NOM:____________________________COGNOM:____

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu justifiqueu els càlculs.

Problema 1 (A)

MBW és una empresa de renom que es dedica principalment a la fabricació, venda i distribució de vehicles d'alta gamma. La qualitat i fiabilitat dels seus productes i la seva amplia història avala als compradors i fa que se sentin còmodes invertint més diners dels que invertirien en altres marques.

Se sap que el 85% dels clients estan satisfets amb la compra. A més, sabem que els clients satisfets que han tingut algun problema representen el 5% del total, i que el 10% han tingut problemes i no estan satisfets.

1. Feu una representació gràfica de la situació descrita (0,5 punts)
   S'espera que l'alumne faci servir alguna de les representacions següents: un arbre o una taula amb les probabilitats.

	Algun problema (P)	Cap problema (NP)	
Satisfet (S)	**0.05**	0.80	**0.85**
No satisfet (NS)	**0.10**	0.05	0.15
	0.15	0.85	

2. Sabent que durant 2022 es van vendre a l'estat 10.000 vehicles d'aquesta marca, quin nombre de clients satisfets tenim? (0,5 punts).
   El valor és de 10.000*0,85 = 8.500 clients satisfets.
3. Podem assumir independència entre tenir un problema i estar satisfet amb la compra? Raoneu la resposta (1 punt)
   No la podem assumir ja que $P(S \mid P) \neq P(S \mid NP)$.
   $P(S \mid P) = 0.05 / 0.15 = 1/3$
   $P(S \mid NP) = 0{,}80 / 0{,}85 = 0{,}94$
4. Sabent que un client no ha tingut problemes, quina és la probabilitat que hagi quedat insatisfet? (1 punt)
   $P(NS \mid NP) = P(NS \cap NP)/P(NP) = 0{,}05 / 0{,}85 = 0{,}059$

A part de la venda, el servei de taller és un element clau per a la marca. Es disposa de les següents dades, i considereu que la taula contempla tot l'espai de resultats possibles, i que tots els casos són equiprobables:

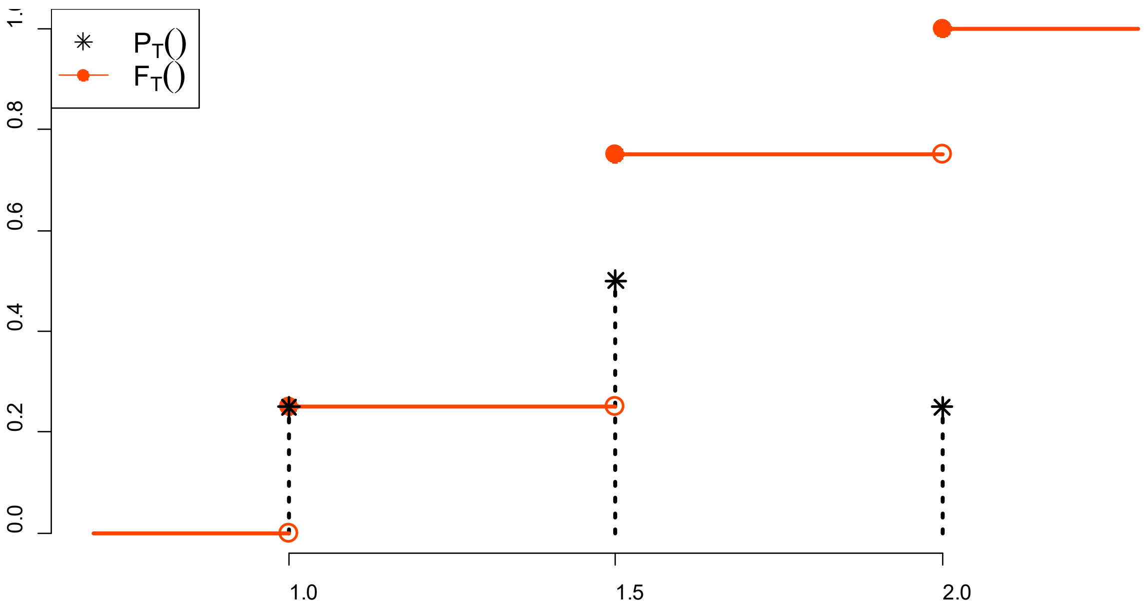
- Temps en hores de permanència al taller
- Import de la factura al client
- Valoració del servei (s'efectua pel client una setmana després de recollir el vehicle, es puntua del 1 al 5)

