1- LÒGICA I DEMOSTRACIONS

1.1 LÒGICA PROPOSICIONAL

Enunciat o proposició: frase o expressió correcta del llenguatge natural susceptible de ser certa o falsa. Afirma alguna cosa que té sent, sigui certa o falsa.

Proposición: 2+3=7 Cierta 1

: p,q,r,φ,ψ,θ… Falsa 0

Les fórmules de la lògica proposicional es construeixen amb els símbols següents:

- **Lletres proposicionals**: p, q, r, s…
- **Connectives lògiques**:
  - binàries: ∧ (i) , ∨ (o) , → (si llueve voy al cine), ↔
  - unària: ¬ (negació)
- **Parèntesis**: (,)

Significat de les connectives

p	¬p
0	1
1	0

p	q	p ∨ q	p ∧ q	p → q
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Tipus de fórmules importants:

Tautologia:	fórmula sempre certa (taula de veritat: columna de 1)
Contradicció:	fórmula sempre falsa (taula de veritat: columna de 0)
Satisfactible:	fórmula que és certa per a alguna assignació (taula de veritat conté algun 1)

insatisfactible = contradicció

Equivalència de fórmules

Distributiva	$\phi \land (\psi \lor \theta) \equiv (\phi \land \psi) \lor (\phi \land \theta)$	$\phi \lor (\psi \land \theta) \equiv (\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \theta)$
De Morgan	$\neg(\phi \land \psi) \equiv \neg\phi \lor \neg\psi$	$\neg(\phi \lor \psi) \equiv \neg\phi \land \neg\psi$
Absorció	$\phi \land (\phi \lor \psi) \equiv \phi$	$\phi \lor (\phi \land \psi) \equiv \phi$
Idempotència	$\phi \land \phi \equiv \phi$	$\phi \lor \phi \equiv \phi$
Commutativa	$\phi \land \psi \equiv \psi \land \phi$	$\phi \lor \psi \equiv \psi \lor \phi$
Associativa	$\phi \land (\psi \land \theta) \equiv (\phi \land \psi) \land \theta$	$\phi \lor (\psi \lor \theta) \equiv (\phi \lor \psi) \lor \theta$
Neutre	$\phi \land 1 \equiv \phi$	$\phi \lor 0 \equiv \phi$
Element absorbent	$\phi \lor 1 \equiv 1$	$\phi \land 0 \equiv 0$
Complementari	$\phi \lor \neg\phi \equiv 1$	$\phi \land \neg\phi \equiv 0$
Doble negació	$\neg\neg\phi \equiv \phi$	
	$\neg 1 \equiv 0$	$\neg 0 \equiv 1$

Traducció de la →	$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$	$\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv \phi \wedge \neg\psi$
Traducció de la ↔	$\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ $\equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$	$\neg(\phi \leftrightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \neg\phi)$ $\equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \neg\phi)$
Contrarecíproc	$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \rightarrow \neg\phi$	
Reducció a l'absurd	$\phi \equiv \neg\phi \rightarrow 0$	$\phi \rightarrow \psi \equiv (\phi \wedge \neg\psi) \rightarrow 0$
V al conseqüent	$\psi \vee \theta \equiv \neg\psi \rightarrow \theta$	$\phi \rightarrow (\psi \vee \theta) \equiv (\phi \wedge \neg\psi) \rightarrow \theta$
V a l'antecedent	$(\psi \vee \theta) \rightarrow \phi \equiv (\psi \rightarrow \phi) \wedge (\theta \rightarrow \phi)$	

Calculo de predicados

Predicado **P(x) ≡ 2+x ≡ 5**

P(2) ≡ (2+2=5)

R(x,y) ≡ (x+2 < y)

R(1,2) ≡ (1+2 < 2)

S (x,y,z) ≡ (2x es par) ∧ (y+z es impar)

S (2,y,z) ≡ (2·2 es par) ∧ (y+z es impar)

S (2,5,z) ≡ (2·2 es par) ∧ (5+z es impar)

S (2,5,1) ≡ (2·2 es par) ∧ (5+1 es impar)

1 **0**

0

Cuantificadores

$\forall$ (Todos) , $\exists$ (alguno)

N=(0,1,2.....)

Z= (..-2,-1,0,1..)

