一、 选择题

4_13.（ A ）下列关于平均能流密度矢量$\vec{S}_{av}$的公式，不正确的是______。

A. $\vec{S}_{av}=\vec{E}\times\vec{H}$　　B. $\vec{S}_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\vec{E}\times\vec{H}\mathrm{d}t$

C. $\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)$　　D. $\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\times\vec{H}\right)$

4_14.（ C ）已知磁介质的磁导率为$\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$，该磁介质的损耗角正切为______。

A. $\frac{\mu'}{\mu''}$　　B. $\tan\frac{\mu'}{\mu''}$　　C. $\frac{\mu''}{\mu'}$　　D. $\tan\frac{\mu''}{\mu'}$

6_13.（ B ）平行极化入射波是指入射波的电场强度矢量与入射面______。

A. 无确定关系　　B. 平行　　C. 垂直　　D. 不共面

6_14.（ D ）平面电磁波在媒质分界面发生反射与透射时，下列叙述正确的是______。

A. 反射系数一定大于 0　　B. 透射系数一定大于 1

C. 反射系数一定小于 0　　D. 透射系数可以大于 1

4_11.（ B ）在一定的频率范围内，下列______为弱导电媒质。

A. $\sigma>>\omega\varepsilon$　　B. $\sigma<<\omega\varepsilon$　　C. $\sigma<<\omega\mu$　　D. $\sigma>>\omega\mu$

4_12.（ D ）在时变电磁场中，电场强度$\vec{E}$与电位φ的关系为______。

A. $\vec{E}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\nabla\varphi$　　B. $\vec{E}=\nabla\varphi$　　C. $\vec{E}=-\nabla\varphi$　　D. $\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$

6_11.（ C ）波长为$\lambda=0.2\mu\mathrm{m}$的均匀平面波从自由空间垂直入射到理想导体的分界面上，经导体反射后，第一个电场$\left|\vec{E}(z)\right|$波腹点到导体的距离为_____。

A. 0.1μm　　B. 0.2μm　　C. 0.05μm　　D. 0.15μm

6_12.（ B ）现有两种本征阻抗分别为η_1和η_2的理想介质（媒质 1 和媒质 2），假设平面电磁波从媒质 1 垂直入射到媒质 2 表面上，则反射系数为______。

A. $\Gamma=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$　　B. $\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$　　C. $\Gamma=\frac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}$　　D. $\Gamma=\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$

4_7.（ B ）下面关于坡印廷矢量$\vec{S}$的正确表达式为______。

A. $\vec{S}=\vec{H}\times\vec{E}$ B. $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ C. $\vec{S}=\vec{E}\cdot\vec{H}$ D. $\vec{S}=\vec{H}\cdot\vec{E}$

4_8.（ C ）已知海水的电导率为$\sigma=4\mathrm{S/m}$，相对介电常数为$\varepsilon_r=81$，那么海水在频率$f=1\mathrm{kHz}$时是______。

A. 导电媒质 B. 弱导电媒质 C. 良导体 D. 绝缘体

6_7.（ B ）均匀平面波从理想介质垂直入射到理想导体表面，下列说法正确的是______。

A. 在理想导体表面合成电场形成波腹

B. 在理想介质一侧合成波的平均坡印廷矢量等于 0

C. 在理想导体表面合成磁场形成波节

D. 在理想介质一侧合成波的平均坡印廷矢量不等于 0

6_8.（ D ）雷达天线罩采用______的结构来消除天线罩对电磁波的反射。

A. 1/4 波长匹配层 B. 半反射匹配层

C. 全反射匹配层 D. 半波长介质窗

4_15.（ A ）对电磁波而言，媒质导电性的强弱由$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$决定。当$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}<<1$时，该媒质称为______。

A. 弱导电媒质 B. 半导体 C. 良导体 D. 绝缘体

4_10.（ C ）电场强度$\dot{\vec{E}}=-\vec{e}_x\mathrm{j}E_0e^{-\mathrm{j}kz}$的瞬时值形式为______。

A. $\vec{E}=\vec{e}_xE_0\cos\left(\omega t-kz+\dfrac{\pi}{2}\right)$ B. $\vec{E}=\vec{e}_x\mathrm{j}E_0\cos(\omega t-kz)$

C. $\vec{E}=\vec{e}_xE_0\cos\left(\omega t-kz-\dfrac{\pi}{2}\right)$ D. $\vec{E}=-\vec{e}_x\mathrm{j}E_0\cos(\omega t-kz)$

6_15.（ C ）在媒质 1 和媒质 2 两种不同媒质之间插入一层厚度为四分之一波长的媒质后，若能消除媒质 1 表面上的反射，则称这种媒质为______。

A. 全反射匹配层 B. 半波长媒质窗

C. 1/4 波长匹配层 D. 半反射匹配层

6_16. （ A ）现有两种本征阻抗分别为η_1和η_2的理想介质（媒质 1 和媒质 2），假设平面电磁波从媒质 1 垂直入射到媒质 2 表面上，则透射系数为______。

A. $\mathit{\Gamma}=\dfrac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$ B. $\mathit{\Gamma}=\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$ C. $\mathit{\Gamma}=\dfrac{2\eta_1}{\eta_1+\eta_2}$ D. $\mathit{\Gamma}=\dfrac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}$

4_17.（ C ）电场强度 $\dot{\vec{E}} = \vec{e}_z E_0 \sin(k_x x) e^{-jk_z z}$ 的瞬时值形式为______。

A. $\vec{E} = \vec{e}_z E_0 \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z)$ B. $\vec{E} = \vec{e}_z E_0 \sin(\omega t + k_x x - k_z z)$

C. $\vec{E} = \vec{e}_z E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z)$ D. $\vec{E} = \vec{e}_z E_0 \cos(\omega t + k_x x - k_z z)$

4_18.（ B ）已知某种媒质的复电容率为 $\varepsilon = (5 - \mathrm{j}0.2)\varepsilon_0$，该媒质的损耗角正切为______。

A. –0.04 B. 0.04 C. tan(0.04) D. 25

6_17.（ C ）波长为 $\lambda = 0.1\mu\mathrm{m}$ 的均匀平面波从空气垂直入射到理想导体上，经导体反射后，第一个电场 $|\vec{E}(z)|$ 波节点到第一个磁场 $|\vec{H}(z)|$ 波节点的距离为_____。

A. 0.1μm B. 0.05μm C. 0.025μm D. 0.2μm

6_18.（ D ）均匀平面电磁波从空气垂直入射到理想导体表面，不可能发生的现象是______。

A. 入射电场与反射电场相位差π B. 反射系数为–1

C. 电磁波在空气一侧形成驻波 D. 电磁波相位沿传播方向不断变化

4_19.（ A ）已知海水的电导率为 $\sigma = 4\mathrm{S/m}$，相对介电常数为 $\varepsilon_r = 81$，那么海水在频率 $f = 1\mathrm{GHz}$ 时是______。

A. 导电媒质 B. 绝缘体 C. 良导体 D. 半导体

4_20.（ D ）电场强度 $\vec{E} = \vec{e}_y 2E_0 \sin(\omega t - kz)$ 的复数形式为______。

A. $\dot{\vec{E}} = \vec{e}_y \mathrm{j}2E_0 e^{-\mathrm{j}kz}$ B. $\dot{\vec{E}} = \vec{e}_y \mathrm{j}2E_0 e^{\mathrm{j}kz}$

C. $\dot{\vec{E}} = \vec{e}_y 2E_0 e^{-\mathrm{j}kz}$ D. $\dot{\vec{E}} = -\vec{e}_y \mathrm{j}2E_0 e^{-\mathrm{j}kz}$

6_19.（ A ）在媒质 1 和媒质 2 两种相同媒质之间插入一层厚度为二分之一波长的媒质后，若能消除媒质 1 表面上的反射，则称这种媒质为______。

A. 半波长媒质窗 B. 全反射匹配层

C. 1/4 波长匹配层 D. 半反射匹配层

6_20.（ B ）一均匀平面电磁波由理想介质垂直入射到理想导体上，在理想介质中只有______。

A. 行波 B. 驻波 C. 反射波 D. 入射波

4_9.（ A ）已知时变电磁场中矢量位 $\vec{A} = \vec{e}_x A_m \sin(\omega t - kz)$，则磁场强度为

$\vec{H} =$ ______。

A. $-\vec{e}_y \dfrac{kA_m}{\mu} \cos(\omega t - kz)$　　B. $\vec{e}_y \dfrac{kA_m}{\mu} \sin(\omega t - kz)$

C. $-\vec{e}_y kA_m \cos(\omega t - kz)$　　D. $\vec{e}_y kA_m \sin(\omega t - kz)$

4_16.（　B　）对于介电常数为ε、电导率为σ的导电媒质，有$\nabla \times \vec{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_c \vec{E}$，其中等效复介电常数为______。

A. $\varepsilon_c = \varepsilon + \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}$　B. $\varepsilon_c = \varepsilon - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega}$　C. $\varepsilon_c = \varepsilon - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$　D. $\varepsilon_c = \varepsilon + \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$

6_9.（　C　）一均匀平面电磁波垂直入射到两种理想介质的分界面上，合成波的电场______。

A. 仅包含行波　　B. 仅包含驻波

C. 包含行波和驻波　　D. 不包含行波和驻波

6_10.（　A　）均匀平面波不可能在______中存在。

A. 良导体　B. 电介质　C. 磁介质　D. 弱导电媒质

4_5.（　D　）在时变电磁场中，采用的洛仑兹条件为______。

A. $\nabla \cdot \vec{A} = 0$　B. $\nabla \cdot \vec{A} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$　C. $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$　D. $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

4_6.（　C　）对电磁波而言，媒质导电性的强弱由$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$决定。当$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$时，该媒质称为______。

A. 弱导体　B. 半导体　C. 良导体　D. 绝缘体

6_5.（　A　）在照相机的镜头上一般都有消除反射的敷层，这种敷层称为______。

A. 1/4 波长匹配层　　B. 半反射匹配层

C. 全反射匹配层　　D. 半波长介质窗

6_6.（　C　）垂直极化入射波是指入射波的电场强度矢量与入射面______。

A. 不共面　B. 平行　C. 垂直　D. 无确定关系

4_3.（　D　）电场强度$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t + \phi_e)$，磁场强度$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t + \phi_m)$，则电磁波能流密度的平均值$\vec{S}_{av}$为______。

