Matemàtiques 1-GEI-FIB 02-06-2022
Examen final-Àlgebra Lineal

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (a) (1 punt) Demostreu l'afirmació següent si és certa o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa:
Si e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos d'un espai vectorial E de dimensió 5 i els vectors e_1, e_2, e_3 són linealment independents, aleshores els vectors e_1, e_2, e_3, u són linealment independents.

(b) (1.5 punts) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors $u_1 + u_3$, v_2 i $u_1 + v_2$ en cadascuna de les dues bases.

F2. (3 punts) En l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2, considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Doneu un subconjunt de $\{A, B, C, D, E\}$ que sigui base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i expresseu les matrius que no siguin de la base com a combinació lineal de les matrius de la base donada.

(b) Calculeu la dimensió del subespai $S =< A, B, C >$. Trobeu les equacions que han de satisfer x, y, z, t per tal que la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui del subespai S.

F3. (2.5 punts) Sigui $f = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que en les respectives bases canòniques té matriu associada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió del nucli i de la imatge de f. Doneu una base del subespai imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

(b) Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors u, v, w, on $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Quina és la dimensió del subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$?

F4. (2 punts) Sabem que un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

diagonalitza i que el seu el polinomi característic és $p(x) = -(x-1)^2(x-7)$. Deduïu els valors de a i de b. Calculeu una base B formada per vectors propis de f i doneu la matriu associada a f en la base B.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 50minuts.
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes i revisió de l'examen: s'informarà en un avís del racó.

Model de solució

F1. (a) (1 punt) Demostreu l'afirmació següent si és certa o bé doneu-ne un contraexemple, si és falsa: Si e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos d'un espai vectorial E de dimensió 5 i els vectors e_1, e_2, e_3 són linealment independents, aleshores els vectors e_1, e_2, e_3, u són linealment independents.

Solució. És fals. Per exemple, si $E = \mathbb{R}^5$, e_1, e_2, e_3 són 3 vectors diferents de la base canònica i $u = e_1 + e_2$, aleshores e_1, e_2, e_3, u són vectors diferents dos a dos, però són linealment dependents perquè u és combinació lineal de e_1, e_2, e_3.

(b) (1.5 punts) Sigui E un espai vectorial de dimensió 3. Sabem que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ i $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ són bases de E, i que la matriu de canvi de base de B a B' és

$$P_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Doneu les coordenades dels vectors $u_1 + u_3$, v_2 i $u_1 + v_2$ en cadascuna de les dues bases.

Solució.
La matriu $P = P_{B'}^{B}$ té per columnes les coordenades dels vectors u_1, u_2 i u_3 en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. La inversa de P és $P^{-1} = P_{B}^{B'}$, i té per columnes les coordenades dels vectors v_1, v_2 i v_3 en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Calculem P^{-1} amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftarrow F_2 + F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3 \leftarrow \frac{1}{3} F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $P^{-1} = P_{B}^{B'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Aleshores

$$(u_1 + u_3)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ja que } u_1 + u_3 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

$$(u_1 + u_3)_{B'} = (u_1)_{B'} + (u_3)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ (suma de les columnes 1a i 3a de } P\text{)}$$

$$(v_2)_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (segona columna de } P^{-1}\text{)}$$

$$(v_2)_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ja que } v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$(u_1 + v_2)_B = (u_1)_B + (v_2)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ((} v_2)_B \text{ és la segona columna de } P^{-1}\text{)}$$

$$(u_1 + v_2)_{B'} = (u_1)_{B'} + (v_2)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ((} u_1)_{B'} \text{ és la primera columna de } P\text{)}$$

Solució alternativa. És evident que

$(u_1+u_3)_B = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, perquè $u_1+u_3 = 1\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 1\cdot u_3$ i que

$(v_2)_{B'} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, perquè $v_2 = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 0\cdot v_3$.

