# Makine Öğrenmesi

## Güdümsüz Öğrenme

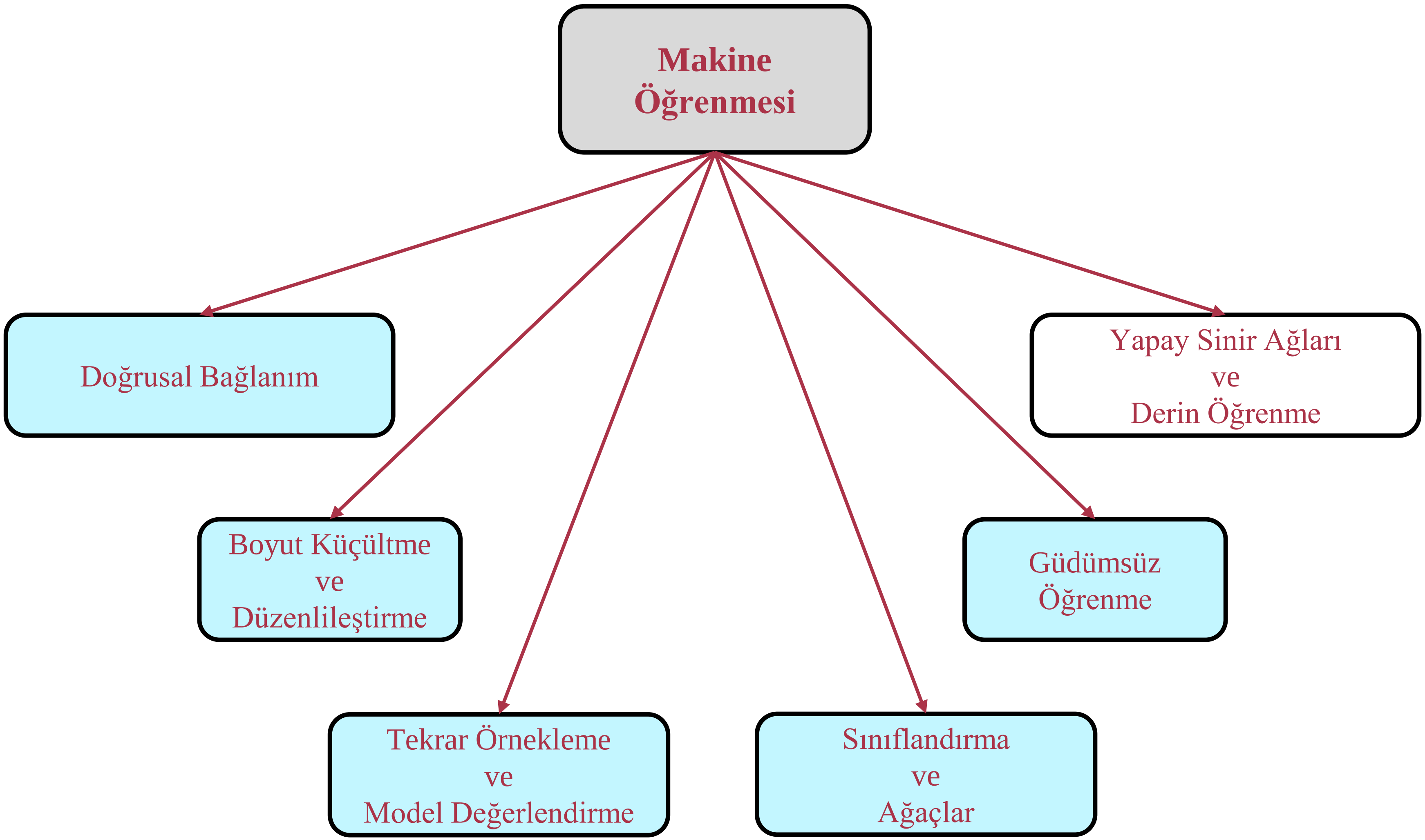
**İlker Birbil ve Utku Karaca**

Erasmus Üniversitesi Rotterdam

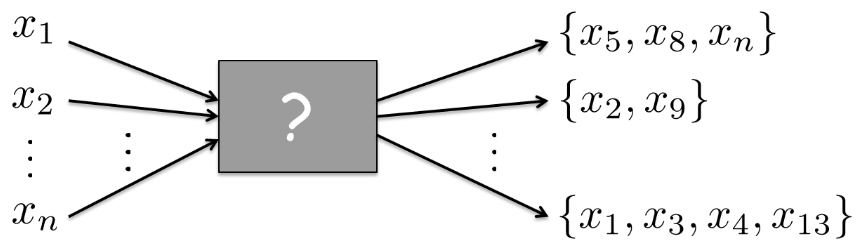
İstanbul'da Makine Öğrenmesi

27 Ocak – 2 Şubat, 2020

EUR
D4C
Bol Bilim
Veri Defteri
@sibirbil


Makine Öğrenmesi
Doğrusal Bağlanım
Boyut Küçültme ve Düzenlileştirme
Tekrar Örnekleme ve Model Değerlendirme
Sınıflandırma ve Ağaçlar
Güdümsüz Öğrenme
Yapay Sinir Ağları ve Derin Öğrenme

# Güdümsüz Öğrenme



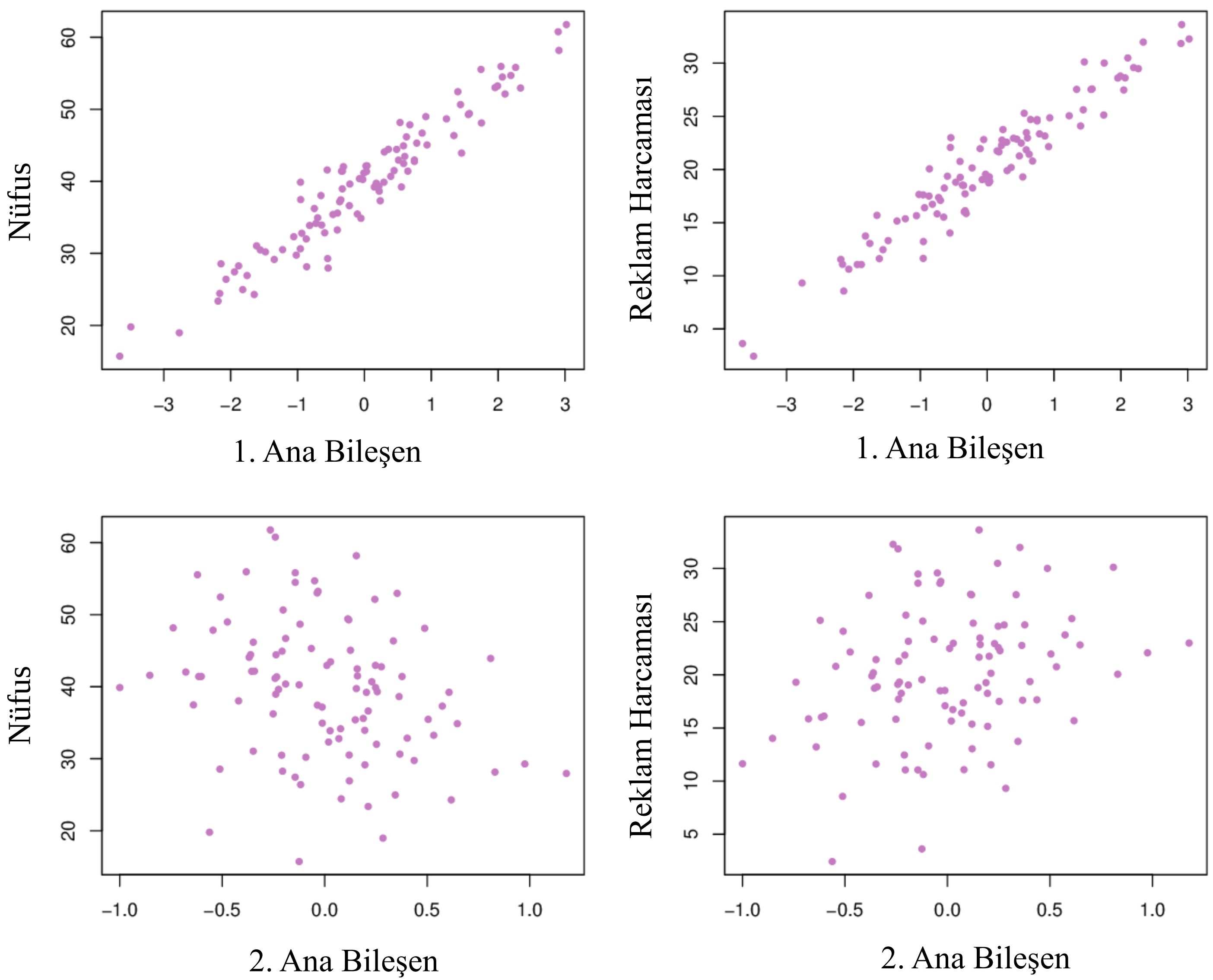

eğitim verisi

$\{x_i : 1, \ldots, n\}$

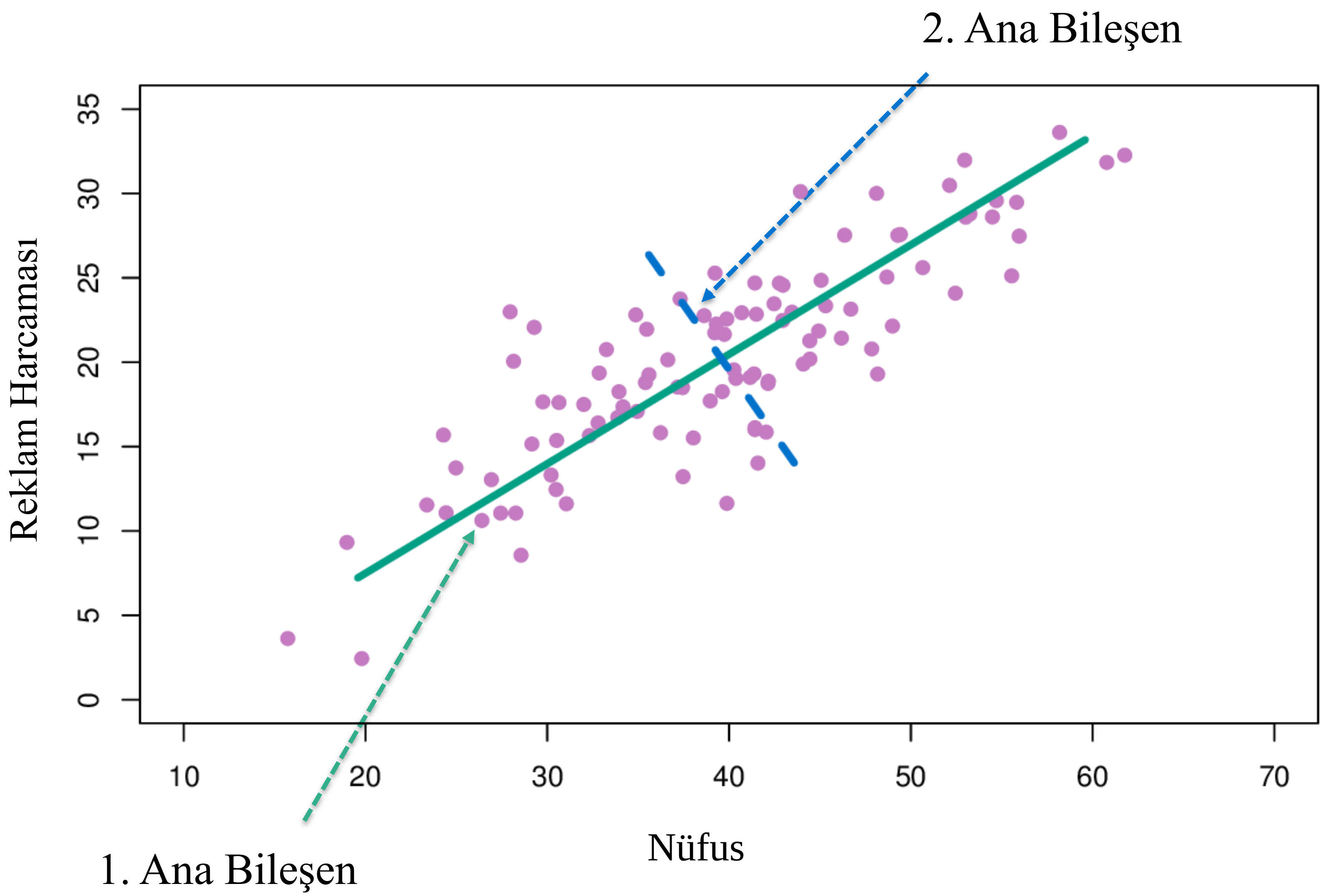
- Ana Bileşenler Analizi (Principal Component Analysis): Varyansın en yüksek olduğu kısımları göz önüne alacak şekilde değişkenleri birleştirme

- Gruplandırma (clustering): Veri kümesi içerisinde benzer alt grupları bulma
  - K-ortalamalar (K-means) gruplandırma
  - Hiyerarşik (hierarchical) gruplandırma
  - Spektral (spectral) gruplandırma
- Matris Ayrıştırma
- Google PageRank Algoritması

# Resimlerle Ana Bileşenler Analizi



# Resimlerle Ana Bileşenler Analizi



# Ana Bileşenler Analizi

$$Z_1 = \phi_{11} X_1 + \phi_{21} X_2 + \cdots + \phi_{p1} X_p$$

Değişkenlerin ortalamalarının sıfır olacağı kabul edilir

birinci ana bileşenin *skorları*

$$z_{i1} = \phi_{11} x_{i1} + \phi_{21} x_{i2} + \cdots + \phi_{p1} x_{ip}$$

Birinci ana bileşenin *ağırlıkları (loadings)*

Varyansı en fazla yapacak doğrultuyu bulma

$$\underset{\phi_1 \in \mathbb{R}^p}{\text{enbüyükle}} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\phi_1^{\intercal} x_i\right)^2}_{z_{i1}^2}$$

$$\text{öyle ki} \quad \|\phi_1\|^2 = 1.$$

# Ana Bileşenler Analizi

$$X^\intercal = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\phi_1 \in \mathbb{R}^p}{\text{enbüyükle}} & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\phi_1^\intercal x_i)^2}_{z_{i1}^2} \\ \text{öyle ki} & \|\phi_1\|^2 = 1. \end{array} \equiv \begin{array}{ll} \underset{\phi_1 \in \mathbb{R}^p}{\text{enbüyükle}} & \frac{1}{n}\phi_1^\intercal X^\intercal X \phi_1 \\ \text{öyle ki} & \phi_1^\intercal \phi_1 = 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\phi_1 \in \mathbb{R}^p}{\text{enbüyükle}} & \frac{1}{n}\phi_1^\intercal X^\intercal X \phi_1 \\ \text{öyle ki} & \phi_1^\intercal \phi_1 = 1. \end{array}$$

$$\phi_1$$

$$\begin{array}{ll} \underset{\phi_2 \in \mathbb{R}^p}{\text{enbüyükle}} & \frac{1}{n}\phi_2^\intercal X^\intercal X \phi_2 \\ \text{öyle ki} & \phi_2^\intercal \phi_2 = 1, \\ & \boxed{\phi_1^\intercal \phi_2 = 0.} \end{array}$$

...

Birinci ana bileşenle korelasyona engel olmak için eklenir (diklik kısıtı)

Ana bileşen doğrultuları ($\phi_1$, $\phi_2$, $\ldots$), buradaki $X^\intercal X$ matrisinin sıralı özvektörlerine karşılık gelir.

