JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (a) (1 punt) Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa: Si e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents d'un espai vectorial E de dimensió 5 i els vectors e_1, e_2, e_3 són linealment independents, aleshores els vectors e_1, e_2, e_3, u són linealment independents.

(b) (1.5 punts) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors $u_1 + u_3$, v_2 i $u_1 + v_2$ en cadascuna de les dues bases B i B'.

F2. (3 punts) En l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2, considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Doneu un subconjunt de $\{A, B, C, D, E\}$ que sigui base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i expresseu les matrius que no siguin de la base com a combinació lineal de les matrius de la base donada.

(b) Calculeu la dimensió del subespai $S =< A, B, C >$. Trobeu les equacions que han de satisfer x, y, z, t per tal que la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui del subespai S.

F3. (2.5 punts) Sigui $f = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que en les respectives bases canòniques té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió del nucli i de la imatge de f. Doneu una base del subespai imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

(b) Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors u, v, w, on $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Quina és la dimensió del subespai $\text{Ker} f \cap S$?

F4. (2 punts) Sabem que un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

diagonalitza i que el seu el polinomi característic és $p(x) = -(x-1)^2(x-7)$. Deduïu els valors de a i de b. Calculeu una base B formada per vectors propis de f i doneu la matriu associada a f en la base B.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 50minuts.
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Si és necessari calcular matrius inverses, s'ha de fer amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes i revisió de l'examen: s'informarà amb un avís al racó.