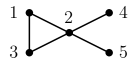
Matemàtiques 1 - GEI - FIB 02-11-2022
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf. Direm que un conjunt $S \subseteq V$ és *independent* si S no conté cap parell de vèrtexs adjacents.

Per exemple, en el graf 

, el conjunt $\{1, 4, 5\}$ és independent, però $\{1, 3, 4, 5\}$ no ho és, perquè $1 \sim 3$.

Definim el *nombre d'independència* de G, que denotarem $ind(G)$, com el cardinal més gran dels conjunts independents de G.

(a) Calculeu el nombre d'independència dels grafs

i) complet K_n, $n \geq 1$;
ii) cicle C_n, $n \geq 3$;
iii) estrella $K_{1,s}$, $s \geq 3$;
iv) bipartit complet $K_{r,s}$, $r \geq s \geq 2$.

(b) Demostreu que si $ind(G) = r$, aleshores el graf complementari de G té un subgraf isomorf a K_r, però no té cap subgraf isomorf a K_{r+1}.

(c) Demostreu que si G és un graf amb diàmetre D, aleshores $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

P2. (4 punts) Sabem que un graf G d'ordre 9 té com a mínim quatre vèrtexs de grau 1, tres vèrtexs de grau 2, un vèrtex de grau 3, i a més d'un vèrtex de grau k, on $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

(a) Demostreu que si $k = 5$, aleshores G conté almenys un cicle.
(b) Demostreu que si $k = 7$, aleshores G és connex.
(c) Suposem que $k = 5$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu G llevat d'isomorfismes.
(d) Doneu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seva seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat. Quina seqüència de graus tenen?

P3. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 15, 24, 26, 28, 35, 37, 46, 48, 59, 68, 79\}$.

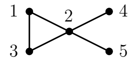
(a) (2 punts)
i) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex.
ii) Calculeu el diàmetre, el radi i els vèrtexs centrals de G.
iii) Hi ha algun camí de longitud més gran que el diàmetre?
iv) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.
v) Quin és l'enter r més gran tal que existeix un subgraf isomorf a K_r en el graf complementari de G?

(b) (1 punt) Doneu una representació dels arbres generadors obtinguts en aplicar a G els algorismes BFS i DFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme.

Informacions
- Durada de l'examen: 100 minuts
- S'ha de respondre amb tinta permanent blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació...

Model de solució

P1. (3 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf. Direm que un conjunt $S \subseteq V$ és *independent* si S no conté cap parell de vèrtexs adjacents.

Per exemple, en el graf , el conjunt $\{1, 4, 5\}$ és independent, però $\{1, 3, 4, 5\}$ no ho és, perquè $1 \sim 3$.

Definim el *nombre d'independència* de G, que denotarem $ind(G)$, com el cardinal més gran dels conjunts independents de G.

(a) Calculeu el nombre d'independència dels grafs

i) complet K_n, $n \geq 1$;
ii) cicle C_n, $n \geq 3$;
iii) estrella $K_{1,s}$, $s \geq 3$;
iv) bipartit complet $K_{r,s}$, $r \geq s \geq 2$.

Solució.

i) $ind(K_n) = 1$, $\forall n \geq 1$, ja que dos vèrtexs qualssevol d'un graf complet són adjacents. Per tant, qualsevol conjunt amb almenys 2 vèrtexs no és independent.

ii) $ind(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $\forall n \geq 3$. Suposem que $V(C_n) = [n]$ i $1 \sim 2 \sim 3 \sim \cdots \sim n \sim 1$.
Si n, parell, aleshores la meitat dels vèrtexs són parells, l'altra meitat són senars, i dos vèrtexs són adjacents si i només si tenen diferent paritat. Per tant, el conjunt de vèrtexs parells, de cardinal $n/2$, és independent. A més, si un conjunt té almenys $n/2 + 1$ vèrtexs, hi haurà com a mínim un vèrtex parell i un senar, i no serà independent. Per tant, $ind(C_n) = n/2 = \lfloor n/2 \rfloor$, si n és parell.
Si n és senar, aleshores dos vèrtexs són adjacents si i només si tenen diferent paritat o bé són els vèrtexs senars 1 i n. Per tant, el conjunt de vèrtexs parells, que té $(n-1)/2$ vèrtexs, és independent. Si un conjunt té almenys $(n-1)/2+1$ vèrtexs, o bé conté nombres senars i parells, o bé conté tots els nombres senars, i en cap dels dos casos és independent. Per tant, $ind(C_n) = (n-1)/2 = \lfloor n/2 \rfloor$, si n és senar.

iii) $ind(K_{1,s}) = s$, $\forall s \geq 3$, ja que dues de les s fulles de l'estrella no són mai adjacents. Si el conjunt tingués més de s vèrtexs, seria el conjunt de tots els vèrtexs, que no és independent, perquè el centre és adjacent a totes les fulles.

iv) $ind(K_{r,s}) = r$, si $r \geq s \geq 2$. La part estable amb r vèrtexs és independent, per definició de graf bipartit. Si un conjunt de vèrtexs té més de r elements, aleshores ha de tenir vèrtexs de les dues parts estables, i per tant hi hauria algun parell de vèrtexs adjacents, ja que el graf és bipartit complet.

(b) Demostreu que si $ind(G) = r$, aleshores el graf complementari de G té un subgraf isomorf a K_r, però no té cap subgraf isomorf a K_{r+1}.

Solució. Considerem un conjunt independent W de cardinal r en G. Aleshores, els vèrtexs de W són adjacents dos a dos en G^c, ja que no ho són en G. Per tant, W indueix un subgraf isomorf a K_r en G^c.

No hi pot haver un subgraf isomorf a K_{r+1} en G^c. Suposem al contrari que H és un subgraf isomorf a K_{r+1} en G^c. Aleshores, dos vèrtexs de $V(H)$ no són mai adjacents en G, ja que ho són en G^c, de manera que $V(H)$ seria un conjunt independent de cardinal $r+1$ en G, contradicció, ja que $ind(G) = r$.

(c) Demostreu que si G és un graf amb diàmetre D, aleshores $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

Solució. Siguin u i v dos vèrtexs tals que $d(u, v) = D$. Considerem un $u - v$ camí de longitud D en G, $x_0(= u), x_1, x_2, \ldots, x_D(= v)$. El conjunt $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_D\}$ conté $D+1$ vèrtexs. Sigui W en conjunt que conté els vèrtexs amb subíndex parell, és a dir,

$W = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_D\}$ si D és parell,
$W = \{x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{D-1}\}$ si D és senar.

El conjunt W és independent, ja que si dos vèrtexs d'aquest conjunt fossin adjacents, hi hauria un camí entre u i v de longitud més petita que D, contradicció amb la hipòtesi $d(u,v) = D$. A més, si D és parell, W és un conjunt de cardinal $\frac{D}{2}+1(= \frac{D+2}{2} \geq \frac{D+1}{2})$ i, si D és senar, W és un conjunt de cardinal $\frac{D-1}{2}+1(= \frac{D+1}{2})$. Per tant, $ind(G) \geq \frac{D+1}{2}$.

P2. (4 punts) Sabem que un graf G d'ordre 9 té com a mínim quatre vèrtexs de grau 1, tres vèrtexs de grau 2, un vèrtex de grau 3, i a més d'un vèrtex de grau k, on $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

(a) Demostreu que si $k = 5$, aleshores G conté almenys un cicle.

Solució. En aquest cas, el graf té ordre 9 i seqüència de graus $5, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. Pel Lema de les encaixades, la mida és $mida(G) = \frac{1}{2}(5+3+2+2+2+1+1+1+1) = 9$.

Mètode I. Si el graf fos acíclic, seria un bosc d'ordre n i mida m amb k components connexos, on $k \geq 1$, i es compliria $m = n - k$. En aquest cas, hauria de ser $9 = 9 - k$, és a dir, $k = 0$, contradicció.

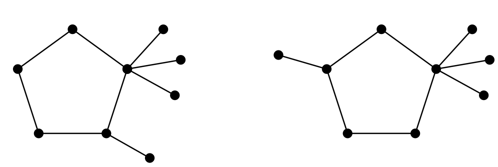
Mètode II. En tot graf acíclic d'ordre n i mida m es satisfà $m \leq n - 1$. Per tant, si $m > n - 1$, el graf tindrà algun cicle. Per ser $mida(G) = 9 > 9 - 1 = ordre(G) - 1$, el graf G té algun cicle.

(b) Demostreu que si $k = 7$, aleshores G és connex.

Solució. En aquest cas, el graf té ordre 9 i seqüència de graus $7, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. El vèrtex de grau 7 és a un component connex amb almenys 8 vèrtexs (ell mateix més els 7 vèrtexs adsjacents). Per tant, si el graf no fos connex, hauria de tenir un component connex format per un vèrtex aïllat, i això no és possible, perquè no hi ha cap vèrtex de grau 0.

(c) Suposem que $k = 5$, G és connex i al suprimir tots els vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf eulerià. Determineu G llevat d'isomorfismes.

Solució. El graf té ordre 9 i seqüència de graus $5, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. Per ser G connex, els vèrtexs de grau 1 són adjacents a vèrtexs de grau almenys 2 (si no, hi hauria un component connex isomorf a K_2, contradicció perquè G és connex per hipòtesi). Per tant, al suprimir els 4 vèrtexs de grau 1 obtindrem un graf d'ordre 5 tal que la seqüència de graus s'obté restant 4 unitats dels nombres de la seqüència $5, 3, 2, 2, 2$. A més, si el graf resultant és eulerià, els graus dels vèrtexs han de ser parells i diferents de 0. Per tant, només podem restar les 4 unitats dels valors 5 i 3. L'única possibilitat és restar un 1 del 3 i 3 unitats del 5, de manera que el graf eulerià obtingut ha de tenir seqüència de graus $2, 2, 2, 2, 2$, és a dir, ha de ser un cicle d'ordre 5. A més, sabem que 3 fulles han de ser adjacents a un mateix vèrtex u del cicle (el vèrtex de grau 5 en G) i l'altra fulla ha de ser adjacent a un vèrtex diferent v del cicle (el vèrtex de grau 3 en G). Això ho podem fer de dues maneres diferents, llevat isomorfismes, segons si els vèrtexs u i v són adjacents o no (és a dir $d(u,v) = 2$). Vegem a la figura una representació dels dos grafs G llevat isomorfismes:



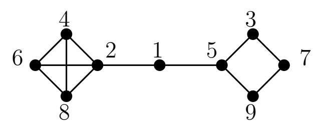
(d) Doneu almenys dos arbres no isomorfs tals que la seva seqüència de graus satisfaci les condicions de l'enunciat. Quina seqüència de graus tenen?

Solució. El graf té ordre 9 i seqüència de graus $k, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ (que potser no estan en ordre decreixent, ja que no sabem el valor de k). En un arbre, la mida és l'ordre menys 1. Pel Lema de les encaixades, $mida(G) = \frac{1}{2}(k+3+2+2+2+1+1+1+1) = \frac{1}{2}(k+13)$. Per tant, si G és un arbre, ha de ser $8 = \frac{1}{2}(k+13)$, és a dir,

$k = 3$. La seqüència de graus de l'arbre serà, doncs, $3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. A la figura següent tenim la representació de dos arbres amb aquesta seqüència de graus que no són isomorfs, perquè en un d'ells els únics dos vèrtexs de grau 3 són adjacents, i en l'altre, no:

P3. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 15, 24, 26, 28, 35, 37, 46, 48, 59, 68, 79\}$.

Solució. Fem una representació gràfica de G, que ens servirà per resoldre tots els apartats:



(a) (2 punts)

i) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex.

Solució. Per simetria, $e(4) = e(6) = e(8)$ i $e(3) = e(9)$. Per a calcular l'excentricitat dels vèrtexs 1, 2, 3, 4, 5 i 7, calculem el màxim de les distàncies a la resta de vèrtexs:

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$d(1,u)$	0	1	2	2	1	2	3	2	2	$e(1) = 3$
$d(2,u)$	1	0	3	1	2	1	4	1	3	$e(2) = 4$
$d(3,u)$	2	3	0	4	1	4	1	4	2	$e(3) = 4$
$d(4,u)$	2	1	4	0	3	1	5	1	4	$e(4) = 5$
$d(5,u)$	1	2	1	3	0	3	2	3	1	$e(5) = 3$
$d(7,u)$	3	4	1	5	2	5	0	5	1	$e(7) = 5$

Per tant, l'excentricitat dels vèrtexs de G és:

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$e(u)$	3	4	4	5	3	5	5	5	4

ii) Calculeu el diàmetre, el radi i els vèrtexs centrals de G.

Solució. El diàmetre i el radi de G és el màxim i el mínim de les excentricitats, respectivament. De l'apartat anterior deduïm que el diàmetre és 5 i el radi és 3. Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat igual al radi, o sigui, excentricitat 3. Per tant, els vèrtexs centrals són 1 i 5.

iii) Hi ha algun camí de longitud més gran que el diàmetre?

Solució. Sí, de fet en aquest graf hi ha camins hamiltonians (que passen per tots els vèrtexs), per exemple, el camí 4, 6, 8, 2, 1, 5, 3, 7, 9, que té longitud 8, més gran que 5(=diàmetre de G).

iv) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

Solució. Les arestes pont són 12 i 15, que no són de cap cicle. No n'hi ha més, perquè les arestes restants són d'algun dels cicles (2,4,8,6,2); (2,4,6,8,2); o bé (3,5,9,7,3). Els vèrtexs de tall són 1, 2 i 5, ja que el graf és connex i al suprimir-ne qualsevol dels 3, queden 2 components connexos. La resta no són de tall, perquè al suprimir-los queda un sol component connex.

v) Quin és l'enter r més gran tal que existeix un subgraf isomorf a K_r en el graf complementari de G?

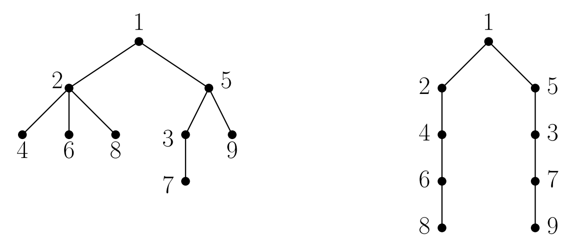
Solució. Dos vèrtexs són adjacents en el complementari si i només si no ho són en G. Per tant, és equivalent a donar un conjunt de vèrtexs dos a dos no adjacents en G de cardinal màxim, i aquest cardinal serà el valor de r.

Observem que $r \geq 4$, ja que en el conjunt $\{3, 9, 1, 8\}$ no hi ha cap parell de vèrtexs adjacents en G.

Només falta demostrar que tot conjunt W amb vèrtexs no adjacents dos a dos en G té com a molt 4 vèrtexs. En efecte, W només pot tenir un vèrtex del conjunt $\{2, 4, 6, 8\}$ (perquè són adjacents dos a dos en G) i com a molt 2 vèrtexs del conjunt $\{3, 5, 7, 9\}$ (ja que entre 3 vèrtexs qualsevol d'aquest conjunt, sempre n'hi ha alguna adjacència). Per tant, W té com a molt 4 vèrtexs: un de $\{2, 4, 6, 8\}$, dos de $\{3, 5, 7, 9\}$ i el vèrtex 1.

