JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. Considerem les matrius de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ format per les matrius 2×2 amb coeficients reals:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents. Per a cadascun dels valors trobats, expresseu una de les matrius com a combinació lineal de la resta.

(b) Suposem que $a = 0$. Doneu una base del subespai S generat per M_1, M_2, M_3, M_4 i completeu-la fins a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quin sistema d'equacions lineals han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S?

F2. Sigui $P_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2. Considerem les bases canòniques $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Definim les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma següent:

- $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3 + 6x^2,\ \ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - x + 3x^2,\ \ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -4 - x - 7x^2;$
- la matriu associada a g en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge de f. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) Calculeu la matriu associada a $f \circ g$ en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu totes les antiimatges per $f \circ g$ del polinomi $2 + x + 3x^2$ i del polinomi $1 + x + x^2$.

F3. (a) (2 punts sobre 10) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on D és una matriu diagonal i P és una matriu invertible. Proveu que per tot enter $k > 0$, es té $A^k = PD^kP^{-1}$.

(b) (6 punts sobre 10) Calculeu el polinomi característic, els valors propis i vectors propis de la matriu A següent, i feu-los servir per trobar matrius D i P tals que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) (2 punts sobre 10) Calculeu A^6 utilitzant els apartats anteriors.

Informacions

- Durada de l'examen: 100 minuts.
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Els tres problemes valen igual.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.

Model de solució

F1. Considerem les matrius de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ format per les matrius 2×2 amb coeficients reals:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents. Per a cadascun dels valors trobats, expresseu una de les matrius com a combinació lineal de la resta.

Solució. Expressem les matrius donades en la base canònica, $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, les posem per columnes i fem transformacions per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-(1+a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a \end{pmatrix}$$

Les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents si i només si el rang de la matriu és menor que 4, és a dir, si $a^2 + a = 0$, que equival a $a = 0$ o bé $a = -1$.

Mètode alternatiu. Les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents si i només si el determinant de la matriu A considerada anteriorment és 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - a - \left(a^2 + 1 + 0\right) = -a^2 - a$$

on $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o bé $a = -1$, i obtenim el mateix resultat.

Expressem ara una de les matrius com a combinació lineal de la resta per als valors trobats, $a = 0$ i $a = -1$.

Observem que si $a = 0$, les matrius són $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i veiem a ull que $M_4 = M_1 + M_3 = 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Si $a = -1$, aleshores $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i observem que $M_4 = M_3 = 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Mètode alternatiu. Suposem primer que $a = 0$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent a A és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de M_4 en funció de M_1, M_2, M_3, és a dir, $M_4 = 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Suposem ara que $a = -1$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de M_4 en funció de M_1, M_2, M_3, és a dir, $M_4 = M_3 = 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

(b) Suposem que $a = 0$. Doneu una base del subespai S generat per M_1, M_2, M_3, M_4 i completeu-la fins a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quin sistema d'equacions lineals han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S?

Solució.
La dimensió del subespai que generen és el rang de la matriu A calculada a l'apartat anterior, que té per columnes les coordenades de les 4 matrius expressades en base canònica. Hem vist a l'apartat anterior que si $a = 0$, aleshores

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\dim S = \text{rang} A = 3$ i una base està formada per les 3 primeres matrius, M_1, M_2, M_3. Per a completar la base de S fins una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, busquem una matriu M de manera que M_1, M_2, M_3, M siguin linealment independents. Veiem que la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ho satisfà, ja que la matriu que té per columnes les coordenades de M_1, M_2, M_3, M en la base canònica és equivalent per files a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que té rang 4.

D'altra banda, perquè una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S cal que sigui combinació lineal de les matrius que formen una base, és a dir, el rang de la matriu que té per columnes M_1, M_2, M_3 i la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ha de ser 3. Fem transformacions elementals per files per a calcular el rang d'aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & t-y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-y-(z-y) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-z \end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 3 si i només si $t - z = 0$. Per tant, una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S si i només si satisfà el sistema d'equacions lineals que només té una equació, $z - t = 0$.

F2. Sigui $P_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2. Considerem les bases canòniques $\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Definim les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma següent:

- $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = 3 + 6x^2$, $f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = 1 - x + 3x^2$, $f(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = -4 - x - 7x^2$;
- la matriu associada a g en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és la matriu $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge de f. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$. La imatge del primer vector de la base ens la donen. Per a calcular les altres dues, observem que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1 - x + 3x^2) - (3 + 6x^6) = -2 - x - 3x^2;$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (-4 - x - 7x^2) - (-2 - x - 3x^2) = -2 - 4x^2.$$

La matriu M associada a f en les bases canòniques és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{1, x, x^2\}$, o sigui:

$$M = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Mètode alternatiu: amb matrius de canvis de base. El conjunt

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

és una base de $\mathbb{R}^3$. En efecte, B és linealment independent perquè la matriu P que té els tres vectors per columnes és una matriu escalonada amb tres files no nul·les i, per tant, té rang 3:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Per ser 3 vectors linealment independents d'un espai de dimensió 3, B és una base de $\mathbb{R}^3$. Sigui C_1 la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i C_2 la base canònica de $P_2(\mathbb{R})$. Coneixem les imatges dels vectors de B expressades en la base C_2. Per tant, coneixem la matriu associada a f en les bases B, en l'espai de sortida, i $C_2 = \{1, x, x^2\}$, en l'espai d'arribada:

$$M^B_{C_2}(f) = \begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\0 & -1 & -1\\6 & 3 & -7\end{pmatrix}.$$

Per a calcular la matriu associada a f en les bases canòniques, fem un canvi de base a l'espai de sortida:
$$M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P_B^{C_1}.$$
Observem que la matriu de canvi de base de C_1 a B és la inversa de la matriu de canvi de base de B a C_1, que és precisamemnt la matriu P. Per tant,

$$M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P_B^{C_1} = M_{C_2}^{B}(f)(P_{C_1}^{B})^{-1} = M_{C_2}^{B}(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
La inversa de P és doncs
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matriu M associada a f en les bases canòniques és, doncs,
$$M = M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per a comprovar si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva, calculem el rang de la matriu A:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} A = 2$ i $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rang} A = 3 - 2 = 1$.
L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \neq 0$ i no és exhaustiva per ser $\dim \operatorname{Im} f = 2 \neq 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$, i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Calculeu la matriu associada a $f \circ g$ en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu totes les antiimatges per $f \circ g$ del polinomi $2 + x + 3x^2$ i del polinomi $1 + x + x^2$.

Solució. La composició $f \circ g$ és una aplicació de $\mathbb{R}^3$ en $P_2(\mathbb{R})$. La matriu associada a la composició és el producte de matrius associades:

$$N = M_{C_2}^{C_1}(f \circ g) = M_{C_2}^{C_1}(f)M_{C_1}^{C_1}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular les antiimatges per $f \circ g$ d'un polinomi, resolem el sistema d'equacions lineals que té N per matriu de coeficients i les coordenades del polinomi en la base $\{1, x, x^2\}$, a la columna de termes independents. Calculem primer les antiimatges de $2 + x + 3x^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

El sistema té rang 1 i 2 graus de llibertat. La variable principal és y, que val -1. Donem el conjunt de solucions de forma paramètrica en funció de les variables lliures x, z:

$$\{\begin{pmatrix} x \\ -1 \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Calculem ara les antiimatges de $1+x+x^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Veiem que el rang de la matriu de coeficients és 1 i el rang de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és incompatible. És a dir, el polinomi $1+x+x^2$ no té cap antiimatge per $f \circ g$.

F3. (a) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on D és una matriu diagonal i P és una matriu invertible. Proveu que per tot enter $k > 0$, es té $A^k = PD^kP^{-1}$.

Solució. Observem que

$$\begin{aligned} A^k = (PDP^{-1})^k &= \overbrace{(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}^{k)} \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)DP \\ &= PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

ja que $P^{-1}P$ és la matriu identitat. *Observació.* Es pot demostrar també per inducció sobre k.

(b) Calculeu el polinomi característic, els valors propis i vectors propis de la matriu A següent, i feu-los servir per trobar matrius D i P tals que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. El polinomi característic és:

$$\begin{aligned} p(x) = \det(A - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -5-x & 0 & -6 \\ 3 & 1-x & 3 \\ 3 & 0 & 4-x \end{pmatrix} &= (1-x)\det \begin{pmatrix} -5-x & -6 \\ 3 & 4-x \end{pmatrix} \\ = (1-x)((-5-x)(4-x)+18) = (1-x)(x^2+x-2) &= (1-x)(x+2)(x-1) \\ = -(x-1)^2(x+2). \end{aligned}$$

Els valors propis són les arrels del polinomi característic, o sigui, 1 i -2, que tenen multiplicitat algebraica 2 i 1, respectivament. Per tant, la matriu diagonalitza si i només si $\dim E_1 = 2$. Calculem $\dim E_1$:

$$\begin{aligned} \dim E_1 = 3 - \operatorname{rang}(A - I) = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -5-1 & 0 & -6 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ 3 & 0 & 4-1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Per tant, A diagonalitza. Calculem ara una base formada per vectors propis.

Per a calcular una base de E_1, resolem el sistema homogeni que té $A - I$ per matriu de coeficients,

$$\begin{pmatrix} -5-1 & 0 & -6 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ 3 & 0 & 4-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rang del sistema és 1. La solució té 2 graus de llibertat. Triem z com a variable principal i expressem les solucions en funció de x, y. En forma paramètrica, la solució és

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_1, u_2\}$, on $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per a calcular una base de E_{-2}, resolem el sistema homogeni que té $A + 2I$ per matriu de coeficients,

$$\begin{pmatrix} -5+2 & 0 & -6 \\ 3 & 1+2 & 3 \\ 3 & 0 & 4+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El rang del sistema és 2. La solució té 1 grau de llibertat. Triem x, y com a variables principals i expressem les solucions en funció de z. En forma paramètrica, la solució és

$$\{\begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = \{z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} =< \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_{-2} és $\{u_3\}$, on $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base formada per vectors propis és $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Sigui P la matriu de canvi de base de B a la base canònica de $\mathbb{R}^3$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aleshores

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

i $A = PDP^{-1}$.

(c) Calculeu A^6 utilitzant els apartats anteriors.

Solució. Tenint en compte els apartats anteriors, $A^6 = PD^6P^{-1}$. Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

La inversa de P és, doncs,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
A^6 = PD^6P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -64 & 0 & -64 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 127 & 0 & 126 \\ -63 & 1 & -63 \\ -63 & 0 & -62 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Matemàtiques 1-GEI-FIB 02-06-2022

Examen final-Àlgebra Lineal

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (a) (1 punt) Demostreu l'afirmació següent si és certa o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa: Si e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos d'un espai vectorial E de dimensió 5 i els vectors e_1, e_2, e_3 són linealment independents, aleshores els vectors e_1, e_2, e_3, u són linealment independents.

(b) (1.5 punts) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors $u_1 + u_3$, v_2 i $u_1 + v_2$ en cadascuna de les dues bases.

F2. (3 punts) En l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2, considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Doneu un subconjunt de $\{A, B, C, D, E\}$ que sigui base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i expresseu les matrius que no siguin de la base com a combinació lineal de les matrius de la base donada.

(b) Calculeu la dimensió del subespai $S = < A, B, C >$. Trobeu les equacions que han de satisfer x, y, z, t per tal que la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui del subespai S.

F3. (2.5 punts) Sigui $f = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que en les respectives bases canòniques té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió del nucli i de la imatge de f. Doneu una base del subespai imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

(b) Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors u, v, w, on $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Quina és la dimensió del subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$?

F4. (2 punts) Sabem que un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

diagonalitza i que el seu el polinomi característic és $p(x) = -(x-1)^2(x-7)$. Deduïu els valors de a i de b. Calculeu una base B formada per vectors propis de f i doneu la matriu associada a f en la base B.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 50minuts.
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes i revisió de l'examen: s'informarà en un avís del racó.

Model de solució

F1. (a) (1 punt) Demostreu l'afirmació següent si és certa o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa: Si e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos d'un espai vectorial E de dimensió 5 i els vectors e_1, e_2, e_3 són linealment independents, aleshores els vectors e_1, e_2, e_3, u són linealment independents.

Solució. És fals. Per exemple, si $E = \mathbb{R}^5$, e_1, e_2, e_3 són 3 vectors diferents de la base canònica i $u = e_1 + e_2$, aleshores e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos, però són linealment dependents perquè u és combinació lineal de e_1, e_2, e_3.

