

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses. Demostreu-les, si són certes, i doneu-ne un contraexemple, si són falses.

- (a) Sigui G un graf connex d'ordre almenys 3.
 - (i) Si G té algun vèrtex de tall, aleshores G té alguna aresta pont.
 - (ii) Si G té alguna aresta pont, aleshores G té algun vèrtex de tall.
- (b) Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$.
 - (i) Si G té diàmetre 2, aleshores el radi de G és 1.
 - (ii) Si G té radi 1, aleshores el grau màxim de G és $n - 1$.
- (c) Si G és un graf connex d'ordre almenys 2 tal que en suprimir-ne un vèrtex central v queda un graf complet, aleshores podem assegurar que G és un graf complet.

P2. (4 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m , on $n \geq 2$ i $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Considerem el graf $G' = (V', A')$, on $V' = \{y_1, \dots, y_n\}$ i $y_i y_j \in A'$ si i només si $x_i x_j \in A$ (és a dir, G' és una còpia de G). Definim el graf $H = (W, B)$ com segueix:

$$W = V \cup V' \cup \{z_1, \dots, z_n\},$$
$$B = A \cup A' \cup \{x_i z_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

- (a) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de H en funció de l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G .
- (b) Demostreu que H és bipartit si i només si G és bipartit.
- (c) Demostreu que si el graf G és un cicle d'ordre 6, aleshores H és hamiltonià, però que si G és un cicle d'ordre 5, aleshores H no és hamiltonià.
- (d) Suposem que $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_1\})$ (és a dir, G és un graf cicle d'ordre 4). Calculeu l'arbre generador de H que s'obté en aplicar l'algorisme BFS si es comença en el vèrtex x_1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria segons l'ordre següent:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre en aplicar l'algorisme.

P3. (3 punts) Un arbre T té només tres vèrtexs a , b i c que no són fulles, amb graus $g(a) = 4$, $g(b) = 3$ i $g(c) = 2$.

- (a) Doneu l'ordre i la seqüència de graus de T .
- (b) Demostreu que el graf complementari de T , T^c , conté un senderó eulerià. Quins vèrtexs tindrà com a extrems aquest senderó eulerià?
- (c) Sabem que ab i bc són arestes de T . Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per tal d'obtenir un graf eulerià?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 30m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar per separat: 1) P1; 2) apartats (a) i (b) de P2; 3) apartats (c) i (d) de P2; 4) P3.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 29/04/2021.
- Revisió de l'examen: es publicarà al racó el procediment a seguir.