

# Notas de Clase en **Teoría Clásica de Campos**

Borja Diez  
borjadiez1014@gmail.com

Estas notas de clase están basadas en el curso dictado por el Dr. Patricio Salgado durante el primer semestre del año 2024 en la Universidad Arturo Prat y han sido escritas con propósito de estudio personal.

Las notas están divididas por clase. Adicionalmente han sido complementadas con desarrollos de cálculo personal y comentarios sacados de la bibliografía citada al final de este documento.

## Índice

<b>I</b>	<b>Mecánica Clásica</b>	<b>4</b>
<b>1.</b>	<b>Clase 1</b>	<b>4</b>
1.1.	Mecánica de Newton . . . . .	4
1.2.	Mecánica de Lagrange . . . . .	5
1.3.	Acerca de la matriz Hessiana de las ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	6
<b>2.</b>	<b>Clase 2</b>	<b>7</b>
2.1.	Acerca de la matriz Hessiana . . . . .	8
2.2.	Formalismo de Hamilton . . . . .	9
2.3.	*Transformaciones canónicas . . . . .	9
<b>3.</b>	<b>Clase 3</b>	<b>10</b>
3.1.	Simetrías y leyes de conservación . . . . .	10
<b>4.</b>	<b>Clase 4</b>	<b>12</b>
4.1.	Teorema de Noether . . . . .	12
4.2.	Transformaciones de simetría . . . . .	13
<b>5.</b>	<b>Clase 5</b>	<b>15</b>
5.1.	Relación entre y . . . . .	15
5.2.	Prueba del teorema de Noether . . . . .	16
<b>6.</b>	<b>Clase 6</b>	<b>19</b>
6.1.	Continuación prueba del teorema de Noether . . . . .	19
6.2.	Grupos y álgebras de Lie . . . . .	21
<b>7.</b>	<b>Clase 7</b>	<b>23</b>
7.1.	Espacio lineal o espacio vectorial . . . . .	23
7.2.	Álgebra y álgebra de Lie . . . . .	24
7.3.	Grupos, álgebras y simetrías . . . . .	24
<b>8.</b>	<b>Clase 8</b>	<b>27</b>
8.1.	Generadores de grupos de Lie . . . . .	27
8.2.	Grupos matriciales . . . . .	31
<b>9.</b>	<b>Clase 9</b>	<b>33</b>
9.1.	Ejemplo: Generadores y álgebra de $SO(3)$ . . . . .	33
<b>10.</b>	<b>Clase 10</b>	<b>36</b>
10.1.	Generadores de transformaciones infinitesimales . . . . .	36
10.2.	Cargas conservadas . . . . .	38
<b>11.</b>	<b>Clase 11</b>	<b>41</b>
11.1.	Grupo de Galileo y sus cargas conservadas . . . . .	41
11.2.	Partícula libre en 3-dimensiones . . . . .	42

<b>II Electrodinámica y Relatividad</b>	<b>42</b>
11.3. Transformaciones de Galileo y ecuaciones de Newton . . . . .	42
<b>12.Clase 12</b>	<b>46</b>
12.1. Generadores del grupo de Lorentz . . . . .	50
<b>13.Clase 13</b>	<b>51</b>
13.1. Generadores de las rotaciones espaciales y Boosts . . . . .	51
13.2. Grupo de Poincare . . . . .	52

# Parte I

## Mecánica Clásica

### 1. Clase 1

#### 1.1. Mecánica de Newton

Posición, velocidad, aceleración, fuerza.

Si consideramos un sistema de partículas de masa  $m$

$$\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha, \quad \mathbf{p} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\mathbf{x}}^2, \quad L = \sum_\alpha \mathbf{x}_\alpha \times \mathbf{p}_\alpha \quad (1.2)$$

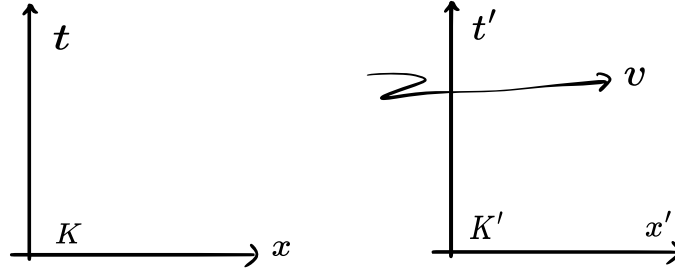
Newton estableció que la dinámica de un sistema mecánico queda determinada por tres leyes fundamentales:

- **Primera ley del movimiento:** Todo cuerpo en reposo permanecerá en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (MRU), a menos que una fuerza externa actúe sobre él.
- **Primera ley del movimiento:** Un cuerpo cambia su estado de movimiento si una fuerza actúa sobre él

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.3)$$

- **Tercera ley del movimiento:** A cada acción le corresponde una reacción paralela y opuesta.

Estas leyes sólo son válidas en un sistema de referencia inercial (SRI). Dos SRI están relacionados por medio de una transformación de Galileo.



$$x' = x - vt \quad (1.4)$$

$$t' = t \quad (1.5)$$

Además

$$\mathbf{F}_\alpha = m\ddot{\mathbf{x}} \quad (1.6)$$

$$\implies m\ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}_\alpha) = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_\alpha = \dot{\mathbf{p}}_\alpha \quad (1.7)$$

Si las fuerzas son conservativas, se tiene

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla V_\alpha \quad (1.8)$$

$$\implies \boxed{\dot{\mathbf{p}}_\alpha + \nabla V_\alpha = 0} \quad (1.9)$$

## 1.2. Mecánica de Lagrange

Es basada en la llamada función de Lagrange, definida como

$$L(\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha, t) = T(\dot{\mathbf{x}}_\alpha, t) - V(\mathbf{x}_\alpha, t) \quad (1.10)$$

Lagrange introdujo el concepto de coordenada generalizada

$$q_i, \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (1.11)$$

donde  $f$  son los grados de libertad del sistema. De esta manera, se define la derivada de Euler-Lagrange como

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.12)$$

Así, las soluciones a estas ecuaciones describen la dinámica del sistema en un espacio  $f$ -dimensional de coordenadas  $q_1, q_2, \dots, q_f$ .

**Nota:** La energía cinética debe ser una función homogénea de grados dos

$$T = \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \quad (1.13)$$

Notemos que una función de Lagrange dada por

$$L' = L + \frac{d}{dt} B(q, t) \quad (1.14)$$

conduce a las mismas ecuaciones del movimiento.

La libertad en la elección de coordenadas generalizadas implica que las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange son *estructuralmente invariantes* bajo una transformación de coordenadas generalizadas, es decir, bajo

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_l) \implies \dot{q}'_i = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \dot{q}'_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} \quad (1.16)$$

Definiendo

$$\varphi(q_l) = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} \quad (1.17)$$

se tiene

$$\frac{d}{dt} \varphi(q_l) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad (1.18)$$

luego

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} \right) \dot{q}_k \quad (1.19)$$

$$\implies \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 q'_i}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k} \quad (1.20)$$

Dado que

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \dot{q}'_i}{\partial q_l} = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial^2 q'_i}{\partial q_l \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_l} \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial q'_i}{\partial q_l} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_l}} \quad (1.23)$$

Dado que  $L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$ , calculemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} \quad (1.24)$$

### 1.3. Acerca de la matriz Hessiana de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} = \frac{\partial L'}{\partial q'_k} - [L]_k \frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}'_k} \quad (1.26)$$

$$\boxed{[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}'_k}} \quad (1.27)$$

La derivada de Euler-Lagrange transforma como un vector covariante bajo una transformación de coordenadas

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0 \quad (1.28)$$

## 2. Clase 2

1. Las ecuaciones de Newton son *invariantes en forma* bajo las transformaciones de Galileo.
2. Las ecuaciones de Newton son ecuaciones de segundo orden en  $\mathbf{x}_\alpha$ . Es bueno recalcar que *todas las ecuaciones dinámicas de la física fundamental son de segundo orden*. Las ecuaciones de orden mayor al segundo, tienden a tener inestabilidades [1].
3. Si  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  es la función de Lagrange para un sistema mecánico, entonces la dinámica del sistema es gobernada por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (2.1)$$

Estas ecuaciones no cambian si la función de Lagrange es modificada a la forma

$$\tilde{L} = L + \frac{d}{dt} B(q, t) \quad (2.2)$$

con  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  y  $\tilde{L} = \tilde{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

4. La libertad en la elección de las coordenadas generalizadas implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange son estructuralmente invariantes bajo un cambio de coordenadas:

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_l) \quad (2.3)$$

lo cual implica que

$$[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_k} \quad (2.4)$$

que muestra que la derivada de Euler transforma como un vector covariante bajo la transformación 2.3

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0. \quad (2.5)$$

Es importante recalcar que la invariancia estructural es distinto a la invariancia en forma (covariancia).

*Todos los observadores observan la misma forma de las ecuaciones de los modelos de la naturaleza.*

**Ejemplo 2.1.** La ecuación de Newton en el SRI K toma la forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  mientras que en el SRI  $K'$  toma la forma  $\mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'$ .

**Ejemplo 2.2.** Las ecuaciones de Maxwell tendrán la misma forma en todos los SRI.

Notemos son embargo, que en la mecánica de Newton las transformaciones son las transformaciones de Galileo y que en la electrodinámica de Maxwell son las transformaciones de Lorentz.

La covariancia de las ecuaciones del movimiento bajo una transformación de coordenadas es la propiedad que define una **simetría de Lie**.

### 2.1. Acerca de la matriz Hessiana

Una característica básica de las ecuaciones de Newton  $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  es que es posible expresar la aceleración  $\ddot{\mathbf{r}}$  en función de la posición  $\mathbf{r}$ , de la velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  y de  $t$ ,

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}(t)) \quad (2.6)$$

Esta es una formulación vectorial de la mecánica es basada en el concepto d partícula material. Esto llevó a pensar que la naturaleza podría no ser continua, sino que podría ser atómica (cuántica). Esto condujo a la formulación escalar de la mecánica representado de la introducción del concepto de energía.

La formulación de Lagrange y de Hamilton fue el resultado de esta búsqueda. Sin embargo, de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1) no es evidente cómo expresar la aceleración  $\ddot{q}(t)$  en función de  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$  y  $t$ .

Consideremos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \quad L = L(q_n, \dot{q}_n, t) \quad (2.7)$$

notemos que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \dot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m} \dot{q}^m \quad (2.8)$$

luego

$$[L]_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m} \dot{q}^m - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \dot{q}^m = 0 \quad (2.9)$$

así

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \right) \dot{q}^m = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m} \dot{q}^m} \quad (2.10)$$

Notemos que para poder expresar  $\ddot{q}$  como función de  $q$  y  $\dot{q}$  es necesario que la matriz  $W_{nm} = \partial^2 L / \partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m$  sea invertible, es decir,  $\det W_{nm} \neq 0$ .

Llamando

$$V_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m} \dot{q}^m \quad (2.11)$$

tenemos

$$W_{nm} \ddot{q}^m - V_n = 0 \quad (2.12)$$

Si  $\det W_{nm} \neq 0$  entonces existe una matriz inversa  $W^{kn} \equiv (W_{kn})^{-1}$  tal que  $W^{kn} W_{nm} = \delta_m^k$ . Luego, multiplicando (2.12) por  $W^{km}$ , tenemos

$$W^{kn} W_{nm} \ddot{q}^m - W^{kn} V_n = 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \ddot{q}^k = W^{kn} V_n = F(q, \dot{q}, t) \quad (2.14)$$

En la física fundamental, las teorías de gauge tales como la teoría electromagnética o las teorías de Yang-Mills (teoría electrodébil, cromodinámica cuántica), las correspondientes funciones de Lagrange tienen sus matrices Hessianas singulares, es decir,  $\det W_{nm} \neq 0$ .



## 2.2. Formalismo de Hamilton

Consiste en pasarse de las coordenadas  $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$  a  $\{q_i, p_i, t\}$ , donde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (2.15)$$

es el momentum generalizado.

Para escribir explícitamente la función de Hamilton es necesario expresar por medio de (2.15)  $\dot{q}_i = \bar{f}(q_i, p_i)$ . Esto implica que la función  $f_i$  sea invertible,

$$\dot{q}_n \rightarrow p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t) \quad (2.16)$$

es decir, tenemos una transformación de coordenadas. Esta transformación tiene como matriz Jacobiana a

$$J_{nm} = \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \quad (2.17)$$

esto es

$$J_{nm} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \equiv W_{nm} \quad (2.18)$$

Para clarificar esto calculemos  $dp_n$  recordando que  $p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t)$ ,

$$dp_n = \frac{\partial f_n}{\partial t} dt + \frac{\partial f_n}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m \quad (2.19)$$

$$= \frac{\partial f_n}{\partial t} dt + \frac{\partial f_n}{\partial q_m} dq_m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} d\dot{q}_m \quad (2.20)$$

esto implica que

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \right) d\dot{q}_m = dp_n - \frac{\partial p_n}{\partial t} dt - \frac{\partial p_n}{\partial q_m} dq_m \quad (2.21)$$

De aquí vemos que para expresar  $\dot{q} = \bar{f}(q, p, t)$  es necesario que

$$\det W_{nm} = \det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \right) \neq 0 \quad (2.22)$$

## 2.3. \*Transformaciones canónicas

Son transformaciones invertibles de la forma (Ref. [2])<sup>1</sup>

$$\hat{q}^j = \hat{q}^j(q, p), \quad \hat{p}^j = \hat{p}^j(q, p) \quad (2.23)$$

que dejan los corchetes fundamentales invariantes.

