Matemàtiques 1 - GEI - FIB 1-4-2019
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (3 punts)
   (a) Siguin G un graf d'ordre n i mida m, i $a = xy$ una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida dels grafs $G - x$, $G - a$, $G - \{x, y\}$ i G^c en funció de n, m i dels graus dels vèrtexs (no cal justificar-ho).
   (b) Definiu graf bipartit i doneu-ne una caracterització.
   (c) Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf G tenen grau almenys 2, aleshores G conté algun cicle.

2. (4 punts) Considerem dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres n_1 i n_2 respectivament, tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$. Definim el graf $G = (V, A)$ on:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{w, w'\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv \,:\, v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v \,:\, v \in V_1 \cup V_2\}$$

   És a dir, G s'obté a partir de $G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs addicionals w, w' adjacents a tots els vèrtexs de G_1 i a tots els vèrtexs de G_2.

   (a) Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de G. Determineu quantes arestes pont té G.
   (b) Si G_1 i G_2 són hamiltonians, podem concloure que G és hamiltonià?
   (c) Digueu quines condicions han de complir G_1 i G_2 per tal que G sigui eulerià.
   (d) Suposem que G_1 i G_2 són grafs complets d'ordre 4 i que etiquetem els vèrtexs de G_1 de 1 a 4, i els vèrtexs de G_2 de 5 a 8. Dibuixeu els arbres generadors que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS començant pel vèrtex w si considerem l'ordenació $w, w', 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dels vèrtexs de G.

3. (3 punts) Considerem un graf G d'ordre $n \geq 3$ i mida m on cada vèrtex té grau k ó $k + 3$. Sigui r el nombre de vèrtexs de grau k.
   (a) Comproveu que $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Deduïu que si G és un arbre, aleshores $r = \frac{2n+2}{3}$ i $n + 1$ ha de ser múltiple de 3.
   (b) Demostreu que si G és un arbre, aleshores el subgraf induït pels vèrtexs de grau almenys 2 és connex.
   (c) Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 10 i d'ordre 14 tals que cada vèrtex té grau k ó $k + 3$.

1. (a) *Siguin G un graf d'ordre n i mida m, i $a = xy$ una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida dels grafs $G - x$, $G - a$, $G - \{x, y\}$ i G^c en funció de n, m i dels graus dels vèrtexs (no cal justificar-ho).*

	$G - x$	$G - a$	$G - \{x, y\}$	G^c
ordre	$n - 1$	n	$n - 2$	n
mida	$n - g(x)$	$m - 1$	$m - g(x) - g(y) + 1$	$\frac{n(n-1)}{2} - m$

(b) *Definiu graf bipartit i doneu-ne una caracterització.*

Definició. Un graf $G = (V, A)$ és bipartit si existeixen dos conjunts V_1 i V_2 no buits tals que $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i tota aresta té un extrem en V_1 i l'altre en V_2.

Caracterització. Un graf és bipartit si i només si té ordre almenys 2 i no conté cicles de longitud senar.

(c) *Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf G tenen grau almenys 2, aleshores G conté algun cicle.*

Demostració I. Suposem que G no té cap cicle. Aleshores, G és un bosc. Considerem un component connex qualsevol de G. Si el component connex té només un vèrtex, aleshores G conté un vèrtex de grau 0. Si té almenys dos vèrtexs, el component connex és un arbre d'ordre almenys dos i per tant té almenys dues fulles. En qualsevol cas, es contradiu la hipòtesi de que G té tots els vèrtexs de grau almenys 2.

Demostració II. Suposem que $G = (V, A)$ té ordre n.

Sigui k la longitud màxima d'un camí en G. Observem que $1 \le k \le n - 1$, ja que per una banda, el graf G no pot ser el graf nul per tenir vèrtexs de grau almenys 2 i una sola aresta és un camí de longitud 1, i per altra banda, els camins tenen longitud màxima $n - 1$, ja que no es poden repetir vèrtexs.

Considerem un camí de longitud k en G, $x_0x_1 \ldots x_k$. El vèrtex x_0 no pot ser adjacent a un vèrtex $y \in V \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, ja que en cas contrari, $yx_0x_1 \ldots x_k$ seria un camí de longitud $k + 1$, i això contradiria que el camí tingués longitud màxima k. Però x_0 té grau almenys 2, per tant, és adjacent a x_1 i a algun altre vèrtex x_j de $\{x_2, \ldots, x_k\}$. Aleshores, G té almenys un cicle, $x_0, x_1, \ldots, x_jx_0$.

Demostració III. Trobarem un cicle constructivament.

