Matemàtiques 1 - GEI - FIB 10-01-2023

Examen Final-Part de grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

R1. (40%) En aquest exercici heu de decidir quines propietats d'un graf es mantenen en afegir o suprimir arestes qualssevol. Concretament, si P és una propietat d'un graf, direm que P és *monòtona creixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P es compleix que el graf $G + a$ té també té la propietat P per a qualsevol aresta a de G^C, i direm que P és *monòtona decreixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P, aleshores $G - a$ té també la propietat P, per a qualsevol aresta a de G. Per exemple, la propietat "G és acíclic" és monòtona decreixent, perquè si suprimim una aresta d'un graf acíclic, obtenim sempre un graf acíclic, però no és monòtona creixent, perquè si afegim una aresta a un graf acíclic es pot formar un cicle.

Justifiqueu si les propietats següents són monòtones creixents i/o monòtones decreixents.

(a) G és bipartit.

(b) $r(G) = D(G)$.

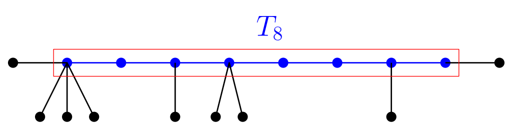
(c) G té algun vèrtex de tall.

(d) G és eulerià.

(e) G és hamiltonià.

(f) G és un arbre.

R2. (60%) Direm que un arbre T és una *eruga* si és el graf trajecte d'ordre 1, o bé el graf trajecte d'ordre 2, o bé té ordre almenys 3 i al suprimir totes les fulles queda un graf trajecte T_k, per algun $k \geq 1$. Per exemple, el graf de la figura següent és una eruga perquè al suprimir les fulles queda un graf trajecte d'ordre 8:



(a) Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui un trajecte. Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui una eruga.

(b) Sigui T un arbre d'ordre n, $n \geq 3$, amb exactament k vèrtexs que no són fulles i suposem que $d_1, \ldots, d_k$ són els seus graus. Expresseu el nombre de fulles de T en funció de k i de $d_1, \ldots, d_k$.

(c) Considerem una eruga que té exactament k vèrtexs que no són fulles i, a més, tots tenen grau 4. Trobeu quantes arestes cal afegir com a mínim per tal d'obtenir un graf eulerià. Expliqueu com les afegiríeu a una eruga concreta si $k = 5$ i doneu un circuit eulerià del graf resultant en aquest cas.

(d) Suposem que un graf G d'ordre almenys 3 té un arbre generador que és una eruga amb exactament k vèrtexs que no són fulles. Justifiqueu que el diàmetre de G és com a molt $k + 1$. Pot ser menor que $k + 1$?

(e) De les dues seqüències $(4, 6, 6, 2, 7)$ i $(4, 7, 2, 6, 6)$, n'hi ha alguna que sigui la seqüència de Prüfer d'una eruga?

Informacions

- Durada de l'examen: 100 minuts
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

Model de solució

R1. En aquest exercici heu de decidir quines propietats d'un graf es mantenen en afegir o suprimir arestes qualssevol. Concretament, si P és una propietat d'un graf, direm que P és *monòtona creixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P es compleix que el graf $G + a$ té també té la propietat P per a qualsevol aresta a de G^C, i direm que P és *monòtona decreixent* si per a qualsevol graf G que tingui la propietat P, aleshores $G - a$ té també la propietat P, per a qualsevol aresta a de G. Per exemple, la propietat "G és acíclic" és monòtona decreixent, perquè si suprimim una aresta d'un graf acíclic, obtenim sempre un graf acíclic, però no és monòtona creixent, perquè si afegim una aresta a un graf acíclic es pot formar un cicle.

Justifiqueu si les propietats següents són monòtones creixents i/o monòtones decreixents.

(a) G és bipartit.

Solució. És monòtona decreixent. En efecte, si G és bipartit i V_1, V_2 són les parts estables, aleshores no hi ha arestes entre vertexs de V_1 ni arestes entre vèrtexs de V_2, i si suprimim una aresta qualsevol, es continua complint aquesta condició. Per tant, $G - a$ és bipartit per a qualsevol aresta a de G, i les parts estables de $G - a$ són, per exemple, V_1 i V_2.

