

**JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**

1. Sigui  $k \geq 2$  un nombre natural. Definim el graf  $G_k = (V_k, A_k)$ , on:

$$\begin{aligned} V_k &= \{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k\} \\ A_k &= \{x_1 y_1\} \cup \{x_i x_j : i \neq j\} \cup \{y_i y_j : i \neq j\} \end{aligned}$$

- a) (1 punt) Representeu els grafs  $G_2$  i  $G_5$ . Doneu l'ordre i la mida de  $G_k$  i del seu complementari,  $G_k^c$ , en funció de  $k$ .
  - b) (1 punt) Esbrineu si  $G_k^c$  és bipartit. En cas afirmatiu, doneu les parts estables.
  - c) (1 punt) Calculeu el diàmetre del graf complementari,  $G_k^c$ .
  - d) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf  $G_k$ ,  $k \geq 2$ , per tal d'obtenir un graf eulerià?
  - e) (1 punt) Proveu que  $G_3^c$  és hamiltonià. Per a quins valors de  $k$  és  $G_k^c$  hamiltonià?
2. Considerem el graf bipartit complet  $K_{2,10}$  amb parts estables  $\{1, 2\}$  i  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .
- a) (1 punt) Quants arbres generadors diferents té?
  - b) (1 punt) Quants arbres generadors no isomorfs té?
  - c) (1 punt) Doneu l'arbre generador obtingut en aplicar l'algorisme BFS si es comença amb el vèrtex 1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria sempre el vèrtex d'etiqueta més petita. Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en que s'hi afegeixen els vèrtexs en aplicar l'algorisme.
  - d) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre obtingut a l'apartat anterior.
3. (1.5 punts) Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n$ ,  $n \geq 2$ , amb exactament  $k$  components connexos. Demostreu que  $G$  és acíclic si, i només si, la seva mida és  $n - k$ .

---

**Informacions**

- Durada de l'examen: 1h 25m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 3 exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 21/06/2021.
- Revisió de l'examen: s'haurà de demanar el 22 de juny seguint el procediment que es publicarà al racó.