第5章 数字特征与极限定理

5.1 数学期望

前节我们学习了随机变量及其分布，学习了随机变量的分布函数，分布列和概率密度，它们都能完整的描述随机变量。但在实际或理论问题中，人们可能只感兴趣于某些能描述随机变量的某一种特征的常数.

比如：某班级概率统计课程的学习情况

——平均成绩。

平均值的概念与应用广泛存在

例如

某电子产品的平均无故障时间

某地区的日平均气温和年平均降水量

某地区水稻的平均亩产量

某地区的家庭平均年收入

某国家国民的平均寿命

问题

question

怎样定义随机变量的平均值概念？

5.1 随机变量的数学期望

- 离散随机变量的数学期望概念
- 连续随机变量的数学期望概念
- 随机变量函数的数学期望概念
- 数学期望的性质概念

引例 甲、乙两射手进行打靶训练，每人各打了100发子弹，成绩如下：

甲：

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙：

环数	8	9	10
次数	35	10	55

试评估两人的射击水平。

分析 两人的总环数分别为

甲：$8\times 15+9\times 40+10\times 45=930$ （环）

乙：$8\times 35+9\times 10+10\times 55=920$ （环）

每枪平均环数为

甲：$8\times \frac{15}{100}+9\times \frac{40}{100}+10\times \frac{45}{100}=9.3$ （环）

乙：$8\times \frac{35}{100}+9\times \frac{10}{100}+10\times \frac{55}{100}=9.2$ （环）

Expectation, Expected value

甲:

环数	8	9	10
次数	15	40	45

乙:

环数	8	9	10
次数	35	10	55

进一步分析　记甲每枪击中的环数为 X,因为射击次数较多,故可认为 X 的分布列为

X	8	9	10
p_k	0.15	0.40	0.45

则甲射手每枪平均环数为

$$8\times0.15+9\times0.40+10\times0.45=9.3$$

即平均环数为

$$E(X)\overset{\Delta}{=}\sum_{k=1}^{3}x_k p_k$$

1. 离散型 r.v的数学期望

定义 设 r.v X的分布列为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$P\{X=x_k\}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k<+\infty$,则称

$$E(X)\triangleq\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P\{X=x_k\}$$

为r.v X的**数学期望(期望、均值).**

若 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=+\infty$, 则称 $E(X)$不存在.

"数学期望"是历史上沿用下来的一个名词，可理解为在数学上对 r.v 进行计算期望得到的值, 即平均值。

问题 在数学期望的定义中，为什么要求

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < +\infty \quad ?$$

分析 由高等数学知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k < +\infty \Rightarrow E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \text{收敛}$$

且 $E(X)$与 $x_k p_k$ 出现的先后位置无关！

例 1 设随机变量 $X \sim (0 \sim 1)$ 分布，求 $E(X)$.

解 X 的分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^{1-k}p^{k}\quad,\quad 0<p<1,k=0,1.$$

$\therefore$ X 的期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{1}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=0\times(1-p)+1\times p$$

$$=p$$

X	0	1
P	$1-p$	p

例2 设 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

Possion分布

解 X 的分布列为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},(\lambda>0,k=0,1,2,\cdots)$$

$\therefore$ X 的均值为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{i}}{i!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例3 设X为几何随机变量，分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p\ ,\ (0<p<1, k=1,2,\cdots)$$

求 $E(X)$

解

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}p$$

$$q=1-p$$

$$=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$

$$kq^{k-1}=\frac{d}{dq}q^k$$

$$=p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)=p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)$$

$$=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

例4 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 付款额根据使用寿命 X来确定:

寿命(年)	$X \le 1$	$1 < X \le 2$	$2 < X \le 3$	$X > 3$
付款(元)	1500	2000	2500	3000

假设$X \sim EXP(0.1)$,试求该商店出售一台电器的平均收费额.

解 设出售一台电器的收费额为 Y, 概率分布为

$$P\{Y = 1500\} = P\{X \le 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0.0952$$

$$\therefore \quad E(Y) = \sum_{k=1}^{4} y_k P\{Y = y_k\}$$

$$= 1500 \times 0.0952 + 2000 \times 0.0861 + 2500 \times 0.0779 + 3000 \times 0.7408$$

$$= 2732.17$$

即商店出售一台电器平均收费额为 2732.17 元.

数学期望在医学上的一个应用:分组检验

问题 考虑用验血的方法在人群中普查某种疾病.具体做法是每 k=10个人一组，把这10个人的血液样本混合起来进行化验.如果结果为阴性，则10个人只需化验1次；若结果为阳性，则需对10个人再逐个化验，总计化验11次.假定人群中这种疾病的患病率 p =10%，且每人患病与否是相互独立的.试问这种分组化验的方法与通常的逐一化验方法相比，是否能减少化验次数?

分析： 设 随机抽取的10人组所需的化验次数为 X，我们需要计算 X 的数学期望，然后与10比较.

先求出化验次数*X*的分布律.

化验次数*X*的可能取值为1，11

注意 求*X*数学期望的步骤!

(*X*=1)表示“10人都呈阴性”

$$P\{X=1\}=(1-0.1)^{10}=0.9^{10}$$

（*X*=11)表示“10人至少有1人呈阳性”

$$P\{X=11\}=1-P(X=1)=1-0.9^{10}$$

$$E(X)=1\times 0.9^{10}+11\times(1-0.9^{10})=7.513<10$$

结论： 分组的化验次数少于逐一化验法的次数.

例（圣彼得堡悖论）

一个赌徒按照下列策略赌博：他开始下注一美元，如果输了，就接着双倍下注，且连续双倍下注直到最终获胜。假设赌博是公平的，分析这个策略。

解 令 X表示最后一局（赌徒获胜局）的赌注，则

$X = 2^{k-1}, k = 1, 2, \cdots$表示前$k$-1局均输，第$k$局赢

$$P\{X = 2^{k-1}\} = \frac{1}{2^{k-1}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \cdots$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \infty$$

$\therefore$ X 的期望$E(X)$没有意义.

赌局策略的缺陷是没有考虑巨额的资金需求。

2. 连续型 r.v 的数学期望

定义 设 r.v X 的概率密度函数为 $f(x)$, 若

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < +\infty$$

则称

$$E(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

为r.v X的**数学期望(期望、均值)**.

注意：离散型和连续型情形的形式的一致性

注 若$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx = +\infty$,则称$E(X)$ 不存在.

例5 设 $X \sim U(a,b)$, 求 $E(X)$.

解 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\therefore \quad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

$$=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$=\frac{a+b}{2}$$

例6 设某元器件的寿命 X服从指数分布,其密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0\ , & x\le 0\end{cases}$$

求 X的数学期望 $E(X)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

$$=\int_{0}^{\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$$

$$=\theta\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}d(\frac{x}{\theta})$$

$$=\theta\cdot\int_{0}^{\infty}te^{-t}dt\ =\theta$$

即该元器件的平均寿命为θ.

由此得，若 $X\sim E(\lambda)$,则$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$,($\lambda=\dfrac{1}{\theta}$).

例7 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + x - \mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \right)$$

$$= \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$= \mu$$

例8 设 r.v X服从Cauchy分布,其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<\infty$$

计算$E(X)$.

解 因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty}=\infty$$

故期望 $E(X)$不存在.

3. r.v 的函数的数学期望

定理1 设 $y = g(x)$ 为普通函数, 则

① 设 X 为离散型r.v, 其分布列为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \cdots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| \cdot p_k < +\infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

② 设 X 为连续型r.v, 其概率密度为 $f(x)$,

若 $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$, 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

$$E[g(X)] \neq g[E(X)]$$

注意二者的形式一致性

例9 设X,服从区间(2000,4000)上的均匀分布,

$$Z = g(X) = \begin{cases} 3y, & X \geq y \\ 3X - (y - X), & X < y. \end{cases}$$

求$E(Z)$，并求使$E(Z)$达到最大的y的值.