No és monòtona creixent. Per exemple, el trajecte T_3 és bipartit (és un arbre), però si afegim l'aresta a entre els vèrtexs de grau 1, obtenim un cicle d'ordre 3, senar. Per tant, $T_3 + a$ no és bipartit.

(b) $r(G) = D(G)$.

Solució. No és monòtona decreixent. Per exemple, el graf cicle d'ordre 6 té radi i diàmetre iguals a 3. Si suprimim una aresta, obtenim un trajecte d'ordre 6 que té diàmetre 5 i radi 3, diferents.

Tampoc és monòtona creixent. El graf cicle d'ordre 4 té radi i diàmetre iguals a 2. Si afegim una aresta entre vèrtexs no adjacents obtenim un graf amb diàmetre 2 i radi 1, és a dir, radi i diàmetre diferents.

(c) G té algun vèrtex de tall.

Solució. No és monòtona creixent. Per exemple, el graf trajecte d'ordre 3 té un vèrtex de tall (el vèrtex de grau 2), però si afegim l'aresta entre els dos vèrtexs de grau 1 obtenim un cicle d'ordre 3, que no té vèrtexs de tall.

Tampoc és monòtona decreixent. Si suprimim una aresta del graf trajecte d'ordre 3, obtenim el graf $K_2 \cup K_1$, que no té vèrtexs de tall, en canvi el vèrtex de grau 2 de T_3 és de tall.

(d) G és eulerià.

Solució. No és monòtona creixent. Per exemple, el graf cicle d'ordre 6 és eulerià, perquè és connex i tot vèrtex té grau parell, però si afegim una aresta qualsevol, obtenim un graf no eulerià perquè té vèrtexs de grau 3, senar.

Tampoc és monòtona decreixent. Per exemple, el graf cicle d'ordre 6 és eulerià, perquè és connex i tot vèrtex té grau parell, però si suprimim una aresta qualsevol, obtenim un graf no eulerià perquè té vèrtexs de grau 1, senar.

(e) G és hamiltonià.

Solució. És monòtona creixent. Si un graf és hamiltonià, conté un cicle que passa per tots els vèrtexs del graf. Si afegim una aresta a qualsevol, aquest cicle continua existint en el graf $G + a$. Per tant, $G + a$ és hamiltonià.

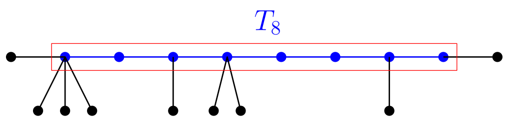
No és monòtona decreixent. Per exemple, el graf cicle d'ordre 6 és hamiltonià, però si suprimim una aresta, obtenim el graf trajecte d'ordre 6, que no és hamiltonià.

(f) G és un arbre.

Solució. No és monòtona decreixent, ja que si suprimim una aresta qualsevol d'un arbre, s'obté un graf no connex, és a dir, deixa de ser un arbre.

Tampoc és monòtona creixent, ja que si afegim una aresta qualsevol a un arbre, es forma un cicle, és a dir, deixa de ser un arbre.

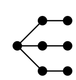
R2. Direm que un arbre T és una *eruga* si és el graf trajecte d'ordre 1, o bé el graf trajecte d'ordre 2, o bé té ordre almenys 3 i al suprimir totes les fulles queda un graf trajecte T_k, per algun $k \geq 1$. Per exemple, el graf de la figura següent és una eruga perquè al suprimir les fulles queda un graf trajecte d'ordre 8:



(a) Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui un trajecte. Trobeu per a quin valor n mínim hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui una eruga.