Q= $(\frac{a}{b}, \ a, b \ , b \neq 0)$

C= $\sqrt{-1}$

R= Q i C

P(x) ≡ x=par v x=impar

$\forall$ x ∈ N, x= par v x= impar

A= (a,b,c) P(x)

$\forall$ x ∈ A, P(x) ≡ P(a) ∧ P(b) ∧ P(c)

A= (a,b,c) P(x)

$\exists$ x ∈ A, P(x) ≡ P(a) v P(b) v P(c)

P(x) ≡ x= par

Q (x) ≡ x es un cuadrado ($\exists$ x ∈ Z x= a^2)

M (x) ≡ x =4 ($\exists$ b ∈ Z x= 4·b)

x<y

fórmula	**Significat**
$\forall x\,(M(x) \rightarrow P(x))$	Tot enter múltiple de 4 és parell
$\exists x\,(P(x) \wedge \neg M(x))$	Hi ha nombres parells que no són múltiples de 4
$\forall x\,((P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow M(x))$	Tot parell quadrat és múltiple de 4
$\exists x\,(P(x) \wedge \neg M(x) \wedge \neg Q(x))$	Hi ha nombres parells que ni són múltiples de quatre ni són quadrats
$P(2) \wedge \neg Q(2) \wedge \neg M(2)$	2 és parell però no és quadrat ni múltiple de 4
$\exists x\,(\,P(x) \wedge x > 2 \wedge \neg Q(x)\,)$	Hi ha nombres parells més grans que 2 que no són quadrats

Algunes equivalències importants:

$\neg\forall x\phi \equiv \exists x\neg\phi$	$\neg\exists x\phi \equiv \forall x\neg\phi$
$\forall x\forall y\phi \equiv \forall y\forall x\phi$	$\exists x\exists y\phi \equiv \exists y\exists x\phi$
$\forall x\,(\phi \wedge \psi) \equiv \forall x\phi \wedge \forall x\psi$	$\exists x\,(\phi \vee \psi) \equiv \exists x\phi \vee \exists x\psi$

Demostració d'un existencial $\exists x P(x)$:

Exemples:

- $\exists x \in \mathbb{R}\,(x > 0 \wedge x^2 - 1 < 0)$ és cert.

X=0,5 → 0,5>0

$\exists x P(x)$ es fals ≡ $\forall x, \neg P(x)$ es cert

Demostració d'un universal $\forall x P(x)$:

Exemples/exercicis. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

34. Justifiqueu que són falses:

a. $\exists x \in A\,(|x + 4| = 2)$ Es falso ≡ $\forall x$ € A, $|x+4| \neq 2$ → **cierto**

Quantificadors barrejats

- **$\exists x\forall y\; P(x, y)$**: donar un **element x que negui la propietat $P(x, y)$** per a cada y . Fem $x = a$ i demostrem que $\forall y P(a, y)$ és cert. <u>La x no pot dependre de y.</u>

- **$\forall x\exists y\; P(x, y)$:** per a **cada x cal donar una y que sasfà $P(x, y)$**. La y normalment dependrà de x. Fem $y = E(x)$ i demostrem que $\forall x P(x, E(x))$ és cert.

La demostració de la falsedat de $\exists x \forall y\ P(x, y)$ **o de** $\forall x \exists y\ P(x, y)$ es pot fer veient que **els seus negats són certs**.

Fet: Si $\exists x \forall y P(x, y)$ **és cert** $\forall y \exists x\ P(x, y)$ **també és cert**, però no és val el recíproc en general.

1.2 DEMOSTRACIONS

Passos lògics: (aquí A, B, C són enunciats)

1- $(p \wedge q) \rightarrow p$

2- $p \rightarrow (p \vee q)$

3- $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

4- $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

5- $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$

6- $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

7- 0 → p

Prova directa

Volem demostrar $A \Rightarrow B$.
$A \Rightarrow A' \Rightarrow A'' \Rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots \Rightarrow B$

Ex: La suma de dos enters consecutius es senar

∀ x ∈ Z, x+ (x+1) = impar

x € Z

x= par → ∃ K ∈ Z, x=2K

x=impar →∃ K' ∈ Z, x=2K+1

x € Z, x=par V x=impar

x=par --> x=2K --> x+x+1= 2K+2K+1= 2(2K)+1= 2K'+1= impar

2. $\forall x \in Z$, x= impar --> x^2=impar

x=2K+1

x^2= $4K^2$+ 4K+ 1= 2·($2K^2$ +2K) +1 = 2K' +1 = impar

Prova pel contrarecíproc

Es basa en: $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

$\forall$ n $\in$ Z --> n^2= par --> n= par

n^2= impar --> n=impar

Reducció a l'absurd

p es cierta ≡ ¬p es falsa

Ex: $\sqrt{3}\ irracional$

X € Q → ∃ a,b ∈ Z, b≠0, x=$\frac{a}{b}$

Reducció a l'absurd II

Es basa en: $p \to q \equiv (p \wedge \neg q) \to 0$

Volem demostrar $A \Rightarrow B.$
$A, \neg B \quad \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad Contradicci\acute{o}$

Ex: La suma d'un nombre racional i un irracional és irracional.

x € Q ∧ y € I → x+y € Q

x € Q ∧ y € I ∧ x+y € Q x+y = a y= a-x = d € Q → Q

Prova d'una disjunció

Es basa en: $(q \vee r) \equiv (\neg q \rightarrow r)$

Volem provar $B \vee C$
$\neg B \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow C$

Ex: n és enter. Demostreu que n és senar o n^2 és múltiple de 4

n= impar V $n^2 = \dot{4}$

n= 2K → $n^2 = \dot{4}$

$n^2 = 4K^2 = \dot{4}$

Disjunció al conseqüent

Es basa en: $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$

Volem provar $A \Rightarrow (B \vee C)$
$A, \neg B \Rightarrow \quad \cdots\cdots\cdots \quad \Rightarrow C$

Ex: x, y reals. Si $x + y \leq 2$ llavors $x \leq 1$ o $y \leq 1$.

$(x + y \leq 2 \wedge x > 1) \rightarrow (y \leq 1)$ Si y > 1 → contradicció

Disjunció a l'antecedent

Es basa en: $(q \vee r) \rightarrow p \equiv (q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow p)$

És equivalent a fer una prova per casos (distingim segons B o C).

Volem demostrar $(B \vee C) \Rightarrow A$				
B	$\Rightarrow$	....	$\Rightarrow$	A
C	$\Rightarrow$	....	$\Rightarrow$	A

Ex: n és enter. Si el residu de n al dividir per 4 és 1 o 3, el residu de n^2 és 1.

(n= 4+1) V (n=4+3) → n^2= $\dot{4} + 1$

(n= 4+1 → n^2= $\dot{4} + 1$) $\wedge$ (n=4+3 → n^2= $\dot{4} + 1$)

Cas 1 → n^2= $(\dot{4} + 1) \cdot (\dot{4} + 1)$= $\dot{4} + \dot{4} + \dot{4} + 1 = \mathbf{\dot{4} + 1}$

Cas 2 → n^2= $(\dot{4} + 3) \cdot (\dot{4} + 3)$= $\mathbf{\dot{4} + 1}$

Demostració d'una equivalència

Es basa en: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Volem demostrar $A \Leftrightarrow B$
$A \Rightarrow B$ $B \Rightarrow A$

Ex: n, m és enters. Són equivalents:

5n + 3m és senar ↔ $n - 3m = senar$ ↔ $n \wedge$ m

5n+3m= 2K+1

5m +3m -6m = impar → 5n-3 = impar

Demostració de la unicitat

$\exists!\, x\,,\, \mathrm{P(x)}$

Volem veure: hi ha com a molt un x tal que $P(x)$.		
$P(x),\ P(y)\ \Rightarrow$	………	$\Rightarrow\ x = y$

Ex: En tota operació $(A, *)$ el neutre (u és neutre si $\forall x\epsilon A(x * u = u * x = x)$), en cas d'existir, és únic.

$$\forall x\ A \begin{cases} x*u = u*x = x \xrightarrow{x=u'} u'*u = u*u' = u' \\ x*u' = u'*x = x \xrightarrow{x=u} u*u' = u'*u = u \end{cases}$$

$$\boxed{u = u'}$$

2. Inducció

método de demostración para conj inductivas

Ej Conj. inductivas $\rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots$

1 – Hay un primer elemento $= 0$
2 Todo elemento tiene un siguiente
$:\ x,\ S(x) = x+1$

Conj. no inductivas $\mathbb{Z}\ \{\ldots -1, 0, 1 \ldots\} \rightarrow$ No tiene un primer elemento
Tiene un siguiente
$\mathbb{Q}\ (\frac{1}{2}) \rightarrow$ No tiene un primer elemento
No tiene siguiente

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0\quad \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}}_{P(N)}}$$

Inducció simple

$\forall n \geq n\ 0\ P(n) \equiv P(n\ 0\ ) \wedge \forall n > n\ 0\ (\ P(n-1) \rightarrow P(n)\ )$

o

$\forall n \geq n\ 0\ P(n) \equiv P(n\ 0\ ) \wedge \forall n > n\ 0\ (\ P(n) \rightarrow P(n+1)\ )$

1- $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0 \quad \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

1) $P(0)$ $\quad \sum_{i=0}^{0} i \overset{?}{=} \frac{0\cdot(0+1)}{2}$

$$\sum_{i=0}^{0} i = 0 \qquad \frac{0\cdot(0+1)}{2} = 0$$

2) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \longrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} i = \frac{(n+1)\cdot(n+1+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = (0+1+2+\dots+n) + (n+1) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} i + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\boxed{\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}}$$

Ho presentem així:

- Pas Base. $\quad P(n_0)$
- Pas inductiu. $\quad$ Sigui $n > n_0$:
  - Hipòtesi d'Inducció: $\quad P(n-1)$
  - Volem veure(Tesi d'Inducció): $\quad P(n)$

En efecte:

Inducció completa

$\forall n \geq n\,0\; P(n) \equiv P(n\,0\,) \wedge \forall n > n\,0\; P(n\,0\,(\,) \wedge \ldots \wedge P(n+1) \rightarrow P(n)\,)$

Ho fem així:

- Pas Base: $P(n_0)$
- Pas inductiu: per a $n > n_0$:
  - H.I. $P(n_0), \ldots, P(n-2), P(n-1)$
  - Volem veure: $P(n)$

En efecte:

50- $a_0 = 0 \quad a_2 = 4\cdot 2 = 8 \quad a_3 = 4\cdot 8 - 4\cdot 2 = 24$

$a_1 = 2$

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad n > 2$

$a_n = n\cdot 2^n \quad n \geq 0$

1- $a_0 = 0\cdot 2^0 = 0$ ✓

2- $a_0 = 0\cdot 2^0 \wedge a_1 = 2^1 \wedge a_2 = 2\cdot 2^2 \ldots$

En efecto, $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} = 4n\cdot 2^2 - 4\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1}$

$= 2\cdot n \cdot 2^1 \cdot 2^n - (n-1)\cdot 2^2 \cdot 2^{n-1}$

$= 2n \cdot 2^{n+1} - (n-1)\cdot 2^{n+1} = (2n - n+1)\cdot 2^{n+1}$

$= (n+1)\cdot 2^{n+1}$

3. CONJUNTS I RELACIONS

$A, B, C, \dots$ $\quad X, Y, Z \dots$ Conjunto de elementos

$a, b, c, \dots$ $\quad x, y, z \dots$

$A = \{a, b, c, d\}$ relación elemento Conjunto

$a \in A$ $\qquad e \notin A$

Pertenencia

Descripció d'un conjunt

Per descriure un conjunt hem de dir quins elements té (i quins no té). Hi ha dues maneres de fer-ho:

Per **extensió:** Donem la "llista" (cal recordar que no importa l'ordre i no hi ha repeticions) dels seus elements entre claus:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Per **comprensió:** Donem una propietat $P(x)$ que caracteritza els seus elements (una propietat $P(x)$ que tenen tots els seus elements i ningú més):

$$A = \{\, x \mid P(x) \,\}.$$

Notem que: Si $A = \{x \mid P(x)\}$ llavors,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{per a tot } x: \\ x \in A \iff P(x) \end{array}}$$

Notem que: Si $A = \{\, x \in B \mid P(x) \,\}$ llavors

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{per a tot } x \in B: \\ \quad x \in A \iff P(x) \end{array}}$$

Però **no** es compleix per a tot x (hi poden haver $x \notin B$que compleixin $P(x)$)

Igualtat entre conjunts (principi d'extensionalitat)

El que caracteritza un conjunt són els elements que té (i els que no té). Expressat més clarament, dos conjunts A, B són iguals si i només si tenen els mateixos elements:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Conjunt buit

És el conjunt que no té elements i es denota per Ø:

$$\emptyset = \{\} = \{x \mid x \neq x\}$$

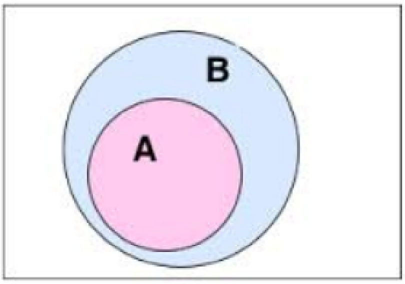
Inclusió entre conjunts (⊆)

Idea: Aés una "part" de B : Aconté "alguns" (potser tots!) dels elements de B. Aquesta idea s'expressa més clarament dient que tots els elements de A també són elements de B:

Definició:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Es llegeix dient que A **és subconjunt de** B(o que A **està inclòs** a B)



Exemple: Si $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ llavors $A \subseteq B$.

Notem que: el principi de extensionalitat es pot expressar així:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B,\ B \subseteq A$$

Propietats:

I. $\emptyset \subseteq A$.
II. $A \subseteq A$.
III. $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ implica $A \subseteq C$.

Operacions amb conjunts

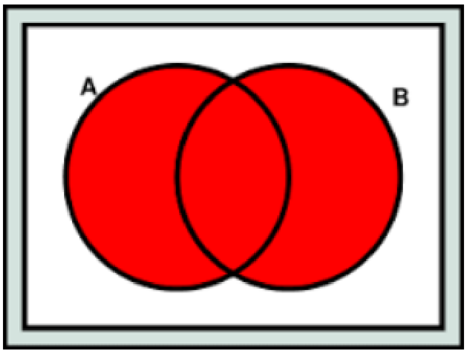
Unió

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt unió** de A i B així:

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \ \lor \ x \in B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \lor x \in B}$$



Propietats:

I. $A \cup A = A$.
II. $A \cup \emptyset = A$.
III. $A \cup B = B \cup A$.
IV. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
V. $A \subseteq A \cup B, \ B \subseteq A \cup B$.
VI. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$.
VII. $A \cup B \subseteq C \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C \ , \ B \subseteq C$.

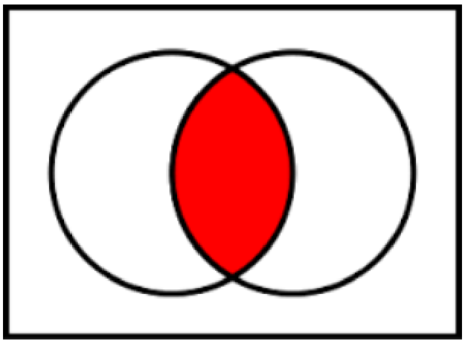
Intersecció

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt intersecció** de A i B així:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \;\wedge\; x \in B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \;i\; x \in B}$$



Propietats:

I. $A \cap A = A.$
II. $A \cap \emptyset = \emptyset.$
III. $A \cap B = B \cap A.$
IV. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

V. $A \cap B \subseteq A,\; A \cap B \subseteq B.$
VI. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A.$
VII. $C \subseteq A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad C \subseteq A$ i $C \subseteq B.$

Quan dos conjunts A, B no tenen elements comuns es diu que són **disjunts**:

$$\boxed{A \text{ i } B \text{ són } \textbf{disjunts} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset}$$

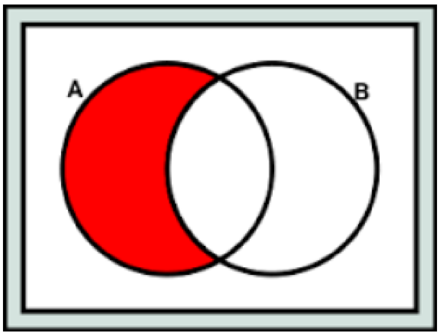
Diferència

Donats dos conjunts A i B definim el **conjunt diferència** de A i B així:

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A - B \iff x \in A \text{ } i \text{ } x \notin B}$$



Propietats:

I. $A - A = \emptyset$
II. $A - \emptyset = A$
III. $\emptyset - A = \emptyset$
IV. $A - B \subseteq A$
V. $(A - B) \cap B = \emptyset$
VI. $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$
VII. $C \subseteq A - B \iff C \subseteq A, \ C \cap B = \emptyset$

Altres propietats:

I. **(distributiva)**

$$\boxed{\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}}$$

2- $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$

3- $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

4- $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$

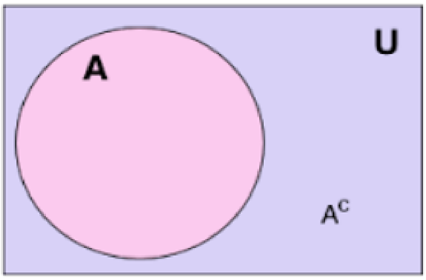
Complementari

Donat un conjunt A subconjunt de Ω, definim el **conjunt complementari** de A així:

$$\boxed{A^C = \Omega - A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}}$$

Això es pot expressar de manera equivalent així:

$$\boxed{x \in A^C \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \notin A}$$



Par a tot $x \in \Omega$:

$$x \in A^C \Leftrightarrow x \notin A$$

Propietats:

Suposem que $A, B, C \subseteq \Omega$

I. $\left(A^C\right)^C = A.$

II. $\emptyset^C = \Omega,\ \Omega^C = \emptyset$.

III. $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cup A^C = \Omega$.

IV.

(De Morgan) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

$$\boxed{A - B = A \cap B^C}$$

VI. $A \subseteq B \iff B^C \subseteq A^C \iff A \cap B^C = \emptyset \iff A^C \cup B = \Omega$.

VII. $B = A^C \iff A \cap B = \emptyset\ ,\ A \cup B = \Omega$.

Parts d'un Conjunt

$P(A) = 2^N$

$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$ → Conjunto de todos los subconjuntos del conjunto A

$X \in P(A) \longleftrightarrow X \subseteq A$

$\#A = |A| =$ nº de elementos de A

47- $\underbrace{|A| = n \longrightarrow |P(A)| = 2^N}_{P(n)}$ $A = \{x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}\}$

$P(0) \rightarrow |A| = 0 \longrightarrow |P(A) = \{\emptyset\}$

$P(n) \rightarrow P(n+1)$

$|A| = n+1 \longrightarrow |P(A)| = 2^{n+1}$

$P(A) =$ nº de Subconjuntos de A que tienen el elemento x_1

$+$

nº de Subconjuntos de A que no tienen el elemento x_1

$P(A) =$ nº de Subconj de $(x_2 \ldots x_{n+1}) \rightarrow 2^N$

$+$

nº de Subconj de $(x_2 \ldots x_{n+1}) \rightarrow 2^N$ $\Big\}\ 2^{N+1}$

Codificación y descodificación

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ $\quad |A| = 4$

Palabras binarias de long $|A|$

$\{x_1, x_4\} \xrightarrow{\text{codif}} 1001 \xrightarrow{\text{desc}} \{x_1, x_4\}$

$\emptyset \longrightarrow 0000 \xrightarrow{\text{desc}} \emptyset$

$A \longrightarrow 1111 \xrightarrow{\text{desc}} A$

45- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

$X \in P(A \cap B) \longleftrightarrow X \subseteq A \cap B \longleftrightarrow \begin{matrix} X \subseteq A \\ X \subseteq B \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} X \in P(A) \\ X \in P(B) \end{matrix} \updownarrow X = P(A) \cap P(B)$

49- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

$X \in P(A \cup B) \longrightarrow X \subseteq A \cup B \;\cancel{\longleftrightarrow}\; \begin{matrix} X \subseteq A \\ X \subseteq B \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} X \in P(A) \\ X \in P(B) \end{matrix} \downarrow X \in P(A) \cup P(B)$

Parella ordenada

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c\,,\; b = d}$$

Producte cartesià

Donats dos conjunts A, B definim el **conjunt producte cartesià** de A per B així:

$$\boxed{A \times B = \{\, x \mid x = (a, b) \;\; per\; a\; uns\; certs\; a \in A \; i\; b \in B \,\}}$$

Exemple:
$\{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b\} = \{\, (1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (1, b), (2, b), (3, b), (4, b) \,\}$

Notem que: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Propietats:

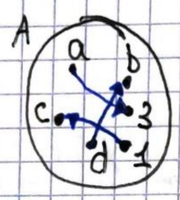
I. $A \times \emptyset = \emptyset,\ \emptyset \times A = \emptyset.$

II. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$

III. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$

IV. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C).$

Relacions d'equivalencia



Una relación en A es un subconjunt del conj $A \times A$.

Los pares en $A \times A$ indican que elementos están relacionados

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$A \times A = \{(a,a), (a,b), \ldots (e,e)\}$

$R = \{(a,a), (a,b), (c,d), (e,e), (b,d), (c,e)$

$R \subseteq A \times A$ $\quad (x,y) \in R \equiv xRy$

Propietats importants que *poden tenir* les relacions:

Reflexiva	$\forall x \epsilon A\ \ xRx$
Simètrica	$\forall x, y \epsilon A\ (\ xRy \rightarrow yRx\ )$
Transitiva	$\forall x, y, z \epsilon A\ (\ xRy\ \wedge\ yRz \rightarrow xRz\ )$
Antisimètrica	$\forall x, y \epsilon A\ (\ xRy\ \wedge\ yRx \rightarrow x = y\ )$

Una **relació d'equivalència** és una relació binària que és reflexiva, simètrica i transitiva.

Ex: A = alumnos grupo 10
R = $x \varepsilon y$ han nacido en el mismo més

1- xRx ✓

2- $xRy \rightarrow yRx$ ✓

3- $\left.\begin{matrix} xRy \\ yRx \end{matrix}\right) x=y$ ✗

4- $\left.\begin{matrix} xRy \\ yRz \end{matrix}\right\} \rightarrow xRz$ ✓

Classes d'equivalencia i conjunt quocient

$\overline{a} = \{x \varepsilon A \mid xRa\}$

$x \varepsilon \overline{a} \longleftrightarrow xRa$

Conjunt quocient $\rightarrow$ $A/R = \{x \mid x = \overline{a}$ per a un cert $a \in A\}$
$= \{\overline{a} \mid a \in A\}$

Partición de un conjunto

Conj A

Una K-partición de $A = \{A_1, A_2, \dots A_k\}$

tal que:

1- $\forall i = i, -, K, \quad A_i \neq \emptyset$

2- $A_i \cap A_j \neq 0$

3- $\bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_K = A$

Propietats de tota relació d'equivalència:

I. $x \in \overline{x}$.

II. Si $x \in \overline{y}$ llavors $\overline{x} = \overline{y}$.

III. Si $x \notin \overline{y}$ llavors $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

IV. Les classes formen una "partició" de A. És a dir:

   a. Cada classe és no buida (ja que $x \in \overline{x}$).

   b. Dues classes diferents són disjuntes: $\forall x, y \in A(\overline{x} \neq \overline{y} \to \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset)$.

   c. La reunió de totes les classes és A (ja que $x \in \overline{x}$).

3- $\left.\begin{array}{l} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} mcm(x,a) = mcm(y,a) \\ \wedge \\ mcm(y,a) = mcm(z,a) \end{array}\right) \; mcm(x,a) = mcm(z,a) \downarrow xRz$ ✓

R es una relación de equivalencia

$A = \{1, 2, \ldots, 11, 12\}$

$a = 8$

$\overline{1} = \{xR1\} = \{1, 2, 4, 8\}$

$mcm(x,8) = mcm(1,8) = 8$

$mcm(1,8) = mcm(2,8) = mcm(4,8) = mcm(8,8)$

$\overline{3} = xR3 \to \{3, 6, 12\}$

$mcm(x,8) = mcm(3,8) = 24$

$mcm(3,8) = mcm(6,8) = mcm(12,8)$

$\overline{5} = xR5 \to \{5, 10\}$

$mcm(x,8) = mcm(5,8) = 40$

$mcm(5,8) = mcm(10,8)$

$A/R = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}\}$