Model de solució

1. (a) i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i S un subconjunt d'E. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai d'E.

Solució. S és subespai d'E si es compleixen les tres condicions següents:
- $S \neq \emptyset$;
- $\forall u, v \in S$, si $u, v \in S$, aleshores $u + v \in S$;
- $\forall u \in S$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, si $u \in S$, aleshores $\alpha u \in S$.

ii) Determineu si els conjunts següents són subespais d'$\mathbb{R}^4$:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} 2x = y - z \\ x + y + t = 0 \end{array} \right\}; \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x+y-2 \\ 2x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solució. S_1 és subespai perquè és el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni en les variables x, y, z, t, i sabem que el conjunt de solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables és sempre un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^n$.
S_2 no és subespai perquè el vector zero no és d'S_2: perquè el vector zero sigui d'S_2 ha de ser $x + y = x - y = x + y - 2 = 2x = 0$, i això no 'es possible, ja que de $x + y = 2x = 0$ deduïm $x = y = 0$, però aleshores $x + y - 2 = -2 \neq 0$.

(b) Sigui E un espai vectorial real de dimensió n i f un endomorfisme d'E amb polinomi característic $P_f(x) = (1-x)^n$. Demostreu que si f diagonalitza, aleshores f és l'aplicació identitat.

Solució. L'únic valor propi d'f és 1 amb multiplicitat algebraica n. Per tant, f diagonalitza si i només si el subespai propi $E_1 = \{u \in E : f(u) = u\}$ té dimensió n. Però per ser $\dim E = n$, l'únic subespai d'E de dimensió n és el mateix espai vectorial E. Per tant, si f diagonalitza, $E_1 = \{u \in E : f(u) = u\} = E$. És a dir, si f diagonalitza, aleshores f és l'aplicació identitat ja que $f(u) = u$, per a tot $u \in E$.

2. Considerem el subespai F d'$\mathbb{R}^4$ generat pels vectors del conjunt $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Calculeu la dimensió d'F i doneu una base B d'F formada per vectors del conjunt S. Expresseu els vectors d'S que no siguin de B com a combinació lineal dels vectors de B.

Solució. La dimensió d'F és el rang de la matriu que té per columnes (o bé per files) els vectors que generen F. A més, si posem els vectors per columnes i fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu reduïda equivalent, les columnes dels pivots formen una base d'F i a la resta de columnes hi ha els coeficients dels vectors corresponents com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Per tant, $\dim F = \operatorname{rang} A = 2$, i si $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, una base d'$F$ és $B = \{u_1, u_2\}$, i aleshores $u_3 = u_1 + u_2$, $u_4 = -u_1 - 2u_2$.

(b) Completeu la base donada a l'apartat anterior fins a una base d'$\mathbb{R}^4$.

Solució. Per ser F un subespai de dimensió 2 d'$\mathbb{R}^4$, que té dimensió 2, cal trobar dos vectors v_1, v_2 tals que $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ siguin linealment independents. Sabem que sempre es pot aconseguir amb vectors v_1 i v_2 de la base canònica. Observem que la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

té rang 4 ja que si canviem el signe de la tercera fila, obtenim una matriu escalonada amb 4 files no nul·les. Per tant, si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aleshores $B \cup \{v_1, v_2\}$ és una base d'$\mathbb{R}^4$.

(c) Quines equacions han de satisfer les variables x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ sigui d'F?

Solució. Un vector $u \in \mathbb{R}^4$ és d'F si i només el rang de la matriu que té per columnes els 2 vectors de la base d'F i una tercera columna amb les coordenades del vector u és 2. Imposem, doncs, que el rang d'aquesta matriu sigui 2 per a un vetor genèric $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \\ 2 & -2 & x \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & y+z \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -2 & x-2y \\ 0 & 0 & y+z \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x-2y+2t \\ 0 & 0 & y+z \end{pmatrix}$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $x - 2y + 2t = 0$ i $y + z = 0$. Per tant, $u \in F$ si i només si x, y, z, t satisfan les equacions $x - 2y + 2t = 0$ i $y + z = 0$.

3. Sigui $B = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ la base canònica de l'espai vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de matrius reals 2×2, i $W = \{1, x, x^2\}$ la base canònica de l'espai vectorial $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis reals de grau com a molt 2. Definim l'aplicació lineal $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ tal que $f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = (a - 2b + 2d) + (b + c)x + (a + 2c + 2d)x^2$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases B i W.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de B i posem per columnes les coordenades de les imatges en la base W:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + x^2,\ f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 + x,\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x + 2x^2,\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2x^2,$$

per tant, la matriu associada a f en les bases B i W és:

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculeu la dimensió i una base dels subespais $\mathrm{Ker} f$ i $\mathrm{Im} f$. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Si anomenem $M = M_W^B(f)$, sabem que $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang} M$, $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rang} M = 4 - \mathrm{rang} M$. Calculem el rang d'$M$:. Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\mathrm{rang} M = 2$, i aleshores $\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

Una base d'$\mathrm{Im} f$ està formada pels polinomis que corresponen a dues columnes d'M linealment independents. Veiem que les dues primeres columnes d'M no són proporcionals, per tant, una base d'$\mathrm{Im} f$ és $\{1 + x^2, -2 + x\}$.

Per trobar una base de $\mathrm{Ker} f$, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients la matriu M. Hem vist que

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per tant, si a, b, c, d són les variables del sistema, la solució és:

$$a = -2c - 2d, b = -c, \text{ on } c, d \in \mathbb{R}.$$

Per tant,

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -2c - 2d & -c \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de $\mathrm{Ker} f$ és, doncs, $\{ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$.

Per ser $\mathrm{rang} M = 2 \neq 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'aplicació f no és injectiva, i per ser $\mathrm{rang} M = 2 \neq 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$, l'aplicació f no és exhaustiva. Per tant, tampoc és bijectiva.

(c) Calculeu la matriu associada a f en les bases $B' = \{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $W' = \{1 + x^2, \frac{1}{2}x, 1 - x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Solució. Utilitzem matrius de canvi de base. Si $P_B^{B'}$ és la matriu de canvi de base de B' a B i $P_W^{W'}$ és la matriu de canvi de base de W' a W, sabem que

$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} M_W^B(f) P_B^{B'} = (P_W^{W'})^{-1} M_W^B(f) P_B^{B'}.$$

La matriu $M_W^B(f)$ l'hem calculat en un apartat anterior. La matriu $P_B^{B'}$ s'obté escrivint per columnes els vectors de B' en la base B, per tant:

$$P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu $P_W^{W'}$ s'obté escrivint per columnes els vectors de W' en la base W, per tant:

$$P_W^{W'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de $P_W^{W'}$ amb Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned}
(P_W^{W'}|I_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_3|(P_W^{W'})^{-1})
\end{aligned}$$

Per tant,

$$P_{W'}^{W} = P_W^{W'})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$\begin{aligned}
M_{W'}^{B'}(f) &= P_{W'}^{W} M_W^B(f) P_B^{B'} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Sigui $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme f_a d'$\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

(a) Estudieu per a quins valors d'a diagonalitza l'endomorfisme f_a.

Solució. Calculem el polinomi característic d'f_a:

$$p_{f_a}(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 3 & 0 & a-x \end{pmatrix} = (5-x)(-1-x)(a-x).$$

El polinomi característic es pot descompondre en factors de grau 1. Les arrels són 5, -1 i a. La multiplicitat de les arrels depèn del valor d'a.

- Si $a \neq 5, -1$, aleshores el polinomi característic té 3 arrels diferents, per tant f_a diagonalitza, ja que té tots els valors propis diferents.

- Si $a = 5$, aleshores el polinomi característic té dues arrels: 5, de multiplicitat 2 i -1, de multiplicitat 1. En aquest cas, l'endomorfisme diagonalitza si i només si $\dim E_5 = 2$. Calculem la dimensió d'E_5:

$$\dim E_5 = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 0 & -1-5 & 0 \\ 3 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

  Per tant, f_5 no diagonalitza.

- Si $a = -1$, aleshores el polinomi característic té dues arrels: 5, de multiplicitat 1 i -1, de multiplicitat 2. En aquest cas, l'endomorfisme diagonalitza si i només si $\dim E_{-1} = 2$. Calculem la dimensió d'E_{-1}:

$$\dim E_{-1} = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 3 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

  Per tant, f_{-1} diagonalitza.

Resumint, f_a diagonalitza si i només si $a \neq 5$.

(b) Sigui $a = -1$. En cas que f_{-1} diagonalitzi, doneu una base B d'$\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis, la matriu diagonal D associada a f_{-1} en la base B, i la relació entre les matrius A i D.

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que f_a diagonalitza si $a = -1$. En aquest cas, els valors propis de l'endomorfisme són 5 i -1, de multiplicitat 1 i 2, respectivament. Per trobar una base de vectors propis, calculem una base d'E_5 i una base d'E_{-1}, tenint en compte que $a = -1$.

Base d'E_5. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - 5I$:

$$(A-5I) = \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ 0 & -1-5 & 0 \\ 3 & 0 & -1-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució: $y = 0$; $x = 2z$, $z \in \mathbb{R}$. La solució en forma paramètrica és:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = < \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Una base d'E_5 és $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base d'E_{-1}. Resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients $A - (-1)I$:

$$(A-(-1)I) = \begin{pmatrix} 5-(-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1-(-1) & 0 \\ 3 & 0 & -1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = 0$; $y, z \in \mathbb{R}$. La solució en forma paramètrica és:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base d'E_{-1} és $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Base de vectors propis d'f_{-1}: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

A la matriu diagonal D associada a f_{-1} en la base B hi ha els valors propis asociats als vectors de la base B:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, la relació entre les matrius A i D és:

$$D = P^{-1}AP$$

on P és la matriu de canvi de base de B a la base canònica:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$