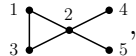


JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf. Direm que un conjunt $S \subseteq V$ és *independent* si S no conté cap parell de vèrtexs adjacents.

Per exemple, en el graf , el conjunt $\{1, 4, 5\}$ és independent, però $\{1, 3, 4, 5\}$ no ho és, perquè $1 \sim 3$.

Definim el *nombre d'independència* de G , que denotarem $ind(G)$, com el cardinal més gran dels conjunts independents de G .

(a) Calculeu el nombre d'independència dels grafes

- | | |
|---------------------------------|--|
| i) complet K_n , $n \geq 1$; | iii) estrella $K_{1,s}$, $s \geq 3$; |
| ii) cicle C_n , $n \geq 3$; | iv) bipartit complet $K_{r,s}$, $r \geq s \geq 2$. |

(b) Demostreu que si $ind(G) = r$, aleshores el graf complementari de G té un subgraf isomorf a K_r , però no té cap subgraf isomorf a K_{r+1} .

(c) Demostreu que si G és un graf amb diàmetre D , aleshores $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

P2. (4 punts) Sabem que un graf G d'ordre 9 té com a mínim quatre vèrtexs de grau 1, tres vèrtexs de grau 2, un vèrtex de grau 3, i a més d'un vèrtex de grau k , on $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$.

(a) Demostreu que si $k = 5$, aleshores G conté almenys un cicle.

(b) Demostreu que si $k = 7$, aleshores G és connex.

(c) Suposem que $k = 5$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu G llevat d'isomorfismes.

(d) Doneu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seva seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat. Quina seqüència de graus tenen?

P3. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 15, 24, 26, 28, 35, 37, 46, 48, 59, 68, 79\}$.

(a) (2 punts)

- Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex.
- Calculeu el diàmetre, el radi i els vèrtexs centrals de G .
- Hi ha algun camí de longitud més gran que el diàmetre?
- Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G .
- Quin és l'enter r més gran tal que existeix un subgraf isomorf a K_r en el graf complementari de G ?

(b) (1 punt) Doneu una representació dels arbres generadors obtinguts en aplicar a G els algorismes BFS i DFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme.

Informacions

- Durada de l'examen: 100 minuts
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació...