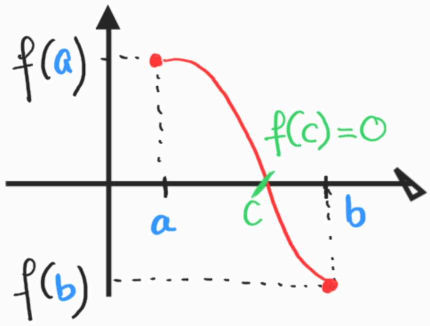
TEOREMES de CONTINUÏTAT

(pàg 252)

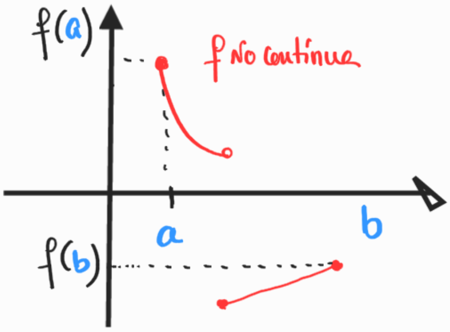
① Teorema de Bolzano

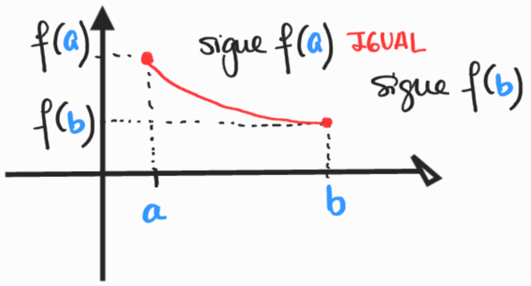
Si f és contínua en $[a,b]$
i signe $f(a)$ DIFERENT signe $f(b)$
$f(a)\cdot f(b)<0$

$\Rightarrow$ $\exists c\in(a,b):f(c)=0$



S'han de complir aquestes condicions

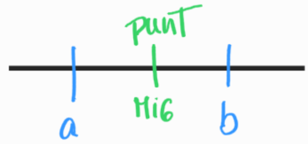




❗ però no sabem quin valor és c
només podem dir que existeix

NOTA De vegades, trobem c amb una COTA D'ERROR

Si cota 0'5 $\rightarrow$ $\overline{ab}=1$
Si cota 0'05 $\rightarrow$ $\overline{ab}=0'1$

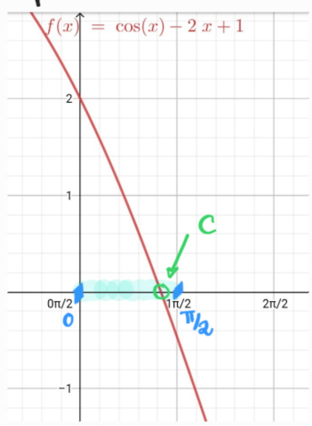


41 Comprova mitjançant el teorema de Bolzano si $f(x)=\cos x-2x+1$ talla l'eix d'abcisses, almenys en un punt. Treballem a l'interval $[0,\frac{\pi}{2}]$

$f(x)$ és contínua en $[0,\pi/2]$
$f(0)=\cos 0-2\cdot 0+1=1-0+1=2>0$
$f(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{2}+1=0-\pi+1<0$

$\xrightarrow{TB}$ $\exists c\in(0,\frac{\pi}{2}):f(c)=0$

però no sabem quin valor és c



Aplicacions del teorema de Bolzano

1. Es fa servir per trobar les solucions d'una equació (zeros o arrels)

$$f(x=c)=0$$

equació

2. Per comprovar que $f(x=c)$ té un valor donat (n^o)

$$f(x=c)-n^o=0$$

$$\hookrightarrow h(x=c)=0$$

3. Per comprovar que 2 funcions es tallen en un punt i trobar-lo

si es tallen $\Rightarrow \exists c: f(x=c)=g(x=c) \Leftrightarrow f(x=c)-g(x=c)=0$

Exemples:

31 (pàg 259) Prova que les funcions $\begin{cases} f(x)=\sin 2x \\ g(x)=2x-1 \end{cases}$ es tallen en algun punt de $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

si es tallen en un valor donat $x_c \Rightarrow f(x_c)=g(x_c) \Leftrightarrow f(x_c)-g(x_c)=0$

anomeno

hem de comprovar: $h(x_c)=0 \Leftarrow h(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)$ contínua en $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\left(2\cdot\frac{\pi}{4}-1\right)=1-\frac{\pi}{2}+1=2-\frac{\pi}{2}>0$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\cdot\frac{\pi}{2}-1\right)=0-\pi+1<0$

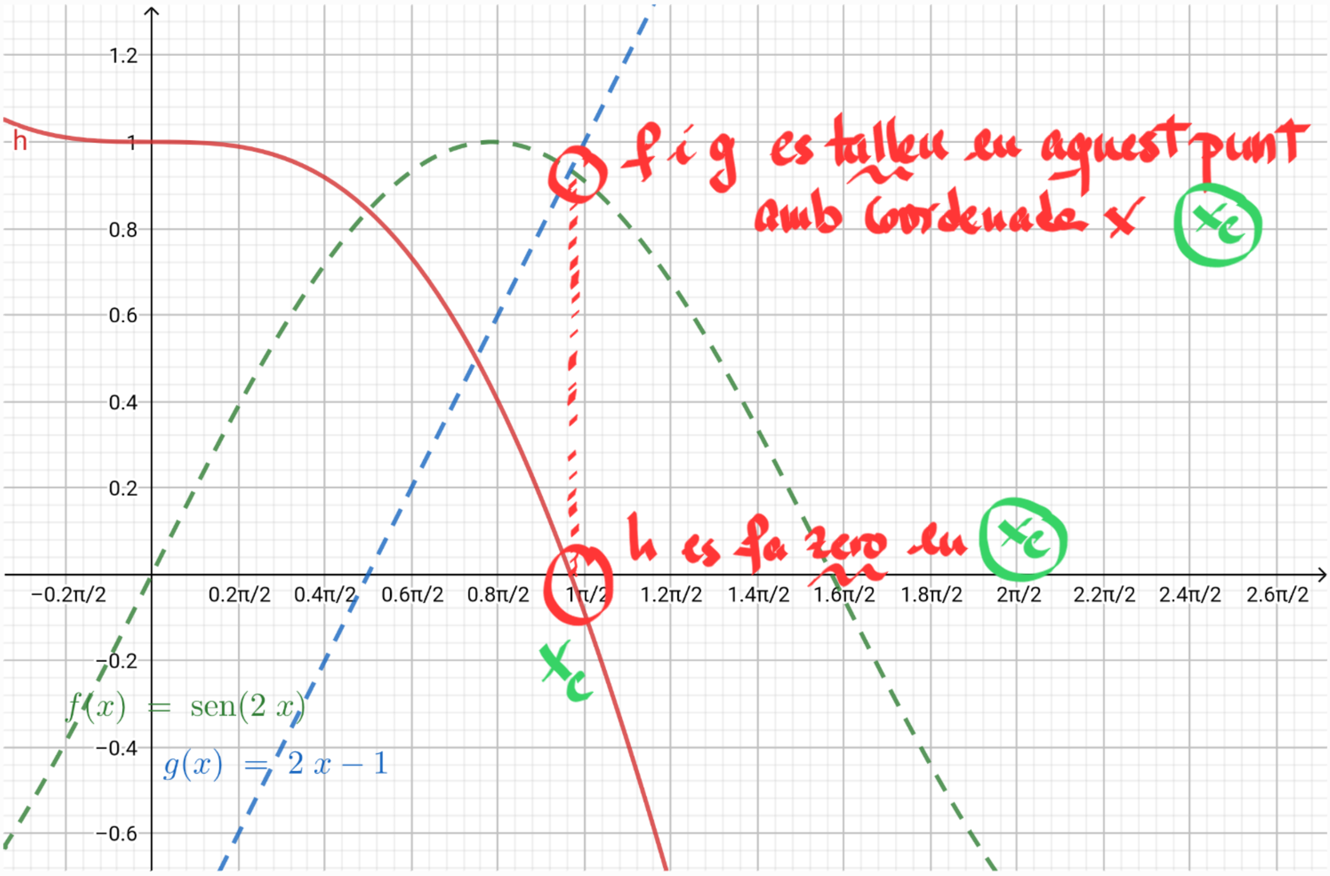
$\xrightarrow{TB} \exists x_c \in \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right):$

$h(x_c)=0$

$\Downarrow$

$f(x_c)=g(x_c)$

es tallen en 1 punt de $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

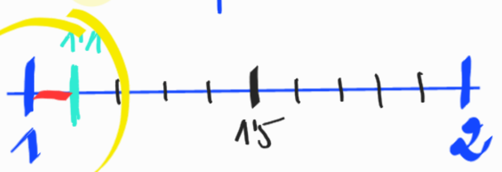

f i g es tallen en aquest punt
amb coordenada x x_c
h es fa zero en x_c
x_c
h
$f(x) = \mathrm{sen}(2x)$
$g(x) = 2x - 1$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.2π/2
0.2π/2
0.4π/2
0.6π/2
0.8π/2
1π/2
1.2π/2
1.4π/2
1.6π/2
1.8π/2
2π/2
2.2π/2
2.4π/2
2.6π/2

(33 pàg 259) Comprova que $f(x)=e^x-3$ té un zero en $(1,2)$ i troba aquest zero amb un error menor que 0'1

↝ Comprovem que existeix el zero

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ contínua en } [1,2] \\ f(1)=e^1-3<0 \\ f(2)=e^2-3>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{TB} \exists\, c\in(1,2): f(c)=0$$

↝ Trobar aquest zero amb un error menor que 0'1

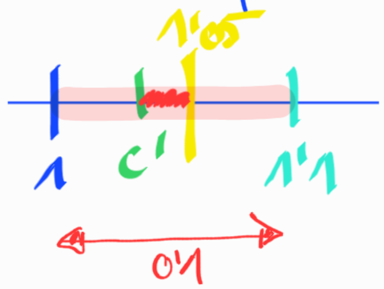


és a dir, no el trobarem de manera exacta sinó aproximada

↳ i aquesta aproximació ha de tenir un error menor que 0'1

treballo en un nou interval d'amplitud 0'1 : $[1, 1'1]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ contínua en } [1,1'1] \\ f(1)=e^1-3<0 \\ f(1'1)=e^{1'1}-3>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{TB} \exists\, c'\in(1,1'1): f(c')=0$$



quin punt agafo en lloc de c', que és on realment $f(c')=0$, però que ha d'estar a menys de 0'1 de c'

! per exemple el punt del mig entre 1 i 1'1
1'05

Comprovo que està a menys de 0'1 de c'

$$|c'-1'05| < \frac{d(1,1'1)}{2} = \frac{0'1}{2} < 0'05$$

34 (pàg 260) 11

34. ★★☆ La funció $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ pren el valor -1 per a $x = 0$ i el valor $\dfrac{1}{2}$ per a $x = 3$. Podem deduir d'aquest fet que existeix un valor de x en l'interval $(0, 3)$ per al qual la funció s'anul·la? Justifica la resposta.

Sol.: No

30 (pàg 259) 11

30. ★☆☆ Comprova, utilitzant el teorema de Bolzano, que l'equació $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$ té una solució en l'interval $(1, 2)$.

11 Comprova que la funció $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$ talla a l'eix OX a l'interval $(-2, -1)$.

llibre Anaya 248

Busca altre interval, per tanteig, en el qual hi hagi una solució de l'equació $x^4 - 2x^3 - 5 = 0$ i aproxima su valor fins les dècimes