Tipus de matrius

- Una matriu de tipus $1 \times n$ s'anomena matriu fila
- Una matriu de tipus $m \times 1$ s'anomena matriu columna
- La matriu nul·la $O_{m,n}$ (o simplement O) és la matriu tipus $m \times n$ on tots els elements són iguals a 0
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena quadrada. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{n\times n}$ és
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$
  - diagonal si és triangular superior i inferior simultàniament
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot i
- La matriu identitat I_n és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$

Suma de matrius

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propietats

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu B tal que
$$A + B = B + A = O$$
(a aquesta B l'anomenem $-A$)

Producte per escalars

Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar

El **producte d'A per l'escalar λ** és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Propietats

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Fixem-nos que $(-1)A = -A$

Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times m}$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada A és
simètrica si $A^t = A$
antisimètrica si $A^t = -A$

Producte de matrius

Siguin $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Observacions

- El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general $AB \neq BA$
- El producte és una operació interna dins de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propietats del producte de matrius

Si A, B, C són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$
- *(Distributives)* $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^tA^t$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per A^k el producte $AA\cdots A$
(és a dir, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc.)

Prop. • $\lambda(AB) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$

• El producte de matrius no és commutatiu en general.

Matriu inversa

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que B és la **matriu inversa** d'A si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que A és **invertible** i denotem per A^{-1} la matriu inversa

Observacions

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

Propietats de la matriu inversa

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1}A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

• Si $A_1, \ldots, A_k$ són invertibles, aleshores el producte $A_1 \cdots A_k$ és invertible i $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Transformacions elementals

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

(I) intercanviar dues files d'A

(II) multiplicar una fila d'A per un escalar no nul

(III) sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

Matrius equivalents

Teorema

Sigui T una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació T a la matriu M és EM, on E és la matriu elemental resultant d'aplicar T a la identitat I_m

Una matriu B és **equivalent (per files)** a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si B és equivalent a A podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les E_i són matrius elementals

EXEMPLES:

Transformacions elementals:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Transf. elemental tipus I: permutem les files 3,6:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus II: multipliquem la fila 3 per 5:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus III: Sumem a la fila 3ª la 6ª multiplicada per 2:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius elementals:

Si denotem:

matriu elemental tipus
$$\begin{cases} \text{I}: P_{ij}, \text{ si intercanviem les files } i, j \\ \text{II}: M_i(\lambda), \text{ si multipliquem la fila } i \text{ per } \lambda \\ \text{III}: S_{ij}(\lambda), \text{ si sumem a la fila } i \text{, la fila } j \text{ multiplicada per } \lambda \end{cases}$$

$$\boxed{I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- $P_{2,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $M_4(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $S_{3,6}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrius escalonades

OBS.: de vegades només s'exigeix que els pivots si fuin $\neq 0$, no necessàriament 1's

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior.

Matriu escalonada reduïda: matriu escalonada amb pivots $=1$ i tots els altres elements de les columnes dels pivots han de ser 0's

Teorema
Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files i a una matriu escalonada reduïda per files

El **rang** d'una matriu A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A

- Prop. Si A és una matriu $m \times n$, aleshores $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$

Aplicació al càlcul de la inversa (I)

Lema
Si E és una matriu elemental, aleshores E és invertible i la seva inversa E^{-1} també és una matriu elemental

Comprovació:

(I) Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files i i j), tenim $BB = I$ $\quad P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

(II) Si C_λ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$ $\quad (M_i(\lambda))^{-1} = M_i(1/\lambda)$

(II) Si D_k és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila i la fila j multiplicada per k), tenim $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$ $\quad (S_{ij}(\lambda))^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

Exemple de matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ té rang 4 perquè hi ha 4 files no nul·les.

Exemple de matriu escalonada equivalent i càlcul del rang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

permutem files 1 i 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{cases} 2^a := 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a := 3^a + 2 \cdot 1^a \\ 4^a := 4^a - 5 \cdot 1^a \end{cases}$$

permutem files
$2^a := 4^a$
$3^a := 2^a$
$4^a := 3^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 43 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 52 & -3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 1 & -3/52 & 14/52 \end{pmatrix}$$

$3^a := 3^a - 4 \cdot 2^a$
$4^a := 4^a - 4 \cdot 2^a$

$3^a := \frac{1}{43} \cdot 3^a$
$4^a := \frac{1}{52} 4^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & -233/2236 & -230/2236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 230/233 \end{pmatrix} = B$$

