1. 介面說明

　　這次專題所使用的開發環境是用 Matlab 來完成（Matlab 軟體是由學校網站所提供下載，版本為 Matlab R2021b）。本專題主要是要學習 forward kinematic 和 inverse kinematic 的公式推導並將其實作出來。簡單介紹 forward kinematic 和 inverse kinematic，forward kinematic 就是給定各軸的角度，然後計算出轉換矩陣[n o a p]，此矩陣包括旋轉矩陣及位置向量；inverse kinematic 則是給定轉換矩陣[n o a p]回推各軸的角度，通常為多組解。關於 forward kinematic 和 inverse kinematic 的相關推導會在「數學運算說明」部分詳細說明。

　　程式執行只要點選 project_1.m 執行即可。在 forward kinematic 部分是需要輸入各軸角度 theta（以矩陣的形式輸入），然後藉由計算各軸的轉換矩陣再將其相乘就可以得出最後的轉換矩陣，其包含旋轉矩陣及位置向量（如圖一所示）。

```
Enter the joint variable :
[theta1    theta2    theta3    theta4    theta5    theta6]
[90, 99, -119, -10, 10, 0]


[         n         a         o         p]
T =

    0.1736   -0.0000   -0.9848    0.0000
    0.8529    0.5000    0.1504    0.3252
    0.4924   -0.8660    0.0868   -0.1580
         0         0         0    1.0000

[         x         y         z         phi           theta         psi]
ans =

    0.0000    0.3252   -0.1580    1.0000  171.3178    85.0191 -119.6217
```

（圖一）輸入各軸角度，輸出[n o a p]矩陣及 Euler angles

　　在 inverse kinematic 部分，是需要輸入[n o a p]矩陣（以矩陣的形式輸入），將其反推各軸的角度。經由相關公式的計算得出各軸角度後，會在輸出之前判斷角度是否有超出範圍，有超出範圍者，輸出有註記所超出的各軸代號；如果是超出機器手臂的工作範圍，輸出不會顯示其各軸角度，則顯示「out of reach」（如圖二所示）。

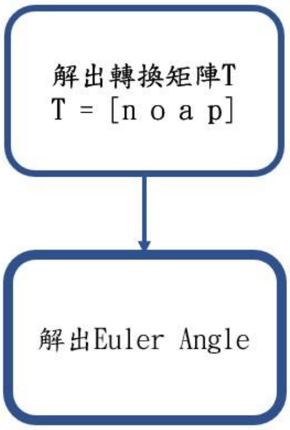
```
Enter the Cartestian point [n o a p]
[nx   ox   ax   px
 ny   oy   ay   px
 nz   oz   az   pz
  0    0    0   1]
[-0.7071 -0 -0.7071 0; 0.5 0.7071 -0.5 0.37; 0.5 -0.7071 -0.5 0.26; 0 0 0 1]


Inverse Kinematic :

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]

ans =

   90.0000   -0.0000   90.0000   45.0000   45.0005  180.0000

    joint  3  out of range

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]

ans =

   90.0000   92.2466  -90.0000  132.7534   45.0005  180.0000

    joint  4  out of range

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]

ans =

   90.0000   -0.0000   90.0000 -135.0000  -45.0005   -0.0000

    joint  3 4  out of range

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]

ans =

   90.0000   92.2466  -90.0000  -47.2466  -45.0005   -0.0000


[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]
    out of reach

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]
    out of reach

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]
    out of reach

[theta1  theta2  theta3  theta4  theta5  theta6]
    out of reach
```

