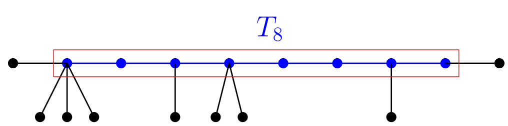
JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

R1. (40%) En aquest exercici heu de decidir quines propietats d'un graf es mantenen en afegir o suprimir arestes qualssevol. Concretament, si P és una propietat d'un graf, direm que P és *monòtona creixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P es compleix que el graf $G+a$ té també té la propietat P per a qualsevol aresta a de G^C, i direm que P és *monòtona decreixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P, aleshores $G-a$ té també la propietat P, per a qualsevol aresta a de G. Per exemple, la propietat "G és acíclic" és monòtona decreixent, perquè si suprimim una aresta d'un graf acíclic, obtenim sempre un graf acíclic, però no és monòtona creixent, perquè si afegim una aresta a un graf acíclic es pot formar un cicle.

Justifiqueu si les propietats següents són monòtones creixents i/o monòtones decreixents.

(a) G és bipartit.
(b) $r(G) = D(G)$.
(c) G té algun vèrtex de tall.
(d) G és eulerià.
(e) G és hamiltonià.
(f) G és un arbre.

R2. (60%) Direm que un arbre T és una *eruga* si és el graf trajecte d'ordre 1, o bé el graf trajecte d'ordre 2, o bé té ordre almenys 3 i al suprimir totes les fulles queda un graf trajecte T_k, per algun $k \geq 1$. Per exemple, el graf de la figura següent és una eruga perquè al suprimir les fulles queda un graf trajecte d'ordre 8:



(a) Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui un trajecte. Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui una eruga.

(b) Sigui T un arbre d'ordre n, $n \geq 3$, amb exactament k vèrtexs que no són fulles i suposem que $d_1, \ldots, d_k$ són els seus graus. Expresseu el nombre de fulles de T en funció de k i de $d_1, \ldots, d_k$.

(c) Considerem una eruga que té exactament k vèrtexs que no són fulles i, a més, tots tenen grau 4. Trobeu quantes arestes cal afegir com a mínim per tal d'obtenir un graf eulerià. Expliqueu com les afegiríeu a una eruga concreta si $k = 5$ i doneu un circuit eulerià del graf resultant en aquest cas.

(d) Suposem que un graf G d'ordre almenys 3 té un arbre generador que és una eruga amb exactament k vèrtexs que no són fulles. Justifiqueu que el diàmetre de G és com a molt $k+1$. Pot ser menor que $k+1$?

(e) De les dues seqüències $(4, 6, 6, 2, 7)$ i $(4, 7, 2, 6, 6)$, n'hi ha alguna que sigui la seqüència de Prüfer d'una eruga?

Informacions
- Durada de l'examen: 100 minuts
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.