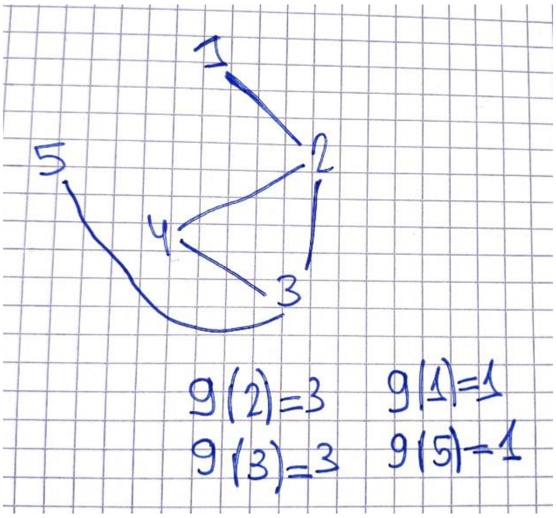
Tema 1 – Grafs

1- DEFINICIÓ

Un **graf G** es un parell (V, A) amb V un conjunt finit no buit i A un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents de V, es a dir, $A \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V\}$

G = (V,A)

V = {1,2,3,4,5} , A = { {1,2} , {2,3} , {2,4} , {3,4} , {3,5} }



S'anomena:

Vèrtexs als elements de V

Arestes als elements de A

Ordre de G al nombre de vèrtexs, |V|

Mida de G al nombre d'arestes, |A|

Siguin $u, v \in V$ vèrtexs i $a, e \in A$ arestes de G, direm que:

- u i v són adjacents o veïns si $\{u, v\} \in A$, es denota $u \sim v$ o $uv \in A$;
  si u i v no són adjacents, es denota $u \not\sim v$ o $uv \notin A$
- u i e són incidents si $e = \{u, w\}$, per algun $w \in V$
- e i a són incidents si tenen un vèrtex en comú
- grau de u és el nombre de vèrtexs adjacents a u, $g(u) = \#\{v \in V | u \sim v\}$

Observació: Si $n = |V|$ i $m = |A|$, aleshores $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

Representació gràfica d'un graf $G = (V, A)$

Els vèrtexs es representen mitjançant un punt i les arestes mitjançant una corba que uneix els dos punts que representen els vèrtexs incidents a l'aresta

Llista d'adjacències (o taula d'adjacències) d'un graf $G = (V, A)$

Siguin $v_1, v_2, \dots, v_n$ els vèrtexs de G. La llista d'adjacències de G és una llista de longitud n on a la posició i hi ha el conjunt dels vèrtexs adjacents a v_i, per a tot $i \in [n]$

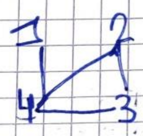
Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m amb $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Matriu d'adjacència de G és la matriu $M_A = M_A(G)$ de tipus $n \times n$, tal que l'element m_{ij} de la fila i columna j és

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

– M_A és binària, amb zeros a la diagonal, i simètrica
– El nombre d'uns de la fila i és el grau de v_i
– No és única, depèn de l'ordenació que s'escull al conjunt de vèrtexs

Repr. gràfica:



llista d'adjecencia:

$\{\{4\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}\}$

1	2	3	4
4	3	2	1
	4	4	2
			3

correcta amb

Matriu

$$M = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \to 1 \\ \to 2 \\ \to 2 \\ \to 3 \end{array}$$

Variants de la definició de graf:

▷ Multigraf: graf que admet arestes múltiples, és a dir, dos vèrtexs adjacents per més d'una aresta

▷ Pseudograf: graf que admet arestes múltiples i llaços (aresta que uneix un vèrtex amb ell mateix)

▷ Graf dirigit: graf on les arestes estan orientades   Només en un sentit

2. Graus

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i $v \in V$ un vèrtex, anomenem

- grau de v, $g(v)$: al nombre d'arestes incidents a v
- grau mínim de G, $\delta(G)$: al mínim dels graus dels vèrtexs
- grau màxim de G, $\Delta(G)$: al màxim dels graus dels vèrtexs
- seqüència de graus de G:a la successió dels graus dels vèrtexs de G ordenats de forma decreixent
- graf regular: al graf tal que $\delta(G) = \Delta(G)$, és a dir, tots els vèrtexs tenen el mateix grau

Remarques:

– $0 \leq g(v) \leq n - 1$

– Tot graf d'ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtexs amb el mateix grau

Lema de les encaixades: $2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$

Corol.lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar

Una seqüència d'enters decreixent és gràfica si hi ha algun graf que la té com a seqüència de graus

V = [8] = {1,2,3,4,5,6,7,8}

(7,3,3,2,2,1,0) No seq gràfica , ordre G = 7, graus ≤ 6

(4,3,3,2,1,0,0) No seq gràfica, no hi pot haver un nº senar de vertex de grau senar

4, 4 4,3,3,2,1,1,1,1,0

$\underbrace{3\,3\,2\,2}$, 1 1 1 1 1 0

2 $\underbrace{1\,1\,2}$ ~~1 1 1 1~~ 1 1 1 1 0

0 0 $\underbrace{1\,1\,1\,1}_{4}$ 0 → Es un parell ✓

3. Isomorfisme de grafs

Siguin $G = (V, A)$ i $G' = (V', A')$ dos grafs, direm que

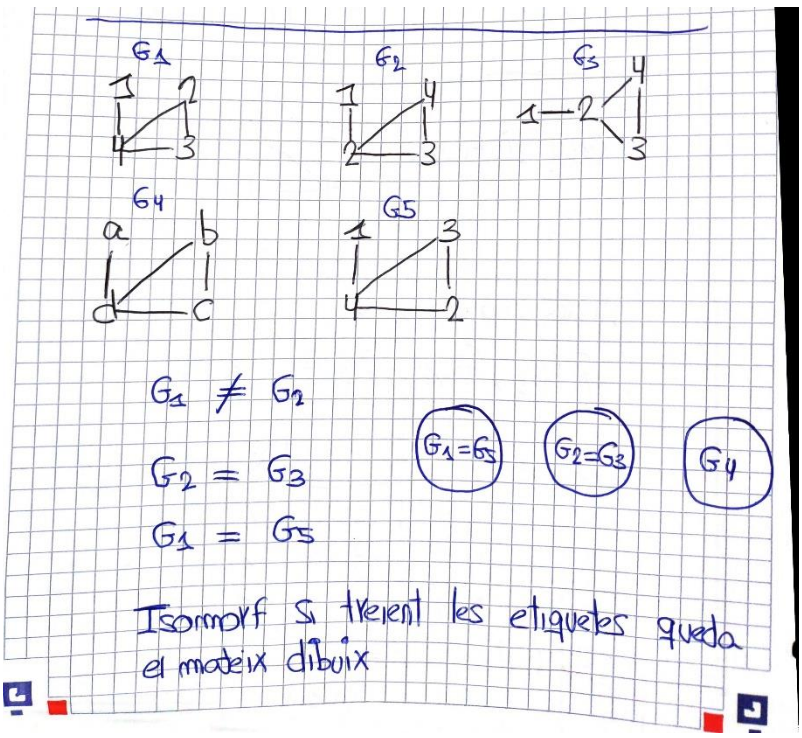
▷ G i G' són grafs iguals, $G = G'$, si $V = V'$ i $A = A'$

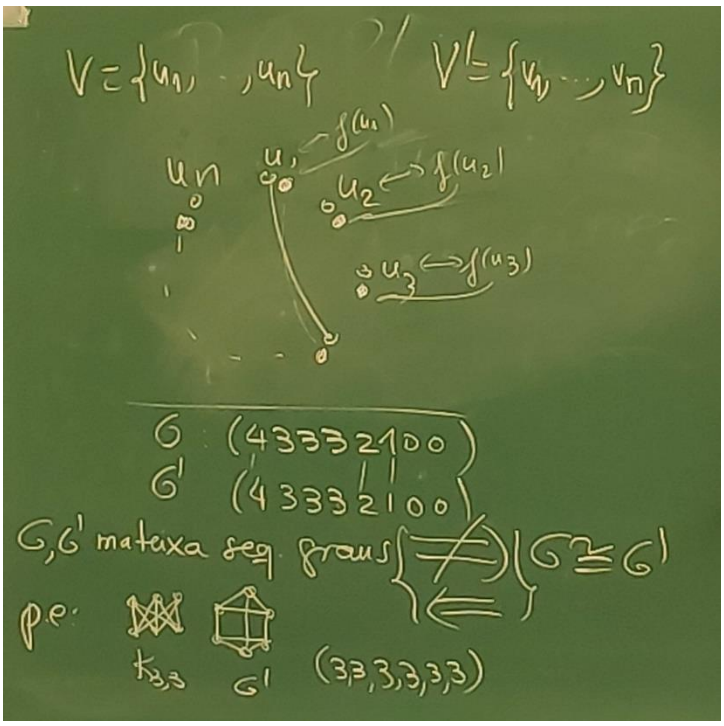
▷ G i G' són grafs isomorfs, $G \cong G'$, si existeix una aplicació bijectiva $f : V \to V'$ tal que, per a tot $u, v \in V$,

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) \sim f(v),$$

a l'aplicació f se l'anomena isomorfisme de G en G'

Remarques:
– Un vèrtex i la seva imatge per un isomorfisme tenen el mateix grau
– Dos grafs isomorfs tenen la mateixa mida i el mateix ordre. El recíproc és fals
– Dos grafs isomorfs tenen la mateixa seqüència de graus. El recíproc és fals
– *Ser isomorfs* és una relació d'equivalència





4. Tipus de grafs

Siguin n un enter positiu i $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Graf nul d'ordre n, N_n: és un graf d'ordre n i mida 0
Graf trivial: N_1

Graf complet d'ordre n, K_n: és un graf d'ordre n amb totes les arestes possibles
– Mida de $K_n = \frac{n(n-1)}{2}$

Graf trajecte d'ordre n, $T_n = (V, A)$: és un graf d'ordre n i mida $n-1$ amb conjunt d'arestes $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$
– $\delta(T_n) = 1$ i $\Delta(T_n) = 2$, si $n \geq 3$

Graf cicle d'ordre n, $n \geq 3$, $C_n = (V, A)$, amb $n \geq 3$: és un graf d'ordre n i mida n amb conjunt d'arestes $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$
– $\delta(C_n) = \Delta(C_n) = 2$

Graf roda d'ordre n, $n \geq 4$, $W_n = (V, A)$: és un graf d'ordre n i mida $2n-2$ tal que $A = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_1\} \cup \{x_nx_1, x_nx_2, \dots, x_nx_{n-1}\}$

Siguin r i s enters positius

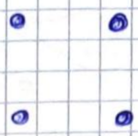
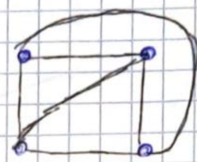
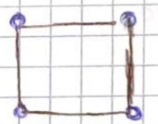
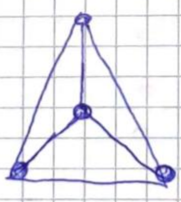
Graf r-regular d'ordre n: és un graf regular on r és el grau dels vèrtexs
– El graf complet K_n és un graf $(n-1)$-regular
– El graf cicle C_n és un graf 2-regular
– Si $G = (V, A)$ és un graf r-regular: $2|A| = r|V|$

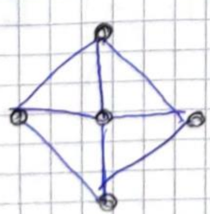
Graf bipartit: és un graf $G = (V, A)$ tal que hi ha dos subconjunts no buits V_1 i V_2 de V tals que $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i per a tota aresta $uv \in A$ es té que $u \in V_1$ i $v \in V_2$, o viceversa.
Anomenem parts estables del graf a V_1 i V_2
– $\displaystyle\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{v \in V_2} g(v) = |A|$

Graf bipartit complet, $K_{r,s} = (V, A)$: graf bipartit amb parts estables V_1 i V_2 tals que $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$ i tots els vèrtexs de V_1 són adjacents a tots els vèrtexs de V_2. És a dir, $A = \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$
– L'ordre de $K_{r,s}$ és $r + s$ i la mida és rs
– El graf $K_{1,s}$ se l'anomena graf estrella

Lab

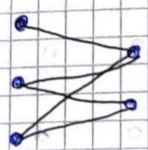
$n=4$

		ordre	mida	min	max
N_N – graf nul		n	0	0	0
K_N graf complet		n	$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$	$n-1$	$n-1$
T_n trajecte		n	$n-1$	2	1
C_n Cicle		n	n	2	2
W_n roda		n	$2\cdot(n-1)$	$n-1$	3

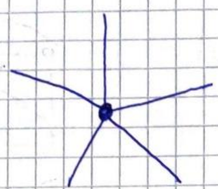


	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	1
4	1	0	1	0	1
5	1	1	1	1	0

graf bipartit



graf estrella



5. Subgrafs

Sigui $G = (V, A)$ un graf

Subgraf de G, $G' = (V', A')$: és un graf amb $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$

Subgraf generador de G, $G' = (V', A')$: és un subgraf tal que $V' = V$

Subgraf induït (o generat) per $S \subseteq V$: és el graf $G[S] = (S, A')$ tal que $A' = \{uv \in A : u, v \in S\}$

5.1. Grafs derivats d'un graf

Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m

Graf complementari de G, $G^c = (V^c, A^c)$: és el graf amb conjunt de vèrtexs $V^c = V$ i conjunt d'arestes $A^c = \{uv | u, v \in V \text{ i } uv \notin A\}$
– Ordre de G^c = Ordre de G
– Mida de $G^c = \frac{n(n-1)}{2} - |A|$
– $(G^c)^c = G$
– Sigui H un graf. Aleshores: $G \cong H \Leftrightarrow G^c \cong H^c$

El graf G és autocomplementari si $G \cong G^c$

Graf que s'obté per la supressió dels vèrtexs de S, $S \subset V$: graf denotat per $G - S$ amb conjunt de vèrtexs $V \setminus S$ i arestes les de G que no són incidents a cap vèrtexs de S. En cas que $S = \{v\}$, el denotem per $G - v$
– Ordre de $(G - u) = n - 1$. Mida de $(G - u) = m - g(u)$

