一、单项选择题

1. （ B ）在电磁场中，通常采用的洛仑兹条件为______________。

A. $\nabla \cdot \vec{A} = 0$　　B. $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$　　C. $B = \nabla \times \vec{A}$　　D. $\nabla \cdot \vec{A} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

2. (A)两个相互平行的导体板构成一个电容器，其电容与__________无关。

A．导体板上的电荷　　B．平板间的介质

C．导体板的几何形状　　D．两个导体板的相对位置

3. （ D ）引入磁矢势描述恒定磁场的依据是__________。

A. $\nabla \times \vec{H} = 0$　　B. $\nabla \cdot \vec{H} = 0$　　C. $\nabla \times \vec{B} = 0$　　D. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

4. （ C ）电磁感应定律可以表示为_____________。

A. $\oint_c \vec{E} \times d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$　　B. $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS$

C. $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$　　D. $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times d\vec{S}$

5（ A ）电流密度为 $\vec{J}$ 的恒定电流产生磁场的磁矢位可以表示为_________。

A. $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_V \dfrac{\vec{J}}{R} dV$　　B. $\vec{A} = \dfrac{1}{4\pi\mu_0}\int_V \dfrac{\vec{J}}{R} dV$

C. $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_S \dfrac{\vec{J}}{R} \times d\vec{S}$　　D. $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_S \dfrac{\vec{J}}{R} \cdot d\vec{S}$

6(A)导电媒质中的恒定电场 $\vec{E}$ 满足__________。

A. $\nabla \times \vec{E} = 0$　　B. $\nabla \cdot \vec{E} = 0$　　C. $\nabla \times \vec{E} = \vec{J}$　　D. $\nabla \cdot \vec{E} = \rho$

7(A)下面哪个适合于恒定磁场_____________。

A. $\nabla \cdot \vec{B} = 0$　　B. $\nabla \times \vec{B} = 0$　　C. $\nabla B = 0$　　D. $\nabla^2 B = 0$

8（ D ）用镜像法求解电场边值问题时，判断镜像电荷的选取是否正确的根据是__________。

A．镜像电荷是否对称　　B．电位 Φ 所满足的方程是否改变

C．边界条件是否保持不变　　D．同时选择 B 和 C

9（ C ）下面说法表明恒定磁场有旋性质的是_____________。

A. $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$　　B. $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

C. $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$　　D. $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

10(A)线性介质中磁场的能量密度为__________。

A. $\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}$　　C. $\vec{B}\cdot\vec{H}$　　D. $\vec{A}\cdot\vec{J}$

11(　D　)磁矢位与磁感应强度方向的关系为________。

A．方向相反　B．互相平行　　C．互相垂直　　D．方向相同

12（　B　）在静态电磁场中，通常采用的库仑条件为_______________。

A．$\nabla\cdot\vec{A}=0$　　B．$\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$　　C．$B=\nabla\times\vec{A}$　　D．$\nabla\cdot\vec{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$

13（B　）静电场的电场强度$\vec{E}$与电位φ的关系为________________。

A．$\vec{E}=\nabla\times\varphi$　　B．$\vec{E}=-\nabla\varphi$　　C．$\vec{E}=\nabla\cdot\varphi$　　D．$\vec{E}=\nabla^2\varphi$

14(　A　)下列说法适用于恒定磁场的是_____________。

A．$\nabla\cdot\vec{B}=0$　　B．$\nabla\times\vec{B}=0$　　C．$\nabla B=0$　　D．$\nabla^2 B=0$

15(　D　)已知某区域 V 中电场强度$\vec{E}$满足$\nabla\cdot\vec{E}=0$，下列结论正确的是__________。

A．$\vec{E}$为时变场　　　　B．$\vec{E}$为静电场

C．V 中电荷均匀分布　　　D．V 中电荷处处为零

16（　C　）点电荷q置于两个半无限大接地导体平面垂直相交的区域中，则需要引入__________个镜像电荷才能使导体平面上的电位为零。

A．4　　　B．5　　　C．3　　　D．2

17（　D　）用镜像法求解电场边值问题时，判断镜像电荷的选取是否正确的根据是__________。

A．镜像电荷是否对称　　　　B．电位 Φ 所满足的方程是否改变

C．边界条件是否保持不变　　D．同时选择 B 和 C

18（ A　）恒定磁场的能量可用矢势表示为__________。

A. $\frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}dv$　　B. $\frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{E}dv$　　C. $\frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{B}dv$　　D. $\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}dv$

