《数学分析 Ia》高频考点复习资料

📘 第一章 极限与连续

一、极限计算（必考）

1. 重要极限公式

- **第一重要极限**：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- **第二重要极限**：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad \text{或} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

- **推广形式**：

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k$$

2. 等价无穷小（必考）

当 $x\to 0$ 时：

- $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$
- $e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$
- $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$
- $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$
- $x\ln(1+x^2)\sim x^3$（2021、2024年均考）

3. 解题步骤

1. **判断类型**：0/0、∞/∞、1^∞、∞−∞ 等
2. **化简方法**：
   - 因式分解、有理化
   - 等价无穷小替换（**乘除可用，加减慎用**）
   - 变量代换（尤其含根式）
3. **选择工具**：
   - 优先：等价无穷小
   - 其次：洛必达法则（需验证条件）
   - 复杂：泰勒展开到足够阶数

4. 典型例题

例 1（2021 年第 1 题）
若 $x\to 0$ 时，$x\ln(1+x^2)$ 与 x^k 等价，求 k。

> **解**：
> $x\ln(1+x^2)\sim x\cdot x^2=x^3$，
> $\therefore k=3$

例 2（2023 年第 2 题）
$e^{2x}-\cos x$ 与 $\sin x$ 比较。

> **解**：
> $e^{2x}-\cos x=(1+2x+o(x))-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=2x+o(x)$

> $\sin x \sim x$，
> $\therefore$ 同阶但不等价

二、连续性（常考）

1. 间断点分类

- **可去间断点**：极限存在但不等于函数值
- **跳跃间断点**：左右极限存在但不相等
- **无穷间断点**：极限为无穷
- **振荡间断点**：极限不存在且不趋于无穷

2. 连续性判定

$f(x)$ 在 x_0 连续 $\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
分段函数在分段点需检查左右极限。

3. 典型例题

例（2024 年第 3 题）
$f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ 在 $x = 0$ 处的间断类型。

> **解**：
> $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$，$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$
> 左右极限存在但不相等，$\therefore$ 跳跃间断点

📘 第二章 导数与微分

一、导数定义与计算（必考）

1. 导数定义

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数：$\lim_{\Delta x \to 0^-}$，右导数：$\lim_{\Delta x \to 0^+}$
可导 $\iff$ 左右导数存在且相等。

2. 求导法则

- **四则运算**：
  - $(u \pm v)' = u' \pm v'$
  - $(uv)' = u'v + uv'$
  - $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- **复合函数**：$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
- **隐函数求导**：方程两边对 x 求导，注意 y 是 x 的函数
- **参数方程**：
  - $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$
  - $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt}$
- **对数求导法**：适用于幂指函数或连乘积

3. 高阶导数（常考）

常用公式：

- $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$
- $(\sin(ax))^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$

- $(\cos(ax))^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $(\ln(1+x))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

莱布尼茨公式：$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

4. 典型例题

例 1（2023 年第 12 题）参数方程二阶导
已知 $x = \sqrt{1-t^2}$，$y = \arcsin t$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

> **解**：
>
> 1. $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$，$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
> 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{1}{t}$
> 3. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(dy/dx)/dt}{dx/dt} = \frac{(1/t^2)}{(-t/\sqrt{1-t^2})} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$

例 2（2024 年第 8 题）已知积分求导
若 $\int f(x)\,dx = \sin(2x+e^2) + C$，求 $f'(x)$。

> **解**：
> $f(x) = 2\cos(2x+e^2)$，
> $f'(x) = -4\sin(2x+e^2)$

二、微分及其应用

1. 微分公式

- $dy = f'(x)dx$
- $df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)dx$

2. 近似计算

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

3. 典型例题

例（2023 年第 7 题）若 $f(x)$ 可导，求 $df(2x+3)$。

> **解**：
> $df(2x+3) = f'(2x+3)d(2x+3) = 2f'(2x+3)dx$

📘 第三章 导数的应用（必考）

一、单调性与极值

1. 判定定理

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 单调增；$f'(x) < 0 \Rightarrow$ 单调减
- **极值必要条件**：若 $f(x)$ 在 x_0 可导且取极值，则 $f'(x_0) = 0$
- **极值充分条件**：
  - **第一充分条件**：$f'(x)$ 在 x_0 两侧变号
  - **第二充分条件**：$f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) \neq 0$
    - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ 极小值
    - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ 极大值

