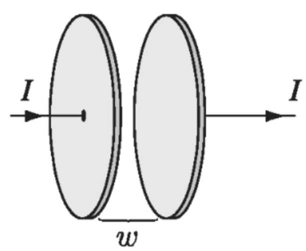
Problema 1 *Un cable coaxial muy largo, radio interio a y exterior $b > a$ transporta una corriente I por el conductor interno y $-I$ (es decir, una corriente de igual magnitud, pero sentido opuesto) por el coductor externo. Calcula la energía almacenada en una sección de largo L del cilindro.*

Solución 1

Problema 2 *Un cable muy delgado transporta una corriente constante I, conectando los centros de dos placas circulares de radio R, tal como se indica en la figura. Suponga que la separación entre las placas w es muy pequeña ($w << R$), que en todo momento la densidad de carga $\sigma(t)$ sobre las placas es uniforme, y que $\sigma(t = 0) = 0$. Realizando todas las aproximaciones e idealizaciones que considere pertinentes, calucule:*

1. *El valor de la densidad de carga $\sigma(t)$ sobre las placas*
2. *El campo eléctrico entre las placas, como función del tiempo t*
3. *El valor campo magnético $B(\rho, t)$ a una distancia $\rho < R$ del eje del sistema, entre las placas*
4. *Bosqueje los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ entre las placas*



Solución 2

1. Como $\sigma(t = 0) = 0$ y se supone que esta densidad de carga es constante sobre la superficie, entonces tenemos que esta no tiene dependencia espcial. Así

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{Q}{A} = \frac{It}{\pi R^2}} \tag{1}$$

2. Supongamamos $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$, homogéneo entre las placas y nulo en otros lados. Además recoerdemos que la magnitud de campo eléctico generado por una placa infinita es $E = \sigma/2\epsilon_0$ (Ley de Gauss, el área encerrada por una cara de la superficie gaussiana cilindrica es la mita de la carga total de la placa). Sin embargo, como queremos calcular el campo eléctrico entre las placas, este será la suma del generado por la placa izquierda (positiva) y la derecha (negativa), por lo tanto tenemos que el campo eléctrico entre las placas es

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{2}$$

Reemplazando (1)

$$\boxed{\boldsymbol{E}(t) = \frac{It}{\epsilon_0 \pi R^2}\hat{\boldsymbol{z}}} \tag{3}$$

3. Dada la simetría del problema y la dirección de la corriente. el campo amgnético será de la forma $\boldsymbol{B}(\rho, t) = B(\rho, t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Así, considerando que $\boldsymbol{J} = 0$, tenemos

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B)\right)\hat{\boldsymbol{z}} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2}\rho \tag{5}$$

Integrando con respecto a ρ

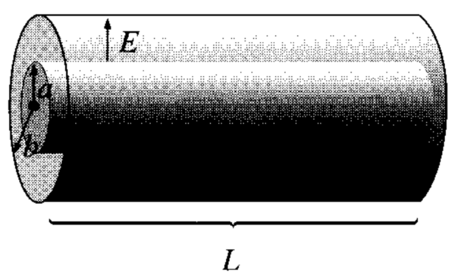
$$\rho B = \frac{\mu_o I}{2\pi R^2}\rho^2 + c \tag{6}$$

Obteniendo así

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\rho\hat{\boldsymbol{\phi}}} \tag{7}$$

4. El bosquejo de los campos es sencillo considerando que $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{z}}$ y $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Problema 3 *Dos cilindros largos (radio a y b) estan separados por un materia con conductividad σ. Si estan mantenidos a una diferencia de potencial V, ¿qúe corriente fluye de uno hacia el otro, en una longitud L?*



Solución 3

Por ley de Gauss, el campo generado por el cilinro en para $r > a$ es

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{8}$$

Notar que es tambien es el campo entre ambos cilindros.

La corriente viene dada por

$$I = \int \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \sigma \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{9}$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L \tag{10}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \frac{s}{s} \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z \tag{11}$$

$$= \frac{\sigma \lambda L}{\epsilon_0} \tag{12}$$

La diferencia de potencual entre los cilindros es

$$V = -\int_b^a \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{13}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{s} \tag{14}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{15}$$

Despejando λ

$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0}{ln(b/a)} V \tag{16}$$

Reemplazando en la expresión para la corriente obtenemos

$$\boxed{I = \frac{2\pi\sigma L}{ln(b/a)} V} \tag{17}$$

Problema 4 *Find the charge and current distributions that would give rise to the potentials*

$$V = 0, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 k}{4c}(ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{z}}, |x| < ct, 0, |x| > ct \tag{18}$$

First we'll determine the electric and magnetic fields

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 l}{2}(ct - |x|)\mathbf{z} \tag{19}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 k}{4c} \frac{\partial}{\partial x}(ct - |x|)^2 \hat{\mathbf{y}} = \pm \frac{\mu_0 k}{2c}(ct - |x|)\hat{\mathbf{y}} \tag{20}$$

Calculating every derivative in sight. I find

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mp \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 k}{2c} \hat{\mathbf{z}} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k c}{2} \hat{\mathbf{z}}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \pm \frac{\mu_0 k}{2} \hat{\mathbf{y}} \tag{22}$$

As you can easily check, Maxwell's equations are all satisfied, with ρ and $\mathbf{J}$ both *zero*. Notice, however, that $\mathbf{B}$ has a discontinuity at $x = 0$, and this signals the presence of a surface current $\mathbf{K}$ in the yz plane;

$$kt\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{x}} \tag{23}$$

and hence

$$\mathbf{K} = kt\hat{\mathbf{z}} \tag{24}$$

Evidently we have here a uniform surface current flowing in the z direction over the plane $x = 0$, which starts up at $t = 0$, and increases in proportion to t. Notice that the news travels out (in both directions) at the spped of light: for points $|x| > ct$ the message (the current is now flowing) has not yet arrived, so the fields are zero.