TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*4 punts*) Sigui a un nombre de l'interval $(0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = a$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$.

   a) Demostreu que $0 < a_n < 1$ per a tot $n \geq 1$.

   b) Demostreu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   c) Demostreu que la successió és convergent i que el seu límit és 0.

   d) Proveu que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$ i calculeu $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

2. (*3 punts*) L'objectiu es trobar una solució de l'equació:

$$(1+\sin x)\, e^x = 1.21$$

   a) Trobeu els polinomis de Taylor de grau 1 centrats en 0 de les funcions $\sin x$ i e^x. Substituïu $\sin x$ i e^x pels seus polinomis de Taylor que heu trobat en l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$, i trobeu la solució positiva x_0 de l'equació resultant.

   b) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial x_0 per trobar una solució de l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$ amb un error absolut $\eta < 10^{-5}$.

3. (*3 punts*) Considereu l'equació $3x^2 - x^3 = 6$.

   a) Demostreu que l'equació té una solució real, i donar un interval de longitud menor o igual que 1 que la contingui.

   b) Doneu la solució amb un error absolut $\eta < 0.05$.

   c) Demostreu que fora de l'interval $[-2,3]$ l'equació no té solució.

   d) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Trobeu les solucions de $f'(x) = 0$. Aplicant el Teorema de Rolle es pot deduir que l'equació $3x^2 - x^3 = 6$ té més d'una solució real? Justifiqueu la resposta.

Durada de l'examen: 1h 45m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

1. (*4 punts*) Sigui a un nombre de l'interval $(0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = a$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$.

   a) Demostreu que $0 < a_n < 1$ per a tot $n \geq 1$.

   b) Demostreu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   c) Demostreu que la successió és convergent i que el seu límit és 0.

   d) Proveu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ i calculeu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

SOLUCIÓ:

a) Demostrem per inducció que:

$$0 < a_n < 1,\ \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $0 < a_1 = a < 1$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció de que per aquest n: $0 < a_n < 1$, i demostrem que aleshores $0 < a_{n+1} < 1$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $0 < a_n < 1$,

$0 < a_n < 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} -1 < -a_n < 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} 0 < 1 - a_n < 1 \overset{(3)}{\Longrightarrow} 0 < \sqrt{1-a_n} < 1 \overset{(4)}{\Longrightarrow} -1 < -\sqrt{1-a_n} < 0 \overset{(5)}{\Longrightarrow} 0 < 1 - \sqrt{1-a_n} < 1 \overset{(6)}{\Longrightarrow} 0 < a_{n+1} < 1$.

(1) Multiplicant per -1.

(2) Sumant 1.

(3) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(4) Multiplicant per -1.

(5) Sumant 1.

(6) $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$

b) Ara demostrem que la successió és decreixent:

$$a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \geq 1.$$

En aquest cas es pot demostrar directament:

$a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1} \Longleftrightarrow a_n \overset{?}{\geq} 1-\sqrt{1-a_n} \Longleftrightarrow \sqrt{1-a_n} \overset{?}{\geq} 1-a_n \Longleftrightarrow 1-a_n \overset{?}{\geq} (1-a_n)^2 \Longleftrightarrow a_n(a_n-1) \overset{?}{\leq} 0$,

i com que ja hem demostrat a l'apartat anterior que $0 < a_n < 1$: tenim que, efectivament, $0 < a_n < 1 \Longrightarrow a_n(a_n-1) < 0 \Longrightarrow a_n(a_n-1) \leq 0$.

c) Com que és fitada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent. Aleshores $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i, a més, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Per tant, si $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, a partir de $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$ tenim:

$l = 1-\sqrt{1-l} \Longleftrightarrow 1-l = \sqrt{1-l} \Longleftrightarrow (1-l)^2 = 1-l \Longleftrightarrow l^2-l = 0 \Longleftrightarrow l(l-1) = 0 \Longleftrightarrow (l = 1 \ \vee \ l = 0) \overset{(7)}{\Longrightarrow} l = 0.$

(7) La succesió és decreixent i $a_1 = a < 1$, per tant l no pot ser 1.

d) Primer provem que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\sqrt{1-a_n}}{a_n} \overset{(8)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\sqrt{1-a_n})(1-\sqrt{1-a_n})}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1-a_n)}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} \overset{(9)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{1-a_n})} =$$

$$= \frac{1}{(1+\sqrt{1-0})} = \frac{1}{2}.$$

(8) En fer la divisió entre a_n queda una indeterminació del tipus $\infty - \infty$ amb una arrel quadrada, per tant multipliquem i dividim pel conjugat.

(9) Es pot simplificar perquè $a_n > 0$.

Ara calculem $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$:

Com que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, tenim que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$ és una indeterminació del tipus 1^∞, per tant:

$$\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}} = e^{\lim_{n\to+\infty} (1+a_n-1)\frac{1}{a_{n+1}}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}} \overset{(10)}{=} e^2.$$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2.$

2. (*3 punts*) L'objectiu es trobar una solució de l'equació:

$$(1 + \sin x)\, e^x = 1.21$$

   a) Trobeu els polinomis de Taylor de grau 1 centrats en 0 de les funcions $\sin x$ i e^x. Substituïu $\sin x$ i e^x pels seus polinomis de Taylor que heu trobat en l'equació $(1 + \sin x)\, e^x = 1.21$, i trobeu la solució positiva x_0 de l'equació resultant.

   b) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial x_0 per trobar una solució de l'equació $(1 + \sin x)\, e^x = 1.21$ amb un error absolut $\eta < 10^{-5}$.

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 1 d'una funció f centrat en 0 és

$$P_1(x) = f(0) + f'(0) \cdot x$$

Per $f(x) = \sin x$ tenim $P_1(x) = 0 + 1 \cdot x = x$.

Per $f(x) = e^x$ tenim $P_1(x) = 1 + 1 \cdot x = 1 + x$.

En substituir s'obté l'equació $(1 + x)^2 = 1.21$, que té solucions 0.1 i -2.1. Per tant la solució positiva és $x_0 = 0.1$.

b) Sigui $f(x) = (1 + \sin x)\, e^x - 1.21$, aleshores $f'(x) = e^x(1 + \cos x + \sin x)$.

Apliquem el mètode de la tangent ($x_0 = 0.1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$, fins que $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta \wedge |f(x_{n+1})| \leq \eta$):

$x_0 = 0.1,\ f(x_0) = 0.00550390680585156$

$x_1 = 0.09762266008,\ f(x_1) = 9.332 \cdot 10^{-6},\ |x_1 - x_0| = 0.002377339$

$x_2 = 0.09761861554,\ f(x_2) = -2. \cdot 10^{-9}, |x_2 - x_1| = 4.04415559 \cdot 10^{-6}$

Resultat: $x \simeq 0.097619$.

3. (*3 punts*) Considereu l'equació $3x^2 - x^3 = 6$.

a) Demostreu que l'equació té una solució real, i donar un interval de longitud menor o igual que 1 que la contingui.

b) Doneu la solució amb un error absolut $\eta < 0.05$.

c) Demostreu que fora de l'interval $[-2, 3]$ l'equació no té solució.

d) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Trobeu les solucions de $f'(x) = 0$. Aplicant el Teorema de Rolle es pot deduir que l'equació $3x^2 - x^3 = 6$ té més d'una solució real? Justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ:

$3x^2 - x^3 = 6 \iff x^3 - 3x^2 + 6 = 0$. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Per ser una funció polimòmica és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

a) Per ser $f(-2) = -14 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$ i f contínua en l'interval $[-2, -1]$, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té una solució real en l'interval $(-2, -1)$. Per tant, la solució es toba a l'interval $(-2, -1)$ que té longitud 1.

b) Es pot fer pel métode de la bisecció, de la secant o de la tangent. Pel mètode de la tangent (fórmules a l'exercici anterior) tenim:

$x_0 = -1.$

$x_1 = -1.222222222,$

$x_2 = -1.196215024,\ f(x_2) = -0.004491575, |x_2 - x_1| = 0.026007198$

Resultat: $x \simeq -1.196$.

c) Per veure que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \neq 0\ \forall x \notin [-2, 3]$ es pot veure de diverses maneres.

Una manera és, tenint en compte que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 3x(x - 2)$, aleshores:

- $x < -2 \Longrightarrow f'(x) > 0$, per tant, f és creixent a $(-\infty, -2)$, així, si $x < -2 \Longrightarrow f(x) < f(-2) = -14 < 0$, per tant, no hi ha cap solució de l'equació a l'esquerra de -2.
- $x > 3 \Longrightarrow f'(x) > 0$, per tant, f és creixent a $(3, +\infty)$, així $x > 3 \Longrightarrow f(x) > f(3) = 6 > 0$ i, per tant, no hi ha cap solució de l'equació a la dreta de 3.

Aleshores, fora de l'interval $[-2, 3]$ l'equació no té solució.

Una altra manera de demostrar que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \neq 0\ \forall x \notin [-2, 3]$, és, tenint en compte que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6$. Aleshores, per una banda: $x < -2 \Longrightarrow (x^2 > 4 \wedge x - 3 < -5) \Longrightarrow x^2(x - 3) < -20 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6 < -14 < 0 \Longrightarrow x$ no pot ser solució de l'equació. Per l'altra banda: $x > 3 \Longrightarrow (x^2 > 9 \wedge x - 3 > 0) \Longrightarrow x^2(x - 3) > 0 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6 > 6 > 0 \Longrightarrow x$ no pot ser solució de l'equació.

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 3x(x-2)$. Per tant: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$.

No es pot deduir:

El Teorema de Rolle assegura que entre un parell de solucions diferents de l'equació $f(x) = 0$ hi hauria una solució de $f'(x) = 0$.

A partir de la hipòtesi de que l'equació $f'(x) = 0$ té dues solucions, el Teorema de Rolle no diu res més que l'equació $f(x) = 0$ té com a màxim tres solucions.