5
Matrius, sistemes i determinants

5.1 Àlgebra de matrius

5.1 Donades les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

calculeu: 1) $3A$; 2) $3A - B$; 3) AB; 4) BA; 5) $C(3A - 2B)$.

Solució: Tenim:

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3A - B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 14 \\ -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 19 & 5 & 14 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 12 \\ -11 & 8 & -9 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C(3A - 2B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 & 12 \\ -11 & 8 & -9 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 20 & 15 \\ 23 & -3 & 18 \\ 17 & -12 & -8 \\ -67 & 67 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Calculeu els productes $(1\ 2\ -3)\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}(1\ 2\ -3)$.

Solució: Tenim, d'una banda:

$$(1\ 2\ -3)\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} = 2+2-15 = -11,$$

i de l'altra:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}(1\ 2\ -3) = \begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot(-3)\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot(-3)\\ 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 10 & -15\end{pmatrix}$$

5.3 Donades A i B matrius tals que AB és una matriu quadrada, proveu que el producte BA està definit.

Solució: La matriu AB té un número de files igual al nombre de files d'A, i un nombre de columnes igual al nombre de columnes de B. Al ser AB quadrada, llavors podem dir que el nombre de files d'A és el mateix que el nombre de columnes de B, i per tant el producte BA està ben definit.

5.4 Per a les matrius A i B següents, doneu els elements c_{13} i c_{22} de la matriu $C = AB$ sense calcular tots els elements de C.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -4 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Solució: L'element c_{ij} del producte de dues matrius A i B s'obté multiplicant la fila i de la matriu A per la columna j de la matriu B. En el nostre cas, tenim:

$$c_{13} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = 0+6+2 = 8, \quad c_{22} = \begin{pmatrix}-3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix} = 0+0-3 = -3.$$

5.5 Una empresa confecciona bosses i maletes en dues fàbriques diferents. La taula adjunta dóna la informació del cost total de fabricació en milers d'euros de cada producte a cada lloc:

	Fàbrica 1	Fàbrica 2
Bosses	135	150
Maletes	627	681

Responeu les preguntes següents mitjançant operacions matricials.

1) Sabent que el cost de personal representa 2/3 del cost total, trobeu la matriu que representa el cost de personal de cada producte en cada fàbrica.

2) Trobeu la matriu que representa els costos de material de cada producte en cada fàbrica, suposant que, a més dels costos de personal i de materials, hi ha un cost de 20.000 euros per cada producte a cada fàbrica.

Solució:

1) Tenim:

$$C_{\text{personal}} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 135 & 150 \\ 627 & 681 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 100 \\ 418 & 454 \end{pmatrix}.$$

2) Ara tenim:

$$C_{\text{personal}} + C_{\text{material}} + \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 & 150 \\ 627 & 681 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$C_{\text{material}} = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ 189 & 207 \end{pmatrix}.$$

5.6 En aquest exercici es vol trobar una fórmula per calcular les potències d'una matriu diagonal.

1) Calculeu A^2, A^3 i A^5, sent:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Quina matriu creieu que és A^{32}?

3) Sigui D una matriu $n \times n$ diagonal que té per elements a la diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Conjectureu quina és la matriu D^r, per a $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$, i proveu la conjectura per inducció.

Solució:

1) Fent un càlcul directe, obtenim:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \quad A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}.$$

2) De manera anàloga, tenim:

$$A^{32} = \begin{pmatrix} 2^{32} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{32} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{32} \end{pmatrix}.$$

3) La matriu D^r serà la matriu $\operatorname{Diag}({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \ldots, {\lambda_n}^r)$.

Demostració per inducció sobre $r \geq 1$:

- Cas base: Trivial, ja que $A^1 = A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$
- Pas inductiu: $B = (b_{ij}) = A^r = A^{r-1}A$, i per hipòtesi d'inducció, sabem que $A^{r-1} = \mathrm{Diag}({\lambda_1}^{r-1}, {\lambda_2}^{r-1}, \dots, {\lambda_n}^{r-1})$. Així si $i \neq j$, $b_{ij} = 0$, ja que la fila i d'A^{r-1} només té un component diferent de 0, i aquest és el i, en canvi la columna j d'A té també un únic component diferent de 0, que és el j, com $j \neq i$, al multiplicar la fila per la columna surt 0. Si $i = j$, llavors el component diferent de 0 coincideix, i queda $b_{ii} = {\lambda_i}^{r-1}\lambda_i = {\lambda_i}^r$. Per tant la matriu resultant és la matriu $\mathrm{Diag}({\lambda_1}^r, {\lambda_2}^r, \dots, {\lambda_n}^r)$.

5.7 Doneu un exemple de dues matrius A i B de tipus 2×2 tals que $(AB)^t \neq A^t B^t$.

Solució: La solució no és única. Per exemple, siguin les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Llavors tenim:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (AB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^t B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5.8 Siguin $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu $(AB)^t$ i $B^t A^t$. Observeu que, encara que A i B són matrius simètriques, el seu producte no ho és.

Solució: Tenim:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \\ (AB)^t &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ B^t A^t &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5.9 Siguin A i B dues matrius simètriques del mateix tipus. Proveu que AB és una matriu simètrica si, i només si, A i B commuten.

Solució:

$\boxed{\Rightarrow}$ Hipòtesis: les matrius A, B i AB són simètriques; és a dir, $A^t = A$, $B^t = B$ i $(AB)^t = AB$. A més, sabem que sempre es compleix: $(AB)^t = B^t A^t$. Per tant: $AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$; és a dir, les matrius A i B conmuten.

$\boxed{\Leftarrow}$ Hipòtesis: les matrius A i B són simètriques i conmuten; és a dir, $A^t = A$, $B^t = B$ i $AB = BA$. Per tant: $(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$; és a dir, la matriu AB és simètrica.

5.10 Siguin I la matriu identitat i $\boldsymbol{O}$ la matriu nul·la de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trobeu matrius $A, B, C, D, E \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tals:

1) $A^2 = I$ i $A \neq I, -I$;

2) $B^2 = \boldsymbol{O}$ i $B \neq \boldsymbol{O}$;

3) $C^2 = C$ i $C \neq I, \boldsymbol{O}$;

4) $DE = \boldsymbol{O}$ però $E \neq D$ i $ED \neq \boldsymbol{O}$.

Solució: La solució no és única.

1) $A = (-1)I = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Tenim: $A^2 = (-1)^2 I^2 = I$.

2) $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $B^2 = \boldsymbol{O}$.

3) $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $C^2 = C$.

4) $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es comprova fàcilment que $DE = \boldsymbol{O}$ i que $ED = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5.11 Esbrineu si les igualtats següents les satisfan totes les matrius $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En cas negatiu, doneu alguna condició sobre A i B per tal que es satisfacin.

1) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$;

2) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$.

Solució: Les igualtats no són certes en general; per exemple, les matrius $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ no satisfan cap de les dues. En efecte, tenim:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 + B^2 + 2AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \\
(A-B)(A+B) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \\
A^2 - B^2 &= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

No obstant, si A i B commuten, aleshores es satisfan les dues igualtats. En efecte, si $AB = BA$, d'una banda tenim:

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \\
&= A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2;
\end{aligned}$$

i de l'altra:

$$\begin{aligned}
(A-B)(A+B) &= A^2 - AB - BA - B^2 \\
&= A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2.
\end{aligned}$$

5.12 Siguin A i B matrius quadrades del mateix tipus. Direm que A és *semblant* a B si existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Si aquest és el cas, proveu:

1) B és semblant a A. En general direm que A i B són semblants.

2) *Ser semblants* és una relació d'equivalència.

3) A és invertible si, i només si, B és invertible.

4) A^t és semblant a B^t.

5) Si $A^n = \mathbf{0}$ i B és semblant a A, aleshores $B^n = \mathbf{0}$.

Solució:

1) Si A és semblant a B, llavors existeix una matriu invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Multiplicant per la esquerra per P i per la dreta per P^{-1}, obtenim que $PBP^{-1} = A$. Llavors amb $Q = P^{-1}$ es compleix que $B = Q^{-1}AQ$. Per tant, B es semblant a A. El que acabem de demostrar es pot expressar dient que la relació *ser semblants* és una relació simètrica.

2) Ja hem vist que és simètrica; ara cal veure que és reflexiva i transitiva. La primera propietat és trivial de veure: agafant $P = I$, llavors $A = I^{-1}AI$. Per veure la transitivitat, siguin A semblant a B, i B semblant a C; cal veure que A és semblant a C. Si A i B són semblants, llavors existeix P tal que $B = P^{-1}AP$. Si B i C són semblants, llavors existeix Q tal que $C = Q^{-1}BQ$. Llavors $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$; és a dir, la matriu $K = PQ$ compleix que $C = K^{-1}AK$. Per tant, A és semblant a C.

3) Suposem que A és invertible. Aleshores: $A = P^{-1}BP \Rightarrow PA = BP \Rightarrow I = BPA^{-1}P^{-1}$. Per tant, $PA^{-1}P^{-1}$ és la inversa de B. La implicació recíproca és anàloga.

4) Suposem que A és semblant a B. Aleshores existeix una matriu inversible P tal que $B = P^{-1}AP$. Llavors tenim que $B^t = (P^{-1}AP)^t = P^t(P^{-1}A)^t = P^tA^t(P^{-1})^t$. Observem que que P^t és la matriu inversa de $(P^{-1})^t$ (ja que si $PP^{-1} = I$, llavors al fer la transposada als dos costats de la igualtat surt $(P^{-1})^tP^t = I$). Per tant, $B^t = P^tA^t(P^t)^{-1}$; és a dir, A^t és semblant a B^t.

5) Sigui $B = P^{-1}AP$, per a certa matriu inversible P. Es té que $B^n = P^{-1}A^nP$, ja que:

$$B^n = B \cdot B \cdots B = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP.$$

Hem demostrat que si A és semblant a B, aleshores A^n és semblant a B^n. En conseqüència, si $A^n = \boldsymbol{O}$, llavors $B^n = P^{-1}\mathbf{0}P = \mathbf{0}$.

5.13 Trobeu una matriu escalonada per files equivalent a cadascuna de les matrius següents. Doneu el rang de cada matriu.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad 3) \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: La matriu escalonada equivalent no és única. Notem per F_i la fila i en cada cas.

1) En la primera transformació fem: $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$; en la segona transformació fem: $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2$; i finalment, dividim F_3 per 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu és 3.

2) En la primera transformació fem: $F_2 \leftarrow F_2 + 2/3F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1$; després dividim F_1 per -3, F_2 per $2/3$ i F_3 per 6; i finalment, restem F_2 a F_3:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2/3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang és 2.

3) En la primera transformació fem $F_2 \leftarrow 5F_2 - 2F_1$, $F_3 \leftarrow 5F_3 - 3F_1$; en la segona transformació $F_3 \leftarrow 43F_2 - 17F_3$; després dividim $F3$ per -30 i F_4 per 4 i restem a F_4 la fila F_3; i finalment dividim cada fila pel primer coeficient no nul:

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & -43 & 22 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 11 & 6 \\ 0 & -17 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 11/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -8/17 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu té rang 3.

4) Primer intercanviem les files 1 i 2 i canviem de signe les files F_1, F_3 i F_4 de la matriu resultant. Després fem les transformacions $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$ i $F_4 \leftarrow F_4 - 4F_1$; a continuació $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, $F_5 \leftarrow F_5 - 2F_2$ i intercanviem les files 4 i 5 que resulten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu és 3.

5.14 Trobeu la inversa de les matrius elementals següents.

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$

Solució: En primer lloc, notem que la matriu inversa d'una matriu diagonal $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, amb tots els $\lambda_i \neq 0$, és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, és fàcil comprovar que les matrius dels apartats 1) i 3) són les seves pròpies inverses (per exemple, aplicant el mètode de Gauss-Jordan o bé calculant el quadrat de cada matriu); és a dir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalment, aplicant el mètode de Gauss-Jordan, per exemple, obtenim que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.15 Trobeu, si existeix, la inversa de cadascuna de les matrius següents, seguint el mètode de Gauss-Jordan.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

4) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| \leq 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

5) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,j} = 2^{j-1}$ si $i \geq j$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

6) $A = (a_{i,j})_{4\times 4}$, tal que $a_{i,i} = k$, $a_{i,j} = 1$ si $i - j = 1$, i $a_{i,j} = 0$ altrament.

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 7 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu no té inversa.

3) Vegeu els càlculs a la figura 5.1. Per tant, la inversa de la matriu és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \\ -2 & 0 & -11 & -5 \\ 2 & 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
-2 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0\\
0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 4 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0\\
0 & 0 & 13 & 11 & -4 & 11 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\
0 & 0 & -6 & -5 & 2 & -5 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & -3 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6
\end{pmatrix}
$$

$$
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -13 & -6\\
0 & 1 & -3 & 0 & 7 & 1 & 39 & 18\\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6
\end{pmatrix}
$$

$$
\equiv
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & -4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6
\end{pmatrix}
\equiv
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & 4\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 3\\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -11 & -5\\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 13 & 6
\end{pmatrix}
$$

Figura 5.1: Càlculs del problema 5.15, apartat 3.

4) Tenim

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de la matriu és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa de la matriu és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$.

6) Si $k = 0$ no té inversa, ja que el determinant és 0. Si $k \neq 0$, podem procedir de dues maneres: com es mostra a continuació o bé com es veu a la figura 5.2:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & -1/k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 1/k^2 & -1/k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & -1/k^3 & 1/k^2 & -1/k & 1 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/k^2 & 1/k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/k^4 & 1/k^3 & -1/k^2 & 1/k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k^3 & 0 & 1 & -k & k^2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^4 & 1 & -k & k^2 & -k^3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & -k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -k^{-2} & k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k^{-4} & k^{-3} & -k^{-2} & k^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Figura 5.2: Càlculs del problema 5.15, apartat 6 (segona versió).

5.2 Sistemes d'equacions

5.16 Quines de les equacions següents són lineals en x, y i z?

1) $x + 3xy + 2z = 2$;
2) $y + x + \sqrt{2}z = e^2$;
3) $x - 4y + 3z^{1/2} = 0$;
4) $y = z \sin \frac{\pi}{4} - 2y + 3$;
5) $z + x - y^{-1} + 4 = 0$;
6) $x = z$.

Solució: Els sistemes d'equacions on apareixen només operacions lineals són el 2), el 4) i el 6). A l'equació 1), el terme xy és quadràtic; a l'equació 3) l'arrel $\sqrt{z}$ no és lineal; i a l'equació 5) el terme $y^{-1} = 1/y$ tampoc és lineal.

5.17 Trobeu un sistema d'equacions lineals que correspongui a cadascuna de les matrius ampliades següents.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solució:

1) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3z & = & 2 \\ 2x + y + z & = & 3 \\ -y + 2z & = & 4 \end{array} \right.$

2) $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 5y & = & -2 \\ x + y & = & 0 \\ x - y & = & 1 \end{array} \right.$

3) $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 4t & = & 5 \\ x/3 + y/4 + z/5 + t/2 & = & 1 \end{array} \right.$

4) $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \\ x + t & = & 4 \end{array} \right.$

5.18 Responeu raonadament les preguntes següents:

1) Quin és el rang de la matriu associada a un sistema compatible determinat amb 5 equacions i 4 incògnites? I si el sistema és compatible indeterminat?

2) Quantes equacions com a mínim són necessàries per tenir un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3? Quantes incògnites tindrà aquest sistema?

3) Pot ser compatible determinat un sistema amb 7 equacions i 10 incògnites?

4) És possible que un sistema lineal amb menys equacions que incògnites sigui incompatible?

5) Inventeu un sistema compatible determinat, un sistema compatible indeterminat i un sistema incompatible, tots ells amb 3 incògnites i 4 equacions.

Solució:

1) Un sistema és compatible i determinat si i només si el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada i aquest rang comú és igual al nombre d'incògnites, que en aquest cas és 4. Per tant, la resposta a la primera pregunta és 4. En el cas d'un sistema compatible indeterminat hem de tenir igualtat de rangs però aquest ha de ser més petit que el nombre d'incògnites. Per tant, la resposta a la segona pregunta és: menor o igual a 3.

2) un sistema compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat i rang 3 ha de tenir un mínim de 3 equacions. El nombre d'incòginites és igual al rang del sistema més el nombre de graus de llibertat; és a dir, 5 incògnites.

3) No. Un sistema amb 7 equacions tindrà, como a màxim, rang 7.

4) Sí. Per exemple, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$.

5) Per exemple, exemples de sistemes compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible, respectivament, són:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 2 \\ z &=& 3 \\ x+y &=& 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ y &=& 2 \\ x+2y+z &=& 3 \\ x+3y+z &=& 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& 2 \\ z &=& 3 \\ x+y &=& 4 \end{array}\right.$$

5.19 Resoleu els sistemes lineals següents amb coeficients a $\mathbb{Z}_2$. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ x+z &=& 0 \\ x+y+z &=& 1 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ y+z &=& 1 \\ x+z &=& 1 \end{array}\right. \qquad 3)\ \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ y+z &=& 0 \\ x+z &=& 0 \end{array}\right.$$

Solució:

1) Es tracta d'un sistema compatible determinat amb solució $(0, 1, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) És un sistema incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) És un sistema compatible indeterminat; les solucions es poden expresar com:

$$\{(z, z, z) : z \in \mathbb{Z}_2\} = \langle (1, 1, 1) \rangle = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$$

(recordem que en $\mathbb{Z}_2$, $1 = -1$). A continuació, tenim els càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.20 Resoleu el sistemes lineals següents. Useu eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

$$1)\ \begin{cases} x+y+2z &= 8 \\ -x-2y+3z &= 1 \\ 3x-7y+4z &= 10 \\ 3y-2z &= -1 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x-y+2z-w &= -1 \\ 2x+y-2z-2w &= -2 \\ -x+2y-4z+w &= 1 \\ 3x-3w &= -3 \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x-y+2z &= 3 \\ 2x-2y+5z &= 4 \\ x+2y-z &= -3 \\ 2y+2z &= 1 \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+2x_5 &= 0 \\ 2x_1+6x_2-5x_3-2x_4+4x_5-3x_6 &= -1 \\ 5x_3+10x_4+15x_6 &= 5 \\ 2x_1+6x_2+8x_4+4x_5+18x_6 &= 6 \end{cases}$$

Solució:

1) Sistema compatible determinat amb solució $(3, 1, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -5 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -26 & -52 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Es tracta d'un sistema incompatible, no té solució:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

3) És un sistema compatible indeterminat; la solució es pot expressar com:

$$\{(-1+x_4, 2x_3, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = (-1, 0, 0, 0) + \langle (0, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle.$$

A continuació, tenim els càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Sistema compatible indeterminat, les solucions del qual s'expressen com:

$$\{(-3x_2 - 4x_4 - 2x_5, x_2, -2x_4, x_4, x_5, 1/3) : x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} = (0,0,0,0,0,1/3) + \langle(-3,1,0,0,0,0), (-4,0,-2,1,0), (-2,0,0,0,1,0)\rangle$$

Càlculs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 21 & 7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

5.21 Resoleu el sistemes lineals homogenis següents. Useu l'eliminació gaussiana i doneu la solució en forma paramètrica.

1) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 2y + 2z & = & 0 \\ -2x + 5y + 2z & = & 0 \\ -7x + 7y + z & = & 0 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 4y + z + w & = & 0 \\ x - 5y + 2z & = & 0 \\ -2y - 2z - w & = & 0 \\ x + 3y + w & = & 0 \\ x - 2y - z + w & = & 0 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ -7 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució és:

$$\{(-\frac{3}{7}x_3, -\frac{4}{7}x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, 1)\rangle = \langle(-3,-4,7)\rangle.$$

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible i determinat i, com és homogeni, la solució és $(0,0,0,0)$.

3) Tenim:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució es pot escriure com:

$$\{(-2x_3 - 3x_4, 3x_3 - x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,3,1,0), (-3,-1,0,1)\rangle.$$

4) Tenim:

$$\begin{pmatrix}2&2&-1&0&1&0\\-1&-1&2&-3&1&0\\1&1&1&0&2&0\\0&0&2&2&2&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\2&2&-1&0&1&0\\-1&-1&2&-3&1&0\\0&0&2&2&2&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\0&0&-3&0&-3&0\\0&0&3&-3&3&0\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&3&-3&3&0\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&-3&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&0&2&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

Per tant, el sistema és compatible indeterminat i la solució és:

$$\{(-x_2-x_5,x_2,-x_5,0,x_5):x_2,x_5\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,1,0,0,0),(-1,0,-1,0,1)\rangle.$$

5.22 Discutiu els sistemes següents segons els valors dels paràmetres a $\mathbb{R}$.

1) $\left\{\begin{array}{rcl}x+y+2z&=&a\\x+z&=&b\\2x+y+3z&=&c\end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{rcl}bx+y+z&=&b^2\\x-y+z&=&1\\3x-y-z&=&1\\6x-y+z&=&3b\end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{rcl}ax+y-z+t-u&=&0\\x+ay+z-t+u&=&0\\-x+y+az+t-u&=&0\\x-y+z+at+u&=&0\\-x+y-z+t+au&=&0\end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{rcl}x+2y-3z&=&4\\3x-y+5z&=&2\\4x+y+(a^2-14)z&=&a+2\end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{rcl}x+y&=&k\\ax+by&=&k^2\\a^2x+b^2y&=&k^3\end{array}\right.$

Solució:

1) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1&1&2&a\\1&0&1&b\\2&1&3&c\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&1&b\\1&1&2&a\\2&1&3&c\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&1&b\\0&1&1&a-b\\0&1&1&c-2b\end{pmatrix}$$

$$\equiv\begin{pmatrix}1&0&1&b\\0&1&1&a-b\\0&0&0&c-2b-(a-b)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&1&b\\0&1&1&a-b\\0&0&0&c-b-a\end{pmatrix}$$

i) Si $c = a + b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2 < 3$. Per tant, el sistema és compatible indeterminat.

ii) Si $c \neq a + b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i tenim que $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A')$. Per tant, el sistema és incompatible.

2) Tenim:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & b^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 3b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \\ 0 & 2 & b+6 & b^2+3b \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 5 & 3b-1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 5 & 3b-1 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & b+3 & b^2+1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+1-(3b-1)(b+3)/5 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & (2b^2-8b+8)/5 \end{pmatrix}$$

Ara bé:

$$(2b^2 - 8b + 8)/5 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow (b-2)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

i) Si $b = 2$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 3$ i el sistema és compatible determinat.

ii) Si $b \neq 2$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b & b^2 \\ 0 & 2 & b+1 & b^2+1 \\ 0 & 0 & 1 & (3b-1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 3 < 4 = \text{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

3) Tenim:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & a & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & 0 & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & -a^2+1 & -a-1 & a+1 & -a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Si $a = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = 1 < 5$ i el sistema és incompatible.

ii) Si $a \neq -1$, procedim com:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a+1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a-1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a+3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1+a-3 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $a = 4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = 4 < 5$ i el sistema és compatible indeterminat.

b) Si $a \neq 4$ (és a dir, si $a \neq 4, -1$), la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = 5$ i el sistema és compatible determinat.

4) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -7 & 14 & -10\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4\end{pmatrix}$$

i) Si $a=4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A')=2<3$ i el sistema és compatible indeterminat.

ii) Si $a=-4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A)=2<3=\operatorname{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

iii) Si $a\neq 4,-4$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 1 & (a-4)/(a^2-16)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & -2 & 10/7\\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+4)\end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A')=3$ i el sistema és compatible determinat.

5) Tenim:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ a & b & k^2\\ a^2 & b^2 & k^3\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k^2-a\,k\\ 0 & b^2-a^2 & k^3-a^2\,k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & (b-a)(b+a) & k(k^2-a^2)\end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & 0 & k(k^2-a^2)-k(k-a)(b+a)\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & b-a & k(k-a)\\ 0 & 0 & k(k-a)(k-b)\end{pmatrix}$$

i) Si $a\neq b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & k(k-a)/(b-a)\\ 0 & 0 & k(k-a)(k-b)\end{pmatrix}$$

a) Si $k\in\{0,a,b\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A')=2$ i el sistema és compatible determinat.

b) Si $k \notin \{0, a, b\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k(k-a)/(b-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

ii) Si $a = b$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & k(k-a) \\ 0 & 0 & k(k-a)(k-a) \end{pmatrix}$$

a) Si $k \in \{0, a\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') = 1 < 2$ i el sistema és compatible indeterminat.

b) Si $k \notin \{0, a\}$, la matriu ampliada és equivalent a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\operatorname{rang}(A) = 1 < 2 = \operatorname{rang}(A')$ i el sistema és incompatible.

5.3 Determinants

5.23 Suposant que $D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 5$, calculeu els determinants següents.

1) $D_1 = \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

2) $D_2 = \begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$

3) $D_3 = \begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix}$

4) $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix}$

Solució:

1) Si canviem d'ordre dues files en una matriu, el determinant canvia de signe. Per tant:

$$D_1 = \begin{vmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ a & b & c & d \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = D = 5.$$

2) Si multipliquem una fila d'una matriu per un escalar, el determinat queda multiplicat per aquest escalar. Per tant:

$$D_2 = \begin{vmatrix} -a & -b & -c & -d \\ 2e & 2f & 2g & 2h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = -2D = -10.$$

3) Si sumem a una fila una combinació lineal d'altres files, el determinant no canvia de valor. Per tant:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a+e & b+f & c+g & d+h \\ e & f & g & h \\ m & n & o & p \\ i & j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = D = 5.$$

4) Tenint en compte les propietat esmentades als dos apartats anteriors, tenim:

$$D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ 4m & 4n & 4o & 4p \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e-3a & f-3b & g-3c & h-3d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = 4D = 20.$$

5.24 Trobeu els valors de λ per als quals les matrius següents tenen determinant 0.

1) $\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Solució:

1)
$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)+2 = \lambda^2-5\lambda+6 = 0 \iff \lambda \in \{2,3\}.$$

2)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix} &= (\lambda-6)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-6)(\lambda(\lambda-4)+4) \\ &= (\lambda-6)(\lambda-2)^2 = 0 \iff \lambda \in \{6,2\}. \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2(4-\lambda)+2+2-(4-\lambda)-2(3-\lambda)-2(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24 = -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0 \\ &\iff \lambda \in \{2,6\}. \end{aligned}$$

5.25 Calculeu els determinants següents.

1) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solució:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{vmatrix} = -100-150 = -250.$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 4 - 24 + 2 = -20.$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 20 + 2 + 20 - 12 - 3 = 25.$

4) Treient factor comú 4 de cada fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 4^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 4^3(2 + 0 + 32 + 8 - 10 + 12) = 2304.$$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 4 + 0 - 6 - 0 + 6 = -4.$

6) Sumant la fila 1 a la fila 2, dues vegades la fila 1 a la fila 3 i 3 vegades les fila 1 a la fila 4, i desenvolupant després per la primera columna, obtenim:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -128.$$

7) Desenvolupant per la quarta fila, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -(-7) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \end{vmatrix} + 14 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 8 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 255 + \cdot 404 = 7441.$$

8) Restant dues vegades la fila 1 a la fila 2 i a la fila 3 i desenvolupant per la primera columna, obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -16 & -12 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -16 & -12 & -1 \\ 2 & -14 & -2 & -2 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (*)$$

Ara en primer lloc treiem un factor 2 de les files segona i tercera i en segon lloc restem 8 vegades la fila 4 a la fila 1 i restem a les files 2 i 3 la fila 1 i desenvolupem per la última fila i obtenim:

$$(*) = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -16 & -12 & -1 \\ 1 & -7 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -24 & -28 & -17 \\ 0 & -8 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2^2 \cdot \begin{vmatrix} -24 & -28 & -17 \\ -8 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Finalment, calculant directament aquest determinant, el resultat és: $-2^2 \cdot 275 = -1100$.

5.26 Siguin A i B matrius quadrades d'ordre 3 tals que $\det(A) = 10$ i $\det(B) = 12$. Calculeu

1) $\det(AB)$, 2) $\det(A^4)$, 3) $\det(2B)$, 4) $\det(A^t)$, 5) $\det(A^{-1})$.

Solució:

1) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 10 \cdot 12 = 120$.
2) $\det(A^4) = \det(A)^4 = 10^4$.
3) $\det(2B) = 2^3 \det(B) = 96$ (ja que la matriu B té 3 files i al fer $2B$ cada fila queda multiplicada per 2).
4) $\det(A^t) = \det(A) = 10$.
5) $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1/10$.

5.27 Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

Solució: Restant la 4a fila a totes les altres files, arribem a la matriu:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Si $a = 1$, clarament el determinant és 0 i es compleix la fórmula. Altrament, fent $f_4 = f_4 - 1/(a-1)(f_3 + f_2 + f_1)$ arribem a la matriu triangular:

$$\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{vmatrix},$$

que té per determinant $(a+3)(a-1)^3$.

6
Espais vectorials

6.1 Siguin $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ vectors de $\mathbb{R}^3$. Calculeu:

1) $u - v$; 2) $5v + 3w$; 3) $5(v + 3w)$ 4) $(2w-u)-3(2v+u)$.

Solució:

(1) $u - v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(2) $5v + 3w = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -3 \\ -52 \end{pmatrix}$.

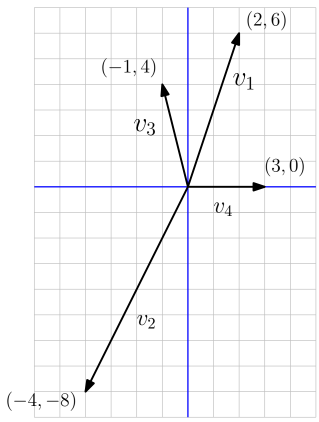
(3) $5(v + 3w) = 5v + 15w = 5 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ -15 \\ -100 \end{pmatrix}$.

(4) $(2w - u) - 3(2v + u) = -4u - 6v + 2w = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}$.

6.2 Dibuixeu en el pla els vectors següents de $\mathbb{R}^2$.

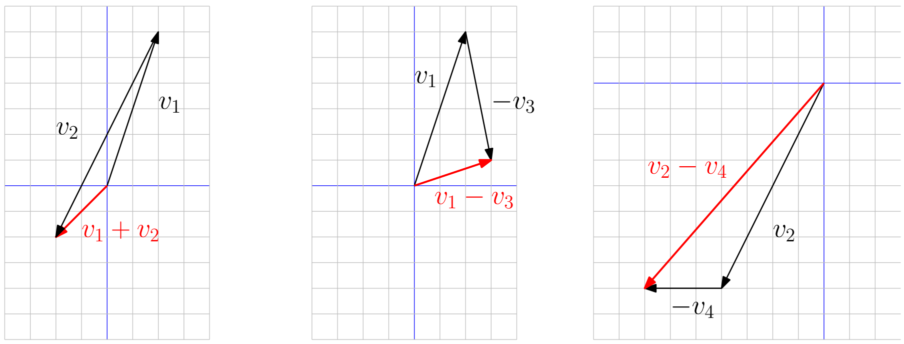
1) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$; 2) $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$; 3) $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; 4) $v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solució:



6.3 Per als vectors de l'exercici anterior, calculeu $v_1 + v_2$, $v_1 - v_3$ i $v_2 - v_4$ gràficament i comproveu les vostres respostes algebraicament.

Solució: $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_1 - v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 - v_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}$.



$v_1 + v_2 = (-2, -2)$ $v_1 - v_3 = (3, 1)$ $v_2 - v_4 = (-7, -8)$

6.4 Siguin u, v, w elements d'un espai vectorial i siguin α, β, γ elements del cos d'escalars amb $\alpha \neq 0$. Suposem que es compleix la relació $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Escriviu els vectors u, $u - v$ i $u + \alpha^{-1}\beta v$ en funció de v i w.

Solució: Com que $\alpha \neq 0$, es pot aïllar u de la condició de l'enunciat i s'obté:

$$u = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w.$$

Per tal d'obtenir ara $u - v$ en funció només de v, w només cal substituir aquesta expressió de u a $u - v$ i agrupar els termes en v i en w, la qual cosa dona:

$$u - v = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w - v = -\frac{\beta + \alpha}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w.$$

Finalment, per tal d'obtenir $u + \alpha^{-1}\beta v$ en termes de v, w fem el mateix:

$$u + \alpha^{-1}\beta v = \frac{-\beta}{\alpha} v - \frac{\gamma}{\alpha} w + \alpha^{-1}\beta v = -\frac{\gamma}{\alpha} w.$$

6.5 Sigui $P(\mathbb{R})_p$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$ i on totes les potències de x tenen grau parell. Esbrineu si $P(\mathbb{R})_p$ és un espai vectorial amb les operacions de suma i producte per escalar habituals. (Considerem que el polinomi 0 té grau 0.)

Solució: Correspon a comprovar que $P(\mathbb{R})_p$ és un subespai vectorial de l'espai vectorial $P(\mathbb{R})$ de tots els polinomis. Per tant, cal comprovar que: 1) $P(\mathbb{R})_p \neq \emptyset$, 2) $P(\mathbb{R})_p$ és tancat per sumes (és a dir, la suma de polinomis de $P(\mathbb{R})_p$ continua sent un element de $P(\mathbb{R})_p$), i 3) és tancat per producte per escalars (i.e. el producte per escalars de qualsevol polinomi de $P(\mathbb{R})_p$ continua sent un element de $P(\mathbb{R})_p$).

1) És no buit ja que, per exemple, $p(x) = 1 \in P(\mathbb{R})_p$.

2) És tancat per sumes ja que si $p(x), q(x)$ són dos polinomis qualssevol amb tots els termes de grau parell, la seva suma $p(x) + q(x)$ continua essent un polinomi amb tots els termes de grau parell.

3) És tancat pel producte per escalars ja que si $p(x)$ és un polinomi amb tots els termes dde grau parell, el polinomi $\lambda p(x)$ continua tenint tots els termes de grau parell per a qualsevol $\lambda \in \mathbb{R}$.

6.6 Considereu el conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ format per totes les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donades dues funcions $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim les funcions $f + g$ i λf com:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Demostreu que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ amb aquestes operacions és un $\mathbb{R}$-espai vectorial.

Solució: És evident que el producte per un escalar d'una funció real de variable real té com a resultat una funció real de variable real, igual que la suma. L'element neutre és la funció constant $f(x) = 0$. L'element oposat de $f(x)$ existeix sempre i és $-f(x)$. La comprovació de les altres propietats es pot demostrar utilitzant les propietats dels reals.

6.7 Esbrineu quins dels conjunts següents són subespais vectorials sobre $\mathbb{R}$. (Justifiqueu les respostes.)

$$E_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + \pi y = 0\}, \qquad E_5 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, x - t = 0\},$$

$$E_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + z = \pi\}, \qquad E_6 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + y^2 = 0\},$$

$$E_3 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}, \qquad E_7 = \{\begin{pmatrix} a+b \\ a-2b \\ c \\ 2a+c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$E_4 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}, \qquad E_8 = \{\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ b+a \\ 2+a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Solució: En cada cas cal comprovar que són conjunts no buits i tancats per sumes i per producte per escalars. Per conveniència, denotarem els vectors per $(a_1, \ldots, a_n)$ enlloc de representar-los per matrius columna.

E_1: És no buit, per exemple, $(0, 0) \in E_1$. Suposem que $(x, y), (x', y') \in E_1$. Vol dir que $x + \pi y = 0$ i que $x' + \pi y' = 0$. Sumant aquestes dues equacions i agrupant termes resulta que:
$$(x + x') + \pi(y + y') = 0,$$
que és justament la condició per tal que $(x + x', y + y') \in E_1$. Per tant, E_1 és tancat per sumes. Anàlogament, si $(x, y) \in E_1$ és que $x + \pi y = 0$. Per tant, qualsevol que sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ també es complirà que $\lambda(x + \pi y) = 0$, i això vol dir que:
$$\lambda x + \pi(\lambda y) = 0,$$
que és justament la condició per tal que $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ pertanyi a E_1. Per tant, E_1 també és tancat per producte per escalars i E_1 és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

E_2: És no buit, però no és tancat per sumes. Per exemple, $(1, 0, \pi - 1)$ i $(0, 0, \pi)$ són vectors de E_2 però la seva suma:

$$(1, 0, \pi - 1) + (0, 0, \pi) = (1, 0, 2\pi - 1)$$

no és de E_2, ja que en aquest cas $x + z = 2\pi \neq \pi$. De fet, tampoc és tancat per producte per escalars. Per tant, E_2 no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

També es pot deduir que E_2 no és subespai vectorial tenint en compte que tot subespai ha de contenir el vector zero, i en aquest cas $(0, 0, 0) \notin E_2$, ja que $0 + 0 \neq \pi$.

E_3: Tampoc és tancat per sumes. Per exemple, $(0, 1, 0), (1, 0, 0)$ són vectors de E_3 (les seves coordenades compleixen $xy = 0$), però la seva suma $(1, 1, 0)$ no ho és, ja que ara $xy = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Per tant, E_3 no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

E_4: És tancat per sumes perquè la suma de dos racionals sempre és un racional, perè no ho és pel producte per escalars, ja que els escalars són nombres reals qualssevol, en particular, poden no ser racionals. Per exemple, $(1, 0)$ és de E_4, però en canvi no ho és el seu múltiple $\sqrt{2}(1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$. Per tant, E_4 no és subespai de $\mathbb{R}^2$.

E_5: És no buit perquè conté almenys la solució trivial $(0, 0, 0, 0)$. És tancat per sumes ja que si $(a, b, c, d), (a', b', c', d')$ són dues solucions del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x - t &= 0 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ a - d &= 0 \\ a' + b' + c' + d' &= 0 \\ a' - d' &= 0 \end{aligned}$$

sumant la primera i tercera equacions i la segona i quarta i agrupant termes resulta que:

$$\begin{aligned} (a + a') + (b + b') + (c + c') + (d + d') &= 0 \\ (a + a') - (d + d') &= 0, \end{aligned}$$

és a dir, $(a + a', b + b', c + c', d + d')$ també és solució del sistema. Finalment, també és tancat pel producte per escalars ja que si $(a, b, c, d) \in E_5$ és que $a+b+c+d = 0$ i $a-d = 0$ i aleshores també es compleix que

$$(\lambda a) + (\lambda b) + (\lambda c) + (\lambda d) = \lambda(a + b + c + d) = \lambda 0 = 0$$

i que:

$$(\lambda a) - (\lambda d) = \lambda(a - d) = \lambda 0 = 0$$

qualsevol que sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Per tant, $\lambda(a, b, c, d) \in E_5$. En general, un raonament similar prova que el conjunt de solucions de qualsevol sistema d'equacions lineals *homogeni* amb n incògnites és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

E_6: És el conjunt de vectors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tals que $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2 = 0$ o, equivalentment, tals que $x + y = 0$. Per tant, E_6 és de fet el format per tots els vectors de la forma $(a, -a)$ per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$, i aquest conjunt és clarament no buit i tancat per sumes i per producte per escalars. Per tant, E_6 és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$.

E_7: És el conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ de la forma:

$$\begin{aligned}(a+b, a-2b, c, 2a+c) &= (a, a, 0, 2a) + (b, -2b, 0, 0) + (0, 0, c, c)\\ &= a(1, 1, 0, 2) + b(1, -2, 0, 0) + c(0, 0, 1, 1)\end{aligned}$$

per $a, b, c \in \mathbb{R}$ qualssevol, és a dir, és el conjunt de totes les combinacions lineals dels vectors $(1, 1, 0, 2), (1, -2, 0, 0), (0, 0, 1, 1)$. Ara, en general, el conjunt de totes les combinacions lineals de qualsevol família donada de vectors d'un espai vectorial, en aquest cas de $\mathbb{R}^4$, sempre és un subespai vectorial de l'espai vectorial en qüestió. És el que s'anomena el *subespai vectorial generat per la família donada de vectors.* Per tant, E_7 és un subespai de $\mathbb{R}^4$.

E_8: A diferència del cas anterior, ara E_8 no és el conjunt de combinacions lineals de quatre vectors donats degut a què a la primera coordenada el paràmetre a apareix elevat al quadrat (i que a la quarta coordenada apareix un 2 sumat a a). De fet, E_8 no és tancat per sumes. Per ex., $(0, 0, 0, 2), (0, 0, 1, 3) \in E_8$ (corresponen als vectors amb $a = b = 0$ el primer i $a = 0$ i $b = 1$ el segon). En canvi, la seva suma $(0, 0, 1, 5)$ no és de E_8 ja que el sistema d'equacions:

$$a^2 = 0, \quad a = 0, \quad b + a = 1, \quad 2 + a = 5$$

no té solució. Per tant, E_8 no és subespai.

Observació. També es pot justificar que E_1, E_5 i E_6 són subespais com a conseqüència d'un resultat vist a teoria: *el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n incògnites és subespai de $\mathbb{R}^n$.* Els conjunts E_1 i E_5 estan donats directament com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni. El conjunt E_6 hem vist que equival al conjunt de solucions del sistema homogeni que té només una equació, $x + y = 0$. Per tant, tots tres són subespais vectorials.

6.8 Denotem per $P(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis amb coeficients reals i variable x. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $P(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P(\mathbb{R}) : a_2 = a_0\}\\
F_2 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau } 3\}\\
F_3 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) \text{ té grau parell}\}\\
F_4 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}\\
F_5 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}\\
F_6 &= \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p'(5) = 0\}
\end{aligned}$$

Solució:

1) Un polinomi arbitrari $p(x)$ de F_1 s'expressa com:

$$p(x) = a_3x^3 + a_0x^2 + a_1x + a_0 = a_3x^3 + a_0(x^2 + 1) + a_1x;$$

és a dir, $p(x)$ és una combinació lineal dels polinomis x^3, $x^2 + 1$ i x. Està clar que una combinació lineal d'aquests polinomis pertany a F_1. Per tant:

$$F_1 = \langle x^3, x^2 + 1, x\rangle$$

i, per tant, F_1 és un subespaci vectorial.

2) No, perquè, per exemple, la suma de $x^3 + x$ i $-x^3 + x$ és $2x$, que no té grau 3.

3) No, perquè, per exemple, la suma de $x^2 + x$ i $-x^2 + x$ és $2x$, que no té grau parell.

4) F_4 sí és un subespaci vectorial. En primer lloc, $x - 1 \in F_4$ i, per tant, $F_4 \neq \emptyset$. Segon, si $p(x), q(x) \in F_4$, llavors $p(1) = q(1) = 0$ i per tant $(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$. Finalment, si $p(x) \in F_4$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ i, per tant, $\lambda p(x) \in F_4$.

5) F_5 no és un subespai perquè si $p(0) = q(0) = 1$, llavors $(p+q)(0) = p(0)+q(0) = 1+1 = 2$; és a dir, si $p(x), q(x) \in F_5$, llavors $p(x) + q(x) \notin F_5$.

6) F_6 sí és un subespaci vectorial. En primer lloc, $(x - 5)^2 \in F_6$ i, per tant, $F_6 \neq \emptyset$. Segon, si $p(x), q(x) \in F_6$, llavors $p'(5) = q'(5) = 0$ i per tant $(p + q)'(5) = p'(5) + q'(5) = 0 + 0 = 0$. Finalment, si $p(x) \in F_6$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors $\lambda p'(5) = \lambda \cdot 0 = 0$ i, per tant, $\lambda p(x) \in F_6$.

6.9 Considerem $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius $n \times m$ amb coeficients reals. Esbrineu quins dels subconjunts següents són subespais vectorials de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. (Justifiqueu les respostes.)

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \\
M_2 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : A = A^t\} \\
M_3 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 0 \ \forall i \in [m]\} \\
M_4 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : a_{1\,i} = 1 \ \forall i \in [m]\} \\
M_5 &= \{A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) : AB = 0\} \quad \text{(on } B \text{ és una matriu fixa)}
\end{aligned}$$

Solució: A tots els apartats, O denota la matriu nul·la del tipus $n \times m$ indicat a l'apartat, és a dir, la matriu $n \times m$ amb tots els elements iguals a 0.

M_1: Sí. Si $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores $M_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AM = MA\}$, i és un subespai de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ja que es compleix:

- $M_1 \neq \emptyset$, ja que $OM = MO = O$, i per tant $O \in M_1$.
- Si $A, A' \in M_1$ aleshores $AM = MA$ i $A'M = MA'$, d'on deduïm que $(A + A')M = AM + A'M = MA + MA' = M(A + A')$. Per tant, $A + A' \in M_1$.
- Si $A \in M_1$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $AM = MA$, d'on deduïm que $(\lambda A)M = \lambda(AM) = \lambda(MA) = M(\lambda A)$. Per tant, $\lambda A \in M_1$.

M_2: Si $m \neq n$, aleshores M_2 és buit, i no és subespai. Si $n = m$, aleshores M_2 és subespai $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ja que:

- $M_2 \neq \emptyset$, ja que $O = O^t$ i per tant $O \in M_2$.
- Si $A, B \in M_2$ aleshores $A = A^t$ i $B = B^t$, d'on deduïm que $A+B = A^t+B^t = (A+B)^t$. Per tant, $A + B \in M_2$.
- Si $A \in M_2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda A = \lambda A^t = (\lambda A)^t$. Per tant, $\lambda A \in M_2$.

M_3: Sí. Observem que M_3 conté totes les matrius tals que tots els elements de la primera fila són nuls i es compleix:

- $M_3 \neq \emptyset$, ja que $O \in M_3$.
- Si $A, B \in M_3$, aleshores els elements de la primera fila de A i de B són nuls, d'on deduïm que els elements de la primera fila de $A + B$ també ho són. Per tant, $A + B \in M_3$.
- Si $A \in M_3$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores els elements de la primera fila de A són nuls, d'on deduïm que els elements de la primera fila de λA també ho són. Per tant, $\lambda A \in M_3$.

M_4: No és subespai. La matriu nul·la $n \times m$, no és del conjunt M_4, per tant, M_4 no és subespai de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

M_5: Sí, ja que es compleix:

- $M_5 \neq \emptyset$, ja que $OB = O$ i per tant $O \in M_5$.
- Si $A, A' \in M_5$ aleshores $AB = O$ i $A'B = O$, d'on deduïm que $(A+A')B = AB+A'B = O + O = O$. Per tant, $A + A' \in M_5$.
- Si $A \in M_5$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $AB = O$, d'on deduïm que $(\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda O = O$. Per tant, $\lambda A \in M_5$.

6.10 Considerem el conjunt $T \subset \mathbb{R}^4$. Proveu que el vector u es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T almenys de dues maneres diferents.

$$T = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Si escrivim el vector u com a combinació lineal dels vectors de T, obtenim el sistema d'equacions següent, que és compatible indeterminat, donat que el rang de la matriu del sistema és 3 i el rang de la matriu ampliada és 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solució s'expressa com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dues solucions: fem $s = 0$ i $s = 1$ i obtenim:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, el vector u es pot expressar com:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.11 Per a quins valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ el vector $u \in \mathbb{R}^3$ es pot escriure com a combinació lineal dels vectors del conjunt T?

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \end{pmatrix}, \quad T = \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Solució: És equivalent a dir que el sistema:

$$\begin{cases} 3x - z &= 1 \\ x + 7y + 2z &= 5 \\ -x - y &= a \end{cases}$$

és compatible. Tenim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & a \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 5+a \\ 0 & -21 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & (5+a)/2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & (5+a)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-(5+a)/2 \end{pmatrix}.$$

El sistema és compatible si i només si el rang de la matriu del sistema coincideix amb el rang de la matriu ampliada i això passa si i només si $a = -1$. Finalment, la solució és $x = 1 - y$, $z = 2 - 3y$, amb y lliure.

6.12 Doneu els valors dels paràmetres a i b per als quals la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ és combinació lineal de $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solució: És equivalent a dir que el sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \beta &= 1 \\ 4\lambda + 2\beta &= 0 \\ -5\lambda + 3\beta &= a \\ 2\lambda - \beta &= b \end{cases}$$

és compatible. Resolent per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & a \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & a+5 \\ 0 & -3 & b-2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-11 \\ 0 & 0 & b+4 \end{pmatrix}$$

obtenim que per ser compatible si i només si $a = 11$ i $b = -4$.

6.13 Donats els vectors $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^3$, trobeu quina condició han de complir les components d'un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ per a que pertanyi al subespai generat per $\{u, v\}$.

Solució: Sigui $F = \langle u, v \rangle$ el subespai generat pels dos vectors. Per definició, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in F$ si i només si és combinació lineal de u, v; és a dir, si i només si existeixen escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta equació vectorial en λ, μ equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} \lambda &= x \\ \lambda + \mu &= y \\ 2\lambda + \mu &= z \end{aligned}$$

Per tant, el vector és de F si i només si aquest sistema d'equacions lineals en λ, μ té solució, i el que busquem és la condició o condicions de compatibilitat d'aquest sistema. La matriu ampliada, un cop esglaonada, és:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|l} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y-x \end{array}\right).$$

Per tant, el sistema és compatible si i només si $z - y - x = 0$, que és la condició necessària i suficient buscada per tal que el vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ sigui de F.

6.14 Doneu la forma genèrica dels polinomis de $P(\mathbb{R})$ que pertanyen al subespai vectorial generat pel conjunt $\{1 + x, x^2\}$.

Solució: El subespai generat en qüestió és el format per totes les combinacions lineals dels dos polinomis. Per tant, un polinomi genèric d'aquest subespai és de la forma:

$$\lambda\,(1 + x) + \mu\, x^2 = \lambda + \lambda\, x + \mu\, x^2$$

per a qualssevol $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

6.15 Siguin $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ subespais de $\mathbb{R}^3$.

1) Demostreu que $F = G$.

2) Sigui $e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Proveu que $e \in F$ i expresseu-lo com a combinació lineal dels conjunts de vectors que generen F.

Solució:

1) Cal provar les dues inclusions $F \subseteq G$ i $G \subseteq F$. Per tal de provar qualsevol d'aquestes inclusions, per exemple que $F \subseteq G$, n'hi ha prou amb provar que els generadors de F pertanyen a G, que vol dir que són combinació lineal dels generadors de G. En efecte, si és així, un vector qualsevol de F, en ser una combinació lineal dels generadors de F, és una combinació lineal de combinacions lineals dels generadors de G, i això acaba sent una combinació lineal dels generadors de G i, per tant, també un element de G. Anàlogament, la inclusió $G \subset F$ queda provada comprovant simplement que els generadors de G són de F. Comprovem les dues coses.

- Els generadors de F són combinació lineal dels generadors de G: en efecte, només cal comprovar que les equacions vectorials:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  en a, b, c, d com a incògnites tenen solució. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i analitzant-los s'obté que efectivament tenen solució i és:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Els generadors de G són combinació lineal dels de F: ara cal resoldre les equacions vectorials:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = c' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + d' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

  en a', b', c', d' com a incògnites. Escrivint els sistemes d'equacions lineals corresponents a cada equació i resolent-los s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativament, com que només ens interessa saber si els generadors de F són combinació lineal dels de G, i els de G ho són dels de F, sense necessitat de trobar quines combinacions lineals són, n'hi ha prou amb estudiar el rang de la matriu que té per columnes els quatre vectors, els dos generadors de F més els dos generadors de G. Esglaonant-la s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, és matriu de rang 2. Però el rang d'una matriu dóna el nombre màxim de columnes linealment independents. Com que les dues últimes columnes (generadors de G) ja ho són, deduïm que les dues primeres (generadors de F) són necessàriament combinació lineal de les dues últimes i, per tant, que $F \subseteq G$. Anàlogament, com que les dues primeres columnes (generadors de F) també són linealment independents, deduïm que les dues últimes (generadors de G són combinació lineal de les primeres i, per tant, que també $G \subseteq F$.

2) Per tal de veure que $e \in F$ només cal comprovar que e és combinació lineal dels generadors de F, cosa que es pot fer comprovant que la matriu que té per columnes els dos generadors de F més el vector e és de rang 2. Però com que ens demanen també trobar quina combinació lineal és, ho fem plantejant directament l'equació vectorial:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en a, b com a incògnites i resolent el corresponent sistema d'equacions lineals. Aquest és el de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ 1 & -1 & 1-\sqrt{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \sqrt{2}+8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant:

$$e = \begin{pmatrix} 9 \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (8+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anàlogament, es pot comprovar que e també es pot obtenir com la combinació lineal dels generadors de G:

$$e = \frac{17+\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.16 Esbrineu si els conjunts de vectors següents són linealment independents a l'espai vectorial que s'indica.

1) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\}$ a $\mathbb{R}^3$;

2) $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ a $\mathbb{R}^3$;

3) $\{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ a $\mathbb{R}^3$;

4) $\{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\}$ a $\mathbb{R}^4$;

5) $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}\}$ a $\mathbb{R}^5$.

Solució: En cada cas hem de calcular el rang de la matriu associada als vectors.

1) El rang de la matriu és 2 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) El rang de la matriu és 3 i per tant els vectors són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 13 & 7 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

3) En aquest cas, el rang de la matriu associada és 2 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ -1 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -27 \\ 0 & 2 & -18 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A més, la relació de dependència lineal és:

$$-7\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) El rang de la matriu associada és 3 i, per tant, són linealment dependents:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/9 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 8/9 \\ 0 & 0 & 2 & 43/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) El rang de la matriu associada és 4 i, per tant, són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ 5 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.17 A l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem els vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$. Determineu a i b per tal que siguin un conjunt linealment dependent, i en aquest cas expresseu el vector $0_{\mathbb{R}^4}$ com a combinació lineal no nul·la dels vectors.

Solució: Escrivim la matriu associada als vectors i l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & b & a \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & b & a \\ 0 & -1-3a & -4+3a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & b & a \\ 0 & -1-3a & -4+3a \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -4+3a-2(1+3a) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -6-3a \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+2b \\ 0 & 0 & -6-3a \end{pmatrix}$$

Ara, els vectors són linealment dependents si i només si el rang d'aquesta matriu és més petit que 3 i això passa si i només si $a = -2b$ i $a = -2$; és a dir, si i només si $a = -2$ i $b = 1$. La solució del sistema homogeni en aquest cas és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una solució és: $-3u_1 + 2u_2 + u_3 = 0$.

6.18 Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i u, v, w tres vectors qualssevol d'E. Demostreu que el conjunt $\{u-v, v-w, w-u\}$ és linealment dependent.

Solució: Cal provar que existeix una combinació lineal dels tres vectors no trivial (és a dir, amb almenys un coeficient diferent de zero) que dóna el vector zero o, equivalentment, que almenys un dels vectors es pot obtenir com a combinació lineal de la resta (no que qualsevol d'ells és combinació lineal dels altres). Ara, per les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial es té que:

$$u - v = u - w + w - v = -(w-u) - (v-w) = (-1)(w-u) + (-1)(v-w).$$

6.19 Demostreu que les matrius A, B i C següents formen un conjunt linealment independent a $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proveu que per a qualsevol valor de λ la matriu següent és combinació lineal d'A i B.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solució: Escrivim en primer lloc la matriu associada a A, B i C en la base canònica i comprovem que té rang 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, les matrius A, B i C són linealment independents.

Si la matriu donada en funció de λ ha de ser combinació lineal d'A i B, llavors $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \lambda_1 A + \lambda_2 B$, per algun $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. De la igualtat surt el sistema següent:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & \lambda \\ \lambda_2 & = & 2-\lambda \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \\ -2\lambda_1-2\lambda_2 & = & -4 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aquest sistema té solució per a tot λ, ja que $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 2-\lambda$, i substituint a la tercera equació, que és equivalent a la resta, surt $\lambda + 2 - \lambda = 2$, que és equivalent a $0 = 0$.

Una altra manera és considerar la matriu associada a A, B i la matriu donada i veure que té rang 2 per a qualsevol valor de λ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.20 Demostreu que els polinomis $-1+2x+x^2$, $1+x^2$ i $x+x^2$ són linealment dependents a l'espai $P(\mathbb{R})$.

Solució: Cal provar que existeix una combinació lineal dels tres vectors no trivial (és a dir, amb almenys un coeficient diferent de zero) que dóna el vector zero o, equivalentment, que almenys un dels vectors es pot obtenir com a combinació lineal de la resta (no que qualsevol d'ells és combinació lineal dels altres). Si no es veu a simple vista, el procediment a seguir és plantejar l'equació:

$$a(-1+2x+x^2)+b(1+x^2)+c(x+x^2)=0$$

en a, b, c com a incògnites. Ara, per com estan definides la suma i el producte per escalars de polinomis, el membre de l'esquerra és el polinomi:

$$a(-1+2x+x^2)+b(1+x^2)+c(x+x^2) = (-a+b)+(2a+c)x+(a+b+c)x^2.$$

Per tant, l'equació anterior equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} -a+b&=0\\ 2a+c&=0\\ a+b+c&=0 \end{aligned}$$

la matriu ampliada del qual és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema és compatible indeterminat, cosa que mostra que efectivament té solució no trivial. Una solució és, per exemple, $a=b=1$ i $c=-2$.

6.21 Si $\{e_1,e_2,\dots,e_r\}$ és un conjunt de vectors linealment dependent d'un espai vectorial, és cert que qualsevol e_i es pot escriure com a combinació lineal dels altres vectors del conjunt? Demostreu-ho o doneu un contraexemple.

Solució: No és cert. La condició de linealment dependents equival a què hi hagi algun vector que és combinació lineal de la resta, però no a què ho sigui qualsevol. Per exemple, a $P(\mathbb{R})$ els polinomies $e_1=1$, $e_2=x+x^2$ i $e_3=2x+2x^2$ són linealment dependents, ja que $0\,e_1+2\,e_2-e_3=0$, i efectivament e_3 és combinació lineal de e_1,e_2 perquè és $e_3=0\,e_1+2\,e_2$. Però el vector e_1 no es pot obtenir com a combinació lineal de e_2,e_3 ja que una combinació lineal genèrica d'aquests dos vectors és:

$$ae_2+be_3=a(x+x^2)+b(2x+2x^2)=(a+2b)(x+x^2)\neq 1$$

siguin quins siguin els reals a,b.

6.22 Esbrineu si les afirmacions següents sobre conjunts de vectors en un espai vectorial E són certes, demostrant-ho si és el cas i donant-ne un contraexemple altrament.

1) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v\neq e_i$ per a tot i, aleshores el conjunt $\{e_1,\dots,e_r,v\}$ és linealment independent.

2) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ és un conjunt linealment independent i $v\notin\langle e_1,\dots,e_r\rangle$, aleshores $\{e_1,\dots,e_r,v\}$ és linealment independent.

3) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $v\neq e_i$ per a tot i, aleshores $\{e_1,\dots,e_r,v\}$ és un conjunt generador d'E.

4) Si $\{e_1,\dots,e_r\}$ és un conjunt generador d'E i $e_r\in\langle e_1,\dots,e_{r-1}\rangle$, aleshores $\{e_1,\dots,e_{r-1}\}$ és un conjunt generador d'E.

5) Tot conjunt amb un sol vector és linealment independent.

Solució:

1) No és cert. Per exemple, si B és la base canònica de $\mathbb{R}^r$, que en particular és una família linealment independent de vectors, qualsevol vector $v \in \mathbb{R}^r$ tal que $v \notin B$ és combinació lineal dels vectors de B i, per tant, $B \cup \{v\}$ és un conjunt linealment dependent.

2) És cert. En efecte, suposem que la família ampliada és linealment dependent. Hi haurà aleshores una combinació lineal no trivial de tots ells que donarà el vector zero, és a dir, existiran $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_v$ no tots nuls tals que:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_r e_r + \lambda_v v = 0_E.$$

De fet, com que $\{e_1, \ldots, e_r\}$ és per hipòtesi linealment independent, ha de ser necessàriament $\lambda_v \neq 0$. Per tant, passant el terme $\lambda_v v$ a l'altra banda, i aïllant v tenim v com a combinació lineal del conjunt inicial de vectors, la qual cosa es contradiu amb la hipòtesi que $v \notin \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$.

3) És cert, ja que podem expressar qualsevol vector d'E com a combinació lineal del conjunt anterior sense necessitat d'utilitzar el vector v.

4) També és cert ja que qualsevol vector v combinació lineal de tots els e_i's també ho és de només els $r-1$ primers vectors. En efecte, si:

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r e_r,$$

només cal substituir e_r per la combinació lineal corresponent dels $r-1$ primers vectors $e_r = a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}$ (una tal combinació lineal existeix perquè estem suposant que $e_r \in \langle e_1, \ldots, e_{r-1} \rangle$) i queda que:

$$v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1} + \lambda_r (a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}) = (\lambda_1 + a_1 \lambda_r) e_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} + a_{r-1} \lambda_r) e_{r-1},$$

on a la darrera igualtat hem utilitzat les propietats de la suma i el producte per escalars de qualsevol espai vectorial.

5) No, ja que aquest pot ser el vector zero, i qualsevol combinació lineal del vector zero, trivial o no, és el vector zero.

6.23 Considereu el conjunt de vectors $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

1) Demostreu que formen una base de $\mathbb{R}^4$.

2) Trobeu les coordenades del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ en aquesta base.

3) Trobeu les coordenades d'un vector arbitrari $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ en aquesta base.

Solució:

1) Com que estem en dimensió 4, i són 4 vectors, n'hi ha prou amb veure que són linealment independents (en general, n vectors linealment independents en un espai de dimensió n són

automàticament base). Això vol dir comprovar que la matriu que els té per columnes és de rang 4. Ara, esglaonant aquesta matriu s'obté que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

així que és de rang 4. Per tant, són una base.

2) Busquem els escalars $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant les seves components amb les del vector de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a + c &= 1 \\ a &= 0 \\ b &= 2 \\ b + 4c + 2d &= -3, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = -9/2$, que són les coordenades buscades.

(3) Cal repetir el mateix d'abans però substituint el vector anterior per un de genèric, de manera que l'equació vectorial a resoldre ara és:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i el sistema d'equacions lineals equivalent és:

$$\begin{aligned} a + c &= x \\ a &= y \\ b &= z \\ b + 4c + 2d &= t, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = y$, $b = z$, $c = x - y$ i $d = (t - z - 4(x - y))/2 = (t + 4y - 4x - z)/2$.

6.24 Sigui $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Comproveu que és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Doneu les coordenades d'$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B.

Solució: Com a l'exercici anterior, en ser $M_2(\mathbb{R})$ un espai vectorial real de dimensió 4, i com que B consta de 4 vectors, només cal veure que són matrius linealment independents, per la qual cosa cal veure que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectives matrius és de rang 4. Aquesta matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la primera columna correspon als coeficients de la primera matriu, la segona als de la segona, etc), i és clarament de rang 4. Per tant, són una base de $M_2(\mathbb{R})$. Les coordenades de la matriu A en aquesta base són els reals a, b, c, d tals que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant els coeficients de la matriu resultant amb els corresponents de la matriu de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ b + 2c &= 3 \\ c &= 3 \\ d &= 1, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = 1$, $b = -3$, $c = 3$ i $d = 1$, que són les coordenades buscades.

6.25 Sigui $P_3(\mathbb{R})$ l'espai vectorial dels polinomis de grau com a molt 3. Demostreu que els polinomis $1 + x, -1 + x, 1 + x^2$ i $1 - x + x^3$ formen una base de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu les coordenades del polinomi $-5 + 6x + 3x^2 + x^3$ en aquesta base.

Solució: Com en els dos exercicis anteriors, en ser $P_3(\mathbb{R})$ un espai vectorial real de dimensió 4, i com que considerem 4 polinomis, només cal veure que són linealment independents, per la qual cosa cal veure que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectius polinomis és de rang 4. Aquesta matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(la primera columna de la matriu abans d'esglaonar correspon als coeficients del primer polinomi per grau creixent, la segona columna als del segon, etc), i és clarament de rang 4. Per tant, el quatre polinomis són una base de $P_3(\mathbb{R})$. Les coordenades del polinomi $-5 + 6x + 3x^2x^3$ en aquesta base són aleshores els reals a, b, c, d tals que:

$$-5 + 6x + 3x^2 + x^3 = a\,(1 + x) + b\,(-1 + x) + c\,(1 + x^2) + d\,(1 - x + x^3).$$

Calculant la combinació lineal de la dreta i igualant els coeficients del polinomi resultant amb els del polinomi de l'esquerra, aquesta equació vectorial equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a - b + c + d &= -5 \\ a + b - d &= 6 \\ c &= 3 \\ d &= 1, \end{aligned}$$

la solució del qual és $a = -1$, $b = 8$, $c = 3$ i $d = 1$, que són les coordenades buscades.

6.26 Considereu el subespai $F = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ a $\mathbb{R}^3$. Trobeu una base de F i la condició (en forma de sistema d'equacions lineals homogènies) que ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per pertànyer a F.

Solució: Escalonant la matriu que té els vectors generadors de F per columnes obtenim que el rang de la matriu és 2 i, per tant, la dimensió de F és 2. Els vectors primer i tercer formen una base de F perquè no són proporcionals: $B_F = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

Sigui $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vector arbitrari. Perquè pertanyi a F la matriu formada pels dos vectors de la base de F i u ha de tenir rang 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & x - 2y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x - 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

És a dir, s'ha de satisfer que $x - 2y + 2z = 0$.

6.27 Considereu els subespais següents de $\mathbb{R}^4$.

$$F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle, \qquad G = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Proveu que $F = G$ i que els conjunts de generadors donats són bases. Esbrineu si algun dels vectors $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertany a F i, si és el cas, doneu-ne les coordenades en les dues bases.

Solució: Per comprovar que són el mateix, expressem tots els vectors generadors de F com a combinació lineal dels generadors de G:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= 3/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i tots els vectors generadors de G com a combinació lineal dels generadors de F:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tenim que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$ i $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2}-1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \in F$.

$$v_{B_F} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \\ (-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}, \qquad v_{B_G} = \begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1)/2+\sqrt{3} \\ (1-\sqrt{2})/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.28 Sigui $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base d'un espai vectorial E. Demostreu que el conjunt $\{v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1\}$ també és una base d'E.

Solució: Sigui $w_1 = v_1 + 2v_2, w_2 = 2v_2 + 3v_3, w_3 = 3v_3 + v_1$, llavors:

$$v_1 = (w_1 - w_2 + w_3)/2, \quad v_2 = (w_2 - w_3 + w_1)/4, \quad v_3 = (w_3 - w_1 + w_2)/6.$$

Per tant, $E \subseteq \langle v_1 + 2v_2, 2v_2 + 3v_3, 3v_3 + v_1 \rangle$. Com que tenim el mateix nombre de vectors que la base donada, el nou conjunt també és una base.

6.29 Trobeu una base del subespai E de $\mathbb{R}^5$ i completeu-la a una base de $\mathbb{R}^5$.

$$E = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : x_3 = x_1 + x_2 - x_4,\ x_5 = x_2 - x_1 \}.$$

Solució: En general, la dimensió i una base de qualsevol subespai de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ descrit com al conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni, com és el cas de E, venen donades pel nombre de graus de llibertat del sistema i per les solucions que apareixen a la forma paramètrica de la solució general del sistema, respectivament.

En aquest cas, el sistema d'equacions lineals homogeni és el de matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 2, i per tant, el sistema té 3(=5-2) graus de llibertat, és a dir, $\dim E = 3$. Si canviem el signe dels elements de la primera fila, les columnes 4a i 5a formen una matriu identitat 2×2:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que podem donar les variables principals, x_4 i x_5, en funció de les variables lliures, x_1, x_2 i x_3:

$$x_4 = x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_5 = -x_1 + x_2$$

que en forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de E és $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

Per tal d'obtenir una base de tot $\mathbb{R}^5$, que estarà formada per 5 vectors linealment independents, cal buscar dos vectors més de $\mathbb{R}^5$ que, juntament amb la base de E anterior, encara formin un sistema linealment independent.

En aquest cas es veu fàcilment que si afegim els vectors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aleshores la matriu que té per columnes els vectors de la base donada de E i aquests dos vectors té determinant diferent de zero, ja que és trangular inferior amb els elements de la diagonal diferents de zero:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem completar la base donada de E amb aquests dos vectors. Una base de $\mathbb{R}^5$ és

$$B' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

.

6.30 Considereu els vectors de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que formen un conjunt linealment independent i trobeu un vector que juntament amb aquests tres formi una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució: Per tal de provar que una família de matrius és linealment independent només cal comprovar que la matriu que té per columnes els coeficients de les respectives matrius té rang igual al nombre de matrius de la família (i.e. al nombre de columnes). En aquest cas, és la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & -7 & -3 \\ 0 & -60 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 47/7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que és de rang 3. Per tant, les 3 matrius són linealment independents. Com que $M_2(\mathbb{R})$ té dimensió 4, no són base de $M_2(\mathbb{R})$.

Per tal d'obtenir una base, cal afegir una matriu que, juntament amb les anteriors, continui formant una família linealment independent. Ara, si abans d'esglaonar la matriu anterior haguéssim afegit una quarta columna tota de 0's excepte un 1, a la quarta columna de la matriu esglaonada hi hauria només un element diferent de zero a la fila de l'1 després de fer les permutacions de files utilitzades per escalonar la matriu. En aquest cas, tenint en compte les transformacions elementals fetes, les files 1a-2a-3a-4a han quedat ordenades 1a-3a-4a-2a. Si a la matriu escalonada li afegim el vector (0001) en columna, tenim una matriu de rang 4. Com que la 4a fila de la matriu escalonada correspon a la 2a fila de la matriu original, si a la matriu original li afegim el vector (0100) en columna, tenim una matriu de rang 4.

La família de matrius originals es pot completar doncs a una base de $M_2(\mathbb{R})$ afegint-hi simplement la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observació. Una altra manera de completar la base consisteix en posar els vectors de la base per files, escalonar la matriu i afegir les files que tenen tots els elements nuls excepte un 1 a les columnes on no hi ha pivots:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 6 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1/2 & 30/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si afegim la fila $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenim una matriu de rang 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1/2 & 30/7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem completar la base donada amb la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.31 Per a quins valors de λ els vectors $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ generen un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensió 2?

Solució: En general, la dimensió d'un subespai qualsevol de $\mathbb{R}^n$ descrit per generadors és igual al rang de la matriu que té els vectors generadors per columnes, ja que el rang dóna el nombre màxim de generadors linealment independents. Per tant, busquem λ tal que

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} = 2.$$

Per tal de trobar el rang d'aquesta matriu l'esglaonem:

$$\begin{pmatrix}\lambda & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & \lambda\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & \lambda & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

Per tal de continuar, distingim ara els casos $\lambda \neq 1$ i $\lambda = 1$. En el primer cas, es pot dividir l'última fila per $\lambda - 1$ i queda que

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ \lambda & 1 & \lambda\end{pmatrix},$$

que és clarament una matriu de rang 3 qualsevol que sigui $\lambda \neq 1$. En el cas $\lambda = 1$ queda la matriu

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

que és de rang 2. Per tant, només quan $\lambda = 1$ el subespai generat és de dimensió 2. Per a qualsevol altre valor, és de dimensió 3.

6.32 Considerem el subespai $F_a = \langle \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & a\\ 0 & -1\end{pmatrix} \rangle$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, amb $a \in \mathbb{R}$.

1) Trobeu el valor de a per al qual F_a és de dimensió 2.

2) Sigui $a = a_0$ el valor de a obtingut a l'apartat anterior. Trobeu les condicions, en la forma d'un sistema d'equacions lineals homogeni en x, y, z, t, per tal que la matriu $\left(\begin{smallmatrix}x & y\\ z & t\end{smallmatrix}\right)$ sigui de F_{a_0}.

3) Raoneu que $B = \{\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\}$ i $B' = \{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\}$ són bases de F_{a_0}.

Solució:

1) Com que els dos primers generadors no són proporcionals i, per tant, són linealment independents, la dimensió de F és com a mínim 2. Cal buscar, doncs, per a quin, o quins, valors de a els tres vectors són linealment dependents, que en aquest cas vol dir que la matriu que

té per columnes els corresponents vectors de coordenades en base canònica és de rang 2. Escalonant aquesta matriu dóna:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & (a-4)/3 \\ 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, la dimensió de F és 2 si i només si $a = -1$.

2) La matriu $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ és de F_{-1} si i només si és combinació lineal dels dos primers generadors, que per l'apartat anterior sabem que són una base de F_{-1}. Per tant, busquem les condicions de compatibilitat del sistema d'equacions corresponent a l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

és a dir, del sistema d'equacions en λ, μ:

$$\begin{aligned} \lambda - \mu &= x \\ 2\lambda + \mu &= y \\ 0 &= z \\ 2\lambda + \mu &= t \end{aligned}$$

Per a trobar-les escalonem la matriu ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & (y-2x)/3 \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t-y \end{pmatrix}$$

El sistema és compatible, doncs, si $t - y = 0$ i $z = 0$.

3) A l'apartat 1) ja hem vist que B és família linealment independent i que genera F_{-1} perquè el tercer generador n'és combinació lineal. Per tant, és base de F_{-1}. Per tal de provar que els vectors de B' també formen una base, com que no són proporcionals i, per tant, linealment independents, i F_{-1} sabem que és de dimensió 2, només cal comprovar que són tots dos de F_{-1}. Això ho veiem comprovant simplement que els seus coeficients satisfan les dues equacions de l'apartat anterior.

6.33 Doneu una base i la dimensió dels espais E, F i $E \cap F$ en els casos següents:

1) $E = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2x = 2y = z\}$ i $F = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z, 3x + y + z = 0\}$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

2) $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ com a subespais de $\mathbb{R}^3$.

3) $E = \{\left(\begin{smallmatrix} a \\ a+3b \\ 2a-b \\ c \end{smallmatrix}\right) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ i $F = \{\left(\begin{smallmatrix} -2a \\ b \\ 0 \\ 3b \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{R}\}$ com a subespais de$\mathbb{R}^4$.

4) $E = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a = b = c\}$ i $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ com a subespais de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució:

1) Un vector de E és de la forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant: $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E) = 1$. Anàlogament, un vector de F és de la forma (resolent el sistema homogeni que defineix F):

$$\begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant: $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(F) = 1$.

El subespai intersecció està definit pels vectors $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ que són solució del sistema d'equacions:

$$2x = 2y = z, \qquad x + y = z, \quad 3x + y + z = 0.$$

És fàcil veure que aquest sistema és compatible i determinat i que té solución única $x = y = z = 0$. Per tant, $E \cap F = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

2) Es comprova fàcilment que el rang de les matrius següents és 2 i que les dues primeres columnes són linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E) = 2$; i anàlogament, $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(F) = 2$.

Sigui $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in E \cap F$. Llavors podem escriure:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'aqui resulta un sistema d'equacions amb incògnites $\lambda, \mu, \alpha, \mu$. L'objectiu és trobar una relació entre λ i μ o una relació entre α i β. Per exemple, en aquest cas trobem que $\alpha = 5\beta$. Per tant, un vector de la intersecció s'expressa com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $E \cap F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ i $\dim(E \cap F) = 1$.

3) Pels vectors del subespai E tenim:

$$\begin{pmatrix} a \\ a + 3b \\ 2a - b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$E = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle.$$

Es comprova que aquests tres vectors són independents i, per tant, formen una base de E i $\dim(E) = 3$.

Anàlogament, pels vectors de F podem escriure:

$$\begin{pmatrix}-2a\\b\\0\\3b\end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$F = \langle \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3\end{pmatrix} \rangle.$$

Aquests dos vectors són linealment independents i, per tant, formen una base de F i $\dim(F) = 2$.

Sigui $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\\t\end{smallmatrix}\right) \in E \cap F$. Podem escriure:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+3b\\2a-b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\alpha\\\beta\\0\\3\beta\end{pmatrix}$$

per a certs $a, b, c, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. El sistema homogeni que resulta de l'última igualtat té 4 equacions i 5 incògnites. Si el resolem, el rang de la matriu de coeficients és 4 i té un grau de llibertat. Les solucions en funció de α són:

$$a = -2\alpha,\ b = -4\alpha,\ c = -42\alpha, \beta = -14\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Per tant, els vectors de $F \cap G$ són de la forma:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\alpha\\\beta\\0\\3\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\alpha\\-14\alpha\\0\\-42\alpha\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}-2\\-14\\0\\-42\end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de $E \cap F$ és $\{\left(\begin{smallmatrix}-2\\-14\\0\\-42\end{smallmatrix}\right)\}$ (també podem prendre el vector proporcional, $\left(\begin{smallmatrix}1\\7\\0\\21\end{smallmatrix}\right)$) i $\dim(E \cap F) = 1$.

4) Un vector del subespai E s'espressa com:

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & a\\a & d\end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Aquestes dues matrius són linealment independents perquè no són proporcionals. Per tant, $\dim(E) = 2$ i $E = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Anàlogament, les dues matrius que generen F no són proporcionals i, per tant, són linealment independents. Per tant, formen una base de F i $\dim(F) = 2$.

Escrivim continuació les condicions que ha de satisfer un vector de F per a pertanyer a E:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha \\ 2\alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \in E$$
$$\iff \alpha + 2\beta = 2\alpha - \beta = \alpha \iff \alpha = \beta = 0.$$

Per tant, $E \cap F = \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}$.

6.34 Considereu els subespais E de l'exercici anterior (exercici 6.33). Per a cadascun d'ells, amplieu la base fins obtenir-ne una de l'espai vectorial on es troben.

Solució: La solució no és única.

1) $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

2) $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

3) $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

4) $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

6.35 Considereu la base $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Doneu la matriu P_B^C de canvi de base de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ a B.

2) Sigui ara $B' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ una altra base de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu $P_B^{B'}$ de canvi de base de B' a B.

Solució:

1) Tenim:

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^C = (P_C^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$P_B^{B'} = P_B^C \cdot P_C^{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 & 1 \\ 2 & -3/2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & 6 & 3 \\ 3/2 & 7 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

6.36 Considereu l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ dels polinomis de grau menor o igual a 2 i amb coeficients reals.

1) Proveu que $B = \{-1 + 2x + 3x^2, x - x^2, x - 2x^2\}$ és una base de $P_2(\mathbb{R})$ i calculeu la matriu de canvi de base de base canònica a base B.

2) Trobeu les coordenades de $p(x) = 3 - x + 2x^2$ en la base B.

Solució:

1) Com que $P_2(\mathbb{R})$ és de dimensió 3, només cal veure que $B = \{-1+2x+3x^2, x-x^2, x-2x^2\}$ és una família linealment independent (qualsevol família linealment independent de n vectors en un espai de dimensió n també és automàticament conjunt de generadors i, per tant, base). Per tal de veure que són linealment independents comprovem que el rang de la matriu que té els coeficients de cada polinomi per columnes és 3. La matriu és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que és efectivament de rang 3.

La matriu $P_B^{B_c}$ de canvi de base canònica a base B és la inversa de $P_{B_c}^B$, que és la matriu que té per columnes els components de B en base B_c. Aquesta és la matriu anterior, així que només cal calcular la matriu inversa de l'anterior. Apliquem mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu demanada és:

$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Només cal utilitzar la matriu canvi de base anterior: les coordenades en la base B s'obtenen multiplicant les coordenades en base canònica per la matriu $P_B^{B_c}$ per l'esquerra. Per tant, són:

$$P_B^{B_c} \begin{pmatrix} r3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

6.37 Siguin $B = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}$ i $B' = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$.

1) Comproveu que efectivament són bases.

2) Doneu la matriu del canvi de la base B a la base B' ($P^B_{B'}$) i la matriu del canvi de B' a B ($P^{B'}_B$).

3) Calculeu les coordenades en les bases B i B' del vector que en base canònica té coordenades $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solució:

1) Considerem les matrius associades als vectors B i B' en base canònica C, respectivament:

$$P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 4 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{B'}_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es comprova fàcilment que els rangs d'aquestes matrius és 3 i, per tant, tant B com B' són bases.

2) Tenim:

$$P^B_{B'} = (P^{B'}_C)^{-1} P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{B'}_B = (P^B_{B'})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tenim, d'una banda:

$$u_B = P^C_B \cdot u_C = (P^B_C)^{-1} \cdot u_C = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -5/4 \\ -5/4 \end{pmatrix},$$

i de l'altra:

$$u_{B'} = P^B_{B'} \cdot u_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

6.38 Siguin

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dues bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Doneu les matrius de canvi de base $P^B_{B'}$ i $P^{B'}_B$.

Solució: Podem considerar que la base B és la base canònica i, per tant, tenim que la matriu de la base B' en la base B és:

$$P^{B'}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$P_{B'}^{B} = (P_{B}^{B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.39 Considereu els conjunts B i B' i comproveu que són bases de $\mathbb{R}^3$.

$$B = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}, \qquad B' = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Sigui u un vector de $\mathbb{R}^3$ que en la base B té coordenades $u_B = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ i en la base B', $u_{B'} = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$. Expresseu x, y i z en funció de x', y' i z', i viceversa.

Solució: Ens donen les bases B i B' en funció de la base canònica C; és a dir, tenim les matrius:

$$P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{C}^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$P_{B'}^{B} = (P_{C}^{B'})^{-1} P_{C}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si $u_B = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, llavors $u_{B'} = P_{B'}^{B} \cdot u_B = \left(\begin{smallmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$; i si $u_{B'} = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$, llavors $u_B = P_{B}^{B'} \cdot u_{B'} = 1/2 \left(\begin{smallmatrix} y'+z'-x' \\ z'+x'-y' \\ x'+y'-z' \end{smallmatrix}\right)$.

6.40 Sigui $B = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ una base de $P_2(\mathbb{R})$, l'espai dels polinomis de grau ≤ 2. Considerem els polinomis $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = 2x^2 + 3$ i $w(x) = x^2 + x$. Si en la base B les coordenades de $u(x)$, $v(x)$ i $w(x)$ són:

$$u(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(x)_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w(x)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

respectivament, doneu les coordenades dels vectors de B en base canònica $\{x^2, x, 1\}$.

Solució: La matriu dels vectors $u(x), v(x), w(x)$ en la base B és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

i es comprova fàcilment que té rang 3. Això vol dir que els vectors $u(x), v(x), w(x)$ formen una base, que li direm B'. Així, $P_{B}^{B'} = A$. A més, de les dades del problema tenim que:

$$P_{C}^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

on C indica la base canònica. Per tant:

$$\begin{aligned} P_C^B = P_C^{B'} P_{B'}^B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, els vectors de la base B expressats en la base canònica són:

$$p_1(x) = 2x^2 + 1, \quad p_2(x) = -3x^2 + x, \quad p_3(x) = -x^2 + 1/2.$$

7
Aplicacions lineals

7.1 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + y$;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x^2y^2$;

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+7 \\ 2y \\ x+y+z \end{smallmatrix}\right)$;

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y-x \\ x+y \end{smallmatrix}\right)$;

5) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} xy \\ z \\ x \end{smallmatrix}\right)$.

Solució:

1) És lineal. Tenim:

$$\begin{aligned} f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] &= f\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = (x + x') + (y + y') \\ &= (x + y) + (x' + y') = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$f\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2) No és lineal. Ho demostrem amb un contraexemple: $2f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 2 \neq f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 16$.

3) No és lineal. Ho demostrem amb un contraexemple: $0f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

4) És lineal. Tenim:

$$\begin{aligned} f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right] &= f\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' - x - x' \\ x + x' + y + y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y - x \\ x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' - x' \\ x' + y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$f\left[\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y - \lambda x \\ \lambda x + \lambda y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y - x \\ x + y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

5) No és lineal. Ho provem amb un contraexemple: $2f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \neq f\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$.

7.2 Determineu quines de les següents aplicacions $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ són lineals:

1) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$;

2) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$;

3) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2$.

Solució:

1) És lineal. En general, si E i F són espais vectorials i definim $f : E \to F$ com $f(e) = 0_F$, per a tot $e \in E$, llavors f és lineal. En efecte, si $e_1, e_2 \in E$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, aleshores:

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) = 0_F, \quad \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = \lambda_1 \cdot 0_F + \lambda_2 \cdot 0_F = 0_F.$$

2) És lineal. Si $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b(x) = b_0 + b_1 + b_2x^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors tenim:

$$\begin{aligned}
f(a(x) + b(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)x + (2a_0 + 2b_0 - 3a_1 - 3b_1)x^2 \\
&= (a_0 + a_1x + (2a_0 - 3a_1)x^2) + (b_0 + b_1x + (2b_0 - 3b_1)x^2) \\
&= f(a(x)) + f(b(x)) \\
f(\lambda a(x)) &= f(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) \\
&= \lambda a_0 + (\lambda a_1 + \lambda a_2)x + (2\lambda a_0 - 3\lambda a_1)x^2 \\
&= \lambda(a_0 + a_1x + (2a_0 - 3a_1)x^2) = \lambda f(a(x)).
\end{aligned}$$

3) És lineal. Si $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $b(x) = b_0 + b_1 + b_2x^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, llavors tenim:

$$\begin{aligned}
f(a(x) + b(x)) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)(1 + x) + (a_2 + b_2)(1 + x)^2 \\
&= (a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2) + (b_0 + b_1(1 + x) + b_2(1 + x)^2) \\
&= f(a(x)) + f(b(x)) \\
f(\lambda a(x)) &= f(\lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1(1 + x) + \lambda a_2(1 + x)^2 \\
&= \lambda(a_0 + a_1(1 + x) + a_2(1 + x)^2) = \lambda f(a(x)).
\end{aligned}$$

7.3 Determineu quines de les aplicacions següents són lineals:

1) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}) = a + d$;

2) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, on $f(A) = AB$, essent $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ una matriu fixada;

3) $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on $f(A) = \det(A)$.

Solució:

1) És lineal. En efecte, si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, llavors:

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \lambda' A') &= f\begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' & \lambda b + \lambda' b' \\ \lambda c + \lambda' c' & \lambda d + \lambda' d' \end{pmatrix} = (\lambda a + \lambda' a') + (\lambda d + \lambda' d') \\ &= (\lambda a + \lambda d) + (\lambda' a' + \lambda' d') = \lambda f(A) + \lambda' f(A'). \end{aligned}$$

2) És lineal. Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, llavors:

$$f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)B = \lambda_1 A_1 B + \lambda_2 A_2 B = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2),$$

la segona igualtat per la propietat distributiva del producte de matrius respecte de la suma.

3) No és lineal. Per exemple, perquè el determinant d'una suma de matrius no és igual a la suma dels determinats, com demostra el contraexemple següent:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4 Sigui $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ l'aplicació lineal definida per: $f(1) = 1 + x$, $f(x) = 3 - x^2$ i $f(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Quina és la imatge del polinomi $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$? Calculeu $f(2 - 2x + 3x^2)$.

Solució: Per linealitat, tenim que:

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) &= a_0 \cdot f(1) + a_1 \cdot f(x) + a_2 \cdot f(x^2) \\ &= a_0(1 + x) + a_1(3 - x^2) + a_2(4 + 2x - 3x^2) \\ &= (a_0 + 3a_1 + 4a_2) + (a_0 + 2a_2)x + (-a_1 - 3a_2)x^2. \end{aligned}$$

En particular, $f(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$.

7.5 Estudieu si existeix algun endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(u_i) = v_i$, $i = 1, 2, 3$, on:

1) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$;

2) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$;

3) $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució: Per tal que existeixi un endomorfisme que envii uns vectors donats $u_1, \ldots, u_k$ a uns altres $v_1, \ldots, v_k$ és necessari i suficient que les respectives imatges $v_1, \ldots, v_k$ compleixin totes les relacions lineals que es compleixen entre els vectors $u_1, \ldots, u_k$ ja que les aplicacions lineals preserven combinacions lineals. És a dir, és necessari i suficient que sempre que es compleixi $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0$ per a certs escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ també s'ha de complir que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$. En particular, quan els vectors $u_1, \cdots, u_k$ són linealment independents i, per tant, quan l'única combinació lineal d'ells que dona el vector zero és la combinació trivial, les seves imatges es poden triar com es vulguin perquè la combinació lineal trivial dels vectors $v_1, \ldots, v_k$ també serà el vector zero siguin quins siguin aquests vectors. Per tant, el problema consisteix en identificar en cada cas les relacions lineals entre els u_1, u_2, u_3 i comprovar si les respectives imatges v_1, v_2, v_3 també les compleixen.

1) En aquest cas, els vectors u_1, u_2, u_3 són linealment independents ja que la matriu que els té per columnes és:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
i, per tant, és de rang 3. Per tant, les seves imatges es poden triar arbitràriament. En particular, existeix l'endomorfisme que els envia als vectors v_1, v_2, v_3 indicats. A més, serà únic, ja que u_1, u_2, u_3 són una base de $\mathbb{R}^3$, i qualsevol aplicació lineal queda unívocament determinada per la imatge d'una base qualsevol, la qual, d'acord amb el que hem dit, es pot triar arbitràriament.

2) En aquest cas, els vectors u_1, u_2 són linealment independents (no són múltiple un de l'altre), de manera que les seves imatges es poden triar com vulguem. Però el vector u_3 és combinació lineal de u_1, u_2. Concretament, es té que $u_3 = -u_1 + 3u_2$. Per tant, la imatge de u_3 no pot ser qualsevol, sinó que ha de ser un vector v_3 que sigui la mateixa combinació lineal de les imatges de u_1, u_2; és a dir, tal que $v_3 = -v_1 + 3v_2$ (si $u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$ cal que també $v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$). En aquest cas, això és cert. Per tant, també existeix l'endomorfisme indicat. Però a diferència del cas anterior, no serà únic, ja que els vectors u_1, u_2, u_3 ara no són base. Per tal de tenir unicitat, cal especificar la imatge de qualsevol altre vector u_4 que amb u_1, u_2 formin base.

3) Ara continua essent $u_3 = -u_1 + 3u_2$ com en el cas anterior, però en canvi $v_3 \neq -v_1 + 3v_2$. Per tant, no existeix l'endomorfisme indicat.

7.6 Siguin E i F dos espais vectorials, $f\colon E \to F$ una aplicació lineal, i $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectors d'E. Discutiu les afirmacions següents: demostreu les certes i doneu contraexemples per a les falses.

1) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents.

2) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.

3) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F.

4) Si $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de F, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E.

5) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és un conjunt de generadors d'E, aleshores $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\operatorname{Im} f$.

Solució:

1) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, si un dels vectors v_i és del nucli (és a dir, $f(v_i) = 0$), aleshores les imatges ja no són linealment independents.

2) Aquesta propietat és certa. Suposem que els vectors $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents. Anem a demostrar que els vectors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents. Considerem la combinació lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$. Per linealitat $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = 0_F$, atès que $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ són linealment independents, els escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, són tots nuls. Per tant, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ són linealment independents.

3) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, si $\dim(E) < \dim(F)$, llaors la imatge de qualsevol base d'E no genera F.

4) Aquesta propietat és falsa en general. Per exemple, sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per:
$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
Aleshores els vectors $f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ generen $\mathbb{R}^2$, però els vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ no generen $\mathbb{R}^3$.

5) Aquesta propietat és certa. Sigui $w \in \mathrm{Im}(f)$ i sigui $v \in E$ tal que $f(v) = w$. Per ser $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un conjunt de generadors d'E, existeixen uns escalars $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tals que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Per linealitat, $w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$. Per tant $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ és un conjunt de generadors de $\mathrm{Im}(f)$.

7.7 Per als següents subespais E i F de $\mathbb{R}^4$, esbrineu si existeix una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(u) = 0$ per a tot $u \in E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

1) $E = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

2) $E = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}4\\1\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ i $F = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\-5\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

Solució:

1) Per tal que $f(u) = 0$, per a tot $u \in E$, és necessari i suficient que f envii al vector zero els dos generadors de E (qualsevol altre vector de E n'és combinació lineal i les aplicacions lineals preserven combinacions lineals, així que enviarà qualsevol altre vector $u \in E$ també al vector zero). Per la mateixa raó, per tal que $f(v) = v$, per a tot $v \in F$, és necessari i suficient que f apliqui cada generador de F a ell mateix. Per tant, busquem, si existeix, un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que apliqui els dos generadors de E al vector zero i els de F a ells mateixos. Tal i com s'ha explicat a l'Exercici 5, un tal endomorfisme existirà si els quatre vectors són linealment independents, ja que aleshores les seves imatges es poden triar com es vulgui. Ara, la matriu que té els quatre generadors per columnes és:
$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\2&1&2&1\\-1&0&2&0\\0&2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-2&-1\\0&1&4&1\\0&2&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&2&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
i per tant, és de rang 4, així que són una base de $\mathbb{R}^4$ i l'endomorfisme demanat existeix, i és únic perquè fixem la imatge d'una base. Per tal d'identificar-la explícitament (no ho

demana), només cal expressar un vector genèric com a combinació lineal d'aquesta base. La seva imatge serà aleshores la mateixa combinació lineal de les imatges de la base. Fent això, s'obté que f és l'endomorfisme definit per:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(7x-3y+z-2t)/2\\(7x-3y+z-2t)/2\\-x+y+z\\3x-y+z-t\end{pmatrix}.$$

2) A diferència del cas anterior, els dos generadors de E juntament amb els dos de F no són una família linealment independent, ja que la matriu que els té per columnes és:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&1&-1&0\\2&-5&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&-1&-1\\0&-7&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

i, per tant, és només de rang 3. De fet, deduïm que la quarta columna és combinació lineal de les tres primeres. Concretament, plantejant el sistema d'equacions corresponent i resolent-lo s'obté que:

$$\begin{pmatrix}4\\1\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Per tant, si f ha d'enviar els vectors de E al vector zero i enviar els de F a ells mateixos, en aplicar f en aquesta igualtat, i com que f preserva combinacions lineals, s'hauria de complir que:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

cosa que no és certa. Per tant, no existeix l'endomorfisme f indicat.

7.8 Doneu la matriu associada a les aplicacions lineals següents en les bases canòniques i calculeu la dimensió del nucli i de la imatge:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on $f(x)=3x$;

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\x-y\end{smallmatrix}\right)$;

3) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, on $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+y+z\\y+z\\z\end{smallmatrix}\right)$;

4) $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\left(\begin{smallmatrix}b+c\\c+d\\2a-b+c-d\end{smallmatrix}\right)$;

5) $f:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, on $f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(2a_1-a_0)+(2a_1-a_2)x+(3a_2-2a_1+a_0)x^2+(a_0+a_1+a_2)x^3$.

Solució: En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents. Recordem que el subespai imatge $\mathrm{Im}(f)$ està generat pels vectors columna de $M(f)$ i, per tant, $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}\, M(f)$. Recordem, a més, la fórmula de la dimensió, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim(E)$, si $f : E \to F$ és una aplicació lineal.

1) $M(f) = (3)$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 1$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1 - 0 = 0$.

2) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 2$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2 - 2 = 0$.

3) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

4) $M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - 3 = 1$.

5) $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \mathrm{rg}(M(f)) = 3$ i $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 3 = 0$.

7.9 Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ amb matriu associada:

$$\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix}.$$

Determineu la dimensió de la imatge segons els valors de m.

Solució: Calculem el determinant de la matriu donada:

$$\det \begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & m+1 \end{pmatrix} = m^3 - 3m^2 + 2m = m(m-1)(m-2).$$

Per tant, veiem que si $m \notin \{0, 1, 2\}$, aquest determinant no s'anul·la i el rang de la matriu és 3. En aquest cas, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ i $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. A més, tenim que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Es tracta doncs d'un automorfisme (aplicació lineal bijectiva de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$).

Per a la resta de casos, tenim que $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ i, per tant, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$:

$$m = 0 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$m = 1 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2;$$

$$m = 2 \qquad \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

En cada cas, el subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat, per exemple, per les dues primeres columnes de la matriu corresponent. Resolent els sistemes homogenis les matrius associades dels quals són, en cada cas, les matrius anteriors, obtenim que les bases de $\operatorname{Ker} f$ són: $\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$ si $m = 0$; $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ si $m = 1$; i $\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ si $m = 2$.

7.10 Sigui E un espai vectorial i $B = \{u, v, w, t\}$ una base d'aquest. Sigui f un endomorfisme d'E tal que:

$$f(u) = u + 2w,\ \ f(v) = v + w,\ \ f(w) = 2u + v + w,\ \ f(t) = 2u + 2v + 4w.$$

Escriviu la matriu d'f en la base B, i trobeu una base i la dimensió de la imatge d'f.

Solució: Les columnes de la matriu $M_B(f)$ s'obtenen escrivint les components en base B dels vectors imatges dels vectors de la base B. Així, les components del vector $f(u)$ en base B són $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; les del vector $f(v)$ són $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; les del vector $f(w)$ són $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; i les del vector $f(t)$ són $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Per tant:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com que $M_B(f)$ té rang 3, es té $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. El subespai $\mathrm{Im}(f)$ està generat per les columnes de $M_B(f)$ i les tres primeres columnes són linealment independents. Per tant, una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{u + 2w, v + w, 2u + v + w\}$. Per a obtenir una base del nucli, hem de resoldre el sistema homogeni la matriu associada del qual és $M_B(f)$. Si denotem per a_1, a_2, a_3, a_4 les incògnites, llavors les solucions es poden expressar com:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_3 \\ 3a_3 \\ a_3 \\ -2a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{2u + 3v + w - 2t\}$.

7.11 Trobeu el nucli de l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix}$, calculeu $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i les antiimatges, si en tenen, dels vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solució:

1) El nucli de f està format pels vectors que tenen imatge el vector $0_{\mathbb{R}^3}$; és a dir, el vectors les components dels quals són les solucions del sistema homogeni:

$$x - y = 0, \quad y - z = 0, \quad z - x = 0.$$

Per tant: $\operatorname{Ker} f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

2) $f\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-0\\0-1\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

3) Càlcul de $f^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$: un vector de l'antiimatge s'escriu com la suma d'una antiimatge concreta i un vector del nucli. En aquest cas, coneixem una antiimatge: el vector $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ (apartat anterior) i coneixem el nucli. Per tant:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}:\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

També podem calcular el conjunt antiimatge resolem el sistema d'equacions:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-z\\z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

4) Càlcul de $f^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$: en aquest cas, no coneixem cap antimatge concreta. Per tant, resolem el sistema:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-z\\z-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},$$

i trobem que és incompatible. Per tant, $f^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\emptyset$.

7.12 Determineu si les aplicacions lineals següents són o no bijectives usant la informació que es dóna:

1) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Ker} f=\{0_{\mathbb{R}^n}\}$;

2) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\dim(\mathrm{Im}\, f)=n-1$;

3) $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, amb $n<m$;

4) $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, amb $\mathrm{Im}\, f=\mathbb{R}^n$.

Solució: Recordem que si $f:E\to F$ es una aplicació lineal entre espais vectorials de dimensió finita, aleshores $\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))$.

1) Aplicant la fórmula anterior, tenim que $n=0+\dim(\mathrm{Im}(f))$. Per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f))=n$ i, com que $\mathrm{Im}(f)$ és un subespai de $\mathbb{R}^n$, resulta que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^n$. En conseqüència, f és exhaustiva. A més, com que el nucli només conté el vector zero, f és injectiva. Per tant, f és bijectiva.

2) Com que $\dim(\mathrm{Im}\, f)=n-1$, el subespai $\mathrm{Im}(f)$ no és tot $\mathbb{R}^n$; és a dir, f no és exhaustiva. Tampoc és injectiva, com resulta d'aplicar la fórmula de les dimensions: $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$.

3) Si apliquem la fórmula de les dimensions i tenim en compte que $\dim(\mathrm{Im}(f))\leq n$, resulta:

$$n<m=\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))\leq\dim(\mathrm{Ker}(f))+n$$

d'on obtenim que $\dim(\mathrm{Ker}(f))>1$. Per tant, f no és injectiva ni tampoc potser bijectiva.

4) L'hipòtesi ens diu que f és exhaustiva. Si apliquem la fórmula, resulta que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$ i, per tant, f és injectiva. Per tant, f és bijectiva.

7.13 Per a cadascuna de les aplicacions lineals següents, doneu la matriu associada a l'aplicació en les bases canòniques; doneu la dimensió i una base del nucli i de la imatge de l'aplicació; digueu si l'aplicació és injectiva, exhaustiva, bijectiva o cap de les tres; i determineu l'aplicació inversa, en el cas que existeixi:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ fix;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+7y \end{pmatrix}$;

3) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z+2t \\ y-z+t \\ x-2y+2z \end{pmatrix}$;

4) $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)x + (a_2 - a_0)x^2$;

5) $f : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2$;

6) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, on $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}$;

7) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z-y & x-z \end{pmatrix}$.

Solució: En tots els casos, indiquem per $M(f)$ la matriu d'f en les bases canòniques corresponents.

1) $M(f) = (a)$. Cal distingir dos casos:

- $a \neq 0$: $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}}\}$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$ i $\dim(\operatorname{Im}\ f) = 1$. A més, f és isomorfisme i la inversa ve donada per $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x$.
- $a = 0$: $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$, $\operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{R}}\}$ i $\dim(\operatorname{Im} f) = 0$. En aquest cas, f no és ni injectiva ni exhaustiva i, per tant, no és invertible.

2) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Com que $\operatorname{rg}(M(f)) = 2$, es té que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$. L'aplicació és un isomorfisme, i la inversa té per matriu $M(f^{-1}) = M(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. En aquest cas, $\operatorname{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$, $\operatorname{Ker} f = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. L'aplicació no és injectiva però sí exhaustiva.

4) $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es té que $\operatorname{Im} f = \langle 1 - x^2, -1 + x \rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, $\operatorname{Ker} f = \langle 1 + x + x^2 \rangle$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. L'aplicació no és injectiva ni exhaustiva.

5) $M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ara, $\operatorname{Im} f = \langle 3 + x + 2x^2, -x + x^2, x^2 \rangle$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$, $\operatorname{Ker} f = \{0_{P_2(\mathbb{R})}\}$ i $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$. L'aplicació és un isomorfisme i la inversa té per matriu $M(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. És a dir, $f^{-1}(a_0 + a_1x - a_2x^2) = \frac{a_0}{3} + (\frac{a_0}{3} - a_1)x + (-a_0 + a_1 + a_2)x^2$.

6) $M(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. f és exhaustiva i no injectiva.

7) $M(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Una base de $\operatorname{Im} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Una base de $\operatorname{Ker} f$ és $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. f no és ni injectiva ni exhaustiva.

7.14 Sigui B una matriu invertible $n \times n$. Demostreu que l'aplicació $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = AB$ és un endomorfisme bijectiu.

Solució: És injectiva, ja que:

$$f(A) = f(C) \Rightarrow AB = CB \Rightarrow ABB^{-1} = CBB^{-1} \Rightarrow A = C,$$

donat que existeix B^{-1}.

També és exhaustiva ja que per qualsevol matriu $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, exiteix A tal que $f(A) = D$: prendre $A = DB^{-1}$. En efecte, $f(DB^{-1}) = DB^{-1}B = D$.

Per tant, al ser exhaustiva i injectiva, llavors és bijectiva.

7.15 Per a les aplicacions lineals següents f_1 i f_2, digueu si l'aplicació composició $f = f_2 \circ f_1$ és injectiva, exhaustiva, bijectiva.

1) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, on $f_1 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} z \\ x+y \\ x+2z-y \end{smallmatrix}\right)$ i $f_2 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2x-3z \\ y+4z \end{smallmatrix}\right)$;

2) $f_1 : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ i $f_2 : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, on $f_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2 + a_3x + a_0x^2$ i $f_2(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_2) + (a_0 + a_2)x + (a_0 + a_1)x^2$;

3) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f_1 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x+y \\ y \end{smallmatrix}\right)$ i $f_2 \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} y+z \\ x+y+z \\ y+x \end{smallmatrix}\right)$.

Solució: El caràcter injectiu i/o exhaustiu d'una aplicació lineal $f : E \to F$ es pot determinar a partir del rang de la seva matriu en qualsevol base: (1) f és injectiva si i només si el rang és igual a la dimensió de E (per tant, al nombre de columnes de la matriu), i (2) f és exhaustiva si i només si el rang és igual a la dimensió de F (per tant, al nombre de files de la matriu). Per tant, només cal calcular la matriu de l'aplicació composició en cada cas i calcular-ne el rang, i la matriu de la composició es pot calcular usant que $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2) \cdot M(f_1)$.

1) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 2, que és igual a la dimensió de l'espai d'arribada $\mathbb{R}^2$, però diferent de la de l'espai de partida $\mathbb{R}^3$, l'aplicació és exhaustiva però no injectiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

2) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 3, que és igual a la dimensió de l'espai d'arribada $P_2(\mathbb{R})$, però diferent de la de l'espai de partida $P_3(\mathbb{R})$, l'aplicació és exhaustiva però no injectiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

3) Treballant en les bases canòniques corresponents, les matrius de f_1, f_2 són:

$$M(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$M(f) = M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)\, M(f_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com que el rang de $M(f)$ és 2, que és igual a la dimensió de l'espai de partida $\mathbb{R}^2$, però diferent de la de l'espai d'arribada $\mathbb{R}^3$, l'aplicació és injectiva però no exhaustiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

7.16 Doneu les matrius associades a les aplicacions lineals següents respecte de les bases canòniques:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$;

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$;

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució: Es tracta de trobar les imatges dels vectors de la corresponent base canònica a partir de les imatges dels vectors de l'enunciat. Hi ha tres maneres de procedir: (1) buscant quina combinació lineal és cada vector de la base canònica dels vectors dels quals se'n coneixen les imatges (per linealitat, la imatge del vector de la base canònica és aleshores la mateixa combinació lineal de les imatges que es donen a l'enunciat), (2) anar deduint imatges d'altres vectors fent combinacions lineals de les donades fins arribar a obtenir les imatges de la base canònica, i (3) fent el canvi de base, ja que les dades que donen proporcionen la matriu de f treballant amb base canònica a l'arribada però no a la partida.

1) Aplicant el primer procediment, busquem components dels vectors de la base canònica $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}$ en la base $\binom{1}{1}, \binom{-1}{2}$. Es té que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per tant, utilitzant que les aplicacions lineals preserven les combinacions lineals es té que:

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= f\left(\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{2}{3}\cdot f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} &= f\left(\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot f\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En definitiva, la matriu en bases canòniques de f és:

$$M_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}.$$

2) Aplicant el segon procediment, tenim que:

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = 6\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix}.$$

Anàlogament:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} - 4\,f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\3\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1/2\\-1/3\\1/3\\2/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2/3\\5/3\\-5/3\end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu en base canònica buscada és:

$$M_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix}1/2 & 0\\-1/3 & -2/3\\1/3 & 5/3\\2/3 & -5/3\end{pmatrix}.$$

3) És fàcil comprovar que els vectors de $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\}$ són linealment independents i, per tant, com que $\mathbb{R}^3$ és de dimensió 3, en són una base. Donant-nos les imatges d'aquesta base B ens donen implícitament la matriu de f agafant a $\mathbb{R}^3$ la base B i a $\mathbb{R}^2$ la canònica B_c; és a dir, sabem que:
$$M_{B_c}^{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Ens demanen la matriu $M_{B_c}^{B_c}(f)$, que la podem obtenir aplicant la fórmula de canvi de base, segons la qual (només fem canvi de base a l'espai de partida):
$$M_{B_c}^{B_c}(f) = M_{B_c}^{B}(f) P_{B}^{B_c}.$$
Per tant, només cal trobar la matriu de canvi de base:
$$P_B^{B_c} = (P_{B_c}^{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$
Trobem la inversa utilitzant el mètode de Gauss-Jordan:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
Per tant, la matriu buscada és:
$$M_{B_c}^{B_c}(f) = M_{B_c}^{B}(f) P_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.17 Sigui f un endomorfisme de $P_2(\mathbb{R})$ donat per:
$$f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 3a_0 + (a_0 - a_1)x + (2a_0 + a_1 + a_2)x^2.$$
Doneu la matriu d'f en la base $B = \{1 + x^2, -1 + 2x + x^2, 2 + x + x^2\}$.

Solució: Sigui C la base canònica $\{1, x, x^2\}$. De les dades del problema podem escriure:
$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Per tant:
$$M_B(f) = (P_C^B)^{-1} M_C(f) P_C^B = \begin{pmatrix} 9/4 & 17/4 & 21/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -7/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

7.18 Sigui $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i sigui $B_F = \{v_1, v_2\}$ una base d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial F. Considerem l'aplicació lineal $f\colon E \to F$ definida per:

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x - 2z)v_1 + (y + z)v_2.$$

Trobeu la matriu associada a f en les bases:

1) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.

2) $B_E = \{e_1, e_2, e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

3) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B_F = \{v_1, v_2\}$.

4) $B'_E = \{e_1 + e_2 + e_3, 2e_1 + 2e_3, 3e_3\}$ i $B'_F = \{2v_1, 2v_2\}$.

Solució: De les dades del problema, tenim:

$$M_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{B_F}^{B'_F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$\begin{aligned}
M_{B'_F}^{B_E}(f) &= (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
M_{B_F}^{B'_E}(f) &= M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
M_{B'_F}^{B'_E}(f) &= (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

7.19 Considerem l'endomorfisme $f_N\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per $f_N(A) = NA$, on $N = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

1) Trobeu la matriu associada a f_N en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Calculeu $\ker f_N$ i $\operatorname{Im} f_N$.

3) Trobeu la matriu associada a f_N en la base:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solució:

1) Calculem les imatgesdels vectors de la base canònica i expressem els resultats en la base canònica. Tenim:

$$f_N\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \qquad f_N\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$f_N\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \qquad f_N\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f_N en la base canònica és:

$$M_{\mathrm{CAN}}(f_N)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$\mathrm{Ker}(f_N)=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} : f_N\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

És a dir, $\left(\begin{smallmatrix}x&y\\z&t\end{smallmatrix}\right)$ és del nucli si i només si:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z&y+t\\x+z&y+t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

que equival a dir que $z=-x$, $t=-y$. Per tant:

$$\mathrm{Ker}(f_N)=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-x&-y\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Així, $\dim(\mathrm{Ker}(f_N))=2$.

D'altra banda, $\mathrm{Im}(f_N)$ està generat per les columnes de la matriu $M_{\mathrm{CAN}}(f_N)$; és a dir:

$$\mathrm{Im}(f_N)=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

i, per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f_N))=2$.

3) De les dades del problema, tenim:

$$P_{\mathrm{CAN}}^{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix},$$

d'on resulta que:

$$P_B^{\mathrm{CAN}}=(P_{\mathrm{CAN}}^{B})^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

Finalment, la matriu de f_N en base B és:

$$M_B(f_N)=P_B^{\mathrm{CAN}}M_{\mathrm{CAN}}(f_N)P_{\mathrm{CAN}}^{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&1&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

7.20 Sigui $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

1) Trobeu els subespais Ker$f$ i Imf.

2) Trobeu una base B de $\mathbb{R}^3$ per a la qual la matriu associada f sigui $M_B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solució:

1) El subespai Im(f) està generat per les columnes de la matriu de f. Veiem que les dues últimes columnes són linealmente independents. Per tant:

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Per tant, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$.

Els vectors del nucli són les solucions de $M \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; és a dir, les solucions del sistema $2y + z = 0$, $3z = 0$, que són $x = x, y = z = 0$. Per tant:

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle ,$$

i $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

2) Posem $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & c \end{smallmatrix}\right)$. S'ha de satisfer que $P^{-1}MP = M_B$. Per tant, resolent $MP = PM_B$, on la incògnita és la matriu P, trobem:

$$MP = \begin{pmatrix} 2d+h & 2e+i & 2g+j \\ 3h & 3i & 3j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PM_B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & h & i \end{pmatrix}.$$

D'on resulta el sistema:

$$2d+h=0, \quad 3h=0, \quad 2e+i=a, \quad 3i=d, \quad 2g+j=b, \quad h=0, \quad 3j=e, \quad i=0.$$

Per tant, les possibles matrius P són de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 6j & 2g+j & c \\ 0 & 3j & g \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix},$$

amb $c, g, j \in \mathbb{R}$ i $j \neq 0$ (ja que P ha de ser invertible al ser una matriu de canvi de base). Per exemple, prenent $g = c = 0$ i $j = 1$, obtenim:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una possible base on la matriu de f té forma demanada és:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7.21 Siguin $u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $u_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ vectors de $\mathbb{R}^4$ i E el subespai generat per $B_E = \{u_1, u_2\}$. Siguin $v_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $v_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ vectors de $\mathbb{R}^3$ i F el subespai generat per $B_F = \{v_1, v_2\}$. Definim $f\colon E \to F$ tal que $f(x_1u_1 + x_2u_2) = (x_1 - x_2)v_1 + (x_1 + x_2)v_2$.

1) Trobeu la matriu d'f en les bases B_E i B_F.

2) És f injectiva? És exhaustiva?

3) Siguin $B'_E = \{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ i $B'_F = \{\left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)\}$. Proveu que són bases d'E i F respectivament i doneu la matriu d'f en aquestes noves bases.

Solució: En primer lloc, observem que els vectors u_1 i u_2 són linealment independents i, per tant, formen una base de E. Igualment, el vectors v_1 i v_2 són linealment independents i formen, per tant, una base de F.

1) Per a calcular la matriu $M^{B_E}_{B_F}(f)$, hem de calcular les imatges $f(u_1)$ i $f(u_2)$ i calcular les components dels vectors resultants en la base B_F. Tenim:

$$f(u_1) = v_1 + v_2 \Rightarrow f(u_1)_{B_F} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f(u_2) = -v_1 + v_2 \Rightarrow f(u_2)_{B_F} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Així doncs:

$$M^{B_E}_{B_F}(f) = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

2) El rang de la matriu $M^{B_E}_{B_F}(f)$, que és la dimensió de $\mathrm{Im}(f)$, és 2. Per tant, f és exhaustiva. Per la fórmula de les dimensions, trobem que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ i, per tant, f és injectiva. Per tant, f és un isomorfisme.

3) Només cal comprovar que els vectors donats pertanyen a E i a F respectivament i que són linealment independents. Tenim:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = u_2 - u_1, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = u_1 + u_2.$$

Per tant:

$$P^{B'_E}_{B_E} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té rang 2 i, per tant, els vectors B'_E formen una base de E. Anàlogament, tenim:

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = v_1 - v_2, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 2v_1 - v_2.$$

Per tant:

$$P^{B'_F}_{B_F} = \begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu també té rang 2 i, per tant, els vectors de B'_F formen una base de F. Finalment, la matriu associada a f en les bases B'_E i B'_F és:

$$M_{B'_F}^{B'_E} = (P_{B_F}^{B'_F})^{-1} M_{B_F}^{B_E} P_{B_E}^{B'_E} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.22 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ s'obté respectivament:

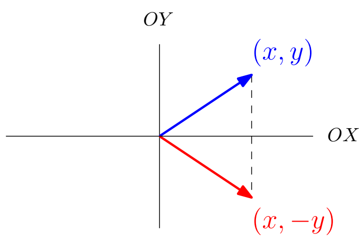
1) la reflexió respecte de l'eix OX;
2) la reflexió respecte de l'eix OY;
3) la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
4) la projecció ortogonal sobre l'eix OY;
5) un escalat de factor k;
6) una rotació en sentit antihorari d'angle α amb centre l'origen.

Solució:

1) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

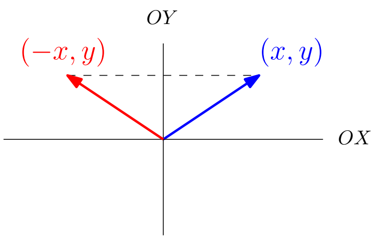
que efectivament és la seva reflexió respecte de l'eix OX.



2) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix},$$

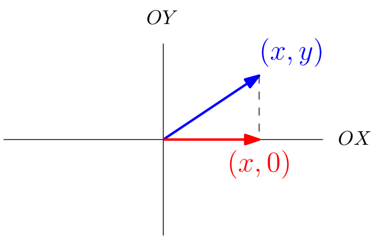
que efectivament és la seva reflexió respecte de l'eix OY.



3) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

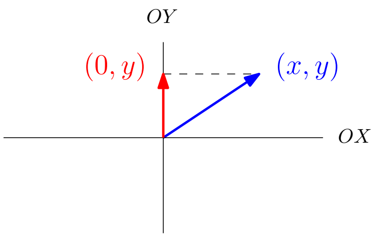
que efectivament és la projecció perpendicular del vector sobre l'eix OX.



4) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

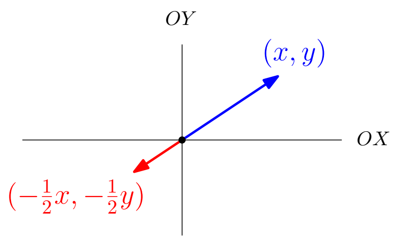
que efectivament és la projecció perpendicular del vector sobre l'eix OY.



5) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix},$$

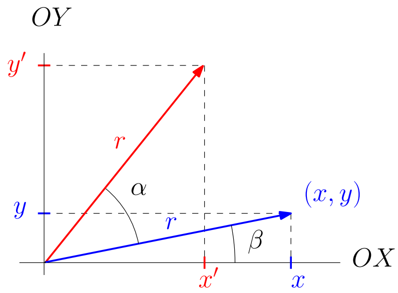
que efectivament és el producte del vector per k. A la figura hem fet $k = -1/2$.



6) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari.



$x = r\cos\beta \qquad y = r\sin\beta$

$x' = r\cos(\alpha+\beta) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$
$= (r\cos\beta)\cos\alpha - (r\sin\beta)\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$y' = r\sin(\alpha+\beta) = r(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$
$= (r\cos\beta)\sin\alpha + (r\sin\beta)\cos\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha$

Observació. Una altra manera de raonar-ho és adonar-se que les columnes de les matrius que ens donen a cada apartat són efectivament les imatges de la base canònica $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ de $\mathbb{R}^2$ per la corresponent transformació. Per exemple, per la reflexió respecte de l'eix OX el primer vector de la base queda fix, ja que està sobre l'eix, mentre que el segon canvia el seu sentit, de manera la base anterior s'aplica respectivament als vectors $\binom{1}{0}$ i $\binom{0}{-1}$, que efectivament són les columnes de la primera matriu. Anàlogament, per la projecció perpendicular sobre l'eix OX s'apliquen respectivament als vectors $\binom{1}{0}$ (ja és un vector d'aquest eix, així que coincideix amb la seva projecció sobre aquest eix) i $\binom{0}{0}$ (en ser perpendicular a l'eix sobre el qual es projecta, la seva projecció perpendicular redueix simplement a l'origen, que correspon al vector zero). En el cas de la rotació d'angle α en sentit antihorari, el primer vector de la base efectivament s'aplica al vector $\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ mentre que el segon s'aplica al $\binom{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, i d'aquí la matriu de l'enunciat.

7.23 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^2$ següents:

1) una rotació de 30° en sentit antihorari seguida d'una reflexió respecte a l'eix OY;

2) una projecció ortogonal sobre l'eix y, seguida d'un escalat de factor $k = 1/2$;

3) un escalat de factor $k = 2$, seguida d'una rotació de 45° en sentit antihorari seguit d'una reflexió respecte a l'eix OY.

Solució: Notem per R_α la rotació d'angle α en sentit antihorari; per S_{OY} la simetria respecte de l'eix OY; per P_{OY} la projecció sobre l'eix OY; i per E_k l'escalat de factor k. Segons el problema 7.22, les matrius associades a aquestes transformacions en base canònica són:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad S_{OY} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{OY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

1) En aquest cas, tenim:
$$R_{30^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$
Per tant, la matriu de la composició demanada és:
$$S_{OY} \circ R_{30^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

2) La matriu de la composició demanada és:
$$E_{1/2} \circ P_{OY} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3) En aquest cas, tenim:
$$R_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$
Per tant, la matriu de la composició demanada és:
$$S_{OY} \circ R_{45^\circ} \circ E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7.24 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 és la projecció ortogonal sobre l'eix OX;
2) f_1 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari d'angle θ_2;
3) f_1 és la reflexió respecte l'eix OX i f_2 és la reflexió respecte l'eix OY;
4) f_1 és la projecció ortogonal sobre l'eix OY i f_2 la rotació en sentit antihorari d'angle θ.

Solució: Comprovem en cada cas si es satisfà la corresponen igualtat entre les matrius associades en base canònica; és a dir, comprovem si $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$, donat que $M(f_1 \circ f_2) = M(f_1)M(f_2)$ i $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)M(f_1)$. Tenim en compte, a més, les matrius associades donades al problema 7.22.

1) En aquest cas la igualtat és certa, ja que:
$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(f_2)M(f_1).$$

2) En aquest cas la igualtat és certa, ja que, tenint en compte les fórmules trigonomètriques que donen $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ i $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ en funció del sinus i el cosinus dels angles θ_1 i θ_2:
$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$
$$M(f_2)M(f_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2+\theta_1) & -\sin(\theta_2+\theta_1) \\ \sin(\theta_2+\theta_1) & \cos(\theta_2+\theta_1) \end{pmatrix}$$
d'on deduïm que $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$.

3) La igualtat és certa, ja que:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(f_2)M(f_1).$$

4) En aquest cas la igualtat no és certa si $\theta \neq 0°$, ja que, d'una banda tenim:

$$M(f_1)M(f_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

i de l'altra:

$$M(f_2)M(f_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\theta = 0°$, les dues composicions són iguals a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Observem, però, que si $\theta = 0°$, llavors f_2 és la aplicació identitat.

7.25 Considerem les aplicacions lineals associades a les matrius:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Observeu que si les apliquem a un vector $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ s'obté respectivament:

1) la reflexió respecte del pla $z = 0$;
2) la reflexió respecte del pla $y = 0$;
3) la reflexió respecte del pla $x = 0$;
4) la projecció ortogonal sobre el pla $z = 0$;
5) la projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;
6) la projecció ortogonal sobre el pla $x = 0$;
7) una rotació d'angle α respecte a l'eix OZ en sentit antihorari si observem el pla $z = 0$ des del semiplà $z > 0$;
8) una rotació d'angle α respecte a l'eix OY en sentit antihorari si observem el pla $y = 0$ des del semiplà $y > 0$;
9) una rotació d'angle α respecte a l'eix OX en sentit antihorari si observem el pla $x = 0$ des del semiplà $x > 0$.

Solució:

1) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ -z\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $z = 0$, ja que només canvia el signe de la tercera coordenada.

2) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ -y\\ z\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $y = 0$, ja que només canvia el signe de la segona coordenada.

3) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva reflexió respecte del pla $x = 0$, ja que només canvia el signe de la primera coordenada.

4) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció perpendicular sobre el pla $z = 0$.

5) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ 0\\ z\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció sobre el pla $y = 0$.

6) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

que efectivament és la seva projecció sobre el pla $x = 0$.

7) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ z \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OZ, ja que deixa fixa la tercera coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle α en el pla XY.

8) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha + z\sin\alpha \\ y \\ -x\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OY, ja que deixa fixa la segona coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle $-\alpha$ en el pla XZ, que és el mateix que una rotació d'angle α en sentit antihorari respecte a l'eix OY.

9) La imatge d'un vector genèric és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y\cos\alpha - z\sin\alpha \\ y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{pmatrix},$$

que efectivament són les coordenades del vector que s'obté després de girar-lo d'un angle α en sentit antihorari al voltant de l'eix OX, ja que deixa fixa la primera coordenada i les altres dues corresponen a una rotació d'angle α en el pla YZ

També es pot raonar com a l'Exercici 22, buscant les imatges de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ per cadascuna de les transformacions.

7.26 Doneu la matriu de la composició de les aplicacions lineals de $\mathbb{R}^3$ següents:

1) una reflexió respecte el pla $x = 0$, seguida d'una projecció ortogonal sobre el pla $y = 0$;

2) una rotació de 45° en sentit antihorari respecte l'eix OY, seguida d'un escalat de factor $k = \sqrt{2}$;

3) una rotació de 30° en sentit antihorari respecte l'eix OX, seguida d'una rotació de 30^o en sentit antihorari respecte l'eix OZ, seguida d'un escalat de factor $k = 1/3$.

Solució: Notem per S_π la simetría respecte del pla π; P_π la proyecció sobre el pla π; $R_{\alpha,r}$ la rotació d'angle α en sentit antihorari respecte de la recta r; i per E_k l'escalat de factor k. Segons el problema 7.25, les matrius associades a les transformacions de l'enunciat són:

$$S_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{y=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$$R_{\alpha,OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha,OY} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_{\alpha,OZ} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Tenim:

$$P_{y=0} \circ S_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Tenim:

$$E_{\sqrt{2}} \circ R_{45^\circ,OY} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Tenim:

$$\begin{aligned} E_{1/3} \circ R_{30^\circ,OZ} \circ R_{30^\circ,OX} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= 1/6 \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1 & 3/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.27 Siguin $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicacions lineals. Determineu si $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ quan:

1) f_1 és un escalat de factor k i f_2 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ;

2) f_1 és una rotació en sentit antihorari respecte l'eix OX d'angle θ_1 i f_2 és la rotació en sentit antihorari respecte l'eix OZ d'angle θ_2.

Solució: Comprovem en cada cas si es satisfà la corresponen igualtat entre les matrius associades en base canònica; és a dir, comprovem si $M(f_1)M(f_2) = M(f_2)M(f_1)$, donat que $M(f_1 \circ f_2) = M(f_1)M(f_2)$ i $M(f_2 \circ f_1) = M(f_2)M(f_1)$. Tenim en compte, a més, les matrius associades donades al problema 7.25.

1) En aquest cas, sí que commuten les transformacions. En efecte, tenim:

$$\begin{aligned} M(f_1)M(f_2) &= \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta & 0 \\ k\sin\theta & k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \\ M(f_2)M(f_1) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cos\theta & -k\sin\theta & 0 \\ k\sin\theta & k\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) En aquest cas les transformacions no commuten, ja que:

$$
\begin{aligned}
M(f_1)M(f_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 & \cos\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 & \sin\theta_1 \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
M(f_2)M(f_1) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \cos\theta_1 & \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \cos\theta_1 & -\cos\theta_2 \sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

8
Diagonalització

8.1 Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els subespais de vectors propis de les matrius següents. Determineu quines són diagonalitzables i doneu, quan sigui possible, una base en la que diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Solució:

1) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = k^2 - 3k - 4 = (k+1)(k-4).$$

Per tant, els valors propis són -1 i 4 amb multiplicitat 1 (simples). Com que hi ha 2 valors propis diferents i la dimensió de l'espai és 2, la matriu diagonalitza.

Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $E_4 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. En efecte, els vectors de E_{-1} i de E_4 són, respectivament, les solucions del sistemes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Una base en la que la matriu diagonalitza és, per tant, $\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \}$ i la matriu diagonal associada en aquesta base és $\mathrm{Diag}(-1, 4)$. El canvi de base vé donat per:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = k^2 - 1 = (k+1)(k-1).$$

Per tant, els valors propis són -1 i 1 amb multiplicitat 1 (simples). Com que hi ha 2 valors propis diferents i la dimensió de l'espai és 2, la matriu diagonalitza.

Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $E_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, que són, respectivament, les solucions dels sistemes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, una base en la que la matriu diagonalitza és $\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, 1)$. El canvi de base vé donat per:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 3-k & 1 & 1 \\ 2 & 4-k & 2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = -k^3 + 10k^2 - 28k + 24 = -(k-6)(k-2)^2.$$

Els valors propis són 6, simple ($m_6 = 1$), i 2, doble $m_2 = 2$. Els subespais de vectors propis associats són $E_6 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $E_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, que són, respectivament, les solucions dels sitemes d'equacions:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que $\dim(E_6) = m_6 = 1$ i $\dim(E_2) = m_2 = 2$, la matriu és diagonalitzable. Diagonalitza en la base $\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(6, 2, 2)$. El canvi de base és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^3.$$

Per tant, hi ha un valor propi, 1, de multiplicitat 3: $m_1 = 3$. El subespai associat al valor propi és $E_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, que està format per les solucions del sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Com que $\dim(E_1) = 1 < m_1 = 3$, la matriu no és diagonalitzable.

5) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & -3 & 3 \\ 3 & -5-k & 3 \\ 6 & -6 & 4-k \end{vmatrix} = -k^3 + 12k + 16 = -(k-4)(k+2)^2.$$

Per tant, hi ha dos valors propis: 4, simple, i -2, doble. Els subespais associats als valors propis són:

$$E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La matriu és diagonalitzable, donat que la multiplicitat de cada valor propi coincideix amb la dimensió del corresponent subespai propi. Diagonalitza en la base $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(4, -2, -2)$.

6) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 \\ -4 & 4-k & 0 \\ -2 & 1 & 2-k \end{vmatrix} = -(k-2)^3.$$

La matriu té un valor propi 2 de multiplicitat 3. El subespai associat al valor propi és $E_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Com que $\dim(E_2) \neq 3$, la matriu no és diagonalitzable.

7) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & -1 & -1 \\ 1 & -1-k & 0 \\ 1 & 0 & -1-k \end{vmatrix} = -(k+1)(k^2+1).$$

Com que la matriu només té un valor propi real, no és diagonalitzable.

8) El polinomi característic és (desenvolupant per la primera columna):

$$p(k) = \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 1 \\ -4 & 12 & -13 & 6-k \end{vmatrix} = (-k) \cdot \begin{vmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -k & 1 \\ 12 & -13 & 6-k \end{vmatrix} + 4$$
$$= k^4 - 6k^3 + 13k^2 - 12k + 4 = (k-1)^2(k-2)^2.$$

La matriu té valors propis 1 i 2, els dos dobles. Els subespais associats als valors propis són $E_1 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, $E_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. La matriu no és diagonalitzable perquè les multiplicitats dels valors propis no coincideixen amb les dimensions dels corresponents subespais propis.

9) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} -2-k & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1-k & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1-k & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -2-k \end{vmatrix} = (k-1)(k+1) \cdot \begin{vmatrix} -2-k & 4 \\ 4 & -2-k \end{vmatrix}$$
$$= (k-1)(k+1)((2+k)^2 - 16) = (k+1)(k+6)(k-2)(k-1).$$

La matriu és diagonalitzable perquè té quatre valors propis diferents. Els subespais associats als valors propis són $E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \rangle$, $E_{-6} = \langle \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1\\4\\2\\1 \end{pmatrix} \rangle$, $E_1 = \langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \rangle$. La matriu diagonalitza en la base $\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\4\\2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \}$ i la matriu diagonal associada és $\mathrm{Diag}(-1, -6, 2, 1)$.

8.2 Sigui J la matriu de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ formada íntegrament per uns. Trobeu una base de $\mathbb{R}^5$ que estigui formada per un vector propi de J de valor propi 5 i per quatre vectors propis de valor propi 0.

Solució: Calculem en primer lloc el polinomi característic de J:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \lambda^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \lambda^4(-A + (1-\lambda))$$

on hem fet: (1) restem a cada fila la fila següent; (2) treiem λ factor comú de les quatre primeres files; (3) desemvolupem per la cinquena columna. On, a més, A és el determinant:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

(desenvolupant, per exemple, per la primera columna). Finalment, tenim:

$$p(\lambda) = \lambda^4(4 + 1 - \lambda) = \lambda^4(5 - \lambda).$$

Per tant, els valors propies de J són $\lambda = 0$, amb multiplicitat algebraica 4, i $\lambda = 5$, simple. Calculem els subespais propis. El supespai E_0 és el conjunt de solucions del sistema $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$; és a dir:

$$E_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

El supespai E_4 és el conjunt de solucions dels sistema:

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}.$$

Restant a cada fila la fila posterior, obtenim el sistema equivalent:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5.$$

Per tant:

$$E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

La base buscada és doncs:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

8.3 Trobeu els valors i vectors propis dels endomorfismes següents. En cas que siguin diagonalitzables, doneu una base en què diagonalitzin i la matriu diagonal associada.

1) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, on $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+4z \\ 3x-4y+12z \\ x-2y+5z \end{pmatrix}$.

2) $f\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$, on:

$$f(a+bx+cx^2) = (5a+6b+2c) - (b+8c)x + (a-2c)x^2.$$

3) $f\colon P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$, on:

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = (a+b+c+d) + 2(b+c+d)x + 3(c+d)x^2 + 4dx^3.$$

Solució:

1) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 2-k & 0 & 4 \\ 3 & -4-k & 12 \\ 1 & -2 & 5-k \end{vmatrix} = -k^3 + 3k^2 - 2k = -k(k-1)(k-2).$$

Els subespais associats als valors propis són:

$$E_0 = \operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,\ E_1 = \operatorname{Ker}(f-I) = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ E_2 = \operatorname{Ker}(f-2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Com que les multiplicitats algebràiques coincideixen amb les corresponents dimensions dels subespais propis, l'endomorfisme és diagonalitzable i ho fa en la base $\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ i la matriu diagonal associada és $\operatorname{Diag}(0,1,2)$.

2) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 5-k & 6 & 2 \\ 0 & -1-k & -8 \\ 1 & 0 & -2-k \end{vmatrix} = -k^3 + 2k^2 + 15k - 36 = -(k+4)(k-3)^2.$$

Els subespais associats als valors propis són:

$$E_{-4} = \operatorname{Ker}(f+4I) = \langle 3x^2 + 8x - 6 \rangle, \quad E_3 = \operatorname{Ker}(f-3I) = \langle x^2 - 2x + 5 \rangle.$$

L'endomorfisme no és diagonalitzable, ja que $\dim(E_3) \neq 2$.

3) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-k & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3-k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4-k \end{vmatrix} = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4).$$

Els subespais associats als valors propis són:

$$E_1 = \langle 1 \rangle, \; E_2 = \langle 1 + x \rangle, \; E_3 = \langle 3 + 4x + 2x^2 \rangle, \; E_4 = \langle 8 + 12x + 9x^3 + 3x^3 \rangle.$$

Atès que l'endomorfisme té quatre valors propis diferents, aquest diagonalitza respecte de la base $\{1, 1+x, 3+4x+2x^2, 8+12x+9x^2+3x^3\}$, essent la matriu diagonal associada $\operatorname{Diag}(1,2,3,4)$.

8.4 Trobeu els valors i vectors propis de l'endomorfisme $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definit per:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}.$$

Solució: Considerem la base canònica C de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En aquesta base, la matriu de f és:

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i el polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Per tant, els valors propis són -1, -2 i 1, de multiplicitat algebraica 1, 1 i 2, respectivament. Els subespais associats als valors propis són:

$$E_{-1} = \langle \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad E_{-2} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle, \quad E_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

L'endomorfisme f diagonalitza perquè la multiplicitat algebraica de λ coincidex amb $\dim(E_\lambda)$, per a cada valor propi λ de f.

