Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtica Aplicada II

Febrer 2012

5. Matrius, sistemes i determinants

5.1 Matrius: operacions bàsiques i matrius escalonades

Repàs de l'àlgebra de matrius

Els escalars

Per un **cos d'escalars** $\mathbb{K}$ entendrem un conjunt de nombres amb dues operacions (*suma* i *producte*) tals que

- es satisfan les propietats habituals (*commutativa*, *associativa*, *distributiva*, *elements neutres*)
- són invertibles (podem *restar* i *dividir*)

Exemples: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{C}$

Matrius

Siguin $m, n \geq 1$ enters. Una **matriu de tipus $m \times n$ amb elements al cos $\mathbb{K}$** consisteix en mn elements de $\mathbb{K}$ arranjats en una taula de m files i n columnes

Denotarem per a_{ij} l'element que es troba a la fila i, columna j

Una matriu genèrica la representem així:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Farem servir també la notació $A = (a_{ij})_{m \times n}$

El conjunt de totes les matrius $m \times n$ el denotarem per $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Tipus de matrius

- Una matriu de tipus $1 \times n$ s'anomena matriu fila
- Una matriu de tipus $m \times 1$ s'anomena matriu columna
- La matriu nul·la $O_{m,n}$ (o simplement O) és la matriu tipus $m \times n$ on tots els elements són iguals a 0
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena quadrada. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{n\times n}$ és
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$
  - diagonal si és triangular superior i inferior simultàniament
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot i
- La matriu identitat I_n és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)$

Suma de matrius

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propietats

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu B tal que
$$A + B = B + A = O$$
(a aquesta B l'anomenem $-A$)

Producte per escalars

Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar

El **producte d'A per l'escalar λ** és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Propietats

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Fixem-nos que $(-1)A = -A$

Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times m}$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada A és

simètrica si $A^t = A$
antisimètrica si $A^t = -A$

Producte de matrius

Siguin $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

i

Observacions

- El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general $AB \neq BA$
- El producte és una operació interna dins de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propietats del producte de matrius

Si A, B, C són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$
- *(Distributives)* $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^t A^t$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per A^k el producte $AA \cdots A$ (és a dir, $A^2 = AA, A^3 = AAA$, etc.)

<u>Prop.</u> • $\lambda(AB) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$

• El producte de matrius no és commutatiu en general.

Matriu inversa

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que B és la **matriu inversa** d'A si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que A és **invertible** i denotem per A^{-1} la matriu inversa

Observacions

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

Propietats de la matriu inversa

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

- Si $A_1, \dots, A_k$ són invertibles, aleshores el producte $A_1 \cdots A_k$ és invertible i $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Transformacions elementals i matrius escalonades

Transformacions elementals

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

(I) intercanviar dues files d'A

(II) multiplicar una fila d'A per un escalar no nul

(III) sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

EXEMPLES:

Transformacions elementals:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus I: permutem les files 3,6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus II: multipliquem la fila 3 per 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus III: Sumem a la fila 3ª la 6ª multiplicada per 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius elementals:

Si denotem:

matriu elemental tipus
$$\begin{cases} \text{I}: P_{ij}, \text{ si intercanviem les files } i, j \\ \text{II}: M_i(\lambda), \text{ si multipliquem la fila } i \text{ per } \lambda \\ \text{III}: S_{i,j}(\lambda), \text{ si sumem a la fila } i, \text{ la fila } j \text{ multiplicada per } \lambda \end{cases}$$

$$I_7 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- $$P_{2,6} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- $$M_4(5) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- $$S_{3,6}(2) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&2&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Matrius equivalents

<u>**Teorema**</u>
Sigui T una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació T a la matriu M és EM, on E és la matriu elemental resultant d'aplicar T a la identitat I_m

Una matriu B és **equivalent (per files)** a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si B és equivalent a A podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les E_i són matrius elementals

Matrius escalonades

OBS: de vegades només s'exigeix que els pivots siguin $\neq 0$, no necessàriament 1's

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior

Matriu escalonada reduïda: matriu escalonada amb pivots $= 1$ i tots els altres elements de les columnes dels pivots han de ser 0's

Teorema

Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files i a una matriu escalonada reduïda per files

El **rang** d'una matriu A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A

- Prop. Si A és una matriu $m \times n$, aleshores $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$

Exemple de matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ té rang 4 perquè hi ha 4 files no nul·les.

Exemple de matriu escalonada equivalent i càlcul del rang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

permutem files 1 i 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{cases} 2^a := 2^a - 3\cdot 1^a \\ 3^a := 3^a + 2\cdot 1^a \\ 4^a := 4^a - 5\cdot 1^a \end{cases}$$

permutem files
$2^a := 4^a$
$3^a := 2^a$
$4^a := 3^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 43 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 52 & -3 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 1 & -3/52 & 14/52 \end{pmatrix}$$

$3^a := 3^a - 4\cdot 2^a$
$4^a := 4^a - 4\cdot 2^a$

$3^a := \frac{1}{43}\cdot 3^a$
$4^a := \frac{1}{52}\, 4^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & -233/2236 & -230/2236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 230/233 \end{pmatrix} = B$$

$4^a := 4^a - 3^a$

$4^a := -\frac{2236}{233} \times 4^a$

- B és una matriu escalonada per files equivalent a A.
- rang A = rang B = 4, ja que B té 4 files no nul·les

Aplicació al càlcul de la inversa (I)

Lema

Si E és una matriu elemental, aleshores E és invertible i la seva inversa E^{-1} també és una matriu elemental

Comprovació:

(I) Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files i i j), tenim $BB = I$

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

(II) Si C_λ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$

$(M_i(\lambda))^{-1} = M_i(1/\lambda)$

(II) Si D_k és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila i la fila j multiplicada per k), tenim $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$

$(S_{ij}(\lambda))^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

EXEMPLES:

A	A^{-1}

I)

$$P_{3,6}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=P_{3,6}$$

II)

$$M_3(4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1/4&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_3(1/4)$$

III)

$$S_{6,3}(5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&5&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&-5&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=S_{6,3}(-5)$$

Aplicació al càlcul de la inversa (II)

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Corol·lari

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si el rang d'A és n

Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

si $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$, aleshores $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar A^{-1}, si existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{-1} = B$
- Altrament, A no és invertible

Exemple:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$2^{a} := 2^{a} - 1^{a}$
$3^{a} := 3^{a} - 2\cdot 1^{a}$
$4^{a} := 4^{a} - 1^{a}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$2^{a} := (-1)\times 2^{a}$

$3^{a} := 3^{a} - 2^{a}$
$4^{a} := 4^{a} - 2^{a}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & +1 & +3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

permutem les files 3 i 4 i les multipliquem per -1

$4^{a} := 4^{a} + (-4)\cdot 3^{a}$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 26 & -16 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 & -13 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$1^{a} := 1^{a} + 4^{a}$
$2^{a} := 2^{a} - 5\cdot 4^{a}$

$1^{a} := 1^{a} - 3^{a}$
$2^{a} := 2^{a} - 3\cdot 3^{a}$

$$\underset{1^{a} := 1^{a} - 2^{a}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{\sim}}} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{matrix} -26 & 17 & -6 & 22 \\ 20 & -13 & 5 & -17 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Per tant, A és invertible i:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -26 & 17 & -6 & 22 \\ 20 & -13 & 5 & -17 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtica Aplicada II

Febrer 2012

5. Matrius, sistemes i determinants

5.2 Sistemes d'equacions lineals

Sistemes d'equacions lineals

Una **equació lineal** en les variables $x_1, \ldots, x_n$ és una expressió del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

on $a_1, \ldots, a_n, b$ pertanyen al cos d'escalars $\mathbb{K}$

Una **solució** és $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

(Obs. Una equació lineal pot tenir entre zero i infinites solucions)

Exemple: quines de les equacions següents són lineals en x, y, z?

	LINEAL?
$3x - y + z = 1$	SÍ
$2x - \sin\frac{\pi}{4}\, y + z = 2$	SÍ
$3x - \frac{1}{y} + z = 2$	NO
$x + yz = 5$	NO
$x - y + z^2 = 1$	NO
$x + \sin y + z = -3$	NO

Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \dots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solució
- compatible indeterminat si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b$$

Exemple. Matriu associada al sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ x + y - 2z &= 1 \\ 4x - y + 5z &= 0 \\ 3x + 3y - \tfrac{1}{2}z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -1/2 & 2 \end{array}\right)$$

A $\quad$ b

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b}$$

sistema expressat de de forma matricial.

Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

reduïda : hi ha zeros damunt dels pivots (és a dir, a la columna del pivot, els elements diferents del pivot són tots zeros)

Sistemes escalonats

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \ldots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\
x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\
&\vdots \\
x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n
\end{aligned}
$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

$$
\begin{cases}
\# \text{ variables principals} = \text{rang } A = r \\
\# \text{ variables lliures} = n - \text{rang } A = n - r
\end{cases}
$$

Exemple.

Si tenim una matriu reduïda equivalent, el sistema té les mateixes solucions que el sistema que correspon a aquesta matriu reduïda equivalent i per a donar el conjunt de totes les solucions podem aïllar directament les variables principals (les que corresponen a les columnes dels pivots) i donar-les en funció de les variables lliures (la resta de variables):

variables principals: x_1, x_3, x_4

variables lliures: x_2, x_5, x_6

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

SOLUCIONS:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
x_1 = -2x_2 - 3x_5 + 2x_6 + 4 \\
x_3 = x_5 - 4x_6 + 5 \\
x_4 = -5x_5 + x_6 + 2
\end{array} \quad , \; x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{K}}
$$

Exemple.

Si el sistema és equivalent a un sistema amb matriu reduïda:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)
$$

aleshores no té solució perquè la quarta equació equival a:

$$
\underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6}_{0} = 3
$$

$$= 3$$

que no es compleix mai!

Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$

Sigui r el rang d'A i sigui r' el rang de $(A|b)$

Aleshores,

$r \neq r'$:
- si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI)

$r = r'$
- si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD)
- si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat

Anomenarem rang d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$)

Corol·lari

Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables; sigui r el rang d'A. Aleshores

- si $r = n$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

Resolució de sistemes d'equacions lineals

Sistema de m equacions lineals i n incògnites:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$\downarrow$$

Matriu ampliada associada al sistema:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Resolució de sistemes d'equacions lineals

- $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A|b)$: sistema incompatible.
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = r = n$: sistema compatible determinat.
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|b) = r < n$: sistema compatible indeterminat.

Solucions. Si $(A|b)$ és equivalent per files a una matriu escalonada amb zeros damunt dels pivots (matriu escalonada *reduïda*), podem donar les r variables corresponents a les columnes dels pivots (*variables principals*)
en funció de la resta de $n - r$ variables (*variables lliures*).

Direm que el sistema té $n - r$ *graus de llibertat*.

Exemple 1

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Solucions. La solució és única, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Exemple 2

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rang} A = 3 \neq 4 = \mathrm{rang}(A|b) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Exemple 3

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 = \text{ nombre d'incògnites } \Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad\qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 3 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned} \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ 2 + x_5 - 5x_6 \\ 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

Exemple 4. Sistema homogeni

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 = \text{ nombre d'incògnites } \Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= x_5 - 5x_6 \qquad\qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 4 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 = x_5 - 5x_6 \\ x_4 = 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{cases} \qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ x_5 - 5x_6 \\ -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

EXEMPLE DE DISCUSSIÓ DE SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu equivalent escalonada

$\Leftarrow$ permutem les files 1ª i 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} 2^a := 2^a - 1^a \\ 3^a := 3^a - a \cdot 1^a \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a + 2^a$

$ab-b=0 \Leftrightarrow (a-1)b=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ o } b=0$

$\boxed{\text{CAS } b=0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -a \end{array}\right) \sim$$

$2-a-a^2 = (a+2)(1-a)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+(a+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a \cdot (a+2)$

$\text{rg} A < \text{rg} A' \Rightarrow$ S. Incompatible

- si $1-a \neq 0$: $\text{rg} A = 2 < 3 = \text{rg} A'$
- si $1-a = 0$: $\text{rg} A = 1 < 2 = \text{rg} A'$

$\boxed{\text{cas } b\neq 0}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

CASOS

$\boxed{a=1}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \underset{3^a := 3^a - 2^a}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg}A = 1$

i $\begin{cases} \mathrm{rg}A' = 1, \text{ si } b=1 \\ \mathrm{rg}A' = 2, \text{ si } b\neq 1 \end{cases}$

Per tant:

$\boxed{b\neq 1}$: S. Incompatible

$\boxed{b=1}$: S.C. amb 2 graus de llibertat

$$2 = \underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{1}_{\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A'=1}$$

$\boxed{a\neq 1}$:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & b-a \end{array}\right)$$

$(a-1)b \neq 0$, $\quad (1-a) \neq 0$, $\quad (a+2) = 0 \iff a=-2$

Casos:

$\boxed{a=-2}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right)$$

$\boxed{b=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A' = 2 \Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

$$1 = \underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{2}_{\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A'=2}$$

$\boxed{b\neq -2}$: $\underset{2}{\mathrm{rg}A} \neq \underset{3}{\mathrm{rg}A'} \Rightarrow$ S.I

$\boxed{a\neq -2}$ $\mathrm{rg}A = \underset{\#\text{variables}}{3} = \mathrm{rg}A' \Rightarrow$ S.C.D

RESUM DE CASOS:

- $b=0$: S.I.
- $b\neq 0$
  - $a=1$
    - $b\neq 1$: S.I.
    - $b=1$: S.C.I. amb 2 graus de llibertat
  - $a\neq 1$
    - $a=-2$
      - $b=-2$: S.C.I amb 1 grau de llibertat
      - $b\neq -2$: S.I.
    - $a\neq -2$: S.C.D.

Es pot comprovar que és equivalent a:

- $a=1$
  - $b=1$: S.C.I.
  - $b\neq 1$: S.I
- $a=-2$
  - $b=-2$: S.C.I
  - $b\neq -2$: S.I
- $a\neq 1,-2$
  - $b=0$: S.I.
  - $b\neq 0$: S.C.D.

