P3369 【模板】普通平衡树 题解

返回题目

以下题解仅供学习参考使用

抄袭、复制题解，以达到刷 AC 率/AC 数量或其他目的的行为，在洛谷是严格禁止的。

洛谷非常重视**学术诚信**。此类行为将会导致您成为**作弊者**。 具体细则请查看洛谷社区规则。

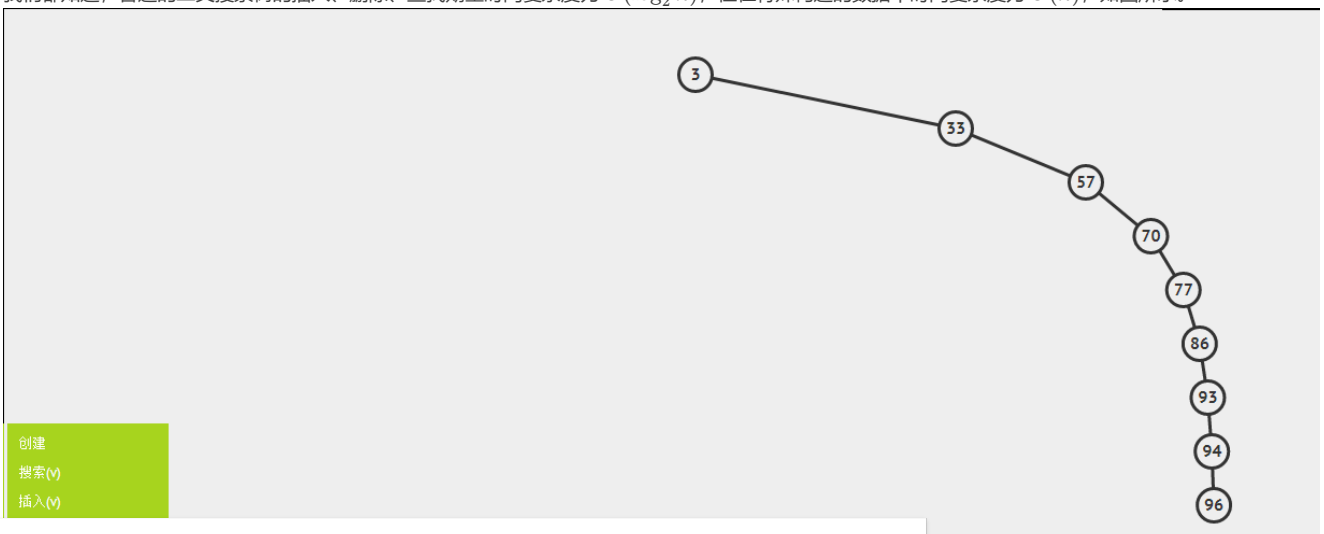
提交题解前请务必阅读题解审核要求及反馈要求。

112 篇题解　　默认排序　按时

YCE3216037　更新时间：2019-12-22 12:34:59　　在 Ta 的博

什么？！21页题解竟然没有一个人写 AVL 树，于是本蒟蒻就写一篇 AVL 树的题解。当然， AVL 树可能会比较难，而且常数较大，但如果有比较多的插入和删树就会有优势。