8.5 Discutiu la diagonalització de les matrius següents sobre $\mathbb{R}$ en funció dels seus paràmetres:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $\begin{pmatrix} c & 2a & 0 \\ b & 0 & a \\ 0 & 2b & -c \end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$,

6) $\begin{pmatrix} 2a-1 & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1 & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1 \end{pmatrix}$,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució:

1) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} a-k & b \\ -b & -k \end{vmatrix} = k^2 - ak + b^2.$$

El discriminant d'aquest polinomi de segon grau és $a^2 - 4b^2$. Si $a^2 - 4b^2 < 0$, no hi ha cap valor propi real i, per tant, la matriu no diagonalitza. Si $a^2 - 4b^2 > 0$, llavors hi ha dos valors propis reals i diferents i, per tant, la matriu diagonalitza. Estudiem ara què passa si $a^2 - 4b^2 = 0$; és adir, si $a = \pm 2b$. Resolent l'equació $p(k) = 0$ en aquest cas, trobem que hi ha un valor propi $k = a/2$ amb multiplicitat 2. El subespai propi $E_{a/2}$ ve donat per l'equació $bx + by = 0$, si $a = 2b$, o per l'equació $bx - by = 0$, si $a = -2b$. En els dos casos, si $b \neq 0$, el subespai té dimensió 1 i, per tant, la matriu no diagonalitza. Però el subespai de vectors propis té dimensió 2 si $b = 0$ i, en conseqüència, la matriu diagonalitza. Resumint: la matriu diagonalitza si i només si o bé $a^2 - 4b^2 > 0$ o bé $a = b = 0$.

2) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ a & 1-k & 0 \\ b & c & 2-k \end{vmatrix} = (1-k)^2(2-k).$$

Els subespais propis E_1 i E_2 venen donats, respectivament, pels sistemes següents:

$$E_1 : \quad ax = 0, bx + cy + z = 0; \qquad E_2 : \quad x = 0, y = 0.$$

D'aqui resulta que $E_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, és a dir $\dim(E_2) = 1$. Pel que fa a E_1, tenim: si $a \neq 0$, el rang del sistema és 2 i, per tant, $\dim(E_1) = 1$, i si $a = 0$, el rang del sistema és 1 i, per tant,

$\dim(E_1) = 2$. Per tal que la matriu diagonalitzi s'ha de complir que $\dim(E_\lambda)$ sigui igual a la multiplicitat algebraica de λ, per a tot valor propi λ. Per tant, la matriu és diagonalitzable si i nomès si $a = 0$.

3) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} a-k & b & 0 \\ 0 & -1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{vmatrix} = (a-k)(1-k)(-1-k).$$

Si $a \neq \pm 1$, llavors la matriu té tres valors propis diferents i, per tant, diagonalitza. Estudiem què passa si $a = 1$ o si $a = -1$. Si $a = 1$, llavors hem de veure quan $\dim(E_1) = 2$. Si $a = 1$, el subespai E_1 ve donat per $x = x, y = 0, z = z$ i té dimensió 2. Per tant, la matriu diagonalitza. Si $a = -1$, hem de veure quan $\dim(E_{-1}) = 2$. Si $a = -1$, el subespai E_{-1} ve donat per $x = x, by = 0, z = z$. Per tal que E_{-1} tingui dimensió 2, el paràmetre b ha de ser 0. Per tant, quan $a = -1$ la matriu diagonalitza si i només si $b = 0$. Resumint: la matriu diagonalitza si i només si $a = \pm 1$ o $a = 1$ o $a = -1$ i $b = 0$.

4) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} c-k & 2a & 0 \\ b & -k & a \\ 0 & 2b & -c-k \end{vmatrix} = k(k^2 - (c^2 + 4ab)).$$

Si $c^2 + 4ab < 0$, llavors només hi ha un valor propi real i, per tant, la matriu no diagonalitza. Si $c^2 + 4ab > 0$, llavors hi ha tres valors propis reals diferents i, per tant, la matriu diagonalitza. Si $c^2 + 4ab = 0$, llavors la matriu té el valor propi $k = 0$ amb multiplicitat 3. En aquest cas, la matriu només diagonalitza si i només si és la matriu zero; és a dir, si i només si $a = b = c = 0$. Resumint: la matriu diagonalitza si i només si $c^2 + 4ab > 0$ o si $a = b = c = 0$.

5) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-k \end{vmatrix} = (1-k)^2(2-k)(b-k).$$

Si $b \neq 1, 2$, llavors la matriu té valors propis 1, doble, 2, simple, i b, simple. La matriu diagonalitza si i només si $\dim(E_1) = 2$. El subespai E_1 ve donat pel sistema d'equacions $x = x, ay = 0, z = 0, t = 0$. Per tal que E_1 tingui dimensió 2, ha de ser $a = 0$. Per tant, si $b \neq 1, 2$, la matriu diagonalitza si i només si $a = 0$. Si $b = 1$, la matriu té valors propis 1, triple, i 2, simple. Diagonalitza si i només si $\dim(E_1) = 3$. Però E_1 ve donat per $x = x, y = y, z = 0, t = -ay$, i té, per tant, dimensió 2. Per tant, si $b = 1$, la matriu no diagonalitza. Si $b = 2$, la matriu té valors propis 1, doble, i 2, doble. Diagonalitza si i només si $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 2$. Però E_2 ve donat per $x = y = t = 0, z = z$ i té dimensió 1. Per tant, si $b = 2$, la matriu no diagonalitza. Resumint: la matriu diagonalitza si i només si $b \neq 1, 2$ i $a = 0$.

6) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 2a-1-k & 1-a & 1-a \\ a-1 & 1-k & 1-a \\ a-1 & 1-a & 1-k \end{vmatrix} = (a-k)^2(1-k).$$

Si $a = 1$, la matriu és la identitat, que és una matriu diagonal. Si $a \neq 1$, la matriu té valors propis a, doble, i 1, simple. Per tant, si $a \neq 1$, la matriu diagonalitza si i només si $\dim(E_a) = 2$. Però si $a \neq 1$, E_a ve donat pel sistema $x = y + z$, i té, per tant, dimensió 2. Per tant, si $a \neq 1$, la matriu diagonalitza. Resumint: la matriu diagonalitza per a qualsevol valor de a.

7) El polinomi característic és:

$$p(k) = \begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ b & a-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k \end{vmatrix} = (1-k)(2-k)(a-k).$$

Si $a \neq 1, 2$, llavors la matriu té tres valors propis diferents i, per tant, diagonalitza. Si $a = 1$, la matriu té valors propis 1, doble, i 2, simple. En aquest cas, la matriu diagonalitza si i només si $\dim(E_1) = 2$. Però E_1 ve donat per $bx = 0, y = y, z = 0$. Si $b \neq 0$, tenim que $\dim(E_1) = 1$ i si $b = 0$, llavors $\dim(E_1) = 2$. Per tant, si $a = 1$, la matriu diagonalitza si i només si $b = 0$. Si $a = 2$, la matriu té valors propis 1, simple, i 2, doble. Diagonalitza si i nomóes si $\dim(E_2) = 2$. Però en aquest cas, E_2 ve donat per $x = 0, y = y, z = z$ i té, per tant, dimensió 2. Resumint: la matriu diagonalitza si $a \neq 1$ o bé si $a = 1$ i $b = 0$.

8.6 Siguin f un endomorfisme d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i $u \in E$ un vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que:

1) $-u$ és un vector propi de f de valor propi λ;

2) u és un vector propi de f^2 de valor propi λ^2.

Solució: Si u és un vector propi de valor propi λ, llavors $f(u) = \lambda u$.

1) En aquest cas, tenim:
$$f(-u) = (-1)f(u) = -\lambda u = \lambda(-u).$$
Per tant, $-u$ és un vector propi de valor propi λ.

2) Ara tenim:
$$f(f(u)) = f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u.$$
Per tant, u és un vector propi de f^2 de valor propi λ^2.

8.7 Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial i f un endomorfisme de E. Demostreu que f és bijectiu si i només si 0 no és valor propi d'f.

Solució: L'escalar 0 és valor propi de f si i només si hi ha algun vector $u \neq 0_E$ tal que $f(u) = 0 \cdot u = 0_E$; és a dir, si i només si $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Però sabem que f és injectiu si i només si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Per tant, f és injectiu si i només si 0 no és valor propi. Per acabar la demostració notem que, com a conseqüència la fórmula de les dimensions, tot endomorfisme injectiu és exhaustiu.

8.8 Demostreu que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ és una matriu triangular superior, amb els elements de la diagonal principal diferents dos a dos, aleshores A és diagonalitzable.

Solució: El polinomi característic serà de la forma $(-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, on λ_i és l'i-èsim element de la diagonal principal. Al ser tots diferents, llavors hi haurà exactament n vectors propis linealment independents i, per tant, diagonalitza.

8.9 Raoneu si existeix algun endormorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifiqui les condicions que s'especifiquen a continuació. En cas que existeixi, determineu-lo, calculeu el seu polinomi característic i digueu si és o no diagonalitzable.

1) Tal que $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ són vectors propis de valor propi 1 i $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ és un vector propi de valor propi 0.

2) Tal que $\mathrm{Ker}(f) = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 5x + y - 2z = 0\}$ i $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ és un vector propi de valor propi $-1/2$.

3) Tal que $f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

4) Tal que $\mathrm{Ker}(f) = \langle\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$ i $F = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ sigui el subespai vectorial dels vectors propis de valor propi 2.

Solució:

1) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable. Els vectors $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ són linealment independents i, per tant, formen una base de $\mathbb{R}^3$. Sabem que si fixem les imatges dels vectors d'una base, aleshores existeix un únic endomorfisme satisfent les condicions. En aquest cas, sabem que:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En aquesta base, la matriu de f és:

$$M_B(f) = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

D'aquí, el polinomi característic és $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2$. Per tant, la matriu de f en la base canónica C és:

$$M_C(f) = PDP^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\2 & 2 & -4\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \text{on} \quad P = P_C^B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

L'endomorfisme f ve donat en base canònica per les fórmules:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M_C(f)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x-y+4z\\2x+2y-4z\\z\end{pmatrix}.$$

2) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable. Els vector dels nucli són vectors propis de valor propi associat 0. Una base del nucli és:
$$E_0 = \operatorname{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Per tant, les condicions que ha de complir l'endomorfisme f són:
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ara bé, la matriu:
$$P = P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
té rang 3 i, per tant, les seves columnes formen una base B de $\mathbb{R}^3$ (C és la base canònica). Sabem que si fixem les imatges dels vectors de una base, llavors existeix un únic endomorfisme que satisfà les condicions. Per tant, existeix l'endomorfisme f i la seva matriu en base B és diagonal:
$$M_B(f) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$
Per tant, el polinomi característic de f és $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 1/2)$ i la matriu de f en base canònica és:
$$M_C(f) = PDP^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
I en base canònica les fórmules de f són:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -5x - y + 2z \\ -5x - y + 2z \\ -5x - y + 2z \end{pmatrix}.$$

3) L'endomorfisme existeix, però no és diagonalitzable. Els vectors $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ y $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ són linealment independents i, per tant, formen una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Això implica que hi ha un únic endomorfisme f que satisfà les condicions demanades. En la base B la matriu de f és:
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ja que les condicions del problema es poden escriure com $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = -v_1 + v_2 + v_3$. Per tant, el polinomi característic de f és $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$. Ara bé, l'espai propi E_1 té dimensió 1, ja que $\dim E_1 = 3 - \operatorname{rang}(M_B(f) - Id) = 3 - 2 = 1$, que no coincideix amb la multiplicitat algebraica del valor propi 1. Per tant, f no diagonalita. La matriu de f en base canònica c és:
$$M_C(f) = PM_B(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on } P = P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les fórmules de f en base canònica són:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M_C(f)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-y\\y+z\\z\end{pmatrix}.$$

4) L'endomorfisme existeix i és diagonalitzable. Una base del subespai F és $F = \langle \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\rangle$. Per tant, es demana si existeix un endomorfisme tal que:

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Com que els vectors $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ formen una base de $\mathbb{R}^2$, aquest endomorfisme f existeix, ja que estem fixant les imatges dels vectors d'una base. A més, està clar que els vectors d'aquesta base B són vectors propis (de valors propis 0, 2 i 2, respectivament). Per tant, l'endomorfisme f diagonalitza. La matriu de f en base B i la matriu del canvi de base de B a C (base canònica) són, respectivament:

$$M_B(f) = D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, \qquad P = P_C^B = \begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Per tant, la matriu de f en base canònica és:

$$M_C(f) = PDP^{-1} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\2&2&0\end{pmatrix},$$

i les fórmules de f en base canónica són:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2x+2y\end{pmatrix}.$$

El polinomi característic és $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2$.

8.10 Considereu l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}ax-y\\x+y+z\\2z\end{smallmatrix}\right)$, on a és un paràmetre real.

1) Doneu la dimensió de $\mathrm{Im}(f)$ segons els valors de $a \in \mathbb{R}$.

2) És f diagonalitzable per a $a = 3$?

3) Doneu condicions sobre a per tal que f tingui tots els seus valors propis reals.

Solució:

1) La matriu associada a f en base canònica és:

$$M(f) = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

que té determinant $2(a+1)$. Per tant, si $a \neq -1$, la matriu té rang 3 i, per tant, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ (és a dir, la imatge és $\mathbb{R}^3$ i f és exhaustiva). Si $a = -1$, observem que les dues primeres columnes són iguals i, per exemple, la primera i la tercera columnes són independents i generen la imatge: és a dir, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ si $a = -1$.

2) El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a + 1).$$

Si $a = 3$, llavors $p(\lambda) = -(\lambda-2)^3$. L'espai de vectors propis E_2 és el subespai de les solucions del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

És a dir: $E_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Com que la multiplicitat algebraica és 3 i $\dim(E_2) = 1$, f no diagonalitza.

3) Hem vist a l'apartat anterior que $p(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a + 1)$. Per tant, f té totes les arrels reals si, i només si, el discriminant del factor de segon grau de $p(\lambda)$ és positiu o 0. Però:

$$\text{discriminant}(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a + 1) = (a+1)^2 - 4(a+1) = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$$

Per tant, f té totes les arrels reals si i només si $a \geq 3$ o $a \leq -1$.

8.11 Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Quina relació hi ha entre els valors propis d'A i els d'A^k? I entre els vectors propis?

2) Demostreu que si la matriu A es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on P és una matriu invertible, aleshores $A^k = PD^kP^{-1}$.

3) Fent ús de l'apartat anterior, calculeu:

$$\text{i)} \quad \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100}, \qquad \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2001}, \qquad \text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{70}.$$

Solució:

1) Sigui λ un valor propi de A i $u \neq \vec{0}$ un vector propi associat; és a dir, $A \cdot v = \lambda \cdot v$. Afirmem que v és vector propi de A^k amb valor propi λ^k. Ho demostrem per inducció sobre $k \geq 1$. Per a $k = 1$, és la hipòtesi. Suposem que $k \geq 1$ i que v és un vector propi de A^k amb valor propi λ^k. Veiem que v és un vector propi de A^{k+1} amb valor propi λ^{k+1}. Tenim:

$$A^{k+1} \cdot v = A^k A \cdot v = A^k \cdot \lambda v = \lambda A^k \cdot v = \lambda \cdot \lambda^k v = \lambda^{k+1} v,$$

la penúltima igualtat per hipòtesi d'inducció.

Per tant, hem demostrat que si λ és un valor propi d'A, llavors λ^k és un valor propi d'A^k i els vectors propis associats són els mateixos.

Observació: Ara bé, A^k pot tenir valors propis que no provinguin de valors propis d'A. Per exemple, la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ té un únic valor propi real $\lambda = -1$ de multiplicitat algebraica 1, però la matriu $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ té dos valors propis, $\lambda^2 = 1$ i -1, amb multiplicitats algebraiques 1 i 2 respectivament.

2) En efecte, tenim:

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^k P^{-1},$$

ja que els factors intermitjos satisfan $P^{-1}P = I$.

3) L'estratègia per a calcular A^k és la següent: primer estudiem si la matriu A diagonalitza. Si és el cas, llavors existeix una matriu invertible P tal que $P^{-1}AP = D$, on D és una matriu diagonal. Per tant, $A = PDP^{-1}$ i, per l'apartat anterior, tenim que $A^k = PD^kP^{-1}$. Però si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, aleshores $D^k = \mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

a) La matriu $\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Els valors propis són 3 i 2 i la matriu de canvi de base és $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) La matriu $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Els seus valors propis són 1, 2 i 4 i la matriu de canvi de base és $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{2001} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2001} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2001} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

c) La matriu $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Els seus valors propis són -1, -7, 11 i 13 i la matriu de canvi de base és $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. Per tant:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 13 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & -1 & 7 \\ 9 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{70} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{70} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-7)^{70} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11^{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13^{70} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7/12 & 0 & 1 & -7/12 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/12 & 0 & 0 & 1/12 \\ 5/2 & 1 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

8.12 Un OVNI surt d'un planeta en el qual tenen el seu origen els vectors v_1, v_2, v_3. Aquests vectors són utilitzats com base d'un sistema de coordenades de l'univers ($\mathbb{R}^3$). Després d'arribar al punt $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ la nau es deixa portar per una estranya força tal que cada dia la transporta de la situació v a la Av, on:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) On estarà al cap de 10 dies?

2) Arribarà algun dia a la Terra, que està situada al punt $\left(\begin{smallmatrix}-4098\\2049\\4149\end{smallmatrix}\right)$ segons les seves coordenades?

Solució:

1) Al cap de 10 dies la seva posició vindrà donada pel vector $A^{10} \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Per tal de calcular la potència A^{10}, diagonalitzem la matriu A i llavors apliquem el mètode del problema anterior. El polinomi característic de la matriu A és:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Per tant, la matriu A té dos valors propis: $\lambda = 1$ amb multiplicitat 1 i $\lambda = 2$ amb multiplicitat 2. Calculem els valors propis. L'espai propi E_1 és el conjunt de solucions del sistema:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és a dir: $E_1 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. L'espai propi E_2 és el conjunt de solucions del sistema:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és a dir: $E_2 = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Com que les multiplicitats dels valors propis coincideixen amb les respectives dimensions dels seus espais propis, la matriu A diagonalitza. La matriu de canvi de base i la seva inversa són, respectivament:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenim doncs:

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(2,2,1), \qquad A = P \cdot \mathrm{Diag}(2,2,1) \cdot P^{-1}.$$

Per tant, pel problema 8.11, tenim doncs que, per a tot enter $n \geq 1$:

$$A^n = P \cdot \mathrm{Diag}(2,2,1)^n \cdot P^{-1} = P \cdot \mathrm{Diag}(2^n, 2^n, 1) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & 0 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 0 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

En particular:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} -1022 & 0 & -2046 \\ 1023 & 1024 & 1023 \\ 1023 & 0 & 2047 \end{pmatrix}.$$

Per últim, la posició de l'OVNI al cap de 10 dies serà:

$$A^{10} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2046 \\ 1023 \\ 2047 \end{pmatrix}.$$

2) No, ja que l'equació:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n+2 & 0 & -2^{n+1}+2 \\ 2^n-1 & 2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 0 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+2 \\ 2^n-1 \\ 2^{n+1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4098 \\ 2049 \\ 4149 \end{pmatrix}$$

no té solució en n enter.