1. [2 punts]

   (a) (i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $S \subseteq E$. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai vectorial d'E.

   (ii) Indiqueu si els conjunts següents són subespais de l'espai vectorial que s'indica (en aquest apartat responeu només sí o no en cada cas, no s'ha de justificar la resposta):

   1). $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ a - c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$

   2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x + y - 3z = 0, 2x + 3y - z + 2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$

   3) S_3 és el conjunt de les matrius triangulars superiors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades 4×4.

   (b) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real E. Digueu què vol dir que u sigui vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores $\dim \operatorname{Ker}(f) \geq 1$.

2. [2 punts] Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$

$$S_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y + z + 3t = 0, x - y + 2z - t = 0, x - y + az + (1 - a)t = 0 \}$$

   (a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

   (b) Doneu una base de S_2.

3. [2 punts] Considerem les bases $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, 2 + x\}$ i $B' = \{1 + x^2, -1 + x, 2x + x^2\}$ de l'espai $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2.

   (a) Doneu la matriu de canvi de base de B a B', $P_{B'}^{B}$.

   (b) Doneu les coordenades del polinomi $1 + x - x^2$ en la base B'.

4. [4 punts] Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$.

   (a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f.

   (b) Doneu el polinomi característic i els valors propis de f. És f diagonalitzable?

   (c) Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & y + z \\ z + x & y \end{pmatrix}$. Digueu si l'aplicació $g \circ f$ és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Els sistemes d'equacions lineals s'han de resoldre amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- Cal entregar les 4 preguntes per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,. . .
- Les notes es publicaran com a tard el dia 27 de juny a la tarda.
- La revisió es farà el dia 28 de juny a les 11:00 a l'aula A5-102.

1. [3 punts]

   (a) Doneu llevat d'isomorfismes tots els grafs eulerians d'ordre 5. Indicació: considereu les possibles seqüències de graus que pot tenir un graf eulerià d'ordre 5.

   (b) Enuncieu el Teorema de Dirac. Doneu un contraexemple que mostri que el recíproc no és cert. Doneu un exemple que mostri que la condició del teorema és ajustada.

   (c) Sigui G un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos. Demostreu que G és acíclic si i només si $m = n - k$.

2. [3 punts]

   (a) Doneu totes les seqüències de graus dels arbres d'ordre 8 amb almenys 5 fulles i almenys un vèrtex de grau 3.

   (b) Doneu l'arbre T que té per seqüència de Prüfer $(4, 4, 5, 1, 5, 4)$. Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de T.

   (c) Sigui G el graf de Petersen amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{a, b, c, d, e\}$ i arestes $A = \{12, 23, 34, 45, 51\} \cup \{1a, 2b, 3c, 4d, 5e\} \cup \{ac, ce, be, bd, ad\}$. Dibuixeu els arbres generadors de G que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS respectivament si es comença amb el vèrtex 1 i considerant l'ordenació del conjunt de vèrtexs $(1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e)$. Indiqueu en quin ordre s'obtenen les arestes dels arbres en cada cas.

3. [4 punts] Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n \geq 3$. Definim el graf $G^* = (V^*, A^*)$ tal que:

$$V^* = V$$
$$A^* = A \cup \{xy : x, y \in V \text{ i } d(x, y) = 2\}.$$

   on $d(x, y)$ és la distància entre x i y en G.

   (a) Sigui $K_{1,n-1}$ el graf estrella d'ordre n. Demostreu que $K^*_{1,n-1}$ és isomorf al graf complet K_n.

   (b) Sigui T_n el graf trajecte d'ordre n. Calculeu el diàmetre del graf T^*_n.

   (c) Sigui C_n el graf cicle d'ordre n. Per a quins valors de n és C^*_n eulerià?

   (d) Demostreu que si u és un vèrtex de tall d'un graf connex G, aleshores u no és vèrtex de tall en G^*.

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- La durada de l'examen és de 1h 45m.
- Cal entregar les 3 preguntes per separat.
- Escriviu amb tinta negra o blava.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,...
- Les notes es publicaran com a tard el dia 27 de juny a la tarda.
- La revisió es farà el dia 28 de juny a les 11:00 a l'aula A5-102.