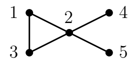
Matemàtiques 1 - GEI - FIB 02-11-2022
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf. Direm que un conjunt $S \subseteq V$ és *independent* si S no conté cap parell de vèrtexs adjacents.

Per exemple, en el graf 

, el conjunt $\{1, 4, 5\}$ és independent, però $\{1, 3, 4, 5\}$ no ho és, perquè $1 \sim 3$.

Definim el *nombre d'independència* de G, que denotarem $ind(G)$, com el cardinal més gran dels conjunts independents de G.

(a) Calculeu el nombre d'independència dels grafs

- i) complet K_n, $n \geq 1$;
- ii) cicle C_n, $n \geq 3$;
- iii) estrella $K_{1,s}$, $s \geq 3$;
- iv) bipartit complet $K_{r,s}$, $r \geq s \geq 2$.

(b) Demostreu que si $ind(G) = r$, aleshores el graf complementari de G té un subgraf isomorf a K_r, però no té cap subgraf isomorf a K_{r+1}.

(c) Demostreu que si G és un graf amb diàmetre D, aleshores $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

P2. (4 punts) Sabem que un graf G d'ordre 9 té com a mínim quatre vèrtexs de grau 1, tres vèrtexs de grau 2, un vèrtex de grau 3, i a més d'un vèrtex de grau k, on $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

(a) Demostreu que si $k = 5$, aleshores G conté almenys un cicle.

(b) Demostreu que si $k = 7$, aleshores G és connex.

(c) Suposem que $k = 5$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu G llevat d'isomorfismes.

(d) Doneu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seva seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat. Quina seqüència de graus tenen?

P3. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 15, 24, 26, 28, 35, 37, 46, 48, 59, 68, 79\}$.

(a) (2 punts)

- i) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex.
- ii) Calculeu el diàmetre, el radi i els vèrtexs centrals de G.
- iii) Hi ha algun camí de longitud més gran que el diàmetre?
- iv) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.
- v) Quin és l'enter r més gran tal que existeix un subgraf isomorf a K_r en el graf complementari de G?

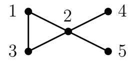
(b) (1 punt) Doneu una representació dels arbres generadors obtinguts en aplicar a G els algorismes BFS i DFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme.

Informacions

- Durada de l'examen: 100 minuts
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació...

Model de solució

P1. (3 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf. Direm que un conjunt $S \subseteq V$ és *independent* si S no conté cap parell de vèrtexs adjacents.

Per exemple, en el graf , el conjunt $\{1, 4, 5\}$ és independent, però $\{1, 3, 4, 5\}$ no ho és, perquè $1 \sim 3$.

Definim el *nombre d'independència* de G, que denotarem $ind(G)$, com el cardinal més gran dels conjunts independents de G.

(a) Calculeu el nombre d'independència dels grafs

i) complet K_n, $n \geq 1$;

ii) cicle C_n, $n \geq 3$;

iii) estrella $K_{1,s}$, $s \geq 3$;

iv) bipartit complet $K_{r,s}$, $r \geq s \geq 2$.

Solució.

i) $ind(K_n) = 1$, $\forall n \geq 1$, ja que dos vèrtexs qualssevol d'un graf complet són adjacents. Per tant, qualsevol conjunt amb almenys 2 vèrtexs no és independent.

ii) $ind(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\forall n \geq 3$. Suposem que $V(C_n) = [n]$ i $1 \sim 2 \sim 3 \sim \cdots \sim n \sim 1$.
Si n, parell, aleshores la meitat dels vèrtexs són parells, l'altra meitat són senars, i dos vèrtexs són adjacents si i només si tenen diferent paritat. Per tant, el conjunt de vèrtexs parells, de cardinal $n/2$, és independent. A més, si un conjunt té almenys $n/2 + 1$ vèrtexs, hi haurà com a mínim un vèrtex parell i un senar, i no serà independent. Per tant, $ind(C_n) = n/2 = \lfloor n/2 \rfloor$, si n és parell.
Si n és senar, aleshores dos vèrtexs són adjacents si i només si tenen diferent paritat o bé són els vèrtexs senars 1 i n. Per tant, el conjunt de vèrtexs parells, que té $(n-1)/2$ vèrtexs, és independent. Si un conjunt té almenys $(n-1)/2+1$ vèrtexs, o bé conté nombres senars i parells, o bé conté tots els nombres senars, i en cap dels dos casos és independent. Per tant, $ind(C_n) = (n-1)/2 = \lfloor n/2 \rfloor$, si n és senar.

iii) $ind(K_{1,s}) = s$, $\forall s \geq 3$, ja que dues de les s fulles de l'estrella no són mai adjacents. Si el conjunt tingués més de s vèrtexs, seria el conjunt de tots els vèrtexs, que no és independent, perquè el centre és adjacent a totes les fulles.

iv) $ind(K_{r,s}) = r$, si $r \geq s \geq 2$. La part estable amb r vèrtexs és independent, per definició de graf bipartit. Si un conjunt de vèrtexs té més de r elements, aleshores ha de tenir vèrtexs de les dues parts estables, i per tant hi hauria algun parell de vèrtexs adjacents, ja que el graf és bipartit complet.

(b) Demostreu que si $ind(G) = r$, aleshores el graf complementari de G té un subgraf isomorf a K_r, però no té cap subgraf isomorf a K_{r+1}.

Solució. Considerem un conjunt independent W de cardinal r en G. Aleshores, els vèrtexs de W són adjacents dos a dos en G^c, ja que no ho són en G. Per tant, W indueix un subgraf isomorf a K_r en G^c.

No hi pot haver un subgraf isomorf a K_{r+1} en G^c. Suposem al contrari que H és un subgraf isomorf a K_{r+1} en G^c. Aleshores, dos vèrtexs de $V(H)$ no són mai adjacents en G, ja que ho són en G^c, de manera que $V(H)$ seria un conjunt independent de cardinal $r+1$ en G, contradicció, ja que $ind(G) = r$.

(c) Demostreu que si G és un graf amb diàmetre D, aleshores $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

Solució. Siguin u i v dos vèrtexs tals que $d(u, v) = D$. Considerem un $u - v$ camí de longitud D en G, $x_0(= u), x_1, x_2, \ldots, x_D(= v)$. El conjunt $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_D\}$ conté $D+1$ vèrtexs. Sigui W en conjunt que conté els vèrtexs amb subíndex parell, és a dir,

$W = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_D\}$ si D és parell,

$W = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{D-1}\}$ si D és senar.

El conjunt W és independent, ja que si dos vèrtexs d'aquest conjunt fossin adjacents, hi hauria un camí entre u i v de longitud més petita que D, contradicció amb la hipòtesi $d(u,v) = D$. A més, si D és parell, W és un conjunt de cardinal $\frac{D}{2}+1(=\frac{D+2}{2} \geq \frac{D+1}{2})$ i, si D és senar, W és un conjunt de cardinal $\frac{D-1}{2}+1(=\frac{D+1}{2})$. Per tant, $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

P2. (4 punts) Sabem que un graf G d'ordre 9 té com a mínim quatre vèrtexs de grau 1, tres vèrtexs de grau 2, un vèrtex de grau 3, i a més d'un vèrtex de grau k, on $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

(a) Demostreu que si $k = 5$, aleshores G conté almenys un cicle.

Solució. En aquest cas, el graf té ordre 9 i seqüència de graus $5, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. Pel Lema de les encaixades, la mida és $mida(G) = \frac{1}{2}(5+3+2+2+2+1+1+1+1) = 9$.

Mètode I. Si el graf fos acíclic, seria un bosc d'ordre n i mida m amb k components connexos, on $k \geq 1$, i es compliria $m = n - k$. En aquest cas, hauria de ser $9 = 9 - k$, és a dir, $k = 0$, contradicció.

