JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (3 punts) A l'espai $P_3(\mathbb{R})$ format pels polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 3, considerem els polinomis $p(x) = 1 + ax^3$, $q(x) = a + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = a + x^2 + x^3$, on $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a els polinomis són linealment dependents.

(b) Per a cadascun dels valors trobats a l'apartat anterior expresseu un dels polinomis com a combinació lineal de la resta.

F2. (4 punts) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\-7\end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

(b) Sigui $S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.

i. Doneu una base i la dimensió del subespai S i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^3$.

ii. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Expresseu $f(S)$ com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

F3. (3 punts) Sigui $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

(a) Calculeu el seu polinomi característic i determineu els valors propis de M. Raoneu que M diagonalitza.

(b) Calculeu tres vectors propis de M linealment independents. Doneu una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ sigui una matriu diagonal.

(c) Calculeu la matriu M^n, on n és un nombre natural.

Informacions

- Durada de l'examen: 90 minuts.
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 24/01/2022.
- Revisió de l'examen: 25/01/2022 a les 15:00 (s'haurà de demanar segons el procediment que es publicarà al racó).

Model de solució

F1. (3 punts) A l'espai $P_3(\mathbb{R})$ format pels polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 3, considerem els polinomis $p(x) = 1 + ax^3$, $q(x) = a + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = a + x^2 + x^3$, on $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determineu per a quins valors del paràmetre a els polinomis són linealment dependents.

(b) Per a cadascun dels valors trobats a l'apartat anterior expresseu un dels polinomis com a combinació lineal de la resta.

Solució. Expressem els polinomis en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$, els posem per columnes i fem transformacions per files fins tenir una matriu escalonada equivalent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2-(1+a) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a \end{pmatrix}$$

Els polinomis $p(x), q(x), r(x), s(x)$ són linealment dependents si i només si el rang de la matriu és menor que 4, és a dir, si $a^2 + a = 0$, que equival a $a = 0$ o bé $a = -1$. Per tant, la resposta a l'apartat (a) és $a = 0$ o bé $a = -1$.

Mètode alternatiu. Una altra manera de determinar els valors del paràmetre a que fan que els polinomis siguin linealment dependents és utilitzant que el determinant de la matriu A considerada anteriorment (que conté les coordenades dels polinomis donats en la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ per columnes) sigui 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 - 1 - \big(a^2 + 1 + 0\big) = -a^2 - a$$

on $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o bé $a = -1$, i obtenim el mateix resultat.

Responem ara l'apartat (b). Observem que si $a = 0$, els polinomis són $p(x) = 1$, $q(x) = x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = x^2 + x^3$ i veiem a ull que $s(x) = p(x) + r(x)$. Si $a = -1$, aleshores $p(x) = 1 - x^3$, $q(x) = -1 + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = -1 + x^2 + x^3$, i observem que $s(x) = r(x)$.

Mètode alternatiu. Suposem primer que $a = 0$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent a A és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de $s(x)$ en funció de $p(x), q(x), r(x)$, és a dir, $s(x) = p(x) + r(x)$.

Suposem ara que $a = -1$. Dels càlculs anteriors tenim que la matriu reduïda equivalent és:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a la quarta columna tenim els coeficients de $s(x)$ en funció de $p(x), q(x), r(x)$, és a dir, $s(x) = r(x)$.

F2. (4 punts) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base canònica. Observem que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per tant:

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La matriu A associada a f en la base canònica és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base canònica, o sigui: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Mètode alternatiu: amb matrius de canvis de base. El conjunt

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

és una base de $\mathbb{R}^3$. En efecte, B és linealment independent perquè la matriu P que té els tres vectors per columnes és una matriu escalonada amb tres files no nulles i, per tant, té rang 3:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ser 3 vectors linealment i ndependents d'un espai de dimensió 3, B és una base de e $\mathbb{R}^3$. Considerem la base canònica,

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Coneixem les imatges dels vectors de B expressades en la base canbònica. Per tant, coneixem la matriu associada a f en les bases B, en l'espai de sortida, i C, en l'espai d'arribada:

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Per a calcular la matriu associada a f en la base canònica, fem un canvi de base a l'espai de sortida:

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P_B^C.$$

Observem que la matriu de canvi de base de C a B és la inversa de la matriu de canvi de base de B a C, que és precisamemnt la matriu P. Per tant,

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P_B^C = M_C^B(f)(P_C^B)^{-1} = M_C^B(f) P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

La inversa de P és doncs

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu associada a f en la base canònica és, doncs,

$$M_C^C(f) = M_C^B(f) P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Per a comprovar si f és injectiva, exhaustiva, bijectiva, calculem el rang de la matriu A:

$$\text{rang} A = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Per tant, $\dim Imf = \text{rang} A = 2$ i $\dim Kerf = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rang} A = 3 - 2 = 1$.
L'aplicació f no és injectiva per ser $\dim Kerf = 1 \neq 0$ i no és exhaustiva per ser $\dim Imf = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, i per tant, tampoc és bijectiva.

