概率论与数理统计

Probability and Statistics

哈爾濱工業大學(深圳)

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, SHENZHEN

概率论与数理统计

- 教材：《概率论与数理统计》
  （第二版）
  哈尔滨工业大学数学系
  王勇 主编
  高等教育出版社

讲授：陶菊春
QQ:369561628
Email:taojuchun@hit.edu.cn

- 参考书：《概率论与数理统计》
  盛 骤 等 编
  高等教育出版社

1、课程学习与方法

预习——学习——练习

——复习——总结——深入

——综合——应用——提高

2、课程考核与考试

课程成绩（100分）

= 作业及平时20%+小论文10%+期末考试70%

作业及平时：20% (5次作业的平均分。课堂发言及讨论等表现好的适当加分，无故缺课、旷课扣分)

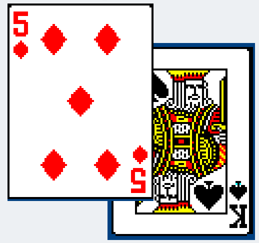
小论文：10%(开放性撰写与课程内容相关的小论文)

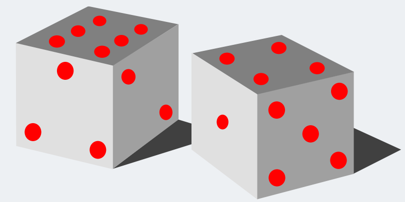
期末考试：70% (闭卷，笔试，2小时)

概率论与数理统计

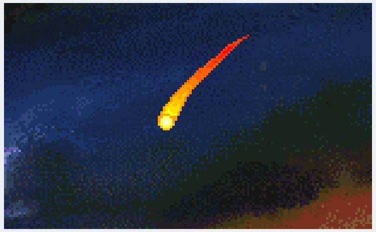
引言

概率论与数理统计是研究什么的





从玩扑克、扔硬币和掷骰子等简单的机会游戏，到复杂的社会现象；从流星坠落，到大自然的千变万化……，我们无时无刻不面临着不确定性和随机性.



在我们生活的世界上充满了不确定性和随机性.

一、随机现象

自然界所观察到的现象可分为两类:
- 确定性现象;
- 随机现象

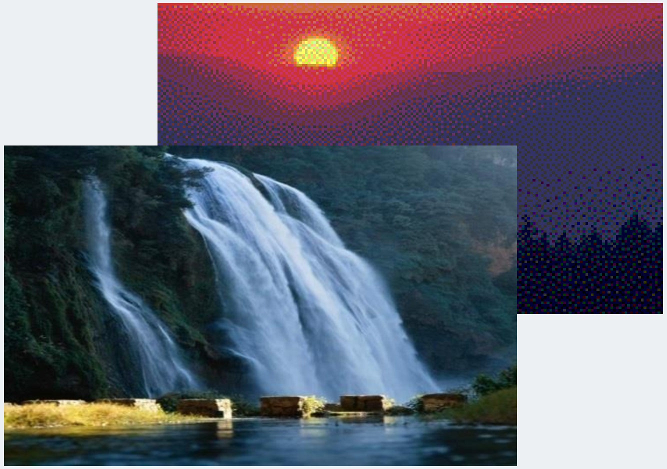
1. 确定性现象 Certainty phenomena

实例

“太阳从东边升起”;

“水从高处流向低处”;

“同性电荷必然互斥”.



在一定条件下必然发生的现象称为必然现象或确定性现象.

确定性现象的特征 条件完全决定结果

2. 随机现象 Random phenomena

实例1 “在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察正反两面出现的情况”.

结果 有可能**出现正面**也可能**出现反面**.

实例2 “用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况”.

结果 “弹落点会各不相同”.