(b) (1.5 punts) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors $u_1 + u_3$, v_2 i $u_1 + v_2$ en cadascuna de les dues bases.

Solució.
La matriu $P = P_{B'}^{B}$ té per columnes les coordenades dels vectors u_1, u_2 i u_3 en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. La inversa de P és $P^{-1} = P_{B}^{B'}$, i té per columnes les coordenades dels vectors v_1, v_2 i v_3 en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Calculem P^{-1} amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 \leftarrow F_2 + F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 \leftarrow \frac{1}{3} F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Per tant, $P^{-1} = P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Aleshores

$$(u_1 + u_3)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ja que } u_1 + u_3 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

$$(u_1 + u_3)_{B'} = (u_1)_{B'} + (u_3)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (suma de les columnes 1a i 3a de } P\text{)}$$

$$(v_2)_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (segona columna de } P^{-1}\text{)}$$

$$(v_2)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ja que } v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$(u_1 + v_2)_B = (u_1)_B + (v_2)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ((}v_2)_B \text{ és la segona columna de } P^{-1}\text{)}$$

$$(u_1 + v_2)_{B'} = (u_1)_{B'} + (v_2)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ((}u_1)_{B'} \text{ és la primera columna de } P\text{)}$$

Solució alternativa. És evident que

$(u_1+u_3)_B = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, perquè $u_1+u_3 = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 1\cdot u_3$ i que

$(v_2)_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, perquè $v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3$.

D'altra banda, a la columna i, $i\in\{1,2,3\}$, de la matriu donada hi ha les coordenades del vector u_i en la base B'. Per tant, $u_1+u_3 = (v_1+v_3)+(-3v_2+3v_3) = v_1-3v_2+4v_3$, d'on deduïm

$(u_1+u_3)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$,

i $u_1+v_2 = (v_1+v_3)+v_2 = v_1+v_2+v_3$, d'on deduïm

$(u_1+v_2)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Només falta calcular $(v_2)_B$ i $(u_1+v_2)_B$. Observem que si restem dues vegades la primera columna a la segona columna, només la segona coordenada és diferent de zero, concretament

$(u_2-2\,u_1)_{B'} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (v_2)_{B'}$.

Per tant, $v_2 = u_2 - 2\,u_1 = (-2)\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3$, d'on deduïm

$(v_2)_B = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

i aleshores $u_1+v_2 = u_1+(u_2-2\,u_1) = -u_1+u_2 = (-1)\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3$, d'on deduïm

$(u_1+v_2)_B = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Resumint:

vector	u_1+u_3	v_2	u_1+v_2
coord. en base B	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$
coord. en base B'	$\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

F2. (3 punts) En l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2, considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 4\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}2 & 9\\3 & 1\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Doneu un subconjunt de $\{A,B,C,D,E\}$ que sigui base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i expresseu les matrius que no siguin de la base com a combinació lineal de les matrius de la base donada.

Solució. La dimensió de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és 4. Per tant, és suficient donar 4 matrius linealment independents del conjunt $\{A,B,C,D,E\}$. Escrivim les coordenades de les matrius donades en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ per columnes i fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu reduïda equivalent:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\3&0&9&0&1\\0&3&3&1&1\\-1&4&1&0&0\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_4:=F_4+F_1}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&-2\\0&3&3&1&1\\0&3&3&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_2\leftrightarrow F_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&3&3&1&1\\0&3&3&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_3:=F_3-F_2\\F_4:=F_4-F_2}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_4:=-\frac{1}{3}F_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_1:=F_1-F_4\\F_2:=F_2-F_4}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&0\\0&3&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_2:=-\frac{1}{3}F_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_1:=F_1+F_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&3&0&0\\0&\mathbf{1}&1&0&0\\0&0&0&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Les matrius que corresponen a les columnes dels pivots formen una base, és a dir, $\{A,B,D,E\}$ és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A més, a la 3a columna hi ha els coeficients de l'expressió de C com a combinació lineal de la base donada, és a dir, $C=3A+B$.

(b) Calculeu la dimensió del subespai $S=<A,B,C>$. Trobeu les equacions que han de satisfer x,y,z,t per tal que la matriu genèrica $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ sigui del subespai S.

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que A,B són linealment independents i que C és combinació lineal de A i B. Per tant, $S=<A,B,C>=<A,B>$ i $\dim S=\dim<A,B>=2$. Una matriu $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ és de S si $\mathrm{rang}(A,B,M)=2$. Fem transformacions elementals a la matriu que té A,B,M per columnes:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&x\\3&0&y\\0&3&z\\-1&4&t\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_4:=F_4+F_1}}\begin{pmatrix}1&-1&x\\0&3&y-3x\\0&3&z\\0&3&t+x\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_3:=F_3-F_2\\F_4:=F_4-F_2}}\begin{pmatrix}1&-1&x\\0&3&y-3x\\0&0&z-(y-3x)\\0&0&t+x-(y-3x)\end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $z-(y-3x)=0$ i $t+x-(y-3x)=0$, és a dir, si i només si x,y,z,t satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\begin{cases}3x-y+z&=0\\4x-y+t&=0\end{cases}$$

F3. (2.5 punts) Sigui $f=\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que en les respectives bases canòniques té matriu associada

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\3&-1&0&0\\-2&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió del nucli i de la imatge de f. Doneu una base del subespai imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Sabem que $\dim\mathrm{Im}f=\mathrm{rang}A$ i $\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^4-\mathrm{rang}A=4-\mathrm{rang}A$. Per calcular el rang de A fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu escalonada equivalent,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\3&-1&0&0\\-2&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_3:=F_3+2F_1}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&3&-3\\0&1&-3&3\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=-F_2\\F_3:=F_3+F_2}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \quad (1)$$

Per tant, $\mathrm{rang}A=2$, de manera que $\dim\mathrm{Im}f=2$ i $\dim\ker f=2$. Una base de la imatge està formada per dues columnes linealment independents de la matriu A. Una possible base seria, doncs, la formada per les columnes 2a i 4a, que són columnes no proporcionals:

$$\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

L'aplicació f no pot ser bijectiva, ja que els espais de sortida i d'arribada tenen dimensió diferent, 4 i 3. Serà exhaustiva si $\dim \mathrm{Im} f = 3$ i injectiva, si $\dim \ker f = 4$, i ja hem vist que no es compleix cap de les dues condicions. Per tant, f no és ni injectiva, ni exhaustiva, ni bijectiva.

(b) Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors u, v, w, on $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Quina és la dimensió del subespai $\ker f \cap S$?

Solució. Sabem que si $S =< u, v, w >$, aleshores $f(S) =< f(u), f(v), f(w) >$. Calculem les imatges dels vectors u, v, w amb la matriu associada:

$$f(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(w) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $f(S) =< f(u), f(v), f(w) >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} >$.

Per tant, $\dim f(S) = 1$ i una base de $f(S)$ és $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \}$.

Finalment, veurem que $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 1$.

Observem que $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) \geq 1$, ja que $\mathrm{Ker} f \cap S$ conté com a mínim un vector no nul, concretament el vector u, que per hipòtesi és de S i, a més, $u \in \mathrm{Ker} f$, perquè $f(u)$ és el vector zero.

El subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$ és un subespai de $\mathrm{Ker} f$ i de S. Hem vist que $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ i, d'altra banda, $\dim S = 2$, ja que $S =< u, v, w >=< u, v >$, perquè $w = u + v$, i els vectors u i v són independents, perquè no són proporcionals.

Sabem que si F és subespai de G i $\dim F = \dim G$, aleshores $F = G$. Per tant, si $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 2$, seria $\mathrm{Ker} f \cap S = S = \mathrm{Ker} f$, i ja hem vist que $S \neq \mathrm{Ker} f$, perquè el vector $v \in S$ no és del nucli. Per tant, ha de ser $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 1$.

Solució alternativa per calcular $\dim \mathrm{Ker} f \cap S$. El nucli es la solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients qualsevol matriu equivalent per files a A, per exemple, de (1) deduïm que és solució de:

$$\begin{cases} x - z + t &= 0 \\ y - 3z + 3t &= 0 \end{cases}$$

Tal com hem justificat abans, $\dim S = 2$ i una base de S és $\{u, v\}$. Per tant, un vector genèric de $\mathbb{R}^4$ és de S si i només si el rang de la matriu que té per columnes u, v i el vector genèric és 2. Imposem que aquest rang sigui 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \\ -1 & 4 & t \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{F_2 := F_2 - 3F_1 \\ F_4 := F_4 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 3x \\ 0 & 3 & z \\ 0 & 3 & t + x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{F_3 := F_3 - F_2 \\ F_4 := F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 3x \\ 0 & 0 & z - (y - 3x) \\ 0 & 0 & t + x - (y - 3x) \end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $z - (y - 3x) = 0$ i $t + x - (y - 3x) = 0$. Per tant, el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ és de S si i només si x, y, z, t satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\begin{cases} 3x - y + z &= 0 \\ 4x - y + t &= 0 \end{cases}$$

El subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$ està definit per les equacions que defineixen els vectors de $\mathrm{Ker} f$ i S:

$$\begin{cases} x - z + t &= 0 \\ y - 3z + 3t &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 4x - y + t &= 0 \end{cases}$$

La dimensió de $\mathrm{Ker} f \cap S$ serà, doncs, el nombre de graus de llibertat d'aquest sistema, o sigui:

$$\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

F4. (2 punts) Sabem que un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

diagonalitza i que el seu el polinomi característic és $p(x) = -(x-1)^2(x-7)$. Deduïu els valors de a i de b. Calculeu una base B formada per vectors propis de f i doneu la matriu associada a f en la base B.

Solució. Les arrels del polinomi característic són 1 i 7 de multiplicitat 2 i 1, respectivament. Per tant, f diagonalitza si i només la dimensió de l'espai propi E_1 és 2. La dimensió d'aquest espai és $\dim E_1 = 3 - \mathrm{rang}(A - \mathrm{Id})$, per tant, f diagonalitza si i només si $\mathrm{rang}(A - \mathrm{Id}) = 1$. Calculem el rang de la matriu $A - \mathrm{Id}$:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 2 \\ 2 & 3-1 & b \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\substack{F_2 := F_2 - F_1 \\ F_3 := F_3 - F_1}}{}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix},$$

i el rang d'aquesta matriu és 1 si i només si $b - 2 = a - 3 = 0$. Per tant, f diagonalitza si i només si $a = 3$ i $b = 2$.

Aleshores, si $a = 3$ i $b = 2$, la dimensió dels espais propis serà, $\dim E_1 = 2$ i $\dim E_7 = 1$. Per a trobar una base de vectors propis, resolem els sistemes homogenis que tenen per matriu de coeficients $A - \mathrm{Id}$ i $A - 7 \cdot \mathrm{Id}$, tenint en compte que $a = 3$ i $b = 2$.

Base de E_1.

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 2 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema té 2 graus de llibertat. Solució en forma paramètrica: $z = -x - y$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_1, u_2\}$, on $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Base de E_7.

$$A - 7\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-7 & 2 & 2 \\ 2 & 3-7 & 2 \\ 2 & 2 & 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{F_1 \leftarrow F_1/2}{}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{\substack{F_2 := F_2 + F_1 \\ F_3 := F_3 + F_1}}{}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\substack{F_2 := -\frac{1}{3}F_2 + F_1 \\ F_3 := F_3 + F_2}}{}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema té 1 grau de llibertat. Solució en forma paramètrica: $x = z, y = z$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = \{z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_3\}$, on $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ és, doncs, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f. La matriu associada a f en la base B és la matriu diagonal que té a la diagonal els valors propis 1, 1, 7, ja que u_1, u_2, u_3 són vectors propis de valor propi 1, 1, 7, respectivament:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solució alternativa per trobar els valors de a i b. Calculem el polinomi característic tenint en compte les dades del problema. D'una banda,

$$\begin{aligned} p_f(x) &= -(x-1)^2(x-7) = -(x^2-2x+1)(x-7) = -(x^3-2x^2+x-7x^2+14x-7) \\ &= -x^3+9x^2-15x+7 \end{aligned}$$

i d'altra banda

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \det(A - x\cdot \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 3-x & b \\ 2 & 2 & a-x \end{pmatrix} \\ &= (3-x)^2(a-x) + 4b + 8 - 2b(3-x) - 4(3-x) - 4(a-x) \\ &= -x^3 + (a+6)x^2 - (6a+9)x + 9a + 4b + 8 - 6b + 2bx - 12 + 4x - 4a + 4x \\ &= -x^3 + (a+6)x^2 + (2b-6a-1)x + 5a - 2b - 4. \end{aligned}$$

Si igualem els coeficients del terme de grau 2, obtenim $a+6=9$, d'on deduïm $a=3$. I si ara igualem els termes independents, obtenim $7 = 5\cdot 3 - 2b - 4$, d'on deduïm $b=2$.

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (3 punts) A l'espai $P_3(\mathbb{R})$ format pels polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 3, considerem els polinomis $p(x) = 1 + ax^3$, $q(x) = a + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = a + x^2 + x^3$, on $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a els polinomis són linealment dependents.

(b) Per a cadascun dels valors trobats a l'apartat anterior expresseu un dels polinomis com a combinació lineal de la resta.

F2. (4 punts) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \ f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) Sigui $S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.

i. Doneu una base i la dimensió del subespai S i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Expresseu $f(S)$ com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

F3. (3 punts) Sigui $M = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 4 & -2\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

(a) Calculeu el seu polinomi característic i determineu els valors propis de M. Raoneu que M diagonalitza.

(b) Calculeu tres vectors propis de M linealment independents. Doneu una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ sigui una matriu diagonal.

(c) Calculeu la matriu M^n, on n és un nombre natural.

Informacions

- Durada de l'examen: 90 minuts.
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 24/01/2022.
- Revisió de l'examen: 25/01/2022 a les 15:00 (s'haurà de demanar segons el procediment que es publicarà al racó).

Model de solució

F1. (3 punts) A l'espai $P_3(\mathbb{R})$ format pels polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 3, considerem els polinomis $p(x) = 1 + ax^3$, $q(x) = a + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = a + x^2 + x^3$, on $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a els polinomis són linealment dependents.

(b) Per a cadascun dels valors trobats a l'apartat anterior expresseu un dels polinomis com a combinació lineal de la resta.

Solució. Expressem els polinomis en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$, els posem per columnes i fem transformacions per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-(1+a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a \end{pmatrix}$$

Els polinomis $p(x), q(x), r(x), s(x)$ són linealment dependents si i només si el rang de la matriu és menor que 4, és a dir, si $a^2 + a = 0$, que equival a $a = 0$ o bé $a = -1$. Per tant, la resposta a l'apartat (a) és $a = 0$ o bé $a = -1$.

Mètode alternatiu. Una altra manera de determinar els valors del paràmetre a que fan que els polinomis siguin linealment dependents és utilitzant que el determinant de la matriu A considerada anteriorment (que conté les coordenades dels polinomis donats en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ per columnes) sigui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 1 - \big(a^2 + 1 + 0\big) = -a^2 - a$$

on $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o bé $a = -1$, i obtenim el mateix resultat.

Responem ara l'apartat (b). Observem que si $a = 0$, els polinomis són $p(x) = 1$, $q(x) = x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = x^2 + x^3$ i veiem a ull que $s(x) = p(x) + r(x)$. Si $a = -1$, aleshores $p(x) = 1 - x^3$, $q(x) = -1 + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = -1 + x^2 + x^3$, i observem que $s(x) = r(x)$.

Mètode alternatiu. Suposem primer que $a = 0$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent a A és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de $s(x)$ en funció de $p(x), q(x), r(x)$, és a dir, $s(x) = p(x) + r(x)$.

Suposem ara que $a=-1$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de $s(x)$ en funció de $p(x), q(x), r(x)$, és a dir, $s(x) = r(x)$.

F2. (4 punts) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica. Observem que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

La matriu A associada a f en la base canònica és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica, o sigui: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Mètode alternatiu: amb matrius de canvis de base. El conjunt

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

és una base de $\mathbb{R}^3$. En efecte, B és linealment independent perquè la matriu P que té els tres vectors per columnes és una matriu escalonada amb tres files no nulles i, per tant, té rang 3:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ser 3 vectors linealment i ndependents d'un espai de dimensió 3, B és una base de e $\mathbb{R}^3$. Considerem la base canònica,

$$C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Coneixem les imatges dels vectors de B expressades en la base canbònica. Per tant, coneixem la matriu associada a f en les bases B, en l'espai de sortida, i C, en l'espai d'arribada:

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular la matriu associada a f en la base canònica, fem un canvi de base a l'espai de sortida:

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P_B^C.$$

Observem que la matriu de canvi de base de C a B és la inversa de la matriu de canvi de base de B a C, que és precisamemnt la matriu P. Per tant,

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P_B^C = M_C^B(f)(P_C^B)^{-1} = M_C^B(f) P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La inversa de P és doncs

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu associada a f en la base canònica és, doncs,

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per a comprovar si f és injectiva, exhaustiva, bijectiva, calculem el rang de la matriu A:

$$\text{rang} A = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, $\dim Imf = \text{rang} A = 2$ i $\dim Kerf = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang} A = 3 - 2 = 1$.
L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim Kerf = 1 \neq 0$ i no és exhaustiva per ser $\dim Imf = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Sigui $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \}$.

i. Doneu una base i la dimensió del subespai S i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^3$.

Solució. El subespai S està definit per un sistema amb una única equació amb 3 incògnites. La dimensió de S és el nombre de graus de llibertat del sistema, que en aquest cas és 2 $(= 3 - 1)$. Resolem el sistema per a trobar una base. Si aïllem z en funció de x i y, obtenim:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base de S és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Per tant, $S =< \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >$.

Per a completar la base, observem que la matriu tal que les dues primeres columnes són els vectors de la base de S,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

té rang 3, perquè és triangular inferior. Per tant, podem completar la base de S fins a una base de $\mathbb{R}^3$ amb el vector $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ii. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Expresseu $f(S)$ com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base de S amb la matriu associada A calculada a l'apartat anterior, i obtenim:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$f(S) =< f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} > .$$

Els dos vectors que generen $f(S)$ són linealment independents perquè no són proporcionals, per tant, una base de $f(S)$ és $\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ i $\dim f(S) = 2$.

Observem que

$$f(S) =< \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >= S,$$

per tant

$$f(S) = S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}.$$

Mètode alternatiu: si no ens adonem que $f(S) = S$. Un vector genèric $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ serà de $f(S)$ si la matriu $\begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\-2 & 1 & z\end{pmatrix}$ té rang 2. Amb transformacions elementals per files obtenim que la matriu és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\-2 & 1 & z\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\0 & 1 & z-2x\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\0 & 0 & z-2x+y\end{pmatrix}$$

que té rang 2 si i només si $z - 2x + y = 0$. Per tant,

$$f(S) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}.$$

F3. (3 punts) Sigui $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Calculeu el seu polinomi característic i determineu els valors propis de M. Raoneu que M diagonalitza.

Solució. El polinomi característic és

$$\det(M - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 3-x & -1 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 4 & -2-x \end{pmatrix} = (3-x)(2-x)(-2-x).$$

Els valors propis són les arrels del polinomi caracteristic, o sigui 3, 2 i -2. Per ser M una matriu 3×3 amb 3 valors propis diferents podem assegurar que diagonalitza.

(b) Calculeu una base formada per vectors propis. Doneu una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ sigui una matriu diagonal.

Solució. Per ser 3, 2 i -2 tres valors propis diferents d'una matriu 3×3, tres vectors propis de valor propi 3, 2 i -2, respectivament, seran linealment independents.

• Un vector propi de valor propi 3 és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ja que la primera columna de M és $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que és proporcional a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mètode alternatiu. Els vectors propis de valor propi 3 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M - 3I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & -1 & 0 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 0 & 4 & -2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable x:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 3.

• Els vectors propis de valor propi 2 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M - 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 4 & -2-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 2.

- Un vector propi de valor propi -2 és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ja que la tercera columna de M és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, que és proporcional a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Mètode alternatiu. Els vectors propis de valor propi -2 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M + 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3+2 & -1 & 0 \\ 0 & 2+2 & 0 \\ 0 & 4 & -2+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Per tant, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una vector propi de valor propi -2.

Els següents vectors són tres vectors propis de M linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que té per columnes els vectors propis trobats satisfà

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculeu la matriu M^n, on n és un nombre natural.

Solució. De l'apartat anterior deduïm $M = PDP^{-1}$ i, per tant,

$$M^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{n)} = PD^nP^{-1},$$

on $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de P és doncs

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu M^n és

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^n - 3^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - (-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) (1 punt) Suposem que F i G són dos subespais de $\mathbb{R}^3$. Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:

Si F i G són subespais de dimensió 2, aleshores $F \cap G \neq \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

(b) (1 punt) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u, v, w\}$ i $B' = \{u', v', w'\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors u, $u + v$ i v' en cadascuna de les dues bases.

(c) (1 punt) Siguin $f\colon E \to F$ una aplicació lineal i e_1, e_2, e_3 vectors de E. Demostreu que si e_1, e_2, e_3 són linealment independents i f és injectiva, aleshores $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són linealment independents.

2. Sigui S_a el subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generat per les matrius M_1, M_2, M_3, M_4, on

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1 & a\\-1 & -1\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}-2 & -2\\a & 1\end{pmatrix} \text{ i } M_4 = \begin{pmatrix}a & a\\a & a^2\end{pmatrix}.$$

(a) (1 punt) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

(b) (1 punt) Quines equacions han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$ sigui de S_1?

(c) (1 punt) Doneu la dimensió i una base de $S_0 \cap S_1$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) (1.5 punts) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) (1 punt) Sigui $S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}$. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$.

(c) (1.5 punts) Esbrineu si f diagonalitza. En cas que diagonalitzi, trobeu una base B de vectors propis i doneu la matriu D associada a f en aquesta base. Quina relació hi ha entre les matrius A, D i la matriu de canvi de base de B a C?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 3 exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 21/06/2021.
- Revisió de l'examen: s'haurà de demanar el 22 de juny seguint el procediment que es publicarà al racó.

Model de solució

1. (a) (1 punt) Suposem que F i G són dos subespais de $\mathbb{R}^3$. Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:

$$\text{Si } F \text{ i } G \text{ són subespais de dimensió 2, aleshores } F \cap G \neq \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

Solució. És certa. Cadascun dels subespais F i G és solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb 2 graus de llibertat, o sigui, es poden donar com la solució d'un sistema homogeni amb una equació i 3 incògnites. Per tant, $F \cap G$ es pot expressar com la solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb 2 equacions i 3 incògnites, que té almenys 1 grau de llibertat, ja que el rang de la matriu de coeficients és com a molt 2. Per tant, $F \cap G \neq \{0_E\}$ perquè $F \cap G$ té dimensió almenys 1.

També es pot justificar geomètricament, tenint en compte que un subespai de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ està format per tots els vectors posició dels punts d'un pla per l'origen. Per tant, la intersecció estarà formada per tots els vectors posició de la intersecció de dos plans per l'origen. Sabem que la intersecció de dos plans és una recta o bé un pla (si els dos plans són coindidents). En qualsevol dels dos casos, a la intersecció dels dos subespais hi haurà almenys un vector diferent del vector zero.

(b) (1 punt) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u, v, w\}$ i $B' = \{u', v', w'\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & -3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors u, $u+v$ i v' en cadascuna de les dues bases.

Solució. Les coordenades dels vectors u i $u+v$ en la base B són $(u)_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ i $(u+v)_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. A les columnes de la matriu $P_{B'}^{B}$ hi ha les coordenades dels vectors de B expressats en la base B', per tant, $(u)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ i $(u+v)_{B'} = (u)_{B'} + (v)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

Finalment, $(v')_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, perquè v' és el segon vector de la base B', i per ser $u = u' + w'$, $v = 2u' + v' + 2w'$, veiem a ull que $v - 2u = v'$. Per tant, $(v')_B = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) (1 punt) Siguin $f\colon E \to F$ una aplicació lineal i e_1, e_2, e_3 vectors de E. Demostreu que si e_1, e_2, e_3 són linealment independents i f és injectiva, aleshores $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són linealment independents.

Solució. Suposem que $\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_F$. Per a demostrar que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són vectors de F linealment independents, cal veure que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En efecte, per ser f lineal, $f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_F$. Si f és injectiva, l'única antiimatge de 0_F és 0_E. Per tant, $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$. I per ser e_1, e_2, e_3 vectors de E linealment independents, ha de ser $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2. Sigui S_a el subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generat per les matrius M_1, M_2, M_3, M_4, on

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1 & a\\-1 & -1\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}-2 & -2\\a & 1\end{pmatrix} \text{ i } M_4 = \begin{pmatrix}a & a\\a & a^2\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió i doneu una base de S_a segons els valors del paràmetre a.

Solució.

Mètode I. Si expressem les matrius de S_a en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la dimensió de S_a és el rang de la matriu A que té les coordenades aquests vectors per columnes. Fem transformacions elementals per files per calcular el rang:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\1 & a & -2 & a\\1 & -1 & a & a\\1 & -1 & 1 & a^2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\1 & -1 & a & a\\1 & -1 & 1 & a^2\\1 & a & -2 & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\0 & -2 & a+2 & 0\\0 & -2 & 3 & a^2-a\\0 & a-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Distingim casos:

- Si $a = 1$, aleshores A és equivalent a una matriu de rang 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suposem ara que $a \neq 1$. Aleshores A és equivalent a:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -2 & a+2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & a^2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -2 & a+2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & a^2-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-a \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 1, 0, -2$ és equivalent a una matriu de rang 4, ja que el determinant de la matriu obtinguda és igual a $(a+2)(a^2-a)$ que és diferent de 0.
- Si $a = 0$, aleshores A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Finalment, si $a = -2$, aleshores és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4, & \text{si } A \neq 0, 1, -2 \\ 3, & \text{si } A = 0, -2 \\ 2, & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

Mètode II. Si expressem les matrius de S_a en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la dimensió de S_a és el rang de la matriu A que té les coordenades aquests vectors per files. Fem transformacions elementals per files per calcular el rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ -2 & -2 & a & 1 \\ a & a & a & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$$

Distingim casos segons els valors del paràmetre a que fan que s'anul·lin els elements de la diagonal principal, és a dir, $a = 1$, $a = 0$, $a = -2$ i $a \neq 0, 1, -2$.

- Si $a \neq 0, 1, -2$, A és equivalent a una matriu amb tots els elements de la diagonal principal diferents de zero. Per tant, el rang d'A és 4.
- Si $a = 1$, A és equivalent a una matriu de rang 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = -2$, A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a=0$, A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4, & \text{si } A \neq 0, 1, -2 \\ 3, & \text{si } A = 0, -2 \\ 2, & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

(b) Quines equacions han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S_1?

Solució.
Mètode I. De l'apartat anterior (Mètode I), sabem que els vectors corresponents a les columnes dels pivots de la matriu escalonada equivalent formen una base de S_a. Per tant, les matrius M_1 i M_2 formen una base de S_1. Una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S_1 si és combinació lineal dels vectors de la base de S_1, és a dir, si el rang de la matriu que té per columnes les matrius M_1, M_2 i la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és igual a 2. Veiem que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & -2 & t-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & t-x-(z-x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & t-z \end{pmatrix}$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $y-x=0$ i $t-z=0$.
Mètode II. Calculem primer una base de S_1. A l'apartat anterior (Mètode II) hem vist que si $a=1$, la matriu A que té per files les matrius que generen el subespai és equivalent per files a la matriu

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de S_1 està formada per les dues files no nul·les de la matriu equivalent per files, ja que A té per files els vectors que generen S_a. És a dir, una possible base de S_1 és $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S_1 si és combinació lineal dels vectors de la base de S_1, és a dir, si el rang de la matriu que té per files els dos vectors de la base de S_a i una matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és 2. Si fem transformacions elementals tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & 0 & t-z \end{pmatrix}$$

Si $y-x \neq 0$, aleshores el rang és 3, ja que si permutem les files 2 i 3 tenim una matriu escalonada amb 3 files no nul·les. Per tant, si el rang és 2, ha de ser $y-x=0$. Finalment, si $y-x=0$ i $t-z \neq 0$, aleshores el rang és 3, ja que queda una matriu escalonada amb 3 files no nul·les. Per tant, ha de ser $t-z=0$. És a dir, el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $y-x=0$ i $t-z=0$. Equivalentment, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in S_1$ si i només si $x=y$ i $z=t$.

(c) Doneu la dimensió i una base de $S_0 \cap S_1$.

Solució.
Mètode I. De l'apartat (a) (Mètode I) deduïm que una base de S_0 està formada per les matrius $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Una matriu M és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si existeixen escalars $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta-2\gamma & \alpha-2\gamma \\ \alpha-\beta+2\gamma & \alpha-\beta+\gamma \end{pmatrix}.$$

Imposem ara que la matriu M sigui també de S_1. Tenint en compte l'apartat anterior ha de ser $\alpha+\beta-2\gamma=\alpha-2\gamma$ i $\alpha-\beta+2\gamma=\alpha-\beta+\gamma$, d'on deduïm que $\beta=\gamma=0$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Si substituïm el resultat obtingut a l'expressió anterior, tenim que $M\in S_0\cap S_1$ si:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Per tant, $S_0\cap S_1$ és un subespai de dimensió 1 i una possible base és $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

Mètode II. De l'apartat (a) (Mètode I) deduïm que una base de S_0 està formada per les matrius $M_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}-2&-2\\0&1\end{pmatrix}$. Una matriu $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si el rang de la matriu que té per columnes aquestes 3 matrius juntament amb una matriu genèrica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és igual a 2. Fem transformacion elementals per files a aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\1&0&-2&y\\1&-1&0&z\\1&-1&1&t\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&-1&0&y-x\\0&-2&2&z-x\\0&-2&3&t-x\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&-2&2&z-x\\0&-2&3&t-x\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&-2&2&z-x\\0&0&1&t-x-(z-x)\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&2&z+x-2y\\0&0&1&t-z\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&t-z\\0&0&0&z+x-2y-2(t-z)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&t+x-2y\\0&0&0&x-2y+3z-2t\end{pmatrix}$$

El subespai S_0 és doncs solució del sistema homogeni amb una equació i 4 incògnites:

$$x-2y+3z-2t=0.$$

La intersecció $S_0\cap S_1$ és la solució del sistema format per les equacions que defineixen S_0 i les que defineixen S_1, que hem trobat a l'apartat anterior, o sigui

$$x=y, z=t, x-2y+3z-2t=0.$$

Resolem el sistema homogeni, que és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\1&-2&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&-1&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-3&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

La solució en forma paramètrica és:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Una base de $S_0\cap S_1$ és doncs $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

Mètode III. Calculem primer una base de S_0. De l'apartat (a) (Mètode II) obtenim una possible base formada per les 3 files no nul·les de la matriu equivalent a A per files, és a dir, $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}\}$. Una matriu M és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si existeixen escalars $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ de forma que:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\alpha-\beta\\\alpha-2\beta+2\gamma&\alpha-2\beta+3\gamma\end{pmatrix}.$$

Imposem ara que la matriu M sigui també de S_1. Tenint en compte l'apartat anterior ha de ser $\alpha=\alpha-\beta$ i $\alpha-2\beta+2\gamma=\alpha-2\beta+3\gamma$, d'on deduïm que $\beta=\gamma=0$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Si substituïm el resultat obtingut a l'expressió anterior, tenim que $M\in S_0\cap S_1$ si:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Per tant, $S_0\cap S_1$ és un subespai de dimensió 1 i una possible base és $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica. Observem que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

La matriu A associada a f en la base canònica és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica, o sigui: $A = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}$.

Calculem el rang de la matriu A:

$$\text{rang} A = \text{rang}\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

Per tant, $\dim Imf = \text{rang} A = 2$ i $\dim Kerf = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang} A = 3 - 2 = 1$.
L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim \ker f = 1 \neq 0$; no és exhaustiva per ser $\dim Imf = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Sigui $S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}$. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$.

Solució. El subespai S està definit per un sistema amb una única equació amb 3 incògnites. La dimensió de S és el nombre de graus de llibertat del sistema, que en aquest cas és 2 $(= 3 - 1)$. Resolem el sistema per a trobar una base. Si aïllem z en funció de x i y, obtenim:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\2x-y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Una base de S és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Per tant, $S = <\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}>$.

Calculem les imatges dels vectors de la base de S amb la matriu associada A calculada a l'apartat anterior, i obtenim:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$f(S) = < f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} >.$$

Els dos vectors que generen $f(S)$ són linealment independents perquè no són proporcionals. Per tant, $\dim f(S) = 2$ i una base de $f(S)$ és $\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

(Observeu que els vectors de S són vectors propis de valor propi -1.)

(c) Esbrineu si f diagonalitza. En cas que diagonalitzi, trobeu una base B de vectors propis i doneu la matriu D associada a f en aquesta base. Quina relació hi ha entre D i la matriu associada en la base canònica?

Solució. Calculem el polinomi característic de f a partir de la matriu associada en la base canònica:

$$p_f(x) = \det(A - x\,I_3) = \det\begin{pmatrix} 3-x & -2 & -2 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 6 & -3 & -4-x \end{pmatrix} = (-1-x)\det\begin{pmatrix} 3-x & -2 \\ 6 & -4-x \end{pmatrix}$$
$$= (-1-x)\big((3-x)(-4-x)-(-2)6\big) = (-1-x)(-12-3x+4x+x^2+12) = (-1-x)(x^2+x)$$
$$= -x(x+1)^2.$$

Les arrels del polinomi característic són 0, de multiplicitat 1, i -1, de multiplicitat 2. Els valors propis són, doncs, 0 i -1. Siguin E_0 i E_{-1} els subespais propis de valor propi 0 i -1 respectivament. Sabem que $\dim E_0 = 1$, perquè la multiplicitat de l'arrel 0 en $p_f(x)$ és 1. Sabem que la dimensió de E_{-1} satisfà $1 \le \dim E_{-1} \le 2$.
Perquè f diagonalitzi, cal que $\dim E_{-1} = 2$.

Mètode I. A l'apartat anterior hem vist que els vectors de la base de S són vectors propis de valor propi -1. Per tant, $\dim E_{-1} = 2$ i una base de E_{-1} és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. És a dir, l'endomorfisme diagonalitza.

Mètode II. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A-(-1)I_3$ per a trobar tots els vectors de E_{-1}:

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 & -2 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 6 & -3 & -4-(-1) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu de coeficients és 1 i el nombre de graus de llibertat del sistema és $2(=3-1)$. Per a donar la solució de forma paramètrica, expressem la variable z en funció de x i y:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\2x-y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Per tant, f diagonalitza perquè $\dim E_{-1} = 2$, i una base de E_{-1} és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$

Calculem ara una base de E_0 (que en realitat és el nucli de f). Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - 0\cdot I_3 = A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenem x, y com a variables principals i z com a variable lliure. Aleshores la solució es pot expressar:

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}z\\0\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}2/3\\0\\1\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}$$

Per tant, una base de E_0 és $\{\begin{pmatrix}2/3\\0\\1\end{pmatrix}\}$

Una base en què f diagonalitza és $B = \{\begin{pmatrix}2/3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$.

La matriu diagonal associada en aquesta base és:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La relació entre A i D és:

$$D = P^{-1}AP$$

on $P = P_C^B$, és la matriu de canvi de base de B a la base canònica, C:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Model de solució

1. (a) i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i S un subconjunt d'E. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai d'E.

Solució. S és subespai d'E si es compleixen les tres condicions següents:

- $S \neq \emptyset$;
- $\forall u, v \in S$, si $u, v \in S$, aleshores $u + v \in S$;
- $\forall u \in S$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $u \in S$, aleshores $\alpha u \in S$.

ii) Determineu si els conjunts següents són subespais d'$\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} 2x = y - z \\ x + y + t = 0 \end{array} \right\}; \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y-2 \\ 2x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solució. S_1 és subespai perquè és el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni en les variables x, y, z, t, i sabem que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables és sempre un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^n$.
S_2 no és subespai perquè el vector zero no és d'S_2: perquè el vector zero sigui d'S_2 ha de ser $x + y = x - y = x + y - 2 = 2x = 0$, i això no 'es possible, ja que de $x + y = 2x = 0$ deduïm $x = y = 0$, però aleshores $x + y - 2 = -2 \neq 0$.

(b) Sigui E un espai vectorial real de dimensió n i f un endomorfisme d'E amb polinomi característic $P_f(x) = (1 - x)^n$. Demostreu que si f diagonalitza, aleshores f és l'aplicació identitat.

Solució. L'únic valor propi d'f és 1 amb multiplicitat algebraica n. Per tant, f diagonalitza si i només si el subespai propi $E_1 = \{u \in E : f(u) = u\}$ té dimensió n. Però per ser $\dim E = n$, l'únic subespai d'E de dimensió n és el mateix espai vectorial E. Per tant, si f diagonalitza, $E_1 = \{u \in E : f(u) = u\} = E$. És a dir, si f diagonalitza, aleshores f és l'aplicació identitat ja que $f(u) = u$, per a tot $u \in E$.

