Cálculos Varios

Diez B. Borja

19 de agosto de 2024

Índice

1. El monopolo magnético

Consideremos las ecuaciones de Maxwell en presencia de carga magnética

$$\rho_m(t,\boldsymbol{r}) = p\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

$$\nabla \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_e(t,\boldsymbol{r}), \qquad \nabla \boldsymbol{B} = \mu_0\rho_m(t,\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}_e + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3}$$

con

$$c = q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{4}$$

$$\boldsymbol{J}_e = \boldsymbol{v}\rho_e(t,\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

Si movemos el monopolo magnético con velocidad $\boldsymbol{v}$, entonces se generará una corriente magnética

$$\boldsymbol{J}_m = \boldsymbol{v}\rho_m(t,\boldsymbol{r}) \tag{6}$$

¿Existe una ley de conservación de la carga magnética?
Tomando divergencia en $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\,\partial\boldsymbol{B}/\partial t$:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla\boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\rho_m(t,\boldsymbol{r})) \tag{7}$$

para que haya una ley de conservación de la carga magnética debemos modificar la ley de Faraday-Lenz de modo que

$$\nabla \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_e(t,\boldsymbol{r}), \qquad \nabla \boldsymbol{B} = \mu_0\rho_m(t,\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \mu_0\boldsymbol{J}_m, \qquad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}_e + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{9}$$

Se puede mostrar que estas ecuaciones son invariantes bajo

$$\boldsymbol{E} \to c_1\boldsymbol{B} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{B} \to c_2\boldsymbol{E} \tag{11}$$

$$q \to c_3\boldsymbol{p} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p} \to c_4 q \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Encontrar los coeficientes de modo que se cumpla lo anterior.

¿Cuánto vale el campo magnético del monopolo? Consideremos

$$\nabla\boldsymbol{B} = \mu_0\rho_m(t,\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

Integando ambos lados sobre un volúmen V, tenemos

2. Hypersuperficies

En una variedad D-dimensional M, una hypersuperficie Σ es una variedad de $(D-1)$-dimensiones que se puede obtener a partir de una restricción sobe las coordenadas, digamos, $\Phi(x^\mu) = 0$, como se muestra en la Figura 1.

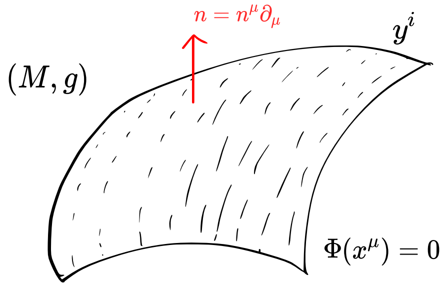


Figura 1: Hypersuperficie

También se puede definir a través del embedding $x^\mu = x^\mu(y^i)$ en donde y^i son coordenadas sobre Σ.

El vector $u_\mu \equiv \nabla_\mu \Phi$ es normal a Σ. Además, el vector

$$n_\mu = \frac{u_\mu}{\sqrt{\|u_\lambda u^\lambda\|}}$$

es unitario y cumple que

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} \frac{u_\mu}{\sqrt{\|u_\lambda u^\lambda\|}} \frac{u_\nu}{\sqrt{\|u_\rho u^\rho\|}} = \sigma = \begin{cases} -1 & \text{si } u^\mu \text{ es timelike o bien } \Sigma \text{ es spacelike.} \\ +1 & \text{si } u^\mu \text{ es spacelike o bien } \Sigma \text{ es timelike.} \end{cases}$$

2.1. Métrica Inducida

El embedding $x^\mu = x^\mu(y^i)$ induce una métrica sobre Σ. Esta **métrica inducida** está dada por

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \equiv g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$$

Como n^μ no tiene componentes tangenciales, entonces $u_\mu e^\mu_i = 0$. Esto implica que

$$\boxed{h_{ij} = e^\mu_i e^\nu_j h_{\mu\nu}} \qquad \text{en donde,} \qquad h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \sigma n_\mu n_\nu$$

Notemos que

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\nu &= g^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} \\ &= g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\mu} - \sigma n_\lambda n_\nu) \\ &= \delta^\mu_\nu - \sigma n^\mu n_\nu \end{aligned} \tag{16}$$

Ejemplo 2.1. Consideremos una 2-esfera embedida en $\mathbb{R}^3$ a través de

$$\Phi(x^\mu) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

Encontrar el vector normal y la métrica inducida.

Solución 2.1. El vector normal a la hypersuperficie $\Phi(x^\mu) = 0$ es

$$u_\mu = \nabla_\mu \Phi = 2x\delta^x_\mu + 2y\delta^y_\mu + 2z\delta^z_\mu$$

la métrica de $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas es

$$ds^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \\ &= (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 \\ &= (2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 \\ &= 4(x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Así, el vector normal $n = n^\mu \partial_\mu = \frac{u^\mu}{\sqrt{\|u_\lambda u^\lambda\|}} \partial_\mu$ es

$$\boxed{n = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)}$$

Otro modo de abordar este ejercicio es utilizar las coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \sin\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

donde la métrica es

$$ds^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

de modo que el embedding se puede escribir como

$$\Phi(x^\mu) = r^2 - R^2 = 0$$

el vector normal y su norma son respectivamente

$$u_\mu = 2r\delta^r_\mu, \qquad u_\lambda u^\lambda = 4r^2$$

finalmente, el vector normal normalizado es

$$\boxed{n = n^\mu \partial_\mu = \partial_r}$$

Encontremos ahora la métrica inducida sobre la 2-esfera. El embedding $x^\mu = x^\mu(y^i)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} x &= R\cos\phi\sin\theta \\ y &= R\sin\phi\sin\theta \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$

usando que,

$$\begin{aligned} ds^2\Big|_\Sigma = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu &= g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}\mathrm{d}x^j \\ &= (g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j)\mathrm{d}y^i \mathrm{d}y^j \\ &= h_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j \end{aligned}$$

Usando $x^\mu = (x, y, z)$, $y^i = (\theta, \phi)$, podemos encontrar los $e^\mu_i = \partial x^\mu / \partial y^i$:

$$\begin{aligned} e^x_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = R\cos\phi\cos\theta & e^x_\phi &= \frac{\partial x}{\partial \phi} = -R\sin\phi\sin\theta \\ e^y_\theta &= \frac{\partial y}{\partial \theta} = R\sin\phi\cos\theta & e^y_\phi &= \frac{\partial y}{\partial \phi} = R\cos\phi\sin\theta \\ e^z_\theta &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = -R\sin\theta & e^z_\phi &= \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

Así, de $h_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j$, sólo sobreviven

$$h_{\theta\theta} = R^2, \qquad h_{\phi\phi} = R^2 \sin^2\theta$$

Luego, encontramos que

$$\boxed{ds^2\Big|_\Sigma = h_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j = R^2\mathrm{d}\theta^2 + R^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2}$$

2.1.1. Propiedades de la métrica inducida

Veamos algunas propiedades de la métrica inducida. Primero veamos que sucede al contraer $n^\mu h_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} n^\mu h_{\mu\nu} &= n^\mu(g_{\mu\nu} - \sigma n_\mu n_\nu) \\ &= n_\nu - \sigma \underbrace{n^\mu n_\mu}_{\sigma} n_\nu \\ &= n_\nu - n_\nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde se usó $\sigma^2 = 1$. Concluimos entonces que n^μ y $h_{\mu\nu}$ son ortogonales.

Veamos ahora qué sucede si contraemos $h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\lambda$,

$$\begin{aligned} h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\lambda &= (\delta^\mu_\nu - \sigma n^\mu_\nu)(\delta^\nu_\lambda - \sigma n^\nu n_\lambda) \\ &= \delta^\mu_\lambda - \sigma n^\mu n_\lambda - \cancel{\sigma n^\mu n_\lambda} + \cancel{\underbrace{\sigma^2}_{1} n^\mu \underbrace{n_\nu n^\nu}_{\sigma} n_\lambda} \\ &= \delta^\mu_\lambda - \sigma n^\mu n_\lambda \\ &= h^\mu{}_\lambda \end{aligned}$$

Es decir, $h^\mu{}_\nu$ es idempotente; tal como los proyectores. Así, concluimos que $h^\mu{}_\nu$ es un proyector que mapea tensores de M en tensores de Σ.

2.1.2. Descomposición de un vector

El vector v^μ puede ser descompuesto en componentes normales, $v^\mu_\perp$ y tangenciales, $v^\mu_\parallel$, como sigue

$$v^\mu = v^\mu_\perp + v^\mu_\parallel$$

La parte puramente tangencial puede ser escrita como

$$\boxed{v^\mu_\parallel = h^\mu{}_\nu v^\nu}$$

mientras que la parte perpendicular,

$$\begin{aligned} v^\mu_\perp &= v^\mu - v^\mu_\parallel \\ &= v^\mu - h^\mu{}_\nu v^\nu \\ &= (\delta^\mu_\nu - h^\mu{}_\nu)v^\nu \end{aligned}$$

usando (16),

$$\boxed{v^\mu_\perp = \sigma n_\nu v^\nu n^\mu}$$

2.2. Integración sobre hypersuperficie

El elemento de volumen de la hypersuperficie Σ está dado por

$$\mathrm{d}\Sigma = \sqrt{|h|}\mathrm{d}^{D-1}x$$

en donde $h = \det h_{ij} = \det\left(e_i^\mu e_j^\nu h_{\mu\nu}\right)$.

Además, el elemento de volumen orientado de Σ es

$$\mathrm{d}\Sigma_\mu = \sigma n_\mu \mathrm{d}\Sigma = \sigma n_\mu \sqrt{|h|}\mathrm{d}^{D-1}x$$

En el caso de co-dimensión p:

$$\mathrm{d}\Sigma_{\mu_1\ldots\mu_p} = \frac{1}{p!} n^{(1)}_{[\mu_p} \cdots n^{(p)}_{\mu_1]} \sqrt{|\sigma|}\mathrm{d}^{D-p}x$$

Análogamente, la D-forma de volumen

$$\epsilon_D = \frac{1}{D!}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_D} \underbrace{\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_D}}_{\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_D}\sqrt{|g|}\mathrm{d}^Dx} = \sqrt{|g|}\mathrm{d}^Dx$$

En donde el producto cuña se define como

$$\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|}\mathrm{d}x^{\sigma(\mu_1)}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\sigma(\mu_p)}$$

Ejemplo 2.2.

$$\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu - \mathrm{d}x^\nu\otimes\mathrm{d}x^\mu$$

En formas diferenciales, el elemento de volumen de una hypersuperficie de co-dimensión 1 y con vector normal $n_{(1)}$ es

$$\epsilon_{(D-1)} = \frac{1}{(D-1)!} n^\mu_{(1)}\varepsilon_{\mu\nu_2\ldots\nu_D}\mathrm{d}x^{\nu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_D}$$

Para co-dimensión 2, con vectores normales[1] $n_{(1)}$ y $n_{(2)}$, tenemos

$$\epsilon_{(D-2)} = \frac{1}{(D-1)!}\frac{1}{(D-2)!} n^\mu_{(2)} n^\nu_{(1)}\varepsilon_{\mu\nu\lambda_3\ldots\lambda_D}\mathrm{d}x^{\lambda_3}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\lambda_D}$$

Para co-dimensión p, la $(D-p)$-forma volumen es:

$$\epsilon_{D-p} = \frac{1}{(D-1)!}\cdots\frac{1}{(D-p)!} n^{\mu_1}_{(p)} n^{\mu_2}_{(p-1)}\cdots n^{\mu_p}_{(1)}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_p\nu_{p+1}\ldots\nu_D}\mathrm{d}x^{\nu_p+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_D}$$

El **teorema de la divergencia** en este lenguaje queda

$$\int_M \mathrm{d}^Dx\sqrt{|g|}\nabla_\mu v^\mu = \oint_{\partial M} v^\mu \mathrm{d}\Sigma_\mu = \sigma\oint_{\partial M}\mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{|h|}n_\mu v^\mu$$

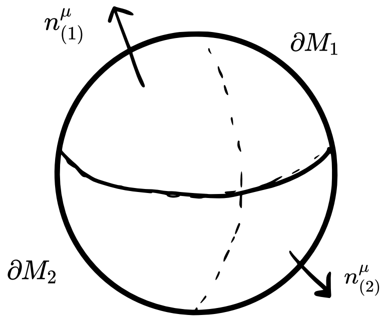
Notemos que, si $\nabla_\mu v^\mu = 0$, entonces el teorema de la divergencia

$$\int_M \mathrm{d}^Dx\sqrt{|g|}\nabla_\mu v^\mu = \sigma\oint_{\partial M}\mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{|h|}n_\mu v^\mu = 0$$

Si $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$, entonces

$$\oint_{\partial M} v^\mu\mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_{\partial M_1} v^\mu \mathrm{d}\Sigma^{(1)}_\mu + \int_{\partial M_2} v^\mu\mathrm{d}\Sigma^{(2)}_\mu = 0$$

[1]Recordatorio: Binormales: $\epsilon_{\mu\nu} = n^\lambda_{(2)} n^p_{(1)}\varepsilon_{\lambda\rho\mu\nu}$



2.3. Derivada covariante sobre hypersuperficie

Dado que Σ es una subvariedad con métrica inducida h_{ij}, podemos definir una derivada covariante que es compatible con h del siguiente modo

$$\mathcal{D}_\sigma T^{\mu_1\dots\mu_p}{}_{\nu_1\dots\nu_q} = h^{\mu_1}{}_{\lambda_1}\cdots h^{\mu_p}{}_{\lambda_p} h^{\rho_1}{}_{\nu_1}\cdots h^{\rho_q}{}_{\nu_q} h^\tau{}_\sigma \nabla_\tau T^{\lambda_1\dots\lambda_p}{}_{\rho_1\dots\rho_q}$$

esta derivada $\mathcal{D}$ es compatible con $h_{\mu\nu}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu h_{\lambda\rho} &= h^\alpha{}_\lambda h^\beta{}_\rho h^\gamma{}_\mu \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} \\
&= h^\alpha{}_\lambda h^\beta{}_\rho h^\gamma{}_\mu \nabla_\gamma (g_{\alpha\beta} - \sigma n_\alpha n_\beta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Consideremos un vector tangente a Σ, digamos v^μ

$$v^\mu = h^\mu{}_\nu v^\nu$$

Si hubiésemos definido la derivada covariante sobre Σ como

$$h^\lambda{}_\mu \nabla_\lambda v^\nu$$

entonces aparecen componentes normales. Veamos

$$\begin{aligned}
h^\lambda{}_\mu \nabla_\lambda v^\nu &= h^\lambda{}_\mu \delta^\nu_\rho \nabla_\lambda v^\rho \\
&= h^\lambda{}_\mu (h^\nu{}_\rho + \sigma n^\nu n_\rho) \nabla_\lambda v^\rho \\
&= \mathcal{D}_\mu v^\nu + \sigma h^\lambda{}_\mu n^\nu n_\rho \nabla_\lambda v^\rho
\end{aligned}$$

usando $n_\rho v^\rho = n_\rho h^\rho{}_\sigma v^\sigma = 0$, entonces $\nabla_\lambda (n_\rho v^\rho) = 0$. Luego

$$\nabla_\lambda n_\rho v^\rho + n_\rho \nabla_\lambda v^\rho = 0$$

así,

$$\begin{aligned}
h^\lambda{}_\mu \nabla_\lambda v^\nu &= \mathcal{D}_\mu v^\nu - \sigma h^\lambda{}_\mu n^\nu \underbrace{v^\rho}_{h^\rho{}_\sigma v^\sigma} \nabla_\lambda n_\rho \\
&= \mathcal{D}_\mu v^\nu - \sigma \underbrace{h^\lambda{}_\mu h^\rho{}_\sigma \nabla_\lambda n_\rho}_{K_{\mu\sigma}} v^\sigma n^\nu
\end{aligned}$$

De esta forma, podemos escribir

$$h^{\lambda}{}_{\mu}\nabla_{\lambda}v^{\nu} = \mathcal{D}_{\mu}v^{\nu} - \sigma K_{\mu\sigma}v^{\sigma}n^{\nu} \tag{17}$$

en donde

$$\boxed{K_{\mu\nu} \equiv h^{\lambda}{}_{\mu}h^{\rho}{}_{\nu}\nabla_{\lambda}n_{\rho}}$$

es la **curvatura extrínseca**. Notemos que en (17) aparece una pieza con componente normal.

Demostrar:

- $K_{\mu\nu} = h^{\lambda}{}_{\mu}\nabla_{\lambda}n_{\nu}$
- $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$ (usar el teorema de Frobenius)
- $K_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\pounds_{\xi}h_{\mu\nu}$

Si $v^{\mu} = h^{\mu}{}_{\nu}v^{\nu}$, entonces $[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}]v^{\lambda} = \mathcal{R}^{\lambda}{}_{\rho\mu\nu}v^{\rho}$, en donde $\mathcal{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$ es la curvatura intrínseca. Demostrar las relaciones de Gauss-Codazzi-Maunardi

- $\mathcal{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = h^{\rho}{}_{\alpha}h^{\beta}{}_{\sigma}h^{\gamma}{}_{\mu}h^{\delta}{}_{\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + 2\sigma\kappa^{\rho}{}_{[\mu}K_{\nu]\sigma}$
- $2\mathcal{D}_{[\mu}K_{\nu]\lambda} = \mathcal{R}_{\rho\sigma\tau\kappa}n^{\rho}h^{\sigma}{}_{\lambda}h^{\tau}{}_{\mu}h^{\kappa}{}_{\nu}$

2.4. Hypersuperficie de Cauchy

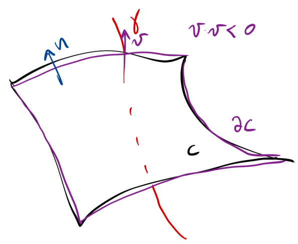


Figura 2: Hypersuperficie de Cauchy

Una hypersuperficie de Cauchy es una hypersuperficie la cual es intersectada una sola vez por una curva tipo tiempo. Es lo más parecido a la noción de tiempo constante en Minkowski.

3. Acción Euclídea on-shell y función de partición

En mecánica cuántica, calculamos la amplitud de transición de un estado $|q_i\rangle$ a otro $|q_f\rangle$ a través de los elementos de matriz,

$$A(q_f, t_f, q_i, t_i) = \langle q_f| e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} |q_i\rangle$$

en donde la evolución Hamiltoniana del sistema está dada por el operador unitario

$$\hat{U} \equiv e^{-i\hat{H}t}$$

Para calcular valores de expectación a temperatura cero de un operador $\hat{O}$, tomamos

$$\left\langle \hat{O} \right\rangle \Big|_{T=0} = \sum_{n} \langle n| \hat{O} |n\rangle$$

en donde $|n\rangle$ son un conjunto completo de estados ortonormales: $\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{I}$.

En un baño térmico, el valor de expectación se calcula como el promedio en el ensamble, con el factor de peso de Boltzman, esto es,

$$\left\langle \hat{O} \right\rangle \Big|_T = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_n \langle n| e^{-\beta \hat{H}} \hat{O} |n\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{O}\right]$$

en donde $\mathcal{Z} = \operatorname{Tr}[\hat{\rho}]$ es la función de partición, con $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}$ y $\beta = 1/(k_B T)$.

Ejemplo 3.1. La energía promedio se puede calcular como $U = \left\langle \hat{H} \right\rangle$,

$$\left\langle \hat{H} \right\rangle = \frac{\operatorname{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}} \hat{H}\right]}{\operatorname{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}}\right]} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} = U$$

Por otro lado, la entropía se puede obtener de

$$S = k_B \beta \left\langle \hat{H} \right\rangle + k_B \ln \mathcal{Z}$$

En adelante usaremos $k_B = \hbar = c = 1$.

Notemos que si definimos a través de una rotación de Wick[2]

$$t \to -i\tau, \qquad \text{con } \tau \sim \tau + \beta$$

podemos relacionar el operador evolución con la matriz densidad

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} \longleftrightarrow \hat{\rho}(T) = e^{-\beta \hat{H}}$$

Consideremos una función de dos puntos en QFT a temperatura finita,

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(y,0) \right\rangle \Big|_T &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}} \hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(y,0)\right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Tr}\left[\hat{\phi}(x,t) \underbrace{e^{-\beta \hat{H}} e^{+\beta \hat{H}}}_{\mathbb{I}} \hat{\phi}(y,0) e^{-\beta \hat{H}}\right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Tr}\left[\hat{\phi}(x,t) e^{-\beta \hat{H}} \underbrace{e^{i\hat{H}(-i\beta)} \hat{\phi}(y,0) e^{-i\hat{H}(-i\beta)}}_{\hat{\phi}(y,-i\beta)}\right] \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}} \operatorname{Tr}\left[e^{-\beta \hat{H}} \hat{\phi}(y,-i\beta)\hat{\phi}(x,t)\right] \\
&= \left\langle \hat{\phi}(y,-i\beta)\hat{\phi}(x,t) \right\rangle \Big|_T
\end{aligned}$$

donde para pasar de la primera a la segunda línea se utilizó la propiedad cíclica de la traza.

En el formalismo de integral de camino de la mecánica cuántica (ver Matthew D. Schwartz, QFT and SM, ch. 4), una amplitud de transición entre un estado $|q_i\rangle$ a otro $|q_f\rangle$ se calcula como

$$A(q_f, t_f, q_i, t_i) = \langle q_f| e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} |q_i\rangle = N \int \mathcal{D}q(t) e^{iI_{\mathrm{CL}}[q]}$$

en donde N es una constante de normalización y la acción clásica es

$$I_{\mathrm{CL}}[q] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \mathcal{L}_{\mathrm{CL}}[q, [\dot{q}]$$

[2] τ se conoce como el tiempo Euclideo, mientras que a t como el tiempo Lorentziano.

Por otro lado, la función de partición en teoría de campos

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_o^\beta \mathrm{d}\tau \mathcal{L}(\tau)}$$

En teoría cuántica de campos, el funcional generatriz, es un funcional de las fuentes J,

$$W[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-I_{\text{CL}}[\phi]+J[\phi]}$$

la función de dos puntos es

$$\left\langle \hat{\phi}(x,t)\hat{\phi}(y,0) \right\rangle = \left.\frac{\delta^2 W}{\delta\phi(y,0)\delta\phi(x,t)}\right|_{J=0}$$

La función partición a temperatura T fija

$$W[0]\Big|_{t\to -i\tau} = \mathcal{Z}$$

Es decir, con esta evidencia de cálculo, podemos pensar al tiempo Euclídeo como el inverso de la temperatura.

Una acción clásica

$$I_{\text{CL}}[\phi, g_{\mu\nu}] = \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\mathcal{L}(\phi, \nabla\phi, g_{\mu\nu}, R^{\mu\nu}_{\lambda\rho})$$

transforma bajo una rotación de Wick[3] del siguiente modo:

$$\mathrm{d}^D x\sqrt{|g|} = \mathrm{d}t\mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{|g|} \xrightarrow{t\to -i\tau} -i\mathrm{d}\tau\mathrm{d}^{D-1}x\sqrt{|g_E|} = -i\mathrm{d}^D x_E\sqrt{|g_E|}$$

Usando $\Phi(t,\boldsymbol{x}) \to \Phi(-i\tau, \boldsymbol{x}) \equiv \Phi_E$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{\text{CL}}[\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu}, R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}] \to &- i\int \mathrm{d}^D x_E\sqrt{|g_E|}\mathcal{L}_{\text{CL}}[\Phi_E, \nabla\Phi_E, ...] \\ &\equiv iI^{(E)}_{\text{CL}}[\Phi_E, g^{(E)}_{\mu\nu}, ...]\end{aligned}$$

De este modo, el funcional generatriz se transforma en la función partición

$$W[0] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{iI_{\text{CL}}[\phi]+\phi J}\Big|_{J=0} \to \mathcal{Z}\int \mathcal{D}\phi e^{-I^{(E)}_{\text{CL}}[\phi]}$$

Desde aquí, podemos obtener toda la información termodinámica del sistema.

3.1. Aproximación de punto silla

Consideremos la siguiente integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-f(x)}, \qquad \text{en donde } f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Sea $x = x_0$ un extremo de $f(x)$, i.e. $f'(x)\big|_{x=x_0} = 0$. Expandiendo $f(x)$ en torno a este punto, tenemos

$$f(x) = f(x_0) + \cancelto{0}{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

Así, a segundo orden, la integral queda

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\left(f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right)} \\ &= e^{-f(x_0)}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}\end{aligned}$$

[3] La rotación de Wick cambia la topología.

Para que la integral converja ($I < 0$), pedimos que $f''(x_0) > 0$. Así, esta integral es una Gaussiana y la podemos calcular explícitamente

$$I = e^{-f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2} = e^{-f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}} \equiv Ce^{-f(x_0)}$$

Esta aproximación se conoce como la aproximación de punto silla (a primer orden).

Con esto en mente, podemos calcular la función partición. Consideremos una configuración que minimice la acción $\Phi = \Phi_0$. Para el resto del cálculo conideraremos tanto los campos como la acción clásica en el Euclideo: $\Phi^E, I_{\text{CL}}^{(E)}$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-I[\Phi]} &\approx \int \mathcal{D}\Phi e^{-I[\Phi_0]} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 I}{\delta \Phi^2}\bigg|_{\Phi=\Phi_0} (\Phi - \Phi_0) \\ &\approx Ce^{-I[\Phi_0]} \end{aligned}$$

fijando $C = 1$ sin perdida de generalidad, encontramos que

$$\mathcal{Z} \approx e^{-I[\Phi_0]}$$

$$\boxed{\ln \mathcal{Z} \approx -I_{\text{CL}}^{(E)}[\Phi_0^{(E)}]}$$

donde $\Phi_0^{(E)}$ es solución a las ecuaciones de campo.

Así, la energía promedio y la entropía las podemos obtener como

$$\boxed{U = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} = \frac{\partial}{\partial \beta} I_{\text{CL}}^{(E)}[\Phi_0^{(E)}]}$$

$$\boxed{S = \beta U + \ln \mathcal{Z} = \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} - 1\right) I_{\text{CL}}^{(E)}[\Phi_0^{(E)}]}$$

$$\boxed{F = -k_B T \ln \mathcal{Z} = \beta^{-1} I_{\text{CL}}^{(E)}[\Phi_0]}$$

En gravitación, calculando $I_{\text{CL}}^{(E)}[\Phi_0]$, podemos derivar las cantidades termodinámcias de los agujeros negros.

Ejemplo 3.2. *"Action integrals and partition functions in quantum gravity"*. G. W. Gibbons & S. W. Hawkings, Phy. Rev. D 15, (1977) 2752.

Consideremos la acción de Einstein-Hilbert con el término de Gibbons-Hawking-York,

$$I_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] = \kappa \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} R + 2\kappa \int \mathrm{d}^3x \sqrt{|h|}(K - K_0),$$

en donde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, con n^μ un vector unitario tipo espacio, $\kappa = (16\pi G_N)^{-1}$, $K = g^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$, con $K_{\mu\nu}$ la curvatura extrínseca y K_0 es la curvatura extrínseca de un background de referencia.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

multiplicando por $g^{\mu\nu}$ a ambos lados,

$$R = 0$$

La acción Euclídea on-shell queda expresada puramente en términos del borde

$$I_{\text{EH}}^{\text{on-shell}} = 2\kappa \int \mathrm{d}^3x \sqrt{|h|}(K - K_0)$$

La única solución estática y esféricamente simétrica a $R_{\mu\nu} = 0$ es (ver Teorema de Birchoff),

$$ds^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2) \tag{18}$$

con $f(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$. Consideremos la rotación de Wick $t \to -i\tau$, con τ el tiempo Euclídeo. Así, la métrica (18) queda

$$ds^2 = f(r)\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{19}$$

Como la métrica tiene signatura Euclídea, entonces $f(r) \geq \infty$. Así, $r_h \leq r < 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. ¿Qué pasa con el rango de τ?

3.2. Near Horizon Geometry

Analicemos la métrica (19) cerca del horizonte $r = r_h$. Para ello, expandamos $f(r)$ en torno a $r = r_h$:

$$f(r) = \cancelto{0}{f(r_h)} + f'(r_h)(r - r_h) + \cdots$$

Así, el elemento de línea cerca del horizonte es:

$$ds^2 \approx f'(r_h)(r - r_h)\mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f'(r_h)(r - r_h)} + r_h^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Haciendo el cambio de coordenadas,

$$\mathrm{d}\rho^2 \equiv \frac{\mathrm{d}r^2}{f'(r_h)(r - r_h)} \longrightarrow \rho = 2\sqrt{\frac{(r - r_h)}{f'(r_h)}}$$

o bien

$$r - r_h = \frac{\rho^2 f'(r_h)}{4},$$

obtenemos

$$ds^2 \approx \frac{\rho^2 f'^2(r_h)}{4}\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\rho^2 + r_h^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Definiendo $\Psi \equiv \frac{f'(r_h)}{2}\tau \longrightarrow \mathrm{d}\Psi^2 = \frac{f'^2(r_h)}{4}\mathrm{d}\tau^2$, encontramos

$$ds^2 = \rho^2\mathrm{d}\Psi^2 + \mathrm{d}\rho^2 + r_h^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Las hypersuperficies de ρ constante son topológicamente $S^1 \times S^2$. Para que no hayan singularidades cónicas, vamos a pedir $\Psi \sim \Psi + 2\pi$; esto implica que $\tau \sim \tau + \beta_\tau$ en donde

$$\boxed{\beta_\tau = \frac{4\pi}{f'(r_h)}}$$

Así, la métrica (19) junto a la condición $0 \leq \tau \leq \beta_\tau$ es completamente regular. Identificamos $\beta_\tau = T^{-1}$, lo que da explícitamente

$$T = \beta_\tau^{-1} = \frac{f'(r_h)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\left.\frac{2MG}{r^2}\right|_{r_h} = \frac{1}{8\pi MG}$$

Es decir, hemos encontrado la temperatura de Hawkings para el agujero negro de Schwarzschild,

$$\boxed{T_H = \frac{1}{8\pi MG}}$$

Evaluemos la acción Euclídea on-shell. Recordemos que, luego de la rotación de Wick, la acción Euclídea on-shell[4] queda

$$I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = -2\kappa \int \mathrm{d}^2 x \sqrt{|h_E|}(K - K_0)$$

Escojamos una foliación radial que define hypersuperficies de r constante. El vector normal unitario a dichas hypersuperficies es:

$$n = n^\mu \partial_\mu = \sqrt{f(r)}\partial_r$$

Checkeo de que es unitario y tipo espacio:

$$\begin{aligned} n \cdot n = g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= g_{rr} n^r n^r \\ &= \frac{1}{f(r)}(\sqrt{f(r)})^2 = 1 \end{aligned}$$

A partir de acá, calculamos la curvatura extrínseca a través de $K_{\mu\nu} = h_\mu^\lambda \nabla_\lambda n_\nu$. Luego, podemos calcular la traza, i.e. $K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu$. Esto da

$$K = \frac{f'(r)r + 4f(r)}{2r\sqrt{f(r)}} \tag{20}$$

Para calcular K_0, usamos la métrica de Minkowski en el Euclídeo, es decir, la métrica de $\mathbb{R}^4$ en coordenadas esféricas, esto es:

$$ds_0^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Usando foliación radial con un vector $n = \partial_r$ normal unitario a las hypersuperficies de r constante, encontramos que la traza de la curvatura extrínseca de Minkowski es

$$K_0 = \frac{2}{r} \tag{21}$$

Demostrar (20) y (21)

Notemos que Minkowski no tiene horizonte. Por ende, su periodo del tiempo Euclídeo permanece arbitrario. Para que ambas configuraciones estén en el mismo ensamble a T fijo, consideremos que la temperatura de Schwarzschild y Minkowski coinciden. Esto implica que ambas métricas tienen las mismas condiciones de borde. Con esto en mente, calculemos la acción Euclídea on-shell:

$$\begin{aligned} I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} &= -2\kappa \int \mathrm{d}^3 x \sqrt{|h_E|}(K - K_0) \\ &= -2\kappa \lim_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \int_0^{\beta_\tau} \mathrm{d}\tau \left[\sqrt{f(r)} r^2 \left(\frac{f'r + 4f}{2\sqrt{f}r} - \frac{2}{r}\right)\right] \end{aligned}$$

Evaluar la integral en el límite $r \to \infty$ y demostrar que vale:

$$\boxed{I_{\text{CL}}^{(E)} = \frac{1}{2}\beta_\tau M}$$

[4] Omitiré en adelante los índices sobre la acción ya que se entiende el contexto.

3.3. Termodinámica de Schwrzschild

Usando $f(r_h) = 0 = 1 - \frac{2MG}{r}$, tenemos

$$M = \frac{r_h}{2G}$$

Además, anteriormente encontramos

$$\boxed{\beta_\tau = 8\pi MG = 4\pi r_h}$$

Así, la acción Euclídea on-shell en términos del radio de Schwarzschild es:

$$\boxed{I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{1}{2} 4\pi r_h \frac{r_h}{2G} = \frac{\pi r_h^2}{G}}$$

Calculemos la energía promedio a primer orden en la aproximación de punto silla:

$$U = \frac{\partial \; I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}}}{\partial\beta} = \frac{\partial I}{\partial r_h}\frac{\partial r_h}{\partial \beta} = \frac{2\pi r_h}{G}\frac{1}{4\pi} = \frac{r_h}{2G} = M$$

Es decir,

$$\boxed{U = M}$$

Calculemos la entropía: $S = \beta U + \ln \mathcal{Z} \approx \beta U - I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}}$:

$$S = 4\pi r_h \frac{r_h}{2G} - \frac{\pi r_h^2}{G} = \frac{\pi r_h^2}{G}$$

Si el área del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild es $A = 4\pi r_h^2$, entonces $\pi r_h^2 = A/4$, luego la entropía es

$$\boxed{S = \frac{A}{4G}}$$

Notemos que la acción euclídea on-shell puede ser escrita como

$$I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{1}{2}\beta M = \beta M - \frac{1}{2}\beta M = \beta M - S \tag{22}$$

Luego, la energía libre es

$$\boxed{F = \beta^{-1} \; I_{\text{CL}}^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = M - TS} \tag{23}$$

4. Variación de la acción y el término de borde de GBY

Luego, la variaciónde la acción de Einstein-Hilbert on-shell nos queda

$$\delta I_{\mathrm{EH}}\Big|_{\text{on-shell}} = \kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{24}$$

Usando la identidad de Palatini:

$$\delta R_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu|\nu]} = 2\delta^{\alpha}_{[\lambda}\delta^{\beta}_{\nu]}\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} \tag{25}$$

tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta I_{\mathrm{EH}}\Big|_{\text{on-shell}} &= \kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}2\delta^{\alpha}_{[\lambda}\delta^{\beta}_{\nu]}\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} &(26)\\
&= \kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}\nabla_{\alpha}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} &(27)\\
&= \kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\nabla_{\alpha}\left(g^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\right) - \kappa\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}\cancel{\nabla_{\alpha}g^{\mu\nu}} &(28)\\
&= \kappa \int_{\partial M} \mathrm{d}^3x\sqrt{|g|}\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}g^{\mu\nu}n_{\alpha}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} &(29)\\
&= \kappa\sigma \int_{\partial M} \mathrm{d}^3x\sqrt{|g|}n_a\Theta^{\alpha} &(30)
\end{aligned}$$

donde

$$\Theta^{\alpha} \equiv g^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}. \tag{31}$$

Usando que

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\nabla_{\mu}\delta g_{\beta\rho} + \nabla_{\beta}\delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\rho}\delta g_{\mu\beta}\right) \tag{32}$$

se puede mostrar que

$$\Theta^{\alpha} = 2g^{\rho\alpha}g^{\beta\mu}\nabla_{[\mu}g_{\rho]\beta}. \tag{33}$$

Trabajemos ahora el integrando de la integral del borde que nos queda,

$$\begin{aligned}
n_{\alpha}\Theta^{\alpha} &= 2n_{\alpha}g^{\beta[\mu}g^{\rho]\alpha}\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\beta} &(34)\\
&= (n_{\alpha}g^{\beta\mu}g^{\rho\alpha} - n_{\alpha}g^{\beta\rho}g^{\mu\alpha})\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\beta} &(35)\\
&= (n^{\rho}g^{\beta\mu} - n^{\mu}g^{\beta\rho})\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\beta} &(36)\\
&= [n^{\rho}(h^{\beta\mu} + \sigma n^{\beta}n^{\mu}) - n^{\mu}(h^{\beta\rho} + \sigma n^{\beta}n^{\rho})]\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\beta} &(37)
\end{aligned}$$

notemos que los términos que involucran 3 vectores normales son los mismos y se anulan.

La traza de la curvatura extrínseca se puede escribir como

$$K = \nabla_{\mu}n^{\mu} = \partial_{\mu}n^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}n^{\lambda}. \tag{38}$$

Variando a ambos lados,

$$\begin{aligned}
\delta K &= \delta(\partial_{\mu}n^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}n^{\lambda}) &(39)\\
&= \partial_{\mu}\delta n^{\mu} + \delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}n^{\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}\delta n^{\lambda} &(40)\\
&= \nabla_{\mu}\delta n^{\mu} + \delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\mu}n^{\lambda}. &(41)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
0 = \delta(n_{\nu}n^{\nu}) &= n^{\nu}\delta n_{\nu} + n_{\nu}\delta n^{\nu} &(42)\\
n^{\nu}\delta n_{\nu} &= -n_{\nu}\delta n^{\nu} &(43)
\end{aligned}$$

Calculemos la variación del vector normal a la hipersuperficie Σ:

$$n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu \tag{44}$$

Variando a ambos lados, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta n_\mu &= \delta g_{\mu\nu} n^\nu + g_{\mu\nu}\delta n^\nu &(45)\\
&= \delta(\cancel{h_{\mu\nu}} + \sigma n_\mu n_\nu) n^\nu + g_{\mu\nu}\delta n^\nu &(46)\\
&= \sigma \delta n_\mu \underbrace{n_\nu n^\nu}_{\pm\sigma} + \sigma n_\mu \delta n_\nu n^\nu + g_{\mu\nu}\delta n^\nu &(47)\\
&= \delta n_\mu - \sigma n_\mu n_\nu \delta n^\nu + g_{\mu\nu}\delta n^\nu &(48)
\end{aligned}$$

Cancelando los δn_ν a ambos lados,

$$g_{\mu\nu}\delta n^\nu = \sigma n_\mu n_\nu \delta n^\nu \tag{49}$$

Multiplicando por la métrica inversa $g^{\mu\lambda}$,

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} g^{\mu\lambda} \delta n^\nu &= g^{\mu\lambda}\sigma n_\mu n_\nu \delta n^\nu &(50)\\
\delta^\lambda_\nu \delta n^\nu &= (\cancel{h^{\mu\lambda}} + \sigma n^\mu n^\lambda)\sigma n_\mu n_\nu \delta n^\nu &(51)\\
\delta n^\lambda &= \sigma n^\lambda n_\nu \delta n^\nu &(52)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{\delta n^\mu = \sigma n^\mu n_\nu \delta n^\nu} \tag{53}$$

Calculemos ahora la variación de la norma de n^μ:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu) &(54)\\
&= \delta g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + g_{\mu\nu}\delta n^\mu n^\nu + g_{\mu\nu} n^\mu \delta n^\nu &(55)\\
&= \delta g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu + 2 g_{\mu\nu}\delta n^\nu n^\mu &(56)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
2 g_{\mu\nu}\delta n^\nu n^\mu &= -\delta g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \qquad /.g^{\nu\rho} &(57)\\
2 g_{\mu\nu} g^{\nu\rho}\delta n^\nu n^\mu &= -\delta g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} n^\mu n^\nu &(58)\\
2\delta^\rho_\mu \delta n^\nu n^\mu &= +\delta g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu g^{\nu\rho} &(59)\\
2\delta n^\nu n^\rho &= \delta g^{\mu\nu} n_\mu n^\rho &(60)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\delta n^\nu = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} n_\mu \tag{61}$$

Reemplazando en (53)

$$\delta n^\mu = \frac{1}{2}\sigma n^\mu n_\nu \delta g^{\nu\lambda} n_\lambda \tag{62}$$

Pero $\sigma n^\mu n_\nu = \delta^\mu_\nu - h^\mu_\nu$, luego

$$\begin{aligned}
\delta n^\mu &= \frac{1}{2}(\delta^\mu_\nu - h^\mu_\nu) n_\lambda \delta g^{\nu\lambda} &(63)\\
&= \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu n_\lambda \delta g^{\nu\lambda} - \frac{1}{2} h^\mu_\nu n_\lambda \delta g^{\nu\lambda} &(64)\\
&= \frac{1}{2} n_\lambda \delta g^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} h^\mu_\nu n_\lambda \delta g^{\nu\lambda} &(65)
\end{aligned}$$

Notemos que el segundo término vive en Σ, entonces podemos escribir

$$\delta n^\mu = \frac{1}{2} n_\lambda \delta g^{\mu\lambda} - v^\mu_\parallel \tag{66}$$

donde definimos

$$v_{\parallel}^{\mu} = \frac{1}{2}h_{\nu}^{\mu}n_{\lambda}\delta g^{\nu\lambda}. \tag{67}$$

Calculemos ahora, $\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu}$:

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\rho} + \cancel{\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\rho}} - \cancel{\nabla_{\rho}\delta g_{\lambda\mu}}) && (68)\\
&= \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\nabla_{\lambda}\delta g_{\mu\rho} && (69)\\
&= \nabla_{\lambda}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\delta g_{\mu\rho}\right) - \cancel{\frac{1}{2}\nabla_{\lambda}g^{\mu\rho}\delta g_{\mu\rho}} && (70)\\
&= \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g^{\mu\rho}\delta g_{\mu\rho}) && (71)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}) && (72)
\end{aligned}$$

Así,

$$\delta K = \nabla_{\mu}\delta n^{\mu} + \delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu}n^{\lambda} \tag{73}$$

$$\boxed{\delta K = \nabla_{\mu}\left(\frac{1}{2}n_{\rho}\delta g^{\mu\rho} - v_{\parallel}^{\mu}\right) - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho})n^{\lambda}} \tag{74}$$

Notemos es la acción de la derivada compatible con la métrica inducida sobre el vector v^{μ} tangencial a la hipersuperficie Σ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu}v^{\mu} &= h_{\mu}^{\alpha}h_{\beta}^{\mu}\nabla_{\alpha}v^{\beta} && (75)\\
&= h_{\beta}^{\alpha}\nabla_{\alpha}v^{\beta} && (76)\\
&= (\delta_{\beta}^{\alpha} - \sigma n^{\alpha}n_{\beta})\nabla_{\alpha}v^{\beta} && (77)\\
&= \delta_{\beta}^{\alpha}\nabla_{\alpha}v^{\beta} - \sigma n^{\alpha}n_{\beta}\nabla_{\alpha}v^{\beta} && (78)\\
&= \nabla_{\alpha}v^{\alpha} - \sigma\nabla_{\alpha}\cancel{(n^{\alpha}n_{\beta}v^{\beta})} + \sigma v^{\beta}\nabla_{\alpha}(n^{\alpha}n_{\beta}) && (79)\\
&= \nabla_{\alpha}v^{\alpha} + \cancel{\sigma v^{\beta}\nabla_{\alpha}n^{\alpha}n_{\beta}} + \sigma v^{\beta}n^{\alpha}\nabla_{\alpha}n_{\beta} && (80)\\
&= \nabla_{\mu}v^{\mu} + \sigma n^{\mu}v^{\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu} && (81)
\end{aligned}$$

Además, el segundo término se anula. En efecto,

$$\begin{aligned}
\sigma n^{\mu}v^{\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu} &= \frac{\sigma}{2}n^{\mu}h_{\rho}^{\nu}n_{\sigma}\delta g^{\rho\sigma}\nabla_{\mu}n_{\nu} && (82)\\
&= \frac{\sigma}{2}n^{\mu}h_{\rho}^{\nu}\delta(h^{\rho\nu} + \sigma n^{\rho}n^{\nu})\nabla_{\mu}n_{\nu} && (83)\\
&= \frac{\sigma}{2}n^{\mu}h_{\rho}^{\nu}n_{\nu}(\delta h^{\rho\nu} + \sigma\delta n^{\rho}n^{\nu} + \sigma n^{\rho}\delta n^{\nu})\nabla_{\mu}n_{\nu} && (84)\\
&= 0 && (85)
\end{aligned}$$

donde se uso que los tres términos son todos nulos por la ortogonalidad entre los vectores normales y los proyectores, i.e. $h_{\nu}^{\mu}n_{\mu} = 0$. Entonces,

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mu}v_{\parallel}^{\mu} = \nabla_{\mu}v_{\parallel}^{\mu}} \tag{86}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\delta K &= \nabla_{\mu}\left(\frac{1}{2}n_{\rho}\delta g^{\mu\rho} - v_{\parallel}^{\mu}\right) - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho})n^{\lambda} && (87)\\
&= \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}n_{\rho}\delta g^{\mu\rho} + n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho}) - \mathcal{D}_{\mu}v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho})n^{\lambda} && (88)\\
&= \frac{1}{2}\nabla_{\mu}n_{\rho}\delta g^{\mu\rho} + \frac{1}{2}n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - \mathcal{D}_{\mu}v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho})n^{\lambda} && (89)
\end{aligned}$$

Podemos sumar un cero astuto de la forma

$$-\frac{1}{2}\sigma n^{\alpha} n_{\rho}\delta g^{\rho\beta}\nabla_{\alpha} n_{\beta} = 0 \tag{90}$$

De manera que la variación de K queda

$$\begin{aligned}
\delta K &= \frac{1}{2}\nabla_{\mu} n_{\rho}\delta g^{\mu\rho} + \frac{1}{2} n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} - \mathcal{D}_{\mu} v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}) n^{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma n^{\alpha} n_{\rho}\delta g^{\rho\beta}\nabla_{\alpha} n_{\beta} && (91)\\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho}(\nabla_{\mu} n_{\rho} - \sigma n^{\nu} n_{\mu}\nabla_{\nu} n_{\rho}) - \mathcal{D}_{\mu} v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}) n^{\lambda} + \frac{1}{2} n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} && (92)\\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho}\nabla_{\nu} n_{\rho}\underbrace{(\delta^{\nu}_{\mu} - \sigma n^{\nu} n_{\mu})}_{h^{\nu}_{\mu}} - \mathcal{D}_{\mu} v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}) n^{\lambda} + \frac{1}{2} n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} && (93)\\
&= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho}\nabla_{\nu} n_{\rho} h^{\nu}_{\mu} - \mathcal{D}_{\mu} v^{\mu} - \frac{1}{2}\nabla_{\lambda}(g_{\mu\rho}\delta g^{\mu\rho}) n^{\lambda} + \frac{1}{2} n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho} && (94)
\end{aligned}$$

Usando que $K_{\mu\nu} = h^{\lambda}_{\mu}\nabla_{\lambda} n_{\nu}$, nos queda

$$\boxed{\delta K = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\rho} K_{\mu\rho} - \mathcal{D}_{\mu} v^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\rho}\nabla_{\lambda}\delta g^{\mu\rho} n^{\lambda} + \frac{1}{2} n_{\rho}\nabla_{\mu}\delta g^{\mu\rho}} \tag{95}$$

Recordemos que la variación de la acción era

$$\delta I = \kappa\int_{M} \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \kappa\sigma\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|} n_{\mu}\Theta^{\mu} \tag{96}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Theta^{\mu} &= 2 g^{\beta[\tau} g^{\rho]\mu}\nabla_{\tau}\delta g_{\rho\beta} && (97)\\
&= g^{\beta\tau} g^{\rho\mu}\nabla_{\tau}\delta g_{\rho\beta} - g^{\beta\rho} g^{\tau\mu}\nabla\tau\delta g_{\rho\beta} && (98)
\end{aligned}$$

Si ahora le agregamos el término de Gibbons-Hawking-York, nos queda

$$I = \kappa\int_{M} \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \kappa\sigma\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|} n_{\mu}\Theta^{\mu} + \alpha\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|} K \tag{99}$$

La variación de esta acción on-shell nos queda

$$\begin{aligned}
\delta I\Big|_{\text{on-sehll}} &= \kappa\sigma\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|} n_{\mu}\Theta^{\mu} + \alpha\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x[\delta\sqrt{|h|} K + \sqrt{|h|}\delta K] && (100)\\
&= \kappa\sigma\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|} n_{\mu}\Theta^{\mu} + \alpha\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\left(-\frac{1}{2}\sqrt{|h|}\delta h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} K + \sqrt{|h|}\delta K\right) && (101)\\
&= \kappa\sigma\int_{\partial M} \mathrm{d}^3 x\sqrt{|h|}\left(n_{\mu}\Theta^{\mu} - \frac{\alpha}{2}\delta h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} K + \alpha\delta K\right) && (102)
\end{aligned}$$

Desarrollemos el término entre paréntesis,

$$
\begin{aligned}
n_\mu\Theta^\mu - \frac{\alpha}{2}\delta h^{\mu\nu}h_{\mu\nu}K + \alpha\delta K &= n_\mu\Theta^\mu - \frac{\alpha}{2}\left(\delta g^{\mu\nu} - 2\sigma n^{(\mu}n^{\nu)}\right)h_{\mu\nu}K & (103)\\
&- \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu v^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}n_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) & (104)\\
&= n_\mu g^{\beta\tau}g^{\rho\mu}\nabla_\tau\delta g_{\rho\beta} - n_\mu g^{\beta\rho}g^{\tau\mu}\nabla_\tau\delta g_{\rho\beta} & (105)\\
&- \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu v^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}n_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) & (106)\\
&= g^{\beta\tau}n^\rho\nabla_\tau\delta g_{\rho\beta} - g^{\beta\rho}n^\tau\nabla_\tau\delta g_{\rho\beta} & (107)\\
&- \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu v^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}n_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) & (108)\\
&= n^\rho\nabla^\beta\delta g_{\rho\beta} + g_{\rho\beta}n^\tau\nabla_\tau\delta g^{\rho\beta} & (109)\\
&- \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu v^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}n_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) & (110)\\
&= -n_\rho\nabla_\beta\delta g^{\rho\beta} + g_{\rho\beta}n^\tau\nabla_\tau\delta g^{\rho\beta} & (111)\\
&- \alpha\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}K_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\mu v^\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\rho\nabla_\rho\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}n_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\right) & (112)
\end{aligned}
$$

De acá vemos que si hacemos $\alpha = 2\kappa\sigma$ se cancelan todos los términos que tienen que ver con las derivadas normales. Luego, la variación de la acción con el término de GHY on-shell nos queda

$$\delta I\Big|_{\text{on-shell}} = \kappa\sigma\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}[\delta h^{\mu\nu}(K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K) - 2\mathcal{D}_\mu v^\mu] \tag{113}$$

Luego, la acción

$$\boxed{I = \kappa\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}R + 2\kappa\sigma\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}K} \tag{114}$$

tiene un principio variacional bien puesto bajo condiciones de borde tipo Dirichlet.

5. Ecuaciones de Gauss-Codazzi-Mainardi

Si v^μ es un vector tangencial a Σ, i.e, $v^\mu = h^\mu_\nu v^\nu$, entonces

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]v^\lambda = \mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu}v^\rho \tag{115}$$

donde $\mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu}$ es la curvatura intrínseca.

Calculemos $\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu v^\lambda$:[5]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu v^\lambda &= h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}\nabla_{\mu'}\mathcal{D}_{\nu'}v^{\lambda'} & (116)\\
&= h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}\nabla_{\mu'}(h^\alpha_{\nu'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_\alpha v^\beta) & (117)\\
&= h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}\nabla_{\mu'}h^\alpha_{\nu'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_\alpha v^\beta + h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^\alpha_{\nu'}\nabla_{\mu'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_\alpha v^\beta + h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^\alpha_{\nu'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_{\mu'}\nabla_\alpha v^\beta & (118)
\end{aligned}
$$

Trabajemos los términos por separado. El primer términos nos queda

$$
\begin{aligned}
h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_{\mu'}h^\alpha_{\nu'}\nabla_\alpha v^\beta &= h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^{\lambda'}_\beta\nabla_{\mu'}(\cancel{\delta^\alpha_{\nu'}} - \sigma n^\alpha n_{\nu'})\nabla_\alpha v^\beta & (119)\\
&= -\sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^{\lambda'}_\beta n_{\nu'}\nabla_{\mu'}n^\alpha\nabla_\alpha v^\beta - \sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'}h^{\lambda'}_\beta n^\alpha\nabla_{\mu'}n_{\nu'}\nabla_\alpha v^\beta & (120)\\
&= -\sigma K_{\mu\nu}h^\lambda_\beta n^\alpha\nabla_\alpha v^\beta & (121)
\end{aligned}
$$

[5] A lo largo del cálculo usaré la propiedad de idempotencia de los proyectores $h^\alpha_\mu h^\nu_\alpha = h^\nu_\mu$ y el hecho que son ortogonales con los vectores normales, $h^\mu_\nu n_\mu = 0$.

El segundo término nos queda

$$h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} \nabla_{\mu'} h^{\lambda'}_\beta \nabla_\alpha v^\beta = h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} \nabla_{\mu'} (\cancel{\delta^{\lambda'}_\beta} - \sigma n^{\lambda'} n_\beta) \nabla_\alpha v^\beta \tag{122}$$

$$= -\sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} n_\beta \nabla_{\mu'} n^{\lambda'} \nabla_\alpha v^\beta - \sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} n^{\lambda'} \nabla_{\mu'} n_\beta \nabla_\alpha v^\beta \tag{123}$$

$$= -\sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} n_\beta \nabla_{\mu'} n^{\lambda'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{124}$$

Usando que $\nabla_\alpha (n_\beta v^\beta) = 0 \Rightarrow n_\beta \nabla_\alpha v^\beta = -v^\beta \nabla_\alpha n_\beta$, se tiene

$$h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} \nabla_{\mu'} h^{\lambda'}_\beta \nabla_\alpha v^\beta = \sigma h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} v^\beta \nabla_{\mu'} n^{\lambda'} \nabla_\alpha n_\beta \tag{125}$$

$$= \sigma h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_{\lambda'} v^\beta \nabla_{\mu'} n^{\lambda'} \nabla_\alpha n_\beta \tag{126}$$

$$= \sigma K_{\nu\beta} h^{\mu'}_\mu h^\lambda_{\lambda'} v^\beta \nabla_{\mu'} n^{\lambda'} \tag{127}$$

$$= \sigma K_{\beta\nu} K^\lambda_\mu v^\beta \tag{128}$$

Finalmente, el tercer término nos queda

$$h^{\mu'}_\mu h^{\nu'}_\nu h^\lambda_{\lambda'} h^\alpha_{\nu'} h^{\lambda'}_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta = h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{129}$$

Reemplazando (121), (128) y (129) en (118), tenemos

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu v^\lambda = -\sigma K_{\mu\nu} h^\lambda_\beta n^\alpha \nabla_\alpha v^\beta + \sigma K_{\beta\nu} K^\lambda_\mu v^\beta + h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{130}$$

Con este resultado en el bolsillo, veamos ahora cuánto vale $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] v^\lambda$:

$$\mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu} v^\rho = [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] v^\lambda \tag{131}$$

$$= 2\mathcal{D}_{[\mu} \mathcal{D}_{\nu]} v^\lambda \tag{132}$$

$$= -2\sigma K_{[\mu\nu]} h^\lambda_\beta n^\alpha \nabla_\alpha v^\beta + 2\sigma K_{\beta[\nu} K^\lambda_{\mu]} v^\beta + 2h^{\mu'}_{[\mu} h^\alpha_{\nu]} h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{133}$$

Notemos que $K_{\mu\nu}$ es simétrico en μ, ν. Luego el primer término es cero:

$$\mathcal{R}^\lambda_{\rho\mu\nu} v^\rho = 2\sigma K_{\beta[\nu} K^\lambda_{\mu]} v^\beta + 2h^{\mu'}_{[\mu} h^\alpha_{\nu]} h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{134}$$

Trabajemos el segundo término de la ecuación anterior.

$$2h^{\mu'}_{[\mu} h^\alpha_{\nu]} h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta = h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta - h^{\mu'}_\nu h^\alpha_\mu h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta \tag{135}$$

Aprovechando que los índices μ' y α se encuentran contraídos, podemos intercambiarlos en el segundo término,

$$2h^{\mu'}_{[\mu} h^\alpha_{\nu]} h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta = h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta \nabla_{\mu'} \nabla_\alpha v^\beta - h^\alpha_\nu h^{\mu'}_\mu h^\lambda_\beta \nabla_\alpha \nabla_{\mu'} v^\beta \tag{136}$$

$$= h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta (\nabla_{\mu'} \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_{\mu'}) v^\beta \tag{137}$$

$$= h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta R^\beta_{\sigma\mu'\alpha} v^\sigma \tag{138}$$

$$= h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta R^\beta_{\sigma\mu'\alpha} h^\sigma_\rho v^\rho \tag{139}$$

Reemplazando en (134)

$$\mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu} v^\rho = 2\sigma K^\lambda_{[\mu} K_{\nu]\rho} v^\rho + h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta h^\sigma_\rho R^\beta{}_{\sigma\mu'\alpha} v^\rho \tag{140}$$

Como tiene que ser válido para todo v^ρ,

$$\mathcal{R}^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = 2\sigma K^\lambda_{[\mu} K_{\nu]\rho} + h^{\mu'}_\mu h^\alpha_\nu h^\lambda_\beta h^\sigma_\rho R^\beta{}_{\sigma\mu'\alpha} \tag{141}$$

Haciendo un renombre de índices, tenemos

$$\mathcal{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = h^{\rho}_{\alpha}h^{\beta}_{\sigma}h^{\gamma}_{\mu}h^{\delta}_{\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + 2\sigma K^{\rho}{}_{[\mu}K_{\nu]\sigma} \tag{142}$$

Calculemos ahora $2\mathcal{D}_{[\mu}K_{\nu]\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu}K_{\nu\lambda} &= h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}K_{\beta\gamma} &(143)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}(h^{\sigma}_{\beta}\nabla_{\sigma}n_{\gamma}) &(144)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}h^{\sigma}_{\beta}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} - h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\delta}_{\lambda}h^{\sigma}_{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} &(145)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}(\cancel{\delta^{\sigma}_{\beta}} - \sigma n^{\sigma}n_{\beta})\nabla_{\sigma}n_{\gamma} + h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}h^{\sigma}_{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} &(146)\\
&= -\sigma h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}n_{\beta}\nabla_{\alpha}n^{\sigma}\nabla_{\alpha}n_{\gamma} - \sigma h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}n^{\sigma}\nabla_{\alpha}n_{\beta}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} + h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}h^{\sigma}_{\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} &(147)\\
&= -\sigma K_{\mu\nu}h^{\gamma}_{\lambda}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} + h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} &(148)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{[\mu}K_{\nu]\lambda} &= -2\sigma K_{[\mu\nu]}h^{\gamma}_{\lambda}n^{\sigma}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} + h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}g^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} - h^{\alpha}_{\nu}h^{\sigma}_{\mu}g^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} &(149)\\
& &(150)
\end{aligned}$$

El primer término se anula. Al último término le cambiamos los índices $\alpha \longleftrightarrow \sigma$,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{[\mu}K_{\nu]\lambda} &= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\nabla_{\sigma}n_{\gamma} - h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}\nabla_{\sigma}\nabla_{\alpha}n_{\gamma} &(151)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}[\nabla_{\alpha},\nabla_{\sigma}]n_{\gamma} &(152)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}[\nabla_{\alpha},\nabla_{\sigma}]g_{\gamma_{\rho}}n^{\rho} &(153)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}g_{\gamma_{\rho}}[\nabla_{\alpha},\nabla_{\sigma}]n^{\rho} &(154)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}g_{\gamma\rho}R^{\rho}{}_{\theta\alpha\sigma}n^{\theta} &(155)\\
&= h^{\alpha}_{\mu}h^{\sigma}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}R_{\gamma\theta\alpha\sigma}n^{\theta} &(156)
\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo un renombre de índices, tenemos

$$2\mathcal{D}_{[\mu}K_{\nu]\lambda} = h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu}h^{\gamma}_{\lambda}n^{\sigma}R_{\gamma\sigma\alpha\beta} \tag{157}$$

