

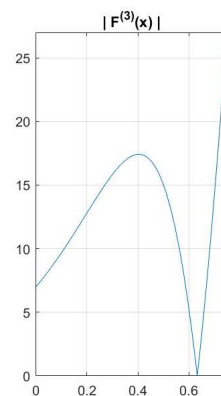
Totes les respostes han de ser raonades

1. Sigui la funció  $f(x) = \sin(2x) - x$ .

- a) Comproveu que  $x = 0$  és solució de l'equació  $f(x) = 0$ . Proveu que, a més, l'equació  $f(x) = 0$  té una solució positiva i una negativa en l'interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . i que aquesta equació té només 3 solucions reals en l'interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
- b) Utilitzant el mètode de la bisecció, trobeu el valor aproximat de la solució positiva de  $f(x) = 0$  en l'interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  amb un decimal correcte (error més petit que 0.05).
- c) Amb el valor trobat a l'apartat anterior calculeu un valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per la corba  $y = f(x)$  i l'eix d'abscisses en el primer quadrant.

2. a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en  $x = 0$  de la funció  $F(x) = \int_0^{x^2+x} e^{\sin t} dt$ ,  $x \geq 0$ . Escriviu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

- b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de  $F(0.1)$ .
- c) Fent ús del gràfic adjunt, que representa la funció  $y = |F^{(3)}(x)|$  a l'interval  $[0, 0.75]$  i de l'expressió del residu de l'apartat a), doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b). Quants decimals correctes s'obtenen?



3. Considereu la funció  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 3}$

- a) Trobeu el domini de la funció  $f$ .
- b) Feu un esboç de les corbes de nivell  $f(x, y) = 1/k$  per a  $k = -3, -2, 1$ .
- c) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció  $f$  en el seu domini.
- d) Quina és la direcció en la qual  $f$  creix més ràpidament en el punt  $P(1, 1)$ ? Trobeu la derivada direccional de  $f$  en aquesta direcció.

4. Sigui  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  i sigui  $K$  el recinte  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

- a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de  $f$  en el recinte  $K$ .
- b) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció  $f$  en el recinte  $K$  i els punts on s'assoleixen.

**Durada de l'examen: 2,5 hores**