2. 最值问题步骤

1. 求 $f'(x)$，找驻点和不可导点

2. 计算这些点及端点的函数值
3. 比较得最大值和最小值

3. 典型例题

例 1（2021 年第 11 题）
求 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 在 $[-2,2]$ 的最大值。

> **解**：
>
> 1. $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x}{1+x^2}$
> 2. 令 $y'=0$ 得 $x=1$
> 3. 计算：
>   - $y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$
>   - $y(-2)=\arctan(-2)-\frac{1}{2}\ln 5$
>   - $y(2)=\arctan 2-\frac{1}{2}\ln 5$
> 4. 比较得最大值在 $x=1$ 处取得

例 2（2024 年第 13 题）
求 $y=\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ 的极值。

> **解**：同上题，$x=1$ 为驻点
> $y''=\frac{-(1+x^2)-2x(1-x)}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$
> $y''(1)=\frac{1-2-1}{(1+1)^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}<0$
> $\therefore x=1$ 处取极大值 $y(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

二、凹凸性与拐点

1. 判定定理

- $f''(x)>0\Rightarrow$ 凹函数；$f''(x)<0\Rightarrow$ 凸函数
- **拐点**：$f''(x)$ 变号且曲线经过的点

2. 典型例题

例（2023 年第 5 题）
$f'(0)=0$，$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=1$，判断 $x=0$ 性质。

> **解**：由极限知 $f''(x)\sim x$，在 $x=0$ 两侧 $f''(x)$ 变号
> $\therefore x=0$ 是拐点

三、渐近线

1. 分类求法

- **水平渐近线**：$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=b\Rightarrow y=b$
- **垂直渐近线**：$\lim_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow x=a$
- **斜渐近线**：$y=kx+b$，其中
  - $k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$
  - $b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$

四、曲率与曲率半径（较少考）

曲率：$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$
曲率半径：$R=\frac{1}{K}$

📘 第四章 不定积分（必考）

一、基本积分公式（必须熟记）

1. $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x \, dx = e^x + C$
4. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

二、积分方法

1. 换元积分法（必考）

- **第一类换元（凑微分）**：识别 $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = f(u)du$
- **第二类换元**：
  - 三角代换：
    - $\sqrt{a^2 - x^2} \to x = a\sin t$
    - $\sqrt{a^2 + x^2} \to x = a\tan t$
    - $\sqrt{x^2 - a^2} \to x = a\sec t$
  - 根式代换：$\sqrt[n]{ax+b} \to t = \sqrt[n]{ax+b}$
  - 倒代换：分母次数高时用 $x = 1/t$

2. 分部积分法（必考）

公式：$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

选择 u 的顺序（口诀：**反、对、幂、三、指**）：

1. 反三角函数
2. 对数函数
3. 幂函数
4. 三角函数
5. 指数函数

3. 有理函数积分

步骤：真分式 → 部分分式分解 → 分别积分

三、典型例题

例 1（2021 年第 12 题）$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$

> **解**：令 $x = 3\sin t$，$dx = 3\cos t \, dt$
> $\int \sqrt{9 - 9\sin^2 t} \cdot 3\cos t \, dt = 9\int \cos^2 t \, dt = \frac{9}{2}\int (1 + \cos 2t) \, dt$
> $= \frac{9}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + C$

例 2（2021 年第 13 题）$\int x^3 e^x \, dx$

> **解**：分部积分，令 $u = x^3$，$dv = e^x dx$
> $\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x \, dx$
> $= x^3 e^x - 3\left(x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx\right)$

> $= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x\,dx\right)$
> $= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

例 3（2023 年第 14 题）$\int x\arctan x\,dx$

> **解**：令 $u = \arctan x$，$dv = xdx$
> $\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
> $= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$
> $= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$
> $= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C$

例 4（2024 年第 9 题）$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

> **解**：令 $u = e^x$，$du = e^xdx$
> $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u + C = \arctan(e^x) + C$

📘 第五章 定积分及其应用（必考）

一、定积分计算

1. 基本性质

- **线性性**：$\int_a^b[\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$
- **区间可加性**：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- **保号性**：若 $f(x) \geq 0$，则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- **积分中值定理**：存在 $\xi \in [a,b]$ 使 $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

2. 对称性（常考）

- 奇函数：$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$（$f(x)$ 为奇函数）
- 偶函数：$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$（$f(x)$ 为偶函数）

3. 重要公式

- **牛顿-莱布尼茨公式**：$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
- **换元法**：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$，其中 $x = \varphi(t)$
- **分部积分法**：$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$

二、典型例题

例 1（2021 年第 14 题）
$\int_{-1}^1 f(x)\,dx$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -1 \leq x < 0 \\ e^{-x}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

> **解**：分段积分
> $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (2x-1)\,dx + \int_0^1 e^{-x}\,dx$
> $= [x^2 - x]_{-1}^0 + [-e^{-x}]_0^1$
> $= (0-0) - [(1+1)] + (-e^{-1} + 1)$
> $= -2 + 1 - \frac{1}{e} = -1 - \frac{1}{e}$

例 2（2023 年第 10 题）
$\int_{-1}^1\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + 1\right)\sqrt{1-x^2}\,dx$

> **解**：利用对称性
> $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1-x^2}$ 是奇函数，在对称区间积分为 0
> $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$（几何意义：半圆面积）
> $= 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

例 3（2023 年第 15 题）$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

> **解**：令 $t=\sqrt{2x+1}$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx = t\,dt$，当 $x=0$ 时 $t=1$，$x=4$ 时 $t=3$
> $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t\,dt = \int_1^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}\right)dt$
> $= \left[\frac{t^3}{6}+\frac{3}{2}t\right]_1^3 = \left(\frac{27}{6}+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\right)$
> $= \left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{9}{6}\right) = 9-\frac{10}{6} = 9-\frac{5}{3} = \frac{22}{3}$

例 4（2024 年第 15 题）$\int_1^e x^2\ln x\,dx$

> **解**：分部积分，令 $u=\ln x$，$dv = x^2dx$
> $\int_1^e x^2\ln x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx$
> $= \frac{e^3}{3} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$
> $= \frac{e^3}{3}-\frac{1}{9}(e^3-1) = \frac{3e^3-e^3+1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$

三、定积分应用（常考）

1. 平面图形面积

- 直角坐标：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$
- 参数方程：$S=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|\,dt$
- 极坐标：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$

2. 旋转体体积

- 绕 x 轴：$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$
- 绕 y 轴：$V=2\pi\int_a^b x|f(x)|\,dx$（柱壳法）

3. 弧长

- 直角坐标：$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
- 参数方程：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$
- 极坐标：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

📘 第六章 中值定理与证明题（必考）

一、微分中值定理

1. 罗尔定理

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$f(a)=f(b)$
结论：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

2. 拉格朗日中值定理

条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导
结论：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

变形形式（常考）：

- $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

- $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$

3. 柯西中值定理

条件：$f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，$g'(x)\neq 0$
结论：存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

二、证明题技巧

1. 中值定理证明题步骤

1. 分析结论形式，确定使用哪个定理
2. 构造辅助函数（常用方法）：
   - 直接将结论变形为 $F'(\xi)=0$ 形式
   - 使用原函数法：若结论含 $f'(\xi)$，设 $F(x)=\ldots$ 使 $F'(x)$ 包含 $f'(x)$
   - 常数 k 法：将结论中的 ξ 换为 x，令 $k=\frac{\ldots}{\ldots}$，构造 $F(x)=\ldots-k\cdot\ldots$
3. 验证定理条件
4. 应用定理得结论

2. 不等式证明方法

- **单调性法**：设 $F(x)=\ldots$，证明 $F'(x)\geq 0$ 或 ≤ 0
- **中值定理法**：将差表示为导数形式
- **凹凸性法**：利用二阶导符号
- **最值法**：证明最小值 ≥ 0 或最大值 ≤ 0

三、典型例题

例 1（2021 年第 16 题）
证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$。

> **证明**：构造 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}x^2$
> 则 $F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}a^2$，$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}b^2$
> 计算 $F(b)-F(a)=[f(b)-f(a)]-\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}(b^2-a^2)=0$
> $\therefore F(a)=F(b)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$
> 即 $f'(\xi)-\frac{2\xi[f(b)-f(a)]}{b^2-a^2}=0$，整理即得。

例 2（2023 年第 16 题）
证明数列 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 收敛，并求其极限。

> **证明**：
>
> 1. **单调性**：$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1$，设 $a_k>a_{k-1}$，则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}>\sqrt{2+a_{k-1}}=a_k$，$\therefore$ 单调增。
> 2. **有界性**：显然 $a_n>0$，假设 $a_k<2$，则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$，$\therefore$ 有上界 2。
> 3. **收敛**：单调有界数列必收敛。
> 4. **求极限**：设 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$，则 $A=\sqrt{2+A}$，解得 $A=2$（舍去负根）。

例 3（2023 年第 17 题）
若 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$。

> **证明**：考虑 $f(x)=\ln^2 x$，在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理
> 存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=(\ln^2\xi)'=\frac{2\ln\xi}{\xi}$
> 需证 $\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$ 对 $\xi\in(e,e^2)$ 成立
> 令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，在 (e,e^2) 上 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调减
> $g(\xi)>g(e^2)=\frac{2}{e^2}$，$\therefore \frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$，得证。

例 4（2024 年第 17 题）
证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

> **证明**:
>
> 1. **右不等式**：令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}<0\ (x>0)$
> $\therefore f(x)$ 单调减，$f(x)<f(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$。
> 2. **左不等式**：令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0\ (x>0)$
> $\therefore g(x)$ 单调增，$g(x)>g(0)=0$，即 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$。

📘 第七章 数列与级数（较少考）

一、数列极限

1. 收敛判定

- 夹逼准则
- 单调有界准则
- 柯西收敛准则

2. 常见数列极限

- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1)$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}=0\quad(p>0)$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

📘 第八章 常考题型总结与预测

一、近三年考点分布

年份	极限	导数	积分	中值定理	证明题	其他
2021	等价无穷小、重要极限	隐函数求导、极值	不定积分（换元、分部）、定积分（分段）	拉格朗日中值定理变形	中值定理证明、归结原则	切线方程
2023	数列极限、无穷小比较	参数方程二阶导、极值应用	定积分（对称性、换元）、不定积分（分部）	拉格朗日中值定理应用	数列收敛、不等式证明	微分计算
2024	重要极限、等价无穷小	隐函数求导、极值	不定积分（换元、分部）、定积分计算	函数性质证明	不等式证明、连续性证明	参数方程导数

二、2025-2026 预测重点

1. **极限计算（必考）**：等价无穷小替换、重要极限应用
2. **导数应用（必考）**：隐函数/参数方程求导、极值最值问题
3. **积分计算（必考）**：换元法（尤其三角代换）、分部积分法
4. **证明题（必考）**：拉格朗日中值定理变形、函数不等式证明
5. **可能新增**：函数项级数简单概念、反常积分初步

三、复习建议

1. **基础公式**：极限等价公式、导数公式、积分公式必须熟记

2. **真题训练**：近三年真题至少做两遍，总结规律
3. **专题突破**：
   - 薄弱环节专项练习
   - 证明题总结模板
   - 计算题提高准确率
4. **模拟测试**：限时 120 分钟完成一套试卷，训练时间分配

📘 附录：常用公式速查

一、三角函数

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
6. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
7. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

二、对数与指数

1. $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$
2. $\ln(e^x) = x$
3. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
4. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
5. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$
6. $a^x = e^{x \ln a}$

三、常见积分结果

1. $\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$
2. $\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$
3. $\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
4. $\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
5. $\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
7. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

整理说明：本资料基于广东财经大学 2021-2025 年《数学分析 Ia》A 卷真题分析整理，涵盖了所有高频考点和典型题型，适合考前系统复习使用。祝考试顺利！