6. Carga de Brown-York & Quasilocal Stress-Energy Tensor

De la ecuación de Codazzi-Mainardi (157), tenemos

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}[\mu K_{\nu]\lambda} &= h^{\tau}_{\mu}h^{\kappa}_{\nu}h^{\sigma}_{\lambda}R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho} &(158)\\
\mathcal{D}_{\mu}K_{\nu\lambda} - \mathcal{D}_{\nu}K_{\mu\lambda} &= h^{\tau}_{\mu}h^{\kappa}_{\nu}h^{\sigma}_{\lambda}R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho} / \cdot g^{\mu\lambda} &(159)\\
&= R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho}h^{\tau\lambda}h^{\kappa}_{\nu}h^{\sigma}_{\lambda} &(160)\\
&= R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho}h^{\tau\sigma}h^{\kappa}_{\nu} &(161)\\
&= R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho}(g^{\sigma\tau} - \sigma n^{\tau}n^{\sigma}) &(162)
\end{aligned}$$

Notemos que $R_{\sigma\rho\tau\kappa}$ es antisimétrico en $\sigma\rho$ mientras que $n^{\rho}n^{\sigma}$ es simétrico en estos índices. Luego, al contraerlos se anulan,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mu}K_{\nu\lambda} - \mathcal{D}_{\nu}K_{\mu\lambda} &= R_{\sigma\rho\tau\kappa}n^{\rho}g^{\sigma\tau}h^{\kappa}_{\nu} &(163)\\
\mathcal{D}^{\lambda}(K_{\nu\lambda} - h_{\nu\lambda}K) &= R_{\rho\kappa}n^{\rho}h^{\kappa}_{\nu} &(164)
\end{aligned}$$

Además, sabemos que para espacios-tiempo tipo Einstein, $R_{\mu\nu} = 0$. Luego, on-shell,

$$\boxed{\mathcal{D}^\mu(K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K) = 0}, \qquad \text{(on-shell)} \tag{165}$$

Se define el **quasilocal stress-energy tensor** como

$$\boxed{\tau_{\mu\nu} \equiv -2\kappa\sigma \left[K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}(K - K_0)\right]} \tag{166}$$

El adjetivo quasilocal proviene de que en realidad $\tau_{\mu\nu}$ depende de la foliación que estemos considerando.

Podemos preguntarnos ¿qué pasa con el término K_0 adicional? Si consideramos espacios asintóticamente planos, es natural considerar a Minkowski como el background a sustraer. En coordenadas esféricas, esto es

$$\mathrm{d}s_0^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{167}$$

Si escogemos foliación radial, i.e. $n = \partial_r$, con $n \cdot n = 1$, entonces:

$$K_0 = 2/r. \tag{168}$$

Así, tenemos que $\mathcal{D}^\mu(h_{\mu\nu}K_0) = 0$, ya que

$$\mathcal{D}^\mu(h_{\mu\nu}K_0) = \mathcal{D}_\nu K_0 = h_\nu^\lambda \nabla_\lambda K_0 \tag{169}$$

pero $\nabla_\lambda K_0$ es proporcional a n_λ, y al contraerse con h_ν^λ se anula.

Concluimos entonces que, on-shell

$$\mathcal{D}^\mu \tau_{\mu\nu} = 0 \tag{170}$$

Con esto, podemos construir una corriente conservada

$$J^\mu = \tau^{\mu\nu}\xi_\nu, \tag{171}$$

en donde $\xi = \xi^\mu\partial_\mu$ es un vector de Killing.

Esta corriente es conservada con respecto de $\mathcal{D}_\mu$, ya que

$$\mathcal{D}_\mu J^\mu = \mathcal{D}_\mu(\tau^{\mu\nu}\xi\nu) = \cancel{\mathcal{D}_\mu\tau^{\mu\nu}\xi_\nu} + \tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\xi_\nu \tag{172}$$

Para el térmio restante, notemos que

$$\tau^{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\xi_\nu = \tau^{\mu\nu}h_\mu^\lambda h_\nu^\rho \nabla_\lambda\xi_\rho = 0 \tag{173}$$

ya que $\tau^{\mu\nu}$ es simétrico, así podemos armar la ecuación de Killing $\nabla_{(\lambda}\xi_{\rho)} = 0$. De esta manera concluimos que

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu J^\mu = 0} \tag{174}$$

La **carga de Brown-York** se define como la integral de J^μ sobre una hipersuperficie de codimensión-2, Σ, con vector normal u^μ, con $u^\mu u_\mu = -1$, es decir,

$$\boxed{Q[\xi] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\sqrt{\gamma}u_\mu\tau^{\mu\nu}\xi_\nu} \tag{175}$$

con $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. En el caso de Schwarzschild

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{176}$$

$$\mathrm{d}s^2\Big|_\Sigma = -f(r)\mathrm{d}t^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \to n = \sqrt{f(r)}\partial_r \tag{177}$$

$$\mathrm{d}s^2\Big|_{\partial\Sigma} = r^2\mathrm{d}\Omega^2 \to u = \frac{1}{\sqrt{f(r)}}\partial_t \tag{178}$$

Así, la métrica inducida sobre Σ es $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, con $h_{\mu\nu} = g_\mu\nu - n_\mu n_\nu$ y la raíz del determinantes es $\sqrt{\gamma} = r^2\sin\theta$. Se puede mostrar que en este caso, la carga conservada corresponde a la masa del agujero negro,

$$Q[\xi] = M \tag{179}$$

7. Formalismo de Noether-Wald

Consideremos una teoría gravitacional, construida a partir de la métrica y sus derivadas, que es invariante de difeomorfismos y que puede ser escrita por el principio de acción [6, 4, 7, 1],

$$I[g_{\mu\nu}] = \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|} \mathcal{L}[R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}] \tag{180}$$

en donde $R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \equiv g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho}$ incorpora implícitamente la dependencia de la métrica.

Variaciones arbitrarias de la acción (180) entregan

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int_M \mathrm{d}^D x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}} \delta R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \right] && (181)\\
&= \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}} \delta R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \right] && (182)\\
&= \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}\mathcal{L} + E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \right] && (183)
\end{aligned}$$

donde hemos definido $E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}}$, y además conserva todas las propiedades de (anti-)simetría del Riemann.

Calculemos la variación que aparece en el último término.

$$\begin{aligned}
\delta R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} &= \delta(g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho}) && (184)\\
&= \delta g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} + g^{\nu\sigma}\delta R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} && (185)\\
&= \delta g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} + 2 g^{\nu\sigma}\nabla_{[\lambda}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma|\rho]} && (186)
\end{aligned}$$

donde en el último término se usó la identidad de Palatiny. Luego, la variación de la acción nos queda

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}\mathcal{L} + E^{\lambda\rho}_{\mu\nu}(\delta g^{\nu\sigma} R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} + 2 g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} \right]. \tag{187}$$

Notemos que brackets de antisimetrización del último término desaparecen dado que están contraídos con índices que ya son antisimétricos. Ahora integremos por partes este término,

$$2E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} = 2\nabla_{\lambda}(E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}) - 2\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{188}$$

Usando que

$$\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\tau}(\nabla_{\sigma}\delta g_{\rho\tau} + \nabla_{\rho}\delta g_{\sigma\tau} - \nabla_{\tau}\delta g_{\sigma\rho}) \tag{189}$$

y reemplazando en el segundo término de (188) tenemos

$$\begin{aligned}
-2\delta\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}\nabla_{\lambda}(E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}) &= -2\frac{1}{2} g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho}_{\mu\nu}(\nabla_{\sigma}\delta g_{\rho\tau} + \nabla_{\rho}\delta \cancel{g_{\sigma\tau}} - \nabla_{\tau}\delta g_{\sigma\rho}) && (190)\\
&= -g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} 2\nabla_{[\sigma}\delta g_{\tau]\rho} && (191)\\
&= -2 g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho}_{\mu\nu}\nabla_{\sigma}\delta g_{\tau\rho} && (192)\\
&= -2\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho\tau\sigma}\nabla_{\sigma}\delta g_{\tau\rho} && (193)\\
&= 2\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho\sigma\tau}\nabla_{\sigma}\delta g_{\tau\rho} && (194)
\end{aligned}$$

Similarmente para el otro término de (188)

$$2\nabla_{\lambda}(E^{\lambda\rho}_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}\delta\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}) = 2\nabla_{\lambda}(E^{\lambda\mu\tau\sigma}\nabla_{\sigma}\delta g_{\tau\rho}) \tag{195}$$

Luego, la variación de la acción nos queda

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathcal{L} + E^{\lambda\rho}_{\mu\nu}\delta g^{\nu\sigma}R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} + 2\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho} + 2\nabla_\lambda(E^{\lambda\mu\tau\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho})\right] \tag{196}$$

Notemos que el segundo término de esta expresión lo podemos escribir como

$$E^{\lambda\rho}_{\mu\nu}\delta g^{\nu\sigma}R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\rho} = \delta g^{\nu\sigma}E^{\lambda\rho}_{\nu\mu}R_{\sigma}{}^{\mu}{}_{\lambda\rho} \tag{197}$$

$$= \delta g^{\mu\nu}E^{\lambda\rho}_{\mu\sigma}R_{\nu}{}^{\sigma}{}_{\lambda\rho}, \qquad (\nu\to\mu, \sigma\to\nu, \mu\to\sigma) \tag{198}$$

$$= \delta g^{\mu\nu}E_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R_{\nu\sigma\lambda\rho} \tag{199}$$

De aquí,

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \delta g^{\mu\nu}E_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R_{\nu\sigma\lambda\rho} + 2\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho}\right] + \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda(2E^{\lambda\rho\tau\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho}) \tag{200}$$

Integrando por partes el término destacado,

$$2\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho} = 2\nabla_\sigma(\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\delta g_{\tau\rho}) - 2\delta g_{\tau\rho}\nabla_\sigma\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau} \qquad (\tau\to\mu, \rho\to\nu) \tag{201}$$

$$= 2\nabla_\sigma(\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\delta g_{\tau\rho}) - 2\delta g_{\mu\nu}\nabla_\sigma\nabla_\lambda E^{\lambda\nu\sigma\mu} \tag{202}$$

$$= 2\nabla_\sigma(\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\delta g_{\tau\rho}) + 2\delta g^{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\lambda E_{\lambda\nu\sigma\mu} \tag{203}$$

$$= 2\nabla_\sigma(\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\delta g_{\tau\rho}) - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\lambda_{\lambda\nu\mu\sigma} \tag{204}$$

$$= 2\nabla_\sigma(\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}\delta g_{\tau\rho}) - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\lambda E_{\mu\sigma\lambda\nu} \tag{205}$$

Luego,

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \delta g^{\mu\nu}E_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R\nu\sigma\lambda\rho + 2\nabla_\sigma(\delta g_{\tau\rho}\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}) - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\lambda E_{\mu\sigma\lambda\nu}\right. \tag{206}$$

$$\left.+2\nabla_\lambda(E^{\lambda\rho\tau\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho})\right] \tag{207}$$

El último término se puede escribir como

$$2\nabla_\lambda(E^{\lambda\rho\tau\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\tau\rho} = 2\nabla_\sigma(E^{\sigma\rho\tau\lambda}\nabla_\lambda\delta g_{\tau\rho}) \tag{208}$$

$$= -2\nabla_\sigma(E^{\lambda\tau\sigma\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\tau\rho}) \tag{209}$$

Finalmente, tenemos

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\left[-\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \delta g^{\mu\nu}E_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R\nu\sigma\lambda\rho + 2\nabla_\sigma(\delta g_{\tau\rho}\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\sigma\tau}) - 2\delta g^{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla^\lambda E_{\mu\sigma\lambda\nu}\right. \tag{210}$$

$$\left.-2\nabla_\sigma(E^{\lambda\tau\sigma\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\tau\rho})\right] \tag{211}$$

Podemos reescribir esto como

$$\delta I = \int_M \mathrm{d}^4 Dx\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\left[E_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R_{\nu\sigma\lambda\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\nabla^\sigma\nabla^\lambda E_{\mu\sigma\lambda\nu}\right] \tag{212}$$

$$+ \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\nabla_\mu\left[2\delta g_{\tau\rho}\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\mu\tau} - 2E^{\lambda\tau\mu\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\rho\tau}\right] \tag{213}$$

$$= \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} + \int_M \mathrm{d}^4 x\sqrt{|g|}\nabla_\mu\Theta^\mu(g,\delta g), \tag{214}$$

en donde

$$\varepsilon_{\mu\nu} \equiv R_{\mu}{}^{\sigma\lambda\rho}R_{\nu\sigma\lambda\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\nabla^{\sigma}\nabla^{\lambda}E_{\mu\sigma\lambda\nu} \tag{215}$$

$$\Theta^{\mu} \equiv 2\delta g_{\tau\rho}\nabla_{\lambda}E^{\lambda\rho\mu\tau} - 2E^{\lambda\tau\mu\rho}\nabla_{\lambda}\delta g_{\rho\tau} \tag{216}$$

El término $\varepsilon_{\mu\nu}$ en (215) es simétrico.

Demostración 7.1. Tal como definimos $E^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}}$ el cual hereda las propiedades de (anti-)simetría de $R_{\mu\nu\lambda\rho}$, definamos $E^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}$ el cual es simétrico en $\mu\nu$. Construyamos también el tensor $\mathcal{R}_{\mu\nu} = E_{\mu}{}^{\lambda\rho\sigma}R_{\nu\lambda\rho\sigma}$[5].

Consideremos un diffeomorfismo infinitesimal $x^{\mu} \to x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ que cambia $\mathcal{L}, g_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ en cantidades infinitesimales. La idea es expresar la derivada de Lie de dos formas distintas e igualar ambos resultados.

$$\begin{aligned}
\pounds_{\xi}\mathcal{L}[g_{\mu\nu}, R_{\lambda\rho\mu\nu}] &= \xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}\mathcal{L}[g_{\mu\nu}, R_{\lambda\rho\mu\nu}] \\
&= \xi^{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} + \xi^{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\lambda\rho\mu\nu}}\nabla R_{\lambda\rho\mu\nu} \\
&= \xi^{\alpha}E^{\mu\nu}\cancel{\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu}} + \xi^{\alpha}E^{\lambda\rho\mu\nu}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu} \\
&= E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu}
\end{aligned} \tag{217}$$

Por otro lado, si pensamos en el cambio $\delta\mathcal{L}$ en $\mathcal{L}$ debido a pequeños cambios en $\delta g_{\mu\nu} \equiv \pounds_{\xi}g_{\mu\nu}$ y $\delta R_{\lambda\rho\mu\nu} \equiv \pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu}$ tenemos,

$$\pounds_{\xi}\mathcal{L}[g_{\mu\nu}, R_{\lambda\rho\mu\nu}] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}\pounds_{\xi}g_{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\lambda\rho\mu\nu}}\pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu} \tag{218}$$

$$= E^{\mu\nu}\pounds_{\xi}g_{\mu\nu} + E^{\lambda\rho\mu\nu}\pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu} \tag{219}$$

Pero,

$$E^{\mu\nu}\pounds_{\xi}g_{\mu\nu} = 2E^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\xi_{\nu} \tag{220}$$

y

$$E^{\lambda\rho\mu\nu}\pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu} = E^{\lambda\rho\mu\nu}(\xi^{\alpha}\nabla_{\lambda}R_{\lambda\rho\mu\nu} + R_{\alpha\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} + R_{\lambda\alpha\mu\nu}\nabla_{\rho}\xi^{\alpha} + R_{\lambda\rho\alpha\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\alpha} + R_{\lambda\rho\mu\alpha}\nabla_{\nu}\xi^{\alpha}) \tag{221}$$

Notemos que

$$E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\lambda\alpha\mu\nu}\nabla_{\rho}\xi^{\alpha} = E^{\rho\lambda\mu\nu}R_{\alpha\lambda\mu\nu}\nabla_{\rho}\xi^{\alpha} = E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\alpha\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} \tag{222}$$

y

$$E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\lambda\rho\mu\nu}\nabla\nu\xi^{\alpha} = E^{\lambda\rho\nu\mu}R_{\lambda\rho\alpha\mu}\nabla_{\nu}\xi^{\alpha} = E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\lambda\rho\alpha\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\alpha} \tag{223}$$

Así,

$$E^{\lambda\rho\mu\nu}\pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu} = E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu} + 2E^{\lambda\rho\mu\nu}(R_{\alpha\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha}R_{\lambda\rho\alpha\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\alpha}) \tag{224}$$

Además, notemos que

$$E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\lambda\rho\alpha\nu}\nabla_{\mu}\xi^{\alpha} = E^{\mu\rho\lambda\nu}R_{\mu\rho\alpha\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} \tag{225}$$

$$= E^{\lambda\nu\rho\mu}R_{\alpha\nu\mu\rho}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} \tag{226}$$

$$= E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\alpha\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} \tag{227}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E^{\lambda\rho\mu\nu}\pounds_{\xi}R_{\lambda\rho\mu\nu} &= E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu} + 4E^{\lambda\rho\mu\nu}R_{\alpha\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi^{\alpha} \\
&= E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu} + 4E^{\lambda\rho\mu\nu}R^{\alpha}_{\rho\mu\nu}\nabla_{\lambda}\xi_{\alpha} \\
&= E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^{\alpha}\nabla_{\alpha}R_{\lambda\rho\mu\nu} + 4\mathcal{R}^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\xi_{\alpha}
\end{aligned} \tag{228}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\pounds_\xi \mathcal{L} &= 2E^{\mu\nu}\nabla_\mu \xi_\nu + E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^\alpha \nabla_\alpha R_{\lambda\rho\mu\nu} + 4\mathcal{R}^{\lambda\alpha}\nabla_\lambda \xi_\alpha && (229)\\
&= E^{\lambda\rho\mu\nu}\xi^\alpha \nabla_\alpha R_{\lambda\rho\mu\nu} + 2\nabla_\lambda \xi_\alpha (E^{\lambda\alpha} + 2\mathcal{R}^{\lambda\alpha}) && (230)
\end{aligned}$$

De (217)

$$\pounds_\xi \mathcal{L} = \pounds_\xi \mathcal{L} + 2\nabla_\lambda \xi_\alpha (E^{\lambda\alpha} + 2\mathcal{R}^{\lambda\alpha}) \tag{231}$$

Luego, $E^{\lambda\alpha} = -2\mathcal{R}^{\lambda\alpha}$. Dado que $E^{\lambda\alpha}$ es simétrico, se tiene que $\mathcal{R}^{\lambda\alpha}$ también lo es.

Para el otro término, notemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla_\nu &= \frac{1}{2}[\nabla_\mu, \nabla_\nu]E^{\mu\nu\lambda\rho} && (232)\\
&= \frac{1}{2}(R^\mu{}_{(\sigma|\nu|\nu)}E^{[\sigma\nu]\lambda\rho} + R^\nu{}_{(\sigma\mu)\nu}E^{[\mu\sigma]\lambda\rho} + R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}E^{\mu\nu\sigma\rho} + R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}E^{\mu\nu\lambda\sigma}) && (233)\\
&= \frac{1}{2}(R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}E^{\mu\nu\sigma\rho} + R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}E^{\mu\nu\lambda\sigma}) && (234)\\
&= \frac{1}{2}(-R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}E^{\rho\sigma\mu\nu} + R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}E^{\mu\nu\lambda\sigma}) && (235)\\
&= \frac{1}{2}(-\mathcal{R}^{\lambda\rho} + \mathcal{R}^{\rho\lambda}) = 0 && (236)
\end{aligned}$$

Calculemos $\nabla_\lambda \nabla_\rho E^{[\mu|\lambda\rho|\nu]}$,

$$\begin{aligned}
\nabla_\lambda \nabla_\rho E^{[\mu|\lambda\rho|\nu]} &= \frac{1}{2}\nabla_\lambda \nabla_\rho (E^{\mu\lambda\rho\nu} - E^{\nu\lambda\rho\mu}) && (237)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_\lambda \nabla_\rho E^{\mu\nu\lambda\rho} && (238)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_\lambda \nabla_\rho E^{\lambda\rho\mu\nu} && (239)\\
&= 0 && (240)
\end{aligned}$$

Luego, $\nabla_\lambda \nabla \rho E^{\mu\lambda\rho\nu}$ es simétrico en $\mu\nu$.

7.1. En relatividad general

Notemos que para relatividad general el Lagrangeano viene dado por

$$\mathcal{L} = \kappa R = \kappa \delta^\mu_\lambda \delta^\nu_\rho R^{\lambda\rho}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho}R^{\lambda\rho}_{\mu\nu}.$$

Luego,

$$E^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{\lambda\rho}_{\mu\nu}} = \frac{\kappa}{2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{241}$$

Encontremos $\varepsilon_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu} &= E_\mu{}^{\lambda\rho\sigma}R_{\nu\lambda\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\nabla^\sigma \nabla^\lambda E_{\mu\sigma\lambda\nu} && (242)\\
&= \frac{\kappa}{2}\delta_\mu{}^{\lambda\rho\sigma}R_{\nu\lambda\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\kappa R - \cancel{2\nabla^\sigma \nabla^\rho \frac{\kappa}{2}\delta_{\mu\sigma\rho\nu}} && (243)\\
&= \frac{\kappa}{2}\delta^{\rho\sigma}_{\mu\lambda}R_\nu{}^\lambda{}_{\rho\sigma} - \frac{\kappa}{2}Rg_{\mu\nu} && (244)\\
&= \kappa \delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\lambda R_\nu{}^\lambda{}_{\rho\sigma} - \frac{\kappa}{2}Rg_{\mu\nu} && (245)\\
&= \kappa R_\nu{}^\lambda{}_{\mu\lambda} - \frac{\kappa}{2}Rg_{\mu\nu} && (246)\\
&= \kappa R^\lambda{}_{\nu\lambda\mu} - \frac{\kappa}{2}Rg_{\mu\nu} && (247)\\
&= \kappa R_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2}Rg_{\mu\nu} && (248)\\
&= \kappa G_{\mu\nu} && (249)
\end{aligned}$$

Calculemos ahora Θ^μ:

$$\Theta^\mu = 2\delta g_{\tau\rho}\nabla_\lambda E^{\lambda\rho\mu\tau} - 2E^{\lambda\tau\mu\rho}\nabla_\lambda \delta G_{\rho\tau} \tag{250}$$

$$= 2\delta g_{\tau\rho}\cancel{\nabla_\lambda \frac{\kappa}{2}\delta^{\lambda\rho\mu\tau}} - 2\frac{\kappa}{2}\delta^{\lambda\tau\mu\rho}\nabla_\lambda \delta g_{\rho\tau} \tag{251}$$

$$= -\kappa\delta^{\lambda\tau}_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\rho\tau} \tag{252}$$

$$= -2\kappa\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\tau}_{\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\rho\tau} \tag{253}$$

$$= -2\kappa\delta^{\lambda}_{\alpha}\delta^{\tau}_{\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\tau\rho} \tag{254}$$

$$= 2\kappa\delta^{\lambda}_{\beta}\delta^{\tau}_{\alpha}g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_\lambda\delta g_{\tau\rho} \tag{255}$$

$$= 2\kappa g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}\nabla_{[\beta}\delta g_{\alpha]\rho} \tag{256}$$

Por otro lado, una variación difeomórfica de la acción

$$\delta_\xi I = \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\mathcal{L} \tag{257}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x(\delta_\xi\sqrt{|g|}\mathcal{L} + \sqrt{|g|}\delta_\xi\mathcal{L}) \tag{258}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta_\xi g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \sqrt{|g|}\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L} \tag{259}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\xi_\nu\mathcal{L}\sqrt{|g|}\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L}) \tag{260}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x(\sqrt{|g|}\nabla_\mu\xi^\mu\mathcal{L} + \sqrt{|g|}\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L}) \tag{261}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}(\nabla_\mu\xi^\mu\mathcal{L} + \xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L}) \tag{262}$$

$$= \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\nabla_\mu(\xi^\mu\mathcal{L}) \tag{263}$$

Así, tenemos dos resultados:

- Si $\bar{g}_{\mu\nu}$ es solución de las EOM $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$, entonces

$$\delta I\Big|_{\text{on-shell}} = \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|\bar{g}|}\nabla_\mu\Theta^\mu(\bar{g}, \delta g) \tag{264}$$

- Por otro lado, la variación difeomórfica nos entrega

$$\delta_\xi\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^D x\sqrt{|g|}\nabla_\mu(\xi^\mu\mathcal{L}) \tag{265}$$

7.2. El teorema de Noether

Para que las dos variaciones de la acción sean iguales, se debe cumplir que

$$\int_M \mathrm{d}^D x\sqrt{|\bar{g}|}\nabla_\mu\Theta^\mu(\bar{g}, \pounds_\xi g) = \int_M \mathrm{d}^D x\sqrt{|\bar{g}|}\nabla_\mu(\xi^\mu\mathcal{L}[\bar{R}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}]) \tag{266}$$

$$\int_M \mathrm{d}^D x\sqrt{|\bar{g}|}\nabla_\mu(\Theta^\mu(\bar{g}, \pounds_\xi g) - \xi^\mu\mathcal{L}[\bar{R}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}]) = 0 \tag{267}$$

Para M arbitraria, tenemos que

$$\nabla_\mu(\Theta^\mu(\bar{g}, \pounds_\xi g) - \xi^\mu\mathcal{L}[\bar{R}^{\mu\nu}_{\lambda\rho}]) \equiv \nabla_\mu J^\mu = 0 \tag{268}$$

Donde J^μ se conoce como la corriente de Noether. La ecuación anterior nos dice que dicha corriente es conservada. El lemma de Poincarè nos dice que localmente $\nabla_\mu J^\mu = 0$, luego $J^\mu = \nabla_\nu q^{\mu\nu}$ con $q^{\mu\nu}$ es antisimétrico y se conoce como el **prepotencial de Noether**.

Utilizando la definición de $\Theta^\mu = 2\delta g_{\nu\sigma}\nabla_\rho E^{\rho\sigma\mu\nu} - 2\nabla_\rho \delta g_{\nu\sigma} E^{\rho\sigma\mu\nu}$. Reemplazamos δg por $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}$:

$$J^\mu = 2(\nabla_\nu \xi_\sigma + \nabla_\sigma \xi_\nu)\nabla_\rho E^{\rho\sigma\mu\nu} - 2\nabla_\rho(\nabla_\nu\xi_\sigma + \nabla_\sigma\xi_\nu)E^{\rho\sigma\mu\nu} - \xi^\mu \mathcal{L} \tag{269}$$

De las EOM $\mathcal{E}_{\mu\nu} = 0$, podemos encontrar el último término

$$\mathcal{E}^\mu_\nu = E^{\mu\lambda\rho\sigma} R_{\nu\lambda\rho\sigma} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu \mathcal{L} - 2\nabla^\lambda\nabla^\rho E^\mu{}_{\lambda\rho\nu} = 0 \tag{270}$$

Multiplicando a ambos lados por ξ^ν y despejando el término que nos interesa,

$$\xi^\mu \mathcal{L} = 2\xi^\nu E^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\lambda\nu\rho\sigma} - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho E^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{271}$$

Usando que $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\xi_\nu = -R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma}\xi_\lambda$ obtenemos

$$\xi^\mu \mathcal{L} = -2[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\xi_\nu E^{\mu\nu\rho\sigma} - 4\xi_\sigma \nabla_\nu \nabla_\rho E^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{272}$$

Luego, la corriente de Noether queda

$$J^\mu = = 2(\nabla_\nu \xi_\sigma + \nabla_\sigma \xi_\nu)\nabla_\rho E^{\rho\sigma\mu\nu} - 2\nabla_\rho(\nabla_\nu\xi_\sigma + \nabla_\sigma\xi_\nu)E^{\rho\sigma\mu\nu} + 2\nabla_\rho\nabla_\sigma\xi_\nu E^{\mu\nu\rho\sigma} - 2\nabla_\sigma\nabla_\rho\xi_\nu E^{\mu\nu\rho\sigma} + 4\xi_\sigma\nabla_\nu\nabla_\rho E^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{273}$$

$$= 2\nabla_\nu\xi_\sigma\nabla_\rho E^{\rho\sigma\mu\nu} + 2\nabla_\sigma\xi_\nu\nabla_\rho E^{\rho\sigma\mu\nu} - 2\nabla_\rho\nabla_\nu\xi_\sigma E^{\rho\sigma\mu\nu} - 2\nabla_\rho\nabla_\sigma\xi_\nu E^{\rho\sigma\mu\nu} + 2\nabla_\rho\nabla_\sigma\xi_\nu E^{\mu\nu\rho\xi} - 2\nabla_\sigma\nabla_\rho\xi_\nu E^{\mu\nu\rho\sigma} - \tag{274}$$

8. Einstein-AdS Gravity

Consideremos el principio de acción

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}(R-2\Lambda) + 2\kappa\int_M \mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}K - \kappa\int_{M_0}\mathrm{d}^4x\sqrt{|g_0|}(R_0-2\Lambda) - 2\kappa\int_{M_0}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h_0|}K_0 \tag{275}$$

donde consideramos contante cosmológica Λ negativa. En particular consideramos $\Lambda \equiv -\frac{3}{l^2}$, y M_0 es un background, que usualmente escogemos como AdS-Global, es decir,

$$ds_0^2 = -\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1+\frac{r^2}{l^2}\right)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{276}$$

y cumple que

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = -\frac{1}{l^2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{277}$$

Las ecuaciones de movimiento (EOM) de este principio de acción son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{278}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{279}$$

Una solución se conoce como Schwarzschild-Ads y está dada por

$$ds^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2, \qquad f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} + \frac{r^2}{l^2} \tag{280}$$

Verificar que (280) es solución de las EOM.

Ambos espacios tiene el escalar de Ricci constante e igual

$$R = -\frac{12}{l^2}.$$

Notemos que

$$R - 2\Lambda = -\frac{12}{l^2} + \frac{6}{l^2} = -\frac{6}{l^2} \tag{281}$$

Luego, la acción Euclídea on-shell nos queda

$$I^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{6}{l^2}\kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|} - \frac{6}{l^2}\kappa \int_{M_0} \mathrm{d}^4x\sqrt{|g_0|} - 2\kappa \int_{\partial M} \mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}(K - K_0) \tag{282}$$

Calculemos K_0 escogiendo foliación radial. El vector normal a las hypersuperficies de r constante es $n = \sqrt{f(r)}\partial_r$. Luego, la traza de la curvatura extrínseca de Ads Global escogiendo foliación radial es

$$K_0 = \frac{2l^2 + 3r^2}{rl\sqrt{l^2 + r^2}} \tag{283}$$

Si hacemos el cálculo, vemos que el término de borde se anula cuando tomamos el límite $r \to \infty$. Luego, la acción Euclídea on-shell nos queda

$$I^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{6}{l^2}\kappa \int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|} - \frac{6}{l^2}\kappa \int_{M_0} \mathrm{d}^4x\sqrt{|g_0|} \tag{284}$$

Sabemos que si r_h es el radio del horizonte, se cumple que

$$f(r_h) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{r_h^2}{l^2} - \frac{2MG}{r_h} = 0 \tag{285}$$

Resolviendo para M,

$$M = \frac{(l^2 + r_h^2)r_h}{2l^2 G} \tag{286}$$

Además, recordemos que en el Euclídeo, para eliminar singularidades cónicas debemos fijar el período del tiempo Euclídeo $\tau \sim \tau + \beta_\tau$, con

$$\beta_\tau = \frac{4\pi}{f'(r_h)} = \frac{4\pi r_h l^2}{l^2 + 3r_h^2} = \frac{1}{T} \tag{287}$$

es decir, la temperatura en función de los radios de horizonte nos queda

$$T = \frac{l^2 + 3r_h^2}{4\pi l^2 r_h} \tag{288}$$

despajando los radios en función de la temperatura, vemos que existen dos radios de horizonte

$$r_h^{(\pm)}(T) = \frac{2\pi T l^2}{3} \pm \frac{\sqrt{4\pi^2T^2l^2 - 3}}{3} \tag{289}$$

Para que exista horizonte se de cumplir que $4\pi^2T^2l^2 - 3 \geq 0$. Luego, existe una temperatura crítica mínima dada por

$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi l} \tag{290}$$

Graficando estos radios en función de la temperatura, obtenemos

Similar al caso plano debemos asegurarnos que Schwarzschild-AdS y Global-AdS tengan el mismo comportamiento asintótico y así tener las mismas condiciones de borde y asegurarnos que está en el mismo ensamble. Para que esto ocurra, a $r = R, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$, las longitudes de arco

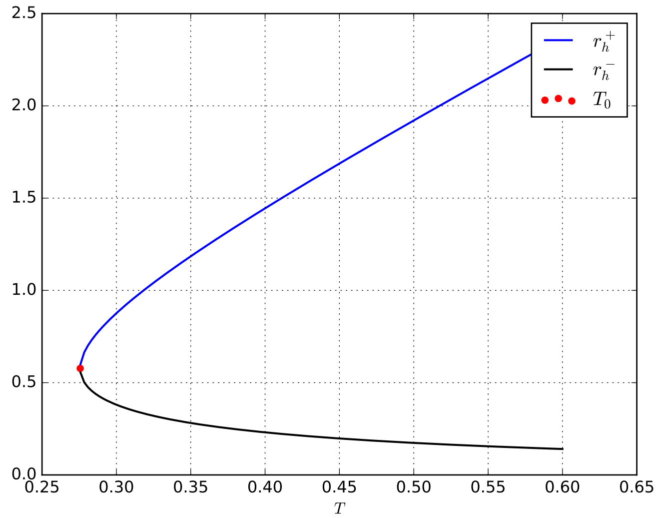


Figura 3: Radios del horizonte como función de la temperatura.

deben ser iguales,

$$\int_0^{\beta_\tau} \sqrt{ds^2} = \int_0^{\beta_0} \sqrt{d\bar{s}^2} \tag{291}$$

$$\int_0^{\beta_\tau} \sqrt{g_{\tau\tau}} d\tau = \int_0^{\beta_0} \sqrt{\bar{g}_{\tau\tau}} d\tau \tag{292}$$

$$\beta\tau\sqrt{1 - \frac{2MG}{R} + \frac{R^2}{l^2}} = \beta_0\sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}} \tag{293}$$

$$\boxed{\beta_0 = \beta_\tau\sqrt{\frac{1 - \frac{2MG}{R} + \frac{R^2}{l^2}}{1 + \frac{R^2}{l^2}}}} \tag{294}$$

En el límite cuando $R \to \infty$, $\beta_\tau = \beta_0$. Así, la acción Euclídea on-shel nos queda

$$I^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{6\kappa}{l^2}\int_0^{\beta_\tau} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_{r_h}^{R} drr^2 - \frac{6\kappa}{l^2}\int_0^{\beta_0} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{R} drr^2 \tag{295}$$

$$= \frac{6\kappa}{l^2}\left(\beta_\tau \frac{4\pi}{3}(R^3 - r_h^3) - \beta_0 \frac{4\pi}{3} R^3\right) \tag{296}$$

$$= \frac{8\kappa\pi}{l^2}\beta_\tau\left(R^3 - r_h^3 - R^3\sqrt{\frac{1 - \frac{2MG}{R} + \frac{R^2}{l^2}}{1 + \frac{R^2}{l^2}}}\right) \tag{297}$$

Tomando el límite $R \to \infty$, obtenemos

$$I^{(E)}\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{8\pi\kappa\beta_\tau}{l^2}(MGl^2 - r_h^3) \tag{298}$$

Usando que la energía libre se puede obtener como $F = \beta_\tau^{-1}\ I^{(E)}\big|_{\text{on-shell}}$ encontramos

$$F^{(\pm)}(T) = \frac{4\pi\kappa}{l^2} r_h^{(\pm)}(l^2 - r_h^2) \tag{299}$$

También podemos calcular la energía

$$U = \frac{\partial I_E[\Phi_0]}{\partial\beta} = \frac{\partial I_E[\Phi_0]}{\partial r_h}\frac{\partial r_h}{\partial\beta} = \frac{\partial I_E[\Phi_0]}{\partial r_h}\left(\frac{\partial\beta}{\partial r_h}\right)^{-1} = \frac{(l^2+r_h^2)r_h}{2l^2G} \tag{300}$$

Comparando con (286), vemos que

$$U = M \tag{301}$$

Finalmente la entropía

$$S = \beta U - I_E[\Phi_0] = \frac{\pi r_h^2}{G} = \frac{A}{4G} \tag{302}$$

8.1. Contraterminos intrínsecos

A pesar de que la acción es finita, si intentamos calcular la carga de Brown-York, esta diverge. Podemos solventar este comportamiento agregando términos intrínsecos a la acción de manera que nos quede de la forma

$$I^{(E)}[g_{\mu\nu}] = -\kappa\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\left(R+\frac{6}{l^2}\right) - 2\kappa\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}K - 2\kappa\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}(z_0+z_1\mathcal{R}) \tag{303}$$

donde $\mathcal{R}$ es la traza de la curvatura intrínseca a hypersuperficies a r constante, definida por (142). Si calculamos los coeficientes z_0 y z_1 con el fin de que la acción sea finita a $r\to\infty$ encontramos que

$$z_0 = -\frac{2}{l} \qquad \text{y} \qquad z_1 = -\frac{l}{2}, \tag{304}$$

de manera que la acción Euclídea renormalizada nos queda

$$I^{(E)}_{\text{ren}} = \frac{8\pi\kappa\beta}{l^2}(MGl^2 - r_h^3). \tag{305}$$

8.1.1. Variación de la acción con contratérminos intrínsecos

Consideremos el principio de acción

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}(R-2\Lambda) + 2\kappa\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}K + 2\kappa\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}(z_0+z_1\mathcal{R}) \tag{306}$$

Variando la acción (ver Sec. 4) encontramos que

$$\delta I = \kappa\int_M \mathrm{d}^4\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}) + \kappa\int_{\partial M}\mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}\delta h^{\mu\nu}\left[K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K - z_0h_{\mu\nu} + 2z_1\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}h_{\mu\nu}\right)\right]$$

Así, el quasilocal stress-energy tensor, queda

$$\tau^{\text{ren}}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|h|}}\frac{\delta I_{\text{borde}}}{\delta h^{\mu\nu}} = -2\kappa\left[K_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}K - z_0h_{\mu\nu} + 2z_1\left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}h_{\mu\nu}\right)\right] \tag{307}$$

Este tensor es conocido como el **tensor de Balasubramanian-Kraus** [3].

Si ahora calculamos la carga de Brown-York con este bicho, y considerando un vector de killing $\xi = \partial_t$, encontramos que la carga ahora es finita y es exactamente la masa del agujero negro!

$$Q[\xi] = \int_\Sigma \mathrm{d}^2x\sqrt{|\gamma|}u^\mu\tau^{\text{ren}}_{\mu\nu}\xi^\nu = M \tag{308}$$

9. Gauss-Bonnet Gravity

El teorema de Gauss-Bonnet en 4 dimensiones se ve como

$$\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\mathcal{G} = 32\pi^2\chi(M) + \int_{\partial M} \mathrm{d}^3x\sqrt{|h|}B \tag{309}$$

donde χ es un invariante topológico conocido como la característica de Euler y B es la forma Chern. Acá $\mathcal{G}$ es el término de Gauss-Bonnet y se puede escribir como

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \tag{310}$$

Se puede mostrar que este término también puede ser escrito como

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4}\delta^{\mu\nu\lambda\rho}_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}R^{\gamma\delta}_{\lambda\rho} \tag{311}$$

Consideremos ahora la acción con constante cosmológica negativa y con el término de Gauss-Bonnet

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}(R - 2\Lambda + \alpha\mathcal{G}) \tag{312}$$

$$= \kappa\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\left(R + \frac{6}{l^2} + \alpha\mathcal{G}\right) \tag{313}$$

donde $\Lambda \equiv -3/l^2$. Si evaluamos por ejemplo, la solución de Schwarzschild-AdS en esta acción, encontramos que el único coeficiente α que deja la acción finita corresponde a $\alpha = l^2/4$.

Se puede mostrar que (313) también se puede escribir como

$$I[g_{\mu\nu}] = \frac{l^2}{16}\int_M \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}\delta^{\mu\nu\lambda\rho}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \frac{1}{l^2}\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\right)\left(R^{\gamma\delta}_{\lambda\rho} + \frac{1}{l^2}\delta^{\gamma\delta}_{\lambda\rho}\right) \tag{314}$$

10. Descomposición irreducible del tensor de Riemann

El tensor de Riemann puede ser descompuesto como

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = A^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + B^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + W^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{315}$$

con

$$A^{\mu\nu}_{\mu\nu} = A \tag{316}$$

$$B^{\mu}_{\nu} = B^{\mu\lambda}_{\nu\lambda}, \qquad \text{pero} \qquad B^{\mu}_{\mu} = 0 \tag{317}$$

$$W^{\mu\nu}_{\mu\lambda} = W^{\mu\nu}_{\lambda\nu} = 0 \tag{318}$$

Para encontrar $A^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$ tomamos la traza en (315) . Esto nos da $A = R$, con ello, tenemos

$$A^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \alpha R \delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{319}$$

usando las propiedades de la delta de Kronecker generalizada, encontramos que $\alpha = 1/(D(D-1))$, así

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \frac{1}{D(D-1)} R \delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + B^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + W^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{320}$$

Tomando la semi-traza de esta última ecuación, y usando las propiedades de las partes irreducibles del Riemann, encontramos que

$$\boxed{B^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{D}\delta^{\mu}_{\nu} R} \tag{321}$$

Todo espacio tipo Einstein tiene $B^{\mu}_{\nu} = 0$.

Para encontrar $B^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$ proponemos

$$B^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \beta \delta^{[\mu}_{[\lambda} B^{\nu]}_{\rho]} \tag{322}$$

Desarrollando esta expresión, encontramos que $\beta = 4/(D-2)$. Así, la descomposición irreducible del tensor de Riemann es

$$\boxed{R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \frac{1}{D(D-1)} R \delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + \frac{4}{D-2} \delta^{[\mu}_{[\lambda} B^{\nu]}_{\rho]} + W^{\mu\nu}_{\lambda\rho}} \tag{323}$$

Sabemos que las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica están dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{324}$$

tomando la traza, encontramos que

$$R = \frac{2D}{D-2}\Lambda \tag{325}$$

En D-dimensiones, la curvatura de Ads-global (espacio maximalmente simétrico y por tanto tensor de curvatura constante), es

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = -\frac{1}{l^2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{326}$$

$$R = -\frac{D(D-1)}{l^2} \tag{327}$$

Así, Λ se relaciona con l según,

$$\boxed{\Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2l^2}} \tag{328}$$

Cualquier espacio Einstein-Ads tiene

$$W^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + \frac{1}{l^2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{329}$$

11. Einstein-Hilbert topológicamente renormalizado

$$I[g_{\mu\nu}] = \kappa \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} \left(R + \frac{6}{l^2} + \frac{l^2}{4}\mathcal{G} \right) \tag{330}$$

$$= \frac{\kappa l^2}{16} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} \delta^{\mu_1 \ldots \mu_4}_{\nu_1 \ldots \nu_4} \left(R^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{l^2}\delta^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2} \right) \left(R^{\nu_3\nu_4}_{\mu_3\mu_4} + \frac{1}{l^2}\delta^{\nu_3\nu_4}_{\mu_3\mu_4} \right) \tag{331}$$

Para espacios Einstein con $R^{\mu}_{\nu} = -\frac{3}{l^2}\delta^{\mu}_{\nu}$, sabemos que el tensor de Weyl queda

$$W^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} + \frac{1}{l^2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho} \tag{332}$$

Así, la acción on-shell es

$$I\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{\kappa l^2}{16} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} \delta^{\mu_1 \ldots \mu_4}_{\nu_1 \ldots \nu_4} W^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2} W^{\nu_3\nu_4}_{\mu_3\mu_4} \tag{333}$$

Usando que

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_4}_{\nu_1 \ldots \nu_4} = \delta^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_3\mu_4}_{\nu_3\nu_4} + \delta^{\mu_3\mu_4}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_1\mu_2}_{\nu_3\nu_4} + \delta^{\mu_1\mu_4}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_2\mu_3}_{\nu_3\nu_4} + \delta^{\mu_2\mu_3}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_1\mu_4}_{\nu_3\nu_4} + \delta^{\mu_1\mu_3}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_4\mu_2}_{\nu_3\nu_4} + \delta^{\mu_4\mu_2}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_1\mu_3}_{\nu_3\nu_4} \tag{334}$$

y utlizando que las trazas y semi-trazas de $W^{\mu\nu}_{\lambda\rho}$ son cero, encontramos

$$I\Big|_{\text{on-shell}} = \frac{\kappa l^2}{16} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} \delta^{\mu_3\mu_4}_{\nu_1\nu_2}\delta^{\mu_1\mu_2}_{\nu_3\nu_4} W^{\nu_1\nu_2}_{\mu_1\mu_2} W^{\nu_3\nu_4}_{\mu_3\mu_4} \tag{335}$$

$$= \frac{\kappa l^2}{4} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} W^{\mu\nu}_{\lambda\rho} W^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{336}$$

Así, el E-tensor se puede obtener como

$$E^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R^{\lambda\rho}_{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}} \frac{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}}{\partial R^{\lambda\rho}_{\mu\nu}} \tag{337}$$

$$= \frac{\kappa l^2}{8} \delta^{\mu\nu\alpha\beta}_{\lambda\rho\gamma\delta} \left(R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{l^2}\delta^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial \mathcal{F}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}}{\partial R^{\lambda\rho}_{\mu\nu}} \tag{338}$$

Luego,

$$E^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\Big|_{E} = \frac{\kappa l^2}{2} W^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \tag{339}$$

donde el subíndice E denota que está evaluada en una solución tipo Einstein.

12. Taub-NUT

Una solución a a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{340}$$

es

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)(\mathrm{d}t + 2n\cos\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + (r^2+n^2)\mathrm{d}\Omega^2 \tag{341}$$

con

$$f(r) = \frac{r^2-n^2}{r^2+n^2} - \frac{2MGr}{r^2+n^2} - \frac{\Lambda}{3}\frac{\left(r^4+6n^2r^2-3n^4\right)}{r^2+n^2} \tag{342}$$

Esta solución se conoce como la solución de **Taub-NUT**.

Notemos que en el límite $n \to 0$, se tiene

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \tag{343}$$

y

$$f(r) = 1 - \frac{2MG}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{344}$$

Si calculamos el Kretcshmann obtenemos

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \sim \frac{h(r)}{(r^2+n^2)^6} \tag{345}$$

con $h(r) < \infty$, $\forall r \in \mathbb{R}$. De aquí vemos claramente que Taub-NUT no presenta singularidades de curvatura, pero no podemos decir nada de su completitud geodésica.

Cuando $r \to \infty$, se tiene

$$\lim_{r\to\infty} R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{8\Lambda^2}{3} \tag{346}$$

12.1. Comportamiento asintótico

Notemos que

$$g_{t\phi} = 2f(r)n\cos\theta \tag{347}$$

cuando $r \to \infty$, se tiene

$$g_{t\phi} = 2\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)n\cos\theta \tag{348}$$

Sin embargo, si calculamos las componentes del tensor de curvatura, vemos que

$$R^{\mu\nu}_{\lambda\rho} = \pm\frac{1}{l^2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\rho}, \qquad \Lambda = \pm\frac{3}{l^2} \tag{349}$$

Por esta razón decimos que Taub-NUT no es asintóticamente AdS (AADS) pero si **asintóticamente localmente AdS (AlAdS)**.

12.2. Cargas conservadas

En el siguiente paper se estudian [2]. Si se calcula con el formalismo de Noether-Wald llegamos

13. Taub-Nut Euclídeo

Consideremos la métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)(\mathrm{d}t + 2n\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + (r^2+n^2)\mathrm{d}\Omega^2 \tag{350}$$

que sabemos que resuelve las ecuaciones de Einstein con cosntante cosmológica $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$. Haciendo una rotación de Wick tanto en $t \to -i\tau$ como en $n \to -in$, nos queda

$$\mathrm{d}s^2 = f_E(r)(\mathrm{d}t + 2n\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f_E(r)} + (r^2-n^2)\mathrm{d}\Omega^2 \tag{351}$$

donde

$$f_E(r) = \frac{r^2+n^2}{r^2-n^2} - \frac{2MGr}{r^2-n^2} + \frac{r^4-6n^2r^2-3n^4}{l^2(r^2-n^2)} \tag{352}$$

Notemos que esta solución tiene una singularidad de curvatura en $r = n$, dado que el Kretschamn se indetermina en ese punto

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \sim \frac{A(r)}{(r^2-n^2)^6} \tag{353}$$

Al pedir que no hayan singularidades cónicas, esto impone una restricción en M. Expandiendo $f_E(r)$ en torno a $r = n$ tenemos

$$f(r) \sim \frac{B(M,n,l)}{r-n} + +\frac{1}{2}B(M,n,l) + \mathcal{O}(r-n) \tag{354}$$

Al imponer que $B(M,n,l) = 0$, tenemos

$$M_{\mathrm{NUT}} = \frac{n}{G}\left(1 - \frac{4n^2}{l^2}\right) \tag{355}$$

reemplazado en (352),

$$f_{\mathrm{NUT}}(r) = \frac{r-n}{r+n} + \frac{(r-n)^2(r+3n)}{l^2(r+n)} \tag{356}$$

la cual cumple que $f_{\mathrm{NUT}}(r = n) = 0$. Ahora, esta solución no posee singularidades de curvatura, en efecto

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho} \sim \frac{A(r)}{(r+n)^6} \tag{357}$$

Además, al calcular el periodo del tiempo Euclídeo para eliminar las singularidades cónicas, obtenemos

$$\beta_\tau = \frac{4\pi}{f'(n)} = 8\pi n \tag{358}$$

13.1. (Anti-)auto dualidad

El dual del tensor de Weyl se define como

$$\tilde{W}_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}W^{\alpha\beta}_{\lambda\rho} \tag{359}$$

donde $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ es el tensor de Levi-Civita y $W^{\lambda\rho}_{\mu\nu}$ se define según (323).

Decimos que una solución es (anti) auto-dual si su tensor de Weyl satisface

$$W_{\mu\nu\lambda\rho} = \pm\tilde{W}_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{360}$$

Sabemos que para espacios Einstein, el tensor de Weyl queda como (329), luego la acción queda

$$I = \frac{\kappa l^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}W^{\mu\nu}_{\lambda\rho}W^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{361}$$

$$= \pm\frac{\kappa l^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}W^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\tilde{W}^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{362}$$

Usando la primera identidad de Bianchi $R_{\mu[\nu\lambda\rho]} = 0$ se puede mostrar que, of-shell, se satisface

$$W^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\tilde{W}^{\lambda\rho}_{\mu\nu} = R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\tilde{R}^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{363}$$

En efecto, (on-shell):

$$W^{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{W}_{\mu\nu\lambda\rho} = \left(R^{\mu\nu\lambda\rho} + \frac{2}{l^2}g^{\mu[\lambda}g^{\rho]\nu}\right)\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left(R^{\alpha\beta}_{\lambda\rho} + \frac{2}{l^2}\delta^{[\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta]}_{\rho}\right) \tag{364}$$

$$= R^{\mu\nu\lambda\rho}\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\lambda\rho} + R^{\mu\nu\lambda\rho}\frac{1}{l^2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\rho} + \frac{1}{l^2}g^{\mu[\lambda}g^{\rho]\nu}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}_{\lambda\rho} \tag{365}$$

$$+ \frac{2}{l^4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\mu[\lambda}g^{\rho]\nu}\delta^{\alpha}_{\lambda}\delta^{\beta}_{\rho} \tag{366}$$

$$= R^{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\rho} + \frac{2}{l^2}R^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{2}{l^4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu} \tag{367}$$

El segundo término se anula debido a la identidad de Bianchi $R_{\mu[\ u\lambda\rho]} = 0$ y el tercero porque al usar la simetría en los índices de $g_{\mu\nu}$, luego

$$W^{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{W}_{\mu\nu\lambda\rho} = R^{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{368}$$

De hecho, si hacemos el cálculo off-shell, despues de algo de álgebra encontramos que

$$W^{\mu\nu\lambda\rho}\tilde{W}_{\mu\nu\lambda\rho} = \left(R^{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{2}{D(D-1)}Rg^{\mu[\lambda}g^{\rho]\nu} - \frac{2}{D-2}\left(g^{\mu[\lambda}B^{\rho]\nu} - g^{\nu[\lambda}B^{\rho]\mu}\right)\right)\times \tag{369}$$

$$\times\left(\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{1}{D(D-1)}R\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \frac{2}{D-2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}R^{\beta}_{\rho} - \frac{1}{D}R\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\right) + \frac{2}{D-2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}R^{\beta}_{\lambda} - \varepsilon_{\mu\nu\rho\beta}R^{\beta}_{\rho}\right)\right) \tag{370}$$

Utilizando las propiedades de simetría y antisimetria, vemos que se cumple (368) off-shell de igual manera.

Luego, on-shell, tenemos

$$\pm\frac{\kappa l^2}{4}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\tilde{R}^{\lambda\rho}_{\mu\nu} = \pm 4\pi^2 c\kappa l^2 \tag{371}$$

donde c es el el índice de Chern-Pontryagin, el cual corresponde a un término topológico y se define como

$$c = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}_{\lambda\rho}\tilde{R}^{\lambda\rho}_{\mu\nu} \tag{372}$$

Al calcular este término para Taub-Nut AdS, obtenemos

$$c = 2 - \frac{16n^2}{l^2}\left(1 - \frac{2n^2}{l^2}\right) \tag{373}$$

Vemos que cuando $l \to \infty$, $c = 2$, resultado que había encontrado previamente Hawkings en su paper *Graviational Instantons* del año 1977.

Luego, la acción euclidea on-shell queda

$$I = \pm 4\pi^2 c\kappa l^2 \tag{374}$$

Al calcular las cantidades termodinámicas obtenemos,

$$U_{\text{NUT}} = M_{\text{NUT}}, \qquad S_{\text{NUT}} = \frac{4\pi n^2}{G}\left(1 - \frac{6n^2}{l^2}\right) + \frac{2\pi l^2}{G} \tag{375}$$

14. La métrica de Eguchi-Hanson

Las left invariant forms de Maurier-Cartan de SU(2) se definen en función de los ángulos de Euler según

$$\sigma_1 = \cos\psi \mathrm{d}\theta + \sin\theta \sin\psi \mathrm{d}\phi \tag{376}$$
$$\sigma_2 = -\sin\psi \mathrm{d}\theta + \sin\theta \cos\psi \mathrm{d}\phi \tag{377}$$
$$\sigma_3 = \mathrm{d}\psi + \cos\theta \mathrm{d}\phi \tag{378}$$

donde $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi], \psi \in [0, 4\pi]$.

Estas satisfacen

$$\mathrm{d}\sigma_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^j \wedge \sigma^k = 0 \tag{379}$$

La métrica de las 3-esfera en términos de estas formas queda

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{S}^3} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \mathrm{d}\Omega^2 + \sigma_3^2 \tag{380}$$

donde $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2$ es la métrica de la 2-esfera.

La métrica de $\mathbb{R}^4$ queda

$$\mathrm{d}s^2_{\mathbb{R}^4} = \mathrm{d}r^2 + r^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \tag{381}$$

La métrica de Taub-Nut Euclídea queda

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)(\mathrm{d}t + 2n\cos\theta \mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + (r^2 - n^3)\mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{382}$$

Haciendo $\psi = \frac{t}{2n}$, tenemos

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)4n^2\sigma_3^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + (r^2 - n^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{383}$$

Notemos que si considramos $r = r_0 =$ constante, tenemos

$$\mathrm{d}s^2_{r=r_0} = f(r_0)4n^2\sigma_3^2 + (r_0^2 - n^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \tag{384}$$
$$= (r_0^2 - n^2)\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{f(r_0)4n^2}{r_0^2 - n^2}\sigma_3^2\right] \tag{385}$$

Si una métrica es de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + f(r)h(r)\sigma_3^2 + J_1(r)\sigma_1^2 + J_2(r)\sigma_2^2 \tag{386}$$

y si $J_1 = J_2$, entonces tiene simetría SU(2)×U(1)

Para Taub-NUT: $J(r) = r^2 - n^2$ y $h(r) = 4n^2$, mientras que para Eguchi-Hanson $J(r) = h(r) = r^2/4$.

15. Eguchi-Hanson en gravedad de Einstein

La generalización a más dimensiones de la métrica de Eguchi-Hanson es

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)\frac{r^2}{4}(\mathrm{d}\tau + \mathcal{B})^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + \frac{r^2}{4}\mathrm{d}\Sigma^2 \tag{387}$$

donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ denota a la 1-forma potencial de Kalher tal que $\Omega = \mathrm{d}\mathcal{B}$, define la forma real simplectica asociada al $(2m-2)$-dimensional base manifold de Kalher con elemento de línea $\mathrm{d}\Sigma^2$.

16. Eguchi-Hanson Einstein gravity D-dimensions

Consideraré la acción dada por

$$I = \kappa \int \mathrm{d}^D x \sqrt{|g|}(R - 2\Lambda) \tag{388}$$

de la cual obtenemos las ecuaciones de movimiento dadas por

$$R^\nu_\mu - \frac{1}{2} R \delta^\nu_\mu + \Lambda \delta^\nu_\mu = 0 \tag{389}$$

Considerando un ansatz de la forma

$$\mathrm{d}s^2 = f(r)\frac{r^2}{4}(\mathrm{d}\tau + \mathcal{B})^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(r)} + \frac{\mathrm{d}r^2}{4}\mathrm{d}\Sigma^2 \tag{390}$$

donde $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ denota a la 1-forma potencial de Kahler tal que $\Omega = \mathrm{d}\mathcal{B}$ define la forma real simpléctica asociada al $(2D-2)$-dimensional manifold base con elemento de línea $\mathrm{d}\Sigma^2$. Las funciones métricas para manifolds base $(\mathbb{T}^2)^k$, $(\mathbb{S}^2)^k$ y $(\mathbb{H}^2)^k$vienen dadas por

$$f(r) = -\frac{2\Lambda r^2}{D^2 - 4} - \left(\frac{a}{r}\right)^D + \gamma \tag{391}$$

donde $\gamma = 0, \pm 1$.

Referencias

[1] Giorgos Anastasiou et al. “Noether-Wald charges in six-dimensional Critical Gravity”. En: *JHEP* 07 (2021), pág. 156. DOI: 10.1007/JHEP07(2021)156. arXiv: 2105.02924 [hep-th].

[2] Adel Awad y Somaya Eissa. “Lorentzian Taub-NUT spacetimes: Misner string charges and the first law”. En: 105.12 (jun. de 2022). DOI: 10.1103/physrevd.105.124034. URL: https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.105.124034.

[3] Vijay Balasubramanian y Per Kraus. “A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity”. En: *Commun. Math. Phys.* 208 (1999), págs. 413-428. DOI: 10.1007/s002200050764. arXiv: hep-th/9902121.

[4] Vivek Iyer y Robert M. Wald. “Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy”. En: *Phys. Rev. D* 50 (2 1994), págs. 846-864. DOI: 10.1103/PhysRevD.50.846. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.846.

[5] T Padmanabhan. “Some aspects of field equations in generalized theories of gravity”. En: *Physical Review D* 84.12 (2011), pág. 124041. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.3846.

[6] Robert M. Wald. “Black hole entropy is the Noether charge”. En: *Phys. Rev. D* 48 (8 1993), R3427-R3431. DOI: 10.1103/PhysRevD.48.R3427. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.48.R3427.

[7] Robert M. Wald y Andreas Zoupas. “General definition of “conserved quantities” in general relativity and other theories of gravity”. En: *Phys. Rev. D* 61 (8 2000), pág. 084027. DOI: 10.1103/PhysRevD.61.084027. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.084027.