(b) (1 punt) Doneu una representació dels arbres generadors obtinguts en aplicar a G els algorismes BFS i DFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme.

Solució. Vegem-ne una representació a la figura següent:



L'ordre en que s'afdegeixen els vèrtexs amb l'algorisme BFS és $(1, 2, 5, 4, 6, 8, 3, 9, 7)$; i amb l'algorisme DFS és $(1, 2, 4, 6, 8, 5, 3, 7, 9)$.

Matemàtiques 1 - GEI - FIB 31-03-2022
Examen Parcial

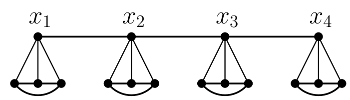
JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. Sigui G un graf d'ordre n i mida m, amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$, i H un graf d'ordre n' i mida m'. Siguin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ grafs isomorfs a H de manera que els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ són disjunts dos a dos. Definim el graf $G \circ H$ com el graf que té per conjunt de vèrtexs i arestes:

$V(G \circ H) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_n)$,

$A(G \circ H) = A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}$.

(O sigui, "pengem" una còpia de H de cada vèrtex de G de la manera que s'especifica a l'enunciat.

Per exemple, una representació del graf $T_4 \circ C_3$ seria: 

)

Responeu les preguntes següents per a grafs G i H connexos qualssevol d'ordre almenys 2, si no s'indica el contrari, en funció dels paràmetres corresponents dels grafs G i H.

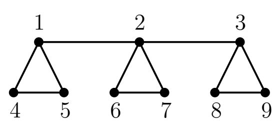
(a) (1 punt) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de $G \circ H$.

(b) (1 punt) Calculeu el radi i el diàmetre de $G \circ H$.

(c) (1 punt) Determineu tots els vèrtexs de tall i les arestes pont de $G \circ H$.

(d) (1 punt) Suposem que G i H són grafs complets. Per a quins valors de n i n' serà $G \circ H$ eulerià?

(e) (1 punt) Suposem que G és un cicle d'ordre parell i H és un graf hamiltonià. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a $G \circ H$ per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

P2. (1 punt) Considerem el graf de la figura: 

Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i, en tot moment, l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

P3. Digueu si és certa o falsa cadascuna de les afirmacions següents. Si és certa, justifiqueu-la, i si no, doneu-ne un contraexemple.

(a) (1 punt) Si afegim una aresta entre dos vèrtexs de la mateixa part estable d'un graf bipartit, el resultat és sempre un graf no bipartit.

(b) (1 punt) Un graf d'ordre 30 amb tots els vèrtexs de grau almenys 15 és sempre connex.

P4. (2 punts) Sabem que la seqüència de Prüfer d'un arbre T té longitud 4 i hi apareix exactament dues vegades el valor a, exactament una vegada el valor b, i exactament una vegada el valor c. Quina és la seqüència de graus de l'arbre? Quants arbres hi ha, llevat isomorfismes, que tinguin aquesta seqüència de graus? Doneu una representació gràfica de cadascun d'aquests arbres.

- Durada de l'examen: 1h 45m
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

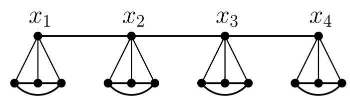
Solució

P1. Sigui G un graf d'ordre n i mida m, amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$, i H un graf d'ordre n' i mida m'. Siguin $H_1, H_2, \ldots, H_n$ grafs isomorfs a H de manera que els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ són disjunts dos a dos. Definim el graf $G \circ H$ com el graf que té per conjunt de vèrtexs i arestes:

$V(G \circ H) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup V(H_1) \cup \cdots \cup V(H_n)$,

$A(G \circ H) = A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}$.

(O sigui, "pengem" una còpia de H de cada vèrtex de G de la manera que s'especifica a l'enunciat.

Per exemple, una representació del graf $T_4 \circ C_3$ seria: 

)

Responeu les preguntes següents per a grafs G i H connexos qualssevol d'ordre almenys 2, si no s'indica el contrari, en funció dels paràmetres corresponents dels grafs G i H.

(a) (1 punt) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de $G \circ H$.

Solució. L'ordre de $G \circ H$ és $n + nn'$, ja que, al ser els conjunts de vèrtexs de $G, H_1, \ldots, H_n$ disjunts dos a dos,

$$|V(G \circ H)| = |\{x_1, \ldots, x_n\}| + |V(H_1)| + \cdots + |V(H_n)| = n + nn'.$$

La mida és $m + nm' + nn'$, ja que

$$\begin{aligned} &|A(G \circ H)| = \\ &= |A(G) \cup A(H_1) \cup \cdots \cup A(H_n) \cup \{x_1 u : u \in V(H_1)\} \cup \cdots \cup \{x_n u : u \in V(H_n)\}| \\ &= |A(G)| + |A(H_1)| + \cdots + |A(H_n)| + |\{x_1 u : u \in V(H_1)\}| + \cdots + |\{x_n u : u \in V(H_n)\}| \\ &= m + nm' + nn' \end{aligned}$$

El grau dels vèrtexs és:

$$g_{G \circ H}(x_i) = g_G(x_i) + n', \text{ on } x_i \in V(G)$$
$$g_{G \circ H}(u) = g_{H_i}(u) + 1, \text{ si } u \in V(H_i)$$

(b) (1 punt) Calculeu el radi i el diàmetre de $G \circ H$.

Solució. L'excentricitat en $G \circ H$ d'un vèrtex $x_i \in V(G)$ és $e_{G \circ H}(x_i) = e_G(x_i) + 1$, ja que, per construcció, el vèrtexs més allunyats de x_i en $G \circ H$ són els vèrtexs de la còpia H_j, que pengen del vèrtex $x_j \in V(G)$ més allunyat de x_i en G.

L'excentricitat d'un vèrtex $u \in V(H_i)$ és $e_{G \circ H}(u) = 1 + e_{G \circ H}(x_i) = e_G(x_i) + 2$, ja que els vèrtexs de H_i estan a distància com a molt 2 de u i tots els camins de u a vèrtexs que no són de H_i passen pel vèrtex x_i.

Per tant, el radi de $G \circ H$ és

$r(G \circ H) = \min\{e_{G \circ H}(z) : z \in V(G \circ H)\} = \min\{e_G(x_i) + 1 : x_i \in V(G)\} = r(G) + 1$

i el diàmetre de $G \circ H$ és

$D(G \circ H) = \max\{e_{G \circ H}(z) : z \in V(G \circ H)\} = \max\{e_G(x_i) + 2 : x_i \in V(G)\} = D(G) + 2.$

(c) (1 punt) Determineu tots els vèrtexs de tall i les arestes pont de $G \circ H$.

Solució.

Vèrtexs de tall. Sabem que el graf $G \circ H$ és connex, perquè G és connex. Per tant, un vèrtex de $G \circ H$ serà de tall si i només si al suprimir-lo de $G \circ H$, s'obté un graf no connex. Observem que, per construcció de $G \circ H$, tots els camins des d'un vèrtex de H_i fins a un vèrtex de G passen per x_i. Aleshores,

- si $x_i \in V(G)$, aleshores x_i és de tall, ja que, per construcció de $G \circ H$, tots els camins de $u \in V(H_i)$ a $x_j \in V(G)$, $j \neq i$, passen per x_i.
- si $u \in V(H_i)$, aleshores u no és de tall, ja que
  - si $v, w \in V(H_i)$, aleshores hi ha un camí de v a w en $G \circ H - u$, per exemple vx_iw;
  - si $v \in V(H_i)$ i $z \notin V(H_i)$, aleshores hi ha un camí en $G \circ H - u$, que comença amb l'aresta vx_i i després passa per vèrtexs diferents de u;
  - si $z, z' \notin V(H_i)$, aleshores hi ha un camí en $G \circ H - u$, perquè cap camí de z a z' en $G \circ H$ passa per u (ja que caldria passar dues vegades per x_i).

Per tant, els vèrtexs de tall de $G \circ H$ són tots els vèrtexs de G, $x_1, \ldots, x_n$.

Arestes pont.

- Les arestes de H_i no són pont, ja que formen part d'un cicle (si l'aresta és, per exemple, uv, $u, v \in V(H_i)$), aleshores x_iuvx_i és un cicle que passa per uv).
- Les arestes x_iu, que connecten un vèrtex x_i de G amb un vèrtex u de H_i, no són mai arestes pont, perquè són d'algun cicle (per exemple, si v és un vèrtex de H_i adjacent a u, que existeix perquè H és connex d'ordre almenys 2, aleshores x_iuvx_i és un cicle que conté x_iu).
- Les arestes de G són d'un cicle en $G \circ H$ si i només si són d'un cicle en G (no hi ha cicles que continguin vèrtexs de G i d'alguna còpia de H_i alhora, ja que els vèrtexs x_i són de tall en $G \circ H$). Per tant, una aresta de $A(G)$ és pont en $G \circ H$ si i només si és pont en G.

Per tant, les arestes pont de $G \circ H$ són les arestes pont de G.

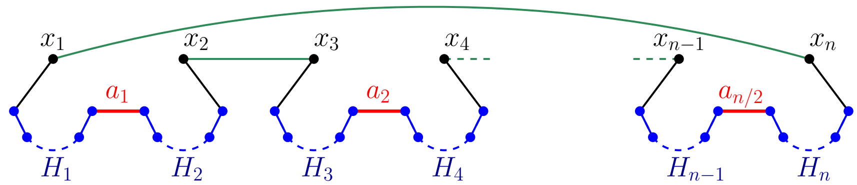
(d) (1 punt) Suposem que G i H són grafs complets. Per a quins valors de n i n' serà $G \circ H$ eulerià?

Solució. El graf $G \circ H$ és connex perquè al ser G connex, aleshores $G \circ H$ té diàmetre finit (vegeu l'apartat (b)). A més, per ser G i H grafs complets, per l'apartat (a) tenim, $g_{G \circ H}(x_i) = n - 1 + n'$, si $x_i \in V(G)$, i $g_{G \circ H}(u) = n' - 1 + 1 = n'$, si $u \in V(H_i)$. Per tant, tots els vèrtexs tindran grau parell si i només si $n + n' - 1$ i n' són parells. Per tant, $G \circ H$ és eulerià si i només si n és senar i n' és parell.

(e) (1 punt) Suposem que G és un cicle d'ordre parell i H és un graf hamiltonià. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a $G \circ H$ per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

Solució. El graf $C_n \circ H$ no és hamiltonià perquè té vèrtexs de tall (tots els vèrtexs de C_n). D'altra banda, per obtenir un graf hamiltonià cal afegir almenys una aresta incident a un dels vèrtexs de H_i, per a cada còpia H_i, ja que en cas contrari, el vèrtex x_i continua essent un vèrtex de tall. Per tant, calen com a mínim $n/2$ arestes (ja que cada aresta és incident a dos vèrtexs).

Vegem ara que afegint $n/2$ arestes podem aconseguir un graf hamiltonià. A la figura següent teniu un esquema de la contrucció que farem per obtenir un cicle hamiltonià, i que s'explica a continuació.



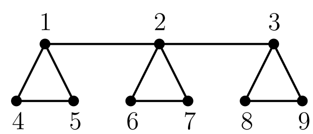
Considerem a cada H_i un camí hamiltonià amb vèrtex inicial u_{i1} i vèrtex final $u_{in'}$ (en blau, a la figura), que existeix perquè H és hamiltonià (si un graf té un cicle hamiltonià, aleshores té un camí hamiltonià). Afegim per a cada i senar l'aresta $a_i = u_{in'}u_{i+1,1}$, és a dir, l'aresta que té per extrems l'ultim vèrtex del camí hamiltonià de H_i i el primer vèrtex del camí hamiltonià de H_{i+1} (en vermell, a la figura). D'aquesta manera, afegim exactament $n/2$ arestes. Vegem a continuació que el graf $G \circ H + \{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$ és hamiltonià descrivint un cicle hamiltonià. Suposem que el cicle del graf G és $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$. Per a tot i senar substituim l'aresta $x_i x_{i+1}$ del cicle pel camí següent:

$$x_i \overbrace{u_{i,1}u_{i,2}, \ldots, u_{i,n'-1}, u_{i,n'}}^{\text{camí hamiltonià de } H_i}\overbrace{u_{i+1,1}, u_{i+1,2}, \ldots, u_{i+1,n'}}^{\text{camí hamiltonià de } H_{i+1}} x_{i+1}.$$

És a dir, entre x_i i x_{i+1} es passa tots els vèrtexs de H_i i de H_{i+1}, utilitzant l'aresta afegida $a_i = u_{in'}u_{i+1,1}$ (en vermell, els vèrtexs extrems de a_i).

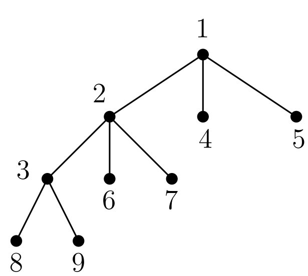
D'aquesta manera, utilitzant les arestes $\{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$, obtenim un cicle que passa per tots els vèrtexs de $G \circ H$, o sigui, un cicle hamiltonià en $G \circ H + \{a_1, \ldots, a_{n/2}\}$.

Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir per obtenir un graf hamiltonià és $n/2$.

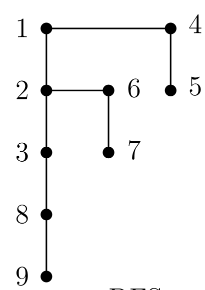
P2. (1 punt) Considerem el graf de la figura: 

Doneu una representació gràfica dels arbres generadors obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS si es comença en el vèrtex 1 i en tot moment l'algorisme escull el vèrtex d'etiqueta més petita, si hi ha més d'una opció. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a cadascun dels arbres.

Solució. A la figura següent teniu una representació de cadascun dels arbres. L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador en aplicar l'algorisme BFS és $1, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 9$ i en aplicar l'algorisme DFS és $1, 2, 3, 8, 9, 6, 7, 4, 5$.



BFS



DFS

P3. Digueu si és certa o falsa cadascuna de les afirmacions següents. Si és certa, justifiqueu-la, i si no, doneu-ne un contraexemple.

(a) (1 punt) Si afegim una aresta entre dos vèrtexs de la mateixa part estable d'un graf bipartit, el resultat és sempre un graf no bipartit.

Solució. És fals. Per exemple, considerem el graf G amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4\}$ i conjunt d'arestes $\{13, 24\}$. Aleshores, si $V_1 = \{1, 2\}$ i $V_2 = \{3, 4\}$, V_1, V_2

és una partició de V, on les arestes tenen un extrem a V_1 i l'altre a V_2. Per tant, G és bipartit. Si afegim l'aresta 12 entre els dos vèrtex de la part estable V_1 obtenim un graf trajecte d'ordre 4, que és també bipartit, amb parts estables $V_1' = \{1, 4\}$ i $V_2' = \{2, 3\}$.

(b) (1 punt) Un graf d'ordre 30 amb tots els vèrtexs de grau almenys 15 és sempre connex.

Solució. És cert. El graf té ordre més gran o igual que 3 i tots els vèrtexs tenen grau 15 que és almenys la meitat de l'ordre ($30/2 = 15$). Pel Teorema de Dirac, el graf és hamiltonià, i per tant, connex.

D'una altra manera. Veurem que entre dos vèrtexs qualssevol u i v del graf hi ha almenys un camí. Si són adjacents, hi ha un camí de longitud 1. Si no, considerem el conjunt $N(u)$, format per tots els vèretxs adjacents a u, i el conjunt $N(v)$, format per tots els vèretxs adjacents a v. Cadascun dels conjunts $N(u)$ i $N(v)$ té almenys 15 vèrtexs, ja que tots els vèrtexs tenen grau almenys 15, i, a més, no contenen ni u, ni v, perquè u i v no són adjacents. Si $N(u)$ i $N(v)$ fossin disjunts, aleshores el graf tindriacom a mínim 32 vèrtexs (el vèrtex u, el vèrtex v, almenys 15 vèrtexs a $N(u)$ i almenys 15 vèrtexs a $N(v)$), contradicció. Per tant, $N(u)$ i $N(v)$ tenen com a mínim un vèrtex comú, w, de manera que uwv és un camí de longitud 2. Per tant, el graf és connex, perquè entre dos vèrtexs qualssevol hi ha almenys un camí.

P4. (2 punts) Sabem que la seqüència de Prüfer d'un arbre T té longitud 4 i hi apareix exactament dues vegades el valor a; exactament una vegada el valor b, i exactament una vegada el valor c. Quina és la seqüència de graus de l'arbre? Quants arbres hi ha, llevat isomorfismes, que tinguin aquesta seqüència de graus? Doneu una representació gràfica de cadascun d'aquests arbres.

Solució. L'arbre té ordre 6, ja que la seqüència de Prüfer té longitud 4. Dels 6 vèrtexs, només 3 apareixen a la seqüència de Prüfer, Per tant, l'arbre té 3 ($= 6 - 3$) fulles. El grau dels vèrtexs a, b i c és una unitat més gran que el nombre de vegades que apareixen a la seqüència de Prüfer. Per tant, $g(a) = 3$, $g(b) = 2$ i $g(c) = 2$. La seqüència de graus de l'arbre és, doncs, $(3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Per a trobar tots els arbres amb aquesta seqüència de graus, llevat isomorfismes, observem que si suprimim les 3 fulles de l'arbre, queda un graf connex (perquè els vèrtexs de grau 1 no són de tall) i sense cicles (perquè l'arbre no conté cicles) amb els vèrtexs a, b i c. És a dir, el resultat és un arbre format pels vèrtexs a, b i c. L'únic arbre d'ordre 3 és el trajecte T_3. Només cal analitzar dos casos, segons si el vèrtex a és el vertex de grau 2 de T_3 o bé una fulla de T_3, ja que tenint en compte el grau d'a, b i c en T, ja quedarà determinat d'on pengen les 3 fulles de T. Els arbres que s'obtenen són els de la figura, que són no isomorfs, perquè en un dels arbres el vèrtex de grau 3 és adjacent a una fulla, i en l'altre, a 2 fulles:

Matemàtiques 1 - GEI - FIB 09-11-2021
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. Sabem que un graf G té mida 8 i que només té vèrtexs de grau 3 i de grau 4.

(a) (1.25 punts) Determineu l'ordre i la seqüència de graus de G.

(b) (1.25 punts) Demostreu que només hi ha un graf G amb aquestes condicions llevat isomorfismes. Doneu una representació de G. De quin graf es tracta?

P2. Sigui G un graf amb 3 components connexos, que anomenem G_1, G_2 i G_3, tals que G_1 té ordre 4 i mida 5; G_2 és un graf complet d'ordre 6; i G_3 és isomorf a un graf bipartit complet $K_{1,2}$.

(a) (0.5 punts) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

(b) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià?

(c) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

P3. Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Sabem que si es suprimeix una determinada aresta de G s'obté un graf isomorf a G^c.

(a) (1.25 punts) Determineu la mida del graf G en funció del seu ordre.

(b) (1.25 punts) Determineu llevat isomorfismes tots els grafs G d'ordre com a molt 5 que compleixen les condicions de l'enunciat. En cada cas, representeu els grafs G i G^c, indiqueu l'aresta a que cal suprimir i l'isomorfisme entre $G - a$ i G^c.

P4. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 45, 47, 56, 57, 58, 68, 78, 79, 89\}$.

(a) (1 punt) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex, i el diàmetre, el radi i el centre de G.

(b) (1 punt) Doneu una representació de l'arbre generador T obtingut en aplicar a G l'algorisme BFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre T en l'aplicar l'algorisme.

(c) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior.

Informacions

- Durada de l'examen: 90 minuts
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els problemes per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació ...
- Publicació de les notes: 23/11/2021.
- Revisió de l'examen: dimarts 30 de novembre a les 14:00, prèvia sol·licitud. Es publicarà al racó el procediment a seguir.

Model de solució

P1. Sabem que un graf G té mida 8 i que només té vèrtexs de grau 3 i de grau 4.

(a) (1.25 punts) Determineu l'ordre i la seqüència de graus de G.

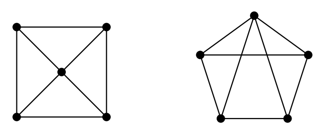
Solució. Pel lema de les encaixades, la suma dels graus és dues vegades la mida. En aquest cas, si r és el nombre de vèrtexs de grau 3 i s el nombre de vèrtexs de grau 4, aleshores la suma dels graus és $\sum_{u \in V} g(u) = 3r + 4s$. A més, la mida és 8, per tant, $3r + 4s = 16$. El nombre de vèrtexs de grau senar ha de ser parell, per tant, r ha de ser parell. A més, r ha de ser com a molt 4, ja que r i s són no negatius. Resumint, $0 \leq r \leq 4$; $3r + 4s = 16$; i l'ordre del graf és $n = r + s$.

Si $r = 0$, aleshores $s = 4$ i $n = 0 + 4 = 4$, no pot ser, ja que no hi pot haver vèrtexs de grau 4 en un graf d'ordre 4. Si $r = 2$, aleshores $4s = 16 - 3r = 10$, no pot ser, ja que 10 no és múltiple de 4. Si $r = 4$, aleshores $4s = 16 - 12 = 4$, per tant, $s = 1$ i $n = 4 + 1 = 5$.

Per tant, l'ordre ha de ser $n = 5$ i la seqüència de graus, 43333.

(b) (1.25 punts) Demostreu que només hi ha un graf G amb aquestes condicions llevat isomorfismes. Doneu una representació de G. De quin graf es tracta?

Solució. Si un graf G d'ordre 5 té seqüència de graus 43333, aleshores hi ha un vèrtex adjacent a tots els altres. Per tant, si suprimim aquest vèrtex de G, tenim un graf 2-regular d'ordre 4 (ja que eliminem una aresta incident amb cadascun dels vèrtexs de grau 3). Els grafs 2-regulars són unió de cicles. En aquest cas, l'única possibilitat és que siguin un únic cicle d'ordre 4, ja que si un graf és unió d'almenys 2 cicles, ha de tenir ordre almenys 6. Per tant, G és el graf que s'obté afegint un vèrtex adjacent a tots els vèrtexs d'un cicle d'ordre 4. Per tant, G és isomorf a una roda d'ordre 5, W_5. Vegem a la figura següent dues possibles representacions del graf:

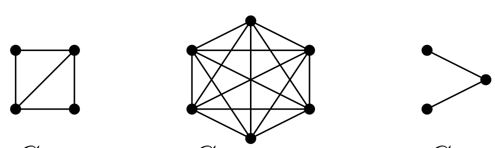


P2. Sigui G un graf amb 3 components connexos, que anomenem G_1, G_2 i G_3, tals que G_1 té ordre 4 i mida 5; G_2 és un graf complet d'ordre 6; i G_3 és isomorf a un graf bipartit complet $K_{1,2}$.

(a) (0.5 punts) Doneu tots els vèrtexs de tall i arestes pont de G.

Solució. Sabem que un vèrtex és de tall en un graf si i només si ho és en el component connex al qual pertany. El mateix passa amb les arestes pont.

El component connex G_1 és isomorf a un graf $K_4 - a$, on a és una aresta qualsevol de K_4, ja que la mida de K_4 és 6, i l'únic graf d'ordre 4 i mida 5 s'obté suprimint una aresta de K_4. Per tant, una representació de G és:



G_1 G_2 G_3

El component connex G_1 no té vèrtexs de tall, ja que al suprimir un vèrtex obtenim el graf T_3 o bé C_3, tots dos connexos; i no té arestes pont, ja que totes són d'algun cicle d'ordre 3.

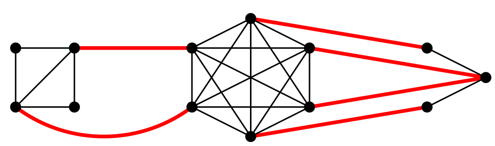
El component connex G_2 és isomorf a K_6. Per tant, G_2 no té vertexs de tall, ja que al suprimir un vèrtex de K_6 obtenim el graf K_5, que és connex; i G_2 no té arestes pont, perquè per exemple si l'aresta és $a = uv$, aleshores a és del cicle $uvwu$, on w és un vèrtex qualsevol de G_2 diferent de u i de v.

El component connex G_3 és isomorf a $K_{1,2}$, per tant, té exactament un vèrtex de tall, el vèrtex de grau 2 (els de grau 1 no són mai vèrtexs de tall), i les dues arestes de $K_{1,2}$ són pont, ja que no són de cap cicle.

Per tant, G té exactament un vèrtex de tall (el vèrtex de grau 2 del component G_3), i dues arestes pont (les dues arestes de G_3).

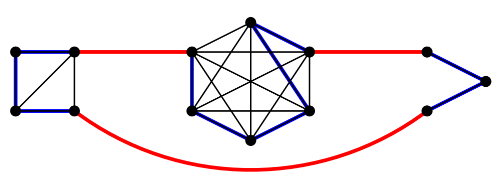
(b) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià?

Solució. Un graf és eulerià si és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Per tal d'aconseguir un graf connex, cal afegir almenys 2 arestes al graf G. D'altra banda, G té 10 vèrtexs de grau senar (la seqüència de graus de G és 5555553322211). Per tant, cal afegir almenys 5(=10/2) arestes per tal d'obtenir un graf amb tots els vèrtexs de grau parell. Vegem si amb 5 arestes podem aconseguir un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell. Els 6 vèrtexs de G_2 tenen grau senar i no podem afegir arestes entre dos vèrtexs de G_2, ja que és un graf complet. Per tant, cal afegir almenys 6 arestes, cadascuna amb un extrem a G_2 i l'altre a G_1 o bé a G_3. Podem fer que 4 d'aquestes arestes tinguin l'altre extrem a cadascun dels 4 vèrtexs de grau senar de $G_1 \cup G_3$, i les altres dues, que siguin incidents a un mateix vèrtex de grau parell de $G_1 \cup G_3$, per exemple, el vèrtex de grau 2 de G_3. Aleshores, al graf obtingut és eulerià, ja que és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. El mínim nombre d'arestes que cal afegir és, doncs, 6. A la figura següent tenim en vermell un exemple de 6 arestes que podem afegir al graf G per tal d'obtenir un graf eulerià:



(c) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G per tal d'obtenir un graf hamiltonià?

Solució. El mínim nombre d'arestes que cal afegir és 3. Afegint 3 arestes aconseguim un graf hamiltonià si, per exemple, afegim una aresta amb un extrem a una de les fulles de G_3 i un vèrtex de grau 2 de G_1, afegim una altra aresta amb extrems l'altra fulla de G_3 i un vèrtex qualsevol de G_2, i una tercera aresta amb extrems un vèrtex qualsevol de G_2 i un vèrtex de grau 3 de G_2. Vegeu a la figura el graf G' i un possible cicle hamiltonià en G'. A la figura següent tenim en vermell un exemple de 3 arestes que podem afegir al graf G per tal d'obtenir un graf G' hamiltonià. Un possible cicle hamiltonià de G' està format per les arestes vermelles i blaves:



Vegem ara que amb menys de 3 arestes no es pot aconsegur.

El graf que resulta d'afegir només una aresta no és connex i, per tant, tampoc és hamiltonià.

Si afegim 2 arestes no es pot aconseguir un graf hamiltonià. En efecte, al suprimir dues arestes d'un graf hamiltonià s'obtenen com a molt dos components connexos (ja que al suprimir dues arestes d'un cicle qualsevol s'obtenen dos components connexos i si un graf és hamiltonià, tots els vèrtexs del graf són d'un mateix cicle). Si el resultat d'afegir dues arestes a_1 i a_2 a G fós un graf G' hamiltonià, al suprimir les arestes a_1 i a_2 de G' s'obtindrien com a molt 2 components connexos, contradicció, ja que $G' - \{a_1, a_2\}$ és el graf G, que té 3 components connexos.

P3. Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Sabem que si es suprimeix una determinada aresta de G s'obté un graf isomorf a G^c.

(a) (1.25 punts) Determineu la mida del graf G en funció del seu ordre.

Solució. Suposem que a és una aresta de G tal que $G - a \cong G^c$. Aleshores els grafs $G - a$ i G^c tenen la mateixa mida. Però la mida de $G - a$ és $m - 1$ i la mida de G^c és $\frac{n(n-1)}{2} - m$. Per tant,

$$m - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

d'on deduïm

$$m = \frac{n(n-1)+2}{4}.$$

(b) (1.25 punts) Determineu llevat isomorfismes tots els grafs G d'ordre com a molt 5 que compleixen les condicions de l'enunciat. En cada cas, representeu els grafs G i G^c, indiqueu l'aresta a que cal suprimir i l'isomorfisme entre $G - a$ i G^c.

Solució. Comprovem primer quina hauria de ser la mida segons l'ordre del graf, tenint en compte l'expressió trobada a l'apartat anterior:

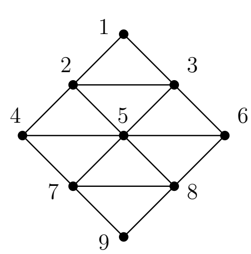
n	1	2	3	4	5
$m(=\frac{n(n-1)+2}{4})$	$\frac{2}{4}$	1	2	$\frac{14}{4}$	$\frac{22}{4}$

Com que la mida ha de ser un enter no negatiu, només en poden existir per a $n \in \{2, 3\}$.
Si $n = 2$, aleshores G ha de tenir mida 1, és a dir, G ha de ser K_2, i observem que es compleix la condició de l'enunciat, ja que si suprimim l'única aresta de K_2 obtenim N_2, i el graf complementari de K_2 és N_2.
Si $n = 3$, aleshores G ha de tenir mida 2. L'únic grafs d'ordre 3 i mida 2, llevat isomorfismes, és T_3, i observem compleix la condició de l'enunciat, ja que si suprimim qualsevol de les dues arestes de T_3, obtenim $K_1 \cup K_2$, i el graf complementari de T_3 és $K_1 \cup K_2$.
És a dir, els únics grafs d'ordre com a molt 5 que satisfan la condició de l'enunciat són K_2 i T_3.

P4. Considerem el graf $G = (V, A)$, on $V = [9]$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 25, 35, 36, 45, 47, 56, 57, 58, 68, 78, 79, 89\}$.

(a) (1 punt) Calculeu l'excentricitat de cada vèrtex, i el diàmetre, el radi i el centre de G.

Solució. L'excentricitat d'un vèrtex és el màxim de les distàncies a tots els altres vèrtexs. Si representem el graf com a la figura següent, veiem que, per simetria, els vèrtexs 1 i 9 tenen la mateixa excentricitat; els vèrtexs 2, 3, 7 i 8 tenen la mateixa excentricitat; i els vèrtexs 4 i 6 tenen la mateixa excentricitat:



Per tant, només cal calcular l'excentricitat dels vèrtes 1, 2, 4 i 5.

L'excentricitat del vèrtex 1 és 4, ja que els vèrtexs 2 i 3 són a distància 1 del vèrtex 1; els vèrtexs 4, 5 i 6 són a distància 2; els vèrtexs 7 i 8 són a distància 3; i el vèrtex 9 és a distància 4.

L'excentricitat del vèrtex 2 és 3, ja que els vèrtexs 1, 3, 4 i 5 són a distància 1 del vèrtex 2; els vèrtexs 6, 7 i 8 són a distància 2; el vèrtex 9 és a distància 3.

L'excentricitat del vèrtex 4 és 2, ja que els vèrtexs 2, 5 i 7 són a distància 1 del vèrtex 4; i la resta de vèrtexs són a distància 2.

L'excentricitat del vèrtex 5 és , ja que els vèrtexs 2, 3, 4, 6, 7 i 8 són a distància 1 del vèrtex 5; i la resta de vèrtexs són a distància 2.

Per tant, les excentricitats són:

vèrtex	1	2	3	4	5	6	7	8	9
excentricitat	4	3	3	2	2	2	3	3	4

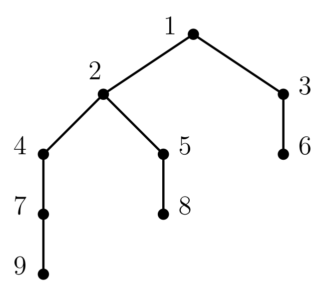
El diàmetre és el màxim de les excentricitats, o sigui, 4.

El radi és el mínim de les excentricitats, o sigui, 2.

Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat mínima, o sigui, 4, 5 i 6. El centre de G és el subgraf induït pels vèrtexs centrals, o sigui el graf $(\{4,5,6\}), \{45,56\})$, que és isom orf al graf trajecte T_3.

(b) (1 punt) Doneu una representació de l'arbre generador T obtingut en aplicar a G l'algorisme BFS començant en el vèrtex 1 i, si en algun pas de l'algorisme es pot escollir més d'un vèrtex, triem el d'etiqueta més petita. Indiqueu en quin ordre s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre T en l'aplicar l'algorisme.

Solució. L'orbre obtingut és el de la figura:



L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre és $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(c) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior.

Solució. La seqüència de Prüfer de T té longitud 7, ja que l'arbre té ordre 9 i la trobem recursivament: mirem de quin vèrtex penja la fulla amb etiqueta més petita, suprimim a continuació aquesta fulla i fem el mateix a l'arbre obtingut:

arbre	mín{fulles}	penja de:
$T_0 = T$	6	3
$T_1 = T_0 - 6$	3	1
$T_2 = T_1 - 3$	1	2
$T_3 = T_2 - 1$	8	5
$T_4 = T_3 - 8$	5	2
$T_5 = T_4 - 5$	2	4
$T_6 = T_5 - 2$	4	7

La seqüència de Prüfer de l'arbre T obtingut a l'apartat anterior és, doncs, $(3, 1, 2, 5, 2, 4, 7)$.

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

P1. (3 punts) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses. Demostreu-les, si són certes, i doneu-ne un contraexemple, si són falses.

(a) Sigui G un graf connex d'ordre almenys 3.
  (i) Si G té algun vèrtex de tall, aleshores G té alguna aresta pont.
  (ii) Si G té alguna aresta pont, aleshores G té algun vèrtex de tall.

(b) Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$.
  (i) Si G té diàmetre 2, aleshores el radi de G és 1.
  (ii) Si G té radi 1, aleshores el grau màxim de G és $n-1$.

(c) Si G és un graf connex d'ordre almenys 2 tal que en suprimir-ne un vèrtex central v queda un graf complet, aleshores podem assegurar que G és un graf complet.

P2. (4 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m, on $n \geq 2$ i $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considerem el graf $G' = (V', A')$, on $V' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ i $y_iy_j \in A'$ si i només si $x_ix_j \in A$ (és a dir, G' és una còpia de G). Definim el graf $H = (W, B)$ com segueix:

$$W = V \cup V' \cup \{z_1, \ldots, z_n\},$$
$$B = A \cup A' \cup \{x_iz_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de H en funció de l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G.

(b) Demostreu que H és bipartit si i només si G és bipartit.

(c) Demostreu que si el graf G és un cicle d'ordre 6, aleshores H és hamiltonià, però que si G és un cicle d'ordre 5, aleshores H no és hamiltonià.

(d) Suposem que $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\})$ (és a dir, G és un graf cicle d'ordre 4). Calculeu l'arbre generador de H que s'obté en aplicar l'algorisme BFS si es comença en el vèrtex x_1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria segons l'ordre següent:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre en aplicar l'algorisme.

P3. (3 punts) Un arbre T té només tres vèrtexs a, b i c que no són fulles, amb graus $g(a) = 4$, $g(b) = 3$ i $g(c) = 2$.

(a) Doneu l'ordre i la seqüència de graus de T.

(b) Demostreu que el graf complementari de T, T^c, conté un senderó eulerià. Quins vèrtexs tindrà com a extrems aquest senderó eulerià?

(c) Sabem que ab i bc són arestes de T. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per tal d'obtenir un graf eulerià?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 30m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar per separat: 1) P1; 2) apartats (a) i (b) de P2; 3) apartats (c) i (d) de P2; 4) P3.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 29/04/2021.
- Revisió de l'examen: es publicarà al racó el procediment a seguir.

Model de solució

P1. (3 punts) Digueu si les afirmacions següents són certes o falses. Demostreu-les, si són certes, i doneu-ne un contraexemple, si són falses.

(a) Sigui G un graf connex d'ordre almenys 3.

(i) Si G té algun vèrtex de tall, aleshores G té alguna aresta pont.

Solució. És fals. Per exemple, el graf $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{12, 23, 13, 14, 45, 15\})$ no té arestes pont, perquè totes formen part d'un cicle, però 1 és vèrtex de tall, ja que en $G - 1$ no hi ha cap camí de 2 a 5.

(ii) Si G té alguna aresta pont, aleshores G té algun vèrtex de tall.

Solució. És cert. Una aresta amb els dos extrems de grau 1 indueix un component connex d'ordre 2. Per tant, al ser G connex d'ordre almenys 3, un dels extrems de l'aresta pont té grau almenys 2, i sabem que els extrems d'una aresta pont són vèrtexs de tall si tenen grau almenys 2.

(b) Sigui G un graf d'ordre $n \geq 2$.

(i) Si G té diàmetre 2, aleshores el radi de G és 1.

Solució. És fals. Per exemple, un graf cicle d'ordre 4 té diàmetre 2 i radi 2, ja que tots els vèrtexs tenen excentricitat 2.

(ii) Si G té radi 1, aleshores el grau màxim de G és $n - 1$.

Solució. És cert. Si el radi és 1, vol dir que hi ha un vèrtex u amb excentricitat 1, és a dir, tots els vèrtexs són a distància 1 d'u. Per tant, u és adjacent a tots els altres vèrtexs del graf, que és equivalent a que $g(u) = n - 1$. Per tant, el grau màxim de G és $n - 1$.

(c) Si G és un graf connex d'ordre almenys 2 tal que en suprimir-ne un vèrtex central v queda un graf complet, aleshores podem assegurar que G és un graf complet.

Solució. És cert. Suposem que v és un vèrtex central tal que $G-v$ és un graf complet. Per ser G connex, $g(v) \geq 1$. Sigui u un vèrtex de G adjacent a v. El vèrtex u és adjacent a tots els vèrtexs de G, ja que és adjacent a v i a més adjacent a tots els altres vèrtexs de $G - v$, per ser $G - v$ complet. Per tant, u té excentricitat 1 en G. Per ser v un vèrtex central (o sigui, d'excentricitat mínima), l'excentricitat de v ha de ser també 1. Per tant, G és un graf complet, ja que dos vèrtexs qualsevol de G són adjacents: v és adjacent a tots els altres vèrtexs de G (per ser d'excentricitat 1) i tots els vèrtexs de $G - v$ són adjacents dos a dos, per ser $G - v$ complet.

P2. (4 punts) Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m, on $n \geq 2$ i $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Considerem el graf $G' = (V', A')$, on $V' = \{y_1, \dots, y_n\}$ i $y_iy_j \in A'$ si i només si $x_ix_j \in A$ (és a dir, G' és una còpia de G). Definim el graf $H = (W, B)$ com segueix:

$$W = V \cup V' \cup \{z_1, \dots, z_n\},$$
$$B = A \cup A' \cup \{x_iz_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

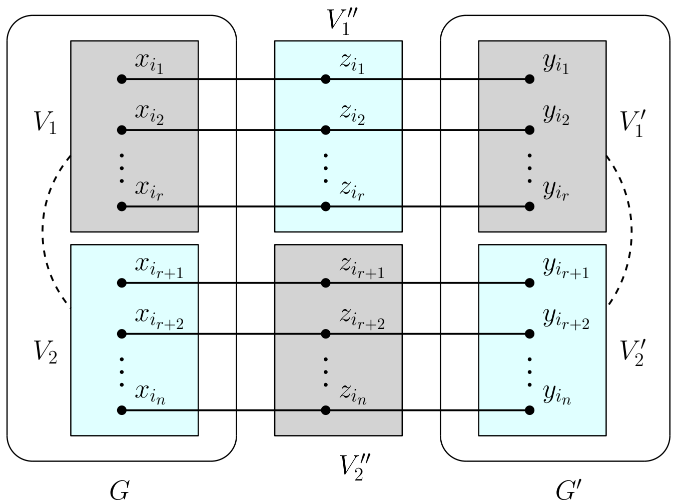
(a) Doneu l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de H en funció de l'ordre, la mida i els graus dels vèrtexs de G.

Solució. L'ordre de H és el nombre de vèrtexs de H, o sigui el cardinal de W. Per tant, $\text{ord}(H) = |W| = 3n$. La mida de H és el nombre d'arestes de H, o sigui el cardinal de B. Per tant, $\text{mida}(H) = |B| = |A| + |A'| + |\{x_iz_i : 1 \leq i \leq n\}| + |\{y_iz_i : 1 \leq i \leq n\}| = 2m + 2n$. Calculem ara els graus dels vèrtexs de H. Per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, els vèrtexs adjacents a z_i en H són x_i i y_i, per tant, $g_H(z_i) = 2$. Per a tot $i \in \{1, \dots, n\}$, els vèrtexs adjacents a x_i en H són els vèrtexs x_j adjacents a x_i en G i el vèrtex z_i. Per tant, $g_H(x_i) = g_G(x_i) + 1$. Anàlogament, tenim que $g_H(y_i) = g_{G'}(y_i) + 1$, ja que els vèrtexs adjacents a y_i en H són els vèrtexs y_j adjacents a y_i en G' i el vèrtex z_i. Per tant, $g_H(y_i) = g_G(x_i) + 1$.

(b) Demostreu que H és bipartit si i només si G és bipartit.

Solució. Demostrem primer que si H és bipartit, aleshores G també ho és. En efecte, si H és bipartit, aleshores H no conté cicles de longitud senar. Per tant, G tampoc conté cicles de longitud senar perquè és un subgraf de H. Per tant, G és bipartit.

Recíprocament, suposem que G és bipartit i les parts estables són V_1 i V_2, de manera que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ i tota aresta de G té un extrem a V_1 i l'altre a V_2. El graf G' és una còpia de G, per tant, també és bipartit i les partes estables són, per exemple, V_1' i V_2'. Definim $V_1'' = \{z_i : x_i \in V_1\}$ i $V_2'' = \{z_i : x_i \in V_2\}$. Vegem a la figura següent una possible representació del graf H. A més de les arestes dibuixades, només hi pot haver arestes entre un vèrtex de V_1 i un de V_2, o bé entre un vèrtex de V_1' i un de V_2'. Per tant, no hi ha arestes entre un vertèx de $W_1 = (V_1 \cup V_1') \cup V_2''$ (en gris) i un de $W_2 = (V_2 \cup V_2') \cup V_1''$ (en blau). Per tant, H és bipartit i W_1 i W_2 són les parts estables de H.



(c) Demostreu que si el graf G és un cicle d'ordre 6, aleshores H és hamiltonià, però que si G és un cicle d'ordre 5, aleshores H no és hamiltonià.

Solució. Suposem que G és isomorf a un cicle d'ordre 6 i que les arestes de G són x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_6x_1. Aleshores, el graf H és hamiltonià, ja que un possible cicle hamiltonià és:

$$x_1, z_1, y_1, y_2, z_2, x_2, x_3, z_3, y_3, y_4, z_4, x_4, x_5, z_5, y_5, y_6, z_6, x_6, x_1.$$

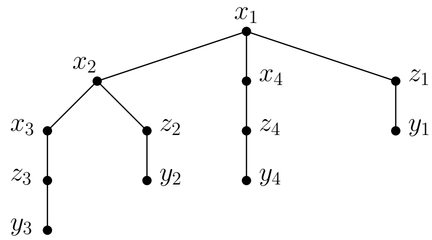
Suposem ara que G és isomorf a un cicle d'ordre 5. Suposem que les arestes de G són x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1. Suposem que H és hamiltonià i arribarem a una contradicció. Observem que $g_H(x_i) = 3$, $g_H(y_i) = 3$ i $g_H(z_i) = 2$, per a tot $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Els vèrtexs z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 tenen grau 2 en H, per tant, les dues arestes incidents amb z_i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$ serien de qualsevol cicle hamiltonià. Per a tot vèrtex x_i, l'aresta incident amb x_i i z_i ha de ser del cicle hamiltonià. Per tant, per a qualsevol i, exactament una de les altres dues arestes de H incidents amb x_i hauria de ser del cicle hamiltonià, és a dir, exactament una de les dues arestes de G incidents amb x_i hauria de ser del cicle hamiltonià. Però no és possible triar les arestes de G amb aquesta condició, ja que G és un cicle d'ordre senar. Per tant, H no és hamiltonià.

(d) Suposem que $G = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1\})$ (és a dir, G és un graf cicle d'ordre 4). Calculeu l'arbre generador de H que s'obté en aplicar l'algorisme BFS si es comença en el vèrtex x_1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria segons l'ordre següent:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2, z_3, z_4.$$

Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre en aplicar l'algorisme.

Solució. Vegeu una representació a la figura següent. L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador és: $x_1, x_2, x_4, z_1, x_3, z_2, z_4, y_1, z_3, y_2, y_4, y_3$.



P3. (3 punts) Un arbre T té només tres vèrtexs a, b i c que no són fulles, amb graus $g(a) = 4$, $g(b) = 3$ i $g(c) = 2$.

(a) Doneu l'ordre i la seqüència de graus de T.

Solució. Suposem que T és un arbre d'ordre n i mida m. Sigui ℓ el nombre de fulles de T. Pel lema de les encaixades, $\sum_{u\in V(T)} g(u) = 2m$. Observem que $\sum_{u\in V(T)} g(u) = \ell + 2 + 3 + 4 = \ell + 9$, i per ser T un arbre, $m = n - 1 = (\ell + 3) - 1 = \ell + 2$. Per tant, $\ell + 9 = 2\ell + 4$, d'on deduïm $\ell = 5$.

Per tant, T és un arbre d'ordre 8 amb seqüència de graus $4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1$.

(b) Demostreu que el graf complementari de T, T^c, conté un senderó eulerià. Quins vèrtexs tindrà com a extrems aquest senderó eulerià?

Solució. La suma dels graus d'un vèrtex en un graf i en el seu complementari és l'ordre menys 1. Per tant, si restem de 7 els valors de la seqüència de graus de T, obtenim la seqüència de graus del complementari, T^c: $6, 6, 6, 6, 6, 5, 4, 3$. El graf T^c conté un senderó eulerià si, i només si, és connex i té exactament dos vèrtexs de grau senar. Observem a la seqüència de graus de T^c que aquesta última condició es compleix. Per tant, només falta demostrar que T^c és connex. El graf T^c té un vèrtex de grau 6 i, per tant, té un component connex amb almenys 7 vèrtexs, de manera que si T^c no fos connex, hi hauria com a molt un altre component connex amb un sol vèrtex, és a dir, hi hauria un vèrtex aïllat. Però ja hem vist que no hi ha vèrtexs aïllats a T^c, perquè no hi ha cap valor igual a 0 a la seqüència de graus de T^c. Per tant, T^c és connex.

Els extrems del senderó eulerià de T^c són els dos vèrtexs de grau senar en T^c, o sigui, els vèrtexs de grau a i c, ja que tenen grau 4 i 2 respectivament en T, i per tant, tenen grau 3 i 5 respectivament en T^c.

(c) Sabem que ab i bc són arestes de T. Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per tal d'obtenir un graf eulerià?

Solució. Per tal que un graf sigui eulerià, cal que sigui connex i tots els vèrtexs tinguin grau parell. Sabem que T^c és connex. Per tant, si li afegim arestes també ho serà. D'altra banda, T^c té exactament dos vèrtexs de grau senar, que són a i c, ja que $g_{T^c}(a) = 7 - 4 = 3$ i $g_{T^c}(c) = 7 - 2 = 5$. Si volem aconseguir un graf eulerià afegint una única aresta a T^c, aquesta hauria de ser ac per tal que els vèrtexs a i c passin a tenir grau parell. Però ac és una aresta de T^c, ja que els vèrtexs a i c no són adjacents en T (altrament T tindria un cicle perquè T conté les arestes ab i bc, i això és una contradicció perquè T és un arbre). Per tant, no podem afegir l'aresta ac a T^c. És a dir, no podem aconseguir un graf eulerià afegint només una aresta a T^c. Per tant, cal afegir almenys 2 arestes. Si es pot aconseguir amb exactament dues arestes, aquestes han de ser incidents, i a més una d'elles incident amb a i l'altra, amb c. Observem que les arestes ab i bc són de T, per tant, no són de T^c. Si les afegim a T^c, tindrem un graf connex amb seqüència de graus $6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 4$, o sigui, un graf eulerià. El mínim nombre d'arestes que cal afegir a T^c per obtenir un graf eulerià és, doncs, 2.

Matemàtiques 1 - GEI - FIB 09-11-2020
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. a) (0.5 punts) Definiu graf bipartit.

b) (0.5 punts) Doneu una condició necessària i suficient perquè un graf G sigui bipartit.

c) (1 punt) Demostreu que si $G = (V, A)$ és un graf bipartit d'ordre n i mida m, aleshores es compleix $m \leq n^2/4$.

2. Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m amb conjunt de vèrtexs $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definim el graf $G^* = (V^*, A^*)$ que té per conjunt de vèrtexs $V^* = V \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ i arestes $A^* = A \cup \{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n\}$.

(a) i) (0.5 punts) Calculeu l'ordre i la mida de G^* en funció de n i m.

ii) (0.5 punts) Suposem que la seqüència de graus de G és $(d_1, \ldots, d_n)$. Quina és la seqüència de graus de G^*?

(b) (1 punt) Suposem que G és un graf cicle d'ordre n, $n \geq 3$. Calculeu el radi i el diàmetre de G^* segons els valors de n. Quins són els vèrtexs centrals?

(c) Raoneu per a quins valors de n el graf G^* és bipartit en els casos següents:

i) (0.5 punts) si G és un cicle d'ordre n, $n \geq 3$;

ii) (0.5 punts) si G és un graf complet d'ordre n, $n \geq 1$.

(d) (1 punt) Suposem que G és un graf connex d'ordre n amb exactament 3 arestes pont. Quants vèrtexs de tall i quantes arestes pont té el graf G^*?

(e) Suposem que G és un graf bipartit complet $K_{3,4}$. Calculeu en cada cas el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G^*:

i) (1 punt) per tal d'obtenir un graf que sigui eulerià;

ii) (1 punt) per tal d'obtenir un graf que sigui hamiltonià.

(f) (2 punts) Dibuixeu els arbres generadors de G^* obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS quan G és el graf $K_{3,4}$. En aplicar els algorismes suposeu que: les parts estables de $K_{3,4}$ són $\{x_1, x_2, x_3\}$ i $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$; l'algorisme comença en el vèrtex x_1; i els vèrtexs de G^* estan ordenats $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$. Doneu en cada cas l'ordre en que s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 25m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els dos exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 25/11/2020.
- Revisió de l'examen: es publicarà al "racó" el procediment a seguir.

Model de solució

1. a) (0.5 punts) Definiu graf bipartit.

Solució. Un graf $G = (V, A)$ és bipartit si i només si hi ha una partició del conjunt de vèrtexs en dos parts V_1 i V_2 de manera que tota aresta és incident amb un vèrtex de V_1 i amb un vèrtex de V_2. És a dir, $V = V_1 \cup V_2$, amb $V_1, V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i si $a = xy \in A$ aleshores $x \in V_1$ i $y \in V_2$, o bé $y \in V_1$ i $x \in V_2$.

b) (0.5 punts) Doneu una condició necessària i suficient perquè un graf G sigui bipartit.

Solució. Un graf és bipartit si i només si no té cicles de longitud senar. O el que és el mateix, tot cicle de G té longitud parella.

c) (1 punt) Demostreu que si $G = (V, A)$ és un graf bipartit d'ordre n i mida m, aleshores es compleix $m \leq n^2/4$.

Solució. Suposem que les parts estables de G són V_1 i V_2, amb $|V_1| = r$ i $|V_2| = s$, $r + s = n$. Aleshores, la mida del graf G és com a molt la mida del graf bipartit complet $K_{r,s}$, és a dir $m \leq rs$. Es pot demostrar que es compleix $rs \leq n^2/4$, per a qualsevol parell d'enters r i s tals que $r + s = n$. En efecte, la desigualtat $rs \leq n^2/4$ és equivalent a:

$$\begin{aligned} rs \leq n^2/4 &\Leftrightarrow rs \leq (r+s)^2/4 \Leftrightarrow rs \leq (r^2 + s^2 + 2rs)/4 \\ &\Leftrightarrow 4rs \leq r^2 + s^2 + 2rs \Leftrightarrow 0 \leq r^2 + s^2 - 2rs \Leftrightarrow 0 \leq (r-s)^2 \end{aligned}$$

L'última desigualtat és certa perquè tot quadrat és positiu. Per tant,

$$m \leq rs \leq n^2/4,$$

tal com volíem demostrar.

2. Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m amb conjunt de vèrtexs $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definim el graf $G^* = (V^*, A^*)$ que té per conjunt de vèrtexs $V^* = V \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ i arestes $A^* = A \cup \{x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n\}$.

Observació. *Veiem primer algunes propietats generals del graf G^* que utilitzarem després. El graf G^* s'obté afegint una fulla adjacent a cadascun dels vèrtexs de G. Per tant, es compleix:*

- *G^* conté el graf G com a subgraf;*
- *la distància entre dos vèrtexs diferents de G^* és $d_{G^*}(x_i, x_j) = d_G(x_i, x_j)$, $d_{G^*}(x_i, y_j) = d_G(x_i, x_j) + 1$, i $d_{G^*}(y_i, y_j) = d_G(y_i, y_j) + 2$;*
- *G^* i G tenen exactament els mateixos cicles, ja que un cicle de G^* no pot contenir vèrtexs del conjunt $\{y_1, \ldots, y_k\}$ per ser vèrtexs de grau 1.*

(a) i) (0.5 punts) Calculeu l'ordre i la mida de G^* en funció de n i m.

Solució. L'ordre de G^* és $|V^*| = |V| + n = 2n$ i la mida de G^* és $|A^*| = |A| + n = m + n$.

ii) (0.5 punts) Suposem que la seqüència de graus de G és $(d_1, \ldots, d_n)$. Quina és la seqüència de graus de G^*?

Solució. Per la definició del graf G^*, tenim que $g_{G^*}(x_i) = g_G(x_i) + 1$ i $g_{G^*}(y_i) = 1$. Per tant, la seqüència de graus de G^* és $(d_1 + 1, \ldots, d_n + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n)})$

(b) (1 punt) Suposem que G és un graf cicle d'ordre n, $n \geq 3$. Calculeu el radi i el diàmetre de G^* segons els valors de n. Quins són els vèrtexs centrals?

Solució. El diàmetre és el màxim de les excentriciats dels vèrtexs de G^* i el radi, el mínim. Per simetria, tots els vèrtexs del graf cicle G, $x_1, \ldots, x_n$, tenen la mateixa excentricitat en G^* i els vèrtexs $y_1, \ldots, y_n$ tenen la mateixa excentricitat en G^*. Per tant, només cal calcular l'excentricitat d'un vèrtex del cicle i d'un vèrtex que no sigui del cicle.

Recordem que tots els vèrtexs d'un cicle C_n tenen excentricitat $\lfloor n/2 \rfloor$. Per tant, l'excentricitat del vèrtex x_i en G^* és $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, ja que el vèrtex més allunyat d'x_i és la fulla que penja del vèrtex més allunyat d'x_i en el cicle, i l'excentricitat del vèrtex y_j és $\lfloor n/2 \rfloor + 2$, ja que el vèrtex més allunyat d'y_j és la fulla que penja del vèrtex més allunyat d'x_j en el cicle.

Per tant, $r(G^*) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ i $D(G^*) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$. Els vèrtexs centrals són els vèrtexs que tenen excentricitat mínima (igual al radi), que en aquest cas són els vèrtexs del cicle, $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

(c) Raoneu per a quins valors de n el graf G^* és bipartit en els casos següents:

i) (0.5 punts) si G és un cicle d'ordre n, $n \geq 3$;

Solució. El graf G^* és bipartit si i només si no té cicles de longitud senar.
Si n és senar, G^* no és bipartit perquè conté C_n com a subgraf, és a dir, G^* conté un cicle de longitud senar. Si n és parell, aleshores G^* no conté cicles de longitud senar, ja que G^* només conté el cicle C_n.
Per tant, G^* és bipartit si i només si n és parell.

ii) (0.5 punts) si G és un graf complet d'ordre n, $n \geq 1$.

Solució. Com en l'apartat anterior, comprovem en quins casos el graf G^* no conté cicles de longitud senar.
Si $n = 1$, aleshores G^* és el graf K_2, que és bipartit. Si $n = 2$, aleshores G^* és el graf trajecte d'ordre 4, que és bipartit, perquè no té cicles. Si $n \geq 3$, aleshores G^* no és bipartit, ja que G^* conté K_n com a subgraf i tot graf complet d'ordre almenys 3 conté un cicle d'ordre 3, o sigui, un cicle de longitud senar.
Per tant, G^* és bipartit si i només si $n \in \{1, 2\}$.

(d) (1 punt) Suposem que G és un graf connex d'ordre n amb exactament 3 arestes pont. Quants vèrtexs de tall i quantes arestes pont té el graf G^*?

Solució. Els vèrtexs y_i, $1 \leq i \leq n$, no són mai de tall en G^*, ja que tenen grau 1. Els vèrtexs x_i, $1 \leq i \leq n$, són tots de tall en G^*, ja que al sumprimir x_i de G^*, el vèrtex y_i queda aïllat de la resta de vèrtexs. És a dir, G^* és connex i $G^* - x_i$ no és connex (observem que el graf $G^* - \{x_i, y_i\}$ té almenys un vèrtex perquè G té almenys 3 arestes i per tant G és un graf no trivial), d'on deduïm que x_i és de tall en G^*.
Per tant, G^* té exactament n vèrtexs de tall.

Una aresta és pont si i només si, no és de cap cicle. Hem vist abans que G^* i G tenen els mateixos cicles. Per tant, una aresta de G^* és d'un cicle en G^* si i només si és d'un cicle en G, d'on deduïm que les arestes pont de G^* són les arestes pont de G i totes les les arestes de la forma x_iy_i, $1 \leq i \leq n$. Per tant, G^* té exactament $n + 3$ arestes pont.

(e) Suposem que G és un graf bipartit complet $K_{3,4}$. Calculeu en cada cas el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G^*:

i) (1 punt) per tal d'obtenir un graf que sigui eulerià;

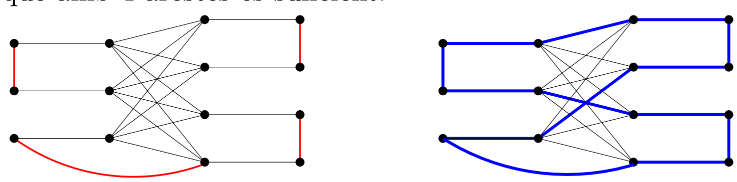
Solució. Un graf és eulerià si i només si és connex i tot vèrtex té grau parell.
El graf G^* és connex perquè $K_{3,4}$ ho és i l'únic que fem per a construir G^* és penjar fulles a cadascun dels vèrtexs de $K_{3,4}$. Per l'apartat a)ii), la seqüència de graus de G^* és $(5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Aleshores, G^* té 10 vèrtexs de grau senar, per tant, cal afegir almenys $10/2$ arestes, ja que en afegir una aresta es modifica

el grau d'exactament 2 vèrtexs. Veiem amb un exemple que amb 5 arestes n'hi ha prou:

A l'esquerra, el graf G^* amb els vèrtexs de grau senar en blau. A la dreta, si afegim les 5 arestes vermelles al graf G^* obtenim un graf eulerià, ja que el graf és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell.

ii) (1 punt) per tal d'obtenir un graf que sigui hamiltonià.

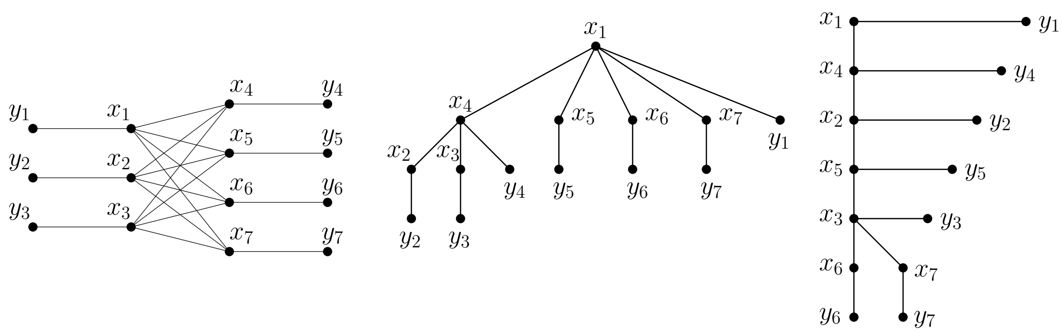
Solució. Un graf hamiltonià té tots els vèrtexs de grau almenys 2. El graf G^* té exactament 7 vèrtexs de grau 1. Per tant, cal afegir almenys $4(= \lceil 7/2 \rceil)$ arestes, ja que en afegir una aresta es modifica el grau d'exactament 2 vèrtexs. Veiem amb un exemple que amb 4 arestes és suficient:



A l'esquerra, en vermell les arestes que afegim al graf G^* per tal d'obtenir un graf hamiltonià. A la dreta, un cicle hamiltonià en el nou graf.

(f) (2 punts) Dibuixeu els arbres generadors de G^* obtinguts en aplicar els algorismes BFS i DFS quan G és el graf $K_{3,4}$. En aplicar els algorismes suposeu que: les parts estables de $K_{3,4}$ són $\{x_1, x_2, x_3\}$ i $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$; l'algorisme comença en el vèrtex x_1; i els vèrtexs de G^* estan ordenats $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$. Doneu en cada cas l'ordre en que s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador.

Solució. Veiem a la figura el graf G^* i els arbres obtinguts.



A l'esquerra, el graf G^*. Al centre, l'arbre obtingut en aplicar l'algorisme BFS. L'arbre està dibuixat de manera que els vèrtexs s'afegeixen a l'arbre d'esquerra a dreta, i de dalt a baix. A la dreta, l'arbre obtingut en aplicar l'algorisme DFS. L'arbre està dibuixat de manera que els vèrtexs s'afegeixen a l'arbre de dalt a baix, i d'esquerra a dreta. Concretament, l'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs als arbres generadors obtinguts és:

BFS: $x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, x_2, x_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_2, y_3$.

DFS: $x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_6, y_6, x_7, y_7, y_3, y_5, y_2, y_4, y_1$.

L'examen parcial del curs 2019-2020(2) va consistir en un qüestionari a Atenea que es generava de forma aleatòria.

Estructura qüestionari examen parcial:

- El qüestionari és **seqüencial**: una vegada s'ha passat una pàgina (havent respost o no les preguntes corresponents) **no es pot tornar enrere.** És a dir, ja no es pot respondre ni modificar la resposta de les preguntes de pàgines anteriors.
- **Temps: 1 hora 20 minuts**.
- El qüestionari consta de **10 pàgines** amb un total de **17 preguntes**. Les 7 primeres pàgines contenen 2 preguntes cadascuna. Les 3 últimes pàgines, 1 pregunta cadascuna.
- Les 15 primeres preguntes són de tipus CERT/FALS. En aquestes preguntes, **cada resposta incorrecta resta**.
- **Puntuació sobre 20**: 1 punt cada resposta CERT/FALS correcta; -1 punt cada resposta CERT/FALS incorrecta; 0 punts cada pregunta CERT/FALS sense resposta; 3 punts la pregunta 16 (penúltima pregunta); 2 punts la pregunta 17 (última pregunta).

Exemples de possibles preguntes:

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Hi ha 14 grafs bipartits complets d'ordre 28 llevat isomorfismes.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Un graf té diàmetre 2 si i només si és un graf bipartit complet.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Un graf d'ordre 15 té radi 1 si i només si té grau màxim 14.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf és eulerià, podem assegurar que conté algun cicle.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un graf té seqüència de graus $(4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, aleshores podem assegurar que és eulerià.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Si un arbre d'ordre 16 té exactament 5 fulles, aleshores té exactament 9 vèrtexs de tall.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Digueu si és certa o falsa la següent afirmació:

Els únics arbres de radi 1 són els grafs estrella d'ordre almenys 3 i el graf complet d'ordre 2.

Trieu-ne una:

- Cert
- Fals

Sigui el graf G amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que el subgraf generat pel conjunt de vèrtexs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és isomorf a C_5 -amb les arestes $\{12, 15, 23, 34, 45\}$ -, el subgraf generat pels vèrtexs $\{6, 7, 8, 9\}$ és isomorf a K_4 i, a més, fora de les arestes d'aquests subgrafs, G només en té una, l'aresta 16.

Quina és la mida d'aquest graf?

Apliquem l'algorisme **DFS** (Depth First Search) amb els vèrtexs ordenats de petit a gran (és a dir, a l'hora de triar un vèrtex per posar-lo a la cua/pila prenem sempre el d'etiqueta mínima si hi ha més d'una possibilitat).

Doneu la llista dels vèrtexs ordenada tal com els afegim a l'arbre generador a l'aplicar aquest algorisme començant en el vèrtex **6**.

Llista ordenada:

Doneu la seqüència de graus de l'arbre generador obtingut:

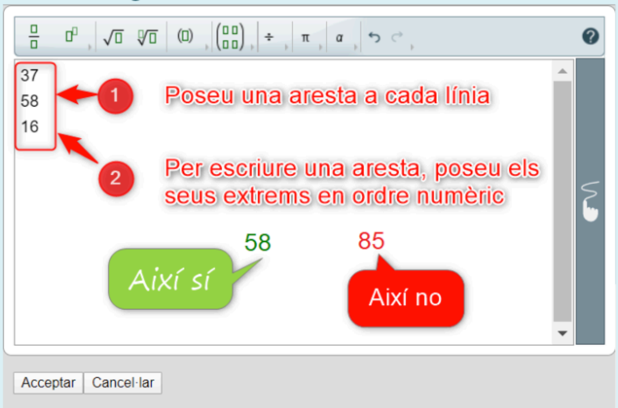
(doneu els graus ordenats de gran a petit, responeu com si fos un únic nombre enter de 9 xifres)

Sigui G el graf amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ tal que el subgraf generat pel conjunt de vèrtexs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és isomorf a C_5 -amb les arestes $\{12, 15, 23, 34, 45\}$ -, el subgraf generat pels vèrtexs $\{6, 7, 8, 9\}$ és isomorf a K_4 i, a més, fora de les arestes d'aquests subgrafs, G només en té dues, la 16 i la 49

Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per convertir-lo en eulerià?

Quines arestes afegiries a tal efecte? Escriu cada aresta com un nombre de dues xifres, amb la primera més petita que la segona, i cada aresta a una nova línia.

Mira la imatge abans de contestar:



Arestes que afegiries:

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (2 punts)

a) Enuncieu el lema de les encaixades. Demostreu que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

b) Definiu circuit eulerià i graf eulerià. Definiu cicle hamiltonià i graf hamiltonià. Doneu en cada cas un exemple de graf:

(i) eulerià i hamiltonià;
(ii) eulerià, però no hamiltonià;
(iii) hamiltonià, però no eulerià;
(iv) ni eulerià, ni hamiltonià.

2. (4 punts) Sigui $n \geq 2$. Considereu el graf producte $G_n = T_n \times K_4$, on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte T_n és $\{1, 2, \ldots, n\}$, on 1 i n són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet K_4 és $\{a, b, c, d\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf G_n en funció de n. És G_n regular per a algun valor de n?

b) Per a quins valors de n és hamiltonià el graf G_n? En cas que ho sigui, doneu un cicle hamiltonià.

c) Per a quins valors de n és bipartit el graf G_n?

d) Dibuixeu els arbres generadors de G_2 obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_2. Preneu com a vèrtex inicial $(1, a)$ considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent: $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$.
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Definició de graf producte. Siguin $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafs, aleshores $G_1 \times G_2$ és el graf que té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V_1 \times V_2$, i dos vèrtexs (u_1, u_2), (v_1, v_2) són adjacents en $G_1 \times G_2$ si i només si $u_1 = v_1$ i $u_2v_2 \in A_2$, o bé $u_2 = v_2$ i $u_1v_1 \in A_1$.

3. (4 punts) Sabem que un graf G té exactament 4 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau $k > 3$.

(a) Deduïu que k ha de ser 4, 6 o 8. Doneu en cada cas l'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf.

(b) Demostreu que G té almenys un cicle.

(c) Demostreu que si $k = 8$, aleshores el graf G ha de ser connex.

(d) Suposem que G és connex, que $k = 4$, i a més, al suprimir els quatre vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf G' que és eulerià. Quin ha de ser aquest graf G'? Construïu un possible graf G a partir de G'.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 40m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra. Cal lliurar els 3 problemes per separat.
- No es poden utilitzar llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ...
- Publicació de les notes: 05/11/2019.
- Revisió de l'examen: 06/11/2019 a les 12:15 a l'aula A6102.

Model de solució

1. (2 punts)

a) Enuncieu el lema de les encaixades. Demostreu que tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

Solució. El lema de les encaixades diu que la suma dels graus de tots els vèrtexs d'un graf és igual a dues vegades la seva mida.
És a dir, si $G = (V, A)$ és un graf de mida m i $g(v)$ representa el grau del vèrtex $v \in V$, aleshores

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

Tenint en compte el lema de les encaixades, deduïm que

$$2m = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{g(v) \text{ parell}} g(v) + \sum_{g(v) \text{ senar}} g(v),$$

i per tant,

$$\sum_{g(v) \text{ senar}} g(v) = 2m - \sum_{g(v) \text{ parell}} g(v),$$

és un nombre parell, ja que la suma de nombres parells és sempre parell. Per altra banda, la suma de nombres senars és parell si i només si el nombre de sumands és parell. Per tant, hi ha d'haver un nombre parell de sumands a l'expressió

$$\sum_{g(v) \text{ senar}} g(v),$$

o, el que és el mateix, hi ha d'haver un nombre parell de vèrtexs de grau senar.

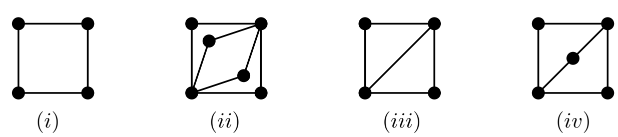
b) Definiu circuit eulerià i graf eulerià. Definiu cicle hamiltonià i graf hamiltonià. Doneu en cada cas un exemple de graf que sigui:

(i) eulerià i hamiltonià;
(ii) eulerià, però no hamiltonià;
(iii) hamiltonià, però no eulerià;
(iv) ni eulerià, ni hamiltonià.

Solució. Un circuit eulerià és un recorregut tancat que passa per totes les arestes de G una vegada i només una. Un graf és eulerià si és connex i conté un circuit eulerià.

Un cicle hamiltonià és un cicle que conté tots els vèrtexs de G. Un graf és hamiltonià si conté un cicle hamiltonià.

A la figura següent es mostren exemples dels grafs demanats en cada cas:



Els grafs (i), (ii) són eulerians perquè són connexos i tots els vèrtexs tenen grau parell. Els grafs (iii), (iv) no són eulerians perquè tenen algun vèrtex de grau senar. Els grafs (i), (iii) són hamiltonians perquè hi ha un cicle d'ordre 4 que conté els 4 vèrtexs del graf. Els grafs (ii), (iv) no són hamiltonians perquè al suprimir respectivament els dos vèrtexs de grau 4 i els dos vèrtexs de grau 3 s'obtenen respectivament 4 i 3 components connexos (és a dir, s'obtenen més components connexos que nombre de vèrtexs suprimim).

2. (4 punts) Sigui $n \geq 2$. Considereu el graf producte $G_n = T_n \times K_4$, on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte T_n és $\{1, 2, \ldots, n\}$, on 1 i n són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet K_4 és $\{a, b, c, d\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf G_n en funció de n. És regular per a algun valor de n?

Solució. El nombre de vèrtexs de G_n és $4n$. El grau dels vèrtexs és $g(u, v) = g_{T_n}(u) + g_{K_4}(v)$, és a dir, per a tot $v \in \{a, b, c, d\}$

$$g(1, v) = g(n, v) = 1 + 3 = 4;$$
$$g(i, v) = 2 + 3 = 5, \text{ si } i \neq 1, n.$$

Per tant, la seqüència de graus és $\overbrace{5, \ldots, 5}^{4n-8}, \overbrace{4, \ldots 4}^{8}$. Notem que si $n = 2$, aleshores el graf és 4-regular, i si $n > 2$, aleshores no és regular perquè hi ha vèrtexs de grau 4 i de grau 5. La mida es pot calcular tenint en compte el lema de les encaixades:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{(i,v) \in V(G_n)} g(i, v) = \frac{1}{2}(5(4n - 8) + 4 \cdot 8) = 10n - 4.$$

b) Per a quins valors de n és hamiltonià el graf G_n? En cas que ho sigui, doneu un cicle hamiltonià.

Solució. El graf G_n és hamiltonià per a qualsevol valor de n, ja que es pot donar un cicle hamiltonià en tots els casos:

$$(1, a), (2, a), \ldots, (n - 1, a), (n, a), (n, b), (n - 1, b), \ldots, (2, b), (1, b),$$
$$(1, c), (2, c), \ldots, (n - 1, c), (n, c), (n, d), (n - 1, d), \ldots, (2, d), (1, d), (1, a).$$

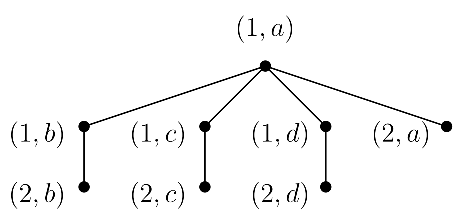
c) Per a quins valors de n és bipartit el graf G_n?
Solució. En cap cas, ja que G_n conté cicles de longitud senar, per exemple:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, a).$$

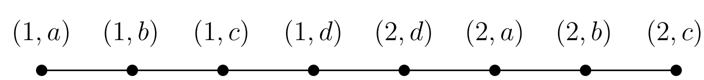
d) Dibuixeu els arbres generadors de G_2 obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf G_2. Preneu com a vèrtex inicial $(1, a)$ considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent: $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$.
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

Solució. Els arbres que s'obtenen són:

BFS:



DFS:



Els vèrtexs de l'arbre BFS s'obtenen en l'ordre següent:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d).$$

Els vèrtexs de l'arbre DFS s'obtenen en l'ordre següent:

$$(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, d), (2, a), (2, b), (2, c).$$

No són isomorfs, ja que en el primer cas hi ha un vèrtex de grau 4 i en el segon, tots els vèrtexs tenen grau com a molt 2 (és un graf trajecte).

3. (4 punts) Sabem que un graf G té exactament 4 vèrtexs de grau 1, 3 vèrtexs de grau 2, 2 vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau $k > 3$.

(a) Deduïu que k ha de ser 4, 6 o 8. Doneu en cada cas l'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf.

Solució. Pel lema de les encaixades,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} g(v) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + k = 16 + k,$$

per tant, k ha de ser parell. Per altra banda, el graf té 10 vèrtexs, per tant, $k \leq 9$. Deduïm doncs que $k \in \{4, 6, 8\}$.

L'ordre, la mida i la seqüència de graus del graf és segons el cas:

k	ordre	mida	seqüència de graus
4	10	10	4332221111
6	10	11	6332221111
8	10	12	8332221111

(b) Demostreu que G té almenys un cicle.

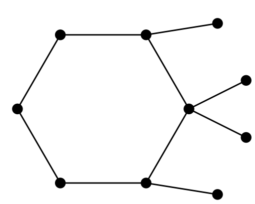
Solució. En un graf acíclic, la mida és com a molt l'ordre menys 1, però tal com veiem a la taula anterior, en tots els casos la mida és més gran o igual que l'ordre. Per tant, en tots els casos ha de tenir algun cicle.

(c) Demostreu que si $k = 8$ el graf G ha de ser connex.

Solució. Si $k = 8$, aleshores hi ha almenys un vèrtex u de grau 8 que juntament amb els 8 vèrtexs adjacents a aquest, són del mateix component connex, és a dir, el component connex de u tindrà almenys 9 vèrtexs. Per ser el graf d'ordre 10, si no fos connex hauria de tenir un vèrtex aïllat, i això és una contradicció ja que tots els vèrtexs tenen grau almenys 1.

(d) Suposem que G és connex, que $k = 4$, i a més, al suprimir els quatre vèrtexs de grau 1 de G s'obté un graf G' que és eulerià. Quin ha de ser aquest graf G'? Construïu un possible graf G a partir de G'.

Solució. Per ser G connex, els vèrtexs de grau 1 són adjacents a vèrtexs de grau almenys 2. Si suprimim els 4 vèrtexs de grau 1 obtindrem doncs un graf d'ordre 6 on els graus s'obtindràn a partir de $4, 3, 3, 2, 2, 2$ restant en total 4 unitats. Però el graf resultant ha de ser eulerià, per tant, ha tenir tots els vèrtexs de grau parell i diferent de 0, és a dir, almenys 2, ja que G' ha de ser connex. L'única possibilitat és que els graus dels vèrtexs de G' siguin $2, 2, 2, 2, 2, 2$, que correspon al graf cicle d'ordre 6. Un possible graf G és el de la figura:



Matemàtiques 1 - GEI - FIB — 1-4-2019

Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (3 punts)

   (a) Siguin G un graf d'ordre n i mida m, i $a = xy$ una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida dels grafs $G - x$, $G - a$, $G - \{x, y\}$ i G^c en funció de n, m i dels graus dels vèrtexs (no cal justificar-ho).

   (b) Definiu graf bipartit i doneu-ne una caracterització.

   (c) Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf G tenen grau almenys 2, aleshores G conté algun cicle.

2. (4 punts) Considerem dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres n_1 i n_2 respectivament, tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$. Definim el graf $G = (V, A)$ on:

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{w, w'\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv \,:\, v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v \,:\, v \in V_1 \cup V_2\}$$

   És a dir, G s'obté a partir de $G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs addicionals w, w' adjacents a tots els vèrtexs de G_1 i a tots els vèrtexs de G_2.

   (a) Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de G. Determineu quantes arestes pont té G.

   (b) Si G_1 i G_2 són hamiltonians, podem concloure que G és hamiltonià?

   (c) Digueu quines condicions han de complir G_1 i G_2 per tal que G sigui eulerià.

   (d) Suposem que G_1 i G_2 són grafs complets d'ordre 4 i que etiquetem els vèrtexs de G_1 de 1 a 4, i els vèrtexs de G_2 de 5 a 8. Dibuixeu els arbres generadors que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS començant pel vèrtex w si considerem l'ordenació $w, w', 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dels vèrtexs de G.

3. (3 punts) Considerem un graf G d'ordre $n \geq 3$ i mida m on cada vèrtex té grau k ó $k + 3$. Sigui r el nombre de vèrtexs de grau k.

   (a) Comproveu que $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Deduïu que si G és un arbre, aleshores $r = \frac{2n+2}{3}$ i $n + 1$ ha de ser múltiple de 3.

   (b) Demostreu que si G és un arbre, aleshores el subgraf induït pels vèrtexs de grau almenys 2 és connex.

   (c) Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 10 i d'ordre 14 tals que cada vèrtex té grau k ó $k + 3$.

1. (a) *Siguin G un graf d'ordre n i mida m, i $a = xy$ una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida dels grafs $G - x$, $G - a$, $G - \{x, y\}$ i G^c en funció de n, m i dels graus dels vèrtexs (no cal justificar-ho).*

	$G - x$	$G - a$	$G - \{x, y\}$	G^c
ordre	$n - 1$	n	$n - 2$	n
mida	$n - g(x)$	$m - 1$	$m - g(x) - g(y) + 1$	$\frac{n(n-1)}{2} - m$

(b) *Definiu graf bipartit i doneu-ne una caracterització.*

Definició. Un graf $G = (V, A)$ és bipartit si existeixen dos conjunts V_1 i V_2 no buits tals que $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i tota aresta té un extrem en V_1 i l'altre en V_2.

Caracterització. Un graf és bipartit si i només si té ordre almenys 2 i no conté cicles de longitud senar.

(c) *Demostreu que si tots els vèrtexs d'un graf G tenen grau almenys 2, aleshores G conté algun cicle.*

Demostració I. Suposem que G no té cap cicle. Aleshores, G és un bosc. Considerem un component connex qualsevol de G. Si el component connex té només un vèrtex, aleshores G conté un vèrtex de grau 0. Si té almenys dos vèrtexs, el component connex és un arbre d'ordre almenys dos i per tant té almenys dues fulles. En qualsevol cas, es contradiu la hipòtesi de que G té tots els vèrtexs de grau almenys 2.

Demostració II. Suposem que $G = (V, A)$ té ordre n.
Sigui k la longitud màxima d'un camí en G. Observem que $1 \leq k \leq n - 1$, ja que per una banda, el graf G no pot ser el graf nul per tenir vèrtexs de grau almenys 2 i una sola aresta és un camí de longitud 1, i per altra banda, els camins tenen longitud màxima $n - 1$, ja que no es poden repetir vèrtexs.
Considerem un camí de longitud k en G, $x_0x_1 \ldots x_k$. El vèrtex x_0 no pot ser adjacent a un vèrtex $y \in V \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, ja que en cas contrari, $yx_0x_1 \ldots x_k$ seria un camí de longitud $k + 1$, i això contradiria que el camí tingués longitud màxima k. Però x_0 té grau almenys 2, per tant, és adjacent a x_1 i a algun altre vèrtex x_j de $\{x_2, \ldots, x_k\}$. Aleshores, G té almenys un cicle, $x_0, x_1, \ldots, x_jx_0$.

Demostració III. Trobarem un cicle constructivament.
Com que $g(v_0) \geq 2$, hi ha un vèrtex v_1 adjacent a v_0; igualment, com que $g(v_1) \geq 2$, hi ha un altre vèrtex $v_2 \neq v_0$ adjacent a v_1. Per tant, hem construït un camí $v_0v_1v_2$. De nou, $g(v_2) \geq 2$. Poden passar dues coses: o bé v_2 és adjacent a v_0 i acabem perquè hem trobat un cicle, o bé v_2 és adjacent a un vèrtex v_3 diferent de v_0 i de v_1. En aquest cas, continuem de la mateixa manera, o bé trobem un cicle, o bé podem allargar el camí. Fem l'argument en general: suposem que hem construït un camí $v_0v_1 \ldots v_i$. El vèrtex

v_i té grau ≥ 2. Si v_i és adjacent a algun dels vèrtexs $v_k \in \{v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}\}$ el graf conté un cicle $v_k v_{k+1} \ldots v_i v_k$; altrament, hi ha un vèrtex v_{i+1} tal que $v_0 v_1 \ldots v_i v_{i+1}$ és un camí. Com que el graf és finit, no pot ser que estiguem en la segona situació per a tot $i \geq 2$, per tant en algun moment trobarem un cicle.

2. *Considerem dos grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres n_1 i n_2 respectivament, tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$. Definim el graf $G = (V, A)$ on:*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \{w, w'\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv \,:\, v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v \,:\, v \in V_1 \cup V_2\}$$

És a dir, G s'obté a partir de $G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs addicionals w, w' adjacents a tots els vèrtexs de G_1 i a tots els vèrtexs de G_2.

(a) *Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de G. Determineu quantes arestes pont té G.*

El vèrtex w té excentricitat 2 en G, ja que per definició de G, $d(w, x) = 1$, si $x \in V_1 \cup V_2$ i $d(w, w') = 2$, ja que w no és adjacent a w' en G, però wxw' és un camí en G per a qualsevol vèrtex $x \in V_1 \cup V_2$. Anàlogament, per simetria, w' té excentricitat 2 en G.

Si $x \in V_1 \cup V_2$, aleshores $d(x, w) = d(x, w') = 1$, i $d(x, y) \leq 2$ per a qualsevol vèrtex $y \in V_1 \cup V_2$ diferent de x, ja que xwy és un camí en G. A més, si $x \in V_1$ i $y \in V_2$, aleshores $d(x, y) = 2$. Per tant, els vèrtexs de $V_1 \cup V_2$ tenen excentricitat 2 en G.

Per tant, $e(u) = 2$, per a tot vèrtex u de G i conseqüentment, G té radi 2, diàmetre 2 i tots els vèrtexs són centrals.

Per altra banda, G no té arestes pont, ja que tota aresta és d'algun cicle. En efecte, si l'aresta és de la forma xw, $x \in V_1$, aleshores és del cicle $wxw'yw$, per a qualsevol vèrtex $y \in V_2$. Anàlogament, es demostra que les arestes de la forma wy, $y \in V_2$, i de la forma $w'z$, $z \in V_1 \cup V_2$, són d'algun cicle. Si xy és una aresta de G_1, aleshores $xwyx$ és un cicle de G. Anàlogament, es demostra que les arestes de G_2 són d'algun cicle.

(b) *Si G_1 i G_2 són hamiltonians, podem concloure que G és hamiltonià?*

Sí. Suposem que $x_1, \ldots, x_{n_1}, x_1$ i $y_1, \ldots, y_{n_2}, y_1$ són cicles hamiltonians de G_1 i de G_2, respectivament. Aleshores, $w, x_1, \ldots, x_{n_1}, w', y_1, \ldots, y_{n_2}, w$ és un cicle hamltonià en G.

(c) *Digueu quines condicions han de complir G_1 i G_2 per tal que G sigui eulerià.*

G és eulerià si i només si G és connex i tot vèrtex té grau parell.

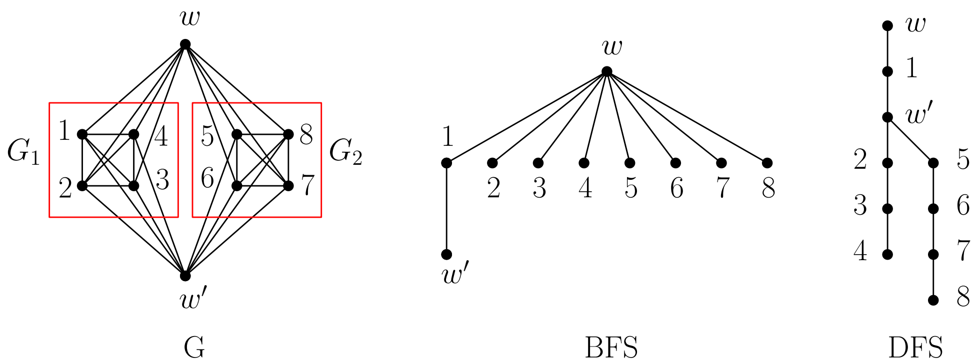
Hem vist al primer apartat que el diàmetre de G és 2, per tant, G és connex.

El grau dels vèrtexs de G és $g(w) = g(w') = n_1 + n_2$ i $g(x) = g_i(x) + 2$, si $x \in V_i$, on g_i denota el grau en el graf G_i. Tots els vèrtexs de G tindran grau parell si, i només si, $n_1 + n_2$ és parell i tots els vèrtexs de $V_1 \cup V_2$ tenen grau parell en el graf corresponent.

Per tant, G és eulerià si i només si $n_1 + n_2$ és parell, tot vèrtex de V_1 té grau parell en G_1 i tot vèrtex de V_2 té grau parell en G_2.

(d) *Suposem que G_1 i G_2 són grafs complets d'ordre 4 i que etiquetem els vèrtexs de G_1 de 1 a 4, i els vèrtexs de G_2 de 5 a 8. Dibuixeu els arbres generadors que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS començant pel vèrtex w si considerem l'ordenació $w, w', 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dels vèrtexs de G.*

A la figura següent teniu el graf G i els arbres generadors obtinguts amb els algorismes BFS i DFS:



3. *Considerem un graf G d'ordre $n \geq 3$ i mida m on cada vèrtex té grau k ó $k+3$. Sigui r el nombre de vèrtexs de grau k.*

(a) *Comproveu que $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Deduïu que si G és un arbre, aleshores $r = \frac{2n+2}{3}$ i $n+1$ ha de ser múltiple de 3.*

Pel Lema de les Encaixades, sabem que la suma dels graus és dues vegades la mida. Per tant, $2m = \sum_{u \in V(G)} g(u) = kr + (k+3)(n-r)$, ja que hi ha r vèrtexs de grau k i $n-r$ vèrtxes de grau $k+3$. Si aïllem r d'aquesta igualtat, obtenim $r = \frac{(k+3)n-2m}{3}$. Si G és un arbre d'ordre almenys 3, aleshores G té alguna fulla, per tant, ha de ser $k = 1$. Per altra banda, si G és arbre es compleix $m = n-1$. Per tant,

$$r = \frac{(k+3)n - 2m}{3} = \frac{(1+3)n - 2(n-1)}{3} = \frac{2n+2}{3}.$$

A més, per ser r enter, $2n+2$ ha de ser múltiple de 3. I això és equivalent a que $n+1$ sigui múltiple de 3.

