TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+2x})$.

   (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f centrat a l'origen i escriviu la forma de Lagrange del residu corresponent.

   (b) Calculeu un valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2})$ utilitzant el polinomi de l'apartat anterior.

   (c) Fiteu l'error comès a l'apartat anterior utilitzant el residu de l'apartat (a).

   (d) Trobeu la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5\cdot 10^{-10}$.

2. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

   (a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ per $z = 0, 1, -1$.

   (b) Doneu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1,1)$ i l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(1,1,\ln 3)$.

   (c) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 0)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{1.1}^{1.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 2.5$, per a tot $x \in [1.1, 1.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

   (d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

3. (*4 punts*) Sigui $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2+1)$.

   (a) Trobeu el domini de f. Proveu que f és de classe C^2 en el seu domini.

   (b) Proveu que f té un únic punt crític i que es tracta d'un punt de sella.

   (c) Proveu que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$.

   (d) Proveu que f no té extrems condicionats sobre la paràbola $x^2+y-\dfrac{1}{2} = 0$.

   (e) Demostreu que f té extrems absoluts sobre el conjunt

   $$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \frac{5}{4},\ x^2+y \ge \frac{1}{2}\}.$$

   Calculeu els valors màxim i mínim absolut de f sobre K i els punts on s'assoleixen.

Durada de l'examen: 2h 45m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

1. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+2x})$.

   (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f centrat a l'origen i escriviu la forma de Lagrange del residu corresponent.

   (b) Calculeu un valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2})$ utilitzant el polinomi de l'apartat anterior.

   (c) Fiteu l'error comès a l'apartat anterior utilitzant el residu de l'apartat (a).

   (d) Trobeu la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5\cdot 10^{-10}$.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és la composició d'una funció polinòmica amb una arrel cúbica i amb una funció logarítmica. Per les propietats de les funcions elementals, el domini de f és la semirecta $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, i la funció és de classe C^3 a tot el seu domini.

Per les propietats dels logaritmes $f(x) = (1/3)\ln(1+2x)$. Per tant, les seves derivades fins a ordre dos són

$$f'(x) = \frac{2}{3}(1+2x)^{-1}, \quad f''(x) = -\frac{4}{3}(1+2x)^{-2}.$$

Aleshores

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{2}{3}, \quad f''(0) = -\frac{4}{3}.$$

El polinomi demanat és

$$P_2(f,0,x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^2.$$

Per tal de calcular la forma de Lagrange del residu cal la tercera derivada, que és

$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{3}(1+2x)^{-3} = \frac{16}{3(1+2x)^3}.$$

Per tant, la forma de Lagrange del residu és

$$R_2(f,0,x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{8}{9(1+2c)^3}x^3$$

per a algun c entre 0 i x.

(b) El valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2}) = \ln(\sqrt[3]{1+2\cdot(0.1)}) = f(0.1)$ és:

$$f(0.1) \simeq P_2(f,0,0.1) = \frac{3}{50} = 0.06.$$

(c) L'error comès és:

$$|R_2(f,0,0.1)| = \frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3,$$

on $c \in (0, 0.1)$. Una cota de l'error comès ve donada pel valor màxim de la funció $\frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3$, per a $c \in [0, 0.1]$, i aquest valor màxim es donarà quan el denominador $9(1+2c)^3$ és mínim. Com que la funció $(1+2c)^3$ és creixent, el valor mínim del denominador correspon al valor més petit de c, és a dir, a $c = 0$. Per tant, $\ln(\sqrt[3]{1.2}) \approx 0.06$ amb un error

$$\frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3 \leq \frac{8 \cdot (0.1)^3}{9} = 0.0008888 < 0.9 \cdot 10^{-3}.$$

(d) Donat que $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}}) = f(10^{-n})$, d'acord amb les fórmules de més amunt es té que

$$|f(10^{-n}) - P_2(f,0,10^{-n})| = \left|\frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3\right|,$$

per a algun $c \in (0, 10^{-n})$. Com abans, el màxim de la funció $\frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3$ per a $c \in [0, 10^{-n}]$ s'obté quan $c = 0$ i, per tant:

$$|f(10^{-n}) - P_2(f,0,10^{-n})| = \frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3 \leq \frac{8 \cdot (10^{-n})^3}{9}$$

Per tant, busquem la mínima n tal que

$$\frac{8 \cdot (10^{-n})^3}{9} < 0.5 \cdot 10^{-10} \leftrightarrow 10^{-3n} < \frac{9}{16} \cdot 10^{-10} \leftrightarrow 10^{10-3n} < 9/16$$

o, equivalentment (ja que la funció $\log_{10} x$ és creixent), $10 - 3n < \log_{10}(9/16)$. Això correspon a $n > 3.416625823$, és a dir, $n \geq 4$.

Per tant, la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5 \cdot 10^{-10}$ és $n = 4$.

2. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

(a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de $z = f(x, y)$ per $z = 0, 1, -1$.

