

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. [3 punts]
 - (a) Demostreu que tot graf d'ordre $n \geq 2$ té almenys dos vèrtexs del mateix grau.
 - (b) Doneu la definició de vèrtex de tall i d'aresta pont. Doneu una caracterització d'aresta pont. És possible que un graf tingui vèrtexs de tall, però no tingui cap aresta pont?
 - (c) Enuncieu el Teorema de Dirac. Doneu un contraexemple que mostri que el recíproc no és cert. Doneu un exemple que mostri que la condició del teorema és ajustada.
2. [3 punts] Sigui G un graf bipartit d'ordre $n \geq 3$.
 - (a) Demostreu que si G és hamiltonià, aleshores l'ordre de G ha de ser parell.
 - (b) Demostreu que si $n \geq 5$, aleshores el graf complementari de G no pot ser bipartit.
 - (c) Demostreu que G és bipartit complet si i només si el diàmetre de G és 2.
3. [4 punts] Sigui $r \geq 2$ un enter. Sigui $H_r = (V_r, A_r)$ el graf tal que V_r és el conjunt de les paraules binàries de longitud r (amb l'alfabet $\{0, 1\}$) i A_r està definit d'acord a la regla següent: dues paraules són adjacents si i només si difereixen en una única posició. Per exemple, per a $r = 3$ el conjunt de vèrtexs és $V_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 100 és $\{000, 110, 101\}$.
 - (a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf H_r en funció de r .
 - (b) Calculeu el diàmetre i el radi de H_r en funció de r .
 - (c) Per a quins valors de r és H_r eulerià?
 - (d) Doneu els arbres generadors obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf H_3 prenent com a vèrtex inicial 000 i els vèrtexs ordenats lexicogràficament (o sigui, amb l'ordre: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111). Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Instruccions

- La durada de l'examen és de 1h 45m.
- Cal entregar les 3 preguntes per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,...

Informacions

- Les notes es publicaran com a tard el dia 16 de gener a la tarda.
- La revisió es farà el dia 17 de gener a les 15:15 a l'aula A5202.