2. Considerem el subespai F d'$\mathbb{R}^4$ generat pels vectors del conjunt $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Calculeu la dimensió d'F i doneu una base B d'F formada per vectors del conjunt S. Expresseu els vectors d'S que no siguin de B com a combinació lineal dels vectors de B.

Solució. La dimensió d'F és el rang de la matriu que té per columnes (o bé per files) els vectors que generen F. A més, si posem els vectors per columnes i fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu reduïda equivalent, les columnes dels pivots formen una base d'F i a la resta de columnes hi ha els coeficients dels vectors corresponents com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Per tant, $\dim F = \operatorname{rang} A = 2$, i si $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, una base d'$F$ és $B = \{u_1, u_2\}$, i aleshores $u_3 = u_1 + u_2$, $u_4 = -u_1 - 2u_2$.

(b) Completeu la base donada a l'apartat anterior fins a una base d'$\mathbb{R}^4$.

Solució. Per ser F un subespai de dimensió 2 d'$\mathbb{R}^4$, que té dimensió 2, cal trobar dos vectors v_1, v_2 tals que $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ siguin linealment independents. Sabem que sempre es pot aconseguir amb vectors v_1 i v_2 de la base canònica. Observem que la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

té rang 4 ja que si canviem el signe de la tercera fila, obtenim una matriu escalonada amb 4 files no nul·les. Per tant, si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aleshores $B \cup \{v_1, v_2\}$ és una base d'$\mathbb{R}^4$.

(c) Quines equacions han de satisfer les variables x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sigui d'F?

Solució. Un vector $u \in \mathbb{R}^4$ és d'F si i només el rang de la matriu que té per columnes els 2 vectors de la base d'F i una tercera columna amb les coordenades del vector u és 2. Imposem, doncs, que el rang d'aquesta matriu sigui 2 per a un vetor genèric $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \\ 2 & -2 & x \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & y+z \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 0 & y+z \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x-2y+2t \\ 0 & 0 & y+z \end{pmatrix}$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $x - 2y + 2t = 0$ i $y + z = 0$. Per tant, $u \in F$ si i només si x, y, z, t satisfan les equacions $x - 2y + 2t = 0$ i $y + z = 0$.

3. Sigui $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ la base canònica de l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de matrius reals 2×2, i $W = \{1, x, x^2\}$ la base canònica de l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis reals de grau com a molt 2. Definim l'aplicació lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ tal que $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a - 2b + 2d) + (b + c)x + (a + 2c + 2d)x^2$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases B i W.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de B i posem per columnes les coordenades de les imatges en la base W:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x^2,\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 + x,\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x + 2x^2,\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2x^2,$$

per tant, la matriu associada a f en les bases B i W és:

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculeu la dimensió i una base dels subespais $\mathrm{Ker} f$ i $\mathrm{Im} f$. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Si anomenem $M = M_W^B(f)$, sabem que $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang} M$, $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rang} M = 4 - \mathrm{rang} M$. Calculem el rang d'$M$:. Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\mathrm{rang} M = 2$, i aleshores $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.
Una base d'$\mathrm{Im} f$ està formada pels polinomis que corresponen a dues columnes d'M linealment independents. Veiem que les dues primeres columnes d'M no són proporcionals, per tant, una base d'$\mathrm{Im} f$ és $\{1 + x^2, -2 + x\}$.
Per trobar una base de $\mathrm{Ker} f$, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients la matriu M. Hem vist que

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per tant, si a, b, c, d són les variables del sistema, la solució és:

$$a = -2c - 2d, b = -c, \text{ on } c, d \in \mathbb{R}.$$

Per tant,

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2c - 2d & -c \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de $\mathrm{Ker} f$ és, doncs, $\{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.
Per ser $\mathrm{rang} M = 2 \neq 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'aplicació f no és injectiva, i per ser $\mathrm{rang} M = 2 \neq 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$, l'aplicació f no és exhaustiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

(c) Calculeu la matriu associada a f en les bases $B' = \{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $W' = \{1 + x^2, \frac{1}{2}x, 1 - x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Solució. Utilitzem matrius de canvi de base. Si $P_B^{B'}$ és la matriu de canvi de base de B' a B i $P_W^{W'}$ és la matriu de canvi de base de W' a W, sabem que

$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} M_W^B(f) P_B^{B'} = (P_W^{W'})^{-1} M_W^B(f) P_B^{B'}.$$

La matriu $M_W^B(f)$ l'hem calculat en un apartat anterior. La matriu $P_B^{B'}$ s'obté escrivint per columnes els vectors de B' en la base B, per tant:

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu $P_W^{W'}$ s'obté escrivint per columnes els vectors de W' en la base W, per tant:

$$P_W^{W'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de $P_W^{W'}$ amb Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}
(P_W^{W'}|I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_3|(P_W^{W'})^{-1})
\end{aligned}$$

Per tant,

$$P_{W'}^{W} = P_W^{W'})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
M_{W'}^{B'}(f) &= P_{W'}^{W} M_W^B(f) P_B^{B'} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Sigui $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme f_a d'$\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

(a) Estudieu per a quins valors d'a diagonalitza l'endomorfisme f_a.

Solució. Calculem el polinomi característic d'f_a:

$$p_{f_a}(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 3 & 0 & a-x \end{pmatrix} = (5-x)(-1-x)(a-x).$$

El polinomi característic es pot descompondre en factors de grau 1. Les arrels són 5, -1 i a. La multiplicitat de les arrels depèn del valor d'a.

- Si $a \neq 5, -1$, aleshores el polinomi característic té 3 arrels diferents, per tant f_a diagonalitza, ja que té tots els valors propis diferents.

- Si $a = 5$, aleshores el polinomi característic té dues arrels: 5, de multiplicitat 2 i -1, de multiplicitat 1. En aquest cas, l'endomorfisme diagonalitza si i només si $\dim E_5 = 2$. Calculem la dimensió d'E_5:

$$\begin{aligned}\dim E_5 &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 0 & -1-5 & 0 \\ 3 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.\end{aligned}$$

  Per tant, f_5 no diagonalitza.

- Si $a = -1$, aleshores el polinomi característic té dues arrels: 5, de multiplicitat 1 i -1, de multiplicitat 2. En aquest cas, l'endomorfisme diagonalitza si i només si $\dim E_{-1} = 2$. Calculem la dimensió d'E_{-1}:

$$\begin{aligned}\dim E_{-1} &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 3 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

  Per tant, f_{-1} diagonalitza.

Resumint, f_a diagonalitza si i només si $a \neq 5$.

(b) Sigui $a = -1$. En cas que f_{-1} diagonalitzi, doneu una base B d'$\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis, la matriu diagonal D associada a f_{-1} en la base B, i la relació entre les matrius A i D.

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que f_a diagonalitza si $a = -1$. En aquest cas, els valors propis de l'endomorfisme són 5 i -1, de multiplicitat 1 i 2, respectivament. Per trobar una base de vectors propis, calculem una base d'E_5 i una base d'E_{-1}, tenint en compte que $a = -1$.

Base d'E_5. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - 5I$:

$$(A-5I) = \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 0 & -1-5 & 0 \\ 3 & 0 & -1-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució: $y = 0$; $x = 2z$, $z \in \mathbb{R}$. La solució en forma paramètrica és:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Una base d'E_5 és $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base d'E_{-1}. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - (-1)I$:

$$\begin{aligned}(A-(-1)I) &= \begin{pmatrix} 5-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 3 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Solució: $x = 0$; $y, z \in \mathbb{R}$. La solució en forma paramètrica és:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base d'E_{-1} és $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base de vectors propis d'f_{-1}: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

A la matriu diagonal D associada a f_{-1} en la base B hi ha els valors propis asociats als vectors de la base B:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, la relació entre les matrius A i D és:

$$D = P^{-1} A P$$

on P és la matriu de canvi de base de B a la base canònica:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'examen final del curs 2019-2020(2) va consistir en un qüestionari a Atenea que es generava de forma aleatòria.

Estructura de la part d'àlgebra lineal:

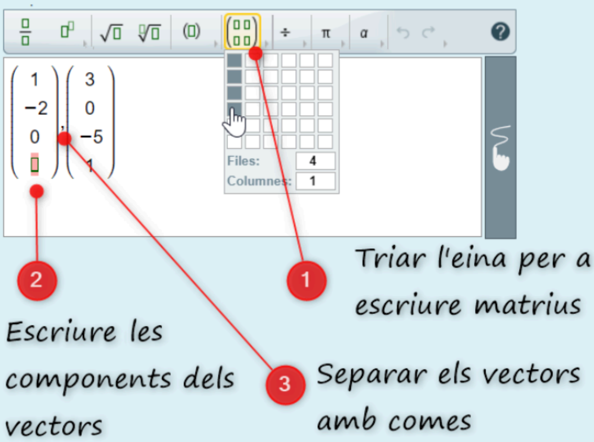
- **Temps: 1 hora 45 minuts**.
- El qüestionari consta de **15 preguntes:** 7 de tipus CERT/FALS, 3 de resposta múltiple, i 5 de resposta oberta.
- **Puntuació sobre 23**: les preguntes CERT/FALS valen 1 punt i la resta 2 punts. Concretament: 1 punt cada resposta CERT/FALS correcta; -1 punt cada resposta CERT/FALS incorrecta; 0 punts cada pregunta CERT/FALS sense resposta; 2 punts cada resposta múltiple correcta; -2/3 cada resposta múltiple incorrecta; 0 punts cada pregunta múltiple sense respondre; 2 punts cada pregunta de resposta oberta correcta

Exemples de possibles preguntes:

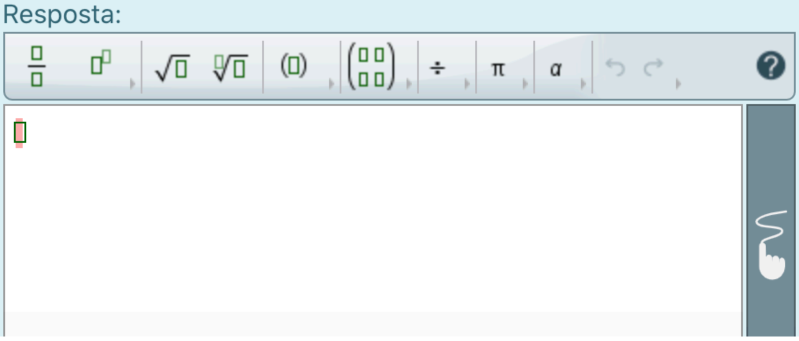
Sigui $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 6 & -12 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 11 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ la matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases canòniques. Doneu una base de $\operatorname{Im} f$.

Responeu escrivint els vectors de la base en forma de columna i separats per comes.

Indicació per a respondre:



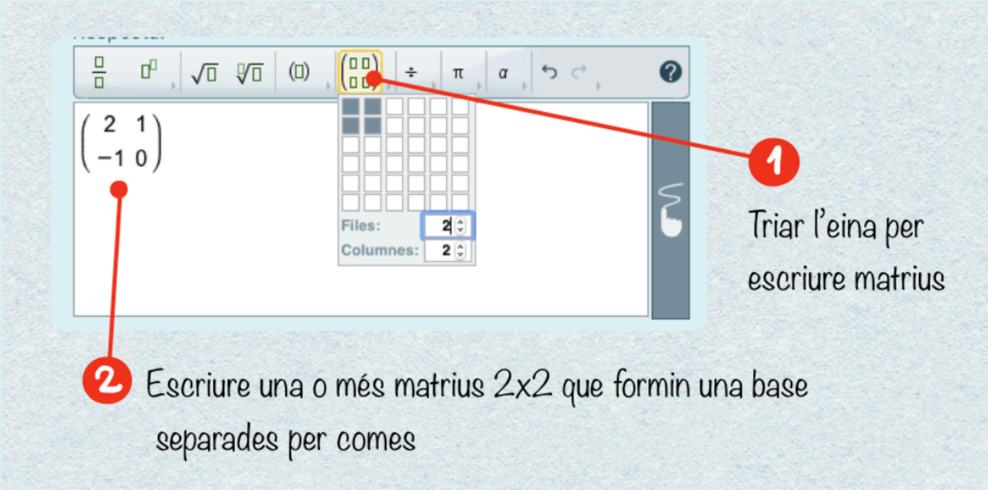
Resposta:



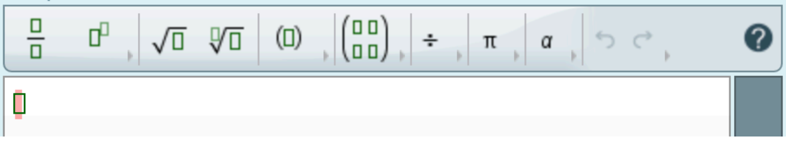
Siguin dos subespais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definits per $S=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ i

$T=\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : 2a-b+c-3d=0 \right\}$. Doneu una base de la intersecció dels dos subespais.