19（　D ）电容的大小与什么因素有关__________。

A. 电荷量q和导体系统的物理尺度

B. 导体系统周围电介质的特性参数和电位差U

C. 电荷量q和电位差U

D. 导体系统的物理尺度及周围电介质的特性参数

20（ A ）虚位移法求解电场力时可分为两种情况，下列说法正确的是______________。

A．保持各个带电体电荷量不变时，外源对系统做功为零

B. 保持各个带电体电荷量不变时，外源对系统做功不为零

C. 保持各个带电体电位不变时，外源对系统做功为零

D. 保持各个带电体电荷量不变时，外源对系统所做的功等于系统电场能量的增量

21（ C ）下列说法中，哪项是引入磁标位描述磁场的条件_________。

A．磁化电流 $J_m = 0$　　　　B．极化电流 $J_P = 0$

C．位移电流 $J_D = 0$　　　　D．静磁场且传导电流为零

22（ D ）电位差反映了电场空间中不同位置处电位的变化量。电场空间中 M、N 两点之间的电位差_________。

A．是相对值，与 M、N 两点位置无关

B．将单位正电荷从 M 点沿任意路径移动到 N 点过程中电场力所做的功

C．与电位参考点的选择有关

D．将单位正电荷从 N 点移动到 M 点过程中电场力所做的功

23（ B ）点电荷 q 对不接地球面导体(点电荷 q 位于球面外)的镜像电荷有__________个。

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

24 (C)两个导体回路间的互感与__________有关。

A．导体上所带的电流　　　B．空间磁场分布

C．两导体的相对位置　　　D．同时选 A，B 和 C

25（ C ）下面关于电位函数的描述正确的一项是______。

A．空间各点电位具有确定值；

B．根据需要，同一个问题可以有两个电位参考点；

C．电位参考点电位一般为零；

D．对于无限长线电荷的电位，其电位参考点位于无穷远点

26 (C)静电场在边界形状完全相同的两个区域 V1 和 V2 上，满足相同的边界条件，则 V1 和 V2 中的场分布__________。

A．相同　　　B．不相同　　　C．无法确定　　　D．取决于区域的性质

27（ A ）静电场和恒定电场中引入电位函数的根据是______。

A．两者都是无旋场　　　B．两者都是无散场

C．两者都是有散场　　　D．两者都是有旋场

28（　C　）对于恒定磁场，可以引入矢量磁位 $\vec{A}$，并令 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ 的依据是______________。

A．$\nabla\times\vec{B}=0$　B．$\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}$　C．$\nabla\cdot\vec{B}=0$　D．$\nabla B=0$

29（　B　）磁场能量密度可以表示为 _____________。

A．$w_m=\frac{1}{2}\vec{J}\cdot\vec{A}$　B．$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$

C．$w_m=\frac{1}{2}\vec{J}\cdot\vec{A}$或$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$　D．$w_e=\frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}\right|^2$

30(C　)已知单位长度的通电直导线，电流强度为 I，其内部磁能为 $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$，单位长度的内自感为__________。

A.　$\mu_0/(16\pi)$　B.　$\mu_0/(4\pi)$　C.　$\mu_0/(8\pi)$　D.　$\mu_0/(32\pi)$

31（　D　）关于静电场能量的表示，下列说法正确的是__________。

A．$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i q_i$ 表示点电荷系的互能，其中 φ_i 是点电荷 q_i 所在处的电位。

B．$W_e=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV$ 表示分布电荷系统的能量，只有电荷密度不为零的区域才对积分有贡献。

C．$W_e=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV$ 表示连续分布电荷系统的能量，适用于静电场和时变电磁场。

D．$W_e=\frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}dV$ 适用于静电场和时变电磁场。

32（　A　）点电荷 q 位于一个半径为 a 的不接地导体球外，与球心距离为 d，下列关于镜像电荷的电量和位置的说法错误的是__________。

A．$q'=-\frac{a}{d}q\quad d'=\frac{a}{d}$　B．$q'=-\frac{a}{d}q\quad d'=\frac{a^2}{d}$

C．$q''=\frac{a}{d}q\quad d''=0$(即位于球心)　D．$q'=-q''$

33（　B　）电场能量密度可以表示为 _____________。

A．$w_e=\frac{1}{2}\rho\varphi$　B．$w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$

C．$w_e=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$或$w_e=\frac{1}{2}\rho\varphi$　D．$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2$

34（　B　）点电荷q位于一个半径为a的不接地导体球外，则下列说法正确的是________。

A. 球上总的感应电荷不为零

B. 球上总的感应电荷为零

C. 导体球面是一个电位为零的等位面

D. 球上总的感应电荷与点电荷q等值异号

35(　D　)恒定磁场的泊松方程$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$成立的条件是_________。

