JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) (1 punt) Suposem que F i G són dos subespais de $\mathbb{R}^3$. Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:

Si F i G són subespais de dimensió 2, aleshores $F \cap G \neq \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$.

(b) (1 punt) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u, v, w\}$ i $B' = \{u', v', w'\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors u, $u + v$ i v' en cadascuna de les dues bases.

(c) (1 punt) Siguin $f \colon E \to F$ una aplicació lineal i e_1, e_2, e_3 vectors de E. Demostreu que si e_1, e_2, e_3 són linealment independents i f és injectiva, aleshores $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són linealment independents.

2. Sigui S_a el subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generat per les matrius M_1, M_2, M_3, M_4, on

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1 & a\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}-2 & -2\\ a & 1\end{pmatrix} \text{ i } M_4 = \begin{pmatrix}a & a\\ a & a^2\end{pmatrix}.$$

(a) (1 punt) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

(b) (1 punt) Quines equacions han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ sigui de S_1?

(c) (1 punt) Doneu la dimensió i una base de $S_0 \cap S_1$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) (1.5 punts) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) (1 punt) Sigui $S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}$. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$.

(c) (1.5 punts) Esbrineu si f diagonalitza. En cas que diagonalitzi, trobeu una base B de vectors propis i doneu la matriu D associada a f en aquesta base. Quina relació hi ha entre les matrius A, D i la matriu de canvi de base de B a C?

Informacions
- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 3 exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, . . .
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 21/06/2021.
- Revisió de l'examen: s'haurà de demanar el 22 de juny seguint el procediment que es publicarà al racó.

Model de solució

1. (a) (1 punt) Suposem que F i G són dos subespais de $\mathbb{R}^3$. Demostreu l'afirmació següent, si és certa, o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:

$$\text{Si } F \text{ i } G \text{ són subespais de dimensió 2, aleshores } F \cap G \neq \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}.$$

Solució. És certa. Cadascun dels subespais F i G és solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb 2 graus de llibertat, o sigui, es poden donar com la solució d'un sistema homogeni amb una equació i 3 incògnites. Per tant, $F \cap G$ es pot expressar com la solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb 2 equacions i 3 incògnites, que té almenys 1 grau de llibertat, ja que el rang de la matriu de coeficients és com a molt 2. Per tant, $F \cap G \neq \{0_E\}$ perquè $F \cap G$ té dimensió almenys 1.

També es pot justificar geomètricament, tenint en compte que un subespai de dimensió 2 de $\mathbb{R}^3$ està format per tots els vectors posició dels punts d'un pla per l'origen. Per tant, la intersecció estarà formada per tots els vectors posició de la intersecció de dos plans per l'origen. Sabem que la intersecció de dos plans és una recta o bé un pla (si els dos plans són coindidents). En qualsevol dels dos casos, a la intersecció dels dos subespais hi haurà almenys un vector diferent del vector zero.

(b) (1 punt) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u, v, w\}$ i $B' = \{u', v', w'\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors u, $u + v$ i v' en cadascuna de les dues bases.

Solució. Les coordenades dels vectors u i $u+v$ en la base B són $(u)_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ i $(u+v)_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. A les columnes de la matriu $P_{B'}^{B}$ hi ha les coordenades dels vectors de B expressats en la base B', per tant, $(u)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ i $(u+v)_{B'} = (u)_{B'} + (v)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

Finalment, $(v')_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, perquè v' és el segon vector de la base B', i per ser $u = u' + w'$, $v = 2u' + v' + 2w'$, veiem a ull que $v - 2u = v'$. Per tant, $(v')_B = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

(c) (1 punt) Siguin $f\colon E \to F$ una aplicació lineal i e_1, e_2, e_3 vectors de E. Demostreu que si e_1, e_2, e_3 són linealment independents i f és injectiva, aleshores $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són linealment independents.

Solució. Suposem que $\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_F$. Per a demostrar que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ són vectors de F linealment independents, cal veure que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. En efecte, per ser f lineal, $f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_F$. Si f és injectiva, l'única antiimatge de 0_F és 0_E. Per tant, $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_E$. I per ser e_1, e_2, e_3 vectors de E linealment independents, ha de ser $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

2. Sigui S_a el subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ generat per les matrius M_1, M_2, M_3, M_4, on

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix}1 & a\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix}-2 & -2\\ a & 1\end{pmatrix} \text{ i } M_4 = \begin{pmatrix}a & a\\ a & a^2\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió i doneu una base de S_a segons els valors del paràmetre a.

Solució.

Mètode I. Si expressem les matrius de S_a en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la dimensió de S_a és el rang de la matriu A que té les coordenades aquests vectors per columnes. Fem transformacions elementals per files per calcular el rang:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\ 1 & a & -2 & a\\ 1 & -1 & a & a\\ 1 & -1 & 1 & a^2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\ 1 & -1 & a & a\\ 1 & -1 & 1 & a^2\\ 1 & a & -2 & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & a\\ 0 & -2 & a+2 & 0\\ 0 & -2 & 3 & a^2-a\\ 0 & a-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Distingim casos:

- Si $a = 1$, aleshores A és equivalent a una matriu de rang 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suposem ara que $a \neq 1$. Aleshores A és equivalent a:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -2 & a+2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & a^2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & -2 & a+2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & a^2-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-a \end{pmatrix}$$

- Si $a \neq 1, 0, -2$ és equivalent a una matriu de rang 4, ja que el determinant de la matriu obtinguda és igual a $(a+2)(a^2-a)$ que és diferent de 0.
- Si $a = 0$, aleshores A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Finalment, si $a = -2$, aleshores és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4, & \text{si } A \neq 0, 1, -2 \\ 3, & \text{si } A = 0, -2 \\ 2, & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

Mètode II. Si expressem les matrius de S_a en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la dimensió de S_a és el rang de la matriu A que té les coordenades aquests vectors per files. Fem transformacions elementals per files per calcular el rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ -2 & -2 & a & 1 \\ a & a & a & a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix}$$

Distingim casos segons els valors del paràmetre a que fan que s'anul·lin els elements de la diagonal principal, és a dir, $a = 1$, $a = 0$, $a = -2$ i $a \neq 0, 1, -2$.

- Si $a \neq 0, 1, -2$, A és equivalent a una matriu amb tots els elements de la diagonal principal diferents de zero. Per tant, el rang d'A és 4.
- Si $a = 1$, A és equivalent a una matriu de rang 2:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = -2$, A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a=0$, A és equivalent a una matriu de rang 3:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4, & \text{si } A \neq 0, 1, -2 \\ 3, & \text{si } A = 0, -2 \\ 2, & \text{si } A = 1 \end{cases}$$

(b) Quines equacions han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S_1?

Solució.
Mètode I. De l'apartat anterior (Mètode I), sabem que els vectors corresponents a les columnes dels pivots de la matriu escalonada equivalent formen una base de S_a. Per tant, les matrius M_1 i M_2 formen una base de S_1. Una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S_1 si és combinació lineal dels vectors de la base de S_1, és a dir, si el rang de la matriu que té per columnes les matrius M_1, M_2 i la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és igual a 2. Veiem que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & -2 & t-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & t-x-(z-x) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & t-z \end{pmatrix}$$

i el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $y-x=0$ i $t-z=0$.
Mètode II. Calculem primer una base de S_1. A l'apartat anterior (Mètode II) hem vist que si $a=1$, la matriu A que té per files les matrius que generen el subespai és equivalent per files a la matriu

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base de S_1 està formada per les dues files no nul·les de la matriu equivalent per files, ja que A té per files els vectors que generen S_a. És a dir, una possible base de S_1 és $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S_1 si és combinació lineal dels vectors de la base de S_1, és a dir, si el rang de la matriu que té per files els dos vectors de la base de S_a i una matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és 2. Si fem transformacions elementals tenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & 0 & t-z \end{pmatrix}$$

Si $y-x \neq 0$, aleshores el rang és 3, ja que si permutem les files 2 i 3 tenim una matriu escalonada amb 3 files no nul·les. Per tant, si el rang és 2, ha de ser $y-x=0$. Finalment, si $y-x=0$ i $t-z \neq 0$, aleshores el rang és 3, ja que queda una matriu escalonada amb 3 files no nul·les. Per tant, ha de ser $t-z=0$. És a dir, el rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $y-x=0$ i $t-z=0$. Equivalentment, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in S_1$ si i només si $x=y$ i $z=t$.

(c) Doneu la dimensió i una base de $S_0 \cap S_1$.

Solució.
Mètode I. De l'apartat (a) (Mètode I) deduïm que una base de S_0 està formada per les matrius $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Una matriu M és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si existeixen escalars $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta-2\gamma & \alpha-2\gamma \\ \alpha-\beta+2\gamma & \alpha-\beta+\gamma \end{pmatrix}.$$

Imposem ara que la matriu M sigui també de S_1. Tenint en compte l'apartat anterior ha de ser $\alpha+\beta-2\gamma=\alpha-2\gamma$ i $\alpha-\beta+2\gamma=\alpha-\beta+\gamma$, d'on deduïm que $\beta=\gamma=0$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Si substituïm el resultat obtingut a l'expressió anterior, tenim que $M\in S_0\cap S_1$ si:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Per tant, $S_0\cap S_1$ és un subespai de dimensió 1 i una possible base és $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

Mètode II. De l'apartat (a) (Mètode I) deduïm que una base de S_0 està formada per les matrius $M_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}-2&-2\\0&1\end{pmatrix}$. Una matriu $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si el rang de la matriu que té per columnes aquestes 3 matrius juntament amb una matriu genèrica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és igual a 2. Fem transformacion elementals per files a aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\1&0&-2&y\\1&-1&0&z\\1&-1&1&t\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&-1&0&y-x\\0&-2&2&z-x\\0&-2&3&t-x\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&-2&2&z-x\\0&-2&3&t-x\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&-2&2&z-x\\0&0&1&t-x-(z-x)\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&2&z+x-2y\\0&0&1&t-z\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&t-z\\0&0&0&z+x-2y-2(t-z)\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&x\\0&1&0&x-y\\0&0&1&t+x-2y\\0&0&0&x-2y+3z-2t\end{pmatrix}$$

El subespai S_0 és doncs solució del sistema homogeni amb una equació i 4 incògnites:

$$x-2y+3z-2t=0.$$

La intersecció $S_0\cap S_1$ és la solució del sistema format per les equacions que defineixen S_0 i les que defineixen S_1, que hem trobat a l'apartat anterior, o sigui

$$x=y, z=t, x-2y+3z-2t=0.$$

Resolem el sistema homogeni, que és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\1&-2&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&-1&3&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-3&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

La solució en forma paramètrica és:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t\\t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Una base de $S_0\cap S_1$ és doncs $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

Mètode III. Calculem primer una base de S_0. De l'apartat (a) (Mètode II) obtenim una possible base formada per les 3 files no nul·les de la matriu equivalent a A per files, és a dir, $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}\}$. Una matriu M és de S_0 si és combinació lineal dels vectors de la base, o sigui, si existeixen escalars $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ de forma que:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\alpha-\beta\\\alpha-2\beta+2\gamma&\alpha-2\beta+3\gamma\end{pmatrix}.$$

Imposem ara que la matriu M sigui també de S_1. Tenint en compte l'apartat anterior ha de ser $\alpha=\alpha-\beta$ i $\alpha-2\beta+2\gamma=\alpha-2\beta+3\gamma$, d'on deduïm que $\beta=\gamma=0$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Si substituïm el resultat obtingut a l'expressió anterior, tenim que $M\in S_0\cap S_1$ si:

$$M=\alpha\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Per tant, $S_0\cap S_1$ és un subespai de dimensió 1 i una possible base és $\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\}$.

3. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica. Observem que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

La matriu A associada a f en la base canònica és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica, o sigui: $A=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&-1&0\\6&-3&-4\end{pmatrix}$.

Calculem el rang de la matriu A:

$$\text{rang}A=\text{rang}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&-1&0\\6&-3&-4\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2$$

Per tant, $\dim Imf=\text{rang}A=2$ i $\dim Kerf=\dim\mathbb{R}^3-\text{rang}A=3-2=1$.

L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim\ker f=1\neq 0$; no és exhaustiva per ser $\dim Imf=2\neq 3=\dim\mathbb{R}^3$ i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Sigui $S=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: 2x-y-z=0\}$. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$.

Solució. El subespai S està definit per un sistema amb una única equació amb 3 incògnites. La dimensió de S és el nombre de graus de llibertat del sistema, que en aquest cas és 2 $(=3-1)$. Resolem el sistema per a trobar una base. Si aïllem z en funció de x i y, obtenim:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\2x-y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Una base de S és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Per tant, $S=<\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}>$.

Calculem les imatges dels vectors de la base de S amb la matriu associada A calculada a l'apartat anterior, i obtenim:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&-1&0\\6&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\0&-1&0\\6&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$f(S)=<f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}>=<\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}>.$$

Els dos vectors que generen $f(S)$ són linealment independents perquè no són proporcionals. Per tant, $\dim f(S)=2$ i una base de $f(S)$ és $\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$.

(Observeu que els vectors de S són vectors propis de valor propi -1.)

(c) Esbrineu si f diagonalitza. En cas que diagonalitzi, trobeu una base B de vectors propis i doneu la matriu D associada a f en aquesta base. Quina relació hi ha entre D i la matriu associada en la base canònica?

Solució. Calculem el polinomi característic de f a partir de la matriu associada en la base canònica:

$$
\begin{aligned}
p_f(x) = \det(A - x\,I_3) &= \det\begin{pmatrix} 3-x & -2 & -2 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 6 & -3 & -4-x \end{pmatrix} = (-1-x)\det\begin{pmatrix} 3-x & -2 \\ 6 & -4-x \end{pmatrix} \\
&= (-1-x)\big((3-x)(-4-x)-(-2)6\big) = (-1-x)(-12-3x+4x+x^2+12) = (-1-x)(x^2+x) \\
&= -x(x+1)^2.
\end{aligned}
$$

Les arrels del polinomi característic són 0, de multiplicitat 1, i -1, de multiplicitat 2. Els valors propis són, doncs, 0 i -1. Siguin E_0 i E_{-1} els subespais propis de valor propi 0 i -1 respectivament. Sabem que $\dim E_0 = 1$, perquè la multiplicitat de l'arrel 0 en $p_f(x)$ és 1. Sabem que la dimensió de E_{-1} satisfà $1 \le \dim E_{-1} \le 2$.
Perquè f diagonalitzi, cal que $\dim E_{-1} = 2$.

Mètode I. A l'apartat anterior hem vist que els vectors de la base de S són vectors propis de valor propi -1. Per tant, $\dim E_{-1} = 2$ i una base de E_{-1} és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. És a dir, l'endomorfisme diagonalitza.

Mètode II. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A-(-1)I_3$ per a trobar tots els vectors de E_{-1}:

$$
\begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 & -2 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 6 & -3 & -4-(-1) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

El rang de la matriu de coeficients és 1 i el nombre de graus de llibertat del sistema és $2(=3-1)$. Per a donar la solució de forma paramètrica, expressem la variable z en funció de x i y:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Per tant, f diagonalitza perquè $\dim E_{-1} = 2$, i una base de E_{-1} és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$

Calculem ara una base de E_0 (que en realitat és el nucli de f). Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - 0\cdot I_3 = A$:

$$
\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Prenem x, y com a variables principals i z com a variable lliure. Aleshores la solució es pot expressar:

$$
\begin{pmatrix} \frac{2}{3}z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R}
$$

Per tant, una base de E_0 és $\{\begin{pmatrix}2/3\\0\\1\end{pmatrix}\}$

Una base en què f diagonalitza és $B = \{\begin{pmatrix}2/3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$.

La matriu diagonal associada en aquesta base és:

$$
D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

La relació entre A i D és:

$$
D = P^{-1}AP
$$

on $P = P_C^B$, és la matriu de canvi de base de B a la base canònica, C:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$