Model de solució

1. a) Definiu arbre generador d'un graf G.

Solució. Un arbre generador d'un graf G és un subgraf generador que és arbre. O sigui, un arbre generador de $G = (V, A)$ és un graf $T = (V', A')$ connex i acíclic tal que $V' = V$ i $A' \subseteq A$.

b) Doneu una condició necessària i suficient perquè un graf G tingui un arbre generador.

Solució. Un graf G té un arbre generador si i només si G és connex.

c) Demostreu que qualsevol graf d'ordre almenys 2 té com a mínim dos vèrtexs que no són de tall.

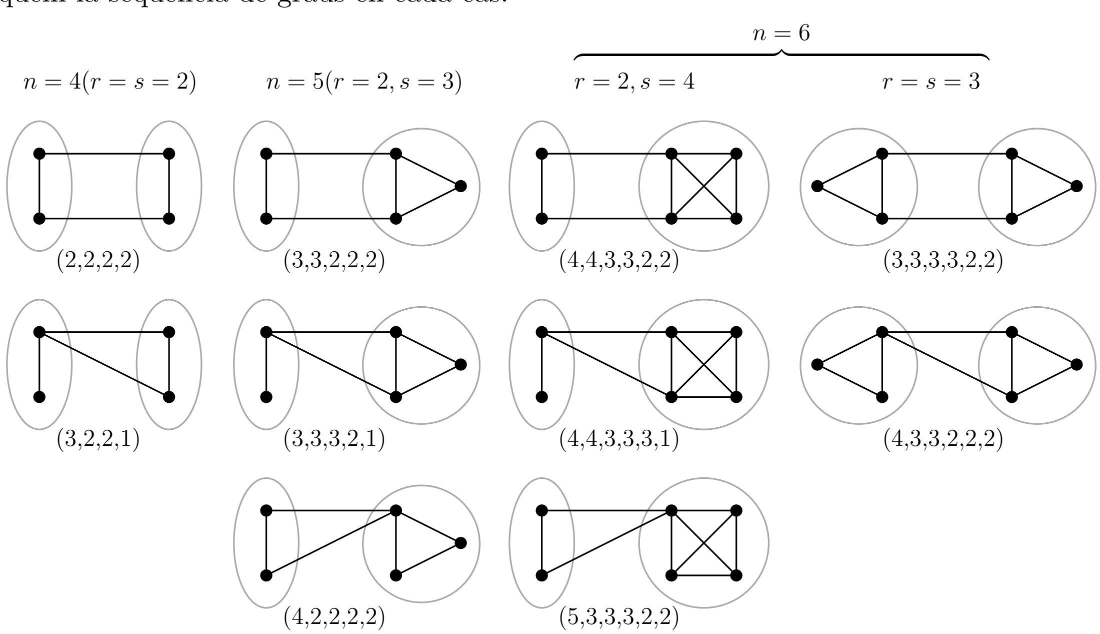
Solució. Si G és connex, té almenys un arbre generador T. Per ser T un arbre d'ordre almenys 2, té com a mínim dues fulles u i v.
Si u és una fulla, aleshores no és vèrtex de tall, per tant $T - u$ és connex, és a dir, si x, y són vèrtexs de $T - u$ hi ha un $x - y$ camí en T. Però, $V(G - u) = V(T - u)$ i $A(T - u) \subseteq A(G - u)$. Per tant, $G - u$ també és connex, és a dir, u no és vèrtex de tall de G. Anàlogament es demostra que v no és vèrtex de tall de G.
Si G no és connex, té almenys dos components connexos. Si G té un component connex G_1 d'ordre almenys dos, ja hem demostrat que G_1 té almenys dos vèrtexs que no són de tall en G_1, i per tant no són de tall en G. Si tots els components connexos tenen un sol vèrtex, aleshores tots els vèrtexs de G són aïllats i, per tant, no són de tall. Per ser G d'ordre almenys 2, té com a mínim dos vèrtexs que no són de tall.

2. Sigui G el **complementari** del graf $K_{r,s} - \{a, b\}$, on a i b són dues arestes qualssevol d'un graf bipartit complet $K_{r,s}$, amb $s \geq r \geq 2$.

Solució. Observem que G té els mateixos vèrtexs que $K_{r,s}$, i si V_1 i V_2 són les partes estables de $K_{r,s}$, aleshores cadascun dels conjunts V_1 i V_2 indueix un graf complet en G. A més, les úniques arestes de G que tenen un extrem a V_1 i l'altre a V_2 són a i b. Suposarem en la resta de l'exercici que el conjunt de vèrtexs de G és $V = V_1 \cup V_2$, amb $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$, $G[V_1] \cong K_r$ i $G[V_2] \cong K_s$, i les úniques arestes amb un extrem a V_1 i l'altre a V_2 són a i b. És a dir, G s'obté afegint dues arestes a la unió de dos grafs complets, $K_r \cup K_s$.

a) Doneu una representació gràfica de tots els possibles grafs G d'ordre n, $4 \leq n \leq 6$, llevat isomorfismes.

Solució. Si l'ordre de G és $n \in \{4, 5, 6\}$, aleshores ha de ser $r = s = 2$; o bé $r = 2$, $s = 3$; o bé $r = 2$, $s = 4$; o bé $r = s = 3$. Si afegim un parell d'arestes o bé no incidents o bé incidents de totes les maneres possibles a $K_r \cup K_s$, obtenim els grafs següents llevat isomorfismes, dels quals indiquem la seqüència de graus en cada cas:



Veiem que les seqüències de graus de tots aquests grafs són diferents, i per tant són no isomorfs.

b) Calculeu la mida de G en funció de r i s.

Solució. Hem justificat que G és la unió de dos grafs complets d'ordre r i s més les arestes a i b. Per tant, la mida de G és $\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}+2=\frac{r^2+s^2-r-s+4}{2}$.

També ho podem calcular tenint en compte que el graf $K_{r,s}$ té ordre $r+s$ i mida rs. Per tant, $K_{r,s}-\{a,b\}$ és un graf d'ordre $r+s$ i mida $rs-2$, ja que suprimim dues arestes de $K_{r,s}$. Finalment, la mida del complementari de $K_{r,s}-\{a,b\}$ és la mida del graf complet amb $r+s$ vèrtexs menys la mida de $K_{r,s}-\{a,b\}$, és a dir, $\frac{(r+s)(r+s-1)}{2}-(rs-2)=\frac{r^2+s^2-r-s+4}{2}$.

c) Suposem que $r \geq 3$. Calculeu el diàmetre i el radi de G. Demostreu que G és connex.

Solució. Calculem les excentricitats dels vèrtexs de G.

Si u és un vèrtex de V_1 que no és extrem ni d'a ni de b, la resta de vèrtexs de V_1 estàn a distància 1 d'u; els vèrtexs de V_2 que són extrem d'a o de b estàn a distància 2 d'u; i la resta de vèrtexs de V_2 estàn a distància 3 d'u. Per ser $s \geq r \geq 3$, hi ha almenys un vèrtex en V_2 que no és extrem ni d'a ni de b. Per tant, l'excentricitat d'u és 3.

Anàlogament, si u és un vèrtex de V_2 que no és extrem ni d'a ni de b, té excentricitat 3.

Suposem que u és un vèrtex de V_1 que és extrem d'a o de b. La resta de vèrtexs de V_1 estàn a distància 1 d'u; els com a molt 2 vèrtexs de V_2 adjacents a u estàn a distància 1 d'u; la resta de vèrtexs de V_2 estàn a distància 2 d'u. Per ser $s \geq r \geq 3$, hi ha almenys un vèrtex en V_2 que no és extrem ni d'a ni de b. Per tant, l'excentricitat d'u és 2.

Anàlogament, si u és un vèrtex de V_2 que és extrem d'a o de b, té excentricitat 2.

Per tant, G té radi 2 i diàmetre 3.

A més, G és connex perquè té diàmetre finit.

d) Demostreu que si $r \geq 3$, aleshores G no té arestes pont.

Solució. Les arestes amb els dos extrems a un mateix conjunt V_1 o bé V_2 són d'un subgraf complet amb almenys 3 vèrtexs en G, per tant, són d'algun cicle. Si les arestes a i b són incidents, podem suposar que $a=u_0v_0$ i $b=u_0v_1$. Aleshores $u_0v_0v_1u_0$ és un cicle de G que conté a i b. Finalment, si les arestes a i b no són incidents, podem suposar $a=u_0v_0$, $b=u_1v_1$ amb $u_0,u_1 \in V_1$ i $v_0,v_1 \in V_2$. Aleshores $u_0v_0v_1u_1u_0$ és un cicle en G que conté a i b. És a dir, totes les arestes de G són d'algun cicle en G, i per tant, cap aresta de G és pont.

e) En quins casos és G és eulerià?

Solució. Ja hem vist que G és sempre connex. Només cal comprovar, doncs, en quins casos tots els vèrtexs tenen grau parell.

Calculem els graus dels vèrtexs de G en funció de r i s, i segons si les arestes a i b són o no incidents.