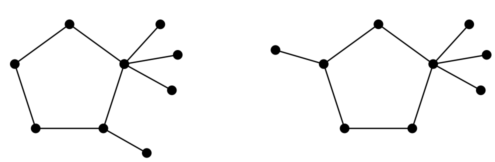
Mètode II. En tot graf acíclic d'ordre n i mida m es satisfà $m \leq n - 1$. Per tant, si $m > n - 1$, el graf tindrà algun cicle. Per ser $mida(G) = 9 > 9 - 1 = ordre(G) - 1$, el graf G té algun cicle.

(b) Demostreu que si $k = 7$, aleshores G és connex.

Solució. En aquest cas, el graf té ordre 9 i seqüència de graus $7, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. El vèrtex de grau 7 és a un component connex amb almenys 8 vèrtexs (ell mateix més els 7 vèrtexs adsjacents). Per tant, si el graf no fos connex, hauria de tenir un component connex format per un vèrtex aïllat, i això no és possible, perquè no hi ha cap vèrtex de grau 0.

(c) Suposem que $k = 5$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu G llevat d'isomorfismes.

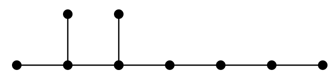
Solució. El graf té ordre 9 i seqüència de graus $5, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. Per ser G connex, els vèrtexs de grau 1 són adjacents a vèrtexs de grau almenys 2 (si no, hi hauria un component connex isomorf a K_2, contradicció perquè G és connex per hipòtesi). Per tant, al suprimir els 4 vèrtexs de grau 1 obtindrem un graf d'ordre 5 tal que la seqüència de graus s'obté restant 4 unitats dels nombres de la seqüència $5, 3, 2, 2, 2$. A més, si el graf resultant és eulerià, els graus dels vèrtexs han de ser parells i diferents de 0. Per tant, només podem restar les 4 unitats dels valors 5 i 3. L'única possibilitat és restar un 1 del 3 i 3 unitats del 5, de manera que el graf eulerià obtingut ha de tenir seqüència de graus $2, 2, 2, 2, 2$, és a dir, ha de ser un cicle d'ordre 5. A més, sabem que 3 fulles han de ser adjacents a un mateix vèrtex u del cicle (el vèrtex de grau 5 en G) i l'altra fulla ha de ser adjacent a un vèrtex diferent v del cicle (el vèrtex de grau 3 en G). Això ho podem fer de dues maneres diferents, llevat isomorfismes, segons si els vèrtexs u i v són adjacents o no (és a dir $d(u,v) = 2$). Vegem a la figura una representació dels dos grafs G llevat isomorfismes:



(d) Doneu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seva seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat. Quina seqüència de graus tenen?

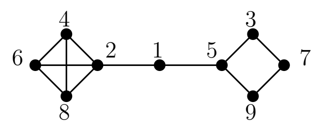
Solució. El graf té ordre 9 i seqüència de graus $k, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ (que potser no estan en ordre decreixent, ja que no sabem el valor de k). En un arbre, la mida és l'ordre menys 1. Pel Lema de les encaixades, $mida(G) = \frac{1}{2}(k + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{2}(k + 13)$. Per tant, si G és un arbre, ha de ser $8 = \frac{1}{2}(k + 13)$, és a dir,

$k = 3$. La seqüència de graus de l'arbre serà, doncs, $3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. A la figura següent tenim la representació de dos arbres amb aquesta seqüència de graus que no són isomorfs, perquè en un d'ells els únics dos vèrtexs de grau 3 són adjacents, i en l'altre, no:



P3. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 15, 24, 26, 28, 35, 37, 46, 48, 59, 68, 79\}$.

Solució. Fem una representació gràfica de G, que ens servirà per resoldre tots els apartats:



(a) (2 punts)

i) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex.

