

Лабораторная работа 4.3.4.  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В  
ОПТИКЕ

Державин Андрей, Б01-901

10 марта 2021 г.

# Содержание

<b>Теоретические сведения</b>	<b>3</b>
Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки . . . . .	3
Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций . . . . .	6
Метод Аббе . . . . .	8
Мультипликация изображения предмета . . . . .	9
<b>Экспериментальная установка</b>	<b>10</b>
<b>Ход работы</b>	<b>12</b>
Определение ширины щели . . . . .	12
Определение ширины щели с помощью линзы . . . . .	12
Определение ширины щели по её спектру . . . . .	12
Определение периода решёток . . . . .	14
Определение периода по спектру на удалённом экране . . . . .	14
Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра . . . . .	15
Мультиплицирование . . . . .	15

**Цель работы:** исследование особенностей применения пространственного преобразования Фурье для анализа дифракционных явлений.

**В работе используются:** гелий-неоновый лазер, кассета с набором сеток разного периода, щель с микрометрическим винтом, линзы, экран, линейка.

## Теоретические сведения

Анализ сложного волнового поля во многих случаях целесообразно проводить, разлагая его на простейшие составляющие, например, представляя его в виде разложения по плоским волнам. При этом оказывается, что если мы рассматриваем поле, полученное после прохождения плоской монохроматической волны через предмет или транспарант (изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания  $t(x)$ , то разложение по плоским волнам соответствует преобразованию Фурье от этой функции. Если за предметом поставить линзу, то каждая плоская волна сфокусируется в свою точку в задней фокальной плоскости линзы. Таким образом, картина, наблюдаемая в фокальной плоскости линзы, даёт нам представление о спектре плоских волн падающего на линзу волнового поля. Поэтому можно утверждать, что с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье.

## Спектр функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки

Рассмотрим вначале простой пример: дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом  $d$  расположена в плоскости  $Z = 0$ , а её штрихи ориентированы вдоль оси  $Y$ . Функция пропускания такой решётки имеет вид

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2} \quad (1)$$

с постоянными  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $u$  ( $u = 2\pi/d$  - пространственная частота)

Если на решётку падает плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $Z$ ,

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \quad (2)$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновой вектор ( $k = 2\pi/\lambda$ ),  $E_0$  – амплитуда, то на выходе из решётки мы получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}; \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t - ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}, \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-i(\omega t + ux - z\sqrt{k^2 - u^2})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Действительно, легко видеть, что в плоскости  $Z = 0$  амплитуда колебаний, создаваемая суммой этих волн, описывается функцией (1), а фаза колебаний постоянна. Таким образом, в силу единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях мы нашли искомую суперпозицию плоских волн. Каждая из этих трёх плоских волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости.

Волна  $E_1 = \beta \cdot E_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ , распространяющаяся вдоль оси линзы (оси  $Z$ ), фокусируется в начало координат, а волны  $E_2$  и  $E_3$ , распространяющиеся в направлении  $\sin \theta = \pm(u/k)$ , фокусируются в точках  $x_{1-2} = \pm F u / k = \pm F \lambda / d$  ( $F$  – фокусное расстояние линзы).

Функция  $t(x)$  с самого начала задана в виде суммы гармонических составляющих, т.е. в виде ряда Фурье. Каждой гармонической составляющей мы поставили в соответствие с (3) плоскую волну, собираемую линзой в точку в задней фокальной плоскости (её обычно называют фурье-плоскостью). Проводя аналогии с «временной» координатой, мы можем заключить, что спектр функции  $t(x)$  представлен в фурье-плоскости тремя пространственными частотами: 0,  $+u$ ,  $-u$ ; с амплитудами соответственно:  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ .

Теорема Фурье, доказываемая в курсе математического анализа, утверждает, что широкий класс периодических функций  $t(x)$  может быть представлен в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, имеющих кратные частоты, т.е. в виде ряда Фурье. В компактной форме этот ряд имеет вид

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inux} \quad (4)$$

Рассуждая так же, как в случае амплитудной синусоидальной решётки, мы придём к выводу, что картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами

$$x_n = \frac{F u}{k} n = \frac{F \lambda}{d} n$$

Строим график  $\Delta y = f(1/d_c)$ , где  $d_c$  – периоды решёток, определённые по спектру.

