§4 *QR*算法

- *QR*算法：变换法
- *QR*算法的应用：
  - 计算上Hessenberg阵的全部特征值
  - 计算对称三对角阵的全部特征值
- 优点：收敛快、算法稳定
- 理论基础：$A \sim B \Rightarrow A$、B 特征值相同
- 思想方法：

利用正交相似变换（Householder变换）、*QR*分解将矩阵A化为简单矩阵。如上Hessenberg阵、对称三对角阵。

***A*相似于*B*的定义：** 设矩阵$A,B\in R^{n\times n}$，如果存在可逆矩阵X使$B=X^{-1}AX$，则称B相似于A，记为$A\sim B$。

上Hessenberg阵的定义：（1）设$B=(b_{ij})\in R^{n\times n}$，如果当$i>j+1$时，$b_{ij}=0$，称$B$为上Hessenberg阵，即

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & n_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \boxed{0} & & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

（2）若$b_{i+1,i}\neq 0,(i=1,2,\cdots,n-1)$，称$B$为不可约上Hessenberg阵。

本节内容：

一、基本QR方法

二、带原点位移的QR方法（加速收敛的方法）

三、上Hessenberg阵的单步QR方法

一、基本QR方法

Chap. 5 §10
QR分解(正交分解)

$Q^{-1}=Q^{T}$

(一)过程

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$，$A\to B$，$B$的构造如下：

(1) QR分解：$A=QR$，R是上三角阵，Q为正交阵。

(2) 逆序相乘（作矩阵）：$B=RQ=Q^{T}AQ$， $R=Q^{-1}A=Q^{T}A$

显然，B是由A经过正交相似变换(Householder)得到。因此，$A\sim B$，从而，B与A有相同的特征值。

构造序列$\{A_k\}$

设 $A_1=A$，先分解：$A_1=Q_1R_1$，作矩阵：$A_2=R_1Q_1=Q_1^{T}A_1Q_1$；

再分解：$A_2=Q_2R_2$，作矩阵：$A_3=Q_2^{T}A_2Q_2$；

……

$A_k=Q_kR_k$，$A_{k+1}=R_kQ_k=Q_k^{T}A_kQ_k$； (4.1)

…… $\Rightarrow\{A_k\}$

这样由矩阵的QR分解，按正交相似变换构造矩阵序列$\{A_k\}$的过程称为QR算法。

$\{A_k\}$的性质：

$A_k=Q_kR_k$，$A_{k+1}=R_kQ_k=Q_k^TA_kQ_k$

$(k=1, 2, \ldots)$

定理13 QR序列$\{A_k\}$满足：

（1）A_{k+1}相似于A_k，即$A_{k+1}=Q_k^TA_kQ_k$；

（2）$A_{k+1}=(Q_1Q_2\ldots Q_k)^TA_1(Q_1Q_2\ldots Q_k)=\tilde{Q}_k^TA_1\tilde{Q}_k$；

（3）A^k的QR分解式为：$A^k=\tilde{Q}_k\tilde{R}_k$。$\tilde{Q}_k=Q_1Q_2\cdots Q_k$，$\tilde{R}_k=R_k\cdots R_2Q_1$

分析：(1) 因为$A_k\to A_{k+1}$是正交相似变换，因此$A_{k+1}\sim A_k$，

（2）由记$\tilde{Q}_k=Q_1Q_2\cdots Q_k$，及$QR$算法

$A_{k+1}=R_kQ_k=Q_k^TA_kQ_k$, $(k=1, 2, \ldots)$ 得

$$A_{k+1}=Q_k^T(Q_{k-1}^TA_{k-1}Q_{k-1})Q_k=\cdots=Q_k^TQ_{k-1}^T\cdots Q_1^TA_1Q_1Q_2\cdots Q_k$$

$$=(Q_1Q_2\cdots Q_k)^TA_1(Q_1Q_2\cdots Q_k)$$

矩阵的结合律

（3）要证$A^k=\tilde{Q}_k\tilde{R}_k$，即要证$A^k=(Q_1Q_2\cdots Q_k)(R_k\cdots R_2R_1)$，

用归纳法证。

$\{A_k\}$的性质：

定理13 QR序列$\{A_k\}$满足：

（1）A_{k+1}相似于A_k，即$A_{k+1}=Q^{T}{}_{k}A_kQ_k$ ；

（2）$A_{k+1}=(Q_1Q_2\ldots Q_k)^{T}A_1(Q_1Q_2\ldots Q_k)=\tilde{Q}^{T}{}_{k}A_1\tilde{Q}_k$;

