Mecánica Estadística

Tarea 01

Borja Diez

26 de mayo de 2024

Nota: Para los ejercicios del capítulo 2, primero hice el Problema 5 (Problema 2.7 del libro), así que recomiendo revisar ese primero y luego los otros dos restantes correspondientes a ese capítulo ya que hay cálculos similares que están mejor explicados en este problema.

Índice

1. Problema 1.3

Problema 1.1. Considere dos fermiones idénticos (ningún nivel de energía puede tener más de una partícula) en un sistema de 2 niveles de energía, donde las energías son 0 y ϵ. En términos de ϵ y T calcular

1. La función partición del ensamble canónico Z_{C}
2. La energía promedio $\langle E \rangle$. Además ver que sucede con $\langle E \rangle$ en los límites cuando $T \to 0$ y $T \to \infty$.
3. La entropía S. Analizar los mismo límites para T.
4. Ahora, el sistema es conectado a un baño de partículas con potencial químico μ. Calcule $Z_{\text{GC}}(\mu, T)$. Encuentre el número de partículas, $\langle N \rangle$ como función de μ y T. Además, calcules los mismo límites anteriores en T.

Solución 1.1.

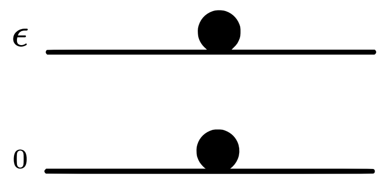

Figura 1. Única configuración posible para el problema dado.

1. Notemos que debido al hecho de que estamos considerando 2 fermiones idénticos en un sistema de 2 niveles de energía, existe sólo una configuración posible para el sistema, de manera tal que ningún nivel de energía tengas más de una partícula, representada en la Figura 1.

   Sabemos que la función de partición del ensamble canónico viene dada por

$$Z_{\text{C}} = \sum_i e^{-\beta\epsilon_i}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{1.1}$$

   Para este caso, tenemos

$$Z_{\text{C}} = e^{-\beta\epsilon} \tag{1.2}$$

$$\boxed{Z_{\text{C}} = e^{-\epsilon/\kappa T}} \tag{1.3}$$

2. La energía promedio se obtiene como

$$\langle E \rangle = \sum_i \epsilon_i P_i \tag{1.4}$$

   donde

$$P_i = \frac{e^{-\beta\epsilon_i}}{Z_{\text{C}}} \tag{1.5}$$

   Usando (1.3), se tiene

$$P_i = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{e^{-\beta\epsilon}} = 1 \tag{1.6}$$

así de (1.4) , la energía promedio es

$$\boxed{\langle E\rangle = \epsilon} \tag{1.7}$$

Notemos que esta igual puede ser calculada usando

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z_{\mathrm{C}}) && (1.8)\\
&= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(e^{-\beta\epsilon}\right) && (1.9)\\
&= -\frac{\partial}{\partial\beta}(-\beta\epsilon) && (1.10)\\
&= \epsilon && (1.11)
\end{aligned}$$

lo cual es consistente con (1.7). Notemos que este valor no depende de T, luego

$$\boxed{\lim_{T\to 0}\langle E\rangle = \lim_{T\to\infty}\langle E\rangle = \epsilon} \tag{1.12}$$

Es decir, para cualquier T, el valor de expectación de la energía será el mismo. Pero esto es consistente ya que el sistema siempre estará en la única configuración en la cual puede estar, con energía total ϵ.

3. Para calcular la entropía S, notemos que de la energía libre de Hemholtz,

$$F = \langle E\rangle - TS = -\kappa T\ln(Z_{\mathrm{C}}) \tag{1.13}$$

podemos despejar S,

$$S = \frac{\langle E\rangle}{T} + \kappa\ln(Z_{\mathrm{C}}) \tag{1.14}$$

Usando lo encontrado anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\epsilon}{T} + \kappa(-\beta\epsilon) && (1.15)\\
&= \frac{\epsilon}{T} - \frac{\kappa}{\kappa T}\epsilon && (1.16)\\
&= \frac{\epsilon}{T} - \frac{\epsilon}{T} && (1.17)\\
\implies & \boxed{S = 0} && (1.18)
\end{aligned}$$

Al igual que antes este valor no depende de T, luego

$$\boxed{\lim_{T\to 0} S = \lim_{T\to\infty} S = 0} \tag{1.19}$$

Este resultado igual es consistente con lo esperado, ya que al existir sólo un único microestado comptible con el sistema, $S \sim \ln(1) = 0$, independientmenete del valor de T.

