Makine Öğrenmesi

Sınıflandırma ve Ağaçlar

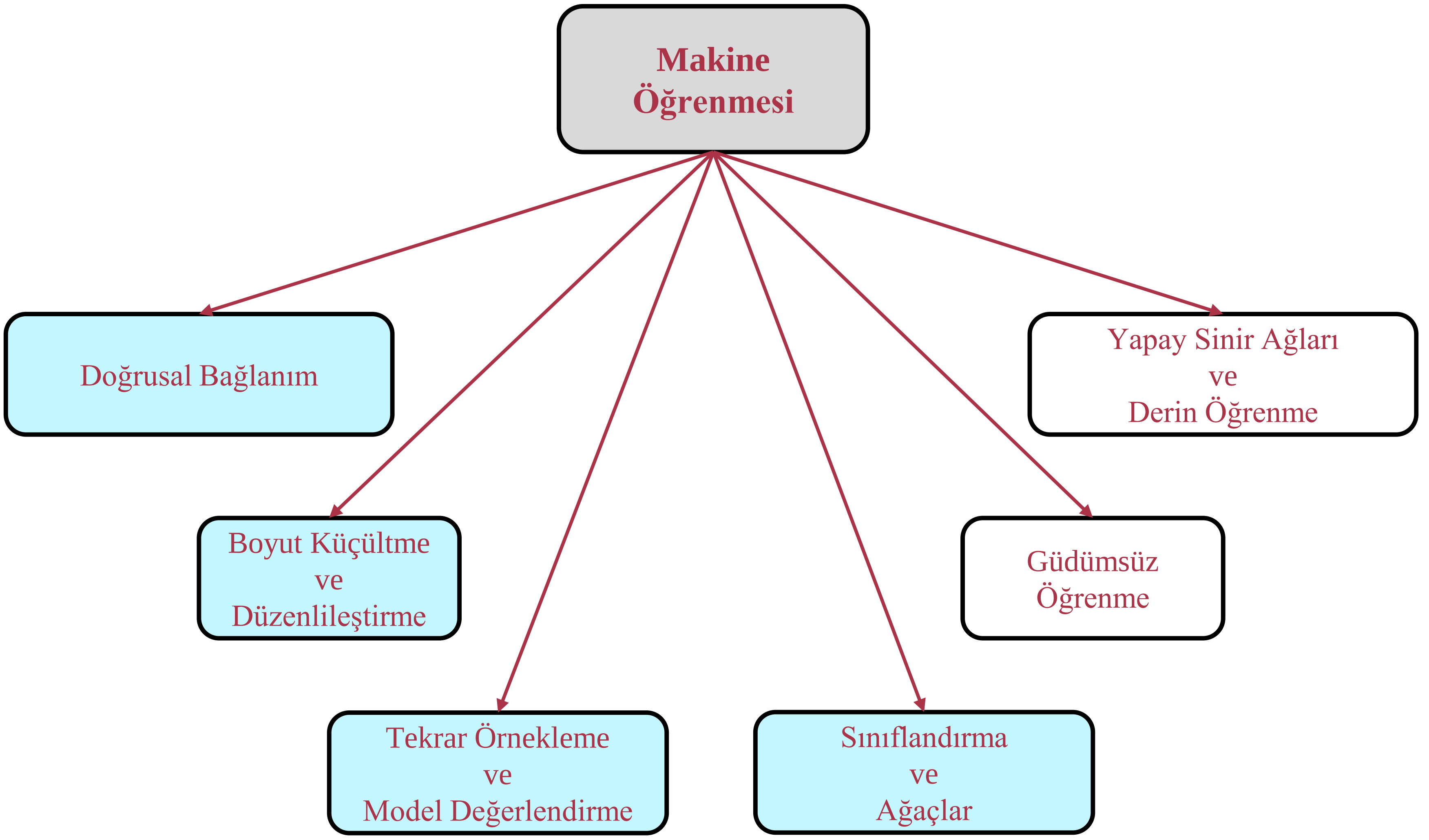
İlker Birbil ve Utku Karaca

Erasmus Üniversitesi Rotterdam

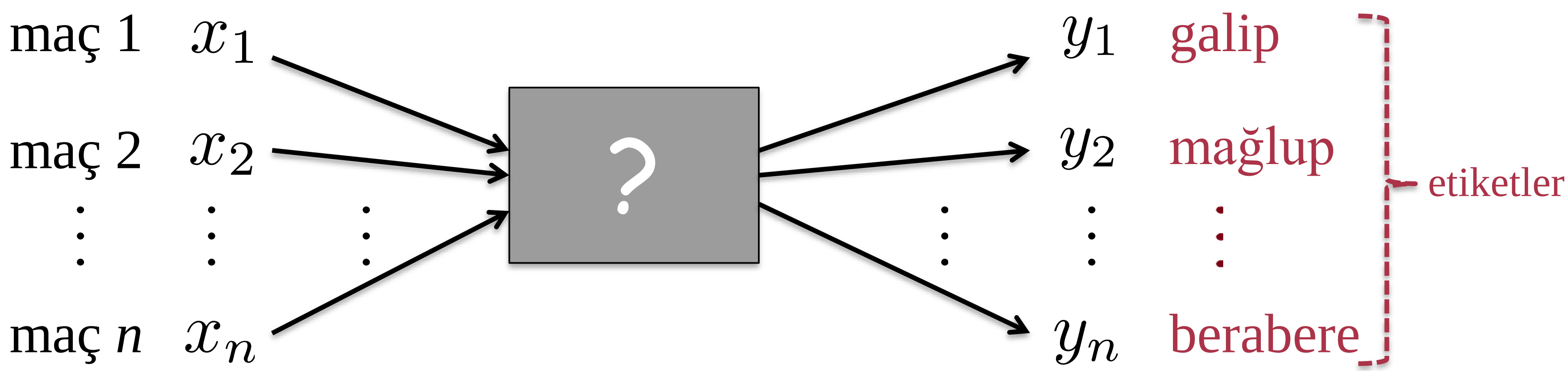
İstanbul'da Makine Öğrenmesi

27 Ocak – 2 Şubat, 2020

EUR
D4C
Bol Bilim
Veri Defteri
@sibirbil



Makine Öğrenmesi
Doğrusal Bağlanım
Boyut Küçültme ve Düzenlileştirme
Tekrar Örnekleme ve Model Değerlendirme
Sınıflandırma ve Ağaçlar
Güdümsüz Öğrenme
Yapay Sinir Ağları ve Derin Öğrenme



eğitim verisi

$$\{(x_i, y_i) : 1, \ldots, n\}$$

Lojistik Bağlanım (Logistic Regression)

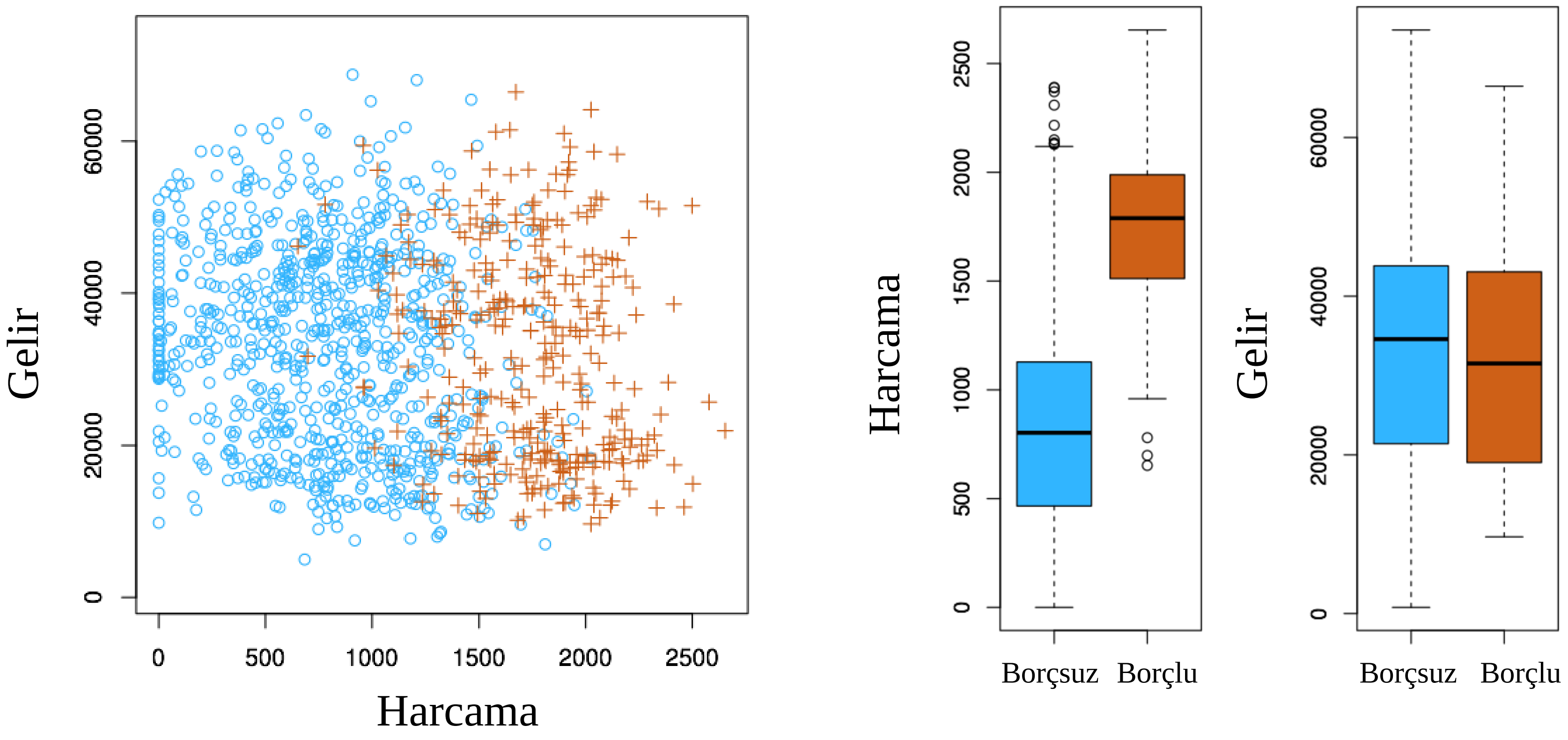
X_1 : toplam harcama (bakiye)
X_2 : yıllık gelir
X_3 : öğrenci (1), öğrenci değil (0)

$$Y = \begin{cases} \text{kart borcu kalan (borçlu)}, & 1; \\ \text{kart borcu kalmayan (borçsuz)}, & 0. \end{cases}$$

$$p(X) = \mathbb{P}(Y = 1|X) \quad ?$$

$$p(X) = \mathbb{P}(Y = 1|X) > \tau$$

eşik değer (threshold)


Gelir
Harcama
0
20000
40000
60000
0
500
1000
1500
2000
2500
Harcama
0
500
1000
1500
2000
2500
Borçsuz
Borçlu
Gelir
0
20000
40000
60000
Borçsuz
Borçlu

$$\boxed{p(X) = \mathbb{P}(Y = 1|X) \quad ?}$$

$$\boxed{p = 1}$$

$$p(X) = \beta_0 + \beta_1 X \quad \longrightarrow (-\infty, +\infty)$$

$$p(X) = \sigma(\beta_0 + \beta_1 X) \longrightarrow [0, 1]$$

?

Sigmoid Fonksiyonu

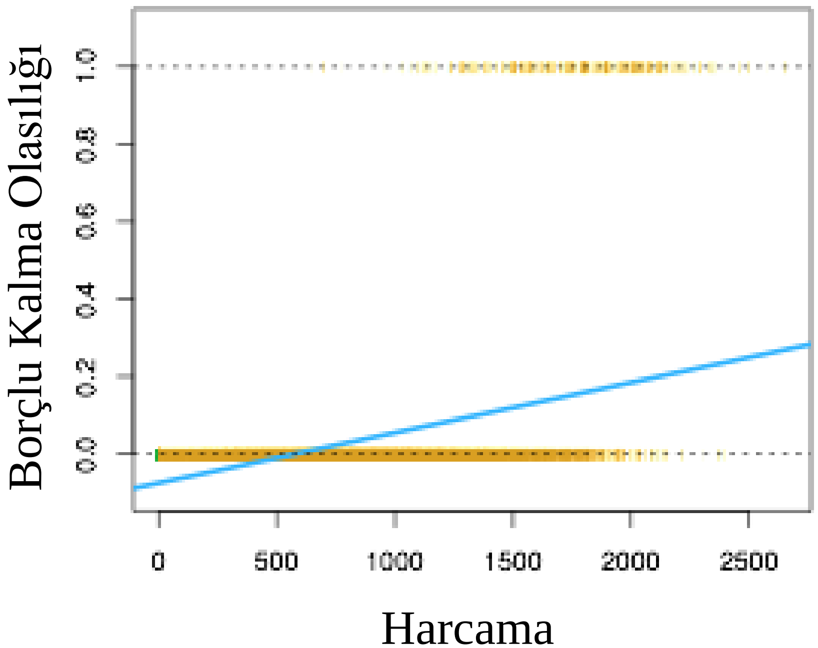
$$\sigma(y) = \frac{e^y}{1 + e^y}$$

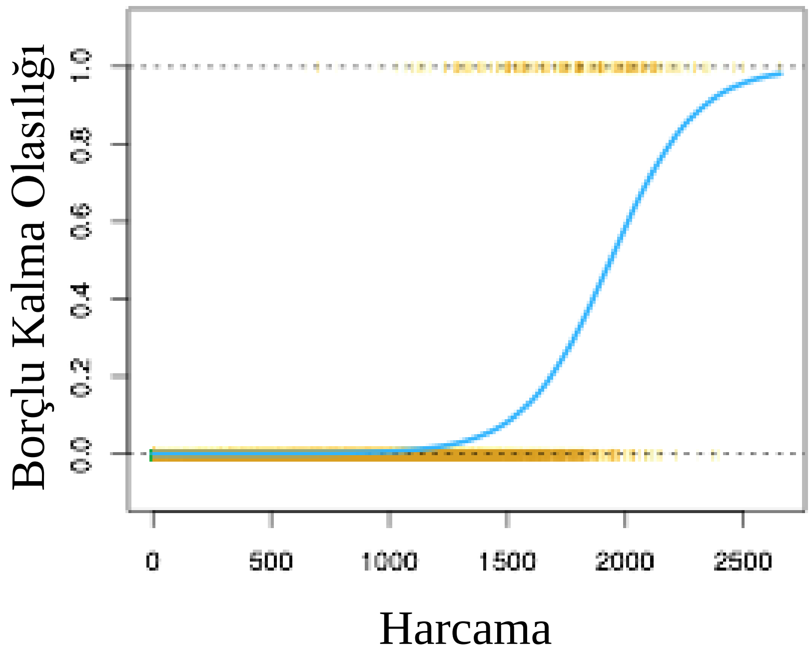
Lojistik Fonksiyonu

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}} \longrightarrow [0, 1]$$

$$\boxed{p(X) = \mathbb{P}(Y=1|X) \quad ?}$$

$$p(X) = \beta_0 + \beta_1 X \longrightarrow (-\infty, +\infty) \qquad p(X) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X}} \longrightarrow [0,1]$$





$$\log\left(\underbrace{\frac{p(X)}{1-p(X)}}_{\text{göreceli olasılıklar (odds)}}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$$

$\boxed{p > 1}$

$$p(X) = \sigma(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p)$$

Lojistik Fonksiyonu

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_p X_p}}$$

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p?$$

$$\downarrow$$

eğitim verisi

$$\{(x_i, y_i) : 1, \ldots, n\}$$

$$\overbrace{1-\mathbb{P}(Y=1|X=x_2)}^{1-p(x_2)} \qquad \overbrace{1-\mathbb{P}(Y=1|X=x_5)}^{1-p(x_5)}$$

$$\boxed{(x_1,1),} \quad \boxed{(x_2,0)}, \quad \boxed{(x_3,1),} \quad \boxed{(x_4,1),} \quad \boxed{(x_5,0)}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(Y=1|X=x_1)}_{p(x_1)} \qquad \underbrace{\mathbb{P}(Y=1|X=x_3)}_{p(x_3)} \qquad \underbrace{\mathbb{P}(Y=1|X=x_4)}_{p(x_4)}$$

$$p(x_1)p(x_3)p(x_4)(1-p(x_2))(1-p(x_5))$$

Olabilirlik (Likelihood) Fonksiyonu

$$\ell(\beta_0,\ldots,\beta_p) = \prod_{i:y_i=1} p(x_i) \prod_{j:y_j=0} (1-p(x_j))$$

En Büyük (Maximum) Olabilirlik

$$\boxed{\ell(\beta_0, \ldots, \beta_p) = \prod_{i:y_i=1} p(x_i) \prod_{j:y_j=0} (1 - p(x_j))}$$

$$\max_{\beta_0,\ldots,\beta_p} \ell(\beta_0, \ldots, \beta_p)$$

$$\downarrow$$

$$\max_{\beta_0,\ldots,\beta_p} \log(\ell(\beta_0, \ldots, \beta_p))$$

$$\downarrow$$

$$\max_{\beta_0,\ldots,\beta_p} \sum_{i:y_i=1} p(x_i) + \sum_{j:y_j=0} (1 - p(x_j))$$

$$\downarrow$$

İçbükey Fonksiyon

$$\downarrow$$

$$\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_p$$

$p = 1$

	Katsayı	**St. Hata**	***Z* istatistiği**	***p* değeri**
Kesme nok.	-3,5041	0,0707	-49,55	< 0,0001
Öğrenci (1)	0,4049	0,1150	3,52	0,0004

$p > 1$

	Katsayı	**St. Hata**	***Z* istatistiği**	***p* değeri**
Kesme nok.	-10,8690	0,4923	-22,08	< 0,0001
Harcama	0,0057	0,0002	24,74	< 0,0001
Gelir	0,0030	0,0082	0,37	0,7115
Öğrenci (1)	-0,6468	0,2362	-2,74	0,0062

Parazit Etkisi (Confounding Effect)

Tahmin Yapma

	Katsayı	**St. Hata**	***Z* istatistiği**	***p* değeri**
Kesme nok.	-10,8690	0,4923	-22,08	< 0,0001
Harcama	0,0057	0,0002	24,74	< 0,0001
Gelir	0,0030	0,0082	0,37	0,7115
Öğrenci (1)	-0,6468	0,2362	-2,74	0,0062

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_p X_p}}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1.500 \\ 40.000 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}(X) = \frac{e^{-10,869+0,0057\times 1.500+0.003\times 40-0.6468\times 1}}{1+e^{-10,869+0,0057\times 1.500+0.003\times 40-0.6468\times 1}} = 0.058$$

Doğrusal Ayrımlayıcı Çözümleme (Linear Discriminant Analysis - LDA)

$$\mathbb{P}(Y = k|X = x) \quad \leftrightsquigarrow \quad \mathbb{P}(X = x|Y = k)$$

Bayes Kuramı

$$\mathbb{P}(Y = k|X = x) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(Y = k)}^{\pi_k}\overbrace{\mathbb{P}(X = x|Y = k)}^{f_k(x)}}{\sum_{l=1}^{K} \mathbb{P}(Y = l)\mathbb{P}(X = x|Y = l)}$$

Ardıl Olasılık (Posterior Probability)

$$p_k(x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l f_l(x)}$$

π_k ? $\qquad$ $f_k(x)$?

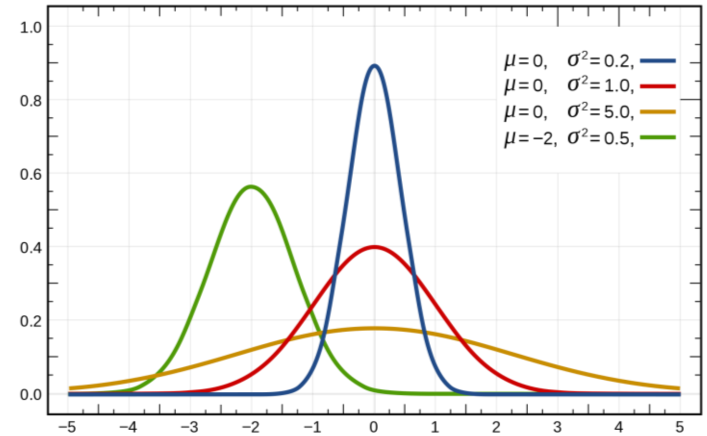
$$f_k(x)\ ?$$

$$\mathbb{P}(Y=k|X=x)=\frac{\overbrace{\mathbb{P}(Y=k)}^{\pi_k}\overbrace{\mathbb{P}(X=x|Y=k)}^{f_k(x)}}{\sum_{l=1}^{K}\mathbb{P}(Y=l)\mathbb{P}(X=x|Y=l)}$$

$$p=1$$

Kabul 1: $X \sim N(\mu,\sigma)$

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x-\mu_k)^2\right)$$



Kabul 2: $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_K^2=\sigma^2$

$$p_k(x)=\frac{\pi_k\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_k)^2\right)}{\sum_{l=1}^{K}\pi_l\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_l)^2\right)}$$

$$p_k(x) = \frac{\pi_k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_k)^2\right)}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_l)^2\right)}$$

$$\begin{aligned}
\log(p_k(x)) &= \log\left(\frac{\pi_k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_k)^2\right)}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu_l)^2\right)}\right) \\
&\vdots \\
&= \underbrace{x\frac{\mu_k}{\sigma^2} - \frac{\mu_k^2}{2\sigma^2} + \log(\pi_k)}_{\delta_k(x)} - C
\end{aligned}$$

k’den bağımsız
sabit terim

$$\delta_k(x) = x\,\frac{\mu_k}{\sigma^2} - \frac{\mu_k^2}{2\sigma^2} + \log(\pi_k)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i:y_i=k} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i:y_i=k}(x_i - \hat{\mu}_k)^2 \qquad \hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n}$$

k sınıfından
veri sayısı

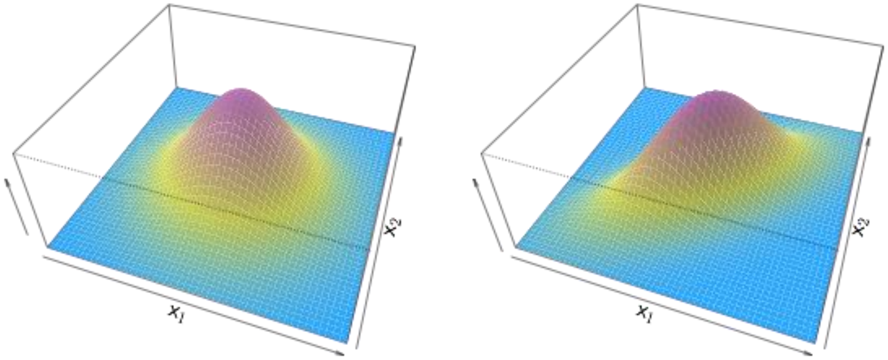
$$\boxed{\hat{\delta}_k(x) = x\,\frac{\hat{\mu}_k}{\hat{\sigma}^2} - \frac{\hat{\mu}_k^2}{2\hat{\sigma}^2} + \log(\hat{\pi}_k)}$$

$\boxed{X = x}$ $\qquad \hat{\delta}_k(x) \uparrow\uparrow \qquad$ $\boxed{Y = k}$

$$\boxed{p > 1} \qquad X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$$

Kabul 1: $X \sim N(\mu, \Sigma)$

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^\mathsf{T}\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)\right)$$



Kabul 2: $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \cdots = \Sigma_K = \Sigma$

$$\delta_k(x) = x^\intercal \Sigma^{-1}\mu_k - \tfrac{1}{2}\mu_k^\intercal \Sigma^{-1}\mu_k + \log(\pi_k)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k}\sum_{i:y_i=k} x_i \qquad\qquad \hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i:y_i=k}(x_i - \hat{\mu}_k)(x_i - \hat{\mu}_k)^\intercal$$

$$\boxed{\hat{\delta}_k(x) = x^\intercal \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}_k - \tfrac{1}{2}\hat{\mu}_k^\intercal \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mu}_k + \log(\hat{\pi}_k)}$$

$\boxed{X = x}$ $\qquad \hat{\delta}_k(x) \uparrow\uparrow \qquad$ $\boxed{Y = k}$

$$p(X) = \mathbb{P}(Y = 1|X) > \tau$$

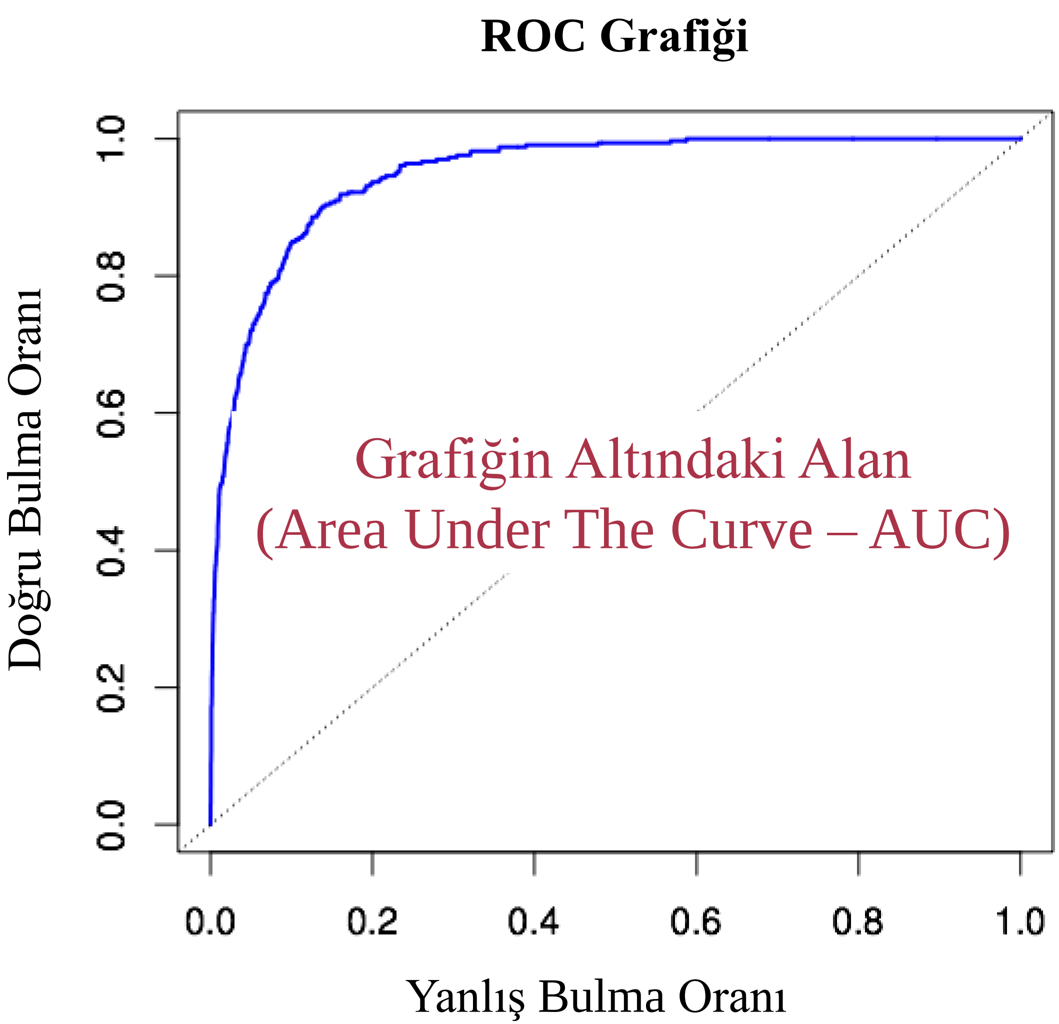
$\tau = 0.5$

		Gerçek		
		Borçsuz	**Borçlu**	**Toplam**
Tahmin	**Borçsuz**	9.644	252	9.896
	Borçlu	23	81	104
	Toplam	9.667	333	10.000