Temps (hores)	1	1,5	1,5	1	2	1,5	2	1,5
Import	200	215	240	195	310	300	330	270
Valoració	4	4	3	4	5	5	4	3

A continuació, responeu aquestes qüestions:

5. El valor esperat de l'import de la factura, temps de permanència i la valoració del servei, així com la desviació tipus de cadascun. Detalleu els càlculs realitzats (1,5 punts)
   T: TEMPS EN HORES
   I: IMPORT
   V: VALORACIÓ
   $E(T) = 1\ (2/8) + 1{,}5\ (4/8) + 2\ (2/8) = 1{,}5$ // $V(T) = 1^2\ (2/8) + 1{,}5^2\ (4/8) + 2^2\ (2/8) - 1{,}5^2 = 0{,}125$; $DESV(T) = 0{,}3535$
   $E(I) = (200+215+240+195+310+300+330+270)\ 1/8 = 257{,}5$ //
   $V(I) = (200^2+215^2+240^2+195^2+310^2+300^2+330^2+270^2)\ 1/8 - 257{,}5^2 = 2412{,}5$; $DESV(I) = 49{,}12$
   $E(V) = 4$ // $DESV(V) = 0{,}707$

6. Dibuixeu la funció de probabilitat i la funció de distribució del temps de reparació (1 punt)



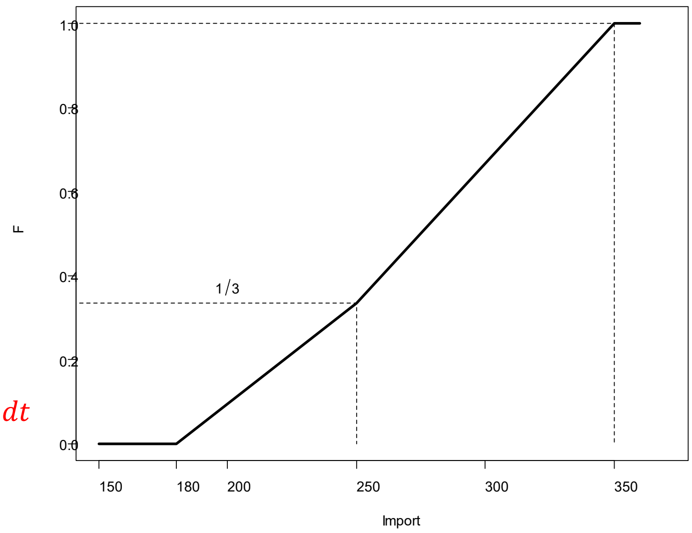
7. Calculeu la funció de probabilitat conjunta entre el temps i la valoració, i la seva covariància (1,5 punts). Són independents? Perquè? (1 punt)

TEMPS / VALORACIÓ	V=3	V=4	V=5
T=1		2/8	
T=1,5	2/8	1/8	1/8
T=2		1/8	1/8

Donat que són simètriques, el producte (t-E(T))(v-E(V)) val 0 a la fila del mig i a la columna del mig. La resta de posicions tenen probabilitat 0, excepte la combinació (T=2 i V=5). Per tant, la covariància és igual a (2-1,5)(5-4) 1/8 = 0,0625

Com la covariància no és 0, no són independents, s'aprecia una lleu relació positiva (més temps, millor valoració).

8. Imagineu que en realitat l'import de la factura és una operació que retorna un valor continu (no hi ha arrodoniment), i que la seva funció de distribució és la de la figura. Es demana que obteniu analíticament la funció de densitat corresponent i el valor esperat de l'import (2 punts)



La funció de distribució està composada per dos rectes, de pendents respectivament:

(1/3) / (250-180) = 1/210, per a 180 < x < 250, i

(2/3) / (350-250) = 1/150, per a 250 < x < 350.

Per tant, la funció de densitat de l'import és:

$f_I(x)$ = 1/210, per a 180 < x < 250, i

= 1/150, per a 250 < x < 350.

$$E(I) = \int t\, f_I(t)dt = \int_{180}^{250} t\,\frac{1}{210}dt + \int_{250}^{350} t\,\frac{1}{150}dt$$

$$= \frac{t^2}{420}\Big]_{180}^{250} + \frac{t^2}{300}\Big]_{250}^{350} = 271{,}67\text{ €}$$

Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Problema 2 (B)

Una empresa de distribució de petita paqueteria compta amb una flota de 200 motocicletes per al repartiment diari. Cada matí, les comandes es distribueixen, per ordre, a cada vehicle. A partir dels registres d'incidències, s'ha trobat que cada motocicleta té, cada dia, una probabilitat de patir una avaria del 2%.

1. Quina és la probabilitat que la primera motocicleta en tenir una avaria estigui entre les cinc primeres? (0.5 punts)

Sigui X la variable aleatòria, X:"nombre de motocicles fins a tenir la primera motocicleta avariada "

$X \sim Geom(0.02)$

Hem de calcular $P(X \leq 5) = 1 - 0.98^5 = 0.0961$

2. Quina és la probabilitat que sigui la cinquena motocicleta la primera en tenir una avaria?

Hem de calcular $P(X=5) = 0.02 \cdot 0.98^4 = 0.01845$

3. Quina és la probabilitat que entre les 200 motocicletes n'hi hagi 5 d'avariades? (0.5 punts)

Es considera la v.a. X1:"nombre de motocicles avariades" $X1 \sim Bin(n=200, p=0.02)$

Hem de calcular $P(X1=5) = \binom{200}{5} \cdot 0.02^5 \cdot 0.98^{195} = 0.1579$

4. Quina és la probabilitat que no hi hagi més de 2 motocicletes avariades? (0.5 punts)

Hem de calcular $P(X1 \leq 2) = P(x1=0) + P(x1=1) + P(x1=2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{200}{i} \cdot 0.02^i \cdot 0.98^{200-i} = 0.0176 + 0.0718 + 0.1458 = 0.2351$

5. Quin és el nombre esperat diari de motocicles avariades? (0.5 punts)

$E(X1) = 200 \cdot 0.02 = 4$ motocicletes

6. Quina és la probabilitat que entre les 20 primeres motocicletes n'hi hagi tres d'avariades? (0.5 punts)

X2:"nombre de motocicles avariades entre 20" $X2 \sim Bin(n=20, p=0.02)$

$P(X2=3) = \binom{20}{3} \cdot 0.02^3 \cdot 0.98^{17} = 0.00647$

7. A més de les avaries, l'empresa també recull els accidents que pateixen les seves motocicletes. En concret, s'ha trobar que en una intersecció molt cèntrica de la ciutat els accidents es distribueixen d'una manera aleatòria amb una mitjana de 8 accidents a l'any.

a) Quina és la probabilitat que en un any, hi hagi 6 motocicletes que tenen un accident en aquest cruïlla? (0.75 punts)

Sigui la v.a. Y: "Nombre de motocicletes accidentades en una determinada cruïlla en un any".
$P \sim P(8)$

$P(P=6) = \frac{8^6 \cdot e^{-8}}{6!} = 0.1221$

b) Si el nombre d'accidents es comporta de manera independent al llarg dels anys, quina és la probabilitat que hi hagi 30 motocicletes que han tingut un accident en aquesta cruïlla en un període de 5 anys? (0.75 punts)

$P5 \sim P(5 \cdot 8)$

$P(P5=30) = \frac{40^{30} \cdot e^{-40}}{30!} = 0.0185$

L'empresa té estimat que cada dia reparteixen uns 1500 paquets. Per realitzar el servei de lliurament de manera més eficient, volen estudiar com es distribueixen les comandes dins de la seva àrea de repartiment. Per fer-ho han dividit la zona en un graella de 15 x 20 quadrats de 100 m de costat i s'ha simulat la destinació dels 1500 paquets de manera aleatòria en els 300 quadrats en què s'ha dividit l'àrea de repartiment. Cada paquet té la mateixa probabilitat d'haver de ser lliurat en cadascun dels 300 quadrats.

