Prepared for submission to JHEP

Skyrme model

Borja Diez

Universidad Arturo Prat

E-mail: borjadiez1014@gmail.com

Abstract: Abstract...

Contents

1 Skyrme model

Un campo de Skyrme es descrito por un modelo sigma no lineal con términos adicionales el cual puede ser escrito convenientemente en términos de un campo escalar U valuado sobre algún grupo, digamos $SU(2)$. El Lagrangiano de Skyrme describe interacciones no-lineales a bajas energías de piones o bariones.

La acción de Einstein-Skyrme viene dada por

$$S = S_G + S_{\text{Skyrme}} \tag{1.1}$$

donde

$$S_G = \kappa \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \tag{1.2}$$

$$S_{\text{Skyrme}} = \frac{K}{2} \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}R^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{16}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{1.3}$$

con $\kappa = (16\pi G)^{-1}$, donde G es la constante gravitacional de Newton y los parámetros K y λ son fijados por el experimento. Aquí R_μ y $F_{\mu\nu}$ se definen según

$$R_\mu := U^{-1}\nabla_\mu U \tag{1.4}$$

$$F_{\mu\nu} := [R_\mu, R_\nu] \tag{1.5}$$

Las ecuaciones de Einstein resultantes son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

donde

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\left(R_\mu R_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\alpha R_\alpha\right) + \frac{\lambda}{4}\left(F_{\mu\alpha}F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)\right] \tag{1.7}$$

Las ecuaciones de Skyrme vienen dadas por

$$\nabla^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{4}\nabla^\mu[R^\nu, F_{\mu\nu}] = 0 \tag{1.8}$$

Aquí R_μ es expresado como

$$R_\mu = R^i_\mu t_i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.9}$$

en la base de los generadores de $SU(2)$ t_i. Los índices de grupo (índices latinos) son subiso y bajados con la métrica plana δ_{ij}. Duchos generadores satisfacen la siguiente relación

$$t_i t_j = -\delta_{ij}\mathrm{I} - \epsilon_{ijk}t_k \tag{1.10}$$

donde I es la matriz identidad de 2×2 y ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita totalemnte antisimétrico con $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$. Los generadores t_j se relacionan con las matrices de Pauli mediante $t_j = -i\sigma_j$.

Usando (1.10) obtenemos la siguiente relación de conmutación,

$$
\begin{aligned}
[t_i, t_j] &= t_i t_j - t_j t_i && (1.11)\\
&= -\delta_{ij}\mathrm{I} - \epsilon_{ijk} t_k + \delta_{ji}\mathrm{I} + \epsilon_{jik} t_k && (1.12)\\
&= -2\epsilon_{ijk} t_k && (1.13)
\end{aligned}
$$

luego,

$$\boxed{F^i_{\mu\nu} = [R_\mu, R_\nu]^i = -2\epsilon_{ijk} R^i_\mu R^j_\nu} \tag{1.14}$$

De auí en adelante usaremos la parametrización estandar para un campo escalar $U(x^\mu)$ valuado sobre $SU(2)$ dada por

$$U^{\pm}(x^\mu) = Y^0(x^\mu)\mathrm{I} \pm Y^i(x^\mu) t_i \tag{1.15}$$

donde los Y^0 y Y^i satisfacen

$$(Y^0)^2 + Y^i Y_i = 1 \tag{1.16}$$

Tomándole la derivada covariante a esta expresión es directo ver que

$$Y^0 \nabla_\mu Y_0 + Y^i \nabla_\mu Y_i = 0 \tag{1.17}$$

Con el fin de calcular cosas en esta teoría, es conveniente expresar cada uno de los objetos obtenidos a partir de $R^i_\mu t_i$ a lo largo de los generadores del grupo, y es lo que haremos a partir de ahora.

De (1.4) y (1.15)

$$
\begin{aligned}
R_\mu &= U^{-1}\nabla_\mu U && (1.18)\\
&= (Y^0\mathrm{I} - Y^i t_i)\nabla_\mu(Y^0\mathrm{I} + Y^j t_j) && (1.19)\\
&= (Y^0\mathrm{I} - Y^i t_i)(\nabla_\mu Y^0\mathrm{I} + \nabla_\mu Y^j t_j) && (1.20)\\
&= Y^0\nabla_\mu Y^0\mathrm{I} + Y^0\nabla Y^j t_j - Y^i\nabla Y^0 t_i - Y^i\nabla_\mu Y^j t_i t_j && (1.21)\\
&= Y^0\nabla_\mu Y^0\mathrm{I} + Y^0\nabla Y^j t_j - Y^i\nabla Y^0 t_i + Y^i\nabla_\mu Y^j(\delta_{ij}\mathrm{I} + \epsilon_{ijk} t_k) && (1.22)\\
&= \underbrace{(Y^0\nabla_\mu Y^0 + Y^i\nabla_\mu Y^i)}_{0}\mathrm{I} + Y^0\nabla Y^i t_i - Y^i\nabla Y^0 t_i + \epsilon_{ijk} Y^i\nabla_\mu Y^j t_k && (1.23)\\
&= Y^0\nabla Y^i t_i - Y^i\nabla Y^0 t_i + \epsilon_{ijk} Y^i\nabla_\mu Y^j t_k && (1.24)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado (1.17). Así, las componentes de R_μ a lo largo de los generadores de $SU(2)$ vienen dadas por

$$\boxed{R^k_\mu = \epsilon^{ijk} Y_i \nabla_\mu Y_j + Y^0\nabla_\mu Y^k - Y^k\nabla_\mu Y^0} \tag{1.25}$$

Con este objeto, podemos construir todo el resto.

Notemos que

$$\mathrm{Tr}(t_i t_j) = \mathrm{Tr}(-\delta_{ij}\mathrm{I} - \epsilon_{ijk} t_k) = -2\delta_{ij} \tag{1.26}$$

De esta manera,

$$\mathrm{Tr}(R_\mu R_\nu) = -2R^i_\mu R^j_\nu \delta_{ij} \tag{1.27}$$

Definiendo

$$S_{\mu\nu} := R^i_\mu R^j_\nu \delta_{ij} \tag{1.28}$$

se tiene

$$\mathrm{Tr}(R_\mu R_\nu) = -2S_{\mu\nu} \tag{1.29}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}) &= \mathrm{Tr}\big(F^{i}_{\mu\alpha}t_i F^{j\alpha}_{\nu}t_j\big) && (1.30)\\
&= F^{i}_{\mu\alpha}F^{j\alpha}_{\nu}\,\mathrm{Tr}(t_i t_j) && (1.31)\\
&= -2\delta_{ij}F^{i}_{\mu\alpha}F^{j\alpha}_{\nu} && (1.32)\\
&= -2\delta_{ij}(-2\epsilon_{ilm}R^{l}_{\mu}R^{m}_{\alpha})(-2\epsilon_{jpq}R^{p}_{\nu}R^{q\alpha}) && (1.33)\\
&= -8\delta_{ij}(\epsilon_{ilm}\epsilon_{jpq}R^{l}_{\mu}R^{m}_{\alpha}R^{p}_{\nu}R^{q\alpha}) && (1.34)\\
&= -8(\delta_{lp}\delta_{mq}-\delta_{lq}\delta_{mp})R^{l}_{\mu}R^{m}_{\alpha}R^{p}_{\nu}R^{q\alpha} && (1.35)\\
&= 8S_{\mu\alpha}S_{\nu}{}^{\alpha}-8S_{\mu\nu}S && (1.36)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}) = 8S_{\mu\alpha}S_{\nu}{}^{\alpha}-8S_{\mu\nu}S \tag{1.37}$$

Veamos ahora como queda (1.7). Primero notemos que

$$\mathrm{Tr}\left(R-\mu R_{\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha}R_{\alpha}\right) = -2S_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}S \tag{1.38}$$

y

$$\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\alpha}F_{\nu}{}^{\alpha}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) = 8S_{\mu\alpha}S_{\nu}{}^{\alpha}-8S_{\mu\nu}S-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(8S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}-S^2) \tag{1.39}$$

Luego, es directo ver que

$$\boxed{T_{\mu\nu} = K\left[S_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}S+\lambda\left\{S_{\mu\nu}S-S_{\mu\alpha}S_{\nu}{}^{\alpha}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(S^2-S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta})\right\}\right]} \tag{1.40}$$

References