$\boxed{\text{TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES}}$

1. Calculeu els límits següents:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\dfrac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. Considereu l'equació:
$$x-3\ln x=0$$

   a) Demostreu que l'equació té al menys dues solucions a l'interval $(1,5)$.

   b) Utilitzant el Teorema de Rolle, demostreu que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

   c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1,e)$ amb un error absolut menor que $0.5\cdot 10^{-4}$ prenent com a interval inicial l'interval $[1,e]$.

   d) Apliqueu el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0=1.8$ per a determinar la solució a l'interval $(1,e)$. Atureu el càlcul quan el valor absolut de la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que $0.5\cdot 10^{-4}$. Quantes iteracions calen en aquest cas?

3. Volem calcular un valor aproximat de la integral
$$I=\int_0^1 e^{-x^3}\,dx$$

   a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x)=e^{-x^3}$ centrat a l'origen.

   b) Calculeu un valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior.

   c) Sabent que $\displaystyle\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|\le 34$, en el cas de calcular numèricament la integral amb el mètode de Simpson, quants subintervals caldria utilitzar per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005?

   d) Useu el mètode de Simpson per calcular la integral I amb el nombre de subintervals de l'apartat anterior.

Totes les respostes han de ser raonades

1. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}$

b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

SOLUCIÓ:

a) Tant en la base com en l'exponent, dividim numerador i denominador entre 3^n i tenim:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}\right)^{\frac{3+n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}},$$

que és una indeterminació del tipus 1^∞ (per ser $\frac{2}{3}<1$), per tant el límit s'obté fent e elevat al límit del producte de la base menys 1 per l'exponent:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}\right)^{\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n+2^n}{3^n}-1\right)\frac{3^{n+1}+n}{2^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+n\right)}{3^n2^{n-1}}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{18\cdot 6^{n-1}+2n\cdot 2^{n-1}}{3\cdot 6^{n-1}}}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{18+2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{3}}=\mathbf{6}.$$

(En el penúltim pas hem dividit numerador i denominador entre 6^{n-1})

b) Per calcular el límit, apliquem el criteri arrel-quocient:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1},$$

que és una indeterminació del tipus 1^∞, per tant el límit s'obté fent e elevat al límit del producte de la base menys 1 per l'exponent, i finalment:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{-n+1}{n}}=\mathbf{e^{-1}}.$$

2. Considereu l'equació:

$$x - 3\ln x = 0$$

a) Demostreu que l'equació té al menys dues solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) Utilitzant el Teorema de Rolle, demostreu que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

c) Calculeu, sense fer cap iteració, el nombre d'iteracions que serien necessàries si féssim servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ amb un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$.

d) Apliqueu el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$ per a determinar la solució a l'interval $(1, e)$. Atureu el càlcul quan el valor absolut de la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$. Quantes iteracions calen en aquest cas?

SOLUCIÓ:

a) Considerem la funció $f(x) = x - 3\ln x$. Per ser la resta d'una funció polinòmica i el producte d'una constant per una funció logarítmica, f és contínua i derivable en $(0, +\infty)$.

Així f és contínua en l'interval $[1, e]$. A més $f(1) = 1 > 0$ i $f(e) = e - 3 < 0$. Per tant, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té solució a l'interval $(1, e)$.

També, f és contínua en l'interval $[e, 5]$. A més $f(e) = e - 3 < 0$ i $f(5) = 5 - 3\ln 5 > 0$. Per tant, el teorema de Bolzano assegura que l'equació té solució a l'interval $(e, 5)$.

En resum, l'equació té al menys dos solucions a l'interval $(1, 5)$.

b) A l'apartat anterior ja hem demostrat que té al menys dos solucions a $\mathbb{R}^+$. Demostrarem que l'equació té com a màxim 2 solucions a $\mathbb{R}^+$ per reducció a l'absurd, utilitzant el Teorema de Rolle; per això, suposem que l'equació té més de 2 solucions i arribarem a una contradicció:

Suposem que $\exists a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tals que $a < b < c$ i $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, aleshores pel Teorema de Rolle tindríem:

Per una banda, f és contínua en l'interval $[a, b]$ i derivable en l'interval (a, b). A més $f(a) = f(b)$. Per tant, el Teorema de Rolle asseguraria que $\exists \alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Per altra banda, f és contínua en l'interval $[b, c]$ i derivable en l'interval (b, c). A més $f(b) = f(c)$. Per tant, el Teorema de Rolle asseguraria que $\exists \beta \in (b, c)$ tal que $f'(\beta) = 0$. Així l'equació $f'(x) = 0$ tindria dos solucions diferents α i β a $\mathbb{R}^+$.