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques
Abril 2020

6. Espais vectorials

$\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\}$$

Siguin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són "component a component")

Propietats

La suma a $\mathbb{R}^n$ satisfà les propietats següents:

- s1) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- s2) (commutativa) $x + y = y + x$
- s3) (element neutre) $x + \mathbf{0} = x$ on $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$
- s4) (element oposats) per tot x existeix x' tal que $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a $\mathbb{R}^n$ satisfà:

- p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- p3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- p4) $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a $\mathbb{R}$ i les operacions són component a component)

6.2 Espais vectorials

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$

Un **espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$** consisteix en

1. un conjunt no buit E
2. una operació interna $E \times E \to E$ (*suma* $+$) i
3. una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (*producte per escalars* $\cdot$)

de manera que per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es satisfà:

e1) *(associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$

e2) *(commutativa)* $u + v = v + u$

e3) *(element neutre)* existeix un únic element $\mathbf{0}_E \in E$ tal que $u + \mathbf{0}_E = u$

e4) *(element oposat)* per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = \mathbf{0}_E$

e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$

$\begin{cases} \text{Elements d'E : "vectors"} \\ \text{Elements de } \mathbb{K} \text{: "escalars"} \end{cases}$

E e.v. sobre $\mathbb{K}$:

4 operacions

$\begin{cases} + \text{ d'escalars} \\ \cdot \text{ d'escalars} \end{cases} \mathbb{K}$

$\begin{cases} + \text{ de vectors} \\ \cdot \text{ escalar/vector} \end{cases}$

$$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

prod escalar/vector

prod escalar/escalar

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

suma vectors

suma vectors

$$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

suma escalars

suma vectors

Alguns exemples d'espais vectorials

$\mathbb{K}^n$

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^n$
- $\mathbb{Z}_2^n$: cadenes de n bits
  La suma és bit a bit: p. ex.,

  $$(0,1,1,0)+(1,1,1,0)=(1,0,0,0)$$

  Producte per escalars: $0u = \mathbf{0}_{\mathbb{Z}_2^n}$ i $1u = u$

matrius

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (les matrius $m \times n$ amb entrades en el cos $\mathbb{K}$)
- Les matrius de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que són triangulars superiors

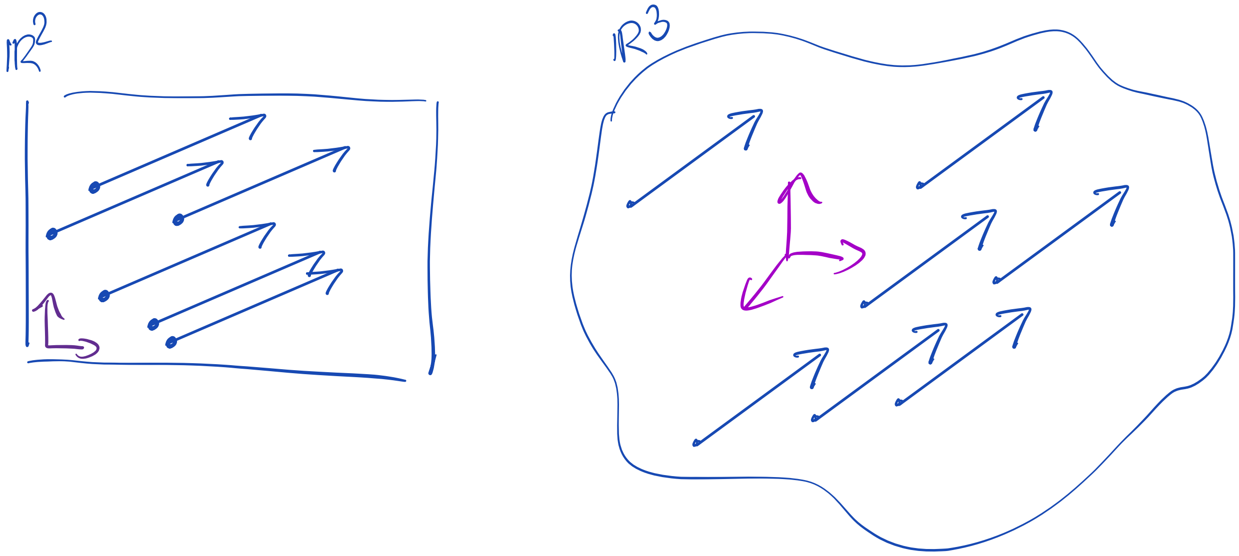
polinomis

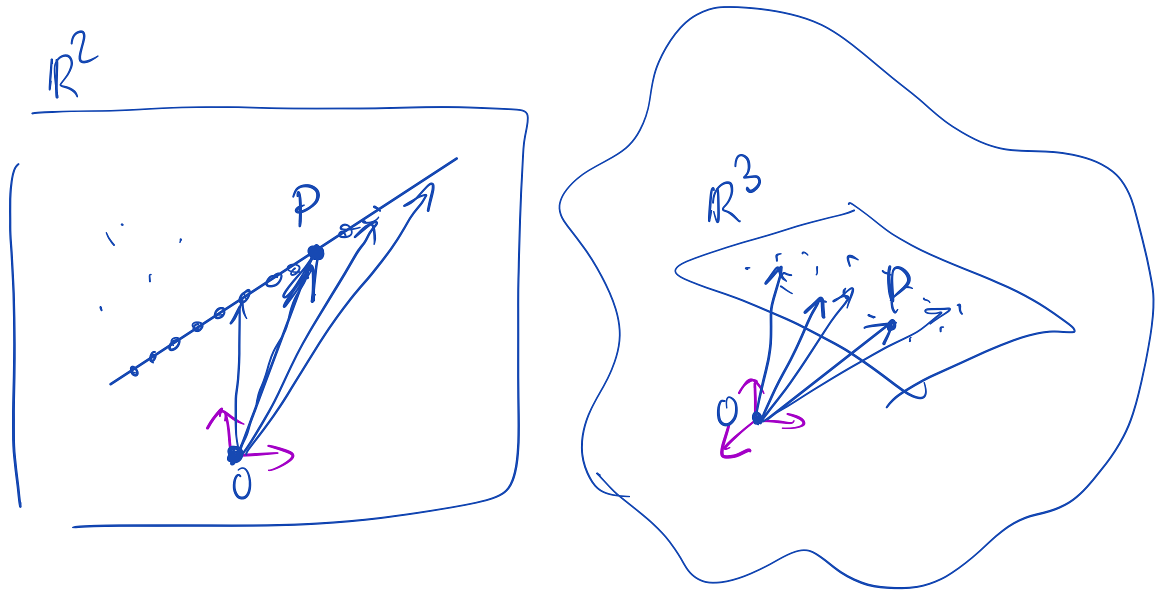
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: el conjunt dels polinomis amb coeficients a $\mathbb{R}$
- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$: els polinomis de grau com a molt d i coeficients a $\mathbb{R}$
- L'espai vectorial trivial format per un únic element: $\{\mathbf{0}_E\}$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni

L' ESPAI VECTORIAL $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...

vectors "lliures" del pla, espai, ...

NO confondre amb el conjunt de punts del pla, espai, ...





Propietats

Si v pertany a l'espai vectorial E i λ és un escalar, es satisfà:

- $0v = \mathbf{0}_E$
- $\lambda\,\mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$
- Si $\lambda\,v = \mathbf{0}_E$, aleshores $\lambda = 0$ o $v = \mathbf{0}_E$
- L'element oposat de v és $(-1)v$; normalment escriurem $-v$

on:

0 : escalar 0 = element neutre de $(\mathbb{K}, +)$
0_E : vector "0" = element neutre de $(E, +)$

6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt $S \subseteq E$ és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1) $S \neq \emptyset$

(s2) per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$

(s3) per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector $\mathbf{0}_E$ pertany a tots els subespais vectorials

Alguns exemples de subespais espais vectorials

- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

- S és subespai d'E $\Leftrightarrow$ S amb les operacions d'E induïdes a S és e.v.
- És a dir: els subespais vectorials són espais vectorials dins d'un altre e.v.

- 0_E és de tot subespai vectorial de E

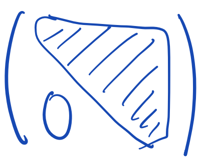
- E espai vectorial $\Rightarrow$
  $\{0_E\}$ i E són subespais vectorials d'E
  s'anomenen subespais "impropis" o "trivials"

- $\underbrace{\mathcal{P}_d(\mathbb{R})}_{\substack{\text{polinomis de grau } \leq d \\ \text{amb coeficients reals}}}$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

  - $P_d(\mathbb{R}) \neq \emptyset$: $0 \in P_d(\mathbb{R})$
  - $\underline{p, q \in P_d(\mathbb{R})} \Rightarrow \underline{p+q \in P_d(\mathbb{R})}$: la suma de polinomis de grau $\leq d$ és un polinomi de grau $\leq d$
  - $\underline{\lambda \in \mathbb{R},\ p \in P_d(\mathbb{R})} \Rightarrow \underline{\lambda p \in P_d(\mathbb{R})}$; el prod. d'un polinomi de grau $\leq d$ per un escalar és un polinomi de grau $\leq d$

<u>OBS:</u>
p, q polinomis de grau $= d$, pot passar que $p+q$ tingui grau $< d$? $\underline{\underline{\text{SÍ}}}$!!!
p.e.: si $d=3$, $p = 1+x+x^3$, $q = 2-x+x^2-x^3$, però $p+q = 3+x^2$, té grau $\underline{\underline{2}}$.

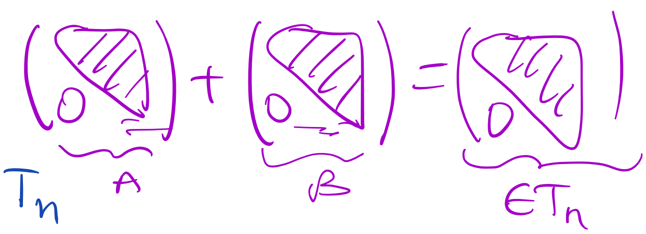
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$



$T_n = \{\text{matrius de } M_n(\mathbb{R}) \text{ triangulars superiors}\}$

- $T_n \neq \emptyset$: $O_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in T_n$

- $A, B \in T_n \Rightarrow A+B \in T_n$



- $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in T_n \Rightarrow \lambda A \in T_n$

- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\} \longleftrightarrow A\cdot x = 0 \,, \quad \text{on } \left\{\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Solucions: $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}}$

- $S \neq \emptyset$: $A\cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in S$

(un sistema homogeni sempre té la solució trivial $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)

- $x, x' \in S \Rightarrow x + x' \in S$:

$$\underbrace{x, x' \in S}_{Ax = 0,\ Ax' = 0} \Rightarrow \left[A(x+x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + x' \in S$$

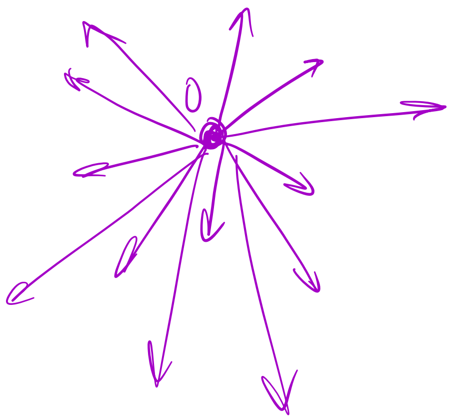
- $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in S \Rightarrow \lambda x \in S$:

$$\underbrace{\lambda \in \mathbb{R},\ x \in S}_{\lambda \in \mathbb{R},\ Ax = 0} \Rightarrow \left[A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\cdot 0 = 0\right] \Rightarrow$$

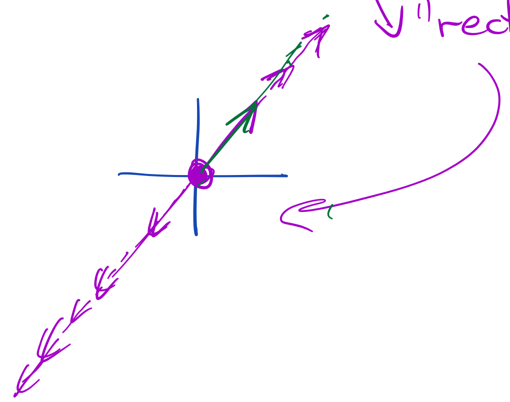
$$\Rightarrow \lambda x \in S$$

- SUBESPAIS DE $\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}^2$ = vectors lliures del pla



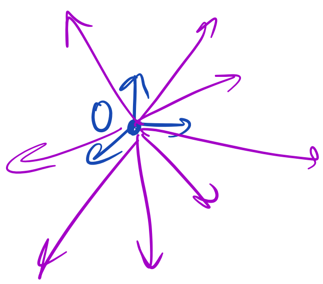
$$\text{Subespais} \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \\ \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \text{trivials} \\ \text{"rectes"} \end{cases}$$

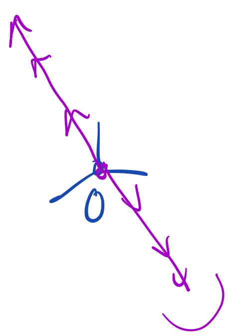


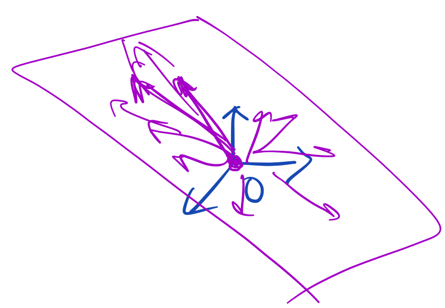
- SUBESPAIS DE $\mathbb{R}^3$:

$\mathbb{R}^3$ = vectors lliures de l'espai

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \\ \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \text{trivials}, \\ \text{"rectes"} \\ \text{"plans"} \end{cases}$$







Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ $((1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S')$

Combinació lineal

Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

- $S \cap S' \neq \emptyset$:

$$S, S' \text{ subespais d'}E \Rightarrow \begin{cases} 0_E \in S \\ 0_E \in S' \end{cases} \Rightarrow 0_E \in S \cap S' \Rightarrow S \cap S' \neq \emptyset$$

- $u, v \in S \cap S' \Rightarrow u+v \in S \cap S'$:

S és subespai d'E

$$\left.\begin{array}{l} u \in S\cap S' \Rightarrow \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \\ v \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} v \in S \\ v \in S' \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow u+v \in S \\ \\ \Rightarrow u+v \in S' \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} \Rightarrow u+v \in S \cap S'$$

S' és subespai d'E

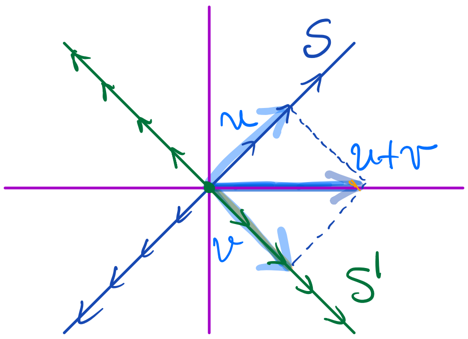
- $\lambda \in \mathbb{K},\ u \in S \cap S' \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$:

S subespai d'E

$$\left.\begin{array}{l} u \in S,\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S \\ u \in S',\ \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S' \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$$

S' subespai

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ $((1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S')$



$S \cup S'$:

$\left\{\begin{array}{l} u \in S \cup S' \\ v \in S \cup S' \end{array}\right.$ però $u+v \notin S \cup S'$

$$\left.\begin{array}{l} u = (2,2) \in S \subseteq S \cup S' \\ v = (2,-2) \in S' \subseteq S \cup S' \end{array}\right\} \text{ però } u+v = \underbrace{(4,0)}_{0 \neq \pm 4} \notin S \cup S'$$

$\Rightarrow$ $S \cup S'$ no és subespai vectorial de $\mathbb{R}^2$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

6. Espais vectorials

6.3 Subespais vectorials i combinacions lineals

Un subconjunt $S \subseteq E$ és un **subespai vectorial (SEV)** si compleix

(s1) $S \neq \emptyset$

(s2) per tot $u, v \in S$, $u + v \in S$

(s3) per tot $u \in S$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u \in S$

El vector $\mathbf{0}_E$ pertany a tots els subespais vectorials

Alguns exemples de subespais espais vectorials

- $\mathcal{P}_d(\mathbb{R})$ és un subespai vectorial de l'espai de polinomis $\mathcal{P}(\mathbb{R})$
- Les matrius triangulars superiors de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formen un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb n variables i coeficients a $\mathbb{R}$ és un SEV de $\mathbb{R}^n$

Exemple: $S = \{(x,x,1) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ és subespai de $\mathbb{R}^3$?

$(0,0,0) \notin S \Rightarrow S$ no és subespai de $\mathbb{R}^3$.

Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ ($(1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S'$)

Combinació lineal

Donats $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$** és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

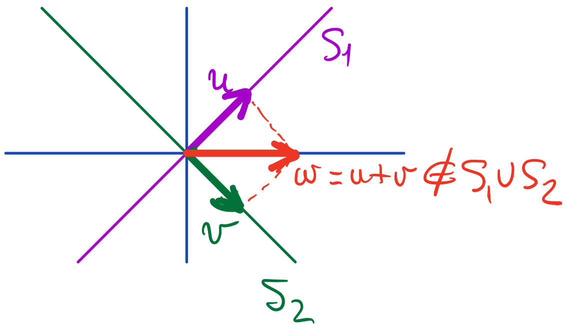
on $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ són escalars

El vector v **és combinació lineal de** $u_1, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tals que

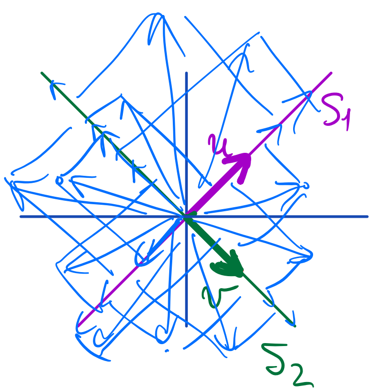
$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Exemple:

$S_1 = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$
$S_2 = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ son subespais de $\mathbb{R}^2$ però $S_1 \cup S_2$ no és subespai



S = Subespai més petit que conté u i v:



$u \in S \Rightarrow \underbrace{\lambda u \in S, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}_{\text{vectors de la recta } S_1}$

$v \in S \Rightarrow \underbrace{\mu v \in S, \ \forall \mu \in \mathbb{R}}_{\text{vectors de la recta } S_2}$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda u + \mu v \in S}_{\text{obtenim tots els vectors de } \mathbb{R}^2}, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Subespai generat

Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt

$$\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \ldots, u_k$

Proposició

El subespai generat $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \ldots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

Demostració de que $\langle u_1,\dots,u_k\rangle$ és subespai:

$S=\langle u_1,\dots,u_k\rangle=\{\lambda_1u_1+\dots+\lambda_ku_k : \lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}\}$

és un subespai vectorial, ja que:

- $\neq\emptyset$: $\underbrace{0\cdot u_1+0u_2+\dots+0u_k}_{=0_E}\in S\neq\emptyset$

- $u,v\in S\Rightarrow u+v\in S$:

$$u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_ku_k$$
$$v=\mu_1u_1+\dots+\mu_ku_k$$
$$u+v=(\lambda_1+\mu_1)u_1+\dots+(\lambda_k+\mu_k)u_k\in\langle u_1,\dots,u_k\rangle=S$$

- $u\in S,\ \alpha\in\mathbb{K}\Rightarrow\alpha u\in S$:

$\hookrightarrow u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_ku_k$

$$\alpha u=\alpha\lambda_1u_1+\dots+\alpha\lambda_ku_k\in\langle u_1,\dots,u_k\rangle=S$$

Exemples de subespais generats

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$
  $= \langle (1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1) \rangle$
- L'espai de les matrius $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ està generat per les matrius M_{ij} que tenen totes les entrades iguals a 0, excepte la de la posició i, j, que és igual a 1, $1 \le i \le n$ i $1 \le j \le m$
  Per exemple, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) =< M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} >$, on

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Polinomis de grau $\le d$, $P_d(\mathbb{R})$:
  $P_d(\mathbb{R}) = < 1, x, x^2, \dots, x^d >$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} =$

  $= \{x_1(1,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0,0,\dots,1) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

  $= \langle (1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1) \rangle$

En general, el conjunt de generadors d'un subespai no és únic. P.e., es pot demostrar que:

$$\mathbb{R}^3 \begin{cases} = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle \\ = \langle (1,1,0), (1,0,0), (1,1,1) \rangle \\ = \langle (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,2,3), (4,5,6) \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} =$

  $= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

  $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $P_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\} =$

  $= \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\}$

  $= \langle 1, x, \dots, x^d \rangle$

(*)
- Si volguéssim generar les matrius triangulars superiors, agafaríem de les matrius M_{ij} anteriors només les que tenen $i \leq j$
- Subespai donant els vectors en funció de paràmetres

$$\{a + (b-a)x + (c-b)x^2 + (a-c)x^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1 - x + x^3) + b(x - x^2) + c(x^2 - x^3) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle 1 - x + x^3, x - x^2, x^2 - x^3 \rangle$$

(*) P.e: {matrius triangulars superiors 2x2} =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemples:

- $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b & c \\ d & c-a & b+2c \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

  Demostreu que S és subespai de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, S és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$

i $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ és un conjunt generador de S

- $S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 2a-3b \\ a+b+c \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

  Demostreu que S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -3b \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\{\alpha+(\alpha+\beta)x+(\alpha-2\beta)x^2+(2\alpha+\beta)x^3 : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subseteq P_3(\mathbb{R})$
  Demostreu que S és subespai de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\{\alpha(1+x+x^2+2x^3)+\beta(x-2x^2+x^3) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\langle 1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\rangle$$

Per tant, S és subespai de $P_2(\mathbb{R})$ i $\{1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\left\{\text{solucions del sistema homogeni } \begin{cases} x=2y-t \\ z=3t \end{cases}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$
  Sabem que S és subespai de $\mathbb{R}^4$. Doneu un conjunt generador de S.

Resolem el sistema i donem les solucions de forma paramètrica:

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ \hline \end{array}\!\!\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)}_{\operatorname{rg} A=2}$$

variables principals: x, z; variables lliures: y, t

$$\begin{cases} x = 2y-t \\ z = 3t \end{cases} \quad y,z\in\mathbb{R}$$

Solucions:

$$\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} : \begin{array}{l} x=2y-t \\ z=3t \end{array},\ y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2y-t\\ y\\ 3t\\ t\end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{y\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\1\end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

OBSERVACIONS :

- En general, un subespai té més d'un conjunt generador.

  P.e: es pot demostrar que:

  $$\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

- Si un vector es pot expressar com a combinació lineal d'uns altres, la forma d'expressar-lo com a combinació lineal d'aquests vectors no és necessàriament única.

  P.e.: $(5,-1,-4)$ es pot expressar com a combinació lineal de $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$ d'almenys dues maneres diferents:

  $$(5,-1,-4) = \begin{cases} 3\cdot(1,-1,0) + 2\cdot(0,1,-1) + 2(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0) + 3\cdot(0,1,-1) + 1\cdot(1,0,-1) \end{cases}$$

- No sempre es pot expressar un vector com a combinació lineal d'un conjunt de vectors donats.

  P.e. $(1,1,0)$ no és C.L. de $(0,0,1)$ i $(1,0,0)$, ja que les combinacions lineals d'aquest vectors són els vectors de la forma
  $\{a(0,0,1)+b(1,0,0) : a,b\in\mathbb{R}\} = \{(a,0,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$
  és a dir, la segona component és sempre 0, cosa que no compleix el vector $(1,1,0)$.

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

- Combinacions lineals de $u_1, \dots, u_r \in E$:

  $$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \quad , \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$$

- Subespai generat per $u_1, \dots, u_r$:

  $$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K} \}$$

- Si $v \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ aleshores

  $$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}, \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$$

  però en general $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ no són únics

  p.e:

  $$(5,-1,-4) = \begin{cases} 3 \cdot (1,-1,0) + 2 \cdot (0,1,-1) + 2 \cdot (1,0,-1) \\ 4 \cdot (1,-1,0) + 3 \cdot (0,1,-1) + 1 \cdot (1,0,-1) \end{cases}$$

6.4 Independència lineal

Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \dots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \dots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)

Exemples:

- El vector $\mathbf{0}_E$ és linealment dependent
- Donat un vector $u \neq \mathbf{0}_E$, el vector u és linealment independent
- Si u és un vector qualsevol i λ és un escalar, $\{u, \lambda u\}$ és LD

- $\{0_E\}$ és L.D. : $\underset{\neq 0}{1} \cdot 0_E = 0_E$

- $\{u\}$ és L.I. si $u \neq 0_E$: $\alpha \cdot u = 0_E \underset{u \neq 0_E}{\Longrightarrow} \alpha = 0$

- $\{u, \lambda u\}$ és L.D. : $(-\lambda) u + \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot \lambda u = 0_E$

Exemples:

(1) $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C. Det. $\Leftrightarrow$ $rg A = 3$ $(= \#$ incog.)

L.D. $\Leftrightarrow$ S.C. Indet $\Leftrightarrow$ $rg A < 3$ $(= \#$ incog.)

on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rg A = 2 < 3 \Rightarrow$ L.D.

(2) $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C. Det. $\Leftrightarrow$ $rg A = 3$ $(= \#$ incog.)

L.D. $\Leftrightarrow$ S.C. Indet. $\Leftrightarrow$ $rg A < 3$ $(= \#$ incog.)

on $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$rg A = 3 \Rightarrow$ S.C.D : només té la solució trivial $x = y = z = 0$

$\Rightarrow$ són L.I.

(3) $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ l.i.? $\qquad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$x\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\overset{?}{\Rightarrow} x=y=z=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x+y+2z & y+z\\ y+z & x+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ y+z&=0\\ y+z&=0\\ x+z&=0\end{aligned}\right\}\text{ sist. homog.}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&-1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\text{rg}A=2<3=\#\text{incog.}\Rightarrow$ té sol. no trivial $\Rightarrow$ L.D

(4) $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ l.i.? $\qquad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$x\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\overset{?}{\Rightarrow} x=y=z=0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x+y+2z & y+z\\ y+z & -x+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} x+y+2z&=0\\ y+z&=0\\ y+z&=0\\ -x+z&=0\end{aligned}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&1&1\\0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\text{rg}A=3=\#\text{incòg.}\Rightarrow$ L.I.

(5) $\boxed{\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}\ \text{l.i.}\ ?}$ $\quad P_2(\mathbb{R})$

$$\alpha\cdot 1+\beta(1+x)+\gamma\cdot(1+x+x^2)=0 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha=\beta=\gamma=0$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)x+\gamma x^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \\ \gamma=0 \end{array}\right\} \rightsquigarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ rg A=3= \#\text{incog.}$$

Sist. ef. lin. homos, α, β, γ. $\Rightarrow$ L.I.

(6) $\boxed{\{1+x,\ 1-x,\ x+x^2,\ x^2-x\}\ \text{l.i.}\ ?}$ $\quad P_2(\mathbb{R})$

$$\alpha(1+x)+\beta(1-x)+\gamma(x+x^2)+\delta(x^2-x)=0 \overset{?}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)x+(\gamma+\delta)x^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta=0 \\ \alpha-\beta+\gamma-\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{array}\right\}:\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg A=3<4=\#$ incògnites

$\Rightarrow$ té solució no trivial $\Rightarrow$ L.D.

Exemples:

- $\mathbb{R}^3$: $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ L.I}}$

$$\underbrace{x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x=y=z=0$$

- En general, a $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ són L.I.}}$$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$: $\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} \text{ L.I.}}$

$$\underbrace{x\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=0\\t=0\end{cases}$$

- En general, a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\ \cdots,\ \begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\right\} \text{ són L.I.}}$$

(cjt. de $m\cdot n$ matrius amb exactament un 1 a cada lloc)

- $P_3(\mathbb{R})$: $\boxed{\{1, x, x^2, x^3\} \text{ L.I.}}$

$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

- En general, a $P_d(\mathbb{R})$,

$\boxed{\{1, x, x^2, \dots, x^d\} \text{ són L.I.}}$

En general, per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és

- compatible determinat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LI
- compatible indeterminat els vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ són LD

Per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents seguim els passos següents:

(1) formem una matriu A amb els vectors donats, posant-los per columnes

(2) calculem el rang r d'A

(3)
- si $r = k$, aleshores els k vectors són LI
- si $r < k$, aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu A, aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que corresponent a les columnes del menor d'A més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

$$\boxed{u_1, u_2, \ldots, u_k \text{ L.I.} \Leftrightarrow rg(u_1, \ldots, u_k) = k}$$

Propietats

Sigui $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E

(1) ▶ Si $\mathbf{0}_E$ és a S, llavors $u_1, \ldots, u_k$ són LD

(2) ▶ Si $u_1, \ldots, u_k$ són LI, llavors $\mathbf{0}_E$ no és a S

(3) ▶ Si $u_1, \ldots, u_k$ són LI, tot subconjunt de S és LI

(4) ▶ Si $u_1, \ldots, u_k$ són LD, tot conjunt que conté S és LD

▶ $\{0_E\}$ L.D. ; $\{v\}$ L.I. si $v \neq 0_E$

▶ $\{v, \lambda v\}$ L.D.

(1), (2) són equivalents:

$$\begin{cases} 0_E \in S \Rightarrow S \ \text{L.D} & (1) \\ S \ \text{L.I.} \Rightarrow 0_E \notin S & (2) \end{cases}$$

dem. de (1):

$$0_E \in S \Rightarrow \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot 0_E + \sum_{u \in S - \{0_E\}} 0 \cdot u = 0_E$$

$\Rightarrow S$ L.D.

(3), (4) són equivalents: $S' \subseteq S \subseteq E$

$$\begin{cases} S \ \text{L.I.} \Rightarrow S' \ \text{L.I} & (3) \\ S' \ \text{L.D.} \Rightarrow S \ \text{L.D.} & (4) \end{cases}$$

dem. de (4):

$S' = \{u_1, \dots, u_r\}$

$S = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_k\}$

S' L.D. $\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_r$ amb $\alpha_i \neq 0$ tq.

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \underbrace{\alpha_i}_{\neq 0} u_i + \dots + \alpha_r u_r = 0_E$$

$$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \underbrace{\alpha_i}_{\neq 0} u_i + \dots + \alpha_r u_r + \underbrace{0\, u_{r+1} + \dots + 0\, u_k}_{= 0_E} = 0_E$$

$\Rightarrow S$ L.D.

Caracteritzacions

1 **Teorema**

Un conjunt de vectors S és LD si, i només si, hi ha un vector v a S que és combinació lineal de la resta de vectors de S

2 **Corol·lari**

Sigui $v \in E$. Si $u_1, \ldots, u_k$ són LI, aleshores $v, u_1, \ldots, u_k$ són LI si, i només si, $v \notin \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

1 **Teorema.** E $\mathbb{K}$-e.v., $S=\{u_1,\dots,u_k\}\subseteq E$

$$\boxed{S \text{ és L.D.} \Leftrightarrow \exists u\in S \text{ tq. } u \text{ és C.L. de } S-\{u\}}$$

$\Leftarrow$) Suposem que u_i és C.L. de $S-\{u_i\}=\{u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_k\}$:
aleshores, existeixen escalars $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_k$ tq.

$$u_i=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_k u_k$$

per tant:

$$\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\underbrace{(-1)}_{\neq 0}u_i+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_k u_k=0_E$$

és a dir, $S=\{u_1,\dots,u_k\}$ és L.D.

$\Rightarrow$) Suposem que $S=\{u_1,\dots,u_k\}$ és L.D.
aleshores, existeixen escalars $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ no tots nuls tq.

$$\alpha_1u_1+\dots+\alpha_k u_k=0_E$$

Suposem que, p.e., $\alpha_i\neq 0$. Aleshores:

$$u_i=\left(-\alpha_1/\alpha_i\right)u_1+\dots+\left(-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\right)u_{i-1}+\left(-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\right)u_{i+1}+\dots+\left(\frac{-\alpha_k}{\alpha_i}\right)u_k$$

Per tant, u_i és C.L. de $\{u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots u_k\}=S-\{u_i\}$

Observació: S L.D. $\cancel{\Rightarrow}$ $\forall u\in S$, u és C.L. de $S-\{u\}$

Exemple:

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$

- S és L.D.: $\underbrace{(-2)}_{\neq 0}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

  però: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ NO és C.L. de $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$

Propietat $u_1, u_2, \dots, u_k \in E$,

$$\boxed{\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = \langle u_2, \dots, u_k\rangle \iff u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle}$$

demo

$\Rightarrow)$ $u_1 \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = \langle u_2, \dots, u_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle$

$\Leftarrow)$ suposem $u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle$,

veurem que $\langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle = \langle u_2, \dots, u_k\rangle$:

Demostrem les dues inclusions:

$\supseteq)$ $v \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tq $v = \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k =$

$= 0 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$\Rightarrow v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle$

(observeu que per a demostrar aquesta inclusió no és necessària la hipòtesi "$u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle$")

$\subseteq)$ $v \in \langle u_1, u_2, \dots, u_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tq. $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

$\Rightarrow v = \alpha_1 (\beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k) + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k$

on $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{K}$

$u_1 \in \langle u_2, \dots, u_k\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \beta_2, \dots, \beta_k$ tq.

$u_1 = \beta_2 u_2 + \dots + \beta_k u_k$

$\Rightarrow v = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2) u_2 + \dots + (\alpha_1 \beta_k + \alpha_k) u_k \in$

$\in \langle u_2, \dots, u_k\rangle$

② **Propietat** $u_1, \dots, u_k, u_{k+1} \in E$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } u_1, \dots, u_k \text{ són L.I., aleshores} \\ u_1, \dots, u_k, u_{k+1} \text{ són L.I.} \iff u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle\end{array}}$

demo:

$\Rightarrow$) Suposem que $u_{k+1} \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, aleshores $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ són L.D. pel Teorema ①, CONTR.!

$\Leftarrow$) Veurem que si $u_{k+1} \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, aleshores

$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0_E$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$

en efecte:

si $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = 0_E$, aleshores:

- $\alpha_{k+1} = 0$, ja que si $\alpha_{k+1} \neq 0$, tindríem que $u_{k+1} = \left(-\alpha_1/\alpha_{k+1}\right) u_1 + \dots + \left(-\alpha_k/\alpha_{k+1}\right) u_k \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$, CONTRAD.!
- per tant, $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0_E$, d'on deduïm que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ per ser $u_1, \dots, u_k$ L.I.

és a dir, $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$ com volíem demostrar.

OBSERVACIÓ

el resultat anterior el podem enunciar:

Si $u_1, \dots, u_k$ són L.I. , aleshores

$v, u_1, \dots, u_k$ són L.I. $\Longleftrightarrow$ $v \notin \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

$v, u_1, \dots, u_k$ són L.D. $\Longleftrightarrow$ $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

MÈTODE PER TROBAR EL MÀXIM # DE VECTORS L.I D'UN CONJUNT DE VECTORS DE $\mathbb{R}^n$

- Posem els vectors per columnes $\rightsquigarrow A = (u_1, \dots, u_k)$
- B matriu reduïda equivalent a A per files
  - el conjunt S de vectors de les columnes dels pivots són L.I.
  - a la resta de columnes tenim els coeficients del vector corresponent com a C.L. dels vectors de S

P.e.: $\{u_1, \dots, u_6\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$
\begin{array}{cccccc}
u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1
\end{pmatrix} \sim \dots \sim}_{\text{transf. elementals files}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{pmatrix}
$$

$\Rightarrow$
- $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ són L.I.
- $u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$
- $u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5$

5. Matrius, sistemes, determinants

6. Espais vectorials

Espai vectorial. Subespais.

Combinacions lineals. Subespai generat

Independència lineal.

Bases. Dimensió. Coordenades.

Canvis de base.

7. Aplicacions lineals

8. Diagonalització

Subespai generat

Siguin $u_1, \ldots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \ldots, u_k$ és el conjunt

$$\boxed{\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},}$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \ldots, u_k$

Proposició

El subespai generat $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \ldots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \ldots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \ldots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \ldots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$

$$\boxed{\begin{array}{l} v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \iff \\ \iff \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \ \text{tq.} \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k v_k \end{array}}$$

discutir un sistema d'equacions lineals

p.e.:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = W$$

Plantegem l'equació:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{matrix}}_{A} \ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right)}_{A'}$$

té solució $\iff$
$\iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$

Comprovem si té solució:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3 \Rightarrow$ té solució

$\Rightarrow \boxed{v \in W}$

6.4 Independència lineal

Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \dots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \dots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)

Exemples:

- El vector $\mathbf{0}_E$ és linealment dependent
- Donat un vector $u \neq \mathbf{0}_E$, el vector u és linealment independent
- Si u és un vector qualsevol i λ és un escalar, $\{u, \lambda u\}$ és LD

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$ (també a $\{x^d, x^{d-1}, \ldots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

$P_d(\mathbb{K})$

RECORDEM:

$\{b_1, \ldots, b_n\}$ és base d'E $\Longleftrightarrow$

1) $\{b_1, \ldots, b_n\}$ L.I. :

$b_1, \ldots, b_n$ L.I $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = 0_E \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0\right)$

2) $\{b_1, \ldots, b_n\}$ genera E :

$b_1, \ldots, b_n$ generen E $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow E = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = \{\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E

1 **Proposició**

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

2 **Proposició**

Sigui $\{u_1, \ldots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

3 **Corol·lari**

Tota base d'E té n elements

Demostració de 1

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E

$v \in E \underset{\langle b_1, \dots, b_n \rangle = E}{\Rightarrow} \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \ v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$

Els coeficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ únics:

Si $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$ tq. $v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$
$v = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n$ > restem

$0_E = (\beta_1 - \alpha_1) b_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) b_n \Rightarrow$

$\underset{\{b_1, \dots, b_n\} = B \text{ L.I.}}{\Rightarrow} \beta_1 - \alpha_1 = 0, \dots, \beta_n - \alpha_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$

<u>OBSERVACIÓ</u>: $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ base d'E

$$\left.\begin{array}{l} u, v \in E \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} (u+v)_B = (u)_B + (v)_B \\ (\lambda u)_B = \lambda (u)_B \end{array}$$

$(u)_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Leftrightarrow u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$

$(v)_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow v = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n$

$$u+v = (\alpha_1+\beta_1) b_1 + \cdots + (\alpha_n+\beta_n) b_n$$

$$\Rightarrow \boxed{(u+v)_B} = (\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n) =$$
$$= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) =$$
$$= \boxed{(u)_B + (v)_B}$$

$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 b_1) + \cdots + \lambda(\alpha_n b_n)$$
$$= (\lambda\alpha_1) b_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n) b_n$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda u)_B} = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n) =$$
$$= \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= \boxed{\lambda (u)_B}$$

Per tant, si a un espai vectorial tenim una base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, podem operar els vectors utilitzant coordenades en la base B com si fossin vectors de $\mathbb{K}^n$

2

Proposició Sigui $\{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E.

Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

Demostració:

$\{u_1, \dots, u_k\}$ L.I.

$\Updownarrow$

l'equació $x_1 u_1 + \dots + x_k u_k = 0_E$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$(x_1 u_1 + \dots + x_k u_k)_B = (0_E)_B$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$x_1 (u_1)_B + \dots + x_k (u_k)_B = (0_E)_B$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{x_1 \cdot \begin{pmatrix} \uparrow \\ (u_1)_B \\ \downarrow \end{pmatrix} + \dots + x_k \begin{pmatrix} \uparrow \\ (u_k)_B \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sist. equacions lineals homogeni amb } k \text{ variables}}$$ només té la solució $x_1 = \dots = x_k = 0$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (u_1)_B & \cdots & (u_k)_B \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}$$

$M_{n \times k}(\mathbb{K}) \ni A =$ matriu de coef. del sistema té rang k

$\Longrightarrow k \leq n$ ($= \#$ files d'A)

3

Corol·lari Sigui $\{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E.

Tota base d'E té n elements

Demostració

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E

$B' = \{b'_1, \dots, b'_k\}$ una altra base d'E

B' L.I., B base d'E : $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $k \leq n$

B L.I., B' base d'E : $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $n \leq k$

$\Longrightarrow k = n$

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d'E és n i sigui $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ un subconjunt d'E

- si W és un conjunt LI, aleshores W és una base d'E
- si W genera E, aleshores W és una base d'E

Si S és un subespai d'E aleshores

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

ATENCIÓ!

E e.v., S_1, S_2 subespais d'E

- $\dim S_1 = \dim S_2 \not\Rightarrow S_1 = S_2$
- $S_1 \subseteq S_2$ i $\dim S_1 = \dim S_2 \Longrightarrow S_1 = S_2$

E espai vectorial de dimensió n :

- n és el màxim nombre de vectors L.I. que podem trobar a E
- n és el mínim nombre de vectors que calen per generar E

és a dir, $S \subseteq E$:

$$\begin{cases} S \text{ L.I.} \Rightarrow |S| \leq n \\ \langle S \rangle = E \Rightarrow |S| \geq n \end{cases}$$

Si $\dim E = n$:

$$B \subseteq E \begin{cases} \text{L.I.} \\ \langle B \rangle = E \\ |B| = n \end{cases}$$

> dues d'aquestes condicions impliquen la tercera

L.I, $\langle B \rangle = E$

$\Leftrightarrow$ L.I, $|B| = n$

$\Leftrightarrow$ $\langle B \rangle = E$, $|B| = n$

L.I, $|B| = n$ $\Leftrightarrow$ $\langle B \rangle = E$, $|B| = n$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials → CANVIS DE BASE
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \ldots, x^d\}$ (també a $\{x^d, x^{d-1}, \ldots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'E

Proposició

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

Proposició

Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

Corol·lari

Tota base d'E té n elements

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són: $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

E e.v. de dimensió n

- E té com a molt n vectors L.I.
- Calen almenys n vectors per a generar E.

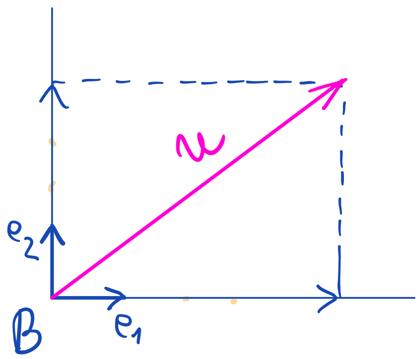
$B \subseteq E$:

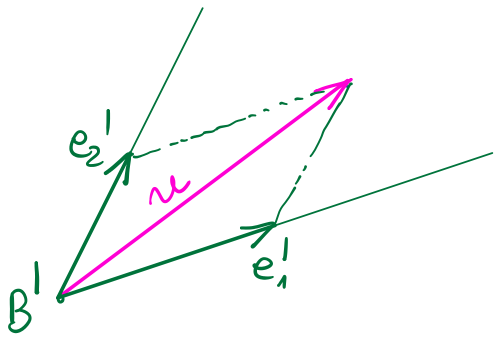
* $|B| = n$
* B L.I
* $\langle B \rangle = E$

$\Leftarrow$ dues d'aquestes condicions impliquen la tercera

és a dir:

- n vectors L.I. formen base
- n vectors que generin E, formen base





$$u = 4e_1 + 3e_2 \qquad\qquad u = e_1' + e_2'$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Canvi de base

Siguin $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ i $B' = \{b'_1, \cdots, b'_n\}$ dues bases d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E. Sigui u un vector d'E
Veiem com es relacionen els vectors de coordenades u_B i $u_{B'}$

Anomenem **matriu del canvi de la base B a la base B′** a la matriu que té per columnes els vectors de coordenades $(b_1)_{B'}, \ldots, (b_n)_{B'}$. La denotem per $\mathbf{P^B_{B'}}$

$$P^B_{B'} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_1)_{B'} & (b_2)_{B'} & \ldots & (b_n)_{B'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Aleshores

- $u_{B'} = P^B_{B'} u_B$, expressant els vectors de coordenades en columna
- $P^{B'}_B = \left(P^B_{B'}\right)^{-1}$ ja que $\left(P^B_{B'}\right)^{-1} (u)_{B'} = (u)_B$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ $\quad B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$, $u \in E$

$$(u)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n \\ u = x'_1 b'_1 + \dots + x'_n b'_n \end{cases}$$

$$\boxed{(u)_{B'}} = (x_1 b_1 + \dots + x_n b_n)_{B'} =$$

$$= x_1 \cdot (b_1)_{B'} + \dots + x_n (b_n)_{B'}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (b_1)_{B'} & \cdots & (b_n)_{B'} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{P^B_{B'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(u)_B}$$

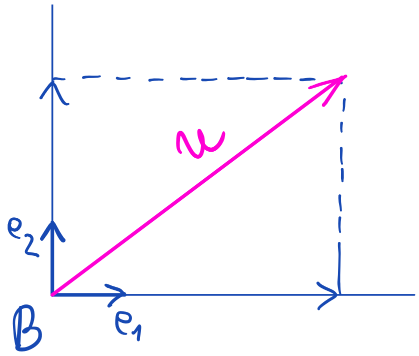
vectors de B en la base B' per columnes

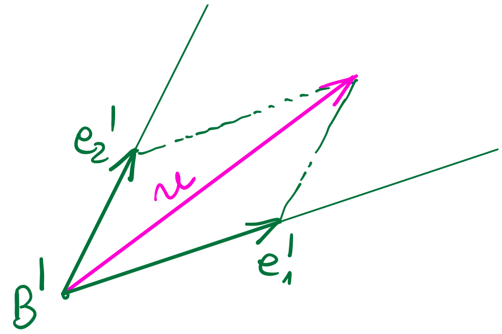
$$(u)_{B'} = P^B_{B'} (u)_B \, , \quad P^B_{B'} : \text{matriu de canvi de base de } B \text{ a } B'$$

- $(u)_{B'} = P^B_{B'} \cdot (u)_B \iff (P^B_{B'})^{-1} (u)_{B'} = (u)_B$
- $(u)_B = P^{B'}_B (u)_{B'}$

Per tant: $\boxed{P^{B'}_B = (P^B_{B'})^{-1}}$

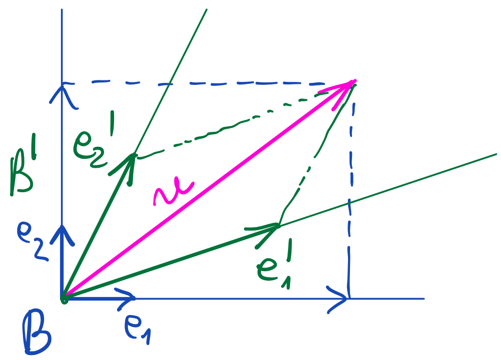
EXEMPLE





$$u = 4e_1 + 3e_2 \quad \Downarrow \quad (u)_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u = e_1' + e_2' \quad \Downarrow \quad (u)_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$B = \{e_1, e_2\}$$
$$B' = \{e_1', e_2'\}$$

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = 3e_1 + e_2 \\ e_2' = e_1 + 2e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (e_1')_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (e_2')_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P_B^{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{B'}^{B} = \left(P_B^{B'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$P_B^{B'} (u)_{B'} = (u)_B$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$P_{B'}^{B} (u)_B = (u)_{B'}$:

$$\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Coordenades de $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}$ en la base B ?

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canònica

conec: $\underset{!}{(u)_C}$ volem: $\underset{?}{(u)_B}$

Matriu de canvi de base:

conec B en base C : $P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_C^B \cdot (u)_B = (u)_C$$

conec: ! ? !

$$\boxed{(u)_B} = \left(P_C^B\right)^{-1} \cdot (u)_C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2. $P_2(\mathbb{R})$

$B=\{2-2x+x^2,\ 1-x,\ 2-2x^2\}$. Expresseu $\underbrace{x+2x^2}_{p}$ en la base B.

$C=\{1, x, x^2\}$ $\rightsquigarrow$ base canònica.

Conec: $P_C^B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\underbrace{P_C^B}_{!}\ \underbrace{(p)_B}_{?} = \underbrace{(p)_C}_{!}$

Conec $(p)_C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Volem: $(p)_B$?

$P_C^B (p)_B = (p)_C \Rightarrow \boxed{(p)_B} = (P_C^B)^{-1} \cdot (p)_C =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$

Per tant:

$p = x+2x^2 =$

$= 3\cdot(2-2x+x^2) + (-7)\cdot(1-x) + 1/2\,(2-2x^2) =$.

