Matemàtiques 1 - GEI - FIB 11-01-2022
Examen Final-Part de grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

R1. (5 punts)

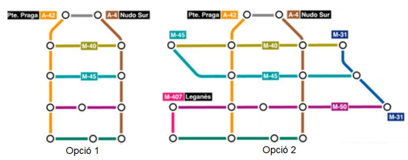
a) Sigui G un graf connex d'ordre n i mida m. Demostreu que G conté exactament un cicle si i només si $m = n$.

b) Trobeu tots els grafs no isomorfs d'ordre 5, connexos i amb exactament un cicle (Indicació: considereu casos segons la longitud del cicle).

c) Demostreu que si un graf G d'ordre 5 és autocomplementari, aleshores G és connex i conté exactament un cicle. (Un graf G és *autocomplementari* si G i el seu complementari, G^c, són isomorfs).

d) Deduïu que hi ha exactament dos grafs d'ordre 5 autocomplementaris, llevat isomorfismes.

R2. (2 punts) Després d'una gran nevada, una màquina llevaneus ha de netejar unes carreteres de l'àrea de Madrid. Qui organitza el servei es planteja a quina d'aquestes dues zones li pot assignar un operari de manera que la pugui netejar sencera sense passar dos cops pel mateix tram de carretera.



(a) Quina de les dues opcions permetrà netejar tota la zona sense passar dos cops per un mateix tram? Indiqueu els punts inicial i final del trajecte.

(b) Per a l'opció donada a l'apartat anterior, indiqueu per quants trams caldrà passar almenys dos cops si un cop netejada tota la zona la màquina ha de retornar al punt d'inici.

Nota: l'esquema de carreteres és real però les distàncies i les característiques de les mateixes no permetrien que el problema fos tan simple.

R3. (3 punts) La seqüència de graus d'un arbre T d'ordre 15 comença amb 5,4,3,3 i la resta de vèrtexs tenen grau inferior a 3.

(a) Quina ha de ser la seqüència de graus de T?

(b) Suposem a més que el vèrtex de grau 5 no és adjacent a cap fulla. Quants arbres possibles hi ha llevat isomorfismes amb aquestes condicions? Doneu-ne una representació gràfica.

(c) Quants valors diferents apareixen a la seqüència de Prüfer? Quants valors apareixen almenys dos cops?

Informacions

- Durada de l'examen: 85 minuts
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Publicació de les notes: 24/01/2022.
- Revisió de l'examen: 25/01/2022 a les 15:00 (s'haurà de demanar segons el procediment que es publicarà al racó).

Model de solució

R1. (5 punts)

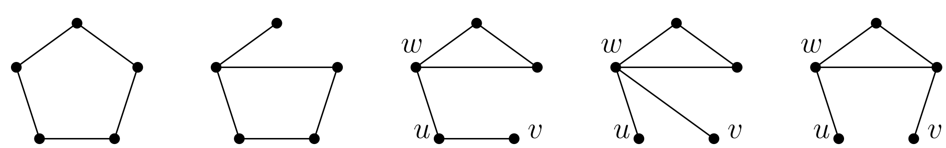
a) Sigui G un graf connex d'ordre n i mida m. Demostreu que G conté exactament un cicle si i només si $m = n$.

Solució. Suposem primer que G conté un únic cicle C. Sigui a una aresta del cicle C. Aleshores $G - a$ és connex, perquè l'aresta a no és pont, i és acíclic, perquè ja no tenim el cicle C. Per tant, $G - a$ és un arbre d'ordre n i mida $m - 1$. Sabem que la mida d'un arbre és igual a l'ordre menys 1, és a dir, $m - 1 = n - 1$, d'on deduïm $m = n$.

Suposem ara que $m = n$. Aleshores G no és un arbre, perquè la mida no és l'ordre menys 1. Els arbres són grafs connexos i acíclics i sabem que G és connex. Per tant, G no pot ser acíclic. Suposem ara que G té almenys dos cicles diferents, i arribarem a contradicció. En aquest cas hi ha almenys una aresta a que és només d'un dels dos cicles (si no, no serien dos cicles diferents). El graf $G - a$ té algun cicle i és connex, perquè les arestes d'un cicle no són arestes pont. Per tant, $G - a$ no és arbre. Com que $G - a$ és connex no arbre, la mida de $G - a$ ha de ser més gran que l'ordre menys 1. És a dir, $m - 1 > n - 1$, i per tant $m > n$, contradicció. Per tant, G té exactament un cicle.

b) Trobeu tots els grafs no isomorfs d'ordre 5, connexos i amb exactament un cicle (Indicació: considereu casos segons la longitud del cicle).