$4^a := 4^a - 3^a$

$4^a := -2236/233 \times 4^a$

- B és una matriu escalonada per files equivalent a A.
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4$, ja que B té 4 files no nul·les

EXEMPLES:

$$\begin{array}{lcc}
 & A & A^{-1} \\
\text{I)} \quad P_{3,6}= & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = P_{3,6} \\
\text{II)} \quad M_3(4)= & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1/4&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = M_3(1/4) \\
\text{III)} \quad S_{6,3}(5)= & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&5&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&-5&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = S_{6,3}(-5)
\end{array}$$

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Corol·lari

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si el rang d'A és n

Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

si $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$, aleshores $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar A^{-1}, si existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{-1} = B$
- Altrament, A no és invertible

$$\underset{1^a = 1^a - 2^a}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -26&17&-6&22\\ 20&-13&5&-17\\ 2&-1&0&-1\\ -5&3&-1&4 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Per tant, A és invertible i:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -26&17&-6&22\\ 20&-13&5&-17\\ 2&-1&0&-1\\ -5&3&-1&4 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2ª := 2ª − 1ª
3ª := 3ª − 2·1ª
4ª := 4ª − 1ª

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

2ª := (−1)×2ª

3ª := 3ª − 2ª
4ª := 4ª − 2ª

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & +1 & +3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

permutem les files 3 i 4 i les multipliquem per −1

4ª := 4ª + (−4)·3ª

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 26 & -16 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 & -13 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

1ª := 1ª + 4ª
2ª := 2ª − 5·4ª

1ª := 1ª − 3ª
2ª := 2ª − 3·3ª

Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \ldots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solució
- compatible indeterminat si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

Exemple. Matriu associada al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 3x + 3y - \frac{1}{2}z = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -1/2 & 2 \end{array}\right)$$

$A \qquad b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b}$$

sistema expressat de forma matricial.

Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

reduïda: hi ha zeros damunt dels pivots (és a dir, a la columna del pivot, els elements diferents del pivot són tots zeros)

Sistemes escalonats

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \dots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \dots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

$$\left\{\begin{array}{l} \#\ \text{variables principals} = \operatorname{rang} A = r \\ \#\ \text{variables lliures} = n - \operatorname{rang} A = n - r \end{array}\right.$$

Exemple.

Si tenim una matriu reduïda equivalent, el sistema té les mateixes solucions que el sistema que correspon a aquesta matriu reduïda equivalent i per a donar el conjunt de totes les solucions podem aïllar directament les variables principals (les que corresponen a les columnes dels pivots) i donar-les en funció de les variables lliures (la resta de variables):

variables principals

variables lliures

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ (A|b) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

SOLUCIONS:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - 3x_5 + 2x_6 + 4 \\ x_3 = x_5 - 4x_6 + 5 \\ x_4 = -5x_5 + x_6 + 2 \end{array} \quad , \ x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{K}}$$

Exemple.

Si el sistema és equivalent a un sistema amb matriu reduïda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

aleshores no té solució perquè la quarta equació equival a:

$$\underbrace{0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5+0x_6}_{0} = 3$$

que no es compleix mai!

Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$

Sigui r el rang d'A i sigui r' el rang de $(A|b)$

Aleshores,

$r \neq r'$:
- si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI)

$r = r'$
- si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD)
- si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat

Anomenarem rang d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{aligned}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1}\begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$)

Corol·lari

Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables; sigui r el rang d'A. Aleshores

- si $r = n$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Solucions. La solució és única, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = 3 \neq 4 = \mathrm{rang}(A|b) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 =$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 3 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.
x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ 2 + x_5 - 5x_6 \\ 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

Exemple 4. Sistema homogeni

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 =$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= x_5 - 5x_6 \qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 4 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 = x_5 - 5x_6 \\ x_4 = 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{cases} \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ x_5 - 5x_6 \\ -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

EXEMPLE DE DISCUSSIÓ DE SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \qquad \text{en } \mathbb{R}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu equivalent escalonada

$\Leftarrow$ permutem les files 1ª i 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$\begin{cases} 2^a := 2^a - 1^a \\ 3^a := 3^a - a \cdot 1^a \end{cases}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a + 2^a$

$ab - b = 0 \Leftrightarrow (a-1)b = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ o } b = 0$

$\boxed{\text{CAS } b=0}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -a \end{array}\right) \sim$$

