复球面上的几何性质

摘要：本文通过测地投影法，建立了复平面与球面上的点的一一对应关系。从而复平面上的点可以在一个三维球面上被表示出，　称为复数的球面几何表示。通过这样的一个一一映射，我们可以研究平面上的复数和复平面在有限三维空间上的性质，接着再探讨复球面与扩充复平面之间的对应关系。

关键词：复平面；复球面；对应关系

中图分类号：　O174.51

引言

公元七世纪前，欧几里得（ Euclid ）精心整理了古希腊推理几何学，创造性的完成了《几何原本》这本数学巨著。　1868 年，德国数学家黎曼（ Riemann）从另一角度否定欧几里得第五公设（平行性公设）　，黎氏几何公理体系与欧氏几何公理体系除平行公理截然不同外，　其它公理也有异同之处。我们把通常的球面作为平面，球面上对径点（球面直径的两端点）视为一个点，球面上的大圆作为直线, 便得到黎氏几何的一个模型，　称为黎氏半球面模型。球面几何属于黎世几何，其有着广泛的应用。 例如，卫星定位、大地 (天体) 测量和航空卫星定位等都需要利用有关于球面几何的知识。 在基础理论上，球面几何与欧氏几何是不同的几何模型，它是一个非常重要且实用的非欧几何的数学模型。　在几何学的理论研究方面球面几何有着特殊的重要作用和意义。　我们通过比较欧氏平面几何与球面几何的差异和联系，应用和感受科学中存在的丰富多彩的教学模型。

我们可以在坐标系中用一个点表示一对有序实数。　通过复变函数的学习，　可知坐标系中的一个点可以与一个复数一一对应。　因此我们可以在坐标系中将全体复数构成的集合进行表示，　则会形成一个复平面，　每一个复数在复平面上都有一个唯一对应的点。通过有关的学习和书籍的说明，　可以知道扩充复平面与复球面之间可以建立一一对应的关系。 本文致力于研究扩充复平面和复球面之间的位置关系，讨论其对应表达式及研究对应关系，　在理论上得以证明其建立的关系。　对于复数和复平面在复球面上的性质，　从而构造出一个新的一一映射，　在一个三维球面上复平面的点可以被表示出来，这样我们可以称其为复数的球面几何表示。

我们通过这样的一个一一映射，对平面上复数的研究转移到一个有界的复球面，并且在这个复球面中讨论复数在其上的一些性质及关系。

1 复球面

1.1 复数在球面上的表示法

设

$$z_1,\ z_2\cdots,\ z_n,\cdots, \tag{1}$$

是一个点列。如所周知，如果在以原点为中心，任意大的数为半径的圆外，总有这个点列中的点，这个点列就称为是无界的。我们也知道一个无界点列，可以没有极限点。在这种情况下，我们说点列（1）趋向无穷。用符号来表示，写作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty, \tag{2}$$

这个等式就表示无穷数列（2）没有极限数。

为了给等式（2）以简单的几何意义，我们要用球面上的点来表示复数。为此，我们取一个与平面在原点 o 相切的球面（图 1）那末通过 o 点的球的直径 op 就与平面垂直，并且与球面交于一个第二点 p，我们把点 p 叫做极点。每一个复数 z 可以看作平面上的一个点，用直线 pz 连接这个点与极点。这条直线与球面有（异于 p 的）另一个唯一的交点，我们就用这个唯一确定的点来表示复数 z，称作 z 在球面上的像。这样一来，每一个复数就可由球面上的某一点来表示。反之，除极点 p 以外，对于球面上每一个点，平面上有一个唯一的点对应它，这个点就是通过 p 点和那个被考虑的点的直线与平面的交点。所以，除极点 p 以外，球面上每一个点代表了某一个复数。这样，我们就在平面上的点与球面上（除点 p 以外）的点之间建立了一个双方连续的一一对应。这个球面，在它上面去掉了 p 点以后，就成为全体复数的像。现在我们来观察 p 点与球面上另外的点有什么相互的关系。假如数列 z_n 趋向无穷，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$，那么 z_n 在球面上的像就无限制地接近于 p 点。把 p 点作为无穷的像就显得很自然，而平面上与它对应的那个唯一的点就称为这个平面的无穷远点。

