Diagonalització: resum, mètode i exemples M1-GEI-FIB

Mercè Mora

Curs 2022-2023(1)

Diagonalització

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n ($\mathbb{K}$ pot ser, per exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ amb p primer) direm que f *diagonalitza* si existeix una base d'E tal que la matriu associada a f en aquesta base sigui diagonal.

Valors i vectors propis

• *valor propi (vap.)* de f: $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$, per a algun vector $v \neq 0_E$

• *vector propi (vep.)* de f: $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ i $f(v) = \lambda\, v$, per a algun $\lambda \in \mathbb{K}$ (direm que v és un *vector propi de valor propi* λ)

$\triangleright$ f diagonalitza si i només si existeix una base de vectors propis

Subespais de vectors propis

Per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$ definim $E_\lambda = \{v \ : \ f(v) = \lambda \, v\}$

- Per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ és un subespai vectorial de E

- Si λ NO és vap de f aleshores $E_\lambda = \{0_E\}$

- Si λ és vap de f aleshores E_λ conté els vectors propis de valor propi λ, més el vector 0_E

Subespais de vectors propis (cont.)

Si A és la matriu associada a f en una base qualsevol B, aleshores:

• E_λ está format per les solucions del sistema d'equacions lineal homogeni $(A-\lambda I_n)X=0$.

• E_λ és un subespai vectorial de dimensió $n-\operatorname{rang}(A-\lambda\, I_n)$

• $\lambda \in K$ és valor propi de $f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{rang}(A-\lambda\; Id) < n$
$\Leftrightarrow \det(A-\lambda\; I_n)=0$

• Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ són valors propis diferents de f i $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són vectors propis de valor propi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ respectivament, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són linealment independents

Polinomi característic

Polinomi característic de f:

$$p_f(x) = \det(A - x\, I_n)$$

on A és la matriu associada a f en una base qualsevol d'E (es pot demostrar que el polinomi característic és invariant per canvis de base.)

• $\lambda \in \mathbb{K}$ és valor propi de f si, i només si, λ és arrel de $p_f(x)$

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, aleshores $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$.

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat 1 (arrel simple) del polinomi característic, aleshores $\dim E_\lambda = 1$.

Polinomi característic (cont.)

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, direm que m és la *multiplicitat algebraica* de λ i $\dim E_\lambda$ és la *multiplicitat geomètrica* de λ. Per tant, amb aquesta terminologia, la multiplicitat geomètrica és més petita o igual que la multiplicitat algebraica.

- $p_f(x)$ és un polinomi de grau n tal que
  - el coeficient de x^n és $(-1)^n$;
  - el terme independent és $\det A$;
  - el coeficient de x^{n-1} és $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$,
    on $\operatorname{tr} A$ és la *traça* de A (=suma dels elements de la diagonal principal d'A).

Caracterització

Teorema. *f diagonalitza si, i només si, es compleixen alhora les dues condicions següents:*

i) *$p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{K}[x]$;*

ii) *per a tota arrel λ de $p_f(x)$, la dimensió d'E_λ és igual a la multiplicitat de λ en $p_f(x)$.*

La condició ii) és equivalent a dir que, per a tota arrel λ de $p_f(x)$, les multiplicitats algebraica i la geomètrica coincideixen.

Corol·lari. *Si $p_f(x)$ té n arrels diferents en $\mathbb{K}$, aleshores f diagonalitza.*

Mètode: determinar si f diagonalitza

f endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n
A la matriu associada a f en la base B,

• Calcular el polinomi característic de f i descompondre'l en factors de grau 1:

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \det(A - x\ I_n) = \dots \\ &= (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}\ (x-\lambda_2)^{m_2}\ \dots (x-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

on $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són arrels diferents de multiplicitat $m_1, m_2, \dots, m_k$ respectivament.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són els valors propis de f, de multiplicitat algebraica $m_1, m_2, \dots m_k$ respectivament.

Si $p_f(x)$ no es pot descompondre en factors de grau 1, f **no diagonalitza**. Altrament, continuem.

Mètode: determinar si f diagonalitza (cont.)

- Comprovem si $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, per a tots els valors propis λ_i tals que $m_i > 1$: equival a comprovar si $n - \mathrm{rang}(A - \lambda_i\ I_n) = m_i$.

Si en algun cas no es compleix, f **no diagonalitza**.
Altrament, f **diagonalitza**

Mètode: base en què diagonalitza

- Calculem una base B_i de E_{λ_i} per a cada valor propi λ_i.

Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - \lambda_i\ I_n$ i expressem la solució en forma paramètrica, és a dir, calculem una base del subespai vectorial solució del sistema homogeni. La base tindrà exactament m_i vectors, $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i\,m_i}\}$.

- Una base de vectors propis de f és:

$$
\begin{aligned}
B' &= B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \\
&= \{\underbrace{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1\,m_1}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_1}, \underbrace{v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2\,m_2}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_2}, \dots, \underbrace{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{k\,m_k}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_k}\}
\end{aligned}
$$

Mètode: matriu diagonal

- La matriu associada en la base B' és la matriu diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

on cada λ_i apareix exactament m_i vegades i els elements que no són de la diagonal principal són nuls.

- Es satisfà la igualtat $D = P^{-1} A\ P$, on P és la matriu $P_B^{B'}$ de canvi de base de B' a B, és a dir, les columnes de P són les components dels vectors de B' en la base B

Exemple 1

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x^2+4)$$

No diagonalitza perquè el polinomi característic no té totes les arrels reals, és a dir, no es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{R}[x]$.

Exemple 2

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = \dots$$
$$= -(x-4)(x-2)(x+2)$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 $(= \dim \mathbb{R}^3)$ arrels diferents (4, 2 i -2).

Exemple 3

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-1)^2(x-2)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
1	2
2	1

- El valor propi 1 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_1 = 2$:

$$
\begin{aligned}
\dim E_1 &= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \\
&= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3 - 2 = 1 \neq 2
\end{aligned}
$$

Per tant, f no diagonalitza.

Exemple 4

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ 1 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)^2\,(-1-x)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
5	2
-1	1

- El valor propi 5 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_5 = 2$:

$$\begin{aligned}\dim E_5 &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ -1 & -1-5 & 0 \\ 1 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.\end{aligned}$$

Per tant, f diagonalitza.

Exemple 5

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-x & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2\,(4-x)^2$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
-2	2
4	2

• Els dos valors propis, -2 i 4, tenen multiplicitat $2 > 1$.
Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$ i si $\dim E_4 = 2$.

$$\dim E_{-2} = 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2-(-2) & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-(-2) & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-(-2) \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\dim E_4 = 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2-4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-4 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

Exemple 6

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-x & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-x \end{pmatrix}$$
$$= (-2-x)^2 (-1-x)(2-x)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
-2	2
-1	1
2	1

• El valor propi -2 té multiplicitat 2, diferent de 1.
Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2-(-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-(-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-(-2) & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-(-2) \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

Exemple 7

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3\,(-1-x)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
2	3
-1	1

• El valor propi 2 té multiplicitat $3 > 1$.
Comprovem si $\dim E_2 = 3$:

$$\dim E_2 = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} =$$

$$4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4 - 3 = 1 \neq 3$$

Per tant, f no diagonalitza.

Exemple 8

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalitza.

Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x) - 6$$
$$= x^2 - 3\,x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 2 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
4	1
-1	1

• Base de E_4. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 4I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x, y) : x = \frac{2}{3}y\} = \{(\frac{2}{3}y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.
Base: $\{(\frac{2}{3}, 1)\}$

• Base de E_{-1}. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - (-1)I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x, y) : x = -y\} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.
Base: $\{(-1, 1)\}$

• Base de E en que f diagonalitza: $B' = \{(\frac{2}{3}, 1), (-1, 1)\}$

• Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

• Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 9

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalitza.

Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (3-x)^2(4-x) + 2 + 2 - (4-x) - 3\,(3-x) - 2\,(3-x) = \dots$$

$$= -x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = -(x-2)^2(x-6)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
2	2
6	1

El valor propi 2 té multiplicitat $2 > 1$.
Comprovem si $\dim E_2 = 2$:

$$
\begin{aligned}
\dim E_2 &= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \\
&= 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.
\end{aligned}
$$

Per tant, f diagonalitza.

• Base de E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x, y, z) : x + y + z = 0\} = \{(x, y, z) : x = -y - z\} =$
$\{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$

• Base de E_6. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 6I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x, y, z) : x = z\,,\ y = 2z\} = \{(z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(1, 2, 1)\}$

• Base de E en que f diagonalitza:
$B' = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,2,1)\}$

• Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

• Relació entre D i A:
$D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir,
$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 10

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalitza.

Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

- Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{pmatrix}$$
$$= (2-x)(-4-x)(5-x) - 24 - 4\,(-4-x) - 24(2-x) = \ldots$$
$$= -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$$

- Valors propis:

valors propis	multiplicitat
0	1
1	1
2	1

Diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

• Base de E_0. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 0 \cdot I_3 = A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x,y,z) : x+2z = 0\,,\ -2y+3z = 0\} = \{(x,y,z) : x = -2z\,,\ y = \frac{3}{2}z\} = \{(-2z, y\frac{3}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, \frac{3}{2}, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,3,2)\}$, ja que el vector $(-2, \frac{3}{2}, 1)$ genera el mateix subespai que $2\,(-2, \frac{3}{2}, 1) = (-4, 3, 2)$

• Base de E_1. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 1 \cdot I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 4 \\ 3 & -4-1 & 12 \\ 1 & -2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x + 4z = 0\,,\ y = 0\} = \{(x,y,z) : x = -4z\,,\ z = 0\} = \{(-4z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-4,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,0,1)\}$

• Base de E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2\, I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 4 \\ 3 & -4-2 & 12 \\ 1 & -2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x, y, z) : z = 0\,,\, x = 2y\} = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2, 1, 0) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(2, 1, 0)\}$

• Base de E en que f diagonalitza:
$B' = \{(-4,3,2),(-4,0,1),(2,1,0)\}$

• Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

• Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.