Prepared for submission to JHEP

Teoría Clásica de Campos

Borja Diez

Universidad Arturo Prat

E-mail: borjadiez1014@gmail.com

Abstract: Abstract...

Contents

1 Clase 1

1.1 Mecánica de Newton

Posición, velocidad, aceleración, fuerza.

Si consideramos un sistema de partículas de masa m

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha, \qquad \vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha, \qquad \alpha = 1, ..., k \tag{1.1}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{x}}^2, \qquad \vec{L} = \sum_\alpha \vec{x}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \tag{1.2}$$

Newton estableció que a dinámica de un sistema mecánico queda determinada por tres leyes fundamentales.

1.2 Acerca de la matriz Hessiana de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} = \frac{\partial L'}{\partial q'_k} - [L]_k \frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_k} \tag{1.4}$$

$$\boxed{[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_k}} \tag{1.5}$$

La derivada de Euler-Lagrange transforma como un vector covariante bajo una transformación de coordenadas

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0 \tag{1.6}$$

2 Clase 2

1. Las ecuaciones de Newton son invariantes en forma bajo las transformaciones de Galileo.

2. Las ecuaciones de Newton sn ecuaciones de segundo orden en $\boldsymbol{x}_\alpha$. Es bueno recalcar que *todas las ecuaciones dinámicas de la física fundamental son de segundo orden.* Las ecuaciones de orden mayor al segundo, tienden a tener inestabilidades.

3. Si $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la función de Lagrange para un sistema mecánico, entonces la dinámica del sistema es gobernada por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.1}$$

   Estas ecuaciones no cambian si la función de Lagrange es modificada a la forma

$$\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(q,t) \tag{2.2}$$

   con $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ y $\bar{L} = \bar{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

4. La libertad en la elección de las coordenadas generalizadas implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange son estructuralmente invariantes bajo un cambio de coordenadas:

$$q_i \to q_i' = q_i'(q_l) \tag{2.3}$$

   lo cual implica que

$$\boxed{[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q_k'}} \tag{2.4}$$

   que muestra que la derivada de Euler transforma como un vector covariante bajo la transformación 2.3

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0. \tag{2.5}$$

Es importante recalcar que la invariancia estructural es distinto a la invariancia en forma (covariancia).

Todos los observadores observan la misma forma de las ecuaciones de los modelos de la naturaleza.

Example 2.1. *La ecuación de Newton en el SRI K toma la forma $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ mientras que en el SRI K' toma la forma $\boldsymbol{F'} = m'\boldsymbol{a}'$.*

Example 2.2. *Las ecuaciones de Maxwell tendrán la misma forma en todos los SRI.*

Notemos son embargo, que en la mecánica de Newton las transformaciones son las transformaciones de Galileo y que en la electrodinámica de Maxwell son las transformaciones de Lorentz.

La covariancia de las ecuaciones del movimiento bajo una transformación de coordenadas es la propiedad que define una **simetría de Lie**.

2.1 Acerca de la matriz Hessiana

Una característica básica de las ecuaciones de Newton $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ es que es posible expresar la aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}$ en función de la posición $\boldsymbol{r}$, de la velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}$ y de t,

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}(t)) \tag{2.6}$$

Esta es una formulación vectorial de la mecánica es basada en el concepto d partícula material. Esto llevó a pensar que la naturaleza podría no ser contínua, sino que podría ser atómica (cuántica). Esto condujo a la formulación escalar de la mecánica representado de la introducción del concepto de energía.

La formulación de Lagrange y de Hamilton fue el resultado de esta búsqueda. Sin embargo, de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1) no es evidente cómo expresar la aceleración $\ddot{q}(t)$ en función de $q(t), \dot{q}(t)$ y t.

Consideremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \qquad L = L(q_n, \dot{q}_n, t) \tag{2.7}$$

notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m \tag{2.8}$$

luego

$$[L]_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\ddot{q}^m = 0 \tag{2.9}$$

así

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\right)\ddot{q}^m = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m} \tag{2.10}$$

Notemos que para poder expresar $\ddot{q}$ como función de q y $\dot{q}$ es necesario que la matriz $W_{nm} = \partial^2 L / \partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m$ sea invertible, es decir, $\det W_{nm} \neq 0$.

Llamando

$$V_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m \tag{2.11}$$

tenemos

$$W_{nm}\ddot{q}^m - V_n = 0 \tag{2.12}$$

Si $\det W_{nm} \neq 0$ entonces existe una matriz inversa $W^{kn} \equiv (W_{kn})^{-1}$ tal que $W^{kn}W_{nm} = \delta^k_m$. Luego, multiplicando (2.12) por W^{km}, tenemos

$$W^{kn}W_{nm}\ddot{q}^m - W^{kn}V_n = 0 \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}^k = W^{kn}V_n = F(q, \dot{q}, t) \tag{2.14}$$

En la física fundamental, las teorías de gauge tales como la teoría electromagnética o las toerías de Yang-Mills (teoría electrodébil, cromonodinámica cuántica), las correspondientes funciones de Lagrange tienen sus matrices Hessianas singulares, es decir, $\det W_{nm} \neq 0$.

2.2 Formalismo de Hamilton

Consiste en pasarse de las coordenadas $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ a $\{q_i, p_i, t\}$, donde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{2.15}$$

es el momentum generalizado.

Para escribir explícitamente la función de Hamilton es necesario expresar por medio de (2.15) $\dot{q}_i = \bar{f}(q_i, p_i)$. Esto implica que la función f_i sea invertible,

$$\dot{q}_n \to p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t) \tag{2.16}$$

es decir, tenemos una transformación de coordenadas. Esta transformación tiene como matriz Jacobiana a

$$J_{nm} = \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) \tag{2.17}$$

esto es

$$\boxed{J_{nm} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \equiv W_{nm}} \tag{2.18}$$

Para clarificar esto calculemos $\mathrm{d}p_n$ recordando que $p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t)$,

$$\mathrm{d}p_n = \frac{\partial f_n}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m + \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m}\mathrm{d}\dot{q}_m \tag{2.19}$$

$$= \frac{\partial f_n}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\mathrm{d}\dot{q}_m \tag{2.20}$$

esto implica que

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\right)\mathrm{d}\dot{q}_m = \mathrm{d}p_n - \frac{\partial p_n}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial p_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m \tag{2.21}$$

De aquí vemos que para expresar $\dot{q} = \bar{f}(q, p, t)$ es necesario que

$$\det W_{nm} = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\right) \neq 0 \tag{2.22}$$