

Skyrme model

Borja Diez

Universidad Arturo Prat

E-mail: borjadiez1014@gmail.com

ABSTRACT: Abstract...

Contents

1 Skyrme model

1

1 Skyrme model

Un campo de Skyrme es descrito por un modelo sigma no lineal con términos adicionales el cual puede ser escrito convenientemente en términos de un campo escalar U valuado sobre algún grupo, digamos $SU(2)$. El Lagrangiano de Skyrme describe interacciones no-lineales a bajas energías de piones o bariones.

La acción de Einstein-Skyrme viene dada por

$$S = S_G + S_{\text{Skyrme}} \quad (1.1)$$

donde

$$S_G = \kappa \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (1.2)$$

$$S_{\text{Skyrme}} = \frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} R^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{16} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (1.3)$$

con $\kappa = (16\pi G)^{-1}$, donde G es la constante gravitacional de Newton y los parámetros K y λ son fijados por el experimento. Aquí R_μ y $F_{\mu\nu}$ se definen según

$$R_\mu := U^{-1} \nabla_\mu U \quad (1.4)$$

$$F_{\mu\nu} := [R_\mu, R_\nu] \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de Einstein resultantes son

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} T_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = -\frac{K}{2} \text{Tr} \left[\left(R_\mu R_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^\alpha R_\alpha \right) + \frac{\lambda}{4} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \right] \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de Skyrme vienen dadas por

$$\nabla^\mu R_\mu + \frac{\lambda}{4} \nabla^\mu [R^\nu, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (1.8)$$

Aquí R_μ es expresado como

$$R_\mu = R_\mu^i t_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

en la base de los generadores de $SU(2)$ t_i . Los índices de grupo (índices latinos) son subíndice y bajados con la métrica plana δ_{ij} . Dichos generadores satisfacen la siguiente relación

$$t_i t_j = -\delta_{ij} \mathbf{I} - \epsilon_{ijk} t_k \quad (1.10)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad de 2×2 y ϵ_{ijk} es el símbolo de Levi-Civita totalmente antisimétrico con $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$. Los generadores t_j se relacionan con las matrices de Pauli mediante $t_j = -i\sigma_j$.

Usando (1.10) obtenemos la siguiente relación de conmutación,

$$[t_i, t_j] = t_i t_j - t_j t_i \quad (1.11)$$

$$= -\delta_{ij} \mathbf{I} - \epsilon_{ijk} t_k + \delta_{ji} \mathbf{I} + \epsilon_{jik} t_k \quad (1.12)$$

$$= -2\epsilon_{ijk} t_k \quad (1.13)$$

De aquí en adelante usaremos la parametrización estandar para un campo escalar $U(x^\mu)$ valuado sobre $SU(2)$ dada por

$$U^\pm(x^\mu) = Y^0(x^\mu) \mathbf{I} \pm Y^i(x^\mu) t_i \quad (1.14)$$

donde los Y^0 y Y^i satisfacen

$$(Y^0)^2 + Y^i Y_i = 1 \quad (1.15)$$

Tomándole la derivada covariante a esta expresión es directo ver que

$$Y^0 \nabla_\mu Y_0 + Y^i \nabla_\mu Y_i = 0 \quad (1.16)$$

Con el fin de calcular cosas en esta teoría, es conveniente expresar cada uno de los objetos obtenidos a partir de $R_\mu^i t_i$ a lo largo de los generadores del grupo, y es lo que haremos a partir de ahora.

De (1.4) y (1.14)

$$R_\mu = U^{-1} \nabla_\mu U \quad (1.17)$$

$$= (Y^0 \mathbf{I} - Y^i t_i) \nabla_\mu (Y^0 \mathbf{I} + Y^j t_j) \quad (1.18)$$

$$= (Y^0 \mathbf{I} - Y^i t_i) (\nabla_\mu Y^0 \mathbf{I} + \nabla_\mu Y^j t_j) \quad (1.19)$$

$$= Y^0 \nabla_\mu Y^0 \mathbf{I} + Y^0 \nabla Y^j t_j - Y^i \nabla Y^0 t_i - Y^i \nabla_\mu Y^j t_i t_j \quad (1.20)$$

$$= Y^0 \nabla_\mu Y^0 \mathbf{I} + Y^0 \nabla Y^j t_j - Y^i \nabla Y^0 t_i + Y^i \nabla_\mu Y^j (\delta_{ij} \mathbf{I} + \epsilon_{ijk} t_k) \quad (1.21)$$

$$= \underbrace{(Y^0 \nabla_\mu Y^0 + Y^i \nabla_\mu Y^i)}_0 \mathbf{I} + Y^0 \nabla Y^i t_i - Y^i \nabla Y^0 t_i + \epsilon_{ijk} Y^i \nabla_\mu Y^j t_k \quad (1.22)$$

$$= Y^0 \nabla Y^i t_i - Y^i \nabla Y^0 t_i + \epsilon_{ijk} Y^i \nabla_\mu Y^j t_k \quad (1.23)$$

donde hemos usado (1.16). Así, las componentes de R_μ a lo largo de los generadores de $SU(2)$ vienen dadas por

$$\boxed{R_\mu^k = \epsilon^{ijk} Y_i \nabla_\mu Y_j + Y^0 \nabla_\mu Y^k - Y^k \nabla_\mu Y^0} \quad (1.24)$$

References