TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (2 punts) Sigui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   a) Proveu que el màxim de $|f''(x)|$, per $x \in [-1,1]$, val 1.

   b) Calculeu el valor aproximat de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ pel mètode dels Trapezis amb 4 subintervals.

   c) Proveu que l'error comès en l'apartat anterior és més petit que 0.05.

2. (2 punts) Sabem que una funció $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfà que f i totes les seves derivades estan fitades en valor absolut per 1. A més a més, sabem que $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$ i $f'''(1)=\frac{1}{2}$. Fent servir aquestes dades, doneu el valor més aproximat possible per $f(0.9)$ i fiteu l'error comés.

3. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ i el punt P de coordenades $(1,2)$.

   a) Calculeu el gradient de la funció f en el punt P.

   b) Dibuixeu la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt.

   c) Calculeu la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v}=(5,12)$.

   Considerem la superfície $z=f(x,y)$ i el punt $Q=(1,2,1)$.

   d) Trobeu l'equació de la recta normal a la superfície pel punt Q.

   e) Doneu l'equació del pla tangent a la superfície en el punt Q.

4. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y)=(x+y)(x+y+8)$ i el conjunt definit per:

$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1, y\le x\}.$$

   a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

   b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

Les SOLUCIONS sortiran publicades avui al Racó. Les NOTES sortiran com a molt tard dimarts 29 al matí. Si algú vol REVISIÓ d'algun problema, s'haurà d'apuntar a Atenea dimarts 29 entre les 12.00 i les 15.00.

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. (2 punts) Sigui $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

a) Proveu que el màxim de $|f''(x)|$, per $x \in [-1,1]$, val 1.

b) Calculeu el valor aproximat de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ pel mètode dels Trapezis amb 4 subintervals.

c) Proveu que l'error comès en l'apartat anterior és més petit que 0.05.

SOLUCIÓ: a) Tenim que $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Calculem les derivades $f'(x)$ i $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\left((1+x^2)-x^2\right) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Com que $x^2 \geq 0$, obtenim que $1+x^2 \geq 1$. Per tant, $(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1$ i $f''(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \leq 1$, que demostra la primera part de l'exercici. També podem calcular el màxim de $g(x) = f''(x)$ derivant:

$$g'(x) = f'''(x) = -\frac{3}{2}(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -3x \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Aquesta derivada $g'(x)$ s'anul.la només si $x = 0$ (perqué $1+x^2$ és sempre estrictament positiu), per tant el màxim s'assolirà a $x = 0$ o als extrems $x = \pm 1$. Un simple càlcul demostra que $f''(\pm 1) < f''(0) = 1$, per tant el màxim és 1. Com que $f''(x) > 0$ per a tot x, aquest és el màxim en valor absolut.

b) Tenim que $b = 1$, $a = -1$, $n = 4$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = a = -1, \quad x_1 = a+h = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = a+2h = 0, \quad x_3 = a+3h = \frac{1}{2}, \quad x_4 = b = 1.$$

Per tant, per la fórmula dels Trapezis:

$$T(4) = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Obtenim que $T(4) = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2} \approx 2,3251$.

c) L'error en el mètode dels Trapezis ve donat per la fórmula

$$E = \left|\int_{-1}^{1} f(x)dx - T(4)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\xi)|,$$

per algún $\xi \in (-1,1)$. Com que en l'apartat (a) hem demostrat que $|f''(\xi)| \leq 1$, obtenim que

$$E < \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{8}{12 \cdot 16} = \frac{1}{24} \approx 0,0417 < 0,05,$$

Per tant, queda demostrat que l'error comès és inferior a 0,05.

2. (2 punts) Sabem que una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfà que f i totes les seves derivades estan fitades en valor absolut per 1. A més a més, sabem que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$ i $f'''(1) = \frac{1}{2}$. Fent servir aquestes dades, doneu el valor més aproximat possible per $f(0.9)$ i fiteu l'error comés.

SOLUCIÓ: Utilitzem la Fórmula de Taylor d'ordre 3 de la funció f en el punt 1:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \pm \frac{f''''(c)}{4!}(x-1)^4,$$

on c està entre x i 1. Per tant,

$$f(0.9) = f(1) + f'(1)(0.9-1) + \frac{f''(1)}{2!}(0.9-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(0.9-1)^3 \pm \frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4,$$

on $0.9 \leq c \leq 1$. D'aquesta manera obtenim:

$$f(0.9) \approx (0.9-1) - \frac{1}{2}(0.9-1)^2 + \frac{1}{12}(0.9-1)^3 \approx -0.1050833333.$$

L'error comés és $error = \left| \frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4 \right|$ amb $0.9 \leq c \leq 1$, i donat que totes les derivades de f estan fitades en valor absolut per 1, la fita de l'error comés és:

$$error = \left| \frac{f''''(c)}{4!}(0.9-1)^4 \right| \leq \frac{(0.9-1)^4}{4!} = 0.4166666667 \cdot 10^{-5}.$$

Finalment $f(0.9) \approx -0.105083 \pm 0.4166666667 \cdot 10^{-5}$.

3. (3 punts) Considereu la funció $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2}$ i el punt P de coordenades $(1,2)$.

a) Calculeu el gradient de la funció f en el punt P.

b) Dibuixeu la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt.

c) Calculeu la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v} = (5,12)$.

Considerem la superfície $z = f(x,y)$ i el punt $Q = (1,2,1)$.

d) Trobeu l'equació de la recta normal a la superfície pel punt Q.

e) Doneu l'equació del pla tangent a la superfície en el punt Q.

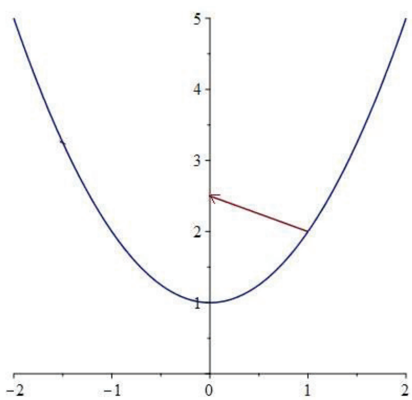
SOLUCIÓ: La funció f és una funció racional amb denominador diferent de 0 per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per tant f és de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$.

a) Les derivades parcials de primer ordre de la funció f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per tant $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \dfrac{1}{2}$, i el gradient de la funció f en el punt P és $\vec{\nabla} f(1,2) = (-1, \dfrac{1}{2})$.

b) Donat que $f(1,2) = 1$, la corba de nivell que passa pel punt P és la corba d'equació $\dfrac{y}{1+x^2} = 1$, és a dir la paràbola $y = x^2 + 1$. Aleshores el dibuix de la corba de nivell que passa pel punt P i el vector gradient en aquest punt és:



c) Donat que la funció f és de classe C^1 en $\mathbb{R}^2$ i per tant també en el punt P, la derivada de la funció f en el punt P en la direcció del vector $\vec{v} = (5,12)$ és:

$$D_{\vec{v}} f(P) = D_{\vec{v}} f(1,2) = \vec{\nabla} f(1,2) \cdot \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = (-1, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{5}{13}, \frac{12}{13}) = \frac{1}{13}.$$

d) L'equació contínua de la recta normal a la superfície $z = f(x,y)$ pel punt $Q = (1,2,1)$ és:

$$\frac{x-1}{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)} = \frac{y-2}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)} = \frac{z-1}{-1},$$

és a dir:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{-1},$$

o, equivalentment:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

e) L'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x,y)$ en el punt $Q = (1,2,1)$ és:

$$z = 1 + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-2),$$

és a dir:

$$z = 1 - (x-1) + \frac{1}{2}(y-2),$$

o, equivalentment: $2x - y + 2z - 2 = 0$.

4. (3 punts) Considereu la funció $f(x, y) = (x + y)(x + y + 8)$ i el conjunt definit per:

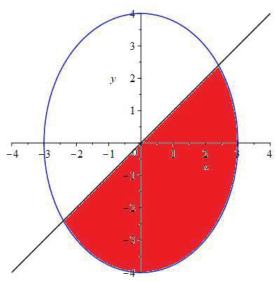
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \leq x\}.$$

a) Justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en K.

b) Trobeu els extrems absoluts de f en K i els punts on s'assoleixen.

SOLUCIÓ: a) La funció f és polinòmica i per tant de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^2$.

