Matemàtiques 1 - GEI - FIB 02-06-2022
Examen Final-Part de grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

FG1. (3 punts)

(a) Determineu el mínim valor de n tal que hi ha un graf regular de grau 4 i ordre n amb algun vèrtex de tall.

(b) Sigui G un graf d'ordre n que no té cap subgraf isomorf a un cicle d'ordre 3. Demostreu que si u, v són vèrtexs adjacents, aleshores $g(u) + g(v) \leq n$.

(c) Demostreu que si un graf bipartit d'ordre almenys 3 té diàmetre 2, aleshores és isomorf a un graf bipartit complet.

FG2. (2 punts) Considerem el graf bipartit complet $K_{r,s}$, on $r \geq s \geq 2$.

(a) Trobeu tots els valors de r, s tals que $K_{r,s}$ és eulerià.

(b) Trobeu tots els valors de r, s tals que $K_{r,s}$ és hamiltonià.

FG3. (3 punts) Sigui T un arbre d'ordre n i d un enter, $d \geq 3$.

(a) Demostreu que si T té almenys dos vèrtexs de grau d, aleshores T té com a mínim $2d - 2$ fulles.

(b) Deduïu quina ha de ser la seqüència de graus de T si té almenys 2 vèrtexs de grau d i $n = 2d + 1$. Quants arbres hi ha llevat isomorfismes que compleixin aquestes condicions?

FG4. (2 punts) Considerem el graf $G = ([7], \{12, 23, 34, 15, 56, 26, 27, 37\})$.

(a) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents de G.

(b) Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i en cada moment, l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

Informacions

• Durada de l'examen: 1h 45minuts.
• S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
• Cal lliurar els exercicis per separat.
• No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
• Publicació de les notes i revisió de l'examen: s'informarà en un avís del racó.

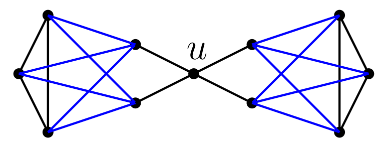
Model de solució

FG1. (a) Determineu el mínim valor de n tal que hi ha un graf regular de grau 4 i ordre n amb algun vèrtex de tall.

Solució. El graf d'ordre mínim serà connex, ja que el vèrtex de tall ho serà en el component connex que el contingui, que serà també 4-regular.

Suposem que u és vèrtex de tall d'un graf G 4-regular d'ordre mínim, n. Aleshores, $G - u$ no és connex. Tot component connex de $G - u$ té almenys dos vèrtexs adjacents a u, ja que si només en tingués un, el component seria un graf amb exactament un vèrtex de grau 3 i la resta de grau 4, fet que contradiu el corol·lari del lemma de les encaixades (tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar). Com que hi ha exactament 4 vèrtexs adjacents a u, $G - u$ ha de tenir exactament 2 components connexos, cadascun d'ells amb exactament 2 vèrtexs adjacents a u. Aleshores, cadascun d'aquests components tindrà 2 vèrtexs de grau 3 i la resta de grau 4. Cadascun d'aquests components connexos ha de tenir ordre almenys 5, ja que té vèrtexs de grau 4. Per tant, G ha de tenir ordre almenys 11 (el vèrtex u i 5 vèrtexs a cada component de $G - u$).

D'altra banda, és fàcil veure que es pot construir un graf d'ordre 5 amb seqüència de graus $4, 4, 4, 3, 3$ (un cicle d'ordre 3 més dos vèrtexs adajcents als tres vèrtexs del cicle), de manera que es pot construir el graf G d'ordre 11 amb les condicions demanades a l'enunciat. És a dir, l'ordre mínim és 11. Vegeu a la figura següent una representació del graf G:



(b) Sigui G un graf d'ordre n que no té cap subgraf isomorf a un cicle d'ordre 3. Demostreu que si u, v són vèrtexs adjacents, aleshores $g(u) + g(v) \leq n$.