Indicacions per respondre: doneu una o més matrius 2x2 que formin una base separades per comes



Resposta:



En un espai vectorial de dimensió 4, siguin els vectors $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ que satisfan

$v_2+6v_3+2v_4-5v_5+4v_6=0$.

A més sabem que els vectors v_3, v_4, v_5, v_6 són linealment independents. En aquestes condicions, quina de les afirmacions següents és **FALSA**?

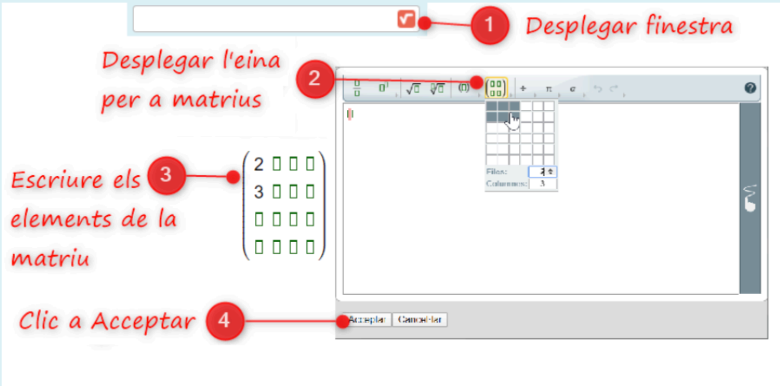
Trieu-ne una:

- v_3, v_4, v_6 són vectors linealment independents pero no són generadors
- $< v_3, v_4, v_6 >$ és un subespai de dimensió 3 del qual sabem que $v_5 \notin < v_3, v_4, v_6 >$
- Blanc
- v_3, v_4, v_5 no formen base però sí que són generadors
- v_3, v_4, v_5, v_6 formen base i en aquesta base el vector $v_2=(-6,-2,5,-4)$

Siguin $E = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $F = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ subespais vectorials d'$\mathbb{R}^4$. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfisme tal que $\mathrm{Ker} f = E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

Calculeu la matriu d'f en la base canònica:

Indicacions per respondre:



Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si u i v són vectors propis de valor propi 3 d'un endomorfisme f, aleshores podem assegurar que $8u - 3v$ és vector propi de valor propi 3 de f.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ és 4, aleshores el determinant de la matriu $10A$ és 40.

Trieu-ne una:

- Cert
- Blanc
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en una certa base B és $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, aleshores f és diagonalitzable.

Trieu-ne una:

- Blanc
- Fals
- Cert

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un sistema d'equacions lineals té 2 equacions i 3 incògnites, aleshores podem assegurar que el sistema és compatible.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si u i v són vectors propis de valor propi 3 d'un endomorfisme f, aleshores podem assegurar que $8u - 3v$ és vector propi de valor propi 3 de f.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ és 4, aleshores el determinant de la matriu $10A$ és 40.

Trieu-ne una:

- Cert
- Blanc
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en una certa base B és $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, aleshores f és diagonalitzable.

Trieu-ne una:

- Blanc
- Fals
- Cert

Estructura part de grafs (recuperació del parcial):

- **Temps: 1 hora 30 minuts**.
- El qüestionari consta de **15 preguntes,** 14 de tipus CERT/FALS i una de resposta oberta.
- A les preguntes CERT/FALS, **cada resposta incorrecta resta**.
- **Puntuació sobre 20**: 1 punt cada resposta CERT/FALS correcta; -1 punt cada resposta CERT/FALS incorrecta; 0 punts cada pregunta CERT/FALS sense resposta; 6 punts la pregunta de resposta oberta.

Exemples de posibles preguntes:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf d'ordre 15 té diàmetre 14, aleshores el graf ha de ser un graf trajecte d'ordre 15.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tots els grafs d'ordre 20 i mida 11 sense vèrtexs aïllats són acíclics.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf té almenys tantes arestes pont com vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si G és un graf bipartit d'ordre 7, aleshores G no és autocomplementari.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf té almenys tantes arestes pont com vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf 2-regular d'ordre 6 és un graf cicle.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

L'únic arbre d'ordre almenys 2 tal que el seu complementari és també arbre és el trajecte d'ordre 4.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf té ordre 25 i mida 280, aleshores podem assegurar que és connex.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Les arestes pont d'un graf connex G són arestes de tots els arbres generadors de G.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf bipartit és hamiltonià, el seu ordre ha de ser parell.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Donats el graf C_6 amb conjunt de vèrtexs $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ en el qual $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_1$ és un cicle i el graf K_4 amb conjunt de vèrtexs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, considerem el graf $G = (V, A)$ on $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i A, a més de les arestes dels dos grafs anteriors, en té dues més: u_1v_1 i u_2v_2.

D'aquest graf G, us demanem:

- La seqüència de graus (escriviu-la com un enter de 10 dígits ordenats de gran a petit):

- Escriu sota de cada vèrtex la seva excentricitat:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4

- Digues quin és el radi del graf $r(G) =$

- Digues quin és el diàmetre del graf $D(G) =$

- Digues si cada vèrtex és o no central:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4

- Quin és el mínim d'arestes que cal afegir a G per tal que tingui un senderó eulerià?

- Tornem a etiquetar els vèrtexs de G, ara u_i serà el vèrtex i, mentre que v_j serà el vèrtex $j+6$. Amb això, els vèrtexs de G tenen etiquetes que van de l'1 al 10.

Apliquem l'algorisme **BFS** (Breadth First Search) amb els vèrtexs ordenats de petit a gran (és a dir, a l'hora de triar un vèrtex per posar-lo a la cua/pila prenem sempre el d'etiqueta mínima si hi ha més d'una possibilitat).

Doneu la llista dels vèrtexs ordenada tal com els afegim a l'arbre generador en aplicar aquest algorisme començant en el vèrtex **9**:

1. [3 punts]

a) Doneu la definició de combinació lineal i de vectors linealment independents.

b) Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 vectors diferents d'un espai vectorial E. Demostreu les afirmacions següents si són sempre certes o doneu-ne un contraexemple si són falses en general.

i) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

ii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.

iii) Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.

iv) Si v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents, aleshores v_4 és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.

2. [3 punts] Considereu el subespai S_a de $\mathbb{R}^4$ generat per:

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\a\end{pmatrix}\}.$$

a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

b) Doneu una base de S_{-1} i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^4$.

c) Quines condicions han de satisfer x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sigui de S_{-1}?

d) Determineu si algun dels vectors següents és de S_{-1}: $u = \begin{pmatrix}25\\12\\-12\\-25\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}31\\14\\14\\-31\end{pmatrix}$.

3. [4 punts]

a) Sigui $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que

$$f(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

i) Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.

ii) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f i determineu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

b) La matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és

$$A = \begin{pmatrix}-3&-4&0\\-4&3&0\\-12&-6&5\end{pmatrix}.$$

i) Trobeu el polinomi característic, i els valors i vectors propis d'f. Comproveu que f diagonalitza i doneu una base B en que diagonalitzi, la matriu P de canvi de base de B a la base canònica i la matriu diagonal D associada a f en la base B. Quina relació hi ha entre A, D i P?

ii) En cas que f sigui bijectiva calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base B donada a l'apartat anterior.

Instruccions

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan i els sistemes d'equacions lineals amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- Cal entregar els 3 exercicis per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils, ...

Informacions

- Les notes es publicaran com a tard el dia 16 de gener a la tarda.
- La revisió es farà el divendres 17 de gener a les 15:15 a l'aula A5-202.

Model de solució

1. [3 punts]

   a) *Doneu la definició de combinació lineal i de vectors linealment independents.*

   Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$.

   Una combinació lineal dels vectors $v_1, \ldots, v_k \in E$ és qualsevol vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, on $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

   Els vectors $v_1, \ldots, v_k$ són linealment independents si l'única manera d'obtenir el vector zero com a combinació lineal d'aquests vectors és amb tots els escalars igual a zero, és a dir:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} \ \Rightarrow\ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

   b) *Siguin v_1, v_2, v_3, v_4 vectors diferents qualssevol d'un espai vectorial E. Demostreu les afirmacions següents si són sempre certes o doneu-ne un contraexemple si són falses en general.*

   i) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.*
   És fals en general. Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 no són linealment independents.

   ii) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.*
   És cert. Si v_1, v_2, v_3 són linealment dependents, aleshores hi ha una combinació lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_E$ amb algun escalar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Per tant, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + 0 v_4 = 0_E$, amb algun escalar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$, d'on deduïm que v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents.

   iii) *Si v_1, v_2, v_3 són linealment independents i v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3, aleshores v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment independents.*
   És cert. Suposem que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0_E$, on $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, veurem que ha de ser $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. En efecte, si $\alpha_4 \neq 0$, aleshores tindríem $v_4 = \frac{\alpha_1}{\alpha_4} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_4} v_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} v_3$, és a dir, v_4 seria combinació lineal de v_1, v_2, v_3, que contradiu la hipòtesi donada. Per tant, ha de ser $\alpha_4 = 0$, i aleshores obtenim $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_E$, d'on deduïm que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, per ser v_1, v_2, v_3 linealment independents.

   iv) *Si v_1, v_2, v_3, v_4 són linealment dependents, aleshores v_4 és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.*
   És fals en general. Per exemple, els vectors $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ són linealment dependents, però v_4 no és combinació lineal de v_1, v_2, v_3.

2. [3 punts] *Considereu el subespai S_a de $\mathbb{R}^4$ generat per:*

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\a\end{pmatrix}\}.$$

   a) *Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.*

   La dimensió de S_a és el rang de la matriu que té per files o columnes els vectors donats.

   Mètode I.

   Posem els vectors per columnes i fem transformacions elementals per files a aquesta matriu fins tenir una matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\-1&0&-2&a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

   d'on deduïm que el rang de la matriu és 2, si $a = -1$, i el rang és 3, si $a \neq -1$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -1 \\ 3, & \text{si } a \neq -1 \end{cases}$$

   Mètode II.

   Posem els vectors per files i fem transformacions elementals per files a aquesta matriu fins tenir una matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\2&1&1&-2\\1&-1&-1&a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&-1&-1&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&a+1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

   d'on deduïm que el rang de la matriu és 2, si $a = -1$, i el rang és 3, si $a \neq -1$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 2, & \text{si } a = -1 \\ 3, & \text{si } a \neq -1 \end{cases}$$

b) *Doneu una base de S_{-1} i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^4$.*

Mètode I. Si a l'apartat anterior hem posat els vectors que generen S_{-1} per columnes i hem fet transformacions elementals per files per calcular el rang, una base de S_{-1} està formada pels dos vectors columna de la primera matriu corresponents a les columnes amb pivots no nuls de la matriu escalonada equivalent. En aquest cas, una base de S_{-1} està formada per la primera i segona columnes de la primera matriu:

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

i per ser

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

la podem completar fins a una base de $\mathbb{R}^4$ amb els vectors de la base canònica

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és a dir,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és una base de $\mathbb{R}^4$ on els dos primers vectors formen una base de S_{-1}.

