TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*2 punts*) Considereu la integral següent:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

   a) Sabent que la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ satisfà $|f^{(4)}(x)| < 16,\ \forall x \in [1,2]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I fent ús del mètode de Simpson amb error absolut $< 0.5 \cdot 10^{-3}$.

   b) Fent ús del mètode de Simpson i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

SOLUCIÓ:

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

a) La fórmula del mètode de Simpson amb n subintervals és:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq S(n) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m} f(x_{2j-1}) + f(b)\right)$$

amb n parell, $h = \dfrac{b-a}{n}$, i $x_i = a + ih$ per a $i = 0, \ldots, n$.

A més, l'expressió:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S(n)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4,$$

on M_4 una cota superior del valor absolut de la derivada quarta de f en l'interval $[a,b]$, ens dóna una cota superior de l'error absolut de l'aproximació de la integral $\int_a^b f(x)dx$ per $S(n)$.

En aquest exercici, $a = 1,\ b = 2$, i podem prendre $M_4 = 16$, aleshores determinem el nombre de subintervals n imposant:

$$\frac{1^5}{180n^4} \cdot 16 < 0.5 \cdot 10^{-3} \quad \Longrightarrow n > \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 10^3}{180 \cdot 0.5}} \simeq 3.65.$$

Per tant, el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb una precisió de tres decimals correctes fent ús del mètode de Simpson, que ha de ser parell, és com a mínim $\mathbf{n = 4}$.

b) Substituint $a = 1,\ b = 2,\ n = 4$ a la fórmula de Simpson, s'obté:

$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \simeq S(4) = \frac{1}{12}\ [f(1) + 4[f(1.25) + f(1.75)] + 2f(1.5) + f(2)]$

$\simeq 0.4299784376$.

El valor de la integral amb la precisió demanada és, per tant, $I = \mathbf{0.430} \pm 0.0005$.

2. (*4 punts*) Considereu la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

a) Calculeu i representeu gràficament el seu domini.

b) Considereu el conjunt $A = \mathrm{Dom}(f) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 1\}$, calculeu la frontera, l'interior i l'adherència del conjunt A. Dieu raonadament si A és obert, tancat o compacte.

c) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de la superfície $z = f(x,y)$ corresponents als nivells $z = 0, \sqrt{5}, 5$.

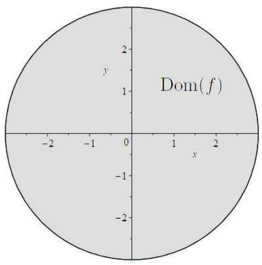
d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$? Trobeu el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció.

SOLUCIÓ:

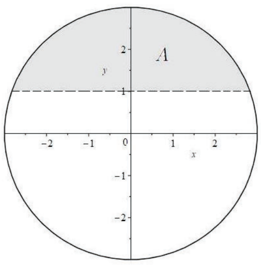
a) Per buscar el domini de $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, observem que, perquè f estigui ben definida, ha de ser $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, o, equivalentment $x^2 + y^2 \leq 9$. Per tant:

$$\mathrm{Dom}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^\mathbf{2} : \ \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} \leq \mathbf{9}\},$$

què és el cercle tancat per la circumferència de centre el $(0,0)$ i radi 3. La seva representació gràfica és:



b) El conjunt a considerar és $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 9 \ \wedge \ y > 1\}$, és a dir:



Per tant la frontera, l'interior i l'adherència del conjunt A són:

$\mathrm{Fr}(\mathbf{A}) =$
$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} = \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} \geq \mathbf{1}\} \cup \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \mathbf{y} = \mathbf{1} \wedge \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} \leq \mathbf{9}\}$,
$\mathring{\mathbf{A}} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} < \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} > \mathbf{1}\}$,

$\bar{\mathbf{A}} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \mathbf{x^2} + \mathbf{y^2} \leq \mathbf{9} \wedge \mathbf{y} \geq \mathbf{1}\}$.

Tenim que, com que la frontera de A no està inclosa íntegrament al conjunt A (ja que el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$ està exclòs), el conjunt A **no és tancat**.

Com que la frontera de A tampoc està exclosa totalment al conjunt A (ja que l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 9 \wedge y > 1\}$ està inclòs), el conjunt A **no és obert**.

Per no ser tancat, el conjunt A **no és compacte** (per ser compacte ha de ser tancat i acotat).

c) Per a la corba de nivell $z = k$, tenim que trobar els (x,y) tals que $f(x,y) = k$, és a dir:

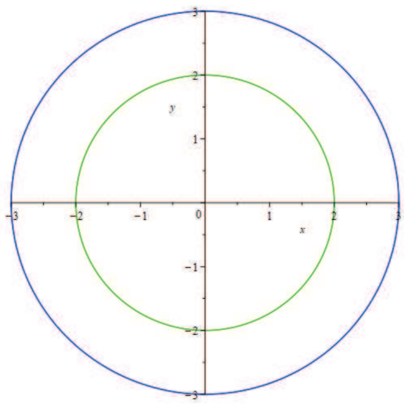
$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \iff 9 - x^2 - y^2 = k^2 \iff x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Per tant:

La corba de nivell $z = 0$ **és la corba d'equació** $x^2 + y^2 = 9$**, que és la circumferència de centre el** $(0,0)$ **i radi** 3.

La corba de nivell $z = \sqrt{5}$ **és la corba d'equació** $x^2 + y^2 = 4$**, que és la circumferència de centre el** $(0,0)$ **i radi** 2.

La corba de nivell $z = 5$ **és la corba d'equació** $x^2 + y^2 = -16$**, que és el conjunt buit**.



Corba de nivell $z = 0$ en color blau i corba de nivell $z = \sqrt{5}$ en color verd.

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$ és la mateixa direcció i sentit que el vector gradient de f en el punt $(1,1)$, i el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient de f en el punt $(1,1)$. Les derivades parcials de la funció f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

Per tant:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{-\sqrt{7}}{7}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{-\sqrt{7}}{7}.$$

i el vector gradient de f en el punt $(1,1)$ és:

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\frac{-\sqrt{7}}{7}, \frac{-\sqrt{7}}{7} \right)$$

Per tant, **la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $(1,1)$ és la direcció del $\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\frac{-\sqrt{7}}{7}, \frac{-\sqrt{7}}{7} \right)$, o, equivalentment la del vector $(-1,-1)$.**
Finalment, **el valor de la derivada direccional de f en el punt $(1,1)$ en aquesta direcció és $||\vec{\nabla} f(1,1)|| = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$.**

3. (*4 punts*) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = xy$ i sigui K el conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

b) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el conjunt K.

c) Determineu tots els candidats a punts on f pot assolir el màxim i el mínim absoluts en el conjunt K.

d) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el conjunt K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^2 en tot $\mathbb{R}^2$. Per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \\ x = 0 \end{cases}$$

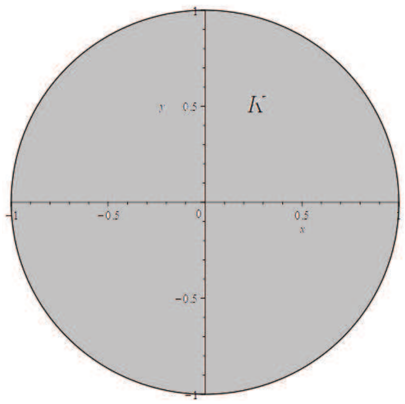
Per tant **la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(\mathbf{0},\mathbf{0})$**.

La matriu hessiana de f en el punt crític és:

$$\mathcal{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donat que $det(\mathcal{H}f(0,0)) = -1 < 0$, **la funció f té en el punt $(0,0)$ un punt de sella**.

b) La funció f és polinòmica i per tant **contínua** en tot $\mathbb{R}^2$, el conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 1\}$ és el cercle unitat i el seu dibuix és:



K és un conjunt **compacte** per ser tancat i fitat. K és tancat, ja que conté tots els seus punts frontera: $\mathrm{Fr}(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\} \subset K$. K és fitat, ja que $K \subset B_2\big((0,0)\big)$.

Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el conjunt K és un compacte, **pel teorema de Weierstrass**, f té extrems absoluts en K.

c) Buscarem els punts candidats:

(i) Punts crítics de f en l'interior del compacte K: Tal com hem vist a l'apartat anterior, la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(0,0)$ i, donat que $(0,0) \in \overset{\circ}{K}$, tenim que $(0,0)$ és un candidat.

(ii) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte K, és a dir els punts crítics de f condicionats a ser sobre la circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\}$. Es fa pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-1).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicant la primera equació per y, la segona per x i restant les dues equacions resultants obtenim: $y^2 - x^2 = 0$, és a dir $y^2 = x^2$, d'on $y = x$ o $y = -x$.

Si $y = x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = -\frac{1}{2} \Longrightarrow$ los punts $(x, y, \lambda) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ són punts crítics de la funció de Lagrange, és a dir tenim els dos punts candidats $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si $y = -x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ los punts $(x, y, \lambda) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ són punts crítics de la funció de Lagrange, és a dir tenim els dos punts candidats $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Per tant els punts candidats a punts on f pot assolir el màxim i el mínim absoluts en el conjunt K són:

$\mathbf{(0,0)}$, $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, $\boldsymbol{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$, $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ i $\boldsymbol{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

d) Les imatges per f dels punts candidats trobats són:

$f(0,0) = 0$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Per tant, **el valor màxim absolut de f en K és $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ i l'assoleix als punts $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ i $\boldsymbol{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$**, i **el valor mínim absolut de f en K és $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ i l'assoleix als punts $\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ i $\boldsymbol{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$**.

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+2x})$.

   (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f centrat a l'origen i escriviu la forma de Lagrange del residu corresponent.

   (b) Calculeu un valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2})$ utilitzant el polinomi de l'apartat anterior.

   (c) Fiteu l'error comès a l'apartat anterior utilitzant el residu de l'apartat (a).

   (d) Trobeu la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5\cdot 10^{-10}$.

2. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

   (a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ per $z = 0, 1, -1$.

   (b) Doneu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1,1)$ i l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(1,1,\ln 3)$.

   (c) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 0)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{1.1}^{1.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 2.5$, per a tot $x \in [1.1, 1.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

   (d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

3. (*4 punts*) Sigui $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2+1)$.

   (a) Trobeu el domini de f. Proveu que f és de classe C^2 en el seu domini.

   (b) Proveu que f té un únic punt crític i que es tracta d'un punt de sella.

   (c) Proveu que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$.

   (d) Proveu que f no té extrems condicionats sobre la paràbola $x^2+y-\dfrac{1}{2} = 0$.

   (e) Demostreu que f té extrems absoluts sobre el conjunt

   $$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le \frac{5}{4},\ x^2+y \ge \frac{1}{2}\}.$$

   Calculeu els valors màxim i mínim absolut de f sobre K i els punts on s'assoleixen.

Durada de l'examen: 2h 45m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

1. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+2x})$.

   (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f centrat a l'origen i escriviu la forma de Lagrange del residu corresponent.

   (b) Calculeu un valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2})$ utilitzant el polinomi de l'apartat anterior.

   (c) Fiteu l'error comès a l'apartat anterior utilitzant el residu de l'apartat (a).

   (d) Trobeu la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5\cdot 10^{-10}$.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és la composició d'una funció polinòmica amb una arrel cúbica i amb una funció logarítmica. Per les propietats de les funcions elementals, el domini de f és la semirecta $\left(-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, i la funció és de classe C^3 a tot el seu domini.

Per les propietats dels logaritmes $f(x) = (1/3)\ln(1+2x)$. Per tant, les seves derivades fins a ordre dos són

$$f'(x) = \frac{2}{3}(1+2x)^{-1}, \quad f''(x) = -\frac{4}{3}(1+2x)^{-2}.$$

Aleshores

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{2}{3}, \quad f''(0) = -\frac{4}{3}.$$

El polinomi demanat és

$$P_2(f,0,x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x^2.$$

Per tal de calcular la forma de Lagrange del residu cal la tercera derivada, que és

$$f^{(3)}(x) = \frac{16}{3}(1+2x)^{-3} = \frac{16}{3(1+2x)^3}.$$

Per tant, la forma de Lagrange del residu és

$$R_2(f,0,x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{8}{9(1+2c)^3}x^3$$

per a algun c entre 0 i x.

(b) El valor aproximat de $\ln(\sqrt[3]{1.2}) = \ln(\sqrt[3]{1+2\cdot(0.1)}) = f(0.1)$ és:

$$f(0.1) \simeq P_2(f,0,0.1) = \frac{3}{50} = 0.06.$$

(c) L'error comès és:
$$|R_2(f,0,0.1)| = \frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3,$$
on $c \in (0, 0.1)$. Una cota de l'error comès ve donada pel valor màxim de la funció $\frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3$, per a $c \in [0, 0.1]$, i aquest valor màxim es donarà quan el denominador $9(1+2c)^3$ és mínim. Com que la funció $(1+2c)^3$ és creixent, el valor mínim del denominador correspon al valor més petit de c, és a dir, a $c = 0$. Per tant, $\ln(\sqrt[3]{1.2}) \approx 0.06$ amb un error
$$\frac{8}{9(1+2c)^3}(0.1)^3 \leq \frac{8 \cdot (0.1)^3}{9} = 0.0008888 < 0.9 \cdot 10^{-3}.$$

(d) Donat que $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}}) = f(10^{-n})$, d'acord amb les fórmules de més amunt es té que
$$|f(10^{-n}) - P_2(f,0,10^{-n})| = \left|\frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3\right|,$$
per a algun $c \in (0, 10^{-n})$. Com abans, el màxim de la funció $\frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3$ per a $c \in [0, 10^{-n}]$ s'obté quan $c = 0$ i, per tant:
$$|f(10^{-n}) - P_2(f,0,10^{-n})| = \frac{8}{9(1+2c)^3}(10^{-n})^3 \leq \frac{8 \cdot (10^{-n})^3}{9}$$
Per tant, busquem la mínima n tal que
$$\frac{8 \cdot (10^{-n})^3}{9} < 0.5 \cdot 10^{-10} \leftrightarrow 10^{-3n} < \frac{9}{16} \cdot 10^{-10} \leftrightarrow 10^{10-3n} < 9/16$$
o, equivalentment (ja que la funció $\log_{10} x$ és creixent), $10 - 3n < \log_{10}(9/16)$. Això correspon a $n > 3.416625823$, és a dir, $n \geq 4$.

Per tant, la mínima n per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular $\ln(\sqrt[3]{1+2\cdot 10^{-n}})$ amb un error menor que $0.5 \cdot 10^{-10}$ és $n = 4$.

2. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$.

   (a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de $z = f(x,y)$ per $z = 0, 1, -1$.

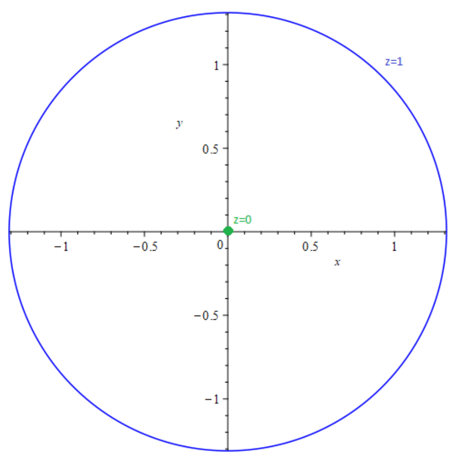
   (b) Doneu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1,1)$ i l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $(1,1,\ln 3)$.