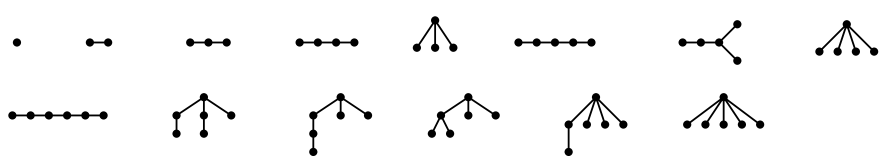
Solució. Els arbres d'ordre com a molt 3 són els grafs trajecte T_1, T_2 i T_3, respectivament. El graf $K_{1,3}$ és un arbre d'ordre 4 que no és un trajecte. Per tant, el valor n mínim tal que hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui un trajecte és $n = 4$.

Suposem ara que T és un arbre que no és una eruga. Al suprimir les fulles ha de quedar un arbre que no sigui un trajecte, o sigui, un arbre d'ordre almenys 4 (ja que els arbres d'ordre com a molt 3 són trajectes). Si T té exactament dues fulles, és un trajecte i, per tant, una eruga. Per tant, T ha de tenir ordre almenys 7: com a mínim 4 vèrtexs que no són fulles i 3 fulles. Tenint en compte aquesta informació és fàcil construir un arbre d'ordre 7 que no sigui una eruga. L'arbre de la figura següent no és una eruga, perquè al suprimir les 3 fulles, s'obté el graf $K_{1,3}$ que no és un trajecte:



Per tant, el valor n mínim tal que hi ha algun arbre d'ordre n que no sigui un trajecte és $n = 7$.

Observació. També es pot resoldre generant recursivament tots els arbres d'ordre com a molt 6 (per obtenir el arbres d'ordre n, pengem una fulla als vèrtexs d'arbres d'ordre $n - 1$ de totes les maneres possibles), que són els de la figura:



i comprovar que

- fins ordre 3 tots són trajectes;
- n'hi ha un d'ordre 4 que no és un trajecte;
- tots són erugues;
- podem construir un arbre d'ordre 7 que no és eruga, tal com s'ha explicat anteriorment.

(b) Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 3$ amb exactament k vèrtexs que no són fulles i suposem que $d_1, \ldots, d_k$ són els seus graus. Expresseu el nombre de fulles de T en funció de k i de $d_1, \ldots, d_k$.

Solució. Sigui ℓ el nombre de fulles, aleshores:

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) = d_1 + \cdots + d_k + \ell$$

$$\sum_{u \in V(T)} g(u) \overset{(1)}{=} 2m \overset{(2)}{=} 2(n-1) \overset{(3)}{=} 2(\ell + k - 1)$$

on la igualtat (1) és certa pel Lema de les encaixades; (2) és certa perquè la mida d'un arbre és l'ordre menys 1 i (3) és certa perquè l'arbre té exactament k vèrtexs que no són fulles. Si igualem les dues expressions, obtenim

$$d_1 + \cdots + d_k + \ell = 2(\ell + k - 1)$$

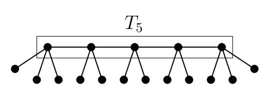
i, per tant,

$$\ell = d_1 + \cdots + d_k - 2k + 2.$$

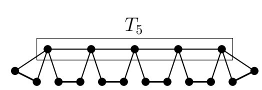
(c) Considerem una eruga que té exactament k vèrtexs que no són fulles i, a més, tots tenen grau 4. Trobeu quantes arestes cal afegir com a mínim per tal d'obtenir un graf eulerià. Expliqueu com les afegiríeu a una eruga concreta si $k = 5$ i doneu un circuit eulerià del graf resultant en aquest cas.

Solució. Un graf és eulerià si és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Si afegim arestes a una eruga, el graf continuarà essent connex. Per tant, cal veure quantes arestes cal afegir com a mínim a l'eruga per tal d'obtenir un graf amb tots els vèrtexs de grau parell. En aquest cas, els vèrtexs de grau senar de l'eruga són exactament totes les fulles. De l'apartat anterior, deduïm que el nombre de fulles de l'eruga és $\ell = 4k - 2k + 2 = 2k + 2$. Si afegim una aresta entre dues fulles (aquesta aresta no pot ser de l'eruga, perquè al ser un graf connex d'ordre almenys 3, dues fulles no poden ser mai adjacents), passem a tenir 2 vèrtexs més de grau parell. Per tant, cal afegir com a mínim $k + 1 (= \ell/2)$ arestes. I per a obtenir el graf eulerià només cal afegir $k + 1$ arestes amb extrems fulles diferents de l'eruga.

