高等学校教材

《点集拓扑讲义》题解

熊金城　编

高等教育出版社

目　　录

第 1 章　集合论初步

§1.1　集合的基本概念

1.1　试在下列集合中决定：哪些集合是空集？哪些集合是相同的？哪些集合间有包含关系？哪些集合间有真子集关系？

(1)　$A = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$，并且存在 $y \in \mathbf{Z}$，使得 $x = 2y\}$；

(2)　$B = \{2\}$；

(3)　$C = \{x \mid x \in A$，且 $x^2 = 1\}$；

(4)　$D = \{x \mid x \in A$，且 x 为素数$\}$；

(5)　$E = \{x \mid x \in \mathbf{Q}$，且 $x^2 = 2\}$.

解：$B = D \subset A \subset \mathbf{Z}$，$C = E = \varnothing$，$C$，$E$ 是 B 的真子集，B，D 是 A 的真子集.

1.2　试判断以下关系式的正确与错误.

(1)　$A = \{A\}$；　　(2)　$A \in \{A\}$；

(3)　$\varnothing \subset \{\varnothing\}$；　　(4)　$\varnothing = \{\varnothing\}$；

(5)　$\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$.

解：(2)，(3) 为正确.

1.3　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是集合，其中 $n \geqslant 1$. 证明：如果

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \subset A_1$$

则

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n$$

证：因为 $A_i \subset A_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$，$A_n \subset A_1$，由传递性，$A_{i+1} \subset A_n \subset A_1 \subset A_i$，即 $A_{i+1} \subset A_i$，所以 $A_i = A_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots, n-1$.

故 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$.

1.4　设 $X = \{a, b, c\}$. 写出 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$.

解：$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

1.5　设 X 为由 n 个互不相同的元素构成的集合. X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 中有多少个互不相同的元素？

解：$\mathscr{P}(X)\}$ 的元素有 1 个空集，C_n^1 个单点集，C_n^2 个含有两个元素的集，$\cdots$，C_n^{n-1} 个含有 $n-1$ 个元素的集，C_n^n 个含有 n 个元素的集（X 本身），故 $\mathscr{P}(X)$ 共有 $1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$ 个互不相同的元素.

§1.2　集合的基本运算

2.1　A, B, C 都是集合，证明：

(1)　$A \subset A \cup B$，以及 $A \supset A \cap B$；

(2)　若 $A \subset B$，则有 $A \cup C \subset B \cup C$ 和 $A \cap C \subset B \cap C$；

(3)　若 $A \subset B$，则 $B - (B - A) = A$.

证：(1) 显然，(2) 因为 $A \subset B$，所以 $A = A \cap B$，$B = A \cup B$，从而

$B \cup C = (A \cup B) \cup C = B \cup (A \cup C) \supset A \cup C$

$A \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \subset B \cap C$

(3) 因为 $A \subset B$,则 $x \in B-(B-A)$ 当且仅当 $x \in B$ 且 $x \notin B-A$ 当且仅当 $x \in A$,故 $B-(B-A)=A$.

2.2 设 X 为基础集,A,B 等均为其子集,证明:

(1) $A-B=A\cap B'$;

(2) $A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B)$;

(3) 若 $A\cup B=X$,并且 $A\cap B=\varnothing$,则有 $A'=B$,$B'=A$;

(4) $(A_1-B_1)\cap(A_2-B_2)=(A_1\cap A_2)-(B_1\cup B_2)$.

证:(1) $x\in A-B$,当且仅当 $x\in A$,$x\notin B$ 当且仅当 $x\in A$,$x\in B'$,当且仅当 $x\in A\cap B'$,所以 $A-B=A\cap B'$.

(2) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup(B\cap B')=A\cap B'=A-B$

$A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)'=A\cap(A'\cup B')==(A\cap A')\cup(A\cap B')=A\cap B'=A-B$ 所以,$A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B)$

(3) 因为 $A\cap B=\varnothing$,所以 $B-A=B$,$A'=X-A=(A\cup B)-A=B-A=B$,因此 $A'=B$,从而 $B'=(A')'=A$.

(4) $(A_1-B_1)\cap(A_2-B_2)=(A_1\cap B_1')\cap(A_2\cap B_2')=(A_1\cap A_2)\cap(B_1'\cap B_2')=(A_1\cap A_2)\cap(B_1\cup B_2)'=(A_1\cap A_2)-(B_1\cup B_2)$.

2.3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 都是集合,其中 n 为正整数. 证明:

(1) 分配律

$$B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$$

$$B\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$$

(2) De Morgan 律

$$B-\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$$

$$B-\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B-A_i)$$

证:(1) $x\in B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\Leftrightarrow x\in B$ 且 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Leftrightarrow$ 存在 i,使得 $x\in B$ 且 $x\in A_i\Leftrightarrow$ 存在 i,使得 $x\in B\cap A_i\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$

所以 $B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$

$x\in B\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\Leftrightarrow x\in B$ 或 $x\in\bigcap_{i=1}^{n}A_i\Leftrightarrow x\in B$ 或 $x\in A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow$ 对任何 i,使得 $x\in B$ 或 $x\in A_i\Leftrightarrow$ 对任何 i,$x\in B\cup A_i\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$

所以 $B\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$

(2) $x\in B-\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\Leftrightarrow x\in B$ 且 $x\notin\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Leftrightarrow x\in B$ 且 $x\notin A_i$ $(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow$ 对任何 i,$x\in B$ 且 $x\notin A_i\Leftrightarrow$ 对任何 i,$x\in B-A_i\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$

所以 $B-\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\Leftrightarrow=\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$

$x \in B-(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow x \in B$ 且 $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow x \in B$ 且存在 $i, x \notin A_i \Leftrightarrow$ 存在 i,使 $x \in B$ 且 $x \notin A_i \Leftrightarrow$ 存在 i,使 $x \in B-A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n}(B-A_i)$

所以 $B-(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \Leftrightarrow = \bigcup_{i=1}^{n}(B-A_i)$

2.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是集合,其中 n 为正整数. 证明:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i-(\bigcap_{j=1}^{n} A_j)=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i-A_{i+1}) \qquad (A_{n+1}=A_1)$$

证:考虑 $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为基础集. 令 $A_{n+1}=A_1$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i-(\bigcap_{j=1}^{n} A_j)=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i-(\bigcap_{j=1}^{n} A_j))=\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{n}(A_i-A_j)) \supset \bigcup_{i=1}^{n}(A_i-A_{i+1})$.

另一方面,易见 $A_i-A_j \subset (A_i-A_{i+1}) \cup (A_{i+1}-A_j)$

事实上,若 $x \in A_i-A_j$,即 $x \in A_i, x \equiv A_j$,则当 $x \in A_{i+1}$ 时,$x \in A_{i+1}-A_j$,当 $x \equiv A_{i+1}$ 时,$x \in A_i-A_{i+1}$,故总有:$x \in (A_i-A_{i+1}) \cup (A_{i+1}-A_j)$,从而:

$A_i-A_j \subset (A_i-A_{i+1}) \cup (A_{i+1}-A_j) \subset (A_i-A_{i+1}) \cup (A_{i+1}-A_{i+2}) \cup (A_{i+2}-A_j) \subset \cdots \subset (A_i-A_{i+1}) \cup (A_{i+1}-A_{i+2}) \cup \cdots \cup (A_{j-1}-A_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(A_i-A_{i+1})$

所以, $\bigcup_{i,j=1}^{n}(A_i-A_j) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(A_i-A_{i+1})$

故 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i-(\bigcap_{j=1}^{n} A_j)=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i-A_{i+1}) \qquad (A_{n+1}=A_1)$

2.5 设 A 和 B 是两个集合. 定义 A 与 B 的对称差 $A \oplus B$

$$A \oplus B=(A-B) \cup (B-A)$$

证明:集合的对称差运算满足交换群公理,即:如果 A, B 和 C 都是集合,则

(1) $A \oplus B=B \oplus A$;

(2) $A \oplus \varnothing=A$;

(3) 存在一个集合 $\tilde{A}$,使得 $A \oplus \tilde{A}=\varnothing$;

(4) $(A \oplus B) \oplus C=A \oplus (B \oplus C)$.

证:(1),(2),显然.

(3) 取 $\tilde{A}=A$,则 $A \oplus \tilde{A}=(A-A) \cup (A-A)=\varnothing$

(4) $(A \oplus B) \oplus C=((A-B) \cup (B-A)) \oplus C=(((A-B) \cup (B-A))-C) \cup (C-((A-B) \cup (B-A)))=(((A-B)-C) \cup ((B-A)-C)) \cup (C-((A \cup B)-(A \cap B)))=(A-(B \cup C)) \cup (B-(A \cup C)) \cup (C-(A \cup B)) \cup (A \cap B \cap C)=(B-(A \cup C)) \cup (C-(A \cup B)) \cup (A-(B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)=(B \oplus C) \oplus A=A \oplus (B \oplus C)$.

2.6* 证明 n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 经过并、交、差三种运算,最多能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合;并且确实有 n 个集合,它们经过并、交、差三种运算恰能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合. [提示:首先证明 m 个两两无交的集合经过并、交、差三种运算最多能生成 2^m 个互不相同的集合. 其次,从 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 经过三种运算生成的集合中找出 $m=2^n-1$ 个两两无交的集合 $B_1, B_2, \cdots, B_m$,并且使得每一 A_i 均可用 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 经过三种运算表出. 于是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 经过三种运算生成的集族与 $B_1, B\backslash-2, \cdots, B_m$ 经过三种运算生成的集族相同. 把上述两个结论结合起来即得本题第一部分的证明. 通

过以上证明过程的分析,举出满足本题第二部分的要求的例子就比较容易了.]

证:分两步证明

第一步,证明 m 个两两无交的集合经过并、交、差三种运算最多能生成 2^m 个互不相同的集合.

因为,通过并运算,m 个两两无交的集合最多能生成

$$C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m = 2^m - 1$$

个互不相同的集合,而交运算仅产生空集,差运算亦不再产生新的不同的集合,这就完成了第一步的证明.

第二步,证明任意 n 个集合经过并、交、差三种运算最多能生成 $2^n - 1$ 个互不相交的集合.

记 $E^0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$

$E_{i_1}^1 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap A_n \quad i_1 = 1,2,\cdots,n$

$E_{i_1i_2}^2 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_2} \cap \cdots \cap A_n \quad i_1 < i_2$

$E_{i_1i_2i_3}^3 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_3} \cap \cdots \cap A_n \quad i_1 < i_2 < i_3$

……

$E_{i_1i_2\cdots i_{n-1}}^{n-1} = A_j \qquad j \neq i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$

其中 $\hat{A}_i$ 表示去掉 A_i,则 E^0 的个数至多为 1,$E_{i_1}^1$ 的个数至多为 C_n^1,$E_{i_1i_2}^2$ 的个数至多为 $C_n^2,\cdots,E_{i_1i_2\cdots i_{n-1}}^{n-1}$ 的个数至多为 C_n^{n-1},故它们总的个数至多为

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^n - 1$$

且它们的并集为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

令 $B_1 = E^0, B_2 = E_1^1 - B_1, B_3 = E_2^1 - B_1, \cdots, B_{n+1} = E_n^1 - B_1$,

$B_{n+2} = E_{12}^2 - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i), B_{n+3} = E_{13}^2 - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i), \cdots, B_{n+1+C_n^2} = E_{(n-1)n}^2 - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i)$,

……

$B_{2^n-n} = A_1 - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i), B_{2^n-(n-1)} = A_2 - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i), \cdots, B_{2^n-1} = A_n - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i)$,

则 $B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-1}$ 至多有 $2^n - 1$ 个两两无交的非空集,且每一 A_i 均可用 $B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-1}$ 经过并、交、差三种运算表示,所以 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 经过并、交、差三种运算生成的集族与 $B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-1}$ 经过这三种运算生成的集族相同.

由第一步结论 $B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-1}$ 经过并、交、差三种运算生成的不同集合的个数至多为 2^{2^n-1},从而 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 经过并、交、差三种运算至多能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合.

例,记 $A_i = \{(e_1, \cdots, \overset{i}{1}, \cdots, e_n) : e_k = 0 \text{ 或 } 1, k \neq i\}, i_1 = 1, \cdots, n$,则 $E^0 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \{(1,1,\cdots,1)\}$

$E_{i_1}^1 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap A_n = \{(1, \cdots, e_{i_1}, \cdots, 1) : e_{i_1} = 0 \text{ 或 } 1\} \quad i_1 = 1,2,\cdots,n$

$E_{i_1i_2}^2 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_2} \cap \cdots \cap A_n = \{(1, \cdots, e_{i_1}, \cdots, e_{i_2}, \cdots, 1) : e_k = 0 \text{ 或 } 1\} \quad i_1 < i_2$

$E_{i_1i_2i_3}^3 = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_1} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_2} \cap \cdots \cap \hat{A}_{i_3} \cap \cdots \cap A_n = \{(1, \cdots, e_{i_1}, \cdots, e_{i_2}, \cdots, e_{i_3}, \cdots, 1) : e_k = 0 \text{ 或 } 1\} \quad i_1 < i_2 < i_3$

……

$E^{n-1}_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} = A_j = \{(e_{i_1}, \cdots, \overset{j}{1}, \cdots, e_{i_{n-1}}) : e_k = 0 \text{ 或 } 1\} \quad j \neq i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$

记 $B_1 = E_1 = \{(1,1,\cdots,1)\}$,

$B_2 = E^1_1 - B_1 = \{(0,1,\cdots,1)\}, B_3 = E^1_2 - B_1 = \{(1,0,1,\cdots,1)\}$,

$\cdots, B_{n+1} = E^1_n - B_1 = \{(1,1,\cdots,1,0)\}$,

$B_{n+2} = E^2_{12} - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i) = \{(0,0,1,\cdots,1)\}$,

$B_{n+3} = E^2_{13} - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i) = \{(0,1,0,1,\cdots,1)\}, \cdots$,

$B_{n+1+C_n^2} = E^2_{(n-1)n} - (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} B_i) = \{(1,1,\cdots,1,0,0)\}$,

……

$B_{2^n-n} = A_1 - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i) = \{(1,0,\cdots,0)\}$,

$B_{2^n-(n-1)} = A_2 - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i) = \{(0,1,0,\cdots,0)\}, \cdots$,

$B_{2^n-1} = A_n - (\bigcup\limits_{i=1}^{2^n-(n+1)} B_i) = \{(0,\cdots,0,1)\}$

这样得到 $2^n - 1$ 个互不相同的单点集 $B_1, B_2, \cdots, B_{2^n-1}$,容易看出由这 $2^n - 1$ 个单点集通过并、交、差运算恰好生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合.

因此,确有 n 个集合,它们经过并、交、差三种运算恰能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合.

§1.3 关系

3.1 设 $X = \{a,b\}, Y = \{c,d,e\}$. 试列举 $X \times Y$ 的所有成员.

解:$X \times Y = \{a,b\} \times \{c,d,e\} = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$

3.2 设 X 和 Y 都是集合. 证明:对于 X 的任何子集 A,B 和 Y 的任何子集 C,D,有:

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$$

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

$$(X \times Y) - (A \times C) = ((X - A) \times Y) \cup (X \times (Y - C))$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

3.3 设 $X = \{a,b,c\}, Y = \{d,e,f,g\}; R = \{\{a,d\},\{a,e\},\{b,f\}\}$. 令 $A = \{a,c\}, B = \{d,e,g\}$. 试求 $R(A), R^{-1}(B)$, R 的值域,和 R 的定义域.

解:$R(A) = \{d,e\}, R^{-1}(B) = \{a\}$

$\mathrm{Range}R = \{d,e,f\}, \mathrm{Domain}R = \{a,b\}$

3.4 设 R 为从集合 X 到集合 Y 中的关系. 证明:对于任意 $A,B \subset X$,等式 $R(A) \cap R(B) = R(A \cap B)$ 成立的充分必要条件是:对于任意 $x,y \in X$,若 $x \neq y$,则 $R(\{x\}) \cap R(\{y\}) = \varnothing$.

证:充分性:设 $z \in R(A) \cap R(B)$,即 $z \in R(A), z \in R(B)$,存在 $x \in A, y \in B$,使 xRz, yRz,若 $x \neq y$,则 $R(\{x\}) \cap R(\{y\}) = \varnothing$,但 $z \in R(\{x\}) \cap R(\{y\})$ 矛盾. 故 $x = y$,从而 $z \in R(A \cap B)$,即 $R(A) \cap R(B) \subset R(A \cap B)$,据定理 1.3.2(2) 有 $R(A) \cap R(B) \supset R(A \cap B)$. 因此有 $R(A) \cap R(B) = R(A \cap B)$

必要性:设 $x,y \in X, x \neq y$,有 $R(\{x\}) \cap R(\{y\}) = R(\{x\} \cap \{y\}) = R(\varnothing) = \varnothing$

3.5 设 X_1, X_2, X_3 是三个集合. 什么时候有 $X_1 \times X_2 \times X_3 = X_2 \times X_3 \times X_1$?

解:(1) 当 $X_i (i = 1,2,3)$ 中至少有一个为空集时 $X_1 \times X_2 \times X_3 = X_2 \times X_3 \times X_1 = \varnothing$.

(2) 对任何 $i=1,2,3,X_i\neq\varnothing$ 时,当 $X_1=X_2=X_3$ 时 $X_1\times X_2\times X_3=X_2\times X_3\times X_1$.

§1.4 等价关系

4.1 举出满足反身、对称、传递三性质中的两条而不满足第三条的关系的例子.

解:例(1) 设 $X=\{a,b,c\}$, $R=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$,显然 R 满足对称性,传递性,但不满足反身性,因为(c,c).

(2) 在实数集 $\mathbf{R}$ 中定义关系 $R=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R},xy\geqslant 0\}$,显然 R 满足反身性,对称性,但 R 不满足传递性. 事实上,取 $x>0,y=0,z<0$,则$(x,y),(y,z)\in R$,但$(x,z)\in R$.

(3)2^X 的成员的"包含关系" $\subset$ 是反身的,传递的,但不是对称的.

4.2 设 R 为集合 X 中的对称的、传递的关系,证明 R 为等价关系当且仅当 $\mathrm{Domain}R=X$.

证:若 R 为等价关系,则 R 具有反身性,即任意 $x\in X,xRx$,所以 $\mathrm{Domain}R=X$,反之,若 $\mathrm{Domain}R=X$,则任意 $x\in X$,有 $y\in X$,使 xRy,又 R 具有对称性及传递性,所以 yRx,从而 xRx,即 R 亦具有反身性,故 R 是 X 中的等价关系.

4.3 试写出 $\mathbf{R}$ 中的等价关系 R,它使得

$$\mathbf{R}/R=\{\{x\in\mathbf{R}:x\geqslant 0\},\{x\in\mathbf{R}:x<0\}\}.$$

解:令 $F(x)=1+\mathrm{sgn}x-|\mathrm{sgn}x|$,则 $\mathbf{R}$ 中的等价关系 R 为

$R=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R},F(x)F(y)=1\}$

4.4 $\mathbf{R}$ 中的关系定义为

$$R=\{(x,y):x,y\in\mathbf{R},x-y\in\mathbf{Z}\},$$

证明 R 为等价关系.

证:显然关系 R 满足反身性,对称性,设 xRy,yRz,即 $x-y=n_1\in\mathbf{Z},y-z=n_2\in\mathbf{Z},x-z=(x-y)+(y-z)=n_1+n_2\in\mathbf{Z}$,所以 xRz,即 R 满足传递性,故 R 为 $\mathbf{R}$ 的等价关系.

4.5 设 R_1,R_2 为集合 X 中的两个等价关系,证明 $R_2\circ R_1$ 仍为等价关系当且仅当 $R_2\circ R_1=R_1\circ R_2$.

证:因 R_1,R_2 是等价关系,若 $R_2\circ R_1$ 是等价关系,则 $R_2\circ R_1=(R_2\circ R_1)^{-1}=R_1^{-1}\circ R_2^{-1}=R_1\circ R_2$;反之,若 $R_2\circ R_1=R_1\circ R_2$,则 $R_2\circ R_1=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}=(R_1\circ R_2)^{-1}=(R_2\circ R_1)^{-1}$,任意 $x\in X$, xR_1x,xR_2x,所以 $xR_2\circ R_1x$,即 $\triangle(X)\subset R_2\circ R_1$;又$(R_2\circ R_1)\circ(R_2\circ R_1)=R_2\circ(R_1\circ R_2)\circ R_1=R_2\circ(R_2\circ R_1)\circ R_1=(R_2\circ R_2)\circ(R_1\circ R_1)\subset R_2\circ R_1$,故 $R_2\circ R_1$ 是等价关系.

§1.5 映射

5.1 设 $f:X\to Y$. 证明:

(1) 对于任意 $A\subset X,A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 对于任意 $B\subset Y,B\supset f(f^{-1}(B))$.

(3) f 为在上的映射当且仅当对于每一 $B\subset Y,f(f^{-1}(B))=B$.

证:(1),(2) 容易.

(3) 设 f 为在上的映射,对任意 $y\in B\subset Y$,存在 $x\in f^{-1}(B)$,使 $f(x)=y$,所以 $y=f(x)\in f(f^{-1}(B))$,即 $B\subset f(f^{-1}(B))$,由(2) 知,$B\supset f(f^{-1}(B))$,故 $B=f(f^{-1}(B))$.

反之,设对每一 $B\subset Y,f(f^{-1}(B))=B$,特别地,取 $B=Y$,有 $f(f^{-1}(Y))=Y$,而 $f^{-1}(Y)=X$,故 f 为在上的映射.

5.2　设 $f:X\to Y$. 证明下列各条件等价：

(1)　f 是一一映射.

(2)　对于任意 $A,B\subset X,f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(3)　对于任意 $A\subset X,A=f^{-1}(f(A))$.

(4)　对于任意 $A\subset X,f(X\sim A)=f(X)\sim f(A)$.

证：(1)⇒(3)　令 $f_1:X\to f(X)$ 使得任意 $x\in X,f_1(x)=f(x),f_1:x\to f(x)$ 是在上的一一映射，对任意 $A\subset X$，由习题 5.1(3) 知：

$A=f_1^{-1}((f_1^{-1})^{-1}(A))=f_1^{-1}(f_1(A))=f^{-1}(f(A))$

(3)⇒(2) 定义 $f_1:X\to f(X)$ 同上，则 f_1 是在上的，对任意 $A\subset X$，由习题 5.1(3) 有 $f(A\cap B)=f(f^{-1}(f(A))\cap f^{-1}(f(B))=f(f^{-1}(f(A)\cap f(B)))=f_1(f_1^{-1}(f_1(A)\cap f_1(B))=f_1(A)\cap f_1(B)=f(A)\cap f(B)$

(2)⇒(4) 因 $X=A\cup(X\sim A),f(X)=f(A)\cup f(X\sim A)$

$f(X)\sim f(A)=f(X)\cap(f(X)\sim f(A))=(f(A)\cup f(X\sim A))\cap(f(X)\sim f(A))=f(X\sim A)\cap(f(X)\sim f(A))=f(X\sim A)\cap f(X)\sim f(X\sim A)\cap f(A)=f(X\sim A)$

(4)⇒(1) 若 $f(x)$ 不是一一的，则存在 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$，使 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_2)\in f(X-\{x_1\})=f(X)\sim f(\{x_1\})=f(X)\sim f(\{x_2\})$ 矛盾，故 f 是一一映射.

5.3　设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 证明下列条件等价：

(1)　f 是一一映射；

(2)　f^{-1} 是满射；

(3)　$f^{-1}\circ f=i_X$ 和 $f\circ f^{-1}=i_Y$，

其中 i_X 和 i_Y 分别是 X 和 Y 的恒同映射.

证：(1)⇒(2) 由定理 1.5.3 立得.

(2)⇒(3) 设 f^{-1} 是满射，任意 $x\in X$，由习题 5.1(3) 有 $f^{-1}((f^{-1})^{-1}(\{x\}))=\{x\}$，即 $f^{-1}(f(\{x\}))=\{x\}$，因此 $f^{-1}\circ f=i_X$ 又 $f^{-1}:Y\to X$ 为映射，则 $f:X\to Y$ 为满射，同上证得 $f\circ f^{-1}=i_Y$.

(3)⇒(1) 因为 $f^{-1}\circ f=i_X$，所以 f 是一一的映射，又 $f\circ f^{-1}=i_Y$，所以 f 是满射，因此 f 是满的一一映射.

5.4　设 X_1,X_2 为集合，$p_i:X_1\times X_2\to X_i$ 为第 i 个投射，$i=1,2$.

(1)　什么情况下 p_i 是在上的？什么情况下 p_i 是一一的？

(2)　若 $x_i\in X_i$，写出集合 $p_i^{-1}(\{a_i\}$ 来.

解：(1) 当 $x_j\neq\varnothing,(j\neq i)$，则 P_i 是在上的，当 x_j 为单点集 $(j\neq i)$，则 P_i 是一一的.

(2) $P_1^{-1}(\{a_1\})=\{a_1\}\times X_2,P_2^{-1}(\{a_2\})=X_1\times\{a_2\}$

5.5　设 X,Y 为集合，定义 $\triangle:X\to X\times X$，使得对于任意，$x\in X,\triangle(x)=(x,x)$. 证明：

(1)　$\triangle$ 是一一映射.

(2)　$P_i\circ\triangle=i_X,(i=1,2)$.

(3)　$\triangle(X)$ 即定义 1.4.1 中的对角线.

证：(1) 当 $x,y\in X,x\neq y$ 时，有 $(x,x)\neq(y,y)$. 所以 $\triangle$ 是一一映射.

(2) 任意 $x\in X,(P_i\circ\triangle)(x)=P_i((x,x))=x,(i=1,2)$. 所以 $P_i\circ\triangle=i_X,(i=1,2)$.

(3) 因为 $\triangle(X)=\{\triangle(x):x\in X\}=\{(x,x):x\in X\}$，所以 $\triangle(x)$ 是定义 1.4.1 中的对角线.

5.6　设 X,Y 为集合，$a\in X,b\in Y$. 定义映射 $k_{1,b}:X\to X\times Y$，使得对于任意 $x\in X,k_{1,b}(x)=(x,b);k_{2,a}:Y\to X\times Y$，使得对于任意 $y\in Y,k_{2,a}(y)=(a,y)$. 证明：

(1)　$k_{1,b},k_{2,a}$ 都是一一映射.

(2)　$k_{1,b}(X) = X \times \{b\}, k_{2,a}(Y) = \{a\} \times Y$.

(3)　$p_1 \circ k_{1,b} i_X, p_2 \circ k_{2,a} = i_Y$.

(4)　$p_1 \circ k_{2,a}: Y \to X$ 为取常值 a 的映射,$p_2 \circ k_{1,b}: X \to Y$ 为取常值 b 的映射,其中 p_i 是 $X \times X$ 的第 i 个投射,$i = 1,2$.

证:(1) 设 $x_1, x_2 \in X$,且 $x_1 \neq x_2$,则 $k_{1,b}(x_1) = (x_1, b) \neq (x_2, b) = k_{1,b}(x_2)$,所以 $k_{1,b}$ 是一一映射;同理 $k_{2,a}$ 是一一映射.

(2)$k_{1,b}(X) = \{k_{1,b}(x), x \in X\} = \{(x,b): x \in X\} = X \times \{b\}$,所以 $k_{1,b}(X) = X \times \{b\}$;同理 $k_{2,a}(Y) = \{a\} \times Y$

(3) 任意 $x \in X$,$(p_1 \circ k_{1,b})(x) = p_1(k_{1,b}(x)) = p_1((x,b)) = x$,所以 $p_1 \circ k_{1,b} = i_X$;同理 $P_2 \circ k_{2,a} = i_Y$.

(4) 任意 $y \in Y$,$(p_1 \circ k_{2,a})(y) = p_1(k_{2,a}(y)) = p_1((a,y)) = a$,所以 $p_1 \circ k_{2,a}: Y \to X$ 为取常值 a 的映射;同理,$p_2 \circ k_{1,b}: X \to Y$ 为取常值 b 的映射.

5.7　X_1, X_2 为集合. 令

$$\Pi(X_1, X_2) = \{x: \{1,2\} \to X_1 \cup X_2 : x(1) \in X_1, x(2) \in X_2\}$$

定义 $j: \Pi(X_1,X_2) \to X_1 \times X_2$,使得 $x \in \Pi(X_1,X_2)$,$j(x) = (x(1), x(2)) \in (X_1, X_2)$. 证明 j 是在上的一一映射.

证:设 $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$,定义 $x: \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$,使得 $x(1) = x_1$,$x(2) = x_2$,则 $x \in \Pi(X_1, X_2)$,并且 $j(x) = (x_1, x_2)$,即 j 是在上的映射;又设 $x, \bar{x} \in \Pi(X_1, X_2)$,$x \neq \bar{x}$,即 $(x(1), x(2)) \neq (\bar{x}(1), \bar{x}(2))$,所以 $j(x) \neq j(\bar{x})$,j 是一一映射.

综上所述,j 是在上的一一映射.

5.8　设 f, g, h 都是映射. 证明:

(1)　f 为 f 的扩张(限制).

(2)　若 f 为 g 的扩张(限制),g 为 h 的扩张(限制),则 f 为 h 的扩张(限制).

(3)　若 f 为 g 的扩张(限制),并且 g 为 f 的扩张(限制),则 $f = g$.

证:(1) 因 $f| X = f$,所以 f 为 f 的扩张(限制).

(2) 若 f 为 g 的扩张,g 为 h 的扩张,不妨设 $f: X \to Y, g: A \to Y, h: B \to Y$,其中 $X \supset A \supset B$,则 $f | A = g, g| B = h$,所以 $f| B = g| B = h$,即 f 为 h 的扩张.

同理可证,若 f 为 g 的限制,g 为 h 的限制,则 f 为 h 的限制.

(3) 若 f 为 g 的扩张,并且 g 为 f 的扩张,不妨设 $f: X_1 \to Y, g: X_2 \to Y$,则 $X_1 \supset X_2, X_2 \supset X_1$,故 $X_1 = X_2$,从而 $f = f| X_1 = f| X_2 = g$,即 $f = g$.

同理可证,若 f 为 g 的限制,并且 g 为 f 的限制,则 $f = g$.

5.9　设 X 和 Y 是两个集合,$f: X \to Y, g: Y \to X$. 证明:如果 $f \circ g = i_Y$,则 g 是一个单射,f 是一个满射.

证:对任何 $y_1, y_2 \in Y$,设 $g(y_1) = g(y_2) = x \in X$,

$f \circ g(y_1) = f(g(y_1)) = f(x) \in Y$

$f \circ g(y_2) = f(g(y_2)) = f(x) \in Y$

因 $f \circ g = i_Y$,所以,$y_1 = f \circ f(y_1) = f(x) = f \circ g(y_2) = y_2$,即 g 是单射

对任何 $y \in Y$,$y = f \circ g(y) = f(g(y))$. 因 $g: Y \to X$,所以 $g(y) \in X$,于是 f 是满射.

§1.6 集族及其运算

6.1 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$,$\{A_\beta\}_{\beta\in\Gamma'}$ 为任意两个集族,证明:

(1) $(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$

$(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$

(2) $(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma'}(A_\alpha\cap A_\beta)$

$(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cap_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma'}(A_\alpha\cup A_\beta)$.

证:(1) 因为$(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\subset(\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma)$,$(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)\subset(\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma)$,所以$(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)\subset(\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma)$;另一方面,设$x\in\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$,存在$\gamma_0\in\Gamma\cup\Gamma'$,使$x\in A_{\gamma_0}$,$\gamma_0\in\Gamma$或者$\gamma_0\in\Gamma'$,所以$x\in(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)$,即$\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma\subset(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)$,故$(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=(\cup_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma)$

因为$\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma\subset\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha$,$\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma\subset\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta$,所以$\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma\subset(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)$;另方面,设$x\in(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)$,即任意$\alpha\in\Gamma$,$\beta\in\Gamma'$,有$x\in A_\alpha$,及$x\in A_\beta$,所以$x\in\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$,即$(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)\subset\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$,故$(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cap_{\gamma\in\Gamma\cup\Gamma'}A_\gamma$.

(2)$(\cup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cap(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cup_{\alpha\in\Gamma}(A_\alpha\cap(\cup_{\beta\in\Gamma'}A_\beta))=\cup_{\alpha\in\Gamma}\cup_{\beta\in\Gamma'}(A_\alpha\cap A_\beta)=\cup_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma'}(A_\alpha\cap A_\beta)$

$(\cap_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha)\cup(\cap_{\beta\in\Gamma'}A_\beta)=\cap_{\alpha\in\Gamma}\cap_{\beta\in\Gamma'}(A_\alpha\cup A_\beta)=\cap_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Gamma'}(A_\alpha\cup A_\beta)$

6.2 若$\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为一集族,并且对于每一$\alpha\in\Gamma$,给定了一个集族$\{A_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 证明:

$$\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta=\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$$

$$\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta=\cap_{\alpha\in\Gamma}(\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta).$$

证:因为对每一$\alpha\in\Gamma$,都有$\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\supset\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta$,所以$\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\supset\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$;另方面,设$x\in\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta$,存在$\beta_0\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha$,使$x\in A_{\beta_0}$,从而存在$\alpha\in\Gamma$,使$\beta_0\in\Gamma_{\alpha_0}$,即$x\in\cup_{\beta\in\Gamma_{\alpha_0}}A_\beta\subset\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$,所以$\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\subset\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$

故$\cup_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta=\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$.

因为$\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\subset\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta$,任意$\alpha\in\Gamma$,所以$\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\subset\cap_{\alpha\in\Gamma}(\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$;另方面,设$x\in\cap_{\alpha\in\Gamma}(\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$,则对任意$\alpha\in\Gamma$有$x\in\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta$,从而对任意$\alpha\in\Gamma$及$\beta\in\Gamma_\alpha$,都有$x\in A_\beta$,即$x\in\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta$,所以$\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta\supset\cup_{\alpha\in\Gamma}(\cup_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$,故$\cap_{\beta\in\cup_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha}A_\beta=\cap_{\alpha\in\Gamma}(\cap_{\beta\in\Gamma_\alpha}A_\beta)$.

§1.7 可数集,不可数集,基数

7.1 证明全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 为可数集.

证:因为任意$r\in\mathbf{Q}$,r可唯一表为既约分数p/q,$p,q\in\mathbf{Z}$,$q>0$,易见

$\mathbf{Q}=\{p/q:p,q\in\mathbf{Z}$互质$,q>0\}=_c\{(p,q):p,q$互质$,q>0\}\leqslant_c\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$,而$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$是可数集,故$\mathbf{Q}$是可数集.

7.2 证明实数集合 $\mathbf{R}$ 的子集 A,若包含着某一开区间,则 $A=_c\mathbf{R}$.

证:设$A(\subset\mathbf{R})$包含开区间E,则$E\subset A\subset\mathbf{R}$,因此$E\leqslant_c A\leqslant_c\mathbf{R}$,易见$E=_c\mathbf{R}$,由 Contor – Bernstein 定理 1.7.9 知 $A=_c\mathbf{R}$.

7.3 证明 $\mathbf{R}=_c\mathbf{R}^2$.

证:先证实数列全体$E_\infty=_c\mathbf{R}$,记$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots):0<x_n<1,n=1,2,\cdots\}$,则 B

$=_c E_\infty$.

事实上,任意 $x \in (0,1)$,$(x,x,\cdots) \in B$,因此,$(0,1) \leqslant_c B$;反之,任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots) \in B$,将 x_n 按十进位无限小数表示:

$x_1 = 0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots$

$x_2 = 0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots$

…………

$x_m = 0.x_{m1}x_{m2}\cdots x_{mn}\cdots$

作映射 $\varphi: B \to (0,1)$,使 $\varphi(x) = 0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{m1}x_{(m-1)2}\cdots x_{1m}\cdots$,显然 φ 是一一映射,故 $B \leqslant_c (0,1)$.

由 Contor - Bernstein 定理 1.7.9 知,$B =_c (0,1) =_c \mathbf{R}$. 因此 $E_\infty = \mathbf{R}$.

再证 $\mathbf{R} =_c \mathbf{R}^2$,因为 $\mathbf{R}^2 = \{(x_1,x_2):x_1,x_2 \in \mathbf{R}\}$,所以 $\mathbf{R}^2 =_c \{(x_1,x_2,0,\cdots,0,\cdots):x_1,x_2 \in \mathbf{R}\} \leqslant_c E_\infty =_c \mathbf{R}$,即 $\mathbf{R}^2 \leqslant_c \mathbf{R}$,又显然 $\mathbf{R} \leqslant_c \mathbf{R}^2$,由 Contor - Bernstein 定理 1.7.9 知 $\mathbf{R} =_c \mathbf{R}^2$.

7.4 若 X 为无限的可数集. 证明 2^X 为不可数集. 但 2^X 中所有有限子集构成的子集族为可数集.

证:用二进小数表示区间 $(0,1)$ 中的数,若一个数有两种表示,我们选取 1 循环的那一种,记二进小数全体为 A,则 $A =_c (0,1)$. 因为 X 是无限可数集,将 X 中元素用自然数编号 $q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots$,作映射 $\varphi: 2^X \to A$,使得任意 $D \in 2^X$,$\varphi(D) = 0.t_1t_2\cdots t_k\cdots$,当 $q_n \in D$ 时,$t_n = 1$;当 $q_n \overline{\in} D$ 时,$t_n = 0$.

易见,φ 是在上的一一映射,故 $2^X =_c A =_c (0,1)$,即 2^X 是不可数集.

设 $X = \{q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots\}$,记 X_n 是 X 的前 n 个元素的所有子集构成的子集族,则 X_n 可数(实际上为 2^n-1 个),并且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \{2^X$ 中所有有限子集$\}$. 因此 2^X 中所有有限子集构成的子集族为可数集.

7.5 设 X 为集合. 证明 $2^X =_c \{0,1\}^X$.

证:作映射 $F: 2^X \to \{0,1\}^X$,使得对每一 $A \in 2^X$,

$$F(A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \overline{\in} A \end{cases} \text{其中 } x \in X$$

显然 F 是一一映射,又对任意 $f \in \{0,1\}^X$,记 $A = \{x \in X: f(x) = 1\}$ 则 $A \in 2^X$,并且 $F(A) = f$,所以 F 是在上的映射.

故 F 是在上的一一映射,即 $2^X =_c \{0,1\}^X$.

§1.8 选择公理

8.1 证明定理 1.8.2 和 1.8.3 都等价于选择公理.

证:(1) 定理 1.8.2 等价于选择公理.

设 X 是非空集合,记 $\widetilde{X}$ 为所有 X 的非空子集构成的集族,则 $\widetilde{X}$ 非空. 由定理 1.8.2 知,存在映射 $\eta: \widetilde{X} \to \bigcup_{A \in \widetilde{X}} A = X$,使得任一 $A \in \widetilde{X}$,$\eta(A) \in A$,即 η 是 X 的选择函数,因此选择公理成立. 结合定理 1.8.2 的证明知,定理 1.8.2 与选择公理等价.

(2) 定理 1.8.3 等价于选择公理.

设 X 是非空集合,记 $\widetilde{X}$ 为所有 X 的非空子集构成的集族,则 $\widetilde{X}$ 非空. 令 $\mathscr{A} = \{A \times \{A\}: A \in \widetilde{X}\}$,则 $\mathscr{A}$ 是非空的. 并且 $\mathscr{A}$ 的成员两两无交. 由 Zermelo 假定(定理 1.8.3) 存在集合 C,使得对于每一

$A\times\{A\}\in\mathscr{A}$,$(A\times\{A\})\cap C=\{(\lambda_a,A)\}$为单点集,$\lambda_a\in A$,定义映射$\varepsilon:\widetilde{X}\to X$,使得每一$A\in\widetilde{X}$,$\varepsilon(A)=\lambda_a$,则$\varepsilon$是$X$的选择函数,故选择公理存在,结合定理1.8.3的证明即知,定理1.8.3与选择公理等价.

8.2　设X,Y为集合,证明$Y\leqslant_c X$当且仅当存在着从X到Y上的映射.

证:设$Y\leqslant_c X$,即存在Y到X中的一一映射f,定义$g:X\to Y$,使

$$g(x)=\begin{cases}f^{-1}(x), & \text{当 } x\in f(Y)\\ y_0, & \text{当 } x\notin f(Y)\end{cases}$$

其中y_0为Y中一固定元,则g是从X到Y上的映射.

反之,若存在从X到Y上的映射g,记

$$\mathscr{A}=\{A_y:y\in Y,g^{-1}(y)=A_y\}$$

则$\mathscr{A}$是X中非空族,并且$\mathscr{A}$中成员两两无交,由Zermelo假定存在集合$C\subset X$,使得对于每一$A\in\mathscr{A}$,$A\cap C$是单点集,所以存在C到Y上的一一映射,即$C=_cY$,又$C\leqslant_c X$,故$Y\leqslant_c X$.

第 2 章　拓扑空间与连续映射

§2.1　度量空间与连续映射

1.1　定义 $\sigma,\sigma':\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 使得对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $\sigma(x,y)=(x-y)^2$,$\sigma'(x,y)=|x^2-y^2|$. 证明 σ 和 σ' 都不是 $\mathbf{R}$ 的度量.

证:取 $z=\frac{x+y}{2}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,$x\neq y$,则 $\sigma(x,z)=(\frac{x-y}{2})^2$,$\sigma(z,y)=(\frac{x-y}{2})^2$,$\sigma(x,z)+\sigma(z,y)=\frac{(x-y)^2}{2}<\sigma(x,y)$,故 σ 不是 $\mathbf{R}$ 的度量

当 $\sigma'(x,y)=0$ 时,即 $x^2-y^2=0$,则 $x=\pm y$,故 σ' 也不是 $\mathbf{R}$ 的度量.

1.2　证明:只含有限个点的度量空间都是离散的度量空间.

证:设 (X,ρ) 为度量空间,并且 X 为有限集,只需证明 X 的每一子集都是开集. 因为 X 是有限集,记 $\varepsilon=\min\{\rho(x,y):x,y\in X,x\neq y\}$,则对 X 中任意一点 x,$B(x,\frac{\varepsilon}{2})=\{x\}$,即 X 中所有单点集均为开集. 所以 X 的每一子集都是开集.

1.3　设 (X,ρ) 是一个离散的度量空间. 证明:

(1) X 的每一子集都是开集;

(2) 如果 Y 也是度量空间,则任何映射 $f:X\to Y$ 都是连续的.

证:(1) 设 A 为 X 的任一子集,任意 $x\in A$,取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$,则 $B(x,\varepsilon)=\{x\}\subset A$,所以 A 为开集.

(2) 设 $f:X\to Y$ 为任一映射,U 为 Y 中任一开集,由(1)知,$f^{-1}(U)$ 为 X 的开集,所以 f 为连续映射.

1.4　集合 X 的两个度量 ρ_1 和 ρ_2 称为等价的,如果 X 的子集 A 是度量空间 (X,ρ_1) 中的开集当且仅当 A 是度量空间 (X,ρ_2) 的开集.

设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 X 的两个等价的度量,Y 是一个度量空间,$f:X\to Y$. 证明 f 相对于度量 ρ_1 而言是连续的当且仅当 f 相对于度量 ρ_2 而言是连续的.

证:设 A 是 Y 中的任一开集,由 f 相对于度量 ρ_1 而言的连续性得 $f^{-1}(A)$ 是度量空间 (X,ρ_1) 中的开集,因 ρ_1,ρ_2 等价得 $f^{-1}(A)$ 是度量空间 (X,ρ_2) 中的开集,即 f 相对于度量 ρ_2 而言连续.

必要性类似证明.

1.5　定义 $\rho_1,\rho_2:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 使得对于任何 $x=(x_1,x_2)$,$y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$,

$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

$\rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

证明:

(1) ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}^2$ 的度量.

(2) 度量空间 $(\mathbf{R}^2,\rho)$,$(\mathbf{R}^2,\rho_1)$,$(\mathbf{R}^2,\rho_2)$(ρ 的定义见例 2.1.2) 有着完全相同的开集(意即一集合对于某一度量而言是开集,则对于另一度量而言也是开集).

(3) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 为一映射,若 f 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ,ρ_1,ρ_2 之一而言为连续映射,则 f 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ,ρ_1,ρ_2 之另一而言也是连续映射.

证:(1)ρ_1,ρ_2 满足度量的条件1),2)是显然的,下面验证它们也满足三角不等式.

设 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2),z=(z_1,z_2)\in \mathbf{R}^2$,

$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}\leqslant \max\{|x_1-z_1|+|z_1-y_1|,|x_2-z_2|+|z_2-y_2|\}\leqslant \max\{|x_1-z_1|,|x_2-z_2|\}+\max\{|z_1-y_1|,|z_2-y_2|\}=\rho_1(x,z)+\rho_1(z,y)$.

$\rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\leqslant|x_1-z_1|+|z_1-y_1|+|x_2-z_2|+|z_2-y_2|=(|x_1-z_1|+|x_2-z_2|)+(|z_1-y_1|+|z_2-y_2|)=\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)$.

故 ρ_1,ρ_2 都是 $\mathbf{R}^2$ 的度量.

(2)因为 $\rho_1(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant 2\rho_1(x,y)$ ①

设 U 为($\mathbf{R}^2,\rho$)中的开集,即任意 $x\in U$,存在 $\varepsilon>0$,使 $B_\rho(x,\varepsilon)\subset U$,其中 $B_\rho(x,\varepsilon)$ 表示度量空间($\mathbf{R}^2,\rho$)中的 x 的球形邻域.

由①右边不等式,$B_{\rho_1}(x,\varepsilon/2)\subset B_\rho(x,\varepsilon)\subset U$,即 U 是($\mathbf{R}^2,\rho_1$)的开集.反之,设 U 是($\mathbf{R}^2,\rho_1$)中的开集,即任意 $x\in U$,存在 $\varepsilon>0$,使 $B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\subset U$,由①左边不等式,$B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_{\rho_1}(x,\varepsilon)\subset U$,即 U 是($\mathbf{R}^2,\rho$)的开集.

因此($\mathbf{R}^2,\rho$)与($\mathbf{R}^2,\rho_1$)有相同的开集.

又 $\rho(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant 2\rho(x,y)$ ②

利用此不等式,仿上可证($\mathbf{R}^2,\rho$)与($\mathbf{R}^2,\rho_2$)有相同的开集,因此($\mathbf{R}^2,\rho$),($\mathbf{R}^2,\rho_1$),($\mathbf{R}^2,\rho_2$)有完全相同的开集.

(3)不妨设 f 对 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ 而言为连续映射,设 U 为 $\mathbf{R}$ 中(对 $\mathbf{R}$ 中的度量而言)的任一开集,则 $f^{-1}(U)$ 为($\mathbf{R}^2,\rho$)中的开集,由(2),$f^{-1}(U)$ 也是($\mathbf{R}^2,\rho_1$),($\mathbf{R}^2,\rho_2$)中的开集.因此,f 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ_1,ρ_2 之一而言,也是连续映射.

其它两种情况类似证明.

1.6　从欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 的映射 $m,s:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 定义为:对于任何 $x=(x_1,x_2)$,

$$m(x)=\max\{x_1,x_2\}$$
$$s(x)=x_1+x_2$$

证明:m 和 s 都是连续映射.(提示:分别用 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ_1 和 ρ_2(参见习题5).)

证:先证 m 是连续映射.设 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ 是任意一点,任意 $\varepsilon>0$,对 $y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$,因为

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y)&=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}\\&\geqslant|\max\{x_1,x_2\}-\max\{y_1,y_2\}|=|m(x)-m(y)|\end{aligned}$$

(其中 ρ_1 是习题1.5中定义的 $\mathbf{R}^2$ 的度量),故 $m(B(x,\varepsilon))\subset B(m(x),\varepsilon)$.即 m 在 $x\in\mathbf{R}^2$ 对于 $\mathbf{R}^2$ 度量 ρ_1 而言是连续的,由于 $x\in\mathbf{R}^2$ 是任意的,从而 m 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ_1 而言连续,由习题1.5(3)知,m 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ 而言连续.

次证 s 是连续映射.设 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ 是任意一点,任意 $\varepsilon>0$,对 $y=(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2$,因为

$$\begin{aligned}\rho_2(x,y)&=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|\\&\geqslant|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)|=|s(x)-s(y)|,\end{aligned}$$

(其中 ρ_2 是习题1.5中定义的 $\mathbf{R}^2$ 的度量),故 $s(B(x,\varepsilon))\subset B(s)$.即 s 在 $x\in\mathbf{R}^2$ 对于 $\mathbf{R}^2$ 度量 ρ_2 而言是连续的,由于 $x\in\mathbf{R}^2$ 是任意的,故 s 对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量 ρ_1 而言连续,从而对于 $\mathbf{R}^2$ 的度量而言连续.

1.7　设(X,ρ)为度量空间. $\rho',\rho'':X\times X\to\mathbf{R}$分别定义为对于任意$x,y\in X$,

$$\rho'(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

$$\rho''(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y), & \text{当}\rho(x,y)\leqslant 1,\\ 1, & \text{当}\rho(x,y)>1,\end{cases}$$

证明:

(1)ρ',ρ''都是X的度量.

(2)度量空间$(X,\rho),(X,\rho'),(X,\rho'')$有着完全相同的开集.

(3)设$f:X\to Y$为一映射,其中Y为度量空间. 若f对于X的度量ρ,ρ',ρ''之一而言为连续映射,则f对于X的度量ρ,ρ',ρ''之另一而言也是连续映射.

证:(1)ρ',ρ''显然满足度量的条件(1),(2),下面证明ρ',ρ''满足三角不等式,对任意$x,y,z\in X$,因为

$$\begin{aligned}\rho'(x,y)&=1-\frac{1}{1+\rho(x,y)}\leqslant 1-\frac{1}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}\\&=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}\\&\leqslant\rho'(x,z)+\rho'(z,y)\end{aligned}$$

若ρ''不满足三角不等式,即存在$x,y,z\in X$,使$\rho''(x,y)>\rho''(x,z)+\rho''(z,y)$,由$\rho''$的定义,$\rho''(x,y)\leqslant\rho(x,y)$,且$\rho''(x,y)\leqslant 1$,从而$\rho''(x,z)<1,\rho''(z,y)<1$,故$\rho''(x,z)=\rho(x,z),\rho''(z,y)=\rho(z,y)$,于是,$\rho(x,z)+\rho(z,y)<\rho(x,y)$,与$\rho$是度量矛盾.

因此ρ',ρ''都是X的度量.

(2)对任意$x,y\in X$,因为$\rho'(x,y)\leqslant\rho(x,y)$,所以$B_\rho(x,\varepsilon)\subset B_{\rho'}(x,\varepsilon)(\varepsilon>0)$,从而$(X,\rho')$中的开集是$(X,\rho)$中的开集,反之,若$V$是$(X,\rho)$中开集,任意$x\in V$,有$0<\varepsilon<1/2$,使$B_\rho(x,\varepsilon)\subset V$,对于$y\in B_{\rho'}(x,\varepsilon/2)$,因为$\rho(x,y)=\dfrac{\rho'(x,y)}{1-\rho'(x,y)}\leqslant\dfrac{\varepsilon/2}{1-1/4}=\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$. 因此$B_{\rho'}(x,\varepsilon/2)\subset B_\rho(x,\varepsilon)\subset V$,即$V$是$(X,\rho')$中的开集,故$(X,\rho),(X,\rho')$有完全相同的开集.

又$\rho''(x,y)\leqslant\rho(x,y)$,所以$(X,\rho'')$中的开集是$(X,\rho)$中的开集;另方面,当$\rho(x,y)\leqslant 1$时,$\rho''(x,y)=\rho(x,y)\geqslant\rho'(x,y)$;当$\rho(x,y)>1$时,$\rho''(x,y)=1>\rho'(x,y)$,因此总有$\rho''(x,y)\geqslant\rho'(x,y)$,从而$(X,\rho')$中的开集也是$(X,\rho'')$中的开集,进而$(X,\rho)$中的开集也是$(X,\rho'')$中的开集,故$(X,\rho),(X,\rho'')$有完全相同的开集.

综上所述,$(X,\rho),(X,\rho'),(X,\rho'')$有着完全相同的开集.

(3)与习题1.5的(3)证明类似.

1.8　将习题1.5和习题1.6的条件和结论推广到n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$,并加以证明.

解:习题1.5的推广:设$\rho_1,\rho_2:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$定义为从$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}$的映射. 对于任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|,\cdots,|x_n-y_n|\}$$

$$\rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|+\cdots+|x_n-y_n|,$$

则有

(1)ρ_1,ρ_2都是$\mathbf{R}^n$的度量.

(2)度量空间$(\mathbf{R}^n,\rho),(\mathbf{R}^n,\rho_1),(\mathbf{R}^n,\rho_2)$(其中$\rho$是例2.1.2中定义的)有着完全相同的开集.

(3) 设$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$为一映射,若$f$对于$\mathbf{R}^n$的度量$\rho,\rho_1,\rho_2$之一而言为连续映射,则$f$对于$\mathbf{R}^n$的度量$\rho,\rho_1,\rho_2$之另一而言也是连续映射.

习题1.6的推广:从n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$到实数空间$\mathbf{R}$的映射$m,s:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$分别定义为:对于任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,$m(x)=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$s(x)=x_1+x_2+\cdots+x_n$,则$m,s$为连续映射.

证明与习题1.5和1.6类似.

§2.2 拓扑空间与连续映射

2.1 证明例2.2.5.

证:(1)$X\in\mathscr{T}$,因为$X'=\varnothing$,显然是X的一个可数子集,另外,根据定义有$\varnothing\in\mathscr{T}$.

(2) 设$A,B\in\mathscr{T}$,如果A和B之中有一个是空集,则$A\cap B=\varnothing\in\mathscr{T}$.假定$A$和$B$都不是空集,这时$(A\cap B)'=A'\cup B'$是$X$的一个可数子集,所以$A\cap B\in\mathscr{T}$.

(3) 设$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,令$\mathscr{T}_2=\mathscr{T}_1-\{\varnothing\}$,显然有$\cup_{A\in\mathscr{T}_1}A=\cup_{A\in\mathscr{T}_2}A$,如果$\mathscr{T}_2=\varnothing$,则$\cup_{A\in\mathscr{T}_1}A=\cup_{A\in\mathscr{T}_2}A=\varnothing\in\mathscr{T}$,设$\mathscr{T}_2\neq\varnothing$,任意选取$A_0\in\mathscr{T}_2$,这时$(\cup_{A\in\mathscr{T}_1}A)'=(\cup_{A\in\mathscr{T}_2}A)'=\cap_{A\in\mathscr{T}_2}A'\subset A'_0$是$X$的一个可数子集,所以$\cup_{A\in\mathscr{T}_1}A\in\mathscr{T}$.综上所述,$\mathscr{T}$是$X$的一个拓扑.

2.2 $\mathbf{N}$为自然数,令$A_n=\{n,n+1,\cdots\}$,$n=1,2,\cdots$.并令$\mathscr{T}=\{\varnothing,A_1,A_2,\cdots\}$

(1) 证明$\mathscr{T}$为$\mathbf{N}$的拓扑.

(2) 写出$1\in\mathbf{N}$的所有开邻域.

证:显然$\varnothing,\mathbf{N}=A_1\in\mathscr{T}$,又$\varnothing\cap A_n=\varnothing\in\mathscr{T}$,$n=1,2,\cdots$,任意$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,$\cup_{A_n\in\mathscr{T}_1}A_n=A_{\min\{n:A_n\in\mathscr{T}_1\}}\in\mathscr{T}$,因此$\mathscr{T}$为$\mathbf{N}$的拓扑.

(2)$1\in\mathbf{N}$的唯一的开邻域为$A_1=\mathbf{N}$.

2.3 就$n=2,3,4$指出:

(1) 恰含n个点的集合一共有多少个拓扑?

(2) 恰含n个点的拓扑空间一共有多少个同胚等价类?

解:当$n=2$时,有4个拓扑,3个同胚等价类.

当$n=3$时,有29个拓扑,9个同胚等价类.设$X=\{a,b,c\}$,则具体如下:第1类1个:平庸拓扑.第2类1个:离散拓扑.第3类3个:$\{\{a\},\varnothing,X\}$等.第4类6个:$\{\{a\},\{a,b\},\varnothing,X\}$,$\{\{a\},\{a,c\},\varnothing,X\}$等.第5类3个:$\{\{a\},\{b,c\},\varnothing,X\}$等.第6类3个:$\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\varnothing,X\}$等.第7类3个:$\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\varnothing,X\}$等.第8类6个:$\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\varnothing,X\}$,$\{\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\varnothing,X\}$等.第9类3个:$\{\{a,b\},\varnothing,X\}$等.

当$n=4$时,(略).

2.4 分别确定有限补空间和可数补空间何时是可度量化空间.

解:有限补空间$(X,\mathscr{T})$当X是有限集时$\mathscr{T}=\mathscr{P}(X)$.故可定义$\rho$使$(X,\rho)$为离散的度量空间.

可数补空间$(X,\mathscr{T})$当X是可数集时$\mathscr{T}=\mathscr{P}(X)$.故可定义$\rho$使$(X,\rho)$为离散的度量空间.

2.5 证明:每一个离散空间都是可度量化的.

证:若$(X,\mathscr{T})$是离散空间,即$\mathscr{T}=2^X$,对于X上离散度量ρ,由§2.1习题3(1)得X的每一子集都是度量空间(X,ρ)的开集,因此X的拓扑$\mathscr{T}$是由度量ρ诱导出来的,即$(X,\mathscr{T})$是可度量化的空间.

2.6 设(X,ρ)是一个度量空间.证明:作为拓扑空间X是一个离散空间,当且仅当ρ是一个离散度量.

证:(充分性) (X,ρ)是离散的度量空间,X的每一个子集均为开集,于是$\mathscr{T}_\rho=\mathscr{P}(X)$,即$(X,$

$\mathscr{T}_\rho$) 是一个离散空间.

(必要性) $(X,\mathscr{T}_\rho)$ 是离散空间,则 $\mathscr{T}_\rho = \mathscr{P}(X)$. 所以$\{x\}$ 是开集,由(X,ρ) 中开集的定义,存在 $\varepsilon_x > 0$,使 $B(x,\varepsilon_x)\{x\}$,对任何 $y \in X, y \neq x$ 有 $y \notin \{x\}$,显然 $y \notin B(x,\varepsilon_x)$. 有 $\rho(x,y) \geqslant \varepsilon_x$,取 $0 < \delta_x < \varepsilon_x$,对任何 $y \in X, y \neq x \rho(x,y) > \delta_x$ 成立. 由离散度量定义得 ρ 是一个离散度量.

2.7 设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是集合 X 的两个拓扑. 证明:$\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ 也是 X 的拓扑. 举例说明 $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ 可以不是 X 的拓扑.

证:若 $\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$ 都是 X 的拓扑,由于 $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$,所以 $\varnothing, X \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$;任意 $A,B \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$,即 $A,B \in \mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$,所以 $A \cap B \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$,任意 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$,即 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$,则 $\cup_{A\in\mathscr{T}} A \in \mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$,所以 $\cup_{A\in\mathscr{T}} A \in \mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$,因此 $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ 是 X 的拓扑.

例:设 $X = \{a,b,c\}$,$\mathscr{T}_1 = \{\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$,$\mathscr{T}_2 = \{\{b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$,易见 $\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$ 都是 X 的拓扑,但 $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2 = \{\{a\},\{b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$,而 $\{a\},\{b\} \in \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$, $\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\} \notin \mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$,因此 $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ 不是 X 的拓扑.

2.8 设$\{\mathscr{T}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是由集合 X 的一些拓扑构成的一个集族,其中指标集 Γ 非空. 证明:$\cap_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{T}_\gamma$ 是 X 的一个拓扑.

证:仿习题2.7可证.

2.9 设$(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,其中 ∞ 是任何一个不属于 X 的元素. 令 $X^* = X \cup \{\infty\}$,$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \{X^*\}$. 证明$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是一个拓扑空间.

证:显然 $\varnothing, X^* \in \mathscr{T}^*$;任意 $A,B \in \mathscr{T}^*$,若 A,B 中有一个为 X^*,显然 $A \cap B \in \mathscr{T}^*$;若 $A,B \in \mathscr{T}$,则 $A \cap B \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$,故总有 $A \cap B \in \mathscr{T}^*$;任意 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$,若 $X^* \in \mathscr{T}_1$,则 $\cup_{A\in\mathscr{T}_1} A = X^* \in \mathscr{T}^*$;若 $X^* \notin \mathscr{T}_1$,即 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$,也有 $\cup_{A\in\mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$,故总有 $\cup_{A\in\mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}^*$,所以$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为拓扑空间.

2.10 证明:

(1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射;

(2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射.

证:(1) 设 $f: X \to Y$ 为从拓扑空间 X 到平庸空间 Y 的映射,因为 $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$,$f^{-1}(Y) = X$,而 Y 为平庸空间,所以 Y 中任一开集的原象都是 X 的开集,即 f 为连续映射.

(2) 设 $f: X \to Y$ 为从离散空间 X 到任一拓扑空间 Y 的映射,对 Y 中每开集 U,因为 X 为离散空间,所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开集,即 f 是连续映射.

2.11 举例说明:拓扑空间之间的连续的一一映射的逆映射可以不是连续的. 如果要求所涉及的拓扑空间都是可度量化的,你还能举出这样的例子吗?

例:设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\boldsymbol{i}_X$ 是从离散拓扑空间$(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 到平庸拓扑空间$(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 的恒同映射,显然 $\boldsymbol{i}_X$ 是满的一一连续映射,但对 $\mathbf{R}$ 中任非空真子集 $A \in \mathscr{T}$,$(\boldsymbol{i}_X{}^{-1})^{-1}(A) = \boldsymbol{i}_X(A) = A \notin \mathscr{T}$,即 $\boldsymbol{i}_X{}^{-1}$ 不连续.

2.12 设 X 和 Y 是两个同胚的拓扑空间. 证明:如果 X 是可度量化的,则 Y 也是可度量化的.

证:设 $\mathscr{T}_X$ 和 $\mathscr{T}_Y$ 分别是 X 和 Y 的两个拓扑,ρ_X 是 X 的一个度量,则 $\mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{\rho_X}$. 又设 f 是 X 和 Y 的一个同胚映射,对一切 $a,b \in Y$,令

$$\rho_Y(a,b) = \rho_X(f^{-1}(a), f^{-1}(b))$$

可以证明 f 是$(X,\mathscr{T}_{\rho_X})$ 到$(Y,\mathscr{T}_{\rho_Y})$ 同胚映射.

任取 $U \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_X = \mathscr{T}_{\rho_X} \Rightarrow U = f(f^{-1}(U)) \in \mathscr{T}_{\rho_Y}$.

任取 $U \in \mathscr{T}_{\rho_Y} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T}_{\rho_X} = \mathscr{T}_X \Rightarrow U = f(f^{-1}(U)) \in \mathscr{T}_Y$.

故 $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_{\rho_Y}$.

§2.4　导集，闭集，闭包

4.1　求集合的导集和闭包.

(1) 设 A 是有限补空间 X 中的一个无限子集. 求 A 的导集和闭包；

(2) 设 A 是可数补空间 X 中的一个不可数子集. 求 A 的导集和闭包；

(3) 求实数空间 $\mathbf{R}$ 中的全体有理数集 $\mathbf{Q}$ 的导集和闭包；

(4) 设 X^* 是 §2.2 习题 9 中定义的拓扑空间. 求单点集 $\{\infty\}$ 的导集和闭包.

解：(1)　对任意的 $x \in X, V \in \mathscr{U}_x$，都有 $V \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$. 否则当 $V \cap (A - \{x\}) = \varnothing$ 时，$A - \{x\} \subset V'$，所以 V' 为有限集，矛盾. 故 $\boldsymbol{d}(A) = \boldsymbol{c}(A) = X$.

(2)　对任意的 $x \in X, V \in \mathscr{U}_x$，都有 $V \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$. 否则当 $V \cap (A - \{x\}) = \varnothing$ 时，$A - \{x\} \subset V'$，所以 V' 为可数集，矛盾. 故 $\boldsymbol{d}(A) = \boldsymbol{c}(A) = X$.

(3)　$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q}) = \boldsymbol{c}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$.

(4)　对任意的 $x \in X, V \in \mathscr{U}_x$，都有 $V \cap (\{\infty\} - \{x\}) = \varnothing$. 对 $\infty \in X^*, V \in \mathscr{U}_x^*$，都有 $V \cap (\{\infty\} - \{\infty\}) = \varnothing$. 所以 $\boldsymbol{d}(\{\infty\}) = \varnothing$，$\overline{\{\infty\}} = \{\infty\}$.

4.2　设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$. 证明：

(1)　$x \in X$ 是集合 A 的凝聚点当且仅当 x 是集合 $A \sim \{x\}$ 的凝聚点；

(2)　如果 $\boldsymbol{d}(A) \subset B \subset A$，则 B 是一个闭集.

证：(1)　必要性：若 x 为 A 的聚点，任意 $U \in \mathscr{U}_x$，有 $U \cap (A \sim \{x\}) \neq \varnothing$，又 $A \sim \{x\} = (A \sim \{x\}) \sim \{x\}$，从而 $U \cap ((A \sim \{x\}) \sim \{x\}) \neq \varnothing$，即 x 为 $A \sim \{x\}$ 的聚点.

充分性显然.

(2)　因为 $\boldsymbol{d}(A) \subset B \subset A$，所以 $\boldsymbol{d}(B) \subset \boldsymbol{d}(A) \subset B$，即 $\boldsymbol{d}(B) \subset B$，故 B 为闭集.

4.3　证明：闭包运算定义中的 Kuratovski 公理等价于条件：对于任何 $A, B \subset X$，

$$A \cup \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(B)) = \boldsymbol{c}^*(A \cup B) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing),$$

证：若 Kuratovski 闭包公理成立，则对任意 $A, B \subset X$，$A \cup \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(B)) = \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(B) = \boldsymbol{c}^*(A \cup B) = \boldsymbol{c}^*(A \cup B) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing)$.

反之，任意 $A, B \subset X$，若 $A \cup \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(B)) = \boldsymbol{c}^*(A \cup B) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing)$ 成立，则令 $A = B = \varnothing$，有 $\varnothing \cup \boldsymbol{c}^*(\varnothing) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(\varnothing)) = \boldsymbol{c}^*(\varnothing) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing)$，即 $\boldsymbol{c}^*(\varnothing) = \varnothing$.

令 $A = B$，有 $A \cup \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(A)) = \boldsymbol{c}^*(A) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing) = \boldsymbol{c}^*(A)$，即 $A \subset \boldsymbol{c}^*(A)$，并且 $\boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(A)) \subset \boldsymbol{c}^*(A)$，由前者，$\boldsymbol{c}^*(A) \subset \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(A))$，所以 $\boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(A)) = \boldsymbol{c}^*(A)$.

由以上结果有，$\boldsymbol{c}^*(A \cup B) = \boldsymbol{c}^*(A \cup B) \sim \boldsymbol{c}^*(\varnothing) = A \cup \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(\boldsymbol{c}^*(B)) = \boldsymbol{c}^*(A) \cup \boldsymbol{c}^*(B)$，

故 Kuratovski 闭包公理成立.

4.4　设 X 为拓扑空间，$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为 X 的任意子集族，A, B 为 X 的任意子集，证明：

(1) $\cup_{\alpha \in \Gamma} \boldsymbol{c}(A_\alpha) \subset \boldsymbol{c}(\cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$.

(2) $\cap_{\alpha \in \Gamma} \boldsymbol{c}(A_\alpha) \supset \boldsymbol{c}(\cap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$.

(3) $\boldsymbol{c}(A) \sim \boldsymbol{c}(B) \subset \boldsymbol{c}(A \sim B)$.

证：(1) 因为任意 $\alpha \in \Gamma, A_\alpha \subset \cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$，从而 $\boldsymbol{c}(A_\alpha) \subset \boldsymbol{c}(\cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$，因此，$\cup_{\alpha \in \Gamma} \boldsymbol{c}(A_\alpha) \subset \boldsymbol{c}(\cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$.

(2) 因为任意 $\alpha \in \Gamma, A_\alpha \supset \cap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$，从而 $\boldsymbol{c}(A_\alpha) \supset \boldsymbol{c}(\cap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$，因此，$\cap_{\alpha \in \Gamma} \boldsymbol{c}(A_\alpha) \supset \boldsymbol{c}(\cap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha)$.

(3) 因为 $A=(A\sim B)\cup(A\cap B)$,所以 $\boldsymbol{c}(A)\sim\boldsymbol{c}(B)=\boldsymbol{c}((A\sim B)\cup(A\cap B))\sim\boldsymbol{c}(B)$ $=[\boldsymbol{c}(A\sim B)\cup\boldsymbol{c}(A\cap B)]\sim\boldsymbol{c}(B)\subset\boldsymbol{c}(A\sim B)$.

故 $\boldsymbol{c}(A)\sim\boldsymbol{c}(B)\subset\boldsymbol{c}(A\sim B)$.

4.5　设 X 为非空集合,$\mathscr{F}$ 为 X 的子集族并且满足定理 2.4.3 中的条件(1),(2)和(3).证明 X 有唯一的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 使得 $\mathscr{F}$ 恰为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的全体闭集构成的集族.

证:记 $\mathscr{T}=\{\sim F:F\in\mathscr{F}\}$.

因为 $\varnothing,X\in\mathscr{F}$,所以 $X,\varnothing\in\mathscr{T}$.

任意 $\sim F_1,\sim F_2\in\mathscr{T}$,即 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$,则 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$.所以 $(\sim F_1)\cap(\sim F_2)=\sim(F_1\cup F_2)$ $\in\mathscr{T}$.

任意 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,记 $\mathscr{F}_1=\{F:\sim F\in\mathscr{T}_1\}\subset\mathscr{F}$,则 $\cap_{F\in\mathscr{F}_1}F\in\mathscr{F}$,所以 $\cup_{\sim F\in\mathscr{T}_1}(\sim F)=\sim(\cap_{F\in\mathscr{F}_1}F)$ $\in\mathscr{T}$.

因此,$\mathscr{T}$ 为 X 的拓扑,并且由 $\mathscr{T}$ 的构造知,$\mathscr{F}$ 恰为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的全体闭集族.

若 $\mathcal{T}$ 也是 X 的拓扑,且使 $\mathscr{F}$ 恰为拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的全体闭集族,设 $U\in\mathscr{T}$,即 $\sim U$ 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集,则 $\sim U\in\mathscr{F}$,从而 $\sim U$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的闭集,即 $U\in\mathcal{T}$,所以 $\mathscr{T}\subset\mathcal{T}$,同理可证 $\mathcal{T}\subset\mathscr{T}$,所以 $\mathcal{T}=\mathscr{T}$.

4.6*　证明:拓扑空间中的每一子集的导集为闭集当且仅当此空间中的每一单点集的导集为闭集.(杨忠道定理)

证:必要性显然,下证充分性.

设拓扑空间 X 的每一单点集的导集为闭集,任意 $A\subset X$,设 $x\in\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}(A))$,对 x 的任意开邻域 U, $U\cap(\boldsymbol{d}(A)\sim\{x\})\neq\varnothing$,因 $\boldsymbol{d}(\{x\})$ 是闭集,且 $x\notin\boldsymbol{d}(\{x\})$,令 $V=U\sim\boldsymbol{d}(\{x\})$,$V$ 是 x 的开邻域,从而有

$$y\in V\cap(\boldsymbol{d}(A)\sim\{x\}).$$

由 $y\in V,y\notin\boldsymbol{d}(\{x\})$,且 $y\neq x$,于是存在 $W\in\mathscr{U}_y$,使得 $x\notin W$,因 $V\in\mathscr{U}_y$,令 $k=W\cap V$, $k\in\mathscr{U}_y$,由 $y\in\boldsymbol{d}(A)$,存在 $z\in k\cap(A\sim\{y\})\neq\varnothing$

由 $z\in K\subset W,z\neq x$ 因此 $z\in U\cap(A\sim\{x\})$ 故 $U\cap(A\sim\{x\})\neq\varnothing$,即 $x\in\boldsymbol{d}(A)$,所以 $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{d}(A))\subset\boldsymbol{d}(A)$,$\boldsymbol{d}(A)$ 为闭集.

4.7*　设 X 是一个拓扑空间;$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 中的一个子集族.证明:如果对于每一个 $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{\Gamma}$,集合 A_γ 的导集是闭集,则集合 $\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的导集是闭集.(提示:请充分运用定理 2.4.1 中的结论.)

证:要证 $d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$ 是闭集,即

$$dd(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\qquad(*)$$

因对任意的 $\boldsymbol{\gamma}\in\boldsymbol{\Gamma}$,$A_\gamma\subset\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$,所以 $dA_\gamma\subset d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$,于是 $\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma)\subset d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$.又因 $ddA_\gamma\subset dA_\gamma\subset d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$,所以 $\cup_{\gamma\in\Gamma}d(d(A_\gamma))\subset d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$.要使 $(*)$ 成立,只须 $dd(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\cup_{\gamma\in\Gamma}ddA_\gamma$ 或 $dd(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma)$,即对任意的 $x\in dd(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$,有 $x\in\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma)$.

证明:对任意的 $x\in dd(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$,任取 $U\in\mathscr{U}_x$,有 $U\cap(d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)-\{x\})\neq\varnothing$.任取 $y\in U\cap(d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)-\{x\})$,有 $y\in d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$,$y\neq x$,存在 $V\in\mathscr{U}_y$,且 $V\subset U$,有 $V\cap(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma-\{y\})\neq\varnothing$,存在 r 使 $V\cap(A_\gamma-\{y\})\neq\varnothing$,由 $V\cap(A_\gamma-\{y\})\subset U\cap(A_\gamma-\{x\})\neq\varnothing$,所以 $x\in d(A_\gamma)$,$x\in\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma)$.综上,$\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的导集为闭集.证完.

注:若 Γ 为有限集,则有

$$d(d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma))=d(\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma))=\cup_{\gamma\in\Gamma}d(d(A_\gamma))=\cup_{\gamma\in\Gamma}d(A_\gamma)=d(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$$

4.8　证明度量空间的每一单点集都是闭集,并且每一子集的导集都是闭集.

证:设(X,ρ)是度量空间. $\{x\}$是(X,ρ)的单点集,对任意$y \in \sim \{x\}$, $y \neq x$. 记$\varepsilon = \rho(x,y) > 0$,则$B(y,\frac{\varepsilon}{2}) \subset \sim \{x\}$,即$\sim \{x\}$是开集,从而$\{x\}$是闭集.

下证(X,ρ)的每一子集的导集都是闭集,设$\mathscr{T}_\rho$是由X的度量ρ诱导出来的拓扑,由前一结论可知,作为拓扑空间$(X,\mathscr{T}_\rho)$的每一单点集都是闭集,即若$\{x\}$是$(X,\mathscr{T}_\rho)$的单点集,则$\boldsymbol{d}(\{x\}) \subset \{x\}$,又$x \notin \boldsymbol{d}(\{x\})$所以$\boldsymbol{d}(\{x\}) = \varnothing$,因此$(X,\mathscr{T}_\rho)$中每一单点集的导集都是闭集.

由杨道忠定理$(X,\mathscr{T}_\rho)$中每一子集的导集都是闭集,所以(X,ρ)中每一子集的导集都是闭集.

§2.5　内部,边界

5.1　就 §2.4 习题 1 的各款求取指定集合的内部和边界.

解:

(1)　(i)　A'为有限,$\boldsymbol{i}(A) = A^{\prime-\prime} = A$.

(ii)　A'为无限,$\boldsymbol{i}(A) = A^{\prime-\prime} = (A^{\prime-})' = X' = \varnothing$.

$$\boldsymbol{i}(A) = \begin{cases} \varnothing & A' \text{为无限集} \\ A & A' \text{为有限集} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}(A) = A^{\prime-} \cap A^{-} = \begin{cases} A' & A' \text{为有限集} \\ X & A' \text{为无限集} \end{cases}.$$

(2)　$$\boldsymbol{i}(A) = \begin{cases} \varnothing & A' \text{为不可数集} \\ A & A' \text{为可数集} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{b}(A) = \begin{cases} A' & A' \text{为可数集} \\ X & A' \text{为不可数集} \end{cases}.$$

(3)　$\boldsymbol{i}(\mathbf{Q}) = \varnothing$　　$\boldsymbol{b}(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$

(4)　$\boldsymbol{i}(\{\infty\}) = \{\infty\}^{\prime-\prime} = X' = \varnothing$, $\boldsymbol{b}(\{\infty\}) = \{\infty\}^{-} \cap \{\infty\}^{\prime-} = \{\infty\}$.

5.2　设X是一个拓扑空间,$A,B \subset X$. 证明:

(1)$\boldsymbol{c}(A) = A \cup \boldsymbol{b}(A)$, $\boldsymbol{i}(A) = A \sim \boldsymbol{b}(A)$.

(2)$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{i}(A)) \subset \boldsymbol{b}(A)$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}(A)) = \subset \boldsymbol{b}(A)$.

(3)$\boldsymbol{b}(A \cup B) \subset \boldsymbol{b}(A) \cup \boldsymbol{b}(B)$, $\boldsymbol{i}(A \cup B) \supset \boldsymbol{i}(A) \cup \boldsymbol{i}(B)$.

(4)$\boldsymbol{b}(A) = \varnothing$当且仅当$A$为既开又闭的集合.

(5)$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}(A)) \subset \boldsymbol{b}(A)$.

(6)$A \cap B \cap \boldsymbol{b}(A \cap B) = A \cap B \cap (\boldsymbol{b}(A) \cup \boldsymbol{b}(B))$.

证:(1)$A \cup \boldsymbol{b}(A) = A \cup \boldsymbol{c}(A) \cap c(\sim A)) = \boldsymbol{c}(A) \cap (A \cup c(\sim A)) = \boldsymbol{c}(A) \cap X = \boldsymbol{c}(A)$.

$A \sim \boldsymbol{b}(A) = A \sim (\boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\sim A)) = A \cap ((\sim \boldsymbol{c}(A)) \cup (\sim \boldsymbol{c}(\sim A))) = (A \cap (\sim \boldsymbol{c}(A)) \cup (A \cap \boldsymbol{i}(A))) = \varnothing \cup \boldsymbol{i}(A) = \boldsymbol{i}(A)$.

(2)$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{i}(A)) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{i}(A)) \cap \boldsymbol{c}(\sim \boldsymbol{i}(A)) \subset \boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}(\sim A)) = \boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\sim A) = \boldsymbol{b}(A)$.

$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}(A)) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{c}(A)) \cap \boldsymbol{c}(\sim \boldsymbol{c}(A)) \subset \boldsymbol{c}(A) \cap (\sim A) = \boldsymbol{b}(A)$.

(3)$\boldsymbol{b}(A \cup B) = \boldsymbol{c}(A \cup B) \cap \boldsymbol{c}(\sim (A \cup B)) = (\boldsymbol{c}(A) \cup \boldsymbol{c}(B)) \cap \boldsymbol{c}(\sim (A \cup B)) = (\boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\sim (A \cup B))) \cup (\boldsymbol{c}(B) \cap \boldsymbol{c}(\sim (A \cup B))) \subset (\boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\sim A)) \cup (\boldsymbol{c}(B) \cap \boldsymbol{c}(\sim B)) = \boldsymbol{b}(A) \cup \boldsymbol{b}(B)$.

(4) 若$\boldsymbol{b}(A) = \varnothing$,由(1),$\boldsymbol{c}(A) = A \cup \boldsymbol{b}(A) = A$, $\boldsymbol{i}(A) = A \sim \boldsymbol{b}(A) = A$,所以,$A$是既开又闭

的集合.

反之,若 A 是既开又闭的集合,即 $\boldsymbol{c}(A)=A$,$\boldsymbol{c}(\sim A)=\sim A$,所以,$\boldsymbol{b}(A)=\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(\sim A)=\varnothing$.

(5) 因为 $\boldsymbol{b}(A)=\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(\sim A)$ 为闭集,所以 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}(A))=\boldsymbol{b}(A)$,则 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}(A))=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}(A))\cap\boldsymbol{c}(\sim\boldsymbol{b}(A))\subset\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}(A))=\boldsymbol{b}(A)$.

(6)$A\cap B\cap\boldsymbol{b}(A\cap B)=A\cap B\cap(\boldsymbol{c}(A\cap B)\cap\boldsymbol{c}(\sim(A\cap B)))=A\cap B\cap(\boldsymbol{c}(\sim A)\cup(\sim B))=A\cap B\cap(\boldsymbol{c}(\sim A)\cup\boldsymbol{c}(\sim B))=(A\cap B\cap\boldsymbol{c}(\sim A))\cup(A\cap B\cap\boldsymbol{c}(\sim B))=(A\cap B\cap\boldsymbol{b}(A))\cup(A\cap B\cap\boldsymbol{b}(B))=A\cap B\cap(\boldsymbol{b}(A)\cup\boldsymbol{b}(B))$.

5.3　仿照闭包运算的定义自行定义"内部运算"(参照定理 2.5.3). 并自行叙述和证明与定理 2.4.8 相应的定理.

解:定义:设 X 为非空集合,映射 $i^*:2^X\to2^X$. 如果满足条件:对于 X 的任意子集 A,B,

$(1)^*$　$i^*(X)=X$　　　　$(2)^*$　$i^*(A)\subset A$

$(3)^*$　$i^*(A\cap B)=i^*(A)\cap i^*(B)$　　　　$(4)^*$　$i^*(i^*(A))=A$

则称为集合 X 的内部运算.

定理:若 i^* 为非空集合 X 的内部运算,则存在唯一的拓扑 $\mathcal{T}$,使得对于每一 $A\subset X$,$i^*(A)=i(A)$.

证:记 $\mathcal{T}=\{A\subset X:i^*(A)=A\}$,首先验证 $\mathcal{T}$ 为 X 的拓扑,由于$(1)^*$,$X\in\mathcal{T}$;由于$(2)^*$,$i^*(\varnothing)=\varnothing$,所以 $\varnothing\in\mathcal{T}$;若 $A,B\in\mathcal{T}$,由$(3)^*$ 知,$i^*(A\cap B)=i^*(A)\cap i^*(B)=A\cap B$,所以 $A\cap B\in\mathcal{T}$;对于 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$,即任意 $A\in\mathcal{T}_1$,$i^*(A)=A$,由$(2)^*$ 有 $i^*(\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A)\subset\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A=\cup_{A\in\mathcal{T}_1}i^*(A)$,由$(3)^*$ 知,若 $A\subset B$,即 $A=A\cap B$,则 $i^*(A)=i^*(A)\cap i^*(B)\subset i^*(B)$. 因此,对任意 $A\in\mathcal{T}_1$,$i^*(A)\subset i^*(\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A)$,故 $\cup_{A\in\mathcal{T}_1}i^*(A)\subset i^*(\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A)$. 因此 $\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A=i^*(\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A)$,即 $\cup_{A\in\mathcal{T}_1}A\in\mathcal{T}_1$. 所以 $\mathcal{T}$ 是 X 的拓扑,$(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间.

下面证明对于每一 $A\subset X$,$i^*(A)=i(A)$,因为 $i(A)$ 为开集,则 $i(A)\in\mathcal{T}$,即 $i^*(i(A))=i(A)$,又 $i(A)\subset A$,$i(A)=i^*(i(A))\subset i^*(A)$;另一方面,由$(4)^*$ 知,$i^*(i^*(A))=i^*(A)$,因此 $i^*(A)\in\mathcal{T}$,从而 $i(i^*(A))=i^*(A)$,由$(2)^*$ 知,$i^*(A)\subset A$,$i^*(A)=i(i^*(A))\subset i(A)$,所以 $i^*(A)=i(A)$.

最后证明满足定理条件的拓扑是唯一的,设 X 有拓扑 $\mathscr{T}$ 满足定理条件,即对每一 $A\subset X$,$i^*(A)=i'(A)$,(其中 $i'(A)$ 表示 A 在拓扑空间$(X,\mathscr{T})$ 的内部),若 $A\in\mathcal{T}$,则 $A=i(A)=i^*(A)=i'(A)$,因此 $A\in\mathscr{T}$,即 $\mathcal{T}\subset\mathscr{T}$,同理可证 $\mathscr{T}\subset\mathcal{T}$,于是 $\mathscr{T}=\mathcal{T}$.

5.4*　证明对于拓扑空间 X 的任一子集 A,经过取补集,闭包,内部三种运算最多只能产生 14 个集合. 并在实数空间 **R** 中选取一适当的集合,使它经过上述三种运算恰能产生 14 个不同的集合.

证:将 A 的补集,闭包,内部分别改记为 A^c,$A^{\sim}$,A^i,由于 $A^i=A^{\sim c\sim}$,即 A 取内部运算可以通过取补集及闭包得到,因此仅需考虑 A 取补集,闭包所生成的集合. 又因为 $A^{cc}=A^c$,$A^{\sim\sim}=A$. 因此仅需考虑 A 交替取补集及闭包运算的情形.

首先证明 $A^{icic}=A^{ic}$　　　　　　　　　　(*)

事实上,由于 $A^{ici}\subset A^{ic}$,所以 $A^{icic}\subset A^{icc}=A^{ic}$,又 $A^i\subset A^{ic}$,因此 $A^i=A^{ii}\subset A^{ici}$,所以 $A^{ic}\subset A^{icic}$,故 $A^{icic}=A^{ic}$.

由等式(*)及 $A^i=A^{\sim c\sim}$,得

(1)$A^{\sim c\sim c\sim c\sim c}=A^{\sim c\sim c}$

(2)$A^{c\sim c\sim c\sim c}=A^{c\sim c}$

如果 A 先取补集的运算,由结论(1) 知至多可以得到 7 个不同的集合.

$A^{\sim}, A^{\sim c}, A^{\sim c\sim}, A^{\sim c\sim c}, A^{\sim c\sim c\sim}, A^{\sim c\sim c\sim c}, A^{\sim c\sim c\sim c\sim}$

如果 A 先取闭包运算,由结论(2) 知至多得到 6 个不同的集合

$A^{c}, A^{c\sim}, A^{c\sim c}, A^{c\sim c\sim}, A^{c\sim c\sim c}, A^{c\sim c\sim c\sim}$

综合上述13个集合,连同A一起,至多有14个不同集合,因此,A经过取补集,闭包,内部三种运算,最多只能产生14个不同集合.

例:令 $\mathbf{Q}$ 为有理数集,$\mathbf{P}$ 为无理数集.

$A = ((0,1) - \{1/n\}) \cup ([1,2] \cap \mathbf{Q}) \cup \{2 + n/(n+1)\} \cup ((4,5] \cap \mathbf{Q})$

则 $A^{\sim} = (-\infty,0] \cup \{1/n\} \cup ((1,2) \cap \mathbf{P}) \cup ([2,3] - \{2+n/(n+1)\}) \cup (3,4] \cup ((4,5] \cap \mathbf{P}) \cup (5,+\infty)$

$A^{\sim c} = (-\infty,0] \cup \{1/n\} \cup [1,+\infty)$

$A^{\sim c\sim} = (0,1) \sim \{1/n\}$

$A^{\sim c\sim c} = [0,1]$

$A^{\sim c\sim c\sim} = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$

$A^{\sim c\sim c\sim c} = (-\infty,0] \cup [1,+\infty)$

$A^{\sim c\sim c\sim c\sim} = (0,1)$

$A^{c} = [0,2] \cup \{2+n/(n+1)\} \cup \{3\} \cup [4,5]$

$A^{c\sim} = (-\infty,0) \cup ([2,3) - \{2+n/(n+1)\}) \cup (3,4) \cup (5,+\infty)$

$A^{c\sim c} = (-\infty,0] \cup [2,4] \cup [5,+\infty)$

$A^{c\sim c\sim} = (0,2) \cup (4,5)$

$A^{c\sim c\sim c} = [0,2] \cup [4,5]$

$A^{c\sim c\sim c\sim} = (-\infty,0) \cup (2,4) \cup (5,+\infty)$

恰为 A 经补集,闭包,内部的运算产生的 14 个不同的集合.

5.5　设 A 为度量空间(X,ρ) 的子集,证明:

(1)$x \in \boldsymbol{i}(A)$ 当且仅当$\rho(x, \sim A) > 0$.

(2)$x \in \boldsymbol{b}(A)$ 当且仅当$\rho(x,A) = 0$ 并且$\rho(x, \sim A) = 0$.

证:(1)$x \in \boldsymbol{i}(A) = \sim(\boldsymbol{c}(\sim A))$ 当且仅当 $x \notin \boldsymbol{c}(\sim A)$ 当且仅当$\rho(x, \sim A) > 0$.

(2)$x \in \boldsymbol{b}(A) = \boldsymbol{c}(A) \cap \boldsymbol{c}(\sim A)$ 当且仅当$x \in \boldsymbol{c}(A)$ 且 $x \in \boldsymbol{c}(\sim A)$ 当且仅当$\rho(x,A) = 0$ 且 $\rho(x, \sim A) = 0$.

5.6　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f: X \to Y$. 证明以下两个条件等价:

(1)　f 连续;

(2)　对于 Y 的任一子集 B,B 的内部的原象包含于 B 的原象的内部,即:

$$f^{-1}(i(B)) \subset i(f^{-1}(B)).$$

证:对于任意 $B \subset Y$, $\sim B \subset Y$,由定理2.4.10 的结论(4) 和定理2.5.6 结论(2),有f连续当且仅当$f^{-1}(\boldsymbol{c}(\sim B)) \supset \boldsymbol{c}(f^{-1}(\sim B))$ 当且仅当$f^{-1}(i(B)) = f^{-1}(\sim(\boldsymbol{c}(\sim B))) = \sim f^{-1}(\boldsymbol{c}(\sim B)) \subset \sim \boldsymbol{c}(f^{-1}(\sim B)) = \sim \boldsymbol{c}(\sim f^{-1}(B)) = i(f^{-1}(B))$. 证毕.

