Tipus de matrius

- Una matriu de tipus $1 \times n$ s'anomena matriu fila
- Una matriu de tipus $m \times 1$ s'anomena matriu columna
- La matriu nul·la $O_{m,n}$ (o simplement O) és la matriu tipus $m \times n$ on tots els elements són iguals a 0
- Una matriu de tipus $n \times n$ s'anomena quadrada. El conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ amb elements a $\mathbb{K}$ es denota per $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una matriu quadrada $(a_{ij})_{n\times n}$ és
  - triangular superior si $a_{ij} = 0$ per tot $i > j$
  - triangular inferior si $a_{ij} = 0$ per tot $i < j$
  - diagonal si és triangular superior i inferior simultàniament
- La matriu $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ és la matriu diagonal $(d_{ij})_{n\times n}$ amb $d_{ii} = \lambda_i$ per tot i
- La matriu identitat I_n és la matriu diagonal $\mathrm{Diag}(1, 1, \ldots, 1)$

Suma de matrius

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$

La seva **suma** és la matriu $A + B = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propietats

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Associativa)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
- *(Commutativa)* $A + B = B + A$
- *(Element neutre)* $A + O = O + A = A$
- *(Element oposat)* Existeix una matriu B tal que
$$A + B = B + A = O$$
(a aquesta B l'anomenem $-A$)

Producte per escalars

Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb $A = (a_{ij})$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar

El **producte d'A per l'escalar λ** és la matriu $\lambda A = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida per

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Propietats

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, es compleix:

- *(Pseudoassociativa)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- *(Distributiva 1)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- *(Distributiva 2)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- *(Identitat)* $1A = A$

Fixem-nos que $(-1)A = -A$

Transposició

Sigui $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

La seva **transposada** és la matriu $A^t = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(\mathbb{K})_{n\times m}$ definida per $b_{ij} = a_{ji}$

Clarament $(A^t)^t = A$

Una matriu quadrada A és
simètrica si $A^t = A$
antisimètrica si $A^t = -A$

Producte de matrius

Siguin $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $B = (b_{ij})_{n\times p} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

El seu **producte** és la matriu $AB = (c_{ij})_{m\times p} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Observacions

- El producte de dues matrius qualssevol no té per què estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general $AB \neq BA$
- El producte és una operació interna dins de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propietats del producte de matrius

Si A, B, C són matrius i les operacions següents estan definides, es compleix:

- *(Associativa)* $(AB)C = A(BC)$
- *(Distributives)* $A(B+C) = AB + AC$ i $(A+B)C = AC + BC$
- *(Element unitat)* $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- *(Relació amb la transposada)* $(AB)^t = B^t A^t$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotarem per A^k el producte $AA\cdots A$ (és a dir, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, etc.)

Prop. • $\lambda(AB) = (\lambda A)\cdot B = A\cdot(\lambda B)$

• El producte de matrius no és commutatiu en general.

Matriu inversa

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diem que B és la **matriu inversa** d'A si

$$AB = BA = I_n$$

Si això es compleix diem que A és **invertible** i denotem per A^{-1} la matriu inversa

Observacions

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

Propietats de la matriu inversa

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1}A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

• Si $A_1, \ldots, A_k$ són invertibles, aleshores el producte $A_1 \cdots A_k$ és invertible i $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$

Transformacions elementals

Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Una **transformació elemental per files** d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

(I) intercanviar dues files d'A

(II) multiplicar una fila d'A per un escalar no nul

(III) sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és **elemental (per files)** si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

Matrius equivalents

Teorema

Sigui T una transformació elemental i sigui $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El resultat d'aplicar la transformació T a la matriu M és EM, on E és la matriu elemental resultant d'aplicar T a la identitat I_m

Una matriu B és **equivalent (per files)** a una matriu A si B es pot obtenir a partir d'A fent una seqüència finita de transformacions elementals

Per tant, si B és equivalent a A podem escriure

$$B = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A,$$

on les E_i són matrius elementals

EXEMPLES:

Transformacions elementals:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Transf. elemental tipus I: permutem les files 3, 6:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus II: multipliquem la fila 3 per 5:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transf. elemental tipus III: Sumem a la fila 3ª la 6ª multiplicada per 2:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrius elementals:

Si denotem:

matriu elemental tipus
$\begin{cases} \mathrm{I}: P_{ij}, \text{ si intercanviem les files } i, j \\ \mathrm{II}: M_i(\lambda), \text{ si multipliquem la fila } i \text{ per } \lambda \\ \mathrm{III}: S_{ij}(\lambda), \text{ si sumem a la fila } i \text{, la fila } j \text{ multiplicada per } \lambda \end{cases}$

$$\boxed{I_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- $P_{2,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $M_4(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $S_{3,6}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrius escalonades

OBS.: de vegades només s'exigeix que els pivots siguin $\neq 0$, no necessàriament 1's

Una matriu és **escalonada (per files)** si

- si una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- en cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'*1 dominant* o el *pivot* de la fila)
- el pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior.

Matriu escalonada reduïda: matriu escalonada amb pivots $=1$ i tots els altres elements de les columnes dels pivots han de ser 0's

Teorema
Tota matriu és equivalent a una matriu escalonada per files i a una matriu escalonada reduïda per files

El **rang** d'una matriu A és el nombre de files no nul·les de qualsevol matriu escalonada equivalent a A

- Prop. Si A és una matriu $m \times n$, aleshores $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$

Aplicació al càlcul de la inversa (I)

Lema
Si E és una matriu elemental, aleshores E és invertible i la seva inversa E^{-1} també és una matriu elemental

Comprovació:

(I) Si B és una matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (I) (intercanvi files i i j), tenim $BB = I$ $\quad P_{ij}^{-1} = P_{ij}$

(II) Si C_λ és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (II) (multiplicar una fila per $\lambda \neq 0$), tenim $C_\lambda C_{\lambda^{-1}} = I = C_{\lambda^{-1}} C_\lambda$ $\quad (M_i(\lambda))^{-1} = M_i(1/\lambda)$

(II) Si D_k és la matriu elemental corresponent a una transformació de tipus (III) (sumar a la fila i la fila j multiplicada per k), tenim $D_k D_{-k} = I = D_{-k} D_k$ $\quad (S_{ij}(\lambda))^{-1} = S_{ij}(-\lambda)$

Exemple de matriu escalonada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, té rang 4 perquè hi ha 4 files no nul·les.

Exemple de matriu escalonada equivalent i càlcul del rang:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

permutem files 1 i 2

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$2^a := 2^a - 3 \cdot 1^a$
$3^a := 3^a + 2 \cdot 1^a$
$4^a := 4^a - 5 \cdot 1^a$

permutem files
$2^a := 4^a$
$3^a := 2^a$
$4^a := 3^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 43 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 52 & -3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 1 & -3/52 & 14/52 \end{pmatrix}$$

$3^a := 3^a - 4 \cdot 2^a$
$4^a := 4^a - 4 \cdot 2^a$

$3^a := \frac{1}{43} \cdot 3^a$
$4^a := \frac{1}{52} 4^a$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & -233/2236 & -230/2236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/43 & 16/43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 230/233 \end{pmatrix} = B$$

$4^a := 4^a - 3^a$

$4^a := -2236/233 \times 4^a$

- B és una matriu escalonada per files equivalent a A.
- $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 4$, ja que B té 4 files no nul·les

EXEMPLES:

	A	A^{-1}
I)	$P_{3,6}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=P_{3,6}$
II)	$M_3(4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1/4&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=M_3(1/4)$
III)	$S_{6,3}(5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&5&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&-5&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=S_{6,3}(-5)$

Teorema

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i M una matriu escalonada equivalent a A. Aleshores A és invertible si i només si tots els elements de la diagonal de M són iguals a 1

Corol·lari

Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores A és invertible si i només si el rang d'A és n

Mètode de Gauss-Jordan per al càlcul de la inversa

Sigui $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

La demostració del teorema anterior implica que

si $I_n = E_r \cdots E_2 E_1 A$, aleshores $A^{-1} = E_r \cdots E_2 E_1$

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar A^{-1}, si existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{-1} = B$
- Altrament, A no és invertible

$$\underset{1^a = 1^a - 2^a}{\sim} \left(\underbrace{\begin{matrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{I_4}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}-26&17&-6&22\\20&-13&5&-17\\2&-1&0&-1\\-5&3&-1&4\end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

Per tant, A és invertible i:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-26&17&-6&22\\20&-13&5&-17\\2&-1&0&-1\\-5&3&-1&4\end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$2^a := 2^a - 1^a$
$3^a := 3^a - 2 \cdot 1^a$
$4^a := 4^a - 1^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$2^a := (-1) \times 2^a$

$3^a := 3^a - 2^a$
$4^a := 4^a - 2^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & +1 & +3 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & +2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

permutem les files 3 i 4 i les multipliquem per -1

$4^a := 4^a + (-4) \cdot 3^a$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 26 & -16 & 5 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -6 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20 & -13 & 5 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$1^a := 1^a + 4^a$
$2^a := 2^a - 5 \cdot 4^a$

$1^a := 1^a - 3^a$
$2^a := 2^a - 3 \cdot 3^a$

Sistemes d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \dots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

Solucions d'un sistema

Direm que un sistema és

- incompatible si no té cap solució
- compatible determinat si té una única solució
- compatible indeterminat si té més d'una solució

La **solució general** d'un sistema és el conjunt de totes les seves solucions

Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general

Sistemes equivalents

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents

I si en un sistema

- multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- a una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Matriu associada a un sistema

Donat el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

Exemple. Matriu associada al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = 0 \\ 3x + 3y - \frac{1}{2}z = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & -1/2 & 2 \end{array}\right)$$

$A \qquad b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1/2 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{}$$

$$\boxed{A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b}$$

sistema expressat de forma matricial.

Matriu ampliada

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és
- escalonada
- reduïda: hi ha zeros damunt dels pivots (és a dir, a la columna del pivot, els elements diferents del pivot són tots zeros)

Sistemes escalonats

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \ldots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

Solució general d'un sistema escalonat

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

$$\begin{cases} \#\text{ variables principals} = \operatorname{rang} A = r \\ \#\text{ variables lliures} = n - \operatorname{rang} A = n - r \end{cases}$$

Exemple

Si tenim una matriu reduïda equivalent, el sistema té les mateixes solucions que el sistema que correspon a aquesta matriu reduïda equivalent i per a donar el conjunt de totes les solucions podem aïllar directament les variables principals (les que corresponen a les columnes dels pivots) i donar-les en funció de les variables lliures (la resta de variables):

variables principals

variables lliures

$$(A|b) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

SOLUCIONS:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - 3x_5 + 2x_6 + 4 \\ x_3 = x_5 - 4x_6 + 5 \\ x_4 = -5x_5 + x_6 + 2 \end{array} \quad , \; x_2, x_5, x_6 \in \mathbb{K}}$$

Exemple.

Si el sistema és equivalent a un sistema amb matriu reduïda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

aleshores no té solució perquè la quarta equació equival a:

$$\underbrace{0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5+0x_6}_{0}=3 \qquad =3$$

que no es compleix mai!

Forma paramètrica de la solució general

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{aligned}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1}\begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Discussió de sistemes: el teorema de Rouché-Frobenius

Teorema

Considerem un sistema d'equacions lineals que té matriu associada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i matriu ampliada $(A|b)$

Sigui r el rang d'A i sigui r' el rang de $(A|b)$

Aleshores,

$r \neq r'$:
- si $r < r'$, el sistema és incompatible (SI)

$r = r'$
- si $r = r' = n$, el sistema és compatible determinat (SCD)
- si $r = r' < n$, el sistema és compatible indeterminat (SCI) amb $n - r$ graus de llibertat

Anomenarem rang d'un sistema lineal compatible al rang de la matriu associada

Sistemes homogenis

Un sistema d'equacions lineals és **homogeni** si tots els termes independents són iguals a 0

Obs. Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$)

Corol·lari

Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables; sigui r el rang d'A. Aleshores

- si $r = n$, el sistema és compatible determinat i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible indeterminat i té alguna solució diferent de la trivial

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Solucions. La solució és única, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = 3 \neq 4 = \mathrm{rang}(A|b) \Rightarrow$ Sistema Incompatible

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 =$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 3 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.
x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= 2 + x_5 - 5x_6 \qquad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ 2 + x_5 - 5x_6 \\ 3 - 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

Exemple 4. Sistema homogeni

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang}(A|b) = 3 < 7 =$ nombre d'incògnites $\Rightarrow$
Sistema Compatible Indeterminat amb 4 graus de llibertat

Solucions. Donem x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 &= x_5 - 5x_6 \qquad \textit{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K} \\ x_4 &= -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{aligned}$$

Exemple 4 (cont.)

