Matemàtiques 1 FIB

Exercicis resolts.

Mercè Mora. Departament de Matemàtiques. UPC

En aquest document teniu exemples de càlculs amb subespais. Concretament:

I. Si F és un subespai d'un espai vectorial E generat per un conjunt de vectors S.

Exercici 1. (pàg. 2)

- Calcular $\dim F$.
- Donar una base B de F formada per vectors de S.
- Expressar els vectors de $S \setminus B$ com a combinació lineal dels vectors de B.

Exercici 2. (pàg. 3)

- Calcular $\dim F$.
- Donar una base B de F.
- Si S és linealment dependent, expressar el vector zero com a combinació lineal dels vectors de S amb no tots els coeficients iguals a zero.

Exercici 3. (pàg. 5)

- Calcular $\dim F$.
- Donar una base de F formada per vectors de S.
- Donar una base de F no necessàriament formada per vectors de S (que ens anirà molt bé per completar-la fins una base de E).
- Completar bases de F fins una base de E.
- Expressar els vectors de F com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

II. Si F i G són subespais d'un espai vectorial E.

Exercici 4. (pàg. 11)

- Calcular la dimensió i una base de $F \cap G$, si coneixem conjunts generadors de F i de G.

Exercici 5. (pàg. 14)

- Calcular la dimensió i una base de $F \cap G$, si coneixem un conjunt generador de F i G està definit com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Exercici 6. (pàg. 16)

- Calcular la dimensió i una base de $F \cap G$, si F i G estan definits com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Exercici 1. *Considerem el subespai F generat pel conjunt $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ de vectors de $\mathbb{R}^4$.*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \; u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculeu la dimensió de F i doneu una base B de F formada per vectors del conjunt S. Expresseu els vectors de S que no són de B com a combinació lineal dels vectors de B.

Posem els vectors en columnes i fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada reduïda equivalent per files (és a dir, amb tots els elements de les columnes dels pivots igual a 0 llevat del pivot, que és 1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{pmatrix}$$

Aleshores $\dim F = \operatorname{rang} A = 4$
El conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ és una base de F (ja que els pivots són a les columnes $1, 2, 3, 5$).
Els vectors u_4 i u_6 es poden expressar com a combinació lineal dels vectors de B, i els escalars d'aquesta expressió són a les columnes respectives (4,6):

$$u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$$
$$u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5.$$

(Exercici: comproveu que efectivament els vectors donats $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ satisfan aquestes dues igualtats)

Exercici 2. *Considerem el subespai F generat pel conjunt $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ de vectors de $\mathbb{R}^4$.*

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix}1\\4\\-1\\4\end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ u_6 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Calculeu la dimensió de F i doneu una base B de F. Si S no és L.I., expresseu el vector zero com a combinació lineal dels vectors de S de manera que no tots els coeficients siguin zero.

Posem els vectors per files i fem transformacions elementals per files. Per a tota matriu equivalent per files, el subespai generat per les files no canvia. A l'esquerra de cada matriu s'indica quin és el vector fila en funció dels vectors originals, i a la dreta s'indica si s'ha fet alguna permutació de les files.

$$\begin{array}{c} u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} f1\\f2\\f3\\f4\\f5\\f6 \end{array} \sim \begin{array}{c} u_1\\u_2\\u_3+u_1\\u_4-u_1\\u_5\\u_6-u_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} u_1\\u_2\\u_3+u_1\\(u_4-u_1)-(u_3+u_1)\\u_5\\u_6-u_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_1\\(u_1+u_3)/3\\u_2\\2u_1+u_3-u_4\\u_5\\u_6-u_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} f1\\f3\\f2\\f4\\f5\\f6 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} u_1\\(u_1+u_3)/3\\u_2\\2u_1+u_3-u_4-u_2\\u_5\\u_6-u_1-u_2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_1\\(u_1+u_3)/3\\u_2\\2u_1-u_2+u_3-u_4\\u_5\\u_6-u_1-u_2+2u_5 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} u_1\\(u_1+u_3)/3\\u_2\\u_5\\2u_1-u_2+u_3-u_4\\-u_1-u_2+2u_5+u_6 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{c} f1\\f3\\f2\\f5\\f4\\f6 \end{array}$$

El rang de la matriu és 4, per tant generen un subespai de dimensió 4 (és a dir, $F = \mathbb{R}^4$). Els vectors originals corresponents a les files no nul·les són linealment independents, és a dir, u_1, u_3, u_2, u_5 són linealment independents (hem de tenir en compte les permutacions de files que hem fet). Per tant,

$B = \{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ és una base de F. D'altra banda, a l'haver posat els vectors per files, les files no nul·les de la matriu equivalent escalonada formen també una base. És a dir,

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és base de F.
Observem que, en aquest cas podríem donar també la base canònica de $\mathbb{R}^4$ com a base de F, ja que $F = \mathbb{R}^4$.