Com que $g(v_0) \ge 2$, hi ha un vèrtex v_1 adjacent a v_0; igualment, com que $g(v_1) \ge 2$, hi ha un altre vèrtex $v_2 \ne v_0$ adjacent a v_1. Per tant, hem construït un camí $v_0v_1v_2$. De nou, $g(v_2) \ge 2$. Poden passar dues coses: o bé v_2 és adjacent a v_0 i acabem perquè hem trobat un cicle, o bé v_2 és adjacent a un vèrtex v_3 diferent de v_0 i de v_1. En aquest cas, continuem de la mateixa manera, o bé trobem un cicle, o bé podem allargar el camí. Fem l'argument en general: suposem que hem construït un camí $v_0v_1 \ldots v_i$. El vèrtex

v_i té grau ≥ 2. Si v_i és adjacent a algun dels vèrtexs $v_k \in \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}\}$ el graf conté un cicle $v_k v_{k+1} \ldots v_i v_k$; altrament, hi ha un vèrtex v_{i+1} tal que $v_0 v_1 \ldots v_i v_{i+1}$ és un camí. Com que el graf és finit, no pot ser que estiguem en la segona situació per a tot $i \geq 2$, per tant en algun moment trobarem un cicle.

2. *Considerem dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres n_1 i n_2 respectivament, tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$. Definim el graf $G = (V, A)$ on:*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{w, w'\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv \,:\, v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v \,:\, v \in V_1 \cup V_2\}$$

És a dir, G s'obté a partir de $G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs addicionals w, w' adjacents a tots els vèrtexs de G_1 i a tots els vèrtexs de G_2.

(a) *Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de G. Determineu quantes arestes pont té G.*

El vèrtex w té excentricitat 2 en G, ja que per definició de G, $d(w, x) = 1$, si $x \in V_1 \cup V_2$ i $d(w, w') = 2$, ja que w no és adjacent a w' en G, però wxw' és un camí en G per a qualsevol vèrtex $x \in V_1 \cup V_2$. Anàlogament, per simetria, w' té excentricitat 2 en G.

Si $x \in V_1 \cup V_2$, aleshores $d(x, w) = d(x, w') = 1$, i $d(x, y) \leq 2$ per a qualsevol vèrtex $y \in V_1 \cup V_2$ diferent de x, ja que xwy és un camí en G. A més, si $x \in V_1$ i $y \in V_2$, aleshores $d(x, y) = 2$. Per tant, els vèrtexs de $V_1 \cup V_2$ tenen excentricitat 2 en G.

Per tant, $e(u) = 2$, per a tot vèrtex u de G i conseqüentment, G té radi 2, diàmetre 2 i tots els vèrtexs són centrals.

Per altra banda, G no té arestes pont, ja que tota aresta és d'algun cicle. En efecte, si l'aresta és de la forma xw, $x \in V_1$, aleshores és del cicle $wxw'yw$, per a qualsevol vèrtex $y \in V_2$. Anàlogament, es demostra que les arestes de la forma wy, $y \in V_2$, i de la forma $w'z$, $z \in V_1 \cup V_2$, són d'algun cicle. Si xy és una aresta de G_1, aleshores $xwyx$ és un cicle de G. Anàlogament, es demostra que les arestes de G_2 són d'algun cicle.

(b) *Si G_1 i G_2 són hamiltonians, podem concloure que G és hamiltonià?*

Sí. Suposem que $x_1, \ldots, x_{n_1}, x_1$ i $y_1, \ldots, y_{n_2}, y_1$ són cicles hamiltonians de G_1 i de G_2, respectivament. Aleshores, $w, x_1, \ldots, x_{n_1}, w', y_1, \ldots, y_{n_2}, w$ és un cicle hamltonià en G.

(c) *Digueu quines condicions han de complir G_1 i G_2 per tal que G sigui eulerià.*

G és eulerià si i només si G és connex i tot vèrtex té grau parell.

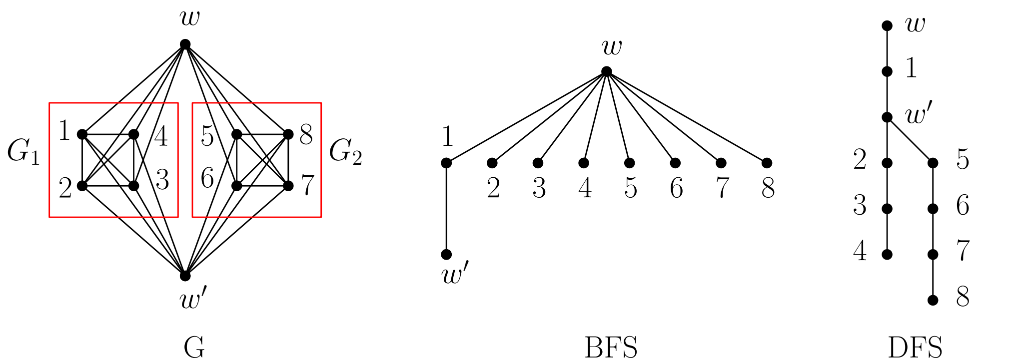
Hem vist al primer apartat que el diàmetre de G és 2, per tant, G és connex.

El grau dels vèrtexs de G és $g(w) = g(w') = n_1 + n_2$ i $g(x) = g_i(x) + 2$, si $x \in V_i$, on g_i denota el grau en el graf G_i. Tots els vèrtexs de G tindran grau parell si, i només si, $n_1 + n_2$ és parell i tots els vèrtexs de $V_1 \cup V_2$ tenen grau parell en el graf corresponent.

Per tant, G és eulerià si i només si $n_1 + n_2$ és parell, tot vèrtex de V_1 té grau parell en G_1 i tot vèrtex de V_2 té grau parell en G_2.

(d) *Suposem que G_1 i G_2 són grafs complets d'ordre 4 i que etiquetem els vèrtexs de G_1 de 1 a 4, i els vèrtexs de G_2 de 5 a 8. Dibuixeu els arbres generadors que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS començant pel vèrtex w si considerem l'ordenació $w, w', 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dels vèrtexs de G.*

A la figura següent teniu el graf G i els arbres generadors obtinguts amb els algorismes BFS i DFS:



3. *Considerem un graf G d'ordre $n \geq 3$ i mida m on cada vèrtex té grau k ó $k+3$. Sigui r el nombre de vèrtexs de grau k.*

(a) *Comproveu que $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Deduïu que si G és un arbre, aleshores $r = \frac{2n+2}{3}$ i $n+1$ ha de ser múltiple de 3.*

Pel Lema de les Encaixades, sabem que la suma dels graus és dues vegades la mida. Per tant, $2m = \sum_{u \in V(G)} g(u) = kr + (k+3)(n-r)$, ja que hi ha r vèrtexs de grau k i $n-r$ vèrtxes de grau $k+3$. Si aïllem r d'aquesta igualtat, obtenim $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Si G és un arbre d'ordre almenys 3, aleshores G té alguna fulla, per tant, ha de ser $k = 1$. Per altra banda, si G és arbre es compleix $m = n-1$. Per tant,

$$r = \frac{(k+3)n-2m}{3} = \frac{(1+3)n-2(n-1)}{3} = \frac{2n+2}{3}.$$

A més, per ser r enter, $2n+2$ ha de ser múltiple de 3. I això és equivalent a que $n+1$ sigui múltiple de 3.

(b) *Demostreu que si G és un arbre, aleshores el subgraf induït pels vèrtexs de grau almenys 2 és connex.*

Suposem que x i y són dos vèrtexs del subgraf G' induït pels vèrtexs de grau almenys 2 en G. Per a demostrar que G' és connex, veurem que hi ha almenys un $x-y$ camí en G'.

Per ser G arbre, hi ha un $x-y$ camí en G. Tots els vèrtexs del camí són de G', ja que x i y els hem triat de G' i la resta de vèrtexs del camí tenen grau almenys 2 en G, ja que són adjcents a almenys dos vèrtexs en G. Per tant, el mateix $x-y$ camí de G és també un camí en G'.

(c) *Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 10 i d'ordre 14 tals que cada vèrtex té grau k ó $k+3$.*

Dels apartats anteriors, deduïm per una banda que no n'hi ha cap d'ordre 10, ja que $10+1$ no és múltiple de 3.

Per altra banda, els arbres d'ordre 14 amb tots els vèrtexs de grau k o $k+3$ són arbres amb només vèrtexs de grau 1 i 4 que tenen exactament $r = \frac{2\cdot 14+2}{3} = 10$ fulles. També de l'apartat anterior sabem que els 4 vèrtexs restants indueixen un graf connex, o sigui, un arbre d'ordre 4. Els únics arbres d'ordre 4 llevat isomorfismes són T_4 i $K_{1,3}$. Si pengem les 10 fulles als vèrtexs d'aquests dos arbres, tenint en compte que en el arbre inicial aquests quatre vèrtexs tenen grau 4, obtenim els dos arbres de la figura: