Matemàtiques 1 - GEI - FIB 31-03-2022
Examen Parcial

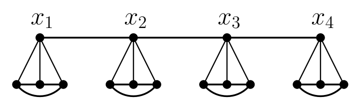
JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. Sigui G un graf d'ordre n i mida m, amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$, i H un graf d'ordre n' i mida m'. Siguin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ grafs isomorfs a H de manera que els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ són disjunts dos a dos. Definim el graf $G \circ H$ com el graf que té per conjunt de vèrtexs i arestes:

$V(G \circ H) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_n)$,

$A(G \circ H) = A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}$.

(O sigui, "pengem" una còpia de H de cada vèrtex de G de la manera que s'especifica a l'enunciat.

Per exemple, una representació del graf $T_4 \circ C_3$ seria: 

)

Responeu les preguntes següents per a grafs G i H connexos qualssevol d'ordre almenys 2, si no s'indica el contrari, en funció dels paràmetres corresponents dels grafs G i H.

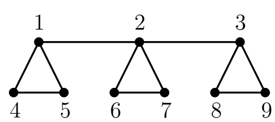
(a) (1 punt) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de $G \circ H$.

(b) (1 punt) Calculeu el radi i el diàmetre de $G \circ H$.

(c) (1 punt) Determineu tots els vèrtexs de tall i les arestes pont de $G \circ H$.

(d) (1 punt) Suposem que G i H són grafs complets. Per a quins valors de n i n' serà $G \circ H$ eulerià?

(e) (1 punt) Suposem que G és un cicle d'ordre parell i H és un graf hamiltonià. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a $G \circ H$ per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

P2. (1 punt) Considerem el graf de la figura: 

Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i, en tot moment, l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

P3. Digueu si és certa o falsa cadascuna de les afirmacions següents. Si és certa, justifiqueu-la, i si no, doneu-ne un contraexemple.

(a) (1 punt) Si afegim una aresta entre dos vèrtexs de la mateixa part estable d'un graf bipartit, el resultat és sempre un graf no bipartit.

(b) (1 punt) Un graf d'ordre 30 amb tots els vèrtexs de grau almenys 15 és sempre connex.

P4. (2 punts) Sabem que la seqüència de Prüfer d'un arbre T té longitud 4 i hi apareix exactament dues vegades el valor a, exactament una vegada el valor b, i exactament una vegada el valor c. Quina és la seqüència de graus de l'arbre? Quants arbres hi ha, llevat isomorfismes, que tinguin aquesta seqüència de graus? Doneu una representació gràfica de cadascun d'aquests arbres.

• Durada de l'examen: 1h 45m

• No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

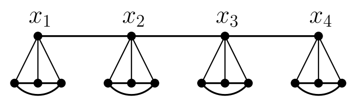
Solució

P1. Sigui G un graf d'ordre n i mida m, amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$, i H un graf d'ordre n' i mida m'. Siguin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ grafs isomorfs a H de manera que els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ són disjunts dos a dos. Definim el graf $G \circ H$ com el graf que té per conjunt de vèrtexs i arestes:

$V(G \circ H) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_n)$,

$A(G \circ H) = A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}$.

(O sigui, "pengem" una còpia de H de cada vèrtex de G de la manera que s'especifica a l'enunciat.

Per exemple, una representació del graf $T_4 \circ C_3$ seria: 

)

Responeu les preguntes següents per a grafs G i H connexos qualssevol d'ordre almenys 2, si no s'indica el contrari, en funció dels paràmetres corresponents dels grafs G i H.

(a) (1 punt) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de $G \circ H$.

Solució. L'ordre de $G \circ H$ és $n + nn'$, ja que, al ser els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ disjunts dos a dos,

$$|V(G \circ H)| = |\{x_1, \ldots, x_n\}| + |V(H_1)| + \cdots + |V(H_n)| = n + nn'.$$

La mida és $m + nm' + nn'$, ja que

$$\begin{aligned}
&|A(G \circ H)| = \\
&= |A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}| \\
&= |A(G)| + |A(H_1)| + \cdots + |A(H_n)| + |\{x_1 u : u \in V(H_1)\}| + \cdots + |\{x_n u : u \in V(H_n)\}| \\
&= m + nm' + nn'
\end{aligned}$$

El grau dels vèrtexs és:

$$g_{G \circ H}(x_i) = g_G(x_i) + n', \text{ on } x_i \in V(G)$$
$$g_{G \circ H}(u) = g_{H_i}(u) + 1, \text{ si } u \in V(H_i)$$

(b) (1 punt) Calculeu el radi i el diàmetre de $G \circ H$.

Solució. L'excentricitat en $G \circ H$ d'un vèrtex $x_i \in V(G)$ és $e_{G \circ H}(x_i) = e_G(x_i) + 1$, ja que, per construcció, el vèrtexs més allunyats de x_i en $G \circ H$ són els vèrtexs de la còpia H_j, que pengen del vèrtex $x_j \in V(G)$ més allunyat de x_i en G.

L'excentricitat d'un vèrtex $u \in V(H_i)$ és $e_{G \circ H}(u) = 1 + e_{G \circ H}(x_i) = e_G(x_i) + 2$, ja que els vèrtexs de H_i estan a distància com a molt 2 de u i tots els camins de u a vèrtexs que no són de H_i passen pel vèrtex x_i.

Per tant, el radi de $G \circ H$ és

$r(G \circ H) = \min\{e_{G \circ H}(z) : z \in V(G \circ H)\} = \min\{e_G(x_i) + 1 : x_i \in V(G)\} = r(G) + 1$

i el diàmetre de $G \circ H$ és

$D(G \circ H) = \max\{e_{G \circ H}(z) : z \in V(G \circ H)\} = \max\{e_G(x_i) + 2 : x_i \in V(G)\} = D(G) + 2.$

(c) (1 punt) Determineu tots els vèrtexs de tall i les arestes pont de $G \circ H$.

Solució.

Vèrtexs de tall. Sabem que el graf $G \circ H$ és connex, perquè G és connex. Per tant, un vèrtex de $G \circ H$ serà de tall si i només si al suprimir-lo de $G \circ H$, s'obté un graf no connex. Observem que, per construcció de $G \circ H$, tots els camins des d'un vèrtex de H_i fins a un vèrtex de G passen per x_i. Aleshores,

- si $x_i \in V(G)$, aleshores x_i és de tall, ja que, per construcció de $G \circ H$, tots els camins de $u \in V(H_i)$ a $x_j \in V(G)$, $j \neq i$, passen per x_i.
- si $u \in V(H_i)$, aleshores u no és de tall, ja que
  - si $v, w \in V(H_i)$, aleshores hi ha un camí de v a w en $G \circ H - u$, per exemple vx_iw;
  - si $v \in V(H_i)$ i $z \notin V(H_i)$, aleshores hi ha un camí en $G \circ H - u$, que comença amb l'aresta vx_i i després passa per vèrtexs diferents de u;
  - si $z, z' \notin V(H_i)$, aleshores hi ha un camí en $G \circ H - u$, perquè cap camí de z a z' en $G \circ H$ passa per u (ja que caldria passar dues vegades per x_i).

Per tant, els vèrtexs de tall de $G \circ H$ són tots els vèrtexs de G, $x_1, \ldots, x_n$.

Arestes pont.

- Les arestes de H_i no són pont, ja que formen part d'un cicle (si l'aresta és, per exemple, uv, $u, v \in V(H_i)$), aleshores x_iuvx_i és un cicle que passa per uv).
- Les arestes x_iu, que connecten un vèrtex x_i de G amb un vèrtex u de H_i, no són mai arestes pont, perquè són d'algun cicle (per exemple, si v és un vèrtex de H_i adjacent a u, que existeix perquè H és connex d'ordre almenys 2, aleshores x_iuvx_i és un cicle que conté x_iu).
- Les arestes de G són d'un cicle en $G \circ H$ si i només si són d'un cicle en G (no hi ha cicles que continguin vèrtexs de G i d'alguna còpia de H_i alhora, ja que els vèrtexs x_i són de tall en $G \circ H$). Per tant, una aresta de $A(G)$ és pont en $G \circ H$ si i només si és pont en G.

Per tant, les arestes pont de $G \circ H$ són les arestes pont de G.

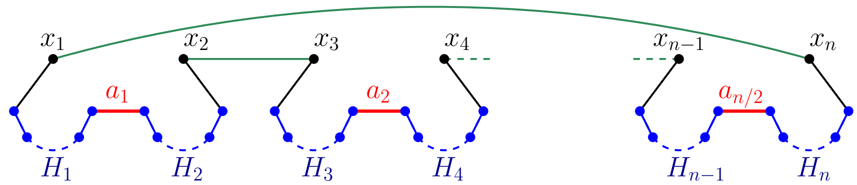
(d) (1 punt) Suposem que G i H són grafs complets. Per a quins valors de n i n' serà $G \circ H$ eulerià?