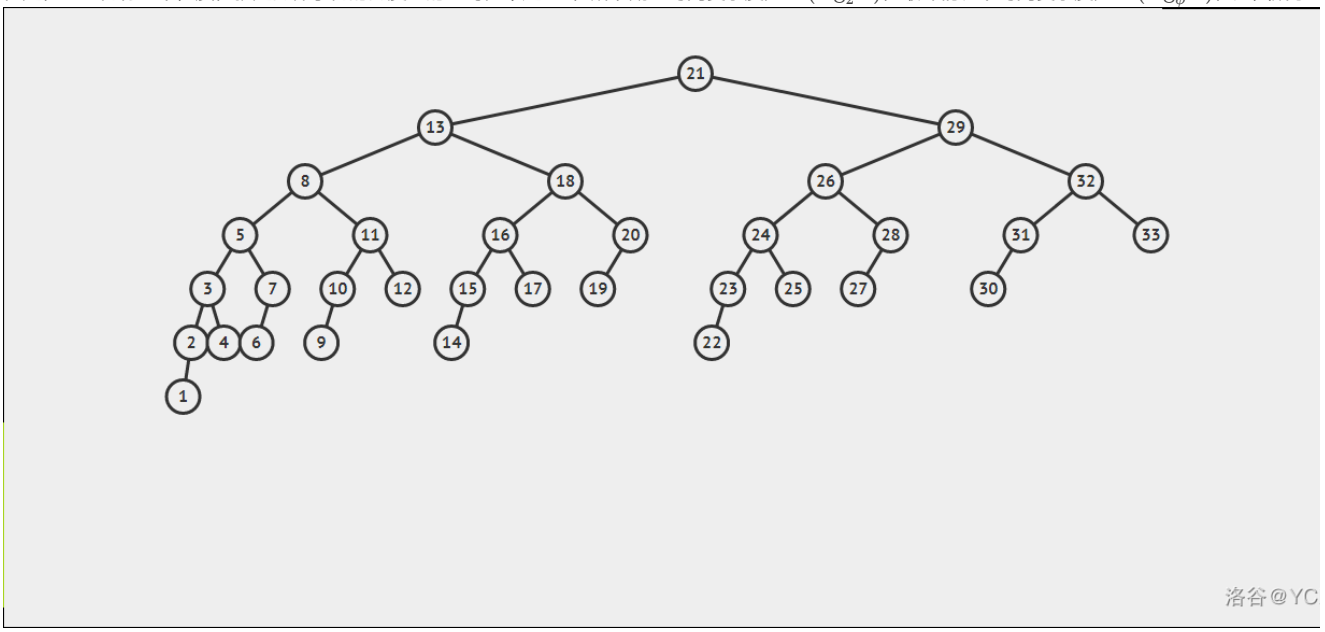
我们都知道，普通的二叉搜索树的插入、删除、查找期望时间复杂度为 $O(\log_2 n)$，但在特殊构造的数据中时间复杂度为 $O(n)$，如图所示。



12　6 条评论　　收起

中序遍历

但是，AVL 树有一个性质，就是两棵子树的高度差的绝对值不超过1，所以期望时间复杂度为 $O(\log_2 n)$，最坏情况下时间复杂度为 $O(\log_\phi n)$，如图所示。



由于 $\log_\phi 2 = 1.44$，所以最坏情况的时间复杂度为 $O(\log_2^{1.44} n)$，时间复杂度不高。

做法：

基本的节点定义：

```
struct AVLnode;
typedef AVLnode* AVLtree;
struct AVLnode {
    int data, high;//权值，树高
    int freq, size;//频数，大小
    AVLtree ls, rs;//左子，右子
    AVLnode(): data(0), high(1), freq(1), size(1), ls(NULL), rs(NULL){}
    AVLnode(int a): data(a), high(1), freq(1), size(1), ls(NULL), rs(NULL){}//初始化
};
```

获取及更新树高，大小：

为了防止因访问空节点而导致 RE，所以要特定函数来获取及更新

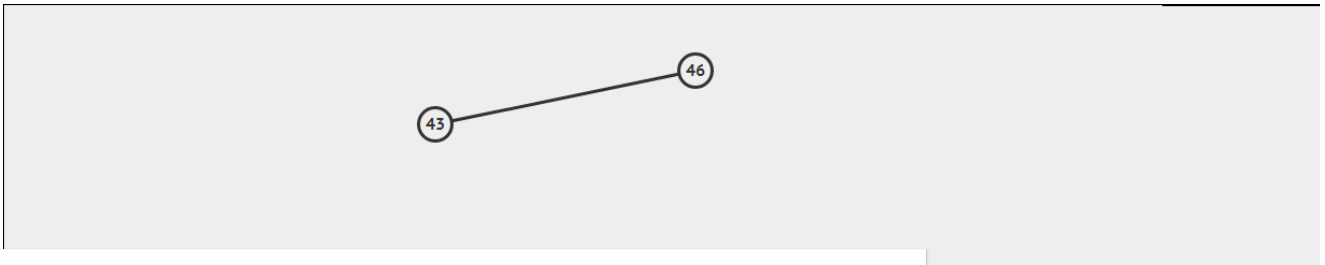
```
inline int GetSize(AVLtree p) {//获取大小
    if (p == NULL) return 0;
    return p->size;
}
inline int GetHigh(AVLtree p) {//获取树高
    if (p == NULL) return 0;
    return p->high;
}
inline void update(AVLtree& p) {//更新节点
    p->size = GetSize(p->ls) + GetSize(p->rs) + p->freq;
    p->high = max(GetHigh(p->ls), GetHigh(p->rs)) + 1;
}
```