解 $$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{2000}\{ \int_{2000}^{y} (4x - y) dx + \int_{y}^{4000} 3y dx \}$$

$$= -\frac{1}{1000}(y^2 - 7000y + 4 \times 10^6)$$

$$= -\frac{1}{1000}\{(y - 3500)^2 - 3500^2 + 4 \times 10^6\}$$

$$\max E(Z) = E(Z)|_{y=3500} = 8250$$

定理2 设 $z=g(x,y)$为二元函数，则

① 设 X,Y的联合分布列为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

若$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(x_i,y_j)|p_{ij}<+\infty$，则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

② 设 X,Y的联合密度为$f(x,y)$，若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy<\infty,$$

则

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

注：公式可推广到一般的高维随机变量

例10 设X,Y是相互独立的随机变量，且都服从$N(0,1)$，

求$E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

解 由定理2及独立性，得

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\rho\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho$$

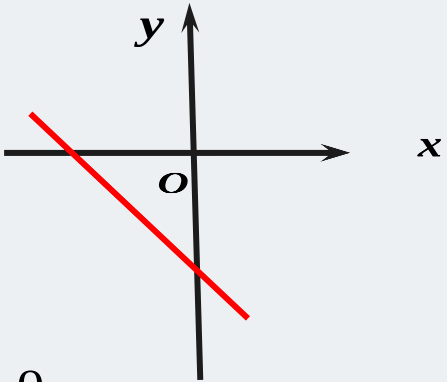
$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

例11 设(*X*,*Y*)在区域*A*上都服从均匀分布,其中*A*为坐标轴与直线$x+y+1=0$所围城的区域，求

（1）$E(X)$，（2）$E(-3X+2Y)$，（3）$E(XY)$.

解 由题意，(*X*,*Y*)的联合密度为



$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in A,\\0,(x,y)\notin A.\end{cases}$$

$$\therefore（1）E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{0}2xdy=-\frac{1}{3}$$

$$（2）E(-3X+2Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(-3x+2y)f(x,y)dxdy=\cdots=\frac{1}{3}$$

$$（3）E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\cdots=\frac{1}{12}.$$

注意 例11

（1） $E(X) = -\frac{1}{3}$ $\qquad E(Y) = -\frac{1}{3}$

（2） $E(-3X + 2Y) = -3E(X) + 2E(Y) = \frac{1}{3}$

（3） $E(XY) \neq E(X)E(Y)$

因为***X***，***Y***不独立

4. 数学期望的基本性质

① 设$a \le X \le b \quad (a.e)$，则 $a \le E(X) \le b$

② 设 c 为常数，则 $E(cX) = cE(X)$

③ 设 X、Y 为r.v，则有 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

④ 设 X, Y相互独立，则有 $E(XY) = E(X)E(Y)$

几个推论

1. 若 $X = c \quad (a.e)$，则 $E(X) = c$

2. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$为常数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为r.v，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$$

例12 二项分布的数学期望

X 服从二项分布，其概率分布为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

二项分布可表示为 n 个(0 — 1)分布的和，即

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

其中 $X_i=\begin{cases}0, & A\text{在第}i\text{次试验中不发生}\\ 1, & A\text{在第}i\text{次试验中发生}\end{cases}$

数学期望 $E(X)=E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)=np$

如果 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$

例13 r 人在楼的底层进入电梯，楼上有n层，如到达某一层时没有乘客下，电梯就不停车.以X表示直到乘客下完时的停车的次数,求X 的期望 (假定每位乘客在任一层下电梯是等可能的,且各乘客是否下电梯相互独立).

解 设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第} i \text{ 站有人下电梯} \\ 0, & \text{第} i \text{ 站没人下电梯} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$\because$ $X_i = 0 \Leftrightarrow$ r位乘客在第 i 站都不下电梯.

$$\therefore \quad P\{X_i = 0\} = (1 - \frac{1}{n})^r, P\{X_i = 1\} = 1 - (1 - \frac{1}{n})^r, i = 1, 2, \cdots, n.$$

易知 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, 从而

注意$X_1, \cdots, X_n$不独立!

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$= nE(X_1) = n[1 - (1 - \tfrac{1}{n})^r]$$

例14 某射击队共有9名队员，技术不相上下，每人射击中靶的概率均为0.8，进行射击时，各自打中靶为止，但限制每人最多只打3次，问大约要为他们准备多少发子弹?

X_i	1	2	3
P_i	0.8	0.2×0.8	$1-0.8-0.2\times0.8$

解 设X_i为第 i 名队员所需子弹数，9名队员所需子弹数为 $X=\sum_{i=1}^{9}X_i$

$$E(X_i)=1\times0.8+2\times0.16+3\times0.04=1.24$$

由数学期望的性质，

$$E(X)=\sum_{i=1}^{9}E(X_i)=9\times1.24=11.16$$

即大约需要为他们准备12发子弹。

课后作业