Si les arestes a i b no són incidents, aleshores hi ha 2 vèrtexs de grau r (els extrems d'a i de b en V_1), $r-2$ vèrtexs de grau $r-1$ (resta de vèrtexs de V_1), 2 vèrtexs de grau s (els extrems d'a i de b en V_2), i $s-2$ vèrtexs de grau $s-1$ (resta de vèrtexs de V_2). Per a que tots els graus siguin de la mateixa paritat ha de ser $r=s=2$, i aleshores el graf G és C_4, que és eulerià.

Si les arestes a i b són incidents en un vèrtex de V_2, aleshores hi ha 2 vèrtexs de grau r (extrems d'a i de b en V_1), $r-2$ vèrtexs de grau $r-1$ (resta de vèrtexs de V_1), 1 vèrtex de grau $s+1$ (l'extrem d'a i b en V_2), i $s-1$ vèrtexs de grau $s-1$ (resta de vèrtexs de V_2). Per tant, tots els graus són parells si i només si $r-2=0$ i s és senar. Per tant, G és eulerià si i només si $r=2$ i s és senar.

Finalment, si les arestes a i b són incidents en un vèrtex de V_1, aleshores hi ha 1 vèrtex de grau $r+1$ (l'extrem d'a i b en V_1), $r-1$ vèrtexs de grau $r-1$ (resta de vèrtexs de V_1), 2 vèrtexs de grau s (extrems d'a i de b en V_2), i $s-2$ vèrtexs de grau $s-1$ (resta de vèrtexs de V_2). Perquè tots els graus siguin parells ha de ser $s=2$, i per tant, $r=2$, ja que $s \geq r \geq 2$. Però aleshores en V_1 hi hauria un vèrtex de grau 1. Per tant, en aquest cas no pot ser mai eulerià.

Resumint, G és eulerià si i només si $r=s=2$ amb a i b no incidents o bé $r=2$ i s senar, amb a i b incidents en un vèrtex del conjunt V_2.

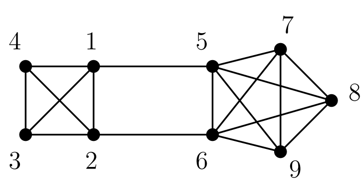
f) En quins casos és G hamiltonià?

Solució. Si les arestes a i b són incidents, aleshores G no és hamiltonià, ja que en aquest cas G té almenys un vèrtex de tall. En efecte, el graf G és connex, però al suprimir el vèrtex que és de les dues arestes a i b, s'obté un graf no connex, ja que no hi ha cap aresta entre un vèrtexs de V_1 i un de V_2.

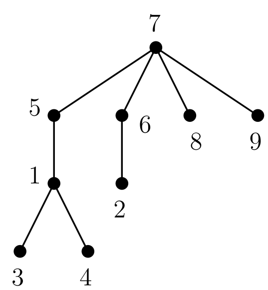
Si les arestes a i b no són incidents, podem suposar $a = u_0v_0$, $b = u_1v_1$ amb $u_0, u_1 \in V_1$ i $v_0, v_1 \in V_2$. Per ser $G[V_1]$ i $G[V_2]$ grafs complets, hi ha un camí hamiltonià C_1 d'u_0 a u_1 en $G[V_1]$ (o sigui, un camí que passa per tots els vèrtexs de V_1) i hi ha un camí hamiltonià C_2 de v_1 a v_0 en $G[V_2]$ (o sigui, un camí que passa per tots els vèrtexs de V_2). El recorregut format per C_1, més l'aresta u_1v_1, més el camí C_2 i finalment l'aresta v_0u_0 és un cicle que passa per tots els vèrtexs de G. Per tant, G és hamiltonià.

g) Suposem que el graf G s'obté a partir de $K_{4,5}$ amb conjunt de vèrtexs $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, parts estables $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, i les arestes que suprimim de $K_{4,5}$ són $a = 15$, $b = 26$. Doneu els arbres generadors de G obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si considerem els vèrtexs ordenats d'1 a 9 i es comença en el vèrtex 7. Doneu l'ordre en que s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en cada cas.

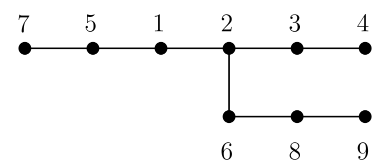
Solució. A la figura següent teniu el graf G i els arbres obtinguts dibuixats de manera que els vèrtexs s'afegeixen a l'arbre d'erquerra a dreta i de dalt a baix. És a dir, l'ordre en que s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador és 7, 5, 6, 8, 9, 1, 2, 3, 4, en el cas d'aplicar l'algorisme BFS i 7, 5, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, en el cas d'aplicar l'algorisme DFS.



G



BFS



DFS