$\tau = 0.2$

		Gerçek		
		Borçsuz	**Borçlu**	**Toplam**
Tahmin	**Borçsuz**	9.432	138	9.570
	Borçlu	235	195	430
	Toplam	9.667	333	10.000

ROC* Grafiği
(Karar Değerlendirme Grafiği)



* Receiver Operating Characteristics

Hata Matrisi (Confusion Matrix)

		Tahmin Edilen Sınıf		
		-	**+**	**Toplam**
Gerçek Sınıf	**-**	Gerçek Negatif (GN)	Yanlış Pozitif (YP)	N
	+	Yanlış Negatif (YN)	Gerçek Pozitif (GP)	P
	Toplam	N*	P*	

		Tahmin Edilen Sınıf		
		-	**+**	**Toplam**
Gerçek Sınıf	**-**	GN	YP	N
	+	YN	GP	P
	Toplam	N*	P*	

İsim	**Hesap**	**Eş Anlam**
Yanlış Bulma Oranı[a]	YP/N	birinci tip hata (type I error), 1 – özgüllük (specifity)
Doğru Bulma Oranı[b]	GP/P	1 – ikinci tip hata (type II error), üs, duyarlılık (sensitivity), doğruluk (recall)
Pozitif Tahmin Değeri[c]	GP/P*	kesinlik (precision), 1 – yanlış keşif oranı (false discovery proportion)
Negatif Tahmin Değeri[d]	GN/N*	

[a] False Positive Rate

[b] True Positive Rate

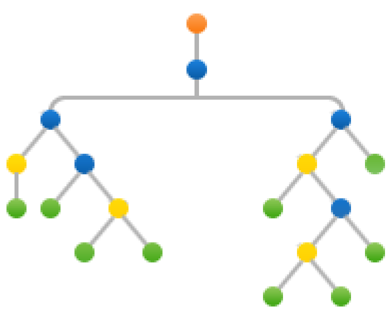
[c] Positive Predictive Value

[d] Negative Predictive Value

Karar Ağaçları (Decision Trees)

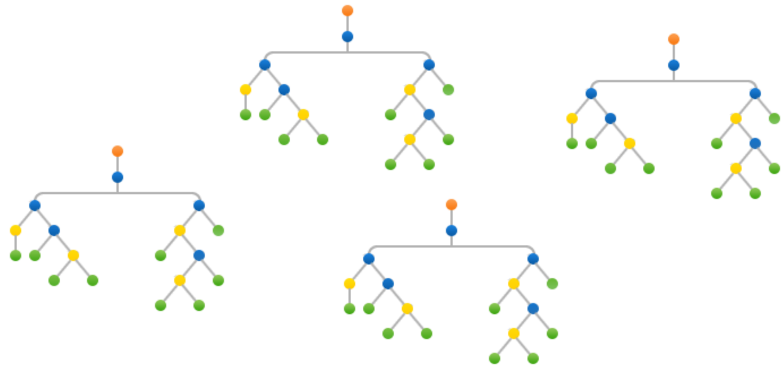
Amaç: Değişkenler uzayını basit alt bölgelere ayırmak

Bağlanım Ağaçları
Sınıflandırma Ağaçları

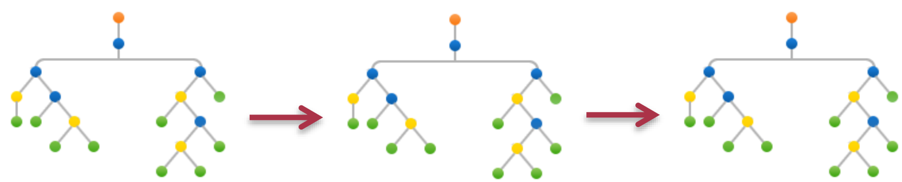


Topluluk Yöntemleri

Torbalama (Bagging) ve
Rastgele Ormanlar (Random Forests)

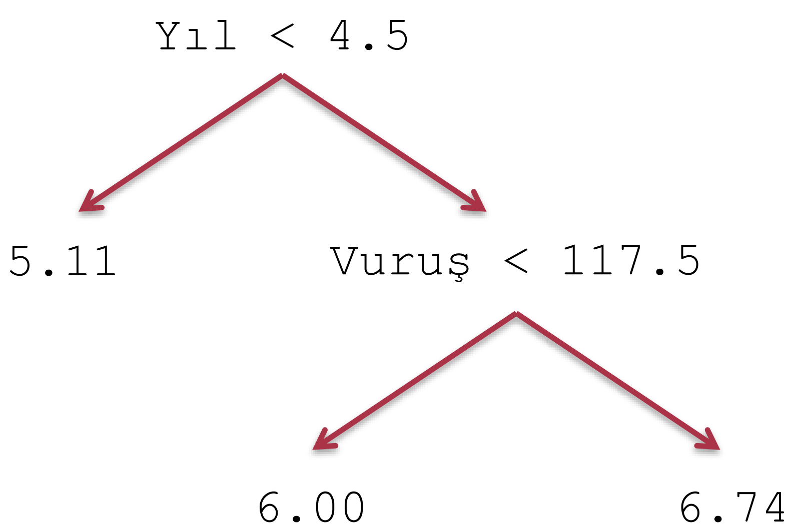


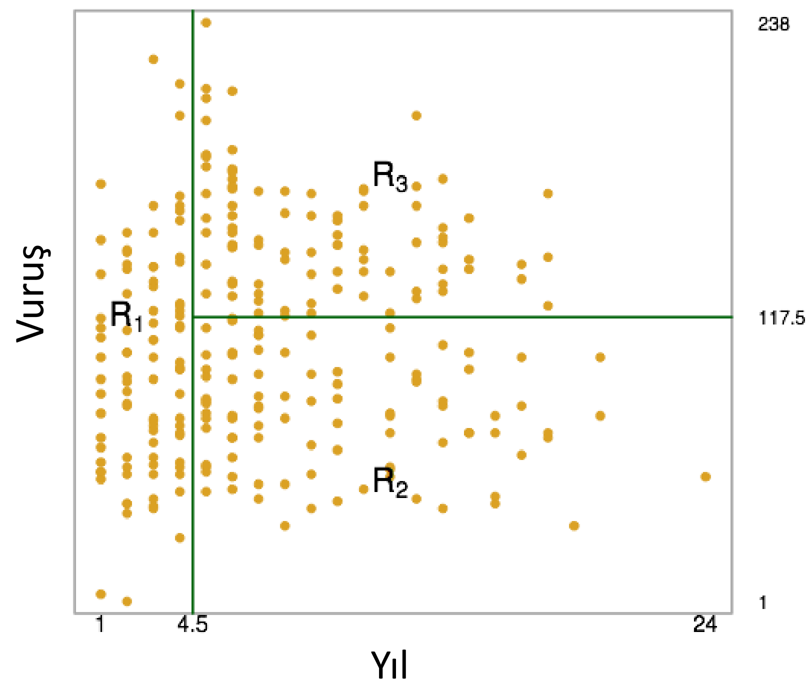
Takviye (Boosting)



Örnek Ağaç

Bir beyzbol oyuncusunun maaşının yaptığı vuruş ve oynadığı toplam yıla göre tahmin edilmesi





Bağlanım Ağaçları

$$X_1, X_2, \ldots, X_p \xrightarrow{\text{Çakışmayan bölgeler}} R_1, R_2, \ldots, R_J$$

Tahmin: R_j bölgesindeki eğitim verisinin çıktı değerlerinin (y_i) ortalaması

$R_1, R_2, \ldots, R_J$ **?**

Amaç: KKT değerinin en küçük olduğu bölgelerin bulunması

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \in R_j} (y_i - \hat{y}_{R_j})^2$$

$\hat{y}_{R_j}$: R_j bölgesindeki çıktıların ortalaması

Bağlanım Ağaçları

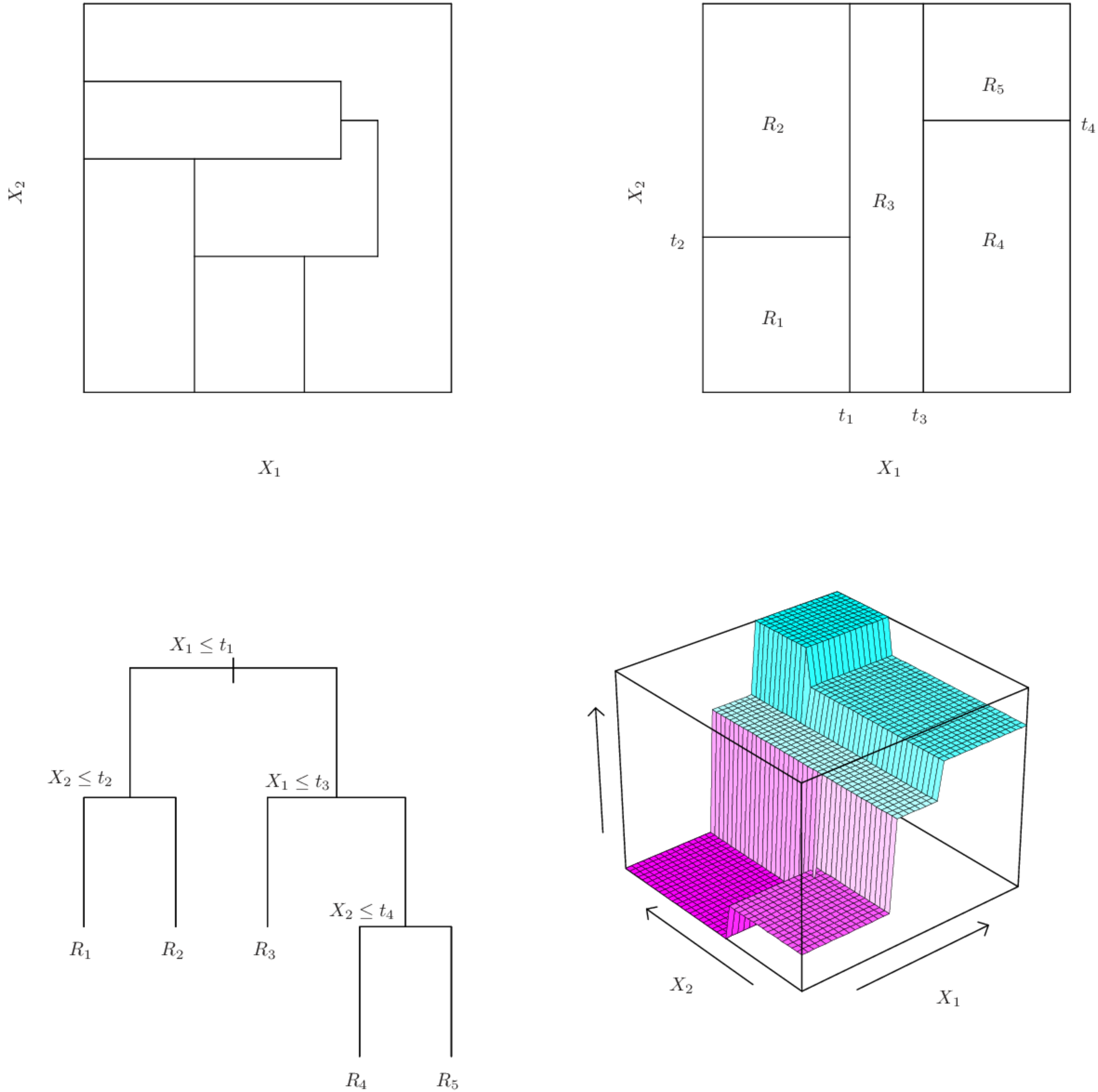
Özyinelemeli İkili Ayırma (Recursive Binary Splitting)

$$R_1(j,s) = \{X|X_j < s\} \qquad R_2(j,s) = \{X|X_j \geq s\}$$

Aşağıdaki ifadeyi en küçükleyen *j* ve *s* değerlerini bul

$$\sum_{i:x_i\in R_1(j,s)} (y_i - \hat{y}_{R_1})^2 + \sum_{i:x_i\in R_2(j,s)} (y_i - \hat{y}_{R_2})^2$$

Terminal düğümde çok az veri noktası kalınca **dur!**



X_1
X_2
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
t_1
t_2
t_3
t_4
$X_1 \le t_1$
$X_2 \le t_2$
$X_1 \le t_3$
$X_2 \le t_4$

Bağlanım Ağaçları

Ağaç Budama (Tree Pruning)

Amaç: Ağacın tamamı ya da büyük kısmı oluşunca ortaya çıkan aşırı öğrenmenin önüne geçmek (düşük *test* hatası)

$$\sum_{m=1}^{|T|} \sum_{i: x_i \in R_m} (y_i - \hat{y}_{R_m})^2 + \alpha |T|$$

$T \subset T_0$: alt ağaç (subtree)

$|T|$: *T* ağacındaki terminal düğüm sayısı

R_m : *m*. terminal düğüme karşılık gelen bölge

α : sabit parametre

$\alpha \uparrow \qquad |T| \downarrow$

α parametresini bulmak için *k*-katlı çapraz geçerlilik sınaması yapılır

Sınıflandırma Ağaçları

Bağlanım ağaçlarına çok benzer şekilde ilerlenir ancak alt bölgenin *saflık* derecesine bağlı bir hata ölçüsü kullanılır

$\hat{p}_{mk}$: *m*. bölgedeki eğitim verisindeki *k*. sınıftan olanların oranı

Sınıflandırma Hata Oranı

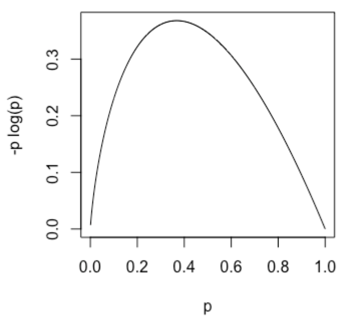
$$E = 1 - \max_k \{\hat{p}_{mk}\}$$

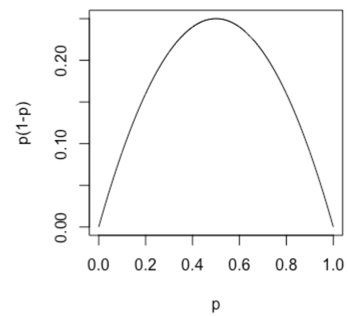
Gini İndeksi

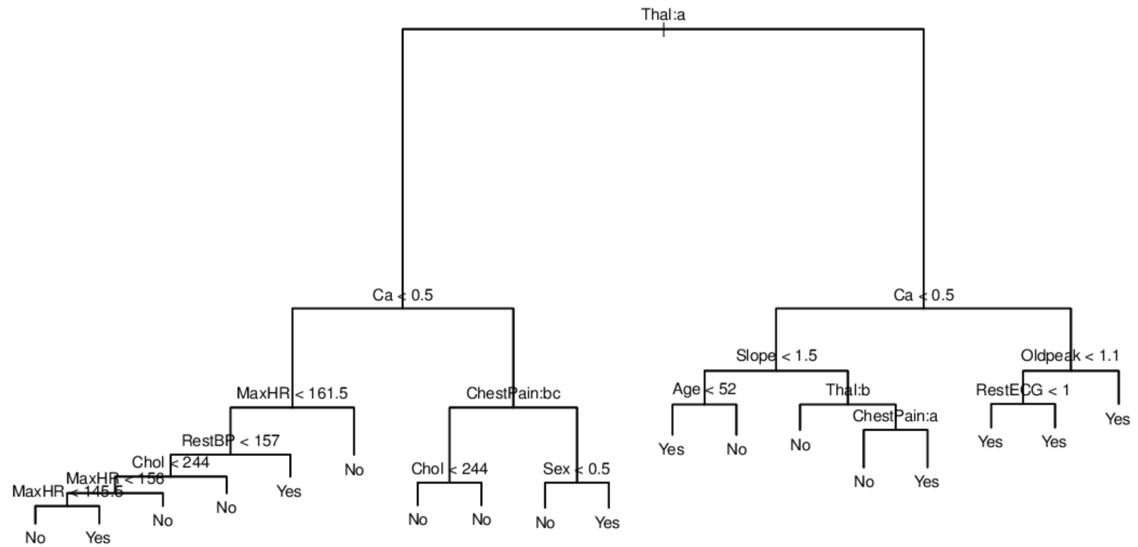
$$G = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk}(1 - \hat{p}_{mk})$$

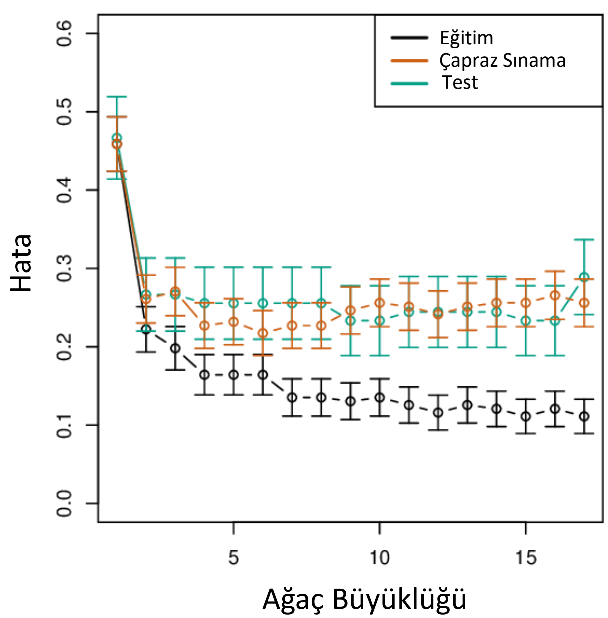
Entropi

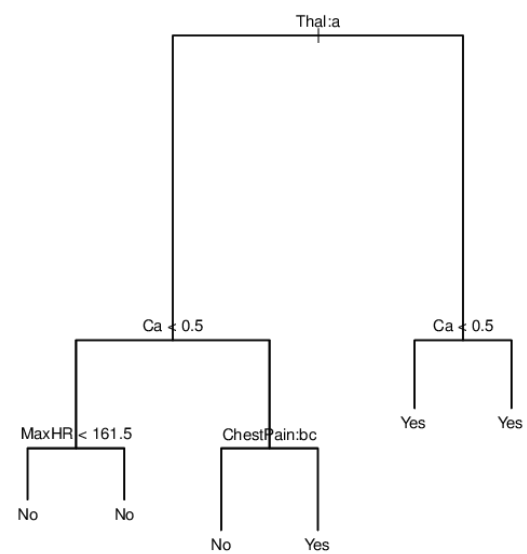
$$D = -\sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk} \log \hat{p}_{mk}$$






Thal:a
Ca < 0.5
Ca < 0.5
MaxHR < 161.5
ChestPain:bc
Slope < 1.5
Oldpeak < 1.1
Age < 52
Thal:b
ChestPain:a
RestECG < 1
RestBP < 157
Chol < 244
MaxHR < 156
MaxHR < 145.5
Chol < 244
Sex < 0.5
No
Yes
No
No
Yes
No
No
No
No
Yes
Yes
No
No
No
Yes
Yes
Yes
Yes

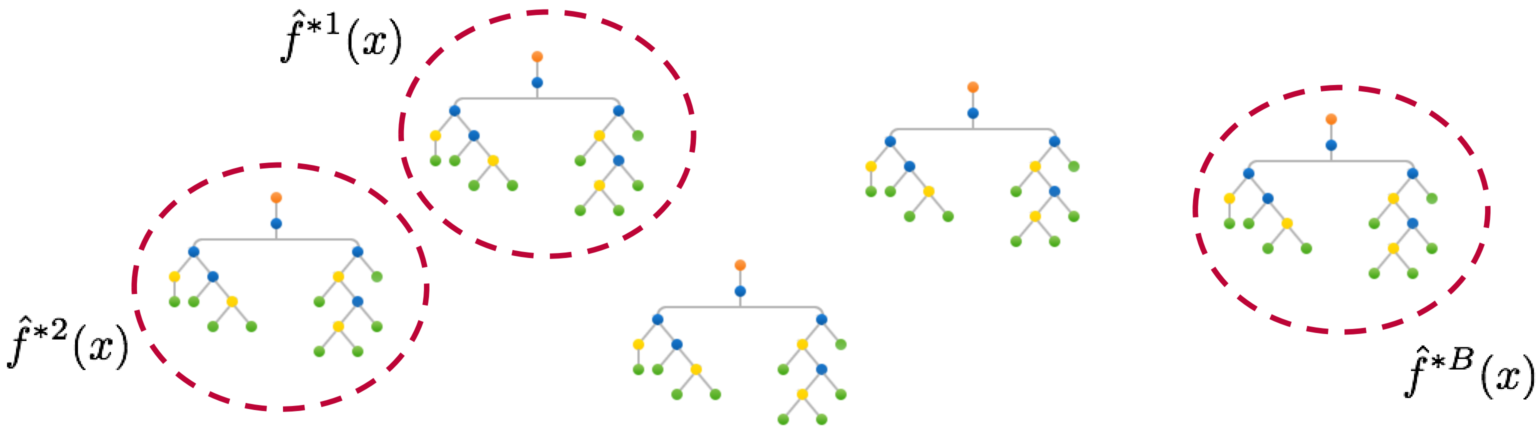

Eğitim
Çapraz Sınama
Test
Hata
Ağaç Büyüklüğü
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
5
10
15


Thal:a
Ca < 0.5
Ca < 0.5
MaxHR < 161.5
ChestPain:bc
Yes
Yes
No
No
No
Yes

Topluluk Yöntemleri

Torbalama

Amaç: Varyansı düşürmek için zorlama tekniğini kullanarak birkaç tane büyük ağaç oluşturulur ve onların tahminlerinin ortalaması (bağlanım) ya da çoğunlukta olan sınıf (sınıflandırma) hesaplanır.



Bağlanım

B : farklı eğitim kümesi sayısı

$\hat{f}^{*b}(x)$: b. eğitim kümesi ile elde edilen tahmin

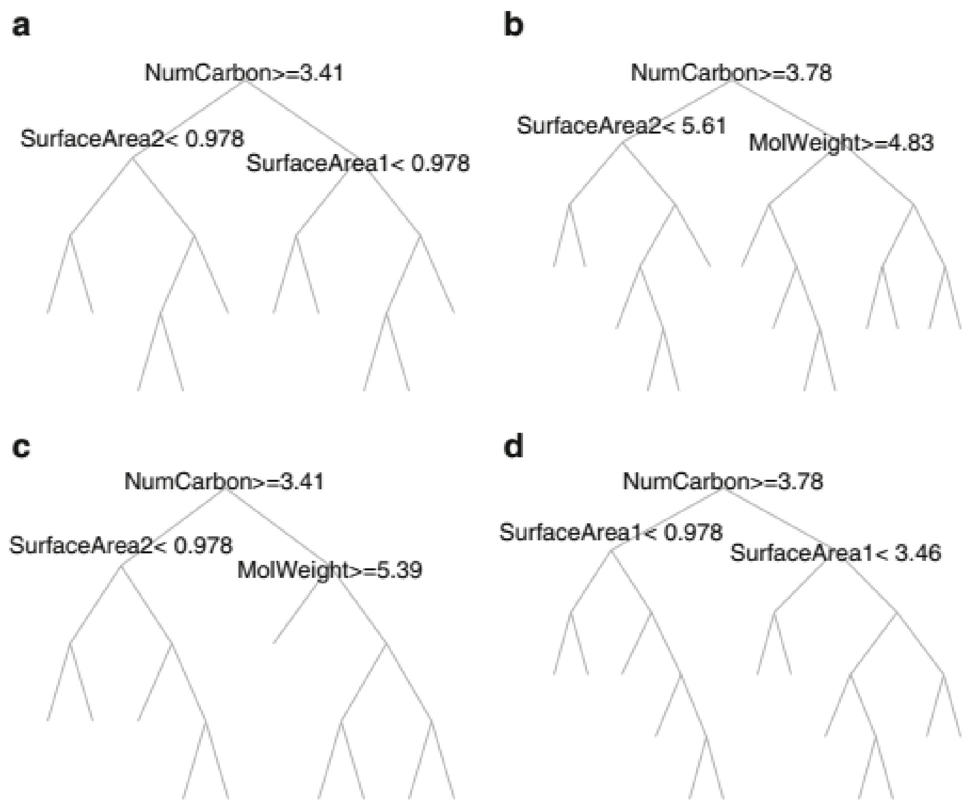
$$\hat{f}_{\text{bag}}(x) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} \hat{f}^{*b}(x)$$

Topluluk Yöntemleri

Rastgele Ormanlar

Amaç: Ağaçlar arasındaki korelasyonu azaltmak için dalları ayırırken tüm değişkenler yerine sadece rassal sayıda değişkeni kullanmak

Neden?



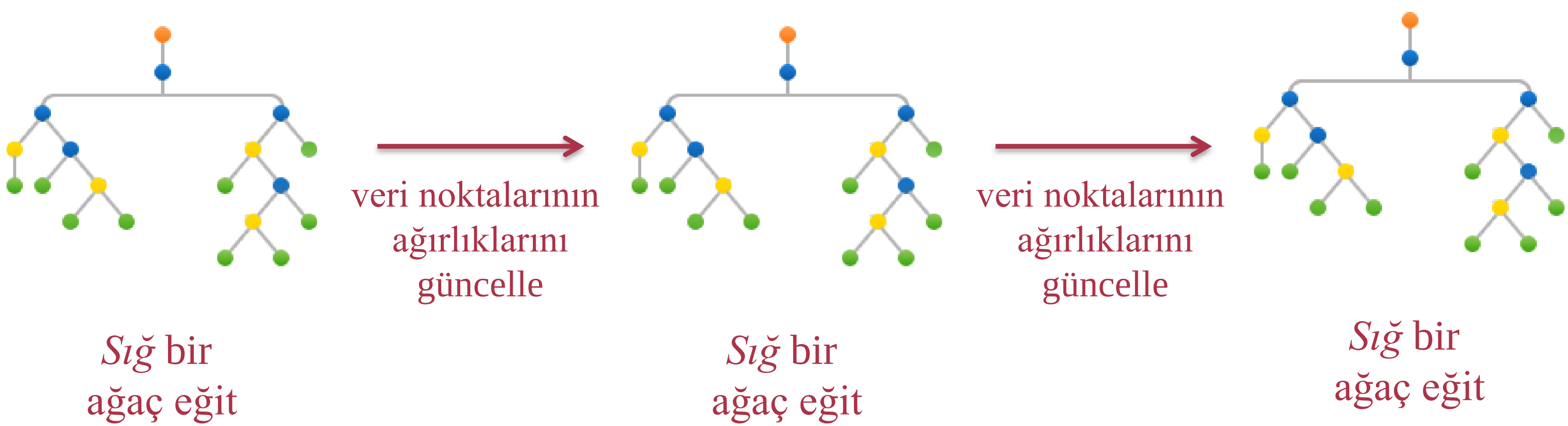
*

**Applied Predictive Modeling*, M. Kuhn, K. Johnson., Springer, 2013, syf. 195.

Topluluk Yöntemleri

Takviye

Fikir: Fazla etkin olmayan sınıflandırıcıları, ağırlıklı veri örnekleme tekniğini kullanarak bir araya getirerek daha etkin bir sınıflandırıcı elde etmek



Güncelleme Kuralı: Yanlış sınıflandırılan veri noktalarının ağırlıklarını arttır

Ensemble Methods

AdaBoost – İkili Sınıflandırma{+1, -1}

Her bir veri satırı başlangıçta aynı ağırlığa sahip: (*1/n*)

for *k=1 to K* **do**

ağırlıklı verileri kullanarak *d* dallı bir ağaç eğit ve yanlış sınıflandırma hatasını hesapla (ϵ_k)

Ağırlık değerini hesapla $\ln \frac{1-\epsilon_k}{\epsilon_k}$

Ağırlıklı verileri güncelle – yanlış sınıflandırılan verilere daha fazla ağırlık ver

end

Her bir veri için *k*. aşamadaki değer ile *k*. model tahminini çarparak takviyeli sınıflandırıcının tahminlerini hesapla ve bu miktarları *k*'ye ekle. Eğer toplam pozitif ise veriyi +1 olarak sınıflandır, değilse -1.

Kitaptaki Algoritma 8.2 **bağlanım ağaçları** için takviye örneği veriyor.

Topluluk Yöntemleri

AdaBoost – İkili Sınıflandırma{+1, -1}

Algoritma 1: AdaBoost

Başlangıç ağırlıklarını belirle: $w_i^1 = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n$

for $k = 1, \ldots, K$ **do**

$y_k(x)$ sınıflandırıcısını şu ağırlıklı sınıflandırma hata fonksiyonu ile eğit:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^k I(y_k(x_i) \neq y_i)$$

Yanlış sınıflandırılan veri noktalarının oransal ağırlığını hesapla:

$$\varepsilon^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i^k I(y_k(x_i) \neq y_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i^k}$$

Güncelleme parametresini belirle: $\alpha_k = \ln \frac{1-\varepsilon_k}{\varepsilon_k}$

Ağırlıkları güncelle: $w_i^{k+1} = w_i^k e^{\alpha_k I(y_k(x_i) \neq y_i)}, \quad i = 1, \ldots, n$

Çıktı: $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k y_k(x)$ değerinin işareti (+1 ya da -1)

(AdaBoost Özeti)

Topluluk Yöntemleri

- Takviye ve torbalama yöntemleri başka yöntemler ile de uygulanabilirler
- Torbalama yöntemi paralel uygulama için son derece uygun olmasına rağmen, takviye yöntemi sıralı yapısı nedeniyle paralelleştirmeye uygun değildir
- Topluluk yöntemleri ile elde edilen modeli yorumlamak güçtür
- Değişken önemini (variable importance) gösteren grafikler kullanılabilir

Bir **değişkenin önemi** Gini indeksinde ya da entropide elde ettiği ortalama azaltmaya göre belirlenir. Daha sonra değişkenler bu önem sırasına göre oranlanarak sıralanır.

Pratikte

```
# Required packages
from sklearn.tree import DecisionTreeClassifier
from sklearn.datasets import make_classification
from sklearn.ensemble import BaggingClassifier
from sklearn.ensemble import RandomForestClassifier
from sklearn.ensemble import AdaBoostClassifier
```

paketler ve fonksiyonlar

```
# Generate and extract features and target data
X, y = make_classification(n_samples=1000,
                           n_features=4,
                           n_informative=2,
                           n_redundant=0,
                           random_state=0,
                           shuffle=False)
```

verinin yaratılması

```
# Create decision tree and train it
DTClassifier = DecisionTreeClassifier(criterion = 'gini',
                                      splitter = 'best',
                                      max_depth = None,
                                      min_samples_leaf = 5)
DTClassifier.fit(X, y)
DTClassifier.score(X, y)
```

karar ağacı uydurumu ve performansının raporlanması

topluluk yöntemleri

```
# Bagging
bagging = BaggingClassifier(DTClassifier,
                            n_estimators = 20,
                            max_samples = 1.0,
                            bootstrap = True,
                            bootstrap_features = False)
bagging.fit(X, y)
bagging.score(X, y)
```

torbalama yöntemi kullanımı ve performansının raporlanması

```
   ...: [DTClassifier.score(X, y),
   ...:  bagging.score(X, y),
   ...:  RF.score(X,y),
   ...:  ABC.score(X,y)]
Out[2]: [0.97, 0.973, 0.975, 0.983]
```

```
# Random Forest
RF = RandomForestClassifier(criterion = 'gini',
                            n_estimators=10,
                            max_depth=None,
                            min_samples_leaf = 5,
                            random_state=0)
RF.fit(X,y)
RF.score(X,y)
```

rastgele ormanlar yöntemi kullanımı ve performansının raporlanması

```
# Adaboost
ABC = AdaBoostClassifier(n_estimators=100, random_state=0)
ABC.fit(X, y)
ABC.score(X,y)
```

AdaBoost yönteminin kullanımı ve performansının raporlanması

Destek Vektör Makineleri - DVM
(Support Vector Machines - SVM)

$$(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

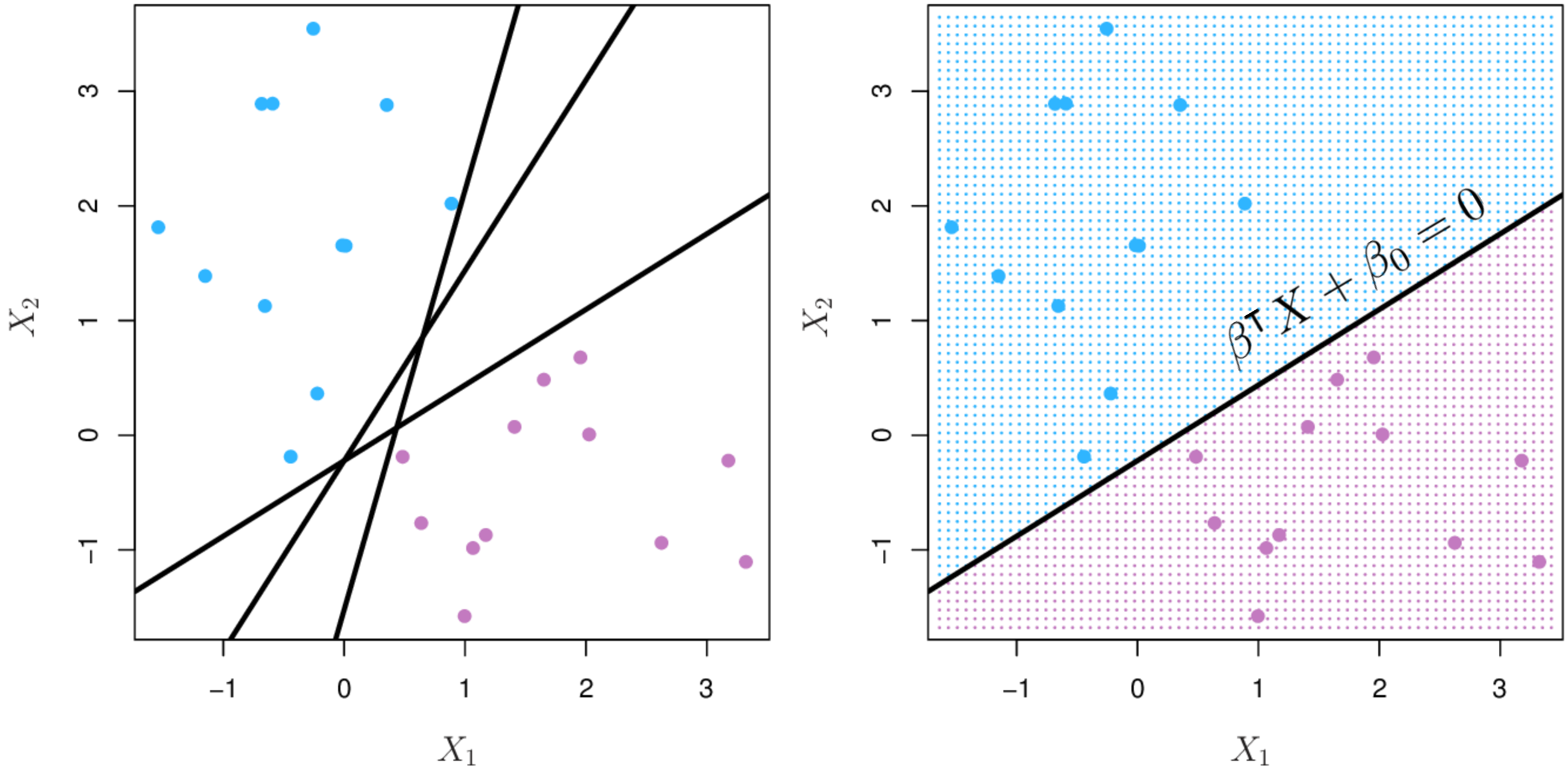
$$x_i \in \mathbb{R}^p \qquad\qquad y_i \in \{-1, +1\}$$

Fikir: Bir düzlem (hyperplane) yardımıyla veri noktalarını iki sınıfa ayırmak

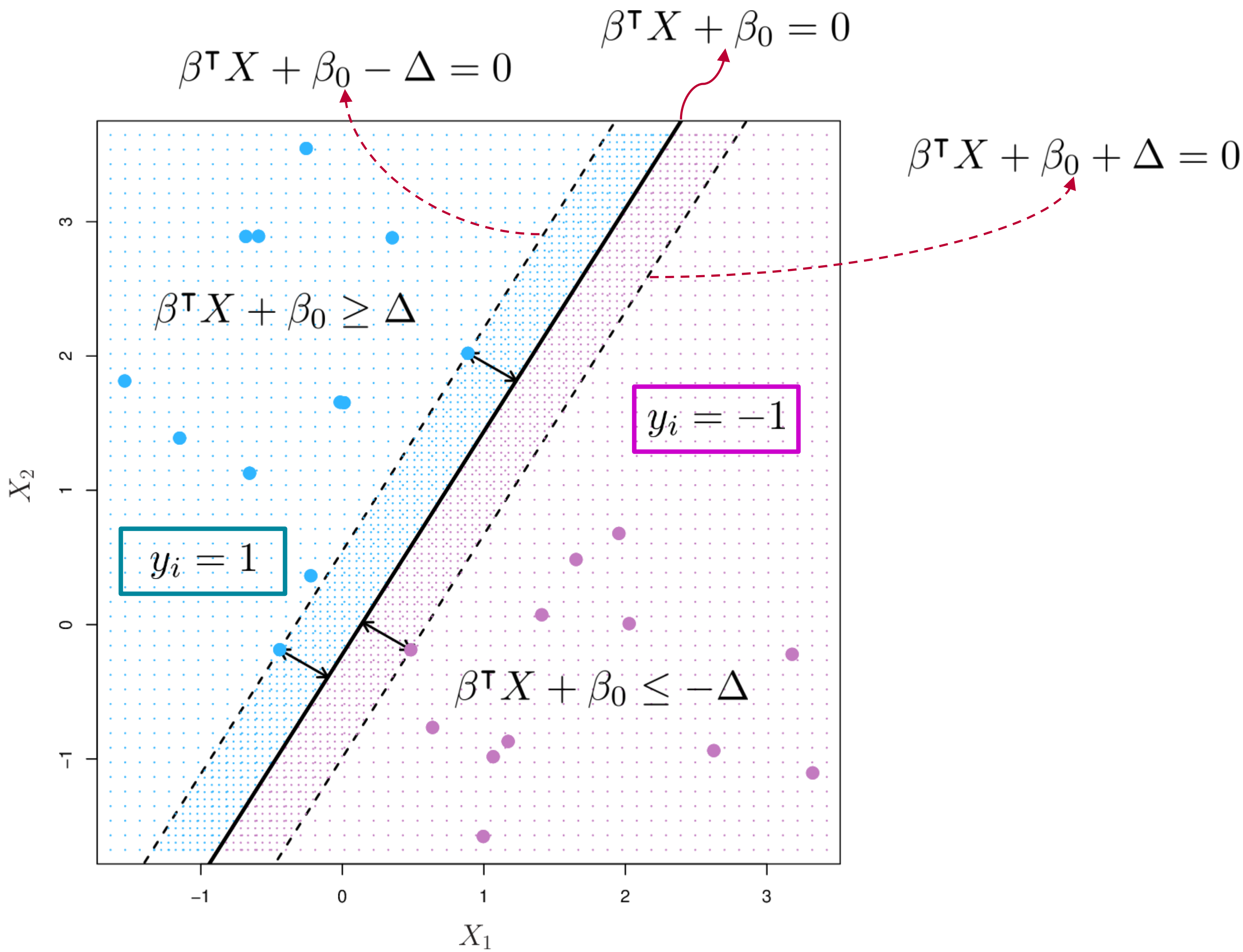
Düzlem

$$\{X \in \mathbb{R}^p : \beta^\mathsf{T} X + \beta_0 = 0,\ \beta \in \mathbb{R}^p, \beta_0 \in \mathbb{R}\}$$

Tam Ayrıştırılabilir Veri



Tam Ayrıştırılabilir Veri



Tam Ayrıştırılabilir Veri

Amaç: β ve Δ parametrelerini,

$$\beta^{\intercal} X + \beta_0 - \Delta = 0 \qquad \text{ve} \qquad \beta^{\intercal} X + \beta_0 + \Delta = 0$$

ile gösterilen iki düzlem arasındaki mesafe en fazla olacak şekilde seçmek

Eşitliklerin her iki tarafı Δ değerine bölünüp, $\Delta = 1$ olarak alınabilir

$$(x_i, y_i)$$

$$y_i = 1 \longrightarrow \beta^{\intercal} x_i + \beta_0 - 1 \geq 0$$

$$y_i = -1 \longrightarrow \beta^{\intercal} x_i + \beta_0 + 1 \leq 0$$

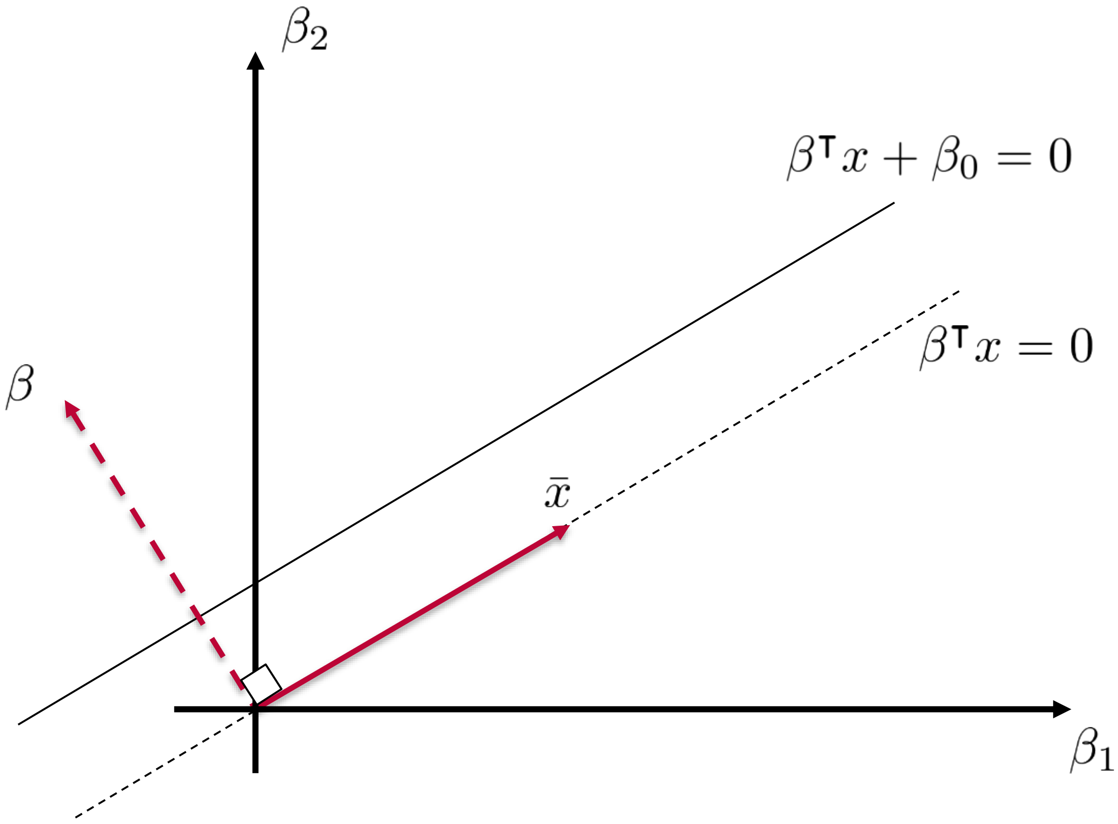
$$y_i(\beta^{\intercal} x_i + \beta_0) \geq 1$$

Tam Ayrıştırılabilir Veri

Amaç: β ve Δ parametrelerini,

$$\beta^\mathsf{T} X + \beta_0 - \Delta = 0 \qquad \text{ve} \qquad \beta^\mathsf{T} X + \beta_0 + \Delta = 0$$

ile gösterilen iki düzlem arasındaki mesafe en fazla olacak şekilde seçmek



$$\beta = (\beta_1, \beta_2)^\mathsf{T}$$

β : alt uzaya dik doğrultu

$$\beta^\mathsf{T} x = 0$$

Ayrıca β vektörü

$$\beta^\mathsf{T} x + \beta_0 = 1$$

ve

$$\beta^\mathsf{T} x + \beta_0 = -1$$

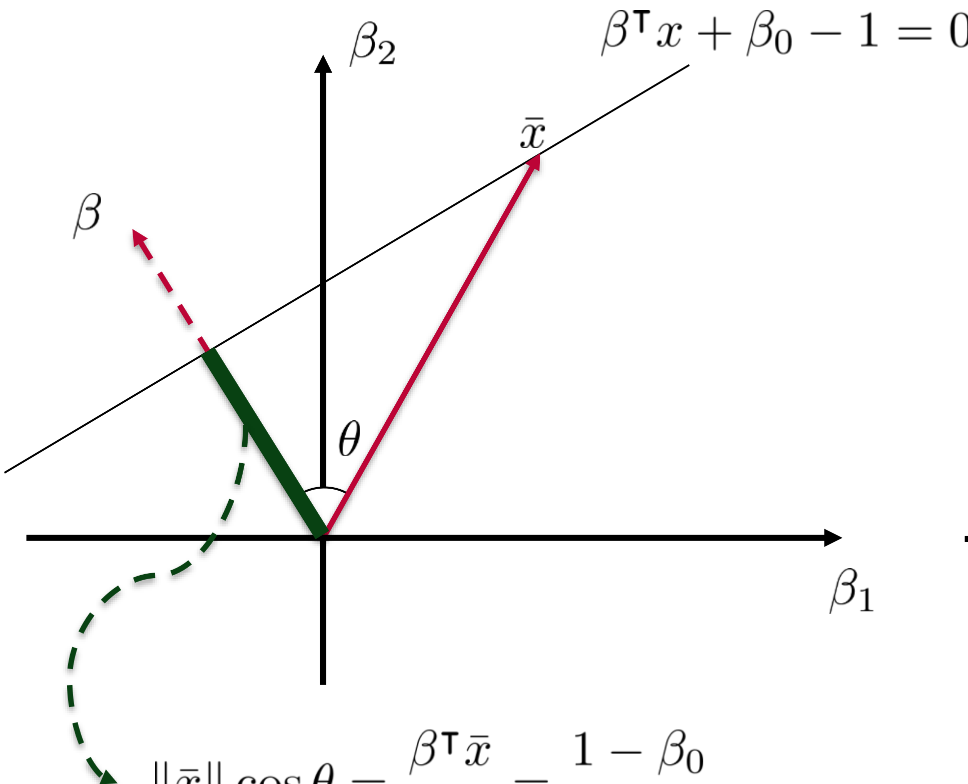
düzlemlerine de dik

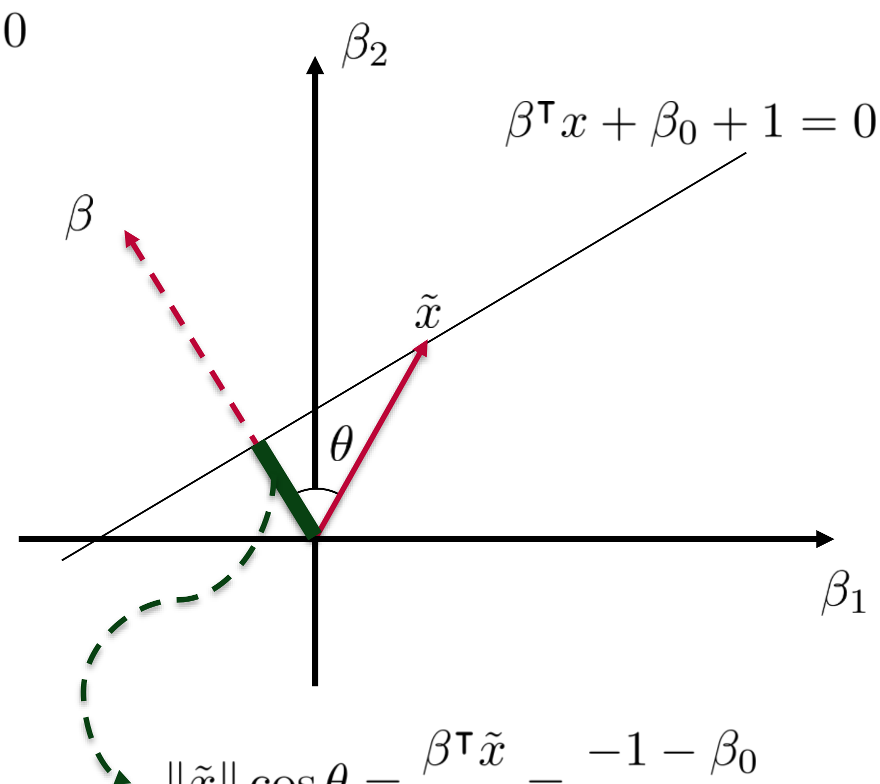
Tam Ayrıştırılabilir Veri

Amaç: β ve Δ parametrelerini,

$$\beta^\intercal X + \beta_0 - \Delta = 0 \qquad \text{ve} \qquad \beta^\intercal X + \beta_0 + \Delta = 0$$

ile gösterilen iki düzlem arasındaki mesafe en fazla olacak şekilde seçmek





$$\|\bar{x}\| \cos\theta = \frac{\beta^\intercal \bar{x}}{\|\beta\|} = \frac{1 - \beta_0}{\|\beta\|}$$

$$\|\tilde{x}\| \cos\theta = \frac{\beta^\intercal \tilde{x}}{\|\beta\|} = \frac{-1 - \beta_0}{\|\beta\|}$$

İki düzlem arasındaki mesafe: $\dfrac{1 - \beta_0}{\|\beta\|} - \dfrac{-1 - \beta_0}{\|\beta\|} = \dfrac{2}{\|\beta\|}$

Tam Ayrıştırılabilir Veri

Amaç: β ve Δ parametrelerini,

$$\beta^\top X + \beta_0 - \Delta = 0 \qquad \text{ve} \qquad \beta^\top X + \beta_0 + \Delta = 0$$

ile gösterilen iki düzlem arasındaki mesafe en fazla olacak şekilde seçmek

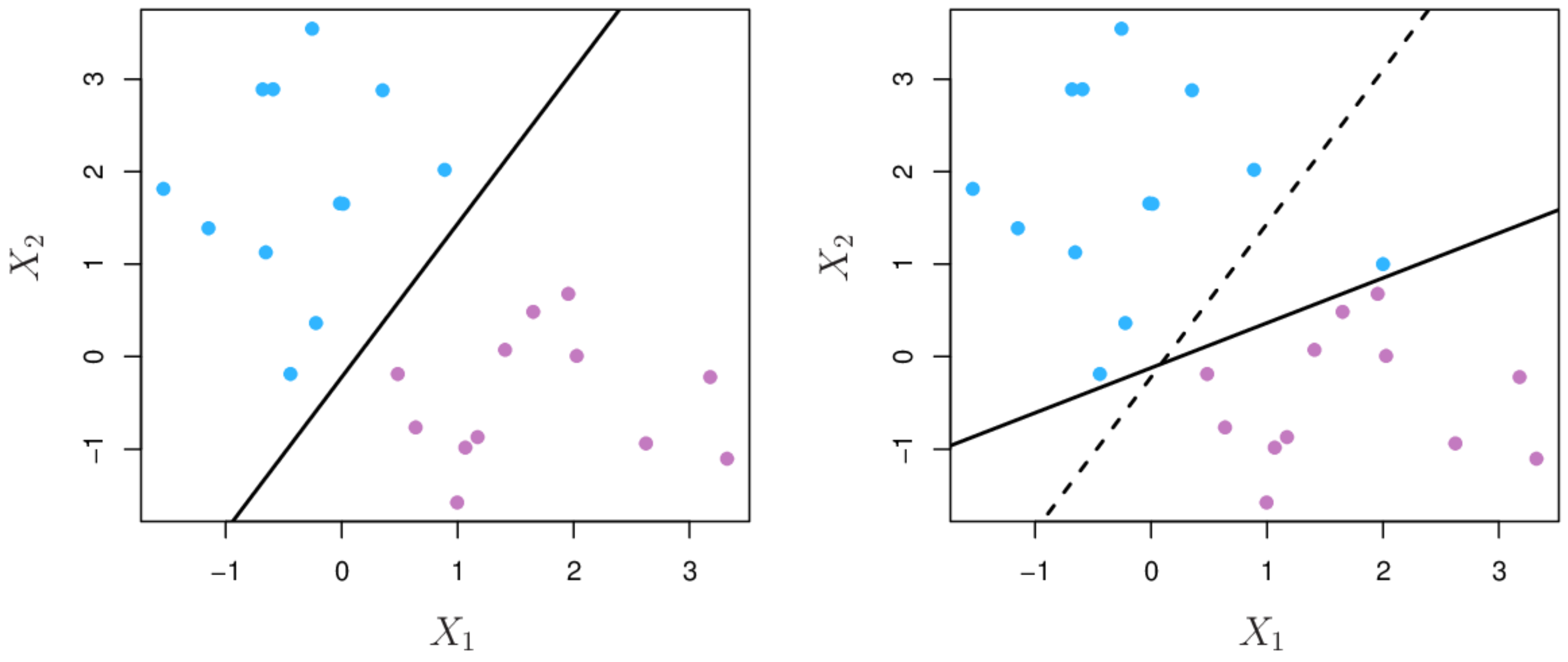
$$\begin{array}{ll} \text{enbüyükle} & \dfrac{2}{\|\beta\|} \\ \text{öyle ki} & y_i(\beta^\top x_i + \beta_0) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

$$\equiv \begin{array}{ll} \text{enküçükle} & \frac{1}{2}\|\beta\| \\ \text{öyle ki} & y_i(\beta^\top x_i + \beta_0) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

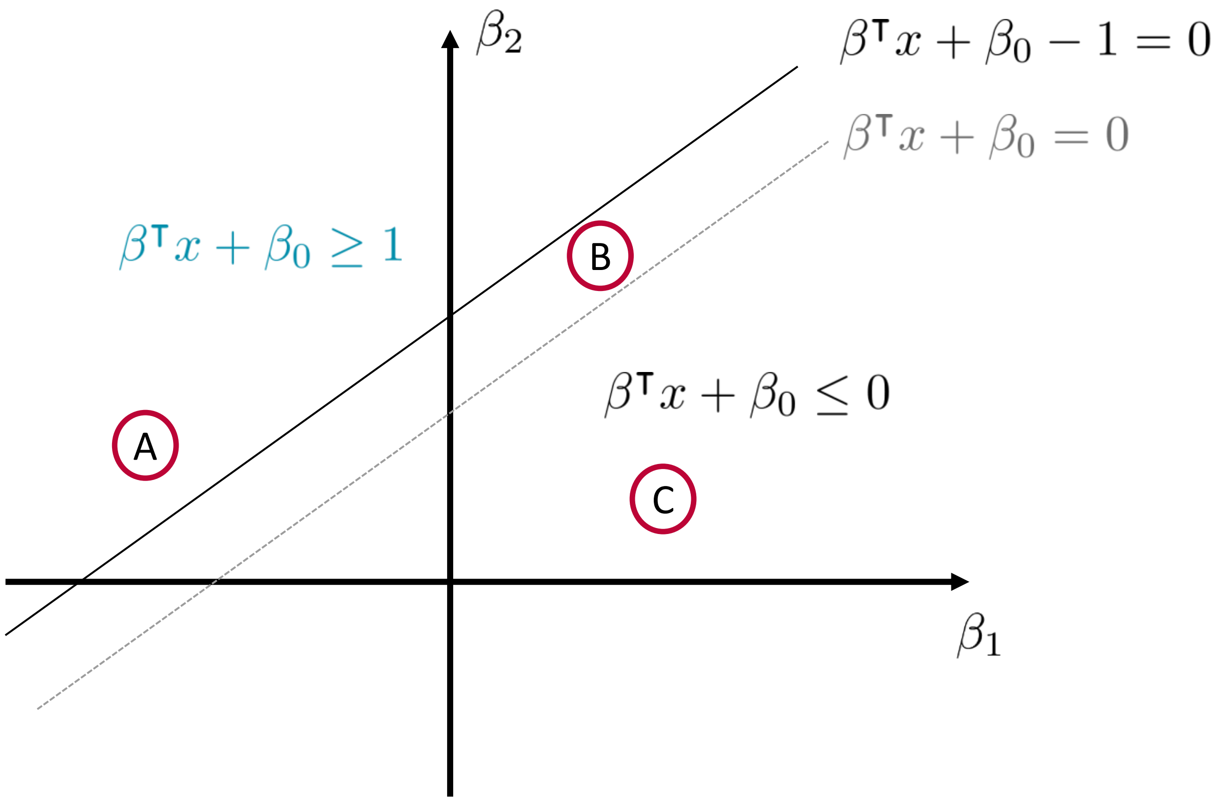
$$\equiv \begin{array}{ll} \text{enküçükle} & \frac{1}{2}\beta^\top \beta \\ \text{öyle ki} & y_i(\beta^\top x_i + \beta_0) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Bu matematiksel model, karesel ve dışbükey amaç fonksiyonu ile doğrusal kısıtlardan oluşuyor. Bu yapıdaki modellere *karesel programlama* (quadratic programming) modelleri denir.

Tam Ayrıştırılabilir Veri



Tam Ayrıştırılamayan Veri



$$(x_i, y_i)$$

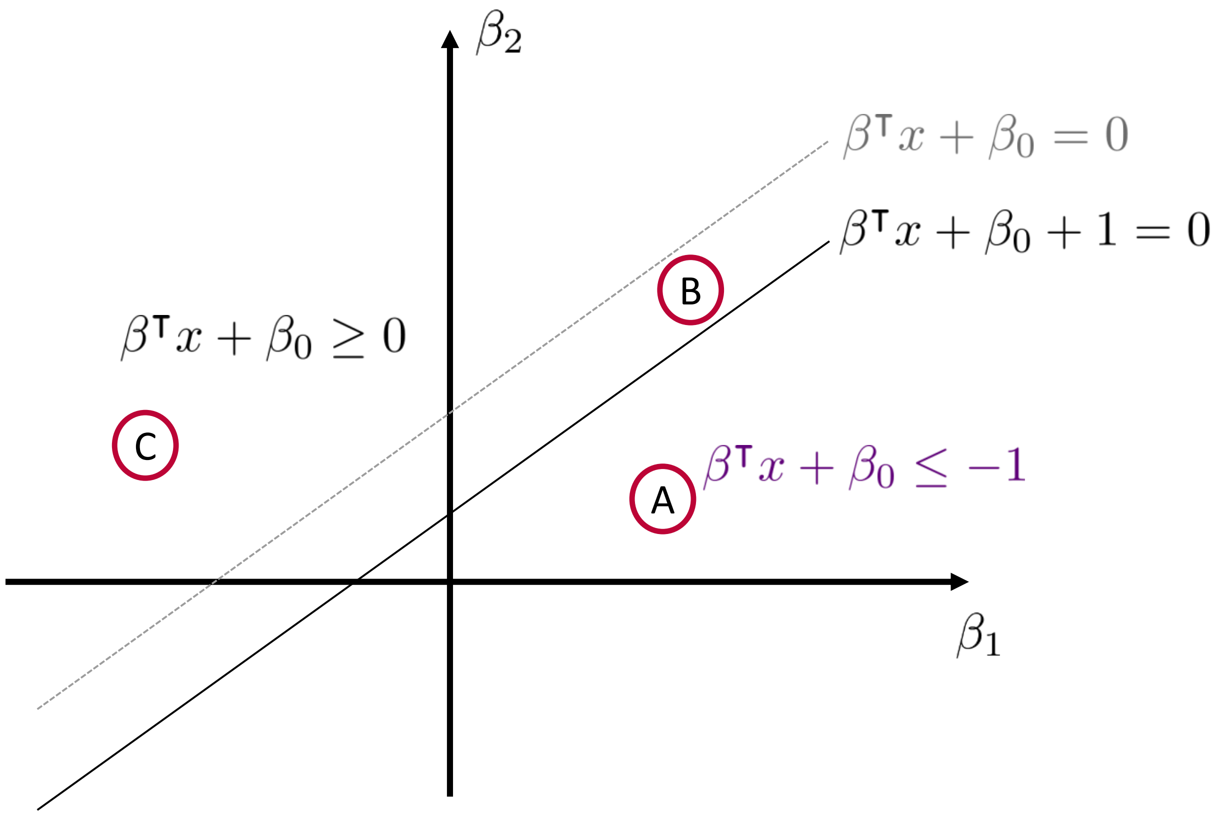
$$y_i = 1$$

A $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = 0$

B $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$

C $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 1$

Tam Ayrıştırılamayan Veri



(x_i, y_i)

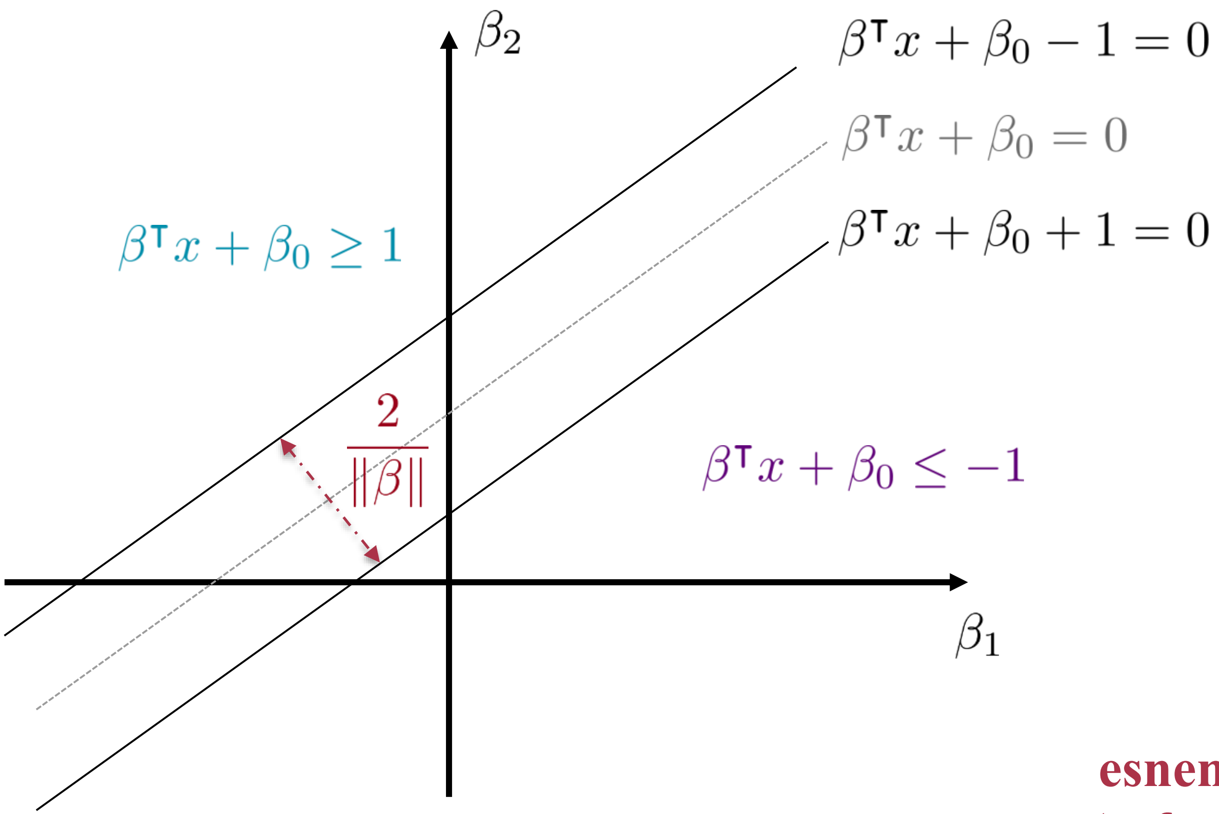
$y_i = -1$

A $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = 0$

B $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$

C $\quad y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 1$

Tam Ayrıştırılamayan Veri



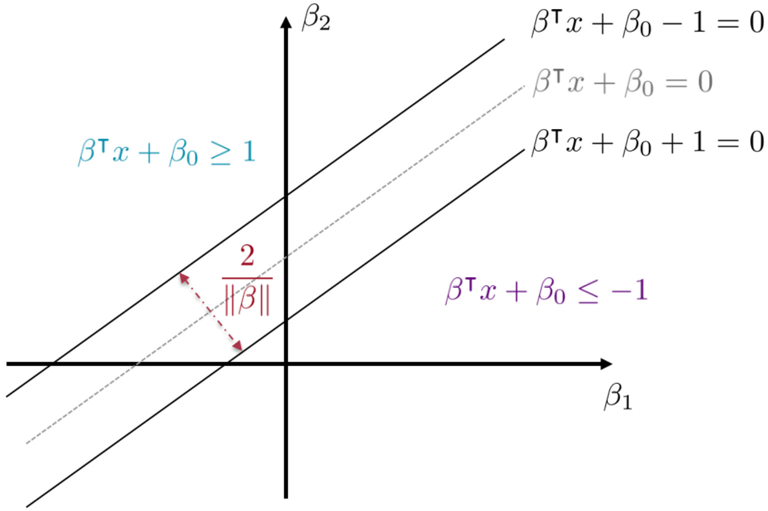
esneme payı (soft margin)

$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = 0$$

$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 1$$

Tam Ayrıştırılamayan Veri



$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = 0$$
$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$$
$$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 1$$

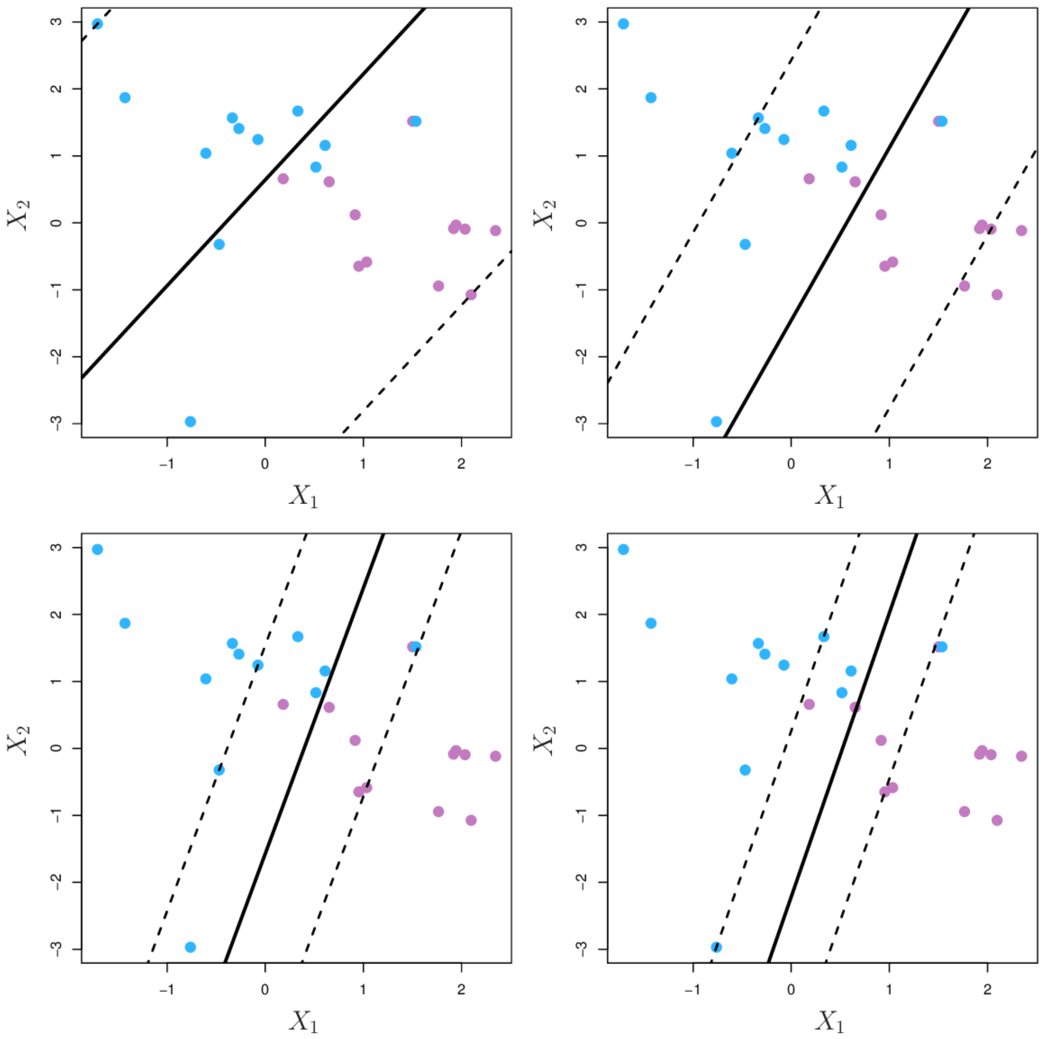
enküçükle $\frac{1}{2}\beta^\intercal\beta + c\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^d$