Exemple 3. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}\right\}$. Expresseu $\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}}_{M}$ en la base B.

$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

coneixem: $(M)_C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

volem: $(M)_B=?$

conec: $P^B_C=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}$

$\underset{!}{P^B_C}\ \underset{?}{(M)_B}=\underset{!}{(M)_C}\Rightarrow \boxed{(M)_B}=(P^B_C)^{-1}\cdot(M)_C=$

$=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&0&1\\-1&0&2&2\\0&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4&-2&1&2\\-3&2&-1&-1\\3&-2&1&2\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-5\\4\\-6\\3\end{pmatrix}}$

Per tant:

$M=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}=(-5)\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}+(-6)\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}$

Exemple 4. $\mathbb{R}^2$

$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\right\}$, $B'=\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right\}$, $(u)_B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Calculeu $(u)_{B'}$.

$C=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

conec: $\underbrace{P_C^B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}}_{P_C^B(u)_B=(u)_C}$, $\underbrace{P_C^{B'}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}}_{P_C^{B'}(u)_{B'}=(u)_C}$

$$\Downarrow$$

$$P_C^B(u)_B=P_C^{B'}(u)_{B'}$$

Conec: $\underbrace{P_C^B}_{!}\;\underbrace{(u)_B}_{!}=\underbrace{P_C^{B'}}_{!}\;\underbrace{(u)_{B'}}_{?}$

$$\left(P_C^{B'}\right)^{-1}\cdot P_C^B(u)_B=(u)_{B'}$$

$$\Rightarrow \boxed{(u)_{B'}}=\left(P_C^{B'}\right)^{-1}\cdot P_C^B(u)_B=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-27\\-16\end{pmatrix}}$$

Hem vist:

B, B', C bases d'E $\Rightarrow$ $P^{B}_{B'} = P^{C}_{B'} \cdot P^{B}_{C} = \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} \cdot P^{B}_{C}$

ja que:

$$\left.\begin{array}{l} P^{B}_{C}\,(u)_B = (u)_C \\ P^{B'}_{C}\,(u)_{B'} = (u)_C \end{array}\right\} \Rightarrow P^{B}_{C}\,(u)_B = P^{B'}_{C}\,(u)_{B'} \Rightarrow \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} P^{B}_{C}\,(u)_B = (u)_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^{B}_{B'} = \left(P^{B'}_{C}\right)^{-1} P^{B}_{C} = P^{C}_{B'}\,P^{B}_{C}$$

En general:

$B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E $\Rightarrow$ $P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r}\,P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots P^{B_2}_{B_3} \cdot P^{B_1}_{B_2}$

ja que:

$$P^{B_1}_{B_r}\,(u)_{B_1} = (u)_{B_r}$$

$$\underbrace{P^{B_{r-1}}_{B_r} \cdot P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots \underbrace{P^{B_2}_{B_3} \cdot \underbrace{P^{B_1}_{B_2}\,(u)_{B_1}}_{(u)_{B_2}}}_{(u)_{B_3}}}_{(u)_{B_r}} = (u)_{B_r}$$

etc.

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, direm que f és un **endomorfisme**

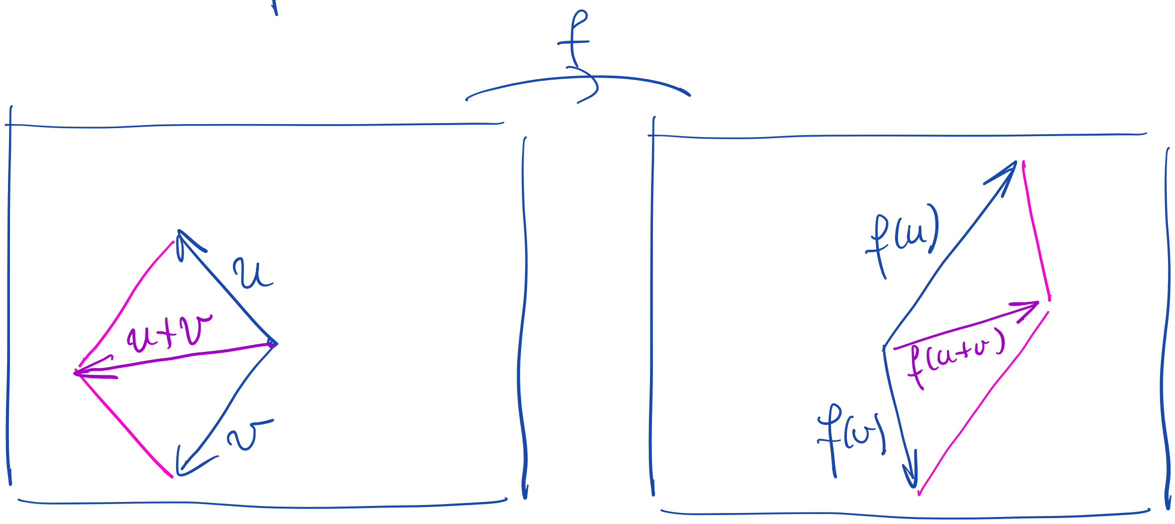
Exemples

1 - Aplicació trivial. $f : E \to F$ on $f(u) = 0_F$, $u \in E$, és lineal
2 - Aplicació identitat. $I_E : E \to E$ on $I_E(u) = u$, $u \in E$, és lineal
3 - L'aplicació següent no és lineal

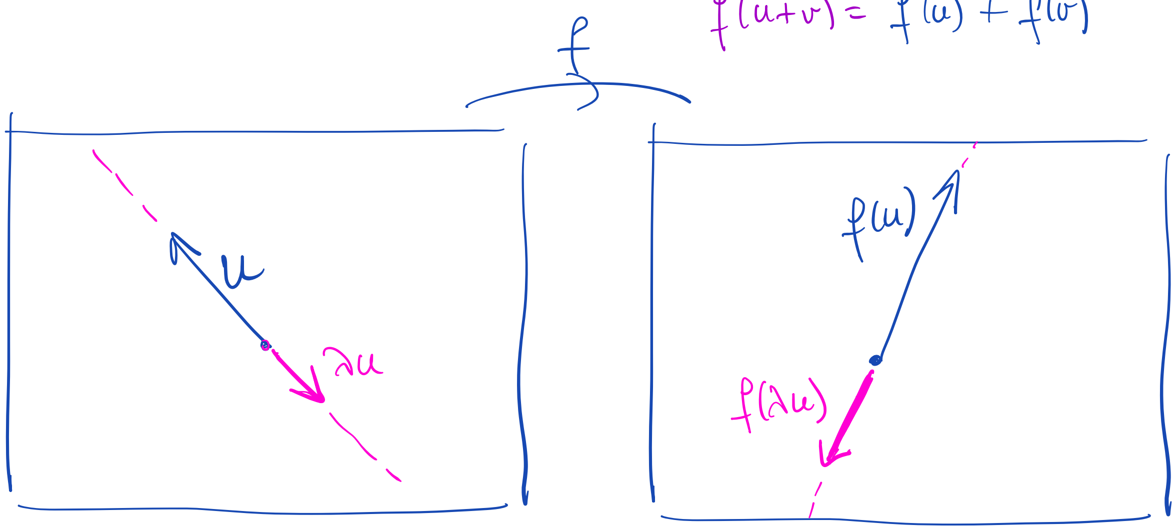
$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$$

4 - L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal
5 - $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tq. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és lineal

P.e. $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal :



$f(u+v) = f(u) + f(v)$



$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

① $f: E \to F$ t.q. $f(u) = 0_F, \forall u \in E,$ és lineal :

(1) $u, v \in E$ $\qquad \underbrace{f(u+v)}_{0_F} \overset{?}{=} \underbrace{f(u)}_{0_F} + \underbrace{f(v)}_{0_F}$

$0_F = 0_F + 0_F$ cert!

(2) $\left.\begin{matrix} u \in E \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{matrix}\right\}$ $\qquad \underbrace{f(\lambda u)}_{0_F} \overset{?}{=} \lambda \underbrace{f(u)}_{0_F}$

$0_F = \lambda \cdot 0_F$ cert!

② $I_E: E \to E$ t.q. $I_E(u) = u, \forall u \in E$ és lineal :

(1) $\underbrace{I_E(u+v)}_{u+v} \overset{?}{=} \underbrace{I_E(u)}_{u} + \underbrace{I(v)}_{v}$

$u+v = u + v$ cert!

(2) $\underbrace{I_E(\lambda u)}_{\lambda u} \overset{?}{=} \lambda \cdot \underbrace{I_E(u)}_{u}$

$\lambda u = \lambda \cdot u$ cert!

③ $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2 - (a+d)x + (2c-b)$

NO és lineal :

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - x \quad , \quad f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$

però :

$2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x^2 - 2x$

$\neq$

$f\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$

④ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

$f(1,1) = (1,2)$, $f(2,2) = (16,4)$

però:

$$f((1,1)+(1,1)) = f(2,2) = (16,4)$$
$$\neq$$
$$f(1,1) + f(1,1) = (1,2) + (1,2) = (2,4)$$

⑤ $\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ f:\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ tq. } f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és lineal :}}$

Si denotem $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ aleshores:

(1) $\forall X, X' \in \mathbb{K}^n$:

$$\boxed{f(X+X')} = A(X+X') = AX + AX' = \boxed{f(X) + f(X')}$$

(2) $\forall X \in \mathbb{K}^n, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{f(\lambda X)} = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \boxed{\lambda f(X)}$$

⑥ $\boxed{f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tq. } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix} \text{ es lineal?}}$

- $$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+2y' \\ -3x'+y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+x'+2(y+y') \\ -3(x+x')+(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+x'+2y' \\ -3x+y-3x'+y' \end{pmatrix} \quad \text{cert!}$$

- $$f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \lambda \cdot f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \lambda\begin{pmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x+2\lambda y \\ -3\lambda x+\lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x+2\lambda y \\ -3\lambda x+\lambda y \end{pmatrix} \quad \text{cert!}$$

Per tant, f és una aplicació lineal

OBSERVACIÓ: Veiem que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es pot definir:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, amb l'exemple/propietat ⑤ podem deduir directament que és lineal.

Propietats

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores

1 - $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
2 - $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in E$
3 - si S és un subespai d'E, $f(S)$ és un subespai d'F
4 - si S' és un subespai d'F, $f^{-1}(S')$ és un subespai d'E

Proposició $f : E \to F$ apl. lineal.

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Aleshores f està unívocament determinada per $f(b_1), \ldots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d'E: $u \in E$

si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, aleshores $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$

Corol·lari

5 Si $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ és un subespai d'E, aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_k) \rangle$$

① $f(0_E) = 0_F$, si f és una aplicació lineal:

Demostració: $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$

Aquesta propietat és útil per a demostrar que algunes aplicacions no són lineals:

$$\boxed{f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow \text{NO és lineal}}$$

P.e: són lineals les aplicacions següents?

(a) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tq. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x-y \\ 3z+1 \\ x-z \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NO és lineal}$$

(b) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tq. $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b+c & 2(a+1) \\ b+3c & c-a \end{pmatrix}$

$$f(0) = f(0+0x+0x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{NO és lineal}$$

② $f(-u) = -f(u)$, si f és lineal:

Demostració: $f(-u) = f((-1)\cdot u) = -1 \cdot f(u) = -f(u)$

③ Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S subespai d'E $\Rightarrow$ $f(S)$ és subespai d'F ?

(1) $f(S) \neq \emptyset$?

S subespai d'E $\Rightarrow 0_E \in S \Rightarrow \underbrace{f(0_E)}_{0_F} \in f(S)$ cert!

$\Rightarrow f(S) \neq \emptyset$

(2) $v, v' \in f(S) \overset{?}{\Rightarrow} v+v' \in f(S)$

$\Downarrow$

$v \in f(S) \Rightarrow v = f(u)$, $u \in S$

$v' \in f(S) \Rightarrow v' = f(u')$, $u' \in S$ $\Rightarrow$ $u+u' \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{v+v' = f(u) + f(u') \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\underbrace{u+u'}_{\in S}) \in f(S)}$ cert!

(3) $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in f(S) \overset{?}{\Rightarrow} \alpha v \in f(S)$

$\Downarrow$

$v = f(u)$, $u \in S$ i $\alpha u \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha v = \alpha f(u) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\underbrace{\alpha u}_{\in S}) \in f(S)}$ cert!

④ Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S' subespai d'F $\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(S')}_{\{u \in E \,:\, f(u) \in S'\}}$ és subespai d'E ?

(1) $f^{-1}(S') \neq \emptyset$?

$0_F \in S'$ i $f(0_E) = 0_F \in S'$ $\Rightarrow$ $0_E \in f^{-1}(S')$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(S') \neq \emptyset$ cert!

(2) $\underbrace{u, u' \in f^{-1}(S')}_{\substack{f(u) \in S' \\ f(u') \in S'}}$? $\Rightarrow$ $\underbrace{u + u' \in f^{-1}(S')}_{f(u+u') \in S'}$

S' subespai

$f(u) + f(u') \in S'$ $\Rightarrow$ $f(u+u') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(u') \in S'$ cert!

(3) $\underbrace{\alpha \in \mathbb{K},\ u \in f^{-1}(S')}_{\alpha \in \mathbb{K},\ f(u) \in S'}$? $\Rightarrow$ $\underbrace{\alpha u \in f^{-1}(S')}_{f(\alpha u) \in S'}$

S' subespai

$\alpha f(u) \in S'$ $\Rightarrow$ $f(\alpha u) \overset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(u) \in S'$ cert!

5 Si $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$

aleshores:

$$\boxed{f(S)} = \{f(u) : u \in S\} =$$
$$= \{f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$
$$= \{\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$
$$= \boxed{\langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle}$$

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E, W una base de F i m la dimensió de F

$f : E \longrightarrow F$ aplicació lineal

La **matriu associada a f en les bases B i W** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base B expressades en coordenades en la base W. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \ldots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f) u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

Justificació :

$u \in E$, $\quad B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E :

$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, per a escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\Downarrow$$

$$f(u) = f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n)$$

$$\Downarrow$$

$$(f(u))_W = (\alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n))_W = \alpha_1 (f(b_1))_W + \dots + \alpha_n (f(b_n))_W$$

$$(f(u))_W = \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (f(b_1))_W & \cdots & (f(b_n))_W \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{M^B_W(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{(u)_B}$$

$$\boxed{M^B_W(f) \in \mathcal{M}_{\underset{\dim F}{m} \times \underset{\dim E}{n}}(\mathbb{K})}$$

- Si $f : \underset{B_1}{E} \longrightarrow \underset{B_2}{E}$ és un endomorfisme i $\dim E = n$

  aleshores $M^{B_1}_{B_2}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si f és un endomorfisme, normalment s'utilitza la mateixa base a l'espai de sortida i al d'arribada, o sigui $B_1 = B_2 = B$.

Exemple 1.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$$

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, ja que:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $$f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(M \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 1/4 \end{matrix}\right) \sim \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{matrix}}_{rg M = 2} \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2 \\ 1/4 \end{matrix}\right)}_{rg M' = 2}$$

S.C.I. ja que $rg M = rg M' = 2 < 3 = \#\text{incògnites}$

Solució:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2\, z \\ 1/4 - 3/4\, z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , z \in \mathbb{R}$$

Per tant:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Exemple ②.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y+2z \\ y-3z \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en base canònica $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ ja que:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Exemple ③.