   (c) Sigui $g(x) = f(5\sin x, 0)$ i sigui $I = \displaystyle\int_{1.1}^{1.5} g(x)\,dx$. Sabent que $|g''(x)| < 2.5$, per a tot $x \in [1.1, 1.5]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral I pel mètode dels trapezis amb error absolut < 0.005.

   (d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.

SOLUCIÓ:

(a) La corba de nivell $z = 0$ és la corba d'equació $\ln(x^2+y^2+1) = 0$, és a dir, $x^2+y^2+1 = e^0 = 1$. Per tant, la corba de nivell $z = 0$ és el punt $(x,y) = (0,0)$.
La corba de nivell $z = 1$ és la corba d'equació $\ln(x^2+y^2+1) = 1$, és a dir, $x^2+y^2+1 = e$, que és $x^2+y^2 = e-1$. Per tant, la corba de nivell $z = 1$ és la circumferència de centre el $(0,0)$ i radi $\sqrt{e-1}$.
La corba de nivell $z = -1$ és la corba d'equació $\ln(x^2+y^2+1) = -1$, és a dir, $x^2+y^2+1 = e^{-1}$, que és $x^2+y^2 = e^{-1}-1$. Com que $e^{-1}-1 < 0$, la corba de nivell $z = -1$ és el conjunt buit.



(b) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$ (per ser la composició d'una funció polinòmica amb imatge estrictament positiva amb una funció logarítmica), per tant, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1,1)$ és la direcció i el sentit del vector gradient de f en aquest punt.
Donat que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{2}{3}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{2}{3}$, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(1,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

o, equivalentment, la direcció del vector unitari $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en un punt $(a, b, f(a, b))$ és:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b).$$

Donat que $f(1, 1) = \ln 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{3}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{2}{3}$, l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en un punt $(1, 1, \ln 3)$ és:

$$3z = 2(x - 1) + 2(y - 1) + 3\ln 3.$$

(c) Una fita superior de l'error del mètode dels trapezis és:

$$\left| \int_a^b g(x)dx - T(n) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

sent M_2 una fita superior del valor absolut de la derivada segona de g en l'interval (a, b).

Aquí, $a = 1.1$, $b = 1.5$, i, atès que $|g''(x)| < 2.5 \ \forall x \in [1.1, 1.5]$, tenim que $M_2 = 2.5$. Aleshores per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005, trobarem el nombre de subintervals n imposant $\frac{(0.4)^3}{12n^2} \cdot 2.5 < 0.005$, que equival a $n^2 > \frac{(0.4)^3 \cdot 2.5}{12 \cdot 0.005}$, és a dir $n > 1.63299316$. Aleshores el nombre de subintervals per obtenir el valor de la integral I amb error absolut < 0.005 fent ús del mètode dels trapezis és $n = 2$.

(d) Substituint $a = 1.1,\ b = 1.5,\ n = 2$ i

$$g(x) = f(5\sin x, 0) = \ln(25(\sin x)^2 + 1)$$

a la fórmula dels trapezis, s'obté:

$$I \simeq T(2) = \frac{0.4}{2}\left[\frac{g(1.1)}{2} + g(1.3) + \frac{g(1.5)}{2}\right] \simeq 1.266455115.$$

El valor de la integral amb la precisió demanada és $I = 1.266 \pm 0.005$.

3. (*4 punts*) Sigui $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2+1)$.

(a) Trobeu el domini de f. Proveu que f és de classe C^2 en el seu domini.

(b) Proveu que f té un únic punt crític i que es tracta d'un punt de sella.

(c) Proveu que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\dfrac{\pm\sqrt{5}}{2}, 0)$.

(d) Proveu que f no té extrems condicionats sobre la paràbola $x^2+y-\dfrac{1}{2} = 0$.

(e) Demostreu que f té extrems absoluts sobre el conjunt

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq \frac{5}{4},\ x^2+y \geq \frac{1}{2}\}.$$

Calculeu els valors màxim i mínim absolut de f sobre K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és el producte d'una funció polinòmica per la composició d'una funció polinòmica amb imatge estrictament positiva amb una funció logarítmica. Per tant, per les propietats de les funcions elementals, el domini de f és $\mathbb{R}^2$ i f és de classe C^2 a tot $\mathbb{R}^2$.

(b) Per ser la funció f de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, els punts crítics de f s'obtenen resolent el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2+y^2+1) + 2\,\dfrac{x^2}{x^2+y^2+1} = 0 \\ \\ 2\,\dfrac{xy}{x^2+y^2+1} = 0 \end{cases}$$

De la segona es dedueix $x = 0$ o $y = 0$.

Si $x = 0$, en la primera ens queda $\ln(y^2+1) = 0 \Rightarrow y^2+1 = 1 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Si $y = 0$, en la primera ens queda $\ln(x^2+1) = -2\,\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Si $x \neq 0$, el terme de l'esquerra és positiu i el de la dreta negatiu, per tant, no té solució.

Aleshores, l'únic punt crític és $(0,0)$.

Tenim $f(0,0) = 0$ i $f(x,0) = x\ln(x^2+1)$, que té el mateix signe que x perquè aquest logaritme és positiu.

En tot entorn de $(0,0)$ hi ha punts $(x,0)$ amb $x > 0$ i, per tant, amb imatge positiva i punts $(x,0)$ amb $x < 0$ i, per tant, amb imatge negativa.

Aleshores, f té en $(0,0)$ un punt de sella.

(c) La funció f és contínua i la circumferència $x^2+y^2 = \dfrac{5}{4}$ és un compacte.

Trobar els punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2=\frac{5}{4}$ es pot fer de diverses maneres.
Una manera és pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x,y,\lambda)=x\ln(x^2+y^2+1)+\lambda(x^2+y^2-\frac{5}{4}).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x^2+y^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2+1}+2\lambda x=0\\ \dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-\dfrac{5}{4}=0\end{cases}$$

De la segona equació tenim $2y\left(\frac{x}{x^2+y^2+1}+\lambda\right)=0$, per tant, o $y=0$ o $\lambda=\frac{x}{x^2+y^2+1}$.

Si $y=0$, de la tercera equació obtenim $x^2=\frac{5}{4}$, d'on $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, y per tant s'obtenen els punts crítics condicionats $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},0)$.

Si $\lambda=\frac{x}{x^2+y^2+1}$, de la primera equació obtenim $\ln(x^2+y^2+1)+\frac{4x^2}{x^2+y^2+1}=0$, d'on $\ln(x^2+y^2+1)=-\frac{4x^2}{x^2+y^2+1}$. Novament no té solució perquè, si $(x,y)\neq 0$, un costat és positiu i l'altre negatiu.

Una altra manera de trobar els punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2=\frac{5}{4}$, és substituint x^2+y^2 per $\frac{5}{4}$ en l'expressió de $f(x,y)$, aleshores ens queda la funció de només una variable $g(x)=x\ln(9/4)$ amb $x\in[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$. És una funció contínua sobre un interval tancat amb derivada que no s'anul.la a l'interior. Per tant, els extrems absoluts estan als extrems de l'interval. Per tant els punts crítics condicionats de f a la circumferència són $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},0)$.
De les dues maneres, hem vist que els extrems absoluts de f sobre la circumferència $x^2+y^2=\frac{5}{4}$ s'assoleixen en els punts $(\frac{\pm\sqrt{5}}{2},0)$.

(d) Substituïm $y=\frac{1}{2}-x^2$ en l'expressió de $f(x,y)$ i obtenim la funció de només una variable $h(x)=f(x,\frac{1}{2}-x^2)=x\ln\left(x^4+5/4\right)$. Per trobar els seus punts crítics, igualem a 0 la seva derivada:

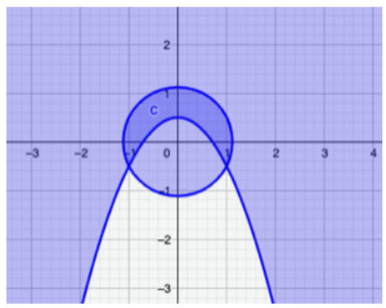
$$h'(x)=\ln\left(x^4+5/4\right)+\frac{4x^4}{x^4+5/4}$$

Així, els punts crítics han de complir:

$$\ln\left(x^4 + 5/4\right) = -\frac{4x^4}{x^4 + 5/4}$$

Novament no hi ha solució perquè un costat és estrictament positiu i l'altre negatiu.

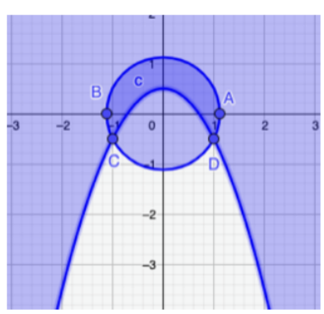
(e) La funció f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$. El conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{5}{4},\ x^2 + y \geq \frac{1}{2}\}$:



és tancat ($Fr(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{5}{4},\ x^2 + y \geq \frac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}\} \subset K$) i fitat ($K \subset B_2(0,0)$), per tant, és compacte. Aleshores, l'existència d'extrems absoluts de f en K queda demostrada pel teorema de Weierstrass.

La llista de candidats a punts on s'assoleixen els extrems absoluts de f en K, junt amb les seves imatges és:

- A l'interior de K: no hi ha cap candidat, ja que l'únic punt crític de f és $(0,0)$ (apartat (b)) i no pertany a K.
- Sobre l'arc de circumferència: els candidats són $(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ (apartat (c)), amb imatges $\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$.
- Sobre l'arc de paràbola: no n'hi ha (apartat (d)).
- Vèrtexs: $x^2 + y^2 - 5/4 = x^2 + y - 1/2 \implies (x,y) = (\pm 1, -1/2)$ amb imatges $\pm\ln(1 + 1/4 + 1) = \pm\ln(9/4)$



Per tant, el valor màxim absolut de f en K és $\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$ i s'assoleix en el punt $(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$, i el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{\sqrt{5}}{2}\ln(9/4)$ i s'assoleix en el punt $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$.

$\boxed{\text{TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES}}$

1. (3 punts)

   a) Calculeu el primer terme no nul del polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ de les funcions següents:

   a.1) $\sin(x)$,

   a.2) $\sin^2(x)$,

   a.3) $\sin^3(x)$,

   a.4) $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Calculeu de forma aproximada, donant una cota de l'error comès:

   b.1) $\sin(0.1)$,

   b.2) $\sin^2(0.1)$.

2. (3 punts) Considereu la funció $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4}$.

   a) Trobeu el domini de la funció f.

   b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x, y) = k$ per a $k = -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$.

   c) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1, 1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

   d) Trobeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1, 1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (-1, 1)$.

3. (4 punts) Considereu la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1$ i el conjunt definit per:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 2y \leq 30,\ x + 4y \leq 20\}.$$

   a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

   b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

1. (3 punts)

   a) Calculeu el primer terme no nul del polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ de les funcions següents:

   a.1) $\sin(x)$,
   a.2) $\sin^2(x)$,
   a.3) $\sin^3(x)$,
   a.4) $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Calculeu de forma aproximada, donant una cota de l'error comès:

   b.1) $\sin(0.1)$,
   b.2) $\sin^2(0.1)$.

   SOLUCIÓ: Les funcions $\sin^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ són totes de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}$ per ser $\sin(x)$ de classe C^∞ derivable en tot $\mathbb{R}$. El polinomi de Taylor d'ordre k centrat al punt $a = 0$ d'una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

   Per tant:

   a.1) Per a la funció $f(x) = \sin(x)$, tenim $f'(x) = \cos(x)$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_1(x) = x$.

   a.2) Per a la funció $f(x) = \sin^2(x)$, tenim $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 2$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_2(x) = x^2$.

   a.3) Per a la funció $f(x) = \sin^3(x)$, tenim $f'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$, $f''(x) = 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)$, $f'''(x) = 6\cos^3(x) - 21\sin^2(x)\cos(x)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6$. Aleshores, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_3(x) = x^3$.

   a.4) Per a la funció $f(x) = \sin^n(x)$, tenim en compte que el polinomi de Taylor de grau n del producte de dues funcions f i g centrat al punt $a = 0$ és el polinomi obtingut de multiplicar els polinomis de Taylor de f i de g centrats al punt $a = 0$ suprimint els termes de grau $> n$. Aleshores, per a la funció $f(x) = \sin^n(x)$, el primer terme no nul del seu polinomi de Taylor centrat al punt $a = 0$ és: $P_n(x) = x^n$.

   Quan s'aproxima el valor d'una funció en un punt pel valor del seu polinomi de Taylor d'ordre n centrat al punt $a = 0$, l'error comès és el valor absolut del reste del polinomi:

$$f(0.1) \approx P_n(0.1) \Leftarrow error = |R_n(0.1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 0.1^{n+1} \right|,$$

   per a cert $c \in (0, 0.1)$. Per tant:

   b.1) Per a la funció $f(x) = \sin(x)$, tenim $\sin(0.1) = f(0.1) \approx P_1(0.1) = 0.1$, $f''(x) = -\sin(x)$, i una cota de l'error comès (utilitzant que $|\sin(c)| \leq 1$ per a tot $c \in \mathbb{R}$) és: $R_1(0.1) = \left| \frac{f''(c)}{2!} 0.1^2 \right| = \frac{|\sin(c)|}{2!} \cdot 0.1^2 \leq \frac{1}{2!} \cdot 0.1^2 = \frac{0.1^2}{2!} = 0.005$.

   b.2) Per a la funció $f(x) = \sin^2(x)$, tenim $f'''(x) = -8\sin(x)\cos(x)$, i una cota de l'error comès (utilitzant que $|\sin(c)|, |\cos(c)| \leq 1$ per a tot $c \in \mathbb{R}$) és: $R_2(0.1) = \left| \frac{f'''(c)}{3!} \cdot 0.1^3 \right| = \frac{8|\sin(c)||\cos(c)|}{3!} \cdot 0.1^3 \leq \frac{8}{3!} \cdot 0.1^3 = \frac{4 \cdot 0.1^3}{3} = 0.00133 \leq 0.00134$.

2. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-4}$.

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x,y) = k$ per a $k = -1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}$.

c) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$? Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

d) Trobeu la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (-1,1)$.

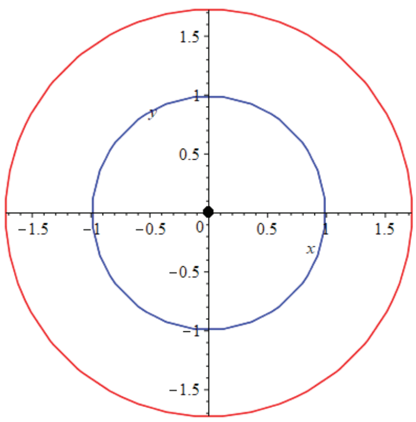
SOLUCIÓ:

a) La funció f és una funció racional, per tant el seu domini són tots els punts (x,y) del pla en els que no s'anul·la el denominador, que són tots els punts del pla excepte els de la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 2:
$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 4)\}$

b) Donat que:

$$f(x,y) = k \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2-4} = k \Leftrightarrow x^2+y^2-4 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow x^2+y^2 = \frac{1}{k}+4$$

Per a qualsevol k amb $k < -\dfrac{1}{4}$ les corbes de nivell k són circumferències de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{\dfrac{1}{k}+4}$, per a $k = -\dfrac{1}{4}$ és el punt $(0,0)$ i per a qualsevol k amb $k > -\dfrac{1}{4}$ són el conjunt buit.
Per tant la corba de nivell $f(x,y) = -1$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{3}$, la corba de nivell $f(x,y) = -\dfrac{1}{3}$ és la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1, i la corba de nivell $f(x,y) = -\dfrac{1}{4}$ és el punt $(0,0)$:



c) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector gradient de f en aquest punt i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient en aquest punt. És a dir, per una banda, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$

o, equivalentment, la direcció del vector unitari $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

I per l'altra banda, el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és:

$$|\nabla f(1,1)| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la derivada direccional de la funció f en el punt $P(1,1)$ en la direcció del vector $\vec{v} = (-1,1,)$ és el producte escalar del vector $\nabla f(1,1)$ pel vector unitari $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, que és: $D_{\vec{v}}f(1,1) = 0$.