Solució. El cicle pot ser d'ordre 3, 4 o 5. Observem a més que si G té exactament un cicle, dos vèrtexs no consecutius del cicle no poden ser adjacents, si no, tindríem més d'un cicle. Per tant, si G té un cicle d'ordre 5, ha de ser C_5. Si G té exactament un cicle d'ordre 4, només hi ha un vèrtex que no és del cicle que haurà de ser adjacent a un vèrtex del cicle, perquè G és connex, i només a un, perquè si no hi hauria més d'un cicle. Anomenem G_0 aquest graf. Si G té exactament un cicle d'ordre 3, hi ha 2 vèrtexs u i v que no són del cicle. Almenys un, suposem que és el vèrtex u, ha de ser adjacent a un i només un vèrtex w del cicle, perquè G és connex i només té un cicle. Aleshores, el vèrtex v ha de ser adjacent a un i només un dels vèrtexs restants, perquè G és connex i només té un cicle. Els casos possibles són: v és adjacent a u, v és adjacent a w o v és adjacent a un vèrtex del cicle diferent de w. Anomenem aquests grafs G_1, G_2 i G_3, respectivament. A la figura següent tenim aquests grafs amb la seqüència de graus corresponent. Veiem que són no isomorfs perquè tenen seqüències de graus diferents, excepte G_0 i G_1, i aquests dos són no isomorfs, perquè l'únic vèrtex de grau 1 és adjacent a un vèrtex de grau 2 en G_1 i a un vèrtex de grau 3 en G_0.



C_5	G_0	G_1	G_2	G_3
$(2,2,2,2,2)$	$(3,2,2,2,1)$	$(3,2,2,2,1)$	$(4,2,2,1,1)$	$(3,3,2,1,1)$

c) Demostreu que si un graf G d'ordre 5 és autocomplementari, aleshores G és connex i conté exactament un cicle. (Un graf G és *autocomplementari* si G i el seu complementari, G^c, són isomorfs).

Solució. Sabem que si un graf és no connex, el seu complementari és connex. En efecte, siguin x i y dos vèrtexs de G. Si x i y són de components connexos diferents en G, aleshores x i y són adjacents en G^c. Si x i y són del mateix component connex en G, considerem un vèrtex z d'un component connex diferent en G. Aleshores, xzy és un camí de longitud 2 en G^c. Per tant, entre els vèrtexs x i y sempre hi ha un camí en G^c i, per tant, G^c és connex.

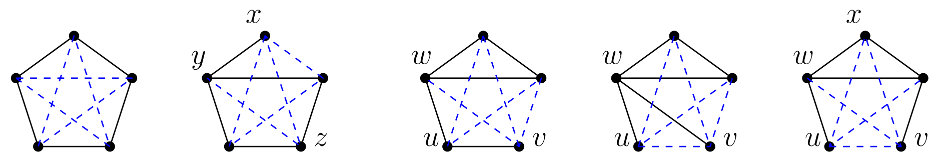
Conseqüentment, G ha de ser connex, ja que si G és no connex, aleshores G^c és connex, i per tant, G i G^c no serien isomorfs, contradicció.

D'altra banda, si G és autocomplementari, aleshores G i G^c tenen la mateixa mida m, i a més, la suma de les mides de G i de G^c és la del complet d'ordre 5. És a dir, la mida de G ha de ser la meitat de la mida del graf complet d'ordre 5, que té mida 10. Per tant, la mida de G ha de ser 5.

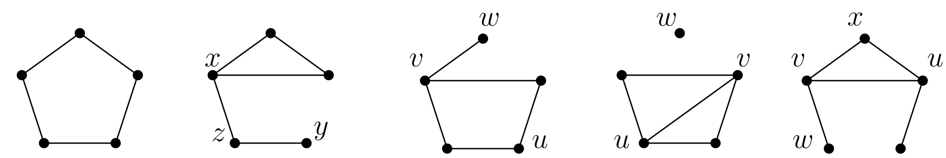
Per ser G connex d'ordre i mida iguals (=5), per l'apartat (a) deduïm que té exactament un cicle.

d) Deduïu que hi ha exactament dos grafs d'ordre 5 autocomplementaris, llevat isomorfismes.

Solució. De l'apartat anterior deduïm que han de ser grafs connexos amb un únic cicle. A l'apartat b) els hem trobat tots, llevat isormorfismes. Calculem el complementari en cada cas i observem que només són autocomplementaris els grafs C_5 i G_3. A la figura següent tenim els grafs trobats a l'apartat (b) i els seus complementaris: a la fila superior hi ha dibuixades amb línia discontínua les arestes del complementari i, a sota, els complementaris redibuixats per tal d'identificar-los. Veiem que només són autocomplementaris C_5 i G_3.

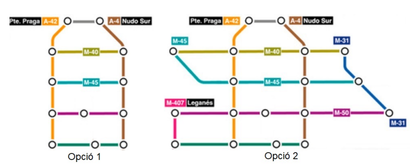


C_5 G_0 G_1 G_2 G_3



$C_5^c \cong C_5$ $G_0^c \cong G_1 \not\cong G_0$ $G_1^c \cong G_0 \not\cong G_1$ $G_2^c \not\cong G_2$ $G_3^c \cong G_3$

R2. (2 punts) Després d'una gran nevada, una màquina llevaneus ha de netejar unes carreteres de l'àrea de Madrid. Qui organitza el servei es planteja a quina d'aquestes dues zones li pot assignar un operari de manera que la pugui netejar sencera sense passar dos cops pel mateix tram de carretera.