Solució. El graf $G \circ H$ és connex perquè al ser G connex, aleshores $G \circ H$ té diàmetre finit (vegeu l'apartat (b)). A més, per ser G i H grafs complets, per l'apartat (a) tenim, $g_{G \circ H}(x_i) = n - 1 + n'$, si $x_i \in V(G)$, i $g_{G \circ H}(u) = n' - 1 + 1 = n'$, si $u \in V(H_i)$. Per tant, tots els vèrtexs tindran grau parell si i només si $n + n' - 1$ i n' són parells. Per tant, $G \circ H$ és eulerià si i només si n és senar i n' és parell.

(e) (1 punt) Suposem que G és un cicle d'ordre parell i H és un graf hamiltonià. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a $G \circ H$ per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

Solució. El graf $C_n \circ H$ no és hamiltonià perquè té vèrtexs de tall (tots els vèrtexs de C_n). D'altra banda, per obtenir un graf hamiltonià cal afegir almenys una aresta incident a un dels vèrtexs de H_i, per a cada còpia H_i, ja que en cas contrari, el vèrtex x_i continua essent un vèrtex de tall. Per tant, calen com a mínim $n/2$ arestes (ja que cada aresta és incident a dos vèrtexs).

Vegem ara que afegint $n/2$ arestes podem aconseguir un graf hamiltonià. A la figura següent teniu un esquema de la contrucció que farem per obtenir un cicle hamiltonià, i que s'explica a continuació.



Considerem a cada H_i un camí hamiltonià amb vèrtex inicial u_{i1} i vèrtex final $u_{in'}$ (en blau, a la figura), que existeix perquè H és hamiltonià (si un graf té un cicle hamiltonià, aleshores té un camí hamiltonià). Afegim per a cada i senar l'aresta $a_i = u_{in'}u_{i+1,1}$, és a dir, l'aresta que té per extrems l'ultim vèrtex del camí hamiltonià de H_i i el primer vèrtex del camí hamiltonià de H_{i+1} (en vermell, a la figura). D'aquesta manera, afegim exactament $n/2$ arestes. Vegem a continuació que el graf $G \circ H + \{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$ és hamiltonià descrivint un cicle hamiltonià. Suposem que el cicle del graf G és $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$. Per a tot i senar substituim l'aresta $x_i x_{i+1}$ del cicle pel camí següent:

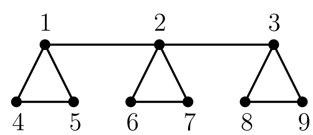
$$x_i \overbrace{u_{i,1} u_{i,2}, \ldots, u_{i,n'-1}, u_{i,n'}}^{\text{camí hamiltonià de } H_i} \overbrace{u_{i+1,1}, u_{i+1,2}, \ldots, u_{i+1,n'}}^{\text{camí hamiltonià de } H_{i+1}} x_{i+1}.$$

És a dir, entre x_i i x_{i+1} es passa tots els vèrtexs de H_i i de H_{i+1}, utilitzant l'aresta afegida $a_i = u_{in'}u_{i+1,1}$ (en vermell, els vèrtexs extrems de a_i).

D'aquesta manera, utilitzant les arestes $\{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$, obtenim un cicle que passa per tots els vèrtexs de $G \circ H$, o sigui, un cicle hamiltonià en $G \circ H + \{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$.

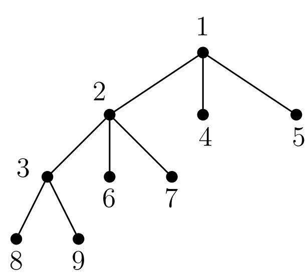
Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf hamiltonià és $n/2$.

P2. (1 punt) Considerem el graf de la figura:

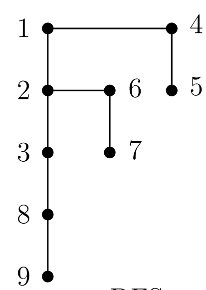


Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i en tot moment l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

Solució. A la figura següent teniu una representació de cadascun dels arbres. L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme BFS és $1, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 9$ i en aplicar l'algorisme DFS és $1, 2, 3, 8, 9, 6, 7, 4, 5$.