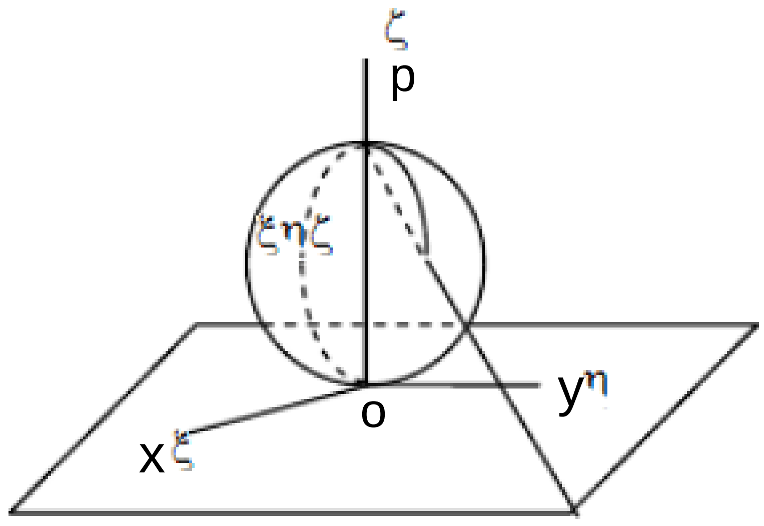

图 1

这样，在复数平面上我们承认有唯一的无穷远点（它在球面上的像是 p 点）这跟射影几何的平面不同，在那时考虑无穷远直线，也就是说有无穷多个不同的无穷远点。

上述的变换叫做球极投影，用这个变换，我们建立了球面上的点与平面上包括它的唯一的无穷远点在内的点之间的一个一一对应。这个用它的点代表了全体复数及无穷的球面称为复数球面或黎曼球面。把复数映射到球面上来代替复数平面的优越性是：这里能把平面上的唯一的无穷远点明显地表示出来。

假如把球面上 p 点的邻域了解为任一个圆周所包围的含有 p 的球面的一部分，而这个圆周所在的平面是和 op 相垂直的话，那么在平面上应当把无穷远点的邻域了解为这个球面部分的球极投影，也就是说，以坐标原点为中心的任一圆周的外部。于是点列（1）收敛于无穷远点的条件，可以表示成完全类似于第 3 节的条件的形式：假如点列 z_n 中几乎所有的点（就是说除了有限个点外所有的点）都在无穷远点的任意的邻域内，我们就称这个点列收敛于无穷远点。

在以后的叙述中，假如没有相反的说明，我们总用字母 z 表示平面上的任一个普通的点，而这种点的全体叫做复数平面。复数平面连同无穷远点在一起就叫做扩大了的复数平面。我们应当注意，平面的无穷远点，跟远点一样，没有确定的幅角。

1.2 球极投影公式

在上一段中，我们谈了球极投影的几何构造，现在我们要来推演这个变换的公式，也就是说要解决下面的问题：已知复数，要确定球面上对应点的坐标，以及这个问题的逆。为了要解决这个问题，我们选取一个空间的坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 使 $o\xi$ 与 $o\eta$ 合于复数平面上的 ox 轴与 oy 轴，而 $o\zeta$ 则沿着直径 op 的方向（图 1）。并为简单记，我们取直径的长作为单位长。

复数 $z=x+iy$ 在平面上以坐标为 x，y 的点为代表。假定这个复数在球面上的像的坐标是 ξ，η，ζ。因为球面的中心是在点 $(0,0,\frac{1}{2})$，而它的半径等于 $\frac{1}{2}$，所以 ξ，η，ζ 应当满足下列球面方程

$$\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \text{即} \xi^2+\eta^2=\zeta(1-\zeta), \qquad (4)$$

又因为 $(0,0,1)$，(ξ,η,ζ) 与 $(x,y,0)$ 这三点在一直线上，所以它们的坐标系应当满足

$$\frac{\xi-0}{x-0}=\frac{\eta-0}{y-0}=\frac{\zeta-1}{0-1}, \qquad (5)$$

从等式（5）就可以用 ξ，η，ζ 来表示 x 与 y。例如，比较第一个比式与第三个比式，然后再比较第二个比式与第三个比式，我们就求出：

$$x=\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta}{1-\zeta} \text{即} z=\frac{\xi+i\eta}{1-\zeta}, \qquad (6)$$

公式（6）给出了用球面上对应点的坐标来表示平面上点的坐标的式子。为了要得到上面公式的逆，我们注意：

$$x^2+y^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta^2)}=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \qquad (7)$$