（3）A^k的QR分解式为：$A^k=\tilde{Q}_k\tilde{R}_k$。$\tilde{Q}_k=Q_1Q_2\cdots Q_k$，$\tilde{R}_k=R_k\cdots R_2Q_1$

证明：当k=1时，有 $A^1=A_1=\tilde{Q}_1\tilde{R}_1=Q_1R_1$。

假设$A^{k-1}=\tilde{Q}_{k-1}\tilde{R}_{k-1}=(Q_1Q_2\ \ldots\ Q_{k-1})(R_{k-1}\ \ldots\ R_2R_1)$, 则

$$\tilde{Q}_k\tilde{R}_k=(Q_1Q_2\ \ldots\ Q_{k-1})\,Q_kR_k\,(R_{k-1}\ \ldots\ R_2R_1)$$

$$=(Q_1Q_2\ \ldots\ Q_{k-1})\,A_k\,(R_{k-1}\ \ldots\ R_2R_1)$$

$$=\tilde{Q}_{k-1}A_k\tilde{R}_{k-1}$$

又因为 $A_k=\tilde{Q}^{T}_{k-1}A\tilde{Q}_{k-1}$,

所以 $\tilde{Q}_k\tilde{R}_k=\underbrace{\tilde{Q}_{k-1}\tilde{Q}_{k-1}^{T}}_{I}A\cdot\tilde{Q}_{k-1}\tilde{R}_{k-1}=A\cdot\tilde{Q}_{k-1}\tilde{R}_{k-1}=A\cdot A^{k-1}=A^k$。 #

（二）由A_k计算A_{k+1}的方法

由第五章定理31、32（P.$_{296-297}$）知，将A_k进行QR分解，即是对A_k施行正交变换（左变换）化为上三角阵R_k，即

$$\begin{cases} Q_k^T A_k = R_k \quad \text{上三角阵} \\ Q_k^T = P_{n-1} \ldots P_2 P_1, \quad P_i \,(i=1,2,\ldots,n-1)\,\text{为正交阵}, k=1,2,\ldots \end{cases}$$

从而 $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k = P_{n-1} \ldots P_2 P_1 A_k P_1^T P_2^T \ldots P_{n-1}^T$

方法：

（1）左变换：$P_{n-1} \ldots P_2 P_1 A_k = R_k$ （上三角阵）

（2）右变换：$R_k P_1^T P_2^T \ldots P_{n-1}^T = A_{k+1}$，（$k=1,2,\ldots$）

（三）QR方法的收敛性

本质收敛：设 $A_k=(a_{ij}^{(k)})$ 称 $\{A_k\}$ 本质上收敛于上三角阵R，当

(1) $a_{ii}^{(k)} \to \lambda_i,\quad k\to\infty$，

(2) 当 $i>j$ 时，$a_{ij}^{(k)}\to 0,\quad k\to\infty$，

(3) 当 $i<j$ 时，$a_{ij}^{(k)}$ 不一定收敛。

$$R=\begin{bmatrix}\lambda_1 & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

收敛定理

定理14 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$。

（1）A的特征值满足：$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|>0$；

（2）A有标准型，即存在非奇异阵X使$A=XDX^{-1}$，其中 $D=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$（对角阵），且设$X^{-1}$有三角分解$X^{-1}=LU$，$L$--单位下三角阵，$U$--上三角阵。则由$QR$算法产生的序列$\{A_k\}$ 本质上收敛于上三角阵，即

$$A_k\to R=\begin{bmatrix}\lambda_1 & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & x_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\quad（当\ k\to\infty）$$

定理15 设$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$为对称矩阵且满足定理14的条件(1)，$A$的特征值满足：$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_n|>0$。则由$QR$算法产生的矩阵序列$\{A_k\}$收敛于对角矩阵$D=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$。

若A为对称矩阵，则由QR算法产生的序列$\{A_k\}$仍为对称矩阵。

说明：QR算法收敛性进一步结果，若A的等模特征值中只有实特征值或复的共轭特征值，则由QR算法产生的矩阵序列$\{A_k\}$本质上收敛于分块上三角矩阵（对角块为一阶或二阶子块），且对角块每一个2×2子块给出一对共轭复特征值，或每一个一阶对角块给出实特征值。

$$
A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \begin{bmatrix}
\lambda_1 & \cdots & x_{1i} & x_{1,i+1} & x_{1,i+2} & \cdots \\
0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\
0 & 0 & \lambda_i & x_{i,i+1} & x_{i,i+2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & 0 & x_{i+1,i+1} & x_{i+1,i+2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & x_{i+2,i+1} & x_{i+2,i+2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