$f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$B = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b) Calculeu $f(1+x+2x^2)$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

d) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $M_W^B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, ja que $\begin{cases} \dim P_2(\mathbb{R}) = 3 \\ \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 \end{cases}$

Calculem les imatges dels polinomis de B:

$$f(1) = f(1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = f(0\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = f(0\cdot 1+0\cdot x+1\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_W^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $f(1+x+2x^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ja que:

$$M_W^B \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{(1+x+2x^2)_B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(f(1+x+2x^2))_W}$$

c) $f^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \emptyset$ ja que:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = \left\{a+bx+cx^2 : \; M \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)_W} \right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)}_{\mathrm{rg}M=3,\ \mathrm{rg}M'=4} \qquad \mathrm{rg}\, M = 3 < 4 = \mathrm{rg}\, M' \Rightarrow \text{S.I.}$$

d) $f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \, ?$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \left\{a+bx+cx^2 : \; M \cdot \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\\ -3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right)_W} \right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -5\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)}_{M,\ M'}$$

$\mathrm{rg}\, M = \mathrm{rg}\, M' = 3 = \#$ incògnites

$\Rightarrow$ S.C.D.

Solució: $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow f^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \{2 + x + 5x^2\}$$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Contingutst:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals $\left\{ \begin{array}{l} \text{nucli i imatge} \\ \text{apl. lineals injectives, exhaustives, biject.} \end{array} \right.$
8. Diagonalització

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

7.2 Nucli i imatge

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal

El **nucli** d'f és

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

La **imatge** d'f és

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \underbrace{\{f(u) : u \in E\}}_{= f(E)}$$

Proposició

$\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ són subespais vectorials d'E i F, respectivament

- $0_E \in \operatorname{Ker} f$ pr que $f(0_E) = 0_F$
  Per tant $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$

- $$\underbrace{\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\underbrace{\{0_F\}}_{\text{subespai d'}F})}_{\Rightarrow \text{ subespai d'}E} \subseteq E$$

- $$\underbrace{\operatorname{Im} f = f(\underbrace{E}_{\text{subespai d'}E})}_{\Rightarrow \text{ subespai d'}F} \subseteq F$$

Càlcul efectiu del nucli i de la imatge

Siguin $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases d'E i F, resp., i sigui $M = M_W^B(f)$ la matriu associada a f en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de m equacions i n incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La dimensió del nucli és $n - \operatorname{rang}(M)$

- Imatge: $\operatorname{Im}(f) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$
  La dimensió de la imatge és el rang de M
  Considerant una matriu escalonada equivalent a M, les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de M que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

$\operatorname{Im} f = f(E) = f(\langle b_1, \dots, b_n \rangle) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$

Nucli:

Resoldre el sistema homogeni que té per matriu de coeficients, la matriu associada a f:

$u \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0_F$:

$$\boxed{M_W^B(f) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{vector genèric} \\ \text{d'E en base } B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(0_F)_W}}$$

OBS:

$\dim \operatorname{Ker} f$ = # graus de llibertat del sistema

= # incògnites − rang $M(f)$

= $\dim E - \operatorname{rang} M(f)$

base $\operatorname{Ker} f$: a partir de la solució del sistema en forma paramètrica.

base i dim $\operatorname{Im} f$:

$\operatorname{Im} f = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}(f(b_1), \dots, f(b_n)) =$

$= \operatorname{rang} M(f) = r$

i una base està formada per r columnes de $M(f)$ L.I.

Per tant: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E}$

EXEMPLES

Calculeu bases i dimensió de Kerf i Imf:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$, $M_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $rg\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ 2 & \end{pmatrix} = 2$

$\Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Im} f = 2 \\ \dim \operatorname{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 2 = 1 \end{cases}$

- base Imf:

$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ qualsevol base de $\mathbb{R}^2$ és base d'Imf

p.e. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- base Kerf:

resolem el sistema homogeni

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -1/2 \\ 3/4 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Solució: $\begin{cases} x = 1/2\, z \\ y = -3/4\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2\, z \\ -3/4\, z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solucions: $\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\boxed{2)\ f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix},\ M_{C_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

- rang $M_{C_3}^{C_3} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ldots = 3$

$$\begin{cases} \underline{\dim \operatorname{Im} f} = \text{rg}\, M_{C_3}^{C_3} = 3 \\ \underline{\dim \operatorname{Ker} f} = \underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{cases}$$

- <u>base Im f</u>: $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

  Per tant, qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és base d'Im f

  p.e: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- <u>base Ker f</u>: $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$ no admet base

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

$C_P = \{1, x, x^2\}$, $C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\quad M_{C_M}^{C_P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rg} M_{C_M}^{C_P} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \dots = 3$$

$$\begin{cases} \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} M_{C_M}^{C_P} = 3 \\ \dim \operatorname{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim P_2(\mathbb{R})} - \operatorname{rg} M_{C_M}^{C_P} = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \end{cases}$$

Base $\operatorname{Im} f$: 3 columnes L.I. de $M_{C_M}^{C_P}$,
en aquest cas, les úniques 3 columnes de $M_{C_M}^{C_P}$
ja que són L.I per ser $\operatorname{rg} M_{C_M}^{C_P} = 3$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ és base d'} \operatorname{Im} f$$

matrius expressades en base C_M

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ és base d'} \operatorname{Im} f$$

Base $\operatorname{Ker} f$: no admet base per ser $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Sigui $f : E \to f$ una aplicació lineal i M una matriu associada a f

<u>**Teorema**</u>

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen **isomorfismes**

Caracterització del tipus d'aplicació

- f és injectiva $\overset{1}{\Leftrightarrow} \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0_E}\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E)$
- f és exhaustiva
  $\underset{2}{\Leftrightarrow} \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(F)$
- f és un isomorfisme $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors
  f és un isomorfisme $\Leftrightarrow$ f és injectiva $\Leftrightarrow$ f és exhaustiva

Recordem:

f injectiva si: $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

$$\equiv$$

$$\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$$

f exhaustiva si: $\forall w \in F,\ \exists u \in E \quad f(u) = w$

$$\equiv$$

$$f(E) = F$$

f bijectiva si f és injectiva i exhaustiva

Demostracions:

① f injectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$:

dem : $\Rightarrow$) Sabem que $0_E \in \operatorname{Ker} f$

Si $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, aleshores $\exists u \in \operatorname{Ker} f$, $u \neq 0_E$

$f(0_E) = f(u) = 0_F \Rightarrow f$ NO injectiva

$\Leftarrow$) $f(u) = f(v) \overset{?}{\Rightarrow} u = v$

$$f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_F \overset{f \text{ lineal}}{\Rightarrow} f(u-v) = 0_F \Rightarrow$$

$$\underset{\text{def. Ker} f}{\Rightarrow} u - v \in \operatorname{Ker} f \underset{\operatorname{Ker} f = \{0_E\}}{\Rightarrow} u - v = 0_E \Rightarrow u = v$$

i abans ja hem vist que:

$$\operatorname{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim E$$

② f exhaustiva $\underset{\text{def. d'aplicació exhaustiva}}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im} f = f(E) = F$

Per ser $\operatorname{Im} f$ un subespai d'F:

$$\operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim F$$

i abans ja hem vist que $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} M$, per tant:

$$f \text{ exhaustiva} \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim F$$

③ Si $\dim E = \dim F$:

$$\operatorname{rang} M = \dim E \Leftrightarrow \operatorname{rang} M = \dim F$$

$$f \text{ injectiva} \Leftrightarrow f \text{ exhaustiva}$$

$f: E \longrightarrow F$ aplicació lineal, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matriu associada

$\dim E = n$, $\dim F = m$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ injectiva} & \Longleftrightarrow & \text{rang } M = \dim E \\ f \text{ exhaustiva} & \Longleftrightarrow & \text{rang } M = \dim F \\ f \text{ bijectiva} & \Longleftrightarrow & \text{rang } M = \dim E = \dim F \end{array}}$$

OBSERVACIONS:

① $\begin{cases} f \text{ injectiva} \Rightarrow \dim E \leq \dim F & \not\Leftarrow \\ \dim E > \dim F \Rightarrow f \text{ NO injectiva} \end{cases}$

p.e.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO inj.

② $\begin{cases} f \text{ exhaustiva} \Rightarrow \dim F \leq \dim E & \not\Leftarrow \\ \dim E < \dim F \Rightarrow f \text{ NO exhaustiva} \end{cases}$

p.e.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO exh.

③ $\begin{cases} f \text{ bijectiva} \Rightarrow \dim E = \dim F & \not\Leftarrow \\ \dim E \neq \dim F \Rightarrow f \text{ NO bijectiva} \end{cases}$

p.e.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO bij.

ATENCIÓ!

$$\dim E = \dim F \not\Rightarrow f \text{ bijectiva}$$

EXEMPLES : són injectives, exhaustives, bijectives ... ?

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$, $M_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rg}\, M_{C_2}^{C_3} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{cases} \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{NO inj.} \\ = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{exh.} \end{cases}$ NO bij.

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$, $M_{C_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\text{rg}\, M_{C_3}^{C_3} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ldots = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{bijectiva}$

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

$C_P = \{1, x, x^2\}$, $C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $M_{C_M}^{C_P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rg}\, M_{C_M}^{C_P} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ldots = 3 \begin{cases} = \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{injectiva} \\ \neq 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{NO exh.} \end{cases}$ NO bij.

4) Determineu si les aplicacions lineals següents poden ser injectives, exhaustives, bijectives:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $2 < 4 \Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(b) $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

dim: $4 > 2 \Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(c) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $3 < 4 \Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(d) $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

dim: $4 > 3 \Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(e) $f: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

dim: $4 = 4$ no podem descartar res!

Antimatges: $f: E \longrightarrow F$

$v \in F$, $f^{-1}(v) = \{u \in E : f(u) = v\}$

pot passar:
$$\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \\ |f^{-1}(v)| = 1 \\ |f^{-1}(v)| > 1 \end{cases}$$

Càlcul de $f^{-1}(v)$

Resoldre el sistema d'equacions lineals:

$$M^{B_E}_{B_F} \cdot X = (v)_{B_F}$$

$M^{B_E}_{B_F} = M$:

$$\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \iff S.I. \iff rg\,M < rg(M|v) \\ |f^{-1}(v)| = 1 \iff S.C.D \iff rg\,M = rg(M|v) = \dim E \\ |f^{-1}(v)| > 1 \iff S.C.I. \iff rg\,M = rg(M|v) < \dim E \end{cases}$$

Si
$$\begin{cases} f^{-1}(v) \neq \emptyset, \ \forall v \in F : f \text{ exhaustiva} \\ |f^{-1}(v)| \leq 1, \ \forall v \in F : f \text{ injectiva} \\ |f^{-1}(v)| = 1, \ \forall v \in F : f \text{ bijectiva} \end{cases}$$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Continguts:

composició d'aplicacions lineals
inversa d'una aplicació lineal

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

7.3 Composició d'aplicacions lineals

E, F, G espais vectorials sobre $\mathbb{K}$

Proposició

Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació composició $g \circ f : E \to G$ també és lineal

Proposició

Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és

Si les bases d'E, F i G són B, W i V respectivament, tenim:

1 $$M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g) M_W^B(f)$$

2 $$M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$\boxed{f, g \text{ lineals} \Rightarrow g\circ f \text{ lineal}}$

Demostració:

1) $\forall u, v \in E$:

$$(g\circ f)(u+v) = g(f(u+v)) \overset{\substack{f \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} g(f(u)+f(v)) \overset{\substack{g \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} g(f(u)) + g(f(v)) =$$
$$= (g\circ f)(u) + (g\circ f)(v)$$

2) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$(g\circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) \overset{\substack{f \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} g(\lambda f(u)) \overset{\substack{g \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} \lambda g(f(u)) = \lambda (g\circ f)(u)$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

f isomorfisme $\Rightarrow$ f bijectiva $\Rightarrow$
$\exists f^{-1}$ aplicació inversa, $f^{-1}: F \to E$ i és bijectiva

A més: $\boxed{f \text{ lineal} \Rightarrow f^{-1} \text{ lineal}}$

Demostració:

1) $\forall v', v'' \in F$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists u' \in E,\ f(u') = v' \\ \exists u'' \in E,\ f(u'') = v'' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(u'+u'') \overset{\substack{f \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} f(u') + f(u'') = v' + v''}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(v'+v'') = u' + u'' = f^{-1}(v') + f^{-1}(v'')$$

2) $\forall v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\exists u \in E, f(u) = v \Rightarrow f(\lambda u) \overset{\substack{f \text{ lineal} \\ \downarrow}}{=} \lambda f(u) = \lambda v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}}(\lambda v) = \lambda u = \lambda \boxed{f^{-1}(v)}$$

① Matriu associada a la composició:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ B & M^B_W(f) & W & M^W_V(g) & V \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M^B_V(g\circ f) \\ \parallel \\ M^W_V(g)\cdot M^B_W(f) \end{array}}$$

ja que:

$u\in E$: $\quad \underbrace{M^W_V(g)\cdot \underbrace{M^B_W(f)\,(u)_B}_{(f(u))_W}}_{(g(f(u)))_V} = \big((g\circ f)(u)\big)_V$

② Matriu associada a la inversa :

si f és bijectiva,
$\dim E = \dim F = n$
$\exists f^{-1}$ i és apl. lineal
aleshores :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"', "M^{B}_{W}(f)"] & F \arrow[l, bend left=60, "f^{-1}"] \\[-20pt] B & W \end{tikzcd}$$

$$\boxed{M^{W}_{B}(f^{-1}) = \left(M^{B}_{W}(f)\right)^{-1}}$$

$f^{-1} \circ f = Id_E$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f", "M^{B}_{W}(f)"'] \arrow[rr, bend right=50, "Id_E"'] & F \arrow[r, "f^{-1}", "M^{W}_{B}(f^{-1})"'] & E \\[-20pt] B & W & B \end{tikzcd}$$

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E,

$$\left.\begin{array}{l} Id(b_1) = b_1 = 1 \cdot b_1 + 0\, b_2 + \dots + 0\, b_n \\ Id(b_2) = b_2 = 0 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + \dots + 0\, b_n \\ \vdots \\ Id(b_n) = b_n = 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 1 \cdot b_n \end{array}\right\} \quad I_n = M^{B}_{B}(Id_E)$$

$$\overset{①}{=} \underbrace{M^{W}_{B}(f^{-1})}_{\text{inversa de } M^{B}_{W}(f)} \cdot M^{B}_{W}(f)$$

EXEMPLES

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

Calculeu la matriu associada a $g\circ f$ i la imatge d'un vector genèric $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per $g\circ f$.

Calculem la matriu associada a f i a g en les bases canòniques:

$M_{C_3}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$M_{C_2}^{C_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

La matriu associada a $g\circ f$ en bases canòniques és el producte:

$$M_{C_2}^{C_3}(g\circ f) = M_{C_2}^{C_3}(g)\, M_{C_3}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

Observem que s'obté el mateix resultat si ho calculem directament a partir de la definició de f i g:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+z)+2(-x+2y)+(y-3z) \\ 2(x+y+z)-(y-3z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

2) Calculeu nucli i imatge de $g \circ f$. És $g \circ f$ injectiva o exhaustiva, o bijectiva? :

$$f : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$$

$$g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

Calcularem nucli i imatge, i comprovarem si és injectiva, exhaustiva, bijectiva a partir de la matriu associada a $g \circ f$.

Utilitzarem les bases :

$P_2(\mathbb{R})$: $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, base : $C_P = \{1, x, x^2\}$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, base : $C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathbb{R}^2$: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, base : $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_P}{P_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \underset{C_M}{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M^{C_P}_{C_2}(g \circ f)}_{\in\, \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})} = M^{C_P}_{C_M}(g) \cdot M^{C_M}_{C_2}(f)$$

- $M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (exemple 3 de la classe de l'1/12)

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $M^{C_M}_{C_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{M^{C_P}_{C_2}(g \circ f)}_{M} = M^{C_M}_{C_2}(g) \cdot M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant $(g\circ f)(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}2a+b\\a+b-c\end{pmatrix}$, ja que: $\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b\\a+b-c\end{pmatrix}$

Nucli i imatge:

$$\operatorname{rg} M=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dim \operatorname{Im}(g\circ f)=2\\ \dim \operatorname{Ker}(g\circ f)=\dim P_2(\mathbb{R})-2=3-2=1\end{cases}$$

base $\operatorname{Im}(g\circ f)$:

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{Im}(g\circ f)\subseteq\mathbb{R}^2\\ \dim \operatorname{Im}(g\circ f)=2=\dim\mathbb{R}^2\end{array}\right\}\Rightarrow \operatorname{Im}(g\circ f)=\mathbb{R}^2\Rightarrow \text{qualsevol base de } \mathbb{R}^2 \text{ és base d'}\operatorname{Im}(g\circ f)$$

p.e. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ és una base d'$\operatorname{Im}(g\circ f)$

base $\operatorname{Ker}(g\circ f)$: resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients la matriu associada a $g\circ f$

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\underset{3^a:=3^a:=-2^a}{\sim}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&\boxed{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}\\1&\end{pmatrix}\quad\begin{cases}b=-2a\\c=-a\end{cases}$$

solució: $\begin{pmatrix}a\\-2a\\-a\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ on $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ són coordenades en base C_p

és a dir, una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\{1-2x-x^2\}$

Injectiva, exhaustiva, bijectiva?

$$\begin{array}{rccc}g\circ f: & P_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ \text{dim.:} & 3 & & 2\end{array}$$

$$\operatorname{rang} M(g\circ f)=\operatorname{rang}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=2\begin{cases}\neq \dim P_2(\mathbb{R})\Rightarrow f \text{ NO inj.}\\ =\dim\mathbb{R}^2\Rightarrow f \text{ exh.}\end{cases}\Bigg\rangle\ f \text{ NO bij.}$$

3) Considerem l'aplicació lineal $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ 2b-3c \end{pmatrix}$$

Comproveu que és isomorfisme i calculeu la matriu associada a f^{-1} en bases canòniques. Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculem la matriu associada a f en les bases canòniques:

$C_p = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$f(1) = f(1\cdot 1 + 0x + 0x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(x) = f(0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(x^2) = f(0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M = M_{C_3}^{C_p}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang}\, M = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow f$ apl. lineal bijectiva, o sigui, un isomorfisme.

Matriu associada a f^{-1} en bases canòniques, C_3 i C_p:

$$f^{-1}: \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{C_p}{P_2(\mathbb{R})}$$

$$M_{C_p}^{C_3}(f^{-1}) = \left(M_{C_3}^{C_p}(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculem $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$M_{C_p}^{C_3}(f^{-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{en base } C_p}$$

Per tant, $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = x - x^2$

$$\left(\text{Observem que } f(x-x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(x-x^2)_{C_p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

4) a) Matriu associada a $Id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en les bases $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ a l'espai de sortida i $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a l'espai d'arribada.

b) Quines són les coordenades en base C del vector u tq. $(u)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

a) $Id : E \longrightarrow E$

bases: $B \qquad C$

$M_C^B(Id)$: $Id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Id\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Id\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

coordenades en base C ! ⇝

$$\Rightarrow M_C^B(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_C^B(Id)(u)_B = (u)_C$$

$Id(u) = u$

b) $$\underbrace{M_C^B(Id)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(Id(u))_C = (u)_C}$$

where $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (u)_B$.

$$\Rightarrow (u)_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$M_C^B(Id)$ és la matriu de canvi de base de B a C, P_C^B :

$$\boxed{M_C^B(Id) = P_C^B}$$

Àlgebra Lineal

M1 - FIB

Contingut:

5. Matrius, sistemes i determinants
6. Espais vectorials
7. Aplicacions lineals
8. Diagonalització

canvis de base i aplicacions lineals:
matriu associada?

Anna de Mier
Montserrat Maureso

Dept. Matemàtiques

Abril 2020

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E, W una base de F i m la dimensió de F

$f: E \longrightarrow F$ aplicació lineal

La **matriu associada a f en les bases B i W** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base B expressades en coordenades en la base W. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \ldots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f) u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

7.4 Canvi de base

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin $f : E \to F$ una aplicació lineal, B i B' bases d'E, i W i W' bases d'F

$$\begin{tikzcd}
E_B \arrow[r, "f", "M_W^B(f)"'] & F_W \arrow[d, "I_F", "P_{W'}^{W}"'] \\
E_{B'} \arrow[u, "I_E", "P_B^{B'}"'] \arrow[r, "f", "M_{W'}^{B'}(f)"'] & F_{W'}
\end{tikzcd}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$\boxed{M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W} \, M_W^B(f) \, P_B^{B'}}$$

JUSTIFICACIÓ:

I

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{E} \arrow[r, "Id_E", "P^{B'}_{B}"'] \arrow[rrr, bend right=40, "Id_F \circ f \circ Id_E = f", "M^{B'}_{W'}(f)"'] & \underset{B}{E} \arrow[r, "f", "M^{B}_{W}(f)"'] & \underset{W}{F} \arrow[r, "Id_F", "P^{W}_{W'}"'] & \underset{W'}{F} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{M^{B'}_{W'}(f) = P^{W}_{W'} \cdot M^{B}_{W}(f) \cdot P^{B'}_{B}}$$

II

$u \in E$

$$M^{B'}_{W'}(f) \cdot (u)_{B'} = (f(u))_{W'}$$

$$\underbrace{P^{W}_{W'} \underbrace{M^{B}_{W}(f) \underbrace{P^{B'}_{B} (u)_{B'}}_{(u)_B}}_{(f(u))_W}}_{(f(u))_{W'}} = (f(u))_{W'}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M^{B'}_{W'}(f) = P^{W}_{W'} \, M^{B}_{W}(f) \, P^{B'}_{B}}$$

EXEMPLES

1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$?

Vam calcular la matriu associada en bases canòniques

$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$:

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (vegeu exemple 1 - AL8)

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$P_{C_3}^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{C_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3} = \left(P_{C_2}^{B_2}\right)^{-1} M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 \\ -2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 25 & 8 & 19 \\ -12 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

Matriu associada a f en base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?

Calculem primer la matriu associada en la base canònica: $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = P_B^C \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B = \left(P_C^B\right)^{-1} M_C^C(f) \cdot P_C^B$$

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ:

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

i $u \in \mathbb{R}^3$, $u = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

aleshores
$u_C = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

$u_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ja que $u = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = 1\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}}_{b_1} + 0\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_2} + 0\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{b_3}$

Podem calcular $f(u)$ utilitzant $M_C^C(f)$ o bé $M_B^B(f)$:

si utilitzem $M_C^C(f)$:

$M_C^C(f)\,(u)_C = (f(u))_C$, per tant $(f(u))_C = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$$

Si utilitzem $M_B^B(f)$:

$M_B^B(f)\,(u)_B = (f(u))_B$, per tant $(f(u))_B = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}3 & -11 & 1\\ 3 & -3 & 2\\ -2 & 16 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Comprovem que, efectivament $P_C^B\,(f(u))_B = (f(u))_C$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}_{P_C^B}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}}_{(f(u))_B} = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}}_{(f(u))_C}$$

CERT!

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

Calculeu la matriu associada en les bases:

$B = \{1+x,\ x^2,\ -1+x+3x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Podem calcular fàcilment la matriu associada a f en les bases canòniques (vegeu l'exemple 3 - AL8)

$C_P = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$

$C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$M_{C_M}^{C_P}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_W^B(f) = P_W^{C_M} \cdot M_{C_M}^{C_P}(f) \cdot P_{C_P}^B = \left(P_{C_M}^W\right)^{-1} M_{C_M}^{C_P}(f) \cdot P_{C_P}^B$$

$$P_{C_M}^W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{C_P}^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_W^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -7 & -11 \end{pmatrix}$$

4) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i canònica d'$\mathbb{R}^2$?

Coneixem la matriu associada en bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^2$ (vegeu l'exemple 1):

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$M_{C_2}^{B_3}(f) = M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

canònica d'$\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$?

Coneixem la matriu associada en bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^2$ (vegeu l'exemple 1):

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$M_{B_2}^{C_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \cdot M_{C_2}^{C_3}(f) =$$

$$= \left(P_{C_2}^{B_2}\right)^{-1} \cdot M_{C_2}^{C_3}(f) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\exists$ B base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal ?

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ i $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

aleshores :

$$\begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_1) = \lambda_1 b_1 \\ f(b_2) = \lambda_2 b_2 \\ f(b_3) = \lambda_3 b_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Plantegem el sistema:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre λ:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(continuarà...)

Per què matrius diagonals?

A més de la interpretació en diferents problemes (estadístics, geomètrics, grafs, ...) el producte de matrius diagonals és més senzill:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2543} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{2543} = \begin{pmatrix} 6^{2543} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2543} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2543} \end{pmatrix}$$

8. Diagonalització

Per què matrius diagonals?

A més de la interpretació en diferents problemes (estadístics, geomètrics, grafs, ...) el producte de matrius diagonals és més senzill:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 11 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\cdot 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2543} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}^{2543} = \begin{pmatrix} 6^{2543} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2543} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2543} \end{pmatrix}$$

En general:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1' & & & \\ & \lambda_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1' & & & \\ & \lambda_2\lambda_2' & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}^{K} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Exemple:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\exists$ B base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal ?

Si $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ i $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

aleshores :

$$\begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_1) = \lambda_1 b_1 \\ f(b_2) = \lambda_2 b_2 \\ f(b_3) = \lambda_3 b_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Plantegem el sistema: $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre λ:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

És a dir, per a trobar tots els vectors $u \in \mathbb{R}^3$ tq. $f(u) = \lambda u$, per a algun valor de $\lambda \in \mathbb{R}$: resolem el sistema d'equacions lineals homogeni següent en funció dels valors de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

- sempre té la solució trivial $x = y = z = 0$
- té solució no trivial $\iff \operatorname{rg} A < 3 = \#\text{incògnites} \iff$
  $\iff \det A = 0$:
  calculem per a quins valors de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det A = 0$:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 4 - (4-\lambda) - 4(3-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24$$

$$\det A = 0 \iff -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24 = 0 \iff$$

$$\iff -(\lambda-2)^2(\lambda-6) = 0$$

$$\iff \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 6$$

- Si $\lambda = 2$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

equivalent a:

$$(1 \;\; 1 \;\; 1):$$

$rg(\,) = 1$, $3-1 = 2$ graus de llibertat

Solució: $z = -x-y$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{f(u) = 2u \iff u \in E_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

- Si $\lambda=6$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

equivalent a:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$rg(\,)=2$, $3-2=1$ grau de llibertat

Solució: $\begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$ $z \in \mathbb{R}$

$$E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{f(u) = 6u \iff u \in E_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$$

Base formada per vectors u tq. $f(u)=\lambda u$:

base formada per vectors de $E_2 \cup E_6 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \rangle \cup \langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \rangle$

p.e. :

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base d'$\mathbb{R}^3$ ja que

$$rg \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \dots = 3$$

i la matriu associada a f en base B és:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

ja que: $\begin{cases} f(u_1) = 2\cdot u_1 = 2\cdot u_1 + 0\, u_2 + 0\, u_3 \\ f(u_2) = 2\cdot u_2 = 0\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + 0\cdot u_3 \\ f(u_3) = 6\, u_3 = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 6 u_3 \end{cases}$

Relació entre $M_C^C(f)$ i $M_B^B(f)$:

$$M_B^B(f) = \underbrace{(P_C^B)^{-1}}_{P_B^C} \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B, \quad \text{on } P_C^B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Calculeu $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2020}$:

Hem vist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

Observem que:

$$M^{2020} = (PDP^{-1})^{2020} = (PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}D\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1}) \dots (PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1}) = PD^{2020}P^{-1}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{2020} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right)^{2020} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{2020} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{2020} & & \\ & 2^{2020} & \\ & & 6^{2020} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3 \cdot 2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020} + 6^{2020}) \\ \frac{1}{2}(-2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{2}(2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{2}(-2^{2020} + 6^{2020}) \\ \frac{1}{4}(-2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{4}(-2^{2020} + 6^{2020}) & \frac{1}{4}(3 \cdot 2^{2020} + 6^{2020}) \end{pmatrix}$$

El problema de la diagonalització

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme. Hi ha alguna base B d'E en què la matriu $M_B(f)$ sigui senzilla? Més concretament, diagonal?

Def

Un endomorfisme $f : E \to E$ és **diagonalitzable** si existeix alguna base B d'E tal que $M_B(f)$ sigui diagonal.

Obs. Suposem que la matriu $M_B(f)$ no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme f diagonalitza en una altra base B'. Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1} M_B(f) P_B^{B'}$$

és diagonal.

Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu P invertible tal que $P^{-1} M_B(f) P$ sigui diagonal.

Def.:

Una matriu $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tq. $P^{-1}MP$ és diagonal

és a dir:

$M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que té M per matriu associada en base canònica és diagonalitzable.

Observem que si la matriu associada a f en base B és diagonal, aleshores:

$$f: \underset{B}{E} \longrightarrow \underset{B}{E}$$

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$\underbrace{M_B^B(f)}_{M_B(f)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & \quad f(b_n) \\ \downarrow & \downarrow & \quad \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$f(b_1) = \lambda_1 b_1$$
$$f(b_2) = \lambda_2 b_2$$
$$\vdots$$
$$f(b_n) = \lambda_n b_n$$

Valors i vectors propis

Def
L'escalar λ és un **valor propi** de l'endomorfisme f si existeix algun vector $v \neq \mathbf{0}_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Tots els vectors $v \neq \mathbf{0}_E$ que compleixen $f(v) = \lambda v$ s'anomenen **vectors propis de valor propi** λ.

Teorema
L'endomorfisme $f : E \to E$ diagonalitza si i només si hi ha alguna base d'E formada per vectors propis.

$$f(v) = \lambda v$$

$$\Downarrow$$

$$M\,(v)_B = \lambda\,(v)_B$$

$$M\,(v_B) = \lambda \cdot I_n\,(v)_B$$

$$\underbrace{(M - \lambda I_n)(v_B) = 0}_{}$$

sistema d'equacions lineals homogeni que té solució no trivial

$\iff \det(M - \lambda \cdot I_n) = 0$

$\iff \lambda$ és solució de l'equació

$$\det(M - x \cdot I_n) = 0$$

Càlcul dels valors propis

Sigui M la matriu associada a $f : E \to E$ en una base B

Def

El **polinomi característic** de l'endomorfisme f és

$$p_f(x) = \det(M - xI_n)$$

Teorema

Els valors propis d'f són les arrels del polinomi característic

La **multiplicitat algebraica** d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com a arrel de $p_f(x)$ i es denota m_λ

L'equació $p_f(x) = 0$ s'anomena **equació característica**

Teorema

El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada M

Exemple:

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+1)^3 (x-5)$

aleshores les arrels són:

2, de multiplicitat 2

-1, de multiplicitat 3

5, de multiplicitat 1

ULL! Cal agrupar tots els factors de la forma $(x-\lambda)$ per tal de calcular la multiplicitat algebraica de λ.

P.e:

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+5)^3 (2-x)(x-5)$

aleshores:

$$p_f(x) = -(x-2)^2 (x+5)^3 (x-2)(x-5) =$$
$$= -(x-2)^3 (x+5)^3 (x-5)$$

aleshores les arrels són:

2 de multiplicitat 3

-5 de multiplicitat 3

5 de multiplicitat 1

Espais de vectors propis

Sigui ara λ un valor propi de l'endomorfisme $f : E \to E$
L'**espai propi** del valor propi λ és el conjunt

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}$$

$$= \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$$

Propietats

- E_λ és un subespai vectorial d'E
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \underbrace{m_\lambda}$ → multiplicitat algebraica de λ

La dimensió d'E_λ s'anomena **multiplicitat geomètrica** de λ

E_λ és un subespai vectorial d'E.

