L’examen final del curs 2019-2020(2) va consistir en un qüestionari a Atenea que es generava de forma aleatòria.

Estructura de la part d’àlgebra lineal:

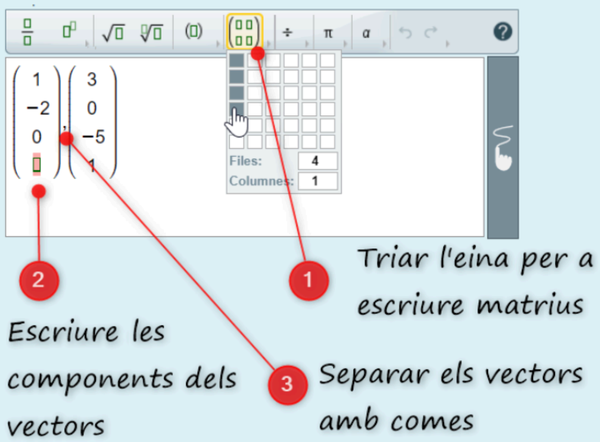
- **Temps: 1 hora 45 minuts**.
- El qüestionari consta de **15 preguntes:** 7 de tipus CERT/FALS, 3 de resposta múltiple, i 5 de resposta oberta.
- **Puntuació sobre 23**: les preguntes CERT/FALS valen 1 punt i la resta 2 punts. Concretament: 1 punt cada resposta CERT/FALS correcta; -1 punt cada resposta CERT/FALS incorrecta; 0 punts cada pregunta CERT/FALS sense resposta; 2 punts cada resposta múltiple correcta; -2/3 cada resposta múltiple incorrecta; 0 punts cada pregunta múltiple sense respondre; 2 punts cada pregunta de resposta oberta correcta

Exemples de possibles preguntes:

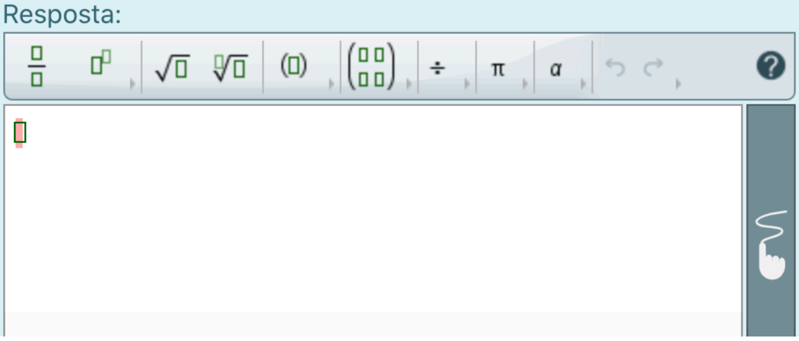
Sigui $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 6 & -12 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 11 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ la matriu d'una aplicació lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases canòniques. Doneu una base de $\mathrm{Im}\, f$.

Responeu escrivint els vectors de la base en forma de columna i separats per comes.

Indicació per a respondre:

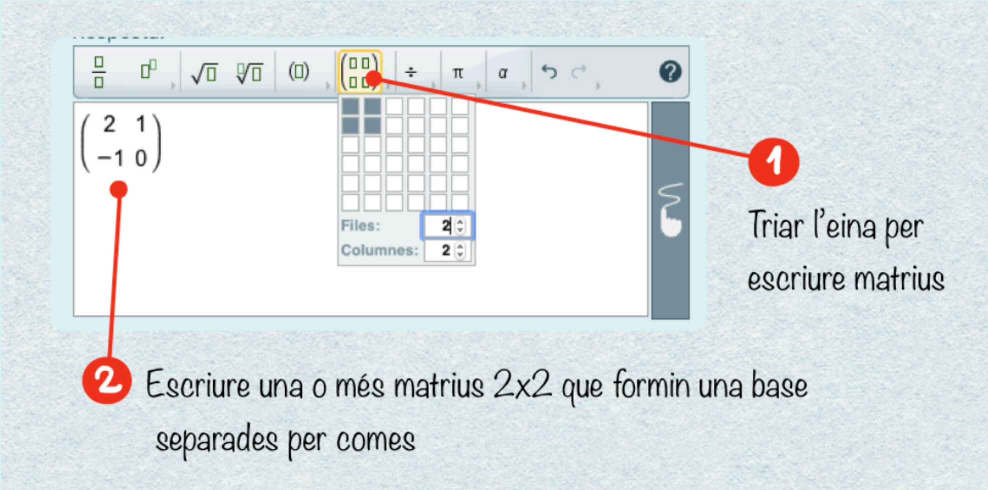


Resposta:

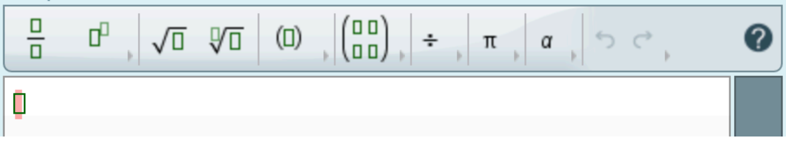


Siguin dos subespais de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ definits per $S=\left\langle \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $T=\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) : 2a-b+c-3d=0 \right\}$. Doneu una base de la intersecció dels dos subespais.

Indicacions per respondre: doneu una o més matrius 2x2 que formin una base separades per comes



Resposta:



En un espai vectorial de dimensió 4, siguin els vectors $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ que satisfan

$v_2+6v_3+2v_4-5v_5+4v_6=0$.

A més sabem que els vectors v_3, v_4, v_5, v_6 són linealment independents. En aquestes condicions, quina de les afirmacions següents és **FALSA**?

