

Лабораторная работа 4.3.4.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОПТИКЕ

Хайдари Фарид, Б01-901

9 марта 2021 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>3</b>
1.1	Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки . . . . .	3
1.2	Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций . . . . .	6
1.3	Метод Аббе . . . . .	8
1.4	Мультипликация изображения предмета . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Экспериментальная установка</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Ход работы</b>	<b>12</b>

**Цель работы:** исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

## 1 Теоретические сведения

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания  $t(x)$ , то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье.

### 1.1 Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки

Рассмотрим вначале простой пример: дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом  $d$  расположена в плоскости  $Z = 0$ , а её штрихи ориентированы вдоль оси  $Y$ . Функция пропускания такой решётки имеет вид

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} \quad (1)$$

с постоянными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$  ( $u = 2\pi/d$  - пространственная частота)

Если на решётку падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Z$ ,

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновой вектор ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $E_0$  – амплитуда, то на выходе из решётки мы получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}; \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t - ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}; \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t + ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, легко видеть, что в плоскости  $Z = 0$  амплитуда колебаний, создаваемая суммой этих волн, описывается функцией (1), а фаза колебаний постоянна. Таким образом, в силу единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях мы нашли искомую суперпозицию плоских волн. Каждая из этих трёх плоских волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости.

Волна  $E_1 = \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , распространяющаяся вдоль оси линзы (оси  $Z$ ), фокусируется в начало координат, а волны  $E_2$  и  $E_3$ , распространяющиеся в направлении  $\sin \theta = \pm(u/k)$ , фокусируются в точках  $x_{1-2} = \pm Fu/k = \pm F\lambda/d$  ( $F$  – фокусное расстояние линзы).

Функция  $t(x)$  с самого начала задана в виде суммы гармонических составляющих, т.е. в виде ряда Фурье. Каждой гармонической составляющей мы поставили в соответствие с (3) плоскую волну, собираемую линзой в точку в задней фокальной плоскости (её обычно называют фурье-плоскостью). Проводя аналогию с «временной» координатой, мы можем заключить, что спектр функции  $t(x)$  представлен в фурье-плоскости тремя пространственными частотами:  $0, +u, -u$ ; с амплитудами соответственно:  $\beta, \alpha/2, \alpha/2$ .

Теорема Фурье, доказываемая в курсе математического анализа, утверждает, что широкий класс периодических функций  $t(x)$  может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, имеющих кратные частоты, т.е. в виде ряда Фурье. В комплексной форме этот ряд имеет вид

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inu x} \quad (4)$$

Рассуждая так же, как в случае амплитудной синусоидальной решётки, мы придём к выводу, что картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами

$$x_n = \frac{Fu}{k} n = \frac{F\lambda}{d} n$$

и амплитудами, пропорциональными  $c_n$ . Таким образом, с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье: при освещении прозрачного плоской монохроматической волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за прозрачным, представляет собой фурье-образ функции пропускания прозрачного.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Распределение света в задней фокальной плоскости линзы будет воспроизводить распределение амплитуд плоских волн, продифрагировавших на прозрачном, но фазовые соотношения при этом, вообще говоря, оказываются искажёнными и не соответствуют аргументам комплексных амплитуд в выражении (4). При изменении расстояния между прозрачным и линзой фазовые соотношения изменяются. Можно доказать, что если прозрачный установлен в передней фокальной плоскости линзы, то в её задней фокальной плоскости восстанавливаются и амплитудные, и фазовые соотношения между плоскими волнами, и таким образом строго осуществляется комплексное фурье-преобразование (4).

Во многих практически важных случаях функция пропускания прозрачного чисто амплитудная, как, например, в случае амплитудной синусоидальной решётки (1). Тогда для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания прозрачного, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе из прозрачного. Для амплитудной синусоидальной решётки мы получили три плоских волны с пространственными частотами  $0$ ,  $+u$ ,  $-u$  и амплитудами, пропорциональными  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ . В соответствии с (1) мы можем утверждать, что нашли пространственный фурье-образ функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки.

