Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat d'Informàtica de Barcelona

Cognoms, Nom | D.N.I.

Titulació: Grau en Enginyeria Informàtica
Assignatura: Programació 2 (PRO2)
Duració: 1h 30m

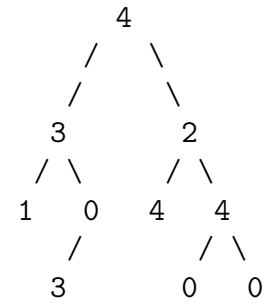
Curs: Q2 2020–2021 (1r Parcial)
Data: 19 d'abril de 2021

1. **(5 puntos)** Dado un árbol binario (`BinTree<int>`) no vacío a y un nodo cualquiera x en a, diremos que el camino $P(a, x)$ de la raíz de a a x es la secuencia de nodos n_0, n_1,..., n_k, tal que n_0 es la raíz de a, $n_k = x$ y para toda i, $0 \leq i < k$, n_i es el padre del nodo n_{i+1}. Observad que fijado un cierto nodo x, el camino $P(a, x)$ es único. El valor val(P) de un camino P es la suma de los valores en los nodos del camino. El valor máximo m de los caminos de un árbol a es entonces

$$m = \max\{\text{val}(P(a, x)) \mid x \text{ es un nodo en } a\}$$

Un camino del árbol se puede representar mediante una `list<char>`, formada por caracteres `'L'` o `'R'` de la siguiente forma: si el camino es la secuencia de nodos n_0,n_1,...,n_k entonces se representará por la secuencia de caracteres c_1,...,c_k, donde si n_i es hijo izquierdo de n_{i-1} entonces c_i = `'L'`, y si n_i es el hijo derecho de n_{i-1} entonces será c_i = `'R'`.

Por ejemplo, si a es el siguiente árbol (que sólo contiene enteros no negativos)



entonces el valor máximo de un camino de a es $m = 10$ y existen cinco caminos con dicho valor máximo, representados por las siguientes listas de caracteres: ['L','R','L'], ['R','L'], ['R','R'], ['R','R','L'] y ['R','R','R'].

Observad que, si todos los valores en a son enteros no negativos, siempre existirá un camino desde la raíz a una hoja cuyo valor sea el máximo m. En el ejemplo, cuatro de los cinco caminos de valor máximo de a llegan hasta las hojas.

Se pide:

(a) (2.5 puntos) Completa el diseño de la siguiente función recursiva:

```
// Pre: a es un árbol no vacío que sólo contiene enteros no negativos
// Post: el resultado es el valor máximo de los caminos del árbol a
int maxvalorcamino(const BinTree<int>& a) {
    int v = a.value();
    BinTree<int> e = a.left();
    BinTree<int> d = a.right();
    ...
}
```

(b) (2.5 puntos) Justifica la corrección de la función diseñada en el apartado anterior, incluyendo la demostración de que termina siempre.

SOLUCIÓ:

(a)

```
void i_maxvalorcamino (const BinTree<int> &a, int &m)
    int v = a.value();
    BinTree<int> e = a.left();
    BinTree<int> d = a.right();
    if (e.empty() and d.empty()) m = v;
    else if (e.empty()) {
            i_maxvalorcamino (d,m);
            m += m; }
    else if (d.empty()){
            i_maxvalorcamino(e,m);
            m += m; }
    else {
            int md;
            i_maxvalorcamino (e, m)
            i_maxvalorcamino(d, md)
            if (m>=md) m+=v;
            else m = v+ md;
    }
}
int maxvalorcamino (const BinTree<int> &a);
    int m = 0;
    i_maxvalorcamino(a, m);
    return m;
}
```

(b) - TERMINACIÓN: $|a| = a.size - d$. Si $|a| = 0$ nos encontramos en el caso base.
En cada llamada recursiva el parametro decrece ya que e.size y d.size son mas pequeños que a.size

- CORRECCIÓN:

• CASO BASE: si a es una hoja m = al valor de a.

