深蓝学院 VIO 第六次课程作业

温焕宇

2019.7.26

1 基础题：题一

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y}\prime = \mathbf{u}_4 + \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y}\prime^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}\prime \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

1.1 证明式（15）中，取 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解

答：

根据矩阵理论定义：设 $A = (a_{ij})_{m*n}, r(A) = r, A^*A$ 的大于零的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$，则 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}$ 称为 A 的奇异值。

对于齐次线性方程 $A * x = 0$ 时，当 A 的秩大于列数时，就需要最小二乘解，在 $\parallel x \parallel = 1$ 的约束下，其 A^TA **最小特征值所对应的特征向量**。

证明：本题中

$$min_y \parallel \mathbf{D}\mathbf{y} \parallel_2^2, s.t. \parallel \mathbf{y} \parallel = 1 \tag{1}$$

其中 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2n+4}$，观测次数大于等于 2 时，即秩大于列数时，需要最小二乘求解。

对于**目标函数有**：

$$\parallel \mathbf{D}\mathbf{y} \parallel_2^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\lambda\mathbf{y} = \lambda \parallel \mathbf{y} \parallel = \lambda \tag{2}$$

其中 λ 是 $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$ 的特征值。

对 $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$ 进行 SVD：

$$\mathbf{D}^T\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{4} \sigma_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \tag{3}$$

其中 σ_i 为奇异值，$\lambda_i = \sigma_i^2$ 为特征值，且降序排列，$\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ 正交。故最小目标函数值对应的特征值为 σ_4^2。特征值 σ_4^2 对应的 $\mathbf{y}$ 为 $\mathbf{u}_4$，得证。

2 提高题

2.1 完成代码部分

答：先构造 **D** 矩阵，为 2n*4 维矩阵，其中 n 为观测数；再构造投影矩阵 $\mathbf{P}_k = [\mathbf{R}_k, \mathbf{t}_k] \in \mathbb{R}^{3x4}$，为 world 系到 Camera 系投影；将

$$(u_k \mathbf{P}_{k,3}^T - \mathbf{P}_{k,1}^T)\mathbf{y} = 0 \tag{4}$$

$$(v_k \mathbf{P}_{k,3}^T - \mathbf{P}_{k,2}^T)\mathbf{y} = 0 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}\mathbf{y} = 0 \tag{6}$$

左边系数填入到 D 矩阵；最后利用 SVD 分解得到 $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$ 特征值，由第一问已知：最优解为 $y = u_4$；故得解。代码如下：

```
/* your code begin */
int n = end_frame_id - start_frame_id;// 观测数
Eigen::MatrixXd D(2*n, 4); // 矩阵D初始化 2n×4
D.setZero();
int k=0; // 矩阵D行
Eigen::Matrix<double, 3, 4> pose[poseNums]; // 投影矩阵，World系到Camera系
for(int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i)
{
    double uk = camera_pose[i].uv(0);
    double vk = camera_pose[i].uv(1);

    pose[i].block<3, 3>(0, 0) = camera_pose[i].Rwc.transpose();
    pose[i].block<3, 1>(0, 3) = -camera_pose[i].Rwc.transpose() * camera_pose[i].twc;
    D.row(k++) = uk * pose[i].row(2) - pose[i].row(0);
    D.row(k++) = vk * pose[i].row(2) - pose[i].row(1);
}
Eigen::Matrix4d DTD = D.transpose() * D;
// 对DTD进行SVD分解
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(DTD, ComputeThinU | ComputeThinV);
Eigen::MatrixXd V, S, U;
V = svd.matrixV();
U = svd.matrixU();
S = svd.singularValues();  // 为 \Theta对角线元素
std::cout<<"DTD :\n"<< DTD <<std::endl;
std::cout<<"U :\n"<< U <<std::endl;
std::cout<<"S :\n"<< S <<std::endl;
std::cout<<"V :\n"<< V <<std::endl;

P_est << U(0,3)/U(3,3), U(1,3)/U(3,3), U(2,3)/U(3,3);
/* your code end */
```

输出结果如下图：其中 $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ 正交，$\mathbf{S}$ 为特征值，降序。

通过判断该解的有效性：$\sigma_4 << \sigma_3$，$7.758e - 16 << 0.723$。故认为三角化有效。

```
DTD :
        7          0 -0.486169   24.7361
        0          7   5.90714  -47.5284
-0.486169    5.90714    5.6799  -47.4055
  24.7361   -47.5284  -47.4055   457.196
U :
0.0530721  0.846878   0.41558  0.327528
-0.103079  0.431629 -0.895388 0.0367562
-0.102585  0.309021  0.122288 -0.937565
 0.987945 0.0316285 -0.103049 -0.111113
S :
    468.406
    7.74642
   0.723255
7.75863e-16
V :
0.0530721  0.846878   0.41558  0.327528
-0.103079  0.431629 -0.895388 0.0367562
-0.102585  0.309021  0.122288 -0.937565
 0.987945 0.0316285 -0.103049 -0.111113
ground truth:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
your result:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
```