Matemàtiques 1 - FIB | 07-01-2020
Examen final | Part F2: Àlgebra Lineal

1. [3 punts]

a) Doneu la definició de combinació lineal i de vectors linealment independents.

b) Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 vectors diferents d'un espai vectorial E. Demostreu les afirmacions següents si són sempre certes o doneu-ne un contraexemple si són falses en general.

i) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

ii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.

iii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

iv) Si v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents, aleshores v_4 és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.

2. [3 punts] Considereu el subespai S_a de $\mathbb{R}^4$ generat per:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\a\end{pmatrix}\right\}.$$

a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

b) Doneu una base de S_{-1} i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Quines condicions han de satisfer x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sigui de S_{-1}?

d) Determineu si algun dels vectors següents és de S_{-1}: $u = \begin{pmatrix}25\\12\\-12\\-25\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}31\\14\\14\\-31\end{pmatrix}$.

3. [4 punts]

a) Sigui $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que

$$f(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

i) Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

ii) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f i determineu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

b) La matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix}-3 & -4 & 0\\-4 & 3 & 0\\-12 & -6 & 5\end{pmatrix}.$$

i) Trobeu el polinomi característic, i els valors i vectors propis d'f. Comproveu que f diagonalitza i doneu una base B en que diagonalitzi, la matriu P de canvi de base de B a la base canònica i la matriu diagonal D associada a f en la base B. Quina relació hi ha entre A, D i P?

ii) En cas que f sigui bijectiva calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base B donada a l'apartat anterior.

Instruccions
- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan i els sistemes d'equacions lineals amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- Cal entregar els 3 exercicis per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils, ...

Informacions
- Les notes es publicaran com a tard el dia 16 de gener a la tarda.
- La revisió es farà el divendres 17 de gener a les 15:15 a l'aula A5-202.