Solució. Considerem un parell de vèrtexs u i v adjacents. Sigui A el conjunt de vèrtexs adjacents a u diferents de v i B, el conjunt de vèrtexs adjacents a v diferents de u. Els conjunts A i B han de ser disjunts, ja que en cas contrari, G tindria un cicle d'ordre 3 (format pels vèrtexs u, v i el vèrtex de $A \cap B$). Per tant, el graf G té com a mínim els vèrtexs u, v, els vèrtexs de A (que no conté ni u ni v) i els vèrtexs de B (que no conté ni u ni v i és disjunt amb A). Per tant, l'ordre de G és almenys $n \geq 2 + |A| + |B|$ i, per definició de A i de B, $|A| = g(u) - 1$ i $|B| = g(v) - 1$, d'on deduïm $g(u) + g(v) \leq n$.

(c) Demostreu que si un graf bipartit d'ordre almenys 3 té diàmetre 2, aleshores és isomorf a un graf bipartit complet.

Solució. Siguin A i B les parts estables d'un graf bipartit G. Veurem que si G no és bipartit complet, aleshores el diàmetre de G no pot ser 2. En efecte, si G no és bipartit complet, hi ha dos vèrtexs $x \in A$ i $y \in B$ tals que xy no és aresta de G. Aleshores, la distància de x a y no és 1, perquè no són adjacents, ni 2, perquè els camins entre vèrtexs de parts estables diferents d'un graf bipartit tenen longitud senar, ja que passen alternadament per vèrtexs de les diferents parts estables. Per tant, la distància entre x i y és almenys 3, de manera que el diàmetre de G ha de ser almenys 3. És a dir, el diàmetre no pot ser 2.

FG2. (2 punts) Considerem el graf bipartit complet $K_{r,s}$, on $r \geq s \geq 2$.

(a) Trobeu tots els valors de r, s tals que $K_{r,s}$ és eulerià.

Solució. Un graf és eulerià si és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. El graf bipartit complet és connex per a r, s qualssevol (2 vèrtexs qualssevol estan a distància 1 si són de diferents parts estables i a distància 2 si són de la mateixa part estable). El grau dels vèrtexs de la part estable amb r vèrtexs és s, i el grau dels vèrtexs de la part estable amb s vèrtexs és r, és a dir, tots els vèrtexs tenen grau parell si i només si r i s són parells. Per tant, $K_{r,s}$ és eulerià si i només si r i s són parells.

(b) Trobeu tots els valors de r, s tals que $K_{r,s}$ és hamiltonià.

Solució. Si un graf bipartit és hamiltonià, aleshores les dues parts estables han de tenir el mateix nombre de vèrtexs, ja que el cicle hamiltonià passa per vèrtexs de les diferents parts estables alternadament. Per tant, si $K_{r,s}$ és hamiltonià, ha de ser $r = s$. Recíprocament, si $r = s$ i etiquetem amb $x_1, x_2, \ldots, x_r$ els vèrtexs d'una part estable i amb $y_1, y_2, \ldots, y_r$ els de l'altra, aleshores $x_1 y_1 x_2 y_2 \ldots x_r y_r x_1$ és un cicle hamiltonià. Per tant, $K_{r,s}$ és hamiltonià si i només si $r = s$.

FG3. (3 punts) Sigui T un arbre d'ordre n i d un enter, $d \geq 3$.

(a) Demostreu que si T té almenys dos vèrtexs de grau d, aleshores T té com a mínim $2d - 2$ fulles.

Solució. Sigui n_1 el nombre de vèrtexs de grau 1. El graf té almenys 2 vèrtexs de grau d. Sigui r el nombre de vèrtexs restants (és a dir, tots excepte les fulles i dos vèrtexs de grau d), que tindran grau almenys 2. Observem que es compleix $n = n_1 + 2 + r$. Del lema de les encaixades i que el nombre d'arestes d'un arbre és l'ordre menys 1, es dedueix

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 2m = 2(n-1) = 2(n_1 + 2 + r - 1) = 2n_1 + 2r + 2$$

i a més es compleix

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) \geq n_1 + 2d + 2r$$

d'on deduïm,

$$n_1 \geq 2d - 2.$$

(b) Deduïu quina ha de ser la seqüència de graus de T si té almenys 2 vèrtexs de grau d i $n = 2d + 1$. Quants arbres hi ha llevat isomorfismes que compleixin aquestes condicions?