BFS



DFS

P3. Digueu si és certa o falsa cadascuna de les afirmacions següents. Si és certa, justifiqueu-la, i si no, doneu-ne un contraexemple.

(a) (1 punt) Si afegim una aresta entre dos vèrtexs de la mateixa part estable d'un graf bipartit, el resultat és sempre un graf no bipartit.

Solució. És fals. Per exemple, considerem el graf G amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4\}$ i conjunt d'arestes $\{13, 24\}$. Aleshores, si $V_1 = \{1, 2\}$ i $V_2 = \{3, 4\}$, V_1, V_2

és una partició de V, on les arestes tenen un extrem a V_1 i l'altre a V_2. Per tant, G és bipartit. Si afegim l'aresta 12 entre els dos vèrtex de la part estable V_1 obtenim un graf trajecte d'ordre 4, que és també bipartit, amb parts estables $V_1' = \{1, 4\}$ i $V_2' = \{2, 3\}$.

(b) (1 punt) Un graf d'ordre 30 amb tots els vèrtexs de grau almenys 15 és sempre connex.

Solució. És cert. El graf té ordre més gran o igual que 3 i tots els vèrtexs tenen grau 15 que és almenys la meitat de l'ordre ($30/2 = 15$). Pel Teorema de Dirac, el graf és hamiltonià, i per tant, connex.

D'una altra manera. Veurem que entre dos vèrtexs qualssevol u i v del graf hi ha almenys un camí. Si són adjacents, hi ha un camí de longitud 1. Si no, considerem el conjunt $N(u)$, format per tots els vèretxs adjacents a u, i el conjunt $N(v)$, format per tots els vèretxs adjacents a v. Cadascun dels conjunts $N(u)$ i $N(v)$ té almenys 15 vèrtexs, ja que tots els vèrtexs tenen grau almenys 15, i, a més, no contenen ni u, ni v, perquè u i v no són adjacents. Si $N(u)$ i $N(v)$ fossin disjunts, aleshores el graf tindriacom a mínim 32 vèrtexs (el vèrtex u, el vèrtex v, almenys 15 vèrtexs a $N(u)$ i almenys 15 vèrtexs a $N(v)$), contradicció. Per tant, $N(u)$ i $N(v)$ tenen com a mínim un vèrtex comú, w, de manera que uwv és un camí de longitud 2. Per tant, el graf és connex, perquè entre dos vèrtexs qualssevol hi ha almenys un camí.

P4. (2 punts) Sabem que la seqüència de Prüfer d'un arbre T té longitud 4 i hi apareix exactament dues vegades el valor a; exactament una vegada el valor b, i exactament una vegada el valor c. Quina és la seqüència de graus de l'arbre? Quants arbres hi ha, llevat isomorfismes, que tinguin aquesta seqüència de graus? Doneu una representació gràfica de cadascun d'aquests arbres.

Solució. L'arbre té ordre 6, ja que la seqüència de Prüfer té longitud 4. Dels 6 vèrtexs, només 3 apareixen a la seqüència de Prüfer, Per tant, l'arbre té 3 ($= 6 - 3$) fulles. El grau dels vèrtexs a, b i c és una unitat més gran que el nombre de vegades que apareixen a la seqüència de Prüfer. Per tant, $g(a) = 3$, $g(b) = 2$ i $g(c) = 2$. La seqüència de graus de l'arbre és, doncs, $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Per a trobar tots els arbres amb aquesta seqüència de graus, llevat isomorfismes, observem que si suprimim les 3 fulles de l'arbre, queda un graf connex (perquè els vèrtexs de grau 1 no són de tall) i sense cicles (perquè l'arbre no conté cicles) amb els vèrtexs a, b i c. És a dir, el resultat és un arbre format pels vèrtexs a, b i c. L'únic arbre d'ordre 3 és el trajecte T_3. Només cal analitzar dos casos, segons si el vèrtex a és el vertex de grau 2 de T_3 o bé una fulla de T_3, ja que tenint en compte el grau d'a, b i c en T, ja quedarà determinat d'on pengen les 3 fulles de T. Els arbres que s'obtenen són els de la figura, que són no isomorfs, perquè en un dels arbres el vèrtex de grau 3 és adjacent a una fulla, i en l'altre, a 2 fulles: