

1. [2 punts] Siguin E, F espais vectorials, v_1, \dots, v_k i u vectors de E , i $f : E \rightarrow F$ una aplicació.
- (a) Expliqueu què ha de complir u per pertànyer a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
 - (b) Digueu què ha de complir f per ser una aplicació lineal.
 - (c) Suposeu que f és lineal, que coneixem $f(v_1), \dots, f(v_k)$, i que $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Expliqueu com es pot calcular $f(u)$.

2. [4 punts] Considereu el subespai de \mathbb{R}^4 següent:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

- (a) Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base B formada per alguns dels generadors.
- (b) Trobeu les condicions, en forma de sistema d'equacions homogeni, que ha de satisfer un vector de \mathbb{R}^4 per a pertànyer a F .

- (c) Considereu els vectors $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per a cadascun d'ells, digueu si pertany

al subespai F i, en cas afirmatiu, doneu-ne les coordenades en la base B de l'apartat (a).

- (d) Amplieu la base B de l'apartat (a) a una base de \mathbb{R}^4 .

3. [4 punts]

- (a) Sigui $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal determinada per

$$f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Doneu la matriu de l'aplicació en les bases canòniques i digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

- (b) Considerem l'endomorfisme f de \mathbb{R}^3 tal que la matriu associada en la base canònica és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- i. Calculeu el polinomi característic de f . Doneu tots els valors propis de f i, per a cadascun d'ells, una base del subespai de vectors propis associat.
- ii. Comproveu si l'endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una base B tal que la matriu associada en aquesta base sigui diagonal. Quina relació hi ha entre la matriu M i la matriu associada en la base B ?

Informacions:

Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.

La durada de l'examen és de 2h.

Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full diferent i escriviu amb tinta negra o blava.

Les notes es publicaran al Racó de la FIB com a tard el dia 16 de gener, i la revisió serà el dia 17, a les 14h (el lloc s'anunciarà amb antel·lació).

Model de solució

1. [2 punts] Siguin E, F espais vectorials, v_1, \dots, v_k i u vectors de E , i $f : E \rightarrow F$ una aplicació.

(a) Expliqueu què ha de complir u per pertànyer a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Solució. El vector u és del subespai $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ si existeixen escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tals que $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$.

(b) Digueu què ha de complir f per ser una aplicació lineal.

Solució. L'aplicació f és lineal si compleix les dues propietats següents, on u, v són vectors qualssevol de E i λ és un escalar qualsevol:

$$\begin{aligned} - f(u+v) &= f(u) + f(v); \\ - f(\lambda u) &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

Alternativament, també podem dir que l'aplicació f és lineal si la imatge d'una combinació lineal de vectors d' E és la combinació lineal de les imatges amb els mateixos escalars, és a dir, si per a vectors u_1, \dots, u_r qualsevol d' E i escalars $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ qualsevol, es compleix $f(\sum_{i=1}^r \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(u_i)$.

(c) Supposeu que f és lineal, que coneixem $f(v_1), \dots, f(v_k)$, i que $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Expliqueu com es pot calcular $f(u)$.

Solució. Per ser del subespai $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$, el vector u és de la forma $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, on $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Per ser f lineal, tenim que $f(u) = \sum_{i=1}^k f(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(v_i)$.

2. [4 punts] Considereu el subespai de \mathbb{R}^4 següent:

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base B formada per alguns dels vectors generadors.

Solució. Considerem la matriu A que té aquests vectors per columnes. La dimensió del subespai és el rang de la matriu, que es pot calcular fent transformacions elementals per files:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & -4 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\dim F = \text{rang} A = 2$ i una base està formada pels vectors que corresponen a les columnes amb els pivots, és a dir, els dos primers vectors,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Trobeu les condicions, en forma de sistema d'equacions homogeni, que ha de satisfer un vector de \mathbb{R}^4 per a pertànyer a F .

Solució. Un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ és de F si és combinació lineal dels vectors que generen

F . Com que a l'apartat anterior hem trobat una base, és suficient imposar que el vector sigui combinació lineal dels vectors de la base. Per tant, cal estudiar la compatibilitat del sistema següent:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \sim (\dots) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & x - 2z + t \\ 0 & 0 & y - 3z + 2t \end{array} \right).$$

Clarament el sistema és compatible si i només si $x - 2z + t = 0$ i $y - 3z + 2t = 0$. Per tant,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x - 2z + t = 0, y - 3z + 2t = 0 \right\}.$$

(Nota: la solució no és única, en el sentit que qualsevol sistema homogeni equivalent al donat defineix el subespai F .)

