深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基于图像的三维模型重建

——相机模型与对极几何

主讲人 隋博士

课程内容

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

✓ 针孔相机模型

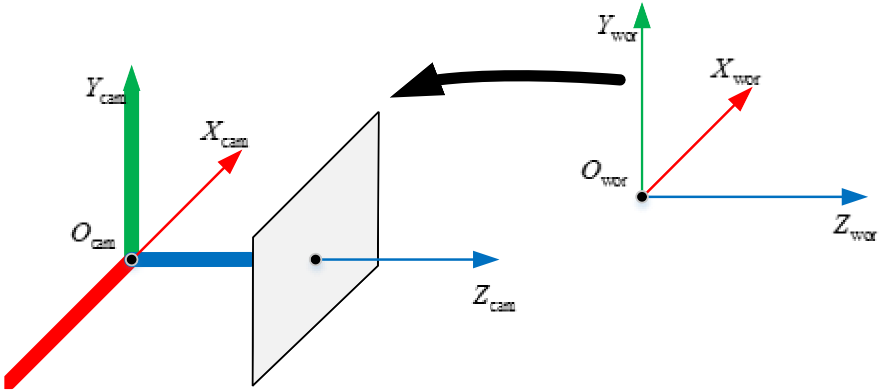
- ✓ 针孔相机模型
- ✓ 径向畸变

✓ 2D-2D:对极几何

- ✓ 对极约束
- ✓ 本质/单应矩阵
- ✓ 直接线性变换法

针孔相机模型-外参数矩阵

1. 世界坐标系到相机坐标系



$$\boldsymbol{X}_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

点的相机坐标

$$\boldsymbol{X}_w = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

点的世界坐标

刚体变换

$$\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_w + \boldsymbol{t}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆变换

$$\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{X}_c - \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{t}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

针孔相机模型–外参数矩阵

1.1 相机中心在世界坐标系中的位置

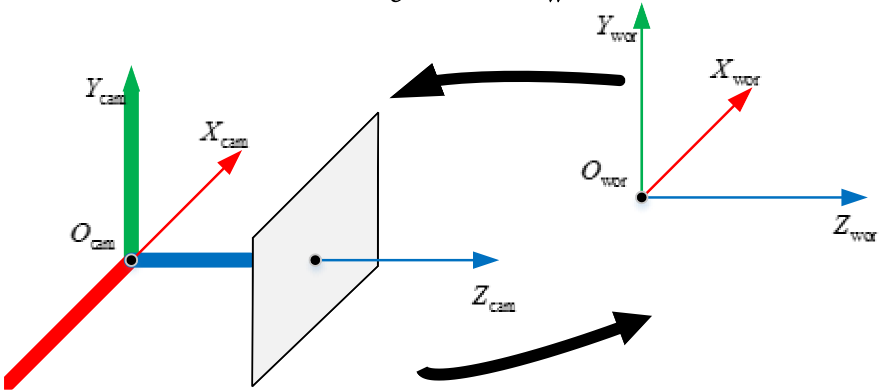
$$\boldsymbol{O}^{c}_{\text{cam}} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{O}^{w}_{\text{cam}} = \boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{O}^{c}_{\text{cam}} - \boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{t}$$

$\boldsymbol{O}^{c}_{\text{cam}}$ ---相机中心在相机坐标系中的坐标

$\boldsymbol{O}^{w}_{\text{cam}}$ ---相机中心在世界坐标系中的坐标

$$\boldsymbol{X}_c = \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_w + \boldsymbol{t}$$



$$\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{X}_c - \boldsymbol{R}^{T}\boldsymbol{t}$$

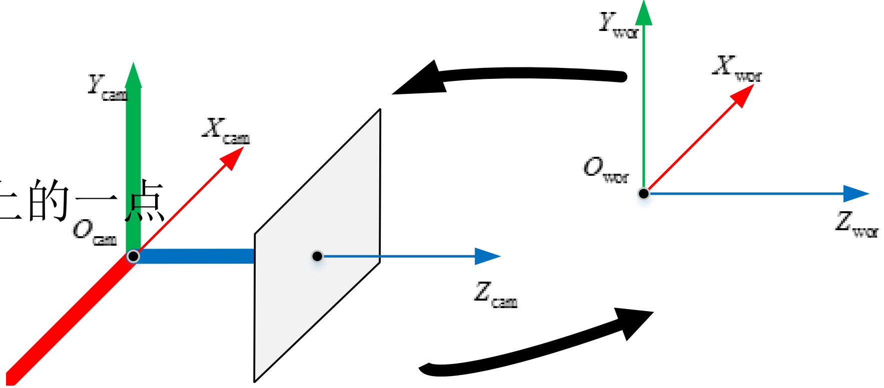
针孔相机模型–外参数矩阵

1.2 相机朝向(Z轴)在世界坐标系中的方向

$$r^c = Z^c - O^c_{\text{cam}} \qquad Z^c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad O^c_{\text{cam}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z^c ---相机坐标系中Z轴上的一点

$$X_c = RX_w + t$$



$$r^w = (R^T Z^c - R^T t) - (R^T O^c_{\text{cam}} - R^T t)$$

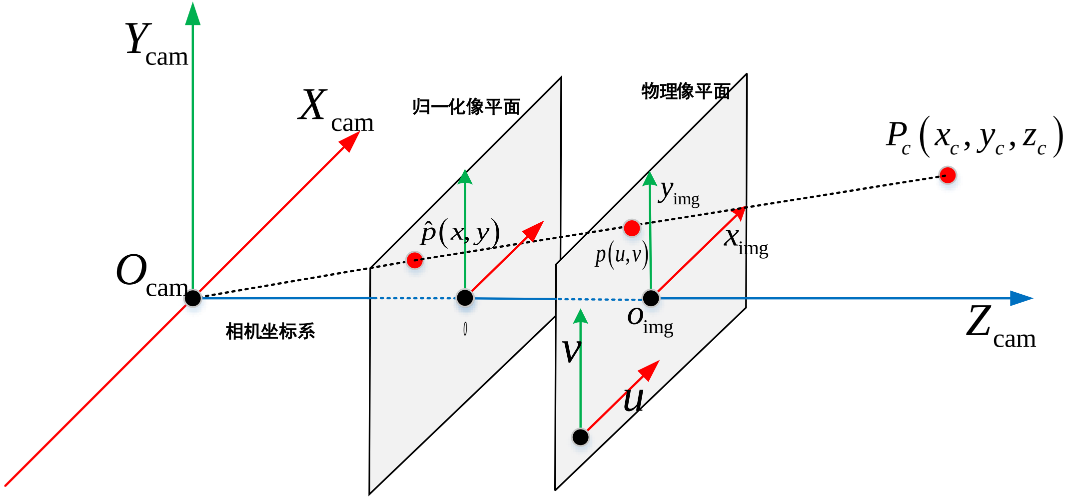
$$= R^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R(2,:)$$ 旋转矩阵的第3行?

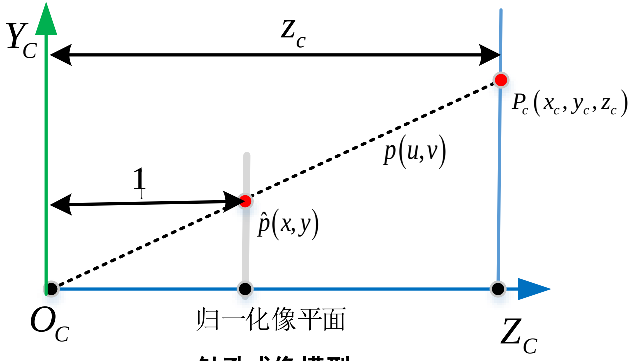
$$X_w = R^T X_c \text{-} R^T t$$

针孔相机模型–内参数矩阵

相机坐标系到归一化像平面坐标系

归一化像平面是虚拟的平面坐标，它与物理像平面平行，且距离相机光心距离为1





针孔成像模型

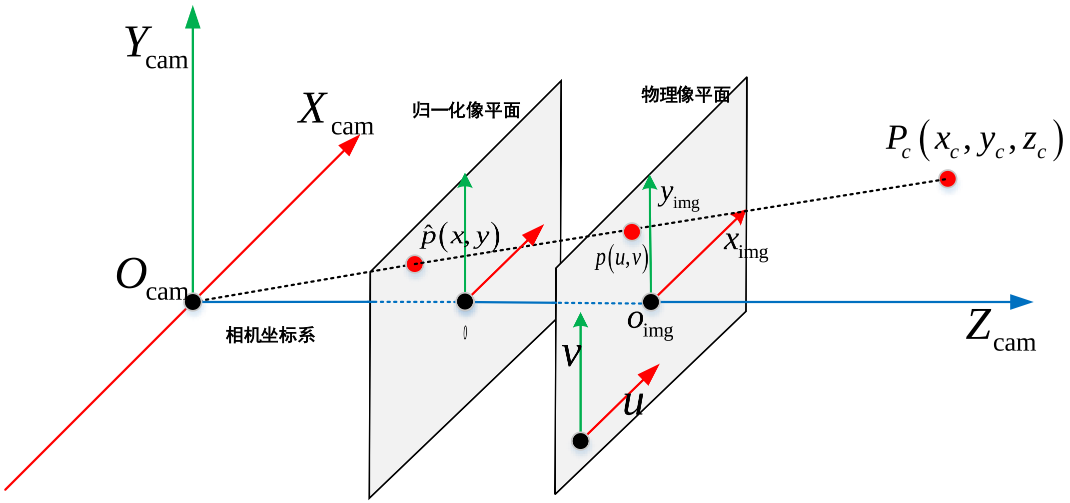
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_c}{z_c} \\ \frac{y_c}{z_c} \end{pmatrix}$$

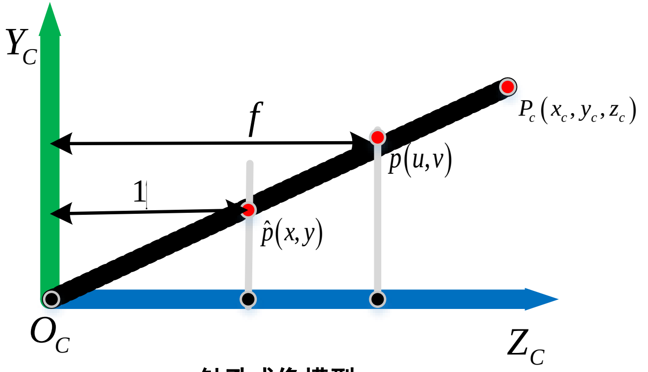
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

针孔相机模型–内参数矩阵

归一化像平面标系到物理像平面坐标系

物理像平面是实际存在的平面，它是相机CCD阵列所在的平面





针孔成像模型

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha x \\ f\beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x \\ f_\beta y \end{pmatrix}$$

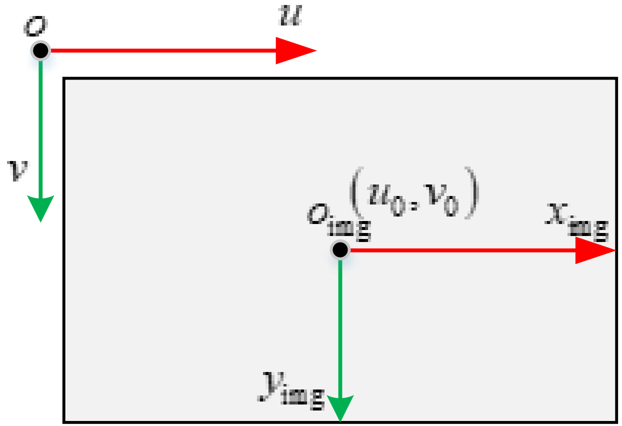
α, β ---单位是像素/毫米

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & f_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

