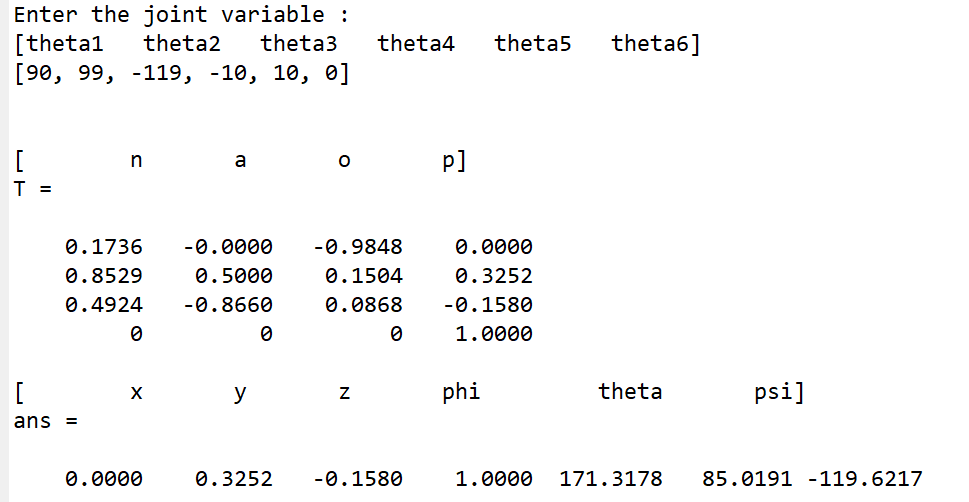
1. 介面說明

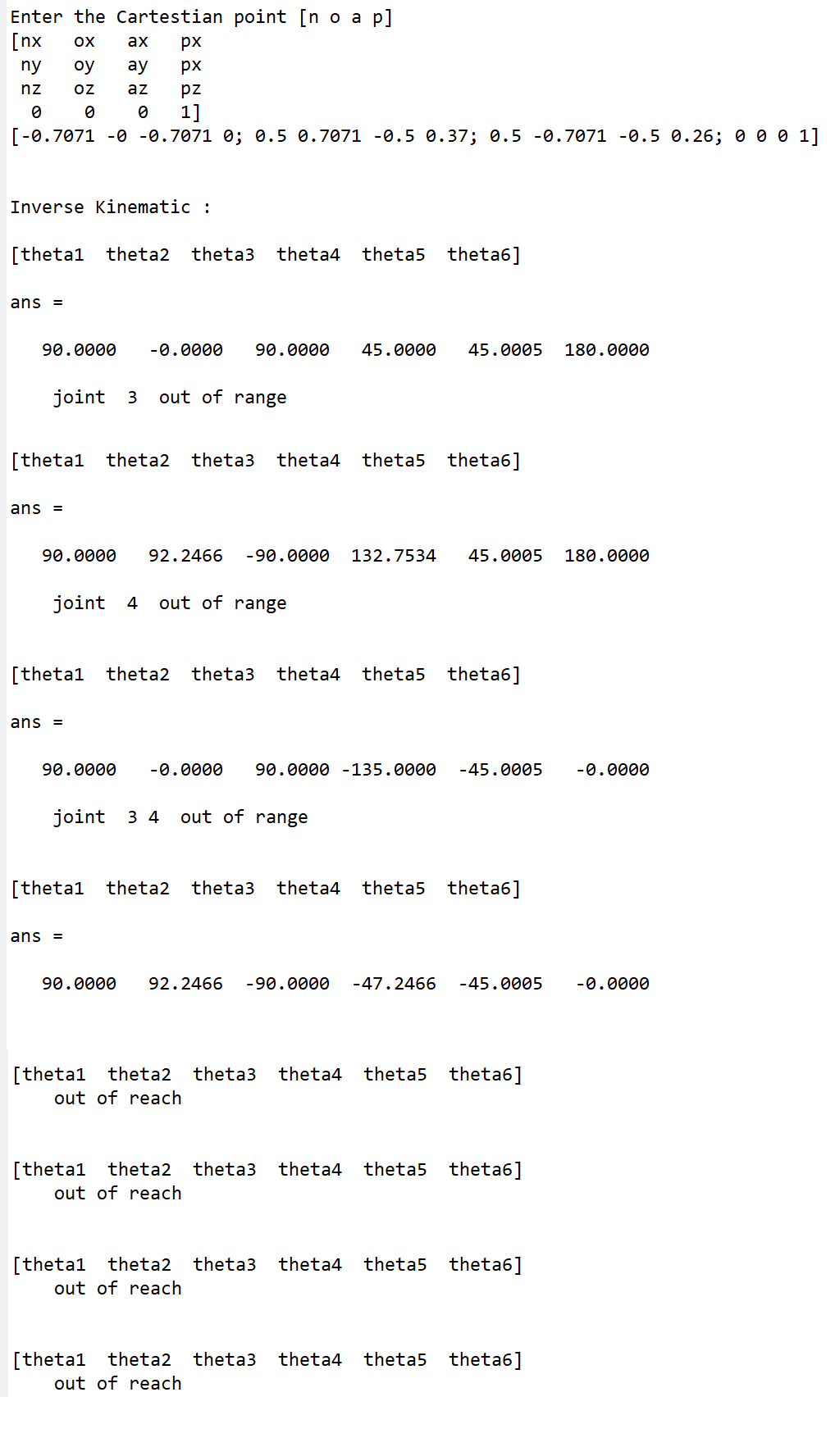
這次專題所使用的開發環境是用Matlab來完成（Matlab軟體是由學校網站所提供下載，版本為Matlab R2021b）。本專題主要是要學習forward kinematic和inverse kinematic的公式推導並將其實作出來。簡單介紹forward kinematic和inverse kinematic，forward kinematic就是給定各軸的角度，然後計算出轉換矩陣[n o a p]，此矩陣包括旋轉矩陣及位置向量；inverse kinematic則是給定轉換矩陣[n o a p]回推各軸的角度，通常為多組解。關於forward kinematic和inverse kinematic的相關推導會在「數學運算說明」部分詳細說明。