5.7*　设 X, Y 是两个拓扑空间. 又设映射$f: X \to Y$满足条件:对于 X 的任何一个子集 A,A 的象的内部包含于 A 的内部的象,即:$i(f(A)) \subset f(i(A))$.

(1) 证明:如果f是一个满射,则f连续;

(2) 举例说明当f不是满射时f可以不是连续映射.

证:(1)　对于任意 $x \in X, f(x) \in Y$,对 $f(x)$ 的任一邻域 U,存在一个开集 $V \in \mathscr{T}_Y$,使得 $f(x) \in V \subset U$,显然 $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U) \subset X$,由题意 $i(f(f^{-1}(V))) \subset f(i(f^{-1}(V)))$,

下证 $f(f^{-1}(V)) = V$.

对任意的 $y \in V$,由 f 满射,存在 $z \in X$,使得 $f(z) = y \in V$,即 $z \in f^{-1}(V)$,于是 $y = f(z) \in f(f^{-1}(V))$,此时有 $V \subset f(f^{-1}(V))$. 对任意的 $y \in f(f^{-1}(V))$,即 $f^{-1}(y) \in f^{-1}(V)$,于是 $y \in V$,此时有 $f(f^{-1}(V)) \subset V$,所以 $f(f^{-1}(V)) = V$.

因 V 为 Y 中的开集,$i(V) = V = i(f(f^{-1}(V))) \subset f(i(f^{-1}(V)))$,所以 $f^{-1}(V) \subset i(f^{-1}(V)) \subset f^{-1}(V)$,故 $f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$. 由此 $f^{-1}(U)$ 是 x 在 X 中的邻域. f 在 x 处连续,由 x 的任意性得 f 连续.

(2)　$f:[0,2] \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

对任意的 $A \subset [0,2]$,若 $A \subset [0,1)$, $i(f(A)) = i(\{0\}) = \varnothing \subset f(i(A))$

若 $A \subset [1,2])$, $i(f(A)) = i(\{1\}) = \varnothing \subset f(i(A))$

若 $A \cap [0,1] \neq \varnothing, A \cap [1,2] \neq \varnothing$, $i(f(A)) = i(\{1,0\}) = \varnothing \subset f(i(A))$

且 f 不是满射,显然 f 不连续. $f^{-1}((3/2,1/2)) = [1,2]$ 不是 $[0,2]$ 的开集.

§2.6　基与子基

6.1　设 X 是一个集合. 则 X 的子集族 $\mathscr{B}, \widetilde{\mathscr{B}}$ 是 X 的同一拓扑的两个基的充分条件是 $\mathscr{B}$ 和 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 满足条件:

(1) 若 $x \in B \in \mathscr{B}$,则存在 $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathscr{B}}$ 使得 $x \in \widetilde{B} \subset B$;

(2) 若 $x \in \widetilde{B} \in \widetilde{\mathscr{B}}$,则存在 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $x \in B \subset \widetilde{B}$.

证:必要性:设 $\mathscr{B}, \widetilde{\mathscr{B}}$ 是 X 的同一拓扑 $\mathscr{T}$ 的两个基,任意 $x \in B \in \mathscr{B}$,即 $B \in \mathscr{U}_x$,因为 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 $\mathscr{T}$ 的基,由定理 2.6.2 存在 $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathscr{B}}$,使 $x \in \widetilde{B} \subset B$,条件(1) 成立.

同理可证条件(2) 成立.

充分性:设 $\mathscr{B}, \widetilde{\mathscr{B}}$ 分别是 X 的拓扑 $\mathscr{T}, \widetilde{\mathscr{T}}$ 的基,并且条件(1),(2) 成立.

设 $x \in B \in \mathscr{B}$,由条件(1) 存在 $\widetilde{B}_x \in \widetilde{\mathscr{B}}$,使 $x \in \widetilde{B}_x \subset B$,从而 $B = \cup_{x \in B}\{x\} \subset \cup_{x \in B}\widetilde{B}_x \subset B$,即 $B = \cup_{x \in B}\widetilde{B}_x$ 任意 $A \in \mathscr{T}$ 存在 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$. 使得 $A = \cup_{B \in \mathscr{B}_1} B = \cup_{B \in \mathscr{B}_1}(\cup_{x \in B}\widetilde{B}_x) = \cup_{x \in B, B \in \mathscr{B}_1}\widetilde{B}_x \in \widetilde{\mathscr{T}}$. 所以 $\mathscr{T} \subset \widetilde{\mathscr{T}}$. 由条件(2) 类似可证 $\mathscr{T} \supset \widetilde{\mathscr{T}}, \mathscr{T} = \widetilde{\mathscr{T}}$.

故 $\mathscr{B}, \widetilde{\mathscr{B}}$ 为同一拓扑的基.

6.2　证明欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的所有开矩形(即 $(a,b) \times (c,d)$,其中 $(a,b),(c,d)$ 为开区间) 构成 $\mathbf{R}^2$ 的基.

证:记 $\mathscr{B} = \{(a,b) \times (c,d): a,b,c,d \in \mathbf{R}, a < b, c < d\}$,则 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集族.

任意 $P = (x,y) \in \mathbf{R}^2$,任意 $U \in \mathscr{U}_P$,存在 $\varepsilon > 0$,使 $B(P,\varepsilon) \subset U$,取 $a = x - \varepsilon/2, b = x + \varepsilon/2, c = y - \varepsilon/2, d = y + \varepsilon/2$,则 $(a,b) \times (c,d) \subset B(P,\varepsilon) \subset U$,且 $(a,b) \times (c,d) \in \mathscr{B}$,由定理 2.6.2 知 $\mathscr{B}$ 构成 $\mathbf{R}^2$ 的基.

6.3　证明:实数集合 $\mathbf{R}$ 有一个拓扑以集族

$$\{[a, +\infty): a \in \mathbf{R}\} \cup \{(-\infty, b]: b \in \mathbf{R}\}$$
为它的一个子基,并说明这个拓扑的特点.

证:记 $\mathscr{S} = \{(-\infty, a]: a \in \mathbf{R}\} \cup \{[b, +\infty): b \in \mathbf{R}\}$. 因为 $\mathbf{R} \supset \cup_{S\in\mathscr{S}} S \supset (-\infty, a] \cup [a, +\infty) = \mathbf{R}$. 所以 $\mathbf{R} = \cup_{S\in\mathscr{S}} S$,由定理 2.6.4 知,存在 $\mathbf{R}$ 的唯一拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\mathscr{S}$ 为子基.

任意 $x \in \mathbf{R}$,因为 $(-\infty, x], [x, +\infty) \in \mathscr{S} \subset \mathscr{T}$,所以 $\{x\} = (-\infty, x] \cap [x, +\infty) \in \mathscr{T}$,即 $\mathbf{R}$ 的每一单点集皆为开集,因此 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{R}$ 的离散拓扑.

6.4 证明实数集合 $\mathbf{R}$ 有以集族
$$\{(a, +\infty): a \in \mathbf{R}\}$$
为基的拓扑 $\mathscr{T}$($\mathscr{T}$ 称为 $\mathbf{R}$ 的右手拓扑),并且

(1) 将 $\mathscr{T}$ 写出来.

(2) 设 $A \subset \mathbf{R}$,求 A 在拓扑空间 $(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 中的闭包.

证:记 $\mathscr{B} = \{(a, +\infty): a \in \mathbf{R}\}$,显然 $\mathbf{R} = \cup_{B\in\mathscr{B}} B$,设 $B_1 = (a, +\infty), B_2 = (b, +\infty) \in \mathscr{B}$,则
$$B_1 \cap B_2 = \begin{cases} (a, +\infty), & a \geqslant b \\ (b, +\infty), & a < b \end{cases}$$
所以 $B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$,由定理 2.6.3 知,$\mathbf{R}$ 有以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑.

(1) 显见 $\mathscr{T} = \mathscr{B} \cup \{\varnothing, \mathbf{R}\}$

(2) 设 $\mathscr{F} = \{(-\infty, b]: b \in \mathbf{R}\}$ 是 $(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 中的所有闭集构成的闭集族,任意 $A \subset \mathbf{R}$

$\boldsymbol{c}(A) = \cap_{F\in\mathscr{F}, F\supset A} F = \cap\{(-\infty, b]: A \subset (-\infty, b]\} = (-\infty, \sup A]$

6.5 设 $(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 为实数集合的下限拓扑空间(见例 2.6.1),证明:

(1) $\mathscr{B}$(见例 1)的每一成员都是既开又闭的集合.

(2) 若 $\tilde{\mathscr{T}}$ 为实数空间 $\mathbf{R}$ 的通常的拓扑,则 $\tilde{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$.

(3) $\mathscr{T}$ 有一子基为
$$\{(-\infty, a): a \in \mathbf{R}\} \cup \{[b, -\infty): b \in \mathbf{R}\}.$$

证:(1) 任意 $[a, b) \in \mathscr{B} \subset \mathscr{T}$,即 $[a, b)$ 是开集,又因为 $(-\infty, a) = \cup_{n\in\mathbf{N}}[a-n, a)$, $[b, +\infty) = \cup_{n\in\mathbf{N}}[b, b+n) \in \mathscr{T}$,所以 $(-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \sim[a, b) \in \mathscr{T}$,因此 $[a, b)$ 是闭集,故 $\mathscr{B}$ 的成员是既开又闭的集合.

(2) 对任意开区间 $(a, b) \subset \mathbf{R}$,因为 $(a, b) = \cup_{n\in\mathbf{N}}[a+1/n, b)$(其中 $n > \dfrac{1}{b-a}$),而 $[a+1/n, b) \in \mathscr{T}$,所以 $(a, b) \in \mathscr{T}$,任意 $A \in \tilde{\mathscr{T}}$,存在指标集 Γ,使 $A = \cup_{\alpha\in\Gamma}(a_\alpha, b_\alpha)$,所以 $A \in \mathscr{T}$,即 $\tilde{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$.

(3) 记 $\mathscr{S} = \{(-\infty, a): a \in \mathbf{R}\} \cup \{[b, -\infty): b \in \mathbf{R}\}$,则 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{T}$ 中的子族,因为
$$(-\infty, a) \cap [b, -\infty) = \begin{cases} [b, a) & a > b \\ \varnothing & a \leqslant b \end{cases}$$
$$(-\infty, c) \cap [b, a) = \begin{cases} [b, a) & c \geqslant a \\ [b, c) & b < c < a \\ \varnothing & c \leqslant b \end{cases}$$
$$[b, a) \cap [c, +\infty) = \begin{cases} [b, a) & c \leqslant b \\ [c, a) & b < c < a \\ \varnothing & c \geqslant a \end{cases}$$

所以$\mathscr{S}$中任意有限个成员的交是所有左闭右开区间构成的集族以及$\varnothing$,即是下限拓扑$\mathscr{T}$的基,因此$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的子基.

6.6 设Γ为一集合,对于每一$\alpha \in \Gamma$,$(X,\mathscr{T}_\alpha)$为拓扑空间. 记$\widetilde{\mathscr{T}}$为X的以$\cup_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{T}_\alpha$为子基的拓扑. 证明:若$\mathscr{T}$为$X$的拓扑,并且对于每一$\alpha \in \Gamma$,$\mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}$,则$\mathscr{T} \supset \widetilde{\mathscr{T}}$.

证:因为$\cup_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{T}_\alpha$为$\widetilde{\mathscr{T}}$的子基,所以

$$\mathscr{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : S_i \in \cup_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{T}_\alpha, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}$$

为$\widetilde{\mathscr{T}}$的基.

任意$B \in \mathscr{B}$,则存在$S_i \in \cup_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{T}_\alpha$,$i = 1,2,\cdots,n$,使$B = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$,由于对每一$\alpha \in \Gamma$,$\mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}$,所以$\cup_{\alpha\in\Gamma}\mathscr{T}_\alpha \subset \mathscr{T}$,即$S_i \subset \mathscr{T}$,$i = 1,2,\cdots,n$. 从而$B \in \mathscr{T}$.

因此$\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$,故$\widetilde{\mathscr{T}} \subset \mathscr{T}$.

6.7 设(X,ρ)为度量空间,并且X有一基只有有限个成员,证明X必为只含有有限个点的离散空间.

证:设$\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$为$(X,\rho)$的基,假定$X$无限取互异的$n+1$个点$x_1,\cdots,x_{n+1} \in X$,令$\delta = \min_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\{\rho(x_i,x_j)/2\}$,则$B(x_i,\delta) \in \mathscr{U}_{x_i}$,$i = 1,2,\cdots,n+1$,且

$$B(x_i,\delta) \cap B(x_j,\delta) = \varnothing, \qquad i \neq j$$

因为$\mathscr{B}$是X的基,故存在$B_i \in \mathscr{B}$,使$x_i \in B_i \subset B(x_i,\delta)$,$i = 1,2,\cdots,n+1$,从而$B_i \cap B_j = \varnothing$,$i \neq j$,因此$\mathscr{B}$至少有$n+1$个成员,矛盾.

故X是只含有限个点的度量空间,由习题1.2知X是离散空间.

§2.7 拓扑空间中的序列

7.1 证明离散的拓扑空间中的序列$\{x_i\}$收敛的充分必要条件是存在$N \in \mathbf{N}$使得当$i,j > N$时$x_i = x_j$.

证:充分性是显然的,下证必要性.

设离散的拓扑空间X中的序列$\{x_i\}$收敛于x,因$\{x\}$为x的开邻域,所以存在$N \in \mathbf{N}$,使得当$i > N$时,$x_i \in \{x\}$,即当$i > N$时,$x_i = x$,因此当$i,j > N$时,$x_j = x_i = x$.

7.2* 举例说明当X为可数集时,定理2.7.2和2.7.3的逆命题也不成立.

解:例1:取$X = \mathbf{Q}$,令

$$\mathscr{T}^* = \{U \subset \mathbf{Q}: \text{在具有通常拓扑的}\mathbf{R}\text{中},\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim U)\text{为有限集}\} \cup \{\varnothing\},$$

则$\mathscr{T}^*$是X的拓扑.

事实上,因为$\varnothing \in \mathscr{T}^*$,又$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim \mathbf{Q}) = \boldsymbol{d}(\varnothing) = \varnothing$,所以$\mathbf{Q} \in \mathscr{T}^*$,因此$\varnothing, X \in \mathscr{T}^*$.

任意$A,B \in \mathscr{T}^*$,若A,B有一为空集,则$A \cap B = \varnothing \in \mathscr{T}^*$. 若$A,B$皆不空,由$A,B \subset \mathbf{Q}$,$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim A)$,$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim B)$在$\mathbf{R}$中为有限集,则$A \cap B \subset \mathbf{Q}$,且$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim (A \cap B)) = \boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim A) \cup \boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim B)$在$\mathbf{R}$中有限,所以$A \cap B \in \mathscr{T}^*$.

任意$\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$,若$\cup_{U\in\mathscr{T}_1}U = \varnothing$,则$\cup_{U\in\mathscr{T}_1}U \in \mathscr{T}^*$. 若$\cup_{U\in\mathscr{T}_1}U \neq \varnothing$,则存在$U_0 \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^* \sim \{\varnothing\}$,即$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim U_0)$在$\mathbf{R}$中有限,从而$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim \cup_{U\in\mathscr{T}_1}U) = \boldsymbol{d}(\cap_{U\in\mathscr{T}_1}(\mathbf{Q} \sim U)) \subset \boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim U_0)$在$\mathbf{R}$中有限,所以$\cup_{U\in\mathscr{T}_1}U \in \mathscr{T}^*$.

因此,$\mathscr{T}^*$是X的拓扑,$(X,\mathscr{T}^*)$是拓扑空间.

设$x \in X$,V是x的任意开邻域,即$V \in \mathscr{T}^*$,则V为无限集(否则在$\mathbf{R}$中有$\boldsymbol{d}(\mathbf{Q} \sim V) = \mathbf{R}$为无

限集),故

$V \cap (X \sim \{x\}) \neq \varnothing$,即 $x \in \boldsymbol{d}(X)$.

证:$\{x_n\}$ 是 $X \sim \{x\}$ 中任一序列,令 $E = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. 若在 $\mathbf{R}$ 中 $\boldsymbol{d}(E) = \varnothing$,则 $F = (\mathbf{Q} \sim E) \in \mathscr{T}^*$,且 $x \in F$,但 $E \cap F = \varnothing$,故 $\{x_n\}$ 在 $(X,\mathscr{T}^*)$ 中不收敛于 x;若在 $\mathbf{R}$ 中有 $\tilde{x} \in \boldsymbol{d}(E)$,则在 $\mathbf{R}$ 中有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 $\tilde{x}$,令 $G = \{x_{n_i} : i \in \mathbf{N}\}$,则在 $\mathbf{R}$ 中 $\boldsymbol{d}(G)$ 为单点集,从而 $H = (\mathbf{Q} \sim G) \in \mathscr{T}^*$,且 $x \in H$,但 $G \cap H = \varnothing$,故 $\{x_n\}$ 在 $(X,\mathscr{T}^*)$ 中不收敛于 x.

因此,当 X 是可数集时,定理 2.7.2 之逆命题不成立.

例 2:取拓扑空间 $(X,\mathscr{T}^*)$ 如上,设 $\{x_n\}$ 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T}^*)$ 中任一序列,首先我们证明:

(*) 如果 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 $x \in X$,则存在 $N \in \mathbf{N}$,使得 $n > N$ 时,$x_n = x$.

事实上,若不然,对每一 $N \in \mathbf{N}$,总有 $n_0 > N$,使 $x_{n_0} \neq x$,记这样的点列为 $\{x_{n_k}\}$,则 $\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子序列.

一方面,据定理 7.4(2),$\{x_{n_k}\}$ 应收敛于 x,另方面,由于 $\{x_{n_k}\}$ 是 $X \sim \{x\}$ 中的序列,据例 1 的后半部分证明知 $\{x_{n_k}\}$ 不收敛于 x,矛盾.

现在考虑从拓扑空间 $(X,\mathscr{T}^*)$ 到实数空间 $\mathbf{R}$ 的子空间 $\mathbf{Q}$ 的恒同映射 $i: X \to \mathbf{Q}$,对于收敛于 x 的 $(x \in X)$ 序列 $\{x_n\}$ 由性质(*)必有 $\{i(x_n)\} = \{x_n\}$ 在 $\mathbf{Q}$ 中收敛于 x.

但是,对于 $\mathbf{R}$ 的开区间 I(它是实数空间 $\mathbf{R}$ 的开集),$I \cap \mathbf{Q}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的开集,但不是 X 中的开集,因此,映射 $i: X \to \mathbf{Q}$ 不是连续映射.

因此,当 X 是可数集时,定理 2.7.3 之逆命题不成立.

7.3　设 X 为度量空间. 证明:

(1) 若 X 中序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x,并且 $\{x_i : i \in \mathbf{N}\}$ 为有限集,则存在 $N \in \mathbf{N}$ 使得当 $i > N$ 时,$x_i = x$.

(2) X 中收敛序列有唯一的极限.

(3) 定理 2.7.2 和 2.7.3 的逆命题成立.

证:(1) 设 ρ 为度量空间 X 的度量,因为 $E = \{x_i : i \in \mathbf{N}\}$ 是有限集,令

$\varepsilon = \min\{\rho(x,x_i) : x_i \in E, x_i \neq x\} > 0$

由于 $\lim_i x_i = x$,所以存在 $N \in \mathbf{N}$,使得 $i > N$ 时,$x_i \in B(x,\varepsilon)$,即 $i > N$ 时,$x_i = x$.

(2) 设 $\{x_i\}$ 为 X 中收敛序列,x, y 为其极限,若 $x \neq y$,则 $\rho(x,y) > 0$,取 $0 < \varepsilon < \rho(x,y)$,存在 $N \in \mathbf{N}$,当 $i > N$ 时,$x_i \in B(x,\varepsilon/2) \cap B(y,\varepsilon/2)$,所以 $i > N$ 时,

$\rho(x,x_i) < \varepsilon/2, \rho(y,x_i) < \varepsilon/2$

从而 $\rho(x,y) < \rho(x,x_i) + \rho(y,x_i) < \varepsilon$　　　　矛盾.

因此,$x = y$,即 X 中收敛序列极限唯一.

(3) 先证定理 2.7.2 的逆命题.

设 $A \subset X$,x 为 A 的聚点,则对每一 $n \in \mathbf{N}$

$B(x,1/n) \cap (A \sim \{x\}) \neq \varnothing$

取 $x_n \in B(x,1/n) \cap (A \sim \{x\})$,$n = 1,2,\cdots$

则 $\{x_n\}$ 是 $A \sim \{x\}$ 中的序列,对任意 $U \in \mathscr{U}_x$,存在 $N \in \mathbf{N}$,当 $n \geqslant N$ 时,$B(x,1/n) \subset U$

即 $x_n \in U$,所以 $\lim_i x_i = x$

因此 $A \sim \{x\}$ 中有收收敛于 x 的序列.

再证定理 2.7.3 的逆命题.

设映射 $f:X \to Y$,对 $x \in X$,满足条件:

$(*)$"X 中序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x 蕴含着 Y 中序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 $f(x)$"

若 $f:X \to Y$ 在点 $x \in X$ 不连续,则存在 $B(f(x),\varepsilon) \subset Y$,使得对任一 $n \in \mathbf{N}$

$$f(B(x,1/n)) \not\subset B(f(x),\varepsilon)$$

因而存在 $x_n \in B(x,1/n)$,使 $f(x_n) \notin B(f(x),\varepsilon)$,即对每一 $n \in \mathbf{N}$

$\rho(f(x_n),f(x)) \geqslant \varepsilon$

但显然 $\{x_i\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列,由条件 $(*)$,$\{f(x_i)\}$ 应收敛于 $f(x)$,这与

$\rho(f(x_i),f(x)) \geqslant \varepsilon$

矛盾.

因此 $f:X \to Y$ 在点 $x \in X$ 处连续.

第 3 章　子空间,(有限)积空间,商空间

§3.1　子空间

1.1　证明:

(1) 实数空间 $\mathbf{R}$ 同胚于任何一个开区间;

(2) n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 同胚于其中的任何一个开方体,也同胚于其中的任何一个球形邻域.

证:(1) 作 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$,使 $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{2x-a-b}{2(b-a)}\pi$,$x\in(a,b)$,显见 f 是同胚,因此 (a,b) 同胚于 $\mathbf{R}$.

(2) 作 $f:(a,b)^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in(a,b)^n$

$$f(x)=\left(\operatorname{tg}\frac{2x_1-a-b}{2(b-a)}\pi,\operatorname{tg}\frac{2x_2-a-b}{2(b-a)}\pi,\cdots,\operatorname{tg}\frac{2x_n-a-b}{2(b-a)}\pi\right),$$

则 f 为同胚,因此 $(a,b)^n$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$.

任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in B(0,\varepsilon)$,则 x 可唯一地表成,

$$r(\cos\varphi_1,\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\cdots,\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_{n-1}),$$

令 $\omega(x)=(\cos\varphi_1,\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\cdots,\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_{n-1})$,即 $x=r\omega(x)$,作 $f:B(0,\varepsilon)\to\mathbf{R}^n$,使得 $x=r\omega(x)\in B(0,\varepsilon)$ 时,$f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{r}{2\varepsilon}\pi\omega(x)$ 则 f 为 $B(0,\varepsilon)$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的同胚映射,因此 $B(0,\varepsilon)$ 与 $\mathbf{R}^n$ 同胚,又 $B(x,\varepsilon)$ 与 $B(0,\varepsilon)$ 同胚,所以 $B(x,\varepsilon)$ 与 $\mathbf{R}^n$ 同胚.

1.2　如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开(闭)子集,则 Y 作为 X 的子空间时特别称为 X 的开(闭)子空间. 证明:

(1) 如果 Y 是拓扑空间 X 的开子空间,则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个开集当且仅当 A 是 X 的一个开集;

(2) 如果 Y 是拓扑空间 X 的闭子空间,则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个闭集当且仅当 A 是 X 的一个闭集.

证:(1) 设 Y 为 X 的开子空间,$A\subset X$,若 A 为 X 的开集,则 $A=A\cap Y$ 为 Y 的开集;反之,若 A 为 Y 的开集,则存在 X 的开集 B 使 $A=B\cap Y$,而 Y 为 X 的开集,所以 A 为 X 的开集.

(2) 同(1) 可类似证明.

1.3　设 Y 为拓扑空间 X 的一个子空间,$A\subset Y$. 证明:

(1)　$\mathrm{i}_X(A)=\mathrm{i}_Y(A)\cap\mathrm{i}_X(Y)$.

(2)　$\mathrm{b}_Y(A)\subset\mathrm{b}_X(A)\cap Y$. 并举例说明等式可以不成立.

证:(1)　$i_Y(A)\cap i_X(Y)=(\sim\boldsymbol{c}_Y(\sim A))\cap(\sim\boldsymbol{c}_X(\sim Y))=\sim(\boldsymbol{c}_Y(\sim(A)\cup\boldsymbol{c}_X(\sim Y))$ $=\sim((\boldsymbol{c}_X(\sim A)\cap Y)\cup\boldsymbol{c}_X(\sim Y))=\sim(((\boldsymbol{c}_X(\sim A)\cup\boldsymbol{c}_X(\sim Y))\cap(Y\cup\boldsymbol{c}_X(\sim Y)))=\sim$ $(\boldsymbol{c}_X(\sim A)\cup(\boldsymbol{c}_X(\sim Y))=\sim\boldsymbol{c}_X(\sim A)=i_X(A)$.

(2) $\boldsymbol{b}_Y(A)=\boldsymbol{c}_Y(A)\cap\boldsymbol{c}_Y(Y\sim A)=(\boldsymbol{c}_X(A)\cap Y)\cap(\boldsymbol{c}_X(Y\sim A\cap Y)\subset\boldsymbol{c}_X(A)\cap\boldsymbol{c}_X(\sim A)$ $\cap Y=\boldsymbol{b}_X(A)\cap Y$.

例:设 $X=\mathbf{R}$,$Y=[a,b]$,$(a<b)$,令 $A=Y$,则 $\boldsymbol{b}_Y(A)=\varnothing$,$\boldsymbol{b}_X(A)=\{a,b\}$,故 $\boldsymbol{b}_Y(A)\neq$ $\boldsymbol{b}_X(A)\cap Y$.

1.4　设 Y 为拓扑空间 X 的一个子空间,$y \in Y$. 证明:

(1) 如果 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基,则 $\mathscr{S}|Y$ 为 Y 的一个子基.

(2) 如果 $\mathscr{W}_y$ 是点 y 在 X 中的一个邻域子基,则 $\mathscr{W}_y|Y$ 是点 y 在 Y 中的一个邻域子基.

证:(1) 设 $\mathscr{S}$ 为 X 的子基,则

$$\mathscr{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : S_i \in \mathscr{S}, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}$$

为 X 的基,据定理 3.1.7

$$\begin{aligned}\mathscr{B}|Y &= \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap Y : S_i \in \mathscr{S}, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}\\ &= \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : S_i \in \mathscr{S}|Y, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}\end{aligned}$$

为 Y 的基. 所以 $\mathscr{S}|Y$ 为 Y 的子基.

(2) 设 $\mathscr{W}_y$ 为点 $y \in Y$ 在 X 中的一个邻域子基,则

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_y &= \{W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n \cap Y : W_i \in \mathscr{W}_y, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}\\ &= \{W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n : W_i \in \mathscr{S}_y|Y, i = 1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}\end{aligned}$$

为点 $y \in Y$ 在 Y 中的一个邻域基,所以 $\mathscr{W}_y|Y$ 为点 y 在 Y 中的一个邻域基.

1.5　设$(X,\mathscr{T})$ 和$(Y,\mathscr{T}_1)$ 是两个拓扑空间,并且 $Y \subset X$. 证明:

(1)　如果$(Y,\mathscr{T}_1)$ 是$(X,\mathscr{T})$ 的一个子空间,则内射 $i:Y \to X$ 是一个连续映射;

(2)　如果内射 $i:Y \to X$ 是一个连续映射,则 $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}|Y$.

因此我们说:相对的拓扑是使内射连续的最小的拓扑.

证:(1) 设 $U \in \mathscr{T}$,则 $i^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathscr{T}_1$,故 $i:Y \to X$ 为连续映射.

(2) 对任意 $V \in \mathscr{T}|Y$,存在 $U \in \mathscr{T}$,使 $V = U \cap Y$,因 $i:Y \to X$ 为连续映射,对 $U \in \mathscr{T}$,$i^{-1}(U) = U \cap Y = V \in \mathscr{T}_1$,因此 $\mathscr{T}|Y \subset \mathscr{T}_1$.

1.6　设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 证明:$f:X \to Y$ 是一个连续映射当且仅当 $f:X \to f(X)$ 是一个连续映射.

证:设 $f:X \to Y$ 为连续映射,因为 $f(X)$ 为 Y 的子空间. 设 U 为 $f(X)$ 的开集. 则存在 Y 的开集 B,使 $U = B \cap f(X)$.

$f^{-1}(U) = f^{-1}(B \cap f(X)) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(B)$

是 X 中的开集,所以 $f:X \to f(X)$ 为连续映射.

反之,设 $f:X \to f(X)$ 的连续映射,因为 $f(X)$ 为 Y 的子空间. 设 V 为 Y 的开集,则 $V \cap f(X)$ 为 $f(X)$ 的开集,而 $f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V)$ 为 X 中开集,所以 $f:X \to Y$ 为连续映射.

1.7　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,A 是 X 的一个子集. 证明:如果映射 $f:X \to Y$ 连续,则映射 $f|A:A \to Y$ 也连续.

证:若 $f:X \to Y$ 为映射,设 U 为 Y 的任一开集,由于

$$(f|A)^{-1}(U) = (f|A)^{-1}(U \cap f(A)) = f^{-1}(U \cap f(A)) = f^{-1}(U) \cap A$$

为 X 的子空间 A 中的开集,故 $f|A:A \to Y$ 为连续映射.

1.8　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,A 是 X 的一个子集. 证明:

(1) 如果映射 $f:X \to Y$ 是一个同胚,则映射 $f|A:A \to f(A)$ 也是一个同胚;

(2) 如果 X 可嵌入 Y,则 X 的任何一个子空间也可嵌入 Y.

证:(1) 因为 $f:X \to Y$ 为同胚,则 $f|A:A \to f(A)$ 是在上的一一映射. 据习题 1.6,1.7 结果映射 $f|A$ 连续,下证$(f|A)^{-1}:f(A) \to A$ 是连续映射.

设 V 为 A 中开集,即存在 X 中开集 U,使 $V = U \cap A$,则

$((f|A)^{-1})^{-1}(V) = (f|A)(V) = f(V) = f(U \cap A) = f(U) \cap f(A) = (f^{-1})^{-1}(U) \cap f(A)$

由于f^{1}为连续映射,因此$(f^{-1})^{-1}(U)$为Y中开集,从而$((f|A)^{-1})^{-1}(V)$为$f(A)$中开集.

故$f|A:A\to f(A)$为同胚.

(2) 设$f:X\to Y$是一个嵌入,则X的任何一个子空间A,$f|A:A\to Y$,由结论(1)知,$f|A$是A到$f|A(A)$的同胚,故A可嵌入Y.

1.9　在集合$\mathbf{R}^2$中给定一个子集族

$$\mathscr{S}=\{[a,b)\times[c,d)\mid a,b,c,d\in\mathbf{R},a<b,c<d\}$$

验证$\mathbf{R}^2$有唯一的拓扑$\mathscr{T}$以$\mathscr{S}$为它的一个子基.令

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x+y=1\}.$$

问A作为拓扑空间$(\mathbf{R}^2,\mathscr{T})$的一个子空间时有什么特点?(提示:证明拓扑空间$(A,\mathscr{T}|A)$是一个离散空间.)

解:验证过程略.设$(x,y)\in A,b>x,d>y$,取$V=[x,b)\times[y,b)\in\mathscr{S}\subset\mathscr{T}$,当$(\bar{x},\bar{y})\in A$,且$(\bar{x},\bar{y})\neq(x,y)$时,由$x+y=\bar{x}+\bar{y}=1$,得$\bar{x}-x=-(\bar{y}-y)\neq 0$,从而$\bar{x}>x$,,$\bar{y}<y$或$\bar{x}<x$,$\bar{y}>y$,故$(\bar{x},\bar{y})\,\overline{\in}\,V$,于是$V\cap A=\{(x,y))\}\in\mathscr{T}|A$,即$A$中每一单点集均为$(A,\mathscr{T}|A)$的开集,故$(A,\mathscr{T}|A)$是离散空间.

1.10　证明:如果X是一个只含可数个点的拓扑空间,则存在一个满的连续映射$f:\mathbf{Q}\to X$.其中$\mathbf{Q}$是由所有有理数构成的实数空间$\mathbf{R}$的子空间.

证:对每一$n\in\mathbf{Z}$,取定无理数$r_n\in(n,n+1)$,则

$\mathscr{A}=\{[r_n,r_{n+1}):n\in\mathbf{Z},r_n\in(n,n+1)\text{ 为无理数}\}$

为可数集族.

因为X为可数集,当X为无限集时,设$X=\{x_n:n\in\mathbf{Z}\}$,定义$f:\mathscr{A}\to X$使$f([r_n,r_{n+1}))=\{x_n\}$,$n\in\mathbf{Z}$,显然f为在上的映射,且$f^{-1}(\{x_n\})=[r_n,r_{n+1})$.

令$g=f|\mathbf{Q}:\mathbf{Q}\to X$,则$g$是在上的映射,对任一$x_n\in X$,$g^{-1}(\{x_n\})=(f|\mathbf{Q})^{-1}(\{x_n\})=[r_n,r_{n+1})\cap\mathbf{Q}=(r_n,r_{n+1})\cap\mathbf{Q}$.所以$g^{-1}(\{x_n\})$为$\mathbf{Q}$的开集.

对于X中任一开集U,$g^{-1}(U)=g^{-1}(\cup_{x_n\in U}\{x_n\})=\cup_{x_n\in U}g^{-1}(\{x_n\})$,即$g^{-1}(U)$为$\mathbf{Q}$的开集,所以$g:\mathbf{Q}\to X$为在上的连续映射.

当X为有限集时,设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,定义$f:\mathbf{R}\to X$使得

$$f(x)=\begin{cases}x_k, & \text{当 } x\in[r_k,r_{k+1}),k=1,2,\cdots,n-1\\ x_n, & \text{其它}\end{cases}$$

仿照上面可以证明$g=f|\mathbf{Q}:\mathbf{Q}\to X$为在上的连续映射.

1.11　回答以下问题并给出必要的证明:

(1) 有限补空间何时可嵌入可数补空间?

(2) 可数补空间何时可嵌入有限补空间?

解:(1) 当X为有限集,Y为有限或可数集时,有限补空间X可嵌入可数补空间Y.

(2) 当X和Y均为有限集,可数补空间X可嵌入有限补空间Y.

§3.2　(有限)积空间

2.1　设(X,ρ)是一个度量空间.证明映射$\rho:X\times X\to\mathbf{R}$是一个连续映射.

证:设$(x,y)\in X\times X$,对$\rho(x,y)$在$\mathbf{R}$中的任意邻域V,有$\varepsilon>0$,使$(\rho(x,y)-\varepsilon,\rho(x,y)+\varepsilon)\subset V$,由不等式

$\rho(x^*,y^*) \leqslant \rho(x^*,x)+\rho(x,y)+\rho(y,y^*)$

$\rho(x,y) \leqslant \rho(x^*,x)+\rho(x^*,y^*)+\rho(y,y^*)$

知，当$(x^*,y^*) \in B(x,\varepsilon/2)\times B(y,\varepsilon/2)$时，$\rho(x^*,y^*)\in V$，故$\rho^{-1}(V)$是$(x,y)$的邻域，由$(x,y)\in X\times X$的任意性，知$\rho$为连续映射.

2.2 设(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)是两个度量空间. 定义

$$d_1,d_2:(X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)\to\mathbf{R}$$

使得对于任何$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$，

$$d_1(x,y)=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$$
$$d_2(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$$

(1) 验证d_1和d_2都是$X_1\times X_2$的度量；

(2) 证明$X_1\times X_2$的度量d_1,d_2和ρ是等价的度量，其中ρ是积度量.

证：显然d_1,d_2都满足度量空间的条件(1)和(2)，下面验证它们也满足三角不等式.

设$x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，$z=(z_1,z_2)\in X_1\times X_2$

$$\begin{aligned}d_1(x,y)&=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)\\&\leqslant\rho_1(x_1,z_1)+\rho_1(z_1,y_1)+\rho_2(x_2,z_2)+\rho_2(z_2,y_2)\\&=d_1(x,z)+d_1(z,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_2(x,y)&=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}\\&\leqslant\max\{\rho_1(x_1,z_1)+\rho_1(z_1,y_1),\rho_2(x_2,z_2)+\rho_2(z_2,y_2)\}\\&\leqslant\max\{\rho_1(x_1,z_1),\rho_2(x_2,z_2)\}+\max\{\rho_1(z_1,y_1),\rho_2(z_2,y_2)\}\\&=d_2(x,z)+d_2(z,y)\end{aligned}$$

所以d_1,d_2都是$X_1\times X_2$的度量.

又$\rho(x,y)=\sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1)+\rho_2^2(x_2,y_2)}$，而

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}[\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)]&\leqslant\sqrt{{\rho_1}^2(x_1,y_1)+{\rho_2}^2(x_2,y_2)}\\&\leqslant\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)\end{aligned}$$

所以$\frac{1}{\sqrt{2}}d_1(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant d_1(x,y)$，因此$(X_1\times X_2,\rho)$与$(X_1\times X_2,d_1)$有完全相同的开集.

因 $\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}\leqslant\sqrt{{\rho_1}^2(x_1,y_1)+{\rho_2}^2(x_2,y_2)}\leqslant\sqrt{2}\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$，所以$d_2(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant\sqrt{2}d_2(x,y)$，因此$(X_1\times X_2,\rho)$与$(X_1\times X_2,d_2)$有完全相同的开集.

故d_1,d_2,ρ是$X_1\times X_2$的等价的度量.

2.3 将第2题中的结论推广到n个度量空间的积空间中去.

解：设(X_i,ρ_i)为度量空间，$i=1,2,\cdots,n$，定义

$d_1,d_2:(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n)\times(X_1\times X_2\times\cdots X_n)\to\mathbf{R}$，

使得对任意$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$

$$d_1(x,y)=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)+\cdots+\rho_n(x_n,y_n)$$
$$d_2(x,y)=\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2),\cdots,\rho_n(x_n,y_n)\}$$

则d_1,d_2都是$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$的度量，且$\rho$(为积度量)，$d_1,d_2$是$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$的等价的度量.

2.4　设 X_1 和 X_2 是两个拓扑空间，$X_1 \times X_2$ 是它们的积空间. 证明对于任何 $A \subset X_1, B \subset X_2$ 有

（1）　$c_{X_1 \times X_2}(A \times B) = c_{X_1}(A) \times c_{X_2}(B)$.

（2）　$i_{X_1 \times X_2}(A \times B) = i_{X_1}(A) \times i_{X_2}(B)$.

（3）　$b_{X_1 \times X_2}(A \times B) = (b_{X_1}(A) \times c_{X_2}(B)) \cup (c_{X_1}(A) b_{X_2}(B))$.

证：(1) 设 $x = (x_1, x_2) \in C_{X_1 \times X_2}(A \times B)$，对于任意开邻域 $U \in \mathscr{U}_{x_1}, V \in \mathscr{U}_{x_2}, U \times V \in \mathscr{U}_x$，从而 $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \varnothing$ 即 $U \cap A \neq \varnothing, V \cap B \neq \varnothing$，则 $x_1 \in \boldsymbol{c}_{X_1}(A)$，$x_2 \in \boldsymbol{c}_{X_2}(A)$，故

$x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B), \boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(A \times B) \subset \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_1}(B)$.

反之，设 $x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B)$，则 $x_1 \in \boldsymbol{c}_{X_1}(A), x_2 \in \boldsymbol{c}_{X_2}(B)$，对任意开邻域 $W \in \mathscr{U}_x$，存在 $U \in \mathscr{U}_{x_1}, V \in \mathscr{U}_{x_2}$，及 $W = U \times V$，由于 $U \cap A \neq \varnothing, V \cap B \neq \varnothing$，则 $(U \cap A) \times (V \cap B) = W \cap (A \times B) \neq \varnothing$，所以 $x \in \boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(A \times B)$，故 $\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(A \times B) \supset \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_1}(B)$.

因此，$\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(A \times B) = \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_1}(B)$.

(2) 首先由(1)有，任意 $A \subset X_1, B \subset X_2, \boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(A \times X_2) = \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(X_2) = \boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times X_2$，同理 $\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(X_1 \times B) = X_1 \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B)$，则 $\boldsymbol{i}_{X_1 \times X_2}(A \times B) = \sim(\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(\sim(A \times B))) = \sim(\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}((\sim A) \times X_2) \cup (X_1 \times (\sim(B)))) = \sim(\boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}((\sim A) \times X_2) \cup \boldsymbol{c}_{X_1 \times X_2}(X_1 \times (\sim(B)))) = (\sim(\boldsymbol{c}_{X_1}(\sim A) \times X_2) \cap (\sim(X_1 \times \boldsymbol{c}_{X_2}(\sim(B)))) = ((\sim(\boldsymbol{c}_{X_1}(\sim A) \times X_2) \cap (X_1 \times (\sim \boldsymbol{c}_{X_2}(\sim(B)))) = \boldsymbol{i}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{i}_{X_2}(B)$.

(3) 由(1)，(2)，$\boldsymbol{b}_{X_1 \times X_2}(A \times B) = (\boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B)) \sim (\boldsymbol{i}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{i}_{X_2}(B)) = [(\boldsymbol{c}_{X_1}(A) \sim \boldsymbol{i}_{X_1}(A)) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B)] \cup [\boldsymbol{c}_{X_1}(A) \times (\boldsymbol{c}_{X_2}(B) \sim \boldsymbol{i}_{X_2}(B))] = (\boldsymbol{b}_{X_1}(A) \times \boldsymbol{c}_{X_2}(B)) \cup (\boldsymbol{c}_{X_2}(A) \times \boldsymbol{b}_{X_2}(B))$.

2.5　设 X_1 和 X_2 是两个拓扑空间，A_1 和 A_2 分别是 X_1 和 X_2 的子空间. 证明 $A_1 \times A_2$ 作为积空间的拓扑与 $A_1 \times A_2$ 作为积空间 $X_1 \times X_2$ 的子空间的拓扑两者相同.

证：设 $(X_1, \mathscr{T}_1), (X_2, \mathscr{T}_2)$ 为拓扑空间，$\mathscr{T}$ 为 $X_1 \times X_2$ 的拓扑.

$\mathscr{B} = \{U_1 \times U_2 : U_i \in \mathscr{T}_i, i = 1, 2\}$ 为 $\mathscr{T}$ 的基，则 $\mathscr{T}_i | A_i$ 为 A_i 的拓扑 $(i = 1, 2)$，$\mathscr{T} | A_1 \times A_2$ 为 $A_1 \times A_2$ 的拓扑，基为 $\mathscr{B} | A_1 \times A_2$，记 $(A_1, \mathscr{T}_1 | A_1), (A_2, \mathscr{T}_2 | A_2)$ 的积拓扑为 $\widetilde{\mathscr{T}}$ 因而其基为 $\widetilde{\mathscr{B}} = \{V_1 \times V_2 : V_i \in \mathscr{T}_i | A_i, i = 1, 2\}$，所以 $U \in \widetilde{\mathscr{B}}$ 当且仅当存在 $V_i \in \mathscr{T}_i | A_i, i = 1, 2$，使 $U = V_1 \times V_2$，当且仅当存在 $U_i \in \mathscr{T}_i$，使 $V_i = U_i \times A_i, i = 1, 2$. 则

$$U = (U_1 \cap A_1) \times (U_2 \cap A_2) = (U_1 \times U_2) \cap (A_1 \times A_2)$$

当且仅当 $U \in \mathscr{B} | A_1 \times A_2$，即 $\widetilde{\mathscr{B}} = \mathscr{B} | A_1 \times A_2$.

因此 $(A_1 \times A_2, \mathscr{T} | A_1 \times A_2)$ 为 $(A_i, \mathscr{T}_i | A_i), i = 1, 2$ 的积空间，故 $A_1 \times A_2$ 作为积空间给出的拓扑与 $A_1 \times A_2$ 作为积空间 $X_1 \times X_2$ 的子集，由 $X_1 \times X_2$ 的积拓扑在 $A_1 \times A_2$ 上诱导出来的相对拓扑，这二者相同.

2.6　设 X_1, X_2 和 X_3 都是拓扑空间. 证明：

（1）　积空间 $X_1 \times X_2$ 同胚于积空间 $X_2 \times X_1$；

（2）　积空间 $(X_1 \times X_2) \times X_3$ 同胚于积空间 $X_1 \times (X_2 \times X_3)$；

（3）　存在一个拓扑空间 Y 使得积空间 $X_1 \times Y$ 同胚于 X_1；

（4）　如果 $X_1 \neq \varnothing$ 并且积空间 $X_1 \times X_2$ 同胚于积空间 $X_1 \times X_3$，则 X_2 同胚于 X_3.