针孔相机模型–内参数矩阵

物理像平面坐标系

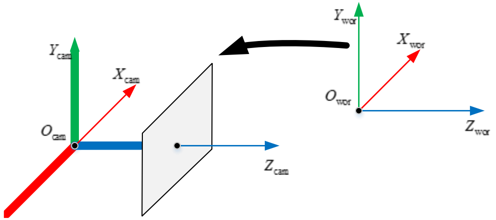
一般以左上角为坐标原点，需要进行坐标系平移

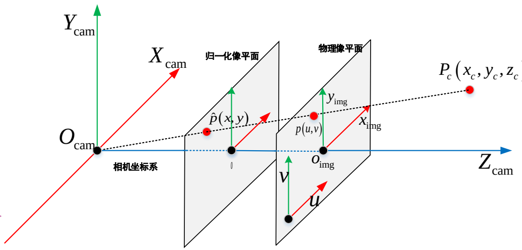


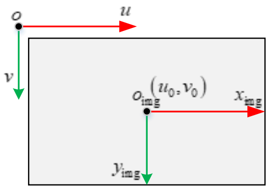
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha x + u_0 \\ f_\beta y + v_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & f_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ z_c \end{pmatrix}$$

一般情况下 $f = f_\alpha = f_\beta$

针孔相机模型–透视矩阵







$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \begin{pmatrix} f_\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f_\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_c} \boldsymbol{K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{3\times 4} = \boldsymbol{K} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

6个外参数 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}$ 姿态估计

5个内参数 $f_\alpha = f_\beta$, $\underline{k_1, k_2}, u_0, v_0$ 相机标定

径向畸变系数后面介绍

针孔相机模型–径向畸变

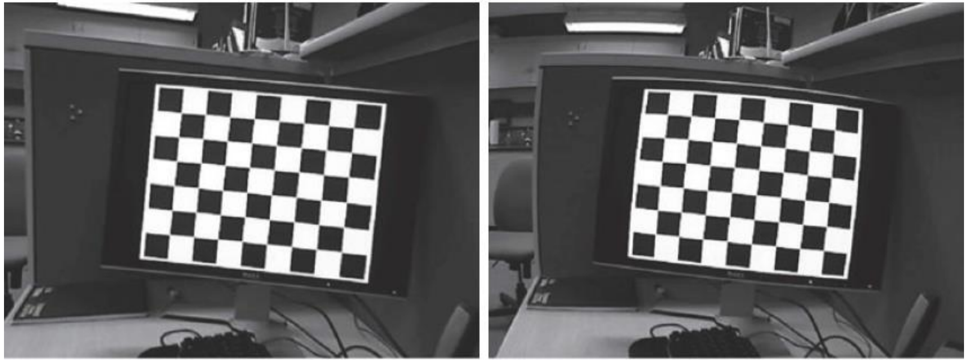
深蓝学院 shenlanxueyuan.com

成因：透镜不能完全满足针孔模型假设

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, r^2 = x^2 + y^2$$

k_1，k_2 为径向畸变系数

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$



直线变弯曲，由图像中心往外畸变程度越来越大

针孔相机模型–径向畸变

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

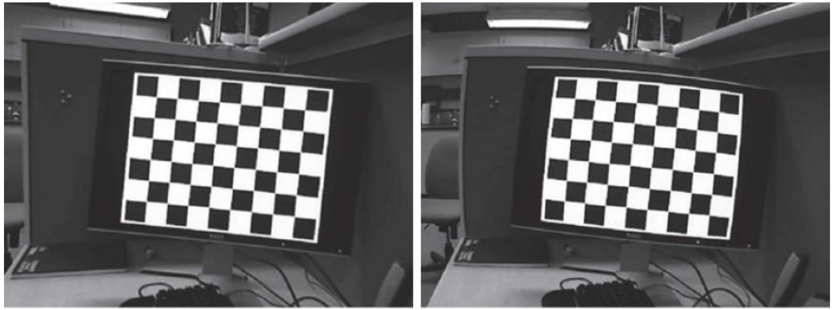
径向畸变系数的最小乘估计

理想情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u\text{-}u_0 \\ v\text{-}v_0 \end{bmatrix}}$$

畸变情况下投影点的坐标：

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}\text{-}u_0 \\ \tilde{v}\text{-}v_0 \end{bmatrix}}$$



$$\boxed{f\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}} = (1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)\boxed{f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

$$\Downarrow$$

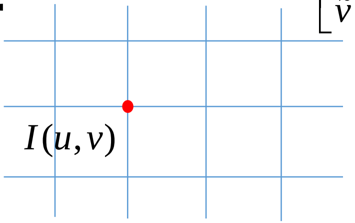
$$\begin{bmatrix} (u-u_0)r^2 & (u-u_0)r^4 \\ (v-v_0)r^2 & (v-v_0)r^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}-u \\ \tilde{v}-v \end{bmatrix}$$

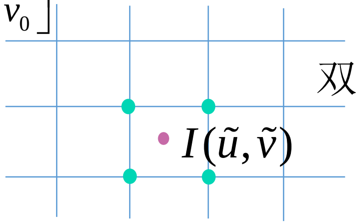
提供理想点 $[u \quad v]^T$与畸变点 $[\tilde{u} \quad \tilde{v}]^T$的对应关系通过最小二乘进行估计

针孔相机模型-径向畸变

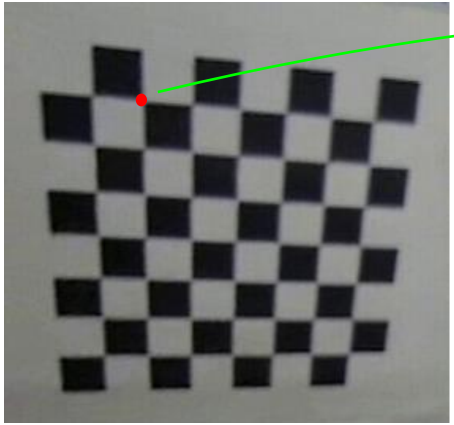
径向畸变矫正

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \left(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4\right) \begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

