Programación 2
Corrección de programas iterativos

Fernando Orejas

1. Corrección de programas
2. Corrección de programas iterativos
3. Diseño inductivo de programas iterativos

Corrección de programas

Definición

Un programa es correcto si para todos los valores posibles que cumplen la Precondición, el programa termina y los resultados cumplen la Postcondición.

```
// Exponenciación

// Pre: x = A, y = B >= 0
// Post: El resultado p es A^B

    int p = 1;
    while (y > 0) {
        y = y - 1;
        p = p*x;
    }
```

¿Cómo podemos probar que un programa es correcto?

No podemos probar que funciona para cada valor

¿Cómo podemos probar que un programa es correcto?

No podemos probar que funciona para cada valor

No basta explicar cómo se ejecuta el programa

```
// Exponenciación (versión 2)

// Pre: x == A, y == B >= 0
// Post: El resultado p es A^B

    int p = 1;
    while (y > 0) {
        if (y % 2 == 0) {
            x = x * x;
            y = y / 2;
        }
        else {
            p = p * x;
            y = y - 1;
        }
    }
```

¿Cómo podemos probar que un programa es correcto?

No podemos probar que funciona para cada valor

No basta explicar cómo se ejecuta el programa

Razonamiento genérico sobre los valores + Inducción

Razonamiento sobre programas

Un estado de un programa es la n-upla de valores que tienen las variables en un momento dado, más la entrada y la salida

Una aserción es la descripción lógica de un conjunto de estados

Razonamiento sobre programas

Método: anotamos el programa con aserciones que describen los estados en distintos puntos y argumentamos que la anotación es correcta

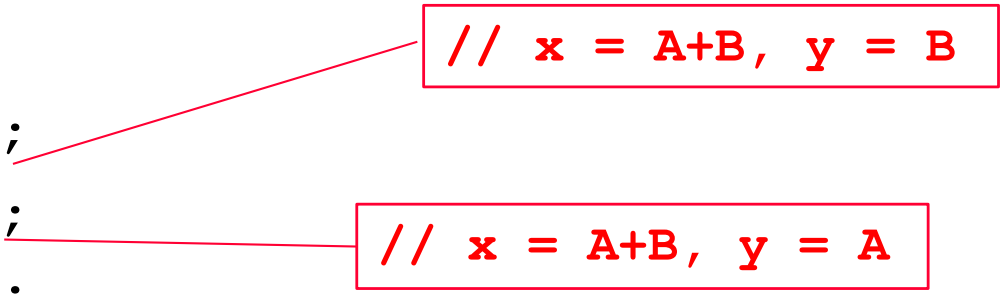
Un programa es (parcialmente) correcto si es cierto que:

```
// Pre
Programa
//Post
```

```
// Intercambio de dos variables enteras

// Pre: x == A, y == B.




// Post: x == B, y == A
```

```
// Intercambio de dos variables enteras

// Pre: x == A, y == B.


    x = x + y;
    y = x - y;
    x = x - y;

// Post: x == B, y == A
```

```
// Intercambio de dos variables enteras

// Pre: x = A, y = B.

    x = x + y;
    y = x - y;
    x = x - y;

// Post: x = B, y = A
```



```
// Exponenciación

// Pre: x = A, y = B >= 0
     int p = 1;
     // x = A, y = B >= 0, p = 1
     while (y > 0) {
          y = y - 1;
          p = p*x;
     }
// Post: El resultado p es A^B
```

Corrección de un programa con un bucle

Esquema básico:

```
// Pre: ...
Inicialización

   while (C) {
   B
}

Tratamiento final
// Post: ...
```

Corrección de un programa con un bucle

Esquema básico:

```
// Pre: ...
Inicialización
// Pre del bucle: ...
   while (C) {
   B
}
// Post del bucle: ...
Tratamiento final
// Post: ...
```

```
// Exponenciación

// Pre: x = A, y = B >= 0

    int p = 1;
    // Pre del bucle: x = A, y = B >= 0, p = 1
    while (y > 0) {
        y = y - 1;
        p = p*x;
    }
    // Post del bucle: p = A^B

// Post: El resultado p es A^B
```

Invariantes

Un invariante de un bucle es una aserción que siempre se cumple, independientemente del número de iteraciones

Típicamente, se coloca a la entrada del bucle

Describe la relación que existe entre las variables que intervienen en el bucle

Los invariantes se demuestran por inducción

Los invariantes son una buena documentación

```
// Exponenciación

// Pre: x == A, y == B >= 0

    int p = 1;
    // Inv: y>=0, A^B = x^y * p
    while (y > 0) {
        y = y - 1;
        p = p*x;
    }

// Post: El resultado p es A^B
```