Mètode II. Si a l'apartat anterior hem posat els vectors que generen S_{-1} per files i hem fet transformacions elementals per files per calcular el rang, una base de S_{-1} està formada pels dos vectors fila no nuls de l'última matriu,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

i per ser

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = 4$$

i la podem completar fins a una base de $\mathbb{R}^4$ amb els vectors de la base canònica

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és a dir,

$$\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

és una base de $\mathbb{R}^4$ on els dos primers vectors formen una base de S_{-1}.

c) *Quines condicions han de satisfer x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ sigui de S_{-1}?*

Mètode I. Un vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ és de S_{-1} si és combinació lineal dels vectors de la base de S_{-1}, és a dir, si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & z\\ -1 & 0 & t\end{pmatrix} = 2.$$

Si sumem la primera fila a la quarta, i després restem la segona fila a la tercera, obtenim:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\\-1&0&t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z\\0&0&x+t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-y\\0&0&x+t\end{pmatrix}$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si els elements de la tercera fila són nuls, és a dir, si

$$\begin{cases}z-y=0\\x+t=0\end{cases}.$$

Mètode II. Un vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ és de S_{-1} si és combinació lineal dels vectors de la base de S_{-1}, és a dir, si

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\x&y&z&t\end{pmatrix}=2.$$

Si restem a la tercera fila la primera multiplicada per x i la segona multiplicada per y, obtenim:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\x&y&z&t\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&z-y&t+x\end{pmatrix},$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si els elements de la tercera fila són nuls, és a dir, si

$$\begin{cases}z-y=0\\t+x=0\end{cases}.$$

d) *Determineu si algun dels vectors següents és de S_{-1}:* $u=\begin{pmatrix}25\\12\\-12\\-25\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}31\\14\\14\\-31\end{pmatrix}$.

Comprovem si es satisfan les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior. El vector u no és de S_{-1}, ja que no satisfà la primera de les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior (té les coordenandes segona i tercera diferents). En canvi, el vector v és de S_{-1}, ja que es compleixen les dues condicions obtingudes a l'apartat anterior: la segona coordenada és igual a la tercera, i la quarta és igual a la primera canviada de signe.

3. [4 punts]

a) *Sigui $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una aplicació lineal tal que*

$$f(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

i) *Doneu la matriu associada a f en les bases canòniques.*
Sigui

$$C_M=\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\}$$

la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i

$$C=\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$$

la base canònica de $\mathbb{R}^3$
Mètode I.
Observem que els vectors (matrius) de la base canònica es poden obtenir com a diferència de les matrius anteriors:

- $f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- $f(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};$
- $f(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix})-f(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},$

$\bullet\ f(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}) - f(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$

La matriu associada s'obté posant per columnes les imatges de les matrius de la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, és a dir:

$A = \begin{pmatrix}0&-1&2&0\\1&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}$

Mètode II. Amb la informació donada tenim directament la matriu associada en les bases

$$B = \{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i la base canònica de $\mathbb{R}^3$, només cal posar per columnes les imatges de les matrius de B:

$M_C^B(f) = \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&1&1&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}.$

La matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i de $\mathbb{R}^3$, $M_C^{C_M}(f)$, s'obté a partir de $M_C^B(f)$ fent un canvi de base. Si $P_{C_M}^B$ és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B en la base C_M, aleshores:

$$M_C^{C_M}(f) = M_C^B(f)P_B^{C_M} = M_C^B(f)(P_{C_M}^B)^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&1&1&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculem la inversa de $P_{C_M}^B$ amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&1&1&0&0&1&0&-1\\0&1&1&1&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1&-1&0\\0&0&1&1&1&0&-1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&1&-1&0&0\end{array}\right)$$

Per tant,

$$(P_{C_M}^B)^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix},$$

i la matriu associada en bases canòniques és:

$$M_C^{C_M}(f) = \begin{pmatrix}1&1&-1&0\\1&1&1&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&2&0\\1&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

ii) *Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f i determineu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva.*

La dimensió del subespai $\mathrm{Im}f$ és igual al rang de la matriu associada A. Fem transformacions elementals per files per obtenir el rang:

$\begin{pmatrix}0&-1&2&0\\1&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&1&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

Per tant, $\dim \mathrm{Im}f = \mathrm{rang}\, A = 3$, i $\dim \mathrm{Ker}f = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \mathrm{rang}A = 4 - 3 = 1$. Un base de $\mathrm{Im}f$ està formada per 3 columnes linealment independents de A, per exemple, les tres primeres, ja que al calcular el rang de A, els pivots han quedat a les tres primeres columnes. O sigui, una base de $\mathrm{Im}f$ és

$$\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

Per trobar una base del nucli, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té com a matriu de coeficients la matriu associada A. Si fem transformacions elementals per files, obtenim sistemes equivalents. Per tant, tenint en compte els càlculs del primer apartat, el sistema és equivalent a:

$\begin{pmatrix}0&-1&2&0\\1&0&0&0\\1&1&-1&-1\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&2&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

La solució del sistema és, doncs, $x = 0; y = 2t; z = t$, $t \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\mathrm{Ker}f = \{\begin{pmatrix}0&2t\\t&t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix} > .$$

Per tant, una base del nucli és $\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$.

La dimensió de l'espai de sortida de f és 4 i la de l'espai d'arribada és 3. Hem vist que el rang de la matriu associada a f és 3 i coincideix amb la dimensió de l'espai d'arribada, però no amb la dimensió de l'espai de sortida. Per tant, l'aplicació és exhaustiva, però no injectiva, i no és bijectiva (de fet, es pot deduir directament que l'aplicació no pot ser bijectiva perquè les dimensions dels espais de sortida i d'arribada són diferents).

b) *La matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica és*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -12 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

i) *Trobeu el polinomi característic, i els valors i vectors propis d'f. Comproveu que diagonalitza i doneu una base B en que diagonalitzi, la matriu P de canvi de base de B a la base canònica i la matriu diagonal D associada a f en la base B. Quina relació hi ha entre A, D i P?*

El polinomi característic és:

$\det \begin{pmatrix} -3-x & -4 & 0 \\ -4 & 3-x & 0 \\ -12 & -6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x) \det \begin{pmatrix} -3-x & -4 \\ -4 & 3-x \end{pmatrix}$

$= (5-x)((-3-x)(3-x)-16) = (5-x)(x^2-25) = -(x-5)^2(x+5)$.

Les arrels del polinomi característic són 5, de multiplicitat 2, i -5, de multiplicitat 1.

Els valors propis són les arrels del polinomi característic, o sigui, 5 i -5.

Els vectors propis de valor propi 5 són les solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $\det(A-5Id)$.

Resolem el sistema:

$\begin{pmatrix} -3-5 & -4 & 0 \\ -4 & 3-5 & 0 \\ -12 & -6 & 5-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ -12 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La matriu del sistema té rang 1, per tant, el sistema té dos graus de llibertat, i el subespai de vectors propis de valor propi 5 té dimensió 2. La solució del sistema és: $y = -2x; x, z \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ -2x \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Una base és

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Els vectors propis de valor propi -5 són les solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $\det(A+5Id)$.

Resolem el sistema:

$\begin{pmatrix} -3+5 & -4 & 0 \\ -4 & 3+5 & 0 \\ -12 & -6 & 5+5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ -12 & -6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

La matriu del sistema té rang 2, per tant, el sistema té un grau de llibertat, i el subespai de vectors propis de valor propi -5 té dimensió 1. Donem la solució del sistema en funció de y: $x = 2y; z = 3y, y \in \mathbb{R}$, és a dir,

$$\{\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 3y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\} = \{y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R}\}.$$

Una base és

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

L'endomorfisme diagonalitza ja que el polinomi característic té 2 arrels, 5 de multiplicitat 2 i -5, de multiplicitat 1, i hem vist a l'apartat anterior que la dimensió del subespai de vectors propis de valor propi 5 és 2 i la dimensió del subespai de vectors de valor propi -5 és 1.

Una base en que diagonalitza està formada per vectors propis, en aquest cas, tal com hem vist a l'apartat anterior,

$$B = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

i la matriu de canvi de base és: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriu diagonal associada a f en base B és: $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

i la relació que hi ha entre aquestes matrius és $D = P^{-1}AP$.

ii) *En cas que f sigui bijectiva calculeu la matriu associada a f^{-1} en la base B donada a l'apartat anterior.*
L'endomorfisme f és bijectiu, ja que el rang de la matriu associada a f és $\operatorname{rang} D = 3$. La matriu associada a f^{-1} en la base B és $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$.

1. [2 punts]

   (a) (i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $S \subseteq E$. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai vectorial d'E.

   (ii) Indiqueu si els conjunts següents són subespais de l'espai vectorial que s'indica (en aquest apartat responeu només sí o no en cada cas, no s'ha de justificar la resposta):

   1) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b+3c \\ a-c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x+y-3z=0, 2x+3y-z+2=0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   3) S_3 és el conjunt de les matrius triangulars superiors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades 4×4.

   (b) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real E. Digueu què vol dir que u sigui vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores $\dim \operatorname{Ker}(f) \geq 1$.

2. [2 punts] Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$

$$S_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x+y+z+3t=0, x-y+2z-t=0, x-y+az+(1-a)t=0 \}$$

   (a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

   (b) Doneu una base de S_2.

3. [2 punts] Considerem les bases $B = \{1+x+x^2, x+x^2, 2+x\}$ i $B' = \{1+x^2, -1+x, 2x+x^2\}$ de l'espai $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2.

   (a) Doneu la matriu de canvi de base de B a B', $P_{B'}^{B}$.

   (b) Doneu les coordenades del polinomi $1+x-x^2$ en la base B'.

4. [4 punts] Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}$.

   (a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f.

   (b) Doneu el polinomi característic i els valors propis de f. És f diagonalitzable?

   (c) Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ z+x & y \end{pmatrix}$. Digueu si l'aplicació $g \circ f$ és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Els sistemes d'equacions lineals s'han de resoldre amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,...

Model de solució

1. [2 punts]

   (a) (i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $S \subseteq E$. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai vectorial d'E.

   Solució. S és subespai d'E si es compleixen les condicions següents:

   - $S \neq \emptyset$;
   - Per a tot $u, v \in E$, si $u, v \in S$, aleshores $u + v \in S$;
   - Per a tot $u \in E$ i per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u \in S$ aleshores $\alpha\, u \in S$.

   (ii) Indiqueu si els conjunts següents són subespais de l'espai vectorial que s'indica (en aquest apartat responeu només sí o no en cada cas, no s'ha de justificar la resposta):

   1) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ a - c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x + y - 3z = 0, 2x + 3y - z + 2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   3) S_3 és el conjunt de les matrius triangulars superiors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades 4×4.

   Solució. S és subespai d'E si es compleixen les dues condicions següents:

   1) Sí (es pot veure fàcilment que $S_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$).
   2) No (S_2 no conté el vector zero).
   3) Sí (el conjunt de matrius triangulars superiors és no buit perquè conté, per exemple, la matriu nul·la; al sumar dues matrius triangulars s'obté una matriu triangular; al multiplicar una matriu triangular per un escalar, s'obté una matriu triangular).

   (b) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real E. Digueu què vol dir que u sigui vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.

   Solució. Un vector $u \in E$ és vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$ si $u \neq O_E$ i $f(u) = \lambda\, u$. Si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores existeix un vector $u \neq 0_E$ tal que $f(u) = 0 \cdot u = 0_E$. Per tant, $0_E \neq u \in \mathrm{Ker} f$. Això implica que el subespai $\mathrm{Ker} f$ té algun vector no nul. Per tant, $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.

2. [2 punts] Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$

$$S_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y + z + 3t = 0, x - y + 2z - t = 0, x - y + az + (1 - a)t = 0 \}$$

   (a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

   Solució. La dimensió de S_a és el nombre de graus de llibertat del sistema, és a dir, 4 menys el rang de la matriu A de coeficients del sistema. Calculem el rang d'aquesta matriu fent transformacions elementals per files:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a & 1 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a - 2 & 2 - a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & a - 2 & 2 - a \end{pmatrix}.$$

El rang de A és igual a 3 si $a \neq 2$ i igual a 2 si $a = 2$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4 - 3 = 1, & \text{si } a \neq 2 \\ 4 - 2 = 2, & \text{si } a = 2 \end{cases}$$

(b) Doneu una base de S_2.

Solució. Sabem de l'apartat anterior que $\dim S_2 = 2$. Per a trobar una base, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que defineix el subespai S_2. De l'apartat anterior tenim que per en aquest cas el sistema és equivalent al sistema que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Fem transformacions elementals per resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema és doncs:

$$x = -\frac{3}{2}z - t, y = \frac{1}{2}z - 2t, z, t \in \mathbb{R}.$$

Expressem la solució de forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} (-3/2)z - t \\ (1/2)z - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base de S_2 és:

$$\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

3. [2 punts] Considerem les bases $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, 2 + x\}$ i $B' = \{1 + x^2, -1 + x, 2x + x^2\}$ de l'espai $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2.

(a) Doneu la matriu de canvi de base de B a B', $P^B_{B'}$.