A. $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos(\phi_e - \phi_m)$　　B. $\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos(\phi_e + \phi_m)$

C. $\dfrac{1}{2}\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos(\phi_e + \phi_m)$　　D. $\dfrac{1}{2}\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos(\phi_e - \phi_m)$

4_4.（　A　）已知某种媒质的复介电常数为$\varepsilon = (2 - \mathrm{j}0.1)\varepsilon_0$，该媒质的损耗角正

切为______。

A. 0.05　　B. –0.05　　C. tan(0.05)　　D. 20

6_3.（　D　）一均匀平面电磁波由理想介质垂直入射到理想导体上，分界面为 $z=0$ 的平面，入射波电场为 $\vec{E}_i=\vec{e}_y E_0\cos(\omega t-\beta z)$，反射波电场为 $\vec{E}_r=$______。

A. $\vec{e}_y E_0\cos(\omega t-\beta z)$　　B. $\vec{e}_y E_0\cos(\omega t+\beta z)$

C. $-\vec{e}_y E_0\cos(\omega t-\beta z)$　　D. $-\vec{e}_y E_0\cos(\omega t+\beta z)$

6_4.（　C　）平面电磁波从介电常数为 ε_1 的媒质 1 入射到介电常数为 ε_2 的媒质 2 中（$\varepsilon_1>\varepsilon_2$），当发生全反射时，入射角应该______。

A. 小于临界角　　B. 等于布儒斯特角

C. 大于等于临界角　　D. 大于布儒斯特角

4.1（　C　）坡印廷定理 $-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}+\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)\mathrm{d}V+\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V$ 中与损耗功率相关的是______。

A. $-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$　　B. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$

C. $\vec{E}\cdot\vec{J}$　　D. $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$

4_2. （　C　）已知电介质的介电常数为 $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$，该电介质的损耗角正切为______。

A. $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$　　B. $\tan\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$　　C. $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$　　D. $\tan\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$

6_1.（　B　）平行极化波在不同媒质分界面上无反射的条件是______。

A. 入射角大于布儒斯特角　　B. 入射角等于布儒斯特角

C. 入射角等于布儒斯特角　　D. 无法确定

6_2.（　B　）反射系数 Γ 与透射系数 τ 之间的关系为______。

A. $\Gamma+\tau=1$　　B. $1+\Gamma=\tau$　　C. $\Gamma\cdot\tau=1$　　D. $\tau/\Gamma=1$

二、　计算题

6_1. 一右旋圆极化波垂直入射至位于 $z=0$ 的理想导体板上，其电场强度的复数形式为

$$\vec{E}_i(z)=(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)E_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

(1) 确定反射波的极化；(2) 写出总电场强度的瞬时表达式；(3)求板上的感应面电流密度。

解：(1) 设反射波电场的复数形式为

$$\vec{E}_r(z)=(\vec{e}_xE_{rx}+\vec{e}_yE_{ry})e^{\mathrm{j}\beta z}$$

由理想导体表面电场所满足的边界条件，即在 z=0 时有

$$\left[\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)\right]\Big|_{z=0}=0 \qquad \text{（1 分）}$$

得 $\vec{E}_r(z)=(-\vec{e}_x+\mathrm{j}\vec{e}_y)E_me^{\mathrm{j}\beta z}$ （1 分）

这是一个沿$-z$ 方向传播的左旋圆极化波。 （1 分）

(2) z<0 区域的总电场强度为

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(z,t)&=\mathrm{Re}\left\{\left[\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)\right]e^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\left[(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)e^{-\mathrm{j}\beta z}+(-\vec{e}_x+\mathrm{j}\vec{e}_y)e^{\mathrm{j}\beta z}\right]E_me^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\left[-(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)\mathrm{j}2\sin(\beta z)\right]E_me^{\mathrm{j}\omega t}\right\}\\&=2E_m\sin(\beta z)[\vec{e}_x\sin(\omega t)-\vec{e}_y\cos(\omega t)]\end{aligned} \qquad \text{（2 分）}$$

(3) 由理想导体表面磁场所满足的边界条件：$\vec{e}_n\times\vec{H}_1=\vec{J}_S$，这里$\vec{e}_n=-\vec{e}_z$，则

$$\vec{J}_S=-\vec{e}_z\times\left[\vec{H}_i(z)+\vec{H}_r(z)\right]\Big|_{z=0} \qquad \text{（1 分）}$$

而

$$\vec{H}_i(z)=\frac{1}{\eta_0}\vec{e}_z\times\vec{E}_i(z)=(\mathrm{j}\vec{e}_x+\vec{e}_y)\frac{E_m}{\eta_0}e^{-\mathrm{j}\beta z} \qquad \text{（1 分）}$$

$$\vec{H}_r(z)=\frac{1}{\eta_0}(-\vec{e}_z)\times\vec{E}_r(z)=(\mathrm{j}\vec{e}_x+\vec{e}_y)\frac{E_m}{\eta_0}e^{\mathrm{j}\beta z} \qquad \text{（1 分）}$$

故

$$\vec{J}_S=-\vec{e}_z\times\left[(\mathrm{j}\vec{e}_x+\vec{e}_y)\frac{E_m}{\eta_0}+(\mathrm{j}\vec{e}_x+\vec{e}_y)\frac{E_m}{\eta_0}\right]=(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)\frac{2E_m}{\eta_0} \qquad \text{（2 分）}$$

4_1. 已知自由空间中时变电磁场的矢量位为

$$\vec{A}=\vec{e}_xA_m\sin(\omega t-kz)$$

其中 A_m、k 是常数，求：(1) 电场强度 $\vec{E}$；(2) 磁场强度 $\vec{H}$；(3) 坡印廷矢量 $\vec{S}$。

解：(1) 由洛仑兹条件 $\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$，可知：

$$\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{A}=0\Rightarrow\varphi=C$$ （2 分）

如果假设过去某一时刻，场还没有建立，那么 $C=0$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{e}_x\omega A_m\cos(\omega t-kz)$$ （2 分）

(2) 由于 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_y\dfrac{\partial A_x}{\partial z}=-\vec{e}_y kA_m\cos(\omega t-kz)$ （2 分）

故 $\vec{H}=-\vec{e}_y\dfrac{k}{\mu}A_m\cos(\omega t-kz)$ （1 分）

(3) 坡印廷矢量的瞬时值为

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$ （1 分）

$$=[-\vec{e}_x\omega A_m\cos(\omega t-kz)]\times\left[-\vec{e}_y\frac{k}{\mu}A_m\cos(\omega t-kz)\right]$$

$$=\vec{e}_z\frac{\omega k}{\mu}A_m^2\cos^2(\omega t-kz)$$ （2 分）

4_2. 在无源（$\rho=0$，$\vec{J}=0$）的自由空间中，已知时变电磁场的电场强度复矢量：

$$\vec{E}(z)=\vec{e}_yE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\quad \mathrm{V/m}$$

式中 k、E_0 为常数。求：(1) 磁场强度复矢量 $\vec{H}(z)$；(2) 瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}$；(3) 平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$。

解：(1) 由 $\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$，得 （1 分）

$$\vec{H}(z)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\vec{E}(z)=\vec{e}_x\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}(E_0e^{-\mathrm{j}kz})=-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-\mathrm{j}kz}$$ （2 分）

(2) 电场、磁场的瞬时值分别为

$$\vec{E}(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{E}(z)e^{j\omega t}]=\vec{e}_yE_0\cos(\omega t-kz)$$ （1 分）

$$\vec{H}(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{H}(z)e^{j\omega t}]=-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}\cos(\omega t-kz)$$ （1 分）

所以，瞬时坡印廷矢量$\vec{S}$为

$$\vec{S}(z,t)=\vec{E}(z,t)\times\vec{H}(z,t)=\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)$$ （2 分）

(3) 平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(z)\times\vec{H}^*(z)]$$ （1 分）

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_yE_0e^{-jkz}\times\left(-\vec{e}_x\frac{kE_0}{\omega\mu_0}e^{-jkz}\right)^*\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\right]=\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}$$ （2 分）

或
$$\vec{S}_{av}=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}(z,t)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}\cos^2(\omega t-kz)\mathrm{d}t=\vec{e}_z\frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0}$$

6_2. 一右旋圆极化波由空气向一理想介质平面（$z=0$）垂直入射，其中媒质的电磁参数分别为$\varepsilon_1=\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=9\varepsilon_0$，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。假设入射波的电场强度

$$\vec{E}_i=\frac{\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y}{\sqrt{2}}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1z}$$

其中，$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$\omega$为电磁波的角频率。求：(1) 反射波和透射波的电场强度，它们分别是何种极化波；(2) 反射波和透射波的相对平均功率密度。

解：(1) 由入射波的电场强度矢量$\vec{E}_i=\frac{\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y}{\sqrt{2}}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1z}$，可知反射波和透射波的电场强度矢量可表示为

$$\vec{E}_r=\frac{\varGamma}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)E_0e^{\mathrm{j}\beta_1z}$$

$$\vec{E}_t=\frac{\tau}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x-\mathrm{j}\vec{e}_y)E_0e^{-\mathrm{j}\beta_2z}$$

其中，$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=3\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。可知，反射波和透射波分别为左旋圆极化波和右旋圆极化波。（2 分）

由媒质的本征阻抗：$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$，$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$，可得上式中反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.5$$ （1 分）

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.5$$ （1 分）

故

$$\vec{E}_r = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \mathrm{j}\vec{e}_y)E_0 e^{\mathrm{j}\beta_1 z}$$ （1 分）

$$\vec{E}_t = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \mathrm{j}\vec{e}_y)E_0 e^{-\mathrm{j}\beta_2 z}$$ （1 分）

(2) 相对平均功率密度为

$$\left|\frac{\vec{S}_{av,r}}{\vec{S}_{av,i}}\right| = |\Gamma|^2 = 0.5^2 = 25\%$$ （2 分）

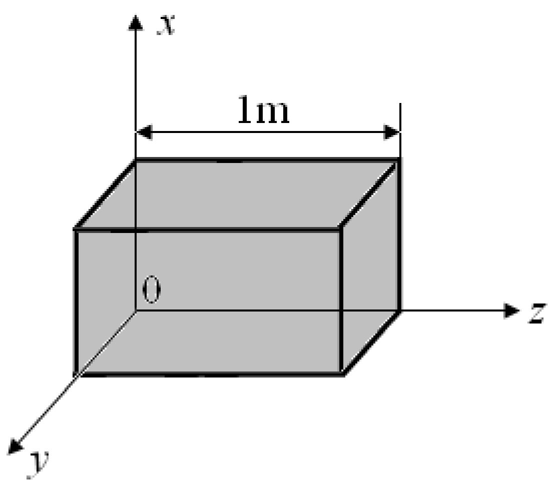
$$\left|\frac{\vec{S}_{av,t}}{\vec{S}_{av,i}}\right| = \frac{\eta_1}{\eta_2}|\tau|^2 = 1 - |\Gamma|^2 = 1 - 0.25 = 75\%$$ （2 分）