Verificación de bucles

Para razonar sobre un bucle hemos de:

1. Probar que la Pre del bucle implica el Invariante
2. Si se cumple Inv y se cumple C, después de ejecutar B, se vuelve a cumplir Invariante
3. Si se cumple Inv y no se cumple C, entonces se cumple la Post del bucle
4. El bucle termina

```
// Pre del bucle x = A, y = B >= 0, p = 1

// Inv: y>=0, A^B = x^y * p

while (y > 0) {

   y = y - 1;

   p = p*x;


//Pero A^B = x^C * D = x^(C-1) * x * D  = x^y * p
}
```

Suponemos que y = C, p = D

```
// Inv: y>=0, A^B = x^y * p

while (y > 0) {
```

y = C > 0, $A^B = x^C * D$, p = D

```
    y = y - 1;
```

y = C-1 >= 0, $A^B = x^C * D$, p = D

```
    p = p*x;
```

y = C-1 >= 0, $A^B = x^C * D$, p = D * x

```
//Pero A^B = x^C * D = x^(C-1) * x * D  = x^y * p
}
```

```
// Inv: y>=0, A^B = x^y * p

while (y > 0) {
    y = y - 1;
    p = p*x;
}
```

$y >= 0, A^B = x^y * p, y <= 0$

```
// Si y > 0 es falso:

// y>= 0, y <= 0  entonces y = 0
// Como consecuencia A^B = x^0 * p = p

// Post: p = A^B
```

Terminación de bucles

Para demostrar que un bucle termina hemos de definir una función F sobre las variables del bucle que cumpla (función de cota):

1. Si se cumple el invariante F(...) >= 0
2. Si entramos en el bucle F(…) > 0
3. Si en un punto de la ejecución del bucle F(...) = N, después de ejecutar una iteración el F(...) < N.

La idea es que la función de cota nos diga cuántas iteraciones nos quedan como máximo.

```
// Exponenciación

// Pre: x == A, y == B >= 0
    int p = 1;
    // Inv: y>=0, A^B = x^y * p
    while (y > 0) {
        y = y - 1;
        p = p*x;
    }
// Post: El resultado p es A^B
```

Definimos F(...) = y

Si se cumple el invariante F(...) = y >= 0

Si entramos en el bucle y > 0

Si antes de ejecutar el bucle F(...) = y = C

después de ejecutar el bucle F(...) = y = C-1

Suma de un vector

```
// Pre: true
double suma(const vector<double>& v) {
    int a = 0;
    double s = 0;

    while (a < v.size()) {
        s += v[a];
        ++a;
    }
    return s;
}
// Post: retorna la suma de todos los elementos de v
```

Para comprobar que una función es correcta hay que:

1. Inventar un invariante I y una función de cota F.
2. Comprobar que despues de la inicialización se cumple I.
3. Si se cumple I y la condición del bucle es cierta, después de ejecutar el cuerpo del bucle se vuelve a cumplir I.
4. I y la negación de la condición del bucle implican la post.
5. La función de cota decrece a cada iteración
6. Si entramos en el bucle, la función de cota es estrictamente positiva.

Suma de un vector

```
// Pre: true
double suma(const vector<double>& v) {
    int a = 0;
    double s = 0;
    // Inv: 0 <= a <= v.size(), s=suma(v[0..a-1])
    while (a < v.size()) {
        s += v[a];
        ++a;
    }
    return s;
}
// Post: retorna la suma de todos los elementos de v

F(...) = v.size()-a
```

Número de elementos diferentes en una lista

```
// Pre: cert
/* Post: Si la lista está vacía retorna 0, en caso
contrario, retorna el número de elementos diferentes
que hay en L */
int ndif (List <int>& L);
```

Número de elementos diferentes en una lista

```
// Pre: cert
/* Post: Si la lista está vacía retorna 0, en caso
contrario, retorna el número de elementos diferentes
que hay en L */
int ndif (List <int>& L) {
    int n = 0;
    List <int>::iterator it = L.begin();
    while (it != L.end()) {
        List <int>::iterator it1 = L.begin();
        while (it1 != it and *it1 != *it) ++it1;
        if (it1 == it) ++n;
        ++it;
    }
    return n;
}
```

Bucle interno

- **Función de cota**. F = número de elementos en en el intervalo de L entre it1 e it.