证：(1) 定义 $f: X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ 使 $f(x) = f((x_1, x_2)) = (x_2, x_1), x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$，

显然 f 为在上的一一映射,又 $P_1 \circ f = P_1, P_2 \circ f = P_1$ 皆为连续映射,故 f 连续. 类似可证 f^{-1} 也连续,即 f 是同胚,故 $X_1 \times X_2$ 同胚于 $X_2 \times X_1$.

(2) 由定理 3.2.9, $X_1 \times X_2 \times X_3$ 同胚于 $(X_1 \times X_2) \times X_3$, 下证 $X_1 \times X_2 \times X_3$ 同胚于 $X_1 \times (X_2 \times X_3)$.

记 $X_1 \times X_2 \times X_3$ 向 X_1, X_2, X_3 的投射分别为 $P_{X_1}, P_{X_2}, P_{X_3}$, $X_2 \times X_3$ 向 X_2, X_3 的投射分别 P_{X_2}', P_{X_3}', 将 $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ 向 $X_1, X_2 \times X_3$ 投射分别记为 P_1, P_2, 则这些投射皆为连续映射,定义映射 $f: X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_1 \times (X_2 \times X_3)$, 使得任意 $(x_1, x_2, x_3) \in X_1 \times X_2 \times X_3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, (x_2, x_3)) \in X_1 \times (X_2 \times X_3)$, 显然 f 是在上的一一映射.

又 $P_1 \circ f = P_{X_1}, P_{X_2}' \circ P_2 \circ f = P_{X2}, P_2' \circ P_2 \circ f = P_2$ 都为连续映射,故 $P_2 \circ f$ 连续,所以 f 为连续映射.

类似可证 f^{-1} 为连续映射,故 f 为同胚,即 $X_1 \times X_2 \times X_3$ 同胚于 $X_1 \times (X_2 \times X_3)$.

(3) 令 $Y = \{a\}$ 为平庸空间, $f: X_1 \to X_1 \times Y$, 则对于任何 $x \in X$, $f(x) = (x, a)$ 显然是同胚.

(4) 由题意存在同胚 $f: X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_3$, 取 $\varnothing \in \mathscr{T}_{X_1}$, 则 $\{\varnothing\} \times X_2 \subset X_1 \times X_2$.

由 §3.1 习题 8(1) $f|_{\{\varnothing\} \times X_2}: \{\varnothing\} \times X_2 \to \{\varnothing\} \times X_3$ 是一个同胚.

令 $g: X_2 \to \{\varnothing\} \times X_2$, 对任何 $x \in X_2$, $g(x) = (\varnothing, x)$ 是一个同胚.

作 $h: X_2 \to X_3$, $h(x) = p_2 \circ f|_{\{\varnothing\} \times X_2} \circ g(x)$ 是一个同胚. 其中 p_2 是 $\{\varnothing\} \times X_3$ 的第 2 个投射.

2.7　证明 §3.1 习题第 9 题中定义的拓扑空间 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{T})$ 是两个实数下限拓扑空间 $\mathbf{R}_l$ (参见例 2.6.1) 的积空间.

证:因为 $\mathscr{B} = \{[a,b): a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$ 下限拓扑空间 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{T})$ 的基,则 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 和积拓扑的基为 $\mathscr{B} = \{B_1 \times B_2 : B_i \in \mathscr{B}', i = 1, 2\}$, 所以 $\mathscr{B}$ 中任一元是

$\varphi = \{[a,b) \times [c,d): a, b, c, d \in \mathbf{R}, a < b, c < d\}$

中的元,且 φ 中任意有限个元的交是 $\mathscr{B}$ 中的元.

因此 $\mathscr{B}$ 为 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{T})$ 的基,即 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{T})$ 是下限拓扑空间的积空间.

§3.3　商空间

3.1　证明:离散空间(平庸空间)的任何一个商空间都是离散空间(平庸空间).

证:(1) 设 $(X, \mathscr{T})$ 是离散空间. $(X/R, \mathscr{T}_1)$ 是商空间,则 $\mathscr{T}_1$ 是相对于自然的投射 $p: X \to X/R$ 而言的商拓扑. 对任何 $u \subset X/R$, 有 $p^{-1}(u) \in \mathscr{P}(X)$, 所以 $p^{-1}(u) \in \mathscr{T}$, 于是 $u \in \mathscr{T}_1$, $\mathscr{P}(X/R) \subset \mathscr{T}_1$, 即 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{P}(X/R)$, 所以 $(X/R, \mathscr{T}_1)$ 是离散空间.

(2) 设 $(X, \mathscr{T})$ 是平庸空间, $(X/R, \mathscr{T}_R)$ 是商空间,若 $\varnothing \neq u \in \mathscr{T}_R$, 有 $p^{-1}(u) \in \mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$, 于是 $p^{-1}(u) = X$, 由 p 是满射, $u = p(p^{-1}(u)) = p(X) = X/R$. 于是 $\mathscr{T}_R = \{X/R, \varnothing\}$, 所以 $(X/R, \mathscr{T}_R)$ 是平庸空间.

3.2　设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 证明:如果 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是商映射,则 $g \circ f: X \to Z$ 也是商映射.

证:因 f, g 都是商映射,得 f, g 都是连续满射,故 $g \circ f$ 也是连续满射.

由 g 是商映射得 $\mathscr{T}_Z = \{u \subset Z \mid g^{-1}(u) \in \mathscr{T}_Y\}$

由 f 是商映射,对 $g^{-1}(u) \in \mathscr{T}_Y$ 有 $f^{-1}(g^{-1}(u)) \in \mathscr{T}_X$ 即 $(g \circ f)^{-1}(u) \in \mathscr{T}_X$. 于是 $\mathscr{T}_Z = \{u \subset Z \mid (g \circ f)^{-1}(u) \in \mathscr{T}_X\}$. 所以 $g \circ f: X \to Z$ 也是商映射.

3.3　定义映射 $p: \mathbf{R} \to S^1$, 使得对于任何 $t \in \mathbf{R}$ 有

$$p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1$$

证明:p 是一个商映射.(提示:事实上 p 是一个开映射.)

证 1:S^1 为 $\mathbf{R}^2$ 的子空间,设 q_i 是 $\mathbf{R}^2$ 的对于第 i 个坐标空间的投射,$i = 1,2$. 因为 $q_1 \circ p(t) = \cos(2\pi t)$,$q_2 \circ p(t) = \sin(2\pi t)$ 连续,由定理 3.2.7 得 $p(t)$ 连续,$p(t)$ 显然是满射.

设 $A = (a,b)$ 为 $\mathbf{R}$ 中的任一开集,设 $f(t) = \cos(2\pi t)$,$g(t) = \sin(2\pi t)$

(i) 若 $b - a \geqslant 1$ 或 $a = -\infty$,$b = +\infty$ 时,$f(A) = g(A) = [-1,1]$,得 $p(A) = S^1 \in \mathscr{T}_{S1}$

(ii) 若 $0 < b - a < 1/4$ 时,有 $0 < 2\pi(b-a) < \pi/2$,$f(A) = (0, f(b-a))$,$g(A) = (0, g(b-a))$,当 $1/4 < b - a < 1/2$ 时,有 $\pi/2 < 2\pi(b-a) < \pi$,$f(A) = (f(b-a), 0)$,$g(A) = (g(b-a), 1)$,当 $1/2 < b - a < 3/4$ 时,有 $\pi < 2\pi(b-a) < 3\pi/2$,$f(A) = (-1, f(b-a))$,$g(A) = (g(b-a), 0)$,当 $3/4 < b - a < 1$ 时,有 $3\pi/2 < 2\pi(b-a) < 2\pi$,$f(A) = (0, f(b-a))$,$g(A) = (-1, g(b-a))$,此时 $p(A) = (f(A) \times g(A)) \cap S^1 \in \mathscr{T}_{S1}$

(iii)$b - a = 1/4$,$f(A) = (0,1]$,$g(A) = (0,1]$

$p(A) = (f(A) \times g(A)) \cap S^1 = (0,1) \times (0,1) \cap S^1 \in \mathscr{T}_{S1}$

$b - a = 1/2$,$f(A) = [-1,0)$,$g(A) = [0,1)$

$p(A) = (f(A) \times g(A)) \cap S^1 = (-1,0) \times (0,1) \cap S^1 \in \mathscr{T}_{S1}$

$b - a = 3/4$,$f(A) = (-1,0]$,$g(A) = [-1,0)$

$p(A) = (f(A) \times g(A)) \cap S^1 = (-1,0) \times (-1,0) \cap S^1 \in \mathscr{T}_{S1}$

综上 p 是开映射,由定理 3.3.3 得 p 是商映射.

证 2:沿用上题及其解中的记号,置 X 为 $\mathbf{R}$,Y 为 S^1(作为 $\mathbf{R}^2$ 的子空间的相对拓扑),易见 f 是连续在上的映射,于是对 Y 中的开集 U,由上题的(*)式知,$p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$ 为 X 的开集,故 $\tilde{f}^{-1}(U)$ 为开集,即 $\tilde{f}$ 连续.

容易验证上题中的 X/R 现在为 $\{[x]: x \in \mathbf{R}\} = \{[x]: x \in [0,1]\}$.

设 $\mathscr{A}$ 为 X/R 的开复盖,则 $\{p^{-1}(A): A \in \mathscr{A}\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的,从而是 $[0,1]$($\mathbf{R}$ 的紧致子集)的开复盖,故有有限子族 $\{p^{-1}(A_1), \cdots\cdots, p^{-1}(A_n)\}$ 为 $[0,1]$ 的复盖,于是 $\{A_1, \cdots\cdots, A_n\}$ 是 $\{[x]: x \in [0,1]\} = X/R$ 的有限复盖,所以 X/R 是紧致空间.

$Y = S^1$ 是 Hausdorff 空间 $\mathbf{R}^2$ 的子空间,从而是 Hausdorff 的,于是由上题的(2),$\tilde{f}$ 是紧致空间 X/R 到 Hausdorff 空间 S^1 上的一一连续映射,据推论 7.2.9,$\tilde{f}$ 为同胚,再据上题的结果,S^1 的上述拓扑就是它对于 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑而言的商拓扑.

3.4　定义映射 $p: \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to S^1$,使得对于任何 $(x,y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ 有

$$p(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \in S^1$$

证明:p 是一个商映射.

证:显然 p 是一个满射,将 S^1 看作 $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ 的子空间,设为 $(S^1, \mathscr{T}_1)$,设 $\mathscr{T}_2$ 是 S^1 的对于映射 p 而言的商拓扑,当 S^1 的拓扑为 $\mathscr{T}_1$ 时,p 连续,于是对任何 $u \in \mathscr{T}_1$,$p^{-1}(u) \in \mathscr{T}_{\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}}$. 由商拓扑定义有 $u \in \mathscr{T}_2$,即 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$. 对任何 $u \in \mathscr{T}_2$,有 $p^{-1}(u) \in \mathscr{T}_{\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}}$. 令 $V = p^{-1}(u) \cap S^1$,对任何 $(x,y) \in u \subset S^1 \subset \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,$p(x,y) = (x,y) \in u$,所以 $(x,y) \in p^{-1}(u)$,于是 $u \subset v$. 若存在 $(x,y) \in v$,使 $(x,y) \notin u$,则 $p^{-1}(x,y) \notin p^{-1}(u)$,又 $(x,y) \in S^1$,$p^{-1}(x,y) = (x,y) \in v = p^{-1}(u) \cap S^1$ 矛盾. 故 $v \subset u$,所以 $u = v = p^{-1}(u) \cap S^1$. 由 $\mathscr{T}_1$ 定义,$u \in \mathscr{T}_1$,即 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$. 于是 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$,即 S^1 的拓

扑是对于映射 p 而言的商拓扑. 所以 p 是商映射.

3.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 是一个商映射. 令

$$R=\{(x,y)\in X^2:f(x)=f(y)\}$$

证明:

(1)R 是 X 中的一个等价关系;

(2)Y 同胚于商空间 X/R.

证 1:(1)R 显然是 X 中的一个等价关系.

(2) 对 $x_1,x_2\in X$,若$[x_1]=[x_2]$,则$f(x_1)=f(x_2)$,从而$\tilde{f}([x_1])=\tilde{f}([x_2])$,故$\tilde{f}$是定义好了的.

若$[x_1]\neq[x_2]$,则$f(x_1)\neq f(x_2)$,从而$\tilde{f}([x_1])\neq\tilde{f}([x_2])$,即$\tilde{f}$是一一的. 又对 $y\in Y$,因f为满射,故有 $x\in X$,使$f(x)=y$,从而有$\tilde{f}([x])=y$,即$\tilde{f}$是满射.

设 p 为投射:$p:X\to X/p$,则易见(*):$f=\tilde{f}\circ p$ 成立. 若$\tilde{f}$是同胚,则据(*)式知f连续,从而对 Y 的任意一开集 U,$f^{-1}(U)$ 是 X 的开集,即 Y 的拓扑是其商拓扑的子族.

又若V是Y对商拓扑(关于f及X的拓扑)而言的开集,则$f^{-1}(V)=p^{-1}(f^{-1}(V))$是开集. 由$X/R$ 的拓扑的定义,$\tilde{f}^{-1}(V)$ 是 X/R 的开集,从而 V 是 Y 的开集.

综上,Y 的拓扑是(对 f 及 X 的拓扑而言的) 商拓扑.

反之,若 Y 的拓扑是对f及 X 的拓扑而言的商拓扑,则对 Y 的开集 U,$f^{-1}(U)=p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$ 是 X 的开集,从而$\tilde{f}^{-1}(U)$ 是 X/R 的开集,由上及 X/R 的拓扑的定义,有$f^{-1}(\tilde{f}(V))=p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(V)))=p^{-1}(V)$ 是 X 的开集,故$\tilde{f}(V)$ 是 Y 的开集,即$\tilde{f}$是开映射.

由上述讨论,$\tilde{f}$是同胚.

证 2:(2)$X/R=\{[x]_R\mid x\in X\}$,$[x]_R=\{y\in X\mid f(y)=f(x)\}$.

令$\tilde{f}:X/R\to Y$,$\tilde{f}([x]_R)=f(x)$

i)$\tilde{f}$是映射,对 $x_1,x_2\in X$,若$[x_1]_R=[x_2]_R$,则$f(x_1)=f(x_2)$,所以$\tilde{f}([x_1]_R)=\tilde{f}([x_2]_R)$.

ii) 若$[x_1]_R\neq[x_2]_R$,则$f(x_1)\neq f(x_2)$,从而$\tilde{f}([x_1]_R)\neq\tilde{f}([x_2]_R)$,即$\tilde{f}$是一一的.

iii) 对任意的 $y\in Y$,因 f 商映射,故有 $x\in X$,使$f(x)=y$,所以有$\tilde{f}([x]_R)=y$,即$\tilde{f}$是满射.

iv) 设 p 为投射:$p:X\to X/R$,则易见(*):$f=\tilde{f}\circ p$ 成立. 对 Y 的任意一开集 U,由 f 是商映射,$f^{-1}(U)$ 是 X 的开集,$(\tilde{f}\circ p)^{-1}(U)$ 开集,$p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U))$ 开集,又 p 连续映射,$\tilde{f}^{-1}(U)$ 是 X/R 中的开集,所以$\tilde{f}$连续.

v) 设 $V\subset X/R$ 是开集,$f^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V))=p^{-1}[\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(V))]=p^{-1}$,$p^{-1}$ 是 X 中开集,所以$\tilde{f}(V)$ 是 Y 中开集,所以$\tilde{f}$是开映射. 综上$\tilde{f}$是 X/R 到 Y 的同胚,即 Y 同胚于商空间 X/R.

3.6 定义映射 $p:I\to S^1$,使得对于任何 $t\in I$ 有

$$p(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))\in S^1$$

其中 $I=[0,1]$,证明:

(1)p 是满的连续闭映射;

(2) 例 3.3.2 中的商空间 I/R 与 S^1 同胚.

证:(1) 由 3 题结果将映射限制在 I 上也是一个商映射,故 p 是满的连续的映射. 设 A 是 I 的任一个闭集,下证 $p^{-1}(S^1 - p(A)) = I - A$,若存在 $x \in p^{-1}(S^1 - p(A))$,使得 $x \notin I - A$ 有 $x \in A$,$p(x) \in p(A)$,$p(x) \notin S^1 - p(A)$,于是 $x \notin p^{-1}(S^1 - p(A))$ 矛盾. 同理若存在 $y \in I - A$,使得 $y \notin p^{-1}(S^1 - p(A))$ 有 $p(y) \notin S^1 - p(A)$,$p(y) \in p(A)$,$y \in A$ 与 $y \in I - A$ 矛盾. 所以 $p^{-1}(S^1 - p(A)) = I - A \in \mathscr{T}_I$. 由商映射定义 $S^1 - p(A) \in \mathscr{T}_{S^1}$,即 $p(A)$ 是 S^1 的闭集. 所以 p 是满的连续闭映射.

(2) 作映射 $f:[0,1]/R \to S^1$

对任何 $x \in [0,1]/R$,若 $x \neq [0]_R$,任取 $a \in x$,$f(x) = p(a)$,若 $x = [0]_R$,$f(x) = p(0)$,f 是一个同胚.

3.7 举例说明商映射可以既不是开映射也不是闭映射.

例:设 $f(x) = e^x \cos x$,定义域与值域均为带有通常拓扑的实数集 **R**. 易见,f 是连续的. 还容易证明,f 在开区间 $(-\infty, 0)$ 内取得最小值

$$f\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

由此可知,$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ 不是集 $f((-\infty, 0))$ 的内点,即 $f((-\infty, 0))$ 不是 **R** 中的开集. 因此,f 不是开映射. 又易见,$\{-n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ 是 **R** 中的闭集,而

$$f(\{-n\pi\}_{n=1}^{\infty}) = \{(-1)^n e^{-n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$$

不是闭集,故 f 不是闭映射.

第 4 章　连通性

§4.1　连通空间

1.1　设 A,B 为拓扑空间 X 的隔离的子集，且 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$，证明 A_1, B_1 是 X 的隔离的子集.

证：因为 A,B 为 X 的隔离的子集，且 $A_1 \subset A, B_1 \subset B$，则 $(A_1 \cap \boldsymbol{c}(B_1)) \cup (\boldsymbol{c}(A_1) \cap B_1) \subset (A \cap \boldsymbol{c}(B)) \cap (\boldsymbol{c}(A) \cap B) = \varnothing$，所以 $(A_1 \cap \boldsymbol{c}(B_1)) \cup (\boldsymbol{c}(A_1) \cap B_1) = \varnothing$，

因此 A_1, B_1 是 X 的隔离子集.

1.2　设 A_1, A_2, B_1, B_2 为拓扑空间 X 的子集，证明 A_i 与 B_j 皆为隔离的子集，$i,j = 1,2$，当且仅当 $A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2$ 为隔离的子集.

证：因为 $\cup_{i,j=1}^{2}(A_i \cap \boldsymbol{c}(B_j)) \cup (\boldsymbol{c}(A_i) \cap B_j) = ((A_1 \cup A_2) \cap \boldsymbol{c}(B_1 \cup B_2) \cup (\boldsymbol{c}(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2)$，所以 $(A_i \cap \boldsymbol{c}(B_j)) \cup (\boldsymbol{c}(A_i) \cap B_j) = \varnothing, i,j = 1,2$. 当且仅当 $((A_1 \cup A_2) \cap \boldsymbol{c}(B_1 \cup B_2)) \cup (\boldsymbol{c}(A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2) = \varnothing$，即 A_i 与 B_j 皆为隔离子集，$(i,j = 1,2)$ 当且仅当 $A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2$ 为隔离的子集.

1.3　若 A,B 为拓扑空间 X 的隔离的子集，且 $A \cup B$ 为开集(闭集)，证明 A,B 都是开集(闭集).

证：若 A,B 之一为空集，结论显然成立，若 A,B 为 X 的非空的隔离的子集，则 $Y = A \cup B$ 为 X 的不连通子空间，所以 A,B 为 Y 的既开又闭的子集. 根据第 3 章习题 1.2，当 $A \cup B$ 为开集(闭集)时，A,B 都是 X 的开集(闭集).

1.4　有限补空间和可数补空间何时是连通的何时是不连通的?给出结论和证明.

证：设 $(X,\mathscr{T}_1)$，$(Y,\mathscr{T}_2)$ 分别是有限补空间和可数补空间. 当 X 是有限集且至少包含两个点时 $(X,\mathscr{T}_1)$ 是不连通空间(因为 X 的任一个真子集是一个既开又闭的). 当 X 是无限集或单点集时，$(X,\mathscr{T}_1)$ 是连通空间.

当 Y 是可数集且至少包含两个点时 $(Y,\mathscr{T}_2)$ 是不连通空间(因为 Y 的任一个真子集是一个既开又闭的). 当 Y 是不可数集或是单点集时，$(Y,\mathscr{T}_2)$ 是连通空间.

1.5　设 $\mathscr{T}_1,\mathscr{T}$ 为非空集合 X 的两个拓扑，且 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1$. 证明若 $(X,\mathscr{T}_1)$ 为连通空间则 $(X,\mathscr{T})$ 也是连通空间.

证：否则 $(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 不是连通空间，则存在非空集合 $A,B \in \mathscr{T}$，使得 $A \cup B = X, A \cap B = \varnothing$，由于 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1$，所以 $A,B \in \mathscr{T}_1$，且 $A \cup B = X, A \cap B = \varnothing$，这与 $(X,\mathscr{T}_1)$ 为连通矛盾. 故 $(X,\mathscr{T})$ 是连通空间.

1.6　设 A 为拓扑空间 X 的连通子集，B 为 X 中既开又闭的集合. 证明：若 $A \cap B \neq \varnothing$，则 $A \subset B$.

证：设 $A \cap B \neq \varnothing$，若 $A \not\subset B$，记 $U = A \cap B$，则 U 为 A 的非空真子集，又 B 为 X 中既开又闭的子集. 所以 U 为 A 中非空的既开又闭的真子集，这与 A 为 X 的连通子集矛盾，故 $A \subset B$.

1.7　证明 Y 为拓扑空间 X 的不连通子集当且仅当存在 X 的开集(闭集) A,B 使 $Y \subset A \cup B, A \cap B \subset X \sim Y$ 且 $A \cap Y \neq \varnothing, B \cap Y \neq \varnothing$.

证：因为 Y 为 X 的不连通子集，当且仅当存在 Y 的非空的开集(闭集) U,V，使 $Y = U \cup V, U \cap V = \varnothing$，当且仅当存在 X 的非空开集(闭集) A,B，使 $U = A \cap Y, V = B \cap Y, Y \subset A \cup B, A \cap B \subset X \sim Y, A \cap Y \neq \varnothing, B \cap Y \neq \varnothing$

1.8　设 Y 为拓扑空间 X 的连通子集. 证明若 A,B 为 X 的无交的开集(或闭集)使得 $Y \subset A \cup B$，则或者 $Y \subset A$ 或者 $Y \subset B$.

证:令 $A\cap Y=A_1,B\cap Y=B_1$,由于 A,B 为 X 的无交的开集,(或闭集),则 $A_1\cap B_1=A\cap B\cap Y=\varnothing$,所以 A_1,B_1 为 Y 中不交的开集(或闭集).

又,$Y\subset A\cup B$,所以 $A_1\cup B_1=(A_1\cup B_1)\cap Y=Y$,

由于 Y 为 X 的连通子集,则 $A_1=\varnothing$ 或 $B_1=\varnothing$,即 $B_1=B\cap Y=Y$ 或 $A_1=A\cap Y=Y$,从而 $Y\subset B$ 或 $Y\subset A$.

1.9　设 Y 为拓扑空间 X 的子集. 证明 $c(Y)$ 为不连通子集当且仅当存在两个非空集合 A,B 使得 $Y\subset A\cup B,c(A)\cap c(B)=\varnothing$,并且 $Y\cap A\neq\varnothing,Y\cap B\neq\varnothing$.

证:设存在 X 的两个非空集合 A,B,使得 $Y\subset A\cup B,\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(B)=\varnothing$,且 $Y\cap A\neq\varnothing,Y\cap B\neq\varnothing$,从而 $\boldsymbol{c}(Y)\subset\boldsymbol{c}(A)\cup\boldsymbol{c}(B),\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(B)=\varnothing\subset X\sim Y,\boldsymbol{c}(Y)$ 为不连通子集.

反之,设 $\boldsymbol{c}(Y)$ 为不连通子集,则存在 X 的非空隔离子集 A,B,使 $\boldsymbol{c}(Y)=A\cup B$,由习题1.3结论知,$A,B$ 都是闭集. 所以 $\boldsymbol{c}(Y)=A\cup B,\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(B)=A\cap B=\varnothing,\boldsymbol{c}(Y)\cap A\neq\varnothing,\boldsymbol{c}(Y)\cap B\neq\varnothing$

因为 $Y=(Y\cap A)\cup(Y\cap B)$,若 $Y\cap A=\varnothing$,则 $Y\subset B$,从而 $\boldsymbol{c}(Y)=B$,则有 $\boldsymbol{c}(Y)\cap A=B\cap A=\varnothing$,与上面矛盾.

故 $Y\cap A\neq\varnothing$,同理 $Y\cap B\neq\varnothing$

因此存在非空集合 A,B,使得 $Y\subset A\cup B,\boldsymbol{c}(A)\cap\boldsymbol{c}(B)=\varnothing,A\cap Y\neq\varnothing,Y\cap B\neq\varnothing$.

1.10　设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 为拓扑空间 X 的连通子集族. 证明:若对于任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$,都存在 Γ 中有限个成员 $\gamma_1=\alpha,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\gamma_{n+1}=\beta$,使得 $Y_{\gamma_i},Y_{\gamma_{i+1}}(i=1,2,\cdots,n)$ 不是隔离的子集,则 $\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 为连通子集.

并指出,定理4.1.6是这个习题的特例.

证:令 A,B 为隔离的子集,且使得 $A\cup B=\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$,对任意 $\gamma\in\Gamma$,由于 Y_γ 是连通的.

则 $Y_\gamma\subset A$,或 $Y_\gamma\subset B$

若存在 $\alpha\in\Gamma,Y_\alpha\subset A$,则对任意 $\beta\in\Gamma$,有 $Y_\beta\subset A$. 不然,若 $Y_\beta\subset B$,由条件存在 $\gamma_1=\alpha,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\gamma_{n+1}=\beta$,使得 $Y_{\gamma_i},Y_{\gamma_{i+1}},(i=1,2,\cdots,n)$ 不是隔离子集.

另一方面,对于 $i=1,2,\cdots,n+1,Y_{\gamma_i}\subset A$,或 $Y_{\gamma_i}\subset B$,而 $Y_\alpha\subset A,Y_\beta\subset B$,所以存在 $Y_{\gamma_i},Y_{\gamma_{i+1}}$,使得 $Y_{\gamma_i}\subset A,Y_{\gamma_{i+1}}\subset B$,即 $Y_{\gamma_i},Y_{\gamma_{i+1}}$ 为隔离子集,矛盾. 因此,对任意 $\beta\in\Gamma,Y_\beta\in A$,即 $\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\subset A$. 故 $B=\varnothing$.

若每一 $\gamma\in\Gamma,Y_\gamma\not\subset A$,则 $Y_\gamma\subset B$,即 $\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\subset B$. 因而 $A=\varnothing$.

综上所述, $\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 是连通的.

在定理4.1.6中,对 X 的连通子集族,$\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 要求 $\cap_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$,因而对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma,Y_\alpha,Y_\beta$,不是隔离子集,所以定理4.1.6是本题之特例.

1.11　设 A 为连通的拓扑空间 X 的真子集. 证明若 $A\neq\varnothing$,则 $\boldsymbol{b}(A)\neq\varnothing$.

证1:因 $X=A\cup A'$,X 连通,所以有 $A\cap A'^{-}\neq\varnothing$ 或 $A^{-}\cap A'\neq\varnothing$. 于是 $b(A)=A^{-}\cap A'^{-}\supset A\cap A'^{-}\neq\varnothing$(或 $A^{-}\cap A'\neq\varnothing$). 因此 $b(A)\neq\varnothing$.

证2:由 §2.5习题2(4),设 $b(A)=\varnothing$,则 A 是一个既开又闭的集合. 由 A 是 X 的非空真子集,根据定理4.1.1得 X 是不连通空间,与题设矛盾,因此 $b(A)\neq\varnothing$.

1.12　设 Y 为不少于两点的离散的空间. 证明:拓扑空间 X 为连通空间当且仅当每一连续映射 $f:X\to Y$ 都是常值映射.

证:设 X 是连通空间. $f:X\to Y$ 为连续映射,则 $f(X)$ 为连通子集,若 $f(X)$ 多于一点,设 $y\in f(X)$,由于 Y 是离散空间,所以 $\{y\},f(X)\sim\{y\}$ 皆为 Y 的非空开集,且它们无交. 这与 $f(X)$ 连通矛盾.

故 $f(X)$ 是单点集,即 f 为常值映射.

反之,设每一连续映射 $f:X\to Y$ 都是常值映射. 若 X 不连通,则存在非空开集 A,B,使 $A\cup B=X$,$A\cap B=\varnothing$,定义映射 $f:X\to Y$,使 $f(A)=\{y_1\}$,$f(B)=\{y_2\}$,其中 $y_1,y_2\in Y$,且 $y_1\neq y_2$,显然 f 为连续映射,但 f 为非常值映射,矛盾.

因此 X 为连通空间.

1.13　设 X,Y 为拓扑空间,$f:X\to Y$ 为连续映射. 证明若 Z 为 X 的连通子集,则 $f(Z)$ 为 Y 的连通子集.

证:因 $f:X\to Y$ 为连续映射,则由第 3 章 §3.1 习题 1.7 知 $f|\,Z:Z\to Y$,且也为连续映射,又 Z 为 X 的连通子集,由定理 4.1.8,$f(Z)=(f|\,Z)(Z)$ 为 Y 的连通子集.

1.14　证明欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中所有至少有一个坐标是有理数的点构成的子集是 $\mathbf{R}^2$ 的连通子集.

证:设 $\mathbf{R}^2$ 中所有至少有一个坐标是有理数的点构成的子集为 $Y=(\mathbf{R}\times\mathbf{Q})\cup(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})$.

设 $x=(x_1,x_2)$,$y=(y_1,y_2)\in Y$,不妨设 x_1 是有理数,若 y_2 是有理数,由于 $\{x_1\}\times\mathbf{R}$,$\mathbf{R}\times\{y_1\}$ 皆连通,且 $(\{x_1\}\times\mathbf{R})\cap(\mathbf{R}\times\{y_2\})=\{(x_1,x_2)\}\subset Y$,故 $(\{x_1\}\times\mathbf{R})\cup(\mathbf{R}\times\{y_2\})$ 连通. 若 y_2 不是有理数,则 y_1 是有理数,此时同上讨论可知 $(\{x_1\}\times\mathbf{R})\cup(\mathbf{R}\times\{0\})\cup(\{y_1\}\times\mathbf{R})$ 为连通的,因此总有 X 的连通子集,$Y_{x,y}$,满足 $x,y\in Y_{x,y}\subset Y$,由定理 4.1.7 知 Y 是连通的.

1.15　证明欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中所有第二个坐标为有理数的点构成的集合 A 与所有第一个坐标为 0 的点构成的集合 B 的并集 $A\cup B$ 是连通子集;但 A 不是连通子集.

证:因为 $A=\mathbf{R}\times\mathbf{Q}$,$B=\{0\}\times\mathbf{R}$. 所以由上题的证明可知 $A\cup B$ 为连通子集.

下面证明 A 不是连通子集.

因为 $A\subset(\mathbf{R}\times(-\infty,\sqrt{2}))$ 与 $A\cap(\mathbf{R}\times(-\sqrt{2},+\infty))$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的子空间,A 的非空互补的开集. 故 A 不连通.

1.16　在欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中令

$$L_{\frac{1}{n}}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x-\frac{1}{n}y=0\},n=1,2,\cdots$$

$$L_0=\{(0,y)\in\mathbf{R}^2:y\in\mathbf{R}\},$$

A 为 L_0 的任一子集. 证明 $E=A\cup(\cup_{n=1,2,\dots}L_{1/n})$ 为连通子集.

证:因为 $L_{\frac{1}{n}}$ 为连通子集,$n=1,2,\cdots$,且 $(0,0)\in\cap_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}}$,所以由定理 4.1.6,$\cup_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}}$ 为连通子集.

因 $\boldsymbol{c}(\cup_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}})=(\cup_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}})\cup L$,

又 $\cup_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}}\subset E\subset\boldsymbol{c}(\cup_{n=1,2,\dots}L_{\frac{1}{n}})$,

由定理 4.1.5,E 为连通子集.

1.17　证明若积空间 $X_1\times X_2$ 为连通空间,则坐标空间 X_1,X_2 都是连通空间.

证:因 $P_i:X_1\times X_2\to X_i$,$i=1,2$ 为连续映射,且 $X_1\times X_2$ 是连通空间,故 X_1,X_2 都是连通空间.

1.18　设 Y 和 Z 都是拓扑空间 X 的子集,其中 Z 是连通的. 证明:如果 $Z\cap Y\neq\varnothing$ 和 $Z\cap Y'\neq\varnothing$,则 $Z\cap b(Y)\neq\varnothing$.

证 1:令 $A=Z\cap c(Y)$,$B=Z\cap c(Y')$,从而 A,B 都是 X 的子空间 Z 的非空闭子集,并且 $Z=A\cup B$,由于 Z 是连通的,由定理 4.1.1(2),必有 $A\cap B\neq\varnothing$. 而 $A\cap B=Z\cap(c(Y))\cap(c(Y'))=Z\cap b(Y)$,故 $Z\cap b(Y)\neq\varnothing$.

证 2:设 $Z\cap b(Y)=\varnothing$,由 §2.4 习题 4(2) 得

$\overline{Z\cap Y}\subset\overline{Z}\cap\overline{Y}=\overline{Z}\cap(i(Y)\cup b(Y))$

$\overline{Z \cap Y'} \subset \overline{Z} \cap \overline{Y'} = \overline{Z} \cap (i(Y') \cup b(Y')) = \overline{Z} \cap (i(Y') \cup b(Y)) = (\overline{Z} \cap i(Y')) \cup (\overline{Z} \cap b(Y))$

$(\overline{Z \cap Y}) \cap (Z \cap Y') \subset (\overline{Z} \cap (i(Y) \cup b(Y))) \cap (Z \cap Y') = (Z \cap Y') \cap (i(Y) \cup b(Y)) = (Z \cap Y' \cap i(Y)) \cup (Z \cap Y' \cap b(Y)) \subset (Y' \cap i(Y)) \cup (Z \cap b(Y)) = \varnothing$

$(Z \cap Y) \cap (\overline{Z \cap Y'}) \subset (Z \cap Y) \cap [(\overline{Z} \cap i(Y')) \cup (\overline{Z} \cap b(Y))] = (Z \cap Y \cap \overline{Z} \cap i(Y')) \cup (Z \cap Y \cap \overline{Z} \cap b(Y)) \subset (Y \cap Y') \cup (Z \cap b(Y)) = \varnothing$

由题意 $Z \cap Y \neq \varnothing$,$Z \cap Y' \neq \varnothing$,且 $Z = (Z \cap Y) \cup (Z \cap Y')$ 得 Z 不连通,与 Z 连通矛盾,故 $Z \cap b(Y) \neq \varnothing$.

§4.2 连通性的某些简单应用

2.1 将实数空间 $\mathbf{R}$ 中的区间进行同胚分类,使得属于同一类的区间是同胚的,否则是不同胚的.

解:设 X 为实数空间 $\mathbf{R}$ 中的所有区间所成的集,$\boldsymbol{R}$ 为 X 的同胚关系,则 $\boldsymbol{R}$ 为 X 的等价关系,且 X 的所有等价类为:

$[(0,1)]_R = \{(a,b) \in X, a < b, a,b \in \mathbf{R}$ 或 $a = -\infty$ 或 $b = +\infty\}$

$[[0,1]]_R = \{[a,b] \in X, a < b, a,b \in \mathbf{R}\}$

$[[0,1)]_R = \{[a,b) \in X, a < b, a,b \in \mathbf{R}$ 或 $b = +\infty\}$

$[(0,1]]_R = \{(a,b] \in X, a < b, a,b \in \mathbf{R}$ 或 $a = -\infty\}$

2.2 证明 $S^n, D^n, E^n, (a,b)^n$,以及 $[a,b]^n$ 都是连通空间.

证:1^0 定义映射 $f: \mathbf{R}^n \to S^n$,使得每一个 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$f(x) \circ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

其中 $y_1 = \cos x_1$

$y_2 = \sin x_1 \cos x_2$

……

$y_n = \sin x_1 \cdots\cdots \sin x_{n-1} \cos x_n$

$y_{n+1} = \sin x_1 \cdots\cdots \sin x_n$

显然 f 是在上的连续映射,$\mathbf{R}^n$ 连通,因此 S^n 为连通空间.

2^0 由于 $D^n = B(0,1)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中半径为 1 的点 0 的球形邻域,由第 3 章 §3.1 习题 1.2(2) 知 $B(0,1)$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$,而 $\mathbf{R}^n$ 连通,因此 D^n 为连通空间.

3^0 由定理 4.1.5 及 2^0,E^n 为连通空间.

4^0 由第 3 章 §3.1 习题 1.2(2),$(a,b)^n$ 同胚于连通空间 $\mathbf{R}^n$,故 $(a,b)^n$ 为连通空间.

5^0 由定理 4.1.5 及 4^0,$[a,b]^n$ 为连通空间.

另证:1^0 定义映射 $f: \mathbf{R}^n \to S^{n+1}$,使得每一个 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$f(x) = (\cos x_1, \sin x_1 \cos x_2, \cdots, \sin x_1 \cdots \sin x_{n-1} \cos x_n, \sin x_1 \cdots \sin x_n)$$

显然 f 是在上的连续映射,$\mathbf{R}^n$ 连通,因此 S^{n+1} 是连通的.

2.3 证明 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n (n > 1)$ 不同胚于实数空间 $\mathbf{R}$ 的任何子集,也不同胚于 S^1 的任何子集.

证:(1) 若 $\mathbf{R}^n$ 同胚于 $\mathbf{R}$ 的某子集 E,由定理 4.1.8 及定理 4.2.1 知 E 为区间,任取 $y \in E$,则有 $x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbf{R}^n$,使 $\mathbf{R}^n \sim \{x\}$ 同胚于 $E \sim \{y\}$

由于 $(-\infty, x_1) \times \mathbf{R}^{n-1}$ 及 $(x_1, +\infty) \times \mathbf{R}^{n-1}$ 皆为 $\mathbf{R}^n$ 的连通子集,且 $(-\infty, x_1) \times \mathbf{R}^{n-1} \subset (-\infty,$

$x_1] \times \mathbf{R}^{n-1} \sim \{x\} \subset (-\infty, x_1] \times \mathbf{R}^{n-1} = c((-\infty, x_1)) \times \mathbf{R}^{n-1}$,所以$(-\infty, x_1] \times \mathbf{R}^{n-1}$也是$\mathbf{R}^n$的连通子集,由于这两个连通子集之交非空,据定理4.1.6,

$$\mathbf{R}^n \sim \{x\} = ((-\infty, x_1] \times \mathbf{R}^{n-1} \sim \{x\}) \cup ([x_1, +\infty) \times \mathbf{R}^{n-1} \sim \{x\})$$

为$\mathbf{R}^n$的连通子集,从而$E \sim \{y\}$为连通子集,这是不可能的. 因此$\mathbf{R}^n$不同胚于$\mathbf{R}$的任意子集.

(2) 若$\mathbf{R}^n$同胚于S^1的子集B,则1^0 如果$B \neq S^1$,有$z \in S^1 \sim B$. 从而$S^1 \sim \{z\}$与$\mathbf{R}$同胚(设$z = (\cos t_0, \sin t_0)$,则$I = (t_0, t_0 + 2\pi)$在映射$f(t) = (\cos t, \sin t)$,$t \in I$之下同胚于$S^1 \sim \{z\}$,且I同胚于$\mathbf{R}$),所以B同胚于$\mathbf{R}$的某子集,这等于$\mathbf{R}^n$同胚于$\mathbf{R}$的子集,这与前论断矛盾. 2^0 如果$B = S^1$,则存在$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$使$\mathbf{R}^n \sim \{x\}$同胚于$S^1 \sim \{(0,1)\}$,而$S^1 \sim \{(0,1)\}$同胚于$\mathbf{R}$,所以$\mathbf{R}^n \sim \{x\}$同胚于$\mathbf{R}$,任意取$y \in \mathbf{R}$,存在$x' \in \mathbf{R}^n$,$x' \neq x$,使$\mathbf{R}^n \sim \{x, x'\}$同胚于$\mathbf{R} \sim \{y\}$,仿(1)可证$\mathbf{R}^n \sim \{x, x'\}$是$\mathbf{R}^n$的连通子集,因此$\mathbf{R} \sim \{y\}$应为连通的,矛盾.

综合(1),(2),$\mathbf{R}^n$不同胚于S^1的任何子集.

2.4 设A为n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$的可数子集,证明$\mathbf{R}^n \sim A$是$\mathbf{R}^n$的连通子集.

证1:对任意$p, q \in \mathbf{R}^n$,$p \neq q$,设

$$\mathscr{L}_{p,q} = \{(1-t)p + tq : t \in [0,1]\}$$

则$\mathscr{L}_{p,q}$为$\mathbf{R}^n$的连通子集.

任意的$x, y \in \mathbf{R}^n \sim A$,$x \neq y$,$\mathscr{L}_{x,y}$为$\mathbf{R}^n$中的连通子集,取$a \in \mathscr{L}_{x,y}$且$x \neq a \neq y$,由于$n > 1$,所以存在$w \in \mathbf{R}^n \sim \mathscr{L}_{x,y}$使$\mathscr{L}_{a,w} \cap \mathscr{L}_{x,y} = \{a\}$,对任意的$u \in \mathscr{L}_{a,w}$,由于$\mathscr{L}_{u,x}$,$\mathscr{L}_{u,y}$均为$\mathbf{R}^n$的连通子集且$\mathscr{L}_{u,x} \cap \mathscr{L}_{u,y} = \{u\}$,所以$Y_u = \mathscr{L}_{u,x} \cup \mathscr{L}_{u,y}$连通,且当$u \neq v$时,$Y_u \cap Y_v = \{x, y\}$.

下面证明存在$u \in \mathscr{L}_{a,w}$,使$Y_u \subset \mathbf{R}^n \sim A$.

否则对每一$u \in \mathscr{L}_{a,w}$,$Y_u \cap A \neq \varnothing$,因为$x, y \notin A$,当$u \neq v$时$Y_u \cap A$与$Y_v \cap A$是非空无交集合,又$\mathscr{L}_{a,w}$是不可数集. 因此$\cup_{u \in \mathscr{L}_{a,w}} (Y_u \cap A) = A \cap (\cup_{u \in \mathscr{L}_{a,w}} Y_u)$不可数,这与$A$的可数性矛盾.

故$\mathbf{R}^n \sim A$为连通子集.

证2:设$x = (x_1, \cdots, x_n)$,$y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n \sim A$,$x \neq y$,不妨假定$x_1 \neq y_1$,取$z = (0, z_2, \cdots, z_n) \neq (0, \cdots, 0) \in \mathbf{R}^n$作$f_k : [0,1] \to \mathbf{R}^n$为对任一$t \in [0,1]$.

$f_k(t) = tx + (1-t)y + k\sin \pi t z$, 其中$k \in \mathbf{R}$

记$E_k = f_k([0,1])$,则E_k是$\mathbf{R}^n$的连通子集,$F_k = E_k \sim \{x, y\}$. 若对某$k, k' \in \mathbf{R}$有$F_k \cap F_{k'} \neq \varnothing$,则有$t, t' \in (0,1)$,使$f_k(t) = f_{k'}(t')$,由于$x_1 \neq y_1$且$z_1 = 0$,故$t = t'$,进而由$z \neq (0, \cdots, 0)$得$k = k'$,换言之,若$k \neq k'$则$F_k \cap F_{k'} = \varnothing$,故$\{F_k : k \in \mathbf{R}\}$是两两不相交的集合的不可数族,因为$A$可数,故必有$k \in \mathbf{R}$,使$F_k \cap A = \varnothing$,即$E_k \subset \mathbf{R}^n \sim A$,因此$\mathbf{R}^n \sim A$连通.

证3:设$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$,$x_i \in \mathbf{R}^n$,则$\mathbf{R}^n - A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbf{R}^n - \{x_i\})$. 因$\mathbf{R}^n - \{x_i\}$连通,且$\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathbf{R}^n - \{x_i\}) \neq \varnothing$,所以$\mathbf{R}^n - A$连通.

2.5 设A为n维单位球面S^n的可数子集,证明$S^n \sim A$是S^n的连通子集($n \geqslant 2$).

证:否则若$S^n \sim A$为S^n的不连通子集,则A非空,设$a \in A$,$f : S^n \sim \{a\} \to \mathbf{R}^n$为以$a$为顶点的球极投影,则$f$为同胚,所以$S^n \sim A$与$\mathbf{R}^n \sim f(A - \{a\})$同胚,因此$\mathbf{R}^n \sim f(A \sim \{a\})$也为不连通子集.

由于A为可数集,即$A \sim \{a\}$也为可数集. 所以$f(A - \{a\})$为可数集.

又$n \geqslant 2$由习题2.4结论,$\mathbf{R}^n \sim f(A - \{a\})$为连通子集,矛盾.

因此,$S^n \sim A$为S^n的连通子集.

2.6 设f为从欧氏平面$\mathbf{R}^2$到实数空间$\mathbf{R}$的连续映射,证明$\mathbf{R}$中最多只有两个点的f原象为非空的可数集.

证:因为$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$为连续映射,又$\mathbf{R}^2$为连通空间,所以$f(\mathbf{R}^2)$为连通空间.

若$f(\mathbf{R}^2)$为单点集,则结论显然成立.

若$f(\mathbf{R}^2)$至少含有两点,则$f(\mathbf{R}^2)$为$\mathbf{R}$中的区间,记为E,因此f可能在区间E的两端点上的原象为非空可数集,否则,若存在$e\in E^0$使$f^{-1}(e)$为非空可数集,由习题2.4的结论,$\mathbf{R}^2\sim f^{-1}(e)$为连通子集,从而$E-\{e\}=f(\mathbf{R}^2-f^{-1}(e))$为连通的,这是不可能的.

2.7 设$\xi:S^1\to S^1$为同胚映射,满足条件:对于任意$x\in S^1$,$\xi(\xi(x))=x$.证明:对于任一连续映射$f:S^1\to\mathbf{R}$,存在点$z\in S^1$,使得$f(z)=f(\xi(z))$.

证:令$F(z)=f(z)-f(\xi(z))$,$z\in S^1$,易见

$F:S^1\to\mathbf{R}$为连续映射

取点$z_0\in S^1$,若$F(z_0)=0$,则结论已真,若$F(z_0)\neq 0$,不妨设$F(z_0)>0$,由ξ的定义$\xi(z_0)\in S^1$且

$F(\xi(z_0))=f(\xi(z_0))-f(\xi(\xi(z_0)))=f(\xi(z_0))-f(z_0)=-F(z_0)<0$

据定理4.2.3及S^1的连通性存在$z\in S^1$,使$F(z)=0$,即$f(z)=f(\xi(z))$

§4.3 连通分支

3.1 设x,y为拓扑空间X中连通的两点,证明:对于任一X的既开又闭的子集A,或者x,y都属于A,或者x,y都不属于A.(逆命题不成立,见下题.)

证:因为x,y为X中连通的两点,则存在X的包含x,y的连通子集B,由于A是X中既开又闭的子集,据习题1.6结论$B\cap A=\varnothing$或者$B\subset A$,所以x,y都不属于A或者x,y都属于A.

3.2 在欧氏平面$\mathbf{R}^2$中令

$$Y_n=\{1/n\}\times[0,1],\qquad n=1,2,\cdots$$
$$Y=(\cup_{n=1,2,\cdots}Y_n\cup\{(0,0),(0,1)\}.$$

(1) 单点集$\{(0,0)\}$,$\{(0,1)\}$都是Y的连通分支.(因为这两点不连通).

(2) 若A是Y中既开又闭的子集,则或者$(0,0)$,$(0,1)$两点都属于A,或者都不属于A.

证:(1) 设Y包含点$(0,0)$的连通分支为A,若某个Y_n中有A的点,取无理数α,使$0<\alpha n<1$,则$((-\infty,\alpha)\times\mathbf{R}\cap A$,$((\alpha,+\infty)\times\mathbf{R}\cap A$是$A$的互补的非空开集,这与$A$的连通性不合,故$A\subset\{(0,0),(0,1)\}$,但后者作为$\mathbf{R}^2$的子空间是离散的,即$(0,1)\notin A$,$A=\{(0,0)\}$.

同理可证:$\{(0,1)\}$是Y的连通分支.

(2) 设A是Y中既开又闭的子集,若$(0,0)\in A$,则有$\mathbf{R}^2$球形邻域$B=B((0,0),\varepsilon)$,使$B\cap A\subset A$,故有$N\in\mathbf{N}$,使当$n>N$时,$Y_n\cap A\neq\varnothing$,由Y_n的连通性及A与$Y\sim A$的隔离性得$Y_n\subset A$,故$\cup_{n\in\{N+1,\cdots\}}Y_n\subset A$,$(0,1)\in\boldsymbol{c}(\cup_{n\in\{N+1,\cdots\}}Y_n)\subset\boldsymbol{c}(A)=A$.

同理可证,若$(0,1)\in A$,则$(0,0)\in A$,因此,$(0,0)$,$(0,1)$或者皆属于A,或者皆不属于A.

3.3 证明拓扑空间中任一既开又闭的连通子集都是连通分支.

证:设A为拓扑空间X中既开又闭的连通子集,C为$x\in A$的连通分支,则$C\supset A$,由习题1.6的结论$C\subset A$,所以$C=A$,即A为X的连通分支.

3.4 若一拓扑空间仅有有限个连通分支.证明每一连通分支都是既开又闭的集合.

证:设拓扑空间X仅有有限个连通分支,记为:$C_1,C_2,\cdots,C_n$,则$C_i(i=1,\cdots,n)$为闭集,且$C_i\cap C_j=\varnothing$,$i\neq j$,$X=\cup_{i=1}C_i$,所以$C_j=X\sim\cup_{i\neq j=1}C_i^n$,$j=1,2,\cdots,n$.又$\cup_{j\neq i=1}C_i$为闭集,故$C_j$为开集,

$j = 1,2,\cdots,n$. 因此 X 的每一连通分支都是既开又闭的集合.

3.5　若拓扑空间 X 的子集 E 为 X 的开集 G 的连通分支,证明 $b(E) \subset b(G)$.

证:因为 E 为 X 的子集 G 的连通分支,所以 E 为 G 的闭子集,即 $E = \boldsymbol{c}_G(E) = \boldsymbol{c}(E) \cap G$,又 E 为 X 的开子集,故 $b(E) = \boldsymbol{c}_G(E) \cap \boldsymbol{c}_G(\sim E) = \boldsymbol{c}(E) \cap [G \cap \boldsymbol{c}(\sim E)] \subset \boldsymbol{c}(E) \cap (\sim G) \subset \boldsymbol{c}(G) \cap \boldsymbol{c}(\sim G) = b(G)$

3.6　若 G 为拓扑空间 X 的连通开集. 证明 G 为 $\sim b(G)$ 的连通分支.

证:因为 G 为 X 的连通开集,所以 $\boldsymbol{c}(\sim G) = \sim G$,又 $\sim b(G) = (\sim \boldsymbol{c}(G)) \cup (\sim \boldsymbol{c}(\sim G)) = (\sim \boldsymbol{c}(G)) \cup G$,而$(\sim \boldsymbol{c}(G)) \cap G = \varnothing$,故 G 为 $\sim b(G)$ 中既开又闭的连通子集.

根据习题3.3结论:G 为 $\sim b(G)$ 的连通分支.

3.7　设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 分别记 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 在拓扑空间 X 和 Y 中所属的连通分支为 $C(x)$ 和 $D(y)$. 设 $f: X \to Y$ 为连续映射. 定义映射

$$\tilde{f}: \{C(x) \mid x \in X\} \to \{D(y) \mid y \in Y\}$$

使得对于 $x \in X$, $\tilde{f}(C(x)) = D(f(x))$. 证明:

(1) 映射 $\tilde{f}$ 的定义是合理的, 即如果 $x_1, x_2 \in X$, 使得 $C(x_1) = C(x_2)$, 则 $D(f(x_1)) = D(f(x_2))$;

(2) 如果 f 是一个同胚,则 $\tilde{f}$ 是一个一一映射.

证:(1) 任意 $x' \in C(x)$,既 x' 与 x 连通. 因 f 为连续映射,所以 $f(x')$ 与 $f(x)$ 连通,即 $D(f(x')) = D(f(x))$,所以 $\tilde{f}$ 是定义合理的映射.

(2) 当 f 为同胚时,设 $x' \in X \sim C(x)$,则 $f(x') \notin D(f(x))$. 若 $f(x') \in D(f(x))$. 由于 f^{-1} 连续,则 $x' \in C(x)$,矛盾. 所以当 $C(x) \neq C(x')$ 时,$D(f(x)) \neq D(f(x'))$,即 $\tilde{f}$ 是一一映射.

3.8　证明欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的子空间 $\{(x,0): x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0,y): y \in \mathbf{R}\}$ 不同胚于 $\mathbf{R}$.

证:设 $Y = \{(x,0): x \in \mathbf{R}\} \cup \{(0,y): y \in \mathbf{R}\}$,若 Y 同胚于 $\mathbf{R}$,则存在 $r \in \mathbf{R}$,使得 $Y \sim \{(0,0)\}$ 同胚于 $\mathbf{R} \sim \{r\}$,但 $Y \sim \{(0,0)\}$ 有四个连通分支,而 $\mathbf{R} \sim \{r\}$ 有二个连通分支,根据习题7知这是不可能的,故 Y 不同胚于 $\mathbf{R}$.

§4.4　局部连通空间

4.1　证明拓扑空间 X 是局部连通的当且仅当对于 X 的每一点 x 以及 x 的每一邻域 U,U 的包含 x 的连通分支都是 x 的邻域.

证:必要性由定理4.4.1得证,下证充分性.

取 U 为 X 的任意开子集,E 为其任一连通分支,对每一点 $x \in E$,$U \in \mathscr{U}_x$,且 E 是 U 的包含 x 的连通分支,从而 $E \in \mathscr{U}_x$,即 E 是开集,由定理4.4.1,x 是局部连通的.

4.2　证明:任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间.

证:(1) 设$(X,\mathscr{T})$ 是有限补空间.

(i) 若 X 为有限集,则 X 的任一子集均为开集,$(X,\mathscr{T})$ 为离散空间,显然是局部连通空间.

(ii) 若 X 为无限集,对任何 $A \in \mathscr{T}$,则 A 为 X 的无限子集. 若 A 不连通则存在 X 中的两个非空隔离子集 C 和 B,使 $A = C \cup B$,此时$(C \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) = \varnothing$.

由 A 为无限集得 B,C 至少有一个为无限集,不妨设 B 为无限集. 根据 §2.4习题1(1)结果 $\overline{B} = X$ 与 $C \cap \overline{B} = \varnothing$ 矛盾. 于是 A 为连通集,对任何 $x \in X$,x 的任一开邻域均连通,所以 X 是局部连通

空间.

(2) 设$(X,\mathscr{T})$ 是可数补空间.

(i) 若 X 为可数集,则 X 的任一子集均为开集,$(X,\mathscr{T})$ 为离散空间,显然是局部连通空间.

(ii) 若 X 为不可数集,对任何 $A\in\mathscr{T}$,则 A 为 X 的不可数子集. 若 A 不连通则存在 X 中的两个非空隔离子集 C 和 B,使 $A=C\cup B$,则 B,C 至少有一个为不可数集,不妨设 B 为不可数集. 根据 §2.4 习题 1(2) 结果 $\overline{B}=X$ 与 $C\cap\overline{B}=\varnothing$ 矛盾. 于是 A 为连通集,所以 X 是局部连通空间.

4.3 证明:局部连通空间的任何一个开集作为空间是一个局部连通空间.

证:设 A 为局部连通空间 X 的开子集,U 为 A 中任一开集,则 U 也是 X 的开集,设 C 为 U 的连通分支,由定理 4.4.1,C 为 U 的开集,再由定理 4.4.1,A 为局部连通空间.

§4.5 道路连通空间

5.1 证明实数空间 $\mathbf{R}$ 的子集 A 是道路连通的当且仅当 A 是连通的.

证:因 $A\subset\mathbf{R}$,A 是道路连通的,根据定理 4.5.1 知 A 是连通的,反之,若 A 是连通的,当 A 是单点集时,显然 A 是道路连通的,当 A 不是单点集时,则 A 是区间,从而是道路连通的.

5.2 证明 n 维单位球 S^n 是道路连通的. $(n\geqslant 1)$

证:任意 $x,y\in S^n$,则存在 $z\in S^n$,使 $x,y\in S^n\sim z$,又 $S^n\sim z$ 与 $\mathbf{R}$ 同胚,且 $\mathbf{R}$ 为道路连通空间,所以 $S^n\sim z$ 为道路连通的. 因此 x,y 为道路连通的. 从而 S^n 是道路连通的.

5.3 证明:例 4.4.1 中的拓扑空间 S_1 不是道路连通空间.

证:为证明 S_1 不是道路连通的,任取点 $a\in T$. 我们证明不可能有 S_1 中的道路,以 a 为起点,以 S 中的点为终点. 设 $u:I\to S_1$ 是以 a 为起点的道路. 因 T 是 S_1 的闭集,$u^{-1}(T)$ 也是 I 中的闭集,且 $u^{-1}(T)\neq\varnothing$. 根据 I 的连通性,只要证明 $u^{-1}(T)$ 也是 I 的开集,就有 $u(I)\subset T$. 现设 $t\in u^{-1}(T)$,根据 u 的连续性,存在正数 ε,使得 $u(<t-\varepsilon,t+\varepsilon>\cap I)\subset B(u(t),\frac{1}{4})\cap S_1$,其中 $B(u(t),\frac{1}{4})$ 是 E^2 内点 $u(t)$ 的$\frac{1}{4}$－邻域. 令 D 是 E^2 内的闭圆盘$\overline{B(u(t),\frac{1}{4})}$,则 $D\cap S_1=(D\cap T)\cup(D\cap S)$ 由 y 轴上一个区间 $D\cap T$ 与曲线 $Y=\sin\frac{\pi}{x}$ 上的一些小段 L_i 组成,这每一小段 L_i 同胚于一个区间,在 $D\cap S_1$ 中是既开又闭的连通子集,从而是 $D\cap S_1$ 的连通分支. 于是,$D\cap T=(D\cap S_1)-(\bigcup\limits_i L_i)$ 也是 $D\cap S_1$ 的连通分支. 因 $<t-\varepsilon,t+\varepsilon>\cap I$ 是连通的,且 $u(t)\in D\cap T$,我们得到 $u(<t-\varepsilon,t+\varepsilon>\cap I)\subset D\cap T\subset T$,即 t 的邻域 $<t-\varepsilon,t+\varepsilon>\cap I\subset u^{-1}(T)$. 由此推出,$t$ 是 $u^{-1}(T)$ 的内点,$u^{-1}(T)$ 是 I 的开集. 也就证明了 S_1 不是道路连通的.

另证:假设 S_1 是道路连通的,则对点$(0,0)$ 和点$(1,\sin 1)$ 存在道路 $f:[0,1]\to S_1$,使得 $f(0)=(0,0)$ 和 $f(1)=(1,\sin 1)$. 我们注意到,$\{f(t):0<t\leqslant 1\}=\{(x,\sin\frac{1}{x}):0<x\leqslant 1\}$,但 $\lim\sin\frac{1}{x}$ 不存在,故 $f(0)$ 不存在,与 $f(0)=(0,0)$ 矛盾.

5.4 设 X 为拓扑空间. $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 为 X 的道路连通子集族,满足条件:对于任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$,存在 Γ 中有限个元素 $\gamma_1=\alpha,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\gamma_{n+1}=\beta$ 使得

$$Y_{\gamma_i}\cap Y_{\gamma_{i+1}}\neq\varnothing,i=1,2,\cdots,n$$

证明 $\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 为道路连通子集.

证:先证"Y_1,Y_2 道路连通,$Y_1\cap Y_2\neq\varnothing$ 则 $Y_1\cup Y_2$ 为道路连通". 任意 $x,y\in Y_1\cup Y_2$,若 x,y

$\in Y_1$,或 $x,y \in Y_2$, x,y 是道路连通的,若 $x \in Y_1, y \in Y_2$,取 $z \in Y_1 \cap Y_2$,则存在连续映射 $f_i:[0,1] \to Y_i$,使得 $f_1(0) = x, f_1(1) = z = f_2(0), f_2(1) = y$,定义 $f:[0,1] \to Y_1 \cup Y_2$,使

$$f(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ f_2(2t-1) & 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

易满足 f 是连续映射,且以 x,y 为起终点,由 x,y 的任意性知 $Y_1 \cup Y_2$ 为道路连通.

5.5 拓扑空间 X 称为局部道路连通的,如果对任一 $x \in X$ 以及 x 的任一邻域 U_x,存在着 x 的道路连通邻域 V_x 包含于 U_x. 拓扑空间 X 的子集 A 称为局部道路连通子集,若 A 作为 X 的子空间是局部道路连通空间. 证明:

(1) 每一局部道路连通空间都是局部连通空间.

(2) 若 X 为局部道路连通空间, $f:X \to Y$ 为连续开映射,则 $f(X)$ 为局部道路连通空间.

(3) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为局部道路连通空间,则积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 为局部道路连通空间.

(4) 局部道路连通空间 X 中开集 A 为道路连通子集,当且仅当 A 为连通子集.

证:(1) 因道路连通子集也是连通子集,所以每一局部道路连通空间为局部连通空间.

(2) 设 $y \in f(X)$,则存在 $x \in X$,使 $f(x) = y$,对任意的 $U \in \mathscr{U}_y \mid f(x)$,因为 $f:X \to Y$ 为连续映射,所以 $f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域,又 X 为局部道路连通空间,存在 x 的道路连通邻域 $V \subset f^{-1}(U)$,而 f 为连续开映射,所以 $f(V) \subset f(f^{-1}(U)) = U$,为 y 在 $f(X)$ 中的道路连通邻域,即 $f(X)$ 为局部道路连通空间.

(3) 先证明如下命题:拓扑空间 X 为局部道路连通空间当且仅当 X 有基,其每一成员是道路连通的.

事实上,设 X 为局部道路连通空间, U 为 X 中任意开集, C 为 U 中的连通分支.

对任意的 $x \in C$,存在 x 的道路连通邻域 $V \subset U$,则 $V \subset C$,即 C 为 U 中的开集,也为 X 的开集,所以 X 的任一开集的任一道路连通分支亦为开集.

因为 U 为其所有道路连通分支之并,而道路连通分支是道路连通的,所以 X 中所有开集的所有道路连通分支组成的集族是 X 的一个基,且其每一成员是道路连通的.

反之,设 $\mathscr{B}$ 为 X 的基,其每一成员是道路连通的,则

$$\mathscr{B}_x = \{B \in \mathscr{B}: x \in B\}$$

为 X 的局部基,其每一成员是道路连通的,所以 X 是局部道路连通空间.

再证(3),由(2) 知局部连通性为拓扑不变性,仅需证明:若 X_1, X_2 为局部道路连通空间,则 $X_1 \times X_2$ 为局部道路连通空间.

设 X_1, X_2 为局部道路连通空间,由上述命题,则存在 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$,分别为 X_1, X_2 的基,其每一成员是道路连通的,记

$$\mathscr{B} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2\}$$

由定理 3.2.4 知 $\mathscr{B}$ 为 $X_1 \times X_2$ 的基,且由本章定理 4.5.3 知 $\mathscr{B}$ 的每一成员均是道路连通的. 再由上命题, $X_1 \times X_2$ 是局部道路连通的.

(4) 设 A 为局部道路连通空间 X 中的开集,若 A 连通子集,由(3) 中命题知 A 的道路连通分支均为开集,因为 A 为其所有道路连通分支之并,若 A 的道路连通分支多于一个,这于 A 为连通子集矛盾. 所以 A 只有一个道路连通分支,从而 A 是道路连通子集.

反之,若 A 为道路连通子集,则 A 为连通子集.

5.6 设 X,Y 为拓扑空间, $\mathscr{A}$ 为 X 的开集族并且 $\cup_{A \in \mathscr{A}} A = X$. 证明:映射 $f:X \to Y$ 为连续映射当且仅当对于任意 $A \in \mathscr{A}$, $f \mid A : A \to Y$ 为连续映射.

证：设 $f:X \to Y$ 为连续映射，则由第3章习题1.7结论，对任意 $A \in \mathscr{A}$，$f|A:A \to Y$ 为连续映射. 反之，设对任意 $A \in \mathscr{A}$，$f|A:A \to Y$ 为连续映射，对 Y 中任一开集 U，$(f|A)^{-1}(U)$ 为 A 中开集，从而也是 X 中开集.

因为 $(f|A)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$，所以 $f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U) \cap (\cup_{A \in \mathscr{A}} A) = \cup_{A \in \mathscr{A}}(f^{-1}(U) \cap A) = \cup_{A \in \mathscr{A}}(f|A)^{-1}(U)$ 为 X 中开集，故 $f:X \to Y$ 为连续映射.

第 5 章　有关可数性的公理

§5.1　第一与第二可数性公理

1.1　设 A 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子空间. 给出 A 的一个具体的可数基.

解:$\mathscr{B}=\{(a_{11},a_{12})\times\cdots\times(a_{n1},a_{n2})\mid a_{ij}$ 为有理数,$i=1,\cdots,n,j=1,2\}$,因为$A_i=\{(a_{i1},a_{i2})\mid a_{ij}\in\mathbf{Q},j=1,2\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的基,$i=1,\cdots,n$,所以由定理3.2.4 得 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 基.

1.2　证明:一个拓扑空间 X 满足第二可数性公理当且仅当它有一个可数的子基.

证:设 X 满足第二可数性公理,则 X 有一可数基 $\mathscr{B}$,记 $\mathscr{B}'=\{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n:B_i\in\mathscr{B},i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbf{N}\}$,由 §2.6 习题 1 结论,$\mathscr{B},\mathscr{B}'$ 为 X 的同一拓扑基,所以 $\mathscr{B}$ 为 X 的可数子基 $\mathscr{S}$.

因为可数集所有有限子集所成的集族为可数集,所以由以子基 $\mathscr{S}$ 构成的基 $\mathscr{B}'$ 是可数的,即 X 满足第二可数性公理.

1.3*　证明:满足第二可数性公理的空间的每一个基都包含着这个空间的一个可数基.

证:设 $\mathscr{B}$ 为满足第二可数性公理的拓扑空间 X 的基,而 $\mathscr{B}_1$ 是 X 的一个可数基,于是

对任意的 $B_1\in\mathscr{B}$,存在 $\mathscr{B}_{B_1}\subset\mathscr{B}$,使 $B_1=\cup_{B\in\mathscr{B}_{B_1}}B$　　　(1)

对任意的 $B\in\mathscr{B}_{B_1}$,存在 $\mathscr{B}_{1B}\subset\mathscr{B}_1$,使 $B=\cup_{N\in\mathscr{B}_{1B}}N$　　　(2)

令 $\mathscr{A}=\cup_{B\in\mathscr{B}_{B_1}}\mathscr{B}_{1,B}$,则 $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}_1$,从而 $\mathscr{A}$ 可数且

$$B_1=\cup_{B\in\mathscr{B}_{B_1}}B=\cup_{B\in\mathscr{B}_{B_1}}(\cup_{w\in\mathscr{B}_{1B}}w)=\cup_{w\in\mathscr{A}}w \tag{3}$$

据(2),对每个 $w\in\mathscr{A}$,可选取一个 $B_w\in\mathscr{B}_{B_1}$,使 $w\subset B_w$,令 $\mathscr{B}^*_{B_1}=\{B_w:w\in\mathscr{A}\}$,则易见 $\mathscr{B}^*_B$ 可数,且

$$B_1=\cup_{w\in\mathscr{A}}w\subset\cup_{B_w\in\mathscr{B}^*_{B_1}}B_w\subset\cup_{B\in\mathscr{B}_{B_1}}B=B_1 \tag{4}$$

令 $\mathscr{B}_*=\cup_{B_1\in\mathscr{B}_1}\mathscr{B}_{B_1}$〔,则 $\mathscr{B}_*$ 是可数个可数族之并,因而可数,且显然 $\mathscr{B}_*\subset\mathscr{B}$.

据(4) 及 §2.6 习题 1 的结果,$\mathscr{B}_*$ 是 $\mathscr{B}$ 所包含的一个可数基.

1.4　证明:满足第二可数性公理的空间中每一个由两两无交的开集构成的子集都是可数族.

证:设 $\mathscr{A}$ 为满足第二可数性公理的拓扑空间 X 的两个无交的开集族,$\mathscr{B}$ 为 X 的一个可数基.

若 $\mathscr{A}$ 不可数,因对于 $\mathscr{A}$ 中任一非空开集 A,都存在 $\mathscr{B}$ 中一个非空成员 $B_A\subset A$,而 $\mathscr{A}$ 中成员两两无交,则 $\{B_A:A\in\mathscr{A}\}$ 也是 $\mathscr{B}$ 中两两无交的开集族,因而也是不可数的,这与 $\mathscr{B}$ 为可数基矛盾. 所以 $\mathscr{A}$ 是可数集族.

1.5　证明:对于实数下限拓扑空间 $\mathbf{R}_l$,有

(1) $\mathbf{R}_l$ 满足第一可数性公理;

(2) $\mathbf{R}_l$ 不满足第二可数性公理.

证:(1) 对任意的 $x\in\mathbf{R}_l$,令 $\mathscr{V}_x=\{(x,1/n):n\in\mathbf{N}\}$,则易见 $\mathscr{V}_x$ 为 x 的可数局部基.

(2) 设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}_l$ 的任一个基,由下限拓扑的定义,对于每个 $x\in\mathbf{R}_l$,可选取 $B_x\in\mathscr{B}$,使 $x\in B_x\subset[x,x+1)$,于是,$\mathscr{A}=\{B_x:x\in\mathbf{R}_l\}\subset\mathscr{B}$,且当 $x,y\in\mathbf{R}_l,x\neq y$ 时,$B_x\neq B_y$,故由 $\mathbf{R}_l$ 不可数知 $\mathscr{B}$ 为不可数族.

1.6　设 A 是一个满足第一可数性公理的空间,$A\subset X$. 证明:A 是一个开子集当且仅当对于 X 中的任何一个序列 $\{x_i\}$,只要 $\lim_{i\to\infty}x_i=x\in A$,则存在 $N>0$ 使得当 $i\geqslant N$ 时有 $x_i\in A$.

证:充分性,对任意的 $x\in A$,因 X 满足第一可数性公理,故可取 x 的可数局部基 $\{V_1,V_2,\cdots\}$,使

$V_1 \supset V_2 \supset \cdots$. 若 $A \notin \mathscr{U}_x$,则 $V_n \cap (\sim A) \neq \varnothing, n = 1,2,\cdots$. 设 $x_n \in V_n \cap (\sim A)$,则 $\lim_{i\to\infty} x_i = x \in A, x_i \notin A$,这与本题条件矛盾.

所以对任一 $x \in A$,都有 $A \in \mathscr{U}_x$,即 A 为 X 的开集.

必要性:设 A 为 X 的开集,$\{x_i\}$ 为 X 中任一序列,若 $\lim_{i\to\infty} x_i = x \in A$,则 A 为 x 的开邻域,故存在 $N > 0$ 使得当 $i \geqslant N$ 时,$x_i \in A$.

1.7　补足定理 5.1.4,5.1.5,5.1.6 中关于第一可数性公理情形的证明.

证:(1) 定理 5.1.4 中关于第一可数性公理情形的证明.

设 $f: X \to Y$ 为以满足第一可数性公理的拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 满的连续开映射.

对任意的 $y \in Y$,存在 $x \in X$,使得 $f(x) = y$,设 $\mathscr{V}_x$ 为 x 的可数局部基,令 $\mathscr{V}_y = \{f(V): V \in \mathscr{V}_x, y = f(x)\}$,因为 f 为开映射,则 $\mathscr{V}_y$ 为 Y 中邻域族,且 $\mathscr{V}_y$ 中每一成员都包含 y.

若 U 为 y 的邻域,由 f 为连续映射,则 $f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域,故存在 $V \subset \mathscr{V}_x$,使 $V \in f^{-1}(U)$.

因为 f 为在上的映射,所以 $f(V) \subset f(f^{-1}(U)) = U$. 又 $f(V) \in \mathscr{V}_y$,所以 $\mathscr{V}_y$ 为 y 的局部基. 定义映射 $\mathscr{F}: \mathscr{V}_x \to \mathscr{V}_y$,使得对于任意 $V \in \mathscr{V}_x$,有

$$\mathscr{F}(V) = f(V) \in \mathscr{V}_y$$

显然 $\mathscr{F}$ 为在上的映射,因 $\mathscr{V}_x$ 可数,根据第一章定理 7.9 知 $\mathscr{V}_y$ 可数,所以 Y 满足第一可数公理.

(*) 其实设 $A \subset Z$ 可数 $\overline{A} = X$,则 $\overline{f(A)} = f(\overline{A}) = f(X) = Y$,知 $f(A)$ 可数且 $\overline{f(A)} = Y$,所以 Y 是 C_I 的.

(2) 定理 5.1.5 关于第一可数性公理情形的证明.

设 Y 为满足第一可数性公理的拓扑空间 X 的任一子空间.

对任意的 $x \in Y \subset X$,则存在 x 在 X 中的可数局部基 $\mathscr{V}_x$. 据第二章定理 8.10,$\mathscr{V}_x | Y$ 为 x 在 Y 中的局部基,定义映射 $f: \mathscr{V}_x \to \mathscr{V}_x | Y$ 使得对于任意的 $V \in \mathscr{V}_x, f(V) = V \cap Y$,则 f 为在上的映射. 由 $\mathscr{V}_x$ 可数知 $\mathscr{V}_x | Y$ 也可数,所以 Y 满足第一可数性公理.

(3) 定理 5.1.6 中关于第一可数性公理情形的证明.

由(1) 知第一可数性公理是拓扑不变性,据第三章说明 1.14,只需证明:若 X_1, X_2 为满足第一可数性公理空间,则积空间 $X_1 \times X_2$ 满足第一可数性公理.

设 $X_1 \times X_2$ 为满足第一可数性公理的空间,$x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$,则存在 $\mathscr{V}_{x_1}, \mathscr{V}_{x_2}$ 分别为 x_1, x_2 在 X_1, X_2 中的可数局部基.

设 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 依次为 X_1, X_2 的基,$\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系,置 $\mathscr{V}_x = \{V_1 \times V_2: V_1 \in \mathscr{V}_{x_1}, V_2 \in \mathscr{V}_{x_2}\}$,则对 $V_1 \times V_2 \in \mathscr{V}_x$,因 V_i 是 x_i 的邻域,故有 $B_i \in \mathscr{B}_i$,使 $x_i \in B_i \subset V_i, i = 1,2$,从而 $x \in B_1 \times B_2 \subset V_1 \times V_2$,据 Ⅱ 定理 9.3,$V_1 \times V_2$ 是 $X_1 \times X_2$ 的开集,故

$$\mathscr{V}_x \subset \mathscr{U}_x$$

又对 $V \in \mathscr{U}_x$,由 Ⅱ 定理 9.3 有 $B'_1 \in \mathscr{B}_1, B'_2 \in \mathscr{B}_2$ 使得 $x \in B'_1 \times B'_2 \subset V$,因 $\mathscr{V}_{x_i}$ 是 x_i 的局部基,故有 $V'_i \in \mathscr{V}_{x_i}$,使 $x_i \in V'_i \subset B'_i, i = 1,2$.

从而 $x \in V'_1 \times V'_2 \subset V$,所以 $\mathscr{V}_x$ 是 x 的局部基,$\mathscr{V}_x$ 的可数性由 $\mathscr{V}_{x_i}$ 的可数性即可得,因而 $X_1 \times X_2$ 满足第一可数性公理. 所以 $\mathscr{V}_x$ 为 x 的可数局部基,故 $X_1 \times X_2$ 满足第一可数性公理.

1.8　证明 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所有有理点(每一坐标都是有理数的点)为中心,以 r 有理数为半径的球形邻域构成的集族为 $\mathbf{R}^n$ 的可数基.

证:令 $\mathscr{B} = \{B(x, r): 0 < r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$,易见其为可数族,设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一开集,则对任一 $x \in U$,存在 $\varepsilon > 0$,使 $B(x, \varepsilon) \subset U$.

显然 $B(x,\varepsilon/3)\cap\mathbf{Q}^n\neq\varnothing$,(见 Ⅱ §3,ex.4,Ⅱ §9,ex.4),取 $z\in B(x,\varepsilon/3)\cap\mathbf{Q}^n$,$r\in\mathbf{Q}$,且 $\varepsilon/3<r<\varepsilon/2$,显然 $x\in B(z,r)\in\mathscr{B}$,且 $B(z,r)\subset B(x,\varepsilon)\subset U$,由 Ⅱ 定理5.3,$\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的基,所以 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的可数基.

§5.2 可分空间

2.1 试将定理5.2.1中的实数空间 $\mathbf{R}$ 改为任何一个度量空间,然后证明相应的结论.

命题:设 D 为拓扑空间 X 的稠密子集,(Y,ρ) 为度量空间,$f,g:X\to Y$ 为连续映射,如果 $f|D=g|D$,则 $f=g$.

证:设 $f|D=g|D$,若 $f\neq g$,即存在 $x\in X\sim D$ 使得 $f(x)=g(x)$,令 $\varepsilon=\rho(f(x),g(x))$,$V_1=B(f(x),\varepsilon/2)$,$V_2=B(g(x),\varepsilon/2)$,则 $V_1\cap V_2=\varnothing$. 因 f,g 都是连续映射,所以 $f^{-1}(V_1)$,$g^{-1}(V_2)$ 都为 x 的邻域,从而:$f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)$ 为 x 的邻域.

又 $\boldsymbol{c}(D)=X$,所以 $(f^{-1}(V_1)g^{-1}(V_2))\cap D\neq\varnothing$. 设 $y\in f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)\cap D$,因为 $f|D=g|D$,所以 $f(y)=g(y)$,且 $f(y)\in V_1$,$g(y)\in V_2$,这与 $V_1\cap V_2=\varnothing$ 矛盾. 所以 $f=g$.

2.2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续映射,满足条件:对于任何 $x,y\in\mathbf{R}$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,证明:存在 $a\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x)=ax$ 对于任何 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

证:因为对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,取 $y=-x$,所以 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$,即 $f(-x)=-f(x)$. 因为 $f(n)=f(n-1)+f(1)=\cdots=nf(1)$,$f(1)=f(n/n)=nf(1/n)$,即 $f(1/n)=1/nf(1)$. 又对 $\mathbf{Q}$ 中任意的 x,则 x 可写成既约分数 p/q,p,q 均为整数,$q>0$. 所以 $f(x)=f(p/q)=p/qf(1)=xf(1)$. 记 $f(1)$ 为 a,定义 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 $g(x)=ax$,则易见 g 连续且 $f|\mathbf{Q}=g|\mathbf{Q}$,据 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中的稠密性,f 的连续性及定理5.2.1题断真.

2.3 证明:

(1) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是实数空间 $\mathbf{R}$ 中的一个可数稠密子集;

(2) n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中全体有理点(即每一个坐标都是有理数的点)构成的集合是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的一个可数稠密子集.

证:(1) 见 §2.4 习题1(3) 的解法.

(2) 设 $\mathbf{Q}^n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中全体有理点组成集合,则 $\mathbf{Q}^n$ 为可数集. 据(1) 及 §3.2 习题4(1) 结果,$C_{\mathbf{R}^n}(\mathbf{Q}^n)=C_{\mathbf{R}}(\mathbf{Q})\times\cdots\times C_{\mathbf{R}}(\mathbf{Q})$,(2) 得证.

2.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明:如果 X 是一个可分空间. 则 $f(X)$ 也是可分的.(这说明可分性是一个连续映射所保持的性质,并且由此可见,它是一个拓扑不变性质,可商性质.)

证:设 D 为 X 的可数稠密子集,$f(D)$ 可数,由 f 的连续性及定理2.4.10(3). $Y=f(X)=f(c(D))\subset c(f(D))$,故 $f(D)$ 是 Y 的稠密子集.

综上,Y 是可分空间.

由本题结果,可分性经过同胚映射保持不变,即,可分性为拓扑不变性.

2.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant1$ 个可分空间. 证明积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是一个可分空间.(也就是说,可分性是有限可积性质.)

证:因为可分性为拓扑不变性,只需证明:若 X_1,X_2 为可分空间,则积空间 $X_1\times X_2$ 为可分空间.

设 X_1,X_2 为可分空间,D_1,D_2 分别为 X_1,X_2 的可数稠密子集,则 $D_1\times D_2$ 为 $X_1\times X_2$ 的可数子集,且 $C_{X_1}(D_1)=X_1$,$C_{X_2}(D_2)=X_2$,由 §3.2 习题4(1) 结论:$C_{X_1\times X_2}(D_1\times D_2)=C_{X_1}(D_1)\times C_{X_2}(D_2)=X_1\times X_2$,所以 $D_1\times D_2$ 为 $X_1\times X_2$ 的可数稠密子集,即 $X_1\times X_2$ 为可分空间.

2.6　证明实数下限拓扑空间 $\mathbf{R}_l$ 是一个可分空间.(这也是一个不满足第二可数性公理的可分空间的例子. 参见 §5.1 习题5.)

证:因为对任意的 $a,b \in \mathbf{R}_l, a < b$,都有$[0,b) \cap \mathbf{Q} \neq \varnothing$,所以对任意的 $x \in \mathbf{R}_l, U \in \mathscr{U}_x$,都有 $U \cap \mathbf{Q} \neq \varnothing$,即 $C(\mathbf{Q}) = \mathbf{R}$,又 $\mathbf{Q}$ 为可数集,所以是 $\mathbf{R}_l$ 可分的空间.

2.7　下面命题是否正确.

满足第一可数性公理的可分空间的每一子空间都是可分的.

答:不正确. 例如:本节例1中取 X 为含有不可数多个点的离散拓扑空间,则 X 是不可分的,且对于它的每一点 x,由单点集$\{x\}$ 构成的集族为点 x 在 X 中的局部基,从而由$\{x\} \cup \{\infty\}$ 构成的集族为点 x 在 X^* 中的局部基,则$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 满足第一可数性公理.

由例1的结论知,$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为可分的空间,且$(X,\mathscr{T})$ 为$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 的子空间,即$(X,\mathscr{T})$ 为满足第一可数性公理的可分的空间的不可分的子空间.

§5.3　Lindelöf 空间

3.1　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X \to Y$ 是一个连续映射,证明:如果 X 是一个 Lindelöf 空间,则 $f((X)$ 也是一个 Lindelöf 空间.

证:设 X 为 Lindelöf 空间,$\mathscr{A}$ 为 Y 的任一开覆盖,因为 $f:X \to Y$ 为在上的连续映射,所以 $\mathscr{B} = \{f^{-1}(A):A \in \mathscr{A}\}$ 为 X 的开覆盖,故存在可数子覆盖$\{f^{-1}(A_1),f^{-1}(A_2),\cdots\}$,使

$X = \cup_{n\in\mathbf{N}} f^{-1}(A_n)$,

$Y = f(X) = f(\cup_{n\in\mathbf{N}} f^{-1}(A_n)) = \cup_{n\in\mathbf{N}} f(f^{-1}(A_n)) = \cup_{n\in\mathbf{N}} A_n$,

所以$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 为 Y 的可数开覆盖,且$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathscr{A}$,即 Y 为 Lindelöf 空间.

3.2　设 X 是一个拓扑空间,$A \subset X$. 点 $x \in A$ 称为是集合 A 的一个 $\aleph$ 凝聚点,如果 x 的每一邻域中都包含着 A 中的不可数多个点. 证明:如果 X 满足第二可数性公理,则 X 的任何不可数子集 A 中都有 A 的某一个 $\aleph$ 凝聚点.

如果将"X 满足第二可数性公理"改为"X 的每一个子空间都是 Lindelöf 空间"相应的命题是否仍然成立?

证:设 A 为满足第二可数性公理的拓扑空间 X 的不可数子集,则 A 为 Lindelöf 空间.

若 A 中无凝聚点,即对任意的 $a \in A$,存在 $U_a \in \mathscr{U}_a$,使 $U_a \cap A$ 为可数集,因为 $\mathscr{A} = \{U_a \cap A: a \in A\}$ 为 A 的开覆盖,则 $\mathscr{A}$ 有可数子覆盖,记为:$\{U_{a_1} \cap A, U_{a_2} \cap A,\cdots\}$,所以推得:$\cup_{n\in\mathbf{N}}(U_{a_n} \cap A) = A$ 为可数集,矛盾. 故 A 中必有凝聚点.

在本题的证明中,只用到了"X 的每一子空间都是 Lindelöf 空间"这个条件,因此可将本题中条件"X 满足第二可数性公理"改为:"X 的每一子空间都是 Lindelöf 空间".

3.3　设$(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,∞ 是一个不属于 X 的元素. 记 $X^* = X \cup \{\infty\}$. 令 $\mathscr{T}^*$ 是 X^* 的一个子集族,使得 $U \subset X^*$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的一个元素当且仅当或者 $U \in \mathscr{T}$,或者 $X^* \sim U \subset X$ 是 X 的闭集,并且作为 X 的子空间是一个 Lindelöf 空间. 证明.

(1) $\mathscr{T}^*$ 是 X^* 的一个拓扑;

(2) 拓扑空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是一个 Lindelöf 空间.

证:(1) 记 $\mathscr{A} = \{U:X^* \sim U$ 为 X 的闭集,且作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间$\}$,则 $\mathscr{T}^* = \mathscr{A} \cup \mathscr{T}$. 因 $\varnothing \in \mathscr{T}, X^* \in \mathscr{A}$,所以 $\varnothing, X^* \in \mathscr{T}^*$,对任意的 $U,V \in \mathscr{T}^*$,若 $U,V \in \mathscr{T}$,则 $U \cap V \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$.

若 $U \in \mathscr{T}, V \in \mathscr{A}$,易见 $V = W \cup \{\infty\}$,$W \in \mathscr{T}$,从而 $U \cap V = U \cap W \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$.

若 $U,V \in \mathscr{A}$,因 $X^* \sim (U \cap V) = (X^* \sim U) \cup (X^* \sim V)$,所以 $X^* \sim (U \cap V)$ 为 X 的闭

集,且作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间. 即 $X^* \sim (U \cap V) \in \mathscr{A} \subset \mathscr{T}^*$.

对任意的 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$,若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$,则 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$.

若 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{A}$. 因对任意的 $A \in \mathscr{T}_1$, $X^* \sim A$ 为 X 的闭集,且作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间. 又 $X^* \sim (\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A) = \cap_{A \in \mathscr{T}_1}(X^* \sim A) \subset X^* \sim A$,所以 $X^* \sim (\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A)$ 为 X 的闭集,且包含在某一 Lindelöf 空间,由定理 5.3.4 知,$X^* \sim \cup_{A \in \mathscr{T}_1} A$ 作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间. 因此 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{A} \subset \mathscr{T}^*$.

若 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2 \cup \mathscr{T}_3$,其中 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}$, $\mathscr{T}_3 \subset \mathscr{A}$,则 $B_1 = \cup_{A \in \mathscr{T}_2} A \in \mathscr{T}$, $B_2 = \cup_{A \in \mathscr{T}_3} A \in \mathscr{A}$,显然 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A = B_1 \cup B_2$. 因为 $X^* \sim (B_1 \cup B_2) = (X^* \sim B_1) \cap (X^* \sim B_2)$,所以 $X^* \sim (B_1 \cup B_2)$ 为 Lindelöf 空间 $X^* \sim B_2 \subset X$ 的闭子空间. 从而 $X^* \sim (B_1 \cup B_2)$ 作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间,即 $B_1 \cup B_2 = \cup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{A} \subset \mathscr{T}^*$. 因此$(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为拓扑空间.

(2) 设 $\mathscr{B}$ 为 X^* 的开覆盖,则存在 $B \in \mathscr{B}$,使 $\infty \in B$,由 $\mathscr{T}^*$ 的定义,$X^* \sim B$ 为 X 的闭集,且作为 X 的子空间为 Lindelöf 空间,又 $\mathscr{B} \sim \{B\}$ 为 $X^* \sim B$ 的开覆盖,故存在 $\mathscr{B} \sim \{B\}$ 的可数子覆盖,设为 $\{B_1, B_2, \cdots\}$,所以 $\mathscr{B}$ 的子族 $\{B, B_1, B_2, \cdots\}$ 为 X^* 的可数子覆盖,即 X^* 为 Lindelöf 空间.

3.4 (两个 Lindelöf 空间的积空间不为 Lindelöf 空间的例子.)

(1) 证明实数的下限拓扑空间$(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 为 Lindelöf 空间.

(2) 记$\widetilde{\mathbf{R}^2}$ 为两实数下限拓扑空间的积空间,证明$\widetilde{\mathbf{R}^2}$ 不为 Lindelöf 空间.

证:(1) 命 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{T}$的如例 2.6.1 的基.

设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}$ 的开覆盖,于是对 $m \in \mathscr{Z}$,有 $U \in \mathscr{A}$,使 $m \in U$,从而有 $x_0 \in (m, \infty)$,使$[m, x_0] \subset U$. 命 $T = \{x : x \in (m, \infty), \mathscr{A}$ 有可数子族覆盖$[m, x]\}$,据(1),$T \neq \varnothing$,若 T 上有界,令 $t = \sup T$, $x_n = t - \dfrac{t-m}{2^n}$,易见 $x_n \in T$, $n = 1, 2, \cdots$. 于是有可数族 $\mathscr{A}_n \subset \mathscr{A}$ 为$[m, x_n]$ 的开覆盖,从而 $\mathscr{E} = \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{A}_n$ 为 $\cup_{n \in \mathbf{N}}[m, x_n] = [m, t)$ 的开覆盖,取 $V \in \mathscr{A}$ 使 $t \in V$,则有 $t' \in [m, \infty)$ 使 $t' > t$,且$[t, t'] \subset V$,因而 $\mathscr{A}$ 的可数子族. $\mathscr{E} \cup \{V\}$ 是$[m, t']$ 的开覆盖,但 $t' \in T$ 且 $t' > t$,此为矛盾,故 T 上无界.

由此可知,对 $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{A}$ 有可数子族 $\mathscr{A}_n^*$ 覆盖$[-n, n]$,故 $\mathscr{A}$ 有可数子族 $= \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{A}_n^*$ 覆盖 $\mathbf{R} = \cup_{n \in \mathbf{N}}[-n, n]$.

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 的任一开覆盖,取上述的 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A} = \{A : A \in \mathscr{B}$,存在 $P \in \mathscr{B}$ 使 $A \subset P\}$,易见 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{A}$ 覆盖 $\mathbf{R}$.

由上面的结果,有可数族 $\mathscr{A}_0 = \{A_1, A_2, \cdots\}$ 覆盖了 $\mathbf{R}$. 对每一 A_n,取定 $P_n \in \mathscr{B}$,使 $A_n \subset P_n$,显然 $\mathscr{B}$ 的可数子族 $\mathscr{B}_0 = \{P_1, P_2, \cdots\}$ 覆盖了 $\mathbf{R}$. 综上,$(\mathbf{R}, \mathscr{T})$ 为 Lindelöf 空间.

(2) 记 $\mathscr{B}$ 如(1),则易见

1^0 $\widetilde{\mathscr{B}} = \{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \in \mathscr{B}\}$ 是$\widetilde{\mathbf{R}^2}$ 的基.

2^0 当$(s, t) \in \{(x, y) \in \widetilde{\mathbf{R}^2}, x + y \neq 1\} = \widetilde{\mathbf{R}^2} \sim A$ 时,$[s, s+a) \times [t, t+a) \subset \widetilde{\mathbf{R}^2} \sim A$ 是(s, t) 的开邻域,其中 $a = 1/2 \mid s + t - 1 \mid$,因而 A 是$\widetilde{\mathbf{R}^2}$ 中的闭集.

3^0 $\mathscr{A} = \{[x, x+1) \times [y, y+1) : (x, y) \in A\}$ 是 A 的一个开覆盖,$\mathscr{A}$ 不可数,且 A 包含于 $\mathscr{A}$,但不等于 $\mathscr{A}$ 的任意族 $\mathscr{A}_n$ 不是 A 的覆盖.

综上,$\widetilde{\mathbf{R}^2}$ 不是 Lindelöf 空间.

第 6 章　分离性公理

§6.1　T_0,T_1,Hausdorff 空间

1.1　证明拓扑空间 X 为 T_0 空间当且仅当对于 X 中任意不同的两点 x,y,或者 $\{x\} \cap c(\{y\}) = \varnothing$,或者 $c(\{x\}) \cap \{y\} = \varnothing$.

证:由本章定理 6.1.1:

X 为 T_0 空间 $\Leftrightarrow$ 对任意的 $x,y \in X$,若 $x \neq y$,则 $c(\{x\}) \neq c(\{y\}) \Leftrightarrow$ 对任意的 $x,y \in X$,若 $x \neq y$,则 $c(\{x\}) \sim c(\{y\}) \neq \varnothing$ 或 $c(\{y\}) \sim c(\{x\}) \neq \varnothing \Leftrightarrow$ 对任意的 $x,y \in X$,若 $x \neq y$,则 $x \notin c(\{y\})$ 或 $y \notin c(\{x\}) \Leftrightarrow$ 对任意的 $x,y \in X$,若 $x \neq y$,则 $\{x\} \cap c(\{y\}) = \varnothing$ 或 $c(\{x\}) \cap \{y\} = \varnothing$.

1.2　若 T_1 空间 X 有一个仅含有限个成员的基,则 X 为仅有有限个点的离散空间.

证:因 X 有一个仅含有限个成员的基,所以 X 只有有限个互不相同的开集,又 X 为 T_1 空间,即 X 中任一有限集均为闭集,则对任意的 $x \in X$, $\sim\{x\}$ 为 X 的开集. 所以 $\{\sim\{x\}: x \in X\}$ 为有限集族,所以 X 为有限集,据定理 6.1.2(3),X 的任意子集皆为闭集. 因此 X 中任一子集为开集,所以 X 为仅有有限个点的离散空间.

1.3　设拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 空间,∞ 为任一不属于 X 的元素. 令

$$X^* = X \cup \{\infty\}, \qquad \mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \{X^*\}$$

验证 $\mathscr{T}^*$ 为 X^* 的拓扑,并且拓扑空间 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为 T_0 而非 T_1 空间.

证:由定义,$\varnothing, X^* \in \mathscr{T}^*$,对任意的 $U,V \in \mathscr{T}^*$. 若 $U,V \in \mathscr{T}$,则 $U \cap V \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$. 若 U,V 之一为 X^*,不妨设 $U = X^*$,则 $U \cap V = V \in \mathscr{T}^*$.

对任意的 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$,若 $X^* \notin \mathscr{T}_1$,即 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$,则 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T} \subset \in \mathscr{T}^*$,若 $X^* \in \mathscr{T}_1$,则 $\cup_{A \in \mathscr{T}_1} A = X^* \in \mathscr{T}^*$,所以 $\mathscr{T}^*$ 为 X^* 的拓扑.

对任意的 $x,y \in X^*$,$x \neq y$,若 $x,y \in X$,由题设有 x 的开邻域 U 使 $U \cap \{y\} = \varnothing$,若 $y = \infty$,$x \in X$,有 $X \cap \{y\} = \varnothing$,故 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为 T_0 空间.

又因为 $c(\{\infty\}) = X^* \neq \{\infty\}$,据定理 6.1.2(2)$(X^*,\mathscr{T}^*)$ 非 T_1 空间.

1.4　证明 T_1 空间的任一子集的导集都是闭集.

证:设 X 为 T_1 空间,则对任意的 $x \in X$,$c(\{x\}) = \{x\}$. 因 $x \notin d(\{x\})$,所以 $d(\{x\}) = \varnothing$,即 X 的每一单点集的导集为闭集,由 §2.4 习题 6 知,X 的任一子集的导集都是闭集.

1.5　证明拓扑空 X 为 T_1 空间当且仅当对于 X 的每一点 x,单点集 $\{x\}$ 恰为 x 的所有邻域的交.

证:设 X 为 T_1 空间,对任意的 $x \in X$,若 $y \in X$,$y \neq x$,则存在 $U \in \mathscr{U}_x$,使 $y \notin U$,所以 $\cap_{U \in \mathscr{U}_x} U = \{x\}$.

反之,设 $x,y \in X$,$x \neq y$,恒有 $\{x\} = \cap_{U \in \mathscr{U}_x} U$,从而 $y \notin \cap_{U \in \mathscr{U}_x} U$,于是存在 $U \in \mathscr{U}_x$,使 $y \notin U$,对称地可知,有 $V \in \mathscr{U}_y$,使 $x \notin V$,所以 X 为 T_1 空间.

1.6　证明 T_1 空间中任何多于一点的有限于集都不连通.

证:设 A 为 T_1 空间 X 中多于一点的有限子集. $x \in A$ 由本章定理 6.1.2,$\{x\}$,$A \sim \{x\}$ 均为 X 中非空无交的闭集,且 $A = \{x\} \cup (A \sim \{x\})$,所以 A 不连通.

1.7　证明任意非空集合 X 都有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 满足条件:(1)$(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 空间;(2) 若 $\mathscr{T}$ 为 X 的

拓扑,且 $\mathscr{T}$ 为的真子族,则$(X,\mathscr{T})$ 不是 T_1 空间.

证:设 $\mathscr{T}$为 X 的有限补拓扑,即

$$\mathscr{T} = \{C \subset X: \sim C \text{ 为有限集}\} \cup \{\varnothing\}$$

则$(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 空间.

若 $\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑且为 $\mathscr{T}$的真子集,则存在 $C \in \mathscr{T} \sim \mathscr{T}$,易见 $C(\neq \varnothing) \subset, X$,从而 $\sim C$ 是有限集而不是$(X,\mathscr{T})$ 的闭集,故$(X,\mathscr{T})$ 有有限集不是闭集. 因而$(X,\mathscr{T})$ 不是 T_1 空间.

1.8 设 A 为 T_1 空间 X 的子集,$x \in X$. 证明:若 $A \sim \{x\}$ 中有序列 $< x_i >$ 收敛于 x,则 $A \sim \{x\}$ 中有 $< x_i >$ 的由完全不同的点所组成的子序列收敛于 x. 并举例说明,在上述命题中 T_1 不能改为 T_0.

证:设 $A \sim \{x\}$ 中有序列$\langle x_i \rangle$ 收敛于 x,由定理 2.7.2,x 为 A 的聚点.

令 $N_1 = 1$,假定 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 已取定,适合 $N_1 < N_2 < \cdots < N_k$ 且 $x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_k}$ 两两不等,因 X 为 T_1 空间,故 $X \sim \{x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots x_{N_k}\} \in \mathscr{U}_x$,从而可令 N_{k+1} 为 N 的非空子集$\{m: m > N_k$ 且 $x_m \in X \sim \{x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots x_{N_k}\}\}$ 的最小数.

由归纳法原理,如此得到$\langle x_i \rangle$ 的完全不同的点组成的子序列$\langle x_{N_i} \rangle$,据定理2.7.1,$\langle x_{N_i} \rangle$ 收敛于 x.

但上述命题中的条件 T_1 不能改为 T_0,如 $X = \{a,b\}$,$\mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a,b\}\}$,则 X 为 T_0 空间. 取 $A = \{a\}$,因 $A \sim \{b\}$ 中有序列$\langle x_i \rangle = \langle a \rangle$ 收敛于 b,但$\langle x_i \rangle$ 中没有完全不同的点所成的子序列收敛于 b.

1.9 设 $\mathscr{T}, \mathscr{T}$ 都是 X 的拓扑,并且 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}$. 证明若$(X,\mathscr{T})$ 为 T_0, T_1 或 Hausdorff 空间,则$(X,\mathscr{T})$ 相应地为 T_0, T_1 或 Hausdorff 空间.

证:设$(X,\mathscr{T})$ 为 T_0 空间,对 $x, y \in X$,不妨设有 x 的开邻域 $U_x \in \mathscr{T}$,使 $y \notin U_x$,因为 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}$,从而$(X,\mathscr{T})$ 为 T_0 空间.

同理可证,若$(X,\mathscr{T})$ 为 T_1 或 Hausdorff 空间,则$(X,\mathscr{T})$ 相应地为 T_1 或 Hausdorff 空间.

1.10 设 X 为拓扑空间,Y 为 Hausdorff 空间,$< x_i >$ 为 X 中的序列,$f: X \to Y$ 为连续映射. 证明:若 Y 中序列 $< f(x_i) >$ 收敛于 $y \in f(X)$,则序列 $< x_i >$ 的任一收敛子序列必收敛于 $f^{-1}(y)$ 中某点;若序列 $< f(x_i) >$ 收敛于 $y \notin f(X)$,则 $< x_i >$ 无收敛的子序列.

证:设 Y 中序列$\langle f(x_i) \rangle$ 收敛于 $y \in f(x)$,$\langle x_{i_k} \rangle$ 为序列$\langle x_i \rangle$ 的收敛于 $x \in X$ 的子序列. 由定理 2.7.3,2.7.1 知,$\langle f(x_i) \rangle$ 中子序列$\langle f(x_{i_k}) \rangle$ 收敛于$f(x)$ 及 y. 由本章定理6.1.5 知 $y = f(x)$,所以 $x \in f^{-1}(y)$.

设序列$\langle f(x_i) \rangle$ 收敛于 $y \notin f(x)$,若$\langle x_i \rangle$ 中有收敛的子序列,由上面证明的结论知必收敛于 $f^{-1}(y)$ 中某点,这与 $y \notin f(x)$ 矛盾. 所以$\langle x_i \rangle$ 无收敛的子序列.

1.11 设 X 为满足第一可数性公理的拓扑空间. 证明 X 为 Hausdorff 空间当且仅当 X 中每一收敛序列的极限唯一.

证:必要性的证明见定理6.1.5,下证充分性.

设 X 中每一收敛序列的极限唯一.

若 X 不为 Hausdorff 空间,即存在 $x, y \in X$, $x \neq y$,对任意的 $U \in \mathscr{U}_x$,对任意的 $V \in \mathscr{U}_x$ 都有 $U \cap V \neq \varnothing$.

因为 X 满足第一可数性公理,则分别存在 x, y 的可数局部基$\{U_1, U_2, \cdots\}$ 和$\{V_1, V_2, \cdots\}$ 满足 $U_1 \supset_2 \supset \cdots$, $V_1 \supset V_2 \supset \cdots$,取 $x_i \in U_i \cap V_i$, $i = 1,2,\cdots$,则 $\lim_i x_i = x$, $\lim_i x_i = y$,这与原假设矛盾.

1.12 证明拓扑空 X 为 Hausdorff 空间当且仅当积空间 $X \times X$ 的对角线 $\triangle = \{(x,x): x \in X\}$ 为闭集.

证:设 X 为 Hausdorff 空间. $(x,y) \in d(\triangle)$,若 $(x,y) \overline{\in} \triangle$,即 $x \neq y$,则存在 $U \in \mathscr{U}_x, V \in \mathscr{U}_y$,使 $U \cap V = \varnothing$,即 $(U \times V) \cap \triangle = \varnothing$,但 $U \times V$ 为 (x,y) 的邻域,这与 $(x,y) \in d(\triangle)$ 矛盾. 所以 $(x,y) \in \triangle$,即 $\triangle$ 为闭集.

反之,若 $\triangle$ 为闭集,则每一 $(x,y) \in X \times X \sim \triangle$ 有一邻域 C 使 $C \cap \triangle = \varnothing$,由积空间拓扑的定义,依次有 x,y 的邻域 U 及 V 使 $U \times V \subset C$,从而 $(U \times V) \cap \triangle = \varnothing$,即 $U \cap V = \varnothing$.

故 X 为 Hausdorff 空间.

§6.2 正则,正规,T_3,T_4 空间

2.1 设 X 是一个拓扑空间. 证明:X 是一个正则空间当且仅当如果 $x \in X$,A 是 X 中的一个闭集,使得 $x \notin A$,则 x 和 A 分别有开邻域 U 和 V 使得 $c(U) \cap c(V) = \varnothing$.

证:充分性是明显的,这里仅证必要性.

设 X 为正则空间,$x \notin A$,A 为不包含 x 的闭集,则存在 x 的开邻域 U_1,A 的开邻域 V,使 $U_1 \cap V = \varnothing$,即 $V \subset \sim U_1$,从而 $c(V) \subset \sim U_1$,$U_1 \subset \sim c(V)$.

所以 $\sim c(V)$ 为 x 的开邻域,由本章定理6.2.1,存在 x 的开邻域 U,使 $c(U) \subset \sim c(V)$,即 $c(U) \cap c(V) = \varnothing$.

2.2 证明拓扑空间 X 为正规空间当且仅当对于 X 的任意两个不相交的闭集 A 与 B,A,B 分别有开邻域 U,V 使得 $c(U) \cap c(V) = \varnothing$.

证:充分性显然,下证必要性.

设 X 为正规空间,A,B 为 X 中任意两个不相交的闭集,则 $\sim B$ 为 A 的开邻域. 由本章定理6.2.2 知,存在 A 的开邻域 U,使 $c(U) \subset \sim B$,从而 $B \subset \sim c(U)$.

所以 $\sim c(U)$ 为 B 的开邻域,再由定理6.2.2 知存在 B 的开邻域 V,使 $c(V) \subset \sim c(U)$,从而 $c(U) \cap c(V) = \varnothing$.

2.3 证明每一正则的 T_0 空间都是 T_3 空间.

证1:设 X 为正则的 T_0 空间,$x,y \in X, x \neq y$. 由 X 为 T_0 空间,存在 $V_1 \in \mathscr{U}_x$,$y \notin V_1$,$y \in \sim V_1$. 因 $\sim V_1$ 闭集且 $x \notin \sim V_1$,由 X 为正则空间知,存在 x, $\sim V_1$ 的开邻域 V,U 使 $V \cap U = \varnothing$,$y \in U$ 且 $y \notin V$,从而 X 为 T_1 空间,从而 X 是 T_3 空间.

证2:设 X 为正则的 T_0 空间,$x,y \in X, x \neq y$. 不妨设有 y 的开邻域 V' 及 V 使 V' 不含 x 且 $c(V) \subset V'$,于是 $\sim c(V)$ 是 x 的开邻域且其不含 y,故 X 是 T_1 空间. 因此 X 是正则的 T_1 空间,即 T_3 空间.

2.4 拓扑空间 X 称为完全正规空间,如果对于任意 X 的隔离的子集 A,B,分别有 A,B 的开邻域 U,V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 证明:拓扑空间 X 是完全正规空间当且仅当 X 的每一子空间都是正规空间.

证:设 X 是完全正规空间,Y 为 X 的任一子空间,A,B 为 Y 的任意两个不相交的闭集,则 A,B 为 Y 的隔离子集. 由定理4.1.3 的证明知 A,B 也是 X 的隔离子集,因而存在 A,B 的开邻域 U,V 使得 $U \cap V = \varnothing$. 所以 $U \cap Y, V \cap Y$ 分别为 A,B 在 Y 中不相交的开邻域.

即 Y 为正规空间.

反之,设 X 的每一子空间都是正规空间,A,B 为 X 的任意隔离子集,则

$$(A \cap C(B)) \cup (C(A) \cap B) = \varnothing$$

令 $Y = (\sim C(A)) \cup (\sim C(B)) = \sim (C(A) \cap C(B))$,则 Y 为 X 正规的开子空间.

$$\text{因为}\quad C_Y(A)=C(A)\cap Y$$
$$=C(A)\cap(\sim C(B))\supset A$$
$$C_Y(B)=C(B)\cap(\sim C(A))\supset B$$
$$\text{所以}\quad C_Y(A)\cap C_Y(B)\subset C(A)\cap(\sim C(A))=\varnothing$$

所以存在 Y 中开邻域 U,V 使

$$C_Y(A)\subset U, C_Y(B)\subset V, U\cap V=\varnothing$$

且 U,V 也是 X 中的开集.

$$A\subset C_Y(A)\subset U, B\subset C_Y(B)\subset V$$

所以 X 是完全正规空间.

2.5* 令 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2, x_2\geqslant 0\}$,

$$\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon):0<\varepsilon<x_2, x=(x_1,x_2)\in X\}\cup$$
$$\{B(x,x_2)\cup\{(x_1,0)\}:x=(x_1,x_2)\in X\}.$$

证明:

(1) $\mathscr{B}$ 是 X 的某一拓扑 $\mathscr{T}$ 的基.

(2) 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_3 空间.

(3) 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 不是正规空间. (提示:考虑集合 $A=\{(x,0)\in X:x$ 为有理数$\}$ 和 $B=\{(x,0)\in X:x$ 为无理数$\}$.)

证:(1) 设 $B_1,B_2\in\mathscr{B}, B_1\cap B_2=\varnothing$.

1^0 若 $B_i=B((x_i,y_i),\varepsilon_i), 0<\varepsilon_i<y_i, i=1,2$. 任取定 $(x_3,y_3)\in B_1\cap B_2$, 令 $\varepsilon_3=\min\{\varepsilon_i-\rho((x_i,y_i),(x_3,y_3)):i=1,2\}$, 则 $0<\varepsilon_3\leqslant\varepsilon_1-\rho((x_1,y_1),(x_3,y_3))\leqslant\varepsilon_1-|y_1-y_2|\leqslant\varepsilon_1-(y_1-y_3)=y_3+(\varepsilon_1-y_1)<y_3$. 故 $B((x_3,y_3),\varepsilon_3)$ 是 $\mathscr{B}$ 中包含在 $B_1\cap B_2$ 中的元.

2^0 若 $B_1=B((x_1,y_1),\varepsilon_1), 0<\varepsilon_1<y_1$

$B_2=B((x_2,y_2),y_2)\cup\{(x_2,0)\}, 0<y_2$

任取定 $(x_3,y_3)\in B_1\cap B_2=B((x_1,y_1),\varepsilon_1)\cap B((x_2,y_2),y_2)$, 在讨论 1^0 中令 $\varepsilon_2=y_2$, 易见 $B((x_3,y_3),\varepsilon_3)$ 是 $\mathscr{B}$ 中包含在 $B_1\cap B_2$ 中的元.

3^0 若 $B_i=B((x_i,y_i),y_i)\cup\{(x_i,0)\}, y_i>0, i=1,2$. 任取定 $(x_3,y_3)\in B_1\cap B_2$, 当 $y_3=0$ 时, $x_3=x_1=x_2$, 令 $y'_3=\min\{y_1,y_2\}$, 便有 $(x_3,y_3)\in B((x_3,y'_3),y'_3)\cup\{(x_3,0)\}\subset B_1\cap B_2$, 且 $B((x_3,y'_3),y'_3)\cup\{(x_3,0)\}\in\mathscr{B}$, 而且当 $y_3>0$ 时, 在讨论 1^0 中令 $\varepsilon_i=y_i/2, i=1,2$, 则易 $B((x_3,y_3),\varepsilon_3)$ 是 $\mathscr{B}$ 中包含于 $B_1\cap B_2$ 中的元. 又, 显然 $X=\cup_{B\in\mathscr{B}}B$, 故 $\mathscr{B}$ 是 X 的某一拓扑的基.

(2) 设 $(x_i,y_i),(i=1,2)$ 是 X 中不同的两点. 令 $\varepsilon=\min(\{1/3\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)),y_1,y_2\}\sim\{0\})$,

$$B_i=\begin{cases}B((x_i,y_i),\varepsilon), y_i>0,\\ B((x_i,\varepsilon),\varepsilon)\cup\{(x_i,0)\}, y_i=0,\end{cases}\quad i=1,2.$$

容易验证, B_i 是 $\mathscr{B}$ 中含 (x_i,y_i) 的元, 且 $B_1\cap B_2=\varnothing$. 因此 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_2 空间从而是 T_1 空间.

剩下需证 $(X,\mathscr{T})$ 是正则空间.

对任意 $(x,y)\in X$ 及含 (x,y) 的任一开邻域 U, 据(1)可取 $B\in\mathscr{B}$ 使 $(x,y)\in B\subset U$, 其中 B 等于 $B((x,y),\varepsilon), 0<\varepsilon<y$ 或 $y=0$ 且 B 等于 $B((x,,\varepsilon),\varepsilon)\cup\{(x,0)\}$

$$\text{令}\quad V=\begin{cases}B((x,y),\varepsilon/2), y>0,\\ B((x,\varepsilon/2),\varepsilon/2)\cup\{(x,0)\}, y=0,\end{cases}$$

则易见 V 是 (x,y) 的开邻域且 $C(V)\subset U$. 据定理6.2.1, $(X,\mathscr{T})$ 是正则空间.

(3) 因为 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 为 $(X,\mathscr{T})$ 的离散子空间, 若 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 正规, 则对 $A\subset\mathbf{R}\times\{0\}$, 有 $U_{A开}, V_{A开}\subset \mathbf{R}\times\{0\}$ 使

$$A\subset U_A,\ \sim A\subset V_A \text{ 且 } U_A\cap V_A=\varnothing$$

若 $A,B\subset\mathbf{R}\times\{0\}$, $A\neq B$, 不妨设 $B\sim A\neq\varnothing$, 故 $U_A\cap V_A\cap(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})=\varnothing$, 即 $U_A\cap(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\neq V_A(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})$.

定义 $f:2^{\mathbf{R}\times\{0\}}\to 2^{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}$ 为 $f(A)=U_A\cap(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})$, 则 f 为单射, 从而

$$2^{S^{S_S S}}=\overline{\overline{\mathbf{R}\times\{0\}}}=f(\overline{\overline{\mathbf{R}\times\{0\}}})\leqslant 2^{\overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}}=2^{S^{S_{S_0}S}}=S^S S^S$$

矛盾. 又 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的闭集, 故 $(X,\mathscr{T})$ 不是正规空间.

2.6　记实数集合 $\mathbf{R}$ 的通常拓扑为 $\mathscr{T}$. 令

$$\mathscr{T}_1=\{G-E\mid G\in\mathscr{T},E\subset\mathbf{Q}\}$$

证明:

(1) $\mathscr{T}_1$ 是实数集合 $\mathbf{R}$ 的一个拓扑;

(2) 拓扑空间 $(\mathbf{R},\mathscr{T}_1)$ 是一个 Hausdorff 空间;

(3) 拓扑空间 $(\mathbf{R},\mathscr{T}_1)$ 不是正则空间, 也不是正规空间.

证: (1) $X,\varnothing\in\mathscr{T}_1$, 对任何 $A,B\in\mathscr{T}_1$, 存在 $G_i\in\mathscr{T},E_i\in\mathbf{Q}$, $i=1,2$, 使得 $A=G_1-E_1$, $B=G_2-E_2$, $A\cap B=(G_1-E_1)\cap(G_2-E_2)=G_1\cap E'_1\cap G_2\cap E'_2=(G_1\cap G_2)-(E_1\cup E_2)\in\mathscr{T}_1$, 对任何 $\widetilde{\mathscr{T}}\subset\mathscr{T}_1$, $\cup_{A\in\widetilde{\mathscr{T}}}A=\cup_{A\in\widetilde{\mathscr{T}}}(G_A-E_A)=\cup_{A\in\widetilde{\mathscr{T}}}G_A-\cap_{A\in\widetilde{\mathscr{T}}}E_A\in\mathscr{T}_1$, 所以 $\mathscr{T}_1$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个拓扑.

(2) 对任何 $x,y\in\mathbf{R}$, $x\neq y$, 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}|x-y|$, $B(x,\varepsilon)\in\mathscr{T}$, $B(y,\varepsilon)\in\mathscr{T}$, $\varnothing\subset\mathbf{Q}$, 所以 $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\varnothing$.

(3) 取 $x=\sqrt{2}$, $A=(0,3)-\mathbf{Q}\in\mathscr{T}$ 且 $x\in A$, 对任何 $U\in\mathscr{T}$ 且 $x\in U\subset A$, 即 $U=(a_1,b_1)-\mathbf{Q}$, $\overline{U}=[a_1,b_1]$, 所以 $\overline{U}\not\subset A$, 故 $(\mathbf{R},\mathscr{T}_1)$ 不是正则空间.

取 $A=[0,1]$, $U=(-1,2)-[(-1,0)\cap\mathbf{Q}]\cup[(1,2)\cap\mathbf{Q}]\in\mathscr{T}$, $A\subset U$, 对任何 $V\in\mathscr{T}$, $A\subset V\subset U$, $V=(a_1,b_1)-(-1,0)\cup(1,2)\cap\mathbf{Q}$, $\overline{V}=[a_1,b_1]\not\subset U$, 故 $(\mathbf{R},\mathscr{T}_1)$ 不是正规空间.

§6.3　Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理

3.1　设 X 为 T_4 空间, U 为 X 的开集, C 为 X 的连通子集, 并且 $U\cap C\neq\varnothing$. 证明或者 C 为单点集, 或者 $U\cap C$ 为不可数集.

证: 因为 C 为 T_4 空间 X 的连通子集.

若 $C\subset U$, 由本章定理6.3.2, 本题结论成立.

$C\not\subset U$, 则 C 非单点集, 可取 $x\in C\cap U$, $y\in C\sim U$. 易见 $\sim U$ 为闭集, $\{x\}$ 为闭集, 且 $\{x\}\cap(\sim U)=\varnothing$. 于是, 存在连续映射 $f:X\to[0,1]$, 使 $f(x)=0$, $f(\sim U)=\{1\}$, 从而 $f(\sim U)=\{1\}$.

又 $f(x)=0$, $f(y)=1$, $x,y\in C$ 连通. 所以 $f(C)=[0,1]$, 从而

$$\begin{aligned}[0,1]&=f[(C\cap U)\cup(C\sim U)]\\&=f(C\cap U)\cup f(C\sim U)\\&=f(C\cap U)\cup\{1\}\end{aligned}$$

$[0,1]\subset f(C\cap U)$, 故 $C\cap U$ 不可数.

3.2　设 A 为正规空间 X 的一个闭集. 证明: 对于任何一个连续映射 $f:A\to[0,1]^n$, 有一个连续

映射 $g:X\to[0,1]^n$ 是映射 f 的扩张.

证:因为 A 为正规空间 X 的闭集,$f_0:A\to[0,1]^n$ 为连续映射,所以 $P_i\circ f_0:A\to[0,1]$ 为连续映射,$i=1,2,\cdots,n$,由 Tietz 扩张定理知,$P_i\circ f_0$ 有连续的扩张.

$g_i:X\to[0,1],\qquad i=1,2,\cdots,n$

定义 $f:X\to[0,1]^n$,使

$$P_i\circ f=g_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

则 f 为连续映射,且

$$P_i\circ f|A=(P_i\circ f)|A=g_i|A=P_i\circ f$$

即 $f|A=f_0$,所以 f 为 f_0 在 X 上的连续扩张.

3.3　证明 Tietze 扩张定理蕴涵 Urysohn 引理.

证:必要性:设 X 是一个正规空间,A 和 B 是 X 中不相交的两个闭集,令 $f_1:A\cup B\to[a,b]$,使得当 $x\in A$ 时 $f_1(x)=a$,当 $x\in B$ 时 $f_1(x)=b$,显然 f_1 是连续映射,且 $A\cup B$ 是 X 中的闭集,由 Tietze 扩张定理,存在一连续映射 $f:X\to[a,b]$ 是 f_1 的扩张,即 f 为所求.

充分性:同 Urysohn 引理的充分性的证明.

3.4*　设 X 是一个正规空间,A 是 X 中的一个闭子集,$f:A\to\mathbf{R}$ 是一个连续映射. 证明:有一个连续映射 $g:X\to\mathbf{R}$ 是映射 f 的扩张.

证:令 $g:\mathbf{R}\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,使得对任何 $x\in\mathbf{R}$,$g(x)=\mathrm{arctg}x$,显然 g 连续. 所以 $g\circ f:A\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 连续,由 A 是 X 中的闭子集 Tietze 扩张定理,存在 $\mathrm{h}:\mathrm{X}\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是 $\mathrm{g}\circ\mathrm{f}$ 的扩张且 h 连续,作 $\mathrm{k}:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbf{R}$,使得对任何 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

$$k(x)=\begin{cases}g^{-1}(x) & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}g^{-1}(x) & x=\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}g^{-1}(x) & x=-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

k 连续,于是 $k\circ h:X\to\mathbf{R}$ 连续. $(k\circ h)|A=k\circ h|A=k\circ(g\circ f)=(k\circ g)\circ f=f$ 对任何 $x\in\mathbf{R}$,$k\circ g(x)=k\circ(\mathrm{arctg}x)=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$

§6.4　完全正则空间,Tychonoff 空间

4.1　证明:拓扑空间 X 为 Tychonoff 空间当且仅当对于任意 $x\in X$ 及任意不包含 x 的闭集或单点集 A,存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$,,并且对任意 $y\in A$,$f(y)=1$.

证:设 X 为 Tychonoff 空间,则 X 中任一单点集为闭集,所以对于任意 $x\in X$ 及任意不包含 x 的闭集或单点集 A,存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$,并且对任意 $y\in A$,$f(y)=1$.

反之,设对任意的 $x\in X$ 及任意不包含 x 的闭集或单点集 A,存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$,$f(A)=\{1\}$,则 X 为完全正则空间.

对任意的 $x,y\in X$,$x\neq y$,由条件存在连续映射 $f:X\to[0,1]$,使得 $f(x)=0$,$f(y)=1$,所以 $x\in f^{-1}([0,1/2])$,$y\in f^{-1}((1/2,1])$,又 $f^{-1}([0,1/2])$,$f^{-1}((1/2,1])$ 为 X 中两个不相交的开集,所

以 X 为 Hausdorff 空间，从而为 T_1 空间.

所以 X 为 Tychonoff 空间.

4.2　证明：连通的 Tychonoff 空间如果不只一个点，则它的每一非空开集都不可数.

证：设 A 为不只一个点的连通的 Tychonoff 空间 X 的非空间开集，则存在 $x \in A, y \in X$ 使 $x \neq y$，即 $\{x\},\{y\}$ 为 X 的不交的闭集，因此存在连续映射 $f: X \to [0,1]$，使得 $f(x) = 0, f(y) = 1$.

因为 X 为连通空间，所以 $f(X) = [0,1]$

若 $A = X$，则 $A = f^{-1}([0,1])$ 为不可数集.

若 $\sim A = X \sim A \neq \varnothing$，则对不含 x 闭集 $\sim A$，存在连续映射 $f: X \to [0,1]$，使得 $f(x) = 0, f(\sim A) = \{1\}$.

由上面的结果，$[0,1] = f(X) = f(A) \cup f(\sim A) = f(A) \cup \{1\}$，从而 A 为不可数集.

4.3　证明. 每一满足第二可数性公理的正则空间都是完全正现空间.

证 1：设 X 是正则空间且满足第二可数性公理，从而 X 为 Lindelöf 空间.

X 是正规空间，对任意的 $x \in X$，任意的闭集 $A, x \notin A$，$\{x\}$ 是闭集，由引理存在连续映射 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x) = 0, f(y) = 1, y \in A$，从而 X 为完全正规空间.

证 2：设 Y 为满足第二可数性公理的正则空间 X 的任一子空间，则 Y 也满足第二可数性公理，从而为 Lindelöf 空间.

对 $x \in Y$ 及 x 在 Y 中的开邻域 V，取 x 在 X 中的开邻域 U 使 $V = U \cap Y$.

因 X 为正则空间，所以存在 x 在 X 中的开邻域 W，使 $C(W) \subset U$. 即 $W \cap Y$ 为 x 在 Y 中的开邻域，且 $W \cap Y \subset U \cap Y = V$，由 §2.4 习题 4 知，

$$C_Y(W \cap Y) \subset C_Y(W) \cap C_Y(Y) = C_X(W) \cap Y \subset U \cap Y = V$$

所以 Y 为正则空间.

又正则的 Lindelöf 空间是正规的，所以 Y 为正规空间. 由 §6.1 习题 6 的结论知 X 为完全正规空间.

4.4　设 X 为拓扑空间. 记 F 为从 X 到 $[0,1]$ 的所有连续映射构成的集合；对于每一 $f \in F$，记 $Z_f = \{x: f(x) \neq 0\}$. 证明：X 为完全正则空间当且仅当 $\{Z_f: f \in F\}$ 为 X 的基.

证：必要性：设 X 为完全正则空间，U 为 X 的任一开集. 对任意的 $x \in U$，则 $\sim U$ 为不含 x 的闭集. 故有连续映射 $g: X \to [0,1]$，使得 $g(x) = 0, g(\sim U) = \{1\}$.

取 $f \in F$ 使 $f(x) = 1 - g(x)$，显然，$f(x) = 1, f(\sim U) = \{0\}$，从而 $f^{-1}(\{0\}) \supset \sim U$. 因 $Z_f = \sim f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}((0,1])$，所以 Z_f 为 X 中的开集，且 $x \in Z_f \subset U$，因此 X 中任一开集都是某些 Z_f 的并.

另一方面，$\{Z_f: f \in F\}$，显然是 X 的开集的族，故 $\{Z_f: f \in F\}$ 为 X 的基.

充分性：设 $\{Z_f: f \in F\}$ 为 X 的基，$x \in X$，B 为不含 x 的任一闭集，则 $\sim B$ 为 x 的开邻域. 因而存在 $Z_f \in \mathscr{D}$，使 $x \in Z_f \subset \sim B$，于是 $\alpha = f(x) \neq 0$ 且 $B \subset \sim Z_f = \{y \in X: f(y) = 0\}$

记 $A = f^{-1}((\alpha,1])$，则 A 为 X 的开集，作映射 $g: X \to [0,1]$，使

$$g(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\alpha} f(y) & y \in X \sim A \\ 0 & y \in C(A) \end{cases}$$

因 $X \sim A, C(A)$ 都为 X 的闭集，且在 $(X \sim A) \cap C(A) = b(A)$ 上，显然有 $1 - \dfrac{1}{\alpha} f(y) = 0$，所以由粘结引理，$g$ 是 X 到 $[0,1]$ 的连续映射. 又 $g(x) = 1 - \dfrac{1}{2} f(x) = 0$，当 $y \in B \subset \sim Z_f$ 时，$f(y) = 0$，

即 $g(y)=1$,所以 X 为完全正则空间.

§6.5 分离性公理与子空间,(有限)积空间和商空间

5.1 证明正规,T_4 对于闭子空间都是可遗传的性质.

证:设 A 为正规空间 X 的闭子空间. B_1,B_2 为 A 的不相交的闭子集,由 §3.1 习题 2 知,B_1,B_2 为 X 的不相交的闭子集.

因 X 为正规空间,所以存在 B_1 在 X 中的开邻域 U,B_2 在 X 中的开邻域 V,使 $U\cap V=\varnothing$,从而 $U\cap A$,$V\cap A$ 分别为 B_1,B_2 在 A 中的不相交的开邻域. 即 A 为正规空间.

(2) 设 A 为 T_4 空间 X 的闭子空间,由(1)知 A 为正规空间,又 T_1 具有可遗传性,所以 A 为 T_4 空间.

由(1),(2)的证明知,正规,T_4 对于闭子空间都是可遗传的性质.

5.2 举例说明正规不是可遗传的性质.(提示:对于非正规的拓扑空间$(X,\mathscr{T})$,令 ∞ 为不属于 X 的任一元素,令 $X^*=X\cup\{\infty\}$,$\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{X^*\}$. 考虑$(X^*,\mathscr{T}^*)$)

例:设拓扑空间$(X,\mathscr{T})$非正规空间,$\infty\ \overline{\in}\ X$,令

$$X^*=X\cup\{\infty\},\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{X^*\}$$

由 §2.2 习题 9 知$(X^*,\mathscr{T}^*)$为拓扑空间,且 $u_\infty=\{X^*\}$.

设 A,B 为 X^* 中任意两个不相交的闭集,则其中之一不含 ∞,不妨设 $\infty\ \overline{\in}\ A$,所以 $X^*\sim A$ 为 ∞ 的开邻域,从而必有 $X^*\sim A=X^*$,因此 $A=\varnothing$,故 $\varnothing,X^*$ 分别为 A,B 的不相交的开邻域.

即$(X^*,\mathscr{T}^*)$为正规空间,但$(X,\mathscr{T})$非正规空间,这说明正规性不是遗传的性质.

5.3 证明:

(1) 实数下限拓扑空间为 T_4 空间.

(2)* 两个实数下限拓扑空间的积空间不是正规空间.(提示:考虑 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的两个子集 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:x+y=1,x$ 为有理数$\}$ 和 $B=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}:x+y=1,x$ 为有理数$\}$.)

证:(1) 设所论拓扑空间为$\widetilde{\mathbf{R}}$,易见$\widetilde{\mathbf{R}}$是 T_1 及正则空间,据 §5.3 习题 4,$\widetilde{\mathbf{R}}$为 Lindelöf 空间. 据定理 6.4.3,$\widetilde{\mathbf{R}}$为正规空间. 综上,$\widetilde{\mathbf{R}}$为 T_4 空间.

(2) 考虑$\widetilde{\mathbf{R}^2}$的闭子空间:

$E=\{(x,y)\in\widetilde{\mathbf{R}^2}:x+y=1\}$ 在 §6.2 习题 6(3) 的证明中,将 $\mathbf{R}\times\{0\}$ 换成 E,$\mathscr{B}$ 换成

$$\mathscr{B}'=\{[a_1,b_1)\times[a_2,b_2):a_i<b_i,a_i,b_i\in\widetilde{\mathbf{R}}\}$$

由同样的证明可以得到 E 不是正规空间,因而$\widetilde{\mathbf{R}^2}$不是正规空间.

5.4 设 X 是一个拓扑空间,$\sim$ 是 X 中的一个等价关系,$p:X\to X/\sim$ 是自然投射. 证明:商空间 $X/\sim$ 是一个 T_1 空间当且仅当对于每一个 $y\in X/\sim$,集合 $p^{-1}(y)$ 是 X 中的闭集.

证:必要性:对于每一个 $\tilde{y}\in X/\sim$,任取 $x\in X,x\notin p^{-1}(\tilde{y})$,则 $\tilde{x}\neq\tilde{y}$,由于 $X/\sim$ 是一个 T_1 空间,存在 $\tilde{x}$ 的邻域 U 使得 $\tilde{y}\notin U$,于是 $p^{-1}(U)\cap p^{-1}(\tilde{y})=\varnothing$,而 $p^{-1}(U)$ 是 x 在 X 中的邻域,故集合 $p^{-1}(\tilde{y})$ 是 X 中的闭集.

充分性:设 $\tilde{x}\neq\tilde{y}$,则 $p^{-1}(\tilde{x}),p^{-1}(\tilde{y})$ 是 X 中不相交的闭集,于是 $U=(p^{-1}(\tilde{x}))'$ 是包含 $p^{-1}(\tilde{y})$,所以 $p(U)$ 是包含 $\tilde{y}$ 的邻域,且 $\tilde{x}\notin p(U)$. 同理可证:存在邻域 $p(V)$ 包含 $\tilde{x}$,且 $\tilde{y}\notin p(V)$. 故 $X/\sim$

是一个 T_1 空间.

另证必要性:$X/\sim$ 是 T_1 空间,对任意的 $y \in X/\sim$,$\{y\}$ 闭集,p 商映射,$p^{-1}(\{y\})$ 是 X 中的闭集,即 $p^{-1}(y)$ 是闭集.

5.5 令

$$D = \{(x,0) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\} \cup \{(x,1) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$$

为欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 的子空间. 将 D 中每一对点 $(x,0)$ 和 $(x,1)$(其中 $x > 0$)粘合起来,得到的商空间记为 Y. 证明:

(1) Y 是一个 T_1 空间;

(2) Y 不是 Hausdorff 空间;

(3) 每一点 $x \in Y$ 在 Y 中有一个开邻域同胚于实数空间 $\mathbf{R}$.

证:(1) 由上题,显然.

(2) 考察 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 两点.

(3) 显然,见 §3.1 的习题 1.1(1).

5.6 构造实数空间 $\mathbf{R}$ 的一个商空间,使得它不是 T_0 空间,不是正则空间,也不是正规空间.(因此不满足所有的分离性公理.)(提示:综合例 6.5.1 和例 3.3.1 中用到的技巧.)

例:设 Y 是在实数空间 $\mathbf{R}$ 中分别将集合 $A = (-\infty,0]$,$B = (0,1)$,$C = [1,\infty) \cap \mathbf{Q}$ 和 $D = [1,\infty) \cap \mathbf{Q}$ 各粘合为一个点所得到的拓扑空间. 事实上 $Y = \{A,B,C,D\}$. 容易验证 $\{\varnothing,\{A,B\},\{B\},\{B,C,D\},\{A,B,C,D\}\}$ 便是 Y 的拓扑. 考察 $\{A\}$,$\{C,D\}$ 两个闭集可见,Y 既不是正则空间也不是正规空间. 考察 C,D 两个点可见,Y 不是 T_0 空间.

§6.6 可度量化空间

6.1 证明定理 6.6.3 的条件(1)中"T_3"可改成"Tychonoff"或"T_4";条件(3)中"可分的"可以改成"Lindelöf"或"满足第二可数性公理".

证:(1) 因 $T_4 \Rightarrow$ Tychonoff $\Rightarrow T_3$,所以由定理 6.6.3 知,满足第二可数性公理的 Tychonoff 空间或 T_4 空间 X 为可分的可度量化的空间.

反之,设 X 为可分的可度量化的空间. 由第 5 章定理 5.2.4 知 X 满足第二可数性公理. 由本章定理 6.2.3 知 X 为 T_4 空间,从而也是 Tychonoff 空间. 所以定理 6.6.3 的条件(1)中"T_3"可以改成"Tychonoff"或"T_4".

(2) 由定理 5.2.2,5.2.4,5.3.1 和 5.3.3 知,X 为可分的度量空间 $\Leftrightarrow X$ 为满足第二可数性公理的度量空间 $\Leftrightarrow X$ 为 Lindelöf 的度量空间. 再由本章定理 5.3 知,条件(3)中"可分的"可以改成"Lindelöf"或满足"第二可数性公理".

6.2 找出 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$ 的一个可数基.

解:令 Z 为 $\mathbf{H}$ 中所有只有有限个非 0 坐标,并且每一坐标都是有理数的点构成的集合,即

$$Z = \{z = (z_1,z_2,\cdots,z_n,0,\cdots) \in \mathbf{H}, n \in \mathbf{N}, z_i \in \mathbf{Q}, i = 1,2,\cdots,n\}$$

则 Z 为可数集. $c(Z) = \mathbf{H}$,记

$$\mathscr{B} = \{B(z,1/k): z \in Z, k = 1,2,\cdots\}$$

则 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{H}$ 的可数开集族.