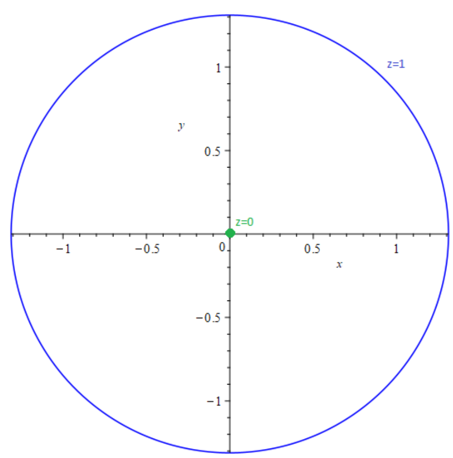
(b) Doneu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1, 1)$ i l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $(1, 1, \ln 3)$.

(c) Sigui $g(x) = f(5 \sin x, 0)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{1.1}^{1.5} g(x)\, dx$. Sabent que $|g''(x)| < 2.5$, per a tot $x \in [1.1, 1.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

(d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

SOLUCIÓ:

(a) La corba de nivell $z = 0$ és la corba d'equació $\ln(x^2 + y^2 + 1) = 0$, és a dir, $x^2 + y^2 + 1 = e^0 = 1$. Per tant, la corba de nivell $z = 0$ és el punt $(x, y) = (0, 0)$.
La corba de nivell $z = 1$ és la corba d'equació $\ln(x^2 + y^2 + 1) = 1$, és a dir, $x^2 + y^2 + 1 = e$, que és $x^2 + y^2 = e - 1$. Per tant, la corba de nivell $z = 1$ és la circumferència de centre el $(0, 0)$ i radi $\sqrt{e - 1}$.
La corba de nivell $z = -1$ és la corba d'equació $\ln(x^2 + y^2 + 1) = -1$, és a dir, $x^2 + y^2 + 1 = e^{-1}$, que és $x^2 + y^2 = e^{-1} - 1$. Com que $e^{-1} - 1 < 0$, la corba de nivell $z = -1$ és el conjunt buit.



(b) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1, 1)$ (per ser la composició d'una funció polinòmica amb imatge estrictament positiva amb una funció logarítmica), per tant, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1, 1)$ és la direcció i el sentit del vector gradient de f en aquest punt.
Donat que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \dfrac{2}{3}$, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1, 1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),$$

o, equivalentment, la direcció del vector unitari $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en un punt $(a, b, f(a, b))$ és:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b).$$

Donat que $f(1,1) = \ln 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2}{3}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2}{3}$, l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en un punt $(1, 1, \ln 3)$ és:

$$3z = 2(x-1) + 2(y-1) + 3\ln 3.$$

(c) Una fita superior de l'error del mètode dels trapezis és:

$$\left|\int_a^b g(x)dx - T(n)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

sent M_2 una fita superior del valor absolut de la derivada segona de g en l'interval (a, b).

Aquí, $a = 1.1$, $b = 1.5$, i, atès que $|g''(x)| < 2.5\ \forall x \in [1.1, 1.5]$, tenim que $M_2 = 2.5$. Aleshores per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005, trobarem el nombre de subintervals n imposant $\frac{(0.4)^3}{12n^2} \cdot 2.5 < 0.005$, que equival a $n^2 > \frac{(0.4)^3 \cdot 2.5}{12 \cdot 0.005}$, és a dir $n > 1.63299316$. Aleshores el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005 fent ús del mètode dels trapezis és $n = 2$.

(d) Substituint $a = 1.1,\ b = 1.5,\ n = 2$ i

$$g(x) = f(5\sin x, 0) = \ln(25(\sin x)^2 + 1)$$

a la fórmula dels trapezis, s'obté:

$$I \simeq T(2) = \frac{0.4}{2}\left[\frac{g(1.1)}{2} + g(1.3) + \frac{g(1.5)}{2}\right] \simeq 1.266455115.$$

El valor de la integral amb la precisió demanada és $I = 1.266 \pm 0.005$.

3. (*4 punts*) Sigui $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2+1)$.

(a) Trobeu el domini de f. Proveu que f és de classe C^2 en el seu domini.

(b) Proveu que f té un únic punt crític i que es tracta d'un punt de sella.

(c) Proveu que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$.

(d) Proveu que f no té extrems condicionats sobre la paràbola $x^2+y-\dfrac{1}{2}=0$.

(e) Demostreu que f té extrems absoluts sobre el conjunt

$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \frac{5}{4},\ x^2+y \ge \frac{1}{2}\}.$$

Calculeu els valors màxim i mínim absolut de f sobre K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és el producte d'una funció polinòmica per la composició d'una funció polinòmica amb imatge estrictament positiva amb una funció logarítmica. Per tant, per les propietats de les funcions elementals, el domini de f és $\mathbb{R}^2$ i f és de classe C^2 a tot $\mathbb{R}^2$.

(b) Per ser la funció f de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, els punts crítics de f s'obtenen resolent el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2+y^2+1) + 2\,\dfrac{x^2}{x^2+y^2+1} = 0 \\ \\ 2\,\dfrac{xy}{x^2+y^2+1} = 0 \end{cases}$$

De la segona es dedueix $x=0$ o $y=0$.

