第 2 章 条件概率与独立性

2.1 条件概率与乘法定理

2.2 全概率公式与贝叶斯公式

2.3 事件的独立性。

2.4 贝努力概型，二项概率公式

复习

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

问 $P(AB) = \ ?$

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad ?$$

2.1 条件概率与乘法定理

- 条件概率
- 乘法定理

■ 条件概率 Conditional Probability

引例： 抛掷一颗骰子, 观察出现的点数，若已知出现的点数是偶数，求出现的点数不超过3的概率.

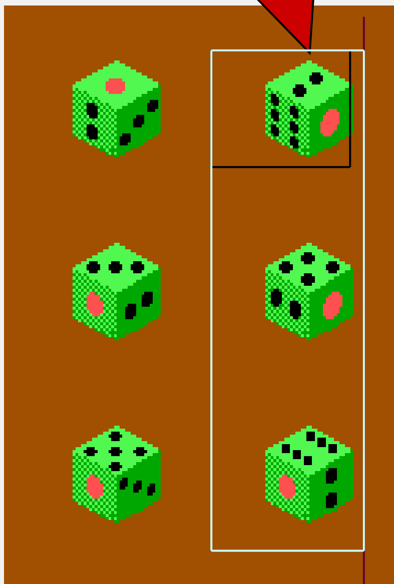
分析： A={出现的点数不超过3}＝｛1，2，3｝

B={出现的点数是偶数}＝｛2，4，6｝

即 事件B已发生，求事件A的概率，记为 $P(A\mid B)$

由于事件B已经发生，所以此时试验所有可能结果缩减为3种，而事件A包含的基本事件只占其中1种，故有

掷骰子



$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{n_{AB}}{n_B}=\frac{n_{AB}/n}{n_B/n}$$

$$\boxed{P(A|B)=P(AB)/P(B)}$$

“事件B已发生”这个新条件缩减了样本空间.

注意： $P(A|B)\neq P(A)=1/2$

定义 设 A, B 为同一个随机试验中的两个随机事件，且 $P(B) > 0$， 则称

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

为事件 A 在事件 B 发生的条件下的**条件概率**.

定理 条件概率 $P(A|B)$ 是概率，满足概率的三条公理.

由此，前面对概率所证明的一些重要性质都适用于条件概率.

例 1 设预订的飞机准时起飞的概率是0.83，准时到达的概率是0.82，准时起飞且准时到达的的概率是0.78，求（1）一架飞机在已知准时起飞的条件下，准时到达的概率？（2）一架飞机在已知准时到达的条件下，准时起飞的概率？

解 设A表示飞机准时起飞，B表示飞机准时到达，

则由已知 $P(A)=0.83,\ P(B)=0.82, P(AB)=0.78.$

$$(1)\quad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.78}{0.83}=0.94$$

$$(2)\quad P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.78}{0.82}=0.95$$

例2 设某种动物从出生起活20岁以上的概率为 0.8，活25岁以上的概率为0.4，现有一个20岁的这种动物，它能活到25岁以上的概率是多少？

解 设 A 表示“能活到20岁以上”，

B 表示“能活到25岁以上”，

则 由已知 $P(A)=0.8,\ P(B)=0.4,$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

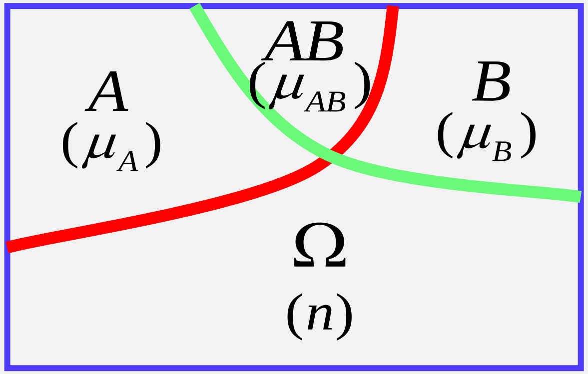
由于 $B\subset A$，故 $AB=B$，于是

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5,$$

概率 $P(A|B)$与$P(AB)$的区别与联系

首先，由定义

$$P(A|B) \geq P(AB)$$



联系：事件A，B都发生了.

区别：

（1）在$P(AB)$中，事件A，B同时发生；在$P(A|B)$中，事件A，B发生有时间上的差异，B先A后.

（2）样本空间不同，在$P(AB)$中，样本空间为 Ω ，而在$P(A|B)$中，事件B变成为了新样本空间.

乘法定理

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},P(A)>0$$

乘法定理：

$$P(AB)=P(A)P(B|A),(P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B),(P(B)>0)$$

乘法公式的推广

$$P(\underline{ABC}) = P(AB)P(C \mid AB)$$

$$= P(A)P(B|A)P(C \mid AB)$$

一般地，有乘法公式的推广

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$$

$$\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

例3 工厂有一批产品，共100个，其中有次品10个，从这批产品中抽取2次，每次取1件，取后不放回，求2次都取得正品的概率.

解 设 A_i 为第 i 次抽到正品 $(i=1,2)$，则两次都取得正品的事件为 A_1A_2，由乘法公式有

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}=0.809$$

注: 若从中一次抽取两件,则有 $p=\dfrac{C_{90}^2}{C_{100}^2}$ ＝0.809

例4 一批产品中有 4% 的次品，而合格品中一等品占45%，从这批产品中任取一件，求该产品是一等品的概率.

解 设 A 表示取到的产品是一等品， B 表示取出的产品是合格品，则由已知

$$P(A|B)=45\%,\quad P(\overline{B})=4\%,$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=96\%$$

由于 $A\subset B$,

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)$$

$$=96\%\times 45\%=43.2\%$$

例 5 包装后的玻璃器皿第一次掉落被打破的概率为0. 4，若未破，第二次掉落被打碎的概率为0.6，若又未破，第三次掉落被打碎的概率为0.9，今已知这种包装的器皿掉落了三次，求被打破的概率。

解 设 A 表示器皿被打破，$A_i\,(i=1,2,3)$ 表示器皿第 i 次掉落后被打破，则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3})$$

$$=1-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\,|\,\overline{A_1})P(\overline{A_3}\,|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$P(A_1)=0.4,P(A_2\,|\,\overline{A_1})=0.6,P(A_3\,|\,\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.9$$

$$P(A)=1-(1-0.4)\times(1-0.6)\times(1-0.9)=0.976.$$

例6 一个盒子中有 6 只白球 4 只黑球，从中不放回地每次任取 1 只，连取 2 次，求

(1) 第1次取得白球的概率；

(2) 第1、第2次都取得白球的概率；

(3) 第1次取得黑球而第2次取得白球的概率；

$\boxed{P(B)=?}$

解 设 A 表示第1次取得白球，B 表示第2次取得白球，

则（1）$P(A)=\frac{6}{10}=0.6$

（2）$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\approx 0.33$

（3）$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\approx 0.27$

2.2 全概率公式与贝叶斯公式

- 完备事件组
- 全概率公式
- 贝叶斯公式

完备事件组

完备事件组

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

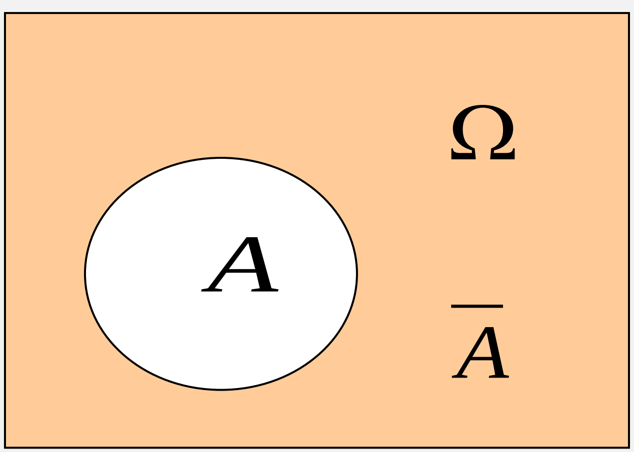
$$A, \overline{A}$$

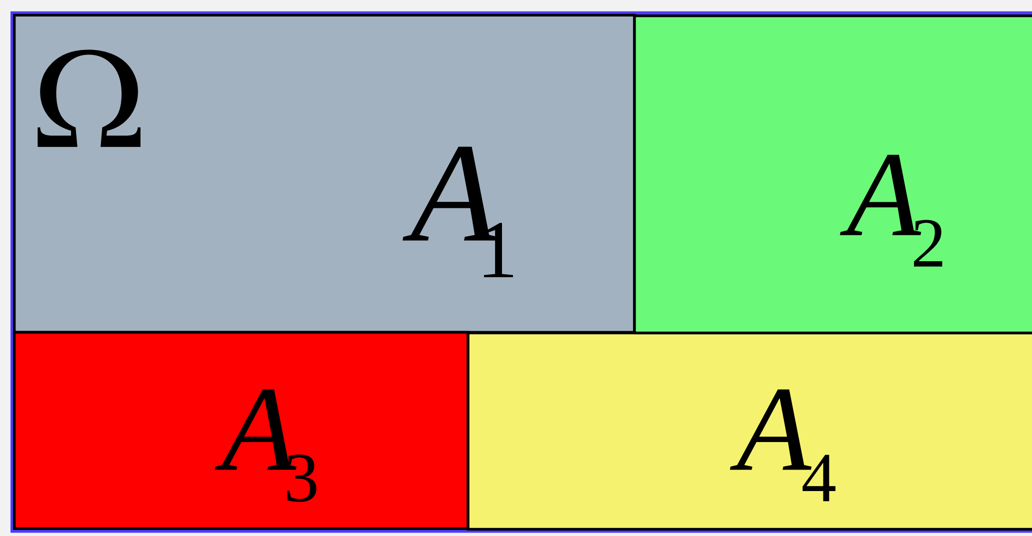
(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

(2) $A_i A_j = \phi, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots n.$

(1) $A \cup \overline{A} = \Omega$

(2) $A\overline{A} = \Phi$





全概率公式

若在例6中，求第2次取到白球的概率，即

$$P(B) = ?$$

解 由于需要先考虑第**1**次的取球结果，故

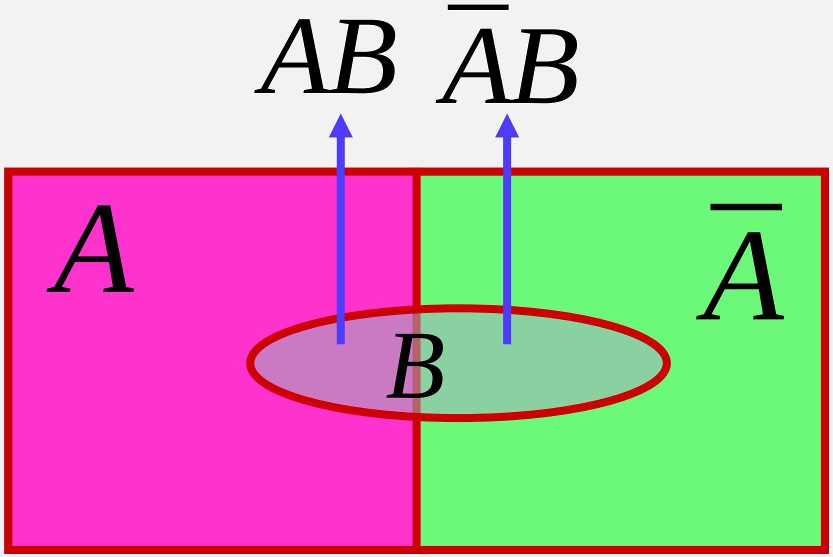
$$B = (A \cup \overline{A})B = AB \cup \overline{A}B,$$

且有 $AB \cap \overline{A}B = \phi$

则由加法公式 $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$

$$= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$= \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = 0.6$$



$$P(B) = P(AB \cup \bar{A}B)$$

$$= P(AB) + P(\bar{A}B)$$

$$= P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})$$

定理（全概率公式）

设 A_1， A_2， …， A_n 构成一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$ ，$i=1,2,\ldots,n$，则对任一随机事件 B，有

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

Ω

A_1

A_2

$\cdots$

A_n

$P(B|A_1)$

$P(B|A_2)$

$\cdots$

$P(B|A_n)$

$P(B)$

例7. 假设某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占总产量的 25 %，35%， 40%，而产品中的次品率分别为 5% ，4%，2%．现从待出厂的产品中随机抽取一个检查，问它是次品的概率是多少？

解 设 $A_1, A_2\ A_3$分别表示产品是由甲、乙、丙车间生产，B表示产品为次品．显然，A_1, A_2, A_3构成完备事件组．依题意，知

$$P(A_1)=25\%,\ P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=40\%,$$

$$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=4\%,\ P(B|A_3)=2\%$$

由全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02$$

$$=0.0345$$

例8 假设职业分成U，M和L三个层次，U_1表示父辈的职业是U层，U_2表示子辈的职业是U层，等等. Class和Hall 1954年编制了如下的英格兰和威尔士职业流动表.

表：转移概率矩阵

	U_2	M_2	L_2
U_1	0.45	0.48	0.07
M_1	0.05	0.70	0.25
L_1	0.01	0.50	0.49

假设父辈职业中从事U、M、L层的分别有10%、40%和50%，求子辈中从事U层职业的概率是多少？

解 U_1、M_1、L_1构成完备事件组，由全概率公式有

$$P(U_2)=P(U_2|U_1)P(U_1)+P(U_2|M_1)P(M_1)+P(U_2|L_1)P(L_1)$$

$$=0.45\times0.10+0.05\times0.40+0.01\times0.50=0.07$$

可以同样计算出 $P(M_2),P(L_2)$

■ 贝叶斯公式

继续讨论例8，假设我们问一个不同的问题：如果子辈已经从事了U层职业，他的父辈从事U层职业的概率是多少？

分析 与例6相比，它是一个“逆”问题，我们给定了“果，来求特定的“因”的概率，即求$P(U_1|U_2)=?$

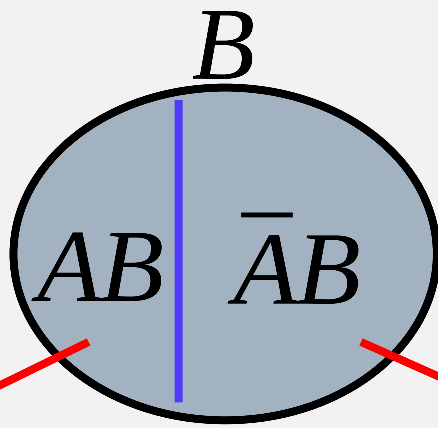
解 应用条件概率公式，乘法公式及全概率公式：有

$$P(U_1|U_2)=\frac{P(U_1\cap U_2)}{P(U_2)}$$

$$=\frac{P(U_2|U_1)P(U_1)}{P(U_2|U_1)P(U_1)+P(U_2|M_1)P(M_1)+P(U_2|L_1)P(L_1)}$$

＝0.045/0.07=0.64

贝叶斯公式



$$P(AB) = P(A) \times P(B \mid A)$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A}) \times P(B \mid \bar{A})$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})}$$

后验概率

先验概率

定理（贝叶斯公式）

设A_1，A_2，…, A_n构成完备事件组，且诸$P(A_i)>0$

B为样本空间的任意事件，$P（B）>0$，则有

$$\boxed{P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}}$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

证明

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k B)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

例9 设患肺病的人经过检查，被查出的概率为0.95，而未患肺病的人经过检查，被误认为患肺病的概率0.002，又设在全城居民中患有肺病的概率为0.1%，若从居民中随机抽一人检查，诊断为有肺病，试求这个人确实患有肺病的概率.

解 设 A—某居民患有肺病的事件, B—他检查诊断有肺病的事件. 于是问题就是求 $P(A|B)$. 依题意有

$P(A)=0.001$, $P(\bar{A})=0.999$, $P(B|\bar{A})=0.002$, $P(B|A)=0.95$,

由贝叶斯公式

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.001\times0.95}{0.001\times0.95+0.002\times0.999}=0.3223$$

例10（参见例7）. 假设某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占全厂产量的 25 %， 35%， 40%，而且各车间的次品率依次为 5% ，4%，2%. 现从待出厂的产品中检查出一个次品，试判断它是由甲车间生产的概率.

解 设 A_1， A_2， A_3 分别表示产品由甲、乙、丙车间生产， B表示产品为次品. 显然， A_1， A_2， A_3 构成完备事件组. 依题意，有

$$P(A_1)=25\%,\ P(A_2)=35\%,\ P(A_3)=40\%,$$

$$P(B|A_1)=5\%,\ P(B|A_2)=4\%,\ P(B|A_3)=2\%$$

解 $P(A_1)=25\%$，$P(A_2)=35\%$，$P(A_3)=40\%$,

$P(B|A_1)=5\%$，$P(B|A_2)=4\%$，$P(B|A_3)=2\%$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{0.25\times0.05}{0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02}$$

$$=\frac{0.0125}{0.0345}\approx0.362$$

主观题 10分 设置

甲，乙，丙3人参加面试抽签，每人的试题通过不放回抽签的方式确定。假设被抽的10个试题签中有4个是难题签，按甲先，乙次，丙最后的次序抽签。试求下列事件的概率：

1）甲抽到难题签；

2）甲和乙都抽到难题签；

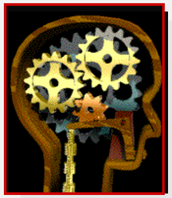
3）甲没抽到难题签而乙抽到难题签；

4）甲、乙、丙都抽到难题签；

5）乙抽到难题签。

作答

课后作业 第三次作业



习题2

1，2，3，5，8，9，10，11.

END