TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*4 punts*) Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ la successió definida per $a_1 = e^2$ i $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$.

   (a) Demostreu que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   (c) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

   (d) Si canviem el valor de a_1 per $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ continua sent acotada, decreixent i convergent? Justifiqueu la resposta.

2. (*3 punts (1+2)*) Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 2x$ per a tot $x \in [0,1]$.

   (a) Enuncieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

   (b) Demostreu que existeix un únic $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

3. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = e^{x/10}$.

   (a) Escriviu el polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen de la funció $f(x)$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

   (b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (c) Utilitzeu el polinomi de Taylor de l'apartat (c) per trobar el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb la precisió demanada.

Durada de l'examen: 1h 30m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

TODAS LES RESPUESTAS DEBEN SER RAZONADAS.

1. (*4 puntos*) Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por $a_1 = e^2$ y $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$.

   (a) Demuestra que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demuestra que $(a_n)_{n\geq 1}$ es decreciente.

   (c) Demuestra que $(a_n)_{n\geq 1}$ es convergente y calcula su límite.

   (d) Si se cambia el valor de a_1 por $a_1 = e^{0,5}$, ¿la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ sigue siendo acotada, decreciente i convergente? Justifica la respuesta.

2. (*3 puntos (1+2)*) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y derivable tal que $f'(x) \neq 2x$ para todo $x \in [0,1]$.

   (a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle.

   (b) Demuestra que existe un único $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

3. (*3 puntos*) Considera la función $f(x) = e^{x/10}$.

   (a) Escribe el polinomio de Taylor de orden n centrado en el origen de la función $f(x)$ y la expresión del resto correspondiente en la forma de Lagrange.

   (b) Determina el grado del polinomio de Taylor de la función $f(x)$ para obtener el valor aproximado de $e^{-0.1}$ con error menor que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (c) Utiliza el polinomio de Taylor del apartado (c) para calcular el valor aproximado de $e^{-0.1}$ con la precisión pedida.

Duración del examen: 1h 30m.
Es necesario entregar los ejercicios por separado.
Se debe responder con tinta azul o negra.
No pueden utilizarse ni libros, ni apuntes, ni móviles, ni dispositivos electrónicos que puedan almacenar, emitir o recibir información.

1. (*4 punts*) Sigui $(a_n)_{n\geq 1}$ la successió definida per $a_1 = e^2$ i $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$, $\forall n \geq 1$

   (a) Demostreu que $2 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$.

   (b) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   (c) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

   (d) Si canviem el valor de a_1 per $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ continua sent acotada, decreixent i convergent? Justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ:

(a) Demostrem per inducció que:

$$2 < a_n < e^4, \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $2 < a_1 = e^2 < e^4$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció que per a aquest n: $2 < a_n < e^4$, i demostrem que aleshores $2 < a_{n+1} < e^4$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $2 < a_n < e^4$:

$2 < a_n < e^4 \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} ln(2) < ln(a_n) < ln(e^4) = 4 \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \sqrt{ln(2)} < \sqrt{ln(a_n)} < \sqrt{4} = 2 \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(2)}} < e^{\sqrt{ln(a_n)}} < e^2 \stackrel{(4)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(2)}} < a_{n+1} < e^2 \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} 2 < a_{n+1} < e^4$.

(1) Prenent logaritmes.

(2) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(3) És cert perquè $f(x) = e^x$ és estrictament creixent.

(4) $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$.

(5) $2 < e^{\sqrt{ln(2)}}$ i $e^2 < e^4$.

(b) Ara demostrem que la successió és decreixent. Demostrem per inducció que:

$$a_n \geq a_{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $e^2 = a_1 \geq a_2 = e^{\sqrt{ln(a_1)}} = e^{\sqrt{ln(e^2)}} = e^{\sqrt{2}}$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció que per a aquest n: $a_n \geq a_{n+1}$, i demostrem que aleshores $a_{n+1} \geq a_{n+2}$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $a_n \geq a_{n+1}$:

$a_n \geq a_{n+1} \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} ln(a_n) \geq ln(a_{n+1}) \stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \sqrt{ln(a_n)} \geq \sqrt{ln(a_{n+1})} \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} e^{\sqrt{ln(a_n)}} \geq e^{\sqrt{ln(a_{n+1})}} \stackrel{(4)}{\Longrightarrow} a_{n+1} \geq a_{n+2}$.

(1) Prenent logaritmes.

(2) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(3) És cert perquè $f(x) = e^x$ és estrictament creixent.

(4) $a_{n+1} = e^{\sqrt{ln(a_n)}}$.

(c) Com que és acotada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent. Calculem el seu límit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{ln(a_n)}} \Rightarrow l = e^{\sqrt{ln(l)}} \Rightarrow ln(l) = \sqrt{ln(l)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ln(l))^2 = ln(l) \Rightarrow (ln(l))^2 - ln(l) = 0 \Rightarrow ln(l)(ln(l) - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ln(l) = 0 \vee ln(l) = 1) \Rightarrow (l = 1 \vee l = e).$$

Donat que $a_n > 2$, $\forall n \geq 1$, es té $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

(d) Si $a_1 = e^{0,5}$, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ no continua sent acotada, decreixent i convergent, ja que no és decreixent(*):

$a_1 = e^{0,5} \simeq 1.649,\ a_2 \simeq 2.028,\ a_3 \simeq 2.318,\ a_4 \simeq 2.502,\ a_5 \simeq 2.605 \cdots$

(*) De fet, en aquest cas, es pot demostrar per inducció que és creixent, pel mateix procediment que hem utilitzat en l'apartat (b).

La successió $(a_n)_{n\geq 1}$ sí que és fitada: $1 < a_n < e^4$, $\forall n \geq 1$. Es pot demostrar per inducció que pel mateix procediment que hem utilitzat en l'apartat (a).

Per últim, la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ també és convergent i el seu límit també és $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

2. (*3 punts (1+2)*) Sigui $f : [0,1] \to [0,1]$ una funció contínua i derivable tal que $f'(x) \neq 2x$ per a tot $x \in [0,1]$.

   (a) Enuncieu el Teorema de Bolzano i el Teorema de Rolle.

   (b) Demostreu que existeix un únic $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$.

SOLUCIÓ:

(a) Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i siguin a, b dos nombres reals amb $a < b$. Si f és contínua en $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$, aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(b) Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció i siguin a, b dos nombres reals amb $a < b$. Si f és contínua en $[a, b]$, f és derivable en (a, b) i $f(a) = f(b)$, aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

(c) Aplicant el Teorema de Bolzano demostrem l'existència: existeix $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c^2$:

Donat que $f(c) = c^2 \Leftrightarrow f(c) - c^2 = 0$, considerem la funció:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{definida per} \quad g(x) = f(x) - x^2.$$

Per ser g la resta de f, que és contínua en $[0,1]$ per hipótesi, i una funció polinòmica, que és contínua en tot $\mathbb{R}$, g és contínua en $[0,1]$. A més:

Donat que $f : [0,1] \to [0,1]$, es compleix $f(x) \in [0,1]$ $\forall x \in [0,1]$, i, en particular $0 \leq f(0) \leq 1$ i $0 \leq f(1) \leq 1$. Per tant:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \quad \text{i} \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

Aleshores, si $g(0) = 0$, ja tenim que $c = 0$ és un $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ i per tant $f(c) = c^2$.

Si $g(1) = 0$, ja tenim que $c = 1$ és un $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ i per tant $f(c) = c^2$.

I, finalment, si $g(0) > 0$ i $g(1) < 0$, el Teorema de Bolzano demostra que existeix $c \in (0,1) \subseteq [0,1]$ tal que $g(c) = 0$ i per tant $f(c) = c^2$.

Aplicant el Teorema de Rolle demostrem la unicitat per reducció a l'absurd: Suposem que existeixen $a, b \in [0,1]$ amb $a < b$ tals que $g(a) = g(b) = 0$ i arribarem a una contradicció:

La funció g és contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) per ser resta de dues funcions contínues i derivables en $[0,1]$, i tenim que $g(a) = g(b)$, aleshores, pel Teorema de Rolle, existiria $c \in (a, b) \subseteq [0,1]$ tal que $g'(c) = 0$.

Però $g'(x) = f'(x) - 2x$ i per hipòtesi $f'(x) \neq 2x$ per a tot $x \in [0,1]$, per tant $g'(x) \neq 0$ per a tot $x \in [0,1]$ i hem arribat a una contradicció.

3. (*3 punts*) Considereu la funció $f(x) = e^{x/10}$

   (a) Escriviu el polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen de la funció $f(x)$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

   (c) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$.

   (d) Utilitzeu el polinomi de Taylor de l'apartat (c) per trobar el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb la precisió demanada.

SOLUCIÓ:

(a) La funció f és la composició d'una funció polinòmica i una funció exponencial, per tant és infinitament derivable en tot $\mathbb{R}$.

El polinomi de Taylor d'ordre n d'una funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

L'expressió del residu corresponent a aquest polinomi de Taylor en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

Les derivades de f són: $f^{(k)}(x) = \dfrac{e^{x/10}}{10^k}$, $\forall k \geq 1$.

Substituïnt x per 0 s'obté $f^{(k)}(0) = \dfrac{1}{10^k}$ $\forall k \geq 1$. Substituïnt x per c s'obté $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{e^{c/10}}{10^{n+1}}$.

Llavors el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{10} + \frac{x^2}{2! \cdot 10^2} + \cdots + \frac{x^n}{n! \cdot 10^n}$$

I l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

(b) Si calculem el valor aproximat de $e^{-0.1} = e^{-1/10} = f(-1)$ utilitzant el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$: $e^{-0.1} = f(-1) \simeq P_n(-1)$, l'error que es comet és:

$$error = |R_n(-1)| = \left| \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}(-1)^{n+1} \right|$$

per a cert c entre -1 i 0.

Donat que $-1 \leq c \leq 0$ i que la funció exponencial és creixent tenim que $e^{c/10} \leq e^{0/10} = e^0 = 1$ i per tant:

$$error = \frac{e^{c/10}}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}}$$

Per assegurar error menor que 0.0005 hem d'imposar que $\dfrac{1}{(n+1)! \cdot 10^{n+1}} < 0.0005$, és a dir $(n+1)! \cdot 10^{n+1} > 2000$. Com que $2! \cdot 10^2 = 200$ i $3! \cdot 10^3 = 6000$ tenim que $n + 1 \geq 3$, és a dir

$n \geq 2$. Per tant, el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor aproximat de $e^{-0.1}$ amb error més petit que $0.5 \cdot 10^{-3}$ és $n \geq 2$.

(c) $e^{-0.1} = f(-1) \simeq P_2(-1) = 1 - \dfrac{1}{10} + \dfrac{(-1)^2}{2! \cdot 10^2} \simeq 0.905.$

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*4 punts*) Sigui a un nombre de l'interval $(0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = a$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$.

   a) Demostreu que $0 < a_n < 1$ per a tot $n \geq 1$.

   b) Demostreu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   c) Demostreu que la successió és convergent i que el seu límit és 0.

   d) Proveu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ i calculeu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

2. (*3 punts*) L'objectiu es trobar una solució de l'equació:

$$(1+\sin x)\, e^x = 1.21$$

   a) Trobeu els polinomis de Taylor de grau 1 centrats en 0 de les funcions $\sin x$ i e^x. Substituïu $\sin x$ i e^x pels seus polinomis de Taylor que heu trobat en l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$, i trobeu la solució positiva x_0 de l'equació resultant.

   b) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial x_0 per trobar una solució de l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$ amb un error absolut $\eta < 10^{-5}$.

3. (*3 punts*) Considereu l'equació $3x^2 - x^3 = 6$.

   a) Demostreu que l'equació té una solució real, i donar un interval de longitud menor o igual que 1 que la contingui.

   b) Doneu la solució amb un error absolut $\eta < 0.05$.

   c) Demostreu que fora de l'interval $[-2, 3]$ l'equació no té solució.

   d) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Trobeu les solucions de $f'(x) = 0$. Aplicant el Teorema de Rolle es pot deduir que l'equació $3x^2 - x^3 = 6$ té més d'una solució real? Justifiqueu la resposta.

Durada de l'examen: 1h 45m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.

1. (*4 punts*) Sigui a un nombre de l'interval $(0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = a$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$.

   a) Demostreu que $0 < a_n < 1$ per a tot $n \geq 1$.

   b) Demostreu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   c) Demostreu que la successió és convergent i que el seu límit és 0.

   d) Proveu que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ i calculeu $\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

SOLUCIÓ:

a) Demostrem per inducció que:

$$0 < a_n < 1, \ \forall n \geq 1.$$

Pas bàsic: És cert per a $n = 1$ ja que $0 < a_1 = a < 1$.

Pas inductiu: Suposem que és cert per a un $n \geq 1$ qualsevol, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció de que per aquest n: $0 < a_n < 1$, i demostrem que aleshores $0 < a_{n+1} < 1$:

Partint de la hipótesi d'inducció, $0 < a_n < 1$,

$0 < a_n < 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} -1 < -a_n < 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} 0 < 1 - a_n < 1 \overset{(3)}{\Longrightarrow} 0 < \sqrt{1-a_n} < 1 \overset{(4)}{\Longrightarrow} -1 < -\sqrt{1-a_n} < 0 \overset{(5)}{\Longrightarrow} 0 < 1 - \sqrt{1-a_n} < 1 \overset{(6)}{\Longrightarrow} 0 < a_{n+1} < 1$.

(1) Multiplicant per -1.

(2) Sumant 1.

(3) És cert perquè $f(x) = \sqrt{x}$ és estrictament creixent.

(4) Multiplicant per -1.

(5) Sumant 1.

(6) $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$

b) Ara demostrem que la successió és decreixent:

$$a_n \geq a_{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

En aquest cas es pot demostrar directament:

$a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1} \Longleftrightarrow a_n \overset{?}{\geq} 1-\sqrt{1-a_n} \Longleftrightarrow \sqrt{1-a_n} \overset{?}{\geq} 1-a_n \Longleftrightarrow 1-a_n \overset{?}{\geq} (1-a_n)^2 \Longleftrightarrow a_n(a_n-1) \overset{?}{\leq} 0$,

i com que ja hem demostrat a l'apartat anterior que $0 < a_n < 1$: tenim que, efectivament, $0 < a_n < 1 \Longrightarrow a_n(a_n-1) < 0 \Longrightarrow a_n(a_n-1) \leq 0$.

c) Com que és fitada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent. Aleshores $\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i, a més, $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Per tant, si $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, a partir de $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$ tenim:

$l = 1-\sqrt{1-l} \iff 1-l = \sqrt{1-l} \iff (1-l)^2 = 1-l \iff l^2-l = 0 \iff l(l-1) = 0 \iff (l = 1 \ \vee \ l = 0) \overset{(7)}{\Longrightarrow} l = 0.$

(7) La succesió és decreixent i $a_1 = a < 1$, per tant l no pot ser 1.

d) Primer provem que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\sqrt{1-a_n}}{a_n} \overset{(8)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\sqrt{1-a_n})(1-\sqrt{1-a_n})}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1-a_n)}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_n(1+\sqrt{1-a_n})} \overset{(9)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{1-a_n})} =$$

$$= \frac{1}{(1+\sqrt{1-0})} = \frac{1}{2}.$$

(8) En fer la divisió entre a_n queda una indeterminació del tipus $\infty - \infty$ amb una arrel quadrada, per tant multipliquem i dividim pel conjugat.

(9) Es pot simplificar perquè $a_n > 0$.

Ara calculem $\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$:

Com que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, tenim que $\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$ és una indeterminació del tipus 1^∞, per tant:

$$\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}} = e^{\lim_{n\to+\infty} (1+a_n-1)\frac{1}{a_{n+1}}} = e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}} \overset{(10)}{=} e^2.$$

(10) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 2.$

2. (*3 punts*) L'objectiu es trobar una solució de l'equació:

$$(1+\sin x)\, e^x = 1.21$$

   a) Trobeu els polinomis de Taylor de grau 1 centrats en 0 de les funcions $\sin x$ i e^x. Substituïu $\sin x$ i e^x pels seus polinomis de Taylor que heu trobat en l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$, i trobeu la solució positiva x_0 de l'equació resultant.

   b) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial x_0 per trobar una solució de l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$ amb un error absolut $\eta < 10^{-5}$.

SOLUCIÓ:

a) El polinomi de Taylor de grau 1 d'una funció f centrat en 0 és

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x$$

Per $f(x) = \sin x$ tenim $P_1(x) = 0 + 1\cdot x = x$.

Per $f(x) = e^x$ tenim $P_1(x) = 1 + 1\cdot x = 1 + x$.

En substituir s'obté l'equació $(1+x)^2 = 1.21$, que té solucions 0.1 i -2.1. Per tant la solució positiva és $x_0 = 0.1$.

b) Sigui $f(x) = (1+\sin x)\, e^x - 1.21$, aleshores $f'(x) = e^x(1+\cos x+\sin x)$.

Apliquem el mètode de la tangent ($x_0 = 0.1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$, fins que $|x_{n+1} - x_n| \leq \eta \wedge |f(x_{n+1})| \leq \eta$):

$x_0 = 0.1,\ f(x_0) = 0.00550390680585156$

$x_1 = 0.09762266008,\ f(x_1) = 9.332\cdot 10^{-6},\ |x_1 - x_0| = 0.002377339$

$x_2 = 0.09761861554,\ f(x_2) = -2.\cdot 10^{-9}, |x_2 - x_1| = 4.04415559\cdot 10^{-6}$

Resultat: $x \simeq 0.097619$.

3. (*3 punts*) Considereu l'equació $3x^2 - x^3 = 6$.

a) Demostreu que l'equació té una solució real, i donar un interval de longitud menor o igual que 1 que la contingui.

b) Doneu la solució amb un error absolut $\eta < 0.05$.

c) Demostreu que fora de l'interval $[-2, 3]$ l'equació no té solució.

d) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Trobeu les solucions de $f'(x) = 0$. Aplicant el Teorema de Rolle es pot deduir que l'equació $3x^2 - x^3 = 6$ té més d'una solució real? Justifiqueu la resposta.

SOLUCIÓ:

$3x^2 - x^3 = 6 \iff x^3 - 3x^2 + 6 = 0$. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Per ser una funció polimòmica és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$.

a) Per ser $f(-2) = -14 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$ i f contínua en l'interval $[-2, -1]$, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té una solució real en l'interval $(-2, -1)$. Per tant, la solució es toba a l'interval $(-2, -1)$ que té longitud 1.

b) Es pot fer pel métode de la bisecció, de la secant o de la tangent. Pel mètode de la tangent (fórmules a l'exercici anterior) tenim:

$x_0 = -1.$

$x_1 = -1.222222222,$

$x_2 = -1.196215024,\ f(x_2) = -0.004491575, |x_2 - x_1| = 0.026007198$

Resultat: $x \simeq -1.196$.

c) Per veure que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \neq 0\ \forall x \notin [-2, 3]$ es pot veure de diverses maneres.

Una manera és, tenint en compte que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 3x(x - 2)$, aleshores:

- $x < -2 \Longrightarrow f'(x) > 0$, per tant, f és creixent a $(-\infty, -2)$, així, si $x < -2 \Longrightarrow f(x) < f(-2) = -14 < 0$, per tant, no hi ha cap solució de l'equació a l'esquerra de -2.
- $x > 3 \Longrightarrow f'(x) > 0$, per tant, f és creixent a $(3, +\infty)$, així $x > 3 \Longrightarrow f(x) > f(3) = 6 > 0$ i, per tant, no hi ha cap solució de l'equació a la dreta de 3.

Aleshores, fora de l'interval $[-2, 3]$ l'equació no té solució.

Una altra manera de demostrar que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \neq 0\ \forall x \notin [-2, 3]$, és, tenint en compte que $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6$. Aleshores, per una banda: $x < -2 \Longrightarrow (x^2 > 4 \wedge x - 3 < -5) \Longrightarrow x^2(x - 3) < -20 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6 < -14 < 0 \Longrightarrow x$ no pot ser solució de l'equació. Per l'altra banda: $x > 3 \Longrightarrow (x^2 > 9 \wedge x - 3 > 0) \Longrightarrow x^2(x - 3) > 0 \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 = x^2(x - 3) + 6 > 6 > 0 \Longrightarrow x$ no pot ser solució de l'equació.

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 3x(x-2)$. Per tant: $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$.

No es pot deduir:

El Teorema de Rolle assegura que entre un parell de solucions diferents de l'equació $f(x) = 0$ hi hauria una solució de $f'(x) = 0$.

A partir de la hipòtesi de que l'equació $f'(x) = 0$ té dues solucions, el Teorema de Rolle no diu res més que l'equació $f(x) = 0$ té com a màxim tres solucions.

Examen Parcial M2 FIB-UPC 5 de novembre de 2021

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. Considereu la successió definida per $a_1 = 0.5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}, n \geq 1$.

   a) Calculeu els quatre primers termes de la successió. [1 punt]

   b) Si la successió fos convergent quin seria el seu límit? [2 punts]

   c) Com podríeu demostrar que és convergent? [2 punts]

   d) Demostreu que és convergent. [5 punts]

2. Considereu la funció $f(x) = e^x \sin(x)$.

   a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange. [5 punts]

   b) Utilitzeu l'expressió de Lagrange del residu per acotar l'error absolut comès en aproximar el valor de la funció en el punt $x = -0.4$ utilitzant el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen. [5 punts]

3. L'energia que consumeix un xip es pot calcular amb la fórmula $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$, on $P(t)$ és la potència que ve donada en funció del temps.

