TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (3 punts)

   a) Calculeu el primer terme no nul del polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ de les funcions següents:

   a.1) $\sin(x)$,

   a.2) $\sin^2(x)$,

   a.3) $\sin^3(x)$,

   a.4) $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Calculeu de forma aproximada, donant una cota de l'error comès:

   b.1) $\sin(0.1)$,

   b.2) $\sin^2(0.1)$.

2. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$.

   a) Trobeu el domini de la funció f.

   b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x,y) = k$ per a $k = -1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}$.

   c) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

   d) Trobeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (-1, 1)$.

3. (4 punts) Considereu la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1$ i el conjunt definit per:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 2y \leq 30,\ x + 4y \leq 20\}.$$

   a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

   b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

1. (3 punts)

a) Calculeu el primer terme no nul del polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ de les funcions següents:

a.1) $\sin(x)$,
a.2) $\sin^2(x)$,
a.3) $\sin^3(x)$,
a.4) $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculeu de forma aproximada, donant una cota de l'error comès:

b.1) $\sin(0.1)$,
b.2) $\sin^2(0.1)$.

SOLUCIÓ: Les funcions $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ són totes de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}$ per ser $\sin(x)$ de classe C^∞ derivable en tot $\mathbb{R}$. El polinomi de Taylor d'ordre k centrat al punt $a = 0$ d'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Per tant:

a.1) Per a la funció $f(x) = \sin(x)$, tenim $f'(x) = \cos(x)$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_1(x) = x$.

a.2) Per a la funció $f(x) = \sin^2(x)$, tenim $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 2$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_2(x) = x^2$.

a.3) Per a la funció $f(x) = \sin^3(x)$, tenim $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$, $f''(x) = 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)$, $f'''(x) = 6\cos^3(x) - 21\sin^2(x)\cos(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_3(x) = x^3$.

a.4) Per a la funció $f(x) = \sin^n(x)$, tenim en compte que el polinomi de Taylor de grau n del producte de dues funcions f i g centrat al punt $a = 0$ és el polinomi obtingut de multiplicar els polinomis de Taylor de f i de g centrats al punt $a = 0$ suprimint els termes de grau $> n$. Aleshores, per a la funció $f(x) = \sin^n(x)$, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_n(x) = x^n$.

Quan s'aproxima el valor d'una funció en un punt pel valor del seu polinomi de Taylor d'ordre n centrat al punt $a = 0$, l'error comès és el valor absolut del reste del polinomi:

$$f(0.1) \approx P_n(0.1) \Leftarrow error = |R_n(0.1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1} \right|,$$

per a cert $c \in (0, 0.1)$. Per tant:

b.1) Per a la funció $f(x) = \sin(x)$, tenim $\sin(0.1) = f(0.1) \approx P_1(0.1) = 0.1$, $f''(x) = -\sin(x)$, i una cota de l'error comès (utilitzant que $|\sin(c)| \leq 1$ per a tot $c \in \mathbb{R}$) és: $R_1(0.1) = \left| \frac{f''(c)}{2!} 0.1^2 \right| = \frac{|\sin(c)|}{2!} \cdot 0.1^2 \leq \frac{1}{2!} \cdot 0.1^2 = \frac{0.1^2}{2!} = 0.005.$

b.2) Per a la funció $f(x) = \sin^2(x)$, tenim $f'''(x) = -8\sin(x)\cos(x)$, i una cota de l'error comès (utilitzant que $|\sin(c)|, |\cos(c)| \leq 1$ per a tot $c \in \mathbb{R}$) és: $R_2(0.1) = \left| \frac{f'''(c)}{3!} \cdot 0.1^3 \right| = \frac{8|\sin(c)|\,|\cos(c)|}{3!} \cdot 0.1^3 \leq \frac{8}{3!} \cdot 0.1^3 = \frac{4 \cdot 0.1^3}{3} = 0.00133 \leq 0.00134.$

2. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-4}$.

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x,y)=k$ per a $k=-1,-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}$.

c) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

d) Trobeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció del vector $\vec{v}=(-1,1)$.

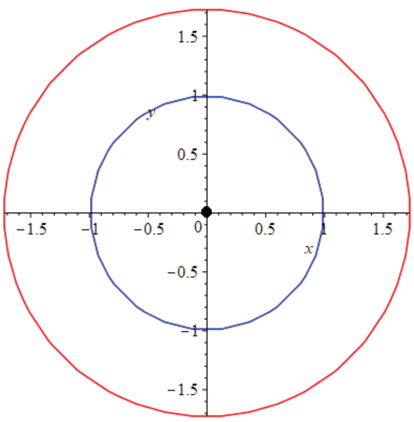
SOLUCIÓ:

a) La funció f és una funció racional, per tant el seu domini són tots els punts (x,y) del pla en els que no s'anul·la el denominador, que són tots els punts del pla excepte els de la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 2:
$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 4)\}$

b) Donat que:

$$f(x,y)=k \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2-4} = k \Leftrightarrow x^2+y^2-4 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{k}+4$$

