

Лабораторная работа 4.3.5.
ИЗУЧЕНИЕ ГОЛОГРАММЫ

SOMEVEODY, Б01-901

23 марта 2021 г.

Содержание

1	Теоретические сведения	3
1.1	Принципы голографии	3
1.1.1	Голограмма точечного источника (голограмма Габора)	5
1.1.2	Разрешающая способность голограммы	10
1.2	Схема с наклонным опорным пучком	11

Цель работы: Изучить свойства голограмм точечного источника и объемного предмета.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, голограммы, набор линз, предметная шкала, экран, линейка.

1 Теоретические сведения

1.1 Принципы голографии

Приёмники света (глаз человека, фотопластинка, фотоэлемент) реагируют на поток энергии световой волны, т. е. величину, пропорциональную квадрату амплитуды. Информация о фазовой структуре волны (т. е. о форме волнового фронта) оказывается при этом утраченной.

В этом разделе мы рассмотрим способ записи изображения, который позволяет по картине интенсивности восстановить полную информацию о волновом поле.

Пусть некоторый предмет (пешка, изображённая на рис. (1.1)) освещается когерентным светом лазера и пусть волна, отражённая предметом (будем называть её далее предметной волной), создаёт в плоскости $z = 0$ световое поле:

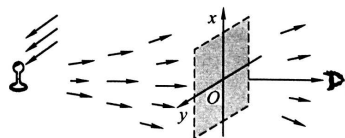


Рис. 1.1: Световое поле предмета

$$f_{\Pi}(x, y) = a(x, y) \cdot e^{i\varphi(x, y)}$$

Установим в плоскости $z = 0$ фотопластинку. Предположим, что функция пропускания фотопластинки после необходимой обработки (проявление, закрепление) пропорциональна интенсивности волны, освещающей пластину во время экспозиции, т. е. пропорциональна величине $I(x, y) = |a(x, y)|^2$. Информация о фазовой структуре волны $\varphi(x, y)$ будет при этом утеряна.

Следуя идее Габора (1948 г.), изменим схему эксперимента: пусть на фотопластинку кроме предметной волны, создающей на фотопластинке поле $f_{\text{п}}(x, y)$, падает ещё некоторая волна с известным распределением амплитуд и фаз колебаний $f_o(x, y) = a_o(x, y) e^{i\varphi(x, y)}$, называемая опорной волной (см. рис. 1.2). При этом необходимо обеспечить когерентность предметной и опорной волн – волны должны интерферировать. Например, как показано на рис. 1.2: излучение лазера частично проходит через полупрозрачную пластинку П, освещая предмет, а частично отражается от неё, создавая опорный пучок. Когерентность предметной и опорной волн обеспечивается высокой степенью монохроматичности лазерного излучения (разность хода между предметной и опорной волнами меньше длины когерентности для любой точки фотопластинки).

Суммарное поле на голограмме

$$f(x, y) = f_{\text{п}}(x, y) + f_o(x, y)$$

а интенсивность (а следовательно, и функция пропускания фотопластинки после необходимой обработки) есть

$$t(x, y) \propto I(x, y) = |f_{\text{п}}(x, y) + f_o(x, y)|^2$$

Раскрывая квадрат модуля в полученном выражении

$$t \propto |f_{\text{п}}|^2 + |f_o(x, y)|^2 + f_{\text{п}} f_o^* + f_{\text{п}}^* f_o = a^2 + a_o^2 + 2aa_o \cos(\varphi - \varphi_o)$$

убеждаемся, что в функции пропускания (а именно, в слагаемом, связанном с интерференцией опорной и предметной волн) сохранилась информация о фазе предметной волны $\varphi(x, y)$

Фотопластинка с зарегистрированным на ней результатом интерференции предметной и опорной волны называется голограммой.

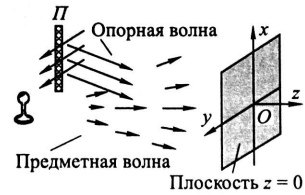


Рис. 1.2: Запись голограммы

1.1.1 Голограмма точечного источника (голограмма Габора)

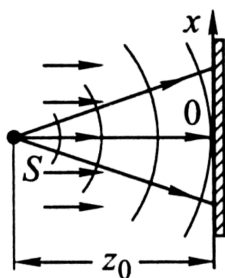


Рис. 1.3: Запись голограммы точечного источника

Для уяснения сути метода рассмотрим в качестве предмета точечный источник света S , т. е. создадим сферическую предметную волну:

$$f_{\Pi} = \frac{a_{\Pi}}{f} e^{ikr},$$

где $r = \sqrt{z_0^2 + x^2 + y^2}$ — расстояние от источника S до точки (x, y) фотопластинки.

В качестве опорной волны возьмём плоскую волну, бегущую вдоль оси z и падающую нормально на фотопластинку, расположенную в плоскости $z = 0$ (рис. 1.3):

$$f_o = a e^{ikz},$$

т. е. опорная волна создаёт во всех точках фотопластинки поле одинаковой амплитуды и фазы.

Принимая фазу колебаний в плоскости $z = 0$ равной нулю, запишем $f_o = a$. Кроме того, для упрощения формул будем далее полагать, что амплитуда сферической волны во всех точках фотопластинки равна амплитуде плоской волны, т. е. $f_{\Pi} \approx a e^{ikr}$. Суммарное поле в таком случае имеет вид

$$f = a e^{ikr} + a.$$

После необходимой фотообработки получаем голограмму с функцией пропускания:

$$t(x, y) \sim I(x, y) = |a + a e^{ikr}|^2. \quad (1)$$

Мы описали первую стадию голографического процесса — процесс записи голограммы. Теперь необходимо использовать полученную голограмму для восстановления (реконструкции) изображения.

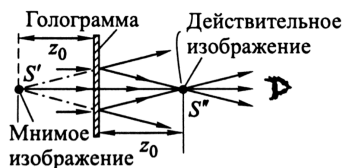


Рис. 1.4: Восстановление голограммы точечного источника

Устанавливаем голограмму в плоскости $z = 0$ и освещаем её плоской нормально падающей волной (рис. 1.4). Для упрощения формул будем считать амплитуду волны равной единице, а фазу без ограничения общности равной нулю, т. е. комплексная амплитуда этой волны (её называют **восстанавливающей волной**) есть $f_-(x, y) = 1$.

Тогда на выходе голограммы, в плоскости, примыкающей к ней справа, получим

$$f_+(x, y) = f_-(x, y)t(x, y) = |a + a e^{ikr}|^2. \quad (2)$$

Итак, суммарное поле за голограммой описывается действительной положительной функцией. Исследуем его более детально.

Из (2) находим

$$f_+(x, y) = 2a^2 + a^2 e^{ikr} + a^2 e^{-ikr} = 2a^2 (1 + \cos kr) \quad (3)$$

Поле в плоскости $z = 0_+$ представляется в виде суммы трёх слагаемых. Соответственно волна в области $z > 0$ есть сумма трёх волн: каждое слагаемое на границе $z = 0_+$ ответственно за появление «своей» волны в области $z > 0$.

Первое слагаемое $2a^2$ «отвечает» за появление волны $f_1 = 2a^2 e^{ikz}$ — плоской волны, бегущей в области $z > 0$ вдоль оси z . Второе слагаемое $f_2 = a^2 e^{ikr}$ — волновое поле со сферическим волновым фронтом: именно такое поле создавал в каждой точке плоскости $z = 0$ точечный источник света, который находился на расстоянии z_0 слева от голограммы в процессе записи. Ясно, что и в области $z > 0$ поле f_2 порождает расходящуюся сферическую волну, неотличимую от предметной волны (сферической волны, исходящей из точки S в процессе записи голограммы). Поэтому наблюдатель, который находится справа (в области $z > 0$) и смотрит на голограмму как в окошко, «увидит в окне» на расстоянии z_0 слева от голограммы светящуюся точку S' , т. е. расходящаяся сферически волна кажется наблюдателю исходящей из точки S' , хотя никакой светящейся точки на стадии реконструкции изображения нет, — есть только фотопластинка-голограмма, освещаемая плоской волной. Это — мнимое изображение предмета.

Рассмотрим теперь последнее, третье, слагаемое в (3): $f_3 = a^2 e^{-ikr}$. Волновой фронт в этой волне «вывернут наизнанку» по отношению к волне f_2 : если в волне f_2 колебание в точке (x, y) плоскости $z = 0$

отстаёт по фазе от колебаний в начале координат, то в волне f_3 колебание в точке (x, y) опережает по фазе колебание в начале координат на ту же величину. Это слагаемое описывает поле, которое создавала бы в плоскости $z = 0$ сферическая волна, сходящаяся в точку S'' на расстоянии z_0 справа (рис. 1.4). Ясно поэтому, что граничное поле f_3 , возникающее в процессе реконструкции, порождает сферическую волну, сходящуюся в точку S'' . Это — действительное изображение предмета. Его можно наблюдать, расположив на расстоянии z_0 за голограммой экран наблюдения, — мы увидим яркую точку, в которую сфокусирована волна.

Описанные закономерности сохраняются в общих чертах при голографировании произвольного предмета: в процессе реконструкции возникают три волны: волна, создающая мнимое изображение, которое находится слева от голограммы, там же, где находился предмет при записи; волна, создающая действительное изображение, которое располагается симметрично справа от голограммы; а также волна, бегущая вдоль оси z и не несущая информации о форме волнового фронта предметной волны.

Зонная решётка Габора. Вернёмся к интерференционной катине (3), которая записана на голограмме точечного источника.

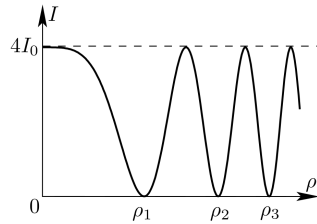
Используем приближённое выражение

$$r \approx \sqrt{z_0^2 + x^2 + y^2} \approx z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} = z_0 + \frac{\rho^2}{2z_0} \quad (4)$$

где $\rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от начала координат до точки (x, y) в плоскости фотопластинки. Соответственно фаза колебаний в сферической волне в точке (x, y) есть

$$\varphi = kr \approx kz_0 + \frac{k}{2z_0}\rho^2 \quad (5)$$

Принимая начальную фазу на оси z в плоскости $z = 0$ нулевой, запишем: $\varphi = \frac{k}{2z_0}\rho^2$. Мы полагаем, таким образом, что колебания опорной (плоской) волны и сферической волны в точке $(x = 0, y = 0)$ синфазны. Тогда получим



$$I(\rho) = 2a^2 \left(1 + \cos \frac{k\rho^2}{2z_0} \right) \quad (6) \quad \text{Рис. 1.5: Зависимость } I(\rho)$$

Мы видим, что интерференционная картина имеет вид колец, центр которых находится в начале координат. Функция $I(\rho)$ показана на рис. 1.5. Радиус первого (тёмного) кольца ρ_1 находим из условия $k \frac{\rho_1^2}{2z_0} = \pi$ (при этом $\cos \left(k \frac{\rho_1^2}{2z_0} \right)$ и $I(\rho_1) = 0$), откуда получаем: $\rho_1 = \sqrt{\lambda z_0}$. Вообще радиусы светлых и тёмных колец находятся по формуле

$$\rho_m = \sqrt{m\lambda z_0} \quad (7)$$

(при m нечётном — тёмные кольца, при m чётном — светлые), которая совпадает с выражением, определяющим радиусы тёмных и светлых колец в зонной пластинке Френеля.

