

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (3 punts) Considereu la funció  $f(x) = \ln(\sqrt[3]{1+2x})$ .
  - (a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció  $f$  centrat a l'origen i escriviu la forma de Lagrange del residu corresponent.
  - (b) Calculeu un valor aproximat de  $\ln(\sqrt[3]{1.2})$  utilitzant el polinomi de l'apartat anterior.
  - (c) Fiteu l'error comès al'apartat anterior utilitzant el residu de l'apartat (a).
  - (d) Trobeu la mínima  $n$  per a la qual el polinomi de Taylor de grau 2 de l'apartat (a) permet calcular  $\ln(\sqrt[3]{1+2 \cdot 10^{-n}})$  amb un error menor que  $0.5 \cdot 10^{-10}$ .
2. (3 punts) Considereu la funció  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ .
  - (a) Trobeu i dibuixeu les corbes de nivell de  $z = f(x, y)$  per  $z = 0, 1, -1$ .
  - (b) Doneu la direcció de màxim creixement de  $f$  en el punt  $(1, 1)$  i l'equació del pla tangent a la superfície  $z = f(x, y)$  en el punt  $(1, 1, \ln 3)$ .
  - (c) Sigui  $g(x) = f(5 \sin x, 0)$  i sigui  $I = \int_{1.1}^{1.5} g(x) dx$ . Sabent que  $|g''(x)| < 2.5$  per a tot  $x \in [1.1, 1.5]$ , calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral  $I$  pel mètode dels trapezis amb error absolut  $< 0.005$ .
  - (d) Fent ús del mètode dels trapezis i explicitant tots els càlculs, doneu el valor aproximat de la integral  $I$  amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat anterior.
3. (4 punts) Sigui  $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ .
  - (a) Trobeu el domini de  $f$ . Proveu que  $f$  és de classe  $C^2$  en el seu domini.
  - (b) Proveu que  $f$  té un únic punt crític i que es tracta d'un punt de sella.
  - (c) Proveu que els extrems absoluts de  $f$  sobre la circumferència  $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$  s'assoleixen en els punts  $(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, 0)$ .
  - (d) Proveu que  $f$  no té extrems condicionats sobre la paràbola  $x^2 + y - \frac{1}{2} = 0$ .
  - (e) Demostreu que  $f$  té extrems absoluts sobre el conjunt

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{5}{4}, x^2 + y \geq \frac{1}{2}\}.$$

Calculeu els valors màxim i mínim absolut de  $f$  sobre  $K$  i els punts on s'assoleixen.

---

Durada de l'examen: 2h 45m.

Cal lliurar els exercicis per separat.

S'ha de respondre amb tinta blava o negra.

No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.