A．介质分区均匀　　　　B.任意介质

C.各向同性线性介质　　　　D.介质分区均匀且$\nabla\cdot\vec{A}=0$

36（　D　）电位差反映了电场空间中不同位置处电位的变化量，电场空间中M、N两点之间的电位差表示________。

A．是相对值，与M、N两点位置无关

B．将单位正电荷从M点沿任意路径移动到N点过程中电场力所做的功

C．与电位参考点的选择有关

D．将单位正电荷从N点移动到M点过程中电场力所做的功

37(　B　)对于一个恒定磁场$\vec{B}$，矢势$\vec{A}$有多种选择性是因为_________。

A. $\vec{A}$的旋度的散度始终为零　　B.在定义$\vec{A}$时只确定了其旋度而没有定义$\vec{A}$散度

C. $\vec{A}$的散度始终为零　　D. $\vec{A}$的散度为常数

38(　A　)点电荷q位于两种电介质1和2分界面的上方h处的介质1中（介质2在下，介质1在上，取分界面上方的距离为正，下方为负），则下面关于该点电荷在这两种电介质中的镜像电荷的电荷量和位置，错误的一项是______________。

A. 介质2中的镜像电荷$q''=-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \quad d''=-2h$

B. 介质1中的镜像电荷$q'=\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \quad d'=h$

C. 介质2中的镜像电荷$q''=-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \quad d''=-h$

D. $q' = -q''$

39（　D　）导电媒质中恒定电场满足的边界条件是__________。

A．$D_{1n}=D_{2n}$　　　B．$J_{1n}=J_{2n}$　　　C．$E_{1t}=E_{2t}$　　D．同时选择 B 和 C

40（　D　）下列关于静电场和恒定电场的说法正确的是_________。

A．静电场是保守场，恒定电场不是保守场

B. 静电场不能存在于理想导体内部，恒定电场可以存在于理想导体内部

C. 二者的源都是静止电荷

D. 静电场只能存在于导体外，恒定电场可以存在于非理想导体内

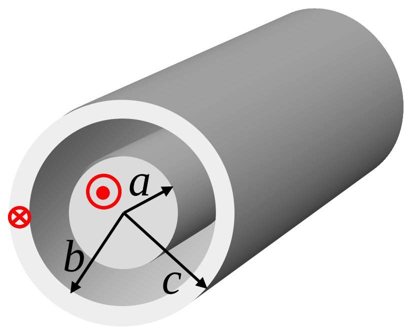
三、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1 已知同轴电缆的内导体半径为 a，外导体的内、外半径分别为 b 和 c，如图所示。导体中通有电流 I，试求：

（1）同轴电缆中的磁场强度分布；（3 分）

（2）单位长度储存的磁场能量；（4 分）

（3）单位长度自感。（4 分）



解：由安培环路定律，得

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \dfrac{\rho I}{2\pi a^2} & 0<\rho<a \\ \vec{e}_\phi \dfrac{I}{2\pi\rho} & a<\rho<b \\ \vec{e}_\phi \dfrac{I}{2\pi\rho}\dfrac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2} & b<\rho<c \\ 0 & \rho>c \end{cases}$$ （3 分）

三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2}\int_0^a \left(\frac{\rho I}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$ （1 分）

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2}\int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\rho}\right)^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$ （1 分）

$$W_{m3}=\frac{\mu_0}{2}\int_b^c(\frac{I}{2\pi\rho})^2(\frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2})^2 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ （1 分）

单位长度内总的磁场能量为

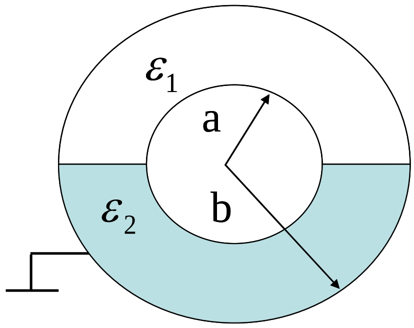
$$W_m=W_{m1}+W_{m2}+W_{m3}$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ （1 分）

单位长度的总自感为

$$L=\frac{2W_m}{I^2}=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}+\frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{c^4}{(c^2-b^2)^2}\ln\frac{c}{b}-\frac{3c^2-b^2}{4(c^2-b^2)}\right]$$ （4 分）

2 已知一球形电容器内导体半径为 a，外球壳半径为 b，球壳间充满介电常数为ε_1和ε_2的两种均匀媒质。假设内导体所带电荷为 q，外球壳接地，试求球壳间的电场和电位的分布。



解：在介质分界面上，由边界条件：

$$E_{1t}=E_{2t}$$ （1 分）

即电场强度的切向分量连续。

又由于电场强度平行于介质的分界面，故介质两边的电场强度相等。 （1 分）

由高斯定理

$$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=q$$ （1 分）

$$2\pi r^2=(D_1+D_2)=q$$ （1 分）

$$2\pi r^2=(\varepsilon_1 E+\varepsilon_2 E)=q$$ （1 分）

解得 $\vec{E}=\dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\vec{e}_r$ （2 分）

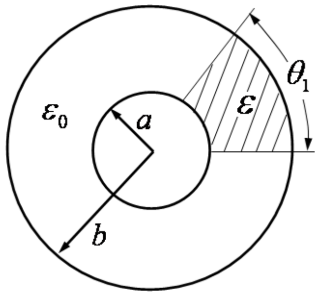
电位分布 $\varphi(r)=\int_r^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{b})$ （3 分）

3 同轴线内外导体半径分别为 a、b，导体间部分填充介质，介电常数为 ε，如图所示。已知内外导体间电压为 U，试求：

（1）内导体单位长度带电量（线电荷密度）ρ_l；（4 分）

（2）导体间的 $\vec{E}$ 分布；（2 分）

（3）导体间单位长度内的电场能量。（4 分）



解：在介质分界面上，由边界条件：

$E_{1t}=E_{2t}$ （1 分）

即电场强度的切向分量连续。

又由于电场强度平行于介质的分界面，故介质两边的电场强度相等。 （1 分）

由高斯定理

$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=Q$

即 $\theta_1 rl\varepsilon E+(2\pi-\theta_1)rl\varepsilon_0 E=Q$ （1 分）

解得 $\vec{E}=\dfrac{\rho_l}{[\theta_1\varepsilon+(2\pi-\theta_1)\varepsilon_0]r}\vec{e}_r$ （1 分）

$U=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\dfrac{\rho_l}{[\theta_1\varepsilon+(2\pi-\theta_1)\varepsilon_0]}\ln\dfrac{b}{a}$ （1 分）

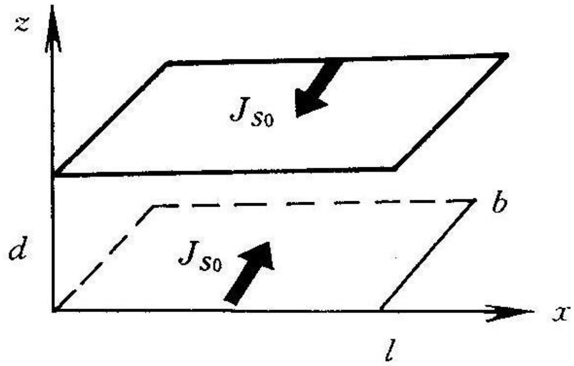
$\rho_l=\dfrac{[\theta_1\varepsilon+(2\pi-\theta_1)\varepsilon_0]U}{\ln b-\ln a}$ （2 分）

$\vec{E}=\dfrac{U}{\ln b-\ln a}\vec{e}_r$ （1 分）

由于$W_e=\frac{1}{2}\sum_i q_i U_i$

解得$W_e=\frac{1}{2}\rho_l U=\frac{1}{2}\frac{[\theta_1\varepsilon+(2\pi-\theta_1)\varepsilon_0]U^2}{\ln b-\ln a}$ （2 分）

4 设两导体平面的长为 l，宽为 b，间隔为 d，上、下面分别有方向相反的面电流 $\vec{J}_{S0}$。设 $b>>d, l>>d$，试求：



（1） 两导体板之间磁感应强度；（2 分）

（2） 两导体板之间磁场强度；（2 分）

（3） 两导体板之间储存的磁场能；（2 分）

（4） 上导体板面电流所受的力。（4 分）

解：考虑到两导体板间隔远小于其尺寸，因此可以看成无限大面电流。

由安培环路定律可得两导体板之间磁感应强度为$\vec{B}_x=\mu_0\vec{J}_{S0}$， （1 分）

导体外磁感应强度为零。 （1 分）

两导体板之间磁场强度为$\vec{H}_x=\vec{J}_{S0}$， （1 分）

导体外磁场强度为零。 （1 分）

两导体板之间储存的磁场能量$W_m=\frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV$ （1 分）

即$W_m=\frac{1}{2}BHV=\frac{1}{2}\mu_0 J_{S0}^2 lbz$ （1 分）

用虚位移法计算上面的导体板受力时，假设两板间隔为一变量 z。

假定上导体板位移时，电流不变，则其受力为：

$F_z=\frac{\partial W_m}{\partial z}=\frac{1}{2}\mu_0 J_{S0}^2 lb$ （2 分）

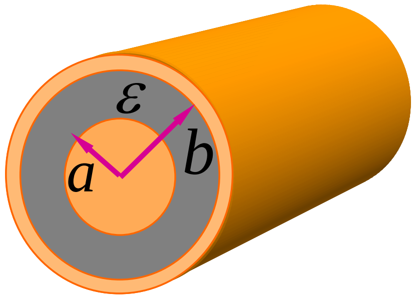
这个力为斥力，即上导体板面电流所受力的方向沿+z 方向。 （2 分）

5

已知同轴线的内外导体半径分别为 a 和 b，内外导体间充满介电常数为 ε 的均匀介质，如图所示。试求：

（1）同轴线内外导体间的电场强度；（5 分）

（2）同轴线单位长度的电容。（5 分）



解：设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$。

应用高斯定理： $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho_l l$ （2 分）

得到内外导体间任一点的电场强度为 $\vec{E}(r) = \vec{e}_r \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon r}$ （3 分）

