Cálculo IV: Cálculo Complejo

Diez B. Borja

11 de enero de 2021

Índice general

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Obtendremos un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes u y v de una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1.1}$$

en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ para que exista la derivada de f. También veremos cómo se puede escribir $f'(z_0)$ en términos de tales derivadas parciales.

Supongamos que existe la derivada

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.2}$$

Poniendo $z_0 = x_0 + iy_0$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, se tiene

$$Re[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} Re\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \tag{1.3}$$

$$Im[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} Im\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \tag{1.4}$$

Realizando un trabajo algebráico riguroso, haciendo tender $(\Delta x, \Delta y)$ a $(0, 0)$ horizontalmente por los puntos $(\Delta x, 0)$, veremos que la existencia de $f'(z_0)$ exige que

$$\boxed{u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \qquad \text{y} \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)} \tag{1.5}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema 1 *Supongamos que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y que $f'(z)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces las primeras derivadas parciales de u y v deben existir en ese punto y deben satisfacer en él las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x \tag{1.6}$$

Además, $f'(z_0)$ se puede expresar como

$$\boxed{f'(z_0) = u_x + iv_x} \tag{1.7}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (x_0, y_0)

Como las condiciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función f en un punto z_0, suelen utilizarse para localizar los puntos en los que f **no** admite derivada.

1.2. Condiciones suficientes

El que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfagan en un punto no basta para asegurar la existencia de la derivada de una funcion $f(z)$ en ese punto. Pero con ciertos requisitos de continuidad se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2 *Sea la función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definida en algún ϵ entorno de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Suponemos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de ese entorno y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

en (x_0, y_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.

Ejemplo 1 *Se tiene la función*

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Notar que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todas partes, y las derivadas son continuas en todas partes, las condiciones requeridas por el teorema se cumplen en todo el plano complejo. Por tanto, $f'(z_0)$ existe en todas partes, y

$$f'(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Nótese que $f'(z) = f(z)$

1.3. Coordenadas polares

Cuando $z_0 \neq 0$, el teorema 2 se reformula en coordenadas polares mediante la transformación

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{1.8}$$

Según escribamos

$$z = x + iy \quad \text{o} \quad z = re^{i\theta} \qquad (z \neq 0)$$

cuando $w = f(z)$, las partes real e imaginaria de $w = u + v$ se expresan en términos de las variables x, y o de r, θ. Supongamos que existen en todas partes las derivadas parciales de primer orden de u y de v con respecto a x y y en algún entorno de un punto no nulo z_0, y que son continuas en ese punto. Las derivadas parciales de primer orden con respecto a r y θ tienen también esas propiedades, y la regla de la cadena para la derivación de funciones reales a dos variables reales se puede usar para escribirlas en términos de las antedichas. Más concretamente, como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

podemos escribir

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \quad u_\theta = -u_r r\sin\theta + u_y r\cos\theta \tag{1.9}$$

Analógicamnete

$$v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \quad v_\theta = -v_r r\sin\theta + v_y r\cos\theta \tag{1.10}$$

Si las derivadas parciales con respecto a x e y satisfacen además las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{1.11}$$

en z_0, las ecuaciones (1.10) pasan a ser

$$v_r = -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta, \quad v_\theta = u_y r \sin\theta + u_x r \cos\theta \tag{1.12}$$

en ese punto. Es claro entonces, (1.9) y (1.12), que

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r} \tag{1.13}$$

Ecs. de Cauchy-Riemann en polares

en el punto z_0. Las ecuaciones (1.13) son una forma alternativa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.11).

Se puede reformular el teorema 2 en corrdenadas polares.

Teorema 3 *Sea la función*

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en algún ϵ entorno de un punto no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Supongamos que las primeras derivadas parciales de las funciones u y v con respecto a r y θ existen en todos los puntos de ese entorno y son continuas en (r_0, θ_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen la forma polar (1.13) de las ecuaciones Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.

Aquí la derivada $f'(z_0)$ se puede escribir

$$\boxed{f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)}, \tag{1.14}$$

donde el miembro de la derecha ha sido calculado en (r_0, θ_0)

Ejemplo 2 *Consideremos la funcion*

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}$$

Las condiciones del teorema del teorema se satidfacen en cualquier punto no nulo del plano. Por tanto la derivda de f existe entre ellos en ellos, y de acuerdo con la expresión (1.14,

$$f'(z) = e^{-i\theta} = \left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}$$

1.4. Funciones analíticas

Una función f de la variable compleja z se dice *analítica* en un conjunto abierto si tiene derivada en todo punto de ese abierto. En particular, f *es analítica en un punto* z_0 si es analítica en un entorno de z_0.

