Nom:

## Problema 1 (BA)

Segons les dades d'una certa universitat, les estudiantes i els estudiants a dues de les seves facultats (FBI i EMF) estan utilitzant tres sistemes operatius diferents: Finestra (F), Lunix (L) i Pera (P). La taula següent presenta les probabilitats conjuntes corresponents, que són les mateixes entre noies i nois:

| | **F** | **L** | **P** |
|---|---|---|---|
| **FBI** | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
| **EMF** | 0,25 | 0,05 | 0,1 |

**(a)** **(1 punt)**
Calculeu les probabilitats $a$ fins a $h$ del següent arbre. Indiqueu les fórmules necessàries per fer els càlculs.

**Solució:**

- Probabilitats marginals $a$ i $b$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{FBI}) = \mathrm{P}(\mathrm{FBI}, F) + \mathrm{P}(\mathrm{FBI}, L) + \mathrm{P}(\mathrm{FBI}, P) = 0.6 \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{P}(\mathrm{EMF}) = 0.4.$$

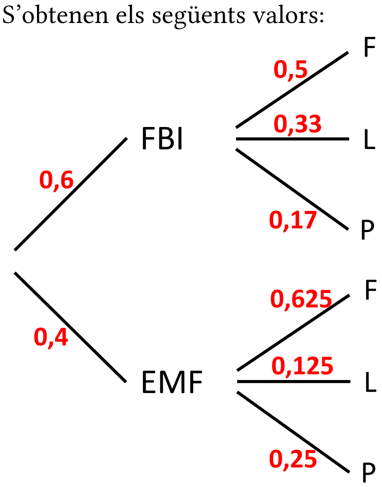
- Càlcul de les probabilitats condicionades $c$ fins a $h$:

$$\mathrm{P}(F|\mathrm{FBI}) = \frac{\mathrm{P}(F, \mathrm{FBI})}{\mathrm{P}(\mathrm{FBI})} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\mathrm{P}(P|\mathrm{EMF}) = \frac{\mathrm{P}(P, \mathrm{EMF})}{\mathrm{P}(\mathrm{EMF})} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25.$$

S'obtenen els següents valors:




**(b)** **(0,5 punts)**
Són independents les variables 'Facultat' i 'Sistema operatiu'? Raoneu la resposta.

**Solució:**
No són independents, perquè les probabilitats condicionades P(SO | FBI) i P(SO | EMF), on SO $\in \{F, L, P\}$, no coincideixen.

**(c)** **(0,75 punts)**
Si una estudianta qualsevol de la universitat no utilitza el sistema operatiu Pera, quina és la probabilitat que sigui de l'FBI?

**Solució:**

$$\mathrm{P}(\mathrm{FBI}|\neg P) = \frac{\mathrm{P}(\neg P \cap \mathrm{FBI})}{\mathrm{P}(\neg P)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625.$$

**(d)** **(1,5 punts)**
Si dos estudiants qualsevols utilitzen el sistema operatiu Finestra, quina és la probabilitat que un sigui de l'FBI i l'altre de l'EMF?

**Solució:**
A la solució següent es té compte que hi dues possibilitats: la primera persona és de l'FBI i la segona de l'EMF o al revés:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1 \times \mathrm{FBI}, 1 \times \mathrm{EMF}|2 \times F) &= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{FBI}, \mathrm{EMF}, 2 \times F)}{\mathrm{P}(2 \times F)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{FBI} \cap F, \mathrm{EMF} \cap F)}{\mathrm{P}(2 \times F)} \\ &= \frac{2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{FBI} \cap F)\mathrm{P}(\mathrm{EMF} \cap F)}{\mathrm{P}(2 \times F)} = \frac{2 \cdot 0.3 \cdot 0.25}{0.55^2} = 0.496.\end{aligned}$$

A les mateixes facultats, s'està utilitzant la plataforma StatusQuo com a eina d'aprenentatge. Definim a continuació les variables $X$: 'Nombre d'exercicis setmanals fets amb StatusQuo' i $Y$: 'Facultat' ($Y = 1$: FBI; $Y = 2$: EMF). La taula a continuació mostra una part de la distribució conjunta d'$X$ i $Y$.