二 带原点位移的QR方法（加速收敛的方法）

设A的特征值满足：$|\lambda_1|>|\lambda_2|> \cdots >|\lambda_n|> 0$。由$QR$算法产生的矩阵序列$\{A_k\}$元素$a_{nn}^{(k)} \to \lambda_n (k \to \infty)$，其收敛速度依赖于$r_n = |\lambda_n / \lambda_{n-1}|$，那么当$|r_n|$很小时，收敛较快。若$\mu$ 是λ_n一个估计，且对$A-\mu I$运用QR算法，则$(n, n-1)$元素将以收敛因子$|(\lambda_n - \mu) / (\lambda_{n-1} - \mu)|$线性收敛于0。此时，$(n, n)$元素将比在基本$QR$算法中收敛更快。因此，为了加速收敛，选择数列$\{\mu_k\}$，从而有带原点位移的$QR$算法。

（一）带原点位移的QR算法

设$A = A_1 \in R^{n\times n}$，$QR$分解 $A_1 - \mu_1 I$：$A_1 - \mu_1 I = Q_1 R_1$

作矩阵：$A_2 = R_1 Q_1 + \mu_1 I = Q_1^T (A_1 - \mu_1 I) Q_1 + \mu_1 I = Q_1^T A_1 Q_1$

… 若已求得A_k，

QR分解 $A_k - \mu_k I$：$A_k - \mu_k I = Q_k R_k$

… 若已求得A_k，

QR分解 $A_k - \mu_k I$：$A_k - \mu_k I = Q_k R_k$ (4.2)

作矩阵：$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I = Q_k^{\mathrm{T}} A_k Q_k$

结论：

(1) $A_{k+1} = \tilde{Q}_k^{\mathrm{T}} A_1 \tilde{Q}_k$， 设 $\tilde{Q}_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k, \tilde{R}_k = R_k \cdots R_2 R_1$；

(2)矩阵 $\varphi(A) \equiv (A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I) \cdots (A - \mu_k I)$，有 QR 分解：

$$\varphi(A) = \tilde{Q}_k \tilde{R}_k$$

(3)带位移QR算法变换一步的计算：

先用正交变换（左变换）将$A_k - \mu_k I$ 化为上三角阵，即

左变换：$P_{n-1} \cdots P_2 P_1 (A_k - \mu_k I) = R_k$，其中 $Q_k^{\mathrm{T}} = P_{n-1} \cdots P_2 P_1$。

右变换：
$$A_{k+1} = R_k P_1^{\mathrm{T}} P_2^{\mathrm{T}} \cdots P_n^{\mathrm{T}} + \mu_k I$$
$$= P_{n-1} \cdots P_2 P_1 (A_k - \mu_k I) P_1^{\mathrm{T}} P_2^{\mathrm{T}} \cdots P_n^{\mathrm{T}} + \mu_k I$$

（二）矩阵A化为上Hessenberg阵的QR算法

(1) 一般算法

设$A\in R^{n\times n}$，有$H=U_0^{T}AU_0$，为上Hessenberg阵，以下考虑上Hessenberg阵的QR算法。

QR算法：当k=1, 2, …时，

$$\begin{cases} H_k=Q_kR_k & QR\text{分解} \\ H_{k+1}=R_kQ_k & \end{cases} \qquad (4.3)$$

（a）假设由（4.3）式产生的每一个Hessenberg阵H_k都是可约的，即若在某步有

$$H_{k+1}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \\ \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \end{array}$$

P. 318
定义4

问题就分离为H_{11}与H_{22}的两个较小的问题。特别当$p=n-1$或$p=n-2$时，有

问题就分离为H_{11}与$\mathbf{H}_{22}$的两个较小的问题。特别当$p=n-1$或$p=n-2$

特别当$p=n-1$或$p=n-2$时，有

$$\begin{array}{ccc} & p & n-p \\ H_{k+1}= & \left[\begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ n-p \end{array} \end{array}$$

当$p=n-1$时，$H_{k+1}=\left[\begin{array}{c|c} & \times \\ H_{11} & \vdots \\ & \times \\ \hline 0 & h_{nn}^{(k+1)} \end{array}\right]$，$H$的特征值$\lambda_n \approx h_{nn}^{(k+1)}$。