Ejemplo 3 *La función $f(z) = 1/z$ es analítica en tod punto no nulo del plano finito, mientras que la función $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto, porque sólo admite derivada en $z = 0$, pero no en un entorno.*

Una función **entera** es una función que es analítica en todos los puntos del plano finito. Ya que la derivada de un polinomio existe en todas partes, *todos los polinomios son funciones enteras*.

Si una función no es analítica en un punto z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0, se dice que z_0 es un *punto singular*, o una *singularidad* de f. El punto $z = 0$ es obviamente singular para la función $f(z) = 1/z$. La función $f(z) = |z|^2$, por su parte, carece de singularidades, pues no es analítica en ningún punto.

Una condición necesaria, pero en modo alguno suficiente, para que f sdea analítica en un dominio D es claramente la contiuidad de f sobre D. El que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario, pero tampoco suficiente.

Las derivadas de la suma y el producto de dos funciones existen siempre que ambas funciones tengan derivada. Así pues, *si dos funciones son analíticas en un dominio D, su suma y su producto son anlíticos ambos en D*. Analógicamente, *su cociente es analñitico en D supuesto que la función del denominador no se anule en ningún punto de D*.

Con la regla de la cadena para la derivada de una función compuesta encontramos que *una función compuesta de dos funciones analíticas es analítica*.

Teorema 4 *Si $f'(z) = 0$ en todos los puntos de un dominio D, entonces $f(z)$ es constante sobre D.*

1.5. Funciones armónicas

Una función real h de dos variables reales x e y se dice *armónica* en un dominio dado del plano xy si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden, y satisfacen la ecuación

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0 \tag{1.15}$$

La ecuación (1.15) se conoce como *ecuación de Laplace*.

Teorema 5 *Si una función $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones u y v son armónicas en D.*

Ejemplo 4 *Ya que las funciones*

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

y

$$g(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

son enteras, tambien lo es su producto. Por el Teorema 5, por tanto, la función

$$Re[f(z)g(z)] = e^x[(x^2 - y^2) \cos y - 2xy \sin y]$$

es armónica en todo el plano.

Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.5) en D, se dice que v es *armónica cinjugada de u*.

Es evidente que si una función $f(z) = u(x, y) + i(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces v es una armónica conjugada de u. Recíprocamente, si v es una armónica conjugada de u en un dominio D, la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D. Enunciamos esto como terorema

Teorema 6 *Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D si y sólo si v es una armónica conjugada de u.*

Si v es armónica conjugada de u en el dominio D, entinces $-u$ es armónica conjugada de v en D, y recíprocamente. Eso se ve escribiendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad -if(z) = v(x, y) - iu(x, y)$$

y observando que $f(z)$ es analítica si y sólo si $-f(z)$ es analítica allí.

Ejemplo 5 *Ilustraremos ahora otro método para la obtención de una armónica conjugada de una función dada. La función*

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y \tag{1.16}$$

se ve fácilmente que es armónica en todo el plano xy. Para calcular una armónica conjugada $v(x, y)$ hagamos notar que

$$u_x(x, y) = -6xy$$

De manera que, en vista de la condición $u_x = v_y$, podemos escribir

$$v_y(x, y) = -6xy$$

Manteniendo x fija e integrando los dos lados de esa ecuación en y, encontramos que

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x) \tag{1.17}$$

donde ϕ es, por el momento, una función arbitraria de x. Como ha de cumplirse $u_y = -v_x$ se sigue de (1.16) y (1.17) que

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x)$$

Luego $\phi'(x) = 3x^2$, o sea $\phi(x) = x^3 + c$ donde c es un número real arbitrario. Por tanto, la función

$$v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + c$$

es una armónica conjugada de $u(x, y)$.

La función analítica correspondiente es

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + c) \tag{1.18}$$

Se comprueba sin dificultad que

$$f(z) = i(z^3 + c)$$

Esta forma viene sugerida observando que cuando $y = 0$, (1.18) se convierte en

$$f(x) = i(x^3 + c)$$

.

