Parseval 等式的一种构造性证明

赵朋军

(商洛师范专科学校数学系，陕西商洛 726000)

摘 要：利用傅里叶级数的系数公式给出了 Parseval 等式的一种构造性证明.

关键词：Parseval 等式；Fourier 级数；收敛定理

中图分类号：O174.21 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-3030(2005)02-0014-02

Parseval 等式是数学中的重要等式，在许多解题中有重要应用，而关于它的证明大多是应用维尔斯特拉斯逼近定理给出的[1-2].本文通过构造含参量积分给出了 Parseval 等式的一种简单证明，这一方法体现了"构造性"思维的灵活性和重要性.

Parseval 等式 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\pi,\pi]$ 上连续，则 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$，其中 a_0,a_n 和 $b_n,(n=1,2,\cdots)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

证明 令 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)dt$，将函数 $f(x)$ 作周期性延拓，则知 $f(x)$ 构成以 2π 为周期的周期函数，因为

$$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+2\pi+t)f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)dt=F(x)$$

所以函数 $F(x)$ 也是以 2π 为周期的周期函数.

又因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，所以由含参量积分性质知，$F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，故由傅里叶级数收敛定理[3]，它可以展开成傅里叶级数.下面求 $F(x)$ 的傅里叶系数.设函数 $F(x)$ 的傅里叶系数为 c_0,c_n 和 $d_n,(n=1,2,\cdots)$，因为

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-x+t)f(t)dt$$

令 $u=-x+t$ 可得

$$F(-x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(u)f(x+u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{-\pi-x+2\pi}f(u)f(x+u)du=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)f(x+u)du=F(x)$$

所以 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数，即有 $d_n=0,(n=1,2,\cdots)$.

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)dt]dx$$

令 $u=x+t$，由含参量积分的积分顺序可交换性质，可得

$$c_0=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)dx]f(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)du]f(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[\int_{-\pi+t}^{-\pi+t+2\pi}f(u)du]f(t)dt=$$

收稿日期：2005-04-07

作者简介：赵朋军(1979-)，男，陕西渭南人，商洛师范专科学校数学系助教

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du\right]f(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right]^2=a_0^2$$

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)dt\right]\cos nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nxdx\right]f(t)dt$$

同理令 $u=x+t$，可得

$$c_n=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)du\right]f(t)dt=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos nt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos nudu+\sin nt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\sin nudu\right]f(t)dt=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos nt\int_{-\pi+t}^{-\pi+t+2\pi}f(u)\cos nudu+\sin nt\int_{-\pi+t}^{-\pi+t+2\pi}f(u)\sin nudu\right]f(t)dt=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos nt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos ndu+\sin nt\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin nudu\right]f(t)dt=$$

$$\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt+\frac{b_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt=a_n^2+b_n^2(n=1,2,\cdots)$$

故由傅里叶级数收敛定理，可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)f(t)dt=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos nx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$$

将 $x=0$ 代入上式，即得 Parseval 等式.

参考文献：

[1]裴礼文.数学分析中的典型问题与分析[M].北京:高等教育出版社,1993.496-507.
[2]四川大学数学系高等数学教研室.高等数学[M].北京:高等教育出版社,1996.67-71.
[3]华东师范大学数学系.数学分析[M].北京:高等教育出版社,2001.65-79.

（责任编辑：张国春）

The Structural Proof Method of Parseval Equacity

ZHAO Peng-jun
(Maths Department of Shangluo Teacher's College,Shangluo Shaanxi 726000)

Abstract:The structural proof method of parseval equacity can be obtained by using coefficient formula of Fourier series.

Key words:parseval equality;fourier series;convergence theorem.