Matemàtiques 1 - GEI - FIB | 28-10-2019

Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (2 punts)

a) Enuncieu el lema de les encaixades. Demostreu que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

b) Definiu circuit eulerià i graf eulerià. Definiu cicle hamiltonià i graf hamiltonià. Doneu en cada cas un exemple de graf:

(i) eulerià i hamiltonià;
(ii) eulerià, però no hamiltonià;
(iii) hamiltonià, però no eulerià;
(iv) ni eulerià, ni hamiltonià.

2. (4 punts) Sigui $n \geq 2$. Considereu el graf producte $G_n = T_n \times K_4$, on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte T_n és $\{1, 2, \ldots, n\}$, on 1 i n són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet K_4 és $\{a, b, c, d\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf G_n en funció de n. És G_n regular per a algun valor de n?

b) Per a quins valors de n és hamiltonià el graf G_n? En cas que ho sigui, doneu un cicle hamiltonià.

c) Per a quins valors de n és bipartit el graf G_n?

d) Dibuixeu els arbres generadors de G_2 obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_2. Preneu com a vèrtex inicial $(1, a)$ considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent: $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$.
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Definició de graf producte. Siguin $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafs, aleshores $G_1 \times G_2$ és el graf que té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V_1 \times V_2$, i dos vèrtexs (u_1, u_2), (v_1, v_2) són adjacents en $G_1 \times G_2$ si i només si $u_1 = v_1$ i $u_2v_2 \in A_2$, o bé $u_2 = v_2$ i $u_1v_1 \in A_1$.

3. (4 punts) Sabem que un graf G té exactament 4 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau $k > 3$.

(a) Deduïu que k ha de ser 4, 6 o 8. Doneu en cada cas l'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf.

(b) Demostreu que G té almenys un cicle.

(c) Demostreu que si $k = 8$, aleshores el graf G ha de ser connex.

(d) Suposem que G és connex, que $k = 4$, i a més, al suprimir els quatre vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf G' que és eulerià. Quin ha de ser aquest graf G'? Construïu un possible graf G a partir de G'.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra. Cal lliurar els 3 problemes per separat.
- No es poden utilitzar llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ...
- Publicació de les notes: 05/11/2019.
- Revisió de l'examen: 06/11/2019 a les 12:15 a l'aula A6102.