左右旋转：

AVL 树的旋转方式有四种：左左，右右，左右，右左。

左左：

假如有这样一颗二叉树，如图所示。



现在要插入21，则步骤如下（注意右下角的字）：

插入

```
插入21的操作已完成
insert v
check balance factor of this and its children
  case1: this.rotateRight
  case2: this.left.rotateLeft, this.rotateRig
  case3: this.rotateLeft
  case4: this.right.rotateRight, this.rotateL
这个是平衡的
```


插入

```
向右旋转 46.
insert v
check balance factor of this and its children
  case1: this.rotateRight
  case2: this.left.rotateLeft, this.rotateRig
  case3: this.rotateLeft
  case4: this.right.rotateRight, this.rotateL
这个是平衡的
```

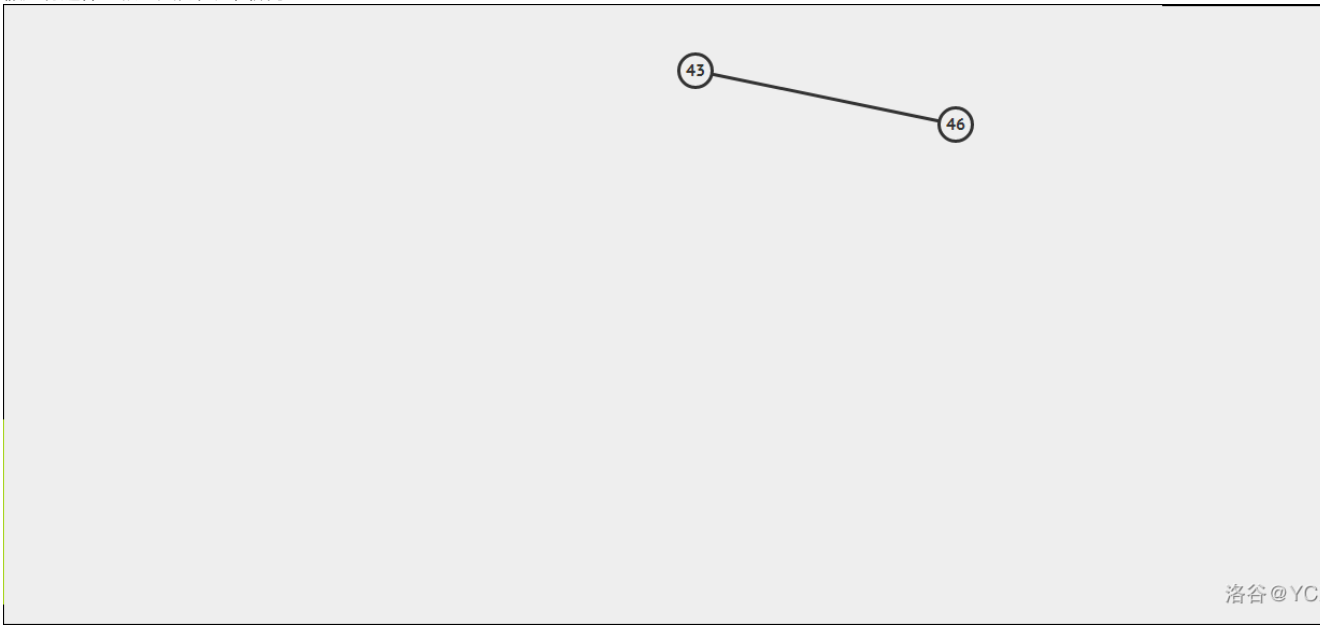

插入

```
搜索树现在是平衡的了
insert v
check balance factor of this and its children
  case1: this.rotateRight
```

