

**JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**

1. (a) Doneu la definició d'arbre i 3 caracteritzacions.  
(b) Demostreu que en tot graf d'ordre  $n \geq 2$  hi ha almenys dos vèrtexs del mateix grau.
2. Sigui  $k \geq 3$ . Considereu un graf  $G_k$  que té exactament dos components connexos: un és isomorf a  $K_{1,k-1}$  i l'altre al graf trajecte  $T_k$ .
  - a) Calculeu el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf  $G_k$  per a obtenir un graf  $G$  que sigui eulerià.
  - b) És el graf  $G$  de l'apartat anterior hamiltonià? Si no ho és, quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir a  $G$  per a fer-ho hamiltonià? (no cal que segueixi sent eulerià).
3. Sigui  $K_{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , el graf bipartit complet on els vèrtexs d'una part estable estan etiquetats de 1 a  $n$ , i els vèrtexs de l'altra part estable estan etiquetats de  $n+1$  a  $2n$ .
  - (a) Apliqueu els algorismes DFS i BFS a  $K_{n,n}$  començant pel vèrtex 1 i seguint l'ordre numèric dels vèrtexs. Doneu una representació gràfica dels arbres obtinguts sense que es tallin les arestes.
  - (b) Per a cada un dels dos arbres generadors de  $K_{n,n}$  obtinguts a l'apartat anterior doneu el radi, el diàmetre i el conjunt dels vèrtexs centrals.
4. Sigui  $r \geq 1$  un enter. Sigui  $H_r = (V_r, A_r)$  el graf tal que  $V_r$  és el conjunt de les paraules de longitud  $r$  amb l'alfabet  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$  i  $A_r$  està definit d'acord a la regla següent: dos paraules són adjacents si i sols si difereixen en una única posició. Per exemple, per a  $r = 2$  el conjunt de vèrtexs és  $V_2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$  i el conjunt de vèrtexs adjacents al vèrtex 00 és  $\{01, 02, 10, 20\}$ .
  - a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf  $H_r$ .
  - b) És  $H_r$  un graf bipartit per a algun valor de  $r$ ?

---

**Informacions**

- Durada de l'examen: 1h 45m
- Tots els problemes valen el mateix
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 4 problemes per separat.
- Sense llibres, ni apunts, ni calculadores
- Publicació de les notes: 13/11/2018. Revisió de l'examen: 14/11/2018 a les 12:15 (s'informarà del lloc al racó).