$2 - a - a^2 = (a+2)(1-a)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+(a+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a \cdot (a+2)$

$rg A < rg A' \Rightarrow$ S. Incompatible

- si $1-a \neq 0$: $rg A = 2 < 3 = rg A'$
- si $1-a = 0$: $rg A = 1 < 2 = rg A'$

$\boxed{\text{cas } b \neq 0}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

CASOS

$\boxed{a=1}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a$ $\qquad rg A = 1$

i $\begin{cases} rg A' = 1, \text{ si } b = 1 \\ rg A' = 2, \text{ si } b \neq 1 \end{cases}$

Per tant:

- $\boxed{b \neq 1}$: S. Incompatible
- $\boxed{b = 1}$: S.C. amb 2 graus de llibertat

$2 = \underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{1}_{rgA = rgA' = 1}$

$\boxed{a \neq 1}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & b-a \end{array}\right)$$

$(a-1)b \neq 0$ $\qquad (1-a) \neq 0$ $\qquad (a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -2$

Casos:

$\boxed{a=-2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right)$

- $\boxed{b=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $rg A = rg A' = 2 \Rightarrow$ S.C.I amb $\underset{\underset{\underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{2}_{rgA = rgA' = 2}}{\shortparallel}}{1}$ grau de llibertat

- $\boxed{b\neq -2}$: $\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{rg A} \neq \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{rg A'} \Rightarrow$ S.I

$\boxed{a\neq -2}$ $rg A = \underset{\underset{\#\text{variables}}{\shortparallel}}{3} = rg A' \Rightarrow$ S.C.D

RESUM DE CASOS:

- $b=0$: S.I.
- $b\neq 0$
  - $a=1$
    - $b\neq 1$: S.I.
    - $b=1$: S.C.I. amb 2 graus de llibertat
  - $a\neq 1$
    - $a=-2$
      - $b=-2$: S.C.I amb 1 grau de llibertat
      - $b\neq -2$: S.I.
    - $a\neq -2$: S.C.D.

Es pot comprovar que és equivalent a:

- $a=1$
  - $b=1$: S.C.I.
  - $b\neq 1$: S.I
- $a=-2$
  - $b=-2$: S.C.I
  - $b\neq -2$: S.I
- $a\neq 1,-2$
  - $b=0$: S.I.
  - $b\neq 0$: S.C.D.

Definició de determinant

Sigui $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un **menor d'$A$** és qualsevol matriu formada a partir d'A eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes

El **menor associat a l'element a_{ij}** és la matriu A_{ij} obtinguda en eliminar la fila i i la columna j de la matriu A.
El menor A_{ij} és una matriu quadrada de tipus $(n-1)\times(n-1)$

El **determinant d'A** es defineix recursivament com

- si $n=1$, aleshores $\det(A)=a_{11}$
- si $n\geq 2$, aleshores

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + \\ &\quad (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})\end{aligned}$$

L'**adjunt de l'element a_{ij}** és $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

Càlcul de determinants

(Enlloc de $\det(A)$, a vegades escriurem $|A|$)

- Matrius 2×2 i 3×3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = a\det((d)) - b\det((c)) = ad-bc$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h\end{vmatrix} \\ &= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg) \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi\end{aligned}$$

- Es demostren per inducció:
  Si A té una fila o una columna nul·la llavors $\det(A)=0$
  Si $A=Diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, llavors $\det(A)=a_1a_2\ldots a_n$

Teorema
Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $i, j \in [n]$. Aleshores

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la fila i)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la columna j)

Determinants i transformacions elementals

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si B és la matriu que s'obté d'A

- intercanviant dues files, aleshores $\det(B) = -\det(A)$ (transformació tipus (I))
- multiplicant la fila i-èsima d'A per λ, aleshores $\det(B) = \lambda \det(A)$ (transformació tipus (II))
- sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores $\det(B) = \det(A)$ (transformació tipus (III))

Corol·lari
Si M s'obté a partir d'A fent transformacions elementals,

$$\det(M) = K \det(A), \qquad \text{on } K \neq 0$$

Per tant, si A i M són matrius equivalents aleshores,

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(M) \neq 0$$

Caracterització de matrius invertibles

Teorema
Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$

Corol·lari
Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té rang n si i només si $\det(A) \neq 0$

Teorema
Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rang d'$A$ és r si i només si el més gran menor d'A amb determinant no nul és $r \times r$

Determinants i operacions amb matrius

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$
- si A és invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Però en general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n \right\}$$

Siguin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són "component a component")

Propietats

La suma a $\mathbb{R}^n$ satisfà les propietats següents:

- s1) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- s2) (commutativa) $x + y = y + x$
- s3) (element neutre) $x + \mathbf{0} = x$ on $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$
- s4) (element oposats) per tot x existeix x' tal que $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a $\mathbb{R}^n$ satisfà:

- p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- p3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- p4) $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a $\mathbb{R}$ i les operacions són component a component)

6.2 Espais vectorials

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \dots$

Un **espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$** consisteix en

1. un conjunt no buit E
2. una operació interna $E \times E \to E$ (*suma* $+$) i
3. una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (*producte per escalars* $\cdot$)

de manera que per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es satisfà:

- e1) *(associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$
- e2) *(commutativa)* $u + v = v + u$
- e3) *(element neutre)* existeix un únic element $\mathbf{0}_E \in E$ tal que $u + \mathbf{0}_E = u$
- e4) *(element oposat)* per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = \mathbf{0}_E$
- e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$
- e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$

{ Elements d'E : "vectors"
{ Elements de $\mathbb{K}$: "escalars"

E e.v. sobre $\mathbb{K}$:

4 operacions { + d'escalars, · d'escalars } $\mathbb{K}$; { + de vectors, · escalar/vector }

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

prod escalar/vector — prod escalar/escalar

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

suma vectors — suma vectors

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

suma escalars — suma vectors

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Si $u_1, \ldots, u_k \in E$, $((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per **columnes** les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B.

(1) $v \in < u_1, \ldots, u_k > \Leftrightarrow$
$\operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) = \operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (v)_B)$.

(2) v és pot expressar com a C.L. dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ d'almenys dues maneres diferents $\Leftrightarrow$
$\operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B, (v)_B) = \operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) < k$.

(3) $u_1, \ldots, u_k$ són L.I. $\Leftrightarrow \operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) = k$.

(4) $u_1, \ldots, u_k$ són L.D. $\Leftrightarrow \operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) < k$.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

(5) $\{u_1, \ldots, u_n\}$ és base de $E \Leftrightarrow \operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) = n \Leftrightarrow$ $\det((u_1)_B, \ldots, (u_n)_B) \neq 0$.

(6) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ existeix una base de E que conté $u_1, \ldots, u_k$.
Vegeu les pàgines 7 i 8.

(7) $u_1, \ldots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ es pot completar amb $n-k$ vectors adequats d'una base qualsevol fins una base de E.
Vegeu les pàgines 7 i 8.

Subespais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

Maneres de donar un subespai F de E:

(a) $F = < u_1, \ldots, u_k >$.
(b) Base de F: $B_F = \{v_1, \ldots, v_r\}$.
(c) Com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb variables $x_1, \ldots, x_n$.

Base i dimensió en cada cas:

(a) Vegeu les pàgines 5 i 6.
(b) Ens donen. La dimensió d'F és $|B_F|$.
(c) La dimensió d'F és el nombre de graus de llibertat del sistema. Base: la trobem a partir de l'expressió de la solució en forma paramètrica.

Com expressar un subespai F de dimensió r com a solució d'un sistema homogeni coneguda una base $B_F = \{v_1, \ldots, v_r\}$ d'F:
imposem que $\operatorname{rang}((v_1)_B, \ldots (v_r)_B, (x)_B) = r$,
on $(x)_B = (x_1, \ldots, x_n)$ és un vector genèric d'E.

Base i dimensió d'un subespai (Mètode I)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
$F = < u_1, \ldots, u_k >$, on $u_1, \ldots, u_k \in E$
$A = ((u_1)_B, \ldots, (u_k)_B) \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{K})$

- $\dim F = \operatorname{rang} A$.
- Una base d'F formada per vectors de $u_1, \ldots, u_k$:
  prenem els vectors de $u_1, \ldots, u_k$ corresponents a les columnes dels pivots d'una matriu escalonada equivalent a A per files (o sigui, u_i és d'aquesta base si i només si a la columna i de la matriu escalonada hi ha un pivot).

  A més, si tenim la matriu escalonada **reduïda** equivalent a A per files (a la columna del pivot només hi ha un 1 i la resta són 0's), a les columnes que no corresponen als pivots tenim els coeficients del vector corresponent com a combinació lineal lineal de la base donada.

Base i dimensió d'un subespai (Mètode II)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E
$F = < u_1, \dots, u_k >$, on $u_1, \dots, u_k \in E$.

