Matemàtiques 1 - GEI - FIB — 09-11-2021

Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. Sabem que un graf G té mida 8 i que només té vèrtexs de grau 3 i de grau 4.

(a) (1.25 punts) Determineu l'ordre i la seqüència de graus de G.

(b) (1.25 punts) Demostreu que només hi ha un graf G amb aquestes condicions llevat isomorfismes. Doneu una representació de G. De quin graf es tracta?

P2. Sigui G un graf amb 3 components connexos, que anomenem G_1, G_2 i G_3, tals que G_1 té ordre 4 i mida 5; G_2 és un graf complet d'ordre 6; i G_3 és isomorf a un graf bipartit complet $K_{1,2}$.

(a) (0.5 punts) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

(b) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià?

(c) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

P3. Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Sabem que si es suprimeix una determinada aresta de G s'obté un graf isomorf a G^c.

(a) (1.25 punts) Determineu la mida del graf G en funció del seu ordre.

(b) (1.25 punts) Determineu llevat isomorfismes tots els grafs G d'ordre com a molt 5 que compleixen les condicions de l'enunciat. En cada cas, representeu els grafs G i G^c, indiqueu l'aresta a que cal suprimir i l'isomorfisme entre $G - a$ i G^c.

P4. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 45, 47, 56, 57, 58, 68, 78, 79, 89\}$.

(a) (1 punt) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex, i el diàmetre, el radi i el centre de G.

(b) (1 punt) Doneu una representació de l'arbre generador T obtingut en aplicar a G l'algorisme BFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre T en l'aplicar l'algorisme.

(c) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior.

Informacions

- Durada de l'examen: 90 minuts
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació ...
- Publicació de les notes: 23/11/2021.
- Revisió de l'examen: dimarts 30 de novembre a les 14:00, prèvia sol·licitud. Es publicarà al racó el procediment a seguir.

Model de solució

P1. Sabem que un graf G té mida 8 i que només té vèrtexs de grau 3 i de grau 4.

(a) (1.25 punts) Determineu l'ordre i la seqüència de graus de G.

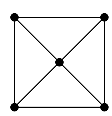
Solució. Pel lema de les encaixades, la suma dels graus és dues vegades la mida. En aquest cas, si r és el nombre de vèrtexs de grau 3 i s el nombre de vèrtexs de grau 4, aleshores la suma dels graus és $\sum_{u\in V} g(u) = 3r + 4s$. A més, la mida és 8, per tant, $3r + 4s = 16$. El nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell, per tant, r ha de ser parell. A més, r ha de ser com a molt 4, ja que r i s són no negatius. Resumint, $0 \le r \le 4$; $3r + 4s = 16$; i l'ordre del graf és $n = r + s$.

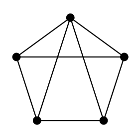
Si $r = 0$, aleshores $s = 4$ i $n = 0 + 4 = 4$, no pot ser, ja que no hi pot haver vèrtexs de grau 4 en un graf d'ordre 4. Si $r = 2$, aleshores $4s = 16 - 3r = 10$, no pot ser, ja que 10 no és múltiple de 4. Si $r = 4$, aleshores $4s = 16 - 12 = 4$, per tant, $s = 1$ i $n = 4 + 1 = 5$.

Per tant, l'ordre ha de ser $n = 5$ i la seqüència de graus, 43333.

(b) (1.25 punts) Demostreu que només hi ha un graf G amb aquestes condicions llevat isomorfismes. Doneu una representació de G. De quin graf es tracta?

Solució. Si un graf G d'ordre 5 té seqüència de graus 43333, aleshores hi ha un vèrtex adjacent a tots els altres. Per tant, si suprimim aquest vèrtex de G, tenim un graf 2-regular d'ordre 4 (ja que eliminem una aresta incident amb cadascun dels vèrtexs de grau 3). Els grafs 2-regulars són unió de cicles. En aquest cas, l'única possibilitat és que siguin un únic cicle d'ordre 4, ja que si un graf és unió d'almenys 2 cicles, ha de tenir ordre almenys 6. Per tant, G és el graf que s'obté afegint un vèrtex adjacent a tots els vèrtexs d'un cicle d'ordre 4. Per tant, G és isomorf a una roda d'ordre 5, W_5. Vegem a la figura següent dues possibles representacions del graf:



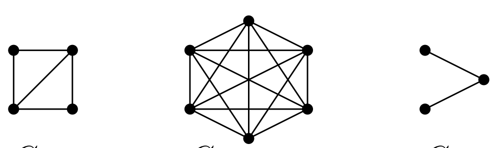


P2. Sigui G un graf amb 3 components connexos, que anomenem G_1, G_2 i G_3, tals que G_1 té ordre 4 i mida 5; G_2 és un graf complet d'ordre 6; i G_3 és isomorf a un graf bipartit complet $K_{1,2}$.

(a) (0.5 punts) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

Solució. Sabem que un vèrtex és de tall en un graf si i només si ho és en el component connex al qual pertany. El mateix passa amb les arestes pont.

El component connex G_1 és isomorf a un graf $K_4 - a$, on a és una aresta qualsevol de K_4, ja que la mida de K_4 és 6, i l'únic graf d'ordre 4 i mida 5 s'obté suprimint una aresta de K_4. Per tant, una representació de G és:



G_1 G_2 G_3

El component connex G_1 no té vèrtexs de tall, ja que al suprimir un vèrtex obtenim el graf T_3 o bé C_3, tots dos connexos; i no té arestes pont, ja que totes són d'algun cicle d'ordre 3.

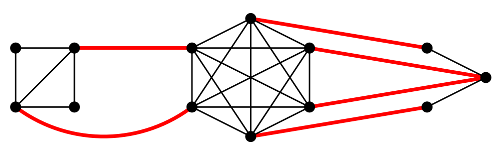
El component connex G_2 és isomorf a K_6. Per tant, G_2 no té vertexs de tall, ja que al suprimir un vèrtex de K_6 obtenim el graf K_5, que és connex; i G_2 no té arestes pont, perquè per exemple si l'aresta és $a = uv$, aleshores a és del cicle $uvwu$, on w és un vèrtex qualsevol de G_2 diferent de u i de v.

El component connex G_3 és isomorf a $K_{1,2}$, per tant, té exactament un vèrtex de tall, el vèrtex de grau 2 (els de grau 1 no són mai vèrtexs de tall), i les dues arestes de $K_{1,2}$ són pont, ja que no són de cap cicle.

Per tant, G té exactament un vèrtex de tall (el vèrtex de grau 2 del component G_3), i dues arestes pont (les dues arestes de G_3).

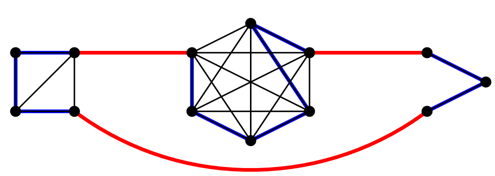
(b) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià?

Solució. Un graf és eulerià si és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Per tal d'aconseguir un graf connex, cal afegir almenys 2 arestes al graf G. D'altra banda, G té 10 vèrtexs de grau senar (la seqüència de graus de G és 5555553322211). Per tant, cal afegir almenys 5(=10/2) arestes per tal d'obtenir un graf amb tots els vèrtexs de grau parell. Vegem si amb 5 arestes podem aconseguir un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell. Els 6 vèrtexs de G_2 tenen grau senar i no podem afegir arestes entre dos vèrtexs de G_2, ja que és un graf complet. Per tant, cal afegir almenys 6 arestes, cadascuna amb un extrem a G_2 i l'altre a G_1 o bé a G_3. Podem fer que 4 d'aquestes arestes tinguin l'altre extrem a cadascun dels 4 vèrtexs de grau senar de $G_1 \cup G_3$, i les altres dues, que siguin incidents a un mateix vèrtex de grau parell de $G_1 \cup G_3$, per exemple, el vèrtex de grau 2 de G_3. Aleshores, al graf obtingut és eulerià, ja que és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. El mínim nombre d'arestes que cal afegir és, doncs, 6. A la figura següent tenim en vermell un exemple de 6 arestes que podem afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià:



(c) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

Solució. El mínim nombre d'arestes que cal afegir és 3. Afegint 3 arestes aconseguim un graf hamiltonià si, per exemple, afegim una aresta amb un extrem a una de les fulles de G_3 i un vèrtex de grau 2 de G_1, afegim una altra aresta amb extrems l'altra fulla de G_3 i un vèrtex qualsevol de G_2, i una tercera aresta amb extrems un vèrtex qualsevol de G_2 i un vèrtex de grau 3 de G_2. Vegeu a la figura el graf G' i un possible cicle hamiltonià en G'. A la figura següent tenim en vermell un exemple de 3 arestes que podem afegir al graf G per tal d'obtenir un graf G' hamiltonià. Un possible cicle hamiltonià de G' està format per les arestes vermelles i blaves:



Vegem ara que amb menys de 3 arestes no es pot aconsegur.

El graf que resulta d'afegir només una aresta no és connex i, per tant, tampoc és hamiltonià.

Si afegim 2 arestes no es pot aconseguir un graf hamiltonià. En efecte, al suprimir dues arestes d'un graf hamiltonià s'obtenen com a molt dos components connexos (ja que al suprimir dues arestes d'un cicle qualsevol s'obtenen dos components connexos i si un graf és hamiltonià, tots els vèrtexs del graf són d'un mateix cicle). Si el resultat d'afegir dues arestes a_1 i a_2 a G fós un graf G' hamiltonià, al suprimir les arestes a_1 i a_2 de G' s'obtindrien com a molt 2 components connexos, contradicció, ja que $G' - \{a_1, a_2\}$ és el graf G, que té 3 components connexos.

P3. Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Sabem que si es suprimeix una determinada aresta de G s'obté un graf isomorf a G^c.

(a) (1.25 punts) Determineu la mida del graf G en funció del seu ordre.

Solució. Suposem que a és una aresta de G tal que $G - a \cong G^c$. Aleshores els grafs $G - a$ i G^c tenen la mateixa mida. Però la mida de $G - a$ és $m - 1$ i la mida de G^c és $\frac{n(n-1)}{2} - m$. Per tant,

$$m - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

d'on deduïm

$$m = \frac{n(n-1)+2}{4}.$$

(b) (1.25 punts) Determineu llevat isomorfismes tots els grafs G d'ordre com a molt 5 que compleixen les condicions de l'enunciat. En cada cas, representeu els grafs G i G^c, indiqueu l'aresta a que cal suprimir i l'isomorfisme entre $G - a$ i G^c.

Solució. Comprovem primer quina hauria de ser la mida segons l'ordre del graf, tenint en compte l'expressió trobada a l'apartat anterior:

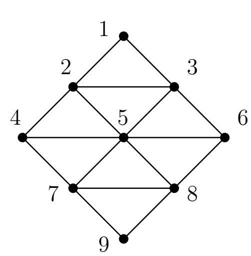
n	1	2	3	4	5
$m(=\frac{n(n-1)+2}{4})$	$\frac{2}{4}$	1	2	$\frac{14}{4}$	$\frac{22}{4}$

Com que la mida ha de ser un enter no negatiu, només en poden existir per a $n \in \{2, 3\}$.
Si $n = 2$, aleshores G ha de tenir mida 1, és a dir, G ha de ser K_2, i observem que es compleix la condició de l'enunciat, ja que si suprimim l'única aresta de K_2 obtenim N_2, i el graf complementari de K_2 és N_2.
Si $n = 3$, aleshores G ha de tenir mida 2. L'únic grafs d'ordre 3 i mida 2, llevat isomorfismes, és T_3, i observem compleix la condició de l'enunciat, ja que si suprimim qualsevol de les dues arestes de T_3, obtenim $K_1 \cup K_2$, i el graf complementari de T_3 és $K_1 \cup K_2$.
És a dir, els únics grafs d'ordre com a molt 5 que satisfan la condició de l'enunciat són K_2 i T_3.