Solució. Per simetria, $e(4) = e(6) = e(8)$ i $e(3) = e(9)$. Per a calcular l'excentricitat dels vèrtexs 1, 2, 3, 4, 5 i 7, calculem el màxim de les distàncies a la resta de vèrtexs:

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$d(1,u)$	0	1	2	2	1	2	3	2	2	$e(1) = 3$
$d(2,u)$	1	0	3	1	2	1	4	1	3	$e(2) = 4$
$d(3,u)$	2	3	0	4	1	4	1	4	2	$e(3) = 4$
$d(4,u)$	2	1	4	0	3	1	5	1	4	$e(4) = 5$
$d(5,u)$	1	2	1	3	0	3	2	3	1	$e(5) = 3$
$d(7,u)$	3	4	1	5	2	5	0	5	1	$e(7) = 5$

Per tant, l'excentricitat dels vèrtexs de G és:

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e(u)$	3	4	4	5	3	5	5	5	4

ii) Calculeu el diàmetre, el radi i els vèrtexs centrals de G.

Solució. El diàmetre i el radi de G és el màxim i el mínim de les excentricitats, respectivament. De l'apartat anterior deduïm que el diàmetre és 5 i el radi és 3. Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat igual al radi, o sigui, excentricitat 3. Per tant, els vèrtexs centrals són 1 i 5.

iii) Hi ha algun camí de longitud més gran que el diàmetre?

Solució. Sí, de fet en aquest graf hi ha camins hamiltonians (que passen per tots els vèrtexs), per exemple, el camí 4, 6, 8, 2, 1, 5, 3, 7, 9, que té longitud 8, més gran que 5(=diàmetre de G).

iv) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

Solució. Les arestes pont són 12 i 15, que no són de cap cicle. No n'hi ha més, perquè les arestes restants són d'algun dels cicles (2,4,8,6,2); (2,4,6,8,2); o bé (3,5,9,7,3). Els vèrtexs de tall són 1, 2 i 5, ja que el graf és connex i al suprimir-ne qualsevol dels 3, queden 2 components connexos. La resta no són de tall, perquè al suprimir-los queda un sol component connex.

v) Quin és l'enter r més gran tal que existeix un subgraf isomorf a K_r en el graf complementari de G?

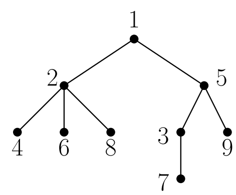
Solució. Dos vèrtexs són adjacents en el complementari si i només si no ho són en G. Per tant, és equivalent a donar un conjunt de vèrtexs dos a dos no adjacents en G de cardinal màxim, i aquest cardinal serà el valor de r.

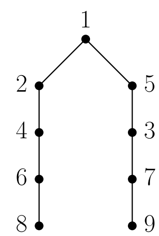
Observem que $r \geq 4$, ja que en el conjunt $\{3, 9, 1, 8\}$ no hi ha cap parell de vèrtexs adjacents en G.

Només falta demostrar que tot conjunt W amb vèrtexs no adjacents dos a dos en G té com a molt 4 vèrtexs. En efecte, W només pot tenir un vèrtex del conjunt $\{2, 4, 6, 8\}$ (perquè són adjacents dos a dos en G) i com a molt 2 vèrtexs del conjunt $\{3, 5, 7, 9\}$ (ja que entre 3 vèrtexs qualsevol d'aquest conjunt, sempre n'hi ha alguna adjacència). Per tant, W té com a molt 4 vèrtexs: un de $\{2, 4, 6, 8\}$, dos de $\{3, 5, 7, 9\}$ i el vèrtex 1.

(b) (1 punt) Doneu una representació dels arbres generadors obtinguts en aplicar a G els algorismes BFS i DFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme.

Solució. Vegem-ne una representació a la figura següent:





L'ordre en que s'afdegeixen els vèrtexs amb l'algorisme BFS és $(1, 2, 5, 4, 6, 8, 3, 9, 7)$; i amb l'algorisme DFS és $(1, 2, 4, 6, 8, 5, 3, 7, 9)$.