内外导体间的电位差：

$$U = \int_a^b \vec{E}(r)\bullet\vec{e}_r \mathrm{dr} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{1}{r}\mathrm{dr}$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)$$

（2 分）

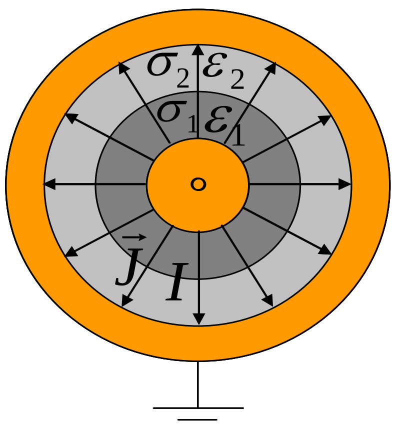
故得同轴线单位长度的电容为 $C_1 = \dfrac{\rho_l}{U} = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$ F/m （3 分）

6 填充有两层介质的同轴电缆，内外导体半径为分别为 a 和 c，介质的分界面半径为 b。两层介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2、电导率为 σ_1 和 σ_2。设内导体的电压为 U_0，外导体接地。试求：

（1）两导体之间的电流密度；（3 分）

（2）两导体之间的电场强度分布；（2 分）

（3）介质分界面上的自由电荷面密度。（5 分）



解　假设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I，电

面上只有法向分量，所以电流密度成轴对称分布。

由 $\int_S \vec{J}\bullet \mathrm{d}\vec{S} = I$， 可得

电流密度 $\vec{J}=\vec{e}_\rho \dfrac{I}{2\pi\rho} \quad (a<\rho<c)$ （1 分）

介质中的电场强度为：

$$\vec{E}_1=\frac{\vec{J}}{\sigma_1}=\vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi\sigma_1\rho} \qquad (a<\rho<b)$$ （1 分）

$$\vec{E}_2=\frac{\vec{J}}{\sigma_2}=\vec{e}_\rho \frac{I}{2\pi\sigma_2\rho} \qquad (b<\rho<c)$$ （1 分）

因为 $U_0=\int_a^b \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{\rho}+\int_b^c \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{\rho}=\dfrac{I}{2\pi\sigma_1}\ln\dfrac{b}{a}+\dfrac{I}{2\pi\sigma_2}\ln\dfrac{c}{b}$

所以 $I=\dfrac{2ps_1s_2U_0}{s_2\ln(b/a)+s_1\ln(c/b)}$ （1 分）

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$\vec{J}=\vec{e}_\rho \frac{\sigma_1\sigma_2U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \quad (a<\rho<c)$$

$$\vec{E}_1=\vec{e}_\rho \frac{\sigma_2U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \quad (a<\rho<b)$$

$$\vec{E}_2=\vec{e}_\rho \frac{\sigma_1U_0}{\rho[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]} \quad (b<\rho<c)$$ （1 分）

由 $\rho_S=\vec{e}_n\bullet\vec{D}$ 可得，介质 1 内表面的电荷面密度为

$$\rho_{S1}=\varepsilon_1\vec{e}_\rho\cdot\vec{E}_1\Big|_{\rho=a}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2U_0}{a[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}$$ （2 分）

介质 2 外表面的电荷面密度为

$$\rho_{S2}=-\varepsilon_2\vec{e}_\rho\cdot\vec{E}_2\Big|_{\rho=c}=-\frac{\varepsilon_2\sigma_1U_0}{c[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}$$ （2 分）

两种介质分界面上的电荷面密度为

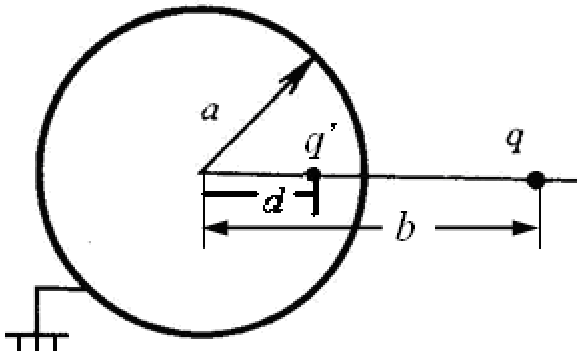
$$\begin{aligned}\rho_{S12}&=-(\varepsilon_1\vec{e}_\rho\cdot\vec{E}_1-\varepsilon_2\vec{e}_\rho\cdot\vec{E}_2)\Big|_{\rho=b}\\&=-\frac{(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma_1)U_0}{b[\sigma_2\ln(b/a)+\sigma_1\ln(c/b)]}\end{aligned}$$ （1 分）

7 空间中有一半径为 a 的接地导体球，球外一点电荷 q 距球心的距离 b，设镜像电荷位于球心与点电荷 q 的连线上，距球心 d，其电量为 q'，

（1）试画出题中接地导体球与点电荷之间关系的示意图；（4 分）

（2）求镜像电荷距球心的距离 d 以及镜像电荷的电量 q'。（6 分）

解：1）



接地……………………………………(1 分)

球半径……………………　…………(1 分)

电荷 q　………………………………(1 分)

电荷 q 到球心的距离………………………………(1 分)

2）球外点电荷与镜像电荷产生的电位函数为

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}\right)$$ …………………(1 分)

由于导体接地，在 r=a 处，电位为 0

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}\right)=0$$ …………………(1 分)

上式对于任意角度均成立

$$(a^2+b^2)q'^2-(a^2+d^2)q^2=0$$ ……………………..……………..…………(1 分)

$$bq'^2-dq^2=0$$ …………………………………………………………..…………(1 分)

求解方程得

$$d=\frac{a^2}{b}$$ ………………………………………………………….…………(1 分)

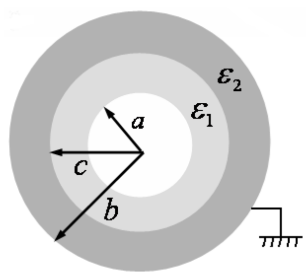
$q' = -\dfrac{a}{b}q$ ……………… ………………………………………..………(1 分)

8 已知同轴线内外导体半径分别为a和b，内外导体间充满介电常数分别为ε_1和ε_2的两种理想介质，分界面半径为c，如图所示。若外导体接地，内导体的电压为U，试求：

（1）　内导体单位长度带电量（线电荷密度）ρ_l；（4 分）

（2）　导体间的$\vec{D}$分布；（2 分）

（3）　导体间的$\vec{E}$分布。（4 分）



解：（1）由题意可知：

电场方向垂直于边界，由边界条件可知，在媒质两边$\vec{D}$连续。

设内导体单位长度带电量为ρ_l

由高斯定律：$\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q$，可以求得两边媒质中

$$\vec{D} = \frac{\rho_l}{2\pi r}\vec{e_r}$$

（1 分）

由$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ 得

$$\vec{E_1} = \vec{D}/\varepsilon_1$$

$$\vec{E_2} = \vec{D}/\varepsilon_2$$

（1 分）

所以$U = \int_a^c \vec{E_1}\cdot d\vec{r} + \int_c^b \vec{E_2}\cdot d\vec{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{c}{a} + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{b}{c}$　（1 分）

$$\Rightarrow \rho = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2\ln\frac{c}{a} + \varepsilon_1\ln\frac{b}{c}}$$

（1 分）

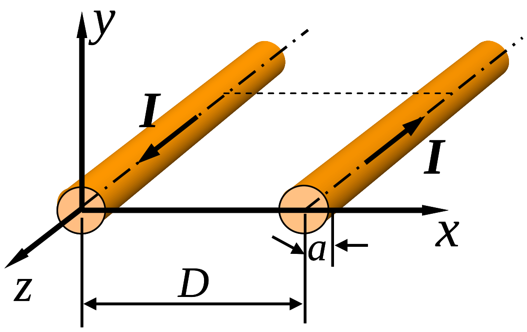
(2) $\vec{D}=\dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_2\ln\frac{c}{a}+\varepsilon_1\ln\frac{b}{c})\bullet r}\vec{e}_r$ （2 分）

(3) $\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_2\ln\frac{c}{a}+\varepsilon_1\ln\frac{b}{c})\bullet r}\vec{e}_r & (a<r<c)\\ \dfrac{\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_2\ln\frac{c}{a}+\varepsilon_1\ln\frac{b}{c})\bullet r}\vec{e}_r & (c<r<b)\end{cases}$ （4 分）

9 设平行双线传输线的半径为a，两导线之间的距为D，且$D>>a$。导体及其周围媒质的磁导率皆为μ_0，两导线中的通过的电流为I，如图所示。试求：

（1）传输线轴心连线的平面上任意点的磁感应强度；（4 分）

（2）平行双传输线单位长度内自感和外自感。（6 分）



解：设两导线流过的电流为 I。由于 D >> a ，故可近似地认为导线中的电流是均匀分布的。应用安培环路定理和叠加原理，可得到两导线之间的平面上任一点 P 的磁感应强度为

$$\vec{B}(x)=\vec{e}_y\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)$$ （4 分）

穿过两导线之间沿轴线方向为单位长度的面积的外磁链为

$$\varPsi_o=\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}$$ （2 分）

于是得到平行双线传输线单位长度的外自感：

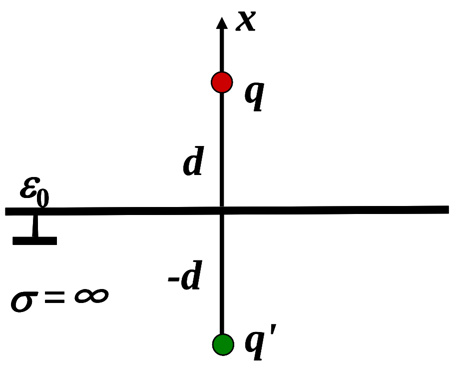
$$L_o=\frac{\varPsi_o}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D-a}{a}\approx\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$ （2 分）

两根导线单位长度的内自感为

$$L=L_i+L_o=\frac{\mu_0}{4\pi}+\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$ （2 分）

10 已知一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d，试用镜像法求：

（1）点电荷 q 所受的电场力；（5 分）
（2）如果把点电荷 q 移至无穷远处，需要做多少功？（5 分）



解：（1）电荷 q 受的电场力来源于导体板上的感应电荷。
利用镜像法，感应电荷的电场可以用像电荷替代。
镜像电荷的电量为 q'＝－q ，与导体平面的距离为 d （2 分）

点电荷 q'产生的电场强度为： $\vec{\boldsymbol{E}}'(x)=\vec{\boldsymbol{e}}_x\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}$ （1 分）

点电荷 q 所受的电场力为 $\vec{F}=q\vec{\boldsymbol{E}}'(x)=\vec{\boldsymbol{e}}_x\dfrac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}$ （2 分）

（2）当电荷 q 移至 x 时，像电荷 q'应位于－x，则有

$$\vec{\boldsymbol{E}}'(x)=\vec{\boldsymbol{e}}_x\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2x)^2}$$ （2 分）

移动电荷时，电场力做功为

$$W_e=\int_d^\infty q\vec{E}'(x)\bullet\mathrm{d}\vec{x}=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty\frac{1}{(2x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$ （2 分）

外力需要克服电场力做功

$$W_o=-W_e=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d}$$

（1 分）

四、证明题（每小题 10 分，共 分）

得分	

1 证明：在线性、各向同性、均匀电介质内部，极化电荷体密度 ρ_p 总是等于自由

电荷密度 ρ 的 $(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)$ 倍。

证明：考虑极化后的麦克斯韦第一方程 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$ （2 分）

由于极化电荷体密度与极化矢量的关系为 $\rho_p=-\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}$ （1 分）

所以 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f-\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}})$ （1 分）

对于线性、各向同性、均匀介质，$\vec{\mathrm{P}}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ （1 分）

又知 $\varepsilon_r=1+\chi_e$， $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ （1 分）

所以 $\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}=\varepsilon_0\chi_e\nabla\bullet\vec{E}=\varepsilon_0\chi_e[\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_f-\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}})]=\chi_e(\rho_f-\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}})$ （1 分）

移项得 $\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}+\chi_e\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}=\chi_e\rho_f$ （1 分）

即 $(1+\chi_e)\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}=\chi_e\rho_f$ （1 分）

所以 $\frac{\rho_p}{\rho_f}=\frac{-\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}}{\frac{(1+\chi_e)}{\chi_e}\nabla\bullet\vec{\mathrm{P}}}=-\frac{\chi_e}{1+\chi_e}=-\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}=\frac{1}{\varepsilon_r}-1=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1$ （1 分）

极化电荷体密度 ρ_p 总是等于自由电荷密度 ρ 的 $(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)$ 倍。

2

证明：在线性、各向同性、均匀磁介质内部，在稳定情况下磁化电流 $\vec{J}_m$ 总是等于传导电流 $\vec{J}_c$ 的 $(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$ 倍。

证明：

由磁化电流体密度与磁化矢量的关系 $\vec{J}_m=\nabla\times\overrightarrow{M}$ （1 分）

在均匀磁介质内部，位移电流等于零，故传导电流 $\vec{J}_c=\nabla\times\overrightarrow{H}$ （1 分）

对于线性、各向同性、均匀磁介质，$\overrightarrow{M}=x_m\vec{H}$ （1 分）

而 $\vec{B}=\mu_0(\vec{M}+\vec{H})=\mu_0(1+x_m)\vec{H}=\mu\vec{H}$ （2 分）

两端取旋度 $\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\nabla\times\vec{M}+\nabla\times\vec{H})=\mu\nabla\times\vec{H}$ （3 分）

