Examen Parcial M2 FIB-UPC 5 de novembre de 2021

TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES

1. Considereu la successió definida per $a_1 = 0.5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}$, $n \geq 1$.

   a) Calculeu els quatre primers termes de la successió. [1 punt]

   b) Si la successió fos convergent quin seria el seu límit? [2 punts]

   c) Com podríeu demostrar que és convergent? [2 punts]

   d) Demostreu que és convergent. [5 punts]

2. Considereu la funció $f(x) = e^x \sin(x)$.

   a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange. [5 punts]

   b) Utilitzeu l'expressió de Lagrange del residu per acotar l'error absolut comès en aproximar el valor de la funció en el punt $x = -0.4$ utilitzant el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen. [5 punts]

3. L'energia que consumeix un xip es pot calcular amb la fórmula $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$, on $P(t)$ és la potència que ve donada en funció del temps.

   S'ha messurat la potència entregada en diferents moments i s'ha obtingut la taula:

t	$P(t)$	t	$P(t)$
0.0	1.0000	0.6	1.1990
0.1	0.9010	0.7	0.7900
0.2	1.1100	0.8	0.8010
0.3	1.0990	0.9	1.2100
0.4	0.8900	1.0	1.0000
0.5	1.0000		

   a) Utilitzant totes aquestes dades, doneu un valor per l'energia consumida entre $t_0 = 0.0$ i $t_1 = 1.0$. [5 punts]

   b) Acoteu l'error comès sabent que, pel disseny, $P(t)$ i totes les seves derivades prenen valors entre 0 i 200. [5 punts]

Els tres problemes valen els mateixos punts: Nota examen $= \dfrac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$.

1. Considereu la successió definida per $a_1 = 0.5$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}, n \geq 1$.

   a) Calculeu els quatre primers termes de la successió. [1 punt]

   b) Si la successió fos convergent quin seria el seu límit? [2 punts]

   c) Com podríeu demostrar que és convergent? [2 punts]

   d) Demostreu que és convergent. [5 punts]

SOLUCIÓ:

a) $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5625000000$, $a_3 = 0.6103515625$, $a_4 \simeq 0.6483080387$.

b) Si la successió fos convergent, aleshores $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ i, a més, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, per tant, si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$:

$$l = \frac{l^2 + 2l + 1}{4} \Rightarrow 4l = l^2 + 2l + 1 \Rightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \Rightarrow l = 1.$$

c) Demostrant que la successió és acotada i creixent i utilitzant el teorema de la convergència monòtona.

d) Primer demostrem que la successió és acotada. Concretament, demostrem per inducció que:

$$0 \leq a_n \leq 1, \ \forall n \geq 1.$$

Cas base: És cert per a $n = 1$ ja que $0 \leq a_1 = 0.5 \leq 1$.

Pas inductiu:Suposem que és cert per a un $n \geq 1$, és a dir, fem la hipòtesi d'inducció: $0 \leq a_n \leq 1$, i demostrem que aleshores $0 \leq a_{n+1} \leq 1$:

$0 \leq a_n \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{0+0+1}{4} \leq \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4} = a_{n+1} \leq \dfrac{1+2+1}{4} \Longrightarrow \dfrac{1}{4} \leq a_{n+1} \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 1.$

Ara demostrem que la successió és creixent, també per inducció:

$$a_n \leq a_{n+1}, \ \forall n \geq 1.$$

Cas base: És cert per a $n = 1$ ja que $a_1 = 0.5 \leq a_2 \simeq 0.5625$.

Pas inductiu:Suposant que és cert per a un $n \geq 1$, és a dir,$a_n \leq a_{n+1}$, tenim:

$a_n \leq a_{n+1} \overset{(1)}{\Longrightarrow} a_n^2 + 2a_n + 1 \leq a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4} \leq \dfrac{a_{n+1}^2 + 2a_{n+1} + 1}{4} \overset{(3)}{\Longrightarrow} a_{n+1} \leq a_{n+2}$

(1) És cert perquè $f(x) = x^2 + 2x + 1$ és creixent en $(-1, +\infty)$. (2) Dividint entre 4. (3) $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n + 1}{4}$.