   S'ha messurat la potència entregada en diferents moments i s'ha obtingut la taula:

t	$P(t)$	t	$P(t)$
0.0	1.0000	0.6	1.1990
0.1	0.9010	0.7	0.7900
0.2	1.1100	0.8	0.8010
0.3	1.0990	0.9	1.2100
0.4	0.8900	1.0	1.0000
0.5	1.0000		

   a) Utilitzant totes aquestes dades, doneu un valor per l'energia consumida entre $t_0 = 0.0$ i $t_1 = 1.0$. [5 punts]

   b) Acoteu l'error comès sabent que, pel disseny, $P(t)$ i totes les seves derivades prenen valors entre 0 i 200. [5 punts]

Els tres problemes valen els mateixos punts: Nota examen $= \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$.

1. Considereu la successió definida per $a_1 = 0.5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}, n \geq 1$.

   a) Calculeu els quatre primers termes de la successió. [1 punt]

   b) Si la successió fos convergent quin seria el seu límit? [2 punts]

   c) Com podríeu demostrar que és convergent? [2 punts]

   d) Demostreu que és convergent. [5 punts]

SOLUCIÓ:

a) $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5625000000$, $a_3 = 0.6103515625$, $a_4 \simeq 0.6483080387$.

b) Si la successió fos convergent, aleshores $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i, a més, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, per tant, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$:

$$l = \frac{l^2 + 2l + 1}{4} \Rightarrow 4l = l^2 + 2l + 1 \Rightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Rightarrow l = 1.$$

c) Demostrant que la successió és acotada i creixent i utilitzant el teorema de la convergència monòtona.

d) Primer demostrem que la successió és acotada. Concretament, demostrem per inducció que:

$$0 \leq a_n \leq 1, \ \forall n \geq 1.$$

Cas base: És cert per a $n = 1$ ja que $0 \leq a_1 = 0.5 \leq 1$.

Pas inductiu:Suposem que és cert per a un $n \geq 1$, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció: $0 \leq a_n \leq 1$, i demostrem que aleshores $0 \leq a_{n+1} \leq 1$:

$0 \leq a_n \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{0+0+1}{4} \leq \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4} = a_{n+1} \leq \dfrac{1+2+1}{4} \Longrightarrow \dfrac{1}{4} \leq a_{n+1} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 1$.

Ara demostrem que la successió és creixent, també per inducció:

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

Cas base: És cert per a $n = 1$ ja que $a_1 = 0.5 \leq a_2 \simeq 0.5625$.

Pas inductiu:Suposant que és cert per a un $n \geq 1$, és a dir,$a_n \leq a_{n+1}$, tenim:

$a_n \leq a_{n+1} \overset{(1)}{\Longrightarrow} a_n^2 + 2a_n + 1 \leq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4} \leq \dfrac{a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1}{4} \overset{(3)}{\Longrightarrow} a_{n+1} \leq a_{n+2}$

(1) És cert perquè $f(x) = x^2 + 2x + 1$ és creixent en $(-1, +\infty)$. (2) Dividint entre 4. (3) $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}$.

Com que és fitada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent.

2. Considereu la funció $f(x) = e^x \sin(x)$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange. [5 punts]

b) Utilitzeu l'expressió de Lagrange del residu per acotar l'error absolut comès en aproximar el valor de la funció en el punt $x = -0.4$ utilitzant el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen. [5 punts]

SOLUCIÓ: a) La funció f és de classe C^∞ per ser el producte d'una funció exponencial i una funció sinus. El seu polinomi de Taylor de grau 3 en l'origen és:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Les tres primeres derivades de $f(x) = e^x \sin(x)$ són: $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$, $f''(x) = 2e^x \cos(x)$, $f'''(x) = 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x)$. Per tant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$ i:

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

L'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^3$$

per a cert c entre 0 i x. La quarta derivada de $f(x)$ és: $f^{(4)}(x) = -4e^x.\sin(x)$. Per tant:

$$R_3(x) = \frac{-4e^c \sin(c)}{4!}x^4, \text{ per a cert } c \text{ entre } 0 \text{ i } x.$$

b) L'error absolut al aproximar $f(-0.4)$ per $P_3(-0.4)$ és:

$$|f(-0.4) - P_3(-0.4)| = |R_3(-0.4)| = \frac{4e^c.|\sin(c)|}{4!}(0.9)^4, \text{ per a cert } c \in [-0.4, 0].$$

Donat que $e^c \leq e^0 = 1$ per a qualsevol $c \in [-0.4, 0]$ i $|\sin(c)| \leq 1$ per a qualsevol $c \in \mathbb{R}$:

$$|f(-0.4) - P_3(-0.4)| = |R_3(-0.4)| = \frac{4e^c.|\sin(c)|}{4!}(0.4)^4 \leq \frac{4}{4!}(0.4)^4 \simeq \mathbf{0.00427}.$$

3. L'energia que consumeix un xip es pot calcular amb la fórmula $\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$, on $P(t)$ és la potència que ve donada en funció del temps.

S'ha messurat la potència entregada en diferents moments i s'ha obtingut la taula:

t	$P(t)$	t	$P(t)$
0.0	1.0000	0.6	1.1990
0.1	0.9010	0.7	0.7900
0.2	1.1100	0.8	0.8010
0.3	1.0990	0.9	1.2100
0.4	0.8900	1.0	1.0000
0.5	1.0000		

a) Utilitzant totes aquestes dades, doneu un valor per l'energia consumida entre $t_0 = 0.0$ i $t_1 = 1.0$. [5 punts]

b) Acoteu l'error comès sabent que, pel disseny, $P(t)$ i totes les seves derivades prenen valors entre 0 i 200. [5 punts]

SOLUCIÓ. Tenim totes les dades per calcular la integral $I = \int_0^1 P(t)dt$ amb 10 subintervals pel mètode de Simpson i per tant:

$I = \int_0^1 P(t)dt \approxeq S_{10} = \frac{1}{30}[f(0.0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + 2f(0.4) + 4f(0.5) + 2f(0.6) + 4f(0.7) + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)] \approxeq \mathbf{1.0000}$.

La fórmula de l'error pel mètode de Simpson amb n subintervals és:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4,$$

on M_4 és una fita superior de $\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\}$. Per tant:

$$\left| \int_{0.0}^{1.0} P(t)dt - S_{10} \right| \leq \frac{M_4}{180 \cdot 10^4} = \frac{200}{180 \cdot 10^4} \leq \mathbf{0.00012}$$

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Considereu l'equació:

$$x - 3\ln x = 0$$

a) Demostreu que l'equació té al menys dues solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) Utilitzant el Teorema de Rolle, demostreu que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ amb un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$.

d) Apliqueu el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$ per a determinar la solució a l'interval $(1, e)$. Atureu el càlcul quan el valor absolut de la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$. Quantes iteracions calen en aquest cas?

3. Volem calcular un valor aproximat de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx$$

a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = e^{-x^3}$ centrat a l'origen.

b) Calculeu un valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior.

c) Sabent que $\max\limits_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 34$, en el cas de calcular numèricament la integral amb el mètode de Simpson, quants subintervals caldria utilitzar per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005?

d) Useu el mètode de Simpson per calcular la integral I amb el nombre de subintervals de l'apartat anterior.

Totes les respostes han de ser raonades

1. Calculeu els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

SOLUCIÓ:

a) Tant en la base com en l'exponent, dividim numerador i denominador entre 3^n i tenim:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}\right)^{\frac{3+n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}},$$

que és una indeterminació del tipus 1^∞ (per ser $\frac{2}{3}<1$), per tant el límit s'obté fent e elevat al límit del producte de la base menys 1 per l'exponent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}-1\right)\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+n\right)}{3^n2^{n-1}}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{18\cdot 6^{n-1}+2n\cdot 2^{n-1}}{3\cdot 6^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{18+2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{3}}=\mathbf{6}.$$

(En el penúltim pas hem dividit numerador i denominador entre 6^{n-1})

b) Per calcular el límit, apliquem el criteri arrel-quocient:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1},$$

que és una indeterminació del tipus 1^∞, per tant el límit s'obté fent e elevat al límit del producte de la base menys 1 per l'exponent, i finalment:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n+1}{n}}=\mathbf{e^{-1}}.$$

2. Considereu l'equació:

$$x - 3\ln x = 0$$

a) Demostreu que l'equació té al menys dues solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) Utilitzant el Teorema de Rolle, demostreu que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ amb un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$.

d) Apliqueu el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$ per a determinar la solució a l'interval $(1, e)$. Atureu el càlcul quan el valor absolut de la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$. Quantes iteracions calen en aquest cas?

SOLUCIÓ:

a) Considerem la funció $f(x) = x - 3\ln x$. Per ser la resta d'una funció polinòmica i el producte d'una constant per una funció logarítmica, f és contínua i derivable en $(0, +\infty)$.

Així f és contínua en l'interval $[1, e]$. A més $f(1) = 1 > 0$ i $f(e) = e - 3 < 0$. Per tant, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té solució a l'interval $(1, e)$.

També, f és contínua en l'interval $[e, 5]$. A més $f(e) = e - 3 < 0$ i $f(5) = 5 - 3\ln 5 > 0$. Per tant, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té solució a l'interval $(e, 5)$.

En resum, l'equació té al menys dos solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) A l'apartat anterior ja hem demostrat que té al menys dos solucions a $\mathbb{R}^+$. Demostrarem que l'equació té com a màxim 2 solucions a $\mathbb{R}^+$ per reducció a l'absurd, utilitzant el Teorema de Rolle; per això, suposem que l'equació té més de 2 solucions i arribarem a una contradicció:

Suposem que $\exists a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tals que $a < b < c$ i $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, aleshores pel Teorema de Rolle tindríem:

Per una banda, f és contínua en l'interval $[a, b]$ i derivable en l'interval (a, b). A més $f(a) = f(b)$. Per tant, el Teorema de Rolle asseguraria que $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Per altra banda, f és contínua en l'interval $[b, c]$ i derivable en l'interval (b, c). A més $f(b) = f(c)$. Per tant, el Teorema de Rolle asseguraria que $\exists \beta \in (b, c)$ tal que $f'(\beta) = 0$. Així l'equació $f'(x) = 0$ tindria dos solucions diferents α i β a $\mathbb{R}^+$.

Però: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$, és a dir, l'equació $f'(x) = 0$ té solució única a $\mathbb{R}^+$. Per tant l'equació té com a màxim 2 solucions a $\mathbb{R}^+$, que, junt amb l'apartat anterior, demostra que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

c) Al fer servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$, l'error de la iteració $n-$èsima és més petit que $\dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{e-1}{2^n}$. Aleshores per assegurar un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ cal que:

$\dfrac{e-1}{2^n} < 0.5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow n > \log_2(20000(e-1)) \approxeq 15.07$.