Solucions en forma paramètrica.

x_1, x_3, x_4 en funció de x_2, x_5, x_6, x_7:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_3 = x_5 - 5x_6 \\ x_4 = 2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \end{cases} \quad \text{on} \quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$$

Forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 3x_5 - 4x_7 \\ x_2 \\ x_5 - 5x_6 \\ -2x_5 + 2x_6 - 2x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on $\quad x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{K}$

EXEMPLE DE DISCUSSIÓ DE SISTEMA

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

Fem transformacions elementals per files fins tenir una matriu equivalent escalonada

$\rightleftarrows$ permutem les files 1ª i 3ª

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ a & b & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & b-ab & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{cases} 2^a := 2^a - 1^a \\ 3^a := 3^a - a \cdot 1^a \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & ab-b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a + 2^a$

$ab - b = 0 \iff (a-1)b = 0 \iff a = 1 \;\text{ o }\; b = 0$

$\boxed{\text{CAS } b=0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & (a+2)(1-a) & -a \end{array}\right) \sim$$

$2 - a - a^2 = (a+2)(1-a)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -a+(a+2) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a \cdot (a+2)$

$rg A < rg A' \Rightarrow$ S. Incompatible

- si $1-a \neq 0$: $rg A = 2 < 3 = rg A'$
- si $1-a = 0$: $rg A = 1 < 2 = rg A'$

$\boxed{\text{cas } b \neq 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right)$$

CASOS

$\boxed{a=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$3^a := 3^a - 2^a$

$rg A = 1$

i $\begin{cases} rg A' = 1, \text{ si } b = 1 \\ rg A' = 2, \text{ si } b \neq 1 \end{cases}$

Per tant:

- $\boxed{b \neq 1}$: S. Incompatible
- $\boxed{b = 1}$: S.C. amb $\underset{\underset{\underbrace{3}_{\#\text{variables}} - \underbrace{1}_{rgA = rgA' = 1}}{\parallel}}{2}$ graus de llibertat

$\boxed{a \neq 1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & b-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & (a-1)b & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & b-a \end{array}\right)$$

$(a-1)b \neq 0$, $\quad (1-a) \neq 0$, $\quad (a+2) = 0 \iff a = -2$

Casos:

$\boxed{a=-2}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & -2 & 1 \\ 0 & -3b & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right)$

- $\boxed{b=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

  $rgA = rgA' = 2 \Rightarrow$ S.C.I amb $\underset{\underset{\underbrace{3-2}_{\#\text{variables}\ \ rgA=rgA'=2}}{\shortparallel}}{1}$ grau de llibertat

- $\boxed{b\neq-2}$: $\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{rgA} \neq \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{rgA'} \Rightarrow$ S.I

$\boxed{a\neq-2}$ $rgA = \underset{\underset{\#\text{variables}}{\shortparallel}}{3} = rgA' \Rightarrow$ S.C.D

RESUM DE CASOS:

- $b=0$: S.I.
- $b\neq0$
  - $a=1$
    - $b\neq1$: S.I.
    - $b=1$: S.C.I. amb 2 graus de llibertat
  - $a\neq1$
    - $a=-2$
      - $b=-2$: S.C.I amb 1 grau de llibertat
      - $b\neq-2$: S.I.
    - $a\neq-2$: S.C.D.

Es pot comprovar que és equivalent a:

- $a=1$
  - $b=1$: S.C.I.
  - $b\neq1$: S.I
- $a=-2$
  - $b=-2$: S.C.I
  - $b\neq-2$: S.I
- $a\neq1,-2$
  - $b=0$: S.I.
  - $b\neq0$: S.C.D.

Definició de determinant

Sigui $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un **menor d'$A$** és qualsevol matriu formada a partir d'A eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes

El **menor associat a l'element a_{ij}** és la matriu A_{ij} obtinguda en eliminar la fila i i la columna j de la matriu A.
El menor A_{ij} és una matriu quadrada de tipus $(n-1)\times(n-1)$

El **determinant d'A** es defineix recursivament com

- si $n=1$, aleshores $\det(A)=a_{11}$
- si $n\geq2$, aleshores

$$\begin{aligned}\det(A) \;=\; & a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + \\ & (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})\end{aligned}$$

L'**adjunt de l'element a_{ij}** és $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

Càlcul de determinants

(Enlloc de $\det(A)$, a vegades escriurem $|A|$)

- Matrius 2×2 i 3×3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\det((d)) - b\det((c)) = ad-bc$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei-fh) - b(di-fg) + c(dh-eg) \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi\end{aligned}$$

- Es demostren per inducció:
  Si A té una fila o una columna nul·la llavors $\det(A)=0$
  Si $A=Diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, llavors $\det(A)=a_1a_2\ldots a_n$

Teorema
Siguin $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i $i, j \in [n]$. Aleshores

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det(A_{ik})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la fila i)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det(A_{kj})$$

(Càlcul del determinant desenvolupant per la columna j)

Determinants i transformacions elementals

Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si B és la matriu que s'obté d'A

- intercanviant dues files, aleshores $\det(B) = -\det(A)$ (transformació tipus (I))
- multiplicant la fila i-èsima d'A per λ, aleshores $\det(B) = \lambda \det(A)$ (transformació tipus (II))
- sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores $\det(B) = \det(A)$ (transformació tipus (III))

Corol·lari
Si M s'obté a partir d'A fent transformacions elementals,

$$\det(M) = K \det(A), \qquad \text{on } K \neq 0$$

Per tant, si A i M són matrius equivalents aleshores,

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(M) \neq 0$$

Caracterització de matrius invertibles

Teorema
Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$

Corol·lari
Una matriu $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té rang n si i només si $\det(A) \neq 0$

Teorema
Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El rang d'$A$ és r si i només si el més gran menor d'A amb determinant no nul és $r \times r$

Determinants i operacions amb matrius

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, aleshores

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$
- si A és invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

Però en general, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\mathbb{R}^n$ i les seves operacions

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n \right\}$$

Siguin $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ elements de $\mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}$

Suma a $\mathbb{R}^n$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Producte per escalars a $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

(És a dir, les dues operacions són "component a component")

Propietats

La suma a $\mathbb{R}^n$ satisfà les propietats següents:

s1) (associativa) $x + (y + z) = (x + y) + z$

s2) (commutativa) $x + y = y + x$

s3) (element neutre) $x + \mathbf{0} = x$ on $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

s4) (element oposats) per tot x existeix x' tal que $x + x' = \mathbf{0}$

El producte per escalars a $\mathbb{R}^n$ satisfà:

p1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

p2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

p3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

p4) $1x = x$

(Totes les propietats són certes perquè ho són a $\mathbb{R}$ i les operacions són component a component)

6.2 Espais vectorials

$\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \ldots$

Un **espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$** consisteix en

1. un conjunt no buit E
2. una operació interna $E \times E \to E$ (*suma* $+$) i
3. una aplicació $\mathbb{K} \times E \to E$ (*producte per escalars* $\cdot$)

de manera que per a tot $u, v, w \in E$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es satisfà:

e1) *(associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$

e2) *(commutativa)* $u + v = v + u$

e3) *(element neutre)* existeix un únic element $\mathbf{0}_E \in E$ tal que $u + \mathbf{0}_E = u$

e4) *(element oposat)* per cada $u \in E$ existeix un únic $u' \in E$ tal que $u + u' = \mathbf{0}_E$

e5) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

e6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

e7) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

e8) $1u = u$, on 1 és el neutre del producte de $\mathbb{K}$

{ Elements d'E : "vectors"
{ Elements de $\mathbb{K}$: "escalars"

E e.v. sobre $\mathbb{K}$:

4 operacions
{ + d'escalars
{ · d'escalars } $\mathbb{K}$
{ + de vectors
{ · escalar/vector

$\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

prod escalar/vector — prod escalar/escalar

$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

suma vectors — suma vectors

$(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$

suma escalars — suma vectors

Espais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
Si $u_1, \dots, u_k \in E$, $((u_1)_B, \dots, (u_k)_B)$ representa la matriu que té per **columnes** les coordenades dels vectors $u_1, \dots, u_k$ en la base B.

(1) $v \in < u_1, \dots, u_k > \Leftrightarrow$
$\text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B, (v)_B)$.

(2) v és pot expressar com a C.L. dels vectors $u_1, \dots, u_k$ d'almenys dues maneres diferents $\Leftrightarrow$
$\text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B, (v)_B) = \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) < k$.

(3) $u_1, \dots, u_k$ són L.I. $\Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) = k$.

(4) $u_1, \dots, u_k$ són L.D. $\Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) < k$.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

(5) $\{u_1, \dots, u_n\}$ és base de $E \Leftrightarrow \text{rang}((u_1)_B, \dots, (u_n)_B) = n \Leftrightarrow$ $\det((u_1)_B, \dots, (u_n)_B) \neq 0$.

(6) $u_1, \dots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ existeix una base de E que conté $u_1, \dots, u_k$.
Vegeu les pàgines 7 i 8.

(7) $u_1, \dots, u_k$ L.I. $\Rightarrow$ es pot completar amb $n-k$ vectors adequats d'una base qualsevol fins una base de E.
Vegeu les pàgines 7 i 8.

Subespais vectorials

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base de E.

Maneres de donar un subespai F de E:

(a) $F = < u_1, \dots, u_k >$.
(b) Base de F: $B_F = \{v_1, \dots, v_r\}$.
(c) Com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni amb variables $x_1, \dots, x_n$.

Base i dimensió en cada cas:

(a) Vegeu les pàgines 5 i 6.
(b) Ens donen. La dimensió d'F és $|B_F|$.
(c) La dimensió d'F és el nombre de graus de llibertat del sistema. Base: la trobem a partir de l'expressió de la solució en forma paramètrica.

Com expressar un subespai F de dimensió r com a solució d'un sistema homogeni coneguda una base $B_F = \{v_1, \dots, v_r\}$ d'F:
imposem que $\text{rang}((v_1)_B, \dots (v_r)_B, (x)_B) = r$,
on $(x)_B = (x_1, \dots, x_n)$ és un vector genèric d'E.

Base i dimensió d'un subespai (Mètode I)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E.
$F = < u_1, \dots, u_k >$, on $u_1, \dots, u_k \in E$
$A = ((u_1)_B, \dots, (u_k)_B) \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{K})$

- $\dim F = \text{rang } A$.
- Una base d'F formada per vectors de $u_1, \dots, u_k$: prenem els vectors de $u_1, \dots, u_k$ corresponents a les columnes dels pivots d'una matriu escalonada equivalent a A per files (o sigui, u_i és d'aquesta base si i només si a la columna i de la matriu escalonada hi ha un pivot).

  A més, si tenim la matriu escalonada **reduïda** equivalent a A per files (a la columna del pivot només hi ha un 1 i la resta són 0's), a les columnes que no corresponen als pivots tenim els coeficients del vector corresponent com a combinació lineal lineal de la base donada.

Base i dimensió d'un subespai (Mètode II)

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n, B base d'E
$F = < u_1, \ldots, u_k >$, on $u_1, \ldots, u_k \in E$.

Considerem la matriu $A' = \begin{pmatrix} (u_1)_B \\ \vdots \\ (u_k)_B \end{pmatrix}$ que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B.

- $\dim F = \operatorname{rang} A'$;
- una base d'F està formada pels vectors fila no nuls d'una matriu escalonada equivalent a A' per files.

Observació. En general, si dues matrius són equivalents per files, els vectors vectors fila de les dues generen el mateix subespai.

Completar bases de subespais

E espai vectorial de dimensió n, B base d'E
F subespai d'E de dimensió r, $\{u_1, \ldots, u_r\}$ base d'F
Volem trobar una base d'E que contingui els vectors $\{u_1, \ldots, u_r\}$

- **Mètode I.** Busquem $n - r$ vectors $w_1, \ldots, w_{n-r}$, de la base B tals que $\operatorname{rang}((u_1)_B, \ldots, (u_r)_B, (w_1)_B, \ldots, (w_{n-r})_B) = n$ (a ull i anar provant!)
- **Mètode II.** Si A' és la matriu que té per **files** les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_k$ en la base B, fem transformacions elementals per files fins una matriu escalonada equivalent (amb els pivots no necessàriament iguals a 1). Les files no nules formen una base d'F i podem completar amb els vectors fila que tenen totes les coordenades iguals a 0 excepte una única coordenada igual a 1 en les columnes que no corresponen als pivots de la matriu escalonada.