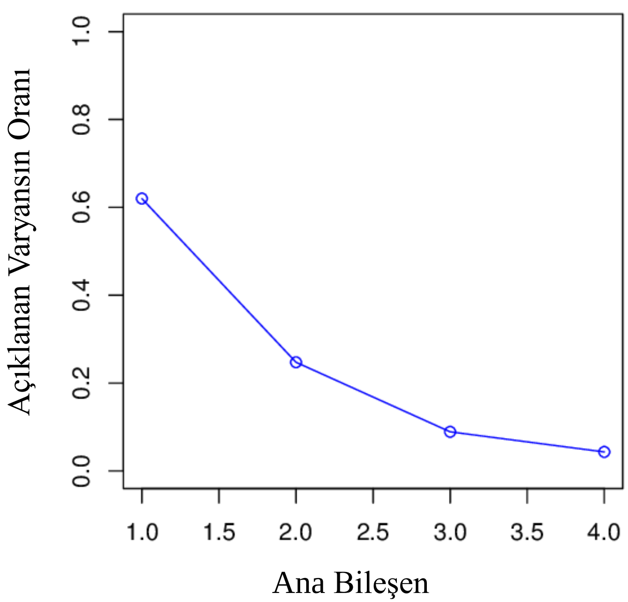
# Ana Bileşenler Analizi

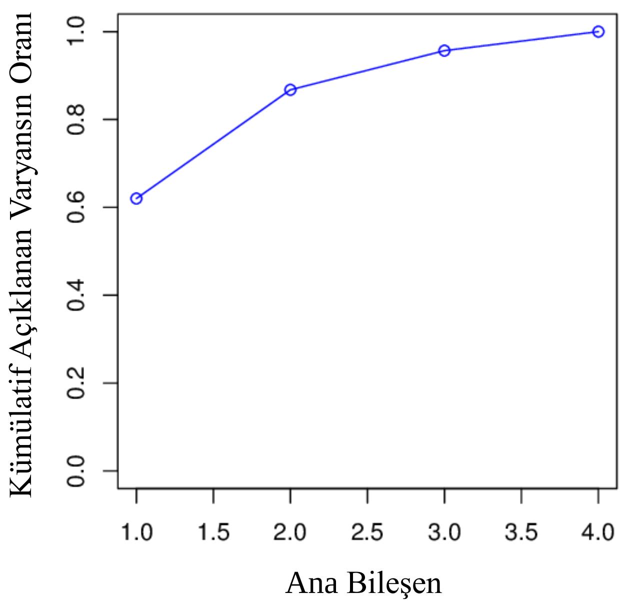
## Varyansın Açıklanması

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{Var}(X_j) = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{im}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{p} \phi_{jm} x_{ij} \right)^2$$

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{p} \phi_{jm} x_{ij} \right)^2}{\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}$$

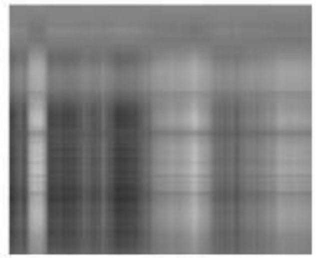



"kayşat (scree) grafiği"

# Ana Bileşenler Analizi

## Görüntü Sıkıştırma



(a) 1 principal component

(b) 5 principal component

(c) 9 principal component

(d) 13 principal component

(e) 17 principal component

(f) 21 principal component

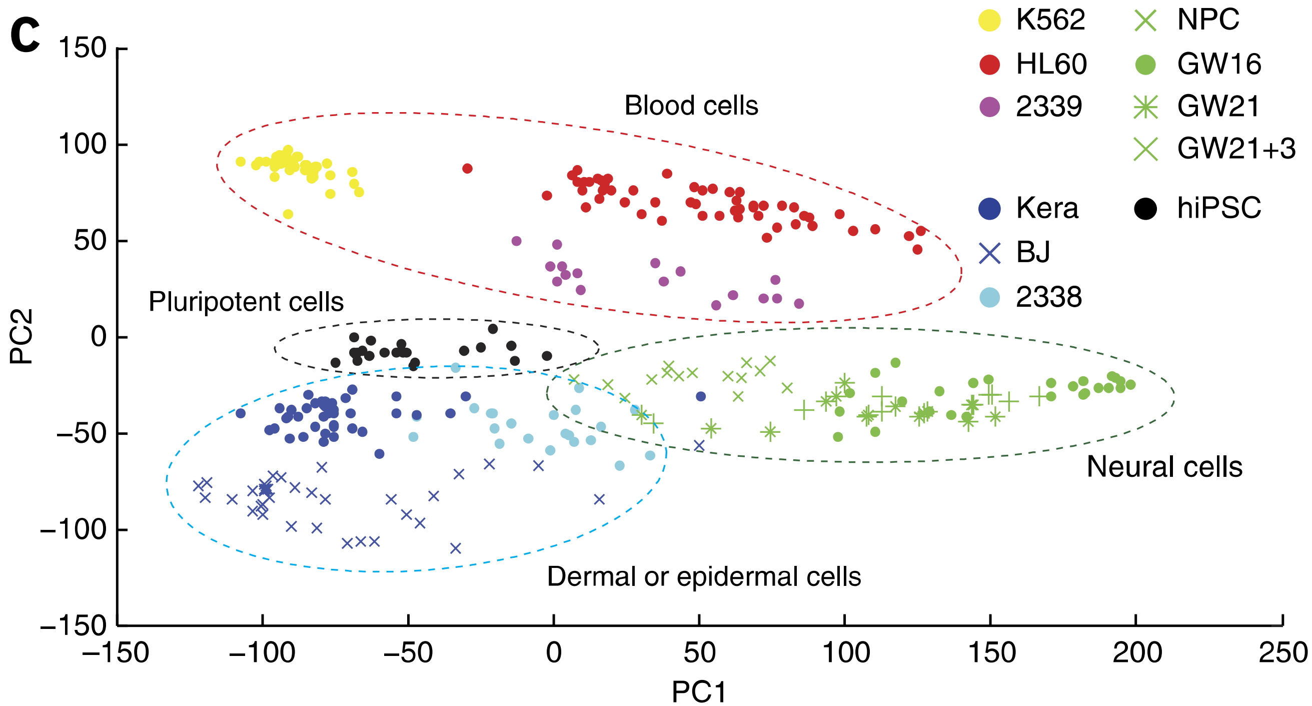
(g) 25 principal component

(h) 29 principal component

# Ana Bileşenler Analizi

## Biyoteknoloji

*




******Low-coverage single-cell mRNA sequencing reveals cellular heterogeneity and activated signaling pathways in developing cerebral cortex*, A. A. Pollen vd., Nature Biotechnology, 32, syf. 1053-1058, 2014.

# Benzemezlik Ölçüleri

- Kritik Nokta: İki nokta arasındaki uzaklık veya benzemelik
- İyi bir ölçü (genellikle) algoritmadan daha önemlidir
- Eksik değerler için dikkatli olunmalı

- Algoritmaların çoğu *K* küme arasında toplam benzemezliği enküçükler:

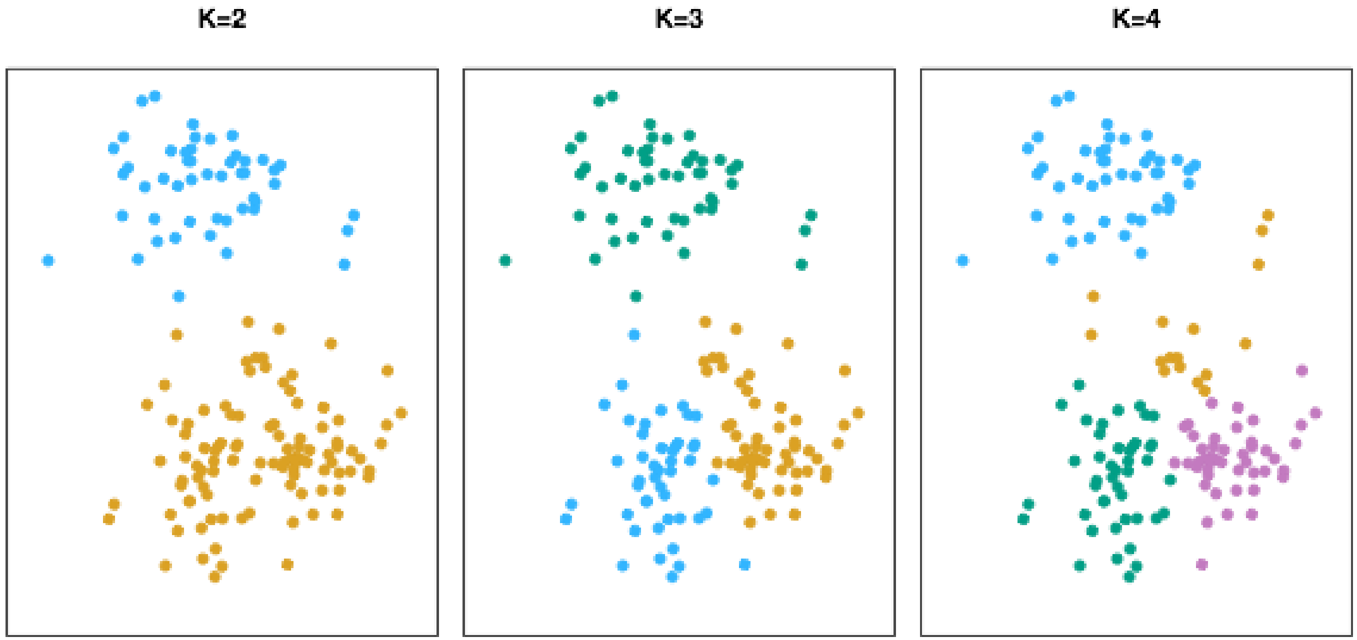
$$W(C) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{C(i)=k} \sum_{C(j)=k} d(x_i, x_j)$$

*kodlayıcı*
(veri noktalarını kümelere atar)

iki gözlem noktası
arasındaki benzemezlik

# *K*-Ortalamalar Gruplandırma

**Fikir:** Birbirine yakın noktaları *K* gruptan birine atamak




Optimizasyon problemi?

# *K*-Ortalamalar Gruplandırma

**Performans:** Her noktanın ait olduğu grup merkezine (geometrik merkez) olan mesafesini hesapla ve tüm mesafeleri topla

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i \text{ noktası } k \text{ grubunda ise;} \\ 0, & \text{aksi halde.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underset{\mu, z}{\text{enküçükle}} \quad & \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - \mu_k\|^2 z_{ik} \\ \text{öyle ki} \quad & \sum_{k=1}^{K} z_{ik} = 1, \quad i = 1, \ldots, n; \\ & z_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, K; \\ & \mu_k \in \mathbb{R}^p, \quad k = 1, \ldots, K. \end{aligned}$$

**ZOR!**

Yaklaşık çözüm?

# $K$-Ortalamalar Gruplandırma

Her noktayı bir gruba rassal olarak ata

$$\text{rassal bir } \bar{k} \in \{1, \dots, K\} \text{ için } z_{i\bar{k}}^0 = 1$$

$$k \in \{1, \dots, K\} \text{ ve } k \neq \bar{k} \text{ için } z_{ik}^0 = 0$$

$$t = 1$$

Gruplar değiştiği sürece aşağıdaki adımları tekrarla

Çöz

$$\mu^t = \arg\min_{\mu} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - \mu_k\|^2 \underbrace{z_{ik}^{t-1}}_{\text{sabit}}$$

Çöz

$$\begin{aligned} z^t = \quad & \arg\min_{z} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - \underbrace{\mu_k^t}_{\text{sabit}}\|^2 z_{ik} \\ & \text{öyle ki} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{K} z_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, n; \\ & \qquad\qquad z_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

$$t \leftarrow t + 1$$

# $K$-Ortalamalar Gruplandırma

Amaç fonsiyonu her döngüde azalır ya da değerini korur

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\mu_k^{t-1}\|^2 z_{ik}^{t-1} &\geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\mu_k^{t}\|^2 z_{ik}^{t-1}\\ &\geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\mu_k^{t}\|^2 z_{ik}^{t}\end{aligned}$$

Alt problemler

$$\mu^t = \arg\min_{\mu} \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\mu_k\|^2 \underbrace{z_{ik}^{t-1}}_{\text{sabit}} \rightarrow \boxed{\mu_k^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i z_{ik}^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n} z_{ik}^{t-1}}}$$

$\mu_k^t$ : *t-1* adımındaki *k* grubunun geometrik merkezi (centroid)

$$\begin{aligned} z^t = \quad & \arg\min_{z} \quad \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n}\|x_i-\underbrace{\mu_k^t}_{\text{sabit}}\|^2 z_{ik}\\ \text{öyle ki} \quad & \sum_{k=1}^{K} z_{ik}=1, \quad i=1,\ldots,n;\\ & z_{ik}\in\{0,1\}, \quad i=1,\ldots,n; k=1,\ldots,K.\end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Eğer } k=\arg\min\{\|x_i-\mu_k^t\| : k=1,\ldots,K \text{ ise } z_{ik}^t=1}$$

*i* noktasını, en yakınındaki geometrik merkezin grubuna ata

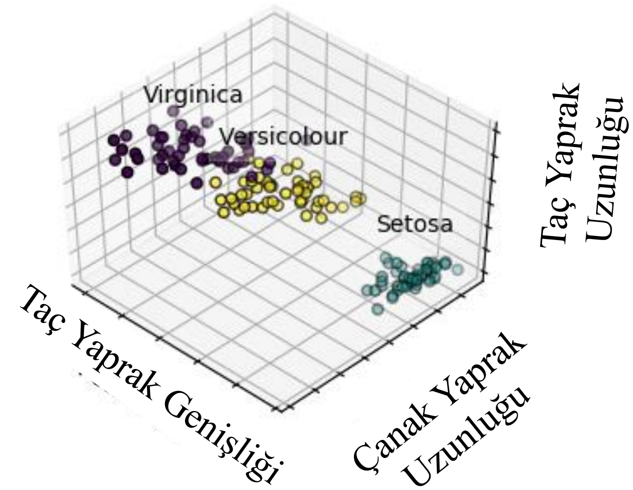
# *K*-Ortalamalar Gruplandırma

## Yerel Çözümler

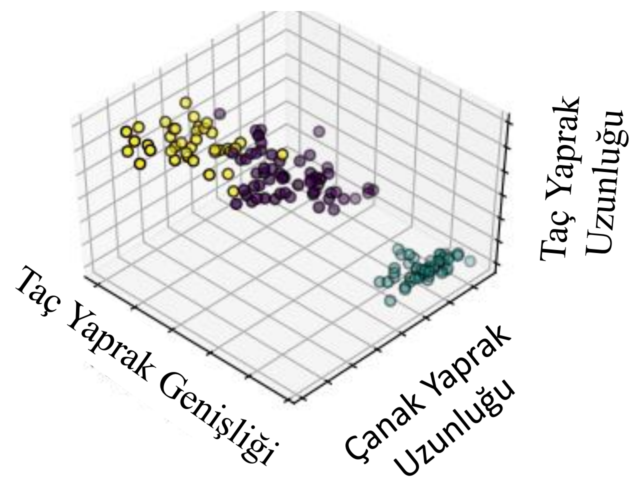
# Pratikte

```python
# Modified from
# https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/clu
# plot_cluster_iris.html#sphx-glr-auto-examples-clu

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

from sklearn.cluster import KMeans
from sklearn import datasets

iris = datasets.load_iris()
X = iris.data
y = iris.target

num_of_clusters = 3
k_means_iris = KMeans(n_clusters=num_of_clusters)

k_means_iris.fit(X)
labels = k_means_iris.labels_

# Plotting the cluster results
```

Gerçek Etiketler




K-Ortalama Etiketleri, K=3



# *K*-Medoit Gruplandırma Algoritması

- *K*-ortalama gibi adımlar izler fakat herhangi bir benzemezlik ölçüsüyle çalışır
- Grup merkezi gözlem noktalarından birisidir :

$$i_k^t = \underset{\{i:C(i)=k\}}{\arg\min} \sum_{C(j)=k} d(x_i, x_j)$$
$$\mu_k^t = x_{i_k^t}$$

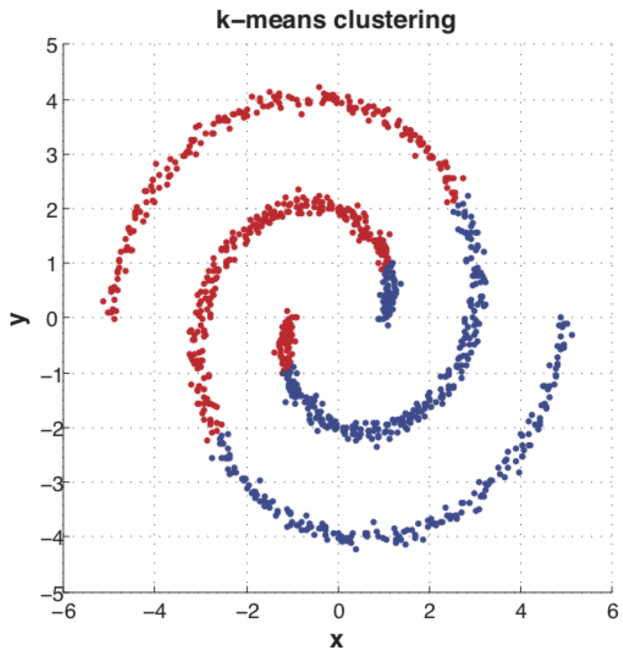
- Aynı şekilde, her bir gözlem noktası en yakındaki grup merkezine atanır:

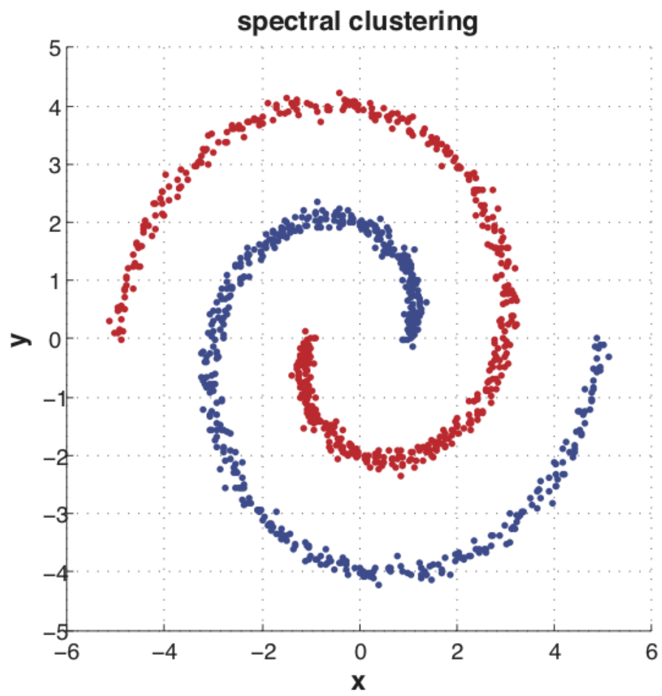
$$C(i) = \underset{k=1,\ldots,K}{\arg\min}\ d(x_i, \mu_k^t)$$

- Ortalamaları kullanmadığımızdan *K*-ortalama algoritmasından daha uzun sürer

# Spektral Gruplandırma

**Fikir:** Bir benzerlik matrisi ile veri noktalarından oluşan bir çizge (graph) tanımlamak ve çizge özdeğer (eigenvalue) analizi ile bağlantılı (connected) altçizgeleri (subgraph) belirlemek




*

**Machine Learning – A Probabilistic Perspective*, K. P. Murphy, The MIT Press, 2012, syf. 893.

# Spektral Gruplandırma

Benzerlik çizgesi – her veri noktası bir düğüm $G = (V, E)$

Tamamen veya kısmen bağlı bir çizge olabilir (karşılıklı *K*-en yakın komşu)


$$w_{ij} = w_{ji} > \tau \geq 0 \qquad\qquad w_{ij} = \exp\left(\frac{-\|x_i - x_j\|^2}{c}\right)$$

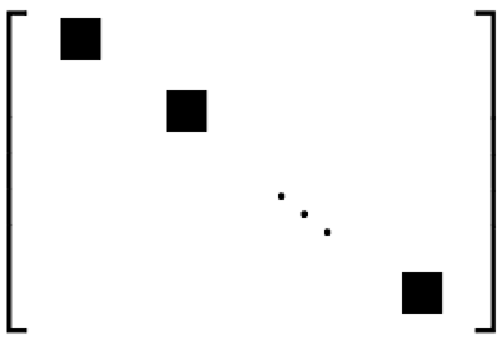
eşik değer

# Spektral Gruplandırma

$$W = [w_{ij}]_{i,j} \qquad g_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \qquad G = \mathrm{diag}(g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

**Çizge Laplace Matrisi**

$$\boxed{L = G - W}$$



*m* en küçük (=0) özdeğere karşılık gelen *m* özvektör bulunarak çizgenin *m* bileşeni (altçizge) belirlenir

# Spektral Gruplandırma

$\boxed{u \in \mathbb{R}^n}$

$$\left.\begin{aligned} u^\intercal L u &= u^\intercal G u - u^\intercal W u \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i u_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j w_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} (u_i - u_j)^2 \end{aligned}\right\} \quad u^\intercal L u \geq 0$$

$w_{ij} \geq 0$

bütün özdeğerler ≥ 0

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1} w_{1j} & -w_{12} & \dots & -w_{1n} \\ -w_{21} & \sum_{j=1} w_{2j} & \dots & -w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -w_{n1} & -w_{n2} & \dots & \sum_{j=1} w_{nj} \end{bmatrix}}_{L} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

en küçük özdeğer

# Spektral Gruplandırma

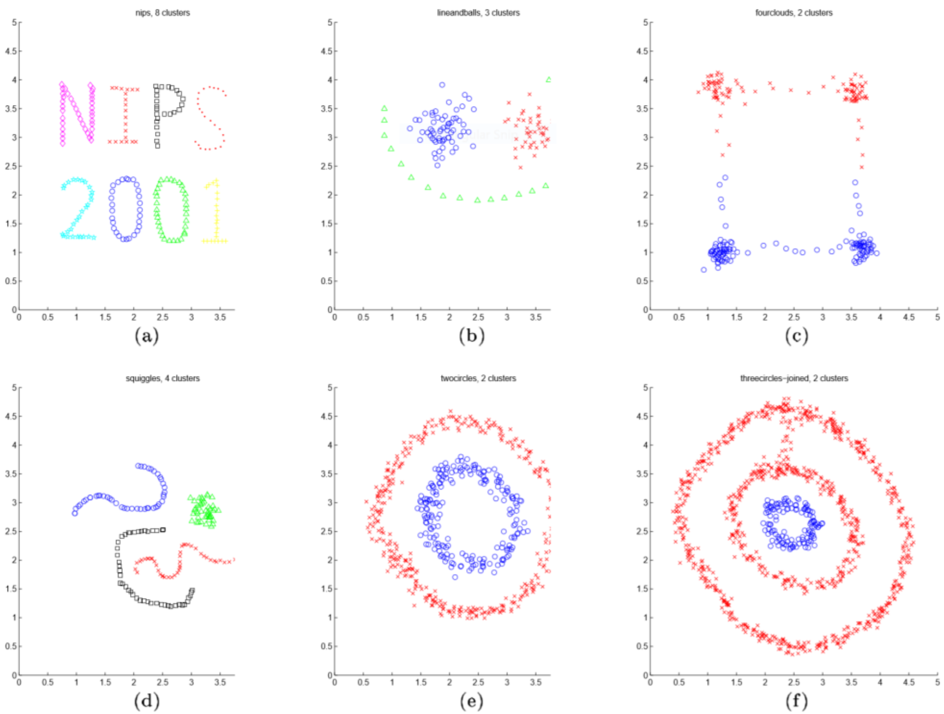
$$\boxed{L = G - W}$$

$m$ en küçük özdeğere karşılık gelen $m$ özvektör

$$Z = \begin{bmatrix} \vert & \vert & \cdots & \vert \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\ \vert & \vert & \cdots & \vert \end{bmatrix}_{n \times m}$$