即 $\mu_0(\vec{J}_m+\vec{J}_c)=\mu\vec{J}_c$ （1 分）

所以 $\mu_0\vec{J}_m=(\mu-\mu_0)\vec{J}_c$ 即 $\frac{\vec{J}_m}{\vec{J}_c}=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$ （1 分）

即磁化电流 $\vec{J}_m$ 总是等于传导电流 $\vec{J}_c$ 的 $(\frac{\mu}{\mu_0}-1)$ 倍。

3 证明：在介质空间中，静电场满足的泊松方程为 $\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$，以及相应的边界条件为 $\varphi_1=\varphi_2$，$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S$。

证明 在介质空间中，静电场满足高斯定理 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$ （2 分）

并且，$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{E}=-\nabla\phi$ （2 分）

因此，$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}$，$\varepsilon$ 为常数 （1 分）

所以，$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$，即为静电场满足的泊松方程。

设 P_1 和 P_2 是介质分界面两侧紧贴界面的相邻两点，其电位分别为 φ_1 和 φ_2。当两点间距离 $\varDelta l\to 0$ 时，

$\varphi_1-\varphi_2=\lim_{\varDelta l\to 0}\int_{P_1}^{P_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=0$ （2 分）

故 $\varphi_1=\varphi_2$。

由 $\vec{e}_{\mathbf{n}}\cdot(\vec{\mathbf{D}}_1-\vec{\mathbf{D}}_2)=\rho_S$ （2 分）

并且，$\vec{\mathbf{D}}=-\varepsilon\nabla\varphi$ （1 分）

所以 $\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\rho_S$。

4 证明：在不同的磁介质的分界面上，矢量磁位 $\vec{A}$ 的切向分量连续。

证明：由 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，得 （1 分）

$\int_S\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\nabla\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_C\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ （2 分）

在磁介质的分界面上任取一点 P，围绕该点做一个跨越分界面的狭长矩形回路 C，其长为 $\varDelta l$，宽为 $\varDelta h$，且令 $\varDelta h\to 0$。

有 $\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ （2 分）

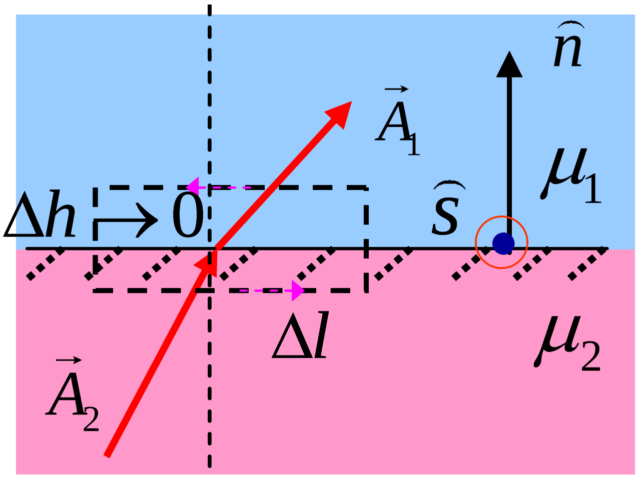
因此，$\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \vec{A}_1\cdot \Delta\vec{l} - \vec{A}_2\cdot \Delta\vec{l} = \lim_{h\to 0}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$ （2 分）

由于 $\vec{B}$ 为有限值，上式右端等于零，故

$\vec{A}_1\cdot \Delta\vec{l} - \vec{A}_2\cdot \Delta\vec{l} = 0$ （2 分）

因为 Δl 平行于分界面，故有

$A_{1t} = A_{2t}$ （1 分）



5

证明：同轴电缆内外导体半径为 a、b，内外导体之间填充一种介电常数为 ε，电导率为 σ 的非理想介质。试证明该同轴电缆单位长度的绝缘电阻为 $R = \dfrac{1}{2\pi\sigma}\ln\dfrac{b}{a}\,\Omega$。

证明：设由内导体流向外导体的电流为 I。

则 $J = \dfrac{I}{2\pi\rho l}$。 （2 分）

由欧姆定律：$J = \sigma E$ 得 （2 分）

$E = \dfrac{J}{\sigma} = \dfrac{I}{2\pi\rho l\sigma}$ （2 分）

则 $U = \int \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_a^b \dfrac{I}{2\pi\rho l\sigma}\mathrm{d}\rho = \dfrac{I}{2\pi\sigma l}\ln\dfrac{b}{a}$ （2 分）

所以同轴电缆单位长度的电阻为 $R = \dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{2\pi\sigma l}\ln\dfrac{b}{a}$ （2 分）