Capítulo 2

Funciones elementales

Consideramos aquí varias funciones estudiadas en el Cálculo y definimos funciones correspondientes de una variable.

2.1. La función exponencial

Si una función f de una variable compleja $z = x + iy$ se ha de reducir a la función exponencial usual cuando z es real, debemos exigir que

$$f(x + i0) = e^x \tag{2.1}$$

para todo número real x. Ya que $d(e^x)/dx = e^x$ para todo x real, es natural imponer las siguientes condiciones:

$$f \text{ es entera y } f'(z) = f(z) \text{ para todo } z \tag{2.2}$$

La función

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{2.3}$$

con y en radianes, es diferenciable en todos los puntos del plano complejo y $f'(z) = f(z)$. Luego esa función que cumple las condiciones (2.1) y (2.2). Puede probarse además que es la única función que las satisface; y escribiremos $f(z) = e^x$.

Así la función exponencial del análisis compeljo se define para todo z como

$$\boxed{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)} \tag{2.4}$$

Función exponencial del análisis complejo

Esta se reduce a la función exponencial usual del Cálculo cuando $y = 0$, es entera, y verifica la fórmula diferencial

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \tag{2.5}$$

en todo el plano.

Hagamos constar además que cuando z es imaginario puro, (2.4 se convierte en

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.6}$$

La forma más compacta

$$e^z = e^x e^{iy} \tag{2.7}$$

Capítulo 3

Integrales

3.1. Funciones complejas $w(t)$

Consideremos primero derivadas e integrales de funciones complejas $w(t)$ de una variable real t.

Escribimos

$$w(t) = u(t) + iv(t) \tag{3.1}$$

donde las funciones u y v son funciones *reales* de t.

La derivada $w'(t)$, de la función (3.1) en un punto t se define como

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \tag{3.2}$$

supuesto que existe cada una de las derivadas u' y v' en t.

De la definición (3.2) se sique que, para cada constante compleja $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\frac{d}{dt}[z_0 w(t)] = z_0 w'(t) \tag{3.3}$$

Otras reglas apendidas en el Cálculo, tales como las de derivación de sumas y productos, se aplican igual para funciones reales de t. Otra fórmula de derivación esperada es

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t} \tag{3.4}$$

Las integrales definidas de funciones del tipo (3.1) sobre intervalos $a \leq t \leq b$ se definen como

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{3.5}$$

cuando las integrales individuales de la derecha existen. Así pues,

$$Re\int_a^b w(t)dt = \int_a^b Re[w(t)]dt \quad \text{y} \quad Im\int_a^b w(t)dt = \int_a^b Im[w(t)]dt \tag{3.6}$$

De forma similar se definen las integrales impropias de $w(t)$ sobre intervalos no acotados.

La existencia de las integrales de u y de v en la definición (3.5) queda garantizada si esas funciones son *continuas a trozos* en el intervalo $a \leq t \leq b$. Es decir, si son continuas en todos los puntos de ese intervalo, excepto quizás en un número finito de puntos en los que , si bien discontinua, la función en cuestión posee límites laterales.

Las reglas esperadas para integrar el producto de una función $w(t)$ por un número complejo, o sumas de funciones, y para intercambiar límites de integración, son todas válidas. Estas reglas, así como la propiedad

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c (t)dt + \int_c^b w(t)dt$$

son fáciles de verificas sin más que recordas las correspondientes del Cálculo.

El teorema fundamental del Cálculo sobre primitivas puede extendrrse a las integrales del tipo (3.5). Concretamente, supongamos que las fucniones

$$w(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{y} \quad W(t) = U(t) + iV(t)$$

son continuas en el intervalo $[a, b]$. Si $W'(t) = w(t)$ para $a \leq t \leq b$, entonces $U'(t) = u(t)$ y $V'(t) = v(t)$. Por tanto, en vista de la definición (3.5),

$$\int_a^b w(t)\,dt = W(t)]_a^b = W(b) - W(a) \tag{3.7}$$

Para establecer una propiedad básica de los valores absolutos de las integrales, tomaremos $a < b$ y supondremos que el valor de la integral definida en (3.5) en un número complejo no nulo. Si r_0 es el módulo y θ_0 un argumento de ese valor, entonces

$$\int_a^b w\,dt = r_0 e^{i\theta_0}$$

Despejando r_0, se tiene

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w\, dt \tag{3.8}$$

Como el lado izquierdo de esa igualdad es un número real, el derecho ha de ser también real. Luego, usando el hecho de que la parte real de un número real es el propio número, vemos que el miembro de la derecha en (3.8) puede reescribirse así:

$$\int_a^b e^{-i\theta_0} w\, dt = Re \int_a^b e^{-i\theta_0} w\, dt = \int_a^b Re(e^{-i\theta_0} w) dt$$

con ello (3.8) toma la forma

$$r_0 = \int_a^b Re(e^{-i\theta_0} w) dt \tag{3.9}$$

Ahora bien,

$$Re(e^{-i\theta_0} w) \leq |e^{-i\theta_0} w| = |e^{-i\theta_0}||w| = |w|$$

y, en consecuencia, por (3.9)

$$r_0 \leq \int_a^b |w| dt$$

Por tanto,

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt \qquad (a < b) \tag{3.10}$$

Esta propiedad es claramente válida incluso cuando el valor de la integral es cero, en particulas cuando $a = b$.

Con ligeras modificaciones, la discusión precedente conduce a desigualdades como

$$\left| \int_a^\infty w(t) dt \right| \leq \int_a^\infty |w(t)| dt \tag{3.11}$$

supuesto que existan ambas integrales impropias.

3.2. Contornos

Se definen integrales de funciones complejas de una variable *compleja* sobre curvas del plano complejo, en lugar de sobre intervalos de la recta real.

Un conjunto de puntos $z = (x, y)$ en el plano se dice que constituyen un arco si

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{3.12}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones contícuas del parámetro t. Esta definición establece una aplicación continua del intrvalo $a \leq t \leq b$ en el plano y, o plano z; y los puntos imagen se ordenan por valores crecientes de t. Es conveniente describir los puntos de C por medio de la ecuación

$$z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{3.13}$$

donde

$$z(t) = x(t) + iy(t) \tag{3.14}$$

El arco C es un arco *simple*, o arco de Jordan, si no se corta a sí mismo; esto es, C es simple si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$. Cuando el arco C se simple excepto por el hecho de que $z(b) = z(a)$, decimo que C es una *curva cerrada simple*, o curva de Jordan.

Un *contorno*, o arco suave a trozos, es un arco que consiste en un nñumero finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Cuando sólo coinciden los valores inicial y final de $z(t)$, un contorno C se llama un *conjunto cerrado simple*.

Los puntos de cualquier curva cerrada simple o contorno cerrado simple C son forntera de dos dominios distintos, uno de los cuelaes es el interior de C y es acotado. El otro, que es el exterior de C, es no acotado. Es conveniente aceptar esta afirmación, conocida como el *teorema de la curva de Jordan*, como geométeicamente evidente (su demostración no es sencilla).

3.3. Integrales de contorno

Veamos ahora con las integrales de funciones complejas f de la variable compleja z. Tales integrales se definen en términos de los valores $f(z)$ a lo largo de un contorno dado C, que va desde un punto $z = Z_1$ a un punto $z = z_2$ del plano complejo. Son, por tanto, integrales de línea, ys sus valores dependen, en general, del contorno C así como de la función f. Se escribe

$$\int_C f(z)dz \quad \text{o} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)dx$$

Supongamos que la ecuación

$$z = z(t) \qquad (a \leq t \leq b) \tag{3.15}$$

representa un contorno C, que se extiende desde $z_1 = z(a)$ hasta $z_2 = z(b)$. Sea $f(z)$ continua a trozos sobre C, es decir, $f[z(t)]$ es continua a trozos en el intervalo $a \leq t \leq b$. Definimos la integral de línea, o *integral de contorno*, de f a lo largo de C como sigue:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt \tag{3.16}$$

Asociado con el contorno C usado en la integral (3.16) está el contorno $-C$, con el mismo conjunto de ountos, pero recorrido en sentido contrario al de C, de manera que el nuevo contorno se extiende desde el punto z_2 al z_1. Haciendo los respectivos cálculos se encuentra que

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz \tag{3.17}$$

Supongamos que C consta de un contorno C_1 desde z_1 hasta z_3, seguido de un contorno C_2 desde z_3 hasta z_2, siendo el punto inicial de C_2 el punto final de C_1. Es evidente que

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz \tag{3.18}$$

Otras propiedades de las integrales de contorno se desprenden inmediatamente de (3.16) y de propiedades de las integrales de funciones complejas $w(t)$. A saber,

$$\int_C z_0 f(z)dz = z_0 \int_C f(z)dz \tag{3.19}$$

para toda contante compleja z_0, y

$$\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz \tag{3.20}$$

Finalmente, según (3.16) y (3.10)

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)|dt$$

Así para cualquier constante no negativa M tal que los valores de f sobre C satisfagan $|f(z)| \leq M$

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq M\int_a^b |z'(t)|dt$$

Dado que la integral de la derecha representa la longitus L del contorno, se deduce que el módulo del valor de la integrla de f a los largo de C no supera ML:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML \tag{3.21}$$

Es desigualdad estricta, cuando los valores de f sobre C son tales que $|f(z)| \leq M$.

Excepto en casos especiales, no se dispone de una interpretación correspondiente, física o geométrica, de las integrales en el plano complejo. Sin embargo, es ectraordinariamente útil tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

3.4. Primitivas

Teorema 7 *Sea $f(z)$ una función continua en un dominio D. Si cualquiera de estas afirmaciones es verdadera, lo son también las demás:*

- *f tiene una primitiva F en D*
- *las integrales de f a lo largo de contornos contendios en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen el mismo valor*
- *las integrales de f a los larfo de cualquier contorno cerrado contenido en D tienen todas el mismo valor*

Nótese que el teorema no afirma que alguna de esas propiedaees sea válida para una f dada en un cierto dominio D. Lo que afirma es que la tres son simultáneamente válidas o falsas.

3.5. El teorema de Cauchy-Goursat

En la sección 3.4 vimos que si una función continua admite primitiva en un dominio D, la integral de $f(z)$ a lo largo de cualquier contorno cerrado C contenido por completo en D tiene valor cero. En esta sección presentamos un teorema que da otras condiciones sobre f que garantizan el valor de la integrla de $f(z)$ a lo largo de un contorno cerrado *simple* es cero.

Teorema 8 *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un conotrno cerrado simple y sobre los puntos de C, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

3.6. Dominios simplemente conexos y multiplemente conexos

Un dominio *simplemente conexo* D es un dominio tal que todo contorno cerrado simple dentro de él encierra sólo puntos d eD. El conjunto de puntos interior a un contorno cerrado simple es un ejemplo. El dominio anular entre dos círculos concéntricos no es, por el contrario, simplemente conexo. Un dominjo que no es simplemente conexo se llamará *multiplemente conexo*.

Teorema 9 *Si una función f es analítica es un dominio simpelmente conexo D, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{3.22}$$

para todo contorno cerrado C contenido en D.

Corolario 1 *Una función es analítica sobre un dominio simplemente conexo D tiene primitiva en D.*

El teorema de Cauchy-Goursat se puede extender de modo que admita integrales a lo largo del controno de un dominio múltiplemente conexo.

Teorema 10 *Supongamos que*

1. *C es un contorno cerrado simple, con orientación positiva;*
2. *$C_k\,(k = 1, 2, \ldots n)$ denota un número finito de contornos cerrados simples, orientados positivamente, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común*

Si una función f es analítica en la región cerrada formada por los puntos interiores a C o del propio C, excepto los puntos interiores a cada C_k, entonces

$$\int_C f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0 \tag{3.23}$$

El siguiente corolario es una consecuencia particularmente importantes del 10

Corolario 2 *Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples positivamente oriantados, donde C_2 es interior a C_1. Si una función f es analítica en la región cerrada que forman esos contornos y los puntos situados entre ellos, entonces*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz \tag{3.24}$$

El Corolario 2 se conoce como el *principio de deformación de caminos*, ya que nos dice que si C_1 se deforma continuamente en C_2 pasando siempre por puntos en los que f es analítica, el valor de la integral de f sobre C_1 no cambia.

3.7. La fórmula integral de Cauchy

Teorema 11 *Sea f analítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{3.25}$$

3.25 se llama la *fórmula integral de Cauchy.* Afirma que si una función f ha de ser analítica en el interior de y sobre los puntos de un contorno cerrado simple C, los valores de f interiores a C están completamente determinados por los valores de f sobre C.

Cuando se expresa la fórmula integral de Cauchy como

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \tag{3.26}$$

cabe utilizarla para calcular ciertas integrales a los largo de contornos cerrados simples.

