

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^n + 2^n}{3^n} \right)^{\frac{3^{n+1} + n}{2^{n-1}}}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Considereu l'equació:

$$x - 3 \ln x = 0$$

a) Demostreu que l'equació té al menys dues solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) Utilitzant el Teorema de Rolle, demostreu que l'equació té exactament 2 solucions a \mathbb{R}^+ .

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ amb un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$.

d) Apliqueu el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$ per a determinar la solució a l'interval $(1, e)$. Atureu el càlcul quan el valor absolut de la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$. Quantes iteracions calen en aquest cas?

3. Volem calcular un valor aproximat de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^3} dx$$

a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = e^{-x^3}$ centrat a l'origen.

b) Calculeu un valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior.

c) Sabent que $\max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 34$, en el cas de calcular numèricament la integral amb el mètode de Simpson, quants subinterval·ls caldria utilitzar per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005?

d) Useu el mètode de Simpson per calcular la integral I amb el nombre de subinterval·ls de l'apartat anterior.