从而求出：

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}, \qquad (10)$$

已知 ζ 后，从公式（7）立刻可以确定出 ξ 与 η

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2+1}, \qquad (9)$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \tag{10}$$

公式（8）（9）（10）给出了球面上点的坐标通过复数的支量 x 与 y 的表达式。

1.3 球极投影的基本性质

现在我们要证明下面球极投影的一个非常重要的性质：在球极投影的变换下，平面上任一圆周都变成球面上的圆周，反之亦然。这里必须要注意的是：在这个定理的化简了的叙述中，“圆周”一词应当作广义的了解，应当把直线算作半径是无穷大的圆周一起包括在内。

事实上，在平面上任一圆周的方程的形式是

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \tag{11}$$

其中 A, B, C 与 D 都是实数。特别 $A = 0$ 时，方程（11）就表示一条直线。为了要确定在球面上的对应曲线，把方程（11）中的 x 与 y 用它们通过 ξ，η，ζ 的表达式来替换。根据公式（6）（7）我们就得到

$$A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D = 0,$$

$$\text{或}\ B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0, \tag{12}$$

这个得到的方程是一次的，所以表示一个平面。因此，坐标 ξ，η，ζ 要满足两个方程（4）（12），从而，点 (ξ, η, ζ) 事在球面（4）与平面（12）的交线上，也就是说在球面上形成一个圆周。

反之，很容易知道球面（4）的任一个圆周都变成复数平面的圆周，这是因为利用数 A, B, C 与 D 的任意性，我们总可以把任一个平面的方程表示成（12）的形式的缘故。显然，当 $A = 0$ 时，平面（12）通过点 $P(0,0,1)$，所以只有在球面的圆周通过球面的极点的情形下，这个圆周才变成平面上的直线。

从几何上来看，这个事实也是显然的：因为对应于平面上直线的球面上的圆周，必须经过平面上的无穷远点的像即点 p。

让我们来考虑在球面上相交于某一点 m 的两条曲线，并设这两条曲线的交点的切线构成一个交角 α（图 2）。我们要证明这两条曲线的球极投影在点 m 的投影 M' 的切线同样构成角 α，也就是说，对于球极投影，角的值保持不变。为此，我们首先注意：当曲线的割线趋向于曲线的切线的投影，而同时也趋向于这条曲线的投影的切线。由此可见，球面曲线的切线的投影就是这条曲线的投影的切线。

现在，让我们延长这两条球面曲线的切线，使它们与球面在 p 点的切平面相交于点 A 和 B。显然，三角形 等于三角形 AMB，这是应为 AB 是这两个三角形的公共边，$AP = AM$ 是从同一点出发到球面的两条切线，同样 $BP = BM$。因此弧 $APB =$ 弧 $AMB = \alpha$。但由于曲线的投影的切线一条是平面 PAM 与投影平面的交线，另一条是平面 PBM 与投影平面的交线，它们各与 AP 及 BP 平行。从而它们之间的交角等于弧 $APM = \alpha$。