4_3. 自由空间中的电磁场为

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x 1000\cos(\omega t - kz) \qquad \text{V/m}$$

$$\vec{H}(z,t) = \vec{e}_y 2.65\cos(\omega t - kz) \qquad \text{A/m}$$

式中 $k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 0.42$ rad/m。求：(1) 瞬时坡印廷矢量 $\vec{S}$；(2) 平均坡印廷矢量 $\vec{S}_{av}$；(3) 任一时刻流入如图所示的平行六面体（长 1m、横截面积 0.25m^2）中的净功率。



解：(1) 瞬时坡印廷矢量为

$$\vec{S}(z,t)=\vec{E}(z,t)\times\vec{H}(z,t) \qquad （1 分）$$

$$=\vec{e}_z 2650\cos^2(\omega t-kz)\ \ \mathrm{W/m^2} \qquad （2 分）$$

(2) 平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av}=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\vec{S}(z,t)\mathrm{d}t \qquad （1 分）$$

$$=\vec{e}_z\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}2650\cos^2(\omega t-kz)\mathrm{d}t=\vec{e}_z 1325\ \ \mathrm{W/m^2} \qquad （2 分）$$

或 由 $\vec{E}(z)=\vec{e}_x 1000\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ V/m 和 $\vec{H}(z)=\vec{e}_y 2.65\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$ A/m，则

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(z)\times\vec{H}^*(z)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\vec{e}_z 2650=\vec{e}_z 1325\ \ \mathrm{W/m^2}$$

(3) 任一时刻流入如图所示的平行六面体中的净功率为

$$P=-\oint_S\left[\vec{E}(z,t)\times\vec{H}(z,t)\right]\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\oint_S\vec{S}(z,t)\cdot\vec{e}_n\mathrm{d}S \qquad （2 分）$$

$$=-\left[\vec{S}(z,t)\cdot(-\vec{e}_z)\Big|_{z=0}+\vec{S}(z,t)\cdot\vec{e}_z\Big|_{z=1}\right]\times 0.25$$
$$=-270.2\sin(2\omega t-0.42)\ \ \mathrm{W} \qquad （2 分）$$

6_4. 均匀平面波从空气中垂直入射到厚度 $d_2=\dfrac{\lambda_2}{8}$ m 的聚丙烯（$\varepsilon_{r2}=2.25$、$\mu_{r2}=1$、$\sigma_2=0$）平板上。求：(1) 入射波能量被反射的百分比；(2) 空气中的驻波比。

解：(1) 本题讨论的是均匀平面波对三层不同媒质的垂直入射，其中上、下的媒质 1 和媒质 3 为空气，中间的媒质 2 为聚丙烯。可知：$\eta_1=\eta_3=\eta_0$，

$$\eta_2=\frac{\eta_0}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}=\frac{2}{3}\eta_0\text{，而 }\beta_2 d_2=\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{8}=\frac{\pi}{4} \qquad （2 分）$$

那么在反射面（空气与聚丙烯的分界面）处的等效波阻抗为

$$\eta_{ef}=\eta_2\frac{\eta_3+\mathrm{j}\eta_2\tan(\beta_2 d_2)}{\eta_2+\mathrm{j}\eta_3\tan(\beta_2 d_2)}=\eta_2\frac{\eta_3+\mathrm{j}\eta_2}{\eta_2+\mathrm{j}\eta_3}=\eta_0\frac{6+\mathrm{j}4}{6+\mathrm{j}9} \qquad （2 分）$$

而反射系数为

$$\varGamma=\frac{\eta_{ef}-\eta_1}{\eta_{ef}+\eta_1}=\frac{-\mathrm{j}5}{12+\mathrm{j}13} \qquad （2 分）$$

故入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}}=|\Gamma|^2=\left|\frac{-\mathrm{j}5}{12+\mathrm{j}13}\right|^2\approx 7.99\% \qquad （2 分）$$

(2) 空气中的驻波比为

$$S=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\frac{|12+\mathrm{j}13|+5}{|12+\mathrm{j}13|-5}\approx 1.79 \qquad （2 分）$$

6_5. 有一频率为 100MHz、沿 y 方向极化的均匀平面波从空气（x<0 区域）中垂直入射到位于 x=0 的理想导体板上。设入射波电场 $\vec{E}_i$ 的振幅为 10V/m，求：(1) 入射波电场 $\vec{E}_i$ 和磁场 $\vec{H}_i$ 的复矢量；(2) 反射波电场 $\vec{E}_r$ 和磁场 $\vec{H}_r$ 的复矢量；(3) 合成波电场 $\vec{E}_1$ 和磁场 $\vec{H}_1$ 的复矢量。

