Matemàtiques 1 - GEI - FIB 15-04-2021
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses. Demostreu-les, si són certes, i doneu-ne un contraexemple, si són falses.

(a) Sigui G un graf connex d'ordre almenys 3.
   (i) Si G té algun vèrtex de tall, aleshores G té alguna aresta pont.
   (ii) Si G té alguna aresta pont, aleshores G té algun vèrtex de tall.

(b) Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$.
   (i) Si G té diàmetre 2, aleshores el radi de G és 1.
   (ii) Si G té radi 1, aleshores el grau màxim de G és $n-1$.

(c) Si G és un graf connex d'ordre almenys 2 tal que en suprimir-ne un vèrtex central v queda un graf complet, aleshores podem assegurar que G és un graf complet.

P2. (4 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m, on $n \geq 2$ i $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considerem el graf $G' = (V', A')$, on $V' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ i $y_i y_j \in A'$ si i només si $x_i x_j \in A$ (és a dir, G' és una còpia de G). Definim el graf $H = (W, B)$ com segueix:

$$W = V \cup V' \cup \{z_1, \ldots, z_n\},$$
$$B = A \cup A' \cup \{x_i z_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de H en funció de l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G.

(b) Demostreu que H és bipartit si i només si G és bipartit.

(c) Demostreu que si el graf G és un cicle d'ordre 6, aleshores H és hamiltonià, però que si G és un cicle d'ordre 5, aleshores H no és hamiltonià.

(d) Suposem que $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\})$ (és a dir, G és un graf cicle d'ordre 4). Calculeu l'arbre generador de H que s'obté en aplicar l'algorisme BFS si es comença en el vèrtex x_1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria segons l'ordre següent:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre en aplicar l'algorisme.

P3. (3 punts) Un arbre T té només tres vèrtexs a, b i c que no són fulles, amb graus $g(a) = 4$, $g(b) = 3$ i $g(c) = 2$.

(a) Doneu l'ordre i la seqüència de graus de T.

(b) Demostreu que el graf complementari de T, T^c, conté un senderó eulerià. Quins vèrtexs tindrà com a extrems aquest senderó eulerià?

(c) Sabem que ab i bc són arestes de T. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per tal d'obtenir un graf eulerià?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 30m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar per separat: 1) P1; 2) apartats (a) i (b) de P2; 3) apartats (c) i (d) de P2; 4) P3.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 29/04/2021.
- Revisió de l'examen: es publicarà al racó el procediment a seguir.

Model de solució

P1. (3 punts) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses. Demostreu-les, si són certes, i doneu-ne un contraexemple, si són falses.

(a) Sigui G un graf connex d'ordre almenys 3.

(i) Si G té algun vèrtex de tall, aleshores G té alguna aresta pont.

Solució. És fals. Per exemple, el graf $G = (\{1,2,3,4,5\}, \{12,23,13,14,45,15\})$ no té arestes pont, perquè totes formen part d'un cicle, però 1 és vèrtex de tall, ja que en $G-1$ no hi ha cap camí de 2 a 5.

(ii) Si G té alguna aresta pont, aleshores G té algun vèrtex de tall.

Solució. És cert. Una aresta amb els dos extrems de grau 1 indueix un component connex d'ordre 2. Per tant, al ser G connex d'ordre almenys 3, un dels extrems de l'aresta pont té grau almenys 2, i sabem que els extrems d'una aresta pont són vèrtexs de tall si tenen grau almenys 2.

(b) Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$.

(i) Si G té diàmetre 2, aleshores el radi de G és 1.

Solució. És fals. Per exemple, un graf cicle d'ordre 4 té diàmetre 2 i radi 2, ja que tots els vèrtexs tenen excentricitat 2.

(ii) Si G té radi 1, aleshores el grau màxim de G és $n-1$.

Solució. És cert. Si el radi és 1, vol dir que hi ha un vèrtex u amb excentricitat 1, és a dir, tots els vèrtexs són a distància 1 d'u. Per tant, u és adjacent a tots els altres vèrtexs del graf, que és equivalent a que $g(u) = n-1$. Per tant, el grau màxim de G és $n-1$.

(c) Si G és un graf connex d'ordre almenys 2 tal que en suprimir-ne un vèrtex central v queda un graf complet, aleshores podem assegurar que G és un graf complet.

Solució. És cert. Suposem que v és un vèrtex central tal que $G-v$ és un graf complet. Per ser G connex, $g(v) \geq 1$. Sigui u un vèrtex de G adjacent a v. El vèrtex u és adjacent a tots els vèrtexs de G, ja que és adjacent a v i a més adjacent a tots els altres vèrtexs de $G-v$, per ser $G-v$ complet. Per tant, u té excentricitat 1 en G. Per ser v un vèrtex central (o sigui, d'excentricitat mínima), l'excentricitat de v ha de ser també 1. Per tant, G és un graf complet, ja que dos vèrtexs qualsevol de G són adjacents: v és adjacent a tots els altres vèrtexs de G (per ser d'excentricitat 1) i tots els vèrtexs de $G-v$ són adjacents dos a dos, per ser $G-v$ complet.

P2. (4 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m, on $n \geq 2$ i $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considerem el graf $G' = (V', A')$, on $V' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ i $y_i y_j \in A'$ si i només si $x_i x_j \in A$ (és a dir, G' és una còpia de G). Definim el graf $H = (W, B)$ com segueix:

$$W = V \cup V' \cup \{z_1, \ldots, z_n\},$$
$$B = A \cup A' \cup \{x_i z_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

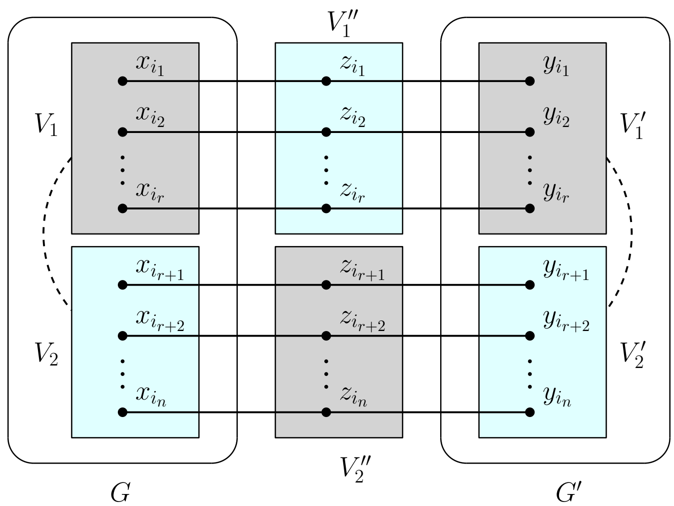
(a) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de H en funció de l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G.

Solució. L'ordre de H és el nombre de vèrtexs de H, o sigui el cardinal de W. Per tant, $\mathrm{ord}(H) = |W| = 3n$. La mida de H és el nombre d'arestes de H, o sigui el cardinal de B. Per tant, $\mathrm{mida}(H) = |B| = |A| + |A'| + |\{x_i z_i : 1 \leq i \leq n\}| + |\{y_i z_i : 1 \leq i \leq n\}| = 2m + 2n$. Calculem ara els graus dels vèrtexs de H. Per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$, els vèrtexs adjacents a z_i en H són x_i i y_i, per tant, $g_H(z_i) = 2$. Per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$, els vèrtexs adjacents a x_i en H són els vèrtexs x_j adjacents a x_i en G i el vèrtex z_i. Per tant, $g_H(x_i) = g_G(x_i) + 1$. Anàlogament, tenim que $g_H(y_i) = g_{G'}(y_i) + 1$, ja que els vèrtexs adjacents a y_i en H són els vèrtexs y_j adjacents a y_i en G' i el vèrtex z_i. Per tant, $g_H(y_i) = g_G(x_i) + 1$.

(b) Demostreu que H és bipartit si i només si G és bipartit.

Solució. Demostrem primer que si H és bipartit, aleshores G també ho és. En efecte, si H és bipartit, aleshores H no conté cicles de longitud senar. Per tant, G tampoc conté cicles de longitud senar perquè és un subgraf de H. Per tant, G és bipartit.

Recíprocament, suposem que G és bipartit i les parts estables són V_1 i V_2, de manera que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ i tota aresta de G té un extrem a V_1 i l'altre a V_2. El graf G' és una còpia de G, per tant, també és bipartit i les partes estables són, per exemple, V_1' i V_2'. Definim $V_1'' = \{z_i : x_i \in V_1\}$ i $V_2'' = \{z_i : x_i \in V_2\}$. Vegem a la figura següent una possible representació del graf H. A més de les arestes dibuixades, només hi pot haver arestes entre un vèrtex de V_1 i un de V_2, o bé entre un vèrtex de V_1' i un de V_2'. Per tant, no hi ha arestes entre un vertèx de $W_1 = (V_1 \cup V_1') \cup V_2''$ (en gris) i un de $W_2 = (V_2 \cup V_2') \cup V_1''$ (en blau). Per tant, H és bipartit i W_1 i W_2 són les parts estables de H.



(c) Demostreu que si el graf G és un cicle d'ordre 6, aleshores H és hamiltonià, però que si G és un cicle d'ordre 5, aleshores H no és hamiltonià.

Solució. Suposem que G és isomorf a un cicle d'ordre 6 i que les arestes de G són x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1. Aleshores, el graf H és hamiltonià, ja que un possible cicle hamiltonià és:

$$x_1, z_1, y_1, y_2, z_2, x_2, x_3, z_3, y_3, y_4, z_4, x_4, x_5, z_5, y_5, y_6, z_6, x_6, x_1.$$

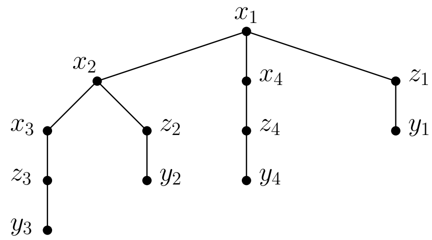
Suposem ara que G és isomorf a un cicle d'ordre 5. Suposem que les arestes de G són x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1. Suposem que H és hamiltonià i arribarem a una contradicció. Observem que $g_H(x_i) = 3$, $g_H(y_i) = 3$ i $g_H(z_i) = 2$, per a tot $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Els vèrtexs z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 tenen grau 2 en H, per tant, les dues arestes incidents amb z_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ serien de qualsevol cicle hamiltonià. Per a tot vèrtex x_i, l'aresta incident amb x_i i z_i ha de ser del cicle hamiltonià. Per tant, per a qualsevol i, exactament una de les altres dues arestes de H incidents amb x_i hauria de ser del cicle hamiltonià, és a dir, exactament una de les dues arestes de G incidents amb x_i hauria de ser del cicle hamiltonià. Però no és possible triar les arestes de G amb aquesta condició, ja que G és un cicle d'ordre senar. Per tant, H no és hamiltonià.

(d) Suposem que $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\})$ (és a dir, G és un graf cicle d'ordre 4). Calculeu l'arbre generador de H que s'obté en aplicar l'algorisme BFS si es comença en el vèrtex x_1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria segons l'ordre següent:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre en aplicar l'algorisme.

Solució. Vegeu una representació a la figura següent. L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador és: $x_1, x_2, x_4, z_1, x_3, z_2, z_4, y_1, z_3, y_2, y_4, y_3$.



P3. (3 punts) Un arbre T té només tres vèrtexs a, b i c que no són fulles, amb graus $g(a) = 4$, $g(b) = 3$ i $g(c) = 2$.

(a) Doneu l'ordre i la seqüència de graus de T.

Solució. Suposem que T és un arbre d'ordre n i mida m. Sigui ℓ el nombre de fulles de T. Pel lema de les encaixades, $\sum_{u \in V(T)} g(u) = 2m$. Observem que $\sum_{u \in V(T)} g(u) = \ell + 2 + 3 + 4 = \ell + 9$, i per ser T un arbre, $m = n - 1 = (\ell + 3) - 1 = \ell + 2$. Per tant, $\ell + 9 = 2\ell + 4$, d'on deduïm $\ell = 5$.

Per tant, T és un arbre d'ordre 8 amb seqüència de graus $4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1$.

(b) Demostreu que el graf complementari de T, T^c, conté un senderó eulerià. Quins vèrtexs tindrà com a extrems aquest senderó eulerià?

Solució. La suma dels graus d'un vèrtex en un graf i en el seu complementari és l'ordre menys 1. Per tant, si restem de 7 els valors de la seqüència de graus de T, obtenim la seqüència de graus del complementari, T^c: $6, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 3$. El graf T^c conté un senderó eulerià si, i només si, és connex i té exactament dos vèrtexs de grau senar. Observem a la seqüència de graus de T^c que aquesta última condició es compleix. Per tant, només falta demostrar que T^c és connex. El graf T^c té un vèrtex de grau 6 i, per tant, té un component connex amb almenys 7 vèrtexs, de manera que si T^c no fos connex, hi hauria com a molt un altre component connex amb un sol vèrtex, és a dir, hi hauria un vèrtex aïllat. Però ja hem vist que no hi ha vèrtexs aïllats a T^c, perquè no hi ha cap valor igual a 0 a la seqüència de graus de T^c. Per tant, T^c és connex.

Els extrems del senderó eulerià de T^c són els dos vèrtexs de grau senar en T^c, o sigui, els vèrtexs de grau a i c, ja que tenen grau 4 i 2 respectivament en T, i per tant, tenen grau 3 i 5 respectivament en T^c.

(c) Sabem que ab i bc són arestes de T. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per tal d'obtenir un graf eulerià?

Solució. Per tal que un graf sigui eulerià, cal que sigui connex i tots els vèrtexs tinguin grau parell. Sabem que T^c és connex. Per tant, si li afegim arestes també ho serà. D'altra banda, T^c té exactament dos vèrtexs de grau senar, que són a i c, ja que $g_{T^c}(a) = 7 - 4 = 3$ i $g_{T^c}(c) = 7 - 2 = 5$. Si volem aconseguir un graf eulerià afegint una única aresta a T^c, aquesta hauria de ser ac per tal que els vèrtexs a i c passin a tenir grau parell. Però ac és una aresta de T^c, ja que els vèrtexs a i c no són adjacents en T (altrament T tindria un cicle perquè T conté les arestes ab i bc, i això és una contradicció perquè T és un arbre). Per tant, no podem afegir l'aresta ac a T^c. És a dir, no podem aconseguir un graf eulerià afegint només una aresta a T^c. Per tant, cal afegir almenys 2 arestes. Si es pot aconseguir amb exactament dues arestes, aquestes han de ser incidents, i a més una d'elles incident amb a i l'altra, amb c. Observem que les arestes ab i bc són de T, per tant, no són de T^c. Si les afegim a T^c, tindrem un graf connex amb seqüència de graus $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4$, o sigui, un graf eulerià. El mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per obtenir un graf eulerià és, doncs, 2.