

Лабораторная работа 4.3.4.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ОПТИКЕ

Хайдари Фарид, Б01-901

2 марта 2021 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>3</b>
1.1	Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки . . . . .	3
1.2	Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций . . . . .	6
1.3	Метод Аббе . . . . .	8
1.4	Мультипликация изображения предмета . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Экспериментальная установка</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Ход работы</b>	<b>12</b>

**Цель работы:** исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

## 1 Теоретические сведения

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания  $t(x)$ , то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье.

### 1.1 Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки

Рассмотрим вначале простой пример: дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом  $d$  расположена в плоскости  $Z = 0$ , а её штрихи ориентированы вдоль оси  $Y$ . Функция пропускания такой решётки имеет вид

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} \quad (1)$$

с постоянными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$  ( $u = 2\pi/d$  - пространственная частота)

Если на решётку падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Z$ ,

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновой вектор ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $E_0$  — амплитуда, то на выходе из решётки мы получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}; \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t - ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}; \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t + ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, легко видеть, что в плоскости  $Z = 0$  амплитуда колебаний, создаваемая суммой этих волн, описывается функцией (1), а фаза колебаний постоянна. Таким образом, в силу единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях мы нашли искомую суперпозицию плоских волн. Каждая из этих трёх плоских волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости.

Волна  $E_1 = \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , распространяющаяся вдоль оси линзы (оси  $Z$ ), фокусируется в начало координат, а волны  $E_2$  и  $E_3$ , распространяющиеся в направлении  $\sin \theta = \pm(u/k)$ , фокусируются в точках  $x_{1-2} = \pm Fu/k = \pm F\lambda/d$  ( $F$  — фокусное расстояние линзы).

Функция  $t(x)$  с самого начала задана в виде суммы гармонических составляющих, т.е. в виде ряда Фурье. Каждой гармонической составляющей мы поставили в соответствие с (3) плоскую волну, собираемую линзой в точку в задней фокальной плоскости (её обычно называют фурье-плоскостью). Проводя аналогию с «временной» координатой, мы можем заключить, что спектр функции  $t(x)$  представлен в фурье-плоскости тремя пространственными частотами:  $0, +u, -u$ ; с амплитудами соответственно:  $\beta, \alpha/2, \alpha/2$ .

Теорема Фурье, доказываемая в курсе математического анализа, утверждает, что широкий класс периодических функций  $t(x)$  может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, имеющих кратные частоты, т.е. в виде ряда Фурье. В комплексной форме этот ряд имеет вид

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inux} \quad (4)$$

Рассуждая так же, как в случае амплитудной синусоидальной решётки, мы придём к выводу, что картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами

$$x_n = \frac{Fu}{k}n = \frac{F\lambda}{d}n$$

и амплитудами, пропорциональными  $c_n$ . Таким образом, с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье: при освещении транспаранта плоской монохроматической волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой фурье-образ функции пропускания транспаранта.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Распределение света в задней фокальной плоскости линзы будет воспроизводить распределение амплитуд плоских волн, продифрагировавших на транспаранте, но фазовые соотношения при этом, вообще говоря, оказываются искажёнными и не соответствуют аргументам комплексных амплитуд в выражении (4). При изменении расстояния между транспарантом и линзой фазовые соотношения изменяются. Можно доказать, что если транспарант установлен в передней фокальной плоскости линзы, то в её задней фокальной плоскости восстанавливаются и амплитудные, и фазовые соотношения между плоскими волнами, и таким образом строго осуществляется комплексное фурье-преобразование (4).

Во многих практически важных случаях функция пропускания транспаранта чисто амплитудная, как, например, в случае амплитудной синусоидальной решётки (1). Тогда для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания транспаранта, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе из транспаранта. Для амплитудной синусоидальной решётки мы получили три плоских волны с пространственными частотами  $0$ ,  $+u$ ,  $-u$  и амплитудами, пропорциональными  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ . В соответствии с (1) мы можем утверждать, что нашли пространственный фурье-образ функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки.