*K*-Ortalamalar Gruplandırma

*




**On Spectral Clustering: Analysis and an algorithm*, A. Y. Ng, M. I. Jordan, Y. Weiss, NIPS 2001, syf. 849-856.

# Hiyerarşik Gruplandırma

**Fikir:** Mevcut iki grup arasındaki benzerliğe (ya da benzemezliğe) bakarak yeni gruplar oluşturma

Sırasıyla $m_1$ ve $m_2$ noktadan oluşan $C_1$ ve $C_2$ grupları

Tek Bağlamalı (*yığınsal* kümeleme)

$$d_{\mathrm{SL}}(C_1|C_2) = \min_{x_i \in C_1, x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

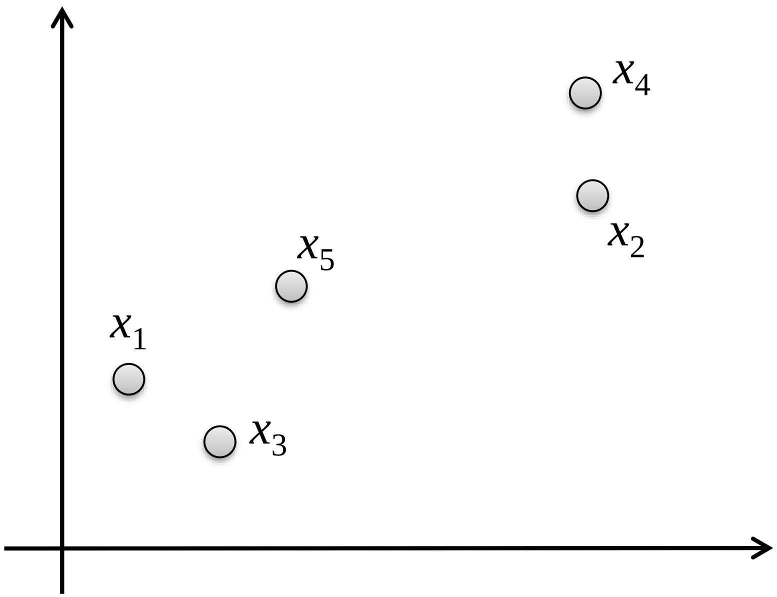
Tam Bağlamalı

$$d_{\mathrm{CL}}(C_1|C_2) = \max_{x_i \in C_1, x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

Grup Ortalaması

$$d_{\mathrm{GA}}(C_1|C_2) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{x_i \in C_1} \sum_{x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

# Hiyerarşik Gruplandırma




**Gruplar:** $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}$

$s(\{x_1\}|\{x_2\}) = 5.0$ $\boxed{s(\{x_1\}|\{x_3\}) = 0.5}$

$s(\{x_1\}|\{x_4\}) = 4.5$ $s(\{x_1\}|\{x_5\}) = 2.0$

$s(\{x_2\}|\{x_3\}) = 4.7$ $s(\{x_2\}|\{x_4\}) = 0.6$

$s(\{x_2\}|\{x_5\}) = 3.0$ $s(\{x_3\}|\{x_4\}) = 4.0$

$s(\{x_3\}|\{x_5\}) = 2.2$ $s(\{x_4\}|\{x_5\}) = 2.5$

**Gruplar:** $\{x_1, x_3\}, \{x_2\}, \{x_4\}, \{x_5\}$

$s(\{x_1, x_3\}|\{x_2\}) = 5.0$ $s(\{x_1, x_3\}|\{x_4\}) = 4.5$ $s(\{x_1, x_3\}|\{x_5\}) = 2.2$

$\boxed{s(\{x_2\}|\{x_4\}) = 0.6}$ $s(\{x_2\}|\{x_5\}) = 3.0$ $s(\{x_4\}|\{x_5\}) = 2.5$

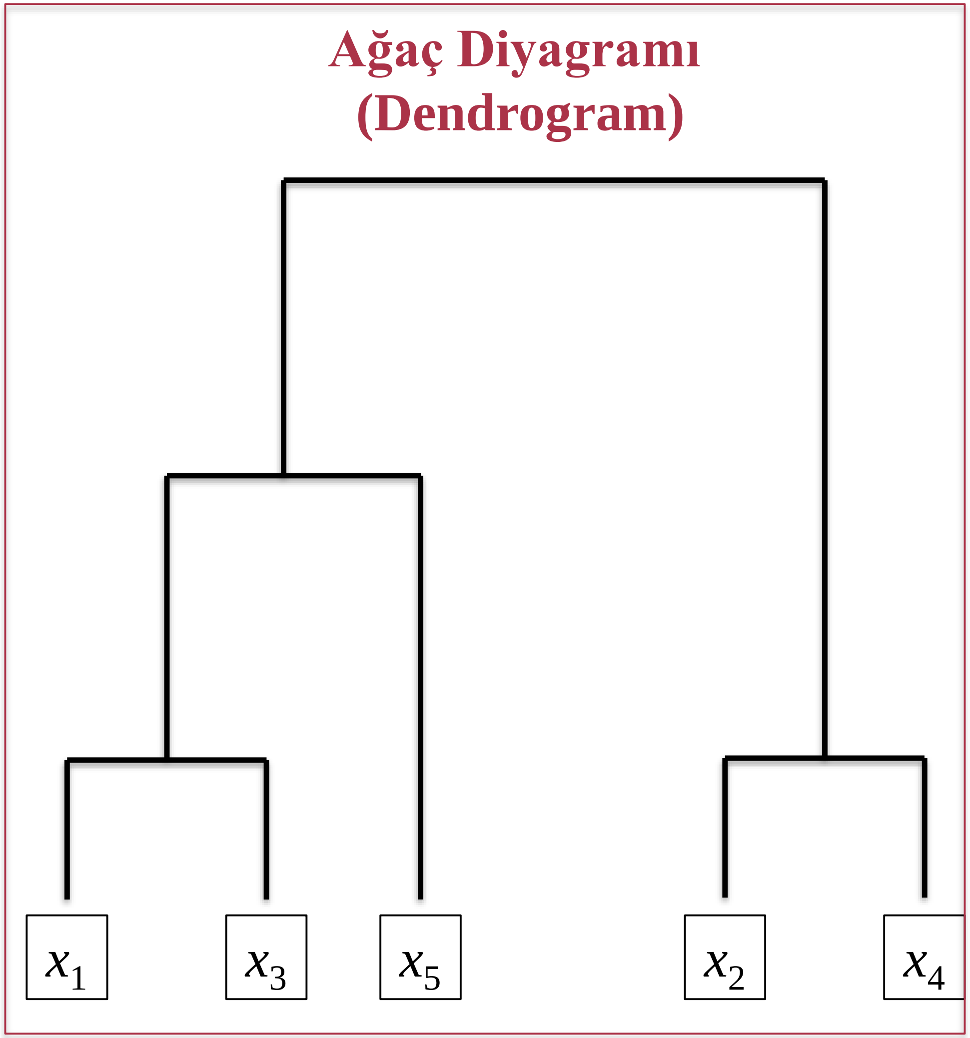
**Gruplar:** $\{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_5\}$