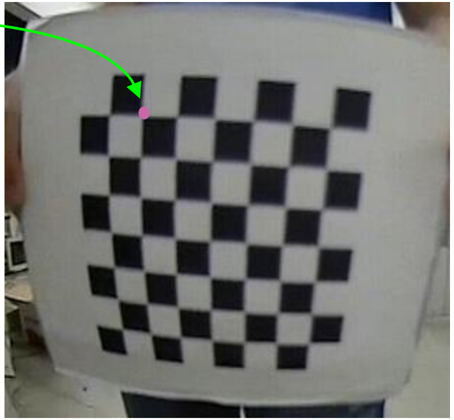




双线性/三线性插值



矫正后的图像



矫正前的图像

针孔相机模型–透视矩阵

Coding1

实现简单的相机C++类，完成相机投影过程的代码

课程内容

- ✓ **针孔相机模型**
  - ✓ 针孔相机模型
  - ✓ 径向畸变
- ✓ **2D-2D:对极几何**
  - ✓ 对极约束
  - ✓ 本质/单应矩阵
  - ✓ 直接线性变换法

2D-2D:对极几何-对极约束

对极约束 $x_2^T F x_1 = 0 \quad \hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0$

其中 $E = K_2^{-T} F K_1 \quad \hat{x}_1 = K_1^{-1} x_1 \quad \hat{x}_2 = K_2^{-1} x_2$

公式推导

$$P_1 = K_1 [I, \quad 0] \qquad P_2 = K_2 [R, \quad t]$$

$$d_1 x_1 = K_1 X \Rightarrow d_1 K_1^{-1} x_1 = X = d_1 \hat{x}_1$$

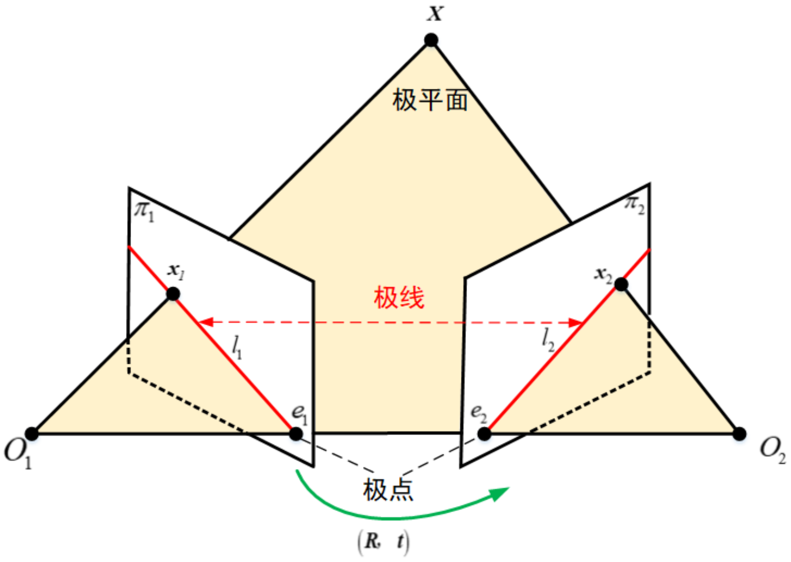
$$d_2 x_2 = K_2 (RX + t) \Rightarrow d_2 K_2^{-1} x_2 = RX + t = d_1 R \hat{x}_1 + t$$

$$\Rightarrow d_2 [t]_\times \hat{x}_2 = d_1 [t]_\times R \hat{x}_1 + [t]_\times t$$

$$\Rightarrow d_2 \hat{x}_2^T [t]_\times \hat{x}_2 = d_1 \hat{x}_2^T [t]_\times R \hat{x}_1 = 0$$

$$\hat{x}_2^T [t]_\times R \hat{x}_1 = \hat{x}_2^T E \hat{x}_1 = 0 \qquad x_2^T K_2^{-T} [t]_\times R K_1^{-1} x_1 = x_2^T F x_1 = 0$$

$$E = [t]_\times R \qquad F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$$



本质矩阵: $E = [t]_\times R$

基础矩阵: $F = K_2^{-T} E K_1^{-1}$

2D-2D:对极几何-基础矩阵F

基础矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵，秩为2
- ✓ 具有7个自由度
- ✓ 奇异值为$[\sigma_1, \sigma_2, 0]^T$
- ✓ 极线约束 $l_1 = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F}$，$l_2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1$

  $\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_1 = 0$

基础矩阵求解方法

- 直接线性变换法
  - 8点法
  - 最小二乘法
- 基于RANSAC的鲁棒方法

2D-2D:对极几何-基础矩阵F

直接线性变换法

对于一对匹配点 $\boldsymbol{x}_1$=[u_1, v_1, 1]$^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2$=[u_2, v_2, 1]$^{\mathrm{T}}$ 根据对极约束 $\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$,

$$(u_1 \quad v_1 \quad 1)\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

令 $\boldsymbol{f}=[F_{11}, \ F_{12}, \ F_{13}, \ F_{21}, \ F_{22}, \ F_{23}, \ F_{31}, \ F_{32}, \ F_{33}]^T$ 则有

$$[u_1u_1, \ u_1v_2, \ u_1, \ v_2u_1, \ v_1v_2, \ v_1, \ u_2, \ v_2, \ 1]\,\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$ ⬅ 每一对匹配点提供一个约束