El conjunt $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1, y \leq x\}$ és la regió del pla limitada per una semi-el·lipse i un segment, la regió del pla de color vermell de la figura:

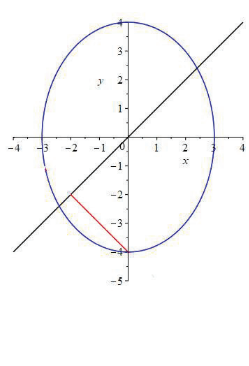


El conjunt K és tancat ja que $Fr(K) \subset K$ (en efecte: $Fr(K) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1,\ y \leq x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1,\ y = x\} \subset K$) i fitat ja que $K \subset B((0, 0); 10)$. Per ser tancat i fitat K és compacte.

L'existència d'extrems absoluts de f en K queda justificada pel Teorema de Weierstrass, donat que f és contínua en K i K és un compacte de $\mathbb{R}^2$.

b)

b.1) En primer lloc, trobem els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte K: Ja hem dit que la funció f és de classe C^1 en tot $\mathbb{R}^2$, per tant els seus punts crítics són les solucions del sistema format per les dues equacions $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, que és equivalent a l'equació $y = -x - 4$. Així, els punts crítics de la funció f són tots els punts de la recta d'equació $y = -x - 4$. Per tant, els punts crítics de f que estàn a l'interior del compacte són els punts de la recta d'equació $y = -x - 4$ que estàn a l'interior de K, és a dir: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = -x - 4,\ -2 < x < 0\}$



b.2) En segon lloc, els vèrtexs del compacte K són els punts d'intersecció de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$ i la recta $y=x$, que són els punts $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)$ i $\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{12}{5}\right)$.

b.3) En tercer lloc, els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de la recta $y=x$, amb $-\dfrac{12}{5}\le x\le\dfrac{12}{5}$, es troben buscant els punts crítics de la funció d'una variable $\varphi(x)=f(x,x)=4x^2+16x$, és a dir les solucions de $\varphi'(x)=8x+16=0$ amb $-\dfrac{12}{5}\le x\le\dfrac{12}{5}$, que és $x=-2$. S'obté el punt $(-2,-2)$.

b.4) En quart lloc, per trobar els punts crítics de f condicionats a ser en el segment de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$, amb $y\le x$, construïm la funció de Lagrange $L(x,y,\lambda)=(x+y)(x+y+8)+\lambda(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-1)$. Igualant a zero les seves derivades parcials, obtenim:

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+8+\dfrac{2\lambda x}{9}=0\\ 2x+2y+8+\dfrac{2\lambda y}{16}=0\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-1=0\end{cases}$$

Restant la primera equació menys la segona equació, s'obté: $2\lambda(\dfrac{x}{9}-\dfrac{y}{16})=0$. Per tant $\lambda=0$ o $y=\dfrac{16}{9}x$.

Fent $y=\dfrac{16}{9}x$ a la tercera equació, s'obté l'equació $25x^2=81$, amb solucions $x=\pm\dfrac{9}{5}$. Així obtenim $x=\dfrac{9}{5}$, $y=\dfrac{16}{5}$, $\lambda=-45$ o $x=-\dfrac{9}{5}$, $y=-\dfrac{16}{5}$, $\lambda=-5$, per tant els punts $\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{16}{5}\right)$ i $\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)$, i, d'aquest dos, només el punt $\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)$ satisfà la condició $y\le x$. Fent $\lambda=0$ a la primera equació, tenim $y=-x-4$, i llavors, de la tercera equació s'obté el punt $(0,-4)$.

b.5) Els punts $(-2,-2)$ i $(0,-4)$ són de la recta d'equació $y=-x-4$. Calculem les imatges de tots els punt trobats i tenim:

$f(x,-x-4)=-16$, $f\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{1536}{25}$, $f\left(-\dfrac{12}{5},-\dfrac{12}{5}\right)=-\dfrac{384}{25}$, $f\left(-\dfrac{9}{5},-\dfrac{16}{5}\right)=-15$.

b.6) Per tant, el mínim absolut de f en K és -16 i s'assoleix a tots els punts de la recta d'equació $y=-x-4$ que estàn al conjunt K, és a dir als punts $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y=-x-4,\ -2\le x\le 0\}$, i el màxim absolut de f en K és $\dfrac{1536}{25}$ i s'assoleix al punt $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.