Интересно заметить, что наблюдаемая визуально картина фраунгоферовой дифракции в задней фокальной плоскости линзы не зависит от расстояния между транспарантом и линзой, так как глаз не реагирует на фазу волны, а регистрирует только интенсивность (усреднённый по времени квадрат амплитуды поля). Условия наблюдения дифракции Фраунгофера можно выполнить и без применения линзы, если наблюдать дифракционную картину на достаточно удалённом экране. Таким образом, пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера.

## 1.2 Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций

Картина дифракции Фраунгофера на щели и на дифракционной решётке, имеющей вид периодического набора щелей, хорошо известна из курса оптики. Спектр дифракционной решётки представлен на рис. 1. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы в спектре бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

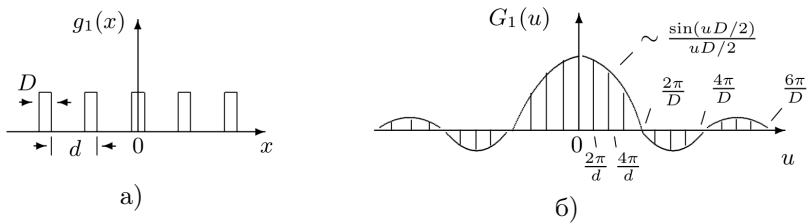


Рис. 1: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос);  
б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания дифракционной решётки

Направление на главные максимумы  $\theta_n = un/k = \lambda n/d$  ( $n$  — целое число) определяется периодом решётки  $d$ , а распределение амплитуд в спектре (огibaющая) — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха.

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -D/2 \leq x \leq D/2; \\ 0, & -D/2 > x > D/2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как функция  $g_2(x)$  непериодична, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{iux} du, \quad (6)$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

Говорят, что в таком виде  $g(x)$  и  $G(u)$  представляют собой пару преобразований Фурье:  $G(u)$  — спектр или фурье-образ функции  $g(x)$ .

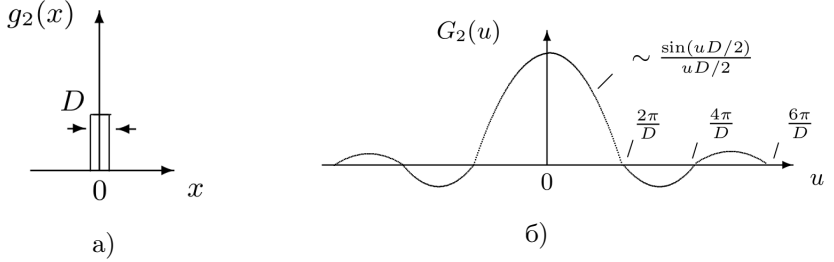


Рис. 2: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания щелевой диафрагмы;  
б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы

Спектр функции  $g_2(x)$  хорошо известен, он соответствует картине дифракции Фраунгофера на щели и описывается функцией вида  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. 2).

Получим спектр  $G_2(u)$  ещё раз с помощью преобразования Фурье:

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{D/2}^{D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin(uD/2)}{uD/2}.$$

Отсюда видно, что направление на первый минимум  $\theta_1$  в огибающей спектра пропускания дифракционной решётки определяется шириной функции пропускания отдельного штриха:  $\theta_1 = u/k = \lambda/D$ . Если ввести понятия протяжённости функции пропускания транспаранта по координате ( $\Delta x$ ) и ширины её спектра ( $\Delta u$ ), то

$$\Delta u \cdot \Delta x = const. \quad (7)$$

Для частного случая функции пропускания щелевой диафрагмы, определяя ширину её спектра по первому нулю функции  $\frac{\sin(uD/2)}{uD/2}$ , получаем

$$\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Соотношение (7) в волновой физике играет чрезвычайно важную роль. Его называют соотношением неопределённости.

Измерив на удалённом экране расстояния между максимумами или минимумами в спектре пропускания щели (рис. 26) или решётки (рис. 16), можно рассчитать размер щели или период решётки.

Размер малого объекта можно рассчитать, если получить его изображение, увеличенное с помощью линзы.

### 1.3 Метод Аббе

Рассмотрим кратко схему образования изображения. Пусть предмет расположен в плоскости  $P_1$  на расстоянии от линзы большем, чем фокусное. Тогда существует сопряжённая предметной плоскости  $P_1$  плоскость  $P_2$ , где образуется изображение предмета-щели.

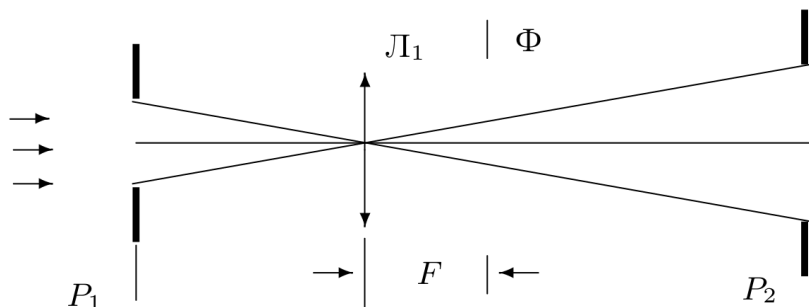


Рис. 3: Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Аббе предложил рассматривать схему прохождения лучей от предмета к изображению в два этапа. Сначала рассматривается изображение спектр в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $_1$  (это изображение Аббе назвал первичным).

Затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение предмета а в плоскости  $P_2$  (вторичное изображение). Такой подход опирается на принцип Гюйгенса–Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения.

Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_2$ , зависит от распределения амплитуды и фазы в плоскости  $\Phi$  – в первичном изображении. Если плоскость  $P_2$  сопряжена с предметной плоскостью  $P_1$ , то фазовые соотношения в первичном изображении оказываются именно такими, что в плоскости  $P_2$  мы наблюдаем соответственно увеличенное или уменьшенное изображение предмета. Поэтому иногда говорят, что линза дважды осуществляет преобразование Фурье: сначала в задней



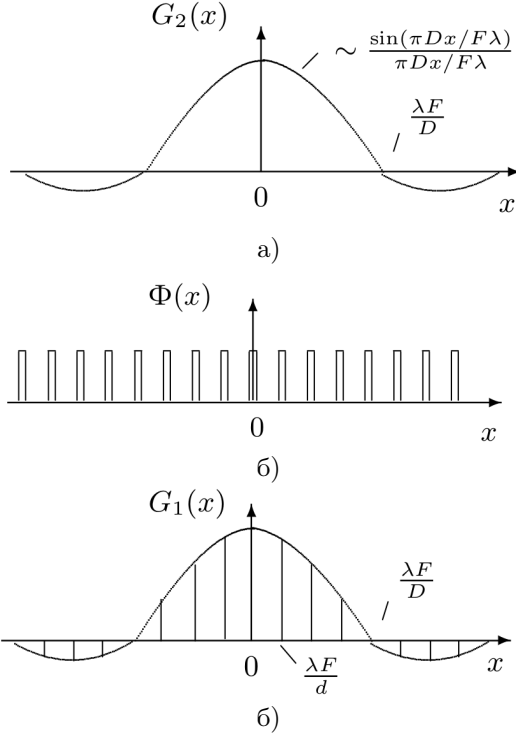


Рис. 4: а)  $G_2(x)$  – спектр функции пропускания щелевой диафрагмы;  $x$  – координаты в задней фокальной плоскости линзы;  
 б)  $\Phi_1(x)$  – функция пропускания решетки, установленной в фурье-плоскости линзы;  
 в)  $G_1(x)$  – отфильтрованный спектр щелевой диафрагмы (ср. с рис. 1)

фокальной плоскости  $\Phi$  линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью  $\Phi$  и плоскостью изображений  $P_2$  осуществляется обратное преобразование Фурье, и в плоскости  $P_2$  восстанавливается таким образом изображение предмета.

## 1.4 Мультипликация изображения предмета

Рассмотрим, что произойдёт с изображением предмета, если мы установим в задней фокальной плоскости линзы решётку. Сопоставим вначале спектры щелевой диафрагмы (рис. 2) и периодической после-

довательности щелевых диафрагм (рис. 1).