4. Debido a que ahora estamos permitiendo que el número de partículas fluctúe, debemos calcular la función partición del ensamble gran canónico Z_{GC} de manera similar al ejercicio realizado en clases para el caso de los bosones. Por definición, Z_{GC} viene dada por

$$Z_{\mathrm{GC}} = \sum_l e^{-\beta(E_l - \mu N_l)} \tag{1.20}$$

donde l es la configuración total del sistema, E_l es la energía total del sistema y N_l corresponde al número de partículas total del sistema. Sea i el número de partículas en el nivel 1 con energía 0 y sea j el número de partículas en el nivel 2 con energía ϵ. Así, se tiene

$$E_l = 0 \cdot i + \epsilon \cdot j = \epsilon j \tag{1.21}$$

$$N_l = i + j \tag{1.22}$$

Notar que en este caso, debido a que estamos considerando fermiones, el número de partículas que puede haber en un nivel de energía puede ser únicamente 0 ó 1. Luego, (1.20) queda

$$Z_{\text{GC}} = \sum_{i,j} e^{-\beta(\epsilon j - \mu i - \mu j)} \tag{1.23}$$

$$= \sum_{i=0}^{1} e^{\beta\mu i} \sum_{j=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon-\mu)j} \tag{1.24}$$

$$= \left(1 + e^{\beta\mu}\right)\left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) \tag{1.25}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z_{\text{GC}} = \left(1 + e^{\mu/\kappa T}\right)\left(1 + e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}\right)} \tag{1.26}$$

Para calcular el número de partículas, usamos

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\ln(Z_{\text{GC}}) = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\ln(Z_{\text{GC}}) \tag{1.27}$$

De (1.25) se tiene

$$\ln(Z_{\text{GC}}) = \ln\left[\left(1 + e^{\beta\mu}\right)\left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right)\right] \tag{1.28}$$

$$= \ln\left(1 + e^{\beta\mu}\right) + \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right) \tag{1.29}$$

De (1.27)

$$\langle N \rangle = \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\ln(Z_{\text{GC}}) \tag{1.30}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\beta\mu)}\left[\ln\left(1 + e^{\beta\mu}\right) + \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}\right)\right] \tag{1.31}$$

$$= \frac{e^{\beta\mu}}{1 + e^{\beta\mu}} + \frac{e^{-\beta(\epsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon-\mu)}} \tag{1.32}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle N \rangle = \frac{e^{\mu/\kappa T}}{1 + e^{\mu/\kappa T}} + \frac{e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}{1 + e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}} \tag{1.33}$$

Para calcular los límites notemos que para $T \to 0$ habrá una indeterminación tipo ∞/∞, luego, usamos L'Hopital,

$$\lim_{T\to 0}\langle N\rangle = \lim_{T\to 0}\left\{\frac{e^{\mu/\kappa T}}{1+e^{\mu/\kappa T}}+\frac{e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}{1+e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}\right\} \tag{1.34}$$

$$= \lim_{T\to 0}\left\{\frac{-\dfrac{\mu}{\kappa T^2}e^{\mu/\kappa T}}{-\dfrac{\mu}{\kappa T^2}e^{\mu/\kappa T}}+\frac{\dfrac{k}{T^2}(\epsilon-\mu)e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}{\dfrac{k}{T^2}(\epsilon-\mu)e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}\right\} \tag{1.35}$$

$$= \lim_{T\to 0}\{1+1\} \tag{1.36}$$

$$= \lim_{T\to 0}\{2\} \tag{1.37}$$

$$= 2 \tag{1.38}$$

Por otro lado,

$$\lim_{T\to \infty}\langle N\rangle = \lim_{T\to \infty}\left\{\frac{e^{\mu/\kappa T}}{1+e^{\mu/\kappa T}}+\frac{e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}{1+e^{-(\epsilon-\mu)/\kappa T}}\right\} \tag{1.39}$$

$$= \frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1} \tag{1.40}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \tag{1.41}$$

$$= 1 \tag{1.42}$$

2. Problema 1.5

Problema 2.1. Asumiendo que la presión P es independiente de V cuando es escrita como función de μ y T, es decir, $\ln Z_{\mathrm{GC}} = PV/\kappa T$ (lo cual es verdad si el sistema es mucho más grande que el rango de interacción),

1. Encuentre expresiones para E/V y Q/V en términos de P, T y derivadas parciales de P o P/T con respecto a $\alpha \equiv -\mu/\kappa T$ y $\beta \equiv 1/\kappa T$. Aquí, asuma que el potencial químico está asociado con el número conservado Q.
2. Encuentre una expresión para $C_V = \mathrm{d}E/\mathrm{d}T\,\big|_{Q,V}$ en términos de $P/T, E, Q, V$ y derivadas de $P, P/T, E$ y Q con respecto a β y α.
3. Muestre que la densidad de entropía es $s = \partial_T P\big|_{\mu}$.

Solución 2.1.