2D-2D:对极几何-基础矩阵F

当有n对匹配点时

$$A=\begin{pmatrix} u_1^{(1)}u_1^{(1)}, & u_1^{(1)}v_2^{(1)}, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}u_2^{(1)}, & v_1^{(1)}v_2^{(1)}, & v_1^{(1)}, & u_2^{(1)}, & v_2^{(1)}, & 1 \\ u_1^{(2)}u_1^{(2)}, & u_1^{(2)}v_2^{(2)}, & u_1^{(2)}, & v_1^{(2)}u_2^{(2)}, & v_1^{(2)}v_2^{(2)}, & v_1^{(2)}, & u_2^{(2)}, & v_2^{(2)}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n)}u_1^{(n)}, & u_1^{(n)}v_2^{(n)}, & u_1^{(n)}, & v_1^{(n)}u_2^{(n)}, & v_1^{(n)}v_2^{(n)}, & v_1^{(n)}, & u_2^{(n)}, & v_2^{(n)}, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Af} = \boldsymbol{0}$$

- 要保证有唯一解至少需要8对匹配点
- $n=8$ 时，若$\boldsymbol{A}$ 非奇异，则有唯一解，称为8点法
- $n\geq 8$ 时，可用最小二乘法求解

$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 的最小特征值对应的特征向量即为最优解

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

奇异值约束

直接线性变化法无法保证基础矩阵的奇异值约束—有两个非0奇异值

根据奇异值约束对矩阵进行重构：

$$\min \left\| \boldsymbol{F} - \hat{\boldsymbol{F}} \right\|, \quad \text{wrt. svd}(\boldsymbol{F}) = [\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0]$$

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \quad \text{with } \boldsymbol{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

对得到的基础矩阵 $\hat{\boldsymbol{F}}$ 进行奇异值分解

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}\text{diag}(\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad 0)\boldsymbol{V}^T$$

利用奇异值约束对基础矩阵进行重构

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-2

实现基础矩阵的求解过程

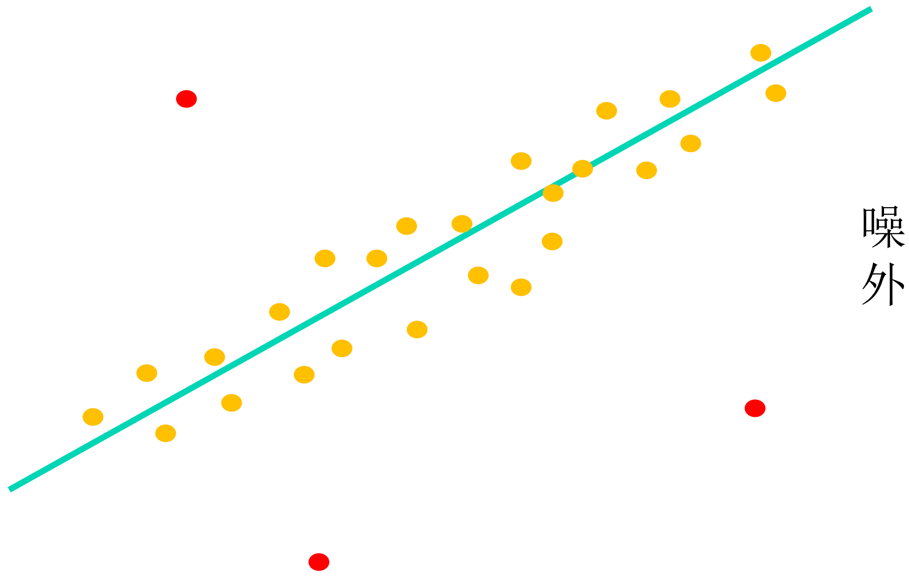
1）直接线性变换法
2）奇异值约束

2D-2D:对极几何-RANSAC

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

RANSAC-随机一致性采样

解决样本中的外点问题，最多可处理50%的外点情况



--外点

--噪声

噪声可建模而外点不可建模

外点对最小二乘影响巨大

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-随机一致性采样

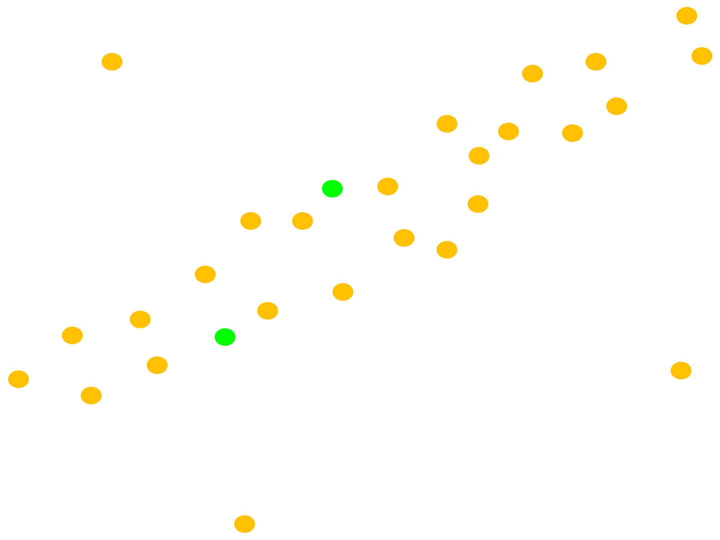
N –样本点个数　　K –求解模型需要最少的点的个数

1. 随机采样 K 个点
2. 对该 K 个点拟合模型
3. 计算其它点到拟合模型的距离小于一定阈值，当作内点，统计内点个数
4. 重复 M 次，选择内点数最多的模型
5. 利用所有的内点重新估计模型(可选)

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

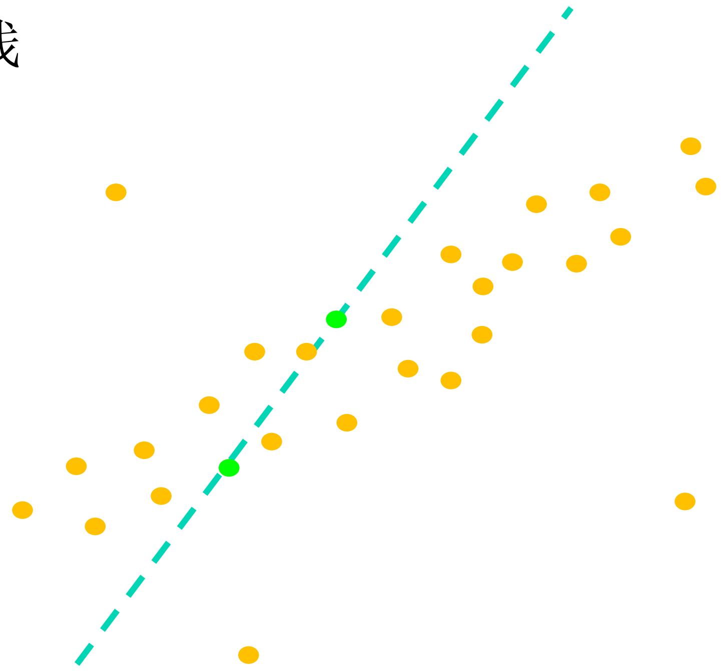
1. 随机选取 K=2 个点



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

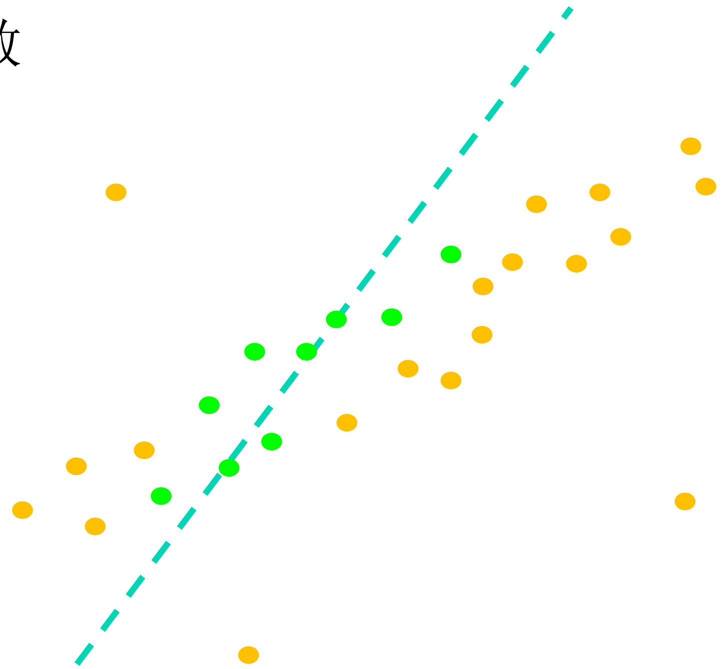
2. 拟合一条直线



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

3. 统计内点个数



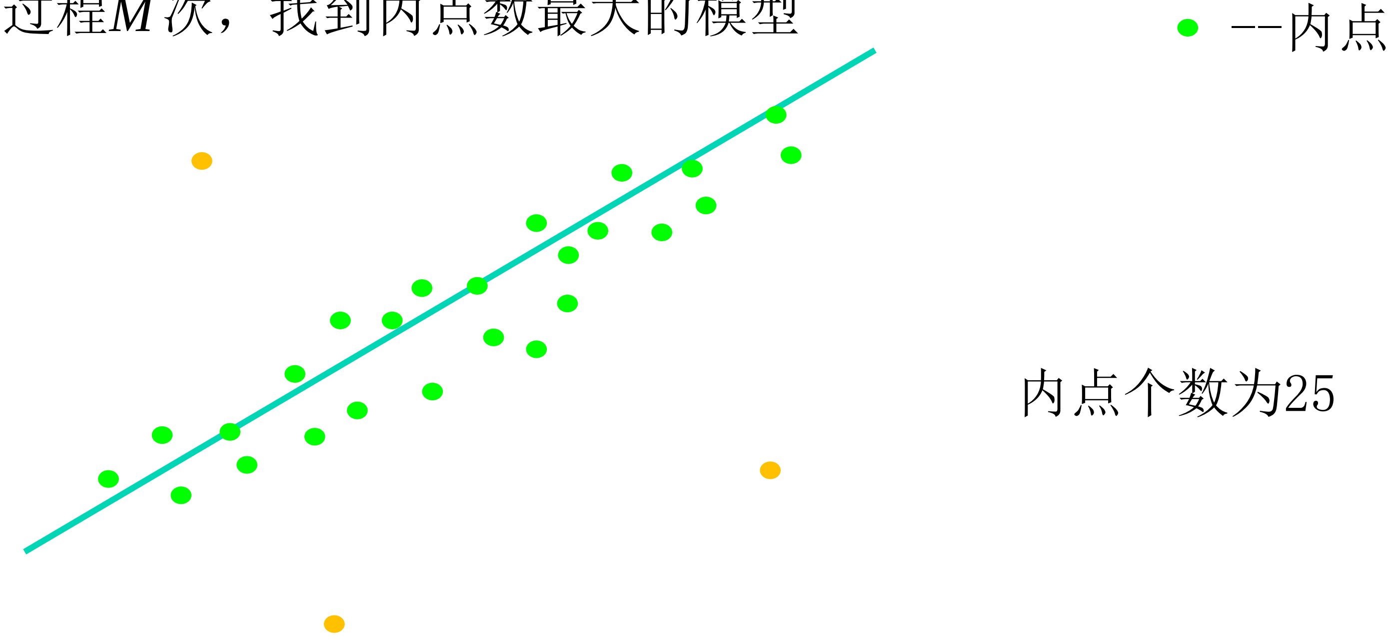
● --内点

内点个数为9

2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

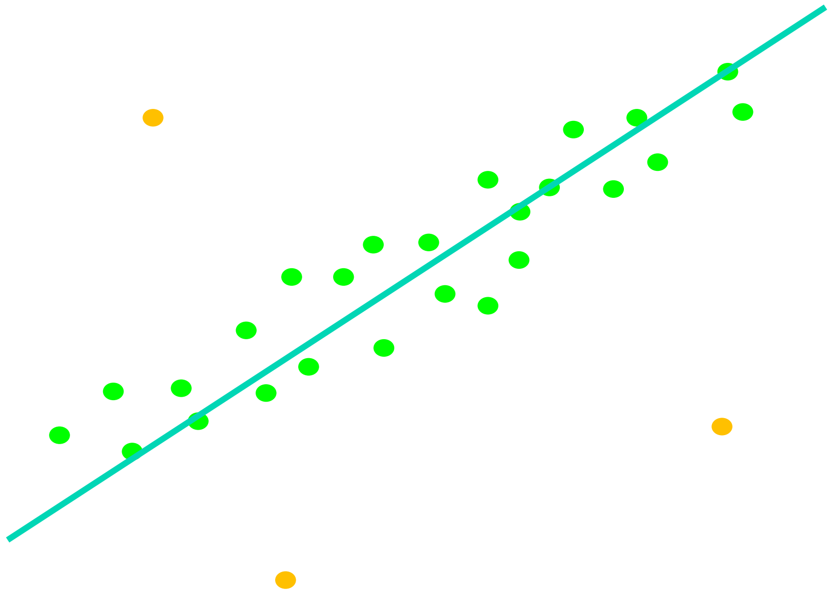
4. 重复上述过程M次，找到内点数最大的模型



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-拟合直线

5. 利用所有的内点重新估计直线



2D-2D:对极几何-RANSAC

RANSAC-采样次数的计算

N −样本点个数

K −求解模型需要最少的点的个数

p −表示内点的概率

p^K $-K$个点都是内点概率

$1-p^K$ $-K$个至少有一个外点(采样失败)的概率

$\left(1-p^K\right)^M$ $-M$次采样全部失败的概率

$z=1-\left(1-p^K\right)^M$ $-M$次采样至少有1次成功的概率

$$M=\frac{\log(1-z)}{\log(1-p^K)}$$

计算 $p=0.9$，$K=8$时，想要采样成功率达到 $z\geq 0.99$，所需要的采样次数 M

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

RANSAC-估计基础矩阵

算法流程

1. 随机采样8对匹配点 $\left(\boldsymbol{x}_1^{(n)}, \quad \boldsymbol{x}_2^{(n)}\right)$
2. 8点法求解基础矩阵 $\hat{\boldsymbol{F}}$
3. 奇异值约束获取基础矩阵 $\boldsymbol{F}$
4. 计算误差，并统计内点个数
5. 重复上述过程，选择内点数最多的结果
6. 对所有内点执行2, 3，重新计算 $\boldsymbol{F}$

内点判断标准-Sampson Distance