De les dues últimes files deduïm dues maneres d'expresar el vector zero com a combinació lineal dels vectors de S de manera que no tots els coeficients siguin zero:

$$2u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0,$$
$$-u_1 - u_2 + 2u_5 + u_6 = 0.$$

Exercici 3. *Sigui F el subespai generat pels vectors u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de $\mathbb{R}^6$, on:*

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\\2\\0\\-2\end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix}4\\3\\2\\3\\4\\7\end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

i) Doneu una base de F formada per vectors del conjunt $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ i expresseu els vectors restants com a combinació lineal dels vectors de la base donada. Quina és la dimensió de F?

ii) Doneu una base de F i completeu-la fins una base de $\mathbb{R}^6$ (és a dir, doneu una base de $\mathbb{R}^6$ que contingui els vectors de la base de F donada).

iii) Expresseu els vectors de F com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

i) Posem els vectors per columnes i escalonem la matriu fins obtenir una matriu escalonada reduïda equivalent per files (és a dir, amb zeros per sobre dels pivots):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4 & 1\\1 & 1 & 0 & 3 & 2\\1 & 3 & -1 & 2 & 3\\2 & 2 & 0 & 3 & 1\\2 & 0 & 1 & 4 & 0\\2 & -2 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4 & 1\\0 & 2 & -1 & -1 & 1\\0 & 4 & -2 & -2 & 2\\0 & 4 & -2 & -5 & -1\\0 & 2 & -1 & -4 & -2\\0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4 & 1\\0 & 2 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\\0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4 & 1\\0 & 2 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4 & 1\\0 & 2 & -1 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & -3\\0 & 2 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & -3\\0 & 1 & -1/2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 1/2 & 0 & -2\\0 & \mathbf{1} & -1/2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El rang de la matriu és 3, ja que té 3 files no nul·les. Per tant, $\dim S = 3$ i una base de F està formada pels vectors que corresponen a les columnes dels pivots. És a dir, $\{u_1, u_2, u_4\}$ és base de F. A més, a la tercera i cinquena columna hi ha els coeficientes dels vectors u_3 i

u_5 respecte a la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ de F, concretament:

$$u_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$$
$$u_5 = -2u_1 + u_2 + u_4$$

(Exercici: comproveu que efectivament els vectors donats u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 satisfan aquestes dues igualtats)

ii) Si dues matrius són equivalents per files, aleshores els vectors fila de les dues matrius generen el mateix subespai. Per tant, si posem els vectors que generen F per files i fem transformacions elementals per files fins obtenir una matriu "escalonada" amb pivots no necessàriament iguals a 1, aleshores els vectors fila d'aquesta matriu generen F:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\dim(S) = 3$, i a més:

$$S =< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >=< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

A més, els 3 vectors fila corresponents a les files no nul·les formen una base de F que podem completar amb els 3 (=6-3) vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^6$ fins tenir una base de $\mathbb{R}^6$. Per ser:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = 6,$$

podem completar la base trobada de F amb els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