P4. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 45, 47, 56, 57, 58, 68, 78, 79, 89\}$.

(a) (1 punt) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex, i el diàmetre, el radi i el centre de G.

Solució. L'excentricitat d'un vèrtex és el màxim de les distàncies a tots els altres vèrtexs. Si representem el graf com a la figura següent, veiem que, per simetria, els vèrtexs 1 i 9 tenen la mateixa excentricitat; els vèrtexs 2, 3, 7 i 8 tenen la mateixa excentricitat; i els vèrtexs 4 i 6 tenen la mateixa excentricitat:



Per tant, només cal calcular l'excentricitat dels vèrtes 1, 2, 4 i 5.

L'excentricitat del vèrtex 1 és 4, ja que els vèrtexs 2 i 3 són a distància 1 del vèrtex 1; els vèrtexs 4, 5 i 6 són a distància 2; els vèrtexs 7 i 8 són a distància 3; i el vèrtex 9 és a distància 4.

L'excentricitat del vèrtex 2 és 3, ja que els vèrtexs 1, 3, 4 i 5 són a distància 1 del vèrtex 2; els vèrtexs 6, 7 i 8 són a distància 2; el vèrtex 9 és a distància 3.

L'excentricitat del vèrtex 4 és 2, ja que els vèrtexs 2, 5 i 7 són a distància 1 del vèrtex 4; i la resta de vèrtexs són a distància 2.

L'excentricitat del vèrtex 5 és , ja que els vèrtexs 2, 3, 4, 6, 7 i 8 són a distància 1 del vèrtex 5; i la resta de vèrtexs són a distància 2.

Per tant, les excentricitats són:

vèrtex	1	2	3	4	5	6	7	8	9
excentricitat	4	3	3	2	2	2	3	3	4

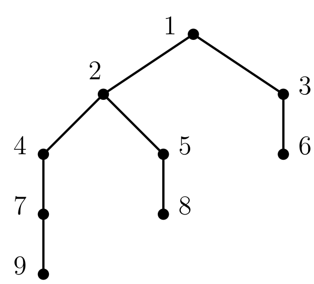
El diàmetre és el màxim de les excentricitats, o sigui, 4.

El radi és el mínim de les excentricitats, o sigui, 2.

Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat mínima, o sigui, 4, 5 i 6. El centre de G és el subgraf induït pels vèrtexs centrals, o sigui el graf $(\{4,5,6\}), \{45,56\})$, que és isom orf al graf trajecte T_3.

(b) (1 punt) Doneu una representació de l'arbre generador T obtingut en aplicar a G l'algorisme BFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre T en l'aplicar l'algorisme.

Solució. L'orbre obtingut és el de la figura:



L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre és $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(c) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior.

Solució. La seqüència de Prüfer de T té longitud 7, ja que l'arbre té ordre 9 i la trobem recursivament: mirem de quin vèrtex penja la fulla amb etiqueta més petita, suprimim a continuació aquesta fulla i fem el mateix a l'arbre obtingut:

arbre	mín{fulles}	penja de:
$T_0 = T$	6	3
$T_1 = T_0 - 6$	3	1
$T_2 = T_1 - 3$	1	2
$T_3 = T_2 - 1$	8	5
$T_4 = T_3 - 8$	5	2
$T_5 = T_4 - 5$	2	4
$T_6 = T_5 - 2$	4	7

La seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior és, doncs, $(3, 1, 2, 5, 2, 4, 7)$.