(c) Considereu els vectors $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per a cadascun d'ells, digueu si pertany

al subespai F i, en cas afirmatiu, doneu-ne les coordenades en la base B de l'apartat (a).

Solució. Comprovem si u i v satisfan el sistema d'equacions lineals homogeni que defineix F , trobat a l'apartat (b). Veiem que $u \notin F$ perquè $4 - 2 \cdot 1 - 1 = 1 \neq 0$, en canvi $v \in F$ perquè satisfà les dues equacions. Les coordenades de v en la base B són els escalars pels que cal multiplicar els vectors de la base B per obtenir el vector v . Fent el càlcul veiem que

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i per tant les coordenades són $v_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Amplieu la base B de l'apartat (a) a una base de \mathbb{R}^4 .

Solució. Sabem que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, per tant ens cal trobar dos vectors de \mathbb{R}^4 que juntament amb els dos de la base B siguin linealment independents. La matriu següent, formada per dos vectors de la base canònica de \mathbb{R}^4 i pels dos vectors de B té rang 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, podem ampliar B amb els vectors $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ per a tenir una base de \mathbb{R}^4 .

3. (a) Sigui $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal determinada per

$$f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Doneu la matriu de l'aplicació en les bases canòniques i digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

Solució. Observem que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= f \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} f \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \\ f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matriu associada a f en les bases canòniques és, doncs:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

L'aplicació f no pot ser injectiva per ser $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) > \dim \mathbb{R}^3$. Per a que sigui exhaustiva, ha de ser $\text{rang} A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, però

$$\text{rang} A = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Per tant, f no és ni injectiva, ni exhaustiva, ni bijectiva.

(b) Considerem l'endomorfisme f de \mathbb{R}^3 tal que la matriu associada en la base canònica és:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- i. Calculeu el polinomi característic de f . Doneu tots els valors propis de f i, per a cadascun d'ells, una base del subespai de vectors propis associat.

Solució. El polinomi característic és:

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \det(M - xI_3) = \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & -3 \\ 3 & 2-x & 3 \\ -3 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (2-x) \det \begin{pmatrix} -1-x & -3 \\ -3 & -1-x \end{pmatrix} \\ &= (2-x)((-1-x)^2 - (-3)^2) = (2-x)(x^2 + 2x - 8) = -(x-2)^2(x+4). \end{aligned}$$

Els valors propis de f són les arrels del polinomi característic, o sigui, 2 i -4 . Els subespais E_2 i E_{-4} de valor propi 2 i -4 , respectivament, són les solucions dels sistemes d'equacions lineals homogenis que tenen per matriu de coeficients $M - 2I_3$ i $M + 4I_3$.

Calculem E_2 :

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 0 & -3 \\ 3 & 2-2 & 3 \\ -3 & 0 & -1-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on deduïm:

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = -x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per tant, $\dim E_2 = 2$ i una base és $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Calculem E_{-4} :

$$\begin{pmatrix} -1+4 & 0 & -3 \\ 3 & 2+4 & 3 \\ -3 & 0 & -1+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'on deduïm

$$E_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = z, y = -z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per tant, $\dim E_{-4} = 1$ i una base és $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- ii. Comproveu si l'endomorfisme diagonalitza. En cas que diagonalitzi, doneu una base B tal que la matriu associada en aquesta base sigui diagonal. Quina relació hi ha entre la matriu M i la matriu associada en la base B ?

Solució. Hem vist a l'apartat anterior que els valors propis de f són 2 i -4 , de multiplicitats algebraiques 2 i 1 respectivament; les multiplicitats geomètriques coincideixen: $\dim E_2 = 2$ i $\dim E_{-4} = 1$. Per tant, f diagonalitza. Una base B en que diagonalitza és la unió d'una base de E_2 i una base de E_{-4} :

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

i la matriu diagonal associada a f en aquesta base és:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

La relació entre les matrius M i D és $D = P^{-1}MP$, on P és la matriu de canvi de base de B a la base canònica:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$