实例3 从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

其结果可能为:

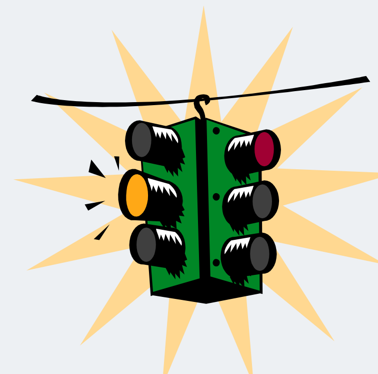
正品 、次品.

实例4 抛掷一枚骰子,观察出现的点数.

结果有可能为:

“1”, “2”, “3”,
“4”, “5” 或 “6”.

实例5 过马路交叉口时,可能遇上红、黄、绿颜色的交通指挥灯.



在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为**随机现象**

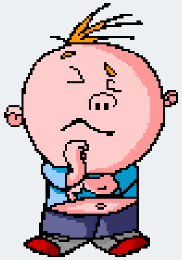
随机现象的特征 条件不能完全决定结果

二、概率论与数理统计的研究对象

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述.

2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性, 但在大量重复试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计规律性.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科.



- □ 概率论通过演绎研究随机现象的本质规律.
- □ 数理统计则通过归纳研究随机现象的本质规律.

三、概率论与数理统计的应用广泛性

1. 生物医学：生物信息；基因突变。

2. 排队模型、人工智能。

3. 保险（人寿保险，财产保险，年金计划等）、金融。

4. 复杂系统（飞行器设计，噪音处理等）。

。。。。。。

第1章 随机事件与概率

1.1 随机事件

1.2 事件的关系与运算

1.3 随机事件的概率

1.1　随机事件

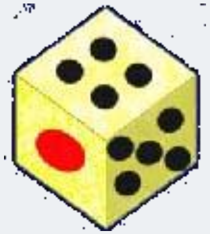
- 随机试验
- 随机事件
- 样本空间

1.1 随机事件与样本空间

试验 科学实验，

或者对某一事物的某一特征进行观察。

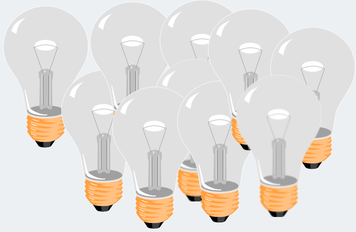
1.抛掷一枚骰子,观察出现的点数.



2.记录某公共汽车站某时刻的等车人数.

3.从一批产品中任选三件,记录出现正品与次品的件数.

4.从一批灯泡中任取一只,测试其寿命.



问 这些试验有什么特点？

■ 随机试验 random Experiments

定义10.1 在概率论中，把具有以下三个特征的试验称为**随机试验.**

1）试验可以在相同的条件下重复地进行；

2）每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3）进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验通常用 E 来表示.

随机现象是通过**随机试验**来研究的.

实例 抛掷一枚硬币,观察正面，反面出现的情况.

分析

1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

2) 试验的所有可能结果:

正面， 反面;

3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故上述试验为 **随机试验**.

■ 随机事件 random Events

- 在随机试验中，可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中具有某种规律性的事件叫做随机事件 (random Events)，简称事件(Events).
- 随机事件通常用大写英文字母 A、B、C 等表示.

例如：在抛掷一枚均匀硬币的试验中，“正面向上”是一 个随机事件，可用 $A=\{$正面向上$\}$ 表示.

掷一枚骰子，“出现偶数点”是一个随机事件，试验结果为 2，4或6点，都导致“出现偶数点”.

下面再引入几个概念，使随机事件的概念具体化，数字化，方便我们的学习和理解。

■ 样本空间

- **样本点 Sample Point**

随机试验中的每一个可能出现的试验结果称为这个试验的一个样本点，记作ω.

- **样本空间 Sample Space**

试验的全体样本点组成的集合称为这个试验的样本空间，记作S或Ω。如

$$\Omega=\{\omega \mid \omega ...\} \qquad \Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$$

随机事件A为样本空间Ω的具有某特性的子集. $A\subset\Omega$

- **基本事件**

仅含一个样本点的随机事件称为基本事件.

- **必然事件**Certainty Events

  ——记作S或Ω.

  - 每次试验中必定有Ω中的一个样本点出现
  - Ω必然发生
  - Ω也是一个“随机”事件
  - Ω也是样本空间的一个子集

例 “抛掷一颗骰子，出现的点数不超过6”为必然事件。

- **不可能事件 Impossible Event**

  ——记作ϕ.

  - ϕ表示不可能发生
  - ϕ不包含任何样本点
  - ϕ是一个特殊的“随机”事件
  - ϕ是样本空间的一个子集

例 “抛掷一颗骰子，出现的点数大于6”是

不可能事件

写出下列试验的样本空间

E1: 掷一颗匀质骰子，观察骰子出现的点数

$\Omega_1=\{1，2，3，4，5，6\}$

E2: 射手向一目标射击，直到击中目标为止

$\Omega_2=\{1,2,\ldots\}$

E3: 将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数

$\Omega_3=\{0，1，2\}$

E4: 从四张扑克牌**J,Q,K,A**任意抽取两张。

$\Omega_4=\{(J,Q),\ldots(Q,A)\}$

E5: 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命

$\Omega_5=\{\ t \mid 0\le t \le T\}$

例1 抛掷一颗骰子，观察出现的点数，那么事件“出现1点”、“出现2点”、...、“出现6 点”均为该试验的基本事件，该试验样本空间为.

$$\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$$

事件A =｛出现奇数点｝是由三个基本事件“出现1点”、“出现3点”、“出现5 点”组合而成的 随机事件.

$$A=\{1，3，5\}$$

注：一次试验中若属于事件*A*的样本点出现，则称事件*A*发生。

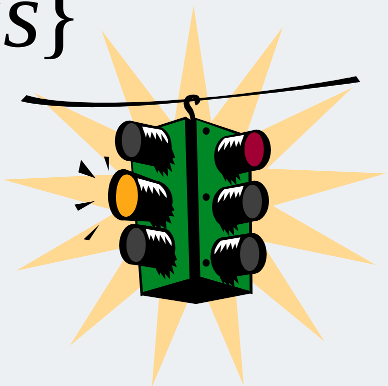
例2 一个人开车去上班，他要穿过三个交通信号灯，在每个信号灯处，他要么停下，要么通过。写出样本空间，事件*A* —至少停下一次,事件*B* —至少停下两次.

解： 用 *c* 表示通过，*s* 表示停下，则样本空间为

$$\Omega = \{ccc, ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss\}$$

$$A = \{ccs, csc, scc, css, scs, ssc, sss\}$$

$$B = \{css, scs, ssc, sss\}$$



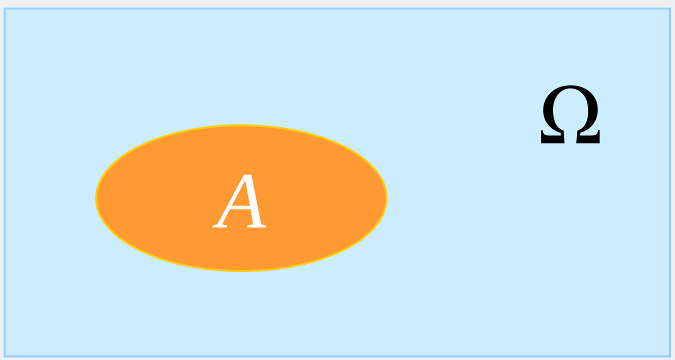
1.2 事件的关系与运算

- 事件的运算
- 事件的关系
- 事件之间的运算性质

1.2 事件的关系与运算

试验的样本空间Ω中，可以有很多的随机事件，概率论的任务之一，是研究随机事件的规律。通过对较简单事件规律的研究去掌握更繁杂事件的规律。

文氏图 (Venn diagram)



随机事件的关系和运算
雷同集合的关系和运算
因此也可用文氏图表示

事件 → 事件之间的关系与事件的运算

↓ ↓

集合 → 集合之间的关系与集合的运算

■ 事件的运算

● **事件的和** (Union)

$A \cup B$ 或 $A+B$

和事件$A \cup B$发生 ⟷ A发生或B发生.

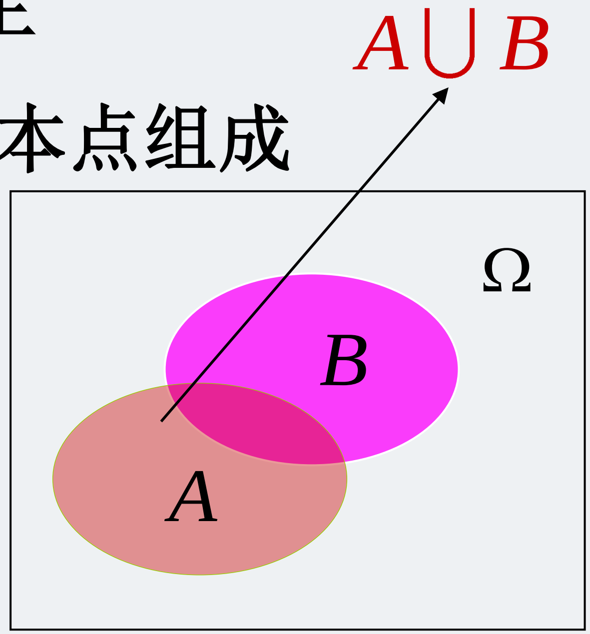
◆ 事件A与事件B至少有一个发生

◆ $A \cup B$由事件A与事件B所有样本点组成

◆ 多个事件的和

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$



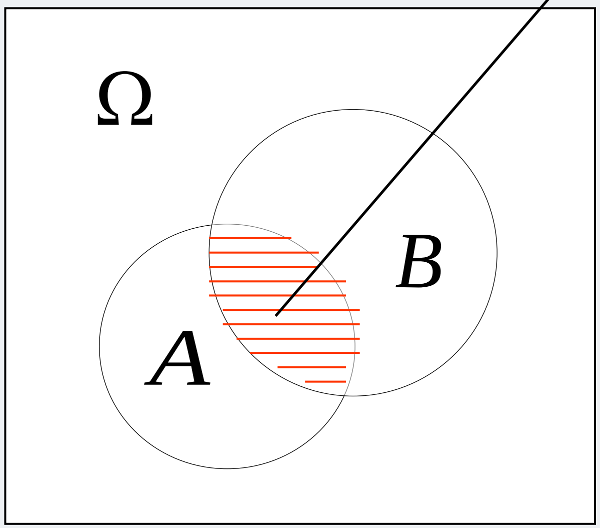
● 事件的积（Intersection）

$A \cap B$ 或 AB

积事件$A\cap B$发生 ⟷ 事件 A和事件 B都发生.

- ◆ 事件 A和事件 B同时发生
- ◆ $A\cap B$由事件 A和事件 B的公共样本点组成
- ◆ 多个事件的积

$A \cap B$



$$A_1A_2\cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

- **事件的差**(*Difference*)

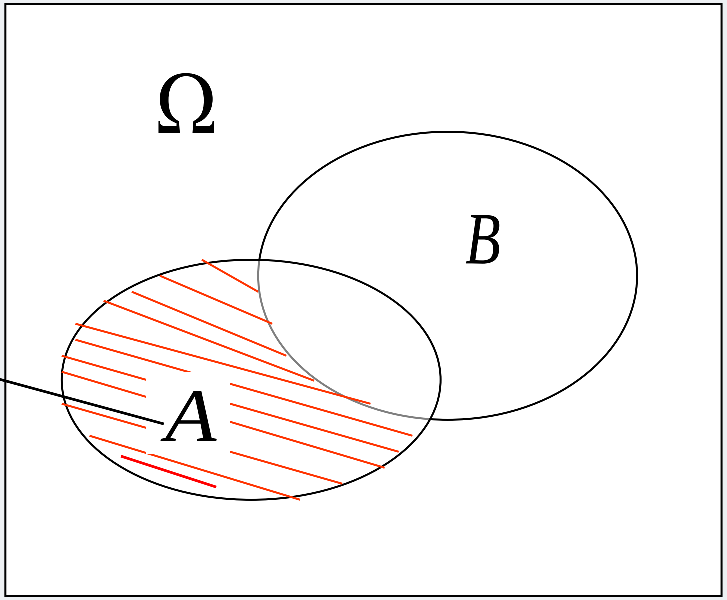
差事件***A***−***B***发生 ⟷ 事件***A***发生但事件***B***不发生.

- 由属于事件***A***但不属于事件***B***的样本点组成

- 性质

$$A-B=A-AB$$

A−***B***



- **事件的逆（Contrary）**

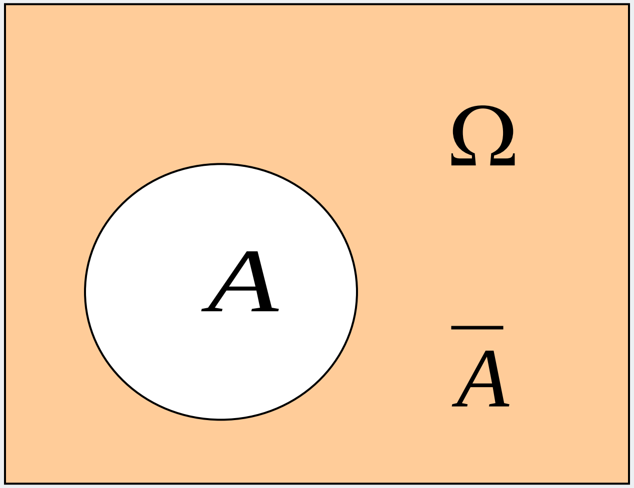
$$\overline{A}$$

逆事件$\overline{A}$ 发生 ⟷ 事件$\boldsymbol{A}$不发生

- $\boldsymbol{A}$的逆事件$\overline{A}$也称为$\boldsymbol{A}$的对立事件
- $\overline{A}$是由所有不属于$\boldsymbol{A}$的样本点组成
- 性质 $\overline{(\overline{A})} = A$

$\overline{A} = \Omega - A \qquad A - B = A\overline{B}$

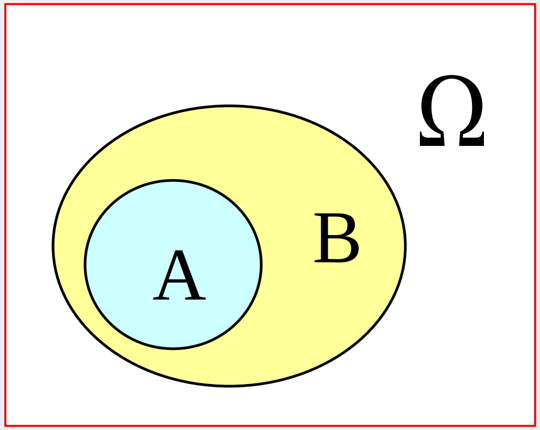
$A \cup \overline{A} = \Omega \qquad A\overline{A} = \Phi$



■ 事件的关系

● **包含关系**（Contain）

$A \subset B$ 或 $B \supset A$



◆ 事件 A 发生必然导致事件 B 发生

◆ 事件 A 是事件 B 的子事件

◆ 事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点

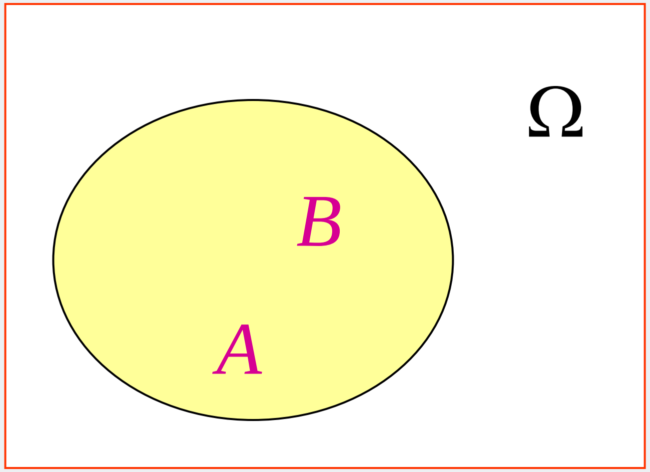
例如 抛掷两颗骰子，观察出现的点数

A={出现1点}， B={出现奇数点}. $A \subset B$

● **相等关系（*Equal*）**

$A=B \iff B\supset A$且 $A\supset B$

◆ 事件*A*与事件*B*含有相同的样本点



例如：在投掷一颗骰子的试验中，事件“出现偶数点”与事件“出现2，4或6点”是相等事件。

- **互斥关系(互不相容)** *Exclusive*

$AB=\Phi$ ⟺ 事件A与事件B互斥

- 事件A与事件B不能同时发生
- 事件A与事件B没有公共的样本点

显然，对于任意事件A, 有 $A\cap\phi=\phi$.

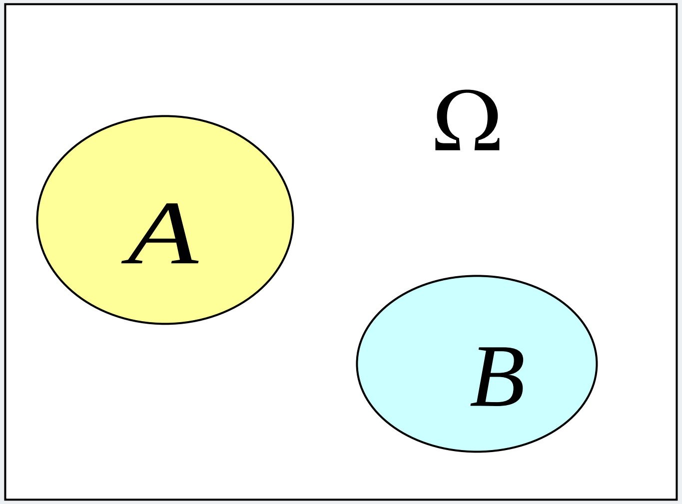
- n个事件的互斥（两两互不相容）

若n个事件

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

中任意两个都互不相容，即

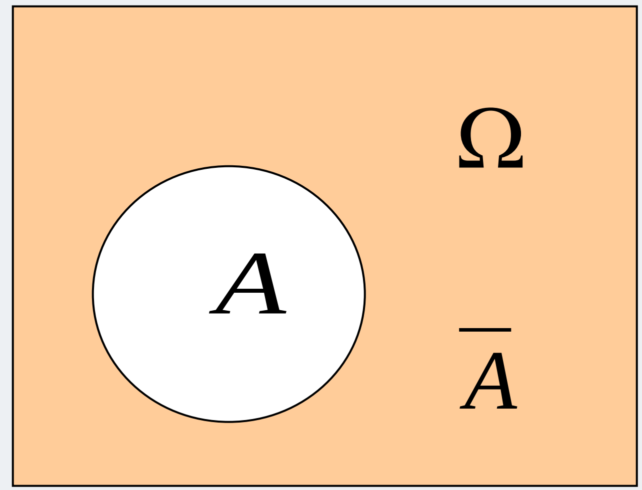
$$A_iA_j=\phi(i\neq j, i, j=1,2,\cdots,n,\cdots)$$



● 对立关系（Contrary）

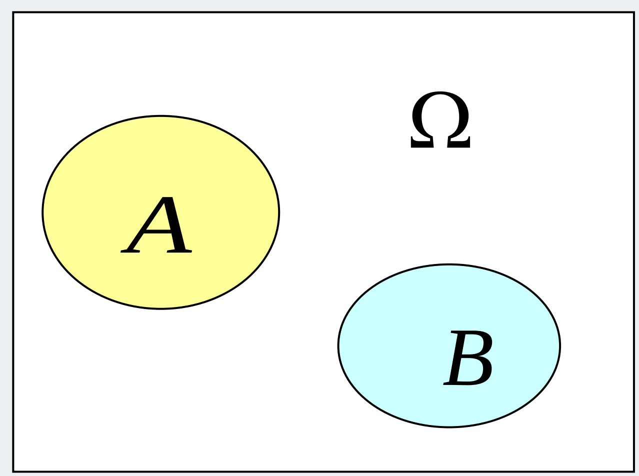
$A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \phi \Longleftrightarrow$ 事件A与事件B互相对立.

显然，$\boldsymbol{B} = \overline{A}$



注意：

对立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **互斥**



显然，对于任意事件A，B，成立

（1） $\phi \subset A \subset \Omega$

（2） $A \cup A = A$，$A \cup \Omega = \Omega$，$A \cup \phi = A$

（3） $AA = A$，$A\Omega = A$，$\phi A = \phi$

（4） $AB \subset A \subset A \cup B$，$AB \subset B \subset A \cup B$

（5） $A \cup \overline{A} = \Omega$，$A\overline{A} = \phi$

（6） $A - B = A - AB = A\overline{B}$，$A \cup B = A \cup \overline{A}B$

小　结

符号	概率论	集合论
Ω	必然事件 (样本空间)	全集
Φ	不可能事件	空集
$A\subset B$	子事件(包含关系)	子集
$A\cup B$	和事件(事件的和)	并集
$A\cap B$	积事件(事件的积)	交集
$A-B$	差事件(事件的差)	差集
$\overline{A}$	逆事件(对立关系)	补集(余集)

■ 事件之间的运算性质

- 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$
- 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- 分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$

  $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$
- 德. 摩根律（对偶律） $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

  $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$

Venn图演示集合的关系与运算。

例3 在检查某种圆形零件时，要求它的长度和直径都必须合格，设A,B,C分别表示“直径合格”，“长度合格”，“产品合格”，则

（1）$C \subset A, C \subset B;$

（2）$\overline{A}$， $\overline{B}$， $\overline{C}$ 分别表示
“直径不合格”，“长度不合格”，“产品不合格”；

（3）$C = A \cap B;$

（4）$\overline{C} = \overline{A} \cup \overline{B};$

（5）$C = A - \overline{B}.$

例4 复合事件的表示

某射手向目标射击三次，用 A_i 表示第 i 次击中目标 $i=1,2,3,$ 试用 A_i 及其运算符表示下列事件：

（1）三次都击中目标： $A_1A_2A_3$

（2）至少有一次击中目标： $A_1\cup A_2\cup A_3$

（3）恰好有两次击中目标： $\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$

（4）最多击中一次： $\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3$

（5）至少有一次没有击中目标： $\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3=\overline{A_1A_2A_3}$

（6）三次都没有击中目标： $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$

主观题 6分

设置

设A,B,C为同一样本空间的随机事件，试用A，B，C的运算表示下列事件

1） A，B，C 都不发生

2） A与B发生，C不发生

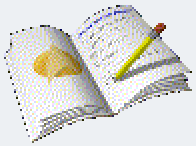
3） A，B，C 至少有一个发生

4） A，B，C 中恰有二个发生

5） A，B，C 中至少有二个发生

6） 事件3）的对立事件

作答



课后作业

P23： 习题1

1，2，3，