D'altra banda, a la columna i, $i\in\{1,2,3\}$, de la matriu donada hi ha les coordenades del vector u_i en la base B'. Per tant, $u_1+u_3 = (v_1+v_3)+(-3v_2+3v_3) = v_1-3v_2+4v_3$, d'on deduïm

$(u_1+u_3)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$,

i $u_1+v_2 = (v_1+v_3)+v_2 = v_1+v_2+v_3$, d'on deduïm

$(u_1+v_2)_{B'} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Només falta calcular $(v_2)_B$ i $(u_1+v_2)_B$. Observem que si restem dues vegades la primera columna a la segona columna, només la segona coordenada és diferent de zero, concretament

$(u_2-2\,u_1)_{B'} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (v_2)_{B'}$.

Per tant, $v_2 = u_2-2\,u_1 = (-2)\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3$, d'on deduïm

$(v_2)_B = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

i aleshores $u_1+v_2 = u_1+(u_2-2\,u_1) = -u_1+u_2 = (-1)\cdot u_1 + 1\cdot u_2 + 0\cdot u_3$, d'on deduïm

$(u_1+v_2)_B = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Resumint:

vector	u_1+u_3	v_2	u_1+v_2
coord. en base B	$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$
coord. en base B'	$\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

F2. (3 punts) En l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de les matrius 2×2, considerem les matrius

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}-1 & 0\\3 & 4\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}2 & 9\\3 & 1\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Doneu un subconjunt de $\{A,B,C,D,E\}$ que sigui base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i expresseu les matrius que no siguin de la base com a combinació lineal de les matrius de la base donada.

Solució. La dimensió de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és 4. Per tant, és suficient donar 4 matrius linealment independents del conjunt $\{A,B,C,D,E\}$. Escrivim les coordenades de les matrius donades en la base canònica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ per columnes i fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu reduïda equivalent:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\3&0&9&0&1\\0&3&3&1&1\\-1&4&1&0&0\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_4:=F_4+F_1}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&-2\\0&3&3&1&1\\0&3&3&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_2\leftrightarrow F_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&3&3&1&1\\0&3&3&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_3:=F_3-F_2\\F_4:=F_4-F_2}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_4:=-\frac{1}{3}F_4}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&1\\0&3&3&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{F_1:=F_1-F_4\\F_2:=F_2-F_4}}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&0\\0&3&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_2:=-\frac{1}{3}F_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_1:=F_1+F_2}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&3&0&0\\0&\mathbf{1}&1&0&0\\0&0&0&\mathbf{1}&0\\0&0&0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Les matrius que corresponen a les columnes dels pivots formen una base, és a dir, $\{A,B,D,E\}$ és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A més, a la 3a columna hi ha els coeficients de l'expressió de C com a combinació lineal de la base donada, és a dir, $C=3A+B$.

(b) Calculeu la dimensió del subespai $S=<A,B,C>$. Trobeu les equacions que han de satisfer x,y,z,t per tal que la matriu genèrica $\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ sigui del subespai S.

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que A,B són linealment independents i que C és combinació lineal de A i B. Per tant, $S=<A,B,C>=<A,B>$ i $\dim S=\dim<A,B>=2$. Una matriu $M=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$ és de S si $\text{rang}(A,B,M)=2$. Fem transformacions elementals a la matriu que té A,B,M per columnes:

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&x\\3&0&y\\0&3&z\\-1&4&t\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_4:=F_4+F_1}}\begin{pmatrix}1&-1&x\\0&3&y-3x\\0&3&z\\0&3&t+x\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_3:=F_3-F_2\\F_4:=F_4-F_2}}\begin{pmatrix}1&-1&x\\0&3&y-3x\\0&0&z-(y-3x)\\0&0&t+x-(y-3x)\end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $z-(y-3x)=0$ i $t+x-(y-3x)=0$, és a dir, si i només si x,y,z,t satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\begin{cases}3x-y+z&=0\\4x-y+t&=0\end{cases}$$

F3. (2.5 punts) Sigui $f=\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal que en les respectives bases canòniques té matriu associada