Exemple. Si al posar per files els 4 vectors que generen un subespai F de $\mathbb{R}^6$ arribem a la matriu equivalent de l'esquerra, una base d'F està formada per les 3 files no nul·les i la podem completar amb els 3(=6-3) vectors fila de la base canònica que tenen l'1 a les columnes on no hi ha pivots (en vermell):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 0 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} & \color{red}0 \\ \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}0 & \color{red}\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Inclusió de subespais

$F = < u_1, \ldots, u_r >$, $G = < v_1, \ldots, v_s >$ subespais d'E

- $F \subseteq G \Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G$
- $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G$ i $G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G$ i $v_1, \ldots, v_s \in F$
- Si $\dim F = \dim G$:
  $F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \Leftrightarrow G \subseteq F$
  $\Leftrightarrow u_1, \ldots, u_r \in G \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_s \in F$

Intersecció de subespais

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

La unió de subespais vectorials no és normalment un subespai vectorial, com és el cas per exemple de $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ i $S' = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ ($(1, 1) + (2, -2) \notin S \cup S'$)

Combinació lineal

Donats $u_1, \dots, u_k$ vectors d'E, una **combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$** és una expressió del tipus

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$

on $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ són escalars

El vector **v és combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$** si existeixen escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tals que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k$$

Lema Si S i S' són subespais vectorials d'E, aleshores $S \cap S'$ també ho és

- $S \cap S' \neq \emptyset$:

S, S' subespais d'$E \Rightarrow \begin{cases} 0_E \in S \\ 0_E \in S' \end{cases} \Rightarrow 0_E \in S \cap S' \Rightarrow S \cap S' \neq \emptyset$

- $u, v \in S \cap S' \Rightarrow u + v \in S \cap S'$:

S és subespai d'E

$\begin{cases} u \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} u \in S \\ u \in S' \end{cases} \Rightarrow u + v \in S \\ v \in S \cap S' \Rightarrow \begin{cases} v \in S \\ v \in S' \end{cases} \Rightarrow u + v \in S' \end{cases} \Rightarrow u + v \in S \cap S'$

S' és subespai d'E

- $\lambda \in \mathbb{K}, u \in S \cap S' \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$:

S subespai d'E

$\left.\begin{matrix} u \in S, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S \\ u \in S', \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lambda u \in S \cap S'$

S' subespai

Subespai generat

Siguin $u_1, \dots, u_k$ vectors d'E. El **subespai generat** per $u_1, \dots, u_k$ és el conjunt

$$\langle u_1, \dots, u_k \rangle = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\},$$

és a dir, el conjunt de totes les combinacions lineals de $u_1, \dots, u_k$

Proposició
El subespai generat $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ és, com el seu nom indica, un subespai vectorial. A més, és el subespai més petit que conté $u_1, \dots, u_k$

Si un espai S el podem escriure com $S = \langle u_1, \dots, u_\ell \rangle$, direm que $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ és un **conjunt de generadors** de S. El conjunt de generadors d'un espai no és únic

Observem que v és combinació lineal de $u_1, \dots, u_k$ si i només si $v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} =$
$= \{x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1) \rangle$

En general, el conjunt de generadors d'un subespai no és únic. P.e., es pot demostrar que:

$\mathbb{R}^3 \begin{cases} = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle \\ = \langle (1,1,0), (1,0,0), (1,1,1) \rangle \\ = \langle (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1), (1,2,3), (4,5,6) \rangle \end{cases}$

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} =$
$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$
$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

- $P_d(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\} =$
$= \{a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_d \cdot x^d : a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}\}$
$= \langle 1, x, \dots, x^d \rangle$

Exemples:

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & c \\ d & c-a & b+2c \end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$

  Demostreu que S és subespai de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, S és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$

i $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S

- $S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ 2a-3b \\ a+b+c \end{pmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$

  Demostreu que S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -3b \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, S és subespai de $\mathbb{R}^4$ i $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\{\alpha+(\alpha+\beta)x+(\alpha-2\beta)x^2+(2\alpha+\beta)x^3 : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\subseteq P_3(\mathbb{R})$

  Demostreu que S és subespai de $P_3(\mathbb{R})$ i doneu un conjunt de generadors.

$$S=\{\alpha(1+x+x^2+2x^3)+\beta(x-2x^2+x^3) : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=$$

$$=\langle 1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\rangle$$

Per tant, S és subespai de $P_2(\mathbb{R})$ i $\{1+x+x^2+2x^3,\ x-2x^2+x^3\}$ és un conjunt generador de S.

- $S=\left\{\text{solucions del sistema homogeni } \begin{cases} x=2y-t \\ z=3t \end{cases}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$

  Sabem que S és subespai de $\mathbb{R}^4$. Doneu un conjunt generador de S.

Resolem el sistema i donem les solucions de forma paramètrica:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{rg}A=2}$$

variables principals: x,z ; variables lliures: y,t

$$\begin{cases} x=2y-t \\ z=3t \end{cases}\quad y,z\in\mathbb{R}$$

Solucions:

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x=2y-t \\ z=3t \end{array}, y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 2y-t \\ y \\ 3t \\ t \end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : y,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Per tant, $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ és un conjunt generador de S.

OBSERVACIONS:

- En general, un subespai té més d'un conjunt generador.

  P.e: es pot demostrar que:

$$\mathbb{R}^3=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\rangle$$

- Si un vector es pot expressar com a combinació lineal d'uns altres, la forma d'expressar-lo com a combinació lineal d'aquests vectors no és necessàriament única.

  P.e.: $(5,-1,-4)$ es pot expressar com a combinació lineal de $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,0,-1)$ d'almenys dues maneres diferents:

$$(5,-1,-4)=\begin{cases} 3\cdot(1,-1,0)+2\cdot(0,1,-1)+2(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0)+3\cdot(0,1,-1)+1\cdot(1,0,-1) \end{cases}$$

- No sempre es pot expressar un vector com a combinació lineal d'un conjunt de vectors donats.

  P.e. $(1,1,0)$ no és c.l. de $(0,0,1)$ i $(1,0,0)$, ja que les combinacions lineals d'aquest vectors són els vectors de la forma $\{a(0,0,1)+b(1,0,0) : a,b\in\mathbb{R}\}=\{(a,0,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$ és a dir, la segona component és sempre 0, cosa que no compleix el vector $(1,1,0)$.

- Combinacions lineals de $u_1,\dots,u_r\in E$:

  $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r$, $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}$

- Subespai generat per $u_1,\dots,u_r$:

  $\langle u_1,\dots,u_r\rangle=\{\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r : \alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K}\}$

- Si $v\in\langle u_1,\dots,u_r\rangle$ aleshores

  $\exists\,\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbb{K},\quad v=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_ru_r$

  però en general $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ no són únics

  p.e:

$$(5,-1,-4)=\begin{cases} 3\cdot(1,-1,0)+2\cdot(0,1,-1)+2\cdot(1,0,-1) \\ 4\cdot(1,-1,0)+3\cdot(0,1,-1)+1\cdot(1,0,-1) \end{cases}$$

6.4 Independència lineal

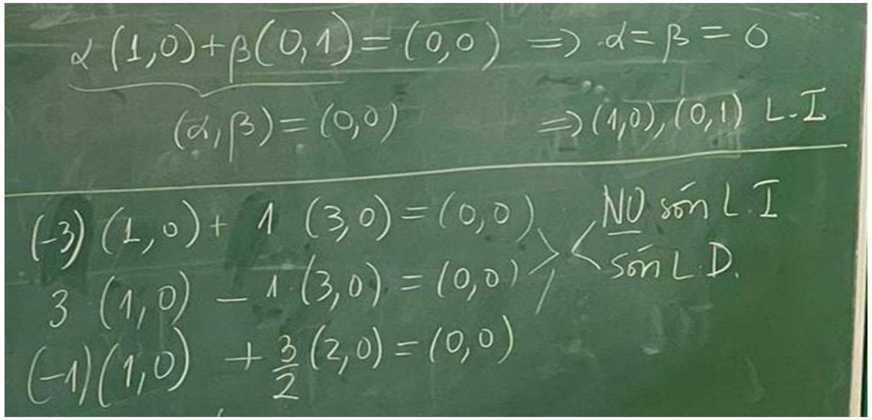
Siguin $u_1, \dots, u_k \in E$. L'equació

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

sempre té la solució $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.
Si aquesta és l'única solució direm que els vectors $u_1, \dots, u_k$ són **linealment independents** (LI)

Si hi ha alguna solució amb un $\lambda_i \neq 0$, direm que els vectors són **linealment dependents** (LD)

(També direm que el conjunt $\{u_1, \dots, u_k\}$ és LI o LD, resp.)



En general, per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E són linealment independents seguim els passos següents:

(1) a partir de l'equació vectorial

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k = \mathbf{0}_E$$

obtenim un sistema homogeni amb incògnites $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

(2) discutim el sistema, si és
- compatible determinat els vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ són LI
- compatible indeterminat els vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ són LD

Per determinar si un conjunt de vectors $u_1, u_2, \dots, u_k$ de $\mathbb{R}^n$ són linealment independents seguim els passos següents:

(1) formem una matriu A amb els vectors donats, posant-los per columnes

(2) calculem el rang r d'A

(3)
- si $r = k$, aleshores els k vectors són LI
- si $r < k$, aleshores són LD; si hem calculat el rang escalonant la matriu A, aleshores els vectors que corresponen a les columnes on hi ha els uns dominants són un subconjunt LI el més gran possible; si hem calculat el rang per menors, els vectors que corresponent a les columnes del menor d'A més gran amb determinant no nul són un subconjunt LI el més gran possible

$$\boxed{u_1, u_2, \dots, u_k \text{ L.I.} \Leftrightarrow rg(u_1, \dots, u_k) = k}$$

Exemples:

① $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C. Det. $\Leftrightarrow$ rg $A = 3$ (= # incog.)
L.D. $\Leftrightarrow$ S.C. Indet $\Leftrightarrow$ rg $A < 3$ (= # incog.)

on $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

rg$A = 2 < 3 \Rightarrow$ L.D.

② $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\} \text{ l.i. ?}}$ $\mathbb{R}^3$

$$x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ sistema homogeni 3 incog.

L.I. $\Leftrightarrow$ S.C.Det. $\Leftrightarrow$ rg $A = 3$ (= # incog)
L.D. $\Leftrightarrow$ S.C.Indet. $\Leftrightarrow$ rg $A < 3$ (= # incog)

on $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&-1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&2\end{pmatrix}$

rg $A = 3 \Rightarrow$ S.C.D : només té la solució trivial $x = y = z = 0$
$\Rightarrow$ són L.I.

Intersecció de subespais

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

Casos:

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

(b) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \dots, u_s\}$.

(c) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat coma solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(a) F, G donats com a solució de sistemes homogenis.

Resoldre el sistema format per les equacions d'F i de G.

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(b) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$, base de G: $\{u_1, \dots, u_s\}$.

- $w \in F \cap G \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$.
- Resolem el sistema amb n equacions i les $r + s$ incògnites $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ que prové de la igualtat: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ (o bé substituïm les solucions obtingudes per a $\beta_1, \dots, \beta_s$ en $w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_s u_s$).

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n. F, G subespais d'E.
Base d'$F \cap G$?

(c) Base d'F: $\{v_1, \dots, v_r\}$; G donat com a solució d'un sistema d'equacions lineals homogeni.

- $w \in F \Leftrightarrow w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.
- A partir de la igualtat anterior, substituïm les n coordenades de w (en funció de les α_i's) en el sistema que defineix G.
- Resolem el sistema obtingut amb n equacions i les r incògnites $\alpha_1, \dots, \alpha_r$.
- Substituïm les solucions obtingudes per a $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ en $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$.

Canvis de base

E $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n;

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B'\{b'_1, \dots, b'_n\}$ bases d'E;

$u \in E$. Relació entre $(u)_B$ i $(u)_{B'}$:

- Matriu de canvi de base de B a B': $P^B_{B'} = ((b_1)_{B'}, \dots, (b_n)_{B'})$
- $(u)_{B'} = P^B_{B'}\,(u)_B$

- Matriu de canvi de base de B' a B: $P^{B'}_B = ((b'_1)_B, \dots, (b'_n)_B)$
- $(u)_B = P^{B'}_B\,(u)_{B'}$

- $P^{B'}_B = (P^B_{B'})^{-1}$

- $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E:
  $P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r}\,P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \dots P^{B_2}_{B_3}\,P^{B_1}_{B_2}$

MÈTODE PER TROBAR EL MÀXIM # DE VECTORS L.I D'UN CONJUNT DE VECTORS DE $\mathbb{R}^n$

- Posem els vectors per columnes $\rightsquigarrow A = (u_1, \dots, u_k)$
- B matriu reduïda equivalent a A per files
  - el conjunt S de vectors de les columnes dels pivots són L.I.
  - a la resta de columnes tenim els coeficients del vector corresponent com a C.L. dels vectors de S

p.e.: $\{u_1, \dots, u_6\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underbrace{\sim \dots \sim}_{\text{transf. elementals files}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$
- $\{u_1, u_2, u_3, u_5\}$ són L.I.
- $u_4 = 2u_1 - u_2 + u_3$
- $u_6 = u_1 + u_2 - 2u_5$

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'E

(1) **Proposició**

Tot vector d'E s'escriu de manera única com a combinació lineal dels vectors de B

Sigui $v \in E$. Si $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, diem que

$$\mathbf{v_B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

és el **vector de coordenades** de v en la base B

(2) **Proposició**

Sigui $\{u_1, \dots, u_k\}$ un conjunt de vectors d'E que són LI. Aleshores $k \leq n$

(3) **Corol·lari**

Tota base d'E té n elements

$$\boxed{\begin{array}{l} v \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \text{ tq. } v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k v_k \end{array}}$$

discutir un sistema d'equacions lineals

p.e.: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = W$

Plantegem l'equació:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

té solució $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ rg A = rg A'

Comprovem si té solució:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rg A = rg A' = 3 $\Rightarrow$ té solució

$\Rightarrow \boxed{v \in W}$

6.5 Bases i dimensió

Sigui E un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un conjunt de vectors $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ és una **base d'E** si

(b1) B és linealment independent

(b2) $E = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, és a dir, $b_1, b_2, \dots, b_n$ generen E

La **base canònica**

- de $\mathbb{K}^n$ és $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$
- de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és la formada per les mn matrius M_{ij} que tenen totes les entrades nul·les excepte la i, j, que és igual a 1
- de $\mathbb{K}_d[x]$ és $\{1, x, x^2, \dots, x^d\}$ (també a $\{x^d, x^{d-1}, \dots, 1\}$ li direm base canònica, caldrà especificar quina usem)

$\rightarrow P_d(\mathbb{K})$

Dimensió

Al cardinal de les bases d'un espai vectorial E (o d'un SEV) l'anomenem la **dimensió** de l'espai, denotada **dim(E)**

- Les dimensions dels espais amb els que treballem habitualment són:
  $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})) = nm$, i $\dim(\mathcal{P}_d(\mathbb{K})) = d+1$
- La dimensió del subespai $\{\mathbf{0}_E\}$ és 0
- La dimensió del subespai $\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$ donat per generadors és el nombre màxim de vectors LI entre $\{u_1, \ldots, u_k\}$ (que és igual al rang de la matriu que té per columnes les coordenades de $u_1, \ldots, u_k$)
- La dimensió d'un subespai donat com a solució d'un sistema d'equacions homogeni és el nombre de graus de llibertat del sistema

Suposem que la dimensió d'E és n i sigui $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunt d'E

- si W és un conjunt LI, aleshores W és una base d'E
- si W genera E, aleshores W és una base d'E

Si S és un subespai d'E aleshores

- $\dim(S) \leq \dim(E)$
- si $\dim(S) = \dim(E)$, $S = E$

ATENCIÓ!

E e.v., S_1, S_2 subespais d'E

- $\dim S_1 = \dim S_2 \not\Rightarrow S_1 = S_2$
- $S_1 \subseteq S_2$ i $\dim S_1 = \dim S_2 \Longrightarrow S_1 = S_2$

E espai vectorial de dimensió n:

- n és el màxim nombre de vectors L.I. que podem trobar a E
- n és el mínim nombre de vectors que calen per generar E

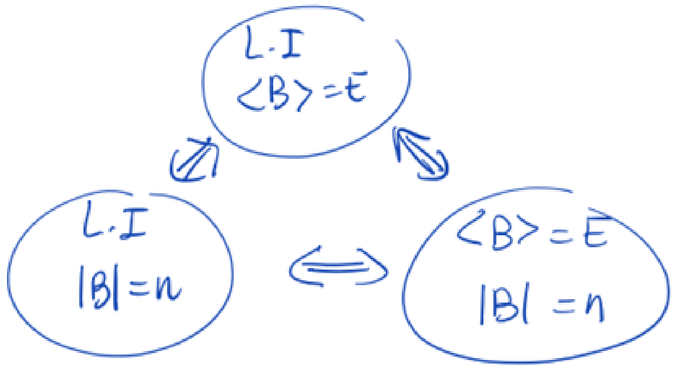
és a dir, $S \subseteq E$:

$$\begin{cases} S \text{ L.I.} \Rightarrow |S| \leq n \\ \langle S\rangle = E \Rightarrow |S| \geq n \end{cases}$$

Si $\dim E = n$:

$$B \subseteq E \begin{cases} \text{L.I.} \\ \langle B\rangle = E \\ |B| = n \end{cases}$$

dues d'aquestes condicions impliquen la tercera



Exemple 1. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Coordenades de $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u}$ en la base B ?

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base canònica

conec: $\underset{!}{(u)_C}$ volem: $\underset{?}{(u)_B}$

Matriu de canvi de base:

conec B en base C : $P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{!}{P_C^B} \cdot \underset{?}{(u)_B} = \underset{!}{(u)_C}$$

conec:

$$\boxed{(u)_B} = (P_C^B)^{-1} \cdot (u)_C$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}}$$

Exemple 2. $P_2(\mathbb{R})$

$B = \{2 - 2x + x^2, 1 - x, 2 - 2x^2\}$. Expresseu $\underbrace{x + 2x^2}_{p}$ en la base B.

$C = \{1, x, x^2\} \rightsquigarrow$ base canònica.

Conec: $P_C^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\underset{!}{P_C^B} \, \underset{?}{(p)_B} = \underset{!}{(p)_C}$

Conec $(p)_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Volem: $(p)_B$?

$$P_C^B (p)_B = (p)_C \Rightarrow \boxed{(p)_B} = (P_C^B)^{-1} \cdot (p)_C =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

Per tant:

$$p = x + 2x^2 =$$
$$= 3 \cdot (2 - 2x + x^2) + (-7) \cdot (1 - x) + \tfrac{1}{2}(2 - 2x^2) = .$$

Exemple 3. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Expresseu $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{M}$ en la base B.

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Coneixem: $(M)_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

volem: $(M)_B = ?$

conec: $P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{!}{P_C^B} \, \underset{?}{(M)_B} = \underset{!}{(M)_C} \Rightarrow \boxed{(M)_B} = (P_C^B)^{-1} \cdot (M)_C =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Per tant:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-6) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 4. $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$, $(u)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculeu $(u)_{B'}$.

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

conec: $\underbrace{P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P^B_C (u)_B = (u)_C}$, $\underbrace{P^{B'}_C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}_{P^{B'}_C (u)_{B'} = (u)_C}$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{P^B_C}_{!} \underbrace{(u)_B}_{!} = \underbrace{P^{B'}_C}_{!} \underbrace{(u)_{B'}}_{?}$$

Conec:

$$\left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = (u)_{B'}$$

$$\Rightarrow \boxed{(u)_{B'}} = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C (u)_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -27 \\ -16 \end{pmatrix}}$$

Hem vist:

B, B', C bases d'E $\Rightarrow P^B_{B'} = P^C_{B'} \cdot P^B_C = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} \cdot P^B_C$

ja que:

$$\left.\begin{array}{l} P^B_C (u)_B = (u)_C \\ P^{B'}_C (u)_{B'} = (u)_C \end{array}\right\} \Rightarrow P^B_C (u)_B = P^{B'}_C (u)_{B'} \Rightarrow \left(P^{B'}_C\right)^{-1} P^B_C (u)_B = (u)_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P^B_{B'} = \left(P^{B'}_C\right)^{-1} P^B_C = P^C_{B'} P^B_C$$

En general:

$B_1, B_2, \dots, B_{r-1}, B_r$ bases d'E $\Rightarrow P^{B_1}_{B_r} = P^{B_{r-1}}_{B_r} P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots P^{B_2}_{B_3} \cdot P^{B_1}_{B_2}$

ja que:

$$P^{B_1}_{B_r} (u)_{B_1} = (u)_{B_r}$$

$$\underbrace{P^{B_{r-1}}_{B_r} \cdot \underbrace{P^{B_{r-2}}_{B_{r-1}} \cdots \underbrace{P^{B_2}_{B_3} \cdot \underbrace{P^{B_1}_{B_2} (u)_{B_1}}_{(u)_{B_2}}}_{(u)_{B_3}}}_{\text{etc.}}}_{(u)_{B_r}} = (u)_{B_r}$$

7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, direm que f és un **endomorfisme**

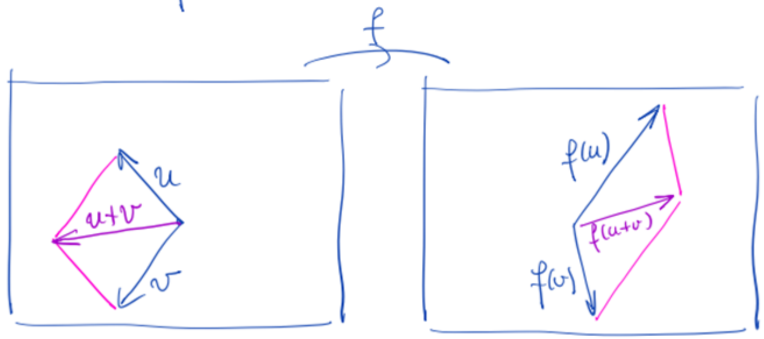
Exemples

1. ▸ Aplicació trivial. $f : E \to F$ on $f(u) = 0_F$, $u \in E$, és lineal
2. ▸ Aplicació identitat. $I_E : E \to E$ on $I_E(u) = u$, $u \in E$, és lineal
3. ▸ L'aplicació següent no és lineal

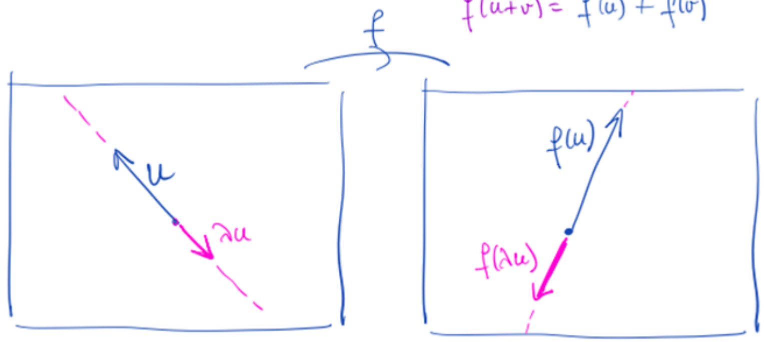
$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2-(a+d)x+(2c-b)$$

4. ▸ L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal
5. ▸ $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ t.q. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és lineal

p.e. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineal :



$f(u+v) = f(u) + f(v)$



$f(\lambda u) = \lambda f(u)$

① $f : E \to F$ t.q. $f(u) = 0_F$, $\forall u \in E$, és lineal :

(1) $u, v \in E$ $\quad f(u+v) \overset{?}{=} f(u) + f(v)$

$\quad\quad 0_F = 0_F + 0_F$ cert!

(2) $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad f(\lambda u) \overset{?}{=} \lambda f(u)$

$\quad\quad 0_F = \lambda \cdot 0_F$ cert!

② $I_E : E \to E$ t.q. $I_E(u) = u$, $\forall u \in E$ és lineal :

(1) $I_E(u+v) \overset{?}{=} I_E(u) + I(v)$

$\quad\quad u+v = u + v$ cert!

(2) $I_E(\lambda u) \overset{?}{=} \lambda \cdot I_E(u)$

$\quad\quad \lambda u = \lambda \cdot u$ cert!

③ $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2-(a+d)x+(2c-b)$

NO és lineal :

$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - x$, $f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$

però :

$2 \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2x^2 - 2x$

$\neq$

$f\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 - 2x$

④ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2y^2, x+y)$ no és lineal

$f(1,1) = (1,2)$, $f(2,2) = (16,4)$

però :

$f((1,1)+(1,1)) = f(2,2) = (16,4)$

$\neq$

$f(1,1) + f(1,1) = (1,2) + (1,2) = (2,4)$

⑤ $\boxed{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ t.q. } f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ és lineal :}}$

Si denotem $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ aleshores :

(1) $\forall X, X' \in \mathbb{K}^n$:

$$\boxed{f(X+X')} = A(X+X') = AX + AX' = \boxed{f(X) + f(X')}$$

(2) $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\boxed{f(\lambda X)} = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \boxed{\lambda f(X)}$$

Propietats

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores

1 ▸ $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$

2 ▸ $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in E$

3 ▸ si S és un subespai d'E, $f(S)$ és un subespai d'F

4 ▸ si S' és un subespai d'F, $f^{-1}(S')$ és un subespai d'E

Proposició $f: E \to F$ apl. lineal.

Sigui $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base d'E. Aleshores f està unívocament determinada per $f(b_1), \ldots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d'E: $u \in E$

si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, aleshores $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$

Corol·lari

5 Si $S = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ és un subespai d'E, aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_k) \rangle$$

1 $f(0_E) = 0_F$, si f és una aplicació lineal:

Demostració: $f(0_E) = f(0 \cdot 0_E) = 0 \cdot f(0_E) = 0_F$

Aquesta propietat és útil per a demostrar que algunes aplicacions no són lineals:

$$\boxed{f(0_E) \neq 0_F \implies \text{NO és lineal}}$$

P.e.: són lineals les aplicacions següents?

(a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tq. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\x-y\\3z+1\\x-z\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \implies$ NO és lineal

(b) $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq. $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix}a+b+c & 2(a+1)\\ b+3c & c-a\end{pmatrix}$

$f(0) = f(0+0x+0x^2) = \begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow$ NO és lineal

2 $f(-u) = -f(u)$, si f és lineal:

Demostració: $f(-u) = f((-1)\cdot u) = -1 \cdot f(u) = -f(u)$

3 Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S subespai d'$E \Rightarrow f(S)$ és subespai d'F?

(1) $f(S) \neq \emptyset$?

S subespai d'$E \Rightarrow 0_E \in S \Rightarrow f(0_E) \in f(S)$ cert!

$\Rightarrow f(S) \neq \emptyset$ $\quad f(0_E) = 0_F$

(2) $v, v' \in f(S) \overset{?}{\Rightarrow} v+v' \in f(S)$

$\Downarrow$

$v \in f(S) \Rightarrow v = f(u)$, $u \in S$

$v' \in f(S) \Rightarrow v' = f(u')$, $u' \in S$ $\Rightarrow u+u' \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{v+v'} = f(u) + f(u') \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\underset{\in S}{u+u'}) \boxed{\in f(S)}$ cert!

(3) $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in f(S) \overset{?}{\Rightarrow} \alpha v \in f(S)$

$\Downarrow$

$v = f(u)$, $u \in S$ i $\alpha u \in S$ per ser S subespai

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha v} = \alpha f(u) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(\underset{\in S}{\alpha u}) \boxed{\in f(S)}$ cert!

6 $\boxed{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ tq. } f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y\\-3x+y\end{pmatrix} \text{ és lineal?}}$

• $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}x+2y\\-3x+y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'+2y'\\-3x'+y'\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x+x'+2(y+y')\\-3(x+x')+(y+y')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+x'+2y'\\-3x+y-3x'+y'\end{pmatrix}$ cert!

• $f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} \lambda \cdot f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$ $\qquad \lambda\begin{pmatrix}x+2y\\-3x+y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\lambda x+2\lambda y\\-3\lambda x+\lambda y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x+2\lambda y\\-3\lambda x+\lambda y\end{pmatrix}$ cert!

Per tant, f és una aplicació lineal

OBSERVACIÓ: Veiem que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es pot definir:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1&2\\-3&1\end{pmatrix}$$

Per tant, amb l'exemple/propietat 5 podem deduir directament que és lineal.

4. Demostració: $f: E \to F$ aplicació lineal

S' subespai d'F $\Rightarrow$ $\underbrace{f^{-1}(S')}_{\{u \in E \,:\, f(u) \in S'\}}$ és subespai d'E ?

(1) $f^{-1}(S') \neq \emptyset$?

$0_F \in S'$ i $f(0_E) = 0_F \in S'$ $\Rightarrow$ $0_E \in f^{-1}(S')$

$\Rightarrow f^{-1}(S') \neq \emptyset$ cert!

(2) $\underbrace{u, u' \in f^{-1}(S')}_{\substack{f(u) \in S' \\ f(u') \in S'}} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{u + u' \in f^{-1}(S')}_{f(u+u') \in S'}$

S' subespai $\rightarrow$ $\Downarrow$ $\qquad \Uparrow$

$f(u) + f(u') \in S' \Rightarrow f(u+u') = f(u) + f(u') \in S'$ cert!

f lineal

(3) $\underbrace{\alpha \in \mathbb{K},\ u \in f^{-1}(S')}_{\alpha \in \mathbb{K},\ f(u) \in S'} \overset{?}{\Rightarrow} \underbrace{\alpha u \in f^{-1}(S')}_{f(\alpha u) \in S'}$

S' subespai $\rightarrow$ $\Downarrow$ $\qquad \Uparrow$

$\alpha f(u) \in S' \Rightarrow f(\alpha u) = \alpha f(u) \in S'$ cert!

f lineal

5. Si $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$ aleshores:

$$f(S) = \{f(u) : u \in S\} =$$
$$= \{f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$
$$= \{\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$
$$= \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$$

tificació :

$\in E$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ base d'E :

$= \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, per a escalars $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\Downarrow$

$) = f(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n)$

$\Downarrow$

$u))_W = (\alpha_1 f(b_1) + \dots + \alpha_n f(b_n))_W = \alpha_1 (f(b_1))_W + \dots + \alpha_n (f(b_n))_W$

$$(f(u))_W = \underbrace{\begin{pmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ (f(b_1))_W & \cdots & (f(b_n))_W \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}}_{M_W^B(f)} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{(u)_B}$$

$M_W^B(f)$

$\cap$

$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$

m = dim F, n = dim E

Si $f: \underset{B_1}{E} \longrightarrow \underset{B_2}{E}$ és un endomorfisme i $\dim E = n$

aleshores $M_{B_2}^{B_1}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si f és un endomorfisme, normalment s'utilitza la mateixa base a l'espai de sortida i al d'arribada, o sigui $B_1 = B_2 = B$.

Exemple 2.

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y+2z \\ y-3z \end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en base canònica $C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

b) $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ ja que:

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$

Exemple ①.

$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+z\\2x-z\end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$C_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$ i $C_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$?

b) Calculeu $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$M=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ: $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+z\\2x-z\end{pmatrix}$

b) $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$, ja que:

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$$

c) $f^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(M\ \middle|\ \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\2&0&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&-4&-3&-1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&1\\0&1&3/4&1/4\end{array}\right)\sim\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}1&0&-1/2\\0&1&3/4\end{matrix}}_{rg M=2}&\begin{matrix}1/2\\1/4\end{matrix}\end{array}\right)}_{rg M'=2}$$

S.C.I. ja que $rg M = rg M' = 2 < \underset{\#\text{incògnites}}{3}$

Solució:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2+1/2\,z\\1/4-3/4\,z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/4\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1/2\\-3/4\\1\end{pmatrix},\quad z\in\mathbb{R}$$

Per tant:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1/2\\1/4\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1/2\\-3/4\\1\end{pmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1/2\\1/4\\0\end{pmatrix}+\left\{z\begin{pmatrix}1/2\\-3/4\\1\end{pmatrix} : z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}1/2\\1/4\\0\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}1/2\\-3/4\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Exemple ③.

$f:P_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a&a+b\\a-b&2b-c\end{pmatrix}$ aplicació lineal.

a) Matriu associada en bases canòniques:

$B=\{1,x,x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i $W=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

b) Calculeu $f(1+x+2x^2)$ utilitzant la matriu associada.

c) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

d) Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}$ utilitzant la matriu associada.

a) $M^B_W\in\mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R})$, ja que $\begin{cases}\dim P_2(\mathbb{R})=3\\ \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})=4\end{cases}$

Calculem les imatges dels polinomis de B:

$f(1)=f(1\cdot1+0\cdot x+0\cdot x^2)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$

$f(x)=f(0\cdot1+1\cdot x+0\cdot x^2)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$f(x^2)=f(0\cdot1+0\cdot x+1\cdot x^2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$M^B_W=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

b) $f(1+x+2x^2)=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$, ja que:

$$M^B_W\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{(1+x+2x^2)_B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}}_{(f(1+x+2x^2))_W}$$

c) $f^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\emptyset$ ja que:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\left\{a+bx+cx^2 : M\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}\right)_W}\right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\1&1&0&2\\1&-1&0&-1\\0&2&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&-1&0&-2\\0&2&-1&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&-1&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}}_{rg M=3}&\begin{matrix}1\\1\\-1\\1\end{matrix}\end{array}\right)}_{rg M'=4}$$

$rg M=3<4=rg M' \Rightarrow$ S.I.

d) $f^{-1}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}=\ ?$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}=\left\{a+bx+cx^2 : M\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-3\end{pmatrix}}_{\left(\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}\right)_W}\right\}$$

Resolem el sistema d'equacions lineals:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\1&1&0&3\\1&-1&0&1\\0&2&-1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&-1&0&-1\\0&2&-1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-1&-5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{matrix}}_{M}&\begin{matrix}2\\1\\5\\0\end{matrix}\end{array}\right)}_{M'}$$

$rg M = rg M' = 3 = \#$ incògnites

$\Rightarrow$ S.C.D.

Solució: $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=5\end{cases}$

$$\Rightarrow f^{-1}\begin{pmatrix}2&3\\1&-3\end{pmatrix}=\{2+x+5x^2\}$$

7.2 Nucli i imatge

Sigui $f:E\to F$ una aplicació lineal

El **nucli** d'f és

$$\mathrm{Ker}(f)=\{u\in E : f(u)=\mathbf{0}_F\}=f^{-1}(\{0_F\})$$

La **imatge** d'f és

$$\mathrm{Im}(f)=\{v\in F : v=f(u)\text{ per algun }u\in E\}=\underbrace{\{f(u) : u\in E\}}_{=f(E)}$$

Proposició

$\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ són subespais vectorials d'E i F, respectivament

- $0_E \in \mathrm{Ker} f$ ja que $f(0_E) = 0_F$
  Per tant $\mathrm{Ker} f \neq \emptyset$

- $\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\underbrace{\{0_F\}}_{\text{subespai d'F}}) \subseteq E$
  $\Rightarrow$ subespai d'E

- $\mathrm{Im} f = f(\underbrace{E}_{\text{subespai d'E}}) \subseteq F$
  $\Rightarrow$ subespai d'F

Càlcul efectiu del nucli i de la imatge

Siguin $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases d'E i F, resp., i sigui $M = M_W^B(f)$ la matriu associada a f en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de m equacions i n incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La dimensió del nucli és $n - \mathrm{rang}(M)$

- Imatge: $\mathrm{Im}(f) = \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle$
  La dimensió de la imatge és el rang de M
  Considerant una matriu escalonada equivalent a M, les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de M que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

$\mathrm{Im} f = f(E) = f(\langle b_1, \ldots, b_n \rangle) = \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle$

Nucli:
Resoldre el sistema homogeni que té per matriu de coeficients, la matriu associada a f:

$u \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(u) = 0_F$: $\boxed{M_W^B(f) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{vector genèric d'E en base B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{(0_F)_W}}$

OBS:
dim Ker f = # graus de llibertat del sistema
= # incògnites − rang $M(f)$
= dim E − rang $M(f)$

base Ker f: a partir de la solució del sistema en forma paramètrica.

base i dim Im f:
$\mathrm{Im} f = \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang}(f(b_1), \ldots, f(b_n)) =$
$= \mathrm{rang}\ M(f) = r$
i una base està formada per r columnes de $M(f)$ L.I.

Per tant: $\boxed{\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E}$

EXEMPLES
Calculeu bases i dimensió de Ker f i Im f:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$, $M_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$
  $\Rightarrow$ dim Im f = 2
  dim Ker f = $\underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 2 = 1$

- base Im f:
  Im $f \subseteq \mathbb{R}^2$, dim Im f = dim $\mathbb{R}^2$ = 2 $\Rightarrow$ Im $f = \mathbb{R}^2$
  $\Rightarrow$ qualsevol base de $\mathbb{R}^2$ és base d'Im f
  p.e. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- base Ker f:
  resolem el sistema homogeni
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$
  Solució: $\begin{cases} x = 1/2\, z \\ y = -3/4\, z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2\, z \\ -3/4\, z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$
  Solucions: $\left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
  Base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$, $M_{C_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- rang $M_{C_3}^{C_3} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ldots = 3$
  dim Im f = rg $M_{C_3}^{C_3} = 3$
  dim Ker f = $\underbrace{3}_{\dim \mathbb{R}^3} - 3 = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

- base Im f: $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3 \\ \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$
  Per tant, qualsevol base de $\mathbb{R}^3$ és base d'Im f
  p.e.: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- base Ker f: Ker $f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ no admet base

Sigui $f : E \to f$ una aplicació lineal i M una matriu associada a f

Teorema

$$\boxed{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))}$$

Les aplicacions lineals bijectives s'anomenen **isomorfismes**

Caracterització del tipus d'aplicació

- f és injectiva $\overset{1}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0_E}\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E)$
- f és exhaustiva
  $\overset{2}{\Leftrightarrow} \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(F)$
- f és un isomorfisme $\Leftrightarrow \mathrm{rang}(M) = \dim(E) = \dim(F)$
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors
  f és un isomorfisme $\Leftrightarrow$ f és injectiva $\Leftrightarrow$ f és exhaustiva

Recordem:

f injectiva si: $\forall u, v \in E,\ u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

$\equiv$

$\forall u, v \in E,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

f exhaustiva si: $\forall w \in F,\ \exists u \in E \quad f(u) = w$

$\equiv$

$f(E) = F$

f bijectiva si f és injectiva i exhaustiva

Demostracions:

① f injectiva $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$:

dem : $\Rightarrow$) Sabem que $0_E \in \mathrm{Ker} f$

Si $\mathrm{Ker} f \neq \{0_E\}$, aleshores $\exists u \in \mathrm{Ker} f,\ u \neq 0_E$

$f(0_E) = f(u) = 0_F \Rightarrow f$ NO injectiva

$\Leftarrow$) $f(u) = f(v) \overset{?}{\Rightarrow} u = v$

$f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) - f(v) = 0_F \overset{f \text{ lineal}}{\Rightarrow} f(u-v) = 0_F \Rightarrow$

$\underset{\text{def. Ker}f}{\Rightarrow} u - v \in \mathrm{Ker} f \underset{\mathrm{Ker}f = \{0_E\}}{\Rightarrow} u - v = 0_E \Rightarrow u = v$

i abans ja hem vist que:

$\mathrm{Ker} f = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, M = \dim E$

② f exhaustiva $\underset{\text{def. d'aplicació exhaustiva}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Im} f = f(E) = F$

Per ser $\mathrm{Im} f$ un subespai d'F :

$\mathrm{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim F$

i abans ja hem vist que $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang}\, M$, per tant:

f exhaustiva $\Leftrightarrow \mathrm{rang}\, M = \dim F$

③ Si $\dim E = \dim F$:

$\mathrm{rang}\, M = \dim E \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, M = \dim F$

f injectiva $\Leftrightarrow$ f exhaustiva

$$\boxed{\begin{array}{l} 3)\ f : P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix} \\ C_P = \{1, x, x^2\},\ C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},\quad M^{C_P}_{C_M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

$$\mathrm{rg}\, M^{C_P}_{C_M} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \dots = 3$$

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\, M^{C_P}_{C_M} = 3$

$\dim \mathrm{Ker} f = \underbrace{3}_{\dim P_2(\mathbb{R})} - \mathrm{rg}\, M^{C_P}_{C_M} = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

Base $\mathrm{Im} f$: 3 columnes L.I. de $M^{C_P}_{C_M}$,
en aquest cas, les úniques 3 columnes de $M^{C_P}_{C_M}$
ja que són L.I per ser $\mathrm{rg}\, M^{C_P}_{C_M} = 3$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ és base d'$\mathrm{Im} f$

matrius expressades en base C_M

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ és base d'$\mathrm{Im} f$

Base $\mathrm{Ker} f$: no admet base per ser $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

$f: E \longrightarrow F$ aplicació lineal, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matriu associada

$\dim E = n$, $\dim F = m$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ injectiva} & \Leftrightarrow & \text{rang } M = \dim E \\ f \text{ exhaustiva} & \Leftrightarrow & \text{rang } M = \dim F \\ f \text{ bijectiva} & \Leftrightarrow & \text{rang } M = \dim E = \dim F \end{array}}$$

OBSERVACIONS :

1. $\begin{cases} f \text{ injectiva} \Rightarrow \dim E \leq \dim F \\ \dim E > \dim F \Rightarrow f \text{ NO injectiva} \end{cases}$ $\not\Leftarrow$ p.e.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO inj.

2. $\begin{cases} f \text{ exhaustiva} \Rightarrow \dim F \leq \dim E \\ \dim E < \dim F \Rightarrow f \text{ NO exhaustiva} \end{cases}$ $\not\Leftarrow$ p.e.: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO exh.

3. $\begin{cases} f \text{ bijectiva} \Rightarrow \dim E = \dim F \\ \dim E \neq \dim F \Rightarrow f \text{ NO bijectiva} \end{cases}$ $\not\Leftarrow$ p.e.: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO bij.

ATENCIÓ !

$\dim E = \dim F \not\Rightarrow f$ bijectiva

7.3 Composició d'aplicacions lineals

E, F, G espais vectorials sobre $\mathbb{K}$

Proposició

Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació composició $g \circ f : E \to G$ també és lineal

Proposició

Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és

Si les bases d'E, F i G són B, W i V respectivament, tenim:

1. $M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g) M_W^B(f)$
2. $M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$

EXEMPLES : són injectives, exhaustives, bijectives ... ?

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$, $M_{C_2}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rg } M_{C_2}^{C_3} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{cases} \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{NO inj.} \\ = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{exh.} \end{cases}$ NO bij.

2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$, $M_{C_3}^{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\text{rg } M_{C_3}^{C_3} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \ldots = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ bijectiva

3) $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$

$C_P = \{1, x, x^2\}$, $C_M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $M_{C_M}^{C_P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\text{rg } M_{C_M}^{C_P} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ldots = 3 \begin{cases} = \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{injectiva} \\ \neq 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{NO exh.} \end{cases}$ NO bij.

4) Determineu si les aplicacions lineals següents poden ser injectives, exhaustives, bijectives :

(a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

dim: $2 < 4 \Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

dim: $4 > 2 \Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(c) $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

dim: $3 < 4 \Rightarrow$ NO pot ser exhaustiva (ni bij.)

(d) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$

dim: $4 > 3 \Rightarrow$ NO pot ser injectiva (ni bij.)

(e) $f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

dim: $4 = 4$ no podem descartar res !

Antimatges: $f: E \to F$

$v \in F$, $f^{-1}(v) = \{u \in E : f(u) = v\}$

pot passar: $\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \\ |f^{-1}(v)| = 1 \\ |f^{-1}(v)| > 1 \end{cases}$

Calcul de $f^{-1}(v)$

Resoldre el sistema d'equacions lineals :

$M_{B_F}^{B_E} = M$: $\quad M_{B_F}^{B_E} \cdot X = (v)_{B_F}$

$\begin{cases} f^{-1}(v) = \emptyset \Leftrightarrow \text{S.I.} \Leftrightarrow \text{rg} M < \text{rg}(M|v) \\ |f^{-1}(v)| = 1 \Leftrightarrow \text{S.C.D} \Leftrightarrow \text{rg} M = \text{rg}(M|v) = \dim E \\ |f^{-1}(v)| > 1 \Leftrightarrow \text{S.C.I} \Leftrightarrow \text{rg} M = \text{rg}(M|v) < \dim E \end{cases}$

Si $\begin{cases} f^{-1}(v) \neq \emptyset, \ \forall v \in F : f \text{ exhaustiva} \\ |f^{-1}(v)| \leq 1, \ \forall v \in F : f \text{ injectiva} \\ |f^{-1}(v)| = 1, \ \forall v \in F : f \text{ bijectiva} \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

$\boxed{f, g \text{ lineals} \Rightarrow g\circ f \text{ lineal}}$

Demostració:

1) $\forall u, v \in E$:

$$(g\circ f)(u+v) = g(f(u+v)) \overset{f \text{ lineal}}{=} g(f(u)+f(v)) \overset{g \text{ lineal}}{=} g(f(u)) + g(f(v)) =$$
$$= (g\circ f)(u) + (g\circ f)(v)$$

2) $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$(g\circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) \overset{f \text{ lineal}}{=} g(\lambda f(u)) \overset{g \text{ lineal}}{=} \lambda g(f(u)) = \lambda (g\circ f)(u)$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

f isomorfisme $\Rightarrow$ f bijectiva $\Rightarrow$ $\exists f^{-1}$ aplicació inversa, $f^{-1}: F \to E$ és bijectiva

A més: $\boxed{f \text{ lineal} \Rightarrow f^{-1} \text{ lineal}}$

Demostració:

1) $\forall v', v'' \in F$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists u' \in E,\ f(u') = v' \\ \exists u'' \in E,\ f(u'') = v'' \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(u'+u'') \overset{f \text{ lineal}}{=} f(u') + f(u'') = v'+v''}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(v'+v'') = u'+u'' = f^{-1}(v') + f^{-1}(v'')$$

2) $\forall v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\exists u \in E, f(u) = v \Rightarrow f(\lambda u) \overset{f \text{ lineal}}{=} \lambda f(u) = \lambda v \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(\lambda v)} = \lambda u = \lambda \boxed{f^{-1}(v)}$$

① Matriu associada a la composició:

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{E} \arrow[r, "f"', "M^B_W(f)"] \arrow[rr, bend right] & \underset{W}{F} \arrow[r, "g", "M^W_V(g)"'] & \underset{V}{G} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M^B_V(g\circ f) \\ \| \\ M^W_V(g)\cdot M^B_W(f) \end{array}}$$

ja que:

$$u \in E: \quad \underbrace{M^W_V(g)\cdot \underbrace{M^B_W(f)\,(u)_B}_{(f(u))_W}}_{(g(f(u)))_V} = \left((g\circ f)(u)\right)_V$$

② Matriu associada a la inversa:

si f és bijectiva,
$\dim E = \dim F = n$
$\exists f^{-1}$ i és apl. lineal
aleshores:

$$\begin{tikzcd} \underset{B}{E} \arrow[r, "f", "M^B_W(f)"'] & \underset{W}{F} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M^W_B(f^{-1}) \\ \| \\ \left(M^B_W(f)\right)^{-1} \end{array}}$$

$$f^{-1}\circ f = Id_E : \quad \begin{tikzcd} \underset{B}{E} \arrow[r, "f", "M^B_W(f)"'] \arrow[rr, bend right, "Id_E"'] & \underset{W}{F} \arrow[r, "f^{-1}", "M^W_B(f^{-1})"'] & \underset{B}{E} \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \{b_1, \dots, b_n\} \text{ base d'}E, \\ Id(b_1) = b_1 = 1\cdot b_1 + 0 b_2 + \dots + 0 b_n \\ Id(b_2) = b_2 = 0\cdot b_1 + 1\cdot b_2 + \dots + 0 b_n \\ \vdots \\ Id(b_n) = b_n = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \dots + 1\cdot b_n \end{array}\right\} \rightarrow I_n = M^B_B(Id_E)$$

$$\| \leftarrow ①$$

$$\underbrace{M^W_B(f^{-1})}_{\text{inversa de } M^B_W(f)}\cdot M^B_W(f)$$

EXEMPLES

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

Calculeu la matriu associada a $g\circ f$ i la imatge d'un vector genèric $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per $g\circ f$.

Calculem la matriu associada a f i a g en les bases canòniques:

$M^{C_3}_{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$M^{C_3}_{C_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

La matriu associada a $g\circ f$ en bases canòniques és el producte:

$$M^{C_3}_{C_2}(g\circ f) = M^{C_3}_{C_2}(g)\, M^{C_3}_{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

Observem que s'obté el mateix resultat si ho calculem directament a partir de la definició de f i g:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y+z)+2(-x+2y)+(y-3z) \\ 2(x+y+z)-(y-3z) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -x+6y-2z \\ 2x+y+5z \end{pmatrix}$$

2) Calculeu nucli i imatge de $g \circ f$. És $g\circ f$ injectiva o exhaustiva, o bijectiva? :

$$f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b-c \end{pmatrix}$$

$$g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

Calcularem nucli i imatge, i comprovarem si és injectiva, exhaustiva, bijectiva a partir de la matriu associada a $g\circ f$.

Utilitzarem les bases:

$P_2(\mathbb{R})$: $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, base: $C_P = \{1, x, x^2\}$

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, base: $C_M = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{R}^2$: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, base: $C_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{tikzcd} \underset{C_P}{P_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \underset{C_M}{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \arrow[r, "g"] & \underset{C_2}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$$\underset{\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{M^{C_P}_{C_2}(g\circ f)}} = M^{C_M}_{C_2}(g) \cdot M^{C_P}_{C_M}(f)$$

- $M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (exemple 3 de la classe de l'1/12)

$$g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $M^{C_M}_{C_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{M^{C_P}_{C_2}(g\circ f)}_{M} = M^{C_M}_{C_2}(g) \cdot M^{C_P}_{C_M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per tant $(g\circ f)(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b-c \end{pmatrix}$, ja que: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ a+b-c \end{pmatrix}$

Nucli i imatge:

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim \operatorname{Im}(g\circ f) = 2 \\ \dim \operatorname{Ker}(g\circ f) = \dim P_2(\mathbb{R}) - 2 = 3-2 = 1 \end{cases}$$

base $\operatorname{Im}(g\circ f)$:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im}(g\circ f) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ \dim \operatorname{Im}(g\circ f) = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im}(g\circ f) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$$ qualsevol base de $\mathbb{R}^2$ és base d'$\operatorname{Im}(g\circ f)$

p.e. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ és una base d'$\operatorname{Im}(g\circ f)$

base $\operatorname{Ker}(g\circ f)$: resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients la matriu associada a $g\circ f$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{3^{\text{o}} := 3^{\text{o}} := -2^{\text{o}}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \\ 1 & \end{pmatrix} \quad \begin{cases} b = -2a \\ c = -a \end{cases}$$

solució: $\begin{pmatrix} a \\ -2a \\ -a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ on $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ són coordenades en base C_P

és a dir, una base de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ és $\{1-2x-x^2\}$

Injectiva, exhaustiva, bijectiva? $g\circ f: \underset{3}{P_2(\mathbb{R})} \to \underset{2}{\mathbb{R}^2}$ (dim.: 3, 2)

$$\operatorname{rang} M(g\circ f) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{cases} \neq \dim P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow f \text{ NO inj.} \\ = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow f \text{ exh.} \end{cases} \Rightarrow f \text{ NO bij.}$$

3) Considerem l'aplicació lineal $f: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$,

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ 2b-3c \end{pmatrix}$$

Comproveu que és isomorfisme i calculeu la matriu associada a f^{-1} en bases canòniques. Calculeu $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Calculem la matriu associada a f en les bases canòniques:

$C_P = \{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$, $C_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$f(1) = f(1\cdot 1 + 0x + 0x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(0\cdot 1 + 1\cdot x + 0 x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(x^2) = f(0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$M = M^{C_P}_{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rang} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$\Rightarrow f$ apl. lineal bijectiva, o sigui, un isomorfisme.

Matriu associada a f^{-1} en bases canòniques, C_3 i C_P:

$$f^{-1}: \underset{C_3}{\mathbb{R}^3} \to \underset{C_P}{P_2(\mathbb{R})}$$

$$M^{C_3}_{C_P}(f^{-1}) = \left(M^{C_P}_{C_3}(f)\right)^{-1} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \dots = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculem $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$M^{C_3}_{C_P}(f^{-1})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{en base } C_P}$$

Per tant, $f^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = x - x^2$

(Observem que $f(x-x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(x-x^2)_{C_P}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$)

4) a) Matriu associada a $\mathrm{Id}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en les bases $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ a l'espai de sortida i $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ a l'espai d'arribada.

b) Quines són les coordenades en base C del vector u tq. $(u)_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$?

a) $\mathrm{Id}: E \longrightarrow E$, bases: B, C

$$M^B_C(\mathrm{Id}): \quad \mathrm{Id}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Id}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Id}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

coordenades en base C!

$$\Rightarrow M^B_C(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^B_C(\mathrm{Id})\,(u)_B = (u)_C \quad (\mathrm{Id}(u) = u)$$

b)
$$M^B_C(\mathrm{Id})\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{(u)_B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}}_{(\mathrm{Id}(u))_C = (u)_C}$$

$$\Rightarrow (u)_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$M^B_C(\mathrm{Id})$ és la matriu de canvi de base de B a C, P^B_C:

$$M^B_C(\mathrm{Id}) = P^B_C$$

7.4 Canvi de base

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin $f : E \to F$ una aplicació lineal, B i B' bases d'E, i W i W' bases d'F

$$\begin{array}{ccc} E_B & \xrightarrow[M_W^B(f)]{f} & F_W \\ I_E \uparrow P_B^{B'} & & P_{W'}^W \downarrow I_F \\ E_{B'} & \xrightarrow[M_{W'}^{B'}(f)]{f} & F_{W'} \end{array}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$\boxed{M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^W \, M_W^B(f) \, P_B^{B'}}$$

JUSTIFICACIÓ :

I

$$\underset{B'}{E} \xrightarrow[P_B^{B'}]{Id_E} \underset{B}{E} \xrightarrow[M_W^B(f)]{f} \underset{W}{F} \xrightarrow[P_{W'}^W]{Id_F} \underset{W'}{F}$$

$$Id_F \circ f \circ Id_E = f$$

$$M_{W'}^{B'}(f)$$

$$\boxed{M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^W \cdot M_W^B(f) \cdot P_B^{B'}}$$

II

$u \in E$

$$M_{W'}^{B'}(f) \cdot (u)_{B'} = (f(u))_{W'}$$

$$\underbrace{P_{W'}^W \, \underbrace{M_W^B(f) \, \underbrace{P_B^{B'} \, (u)_{B'}}_{(u)_B}}_{(f(u))_W}}_{(f(u))_{W'}} = (f(u))_{W'}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^W \, M_W^B(f) \, P_B^{B'}}$$

EXEMPLES

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x-z \end{pmatrix}$

Matriu associada en bases

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$?

Vam calcular la matriu associada en bases canòniques

$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ d'$\mathbb{R}^2$:

$$M_{C_2}^{C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (vegeu exemple 1 - AL8)

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$P_{C_3}^{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{C_2}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = P_{B_2}^{C_2} \, M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3} = \left(P_{C_2}^{B_2}\right)^{-1} M_{C_2}^{C_3}(f) \cdot P_{C_3}^{B_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 \\ -2/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1/7 \begin{pmatrix} 25 & 8 & 19 \\ -12 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+2y \\ y-3z \end{pmatrix}$

Matriu associada a f en base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$?

Calculem primer la matriu associada en la base canònica: $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = P_B^C \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B = \left(P_C^B\right)^{-1} M_C^C(f) \cdot P_C^B$$

$$P_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓ:

Si $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $b_1=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $b_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

i $u\in\mathbb{R}^3$, $u=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

aleshores $u_C=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $u_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ja que $u=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}}_{b_1}+0\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{b_2}+0\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{b_3}$

Podem calcular $f(u)$ utilitzant $M_C^C(f)$ o bé $M_B^B(f)$:

si utilitzem $M_C^C(f)$:

$M_C^C(f)\,(u)_C=(f(u))_C$, per tant $(f(u))_C=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&2&0\\0&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$$

Si utilitzem $M_B^B(f)$:

$M_B^B(f)\,(u)_B=(f(u))_B$, per tant $(f(u))_B=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$ ja que:

$$\begin{pmatrix}3&-11&1\\3&-3&2\\-2&16&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$$

Comprovem que, efectivament $P_C^B\,(f(u))_B=(f(u))_C$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}}_{P_C^B}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}}_{(f(u))_B}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}}_{(f(u))_C}$$

CERT!

Per què matrius diagonals?

A més de la interpretació en diferents problemes (estadístics, geomètrics, grafs, ...) el producte de matrius diagonals és més senzill:

$$\begin{pmatrix}3&1&5\\1&4&6\\2&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&6&7\\8&9&11\\3&-1&-4\end{pmatrix}=\dots$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1&0&0\\0&3\cdot4&0\\0&0&4\cdot5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}^{2543}=\dots$$

$$\begin{pmatrix}6&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}^{2543}=\begin{pmatrix}6^{2543}&0&0\\0&2^{2543}&0\\0&0&2^{2543}\end{pmatrix}$$

3) $f:P_2(\mathbb{R})\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$, $f(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix}a&a+b\\a-b&2b-c\end{pmatrix}$

Calculeu la matriu associada en les bases:

$B=\{1+x,\ x^2,\ -1+x+3x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ i

$W=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&3\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$

Podem calcular fàcilment la matriu associada a f en les bases canòniques (vegeu l'exemple 3 - AL8)

$C_P=\{1,x,x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$

$C_M=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ de $M_2(\mathbb{R})$

$$M_{C_M}^{C_P}(f)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$M_W^B(f)=P_W^{C_M}\cdot M_{C_M}^{C_P}(f)\cdot P_{C_P}^B=\left(P_{C_M}^W\right)^{-1}M_{C_M}^{C_P}(f)\cdot P_{C_P}^B$$

$$P_{C_M}^W=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&2&3&0\\2&1&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix},\quad P_{C_P}^B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_W^B(f)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&2&3&0\\2&1&1&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1&-4\\1&1&1&-1\\-1&-1&1&2\\2&-4&3&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&4&5\\1&1&2\\1&-2&-3\\4&-7&-11\end{pmatrix}$$

Plantegem el sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix},\quad\lambda\in\mathbb{R}$$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre λ:

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(continuarà...)

4) $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+z\\2x-z\end{pmatrix}$

Matriu associada en bases $B_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ d'$\mathbb{R}^3$ i canònica d'$\mathbb{R}^2$?

Coneixem la matriu associada en bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^2$ (vegeu l'exemple 1):

$$M_{C_2}^{C_3}(f)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

Aleshores:

$$M_{C_2}^{B_3}(f)=M_{C_2}^{C_3}(f)\cdot P_{C_3}^{B_3}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&2&5\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Exemple:

$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

$\exists\,B$ base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal?

Si $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ i $M_B^B(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

aleshores:

$$\begin{array}{ccc}f(b_1)&f(b_2)&f(b_3)\\\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(b_1)=\lambda_1 b_1\\f(b_2)=\lambda_2 b_2\\f(b_3)=\lambda_3 b_3\end{cases}\qquad\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$

Exemple:

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicació lineal tq. la matriu associada en la base canònica és $M=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

$\exists$ B base d'$\mathbb{R}^3$ tq. $M_B^B(f)$ sigui diagonal?

Si $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ i $M_B^B(f)=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

aleshores:

$$\begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(b_1)=\lambda_1 b_1 \\ f(b_2)=\lambda_2 b_2 \\ f(b_3)=\lambda_3 b_3 \end{cases} \qquad \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$$

Per tant, buscarem vectors $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tq. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$

Plantegem el sistema: $\underbrace{\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Volem trobar les solucions del sistema en funció del paràmetre λ

$$\begin{pmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

És a dir, per a trobar tots els vectors $u\in\mathbb{R}^3$ tq. $f(u)=\lambda u$, per a algun valor de $\lambda\in\mathbb{R}$: resolem el sistema d'equacions lineals homogeni següent en funció dels valors de $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{pmatrix}$$

- sempre té la solució trivial $x=y=z=0$
- té solució no trivial $\Leftrightarrow$ rg $A<3=\#$ incògnites $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ det $A=0$:
  calculem per a quins valors de $\lambda\in\mathbb{R}$, det $A=0$:

$$\det A=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&1&1\\2&4-\lambda&2\\1&1&3-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)^2(4-\lambda)+4-(4-\lambda)-4(3-\lambda)=$$
$$=-\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24$$
$$\det A=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=2 \text{ o } \lambda=6$$

El problema de la diagonalització

Sigui $f:E\to E$ un endomorfisme. Hi ha alguna base B d'E en què la matriu $M_B(f)$ sigui senzilla? Més concretament, diagonal?

Def

Un endomorfisme $f:E\to E$ és **diagonalitzable** si existeix alguna base B d'E tal que $M_B(f)$ sigui diagonal.

Obs. Suposem que la matriu $M_B(f)$ no és diagonal, però sabem que l'endomorfisme f diagonalitza en una altra base B'. Aleshores la matriu

$$(P_B^{B'})^{-1}M_B(f)P_B^{B'}$$

és diagonal.

Per tant, ser diagonalitzable és equivalent a que existeixi una matriu P invertible tal que $P^{-1}M_B(f)P$ sigui diagonal.

Si $\lambda=2$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix}3-2&1&1\\2&4-2&2\\1&1&3-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

equivalent a;

$$(1\ 1\ 1).$$

rg$()=1$, $3-1=2$ graus de llibertat

Solució: $z=-x-y$, $x,y\in\mathbb{R}$

$$E_2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\boxed{f(u)=2u \Leftrightarrow u\in E_2=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}$$

Si $\lambda=6$:

resolem el sistema homogeni que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix}3-6&1&1\\2&4-6&2\\1&1&3-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3&1&1\\2&-2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

equivalent a:

$$\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-2&4\\0&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

rg$()=2$, $3-2=1$ grau de llibertat

Solució: $\begin{cases}x=z\\y=2z\end{cases}$ $z\in\mathbb{R}$

$$E_6=\left\{\begin{pmatrix}z\\2z\\z\end{pmatrix}: z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{z\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}: z\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\boxed{f(u)=6u \Leftrightarrow u\in E_6=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle}$$

Base formada per vectors u tq. $f(u)=\lambda u$:
base formada per vectors de $E_2 \cup E_6 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

p.e.: $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base d'$\mathbb{R}^3$ ja que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix} = \ldots = 3$$

i la matriu associada a f en base B és:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

ja que: $\begin{cases} f(u_1) = 2\cdot u_1 = 2\cdot u_1 + 0\, u_2 + 0\, u_3 \\ f(u_2) = 2\cdot u_2 = 0\cdot u_1 + 2\, u_2 + 0\cdot u_3 \\ f(u_3) = 6\, u_3 = 0\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 6 u_3 \end{cases}$

Relació entre $M_C^C(f)$ i $M_B^B(f)$:

$$M_B^B(f) = \underbrace{(P_C^B)^{-1}}_{P_B^C} \cdot M_C^C(f) \cdot P_C^B, \text{ on } P_C^B = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Calculeu $\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}^{2020}$:

Hem vist:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Per tant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

Observem que:

$$M^{2020} = (PDP^{-1})^{2020} = (PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1})\ldots(PD\underbrace{\cancel{P^{-1})(P}}_{Id}DP^{-1}) = P D^{2020} P^{-1}$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix}^{2020} = \left(\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{2020} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{2020}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{2020}&&\\&2^{2020}&\\&&6^{2020}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4&-1/4&-1/4\\-1/2&1/2&-1/2\\1/4&1/4&1/4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac14(3\cdot 2^{2020}+6^{2020}) & \frac14(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac14(-2^{2020}+6^{2020}) \\ \frac12(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac12(2^{2020}+6^{2020}) & \frac12(-2^{2020}+6^{2020}) \\ \frac14(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac14(-2^{2020}+6^{2020}) & \frac14(3\cdot 2^{2020}+6^{2020}) \end{pmatrix}$$

Def:
Una matriu $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tq. $P^{-1}MP$ és diagonal

és a dir:
$M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ és diagonalitzable $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ l'endomorfisme $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que té M per matriu associada en base canònica és diagonalitzable.

Observem que si la matriu associada a f en base B és diagonal, aleshores:

$$f: \underset{B}{E} \longrightarrow \underset{B}{E} \qquad B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

$$\underbrace{M_B^B(f)}_{M_B(f)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(b_1) & f(b_2) & f(b_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix}\lambda_1 &&0\\&\lambda_2&\\0&&\ddots\ \lambda_n\end{pmatrix}\end{array}$$

$\Downarrow$

$f(b_1) = \lambda_1 b_1$
$f(b_2) = \lambda_2 b_2$
$\vdots$
$f(b_n) = \lambda_n b_n$

Valors i vectors propis

Def
L'escalar λ és un **valor propi** de l'endomorfisme f si existeix algun vector $v \neq \mathbf{0}_E$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Tots els vectors $v \neq \mathbf{0}_E$ que compleixen $f(v) = \lambda v$ s'anomenen **vectors propis de valor propi λ**.

Teorema
L'endomorfisme $f: E \to E$ diagonalitza si i només si hi ha alguna base d'E formada per vectors propis.

$f(v) = \lambda v$

$\Updownarrow$

$M\,(v)_B = \lambda\,(v)_B$

$M\,(v_B) = \lambda \cdot I_n\,(v)_B$

$$\underbrace{(M - \lambda I_n)(v_B) = 0}_{\text{sistema d'equacions lineals homogeni que té solució no trivial}}$$

$\Leftrightarrow \det(M - \lambda\cdot I_n) = 0$
$\Leftrightarrow \lambda$ és solució de l'equació $\det(M - x\cdot I_n) = 0$

Càlcul dels valors propis

Sigui M la matriu associada a $f: E \to E$ en una base B

Def
El **polinomi característic** de l'endomorfisme f és

$$p_f(x) = \det(M - xI_n)$$

Teorema
Els valors propis d'f són les arrels del polinomi característic

La **multiplicitat algebraica** d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com a arrel de $p_f(x)$ i es denota m_λ

L'equació $p_f(x) = 0$ s'anomena **equació característica**

Teorema
El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada M

Exemple:

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+1)^3 (x-5)$

aleshores les arrels són:

2, de multiplicitat 2

-1, de multiplicitat 3

5, de multiplicitat 1

ULL! Cal agrupar tots els factors de la forma $(x-\lambda)$ per tal de calcular la multiplicitat algebraica de λ.

P.e:

Si $p_f(x) = (x-2)^2 (x+5)^3 (2-x)(x-5)$

aleshores:

$$p_f(x) = -(x-2)^2 (x+5)^3 (x-2)(x-5) =$$
$$= -(x-2)^3 (x+5)^3 (x-5)$$

aleshores les arrels són:

2 de multiplicitat 3

-5 de multiplicitat 3

5 de multiplicitat 1

E_λ és un subespai vectorial d'E.

Demostració

$E_\lambda = \{u : f(u) = \lambda u\} = \{u : f(u) - \lambda u = 0_E\} =$

$= \{$solucions del sistema homogeni amb matriu de coeficients $M - \lambda I\}$

$\Rightarrow$ és subespai d'E

Directament amb la definició de subespai:

- $E_\lambda \neq \emptyset$: ja que $0_E \in E_\lambda$ per ser $f(0_E) = 0_E = \lambda \cdot 0_E$

- $u, v \in E_\lambda \overset{?}{\Rightarrow} u+v \in E_\lambda$

  $f(u) = \lambda u,\ f(v) = \lambda v \Rightarrow \boxed{f(u+v) \underset{f \text{ lineal}}{=} f(u) + f(v) \underset{u,v \in E_\lambda}{=} \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)}$

- $u \in E_\lambda,\ \alpha \in \mathbb{K} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha u \in E_\lambda$

  $f(u) = \lambda u \Rightarrow \boxed{f(\alpha u) \underset{f \text{ lineal}}{=} \alpha f(u) \underset{u \in E_\lambda}{=} \alpha \lambda u = \lambda(\alpha u)}$

Per tant E_λ és subespai d'E

Espais de vectors propis

Sigui ara λ un valor propi de l'endomorfisme $f : E \to E$

L'**espai propi** del valor propi λ és el conjunt

$$E_\lambda = \{u \in E : f(u) - \lambda u = 0_E\}$$
$$= \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$$

Propietats

- E_λ és un subespai vectorial d'E
- $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \underbrace{m_\lambda}_{\text{multiplicitat algebraica de } \lambda}$

La dimensió d'E_λ s'anomena **multiplicitat geomètrica** de λ

Caracterització dels endomorfismes diagonalitzables

Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme d'un espai vectorial E de dimensió n.

Teorema

L'endomorfisme f és diagonalitzable si i només si té n valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari

Si f té n valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.

És el mateix que:

L'endomorfisme f és diagonalitzable si es compleixen les dues condicions següents:

(1) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1

$$p_f(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1} (x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, diferents dos a dos

(2) $\forall \lambda_i,\ 1 \leq i \leq r$, es compleix:

$$\dim E_{\lambda_i} = m_i$$

OBS: Si M és la matriu associada a f en una base qualsevol,

$$p_f(x) = \det(M - x \cdot I_n)$$
$$\dim E_{\lambda_i} = n - \operatorname{rg}(\underset{\uparrow}{M} - \lambda_i I_n)$$

matriu associada a f en una base qualsevol.

Algorisme de diagonalització

Per a decidir si l'endomorfisme $f : E \to E$ és diagonalitzable, podem seguir els passos següents:

(1) Trobem la matriu associada a f en una base qualsevol i calculem el polinomi característic $p_f(x)$.

(2) Trobem els valors propis i les seves multiplicitats resolent $p_f(x) = 0$.

(3) Si les multiplicitats dels valors propis sumen menys de $\dim(E)$, l'endomorfisme no diagonalitza. Altrament anem a (4).

(4) Per a cada valor propi λ, trobem l'espai propi E_λ i la seva dimensió $\dim(E_\lambda)$.

(5) Si per a tot λ es compleix $m_\lambda = \dim(E_\lambda)$, l'endomorfisme diagonalitza. Altrament no diagonalitza.

Si l'endomorfisme diagonalitza, per trobar una base en què diagonalitzi només cal prendre la unió de les bases dels espais E_λ.

Polinomi característic

Polinomi característic de f:

$$p_f(x) = \det(A - x\, I_n)$$

on A és la matriu associada a f en una base qualsevol d'E (es pot demostrar que el polinomi característic és invariant per canvis de base.)

• $\lambda \in \mathbb{K}$ és valor propi de f si, i només si, λ és arrel de $p_f(x)$

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, aleshores $1 \le \dim E_\lambda \le m$.

• Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat 1 (arrel simple) del polinomi característic, aleshores $\dim E_\lambda = 1$.

Si f és un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n ($\mathbb{K}$ pot ser, per exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ amb p primer) direm que f *diagonalitza* si existeix una base d'E tal que la matriu associada a f en aquesta base sigui diagonal.

Valors i vectors propis

• *valor propi (vap.)* de f: $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda\, v$, per a algun vector $v \neq 0_E$

• *vector propi (vep.)* de f: $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ i $f(v) = \lambda\, v$, per a algun $\lambda \in \mathbb{K}$ (direm que v és un *vector propi de valor propi* λ)

▷ f diagonalitza si i només si existeix una base de vectors propis

Per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$ definim $E_\lambda = \{v \ : \ f(v) = \lambda\, v\}$

• Per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$, E_λ és un subespai vectorial de E

• Si λ NO és vap de f aleshores $E_\lambda = \{0_E\}$

• Si λ és vap de f aleshores E_λ conté els vectors propis de valor propi λ, més el vector 0_E

Si A és la matriu associada a f en una base qualsevol B, aleshores:

• E_λ está format per les solucions del sistema d'equacions lineal homogeni $(A - \lambda I_n)X = 0$.

• E_λ és un subespai vectorial de dimensió $n - \mathrm{rang}(A - \lambda\, I_n)$

• $\lambda \in K$ és valor propi de $f \Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{rang}\,(A - \lambda\, Id) < n \Leftrightarrow \det\,(A - \lambda\, I_n) = 0$

• Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ són valors propis diferents de f i $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són vectors propis de valor propi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ respectivament, aleshores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ són linealment independents

- Si $\lambda \in \mathbb{K}$ és arrel de multiplicitat m del polinomi característic, direm que m és la *multiplicitat algebraica* de λ i $\dim E_\lambda$ és la *multiplicitat geomètrica* de λ. Per tant, amb aquesta terminologia, la multiplicitat geomètrica és més petita o igual que la multiplicitat algebraica.

- $p_f(x)$ és un polinomi de grau n tal que
  - el coeficient de x^n és $(-1)^n$;
  - el terme independent és $\det A$;
  - el coeficient de x^{n-1} és $(-1)^{n-1}\operatorname{tr} A$, on $\operatorname{tr} A$ és la *traça* de A (=suma dels elements de la diagonal principal d'A).

Teorema. *f diagonalitza si, i només si, es compleixen alhora les dues condicions següents:*

i) $p_f(x)$ es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{K}[x]$;

ii) per a tota arrel λ de $p_f(x)$, la dimensió d'E_λ és igual a la multiplicitat de λ en $p_f(x)$.

La condició ii) és equivalent a dir que, per a tota arrel λ de $p_f(x)$, les multiplicitats algebraica i la geomètrica coincideixen.

Corol·lari. *Si $p_f(x)$ té n arrels diferents en $\mathbb{K}$, aleshores f diagonalitza.*

- La matriu associada en la base B' és la matriu diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

on cada λ_i apareix exactament m_i vegades i els elements que no són de la diagonal principal són nuls.

- Es satisfà la igualtat $D = P^{-1}\,A\,P$, on P és la matriu $P_B^{B'}$ de canvi de base de B' a B, és a dir, les columnes de P són les components dels vectors de B' en la base B

Mètode: determinar si f diagonalitza

f endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió n
A la matriu associada a f en la base B,

- Calcular el polinomi característic de f i descompondre'l en factors de grau 1:

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \det(A - x\, I_n) = \dots \\ &= (-1)^n (x-\lambda_1)^{m_1}\,(x-\lambda_2)^{m_2}\,\dots(x-\lambda_k)^{m_k} \end{aligned}$$

on $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són arrels diferents de multiplicitat $m_1, m_2, \dots, m_k$ respectivament.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ són els valors propis de f, de multiplicitat algebraica $m_1, m_2, \dots m_k$ respectivament.

Si $p_f(x)$ no es pot descompondre en factors de grau 1, f **no diagonalitza**. Altrament, continuem.

- Comprovem si $\dim E_{\lambda_i} = m_i$, per a tots els valors propis λ_i tals que $m_i > 1$: equival a comprovar si $n - \operatorname{rang}(A - \lambda_i\, I_n) = m_i$.

Si en algun cas no es compleix, f **no diagonalitza**.
Altrament, f **diagonalitza**

- Calculem una base B_i de E_{λ_i} per a cada valor propi λ_i.

Resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que té per matriu de coeficients $A - \lambda_i\, I_n$ i expressem la solució en forma paramètrica, és a dir, calculem una base del subespai vectorial solució del sistema homogeni. La base tindrà exactament m_i vectors, $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i\,m_i}\}$.

- Una base de vectors propis de f és:

$$\begin{aligned} B' &= B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \\ &= \{\underbrace{v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1\,m_1}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_1}, \underbrace{v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2\,m_2}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_2}, \dots, \underbrace{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{k\,m_k}}_{\text{veps. de vap. } \lambda_k}\} \end{aligned}$$

3 Exemples

Exercici 1

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 0-x & 2 & -2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-2)(x^2+4)$.

No diagonalitza perquè el polinomi característic no té totes les arrels reals, és a dir, no es pot descompondre en factors de grau 1 en $\mathbb{R}[x]$.

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 1 & -1-x & -1 \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-4)(x-2)(x+2).$$

Diagonalitza perquè el polinomi característic té 3 arrels diferents i $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ -1 & 1-x & -1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \cdots = -(x-1)^2(x-2)$$

valors propis	multiplicitat
1	2
2	1

(2) El valor propi 1 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_1 = 2$:

$$\dim E_1 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-1 & -1 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

(d) (1) Polinomi característic: $p_f(x) = \det \begin{pmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ 1 & 6 & 5-x \end{pmatrix} = (5-x)^2(-1-x)$

valors propis	multiplicitat
5	2
−1	1

(2) El valor propi 5 té multiplicitat $2 > 1$. Comprovem si $\dim E_5 = 2$:

$$\dim E_5 = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 5-5 & 0 & 0 \\ -1 & -1-5 & 0 \\ 1 & 6 & 5-5 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

Exercici 2

Comproveu en cada cas si diagonalitza l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que la matriu associada en la base canònica és

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solució.

(a) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-x & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2(4-x)^2$$

valors propis	multiplicitat
−2	2
4	2

(2) Els dos valors propis, -2 i 4, tenen multiplicitat $2 > 1$.

Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-(-2) & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-(-2) & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-(-2) \end{pmatrix}$$
$$= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Comprovem ara si $\dim E_4 = 2$:

$$\dim E_4 = 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -2-4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4-4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2-4 \end{pmatrix}$$
$$= 4 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 2.$$

Per tant, f no diagonalitza.

SUCCESIONS RECURRENTS, EN GENERAL:

$(a_n)_{n\geq 0}$ tq. $a_0, \dots, a_{k-1}$ donats i

$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_k a_{n-k}$, si $n \geq k$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix}, \text{ si } n \geq k$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = A^{n-k+1} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}, \text{ si } n \geq k$$

$\Rightarrow$ obtenim a_n en funció de $a_0, \dots, a_{k-1}$ si coneixem la 1a fila de A^{n-k+1}

Si A diagonalitza: $\exists P$ invertible, $A = PDP^{-1}$ i per tant, $A^r = PD^rP^{-1}$, $\forall r \geq 1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$\alpha - \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$$

Observem que:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-(1-\sqrt{5})}{2}\right) = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}\right) = 1$$

(b) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det\begin{pmatrix} -2-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-x & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-x \end{pmatrix} = (-2-x)^2(-1-x)(2-x)$$

valors propis	multiplicitat
-2	2
-1	1
2	1

(2) El valor propi -2 té multiplicitat 2, diferent de 1. Comprovem si $\dim E_{-2} = 2$:

$$\dim E_{-2} = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} -2-(-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-(-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-(-2) & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 2-(-2) \end{pmatrix}$$

$$= 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Per tant, f diagonalitza.

(c) (1) Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-x & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3(-1-x)$$

valors propis	multiplicitat
2	3
-1	1

(2) El valor propi 2 té multiplicitat $3 > 1$.
Comprovem si $\dim E_2 = 3$:

$$\dim E_2 = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} = 4 - \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 4 - 3 = 1 \neq 3.$$

Per tant, f no diagonalitza.

Successió de Fibonacci: terme general?

$u_0 = 0,\ u_1 = 1;\ u_K = u_{K-1} + u_{K-2}$, si $K \geq 2$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	....
un	0	1	1	2	3	5	8	13	.....

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}, \text{ si } n \geq 2$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} \overset{\text{si } n-1 \geq 2}{=} A \cdot A \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} =$$

$$= A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} \overset{\text{si } n-2 \geq 2}{=} A^2 \cdot A \begin{pmatrix} u_{n-3} \\ u_{n-4} \end{pmatrix} =$$

$$= A^3 \begin{pmatrix} u_{n-3} \\ u_{n-4} \end{pmatrix} =$$

.....

$$= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \boxed{A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Calculem A^K:

diagonalitzem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = (-x)(1-x) - 1 = x^2 - x - 1$$

arrels: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightsquigarrow$

vaps: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\ (= \alpha)$, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (= \beta)$

veps de vap. α:

$$E_\alpha: \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & \underbrace{1-(1-\alpha)(-\alpha)}_{-\alpha^2+\alpha+1=0} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = \alpha y,\ y \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right.$

$E_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

OBS: $A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}$

és cert pq que:
$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha + 1$

veps de vap. β:

$$E: \begin{pmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1-\beta & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \underbrace{1-(1-\beta)(-\beta)}_{-\beta^2+\beta+1=0} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució: $x = \beta y,\ y \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{pmatrix} \beta y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right.$

$E_\beta = \left\langle \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Per tant, si $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, aleshores:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D, \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = P D P^{-1}$

$\Rightarrow$

$$\boxed{A^K} = P \cdot D^K P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^K & 0 \\ 0 & \beta^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^{K+1} & \beta^{K+1} \\ \alpha^K & \beta^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \alpha^{K+1} - \beta^{K+1} & -\beta \cdot \alpha^{K+1} + \alpha\, \beta^{K+1} \\ \alpha^K - \beta^K & -\beta \cdot \alpha^K + \alpha\, \beta^K \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n & -\beta \cdot \alpha^n + \alpha\, \beta^n \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & -\beta \alpha^{n-1} + \alpha\, \beta^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-\beta} (\alpha^n - \beta^n) \\ \frac{1}{\alpha-\beta} (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{pmatrix}$$