(b) Sigui $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0\}$.

i. Doneu una base i la dimensió del subespai S i completeu-la fins a una base de $\mathbb{R}^3$.

Solució. El subespai S està definit per un sistema amb una única equació amb 3 incògnites. La dimensió de S és el nombre de graus de llibertat del sistema, que en aquest cas és 2 $(= 3-1)$. Resolem el sistema per a trobar una base. Si aïllem z en funció de x i y, obtenim:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base de S és $\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$. Per tant, $S =< \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >$.

Per a completar la base, observem que la matriu tal que les dues primeres columnes són els vectors de la base de S,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

té rang 3, perquè és triangular inferior. Per tant, podem completar la base de S fins a una base de $\mathbb{R}^3$ amb el vector $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ii. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Expresseu $f(S)$ com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

Solució. Calculem les imatges dels vectors de la base de S amb la matriu associada A calculada a l'apartat anterior, i obtenim:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & -2\\0 & -1 & 0\\6 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$f(S) =< f\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} > .$$

Els dos vectors que generen $f(S)$ són linealment independents perquè no són proporcionals, per tant, una base de $f(S)$ és $\{\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ i $\dim f(S) = 2$.

Observem que

$$f(S) =< \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} >= S,$$

per tant

$$f(S) = S = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}.$$

Mètode alternatiu: si no ens adonem que $f(S) = S$. Un vector genèric $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ serà de $f(S)$ si la matriu $\begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\-2 & 1 & z\end{pmatrix}$ té rang 2. Amb transformacions elementals per files obtenim que la matriu és equivalent a:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\-2 & 1 & z\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\0 & 1 & z-2x\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & x\\0 & -1 & y\\0 & 0 & z-2x+y\end{pmatrix}$$

que té rang 2 si i només si $z - 2x + y = 0$. Per tant,

$$f(S) = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}.$$

F3. (3 punts) Sigui $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Calculeu el seu polinomi característic i determineu els valors propis de M. Raoneu que M diagonalitza.

Solució. El polinomi característic és

$$\det(M - xI_3) = \det \begin{pmatrix} 3-x & -1 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 4 & -2-x \end{pmatrix} = (3-x)(2-x)(-2-x).$$

Els valors propis són les arrels del polinomi caracteristic, o sigui 3, 2 i -2. Per ser M una matriu 3×3 amb 3 valors propis diferents podem assegurar que diagonalitza.

(b) Calculeu una base formada per vectors propis. Doneu una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ sigui una matriu diagonal.

Solució. Per ser 3, 2 i -2 tres valors propis diferents d'una matriu 3×3, tres vectors propis de valor propi 3, 2 i -2, respectivament, seran linealment independents.

• Un vector propi de valor propi 3 és $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ja que la primera columna de M és $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que és proporcional a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mètode alternatiu. Els vectors propis de valor propi 3 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M - 3I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-3 & -1 & 0 \\ 0 & 2-3 & 0 \\ 0 & 4 & -2-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable x:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 3.

• Els vectors propis de valor propi 2 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M - 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 4 & -2-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és un vector propi de valor propi 2.

- Un vector propi de valor propi -2 és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ja que la tercera columna de M és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, que és proporcional a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Mètode alternatiu. Els vectors propis de valor propi -2 són solució del sistema homogeni que té per matriu de coeficients $M + 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3+2 & -1 & 0 \\ 0 & 2+2 & 0 \\ 0 & 4 & -2+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Podem donar la solució de forma paramètrica en funció de la variable z:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Per tant, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és una vector propi de valor propi -2.

Els següents vectors són tres vectors propis de M linealment independents:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que té per columnes els vectors propis trobats satisfà

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculeu la matriu M^n, on n és un nombre natural.

Solució. De l'apartat anterior deduïm $M = PDP^{-1}$ i, per tant,

$$M^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{n)} = PD^nP^{-1},$$

on $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculem la inversa de P amb el mètode de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de P és doncs

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriu M^n és

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 2^n - 3^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 2^n - (-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix}.$$