

- (×) 1.正则语言在并运算下封闭, 在连接、星号运算下不封闭。
- (×) 2.语言 $\{0^i1^j \mid i > j\}$ 是正则的。
- (√) 3.一上下文无关语言都可以用一个乔姆斯基范式的上下文无关文法产生。
- (×) 4.所有的正则语言是上下文无关的。

(正则语言包含上下文无关语言, 所有它们的交集是上下文无关语言。)

- (√) 5.每个非确定图灵机都等价于某个确定型图灵机。
- (×) 6.图灵可识别语言都是图灵可判定的, 但图灵可判定语言不一定是可识别问题的时间复杂性在确定型和非确定型图灵机上最多是平方或多项式的差异。
- (√) 7.对所有与确定型单带图灵机多项式等价的计算模型来说,  $p$  是不变的。
- (√) 8. $p$  大致对应于在计算机上实际可解的问题类。

(若  $B$  满足下面两个条件就成为  $np$  完全的: 1)  $B$  属于  $NP$ , 且 2)  $NP$  中的每个  $A$  都多项式时间可约束到  $B$ 。)

- (√) 9.若  $B$  是  $NP$  完全的, 则  $NP$  中每个  $A$  都多项式时间可归约到  $B$ 。
- (×) 10.3SAT 不是  $NP$  完全的。
- (√) 11.所有的  $NP$  问题都是  $NP$  完全的。

### 一、 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 于是 $\sqrt{2}=m/n$ ,  $m$  和  $n$  都是整数。如果  $m$  和  $n$  都能被同一个大于 1 的最大整数除, 则用那个整数除它们不会改变分式的值。故,  $m$  和  $n$  不可能同时是偶数。等式两边同乘  $n$  得到  $n\sqrt{2}=m$ , 再平方得  $2n^2=m^2$ , 由于  $m^2$  是整数  $n^2$  的 2 倍, 故  $m$  是偶数, 因为奇数的平方总是奇数。令  $m=2k$  ( $k$  是整数), 代入得到  $2n^2=(2k)^2=4k^2$ ,  $n^2=2k^2$ , 由此得到  $n$  为偶数, 于是  $m$  和  $n$  都是偶数, 与已知相矛盾。所以是无理数。

### 二、 证明实数是不可数的。

反证法: 若  $R$  可数, 则  $[0,1)$  是可数的。将  $[0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  中的每个元素写成二进制小数:

$x_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14},$

$x_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24},$

$x_3=0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}, \dots$

然后考虑  $[0,1)$  中的实数  $a=0.a_1a_2a_3a_4, \dots$  其中

$a_k=0$ , 若  $x_{kk}=1$ ;  $a_k=1$ , 若  $x_{kk}=0$ 。

于是  $a$  不等于  $x_1$ , 不等于  $x_2$ , 不等于  $x_3, \dots$ , 即  $a$  不是  $[0,1)$  中的数, 矛盾。

### 三、证明语言 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ 不是正则的。

假设语言是正则的。令  $p$  是由泵引理给出的泵长度。选择  $s$  为字符串  $0^p 1^p$ 。因为  $s$  是  $B$  的一个成员且  $s$  的长度大于  $p$ ，所以泵引理保证  $s=xyz$ ，使得对于任意的  $i \geq 0$ 。则  $xyy^i z$  中 0 比 1 多，从而不是  $B$  的成员。违反泵引理的条件 1，矛盾。所以假设不成立。

### 四、证明语言 $\{WW^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ 不是正则的。

$L=\{WW^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ，若语言  $L$  是正则，则泵引理成立，设  $N$  为泵引理中的正整数。  $W=a^N b^N b^N a^N \in L$ ，则  $W$  满足泵引理中条件，于是由  $W=xyz$ ， $|xy| \leq N$  且  $y \neq \epsilon$ ，知  $x=a^{k'}$ ， $y=a^{k'}(k' > 0)$ ，从而  $xz = a^{k'} a^{N-k'-k'} b^N b^N a^N = a^{N-k'} b^N b^N a^N \in L$ ，矛盾。

### 五、设 $T=\{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}$ 。证明 $T$ 是可数的。

证明：先列出  $T$  的所有元素；然后将此序列中的第一个元素与  $\mathbb{N}$  中的 1 配对，将第二个元素与 2 配对，以此类推。

设  $i=j=k=1$ ,  $T$  的元素为 1 个

$(1, 1, 1)$

设  $i=j=k=2$ ,  $T$  的元素为 8 个

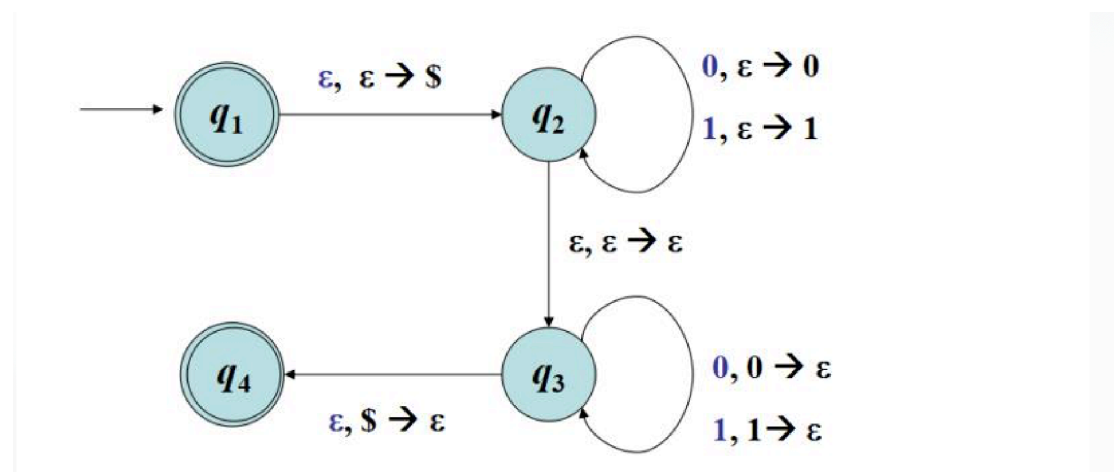
$(1, 1, 1)$ 、 $(1, 1, 2)$ 、 $(1, 2, 1)$ 、 $(1, 2, 2)$

$(2, 1, 1)$ 、 $(2, 1, 2)$ 、 $(2, 2, 1)$ 、 $(2, 2, 2)$

设  $i=j=k=3$ ,  $T$  的元素为 27 个 ...。

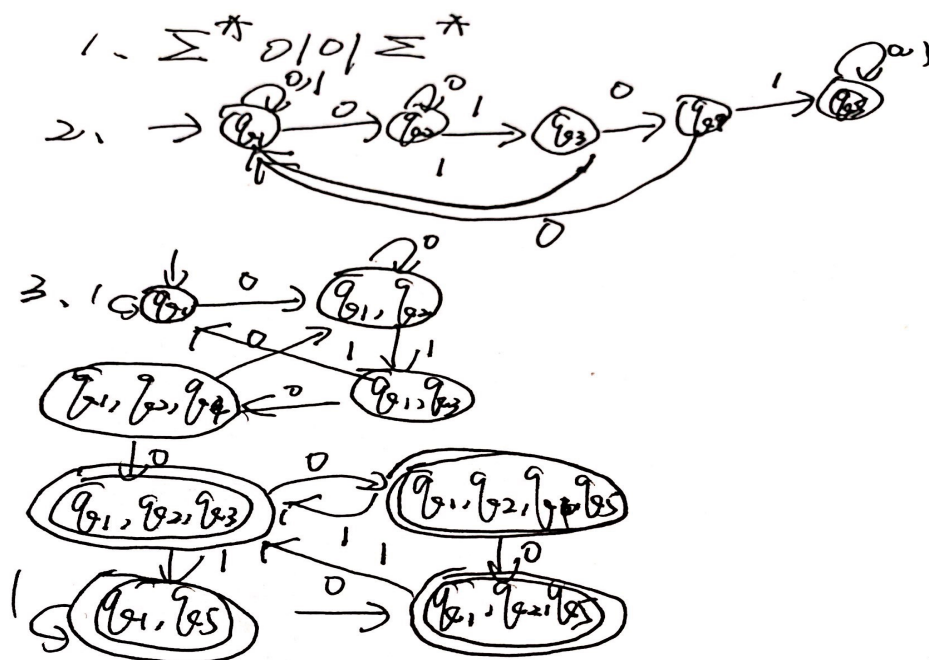
按此顺序排列元素。第一种情况只包含一个元素 $(1, 1, 1)$ ，第二种情况包含 8 个元素，忽略重复的元素。所以次序列的前八个元素是 $(1, 1, 1)$ 、 $(1, 1, 2)$ 、 $(1, 2, 1)$ 、 $(1, 2, 2)$ 、 $(2, 1, 1)$ 、 $(2, 1, 2)$ 、 $(2, 2, 1)$ 、 $(2, 2, 2)$ 。以这种方法继续下去，就能得到  $T$  的所有元素的一个序列。