当$p=n-2$时，$H_{k+1}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n-2 & 2 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|cc} & \times & \times \\ H_{11} & \vdots & \vdots \\ & \times & \times \\ \hline & \times & \times \\ 0 & & \\ & \times & \times \end{array}\right] & \begin{array}{c} n-2 \\ \\ 2 \end{array} \end{array}$，$H$的特征值$\lambda_{n-1},\lambda_n$可由$H_{k+1}$下角二阶矩阵的特征值得到。

这样，求H特征值问题可降阶求H_{11}特征值。

(*b*) 假设由(4.3)式产生的每一个Hessenberg阵$\boldsymbol{H}_k$都是不可约的,计算时,每当$\boldsymbol{H}_k$的次对角元适当小时,就进行分离。

例如$|h_{p+1,p}| \le u(|h_{pp}| + |h_{p+1,p+1}|)$时,就把$h_{p+1,p}$视为零,其中$u = 2^{-t}$,$t$为计算机的字长。

(2)用位移加速收敛

设$A \in R^{n\times n}$,$U_0^{\mathrm{T}} A U_0 = H$(为不可约上Hessenberg阵),取$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}$,

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

当$\boldsymbol{k}$=1, 2, ...时

$$\begin{cases} H_k - \mu_k I = Q_k R_k & (\boldsymbol{QR}\text{分解}) \\ H_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I & (\text{作矩阵}\boldsymbol{H}_{k+1}) \end{cases}$$

三 上Hessenberg阵的单步QR算法

设 $$H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

单步QR方法:

取 $\mu_k=h_{nn}^{(k)}$ ，当k=1, 2, …时

$$\begin{cases} H_k-\mu_k I=Q_k R_k & \text{（}QR\text{分解）} \\ H_{k+1}=R_k Q_k+\mu_k I & \text{（作矩阵}H_{k+1}\text{）} \end{cases}$$

或计算 $$\begin{cases} P_{n-1,n}\cdots P_{23}P_{12}(H_1-\mu_1 I)=R_1 & \text{（上三角阵）} \\ H_2=R_1P_{12}^{\mathrm{T}}P_{23}^{\mathrm{T}}\cdots P_{n-1,n}^{\mathrm{T}}+\mu_1 I \end{cases}$$

即 $$H_2=P_{n-1,n}\cdots P_{23}P_{12}(H_1-\mu_1 I)P_{12}^{\mathrm{T}}P_{23}^{\mathrm{T}}\cdots P_{n-1,n}^{\mathrm{T}}+\mu_1 I$$

对应于平面旋转变换

（1）左变换计算

$h_{kk} \leftarrow h_{kk} - \mu_1, \quad (k = 1,2,\cdots,n)$ （用$h_{kk} - \mu_1$替代 h_{kk} ）

确定平面旋转阵 $p_{12} = p(1,2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$,

使 $p_{12} \cdot \begin{bmatrix} h_{11} - \mu_1 \\ h_{21} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$。

于是，

$$p_{12}(H_1-\mu_1 I)=\begin{bmatrix} r_{11} & h_{12}^{(2)} & \cdots & h_{1n}^{(2)} \\ 0 & h_{22}^{(2)} & \cdots & h_{2n}^{(2)} \\ 0 & h_{32} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix},\qquad H_1=H=\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ & \ddots & \cdots & \cdots \\ & & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix}$$

设已经完成第1次……第k-1次左变换，即有

$$p_{k-1,k}\cdots p_{23}p_{12}(H_1-\mu_1 I)=\begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & h_{1,k-1}^{(2)} & h_{1,k}^{(2)} & \cdots & h_{1,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{k-1,k-1} & h_{k-1,k}^{(k)} & \cdots & h_{k-1,n}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & h_{k,k}^{(k)} & \cdots & h_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_{k+1,k} & \cdots & h_{k+1,n} \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

确定平面旋转阵

$$p_{k,k+1} = p(k,k+1) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & c_k & s_k & & & \\ & & & -s_k & c_k & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