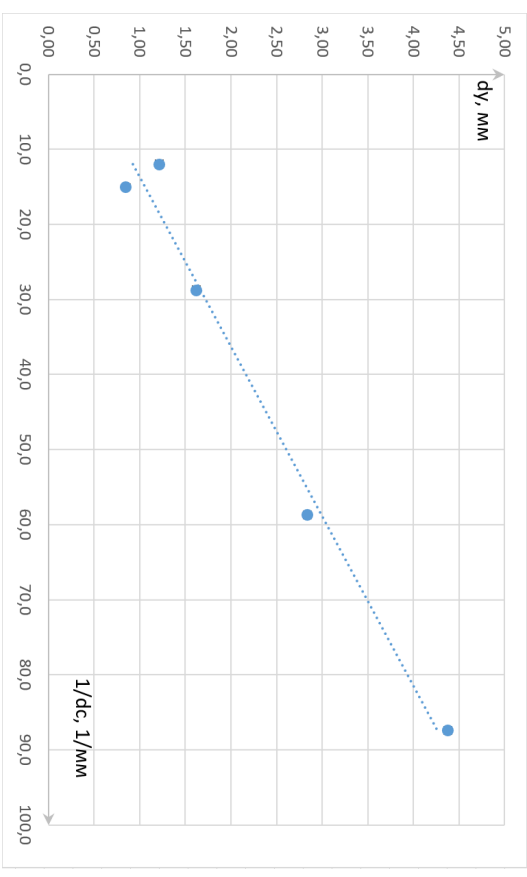


Рис. 9. Зависимость периода «фигтивных» решеток от  $1/d_c$

$Y$ , мм	$\sigma_Y$ , мм	$k$	$n$	$\Delta Y$ , мм	$\sigma_{\Delta Y}$ , мм
54	0,5	2	1	27,0	0,3
35	0,5	2	2	17,5	0,3
20	0,5	2	3	10,0	0,3
21	0,5	4	4	5,25	0,13
15	0,5	2	5	7,5	0,3

Таблица 6: Собранные данные

$\Delta y$ , мм	$\sigma_{\Delta y}$ , мм	$1/d_c$ , мм <sup>-1</sup>	$\sigma_{1/d_c}$ , мм <sup>-1</sup>
4,38	0,04	87,4	0,3
2,84	0,04	58,7	0,3
1,62	0,04	28,7	0,3
0,85	0,02	15,0	0,3
1,22	0,04	12,0	0,3

Таблица 7: Результаты

Рассчитываем периоды  $\Delta y$  «фиктивных» решёток, которые дали бы такую же периодичность на экране:  $\Delta y = \Delta Y/\Gamma_2$ , где  $\Delta Y = Y/K$ .

и амплитудами, пропорциональными  $c_n$ . Таким образом, с помощью линзы в оптике осуществляется пространственное преобразование Фурье: при освещении транспаранта плоской монохроматической волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой фурье-образ функции пропускания транспаранта.

Последнее утверждение нуждается в уточнении. Распределение света в задней фокальной плоскости линзы будет воспроизводить распределение амплитуд плоских волн, продифрагировавших на транспаранте, но фазовые соотношения при этом, вообще говоря, оказываются искажёнными и не соответствуют аргументам комплексных амплитуд в выражении (4). При изменении расстояния между транспарантом и линзой фазовые соотношения изменяются. Можно доказать, что если транспарант установлен в передней фокальной плоскости линзы, то в её задней фокальной плоскости восстанавливаются и амплитудные, и фазовые соотношения между плоскими волнами, и таким образом строго осуществляется комплексное фурье-преобразование (4).

Во многих практически важных случаях функция пропускания транспаранта чисто амплитудная, как, например, в случае амплитудной синусоидальной решётки (1). Тогда для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания транспаранта, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе из транспаранта. Для амплитудной синусоидальной решётки мы получили три плоских волны с пространственными частотами 0,  $+u$ ,  $-u$  и амплитудами, пропорциональными  $\beta$ ,  $\alpha/2$ ,  $\alpha/2$ . В соответствии с (1) мы можем утверждать, что нашли пространственный фурье-образ функции пропускания амплитудной синусоидальной решётки.

Интересно заметить, что наблюдаемая визуально картина Fraunhofer дифракции в задней фокальной плоскости линзы не зависит от расстояния между транспарантом и линзой, так как глаз не реагирует на фазу волн, а регистрирует только интенсивность (усреднённый по времени квадрат амплитуды поля). Условия наблюдения дифракции Fraunгoфeра можно выполнить и без применения линзы, если наблюдать дифракционную картину на достаточно удалённом экране. Таким образом, пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Fraunгoфeра.

## Спектр функции пропускания щелевой диафрагмы и периодической последовательности таких функций

Картина дифракции Фраунгофера на щели и на дифракционной решётке, имеющей вид периодического набора щелей, хорошо известна из курса оптики. Спектр дифракционной решётки представлен на рис. . Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы в спектре бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

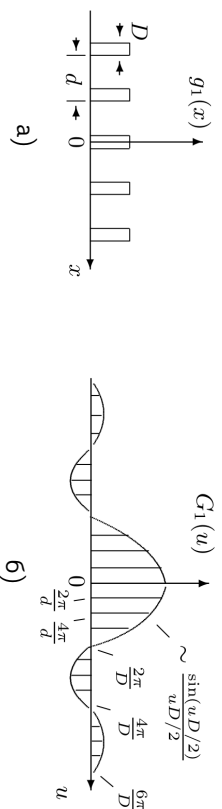


Рис. 1: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос); б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания дифракционной решётки

Направление на главные максимумы  $\theta_n = \pi n / k = \lambda n / d$  ( $n$  — целое число) определяется периодом решётки  $d$ , а распределение амплитуд в спектре (огибающая) — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха.

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -D/2 \leq x \leq D/2; \\ 0, & -D/2 > x > D/2. \end{cases} \quad (5)$$

Так как функция  $g_2(x)$  неперiodична, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) e^{iux} du, \quad (6)$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

## Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

Схема установки изображена на рис.

Поставили линзу  $\Lambda_2$  с максимальным фокусом ( $F_2 = 11$  см) на расстоянии  $F_2$  от касцеты. В плоскости  $\Phi$  линза  $\Lambda_2$  даёт фурье-образ сетки — её спектр, а короткофокусная линза  $\Lambda_3$  ( $F_3 = 2.5$  см) создаёт на экране увеличенное изображение этого спектра.

Измерили  $X$  и  $m$  для всех сеток, где это возможно. Зная увеличение линзы  $\Lambda_3$  ( $\Gamma_3 = b_3/a_3$ ), можно рассчитать расстояние между максимумами  $\Delta x$  в плоскости  $\Phi$ , а затем период сетки  $d_n$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\Gamma_3} = \frac{\lambda}{d_n} F_2 \quad (11)$$

$X$ , мм	$\sigma_X$ , мм	$m$	$n$	$d_n$ , мкм	$\sigma_{d_n}$ , мкм
294	0,5	1	1	10,6	0,2
205	0,5	1	2	15,2	0,3
104	0,5	1	3	30	0,7
52,5	0,5	1	4	59,5	1,4
38	0,5	1	5	82	2

Таблица 5: Сбор данных для  $d_n$

## Мультиплицирование

Ставим тубус с щелью к окну лазера (рис. ??) и находим на экране резкое изображение щели с помощью линзы  $\Lambda_2$  ( $F_2 \approx 10$  см).

Подбираем такую ширину входной щели  $D$ , чтобы на экране можно было наблюдать мультиплицированное изображение для всех сеток

Снимаем зависимость  $Y$  (расстояние между удалёнными изображениями щели) и  $K$  (число промежутков между изображениями) от  $N^\circ$  (номер сетки) для фиксированной ширины входной щели.