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{(\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{x}_1)^2}{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1)_x^2 + (\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1)_y^2 + (\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F})_x^2 + (\boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{F})_y^2}$$

$$d(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) < \tau$$

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-3

RANSAC 估计基础矩阵F

2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

本征矩阵性质

- ✓ 3x3的矩阵，秩为2
- ✓ 具有5个自由度
- ✓ 奇异值为$[\sigma, \sigma, 0]^T$

求解基础矩阵$\boldsymbol{F}$

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{K}_2^T \boldsymbol{F} \boldsymbol{K}_1$$

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)\boldsymbol{V}^T$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U}\mathrm{diag}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)\boldsymbol{V}^T$$

2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

相机姿态的恢复

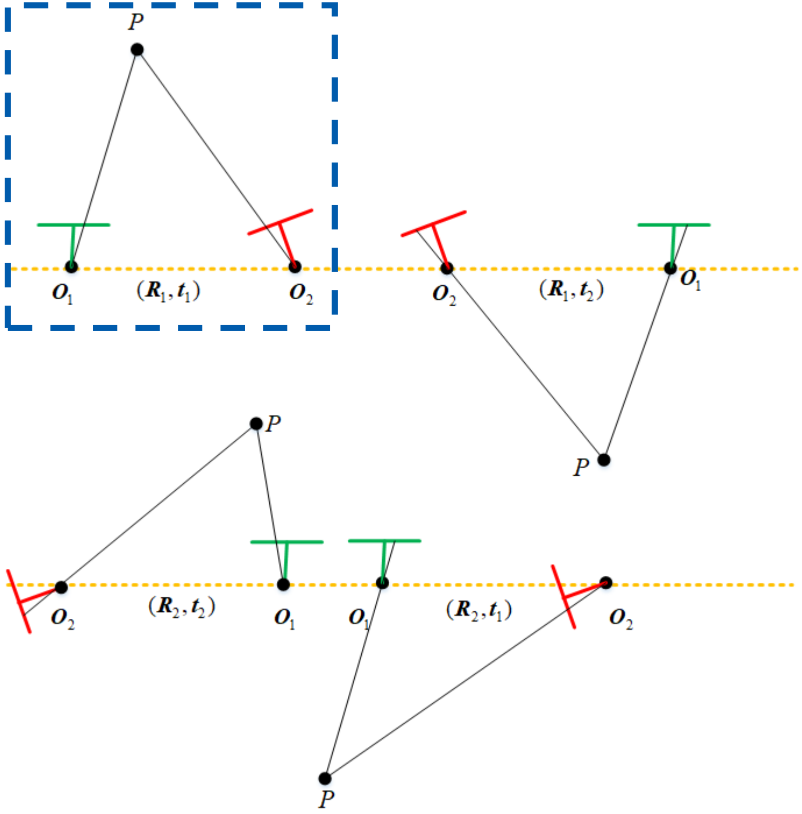
$$E = U\Sigma V^T,\ \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma,\quad \sigma,\quad 0)$$

$$t_1 = U(:,2) \qquad R_1 = UR_Z\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$t_2 = -U(:,2) \qquad R_2 = UR_Z^T\left(\frac{\pi}{2}\right)V^T$$

$$R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},\quad R_Z^T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