Graf que s'obté per la supressió de les arestes de S, $S \subseteq A$: graf denotat per $G - S$ amb conjunt de vèrtexs V i conjunt d'arestes $A \setminus S$. En cas que $S = \{a\}$, el denotem per $G - a$
– Ordre de $(G - a) = n$. Mida de $(G - a) = m - 1$

Graf que s'obté per l'addició d'una aresta $a \notin A$: graf denotat per $G + a$ amb conjunt de vèrtexs V i conjunt d'arestes $A' = A \cup \{a\}$
– Ordre de $(G + a) = n$. Mida de $(G + a) = m + 1$

5.2. Operacions amb grafs

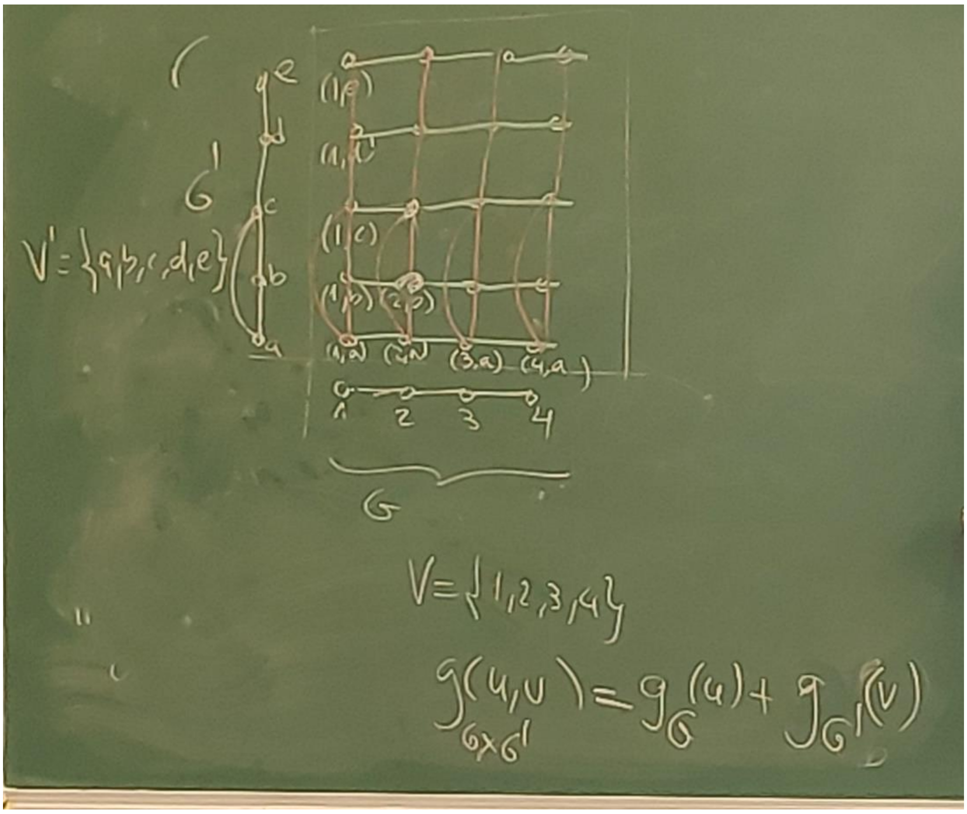
Siguin $G = (V, A)$ i $G' = (V', A')$ dos grafs

Graf reunió de G i G', $G \cup G'$: graf amb conjunt de vèrtexs $V \cup V'$ i conjunt d'arestes $A \cup A'$
– Si $V \cap V' = \emptyset$, l'ordre de $G \cup G'$ és $|V| + |V'|$ i la mida $|A| + |A'|$

Graf producte $G \times G'$: graf amb conjunt de vèrtexs $V \times V'$ i les adjacències

$$(u, u') \sim (v, v') \Leftrightarrow (uv \in A \text{ i } u' = v') \text{ o } (u = v \text{ i } u'v' \in A')$$

– L'ordre de $G \times G'$ és $|V|\,|V'|$ i la mida és $|V|\,|A'| + |V'|\,|A|$



Tema 2 – Recorregut, connexió i distancia

Sigui $G = (V, A)$ un graf, i siguin $u, v \in V$

Un recorregut de u a v o un u-v recorregut de longitud k és una seqüència de vèrtexs i arestes del graf

$$\mathcal{R} : u_0 a_1 u_1 a_2 u_2 \ldots u_{k-1} a_k u_k$$

tals que $u_0 = u$, $u_k = v$ i $a_i = u_{i-1}u_i \in A$, per a tot $i \in [k]$. En general, el denotarem per $u_0 u_1 u_2 \ldots u_{k-1} u_k$

Direm que el recorregut $\mathcal{R}$ passa pels vèrtexs u_i i passa per les arestes $a_i = u_{i-1}u_i$

Si $u = v$ direm que és un recorregut tancat, i si $u \neq v$ direm que és un recorregut obert

Un vèrtex es considera un recorregut de longitud zero

Tipus de recorreguts: un u-v recorregut és un

- camí si tots els vèrtexs són diferents
- cicle si és un recorregut tancat de longitud ≥ 3 amb tots els vèrtexs diferents (llevat del primer i l'últim, que coincidiran per ser tancat)

Un vèrtex es considera un camí de longitud zero

Remarca Un cicle passa per dos vèrtexs u i v si, i només si, hi ha dos u-v camins que no tenen cap vèrtex en comú llevat de u i de v

Un graf sense cicles s'anomena graf acíclic

Proposició 1
Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si a G hi ha un u-v recorregut de longitud k, aleshores hi ha un u-v camí de longitud $\leq k$ que passa per vèrtexs i arestes del recorregut.

Proposició 2
Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si G té dos u-v camins diferents, llavors G conté un cicle

2. Grafs connexos

Un graf $G = (V, A)$ direm que és connex si per a tot parell de vèrtexs diferents u i v hi ha un u-v camí. Altrament direm que el graf és no connex

Remarca Si $G = (V, A)$ és un graf connex d'ordre més gran que 1, llavors $g(v) \geq 1$, per a tot $v \in V$

Definim la relació $\mathbf{R}$ a V: per a tot $x, y \in V$

$$x\mathbf{R}y \Leftrightarrow \text{ existeix un } x - y \text{ camí a } G$$

$\mathbf{R}$ és una relació d'equivalència:

– Reflexiva, $x\mathbf{R}x$: existeix un x-x camí de longitud zero
– Simètrica: Si $x\mathbf{R}y$, llavors $y\mathbf{R}x$: tot x-y camí recorregut en sentit invers és un y-x camí
– Transitiva: Si $x\mathbf{R}y$ i $y\mathbf{R}z$, llavors $x\mathbf{R}z$. Amb un x-y camí $xx_1 \dots x_n y$ i un y-z camí $yy_1 \dots y_m z$, es construeix un x-v recorregut $xx_1 \dots x_n yy_1 \dots y_m z$, per tant, hi ha un x-z camí

Si $G = (V, A)$ és un graf no connex hi ha una partició de V en $k > 1$ subconjunts $V_1, V_2, \dots, V_k$, les classes d'equivalència de la relació $\mathbf{R}$. Per tant, per tot $1 \leq i, j \leq k$,

1. $V_i \neq \emptyset$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ per a tot $i \neq j$, i $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$
2. $G[V_i]$ (el subgraf induït per V_i) és connex
3. No hi ha cap camí entre vèrtexs de $G[V_i]$ i els de $G[V_j]$, amb $i \neq j$
4. $G = \bigcup_{i=1}^{k} G[V_i]$

Anomenem components connexos del graf G als subgrafs $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$

Remarca

Sigui $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, on G_i són els components connexos de G, llavors

$$\begin{aligned} \text{ordre } G &= \text{ordre } G_1 + \dots + \text{ordre } G_k \\ \text{mida } G &= \text{mida } G_1 + \dots + \text{mida } G_k \end{aligned}$$

Proposició 3

Un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles

Proposició 4

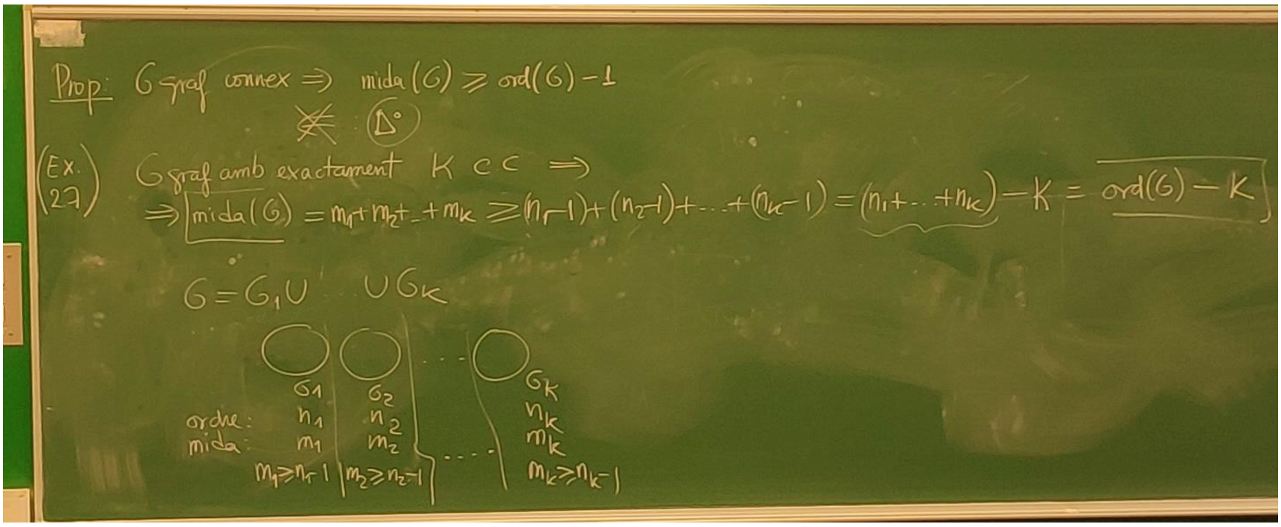
Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i siguin $e = xy \in A$ i $u \in V$. Aleshores

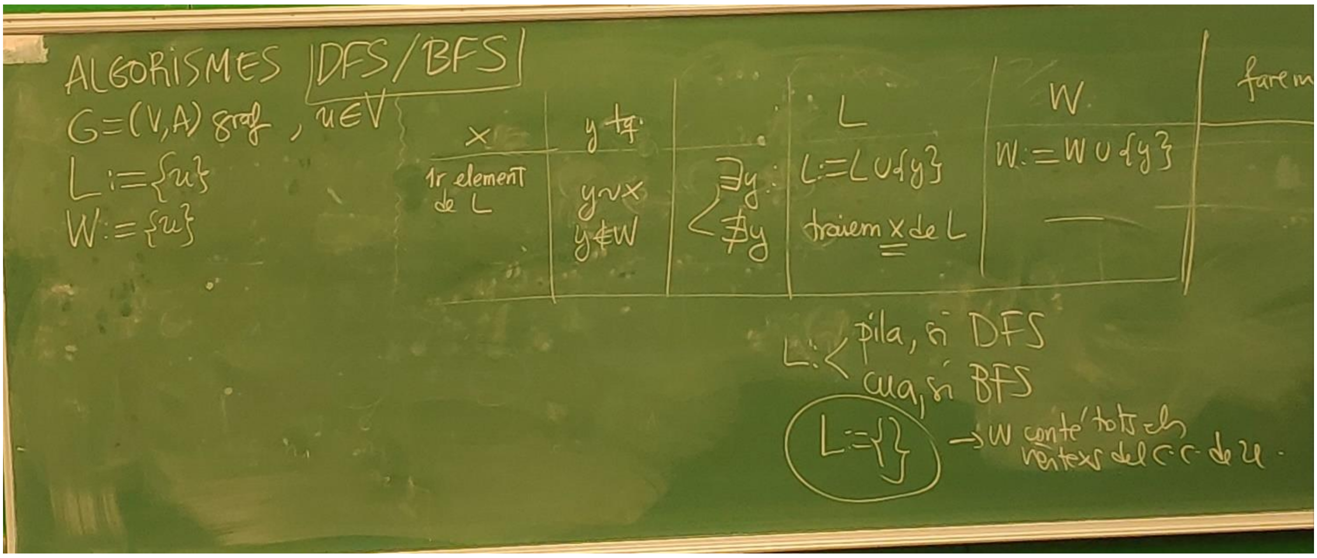
1. el graf $G - e$ té com a molt 2 components connexos; si en té 2, a un hi ha el vèrtex x i a l'altre el vèrtex y

2. el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos

Proposició 5

Tot graf connex d'ordre n té com a mínim $n - 1$ arestes





2.1 Algoritme DFS: Cerca en profunditat (Depth-first search)

```
Llista DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vèrtex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: la llista dels vèrtexs de G que pertanyen al mateix component connex que v
{
 Pila P;
 P.empilar(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 int x;
 while (not P.es_buida) {
  x=P.cim;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  P.empilar(y);
  W.afegir(y);
  }
  else {
  P.desempilar;
  }
 }
 return W;
}
```

Teorema 6 Sigui $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. El subgraf $G[W]$ induït pels vèrtexs de G visitats emprant l'algorisme DFS és el component connex de G que conté v

3. Vèrtexs de tall i arestes pont

Sigui $G = (V, A)$ un graf. Siguin $v \in V$ i $a \in A$, direm que

- v és un vèrtex de tall o vèrtex d'articulació si $G - v$ té més components connexos que G
- a és una aresta pont si $G - a$ té més components connexos que G

Remarques

1. Si G és connex i u és un vèrtex de tall, llavors $G - u$ és un graf no connex amb com a molt $g(u)$ components connexos
2. Els vèrtexs de grau 1 no són vèrtex de tall
3. Si G és connex i a és una aresta pont, llavors $G - a$ és un graf no connex amb exactament 2 components connexos