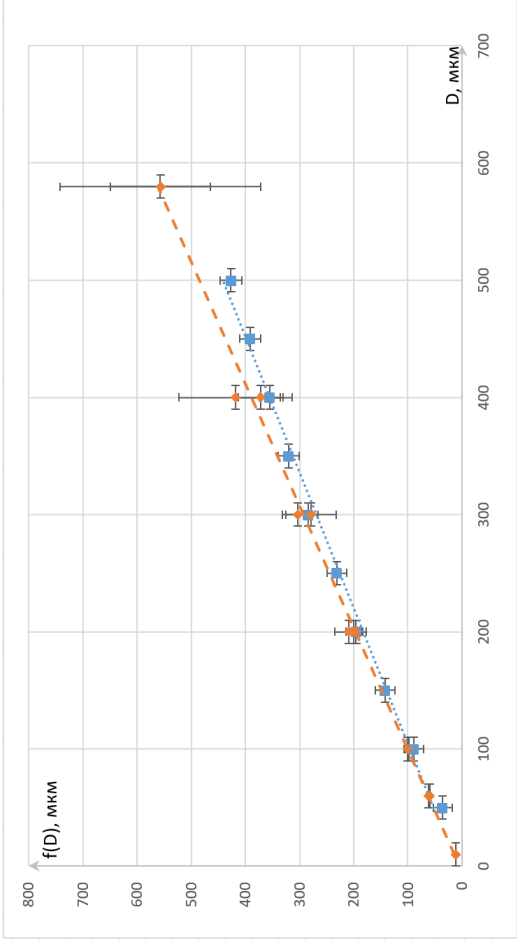


Рис. 8: Зависимость экспериментально рассчитанной ширины щели от измеренной

## Определение периода решёток

### Определение периода по спектру на удалённом экране

Ставим кассету с двумерными решётками (сетками) вплотную к выходному окну лазера. Для каждой сетки измеряем расстояние  $X$  между  $m$ -ми максимумами. Также измеряем расстояние  $l$  от кассеты до экрана. Рассчитайте расстояния  $X$  между соседними максимумами и определяем период каждой решётки  $d_c = f(N^\circ)$ , используя соотношение

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{d_c} l \quad (10)$$

$X$ , мм	$\sigma_X$ , мм	$m$	$n$	$d_c$ , мкм	$\sigma_{d_c}$ , мкм
146	0,5	1	1	11,44	0,04
98	0,5	1	2	17,05	0,09
48	0,5	1	3	34,8	0,4
25	0,5	1	4	66,8	1,3
20	0,5	1	5	84	2

Таблица 4: Зависимость  $d_c$  от  $X$

Говорят, что в таком виде  $g(x)$  и  $G(u)$  представляют собой пару преобразований Фурье:  $G(u)$  — спектр или фурье-образ функции  $g(x)$ .

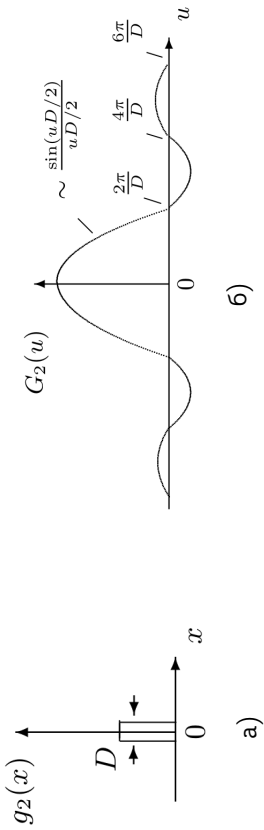


Рис. 2: а)  $g_1(x)$  — функция пропускания щелевой диафрагмы; б)  $G_1(u)$  — спектр функции пропускания щелевой диафрагмы

Спектр функции  $g_2(x)$  хорошо известен, он соответствует картине дифракции Фраунгофера на щели и описывается функцией вида  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. ).

Получим спектр  $G_2(u)$  ещё раз с помощью преобразования Фурье:

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{-D/2}^{D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin(uD/2)}{uD/2}.$$

Отсюда видно, что направление на первый минимум  $\theta_1$  в общей спектра пропускания дифракционной решётки определяется шириной функции пропускания отдельного штриха:  $\theta_1 = u/k = \lambda/D$ . Если ввести понятия протяжённости функции пропускания транспаранта по координате ( $\Delta x$ ) и ширины её спектра ( $\Delta u$ ), то

$$\Delta u \cdot \Delta x = \text{const.} \quad (7)$$

Для частного случая функции пропускания щелевой диафрагмы, определяя ширину её спектра по первому нулю функции  $\frac{\sin(uD/2)}{uD/2}$ , получаем

$$\Delta u \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Соотношение (7) в волновой физике играет чрезвычайно важную роль. Его называют соотношением неопределённости.