共有4种情况 $(R_1,t_1),(R_1,t_2),(R_2,t_1),(R_2,t_2)$



2D-2D:对极几何-本征矩阵 E

相机姿态的恢复–选择正确的相机姿态

相机的世界坐标 O_1, O_2

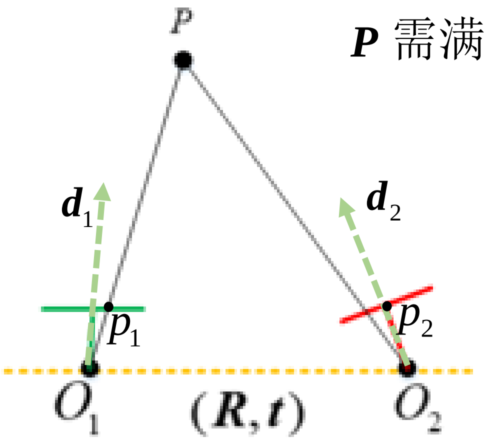
$$O_1 = -R^T t = 0, \quad O_2 = -R^T t$$

相机的世界坐标中的朝向 d_1, d_2

$$d_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$d_2 = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T & -R^T t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = r_3^T$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad R^T = \begin{bmatrix} r_1^T & r_2^T & r_3^T \end{bmatrix}$$



利用相机姿态R, t 和匹配点p_1, p_2进行三角量测得到三维点P

P 需满足同时位于两个相机的前方：

方法1：

$$(P - O_1)^T d_1 > 0$$

$$(P - O_2)^T d_1 > 0$$

方法2：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = RP + t, \quad z_c > 0$$

对两个相机成立

2D-2D:对极几何-基础矩阵 F

Coding-3

实现本征矩阵中恢复相机参数

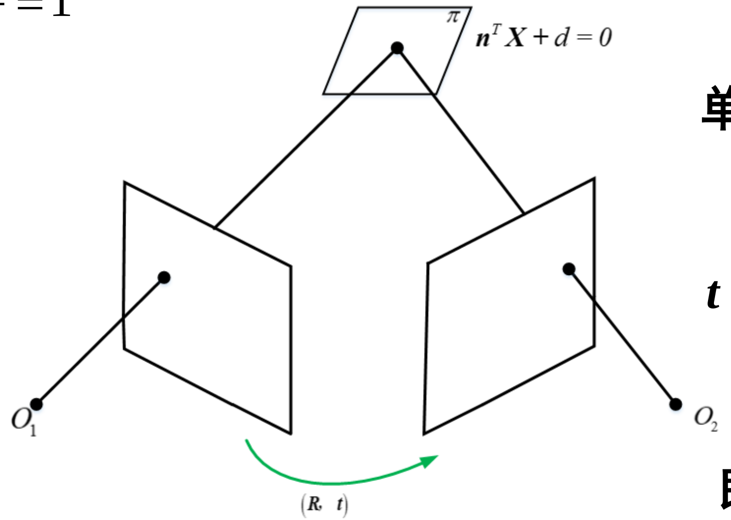
2D-2D:对极几何-单应矩阵H

空间中特征点位于一平面上

$$n^T X + d = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n^T X}{d} = 1$$

$$\begin{aligned} x_2 &= K_2 (RX + t) \\ &= K_2 \left(RX + t \cdot \left(-\frac{n^T X}{d} \right) \right) \\ &= K_2 \left(R - \frac{t n^T}{d} \right) X \\ &= K_2 \left(R - \frac{t n^T}{d} \right) K_1^{-1} x_1 \end{aligned}$$

$$\boxed{x_2 = H x_1, \quad H = K_2 \left(R - \frac{t n^T}{d} \right) K_1^{-1}}$$



单应矩阵是满秩的

$$x_1 = H^{-1} x_2$$

$t = 0$ **时，对应纯旋转**

$$H = K_2 R K_1^{-1}$$

即单应矩阵有两种情况：

1. 空间点位于平面
2. 相机纯旋转

2D-2D:对极几何-单应矩阵H

直接线性变换法

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$

$$v_2 = \frac{H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23}}{H_{31}u_1 + H_{32}v_1 + H_{33}}$$

8个自由度，每对点有两个约束

$$H_{11}u_1 + H_{12}v_1 + H_{13} - H_{31}u_1u_2 - H_{32}u_2v_1 - H_{33}u_2 = 0$$

$$H_{21}u_1 + H_{22}v_1 + H_{23} - H_{31}u_1v_2 - H_{32}v_1v_2 - H_{33}v_2 = 0$$

令 $H_{33}=1$ 总共需要4对特征点

$$A = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1, & 0, & 0, & 0, & -u_1^{(1)}u_2^{(1)}, & -u_2^{(1)}v_1^{(1)} \\ 0, & 0, & 0, & u_1^{(1)}, & v_1^{(1)}, & 1, & -u_1^{(1)}v_2^{(1)}, & -v_1^{(1)}v_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1^{(4)}, & v_1^{(4)}, & 1, & 0, & 0, & 0, & -u_1^{(4)}u_2^{(4)}, & -u_2^{(4)}v_1^{(4)} \\ 0, & 0, & 0, & u_1^{(4)}, & v_1^{(4)}, & 1, & -u_1^{(4)}v_2^{(4)}, & -v_1^{(4)}v_2^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ u_2^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ u_2^{(4)} \\ v_2^{(4)} \end{pmatrix}$$

2D-2D:对极几何-单应矩阵H

RANSAC-估计单应矩阵

算法流程

1. 随机采样4对匹配点 $\left(\boldsymbol{x}_1^{(n)},\ \boldsymbol{x}_2^{(n)}\right)$
2. 8点法求解基础矩阵 $\boldsymbol{H}$
3. 计算误差，并统计内点个数
4. 重复上述过程，选择内点数最多的结果
5. 对所有内点执行3, 4，重新计算$\boldsymbol{H}$

内点判断标准 $E\left(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{H}\right)<\tau$

$$E\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{H}\right)=d\left(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{x}_2\right)^2+d(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1)^2$$

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

三维建模课程地址

感谢各位聆听!

Thanks for Listening