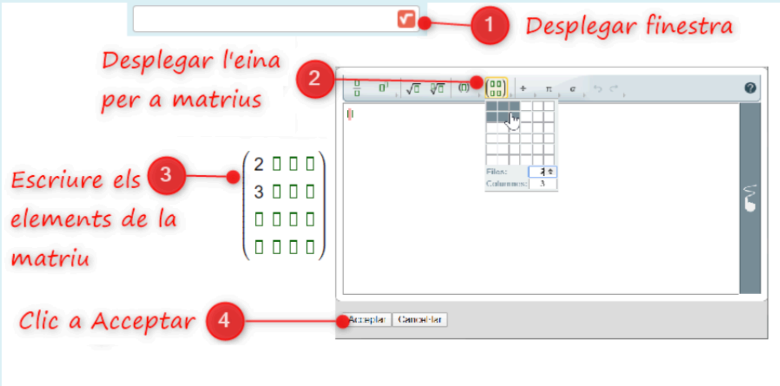
Trieu-ne una:

- ○ v_3, v_4, v_6 són vectors linealment independents pero no són generadors
- ○ $<v_3, v_4, v_6>$ és un subespai de dimensió 3 del qual sabem que $v_5 \notin <v_3, v_4, v_6>$
- ○ Blanc
- ○ v_3, v_4, v_5 no formen base però sí que són generadors
- ○ v_3, v_4, v_5, v_6 formen base i en aquesta base el vector $v_2=(-6,-2,5,-4)$

Siguin $E = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ i $F = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ subespais vectorials d'$\mathbb{R}^4$. Sigui $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfisme tal que $\mathrm{Ker} f = E$ i $f(v) = v$ per a tot $v \in F$.

Calculeu la matriu d'f en la base canònica:

Indicacions per respondre:



Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si u i v són vectors propis de valor propi 3 d'un endomorfisme f, aleshores podem assegurar que $8u - 3v$ és vector propi de valor propi 3 de f.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ és 4, aleshores el determinant de la matriu $10A$ és 40.

Trieu-ne una:

- Cert
- Blanc
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en una certa base B és $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, aleshores f és diagonalitzable.

Trieu-ne una:

- Blanc
- Fals
- Cert

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un sistema d'equacions lineals té 2 equacions i 3 incògnites, aleshores podem assegurar que el sistema és compatible.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si u i v són vectors propis de valor propi 3 d'un endomorfisme f, aleshores podem assegurar que $8u - 3v$ és vector propi de valor propi 3 de f.

Trieu-ne una:

- Fals
- Cert
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si el determinant de la matriu $A \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ és 4, aleshores el determinant de la matriu $10A$ és 40.

Trieu-ne una:

- Cert
- Blanc
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si la matriu associada a un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ en una certa base B és $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, aleshores f és diagonalitzable.

Trieu-ne una:

- Blanc
- Fals
- Cert

Estructura part de grafs (recuperació del parcial):

- **Temps: 1 hora 30 minuts**.
- El qüestionari consta de **15 preguntes,** 14 de tipus CERT/FALS i una de resposta oberta.
- A les preguntes CERT/FALS, **cada resposta incorrecta resta**.
- **Puntuació sobre 20**: 1 punt cada resposta CERT/FALS correcta; -1 punt cada resposta CERT/FALS incorrecta; 0 punts cada pregunta CERT/FALS sense resposta; 6 punts la pregunta de resposta oberta.

Exemples de posibles preguntes:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf d'ordre 15 té diàmetre 14, aleshores el graf ha de ser un graf trajecte d'ordre 15.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tots els grafs d'ordre 20 i mida 11 sense vèrtexs aïllats són acíclics.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf té almenys tantes arestes pont com vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si G és un graf bipartit d'ordre 7, aleshores G no és autocomplementari.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf té almenys tantes arestes pont com vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

- ○ Cert
- ○ Fals
- ○ Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Tot graf 2-regular d'ordre 6 és un graf cicle.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

L'únic arbre d'ordre almenys 2 tal que el seu complementari és també arbre és el trajecte d'ordre 4.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf té ordre 25 i mida 280, aleshores podem assegurar que és connex.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Les arestes pont d'un graf connex G són arestes de tots els arbres generadors de G.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf bipartit és hamiltonià, el seu ordre ha de ser parell.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals
- Blanc

Donats el graf C_6 amb conjunt de vèrtexs $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ en el qual $u_1u_2u_3u_4u_5u_6u_1$ és un cicle i el graf K_4 amb conjunt de vèrtexs $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, considerem el graf $G = (V, A)$ on $V = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i A, a més de les arestes dels dos grafs anteriors, en té dues més: u_1v_1 i u_2v_2.

D'aquest graf G, us demanem:

- La seqüència de graus (escriviu-la com un enter de 10 dígits ordenats de gran a petit):

- Escriu sota de cada vèrtex la seva excentricitat:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4

- Digues quin és el radi del graf $r(G) =$

- Digues quin és el diàmetre del graf $D(G) =$

- Digues si cada vèrtex és o no central:

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4

- Quin és el mínim d'arestes que cal afegir a G per tal que tingui un senderó eulerià?

- Tornem a etiquetar els vèrtexs de G, ara u_i serà el vèrtex i, mentre que v_j serà el vèrtex $j + 6$. Amb això, els vèrtexs de G tenen etiquetes que van de l'1 al 10.

Apliquem l'algorisme **BFS** (Breadth First Search) amb els vèrtexs ordenats de petit a gran (és a dir, a l'hora de triar un vèrtex per posar-lo a la cua/pila prenem sempre el d'etiqueta mínima si hi ha més d'una possibilitat).

Doneu la llista dels vèrtexs ordenada tal com els afegim a l'arbre generador en aplicar aquest algorisme començant en el vèrtex **9**: