Matemàtiques 1 - FIB | 8-1-2019
Examen final | Part F2: Àlgebra Lineal

1. [2 punts] Siguin E, F espais vectorials, $v_1, \ldots, v_k$ i u vectors de E, i $f : E \to F$ una aplicació.
   (a) Expliqueu què ha de complir u per pertànyer a $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
   (b) Digueu què ha de complir f per ser una aplicació lineal.
   (c) Suposeu que f és lineal, que coneixem $f(v_1), \ldots, f(v_k)$, i que $u \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Expliqueu com es pot calcular $f(u)$.

2. [4 punts] Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$ següent:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   (a) Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base B formada per alguns dels generadors.
   (b) Trobeu les condicions, en forma de sistema d'equacions homogeni, que ha de satisfer un vector de $\mathbb{R}^4$ per a pertànyer a F.
   (c) Considereu els vectors $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per a cadascun d'ells, digueu si pertany al subespai F i, en cas afirmatiu, doneu-ne les coordenades en la base B de l'apartat (a).
   (d) Amplieu la base B de l'apartat (a) a una base de $\mathbb{R}^4$.

3. [4 punts]
   (a) Sigui $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal determinada per

$$f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

   Doneu la matriu de l'aplicació en les bases canòniques i digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.
   (b) Considerem l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

      i. Calculeu el polinomi característic de f. Doneu tots els valors propis de f i, per a cadascun d'ells, una base del subespai de vectors propis associat.
      ii. Comproveu si l'endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una base B tal que la matriu associada en aquesta base sigui diagonal. Quina relació hi ha entre la matriu M i la matriu associada en la base B?

Informacions:
Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
La durada de l'examen és de 2h.
Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full diferent i escriviu amb tinta negra o blava.
Les notes es publicaran al Racó de la FIB com a tard el dia 16 de gener, i la revisió serà el dia 17, a les 14h (el lloc s'anunciarà amb antel·lació).