程式執行只要點選project\_1.m執行即可。在forward kinematic部分是需要輸入各軸角度theta（以矩陣的形式輸入），然後藉由計算各軸的轉換矩陣再將其相乘就可以得出最後的轉換矩陣，其包含旋轉矩陣及位置向量（如圖一所示）。



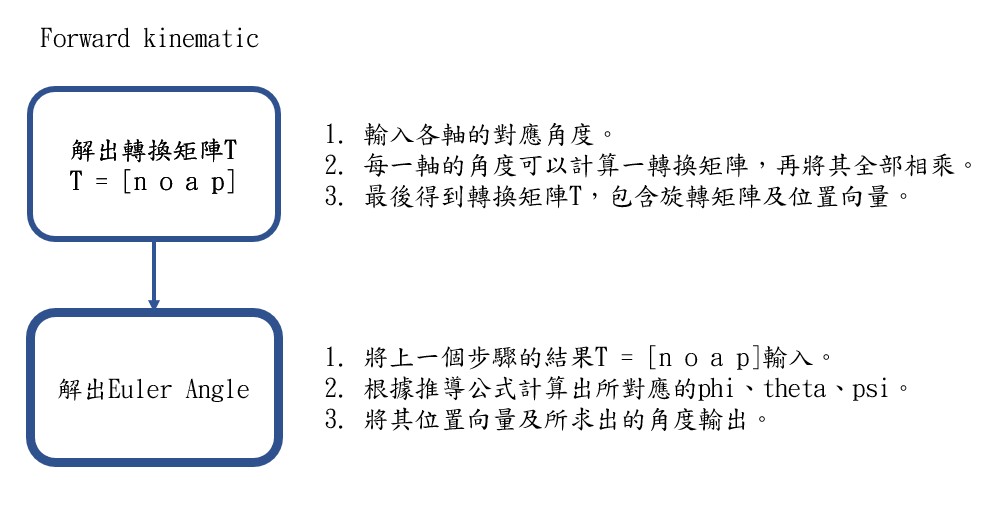
（圖一）輸入各軸角度，輸出[n o a p]矩陣及Euler angles

在inverse kinematic部分，是需要輸入[n o a p]矩陣（以矩陣的形式輸入），將其反推各軸的角度。經由相關公式的計算得出各軸角度後，會在輸出之前判斷角度是否有超出範圍，有超出範圍者，輸出有註記所超出的各軸代號；如果是超出機器手臂的工作範圍，輸出不會顯示其各軸角度，則顯示「out of reach」（如圖二所示）。

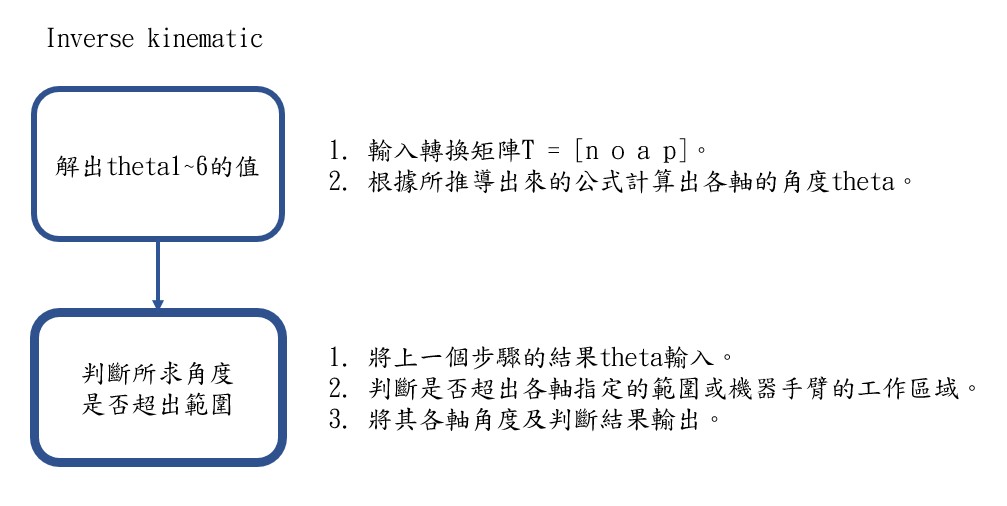
（圖二）輸入[n o a p]矩陣，輸出各軸角度及判斷結果

1. 程式架構說明

圖三及圖四是此次專題的主要程式架構、流程。



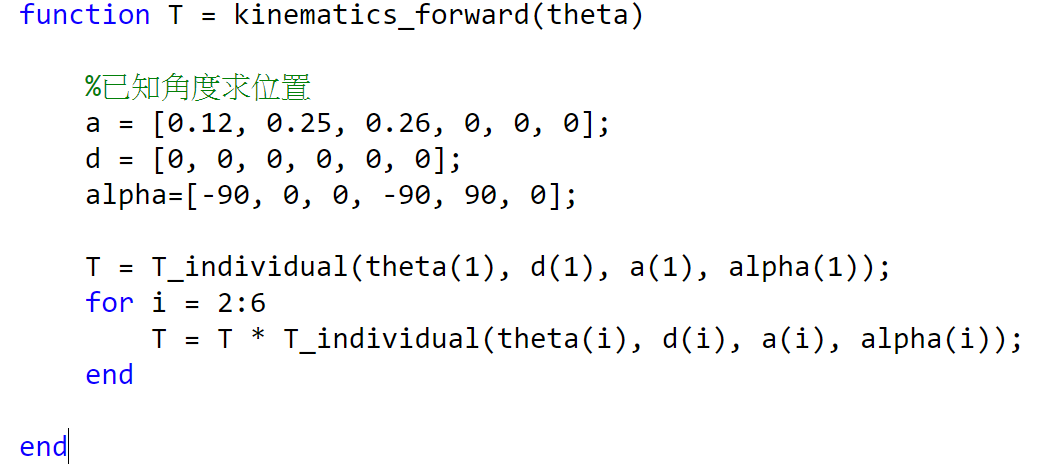
（圖三）Forward kinematic部分的程式架構



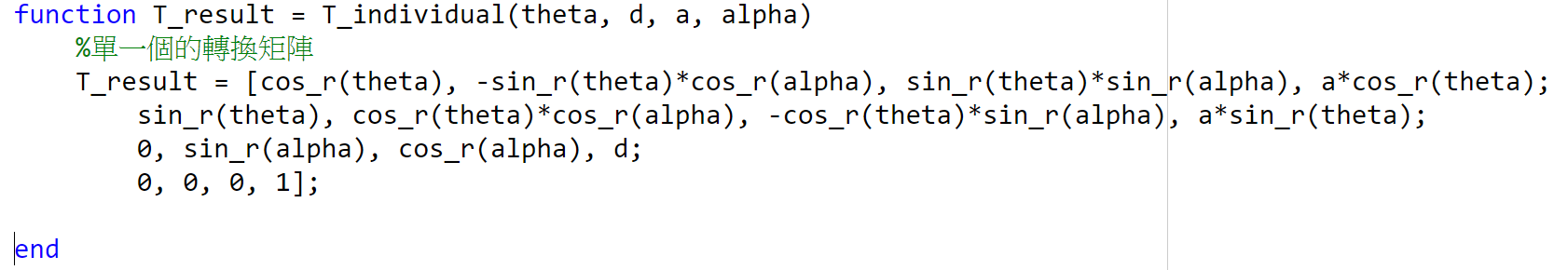
（圖四）Inverse kinematic部分的程式架構

圖五及圖六是forward kinematic的主要程式。輸入theta後先計算出各軸所對應的轉換矩陣（如圖六所示），再將其全部相乘，即可得出最後的T = [n o a p]矩陣（如圖五所示）。

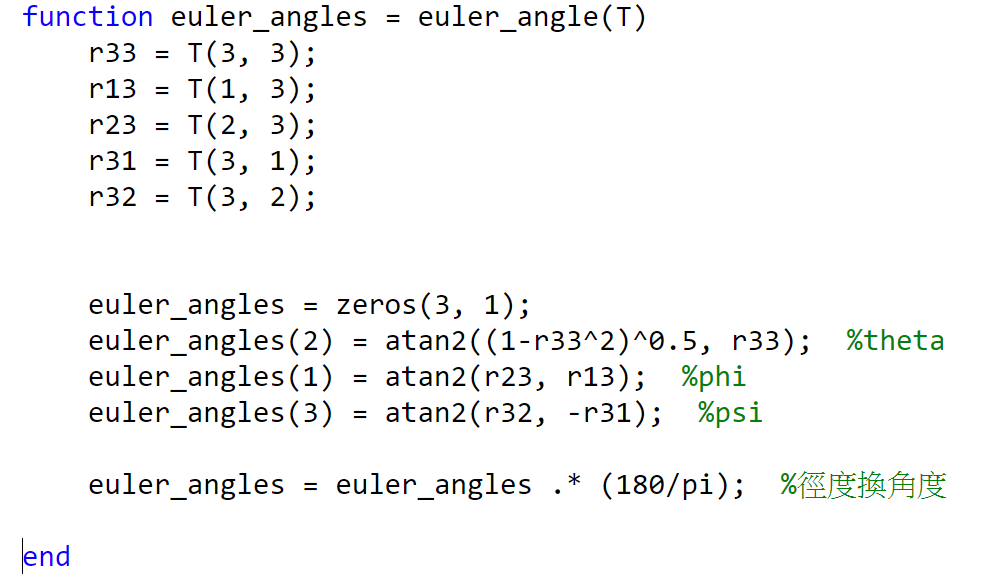
將利用forward kinematic所計算出來的T = [n o a p]輸入euler\_angle的函式中，根據推導的公式計算出其對應的角度（如圖七所示）。