Solució. De l'apartat anterior sabem que T té almenys $2d - 2$ fulles. Tenint en compte que T té almenys 2 vèrtexs de grau d, només ens falta saber el grau d'un vèrtex, ja que T té ordre $2d+1$. Si anomenem u aquest vèrtex del qual no en sabem el grau, es compleix:

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 1 \cdot (2d-2) + d \cdot 2 + g(u) = 4d - 2 + g(u)$$

i pel lema de les encaixades,

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 2m = 2(n-1) = 2(2d + 1 - 1) = 4d.$$

Si igualem les dues expressions, obtenim $g(u) = 2$. La seqüència de graus de T és, doncs,

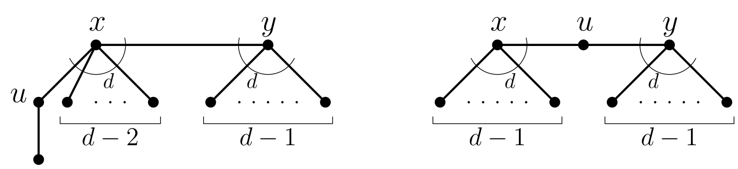
$$(d, d, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2d-2}).$$

Per trobar-los tots, llevat isomorfismes, denotem amb x i y els vèrtexs de grau d.

Suposem primer que x i y són adjacents. Aleshores, el vèrtex de grau 2, u, ha de ser adjacent a x o a y (no pot ser u adjacent a dues fulles, perquè aleshores P_3 seria un component connex de l'arbre, contradicció!, ni a x i y alhora, perquè aleshores hi hauria un cicle, contradicció!). Si u és adjacent a x, aleshores l'altre vèrtex adjacent a u ha de ser una fulla, i la resta de fulles pengen de x o de y. Tenint en compte que x i y tenen grau d, exactament $d - 2$ fulles pengen de x i $d - 1$ fulles pengen de y. Per simetria, si u és adjacent a y, obtenim un arbre isomorf al que acabem de descriure.

Suposem ara que x i y no són adjacents. Aleshores, el vèrtex u ha de ser adjacent a x i a y, ja que l'unic camí de x a y passa per vèrtexs de grau almenys 2. Aleshores, hi haurà $d - 1$ fulles que pengen de x i $d - 1$ fulles que pengen de y, ja que x i y tenen grau d. Els dos arbres obtinguts no són isomorfs perquè en un cas, un dels dos veïns de u és una fulla i en l'altre cas, cap dels dos és una fulla.

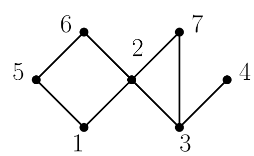
Per tant, en total hi ha 2 arbres amb la seqüència de graus donada, llevat isomorfismes. Vegeu a la figura següent una representació:



FG4. (2 punts) Considerem el graf $G = ([7], \{12, 23, 34, 15, 56, 26, 27, 37\})$.

(a) Calculeu el nombre d'arbres generadors diferents de G.

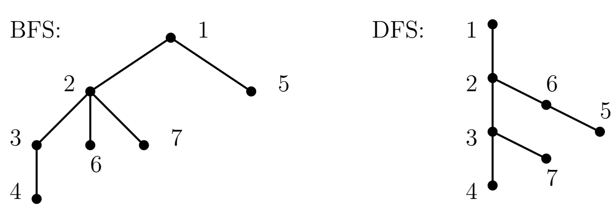
Solució. El graf G es pot representar:



Els arbres generadors de G tenen 6 arestes, ja que G té ordre 7, i s'obtenen eliminant exactament una de les arestes de cadascun dels dos cicles disjunts que conté G. Per tant, n'hi ha 12, que s'obtenen suprimint una de les 4 arestes del cicle d'ordre 4 i una de les 3 arestes del cicle d'ordre 3.

(b) Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i en cada moment, l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

Solució. Vegeu-ne una representació gràfica a la figura següent:



L'ordre en que s'afegeixen els vèrtexs als arbres és 1, 2, 5, 3, 6, 7, 4, en el cas del BFS i 1, 2, 3, 4, 7, 6, 5, en el cas del DFS.