Demostració

$E_\lambda = \{u : f(u) = \lambda u\} = \{u : f(u) - \lambda u = 0_E\} =$

$= \{$solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $M - \lambda I\}$

$\Rightarrow$ és subespai d'E

Directament amb la definició de subespai:

- $E_\lambda \neq \emptyset$: ja que $0_E \in E_\lambda$ per ser $f(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E$

- $u, v \in E_\lambda \overset{?}{\Longrightarrow} u+v \in E_\lambda$

$f(u) = \lambda u,\ f(v) = \lambda v \Rightarrow f(u+v) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(v) \underset{u,v \in E_\lambda}{=} \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$

- $u \in E_\lambda,\ \alpha \in \mathbb{K} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha u \in E_\lambda$

$f(u) = \lambda u \Rightarrow f(\alpha u) \underset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(u) \underset{u \in E_\lambda}{=} \alpha \lambda u = \lambda(\alpha u)$

Per tant E_λ és subespai d'E

Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n.

Teorema

L'endomorfisme f és diagonalitzable si i només si té n valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari

Si f té n valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.

És el mateix que:

L'endomorfisme f és diagonalitzable si es compleixen les dues condicions següents:

(1) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1:

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, diferents dos a dos

(2) $\forall \lambda_i$, $1 \leq i \leq r$, es compleix:

$$\dim E_{\lambda_i} = m_i$$

OBS: Si M és la matriu associada a f en una base qualsevol,

$$p_f(x) = \det(M - x \cdot I_n)$$

$$\dim E_{\lambda_i} = n - rg(M - \lambda_i I_n)$$

matriu associada a f en una base qualsevol.

Algorisme de diagonalització

Per a decidir si l'endomorfisme $f : E \to E$ és diagonalitzable, podem seguir els passos següents:

(1) Trobem la matriu associada a f en una base qualsevol i calculem el polinomi característic $p_f(x)$.

(2) Trobem els valors propis i les seves multiplicitats resolent $p_f(x) = 0$.

(3) Si les multiplicitats dels valors propis sumen menys de $\dim(E)$, l'endomorfisme no diagonalitza. Altrament anem a (4).

(4) Per a cada valor propi λ, trobem l'espai propi E_λ i la seva dimensió $\dim(E_\lambda)$.

(5) Si per a tot λ es compleix $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$, l'endomorfisme diagonalitza. Altrament no diagonalitza.

Si l'endomorfisme diagonalitza, per trobar una base en què diagonalitzi només cal prendre la unió de les bases dels espais E_λ.

Mercè Mora Dept. Matemàtiques. UPC

1 Resum de teoria

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n ($\mathbb{K}$ pot ser, per exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ amb p primer) direm que f *diagonalitza* si existeix una base d'E tal que la matriu associada a f en aquesta base és diagonal.

Valors i vectors propis

• *valor propi (vap.)* d'f: $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$, per a algun vector $v \neq 0_E$

• *vector propi (vep.)* d'f: $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ i $f(v) = \lambda\, v$, per a algun $\lambda \in \mathbb{K}$ (direm que v és un *vector propi de valor propi* λ)

▷ f diagonalitza si i només si existeix una base de vectors propis

• $E_\lambda = \{v \ : \ f(v) = \lambda\, v\}$ (vectors propis de valor propi λ, més el vector 0_E)

Si A és la matriu associada a f en una base qualsevol B, aleshores:

- E_λ és un subespai vectorial de dimensió $n - \text{rang}(A - \lambda\, I_n)$
- E_λ está format per les solucions del sistema d'equacions lineal homogeni $(A - \lambda I_n)X = 0$.
- $\lambda \in K$ és valor propi d'$f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \text{rang}\,(A - \lambda\, Id) < n \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, I_n) = 0$
- Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ són valors propis diferents d'f i $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són vectors propis de valor propi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ respectivament, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són linealment independents

Polinomi característic

• *Polinomi característic* d'f: $p_f(x) = \det(A - x\, I_n)$, on A és la matriu associada a f en una base qualsevol d'E. (Es pot demostrar que el polinomi característic és invariant per canvis de base.)

- $p_f(x)$ és un polinomi de grau n tal que el terme independent és $\det A$; el coeficient de x^n és $(-1)^n$; i el coeficient de x^{n-1} és $(-1)^{n-1}\,\text{tr}\,A$, on $\text{tr}\,A$ és la suma dels elements de la diagonal principal d'A.
- $\lambda \in \mathbb{K}$ és valor propi d'f si, i només si, λ és arrel de $p_f(x)$
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, aleshores $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat 1 (arrel simple) del polinomi característic, aleshores $\dim E_\lambda = 1$.

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, direm que m és la *multiplicitat algebraica* de λ i $\dim E_\lambda$ és la *multiplicitat geomètrica* de λ.

Teorema. *f diagonalitza si, i només si, es compleixen alhora les dues condicions següents:*
(i) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{K}[x]$;
(ii) per a tota arrel λ de $p_f(x)$, la dimensió d'E_λ és igual a la multiplicitat de λ en $p_f(x)$.

La condició ii) és equivalent a dir que per a tota arrel λ de $p_f(x)$ la multiplicitat algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari. *Si $p_f(x)$ té n arrels diferents en $\mathbb{K}$, aleshores f diagonalitza.*

▷ Si f diagonalitza, una base de vectors propis d'f s'obté com a unió de bases dels subespais E_λ tals que λ és valor propi, i la matriu associada a f en aquesta base és una matriu diagonal D on cada valor propi apareix a la diagonal tantes vegades com la seva multiplicitat en el polinomi característic.

2 Passos a seguir per a diagonalitzar un endomorfisme

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n i A la matriu associada a f en la base B,

(i) Determinar si l'endomorfisme diagonalitza.

(1) *Calcular el polinomi característic d'f i descompondre'l en factors de grau* 1*:*

$$p_f(x) = \det(A - x\ I_n) = \cdots = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}\ (x-\lambda_2)^{m_2}\ \ldots (x-\lambda_k)^{m_k},$$

on $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són arrels diferents de multiplicitat $m_1, m_2, \ldots, m_k$ respectivament ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són els valors propis d'f).

Si $p_f(x)$ no es pot descompondre en factors de grau 1, f ***no diagonalitza***.
Altrament, continuem.

(2) *Comprovar si* $\dim E_{\lambda_i} = m_i$*, per a tots els valors propis* λ_i *tals que* $m_i > 1$*:*
equival a comprovar si $n - \mathrm{rang}(A - \lambda_i\ I_n) = m_i$.

Si en algun cas no es compleix, f ***no diagonalitza***.
Altrament, f ***diagonalitza***

(ii) Trobar una base en que diagonalitzi, si és possible, i la matriu associada diagonal

(3) Calcular una base B_i d'$E_{\lambda_i} = \{v : f(v) = \lambda_i\, v\}$ per a tot valor propi λ_i. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - \lambda_i\ I_n$ i calculem una base del subespai vectorial solució. La base tindrà exactament m_i vectors, $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{i\,m_i}\}$.

(4) Una base de vectors propis d'f és:

$$B' = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = \{\underbrace{v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1\,m_1}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_1}, \underbrace{v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2\,m_2}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_2}, \ldots, \underbrace{v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{k\,m_k}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_k}\}$$

(5) La matriu associada en la base B' és la matriu diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_k & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

on cada λ_i apareix exactament m_i vegades i els elements que no són de la diagonal principal són nuls.

A més, es satisfà la igualtat $D = P^{-1}\ A\ P$, on P és la matriu de canvi de base de B' a B, és a dir, les columnes de P són les components dels vectors de B' en la base B

3 Exemples

Exercici 1

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x^2+4)$.

No diagonalitza perquè el polinomi característic no té totes les arrels reals, és a dir, no es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{R}[x]$.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-4)(x-2)(x+2).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-1)^2(x-2)$$

valors propis	multiplicitat
1	2
2	1

(2) El valor propi 1 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_1 = 2$:

$$\dim E_1 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

(d) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ 1 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)^2(-1-x)$

valors propis	multiplicitat
5	2
-1	1

(2) El valor propi 5 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_5 = 2$:

$$\dim E_5 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ -1 & -1-5 & 0 \\ 1 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

Exercici 2

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-x & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2\,(4-x)^2$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
4	2

(2) Els dos valors propis, -2 i 4, tenen multiplicitat $2 > 1$.
Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\begin{aligned} \dim E_{-2} &= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-(-2) & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-(-2) & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-(-2) \end{pmatrix} \\ &= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Comprovem ara si $\dim E_4 = 2$:

$$\begin{aligned} \dim E_4 &= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-4 \end{pmatrix} \\ &= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 2. \end{aligned}$$

Per tant, f no diagonalitza.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-x & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2\,(-1-x)\,(2-x)$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
-1	1
2	1

(2) El valor propi -2 té multiplicitat 2, diferent de 1. Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-(-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-(-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-(-2) & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-(-2) \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3\,(-1-x)$$

valors propis	multiplicitat
2	3
-1	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat $3 > 1$.
Comprovem si $\dim E_2 = 3$:

$$\dim E_2 = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 - 3 = 1 \neq 3.$$

Per tant, f no diagonalitza.

Exercici 3

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu associada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix} = (1-x)(2-x) - 6 = x^2 - 3\,x - 4 = (x-4)(x+1).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 2 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

valors propis	multiplicitat
4	1
-1	1

(2) No hi ha valors propis de multiplicitat > 1.

(3) (i) Base d'E_4. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 4I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 2 \\ 3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y) : x = \frac{2}{3}y\} = \{(\frac{2}{3}y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

Base: $\{(\frac{2}{3}, 1)\}$

(ii) Base d'E_{-1}. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - (-1)I_2$:

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 3 & 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y) : x = -y\} = \{(-y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

Base: $\{(-1, 1)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(\frac{2}{3}, 1), (-1, 1)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 4

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 2 & 4-x & 2 \\ 1 & 1 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x)^2(4-x)+2+2-(4-x)-3\,(3-x)-2\,(3-x) =$$
$$\cdots = -x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = -(x-2)^2(x-6)$$

valors propis	multiplicitat
2	2
6	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat $2 > 1$.

Comprovem si $\dim E_2 = 2$:

$$\dim E_2 = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

(3) (i) Base d'E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 1 \\ 2 & 4-2 & 2 \\ 1 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:
$\{(x,y,z) : x+y+z=0\} = \{(x,y,z) : x = -y-z\} = \{(-y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$

(ii) Base d'E_6. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 6I_3$:

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 1 & 1 \\ 2 & 4-6 & 2 \\ 1 & 1 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x = z\,,\ y = 2z\} = \{(z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(1,2,1) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(1,2,1)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,2,1)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercici 5

Demostreu que l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ diagonalitza. Trobeu una base en que f diagonalitzi, i doneu la matriu assciada en aquesta base i la relació entre la matriu associada en base canònica i en la base trobada.

Solució.

(1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{pmatrix} = (2-x)(-4-x)(5-x) - 24 - 4\,(-4-x) - 24(2-x) = \cdots = -x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x-1)(x-2)$

valors propis	multiplicitat
0	1
1	1
2	1

Diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(2) No hi ha valors propis amb multiplicitat > 1.

(3) (i) Base d'E_0. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 0 \cdot I_3 = A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} =\equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x + 2z = 0\,, -2y + 3z = 0\} = \{(x,y,z) : x = -2z\,,\ y = \frac{3}{2}z\} = \{(-2z, y\frac{3}{2}z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-2, \frac{3}{2}, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,3,2)\}$, ja que el vector $(-2, \frac{3}{2}, 1)$ genera el mateix subespai que $2\,(-2, \frac{3}{2}, 1) = (-4,3,2)$

(ii) Base d'E_1. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 1 \cdot I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 4 \\ 3 & -4-1 & 12 \\ 1 & -2 & 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : x + 4z = 0\,,\ y = 0\} = \{(x,y,z) : x = -4z\,,\ z = 0\} = \{(-4z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-4,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(-4,0,1)\}$

(iii) Base d'E_2. Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - 2\,I_3$:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 4 \\ 3 & -4-2 & 12 \\ 1 & -2 & 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \cdots \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $\{(x,y,z) : z = 0\,,\ x = 2y\} = \{(2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(2,1,0) : z \in \mathbb{R}\}$

Base: $\{(2,1,0)\}$

(4) Base d'E en que f diagonalitza: $B' = \{(-4,3,2),(-4,0,1),(2,1,0)\}$

(5) Matriu associada en la base B': $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Relació entre D i A: $D = P^{-1}AP$, on P és la matriu de canvi de base que té per columnes els vectors de B' en la base canònica, és a dir, $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercici 6

Comproveu si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució.

Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x-2i)(x+2i)$.

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i $\dim \mathbb{C}^3 = 3$.

Successió de Fibonacci : terme general ?

$u_0 = 0,\ u_1 = 1;\ u_K = u_{K-1} + u_{K-2}$, si $K \geqslant 2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	----
u_n	0	1	1	2	3	5	8	13	-----

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} \quad , \text{ si } n \geqslant 2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}} = \underbrace{A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}} \overset{\text{si } n-1\geqslant 2}{=} A \cdot \underbrace{A \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix}} =$$

$$= \underbrace{A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix}} \overset{\text{si } n-2\geqslant 2}{=} A^2 \cdot \underbrace{A \begin{pmatrix} u_{n-3} \\ u_{n-4} \end{pmatrix}} =$$

$$= A^3 \begin{pmatrix} u_{n-3} \\ u_{n-4} \end{pmatrix} =$$

$$= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \boxed{A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Calculem A^K:

diagonalitzem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (-x)(1-x) - 1 = x^2 - x - 1$

arrels: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow$

vaps: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \ (= \alpha)$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \ (= \beta)$

veps de vap. α:

E_α: $\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & \underbrace{1-(1-\alpha)(-\alpha)}_{-\alpha^2+\alpha+1=0} \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solució: $x = \alpha y,\ y \in \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right.$

$E_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

<u>OBS:</u> $A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}$

és cert ja que:

$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$

veps de vap. β :

$$E : \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1-\beta & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \underbrace{1-(1-\beta)(-\beta)}_{-\beta^2+\beta+1=0} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució : $x=\beta y,\ y \in \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} \beta y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right.$

$$E_\beta = \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per tant, si $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow$$

$$A^k = P \cdot D^k P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & \beta^{k+1} \\ \alpha^k & \beta^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} - \beta^{k+1} & -\beta \cdot \alpha^{k+1} + \alpha \beta^{k+1} \\ \alpha^k - \beta^k & -\beta \cdot \alpha^k + \alpha \beta^k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n & -\beta \cdot \alpha^n + \alpha \beta^n \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & -\beta \alpha^{n-1} + \alpha \beta^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n) \\ \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha^n - \beta^n\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$\alpha-\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

Observem que:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}\right) = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}\right) = 1$$

etc.

SUCCESIONS RECURRENTS, EN GENERAL:

$(a_n)_{n\geq 0}$ tq. $a_0, \dots, a_{k-1}$ donats i
$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_k a_{n-k}$, si $n \geq k$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix}, \text{ si } n \geq k$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = A^{n-k+1} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}, \text{ si } n \geq k$$

$\Rightarrow$ obtenim a_n en funció de $a_0, \dots, a_{k-1}$ si coneixem la 1ª fila de A^{n-k+1}

Si A diagonalitza: $\exists P$ invertible, $A = PDP^{-1}$ i per tant, $A^r = PD^rP^{-1}$, $\forall r \geq 1$