31 de mayo de 2024

Cálculos útiles

Borja Diez B.

Universidad Arturo Pratt, Iquique, Chile

E-mail: borjadiez1014@gmail.com

Índice

1. Transformación de coordenadas $\mathbb{CP}^2$

La métrica de $\mathbb{CP}^2$ escrita en las coordenadas $x^\mu = \{r, \theta, \phi, \psi\}$ luce como

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2}\sigma_3^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)}(\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{1.1}$$

donde $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ y $0 \leq \psi \leq 4\pi$, y las σ_i son las formas invariantes izquierdas de Maurier-Cartan de $SU(2)$, definidas como

$$\sigma_1 = \cos\psi\mathrm{d}\theta + \sin\theta\sin\psi\mathrm{d}\phi \tag{1.2}$$

$$\sigma_2 = -\sin\psi\mathrm{d}\theta + \sin\theta\cos\psi\mathrm{d}\phi \tag{1.3}$$

$$\sigma_3 = \mathrm{d}\psi + \cos\theta\mathrm{d}\phi \tag{1.4}$$

las cuales satisfacen $\mathrm{d}\sigma_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^j\wedge\sigma^k = 0$. Además es directo notar que $\sigma_1^2+\sigma_2^2 = \mathrm{d}\Omega_2^2$ es el elemento de línea de las 2-esfera unitaria. Luego, (1.1) puede ser escrita como

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2}(\mathrm{d}\psi+\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)}(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{1.5}$$

La métrica (1.1) es solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica en vacío

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.6}$$

Además, esta métrica se puede expresar en términos de coordenadas periódicas $x'^\mu = \{\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2\}$ como [1]

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{6}{\Lambda}\left[\mathrm{d}\theta_2^2 + \sin^2\theta_2\cos^2\theta_2(\mathrm{d}\phi_2+\sin^2\theta_1\mathrm{d}\phi_1)^2 + \sin^2\theta_2(\mathrm{d}\theta_1^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\mathrm{d}\phi_1^2)\right] \tag{1.7}$$

donde $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ y $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$. Escrita en estas coordenadas es evidente que $\mathbb{CP}^2$ es una variedad compacta.

[1] Ver Ref. [1] y Ref. [2]

La transformación de coordenadas que relaciona la métrica de $\mathbb{CP}^2$ escrita como (1.5) y (1.7) viene dada por

$$\begin{cases} r &= \sqrt{\frac{6}{\Lambda}}\tan\theta_2 \\ \theta &= 2\theta_1 \\ \phi &= -\phi_1 \\ \psi &= 2\phi_2 + \phi_1 \end{cases} \tag{1.8}$$

Es directo ver que

$$\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{6}{\Lambda}}(1+\tan^2\theta_2)\mathrm{d}\theta_2 \tag{1.9}$$

$$\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{d}\theta_1 \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}\phi = -\mathrm{d}\phi_1 \tag{1.11}$$

$$\mathrm{d}\psi = 2\mathrm{d}\phi_2 + \mathrm{d}\phi_1 \tag{1.12}$$

Para ver esto, expresemos cada término de (1.5) en términos de las coordenadas x'^{μ}. El primer término queda

$$\frac{\mathrm{d}r^2}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2} = \frac{\frac{6}{\Lambda}(1+\tan^2\theta_2)^2\mathrm{d}\theta_2^2}{(1+\tan^2\theta_2)^2} = \frac{6}{\Lambda}\mathrm{d}\theta_2^2 \tag{1.13}$$

El segundo queda

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2}(\mathrm{d}\psi+\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 = \frac{1}{4}\frac{6}{\Lambda}\frac{\tan^2\theta_2}{(1+\tan^2\theta_2)^2}\left[2\mathrm{d}\phi_2+\mathrm{d}\phi_1-\cos(2\theta_1)\mathrm{d}\phi_1\right]^2 \tag{1.14}$$

pero

$$\frac{\tan^2\theta_2}{(1+\tan^2\theta_2)^2} = \sin^2\theta_2\cos^2\theta_2 \tag{1.15}$$

luego,

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2}(\mathrm{d}\psi+\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 = \frac{6}{\Lambda}\frac{1}{4}\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left[2\mathrm{d}\phi_2+\mathrm{d}\phi_1-\cos(2\theta_1)\mathrm{d}\phi_1\right]^2 \tag{1.16}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left[\frac{1}{2}(2\mathrm{d}\phi_2+\mathrm{d}\phi_1-\cos(2\theta_1)\mathrm{d}\phi_1)\right]^2 \tag{1.17}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left[\mathrm{d}\phi_2+\frac{1}{2}\mathrm{d}\phi_1-\frac{1}{2}\cos(2\theta_1)\mathrm{d}\phi_1\right]^2 \tag{1.18}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left[\mathrm{d}\phi_2+\frac{1}{2}\mathrm{d}\phi_1-\frac{1}{2}\cos^2(\theta_1)\mathrm{d}\phi_1+\frac{1}{2}\sin^2(\theta_1)\mathrm{d}\phi_1\right]^2 \tag{1.19}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left[\mathrm{d}\phi_2+\sin^2(\theta_1)\mathrm{d}\phi_1\right]^2 \tag{1.20}$$

donde se usó que $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Finalmente el tercer término queda

$$\frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)}(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) = \frac{6}{\Lambda}\frac{1}{4}\frac{\tan^2\theta_2}{(1+\tan^2\theta_2)}(4\mathrm{d}\theta_1^2+\sin^2(2\theta_1)\mathrm{d}\phi_1^2) \tag{1.21}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\frac{1}{4}\sin^2\theta_2(4\mathrm{d}\theta_1^2+4\sin^2\theta_1\cos^2\mathrm{d}\phi_1^2) \tag{1.22}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}\sin^2\theta_2(\mathrm{d}\theta_1^2+\sin^2\theta_1\cos^2\mathrm{d}\phi_1^2) \tag{1.23}$$

donde se usó,

$$\frac{\tan^2\theta_2}{1+\tan^2\theta_2} = \sin^2\theta_2, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.24}$$

Finalmente de (1.13), (1.20) y (1.23) se tiene en efecto

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2} + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)^2}(\mathrm{d}\psi+\cos\theta\mathrm{d}\phi)^2 + \frac{\frac{r^2}{4}}{(1+\frac{\Lambda}{6}r^2)}(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2) \tag{1.25}$$

$$= \frac{6}{\Lambda}[\mathrm{d}\theta_2^2+\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2(\mathrm{d}\phi_2+\sin^2\theta_1\mathrm{d}\phi_1)^2+\sin^2\theta_2(\mathrm{d}\theta_1^2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\mathrm{d}\phi_1^2)] \tag{1.26}$$

Debido a los rangos de las coordenadas $x'^\mu = \{\theta_1,\theta_2,\phi_1,\phi_2\}$, se tiene que el rango de las coordenadas x^μ es $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ y $0 \leq \psi \leq 6\pi$ [2] .

$$\sigma_1 = -4\cos\theta_1\sin\theta_1(\sin\phi_2\cos\phi_2\cos\phi_1+\cos^2\theta_2\sin\phi_1)\mathrm{d}\phi_1 \tag{1.27}$$

$$+2(\cos^2\phi_2\cos\phi_1-2\sin\phi_2\cos\phi_2\sin\phi_1-\cos\phi_1)\mathrm{d}\theta_1 \tag{1.28}$$

$$\sigma_2 = -2\cos\theta_1\sin\theta_1(2\cos^2\phi_2\cos\phi_1-2\sin\phi_2\cos\phi_2\sin\phi_1-\cos\phi_1)\mathrm{d}\phi_1 \tag{1.29}$$

$$-2(2\sin\phi_2\cos\phi_2\cos\phi_1+2\cos^2\phi_2\sin\phi_1-\sin\phi_1)\mathrm{d}\theta_1 \tag{1.30}$$

$$\sigma 3 = 2\mathrm{d}\phi_2+2\sin^2\theta_1\mathrm{d}\phi_1 \tag{1.31}$$

[2] El rango de la coordenada ψ no coincide con el que debería tener.

Referencias

[1] C. Corral, D. Flores-Alfonso, G. Giribet and J. Oliva, *Higher-curvature generalization of eguchi-hanson spaces*, *Phys. Rev. D* **106** (2022) 084055.

[2] P. Hoxha, R.R. Martinez-Acosta and C.N. Pope, *Kaluza-Klein consistency, Killing vectors, and Kahler spaces*, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 4207 [hep-th/0005172].