Solució. La matriu $P^B_{B'}$ de canvi de base de B a B' té per columnes els vectors de B expressats en la base B'. Coneixem els vectors de B i de B' en la base $C = \{1, x, x^2\}$. Per tant, podem calcular $P^B_{B'}$ en funció d'aquestes matrius, concretament,

$$P^B_{B'} = P^C_{B'} P^B_C = (P^{B'}_C)^{-1} P^B_C$$

on

$$P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; P^{B'}_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$P^B_{B'} = (P^{B'}_C)^{-1} P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de $P_C^{B'}$ per Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La matriu $P_{B'}^B$ és doncs:

$$P_{B'}^B = (P_C^{B'})^{-1} P_C^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Doneu les coordenades del polinomi $1 + x - x^2$ en la base B'.

Solució. Si $(p)_C$ i $(p)_B$ són les coordenades d'un polinomi $p \in P_2(\mathbb{R})$ en les bases C i B' respectivament, sabem que $P_{B'}^C\,(p)_C = (p)_{B'}$. La matriu $P_{B'}^C$ és la matriu $(P_C^{B'})^{-1}$ calculada a l'apartat anterior. Per tant, les coordenades de $p = 1 + x + x^2$ en la base B' són:

$$(p)_{B'} = P_{B'}^C\,(p)_C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. [4 punts] Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f.

Solució. Calculem primer la matriu associada en la base canònica, M. Serà una matriu 3×3, ja que $\mathbb{R}^3$ té dimensió 3. La imatge dels vectors de la base canònica és

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

per tant,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La dimensió de la imatge és el rang de M. Caculem el rang de M fent transformacions elementals per files:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang} M = 2$. Una base de la imatge està formada per dues columnes de M linealment independents. Veiem que les dues primeres columnes no són proporcionals, per tant, una base de la imatge és: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

La dimensió del nucli la calculem sabent que és la dimensió de l'espai de sortida menys la dimensió de la imatge:

$$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1.$$

Una base del nucli la trobem resolent el sistema d'equacion lineal homogeni que té per matriu de coeficients la matriu M:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El conjunt de solucions del sistema és

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = z, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Per tant, una base del nucli és $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Doneu el polinomi característic i els valors propis de f. És f diagonalitzable?

Solució. El polinomi característic és

$$\begin{aligned} p_f(x) = \det(M - xI) = \det \begin{pmatrix} 2-x & -2 & 0 \\ 1 & -1-x & 0 \\ 1 & 2 & -3-x \end{pmatrix} &= (-3-x) \det \begin{pmatrix} 2-x & -2 \\ 1 & -1-x \end{pmatrix} \\ = (-3-x)\big((2-x)(-1-x) - (-2)\big) = (-3-x)(x^2 - x) &= x(x-1)(-3-x) \end{aligned}$$

els valors propis de f són les arrels de $p_f(x)$, és a dir, 0, 1 i -3. L'endomorfisme f diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i la dimensió de l'espai on està definit f és 3.

(c) Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ z+x & y \end{pmatrix}$. Digueu si l'aplicació $g \circ f$ és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Podem determinar si $g \circ f$ és injectiva o exhaustiva a partir del rang de la matriu associada a $g \circ f$. Calculem la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques respectives tenint en compte que $M(g \circ f) = M(g)M(f)$, i $M(f) = M$. Tenim que $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ja que $g \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Per tant,

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Veiem que les files primera i quarta són proporcionals, per tant,

$$\begin{aligned} rgM(g \circ f) = rg \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= rg \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

Aleshores $g \circ f$ no és injectiva perquè el rang de $M(g \circ f)$ és diferent de la dimensió de l'espai de sortida ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$), i no és exhaustiva perquè el rang és diferent de la dimensió de l'espai d'arribada ($\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$). I no és bijectiva perquè no és injectiva i exhaustiva alhora.

Solució alternativa. Observem que $g \circ f$ és una aplicació de $\mathbb{R}^3$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. L'aplicació $g \circ f$ no és bijectiva perquè els espais vectorials de sortida i d'arribada tenen dimensions diferents (3 i 4, respectivament) i no és exhaustiva perquè la dimensió de l'espai d'arribada és més gran que la dimensió de l'espai de sortida. Comprovem ara si és injectiva. Hem vist que en apartats anetriors que $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, i la imatge del vector zero per una aplicació lineal és també el vector zero. Per tant, no és injectiva perquè el nucli de $g \circ f$ conté almenys un vector no nul:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

Matemàtiques 1 - FIB | 8-1-2019
Examen final | Part F2: Àlgebra Lineal

1. [2 punts] Siguin E, F espais vectorials, $v_1, \dots, v_k$ i u vectors de E, i $f : E \to F$ una aplicació.
   (a) Expliqueu què ha de complir u per pertànyer a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
   (b) Digueu què ha de complir f per ser una aplicació lineal.
   (c) Suposeu que f és lineal, que coneixem $f(v_1), \dots, f(v_k)$, i que $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Expliqueu com es pot calcular $f(u)$.

2. [4 punts] Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$ següent:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   (a) Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base B formada per alguns dels generadors.
   (b) Trobeu les condicions, en forma de sistema d'equacions homogeni, que ha de satisfer un vector de $\mathbb{R}^4$ per a pertànyer a F.
   (c) Considereu els vectors $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per a cadascun d'ells, digueu si pertany al subespai F i, en cas afirmatiu, doneu-ne les coordenades en la base B de l'apartat (a).
   (d) Amplieu la base B de l'apartat (a) a una base de $\mathbb{R}^4$.

3. [4 punts]
   (a) Sigui $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal determinada per

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

   Doneu la matriu de l'aplicació en les bases canòniques i digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.
   (b) Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

      i. Calculeu el polinomi característic de f. Doneu tots els valors propis de f i, per a cadascun d'ells, una base del subespai de vectors propis associat.
      ii. Comproveu si l'endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una base B tal que la matriu associada en aquesta base sigui diagonal. Quina relació hi ha entre la matriu M i la matriu associada en la base B?

Informacions:
Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
La durada de l'examen és de 2h.
Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full diferent i escriviu amb tinta negra o blava.
Les notes es publicaran al Racó de la FIB com a tard el dia 16 de gener, i la revisió serà el dia 17, a les 14h (el lloc s'anunciarà amb antel·lació).

Model de solució

1. [2 punts] Siguin E, F espais vectorials, $v_1, \ldots, v_k$ i u vectors de E, i $f : E \to F$ una aplicació.

   (a) Expliqueu què ha de complir u per pertànyer a $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

   Solució. El vector u és del subespai $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tals que $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$.

   (b) Digueu què ha de complir f per ser una aplicació lineal.

   Solució. L'aplicació f és lineal si compleix les dues propietats següents, on u, v són vectors qualssevol de E i λ és un escalar qualsevol:

   – $f(u + v) = f(u) + f(v)$;
   – $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

   Alternativament, també podem dir que l'aplicació f és lineal si la imatge d'una combinació lineal de vectors d'E és la combinació lineal de les imatges amb els mateixos escalars, és a dir, si per a vectors $u_1, \ldots, u_r$ qualsevol d'E i escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ qualssevol, es compleix $f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(u_i)$.

   (c) Suposeu que f és lineal, que coneixem $f(v_1), \ldots, f(v_k)$, i que $u \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Expliqueu com es pot calcular $f(u)$.

   Solució. Per ser del subespai $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, el vector u és de la forma $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, on $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Per ser f lineal, tenim que $f(u) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i)$.

2. [4 punts] Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$ següent:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   (a) Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base B formada per alguns dels vectors generadors.

   Solució. Considerem la matriu A que té aquests vectors per columnes. La dimensió del subespai és el rang de la matriu, que es pot calcular fent transformacions elementals per files:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Per tant, $\dim F = \text{rang} A = 2$ i una base està formada pels vectors que corresponen a les columnes amb els pivots, és a dir, els dos primers vectors,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (b) Trobeu les condicions, en forma de sistema d'equacions homogeni, que ha de satisfer un vector de $\mathbb{R}^4$ per a pertànyer a F.

Solució. Un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ és de F si és combinació lineal dels vectors que generen F. Com que a l'apartat anterior hem trobat una base, és suficient imposar que el vector sigui combinació lineal dels vectors de la base. Per tant, cal estudiar la compatibilitat del sistema següent:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim (\cdots) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x-2z+t \\ 0 & 0 & y-3z+2t \end{array}\right).$$

Clarament el sistema és compatible si i només si $x - 2z + t = 0$ i $y - 3z + 2t = 0$. Per tant,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x - 2z + t = 0, y - 3z + 2t = 0 \right\}.$$

(Nota: la solució no és única, en el sentit que qualsevol sistema homogeni equivalent al donat defineix el subespai F.)

(c) Considereu els vectors $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per a cadascun d'ells, digueu si pertany al subespai F i, en cas afirmatiu, doneu-ne les coordenades en la base B de l'apartat (a).

Solució. Comprovem si u i v satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni que defineix F, trobat a l'apartat (b). Veiem que $u \notin F$ perquè $4 - 2 \cdot 1 - 1 = 1 \neq 0$, en canvi $v \in F$ perquè satisfà les dues equacions. Les coordenades de v en la base B són els escalars pels que cal multiplicar els vectors de la base B per obtenir el vector v. Fent el càlcul veiem que

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i per tant les coordenades són $v_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Amplieu la base B de l'apartat (a) a una base de $\mathbb{R}^4$.

Solució. Sabem que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, per tant ens cal trobar dos vectors de $\mathbb{R}^4$ que juntament amb els dos de la base B siguin linealment independents. La matriu següent, formada per dos vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^4$ i pels dos vectors de B té rang 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem ampliar B amb els vectors $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ per a tenir una base de $\mathbb{R}^4$.

3. (a) Sigui $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal determinada per

$$f\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\-14\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}.$$

Doneu la matriu de l'aplicació en les bases canòniques i digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Observem que

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Per tant,

$$f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = f(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}f\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - 2f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\-14\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-7\end{pmatrix}.$$

La matriu associada a f en les bases canòniques és, doncs:

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\1 & 3 & 0 & 2\\-2 & -3 & 3 & -7\end{pmatrix}.$$

L'aplicació f no pot ser injectiva per ser $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) > \dim \mathbb{R}^3$. Per a que sigui exhaustiva, ha de ser $\text{rang}A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, però

$$\text{rang}A = \text{rang}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\-2 & -3 & 3 & -7\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 3 & 3 & -3\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2.$$

Per tant, f no és ni injectiva, ni exhaustiva, ni bijectiva.

(b) Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és:

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -3\\3 & 2 & 3\\-3 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

i. Calculeu el polinomi característic de f. Doneu tots els valors propis de f i, per a cadascun d'ells, una base del subespai de vectors propis associat.

Solució. El polinomi característic és:

$$p_f(x) = \det(M - xI_3) = \det\begin{pmatrix} -1-x & 0 & -3 \\ 3 & 2-x & 3 \\ -3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x)\det\begin{pmatrix} -1-x & -3 \\ -3 & -1-x \end{pmatrix}$$
$$= (2-x)((-1-x)^2 - (-3)^2) = (2-x)(x^2+2x-8) = -(x-2)^2(x+4).$$

Els valors propis de f són les arrels del polinomi característic, o sigui, 2 i -4. Els subespais E_2 i E_{-4} de valor propi 2 i -4, respectivament, són les solucions dels sistemes d'equacions lineals homogenis que tenen per matriu de coeficients $M - 2I_3$ i $M + 4I_3$.

Calculem E_2:

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 0 & -3 \\ 3 & 2-2 & 3 \\ -3 & 0 & -1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on deduïm:

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = -x\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Per tant, $\dim E_2 = 2$ i una base és $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Calculem E_{-4}:

$$\begin{pmatrix} -1+4 & 0 & -3 \\ 3 & 2+4 & 3 \\ -3 & 0 & -1+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on deduïm

$$E_{-4} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = z\,,\ y = -z\} = \{\begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Per tant, $\dim E_{-4} = 1$ i una base és $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

ii. Comproveu si l'endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una base B tal que la matriu associada en aquesta base sigui diagonal. Quina relació hi ha entre la matriu M i la matriu associada en la base B?

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que els valors propis de f són 2 i -4, de multiplicitats algebraiques 2 i 1 respectivament; les multiplicitats geomètriques coincideixen: $\dim E_2 = 2$ i $\dim E_{-4} = 1$. Per tant, f diagonalitza. Una base B en que diagonalitza és la unió d'una base de E_2 i una base de E_{-4}:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

i la matriu diagonal associada a f en aquesta base és:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La relació entre les matrius M i D és $D = P^{-1}MP$, on P és la matriu de canvi de base de B a la base canònica:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$