Matemàtiques 1 - FIB 03-06-2021
Examen final-Àlgebra Lineal

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) (1 punt) Suposem que F i G són dos subespais de $\mathbb{R}^3$. Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:

Si F i G són subespais de dimensió 2, aleshores $F \cap G \neq \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$.

(b) (1 punt) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u, v, w\}$ i $B' = \{u', v', w'\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors u, $u+v$ i v' en cadascuna de les dues bases.

(c) (1 punt) Siguin $f\colon E \to F$ una aplicació lineal i e_1, e_2, e_3 vectors de E. Demostreu que si e_1, e_2, e_3 són linealment independents i f és injectiva, aleshores $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són linealment independents.

2. Sigui S_a el subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generat per les matrius M_1, M_2, M_3, M_4, on

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \text{ i } M_4 = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}.$$

(a) (1 punt) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

(b) (1 punt) Quines equacions han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S_1?

(c) (1 punt) Doneu la dimensió i una base de $S_0 \cap S_1$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1.5 punts) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) (1 punt) Sigui $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}$. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$.

(c) (1.5 punts) Esbrineu si f diagonalitza. En cas que diagonalitzi, trobeu una base B de vectors propis i doneu la matriu D associada a f en aquesta base. Quina relació hi ha entre les matrius A, D i la matriu de canvi de base de B a C?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 3 exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 21/06/2021.
- Revisió de l'examen: s'haurà de demanar el 22 de juny seguint el procediment que es publicarà al racó.