Matemàtiques 1 - FIB 12-01-2021

Examen final-Àlgebra Lineal

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) i) [0.5 punts] Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i S un subconjunt d'E. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai d'E.

ii) [1 punt] Determineu si els conjunts següents són subespais d'$\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{c} 2x = y - z \\ x + y + t = 0 \end{array} \right\}; \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y-2 \\ 2x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) [0.5 punts] Sigui E un espai vectorial real de dimensió n i f un endomorfisme d'E amb polinomi característic $P_f(x) = (1-x)^n$. Demostreu que si f diagonalitza, aleshores f és l'aplicació identitat.

2. Considerem el subespai F d'$\mathbb{R}^4$ generat pels vectors del conjunt $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) [1 punt] Calculeu la dimensió d'F i doneu una base B d'F formada per vectors del conjunt S. Expresseu els vectors d'S que no siguin de B com a combinació lineal dels vectors de B.

(b) [1 punt] Completeu la base donada a l'apartat anterior fins a una base d'$\mathbb{R}^4$.

(c) [1 punt] Quines equacions han de satisfer les variables x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sigui d'F?

3. Sigui $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ la base canònica de l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de matrius reals 2×2, i $W = \{1, x, x^2\}$ la base canònica de l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis reals de grau com a molt 2. Definim l'aplicació lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ tal que $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a - 2b + 2d) + (b + c)x + (a + 2c + 2d)x^2$.

(a) [0.5 punts] Calculeu la matriu associada a f en les bases B i W.

(b) [1.5 punts] Calculeu la dimensió i una base dels subespais $\mathrm{Ker} f$ i $\mathrm{Im} f$. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

(c) [1 punt] Calculeu la matriu associada a f en les bases $B' = \{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $W' = \{1 + x^2, \frac{1}{2}x, 1 - x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

4. Sigui $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme f_a d'$\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

(a) [1 punt] Estudieu per a quins valors d'a diagonalitza l'endomorfisme f_a.

(b) [1 punt] Sigui $a = -1$. En cas que f_{-1} diagonalitzi, doneu una base B d'$\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis, la matriu diagonal D associada a f_{-1} en la base B, i la relació entre les matrius A i D.

Instruccions i informacions

- Durada de l'examen: 1h 30m.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Cal lliurar els 4 exercicis per separat. Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 20/01/2021 a la tarda.
- El procediment de revisió es publicarà al racó.