TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*4 punts*) Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ la successió definida per $a_1 = e^2$ i $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$.

   (a) Demostreu que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   (c) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

   (d) Si canviem el valor de a_1 per $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ continua sent acotada, decreixent i convergent? Justifiqueu la resposta.

2. (*3 punts (1+2)*) Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 2x$ per a tot $x \in [0,1]$.

   (a) Enuncieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

   (b) Demostreu que existeix un únic $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

3. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = e^{x/10}$.

   (a) Escriviu el polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen de la funció $f(x)$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

   (b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (c) Utilitzeu el polinomi de Taylor de l'apartat (c) per trobar el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb la precisió demanada.

Durada de l'examen: 1h 30m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

TODAS LES RESPUESTAS DEBEN SER RAZONADAS.

1. (*4 puntos*) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por $a_1 = e^2$ y $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$.

   (a) Demuestra que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demuestra que $(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente.

   (c) Demuestra que $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente y calcula su límite.

   (d) Si se cambia el valor de a_1 por $a_1 = e^{0,5}$, ¿la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ sigue siendo acotada, decreciente i convergente? Justifica la respuesta.

2. (*3 puntos (1+2)*) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y derivable tal que $f'(x) \neq 2x$ para todo $x \in [0,1]$.

   (a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.

   (b) Demuestra que existe un único $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

3. (*3 puntos*) Considera la función $f(x) = e^{x/10}$.

   (a) Escribe el polinomio de Taylor de orden n centrado en el origen de la función $f(x)$ y la expresión del resto correspondiente en la forma de Lagrange.

   (b) Determina el grado del polinomio de Taylor de la función $f(x)$ para obtener el valor aproximado de $e^{-0.1}$ con error menor que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (c) Utiliza el polinomio de Taylor del apartado (c) para calcular el valor aproximado de $e^{-0.1}$ con la precisión pedida.

Duración del examen: 1h 30m.
Es necesario entregar los ejercicios por separado.
Se debe responder con tinta azul o negra.
No pueden utilizarse ni libros, ni apuntes, ni móviles, ni dispositivos electrónicos que puedan almacenar, emitir o recibir información.

1. (*4 punts*) Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ la successió definida per $a_1 = e^2$ i $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$

   (a) Demostreu que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   (c) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

   (d) Si canviem el valor de a_1 per $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ continua sent acotada, decreixent i convergent? Justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ:

(a) Demostrem per inducció que:

$$2 < a_n < e^4, \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $2 < a_1 = e^2 < e^4$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció que per a aquest n: $2 < a_n < e^4$, i demostrem que aleshores $2 < a_{n+1} < e^4$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $2 < a_n < e^4$:

$2 < a_n < e^4 \overset{(1)}{\Longrightarrow} ln(2) < ln(a_n) < ln(e^4) = 4 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \sqrt{ln(2)} < \sqrt{ln(a_n)} < \sqrt{4} = 2 \overset{(3)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(2)}} < e^{\sqrt{ln(a_n)}} < e^2 \overset{(4)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(2)}} < a_{n+1} < e^2 \overset{(5)}{\Longrightarrow} 2 < a_{n+1} < e^4$.

(1) Prenent logaritmes.

(2) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(3) És cert perquè $f(x) = e^x$ és estrictament creixent.

(4) $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$.

(5) $2 < e^{\sqrt{ln(2)}}$ i $e^2 < e^4$.

(b) Ara demostrem que la successió és decreixent. Demostrem per inducció que:

$$a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $e^2 = a_1 \geq a_2 = e^{\sqrt{ln(a_1)}} = e^{\sqrt{ln(e^2)}} = e^{\sqrt{2}}$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció que per a aquest n: $a_n \geq a_{n+1}$, i demostrem que aleshores $a_{n+1} \geq a_{n+2}$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $a_n \geq a_{n+1}$:

$a_n \geq a_{n+1} \overset{(1)}{\Longrightarrow} ln(a_n) \geq ln(a_{n+1}) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \sqrt{ln(a_n)} \geq \sqrt{ln(a_{n+1})} \overset{(3)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(a_n)}} \geq e^{\sqrt{ln(a_{n+1})}} \overset{(4)}{\Longrightarrow} a_{n+1} \geq a_{n+2}$.

(1) Prenent logaritmes.

(2) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(3) És cert perquè $f(x) = e^x$ és estrictament creixent.

(4) $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$.

(c) Com que és acotada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent. Calculem el seu límit $l = \lim_{n\to+\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{ln(a_n)}} \Rightarrow l = e^{\sqrt{ln(l)}} \Rightarrow ln(l) = \sqrt{ln(l)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ln(l))^2 = ln(l) \Rightarrow (ln(l))^2 - ln(l) = 0 \Rightarrow ln(l)(ln(l) - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ln(l) = 0 \vee ln(l) = 1) \Rightarrow (l = 1 \vee l = e).$$

Donat que $a_n > 2$, $\forall n \geq 1$, es té $l = \lim_{n\to+\infty} a_n = e$.

(d) Si $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq1}$ no continua sent acotada, decreixent i convergent, ja que no és decreixent(*):

$a_1 = e^{0,5} \simeq 1.649,\ a_2 \simeq 2.028,\ a_3 \simeq 2.318,\ a_4 \simeq 2.502,\ a_5 \simeq 2.605 \cdots$

(*) De fet, en aquest cas, es pot demostrar per inducció que és creixent, pel mateix procediment que hem utilitzat en l'apartat (b).

La successió $(a_n)_{n\geq1}$ sí que és fitada: $1 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$. Es pot demostrar per inducció que pel mateix procediment que hem utilitzat en l'apartat (a).

Per últim, la successió $(a_n)_{n\geq1}$ també és convergent i el seu límit també és $l = \lim_{n\to+\infty} a_n = e$.

2. (*3 punts (1+2)*) Sigui $f:[0,1]\to[0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x)\neq 2x$ per a tot $x\in[0,1]$.

   (a) Enuncieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

   (b) Demostreu que existeix un únic $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c^2$.

SOLUCIÓ:

(a) Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i siguin a,b dos nombres reals amb $a<b$. Si f és contínua en $[a,b]$ i $f(a)f(b)<0$, aleshores existeix $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

(b) Sigui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funció i siguin a,b dos nombres reals amb $a<b$. Si f és contínua en $[a,b]$, f és derivable en (a,b) i $f(a)=f(b)$, aleshores existeix $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

(c) Aplicant el Teorema de Bolzano demostrem l'<u>existència</u>: existeix $c\in[0,1]$ tal que $f(c)=c^2$:

Donat que $f(c)=c^2\Leftrightarrow f(c)-c^2=0$, considerem la funció:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad\text{definida per}\quad g(x)=f(x)-x^2.$$

Per ser g la resta de f, que és contínua en $[0,1]$ per hipótesi, i una funció polinòmica, que és contínua en tot $\mathbb{R}$, g és contínua en $[0,1]$. A més:

Donat que $f:[0,1]\to[0,1]$, es compleix $f(x)\in[0,1]$ $\forall x\in[0,1]$, i, en particular $0\leq f(0)\leq 1$ i $0\leq f(1)\leq 1$. Per tant:

$$g(0)=f(0)-0=f(0)\geq 0\quad\text{i}\quad g(1)=f(1)-1\leq 0$$

Aleshores, si $g(0)=0$, ja tenim que $c=0$ és un $c\in[0,1]$ tal que $g(c)=0$ i per tant $f(c)=c^2$.

Si $g(1)=0$, ja tenim que $c=1$ és un $c\in[0,1]$ tal que $g(c)=0$ i per tant $f(c)=c^2$.

I, finalment, si $g(0)>0$ i $g(1)<0$, el Teorema de Bolzano demostra que existeix $c\in(0,1)\subseteq[0,1]$ tal que $g(c)=0$ i per tant $f(c)=c^2$.

Aplicant el Teorema de Rolle demostrem la <u>unicitat</u> per reducció a l'absurd: Suposem que existeixen $a,b\in[0,1]$ amb $a<b$ tals que $g(a)=g(b)=0$ i arribarem a una contradicció:

La funció g és contínua en $[a,b]$ i derivable en (a,b) per ser resta de dues funcions contínues i derivables en $[0,1]$, i tenim que $g(a)=g(b)$, aleshores, pel Teorema de Rolle, existiria $c\in(a,b)\subseteq[0,1]$ tal que $g'(c)=0$.

Però $g'(x)=f'(x)-2x$ i per hipòtesi $f'(x)\neq 2x$ per a tot $x\in[0,1]$, per tant $g'(x)\neq 0$ per a tot $x\in[0,1]$ i hem arribat a una contradicció.

3. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = e^{x/10}$

   (a) Escriviu el polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen de la funció $f(x)$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

   (c) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (d) Utilitzeu el polinomi de Taylor de l'apartat (c) per trobar el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb la precisió demanada.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és la composició d'una funció polinòmica i una funció exponencial, per tant és infinitament derivable en tot $\mathbb{R}$.

El polinomi de Taylor d'ordre n d'una funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

L'expressió del residu corresponent a aquest polinomi de Taylor en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

Les derivades de f són: $f^{(k)}(x) = \dfrac{e^{x/10}}{10^k}$, $\forall k \geq 1$.

Substituïnt x per 0 s'obté $f^{(k)}(0) = \dfrac{1}{10^k}$ $\forall k \geq 1$. Substituïnt x per c s'obté $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{e^{c/10}}{10^{n+1}}$.

Llavors el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{10} + \frac{x^2}{2! \cdot 10^2} + \cdots + \frac{x^n}{n! \cdot 10^n}$$

I l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

(b) Si calculem el valor aproximat de $e^{-0.1} = e^{-1/10} = f(-1)$ utilitzant el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$: $e^{-0.1} = f(-1) \simeq P_n(-1)$, l'error que es comet és:

$$error = |R_n(-1)| = \left| \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}(-1)^{n+1} \right|$$

per a cert c entre -1 i 0.

Donat que $-1 \leq c \leq 0$ i que la funció exponencial és creixent tenim que $e^{c/10} \leq e^{0/10} = e^0 = 1$ i per tant:

$$error = \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}$$

Per assegurar error menor que 0.0005 hem d'imposar que $\dfrac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}} < 0.0005$, és a dir $(n+1)! \cdot 10^{n+1} > 2000$. Com que $2! \cdot 10^2 = 200$ i $3! \cdot 10^3 = 6000$ tenim que $n + 1 \geq 3$, és a dir

$n \geq 2$. Per tant, el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$ és $n \geq 2$.

(c) $e^{-0.1} = f(-1) \simeq P_2(-1) = 1 - \dfrac{1}{10} + \dfrac{(-1)^2}{2! \cdot 10^2} \simeq 0.905.$