Отличие состоит в том, что в нашем случае переход от светлых колец к тёмным происходит плавно. Интерференционная картина (3) (голограмма точечного источника) показана на рис. 1.6 и называется зонной решёткой Габора. Как следует из проведённого выше анализа,

зонная решётка Габора работает одновременно и как собирающая линза (фокусируя параллельный пучок света в точку S'' – действительный фокус зонной пластинки), и как рассеивающая линза, которая преобразует параллельный пучок, падающий на пластинку, в расходящуюся сферическую волну, исходящую из мнимого фокуса S' , и как плоскопараллельная пластинка, поскольку часть света за пластинкой сохраняет структуру освещающего параллельного пучка.



Рис. 1.6: Зависимость $I(\rho)$

Сферическая восстанавливающая

волна. Рассмотрим ещё одно свойство голограммы точки. Пусть восстанавливающая волна является не плоской, а сферической, расходящейся от точки, расположенной на расстоянии $z_1 > z_0$ от голограммы. Используя параболическое приближение (5), запишем комплексную амплитуду падающей волны в плоскости голограммы:

$$f_-(\rho) = e^{-i \frac{k}{2z_1} \rho^2}, \quad (8)$$

Восстановленное поле в плоскости $z = 0$:

$$f_+(\rho) = f_-(\rho)t(\rho).$$

Используя (8) и (1), получим (с точностью до несущественных констант)

$$f_+(\rho) = e^{-i \frac{k}{2z_1} \rho^2} + e^{-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_0} \right) \rho^2} + e^{-i \frac{k}{2} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_0} \right) \rho^2}.$$

Из этого выражения видно, что расстояние b_2 от голограммы до мнимого изображения источника уменьшается, так как

$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1},$$

т. е. это изображение приближается к голограмме. В то же время расстояние b_3 от голограммы до действительного изображения увеличивается:

$$\frac{1}{b_3} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1}.$$

Это свойство голограммы следует иметь в виду при объяснении изменения масштабов изображений трёхмерного предмета при освещении голограммы сферической волной.

В случае произвольного предмета на голограмме записывается сложный интерференционный узор, который можно рассматривать как совокупность зонных кольцевых решёток Габора, причём каждая из них ответственна за восстановление «своей» точки предмета на стадии реконструкции изображения.

1.1.2 Разрешающая способность голограммы

Рассмотрим более детально волну, ответственную за создание действительного изображения. Конечно, сходящаяся сферическая волна не фокусируется строго в точку S'' : изображением является не точка, а маленькое дифракционное пятнышко. Действительно, плоская восстанавливающая волна, пройдя сквозь голограмму, преобразуется в сферическую волну (мы говорим сейчас о той части волны, которая ответственна за создание действительного изображения), причём сферический волновой фронт ограничен размерами голограммы. Эта сходящаяся сферическая волна (третье слагаемое в (3)) не отличается от сферической волны, возникающей за собирающейся линзой, размер D которой равен размеру голограммы. При фокусировке света линзой возникает дифракционное пятно Эйри, размер которого определяется формулой (??). Ясно, что и голограмма создаёт изображение – дифракционное пятно, размер которого определяется аналогичной формулой:

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{D} z_0 \quad (9)$$

где z_0 — расстояние от точечного источника до голограммы в процессе записи, D — размер голограммы. Если записывать на голограмму изображения двух точек, расстояние между которыми меньше Δx , то

при восстановлении изображений возникают два пятна, налагающиеся друг на друга так, что, согласно критерию Рэлея, они оказываются неразрешимыми. Сказанное касается, разумеется, и мнимого изображения точечного источника: наблюдателю оно кажется маленьким пятнышком размера Δx , находящимся на расстоянии z_0 за голограммой.

Важнейшее свойство голограммы состоит в том, что любой её малый участок содержит информацию обо всем объекте: ведь поле в каждой точке голограммы является суперпозицией полей, посылаемых всеми точками предмета (и опорной волной). Другими словами, интерференционная картина на каждом небольшом участке голограммы содержит информацию об амплитуде и фазе колебаний всех точек предмета, поэтому изображение может быть восстановлено с помощью небольшого осколка голограммы, полученной при записи. Разумеется, разрешающая способность определяется размером осколка.