Teorema 7 Caracterització dels vèrtexs de tall

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex. Un vèrtex u de G és de tall si, i només si, existeixen un parell de vèrtexs x, y diferents d'u tals que tot x-y camí passa per u

Teorema 8 Caracterització de les arestes pont

Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i $a = uv$ una aresta de G. Són equivalents:

(a) a és una aresta pont

(b) existeixen un parell de vèrtexs x, y tals que tot x-y camí passa per a

(c) per l'aresta a no passa cap cicle

Remarques

1. Un graf pot tenir vèrtexs de tall però cap aresta pont
2. Sigui $a = uv$ una aresta pont. Si $g(u) = 1$, u no és un vèrtex de tall; si $g(u) \geq 2$, el vèrtex u és de tall
3. L'únic graf connex amb una aresta pont i cap vèrtex de tall és el K_2

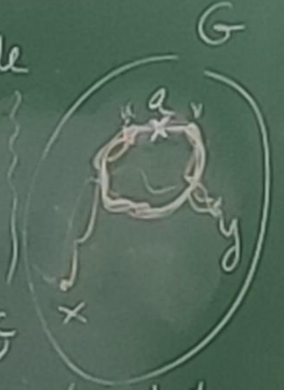
demo: $G=(V,A)$ connex, $a\in A$

a no és pont $\iff$ a és d'algun cicle

$\Rightarrow$) a no és pont $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} G-a \text{ connex} \\ a=uv \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ u-v camí en $G-a$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ l'u-v camí + aresta a és un cicle en G



$\Leftarrow$) a és d'algun cicle, veurem que $G-a$ és connex (i per tant a no és pont)

$\forall x,y \in V(G-a)=V(G)$

$\Downarrow$

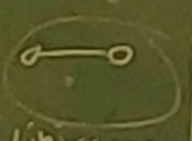
$\exists$ x-y camí en G (perquè G és connex)

- si no passa per a: és un x-y camí en $G-a$
- sí passa per a: canviem "a" per l'altra part del cicle que conté a en $G-a$

$\Rightarrow \exists$ x-y recorregut en $G-a$

$\Rightarrow \exists$ x-y camí " "

Grafs connexos:

∃ v tall \ ∃ a pont	Sí	NO
Sí		
NO	 únic connex	 (complets, cicles) ✓

4. Distància

Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs de G

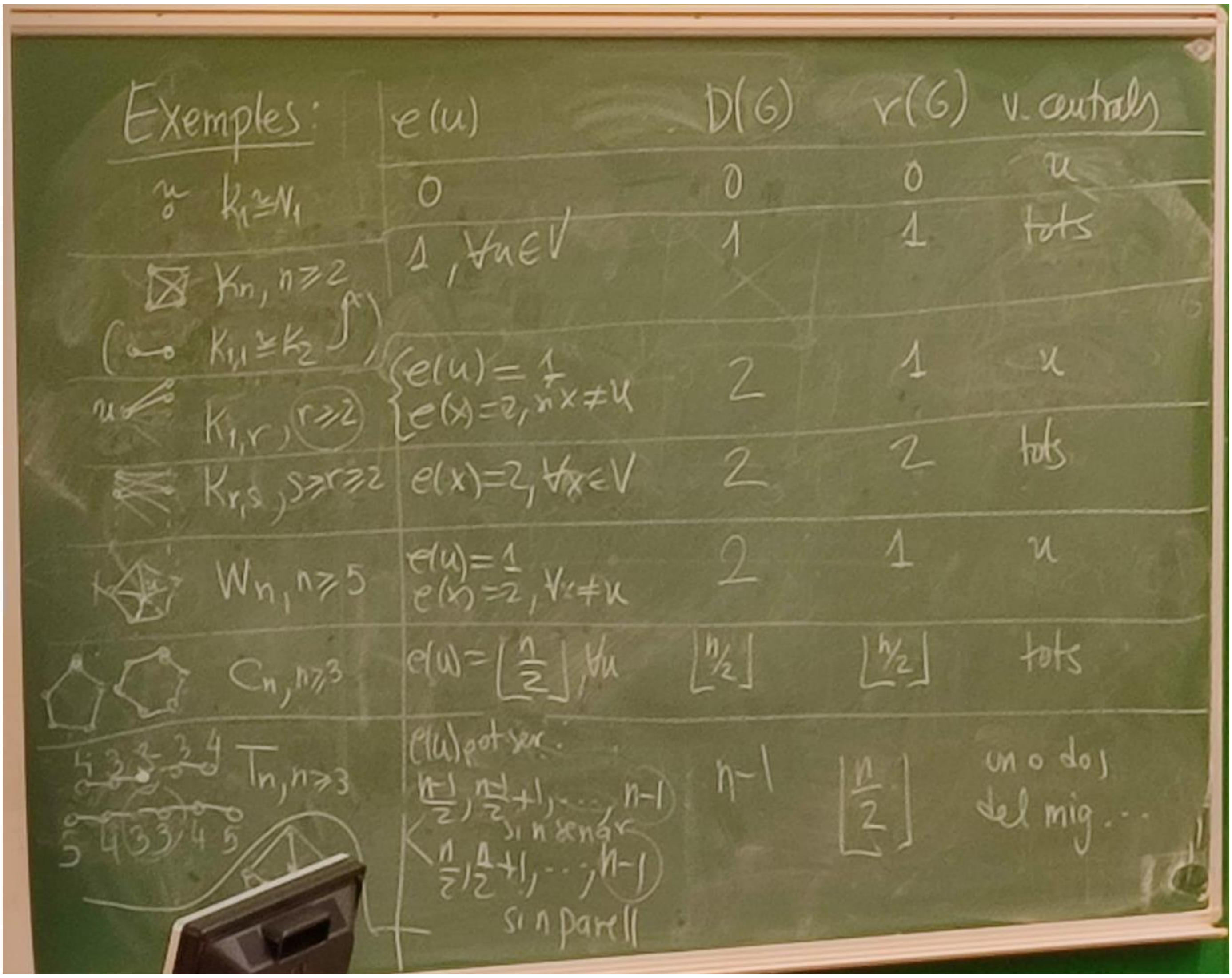
- Si u, v són al mateix component connex, definim distància entre u i v, $d(u, v)$, com el valor mínim entre les longituds de tots els u-v camins. Altrament direm que la distància és ∞
- Excentricitat del vèrtex u, $e(u)$: la distància més gran entre u i qualsevol altre vèrtex de G, és a dir, $e(u) = \text{màx}\{d(u, v) | v \in V\}$
- Diàmetre de G, $D(G)$: la màxima de les distàncies entre els vèrtexs de G, que equival al màxim de les excentricitats dels vèrtexs de G, és a dir,
$$D(G) = \text{màx}\{d(u, v) | u, v \in V\} = \text{màx}\{e(u) | u \in V\}$$
- Radi de G, $r(G)$: mínim de les excentricitats dels vèrtexs de G,
$$r(G) = \text{mín}\{e(u) | u \in V\}$$
- Vèrtexs centrals de G: vèrtexs de G tals que la seva excentricitat és igual al radi de G,
$$\{u \in V : e(u) = r(G))\}$$
- Centre de G: subgraf induït pels vèrtexs centrals

Remarques

1. $xy \in A \Leftrightarrow d(x, y) = 1$
2. G és no connex $\Leftrightarrow D(G) = \infty \Leftrightarrow r(G) = \infty \Leftrightarrow e(u) = \infty, \forall u \in V$
3. Es compleix $r(G) \leq D(G) \leq 2\, r(G)$.

En un graf $G = (V, A)$ (connex) per a vèrtexs u, v, w qualssevol es satisfà:

1. $d(u, v) \geq 0$, i $d(u, v) = 0$ si, i només si, $u = v$
2. $d(u, v) = d(v, u)$
3. $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ (desigualtat triangular)



4.1 Algorisme BFS: Cerca en amplada (Breadth First Search)

```
vector BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v (Suposarem que els vèrtexs del graf són enters)
/* Post: un vector D tal que D[x]=d(v,x)
{
 Cua C;
 C.demanar_torn(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 vector<int> D(n);
 D[v]=0;
 int x;
 while (not C.es_buida) {
  x=C.primer;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  C.demanar_torn(y);
  W.afegir(y);
  D[y]=D[x]+1;
  }
  else {
  C.avançar;
  }
 }
 return D;
}
```

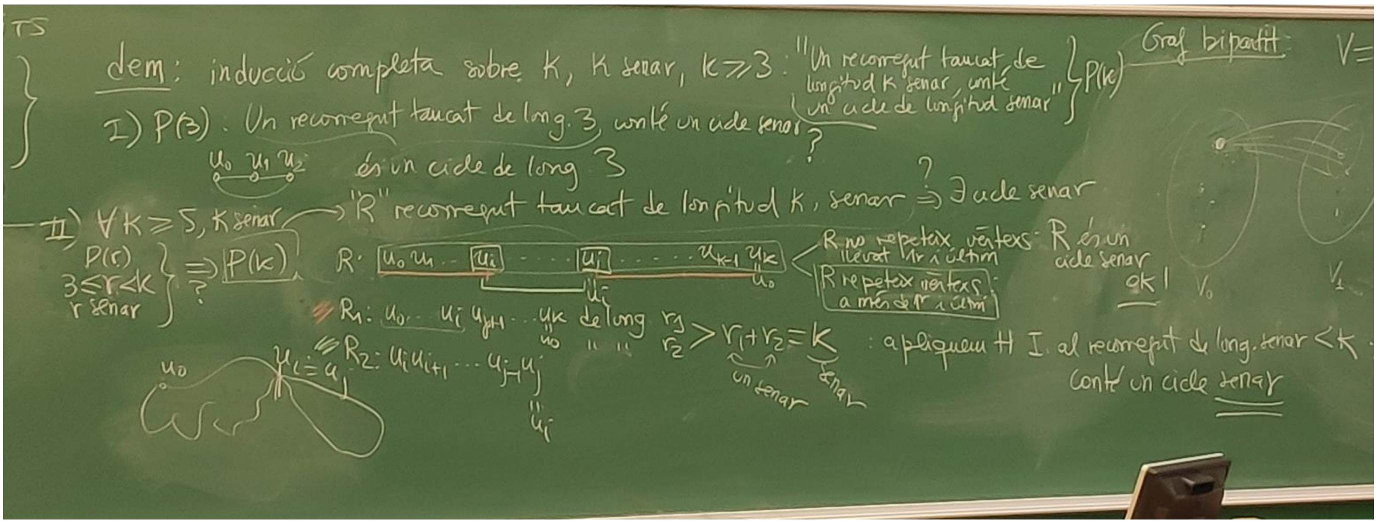
Teorema 9 Sigui $G = (V, A)$ un graf i $v \in V$. El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf

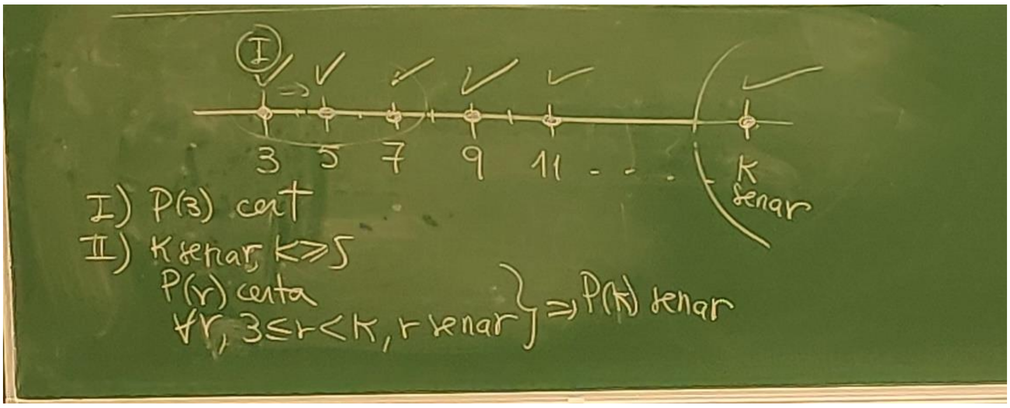
5. Caracterització dels grafs bipartits

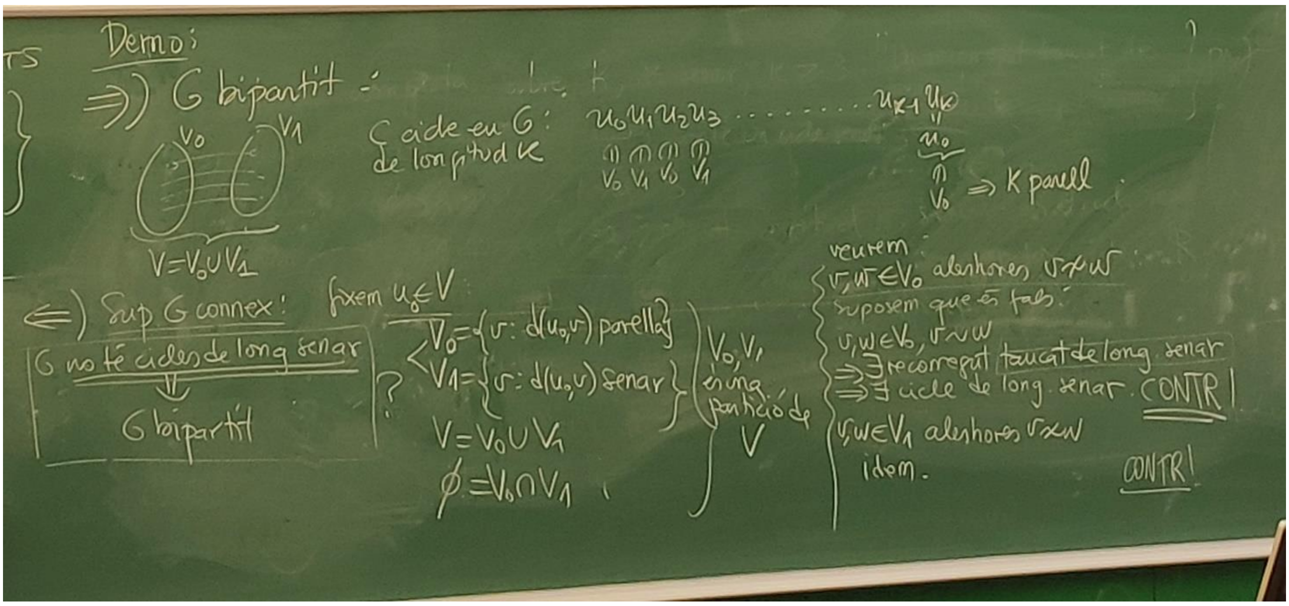
Lema 10
Sigui $G = (V, A)$ un graf
1. Si a G hi ha un recorregut tancat de longitud senar, aleshores a G hi ha un cicle de longitud senar.
2. L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a G no assegura la existència de cicles a G.