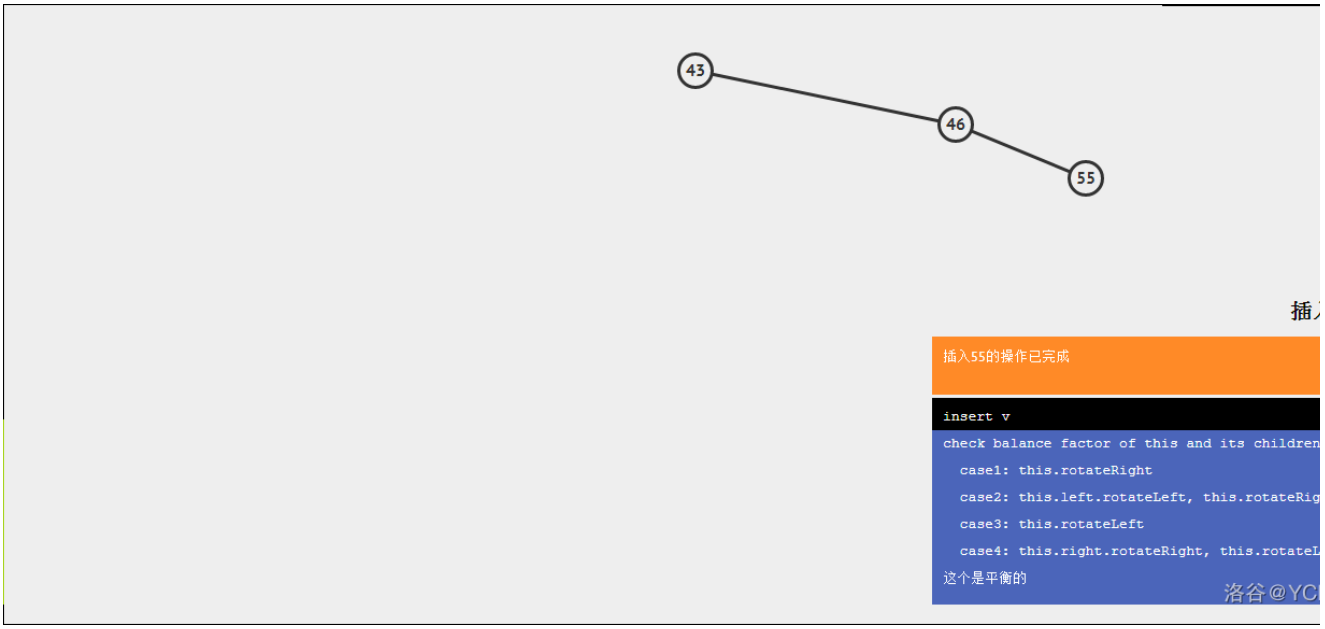

```
inline void LeftPlus(AVLtree& p) {
    AVLtree q;
    q = p->ls;
    p->ls = q->rs;
    q->rs = p;
    update(p);
    update(q);
    p = q;
}
```