3. (4 punts) Considereu la funció $f(x,y) = x^2+y^2-2xy-2x-2y+1$ i el conjunt definit per:

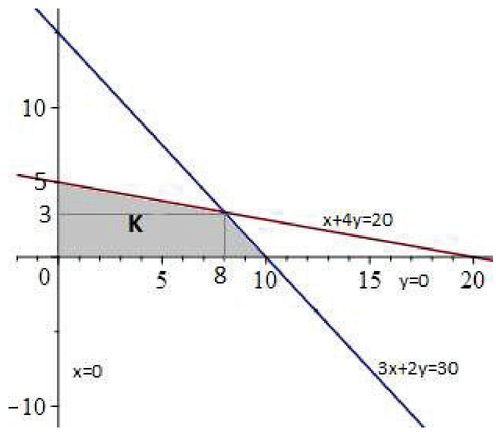
$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, 3x+2y\leq 30, x+4y\leq 20\}.$$

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ: a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^2$.

El conjunt $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, 3x+2y\leq 30, x+4y\leq 20\}$ és la regió del pla de color gris de la figura següent:



El punt d'intersecció de les dues rectes $3x+2y=30$ i $x+4y=20$ és el punt $(8,3)$. El conjunt K és tancat ja que $Fr(K)\subset K$ (en efecte: $Fr(K) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x=0,\ 0\leq y\leq 5\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=0,\ 0\leq x\leq 10\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 3x+2y=30,\ 8\leq x\leq 10\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+4y=20,\ 0\leq x\leq 8\}\subset K$) i fitat ja que $K\subset B((0,0);20)$. Per ser tancat i fitat K és compacte.

L'existència d'extrems absoluts de f en K queda justificada pel Teorema de Weierstrass, donat que f és contínua en K i K és un compacte de $\mathbb{R}^2$.

b)

i) En primer lloc, trobem els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte K: Ja hem dit que la funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, que són $2x-2y-2=0$ i $-2x+2y-2=0$, i és un sistema incompatible. Així, la funció f no té punts crítics. Per tant, no hi ha punts crítics de f a l'interior del compacte K.

ii) En segon lloc, els vèrtexs del compacte K són els punts $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,5)$ i $(8,3)$.

iii) En tercer lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $x=0$, amb $0\leq y\leq 5$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable

$\varphi(y) = f(0, y) = y^2 - 2y + 1$, és a dir la solució de $\varphi'(y) = 2y - 2 = 0$, que és $y = 1$. S'obté el punt $(0, 1)$.

iv) En quart lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $y = 0$, amb $0 \leq x \leq 10$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $\varphi(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x + 1$, és a dir la solució de $\varphi'(x) = 2x - 2 = 0$, que és $x = 1$. S'obté el punt $(1, 0)$.

v) En cinquè lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $3x + 2y = 30$, amb $8 \leq x \leq 10$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $g(x) = f(x, 15 - \dfrac{3x}{2}) = \dfrac{25}{4}x^2 - 74x + 196$, és a dir la solució de $g'(x) = \dfrac{25x}{2} - 74 = 0$, que és $x = \dfrac{148}{25}$, que no satisfà la condició $8 \leq x \leq 10$. No hi ha punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $3x + 2y = 30$, amb $8 \leq x \leq 10$.

vi) En sisè lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $x + 4y = 20$, amb $0 \leq x \leq 8$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $h(y) = f(20 - 4y, y) = 25y^2 - 194y + 361$, és a dir la solució de $h'(y) = 50y - 194 = 0$, que és $y = \dfrac{97}{25}$, aleshores $x = 20 - 4 \cdot \dfrac{97}{25} = \dfrac{112}{25}$ que sí satisfà la condició $0 \leq x \leq 8$. S'obté el punt $\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right)$.

vii) Calculem les imatges de tots els punts trobats i tenim:

$f(0, 0) = 1,\ f(10, 0) = 81,\ f(0, 5) = 16,\ f(8, 3) = 4,\ f(0, 1) = 0,$

$f(1, 0) = 0,\ f\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right) = -\dfrac{384}{25}.$

Per tant, el mínim absolut de f en K és $-\dfrac{384}{25}$ i s'assoleix al punt $\left(\dfrac{112}{25}, \dfrac{97}{25}\right)$, i el màxim absolut de f en K és 81 i s'assoleix al punt $(10, 0)$.

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (2 punts) Sigui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   a) Proveu que el màxim de $|f''(x)|$, per $x \in [-1,1]$, val 1.

   b) Calculeu el valor aproximat de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ pel mètode dels Trapezis amb 4 subintervals.

   c) Proveu que l'error comès en l'apartat anterior és més petit que 0.05.

2. (2 punts) Sabem que una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfà que f i totes les seves derivades estan fitades en valor absolut per 1. A més a més, sabem que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ i $f'''(1) = \frac{1}{2}$. Fent servir aquestes dades, doneu el valor més aproximat possible per $f(0.9)$ i fiteu l'error comés.

3. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ i el punt P de coordenades $(1,2)$.

   a) Calculeu el gradient de la funció f en el punt P.

   b) Dibuixeu la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt.

   c) Calculeu la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v} = (5,12)$.

   Considerem la superfície $z = f(x,y)$ i el punt $Q = (1,2,1)$.

   d) Trobeu l'equació de la recta normal a la superfície pel punt Q.

   e) Doneu l'equació del pla tangent a la superfície en el punt Q.

4. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = (x+y)(x+y+8)$ i el conjunt definit per:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \leq x\}.$$

   a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

   b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

Les SOLUCIONS sortiran publicades avui al Racó. Les NOTES sortiran com a molt tard dimarts 29 al matí. Si algú vol REVISIÓ d'algun problema, s'haurà d'apuntar a Atenea dimarts 29 entre les 12.00 i les 15.00.

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (2 punts) Sigui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   a) Proveu que el màxim de $|f''(x)|$, per $x \in [-1,1]$, val 1.

   b) Calculeu el valor aproximat de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ pel mètode dels Trapezis amb 4 subintervals.

   c) Proveu que l'error comès en l'apartat anterior és més petit que 0.05.

SOLUCIÓ: a) Tenim que $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Calculem les derivades $f'(x)$ i $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left((1+x^2)-x^2\right) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Com que $x^2 \geq 0$, obtenim que $1+x^2 \geq 1$. Per tant, $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1$ i $f''(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \leq 1$, que demostra la primera part de l'exercici. També podem calcular el màxim de $g(x) = f''(x)$ derivant:

$$g'(x) = f'''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -3x \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Aquesta derivada $g'(x)$ s'anul.la només si $x = 0$ (perqué $1+x^2$ és sempre estrictament positiu), per tant el màxim s'assolirà a $x = 0$ o als extrems $x = \pm 1$. Un simple càlcul demostra que $f''(\pm 1) < f''(0) = 1$, per tant el màxim és 1. Com que $f''(x) > 0$ per a tot x, aquest és el màxim en valor absolut.

b) Tenim que $b = 1$, $a = -1$, $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = a = -1, \quad x_1 = a+h = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = a+2h = 0, \quad x_3 = a+3h = \frac{1}{2}, \quad x_4 = b = 1.$$

Per tant, per la fórmula dels Trapezis:

$$T(4) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Obtenim que $T(4) = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \approx 2,3251$.

c) L'error en el mètode dels Trapezis ve donat per la fórmula

$$E = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - T(4)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|,$$

per algún $\xi \in (-1,1)$. Com que en l'apartat (a) hem demostrat que $|f''(\xi)| \leq 1$, obtenim que

$$E < \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{8}{12 \cdot 16} = \frac{1}{24} \approx 0,0417 < 0,05,$$

Per tant, queda demostrat que l'error comès és inferior a $0,05$.

2. (2 punts) Sabem que una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfà que f i totes les seves derivades estan fitades en valor absolut per 1. A més a més, sabem que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ i $f'''(1) = \frac{1}{2}$. Fent servir aquestes dades, doneu el valor més aproximat possible per $f(0.9)$ i fiteu l'error comés.

   SOLUCIÓ: Utilitzem la Fórmula de Taylor d'ordre 3 de la funció f en el punt 1:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \pm \frac{f''''(c)}{4!}(x-1)^4,$$

   on c està entre x i 1. Per tant,

$$f(0.9) = f(1) + f'(1)(0.9-1) + \frac{f''(1)}{2!}(0.9-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(0.9-1)^3 \pm \frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4,$$

   on $0.9 \le c \le 1$. D'aquesta manera obtenim:

$$f(0.9) \approx (0.9-1) - \frac{1}{2}(0.9-1)^2 + \frac{1}{12}(0.9-1)^3 \approx -0.1050833333.$$

   L'error comés és $error = \left|\frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4\right|$ amb $0.9 \le c \le 1$, i donat que totes les derivades de f estan fitades en valor absolut per 1, la fita de l'error comés és:

$$error = \left|\frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4\right| \le \frac{(0.9-1)^4}{4!} = 0.4166666667 \cdot 10^{-5}.$$

   Finalment $f(0.9) \approx -0.105083 \pm 0.4166666667 \cdot 10^{-5}$.

3. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ i el punt P de coordenades $(1,2)$.

a) Calculeu el gradient de la funció f en el punt P.

b) Dibuixeu la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt.

c) Calculeu la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v} = (5, 12)$.

Considerem la superfície $z = f(x,y)$ i el punt $Q = (1,2,1)$.

d) Trobeu l'equació de la recta normal a la superfície pel punt Q.

e) Doneu l'equació del pla tangent a la superfície en el punt Q.

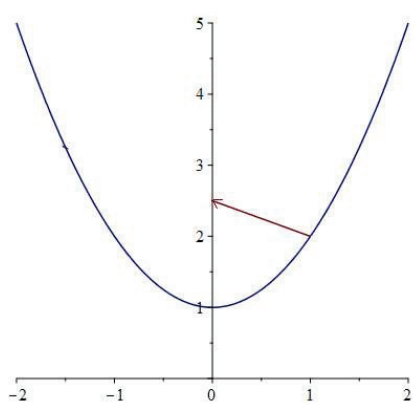
SOLUCIÓ: La funció f és una funció racional amb denominador diferent de 0 per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per tant f és de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$.

a) Les derivades parcials de primer ordre de la funció f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per tant $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \dfrac{1}{2}$, i el gradient de la funció f en el punt P és $\vec{\nabla} f(1,2) = (-1, \dfrac{1}{2})$.

b) Donat que $f(1,2) = 1$, la corba de nivell que passa pel punt P és la corba d'equació $\dfrac{y}{1+x^2} = 1$, és a dir la paràbola $y = x^2 + 1$. Aleshores el dibuix de la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt és:



c) Donat que la funció f és de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$ i per tant també en el punt P, la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v} = (5, 12)$ és:

$$D_{\vec{v}} f(P) = D_{\vec{v}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (-1, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{1}{13}.$$

d) L'equació contínua de la recta normal a la superfície $z = f(x, y)$ pel punt $Q = (1, 2, 1)$ és:

$$\frac{x-1}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)} = \frac{y-2}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)} = \frac{z-1}{-1},$$

és a dir:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{-1},$$

o, equivalentment:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

e) L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $Q = (1, 2, 1)$ és:

$$z = 1 + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-2),$$

és a dir:

$$z = 1 - (x-1) + \frac{1}{2}(y-2),$$

o, equivalentment: $2x - y + 2z - 2 = 0$.

4. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = (x+y)(x+y+8)$ i el conjunt definit per:

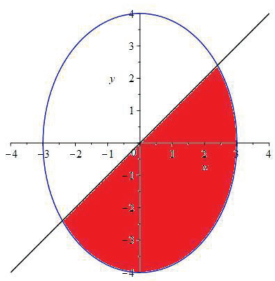
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \leq x\}.$$

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ: a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^2$.

El conjunt $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \leq x\}$ és la regió del pla limitada per una semi-el·lipse i un segment, la regió del pla de color vermell de la figura:

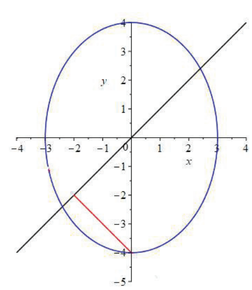


El conjunt K és tancat ja que $Fr(K) \subset K$ (en efecte: $Fr(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1,\ y \leq x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1,\ y = x\} \subset K$) i fitat ja que $K \subset B((0,0);10)$. Per ser tancat i fitat K és compacte.

L'existència d'extrems absoluts de f en K queda justificada pel Teorema de Weierstrass, donat que f és contínua en K i K és un compacte de $\mathbb{R}^2$.

b)

b.1) En primer lloc, trobem els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte K: Ja hem dit que la funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que és equivalent a l'equació $y = -x - 4$. Així, els punts crítics de la funció f són tots els punts de la recta d'equació $y = -x - 4$. Per tant, els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte són els punts de la recta d'equació $y = -x - 4$ que estàn a l'interior de K, és a dir: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -x - 4,\ -2 < x < 0\}$



b.2) En segon lloc, els vèrtexs del compacte K són els punts d'intersecció de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ i la recta $y=x$, que són els punts $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)$ i $\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$.

b.3) En tercer lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $y=x$, amb $-\dfrac{12}{5}\leq x\leq\dfrac{12}{5}$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $\varphi(x)=f(x,x)=4x^2+16x$, és a dir les solucions de $\varphi'(x)=8x+16=0$ amb $-\dfrac{12}{5}\leq x\leq\dfrac{12}{5}$, que és $x=-2$. S'obté el punt $(-2,-2)$.

b.4) En quart lloc, per trobar els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$, amb $y\leq x$, construïm la funció de Lagrange $L(x,y,\lambda)=(x+y)(x+y+8)+\lambda(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-1)$. Igualant a zero les seves derivades parcials, obtenim:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+8+\dfrac{2\lambda x}{9}=0\\ 2x+2y+8+\dfrac{2\lambda y}{16}=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-1=0\end{cases}$$

Restant la primera equació menys la segona equació, s'obté: $2\lambda(\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{16})=0$. Per tant $\lambda=0$ o $y=\dfrac{16}{9}x$.