Teorema 11 Caracterització dels grafs bipartits

Un graf d'ordre ≥ 2 és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar







1. Grafs eulerians

Un recorregut d'un graf s'anomena senderó si és obert i no repeteix arestes, i s'anomena circuit si és tancat, no trivial i no repeteix arestes

Sigui G un graf connex, s'anomena

- senderó eulerià a un senderó que passa per totes les arestes de G
- circuit eulerià a un circuit que passa per totes les arestes de G
- graf eulerià a G si té un circuit eulerià

Teorema Caracterització dels grafs eulerians

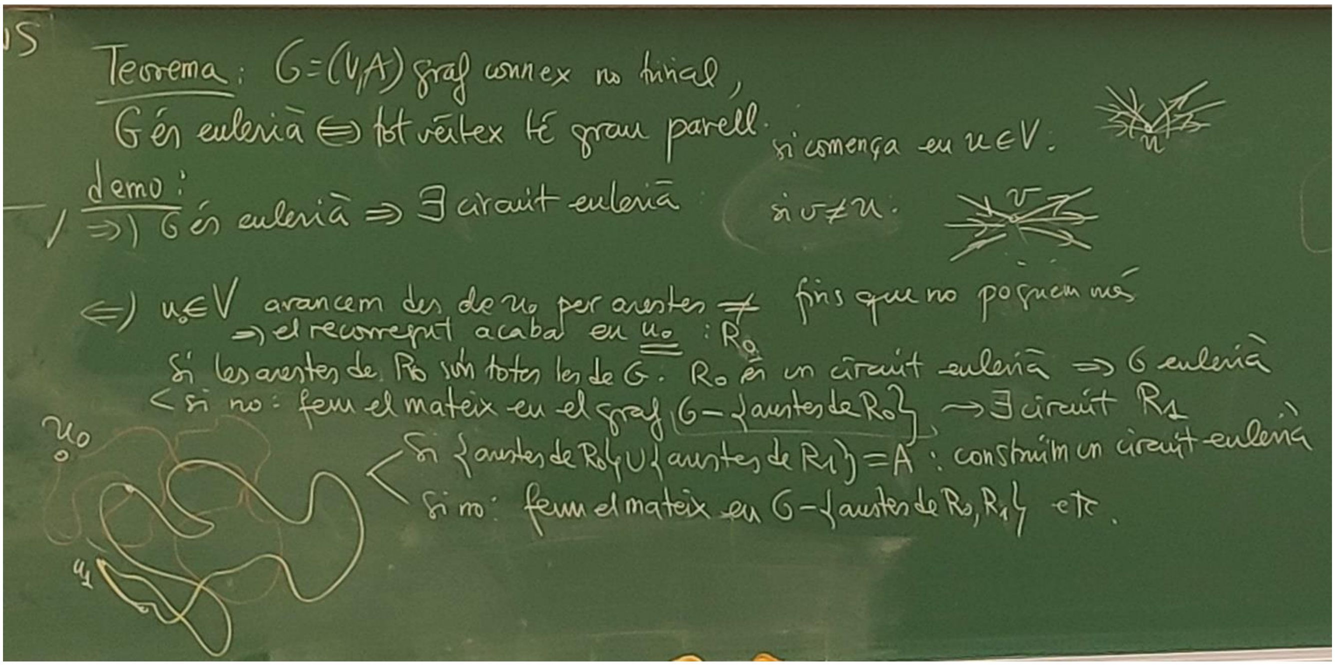
Sigui G un graf connex no trivial. Aleshores,

G és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs tenen grau parell

Corol.lari

Un graf connex té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar

En aquest cas, el senderó eulerià comença en un vèrtex de grau senar i acaba en l'altre vèrtex de grau senar



2. Grafs hamiltonians

Sigui G un graf connex, s'anomena

- camí hamiltonià a un camí no tancat que passa per tots el vèrtexs de G
- cicle hamiltonià a un cicle que passa per tots els vèrtexs de G
- graf hamiltonià a G si té un cicle hamiltonià

Condicions necessàries

Sigui $G = (V, A)$ un graf hamiltonià d'ordre n, aleshores

(1) $g(v) \geq 2$, per a tot $v \in V$

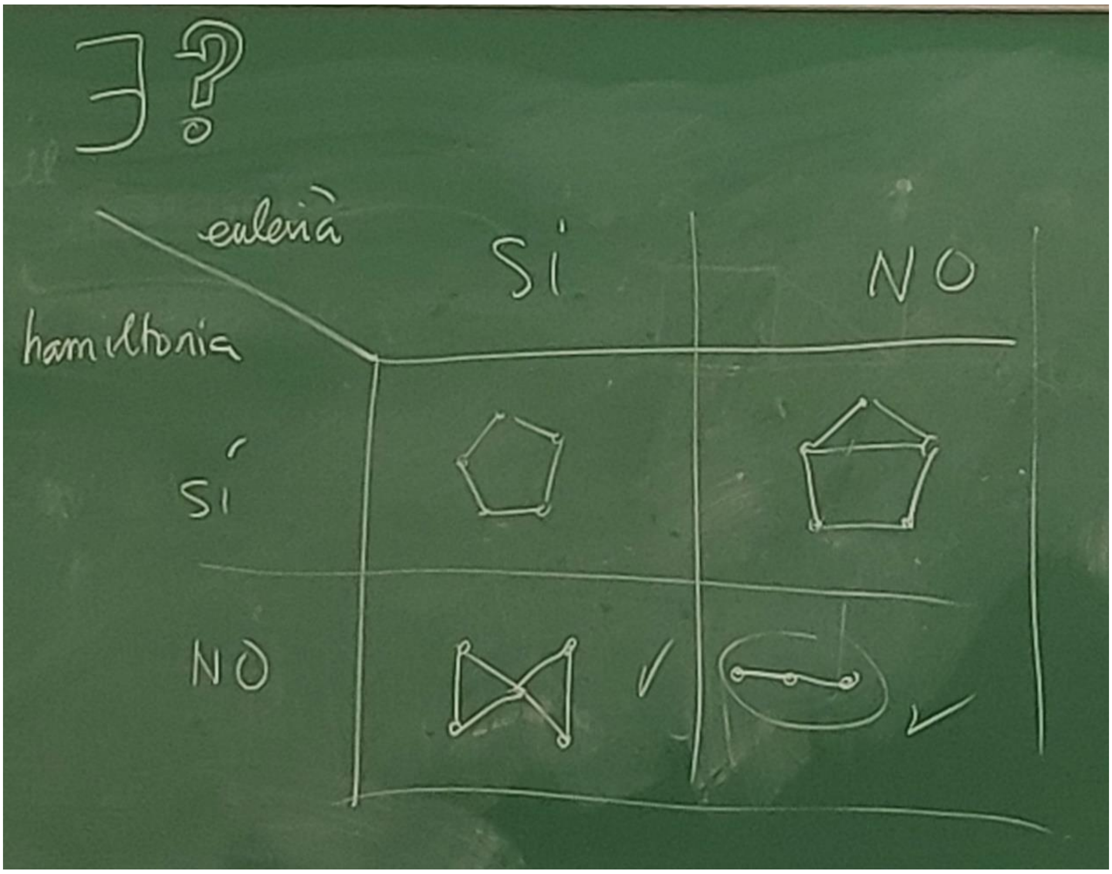
(2) si $S \subset V$ i $k = |S|$, el graf $G - S$ té com a molt k components connexos

Condicions suficients

Teorema de Ore $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot $u, v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià

Teorema de Dirac $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$, per a tot $u \in V$. Aleshores, G és hamiltonià

OBSERVACIO !!!! Els camins i els cicles no repeteixen vertexs.



Condicions necessàries:

G hamiltonià $\Rightarrow$ ord $G \geq 3$ $\not\Leftarrow$

$\Rightarrow$ G connex $\not\Leftarrow$

$\Rightarrow$ G no té v. tall. $\not\Leftarrow$

$\Rightarrow$ G no té arestes pont $\not\Leftarrow$

$\Rightarrow$ $\forall u$, $g(u) \geq 2$ $\not\Leftarrow$

ho satisfà "tot"

però NO és hamiltonià

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{G–S té com a molt } K \text{ c.c. si } |S| = k}$ $\not\Leftarrow$ $\to$

...taxen
...texs.

HAMILTONIANS

T. Ore. $G=(V,A)$ graf d'ordre n, $n \geq 3$ (1960)
$\forall u,v \in V$ $u \not\sim v$ es compleix $g(u)+g(v) \geq n$) $\Rightarrow$ G és hamiltonià

T. Dirac. $G=(V,A)$ graf d'ordre n, $n \geq 3$ (1952)
$\forall u$, $g(u) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ G és hamiltonià

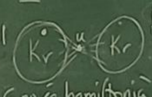
Lema (Bondy-Chvátal), 1972
G graf d'ordre n, $n \geq 3$
$u,v \in V$ tq. $u \not\sim v$ i $g(u)+g(v) \geq n$
G hamiltonià $\Leftrightarrow$ $G+uv$ hamiltonià

· $\not\Leftarrow$ p.e. C_n, $n \geq 5$

· fita "ajustada": G graf d'ordre $n \geq 3$
$(\forall u,v,\ u \not\sim v,\ g(u)+g(v) \geq n-1) \not\Rightarrow$ G hamilt.
$\forall u$, $g(u) \geq \frac{n-1}{2} \not\Rightarrow$ G hamilt.

contraexemple
graf d'ordre n, $n \geq 3$
$u \not\sim v$, $g(u)+g(v) \geq n-1$
$\forall u$, $g(u) \geq \frac{n-1}{2}$
però G no ésser hamiltonià,

G:



$r \geq 1$

$n = 2r+1$
$n-1 = 2r$

G no és hamiltonià (u és v. tall)

$g(u) = 2r \geq n-1$
$g(x) = r \geq \frac{n-1}{2}$
$x \neq u$

Exemples de grafs hamiltonians:

· K_n sí

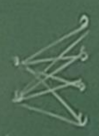
· C_n sí

· W_n sí

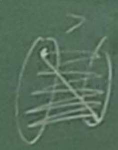
· T_n NO

· Petersen NO

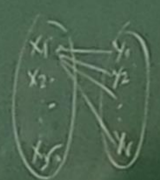
· $K_{1,n}$: NO



$K_{2,4}$



· G bipartit, parts estables V_1, V_2: ⊛
hamiltonià
$\Rightarrow$ $|V_1| = |V_2|$
$\not\Leftarrow$



· $K_{r,s}$, $s \geq r \geq 2$
hamilt. $\Leftrightarrow r = s$
($\Rightarrow$) per ⊛
($\Leftarrow$) $g(u) = r \geq \frac{n}{2} = \frac{2r}{2} = r$: Hamilt.

1. Arbres i teorema de caracterització

Anomenarem
– arbre a un graf connex i acíclic
– bosc a un graf acíclic
– fulla a tot vèrtex d'un arbre o d'un bosc que tingui grau 1

Observació: Els components connexos d'un bosc són arbres

Remarques: Siguin $T = (V, A)$ un arbre, a una aresta i u un vèrtex de T. Llavors

1. T conté almenys una fulla
2. a és aresta pont
3. $T - a$ és un bosc de 2 components connexos
4. si $g(u) \geq 2$, u és un vèrtex de tall
5. $T - u$ és un bosc de $g(u)$ components connexos
6. si u és una fulla, aleshores $T - u$ és un arbre

Proposició 1
Tot graf acíclic d'ordre n té mida com a molt $n - 1$.

Teorema 2 Caracterització d'arbres
Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m. Aleshores, són equivalents

(a) T és un arbre
(b) T és acíclic i $m = n - 1$
(c) T és connex i $m = n - 1$
(d) T és connex i tota aresta és pont
(e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T
(f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle

Corol·lari 3
Un bosc G d'ordre n i k components connexos té mida $n - k$

Corol·lari 4
Si T és un arbre d'ordre $n \geq 2$, T té almenys dos vèrtexs de grau 1

Prop: $G=(V,A)$ graf d'ordre n i mida m $\longrightarrow$ "$P(n)$"
G acíclic $\Rightarrow m \leq n-1$

demo: inducció sobre l'ordre n, $n \geq 1$:

I) $P(1)$ cert?: $n=1$ $\circ$ acíclic i es compleix $\underset{0}{\overset{\parallel}{m}} \overset{?}{\leq} \underset{1-1}{n-1}$ cert

II) $\forall n \geq 2$, $P(n-1) \Rightarrow P(n)$? $\longrightarrow$ Volem dem. $P(n)$:

$\boxed{\text{Si } \forall u \in V, g(u) \geq 2 \Rightarrow G \text{ té al fin cicle}}$ $(*)$

G acíclic d'ordre n i mida $m \Rightarrow m \overset{?}{\leq} n-1$
$\Downarrow$
$\exists u, g(u) < 2$ (si no, tindria al fin cicle per $(*)$)
$\Downarrow$
$\exists u, g(u)=0$ o $g(u)=1$

$\rightarrow$ Considerem el graf $G-u$, aleshores:

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ G-u \text{ és acíclic} \\ \cdot\ \text{ord}(G-u)=n-1 \end{array}\right\} \underset{\text{H.I}}{\Rightarrow} \text{mida}(G-u) \leq \text{ord}(G-u)-1$

$\Rightarrow m = \text{mida}\,G = \text{mida}(G-u) + g(u) \underset{\text{H.I}}{\leq} \text{ord}(G-u)-1 + g(u)$
$= (n-1)-1+g(u) \leq (n-1)\cancel{-1}\cancel{+1} = \boxed{n-1}$

Prop: $\underset{(V,A)}{\overset{\parallel}{T}}$ arbre d'ordre n, $n \geq 2 \Rightarrow$ té almenys 2 v. de grau 1 (fulles).

demo: $\left\{\begin{array}{l} \ell = \#\text{fulles} \\ n-\ell \text{ vèrtexs que no són fulles, o sigui, de grau} \geq 2 \text{ (perquè } T \text{ connex)} \end{array}\right.$

L. encaixades:

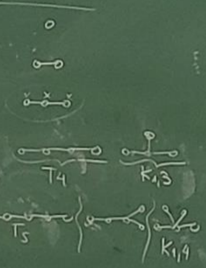
$\boxed{\sum g(u)} = \ell + \sum_{g(u) \geq 2} g(u) \geq \ell + 2(n-\ell)$
$\quad \parallel$
$2m = 2(n-1)$ (T arbre)

$2n-2 \geq \ell + \cancel{2n} - 2\ell \iff \boxed{\ell \geq 2}$

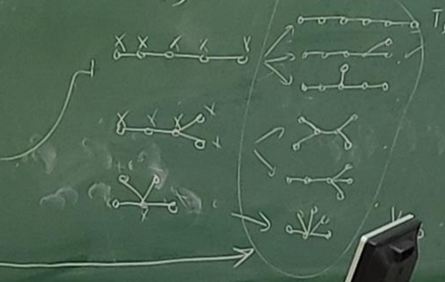
$1\ 1 \ldots 1\ \underbrace{2\ 2 \ldots 3\ 3 \ldots}_{n-\ell}$

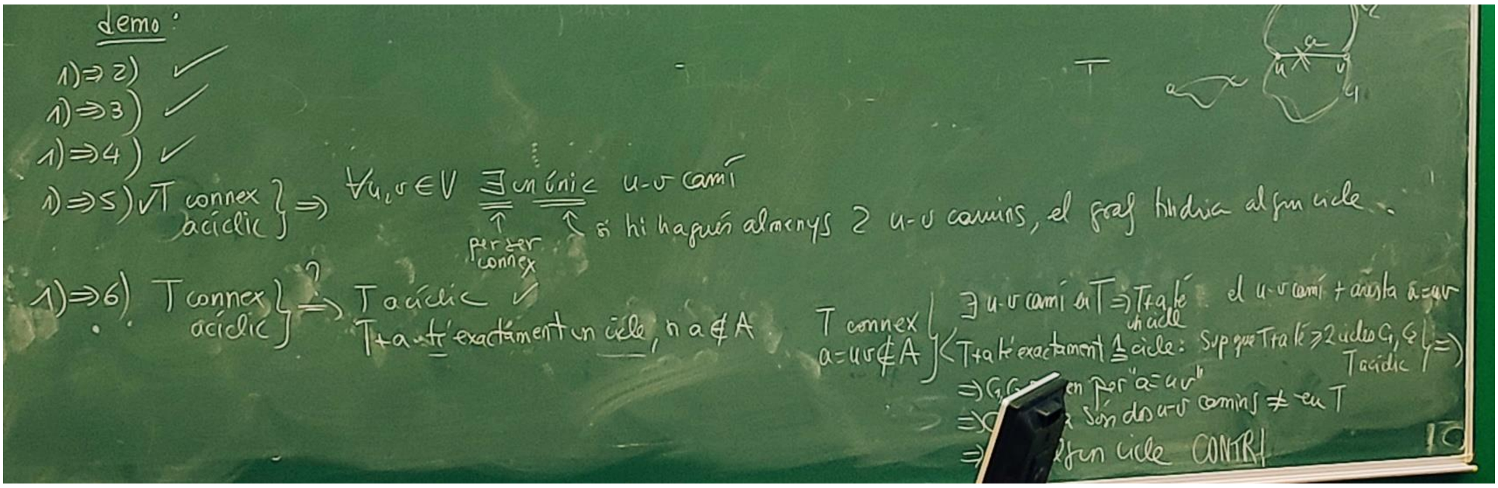
Arbres d'ordre n llevat isomorfismes:

n:	n'hi ha:	
1	1	
2	1	
3	1	
4	2	T_4, $K_{1,3}$
5	3	T_5, $K_{1,4}$
6	6	



$\left.\begin{array}{l} T \text{ arbre} \\ \text{ord}\,T=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists u, g(u)=1 \Rightarrow T-u$ arbre d'ordre 3



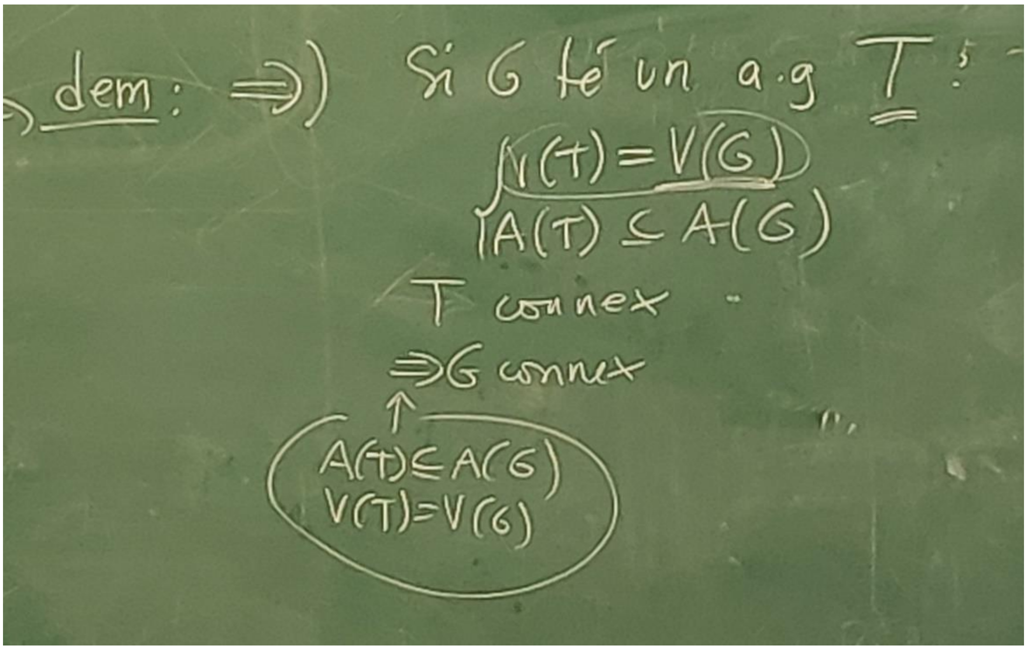


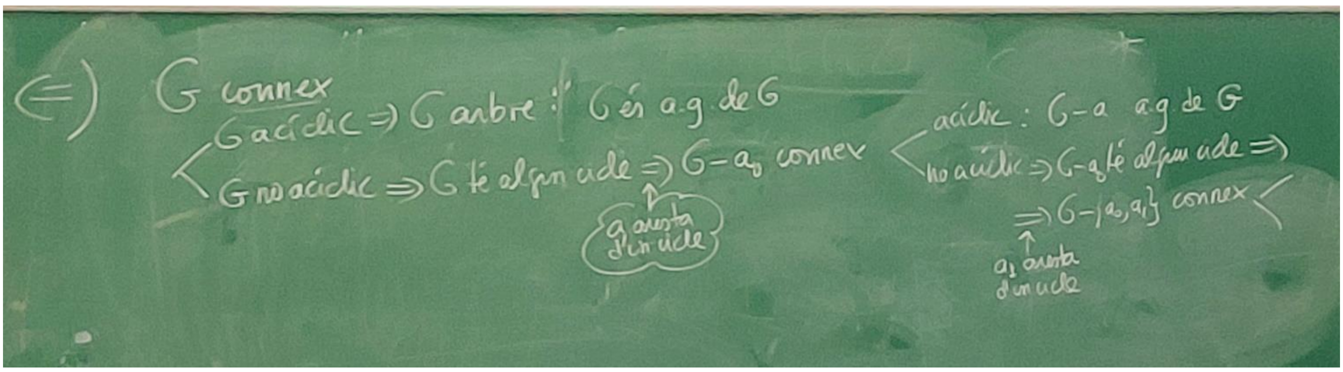
2. Arbres generadors

Anomenarem arbres generadors (o d'expansió) als subgrafs d'un graf que són subgrafs generadors i a més arbres

Teorema 5
$G = (V, A)$ és un graf connex si, i només si, G té un arbre generador

OBS --> s'agafen tots els vertexs





2.1 Algoritme DFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre DFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf G i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
 Pila P;
 P.empilar(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 Llista B;
 int x;
 while (not P.es_buida) {
  x=P.cim;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  P.empilar(y);
  W.afegir(y);
  B.afegir(xy);
  }
  else {
  P.desmpilar;
  }
 }
 return (W,B);
}
```

Teorema 6

$T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v

2.2 Algoritme BFS per a obtenir arbres generadors

