TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*2 punts*) Considereu la integral següent:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

   a) Sabent que la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ satisfà $|f^{(4)}(x)| < 16,\ \forall x \in [1,2]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I fent ús del mètode de Simpson amb error absolut $< 0.5 \cdot 10^{-3}$.

   b) Fent ús del mètode de Simpson i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

SOLUCIÓ:

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

a) La fórmula del mètode de Simpson amb n subintervals és:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq S(n) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right)$$

amb n parell, $h = \dfrac{b-a}{n}$, i $x_i = a + ih$ per a $i = 0, \ldots, n$.

A més, l'expressió:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(n)\right| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4,$$

on M_4 una cota superior del valor absolut de la derivada quarta de f en l'interval $[a,b]$, ens dóna una cota superior de l'error absolut de l'aproximació de la integral $\int_a^b f(x)dx$ per $S(n)$.

En aquest exercici, $a = 1,\ b = 2$, i podem prendre $M_4 = 16$, aleshores determinem el nombre de subintervals n imposant:

$$\frac{1^5}{180n^4} \cdot 16 < 0.5 \cdot 10^{-3} \quad \Longrightarrow n > \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 10^3}{180 \cdot 0.5}} \simeq 3.65.$$

Per tant, el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de tres decimals correctes fent ús del mètode de Simpson, que ha de ser parell, és com a mínim $\mathbf{n = 4}$.

b) Substituint $a = 1,\ b = 2,\ n = 4$ a la fórmula de Simpson, s'obté:

$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \simeq S(4) = \frac{1}{12}\ [f(1) + 4[f(1.25) + f(1.75)] + 2f(1.5) + f(2)]$

$\simeq 0.4299784376$.

El valor de la integral amb la precisió demanada és, per tant, $I = \mathbf{0.430} \pm 0.0005$.

2. (*4 punts*) Considereu la funció $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida per $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

b) Considereu el conjunt $A=\mathrm{Dom}(f)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ y>1\}$, calculeu la frontera, l'interior i l'adherència del conjunt A. Dieu raonadament si A és obert, tancat o compacte.

c) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de la superfície $z=f(x,y)$ corresponents als nivells $z=0,\sqrt{5},5$.

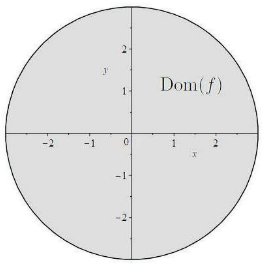
d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$? Trobeu el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció.

SOLUCIÓ:

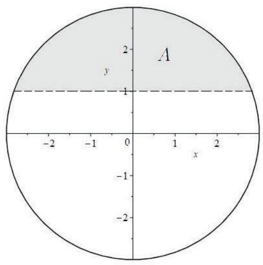
a) Per buscar el domini de $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, observem que, perquè f estigui ben definida, ha de ser $9-x^2-y^2\geq 0$, o, equivalentment $x^2+y^2\leq 9$. Per tant:

$$\mathrm{Dom}(\mathbf{f})=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}}:\ \mathbf{x^2}+\mathbf{y^2}\leq\mathbf{9}\},$$

què és el cercle tancat per la circumferència de centre el $(0,0)$ i radi 3. La seva representació gràfica és:



b) El conjunt a considerar és $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 9\ \wedge\ y>1\}$, és a dir:



Per tant la frontera, l'interior i l'adherència del conjunt A són:

$\mathrm{Fr}(\mathbf{A}) =$
$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} \geq \mathbf{1}\} \cup \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2} : \mathbf{y} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} \leq \mathbf{9}\}$,
$\mathring{\mathbf{A}} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} < \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} > \mathbf{1}\}$,

$\bar{\mathbf{A}} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} \leq \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} \geq \mathbf{1}\}$.

Tenim que, com que la frontera de A no està inclosa íntegrament al conjunt A (ja que el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$ està exclòs), el conjunt A **no és tancat**.

Com que la frontera de A tampoc està exclosa totalment al conjunt A (ja que l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 9 \wedge y > 1\}$ està inclòs), el conjunt A **no és obert**.