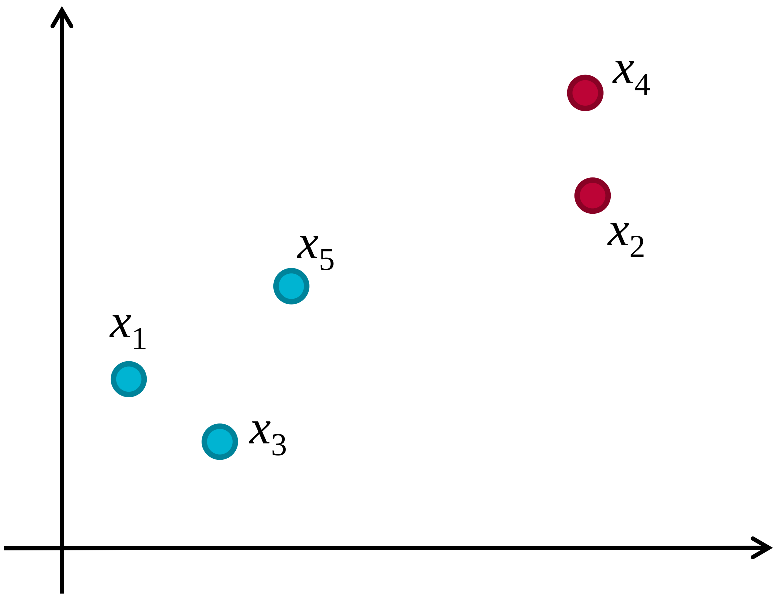
$s(\{x_1, x_3\}|\{x_2, x_4\}) = 5.0$ $\boxed{s(\{x_1, x_3\}|\{x_5\}) = 2.2}$ $s(\{x_2, x_4\}|\{x_5\}) = 3.0$

**Gruplar:** $\{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4\}$

$$\boxed{s(\{x_1, x_3, x_5\}|\{x_2, x_4\}) = 5.0}$$

# Hiyerarşik Gruplandırma

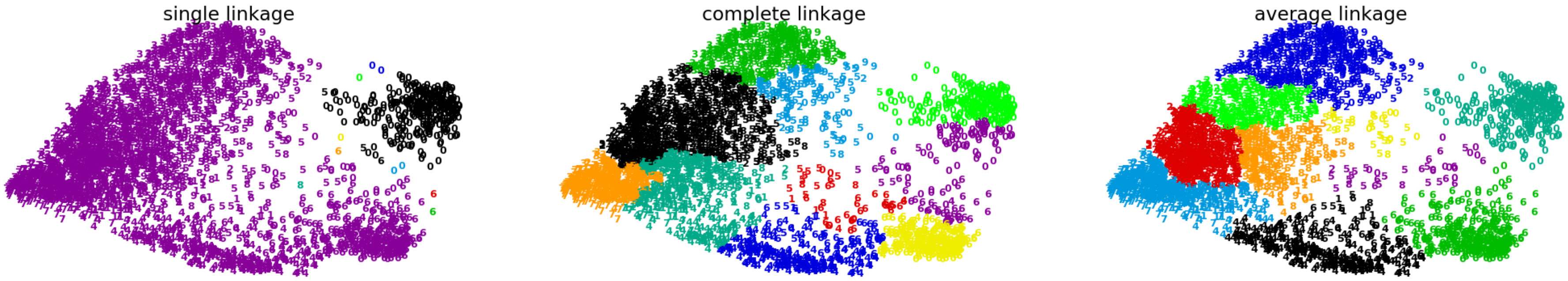



Eğer **üç** grubumuz olmasına karar verirsek, bunlar:
$\{x_1, x_3\}, \{x_5\}$ ve $\{x_2, x_4\}$

# Hiyerarşik Gruplandırma

- Tek bağlamalı gruplandırma, diğer gözlemler epey farklı olmasına rağmen iki grubu birkaç gözlem nedeniyle birleştirebilir
- Tam bağlamalı gruplandırma, bir gözlemi kendisine çok benzeyen gözlemleri içeren gruplar yerine yanlış bir gruba atayabilir
- Grup ortalaması ise tek ve tam bağlamalı gruplandırma arasında sayılır, fakat sayısal ölçeğe bağlıdır (ölçek değişmezliği söz konusu değildir)

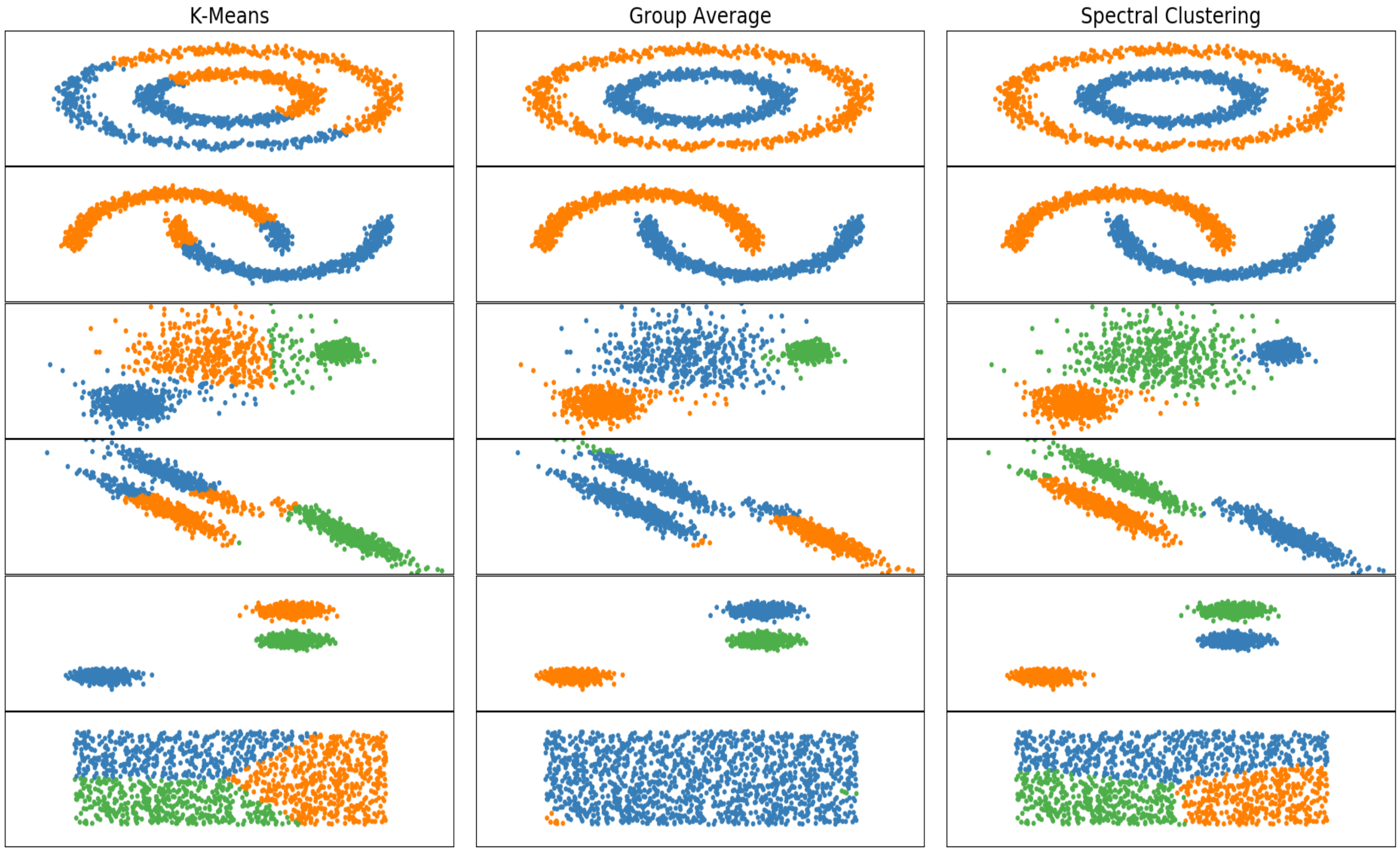



$$d_{\mathrm{SL}}(C_1|C_2) = \min_{x_i \in C_1, x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

$$d_{\mathrm{CL}}(C_1|C_2) = \max_{x_i \in C_1, x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

$$d_{\mathrm{GA}}(C_1|C_2) = \frac{1}{m_1 m_2} \sum_{x_i \in C_1} \sum_{x_j \in C_2} d(x_i, x_j)$$

