# $Chapter\ 4 - HW01$

2015$K$8009929049 冯吕

2018 年 7 月 9 日

4.2.1 解：

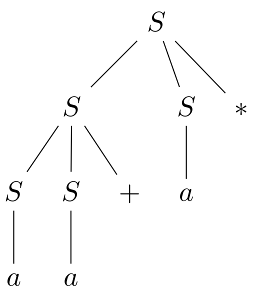
1) 串 $aa + a*$ 的一个最左推导如下：

$$S \underset{lm}{\Longrightarrow} SS* \underset{lm}{\Longrightarrow} SS + S* \underset{lm}{\Longrightarrow} aS + S* \underset{lm}{\Longrightarrow} aa + S* \underset{lm}{\Longrightarrow} aa + a*$$

2) 串 $aa + a*$ 的一个最右推导如下：

$$S \underset{rm}{\Longrightarrow} SS* \underset{rm}{\Longrightarrow} Sa* \underset{rm}{\Longrightarrow} SS + a* \underset{rm}{\Longrightarrow} Sa + a* \underset{rm}{\Longrightarrow} aa + a*$$

3) 该串的一棵语法分析树如下：




4) 该文法不具有二义性。

$proof$：

- 先证明一个该文法产生串的长度的结论：设串的推导过程中使用产生式 $S \rightarrow S\ S\ +$ 和 $S \rightarrow S\ S\ *$ 的次数为 $m$，则串的长度为 $L = 2 \times m + 1$，且串中包含 $m$ 个运算符和 $m + 1$ 个 a；
  - 1) 当 $m = 0$ 时，仅有 $S \rightarrow a$ 一种情况，此时 $L = 1$，串由 1 个 $a$ 和 0 个运算符构成，结论成立；
  - 2) 设当 $m < k(k \geq 1)$ 时结论成立，则当 $m = k$ 时，第一步推导必然为

    $$S \rightarrow S_1 S_2\ op$$

    $op$ 为 + 或 $*$。设 $S_1 \rightarrow \alpha, S_2 \rightarrow \beta$，$\alpha, \beta$ 均为使用 $S \rightarrow S_1 S_2\ op$ 少于 $k$ 次得到的串，设二者推导过程中分别使用该产生式 $k_1$ 和 $k_2$ 次，根据假设有：

    $$L(\alpha) = 2 * k_1 + 1, L(\beta) = 2 * k_2 + 1$$

    则串长度 $L = L(\alpha) + L(\beta) + 1 = 2*(k_1 + k_2 + 1) + 1 = 2k + 1$；且串中 $a$ 的个数为 $(k_1+1)+(k_2+1) = k + 1$；运算符的个数为 $k_1 + k_2 + 1 = k$，故结论成立。
- 下面证明该文法无二义性，对串的长度做归纳。由前述证明可知，该文法产生的串长 $L$ 可为任意非负奇数。对由该文法得到的长度为 $K = 2 * k + 1$ 的串 $w$：

- 1) 当 $k=0$ 时，$L=1$，只有 $S \to a$ 一种情况，显然没有二义性;
- 2) 设当 $k<n$ 时结论成立。$S \to \omega$，根据 $\omega$ 末尾运算符可确定第一步推导使用的产生式，不妨设为:

$$S \to S_1S_2+$$

从后向前处理串 $\omega$，除去末尾的运算符，找到可以由 $S$ 推导出的最短的串 $\alpha$，设 $\alpha$ 长度为 $m_1$，由前述结论可知 $m_1 = 2 * k_1 + 1$，且 $\alpha$ 包含 $k_1$ 个运算符和 $k_1 + 1$ 个 $a$，由归纳假设可知 $\alpha$ 无二义性，存在唯一的最左推导 $S \to \alpha$;

设串 $\omega$ 剩余部分为 $\beta$，设 $\beta$ 的长度为 $m_2$，同理可得 $m_2 = 2 * k_2 + 1$，$\beta$ 包含 $k_2$ 个运算符与 $k_2 + 1$ 个 $a$，存在唯一最左推导 $S \to \beta$，且满足 $k = k_1 + k_2$。此时串 $\omega$ 可表示成如下形式:

$$\omega = \beta\alpha+$$

故存在唯一的最左推导:

$$S \to S\ S + \to \beta S + \to \beta\alpha+$$

此时，仍不存在二义性。

综上所述，该文法不具有二义性。

5) 该文法生成的语言是运算数全为 $a$，带有加法运算和乘法运算的后缀算术表达式全体。

4.2.3 $a$) 解：生成该语言的文法如下：

$$S \to 1S \mid 01S \mid \epsilon$$

4.3.1 解：1) 该文法的每一个非终结符的多个选项之间，均没有非平凡的公共前缀，因此，该文法没有左公因子。

2) 不能，因为该文法是左递归的（$rexpr \to rexpr + rterm, rterm \to rterm\ rfactor$），所以，自顶向下分析会陷入无限循环。

3) 消除左递归后的文法如下：

$$\begin{aligned}
&rexpr \to rterm\ rexpr' \\
&rexpr' \to +rterm\ rexpr' \mid \epsilon \\
&rterm \to rfactor\ rterm' \\
&rterm' \to rfactor\ rterm' \mid \epsilon \\
&rfactor \to rprimary\ rfactor' \\
&rfactor' \to *rfactor' \mid \epsilon \\
&rprimary \to a \mid b
\end{aligned}$$

4) 消除左递归后，满足自顶向下分析的条件，因此适用于自顶向下的语法分析。