Considerem la matriu $A' = \begin{pmatrix} (u_1)_B \\ \vdots \\ (u_k)_B \end{pmatrix}$ que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B.

- $\dim F = \operatorname{rang} A'$;
- una base d'F està formada pels vectors fila no nuls d'una matriu escalonada equivalent a A' per files.

Observació. En general, si dues matrius són equivalents per files, els vectors vectors fila de les dues generen el mateix subespai.

Completar bases de subespais

E espai vectorial de dimensió n, B base d'E
F subespai d'E de dimensió r, $\{u_1, \dots, u_r\}$ base d'F
Volem trobar una base d'E que contingui els vectors $\{u_1, \dots, u_r\}$

- **Mètode I.** Busquem $n - r$ vectors $w_1, \dots, w_{n-r}$, de la base B tals que $\operatorname{rang}((u_1)_B, \dots, (u_r)_B, (w_1)_B, \dots, (w_{n-r})_B) = n$ (a ull i anar provant!)
- **Mètode II.** Si A' és la matriu que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B, fem transformacions elementals per files fins una matriu escalonada equivalent (amb els pivots no necessàriament iguals a 1). Les files no nules formen una base d'F i podem completar amb els vectors fila que tenen totes les coordenades iguals a 0 excepte una única coordenada igual a 1 en les columnes que no corresponen als pivots de la matriu escalonada.

Exemple. Si al posar per files els 4 vectors que generen un subespai F de $\mathbb{R}^6$ arribem a la matriu equivalent de l'esquerra, una base d'F està formada per les 3 files no nul·les i la podem completar amb els 3(=6-3) vectors fila de la base canònica que tenen l'1 a les columnes on no hi ha pivots (en vermell):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Inclusió de subespais

$F = < u_1, \dots, u_r >$, $G = < v_1, \dots, v_s >$ subespais d'E

- $F \subseteq G \Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G$
- $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G$ i $G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G$ i $v_1, \dots, v_s \in F$
- Si $\dim F = \dim G$:
  $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \Leftrightarrow G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \dots, u_r \in G \Leftrightarrow v_1, \dots, v_s \in F$

Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ ($(1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S'$)

Combinació lineal

Donats $u_1, \dots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$** és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

on $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \dots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

- $S \cap S' \neq \emptyset$:

  S, S' subespais d'E $\Rightarrow \begin{cases} 0_E \in S \\ 0_E \in S' \end{cases} \Rightarrow 0_E \in S \cap S' \Rightarrow S \cap S' \neq \emptyset$

- $u, v \in S \cap S' \Rightarrow u + v \in S \cap S'$:

  S és subespai d'E

  $$\left.\begin{array}{l} u \in S\cap S' \Rightarrow \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \Rightarrow u+v \in S \\ v \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} v \in S \\ v \in S' \end{cases} \Rightarrow u+v \in S' \end{array}\right\} \Rightarrow u+v \in S \cap S'$$

  S' és subespai d'E

- $\lambda \in \mathbb{K},\ u \in S \cap S' \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$:

  S subespai d'E

  $$\left.\begin{array}{l} u \in S,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S \\ u \in S',\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$$

  S' subespai

Subespai generat

Siguin $u_1, \dots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \dots, u_k$ és el conjunt

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \dots, u_k$

Proposició
El subespai generat $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \dots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \dots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} =$
  $= \{x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
  $= \langle (1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1) \rangle$

  En general, el conjunt de generadors d'un subespai no és únic. P.e., es pot demostrar que:

  $$\mathbb{R}^3 \begin{cases} = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle \\ = \langle (1,1,0), (1,0,0), (1,1,1) \rangle \\ = \langle (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,2,3), (4,5,6) \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$
  $= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$
  $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $P_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\} =$
  $= \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\}$
  $= \langle 1, x, \dots, x^d \rangle$

Exemples:

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & c \\ d & c-a & b+2c\end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}\subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$
  Demostreu que S és subespai de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 2c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0\end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, S és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$

i $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 2a-3b \\ a+b+c\end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$
  Demostreu que S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -3b \\ b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\{\alpha+(\alpha+\beta)x+(\alpha-2\beta)x^2+(2\alpha+\beta)x^3 : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subseteq P_3(\mathbb{R})$
  Demostreu que S és subespai de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\alpha(1+x+x^2+2x^3)+\beta(x-2x^2+x^3) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\langle 1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\rangle$$

Per tant, S és subespai de $P_3(\mathbb{R})$ i $\{1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\left\{\text{solucions del sistema homogeni } \begin{cases} x=2y-t \\ z=3t\end{cases}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$
  Sabem que S és subespai de $\mathbb{R}^4$. Doneu un conjunt generador de S.