Per no ser tancat, el conjunt A **no és compacte** (per ser compacte ha de ser tancat i acotat).

c) Per a la corba de nivell $z = k$, tenim que trobar els (x,y) tals que $f(x,y) = k$, és a dir:

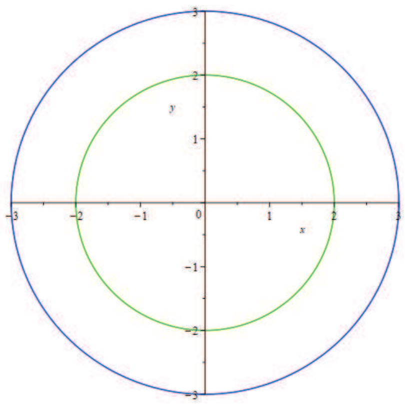
$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \Longleftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = k^2 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Per tant:

La corba de nivell $z = 0$ és la corba d'equació $x^2 + y^2 = 9$, que és la circumferència de centre el $(0,0)$ i radi 3.

La corba de nivell $z = \sqrt{5}$ és la corba d'equació $x^2 + y^2 = 4$, que és la circumferència de centre el $(0,0)$ i radi 2.

La corba de nivell $z = 5$ és la corba d'equació $x^2 + y^2 = -16$, que és el conjunt buit.



Corba de nivell $z = 0$ en color blau i corba de nivell $z = \sqrt{5}$ en color verd.

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$ és la mateixa direcció i sentit que el vector gradient de f en el punt $(1,1)$, i el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient de f en el punt $(1,1)$. Les derivades parcials de la funció f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{-\sqrt{7}}{7}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{-\sqrt{7}}{7}.$$

i el vector gradient de f en el punt $(1,1)$ és:

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\frac{-\sqrt{7}}{7}, \frac{-\sqrt{7}}{7} \right)$$

Per tant, **la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$ és la direcció del $\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\frac{-\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}}, \frac{-\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{7}} \right)$, o, equivalentment la del vector $(-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$.**
Finalment, **el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció és $||\vec{\nabla} f(1,1)|| = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{7}}$.**

3. (*4 punts*) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = xy$ i sigui K el conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt K.

c) Determineu tots els candidats a punts on f pot assolir el màxim i el mínim absoluts en el conjunt K.

d) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el conjunt K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^2 en tot $\mathbb{R}^2$. Per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema:

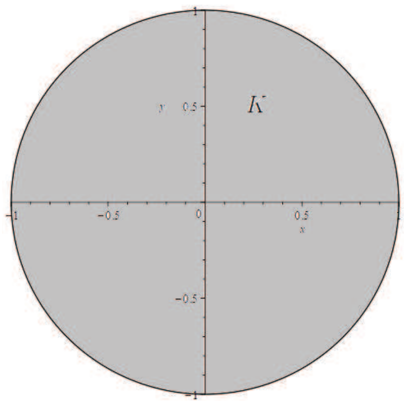
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\[2ex] x = 0 \end{cases}$$

Per tant **la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$**.
La matriu hessiana de f en el punt crític és:

$$\mathcal{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donat que $det(\mathcal{H}f(0,0)) = -1 < 0$, **la funció f té en el punt $(0,0)$ un punt de sella**.

b) La funció f és polinòmica i per tant **contínua** en tot $\mathbb{R}^2$, el conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ és el cercle unitat i el seu dibuix és:



K és un conjunt **compacte** per ser tancat i fitat. K és tancat, ja que conté tots els seus punts frontera: $\mathrm{Fr}(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \subset K$. K és fitat, ja que $K \subset B_2\big((0,0)\big)$.
Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el conjunt K és un compacte, **pel teorema de Weierstrass**, f té extrems absoluts en K.

c) Buscarem els punts candidats:

(i) Punts crítics de f en l'interior del compacte K: Tal com hem vist a l'apartat anterior, la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(0,0)$ i, donat que $(0,0) \in \overset{\circ}{K}$, tenim que $(0,0)$ és un candidat.

(ii) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte K, és a dir els punts crítics de f condicionats a ser sobre la circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Es fa pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicant la primera equació per y, la segona per x i restant les dues equacions resultants obtenim: $y^2 - x^2 = 0$, és a dir $y^2 = x^2$, d'on $y = x$ o $y = -x$.

Si $y = x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$ los punts $(x, y, \lambda) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ són punts crítics de la funció de Lagrange, és a dir tenim els dos punts candidats $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si $y = -x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ los punts $(x, y, \lambda) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ són punts crítics de la funció de Lagrange, és a dir tenim els dos punts candidats $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Per tant els punts candidats a punts on f pot assolir el màxim i el mínim absoluts en el conjunt K són:

$$\mathbf{(0,0)},\ \left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right),\ \left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right) \text{ i } \left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right).$$

d) Les imatges per f dels punts candidats trobats són:

$$f(0,0) = 0,\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2},\ f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Per tant, **el valor màxim absolut de f en K és $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ i l'assoleix als punts $\left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$**, i **el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ i l'assoleix als punts $\left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}, \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)$**.