（圖五）Forward kinematic的主要程式



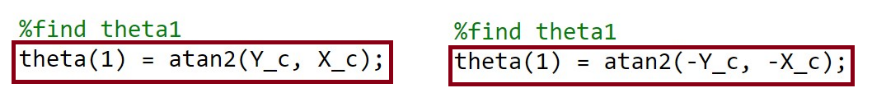
（圖六）計算各軸轉換矩陣



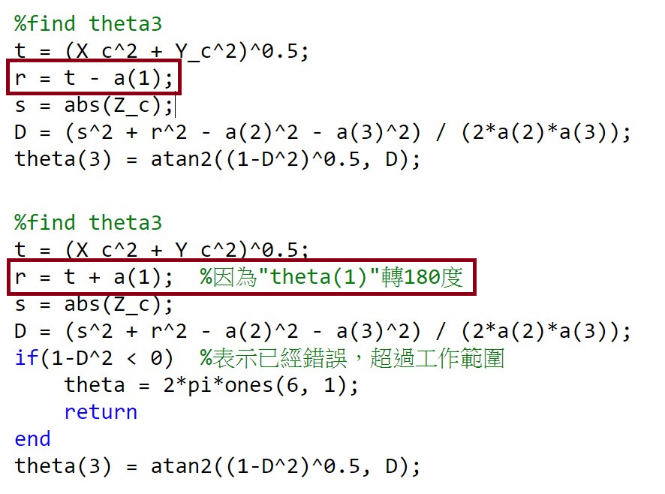
（圖七）反求Euler angle

在inverse kinematic部分，根據幾何法算出theta1、2、3，再利用三角函數方法推導出theta4、5、6。在推導過程可知theta1有兩組解，theta1的兩組解相差180度（如圖八所示）。因機器手臂可以向上彎曲及向下彎曲，所以theta2、3彼此是有相關聯，因此為一組，此有兩組解（如圖九所示）。最後theta4、5、6為一組，在推倒過程中因sin(theta5)有正負之分，因此會出現兩組可能解，其影響到theta4、6（如圖十所示）。因此最後機器手臂推算出來的角度總共有八組解。

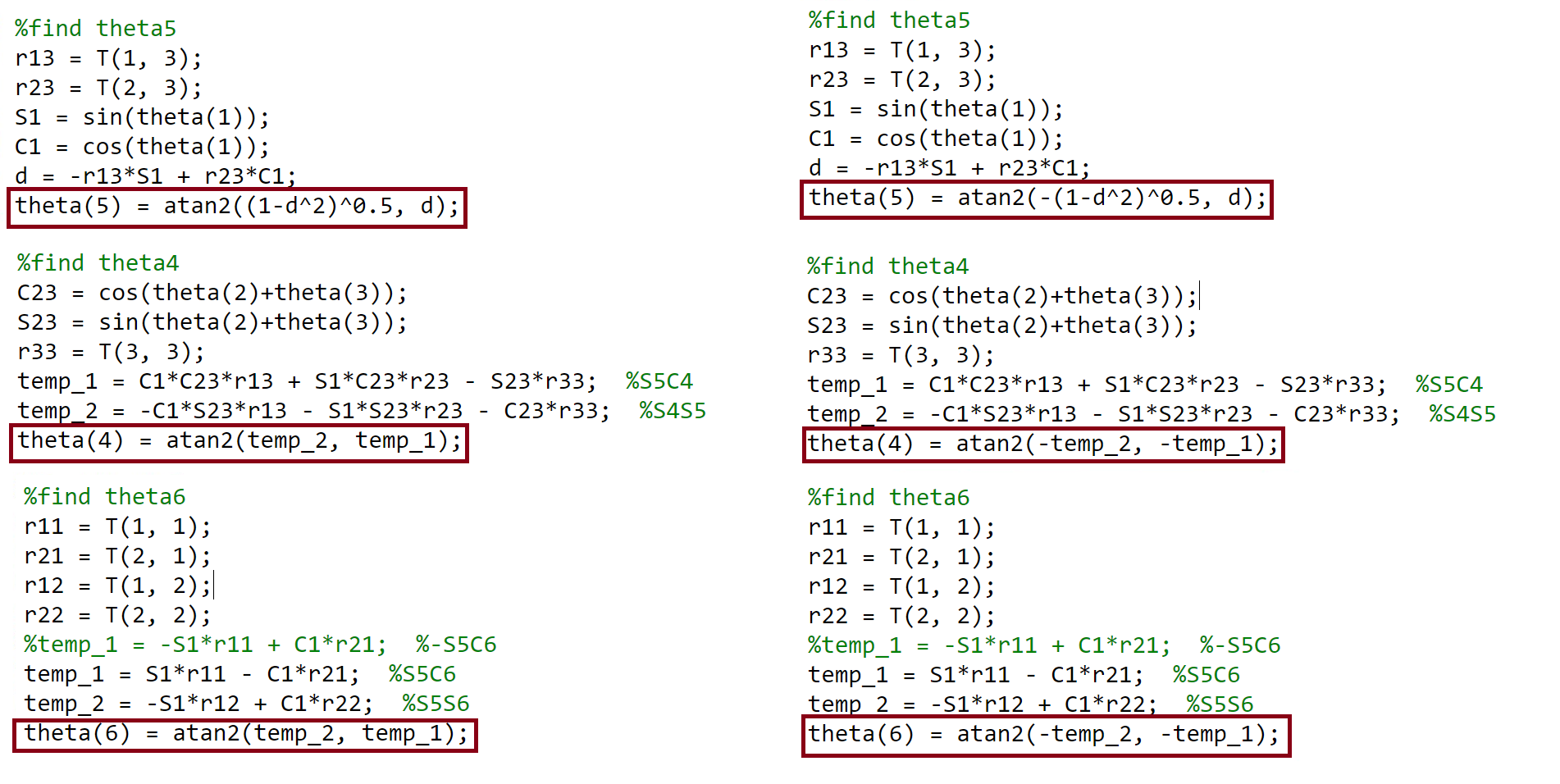
計算出來的八組解最終還需判斷是否有超出各軸角度指定的範圍或機器手臂的工作區域，最後才將所求角度及判斷結果輸出。