Resolem el sistema i donem les solucions de forma paramètrica:

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ \hline 1 & -2 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}}_{\text{rg}A=2}$$

variables principals: x, z ; variables lliures: y, t

$$\begin{cases} x=2y-t \\ z=3t\end{cases}\quad y,z\in\mathbb{R}$$

Solucions:

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t\end{pmatrix} : \begin{matrix} x=2y-t \\ z=3t\end{matrix}, y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2y-t \\ y \\ 3t \\ t\end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1\end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1\end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

OBSERVACIONS:

- En general, un subespai té més d'un conjunt generador.
  P.e: es pot demostrar que:

$$\mathbb{R}^3=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3\end{pmatrix}\right\rangle$$

- Si un vector es pot expressar com a combinació lineal d'uns altres, la forma d'expressar-lo com a combinació lineal d'aquests vectors no és necessàriament única.
  P.e.: $(5,-1,-4)$ es pot expressar com a combinació lineal de $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$ d'almenys dues maneres diferents:

$$(5,-1,-4)=\begin{cases} 3\cdot(1,-1,0)+2\cdot(0,1,-1)+2(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0)+3\cdot(0,1,-1)+1\cdot(1,0,-1)\end{cases}$$

- No sempre es pot expressar un vector com a combinació lineal d'un conjunt de vectors donats.
  P.e. $(1,1,0)$ no és c.l. de $(0,0,1)$ i $(1,0,0)$, ja que les combinacions lineals d'aquest vectors són els vectors de la forma $\{a(0,0,1)+b(1,0,0) : a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,0,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$
  és a dir, la segona component és sempre 0, cosa que no compleix el vector $(1,1,0)$.

- Combinacions lineals de $u_1,\dots,u_r\in E$:
  $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r$, $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}$
- Subespai generat per $u_1,\dots,u_r$:
  $\langle u_1,\dots,u_r\rangle=\{\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r : \alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}\}$

- Si $v\in\langle u_1,\dots,u_r\rangle$ aleshores
  $\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}$, $v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r$
  però en general $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ no són únics
  p.e:

$$(5,-1,-4)=\begin{cases} 3\cdot(1,-1,0)+2\cdot(0,1,-1)+2\cdot(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0)+3\cdot(0,1,-1)+1\cdot(1,0,-1)\end{cases}$$

6.4 Independència lineal

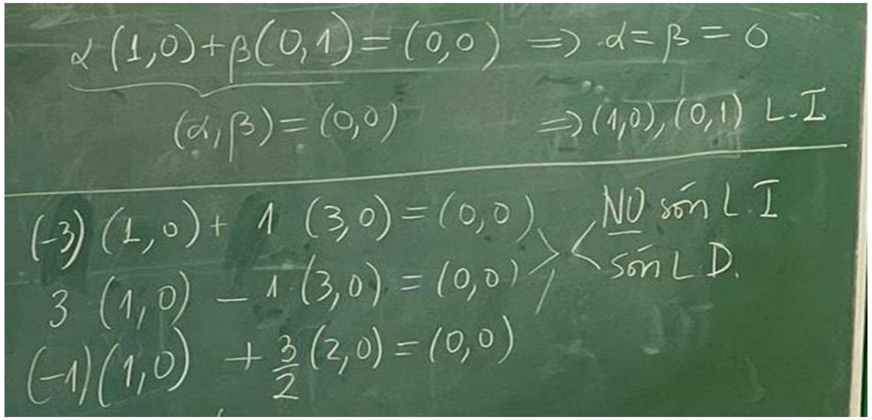
Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \dots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \dots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)



En general, per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és
- compatible determinat els vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ són LI
- compatible indeterminat els vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ són LD

Per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents seguim els passos següents:

(1) formem una matriu A amb els vectors donats, posant-los per columnes

(2) calculem el rang r d'A

(3)
- si $r = k$, aleshores els k vectors són LI
- si $r < k$, aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu A, aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que correspondent a les columnes del menor d'A més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

$$\boxed{u_1, u_2, \dots, u_k \text{ L.I.} \iff rg(u_1, \dots, u_k) = k}$$

Exemples:

(1) $$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}} \quad \mathbb{R}^3$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incòg.

L.I. $\iff$ S.C. Det. $\iff rg A = 3$ (= # incog.)
L.D. $\iff$ S.C. Indet $\iff rg A < 3$ (= # incog.)

$$\text{on } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg A = 2 < 3 \Rightarrow$ L.D.

(2) $$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}} \quad \mathbb{R}^3$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incòg.

L.I. $\iff$ S.C. Det. $\iff rg A = 3$ (= # incòg)
L.D. $\iff$ S.C. Indet. $\iff rg A < 3$ (= # incòg)

$$\text{on } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$rg A = 3 \Rightarrow$ S.C.D : només té la solució trivial $x=y=z=0$
$\Rightarrow$ són L.I.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

Casos:

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

(b) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \dots, u_s\}$.

(c) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat coma solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

Resoldre el sistema format per les equacions d'F i de G.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(b) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \dots, u_s\}$.

- $w \in F \cap G \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$.
- Resolem el sistema amb n equacions i les $r + s$ incògnites $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ que prové de la igualtat: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ (o bé substituïm les solucions obtingudes per a $\beta_1, \dots, \beta_s$ en $w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$).

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(c) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

- $w \in F \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.
- A partir de la igualtat anterior, substituïm les n coordenades de w (en funció de les α_i's) en el sistema que defineix G.
- Resolem el sistema obtingut amb n equacions i les r incògnites $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.

Canvis de base

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n;

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B'\{b'_1, \dots, b'_n\}$ bases d'E;

$u \in E$. Relació entre $(u)_B$ i $(u)_{B'}$:

- Matriu de canvi de base de B a B': $P_{B'}^{B} = ((b_1)_{B'}, \dots, (b_n)_{B'})$
- $(u)_{B'} = P_{B'}^{B}\ (u)_B$

- Matriu de canvi de base de B' a B: $P_{B}^{B'} = ((b'_1)_B, \dots, (b'_n)_B)$
- $(u)_B = P_{B}^{B'}\ (u)_{B'}$

- $P_{B}^{B'} = (P_{B'}^{B})^{-1}$

- $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E:

  $P_{B_r}^{B_1} = P_{B_r}^{B_{r-1}} P_{B_{r-1}}^{B_{r-2}} \dots P_{B_3}^{B_2} P_{B_2}^{B_1}$

MÈTODE PER TROBAR EL MÀXIM # DE VECTORS L.I D'UN CONJUNT DE VECTORS DE $\mathbb{R}^n$

- Posem els vectors per columnes $\rightsquigarrow A = (u_1, \dots, u_k)$

- B matriu reduïda equivalent a A per files
  - el conjunt S de vectors de les columnes dels pivots són L.I.
  - a la resta de columnes tenim els coeficients del vector corresponent com a C.L. dels vectors de S

P.e.: $\{u_1, \dots, u_6\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim \cdots \sim}_{\text{transf. elementals files}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$
- $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ són L.I.
- $u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$
- $u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5$

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'E

(1) **Proposició**
Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

(2) **Proposició**
Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

(3) **Corol·lari**
Tota base d'E té n elements

$v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \iff$
$\iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tq. $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k v_k$

discutir un sistema d'equacions lineals

p.e: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = W$

Plantegem l'equació:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)}_{A'}$$

(the first three columns form A)

té solució $\iff$
$\iff$ rg A = rg A'

Comprovem si té solució:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rg A = rg A' = 3 $\Rightarrow$ té solució

$\Rightarrow \boxed{v \in W}$

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ és una **base d'E** si
(b1) B és linealment independent
(b2) $E = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \dots, b_n$ generen E

La **base canònica**
- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$
(també a $\{x^d, x^{d-1}, \dots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

$\rightarrow P_d(\mathbb{K})$

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d'E és n i sigui $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunt d'E

- si W és un conjunt LI, aleshores W és una base d'E
- si W genera E, aleshores W és una base d'E

Si S és un subespai d'E aleshores

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

ATENCIÓ!