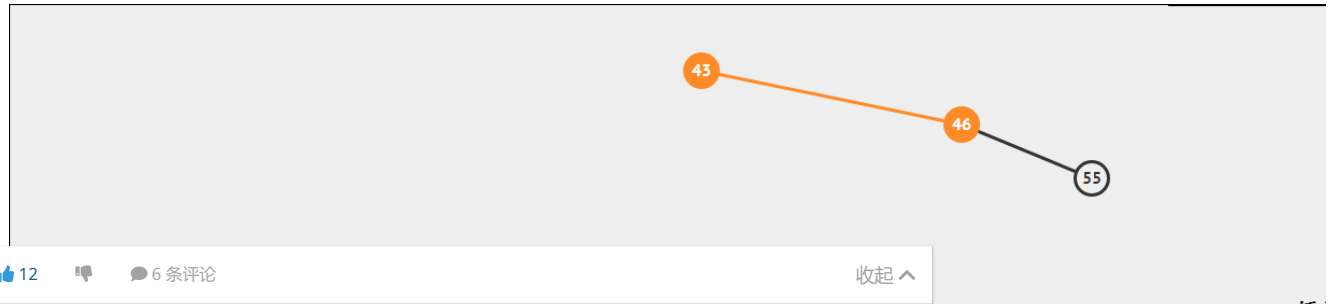
右右：

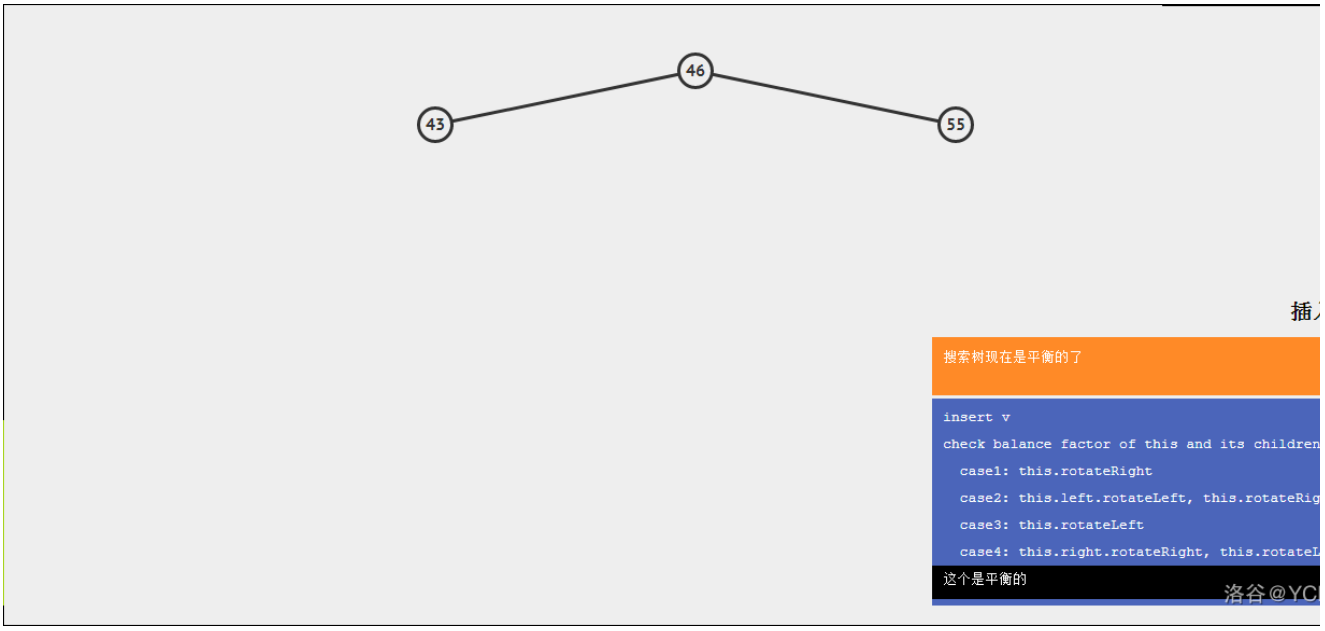
假如有这样一颗二叉树，如图所示。



现在要插入55，则步骤如下：








```
inline void RightPlus(AVLtree& p) {
    AVLtree q;
    q = p->rs;
    p->rs = q->ls;
    q->ls = p;
    update(p);
    update(q);
    p = q;
}
```

左右及右左：

左右要先把这颗二叉树向右旋转变成左左，再左旋；右左反之。

```
inline void LeftRight(AVLtree& p) {//左右
    RightPlus(p->ls);
    LeftPlus(p);
}
inline void RightLeft(AVLtree& p) {//右左
    LeftPlus(p->rs);
    RightPlus(p);
}
```

中序遍历(本题不需要，但可当做调试语句)：

```
inline void OutPut(AVLtree p) {
    if (p == NULL) return;
    OutPut(p->ls);
    for (int i = 1; i <= p->freq; ++i)
        write(p->data), putchar(32);
    OutPut(p->rs);
}
inline void output() {//主程序可以更简洁，下同
    OutPut(root);
}
```