Измерив на удалённом экране расстояния между максимумами или минимумами в спектре пропускания щели (рис. 6) или решётки (рис. 6), можно рассчитать размер щели или периода решётки.

Размер малого объекта можно рассчитать, если получить его изображение, увеличенное с помощью линзы.

## Метод Аббе

Рассмотрим кратко схему образования изображения. Пусть предмет расположен в плоскости  $P_1$  на расстоянии от линзы больше, чем фокусное. Тогда существует сопряжённая предметной плоскости  $P_1$  плоскость  $P_2$ , где образуется изображение предмета-щели.

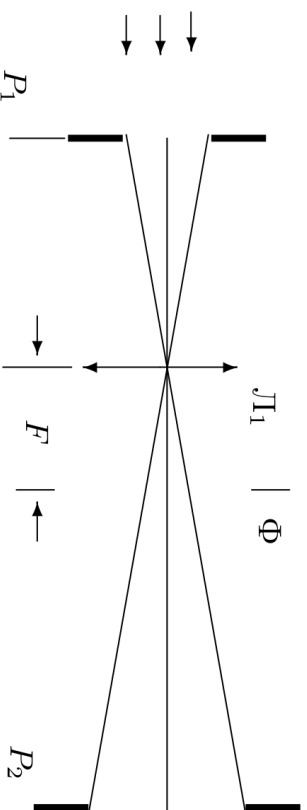


Рис. 3. Схема, поясняющая метод Аббе построения изображения

Аббе предложил рассматривать схему прохождения лучей от предмета к изображению в два этапа. Сначала рассматривается изображение спектра в задней фокальной плоскости  $F$  линзы  $L_1$  (это изображение Аббе назвал первичным).

Затем это изображение рассматривается как источник волн, создающий изображение предмета в плоскости  $P_2$  (вторичное изображение). Такой подход опирается на принцип Гюйгенса-Френеля, согласно которому любой участок волнового фронта можно рассматривать как источник излучения.

Картина, наблюдаемая в плоскости  $P_2$ , зависит от распределения амплитуды и фазы в плоскости  $F$  – в первичном изображении. Если плоскость  $P_2$  сопряжена с предметной плоскостью  $P_1$ , то фазовые соотношения в первичном изображении оказываются именно такими, что в плоскости  $P_2$  мы наблюдаем соответственно увеличенное или уменьшенное изображение предмета. Поэтому иногда говорят, что линза дважды осуществляет преобразование Фурье: сначала в зад-

рию измерений  $X(m)$ , меняя ширину щели в тех же пределах, что и в предыдущем пункте. Также измеряем расстояние  $l$  от щели до экрана. По результатам измерений спектра рассчитываем ширину щели  $D_c$  («с» – по спектру), используя соотношение

$$\Delta X = \frac{X}{2m} = \frac{\lambda}{D_c} l \quad (9)$$

Длина волны He-Ne лазера  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ .

m	D, мкм	$\sigma_D$ , мкм	X, мм	$\sigma_X$ , мм	$D_c$ , мкм	$\sigma_{D_c}$ , мкм
1	10	10	142	1	11,76	0,08
2	10	10	286	1	11,68	0,04
1	60	10	28	1	60	2
2	60	10	54	1	61,9	1,1
1	100	10	17	1	98	6
2	100	10	33	1	101	3
1	200	10	8	1	209	26
2	200	10	17	1	197	12
3	200	10	25	1	200	8
1	300	10	6	1	278	46
2	300	10	11	1	304	28
1	400	10	4	1	418	104
2	400	10	9	1	371	41
1	580	10	3	1	557	186
2	580	10	6	1	557	93

Таблица 2: Зависимость размера изображения от ширины щели

Определим подобным образом ширину человеческого волоса.

m	X, мм
1	17
2	32,5

Таблица 3: Измерения спектра волоса

Получаем, что толщина человеческого волоса приблизительно равна:  $D_{\text{волоса}} = 100 \text{ мкм}$ .

Строим графики  $D_\lambda = f(D)$  и  $D_c = f(D)$  – рис. .