Si $x=0$, en la primera ens queda $\ln(y^2+1) = 0 \Rightarrow y^2+1 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Si $y=0$, en la primera ens queda $\ln(x^2+1) = -2\,\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Si $x\neq 0$, el terme de l'esquerra és positiu i el de la dreta negatiu, per tant, no té solució.

Aleshores, l'únic punt crític és $(0,0)$.

Tenim $f(0,0)=0$ i $f(x,0) = x\ln(x^2+1)$, que té el mateix signe que x perquè aquest logaritme és positiu.

En tot entorn de $(0,0)$ hi ha punts $(x,0)$ amb $x>0$ i, per tant, amb imatge positiva i punts $(x,0)$ amb $x<0$ i, per tant, amb imatge negativa.

Aleshores, f té en $(0,0)$ un punt de sella.

(c) La funció f és contínua i la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ és un compacte.

Trobar els punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}$ es pot fer de diverses maneres.
Una manera és pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x, y, \lambda) = x \ln(x^2 + y^2 + 1) + \lambda(x^2 + y^2 - \frac{5}{4}).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2 + y^2 + 1) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2 + 1} + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{2xy}{x^2 + y^2 + 1} + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - \dfrac{5}{4} = 0 \end{cases}$$

De la segona equació tenim $2y \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1} + \lambda \right) = 0$, per tant, o $y = 0$ o $\lambda = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Si $y = 0$, de la tercera equació obtenim $x^2 = \dfrac{5}{4}$, d'on $x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, y per tant s'obtenen els punts crítics condicionats $(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.

Si $\lambda = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$, de la primera equació obtenim $\ln(x^2+y^2+1)+\dfrac{4x^2}{x^2 + y^2 + 1} = 0$, d'on $\ln(x^2 + y^2 + 1) = -\dfrac{4x^2}{x^2 + y^2 + 1}$. Novament no té solució perquè, si $(x, y) \neq 0$, un costat és positiu i l'altre negatiu.

Una altra manera de trobar els punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$, és substituint x^2+y^2 per $\dfrac{5}{4}$ en l'expressió de $f(x, y)$, aleshores ens queda la funció de només una variable $g(x) = x \ln(9/4)$ amb $x \in [-\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}}{2}]$. És una funció contínua sobre un interval tancat amb derivada que no s'anul.la a l'interior. Per tant, els extrems absoluts estan als extrems de l'interval. Per tant els punts crítics condicionats de f a la circumferència són $(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.
De les dues maneres, hem vist que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$.

(d) Substituïm $y = \dfrac{1}{2} - x^2$ en l'expressió de $f(x, y)$ i obtenim la funció de només una variable $h(x) = f(x, \dfrac{1}{2} - x^2) = x \ln\left(x^4 + 5/4\right)$. Per trobar els seus punts crítics, igualem a 0 la seva derivada:

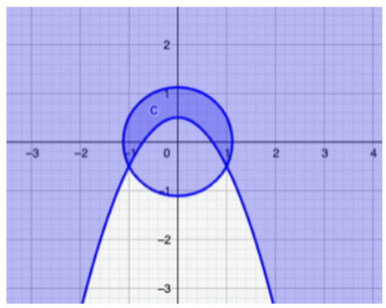
$$h'(x) = \ln\left(x^4 + 5/4\right) + \frac{4x^4}{x^4 + 5/4}$$

Així, els punts crítics han de complir:

$$\ln\left(x^4+5/4\right) = -\frac{4x^4}{x^4+5/4}$$

Novament no hi ha solució perquè un costat és estrictament positiu i l'altre negatiu.

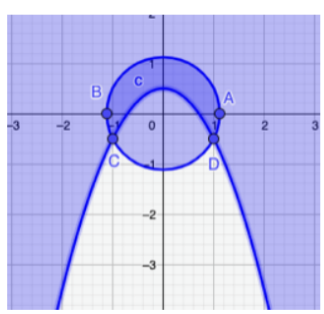
(e) La funció f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$. El conjunt $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{5}{4},\ x^2+y \geq \frac{1}{2}\}$:



és tancat ($Fr(K) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \frac{5}{4},\ x^2+y \geq \frac{1}{2}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y = \frac{1}{2},\ x^2+y^2 \leq \frac{5}{4}\} \subset K$) i fitat ($K \subset B_2(0,0)$), per tant, és compacte. Aleshores, l'existència d'extrems absoluts de f en K queda demostrada pel teorema de Weierstrass.

La llista de candidats a punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f en K, junt amb les seves imatges és:

- A l'interior de K: no hi ha cap candidat, ja que l'únic punt crític de f és $(0,0)$ (apartat (b)) i no pertany a K.
- Sobre l'arc de circumferència: els candidats són $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ (apartat (c)), amb imatges $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$.
- Sobre l'arc de paràbola: no n'hi ha (apartat (d)).
- Vèrtexs: $x^2+y^2-5/4 = x^2+y-1/2 \implies (x,y) = (\pm 1, -1/2)$ amb imatges $\pm\ln(1+1/4+1) = \pm\ln(9/4)$



Per tant, el valor màxim absolut de f en K és $\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$ i s'assoleix en el punt $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$, i el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$ i s'assoleix en el punt $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.