Matemàtiques 1 - GEI - FIB 03-06-2021
Examen Final-Part de Grafs

JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. Sigui $k \geq 2$ un nombre natural. Definim el graf $G_k = (V_k, A_k)$, on:

$$\begin{aligned} V_k &= \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\} \\ A_k &= \{x_1 y_1\} \cup \{x_i x_j : i \neq j\} \cup \{y_i y_j : i \neq j\} \end{aligned}$$

a) (1 punt) Representeu els grafs G_2 i G_5. Doneu l'ordre i la mida de G_k i del seu complementari, G_k^c, en funció de k.

b) (1 punt) Esbrineu si G_k^c és bipartit. En cas afirmatiu, doneu les parts estables.

c) (1 punt) Calculeu el diàmetre del graf complementari, G_k^c.

d) (1 punt) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k, $k \geq 2$, per tal d'obtenir un graf eulerià?

e) (1 punt) Proveu que G_3^c és hamiltonià. Per a quins valors de k és G_k^c hamiltonià?

2. Considerem el graf bipartit complet $K_{2,10}$ amb parts estables $\{1, 2\}$ i $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

a) (1 punt) Quants arbres generadors diferents té?

b) (1 punt) Quants arbres generadors no isomorfs té?

c) (1 punt) Doneu l'arbre generador obtingut en aplicar l'algorisme BFS si es comença amb el vèrtex 1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria sempre el vèrtex d'etiqueta més petita. Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en que s'hi afegeixen els vèrtexs en aplicar l'algorisme.

d) (0.5 punts) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre obtingut a l'apartat anterior.

3. (1.5 punts) Sigui G un graf d'ordre n, $n \geq 2$, amb exactament k components connexos. Demostreu que G és acíclic si, i només si, la seva mida és $n - k$.

Informacions

- Durada de l'examen: 1h 25m
- S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
- Cal lliurar els 3 exercicis per separat.
- No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni calculadores, ni mòbils, ni dispositus electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació, ...
- Publicació de les notes: 21/06/2021.
- Revisió de l'examen: s'haurà de demanar el 22 de juny seguint el procediment que es publicarà al racó.

Model de solució

1. (5 punts) Sigui $k \geq 2$ un nombre natural. Definim el graf $G_k = (V_k, A_k)$ on:

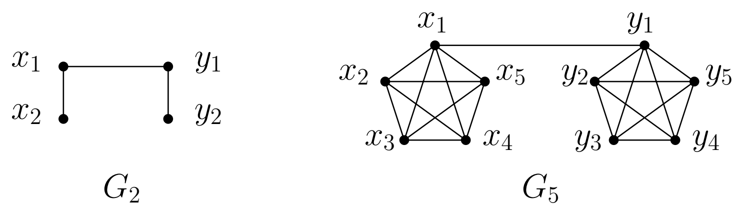
$$\begin{aligned} V_k &= \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\} \\ A_k &= \{x_1 y_1\} \cup \{x_i x_j : i \neq j\} \cup \{y_i y_j : i \neq j\} \end{aligned}$$

Solució. Observem primer com són els grafs G_k i G_k^c. Si definim $V_{k1} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ i $V_{k2} = \{y_1, \ldots, y_k\}$, observem que V_{k1} i V_{k2} indueixen grafs complets en G_k i només hi ha una aresta amb un extrem a V_{k1} i l'altre a V_{k2}. Per tant, el graf G_k està format per dos grafs complets d'ordre k més l'aresta $x_1 y_1$, que té un extrem a cadascún d'aquests grafs complets.

Per tant, en G_k^c, els conjunts V_{k1} i V_{k2} indueixen grafs nuls (és a dir, no hi ha arestes de tipus $x_i x_j$ ni de tipus $y_i y_j$), i hi ha totes les arestes possibles entre un vèrtex de V_{k1} i un altre de V_{k2} (és a dir, arestes del tpus $x_i y_j$) excepte l'aresta $x_1 y_1$.

a) Representeu els grafs G_2 i G_5. Doneu l'ordre i la mida de G_k i del seu complementari, G_k^c, en funció de k.

Solució. Vegeu a la figura una representació dels grafs G_2 i G_5:



L'ordre de G_k és

$$ord(G_k) = |V_k| = |\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k\}| = 2k.$$

La mida de G_k és

$$\begin{aligned} mida(G_k) &= |A_k| = |\{x_1 y_1\} \cup \{x_i x_j : i \neq j\} \cup \{y_i y_j : i \neq j\}| \\ &= |\{x_1 y_1\}| + |\{x_i x_j : i \neq j\}| + |\{y_i y_j : i \neq j\}| \\ &= 1 + \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = 1 + k(k-1) = k^2 - k + 1. \end{aligned}$$

L'ordre de G_k^c és el mateix que el de G_k, o sigui,

$$ord(G_k^c) = ord(G_k) = 2k.$$

La mida de G_k^c és la mida d'un complet amb $2k$ vèrtexs menys la mida de G_k, o sigui:

$$\begin{aligned} mida(G_k^c) &= mida(K_{2k}) - mida(G_k) = \frac{2k(2k-1)}{2} - (k^2 - k + 1) \\ &= k(2k-1) - (k^2 - k + 1) = k^2 - 1. \end{aligned}$$

b) Esbrineu si G_k^c és bipartit. En cas afirmatiu, doneu les parts estables.

Solució. Tal com hem vist abans, en G_k^c, no hi ha arestes entre vèrtexs de V_{k1} ni entre vèrtexs de V_{k2}. Per tant, G_k^c és bipartit amb parts estables V_{k1} i V_{k2}.

c) Calculeu el diàmetre del graf complementari, G_k^c.

Solució. Calculem les distàncies entre tots els possibles parells de vèrtexs de G_k^c. Observem que $d(x_i, x_j) = 2$, si $i \neq j$, ja que els vèrtexs x_i i x_j no són adjacents en G_k^c, però hi ha un camí de longitud 2 en G_k^c, $x_i \sim y_2 \sim x_j$. Per simetria, $d(y_i, y_j) = 2$, si $i \neq j$. D'altra banda, tenim que $d(x_i, y_j) = 1$, si $i \neq j$, i $d(x_i, y_i) = 1$, si $i \neq 1$. Finalment, $d(x_1, y_1) = 3$, perquè $x_1 \sim y_2 \sim x_2 \sim y_1$, però $x_1 \nsim y_1$ i no hi ha camins de longitud 2 entre x_1 i y_1, perquè G_k^c és bipartit i tots els camins entre vèrtexs de parts estables diferents tenen longitud senar.

Per tant, el diàmetre és 3 (el màxim de les distàncies entre tots els parells de vèrtexs).

d) Quin és el mínim nombre d'arestes que cal afegir al graf G_k, $k \geq 2$, per tal d'obtenir un graf eulerià?

Solució. Tal com hem observat a l'inici de l'exercici, G_k és un graf connex amb 2 vèrtexs de grau k (concretament, els vèrtexs x_1 i y_1) i $2k-2$ vèrtexs de grau $k-1$ (la resta de vèrtexs).

Per tant, si k és parell, hi ha exactament $2k-2$ vèrtexs de grau senar. Perquè tots els vèrtexs tinguin grau parell, cal afegir almenys $k-1(=(2k-2)/2)$ arestes (ja que tot vèrtex de grau senar ha de ser incident com a mínim a una aresta més i una nova aresta pot ser incident amb dos vèrtexs de grau senar). Si afegim les $k-1$ arestes $a_i = x_i y_i$, $i \neq 1$, obtenim el graf $G_k + \{a_2, \ldots, a_k\}$, que és eulerià per ser connex amb tots els vèrtexs de grau k, parell. Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir en aquest cas és $k-1$.

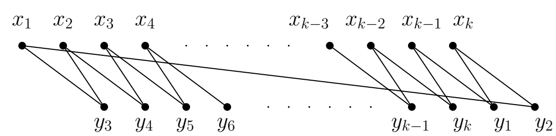
Si k és senar, aleshores hi ha exactament 2 vèrtexs de grau senar, concretament els vèrtexs x_1 i y_1. Perquè tots els vèrtexs tinguin grau parell, cal afegir almenys una aresta a_1 incident amb x_1 i una aresta incident a_2 amb y_1. No pot ser $a_1 = a_2$, perquè aleshores hauria de ser $a_1 = a_2 = x_1 y_1$, i aquesta aresta ja és de G_k. Per tant, $a_1 = x_1 y_j$, amb $j \neq 1$, i $a_2 = x_i y_1$, amb $i \neq 1$. Però aleshores $G_k + \{a_1, a_2\}$ té exactament dos vèrtexs de grau senar, concretament x_i i y_j. Per tant, cal afegir almenys una aresta més, o sigui, almenys 3. Finalment, observem que x_1y_2, x_2y_2, x_2y_1 no són arestes de G_k i el graf $G_k + \{x_1y_2, x_2y_2, x_2y_1\}$ és eulerià, ja que és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Per tant, el mínim nombre d'arestes que cal afegir en aquest cas és 3.