### 六、构造识别语言 $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ 的 PDA $M$ 。

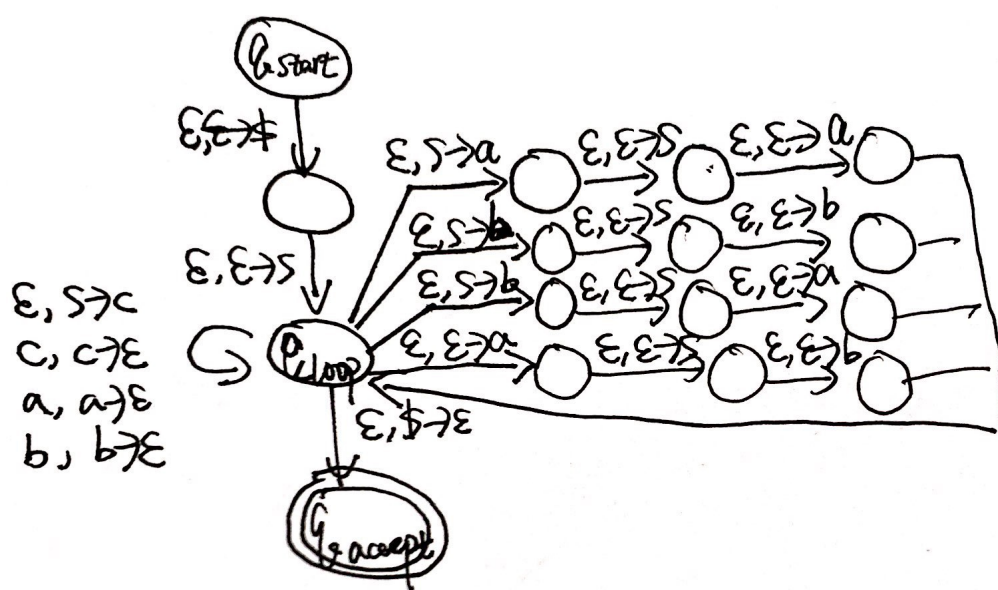


### 七、字母表为 $\{0,1\}$ 。

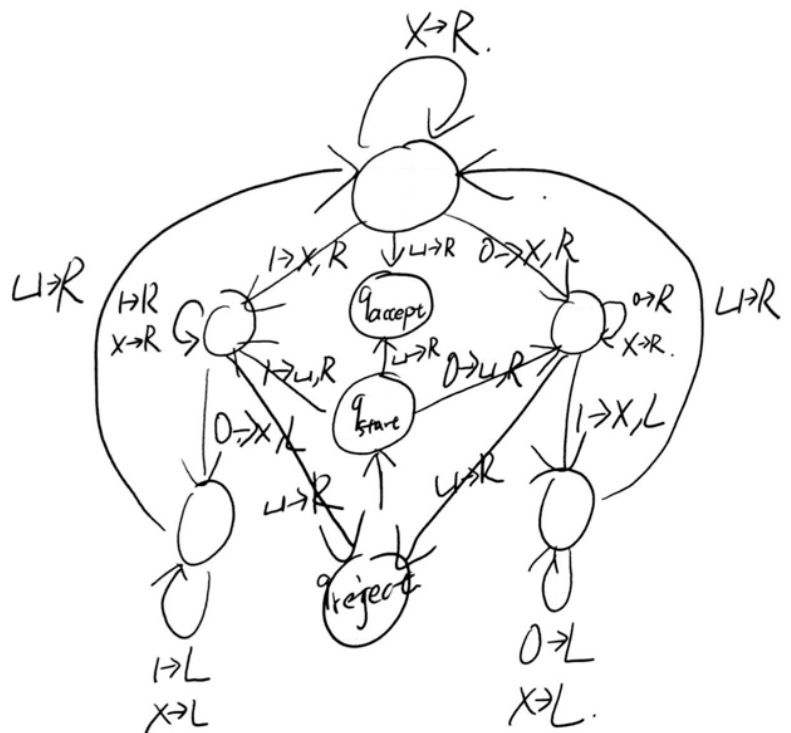
1. 写出含有子串 0101 的所有字符串的正则表达式。
2. 设计一台接受此正则表达式的非确定型有限自动机，要求用 5 个状态。
3. 将非确定型有限自动机转换成确定型有限自动机。