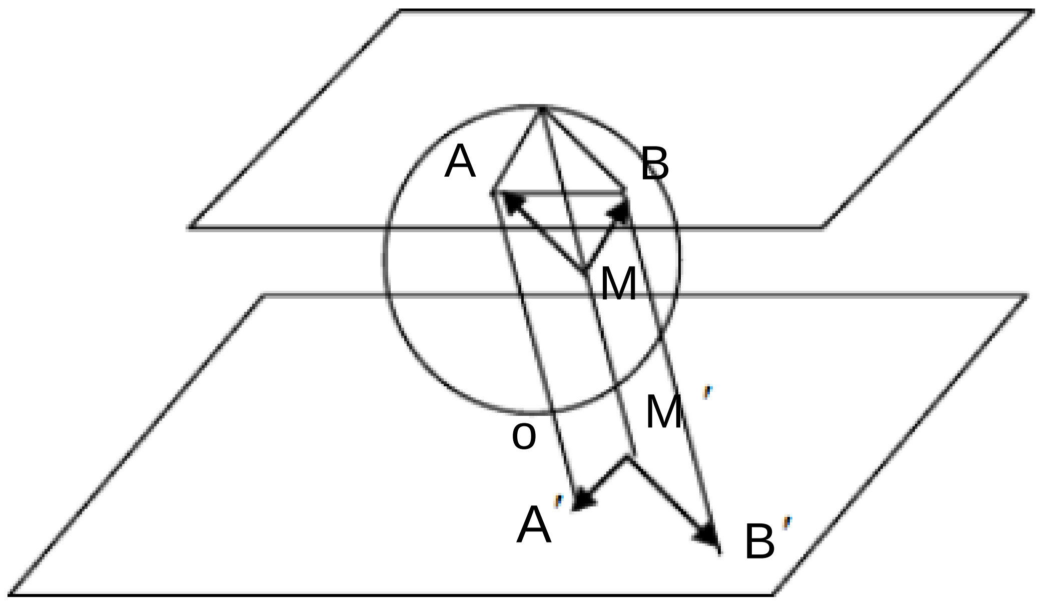

图 2

2 复平面与复球面的对应关系

2.1 复球面的球心在原点

设三维空间中存在一坐标点 (x, y, u)，复平面是 xoy 面，将其称为为 z 平面，原点在球心 r 为半径的球面方程是 $x^2 + y^2 + u^2 = r^2$（下面 r 均大于 0），点 $N(0,0, r)$ 称为球面上的球极，在球面作连接点 $N(0,0, r)$ 与 xoy 平面上任意一点 $A(x, y,0)$ 的直线，设球面与这条直线的交点是 A_1，并称 A_1 为 A 在球面上的球极射影，因此点 A 与球极射影 A_1 有如下对应关系：

定理 2.1 ([1]) 复平面上的任意点 $A(x_1, y_1, 0)$ 在复球面 $x^2+y^2+u^2=r^2$ 上的球极射影 A_1 位置坐标为

$$x=\frac{2r^2x_1}{x_1^2+y_1^2+r^2},\quad y=\frac{2r^2y_1}{x_1^2+y_1^2+r^2},\quad u=\frac{r(x_1^2+y_1^2+r^2)}{x_1^2+y_1^2+r^2},$$

证明 球极 $N(0,0,r)$ 和复平面上的点 $A(x_1, y_1, 0)$ 的连线 NA 的方程为

$$\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{u-r}{-r},$$

故有
$$y=\frac{y_1}{x_1}x,\quad u=r-\frac{rx}{x_1}, \tag{1}$$

带入方程，得
$$x^2+(\frac{y_1}{x_1}x)^2+(r-\frac{rx}{x_1})^2=r^2,$$

$$x^2+(\frac{y_1}{x_1}x)^2+(r-\frac{rx}{x_1})^2=r^2,$$

从而
$$x=\frac{2r^2x_1}{x_1^2+y_1^2+r^2},$$

带入（1）式，解得 $y=\dfrac{2r^2y_1}{x_1^2+y_1^2+r^2}$，$u=\dfrac{r(x_1^2+y_1^2-r^2)}{x_1^2+y_1^2+r^2}$，

证毕。

推论 2.1 ([1]) 复平面上的任意点 $(x_1, y_1, 0)$ 在复球面 $x^2+y^2+u^2=1$ 上的球极射影 A_1 坐标为：

$$x=\frac{2x_1}{x_1^2+y_1^2+1},\quad y=\frac{2y_1}{x_1^2+y_1^2+1},\quad u=\frac{r(x_1^2+y_1^2-1)}{x_1^2+y_1^2+1} \tag{2}$$

推论 2.2 ([1]) 复数 $z=x+iy$ 在复球面 $x^2+y^2+u^2=1$ 上的球极射影坐标为

$$(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1},\frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})。$$

2.2 复平面与复球面相切

设复平面与球心在 P（0,0, r）点的复球面相切，则 $x^2+y^2+(u-r)^2=r^2$ 为复球面的方程， $N(0,0,2r)$ 为球极，作一条连接 $N(0,0,2r)$ 与 xoy 平面上的任意一点 $A(x_1, y_1,0)$ 的直线，设复球面与直线的交点是 A_1 并称 A_1 为 A 的球极射影。下面给出 A_1 与 A 对应关系的结论：

定理 2.2 ([1]) 复平面上的任意点 $A(x_1, y_1,0)$ 在复球面 $x^2+y^2+(u-r)^2=r^2$ 上的球极射影 A_1 坐标为

$$x=\frac{4r^2x_1}{x_1^2+y_1^2+4r^2},\ y=\frac{4r^2y_1}{x_1^2+y_1^2+4r^2},\ u=\frac{2r(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2+y_1^2+4r^2},$$

证明：球极 $NN(0,0,2r)$ 与任意点 $(x_1, y_1,0)$ 的连线 NA 的方程为 $\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{u-2r}{-2r}$，

$$\text{故有 } u-r=r-\frac{rx}{x_1}, \tag{3}$$

代入 $x^2+y^2+(u-r)^2=r^2$，得 $x^2+(\frac{y_1}{x_1}x)^2+(r-\frac{rx}{x_1})^2=r^2$，

解得 $x=\frac{4r^2x_1}{x_1^2+y_1^2+4r^2}$，代入（3）式，即有 $y=\frac{4r^2y_1}{x_1^2+y_1^2+4r^2}$， $u=\frac{2r(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2+y_1^2+4r^2}$，证毕。

推论 2.1 ([1]) 复平面上的任意点 $A(x_1, y_1,0)$ 在复球面 $x^2+y^2+(u-1)^2=1$ 上的球极射影 A_1 坐标为 $x=\frac{4x_1}{x_1^2+y_1^2+4}$， $y=\frac{4y_1}{x_1^2+y_1^2+4}$， $u=\frac{2(x_1^2+y_1^2)}{x_1^2+y_1^2+4}$。

推论 2.2 ([1]) 复数 $z=x+iy$ 在复球面 $x^2+y^2+(u-1)^2=1$ 上的球极射影坐标为 $(\frac{4\operatorname{Re}z}{|z|^2+4},\frac{4\operatorname{Im}z}{|z|^2+4},\frac{2|z|^2}{|z|^2+4})$。

2.3 复球面在空间中的任意位置

设有一球心点为 $M(x_0, y_0, u_0)$，r 为球的半径的复球面，则其方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2=r^2$，点 (x_0, y_0, u_0+r) 为球极 N，则复平面上任意一点 A 在 $(x_1, y_1, 0)$ 的球极射影坐标为：

$$x = x_0 + \frac{2r(x_1-x_0)(u_0+r)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(u_0+r)^2},$$

$$y = y_0 + \frac{2r(y_1-y_0)(u_0+r)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(u_0+r)^2},$$

$$u = r + u_0 - \frac{2r(u_0+r)}{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(u_0+r)^2}。$$

从而知道，复平面上的任意一点，在复球面上总有唯一的一点和其相对应；反之，复球面上任意一点（除球极外），总是能在复平面上找到一与之相对应的点。假设复平面上有一理想的点，我们称这一点为无穷远点，球极与这一点相对应。因此，扩充复平面（复平面加上无穷远点）可以与复球面建立一一对应的关系。

例 1 设复球面 $x^2+y^2+u^2=1$，取球极 $N(0,0,1)$，那么复平面上点 $A(3,4,0)$ 在复球面上的球极摄影 A_1 的坐标根据公式（2）可得 $(\frac{3}{13},\frac{4}{13},\frac{12}{13})$。

例 2 以复球面 $x^2+y^2+u^2=1$ 上点 $B_1(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 为球极射影的复平面上点 B 的坐标同样根据公式（2）可得 $(1,-2,0)$。

3 球面上的几何性质

设两点 z_1，z_2 位于圆周 K 的两侧，并都在过圆心 z_0 的同一条射线上，还满足 $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$，其中 R 为圆周 K 的半径，则称 z_1，z_2 关于圆周 K 对称（如图 1 所示）。

建立三维直角坐标系 $o-xyu$，在坐标点是（x，y，u）的三维空间中，把 xoy 所指平面看作是 $z=x+iy$ 的复平面。关于球面 $\tilde{S}: x^2+y^2+u^2=1$。N（$0,0,1$）为球面上确定的一点，将这一点称为北球极，其中 S（$0,0,-1$）将其称为南球极。作一直线，这条直线连接 N 与 xoy 平面上的任意一点 $A(x, y, 0)$，并且设

$A'=(x', y', u')$ 为球面与这条直线的交点，它满足 $x'^2+y'^2+u'^2=1$。那么我们将将 A' 称为 A 在球面上的球极投影（如图 2)。