• CASO GENERAL: m es el valor máximo de los caminos de a. Los parametros cumplen la pre, garantizado por las condiciones de los IFs.
→ Si uno de los dos hijos esta vacio entonces m es el valor maximo de los caminos del otro.
→ Si no m = 'el valor de a' + el maximo de los caminos de sus hijos.

Cognoms, Nom D.N.I.

2. **(5 puntos)** Diseña un procedimiento `shuffle` que recibe dos listas de enteros `l1` y `l2` y un entero `k` > 0 y modifica la lista `l1` de manera que los elementos de `l2` aparecen intercalados cada `k` elementos de `l1` empezando desde el principio. Asumiremos que la lista `l1` tiene $m \geq n \cdot k$ elementos, siendo n el número de elementos de `l2`. El procedimiento deja vacía la lista `l2`.

   Por ejemplo si `l1` $= [3, 5, 7, 1, 2, 8, 9, 4, 6]$, `l2` $= [200, 300, 100]$ y `k` $= 2$ entonces despues de la llamada `shuffle(l1, l2, k)` tendremos `l2` $= [\,]$ y

   $$\texttt{l1} = [3, 5, 200, 7, 1, 300, 2, 8, 100, 9, 4, 6]$$

   Supongamos que definimos la siguiente función abstracta SHUFFLE (que no es usable como parte de ningún código):

   $$\begin{aligned}&\text{SHUFFLE}([x_1, \ldots, x_m], [y_1, \ldots, y_n], k)\\ &\qquad = [x_1, \ldots, x_k, y_1, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, y_2, \ldots, x_{nk}, y_n, x_{nk+1}, \ldots, x_m]\end{aligned}$$

   Entonces nuestro procedimiento `shuffle` puede especificarse asi:

```
// Pre: l1 = L1, l2 = L2, k > 0, |L1| >= |L2|·k
// Post: l1 = SHUFFLE(L1, L2, k), l2 = []
   void shuffle(list<int>& l1, list<int>& l2, int k);
```

   Utiliza esta plantilla para tu código C++

```
void shuffle(list<int>& l1, list<int>& l2, int k) {
   list<int>::iterator it = ...

   // Inv: l1 = ... ,
   //      L2 = L2'·l2  (esto es, L2' es la sublista prefijo de L2
   //           que no esta en la lista l2),
   //      it referencia a ...
   while ( ... ) {
      for (int j = 0; ... ; ...) {
          ...
      }
      ...
   }
}
```

   Se pide:

   (a) (2.5 puntos) Completa la implementación del procedimiento `shuffle`, utilizando la plantilla que se proporciona.

(b) (1.5 puntos) Completa el invariante del bucle `while` que se proporciona y justifica la corrección del procedimiento `shuffle`, excepto su terminación (véase el apartado siguiente).

(c) (1 punto) Escribe una función de cota para el bucle `while` y justifica que `shuffle` siempre termina.

SOLUCIÓ:

(a)
```
void shuffle (list<int>& l1, list<int> &l2, int k){
list<int>::iterator it = l1.begin();
while (not l2.empty()){
    for(int j=0; j<k ; ++j) ++it;
    l1.insert(it, l2.begin());
    l2.erase(l2.begin());
}
}
```

(b)
```
// INV   l1= SHUFFLE (l1, l2', k)
...
it referencia a un elemento de l1 o l1.end()
```

- CORRECCIÓN:
  - Despues de la inicialización it referencia a un elemento como se puede ver en su inv, ni l1 ni l2 han sido modificadas y l1 = SHUFFLE(l1, , k).
  - Como hemos avanzado it k posiciones, hemos insertado en l1 en la posicion it, el primer elemento de l2 (v_j) y lo hemos eliminado de l2:

l2 = $\langle v_{j+1}, \dots, v_n \rangle$
l1 = SHUFFLE(l1, $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$, k)
it apuntara al primer elemento del siguiente bloque.
  - Si l2 está vacia:
l1 = SHUFFLE(l1, l2, k)

(c) F = l2.size() F >= 0
- Si entra en el bucle F>0.
- l2 decrece a cada iteración del bucle (l2.erase).