Per tant, el nombre d'iteracions que serien necessàries és 16.

d) Apliquem el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$. Donat que $f(x) = x - 3\ln x$, $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x}$, tenim: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approxeq 1.854960007$, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approxeq 1.857180370$ i $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approxeq 1.857183861$, que ja satisfà $|x_3 - x_2| \approxeq 0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ (mentre que $|x_2 - x_1| \geq 0.5 \cdot 10^{-4}$) . Per tant, el valor aproximat de la solució és $x_3 \approxeq \mathbf{1.85718}$ i han calgut **3** iteracions.

3. Volem calcular un valor aproximat de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx$$

a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = e^{-x^3}$ centrat a l'origen.

b) Calculeu un valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior.

c) Sabent que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 34$, en el cas de calcular numèricament la integral amb el mètode de Simpson, quants subintervals caldria utilitzar per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005?

d) Useu el mètode de Simpson per calcular la integral I amb el nombre de subintervals de l'apartat anterior.

SOLUCIÓ: a) La funció f és de classe C^∞ per ser la composició d'una funció polinòmica i una funció exponencial. El seu polinomi de Taylor de grau 3 en l'origen és:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Les tres primeres derivades de $f(x) = e^{-x^3}$ són: $f'(x) = -3x^2e^{-x^3}$, $f''(x) = -6xe^{-x^3} + 9x^4e^{-x^3} = e^{-x^3}(-6x + 9x^4)$ i $f'''(x) = -6e^{-x^3} + 54x^3e^{-x^3} - 27x^6e^{-x^3}$. Per tant $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6$, i:

$$P_3(x) = 1 - \frac{6}{3!}x^3 = \mathbf{1 - x^3}.$$

b) El valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior és:

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx \approxeq \int_0^1 (1 - x^3)\, dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

c) Al calcular la integral amb el mètode de Simpson amb n subintervals, la cota superior de l'error és:

$$error < \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4.$$

On $M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$. Sabem que $a = 0$, $b = 1$ i que $M_4 < 34$ Fem $a = 0$ i $b = 1$, per tant:

$$error < \frac{M_4}{180n^4} < \frac{34}{180n^4}.$$

Per garantir Sabent que que l'error sigui més petit que 0.005, cal que:

$$\frac{34}{180n^4} < 0.005 \Leftrightarrow n > \sqrt[4]{\frac{6800}{180}} \approxeq 2.48,$$

Donat que per utilitzar el mètode de Simpson el número de subintervals ha de ser parell, caldria utilitzar **4** subintervals per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005.

d) Per calcular la integral I amb 4 subintervals pel mètode de Simpson: $\dfrac{1-0}{4} = 0.25, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1, f(x) = e^{-x^3}$ i aleshores:

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx \approxeq S_4 = \frac{1}{12}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)\right] \approxeq \mathbf{0.808}.$$

Totes les respostes han de ser raonades

1. (4 punts) Considereu l'equació:

$$e^{-x} = 4 - 3x$$

a) Demostreu que l'equació té una solució positiva i una de negativa a l'interval $[-3, 2]$.

b) Demostreu que només té dues solucions reals.

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva de l'equació amb un error absolut menor que 10^{-8} prenent com a interval inicial l'interval $[0, 2]$.

d) Calculeu, el valor aproximat de la solució d'abscisa negativa fent servir el mètode de Newton Raphson amb tres decimals correctes (error $< 0.5 \cdot 10^{-3}$), prenent coma a valor inicial $x_0 = -3$.

SOLUCIÓ: Donat que:

$$e^{-x} = 4 - 3x \Leftrightarrow e^{-x} - 4 + 3x = 0.$$

Considerem la funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^{-x} - 4 + 3x$. La funció f és la suma d'una composició d'una funció polinòmica i una exponencial amb una funció polinòmica, per tant és contínua i derivable en tota la recta real.

a) Donat que $f(-3) \simeq 7.09 > 0$, $f(0) = -3 < 0$ i f és contínua en l'interval $[-3, 0]$, el Teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una solució de l'equació en l'interval $(-3, 0)$.

Donat que $f(0) = -3 < 0$, $f(2) \simeq 2.14 > 0$ i f és contínua en l'interval $[0, 2]$, el Teorema de Bolzano ens assegura l'existència d'una solució de l'equació en l'interval $(0, 2)$.

Per tant l'equació té una solució positiva i una de negtiva a l'interval $[-3, 2]$.

b) Demostració per reducció a l'absurd utilitzant el Teorema de Rolle: Es suposa que l'equació tingui 3 solucions reals i s' arriba a una contradicció:

Suposant $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ amb $a < b < c$ i $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, tenim 1) al ser f contínua en l'interval $[a, b]$, derivable en l'interval (a, b) i ser $f(a) = f(b)$, pel Teorema de Rolle es tindria que $\exists \alpha \in (a, b)$ amb $f'(\alpha) = 0$ i 2) al ser f contínua en l'interval $[b, c]$, derivable en l'interval (b, c) i ser $f(b) = f(c)$, pel Teorema de Rolle es tindria que $\exists \beta \in (b, c)$ amb $f'(\beta) = 0$. Per tant l'quació $f'(x) = 0$ tindria dues solucions reals diferents.

Però $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 3$, és a dir l'equació $f'(x) = 0$ té solució única. Contradicció.

c) Si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució positiva de l'equació prenent com a interval inicial l'interval $[a, b] = [0, 2]$, l'error de la iteració $n-$èsima és menor que $\dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Per tant el nombre d'iteracions n necessàries per assegurar un error absolut menor que 10^{-8} ha de satisfer: $\dfrac{1}{2^{n-1}} < 10^{-8} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 10^8 \Leftrightarrow n - 1 > \log_2 10^8 \simeq 26.58$, és a dir $n \geq 28$.

d) Per calcular el valor aproximat de la solució d'abscisa negativa fent servir el mètode de Newton Raphson amb tres decimals correctes (error $< 0.5 \cdot 10^{-3}$), prenem $x_0 = -3$, aleshores $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq -2.585290357$, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \simeq -2.438095563$, $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \simeq -2.421893726$, $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \simeq - - 2.421712903$. Donat que $|x_4 - x_3| \simeq 0.000180823 < 0.5 \cdot 10^{-3}$ i $|f(x_3)| < 0.5 \cdot 10^{-3}$, obtenim que el valor aproximat és x_4, és a dir -2.4217.

2. (4 punts)

a) Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+1} = a_n^2$.

a.1) Demostreu que $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$ per a tot $n \geq 1$,

a.2) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és monòtona,

a.3) Demostreu que $(a_n)_{n\geq 1}$ és convergent i calculeu el seu límit.

b) Calculeu el límit:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\dfrac{n^2+1}{2}}}$$

SOLUCIÓ:

a.1) És evident que $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ja que qualsevol nombre real elevat al quadrat és més gran o igual a zero. Falta demostrar que $a_n \leq \frac{1}{2}$. Ho farem amb el mètode de la inducció matemàtica.

Cas base: $a_1 = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Pas inductiu: sea $n \geq 2$.

Hipòtesi:: $a_n \leq \frac{1}{2}$. Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Partint de la hipòtesi i tenint en compte que $a_n \geq 0$ arribem a la tesi:

$$0 \leq a_n \leq \tfrac{1}{2} \implies a_n^2 \leq \tfrac{1}{4} \implies a_{n+1} = a_n^2 \leq \tfrac{1}{4} \leq \tfrac{1}{2}.$$

Aleshores $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$, és a dir $\{a_n\}$ és fitada inferiorment i superiorment.

a.2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = (a_1)^2 = \frac{1}{4} < a_1 \implies \{a_n\}$ pot ser només monòtona decreixent.
$\{a_n\}$ és monòtona decreixent $\iff a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Ho demostrarem amb el mètode de la inducció matemàtica.
Cas base: $a_2 \leq a_1$.
Pas inductiu: sea $n \geq 2$.

Hipótesis: $a_n \leq a_{n-1}$. Tesi: $a_{n+1} \leq a_n$.

De la hipòtesi, tenint en compte que $a_n \geq 0$, arribem a la tesi:

$$a_n \leq a_{n-1}. \implies a_n^2 \leq a_{n-1}^2 \implies a_{n+1} \leq a_n.$$

a.3) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \text{ monòtona decreixent (b)} \\ \{a_n\} \text{ fitada inferiorment (a)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\{a_n\} \text{ és convergent } \left(\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l\right) \\ \text{(Teorema de la convergència monòtona)}\end{array}.$

Per tant

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n^2 \Longrightarrow l = l^2 \Longrightarrow l^2 - l = 0 \Longrightarrow l(l-1) = 0 \Longrightarrow l = 0 \text{ o } l = 1.$$

Donat que $\{a_n\}$ és monòtona decreixent i $a_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow l = 0$.

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2n}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{\left(\frac{2n+4}{2n-1}-1\right)\frac{n^2+1}{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2n+4-2n+1}{2n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{5}{2n-1}\cdot\frac{n^2+1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{5(n^2+1)}{2n(2n-1)}} = e^{\frac{5}{4}}.$$

3. (2 punts) Donada la funció $f(x) = e^x$,

a) Escriure el seu polinomi de Taylor d'ordre n centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Calculeu aproximadament $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ amb error menor que 0.005, utilitzant el polinomi amb l'ordre adequat.

SOLUCIÓ: El polinomi de Taylor d'ordre n d'una funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és: $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és: $R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ per a cert c entre 0 i x.

Les derivades de f són: $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \geq 1$. Substituïnt x per 0 s'obté $f^{(k)}(0) = 1$, $\forall k \geq 1$, llavors el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$ és:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

I l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

per a cert c entre 0 i x.

b) Si calculem el valor aproximat de $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ utilitzant el polinomi de Taylor d'ordre n de la funció $f(x)$ centrat en $x = 0$: $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq P_n\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, l'error que es comet és:

$error = \left|R_n\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ per a cert c entre $-\frac{1}{4}$ i 0.

Donat que $-\frac{1}{4} \leq c \leq 0$ i que la funció exponencial és creixent tenim que $e^c \leq e^0 = 1$ i per tant:

$$error = \frac{e^c}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!4^{n+1}}$$

Per assegurar error menor que 0.005 hem d'imposar que $\dfrac{1}{(n+1)!4^{n+1}} < 0.005$, és a dir $(n+1)!4^{n+1} > 200$. Com que $2!4^2 = 32$ i $3!4^3 = 384$ tenim que $n + 1 \geq 3$, és a dir $n \geq 2$. Per tant:

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \simeq P_2\left(-\dfrac{1}{4}\right) = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2 2!} \simeq 0.781.$