Totes les respostes han de ser raonades

1. (4 punts) Considereu l'equació:

$$e^{-x} = 4 - 3x$$

a) Demostreu que l'equació té una solució positiva i una de negativa a l'interval $[-3, 2]$.

b) Demostreu que només té dues solucions reals.

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva de l'equació amb un error absolut menor que 10^{-8} prenent com a interval inicial l'interval $[0, 2]$.

d) Calculeu, el valor aproximat de la solució d'abscisa negativa fent servir el mètode de Newton Raphson amb tres decimals correctes (error $< 0.5 \cdot 10^{-3}$), prenent coma a valor inicial $x_0 = -3$.

SOLUCIÓ: Donat que:

$$e^{-x} = 4 - 3x \Leftrightarrow e^{-x} - 4 + 3x = 0.$$

Considerem la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^{-x} - 4 + 3x$. La funció f és la suma d'una composició d'una funció polinòmica i una exponencial amb una funció polinòmica, per tant és contínua i derivable en tota la recta real.

a) Donat que $f(-3) \simeq 7.09 > 0$, $f(0) = -3 < 0$ i f és contínua en l'interval $[-3, 0]$, el Teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una solució de l'equació en l'interval $(-3, 0)$.

Donat que $f(0) = -3 < 0$, $f(2) \simeq 2.14 > 0$ i f és contínua en l'interval $[0, 2]$, el Teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una solució de l'equació en l'interval $(0, 2)$.

Per tant l'equació té una solució positiva i una de negtiva a l'interval $[-3, 2]$.

b) Demostració per reducció a l'absurd utilitzant el Teorema de Rolle: Es suposa que l'equació tingui 3 solucions reals i s' arriba a una contradicció:

Suposant $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ amb $a < b < c$ i $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, tenim 1) al ser f contínua en l'interval $[a, b]$, derivable en l'interval (a, b) i ser $f(a) = f(b)$, pel Teorema de Rolle es tindria que $\exists \alpha \in (a, b)$ amb $f'(\alpha) = 0$ i 2) al ser f contínua en l'interval $[b, c]$, derivable en l'interval (b, c) i ser $f(b) = f(c)$, pel Teorema de Rolle es tindria que $\exists \beta \in (b, c)$ amb $f'(\beta) = 0$. Per tant l'quació $f'(x) = 0$ tindria dues solucions reals diferents.

Però $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 3$, és a dir l'equació $f'(x) = 0$ té solució única. Contradicció.

c) Si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva de l'equació prenent com a interval inicial l'interval $[a, b] = [0, 2]$, l'error de la iteració $n-$èsima és menor que $\dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Per tant el nombre d'iteracions n necessàries per assegurar un error absolut menor que 10^{-8} ha de satisfer: $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-8} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 10^8 \Leftrightarrow n - 1 > \log_2 10^8 \simeq 26.58$, és a dir $n \geq 28$.

d) Per calcular el valor aproximat de la solució d'abscisa negativa fent servir el mètode de Newton Raphson amb tres decimals correctes (error $< 0.5 \cdot 10^{-3}$), prenem $x_0 = -3$, aleshores $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq -2.585290357$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq -2.438095563$, $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq -2.421893726$, $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \simeq - -2.421712903$. Donat que $|x_4 - x_3| \simeq 0.000180823 < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i $|f(x_3)| < 0.5 \cdot 10^{-3}$, obtenim que el valor aproximat és x_4, és a dir -2.4217.

2. (4 punts)

a) Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+1} = a_n^2$.

a.1) Demostreu que $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$ per a tot $n \geq 1$,

a.2) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és monòtona,

a.3) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

b) Calculeu el límit:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\dfrac{n^2+1}{2}}}$$

SOLUCIÓ:

a.1) És evident que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ja que qualsevol nombre real elevat al quadrat és més gran o igual a zero. Falta demostrar que $a_n \leq \frac{1}{2}$. Ho farem amb el mètode de la inducció matemàtica.

Cas base: $a_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Pas inductiu: sea $n \geq 2$.

Hipòtesi:: $a_n \leq \frac{1}{2}$. Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Partint de la hipòtesi i tenint en compte que $a_n \geq 0$ arribem a la tesi:

$$0 \leq a_n \leq \tfrac{1}{2} \implies a_n^2 \leq \tfrac{1}{4} \implies a_{n+1} = a_n^2 \leq \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{2}.$$

Aleshores $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$, és a dir $\{a_n\}$ és fitada inferiorment i superiorment.

a.2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = (a_1)^2 = \frac{1}{4} < a_1 \implies \{a_n\}$ pot ser només monòtona decreixent.

$\{a_n\}$ és monòtona decreixent $\iff a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ho demostrarem amb el mètode de la inducció matemàtica.

Cas base: $a_2 \leq a_1$.

Pas inductiu: sea $n \geq 2$.

Hipótesis: $a_n \leq a_{n-1}$. Tesi: $a_{n+1} \leq a_n$.

De la hipòtesi, tenint en compte que $a_n \geq 0$, arribem a la tesi:

$$a_n \leq a_{n-1}. \implies a_n^2 \leq a_{n-1}^2 \implies a_{n+1} \leq a_n.$$

a.3) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \text{ monòtona decreixent (b)} \\ \{a_n\} \text{ fitada inferiorment (a)}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\{a_n\}$ és convergent $\left(\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l\right)$.

(Teorema de la convergència monòtona)

Per tant

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n^2 \Longrightarrow l = l^2 \Longrightarrow l^2 - l = 0 \Longrightarrow l(l-1) = 0 \Longrightarrow l = 0 \text{ o } l = 1.$$

Donat que $\{a_n\}$ és monòtona decreixent i $a_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow l = 0$.

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{2n+4}{2n-1}-1\right)\frac{n^2+1}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2n+4-2n+1}{2n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{5}{2n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{5(n^2+1)}{2n(2n-1)}} = e^{\frac{5}{4}}.$$

3. (2 punts) Donada la funció $f(x) = e^x$,

a) Escriure el seu polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Calculeu aproximadament $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ amb error menor que 0.005, utilitzant el polinomi amb l'ordre adequat.

SOLUCIÓ: El polinomi de Taylor d'ordre n d'una funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és: $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és: $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ per a cert c entre 0 i x.

Les derivades de f són: $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \geq 1$. Substituïnt x per 0 s'obté $f^{(k)}(0) = 1$, $\forall k \geq 1$, llavors el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

I l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

b) Si calculem el valor aproximat de $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ utilitzant el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$: $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq P_n\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, l'error que es comet és:

$error = \left|R_n\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ per a cert c entre $-\frac{1}{4}$ i 0.

Donat que $-\frac{1}{4} \leq c \leq 0$ i que la funció exponencial és creixent tenim que $e^c \leq e^0 = 1$ i per tant:

$$error = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!4^{n+1}}$$

Per assegurar error menor que 0.005 hem d'imposar que $\dfrac{1}{(n+1)!4^{n+1}} < 0.005$, és a dir $(n+1)!4^{n+1} > 200$. Com que $2!4^2 = 32$ i $3!4^3 = 384$ tenim que $n+1 \geq 3$, és a dir $n \geq 2$. Per tant:

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq P_2\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2 2!} \simeq 0.781.$