e 是什么?

王强

November 29, 2016

南京大学生命科学学院

书上说的

e	自然对数的底
自然对数	以 e 为底的对数

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^h-1}{h}=1$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^h - 1}{h} = 1$$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

定义 e 为唯一的实数 x, 使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^h-1}{h}=1$$

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

定义 e 为唯一的正数 x, 使得

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=1$$

"美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置."

— 戈弗雷 · 哈罗德 · 哈代, 一个数学家的辩白

"美是第一位的, 在这个世界上丑陋的数学没有永久存在的位置."

— 戈弗雷 · 哈罗德 · 哈代, 一个数学家的辩白

"在二十世纪中叶, 人们试图将数学与物理分割开来. 其结果是灾难性的."

— 弗拉基米尔 · 阿诺尔德

真实的历史

利息

利息　　指负债方为借债向债权人所付的补偿性费用, interest.

计算利息的方法:

- 单利　　按照固定的本金计算的利息, simple interest.
- 复利　　利息除了会根据本金计算外, 新得到的利息同样可以生息. compound interest.

利息的计算公式

F	财富在未来的价值, Future value.
P	现值，即本金, Present value.
r	周期内的利息率, interest rate.
n	累计的周期数.

单利

$$F = P + P \cdot r \cdot n$$

复利

$$F = P \cdot (1 + r)^n$$

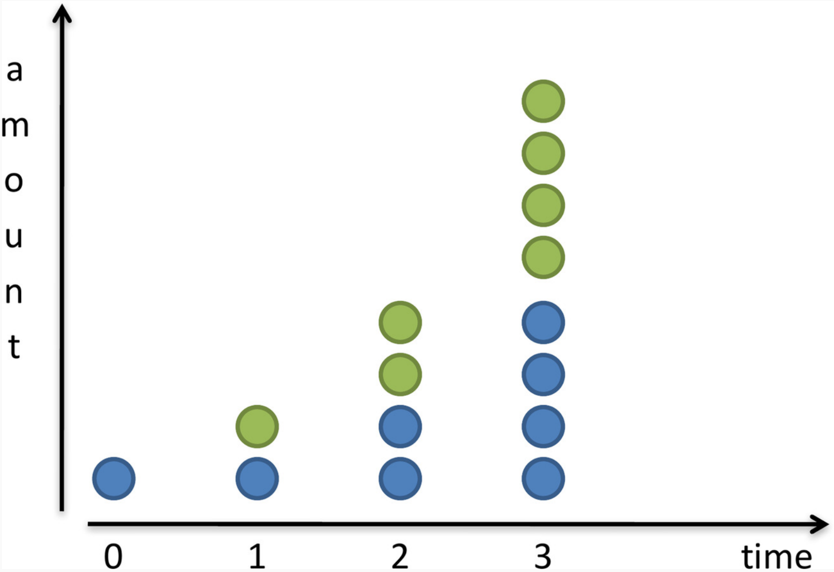
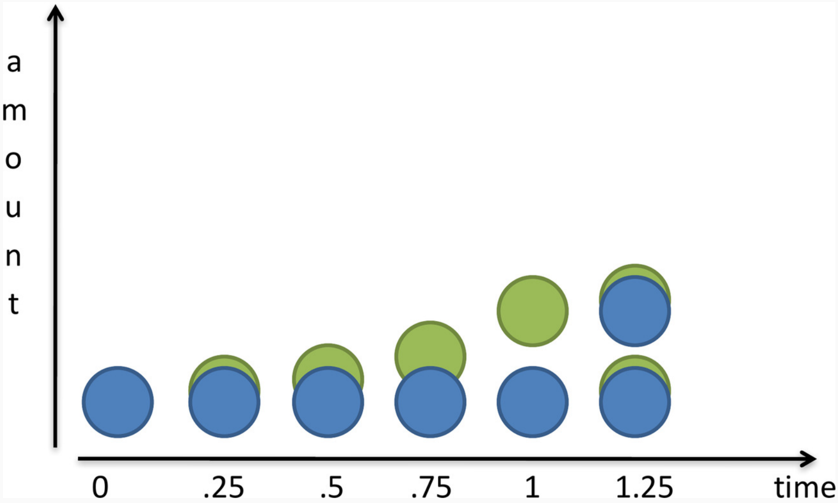
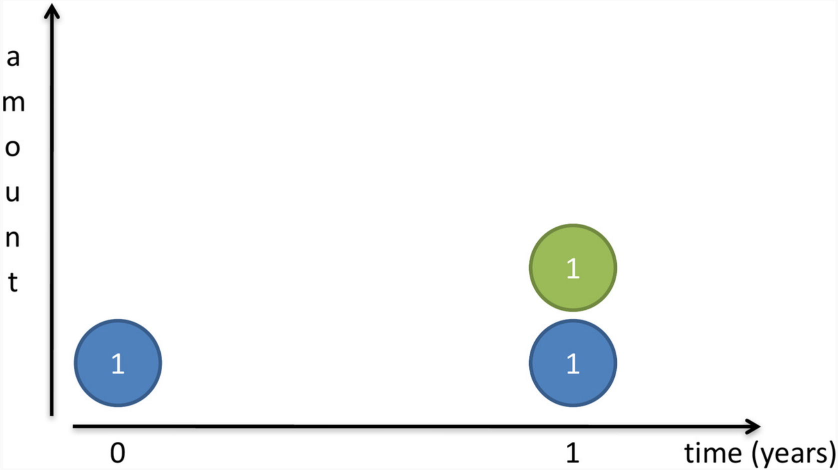
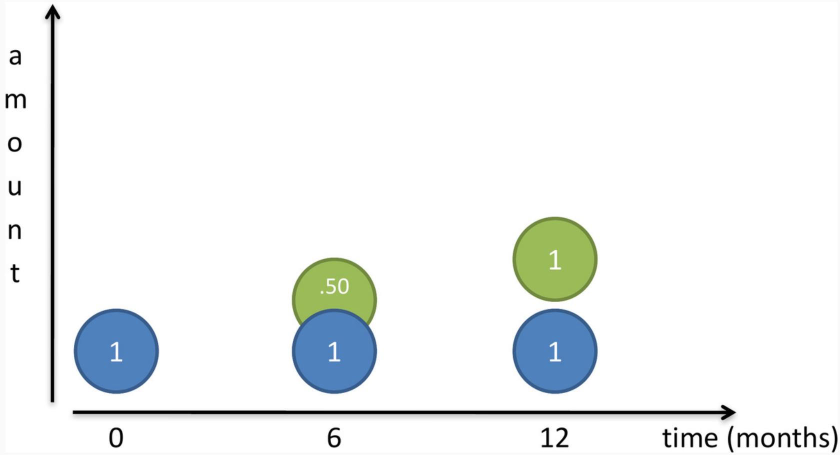
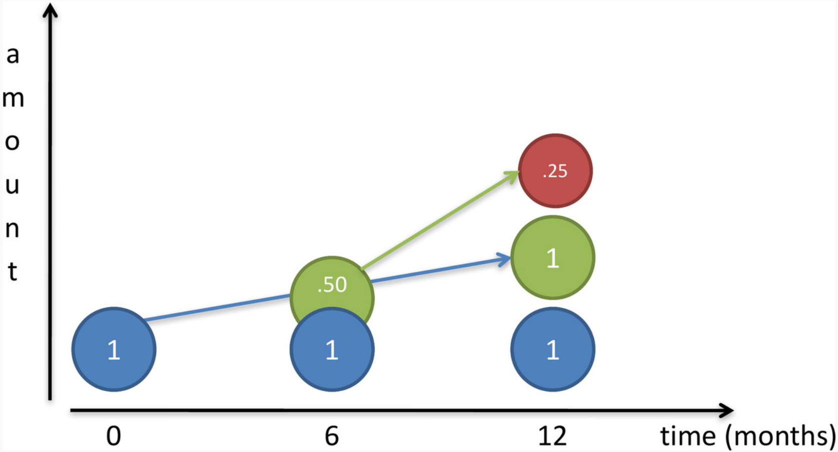


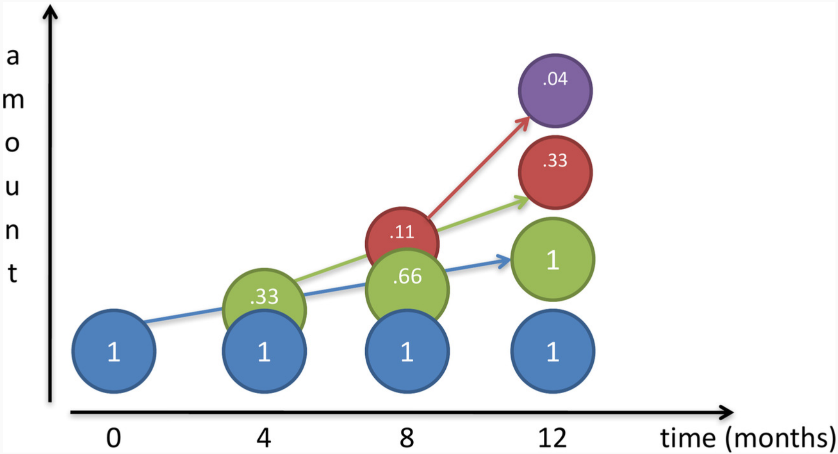
Figure 1. 简化条件: 令 $P = 1, r = 1$, 则 $F = (1 + 1)^n$


a
m
o
u
n
t
0
.25
.5
.75
1
1.25
time


a
m
o
u
n
t
1
1
1
0
1
time (years)


a
m
o
u
n
t
.50
1
1
1
1
1
0
6
12
time (months)


a
m
o
u
n
t
.25
1
.50
1
1
1
0
6
12
time (months)



a
m
o
u
n
t
.04
.33
.11
1
.66
.33
1
1
1
1
0
4
8
12
time (months)

m 一个周期内, 计复利的次数.

前面的简化公式

$$F = (1+1)^1$$

利率 $r = 1/m$, 累计的周期数 $n = m$, 上式变成了

$$F = (1+\frac{1}{m})^m$$

m	$(a+b)^m$	$(1+1/m)^m$	F
1	$a+b$	1 + 1	2
2	$a^2+2ab+b^2$	$1^2+2\cdot 1\cdot 1/2+(1/2)^2=1+1+0.25$	2.25
3	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$1^3+3\cdot 1^2\cdot 1/3+3\cdot 1\cdot (1/3)^2+(1/3)^3\approx 1+1+0.33+0.04$	2.37

m	$F = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

m	$F = (1 + 1/m)^m$
1	2
2	2.25
3	2.37
12	2.613
365	2.714567
$365 \cdot 24 \cdot 60$	2.718279

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bonus slides

1626 年, 荷兰人以 60 荷兰盾 (NLG) 从当地印地安酋长那里买下整个曼哈顿岛.

印地安酋长将钱存放到荷兰银行, 收取每年 6.5% 的复利利率, 并承受通货膨胀带来的贬值.

$$
\begin{aligned}
F &= 60 \text{ NLG} \times (1 + 6.5 \div 100)^{2016-1626} \\
&= 60 \text{ NLG} \times 1.065^{390} \\
&\approx 2782904368555 \text{ NLG} \\
&= 2782904368555 \div 2.20371 \times 1.0595 \text{ USD} \\
&\approx 1.338 \text{ Trillion USD}
\end{aligned}
$$

"Compound interest is the most powerful force in the universe."

— Albert Einstein

另一条路径

$$
\begin{aligned}
f(x) &= R^x \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{R^{x+h} - R^x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(R^x \cdot \frac{R^h - 1}{h} \right) \\
&= R^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h} \\
\frac{d}{dx} R^x &= R^x
\end{aligned}
$$

数学家们应用 l’Hôpital’s rule, 可以求出

$$\lim_{h \to 0} \frac{R^h - 1}{h} = \ln(R)$$

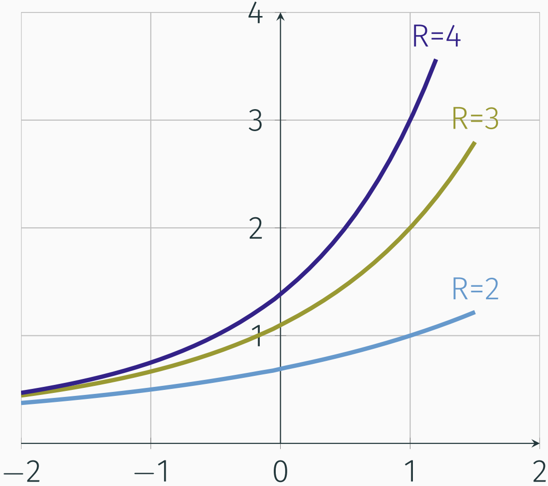


Figure 2. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2 \to 4$

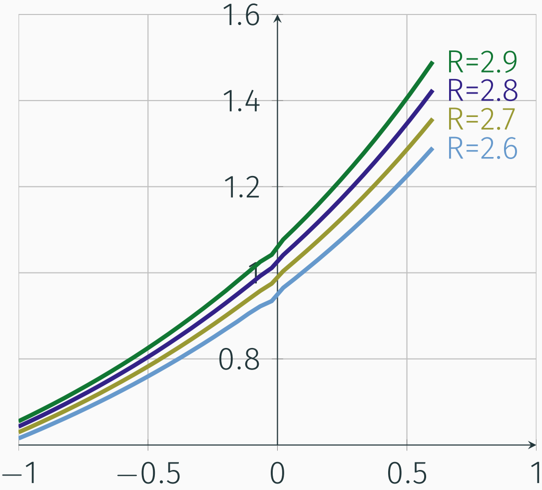


Figure 3. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h-1}{h}$, $R = 2.6 \to 2.9$

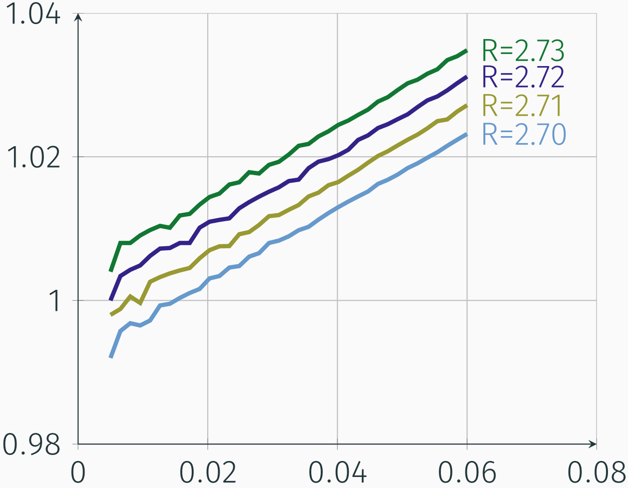


Figure 4. $\lim_{h\to 0} \frac{R^h - 1}{h}$, $R = 2.70 \to 2.73$