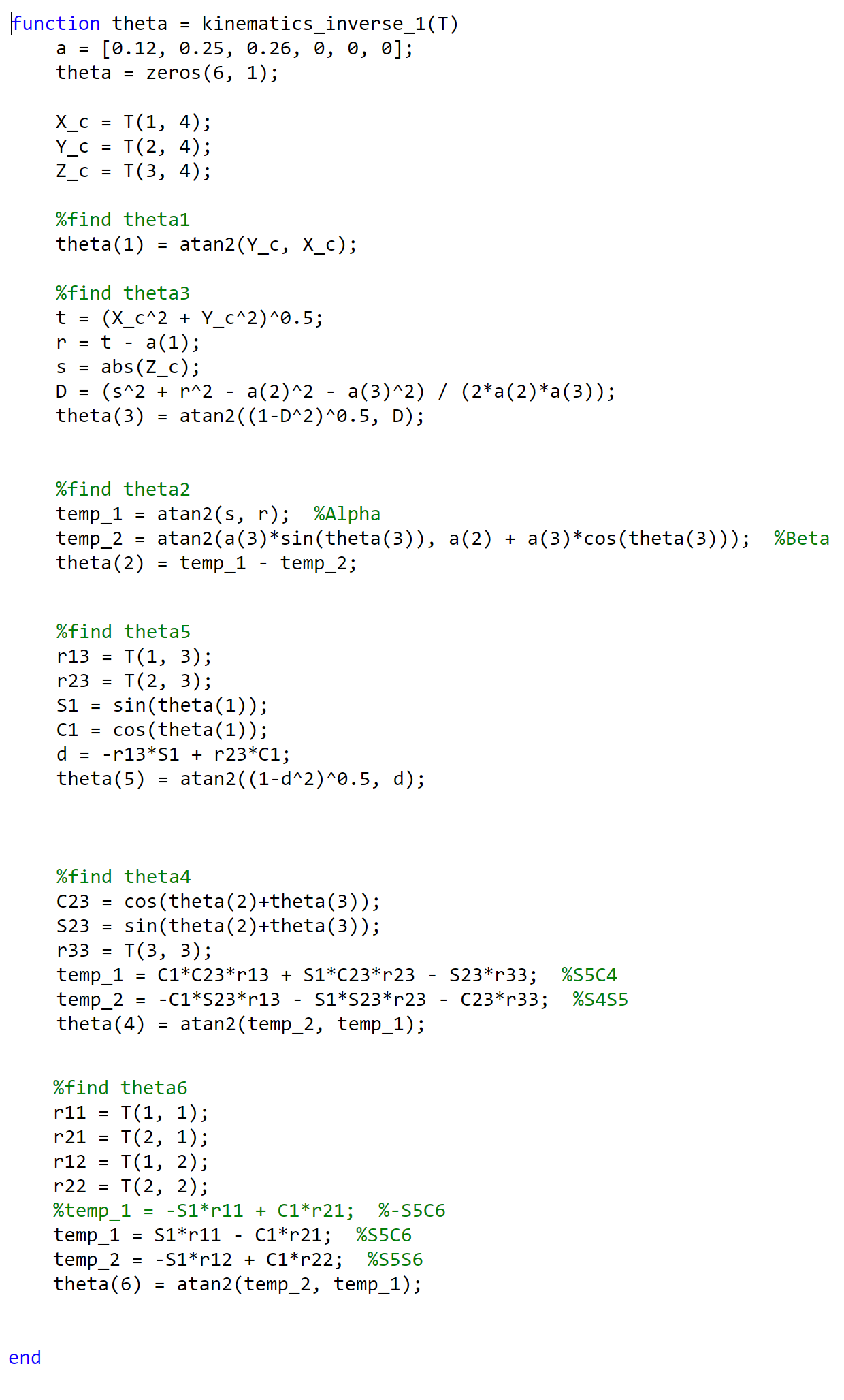
（圖八）theta1會有兩組解



（圖九）theta3會有兩組解，此會影響到theta2的解



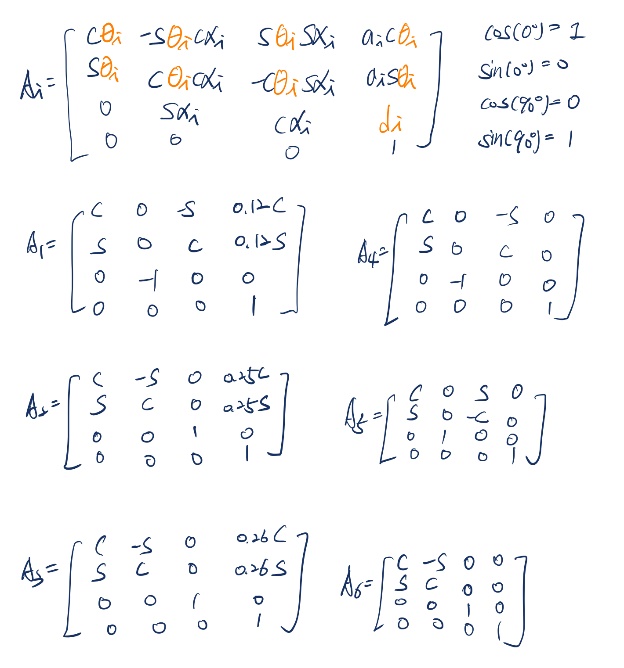
(圖十) theta5有兩組解，此會影響到theta4、6的解



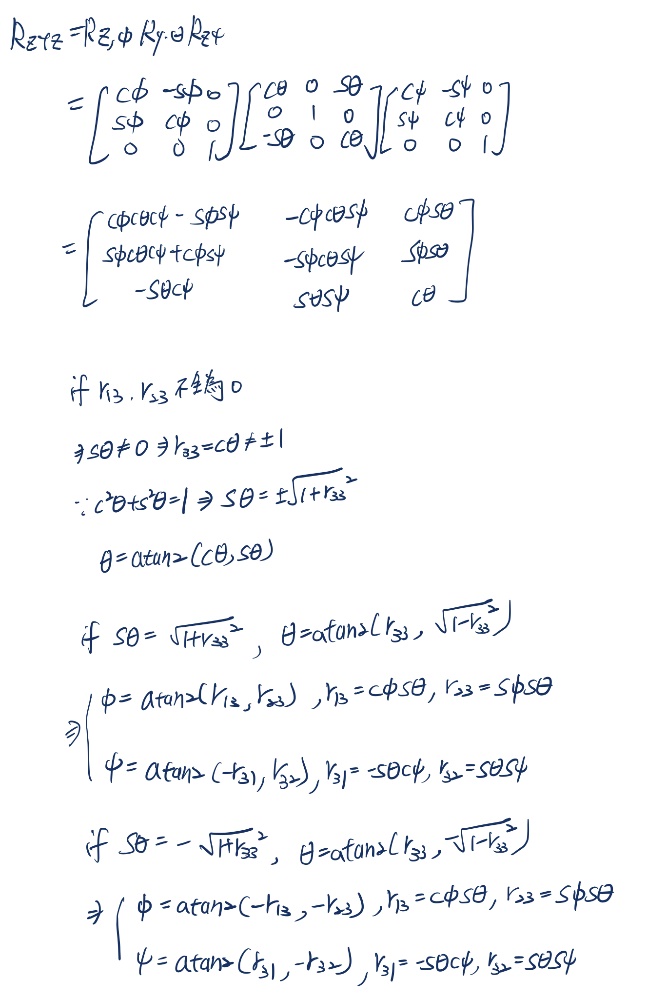
（圖十一）Inverse kinematic的主要程式

1. 數學運算說明

在forward kinematic中，我們套用其轉換矩陣公式求出各軸的轉換矩陣A（如圖十二所示），再將其各軸的A相乘後就可以得出最後的轉換矩陣。最後的轉換矩陣可以用Euler angle的方式來看，因此我們就可以推得其phi、theta、psi的角度（如圖十一所示）。