3.8. Derivadas de las funciones analíticas

Teorema 12 *Si una función f es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes son también funciones analíticas en ese punto.*

Corolario 3 *Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto $z = x+iy$, sus funciones componentes u y v tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto.*

Si convenimos en denotar $f(z)$ por $f^{(0)}(z)$, y en $0! = 1$, por inducción matemática se puede verificar esta notable fórmula:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{(s-z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.27}$$

Cuando $n = 0$, no es sino la fórmula integral de Cauchy.

3.9. El teorema de Morera

Teorema 13 *Si una función f es continua en un dominio D y si*

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{3.28}$$

para todo contorno cerrado C contenido en D, entonces f es analítica en D.

Capítulo 4

Series

4.1. Covergencia de sucesiones y series

Una *sucesión* infinita

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \tag{4.1}$$

de número complejos tiene *límite* z si, para cada número positivo ϵ existe un número positivo n_0 tal que

$$|z_n - z| < \epsilon \qquad \text{si} \qquad n > n_0$$

Geométricamente, esto signifca que para valores suficientemente grandes de n, los puntos z_n están a cualquier ϵ entorno dado de z. Como podemos elegir ϵ todo lo pequeño que queramos, se deduce que los puntos z_n se acercan arbitrariamente a z cuando sus subíndices crecen. Nótese que el valor de n_0 necesario dependerá, en general, del valor de ϵ.

La suseción 4.1 puede tener a lo sumo un límite. Esto es, un límite z es único, si existe. Cuando existe límite, se dice que la sucesión *converge* a z, y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Si la sucesión no tiene límite, *diverge*.

Teorema 14 *Supongamos que* $z_n = x_n + iy_n \, (n = 1, 2, ...)$ y $z = x + iy$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \tag{4.2}$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y \tag{4.3}$$

Una *serie* infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots z_N + \cdots \tag{4.4}$$

de números complejos *converge* con *suma* S si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots z_N \qquad (N = 1, 2, \dots)$$

de *sumas parciales* converge a S; escribimos en tal caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

Teorema 15 *Supongamos que* $z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1, 2, \dots)$ y $S = X + iY$. *En tal caso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \tag{4.5}$$

si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \qquad y \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y \tag{4.6}$$

Recordando el cálculo que el n-ésimo termino de una serie convergente de números reales tiende a cero cuando n tiende a infinito, vemos inmediatamente de los Teoremas 14 y 15 que lo mismo es cierto para una serie convergente de número complejos. Esto es, *una condición necesaria para la convergencia de la serie 4.4 es que*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{4.7}$$

Los términos de una serie convergente de números complejos son, por tanto, acotados. Más precisamente, existe una constante positiva M tal que $|z_n| \le M$ para cada entero positivo n.

Para otra propiedad importante de las series de número complejos, suponemos que la serie 4.4 es *absolutamente convergente*. Es decir, si $z_n = x_n + iy_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

de número reales $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge. Como

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \qquad \text{y} \qquad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

sabemos por el criterio de comparación real que las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

convergen. Además, ya que la convergencia absoluta de una serie de números reales implica la convergencia de la propia serie, se sigue que existen números reales X e Y tales que se verifica (4.6). De acuerdo con el Teorema 15, le serie (4.4) converge, por tanto. Por consiguiente, *la convergencia absoluta de una serie de números complejos implica la convergencia de esa serie*.

Al establecer el hecho de que la suma de una serie de un número S dado, es conveniente con frecuencia definir el resto ρ_N tras N términos:

$$\rho_N = S - S_N \tag{4.8}$$

Luego, $S = S_N + \rho_N$; y, ya que $|S_n - S| = |\rho_N - 0|$, vemos que *una serie converge a un número S si y sólo si la sucesión de restos tiende a cero*. Utilizaremos a menudo esta observación al tratar con *series de potencias*. Son series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

donde z_0 y los coeficientes a_n son constantes complejas, y z cualquier punto en una región prefijada que contenga a z_0. En tales series, que involucran a una variable z, denotaremos las sumas, sumas parciales y restos por $S(z)$, $S_N(z)$, y $\rho_N(z)$ respectivamente.

4.2. Serie de Taylor

Vamos a enunciar el *teorema de Taylor*, uno de los resultados más importante del capítulo

Teorema 16 *Sea f una función analítica en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$, centradi en z_0 y de radio R_0. Entonces, en todo punto z de este disco, $f(z)$ admite la representación en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0) \tag{4.9}$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{4.10}$$

Esto es, esa serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$

Este es el desarrollo de $f(z)$ en *serie de Taylor* en torno al punto z_0. Es la familiar serie de Taylor del Cálculo, adaptada a funciones de una variable compleja.

Obsérvese además que cuando f es *entera*, el radio R_0 del disco puede tomarse arbitrariamente grande. En esas circunstancias, la serie converge a $f(z)$ en todo punto z del plano finito, y la confición de validez se convierte en $|z - z_0| < \infty$.

De la demostración de este teorema nos encontramos con

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (|z| < R_0) \tag{4.11}$$

Este caso especial de la serie (4.9) en que $z_0 = 0$ se llama una *serie de Maclaurin*.

Si se sabe que f es analítica en todos los puntos interiores e un círculo cntrado en z_0 queda garantizada la convergencia de la serie de Taylor centrada en z_0 hacia el valor $f(z)$ en cada uno de esos puntos z; no es necesario ningún cirterio de convergencia. En efecto, de acuerdo con el teorema de Taylor, la serie converge a $f(z)$ dentro del círculo centrado en z_0 cuyo radio es la distancia de z_0 al punto z_1 más próximo en el que f deje de ser analítica.

4.3. Series de Laurent

Si una función f no es analítica en un punto z_0 no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. No obstante, es posible hallar una representación en serie para $f(z)$ que contenga tanto potencias positivas como negativa de $z - z_0$. Ahora presentamos la teoría de tales representaciones, comenzando por el *teorema de Laurent*.

Teorema 17 *Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$, y sea C cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0, orientado posotivamente, contenido en ese dominio. Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \quad (4.12)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.13)$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.14)$$

El desarrollo (4.12) se suele escribir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \quad (4.15)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.16)$$

Cualquiera de las dos formas (4.12) o(4.15), se llama una **serie de Laurent**.

Nótese que el integrando en (4.14) se puede escribir $f(z)(z - z_0)^{n-1}$. Así pued, es claro que cuando f es analítica en el dico $|z - z_0| < R$, este integrando lo es también. Por tanto, todos los coeficientes b_n son cero, y como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

el desarrollo (4.12) se reduce a una serie de Taylor centrada en z_0.

Sin embargo, si f no es analítica en z_0 pero lo es en le resto del disco $|z - z_0| < R_2$, el radio R_1 puede tomarse arbitrariamente pequeño. La representación (4.12) es válida entonces para $0 < |z - z_0| < R_2$. Análogamente, si f es analítica en todo punto del plano finito exterior al círculo $|z - z_0| = R_1$, la condición de validez es $R_1 < |z - z_0| < \infty$.

4.4. Conergencia absoluta y uniforme de las series de potencias

El resto de este capítulo se dedica a diversas propiedades de las series de potencias, o sea, serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Las presentaremos sólo en el caso especial $z_0 = 0$. Sus demostraciones en el caso general son escencialmente las mismas y muchos de nuestros resultados se generalizan simplemente sustituyendo z por $z - z_0$. Las generalizaciones que afectana a serie con potencia negativas de $z-z_0$ son asimismo fáciles de obtener.

Recordemos que una serie de número complejos converge **absolutamente** si la serie de valores absolutos de esos número es convergente. El siguiente teorema se refiere a la convergencia absoluta de las serie de potencias.

Teorema 18 *Si una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \tag{4.17}$$

converge cuando $z = z_1 \quad (z_1 \neq 0)$, *entonces es absolutamente convergente en todo punto* z *del disco abierto* $|z| < |z_1|$

Teorema 19 *Si* z_1 *es un punto interior al círculo de convergencia* $|z| = R$ *de una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4.18}$$

entonces esa serie de uniformemente convergente en el disco cerrado $|z| \leq |z_1|$

4.5. Integración y derivación de serie de potencias

Ya hemos visto que una serie de potencias

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4.19}$$

representa una función continua en todo punto interior a su círculo de convergencia. En esta sección se enunciará un teorema que nos dice que la suma $S(z)$ es analítica dentro del cículo.