- F siempre es positivo.
- Cuando entramos en el bucle F > 0;
- Si F = 0, salimos del bucle.

Bucle interno

- **Invariante:**

```
/* Inv: el valor de todos los valores que estan en
nodos anteriores a it1 son diferentes que *it, it1
apunta a un elemento de L en el intervalo
L.begin():it. */
```

```
/*Post del bucle interno: *it es la primera vez que
aparece si y solamente si it == it1 */
```

1. La primera vez, el invariante se cumple trivialmente.
2. Si se cumple Inv e **`it != it1 and *it1!=`** *it, claramente se vuelve a cumplir el invariante
3. Si no se cumple la condición del bucle, claramente se cumple la Post del bucle.

Bucle externo

- **Función de cota**. F = número de elementos en el intervalo de L entre it y L.end().

- F siempre es positivo.
- Cuando entramos en el bucle F > 0;
- Si F = 0, salimos del bucle.

Bucle externo

- **Invariante:**

```
/* Inv: n = num de elementos diferentes en L hasta la
posición apuntada por it (excluida),it apunta a un
elemento de L */
//Post del bucle externo: n es el num de elementos
diferentes en L */
```

1. La primera vez, el invariante se cumple trivialmente.
2. Si se cumple Inv e **`it != L.end()`** , como despues del bucle interno sabemos que el elemento apuntado por it es nuevo si y solo si **`it1 == it`**, si it apunta a un elemento nuevo se incremenra n en 1, y si no, se deja igual. con lo que al hacer ++it, se vuelve a cumplir el invariante
3. Si no se cumple la condición del bucle y se cumple el invariante, claramente se cumple la Post del bucle.

Invariantes gráficos

Se pide diseñar una función que, dado un vector que solo contiene unos doses y treses, lo ordene. Es decir:

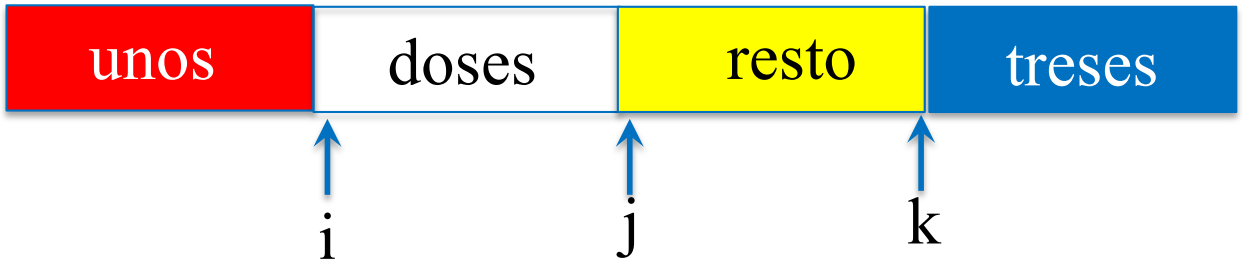
```
/* Pre: para todo i, 0 ≤ i < v.size(): 0 < v[1] < 4 */

/* Post v está ordenado y es una permutación del vector
original*/

void bandera_holandesa(vector <int> v);
```

Invariantes gráficos

```
void bandera_holandesa(vector <int> v){
    int i = 0; int j = 0; int k = v.size()-1;
    while (j <= k){
        if (v[j] == 1){
            swap(v[i],v[j]); ++j; ++i;
        }
        else if (v[j] == 2) ++j
        else {swap(v[k],v[j]); --k;
        }
    }
}
```

$F = k - j + 1$

Inv:



Diseño Inductivo

Diseño inductivo

Invertimos el proceso. A partir de una Pre y una Post:

1. Diseñamos un invariante adecuado
2. Definimos una inicialización para que se cumpla el invariante
3. Definimos una condición del bucle que, negada, garantice la postcondición del bucle
4. Diseñamos un cuerpo del bucle que mantenga el invariante.
5. Definimos una finalización para que se cumpla la Post

```
// contar a's

/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/

/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
// contar a's

/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
   caracteres acabada en un punto*/

/* Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
   de S y c contiene el primer carácter no tratado de S
*/

/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {



    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (      ) {


    }

}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (      ) {


    }

}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (c != '.') {



    }

}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (c != '.') {
        if (c == 'a') cont = cont + 1;
        cin >> c;
    }

}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (c != '.') {
        if (c == 'a') cont = cont + 1;
        cin >> c;
    }
// cont es el número de a's en S

}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (c != '.') {
        if (c == 'a') cont = cont + 1;
        cin >> c;
    }
// cont es el número de a's en S
    cout << cont << endl;
}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
```

```
/* Pre: En la entrada tenemos una secuencia S de
caracteres acabada en un punto*/
int main() {
    char c;
    cin >> c;
    int cont = 0;
    // Inv: cont es el número de a's en la parte tratada
    //      de S y c contiene el primer carácter no
    //      tratado de S
    while (c != '.') {
        if (c == 'a') cont = cont + 1;
        cin >> c;
    }
// cont es el número de a's en S
    cout << cont << endl;
}
/* Post: Escribe el número de a's que hay en S */
F(...) = longitud de S
```

```
// Exponenciación (versión 1)

// Pre: x == A, y == B >= 0
// Post: El resultado p es A^B

    int p = 1;
    // Inv: y>=0, A^B = x^y * p
    while (y > 0) {
        y = y - 1;
        p = p*x;
    }
```

Si: $A^B = x^c * d$ y c es par

entonces: $A^B = (x*x)^{c/2} * d$

ya que $(x^2)^{c/2} = x^c$

Como consecuencia el siguiente programa podría calcular el exponencial:

```
 int p = 1;
// Inv: y>=0, A^B = x^y * p
while (y > 0) {
  if (y % 2 == 0) {
    x = x * x;
    y = y / 2;
  }
  else {
    p = p * x;
    y = y - 1;
  }
}
// Post: A^B = p
```

```
// Exponenciación (versión 2)

// Pre: x == A, y == B >= 0
// Post: El resultado p es A^B

    int p = 1;
    // Inv: y>=0, A^B = x^y * p
    while (y > 0) {
        if (y % 2 == 0) {
            x = x * x;
            y = y / 2;
        }
        else {
            p = p * x;
            y = y - 1;
        }
    }
```

Inserción en una lista ordenada L1 de los elementos de otra lista ordenada L2

```
/* Pre: L1=[x1,...,xn], L2=[y1,...,ym] y las dos listas
    están ordenadas */
/* Post: L1 contiene x1,...,xn,y1,...,ym y está ordenada */
```

Inserción en una lista ordenada L1 de los elementos de otra lista ordenada L2

```
/* Pre: L1=[x1,...,xn], L2=[y1,...,ym] y las dos listas
    están ordenadas */
/* Post: L1 contiene x1,...,xn,y1,...,ym y está ordenada */

/* Inv: L1 y L2 están ordenadas, L1 contiene todos los
elementos de L2 menores que *it1, que son anteriores a it2,
además de todos los elementos x1, ...xn. */
```

```
/* Pre: L1=[x1,...,xn], L2=[y1,...,ym] y las dos listas
    están ordenadas */
/* Inv: L1 y L2 están ordenadas, L1 contiene todos los
elementos de L2 menores que *it1, que son anteriores a it2,
además de todos los elementos x1, ...xn. */

//Inicialización:

    list<int>::iterator it1 = L1.begin();
    list<int>::iterator it2 = L2.begin();

//cuerpo del bucle:

        if (*it1 < *it2) ++it1;
        else {L1.insert(it1,*it2); ++it2;
```

```
/* Pre: L1=[x1,...,xn], L2=[y1,...,ym] y las dos listas
    están ordenadas */
/* Inv: L1 y L2 están ordenadas, L1 contiene todos los
elementos de L2 menores que *it1, que son anteriores a it2,
además de todos los elementos x1, ...xn. */

//condición del bucle:

(it1 != L1.end() and it2 != L2.end()
```

Es decir, a la salida del bucle se cumpliría:

```
/* L1 está ordenada y contiene todos los elementos de L2,
anteriores a it2, que son menores que el mayor elemento de
L1, además de todos los elementos x1, ...xn. */
```

Es decir, en L1, todavía no estarían los elementos de L2 que son mayores o iguales que el mayor elemento de L1. Añadiendo un bucle final, el algoritmo quedaría:

```
list<int>::iterator it1 = L1.begin();
list<int>::iterator it2 = L2.begin();
while (it1 != L1.end() and it2 != L2.end() ) {
    if (*it1 < *it2) ++it1;
    else {L1.insert(it1,*it2); ++it2;
}
while (it2 != L2.end() ) {
     L1.insert(it1,*it2);
     ++it2;
}
```

F(...) = dist. de it1 a L1.end()+ dist. de it2 a L2.end()