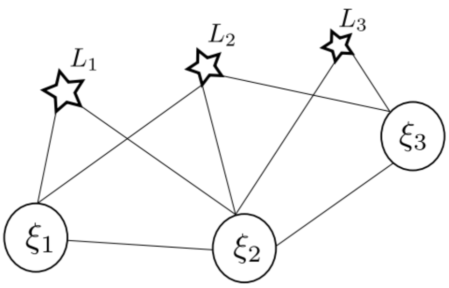
深蓝学院 VIO 第四次课程作业

温焕宇

2019.7.13

1 题一

某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。



1.1 请绘制上述系统的信息矩阵 Λ.

答:

变量及残差有:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_3 \\ \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{l_1\xi_1} \\ \mathbf{r}_{l_1\xi_2} \\ \mathbf{r}_{l_2\xi_1} \\ \mathbf{r}_{l_2\xi_2} \\ \mathbf{r}_{l_2\xi_3} \\ \mathbf{r}_{l_3\xi_2} \\ \mathbf{r}_{l_3\xi_3} \\ \mathbf{r}_{\xi_1\xi_2} \\ \mathbf{r}_{\xi_2\xi_3} \end{bmatrix} \tag{1}$$

对应的高斯牛顿求解为:

$$\mathbf{J}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{J}\delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^T\Sigma^{-1}\mathbf{r} \tag{2}$$

$$or, \boldsymbol{\Lambda}\delta\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3}$$

则公式的雅可比矩阵为:

$$
\mathbf{J}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{b}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{x}}\\ \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_2}}{\partial \mathbf{x}}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{\partial \mathbf{r}_{\xi_2\xi_3}}{\partial \mathbf{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1\\ \mathbf{J}_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mathbf{J}_9\end{bmatrix} \tag{4}
$$

分别计算 $\mathbf{J}_1,\mathbf{J}_2...$

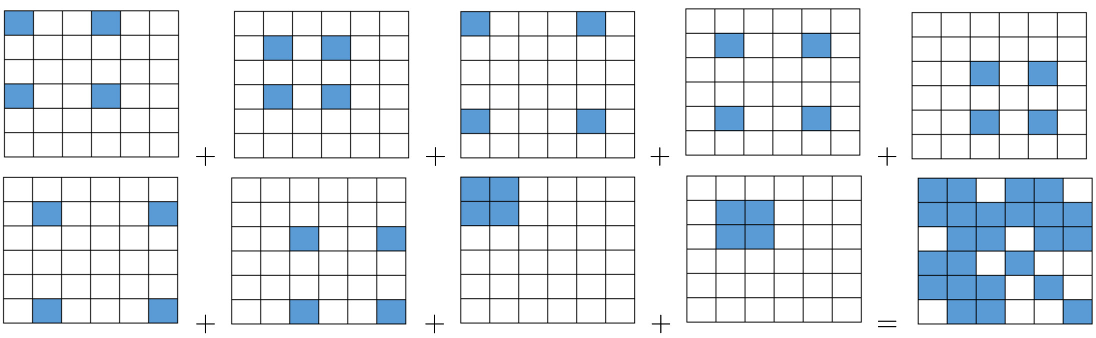
由于每个残差只和某几个状态量有关，因此，雅可比求导时，无关项的雅可比为 0，故得此:

$$
\mathbf{J}_1=\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1} & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5}
$$

$$
\boldsymbol{\Lambda}_1=\mathbf{J}_1^T\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1}\\ 0\\ 0\\ \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1} & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6}
$$

$$
=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \boldsymbol{\xi}_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1}\boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}\frac{\partial \mathbf{r}_{l_1\xi_1}}{\partial \mathbf{l}_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{7}
$$

其它同理得:$\boldsymbol{\Lambda}_1,\boldsymbol{\Lambda}_2,\boldsymbol{\Lambda}_3...\boldsymbol{\Lambda}_9$。依次画矩阵块图且相加得到信息矩阵可视化如下:



$\boldsymbol{\Lambda}$

其中横纵坐标分别为: 纵坐标: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_3 \\ \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$ 横坐标: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_1 & \boldsymbol{\xi}_2 & \boldsymbol{\xi}_3 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$

1.2 请绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 Λ'

答:

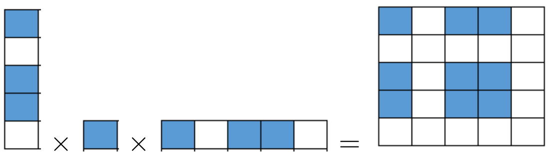
当 marg 掉 $\boldsymbol{\xi}_1$ 时，使用边际概率，将丢弃变量所携带的信息传递给剩余变量。

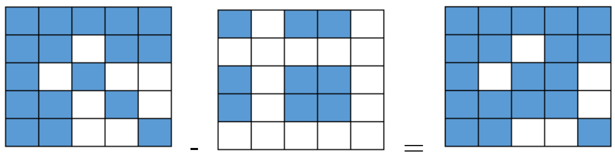
假设 $\beta = \boldsymbol{\xi}_1, \alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_2 & \boldsymbol{\xi}_3 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$

由边际概率可得:

$$\boldsymbol{\Lambda}' = \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\alpha} - \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\beta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\alpha} \tag{8}$$

可视化化如下:

$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\beta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\alpha} \Rightarrow$ 

$\boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\alpha} - \boldsymbol{\Lambda}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\beta}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\beta\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}' \Rightarrow$ 

其中横纵坐标分别为: 纵坐标: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_2 \\ \boldsymbol{\xi}_3 \\ \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$ 横坐标: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_2 & \boldsymbol{\xi}_3 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix}$。

由可视化可知，当 marg 掉 ξ_1 之后 l_1 和 l_2 之间多了一个约束。

2 题二

2.1 请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0 表明零空间的维度为 7。

答:

根据《视觉十四讲》内容推导如下:

对路标点雅可比矩阵:

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} \frac{f_x}{z} & 0 & -\frac{xf_x}{z^2} \\ 0 & \frac{f_y}{z} & -\frac{yf_y}{z^2} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} \tag{9}$$

对相机位姿雅可比矩阵:

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} -\frac{xyf_x}{z^2} & (1+\frac{x^2}{z^2})f_x & -\frac{yf_x}{z} & \frac{f_x}{z} & 0 & -\frac{xf_x}{z^2} \\ -(1+\frac{y^2}{z^2})f_y & -\frac{xyf_y}{z^2} & \frac{xf_y}{z} & 0 & \frac{f_y}{z} & -\frac{yf_y}{z^2} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{cw} \tag{10}$$

则 $\mathbf{H}$ 矩阵为:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中:

$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{J}_T^T \mathbf{J}_T$
$\mathbf{H}_{12} = \mathbf{J}_T^T \mathbf{J}_P$
$\mathbf{H}_{21} = \mathbf{J}_P^T \mathbf{J}_T$
$\mathbf{H}_{22} = \mathbf{J}_P^T \mathbf{J}_P$

修改代码如下:

```
H.block(j*3 + 6*poseNums,j*3 + 6*poseNums,3,3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
H.block(i*6,j*3 + 6*poseNums, 6,3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
```

编译完运行得到结果如下图，奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7:

```
 0.00520788
 0.00502341
  0.0048434
 0.00451083
  0.0042627
 0.00386223
 0.00351651
 0.00302963
 0.00253459
 0.00230246
 0.00172459
0.000422374
1.25708e-16
8.63763e-17
5.18689e-17
4.38809e-17
2.98776e-17
1.45304e-17
1.59456e-18
why@why-desktop:~/Desktop/深蓝VIO课程内容/作业4/nullspace_test/build$
```