Интересно заметить, что наблюдаемая визуально картина Фраунгоферовой дифракции в задней фокальной плоскости линзы не зависит от расстояния между прозрачным и линзой, так как глаз не реагирует на фазу волны, а регистрирует только интенсивность (усреднённый по времени квадрат амплитуды поля). Условия наблюдения дифракции Фраунгофера можно выполнить и без применения линзы, если наблюдать дифракционную картину на достаточно удалённом экране. Таким образом, пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера.

## 1.2 Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций

Картина дифракции Фраунгофера на щели и на дифракционной решётке, имеющей вид периодического набора щелей, хорошо известна из курса оптики. Спектр дифракционной решётки представлен на рис. 1. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы в спектре бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

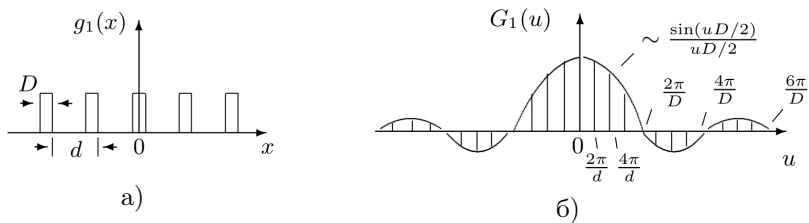


Рис. 1: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос);  
б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания дифракционной решётки

Направление на главные максимумы  $\theta_n = un/k = \lambda n/d$  ( $n$  — целое число) определяется периодом решётки  $d$ , а распределение амплитуд в спектре (огibaющая) — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха.

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -D/2 \leq x \leq D/2; \\ 0, & -D/2 > x > D/2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как функция  $g_2(x)$  непериодична, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{iux} du, \quad (6)$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

Говорят, что в таком виде  $g(x)$  и  $G(u)$  представляют собой пару преобразований Фурье:  $G(u)$  — спектр или фурье-образ функции  $g(x)$ .

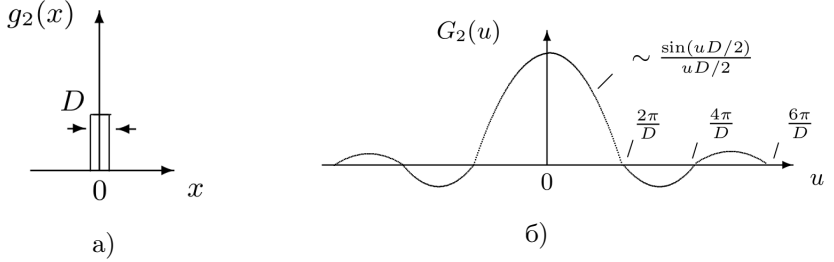


Рис. 2: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания щелевой диафрагмы;  
б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы

Спектр функции  $g_2(x)$  хорошо известен, он соответствует картине дифракции Фраунгофера на щели и описывается функцией вида  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. 2).

Получим спектр  $G_2(u)$  ещё раз с помощью преобразования Фурье:

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{D/2}^{D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin(uD/2)}{uD/2}.$$

Отсюда видно, что направление на первый минимум  $\theta_1$  в огибающей спектра пропускания дифракционной решётки определяется шириной функции пропускания отдельного штриха:  $\theta_1 = u/k = \lambda/D$ . Если ввести понятия протяжённости функции пропускания транспаранта по координате ( $\Delta x$ ) и ширины её спектра ( $\Delta u$ ), то

$$\Delta u \cdot \Delta x = \text{const.} \quad (7)$$

Для частного случая функции пропускания щелевой диафрагмы, определяя ширину её спектра по первому нулю функции  $\frac{\sin(uD/2)}{uD/2}$ , получаем

$$\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Соотношение (7) в волновой физике играет чрезвычайно важную роль. Его называют соотношением неопределённости.

Измерив на удалённом экране расстояния между максимумами или минимумами в спектре пропускания щели (рис. 2б) или решётки (рис. 1б), можно рассчитать размер щели или период решётки.

Размер малого объекта можно рассчитать, если получить его изображение, увеличенное с помощью линзы.

### 1.3 Метод Аббе

Рассмотрим кратко схему образования изображения. Пусть предмет расположен в плоскости  $P_1$  на расстоянии от линзы большем, чем фокусное. Тогда существует сопряжённая предметной плоскости  $P_1$  плоскость  $P_2$ , где образуется изображение предмета-щели.