（圖二）輸入[n o a p]矩陣，輸出各軸角度及判斷結果

2. 程式架構說明

圖三及圖四是此次專題的主要程式架構、流程。

Forward kinematic

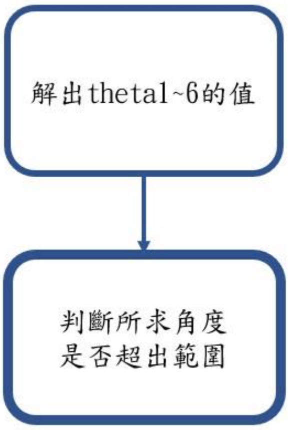


1. 輸入各軸的對應角度。
2. 每一軸的角度可以計算一轉換矩陣，再將其全部相乘。
3. 最後得到轉換矩陣T，包含旋轉矩陣及位置向量。

1. 將上一個步驟的結果T = [n o a p]輸入。
2. 根據推導公式計算出所對應的phi、theta、psi。
3. 將其位置向量及所求出的角度輸出。

（圖三）Forward kinematic 部分的程式架構

Inverse kinematic



1. 輸入轉換矩陣T = [n o a p]。
2. 根據所推導出來的公式計算出各軸的角度theta。

1. 將上一個步驟的結果theta輸入。
2. 判斷是否超出各軸指定的範圍或機器手臂的工作區域。
3. 將其各軸角度及判斷結果輸出。

（圖四）Inverse kinematic 部分的程式架構

圖五及圖六是 forward kinematic 的主要程式。輸入 theta 後先計算出各軸所對應的轉換矩陣（如圖六所示），再將其全部相乘，即可得出最後的 T = [n o a p]矩陣（如圖五所示）。

將利用 forward kinematic 所計算出來的 T = [n o a p]輸入 euler_angle 的函式中，根據推導的公式計算出其對應的角度（如圖七所示）。

```
function T = kinematics_forward(theta)

    %已知角度求位置
    a = [0.12, 0.25, 0.26, 0, 0, 0];
    d = [0, 0, 0, 0, 0, 0];
    alpha=[-90, 0, 0, -90, 90, 0];

    T = T_individual(theta(1), d(1), a(1), alpha(1));
    for i = 2:6
        T = T * T_individual(theta(i), d(i), a(i), alpha(i));
    end

end
```

（圖五）Forward kinematic 的主要程式

```
function T_result = T_individual(theta, d, a, alpha)
    %單一個的轉換矩陣
    T_result = [cos_r(theta), -sin_r(theta)*cos_r(alpha), sin_r(theta)*sin_r(alpha), a*cos_r(theta);
        sin_r(theta), cos_r(theta)*cos_r(alpha), -cos_r(theta)*sin_r(alpha), a*sin_r(theta);
        0, sin_r(alpha), cos_r(alpha), d;
        0, 0, 0, 1];

end
```

（圖六）計算各軸轉換矩陣

```
function euler_angles = euler_angle(T)
    r33 = T(3, 3);
    r13 = T(1, 3);
    r23 = T(2, 3);
    r31 = T(3, 1);
    r32 = T(3, 2);


    euler_angles = zeros(3, 1);
    euler_angles(2) = atan2((1-r33^2)^0.5, r33);  %theta
    euler_angles(1) = atan2(r23, r13);  %phi
    euler_angles(3) = atan2(r32, -r31);  %psi

    euler_angles = euler_angles .* (180/pi);  %徑度換角度

end
```

（圖七）反求 Euler angle

在 inverse kinematic 部分，根據幾何法算出 theta1、2、3，再利用三角函數方法推導出 theta4、5、6。在推導過程可知 theta1 有兩組解，theta1 的兩組解相差 180 度（如圖八所示）。因機器手臂可以向上彎曲及向下彎曲，所以 theta2、3 彼此是有相關聯，因此為一組，此有兩組解（如圖九所示）。最後 theta4、5、6 為一組，在推倒過程中因 sin(theta5)有正負之分，因此會出現兩組可能解，其影響到 theta4、6（如圖十所示）。因此最後機器手臂推算出來的角度總共有八組解。

計算出來的八組解最終還需判斷是否有超出各軸角度指定的範圍或機器手臂的工作區域，最後才將所求角度及判斷結果輸出。

```
%find theta1
theta(1) = atan2(Y_c, X_c);
```

```
%find theta1
theta(1) = atan2(-Y_c, -X_c);
```

（圖八）theta1 會有兩組解

```
%find theta3
t = (X_c^2 + Y_c^2)^0.5;
r = t - a(1);
s = abs(Z_c);
D = (s^2 + r^2 - a(2)^2 - a(3)^2) / (2*a(2)*a(3));
theta(3) = atan2((1-D^2)^0.5, D);

%find theta3
t = (X_c^2 + Y_c^2)^0.5;
r = t + a(1);   %因為"theta(1)"轉180度
s = abs(Z_c);
D = (s^2 + r^2 - a(2)^2 - a(3)^2) / (2*a(2)*a(3));
if(1-D^2 < 0)   %表示已經錯誤，超過工作範圍
    theta = 2*pi*ones(6, 1);
    return
end
theta(3) = atan2((1-D^2)^0.5, D);
```