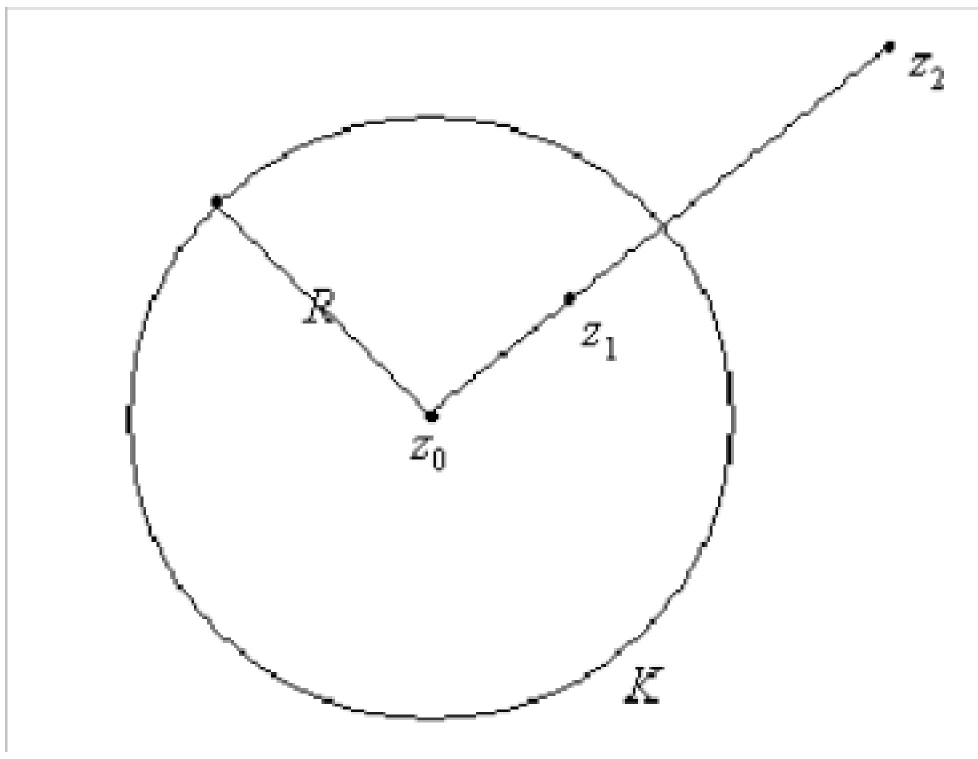

图 1

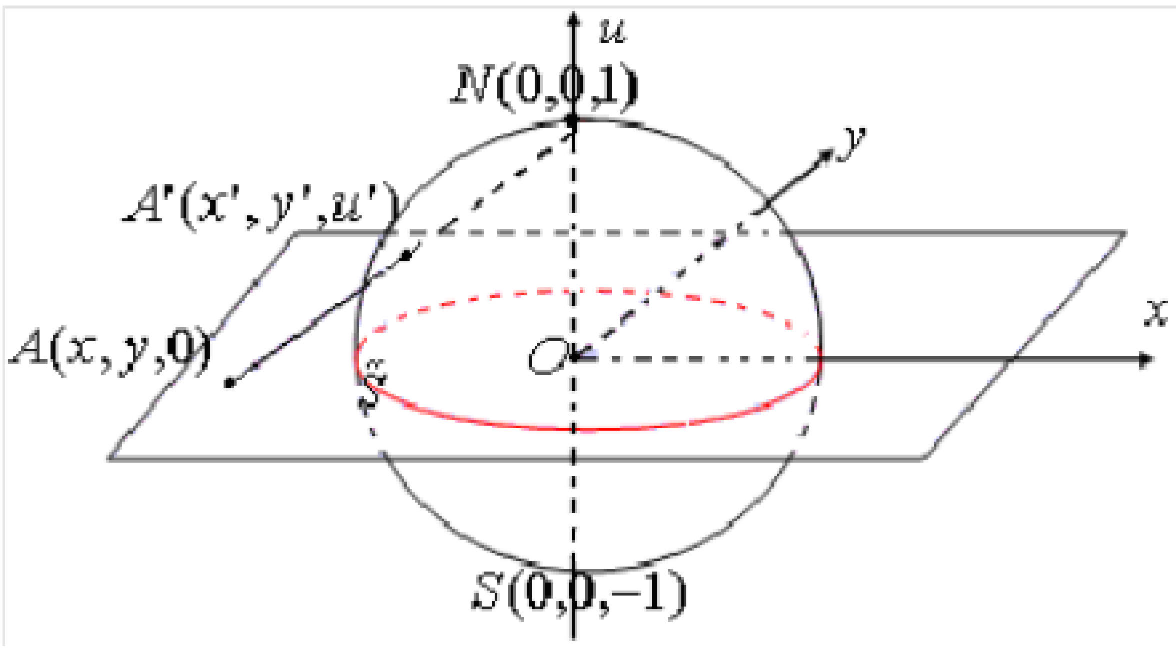

图 2

由于 A（x，y,0)，$A'(x', y', u')$ 及 N (0,0,1) 共线，我们有 $x:y:-1=x':y':u'-1$，从而

$$z=x+iy=\frac{x'+iy'}{1-u}。$$

又因为

$$|z|^2=z\bar{z}=\frac{(x')^2+(y')^2}{(1-u')^2}=\frac{1-(u')^2}{(1-u')^2}=\frac{1+u'}{1-u'}。$$

