JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. Considerem les matrius de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ format per les matrius 2×2 amb coeficients reals:

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents. Per a cadascun dels valors trobats, expresseu una de les matrius com a combinació lineal de la resta.

(b) Suposem que $a = 0$. Doneu una base del subespai S generat per M_1, M_2, M_3, M_4 i completeu-la fins a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quin sistema d'equacions lineals han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S?

F2. Sigui $P_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2. Considerem les bases canòniques $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Definim les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma següent:

- $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 3 + 6x^2$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 - x + 3x^2$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -4 - x - 7x^2$;
- la matriu associada a g en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge de f. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) Calculeu la matriu associada a $f \circ g$ en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu totes les antiimatges per $f \circ g$ del polinomi $2 + x + 3x^2$ i del polinomi $1 + x + x^2$.

F3. (a) (2 punts sobre 10) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on D és una matriu diagonal i P és una matriu invertible. Proveu que per tot enter $k > 0$, es té $A^k = PD^kP^{-1}$.

(b) (6 punts sobre 10) Calculeu el polinomi característic, els valors propis i vectors propis de la matriu A següent, i feu-los servir per trobar matrius D i P tals que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) (2 punts sobre 10) Calculeu A^6 utilitzant els apartats anteriors.

Informacions

- Durada de l'examen: 100 minuts.
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Els tres problemes valen igual.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.

Model de solució

F1. Considerem les matrius de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ format per les matrius 2×2 amb coeficients reals:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents. Per a cadascun dels valors trobats, expresseu una de les matrius com a combinació lineal de la resta.

Solució. Expressem les matrius donades en la base canònica, $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, les posem per columnes i fem transformacions per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-(1+a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a \end{pmatrix}$$

Les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents si i només si el rang de la matriu és menor que 4, és a dir, si $a^2 + a = 0$, que equival a $a = 0$ o bé $a = -1$.

Mètode alternatiu. Les matrius M_1, M_2, M_3, M_4 són linealment dependents si i només si el determinant de la matriu A considerada anteriorment és 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - a - \left(a^2 + 1 + 0\right) = -a^2 - a$$

on $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o bé $a = -1$, i obtenim el mateix resultat.

Expressem ara una de les matrius com a combinació lineal de la resta per als valors trobats, $a = 0$ i $a = -1$.

Observem que si $a = 0$, les matrius són $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i veiem a ull que $M_4 = M_1 + M_3 = 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Si $a = -1$, aleshores $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i observem que $M_4 = M_3 = 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Mètode alternatiu. Suposem primer que $a = 0$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent a A és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de M_4 en funció de M_1, M_2, M_3, és a dir, $M_4 = 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

Suposem ara que $a = -1$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de M_4 en funció de M_1, M_2, M_3, és a dir, $M_4 = M_3 = 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3$.

(b) Suposem que $a = 0$. Doneu una base del subespai S generat per M_1, M_2, M_3, M_4 i completeu-la fins a una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Quin sistema d'equacions lineals han de satisfer x, y, z i t per tal que la matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S?

Solució.

La dimensió del subespai que generen és el rang de la matriu A calculada a l'apartat anterior, que té per columnes les coordenades de les 4 matrius expressades en base canònica. Hem vist a l'apartat anterior que si $a = 0$, aleshores

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\dim S = \mathrm{rang} A = 3$ i una base està formada per les 3 primeres matrius, M_1, M_2, M_3. Per a completar la base de S fins una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, busquem una matriu M de manera que M_1, M_2, M_3, M siguin linealment independents. Veiem que la matriu $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ho satisfà, ja que la matriu que té per columnes les coordenades de M_1, M_2, M_3, M en la base canònica és equivalent per files a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que té rang 4.

D'altra banda, perquè una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sigui de S cal que sigui combinació lineal de les matrius que formen una base, és a dir, el rang de la matriu que té per columnes M_1, M_2, M_3 i la matriu genèrica $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ ha de ser 3. Fem transformacions elementals per files per a calcular el rang d'aquesta matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & t-y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-y-(z-y) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-z \end{pmatrix}.$$

El rang d'aquesta matriu és 3 si i només si $t - z = 0$. Per tant, una matriu $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ és de S si i només si satisfà el sistema d'equacions lineals que només té una equació, $z - t = 0$.

F2. Sigui $P_2(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2. Considerem les bases canòniques $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

Definim les aplicacions lineals $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ i $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de la forma següent:

- $f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = 3 + 6x^2,\ \ f(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = 1 - x + 3x^2,\ \ f(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}) = -4 - x - 7x^2;$
- la matriu associada a g en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ és la matriu $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\0 & 1 & 0\\3 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge de f. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$. La imatge del primer vector de la base ens la donen. Per a calcular les altres dues, observem que:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = (1 - x + 3x^2) - (3 + 6x^6) = -2 - x - 3x^2;$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = (-4 - x - 7x^2) - (-2 - x - 3x^2) = -2 - 4x^2.$$

La matriu M associada a f en les bases canòniques és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{1, x, x^2\}$, o sigui:

$$M = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

Mètode alternatiu: amb matrius de canvis de base. El conjunt

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

és una base de $\mathbb{R}^3$. En efecte, B és linealment independent perquè la matriu P que té els tres vectors per columnes és una matriu escalonada amb tres files no nul·les i, per tant, té rang 3:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Per ser 3 vectors linealment independents d'un espai de dimensió 3, B és una base de $\mathbb{R}^3$. Sigui C_1 la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i C_2 la base canònica de $P_2(\mathbb{R})$. Coneixem les imatges dels vectors de B expressades en la base C_2. Per tant, coneixem la matriu associada a f en les bases B, en l'espai de sortida, i $C_2 = \{1, x, x^2\}$, en l'espai d'arribada:

$$M^B_{C_2}(f) = \begin{pmatrix}3 & 1 & -4\\0 & -1 & -1\\6 & 3 & -7\end{pmatrix}.$$

Per a calcular la matriu associada a f en les bases canòniques, fem un canvi de base a l'espai de sortida:

$$M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P_{B}^{C_1}.$$

Observem que la matriu de canvi de base de C_1 a B és la inversa de la matriu de canvi de base de B a C_1, que és precisamemnt la matriu P. Per tant,

$$M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P_{B}^{C_1} = M_{C_2}^{B}(f)(P_{C_1}^{B})^{-1} = M_{C_2}^{B}(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La inversa de P és doncs

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu M associada a f en les bases canòniques és, doncs,

$$M = M_{C_2}^{C_1}(f) = M_{C_2}^{B}(f)P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per a comprovar si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva, calculem el rang de la matriu A:

$$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang} A = 2$ i $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rang} A = 3 - 2 = 1$.
L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim \mathrm{Ker} f = 1 \neq 0$ i no és exhaustiva per ser $\dim \mathrm{Im} f = 2 \neq 3 = \dim P_2(\mathbb{R})$, i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Calculeu la matriu associada a $f \circ g$ en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $P_2(\mathbb{R})$. Calculeu totes les antiimatges per $f \circ g$ del polinomi $2 + x + 3x^2$ i del polinomi $1 + x + x^2$.

Solució. La composició $f \circ g$ és una aplicació de $\mathbb{R}^3$ en $P_2(\mathbb{R})$. La matriu associada a la composició és el producte de matrius associades:

$$N = M_{C_2}^{C_1}(f \circ g) = M_{C_2}^{C_1}(f)M_{C_1}^{C_1}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular les antiimatges per $f \circ g$ d'un polinomi, resolem el sistema d'equacions lineals que té N per matriu de coeficients i les coordenades del polinomi en la base $\{1, x, x^2\}$, a la columna de termes independents. Calculem primer les antiimatges de $2 + x + 3x^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

El sistema té rang 1 i 2 graus de llibertat. La variable principal és y, que val -1. Donem el conjunt de solucions de forma paramètrica en funció de les variables lliures x, z:

$$\{\begin{pmatrix} x \\ -1 \\ z \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Calculem ara les antiimatges de $1 + x + x^2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Veiem que el rang de la matriu de coeficients és 1 i el rang de la matriu ampliada és 2. Per tant, el sistema és incompatible. És a dir, el polinomi $1 + x + x^2$ no té cap antiimatge per $f \circ g$.

F3. (a) Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que es pot escriure com $A = PDP^{-1}$, on D és una matriu diagonal i P és una matriu invertible. Proveu que per tot enter $k > 0$, es té $A^k = PD^kP^{-1}$.

Solució. Observem que

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k = \overbrace{(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}^{k)} \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)DP \\ &= PD^kP^{-1}, \end{aligned}$$

ja que $P^{-1}P$ és la matriu identitat. *Observació.* Es pot demostrar també per inducció sobre k.

(b) Calculeu el polinomi característic, els valors propis i vectors propis de la matriu A següent, i feu-los servir per trobar matrius D i P tals que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Solució. El polinomi característic és:

$$\begin{aligned} p(x) = \det(A - xI_3) &= \det \begin{pmatrix} -5-x & 0 & -6 \\ 3 & 1-x & 3 \\ 3 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = (1-x) \det \begin{pmatrix} -5-x & -6 \\ 3 & 4-x \end{pmatrix} \\ &= (1-x)((-5-x)(4-x) + 18) = (1-x)(x^2 + x - 2) = (1-x)(x+2)(x-1) \\ &= -(x-1)^2(x+2). \end{aligned}$$

Els valors propis són les arrels del polinomi característic, o sigui, 1 i -2, que tenen multiplicitat algebraica 2 i 1, respectivament. Per tant, la matriu diagonalitza si i només si $\dim E_1 = 2$. Calculem $\dim E_1$:

$$\begin{aligned} \dim E_1 = 3 - \operatorname{rang}(A - I) &= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -5-1 & 0 & -6 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ 3 & 0 & 4-1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2. \end{aligned}$$

Per tant, A diagonalitza. Calculem ara una base formada per vectors propis.

Per a calcular una base de E_1, resolem el sistema homogeni que té $A - I$ per matriu de coeficients,

$$\begin{pmatrix} -5-1 & 0 & -6 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ 3 & 0 & 4-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rang del sistema és 1. La solució té 2 graus de llibertat. Triem z com a variable principal i expressem les solucions en funció de x, y. En forma paramètrica, la solució és

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_1 és $\{u_1, u_2\}$, on $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Per a calcular una base de E_{-2}, resolem el sistema homogeni que té $A + 2I$ per matriu de coeficients,

$$\begin{pmatrix} -5+2 & 0 & -6 \\ 3 & 1+2 & 3 \\ 3 & 0 & 4+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El rang del sistema és 2. La solució té 1 grau de llibertat. Triem x, y com a variables principals i expressem les solucions en funció de z. En forma paramètrica, la solució és

$$\{\begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = \{z \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\} = < \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

Una base de E_{-2} és $\{u_3\}$, on $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base formada per vectors propis és $B = \{u_1, u_2, u_3\}$.

Sigui P la matriu de canvi de base de B a la base canònica de $\mathbb{R}^3$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aleshores

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

i $A = PDP^{-1}$.

(c) Calculeu A^6 utilitzant els apartats anteriors.

Solució. Tenint en compte els apartats anteriors, $A^6 = PD^6P^{-1}$. Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

La inversa de P és, doncs,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
A^6 = PD^6P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & 1^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -64 & 0 & -64 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 127 & 0 & 126 \\ -63 & 1 & -63 \\ -63 & 0 & -62 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$