插入：

先按照普通二叉搜索树的方式插入，再进行调整。

```
        p = new AVLnode(x);//没有这个节点，直接插入一个
        return;
    }
    if (p->data == x) {//如果已经有这个树了，直接增加这个数的频率，更新这个节点即可
        ++(p->freq);
        update(p);
        return;
    }
    if (p->data > x) {//往左子树插入，左子树可能偏高
        Insert(p->ls, x), update(p);
        if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
            if (x < p->ls->data)
                LeftPlus(p);//左左
            else
                LeftRight(p);//左右
        }
    }
    else {//往右子树插入，右子树可能偏高
        Insert(p->rs, x), update(p);
        if (GetHigh(p->rs) - GetHigh(p->ls) == 2) {
            if (x > p->rs->data)
                RightPlus(p);//右右
            else
                RightLeft(p);//右左
        }
    }
    update(p);//别忘记更新
}
inline void insert(int x) {
    Insert(root, x);
}
```

删除：

先按照普通二叉搜索树的方式删除，再进行调整。

```
inline void Erase(AVLtree& p, int x) {
    if (p == NULL) return;//找不到这个树，直接返回
    if (p->data > x) {//删左子树的数，右子树可能偏高
        Erase(p->ls, x), update(p);
        if (GetHigh(p->rs) - GetHigh(p->ls) == 2) {
            if (GetHigh(p->rs->rs) >= GetHigh(p->rs->ls))//一定要加等号，同下，就是因为这个，本蒟蒻92分调了55分钟！
                RightPlus(p);
            else
                RightLeft(p);
        }
    }
    else if(p->data < x) {
        Erase(p->rs, x), update(p);
        if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
            if (GetHigh(p->ls->ls) >= GetHigh(p->ls->rs))
                LeftPlus(p);
            else
                LeftRight(p);
        }
    }
    else {
        if (p->freq > 1) {//如果这个数的频率大于1，那么直接减去一个就可以了
            --(p->freq);
            update(p);
            return;
        }
        if (p->ls && p->rs) {//左右子树都有
            AVLtree q = p->rs;//找这个数的后继
            while (q->ls) q = q->ls;
            p->freq = q->freq;
            p->data = q->data, q->freq = 1;//把q节点提上来
            Erase(p->rs, q->data);//这个节点肯定少于2个子树了，直接删除
            update(p);//别忘记更新
            if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
                if (GetHigh(p->ls->ls) >= GetHigh(p->ls->rs))
                    LeftPlus(p);
                else
                    LeftRight(p);
            }
        }
        else {//如果只有一个子树，直接把这个节点的子树提上来即可，不需要更新
            AVLtree q = p;
            if (p->ls) p = p->ls;
            else if (p->rs) p = p->rs;
```

```
            q = NULL;
        }
    }
    if (p == NULL) return;//注意这里还要判断，否则可能会RE
    update(p);//最后更新一下
}
inline void erase(int x) {
    Erase(root, x);
}
```

根据数值找排名：

```
inline int get_rank(AVLtree p, int val) {
    if (p->data == val) return GetSize(p->ls) + 1;//如果这个节点就是要找的数字，返回左子树的大小加1
    if (p->data > val) return get_rank(p->ls, val);//如果这个节点大于要找的数字，往左找
    return get_rank(p->rs, val) + GetSize(p->ls) + p->freq;//往右找，返回值要加上左子树的大小和这个节点数出现的频数
}
inline int GetRank(int val) {
    return get_rank(root, val);
}
```

根据排名找数值：

```
inline int get_val(AVLtree p, int rank) {
    if (GetSize(p->ls) >= rank) return get_val(p->ls, rank);//如果左子树的大小不小于排名，往左找
    if (GetSize(p->ls) + p->freq >= rank) return p->data;//如果左子树的大小加上这个节点数值出现的频数不小于排名，返回这个数值
    return get_val(p->rs, rank - GetSize(p->ls) - p->freq);//往右找，主要排名要减去左子树的大小和这个节点数值出现的频数
}
inline int GetVal(int rank) {
    return get_val(root, rank);
}
```

找前驱后继：

```
inline int GetPrev(int val) {//找前驱
    AVLtree ans = new AVLnode(-1LL << 42), p = root;//从根节点开始找，初始答案赋最小值
    while (p) {//如果p节点不为空，则一直找
        if (p->data == val) {
            if (p->ls) {//如果找到这个数了，先找这个数的左子树，再一直往右找
                p = p->ls;
                while (p->rs)
                    p = p->rs;
                ans = p;
            }
            break;
        }
        if (p->data < val && p->data > ans->data) ans = p;//如果遇到一个比这个值小但大于当前答案的值的话，把答案赋给ans
        p = p->data < val ? p->rs : p->ls;
    }
    return ans->data;
}
inline int GetNext(int val) {//找后继，与找前驱类似
    AVLtree ans = new AVLnode(1LL << 42), p = root;
    while (p) {
        if (p->data == val) {
            if (p->rs) {
                p = p->rs;
                while (p->ls)
                    p = p->ls;
                ans = p;
            }
            break;
        }
        if (p->data > val && p->data < ans->data) ans = p;
        p = p->data < val ? p->rs : p->ls;
    }
    return ans->data;
}
```

完整代码如下(注释前面有了，就不写了)：

```
#include<bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int N = 100000 + 10;
template<class T> inline void read(T &x) {
    char c = 0;
    int f = x = 0;
```

```
        c = getchar();
    }
    while (c > 47 && c < 58) x = (x << 3)+(x << 1)+(c & 15), c = getchar();
    if (f) x = -x;
}
template<class T,class... Args> inline void read(T &x, Args&... args) {
    read(x), read(args...);
}
template<class T> inline void write(T x) {
    if (x < 0) {
        putchar(45);
        write(-x);
        return;
    }
    if (x > 9) write(x / 10);
    putchar((x % 10) | 48);
}
struct AVLnode;
typedef AVLnode* AVLtree;
struct AVLnode {
    int data, high;
    int freq, size;
    AVLtree ls, rs;
    AVLnode(): data(0), high(1), freq(1), size(1), ls(NULL), rs(NULL){}
    AVLnode(int a): data(a), high(1), freq(1), size(1), ls(NULL), rs(NULL){}
};
inline int GetSize(AVLtree p) {
    if (p == NULL) return 0;
    return p->size;
}
inline int GetHigh(AVLtree p) {
    if (p == NULL) return 0;
    return p->high;
}
struct AVL {
    AVLtree root;
    inline void update(AVLtree& p) {
        p->size = GetSize(p->ls) + GetSize(p->rs) + p->freq;
        p->high = max(GetHigh(p->ls), GetHigh(p->rs)) + 1;
    }
    inline void LeftPlus(AVLtree& p) {
        AVLtree q;
        q = p->ls;
        p->ls = q->rs;
        q->rs = p;
        update(p);
        update(q);
        p = q;
    }
    inline void RightPlus(AVLtree& p) {
        AVLtree q;
        q = p->rs;
        p->rs = q->ls;
        q->ls = p;
        update(p);
        update(q);
        p = q;
    }
    inline void LeftRight(AVLtree& p) {
        RightPlus(p->ls);
        LeftPlus(p);
    }
    inline void RightLeft(AVLtree& p) {
        LeftPlus(p->rs);
        RightPlus(p);
    }
    inline void OutPut(AVLtree p) {
        if (p == NULL) return;
        OutPut(p->ls);
        for (int i = 1; i <= p->freq; ++i)
            write(p->data), putchar(32);
        OutPut(p->rs);
    }
    inline void output() {
        OutPut(root);
    }
    inline void Insert(AVLtree &p, int x) {
        if (p == NULL) {
            p = new AVLnode(x);
            return;
```

```
            update(p);
            return;
        }
        if (p->data > x) {
            Insert(p->ls, x), update(p);
            if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
                if (x < p->ls->data)
                    LeftPlus(p);
                else
                    LeftRight(p);
            }
        }
        else {
            Insert(p->rs, x), update(p);
            if (GetHigh(p->rs) - GetHigh(p->ls) == 2) {
                if (x > p->rs->data)
                    RightPlus(p);
                else
                    RightLeft(p);
            }
        }
        update(p);
    }
    inline void insert(int x) {
        Insert(root, x);
    }
    inline void Erase(AVLtree& p, int x) {
        if (p == NULL) return;
        if (p->data > x) {