（圖九）theta3 會有兩組解，此會影響到 theta2 的解

```
%find theta5
r13 = T(1, 3);
r23 = T(2, 3);
S1 = sin(theta(1));
C1 = cos(theta(1));
d = -r13*S1 + r23*C1;
theta(5) = atan2((1-d^2)^0.5, d);

%find theta4
C23 = cos(theta(2)+theta(3));
S23 = sin(theta(2)+theta(3));
r33 = T(3, 3);
temp_1 = C1*C23*r13 + S1*C23*r23 - S23*r33;  %S5C4
temp_2 = -C1*S23*r13 - S1*S23*r23 - C23*r33;  %S4S5
theta(4) = atan2(temp_2, temp_1);

%find theta6
r11 = T(1, 1);
r21 = T(2, 1);
r12 = T(1, 2);
r22 = T(2, 2);
%temp_1 = -S1*r11 + C1*r21;  %-S5C6
temp_1 = S1*r11 - C1*r21;  %S5C6
temp_2 = -S1*r12 + C1*r22;  %S5S6
theta(6) = atan2(temp_2, temp_1);
```

```
%find theta5
r13 = T(1, 3);
r23 = T(2, 3);
S1 = sin(theta(1));
C1 = cos(theta(1));
d = -r13*S1 + r23*C1;
theta(5) = atan2(-(1-d^2)^0.5, d);

%find theta4
C23 = cos(theta(2)+theta(3));
S23 = sin(theta(2)+theta(3));
r33 = T(3, 3);
temp_1 = C1*C23*r13 + S1*C23*r23 - S23*r33;  %S5C4
temp_2 = -C1*S23*r13 - S1*S23*r23 - C23*r33;  %S4S5
theta(4) = atan2(-temp_2, -temp_1);

%find theta6
r11 = T(1, 1);
r21 = T(2, 1);
r12 = T(1, 2);
r22 = T(2, 2);
%temp_1 = -S1*r11 + C1*r21;  %-S5C6
temp_1 = S1*r11 - C1*r21;  %S5C6
temp_2 = -S1*r12 + C1*r22;  %S5S6
theta(6) = atan2(-temp_2, -temp_1);
```

（圖十）theta5 有兩組解，此會影響到 theta4、6 的解

```
function theta = kinematics_inverse_1(T)
    a = [0.12, 0.25, 0.26, 0, 0, 0];
    theta = zeros(6, 1);

    X_c = T(1, 4);
    Y_c = T(2, 4);
    Z_c = T(3, 4);

    %find theta1
    theta(1) = atan2(Y_c, X_c);

    %find theta3
    t = (X_c^2 + Y_c^2)^0.5;
    r = t - a(1);
    s = abs(Z_c);
    D = (s^2 + r^2 - a(2)^2 - a(3)^2) / (2*a(2)*a(3));
    theta(3) = atan2((1-D^2)^0.5, D);


    %find theta2
    temp_1 = atan2(s, r);  %Alpha
    temp_2 = atan2(a(3)*sin(theta(3)), a(2) + a(3)*cos(theta(3)));  %Beta
    theta(2) = temp_1 - temp_2;


    %find theta5
    r13 = T(1, 3);
    r23 = T(2, 3);
    S1 = sin(theta(1));
    C1 = cos(theta(1));
    d = -r13*S1 + r23*C1;
    theta(5) = atan2((1-d^2)^0.5, d);



    %find theta4
    C23 = cos(theta(2)+theta(3));
    S23 = sin(theta(2)+theta(3));
    r33 = T(3, 3);
    temp_1 = C1*C23*r13 + S1*C23*r23 - S23*r33;  %S5C4
    temp_2 = -C1*S23*r13 - S1*S23*r23 - C23*r33;  %S4S5
    theta(4) = atan2(temp_2, temp_1);

    %find theta6
    r11 = T(1, 1);
    r21 = T(2, 1);
    r12 = T(1, 2);
    r22 = T(2, 2);
    %temp_1 = -S1*r11 + C1*r21;  %-S5C6
    temp_1 = S1*r11 - C1*r21;  %S5C6
    temp_2 = -S1*r12 + C1*r22;  %S5S6
    theta(6) = atan2(temp_2, temp_1);


end
```

（圖十一）Inverse kinematic 的主要程式

3. 數學運算說明

在 forward kinematic 中，我們套用其轉換矩陣公式求出各軸的轉換矩陣 A（如圖十二所示），再將其各軸的 A 相乘後就可以得出最後的轉換矩陣。最後的轉換矩陣可以用 Euler angle 的方式來看，因此我們就可以推得其 phi、theta、psi 的角度（如圖十一所示）。

$$A_i=\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\cos(0^\circ)=1$

$\sin(0^\circ)=0$

$\cos(90^\circ)=0$

$\sin(90^\circ)=1$

$$A_1=\begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0.12c \\ s & 0 & c & 0.12s \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0.25c \\ s & c & 0 & 0.25s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_5=\begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ s & 0 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0.26c \\ s & c & 0 & 0.26s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_6=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（圖十二）各軸計算出的轉換矩陣 A

$$R_{zyz}=R_{z,\phi}R_{y,\theta}R_{z,\psi}$$

$$=\begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 \\ s\phi & c\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix}$$

if r_{13}, r_{33} 不全為 0

$\Rightarrow s\theta \neq 0 \Rightarrow r_{33}=c\theta \neq \pm 1$

$\because c^2\theta + s^2\theta = 1 \Rightarrow s\theta = \pm\sqrt{1+r_{33}^2}$

$\theta = \mathrm{atan2}(c\theta, s\theta)$

if $s\theta=\sqrt{1+r_{33}^2}$, $\theta=\mathrm{atan2}(r_{33}, \sqrt{1-r_{33}^2})$

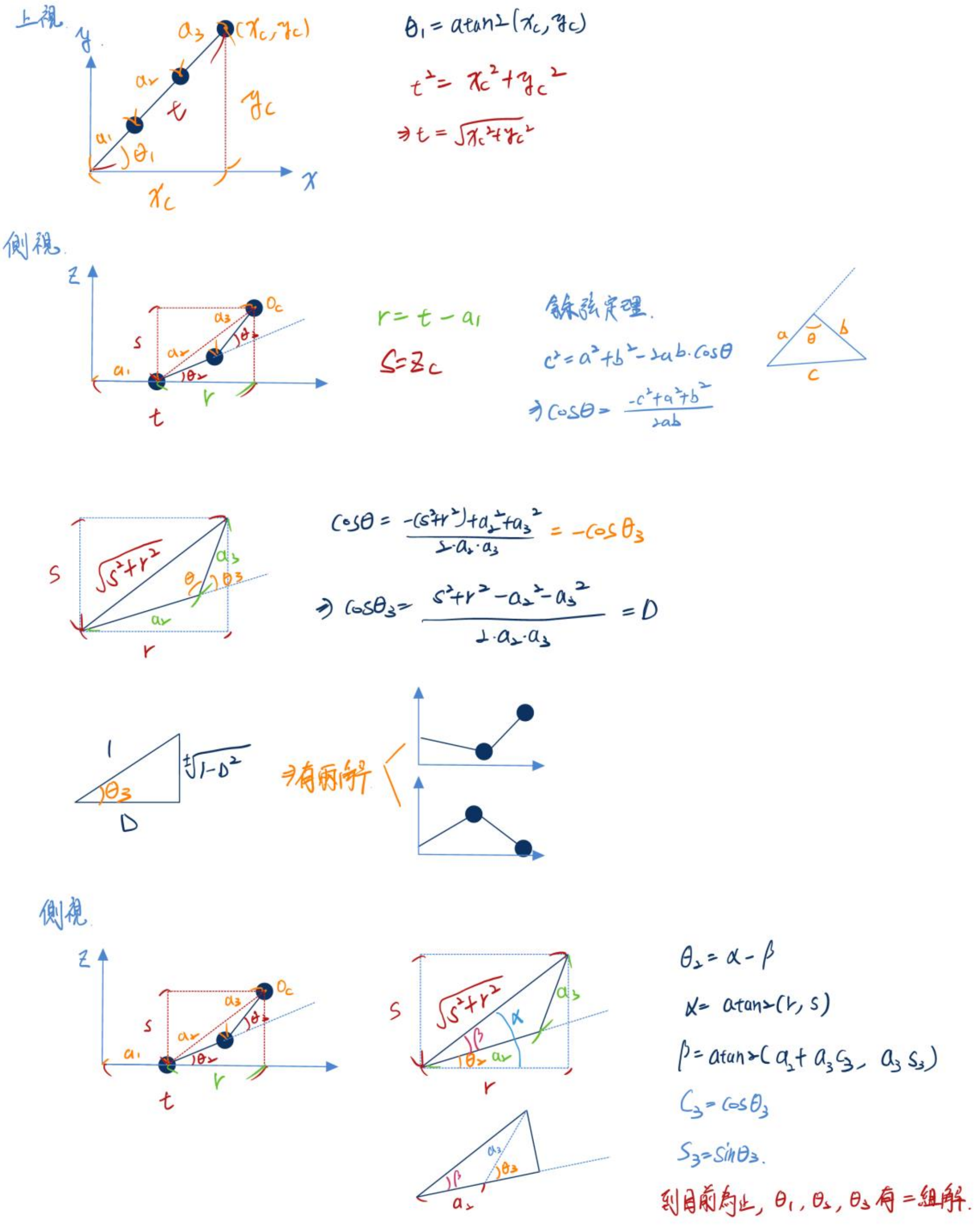
$$\Rightarrow \begin{cases} \phi=\mathrm{atan2}(r_{13}, r_{23}), \ r_{13}=c\phi s\theta, \ r_{23}=s\phi s\theta \\ \psi=\mathrm{atan2}(-r_{31}, r_{32}), \ r_{31}=-s\theta c\psi, \ r_{32}=s\theta s\psi \end{cases}$$

if $s\theta=-\sqrt{1+r_{33}^2}$, $\theta=\mathrm{atan2}(r_{33}, -\sqrt{1-r_{33}^2})$

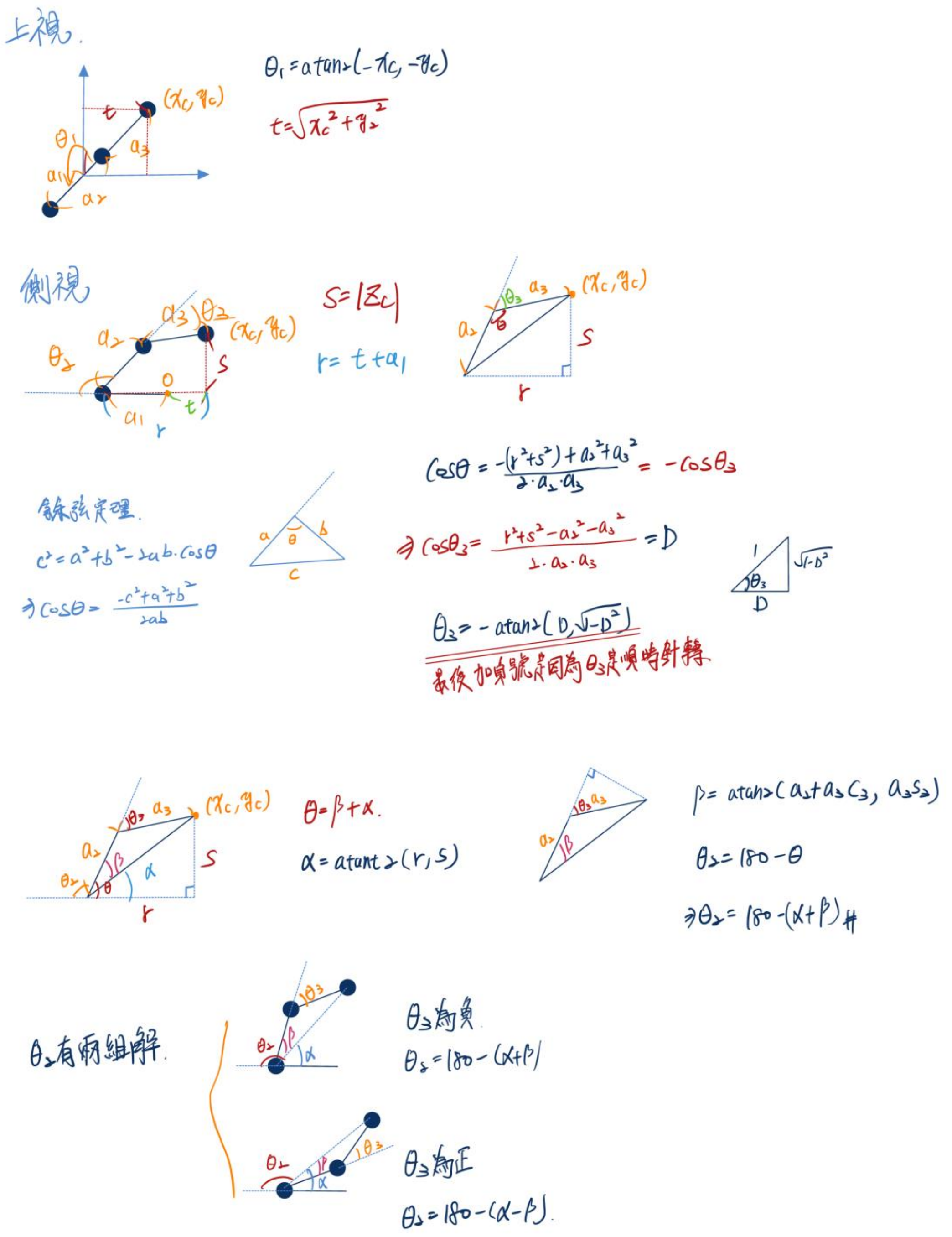
$$\Rightarrow \begin{cases} \phi=\mathrm{atan2}(-r_{13}, -r_{23}), \ r_{13}=c\phi s\theta, \ r_{23}=s\phi s\theta \\ \psi=\mathrm{atan2}(r_{31}, -r_{32}), \ r_{31}=-s\theta c\psi, \ r_{32}=s\theta s\psi \end{cases}$$

（圖十三）Euler angle 的推導

在 inverse kinematic 中，前三軸的角度利用幾何法顯示、推導。由圖可以看出 theta1 是有兩組解，兩解相差 180 度，其 theta1 也會影響到 theta2、3 是如何轉動。如果單獨看 theta2、3 可以知道會有兩種形式，其一情況是手臂向上彎曲，而另一種情況是手臂向下彎曲，由此可以推得兩種組合的解（theta1、2、3 的詳細推導過程如圖十四、圖十五所示）。



（圖十四）theta1 的第一種情況所推算出 theta1、2、3 的過程



（圖十五）theta1 的第二種情況所推算出 theta1、2、3 的過程

接下來 theta4、5、6 是用三角函數的方式所推算，可以發現在計算 theta4、5、6 時，此矩陣就像是用 Euler angle 來表示，其推導也與前面 Euler angle 的過程類似。先算出 theta5 的值，這裡需利用前面所推導出來的 theta1 角度，在此要注意 sin(theta5)有可能是正數也可能是負數，因此在往後推算 theta4、6 時，要相對應的調整正負號。在計算 theta4、6 時需要使用到前面推算出來的 theta1、2、3 的角度，其詳細計算、推導過程如圖十六所示。

$$A_1=\begin{bmatrix} c & 0 & s & 0.12c \\ s & 0 & c & 0.12s \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0.25c \\ s & c & 0 & 0.25s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad A_3=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0.26c \\ s & c & 0 & 0.26s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1=\begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ s & 0 & c \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\quad R_2=\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad R_3=\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1\cdot R_2\cdot R_3=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & -s_1 \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} c & 0 & -s & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad A_5=\begin{bmatrix} c & 0 & s & 0 \\ s & 0 & -c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad A_6=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4=\begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ s & 0 & c \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\quad R_5=\begin{bmatrix} c & 0 & s \\ s & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\quad R_6=\begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4\cdot R_5\cdot R_6=\begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 \\ s_4 & 0 & c_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ s_5 & 0 & -c_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -s_6c_4c_5-s_4c_6 & s_5c_4 \\ s_4s_5s_6+s_6c_4 & -s_4s_6c_5+c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

$$R=R_1R_2R_3R_4R_5R_6\ ,\ \text{Let } R_0^3=R_1R_2R_3\ ,\ R_3^6=R_4R_5R_6$$

$$\Rightarrow R=R_0^3R_3^6\ \Rightarrow (R_0^3)^{-1}R=R_3^6\ ,\ \because (R_0^3)^{-1}=(R_0^3)^T\ \Rightarrow (R_0^3)^TR=R_3^6$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} \\ -s_1 & c_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -s_6c_4c_5-s_4c_6 & s_5c_4 \\ s_4s_5s_6+s_6c_4 & -s_4s_6c_5+c_4c_6 & s_4s_5 \\ -s_5c_6 & s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix}$$