És a dir, una base de $\mathbb{R}^6$ és:

$$\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Observació. Hem vist a l'apartat i) que els vectors u_1, u_2, u_4 formen base. Per a completar aquesta base fins una base de $\mathbb{R}^6$, si posem els vectors per columnes, hem d'afegir 3 columnes de manera que el rang de la matriu final sigui 6:

$$\text{rang}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & * & * & *\\1 & 1 & 3 & * & * & *\\1 & 3 & 2 & * & * & *\\2 & 2 & 3 & * & * & *\\2 & 0 & 4 & * & * & *\\2 & -2 & 7 & * & * & *\end{pmatrix} = 6$$

i en aquest cas no es veu a ull quins poden ser aquests vectors. Podem provar amb 3 vectors a l'atzar de la base canònica i canviar-los si no funciona. Per exemple, provem amb:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Calculem el rang de la matriu (recordeu que si permutem columnes el rang no varia):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0\\1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1\\2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0\\2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4\\0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 7\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 2\\0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

que té rang igual a 6. Per tant, en aquest cas podem completar la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ amb els vectors:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

iii) **Mètode I.**

Un vector genèric $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$ és d'F si és combinació lineal dels vectors de la base $\{u_1, u_2, u_4\}$ trobada al primer apartat, i això passa si $\mathrm{rang}(u_1, u_2, u_4, x) = \mathrm{rang}(u_1, u_2, u_4) = 3$. Fem transformacions elementals per files a la matriu (u_1, u_2, u_4, x):

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\1 & 1 & 3 & x_2\\1 & 3 & 2 & x_3\\2 & 2 & 3 & x_4\\2 & 0 & 4 & x_5\\2 & -2 & 7 & x_6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 4 & -2 & x_3 - x_1\\0 & 4 & -5 & x_4 - 2x_1\\0 & 2 & -4 & x_5 - 2x_1\\0 & 0 & -1 & x_6 - 2x_1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 - 2(x_2 - x_1)\\0 & 0 & -3 & x_4 - 2x_1 - 2(x_2 - x_1)\\0 & 0 & -3 & x_5 - 2x_1 - (x_2 - x_1)\\0 & 0 & -1 & x_6 - 2x_1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\\0 & 0 & -3 & -2x_2 + x_4\\0 & 0 & -3 & -x_1 - x_2 + x_5\\0 & 0 & -1 & -2x_1 + x_6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\0 & 0 & -3 & -2x_2 + x_4\\0 & 0 & -3 & -x_1 - x_2 + x_5\\0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\0 & 0 & 0 & -2x_2 + x_4 + 3(2x_1 - x_6)\\0 & 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_5 + 3(2x_1 - x_6)\\0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 4 & x_1\\0 & 2 & -1 & x_2 - x_1\\0 & 0 & 1 & 2x_1 - x_6\\0 & 0 & 0 & 6x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_6\\0 & 0 & 0 & 5x_1 - x_2 + x_5 - 3x_6\\0 & 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

El rang de la matriu obtinguda és 3 si i només si les tres últimes files són nul·les, que equival a que es satisfacin les tres equacions lineals:

$$6x_1 - 2x_2 + x_4 - 3x_6 = 0,\ 5x_1 - x_2 + x_5 - 3x_6 = 0,\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Per tant,

$$S=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^6 : 6x_1-2x_2+x_4-3x_6=0,\ 5x_1-x_2+x_5-3x_6=0,\ x_1-2x_2+x_3=0\}.$$

Mètode II. Posem els vectors per files i fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada reduïda per files (és a dir, amb zeros damunt dels pivots):

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2&2&2\\-1&1&3&2&0&-2\\1&0&-1&0&1&2\\4&3&2&3&4&7\\1&2&3&1&0&1\end{pmatrix}\sim \text{(veure apartat } ii)\text{)}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&1&1&2&2&2\\0&\mathbf{1}&2&2&1&0\\0&0&0&\mathbf{3}&3&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&1&1&2&2&2\\0&\mathbf{1}&2&2&1&0\\0&0&0&\mathbf{1}&1&1/3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&1&1&0&0&4/3\\0&\mathbf{1}&2&0&-1&-2/3\\0&0&0&\mathbf{1}&1&1/3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&1&2\\0&\mathbf{1}&2&0&-1&-2/3\\0&0&0&\mathbf{1}&1&1/3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Una possible base de F és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\\-1\\-2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1/3\end{pmatrix}\}$.

