数理逻辑题型一览

xyfJASON

1 求(主)析取/合取范式

方法 1 直接转化:

$$
\begin{aligned}
p \to q &\iff \neg p \lor q \\
p \leftrightarrow q &\iff (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)
\end{aligned}
$$

方法 2 画真值表：如果是求主析取/合取范式推荐这种做法，方便且不容易出错。

例一（2019深圳）：求出公式 $(p \to q) \land (p \to r)$ 的主合取范式和主析取范式。

解:

p	q	r	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \land (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

主合取范式为：$(\neg p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$

主析取范式为：$(\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land \neg q \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \lor (p \land q \land r)$

2 用完备联结词组表示公式

完备联结词组有：$\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\Delta_1, \to\}, \{\neg, \to\}, \{\downarrow\}, \{\uparrow\}$ 等。

$$
\begin{aligned}
&\neg p \iff p \downarrow p \iff p \uparrow p \\
&p \vee q \iff \neg p \to q \iff \neg p \uparrow \neg q \iff (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \\
&p \wedge q \iff \neg(p \to \neg q) \iff \neg p \downarrow \neg q \iff (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}
$$

例一（2019深圳）：分别用公式$\uparrow$和$\downarrow$表示公式 $p \vee q \to q \wedge r$。

解：

$$
\begin{aligned}
p \vee q \to q \wedge r &\iff \neg(\neg p \wedge \neg q) \to \neg\neg(q \wedge r) \\
&\iff (\neg p \uparrow \neg q) \to \neg(q \uparrow r) \\
&\iff \neg((\neg p \uparrow \neg q) \wedge (q \uparrow r)) \\
&\iff (\neg p \uparrow \neg q) \uparrow (q \uparrow r) \\
&\iff ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (q \uparrow r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p \vee q \to q \wedge r &\iff \neg\neg(p \vee q) \to \neg(\neg q \vee \neg r) \\
&\iff \neg(p \downarrow q) \to (\neg q \downarrow \neg r) \\
&\iff (p \downarrow q) \vee (\neg q \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg((p \downarrow q) \downarrow (\neg q \downarrow \neg r)) \\
&\iff ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))) \downarrow ((p \downarrow q) \downarrow ((q \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)))
\end{aligned}
$$

例二（2017本部）：用$\downarrow$等价表示公式 $(p \to q) \to \neg r$。

解：

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \to \neg r &\iff \neg(p \to q) \vee \neg r \\
&\iff \neg(\neg(p \to q) \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg(\neg(\neg p \vee q) \downarrow \neg r) \\
&\iff \neg((\neg p \downarrow q) \downarrow \neg r) \\
&\iff (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow (r \downarrow r))
\end{aligned}
$$

3 判断逻辑蕴含/逻辑等价的正确性

使用指派的计算:

$$
\begin{aligned}
&(\neg A)^v = 1 - A^v \\
&(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v \\
&(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v \\
&(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v \\
&(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)
\end{aligned}
$$

然后用逻辑蕴含/逻辑等价的定义判断。

如果是错误的，给出一个反例即可。

例一（2019深圳）：判定下列逻辑蕴含式 $\{A \vee B \to C, B \vee C \to D, C \vee D \to E, \neg A\} \implies E \vee B$ 是否成立，给出理由。

解：取指派 v 使得 $A^v = B^v = C^v = D^v = E^v = 0$，则所有条件被弄真但结论被弄假，故不成立。

例二（2017本部）：判定下列逻辑等价式 $\neg((A \to \neg B) \to \neg C) \iff C \to (B \to \neg A)$ 是否成立。

解:

$$
\begin{aligned}
(\neg((A \to \neg B) \to \neg C))^v &= 1 - ((A \to \neg B) \to \neg C)^v \\
&= (A \to \neg B)^v - (A \to \neg B)^v \cdot (\neg C)^v \\
&= (1 - A^v + A^v \cdot (\neg B)^v) \cdot C^v \\
&= (1 - A^v \cdot B^v) \cdot C^v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C \to (B \to \neg A))^v &= 1 - C^v + C^v \cdot (B \to \neg A)^v \\
&= 1 - C^v + C^v \cdot (1 - B^v + B^v \cdot (\neg A)^v) \\
&= 1 - B^v \cdot C^v + (1 - A^v) \cdot B^v \cdot C^v \\
&= 1 - A^v \cdot B^v \cdot C^v
\end{aligned}
$$

因而，当 $A^v = B^v = 1, C^v = 0$ 时，前者为 0 而后者为 1，故不成立。

例三（2016本部）：判定下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立。

1. $\neg(C \wedge D) \to (A \to B), A, \neg D \implies B$

   解：设指派 v 弄真所有条件，则 $A^v = 1, D^v = 0, (\neg(C \wedge D) \to (A \to B))^v = 1$，于是:

$$
\begin{aligned}
(\neg(C \wedge D) \to (A \to B))^v &= 1 - (\neg(C \wedge D))^v + (\neg(C \wedge D))^v (A \to B)^v \\
&= C^v D^v + (1 - C^v D^v)(1 - A^v + A^v B^v) \\
&= B^v = 1
\end{aligned}
$$

所以结论被弄真，故成立。

2. $(A \to C) \wedge (B \to C) \iff \neg(A \to \neg B) \to C$

解:

$$\begin{aligned}
((A \to C) \wedge (B \to C))^v &= (A \to C)^v (B \to C)^v \\
&= (1 - A^v + A^v C^v)(1 - B^v + B^v C^v) \\
&= 1 - A^v - B^v + B^v C^v + A^v B^v + A^v C^v - A^v B^v C^v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\neg(A \to \neg B) \to C)^v &= 1 - (1 - (A \to \neg B)^v) + (1 - (A \to \neg B)^v) \cdot C^v \\
&= (A \to \neg B)^v \cdot (1 - C^v) + C^v \\
&= (1 - A^v + A^v(1 - B^v))(1 - C^v) + C^v \\
&= 1 - A^v B^v + A^v B^v C^v
\end{aligned}$$

因而，当 $C^v = A^v = 0, B^v = 1$ 时，前者为 0 而后者为 1，故不成立。

4 在 PC/ND/FC 中证明公式

见「PC系统证明思维」「ND系统证明思维」「FC系统证明思维」。

5 构造语义和指派

语义是一个结构，包括论域（个体域）U 和解释 $I: L_a \cup L_f \cup L_p \to U \cup U_f \cup U_p$；指派是一个映射 $s: L_v \to U$。

$\models_U A[s]$ 表示公式 A 在结构 U 和指派 s 下取值为真，其定义是：

1. 当 A 为原子公式（谓词）$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ 时，
$$\models_U A[s] \quad \text{iff} \quad \langle \bar{s}(t_1), \cdots, \bar{s}(t_n)\rangle \in \overline{P^{(n)}}$$
2. 当 A 为公式 $\neg B$ 时
$$\models_U A[s] \quad \text{iff} \quad \not\models_U B[s]$$
3. 当 A 为公式 $B \to C$ 时，
$$\models_U A[s] \quad \text{iff} \quad \not\models_U B[s] \text{ or } \models_U C[s]$$
4. 当 A 为公式 $\forall v B$ 时，
$$\models_U A[s] \quad \text{iff} \quad \text{对每一个 } d \in U, \models_U B[s(v \mid d)]$$
其中，$s(v \mid d)$定义为：$s(v \mid d)(u) = \begin{cases} s(u) & u \neq v \\ d & u = v \end{cases}$

扩展到联结词 $\vee, \wedge$ 和量词 $\exists$ 时，进一步定义：

$$\begin{aligned} \models_U B \vee C[s] \quad &\text{iff} \quad \models_u B[s] \text{ or } \models_U C[s] \\ \models_U B \wedge C[s] \quad &\text{iff} \quad \models_u B[s] \text{ and } \models_U C[s] \\ \models_U \exists v B[s] \quad &\text{iff} \quad \text{存在 } d \in U, \models_u B[s(v \mid d)] \end{aligned}$$

例一（2019深圳）：找出语义和指派使得 $P(x, f(x,a)) \to Q(x)$ 为真。

解：构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D} = \{0,1\}$，解释为 $\bar{a} = 0, \bar{P} = \{(0,0)\}, \bar{Q} = \{1\}$，$\bar{f}(0,0) = 1, \bar{f}(0,1) = 1, \bar{f}(1,0) = 1, \bar{f}(1,1) = 1$；构造指派 $s: s(x) = \bar{x} = 1$。

于是 $\overline{f(x,a)} = \bar{f}(1,0) = 1$，由于 $(1,1) \notin \bar{P}$，故 $\not\models_U P(x, f(x,a))[s]$，故 $\models_U P(x, f(x,a)) \to Q(x)[s]$。

例二（2017本部）：举例说明 $A \to B \vdash_{FC} \forall v A \to \forall v B$ 不一定成立。

思路：这其实考察的是对全称推广定理 5 的理解（也可以看作考察对公理 6 的理解），如果 v 不在假设集 $A \to B$ 中自由出现，那么这句话是成立的，可以通过全称推广定理 5 加上公理 5 进行证明。现在要求举例不成立，所以一定要让 v 在 $A \to B$ 中自由出现。

解：根据演绎定理，只需要说明 $\vdash_{FC} (A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$ 不一定成立。因此只需要找到一个结构 U 和指派 s，使得 $\models_U (A \to B)[s]$ 并且 $\not\models_U (\forall v A \to \forall v B)[s]$，也即 $\models_U \forall v A[s]$ 且 $\not\models_U \forall v B[s]$。

以 $A=P(v), B=Q(v)$ 为例，构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D}=\{0,1\}$，解释为 $\bar{P}=\{0,1\}, \bar{Q}=\{0\}$；构造指派 $s: s(v)=\bar{v}=0$。

于是一方面，由于 $0 \in \bar{Q}$，所以 $\models_U Q(v)[s]$，即 $\models_U B[s]$，故而 $\models_U (A \to B)[s]$。

另一方面，由于 $0,1 \in \bar{P}$，所以 $\models_U P(v)[s(v \mid 0)]$ 并且 $\models_U P(v)[s(v \mid 1)]$，因此 $\models_U \forall v P(v)[s]$，即 $\models_U \forall v A[s]$；

又由于 $1 \notin \bar{Q}$，所以 $\not\models_U Q(v)[s(v \mid 1)]$，因此 $\not\models_U \forall v Q(v)[s]$，即 $\not\models_U \forall v B[s]$。

综上，我们有 $\models_U (A \to B)[s]$ 且 $\models_U \forall v A[s]$ 且 $\not\models_U \forall v B[s]$，于是根据开头的分析，$A \to B \vdash_{FC} \forall v A \to \forall v B$ 不一定成立。

例三（2016本部）：能否构造解释和指派使得公式 $A \to \forall v A$ 为假？请举例说明。

解：以公式 A 为 $P(v)$ 为例，构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D}=\{0,1\}$，解释为 $\bar{P}=\{0\}$；构造指派 $s: s(v)=\bar{v}=0$。

则一方面由于 $0 \in \bar{P}$，故 $\models_U P(v)[s]$，即 $\models_U A[s]$；另一方面，由于 $1 \notin \bar{P}$，故 $\not\models_U P(v)[s(v \mid 1)]$，于是 $\not\models_U \forall v A[s]$。

综合两方面，$\not\models_U A \to \forall v A[s]$。

例四（2015本部）：构造解释使得下列谓词公式为真：$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(x,y)))$。

解：构造结构 U，其论域为 $\mathcal{D}=\{0,1\}$，解释为 $\bar{P}=\{0\}, \bar{Q}=\{(0,0),(1,0)\}$。

要使得 $\models_U \forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge Q(x,y)))$，只需要对于 $x=0$ 和 $x=1$ 都有：$\models_U \exists y(P(y) \wedge Q(x,y))$。

由于 $0 \in \bar{P}$，$(0,0) \in \bar{Q}$，$(1,0) \in \bar{Q}$，故无论 x 是 0 或 1，只要取 $y=0$，就有 $\models_U P(y) \wedge Q(x,y)$，从而 $\models_U \exists y(P(y) \wedge Q(x,y))$。