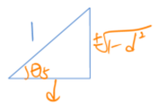
$$\Rightarrow\begin{cases} s_5c_4=r_{13}c_1c_{23}+r_{23}s_1c_{23}-r_{33}s_{23} \\ s_4s_5=-r_{13}c_1s_{23}-r_{23}s_1s_{23}-r_{33}c_{23} \\ c_5=-r_{13}s_1+r_{23}c_1=d \\ -s_5c_6=-r_{11}s_1+r_{21}c_1 \quad \Rightarrow s_5c_6=r_{11}s_1-r_{21}c_1 \\ s_5s_6=-r_{12}s_1+r_{22}c_1 \end{cases}$$

$s_5>0$

$\theta_5=\operatorname{atan2}(d,\sqrt{1-d^2})$

$\theta_4=\operatorname{atan2}(s_5c_4,\ s_4s_5)$

$\theta_6=\operatorname{atan2}(s_5c_6,\ s_5s_6)$



$s_5<0$

$\theta_5=\operatorname{atan2}(d,-\sqrt{1-d^2})$

$\theta_4=\operatorname{atan2}(-s_5c_4,\ -s_4s_5)$

$\theta_6=\operatorname{atan2}(-s_5c_6,\ -s_5s_6)$

（圖十六）theta4、5、6 的推導過程

θ_1 第一種情況

$\theta_1 = \mathrm{atan2}(x_c, y_c)$

$\boxed{\begin{aligned}\theta_3 &= \mathrm{atan2}(D, \pm\sqrt{1-D^2})\\ \theta_2 &= \alpha-\beta\end{aligned}}$

有兩組解.

$$D = \frac{s^2+r^2-a_2^2-a_3^2}{2\cdot a_2\cdot a_3}$$

$s = |z_c|$

$r = t-a_1$

$\alpha = \mathrm{atan2}(r, s)$

$\beta = \mathrm{atan2}(a_2+a_3c_3,\ a_3s_3)$

θ_1 第二種情況

$\theta_1 = \mathrm{atan2}(-x_c, -y_c)$

$\boxed{\begin{aligned}\theta_3 &= \mathrm{atan2}(D, \pm\sqrt{1-D^2})\\ \theta_2 &= 180-(\alpha+\beta)\end{aligned}}$

有兩組解.

$$D = \frac{s^2+r^2-a_2^2-a_3^2}{2\cdot a_2\cdot a_3}$$

$s = |z_c|$

$r = t+a_1$

$\alpha = \mathrm{atan2}(r, s)$

$\beta = \mathrm{atan2}(a_2+a_3c_3,\ a_3s_3)$

$s_5>0$	$s_5>0$
$\theta_5 = \mathrm{atan2}(d, \sqrt{1-d^2})$	$\theta_5 = \mathrm{atan2}(d, -\sqrt{1-d^2})$
$\theta_4 = \mathrm{atan2}(s_5c_4, s_4s_5)$	$\theta_4 = \mathrm{atan2}(-s_5c_4, -s_4s_5)$
$\theta_6 = \mathrm{atan2}(s_5c_6, s_5s_6)$	$\theta_6 = \mathrm{atan2}(-s_5c_6, -s_5s_6)$

有兩組解.

（圖十七）theta1、2、3、4、5、6 整理

4. 加分題 ： 討論兩種逆向運動學(代數法，幾何法)的優缺點

代數法 ：

代數法是直接透過轉換矩陣 T0 到 Tn 中的項進行組合，定義出其中的變量（關節參數的組合)，可以列出聯立方程式將其求解，求出各軸所對應的角度。缺點是多軸計算繁複且複雜，容易計算錯誤，且有時需考慮到多解的情況，較難求出解。

幾何法 ：

將機器手臂利用空間幾何顯示出來，將其各軸的角度問題轉化為平面幾何問題，再將其求解。當求其平面幾何問題時可以通過正餘弦定理公式及三角函數特性求解。利用幾何法求解會比較直觀，機器手臂直接顯示在圖中，所求的角度也明白如何在實際上運作。雖然幾何法能較簡單的解出變數，但需要相當的空間想像能力，在平面畫出空間中構建出路徑，來規劃出每一軸的變化。