



# Bases de l'estadística

Bloc C – Probabilitat i Estadística  
2023

# Índex

1. Inferència. Introducció i conceptes bàsics. Paràmetres
2. Estimació puntual. Estimadors
  - a. Estadística Descriptiva Uni- i Bi-variant
3. Estimació per Interval de Confiança (IC)
  - a. Estadístics.
  - b. Confiança i risc
  - c. Premisses
4. Estimació per IC d'un paràmetre
  - a. IC de  $\mu$  (Cas de  $\sigma$  coneguda i) cas de  $\sigma$  desconeguda
  - b. IC de  $\pi$
  - c. IC de  $\sigma$
5. Estimació per IC de la comparació de 2 paràmetres
  - a. IC de  $\mu_1 - \mu_2$  Cas de mostres aparellades
  - b. IC de  $\mu_1 - \mu_2$  Cas de mostres independents
  - c. IC de  $\pi_1 - \pi_2$  Cas de mostres independents
  - d. IC de  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$  Cas de mostres independents
6. Dissenys (com obtenim les dades)
7. Funcions en R per a IC

# 1. Inferència estadística.

- Hem d'aportar evidència basada en dades  
per exemple, dir *el meu programa funciona* requereix proves/dades
- De forma **reproducible**: només resultats predictibles tenen interès  
per exemple, una curació **miraculosa** no serà útil per futurs pacients
- I **transparent**  
per permetre la seva replicació per a altres
- **Inferim** les característiques de la **població** a partir de les observacions d'una **mostra aleatòria (m.a.)**  
per exemple, puc inferir la velocitat de connexió a tota la població a partir d'una mostra aleatòria de velocitats



# 1. Inferència estadística. Riscos

- Mètode científic i tècnic (estadístic):
  - per **deducció** → disseny de la recollida de dades (Població → m.a.)
  - per **inducció** → inferir (estimar) resultats (m.a. → Població)
- La Inferència Estadística defineix i **quantifica els riscos** d'aquest procés [per exemple, no es pot conèixer la mitjana de la vel. de connexió a tota la població a no ser que es tingui dades de tota la població, però l'estadística permet estimar i **quantificar l'error** a partir d'una **mostra a l'atzar** concreta]
- L'**evidència** aportada per les **dades** termina amb l'**anàlisi**, com per **exemple:**
  - “El meu programa funciona bé”
    - estimar una mesura (ex: **mitjana** del rendiment) i **el seu error**
  - “El meu programa millora els resultats de ...”
    - estimar la millora de rendiment (ex: **diferència mitjanes**) i **el seu error**

# 1. Inferència estadística. Tipus de variables

Per analitzar la relació entre variables, cal establir el paper de cadascuna d'elles:

- **Resposta Y.** Mesura l'assoliment de l'objectiu -de vegades pot ser una mesura indirecta  
Ex: rendiment **Y** mesurat en les notes de certa assignatura
- **Decisions X.** Assignem els seus valors en els estudis experimentals  
Representen el potencial per canviar el futur: volem mesurar l'**efecte** de **X** en **Y**  
Un disseny experimental permet la seva independència de la resta de variables.  
Ex: un mètode docent basat en **llistes impreses** d'exercicis (**X=1**) comparat amb un mètode basat en **e-status** (**X=2**).
- **Co-variables Z.** Representen les condicions observades en dades *reals*  
Podem usar les **Z** per reduir la incertesa de **Y** (haurem de quantificar el seu encert)  
Podem obtenir les **Z** tant en estudis experimentals com observacionals  
Les **Z** solen estar interrelacionades (*col·lineals* o *no ortogonals*)  
Ex: les notes (**Z<sub>1</sub>**, **Z<sub>2</sub>**) de dues assignatures prèvies solen tenir certa relació

# 1. Inferència estadística. Tipus d'estudis

- **FER: Estudis experimentals**

Volem **canviar** el futur **Y** a partir d'intervencions en **X**

A l'anàlisi estimem els **efectes** de **X** en **Y**.

Ex: Per intentar millorar les notes **Y**, assignem a l'atzar els alumnes a diferents entorns de treball **X**

**X** representa una causa **assignable** ben definida

La clau per intervenir és ser **propietaris** de **X**

Per garantir la independència amb tota **Z**, assignem **X** a l'atzar

Assignem respectant drets ètics i legals.

- **VEURE: Estudis observacionals**

Permeten **predir** **Y** a partir dels valors observats **Z**

Quantificarem la **capacitat** de **Z** per **reduir** la **incertesa** en la predicció de **Y**

Ex: comparem notes **Y** segons el grup (**Z<sub>1</sub>**), o segons la nota d'una altra assignatura (**Z<sub>2</sub>**), o en funció d'un cert **model m** de les dues variables [**m=f(Z<sub>1</sub>, Z<sub>2</sub>)**].

→ El grup **Z<sub>1</sub>** per ell mateix redueix un 10% la incertesa; la nota **Z<sub>2</sub>**, un 20%; i el model **m**, amb les dues, un 25%.

No som **propietaris** de les variables **Z** (les unitats ja venen amb el valor de les **Z**)

Podem establir **relacions** entre **Z** i **Y**, que podem utilitzar per **predir** els valor de **Y** a partir de **Z**.

Però les covariables **Z** poden estar relacionades (ser **col·lineals**) i per tant poden tenir **confosos** els seus efectes en **Y**.

Establir **causalitat** requereix moltes premisses (fora d'un curs introductori)

# 1. Inferència estadística. Conceptes bàsics

- **Paràmetre**: indicador de la població que estem interessats en conèixer o estimar. Per exemple la  $\mu$  (esperança) de les alçades dels estudiants de la FIB
- **Estadístic**: qualsevol indicador que s'obtingui com a funció de les dades d'una mostra. Per exemple la suma de les alçades dels estudiants recollits en una mostra
- **Estimador**: estadístic d'una mostra que s'utilitza per conèixer el valor d'un paràmetre de la població. Per exemple la mitjana de les alçades en una mostra a l'atzar d'alumnes de la FIB és una estimador de la  $\mu$  (esperança) de les alçades dels estudiants de la FIB

*Mitjana* pot voler dir *paràmetre esperança* quan parlem del centre de gravetat de la distribució poblacional, o *estadístic mitjana* quan ens referim al valor mitjà d'una sèrie de valors obtinguts d'una mostra

## 2. Estimació puntual

- Un estimador  $\hat{\theta}$  del paràmetre desconegut  $\theta$ , a partir de la mostra  $M(\omega_i)$   $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (mostra aleatòria simple definida a l'annex del bloc B), és una funció de les VA :

$$\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- Estimació puntual:** valor que l'estimador  $\hat{\theta}$  pren en una mostra concreta.

Per exemple  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$  és la mitjana mostral i és una estimació puntual de  $\mu$

Distingiu entre el valor  $\bar{x}$  d'una m.a.s. concreta i la variable aleatòria mitjana mostral  $\bar{X}$

- Error tipus o error estàndard:** variabilitat de l'estimador. En el cas anterior de la MITJANA, l'**error tipus (o estàndard) de la mitjana** (o *mean standard error* o *se*) és:

$$se = \sqrt{V(\bar{X}_n)} = \sqrt{E[(\bar{X}_n - \mu)^2]} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Generalment, la  $\sigma$  serà desconeguda i l'error tipus l'haurem d'aproximar emprant l'estimador pertinent ( $\hat{\sigma}$ ) amb les dades de la mostra:  $\widehat{se} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$  (amb  $s$  estimador puntual de  $\sigma$ )

Llegiu les consideracions de la secció 5 d'aquest bloc "Dissenys (com obtenim les dades)" per aplicar al bloc T



## 2. Estimació puntual. Casos

Per als paràmetres  
utilitzem lletres de  
l'alfabet grec

Paràmetre ( $\theta$ ) ( <b>POBLACIÓ</b> )	Estimador ( $\hat{\theta}$ ) ( <b>MOSTRA</b> )
$\mu$ (esperança, mitjana poblacional)	$\bar{x}$ (mitjana mostral)
$\sigma^2$ (variància poblacional) $\sigma$ (desviació tipus poblacional)	$s^2$ (variància mostral) $s$ (desviació tipus mostral)
$\pi$ (probabilitat)	$p$ (proporció)

El cas de la MITJANA:

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  mitjana mostral és una **estimació puntual del paràmetre  $\mu$**  de tendència central

El cas de la DESVIACIÓ:

$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}}{n - 1}}$  desviació tipus mostral és una **estimació puntual del paràmetre  $\sigma$**  de dispersió

El cas de la PROPORCIÓ:

$p = \sum_{i, x_i=1} 1/n$  proporció mostral és una **estimació puntual del paràmetre  $\pi$**

Cal tenir en compte les propietats dels estimadors (*veure a l'annex*, juntament amb altres possibles estimadors)

## 2. Estimadors i Estadística Descriptiva

Els anteriors estimadors puntuals es corresponen a les funcions d'**Estadística Descriptiva** per resumir numèricament unes dades (veure'n més a l'apartat de R de la pàgina web)

En la següent taula hi ha algunes funcions (bàsiques) en R per **Estadística Descriptiva** en variables **numèriques** i **categòriques** de forma **univariant** o **bivariant**:

	UNIVARIANT (num)	UNIVARIANT (categ)	BIVARIANT
INDICADORS	<code>length()</code> * <code>mean()</code> <code>var()</code> <code>sd()</code> <code>summary()</code> <code>median()</code>	<code>table()</code>	<code>cov( , )</code> <code>cor( , )</code>
GRÀFIQUES	<code>hist()</code> <code>boxplot()</code>	<code>barplot(table())</code>	<code>plot( , )</code>

\* La mida de la mostra ( $n$ ) no és un estimador, però l'incloem a la llista per sentit pràctic

(més funcions gràfiques en R: <https://www.r-graph-gallery.com/>)

### 3. Estimació per Interval

- Sabem com calcular un “interval” que contingui  $\bar{x}$  a partir de  $\mu$ . Però el problema real és **aproximar  $\mu$ , coneixent  $\bar{x}$**  (és a dir, passar d'un interval per a la mitjana mostral  $\bar{x}$ , a un per a la mitjana poblacional  $\mu$ )
- A partir d'una probabilitat  $1 - \alpha$  entre dos valors  $a$  i  $b$  (simètrics): *(amb  $\sigma$  coneguda)*

$$P(a \leq \bar{X}_n \leq b) = 1 - \alpha \rightarrow P\left(\frac{a - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{b - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \rightarrow P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1 - \frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Obtenim l'interval de la v. a.  $\bar{X}_n$  amb **probabilitat  $1 - \alpha$**

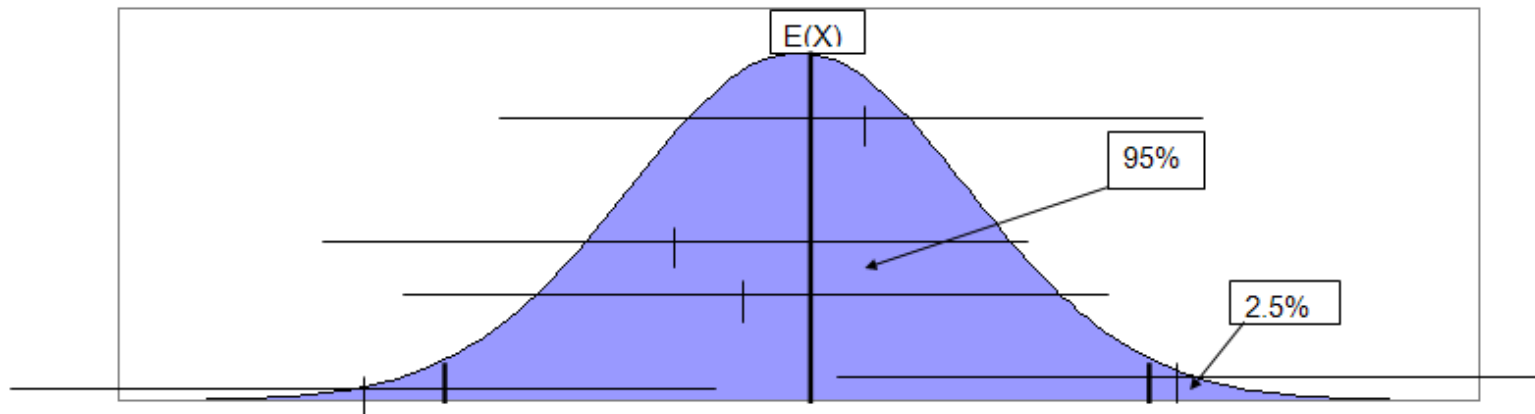
$$P\left(\mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq \mu + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- I reordenant obtenim **l'interval de confiança  $1 - \alpha$  del paràmetre  $\mu$**

$$P\left(\bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

### 3. Estimació per Interval de confiança

- $P\left(\bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$  significa que podem assegurar que  $E(X) = \mu$  estarà (amb una confiança de  $1 - \alpha$ ) en el rang calculat
- Si  $1-\alpha$  és 95% ( $\alpha = 5\%$ ): **el 95% dels intervals (IC) contindran  $\mu$**  (veure una simulació a l'annex)

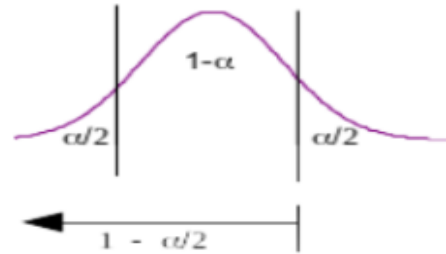


- *Aquest procediment encerta el  $100 \cdot (1-\alpha)\%$  de les vegades!*
- Denotem **IC( $\mu$ ,  $1-\alpha$ )** a l'**INTERVAL DE CONFIANÇA**  $1-\alpha$  de  $\mu$ , i l'expressem:

Nosaltres només observarem una mostra, i no sabrem si l'IC trobat conté o no  $\mu$ , però sí sabem que aquest procediment a la llarga dóna un  $100 \cdot (1-\alpha)\%$  d'encerts

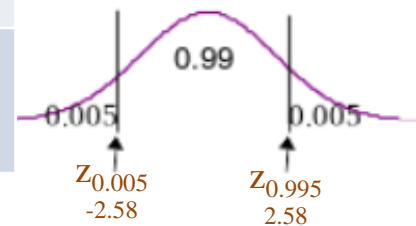
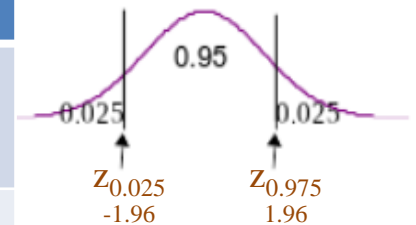
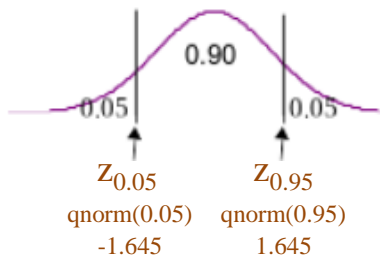
## 3.a. Confiança i risc

El càlcul d'un IC implica una confiança  $1-\alpha$  (i per tant un risc  $\alpha$ ) que podem representar:



I podem relacionar el valor de confiança amb el quantil que necessitem per construir l'IC:  
(com a exemple estan indicats els quantils per una  $Z$  Normal(0,1) on sabem que  $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$  o  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ )

Confiança $1-\alpha$	Risc $\alpha$	$\alpha/2$	$1 - \alpha/2$
0.95	0.05	0.025	0.975
0.90	0.10	0.05	0.95
0.99	0.01	0.005	0.995



## 3.b. Estadístics per fer inferència

- Veurem estadístics de dos tipus:
  - **Rati de “senyal” o “informació”** (diferència entre el valor del paràmetre i el mostral) respecte **“soroll” o “error”** (estàndard error,  $se$ )

Aquests estadístics es modelen seguint el model Z o T Student\* (en alguns casos avaluem el “t-rati” que quantifica quantes vegades és més gran el senyal que el soroll)

estadístic  $\hat{z} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{se}$        $\hat{z} \sim Z = N(0,1)$       (dóna lloc al IC  $\mu \in \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  o bé  $\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se$ )

estadístic  $\hat{t} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\widehat{se}}$        $\hat{t} \sim T$  de **Student** amb  $\nu$  graus de llibertat

- **Quocient de variàncies.** Aquests estadístics es modelen seguint el model F

estadístic  $\hat{F} = \frac{S_A^2}{S_B^2}$        $\hat{F} \sim F$  de **Fisher–Snedecor** amb  $\nu_1$  i  $\nu_2$  graus de llibertat

*Les distribucions T-Student ( $t_\nu$ ), F ( $F_{\nu_1, \nu_2}$ ) i Ji quadrat ( $\chi^2_\nu$ ) estan definides en el Bloc B (annex). Son models derivats de la Normal, i estan **parametritzades amb  $\nu$** , que anomenem “graus de llibertat” i que **depèn de** les mides  $n$  de les mostres*

## 3.c. Premisses

- La premissa fonamental és partir d'una mostra aleatòria

Diem que els valors venen de

**V**ariables **A**leatòries **I**ndependents i **I**dènticament **D**istribuídes, v.a.i.i.d.



- La premissa de normalitat és necessària perquè els IC es basen en el TCL que parteix d'una variable Normal o d'una n “gran”.

En mostres petites ( $n < 30$ ?), sustentarem la premissa de normalitat en:

el coneixement previ de la variable resposta;

i amb el anàlisis gràfic amb R.

Veure l'apartat 7 de funcions de R i

*l'Anàlisi gràfica de la normalitat a l'annex del bloc B.*

## 4. IC per a 1 paràmetre

Ara veurem les **fórmules d'IC** quan tenim **UN SOL PARÀMETRE** d'interès, distingint els següents casos:

- interès en la mitjana  $\mu$  (amb variància poblacional coneguda o no)  
*(per exemple la mitjana de la nota d'una assignatura)*
- interès en una proporció  $\pi$   
*(per exemple la proporció d'aprovals d'una assignatura)*
- interès en la variabilitat  $\sigma^2$   
*(per exemple la desviació de la nota d'una assignatura)*



## 4.a. Interval de confiança de $\mu$ (amb $\sigma$ coneguda)

- L'interval de confiança  $1-\alpha$  de  $\mu$  (amb  $\sigma$  coneguda) es calcula com

$$IC(\mu, 1 - \alpha) = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Recordeu que ens basem en el TCL i perquè es complís calia que la variable X inicial fos Normal o que  $n$  fos “gran”. Per tant, els requisits per realitzar aquest càlcul són:  **$n$  “gran”**  
o  **$X \sim N$**
- Aquest IC es pot obtenir aïllant el paràmetre  $\mu$  de l'estadístic:  $\hat{Z} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{se}$   
del qual en coneixem la seva distribució que és  $N(0,1)$   
ja que el IC es pot veure com  $\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se$

Quan  $n$  augmenta la precisió dels IC augmenta (interval més estret)

Si augmenta la confiança (disminuint el risc  $\alpha$  d'error), la precisió dels IC disminueix (interval més ample)

Per estimar  $\mu$  necessitem conèixer  $\sigma$ , que és una situació poc realista doncs  $\sigma$  acostuma a ser un paràmetre desconegut (també podem assumir un valor raonable, pel coneixement previ)

## 4.a. Interval de confiança de $\mu$ amb $\sigma$ desconeguda

- L'interval de confiança  $1-\alpha$  de  $\mu$  (amb  $\sigma$  desconeguda) es calcula com:

$$IC(\mu, 1 - \alpha) = \bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

- Aquest IC es pot obtenir aïllant el paràmetre  $\mu$  de l'estadístic:  $\hat{t} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{s/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{x}-\mu)}{se}$   
on al desconèixer  $\sigma$ , es substitueix per  $s$  i es distribueix segons la llei ***t-Student*** amb  $n-1$  graus de llibertat, i el IC es pot veure com  $\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se$
- En aquest cas cal que la variable X inicial fos Normal (premissa de normalitat) ja que la definició de la ***t-Student*** parteix de variables normals

La situació de desconèixer  $\sigma$  és més realista i freqüent: no se n'assumeix cap valor sinó que s'aproxima per la seva estimació puntual  $s$

$t$  i  $N(0,1)$  són similars, més quan  $n$  creix:  $t_{n \rightarrow \infty} \rightarrow N(0,1)$

Per valors de  $n$  petits,  $t$  té més variabilitat reflectint més incertesa (relacionat amb que aproximem  $\sigma$  per  $s$ )

A l'IC amb  $\sigma$  desconeguda li correspondrà ser més ample que l'equivalent assumint el verdader valor de  $\sigma$  ja que hi ha més incertesa i usem  $t$  enlloc de  $N(0,1)$

## 4.a Interval de confiança de $\mu$ . Premisses

Per garantir el nivell de confiança de l'IC, s'ha de complir certes premisses

La premissa fonamental és que l'origen de la mostra sigui aleatori (v.a.i.i.d.)

A més a més:

- Si sigma és coneguda, exigirem una de les condicions:
  - **$X \sim N$**   $\rightarrow$  la combinació lineal de Normals és Normal ( $\bar{X} \sim N$ )
  - **Tenir una mostra “gran”**  $\rightarrow$  Pel TCL,  $\bar{X} \sim N$
- Si sigma no és coneguda, exigirem una de les condicions:
  - **$X \sim N$**   $\rightarrow (\bar{x} - \mu) / \sqrt{s^2/n} \sim t_{n-1}$
  - **Tenir una mostra gran (n “gran”)**  $\rightarrow$  Pel TCL,  $\bar{X} \sim N$

Amb grans mostres la variació de “s” serà més petita (s estima bé  $\sigma$ ), i podem considerar que  $(\bar{x} - \mu) / \sqrt{s^2/n} \approx (\bar{x} - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n} \sim N(0,1)$

Dist. de referència	$\sigma$ coneguda	$\sigma$ desconeguda
<b>X Normal</b>	Usar la Normal	Usar <b>t de Student</b>
X no Normal i n “gran”		

## 4.b. Interval de confiança de $\pi$

- Sigui  $X \sim B(n, \pi) \rightarrow$ 

$$E(X) = \pi \cdot n$$

$$V(X) = \pi \cdot (1 - \pi) \cdot n$$
- Aleshores,  $P = X/n \rightarrow$ 

$$E(P) = E(X/n) = E(X)/n = \pi \cdot n / n = \pi$$

$$V(P) = V(X/n) = V(X)/n^2 = \pi \cdot (1 - \pi) \cdot n / n^2 = \pi \cdot (1 - \pi) / n$$
- Per construir l'IC es pot recorre a la convergència de la Binomial a la Normal [amb la premissa de  $n$  "gran" i  $\pi$  no extrema (com a guia comprovar que  $\pi \cdot n \geq 5$  i  $(1 - \pi) \cdot n \geq 5$ ):

$$P \rightarrow N\left(\mu_P = \pi, \sigma_P = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$$

- Així, l'interval de confiança s'assemblaria al de  $\mu$ , aïllant el paràmetre  $\pi$  de l'estadístic  $\hat{z} = \frac{(P - \pi)}{\sigma_P} = \frac{(P - \pi)}{se}$  del qual en coneixem la seva distribució que és  $N(0,1)$ :

$$IC(\pi, 1 - \alpha) = P \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} se = P \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}}$$

La **paradoxa** de que necessitem conèixer  $\pi$  per estimar el IC de  $\pi$  es pot solucionar de 2 maneres:

a) Substituint  $\hat{\pi}$  per  $P$ :  $IC(\pi, 1 - \alpha) = P \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{(P(1 - P))/n}$

b) Aplicant el màxim de  $\hat{\pi} \cdot (1 - \hat{\pi})$  que correspon a fer  $\hat{\pi}$  igual a 0.5:  $IC(\pi, 1 - \alpha) = P \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{(0.5(1 - 0.5))/n}$

## 4.c. Interval de confiança de $\sigma^2$

Si  $X_i \rightarrow N$   $(n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2} = (n-1) \cdot \frac{(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2) / (n-1)}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$

Podem relacionar l'estadístic de quocient de variàncies (amb el qual definirem l'IC) amb una  $\chi^2$  per ser suma de Normals al quadrat (veure models derivats de la Normal a l'annex del bloc B)

Per tant:

$$P\left(\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \frac{\sigma^2}{S^2 \cdot (n-1)} \leq \frac{1}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2 \cdot (n-1)}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$IC(\sigma^2, 1 - \alpha) = \left[ \frac{s^2(n-1)}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{s^2(n-1)}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

És un IC per  $\sigma^2$ , no per  $\sigma$  !!

No és un interval simètric, ja que  $\chi^2$  no ho és. Implica calcular els dos quantils (inferior i superior) en lloc de fer  $\pm$

## 5. IC per a comparar 2 paràmetres

Ara veurem les **fórmules d'IC** quan tenim **DOS PARÀMETRES** d'interès, distingint els següents casos:

- Comparar  $\mu_1$  i  $\mu_2$

*(per ex IC de l'efecte diferencial ( $\mu_1 - \mu_2$ ) comparant mitjanes entre dues assignatures\*)*

Cal diferenciar entre:

- **mostres aparellades\*\*** (cada cas dona lloc a dues mesures, parells de mesures)

*(els mateixos estudiants en les dues assignatures,  $\mu_1 - \mu_2 = \mu_{\text{Diferència}} = \mu_D$ )*

- **mostres independents** (cada cas és una mesura independent)

*(estudiants diferents en les dues assignatures)*

- Comparar  $\pi_1$  i  $\pi_2$

*(per ex IC de l'efecte diferencial ( $\pi_1 - \pi_2$ ) comparant aprovats entre dues assignatures\*)*

- Comparar  $\sigma^2_1$  i  $\sigma^2_2$

*(per ex IC de l'efecte diferencial ( $\sigma^2_1 / \sigma^2_2$ ) comparant desviacions entre dues assignatures\*)*

(\* cal que l'origen de la mostra sigui aleatori (v.a.i.i.d). Per tant, en principi, no unes notes observades)

(\*\* Si és possible, un disseny amb dades aparellades serà més eficient (com veurem més endavant))

## 5.a. IC de $\mu_1 - \mu_2$ (o de $\mu_D$ ) en mostres aparellades

Siguin  $Y_1$  ( $E(Y_1) = \mu_1$   $V(Y_1) = \sigma_1^2$ ) i  $Y_2$  ( $E(Y_2) = \mu_2$   $V(Y_2) = \sigma_2^2$ ) de les que obtenim una mostra aleatòria simple **aparellada** de grandària  $n$ , Definim  $D = Y_1 - Y_2$  (o bé  $Y_2 - Y_1$ ) on  $D$  és normal amb  $E(D) = \mu_D$  i  $V(D) = \sigma_D^2$  i els  $n$  valors de la diferència tenen mitjana  $\bar{d}$  i desviació  $s_d$

- L'estadístic  $\hat{t} = \frac{(\bar{d} - \mu_D)}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{(\bar{d} - \mu_D)}{se}$  segueix la distribució  $t_{n-1}$

on  $(\bar{d} - \mu_D)$  és el “senyal” i  $se = s_d / \sqrt{n}$  l'error estàndard

- L'IC de la diferència amb confiança  $1-\alpha$  és:

$$IC(\mu_1 - \mu_2, 1 - \alpha) = IC(\mu_D, 1 - \alpha) = \bar{d} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \bar{d} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se$$

Pot tenir interès pràctic avaluar el “t-rati”:  $t = \bar{d} / \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \bar{d} / se$

que diu quantes vegades és més gran el senyal que el soroll (assumint m.a. aparellada)

## 5.b. IC de $(\mu_1 - \mu_2)$ mostres independents

Siguin  $Y_1$  ( $E(Y_1) = \mu_1$   $V(Y_1) = \sigma_1^2$ ) i  $Y_2$  ( $E(Y_2) = \mu_2$   $V(Y_2) = \sigma_2^2$ ) amb distribucions Normals ( $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  seran valors desconeguts però cal poder assumir-los iguals\*) de les que obtenim dues mostres aleatòries simples de grandària  $n_1$  i  $n_2$  **independents**, amb mitjanes  $\bar{y}_1, \bar{y}_2$  i desviacions  $s_1, s_2$  (com a estimadors d'un paràmetre comú  $\sigma$ )

- L'estadístic  $\hat{t} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{se}$  segueix la distribució  $t_{n_1+n_2-2}$  amb error estàndard  $se = s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$  on  $s$  és arrel de la variància "pooled"  $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1-1) + (n_2-1)}$
- L'IC de la diferencia amb confiança  $1-\alpha$  és:

$$IC(\mu_1 - \mu_2, 1 - \alpha) = (\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot se =$$

$$(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) \pm t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

\* Apart de la premissa de normalitat de  $Y_1$  i  $Y_2$ , comprovarem (gràficament) que tenen variabilitats semblants



## 5.c. IC de $\pi_1 - \pi_2$

Siguin  $P_1$  i  $P_2$  les proporcions mostrals de 2 poblacions binomials amb  $\pi_1, \pi_2$  de les que obtenim dues mostres aleatòries simples de grandària  $n_1$  i  $n_2$  i independents

- L'estadístic  $\hat{z} = \frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{se}$  segueix la distribució  $N(0,1)$  amb

error estàndard  $se = \sqrt{P_1(1 - P_1)/n_1 + P_2(1 - P_2)/n_2}$

- L'IC de la diferència amb confiança  $1 - \alpha$  és:

$$IC(\pi_1 - \pi_2, 1 - \alpha) = (P_1 - P_2) \pm z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot se =$$

$$(P_1 - P_2) \pm z_{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{P_1(1 - P_1)/n_1 + P_2(1 - P_2)/n_2}$$

En aquest cas, la convergència requereix mostres “grans”: usualment que  $P \cdot n$  i  $(1 - P) \cdot n$  siguin superiors a 5

## 5.d. IC de $\sigma_1^2/\sigma_2^2$

Siguin  $s_1$  i  $s_2$  les desviacions mostrals de dues mostres aleatòries simples de grandària  $n_1$  i  $n_2$  i independents, de dues variables Normals

- L'estadístic  $\hat{F} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$  segueix la distribució  $F_{(n_1-1, n_2-1)}$
- L'IC del quocient de variàncies amb confiança  $1-\alpha$  és:  
(seguint el mateix raonament de l'IC de  $\sigma^2$ )

$$IC(\sigma_1^2/\sigma_2^2, 1 - \alpha) = \left[ \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{(n_1-1, n_2-1), 1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{(n_1-1, n_2-1), \frac{\alpha}{2}}} \right]$$

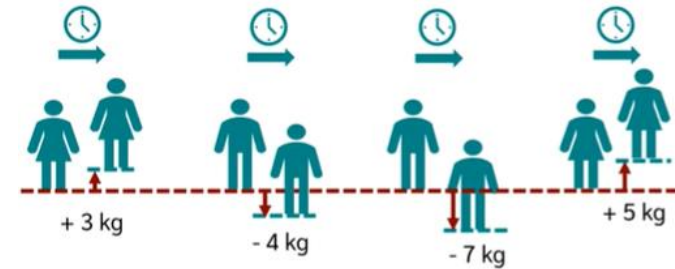
o bé (atenció a l'intercanvi dels graus de llibertat de la F)

$$IC(\sigma_1^2/\sigma_2^2, 1 - \alpha) = \left[ s_1^2/s_2^2 F_{(n_2-1, n_1-1), \frac{\alpha}{2}}, s_1^2/s_2^2 F_{(n_2-1, n_1-1), 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

## 6. Dissenys (com obtenim les dades)

### Disseny aparellat:

- de cada unitat es treu 1 variable i 2 observacions (les dues mesures o respostes): precisa que la primera observació en una “parella” no alteri l'estat de la unitat i, per tant, de la segona observació



### Mostres independents

- per a cada unitat, es treu 1 observació i 2 variables (la mesura o resposta i la categoria per comparar):
  - precisa que la categoria es pugui assignar a la unitat (no pot ser una condició, com el gènere)
  - en estudis observacionals, quan el grup no és assignable, es seleccionen les mostres per separat



**Això és una simple aproximació. El món del disseny d'experiments és molt més ampli.**

La clau es “atzar”:

Recollir dades de qualsevol manera no garanteix una m.a. **“al tuntún” ≠ a l'atzar**

És imprescindible **planificar** la selecció a l'atzar de les unitats que mesurarem.

I **executar** correctament l'experiment, sense valors mancants. I **documentar-lo** de forma **reproducible**.

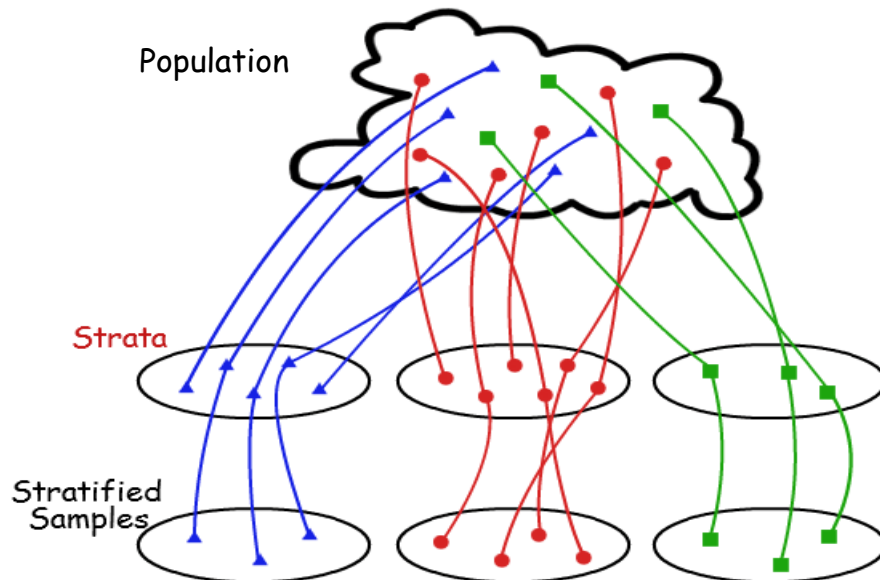
## 6. Dissenys (com obtenim les dades)

El disseny escollit condiciona l'anàlisi estadística posterior.

Si la recollida és complexa, el model estadístic emprat també:

- Cas amb dades **niades** (*clusters*): primer es seleccionen a l'atzar grups del nivell superior (p.e., *escola*); després, de l'inferior (*classe*); fins arribar a l'individu (*alumne*).
- Cas amb dades **estratificades**: es veuen tots els estrats però, dins de cada estrat, és seleccionen a l'atzar els individus.

Llavors, el grup d'alumnes escollits no és pròpiament una m.a.; s'han d'analitzar amb tècniques apropiades (que no veurem).



TAMPOC és habitual disposar de la població completa i poder accedir a qualsevol unitat en les mateixes condicions (requisit per a ser m.a.s.).

### Atenció:

Normalment, unes unitats seran més “visibles” que altres i tindran més probabilitats de ser escollides (p.e: resultats que només es poden obtenir ordenats).

## 7. Funcions en R per a IC

Veurem:

- llista de funcions R
- funcions en R per a una mostra. IC de  $\mu$
- funcions en R per a dues mostres independents. IC de  $\mu_1 - \mu_2$
- funcions en R per a dues mostres aparellades. IC de  $\mu_D$
- funcions en R per a dues mostres aparellades. Gràfic diferències vs. mitjanes
- funcions en R per comparar  $\sigma$ 's. IC  $\sigma_1 - \sigma_2$
- funcions en R per a  $\pi$ .

# Llista de funcions en R

Comprovar la premissa de normalitat: *(a Anàlisi gràfica de la normalitat, annex de Bloc B)*

`qqnorm(X)`

`qqline(X)`



IC de  $\mu$  amb  $\sigma$  coneguda (per aquesta funció cal la llibreria BSDA):

`library(BSDA)`

`z.test(X, sigma.x= )` # per a una mostra amb un valor conegut per a la sigma

IC de  $\mu$  (o  $\mu$ 's) amb  $\sigma$  (o  $\sigma$ 's) desconeguda:

`t.test(X)` # per a una mostra

`t.test(X-Y)` o `t.test(X,Y,paired=T)` # per a dues mostres aparellades

`t.test(X,Y,var.equal=T)` # per a dues mostres independents amb variàncies iguals

`t.test(X,Y,var.equal=F)` # per a dues mostres independents amb variàncies diferents

IC de  $\sigma$ 's en dues mostres independents:

`var.test(X,Y)`

IC de  $\pi$ :

`prop.test` i `binom.test`

# En una mostra

## Exemple de 9 valors amb positius i negatius (mesures per sota o sobre un llindar)

```
X <- c(-4, -2, -1, 0, 0, 4, 8, 8, 9) # mean=2.4 sd=4.9 Assumim normalitat (o qqnorm(X) i qqline(X))
```

```
library(BSDA)
```

```
z.test(X, sigma.x=4) # IC suposant una  $\sigma$  poblacional de 4
```

```
z = 1.8333, p-value = 0.06675
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.1688409  5.0577298
sample estimates: mean of x  2.444444
```

```
t.test(X) # IC si no coneixem el valor poblacional de  $\sigma$  sinó que usem la s mostral
```

```
t = 1.496, df = 8, p-value = 0.173
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.323423  6.212312
sample estimates: mean of x  2.444444
```

Es pot comprovar la coincidència dels límits dels IC amb els que es calcularien amb les fórmules

Apart dels IC, aquestes funcions en R ofereixen el resultat d'un **p-value** : probabilitat que indica si l'estadístic usat per calcular l'IC, i avaluat en un valor a prova del paràmetre, és "extrem" o no en la distribució del model de referència (veure més a l'annex i a bloc D amb més funcions que proporcionen p-values)

# En 2 mostres independents

## Exemple de 2 mostres on comparar $\mu_1$ i $\mu_2$ amb l'IC de l'efecte diferencial ( $\mu_1 - \mu_2$ )

**X1** <-c(1,2,3,5,6,6,7,7,8,8,9) # mean=5.6 sd=2.62      Assumim normalitat (o qqnorm(X1) i qqline(X1))

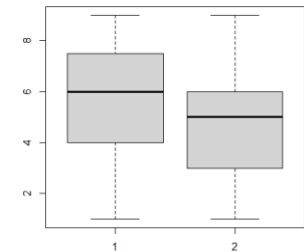
**X2** <-c(1,1,3,4,5,5,6,7,9)      # mean=4.5 sd=2.65      Assumim normalitat (o qqnorm(X2) i qqline(X2))

(per exemple X1 i X2 dues mostres de notes amb variabilitat equivalent)

**t.test(X1,X2,var.equal=T)**

```
t = 0.91335, df = 18, p-value = 0.3731
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.405312  3.566928
sample estimates: mean of x mean of y  5.636364  4.555556
```

**boxplot(X1,X2)**



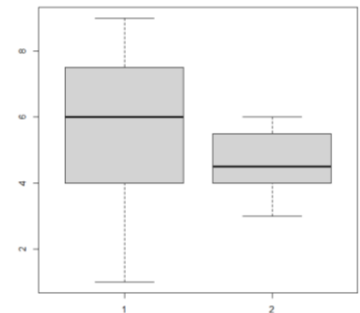
**X3** <-c(3,4,4,4.5,4.5,5,6,6)      # mean=4.6 sd=1.0      Assumim normalitat (o qqnorm(X3) i qqline(X3))

(per exemple X1 i X3 dues mostres de notes amb variabilitat no equivalents)

**t.test(X1,X3,var.equal=F)**

```
t = 1.1641, df = 13.793, p-value = 0.2641
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.8546781  2.8774054
sample estimates: mean of x mean of y  5.636364  4.625000
```

**boxplot(X1,X3)**



**Interpretació:** la diferència de mitjanes és de fins a 0.85 punts a favor de grup 3 o de fins a 2.9 punts a favor de grup 1, amb una confiança del 95%. No preferència.



# En 2 mostres aparellades

**Exemple de 2 mostres on comparar  $\mu_1$  i  $\mu_2$  amb l'IC de l'efecte diferencial ( $\mu_1 - \mu_2$ )**

```
Y1 <- c(1,1,2,2.0,2,2.5,4,5,5.5,6,7.5,8,8,9.5,9,9.5)
```

```
Y2 <- c(1.5,1,2,1.0,3,3,3.5,5,6,6,8.5,8.5,9.5,8.5,9.1,9)
```

(per exemple X1 i X2 dues mostres de notes d'uns mateixos estudiants)

```
t.test(Y1,Y2,paired=T)
```

```
t = -0.92936, df = 15, p-value = 0.3674
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.5351864  0.2101864
sample estimates: mean of the differences -0.1625
```

En mostres aparellades, és pot treballar amb la diferència dels valors ( $D=Y1-Y2$ ), i per tant és com el cas d'una mostra (enlloc de  $\mu_1 - \mu_2$  interessa  $\mu_D$ )

```
D <- Y1-Y2
```

```
-0.5  0.0  0.0  1.0 -1.0 -0.5  0.5  0.0 -0.5  0.0 -1.0 -0.5 -1.5  1.0 -0.1  0.5
```

```
mean(D)
```

```
-0.1625
```

```
sd(D)
```

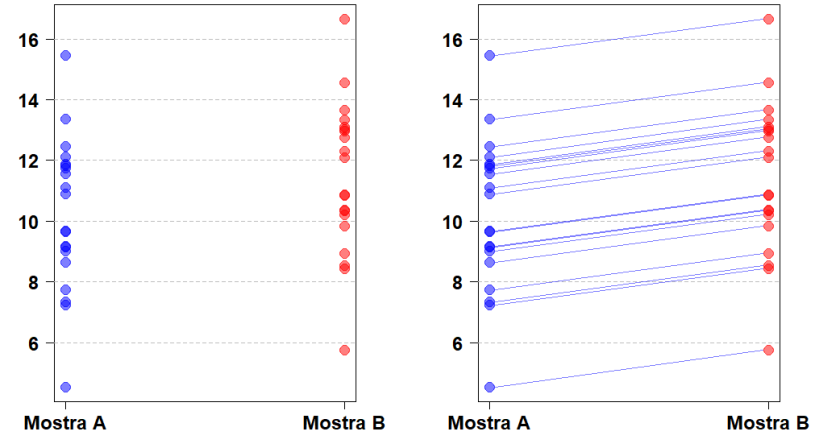
```
0.6994045
```

# En 2 mostres aparellades

És molt important no fer una anàlisi de dades aparellades com a dades independents

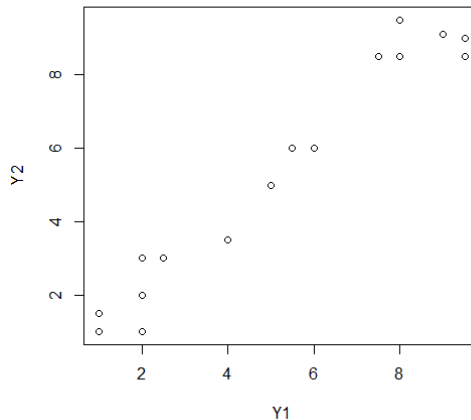
Aparentment, en el gràfic de l'esquerra (independents) no veiem que pugui existir diferències en mitjana entre les dues poblacions

En el gràfic de la dreta (aparellat) es veu clarament que la mitjana és superior en la mostra B.



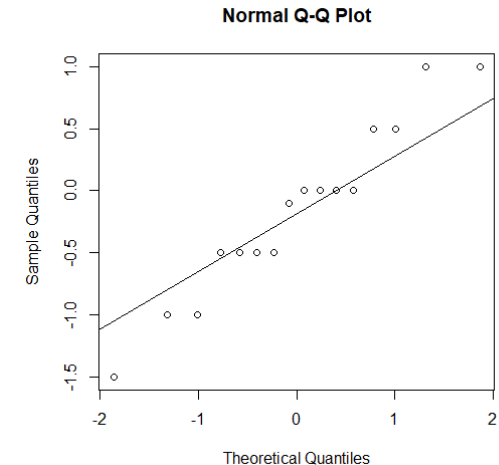
Tenim funcions R de descriptiva gràfica per veure la relació entre les dues mostres i per veure la normalitat de la diferència:

`plot(Y1, Y2)`



`qqnorm(Y1-Y2)`

`qqline(Y1-Y2)`

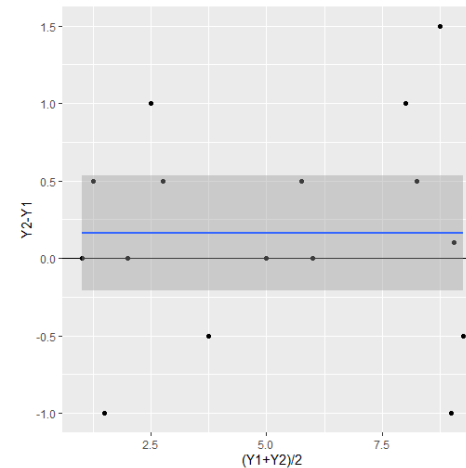


# En 2 mostres aparellades

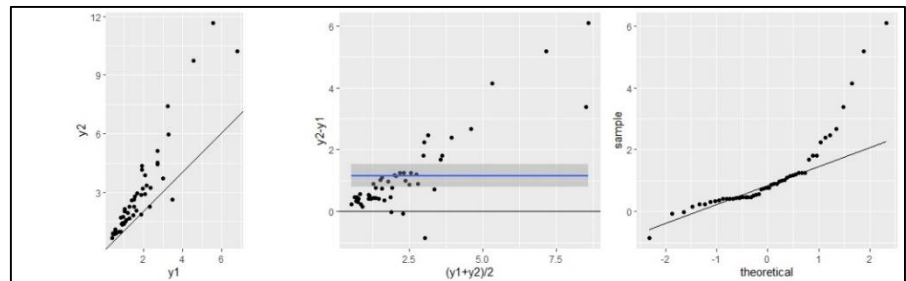
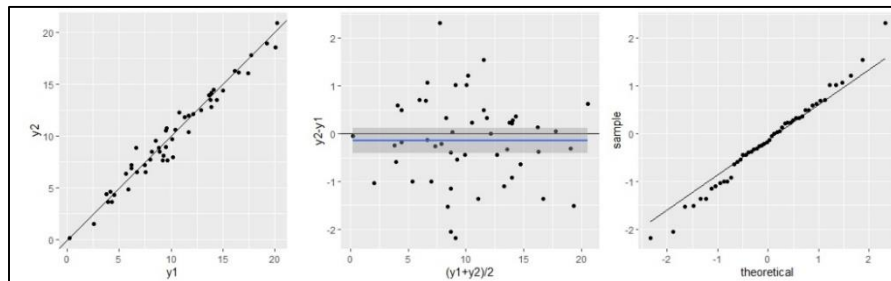
Hi ha funcions R específiques per mostres aparellades: **gràfic de Bland-Altman (BA)**, que representa les diferències de les respostes per cada individu en funció de les seves mitjanes

```
install.packages("PairedData")
library(PairedData)
p <- paired(Y1,Y2)
plot(p, type='BA' )

(o bé plot((Y1+Y2)/2, Y2-Y1) )
```



El gràfic diferències en front de mitjanes (complementant el plot i el qqnorm) permet veure si hi ha efecte additiu (o multiplicatiu), i decidir si convindria una transformació a les dades (es veurà al bloc D)



# Comparant $\sigma$ 's

## Exemple de 2 mostres on comparar $\sigma_1$ i $\sigma_2$ amb l'IC de l'efecte diferencial ( $\sigma^2_1/\sigma^2_2$ )

(com el cas dels exercicis de comparar la variabilitat en la duració dels recanvis dels cartutxos de tinta de dues marques)

```
A <- c(350, 361.9, 365, 365, 365, 370, 372, 377)
```

```
# mean(A)=365.7375 sd(A)=8.00231 var(A)=64.03696 Assumim normalitat (o qqnorm(A) i qqline(A))
```

```
B <- c(390, 391.7, 410, 412, 414, 418)
```

```
# mean(B)=405.95 sd(B)=12.00396 var(B)=144.095 Assumim normalitat (o qqnorm(B) i qqline(B))
```

```
var.test(B,A)
```

```
F test to compare two variances
```

```
data: B and A
```

```
F = 2.2502, num df = 5, denom df = 7, p-value = 0.3199
```

```
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
0.4257491 15.4206862
```

```
sample estimates:
```

```
ratio of variances
```

```
2.250185
```

# Per a IC de $\pi$

**Exemple de llençar 100 vegades una moneda i observar 56 cares**

**`prop.test(56,100)`**

```
1-sample proportions test with continuity correction
data: 56 out of 100, null probability 0.5
X-squared = 1.21, df = 1, p-value = 0.2713
alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4573588 0.6579781
sample estimates: p      0.56
```

**`binom.test(56,100)` # més apropiat si la mostra és petita**

```
Exact binomial test
data: 56 and 100
number of successes = 56, number of trials = 100, p-value = 0.2713
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
 0.4571875 0.6591640
sample estimates:
probability of success
                0.56
```

Cap d'aquests IC coincideix *exactament* amb el calculat amb la fórmula aproximant a la Normal explicada anteriorment. La coincidència augmentaria amb grandàries mostrals majors i amb proporcions més properes a  $\frac{1}{2}$ .