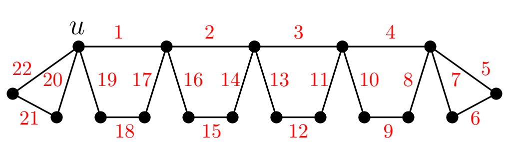
En el cas concret $k = 5$, l'eruga tindria 5 vèrtexs de grau 4, que indueixen un trajecte T_5 (ja que al suprimir les fulles, s'obté un graf trajecte). Per tant, l'eruga ha de ser:



i per a obtenir un graf eulerià, podem afegir 6(=5+1) arestes tal com s'indica a la figura:



A la figura següent s'indica un possible circuit eulerià amb inici i final en el vèrtex u, on el número de cada aresta indica en quin ordre es recorren totes les arestes del graf (des de 1 fins a 22):



(d) Suposem que un graf G d'ordre almenys 3 té un arbre generador que és una eruga amb exactament k vèrtexs que no són fulles. Justifiqueu que el diàmetre de G és com a molt $k + 1$. Pot ser menor que $k + 1$?

Solució. La distància entre dos vèrtexs qualssevol del graf G és com a molt la distància entre aquests vèrtexs en un arbre generador qualsevol T, ja que totes les arestes de T són de G. Per tant, el diàmetre de G és com a molt el diàmetre de qualsevol arbre generador T.

El diàmetre d'una eruga T amb exactament k vèrtexs que no són fulles és $k+1$. En efecte, els k vèrtexs que no són fulles indueixen un trajecte T_k d'ordre k. A més, de cadascuna de les dues fulles d'aquest trajecte, hi penja almenys una fulla de T (ja que no són fulles en T). La distància entre aquestes dues fulles de T és $k+1$ (la longitud de l'únic camí en T). D'altra banda, la distància entre qualsevol altre parell de vèrtexs x, y és com a molt $k+1$, ja que la distància entre x i y de T és com a molt la distància entre els dos vèrtexs u_x, u_y del trajecte T_k més propers a x i y, més la distància entre x i u_x, més la distància entre y i u_y (que seran 1 o 0, segons si x, y són fulles o no). Per tant, dos vèrtexs de T estan a distància com a molt $k+1 (= k-1+2)$ en T. És a dir, el diàmetre de T és $k+1$.

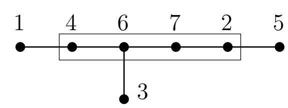
Com a conseqüència, el diàmetre de G és com a molt $k+1$.

El diàmetre de G pot ser menor que $k+1$. Per exemple, un graf complet d'ordre $k+2$, on $k \geq 1$, té un arbre generador que és un trajecte d'ordre $k+2$, o sigui, una eruga amb exactament k vèrtexs que no són fulles. Però el diàmetre del graf complet és 1, diferent de $k+1$.

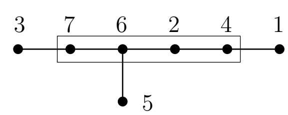
(e) De les dues seqüències $(4,6,6,2,7)$ i $(4,7,2,6,6)$, n'hi ha alguna que sigui la seqüència de Prüfer d'una eruga?

Solució. Els arbres tenen ordre 7 (=longitud de la seqüència més 2).

Les arestes de l'abre amb seqüència de Prüfer $(4,6,6,2,7)$ són 14, 36, 46, 52, 27, 67. Per tant, l'arbre és:



Les arestes de l'abre amb seqüència de Prüfer $(4,7,2,6,6)$ són 14, 37, 42, 26, 56, 67. Per tant, l'arbre és:



Tots dos arbres són erugues, perquè al suprimir les fulles queda un trajecte d'ordre 4.