# Karşılaştırma




(kaynak)

# Matris Ayrıştırma

- Veri ayrık bir matris olarak verilmiş ($Y$)
- Amaç $Y$ matrisini iki matris olarak ayrıştırma
- Klasik örnek film tavsiye sistemleri

| | **M1** | **M2** | **M3** | **M4** |
|---|---|---|---|---|
| **Amy** | 5 | 2 | ? | 2 |
| **Brad** | 4 | ? | ? | 3 |
| **Carl** | 1 | 1 | ? | 4 |
| **Dan** | 2 | ? | 4 | 5 |
| **Emily** | ? | 2 | ? | 4 |

# Matris Ayrıştırma

| | M1 | M2 | M3 | M4 |
|---|---|---|---|---|
| **Amy** | 5 | 2 | ? | 2 |
| **Brad** | 4 | ? | ? | 3 |
| **Carl** | 1 | 1 | ? | 4 |
| **Dan** | 2 | ? | 4 | 5 |
| **Emily** | ? | 2 | ? | 4 |

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 & ? & 2 \\ 4 & ? & ? & 3 \\ 1 & 1 & ? & 4 \\ 2 & ? & {\color{red}4} & 5 \\ {\color{blue}?} & 2 & ? & 4 \end{bmatrix}}_{Y} \approx \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ {\color{red}*} & {\color{red}*} \\ {\color{blue}*} & {\color{blue}*} \end{bmatrix}}^{\text{Gizli boyut (sabit)}}}_{X_U} \underbrace{\begin{bmatrix} {\color{blue}*} & * & {\color{red}*} & * \\ {\color{blue}*} & * & {\color{red}*} & * \end{bmatrix}}_{X_M}$$

# Matris Ayrıştırma

$$(X_U^*, X_M^*) = \arg\min_{X_U, X_M} \frac{1}{n} \|Y - X_U X_M\|_F^2$$

- Toplam değerlendirme (rating) sayısı, *n*
- Birçok düzenlileştirme terimi eklenebilir
- Gizli boyut problemin çözümünden önce sabit alınır
- Ayrıştırılarak elde edilen matrisler bir çeşit kümeleme sayılabilir
- Dışbükey olmayan bir problem
- Bilinmeyen matrislerin birisi sabit tutulduğunda kalan problem içbükey olduğundan, matrisleri sırasıyla sabit yapacak şekilde döngülü (iterative) bir algoritma tasarlanabilir

# Pratikte

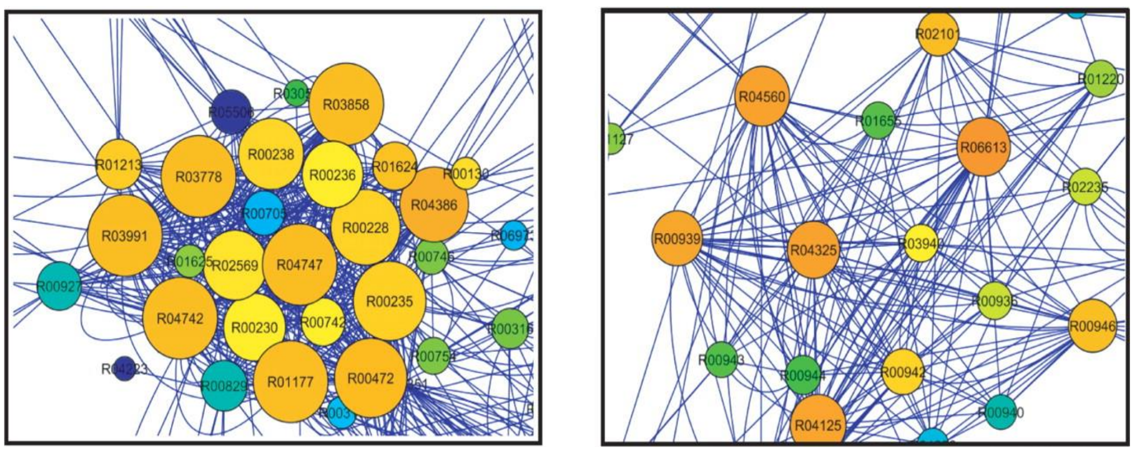
```python
import numpy as np
from sklearn.decomposition import NMF

Y = np.array([[5, 2, 0, 2],
              [4, 0, 0, 3],
              [1, 1, 0, 4],
              [2, 0, 4, 5],
              [0, 2, 0, 4]])

model = NMF(n_components=2, init='random', random_state=0)

X_U = model.fit_transform(Y)
X_M = model.components_

Y_pred = np.dot(X_U, X_M)

np.set_printoptions(precision=2)
print(np.hstack((Y, Y_pred)))
```

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 & ? & 2 \\ 4 & ? & ? & 3 \\ 1 & 1 & ? & 4 \\ 2 & ? & 4 & 5 \\ ? & 2 & ? & 4 \end{bmatrix}}_{Y} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}}_{X_U} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{X_M}$$

```
[9] print(np.hstack((Y, Y_pred)))...

[[5.   2.   0.   2.   | 5.09 1.18 0.   2.23]
 [4.   0.   0.   3.   | 3.9  1.02 0.43 2.68]
 [1.   1.   0.   4.   | 1.31 0.66 1.28 3.48]
 [2.   0.   4.   5.   | 1.48 0.96 2.22 5.67]
 [0.   2.   0.   4.   | 0.54 0.53 1.46 3.54]]
```

# Sayfa Sıralama (PageRank) Algoritması

- Eğer bir sayfa diğer önemli sayfalarca atfediliyorsa, önemlidir
- Eğer atfedilen sayfa, başka sayfalara az atıfta bulunuyorsa önemi artar
- Google bu algoritma ile başladı (şu anki çok daha karmaşık)
- Başka alanlarda da kullanılıyor




*

** When the Web meets the cell: using personalized PageRank for analyzing protein interaction networks*, G. Iván, V. Grolmusz, Bioinformatics, (27) 3, syf. 405-407, 2011.

# Sayfa Sıralama (PageRank) Algoritması

- Sıralanacak *n* sayfa
- $L_{ij} = 1$, eğer sayfa *j* sayfa *i*'ye atıfta bulunuyorsa

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} L_{ij}$$

sayfa *i*'nin sıralaması

$$p_i = (1-d) + d\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{L_{ij}}{c_j}\right)p_j \qquad (d \approx 0.85)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathrm{diag}(\mathbf{c})$$

$$\mathbf{p} = (1-d)\mathbf{e} + d\mathbf{L}\mathbf{D}_c^{-1}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{e}^\intercal\mathbf{p} = n$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \underbrace{\left(\frac{(1-d)}{n}\mathbf{e}\mathbf{e}^\intercal + d\mathbf{L}\mathbf{D}_c^{-1}\right)}_{\mathbf{A}}\mathbf{p}}$$

- Güç Yöntemi:
  (Power method)

$$\mathbf{p}_k \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{p}_{k-1}$$
$$\mathbf{p}_k \leftarrow n\frac{\mathbf{p}_k}{\mathbf{e}^\intercal\mathbf{p}_k}$$

# Özet

- Ana Bileşenler Analizi

- K-Ortalamalar Gruplandırma
- Hiyerarşik Gruplandırma
- Spektral Gruplandırma

- Matris Ayrıştırma
- Sayfa Sıralama (PageRank) Algoritması