Resum de mètodes d'espais vectorials.

Mercè Mora. Departament de Matemàtiques. UPC

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Si $u_1, \ldots, u_k \in E$, $((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per **columnes** les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B.

(1) $v \in < u_1, \ldots, u_k > \Leftrightarrow$
$\text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (v)_B)$.

(2) v és pot expressar com a C.L. dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ d'almenys dues maneres diferents $\Leftrightarrow$
$\text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (v)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) < k$.

(3) $u_1, \ldots, u_k$ són L.I. $\Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) = k$.

(4) $u_1, \ldots, u_k$ són L.D. $\Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) < k$.

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

(5) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és base de $E \Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) = n \Leftrightarrow \det((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) \neq 0$.

(6) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ existeix una base de E que conté $u_1, \ldots, u_k$. Vegeu les pàgines 7 i 8.

(7) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ es pot completar amb $n - k$ vectors adequats d'una base qualsevol fins una base de E. Vegeu les pàgines 7 i 8.

Subespais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

Maneres de donar un subespai F de E:

(a) $F = < u_1, \dots, u_k >$.
(b) Base de F: $B_F = \{v_1, \dots, v_r\}$.
(c) Com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb variables $x_1, \dots, x_n$.

Base i dimensió en cada cas:

(a) Vegeu les pàgines 5 i 6.
(b) Ens donen. La dimensió d'F és $|B_F|$.
(c) La dimensió d'F és el nombre de graus de llibertat del sistema. Base: la trobem a partir de l'expressió de la solució en forma paramètrica.

Com expressar un subespai F de dimensió r com a solució d'un sistema homogeni coneguda una base $B_F = \{v_1, \dots, v_r\}$ d'F:
imposem que $\text{rang}((v_1)_B, \dots (v_r)_B, (x)_B) = r$,
on $(x)_B = (x_1, \dots, x_n)$ és un vector genèric d'E.

Subespais vectorials

Base i dimensió d'un subespai (Mètode I)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
$F = < u_1, \ldots, u_k >$, on $u_1, \ldots, u_k \in E$
$A = ((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{K})$

- dim $F = \operatorname{rang} A$.
- Una base d'F formada per vectors de $u_1, \ldots, u_k$:
  prenem els vectors de $u_1, \ldots, u_k$ corresponents a les columnes dels pivots d'una matriu escalonada equivalent a A per files (o sigui, u_i és d'aquesta base si i només si a la columna i de la matriu escalonada hi ha un pivot).

  A més, si tenim la matriu escalonada **reduïda** equivalent a A per files (a la columna del pivot només hi ha un 1 i la resta són 0's), a les columnes que no corresponen als pivots tenim els coeficients del vector corresponent com a combinació lineal lineal de la base donada.

Subespais vectorials

Base i dimensió d'un subespai (Mètode II)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E
$F =< u_1, \dots, u_k >$, on $u_1, \dots, u_k \in E$.

Considerem la matriu $A' = \begin{pmatrix} (u_1)_B \\ \vdots \\ (u_k)_B \end{pmatrix}$ que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B.

- $\dim F = \operatorname{rang} A'$;
- una base d'F està formada pels vectors fila no nuls d'una matriu escalonada equivalent a A' per files.

Observació. En general, si dues matrius són equivalents per files, els vectors vectors fila de les dues generen el mateix subespai.

Completar bases de subespais

E espai vectorial de dimensió n, B base d'E
F subespai d'E de dimensió r, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ base d'F
Volem trobar una base d'E que contingui els vectors $\{u_1, \ldots, u_r\}$

- **Mètode I.** Busquem $n - r$ vectors $w_1, \ldots, w_{n-r}$, de la base B tals que $\mathrm{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_r)_B, (w_1)_B, \ldots, (w_{n-r})_B) = n$ (a ull i anar provant!)

- **Mètode II.** Si A' és la matriu que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B, fem transformacions elementals per files fins una matriu escalonada equivalent (amb els pivots no necessàriament iguals a 1). Les files no nules formen una base d'F i podem completar amb els vectors fila que tenen totes les coordenades iguals a 0 excepte una única coordenada igual a 1 en les columnes que no corresponen als pivots de la matriu escalonada.

Completar bases de subespais: exemple

Exemple. Si al posar per files els 4 vectors que generen un subespai F de $\mathbb{R}^6$ arribem a la matriu equivalent de l'esquerra, una base d'F està formada per les 3 files no nul·les i la podem completar amb els 3(=6-3) vectors fila de la base canònica que tenen l'1 a les columnes on no hi ha pivots (en vermell):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Inclusió de subespais

$F = < u_1, \dots, u_r >$, $G = < v_1, \dots, v_s >$ subespais d'E

- $F \subseteq G \Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G$
- $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G$ i $G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G$ i $v_1, \dots, v_s \in F$
- Si $\dim F = \dim G$:
  $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \Leftrightarrow G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G \Leftrightarrow v_1, \dots, v_s \in F$

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

Casos:

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

(b) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \dots, u_s\}$.

(c) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat coma solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

Resoldre el sistema format per les equacions d'F i de G.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(b) Base d'F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \ldots, u_s\}$.

- $w \in F \cap G \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$.
- Resolem el sistema amb n equacions i les $r + s$ incògnites $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$ que provénde la igualtat: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ (o bé substituïm les solucions obtingudes per a $\beta_1, \ldots, \beta_s$ en $w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$).

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(c) Base d'F: $\{v_1, \ldots, v_r\}$; G donat com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

- $w \in F \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.
- A partir de la igualtat anterior, substituïm les n coordenades de w (en funció de les α_i's) en el sistema que defineix G.
- Resolem el sistema obtingut amb n equacions i les r incògnites $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.

Canvis de base

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n;

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B'\{b'_1, \dots, b'_n\}$ bases d'E;

$u \in E$. Relació entre $(u)_B$ i $(u)_{B'}$:

- Matriu de canvi de base de B a B': $P^B_{B'} = ((b_1)_{B'}, \dots, (b_n)_{B'})$
- $(u)_{B'} = P^B_{B'} \, (u)_B$

- Matriu de canvi de base de B' a B: $P^{B'}_B = ((b'_1)_B, \dots, (b'_n)_B)$
- $(u)_B = P^{B'}_B \, (u)_{B'}$

- $P^{B'}_B = (P^B_{B'})^{-1}$

- $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E:

  $P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r} \, P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \dots P^{B_2}_{B_3} \, P^{B_1}_{B_2}$