0,後面的7位元為原ASCII的編碼),其餘非 ASCII字符,再依類別而有不同長度的編碼方式。 例如:

「A」的UTF-16為「0041」, UTF-8則為「41」; 「趙」 的UTF-16為「8D99」, UTF-8則為「E8B699」。