Un vector $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^6$ és de F si i només si és combinació lineal dels vectors de la base de F, és a dir, si i només si es compleix:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&1&2\\0&\mathbf{1}&2&0&-1&-2/3\\0&0&0&\mathbf{1}&1&1/3\\x_1&x_2&x_3&x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&-1&0&1&2\\0&\mathbf{1}&2&0&-1&-2/3\\0&0&0&\mathbf{1}&1&1/3\end{pmatrix}=3.$$

Per calcular el rang de la matriu de l'esquerra, permutem la tercera i quarta columnes i escalonem:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1/3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & x_2 & x_4 & x_3+x_1 & x_5-x_1 & x_6-2x_1 \end{pmatrix},$$

$$\overset{(3)}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & x_4 & x_3+x_1-2x_2 & x_5-x_1+x_2 & x_6-2x_1+\frac{2}{3}x_2 \end{pmatrix},$$

$$\overset{(4)}{=} \text{rang}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+x_1-2x_2 & x_5-x_1+x_2-x_4 & x_6-2x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4 \end{pmatrix},$$

on:
(1) Hem permutat les columnes 3a i 4a;
(2) 4a fila := 4a fila + $(-x_1)\times$ 1a fila;
(3) 4a fila := 4a fila + $(-x_2)\times$ 2a fila;
(4) 4a fila := 4a fila + $(-x_4)\times$ 3a fila.
El rang de la matriu obtinguda és 3 si i només si la quarta fila és nul·la, és a dir, si si i només si es satisfà el sistema d'equacions lineals homogeni següent:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1-2x_2+x_3 & =0 \\ -x_1+x_2-x_4+x_5 & =0 \\ -2x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4+x_6 & =0 \end{array}\right\}.$$

Per tant,

$$S=\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : x_1-2x_2+x_3=0,\ -x_1+x_2-x_4+x_5=0,\ -2x_1+\tfrac{2}{3}x_2-\tfrac{1}{3}x_4+x_6=0\}.$$

Observació. Les equacions dels sistemes obtinguts amb els dos mètodes no són les mateixes tot i que el conjunt de solucions que defineixen és el mateix.

Exercici: comproveu que efectivament els 5 vectors donats u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de F satisfan aquest sistema d'equacions lineals homogeni.

Exercici 4. *Sigui F el subespai generat pels vectors u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de $\mathbb{R}^6$, on:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

i G el subespai generat pels vectors v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^6$, on:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Doneu una base i la dimensió del subespai $F \cap G$.

Calculem primer una base de F i una base de G. Hem vist a l'exercici 3 (pàgina 6) que $\dim F = 3$ i una possible base de F és $\{b_1, b_2, b_3\}$ on:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculem una base de G. Posem els vectors que generen G per files i fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada amb pivots no necessàriament iguals a 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenim una matriu escalonada amb 4 files no nul·les. Per tant, $\dim G = 4$ i una base està formada pels 4 vectors donats, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Un vector w de la intersecció $F \cap G$ serà de la forma:

$$w = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4,$$

on $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in \mathbb{R}$. Resolem el sistema homogeni amb 6 equacions i 7 incògnites $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ que s'obté de la segona igualtat:

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 - \beta_1 v_1 - \beta_2 v_2 - \beta_3 v_3 - \beta_4 v_4 = 0$$

és a dir,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\2\\2\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\3\\1\end{pmatrix} - \beta_1 \begin{pmatrix}3\\3\\3\\0\\0\\4\end{pmatrix} - \beta_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \beta_3 \begin{pmatrix}0\\3\\6\\3\\0\\-1\end{pmatrix} - \beta_4 \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & -6 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Per a resoldre el sistema, fem transformacions elementals fins tenir un sistema equivalent amb matriu escalonada reduïda:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & -1 & -6 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & -3 & -1\\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El rang de la matriu de coeficients del sistema equivalent obtingut és 5, i la solució té 2(=7-5) graus de llibertat. Per tant, $\dim(F \cap G) = 2$. Les variables principals són $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_4$. Les variables lliures són β_1 i β_3. La solució és de la forma:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\beta_1\\ 3\beta_3\\ -2\beta_1 - \beta_3\\ \beta_1\\ 0\\ \beta_3\\ 0\end{pmatrix}, \beta_1, \beta_3 \in \mathbb{R}.$$

Els vectors de la intersecció els tindrem en funció dels paràmetres β_1 i β_3. Concretament, s'obtenen substituïnt o bé els valors d'$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a l'expressió $w = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ o bé els valors de $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ a l'expressió $w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4$. Si substituïm les α's obtenim:

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 3\beta_1 b_1 + 3\beta_3\ b_2 + (-2\beta_1 - \beta_3) b_3 \\ &= \beta_1 (3b_1 - 2b_3) + \beta_3 (3b_2 - b_3) \end{aligned}$$

Per tant,

$$F \cap G =< 3b_1 - 2b_3, 3b_2 - b_3 > =< 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

Observem que si substituïm les β's s'obté el mateix resultat:

$$\begin{aligned} w &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 = \beta_1 v_1 + 0 v_2 + \beta_3 v_3 + 0 v_4 \\ &= \beta_1 v_1 + \beta_3 v_3 \end{aligned}$$

Per tant,

$$F \cap G =< v_1, v_3 >=< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

Per tant, $\dim(F \cap G) = 2$ i una base de $F \cap G$ és $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercici 5. *Sigui F el subespai generat pels vectors u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 de $\mathbb{R}^6$, on:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix},\ u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

i G el subespai solució del sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_5 - x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Doneu una base i la dimensió del subespai $F \cap G$.

Calculem primer una base de F. Hem vist a l'exercici 3 (pàgina 6) que $\dim F = 3$ i una possible base de F és $\{b_1, b_2, b_3\}$ on:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, els vectors de F són de la forma

$$w = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Imposem ara que $w \in G$, és a dir, que satisfaci el sistema que defineix els vectors de G:

$3x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = 3\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) - (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) - (2\alpha_1 + \alpha_3)$
$= -4\alpha_3 = 0$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 3(\alpha_1 + 2\alpha_2) + (2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) + (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)$
$= 8\alpha_1 + 8\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0$
$5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 = 5\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 3(\alpha_1 + 2\alpha_2) - (2\alpha_1 + \alpha_3)$
$= 5\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 = 0$

Per tant, hem de resoldre el sistema:

$$\begin{aligned} -4\alpha_3 &= 0 \\ 8\alpha_1 + 8\alpha_2 + 6\alpha_3 &= 0 \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriu del sistema és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 8 & 8 & 6 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriu té rang 2. Per tant, el sistema té 1(=3-2) grau de llibertat, és a dir, $\dim(F \cap G) = 1$. Donem les variables principals α_1 i α_3 en funció de la variable lliure α_2:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2 \\ \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Un vector genèric de $F \cap G$ és, doncs,

$$w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ (-\alpha_2) + \alpha_2 \\ (-\alpha_2) + 2\alpha_2 \\ 2(-\alpha_2) + 2\alpha_2 + 0 \\ 2(-\alpha_2) + \alpha_2 + 0 \\ 2(-\alpha_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ -\alpha_2 \\ -2\alpha_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Per tant, $\dim(F \cap G) = 1$ i una base és $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

Exercici 6. *Sigui F el subespai solució del sistema:*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

i G el subespai solució del sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_5 - x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Doneu una base i la dimensió del subespai $F \cap G$.

El subespai $F \cap G$ és solució del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 - x_6 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 - x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Fem transformacions elementals per files a la matriu del sistema pert a tenir un sistema equivalent:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7/5 & 8/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rang de la matriu és 4. El sistema té 2(=6-4) graus de llibertat. Per tant, $\dim(F \cap G) = 2$. Donem les variables principals x_1, x_2, x_3, x_4 en funció de les variables lliures x_5, x_6:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \\ x_2 &= -\frac{7}{5}x_5 - \frac{8}{5}x_6 \\ x_3 &= -\frac{9}{5}x_5 + \frac{8}{5}x_6 \\ x_4 &= \frac{7}{5}x_5 - \frac{8}{5}x_6 \end{aligned}$$

Els vectors solució del sistema són de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x_5 - \frac{1}{5}x_6 \\ -\frac{7}{5}x_5 - \frac{8}{5}x_6 \\ -\frac{9}{5}x_5 + \frac{8}{5}x_6 \\ \frac{7}{5}x_5 - \frac{8}{5}x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_5 \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ -\frac{9}{5} \\ \frac{7}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_5, x_6 \in \mathbb{R}$$

Una base de $F \cap G$ és, doncs:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4/5 \\ -7/5 \\ -9/5 \\ 7/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/5 \\ -8/5 \\ 8/5 \\ -8/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una altra base s'obté si multipliquem els vectors de la base anterior per escalars no nuls. Per exemple:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -9 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 8 \\ -8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$