Com que és fitada i monòtona, pel teorema de la convergència monòtona, la successió és convergent.

2. Considereu la funció $f(x) = e^x \sin(x)$.

   a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange. [5 punts]

   b) Utilitzeu l'expressió de Lagrange del residu per acotar l'error absolut comès en aproximar el valor de la funció en el punt $x = -0.4$ utilitzant el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció f centrat a l'origen. [5 punts]

SOLUCIÓ: a) La funció f és de classe C^∞ per ser el producte d'una funció exponencial i una funció sinus. El seu polinomi de Taylor de grau 3 en l'origen és:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Les tres primeres derivades de $f(x) = e^x \sin(x)$ són: $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$, $f''(x) = 2e^x \cos(x)$, $f'''(x) = 2e^x \cos(x) - 2e^x \sin(x)$. Per tant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2$ i:

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

L'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange és:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^3$$

per a cert c entre 0 i x. La quarta derivada de $f(x)$ és: $f^{(4)}(x) = -4e^x . \sin(x)$. Per tant:

$$R_3(x) = \frac{-4e^c \sin(c)}{4!}x^4, \text{ per a cert } c \text{ entre } 0 \text{ i } x.$$

b) L'error absolut al aproximar $f(-0.4)$ per $P_3(-0.4)$ és:

$$|f(-0.4) - P_3(-0.4)| = |R_3(-0.4)| = \frac{4e^c .|\sin(c)|}{4!}(0.9)^4, \text{ per a cert } c \in [-0.4, 0].$$

Donat que $e^c \leq e^0 = 1$ per a qualsevol $c \in [-0.4, 0]$ i $|\sin(c)| \leq 1$ per a qualsevol $c \in \mathbb{R}$:

$$|f(-0.4) - P_3(-0.4)| = |R_3(-0.4)| = \frac{4e^c .|\sin(c)|}{4!}(0.4)^4 \leq \frac{4}{4!}(0.4)^4 \simeq \mathbf{0.00427}.$$

3. L'energia que consumeix un xip es pot calcular amb la fórmula $\int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$, on $P(t)$ és la potència que ve donada en funció del temps.

S'ha messurat la potència entregada en diferents moments i s'ha obtingut la taula:

t	$P(t)$	t	$P(t)$
0.0	1.0000	0.6	1.1990
0.1	0.9010	0.7	0.7900
0.2	1.1100	0.8	0.8010
0.3	1.0990	0.9	1.2100
0.4	0.8900	1.0	1.0000
0.5	1.0000		

a) Utilitzant totes aquestes dades, doneu un valor per l'energia consumida entre $t_0 = 0.0$ i $t_1 = 1.0$. [5 punts]

b) Acoteu l'error comès sabent que, pel disseny, $P(t)$ i totes les seves derivades prenen valors entre 0 i 200. [5 punts]

SOLUCIÓ. Tenim totes les dades per calcular la integral $I = \int_0^1 P(t)dt$ amb 10 subintervals pel mètode de Simpson i per tant:

$I = \int_0^1 P(t)dt \approxeq S_{10} = \frac{1}{30}\,[f(0.0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + 4f(0.3) + 2f(0.4) + 4f(0.5) + 2f(0.6) + 4f(0.7) + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)] \approxeq \mathbf{1.0000}$.

La fórmula de l'error pel mètode de Simpson amb n subintervals és:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4,$$

on M_4 és una fita superior de $\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\}$. Per tant:

$$\left| \int_{0.0}^{1.0} P(t)dt - S_{10} \right| \leq \frac{M_4}{180 \cdot 10^4} = \frac{200}{180 \cdot 10^4} \leq \mathbf{0.00012}$$