SUCCESSIÓ

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n\}$

∞ termes

a cada $n \in \mathbb{N}$ $\xrightarrow[\text{relació}]{\text{APLICACIÓ}}$ un $a_n \in \mathbb{R}$

reals

formes de DEFINIR una successió

$n \xrightarrow{\text{relació}} a_n$

donat — obtenir

TERME GENERAL

a_n funció n posició

$a_1, \ldots a_k \xrightarrow{\text{relació}} a_n$

k primers termes — obtenir

LLEI de RECURRÈNCIA

a_n funció termes anteriors

Exemple:

Donat $a_n = n^2 - 3$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1^2 - 3 = -2 \\ a_2 = 2^2 - 3 = 1 \\ a_3 = 3^2 - 3 = 6 \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\{-2, 1, 6, \ldots\}}_{\text{successió}}$$

Exemple:

Donat $a_1 = 1$ i $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}}$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ a_3 = \sqrt{1 + a_2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\{\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}, \ldots\}}_{\text{successió}}$$

Exemples de successions conegudes:

- **PROGRESSIÓ ARITMÈTICA**: Cada terme s'obté de l'anterior **sumant** un nº real fix ("diferència")

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$ $\forall n \geq 2$ i a_1 conegut

$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots \rightarrow a_n = a_0 + n \cdot d$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$\dots a_m \dots a_n \dots \rightarrow a_n = a_m + (n-m) \cdot d$

Exemple:

Donats: $a_1 = 1$ i $d = 3$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d = 1+3 = 4 \\ a_3 &= a_2 + d = 4+3 = 7 \\ a_4 &= a_3 + d = 7+3 = 10 \\ &= a_1 + (4-1)d = 1 + 3 \cdot 3 = 10 \\ &\dots\dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$+3 \quad +3 \quad +3$

La **SUMA** dels **n** primers termes

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_i = \boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Exemple:

- Suma dels 2 primers termes: $S_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot 2 = \frac{1+4}{2} \cdot 2 = \underline{5}$

  o $= a_1 + a_2 = 1 + 4 = \underline{5}$

- Suma dels 3 primers termes: $S_3 = \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = \frac{1+7}{2} \cdot 3 = \underline{12}$

  o $= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 4 + 7 = \underline{12}$

○ PROGRESSIÓ GEOMÈTRICA: Cada terme s'obté de l'anterior multiplicat un nº real fix ("raó")

$$\boxed{a_n = a_{n-1} \cdot r}$$ $\forall n \geq 2$ i a_1 conegut

$a,\ a\cdot r,\ a\cdot r^2,\ \ldots,\ a\cdot r^n \ldots$

$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \ldots \longrightarrow a_n = a_0 \cdot r^n$

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n \ldots \longrightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$\ldots\ a_m \ldots\ldots a_n \ \ldots \longrightarrow a_n = a_m \cdot r^{n-m}$

Exemple:

Donats: $a_1 = 1$ i $r = 3$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r = 1\cdot 3 = 3 \\ a_3 &= a_2 \cdot r = 3 \cdot 3 = 9 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = 9 \cdot 3 = 27 \\ &= a_1 \cdot r^{4-1} = 1 \cdot 3^3 = 27 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{1, 3, 9, 27, \ldots\}$$

$\cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3$

La SUMA dels n primers termes

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_i = \boxed{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}}$$

Exemple:

↝ Suma dels 2 primers termes: $S_2 = \dfrac{a_2 \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{3\cdot 3 - 1}{3-1} = \dfrac{8}{2} = \underline{\underline{4}}$

o $= a_1 + a_2 = 1 + 3 = \underline{\underline{4}}$

↝ Suma dels 3 primers termes: $S_3 = \dfrac{a_3 \cdot r - a_1}{r-1} = \dfrac{9\cdot 3 - 1}{3-1} = \underline{\underline{13}}$

o $= a_1 + a_2 + a_3 = 1+3+9 = \underline{\underline{13}}$

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$\{2,\ 2'25,\ 2'37,\ 2'48,\ 2'52,\ ....\}$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2'7182 81...$$

nº EULER

vídeo sobre el nº e

del canal DERIVANDO de EDUARDO SAENZ de CABEZÓN