```
arbre BFS(graf G, int v)
/* Pre: un graf connex G d'ordre n i un vertex v
/* Post: un arbre generador del component connex de G al que pertany v
{
 Cua C;
 C.demanar_torn(v);
 Llista W;
 W.afegir(v);
 Llista B;
  int x;
 while (not C.es_buida) {
  x=C.primer;
  if(''hi ha y tal que és adjacent a x i y no pertany a W'') {
  C.demanar_torn(y);
  W.afegir(y);
  B.afegir(xy);
  }
  else {
  C.avançar;
  }
 }
 return (W,B);
}
```

Teorema 7

$T = (W, B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v

*) $G=(V,A)$ graf connex

◦ arestes de tot a.g de G? Arestes pont.

◦ " de cap a.g. de G? No n'hi ha, tota aresta és d'algun a.g.

$a=uv$

apliquem BFS des de u

(4.15) (4.13)

• T a.g de G les fulles de T no són de tall en G: BFS →

u fulla de T:

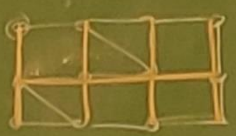
$T-u$ connex

$\Downarrow$

$G-u$ connex, perquè $A(T-u)\subseteq A(G-u)$

$\Downarrow$

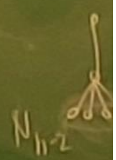
u no és de tall en G



• G connex d'ordre ≥ 2 té almenys 2 v. que no són de tall:

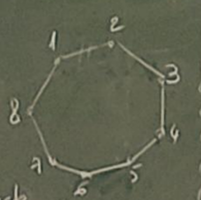
T a.g. de G $\Rightarrow$ T té almenys 2 fulles, u, v

$\Rightarrow$ u, v no són de tall en G.



(4.12)

C_n : ag $\neq$: n ; ag $\ncong$: 1 (el trajecte T_n)

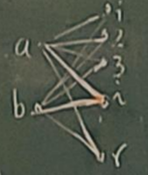


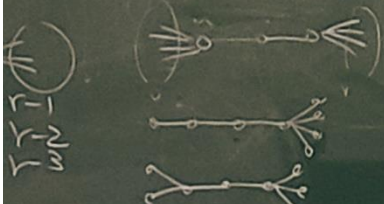
$K_{2,r}$: ag $\neq$: $\lceil r/2 \rceil$ ($r\geq 3$) ($r=1,2$?)

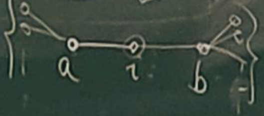
ag $\ncong$: ag de $K_{2,r}$ té mida: $\boxed{r+1}$, ordre $r+2$

$r \cdot \underbrace{2\,2 \cdots 2}_{r-1} = \boxed{r2^{r-1}}$

penjem cada v. de a o de b.







3. Enumeració d'arbres

Teorema de Cayley
El nombre d'arbres generadors diferents del graf complet K_n és n^{n-2}

El teorema equival a dir que el nombre d'arbres diferents d'ordre n amb conjunt de vèrtexs $[n]$ és n^{n-2}

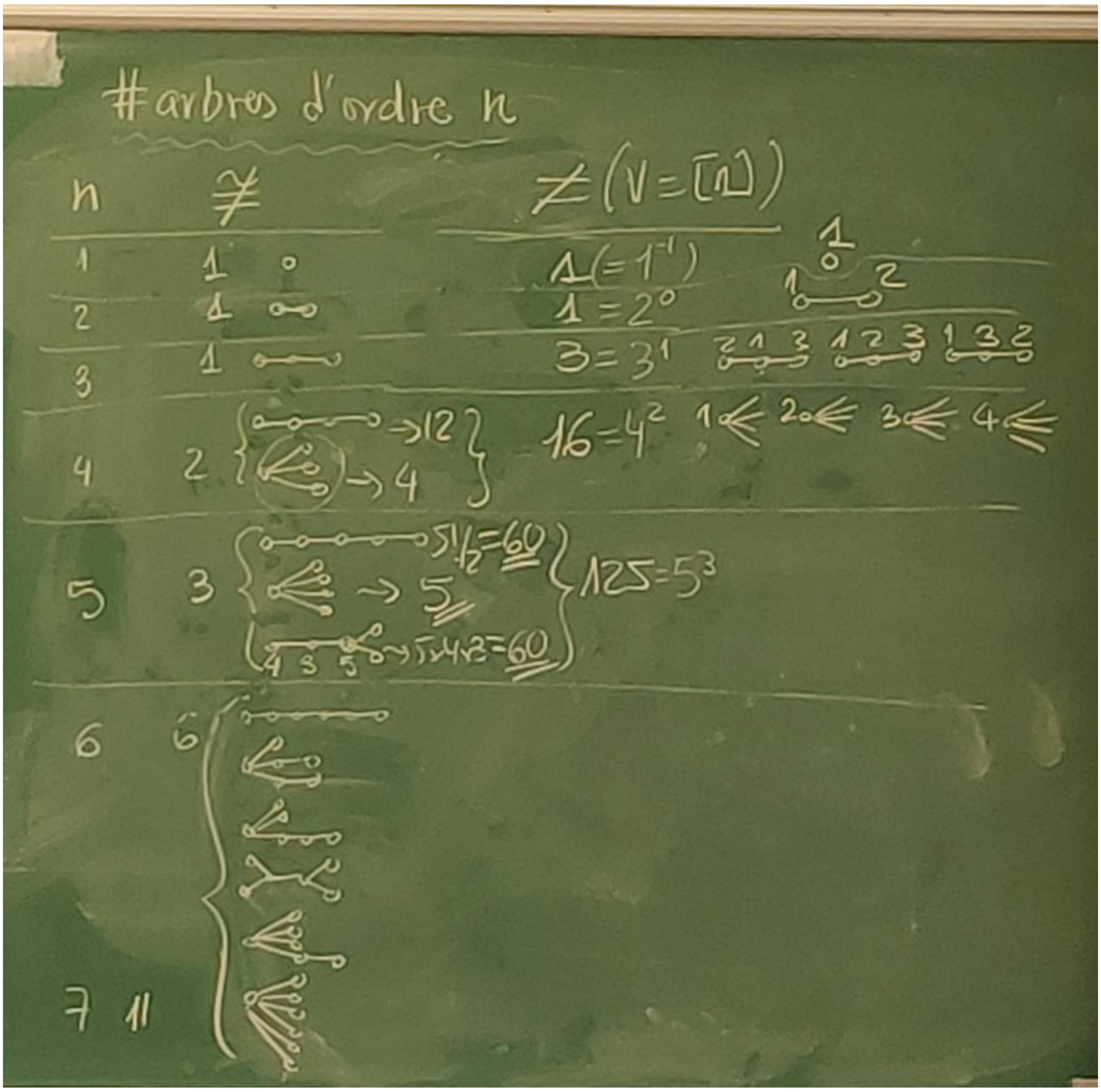
La prova es basa en la construcció d'una aplicació bijectiva

$$Pr : \{T : T \text{ arbre generador de } K_n\} \longrightarrow [n]^{n-2},$$

suposant que el conjunt de vèrtexs de K_n és $[n]$

S'anomena seqüència de Prüfer de T a la imatge de T per l'aplicació Pr:

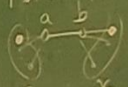
$$Pr(T) = (a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})$$



{"autoaprenentatge"}

Arbres tq la seq. de Prüfer té longitud 1? $\rightsquigarrow$ Arbres d'ordre 3 $P(T)=(a)$

1. Arbres tq.:
1) tots els valors de la seq. Prüfer són $=$ $\longrightarrow$ $P(T)=(\underbrace{a,a,a,\dots,a}_{r)})$, $ord(T)=n\ (=r+2)$; # fulles de T: $\underline{\underline{n-1}} \Rightarrow T\cong K_{1,n-1}$ 
2) a la seq. Prüfer apareixen exactament 2 valors $\neq$ $\rightsquigarrow$ $P(T)=(\underbrace{a,b,a,a,b,\dots}_{r)})$, $a\neq b$, $ord(T)=n\ (=r+2)$; # fulles de T: $\underline{\underline{n-2}}$ $\rightsquigarrow$ $a \sim b$. Té de la forma:
no fulles de T: 2 (a i b)



r_1 r_2

"biestrella"

$\begin{cases} a \to r_1 \\ b \to r_2 \end{cases}$ $g(a)-1=r_1$

Arbres generadors $\not\cong$ segons vèrtex inicial en aplicar DFS a $K_{r,r+3}$

arbres $\not\cong$ d'ordre $n\geq 3$:

segons:

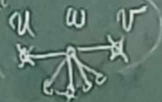
- # fulles $=\ell$, $2\leq \ell\leq n-1$
- grau màxim: $1\leq \Delta\leq n-1$
- diàmetre $2\leq D\leq n-1$

(4.10) similar a: $\rightsquigarrow$

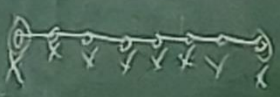
arbres d'ordre $n\geq 3$

- $\ell=n-1 \Leftrightarrow T\cong K_{1,n-1}$ ✓
- $\ell=2 \Leftrightarrow T\cong T_n$: ✓ $\ell=2 \Rightarrow \Delta\leq 2$ (si $\Delta\geq 3$, aleshores $\ell\geq\Delta\geq 3$) CONTR $\Rightarrow \begin{cases}\Delta=2: T_n \\ \Delta=1: \text{CONTR}\end{cases}$

- $D=n-1 \Leftrightarrow T\cong T_n$ ✓
- $D=2 \Leftrightarrow T\cong K_{1,n-1}$ ✓ $D=2$: $d(u,v)=2$



- $\Delta=n-1 \Leftrightarrow T\cong K_{1,n-1}$ ✓
- $\Delta=2 \Leftrightarrow T\cong T_n$ ✓ $\Rightarrow$) Camí de long màxima en T:



...

1.5 Siguin $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$ i $G = (V, A)$. Determineu tots els subgrafs de G d'ordre 4 i mida 4.

1.6 Els cinc apartats següents fan referència al graf G definit com segueix. El conjunt de vèrtexs és $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, i dos vèrtexs u i v són adjacents si $|u - v| \in \{1, 4, 5, 8\}$. Determineu l'ordre i la mida dels subgrafs de G següents:

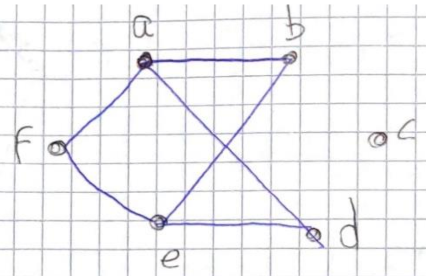
1) El subgraf induït pels vèrtexs parells.

2) El subgraf induït pels vèrtexs senars.

3) El subgraf induït pel conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4) Un subgraf generador que tingui el màxim nombre possible d'arestes però no contingui cicles.

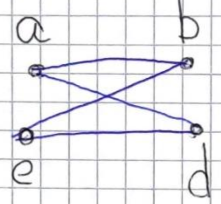
1.5-



$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$

4 abde 3 abdf 4 abef 4 adef 3 bdef

$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$



1.6 - $V = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$A = \{01, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78,$
$04, 15, 26, 37, 48, 05, 16, 27, 38, 08\}$

1- $V = \{0,2,4,6,8\}$
$A = \{04, 26, 48, 08\}$

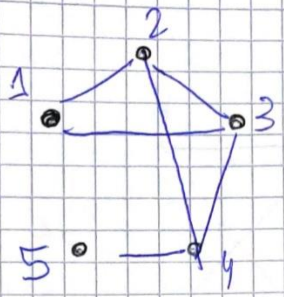
2- $V = \{1,3,5,7\}$
$A = \{15, 37\}$

3- $V = \{0,1,2,3,4\}$
$A = \{01, 12, 23, 34, 04\}$

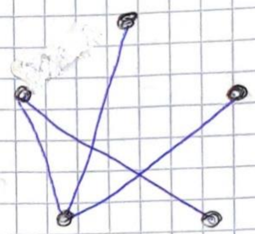
1.7 Considereu un graf $G=(V,A)$ amb $V=\{1,2,3,4,5\}$ i $A=\{12,13,23,24,34,45\}$. Doneu el conjunt d'arestes, la matriu d'adjacència i una representació gràfica dels grafs G^c, $G-4$, $G-45$ i $G+25$.

1.8 Considereu un graf $G=(V,A)$ d'ordre n i mida m. Siguin v un vèrtex i a una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida de G^c, $G-v$ i $G-a$.

1.7 –

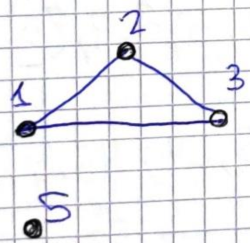


Gc



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

G–4



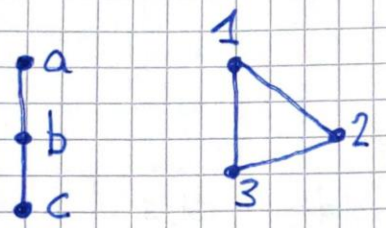
1.8 –

	ordre	mida
G^c	n	$\frac{n\cdot(n-1)}{2}-m$
$G-v$	$n-1$	$m-g(v)$
$G-a$	n	$m-1$
$G+a$	n	$m+1$

1.10 Doneu el conjunt d'arestes i una representació gràfica dels grafs $K_3 \cup T_3$ i $T_3 \times K_3$, suposant que els conjunts de vèrtexs de K_3 i de T_3 són disjunts.

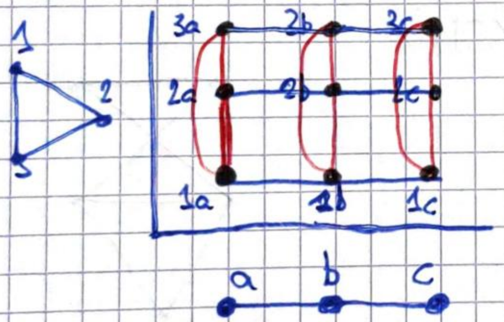
1.11 Considereu els grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$. Doneu l'ordre, el grau dels vèrtexs i la mida de $G_1 \times G_2$ en funció dels de G_1 i G_2.

1.10 – $K_3 \cup T_3$



$A = \{ab, bc, 12, 23, 13\}$

$K_3 \times T_3$



$A = \{1a1b, 1a2a, 1a3a,$
$1b1c, 1b2b, 1b3b$
$1c2c, 1c3c$
$2a2b, 2a3a$
$2b2c, 2b3b$
$2c3c$
$3a3b, 3b, 3c$

1.11 – $G_1 \times G_2$

$\text{ordre} = |V_1| \cdot |V_2|$

$\text{mida} = |V_1| \cdot |A_2| + |V_2| \cdot |A_1|$

$g\, G_1 \times g_2 = g_1 + g_2$

1.14 Considereu els grafs que tenen conjunt de vèrtexs $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Calculeu quants grafs n'hi ha ...

1) ... amb exactament 20 arestes.

2) ... en total.

1.15 Per a cadascuna de les seqüències següents, esbrineu si existeixen grafs d'ordre 5 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

1) 3, 3, 2, 2, 2.

2) 4, 4, 3, 2, 1.

3) 4, 3, 3, 2, 2.

4) 3, 3, 3, 2, 2.

5) 3, 3, 3, 3, 2.

6) 5, 3, 2, 2, 2.

1.16 Demostreu que si un graf és regular de grau senar, aleshores té ordre parell.

1.17 Sigui G un graf bipartit d'ordre n i regular de grau $d \geq 1$. Quina és la mida de G? Pot ser que l'ordre de G sigui senar?

1.18 Demostreu que en un graf bipartit d'ordre n la mida és menor o igual que $n^2/4$.

14- $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

1- 21

2- $2^{21} = 2097152$

Ex 1.16:

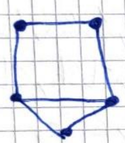
Graf r-regular, r= senar → n= parell

$$\sum_{u \in V} \underbrace{g(u)}_{\substack{n \cdot r \\ n \to \text{parell},\ r \to \text{senar}}} = \underbrace{2|A|}_{\text{parell}}$$

Per complir amb la paritat de l'enunciat el nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell perquè senar més senar dona parell

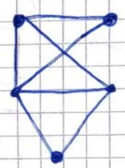
15-

1) 33222



2) 4,4,3,2,1
No existeix

3) 4,3,3,2,2



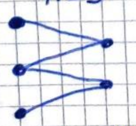
4) 3,3,3,2,2
No existeix

5) 3,3,3,3,2

6) 53222
No existeix

16- Tot graf té un nombre parell de vertex de grau senar

18- $n=5$



mida = 4

✓

$4 \leq \frac{5^2}{4}$

$4 \leq 6'25$

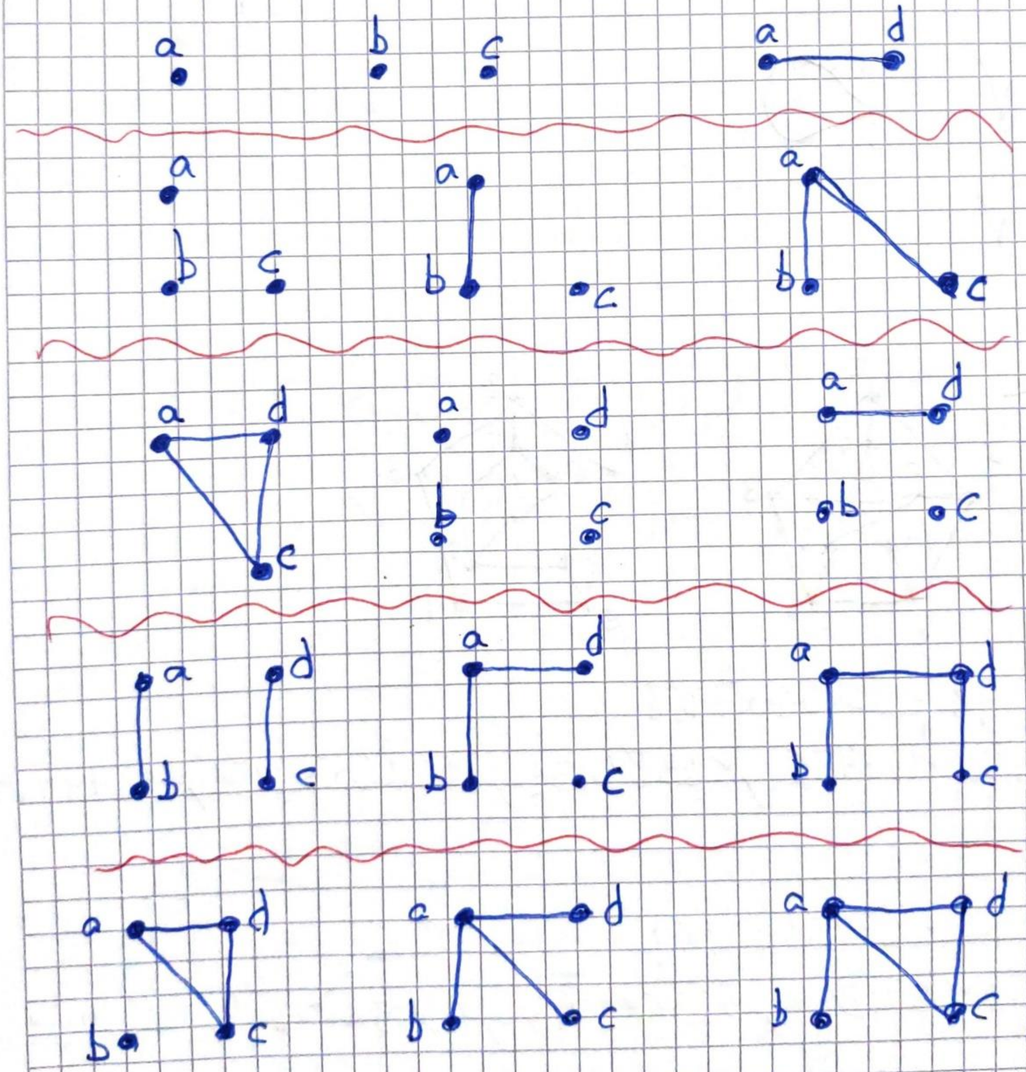
1.21 Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els grafs d'ordre quatre i mida dos.

1.22 Sigui $V = \{a, b, c, d\}$ i $A = \{ab, ac, ad, dc\}$. Determineu, llevat d'isomorfismes, tots els subgrafs del graf $G = (V, A)$.

1.25 Determineu el nombre de grafs no isomorfs d'ordre 20 i mida 188.

21-

22- $A = \{ab, ac, ad, dc\}$



25- 2

$K_{20} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190 \qquad 190 - 188 = 2$

1.28 Sigui G un graf d'ordre $n \geq 6$.

1) Demostreu que G o G^c conté un vèrtex v de grau almenys 3.
2) Demostreu que G o G^c conté un cicle de longitud 3. (Considereu les adjacències entre els veïns del vèrtex v del primer apartat.)
3) Demostreu que en una reunió de $n \geq 6$ persones, sempre n'hi ha 3 que es coneixen dos a dos o 3 que no es coneixen dos a dos.

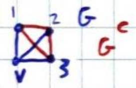
1.12 Proveu o refuteu les afirmacions següents:

1) Si G_1 i G_2 són grafs regulars, aleshores $G_1 \times G_2$ és regular.
2) Si G_1 i G_2 són grafs bipartits, aleshores $G_1 \times G_2$ és bipartit.

Ex 28 PROFE: G d'ordre $n \geq 6$

1) $v \in V$ $\quad gr_G(v) = k \quad$ Si $k < 3$, $n-1-k \geq 3$

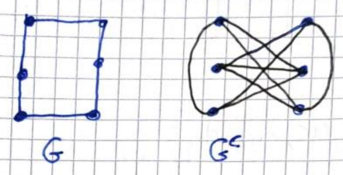
$gr_{G^c}(v) = (n-1) - k$

2) 
Si 12, 23 o 13 són a G formen un cicle amb v, sinó es forma a G^c entre 1, 2 i 3

3) És el triangle, si no es coneixen al complementari sí i viceversa (apartat b) al normal,

28) $n = 6$

1- ✓



2- ✓ 

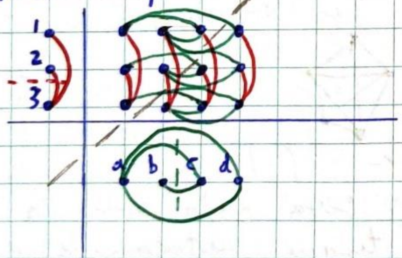
3- ✓

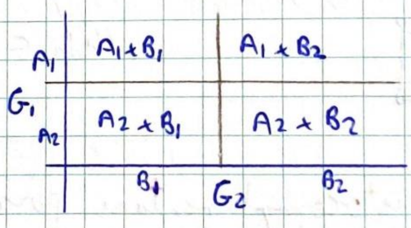
Ex 1.12:

1) $g(u,v) = g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v) \to$ Si tots dos són regulars $g(G_1 \times G_2)$ serà una constant per a tots els vèrtexs

PROFE $\to G_1\ G_2$ regular $\to G_1 \times G_2$ regular perquè $gr(u,v) = gr_{G_1}(u) + gr_{G_2}(v)$

2) $G_1\ G_2$ bipartit $\to G_1 \times G_2$ bipartit

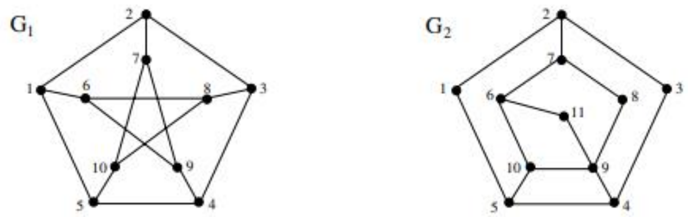




$A_2 \times B_1 \cup A_1 \times B_2$

$A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2$

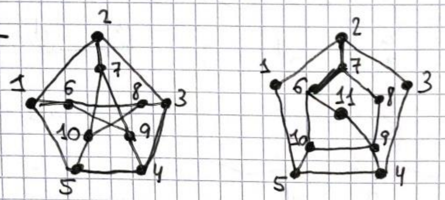
2.1 Trobeu en els grafs següents, si és possible, camins de longitud 9 i 11, i cicles de longitud 5,6,8 i 9.



2.2 Demostreu que si G és un graf de grau mínim d, aleshores G conté un camí de longitud d.

2.3 Un graf té ordre 13 i 3 components connexos. Demostreu que un dels components té un mínim de 5 vèrtexs.

2.1-



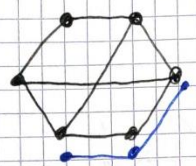
Camí 9: 12345107968

Cicles: 123451 , 12381051 , 1681079451, 12349710861

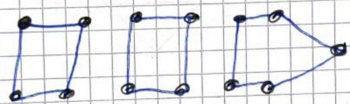
Camí 9: 12345106789

Cicles: 123451 , 510611945 , 2345109872, 51234911610

2.2-

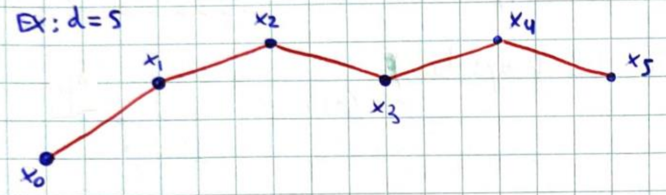


2.3-



Ex 2.2:

Ex: $d=5$



$x_1 \rightarrow$ Com a mínim 4 veïns nous

$x_2 \rightarrow$ Com a mínim 3 veïns nous

$x_3 \rightarrow$ Com a mínim 2 veïns nous

...

$x_5 \rightarrow$ Ja hem acabat (camí de $L=5$)

$\Uparrow$

A cada pas, si $i<d$

$x_0 \; x_1 \; \dots \; x_i$ (Long $= i$) Llavors x_i té algun veí que no sigui $x_0 \dots x_{i-1}$ i l'afegim al camí. Quan $i=d$, ja hem acabat

Ex 2.3:

13 vèrtexs

3 Comp. connexos $\rightarrow$ ordre $k, l, m \leq 4$ $\quad k+l+m \leq 4+4+4=12$ (Contradicció amb ordre 13)

Reducció a l'absurd

Suposem que els 3 cc tenen $k, l, m \leq 4$

ordre $G = k+l+m \leq 4+4+4=12$ Contradicció amb ordre 13

2.5 Demostreu que si un graf té exactament dos vèrtexs de grau senar, aleshores existeix un camí que va d'un a l'altre.

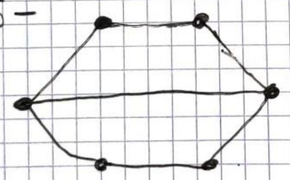
2.6 Sigui G un graf d'ordre n que té exactament dos components connexos i tots dos són grafs complets. Demostreu que la mida de G és, almenys, $(n^2 - 2n)/4$.

2.7 Sigui G un graf d'ordre n amb exactament k components connexos. Demostreu que la mida de G és més gran o igual que $n - k$.

2.4 – 1) a, b, d, e, f, g, i, j $\cup$ c, h

2) a, b, d, e, g, h, j, m $\cup$ c, f, i, K $\cup$ L

2.5 –



2.6 – $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ $\left(\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)\right)$

$\boxed{\frac{n^2 - 2n}{4}}$ $\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}$

Ex 2.5:

Si un graf G té dos vèrtexs de grau senar, existeix un camí entre ells / estan al mateix cc

Reducció a l'absurd

Suposem que no.

V_1, V_2 grau senar $\exists\, G_1$ i G_2 $V_1 \in G_1$ i $V_2 \in G_2$ cc de G

El subgraf G_1 és un graf amb un sol vèrtex de grau senar

(Contradicció amb el lema de les encaixades)

*Cada cc és com un graf (ha de complir les propietats)

Ex 2.6:

G d'ordre n 2 cc que són complets $= K_r \cup K_s$

$\text{Mida}(K_r \cup K_s) \geq \frac{n^2 - 2n}{4}$

Graf amb menys arestes $\to K_{\frac{n}{2}} \cup K_{\frac{n}{2}}$

$r + s = n$

$\text{Mida}\left(K_{\frac{n}{2}} \cup K_{\frac{n}{2}}\right) = \frac{2 \cdot \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2} = \frac{n^2 - 2n}{4}$

$\underbrace{M(K_r \cup K_s)}_{M(K_{r,s})} = M(K_n) - M(K_r \cup K_s)^c \geq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{4}$

Ex 1.16

2.8 Sigui G un graf d'ordre n amb exactament $k+1$ components connexos. En aquest exercici volem trobar una fita superior per la mida de G. Per a fer-ho definim el graf auxiliar H d'ordre n amb $k+1$ components connexos, $k \geq 1$: k són isomorfs a K_1 i un component és isomorf a K_{n-k}.

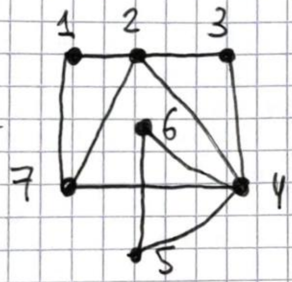
1) Calculeu la mida de H.

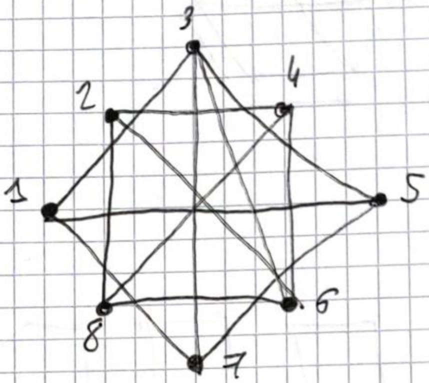
2) Demostreu que la mida de H és més gran o igual que la mida de G.

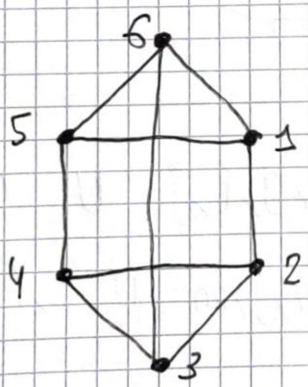
2.9 Trobeu tots els vèrtexs de tall i arestes pont dels grafs següents.

2.8- $M(H) = \dfrac{(n-K)\cdot(n-K-1)}{2}$

2.9-







G_1: Vertexs tall: 4
Arestes pont: cap

G_2: Vertexs tall: 3, 6
Arestes pont: 36

G_3: Vertexs tall: Cap
Arestes pont: Cap

2.10 Sigui $G = (V, A)$ un graf connex d'ordre almenys 2. Prenem $z \notin V$ i definim $G + z$ com el graf que té $V \cup \{z\}$ com a conjunt de vèrtexs i $A \cup \{zv : v \in V\}$ com a conjunt d'arestes. Demostreu que $G + z$ no té vèrtexs de tall.

2.11 Trobeu el més petit n tal que existeix un graf 3-regular d'ordre n que té una aresta pont.

2.12 Demostreu que un graf 3-regular té un vèrtex de tall si, i només si, té alguna aresta pont.

2.13 Siguin $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. Proveu que

1) si G és no connex, aleshores G^c és connex;

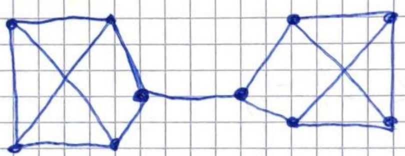
2) $(G - v)^c = G^c - v$;

3) si G és connex i v és un vèrtex de tall de G, aleshores v no és un vèrtex de tall de G^c.

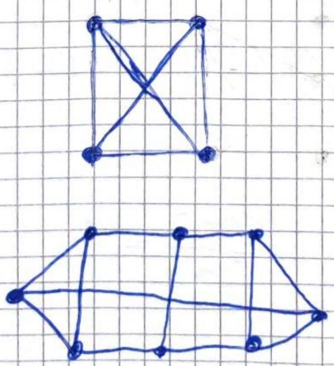
2.10 -

2.11 -

n=10

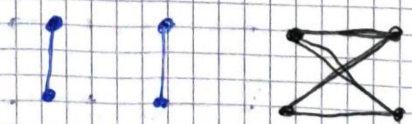


2.12 -



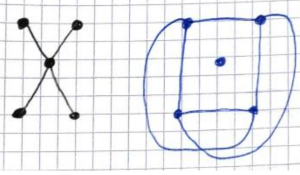
2.13 -

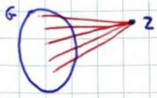
a)



b)

c)





$v \in V$ és de tall?

- v_1 i $v_2 \in G$, $v_1 z v_2$ els connecta
- $v \in G$ i z connectats per construcció
- z no és V.T $\to G+z-z = G$ connex

Ex 2.11 (PROFE - CONTINUACIÓ):

$n = 1,3,5,7,9 \to$ grau senar i ordre senar, impossible

$n = 2 \to \nexists$ graf 3-regular d'ordre 2

$n = 4 \to$ l'únic és el K_4

