PC系统证明思维

xyfJASON

思维过程是证明序列的逆序，即「要证……只需证……」。拿到一道题后的首要任务是写出思维过程，证明时倒着写就行了。

常用公理&定理

公理 1

$$A1: \quad A \to (B \to A)$$

公理 1 的作用是“砍头”，即「要证 $B \to A$，只需证 A」，直接把前件砍掉了。在前件与后件没有关系，或者发现后件本身就是永真式时使用。

公理 2

$$A2: \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

公理 2 有一个鲜明的特点是“共享前件”，即要证的式子中 $A \to B$ 和 $A \to C$ 都有共同的前件 A，这时候我们可以把 A 提出来，变成只需证 $A \to (B \to C)$。如果要证的式子“共享后件”，我们可以对每个部分取逆否得到共享前件的式子，然后运用公理 2。

反身

$$\text{Thm 1}: \ \vdash A \to A$$

前件互换系列

$$\begin{aligned} &\text{Thm 2}: \quad \text{if} \vdash A \to (B \to C), \text{ then} \vdash B \to (A \to C) \\ &\text{Thm 3}: \quad \vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)) \end{aligned}$$

前件互换能调动公式两部分的位置，常常有助于继续推导。见到形如 $A \to (B \to C)$ 时都可以尝试前件互换。

加前后件系列

$$\begin{aligned} &\text{Thm 4}: \quad \vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) \\ &\text{Thm 5}: \quad \vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \end{aligned}$$

观察要证的式子，发现它们的特点也是“共享前件”和“共享后件”，并且与公理 2 不同的是，共享的前件或后件将被砍掉。因此，我们可以总结：当我们遇见一个式子共享前件或共享后件，**首先考虑使用加前后件**，看一看砍掉前后件之后得到的式子是不是永真式，如果是，那么皆大欢喜；如果不是，那么使用公理 2。

自相矛盾系列

$$
\begin{aligned}
\text{Thm 6}: &\quad \vdash \neg A \to (A \to B) \\
\text{Thm 7}: &\quad \vdash A \to (\neg A \to B)
\end{aligned}
$$

如果 A 和 $\neg A$ 都成立，这是自相矛盾的，所以能推出任何式子都成立。

反证法系列

$$
\begin{aligned}
\text{Thm 9}: &\quad \vdash (\neg A \to A) \to A \\
\text{Thm 11}: &\quad \vdash (A \to \neg A) \to \neg A \\
\text{Thm 16}: &\quad \vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A) \\
\text{Thm 17}: &\quad \vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)
\end{aligned}
$$

如果 A 不成立，那么 A 成立，这说明假设不正确，故 A 成立；

如果 A 成立，那么 A 不成立，这说明假设不正确，故 $\neg A$ 成立；

如果 A 不成立，立即可知 B 成立；推了一会儿又知道 B 不成立，说明假设不正确，故 A 成立；

如果 A 成立，立即可知 B 成立；推了一会儿又知道 B 不成立，说明假设不正确，故 $\neg A$ 成立。

逆否命题系列

$$
\begin{aligned}
A3: &\quad \vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\
\text{Thm 13}: &\quad \vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A) \\
\text{Thm 14}: &\quad \vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A) \\
\text{Thm 15}: &\quad \vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)
\end{aligned}
$$

逆否命题很有用，有时遇到很多否定自然使用逆否命题把否定去掉，有时用一下逆否命题就能产生和其他项重复的项，方便我们的证明。

双重否定系列

$$\begin{aligned} \text{Thm } 10: \quad & \vdash \neg\neg A \to A \\ \text{Thm } 12: \quad & \vdash A \to \neg\neg A \end{aligned}$$

三段论

$$\text{Thm } 8: \quad \text{if} \vdash A \to B, \vdash B \to C, \text{ then} \vdash A \to C$$

非常常用的定理。

解题神器

$$\text{Thm } 18: \ \vdash \neg A \to C \ \wedge \ \vdash B \to C \ \text{ iff } \ \vdash (A \to B) \to C$$

要证 $(A \to B) \to C$，只需要拆开分别证 $\neg A \to C$ 和 $B \to C$ 即可。

例题

例一（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to A) \to (B \to A)$

思维过程：

例二（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

思维过程：

例三（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} (A \to C) \to ((B \to C) \to (((A \to B) \to B) \to C))$

思维过程：

例四（2019深圳）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to C) \to ((A \to C) \to C)$

思维过程：

例五（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$

同 2019 深圳，此处不赘述。

例六（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} B \to ((B \to C) \to (\neg A \to C))$

思维过程：

例七（2017本部）

求证：$\vdash_{PC} (A \to B) \to (\neg B \to (A \to \neg A))$

思维过程：

例八（2017本部）

求证：$\neg((A \to B) \to \neg(B \to A)), A \vdash_{PC} B$

思维过程：

例九（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} \neg(A \to B) \to (A \to (B \to C))$

思维过程：

例十（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to \neg B) \to \neg(A \to \neg C)) \to (\neg B \to C)$

思维过程：

例十一（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} (C \to \neg(A \to B)) \to ((C \to \neg A) \to \neg C)$

思维过程：

例十二（2016本部）

求证：$\vdash_{PC} ((\neg A \to A) \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg B)$

思维过程：

例十三（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} \neg C \to (\neg B \to \neg(\neg B \to C))$

思维过程：

例十四（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} ((A \to (B \to C)) \to A) \to A$

思维过程：

例十五（2015本部）

求证：$\vdash_{PC} (A \to (B \to \neg C)) \to (C \to (A \to \neg B))$

思维过程：

例十六（2015本部）

求证：$((\neg A \to B) \to C) \to D, \neg D \to \neg B, \neg A \vdash_{PC} D$

思维过程：