E e.v., S_1, S_2 subespais d'E

- $\dim S_1 = \dim S_2 \not\Rightarrow S_1 = S_2$
- $S_1 \subseteq S_2$ i $\dim S_1 = \dim S_2 \Rightarrow S_1 = S_2$

E espai vectorial de dimensió n:

- n és el màxim nombre de vectors L.I. que podem trobar a E
- n és el mínim nombre de vectors que calen per generar E

és a dir, $S \subseteq E$:

$$\begin{cases} S \text{ L.I.} \Rightarrow |S| \leq n \\ \langle S\rangle = E \Rightarrow |S| \geq n \end{cases}$$

Si $\dim E = n$:

$$B \subseteq E \begin{cases} \text{L.I.} \\ \langle B\rangle = E \\ |B| = n \end{cases}$$

dues d'aquestes condicions impliquen la tercera

L.I., $\langle B\rangle = E$

L.I., $|B| = n$ $\iff$ $\langle B\rangle = E$, $|B| = n$

Exemple 1. $\mathbb{R}^2$

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\}$. Coordenades de $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{u}$ en la base B ?

$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ base canònica

conec: $\underset{!}{(u)_C}$ volem: $\underset{?}{(u)_B}$

Matriu de canvi de base:

conec B en base C: $P_C^B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}$

$$\underset{!}{P_C^B}\cdot\underset{?}{(u)_B}=\underset{!}{(u)_C}$$

conec:

$$\boxed{(u)_B}=(P_C^B)^{-1}\cdot(u)_C$$
$$=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}}$$

Exemple 2. $P_2(\mathbb{R})$

$B=\{2-2x+x^2,\ 1-x,\ 2-2x^2\}$. Expressem $\underbrace{x+2x^2}_{p}$ en la base B.

$C=\{1,x,x^2\}$ ⇝ base canònica.

Conec: $P_C^B=\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}$, $\underset{!}{P_C^B}\,\underset{?}{(p)_B}=\underset{!}{(p)_C}$

Conec $(p)_C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Volem: $(p)_B$?

$$P_C^B\,(p)_B=(p)_C\Rightarrow\boxed{(p)_B}=(P_C^B)^{-1}\cdot(p)_C=$$
$$=\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&-1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\dots=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-3&-2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3\\-7\\1/2\end{pmatrix}}$$

Per tant:

$$p=x+2x^2=$$
$$=3\cdot(2-2x+x^2)+(-7)\cdot(1-x)+\tfrac12(2-2x^2)=.$$

Exemple 3. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$. Expressem $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}}_{M}$ en la base B.

$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

Coneixem: $(M)_C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

volem: $(M)_B=?$

conec: $P_C^B=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

$$\underset{!}{P_C^B}\,\underset{?}{(M)_B}=\underset{!}{(M)_C}\Rightarrow\boxed{(M)_B}=(P_C^B)^{-1}\cdot(M)_C=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}4&-2&1&2\\-3&2&-1&-1\\3&-2&1&2\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-5\\4\\-6\\3\end{pmatrix}}$$

Per tant:

$$M=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=(-5)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+(-6)\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$$

Exemple 4. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$, $(u)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculeu $(u)_{B'}$.

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

conec: $\underbrace{P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^B_C (u)_B = (u)_C}$, $\underbrace{P^{B'}_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}_{P^{B'}_C (u)_{B'} = (u)_C}$

$$P^B_C (u)_B = P^{B'}_C (u)_{B'}$$

Conec: ! ! ! ?

$$\left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = (u)_{B'}$$

$$\Rightarrow \boxed{(u)_{B'}} = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -27 \\ -16 \end{pmatrix}}$$

Hem vist:

B, B', C bases d'E $\Rightarrow$ $P^B_{B'} = P^C_{B'} \cdot P^B_C = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C$

ja que:

$$\left.\begin{array}{l} P^B_C (u)_B = (u)_C \\ P^{B'}_C (u)_{B'} = (u)_C \end{array}\right\} \Rightarrow P^B_C (u)_B = P^{B'}_C (u)_{B'} \Rightarrow \left(P^{B'}_C\right)^{-1} P^B_C (u)_B = (u)_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^B_{B'} = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} P^B_C = P^C_{B'} P^B_C$$

En general:

$B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E $\Rightarrow P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r} P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots P^{B_2}_{B_3} \cdot P^{B_1}_{B_2}$

ja que:

$$P^{B_1}_{B_r} (u)_{B_1} = (u)_{B_r}$$

$$\underbrace{P^{B_{r-1}}_{B_r} \cdot P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots \underbrace{P^{B_2}_{B_3} \cdot \underbrace{P^{B_1}_{B_2} (u)_{B_1}}_{(u)_{B_2}}}_{(u)_{B_3}}}_{(u)_{B_r}} = (u)_{B_r}$$

etc.