对任意的 $x \in \mathbf{H}$,$U \in \mathscr{U}_x$,则存在 $m \in \mathbf{N}$,使 $x \in B(x,1/m) \subset U$

因 $c(Z) = \mathbf{H}$,所以 $B(x,\dfrac{1}{2m}) \cap Z \neq \varnothing$. 取 $z \in B(x,\dfrac{1}{2m}) \cap Z$,$k = 2m$,则

$$x \in B(z,\frac{1}{k}) \subset B(x,\frac{1}{m}) \subset U$$

根据定理 2. 6. 2 知,$\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^{\infty}$ 的一个可数基.

6. 3　设拓扑空间 X_1, X_2 的积空间 $X_1 \times X_2$ 为可度量化的空间,证明 X_1, X_2 都是可度量化的空间.

证:设 $x_2 \in X_2$,则 $X_1 \times \{x_2\}$ 为可度量化空间 $X_1 \times X_2$ 的子空间,从而是可度量化的空间.

因 $X_1 \times \{x_2\}$ 与 X_1 同胚,又可度量化为拓扑不变性,所以 X_1 为可度量化的空间.

同理 X_2 也为可度量化空间.

第 7 章　紧致性

§7.1　紧致空间

1.1　证明:拓扑空间中的任何一个有限子集都是紧致子集.

证:设 A 为拓扑空间 X 中的有限子集,$\mathscr{A}$ 为 A 的任一开覆盖,对每个 $x \in A$,取定 $B_x \in \mathscr{A}$,使 $x \in B_x$,令 $\mathscr{A}_1 = \{B_x \in \mathscr{A}, x \in B_x, x \in A\}$,则 $\mathscr{A}_1$ 为 $\mathscr{A}$ 关于 A 的有限子覆盖,故 A 为紧致子集.

1.2　设 $\mathscr{T}$,$\mathscr{T}_1$ 都是非空集合 X 的拓扑,并且 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$. 证明:当拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是紧致空间,则拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_1)$ 也是紧致空间.

证:设 $\mathscr{A}$ 为 $(X,\mathscr{T}_1)$ 的开覆盖,因 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$,所以 $\mathscr{A}$ 也是 $(X,\mathscr{T})$ 的开覆盖,又 $(X,\mathscr{T})$ 为紧致空间.

所以存在 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖 $\mathscr{A}_1$,从而 $\mathscr{A}_1$ 也是 $(X,\mathscr{T}_1)$ 的有限的开覆盖,所以 $(X,\mathscr{T}_1)$ 为紧致空间.

1.3　证明有一基为有限集族的拓扑空间为紧致空间.

证:设 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间 X 中的有限集族构成的基,则由 $\mathscr{B}$ 的成员构成的 X 的每一个开覆盖都是有限覆盖,由定理 7.1.3 知,X 为紧致空间.

1.4　证明拓扑空间中有限个紧致子集的并集仍为紧致子集.

证:设 A 为拓扑空间 X 中有限个紧致子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集,即 $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$,设 $\mathscr{A}$ 为 A 的任意一开覆盖,则 $\mathscr{A}$ 也为 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的开覆盖.

因 A_i 为紧致子集 $i = 1,2,\cdots,n$,所以存在 $\mathscr{B}_i$ 为 $\mathscr{A}$ 关于 A_i 的有限子覆盖,$i = 1,2,\cdots,n$,于是 $\mathscr{A}_1 = \cup_{i=1}^{n} \mathscr{B}_i$ 为关于 A 的有限子覆盖,故 A 为紧致子集.

1.5　证明:拓扑空间中任何一族紧致闭子集的交还是一个紧致子集.

证:设 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \tau}$ 为拓扑空间 X 中的紧致闭集族,则 $E = \bigcap\limits_{\alpha \in \tau} F_\alpha$ 为 X 的闭集,且对任意的 $\alpha \in \tau$,有 $E \subset F_\alpha$. 由定理 7.1.5,E 为紧致子集.

1.6　举例说明拓扑空间中紧致子集的闭包可以不是紧致的.

例:取 $X = \mathbf{N}$,$\mathscr{T} = \{E : 1 \in E \subset \mathbf{N}\} \cup \{\varnothing\}$,则 $\{1\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的紧致子集,但 $\mathbf{c}(\{1\}) = X$ 显然非紧致.

1.7　证明 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 以及其中的任何一个球形邻域都不是紧致的.

证:因 $\mathscr{A} = \{B(0,n) : n \in \mathbf{N}\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的开覆盖,但 $\mathscr{A}$ 的任意有限子族:$\{B(0,n_1), B(0,n_2), \cdots, B(0,n_k)\}$ 的并为 $B(0,r)$,其中 $r = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$,因而不是 $\mathbf{R}^n$ 的开覆盖,即 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathbf{R}^n$ 没有有限子覆盖,所以 $\mathbf{R}^n$ 不是紧致空间.

由第 3 章习题 1.1 知,$\mathbf{R}^n$ 的球形 $B(x,\varepsilon)$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$,而紧致性为拓扑不变性,所以 $\mathbf{R}^n$ 中任一球形邻域都不是紧致的.

1.8　举例说明紧致空间可以不满足第一可数性公理(从而也不满足第二可数性公理).

例:设拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 不满足第一可数性公理,$\infty \notin X$,记 $X^* = X \cup \{\infty\}$,　$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \mathscr{T}_1 \cup \{X^*\}$,其中 $\mathscr{T}_1 = \{E \subset X^* : X^* \sim E$ 为 X 的紧致闭集$\}$,由定理 7.1.6 知,$(X^*, \mathscr{T}^*)$ 是紧致的拓扑空间,且 $(X,\mathscr{T})$ 为 $(X^*, \mathscr{T}^*)$ 的子空间.

因第一可数性是可遗传性质,即 X 不满足第一可数性公理,所以 X^* 也不满足第一可数性公理.

此例说明紧致空间可以不满足第一可数性公理,(从而也不满足第二可数性公理).

1.9　证明拓扑空间 X 是紧致空间当且仅当它的加一点的紧致化 X^* 中 $\{\infty\}$ 是开集.

证:设 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的加一点紧致化,若 $\{\infty\}$ 为开集,则 $X^* \sim \{\infty\} = X$ 为闭集,由定理 7.1.5 知 X 为紧致空间.

反之,若 X 为紧致空间,则对定理 7.1.6 中的 $\mathscr{T}_1$ 有 $\{\infty\} \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$,所以 $\{\infty\}$ 为开集.

1.10　设 U 为拓扑空间 X 的开集. 证明:若 X 的紧致闭集族 $\mathscr{A}$ 满足条件 $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subset U$,则存在 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 满足条件 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \subset U$.(提示:可以应用加一点紧致化.)

证:设 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的加一点紧致化,则 $U \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$,且对任意的 $A \in \mathscr{A}$

$$X^* \sim A \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^* \qquad (\text{其中 } \mathscr{T}_1 \text{ 如定理 } 7.1.6)$$

即 $\{X^* \sim A\}_{A\in\mathscr{A}}$ 为 $X^* \sim U$ 的开覆盖.

又 X^* 为紧致空间,$X^* \sim U$ 为 X^* 的闭集,由定理 7.1.5 知 $X^* \sim U$ 为紧致子集,因而存在 $A_i \in \mathscr{A}$,$i = 1,2,\cdots,n$,使得

$$X^* \sim U \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X^* \sim A_i) = X^* \sim \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

所以 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset U$

§7.2　紧致性与分离性公理

2.1　证明 Hausdorff 空间中任意个紧致子集的交仍是紧致子集.

证:设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$ 为 Hausdorff 空间 X 中任一个紧致子集族,由推论 7.2.2 知,$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\tau}$ 为紧致闭集族,由第 7 章习题 1.5 知,$\bigcap_{\alpha\in\tau} F_\alpha$ 为紧致子集.

2.2　设 A 为正则空间 X 的紧致子集,$Y \subset X$. 证明:如果 $A \subset Y \subset c(A)$,则 Y 是 X 的一个紧致子集.

证:设 $\mathscr{A}$ 为 Y 的开覆盖,因 $A \subset Y \subset c(A)$,A 为紧致子集,所以 $\mathscr{A}$ 为 A 的开覆盖,因而存在 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ 为 A 的有限覆盖,又 X 为正则空间,所以存在 A 的开邻域 V,使 $c(V) \subset \bigcup_{U\in\mathscr{A}_1} U$,所以

$$Y \subset c(A) \subset c(V) \subset \bigcup_{U\in\mathscr{A}_1} U$$

所以 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ 也为 Y 的有限开覆盖,所以 Y 是紧致子集.

2.3　证明 Wallace 定理:若 A,B 分别为拓扑空间 X,Y 的紧致子集,W 为 $A\times B$ 在积空间 $X\times Y$ 中的开邻域,则有 A 在 X 中的开邻域 U,B 在 Y 中的开邻域 V,使得 $U\times V \subset W$.

证:设 $\mathscr{T}_x,\mathscr{T}_y$ 分别为拓扑空间 X、Y 的拓扑,$\mathscr{T}$ 为 $X\times Y$ 的积拓扑. 因 $\mathscr{B} = \{E\times F : E \in \mathscr{T}_x, F \in \mathscr{T}_y\}$ 为 $\mathscr{T}$ 的基,所以存在 $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$,使 $W = \bigcup_{E\times F\in\mathscr{B}_1} (E\times F)$,对任意取定的 $y \in B$,因 $A\times\{y\}$ 与紧致子集 A 同胚,所以 $A\times\{y\}$ 也为紧致子集. 又 W 为 $A\times B$ 的开邻域,所以 $\mathscr{B}_1$ 为 $A\times B$ 的开覆盖,即也是 $A\times\{y\}$ 的开覆盖,取其一个有限子覆盖,设为:$\{E_y^1\times F_y^1,\cdots,E_y^n\times F_y^n\} \subset \mathscr{B}_1$

令 $u_y = E_y^1 \cup E_y^2 \cup \cdots \cup E_y^n$,　$v_y = F_y^1 \cup F_y^2 \cup \cdots \cup F_y^n$,

则 $A \subset u_y \in \mathscr{T}_x$,$y \in V_y \in \mathscr{T}_y$,即 $u_y \times v_y (\subset W)$ 为 $A\times\{y\}$ 开邻域,记 $\mathscr{A} = \{v_y : y \in B\}$,则 $\mathscr{A}$ 为紧致子集 B 的开覆盖,因而存在有限子覆盖,设为:$\{v_{y_1},\cdots,v_{y_m}\} \subset \mathscr{A}$

令 $u = \bigcap_{i=1}^{m} u_{y_i}$,$v = \bigcup_{i=1}^{m} v_{y_i}$,则 $A \subset u \in \mathscr{T}_x$,$B \subset v \in \mathscr{T}_y$,且 $u\times v \subset W$.

2.4　从 Wallace 定理推出定理 7.2.5.(提示:注意第 6 章 §1 习题 12 的结果.)

证:设 X 为 Hausdorff 空间,A、B 为 X 的不相交的紧致子集. $\triangle = \{(x,x) : x \in X\}$,则 $(A\times B) \cap \triangle = P$.

由第 6 章习题 1.12 的结论，$\triangle$ 为闭集，即 $\sim\triangle$ 为 $A\times B$ 的开邻域，由 Wallace 定理，存在 A 的开邻域 u、B 的开邻域 v，使 $u\times v\subset\sim\triangle$，从而 $u\cap v=P$，定理 7.2.5 得证.

2.5　证明紧致的 Hausdorff 空间是可度量化的空间当且仅当它满足第二可数性公理.

证：设 X 为紧致的 Hausdorff 空间，由推论 7.2.4，显见 X 为 T_3 空间，为 X 满足第二可数性公理，由定理 6.6.3 知，X 为可度量化的空间.

反之，设紧致空间 X 是可度量化的，ρ 为 X 的度量，则对每一 $n\in\mathbf{N}$，显见：$\{B(x,1/n):x\in X\}$ 为 X 的开覆盖.

因 X 紧致，所以存在 X 的有限开覆盖 $\{B(x_{n_i},1/n):i=1,\cdots,l_n\}$，所以 $\mathscr{B}=\{B(x_{n_i},1/n):i=1,\cdots,l_n,n\in\mathbf{N}\}$ 为 X 的可数覆盖，于是对任意 $x\in X,u\in\mathscr{U}_x$，存在 $k\in\mathbf{N}$，使 $x\in B(x_{n_i},1/N)$，从而 $x\in B(x_{N_i},1/N)\subset B(x,1/k)\subset u$，由定理 2.6.2 知：$\mathscr{B}$ 为 X 的可数基，所以 X 满足第二可数性公理.

2.6　设 $\mathscr{A}$ 为 Hausdorff 空间的紧致子集族. 证明：若 $\mathscr{A}$ 中任意有限个成员之交是连通的，则 $\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A$ 是连通的.（提示：注意 §1 习题 10 的结果.）

证：因 $\mathscr{A}$ 为 Hausdorff 空间 X 的紧致子集族，由推论 7.2.2 知，$\mathscr{A}$ 为 X 的闭集族，所以 $Y=\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A$ 为 X 的闭集.

若 Y 不连通，则存在 Y 中非空无交的闭集 D_1,D_2 使 $Y=D_1\cup D_2$，由第 3 章习题 1.2 的结论，D_1，D_2 为 X 中非空无交的闭集，对任意取定 X 的紧致子集 $A\in\mathscr{A}$，由 $D_1,D_2\subset Y\subset A$ 及定理 7.1.5，D_1，D_2 均为紧致子集，由定理 7.2.5 知，存在 D_1 的开邻域 u_1，D_2 的开邻域 u_2，使 $u_1\cap u_2=\varnothing$.

所以 $Y=\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A=u_1\cup u_2$，由第 7 章习题 1.10 知存在 $\mathscr{A}$ 的有限子集族：$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 满足 $Y\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\subset u_1\cup u_2$，由题设 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 连通，所以 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\subset u_1$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\subset u_2$，从而 $Y\subset u_1$ 或 $Y\subset u_2$，即 $D_2=\varnothing$ 或 $D_1=\varnothing$，这都与假设 D_1,D_2 非空矛盾.

§7.3　n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致子集

3.1　举例说明度量空间中可以有有界闭集不是紧致子集.

例：设 X 为不可数集，ρ 是 X 的离散度量，A 为 X 的任一可数子集. 显然 A 是 X 的有界闭集，但不是紧致子集.

3.2　设 (X,ρ) 是一个度量空间. X 中的任意两个非空子集 A 和 B 的距离 $\rho(A,B)$ 定义为：

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

证明：如果 A 和 B 是度量空间 (X,ρ) 中的两个非空的紧致子集，则存在 $x_0\in A$ 和 $y_0\in B$ 使得 $\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$.

如果将上面题中的条件"A 和 B 是度量空间 (X,ρ) 中的两个非空的紧致子集"分别换成

(1) A 和 B 是度量空间 (X,ρ) 中的两个非空的闭子集；或

(2) A 和 B 是度量空间 (X,ρ) 中的两个非空子集，其中 A 是紧致的，B 是闭的，

相应的结论是否仍然正确?给出你的结论和论证.

证：据定理 7.1.7，$A\times B$ 为紧致子集，又易见 $\rho(A\times B):A\times B\to\mathbf{R}$ 为连续映射，故由定理 7.3.4 知，存在 $(x_0,y_0)\in A\times B$，使得 $\inf\{\rho(x,y):x\in A,y\in B\}=\rho(x_0,y_0)$.

(1) 不正确. 例如：$A=[0,1)$，$B=(2,3]$，$X=A\cup B$.

(2) 不正确. 例如：$A=[0,1]$，$B=(2,3]$，$X=A\cup B$. 但可证明：存在 $x_0\in A$ 使得 $\rho(x_0,B)=\rho(A,B)$.

3.3　设 X 为拓扑空间，Y 为紧致的 Hausdorff 空间，$y\in Y$. 若 $Y\sim\{y\}$ 同胚于 X，证明 Y 同胚于

X 的加一点的紧致化 X^*.

证：设 $g: X \to Y - \{y\}$ 为拓扑空间 X 到紧致的 Hausdorff 空间 Y 的子空间 $Y \sim \{y\}$ 的同胚映射，$\infty \in X$，$(X^*, \mathscr{T}^*)$ 为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的加一点紧致化，定义：

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in X \\ y & x = \infty \end{cases}$$

显然，$f: X^* \to Y$ 为在上的一一映射，设 A 为 Y 的开集，若 $y \in A$，则 $f^{-1}(A) = g^{-1}(A) \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$，若 $y \in A$，因 Y 为紧致空间，$Y \sim A$ 为闭集，所以 $Y \sim A$ 为 Y 的紧致闭集，又 $Y \sim A \subset Y \sim \{y\}$，所以 $Y \sim A$ 为 $Y \sim \{y\}$ 的紧致闭集，所以 $\sim f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \sim A) = g^{-1}(Y \sim A)$ 为 X 的紧致闭集，所以 $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$ （$\mathscr{T}_1$ 同定理 7.1.6 中）即 f 为连续映射，又 X^* 为紧致空间，Y 为 Hausdorff 空间，由推论 7.2.9 知 $f: X^* \to Y$ 为同胚.

3.4　证明 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 加一点的紧致化同胚于 S^n.

证：因 S^n 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的闭集（有界），所以 S^n 为紧致的 Hausdorff 空间，又定义 $f: S^n \sim \{(0, \cdots, 0, 1)\} \to \mathbf{R}^n$ 为 $f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n)$，则显见 f 是同胚（$f^{-1}(y_1, \cdots, y_n) = (t_{y_1}, \cdots, t_{y_n}, 1 - t)$，$t = \dfrac{2}{1 + {y_1}^2 + \cdots + {y_n}^2}$），由上题结论，$S^n$ 同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的加一点的紧致化.

3.5　试举出两个紧致子集的交可以不是紧致子集的例子.（提示：考虑 $\mathbf{R} \times \{0,1\}$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数空间，$\{0,1\}$ 取平庸拓扑. 证明其中子集 $(0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times \{1\}$ 和子集 $[0,1) \times \{0\} \cup \{1\} \times \{1\}$ 都是紧致的，但交不紧致.）

例：设 $(\mathbf{R}, \mathscr{T}_1)$ 为实数拓扑空间，$(\{0,1\}, \mathscr{T}_2)$ 为平庸拓扑空间，$X = \mathbf{R} \times \{0,1\}$，则 X 的积拓扑为：

$$\mathscr{T} = \{u \times \{0,1\} : u \in \mathscr{T}_1\}$$

设 $Y_1 = ((0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{1\})$，$\mathscr{A}$ 为 Y_1 在 X 中的开覆盖，则对任意一个 $x \in Y_1$，存在 $u \in \mathscr{T}_1$，使 $x \in u \times \{0,1\} \in \mathscr{A}$，因此，$\mathscr{A}$ 也为 $(0,1] \times \{0,1\}$ 的开覆盖，因 $[0,1]$ 为 $\mathbf{R}$ 中紧致子集，$\{0,1\}$ 为紧致空间，所以 $[0,1] \times \{0,1\}$ 为紧致子集，所以存在 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ 为 $[0,1] \times \{0,1\}$ 的有限开覆盖，从而 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ 为 Y_1 的有限开覆盖，即 Y_1 为紧致子集.

同理，$Y_2 = [0,1) \times \{0\} \cup \{1\} \times \{1\}$ 也为紧致子集，但显然 $Y_1 \cap Y_2 = (0,1) \times \{0\}$ 为非紧致子集.

此例说明两个紧致子集的交可以不是紧致子集，$Y_1 \cap Y_2 = (0,1) \times \{0\}$.

§7.4　几种紧致性以及其间的关系

4.1　设 X, Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 为连续映射. 证明：

(1)　若 X 是可数紧致空间，则 $f(X)$ 也是可数紧致空间.

(2)　若 X 是序列紧致空间，则 $f(X)$ 也是序列紧致空间.

证：(1) 只需证 Y 中 $f(X)$ 的可数开覆盖必为有限子覆盖，设：$f: X \to Y$ 为可数紧致空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，Y 的开集族 $\mathscr{A}$ 为 $f(X)$ 的可数开覆盖，则 $f(X) \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$，即 $\{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{A}\}$ 为 X 的可数开覆盖，因为 X 为可数紧致空间，所以存在 $\{f^{-1}(A_1), \cdots, f^{-1}(A_n)\} \subset \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{A}\}$ 为 X 的有限开覆盖，即 $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$，因此 $\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathscr{A}$ 为 $f(X)$ 的有限开覆盖. 所以 $f(X)$ 为可数紧致空间.

(2) 设 $f:X\to Y$ 为序列紧致空间 $X\to Y$ 的连续映射, $\langle y_i\rangle$ 为 $f(X)$ 的序列, 则存在 $x_i\in X, i=1,2,\cdots$, 使 $f(x_i)=y_i, i=1,2,\cdots$, 因此, $\langle x_i\rangle$ 为 X 中的序列, 因 X 为序列紧致空间, 所以存在 $\langle x_i\rangle$ 的一个收敛子序列 $\langle x_{i_k}\rangle$ 收敛于点 $x\in X$, 由定理 2.7.3 知, 序列 $\langle f(x_{i_k})\rangle=\langle y_{i_k}\rangle\subset\langle y_i\rangle$ 收敛于 $f(x)\in f(X)$, 所以 $f(X)$ 为序列紧致空间.

4.2 令 $X=\mathbf{N}$, $\mathscr{T}$ 为以 $\mathscr{B}=\{\{2n-1,2n\}:n\in\mathbf{N}\}$ 为基的 X 的拓扑. 证明 $(X,\mathscr{T})$ 是列紧空间但不是可数紧致, 紧致, 序列紧致空间.

证: 设 $a\in A\subset X$, 若 $a=2k, k\in\mathbf{N}$, 则 $2k-1$ 为 A 的聚点; 若 $a=2k+1, k\in\mathbf{N}$, 则 $2(k+1)$ 为 A 的聚点, 所以 X 为列紧空间, 因 $\mathscr{B}$ 为 X 的两两无交的开覆盖, 且 $\mathscr{B}$ 为无限集, 所以 X 不是可数紧致空间, 据定理 7.4.1, 7.4.6, X 不是紧致或序列紧空间.

4.3 举例说明列紧空间的连续象可以不是列紧空间.

例: 令 $X=Y=\mathbf{N}$, $\mathscr{T}_x$ 为上题中所定义的 X 的拓扑, $\mathscr{T}_y$ 为 Y 的离散拓扑, 则 $(X,\mathscr{T}_x)$ 为列紧空间, 定义

$$f:X\to Y:\quad f(x)=\begin{cases}n, & x=2n\\ n+1 & x=2n+1\end{cases}\quad x\in X, n\in\mathbf{N}$$

显然, f 为在上的连续映射, 但 $(Y,\mathscr{T}_y)$ 非列紧空间.

4.4 证明序列紧致是有限可积的性质.

证: 因序列紧致是拓扑不变的性质, 仅需证, 当 X_1, X_2 为序列紧致空间, 则空间 $X_1\times X_2$ 为序列紧致空间.

设 X_1, X_2 为序列紧致空间, $\langle x_i\rangle=\langle(x_1{}^i, x_2{}^i)\rangle$ 为 $X_1\times X_2$ 的序列, 则 $\langle x_1{}^i\rangle$、$\langle x_2{}^i\rangle$ 分别为 X_1、X_2 的序列, 所以存在子序列 $\langle x_1{}^{i_k}\rangle\subset\langle x_1{}^i\rangle$ 收敛于点 $x_1\in X_1$, 且 $\langle x_2{}^{i_k}\rangle\subset\langle x_2{}^i\rangle$ 收敛于点 $x_2\in X_2$, 由定理 2.7.1 和子序列 $\langle x_1{}^{i_{k_l}}\rangle\subset\langle x_1{}^{i_k}\rangle\subset\langle x_1{}^i\rangle$ 也收敛于点 $x_1\in X_1$, 易见子序列 $\langle x_{i_{k_l}}\rangle=\langle(x_1{}^{i_{k_l}}, x_2{}^{i_{k_l}})\rangle\subset\langle x_i\rangle$ 收敛于点 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$, 所以 $X_1\times X_2$ 为序列紧致空间.

可以证明, 至多可数个序列紧空间的积空间仍是序列紧的. 但是, 不可数个序列紧空间的积空间不必是序列紧的. 例如, 设 I 为单位闭区间并在 I 上取通常拓扑, X 为乘积空间 I^I, 则 I 是序列紧的, 而 X 是紧的, 但不是序列紧的. 事实上, 我们定义函数序列 $\alpha_n\in X(n=1,2,\cdots)$ 如下: $\alpha_n(x)$ 代表 $x\in I$ 的二进位表示式中的第 n 个数字. 为证 X 不是序列紧的, 只要证明 $\{\alpha_n\}$ 中不存在收敛子列即可. 假如相反, 设 $\{\alpha_n\}$ 有子列 $\{\alpha_{n_k}\}$ 收敛于 $\alpha\in X$. 因乘积空间中的收敛性等价于依坐标收敛, 故对每一 $x\in I$, $\alpha_{n_k}(x)$ 在 I 内收敛于 $\alpha(x)$. 取 $x\in I$, 使其在二进位表示式中奇数位置上的数字为 0, 偶数位置上的数字为 1, 则据函数 $\alpha_{n_k}(x)$ 的定义, 当 k 为奇数时 $\alpha_{n_k}(x)=0$. 而当 k 为偶数时 $\alpha_{n_k}(x)=1$. 也就是说, 序列 $\{\alpha_{n_k}(x)\}$ 是 $0,1,0,1,0,1,\cdots$, 它并不收敛. 因此, X 不是序列紧的.

4.5 设 X 和 Y 都是可数紧致空间. 证明: 积空间 $X\times Y$ 也是一个可数紧致空间.

证: 设积空间 $X\times Y$ 不是可数紧致空间, 由引理 7.4.4 得存在 $X\times Y$ 中一个非空闭集下降序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$ 有空交即 $\cap_{n\in\mathbf{Z}_+}A_n=\varnothing$. 设 $p_i(i=1,2)$ 是 $X\times Y$ 的第 i 个坐标投射. 令 $V_1{}^n=p_1(A_n)$ 为 X 中的非空闭集. 对任意 $x\in V_1{}^{n+1}=p_1(A_{n+1})\subset p_1(A_n)=V_1{}^n$, 于是 $\{V_1{}^n\}$ 是一个非空闭集下降序列. 因 $\cap_{n\in\mathbf{Z}_+}V_1{}^n=\cap_{n\in\mathbf{Z}_+}p_1(A_n)=p_1(\cap_{n\in\mathbf{Z}_+}A_n)=\varnothing$, 与 X 是可数紧致空间矛盾.

4.6 设 X 和 Y 都是列紧空间. 积空间 $X\times Y$ 一定是列紧空间吗? 给出你的结论并证明或举出反例.

例: 设 $\mathbf{N}$ 是自然数集, 并在 $\mathbf{N}$ 上取离散拓扑. $\beta\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{N}$ 的 Stone - Cech 紧化. Novak 证明了存在 $\beta\mathbf{N}$ 的可数紧子集 E 与 F, 使

$$E \cup F = \beta\mathbf{N}, E \cap F = \mathbf{N}.$$

作乘积空间 $X = E \times F$. 令 $H = \{(n,n) \mid n \in \mathbf{N}\}$,则 H 是 X 的闭子集,且具有离散拓扑. 因此,X 不是可数紧的.

注:由于可数紧必列紧. 这个例子也说明了两个列紧空间的积空间未必是列紧的.

4.7　证明可数紧致,列紧,序列紧致都是拓扑不变性质.

证:由第 7 章习题 4.1 知,可数紧致,序列紧致都是拓扑不变性质. 下面证列紧也是拓扑不变性质. 设 $f: X \to Y$ 为列紧空间 X 到拓扑空间 Y 的同胚,A 为 Y 的无限子集,则 $f^{-1}(A)$ 为 X 的无限子集,故 $f^{-1}(A)$ 存在聚点 $x \in X$,从而,$f(x)$ 为 A 的聚点.

§7.5　度量空间中的紧致性

5.1　设 (X,ρ) 和 (Y,d) 是两个度量空间,$f: X \to Y$. 映射 f 称为是一致连续的,如果对于任何实数 $\varepsilon > 0$,存在实数 $\delta > 0$,使得当 $x, y \in X$ 并且 $\rho(x,y) < \delta$ 时有 $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. 证明:

(1) 任何一个一致连续映射都是连续的;

(2) 从紧致度量空间到度量空间的任何一个连续映射都是一致连续的.

证:(1) 对任何 $x \in X$,对任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得对任何 $y \in X$ 且 $\rho(x,y) < \delta$ 时,有 $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$,故 f 在 x 处连续,由 x 的任意性得 f 连续.

(2) 设 $f: X \to Y$ 为满足条件的连续映射,但 f 不一致连续,即存在 $\varepsilon_0 > 0$,对任何 $1/n > 0$,存在 $x_n, y_n \in X$ 且 $\rho(x_n, y_n) < 1/n$,有

$$d(f(x),f(y)) \geqslant \varepsilon_0 \qquad (*)$$

X 是紧致度量空间,由定理 7.5.3 得 X 为序列紧致空间,于是 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$,序列 $\{y_{n_k}\}$ 有收敛的子序列 $\{y_m\}$. 显然 $\{x_m\}$ 是 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛的子序列. 由对任意的 n,$\rho(x_n,y_n) < 1/n$,得 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n) = 0$. 设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m = \lim\limits_{m\to\infty}y_m = a$. 因 f 连续,由定理 2.7.3 得

$$\lim_{m\to\infty}f(x_m) = f(a) = \lim_{m\to\infty}f(y_m)$$

但 $d(f(x_m),f(y_m)) \leqslant d(f(x_m),f(a)) + d(f(y_m),f(a)) \to 0$ 与 $(*)$ 式矛盾.

5.2　设 (X,ρ) 和 (Y,d) 是两个度量空间,$f: X \to Y$. 映射 f 称为是一个压缩映射,如果存在实数 $\alpha \in (0,1)$ 使得对于任何 $x, y \in X$

$$d(f(x),f(y)) \leqslant \alpha\rho(x,y)$$

设 X 是一个紧致的度量空间,$f: X \to X$ 是一个压缩映射. 证明:f 有唯一的一个不动点,即存在唯一的一个点 $z \in X$ 使得 $f(z) = z$.

证:对任意 $x \in X$,令 $x_n = f^n(x)$,对任何 $p \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} d(f^n(x),f^{n+p}(x)) &\leqslant d(f^n(x),f^{n+1}(x)) + \cdots + d(f^{n+p-1}(x),f^{n+p}(x)) \\ &\leqslant (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+p-1})d(x,f(x)) \\ &= \frac{\alpha^n(1-\alpha^p)}{1-\alpha}d(x,f(x)) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x,f(x)) \end{aligned}$$

因 $\alpha \in (0,1)$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f^n(x),f^{n+p}(x)) = 0$,对任意 $p \in \mathbf{N}$,X 是紧致度量空间,由定理 7.5.3,X 是序列紧致空间,设 $\{x_n\} = \{f^n(x)\}$ 有收敛的子序列,且 $\lim\limits_{k\to\infty}f^{n_k}(x) = z$,$f$ 显然连续,于是

$$d(z,f(z)) = \lim_{k\to\infty}d(f^{n_k}(x),f^{n_k+1}(x)) = \lim_{n\to\infty}d(f^n(x),f^{n+1}(x)) = 0$$

若又有 $y \in X$ 使 $f(y) = y$,$d(y,z) = d(f(y),f(z)) \leqslant \alpha d(y,z)$,因 $\alpha \in (0,1)$ 得 $y = z$.

5.3　拓扑空间 X 称为伪紧致的,如果对于任一连续映射 $f: X \to \mathbf{R}$,$f(X)$ 都是有界的. 证明,度

量空间 X 是紧致的当且仅当 X 是伪紧致的.

证:由定理7.1.4及7.3.1,紧致空间是伪紧致的.

反之,设度量空间 X 是伪紧致的.若 X 非紧致,据定理7.5.3,存在 X 的无收敛子序列的序列,设为 $\langle x_i\rangle$,于是度量空间的子集 $E=\{x_i:i\in\mathbf{N}\}$ 的导集 $d(E)=\varnothing$.不妨设当 $i,j\in\mathbf{N},i\neq j$ 时,$x_i\neq x_j$.因度量空间是正规空间,而 $\{x_i\}$,$E\sim\{x_i\}$ 显然是闭集,故依次有 x_i 及 $E\sim\{x_i\}$ 的邻域 U_i,V_i,使 $U_i\cap V_i=\varnothing$.又易见,存在 $B_i=B(x_i,\varepsilon_i)$,使 $B_1\subset U_1,B_n\subset U_n\cap(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}V_k)$,$n=2,3,\cdots$.$\{B_i:i\in\mathbf{N}\}$ 是 $\mathscr{V}$交的邻域族,故可定义 $f:X\to\mathbf{R}$ 为

$$f(x)=\begin{cases}[i(\varepsilon_i-f(x_i,\varepsilon_i)]/\varepsilon_i, & x\in B_i\\ 0 & x\in\sim\bigcup\limits_{i\in\mathbf{N}}B_i\end{cases}$$

易验证 f 连续且无界,这与 X 伪紧致性假设矛盾.

§7.6　局部紧致空间,仿紧致空间

6.1　证明拓扑空间 X 为紧致空间(Lindelöf空间)当且仅当 X 的每一开覆盖 $\mathscr{A}$ 都有一个有限(可数)开覆盖 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细.

证:必要性显然,下证充分性.

设本题条件成立,$\mathscr{A}$ 为 X 的开覆盖,则有一个有限(可数)开覆盖 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细,即对每一个 $B\in\mathscr{B}$,存在 $A_B\in\mathscr{A}$,使 $B\subset A_B$,设 $\{A_B\}_{B\in\mathscr{B}}\subset\mathscr{A}$ 为 X 的有限(可数)开覆盖,所以 X 为紧致空间(Lindelöf).

6.2　证明局部紧致和仿紧致都是对闭子空间可遗传的性质.

证:(1)设 A 为局部紧致空间 X 的闭子空间,则对任意 $x\in A$,存在 x 的紧致邻域 u,因 $u\cap A$ 为 u 的闭子集,且 $x\in u\cap A$,所以 $u\cap A$ 为 x 在 A 中的紧致邻域,即 A 为局部紧致的子空间.

(2)设 Y 为仿紧致空间 X 的闭子空间,$\widetilde{\mathscr{A}}$ 为 Y 的开覆盖,则对每一个 $A\in\mathscr{A}$,存在 X 的开集 u_A,使 $A=u_A\cap Y$,于是 $\widetilde{\mathscr{A}}\cup(X\sim Y)$ 为 X 的开覆盖,因而存在 X 的局部有限开覆盖 $\mathscr{A}_1$ 为 $\widetilde{\mathscr{A}}\cup\{X\sim Y\}$ 的加细,那么 $\mathscr{A}_1|Y$ 为 Y 的局部有限的开覆盖,且为 $(\widetilde{\mathscr{A}}\cup\{X\sim Y\})|Y=\widetilde{\mathscr{A}}$ 的加细,因此 Y 是仿紧致的.

6.3　证明局部紧致是有限可积的性质.

证:因局部紧致是拓扑不变性质,仅需证明若 X_1,X_2 为局部紧致空间,则积空间 $X_1\times X_2$ 为局部紧致空间.

设 X_1,X_2 为局部紧空间 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$,则分别存在 x_1,x_2 在 X_1,X_2 中的紧致邻域 u_1,u_2,从而 $u_1\times u_2$ 为 x 在 $X_1\times X_2$ 中的紧致邻域,所以 $X_1\times X_2$ 为局部紧致空间.

6.4　若仿紧空间 X 的每一开子空间都是仿紧致的,证明 X 的每一子空间都是仿紧致的.

证:设 Y 为仿紧致空间 X 的子空间,对任意 $A\in\mathscr{A}$,存在 X 中的开集 U_A 使 $A=U_A\cap Y$,则 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{U_A:A\in\mathscr{A}\}$ 为 Y 在 X 中的开覆盖,令 $W=U_{A\in\mathscr{A}}A$,那么 W 为 X 中的开子空间,因而是仿紧致的,且 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 为 W 的开覆盖,故存在 W 的局部有限的开覆盖 $\widetilde{\mathscr{A}_1}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细,从而 $\mathscr{A}_1=\widetilde{\mathscr{A}_1}|Y$ 为 Y 的局部有限的开覆盖,且为 $\mathscr{A}=\widetilde{\mathscr{A}}|Y$ 的加细,所以 Y 为仿紧致空间.

6.5　从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 $f:X\to Y$ 称为常态的,如果 Y 的任一紧致子集的 f 原象都是 X 的紧致子集.

证明:从拓扑空间 X 到局部紧致的 Hausdorff 空间 Y 上的一一的连续常态映射是同胚.

证:设 $f:X\to Y$ 是从拓扑空间 X 到局部紧致的 Hausdorff 空间 Y 的在上的一一连续常态映射,则 X 为局部紧致空间,由推论 7.2.9 知 $f:X\to Y$ 为局部同胚的映射,所以 $f^{-1}:Y\to X$ 在每一点处连续,从而 f^{-1} 为连续映射,故 $f:X\to Y$ 是同胚.

6.6　证明局部紧致和仿紧致都是拓扑不变性质.

证:(1) 设 $f:X\to Y$ 为局部紧致空间 X 到拓扑空间 Y 的同胚,对任意的 $y\in Y$,则 $f^{-1}(y)\in X$,有一个紧致的邻域 u,从而 $f(u)$ 为 y 的紧致的邻域,所以 Y 为局部紧致空间.

(2) 设 $f:X\to Y$ 为仿紧致空间 X 到拓扑空间 Y 的同胚,$\mathscr{A}$ 为 Y 的开覆盖,则 $\mathscr{B}=\{f^{-1}(A):A\in\mathscr{A}\}$ 为 X 的开覆盖,存在 $\mathscr{B}_1$ 为 X 的局部有限的开覆盖,且为 $\mathscr{B}$ 的加细,那么 $\mathscr{A}_1=\{f(B):B\in\mathscr{B}_1\}$ 为 Y 的局部有限的开覆盖且为 $\mathscr{A}$ 的加细,所以 Y 为仿紧致空间.

第 8 章　完备度量空量

§8.1　度量空间的完备化

1.1　证明:度量空间中的一个 Cauchy 序列如果有一个收敛的子序列,则这个 Cauchy 序列收敛.

证:设$\{x_i\}$的子序列$\{x_{N_i}\}$收敛于$x \in X$,则对$\varepsilon > 0$,有$M_1 \in \mathbf{N}$使得$i > M_1$时,$\rho(x_{N_i},x) < \varepsilon/2$. 因$\{x_i\}$是 Cauchy 序列,故有$M_2 \in \mathbf{N}$,使$n,m > M_2$时$\rho(x_m,x_n) < \varepsilon/2$.

令$N = \max\{M_1,M_2\}$,取定i_0使$N_{i_0} > N$(此时显然$i_0 > M_1$),则对任意$n > N$,有

$$\rho(x_n,x) \leqslant \rho(x_n,x_{N_{i_0}}) + \rho(x_{N_{i_0}},x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

故$\{x_i\}$收敛于x.

1.2　令X表示所有正整数序列$\{x_i\}$的集合,定义$\rho: X \times X \to \mathbf{R}$使得对于任何$\alpha,\beta \in X$

$$\rho(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \alpha = \beta \\ 1/n, & \text{如果 } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

式中$n = \min\{i \in \mathbf{Z}_+ \mid \alpha(i) \neq \beta(i)\}$. 证明:

(1)ρ是X的一个度量;

(2)度量空间(X,ρ)是完备的.

证:设$\langle x_i\rangle,\langle y_i\rangle,\langle z_i\rangle \in X$,$n = \min\{i: x_i \neq y_i\}$,于是若$x_n \neq z_n$,则$\min\{i: x_i \neq z_i\} \leqslant n$,从而$\rho(\langle x_i\rangle,\langle z_i\rangle) \geqslant \rho(\langle x_i\rangle,\langle y_i\rangle)$.

若$x_n = z_n$,则必$z_n \neq y_n$,从而$\rho(\langle z_i\rangle,\langle y_i\rangle) \geqslant \rho(\langle x_i\rangle,\langle y_i\rangle)$. 总之,我们有

$$\rho(\langle x_i\rangle,\langle z_i\rangle) + \rho(\langle z_i\rangle,\langle y_i\rangle) \geqslant \rho(\langle x_i\rangle,\langle y_i\rangle)$$

即三角不等式成立. 又,由ρ的定义,它显然满足 Ⅱ 定义 1.1 的(1),(2),故ρ是X的度量.

设$\alpha_i \in X$,$\alpha_i = \langle x_k^{(i)}\rangle$使得$\langle \alpha_i\rangle$为 Cauchy 序列,于是对$m \in \mathbf{N}$,有$N_m \in \mathbf{N}$,使得当$i,j > N_m$时,$\rho(\alpha_i,\alpha_j) = \rho(\langle x_k^{(i)}\rangle,\langle x_k^{(j)}\rangle) < 1/m$,从而有:$x_k^{(i)} = x_k^{(j)}$,$k = 1,2,\cdots,m$. 不妨设对每个$m \in \mathbf{N}$,取定了$N_m \in \mathbf{N}$,适合上述条件,并且有$N_1 \leqslant N_2 \leqslant \cdots$,令$x_k = x_k^{(N_k+1)}$,$k = 1,2,\cdots$,则$\alpha = \langle x_k\rangle \in X$.

对$\varepsilon > 0$,取$m \in \mathbf{N}$使$1/m \leqslant \varepsilon$,则由$N_j$的取法,当$i > N_m$时,对$k \leqslant m$,有$x_k^{(i)} = x_k^{(N_m+1)} = x_k^{(N_k+1)} = x_k$,故$\rho(\alpha_i,\alpha) = \rho(\langle x_k^{(i)}\rangle,\langle x_k\rangle) < 1/m \leqslant \varepsilon$,即$\lim_i \alpha_i = \alpha$,故$(X,\rho)$是完备的.

1.3　设(X,ρ)是一个紧致的度量空间,$f: X \to X$是一个保距映射. 证明映射f是一个满射.

证:

1.4　设X是一个完备的度量空间,$f: X \to X$是一个压缩映射. 证明:f有唯一的一个不动点,即存在唯一的一个$z \in X$使得$f(z) = z$.

证:取定$x_0 \in X$,以递推式$x_n = f(x_{n-1})$确定一序列$\{x_i\}$,当$j > i > N$时$(i,j,N \in \mathbf{N})$,由假定,有

$$\begin{aligned}
\rho(x_i,x_j) &= \rho(f(x_{i-1}),f(x_{j-1})) \\
&\leqslant \alpha\rho(x_{i-1},x_{j-1}) \leqslant \cdots \\
&\leqslant \alpha^i\rho(x_0,x_{j-i}) \\
&\leqslant \alpha^i(\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) + \cdots + \rho(x_{j-i-1},x_{j-i}))
\end{aligned}$$

$$\leqslant \alpha^i(\rho(x_0,x_1)+\alpha\rho(x_0,x_1)+\cdots+\alpha^{j-i}\rho(x_0,x_1))$$

$$\leqslant \alpha^i\rho(x_0,x_1)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i=\frac{\alpha^i\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}$$

因 $\alpha<1, i>N$,故由上式得

$$\rho(x_i,y_j)=\alpha^N\rho(x_0,x_1)/(1-\alpha)\to 0,(n\to\infty)$$

所以$\{x_i\}$是 X 中的 Cauchy 序列,由 X 的完备性,可设 $\lim_i x_i=x\in X$,据f的连续性,在$x_n=f(x_{n-1})$两边取极限便得 $x=f(x)$,即 x 是f的不动点.

若x^*是f的不动点,则由 $x=f(x),x^*=f(x^*)$得:$\rho(x,x^*)=\rho(f(x),f(x^*))\leqslant\alpha\rho(x,x^*)$,因 $\alpha<1$,故必有 $x=x^*$,即f的不动点唯一地存在.

1.5 证明:若X^*为度量空间 X 的完备化,则X^*是可分的当且仅当 X 是可分的,并由此推论:

(1) 任何只含可数个点的度量空间的完备化是可分的.

(2) 实数空间 $\mathbf{R}$ 是可分的.

证:若 Y 是 X 的可数稠密子集,则对任意 $x\in X^*$ 及其在 X^* 中的任一开邻域 U,由 X 在 X^* 中的稠密性,有 $\varnothing\neq X\cap U$,即 $X\cap U$ 是 X 中的非空开集,从而由 Y 的取法,$Y\cap U=Y\cap(X\cap U)\neq\varnothing$,即 Y 在 X^* 中稠密,于是 X^* 是可分的.