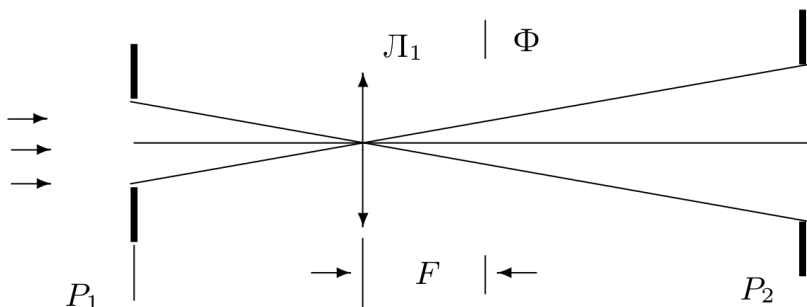


Рис. 3: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Аббе предложил рассматривать схему прохождения лучей от предмета к изображению в два этапа. Сначала рассматривается изображение спектра в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $L_1$  (это изображение Аббе назвал первичным).

Затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение предмета  $a$  в плоскости  $P_2$  (вторичное изображение). Такой подход опирается на принцип Гюйгенса–Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения.

Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_2$ , зависит от распределения амплитуды и фазы в плоскости  $\Phi$  – в первичном изображении. Если плоскость  $P_2$  сопряжена с предметной плоскостью  $P_1$ , то фазовые соотношения в первичном изображении оказываются именно такими, что в плоскости  $P_2$  мы наблюдаем соответственно увеличенное или уменьшенное изображение предмета. Поэтому иногда говорят, что линза дважды осуществляет преобразование Фурье: сначала в задней



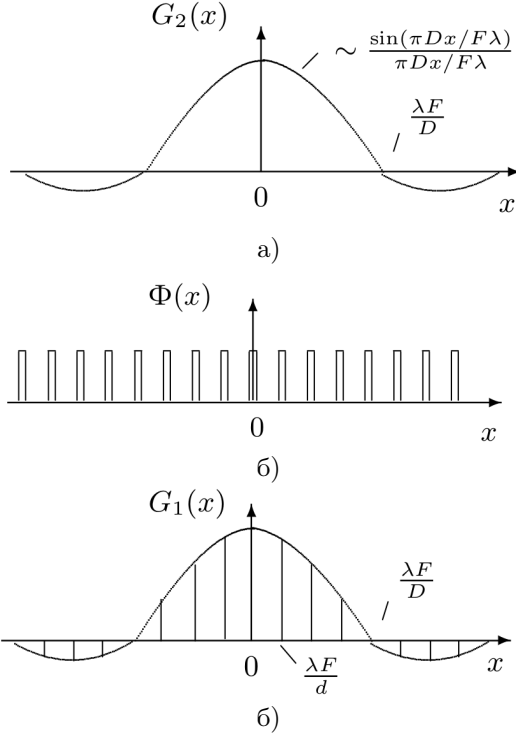


Рис. 4: а)  $G_2(x)$  – спектр функции пропускания щелевой диафрагмы;  $x$  – координаты в задней фокальной плоскости линзы;  
 б)  $\Phi_1(x)$  – функция пропускания решетки, установленной в фурье-плоскости линзы;  
 в)  $G_1(x)$  – отфильтрованный спектр щелевой диафрагмы (ср. с рис. 1)

фокальной плоскости  $\Phi$  линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью  $\Phi$  и плоскостью изображений  $P_2$  осуществляется обратное преобразование Фурье, и в плоскости  $P_2$  восстанавливается таким образом изображение предмета.

## 1.4 Мультипликация изображения предмета

Рассмотрим, что произойдёт с изображением предмета, если мы установим в задней фокальной плоскости линзы решётку. Сопоставим вначале спектры щелевой диафрагмы (рис. 2) и периодической после-

довательности щелевых диафрагм (рис. 1).

Легко видеть, что спектр, изображённый на рис. 1, можно получить из спектра, изображённого на рис. 2, если исключить из него часть пространственных частот, поместив в фурье-плоскость решётку – последовательность прозрачных и непрозрачных линий (рис. 4).

Отфильтрованный таким образом спектр не будет отличаться ни по амплитуде, ни по фазе от спектра периодической последовательности щелевых диафрагм, и в плоскости  $P_2$  мы получим вместо изображения одиночной щели изображение периодической последовательности щелей.

Эти рассуждения можно повторить и для предмета с произвольным спектром, необходимо только, чтобы период решётки был заметно меньше ширины спектра (точное соотношение можно получить из теоремы Котельникова). Таким образом, установив в задней фокальной плоскости линзы решётку, мы вместо изображения одиночного предмета а получим эквидистантный набор изображений таких предметов, т. е. осуществим мультипликацию изображения предмета (увидим изображение несуществующей «фиктивной» решётки).

Поменяв местами сетку и щель, можно проследить влияние размера щели на изображение сетки.

## 2 Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 5. Щель переменной ширины  $D$ , снабжённая микрометрическим винтом В, освещается параллельным пучком света, излучаемым лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

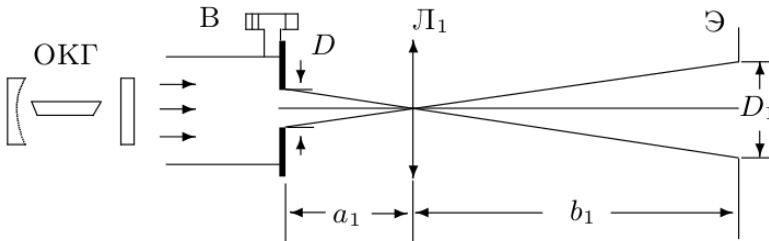


Рис. 5: Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Увеличенное изображение щели с помощью линзы  $L_1$  проеци-

руется на экран Э. Величина изображения  $D_1$  зависит от расстояний от линзы до предмета –  $a_1$  и до изображения –  $b_1$ , т. е. от увеличения  $\Gamma$  системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1} \quad (8)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $Л_1$ . Размещая в плоскости  $\Phi$  двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультиплицированное изображение щели.

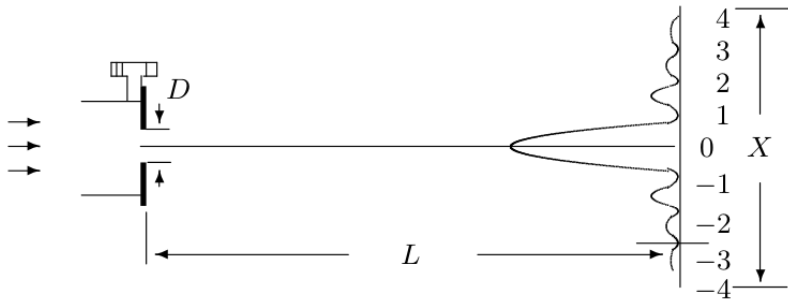


Рис. 6: Схема для определения ширины щели по спектру

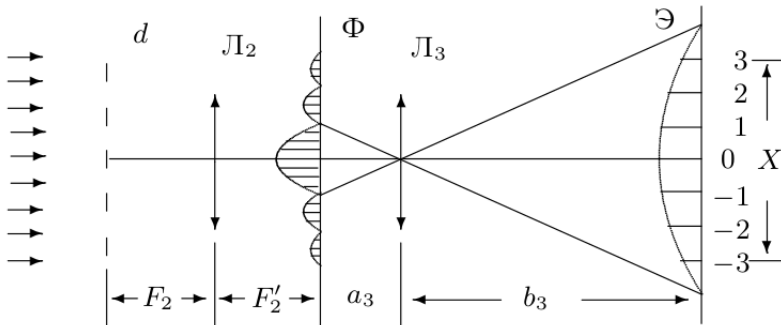


Рис. 7: Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 6), а если заменить щель решёткой – спектр решётки. Крупные решётки

дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 7): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение – спектр, вторая (короткофокусная) – проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

### 3 Ход работы

$D, mkm$	$D1, mkm$	$D_L, mm$	$\sigma_{D_L}, mm$
50	1500	53,3	0,4
100	3000	106,6	0,4
150	4500	160,0	0,4
200	5500	195,5	0,4
250	7000	248,8	0,4
300	8500	302,1	0,4
350	9500	337,7	0,5
400	11000	391,0	0,5
450	12500	444,3	0,5
500	14000	497,6	0,5

Таблица 1: какаято таблица