

18 DE MAYO DE 2024

## Cálculos útiles

---

**Borja Diez B.**

*Universidad Arturo Pratt, Iquique, Chile*

*E-mail:* [borjadiez1014@gmail.com](mailto:borjadiez1014@gmail.com)

---

## Índice

### 1. Transformación de coordenadas $\mathbb{CP}^2$

---

1

### 1. Transformación de coordenadas $\mathbb{CP}^2$

La métrica de  $\mathbb{CP}^2$  escrita en las coordenadas  $x^\mu = \{r, \theta, \phi, \psi\}$  luce como

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2}\sigma_3^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (1.1)$$

donde  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$  y  $0 \leq \psi \leq 4\pi$ , y las  $\sigma_i$  son las formas invariantes izquierdas de Maurier-Cartan de  $SU(2)$ , definidas como

$$\sigma_1 = \cos \psi d\theta + \sin \theta \sin \psi d\phi \quad (1.2)$$

$$\sigma_2 = -\sin \psi d\theta + \sin \theta \cos \psi d\phi \quad (1.3)$$

$$\sigma_3 = d\psi + \cos \theta d\phi \quad (1.4)$$

las cuales satisfacen  $d\sigma_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^j \wedge \sigma^k = 0$ . Además es directo notar que  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = d\Omega_2^2$  es el elemento de línea de las 2-esfera unitaria. Luego, (1.1) puede ser escrita como

$$ds^2 = \frac{dr^2}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2}(d\psi + \cos \theta d\phi)^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.5)$$

La métrica (1.1) es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.6)$$

Además, esta métrica se puede expresar en términos de coordenadas periódicas  $x'^\mu = \{\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2\}$  como <sup>1</sup>

$$ds^2 = \frac{6}{\Lambda} [d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 (d\phi_2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 d\phi_1^2)] \quad (1.7)$$

donde  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$  y  $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$ . Escrita en estas coordenadas es evidente que  $\mathbb{CP}^2$  es una variedad compacta.

---

<sup>1</sup>Ver Ref. [1] y Ref. [2]

La transformación de coordenadas que relaciona la métrica de  $\mathbb{CP}^2$  escrita como (1.5) y (1.7) viene dada por

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} \tan \theta_2 \\ \theta = 2\theta_1 \\ \phi = -\phi_1 \\ \psi = 2\phi_2 + \phi_1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Es directo ver que

$$dr = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}} (1 + \tan^2 \theta_2) d\theta_2 \quad (1.9)$$

$$d\theta = 2d\theta_1 \quad (1.10)$$

$$d\phi = -d\phi_1 \quad (1.11)$$

$$d\psi = 2d\phi_2 + d\phi_1 \quad (1.12)$$

Para ver esto, expresemos cada término de (1.5) en términos de las coordenadas  $x'^\mu$ . El primer término queda

$$\frac{dr^2}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} = \frac{\frac{6}{\Lambda}(1 + \tan^2 \theta_2)^2 d\theta_2^2}{(1 + \tan^2 \theta_2)^2} = \frac{6}{\Lambda} d\theta_2^2 \quad (1.13)$$

El segundo queda

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 = \frac{1}{4} \frac{6}{\Lambda} \frac{\tan^2 \theta_2}{(1 + \tan^2 \theta_2)^2} [2d\phi_2 + d\phi_1 - \cos(2\theta_1)d\phi_1]^2 \quad (1.14)$$

pero

$$\frac{\tan^2 \theta_2}{(1 + \tan^2 \theta_2)^2} = \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \quad (1.15)$$

luego,

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 = \frac{6}{\Lambda} \frac{1}{4} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 [2d\phi_2 + d\phi_1 - \cos(2\theta_1)d\phi_1]^2 \quad (1.16)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \left[ \frac{1}{2} (2d\phi_2 + d\phi_1 - \cos(2\theta_1)d\phi_1) \right]^2 \quad (1.17)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \left[ d\phi_2 + \frac{1}{2}d\phi_1 - \frac{1}{2}\cos(2\theta_1)d\phi_1 \right]^2 \quad (1.18)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 \left[ d\phi_2 + \frac{1}{2}d\phi_1 - \frac{1}{2}\cos^2(\theta_1)d\phi_1 + \frac{1}{2}\sin^2(\theta_1)d\phi_1 \right]^2 \quad (1.19)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 [d\phi_2 + \sin^2(\theta_1)d\phi_1]^2 \quad (1.20)$$

donde se usó que  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ .

Finalmente el tercer término queda

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)}(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \frac{6}{\Lambda} \frac{1}{4} \frac{\tan^2 \theta_2}{(1 + \tan^2 \theta_2)} (4d\theta_1^2 + \sin^2(2\theta_1)d\phi_1^2) \quad (1.21)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \frac{1}{4} \sin^2 \theta_2 (4d\theta_1^2 + 4\sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 d\phi_1^2) \quad (1.22)$$

$$= \frac{6}{\Lambda} \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 d\phi_1^2) \quad (1.23)$$

donde se usó,

$$\frac{\tan^2 \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2} = \sin^2 \theta_2, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.24)$$

Finalmente de (1.13), (1.20) y (1.23) se tiene en efecto

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)^2} (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1 + \frac{\Lambda}{6}r^2)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.25) \\ &= \frac{6}{\Lambda} [d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_2 (d\phi_2 + \sin^2 \theta_1 d\phi_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 d\phi_1^2)] \quad (1.26) \end{aligned}$$

Debido a los rangos de las coordenadas  $x'^\mu = \{\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2\}$ , se tiene que el rango de las coordenadas  $x^\mu$  es  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$  y  $0 \leq \psi \leq 6\pi$ <sup>2</sup>.

$$\sigma_1 = 2(2 \cos^2 \phi_2 \cos \phi_1 - 2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 \sin \phi_1 - \cos \phi_1) d\theta_1 \quad (1.27)$$

$$- 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 (2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 \cos \phi_1 + 2 \cos^2 \phi_2 \sin \phi_1 - \sin \phi_1) d\phi_1 \quad (1.28)$$

$$\sigma_2 = -2(2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 \cos \phi_1 + 2 \cos^2 \phi_2 \sin \phi_1 - \sin \phi_1) d\theta_1 \quad (1.29)$$

$$- 2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 (2 \cos^2 \phi_2 \cos \phi_1 - 2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 \sin \phi_1 - \cos \phi_1) d\phi_1 \quad (1.30)$$

$$\sigma_3 = 2d\phi_2 + 2 \sin^2 \theta_1 d\phi_1 \quad (1.31)$$

---

<sup>2</sup>El rango de la coordenada  $\psi$  no coincide con el que debería tener.

## Referencias

- [1] C. Corral, D. Flores-Alfonso, G. Giribet and J. Oliva, *Higher-curvature generalization of eguchi-hanson spaces*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 084055.
- [2] P. Hoxha, R.R. Martinez-Acosta and C.N. Pope, *Kaluza-Klein consistency, Killing vectors, and Kahler spaces*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 4207 [[hep-th/0005172](#)].