            Erase(p->ls, x), update(p);
            if (GetHigh(p->rs) - GetHigh(p->ls) == 2) {
                if (GetHigh(p->rs->rs) >= GetHigh(p->rs->ls))
                    RightPlus(p);
                else
                    RightLeft(p);
            }
        }
        else if(p->data < x) {
            Erase(p->rs, x), update(p);
            if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
                if (GetHigh(p->ls->ls) >= GetHigh(p->ls->rs))
                    LeftPlus(p);
                else
                    LeftRight(p);
            }
        }
        else {
            if (p->freq > 1) {
                --(p->freq);
                update(p);
                return;
            }
            if (p->ls && p->rs) {
                AVLtree q = p->rs;
                while (q->ls) q = q->ls;
                p->freq = q->freq;
                p->data = q->data, q->freq = 1;
                Erase(p->rs, q->data);
                update(p);
                if (GetHigh(p->ls) - GetHigh(p->rs) == 2) {
                    if (GetHigh(p->ls->ls) >= GetHigh(p->ls->rs))
                        LeftPlus(p);
                    else
                        LeftRight(p);
                }
            }
            else {
                AVLtree q = p;
                if (p->ls) p = p->ls;
                else if (p->rs) p = p->rs;
                else p = NULL;
                delete q;
                q = NULL;
            }
        }
        if (p == NULL) return;
        update(p);
    }
    inline void erase(int x) {
        Erase(root, x);
    }
```

```
        if (GetSize(p->ls) + p->freq >= rank) return p->data;
        return get_val(p->rs, rank - GetSize(p->ls) - p->freq);
    }
    inline int GetVal(int rank) {
        return get_val(root, rank);
    }
    inline int get_rank(AVLtree p, int val) {
        if (p->data == val) return GetSize(p->ls) + 1;
        if (p->data > val) return get_rank(p->ls, val);
        return get_rank(p->rs, val) + GetSize(p->ls) + p->freq;
    }
    inline int GetRank(int val) {
        return get_rank(root, val);
    }
    inline int GetPrev(int val) {
        AVLtree ans = new AVLnode(-1LL << 42), p = root;
        while (p) {
            if (p->data == val) {
                if (p->ls) {
                    p = p->ls;
                    while (p->rs)
                        p = p->rs;
                    ans = p;
                }
                break;
            }
            if (p->data < val && p->data > ans->data) ans = p;
            p = p->data < val ? p->rs : p->ls;
        }
        return ans->data;
    }
    inline int GetNext(int val) {
        AVLtree ans = new AVLnode(1LL << 42), p = root;
        while (p) {
            if (p->data == val) {
                if (p->rs) {
                    p = p->rs;
                    while (p->ls)
                        p = p->ls;
                    ans = p;
                }
                break;
            }
            if (p->data > val && p->data < ans->data) ans = p;
            p = p->data < val ? p->rs : p->ls;
        }
        return ans->data;
    }
};
int n, x, opt;
AVL a;
signed main() {
    read(n);
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        read(opt, x);
        switch(opt) {
            case 1: a.insert(x); break;
            case 2: a.erase(x); break;
            case 3: write(a.GetRank(x)), putchar(10); break;
            case 4: write(a.GetVal(x)), putchar(10); break;
            case 5: write(a.GetPrev(x)), putchar(10); break;
            case 6: write(a.GetNext(x)), putchar(10); break;
        }
    }
    return 0;
}
```

nekko 更新时间：2017-08-10 15:47:37 在 Ta 的博

01trie是个神奇的东西。。。

将每个数字二进制拆分后（需要先加上1e7使得都是非负整数）从高位到地位插入到trie中（只保存01节点），然后查询的话YY一下就行（或者看代码）。

01trie十分好写！！！01trie十分好写！！！01trie十分好写！！！

如果说split-merge treap是时间换代码的话（事实上那个我觉得不太好理解。。。而且一般split用的pair速度超慢的样子。。。（不过clj的那种不需要保存信方法挺好的。。。）），01trie就是空间换代码（然而只是32倍的空间！而且是最烂的情况下！）。。。