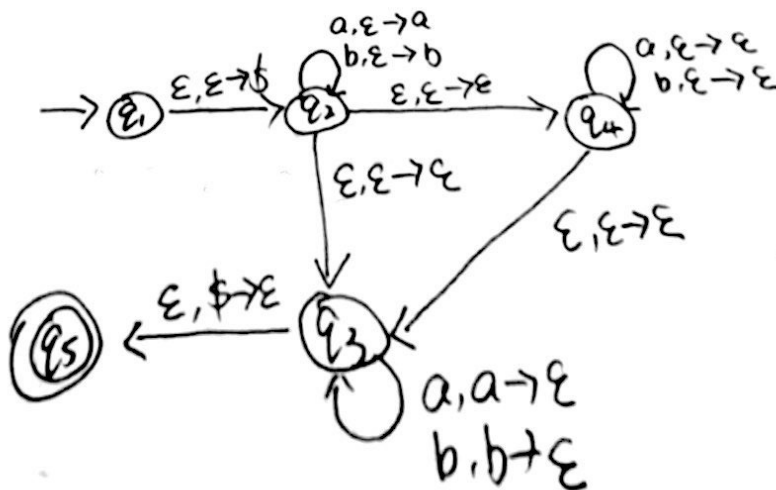
八、构造生成语言  $\{w_1cw_2 : w_1, w_2 \in \{a,b\}^* \text{ and } |w_1| = |w_2|\}$  的上下无关文法，并设计一台下推自动机接受此语言。



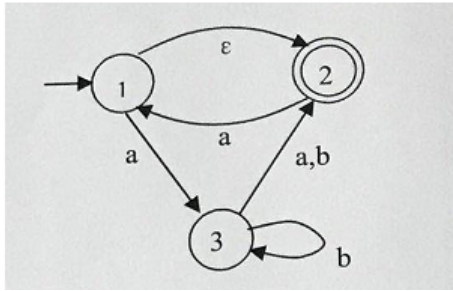
九、 $\{w | w \text{ 包含相同个数的 } 0 \text{ 和 } 1\}$ ，画出接受此语言的 Turing 机的状态图。