Per a qualsevol k amb $k<-\dfrac{1}{4}$ les corbes de nivell k són circumferències de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{\dfrac{1}{k}+4}$, per a $k=-\dfrac{1}{4}$ és el punt $(0,0)$ i per a qualsevol k amb $k>-\dfrac{1}{4}$ són el conjunt buit.
Per tant la corba de nivell $f(x,y)=-1$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{3}$, la corba de nivell $f(x,y)=-\dfrac{1}{3}$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1, i la corba de nivell $f(x,y)=-\dfrac{1}{4}$ és el punt $(0,0)$:



c) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector gradient de f en aquest punt i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient en aquest punt. És a dir, per una banda, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),$$

o, equivalentment, la direcció del vector unitari $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

I per l'altra banda, el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és:

$$|\nabla f(1,1)| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (-1,1,)$ és el producte escalar del vector $\nabla f(1,1)$ pel vector unitari $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que és: $D_{\vec{v}} f(1,1) = 0$.

3. (4 punts) Considereu la funció $f(x,y) = x^2+y^2-2xy-2x-2y+1$ i el conjunt definit per:

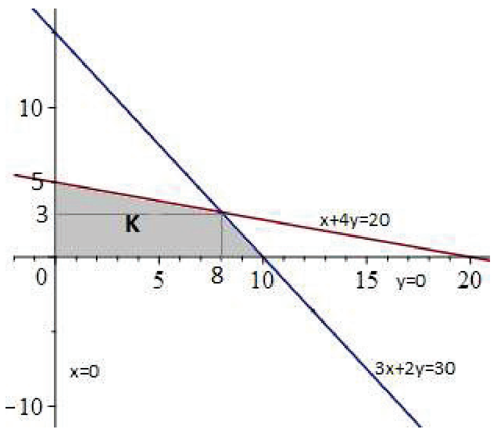
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 3x+2y \leq 30, x+4y \leq 20\}.$$

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ: a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^2$.

El conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 3x+2y \leq 30, x+4y \leq 20\}$ és la regió del pla de color gris de la figura següent:



El punt d'intersecció de les dues rectes $3x+2y=30$ i $x+4y=20$ és el punt $(8,3)$. El conjunt K és tancat ja que $Fr(K) \subset K$ (en efecte: $Fr(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x=0,\ 0 \leq y \leq 5\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y=0,\ 0 \leq x \leq 10\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 3x+2y=30,\ 8 \leq x \leq 10\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+4y=20,\ 0 \leq x \leq 8\} \subset K$) i fitat ja que $K \subset B((0,0);20)$. Per ser tancat i fitat K és compacte.

L'existència d'extrems absoluts de f en K queda justificada pel Teorema de Weierstrass, donat que f és contínua en K i K és un compacte de $\mathbb{R}^2$.

b)

i) En primer lloc, trobem els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte K: Ja hem dit que la funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que són $2x-2y-2=0$ i $-2x+2y-2=0$, i és un sistema incompatible. Així, la funció f no té punts crítics. Per tant, no hi ha punts crítics de f a l'interior del compacte K.

ii) En segon lloc, els vèrtexs del compacte K són els punts $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,5)$ i $(8,3)$.

iii) En tercer lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $x=0$, amb $0 \leq y \leq 5$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable

$\varphi(y) = f(0,y) = y^2 - 2y + 1$, és a dir la solució de $\varphi'(y) = 2y - 2 = 0$, que és $y = 1$. S'obté el punt $(0,1)$.

iv) En quart lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $y = 0$, amb $0 \leq x \leq 10$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $\varphi(x) = f(x,0) = x^2 - 2x + 1$, és a dir la solució de $\varphi'(x) = 2x - 2 = 0$, que és $x = 1$. S'obté el punt $(1,0)$.

v) En cinquè lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $3x + 2y = 30$, amb $8 \leq x \leq 10$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $g(x) = f(x, 15 - \dfrac{3x}{2}) = \dfrac{25}{4}x^2 - 74x + 196$, és a dir la solució de $g'(x) = \dfrac{25x}{2} - 74 = 0$, que és $x = \dfrac{148}{25}$, que no satisfà la condició $8 \leq x \leq 10$. No hi ha punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $3x + 2y = 30$, amb $8 \leq x \leq 10$.

vi) En sisè lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $x + 4y = 20$, amb $0 \leq x \leq 8$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $h(y) = f(20 - 4y, y) = 25y^2 - 194y + 361$, és a dir la solució de $h'(y) = 50y - 194 = 0$, que és $y = \dfrac{97}{25}$, aleshores $x = 20 - 4 \cdot \dfrac{97}{25} = \dfrac{112}{25}$ que sí satisfà la condició $0 \leq x \leq 8$. S'obté el punt $\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right)$.

vii) Calculem les imatges de tots els punts trobats i tenim:

$f(0,0) = 1,\ f(10,0) = 81,\ f(0,5) = 16,\ f(8,3) = 4,\ f(0,1) = 0,$

$f(1,0) = 0,\ f\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right) = -\dfrac{384}{25}.$

Per tant, el mínim absolut de f en K és $-\dfrac{384}{25}$ i s'assoleix al punt $\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right)$, i el màxim absolut de f en K és 81 i s'assoleix al punt $(10,0)$.