Antes de continuar, introduzcamos una notación más compacta en la cual colectamos las  $2N$  variables del espacio de fase en un único conjunto  $(x^\alpha) = (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$ . En esta notación los corchetes fundamentales pueden ser escritos como

$$\{x^\alpha, x^\beta\} = \Gamma^{\alpha\beta}, \quad \text{con} \quad \Gamma \equiv \begin{pmatrix} 0_N & 1_N \\ -1_N & 0_N \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

en términos de la matriz  $\Gamma$ , el corchete de Poisson para dos funciones del espacio de fase  $A$  y  $B$  queda

$$\{A, B\} = \Gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial B}{\partial x^\beta} \quad (2.25)$$

La condición para que  $\hat{x}(x)$  sea una transformación canónica se simplifica a  $\{\hat{x}^\alpha, \hat{x}^\beta\} = \Gamma^{\alpha\beta}$

<sup>1</sup>Ver también el libro Arnold. y [3]

### 3. Clase 3

#### 3.1. Simetrías y leyes de conservación

La homogeneidad del tiempo nos lleva a la conservación de la energía. Que el tiempo sea homogéneo significa que no hay instantes privilegiados. Los resultados de un experimento no dependen del instantes en que se lleven a cabo, es decir, si llevamos a cabo un experimento para  $t = t$  será también el mismo en  $t' = t + t_0$ . La función de Lagrange (que describe un sistema físico) debe ser invariante bajo un desplazamiento temporal, es decir,  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  es invariante bajo la transformación  $t \rightarrow t' = t + t_0$  o  $\delta t = t' - t = t_0$ . Esto se cumplirá sólo si  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  no depende explícitamente del tiempo, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Así,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (3.2)$$

De la derivada de Euler-Lagrange, sabemos

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} = [L]_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.3)$$

Reemplazando en (3.2)

$$\frac{dL}{dt} = \left( [L]_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (3.4)$$

$$= [L]_i \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (3.5)$$

de donde se obtiene

$$[L]_i \dot{q}_i = \frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.6)$$

$$= -\frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \quad (3.7)$$

Para trayectorias on-shell, es decir, para el espacio de soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange  $[L]_i = 0$ , se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 \quad (3.8)$$

Pero sabemos que la función de Hamilton es dada por

$$H = \dot{q}_i p_i - L = E \quad (3.9)$$

Luego,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

es decir, **la homogeneidad del tiempo implica la conservación de la energía.**

Por otra parte, la homogeneidad del espacio conduce a la conservación del momentum lineal. Que el espacio sea homogéneo nos dice que todos los puntos son equivalentes y no hay posiciones privilegiadas en el espacio. Esto implica que la función de Lagrange  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  debe ser invariante bajo una traslación espacial de la forma

$$q_i \rightarrow q'_i = q_i + a_i \quad \text{ó} \quad \delta q_i = q'_i - q_i = a_i \quad (3.11)$$

Así

$$\delta_q L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad (3.12)$$

De la derivada de Euler-Lagrange,

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.13)$$

$$\implies \delta_q L = \left( [L]_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) a_i = 0 \quad (3.14)$$

$$\implies [L]_i a_i + a_i \frac{d}{dt} p_i = 0 \quad (3.15)$$

Para trayectorias on-shell, es decir, cuando las ecuaciones de Euler-Lagrange se cumplen, se tiene

$$\frac{dp_i}{dt} = 0 \quad \implies \quad p_i = \text{constante del movimiento} \quad (3.16)$$

es decir, **la homogeneidad del espacio implica la conservación del momentum.**

Finalmente, se puede mostrar que la **isotropía del espacio implica la conservación del momentum angular**. Que el espacio sea isótropo quiere decir que todas las direcciones son privilegiadas. Luego, la función de Lagrange es invariante bajo rotaciones espaciales.

## 4. Clase 4

### 4.1. Teorema de Noether

**Teorema 4.1.** Si las ecuaciones del movimiento son invariantes bajo una transformación de coordenadas tales como

$$t \rightarrow t' = t'(t) \quad (4.1)$$

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_j, t) \quad (4.2)$$

entonces existe una cantidad conservada.

### Análisis y prueba

Sea  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$  la función de Lagrange de un sistema mecánico, donde  $i = 1, 2, \dots, f$ .  $q_i$  son las coordenadas del espacio de configuraciones. Sean  $q'_i$  y  $t'$  nuevas coordenadas relacionadas a las antiguas por medio de la transformación de coordenadas invertibles

$$t \rightarrow t' = t'(t) = t + \delta t \quad (4.3)$$

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_i, t) = q_i + \delta q_i \quad (4.4)$$

Las correspondientes velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  y  $\dot{q}'_i$  definidas como

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i, \quad \dot{q}'_i = \frac{d}{dt'} q'_i \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \dot{q}'_i = \frac{d}{dt} q'_i \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} (q_i + \delta q_i) \frac{dt}{dt'} \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow \dot{q}'_i = \left( \dot{q}_i + \frac{d\delta q_i}{dt} \right) \frac{dt}{dt'} \quad (4.7)$$

pero,

$$t' = t + \delta t \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d\delta t}{dt} \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 + d\delta t/dt} \quad (4.9)$$

Así,

$$\dot{q}'_i = \left( \dot{q}_i + \frac{d\delta q_i}{dt} \right) \frac{1}{1 + d\delta t/dt} \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{q}'_i = \frac{\dot{q}_i + d\delta q_i/dt}{1 + d\delta t/dt}} \quad (4.11)$$

$$\delta \dot{q}_i = \dot{q}'_i(t') - \dot{q}_i(t) \quad (4.12)$$

$$= \frac{d}{dt'} \dot{q}'_i(t') - \dot{q}_i(t) \quad (4.13)$$

$$= \frac{d}{dt} \dot{q}'_i(t') \frac{dt}{dt'} - \dot{q}_i(t) \quad (4.14)$$

$$= \frac{d}{dt} (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) \frac{dt}{dt'} - \dot{q}_i(t) \quad (4.15)$$

$$= \left( \dot{q}_i + \frac{d\delta \dot{q}_i}{dt} \right) \frac{dt}{dt'} - \dot{q}_i(t) \quad (4.16)$$

pero

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{1 + d\delta t/dt} = 1 - \frac{d\delta t}{dt} + \dots \quad (4.17)$$

$$\delta \dot{q}_i = \left( \dot{q}_i + \frac{d\delta q_i}{dt} \right) \left( 1 - \frac{d\delta t}{dt} \right) - \dot{q}_i \quad (4.18)$$

$$= \dot{q}_i + \frac{d\delta q_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{d\delta t}{dt} - \frac{d\delta q_i}{dt} \frac{d\delta t}{dt} - \dot{q}_i \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t} \quad (4.20)$$

#### 4.2. Transformaciones de simetría

Sabemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen al aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_q}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (4.21)$$

Sean ahora  $q'_i$  y  $t'$  otro sistema coordenado relacionado con  $q_i$  y  $t$  por medio de la transformación

$$q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_i, t) \quad (4.22)$$

$$t \rightarrow t' = t'(t) \quad \Rightarrow \quad t = t(t') \quad (4.23)$$

Escribimos (4.21) en términos de las nuevas coordenadas

$$dt = \frac{dt}{dt'} dt', \quad q_i = q_i(q'_i, t) \quad (4.24)$$

luego,

$$S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_1'=t'(t_1)}^{t_2'=t'(t_2)} dt' \frac{dt}{dt'} L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \quad (4.25)$$

Por otro lado la acción  $S'(q', \dot{q}', t')$  es dada por

$$S'(q', \dot{q}', t') = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L'(q'_i, \dot{q}'_i, t') \quad (4.26)$$

Dado que la física no puede ser alterada por un cambio de coordenadas, tenemos

$$S'(q', \dot{q}', t') = S(q, \dot{q}, t) \quad (4.27)$$

$$\int_{t_1'}^{t_2'} dt' L'(q', \dot{q}', t') = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' \frac{dt}{dt'} L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow L'(q', \dot{q}', t') = L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \frac{dt}{dt'} \quad (4.29)$$

Una transformación de coordenadas que deja invariante en forma a las EOM es llamada una transformación de simetría.

Por lo tanto, si  $q$  son las coordenadas de un sistema físico descrito por las EOM,

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, t) \quad (4.30)$$

entonces

$$t' = t'(t) \quad (4.31)$$

$$q' = q'(q, t) \quad (4.32)$$

será una transformación de simetría si las EOM transformadas es dada por

$$\boxed{\ddot{q}' = G(q', \dot{q}', t')} \quad (4.33)$$

**Teorema 4.2.** Si las EOM expresadas en términos de las nuevas variables tiene exactamente la misma forma funcional que las EOM expresadas en las variables antiguas y si ellas deben ser obtenidas a partir del principio de Hamilton, entonces las respectivas funciones de Lagrange deben diferir a lo más en una derivada total.

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q', t') \quad (4.34)$$

### Prueba

Dado que las EOM se obtienen a partir del principio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (4.35)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' L'(q', \dot{q}', t') \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' L(q', \dot{q}', t') + \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' \frac{d}{dt'} \Omega(q', t') \quad (4.36)$$

Dado que (4.27) es válida, tenemos

$$\int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' L'(q', \dot{q}', t') = \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} L(q, \dot{q}, t) = \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' L(q, \dot{q}', t') + \delta \Omega(q', t') \Big|_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} \quad (4.38)$$

el último término se cancela debido a que los puntos extremos son fijos,

$$\Rightarrow \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt L(q, \dot{q}, t) = \delta \int_{(q'_1, t'_1)}^{(q'_2, t'_2)} dt' L(q', \dot{q}', t') \quad (4.39)$$

Si queremos tener una simetría, entonces debemos imponer dos condiciones

1.  $L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q', t')$
2.  $S'(q', \dot{q}', t') = S(q, \dot{q}, t)$

Estas dos condiciones son el punto de partida para probar el teorema de Noether<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy\\_Noether](https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether)

## 5. Clase 5

Distinguimos entre dos tipos de variaciones. La primera es la **variación**  $\delta$  la cual compara dos coordenadas distintas en tiempos distintos. Es decir, compara las coordenadas  $q$  y  $q'$  en los tiempos  $t$  y  $t'$ ,

$$\delta q = q'(t') - q(t), \quad t' = t + \delta t \quad (5.1)$$

$$q'(t') = q(t) + \delta t \quad (5.2)$$

Por otro lado la **variación**  $\bar{\delta}$  compara dos coordenadas distintas en el mismo instante. Es decir, compara las coordenadas  $q$  y  $q'$  en el mismo instante,

$$\bar{\delta} q = q'(t) - q(t) \quad (5.3)$$

$$q'(t) = q(t) + \bar{\delta} q \quad (5.4)$$

### 5.1. Relación entre $\delta$ y $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta} q = q'(t) - q(t) + q'(t') - q'(t') \quad (5.5)$$

$$= (q'(t') - q(t)) + q'(t) - q'(t') \quad (5.6)$$

$$\implies \bar{\delta} q = \delta q - [q'(t') - q'(t)] \quad (5.7)$$

Pero

$$q'(t') = q'(t + \delta t) = q'(t) + \delta t \frac{dq'(t)}{dt} \quad (5.8)$$

$$\implies q'(t') - q'(t) = \delta t \frac{d}{dt} (q(t) + \bar{\delta} q) \quad (5.9)$$

$$= \delta t \frac{d}{dt} q(t) + \cancel{\delta t \frac{d}{dt} \bar{\delta} q} \quad (5.10)$$

el ultimo término es despreciable por que es de segundo orden.

$$\implies q'(t') - q'(t) = \delta t \dot{q} \quad (5.11)$$

$$\implies \boxed{\bar{\delta} q = \delta q(t) - \delta t \dot{q}(t)} \quad (5.12)$$