8. a) Per cada àrea, es defineix la variable aleatòria Pi que recull si el paquet número i ha de ser lliurat en aquella àrea. Quina distribució segueix la variable aleatòria Pi? (0.5 punts)

$Pi \sim Bern(1/300)$

b) I quina és la distribució que segueixen els 1500 paquets? (0.5 punts)

Q ~Binom(n=1500, p=1/300)

A partir de la simulació realitzada s'han obtingut les següents dades:

Nombre de paquets a lliurar en una zona	Nombre de zones que tenen aquest nombre de paquets
0	2
1	10
2	27
3	43
4	47
Més de 5	171

c) Tenint en compte la distribució que has indicat en l'apartat anterior, quina altra distribució es pot assumir que segueixen les dades anteriors? Raona la resposta més apropiada a partir de les dades i les condicions fixades en la simulació. Recolza el teu raonament aportant dades numèriques. (1 punt)

Q ≈ P(5)

En general, es pot aproximar una Binomial amb n gran (en aquest cas n=1500) i p petita (en aquest cas p=1/300) per una Poisson de paràmetre n·p = 1500 ·1/300 = 5.

Amb les dades es pot comprovar que:

300 P(Q=1) = $300\frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!}$ = 10.11, que és un valor molt proper a l'obtingut en la simulació (10).

Un altre cas: 300 P(Q=4) = $300\frac{5^4 \cdot e^{-5}}{4!}$ = 52.6, enfront de 47. En general, els valors presenten diferències irrellevants.

El temps de repartiment segueix un model normal amb una mitjana de 30 minuts per dur un paquet i amb una desviació típica de 5 min.
a) Quina és la probabilitat que la mitjana dels temps de lliurament dels 100 paquets estigui entre 30 i 31 minuts? (0.75 punts)

T ~N(30, 5) i pel TCL es té que M_{1500} ~ N(30, 0.5)
P(30 < M_{1500} < 31) = P ((30-30)/0.5 < Z < (31-30)/0.5) = P(0 < Z < 2) = 0.9772 – 0.5 = 0.4772, amb Z ~N(0,1)

b) Quina és la probabilitat que, en total, per a lliurar 400 paquets s'estiguin més de 200 hores? (0.75 punts)

Pel TCL es té que S_{400} ~N(12000, 100)
P(S_{400} > 200·60) = P(S_{400} > 12000) = 0.5

9. El pes dels paquets a distribuir es pot modelar amb una distribució Normal. Per trobar-ne els paràmetre, s'ha trobat que 1 de cada 5 paquets no arriba als 240 g, i que només el 10% supera els 390 g. Amb aquesta informació troba el valor de la mitjana i de la desviació tipus? (2 punts)

Considerem la VA Pe: "pes dels paquets a distribuir" i que Pe ~N(μ,σ).
A partir de la informació de l'enunciat, es té que P(Pe<240) = 0.2 i que P(Pe>390) = 0.1

Per poder emprar les dades de la taula, ens cal estandarditzar. Considerant Z ~ N(0,1), s'obté que:
P(Y<240) = 0.2; P(Z < (240- μ)/ σ) = 0.2; I per tant, (240- μ)/ σ = –0.842 [Com que qnorm(0,8) = 0.842, per la simetria de la normal estandarditzada se sap que qnorm(0.2) = –0.842]

Com que P(Pe> 390) = 0.1 i per tant, P(Pe< 390) = 0.9 i estandarditzant:
P(Z < (390- μ)/ σ) = 0.9, es té que (390- μ)/ σ = 1,282 (qnorm(0.9))

Ara cal resoldre el sistema

$$\begin{cases} 240 = \mu - 0.842\sigma \\ 390 = \mu + 1.282\sigma \end{cases}$$

Del que es dedueix que els valors demanats són **μ =299.45** i **σ = 70,6**