| | ***X*** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| $\boldsymbol{Y = 1}$ **(FBI)** | 0,06 | 0,24 | 0,15 | 0,12 | 0,03 |
| $\boldsymbol{Y = 2}$ **(EMF)** | | | | | |

**(e)** **(1 punt)**
Completeu la taula de les probabilitats conjuntes assumint que hi ha independència entre $X$ i el tipus de facultat. Afegiu-hi també les distribucions marginals. Indiqueu les fórmules necessàries per fer els càlculs.

**Solució:**

- Distribució marginal d'$Y$:

$$\mathrm{P}(Y = 1) = \sum_{x=0}^{4} \mathrm{P}(X = x, Y = 1) = 0.6 \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{P}(Y = 2) = 0.4.$$

- Càlcul de les probabilitats conjuntes per a $Y = 2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X = x, Y = 2) &= \mathrm{P}(X = x|Y = 2) \cdot \mathrm{P}(Y = 2) \\ &\overset{X,Y \text{ indep.}}{=} \mathrm{P}(X = x|Y = 1) \cdot \mathrm{P}(Y = 2) \\ &= \mathrm{P}(X = x, Y = 1)\frac{\mathrm{P}(Y = 2)}{\mathrm{P}(Y = 1)}, \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.\end{aligned}$$

- Distribució marginal d'$X$:

$$\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X = x, Y = 1) + \mathrm{P}(X = x, Y = 2), \quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Nom:

S'obtenen els següents valors:

| | $\boldsymbol{X}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | $\mathrm{P}_{\boldsymbol{Y}}$ |
| $\boldsymbol{Y=1}$ **(FBI)** | 0,06 | 0,24 | 0,15 | 0,12 | 0,03 | **0,6** |
| $\boldsymbol{Y=2}$ **(EMF)** | **0,04** | **0,16** | **0,1** | **0,08** | **0,02** | **0,4** |
| $\mathrm{P}_{\boldsymbol{X}}$ | **0,1** | **0,4** | **0,25** | **0,2** | **0,05** | |

**(f)** **(1 punt)**
Quin és el valor esperat d'$X$ a l'FBI? Doneu una interpretació d'aquest valor.

**Solució:**

$$\mathrm{E}(X|Y=1) = \sum_{k=0}^{4} k \cdot \frac{\mathrm{P}(X=k \cap Y=1)}{\mathrm{P}(Y=1)} = 1.7$$

Després de moltes setmanes, el nombre d'exercicis mitjà serà molt proper a $1.7$.

**(g)** **(1 punt)**
Quina és la mediana d'$X$ a l'FBI? Doneu una interpretació d'aquest valor.

**Solució:**
La mediana és igual a 1, perquè $\frac{\mathrm{P}(X=0 \cap Y=1)}{\mathrm{P}(Y=1)} + \frac{\mathrm{P}(X=1 \cap Y=1)}{\mathrm{P}(Y=1)} = 0.5$. És a dir, la probabilitat que el nombre d'exercicis fets a la setmana (a l'FBI) sigui com a màxim 1 és $0.5$.

**(h)** **(0,5 punts)**
Quin és el valor esperat d'$X$ a l'EMF?

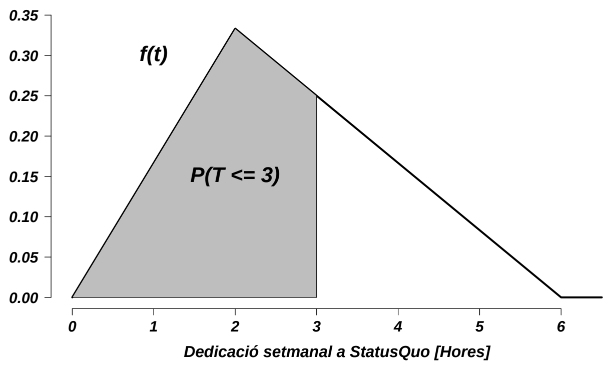
**Solució:**
El valor esperat es el mateix que a l'FBI ($\mathrm{E}(X|Y=2) = 1.7$), perquè $X$ i $Y$ són independents.

A continuació treballem amb la variable $T$, el temps setmanal (en hores) que les estudiantes i els estudiants de la facultat FBI fan servir la plataforma StatusQuo. Segons les dades dels últims anys, la funció de densitat d'aquesta variable és la següent:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/6 \cdot t & 0 \leq t < 2 \\ 1/2 - 1/12 \cdot t & 2 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

**(i)** **(0,75 punts)**
Feu una representació gràfica d'aquesta funció de densitat

**Solució:**



Nom:

**(j)** **(0,75 punts)**
Representeu a la representació gràfica la probabilitat que un estudiant faci servir StatusQuo tres hores o menys per setmana. Quin és el valor d'aquesta probabilitat.

**Solució:**
Trobem la probabilitat descomptant la part de la dreta, que és un triangle, l'àrea del qual es fàcil de trobar geomètricament:

$$\mathrm{P}(T \leq 3) = 1 - \mathrm{P}(T > 3) = 1 - 0.5 \cdot (6 - 3) \cdot f(3) = 0.625.$$

**(k)** **(0,5 punts)**
Si una estudianta es dedica tres hores o menys a la setmana a la plataforma, quina és la probabilitat que s'hi dediqui exactament 2 hores?

**Solució:**

$$\mathrm{P}(T = 2 | T \leq 3) = 0.$$

**(l)** **(0,75 punts)**
Sigui $Z$ la variable 'Setmanes que falten per a l'examen d'estadística'. Si suposem que $T$ canvia en funció d'$Z$, quin signe seria d'esperar que tingués la correlació entre $T$ i $Z$? Per què?

**Solució:**
És d'esperar que quan més prop l'examen (valor de $Z$ petit) més es faci servir la plataforma StatusQuo (valor de $T$ gran). Per tant, el signe de la correlació seria negativa.

NOM:__________________________COGNOM:__________________________________________________

*(Contesteu cada pregunta en el seu lloc. Expliciteu i justifiqueu els càlculs)*

# Problema 2 (B)

Una Universitat molt innovadora ha desenvolupat una plataforma per realitzar una formació online (addicional a les classes estàndard). Els alumnes necessiten únicament un ordinador, connexió a internet i moltes ganes d'aprendre! Per començar la plataforma s'ha dissenyat per a un conjunt de 30 estudiants de diferents titulacions tècniques i se'ls hi ha donat accés a la plataforma i les instruccions per començar a fer-la servir.

Pel conjunt de 30 estudiants, es creu que la probabilitat de fer servir la plataforma és del 30%. Es demana:

1. a) Quina distribució de probabilitat s'adequa al fenomen "Nombre d'estudiants que fan servir la plataforma"? **(0.5 punts).**
b) Quin és el nombre esperat d'alumnes que fan servir la plataforma? **(0.25 punts)**
c) Quina és la desviació tipus del nombre d'estudiants que fan servir la plataforma? **(0.25 punts)**

a) S'anomena N a la VA "Nombre d'estudiants que fan servir la plataforma".
N ~ Bin(30, 0.3)
b) E(N) = n· p = 30 · 0,3 = 9 estudiants.
c) Var(N)= n · p · (1-p) = 9 · 0,7 = 6,3 i $\sigma_N$ = 2.510 estudiants

2. Quina és la probabilitat que facin servir la plataforma entre 4 i 7 alumnes (ambdós extrems no inclosos)? **(1 punt)**

P(4 < N < 7) = P(N≤6) - P(N≤4) = P(N=5) + P(N=6)= 0.0464 + 0.0829 = 0.1293

A partir de l'èxit en l'ús de la plataforma, ara es posa a disposició de tot l'alumnat de la universitat i es permet a l'alumnat valorar amb un "M'agrada" la seva satisfacció.