反之,若 X^* 有可数稠密子集 $A=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots\}$,因 X^* 是度量空间,故每一 y_i 有可数局部基$\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots\}$,因 X 在 X^* 中稠密,存在 $x_{i_k}\in v_{i_k}\cap X, i,k=1,2,\cdots$,易见可数集$\{x_{i_k}:i_k\in\mathbf{N}\}\subset X$ 且在 X 中稠密.

§8.2 度量空间的完备性与紧致性,Baire 定理

2.1 举出两个同胚的度量空间的例子,使得一个是完全有界的,另一个却不是.

解:$R\cong A, A=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,$A$ 是完全有界的,R 非紧致,则 R 非完全有界.

2.2 设 X 是一个完备的度量空间,$Y\subset X$. 证明以下条件等价:

(1) Y 完全有界;

(2) $\overline{Y}$ 完全有界;

(3) $\overline{Y}$ 紧致.

证:(1)⇒(2) Y 完全有界,对任意的 $y\in\overline{Y}$,有点列$\{y_n\}$,$(n\to\infty)$ 且 $y_n\in Y$,对任意的 $\varepsilon>0$,有有限子集 A,对任意的 $x\in Y-\rho(x,A)<\varepsilon/2$,所以 $\rho(y_n,A)<\varepsilon/2,(n\to\infty)$,$\rho(y,A)\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon$. 所以 $\overline{Y}$ 完全有界.

(2)⇒(3) $\overline{Y}$ 完全有界,$\overline{Y}$ 紧致.

(3)⇒(1) 显然.

定理8.1.1 完备度量空间的闭的度量子空间是完备度量空间,Y的闭包属于X,所以Y的闭包为完全有界的完备度量空间根据定理8.2.1是紧致空间。

2.3 从定理 8.2.4 出发证明定理 8.2.3.

解:设 X 为完备的度量空间,$B=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}}A_n$,$A_n$ 是 X 的无处稠密集,$n\in\mathbf{N}$.

设 V 是 X 中的非空开集,若$(\sim c(A_n))\cap V=\varnothing$,则 $V\subset c(A_n)$,从而 $i(c(A_n))\neq\varnothing$,这与 A_n 的取法不合,故$(\sim c(A_n))\cap V\neq\varnothing$,即 $\sim c(A_n)$ 是稠密子集,据定理A.13,$\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}}(\sim c(A_n))$ 是 X 的稠密子集,但

$$\sim B=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\sim A_n)\supset\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(\sim c(A_n))$$

故 $\sim B$ 是 X 的稠密子集.

反之,设 $G_1,G_2,\cdots$ 为完备度量空间 X 的稠密开集,则由 $i(c(\sim G_n))\cap G_n=i(\sim G_n)\cap G_n\subset$

(1) 第二范畴集如果包含一个可数个稠密开集的交,一定是稠密子集
(2) 可数个稠密开集的交一定是第二范畴集
综上,可数个稠密开集是第二范畴集,又包含一个可数个稠密开集的交,所以是稠密子集。

$(\sim G_n)\cap G_n=\varnothing$ 以及 G_n 的稠密性,开集 $i(c(\sim G_n))=\varnothing$,即 $\sim G_n$ 是无处稠密集,故 $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} G_n=\sim(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(\sim G_n))$ 是第一范畴集的补集,据定理 A.16,$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} G_n$ 在 X 中稠密.

2.4　证明:每一个局部紧致的正则空间都是 Baire 空间.

证:设 $U\subset X$ 开集,设 U 不是第二范畴集,则 $U=\bigcup_{i\in\mathbf{Z}_+} F_i$,$F_i$ 疏子集,$F_i^{-\circ}=\varnothing$,$i\in\mathbf{Z}_+$,又 $U\subset\bigcup_{i\in\mathbf{Z}_+} F_i^{-}$,$U'\supset\bigcap_{i\in\mathbf{Z}_+} F_i^{-'}$,$F_i^{-'}$ 稠密,$\bigcap_{i\in\mathbf{Z}_+} F_i^{-'}$ 是 X 中稠密子集,而 $U\cap\bigcap_{i\in\mathbf{Z}_+} F_i^{-'}=\varnothing$ 矛盾.

2. 证明每一完备的度量空间都是属于第二范畴的.

证:若不然,有某个完备的度量空间 X 是第一范畴的集,则由 Baire 定理,$\sim X=\varnothing$ 在 X 中稠密. 即 $X=\varnothing$,这与度量空间的定义中非空的条件不合.

3. 在局部紧致的正则空间中,可数个稠密开集之交是稠密开集.

证:设 $A_1,A_2,\cdots$ 为局部紧致的正则空间 X 中的稠密开集,U 是 X 的任一非空开集. 由假定,存在 $x\in U\cap A$,据 Ⅵ 定理 6.3,有 x 的紧致的闭邻域 D_1 使 $D_1\subset U\cap A_1$,假定 X 中某点的紧致闭邻域 D_n 已取定,则 $D_{n+1}\subset c(D_n)\cap A_{n+1}(\neq\varnothing$ 显然) 为某点的紧致闭邻域,由归纳法原理,如此得到一非空集族 $\{D_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 适合 $D_1\supset D_2\supset\cdots$,据 Ⅵ 定理 1.5 及 D_1 的紧致性,

$$\varnothing\neq\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D_n\subset(U\cap A_1)\cap\bigcap_{n\in\mathbf{N}}[i(D_n)\cap A_{n+1}]\subset U\cap\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$$

故 $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ 是 X 的稠密子集.

第 9 章　积空间

§9.1　集族的笛卡儿积

1.1　证明:定理 9.1.1 与选择公理等价.

证:据定理 9.1.1 的证明,有

$$\text{选择公理} \Rightarrow \text{定理 } 9.1.1$$

反之,设 X 是非空集,$\widetilde{X}$ 是 X 的全体非空子集所成的族,据定理 9.1.1

$\{\varepsilon:\widetilde{X} \to \bigcup_{A \in \widetilde{X}} A = X:\text{对每一} A \in \widetilde{X},\varepsilon(A) \in A\} = \prod_{A \in \widetilde{X}} A \neq \varnothing.$

由上式及第 1 章定义 1.8.1,X 的选择函数存在,即有定理 9.1.1 $\Rightarrow$ 选择公理.

1.2　给定两个集族$\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$和$\{Z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. 证明:

$$\left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right) = \prod_{\gamma \in \Gamma}(Y_\gamma \cap Z_\gamma).$$

证:设 $x \in \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right)$,则 x 是 Γ 到$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right)$的映射,使得对于每一个 $\gamma \in \Gamma$,$x(\gamma) \in Y_\gamma$,且 $x(\gamma) \in Z_\gamma$,即 $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma}(Y_\gamma \cap Z_\gamma)$,因此$\left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right) \subset \prod_{\gamma \in \Gamma}(Y_\gamma \cap Z_\gamma)$.

又,易见$\left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right) \subset \prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma, \prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma$,故$\left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma\right) \cap \left(\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma\right) \supset \prod_{\gamma \in \Gamma}(Y_\gamma \cap Z_\gamma)$.

§9.2　积空间

2.1　设 $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 为拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$的积空间. 证明:若对于每 $\gamma \in \Gamma$,X_γ 有子基 $\mathscr{S}_\gamma$,则

$$\mathscr{S}^* = \{p_\gamma^{-1}(S_\gamma):S_\gamma \in \mathscr{S}_\gamma,\gamma \in \Gamma\}$$

是积拓扑的子基.

证:易见,φ^* 是积空间的开集族,取 φ 如定义 1.6,设 U 是积空间的任一非空开集,$x \in U$,因 φ 是积拓扑的子基,故有 φ 中有限个元,$p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}),\cdots,p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n})$,使得 $x \in p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n}) \subset U$,其中 U_{γ_i} 是 X_{γ_i} 中的开集 $i = 1,2,\cdots,n$,因为 φ_{γ_i} 是 X_{γ_i} 的子基,而 $p_{\gamma_i}(U_{\gamma_i}) \in U_{\gamma_i}$,故有 φ_{γ_i} 中有限个元 $S_{i_1},\cdots,S_{i_{t_i}}$,使 $p_{\gamma_i}(U_{\gamma_i}) \in S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{t_i}} \subset U_{r_i}$,$i = 1,2,\cdots,n$,于是

$$\begin{aligned} x \in & \left(p_{\gamma_1}^{-1}(S_{11}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_1}^{-1}(S_{1_{t_1}})\right) \cap \cdots \cap \left(p_{\gamma_n}^{-1}(S_{n_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(S_{n_{t_n}})\right) \\ & \subset p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n}) \subset U \end{aligned}$$

上式表明,对 U 的任一元 x,有 φ^* 中有限个元的交集(记为)W_x,使 $x \in W_x \subset U$,故 φ^* 是积拓扑的子基.

2.2　设 $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 为拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$的积空间. Γ_1 为 Γ 的非空子集. 定义 $p_{\Gamma_1}:\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \to \prod_{\gamma \in \Gamma_1} X_\gamma$ 使得对于每一 $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$,$p_{\Gamma_1} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 满足条件:对于任一 $\gamma \in \Gamma_1$,$p_{\Gamma_1}(x)(\gamma) = x(\gamma)$. 证明:$p_{\Gamma_1}$ 为在上的连续开映射.

证：取定 $x_0 \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$，对 $y \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$，定义

$$x:\Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \text{ 为 } x(\gamma) = \begin{cases} y(\gamma), & \gamma \in \Gamma_1 \\ x_0(\gamma), & \gamma \in \Gamma \sim \Gamma_1 \end{cases}$$

则 $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 且 $p_{\Gamma_1}(x) = y$，故 p_{Γ_1} 是在上的映射，对 $\gamma \in \Gamma(\gamma \in \Gamma_1)$ 用 $p_\gamma(\tilde{p}_\gamma)$ 表示 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma(\prod_{\gamma\in\Gamma_1} X_\gamma)$ 的第 γ 个映射，对积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma_1} X_\gamma$ 的子基 $\varphi_1 = \{\tilde{p}_\gamma^{-1}(U_\gamma): U_\gamma$ 为 X_γ 的开集 $\gamma \in \Gamma\}$ 中的任一元 $\tilde{p}_\gamma^{-1}(U_\gamma)$，容易验证 $\tilde{p}_\gamma \circ p_{\Gamma_1} = p_\gamma \quad (\gamma \in \Gamma_1)$.

从而 $p_{\Gamma_1}^{-1}(\tilde{p}_\gamma^{-1}(U_\gamma)) = (\tilde{p}_\gamma \circ p_{\Gamma_1})^{-1}(U_\gamma) = p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ 是开集，据 Ⅱ 定理6.2(4)，p_{Γ_1} 连续.

积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的开集是形如 $U = p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n})$ 的集的并，其中 U_{γ_i} 是 X_{γ_i} 的开集，$n \in \mathbf{N}$，且 $\gamma_i \neq \gamma_j \quad (i \neq j)$.

为了证明 p_{Γ_1} 是开映射，只需证明对每一个这样的 U，$p_{\Gamma_1}(U)$ 是开集，由于

$$U = p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n}) = \prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$$

其中 $Y_\gamma = \begin{cases} U_\gamma, & \gamma \in \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\} \\ X_\gamma, & \gamma \in \Gamma \sim \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\} \end{cases}$

令 $Z = \prod_{\gamma\in\Gamma} Z_\gamma$ 其中 $Z_\gamma = \begin{cases} U_\gamma, & \gamma \in \Gamma_1 \cap \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\} \\ X_\gamma, & \gamma \in \Gamma_1 \sim \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\} \end{cases}$

则由 p_{Γ_1} 的定义，易见

$$p_{\Gamma_1}(U) = Z = \prod_{\gamma\in\Gamma} Z_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma_1\cap\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}} \tilde{p}_\gamma^{-1}(U_\gamma)$$

因 $\Gamma_1 \cap \{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$ 是空集或非空有限集，故 $p_{\Gamma_1}(U)$ 为开集，综上：p_{Γ_1} 是在上的连续开映射.

2.3　设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 为拓扑空间族，$\Gamma_1,\Gamma_2 \subset \Gamma$ 使得 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 和 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$，证明：$\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 同胚于 $(\prod_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma 1}) \times (\prod_{\gamma_2\in\Gamma_2} X_{\gamma 2})$.（各积空间的拓扑都取积拓扑）

证：沿用上题的记号，定义

$$f:\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to (\prod_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1}) \times (\prod_{\gamma_2\in\Gamma_2} X_{\gamma_2})$$

为对每一 $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$，$f(x) = (p_{\Gamma_1}(x), p_{\Gamma_2}(x))$

设 $y \in \prod_{\gamma_1\in\Gamma_1} X_{\gamma_1}$，$z \in \prod_{\gamma_2\in\Gamma_2} X_{\gamma_2}$，由于 Γ_1,Γ_2 的取法，可定义一映射

$$x:\Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

使得 $x(\gamma) = \begin{cases} y(\gamma), & \gamma \in \Gamma_1 \\ z(\gamma), & \gamma \in \Gamma_2 \end{cases}$

易见 $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 且 $f(x) = (y,z)$，因此 f 是满射.

设 $x, x' \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 且 $x \neq x'$，则有 $\gamma \in \Gamma$ 使 $x'(\gamma) \neq x(\gamma)$，不妨设 $\gamma \in \Gamma_1$，于是由 p_{Γ_1} 的定义

$$p_{\Gamma_1}(x)(\gamma) = x(\gamma) \neq x'(\gamma) = p_{\Gamma_1}(x')(\gamma)$$

从而$f(x) \neq f(x')$,因此f是一一映射.

令$\tilde{p}_i$为$(\prod_{\gamma_1 \in \Gamma_1} X_{\gamma_1}) \times (\prod_{\gamma_2 \in \Gamma_2} X_{\gamma_2})$的第$i$个投射$(i = 1,2)$,由上题的结果,$\tilde{p}_i \circ f = p_{\Gamma_i} \quad (i = 1,2)$是连续开映射,据 Ⅱ 定理9.11(或 Ⅶ 定理1.8)f连续.

最后,对于$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$中的形如$U = p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n})$的开集(其中$U_{\gamma_i}$是$X_{\gamma_i}$的开集,$n \in \mathbf{N}$,且$\gamma_n \neq \gamma_m, n \neq m \in \mathbf{N}$),由$f$的定义易见有$f(U) = p_{\Gamma_1}(U) \times p_{\Gamma_2}(U)$,因$\Gamma_1, \Gamma_2$是开映射,故$f(U)$是开集,据本节定义1.6,$f$是开映射.

综上,f是同胚.

2.4　设$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$为拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$的积空间,并且对于每一$\gamma \in \Gamma$,确定了$X_\gamma$的子集$Y_\gamma$. 证明:

$$c(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma) = \prod_{\gamma \in \Gamma} c(Y_\gamma)$$

证:设$x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma, x \bar{\in} \prod_{\gamma \in \Gamma} c(Y_\gamma)$,则有$\gamma_0 \in \Gamma$使$x(\gamma_0) \bar{\in} c(Y_{\gamma_0})$,于是$U_{\gamma_0} = X_{\gamma_0} \sim c(Y_{\gamma_0})$是$x(\gamma_0)$在$X_{\gamma_0}$中的开邻域,$p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0})$是$x$的开邻域,并且

$$\begin{aligned} p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0}) \cap (\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma) &\subset p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0}) \cap (\prod_{\gamma \in \Gamma} c(Y_\gamma)) \\ &\subset p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0}) \cap p_{\gamma_0}^{-1}(c(Y_{\gamma_0})) = p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0} \cap (c(Y_{\gamma_0}))) = \varnothing \end{aligned}$$

故$x \bar{\in} c(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma)$

反之,设$y \bar{\in} c(\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma)$则有$\varphi$(见本章定义1.6)中含有$y$的有限个元之交,$W = p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n})$,使得$W \cap (\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma) = \varnothing$.

不妨设$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$互不相同,于是有某$i_0 \in \{1,2,\cdots,n\}$,使$(\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma) \cap p_{\gamma_{i_0}}^{-1}(U_{\gamma_{i_0}}) = \varnothing$,(否则存在$z_i \in p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) \cap (\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma)$,$(i = 1,2,\cdots,n)$取定$z_0 \in \prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$定义$z: \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$为

$$z(\gamma) = \begin{cases} z_i(\gamma), & \gamma = \gamma_i \\ z_0(\gamma), & \text{其它情形} \end{cases}$$

则易见$z \in W \cap (\prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma)$矛盾!)

于是$U_{\gamma_{i_0}} \cap Y_{\gamma_{i_0}} = \varnothing$,从而$y(\gamma_{i_0}) \bar{\in} c(Y_{\gamma_{i_0}})$,故$y \bar{\in} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma^-$.

2.5　证明每一坐标空间都同胚于积空间的某一子空间.

证:设$X = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$是拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$的积空间,取定$x_0 \in X$,对任一$X_\beta \in \{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$定义

$$Y_\gamma = \begin{cases} X_\beta, & \gamma = \beta \\ \{x_0(\gamma)\}, & \gamma \in \Gamma - \{\beta\} \end{cases} \qquad Y = \prod_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$$

以及$f = p_\beta | Y$. 易见,$f: Y \to X_\beta$是一一在上的连续映射,下证f为开映射.

对Y的基$\mathscr{B} = \{p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap p_{\gamma_2}^{-1}(U_{\gamma_2}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n}) \cap Y: n \in N, \gamma_i \in \Gamma, U_{\gamma_i}$是$X_{\gamma_i}$中的开集$\}$中的任一非空成员

$$U = p_{\gamma_1}^{-1}(U_{\gamma_1}) \cap p_{\gamma_2}^{-1}(U_{\gamma_2}) \cap \cdots \cap p_{\gamma_n}^{-1}(U_{\gamma_n}) \cap Y$$

不妨设 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 互不相等,且 $\beta\in\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$(必要时可置 $U_\beta = X_\beta$),据推论1.5及习题1.2,$U=\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}Z_\gamma$,其中

$$Z_\gamma=\begin{cases}U_\gamma\cap Y_\gamma & \gamma\in\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\\ X_\gamma\cap Y_\gamma & \gamma\in\Gamma-\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\end{cases}=\begin{cases}X_\beta, & \gamma=\beta\\ \{x_0(\gamma)\}, & \gamma\in\Gamma-\{\beta\}\end{cases}$$

于是 $f(U)=f(\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}Z_\gamma)=U_\beta$ 是开集,从而 f 是开映射.综上,X_β 同胚于 X 的子空间 Y.

§9.3 可积的拓扑性质

3.1 证明 $T_0(T_1$,正则)空间族的积空间相应是 $T_0(T_1$,正则)空间.

证:(1)设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 T_0 空间族,x,y 是积空间 $X=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 中相异两点,于是有 $\alpha_0\in\Gamma$ 使 $x(\alpha_0)\neq y(\alpha_0)$

在 T_0 空间 X_{α_0} 中,有开集 U_{α_0} 仅含 $x(\alpha_0)$ 与 $y(\alpha_0)$ 之一,不妨设 $x(\alpha_0)\in U_{\alpha_0}$,$y(\alpha_0)\notin U_{\alpha_0}$

易见 $p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ 是 X 中点 x 的开邻域,且其不含 y,故 X 是 T_0 空间.

(2)类似于(1)的证明,可证 T_1 空间族的积空间为 T_1 空间.

(3)设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是正则空间族,x 是积空间 $X=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 的点,U 是 X 中含 x 的开邻域,于是有有限个 Γ 中的元 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ 使

$$x\in p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\cdots\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})\subset U$$

其中 U_{α_i} 是 X_{α_i} 中的开集,$x(\alpha_i)\in U_{\alpha_i}$

因 X_{α_i} 正则,它有开子集 $U_{\alpha_i}^*$ 使得

$$x(\alpha_i)\in U_{\alpha_1}^*,c(U_{\alpha_i}^*)\subset U_{\alpha_i}$$

于是 $U^*=p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}^*)\cap\cdots\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}^*)$ 是 X 中 x 的开邻域,且由定理 Ⅱ6.2

$$\begin{aligned}c(U^*)&=c(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}^*)\cap\cdots\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}^*))\\&\subset p_{\alpha_1}^{-1}(c(U_{\alpha_1}^*))\cap\cdots\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(c(U_{\alpha_n}^*))\\&\subset p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\cdots\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})\subset U\end{aligned}$$

故 X 是正则空间.

3.2 证明拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 满足第一可数性公理当且仅当 Γ 中存在可数子集 Γ_1 使得当 $\alpha\in\Gamma_1$ 时 X_α 满足第一可数性公理,$\alpha\in\Gamma\sim\Gamma_1$ 时 X_α 为平庸空间.

证:充分性:设 $x\in\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$,$V_{x(\alpha)}$ 是 X_α 中点 $x(\alpha)$ 的可数局部基,易见

$$W_x=\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha):U_\alpha\in V_{x(\alpha)},\alpha\in\Gamma\}$$

是空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 中 x 的局部子基.

由假定,当 $\alpha\in\Gamma\sim\Gamma_1$ 时,$V_{x(\alpha)}$ 是单点集 $\{X_\alpha\}$,并且 Γ_1 可数,故 W_x 可数.

于是 x 有可数局部基

$$V_x=\{w_1\cap\cdots\cdots\cap w_n:w_i\in W_x,i=1,2,\cdots\cdots,n,n\in N\}$$

必要性:设 $X=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$ 满足第一可数性公理,则由定理 Ⅳ1.6,$X_\alpha=p_\alpha(X)$ 满足第一可数性公理.

记 $\mathscr{T}_\alpha$ 为 X_α 的拓扑,$\Gamma_1=\{\alpha:\alpha\in\Gamma,X_\alpha$ 不是平庸空间$\}$,取定 $x_0\in X$,并且对每一 $\alpha\in\Gamma_1$,取定 $U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha\sim\{x_\alpha,\varnothing\}$ 以及 $x_\alpha\in U_\alpha$,定义

$$x:\Gamma \to \bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$$

为

$$x(\alpha) = \begin{cases} x_\alpha, & \alpha \in \Gamma_1 \\ x_0(\alpha), & \alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1 \end{cases}$$

则 $x \in X$

设 x 的一个可数局部基为 $\mathscr{V}$,易见对每一个 $U \in \mathscr{V}$,存在有限集 $\Gamma_U \subset \Gamma$ 使得 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_U$ 时有 $p_\alpha(U) = X_\alpha$,令

$$\Gamma' = \bigcup_{U\in\mathscr{V}} \Gamma_U$$

则 Γ' 可数,并当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma'$ 时,对每个 $U \in \mathscr{V}$,$\Gamma_\alpha(U) = X_\alpha$,从而当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma'$ 时,$\mathscr{V}_\alpha = \{X_\alpha\}$.

由 x 的定义,当 $\alpha \in \Gamma_1$ 时,$x(\alpha)$ 的任意局部基必含 X_α 的真子集,故当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma'$ 时,$\alpha \bar{\in} \Gamma_1$,这表明 $\alpha \in \Gamma_1 \subset \Gamma'$,故 Γ_1 可数.

3.3 证明拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为可度量化空间当且仅当 Γ 存在一可数子集 Γ_1,使得当 $\alpha \in \Gamma_1$ 时,X_α 为可度量化空间,当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时,X_α 仅含一点.

证:充分性:据习题 Ⅷ1.4,$\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 与 $\prod_{\alpha\in\Gamma_1} X_\alpha$ 同胚. 据定理2.5,$\prod_{\alpha\in\Gamma_1} X_\alpha$ 可度量化,从而 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 亦然.

必要性:据习题 Ⅷ1.7,对每一个 $\alpha \in \Gamma$,X_α 同胚于可度量化空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的某一子空间,从而 X_α 可度量化.

又,因 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 可度量化,故其满足第一可数性公理,据上题的结果,存在 Γ 的可数子集 Γ_1 使得 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时 X_α 是平庸空间,故 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时 X_α 为可度量的平庸空间,从而 X_α 仅含一点.

3.4 证明拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为局部连通空间当且仅当存在 Γ 的有限子集 Γ_1 使得当 $\alpha \in \Gamma_1$ 时,X_α 为局部连通空间,当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时,X_α 为连通空间.(题解编者注:此题应为:…… 当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时,X_α 为连通且局部连通空间)

证:充分性:设 $x \in X = \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$,$U$ 是 x 的邻域,则因每一 X_α 局部连通,有 Γ 中有限个互不相等的元 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ 使得 $\Gamma \subset \{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n\}$ 且 $x \in V = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots\cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \subset U$,其中 U_{α_i} 是 X_{α_i} 中的连通开邻域,显然,V 是 x 的开邻域.

据定理2.1,集 V 作为积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} Y_\alpha$ 是连通的,其中

$$Y_\alpha \text{ 是} \begin{cases} \text{空间 } X_\alpha, & \text{当 } \alpha \in \Gamma \sim \{\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n\} \\ \text{子空间 } U_\alpha, & \text{当 } \alpha \in \{\alpha_1,\cdots\cdots\alpha_n\} \end{cases}$$

另一方面,集 V 作为 X 的子空间有子基

$$\begin{aligned} \varphi_V &= \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap V : U_\alpha \text{ 为 } X_\alpha \text{ 的开集}, \alpha \in \Gamma\} \\ &= \{(p_\alpha \mid V)^{-1}(V_\alpha) : V_\alpha \text{ 为 } Y_\alpha \text{ 的开集}, \alpha \in \Gamma\} \end{aligned}$$

即 φ_V 也是 $\prod_{\alpha\in\Gamma} Y_\alpha$ 的积拓扑的子基,故 V 作为 X 的子空间就是连通空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} Y_\alpha$,所以 V 是 X 中含 x 的包含于 U 的连通邻域.

必要性:对 $\alpha \in \Gamma$,由 X 的局部连通性及等式 $X_\alpha = p_\alpha(X)$,即知 X_α 为局部连通空间(p_α 为投影,因而是连续开映射)

又,任取 X 的一个连通开集 U,易见有有限集 $\Gamma_U \subset \Gamma$ 使 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_U$ 时 $p_\alpha(U) = X_\alpha$,这表明

$\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_U$ 时 X_α 连通,从而可置所论 $\Gamma_1 = \Gamma_U$.

3.5 设 X 为多于一点的离散空间,证明若 Γ 为不可数集时,X^Γ(取积拓扑)必不为离散空间.

证:设 Γ 为任一无限集,U 为 X^Γ 的任一非空开集,易见有有限集 $\Gamma_U \subset \Gamma$ 使 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_U$ 时 $p_\alpha(U) = X$(注意:$\Gamma \sim \Gamma_U \neq 0$),从而 $p_\alpha(U)$ 多于一点,故 U 不是单点集.

由于 X^Γ 的任一非空开集不是单点集,故 X^Γ 不是离散空间.

§9.4 Tychonoff 乘积定理

4.1 若一拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为紧致空间,证明每坐标空间 X_α 都是紧致空间.

证:据定理 Ⅵ1.7 及等式 $X_\alpha = p_\alpha(\prod\limits_{\beta\in\Gamma} X_\beta)(\alpha \in \Gamma)$,即知每一坐标空间 X_α 在题设条件下是紧致的.

4.2 证明紧致的 Tychonoff 空间可以不是可度量化的空间.

证:考虑多于一点的紧致的 Tychonoff 空间 X(例如单位区间[0,1]),取 Γ 为不可数集.

令 $Y = X^\Gamma$(X^Γ 取积拓扑),据定理 Ⅶ3.9,Y 是紧致空间,据习题 Ⅶ2.1、2.3 及定理 2.4,Y 是 Tychonoff 空间,但不可度量化.

4.3 若拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 中有无限多个 X_α 都不是紧致空间,证明积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的每一紧致子集都没有内点.

证:设 E 是 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的有内点的子集,则 Γ 有有限个互不相等的元 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ 及 X_{α_i} 中的开集 $U_{\alpha_i}(\neq \varnothing)$ 使得

$$B = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots\cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \subset E$$

由题设,可取到 $\Gamma \sim \{\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n\}$ 中的元,设为 α_0,使得 X_{α_0} 不是紧致空间,于是 X_{α_0} 有一个开复盖 $\mathscr{A}_0$ 使得 $\mathscr{A}_0$ 的任意有限子族均不是 X_{α_0} 的复盖.

令 $\mathscr{A} = \{p_{\alpha_0}^{-1}(A): A \in \mathscr{A}_0\}$,则 $\mathscr{A}$ 是 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的开复盖,从而是 E 及 B 的开复盖.

易见 $\mathscr{A}$ 没有有限子族可复盖 B,从而无有限子族可复盖 E,故 E 不是 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的紧致子集.

4.4 证明拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为局部紧致空间当且仅当 Γ 中存在有限子集 Γ_1 使得当 $\alpha \in \Gamma_1$ 时,X_α 是局部紧致的;当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时,X_α 是紧致的.

证:充分性:对任一 $x \in \prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$,由假定,对 $\alpha \in \Gamma_1$,$x(\alpha)$ 在 X_α 中有紧致邻域,设为 U_α,令 $U = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$,则因 Γ_1 有限,U 是 x 的邻域,据习题 Ⅶ2.4 的解,(紧致空间族 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的)积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} Y_\alpha$(取积拓扑)就是空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的子空间 U,其中

$$Y_\alpha \text{ 是} \begin{cases} \text{空间 } X_\alpha, & \text{当 } \alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1, \\ X_\alpha \text{ 的子空间 } U_\alpha, & \text{当 } \alpha \in \Gamma_1 \end{cases}$$

据定理 3.9,U 是 $\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的紧致子集.

必要性:由定理 Ⅵ1.7 及 $X_\alpha = p_\alpha(\prod\limits_{\beta\in\Gamma} X_\beta)$,易见对每一 $\alpha \in \Gamma$,X_α 是局部紧致空间.

任取 $x \in \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$,存在 x 的紧致邻域 U_x,因 x 是 U_x 的内点,据上题的结果,存在有限集 $\Gamma_1(\subset\Gamma)$ 使得当 $\alpha \in \Gamma \sim \Gamma_1$ 时,X_α 是紧致空间.

4.5　证明 Tukey 引理蕴含选择公理.

证:设 μ 为非空集合所成的集族,$m = \bigcup_{E\in\mu} E$,称 f 为 μ 上的选择函数,如果 f 是 μ 到 m 的映射,使得对任意 $(E,e) \in f \subset \mu \times m$,有 $e \in E$.

设 X 为非空集合,$\widetilde{X} = 2^X \sim \{\varnothing\}$,令

$$\mathscr{F} = \{f : f \text{ 是 } \widetilde{X} \text{ 的子族上的选择函数}\}$$

则(1) $\mathscr{F} \neq \varnothing$(易见 $\varnothing \in \mathscr{F}$,即 $\varnothing$ 是 $\widetilde{X}$ 的空子族 $\varnothing$ 上的选择函数)

(2) 若 $f \in \mathscr{F}, g \subset f$ 则易见 $g \in \mathscr{F}$

(3) 若集 f 的每一有限子集都为 $\mathscr{F}$ 的成员,则易见

(i) $f \subset \bigcup_{g\in\mathscr{F}} g \subset \widetilde{X} \times X$;

(ii) 对每一 $(E,e) \in f, e \in E$;

(iii) 若 $(E,e),(E,e') \in f$,则 $f_0 = \{(E,e),(E,e')\} \in \mathscr{F}$,从而,据函数的定义,有 $e' = e$.

综合(1),(2),(3),$\mathscr{F}$ 为具有有限特征的集族,据 *Tukey* 引理,$\mathscr{F}$ 有最大元,设 F 是 $\mathscr{F}$ 的一个最大元,若 F 的定义域 D 是 $\widetilde{X}$ 的真子集,则 $\widetilde{X} \sim D \neq \varnothing$,设 $E_* \in \widetilde{X} \sim D$,取 $e_* \in E_*$,令 $F_* = F\{(E_*, e_*)\}$,则易见 $F_* \in \mathscr{F}$ 并且 F 是 F_* 的真子集,这与 F 的取法矛盾. 故 F 的定义域 $D = \widetilde{X}$,即 F 是 X 的选择函数.

§9.5　拓扑空间在方体中的嵌入

5.1　证明拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为 T_0, T_1, Hausdorff, 正则或完全正则空间,则每一坐标空间相应地为具有同一性质的空间.

证:据习题 Ⅴ4.1 及 4.2,T_0, T_1, Hausdorff, 正则或完全正则空间都是可遗传的拓扑不变性质,从而利用上题即得本题结果.

5.1　若拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 的积空间 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 为 T_4 空间,证明每一坐标空间 X_α 都是 T_4 空间.

证:由题设及上题结果,每一坐标空间都是 T_1 空间,故其单点子集是闭集,于是对习题 Ⅶ1.7 的证明中的 Y_β,有 $c(Y_\beta) = Y_\beta$,对每一 $\beta \in \Gamma$,由习题 Ⅶ1.6 及 1.7,积空间 $\prod_{\beta\in\Gamma} X_\beta$ 中同胚于 X_α 的子空间 $Y = \prod_{\beta\in\Gamma} Y_\beta$ 是 $\prod_{\beta\in\Gamma} X_\beta$ 的闭子集.

据习题 Ⅴ4.1 及 Ⅴ4.3 即得本题结果.

5.2　举例说明嵌入引理(引理 9.5.1)中第(3)条中的“则”字不能改为“当且仅当”.

例:设 Y 为多于一点的离散空间,$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为单点空间族,$f: Y \to \prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 是 Y 到 $\prod_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha$ 的唯一的(常值)映射,则 f 显然是开映射,但不能区别点与闭集.

5.3　利用嵌入引理(引理 9.5.1)简化 Uryshon 嵌入定理(引理 6.6.1)的证明.

证:设 X 满足 A_2 的 T_3 空间

$H = \prod_{r\in Z^+} H_r$

设 F 是 X 到 H_r 的所有连续映射的全体. 易知 X 为 Tycholoff 空间. F 是既区别点,又区别点和闭集的映射族.

定义 $e:X\to H$ 满足对任意的 $f\in F$, $e(x)(f)=f(x)\in H_r$. 所以 $P_f\circ e=f$, $F=\{P_f\circ e\mid f\in F\}$. 由嵌入引理,$e$ 是从 X 到 H 中的一个嵌入.

1　设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为拓扑空间族,证明每一坐标空间都能嵌入积空间.

证:据习题 Ⅶ1.7 即知题断真.

第 10 章　映射空间

§10.1　映射空间

1.1　设 X 为 Tychonoff 空间，且是可数集，证明对任一 $f \in R^X$（点式收敛的拓扑）都存在 $\mathscr{L}(X, R)$ 中的序列 $< f_i >$ 收敛于 f.

证：将 X 的元素排列成 $x_1, x_2, \cdots\cdots$，对 $f \in R^X$，记 $f(x_i) = c_i, i \in \mathbf{N}$，定义 $f_1: X \to R$ 为：$f_1(x) = c_1$，对每一 $x \in X$，假定对 $n-1 \in \mathbf{N}, f_1, \cdots\cdots, f_n$ 已定义，使得对 $i \in \{1, \cdots\cdots, n-1\}$，$f_i: X \to R$ 连续，且 $f_i(x_j) = c_j, j = 1, \cdots\cdots, i$. 由于 X 为 T_1 空间，不含 x_n 的有限集 $\{x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}\}$ 为闭集，又因 X 完全正则，有连续函数 $g_n: X \to R$，使得 $g_n(x_n) = 0, g_n(x) = 1, x \in \{x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}\}$，定义 $f_n: X \to R$ 为：$f_n(x) = f_{n-1}(x) + (c_n - f_{n-1}(x_n))(1 - g_n(x))$ 则易知 f_n 连续，且当 $i \in \{1, \cdots\cdots, n-1\}$ 时，$f_n(x_i) = c_i$，据归纳法原理，由此得到 $c(X, R)$ 中的一序列 $< f_i >$，易见 $< f_i >$ 收敛于 f.

1.2　考虑映射空间 $\mathbf{R}^I$（点式收敛拓扑），其中 $I = [0,1]$. 对于每一个 $i \in \mathbf{Z}_+$，定义 $f_i \in \mathbf{R}^I$ 使得对于任意 $x \in I$ 有 $f_i(x) = x^i$. 证明：$\mathbf{R}^I$ 中的序列 $\{f_i\}_{i \in \mathbf{Z}_+}$ 收敛，但其极限不是一个连续映射.

证：对任意的 $x \in I$，

$$f_i(x) = x^i \to \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases} \qquad (i \to \infty)$$

所以

$$f_i(x) \to f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1 \end{cases} \qquad (i \to \infty)$$

所以 $f_i \to f, f \in \mathbf{R}^I$，$f$ 不是连续映射.

1.2　从前面的章节中，找出定理 1.2 成立的根据.

解：所论根据可列为下表：

性质	坐标空间	根据	映射空间（点式收敛的拓扑）
连通性	Y	$\underset{\text{定理Ⅶ1.7,Ⅲ1.13}}{\overset{\text{定理Ⅶ2.1}}{\leftrightarrows}}$	Y^X
T_0, T_1, Hausdorff，正则，完全正则	Y	$\underset{\text{习题Ⅶ4.2}}{\overset{\text{习题Ⅶ2.1，定理Ⅶ2.3,2.6}}{\leftrightarrows}}$	Y^X
紧致性	Y	$\underset{\text{习题Ⅶ2.1}}{\overset{\text{定理Ⅶ1.9}}{\leftrightarrows}}$	Y^X

1.3　给出定理 1.3 的证明.

证：据定理 Ⅶ2.2（或习题 Ⅶ2.2），映射空间 Y^X（点式收敛的拓扑）满足第二（或第一）可数性公理当且仅当 Y^X 的坐标空间至多有可数个满足第二（或第一）可数性定理，而其余的为平庸空间. 但 Y^X 的坐标空间皆为 Y，故上述条件等价于条件"X 是可数集且 Y 满足第二（或第一）可数性公理或 Y 为平庸空间".

1.4 举例说明当X为拓扑空间,Y为满足第一或第二可数性公理的空间时,映射空间Y^X(紧致收敛的拓扑)可以不具有同一性质.

例:设X为可数个点的紧致拓扑空间(例如平庸空间等等),Y为实空间R. 考虑映射空间Y^X(紧致收敛的拓扑),将X的点排为$x_1,x_2,\cdots\cdots$,令$f:X\to Y$为$f(x_n)=n$. 下证在f处无可数局部基. 假定$\{U_n\}_n\in\mathbf{N}$为f的可数局部基,对每一U_n,有$V_n=W(E_n,U_n)\cap\cdots\cdots\cap W(E_{nm_n},U_{nm_n})$使得$f\in V_n\subset U_n,n=1,2,\cdots\cdots$,其中$E_{st}$为$X$的紧致子集,$U_{st}$是$Y(=R)$中的开集. $m_n\in\mathbf{N}$. 现取开区间(α_n,β_n)如下:若$x_n\notin\bigcup\limits_{i=1}^{m_n}E_{n_i}$,令$(\alpha_n,\beta_n)=(n-1/2,n+1/2)$,若$E_{n1},\cdots\cdots,E_{nm_n}$中全部含$x_n$的集为$E_{ni_1},\cdots\cdots,E_{ni_p}$,则取$(\alpha_n,\beta_n)\subset(n-1/2,n+1/2)$使$[\alpha_n,\beta_n]\subset\bigcup\limits_{t=1}^{p}U_{ni_t}$,这显然可以办到,于是对任一$n$,$\alpha_n\notin\bigcup\limits_{v\in\mathbf{N}\{\mathbf{WTBX}\}}(\boldsymbol{\alpha}_v,\boldsymbol{\beta}_v)$,且$\mathbf{U}=\mathbf{W}(\mathbf{X},\bigcup\limits_{v\in\mathbf{N}\{\mathbf{WTBX}\}}(\boldsymbol{\alpha}_v,\boldsymbol{\beta}_v))$为$\mathbf{f}$的邻域,令$\mathbf{f_n}:\mathbf{X}\to\mathbf{R}$为

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in X\sim\{x_n\}\\ \alpha_n, & x\in\{x_n\}\end{cases}$$

则$f_n\in V_n$,但$f_n\notin U$,即$V_n\not\subset U$,从而$U_n\not\subset U,n=1,2,\cdots\cdots$,故$\{U_n\}$不是$f$的局部基,矛盾.

因此Y^X(紧致收敛的拓扑)不满足第一可数性公理,从而也满足第二可数性公理.

1.5 设X,Y为拓扑空间,证明若$c(X,Y)$(紧致收敛的拓扑)为正则空间,则Y也为正则空间.

证:定义$f:Y\to c(X,Y)$,使得对任一$x\in X,y\in Y$有$p_x(f(y))=y$,其中p_x是第x个投射.

易见f是单射,且对Y的开集U及$x\in X$,$f(U)=p_x^{-1}(U)\cap f(Y)=cc(X,Y)\cap p_x^{-1}(U)\cap f(Y)$是$c(X,Y)$的子空间$f(Y)$的开集,这是因为$p_x^{-1}(U)$是$Y^X$(紧致收敛的拓扑)的开集$W(\{x\},U)$. 又,因$\mathscr{T}_\varphi=\{W(E,V):E$是$X$的紧致子集,$V$是$Y$的开集$\}$是$Y^X$的正基,故$(\mathscr{T}_\varphi\mid c(X,Y))\mid f(Y)=\mathscr{T}_\varphi\mid f(Y)$是$f(Y)$的子基.

对任一$W(E,V)\cap f(Y)\in\mathscr{T}_\varphi\mid f(Y)$,显然有$f^{-1}(W(E,V)\cap f(Y))=f^{-1}(f(V))=V$,故$f:Y\to f(Y)$是同胚.

因$c(X,Y)$正则,据习题 Ⅴ4.2,$f(Y)$正则,又据习题 Ⅴ4.1,Y正则.

2.2 设X是一个拓扑空间. 令

$$\mathscr{F}=\{f\in\mathbf{R}^X\mid f(X)\text{ 是 }\mathbf{R}\text{ 中的一个有界子集}\}$$

证明:$\mathscr{F}$是映射空间$\mathbf{R}^X$(一致收敛度量)的一个闭子集(因此它作为$\mathbf{R}^X$的度量子空间是完备的).

证:$\mathscr{F}$的一个收敛序列$\{f_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$收敛于$F\in\mathbf{R}^X$,$\mathscr{F}$为闭集只须$f\in\mathscr{F}$,$f_i\in\mathscr{F}$. 所以$f_i(x)$有界,存在$M_i\in R$

$$|f_i(x)|\leqslant M_i,\qquad i\in\mathbf{Z}_+$$

M_i有下界,存在收敛子列$\{M_{i_k}\}\to M_{i_k}\to M\qquad(k\to\infty)$

所以$|f_{i_k}(x)|\leqslant M_{i_k}\qquad(k\to\infty)$

$|f(x)|\leqslant M$,所以$f\in\mathscr{F}$.

§10.3 紧致开拓扑

3.1 设X和Y是一个拓扑空间,$X_1\subset X$. 定义映射

$$r:\mathscr{C}(X,Y)\to\mathscr{C}(X_1,Y)$$

使得对于任何$f\in\mathscr{C}(X,Y)$,$r(f)=f|_{X_1}$. 证明:对于$\mathscr{C}(X,Y)$和$\mathscr{C}(X_1,Y)$的紧致开拓扑而言,映射r连续.

证:U是$\mathscr{C}(X_1,Y)$中的开集,对任意的$g\in U$,g连续,V是Y中开集,$g^{-1}(V)$是X_1中开集,$X_1\subset$

X,存在紧致子集 $W \subset g^{-1}(V)$,存在紧致 $V' \subset X$,使 $W = V' \cap X$,所以 $r[W(V',V)] \subset W(W,V) \subset U$,所以 $W(V',V) \subset r^{-1}(U)$

$r^{-1}(U)$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的开集,r 连续.

附:若 Y 是 Hausdorff 空间,则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是的紧致开拓扑也是 Hausdorff 空间.

证:设 $f,g \in \mathscr{C}(X,Y)$ 且 $f \neq g$,则有 $p \in X$ 使 $f(p) \neq g(p)$,Y 是 Hausdorff 空间,有 Y 中开集 G,H 使 $f(p) \in G, g(p) \in H$,且 $G \cap H = \varnothing$,所以 $f \in W(\{p\},G)$,$g \in W(\{p\},H)$ 及 $W(\{p\},G) \cap W(\{p\},H) = \varnothing$. 因 $\{p\}$ 紧致,从而 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 Hausdorff 空间.

3.2　设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 映射 $e:\mathscr{C}(X,Y) \times X \to Y$ 使得对于每一个 $(f,x) \in \mathscr{C}(X,Y) \times X$ 有

$$e(f,x) = f(x)$$

称为赋值映射证明:对于 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的紧致开拓扑而言,赋值映射 e 是一个连续映射.

证:$U \in \mathscr{U}_y$ 开邻域,对任意的 $y \in Y$,存在 $x \in X$,存在 $f \in \mathscr{C}(Y)$,使 $f(x) = y$,所以 $W(\{x\},U)$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中开集(相对紧致开拓扑),f 连续,$f^{-1}(U)$ 是 x 的开邻域. 所以 $e(W(\{x\},U) \times f^{-1}(U)) \subset U$,$(W(\{x\},U) \times f^{-1}(U)) \subset e^{-1}(U)$,所以 $e^{-1}(U)$ 为 x 的邻域,所以 e 连续.