e) Proveu que G_3^c és hamiltonià. Per a quins valors de $k \geq 2$ és G_k^c hamiltonià?

Solució. El graf G_3^c és hamiltonià, ja que un possible cicle hamiltonià és $x_1y_3x_2y_1x_3y_2x_1$. El graf G_k^c és hamiltonià si $n \geq 3$, ja que podem construir un cicle hamiltonià, per exemple:

$$x_1y_3x_2y_4x_3 \ldots x_{k-2}y_kx_{k-1}y_1x_ky_2x_1,$$

on el cicle està construit de la forma següent: comencem en el vèrtex x_1, i a partir d'aquí, a cada pas anem de x_i a y_{i+2} i de y_j a x_{j-1}, on els subíndexs els prenem mòdul k, fins arribar de nou al vèrtex x_1. Observem que el cicle donat és una ziga zaga en què visitem els vèrtexs de V_{k1} en l'ordre $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1$ i els vèrtexs de V_{k2} en l'ordre $y_3y_4 \ldots y_{k-1}y_ky_1y_2$:

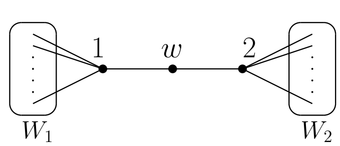


El graf G_2^c no és hamiltonià ja que és isomorf a T_4 i, per tant, $G_2^c \cong (T_4)^c \cong T_4$, que no és hamiltonià perquè té vèrtexs de tall. Per tant G_k^c és hamiltonià si i només si $k \geq 3$.

2. (3.5 punts) Considerem el graf bipartit complet $K_{2,10}$ amb parts estables $\{1, 2\}$ i $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

a) Quants arbres generadors diferents té?

Solució. Denotem $W = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Sigui T un arbre generador del graf $K_{2,10}$. La mida de T és 11, perquè $K_{2,10}$ té ordre 12. Per ser T és connex, per a tot vèrtex u de $K_{2,10}$ hi ha almenys una aresta de T incident amb u. Per tant, l'arbre tindrà 10 arestes $3x_3, 4x_4, \ldots, 12x_{12}$, on $x_k \in \{1, 2\}$ per a tot $k \in W$, més una aresta de la forma $i\,y_i$, on $i \in W$ i $y_i \in \{1, 2\}$. Per tant, hi haurà un vèrtex del conjunt W que tindrà grau 2 en T, i la resta de vèrtexs de W, tindran grau 1 en T. A més, qualsevol subgraf de $K_{2,10}$ amb 11 arestes d'aquesta forma és connex, ja que almenys un vèrtexs és adjacent a 1 i 2 alhora, i la resta de vèrtexs són adjacents al vèrtex 1 o al vèrtex 2. És a dir, d'aquesta manera obtenim sempre arbres generadors de $K_{2,10}$. Si w és el vèrtex de W de grau 2 en T, W_1 és el el conjunt de vèrtexs de $W \setminus \{w\}$ adjacents a 1 en T i W_2 és el el conjunt de vèrtexs de $W \setminus \{w\}$ adjacents a 2 en T, l'estructura dels arbres generadors de $K_{2,10}$ és:

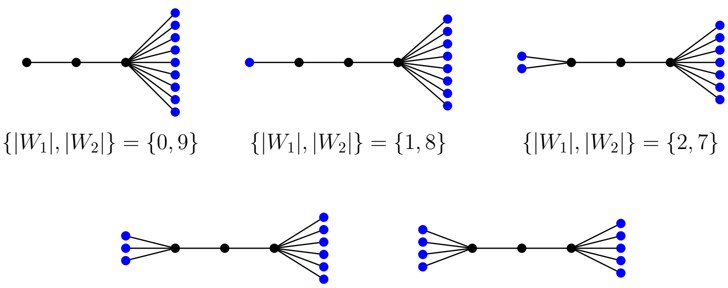


$$W_1 \cup W_2 = \{3, 4, \ldots, 12\} \setminus \{w\}$$

Podem triar el vèrtex w de W de 10 maneres diferents, i un cop escollit aquest vèrtex, hi ha 2^9 possibles maneres de triar el subconjut W_1 (són els possibles subconjunts del conjunt $W \setminus \{w\}$, que té cardinal 9), i aleshores ja queda determinat el conjunt W_2. Per tant, $K_{2,10}$ té 10×2^9 arbres generadors diferents.

b) Quants arbres generadors no isomorfs té?

Solució. Mirem quants arbres obtenim a l'apartat anterior llevat isomorfismes. Dos arbres generadors seran isomorfs si els valors $\{|W_1|, |W_2|\}$ són els mateixos per als dos arbres. Per tant, tenim 5 arbres llevat isomorfismes, segons si els cardinals dels conjunts W_1 i W_2 són 0-9; 1-8; 2-7; 3-6 o bé 4-5 (aquests 5 arbres no són isomorfs perquè tenen grau màxim diferent, concretament 10, 9, 8, 7 i 6, respectivament). Vegeu els 5 arbres obtinguts a la figura següent:

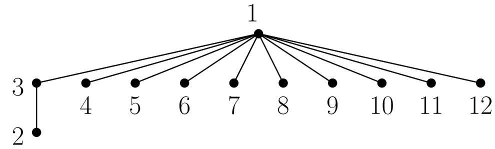


$\{|W_1|, |W_2|\} = \{0, 9\}$ $\{|W_1|, |W_2|\} = \{1, 8\}$ $\{|W_1|, |W_2|\} = \{2, 7\}$

$\{|W_1|, |W_2|\} = \{3, 6\}$ $\{|W_1|, |W_2|\} = \{4, 5\}$

c) Doneu l'arbre generador obtingut en aplicar l'algorisme BFS si es comença amb el vèrtex 1 i, si en algun moment l'algorisme té diversos vèrtexs on escollir, es tria sempre el vèrtex d'etiqueta més petita. Representeu l'arbre obtingut i doneu l'ordre en que s'hi afegeixen els vèrtexs en aplicar l'algorisme.

Solució. Vegeu a la figura l'arbre obtingut. L'ordre en què s'afegeixen els vèrtexs a l'arbre generador és $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 2$.



d) Calculeu la seqüència de Prüfer de l'arbre obtingut a l'apartat anterior.

Solució. A la seqüència de Prüfer de l'arbre obtingut a l'apartat anterior només apareixen els vèrtexs 1 i 3, ja que són els únic vèrtexs que no són fulles. La seqüència de Prüfer és $(3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

3. (1.5 punts) Sigui G un graf d'ordre n, $n \geq 2$, amb exactament k components connexos. Demostreu que G és acíclic si, i només si, la seva mida és $n - k$.

Solució. Suposem primer que G és acíclic. Aleshores G és un bosc d'ordre n, mida m i k components connexos. I sabem que la mida d'un bosc d'ordre n amb k components connexos és $n - k$.

Demostrem ara el recíproc per reducció a l'absurd. Suposem que G té d'ordre n, mida m, k components connexos $G_1, \ldots, G_k$, i que es compleix $m = n - k$, però que no és acíclic, és a dir, G té almenys un cicle. Podem suposar que tenim numerats els component connexos de manera que el component connex G_1 té algun cicle. Per ser $G_1, \ldots, G_k$ connexos, es compleix $mida(G_i) \geq ordre(G_i) - 1$, per a tot $i \in \{1, \ldots, k\}$. A més, $mida(G_1) \neq ordre(G_1) - 1$ perquè en cas contrari G_1 seria un arbre, i conseqüentment, acíclic. Per tant, $mida(G_1) > ordre(G_1) - 1$. Aleshores,

$$m = \sum_{i=1}^{k} mida(G_i) > \sum_{i=1}^{k} (ordre(G_i) - 1) = \sum_{i=1}^{k} ordre(G_i) - k = n - k,$$

que és una contradicció, ja que $m = n - k$ per hipòtesi.