TOTES LES RESPOSTES HAN DE SER RAONADES.

1. (*4 punts*) Sigui a un nombre de l'interval $(0,1)$. Considereu la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ definida per $a_1 = a$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}$.

   a) Demostreu que $0 < a_n < 1$ per a tot $n \geq 1$.

   b) Demostreu que la successió $(a_n)_{n\geq 1}$ és decreixent.

   c) Demostreu que la successió és convergent i que el seu límit és 0.

   d) Proveu que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ i calculeu $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_{n+1}}}$.

2. (*3 punts*) L'objectiu es trobar una solució de l'equació:

$$(1+\sin x)\, e^x = 1.21$$

   a) Trobeu els polinomis de Taylor de grau 1 centrats en 0 de les funcions $\sin x$ i e^x. Substituïu $\sin x$ i e^x pels seus polinomis de Taylor que heu trobat en l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$, i trobeu la solució positiva x_0 de l'equació resultant.

   b) Utilitzeu el mètode de la tangent amb valor inicial x_0 per trobar una solució de l'equació $(1+\sin x)\, e^x = 1.21$ amb un error absolut $\eta < 10^{-5}$.

3. (*3 punts*) Considereu l'equació $3x^2 - x^3 = 6$.

   a) Demostreu que l'equació té una solució real, i donar un interval de longitud menor o igual que 1 que la contingui.

   b) Doneu la solució amb un error absolut $\eta < 0.05$.

   c) Demostreu que fora de l'interval $[-2,3]$ l'equació no té solució.

   d) Considereu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$. Trobeu les solucions de $f'(x) = 0$. Aplicant el Teorema de Rolle es pot deduir que l'equació $3x^2 - x^3 = 6$ té més d'una solució real? Justifiqueu la resposta.

Durada de l'examen: 1h 45m.
Cal lliurar els exercicis per separat.
S'ha de respondre amb tinta blava o negra.
No es poden utilitzar ni llibres, ni apunts, ni mòbils, ni dispositius electrònics que puguin emmagatzemar, emetre o rebre informació.