öyle ki $y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1 - \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$

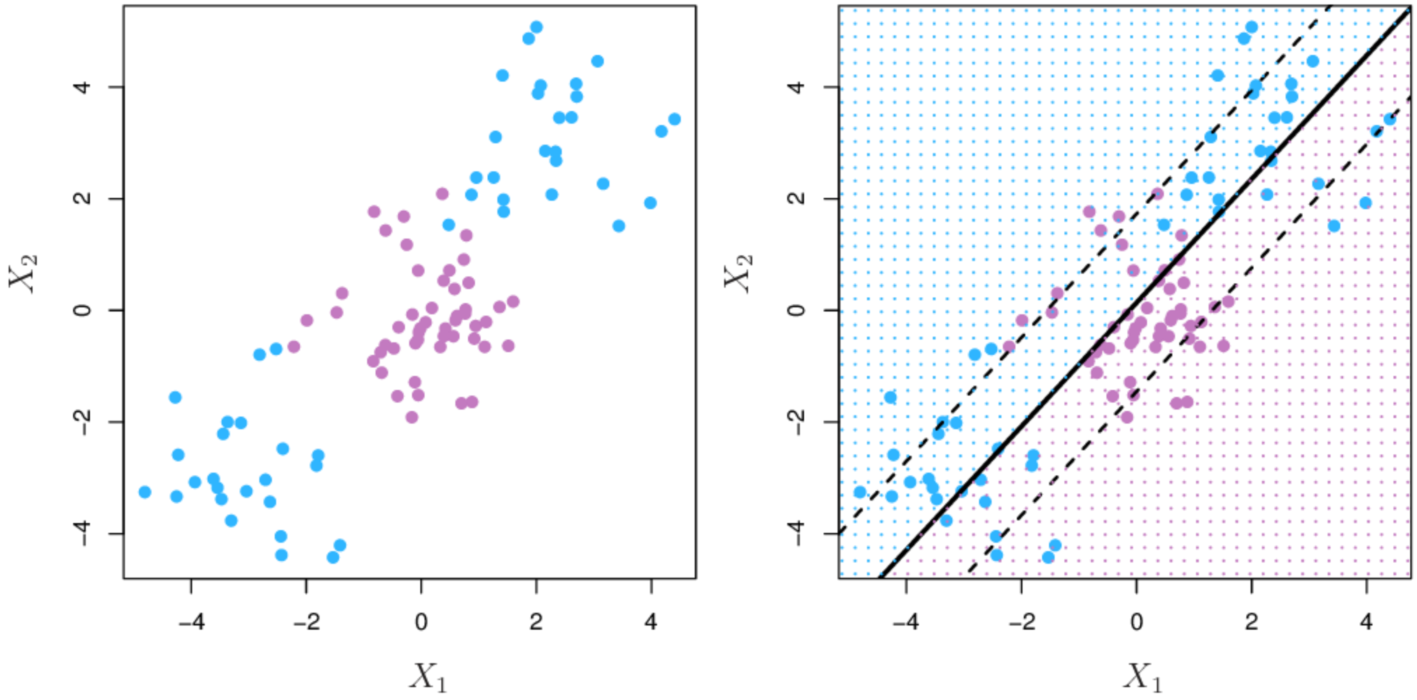
$\varepsilon_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n$

Burada *c* parametresi çapraz geçerlilik sınaması ile belirlenebilir (uygulamalarda *d* = 1 ve *d* = 2 değerleri sık kullanılır)

Tam Ayrıştırılamayan Veri



Çekirdekler (Kernels)



Çekirdekler

enküçükle	$\frac{1}{2}\beta^\intercal\beta$
öyle ki	$y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n$

Lagrange çarpanları

Lagrange Fonksiyonu

$$\mathcal{L}(\beta, \beta_0; \alpha) = \frac{1}{2}\beta^\intercal\beta - \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i \left(y_i(\beta^\intercal x_i + \beta_0) - 1\right)$$

aktif kısıtlar kümesi

Optimallik Şartları

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_\beta \mathcal{L}(\beta, \beta_0; \alpha) = \beta - \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i x_i = 0 \implies \beta = \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i x_i \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\beta, \beta_0; \alpha)}{\partial \beta_0} = -\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i = 0 \implies \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\beta, \beta_0; \alpha) = \quad & \tfrac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i x_i\right)^\intercal \left(\textstyle\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j y_j x_j\right) - \left(\textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i \left(\textstyle\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j y_j x_j\right)^\intercal x_i\right) \\ & - \textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i y_i \beta_0 + \textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i \\ = \quad & \textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i - \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{i \in \mathcal{A}} \textstyle\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boxed{x_i^\intercal x_j} \end{aligned}$$

!

Çekirdekler

$$\mathcal{L}(\beta, \beta_0; \alpha) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{A}} \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \boxed{x_i^\intercal x_j}^{*}$$

tek yapmamız gereken
bu iç çarpımları hesaplamak

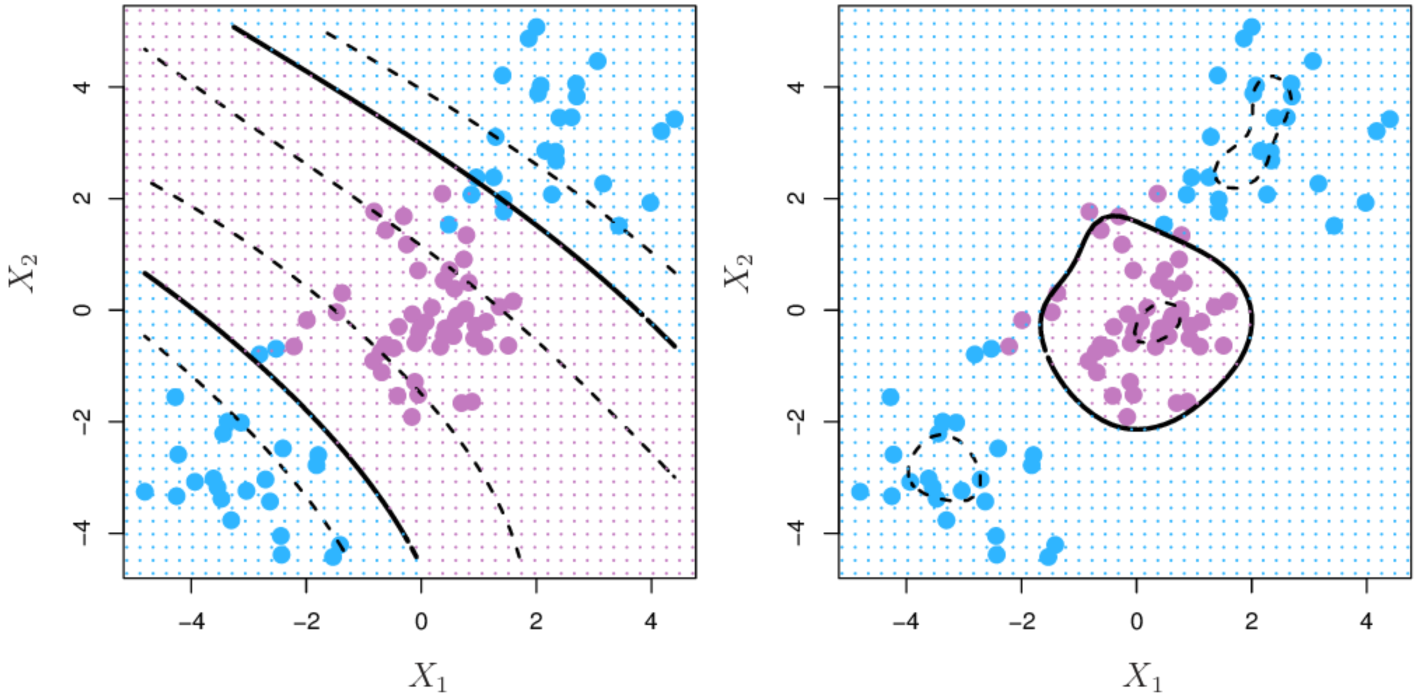
Fikir: İç çarpım hesabını daha yüksek boyutlu uzayda iki veri arasındaki benzerliği ölçen bir çekirdek ile değiştirmek

Doğrusal Çekirdek* $K(x_i, x_j) = x_i^\intercal x_j$

Polinom Çekirdek $K(x_i, x_j) = (1 + x_i^\intercal x_j)^d$

Radyal Çekirdek $K(x_i, x_j) = e^{-\gamma \|x_i - x_j\|^2}, \; \gamma > 0$

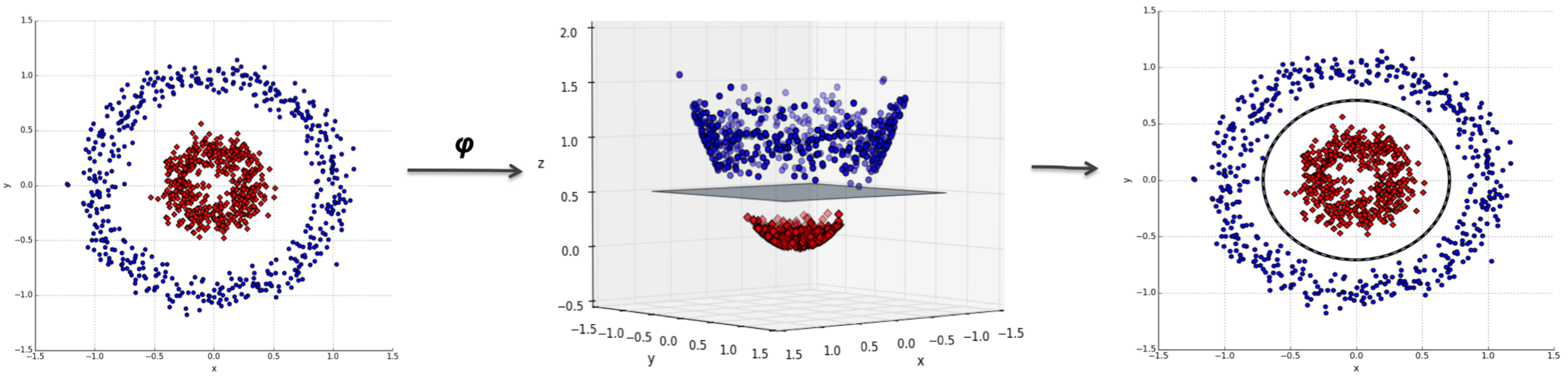
Çekirdekler



Çekirdekler

$$\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

$$K(x_i, x_j) = \varphi(x_i)^\intercal \varphi(x_j)$$



Çekirdekler

Polinom çekirdek: $K(x_i, x_j) = (1 + x_i^\intercal x_j)^d$

$$x_i, x_j \in \mathbb{R}^2$$
$$d = 2$$

$$K(x_i, x_j) = (1 + x_i^\intercal x_j)^2 = \quad 1 + x_{i1}^2 x_{j1}^2 + x_{i2}^2 x_{j2}^2 + 2x_{i1}x_{j1} + 2x_{i2}x_{j2} + 2x_{i1}x_{i2}x_{j1}x_{j2}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$$

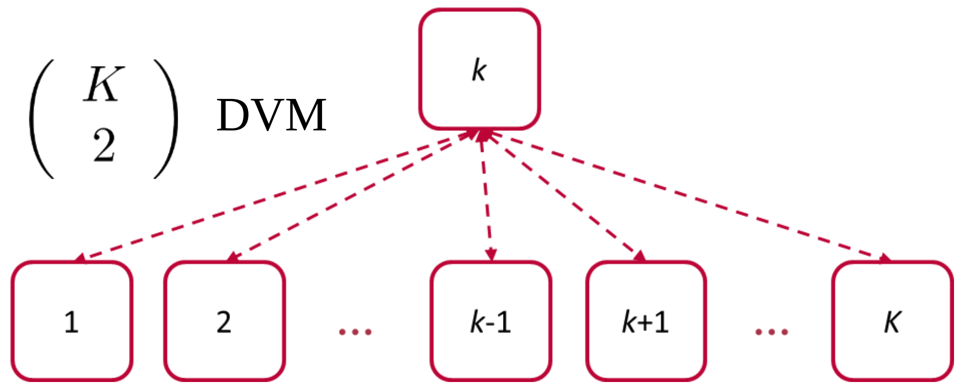
$$\varphi(x_i) = (1, x_{i1}^2, x_{i2}^2, \sqrt{2}x_{i1}, \sqrt{2}x_{i2}, \sqrt{2}x_{i1}x_{i2})^\intercal$$

$$K(x_i, x_j) = \varphi(x_i)^\intercal \varphi(x_j) = (1 + x_i^\intercal x_j)^2$$

Çoklu Sınıf

Tüm Çiftler

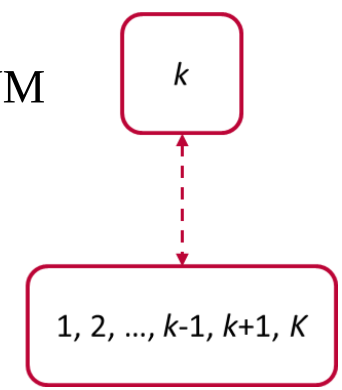
$\binom{K}{2}$ DVM



x_0 en sık atandığı sınıfta kabul edilir

Biri Diğerlerine Karşı

K DVM



$\beta_0^{(k)} + \beta^{(k)\intercal} x_0$

$$\left.\begin{array}{c} \beta_0^{(1)} + \beta^{(1)\intercal} x_0 \\ \beta_0^{(2)} + \beta^{(2)\intercal} x_0 \\ \vdots \\ \beta_0^{(K)} + \beta^{(K)\intercal} x_0 \end{array}\right]$$

x_0 en yüksek değeri alan sınıfa atanır

Özet

- Lojistik Bağlanım
- Doğrusal Ayrımlayıcı Çözümleme
- Sonuçların değerlendirilmesi
- Karar Ağaçları
- Bağlanım ve Sınıflandırma Ağaçları
- Topluluk yöntemleri
- Destek Vektör Makineleri