1. Dado que

$$\ln(Z_{\mathrm{GC}}) = \frac{PV}{\kappa T} \tag{2.1}$$

y sabemos que el valor de expectación de la energía en el ensamble gran canónico viene dado por

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln(Z_{\mathrm{GC}}) \tag{2.2}$$

tenemos

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{PV}{\kappa T}\right) \tag{2.3}$$

$$= -V\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{P}{\kappa T}\right) \tag{2.4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\langle E\rangle}{V} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{P}{\kappa T}\right)} \tag{2.5}$$

pero además sabemos que $\beta = 1/\kappa T$. Luego, (2.5) queda

$$\frac{\langle E\rangle}{V} = -\frac{\partial}{\partial\beta}(P\beta) \tag{2.6}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\langle E\rangle}{V} = -P} \tag{2.7}$$

De manera similar, sabemos que el valor de expextación de Q se relaciona con la función partición del ensamble gran canónico mediante

$$\langle Q\rangle = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln(Z_{\mathrm{GC}}) \tag{2.8}$$

así,

$$\langle Q \rangle = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{PV}{\kappa T}\right) \tag{2.9}$$

$$= -V\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{P}{\kappa T}\right) \tag{2.10}$$

$$\implies \boxed{\frac{\langle Q \rangle}{V} = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{P}{\kappa T}\right)} \tag{2.11}$$

además,

$$\alpha = -\frac{\mu}{\kappa T} \implies \mathrm{d}\alpha = \frac{\mu}{\kappa T^2}\mathrm{d}T \implies \frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\kappa T^2}{\mu}\frac{\partial}{\partial T} \tag{2.12}$$

Reemplazando en (2.11),

$$\frac{\langle Q \rangle}{V} = -\frac{\kappa T^2}{\mu}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{P}{\kappa T}\right) \tag{2.13}$$

$$= \frac{\kappa T^2}{\mu}\frac{P}{\kappa}\frac{1}{T^2} \tag{2.14}$$

$$\implies \boxed{\frac{\langle Q \rangle}{V} = \frac{P}{\mu} = -\frac{P}{\alpha \kappa T}} \tag{2.15}$$

2. El calor específico a volúmen constante viene dado por

$$C_V = \left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}\right|_{Q,V} \tag{2.16}$$

Notemos que

$$\beta = \frac{1}{\kappa T} \implies \mathrm{d}\beta = -\frac{1}{\kappa T^2}\mathrm{d}T \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} = -\kappa T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} = -\frac{1}{\kappa T^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \tag{2.17}$$

Así, podemos escribir

$$C_V = -\frac{1}{\kappa T^2}\left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\beta}\right|_{Q,V} \tag{2.18}$$

Para poder encontrar $\partial E/\partial \beta\,\big|_{Q,V}$ notemos que la variación de la energía promedio $\langle E \rangle$ escrita en función de α y β viene dada por

$$\delta E = \frac{\partial E}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial E}{\partial \beta}\delta\beta \tag{2.19}$$

De manera similar, dado que estamos a Q constante, se tiene que la variación de $Q = 0$,

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial Q}{\partial \beta}\delta\beta = 0 \tag{2.20}$$

$$\implies \frac{\partial Q}{\partial \alpha}\delta\alpha = -\frac{\partial Q}{\partial \beta}\delta\beta \tag{2.21}$$

podemos despejar $\delta\alpha$ a Q constante,

$$\implies \delta\alpha = -\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha}\delta\beta \tag{2.22}$$

Reemplazando en (2.19),

$$\delta E\Big|_{Q,V} = -\frac{\partial E}{\partial \alpha}\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha}\delta\beta + \frac{\partial E}{\partial \beta}\delta\beta \tag{2.23}$$

$$= \delta\beta\left[\frac{\partial E}{\partial \beta} - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha}\right] \tag{2.24}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\beta}\Big|_{Q,V} = \frac{\partial E}{\partial \beta} - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha} \tag{2.25}$$

Reemplazando en (2.18),

$$C_V = -\frac{1}{\kappa T^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\beta}\Big|_{Q,V} \tag{2.26}$$

$$= -\frac{1}{\kappa T^2}\left(\frac{\partial E}{\partial \beta} - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha}\right) \tag{2.27}$$

pero,

$$\beta = \frac{1}{\kappa T} \implies \kappa\beta^2 = \frac{1}{\kappa T^2} \tag{2.28}$$

Luego, C_V escrito en términos de derivadas de E y Q con respecto a α y β queda,

$$\boxed{C_V = -\kappa\beta^2\left(\frac{\partial E}{\partial \beta} - \frac{\partial E}{\partial \alpha}\frac{\partial Q/\partial \beta}{\partial Q/\partial \alpha}\right)} \tag{2.29}$$

