Notas de Clase en

Teoría Clásica de Campos

Borja Diez
borjadiez1014@gmail.com

Índice

1. Clase 1

1.1. Mecánica de Newton

Posición, velocidad, aceleración, fuerza.

Si consideramos un sistema de partículas de masa m

$$\vec{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\vec{x}}_\alpha, \qquad \vec{p} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha, \qquad \alpha = 1, ..., k \tag{1.1}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{x}}^2, \qquad \vec{L} = \sum_\alpha \vec{x}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \tag{1.2}$$

Newton estableció que a dinámica de un sistema mecánico queda determinada por tres leyes fundamentales.

1.2. Acerca de la matriz Hessiana de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_k} = \frac{\partial L'}{\partial q'_k} - [L]_k \frac{\partial q_l}{\partial \dot{q}_k} \tag{1.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L'}{\partial q'_k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_k} = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_k} \tag{1.4}$$

$$\boxed{[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q'_k}} \tag{1.5}$$

La derivada de Euler-Lagrange transforma como un vector covariante bajo una transformación de coordenadas

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0 \tag{1.6}$$

2. Clase 2

1. Las ecuaciones de Newton son invariantes en forma bajo las transformaciones de Galileo.

2. Las ecuaciones de Newton sn ecuaciones de segundo orden en $\boldsymbol{x}_\alpha$. Es bueno recalcar que *todas las ecuaciones dinámicas de la física fundamental son de segundo orden.* Las ecuaciones de orden mayor al segundo, tienden a tener inestabilidades [**?**].

3. Si $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la función de Lagrange para un sistema mecánico, entonces la dinámica del sistema es gobernada por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.1}$$

   Estas ecuaciones no cambian si la función de Lagrange es modificada a la forma

$$\tilde{L} = L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(q,t) \tag{2.2}$$

   con $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ y $\bar{L} = \bar{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

4. La libertad en la elección de las coordenadas generalizadas implica que las ecuaciones de Euler-Lagrange son estructuralmente invariantes bajo un cambio de coordenadas:

$$q_i \to q_i' = q_i'(q_l) \tag{2.3}$$

   lo cual implica que

$$\boxed{[L']_k = [L]_l \frac{\partial q_l}{\partial q_k'}} \tag{2.4}$$

   que muestra que la derivada de Euler transforma como un vector covariante bajo la transformación 2.3

$$\text{Si } [L]_l = 0 \Rightarrow [L']_k = 0. \tag{2.5}$$

Es importante recalcar que la invariancia estructural es distinto a la invariancia en forma (covariancia).

Todos los observadores observan la misma forma de las ecuaciones de los modelos de la naturaleza.

Ejemplo 2.1. La ecuación de Newton en el SRI K toma la forma $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ mientras que en el SRI K' toma la forma $\boldsymbol{F'} = m'\boldsymbol{a}'$.

Ejemplo 2.2. Las ecuaciones de Maxwell tendrán la misma forma en todos los SRI.

Notemos son embargo, que en la mecánica de Newton las transformaciones son las transformaciones de Galileo y que en la electrodinámica de Maxwell son las transformaciones de Lorentz.

La covariancia de las ecuaciones del movimiento bajo una transformación de coordenadas es la propiedad que define una **simetría de Lie**.

2.1. Acerca de la matriz Hessiana

Una característica básica de las ecuaciones de Newton $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ es que es posible expresar la aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}$ en función de la posición $\boldsymbol{r}$, de la velocidad $\dot{\boldsymbol{r}}$ y de t,

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}(t)) \tag{2.6}$$

Esta es una formulación vectorial de la mecánica es basada en el concepto d partícula material. Esto llevó a pensar que la naturaleza podría no ser contínua, sino que podría ser atómica (cuántica). Esto condujo a la formulación escalar de la mecánica representado de la introducción del concepto de energía.

La formulación de Lagrange y de Hamilton fue el resultado de esta búsqueda. Sin embargo, de las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1) no es evidente cómo expresar la aceleración $\ddot{q}(t)$ en función de $q(t), \dot{q}(t)$ y t.

Consideremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \qquad L = L(q_n, \dot{q}_n, t) \tag{2.7}$$

notemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\ddot{q}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m \tag{2.8}$$

luego

$$[L]_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\ddot{q}^m = 0 \tag{2.9}$$

así

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m}\right)\ddot{q}^m = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m} \tag{2.10}$$

Notemos que para poder expresar $\ddot{q}$ como función de q y $\dot{q}$ es necesario que la matriz $W_{nm} = \partial^2 L \big/ \partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m$ sea invertible, es decir, $\det W_{nm} \neq 0$.

Llamando

$$V_n = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\dot{q}^m \tag{2.11}$$

tenemos

$$W_{nm}\ddot{q}^m - V_n = 0 \tag{2.12}$$

Si $\det W_{nm} \neq 0$ entonces existe una matriz inversa $W^{kn} \equiv (W_{kn})^{-1}$ tal que $W^{kn}W_{nm} = \delta^k_m$. Luego, multiplicando (2.12) por W^{km}, tenemos

$$W^{kn}W_{nm}\ddot{q}^m - W^{kn}V_n = 0 \tag{2.13}$$

$$\Rightarrow \ddot{q}^k = W^{kn}V_n = F(q, \dot{q}, t) \tag{2.14}$$

En la física fundamental, las teorías de gauge tales como la teoría electromagnética o las toerías de Yang-Mills (teoría electrodébil, cromonodinámica cuántica), las correspondientes funciones de Lagrange tienen sus matrices Hessianas singulares, es decir, $\det W_{nm} \neq 0$.

2.2. Formalismo de Hamilton

Consiste en pasarse de las coordenadas $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$ a $\{q_i, p_i, t\}$, donde

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{2.15}$$

es el momentum generalizado.

Para escribir explícitamente la función de Hamilton es necesario expresar por medio de (2.15) $\dot{q}_i = \bar{f}(q_i, p_i)$. Esto implica que la función f_i sea invertible,

$$\dot{q}_n \to p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t) \tag{2.16}$$

es decir, tenemos una transformación de coordenadas. Esta transformación tiene como matriz Jacobiana a

$$J_{nm} = \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial p_n}{\partial \dot{q}_m} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) \tag{2.17}$$

esto es

$$\boxed{J_{nm} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \equiv W_{nm}} \tag{2.18}$$

Para clarificar esto calculemos $\mathrm{d}p_n$ recordando que $p_n = f_n(q_m, \dot{q}_m, t)$,

$$\mathrm{d}p_n = \frac{\partial f_n}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m + \frac{\partial f_n}{\partial \dot{q}_m}\mathrm{d}\dot{q}_m \tag{2.19}$$

$$= \frac{\partial f_n}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\mathrm{d}\dot{q}_m \tag{2.20}$$

esto implica que

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\right)\mathrm{d}\dot{q}_m = \mathrm{d}p_n - \frac{\partial p_n}{\partial t}\mathrm{d}t - \frac{\partial p_n}{\partial q_m}\mathrm{d}q_m \tag{2.21}$$

De aquí vemos que para expresar $\dot{q} = \bar{f}(q, p, t)$ es necesario que

$$\det W_{nm} = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_m}\right) \neq 0 \tag{2.22}$$

2.3. *Transformaciones canónicas

Son transformaciones invertibles de la forma (Ref. [?]) [1]

$$\hat{q}^j = \hat{q}^j(q, p), \qquad \hat{p}^j = \hat{p}^j(q, p) \tag{2.23}$$

que dejan los corchetes fundamentales invariantes.

Antes de continuar, introduzcamos una notación más compacta en la cual colectamos las $2N$ variables del espacio de fase en un único conjunto $(x^\alpha) = (q^1, ..., q^N, p_1, ..., p_N)$. En esta notación los corchetes fundamentales pueden ser escritos como

$$\{x^\alpha, x^\beta\} = \Gamma^{\alpha\beta}, \qquad \text{con} \qquad \Gamma \equiv \begin{pmatrix} 0_N & 1_N \\ -1_N & 0_N \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

[1] Ver también el libro Arnold. y [?]

en términos de la matriz Γ, el corchete de Poisson para dos funciones del espacio de fase A y B queda

$$\{A, B\} = \Gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial A}{\partial x \alpha} \frac{\partial B}{\partial x^{\beta}} \tag{2.25}$$

La condición para que $\hat{x}(x)$ sea una transformación canónica se simplifica a $\{\hat{x}^{\alpha}, \hat{x}^{\beta}\} = \Gamma^{\alpha\beta}$

3. Clase 3

3.1. Simetrías y leyes de conservación

La homogeneidad del tiempo nos lleva a la conservación de la energía. Que el tiempo sea homogéneo significa que no hay instantes privilegeados. Los resultados de un experimento nno dependen del instantes en que se lleven a cabo, es decir, si llevamos a cabo un experimento para $t = t$ será tambien el mismo en $t' = t + t_0$. La función de Lagrange (que describe un sistema físico) debe ser invariante bajo un desplazamiento temporal, es decir, $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es invariante bajo la transformación $t \to t' = t + t_o$ o $\delta t = t' - t = t_o$. Esto se cumplirá sólo si $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ no depende explicitaente del tiempo, es decir,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

Así,

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{3.2}$$

De la derivada de Euler-Lagrange, sabemos

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = [L]_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.3}$$

Reemplazando en (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \left([L]_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i && (3.4)\\ &= [L]_i\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i && (3.5) \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} [L]_i\dot{q}_i &= \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} && (3.6)\\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) && (3.7) \end{aligned}$$

Para trayectorias on-shell, es decir, para el espacio de soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange $[L]_i = 0$, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0 \tag{3.8}$$

Pero sabemos que la función de Hamilton es dada por

$$H = \dot{q}_i p_i - L = E \tag{3.9}$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3.10}$$

es decir, **la homogeneidad del tiempo implica la conservación de la energía.**

Por otra parte, la homogeneidad del espacio conduce a la cnservación del momentum lineal. Que el espacio sea homogeneo nos dice que todos los puntos son equivalentes y no hay posiciones privilegiadas en el espacio. Esto implica que la función de Lagrange $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ debe ser invariante bajo una traslación espacial de la forma

$$q_i \to q_i' = q_i + a_i \qquad \text{ó} \qquad \delta q_i = q_i' - q_i = a_i \tag{3.11}$$

Así

$$\delta_q L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \tag{3.12}$$

4. Clase 4

4.1. Teorema de Noether

Teorema 4.1. Si las ecuaciones del movimiento son invariantes bajo una transformación de coordenadas tales como

$$t \to t' = t'(t) \tag{4.1}$$
$$q_i \to q_i' = q_i'(q_j, t) \tag{4.2}$$

entonces existe una cantidad conservada.

Análisis y prueba

Sea $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ la función de Lagrange de un sistema mecánico, donde $i = 1, 2, ..., f$. q_i son las coordenadas del espacio de configuraciones. Sean q_i' y t' nuevas coordenadas relacionadas a las antiguas por medio de la transformación de coordenadas invertibles

$$t \to t' = t'(t) = t + \delta t \tag{4.3}$$
$$q_i \to q_i' = q_i'(q_i, t) = q_i + \delta q_I \tag{4.4}$$

Las correspondientes velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ y $\dot{q}_i'$ definidas como

$$\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i, \qquad \dot{q}_i' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} q_i' \tag{4.5}$$

$$\Longrightarrow \dot{q}_i' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i' \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i + \delta q_i) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{4.6}$$

$$\Longrightarrow \dot{q}_i' = \left(\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} \right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{4.7}$$

pero,

$$t' = t + \delta t \implies \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} \tag{4.8}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1 + \mathrm{d}\delta t / \mathrm{d}t} \tag{4.9}$$

Así,

$$\dot{q}_I' = (\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}) \frac{1}{1 + \mathrm{d}\delta t / \mathrm{d}t} \tag{4.10}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{q}_i' = \frac{\dot{q}_i + \mathrm{d}\delta q_i / \mathrm{d}t}{1 + \mathrm{d}\delta t / \mathrm{d}t}} \tag{4.11}$$

$$\delta\dot{q}_i = \dot{q}'_i(t') - \dot{q}_i(t) \tag{4.12}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\dot{q}'_i(t') - \dot{q}_i(t) \tag{4.13}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}'_i(t')\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} - \dot{q}_i(t) \tag{4.14}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_i + \delta q_i)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} - \dot{q}_i(t) \tag{4.15}$$
$$= \left(\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} - \dot{q}_i(t) \tag{4.16}$$

pero

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{1+\mathrm{d}\delta t/\mathrm{d}t} = 1 - \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} + \cdots \tag{4.17}$$

$$\delta\dot{q}_i = \left(\dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t}\right) - \dot{q}_i \tag{4.18}$$
$$= \dot{q}_i + \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_i\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\delta q_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}t} - \dot{q}_i \tag{4.19}$$

$$\implies \boxed{\delta\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q - \dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t} \tag{4.20}$$

4.2. Transformaciones de simetría

Sabemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen al aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$S(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_q}^{t_2} \mathrm{d}t L(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{4.21}$$

Sean ahora q'_i y t' otro sistema coordenado relacionado con q_i t t por medio de la transformación

$$q_i \to q'_i = q'_i(q_i, t) \tag{4.22}$$
$$t \to t' = t'(t) \qquad \implies t = t(t') \tag{4.23}$$

Escribimos (4.21) en términos de las nuevas coordenadas

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t', \qquad q_i = q_i(q'_i, t) \tag{4.24}$$

luego,

$$S(q_i, q'_i, t) = \int_{t1'=t'(t_1)}^{t'_2=t'(t_2)} \mathrm{d}t'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \tag{4.25}$$

Por otro lado la acción $S'(q', \dot{q}', t')$ es dada por

$$S'(q', \dot{q}', t') = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathrm{d}t' L'(q'_i, \dot{q}'_i, t') \tag{4.26}$$

Dado que la física no puede ser alterada por un cambio de coordenadas, tenemos

$$S'(q', \dot{q}', t') = S(q, q', t) \tag{4.27}$$

$$\int_{t1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' L'(q', \dot{q}', t') = \int_{t_1'}^{t_2'} \mathrm{d}t' \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \tag{4.28}$$

$$\implies L'(q', \dot{q}', t') = L[q_i(q', t), \dot{q}_i(q, \dot{q}', t'), t(t')] \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{4.29}$$

Una transformación de coordenadas que deja invariante en forma a las EOM es llamada una transformación de simetría.

Por lo tanto, si q son las coordenadas de un sistema físico descrito por las EOM,

$$\ddot{q} = G(q, \dot{q}, t) \tag{4.30}$$

entonces

$$t' = t'(t) \tag{4.31}$$

$$q' = q'(q, t) \tag{4.32}$$

será una transfrmación de simetría si las EOM transformadas es dada por

$$\boxed{\ddot{q}' = G(q', \dot{q}', t')} \tag{4.33}$$

Teorema 4.2. Si las EOM expresadas en términos de las nuevas variables tiene exactamente la misma forma funcional que las EOM expresadas en las variables antiguas y si ellas deben ser obtenidas a partir del principio de Hamilton, entonces las respectivas funciones de Lagrange deben diferir a lo más en una derivada total.

$$L'(q', \dot{q}', t' = L(q', \dot{q}', t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \Omega(q', t') \tag{4.34}$$

Prueba

Dado que las EOM se obtienen a partir del principio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t) = 0 \tag{4.35}$$

$$\implies \delta \int_{(q_1', t_1')}^{(q_2', t_2')} \mathrm{d}t' L'(q', \dot{q}', t') \delta \int_{(q_1', t_1')}^{(q_2', t_2')} \mathrm{d}t' L(q', \dot{q}', t') + \delta \int_{(q_1', t_1')}^{(q_2', t_2')} \mathrm{d}t' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} \Omega(q', t') \tag{4.36}$$

Dado que (4.27) es válida, tenemos

$$\int_{(q_1', t_1')}^{(q_2', t_2')} \mathrm{d}t' L'(q' \dot{q}', t') = \delta \int_{(q_1', t_1')}^{(q_2', t_2')} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t) \tag{4.37}$$

$$\implies \delta \int_{(q_1',t_1')}^{(q_2',t_2')} L(q,\dot{q},t) = \delta \int_{(q_1',t_1')}^{(q_2',t_2')} \mathrm{d}t' L(q,\dot{q}',t') + \cancel{\delta\Omega(q',t')\Big|_{(q_1',t_1')}^{(q_2',t_2')}} \tag{4.38}$$

el último término se cancela debido a que los puntos extremos son fijos,

$$\implies \delta \int_{(q_1',t_1')}^{(q_2',t_2')} \mathrm{d}t L(q,\dot{q},t) = \delta \int_{(q_1',t_1')}^{(q_2',t_2')} \mathrm{d}t' L(q',\dot{q}',t') \tag{4.39}$$

Si queremos tener una simetría, entocnes debemos imponer dos condiciones

1. $L'(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(q',t')$
2. $S'(q',\dot{q}',t') = S(q,\dot{q},t)$

Estas dos condiciones son el punto de partida para probar el teorema de Noether[2] .

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether

5. Clase 5

Distinguimos entre dos tipos de variaciones. La primera es la **variación** δ la cual compara dos coordenadas distintas en tiempos distintos. Es decir, compara las coordenadas q y q' en los tiempos t y t',

$$\delta q = q'(t') - q(t), \qquad t' = t + \delta t \tag{5.1}$$

$$q'(t') = q(t) + \delta t \tag{5.2}$$

Por otro lado la **variación** $\bar{\delta}$ compara dos coordenadas distintas en el mismo instante. Es decir, compara las coordenadas q y q' en el mismo instante,

$$\bar{\delta} q = q'(t) - q(t) \tag{5.3}$$

$$q'(t) = q(t) + \bar{\delta} q \tag{5.4}$$

5.1. Relación entre y

$$\begin{aligned}\bar{\delta} q &= q'(t) - q(t) + q'(t') - q'(t') && (5.5)\\ &= (q'(t') - q(t)) + q'(t) - q'(t') && (5.6)\\ \implies \bar{\delta} q &= \delta q - [q'(t') - q'(t)] && (5.7)\end{aligned}$$

Pero

$$q'(t') = q'(t + \delta t) = q'(t) + \delta t \frac{\mathrm{d}q'(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}\implies q'(t') - q'(t) &= \delta t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(q(t) + \bar{\delta} q\big) && (5.9)\\ &= \delta t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(t) + \cancel{\delta t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{\delta} q} && (5.10)\end{aligned}$$

el ultimo término es despreciable por que es de segundo orden.

$$\implies q'(t') - q'(t) = \delta t \dot{q} \tag{5.11}$$

$$\implies \boxed{\bar{\delta} q = \delta q(t) - \delta t \dot{q}(t)} \tag{5.12}$$

Propiedad 5.1. Los operadores $\bar{\delta}$ y $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ conmutan.

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \dot{q} = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q'(t) - \dot{q}(t) && (5.13)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(q(t) - \bar{\delta} q\right) - \dot{q}(r) && (5.14)\\ &= \cancel{\dot{q}(t)} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{\delta} q - \cancel{\dot{q}(t)} && (5.15)\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\bar{\delta} \dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \bar{\delta} q}, \qquad \implies \boxed{\left[\bar{\delta}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right] = 0} \tag{5.16}$$

Propiedad 5.2. Los operadores δ y $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ no conmutan.

5.2. Prueba del teorema de Noether

Hemos visto que

- $$S'(q',\dot{q}',t') = S(q,\dot{q},t) \tag{5.17}$$

- $$L'(q',\dot{q}',t') = L[q_i(q',t),\dot{q}_i(q,\dot{q}',t'),t(t')]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \tag{5.18}$$

- $$L'(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t') + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(q',t') \tag{5.19}$$

De (5.18) y (5.19) vemos

$$L[q(q',t'),\dot{q}(q'\dot{q}',t'),t(t')]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = L(q',\dot{q}',t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(q',t') \tag{5.20}$$

cambiando a las coordenadas antiguas,

$$L(q,\dot{q},t) = L[q'(q,t),\dot{q}'(q\dot{q},t),t'(t)]\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Omega(q'(q,t),t'(t))\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \tag{5.21}$$

$$L(q,\dot{q},t) = L(q'\dot{q}',t')\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q',t') \tag{5.22}$$

en el entendido que

$$q' = q'(q,t), \qquad \dot{q}' = \dot{q}'(q,\dot{q},t), \qquad t' = t'(t) \tag{5.23}$$

Dado que $t' = t + \delta t$,

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = 1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t \tag{5.24}$$

$$L(q,\dot{q},t) = L(q',\dot{q}',t')\left(1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q',t') \tag{5.25}$$

$$\implies L(q,\dot{q},t) - L(q',\dot{q}',t') = L(q',\dot{q}',t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q',t') \tag{5.26}$$

Dado que las transformaciones son continuas, basta estudiar el caso infinitesimal.

De (5.26),

$$-\delta L = L(q,\dot{q},t) - L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t+\delta t) \tag{5.27}$$

$$= L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t+\delta t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q+\delta q,t+\delta t) \tag{5.28}$$

Expandiendo el primer término hasta primer orden

$$-\delta L = L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q+\delta q,t+\delta t) \tag{5.29}$$

Si consideramos el caso límite donde $\delta q = 0, \delta t = 0$

$$\delta L = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q,t) = 0 \tag{5.30}$$

Esto nos permite escribir

$$-\delta L = L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q+\delta q, t+\delta t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(q,t) \tag{5.31}$$

$$= L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \delta t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Omega(q+\delta q, t+\delta t) - \Omega(q,t)] \tag{5.32}$$

$$\implies \boxed{-\delta L = L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(q,t)} \tag{5.33}$$

Reemplazando $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, tenemos

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \tag{5.34}$$

Reemplazando (5.34) en (5.33),

$$-\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(q,t) \tag{5.35}$$

Estudiaremos ahora el primer término del lado izquierdo. Dado que $\delta\dot{q}_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \delta q_i - \dot{q}_i\, \mathrm{d}/\mathrm{d}t\, \delta t$ (eucación (4.20)),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i - \dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t\right) \tag{5.36}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t \tag{5.37}$$

$$\implies \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t \tag{5.38}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t \tag{5.39}$$

Introduciendo en (5.35),

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = -L(q,\dot{q},t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(q,t) \tag{5.40}$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\delta q_i + \left(L(q,\dot{q},t) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\Omega(q,t) \tag{5.41}$$

despues de algo d cálculo se llega a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + L\delta t - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\delta t + \delta\Omega\right] &= -\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \\ &\quad + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta t - \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\delta t\end{aligned} \tag{5.42}$$

Analicemos los dos últimos términos de (5.42). Dado que $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{5.43}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right) \tag{5.44}$$

y además

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \sum_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i \tag{5.45}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t}\right) - \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_i}\ddot{q}_i}\right) \tag{5.46}$$

$$= \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i \tag{5.47}$$

Así, (5.42) toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t\right) + L\delta t + \delta\Omega\right] = -\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t\right) \tag{5.48}$$

Dado que

$$\bar{\delta}q_i = \delta q_i - \dot{q}_i\delta t \tag{5.49}$$

y que

$$[L]_i = \sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{5.50}$$

tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t\right) + L\delta t + \delta\Omega\right] = -[L]_i\bar{\delta}q_i \tag{5.51}$$

luego,

$$[L]_i\bar{\delta}q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}q_i + L\delta t + \delta\Omega\right] = 0 \tag{5.52}$$

esto implica, que en el espacio de soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}q_i + L\delta t + \delta\Omega\right] = 0 \tag{5.53}$$

Definiendo la cantidad,

$$J \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L \delta t + \delta \Omega \tag{5.54}$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0, \Longrightarrow J = \text{constante} \tag{5.55}$$

Luego, J es una cantidad conservada,

$$\boxed{[L]_i \bar{\delta} q_i + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0} \tag{5.56}$$

6. Clase 6

6.1. Continuación prueba del teorema de Noether

De la clase 5 vimos que

$$\boxed{[L]_i\bar{\delta}q_i + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0}, \qquad [L]_i = 0 \tag{6.1}$$

donde

$$J \equiv \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\bar{\delta}q_i + L\delta t + \delta\Omega \tag{6.2}$$

con

$$\bar{\delta}q_i = \delta q_i - \dot{q}_i\delta t \tag{6.3}$$

$$J = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\delta q_i - \dot{q}_i\delta t\right) + L\delta t + \delta\Omega \tag{6.4}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\delta t + L\delta t + \delta\Omega \tag{6.5}$$

pero sabemos que

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \qquad H_c = \sum_i p_i\dot{q}^i - L \tag{6.6}$$

así,

$$\boxed{J = \sum_i p_i\delta q^i - H_c\delta t + \delta\Omega} \tag{6.7}$$

donde H_c es el usual Hamiltoniano en el caso de que la función de Lagrange sea regular, y es el llamado **Hamiltoniano canónico** en el caso de que la función de Lagrange L sea de naturaleza singular. En (6.1) tenemos que

$$[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.8}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i\dot{q}_j}\ddot{q}_j = 0 \tag{6.9}$$

Definiendo

$$V_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j \tag{6.10}$$

$$W_{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i\dot{q}_j} \tag{6.11}$$

se tiene[3]

$$\implies [L]_i = V_i - W_{ij}\ddot{q}^j \tag{6.12}$$

[3] Abusando un poco de la posición de los índices, que para efecto des este cálculo no es tan relevante.

En el caso de que L sea regular, podemos escribir

$$V_i - W_{ij}\ddot{q}^j = 0 \quad /W^{ki} \tag{6.13}$$

$$W^{ki}V_i - W^{ki}W_{ij}\ddot{q}^j = 0 \tag{6.14}$$

$$W^{ki}V_i - \delta^k_j\ddot{q}^j = 0 \tag{6.15}$$

$$\implies \boxed{\ddot{q}^k = W^{ki}V_i} \tag{6.16}$$

Dado que la derivada de Euler-Lagrange es

$$[L]_i = V_i - W_{ij}\ddot{q}^j \tag{6.17}$$

tenemos que (6.1) toma la forma

$$(V_i - W_{ij}\ddot{q}^j)\bar{\delta}q^i + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.18}$$

$$V_i\bar{\delta}q^i - W_{ij}\ddot{q}^j\bar{\delta}q^i + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{6.19}$$

pero $J = J(q, \dot{q}, t)$,

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} \tag{6.20}$$

$$\implies V_i\bar{\delta}q^i - W_{ij}\ddot{q}^j\bar{\delta}q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{6.21}$$

$$V_i\bar{\delta}q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - W_{ji}\ddot{q}^i\bar{\delta}q^j = 0 \tag{6.22}$$

$$V_i\bar{\delta}q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} + \left(\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} - W_{ij}\bar{\delta}q^j\right)\ddot{q}^i = 0 \tag{6.23}$$

donde renombramos índices mudos y usado el hecho de que $W_{ij} = W_{ji}$ por como fue definido.

Teniendo en cuenta que $J = J(q, \dot{q}, t)$,

$$V_i\bar{\delta}q^i + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}^i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_i} - W_{ij}\bar{\delta}q^j = 0 \tag{6.25}$$

Multiplicando (6.25) por W^{ki}, se tiene,

$$\bar{\delta}q^k = W^{ki}\frac{\partial J}{\partial \dot{q}^i} \tag{6.26}$$

Introduciendo (6.26) en (6.24), tenemos

$$V_iW^{ij}\frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{6.27}$$

De (6.16)

$$\ddot{q}^k = W^{ji}V_i = W^{ij}V_i \tag{6.28}$$

reemplazando (6.27),

$$\ddot{q}^j \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial J}{\partial q_i}\dot{q}_i + \ddot{q}^j \frac{\partial J}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \tag{6.30}$$

$$\implies \boxed{\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = 0}, \qquad J = \text{constante} \tag{6.31}$$

$$J = \sum_i p_i \delta q^i - H_c \delta t + \delta\Omega = \text{constante} \tag{6.32}$$

6.2. Grupos y álgebras de Lie

Sea A un conjunto de elementos $\{a, b, ...\}$ dotado de una operación binaria interna $\Box$ tal que $\forall a, b, c \in A \Box b = c \in A$ la operación $\Box$ es cerrada (en este caso tenemos un **magma**).

Si la operación binaria interna tiene solo la propiedad asociativa entonces estamos en presencia de un **semigrupo**.

Definición 6.1. Un **semigrupo** es una estructura algebraica dotada de una sola operación binaria interna que satisface la propiedad asociativa.

Ejemplo 6.1. Sea $A = \{a, b\}$ dotado de la operación $\diamond$. Una tabla de multiplicación es la siguiente.

$$\begin{array}{c|cc} \diamond & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{a} & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{a} & \mathrm{b} \end{array} \tag{6.33}$$

$$(a \diamond b) \diamond a = b \diamond a = a \tag{6.34}$$

$$a \diamond (b \diamond a) = a \diamond a = a \tag{6.35}$$

Luego, la operación $\diamond$ es asociativa. Notemos que $a \diamond a = a$ y $a \diamond b = b$ pero $b \diamond a = a$ lo que implica que $a \diamond b \neq b \diamond a$. Luego el conjunto A con la operación $\diamond$ dada en (6.33) no tiene elemento unidad y correspode a un semigrupo.

Si la operación binaria interna demás de ser asociativa admite un elemento unidad, entonces estamos en prsencia de un **monoide**.

Definición 6.2. Un **monoide** es una estructura algebraca dotada de una operación binaria interna que admite la propiedad asociativa y de elemento unidad.

Si sucediera que cada elemento del mnoide admitiera un elemento neutro, entonces estaos en presencia de un grupo.

Definición 6.3. Un **grupo** es una estructura algebraica dotada de una operación binaria interna que satisface

1. asociatividad
2. tiene elemento unidad
3. cada elemento de la estructura admite un elemento inverso.

Hasta ahora hemos visto estructuras con solo una ley de composición interna. Una estructura que tiene dos leyes de composición interna es el **anillo**.

Definición 6.4. Un **anillo** es una estructura algebraica dotada denotada por $(A, \square, *)$ donde

1. A con respecto a la operación $\square$ es un grupo abeliano (conmutativo)
2. A con respecto de $*$ es un semigrupo.

Normalmente la operación $\square$ se denota por $+$ y se le llama adición, y $*$ se denota por $\cdot$ o solo por yuxtaposición.

Así entonces una estructura $(A, +, \cdot)$se llama anillo si:

1. $\forall a, b, c \in A,\ (a + b) + c = a + (b + c)$
2. $\forall a \in A, \exists \in A\, / a + 0 = 0 + a = a$
3. $\forall a \in A, \exists (-a) \in A, / a + (-a) = (-a) + a = 0$
4. $\forall a, b \in A,\ a + b = b + a$
5. $\forall a, b, c \in A,\ a(bc) = (ab)c$

Su sucediera que $\forall a, b \in A, ab = ba$ el anillo se llamará **anillo conmutativo**.

Si ocurriera que $\forall a \in A, \exists 1 \in A\, / a1 = 1a = a$ el anillo se llamará **anillo con unidad**.

Definición 6.5. Sea $(A, +, \cdot)$un anillo. Si ocuriera que $\forall a \in A$, existiera un a^{-1}, salo para el elemento 0, entonces la estructura algebraica ser+a llamada un **campo**.

7. Clase 7

Definición 7.1. Una estructura $(A, +, \cdot)$ es una anillo si

- $(A, +)$ es un grupo abeliano
- $(A, \cdot)$ es un semigrupo

En el caso que la operación de multiplicación admita un elemento unidad, entonces $(A, +, \cdot)$será un anillo con unidad, i.e. $\forall x \in A, \exists x \in A / ex = xe = x$.

En el caso que la operación multiplicativa del anillo sea conmutativa, el anillo es un anillo conmutativo.

Definición 7.2. Un campo denotado por K, es una estructura que además de tener las propiedades del anillo con unidad, cada elemento A, excepto el cero, tiene un inverso. Por lo tanto un campo $(K, +, \cdot)$es una estructura tal que

- $(K, +)$ es un grupo abeliano aditivo.
- $(K - 0, \cdot)$ es un grupo abeliano multiplciativo.

Hasta ahora hemos estudiado estructuras que tienen una ó dos operaciones binarias internas. Consideremos ahora una estructura dotada de una operación binaria interna y una operación binaria externa.

7.1. Espacio lineal o espacio vectorial

Definición 7.3. Una estructura $(M, K, \bullet)$es llamado un espacio vectorial, si

- M es un grupo abeliano,
- K es un campo conmutativo,
- $\bullet$ es una operación binaria externa que define la acción del campo K sobre el grupo M,

$$\bullet : K \times M \to M \tag{7.1}$$

$$(\alpha, x) \to \alpha \bullet x, \qquad \forall x \in M, \forall \alpha \in K \tag{7.2}$$

- La operación binaria interna de M está relacionada con la operación binaria externa $\bullet$ a través de una operación distintiva mixta.
  - $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$
  - $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet y$

  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in M$.

Normalmente los elementos $x \in M$ se llaman **vectores** y los elementos $\alpha \in K$ se llaman **escalares** y la operación $\bullet$ se llama producto por escalar.

7.2. Álgebra y álgebra de Lie

Definición 7.4. Una estructura algebraica $(A, K, \bullet)$es llamada un álgebra, si

- A es un anillo,
- K es un campo conmutativo,
- $\bullet$ es una operación binaria externa que define la acción del campo K sobre el anillo,

$$\bullet : K \times A \to A \tag{7.3}$$

- La operació binara interna aditiva del anillo $(+)$ está relacionada con la operación binaria externa a través de la propiedad distributiva mixta
  - $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x \alpha \bullet y, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in A$
  - $(\alpha + \beta)x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$
- La operación binaria interna multiplicativa del anillo (denotada por $\diamond$) está relacionada con la operación binaria externa $\bullet$ por medio de la propiedad asociativa mixta

$$\alpha \bullet (x \diamond y) = (\alpha \bullet x) \diamond y = x \diamond (\alpha \bullet y), \qquad \forall x, y \in A, \forall \alpha \in K \tag{7.4}$$

1. La operación binaria interna del anillo $\diamond$ se le llama producto algebraico.

   En el caso que la multiplicación algebraica $\diamond$ sea asociativa, i.e., $\forall x, y, z \in A$,

$$(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z) \tag{7.5}$$

   entonces el álgebra se llama **álgebra asociativa**.

2. Si la multiplicación algebraica tiene además de la propiedad asociativa, al elemento unidad entonces el álgebra es llamada **álgebra asociativa unital**.

3. Si la operación multiplicación algebraica es una operación antisimétrica, i.e., si

4.

$$x \diamond y = [x, y] = xy - yx \tag{7.6}$$

   entonces el álgebra se llama **álgebra de Lie** y la operación $\diamond$ antisimétrica satisface la propiedad derivativa conocida como identidad de Jacobi.

7.3. Grupos, álgebras y simetrías

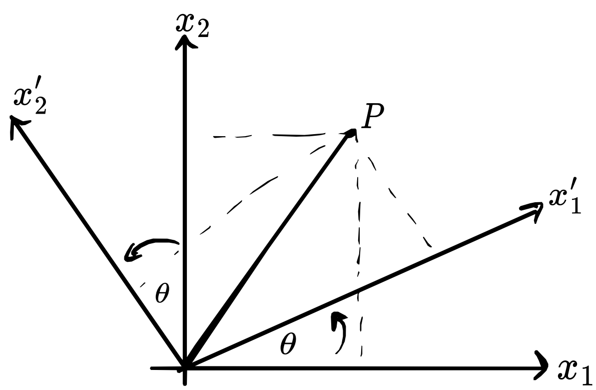
El concepto de grupo está muy relacionado con el concepto de invariancia o de simetría de objetos tales como superficies, funciones, ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, entre otros.

<u>Nota histórica</u>:

- El estudio de las simetrías de las ecuaciones algebraicas se hace en el contexto de la teoría de Galois [4].
- El estudio de las simetrías de las ecuaciones diferenciales se hacen en el contexto de la teoría de Lie [5] .

Los grupos de Lie son grupos continuos que tienen la propiedad que es suficiente estudiarlos en su forma infinitesimal. En física, los grupos de Lie se introducen como grupos de transformaciones de coordenadas, i.e., como actuando sobre los elementos de una variedad.

Ejemplo 7.1. Consideremos la típica rotación en un plano de los ejes coordenados en un ángulo θ, La relación entre las coordenadas primadas y las sin primar viene dada por



$$x'_1 = \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \tag{7.7}$$
$$x'_2 = \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \tag{7.8}$$

o de manera equivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \tag{7.9}$$

Así, tenemos una transformación de la forma

$$x' = f(x, \theta) \tag{7.10}$$

además, notemos que

- $\{R(\theta)\}$ tiene unidad $\forall\theta$, dada por

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

[4] https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois
[5] https://es.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie

- tiene inverso, $\forall\theta, \exists(-\theta)$.
- es asociativo,
- es conmutativo

Si la transformación $x' = f(x,\theta)$, entonces la unidad es dada por $x' = f(x,0) = f(x,e) = x$.

Definición 7.5. Un conjunto de transformaciones

$$x'^i = f^i(x', ..., x^n; g^1, ..., g^r) \equiv f(x,g) \tag{7.12}$$

es llamado un **grupo de transformaciones r-paramétrico** si

1. admite el elemento unidad
$$x' = f(x,e) = x \tag{7.13}$$
2. admite elemento inverso
3. tiene definida una ley de composición interna,
$$x' = f(x,g), \qquad x'' = f(x',g') = f[f(x,g),g'] = f(x,g'') \tag{7.14}$$
entonces
$$\boxed{g'' = g''(g,g')} \tag{7.15}$$

Definición 7.6. Un conjunto de transformaciones es un **grupo de simetría** de una ecuación diferencial

$$F(x, x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = 0, \quad \text{con } x = (x^1, ..., x^n) \tag{7.16}$$

si la ecuación (7.16) permanece invariante en forma bajo la acción del grupo,

$$F(x', x'^{(1)}, ..., x'^{(n)}) = 0 \tag{7.17}$$

Lo interesante de los grupos de Lie es que basta estudiar sus versiones infinitesimales.

$$x' = f(x,g) \to x' = f(x,\delta g) \tag{7.18}$$

$$x'^i = f^i(x,\delta g) = f^i(x,e) + \left.\frac{\partial f^i(x,\delta g)}{\partial g^k}\right|_{g=e} \delta g^k + \cdots \tag{7.19}$$

donde $x' = f(x,e) = x$

$$x'^i = x^i + \left.\frac{\partial f^i(x,\delta g)}{\partial g^k}\right|_{g=e} \delta g^k + \cdots \tag{7.20}$$

$$\Rightarrow \delta x^i = x'^i - x^i = \left.\frac{\partial f^i(x,\delta g)}{\partial g^k}\right|_{g=e} \delta g^k \tag{7.21}$$

Esto significa que un cambio infinitesimal en los parámetros implica un cambio infinitesimal en las coordenadas de la variedad sobre la cual actúa el grupo.

8. Clase 8

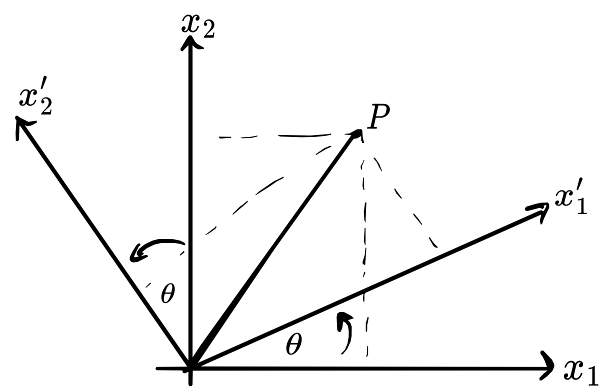
8.1. Generadores de grupos de Lie

Sea $\mathcal{M}$ una variedad dotada de sistemas de coordenadas $\{x_i\}_{i=1}^n$,$\{x_i'\}_{i=1}^n$ y sea G un grupo r-paramétrico a_ν, $\nu = 1, ..., r$. La acción del grupo G sobre la variedad $\mathcal{M}$ es dada por el grupo de transformaciones

$$x' = f(x,a)x_i' = f_i(x_j, a_\nu) \tag{8.1}$$

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; a_1, a_2, ..., a_r) \tag{8.2}$$

Para clarificar ideas consideremos el ejemplo de una variedad $\mathcal{M}$ de 2 dimensiones que admite las coordenadas $x : (x_1, x_2)$ y $x' : (x_1', x_2')$ y un grupo uni-paramétrico $G = SO(2)$ de rotaciones en el plano,



$$x_1' = \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \tag{8.3}$$

$$x_2' = \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \tag{8.4}$$

o de manera equivalente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} \tag{8.5}$$

$$\Longrightarrow \; x' = R(\theta)x \longleftrightarrow x' = f(x,\theta)x \tag{8.6}$$

o en general

$$\Longrightarrow \; x' = R(a)x \longleftrightarrow x' = f(x,a)x \tag{8.7}$$

De aquí vemos:

1. La acción de $G = SO(2)$ es rotar las coordenadas de $\mathcal{M}$.

2. Si el ángulo de rotación es pequeño, entonces el cambio experimentado por las coordenadas es también pequeño. Esto implica que en general, un pequeño cambio en los parámetros del grupo induce cambios pequeños en las coordenadas de $\mathcal{M}$.

Notemos que cuando $\theta = 0$,

$$R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

es decir,

$$x_1' = x_1 \quad x_2' = x_2 \tag{8.9}$$

$$x' = R(0)x = x, \qquad x' = f(x, 0) = x \tag{8.10}$$

Teniendo en cuenta que en el estudio de los grupos de Lie basta con estudiar su comportamiento infinitesimal, consideremos la expansión infinitesimal de la transformación $x' = f(x, a)$ alrededor de $a = 0$.

$$x' = f(x, a) = f(x, 0) + \left.\frac{\partial f(x, a)}{\partial a}\right|_{a=0} \mathrm{d}a + \cdots \tag{8.11}$$

$$x_i' = f_i(x_j, a_\nu) = f_i(x_j, 0) + \frac{\partial f_i(x_j, 0)}{\partial a_\nu} \mathrm{d}a_\nu \tag{8.12}$$

$$x' = x + \frac{\partial f(x, a)}{\partial a} \mathrm{d}a \tag{8.13}$$

$$x_i' = x_i + \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} \mathrm{d}a_\nu \tag{8.14}$$

Esto implica que

$$\mathrm{d}x' = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a} \mathrm{d}a, \qquad \mathrm{d}x_i' = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} \mathrm{d}a_\nu \tag{8.15}$$

Definiendo por comodidad

$$u(x) = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a}, \qquad u_{i\nu}(x) = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} \tag{8.16}$$

Así,

$$\mathrm{d}x = u(x) \mathrm{d}a, \qquad \mathrm{d}x_i = u_{i\nu} \mathrm{d}a_\nu \tag{8.17}$$

Notar que, de lo anterior[6]

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}a_\nu} = u_{i\nu}(x)} \tag{8.18}$$

También podemos escribir

$$\mathrm{d}x_i = \sum_\nu u_{i\nu}(x) \mathrm{d}a_\nu \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad \nu = 1, 2, ..., r \tag{8.19}$$

Definición 8.1. Sea $F(x) = F(x_1, ..., x_n)$ una función definida sobre la variedad $\mathcal{M}$. La función $F(x)$ es **invariante** bajo el grupo de transformaciones

$$x' = f(x, a) \tag{8.20}$$

si

$$F(x') = F[f(x, a)] = F(x).$$

[6] No estamos siendo estrictos con la posición de los índices coordenados de momento.

Consideremos ahora el cambio experimentado por la función $F(x)$ cuando cambian las coordenadas x debido a un cambio en los parámetros del grupo.

Bajo un cambio en x se tiene que $F(x)$ cambia como[7]

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial x}u(x)\mathrm{d}a \tag{8.21}$$

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}a\left(u(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)F \tag{8.22}$$

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}a_\nu\left(u_{i\nu}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)F \tag{8.23}$$

donde hemos usado (8.17).

Definición 8.2. Se define el **generador** del grupo como el operador dado por

$$\boxed{X_\nu = \sum_i u_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}}, \qquad i = 1, 2, ..., n, \qquad \nu = 1, 2, ..., r \tag{8.24}$$

Así, existe un generador por cada parámetro del grupo.

Esto implica que

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}a_\nu X_\nu F \equiv XF \tag{8.25}$$

donde

$$X = \mathrm{d}a_\nu X_\nu \equiv \mathrm{d}a^\nu X_\nu \tag{8.26}$$

Observación 8.1. Los generadores X_ν son operadores que pueden o no ser operadores hermíticos. En el caso que ellos no sean hermíticos, pueden ser convertidos en hermíticos en general, multiplicándolos por i.

Teorema 8.1. A partir de un conjunto de operadores hermíticos X_ν podemos obtener una representación del grupo por medio de operadores unitarios

$$\boxed{U(a_\nu) = e^{ia_\nu X_\nu}} \tag{8.27}$$

Teorema 8.2. Si X_ν y X_μ son generadores de un grupo de Lie, entonces su conmutador es una combinación lineal se dichos generadores:

$$[X_\nu, X_\mu] = C_{\nu\mu}{}^{\lambda}X_\lambda \equiv C_{\mu\nu\lambda}X_\lambda \tag{8.28}$$

donde

$$C_{\nu\mu}{}^{\lambda} = -C_{\mu\nu}{}^{\lambda} \tag{8.29}$$

Dado que este producto es antisimétrico, satisface la **identidad de Jacobi**,

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] + [[X_\nu, X_\lambda], X_\mu] = 0 \tag{8.30}$$

[7] El cambio en el parámetro genera un cambio en las coordenadas, y el cambio en las coordenadas genera un cambio en la función $F(x)$.

Ejemplo 8.1. Consideremos el siguiente grupo de transformaciones

$$x' = \alpha_1 x + \alpha_2, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \tag{8.31}$$

- Encuentre los generadores del grupo
- Determine sus relaciones de conmutación

Solución 8.1. De (8.31) vemos que la identidad del grupo es dada por $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$ ya que $x' = 1x + 0 = x$, lo que implica que $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0) = (1, 0)$. Con el objeto de tener una identidad nula, definimos

$$a_1 = \alpha_1 - 1, \qquad a_2 = \alpha_2 \tag{8.32}$$

Es decir,

$$a_1^0 = \alpha_1^0 - 1, \qquad a_2^0 = \alpha_2^0 \tag{8.33}$$

$$\Longrightarrow\ a_1^0 = 1 - 1 = 0, \qquad a_2^0 = 0 \tag{8.34}$$

$$\Longrightarrow\ a_0 = (a_1^0, a_2^0) = (0, 0) \tag{8.35}$$

Así, el grupo de transformaciones toma la forma

$$x' = (1 + a_1)x + a_2 \tag{8.36}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{x' = f(x, a) = x + a_1 x + a_2} \tag{8.37}$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{d}x_i = \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu}\mathrm{d}a_\nu = u(x)_{i\nu}\mathrm{d}a_\nu \tag{8.38}$$

$$\mathrm{d}x_i = \sum_\nu \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu}\mathrm{d}a_\nu \tag{8.39}$$

$$\mathrm{d}x_1 \equiv \mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial a_1}\mathrm{d}a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}\mathrm{d}a_2 \tag{8.40}$$

$$\mathrm{d}x = x\mathrm{d}a_1 + 1\mathrm{d}a_2 \tag{8.41}$$

$$\boxed{\mathrm{d}x = x\mathrm{d}a_1 + \mathrm{d}a_2} \tag{8.42}$$

pero

$$\mathrm{d}x = u_{11}\mathrm{d}a_1 + u_{12}\mathrm{d}a_2 \tag{8.43}$$

$$\Longrightarrow\ u_{11} = x, \qquad u_{12} = 1 \tag{8.44}$$

de manera que

$$X_\nu = \sum_i u(x)_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{8.45}$$

$$X_1 = u_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} = u_{11}\frac{\partial}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x} \tag{8.46}$$

$$X_2 = u_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} = u_{12}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tag{8.47}$$

Así, los generadores del grupo son

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{8.48}$$

El conmutador es

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]f &= X_1X_2f - X_2X_1f && (8.49)\\ &= x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right) && (8.50)\\ &= x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} && (8.51)\\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} && (8.52)\\ &= -X_2 f && (8.53)\end{aligned}$$

$$\implies [X_1, X_2] = -X_2 \tag{8.54}$$

Dado que

$$[X_1, X_2] = {C_{12}}^1 X_1 + {C_{12}}^2 X_2 \tag{8.55}$$

se tiene que las constantes de estructura son

$${C_{12}}^1 = 0, \qquad {C_{12}}^2 = -1 \tag{8.56}$$

8.2. Grupos matriciales

Sea $\mathcal{M}$ una variedad que admite las bases[8] $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$,$\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ y $\{\hat{e}''_i\}_{i=1}^n$ asociadas a las coordenadas $\{x_i\}_{i=1}^n$,$\{x'_i\}_{i=1}^n$ y $\{x''_i\}_{i=1}^n$. Un cambio de base es dado por

$$\hat{e}'_j = {B_j}^i\hat{e}_i, \qquad \hat{e}''_k = {A_k}^j\hat{e}'_j, \qquad \hat{e}''_k = {C_k}^i\hat{e}_i \tag{8.57}$$

es decir,

$$\hat{e}''_k = {A_k}^j{B_j}^i\hat{e}'_i = {C_k}^i\hat{e}_i \tag{8.58}$$

$$\implies \boxed{{C_k}^i = {A_k}^j{B_j}^i} \tag{8.59}$$

Todas las bases de un espacio vectorial están relacionadas por medio de matrices. El conjunto de estas matrices constituyen un grupo.

Definición 8.3. El conjunto de matrices $n \times n$ invertible que definen un cambio de base constituyen un grupo conocido como **grupo lineal general** definido sobre los espacios $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{Q}^n$. Estos grupos son denotados por $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{Q})$.

Grupo general lineal $GL(n, \mathbb{C})$

Grupo compuesto por todas las matrices complejas invertibles $n \times n$.

Toda matriz $A \in GL(n, \mathbb{C}^n)$ tiene $2n^2$ elementos (n^2 elementos reales y n^2 elementos imaginarios).

Este grupo tiene $2n^2$ parámetros reales, por lo cual tiene dimensión $2n^2$.

[8] Ver Ref. [**?**]

Grupo general lineal real $GL(n, \mathbb{R})$

Si exigimos que las matrices de $GL(n, \mathbb{C}^n)$ sean todas con elemento reales, obtenemos el grupo lineal general real $GL(n, \mathbb{R}^n)$, el cual tiene n^2 parámetros reales.

Grupo general lineal especial $SL(n, \mathbb{C})$

Si exigimos que todas las matrices de $GL(n, \mathbb{C})$ satisfagan las condiciones que tengan determinante $+1$, entonces obtenemos el grupo lineal especial $SL(n, \mathbb{C})$. Así, si $A \in SL(n, \mathbb{C})$, entonces $\det A = 1$.

Grupo general lineal especial real $SL(n, \mathbb{R})$

Si exigimos que todas las matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ tengan determinante $+1$ entonces obtenemos el grupo especial lineal real $SL(n, \mathbb{R})$.

9. Clase 9

Grupo unitario $U(n)$

Es el grupo de todas las matrices complejas unitarias de $n \times n$. Esto significa que si $A \in U(n)$, entonces $A^{\dagger}A = 1 \implies A^{\dagger} = A$.

Grupo especial unitario $SU(n)$

Si exigimos a las matrices del grupo $U(n)$ que tengan determinante 1, entonces obtenemos el grupo especial unitario $SU(n)$. Esto significa que si $A \in SU(n)$, entonces $A^{\dagger}A = 1$ y $\det A = 1$.

Ejemplos importantes en física son el grupo $SU(2)$ y el grupo $SU(3)$.

También son de gran importantes los grupos $SU(4)$, $SU(5)$ y $SU(6)$.

Nota: El grupo $SU(2) \times U(1)$ está relacionado con las fuerzas electrodébiles (unificación del electromagnetismo con las fuerzas nucleares débiles). El grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ está relacionado con la gran-unificación (unificación del electromagnetismo con las fuerzas nucleares débiles y fuertes).

Grupo ortogonal $O(n, \mathbb{C})$

Es el grupo de todas las matrices complejas ortogonales de $n \times n$. Esto significa que si $A \in O(n, \mathbb{C})$ entonces $A^T A = 1 \implies A^T = A^{-1}$.

Grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{C})$

Si exigimos que las matrices del grupo $O(n, \mathbb{C})$ tengan determinante 1, entonces obtenemos el grupo ortogonal especial $SO(n, \mathbb{C})$. Es decir, si $A \in SO(n)$[9] entonces $A^T A = 1$ y $\det A = 1$

9.1. Ejemplo: Generadores y álgebra de $SO(3)$

Ejemplo 9.1. Determine los generadores del grupo ortogonal especial 3-dimensional $SO(3)$ así como también su álgebra de Lie.

Solución 9.1. El grupo $SO(3)$ es el grupo de matrices ortogonales de 3×3 y de determinante igual a 1. La acción de $SO(3)$ sobre E_3 (o $\mathbb{R}^3$) es dada por el grupo de transformaciones

$$x' = Ax \tag{9.1}$$

de aquí vemos que el elemento unidad es dado por $A_0 = 1 \implies x' = A_0 x = x$. Para lograr tener un elemento unidad nulo definimos

$$a = A - 1 \implies a_0 = A_0 - 1 = 1 - 1 = 0 \tag{9.2}$$

así, la transformación (9.1) toma la forma

$$x' = f(x, a) = (1 + a)x = x + ax \tag{9.3}$$

[9] Por notación se puede omitir la $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}a\frac{\partial f(x,0)}{\partial a} \tag{9.4}$$
$$= \mathrm{d}ax \tag{9.5}$$

y recordamos que

$$\mathrm{d}x_i = \sum_{\nu} u_{i\nu}\mathrm{d}a_{\nu} \tag{9.6}$$

Dado que $A^T A = 1$, tenemos que en el caso infinitesimal (a primer oden)

$$(1 + \mathrm{d}a^T)(1 + \mathrm{d}a) = 1 \tag{9.7}$$
$$1 + \mathrm{d}a + \mathrm{d}a^T + \cancel{\mathrm{d}a^T\,\mathrm{d}a} = 1 \tag{9.8}$$

es decir,

$$\mathrm{d}a = -\mathrm{d}a^T \tag{9.9}$$

explícitamente tenemos

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}a_{11} & \mathrm{d}a_{12} & \mathrm{d}a_{13} \\ \mathrm{d}a_{21} & \mathrm{d}a_{22} & \mathrm{d}a_{23} \\ \mathrm{d}a_{31} & \mathrm{d}a_{32} & \mathrm{d}a_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{d}a_{11} & \mathrm{d}a_{21} & \mathrm{d}a_{31} \\ \mathrm{d}a_{12} & \mathrm{d}a_{22} & \mathrm{d}a_{32} \\ \mathrm{d}a_{13} & \mathrm{d}a_{23} & \mathrm{d}a_{33} \end{pmatrix} \tag{9.10}$$

luego,

$$\mathrm{d}a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}a_{12} & \mathrm{d}a_{13} \\ -\mathrm{d}a_{12} & 0 & \mathrm{d}a_{23} \\ -\mathrm{d}a_{13} & -\mathrm{d}a_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.11}$$

Definimos

$$\mathrm{d}a_{12} = \mathrm{d}a_3, \qquad \mathrm{d}a_{13} = -\mathrm{d}a_2, \qquad \mathrm{d}a_{23} = \mathrm{d}a_1 \tag{9.12}$$

así

$$\mathrm{d}a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}a_3 & -\mathrm{d}a_2 \\ -\mathrm{d}a_3 & 0 & \mathrm{d}a_1 \\ \mathrm{d}a_2 & -\mathrm{d}a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

de (9.5)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}a_3 & -\mathrm{d}a_2 \\ -\mathrm{d}a_3 & 0 & \mathrm{d}a_1 \\ \mathrm{d}a_2 & -\mathrm{d}a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{9.14}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1 &= x_2\mathrm{d}a_3 - x_3\mathrm{d}a_2 \\ \mathrm{d}x_2 &= -x_1\mathrm{d}a_3 + x_3\mathrm{d}a_1 \\ \mathrm{d}x_3 &= x_1\mathrm{d}a_2 - x_2\mathrm{d}a_1 \end{aligned} \tag{9.15}$$

De (9.6)

$$\mathrm{d}x_1 = u_{11}\mathrm{d}a_1 + u_{12}\mathrm{d}a_2 + u_{13}\mathrm{d}a_3 \tag{9.16}$$
$$\mathrm{d}x_2 = u_{21}\mathrm{d}a_1 + u_{22}\mathrm{d}a_2 + u_{23}\mathrm{d}a_3 \tag{9.17}$$
$$\mathrm{d}x_3 = u_{31}\mathrm{d}a_1 + u_{32}\mathrm{d}a_2 + u_{33}\mathrm{d}a_3 \tag{9.18}$$

comparando

$$u_{11} = 0, \quad u_{12} = -x_3, \quad u_{13} = x_2 \tag{9.19}$$
$$u_{21} = x_3, \quad u_{22} = 0_3, \quad u_{23} = -x_1 \tag{9.20}$$
$$u_{31} = -x_2, \quad u_{32} = x_1, \quad u_{33} = 0 \tag{9.21}$$

Los generadores vienen dados por

$$X_\nu = \sum_i u(x)_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9.22}$$

$$X_1 = u_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} + u_{31}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.23}$$
$$= x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.24}$$
$$X_2 = u_{12}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{22}\frac{\partial}{\partial x_2} + u_{32}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.25}$$
$$= -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.26}$$
$$X_3 = u_{13}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{23}\frac{\partial}{\partial x_2} + u_{33}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.27}$$
$$= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{9.28}$$
$$\tag{9.29}$$

en resumen,

$$X_1 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{9.30}$$
$$X_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{9.31}$$
$$X_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{9.32}$$
$$\tag{9.33}$$

El conmutador

$$
\begin{aligned}
[X_1, X_2]F &= X_1 X_2 F - X_2 X_1 F \\
&= \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) - \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) \\
&= x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}\right) \\
&- \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right) - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right] \\
&= \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) F \\
&= X_3 F
\end{aligned}
$$

El cálculo para los demás conmutadores es análogo y se obtiene,

$$[X_1, X_2] = X_3 \tag{9.34}$$

$$[X_3, X_1] = X_2 \tag{9.35}$$

$$[X_2, X_3] = X_1 \tag{9.36}$$

o de manera compacta

$$\boxed{[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k} \tag{9.37}$$

10. Clase 10

10.1. Generadores de transformaciones infinitesimales

Consideremos la siguiente transformación de simetría

$$q'^k = q^k + \delta_\epsilon q^k = q^k + \epsilon\eta^k(q,t) \tag{10.1}$$
$$t' = t + \delta_\epsilon t = t + \epsilon\xi(t) \tag{10.2}$$

Tenemos transformaciones de simetría uni-paramétricas de parámetro ϵ.
Para calcular los generadores, usamos el método usual

$$q'^k = f^k(q^i,\epsilon) = q^k + \epsilon\eta^k(q,t), \qquad \Longrightarrow \delta q^k = \epsilon\eta^k(q,t) \tag{10.3}$$
$$t' = f(t,\epsilon) = t + \epsilon\xi(t), \qquad \Longrightarrow \delta t = \epsilon\xi(t) \tag{10.4}$$

Usaremos el siguiente esquema:

$$(q^k,\epsilon) \Leftrightarrow x^i \implies x^1 = q^k,\, x^2 = t \tag{10.5}$$
$$(f^k(q^i,\epsilon), f(t,\epsilon)) \Leftrightarrow f^i(x^i,a) \tag{10.6}$$

Recordemos que el generador viene dado por

$$X_\nu = \sum_i^2 u_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \nu = 1 \tag{10.7}$$

$$X_1 = u_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + u_{21}\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{10.8}$$

$$u_{i\nu} = \frac{\partial f^i}{\partial a_\nu} \tag{10.9}$$

En este caso

$$u_{11} = \frac{\partial f^k}{\partial \epsilon} = \eta^k(q,t) \tag{10.10}$$
$$u_{21} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \xi(t) \tag{10.11}$$

Así, el generador queda

$$\boxed{X = \xi(q,t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^k(q,t)\frac{\partial}{\partial q^k}} \tag{10.12}$$

Esto implica que

$$Xt = \xi\frac{\partial t}{\partial t} + \eta^k\frac{\partial t}{\partial q^k} \tag{10.13}$$
$$= \xi \tag{10.14}$$

$$Xq^k = \xi\frac{\partial q^k}{\partial t} + \eta^k\frac{\partial q^k}{\partial q^k} \tag{10.15}$$
$$= \eta^k \tag{10.16}$$

Recordemos que una función $F(q,t)$ cambia bajo una transformación de simetría como

$$\delta F = \epsilon XF = \epsilon\left(\xi\frac{\partial F}{\partial t} + \eta^k\frac{\partial F}{\partial q^k}\right) \tag{10.17}$$

Si la función $F(q,t)$ es generalizada al caso de una función $G(t,q,\dot{q},\ddot{q},...)$ el correspondiente generador se denota $\bar{X}$ tal que $\delta G = \epsilon\bar{X}G$, donde

$$X = \xi(t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^k(q,t)\frac{\partial}{\partial q^k} + \eta^k_{(1)}(t,q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k} + \eta^k_{(2)}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\frac{\partial}{\partial\ddot{q}^k} + \cdots \tag{10.18}$$

Hemos visto que

$$\delta q^k = \epsilon\eta^k \tag{10.19}$$
$$\delta t = \epsilon\xi \tag{10.20}$$

Por otro lado sabemos

$$\bar{\delta}q^k = \delta q^k - \dot{q}^k\delta t \tag{10.21}$$
$$= \epsilon\eta^k - \dot{q}^k\epsilon\xi \tag{10.22}$$
$$= \epsilon(\eta^k - \dot{q}^k\xi) \equiv \epsilon\chi^k \tag{10.23}$$

donde $\chi^k = \eta^k - \dot{q}^k\xi$.

Recordemos que la corriente de Noether está dada por

$$J(t,q,\dot{q}) = \sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\bar{\delta}q_i + L\delta t + \delta\Omega \tag{10.24}$$
$$= \sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\epsilon\chi^i + L\epsilon\xi + \epsilon\Omega \tag{10.25}$$
$$= \epsilon\left(\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\chi^i + L\xi + \Omega\right) \tag{10.26}$$

Definimos la carga conservada como

$$J(t,q,\dot{q}) = \epsilon C(t,q,\dot{q}) \tag{10.27}$$

donde

$$\boxed{C(t,q,\dot{q}) = \sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\chi^i + L\xi + \Omega} \tag{10.28}$$

Esta carga es válida para transformaciones uni-paramétricas.

Consideremos ahora el caso de un grupo de transformaciones r-paramétricas de parámetro ϵ_ν, $\nu = 1, 2, ..., r$,

$$\delta_\epsilon q^k = \epsilon^\nu \eta^k_\nu(t,q) \implies q'^k = f^k(q^k, \epsilon_\nu) = q^k + \epsilon^\nu \eta^k_\nu \tag{10.29}$$

$$\delta_\epsilon t = \epsilon^\nu \xi_\nu(t,q) \implies t' = f(t, \epsilon_\nu) = t + \epsilon^n \xi_\nu \tag{10.30}$$

En este caso, los generadores son

$$X_\nu = \sum_i^2 u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x_1 \Leftrightarrow q^k,\ x_2 \Leftrightarrow t \tag{10.31}$$

donde

$$u_{11} = \frac{\partial f^k}{\partial \epsilon_\nu} = \eta^k_\nu \tag{10.32}$$

$$u_{21} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon_\nu} = \xi_\nu \tag{10.33}$$

Luego,

$$\boxed{X_\nu = \xi_\nu \frac{\partial}{\partial t} + \eta^k_\nu \frac{\partial}{\partial q^k}} \tag{10.34}$$

Estos generadores tienen la propiedad que el producto antisimétrico de dos de ellos da lugar a un tercer generador, de acuerdo a

$$\boxed{[X_\mu, X_\nu] = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} X_\lambda} \tag{10.35}$$

En el caso que $\Upsilon_{\mu\nu\lambda}$ sea constante, este producto genera un *álgebra de Lie*.

10.2. Cargas conservadas

La corriente conservada es dada por (10.24)

$$J(t, q, \dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bar{\delta} q_i + L\delta t + \delta\Omega \tag{10.36}$$

donde

$$\delta t = \epsilon^\nu \xi_n \tag{10.37}$$

$$\delta q^k = \epsilon^\nu \eta^k_\nu \tag{10.38}$$

de donde se desprende

$$\bar{\delta} q^i = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t \tag{10.39}$$

$$= \epsilon^\nu \eta^i_\nu - \dot{q}^i \epsilon^\nu \xi_\nu \tag{10.40}$$

$$= \epsilon^\nu (\eta^i_\nu - \dot{q}^i \xi_\nu) \tag{10.41}$$

$$= \epsilon^\nu \chi^k_\nu \tag{10.42}$$

donde $\chi^k_\nu = \eta^i_\nu - \dot{q}^i \xi_\nu$. Así,

$$J(t,q,\dot{q}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \epsilon^\nu \chi^i_\nu + L\epsilon^\nu \xi_\nu + \epsilon^\nu \Omega_\nu \tag{10.43}$$

$$= \epsilon^\nu \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi^i_\nu + L\xi_\nu + \Omega_\nu \right) \tag{10.44}$$

$$\equiv \epsilon^\nu C_\nu \tag{10.45}$$

donde

$$C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi^i_\nu + L\xi_\nu + \Omega_\nu \tag{10.46}$$

es la llamada **carga conservada de Noether**.

Dado que

$$\chi^k_\nu = \eta^i_\nu - \dot{q}^i \xi_\nu \tag{10.47}$$

tenemos

$$C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + L\xi_\nu + \Omega_\nu \tag{10.48}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i_\nu - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right) \xi_\nu + \Omega_\nu \tag{10.49}$$

$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i_\nu - \sum_i \left(p_i \dot{q}^i - L \right) \xi_\nu + \Omega_\nu \tag{10.50}$$

$$\Longrightarrow \boxed{C_\nu = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \eta^i_\nu - H_c \xi_\nu + \Omega_\nu} \tag{10.51}$$

donde H_c corresponde al *Hamiltoniano canónico.*

Teorema 10.1. La variación de las coordenadas es dada en función de las cargas de Noether por medio de

$$\bar{\delta} q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu] \tag{10.52}$$

donde $[,]$ es el corchete de Poisson.

Prueba 10.1. Calculemos

$$[q^k, \epsilon^\nu C_\nu] = \left[q^k, \epsilon^\nu \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\eta^i_\nu - H_c\xi_\nu + \Omega_\nu\right)\right] \tag{10.53}$$

$$= \left[q^k, \epsilon^\nu \sum_i p_i\eta^i_\nu\right] - \left[q^k, \epsilon^\nu H_c\xi_\nu\right] + \cancelto{0}{[q^k, \epsilon^\nu\Omega_\nu]}, \qquad \Omega_\nu = \Omega_\nu(q,t) \tag{10.54}$$

$$= \sum_i \epsilon^\nu [q^k, p_i]\eta^i_\nu - \epsilon^\nu [q^k, H_c]\xi_\nu \tag{10.55}$$

$$= \sum_i \epsilon^\nu \delta^k_i \eta^i_\nu - \epsilon^\nu \dot{q}^k\xi_\nu \tag{10.56}$$

$$= \epsilon^\nu\eta^k_\nu - \epsilon^\nu\dot{q}^k\xi_\nu \tag{10.57}$$

$$= \epsilon^\nu(\eta^k_\nu - \dot{q}^k\xi_\nu) \tag{10.58}$$

$$= \epsilon^\nu\chi^k_\nu \tag{10.59}$$

$$= \bar{\delta}q^k \tag{10.60}$$

Así,

$$\bar{\delta}q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu] \qquad \square \tag{10.61}$$

Teorema 10.2. Las cargas de Noether satisfacen la siguiente relación de conmutación

$$[C_\mu, C_\nu] = \Upsilon_{\mu\nu\lambda}C_\lambda + Z_{\mu\nu} \tag{10.62}$$

Prueba 10.2. Hemos visto que $\bar{\delta}q^k = [q^k, \epsilon^\nu C_\nu]$. Consideremos el conmutador de dos transformaciones $\bar{\delta}$,

$$\bar{\delta}_1 q^k = [q^k, \epsilon^\nu_1 C_\nu] \tag{10.63}$$

$$\bar{\delta}_2(\bar{\delta}_1 q^k) = [\bar{\delta}_1 q^k, \epsilon^\mu_2 C_\nu] = [[q^k, \epsilon^\nu_1 C_\nu], \epsilon^\mu_2 C_\mu] \tag{10.64}$$

$$\implies \bar{\delta}_2\bar{\delta}_1 q^k = \epsilon^\nu_1\epsilon^\nu_2[[q^k, C_\nu], C_\mu] \tag{10.65}$$

Además,

$$\bar{\delta}_1(\bar{\delta}_2 q^k) = [\bar{\delta}_2 q^k, \epsilon^\mu_1 C_\mu] = [[q^k, \epsilon^\nu_2 C_\nu]\epsilon^\mu_1, C_\mu] \tag{10.66}$$

$$= \epsilon^\nu_2\epsilon^\mu_1[[q^k, C_\nu], C_\mu] \tag{10.67}$$

Así,

$$\bar{\delta}_2\bar{\delta}_1 q^k - \bar{\delta}_1\bar{\delta}_2 1^k = \epsilon^\nu_1\epsilon^\mu_2[[q^k, C_\nu], C_\mu] - \epsilon^\nu_2\epsilon^\nu_1[[q^k, C_\nu], C_\mu] \tag{10.68}$$

$$= \epsilon^\mu_1\epsilon^\nu_2\left\{[[q^k, C_\mu], C_\nu] - [[q^k, C_\nu], C_\mu]\right\} \tag{10.69}$$

De la identidad de Jacobi,

$$[[q^k, C_\mu], C_\nu] + [[C_\nu, q^k], C_\mu] + [[C_\mu, C_\nu], q^k] = 0 \tag{10.70}$$

lo que implica que

$$\bar{\delta}_2\bar{\delta}_1 q^k - \bar{\delta}_1\bar{\delta}_2 q^k = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, [C_\mu, C_\nu]] \tag{10.71}$$

Dado que el producto de dos transformaciones debe dar lugar a una tercera transformación

$$[\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_1] q^k = \bar{\delta}_3 q^k = [q^k, \epsilon^\lambda C_\lambda] \tag{10.72}$$

luego, podemos conjeturar que $\epsilon^\lambda \sim \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu$, de manera que $[C_\mu, C_\nu] \sim C_\lambda$. Para hacer consistente la conjetura introducimos (10.62) en (10.71)

$$\epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, [C_\mu, C_\nu]] = \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, \Upsilon_{\mu\nu\lambda} C_\lambda + Z_{\mu\nu}] \tag{10.73}$$

$$= \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, C_\lambda] + \epsilon_1^\mu \cancelto{0}{\epsilon_2^\nu [q^k, Z_{\mu\nu}]}, \qquad (q \text{ conmuta con } Z) \tag{10.74}$$

$$[\bar{\delta}_2, \bar{\delta}_1] q^k = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu [q^k, C_\lambda] = \epsilon^\lambda [q^k, C_\lambda] \tag{10.75}$$

$$\implies \epsilon^\lambda = \Upsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \tag{10.76}$$

1