解：(1) 已知入射波频率为 $f=100$ MHz，则 $\omega=2\pi f=2\pi\times10^8$ rad/s，

$\beta=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}=\dfrac{2\pi}{3}$ rad/m，$\eta_1=\eta_0=120\pi\,\Omega$。那么入射波电场和磁场的复矢量为

$$\vec{E}_i(x)=\vec{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\ \ \mathrm{V/m} \qquad （2 分）$$

$$\vec{H}_i(x)=\frac{1}{\eta_1}\vec{e}_x\times\vec{E}_i(x)=\vec{e}_z\frac{1}{12\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\ \ \mathrm{A/m} \qquad （2 分）$$

(2) 由于此时的反射系数 $\Gamma=-1$，则反射波电场和磁场的复矢量为

$$\vec{E}_r(x)=-\vec{e}_y 10\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\ \ \mathrm{V/m} \qquad （2 分）$$

$$\vec{H}_r(x)=\frac{1}{\eta_1}(-\vec{e}_x)\times\vec{E}_r(x)=\vec{e}_z\frac{1}{12\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}x}\ \ \mathrm{A/m} \qquad （2 分）$$

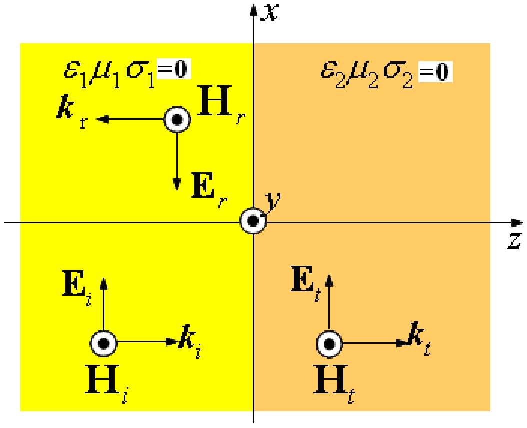
(3) 合成波电场和磁场的复矢量为

$$\vec{E}_1(x)=\vec{E}_i(x)+\vec{E}_r(x)=-\vec{e}_y\mathrm{j}20\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\ \ \mathrm{V/m} \qquad （1 分）$$

$$\vec{H}_1(x)=\vec{H}_i(x)+\vec{H}_r(x)=\vec{e}_z\frac{1}{6\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\ \ \mathrm{A/m} \qquad （1 分）$$

6_3. 频率为 $f=300$ MHz 的线极化均匀平面波，其电场强度的振幅为 2V/m，从

空气垂直入射到$\varepsilon_r = 4$、$\mu_r = 1$的理想介质平面上，如图所示。求：(1) 反射系数、透射系数和驻波比；(2) 入射波、反射波和透射波的电场和磁场。



解：(1) 由波阻抗$\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$和$\eta_2 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi$，则反射系数、透射系数和驻波比分别为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}$$ （1 分）

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$ （1 分）

$$S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = 2$$ （2 分）

(2) 根据已知参数，可知：波长$\lambda_1 = \dfrac{c}{f} = 1\text{m}$，$\lambda_2 = \dfrac{v_2}{f} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}\,f} = 0.5\text{m}$，而波数$k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1} = 2\pi \ \ \text{rad/m}$，$k_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi \ \ \text{rad/m}$。那么入射波、反射波和透射波的电场和磁场分别为

$$\vec{E}_i = \vec{e}_x 2e^{-\mathrm{j}2\pi z}$$ （1 分）

$$\vec{H}_i = \vec{e}_y \frac{2}{\eta_1} e^{-\mathrm{j}2\pi z} = \vec{e}_y \frac{1}{60\pi} e^{-\mathrm{j}2\pi z}$$ （1 分）

$$\vec{E}_r = \vec{e}_x 2\Gamma e^{\mathrm{j}2\pi z} = -\vec{e}_x \frac{2}{3} e^{\mathrm{j}2\pi z}$$ （1 分）

$$\vec{H}_r = \vec{e}_y \frac{2}{3\eta_1} e^{\mathrm{j}2\pi z} = \vec{e}_y \frac{1}{180\pi} e^{\mathrm{j}2\pi z}$$ （1 分）

$$\vec{E}_t = \vec{e}_x 2\tau e^{-\mathrm{j}4\pi z} = \vec{e}_x \frac{4}{3} e^{-\mathrm{j}4\pi z}$$ （1 分）

$$\vec{H}_t = \vec{e}_y \frac{4}{3\eta_2} e^{-\mathrm{j}4\pi z} = \vec{e}_y \frac{1}{45\pi} e^{-\mathrm{j}4\pi z}$$ （1 分）

6_6. 一均匀平面波自空气中垂直入射到半无限大的无耗介质表面上，已知空气中合成波的驻波比为 3，介质内透射波的波长是空气中波长的 1/6，且介质表面上为合成波电场的最小点。求：(1) 介质的相对介电常数ε_r；(2) 介质的相对磁导率μ_r。

解：因为驻波比为

$$S = \frac{1+|\varGamma|}{1-|\varGamma|} = 3$$ （1 分）

所以可以解出 $|\varGamma| = \frac{1}{2}$

由于介质表面上是合成波电场的最小点，故 $\varGamma = -\frac{1}{2}$ （1 分）

而反射系数为$\varGamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$，式中$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi$，于是有

$$\eta_2 = \frac{1}{3}\eta_0$$ （2 分）

又因为

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta_0$$

所以得到 $\frac{\mu_r}{\varepsilon_r} = \frac{1}{9}$ （2 分）

已知介质中的波长为

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{6}$$

可得 $\mu_r \varepsilon_r = 36$ （2 分）

联立$\begin{cases} \frac{\mu_r}{\varepsilon_r} = \frac{1}{9} \\ \mu_r \varepsilon_r = 36 \end{cases}$，解得$\varepsilon_r = 18$，$\mu_r = 2$ （2 分）

4_4. 在横截面为$a \times b$的矩形金属波导中，电磁场的复矢量为

$$\vec{E}=-\vec{e}_y \mathrm{j}\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\qquad \mathrm{V/m}$$

$$\vec{H}=\left[\vec{e}_x \mathrm{j}\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\vec{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\qquad \mathrm{A/m}$$

式中H_0、ω、μ和β都是实常数。求：(1) 瞬时坡印廷矢量$\vec{S}$；(2) 平均坡印廷矢量$\vec{S}_{av}$。

解：(1) 电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{H}$的瞬时矢量分别为

$$\vec{E}(x,z,t)=\mathrm{Re}\left[-\vec{e}_y \mathrm{j}\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=\vec{e}_y\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-\beta z)\ \mathrm{V/m}$$

（2 分）

$$\vec{H}(x,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\left[\vec{e}_x \mathrm{j}\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\vec{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

$$=-\vec{e}_x\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\omega t-\beta z)$$

（2 分）

$$+\vec{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t-\beta z)\ \mathrm{A/m}$$

故瞬时坡印廷矢量为

$$\vec{S}(x,z,t)=\vec{E}(x,z,t)\times\vec{H}(x,z,t)$$

（1 分）

$$=\vec{e}_z\omega\mu\beta\left(\frac{a}{\pi}H_0\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2(\omega t-\beta z)$$

$$+\vec{e}_x\frac{a\omega\mu}{4\pi}H_0{}^2\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin(2\omega t-2\beta z)\ \mathrm{W/m^2}$$

（2 分）

(2) 平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}(x,z)\times\vec{H}^*(x,z)\right]$$

（1 分）

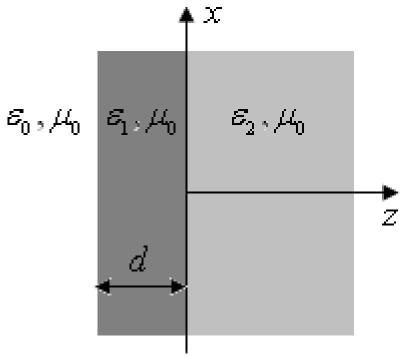
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\vec{e}_y \mathrm{j}\omega\mu\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\times\left[-\vec{e}_x \mathrm{j}\beta\frac{a}{\pi}H_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\vec{e}_z H_0\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right\}$$

$$=\vec{e}_z\frac{\omega\mu\beta}{2\pi^2}a^2H_0{}^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\ \ \mathrm{W/m^2}$$

（2 分）

三、 证明题

6_2. 如图所示，$z>0$区域的媒质的介电常数为ε_2，在此媒质前置有厚底为d、介电常数为ε_1的介质板。对于一个从左侧垂直入射来的 TEM 波，证明：当$\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$、$d=\dfrac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$时（$\lambda$为自由空间的波长），没有反射。



证：媒质 1 中的波阻抗为

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}}=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$ （1 分）

而媒质 2 中的波阻抗为

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}}=\frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$$ （1 分）

当$\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$时，$\eta_1{}^2=\dfrac{\eta_0{}^2}{\varepsilon_{r1}}=\eta_0\dfrac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}=\eta_0\eta_2$ （2 分）

在分界面$z=-d$处的等效波阻抗为

$$\eta_{ef}=\eta_1\frac{\eta_2+\mathrm{j}\eta_1\tan(\beta_1 d)}{\eta_1+\mathrm{j}\eta_2\tan(\beta_1 d)}$$ （1 分）

当$d=\dfrac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$，即$d=\dfrac{c}{4f\sqrt{\varepsilon_{r1}}}=\dfrac{1}{4f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}}=\dfrac{v_1}{4f}=\dfrac{\lambda_1}{4}$（$\lambda_1$为媒质 1 中的波长）

时，$\tan(\beta_1 d)=\tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_1}\dfrac{\lambda_1}{4}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\to\infty$ （1 分）

则有 $\eta_{ef}=\dfrac{\eta_1{}^2}{\eta_2}$ （2 分）

而在分界面$z=-d$处的反射系数为

$$\varGamma=\frac{\eta_{ef}-\eta_0}{\eta_{ef}+\eta_0}=0 \qquad \text{(2 分)}$$

故当$\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$、$d=\dfrac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$时，分界面$z=-d$处没有反射。

6_1. 证明：均匀平面波从一种本征阻抗为η_1的无耗媒质垂直入射至另一种本征阻抗为η_2的无耗媒质的平面上，两种媒质中功率密度的时间平均值相等。

证：设平面波的传播方向为$\vec{e}_z$，则媒质 1 中功率密度平均值为

$$\vec{S}_{1av}=\vec{S}_{iav}+\vec{S}_{rav} \qquad \text{(1 分)}$$

$$=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_1}\left|\vec{E}_i\right|^2-\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_1}\left|\vec{E}_r\right|^2=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_1}\left|\vec{E}_i\right|^2(1-\varGamma^2) \qquad \text{(2 分)}$$

而媒质 2 中功率密度平均值为

$$\vec{S}_{2av}=\vec{S}_{tav} \qquad \text{(1 分)}$$

$$=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_2}\left|\vec{E}_t\right|^2=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_2}\left|\vec{E}_i\right|^2\tau^2=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_2}\left|\vec{E}_i\right|^2(1+\varGamma)^2 \qquad \text{(2 分)}$$

可得 $\left|\dfrac{\vec{S}_{1av}}{\vec{S}_{2av}}\right|=\dfrac{\eta_2(1-\varGamma^2)}{\eta_1(1+\varGamma)^2}=\dfrac{\eta_2(1-\varGamma)}{\eta_1(1+\varGamma)}$ （2 分）

将$\varGamma=\dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$代入上式，可得 $\left|\dfrac{\vec{S}_{1av}}{\vec{S}_{2av}}\right|=1$ （1 分）

故 $\vec{S}_{1av}=\vec{S}_{2av}$ （1 分）

4_1. 证明：矢量函数$\vec{E}=\vec{e}_xE_0\cos\left(\omega t-\dfrac{\omega}{c}x\right)$满足真空中的无源波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

其中$c^2=\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$，$E_0$为常数，但不满足麦克斯韦方程。

证：因为

$$\nabla^2 \vec{E} = \vec{e}_x E_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right] = -\vec{e}_x E_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \qquad \text{（2 分）}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{e}_x E_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right] = -\vec{e}_x E_0 \omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \qquad \text{（2 分）}$$

所以

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{e}_x E_0 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) + \frac{1}{c^2}\vec{e}_x E_0 \omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = 0 \qquad \text{（2 分）}$$

即矢量函数 $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$满足波动方程 $\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$。 （1 分）

另外，$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right] = E_0 \frac{\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \neq 0$ （2 分）

而无源的真空中 $\vec{E}$ 应满足的 Maxwell 方程为 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$，故矢量函数 $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$不满足麦克斯韦方程。 （1 分）

4_3. 已知真空中两个沿 z 方向传播的电磁波的电场为

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{1m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E_{2m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$

其中 ϕ 为常数，$k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$。证明：总的平均坡印廷矢量等于两个波的平均坡印廷矢量之和。

证：由 $\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \vec{H}$，可得这两个波的磁场复矢量为

$$\vec{H}_1 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E}_1 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{e}_x E_{1m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} = \vec{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad \text{（1 分）}$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E}_2 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \vec{e}_y E_{2m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)} = -\vec{e}_x \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{2m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)} \qquad \text{（1 分）}$$

所以这两个波的平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{1av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{e}_x E_{1m} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \times \vec{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\right) = \vec{e}_z \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_{1m}{}^2 \qquad \text{（2 分）}$$

$$\vec{S}_{2av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}_2\times\vec{H}_2^{\ *}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(-\vec{e}_yE_{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}\times\vec{e}_x\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(kz-\phi)}\right)$$

$$=\vec{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2m}^{\ \ 2}$$

（2 分）

合成波电场和磁场复矢量为

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_{1m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\vec{e}_yE_{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$ （1 分）

$$\vec{H}=\vec{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\vec{e}_x\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$ （1 分）

所以总的平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\left[\vec{e}_xE_{1m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\vec{e}_yE_{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}\right]\times\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\vec{e}_yE_{1m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}-\vec{e}_xE_{2m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(kz-\phi)}\right]\right\}$$ （2 分）

$$=\vec{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(E_{1m}^{\ \ 2}+E_{2m}^{\ \ 2}\right)$$

由此可见 $\vec{S}_{av}=\vec{S}_{1av}+\vec{S}_{2av}$

4_2. 已知无源的真空中电磁波的电场

$$\vec{E}=\vec{e}_xE_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\qquad \mathrm{V/m}$$

证明：$\vec{S}_{av}=\vec{e}_zw_{av}c$，其中 w_{av} 是电磁场能量密度的时间平均值，$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ 为电磁波在真空中的传播常数。

证：电场强度复矢量为 $\vec{E}=\vec{e}_xE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}$ （2 分）

由 $\nabla\times\vec{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\vec{H}$，可得磁场强度复矢量为 （1 分）

$$\vec{H}=\frac{\nabla\times\vec{E}}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\times\vec{e}_xE_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}=\vec{e}_y\frac{1}{\mu_0c}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}=\vec{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{c}z}$$ （2 分）

所以

$$\vec{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)=\vec{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^{\ 2}$$ （2 分）

而电磁场能量密度的时间平均值为

$$w_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T(w_e+w_m)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}^*+\mu_0\vec{H}\cdot\vec{H}^*)$$

$$=\frac{1}{4}(\varepsilon_0 E_0{}^2+\mu_0\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}E_0{}^2)=\frac{\varepsilon_0 E_0{}^2}{2}$$ （2 分）

由于$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=\varepsilon_0 c$，故有

$$\vec{S}_{av}=\vec{e}_z\frac{\varepsilon_0 c}{2}E_0{}^2=\vec{e}_z w_{av}c$$ （1 分）