Teorema 20 *Sea C cualquier entorno interior al círculo de convergencia de la serie de potencias (4.19), y sea $g(z)$ cualquier función continua sobre C. La serie formada multiplicando cada término de la serie de potencias por $g(z)$ puede ser integrada término a término sobre C; esto es.*

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)z^n dz \tag{4.20}$$

Presentamos ahora un resultado el tipo del Teorema 20 relativo a la derivación

Teorema 21 *La serie de potencias (4.19) puede ser derivada término a término. Esto es, en todo punto z interior al círculo de convergencia de esa serie*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{n-1} \tag{4.21}$$

4.6. Unicidad de las representaciones por series

Consideremos en primer lugar la de las serie de Taylor

Teorema 22 *Si una serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{4.22}$$

converge a $f(z)$ en todo punto interior a algún círculo $z - z_0 = R$, entonces es la serie de Taylor de f en potencias de $z - z_0$.

Nuestro segundo teorema se refiere a la unciidad de la representación en serie de Laurent

Teorema 23 *Si una serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \tag{4.23}$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos de algún dominio anular centrado en z_0, entonces es la serie de Laurent para f en potencias de $z - z_0$ en ese dominio.

4.7. Multiplicación y división de serie de potencias

Supongamos que cada una de las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{4.24}$$

converge dentro de un círculo $|z| = R$. Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en el disco $|z| < R$, y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin válido allí:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < R) \tag{4.25}$$

Como las serie (4.24) son las serie de Maclaurin de f y g, los tres primeros coeficientes del desarrollo (4.25) vienen dados por

$$c_0 = f(0)g(0) = a_0 b_0$$

$$c_1 = \frac{f(0)g'(0) + f'(0)g(0)}{1!} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

y

$$c_2 = \frac{f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)}{2!} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

La expresión general de c_n es, entonces

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z) \tag{4.26}$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

para la derivada n-ésima del producto de dos funciones. Como es habitual, $f^{(0)}(z)$ y $0! = 1$. Evidentemente

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

y así se puede escribir (4.25) en la forma

$$f(z)g(z) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots+\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n+\cdots \qquad (|z|<R) \tag{4.27}$$

La serie (4.27) es la misma que se obtiene multiplicando formalmente las dos series (4.24) término a término y reuniendo los términos resultantes por potencias de z; esto se conoce como el **producto de Cauchy** de las dos series dadas.

Capítulo 5

Residuos y polos

El teorema de Cauchy-Goursat afirma que si una función es analítica en todo ponto interior de un contorno cerrado simple C y en los puntos del propio C, el valor de la integrla de la función a lo largo de ese contorno es cero. Sin embargo, si la función no es anañítica en un número finito de puntos interiores a C, existe, como veremos, un número específico, llamado residuo, con que cada una de esos punto contribuye a la integral.

5.1. Residuos

Recordemos que un punto z_0 se llama punto singular de la función f si f no es analítica en z_0 pero en analítica en algún punto de todo entorno de z_0. Un punto singular se dice que es **aislado** si, además, existe un entorno punteado $0 < |z - z_0|\epsilon$ de z_0 en el que f es analítica.

Si z_0 es un punto singular aislado de una función f, existe un número positivo R_2 tal que $f(z)$ es analítica en todo z que cumpa $0 < |z - z_0| < R_2$. En consecuencia, la función viene representada por una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots \quad (5.1)$$

donde los coeficientes a_n y b_n tienen ciertas representaciones integrales. En particular,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

donde C es cualquier contorno cerrado simpe positivamente orientado en torno a z_0 y contenido en el dominio $0 < |z-z_0| < R_2$. Cuando $n=1$, esta expresión para b_n puede escribirse

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i b_1 \qquad (5.2)$$

El número complejo b_1, que es el coeficiente de $1/(z-z_0)$ en el desarrollo (5.1), se llama el *residuo* de f en el punto singular aislado z_0. A menudo usaremos la notación

$$Res_{z=z_0} f(z)$$

o simplemente B cuando z_0 y f estén claramente indicados, para denotar el residuo b_1

La Eq. (5.2) proporciona un método útil para evaluar ciertas integrales sobre contornos cerrados simples.

5.2. El teorema de los residuos

Si la función f tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simpled ado C, han de ser aislados. El próximo teorema es un enunciado preciso del hecho de que si además f es analítica sobre C, y C se recorre en sentido positivo, el valor de la integral de f a lo largo de C es $w\pi i$ veces la *suma* de los residuos en esos puntos singulares.

Teorema 24 *Si C es un contorno cerrado simple positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares $z_k (k = 1, , 2 \ldots, n)$ interior a C, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z=z_k} f(z) \qquad (5.3)$$