并且

$$\bar{z}=x-iy=\frac{x'-iy'}{1-u'}。$$

于是有

$$x'=\frac{z+\bar z}{1+|z|^2},\quad y'=\frac{z-\bar z}{i(1+|z|^2)},\quad u'=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$。（其中 $|z|$ 为向量 OA 的模）

因此，在复平面 C 与 $\tilde S-\{N\}$ 之间建立了一个双射 $(x,\ y,0)\to(x',\ y',\ u')$。而且，如果 z 离 O 点越远，即一点 z 的模越大，因此它的球极射影就越接近于球极 N （如图 2）． 称图 3.2 中的球面 $\tilde S$ 为复球面。

而且，复平面上的其中与 N 点对应带内在无穷远处，这一点我们称为复平面上的无穷远点，记为 ∞，而称为扩充复平面是加入了无穷远点的复平面。

在一建立的三维直角坐标系中我们构造出复平面与复球面之间的一一映射的关系，使在复平面上任意一点的表示与复球面上任意一点的表示可以互相转换，下面我们证明复平面上具有一定关系的两个点， 将这两点映射到复球面上时也同样具有相应的关系。

定理 3.1 ([2]) 在复平面 z 中，设圆周 C ：$|z-\alpha|=R$，z_1和 z_2 关于圆周 C 对称，那么 z_1 和 z_2 的球极投影点到圆周 $|z-\alpha|=R$ 的球极投影所在平面具有相等距离的充要条件是 ：

$$(1+|z_1|^2)(\alpha z_2+\alpha\bar z_2+d+|z_2|^2)+(1+|z_2|^2)(\alpha z_1+\alpha\bar z_1+d+|z_1|^2)=0,$$

其中 $d=|\alpha|^2-R^2$。

证明 圆周 $|z-\alpha|=R$ 在复平面上的球极投影所在的平面是

K ： $-(\alpha+\alpha)x+i(\alpha-\alpha)y+(1-d)u+1+d=0$。

将 z_1 和 z_2 的球极投影点分别设为 Z_1 和 Z_2，Z_1 和 Z_2 到 K 具有相等距离的充要条件是 Z_1 和 Z_2 的中点在 K 上，其充要条件是：

$$-(\bar\alpha+\alpha)\cdot\frac{\dfrac{z_1+\bar z_2}{1+|z_1|^2}+\dfrac{z_2+\bar z_2}{1+|\bar z_2|^2}}{2}+i(\alpha-\bar\alpha)\cdot\frac{\dfrac{z_1-\bar z_2}{i(1+|z_1|^2)}+\dfrac{z_2-\bar z_2}{i(1+|\bar z_2|^2)}}{2}+(1-d)\cdot\frac{\dfrac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}+\dfrac{|z_2|^2-1}{1+|z_2|^2}}{2}+(1-d)=0$$

等价于

$$-\bar{\alpha}(z_1+z_1|z_2|^2)-\bar{\alpha}(z_2+z_2|z_1|^2)-\alpha(\bar{z}_1+\bar{z}_1|z_2|^2)-\alpha(\bar{z}_2+\bar{z}_2|z_1|^2)$$
$$+(2|z_1|^2|z_2|^2+2d)+(1+d)(|z_1|^2+|z_2|^2)=0$$

等价于

$$\bar{\alpha}z_1(1+|z_2|^2)+\bar{\alpha}z_2(1+|z_1|^2)+\alpha z_1(1+|z_2|^2)+\alpha z_2(1+|z_1|^2)$$
$$+2(|z_1|^2|z_2|^2+d)+(1+d)(|z_1|^2+|z_2|^2)=0$$

等价于

$$(1+|z_1|^2)(\bar{\alpha}z_2+\alpha z_2+d+|z_2|^2)+(1+|z_2|^2)(\bar{\alpha}z_1+\alpha z_1+d+|z_1|^2)=0$$ 。证毕。