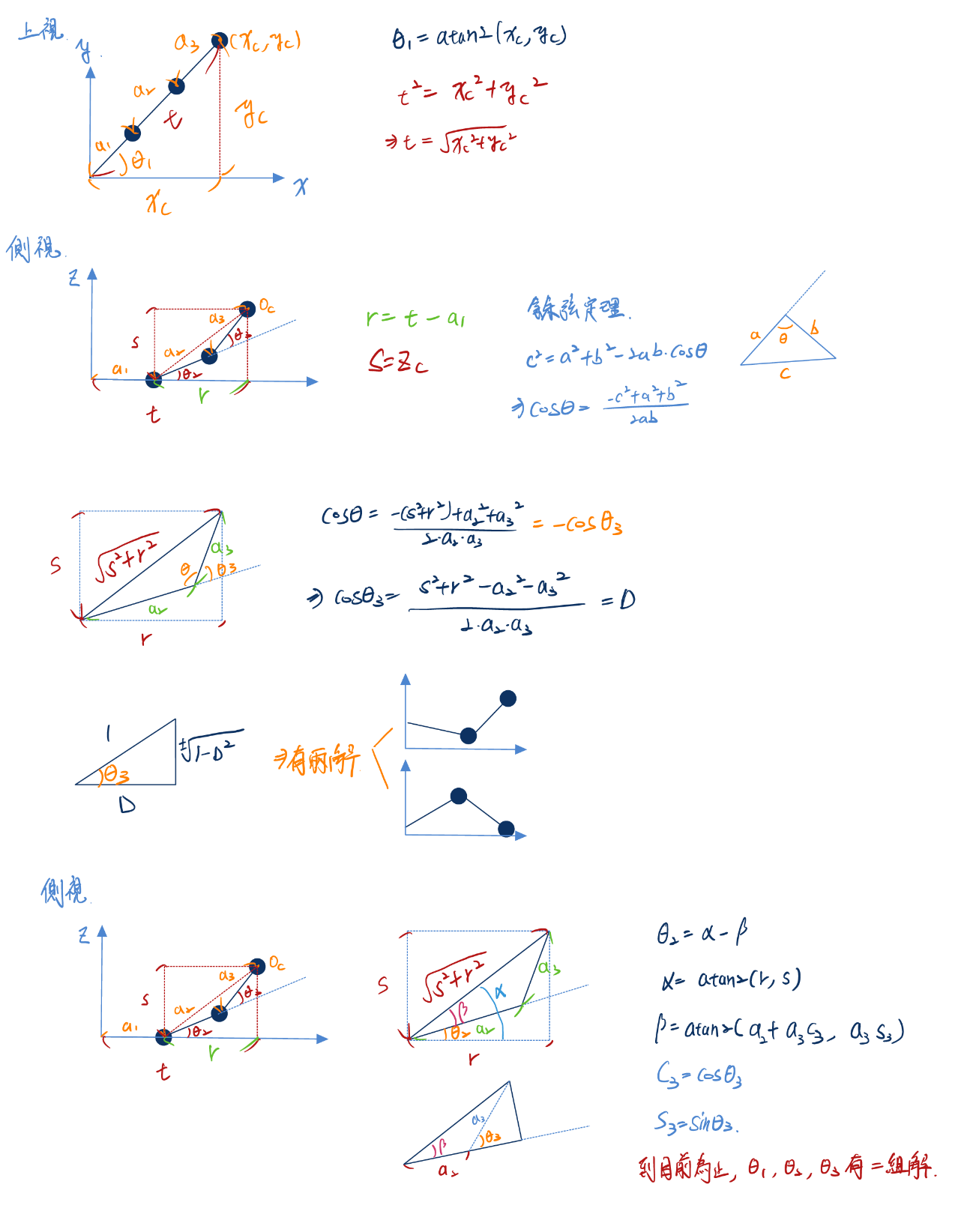


（圖十二）各軸計算出的轉換矩陣A

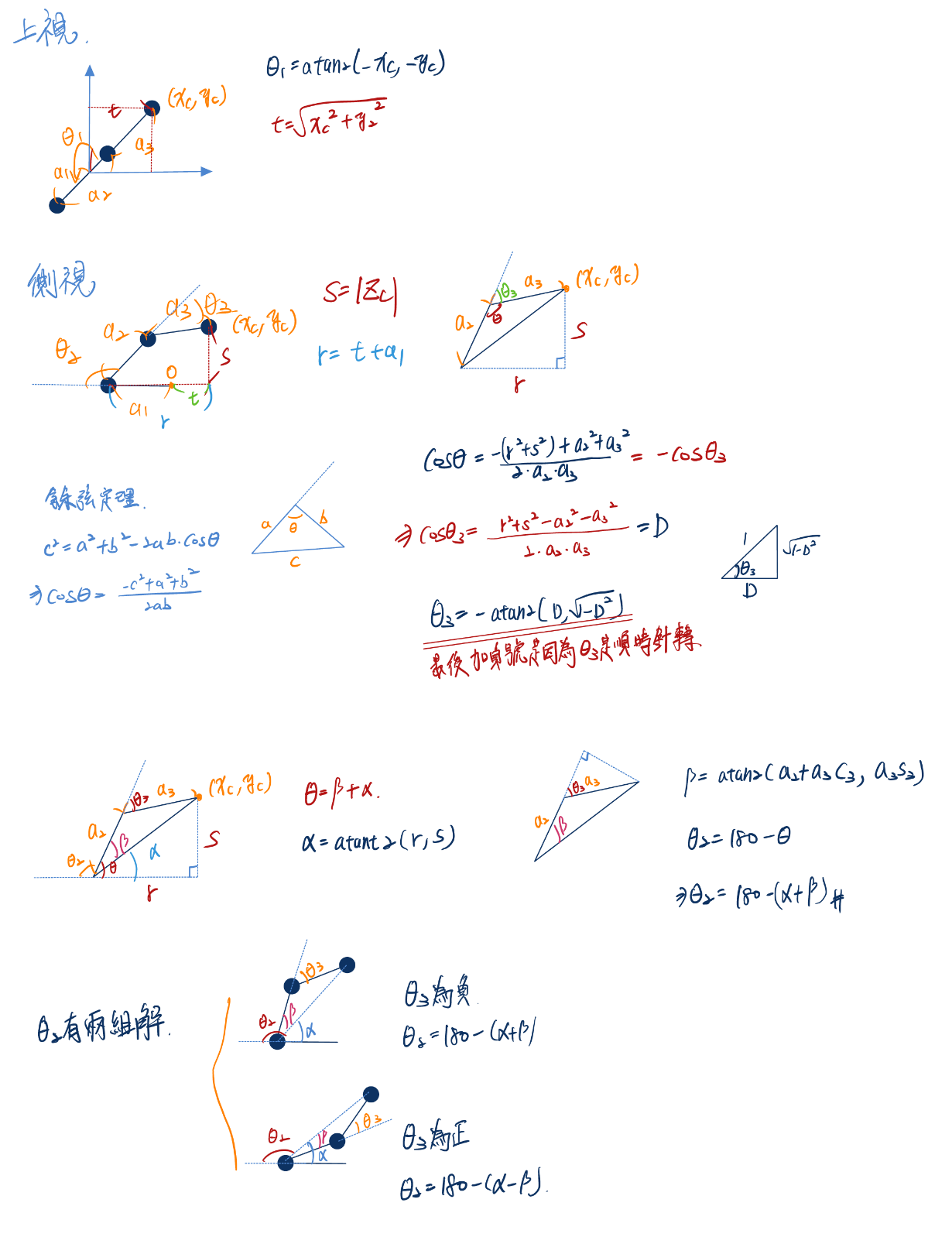


（圖十三）Euler angle的推導

在inverse kinematic中，前三軸的角度利用幾何法顯示、推導。由圖可以看出theta1是有兩組解，兩解相差180度，其theta1也會影響到theta2、3是如何轉動。如果單獨看theta2、3可以知道會有兩種形式，其一情況是手臂向上彎曲，而另一種情況是手臂向下彎曲，由此可以推得兩種組合的解（theta1、2、3的詳細推導過程如圖十四、圖十五所示）。

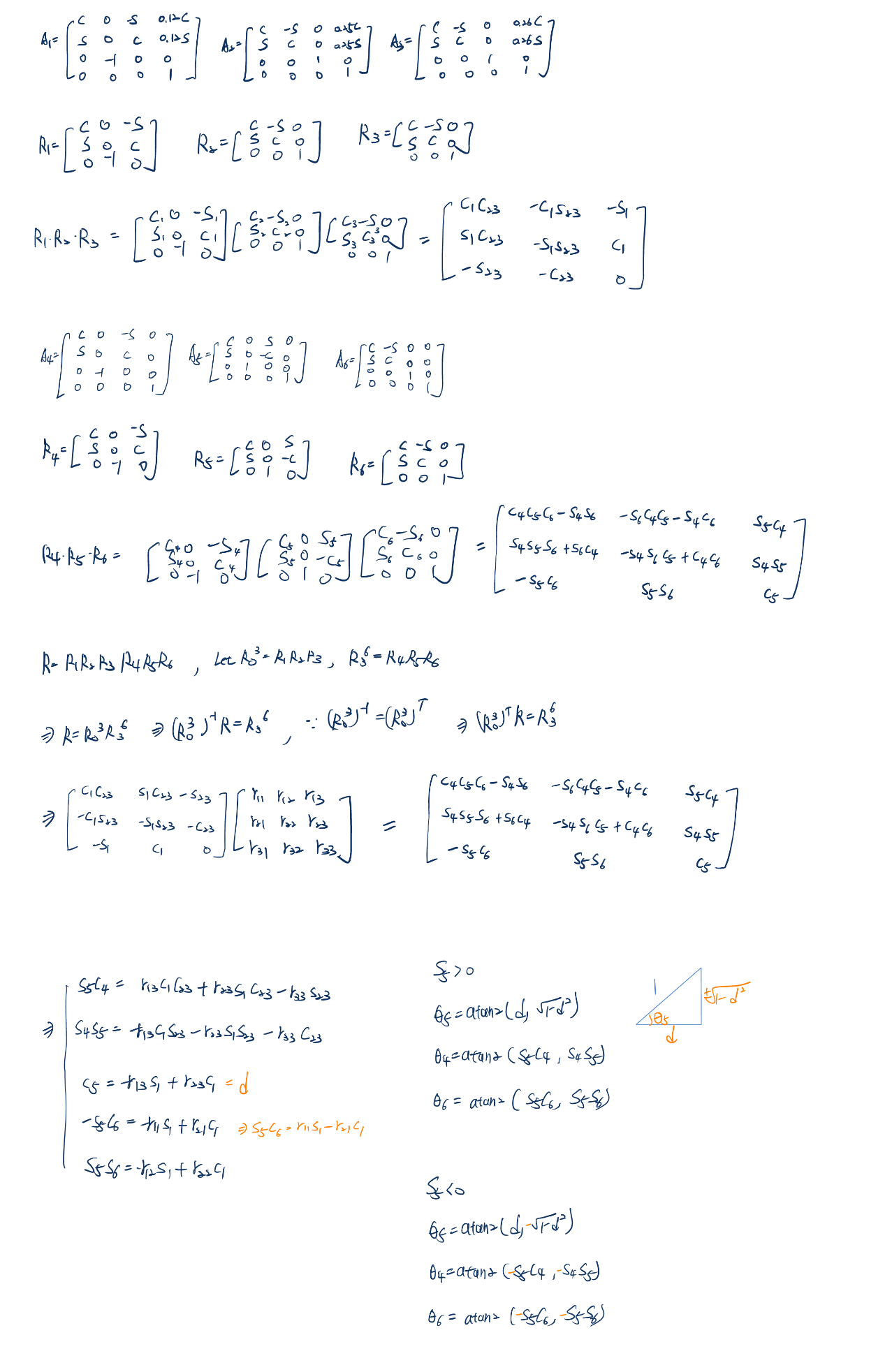


（圖十四）theta1的第一種情況所推算出theta1、2、3的過程

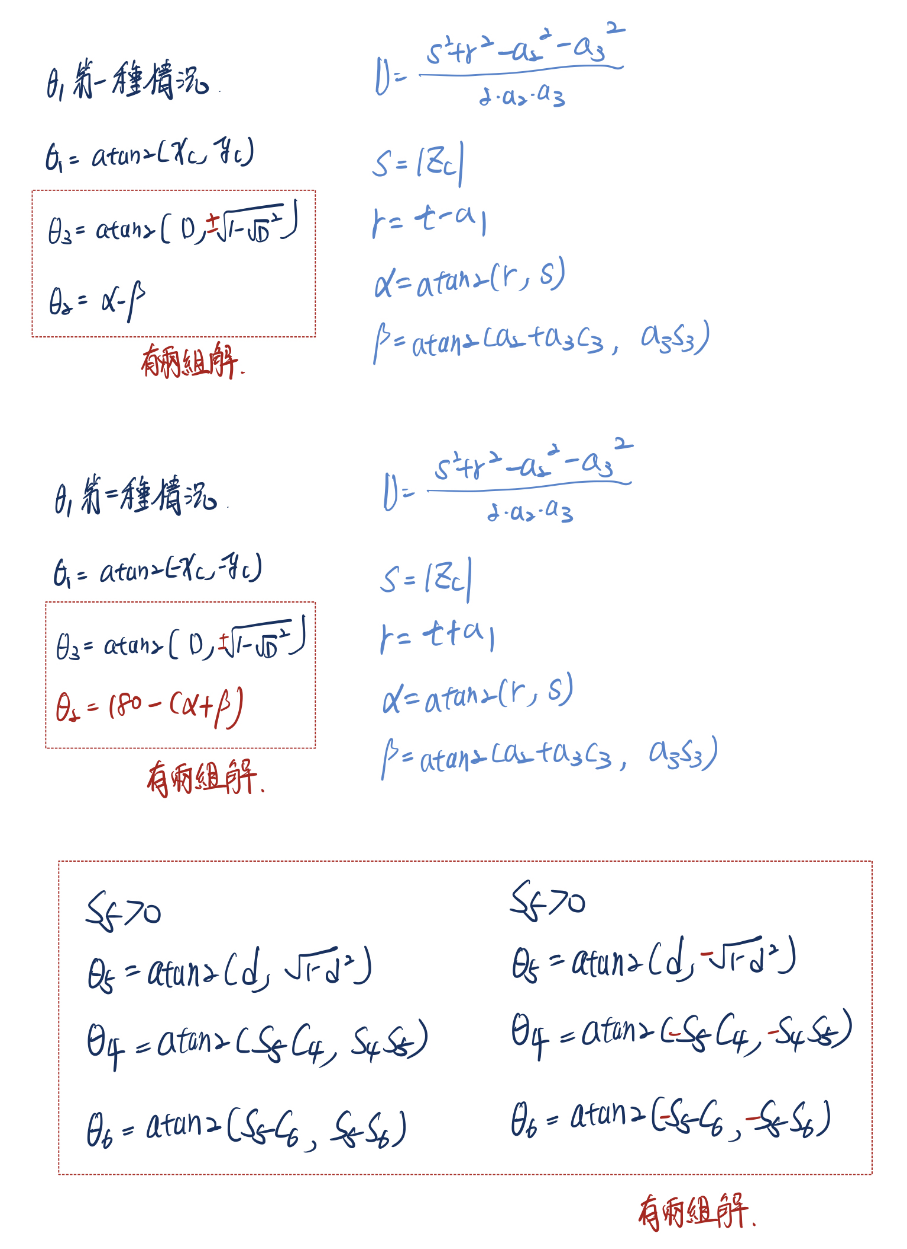


（圖十五）theta1的第二種情況所推算出theta1、2、3的過程

接下來theta4、5、6是用三角函數的方式所推算，可以發現在計算theta4、5、6時，此矩陣就像是用Euler angle來表示，其推導也與前面Euler angle的過程類似。先算出theta5的值，這裡需利用前面所推導出來的theta1角度，在此要注意sin(theta5)有可能是正數也可能是負數，因此在往後推算theta4、6時，要相對應的調整正負號。在計算theta4、6時需要使用到前面推算出來的theta1、2、3的角度，其詳細計算、推導過程如圖十六所示。



（圖十六）theta4、5、6的推導過程



（圖十七）theta1、2、3、4、5、6整理

1. 加分題 : 討論兩種逆向運動學(代數法，幾何法)的優缺點

代數法 :

代數法是直接透過轉換矩陣T0到Tn中的項進行組合，定義出其中的變量（關節參數的組合），可以列出聯立方程式將其求解，求出各軸所對應的角度。缺點是多軸計算繁複且複雜，容易計算錯誤，且有時需考慮到多解的情況，較難求出解。

幾何法 :

將機器手臂利用空間幾何顯示出來，將其各軸的角度問題轉化為平面幾何問題，再將其求解。當求其平面幾何問題時可以通過正餘弦定理公式及三角函數特性求解。利用幾何法求解會比較直觀，機器手臂直接顯示在圖中，所求的角度也明白如何在實際上運作。雖然幾何法能較簡單的解出變數，但需要相當的空間想像能力，在平面畫出空間中構建出路徑，來規劃出每一軸的變化。