

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (3 punts)
 - (a) Siguin G un graf d'ordre n i mida m , i $a = xy$ una aresta de G . Doneu l'ordre i la mida dels grafs $G - x$, $G - a$, $G - \{x, y\}$ i G^c en funció de n , m i dels graus dels vèrtexs (no cal justificar-ho).
 - (b) Definiu graf bipartit i doneu-ne una caracterització.
 - (c) Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf G tenen grau almenys 2, aleshores G conté algun cicle.
2. (4 punts) Considerem dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres n_1 i n_2 respectivament, tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$. Definim el graf $G = (V, A)$ on:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{w, w'\}$$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv : v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v : v \in V_1 \cup V_2\}$$

És a dir, G s'obté a partir de $G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs addicionals w, w' adjacents a tots els vèrtexs de G_1 i a tots els vèrtexs de G_2 .

- (a) Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de G . Determineu quantes arestes pont té G .
 - (b) Si G_1 i G_2 són hamiltonians, podem concloure que G és hamiltonià?
 - (c) Digueu quines condicions han de complir G_1 i G_2 per tal que G sigui eulerià.
 - (d) Suposem que G_1 i G_2 són grafs complets d'ordre 4 i que etiquetem els vèrtexs de G_1 de 1 a 4, i els vèrtexs de G_2 de 5 a 8. Dibuixeu els arbres generadors que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS començant pel vèrtex w si considerem l'ordenació $w, w', 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dels vèrtexs de G .
3. (3 punts) Considerem un graf G d'ordre $n \geq 3$ i mida m on cada vèrtex té grau k ó $k + 3$. Siguin r el nombre de vèrtexs de grau k .
 - (a) Comproveu que $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Deduïu que si G és un arbre, aleshores $r = \frac{2n+2}{3}$ i $n + 1$ ha de ser múltiple de 3.
 - (b) Demostreu que si G és un arbre, aleshores el subgraf induït pels vèrtexs de grau almenys 2 és connex.
 - (c) Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 10 i d'ordre 14 tals que cada vèrtex té grau k ó $k + 3$.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra. Cal lliurar els 3 problemes per separat.
- Publicació de les notes: 12/04/2019. Revisió de l'examen: 24/04/2019 a les 13:00 (s'informarà del lloc al racó).