

Notas en

Mecánica Cuántica Relativista

Borja Diez
borjadiez1014@gmail.com

Estas notas de clase están basadas en el libro *Relativistic Quantum Mechanics* de W. Greiner, y han sido escritas con propósito de estudio personal.

Adicionalmente, las notas han sido complementadas con desarrollos de cálculo personal y comentarios sacados de la bibliografía citada al final de este documento.

Índice

1. Ecuación de onda relativista para partículas de spin-0. Ecuación de Klein-Gordon	3
1.1. La ecuación de Klein-Gordon	4
1.2. El límite no-relativista	6
1.3. Partículas libres de spin-0	8

1. Ecuación de onda relativista para partículas de spin-0. Ecuación de Klein-Gordon

La descripción de un fenómeno a altas energías requiere la investigación de ecuaciones de ondas relativistas, es decir, *ecuaciones que sean invariantes de Lorentz*. La transición desde una descripción no-relativista hacia una relativista implica que varios conceptos de la teoría no-relativista deben ser reinvestigados, en particular:

1. Coordenadas espaciales y temporales tienen que ser tratadas por igual en la teoría.
2. Dado que

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p} \sim \frac{\hbar}{m_0 c}, \quad (1.1)$$

una partícula relativista no puede ser localizada con más precisión que $\approx \hbar/m_0 c$; de otro modo podría ocurrir creación de pares de partículas debido a $E > 2m_0 c^2$. Así, la idea de partícula libre solo hace sentido si la partícula no está confinada por vínculos externos a un volumen menor que aproximadamente la *longitud de onda de Compton* $\lambda_c = \hbar/m_0 c$. De otro modo, la partícula automáticamente tiene compañeros debido a la reacción de partícula-antipartícula.

3. Si la posición de la partícula es incierta, e.d., si

$$\Delta x > \frac{\hbar}{m_0 c}, \quad (1.2)$$

entonces el tiempo es también incierto, debido a

$$\Delta t \sim \frac{\Delta x}{c} > \frac{\hbar}{m_0 c^2}. \quad (1.3)$$

En una teoría no-relativista Δt puede ser arbitrariamente pequeño, porque $c \rightarrow \infty$. De este modo, necesitamos la necesidad de reconsiderar el concepto de densidad de probabilidad

$$\rho(x, y, z, t), \quad (1.4)$$

el cual describe la probabilidad de encontrar una partícula en un lugar definido \mathbf{r} a un tiempo fijo t .

4. A altas energías (relativista) ocurre creación y aniquilación de pares, usualmente en la forma de creación de pares de partícula-antipartícula. Así, a energías relativistas, la conservación de partículas no es más un supuesto válido. Una teoría relativista debe ser capaz de describir creación de pares, polarización del vacío, conversión de partículas, etc.

1.1. La ecuación de Klein-Gordon

De la mecánica cuántica sabemos que la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

corresponde a la relación de energía no-relativista en forma de operador,

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} + V(\mathbf{x}), \quad \text{donde} \quad (1.6)$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla \quad (1.7)$$

son los operadores de energía y momentum respectivamente. Con el fin de obtener una ecuación de onda relativista, comencemos considerando partículas libres con la relación relativista

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2. \quad (1.8)$$

Reemplazamos el 4-momentum p^μ por el operador 4-momentum

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (1.9)$$

$$= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.10)$$

$$= i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right) \quad (1.11)$$

$$= (\hat{p}_0, \hat{\mathbf{p}}) \quad (1.12)$$

Así, obtenemos la **ecuación de Klein-Gordon** para partículas libres,

$$\boxed{\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi} \quad (1.13)$$

Aquí m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Notemos que

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = \left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right) \right] \left[i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right) \right] \quad (1.14)$$

$$= -\hbar^2 \left[\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right] \left[\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla \right] \quad (1.15)$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\nabla^2 \right) \quad (1.16)$$

$$= -\hbar^2 \square \quad (1.17)$$

Así, podemos escribir (1.13) como

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.18)$$

Podemos verificar inmediatamente que covaiancia de Lorentz de la ecuación de Klein-Gordon, dado que $\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu$ es invariante de Lorentz. Notemos también que (1.18) es la ecuación de onda clásica incluyendo el *término de masa* $m_0^2 c^2 / \hbar^2$. Soluciones libres son de la forma

$$\psi = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)\right] \quad (1.19)$$

En efecto, de (1.18),

$$\square\psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi = \partial^\mu \partial_\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \quad (1.20)$$

$$= \partial^\mu \left[-\frac{i}{\hbar} p_\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \right] + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \quad (1.21)$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} p_\mu p^\mu e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \quad (1.22)$$

$$= 0 \quad \checkmark \quad (1.23)$$

bajo la condición $p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2$ lo que resuta en

$$E = \pm \sqrt{m_0^2 c^2 + \mathbf{p}^2} \quad (1.24)$$

Así, existe solución tanto para energías positivas como para energías negativas ¹.