使 $p_{k,k+1} \cdot [p_{k-1,k} \cdots p_{23}\, p_{12}(H_1 - \mu_1 I)] =$

$$p_{k,k+1}\cdot[p_{k-1,k}\cdots p_{23}p_{12}(H_1-\mu_1 I)]$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&c_k&s_k&&\\&&&-s_k&c_k&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}r_{11}&&&&&h_{1n}^{(2)}\\\vdots&\ddots&&&&\vdots\\0&0&r_{k-1,k-1}&&&\\&&&h_{kk}^{(k)}&\vdots&h_{kn}^{(k)}\\&&&h_{k+1,k}&\cdots&h_{k+1,n}\\&&&&\ddots&\vdots\\&&&&h_{n-1,n}&h_{n,n}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}r_{11}&&&&&h_{1n}^{(2)}\\\vdots&\ddots&&&&\vdots\\0&0&r_{k-1,k-1}&&&\\&&&r_{kk}&\vdots&h_{kn}^{(k+1)}\\&&&0&\cdots&h_{k+1,n}^{(k+1)}\\&&&&\ddots&\vdots\\&&&&h_{n-1,n}&h_{n,n}\end{bmatrix}.$$

计算 $p_{k,k+1}\cdot[p_{k-1,k}\cdots p_{23}p_{12}(H_1-\mu_1 I)]$

只须计算第k行及第k+1行的元素.

计算到$p_{n-1,n}\cdots p_{23}p_{12}(H_1-\mu_1 I)$可得上三角阵$\boldsymbol{R}_1$:

$$R_1=\begin{bmatrix} r_{11} & h_{12}^{(2)} & h_{13}^{(2)} & \cdots & h_{1n}^{(2)} \\ 0 & r_{22} & h_{23}^{(3)} & \cdots & h_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & r_{n-1,n-1} & h_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{nn} \end{bmatrix}$$

（2）右变换计算

$$H_2=R_1P_{12}^{\mathrm{T}}P_{23}^{\mathrm{T}}\cdots p_{n-1,n}^{\mathrm{T}}+\mu_1 I$$

第$\boldsymbol{k}$次右变换$(R_1P_{12}^{\mathrm{T}}P_{23}^{\mathrm{T}}\cdots)p_{k,k+1}^{\mathrm{T}}$只须计算$R_1P_{12}^{\mathrm{T}}P_{23}^{\mathrm{T}}\cdots p_{k-1,k}^{\mathrm{T}}$第$\boldsymbol{k}$列及第$\boldsymbol{k}$+1列的元素，即

$$\begin{bmatrix} h_{i,k} & h_{i,k+1} \end{bmatrix}\leftarrow\begin{bmatrix} h_{i,k} & h_{i,k+1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{bmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,k+1)$$

（2）右变换计算

$$H_2 = R_1 P_{12}^{\mathrm{T}} P_{23}^{\mathrm{T}} \cdots p_{n-1,n}^{\mathrm{T}} + \mu_1 I$$

第k次右变换$(R_1 P_{12}^{\mathrm{T}} P_{23}^{\mathrm{T}} \cdots) p_{k,k+1}^{\mathrm{T}}$只须计算$R_1 P_{12}^{\mathrm{T}} P_{23}^{\mathrm{T}} \cdots p_{k-1,k}^{\mathrm{T}}$第$k$列及第$k$+1列的元素，即

$$\begin{bmatrix} h_{i,k} & h_{i,k+1} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} h_{i,k} & h_{i,k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_k & -s_k \\ s_k & c_k \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,k+1)$$

（用$h_{kk} + \mu_1$替代 h_{kk}）

最后，$H_2 = R_1 P_{12}^{\mathrm{T}} P_{23}^{\mathrm{T}} \cdots p_{n-1,n}^{\mathrm{T}} + \mu_1 I$ 为上Hessenberg阵，由此，QR方法保持上Hessenberg阵的结构。

看算法3　P_{469} ·

说明：

（1）应用算法3产生正交相似的上Hessenberg阵序列，当 $h_{n,n-1}^{(k)}$ 充分小时，可将它置为0就得到$\boldsymbol{A}$的近似特征值 $\lambda_n \approx h_{n,n}^{(k)}$。再将矩阵降阶，对较小的矩阵继续应用算法。

（2）算法3中取 $\mu_k = h_{n,n}^{(k)}$，不能逼近复特征值，关于计算$\boldsymbol{A}$的复特征值有双步$\boldsymbol{QR}$方法。

例6　P. 470

本课重点：

理解基本$\boldsymbol{QR}$方法、带原点位移的$\boldsymbol{QR}$方法(加速收敛的方法）、上Hessenberg阵的$\boldsymbol{QR}$方法。