1.2 Схема с наклонным опорным пучком

При наблюдении голографических изображений, полученных по схеме Габора, действительное и мнимое изображения создают взаимные помехи: изображения S' и S'' находятся на одной прямой с точкой, в которой расположен глаз наблюдателя (рис. 1.4). Помехи создаются также возникающей при восстановлении плоской волной, бегущей вдоль оси z и не несущей информации об объекте. В 1962 году Лейт и Упатникс предложили использовать для записи голограммы наклонный опорный пучок.

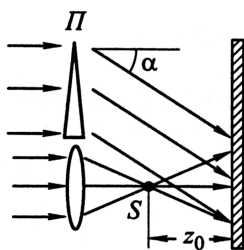


Рис. 1.7: Наклонный опорный пучок

Проследим, каким образом введение опорного наклонного пучка обеспечивает возможность независимого (без взаимных помех) наблюдения действительного и мнимого изображений. На рис. 1.7 «предметом» является «точечный источник» S . Наклон опорного пучка обеспечивается призмой Π . Поле предметной волны на голограмме есть

$$f_{\Pi}(x, y) = a e^{i \frac{k}{z_0} (x^2 + y^2)}$$

(мы вновь используем параболическое приближение). Наклонная опорная волна име-

ет вид $f_0 = a e^{i u_0 x}$, где $u_0 = k \sin \alpha$ — пространственная частота опорной волны. Мы полагаем, что волны имеют равные амплитуды и создают в начале координат плоскости xy (плоскость голограммы) синфазные колебания. Функция пропускания проявленной голограммы, пропорциональная интенсивности суммарной волны при записи, имеет вид

$$t(x, y) \sim \left| a e^{i u_0 x} + a e^{i \frac{k}{2z_0} (x^2 + y^2)} \right|^2.$$

Слагаемые, ответственные за появление действительного и мнимого изображения при восстановлении, можно записать в виде:

$$f_3(x, y) \sim b e^{i \frac{k}{2z_0} ((x+z_0 \sin \alpha)^2 + y^2)}, \quad f_4(x, y) \sim b e^{-i \frac{k}{2z_0} ((x+z_0 \sin \alpha)^2 + y^2)},$$

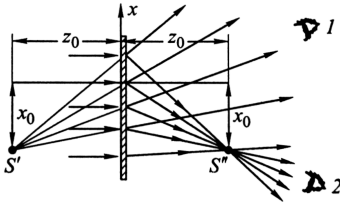


Рис. 1.8: Мнимые и действительные изображения в схеме с наклонным пучком

где b — комплексная константа. Выражение $f_3(x, y)$ представляет собой поле, которое создавал бы в плоскости $z = 0$ точечный источник, находящийся в точке с координатами $x_0 = -z_0 \sin \alpha$, $y = 0$, на расстоянии z_0 слева от голограммы. Это мнимое изображение предмета S' (рис. 1.8). Соответственно $f_4(x, y)$ описывает поле сходящейся в точку S'' сферической волны. Эта точка находится справа от голограммы на расстоянии z_0 и смещена относительно оси z на расстояние $x_0 =$

$-z_0 \sin \alpha$. Это — действительное изображение. Мы видим, что введение наклонного опорного пучка приводит к сдвигу мнимого и действительного изображений таким образом, что наблюдатель может рассматривать их из разных положений (1 и 2 на рис. 1.8), в которых они не создают взаимных помех. Разумеется, угол наклона опорного пучка α (т. е. его пространственная частота) должен быть выбран правильно: чем шире пространственный спектр предметной волны, тем больше должен быть угол наклона опорного пучка, при котором волны, ответственные за создание действительного и мнимого изображений, не создают взаимных помех.