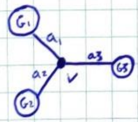
$n = 6,8 \to$  $\to$ A cada peça de separació calen mínim 5 vèrtexs ($n=10$)

Simètric

Ex 12:

$\Leftarrow$) Si té aresta pont tindria vèrtex tall

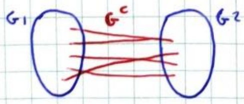
$\Rightarrow$) $\exists v$ de tall $\to \exists$ a. pont



- G_1, G_2, G_3 components* de $G-v$
- Si G_1, G_2 es connecten, G_3 ha d'estar desconnectat, i per tant a_3 és aresta pont. Igualment per a_1, a_2

Ex 13: $G = (V, A)$, $v \in V$

1) G no connex, siguin G_1 una cc i G_2 $G - G_1$, veurem que u i v qualsevol de G estan connectats a G^c



- u i $v \in G_1$, agafem w de G_2. El camí uwv connecta u i v a G^c; equivalent per G_2
- $u \in G_1$ i $v \in G_2$, estan connectats a G^c perquè no ho estaven a G

2) $(G-v)^c = G^c - v$

- Tenen els mateixos vèrtexs ($V - \{v\}$)
- Les arestes que no toquen v son les mateixes (les de G^c)
- Les arestes que no toquen v, no estan en cap dels dos

$\Rightarrow$ Tenen els mateixos vèrtexs i arestes

$(G-v)^c = G^c - v$

3) G és connex, v de tall

$G - v$ no connex (Apartat 1)

$(G-v)^c$ sí és connex

$G^c - v$ sí és connex (Apartat 2)

v no és vèrtex de tall en G^c

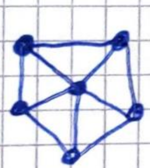
2.16 Per a cadascuna de les relacions següents sobre el diàmetre, doneu un graf $G = (V, A)$ connex i un vèrtex $u \in V$ que les satisfacin.

1) $D(G) = D(G - u)$. 2) $D(G) < D(G - u)$. 3) $D(G) > D(G - u)$.

2.18 Sigui G un graf d'ordre 1001 tal que cada vèrtex té grau ≥ 500. Demostreu que G té diàmetre ≤ 2.

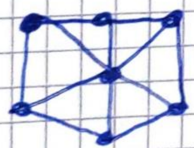
2.16- 1) $D(G) = D(G-u)$

Ex2



$G = W_6$ i un vertex de grau 3

2- $D(G) < D(G-u)$



$G = W_7$, i un vertex de grau 6

3- $D(G) > D(G-u)$

$G = ([4], \{12, 13, 14, 23\})$ $u = 4$

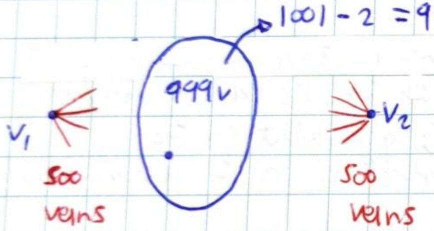
2.18- ordre = 1001

grau ≥ 500

$\frac{1000}{500} = 2$

Ex 2.18:

$1001 - 2 = 999 \to$ Han de tenir un veí en comú (això v_1 i v_2)

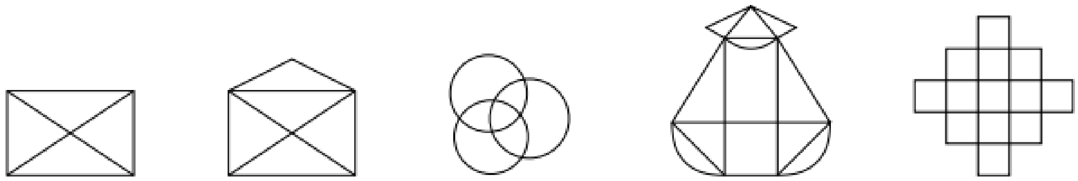


Siguin v_1 i v_2 vèrtexs qualsevols de G $\exists w \in G$ que $v_1 w v_2$ és un camí (i, per tant, v_1 i v_2 estan a distància ≤ 2)

$|\text{"veïns"}(v_1)| \geq 500$ $\quad |G - \{v_1, v_2\}| = 999$

$|\text{"veïns"}(v_2)| \geq 500$ $\quad \Rightarrow \exists w$ veí de v_1 i v_2

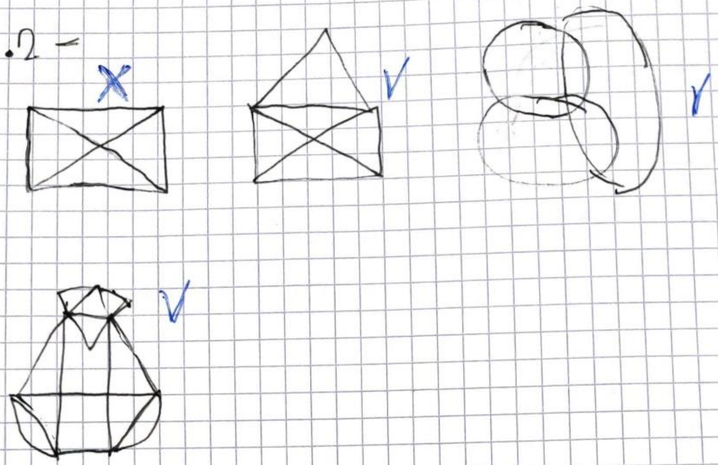
3.2 Esbrineu si els dibuixos següents es poden dibuixar sense aixecar el llapis del paper i sense repetir cap línia



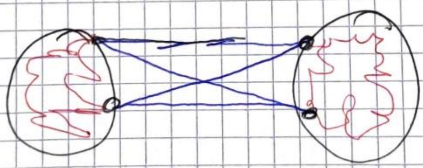
3.5 Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són eulerians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf eulerià.

3.12 Sigui G un graf que té exactament dos components connexos que són grafs hamiltonians. Trobeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf hamiltonià.

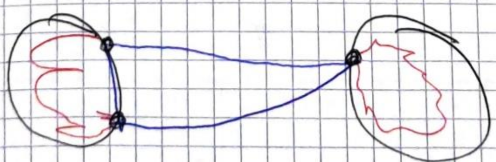
3.2 -



3.5 -

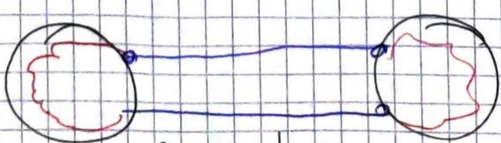


4 arestes



3 arestes si una de les components no es un graf complet

3.12 -



2 arestes

3.8 El *graf n-cub* Q_n té per conjunt de vèrtexs $\{0,1\}^n$ i dos vèrtexs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ són adjacents si difereixen en exactament una coordenada.

1) Representeu Q_i per $1 \le i \le 4$.

2) Determineu l'ordre, la mida i la seqüència de graus de Q_n.

3) Trobeu els valors de n tals que Q_n és eulerià.

3.13 Sigui G un graf hamiltonià que no és un graf cicle. Demostreu que G té almenys dos vèrtexs de grau ≥ 3.

3.14 L'Àlex i l'Aran han llogat un pis per compartir. El dia de la inauguració, conviden 10 companys de facultat a sopar. En el grup de 12 persones, cadascuna en coneix almenys 6 (no cal que tots els convidats coneguin l'Àlex i l'Aran). Demostreu que es poden seure els 12 al voltant d'una taula rodona de forma que tothom conegui les dues persones que té assegudes al costat.

A l'última hora arriba un company que també coneix almenys 6 de les persones que hi ha al sopar. Podeu ara assegurar que es poden seure seguint la condició anterior?

3.8 –

Q_n

ordre 2^n

grau n

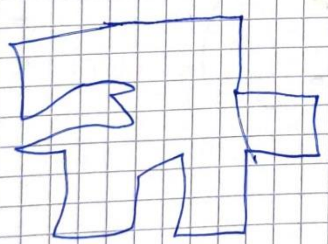
mida $2^{n-1} \cdot n$

c)

$n \geq 2$

n parell

3.13 –



3.14 – Sigui G el graf que té els convidats com a vertexs i una aresta si dues persones es coneixen

Pel teorema de Dirac, és Hamiltonià

4.3 Sigui T_1 un arbre d'ordre n i mida 17 i T_2 un arbre d'ordre $2n$. Calculeu n i l'ordre i la mida de T_2.

4.4 Trobeu quants arbres d'ordre n no isomorfs hi ha tals que ...

1) ... el seu grau màxim és $n-2$.

2) ... el seu grau màxim és $n-3$.

4.5 Sigui T un arbre d'ordre 12 que té exactament 3 vèrtexs de grau 3 i exactament un vèrtex de grau 2.

1) Trobeu la seqüència de graus de T.

2) Trobeu dos arbres no isomorfs amb aquesta seqüència de graus.

4.3 – T_1 ordre n mida 17

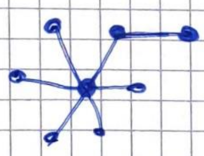
T_2 ordre $2n$ mida m

T_1 mida 17 → ordre 18

T_2 ordre $2n = 36$ → mida 35

4.4 –

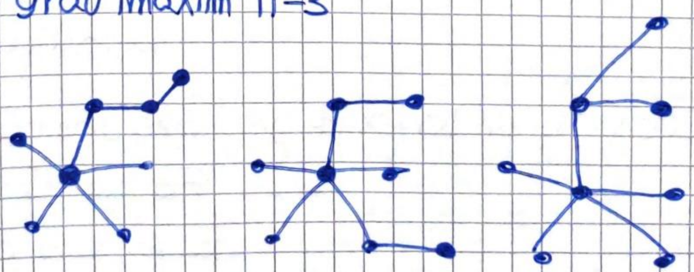
grau maxim $n-2$



1 graf

grau maxim $n-3$

3 grafs



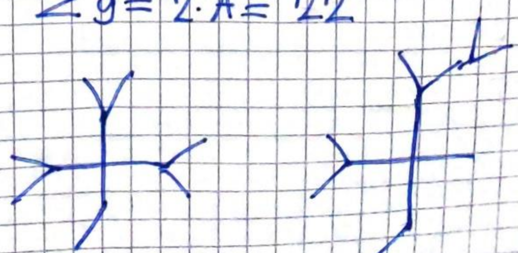
4.5 – 3 vg 3

1 vg 2

1 vg 4

7 vg 1

$\Sigma g = 2 \cdot A = 22$



4.6 Trobeu un graf connex tal que tot vèrtex de grau ≥ 2 sigui de tall però no sigui arbre.

4.7

1) Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$. Proveu que el nombre de fulles de T és

$$2 + \sum_{g(u)\geq 3} (g(u) - 2).$$

2) Sigui Δ el grau màxim de T i sigui n_i el nombre de vèrtexs de grau i de T. Vegeu que la fórmula anterior es pot escriure com

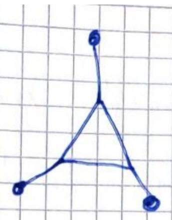
$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i.$$

3) Sigui ara G un graf connex, de grau màxim Δ i amb n_i vèrtexs de grau i, per a tot i. Demostreu que si es compleix la igualtat

$$n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2)n_i,$$

aleshores G és un arbre.

4.6 -



4.7 - nº de fulles $= 2 + \sum_{g(u)\geq 3} g(u) - 2$

T ordre 2

$n=2$ $\quad F = 2+0 = 2$

$n \to n+1$

a conecta una fulla $\to$ F no canvia

a conecta un vertex de grau 2 $\to$ F augmenta en 1

la formula augmenta en 1

a conecta un vertex de grau mes gran o igual a 3

F augmenta en 1

la formula augmenta en 1

b) $n_1 = 2 + \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2) \cdot n_i$

$F = 2$

$\sum_{g(v)\geq 2} g(v) - 2 = \sum_{i=2}^{\Delta} (i-2) \cdot n_i$

4.8 Sigui G un graf connex que només té vèrtexs de grau 1 i de grau 4. Sigui k el nombre de vèrtexs de grau 4. Demostreu que G és un arbre si, i nomes si, el nombre de fulles és $2k + 2$.

4.9 Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 2$ i de grau màxim Δ. Proveu que T té un mínim de Δ fulles.

4.10 Demostreu que les afirmacions següents són equivalents per a un arbre T d'ordre $n \geq 3$:

a) T és isomorf al graf estrella $K_{1,n-1}$.

b) T té exactament $n-1$ fulles.

c) T té grau màxim $n-1$.

d) T té diàmetre igual a 2.

c) T un arbre generador de G. T satisfa la formula

$G = T + \{a \ldots\}$

T+a te menys fulles pero en la formula augmentara o es quedarà igual

4.8- $n_1 = 2 + \sum_{i \geq 2}^{\Delta} (i-2) \cdot K$

$n_1 = 2 + (4-2) \cdot K$

$\boxed{n_1 = 2 + 2K}$

4.9- T arbre ordre n i grau maxim Δ té com a minim Δ fulles

Per cada aresta de V, o be conecta amb una fulla, o bé amb un subarbre que té com a minim una fulla.

4.10- a→b cert perquè $K_{1,n-1}$ té $n-1$ fulles

b→c Si té $n-1$ fulles té un unic vertex que no es una fulla i aquest esta connectat amb tots els altres.

c→d Sigui V grau maxim, està connectat a tots els altres. $\forall a,b$ vertexs de T a V b es un camí, i no n'hi ha cap altre

d→a $\forall a,b$ vertexs, a V b és un camí

Han de ser el mateix o hi ha un cicle