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\3&-1&0&0\\-2&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la dimensió del nucli i de la imatge de f. Doneu una base del subespai imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Sabem que $\dim \text{Im}f=\text{rang}A$ i $\dim\ker f=\dim\mathbb{R}^4-\text{rang}A=4-\text{rang}A$. Per calcular el rang de A fem transformacions elementals per files fins arribar a una matriu escalonada equivalent,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\3&-1&0&0\\-2&1&-1&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=F_2-3F_1\\F_3:=F_3+2F_1}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&3&-3\\0&1&-3&3\end{pmatrix}\underset{\sim}{\substack{F_2:=-F_2\\F_3:=F_3+F_2}}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\quad(1)$$

Per tant, $\text{rang}A=2$, de manera que $\dim\text{Im}f=2$ i $\dim\ker f=2$. Una base de la imatge està formada per dues columnes linealment independents de la matriu A. Una possible base seria, doncs, la formada per les columnes 2a i 4a, que són columnes no proporcionals:

$$\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

L'aplicació f no pot ser bijectiva, ja que els espais de sortida i d'arribada tenen dimensió diferent, 4 i 3. Serà exhaustiva si $\dim \mathrm{Im} f = 3$ i injectiva, si $\dim \ker f = 4$, i ja hem vist que no es compleix cap de les dues condicions. Per tant, f no és ni injectiva, ni exhaustiva, ni bijectiva.

(b) Sigui S el subespai de $\mathbb{R}^4$ generat pels vectors u, v, w, on $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Quina és la dimensió del subespai $\ker f \cap S$?

Solució. Sabem que si $S =< u, v, w >$, aleshores $f(S) =< f(u), f(v), f(w) >$. Calculem les imatges dels vectors u, v, w amb la matriu associada:

$$f(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(v) = A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(w) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $f(S) =< f(u), f(v), f(w) >=< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} >$.

Per tant, $\dim f(S) = 1$ i una base de $f(S)$ és $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \}$.

Finalment, veurem que $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 1$.

Observem que $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) \geq 1$, ja que $\mathrm{Ker} f \cap S$ conté com a mínim un vector no nul, concretament el vector u, que per hipòtesi és de S i, a més, $u \in \mathrm{Ker} f$, perquè $f(u)$ és el vector zero.

El subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$ és un subespai de $\mathrm{Ker} f$ i de S. Hem vist que $\dim \mathrm{Ker} f = 2$ i, d'altra banda, $\dim S = 2$, ja que $S =< u, v, w >=< u, v >$, perquè $w = u + v$, i els vectors u i v són independents, perquè no són proporcionals.

Sabem que si F és subespai de G i $\dim F = \dim G$, aleshores $F = G$. Per tant, si $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 2$, seria $\mathrm{Ker} f \cap S = S = \mathrm{Ker} f$, i ja hem vist que $S \neq \mathrm{Ker} f$, perquè el vector $v \in S$ no és del nucli. Per tant, ha de ser $\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 1$.

Solució alternativa per calcular $\dim \mathrm{Ker} f \cap S$. El nucli es la solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients qualsevol matriu equivalent per files a A, per exemple, de (1) deduïm que és solució de:

$$\left\{ \begin{aligned} x - z + t &= 0 \\ y - 3z + 3t &= 0 \end{aligned} \right.$$

Tal com hem justificat abans, $\dim S = 2$ i una base de S és $\{u, v\}$. Per tant, un vector genèric de $\mathbb{R}^4$ és de S si i només si el rang de la matriu que té per columnes u, v i el vector genèric és 2. Imposem que aquest rang sigui 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 0 & 3 & z \\ -1 & 4 & t \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{F_2 := F_2 - 3F_1 \\ F_4 := F_4 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 3x \\ 0 & 3 & z \\ 0 & 3 & t + x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{F_3 := F_3 - F_2 \\ F_4 := F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 3 & y - 3x \\ 0 & 0 & z - (y - 3x) \\ 0 & 0 & t + x - (y - 3x) \end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 2 si i només si $z - (y - 3x) = 0$ i $t + x - (y - 3x) = 0$. Per tant, el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ és de S si i només si x, y, z, t satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\left\{ \begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ 4x - y + t &= 0 \end{aligned} \right.$$