Fent $y=\dfrac{16}{9}x$ a la tercera equació, s'obté l'equació $25x^2=81$, amb solucions $x=\pm\dfrac{9}{5}$. Així obtenim $x=\dfrac{9}{5}$, $y=\dfrac{16}{5}$, $\lambda=-45$ o $x=-\dfrac{9}{5}$, $y=-\dfrac{16}{5}$, $\lambda=-5$, per tant els punts $\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{16}{5}\right)$ i $\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)$, i, d'aquest dos, només el punt $\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)$ satisfà la condició $y\leq x$. Fent $\lambda=0$ a la primera equació, tenim $y=-x-4$, i llavors, de la tercera equació s'obté el punt $(0,-4)$.

b.5) Els punts $(-2,-2)$ i $(0,-4)$ són de la recta d'equació $y=-x-4$. Calculem les imatges de tots els punt trobats i tenim:

$f(x,-x-4)=-16$, $f\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{1536}{25}$, $f\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{12}{5}\right)=-\dfrac{384}{25}$, $f\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)=-15$.

b.6) Per tant, el mínim absolut de f en K és -16 i s'assoleix a tots els punts de la recta d'equació $y=-x-4$ que estàn al conjunt K, és a dir als punts $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=-x-4,\ -2\leq x\leq 0\}$, i el màxim absolut de f en K és $\dfrac{1536}{25}$ i s'assoleix al punt $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.

Examen FINAL M2 FIB-UPC 22 de gener de 2021

Totes les respostes han de ser raonades

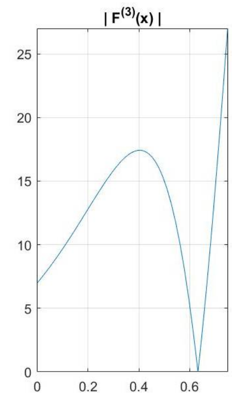
1. Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$.

a) Comproveu que $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. Proveu que, a més, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. i que aquesta equació té només 3 solucions reals en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Utilitzant el mètode de la bisecció, trobeu el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ amb un decimal correcte (error més petit que 0.05).

c) Amb el valor trobat a l'apartat anterior calculeu un valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per la corba $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant.

2. a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} e^{\sin t}\, dt,\ x \geq 0$. Escriviu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.



b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $F(0.1)$.

c) Fent ús del gràfic adjunt, que representa la funció $y = |F^{(3)}(x))|$ a l'interval $[0, 0.75]$ i de l'expressió del residu de l'apartat a), doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b). Quants decimals correctes s'obtenen?

3. Considereu la funció $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 3}$

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x, y) = 1/k$ per a $k = -3, -2, 1$.

c) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1, 1)$?. Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ i sigui K el recinte $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte K.

b) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el recinte K i els punts on s'assoleixen.

Durada de l'examen: 2,5 hores

1. Sigui la funció $f(x) = \sin(2x) - x$.

a) Comproveu que $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. Proveu que, a més, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. i que aquesta equació té només 3 solucions reals en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Utilitzant el mètode de la bisecció, trobeu el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ amb un decimal correcte (error més petit que 0.05).

c) Amb el valor trobat a l'apartat anterior calculeu un valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per la corba $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant.

SOLUCIÓ:

a) Donat que $\sin(0) = 0$, $x = 0$ és solució de l'equació $f(x) = 0$. La funció f és la resta d'una funció sinus i una funció polinòmica, per tant és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.
Tenim que $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0, f(-0.1) \simeq -0.099 < 0$ i f contínua en $[-\frac{\pi}{2}, -0.1]$, per tant, pel Teorema de Bolzano $\exists c_1 \in (-\frac{\pi}{2}, -0.1)$ tal que $f(c_1) = 0$.
A més, tenim que $f(0.1) \simeq 0.099 > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$ i f contínua en $[0.1, \frac{\pi}{2}]$, per tant, pel Teorema de Bolzano $\exists c_2 \in (0.1, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c_2) = 0$.
Per tant, l'equació $f(x) = 0$ té una solució positiva i una negativa en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
A continuació farem la demostració de que aquesta equació té només 3 solucions en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per reducció al absurd utilitzant el Teorema de Rolle.
Suposem que l'equació té 4 solucions reals i arribarem a una contradicció:
Suposem que $\exists \alpha, \beta, \gamma, \delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tals que $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ i $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta) = 0$.
Tindríem que $f(\alpha) = f(\beta)$, f és contínua en $[\alpha, \beta]$ i f és derivable en (α, β), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_1 \in (\alpha, \beta), f'(c_1) = 0$.
A més, tindríem que $f(\beta) = f(\gamma)$, f és contínua en $[\beta, \gamma]$ i f és derivable en (β, γ), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_2 \in (\beta, \gamma), f'(c_2) = 0$.
A més, tindríem que $f(\gamma) = f(\delta)$, f és contínua en $[\gamma, \delta]$ i f és derivable en (γ, δ), per tant, pel Teorema de Rolle $\exists c_3 \in (\gamma, \delta), f'(c_3) = 0$.
En resum, l'equació $f'(x) = 0$ tindria tres solucions diferents en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Però $f'(x) = 2\cos(2x) - 1$ i $\left(2\cos(2x) - 1 = 0 \wedge x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) \Leftrightarrow$

$(x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6})$, és a dir l'equació $f'(x) = 0$ té només dues solucions diferents en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Així hem arribat a una contradicció i aquesta equació té només 3 solucions en l'interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

b) Quan s'utilitza el mètode de la bisecció, primer es poden calcular el número d'iteracions necessaries. Si l'utilitzem en l'interval $\left[0.1, \frac{\pi}{2}\right]$, donat que l'error comés en l'i-èsima iteració és menor que $\frac{b-a}{2^i} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0.1}{2^i} \simeq \frac{1.4708}{2^i}$, es té $\frac{1.4708}{2^i} < 0.05 \Leftrightarrow 2^i > 29.42 \Leftrightarrow i \geq 5$ i per tant calen 5 iteracions.

$f(0.1) \simeq 0.099 > 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0;$

$x_1 = \frac{0.1 + \frac{\pi}{2}}{2}, \quad f(x_1) \simeq f(0.8353981635) \simeq 0.1596060018 > 0;$

$x_2 = \frac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{2}, \quad f(x_2) \simeq f(1.203097245) \simeq -0.5322147725 < 0;$

$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad f(x_3) \simeq f(1.019247704) \simeq -0.1266397222 < 0;$

$x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad f(x_1) \simeq f(0.9273229338) \simeq 0.0326615438 > 0;$

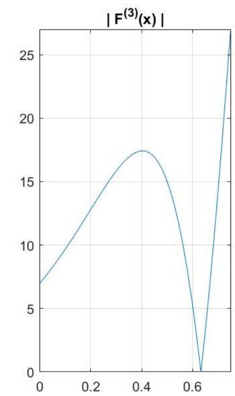
$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} \simeq 0.973.$

Per tant el valor aproximat de la solució positiva de $f(x) = 0$ utilitzant el mètode de la bisecció amb un error més petit que 0.05 és $x_5 \simeq 0.97$.

c) El valor aproximat de l'àrea del recinte tancat limitat per $y = f(x)$ i l'eix d'abscisses en el primer quadrant que s'obté amb el valor trobat a l'apartat anterior és:

$$A = \int_0^{0.973} (\sin(2x) - x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{0.973} \simeq 0.2098665205.$$

2. a) Obteniu el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2+x} e^{\sin t}\, dt,\ x \geq 0$. Escriviu l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.



b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, calculeu un valor aproximat de $F(0.1)$.

c) Fent ús del gràfic adjunt, que representa la funció $y = |F^{(3)}(x))|$ a l'interval $[0, 0.75]$ i de l'expressió del residu de l'apartat a), doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b). Quants decimals correctes s'obtenen?

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x)$ és:

$$P_2(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2.$$

Calculem els coeficients:
$F(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{\sin t}\, dt.$
Donat que la funció $e^{\sin t}$ és contínua per a tot $t \in \mathbb{R}$ per ser la composició d'una funció sinus i una exponencial, i que la funció $x^2 + x$ és derivable per ser polinòmica, pel Teorema Fonamental del Càlcul i la Regla de la Cadena tenim que la funció F és derivable i la seva derivada és: $F'(x) = (2x + 1)e^{\sin(x^2+x)}$, per tant:
$F'(0) = 1.$
La segona derivada de F és $F''(x) = 2e^{\sin(x^2+x)} + (2x+1)^2 \cos(x^2 + x)e^{\sin(x^2+x)}$, i per tant:
$F''(0) = 3.$
D'aquesta manera, el polinomi de Taylor de grau 2 centrat en $x = 0$ de la funció $F(x)$ és:

$$P_2(x) = x + \frac{3}{2}x^2.$$

L'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_2(x) = \frac{F'''(c)}{3!}x^3$$

per a cert c entre 0 i x.

b) Fent ús del polinomi de l'apartat anterior, s'obté el valor aproximat de $F(0.1) = 0.1 + \frac{3}{2}(0.1)^2 = 0.1150.$

c) Fent ús del gràfic que representa la funció $y = |F^3(x)|$ a l'interval $[0, 0.75]$, en el que veiem que el valor absolut de la derivada tercera és menor que 10 entre 0 i 0.1, i de l'expressió del residu de l'apartat a), tenim la següent fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b):

$$error = |R_2(x)| = \frac{|F'''(c)|}{6}x^3 \leq \frac{10}{6}(0.1)^3 \simeq 0.0017 < 0.005.$$

I per tant s'obtenen dos decimals correctes

3. Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-3}$

a) Trobeu el domini de la funció f.

b) Feu un esboç de les corbes de nivell $f(x,y) = 1/k$ per a $k = -3, -2, 1$.

c) Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció f en el seu domini.

d) Quina és la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$?. Trobeu la derivada direccional de f en aquesta direcció.

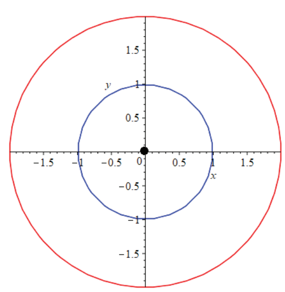
SOLUCIÓ:

a) La funció f és una funció racional, per tant el seu domini són tots els punts (x,y) del pla en els que no s'anul·la el denominador, que són tots els punts del pla excepte els de la circumferència de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{3}$:
$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 3)\}$

b) Donat que:

$$f(x,y) = 1/k \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2-3} = 1/k \Leftrightarrow x^2+y^2-3 = k \Leftrightarrow x^2+y^2 = k+3$$

Per a qualsevol $k > -3$ les corbes de nivell $1/k$ són circumferències de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{k+3}$, per a $k = -3$ és el punt $(0,0)$ i per a qualsevol $k < -3$ són el conjunt buit. Per tant les corbes de nivell $f(x,y) = 1/k$ per a $k = -3, -2$ i 1 són respectivament el punt $(0,0)$ i les circumferències de centre $(0,0)$ i radis 1 i 2 respectivament:



c) Per ser f una funció racional, és de classe C^2 en el seu domini. Per trobar els punts crítics en el seu domini:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x}{(x^2+y^2-3)^2} = 0 \\ \\ \dfrac{-2y}{(x^2+y^2-3)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

És a dir, la funció té un únic punt crític que és el punt $(0,0)$. Per classificar-lo es pot fer aplicant el criteri del Hessià (dóna el determinat diferent de zero) o simplement un estudi local:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3 \geq -3 \Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2-3} \leq \frac{1}{-3} \Rightarrow f(x,y) \leq f(0,0),$$

per tant, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu (i absolut).

d) La funció f és de classe C^1 en el punt $(1,1)$, per tant la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector gradient de f en aquest punt i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és el mòdul del vector gradient en aquest punt. És a dir, per una banda, la direcció en la qual f creix més ràpidament en el punt $P(1,1)$ és la del vector:

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (-2,-2),$$

o, equivalentment, la direcció del vector $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

I per l'altra banda, el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és:

$$|\nabla f(1,1)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

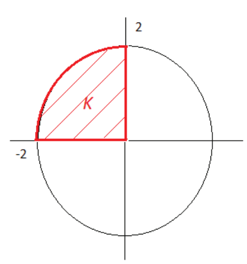
4. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x,y) = x^2+y^2-xy+x+y$ i sigui K el recinte $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \leq 0, \; y \geq 0, \; x^2+y^2 \leq 4\}$.

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en el recinte K.

b) Determineu el màxim absolut i el mínim absolut de la funció f en el recinte K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ:

a) La funció f és polinòmica i per tant contínua en tot $\mathbb{R}^2$, el dibuix del conjunt K és:



K és un conjunt compacte per ser tancat (donat que conté tots els seus punts frontera, que són els punts dels segments $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 0, -2 \leq x \leq 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$ i els punts de l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 4, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\}$) i K és fitat (donat que $K \subset B_3\big((0,0)\big)$).

Atès que f és contínua en tot $\mathbb{R}^2$ i el recinte K és un compacte, pel teorema de Weierstrass, f té extrems absoluts en K.

b) Primer buscarem els punts candidats:

(i) La funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$ (per ser polinòmica), per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ \\ x = -1 \end{cases}$$

Per tant la funció f té un únic punt crític, que és el punt $(-1,-1) \notin K \Leftrightarrow (-1,-1)$ no és un candidat.

(ii) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera del compacte K:

(ii.1) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, -2 \leq x \leq 0\}$: fent $y = 0$ tenim $f(x,0) = x^2 + x$, que és una funció d'una variable $\varphi_1(x) = x^2 + x$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_1'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \in (-2, 0)$. Així s'obté el punt crític $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

(ii.2) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 \leq y \leq 2\}$: fent $x = 0$ tenim $f(x,0) = y^2 + y$, que és una funció d'una variable $\varphi_2(y) = y^2 + y$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi_2'(y) = 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \notin (0, 2) \Longrightarrow$ no és un candidat.

(ii.3) Punts crítics de f condicionats a ser sobre l'arc de circumferència $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 - 4 = 0, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2\}$, es fa pel mètode de Lagrange. La funció de Lagrange és:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy + x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Igualant les seves derivades a 0 s'obté:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2y - x + 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Restant les dues primeres equacions obtenim: $2(x-y)+(x-y)+2\lambda(x-y) = 0$, és a dir $(x-y)(3+2\lambda) = 0$, d'on $y = x$ o $\lambda = -\dfrac{3}{2}$.

Si $y = x$, de la tercera equació s'obté $x = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ i de la primera equació s'obté $\lambda = -\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow$ los punts crítics de la funció de Lagrange son $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{2}}{4})$, i cap de les dues solucions satisfà $-2 \leq x \leq 0, \ 0 \leq y \leq 2$.

Si $\lambda = -\dfrac{3}{2}$, de la primera equació s'obté $y = 1 - x$, i aleshores de la tercera equació: $2x^2 - 2x - 3 = 0$, d'on $x = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{2} \Longrightarrow y =$

$1-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{7}}{2}\Longrightarrow$ los punts crítics de la funció de Lagrange son $\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{7}}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, i per tant tenim el punt crític $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\approx$ $(-0.82, 1.82)$ condicionats a ser sobre l'arc de circumferència .

(ii.4) Els vèrtexs del compacte K són els punts: $(0,0), (-2,0)$ i $(0,2)$.

(iii) Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$f\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$,

$f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{13}{2}=6.5.$

$f(0,0)=0$,
$f(-2,0)=2$,
$f(0,2)=6$.

Per tant, el valor màxim absolut de f en K és $\frac{13}{2}$ i l'assoleix al punt $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, el valor mínim absolut de f en K és $-\frac{1}{4}$ i l'assoleix al punt $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.