通过研究讨论复平面上的两点，并且两点具有一定关系（关于某个圆周对称），将这两点投射到复球面上，这两点的球极投影之间也同样具有相应的关系。另外从定理 1 的结论中我们发现下列等式：

$$\bar{\alpha}z_i+\alpha z_i=-|z_i-\alpha|^2+|z_i|^2+|\alpha|^2 (i=1,2),$$

则可知以下推论。

推论 3.1 ([2]) 设圆周 $C: |z-\alpha|=R$, $d=|\alpha|^2-R^2$，z_1和 z_2 关于圆周 C 对称，则 z_1 和 z_2 的球极投影 Z_1 和 Z_2 到圆周 C 上的球极投影的平面 K 具有相等距离的充要条件是

$$(1+|z_1|^2)(2|z_2|^2+|\alpha|^2+d-|z_2-\alpha|^2)+(1+|z_2|^2)(2|z_1|^2+|\alpha|^2+d-|z_1-\alpha|^2)=0。$$

我们将复平面中圆周的一般方程 $|z-\alpha|=R$ 简化，得到以下推论：

推论 3.2 ([2]) 设圆周 $C: |z|=R$，z_1和 z_2 关于圆周 C 对称，则 z_1 和 z_2 的球极投影 Z_1 和 Z_2 到圆周 C 上的球极投影的平面 K 具有相等距离的充要条件是 $R=1$. 则 z_1和 z_2 的球极投影 Z_1 和 Z_2 关于平面 K 对称。

证明 在定理 1 中取 $|\alpha|=0$，可以得到：$|z_1||z_2|=R^2$。

则 Z_1，Z_2 到平面 K 上具有相等距离的充要条件是：

$$(1+|z_1|^2)(|z_2|^2-R^2)+(1+|z_2|^2)(|z_1|^2-R^2)=0,$$

等价于

$$(1+|z_1|^2)(\frac{R^4}{|z_1|^2}-R^2)+(1+\frac{R^4}{|z_1|^2})(|z_1|^2-R^2)=0,$$

等价于

$$-R^2|z_1|^2+R^4-R^2|z_1|^4+R^4|z_1|^2-R^2|z_1|^2+|z_1|^4-R^6+R^4|z_1|^2=0,$$

等价于

$$R^2|z_1|^2(R^2-1)+|z_1|^4(1-R^2)+R^4(1-R^2)+R^2|z_1|^2(R^2-1)=0,$$

等价于

$$(R+1)(R-1)(|z_1|^2-R^2)^2=0(0<|z_1|<R),$$

等价于

$$R=1。$$

证毕。

4、总结

本文主要吸取了德国数学家黎曼（ Riemann）对球面几何的研究，并对其黎氏几何公理体系应用的研究， 又在其基础上建立了复平面与复球面之间的一一映射的一些方法， 我们可以直接地看成将一纸平面包裹成一个有相应体积的单位球。 经过一次类似于这种空间与空间之间的规律转化， 我们可以更加形象直观地观察某些平面上比较抽象的关系。 而且，对所指的一个无穷大的平面，也可以直接将其有限化， 这非常利于对平面上性质的理解和学习。 但这仍远远不够， 关于复球面上的几何性质还有待我们后人去开发和研究应用。

参考文献

[1] 方企勤．复变函数教程 [M]．北京：北京大学出版社，2005，7-16．

[2] 钟玉泉．复变函数论 (第二版)[M]．北京：高等教育出版社，2001.

[3] 余家荣．复变函数（第三版） [M]．北京：高等教育出版社，2005，1-10．

[4] 史济怀；刘太顺．复变函数 [M]．北京：中国科大出版社，1999.

[5] 谭小江；伍胜健．复变函数简明教程 [M]．北京：北京大学出版社，2006.

[6] 普里瓦洛夫著；阂用鹤；程民德；董怀允；等译．复变函数引论 [M]．北京：人民教育出版社，1978.

[7] 朱静航．复变函数论 [M]．辽宁人民出版社，1983.

[8] 张楚廷．复变函数论学习指导（第一版） [M]．湖南科技出版社，1983.

[9] 戈鲁辛著；陈建功译．复变函数的几何理论 [M]．北京：科学出版社，1956.

[10] 项武义．古典几何学讲义 [M]．北京：科学出版社，1983.