(b) *Demostreu que si G és un arbre, aleshores el subgraf induït pels vèrtexs de grau almenys 2 és connex.*

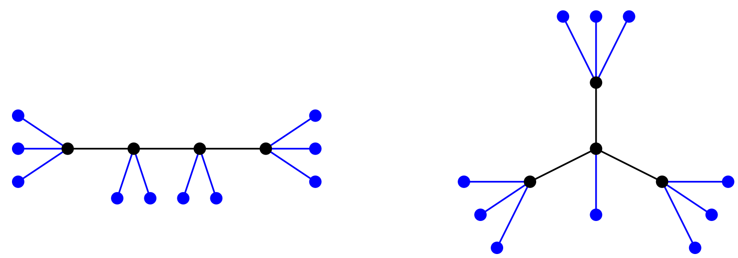
Suposem que x i y són dos vèrtexs del subgraf G' induït pels vèrtexs de grau almenys 2 en G. Per a demostrar que G' és connex, veurem que hi ha almenys un $x-y$ camí en G'.

Per ser G arbre, hi ha un $x-y$ camí en G. Tots els vèrtexs del camí són de G', ja que x i y els hem triat de G' i la resta de vèrtexs del camí tenen grau almenys 2 en G, ja que són adjcents a almenys dos vèrtexs en G. Per tant, el mateix $x-y$ camí de G és també un camí en G'.

(c) *Trobeu, llevat d'isomorfismes, tots els arbres d'ordre 10 i d'ordre 14 tals que cada vèrtex té grau k ó $k+3$.*

Dels apartats anteriors, deduïm per una banda que no n'hi ha cap d'ordre 10, ja que $10+1$ no és múltiple de 3.

Per altra banda, els arbres d'ordre 14 amb tots els vèrtexs de grau k o $k+3$ són arbres amb només vèrtexs de grau 1 i 4 que tenen exactament $r = \frac{2\cdot 14+2}{3} = 10$ fulles. També de l'apartat anterior sabem que els 4 vèrtexs restants indueixen un graf connex, o sigui, un arbre d'ordre 4. Els únics arbres d'ordre 4 llevat isomorfismes són T_4 i $K_{1,3}$. Si pengem les 10 fulles als vèrtexs d'aquests dos arbres, tenint en compte que en el arbre inicial aquests quatre vèrtexs tenen grau 4, obtenim els dos arbres de la figura:



Matemàtiques 1 - GEI - FIB 29-10-2018
Examen Parcial

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) Doneu la definició d'arbre i 3 caracteritzacions.
   (b) Demostreu que en tot graf d'ordre $n \geq 2$ hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.

2. Sigui $k \geq 3$. Considereu un graf G_k que té exactament dos components connexos: un és isomorf a $K_{1,k-1}$ i l'altre al graf trajecte T_k.
   a) Calculeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k per a obtenir un graf G que sigui eulerià.
   b) És el graf G de l'apartat anterior hamiltonià? Si no ho és, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per a fer-ho hamiltonià? (no cal que segueixi sent eulerià).

3. Sigui $K_{n,n}$, $n \geq 2$, el graf bipartit complet on els vèrtexs d'una part estable estan etiquetats de 1 a n, i els vèrtexs de l'altra part estable estan etiquetats de $n+1$ a $2n$.
   (a) Apliqueu els algorismes DFS i BFS a $K_{n,n}$ començant pel vèrtex 1 i seguint l'ordre numèric dels vèrtexs. Doneu una representació gràfica dels arbres obtinguts sense que es tallin les arestes.
   (b) Per a cada un dels dos arbres generadors de $K_{n,n}$ obtinguts a l'apartat anterior doneu el radi, el diàmetre i el conjunt dels vèrtexs centrals.

4. Sigui $r \geq 1$ un enter. Sigui $H_r = (V_r, A_r)$ el graf tal que V_r és el conjunt de les paraules de longitud r amb l'alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ i A_r està definit d'acord a la regla següent: dos paraules són adjacents si i sols si difereixen en una única posició. Per exemple, per a $r = 2$ el conjunt de vèrtexs és $V_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 00 és $\{01, 02, 10, 20\}$.
   a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf H_r.
   b) És H_r un graf bipartit per a algun valor de r?

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 45m
- Tots els problemes valen el mateix
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 4 problemes per separat.
- Sense llibres, ni apunts, ni calculadores
- Publicació de les notes: 13/11/2018. Revisió de l'examen: 14/11/2018 a les 12:15 (s'informarà del lloc al racó).

1. (a) Doneu la definició d'arbre i 3 caracteritzacions.

   Solució. Un arbre és un graf connex i acíclic.
   Si graf T és un graf d'ordre n i mida m, les condicions següents són equivalents:
   a) T és un arbre
   b) T és acíclic i $m = n - 1$
   c) T és connex i $m = n - 1$
   d) T és connex i tota aresta és pont
   e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T
   f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle
   (Calia donar, doncs, 3 de les propietats entre b)–f)).

   (b) Demostreu que en tot graf d'ordre $n \geq 2$ hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.

   Solució. El grau $g(v)$ d'un vèrtex v de G és el nombre d'arestes incidents amb v. Per tant, és un valor entre 0 i $n - 1$, de manera que hi ha exactament n valors diferents possibles. L'única manera de que els graus dels n vèrtexs de G siguin diferents és que hi hagi exactament un vèrtex de grau i per a cada valor de $i \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Si $n \geq 2$ vol dir que hi ha un vèrtex de grau 0 i un vèrtex de grau $n - 1$, amb $n - 1 \neq 0$. És a dir, hi hauria alhora un vèrtex aïllat i un vèrtex adjacent a tots els altres vèrtexs, i això és una contradicció.

2. Sigui $k \geq 3$. Considereu un graf G_k que té exactament dos components connexos: un és isomorf a $K_{1,k-1}$ i l'altre al graf trajecte T_k.

   a) Calculeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k per a obtenir un graf G que sigui eulerià.

   Solució. Un graf és eulerià si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Calculem el nombre de vèrtexs de grau senar de G_k:

   - si k és parell, aleshores $k - 1$ és senar i G_k té exactament $k + 2$ vèrtexs de grau senar (els dos extrems de T_k i tots els vèrtexs de $K_{1,k-1}$);
   - si k és senar, aleshores $k - 1$ és parell i aleshores G_k té exactament $k + 1$ vèrtexs de grau senar (els dos extrems de T_k i les $k - 1$ fulles de $K_{1,k-1}$).

   En els dos casos, el nombre de vèrtexs de grau senar és parell, de manera que per a obtenir un graf eulerià caldrà afegir a G_k:

   - almenys $(k + 2)/2$ arestes, si k és parell;
   - almenys $(k + 1)/2$ arestes, si k és senar.

   I sempre ho podem aconseguir emparellant els vèrtexs de grau senar de la manera següent:

   - si k és parell, afegim una aresta entre un extrem de T_k i el vèrtex de grau $k - 1$ de $K_{1,k-1}$; una aresta entre l'altre extrem de T_k i una fulla de $K_{1,k-1}$; i finalment, una aresta emparellant les fulles restants de $K_{1,k-1}$ (vegeu la Figura 1a).

- si k és senar, per a cada extrem de T_k, afegim una aresta que l'uneixi amb una fulla de $K_{1,k-1}$, i després afegim arestes emparellant les fulles restants de $K_{1,k-1}$ (vegeu la Figura 1b).

ja que en tots dos casos obtenim un graf connex amb tots els vèrtexs de grau parell.

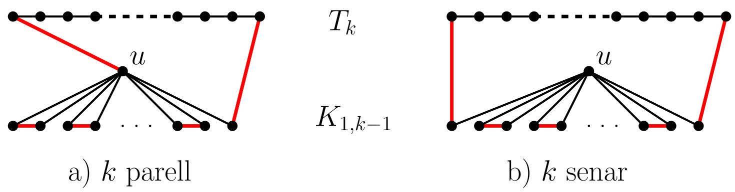


Figure 1: Si afegim a G_k (a) les $(k+2)/2$ arestes vermelles, si k és parell, i (b) les $(k+1)/2$ arestes vermelles, si k és senar, obtenim un graf G eulerià.

b) És el graf G de l'apartat anterior hamiltonià? Si no ho és, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per a fer-ho hamiltonià? (no cal que segueixi sent eulerià).

Solució. Si $k = 3$, aleshores G és el cicle d'ordre 6, que és hamiltonià. Si $k \geq 4$, G no és hamiltonià ja que el vèrtex u de grau $k-1$ en $K_{1,k-1}$ és un vèrtex de tall ($G-u$ té almenys un component connex isomorf a K_2). Observem que per a $k \geq 4$ el graf $G-u$ té $k/2$ components connexos, si k és parell, i $(k-1)/2$ components connexos, si k és senar. Sabem que al suprimir un vèrtex d'un graf hamiltonià s'obté un graf connex. Per tant, per tal d'obtenir un graf hamiltonià cal afegir a G almenys $\frac{k}{2} - 1 = \frac{k-2}{2}$ arestes, si k és parell, i almenys $\frac{k-1}{2} - 1 = \frac{k-3}{2}$ arestes, si k és senar. A més, veiem a la Figura 2 que es pot aconseguir en els dos casos, ja que afegint les arestes indicades obtenim un graf hamiltonià. Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir a G per obtenir un graf hamiltonià és $\frac{k-2}{2}$, si k és parell, i $\frac{k-3}{2}$, si k és senar.

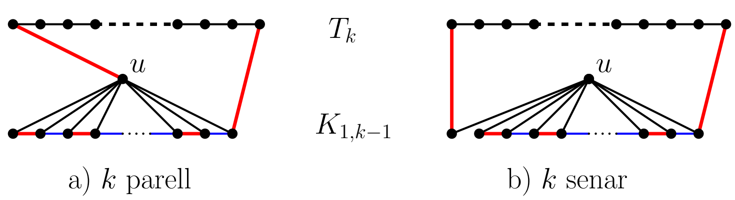


Figure 2: Si afegim a G (a) les $(k-2)/2$ arestes blaves, si k és parell, i (b) les $(k-3)/2$ arestes blaves, si k és senar, obtenim un graf G hamiltonià.

3. Sigui $K_{n,n}$, $n \geq 2$, el graf bipartit complet on els vèrtexs d'una part estable estan etiquetats de 1 a n, i els vèrtexs de l'altra part estable estan etiquetats de $n+1$ a $2n$.

   (a) Apliqueu els algorismes DFS i BFS a $K_{n,n}$ començant pel vèrtex 1 i seguint l'ordre numèric dels vèrtexs. Doneu una representació gràfica dels arbres obtinguts sense que es tallin les arestes.

   Solució. A la Figura 3 tenim el graf $K_{n,n}$ i els arbres generadors que s'obtenen a l'aplicar els algorismes DFS i BFS.

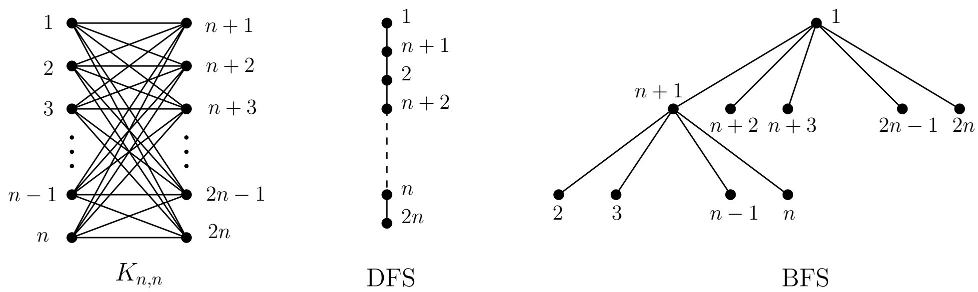


Figure 3: El graf bipartit complet $K_{n,n}$, i els arbres generadors obtinguts a l'aplicar els algorismes DFS i BFS respectivament.

(b) Per a cada un dels dos arbres generadors de $K_{n,n}$ obtinguts a l'apartat anterior doneu el radi, el diàmetre i el conjunt dels vèrtexs centrals.

Solució. L'arbre obtingut amb DFS és el trajecte T_{2n}, que té diàmetre $2n-1$ i radi n, ja que els vèrtexs tenen excentricitat des de n fins a $2n-1$. Els vèrtexs centrals són els que tenen excentricitat igual al radi, i per tant són $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ i $\lceil \frac{n}{2} \rceil + n$.
L'arbre obtingut amb BFS s'anomena *biestrella*. Els vèrtexs 1 i $n+1$ tenen excentricitat 2, i tots els altres (o sigui, les fulles) tenen excentricitat 3. Per tant, el radi és 2 i el diàmetre és 3. Els vèrtexs centrals són, per tant, els vèrtexs 1 i $n+1$.

4. Sigui $r \geq 1$ un enter. Sigui $H_r = (V_r, A_r)$ el graf tal que V_r és el conjunt de les paraules de longitud r amb l'alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ i A_r està definit d'acord a la regla següent: dos paraules són adjacents si i sols si difereixen en una única posició. Per exemple, per a $r = 2$ el conjunt de vèrtexs és $V_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$ i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 00 és $\{01, 02, 10, 20\}$.

a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf H_r.

Solució. L'ordre de H_r és el nombre de paraules de longitud r amb alfabet $\{0, 1, 2\}$, o sigui, 3^r, ja que tenim 3 possibles elements per posar a cadascuna de les r posicions de la paraula. El graf H_r és $2r$-regular, ja que una paraula qualsevol $x_1x_2 \ldots x_r$ és adjacent a les $2r$ paraules que s'obtenen canviant l'element x_i d'una posició qualsevol $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ pels dos elements de $\{0, 1, 2\}$ diferents de x_i. Per tant, la seqüència de graus de H_r és $(\underbrace{2r, 2r, \ldots, 2r}_{3^r)})$. Pel Lema de les Encaixades, i tenint en compte que el graf és regular de grau $2r$, obtenim que la mida del graf H_r és:

$$|A_r| = \frac{1}{2} \sum_{u \in V_r} g(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V_r} 2r = \frac{1}{2} 2r|V_r| = \frac{1}{2} 2r3^3 = r\,3^r.$$

b) És H_r un graf bipartit per a algun valor de r?

Solució. El graf H_r no és mai bipartit perquè conté cicles de longitud senar. Concretament, H_r conté cicles de longitud 3, ja que per a $x_2, \ldots, x_r \in \{0, 1, 2\}$ qualssevol, els vèrtexs $0x_2 \ldots x_r$, $1x_2 \ldots x_r$ i $2x_2 \ldots x_r$ són adjacents dos a dos. Per exemple, els vèrtexs $00 \ldots 00$, $10 \ldots 0$ i $20 \ldots 0$ formen un cicle de longitud 3.