Легко видеть, что спектр, изображённый на рис. 1, можно получить из спектра, изображённого на рис. 2, если исключить из него часть пространственных частот, поместив в фурье-плоскость решётку – последовательность прозрачных и непрозрачных линий (рис. 4).

Отфильтрованный таким образом спектр не будет отличаться ни по амплитуде, ни по фазе от спектра периодической последовательности щелевых диафрагм, и в плоскости  $P_2$  мы получим вместо изображения одиночной щели изображение периодической последовательности щелей.

Эти рассуждения можно повторить и для предмета с произвольным спектром, необходимо только, чтобы период решётки был заметно меньше ширины спектра (точное соотношение можно получить из теоремы Котельникова). Таким образом, установив в задней фокальной плоскости линзы решётку, мы вместо изображения одиночного предмета а получим эквидистантный набор изображений таких предметов, т. е. осуществим мультипликацию изображения предмета (увидим изображение несуществующей «фиктивной» решётки).

Поменяв местами сетку и щель, можно проследить влияние размера щели на изображение сетки.

## 2 Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 5. Щель переменной ширины  $D$ , снабжённая микрометрическим винтом В, освещается параллельным пучком света, излучаемым лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

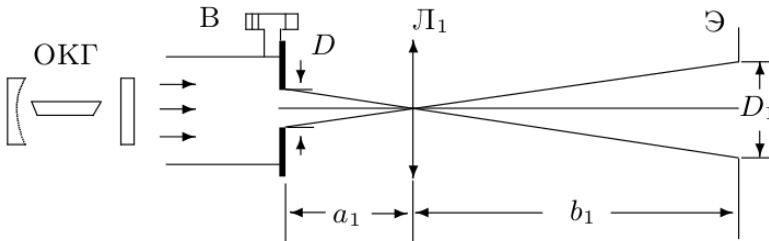


Рис. 5: Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Увеличенное изображение щели с помощью линзы 1 проециру-

ется на экран Э. Величина изображения  $D_1$  зависит от расстояний от линзы до предмета –  $a_1$  и до изображения –  $b_1$ , т. е. от увеличения  $\Gamma$  системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1} \quad (8)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы  $1$ . Размещая в плоскости  $\Phi$  двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультиплицированное изображение щели.

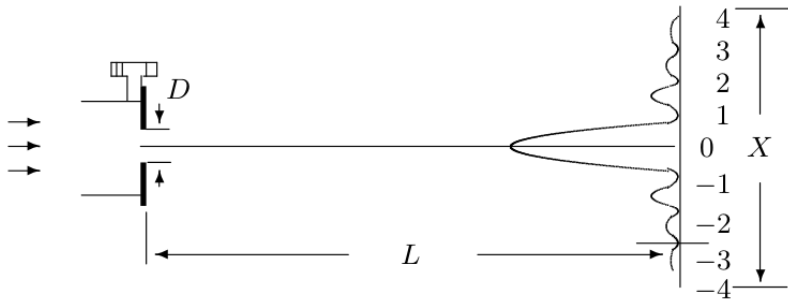


Рис. 6: Схема для определения ширины щели по спектру

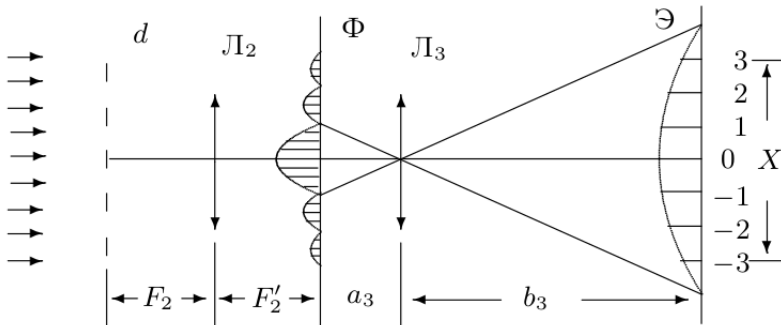


Рис. 7: Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 6), а если заменить щель решёткой – спектр решётки. Крупные решётки

дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 7): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение – спектр, вторая (короткофокусная) – проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

### **3   Ход работы**