3. De la primera y la segunda ley de la termodinámica combinadas, se tiene

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N \tag{2.30}$$

Podemos *integrar por partes* a los diferenciales del lado derecho,

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}(TS) - S\mathrm{d}T - \mathrm{d}(PV) + V\mathrm{d}P + \mathrm{d}(\mu N) - N\mathrm{d}\mu \tag{2.31}$$

$$\implies \mathrm{d}E - \mathrm{d}(TS) + \mathrm{d}(PV) - \mathrm{d}(\mu N) = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P - N\mathrm{d}\mu \tag{2.32}$$

$$\implies \mathrm{d}(E - TS + PV - \mu N) = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P - N\mathrm{d}\mu \tag{2.33}$$

Pero en clases vimos que la energía libre de Gibbs viene dada por

$$G = \mu N = E - TS + PV \implies E - TS + PV - \mu N = 0 \tag{2.34}$$

Así,

$$0 = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}P - N\mathrm{d}\mu \tag{2.35}$$

considerando μ constante,

$$S\mathrm{d}T = V\mathrm{d}P \implies \frac{S}{V} = \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_{\mu} \tag{2.36}$$

Finalmente, la densidad de entropía viene dada por

$$\boxed{s = \frac{\partial P}{\partial T}\Big|_{\mu}} \tag{2.37}$$

3. Problema 1.8

Problema 3.1. Comenzando con

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E + P\mathrm{d}V - \mu\mathrm{d}Q, \quad \text{y} \quad G \equiv E + PV - TS \tag{3.1}$$

1. Muestre que

$$S = -\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{N,P}, \qquad V = \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_{N,T} \tag{3.2}$$

2. Comenzando con

$$\delta S(P,N,T) = \frac{\partial S}{\partial P}\delta P + \frac{\partial S}{\partial N}\delta N + \frac{\partial S}{\partial T}\delta T \tag{3.3}$$

   Muestre que los calores específicos,

$$C_P \equiv T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{N,P}, \qquad C_V \equiv T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{N,V} \tag{3.4}$$

   satisfacen la relación:

$$C_P = C_V - T\left(\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N}\right)^2\left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} \tag{3.5}$$

   Notar que la compresibilidad, $\equiv -\partial V/\partial P$, es positiva (a menos que el sistema sea inestable), luego $C_P > C_V$.

Solución 3.1.

1. La energía libre de Gibbs viene dada por

$$G = E + PV - TS \tag{3.6}$$

   o en su forma diferencial

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}E + V\mathrm{d}P + P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T - T\mathrm{d}S \tag{3.7}$$

   de la expresión de la primera y la segunda ley de la termodinámica combinadas, donde consideraremos $Q = N$, tenemos

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}E + P\mathrm{d}V - \mu\mathrm{d}N \tag{3.8}$$

   reemplazando en (3.7),

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G &= \cancel{\mathrm{d}E} + V\mathrm{d}P + \cancel{P\mathrm{d}V} - S\mathrm{d}T - \cancel{\mathrm{d}E} - \cancel{P\mathrm{d}V} + \mu\mathrm{d}N && (3.9)\\ &= V\mathrm{d}P - S\mathrm{d}T + \mu\mathrm{d}N && (3.10)\end{aligned}$$

   pero además,

$$\mathrm{d}G = \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_{T,N}\mathrm{d}P + \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{P,N}\mathrm{d}T + \left.\frac{\partial G}{\partial N}\right|_{T,P}\mathrm{d}N \tag{3.11}$$

   comparando estas dos última expresiones, se tiene que

$$\boxed{\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{P,N} = -S, \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_{T,N} = V} \tag{3.12}$$

2. De (3.3) podemos calcular $\mathrm{d}S\big|_N$,

$$
\begin{aligned}
\delta S(P,N,T) &= \left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \delta P + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial S}{\partial N}\delta N\right|_{T,P}} + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \qquad (3.13)\\
&= \left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \delta P + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Queremos encontrar una expresión para C_V. Notemos que a volumen y número de partículas constantes se tiene

$$
\begin{aligned}
0 = \delta V\Big|_N &= \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N} \delta P + \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T + \cancelto{0}{\left.\frac{\partial V}{\partial N}\right|_{T,P} \delta N} \qquad (3.15)\\
&= \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N} \delta P + \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

$$
\implies \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N} \delta P = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \tag{3.17}
$$

$$
\implies \delta P = -\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} \delta T \tag{3.18}
$$

Reemplazando en (3.14),

$$
\begin{aligned}
\delta S\Big|_{N,V} &= \left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left[-\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} \delta T\right] + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \qquad (3.19)\\
&= -\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} \delta T + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \delta T \qquad (3.20)\\
&= \left[-\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N}\right] \delta T \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{N,V} = -\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \tag{3.22}
$$

Multiplicando a ambos lados por T,

$$
\begin{aligned}
T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{N,V} &= -T\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{P,N} \qquad (3.23)\\
C_V &= -T\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{T,N} \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} \left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + C_P \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Además, podemos obtener una relación de Maxwell utilizando (3.12). Usando el hecho que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial P} = \frac{\partial^2 G}{\partial P \partial T} \tag{3.25}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T,N}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N}\right)_{T,N} \tag{3.26}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N} = -\left.\frac{\partial S}{\partial P}\right|_{N,T} \tag{3.27}$$

Reemplazando en (3.23), tenemos

$$C_V = -T\left(-\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N}\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N}\right)\left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + C_P \tag{3.28}$$

$$= T\left(\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N}\right)^2\left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1} + C_P \tag{3.29}$$

Finalemte,

$$\boxed{C_P = C_V - T\left(\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{P,N}\right)^2\left(\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N}\right)^{-1}} \tag{3.30}$$

4. Problema 2.5

Problema 4.1. Derive la expresión correspondiente para la presión para un gas de Bosones/Fermiones no-interactuante en 2-dimensiones. Note que en 2-dimensiones, P describe el trabajo realizado al expandirse por unidad de área, $\mathrm{d}W = P\mathrm{d}A$.

Solución 4.1. Veamos primero el caso bosónico[1].

Notemos que debido a que estamos considerando un gas en 2 dimensiones, (5.4) queda,

$$\Omega_{\mathrm{GC}} = -PA = -\kappa T \ln(Z_{\mathrm{GC}}) \tag{4.1}$$

$$\implies \frac{PA}{\kappa T} = \ln(Z_{\mathrm{GC}}) \tag{4.2}$$

Considerando los signos $(-)$ en (5.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{PA}{\kappa T} &= -\frac{N_s A}{(2\pi\hbar)^2} \int \mathrm{d}^2 p \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) && (4.3)\\
&= -\frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}p p \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) && (4.4)\\
&= -\frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2} \left[\frac{p^2}{2} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \Big|_{p=0}^{p=\infty} - \int_0^\infty \frac{p^2}{2} \mathrm{d}p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \right] && (4.5)\\
&= \frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2} \left[\int_0^\infty \frac{p^2}{2} \mathrm{d}p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \ln\left(1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \right] && (4.6)\\
&= \frac{2\pi N_s}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{2} \mathrm{d}p \frac{-(-\beta) e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p} && (4.7)\\
&= \frac{2\pi N_s A\beta}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{2} \mathrm{d}p \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \frac{pc^2}{\epsilon} && (4.8)\\
&= \frac{2\pi N_s A\beta c^2}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}p \frac{p^3}{2\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} && (4.9)\\
&= \frac{N_s A\beta c^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \mathrm{d}^2 p \frac{p^2}{2\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} && (4.10)\\
&= \frac{N_s A c^2}{\kappa T (2\pi\hbar)^2} \int \mathrm{d}^2 p \frac{p^2}{2\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} && (4.11)
\end{aligned}$$

Donde se ha usado el mismo argumento que en (5.11) para eliminar unos de los términos de la integración por partes. Además para expresar $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}p$ se ha usado (5.15).

Multiplicando a ambos lados por $\kappa T/A$, obtenemos

$$\boxed{P_{\text{Bosones}} = \frac{N_s c^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \mathrm{d}^2 p \frac{p^2}{2\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}} \tag{4.12}$$

[1] Varios de los cálculos hechos en este problema son análogos a los realizados en el Problema 5, por lo tanto recomiendo ver ese antes que este.

Para el caso fermionico el cálculo es similar, solo que ahora debemos considerar el signo positvo en (5.2),

$$\frac{PA}{\kappa T} = \frac{N_s A}{(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{d}^2p \ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \tag{4.13}$$

$$= \frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}pp \ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \tag{4.14}$$

$$= \frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2}\left[\frac{p^2}{2}\ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\Big|_{p=0}^{p=\infty} - \int_0^\infty \frac{p^2}{2}\mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\right] \tag{4.15}$$

$$= -\frac{2\pi N_s A}{(2\pi\hbar)^2}\left[\int_0^\infty \frac{p^2}{2}\mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln\left(1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\right] \tag{4.16}$$

$$= -\frac{2\pi N_s}{(2\pi\hbar)^2}\int_0^\infty \frac{p^2}{2}\mathrm{d}p\frac{(-\beta)e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p} \tag{4.17}$$

$$= \frac{2\pi N_s A\beta}{(2\pi\hbar)^2}\int_0^\infty \frac{p^2}{2}\mathrm{d}p\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\frac{pc^2}{\epsilon} \tag{4.18}$$

$$= \frac{2\pi N_s A\beta c^2}{(2\pi\hbar)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}p\frac{p^3}{2\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \tag{4.19}$$

$$= \frac{N_s A\beta c^2}{(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{d}^2p\frac{p^2}{2\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{4.20}$$

$$= \frac{N_s A c^2}{\kappa T(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{d}^2p\frac{p^2}{2\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \tag{4.21}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_{\text{Fermiones}} = \frac{N_s c^2}{(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{d}^2p\frac{p^2}{2\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}} \tag{4.22}$$

Así, podemos considerar ambos casos,

$$\boxed{P = \frac{N_s c^2}{(2\pi\hbar)^2}\int \mathrm{d}^2p\frac{p^2}{2\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1\pm e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}} \tag{4.23}$$

donde el signo $(-)$ es para bosones y el $(+)$ para los fermiones.

5. Problema 2.7

Problema 5.1. Considere un gas de bosones 3-dimensional sin masa con degeneración de spin N_s. Asumiendo que el potencial químico es nulo ($\mu = 0$), encuentre los coeficientes A y B para las expresiones para la densidad de presión y densidad de energía,

$$P = AN_sT^4, \qquad \left(\frac{E}{V}\right) = BN_sT^4 \tag{5.1}$$

Solución 5.1. Por completitud, derivemos la expresión para la presión P para un gas de bosones no interactuantes mostrada en el libro, asumiendo una relación de dispersión relativista $\epsilon(p) = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

En clases vimos que para el caso de un gas de partículas no interactuantes en D-dimensiones con momentum p y carga q las cuales son consideradas independientes una de otra, el logaritmo de la función partición del ensamble gran canónico viene dado por

$$\ln(Z_{\mathrm{GC}}) = \frac{N_sV}{(2\pi\hbar)^D}\int \mathrm{d}^Dp(\mp)\ln\Big(1 \mp e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\Big) \tag{5.2}$$

donde el signo $-$ es para bosones y el $+$ para fermiones. Ademas N_s es la degeneración de spin, la cual en la mayoría de los casos se considera $(2s+1)$ pero acá no es relevante.

Así, para un gas de bosones en 3-dimensiones sin masa, asumiendo $\mu = 0$ se tiene

$$\ln(Z_{\mathrm{GC}}) = \frac{N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\right) \tag{5.3}$$

Sabemos que el potencial gran canónico se relaciona con Z_{GC} según,

$$\Omega_{\mathrm{GC}} = -PV = -\kappa T\ln(Z_{\mathrm{GC}}) \tag{5.4}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{PV}{\kappa T} &= \ln(Z_{\mathrm{GC}}) && (5.5)\\
&= \frac{N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\right) && (5.6)\\
&= \frac{4\pi N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}pp^2\ln\left(\frac{1}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\right) && (5.7)\\
&= -\frac{4\pi N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}pp^2\ln\left(1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) && (5.8)\\
&= -\frac{4\pi N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\left[\frac{p^3}{3}\ln\left(1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\Bigg|_{p=0}^{p=\infty} - \int_0^\infty \frac{p^3}{3}\mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln\left(1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\right] && (5.9)
\end{aligned}$$

donde en el último paso se ha integrado por partes y se ha usado el hecho de que debido a que $\epsilon(p)$ sólo depende de la magnitud de p, podemos usar la fórmula vista en clases

$$\mathrm{d}^Dp = \Omega p^{D-1}\mathrm{d}p \tag{5.10}$$

donde Ω es el elemento de ángulo sólido en D dimensiones.

Notemos que

$$\frac{p^3}{3}\ln\left(1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\Bigg|_{p=0}^{p=\infty}=0 \tag{5.11}$$

Esto debido a que cuando se evalúa en el límite inferior $p=0$ se anula directamente y cuando se evalúa en el límite superior, y asumimos la relación de dispersión relativista $\epsilon=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$, la exponencial decae mucho más rápido que p^3, luego,

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p^3}{3}\ln\left(1-e^{-\beta(\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-\mu)}\right)=\frac{p^3}{3}\ln(1)=0 \tag{5.12}$$

Así, tenemos

$$\frac{PV}{\kappa T}=\frac{4\pi N_sV}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty\frac{p^3}{3}\mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln\left(1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \tag{5.13}$$

$$=\frac{4\pi N_sV}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}pp^3\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\beta\frac{\mathrm{d}\epsilon(p)}{\mathrm{d}p} \tag{5.14}$$

pero

$$\epsilon=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}\implies\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{2}\frac{2pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}}=\frac{pc^2}{\epsilon} \tag{5.15}$$

reemplazando en lo anterior,

$$\frac{PV}{\kappa T}=\frac{4\pi N_sV}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}pp^3\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}\beta\frac{\mathrm{d}\epsilon(p)}{\mathrm{d}p},\qquad\beta=\frac{1}{\kappa T} \tag{5.16}$$

$$=\frac{4\pi N_sV}{3\kappa T(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty\mathrm{d}pp^4\frac{c^2}{\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \tag{5.17}$$

$$=\frac{N_sV}{\kappa T(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}^3p\frac{p^2c^2}{3\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \tag{5.18}$$

multiplicando por $\kappa T/V$ a ambos lados, obtenemos

$$\boxed{P=\frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}^3p\frac{p^2c^2}{3\epsilon}\frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1-e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}} \tag{5.19}$$

la cual corresponde a la expresión de partida del libro pero ya no en unidades naturales.

Dado que estamos considerando un gas de bosones sin masa, la relación de dispersión relativista queda

$$\epsilon=\sqrt{p^2c^2}=pc \tag{5.20}$$

Luego, de (5.19)

$$P = \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p \frac{p^2c^2}{3\epsilon}\frac{e^{-\beta pc}}{1-e^{-\beta pc}} \tag{5.21}$$

$$= \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p \frac{p^2c^2}{3}\frac{1}{pc}\frac{e^{-\beta pc}}{1-e^{-\beta pc}} \tag{5.22}$$

$$= \frac{N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3p p\frac{e^{-\beta pc}}{1-e^{-\beta pc}} \tag{5.23}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p p\frac{e^{-\beta pc}}{1-e^{-\beta pc}} \tag{5.24}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p p^3\frac{e^{-\beta pc}}{1-e^{-\beta pc}} \quad / \cdot \frac{e^{\beta pc}}{e^{\beta pc}} \tag{5.25}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3c(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \mathrm{d}p p^3\frac{1}{e^{\beta pc}-1} \tag{5.26}$$

Haciendo el siguiente cambio de variables

$$u = \beta pc, \quad p = \frac{1}{\beta c}u, \quad \mathrm{d}p = \frac{1}{\beta c}\mathrm{d}u \tag{5.27}$$

donde es claro ver que los límites de integración no cambian, se tiene

$$P = \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \mathrm{d}u\frac{u^3}{e^u-1} \tag{5.28}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \int_0^\infty \mathrm{d}u\frac{u^3}{e^u-1} \tag{5.29}$$

La integral que queda por hacer se puede calcular usando algún software de cálculo analítico, por ejemplo Maple, el cual arroja

$$\int_0^\infty \mathrm{d}u\frac{u^3}{e^u-1} = \frac{\pi^4}{15} \tag{5.30}$$

Finalmente,

$$P = \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{5.31}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\kappa T}{c}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} \tag{5.32}$$

$$= \frac{\pi^2 N_s \kappa^4}{90c^3\hbar^3}T^4 \tag{5.33}$$

Luego, el coeficiente A pedido viene dado por

$$\boxed{A = \frac{\pi^2\kappa^4}{90c^3\hbar^3}} \tag{5.34}$$

Para calcular E/V usamos la relación derivada en clases,

$$\frac{J}{V} = N_s\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} j(p) f(\epsilon(p)) \tag{5.35}$$

donde N_s es la degeneración de spin, $j(p)$ es una cantidad física para una partícula con magnitud de momentum p y

$$f(\epsilon(p)) = \frac{e^{-\beta(\epsilon(p))}}{1 - e^{-\beta(\epsilon(p))}} \tag{5.36}$$

para el caso de bosones con potencial químico nulo. Así, se tiene

$$\frac{E}{V} = \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \epsilon(p) f(\epsilon(p)), \qquad \epsilon = pc \tag{5.37}$$

$$= \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p pc \frac{e^{-\beta pc}}{1 - e^{-\beta pc}} \tag{5.38}$$

$$= \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p p \frac{e^{-\beta pc}}{1 - e^{-\beta pc}} \qquad / \cdot \frac{e^{\beta pc}}{e^{\beta pc} - 1} \tag{5.39}$$

$$= \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^3 \frac{1}{e^{\beta pc} - 1} \tag{5.40}$$

Haciendo el mismo cambio de variable (5.27), se obtiene

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta c}\right) \mathrm{d}u \left(\frac{1}{\beta c}\right)^3 u^3 \frac{1}{e^u - 1} \tag{5.41}$$

$$= \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{u^3}{e^u - 1}}_{\pi^4/15}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{5.42}$$

$$= \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{\kappa T}{c}\right)^4 \frac{\pi^4}{15} \tag{5.43}$$

$$= \frac{\pi^2 N_s \kappa^4}{30\hbar^3 c^3} T^4 \tag{5.44}$$

donde se usó (5.30). Así, el coeficiente B viene dado por

$$\boxed{B = \frac{\pi^2 \kappa^4}{30\hbar^3 c^3}} \tag{5.45}$$

6. Problema 2.8

Problema 6.1. Muestre que si el Problema 5 se repite para el caso de los fermiones, se cumple que

$$A_{\text{Fermiones}} = \frac{7}{8} A_{\text{Bosones}}, \qquad B_{\text{Fermiones}} = \frac{7}{8} B_{\text{Bosones}} \tag{6.1}$$

Solución 6.1. Ahora, repitamos el procedimiento del problema anterior pero este caso para los fermiones. Considerando el signo positivo en (5.2). Así de (5.4), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{PV}{\kappa T} &= \frac{N_s V}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) && (6.2)\\
&= \frac{4\pi N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^2 \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) && (6.3)\\
&= \frac{4\pi N_s}{(2\pi\hbar)^3} \left[\underbrace{\frac{p^3}{3} \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right)\Bigg|_{p=0}^{p=\infty}}_{0} - \int_0^\infty \frac{p^3}{3} \mathrm{d}p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \ln\left(1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}\right) \right] && (6.4)\\
&= -\frac{4\pi N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p \frac{p^3}{3} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p} (-\beta) && (6.5)\\
&= \frac{4\pi N_s}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^3 \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \frac{pc^2}{\epsilon} \beta && (6.6)\\
&= \frac{4\pi N_s c^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^4 \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \beta, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} && (6.7)\\
&= \frac{N_s}{\kappa T (2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \frac{p^2 c^2}{3\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} && (6.8)
\end{aligned}$$

donde se usó (5.11) en la integración por partes y (5.15) para $\mathrm{d}\epsilon/\mathrm{d}p$. Así, multiplicando la última expresión por $\kappa T/V$, se tiene

$$\boxed{P = \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathrm{d}^3 p \frac{p^2 c^2}{3\epsilon} \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}} \tag{6.9}$$

notemos que es la misma expresión para el caso de los bosones (5.19) salvo el signo cambiado en el denominador. Luego, el procedimiento para calcular P, considerando ahora un gas de fermiones sin masa, cuya relación de dispersión es la relativista,

$$\epsilon = pc \tag{6.10}$$

es literalmente análogo al ya realizado. La única diferencia sustancial es que ahora debido al signo cambiado en el denominador, despues de realizar el cambio de variable (5.27), se tiene

$$P = \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{u^3}{e^u + 1} \tag{6.11}$$

Notemos que la integral que queda para resolver es distinta, pero igual se puede realizar con ayuda de algún software de cálculo analítico, resultando

$$\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{u^3}{e^u + 1} = \frac{7\pi^4}{120} \tag{6.12}$$

Luego,

$$P = \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \frac{7\pi^4}{120}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{6.13}$$

$$= \frac{4\pi N_s c}{3(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\kappa T}{c}\right)^4 \frac{7\pi^4}{120} \tag{6.14}$$

$$= \frac{7}{720}\frac{\pi^2 N_s \kappa^4}{c^3\hbar^3} T^4 \tag{6.15}$$

Luego, el coeficiente viene dado por

$$\boxed{A_{\text{Fermiones}} = \frac{7}{720}\frac{\pi^2\kappa^4}{c^3\hbar^3}} \tag{6.16}$$

Comparando con el coeficiente obtenido para los bosones, tenemos

$$\boxed{\frac{A_{\text{Fermiones}}}{A_{\text{Bosones}}} = \frac{7}{720}\frac{\pi^2\kappa^4}{c^3\hbar^3}\cdot\frac{90c^3\hbar^3}{\pi^2\kappa^4} = \frac{7}{8}} \tag{6.17}$$

Para calcular E/V para el caso de los fermiones, usamos (5.35) donde ahora

$$f(\epsilon(p)) = \frac{e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}}{1+e^{-\beta(\epsilon(p)-\mu)}} \tag{6.18}$$

de manera que

$$\frac{E}{V} = \frac{N_s}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathrm{d}^3 p\, pc \frac{e^{-\beta pc}}{1+e^{-\beta pc}} \tag{6.19}$$

El cálculo vuelve a ser análogo que para el caso bosónico, con la misma diferencia en el denominador, por lo que la diferencia vuelve a aparecer en la integral a resolver despues de realizar el mismo cambio de variable,

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{\beta c}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \mathrm{d}u \frac{u^3}{e^u - 1}}_{7\pi^4/120}, \qquad \beta = \frac{1}{\kappa T} \tag{6.20}$$

$$= \frac{4\pi c N_s}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{\kappa T}{c}\right)^4 \frac{7\pi^4}{120} \tag{6.21}$$

$$= \frac{7}{240}\frac{\pi^2 N_s\kappa^4}{\hbar^3 c^3} T^4 \tag{6.22}$$

Luego,

$$\boxed{B_{\text{Fermiones}} = \frac{7}{240}\frac{\pi^2\kappa^4}{\hbar^3 c^3}} \tag{6.23}$$

Comparando con el coeficiente encontrado para el caso bosónico, tenemos

$$\boxed{\frac{B_{\text{Fermones}}}{B_{\text{Bosones}}} = \frac{7}{240}\frac{\pi^2\kappa^4}{\hbar^3 c^3}\frac{30\hbar^3 c^3}{\pi^2\kappa^4} = \frac{7}{8}} \tag{6.24}$$

Mostrando así lo pedido en el enunciado.