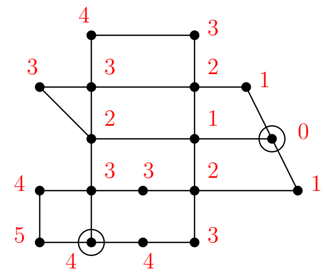


(a) Quina de les dues opcions permetrà netejar tota la zona sense passar dos cops per un mateix tram? Indiqueu els punts inicial i final del trajecte.

Solució. Si representem les zones amb un graf on els vèrtexs són les interseccions d'almenys 2 trams i les arestes, els diferents trams, equival a veure si el graf corresponent és eulerià o té un senderó eulerià. Per tant, cal veure si el graf és connex i té tots els vèrtexs de grau parell o bé exactament 2 vèrtexs de grau senar. Tots dos grafs són connexos, però el graf de l'opció 1 té 6 vèrtexs de grau senar, en canvi el graf de l'opció 2 té dos vèrtexs de grau 3 i la resta de grau parell. Per tant, es pot fer amb l'opció 2. El recorregut començaria i acabaria a cadascún dels vèrtexs de grau 3.

(b) Per a l'opció donada a l'apartat anterior, indiqueu per quants trams caldrà passar almenys dos cops si un cop netejada tota la zona la màquina ha de retornar al punt d'inici.

Solució. Hem de calcular la distància entre els dos vèrtexs de grau 3, que és 4. Per tant, tornarà a passar per almenys 4 trams. Per a calcular la distància, triem un vèrtex de grau 3 i l'etiquetem amb un 0; els vèrtexs adjacents a aquest estan a distància 1 i els etiquetem amb un 1; els vèrtexs no etiquetats fins al moment adjacents als que tenen etiqueta 1 estan a distància 2, i els etiquetem amb un 2; els vèrtexs no etiquetats fins al moment adjacents als que tenen etiqueta 2 estan a distància 3, i els etiquetem amb un 3, etc. D'aquesta manera veiem que els vèrtexs de grau 3 estan a distància 4:



R3. (3 punts) La seqüència de graus d'un arbre T d'ordre 15 comença amb 5,4,3,3 i la resta de vèrtexs tenen grau inferior a 3.

(a) Quina ha de ser la seqüència de graus de T?

Solució. Pel Lema de les Encaixades, la suma dels graus és dues vegades la mida, i per ser T un arbre, la mida és l'ordre menys 1, és a dir, 14. Si n_1 és el nombre de fulles i n_2 és el nombre de vèrtexs de grau 2, aleshores

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = 5 + 4 + 3 + 3 + 2\,n_2 + n_1 = 2 \cdot 14 = 28.$$

A més, l'ordre de l'arbre satisfà

$$15 = n_1 + n_2 + 4,$$

ja que els arbres d'ordre almenys 2 no tenen vèrtexs de grau 0. De les igualtats anteriors obtenim

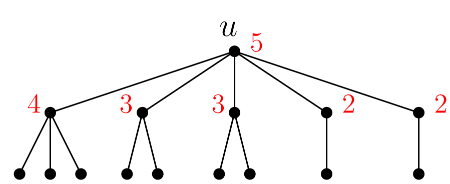
$$n_1 + 2n_2 = 13, \;\; n_1 + n_2 = 11,$$

d'on deduïm $n_1 = 9$ i $n_2 = 2$. La seqüència de graus de T és, doncs,

$$5, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

(b) Suposem a més que el vèrtex de grau 5 no és adjacent a cap fulla. Quants arbres possibles hi ha llevat isomorfismes amb aquestes condicions? Doneu-ne una representació gràfica.

Solució. Sigui u el vèrtex de grau 5. Només hi ha 5 vèrtexs que no són fulles a part del vèrtex de grau 5, que són un vèrtex de grau 4, dos vèrtexs de grau 3 i dos vèrtexs de grau 2. Per tant, u ha de ser adjacent a aquests 5 vèrtexs. A més d'aquests 6 vèrtexs i 5 arestes, l'arbre només té 9 fulles que han de penjar dels vèrtexs de grau 4,3 i 2. Per tant, hi ha d'haver 3 fulles adjacents al vèrtex de grau 4; 2 fulles adjacents a cadascun dels vèrtexs de grau 3 i 1 fulla adjacent a cadascun dels vèrtexs de grau 2. Per tant, només hi ha un arbre llevat isomorfismes, que tenim representat a la figura següent (en vermell, el grau dels vèrtexs corresponents):



(c) Quants valors diferents apareixen a la seqüència de Prüfer? Quants valors apareixen almenys dos cops?

Solució. Cada vèrtex apareix a la seqüència de Prüfer tantes vegades com el grau menys 1. Per tant, apareixeran només les etiquetes dels vèrtexs que no són fulles, o sigui 6, i apareixeràn almenys dos cops els vèrtexs que tenen grau almenys 3, o sigui 4.