Ahora constrimos la cuadri-corriente j_μ conectada con (1.13). En analogía con nuestras consideraciones para el caso de la ecuación de Schrödinger, esperamos una ley de conservación para j_μ . Empezamos de (1.18), en la forma

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0 \quad / \psi^*. \quad (1.25)$$

y tomamos el comlejo conjugado

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0 \quad / \psi. \quad (1.26)$$

Restando (1.26) de (1.25), es direto ver que

$$\psi^* \nabla_\mu \nabla^\mu \psi - \psi \nabla_\mu \nabla^\mu \psi^* = 0 \quad (1.27)$$

$$\implies \nabla_\mu \underbrace{(\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*)}_{\sim j^\mu} = 0 \quad (1.28)$$

Definimos la cuadri-corriente como

$$j_\mu \equiv \frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) \quad (1.29)$$

¹Las soluciones con enenergía negativa están físicamente conectadas con antipartículas. Dado que estas pueden ser observadas en la naturaleza, hemos obtenido una indicación del valor del extender la teoría no-relativista.

donde agregamos el factor delante para que la componente j_0 tenga unidades de probabilidad de densidad (es decir, $1/\text{cm}^3$). Además, esto nos asegura obtener el límite no-relativista correcto. En particular, (1.1) queda

$$\begin{aligned}\nabla_\mu j^\mu &= \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[\frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^* \right) \right] - \nabla \left[\frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^* \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right] - \nabla \left[\frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^* \right) \right] \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \\ &= 0\end{aligned}$$

es decir, posee la forma de una ecuación de continuidad. Como es usual, integramos sobre todo el espacio,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3x = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.30)$$

$$\implies \int_V \rho d^3x = \text{constante} \quad (1.31)$$

De esta manera, es natural interpretar

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \quad (1.32)$$

como una densidad de probabilidad. Sin embargo, hay un problema con esta interpretación: Para un tiempo dado t , tanto ψ como $\partial\psi/\partial t$ pueden tener valores arbitrarios; luego, $\rho(\mathbf{x}, t)$ en (1.1) puede ser tanto positiva como negativa, de manera que $\rho(\mathbf{x}, t)$ no está definida positiva y no puede ser considerada una densidad de probabilidad. La razón profunda de esto es que la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden en el tiempo, de manera que debemos conocer tanto ψ como $\partial\psi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ para un dado t . Además, existen soluciones para energía negativa [ver (1.24)]. Esto, sumado con la dificultad de la interpretación de la probabilidad fue la razón por la que tanto tiempo se consideró a la ecuación de Klein-Gordon como sin sentido físico. Por lo tanto se intentó buscar una ecuación de onda relativista que fuese de primer orden en el tiempo con densidad de probabilidad definida positiva, la cual fue finalmente descubierta por Dirac. Sin embargo, dicha ecuación sigue teniendo soluciones con energía negativa, las cuales están conectadas con la existencia de antipartículas.

1.2. El límite no-relativista

Podemos estudiar el límite no-relativista de la ecuación de Klein-Gordon (1.13). Para ello, consideremos el siguiente ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.33)$$

es decir, separamos la dependencia del tiempo de ψ en dos términos, uno conteniendo la masa en reposo. En el límite no-relativista la diferencia entre la energía total E de la partícula y su masa en reposo $m_0 c^2$ es pequeña. Así, definimos

$$E' = E - m_0 c^2 \quad (1.34)$$

y remarquemos que la energía E' es no-relativista, lo que significa que $E' \ll m_0 c^2$. De aquí,

$$E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi \implies \left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll m_0 c^2 \varphi \quad (1.35)$$

Calculemos $\partial^2 \psi / \partial t^2$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.36)$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.37)$$

$$\approx -\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i m_0 c^2}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.39)$$

$$\approx \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.40)$$

$$\approx \left(-2 \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.41)$$

$$= -\frac{2 i m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{i}{\hbar^2} m_0^2 c^4 \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.42)$$

$$= -\left[\frac{2 i m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.43)$$

Reemplazando en la ecuación de Klein-Gordon

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi = m_0 c^2 \psi \implies \left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (1.44)$$

lo cual se puede reescribir como

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0 \quad (1.45)$$

se tiene

$$-\frac{1}{c^2} \left[i \frac{2 m_0 c^2}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \varphi \right] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.46)$$

$$-\frac{2 i m_0}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} = \nabla^2 \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.47)$$

$$-\frac{2 i m_0}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} = \nabla^2 \varphi e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \quad (1.48)$$

Multiplicando ambos lados por $-\hbar^2/(2m_0)$, obtenemos finalmente

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \varphi} \quad (1.49)$$

la ecuación de Schrödinger libre para partículas sin spin. Dado que el tipo de partículas descrito por una ecuación de onda no depende de si la partícula es relativista o no-relativista, inferimos que *la ecuación de Klein-Gordon describe partículas con spin-0*.

1.3. Partículas libres de spin-0

Anteriormente hemos remarcado que en una teoría relativista, *el concepto de una partícula libre es una idealización*. Es más, partículas de spin-0, como piones o kaones, interactúan fuertemente con otras partículas y campos. Sin embargo, podemos descubrir algunos de los métodos prácticos para lidiar con esos problemas, estudiando las soluciones libres de (1.13). Volvamos a la interpretación de la densidad de corriente (1.29) que habíamos descartado debido a que ρ en (1.1) no era definida positiva. Además, encontramos que, siguiendo el procedimiento usual

$$\int_V \rho d^3x = \text{constante} \quad (1.50)$$

La pregunta es cómo se debe interpretar ρ y \mathbf{j} . La interpretación de probabilidad está descartada por lo discutido anteriormente en el contexto de (1.1). Sin embargo, tenemos la siguiente alternativa: Obtenemos la *cuadri-corriente densidad de carga* multiplicando la densidad de corriente (1.29) con la carga elemental e , resultando

$$j'_\mu \equiv j_\mu e = \frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) = (c\rho', -\mathbf{j}') \quad (1.51)$$

donde

$$\rho' = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.52)$$

$$\mathbf{j}' = -\frac{i\hbar e}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.53)$$

denotan la *densidad de carga* y la *densidad de corriente de carga*, respectivamente. La densidad de carga (1.52) puede ser positiva, negativa o cero. Esto equivale a la existencia de partículas y antipartículas en la teoría. Calculando las *soluciones para partículas libres*, podemos entender esto mejor.

Referencias