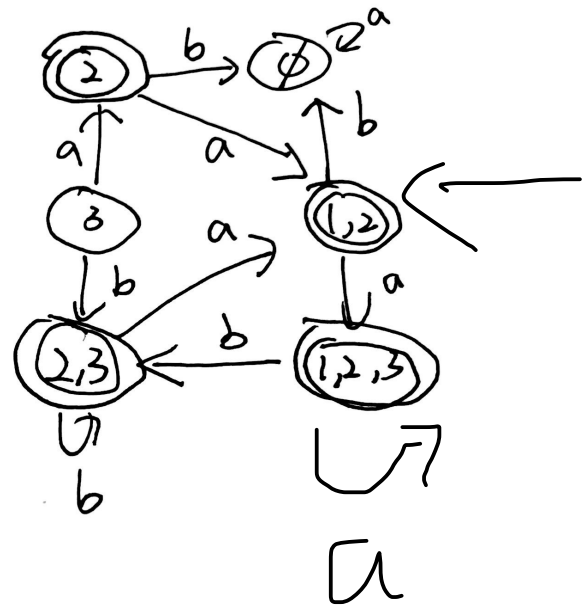
十、构造生成语言 $\{W|W=WR, \text{即 } W \text{ 是一个回文且 } W \in \{a,b\}^*\}$ 的上下文无关文法, 并设计一台下推自动机接受此语言。

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon$$


### 十一、把如图 NFA 转换成等价的 DFA

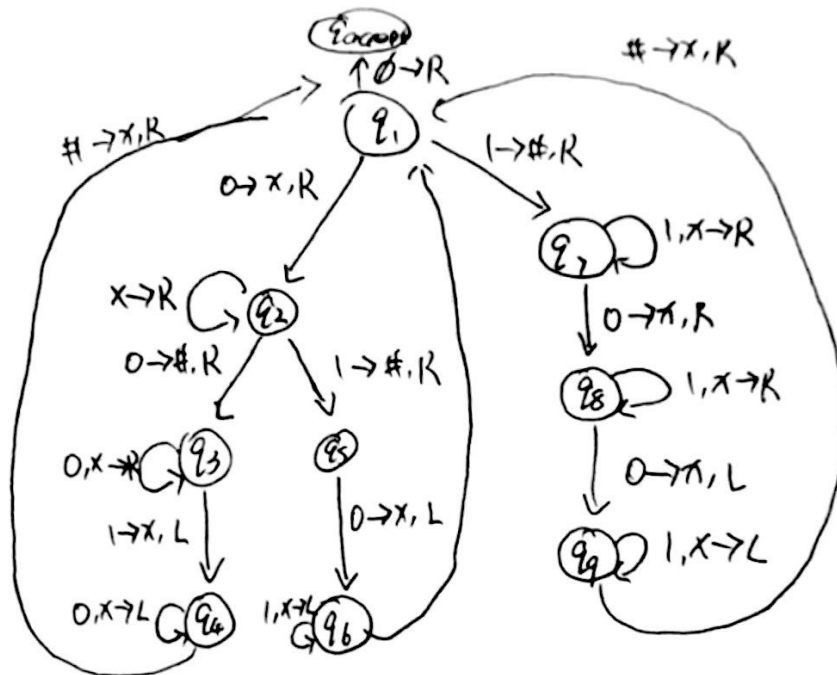


	a	b
1	{3}	∅
2	{6,2}	∅
3	{2}	{2,3}
1,2	{1,2,3}	∅
1,3	{1,2}	{2,3}
2,3	{1,2}	{2,3}
1,2,3	{1,2,3}	{2,3}



十二、

SW/W中0的个数是1的2倍时，画 Turing 机。



十二、证明一个语言是可判定的，当且仅当既是图灵可识别的，也是补图灵可识别的。证明：

- (i) 必要性：如果  $A$  是可判定的，任何可判定语言都是图灵可识别的，且任何可判定语言的补也是可判定的，所以  $A$  和它的补  $\bar{A}$  都是图灵可识别的。
- (ii) 充分性：令  $M_1$  是  $A$  的识别器， $M_2$  是  $\bar{A}$  的识别器。下列图灵机  $M$  是  $A$  的判定器。

如果  $A$  是可判定的，任何可判定语言都图灵可识别的。