El subespai $\mathrm{Ker} f \cap S$ està definit per les equacions que defineixen els vectors de $\mathrm{Ker} f$ i S:

$$\left\{ \begin{aligned} x - z + t &= 0 \\ y - 3z + 3t &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \\ 4x - y + t &= 0 \end{aligned} \right.$$

La dimensió de $\mathrm{Ker} f \cap S$ serà, doncs, el nombre de graus de llibertat d'aquest sistema, o sigui:

$$\dim(\mathrm{Ker} f \cap S) = 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

F4. (2 punts) Sabem que un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en base canònica és

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$$

diagonalitza i que el seu el polinomi característic és $p(x) = -(x-1)^2(x-7)$. Deduïu els valors de a i de b. Calculeu una base B formada per vectors propis de f i doneu la matriu associada a f en la base B.

Solució. Les arrels del polinomi característic són 1 i 7 de multiplicitat 2 i 1, respectivament. Per tant, f diagonalitza si i només la dimensió de l'espai propi E_1 és 2. La dimensió d'aquest espai és $\dim E_1 = 3 - \mathrm{rang}(A - \mathrm{Id})$, per tant, f diagonalitza si i només si $\mathrm{rang}(A - \mathrm{Id}) = 1$. Calculem el rang de la matriu $A - \mathrm{Id}$:

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 2 \\ 2 & 3-1 & b \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 2 & a-1 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 := F_2 - F_1 \\ F_3 := F_3 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix},$$

i el rang d'aquesta matriu és 1 si i només si $b - 2 = a - 3 = 0$. Per tant, f diagonalitza si i només si $a = 3$ i $b = 2$.

Aleshores, si $a = 3$ i $b = 2$, la dimensió dels espais propis serà, $\dim E_1 = 2$ i $\dim E_7 = 1$. Per a trobar una base de vectors propis, resolem els sistemes homogenis que tenen per matriu de coeficients $A - \mathrm{Id}$ i $A - 7 \cdot \mathrm{Id}$, tenint en compte que $a = 3$ i $b = 2$.

Base de E_1.

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 2 \\ 2 & 3-1 & 2 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema té 2 graus de llibertat. Solució en forma paramètrica: $z = -x - y$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_1, u_2\}$, on $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Base de E_7.

$$A - 7\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3-7 & 2 & 2 \\ 2 & 3-7 & 2 \\ 2 & 2 & 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftarrow F_1/2}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{F_2 := F_2 + F_1 \\ F_3 := F_3 + F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 := -\frac{1}{3}F_2 + F_1 \\ F_3 := F_3 + F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema té 1 grau de llibertat. Solució en forma paramètrica: $x = z, y = z$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = \{z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_3\}$, on $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

El conjunt $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ és, doncs, una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f. La matriu associada a f en la base B és la matriu diagonal que té a la diagonal els valors propis 1, 1, 7, ja que u_1, u_2, u_3 són vectors propis de valor propi 1, 1, 7, respectivament:

$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Solució alternativa per trobar els valors de a i b. Calculem el polinomi característic tenint en compte les dades del problema. D'una banda,

$$\begin{aligned}p_f(x) &= -(x-1)^2(x-7) = -(x^2-2x+1)(x-7) = -(x^3-2x^2+x-7x^2+14x-7)\\ &= -x^3+9x^2-15x+7\end{aligned}$$

i d'altra banda

$$\begin{aligned}p_f(x) &= \det(A - x\cdot \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix}3-x & 2 & 2\\ 2 & 3-x & b\\ 2 & 2 & a-x\end{pmatrix}\\ &= (3-x)^2(a-x)+4b+8-2b(3-x)-4(3-x)-4(a-x)\\ &= -x^3+(a+6)x^2-(6a+9)x+9a+4b+8-6b+2bx-12+4x-4a+4x\\ &= -x^3+(a+6)x^2+(2b-6a-1)x+5a-2b-4.\end{aligned}$$

Si igualem els coeficients del terme de grau 2, obtenim $a+6=9$, d'on deduïm $a=3$. I si ara igualem els termes independents, obtenim $7 = 5\cdot 3 - 2b - 4$, d'on deduïm $b=2$.