Però: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$, és a dir, l'equació $f'(x) = 0$ té solució única a $\mathbb{R}^+$. Per tant l'equació té com a màxim 2 solucions a $\mathbb{R}^+$, que, junt amb l'apartat anterior, demostra que l'equació té exactament 2 solucions a $\mathbb{R}^+$.

c) Al fer servir el mètode de la bisecció per tal de calcular la solució de l'equació a l'interval $(1, e)$ prenent com a interval inicial l'interval $[1, e]$, l'error de la iteració $n-$èsima és més petit que $\dfrac{b-a}{2^n} = \dfrac{e-1}{2^n}$. Aleshores per assegurar un error absolut menor que $0.5 \cdot 10^{-4}$ cal que:

$\dfrac{e-1}{2^n} < 0.5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow n > \log_2(20000(e-1)) \approxeq 15.07$.

Per tant, el nombre d'iteracions que serien necessàries és 16.

d) Apliquem el mètode de Newton Raphson amb valor inicial $x_0 = 1.8$. Donat que $f(x) = x - 3\ln x$, $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x}$, tenim: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approxeq 1.854960007$, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approxeq 1.857180370$ i $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approxeq 1.857183861$, que ja satisfà $|x_3 - x_2| \approxeq 0.4 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$ (mentre que $|x_2 - x_1| \geq 0.5 \cdot 10^{-4}$) . Per tant, el valor aproximat de la solució és $x_3 \approxeq \mathbf{1.85718}$ i han calgut **3** iteracions.

3. Volem calcular un valor aproximat de la integral

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx$$

a) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 3 de la funció $f(x) = e^{-x^3}$ centrat a l'origen.

b) Calculeu un valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior.

c) Sabent que $\max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 34$, en el cas de calcular numèricament la integral amb el mètode de Simpson, quants subintervals caldria utilitzar per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005?

d) Useu el mètode de Simpson per calcular la integral I amb el nombre de subintervals de l'apartat anterior.

SOLUCIÓ: a) La funció f és de classe C^∞ per ser la composició d'una funció polinòmica i una funció exponencial. El seu polinomi de Taylor de grau 3 en l'origen és:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Les tres primeres derivades de $f(x) = e^{-x^3}$ són: $f'(x) = -3x^2e^{-x^3}$, $f''(x) = -6xe^{-x^3} + 9x^4e^{-x^3} = e^{-x^3}(-6x + 9x^4)$ i $f'''(x) = -6e^{-x^3} + 54x^3e^{-x^3} - 27x^6e^{-x^3}$. Per tant $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -6$, i:

$$P_3(x) = 1 - \frac{6}{3!}x^3 = \mathbf{1 - x^3}.$$

b) El valor aproximat de I integrant el polinomi obtingut a l'apartat anterior és:

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx \approxeq \int_0^1 (1 - x^3)\, dx = \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

c) Al calcular la integral amb el mètode de Simpson amb n subintervals, la cota superior de l'error és:

$$error < \frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4.$$

On $M_4 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)|$. Sabem que $a = 0$, $b = 1$ i que $M_4 < 34$ Fem $a = 0$ i $b = 1$, per tant:

$$error < \frac{M_4}{180n^4} < \frac{34}{180n^4}.$$

Per garantir Sabent que que l'error sigui més petit que 0.005, cal que:

$$\frac{34}{180n^4} < 0.005 \Leftrightarrow n > \sqrt[4]{\frac{6800}{180}} \approxeq 2.48,$$

Donat que per utilitzar el mètode de Simpson el número de subintervals ha de ser parell, caldria utilitzar **4** subintervals per tal de garantir que l'error sigui més petit que 0.005.

d) Per calcular la integral I amb 4 subintervals pel mètode de Simpson: $\frac{1-0}{4} = 0.25, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1, f(x) = e^{-x^3}$ i aleshores:

$$I = \int_0^1 e^{-x^3}\, dx \approxeq S_4 = \frac{1}{12}\left[f(0) + 4f(0.25) + 2f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)\right] \approxeq \mathbf{0.808}.$$