3. Si s'ha recollit que la probabilitat que un alumne hagi indicat un "M'agrada" ha estat del 25%, quina és la probabilitat d'haver d'esperar 10 usuaris per tenir tres "M'agrada" a la formació? **(1 punt)**

X:"nombre d'alumnes fins a obtenir tres 'M`agrada" en les valoracions de la primera formació" X ~BN(r=3, p=0.25)

Hem de calcular P(X=10) = 0.07508

La nova plataforma disposa d'elements per fer seguiment de l'ús de la mateixa per part dels estudiants, podent accedir al temps d'ús i a les activitats visualitzades. Se sap que de mitjana, hi ha 5 accessos diaris d'estudiants a la plataforma:

4. a) Quina és la probabilitat que un dia facin servir la plataforma 5 estudiants? (assumiu un accés cadascú) **(0.5 punts)**

S'anomena P a la VA "Nombre d'estudiants que fan servir la plataforma en un dia".
P ~ Poiss(5)
P(P=5) = $\frac{5^5 \cdot e^{-5}}{5!}$ = 0.1754

b) Quina és la probabilitat que en una setmana es registrin 20 accessos a la plataforma? **(0.5 punts)**

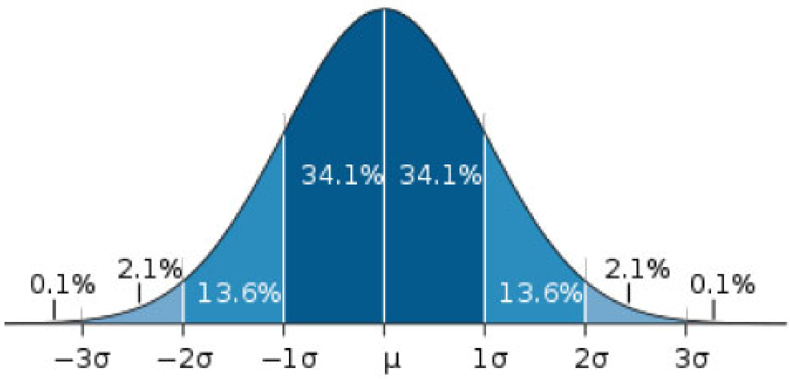
S'anomena P7 a la VA "Nombre d'estudiants que fan servir la plataforma en una setmana".
P7 ~ Poiss(35)
P(P7= 20) = 0.0020

5. a) Considerem ara el temps, en dies, entre l'entrada dels estudiants a la plataforma. Quin és el model de probabilitat que modelitza aquest fenomen i indica quin és el temps esperat (en hores) entre entrades dels estudiants a la plataforma. **(0.25 punts)**
T~exp(5), temps esperat: 0.2 dies = 4.8 hores
b) Quina és la probabilitat que en 12 hores no hagi entrat cap estudiant a la plataforma? **(0.5 punts)**
P(T > 0.5) = 1- (1 – $e^{-5 \cdot 0.5}$ ) = 0 .0821

c) Quin és el temps d'espera entre dues entrades successives a la plataforma que es complirà amb una garantia d'un 80% de probabilitat? **(0.75 punts)**

$P(T > t_{0.8})=0.8$ . Calculem $e^{-5t} = 0.8$ ; $-5t = \ln(0.8)$ ; $t= -1/5\cdot \ln(0.8) = 0.0446$. Per tant, ens cal esperar 0.0446 dies, és a dir 1 hora i 4 minuts

Es vol estudiar el temps de permanència dels estudiants a la plataforma. En un grup de 30 estudiants i un cop els estudiants estan dins la plataforma, sabem que el temps de permanència és independent dels uns als altres i que segueix una distribució normal de mitjana una hora i de desviació típica de 10 minuts.




*Model Normal amb mitjana μ i desviació σ*

6.a) Quina és la probabilitat que un estudiant estigui com a mínim una hora fent servir la plataforma? **(0.25 punts)**
b) Quina és la probabilitat que un estudiant estigui 50 minuts com a molt fent servir la plataforma? **(0.25 punts)**
c) Quina és la probabilitat que un estudiant estigui entre 40 i 50 minuts fent servir la plataforma? **(0.5 punts)**
[Observació: per calcular aquestes probabilitat podeu emprar la calculadora o el gràfic anterior]

S'anomena TP a la VA "Temps de permanència dels estudiants dins de la plataforma" i se sap que $TP \sim N(60,10)$
$P(TP > 60) = 0.5$
$P(TP < 50) = 0.159$
$P(40 < TP < 50) = P(TP < 50) - P(TP < 40) = 0.1587 - 0.0228 = 0.1359$

7.a) Es vol calcular la probabilitat que els 30 estudiants estiguin un cert nombre d'hores fent servir la plataforma un cop hi entren. Indica la distribució de la VA que ens permetrà estudiar aquest fenomen. **(0,5 punts)**

Aplicant el TCL, es té que: $S_{30} \sim N(30\cdot 60,\ 10\cdot \sqrt{30})$

b) Fes una estimació i argumenta quina és la probabilitat que els 30 estudiants estiguin més de 40 hores utilitzant la plataforma. **(0,5 punts)**

S'ha de calcular, $P(S_{30} > 2400) = 1- P(S_{30} < 2400)$. Observem que la mitjana de la distribució és 1800 minuts i la desviació unes 55 minuts (54,77) per tant, $1800 + 10 \cdot 55 < 2400 < 1800 + 11 \cdot 55$ que implica una probabilitat propera a 1 i per tant, $P(S_{30} > 2400)$ serà molt propera a 0.

c) Calcula la probabilitat que els 30 estudiants estiguin més de 31 hores i mitja utilitzant la plataforma **(1 punt)**

S'ha de calcular, $P(S_{30} > 1890) = 1- P(S_{30} < 1890)$.
$P(S_{30} < 1890) = P(Z < (1890 - 1800)/54,77) = P(Z < 1.64)$
Aproximadament, $P(Z<1.64) \approx (P(Z<1.5)+P(Z<1.8))/2 = (0.933+0.964)/2 = 0.9485$
Finalment: $P(S_{30} > 31.5h) \approx$ **0.0515** (la solució exacta és 0.050174)

8. La puntuació obtinguda amb els exercicis és un valor entre 0 i 10, però es pot modelar amb una distribució Normal. El 30% dels alumnes (una *suposada població infinita* d'alumnes) no arriba a 4.5, i 1 de cada 5 aconsegueix una puntuació superior a 7.5. Quin és el valor de la puntuació mitjana? I el de la desviació tipus? **(1.5 punts)**

Considerem la VA Y: "puntuació dels exercicis de la plataforma" i que $Y \sim N(\mu,\sigma)$.
Aleshores es té que $P(Y<4.5) = 0.3$ i que $P(Y>7.5) = 0.2$
Per poder emprar les dades de la taula, ens cal estandarditzar. Considerant $Z \sim N(0,1)$, s'obté que:
$P(Y<4.5) = 0.3$; $P(Z < (4.5- \mu)/ \sigma ) = 0.3$; I per tant, $(4.5- \mu)/ \sigma = -0.524$ [Com que qnorm(0,70) = 0.524, per la simetria de la normal estandarditzada se sap que qnorm(1–0,70) = –0.524]
De manera semblant, es té que:
Com que $P(Y>7.5) = 1/5 = 0.2$, es dedueix que $P(Y<7.5) = 0.8$ i estandarditzant:
$P(Z < (7.5- \mu)/ \sigma ) = 0.8$, es té que $(7.5- \mu)/ \sigma = 0.842$ (qnorm(0.8))
Ara cal resoldre el sistema

$$\begin{cases} 4,5 = \mu - 0.524\sigma \\ 7,5 = \mu + 0.842\sigma \end{cases}$$

Del que es dedueix que els valors demanats són **μ =5,65** i **σ = 2,196**