

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

F1. (3 punts) A l'espai $P_3(\mathbb{R})$ format pels polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 3, considerem els polinomis $p(x) = 1 + ax^3$, $q(x) = a + x + x^2 + x^3$, $r(x) = -1 + x^2 + x^3$, $s(x) = a + x^2 + x^3$, on $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Determineu per a quins valors del paràmetre a els polinomis són linealment dependents.
- (b) Per a cadascun dels valors trobats a l'apartat anterior expresseu un dels polinomis com a combinació lineal de la resta.

F2. (4 punts) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculeu la matriu A associada a f en la base canònica de \mathbb{R}^3 . Calculeu la dimensió dels subespais nucli i imatge. Determineu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.
- (b) Sigui $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - z = 0 \right\}$.
 - i. Doneu una base i la dimensió del subespai S i completeu-la fins a una base de \mathbb{R}^3 .
 - ii. Doneu una base i la dimensió del subespai $f(S)$. Expresseu $f(S)$ com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

F3. (3 punts) Sigui $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- (a) Calculeu el seu polinomi característic i determineu els valors propis de M . Raoneu que M diagonalitza.
- (b) Calculeu tres vectors propis de M linealment independents. Doneu una matriu invertible P tal que $P^{-1}MP$ sigui una matriu diagonal.
- (c) Calculeu la matriu M^n , on n és un nombre natural.

Informacions

- Durada de l'examen: 90 minuts.
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Publicació de les notes: 24/01/2022.
- Revisió de l'examen: 25/01/2022 a les 15:00 (s'haurà de demanar segons el procediment que es publicarà al racó).