шётки дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. ): первая (Алиннофокусная) формирует первичное изображение – спектр, вторая (короткофокусная) – проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

## Ход работы

### Определение ширины щели

#### Определение ширины щели с помощью линзы

Схема установки изображена на рис.

Измеряем расстояния  $a_1$  и  $b_1$  для определения увеличения  $\Gamma$  системы:  $a_1 = 4.5$  см,  $b_1 = 126.6$  см. Находим те же  $a_1$  и  $b_1$  с помощью формулы тонкой линзы:  $a_1^{теор} \approx 3.9$  см,  $b_1^{теор} \approx 128.1$  см.

С помощью короткофокусной линзы  $\Lambda_1$  ( $F_1 = 3.8$  см) получаем на экране Э увеличенное изображение щели. Меняя ширину щели от 50 до 500 мкм (5 - 50 делений от нового нуля), снимаем зависимость размера изображения  $D_1$  от ширины щели  $D$ . Также, зная величине линзы и размер изображения, рассчитаем по формуле (8) ширину входной щели  $D_\lambda$ .

$D$ , мкм	$\sigma_D$ , мкм	$D_1$ , мкм	$\sigma_{D_1}$ , мкм	$D_\lambda$ , мкм	$\sigma_{D_\lambda}$ , мкм
50	10	1000	500	36	18
100	10	2500	500	89	18
150	10	4000	500	142	18
200	10	5500	500	195	18
250	10	6500	500	231	19
300	10	8000	500	284	19
350	10	9000	500	320	19
400	10	10000	500	355	19
450	10	11000	500	391	20
500	10	12000	500	427	20

Таблица 1: Зависимость размера изображения от ширины щели

#### Определение ширины щели по её спектру

Получаем на удалённом экране спектр щели, как на рис. . Измеряем ширину спектра для самой маленькой щели. Проводим се-

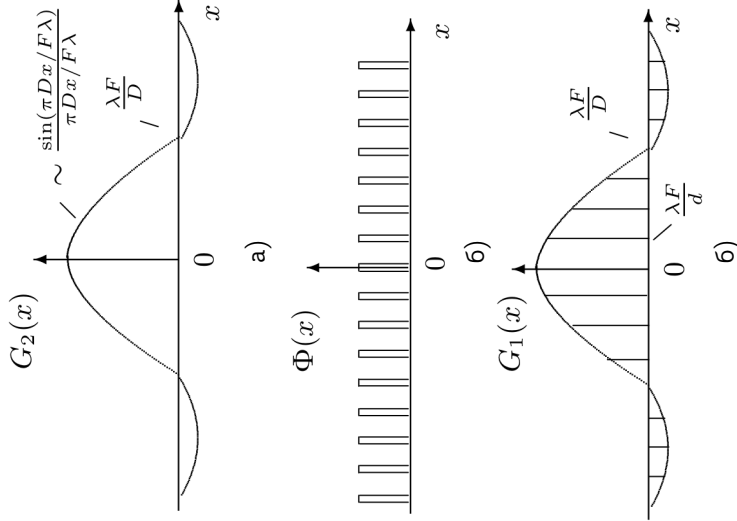


Рис. 4: а)  $G_2(x)$  – спектр функции пропускания щелевой диафрагмы;  $x$  – координаты в задней фокальной плоскости линзы; б)  $\Phi(x)$  – функция пропускания решетки, установленной в фурье-плоскости линзы; в)  $G_1(x)$  – отфильтрованный спектр щелевой диафрагмы (ср. с рис. )

ней фокальной плоскости  $\Phi$  линзы получается световое поле, соответствующее фурье-образу функции пропускания предмета (с точностью до фазы), а затем на промежутке между фокальной плоскостью  $\Phi$  и плоскостью изображений  $P_2$  осуществляется обратное преобразование Фурье, и в плоскости  $P_2$  восстанавливается таким образом изображение предмета.

### Мультипликация изображения предмета

Рассмотрим, что произойдёт с изображением предмета, если мы установим в задней фокальной плоскости линзы решётку. Сопоставим вначале спектры щелевой диафрагмы (рис. ) и периодической после-

довательности щелевых диафрагм (рис. ).

Легко видеть, что спектр, изображённый на рис. , можно по-лучить из спектра, изображённого на рис. , если исключить из него часть пространственных частот, поместив в фурье-плоскость решётку – последовательность прозрачных и непрозрачных линий (рис. ).

Отфильтрованный таким образом спектр не будет отличаться ни по амплитуде, ни по фазе от спектра периодической последова-тельности щелевых диафрагм, и в плоскости  $P_2$  мы получим вместо изображения одиночной щели изображение периодической последова-тельности щелей.

Эти рассуждения можно повторить и для предмета с произ-вольным спектром, необходимо только, чтобы период решётки был заметно меньше ширины спектра (точное соотношение можно полу-чить из теоремы Котельникова). Таким образом, установив в задней фокальной плоскости линзы решётку, мы вместо изображения оди-ночного предмета а получим эквидистантный набор изображений таких предметов, т. е. осуществим мультипликацию изображения предмета (увидим изображение несуществующей «фигитивной» решётки).

Поменяв местами сетку и щель, можно проследить влияние раз-мера щели на изображение сетки.

## Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. . Щель переменной ши-рины  $D$ , снабжённая микрометрическим винтом  $B$ , освещается парал-лельным пучком света, излучаемым лазером (радиус кривизны фрон-та волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используе-мых в схеме линз).

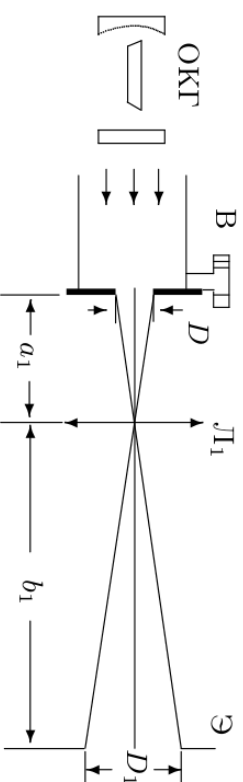


Рис. 5: Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Увеличенное изображение щели с помощью линзы  $L_1$  проеци-

руется на экран  $\mathcal{E}$ . Величина изображения  $D_1$  зависит от расстояний от линзы до предмета –  $a_1$  и до изображения –  $b_1$ , т. е. от увеличения  $\Gamma$  системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1} \quad (8)$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плос-кости  $\Phi$  линзы  $L_1$ . Размещая в плоскости  $\Phi$  двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультипли-цированное изображение щели.

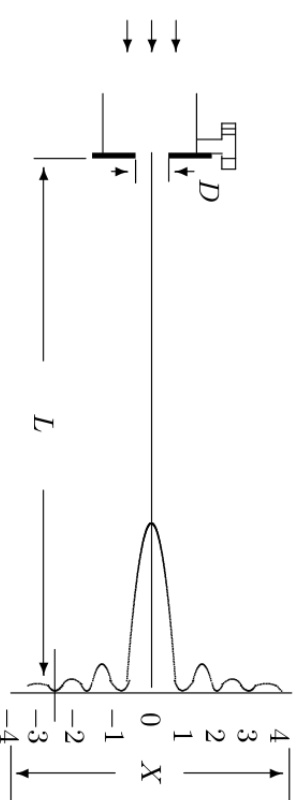


Рис. 6: Схема для определения ширины щели по спектру

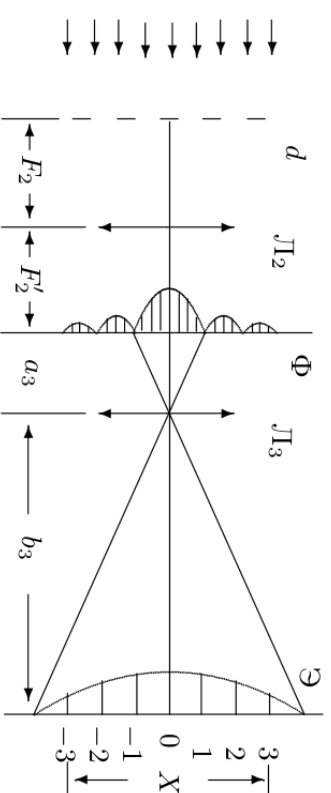


Рис. 7: Схема определения периода решётки по увеличенному изобра-жению спектра

Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. ), а если заменить щель решёткой – спектр решётки. Крупные ре-