离散：

第一题：第 3 问应该是有 N 个孩子，K 个孩子头上有泥，K 个孩子同时回答知道了当且仅当父亲问了 K 次。（笔试回忆有一点小的偏差）

解答：看到 K-1 个孩子头上有泥点的孩子，在第 K-1 次询问后，若无人回答知道了，则他们就知道自己头上有泥点了。并在第 K 次询问时答“我知道了”。

第二题：

第 2 问解答（编的）：

考虑到阿列夫 1 的是无穷可列集，同时注意到

F_0 的端点为 0，1

F_1 的补充端点为 1/3，2/3

F_2 的补充端点为 1/9，2/9，7/9，8/9

……

因而对于任意的 $x \in C$，则 x 必为某个 F_n 的端点，我们可以将 C 列出来，形成 C 与自然数集的一一对应，证毕。

第三题：

先证 X*Y=(X∧Y)×(X∨Y)当且仅当 X∧Y=X 或 X∧Y=Y。

右推左：显然

左推右：注意到(X∧Y)+(X∨Y)=X+Y。若 X∧Y!=X 且 X∧Y!=Y，则必有 X*Y＞(X∧Y)×(X∨Y)，矛盾。因而必有 X∧Y=X 或 X∧Y=Y。

再进行计数，2*243-32=454

第四题：

翻课本吧。。

第五题：

右推左：

先反证，必删轮图的中心。删除中心后剩下一个圈，需要再删 2 个点，故点连通度为 3。

左推右：

（我只证明了点连通度>2，所以是个圈，后面是最后几分钟瞎写的，没啥逻辑，就不记得了。。。）

第六题：类比下题

Set 27

Problem 4

Hall定理(1935, Marriage Theorem)

设二部图G=<V_1, V_2, E>, 则G有V_1到V_2的完备匹配 ⇔ 对于任意的 $A \subseteq V_1$ ，有 $|N(A)| \geq |A|$

令k为一整数。对于任意有限集合，证明对它的任意两个k划分都存在一个相同的代表集。

- 集合的k**划分**指划分为大小相同的互不想交的k个子集，为简便起见，设集合的大小为k的整数倍从而每个子集均有相同个元素。
- 一个划分的**代表集**指从每个子集中取出一个元素而构成的集合。

举例：集合$\{1,2,3,4\}$的一个2划分为$A:\{1,2\}\{3,4\}$。此划分的代表集有$\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{2,4\}$，但$\{1,2\}$不是其代表集。集合的另外一个划分为$B:\{2,3\}\{1,4\}$。易见，$A$与$B$存在相同的代表集$\{1,3\}$。

答案：

证明：构造二部图$G=(V_1,V_2,E)$，V_1中的每个顶点代表集合的一种k划分的每个子集，V_2 中的每个顶点代表集合的另一种k划分的每个子集，$|V_1|=|V_2|=k$。$\forall a \in V_1, b \in V_2$，若所代表的集合有公共元素，则$a,b$相邻。可知对任意$A \subseteq V_1$，$|N(A)| \geq |A|$，因为$N(A)$中顶点代表的子集包括$A$中顶点代表的子集中的所有元素。由$Hall$定理，$G$有饱和$V_1$的匹配，又因为$|V_1|=|V_2|$，$G$有完全匹配。则将完全匹配中的每条边的两个顶点对应的两个集合中任取一个公共元素，所组成的集合即为这两个k划分的相同代表集。