**Propiedad 5.1.** Los operadores  $\bar{\delta}$  y  $d/dt$  conmutan.

$$\bar{\delta} \dot{q} = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} q'(t) - \dot{q}(t) \quad (5.13)$$

$$= \frac{d}{dt} (q(t) + \bar{\delta} q) - \dot{q}(t) \quad (5.14)$$

$$= \cancel{\dot{q}(t)} + \frac{d}{dt} \bar{\delta} q - \cancel{\dot{q}(t)} \quad (5.15)$$

$$\implies \boxed{\bar{\delta} \dot{q} = \frac{d}{dt} \bar{\delta} q}, \quad \implies \boxed{\left[ \bar{\delta}, \frac{d}{dt} \right] = 0} \quad (5.16)$$

**Propiedad 5.2.** Los operadores  $\delta$  y  $d/dt$  no conmutan.

### 5.2. Prueba del teorema de Noether

Hemos visto que

$$\blacksquare \quad S'(q', \dot{q}', t') = S(q, \dot{q}, t) \quad (5.17)$$

$$\blacksquare \quad L'(q', \dot{q}', t') = L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \frac{dt}{dt'} \quad (5.18)$$

$$\blacksquare \quad L'(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{d}{dt'} \Omega(q', t') \quad (5.19)$$

De (5.18) y (5.19) vemos

$$L[q(q', t'), \dot{q}(q' \dot{q}', t'), t(t')] \frac{dt}{dt'} = L(q', \dot{q}', t') \frac{d}{dt'} \Omega(q', t') \quad (5.20)$$

cambiando a las coordenadas antiguas,

$$L(q, \dot{q}, t) = L[q'(q, t), \dot{q}'(q \dot{q}, t), t'(t)] \frac{dt'}{dt} + \frac{d}{dt'} \Omega(q'(q, t), t'(t)) \frac{dt'}{dt} \quad (5.21)$$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t') \frac{dt'}{dt} + \frac{d}{dt} \Omega(q', t') \quad (5.22)$$

en el entendido que

$$q' = q'(q, t), \quad \dot{q}' = \dot{q}'(q, \dot{q}, t), \quad t' = t'(t) \quad (5.23)$$

Dado que  $t' = t + \delta t$ ,

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \frac{d}{dt} \delta t \quad (5.24)$$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(q', \dot{q}', t') \left( 1 + \frac{d}{dt} \delta t \right) + \frac{d}{dt} \Omega(q', t') \quad (5.25)$$

$$\implies L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q', t') \quad (5.26)$$

Dado que las transformaciones son continuas, basta estudiar el caso infinitesimal.

De (5.26),

$$-\delta L = L(q, \dot{q}, t) - L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t + \delta t) \quad (5.27)$$

$$= L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t + \delta t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q + \delta q, t + \delta t) \quad (5.28)$$

Expandiendo el primer término hasta primer orden

$$-\delta L = L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q + \delta q, t + \delta t) \quad (5.29)$$

Si consideramos el caso límite donde  $\delta q = 0, \delta t = 0$

$$\delta L = 0, \quad \frac{d}{dt} \Omega(q, t) = 0 \quad (5.30)$$



Esto nos permite escribir

$$-\delta L = L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \Omega(q + \delta q, t + \delta t) - \frac{d}{dt} \Omega(q, t) \quad (5.31)$$

$$= L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t + \delta t \frac{d}{dt} [\Omega(q + \delta q, t + \delta t) - \Omega(q, t)] \quad (5.32)$$

$$\Rightarrow \boxed{-\delta L = L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t)} \quad (5.33)$$

Reemplazando  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , tenemos

$$\delta L = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad (5.34)$$

Reemplazando (5.34) en (5.33),

$$-\sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t) \quad (5.35)$$

Estudiaremos ahora el primer término del lado izquierdo. Dado que  $\delta \dot{q}_i = d/dt \delta q_i - \dot{q}_i d/dt \delta t$  (ecuación (4.20)),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{dt} \delta q_i - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \right) \quad (5.36)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \quad (5.37)$$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \quad (5.38)$$

$$= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right) \delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t \quad (5.39)$$

Introduciendo en (5.35),

$$\sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right) \delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{d}{dt} \delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = -L(q, \dot{q}, t) \frac{d}{dt} \delta t - \frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t) \quad (5.40)$$

$$\sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \right) \delta q_i + \left( L(q, \dot{q}, t) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d}{dt} \delta t + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = -\frac{d}{dt} \delta \Omega(q, t) \quad (5.41)$$

después de algo de cálculo se llega a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + L \delta t - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \delta t + \delta \Omega \right] &= - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \\ &\quad + \left( \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \right) \delta t - \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t \end{aligned} \quad (5.42)$$

Analicemos los dos últimos términos de (5.42). Dado que  $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , se tiene que

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.43)$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i \right) \quad (5.44)$$

y además

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i \quad (5.45)$$

$$\left( \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} \right) - \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_i} \ddot{q}_i} \right) \quad (5.46)$$

$$= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \quad (5.47)$$

Así, (5.42) toma la forma

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) + L \delta t + \delta \Omega \right] = - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) \quad (5.48)$$

Dado que

$$\bar{\delta} q_i = \delta q_i - \dot{q}_i \delta t \quad (5.49)$$

y que

$$[L]_i = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (5.50)$$

tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) + L \delta t + \delta \Omega \right] = -[L]_i \bar{\delta} q_i \quad (5.51)$$

luego,

$$[L]_i \bar{\delta} q_i + \frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \right] = 0 \quad (5.52)$$

esto implica, que en el espacio de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \right] = 0 \quad (5.53)$$

Definiendo la cantidad,

$$J \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \quad (5.54)$$

$$\Rightarrow \frac{dJ}{dt} = 0, \Rightarrow J = \text{constante} \quad (5.55)$$

Luego,  $J$  es una cantidad conservada,

$$\boxed{[L]_i \bar{\delta} q_i + \frac{dJ}{dt} = 0} \quad (5.56)$$

## 6. Clase 6

### 6.1. Continuación prueba del teorema de Noether

De la clase 5 vimos que

$$\boxed{[L]_i \bar{\delta} q_i + \frac{dJ}{dt} = 0}, \quad [L]_i = 0 \quad (6.1)$$

donde

$$J \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \quad (6.2)$$

con

$$\bar{\delta} q_i = \delta q_i - \dot{q}_i \delta t \quad (6.3)$$

$$J = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) + L \delta t + \delta \Omega \quad (6.4)$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \delta t + L \delta t + \delta \Omega \quad (6.5)$$

pero sabemos que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H_c = \sum_i p_i \dot{q}^i - L \quad (6.6)$$

así,

$$\boxed{J = \sum_i p_i \delta q^i - H_c \delta t + \delta \Omega} \quad (6.7)$$

donde  $H_c$  es el usual Hamiltoniano en el caso de que la función de Lagrange sea regular, y es el llamado **Hamiltoniano canónico** en el caso de que la función de Lagrange  $L$  sea de naturaleza singular. En (6.1) tenemos que

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (6.8)$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} \ddot{q}_j = 0 \quad (6.9)$$

Definiendo

$$V_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \quad (6.10)$$

$$W_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j} \quad (6.11)$$

se tiene<sup>3</sup>

$$\implies [L]_i = V_i - W_{ij} \ddot{q}^j \quad (6.12)$$

En el caso de que  $L$  sea regular, podemos escribir

$$V_i - W_{ij} \ddot{q}^j = 0 \quad / W^{ki} \quad (6.13)$$

$$W^{ki} V_i - W^{ki} W_{ij} \ddot{q}^j = 0 \quad (6.14)$$

$$W^{ki} V_i - \delta_j^k \ddot{q}^j = 0 \quad (6.15)$$

---

<sup>3</sup>Abusando un poco de la posición de los índices, que para efecto des este cálculo no es tan relevante.

$$\implies \boxed{\ddot{q}^k = W^{ki} V_i} \quad (6.16)$$

Dado que la derivada de Euler-Lagrange es

$$[L]_i = V_i - W_{ij} \ddot{q}^j \quad (6.17)$$

tenemos que (6.1) toma la forma

$$(V_i - W_{ij} \ddot{q}^j) \bar{\delta} q^i + \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (6.18)$$

$$V_i \bar{\delta} q^i - W_{ij} \ddot{q}^j \bar{\delta} q^i + \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (6.19)$$

pero  $J = J(q, \dot{q}, t)$ ,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} \quad (6.20)$$

$$\implies V_i \bar{\delta} q^i - W_{ij} \ddot{q}^j \bar{\delta} q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.21)$$

$$V_i \bar{\delta} q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - W_{ji} \ddot{q}^i \bar{\delta} q^j = 0 \quad (6.22)$$

$$V_i \bar{\delta} q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} + \left( \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} - W_{ij} \bar{\delta} q^j \right) \ddot{q}^i = 0 \quad (6.23)$$

donde renombramos índices mudos y usado el hecho de que  $W_{ij} = W_{ji}$  por como fue definido.

Teniendo en cuenta que  $J = J(q, \dot{q}, t)$ ,

$$V_i \bar{\delta} q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}^i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} - W_{ij} \bar{\delta} q^j = 0 \quad (6.25)$$

Multiplicando (6.25) por  $W^{ki}$ , se tiene,

$$\bar{\delta} q^k = W^{ki} \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^i} \quad (6.26)$$

Introduciendo (6.26) en (6.24), tenemos

$$V_i W^{ij} \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.27)$$

De (6.16)

$$\ddot{q}^k = W^{ji} V_i = W^{ij} V_i \quad (6.28)$$

reemplazando (6.27),

$$\ddot{q}^j \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} \dot{q}_i + \ddot{q}^j \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (6.30)$$

$$\implies \boxed{\frac{dJ}{dt} = 0}, \quad J = \text{constante} \quad (6.31)$$

$$J = \sum_i p_i \delta q^i - H_c \delta t + \delta \Omega = \text{constante} \quad (6.32)$$

## 6.2. Grupos y álgebras de Lie

Sea  $A$  un conjunto de elementos  $\{a, b, \dots\}$  dotado de una operación binaria interna  $\square$  tal que  $\forall a, b, c \in A \square b = c \in A$  la operación  $\square$  es cerrada (en este caso tenemos un **magma**).

Si la operación binaria interna tiene solo la propiedad asociativa entonces estamos en presencia de un **semigrupo**.

**Definición 6.1.** Un **semigrupo** es una estructura algebraica dotada de una sola operación binaria interna que satisface la propiedad asociativa.

**Ejemplo 6.1.** Sea  $A = \{a, b\}$  dotado de la operación  $\diamond$ . Una tabla de multiplicación es la siguiente.

$$\begin{array}{c|cc} \diamond & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & b \end{array} \quad (6.33)$$

$$(a \diamond b) \diamond a = b \diamond a = a \quad (6.34)$$

$$a \diamond (b \diamond a) = a \diamond a = a \quad (6.35)$$

Luego, la operación  $\diamond$  es asociativa. Notemos que  $a \diamond a = a$  y  $a \diamond b = b$  pero  $b \diamond a = a$  lo que implica que  $a \diamond b \neq b \diamond a$ . Luego el conjunto  $A$  con la operación  $\diamond$  dada en (6.33) no tiene elemento unidad y corresponde a un semigrupo.

Si la operación binaria interna además de ser asociativa admite un elemento unidad, entonces estamos en presencia de un **monoide**.

**Definición 6.2.** Un **monoide** es una estructura algebraica dotada de una operación binaria interna que admite la propiedad asociativa y de elemento unidad.

Si sucediera que cada elemento del monoide admitiera un elemento neutro, entonces estaríamos en presencia de un grupo.

**Definición 6.3.** Un **grupo** es una estructura algebraica dotada de una operación binaria interna que satisface

1. asociatividad
2. tiene elemento unidad
3. cada elemento de la estructura admite un elemento inverso.

Hasta ahora hemos visto estructuras con solo una ley de composición interna. Una estructura que tiene dos leyes de composición interna es el **anillo**.

**Definición 6.4.** Un **anillo** es una estructura algebraica dotada denotada por  $(A, \square, *)$  donde

1.  $A$  con respecto a la operación  $\square$  es un grupo abeliano (conmutativo)
2.  $A$  con respecto de  $*$  es un semigrupo.

Normalmente la operación  $\square$  se denota por  $+$  y se le llama adición, y  $*$  se denota por  $\cdot$  o solo por yuxtaposición.

Así entonces una estructura  $(A, +, \cdot)$  se llama anillo si:

1.  $\forall a, b, c \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$
2.  $\forall a \in A, \exists 0 \in A / a + 0 = 0 + a = a$
3.  $\forall a \in A, \exists (-a) \in A, a + (-a) = (-a) + a = 0$
4.  $\forall a, b \in A, a + b = b + a$
5.  $\forall a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$

Si sucediera que  $\forall a, b \in A, ab = ba$  el anillo se llamará **anillo conmutativo**.

Si ocurriera que  $\forall a \in A, \exists 1 \in A / a1 = 1a = a$  el anillo se llamará **anillo con unidad**.

**Definición 6.5.** Sea  $(A, +, \cdot)$  un anillo. Si ocurriera que  $\forall a \in A$ , existiera un  $a^{-1}$ , solo para el elemento 0, entonces la estructura algebraica se llama llamada un **campo**.

## 7. Clase 7

**Definición 7.1.** Una estructura  $(A, +, \cdot)$  es un anillo si

- $(A, +)$  es un grupo abeliano
- $(A, \cdot)$  es un semigrupo

En el caso que la operación de multiplicación admita un elemento unidad, entonces  $(A, +, \cdot)$  será un anillo con unidad, i.e.  $\forall x \in A, \exists e \in A / ex = xe = x$ .

En el caso que la operación multiplicativa del anillo sea conmutativa, el anillo es un anillo conmutativo.

**Definición 7.2.** Un campo denotado por  $K$ , es una estructura que además de tener las propiedades del anillo con unidad, cada elemento  $A$ , excepto el cero, tiene un inverso. Por lo tanto un campo  $(K, +, \cdot)$  es una estructura tal que

- $(K, +)$  es un grupo abeliano aditivo.
- $(K - 0, \cdot)$  es un grupo abeliano multiplicativo.

Hasta ahora hemos estudiado estructuras que tienen una ó dos operaciones binarias internas. Consideremos ahora una estructura dotada de una operación binaria interna y una operación binaria externa.

### 7.1. Espacio lineal o espacio vectorial

**Definición 7.3.** Una estructura  $(M, K, \bullet)$  es llamado un espacio vectorial, si

- $M$  es un grupo abeliano,
- $K$  es un campo conmutativo,
- $\bullet$  es una operación binaria externa que define la acción del campo  $K$  sobre el grupo  $M$ ,

$$\bullet : K \times M \rightarrow M \quad (7.1)$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \bullet x, \quad \forall x \in M, \forall \alpha \in K \quad (7.2)$$

- La operación binaria interna de  $M$  está relacionada con la operación binaria externa  $\bullet$  a través de una operación distintiva mixta.

$$\bullet \alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$$

$$\bullet (\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$$

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in M.$$

Normalmente los elementos  $x \in M$  se llaman **vectores** y los elementos  $\alpha \in K$  se llaman **escalares** y la operación  $\bullet$  se llama producto por escalar.

## 7.2. Álgebra y álgebra de Lie

**Definición 7.4.** Una estructura algebraica  $(A, K, \bullet)$  es llamada un álgebra, si

- $A$  es un anillo,
- $K$  es un campo conmutativo,
- $\bullet$  es una operación binaria externa que define la acción del campo  $K$  sobre el anillo,

$$\bullet : K \times A \rightarrow A \quad (7.3)$$

- La operación binaria interna aditiva del anillo  $(+)$  está relacionada con la operación binaria externa a través de la propiedad distributiva mixta

$$\begin{aligned} \bullet \alpha \bullet (x + y) &= \alpha \bullet x \alpha \bullet y, & \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in A \\ \bullet (\alpha + \beta)x &= \alpha \bullet x + \beta \bullet x \end{aligned}$$

- La operación binaria interna multiplicativa del anillo (denotada por  $\diamond$ ) está relacionada con la operación binaria externa  $\bullet$  por medio de la propiedad asociativa mixta

$$\alpha \bullet (x \diamond y) = (\alpha \bullet x) \diamond y = x \diamond (\alpha \bullet y), \quad \forall x, y \in A, \forall \alpha \in K \quad (7.4)$$

1. La operación binaria interna del anillo  $\diamond$  se le llama producto algebraico.

En el caso que la multiplicación algebraica  $\diamond$  sea asociativa, i.e.,  $\forall x, y, z \in A$ ,

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) \quad (7.5)$$

entonces el álgebra se llama **álgebra asociativa**.

2. Si la multiplicación algebraica tiene además de la propiedad asociativa, al elemento unidad entonces el álgebra es llamada **álgebra asociativa unital**.
3. Si la operación multiplicación algebraica es una operación antisimétrica, i.e., si
- 4.

$$x \diamond y = [x, y] = xy - yx \quad (7.6)$$

entonces el álgebra se llama **álgebra de Lie** y la operación  $\diamond$  antisimétrica satisface la propiedad derivativa conocida como identidad de Jacobi.

## 7.3. Grupos, álgebras y simetrías

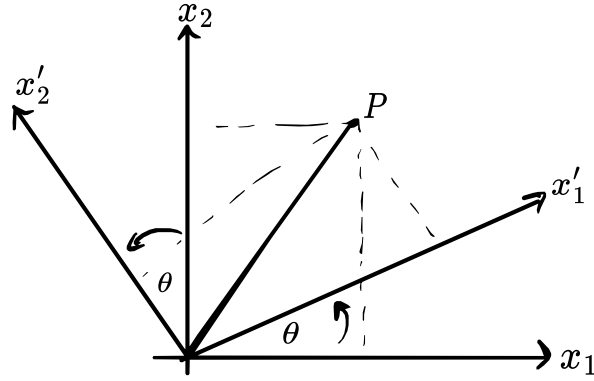
El concepto de grupo está muy relacionado con el concepto de invariancia o de simetría de objetos tales como superficies, funciones, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, entre otros.

### Nota histórica:

- El estudio de las simetrías de las ecuaciones algebraicas se hace en el contexto de la teoría de Galois <sup>4</sup>.
- El estudio de las simetrías de las ecuaciones diferenciales se hacen en el contexto de la teoría de Lie <sup>5</sup>.

Los grupos de Lie son grupos continuos que tienen la propiedad que es suficiente estudiarlos en su forma infinitesimal. En física, los grupos de Lie se introducen como grupos de transformaciones de coordenadas, i.e., como actuando sobre los elementos de una variedad.





**Ejemplo 7.1.** Consideremos la típica rotación en un plano de los ejes coordenados en un ángulo  $\theta$ , La relación entre las coordenadas primadas y las sin primar viene dada por

$$x'_1 = \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \quad (7.7)$$

$$x'_2 = \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \quad (7.8)$$

o de manera equivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{R(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x \quad (7.9)$$

Así, tenemos una transformación de la forma

$$x' = f(x, \theta) \quad (7.10)$$

además, notemos que

- $\{R(\theta)\}$  tiene unidad  $\forall \theta$ , dada por

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

- tiene inverso,  $\forall \theta, \exists (-\theta)$ .
- es asociativo,
- es conmutativo

Si la transformación  $x' = f(x, \theta)$ , entonces la unidad es dada por  $x' = f(x, 0) = f(x, e) = x$ .

**Definición 7.5.** Un conjunto de transformaciones

$$x'^i = f^i(x', \dots, x^n; g^1, \dots, g^r) \equiv f(x, g) \quad (7.12)$$

es llamado un **grupo de transformaciones  $r$ -paramétrico** si

1. admite el elemento unidad

$$x' = f(x, e) = x \quad (7.13)$$

<sup>4</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste\\_Galois](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois)

<sup>5</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Sophus\\_Lie](https://es.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie)

2. admite elemento inverso
3. tiene definida una ley de composición interna,

$$x' = f(x, g), \quad x'' = f(x', g') = f[f(x, g), g'] = f(x, g'') \quad (7.14)$$

entonces

$$\boxed{g'' = g''(g, g')} \quad (7.15)$$

**Definición 7.6.** Un conjunto de transformaciones es un **grupo de simetría** de una ecuación diferencial

$$F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad \text{con } x = (x^1, \dots, x^n) \quad (7.16)$$

si la ecuación (7.16) permanece invariante en forma bajo la acción del grupo,

$$F(x', x'^{(1)}, \dots, x'^{(n)}) = 0 \quad (7.17)$$

Lo interesante de los grupos de Lie es que basta estudiar sus versiones infinitesimales.

$$x' = f(x, g) \rightarrow x' = f(x, \delta g) \quad (7.18)$$

$$x'^i = f^i(x, \delta g) = f^i(x, e) + \left. \frac{\partial f^i(x, \delta g)}{\partial g^k} \right|_{g=e} \delta g^k + \dots \quad (7.19)$$

donde  $x' = f(x, e) = x$

$$x'^i = x^i + \left. \frac{\partial f^i(x, \delta g)}{\partial g^k} \right|_{g=e} \delta g^k + \dots \quad (7.20)$$

$$\Rightarrow \delta x^i = x'^i - x^i = \left. \frac{\partial f^i(x, \delta g)}{\partial g^k} \right|_{g=e} \delta g^k \quad (7.21)$$

Esto significa que un cambio infinitesimal en los parámetros implica un cambio infinitesimal en las coordenadas de la variedad sobre la cual actúa el grupo.

## 8. Clase 8

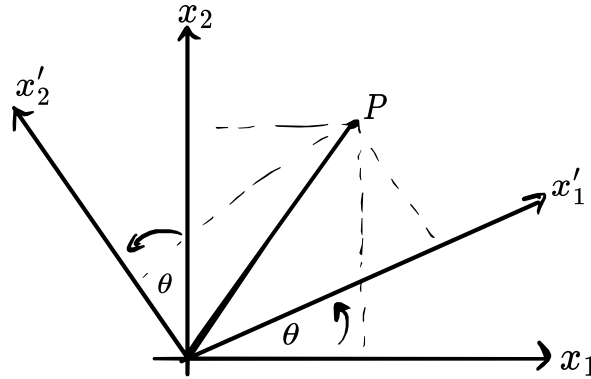
### 8.1. Generadores de grupos de Lie

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad dotada de sistemas de coordenadas  $\{x_i\}_{i=1}^n, \{x'_i\}_{i=1}^n$  y sea  $G$  un grupo  $r$ -paramétrico  $a_\nu, \nu = 1, \dots, r$ . La acción del grupo  $G$  sobre la variedad  $\mathcal{M}$  es dada por el grupo de transformaciones

$$x' = f(x, a)x'_i = f_i(x_j, a_\nu) \quad (8.1)$$

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (8.2)$$

Para clarificar ideas consideremos el ejemplo de una variedad  $\mathcal{M}$  de 2 dimensiones que admite las coordenadas  $x : (x_1, x_2)$  y  $x' : (x'_1, x'_2)$  y un grupo uni-paramétrico  $G = SO(2)$  de rotaciones en el plano,



$$x'_1 = \cos \theta x_1 - \sin \theta x_2 \quad (8.3)$$

$$x'_2 = \sin \theta x_1 + \cos \theta x_2 \quad (8.4)$$

o de manera equivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{R(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_x \quad (8.5)$$

$$\implies x' = R(\theta)x \longleftrightarrow x' = f(x, \theta)x \quad (8.6)$$

o en general

$$\implies x' = R(a)x \longleftrightarrow x' = f(x, a)x \quad (8.7)$$

De aquí vemos:

1. La acción de  $G = SO(2)$  es rotar las coordenadas de  $\mathcal{M}$ .
2. Si el ángulo de rotación es pequeño, entonces el cambio experimentado por las coordenadas es también pequeño. Esto implica que en general, un pequeño cambio en los parámetros del grupo induce cambios pequeños en las coordenadas de  $\mathcal{M}$ .

Notemos que cuando  $\theta = 0$ ,

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

es decir,

$$x'_1 = x_1 \quad x'_2 = x_2 \quad (8.9)$$

$$x' = R(0)x = x, \quad x' = f(x, 0) = x \quad (8.10)$$

Teniendo en cuenta que en el estudio de los grupos de Lie basta con estudiar su comportamiento infinitesimal, consideremos la expansión infinitesimal de la transformación  $x' = f(x, a)$  alrededor de  $a = 0$ .

$$x' = f(x, a) = f(x, 0) + \left. \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0} da + \dots \quad (8.11)$$

$$x'_i = f_i(x_j, a_\nu) = f_i(x_j, 0) + \frac{\partial f_i(x_j, 0)}{\partial a_\nu} da_\nu \quad (8.12)$$

$$x' = x + \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} da \quad (8.13)$$

$$x'_i = x_i + \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} da_\nu \quad (8.14)$$

Esto implica que

$$dx' = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a} da, \quad dx'_i = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} da_\nu \quad (8.15)$$

Definiendo por comodidad

$$u(x) = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a}, \quad u_{i\nu}(x) = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} \quad (8.16)$$

Así,

$$dx = u(x)da, \quad dx_i = u_{i\nu}da_\nu \quad (8.17)$$

Notar que, de lo anterior<sup>6</sup>

$$\boxed{\frac{dx_i}{da_\nu} = u_{i\nu}(x)} \quad (8.18)$$

También podemos escribir

$$dx_i = \sum_{\nu} u_{i\nu}(x) da_\nu \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \nu = 1, 2, \dots, r \quad (8.19)$$

**Definición 8.1.** Sea  $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$  una función definida sobre la variedad  $\mathcal{M}$ . La función  $F(x)$  es **invariante** bajo el grupo de transformaciones

$$x' = f(x, a) \quad (8.20)$$

si

$$F(x') = F[f(x, a)] = F(x).$$

<sup>6</sup>No estamos siendo estrictos con la posición de los índices coordenados de momento.

Consideremos ahora el cambio experimentado por la función  $F(x)$  cuando cambian las coordenadas  $x$  debido a un cambio en los parámetros del grupo.

Bajo un cambio en  $x$  se tiene que  $F(x)$  cambia como<sup>7</sup>

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = \frac{\partial F}{\partial x} u(x) da \quad (8.21)$$

$$dF = da \left( u(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) F \quad (8.22)$$

$$dF = da_\nu \left( u_{i\nu}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) F \quad (8.23)$$

donde hemos usado (8.17).

**Definición 8.2.** Se define el **generador** del grupo como el operador dado por

$$\boxed{X_\nu = \sum_i u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \nu = 1, 2, \dots, r \quad (8.24)$$

Así, existe un generador por cada parámetro del grupo.

Esto implica que

$$dF = da_\nu X_\nu F \equiv XF \quad (8.25)$$

donde

$$X = da_\nu X_\nu \equiv da^\nu X_\nu \quad (8.26)$$

**Observación 8.1.** Los generadores  $X_\nu$  son operadores que pueden o no ser operadores hermíticos. En el caso que ellos no sean hermíticos, pueden ser convertidos en hermíticos en general, multiplicándolos por  $i$ .

**Teorema 8.1.** A partir de un conjunto de operadores hermíticos  $X_\nu$  podemos obtener una representación del grupo por medio de operadores unitarios

$$\boxed{U(a_\nu) = e^{ia_\nu X_\nu}} \quad (8.27)$$

**Teorema 8.2.** Si  $X_\nu$  y  $X_\mu$  son generadores de un grupo de Lie, entonces su conmutador es una combinación lineal de dichos generadores:

$$[X_\nu, X_\mu] = C_{\nu\mu}^\lambda X_\lambda \equiv C_{\mu\nu\lambda} X_\lambda \quad (8.28)$$

donde

$$C_{\nu\mu}^\lambda = -C_{\mu\nu}^\lambda \quad (8.29)$$

Dado que este producto es antisimétrico, satisface la **identidad de Jacobi**,

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] + [[X_\nu, X_\lambda], X_\mu] = 0 \quad (8.30)$$

**Ejemplo 8.1.** Consideremos el siguiente grupo de transformaciones

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \quad (8.31)$$

■ Encuentre los generadores del grupo

---

<sup>7</sup>El cambio en el parámetro genera un cambio en las coordenadas, y el cambio en las coordenadas genera un cambio en la función  $F(x)$ .

- Determine sus relaciones de conmutación

**Solución 8.1.** De (8.31) vemos que la identidad del grupo es dada por  $\alpha_1 = 1$  y  $\alpha_2 = 0$  ya que  $x' = 1x + 0 = x$ , lo que implica que  $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0) = (1, 0)$ . Con el objeto de tener una identidad nula, definimos

$$a_1 = \alpha_1 - 1, \quad a_2 = \alpha_2 \quad (8.32)$$

Es decir,

$$a_1^0 = \alpha_1^0 - 1, \quad a_2^0 = \alpha_2^0 \quad (8.33)$$

$$\implies a_1^0 = 1 - 1 = 0, \quad a_2^0 = 0 \quad (8.34)$$

$$\implies a_0 = (a_1^0, a_2^0) = (0, 0) \quad (8.35)$$

Así, el grupo de transformaciones toma la forma

$$x' = (1 + a_1)x + a_2 \quad (8.36)$$

$$\implies \boxed{x' = f(x, a) = x + a_1x + a_2} \quad (8.37)$$

$$\implies dx_i = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} da_\nu = u(x)_{i\nu} da_\nu \quad (8.38)$$

$$dx_i = \sum_\nu \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} da_\nu \quad (8.39)$$

$$dx_1 \equiv dx = \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 \quad (8.40)$$

$$dx = x da_1 + 1 da_2 \quad (8.41)$$

$$\boxed{dx = x da_1 + da_2} \quad (8.42)$$

pero

$$dx = u_{11} da_1 + u_{12} da_2 \quad (8.43)$$

$$\implies u_{11} = x, \quad u_{12} = 1 \quad (8.44)$$

de manera que

$$X_\nu = \sum_i u(x)_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.45)$$

$$X_1 = u_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} = u_{11} \frac{\partial}{\partial x} = x \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.46)$$

$$X_2 = u_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} = u_{12} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.47)$$

Así, los generadores del grupo son

$$X_1 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.48)$$

El conmutador es

$$[X_1, X_2]f = X_1X_2f - X_2X_1f \quad (8.49)$$

$$= x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (8.50)$$

$$= x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (8.51)$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x} \quad (8.52)$$

$$= -X_2f \quad (8.53)$$

$$\implies [X_1, X_2] = -X_2 \quad (8.54)$$

Dado que

$$[X_1, X_2] = C_{12}^1 X_1 + C_{12}^2 X_2 \quad (8.55)$$

se tiene que las constantes de estructura son

$$C_{12}^1 = 0, \quad C_{12}^2 = -1 \quad (8.56)$$

## 8.2. Grupos matriciales

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad que admite las bases<sup>8</sup>  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n, \{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$  y  $\{\hat{e}''_i\}_{i=1}^n$  asociadas a las coordenadas  $\{x_i\}_{i=1}^n, \{x'_i\}_{i=1}^n$  y  $\{x''_i\}_{i=1}^n$ . Un cambio de base es dado por

$$\hat{e}'_j = B_j^i \hat{e}_i, \quad \hat{e}''_k = A_k^j \hat{e}'_j, \quad \hat{e}''_k = C_k^i \hat{e}_i \quad (8.57)$$

es decir,

$$\hat{e}''_k = A_k^j B_j^i \hat{e}_i = C_k^i \hat{e}_i \quad (8.58)$$

$$\implies \boxed{C_k^i = A_k^j B_j^i} \quad (8.59)$$

Todas las bases de un espacio vectorial están relacionadas por medio de matrices. El conjunto de estas matrices constituyen un grupo.

**Definición 8.3.** El conjunto de matrices  $n \times n$  invertible que definen un cambio de base constituyen un grupo conocido como **grupo lineal general** definido sobre los espacios  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n$ . Estos grupos son denotados por  $GL(n, \mathbb{R}), GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{Q})$ .

### Grupo general lineal $GL(n, \mathbb{C})$

Grupo compuesto por todas las matrices complejas invertibles  $n \times n$ .

Toda matriz  $A \in GL(n, \mathbb{C}^n)$  tiene  $2n^2$  elementos ( $n^2$  elementos reales y  $n^2$  elementos imaginarios).

Este grupo tiene  $2n^2$  parámetros reales, por lo cual tiene dimensión  $2n^2$ .

### Grupo general lineal real $GL(n, \mathbb{R})$

Si exigimos que las matrices de  $GL(n, \mathbb{C}^n)$  sean todas con elemento reales, obtenemos el grupo lineal general real  $GL(n, \mathbb{R}^n)$ , el cual tiene  $n^2$  parámetros reales.

### Grupo general lineal especial $SL(n, \mathbb{C})$

Si exigimos que todas las matrices de  $GL(n, \mathbb{C})$  satisfagan las condiciones que tengan determinante  $+1$ , entonces obtenemos el grupo lineal especial  $SL(n, \mathbb{C})$ . Así, si  $A \in SL(n, \mathbb{C})$ , entonces  $\det A = 1$ .

---

<sup>8</sup>Ver Ref. [4]

**Grupo general lineal especial real  $SL(n, \mathbb{R})$** 

Si exigimos que todas las matrices de  $GL(n, \mathbb{R})$  tengan determinante  $+1$  entonces obtenemos el grupo especial lineal real  $SL(n, \mathbb{R})$ .



## 9. Clase 9

### Grupo unitario $U(n)$

Es el grupo de todas las matrices complejas unitarias de  $n \times n$ . Esto significa que si  $A \in U(n)$ , entonces  $A^\dagger A = 1 \implies A^\dagger = A^{-1}$ .

### Grupo especial unitario $SU(n)$

Si exigimos a las matrices del grupo  $U(n)$  que tengan determinante 1, entonces obtenemos el grupo especial unitario  $SU(n)$ . Esto significa que si  $A \in SU(n)$ , entonces  $A^\dagger A = 1$  y  $\det A = 1$ .

Ejemplos importantes en física son el grupo  $SU(2)$  y el grupo  $SU(3)$ .

También son de gran importantes los grupos  $SU(4)$ ,  $SU(5)$  y  $SU(6)$ .

**Nota:** El grupo  $SU(2) \times U(1)$  está relacionado con las fuerzas electrodébiles (unificación del electromagnetismo con las fuerzas nucleares débiles). El grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  está relacionado con la gran-unificación (unificación del electromagnetismo con las fuerzas nucleares débiles y fuertes).

### Grupo ortogonal $O(n, \mathbb{C})$

Es el grupo de todas las matrices complejas ortogonales de  $n \times n$ . Esto significa que si  $A \in O(n, \mathbb{C})$  entonces  $A^T A = 1 \implies A^T = A^{-1}$ .

### Grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{C})$

Si exigimos que las matrices del grupo  $O(n, \mathbb{C})$  tengan determinante 1, entonces obtenemos el grupo ortogonal especial  $SO(n, \mathbb{C})$ . Es decir, si  $A \in SO(n)$ <sup>9</sup> entonces  $A^T A = 1$  y  $\det A = 1$

#### 9.1. Ejemplo: Generadores y álgebra de $SO(3)$

**Ejemplo 9.1.** Determine los generadores del grupo ortogonal especial 3-dimensional  $SO(3)$  así como también su álgebra de Lie.

**Solución 9.1.** El grupo  $SO(3)$  es el grupo de matrices ortogonales de  $3 \times 3$  y de determinante igual a 1. La acción de  $SO(3)$  sobre  $E_3$  (o  $\mathbb{R}^3$ ) es dada por el grupo de transformaciones

$$x' = Ax \tag{9.1}$$

de aquí vemos que el elemento unidad es dado por  $A_0 = 1 \implies x' = A_0 x = x$ . Para lograr tener un elemento unidad nulo definimos

$$a = A - 1 \implies a_0 = A_0 - 1 = 1 - 1 = 0 \tag{9.2}$$

así, la transformación (9.1) toma la forma

$$x' = f(x, a) = (1 + a)x = x + ax \tag{9.3}$$

$$dx = da \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a} \tag{9.4}$$

$$= dax \tag{9.5}$$

y recordamos que

$$dx_i = \sum_{\nu} u_{i\nu} da_{\nu} \tag{9.6}$$

---

<sup>9</sup>Por notación se puede omitir la  $\mathbb{C}$ .

Dado que  $A^T A = 1$ , tenemos que en el caso infinitesimal (a primer orden)

$$(1 + da^T)(1 + da) = 1 \quad (9.7)$$

$$1 + da + da^T + \cancel{da^T da} = 1 \quad (9.8)$$

es decir,

$$da = -da^T \quad (9.9)$$

explícitamente tenemos

$$\begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} da_{11} & da_{21} & da_{31} \\ da_{12} & da_{22} & da_{32} \\ da_{13} & da_{23} & da_{33} \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

luego,

$$da = \begin{pmatrix} 0 & da_{12} & da_{13} \\ -da_{12} & 0 & da_{23} \\ -da_{13} & -da_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

Definimos

$$da_{12} = da_3, \quad da_{13} = -da_2, \quad da_{23} = da_1 \quad (9.12)$$

así

$$da = \begin{pmatrix} 0 & da_3 & -da_2 \\ -da_3 & 0 & da_1 \\ da_2 & -da_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

de (9.5)

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & da_3 & -da_2 \\ -da_3 & 0 & da_1 \\ da_2 & -da_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2 da_3 - x_3 da_2 \\ dx_2 &= -x_1 da_3 + x_3 da_1 \\ dx_3 &= x_1 da_2 - x_2 da_1 \end{aligned} \quad (9.15)$$

De (9.6)

$$dx_1 = u_{11} da_1 + u_{12} da_2 + u_{13} da_3 \quad (9.16)$$

$$dx_2 = u_{21} da_1 + u_{22} da_2 + u_{23} da_3 \quad (9.17)$$

$$dx_3 = u_{31} da_1 + u_{32} da_2 + u_{33} da_3 \quad (9.18)$$

comparando

$$u_{11} = 0, \quad u_{12} = -x_3, \quad u_{13} = x_2 \quad (9.19)$$

$$u_{21} = x_3, \quad u_{22} = 0_3, \quad u_{23} = -x_1 \quad (9.20)$$

$$u_{31} = -x_2, \quad u_{32} = x_1, \quad u_{33} = 0 \quad (9.21)$$

Los generadores vienen dados por

$$X_\nu = \sum_i u(x)_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (9.22)$$

$$X_1 = u_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} + u_{31} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.23)$$

$$= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.24)$$

$$X_2 = u_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} + u_{32} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.25)$$

$$= -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.26)$$

$$X_3 = u_{13} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{23} \frac{\partial}{\partial x_2} + u_{33} \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.27)$$

$$= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (9.28)$$

$$(9.29)$$

en resumen,

$$X_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (9.30)$$

$$X_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (9.31)$$

$$X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (9.32)$$

$$(9.33)$$

El conmutador

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]F &= X_1 X_2 F - X_2 X_1 F \\ &= \left( x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left( x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) - \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \\ &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \\ &\quad - \left[ x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \right] \\ &= \left( x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) F \\ &= X_3 F \end{aligned}$$

El cálculo para los demás conmutadores es análogo y se obtiene,

$$[X_1, X_2] = X_3 \quad (9.34)$$

$$[X_3, X_1] = X_2 \quad (9.35)$$

$$[X_2, X_3] = X_1 \quad (9.36)$$

o de manera compacta

$$\boxed{[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k} \quad (9.37)$$

## 10. Clase 10

### 10.1. Generadores de transformaciones infinitesimales

Consideremos la siguiente transformación de simetría

$$q'^k = q^k + \delta_\epsilon q^k = q^k + \epsilon \eta^k(q, t) \quad (10.1)$$

$$t' = t + \delta_\epsilon t = t + \epsilon \xi(t) \quad (10.2)$$

Tenemos transformaciones de simetría uni-paramétricas de parámetro  $\epsilon$ .

Para calcular los generadores, usamos el método usual

$$q'^k = f^k(q^i, \epsilon) = q^k + \epsilon \eta^k(q, t), \quad \implies \delta q^k = \epsilon \eta^k(q, t) \quad (10.3)$$

$$t' = f(t, \epsilon) = t + \epsilon \xi(t), \quad \implies \delta t = \epsilon \xi(t) \quad (10.4)$$

Usaremos el siguiente esquema:

$$(q^k, \epsilon) \Leftrightarrow x^i \implies x^1 = q^k, x^2 = t \quad (10.5)$$

$$(f^k(q^i, \epsilon), f(t, \epsilon)) \Leftrightarrow f^i(x^i, a) \quad (10.6)$$

Recordemos que el generador viene dado por

$$X_\nu = \sum_i^2 u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nu = 1 \quad (10.7)$$

$$X_1 = u_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + u_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (10.8)$$

$$u_{i\nu} = \frac{\partial f^i}{\partial a_\nu} \quad (10.9)$$

En este caso

$$u_{11} = \frac{\partial f^k}{\partial \epsilon} = \eta^k(q, t) \quad (10.10)$$

$$u_{21} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \xi(t) \quad (10.11)$$

Así, el generador queda

$$\boxed{X = \xi(q, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^k(q, t) \frac{\partial}{\partial q^k}} \quad (10.12)$$

Esto implica que

$$Xt = \xi \frac{\partial t}{\partial t} + \eta^k \frac{\partial t}{\partial q^k} \quad (10.13)$$

$$= \xi \quad (10.14)$$

$$Xq^k = \xi \frac{\partial q^k}{\partial t} + \eta^k \frac{\partial q^k}{\partial q^k} \quad (10.15)$$

$$= \eta^k \quad (10.16)$$

Recordemos que una función  $F(q, t)$  cambia bajo una transformación de simetría como

$$\delta F = \epsilon X F = \epsilon \left( \xi \frac{\partial F}{\partial t} + \eta^k \frac{\partial F}{\partial q^k} \right) \quad (10.17)$$

Si la función  $F(q, t)$  es generalizada al caso de una función  $G(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots)$  el correspondiente generador se denota  $\bar{X}$  tal que  $\delta G = \epsilon \bar{X} G$ , donde

$$X = \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^k(q, t) \frac{\partial}{\partial q^k} + \eta_{(1)}^k(t, q, \dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} + \eta_{(2)}^k(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k} + \dots \quad (10.18)$$

Hemos visto que

$$\delta q^k = \epsilon \eta^k \quad (10.19)$$

$$\delta t = \epsilon \xi \quad (10.20)$$

Por otro lado sabemos

$$\bar{\delta} q^k = \delta q^k - \dot{q}^k \delta t \quad (10.21)$$

$$= \epsilon \eta^k - \dot{q}^k \epsilon \xi \quad (10.22)$$

$$= \epsilon (\eta^k - \dot{q}^k \xi) \equiv \epsilon \chi^k \quad (10.23)$$

donde  $\chi^k = \eta^k - \dot{q}^k \xi$ .

Recordemos que la corriente de Noether está dada por

$$J(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \quad (10.24)$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon \chi^i + L \epsilon \xi + \epsilon \Omega \quad (10.25)$$

$$= \epsilon \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi^i + L \xi + \Omega \right) \quad (10.26)$$

Definimos la carga conservada como

$$J(t, q, \dot{q}) = \epsilon C(t, q, \dot{q}) \quad (10.27)$$

donde

$$\boxed{C(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi^i + L \xi + \Omega} \quad (10.28)$$

Esta carga es válida para transformaciones uni-paramétricas.

Consideremos ahora el caso de un grupo de transformaciones  $r$ -paramétricas de parámetro  $\epsilon_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, r$ ,

$$\delta_\epsilon q^k = \epsilon^\nu \eta_\nu^k(t, q) \implies q'^k = f^k(q^k, \epsilon_\nu) = q^k + \epsilon^\nu \eta_\nu^k \quad (10.29)$$

$$\delta_\epsilon t = \epsilon^\nu \xi_\nu(t, q) \implies t' = f(t, \epsilon_\nu) = t + \epsilon^\nu \xi_\nu \quad (10.30)$$

En este caso, los generadores son

$$X_\nu = \sum_i^2 u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad x_1 \Leftrightarrow q^k, x_2 \Leftrightarrow t \quad (10.31)$$

donde

$$u_{11} = \frac{\partial f^k}{\partial \epsilon_\nu} = \eta_\nu^k \quad (10.32)$$

$$u_{21} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_\nu} = \xi_\nu \quad (10.33)$$

Luego,

$$X_\nu = \xi_\nu \frac{\partial}{\partial t} + \eta_\nu^k \frac{\partial}{\partial q^k} \quad (10.34)$$

Estos generadores tienen la propiedad que el producto antisimétrico de dos de ellos da lugar a un tercer generador, de acuerdo a

$$[X_\mu, X_\nu] = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda \quad (10.35)$$

En el caso que  $\Upsilon_{\mu\nu\lambda}$  sea constante, este producto genera un *álgebra de Lie*.

## 10.2. Cargas conservadas

La corriente conservada es dada por (10.24)

$$J(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \quad (10.36)$$

donde

$$\delta t = \epsilon^\nu \xi_\nu \quad (10.37)$$

$$\delta q^k = \epsilon^\nu \eta_\nu^k \quad (10.38)$$

de donde se desprende

$$\bar{\delta} q^i = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t \quad (10.39)$$

$$= \epsilon^\nu \eta_\nu^i - \dot{q}^i \epsilon^\nu \xi_\nu \quad (10.40)$$

$$= \epsilon^\nu (\eta_\nu^i - \dot{q}^i \xi_\nu) \quad (10.41)$$

$$= \epsilon^\nu \chi_\nu^i \quad (10.42)$$

donde  $\chi_\nu^k = \eta_\nu^i - \dot{q}^i \xi_\nu$ . Así,

$$J(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon^\nu \chi_\nu^i + L \epsilon^\nu \xi_\nu + \epsilon^\nu \Omega_\nu \quad (10.43)$$

$$= \epsilon^\nu \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_\nu^i + L \xi_\nu + \Omega_\nu \right) \quad (10.44)$$

$$\equiv \epsilon^\nu C_\nu \quad (10.45)$$

donde

$$C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_\nu^i + L \xi_\nu + \Omega_\nu \quad (10.46)$$

es la llamada **carga conservada de Noether**.

Dado que

$$\chi_\nu^k = \eta_\nu^i - \dot{q}^i \xi_\nu \quad (10.47)$$

tenemos

$$C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\eta_\nu^i - \dot{q}^i \xi_\nu) + L \xi_\nu + \Omega_\nu \quad (10.48)$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta_\nu^i - \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) \xi_\nu + \Omega_\nu \quad (10.49)$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta_\nu^i - \sum_i (p_i \dot{q}^i - L) \xi_\nu + \Omega_\nu \quad (10.50)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta_\nu^i - H_c \xi_\nu + \Omega_\nu} \quad (10.51)$$

donde  $H_c$  corresponde al *Hamiltoniano canónico*.

**Teorema 10.1.** La variación de las coordenadas es dada en función de las cargas de Noether por medio de

$$\bar{\delta} q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu] \quad (10.52)$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  es el corchete de Poisson.

**Prueba 10.1.** Calculemos

$$[q^k, \epsilon^\nu C_\nu] = \left[ q^k, \epsilon^\nu \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta_\nu^i - H_c \xi_\nu + \Omega_\nu \right) \right] \quad (10.53)$$

$$= \left[ q^k, \epsilon^\nu \sum_i p_i \eta_\nu^i \right] - [q^k, \epsilon^\nu H_c \xi_\nu] + \cancel{[q^k, \epsilon^\nu \Omega_\nu]} \quad \Omega_\nu = \Omega_\nu(q, t) \quad (10.54)$$

$$= \sum_i \epsilon^\nu [q^k, p_i] \eta_\nu^i - \epsilon^\nu [q^k, H_c] \xi_\nu \quad (10.55)$$

$$= \sum_i \epsilon^\nu \delta_i^k \eta_\nu^i - \epsilon^\nu \dot{q}^k \xi_\nu \quad (10.56)$$

$$= \epsilon^\nu \eta_\nu^k - \epsilon^\nu \dot{q}^k \xi_\nu \quad (10.57)$$

$$= \epsilon^\nu (\eta_\nu^k - \dot{q}^k \xi_\nu) \quad (10.58)$$

$$= \epsilon^\nu \chi_\nu^k \quad (10.59)$$

$$= \bar{\delta} q^k \quad (10.60)$$

Así,

$$\bar{\delta} q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu] \quad \square \quad (10.61)$$

**Teorema 10.2.** Las cargas de Noether satisfacen la siguiente relación de conmutación

$$[C_\mu, C_\nu] = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} C_\lambda + Z_{\mu\nu} \quad (10.62)$$

**Prueba 10.2.** Hemos visto que  $\bar{\delta} q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu]$ . Consideremos el conmutador de dos transformaciones  $\bar{\delta}$ ,

$$\bar{\delta}_1 q^k = [q^k, \epsilon_1^\nu C_\nu] \quad (10.63)$$

$$\bar{\delta}_2 (\bar{\delta}_1 q^k) = [\bar{\delta}_1 q^k, \epsilon_2^\mu C_\mu] = [[q^k, \epsilon_1^\nu C_\nu], \epsilon_2^\mu C_\mu] \quad (10.64)$$

$$\Rightarrow \bar{\delta}_2 \bar{\delta}_1 q^k = \epsilon_1^\nu \epsilon_2^\mu [[q^k, C_\nu], C_\mu] \quad (10.65)$$

Además,

$$\bar{\delta}_1(\bar{\delta}_2 q^k) = [\bar{\delta}_2 q^k, \epsilon_1^\mu C_\mu] = [[q^k, \epsilon_2^\nu C_\nu] \epsilon_1^\mu, C_\mu] \quad (10.66)$$

$$= \epsilon_2^\nu \epsilon_1^\mu [[q^k, C_\nu], C_\mu] \quad (10.67)$$

Así,

$$\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_1 q^k - \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 q^k = \epsilon_1^\nu \epsilon_2^\mu [[q^k, C_\nu], C_\mu] - \epsilon_2^\nu \epsilon_1^\mu [[q^k, C_\nu], C_\mu] \quad (10.68)$$

$$= \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \{ [[q^k, C_\mu], C_\nu] - [[q^k, C_\nu], C_\mu] \} \quad (10.69)$$

De la identidad de Jacobi,

$$[[q^k, C_\mu], C_\nu] + [[C_\nu, q^k], C_\mu] + [[C_\mu, C_\nu], q^k] = 0 \quad (10.70)$$

lo que implica que

$$\bar{\delta}_2 \bar{\delta}_1 q^k - \bar{\delta}_1 \bar{\delta}_2 q^k = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, [C_\mu, C_\nu]] \quad (10.71)$$

Dado que el producto de dos transformaciones debe dar lugar a una tercera transformación

$$[\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_1] q^k = \bar{\delta}_3 q^k = [q^k, \epsilon^\lambda C_\lambda] \quad (10.72)$$

luego, podemos conjeturar que  $\epsilon^\lambda \sim \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu$ , de manera que  $[C_\mu, C_\nu] \sim C_\lambda$ . Para hacer consistente la conjetura introducimos (10.62) en (10.71)

$$\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, [C_\mu, C_\nu]] = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, \Upsilon_{\mu\nu\lambda} C_\lambda + Z_{\mu\nu}] \quad (10.73)$$

$$= \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, C_\lambda] + \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, Z_{\mu\nu}] \xrightarrow{0} \quad (q \text{ conmuta con } Z) \quad (10.74)$$

$$[\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_1] q^k = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, C_\lambda] = \epsilon^\lambda [q^k, C_\lambda] \quad (10.75)$$

$$\implies \epsilon^\lambda = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \quad (10.76)$$



## 11. Clase 11

### 11.1. Grupo de Galileo y sus cargas conservadas

Consideremos la función de Lagrange

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{x}_i^2 + \sum_{i < j} V|x_i - x_j| \quad (11.1)$$

es invariante bajo el grupo de Galileo. A saber,

**Traslaciones temporales:**  $G_\tau : t' = t + \tau = f(t, \tau)$ .

Siguiendo el procedimiento usual,  $a_\nu \leftrightarrow \tau$ ,  $\nu = 1$  y  $x_i \leftrightarrow t$ . Luego

$$u_{11} = 1, \quad X_\nu = \sum_i u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (11.2)$$

$$X = \frac{\partial}{\partial t} = H \implies H = \frac{\partial}{\partial t} \quad (11.3)$$

**Traslaciones espaciales:**  $G_a : x' = x_i + a_i = f(x_i, a_i)$ .

$$u_{11} = 1, \quad X = \frac{\partial}{\partial x_i} \implies P_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (11.4)$$

**Rotaciones temporales:**  $G_R : x' = x_i + R_i^j x_j = f(x_i, \theta)$ .

Anteriormente determinamos los generadores de  $SO(3)$ ,

$$X_{12} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \longrightarrow X_3 \quad (11.5)$$

$$X_{23} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \longrightarrow X_1 \quad (11.6)$$

$$X_{31} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \longrightarrow X_2 \quad (11.7)$$

de manera que

$$X_i = \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \equiv J_i \quad (11.8)$$

**Boosts de Galileo:**  $G_v : x' = x_i + v_i t = f(x_i, v_i)$ .

$$u_{11} = t, \quad X_i = t \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad G_i = t \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv t P_i \quad (11.9)$$

Así tenemos que los generadores del grupo de Galileo son  $\{H, P_i, J_i, G_i\}$  donde

$$H = \frac{\partial}{\partial t} \quad (11.10)$$

$$P_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (11.11)$$

$$J_i = \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (11.12)$$

$$G_i = t \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (11.13)$$

### 11.2. Partícula libre en 3-dimensiones

Las ecuaciones de Newton son invariantes bajo el grupo de transformaciones de Galileo. Normalmente es aceptado que las transformaciones de Galileo son las simetrías más generales bajo la cual las ecuaciones de Newton permanecen invariantes en forma.

Sin embargo, notemos que la trayectoria de una partícula libre que parte desde  $\mathbf{x}_0$  con velocidad  $\mathbf{v}_0$  es igual a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t \quad (11.14)$$

que relaciona las posiciones de la partícula. Escribiendo (11.14) en la forma

$$\frac{\mathbf{x}(t)}{t} = \frac{\mathbf{x}_0}{t} + \mathbf{v}_0 \quad (11.15)$$

Si llamamos  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)/t$  y  $\tilde{t} = 1/t$ , tenemos

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{x}_0 \tilde{t} \quad (11.16)$$

que relaciona velocidades. Notemos que existe una dualidad entre (11.14) y (11.15).

En Ref. [5] fue encontrado que el grupo de transformaciones más general que deja invariante la ecuación de Newton es un grupo de 12 generadores (12 parámetros) constituido por

- El grupo de Galileo de 10 parámetros.
- El grupo de dilataciones de 1 parámetro.
- El grupo de expansiones de 1 parámetro.

Los generadores de este grupo general son:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial}{\partial t} \\ P_i &= \frac{\partial}{\partial q^i} \\ J_i &= \epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial q^k} \\ G_i &= t \frac{\partial}{\partial q^i} \\ S &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + q^i \frac{\partial}{\partial q^i} \\ C &= t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t q^i \frac{\partial}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Este grupo es conocido como el *grupo de Schrödinger* que también deja invariante la ecuación de Schrödinger (Ver Ref. [6]).

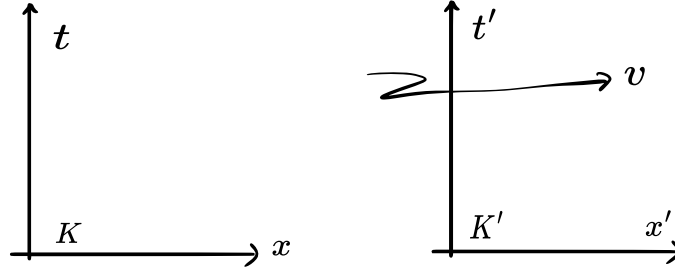
## Parte II

# Electrodinámica y Relatividad

### 11.3. Transformaciones de Galileo y ecuaciones de Newton

Consideremos dos SRI  $K$  y  $K'$ . La relación entre las mediciones de ambos SRI está dado por

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (11.17)$$



La covariancia de las leyes de la física implican que las leyes de Newton en  $K$  deben tener la misma forma en  $K'$ ,

$$K : \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (11.18)$$

$$K' : \quad \mathbf{F}' = m'\mathbf{a}' \quad (11.19)$$

Veamos si  $F = ma$  es invariante bajo Galileo: <sup>10</sup>

$$x' = x - vt \implies \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v \quad (11.20)$$

Definiendo la velocidad medida en  $K$  con  $V = dx/dt$  y la velocidad medida en  $K'$  con  $V' = dx'/dt'$  tenemos

$$V' = V - v \implies \boxed{V' \neq V} \quad (11.21)$$

es decir, la velocidad es una cantidad relativa.

$$\frac{dV'}{dt'} = \frac{dV}{dt} - \frac{dv}{dt} \quad (11.22)$$

pero  $v$  es constante, luego

$$\frac{dV'}{dt'} = \frac{dV}{dt} \implies \boxed{a' = a} \quad (11.23)$$

es decir, la aceleración es una cantidad absoluta. Dado que por postulado la masa es una cantidad absoluta  $m' = m$ , se tiene

$$\boxed{F' = F} \quad (11.24)$$

En este punto es natural hacerse la siguiente pregunta: ¿Son todas las leyes de la física invariante en forma? o ¿Son todas las leyes de la física invariantes en forma bajo Galileo?

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío vienen dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (11.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (11.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (11.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (11.28)$$

---

<sup>10</sup>Por simplicidad consideremos una sólo dimensión.

tomando el rotacional de (11.27) tenemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) \quad (11.29)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (11.30)$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (11.31)$$

usando la identidad del cálculo vectorial, se tiene

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (11.32)$$

$$\implies \nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.33)$$

Del mismo modo tenemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (11.34)$$

Cada componente  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  satisface la ecuación

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \quad (11.35)$$

**Ejemplo 11.1.** Probar que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo, es decir, que las ecuaciones de Maxwell cambian de forma.

**Solución 11.1.**

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (11.36)$$

esto implica que

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -v, \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = 1 \quad (11.37)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \end{aligned} \quad (11.38)$$

Las ecuaciones de Maxwell en una dimensión quedan

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad (11.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad (11.40)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \implies \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad (11.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \implies \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (11.42)$$

$$(11.43)$$

Aplicando la transformación de Galileo, de (11.38) se tiene

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} = 0 \quad (11.44)$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} = 0 \quad (11.45)$$

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'} = -\left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'} - v\frac{\partial B'_x}{\partial x'}\right) \quad (11.46)$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E'_x}{\partial t'} = \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial E'_x}{\partial t'} - v\frac{\partial E'_x}{\partial x'}\right) \quad (11.47)$$

Notar que estas dos últimas ecuaciones cambian en forma. Luego, bajo transformaciones de Galileo las ecuaciones de Maxwell cambian en forma.

**Ejemplo 11.2.** Probar que la ecuación de la onda (11.35) no es invariante bajo transformaciones de Galileo.

## 12. Clase 12

Hemos visto que las ecuaciones de Newton son invariantes en forma bajo las transformaciones de Galileo. Dado que las estas transformaciones sólo son validas en SRI, los cuales están relacionados por transformaciones de Galileo, se tiene que por medio de elemento mecánicos no es posible determinar si un sistema está en reposo o MRU ya que todos los SRI son equivalentes a los ojos de las transformaciones de Galileo.

Las ecuaciones de Maxwell *no son invariantes* bajo transformaciones de Galileo, lo cual implica que no todos los SRI son equivalentes a los ojos de las ecuaciones de Maxwell. Es decir, existen sistemas de referencia privilegiados para las ecuaciones de Maxwell. Dichas ecuaciones adquieren si forma más simple en el SRI donde fueron escritas por Maxwell. Este SRI es privilegiado con respecto a los SRI que se mueven con respecto al sistema de referencia de Maxwell. Al SRI de Maxwell se le postula como en reposo con respecto al éter.

Por medio de experimentos electromagnéticos (por ejemplo, ópticos) podría ser posible determinar si un SRI está en reposo ó en MUR con respecto del sistema del éter.

En este contexto se llevó a cabo el experimento de Michelson-Morley. El resultado de dicho experimento no encontró evidencia del éter ni como saber si un cuerpo estaba en reposo o en MUR.

Esto implicó que las ecuaciones de Maxwell deberían ser invariantes bajo un grupo de transformaciones. Lorentz encontró un grupo de transformaciones que dejaba invariante las ecuaciones de Maxwell. Dichas transformaciones sólo eran válidas para la electrodinámica.

Einstein postuló que debían existir transformaciones válidas para toda la física y estableció el principio de covariancia general: *toda la física debe ser invariante en forma bajo un conjunto de transformaciones*. Estas transformaciones deberían ser obtenidas a partir de principios fundamentales del espacio y del tiempo.

Einstein postuló que dichos principio eran:

- i) **Homogeneidad del tiempo:** todos los instantes son equivalentes.
- ii) **Homogeneidad e isotropía del espacio:** todos los puntos y las direcciones son equivalentes.
- iii) **Principio de la relatividad:** todos los SRI son equivalentes para *toda* la física. (No sólo para la mecánica).
- iv) **Postulado de la constancia de la velocidad de la luz.**

A partir de estos principios Einstein encontró que las transformaciones buscadas eran las transformaciones de Lorentz:

$$t' = \frac{\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.1)$$

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.2)$$

$$y' = y \quad (12.3)$$

$$z' = z \quad (12.4)$$

llamaremos  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  y  $x^0 = ct$ . Escribiendo estas transformaciones como

$$x'^0 = \gamma \left( x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) \quad (12.5)$$

$$x'^1 = \gamma \left( x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \quad (12.6)$$

$$x'^2 = x^2 \quad (12.7)$$

$$x'^3 = x^3 \quad (12.8)$$

o de manera equivalente

$$x'^0 = \gamma x^0 - \gamma \frac{v}{c} x^1 \quad (12.9)$$

$$x'^1 = -\gamma \frac{v}{c} x^0 + \gamma x^1 \quad (12.10)$$

$$x'^2 = x^2 \quad (12.11)$$

$$x'^3 = x^3 \quad (12.12)$$

Escribiendo estas transformaciones en forma matricial, se tiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}}_{x'^\mu} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^\mu_\nu} \underbrace{\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{x^\nu} \quad (12.13)$$

$$\Rightarrow \boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu} \quad (12.14)$$

donde en general

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

De la Relatividad Especial, sabemos que el principio de constancia de la velocidad de la luz implica que la distancia entre dos puntos del espacio de Minkowski es invariante bajo transformaciones de Lorentz,

$$S^2 = x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (12.16)$$

$$S'^2 = x'^\mu x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (12.17)$$

La invariancia de  $S^2$  nos dice

$$S'^2 = S^2 \quad (12.18)$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (12.19)$$

pero

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (12.20)$$

luego,

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (12.21)$$

$$\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (12.22)$$

$$\implies \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}} \quad (12.23)$$

o en forma matricial

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \quad (12.24)$$

**Teorema 12.1.** Las matrices  $\Lambda^\mu_\nu$  constituyen un grupo de Lie no-compacto conocido como *grupo de Lorentz* definido como

$$L := O(1, 3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) / \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \quad (12.25)$$

el cual tiene asociada un álgebra de Lie conocida como el *álgebra de Lorentz*, definida como

$$\mathfrak{o}(1, 3) = \{a \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) / a^T = -\eta a \eta\} \quad (12.26)$$

**Prueba 12.1.** De la teoría de las álgebras de Lie sabemos que un elemento de un grupo y un elemento del álgebra están relacionados por exponenciación, a saber

$$\Lambda = e^{ta}, \quad \Lambda \in O(1, 3), \quad a \in \mathfrak{o}(1, 3) \quad (12.27)$$

donde  $t$  son los parámetros del grupo.

Las matrices  $\Lambda$  satisfacen la condición

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (12.28)$$

$$\implies [e^{ta}]^T \eta [e^{ta}] = \eta \quad (12.29)$$

para determinar las condiciones del álgebra debemos remitirnos a la vecindad de la identidad de las  $\Lambda$ ,

$$\Lambda = e^{ta} \implies \Lambda = 1 \text{ ocurre en } t = 0 \quad (12.30)$$

$$\implies \frac{d}{dt} ([e^{ta}]^T \eta [e^{ta}]) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \eta \Big|_{t=0} \quad (12.31)$$

$$\frac{d}{dt} [e^{ta}]^T \eta [e^{ta}] \Big|_{t=0} + [e^{ta}]^T \eta \frac{d}{dt} [e^{ta}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (12.32)$$

$$[ae^{ta}]^T \eta [e^{ta}] \Big|_{t=0} + [e^{ta}]^T \eta [ae^{ta}] \Big|_{t=0} = 0 \quad (12.33)$$

$$[a]^T \eta + \eta [a] = 0 \quad (12.34)$$

$$a^T \eta + \eta a = 0 \quad (12.35)$$

multiplicando por  $(\cdot \eta^{-1} \equiv \eta)$ , se tiene

$$a^T + \eta a \eta = 0 \quad (12.36)$$

$$\implies \boxed{a^T = -\eta a \eta} \quad \square \quad (12.37)$$

**Teorema 12.2.** Los constraints

$$\det \Lambda = \pm 1 \quad \text{y} \quad |\Lambda^0_0| \geq 1 \quad (12.38)$$

definen 4 partes desconectadas en el espacio de los parámetros del grupo de Lorentz.



**Prueba 12.2.** Sabemos que las matrices de Lorentz satisfacen la condición

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (12.39)$$

$$\implies \det(\Lambda^T \eta) = \det \eta \quad (12.40)$$

$$(\det \Lambda^T) \underbrace{(\det \eta)}_{-1} (\det \Lambda) = \underbrace{\det \eta}_{-1} \quad (12.41)$$

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad (12.42)$$

$$\implies \boxed{\det \Lambda = \pm 1} \quad (12.43)$$

Por otro lado, dado que

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \quad (12.44)$$

$$\implies \eta_{00} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = \eta_{00} \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 + \eta_{ii} \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \quad (12.45)$$

$$\implies 1 = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 \quad (12.46)$$

$$\implies (\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 \quad (12.47)$$

$$\implies |\Lambda^0_0| \geq 1 \quad \square \quad (12.48)$$

Estas condiciones permiten clasificar las transformaciones de Lorentz.

**1. Grupo de Lorentz completo:**

$$L := O(1, 3) = \{\Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) / \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\} \quad (12.49)$$

**2. Grupo de transformaciones de Lorentz propias:**

$$L_+ := SO(1, 3) = \{\Lambda \in O(1, 3) / \det \Lambda = +1\} \quad (12.50)$$

es un subgrupo de  $O(1, 3)$ .

**3. Transformaciones de Lorentz impropias:**

$$L_- = \{\Lambda \in O(1, 3) / \det \Lambda = -1\} \quad (12.51)$$

no es un subgrupo de  $O(1, 3)$ .

**4. Transformaciones de Lorentz ortocronas:**

$$L^\uparrow = \{\Lambda \in O(1, 3) / \Lambda^0_0 \geq 1\} \quad (12.52)$$

es un subgrupo de  $O(1, 3)$ .

**5. Transformaciones de Lorentz no-ortocronas:**

$$L^\downarrow = \{\Lambda \in O(1, 3) / \Lambda^0_0 \leq 1\} \quad (12.53)$$

es un subgrupo de  $O(1, 3)$ .

**6. Grupo de Lorentz restringido o grupo de Lorentz propio ortocrono:**

$$L^\uparrow_+ = \{\Lambda \in O(1, 3) / \det \Lambda = +1 \text{ y } \Lambda^0_0 \geq 1\} \quad (12.54)$$

### 12.1. Generadores del grupo de Lorentz

En la vecindad de la identidad  $\mathbb{I}_{SO(1,3)} \in L_+^\uparrow$  podemos escribir

$$\Lambda = \mathbb{I}_{4 \times 4} + \omega \implies \Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu \quad (12.55)$$

donde  $\omega_\nu^\mu$  son parámetros infinitesimales del grupo de Lorentz y además debe satisfacer

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (12.56)$$

Luego,

$$\eta_{\mu\nu} (\delta_\alpha^\mu + \omega_\alpha^\mu) (\delta_\beta^\nu + \omega_\beta^\nu) = \eta_{\alpha\beta} \quad (12.57)$$

$$(\eta_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu + \eta_{\mu\nu} \omega_\alpha^\mu) (\delta_\beta^\nu + \omega_\beta^\nu) = \eta_{\alpha\beta} \quad (12.58)$$

$$\eta_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \eta_{\mu\nu} \delta_\alpha^\mu \omega_\beta^\nu + \eta_{\mu\nu} \omega_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \eta_{\mu\nu} \omega_\alpha^\mu \omega_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (12.59)$$

$$\cancel{\eta_{\alpha\beta}} + \eta_{\alpha\nu} \omega_\beta^\nu + \eta_{\mu\beta} \omega_\alpha^\mu = \cancel{\eta_{\alpha\beta}} \quad (12.60)$$

$$\omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0 \quad (12.61)$$

$$\implies \boxed{\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}} \quad (12.62)$$

Es decir, los parámetros infinitesimales del grupo de Lorentz son antisimétricos.

$$\implies x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = (\delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu) x^\nu = x^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu \quad (12.63)$$

$$\implies \boxed{\delta x^\mu = \omega_\nu^\mu x^\nu} \quad (12.64)$$

Las matrices  $\Lambda_\nu^\mu \in L_+^\uparrow$  y las matrices  $\omega_\nu^\mu$  pertenecen al álgebra. Los elementos del grupo y los del álgebra están relacionados por

$$\Lambda = e^\omega \implies \Lambda_\nu^\mu = (e^\omega)_\nu^\mu \quad (12.65)$$

Si  $M_{\rho\sigma}$  son una base del espacio de los parámetros del grupo, entonces

$$\omega = -\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma} \quad (12.66)$$

$$\implies \Lambda_\nu^\mu = \left( e^{-\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}} \right)_\nu^\mu \quad (12.67)$$

así, de (12.64)

$$\delta x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu - x^\mu \quad (12.68)$$

$$= \left( e^{-\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}} \right)_\nu^\mu x^\nu - x^\mu \quad (12.69)$$

$$= \left( \delta_\nu^\mu - \frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} (M_{\rho\sigma})_\nu^\mu \right) x^\nu - x^\mu \quad (12.70)$$

$$= -\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} (M_{\rho\sigma})_\nu^\mu x^\nu \quad (12.71)$$

$$= \omega_\nu^\mu x^\nu \quad (12.72)$$

$$\implies \boxed{\omega_\nu^\mu = -\frac{i}{2} \omega^{\rho\sigma} (M_{\rho\sigma})_\nu^\mu} \quad (12.73)$$

cuya solución por inspección es

$$\boxed{(M_{\rho\sigma})_\nu^\mu = i (\eta_{\sigma\nu} \delta_\rho^\mu - \eta_{\rho\nu} \delta_\sigma^\mu)} \quad (12.74)$$

y se satisfacen

$$\boxed{[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})} \quad (12.75)$$

### 13. Clase 13

Hemos visto que álgebra de Lorentz viene dada por

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \quad (13.1)$$

#### 13.1. Generadores de las rotaciones espaciales y Boosts

Podemos hacer la siguiente descomposición de los generadores del grupo de Lorentz  $M_{\mu\nu} : M_{ij}, M_{0i}$ . Definimos

$$J_i = \epsilon_{ijk}M_{jk}, \quad \text{generadores de rotaciones} \quad (13.2)$$

$$K_i = M_{i0} = -M_{0i}, \quad \text{generadores de boosts} \quad (13.3)$$

de manera que

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

Consideremos el caso  $\mu = 0, \nu = i, \rho = 0, \sigma = j$ ,

$$[M_{0i}, M_{0j}] = -i(\eta_{00}M_{ij} - \eta_{0j}M_{i0} - \eta_{i0}M_{0j} + \eta_{ij}M_{00}) \quad (13.5)$$

$$[-K_i, -K_j] = -i\eta_{00}M_{ij} \quad (13.6)$$

$$(13.7)$$

$$\Rightarrow \boxed{[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k} \quad (13.8)$$

Ahora consideremos  $\mu = 0, \nu = i, \rho = k, \sigma = l$ ,

$$[M_{0i}, M_{kl}] = -i(\eta_{0k}M_{il} - \eta_{0l}M_{ik} - \eta_{ik}M_{0l} + \eta_{il}M_{0k}) \quad (13.9)$$

$$[-K_i, \epsilon_{klm}J_m] = -i(\eta_{ik}(-K_l) + \eta_{il}(-K_k)) \quad (13.10)$$

pero  $\eta_{ik} = -\delta_{ik}$ , así

$$-\epsilon_{klm}[K_i, J_m] = -i(-\delta_{ik}(-K_l) - \delta_{il}(-K_k)) \quad (13.11)$$

$$\epsilon_{klm}[K_i, J_m] = -i(\delta_{ik}(-K_l) - \delta_{il}(-K_k)) \quad (13.12)$$

$$\vdots \quad (13.13)$$

$$\boxed{[K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}K_k} \quad (13.14)$$

Haciendo algo similar, se puede calcular la relación de conmutación cuando  $\mu = i, \nu = j, \rho = k, \sigma = l$  y se obtiene que el álgebra que satisfacen los generadores de boost y rotaciones es

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k \\ [K_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\ [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k \end{aligned} \quad (13.15)$$

Si definimos nuevos generadores

$$S_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad T_i = \frac{1}{2}(J_i - K_i) \quad (13.16)$$

Entonces (13.15) toma la forma

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k \quad (13.17)$$

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k \quad (13.18)$$

$$[T_i, S_j] = 0 \quad (13.19)$$

y es conocida como el álgebra complexificada de Lorentz.

### 13.2. Grupo de Poincare

Sabemos que el grupo de Lorentz deja invariante la distancia entre dos puntos del espacio de Minkowski,

$$S^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (13.20)$$

También sabemos que el grupo de traslaciones en el espacio de Minkowski deja invariante a  $S^2$ ,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (13.21)$$

Esto conduce a la definición del grupo de transformaciones de Poincare:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (13.22)$$

Esta definición permite definir la ley de composición (multiplicación) entre los elementos del grupo de Poincare.

$$x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu_\nu x^\nu + a_1^\mu \quad (13.23)$$

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu x'^\nu + a_2^\mu \quad (13.24)$$

Así,

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu ((\Lambda_1)^\nu_\alpha x^\alpha + a_1^\nu) + a_2^\mu \quad (13.25)$$

$$x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu_\nu (\Lambda_1)^\nu_\alpha x^\alpha + (\Lambda_2)^\mu_\nu a_1^\nu + a_2^\mu \quad (13.26)$$

Si denotamos a un elemento del grupo de Poincare como  $(\Lambda, a)$  entonces la ley de composición interna del grupo es:

$$\boxed{(\Lambda_2, a_2) \cdot (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)} \quad (13.27)$$

El elemento unidad del grupo  $P_+^\uparrow$ ,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad \mathbb{I} \equiv (1, 0) \quad (13.28)$$

El inverso del elemento  $(\Lambda, a)$  es definido como  $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ . En efecto

$$(\Lambda, a) \cdot (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = (\Lambda \Lambda^{-1}, -\Lambda \Lambda^{-1}a + a) = (1, -a + a) = (1, 0) \quad (13.29)$$

y tambien

$$(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \cdot (\Lambda, a) = (\Lambda^{-1} \Lambda, \Lambda^{-1}a + (-\Lambda^{-1}a)) = (1, 0) \quad (13.30)$$

## Referencias

- [1] M. Ostrogradsky, *Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres*, *Mem. Acad. St. Petersbourg* **6** (1850) 385.
- [2] J. Schwichtenberg, *Physics from Symmetry*, Undergraduate Lecture Notes in Physics, Springer International Publishing, Cham (2018), [10.1007/978-3-319-66631-0](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66631-0).
- [3] A.W. Harald J. W. Muller-Kirsten, *Introduction to Supersymmetry*, World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific Publishing Company, 2 ed. (2010).
- [4] H.R. David Lovelock, *Tensors, differential forms, and variational principles*, Dover (1989).
- [5] O. Jahn and V.V. Sreedhar, *The Maximal invariance group of Newtons's equations for a free point particle*, *Am. J. Phys.* **69** (2001) 1039 [[math-ph/0102011](#)].
- [6] U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation.*, *Helv. Phys. Acta* **45** (1972) 802.