第 2 章 条件概率与独立性

2.1 条件概率与乘法定理

2.2 全概率公式与贝叶斯公式

2.3 事件的独立性。

2.4 贝努力概型，二项概率公式

复习

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},P(B)>0$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},P(A)>0$$

$$P(AB)=P(A)P(B|A),(P(A)>0)$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B),(P(B)>0)$$

问

$$P(B)=P(B|A)\quad ?$$

$$P(AB)=P(A)P(B)\quad ?$$

2.3 事件的独立性

- 两事件的独立性
- 多事件的独立性

2.3 事件的独立性 Independence

引例 一个盒子中有 6 只黑球、 4 只白球，从中有放回地摸球。求

1）第1次摸到黑球的条件下,第2次摸到黑球的概率；

2）第2次摸到黑球的概率。

解 设A={第1次摸到黑球}，B={第2次摸到黑球}

则 $$1)P(B|A)=\frac{6}{10}=0.6$$

$$2)P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)$$

$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=0.6$$

□ 两事件的独立性

设 A、B为任意两个随机事件，如果

不用它做独立性定义！

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$(P(A \mid B) = P(A))$$

即事件B发生的概率不受事件 A 的影响，此时则有

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

定义 设 A、B为任意两个随机事件，如果

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B)}$$

那么称事件A与 B相互独立.

注意：1. 任意事件A与 ϕ独立；

2. 若$P(B)>0$，则A与B独立的充要条件是$P(A \mid B)= P(A)$.

■ **定理** 下列四组事件，有相同的独立性：

（1）A与B；（2）A与$\overline{B}$；

（3）$\overline{A}$与B；（4）$\overline{A}$与$\overline{B}$

证明（4）若**A**、**B**独立，则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$

$$=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

所以，$\overline{A}$与$\overline{B}$独立。 其余留作练习。

■ 概念辨析

（1）事件 A 与事件 B **相互独立**

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

（2）事件 A 与事件 B **互斥**（互不相容）

$$AB=\phi \Rightarrow P(AB)=0, P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

（3）事件 A 与事件 B **对立**（互逆）

$$AB=\phi, A\cup B=\Omega \Rightarrow P(A)+P(B)=1$$

实际问题中，

事件的独立性也可根据问题的实际意义来判断。

例1 甲、乙二人向同一目标射击，甲击中目标的概率为 0.6，乙击中目标的概率为 0.5. 今各射击一次，试计算 1）两人都击中目标的概率； $A\cap B$

2）恰有一人击中目标的概率； $\bar{A}B\cup A\bar{B}$

3）目标被击中的概率。 $A\cup B$

解 设***A***表示“甲击中目标”，***B***表示“乙击中目标”

则 ***A***与***B***独立，且 $P(A)=0.6, P(B)=0.5$

$$(1)P(AB)=P(A)P(B)=0.6\times 0.5=0.3$$

$$(2)P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=P(\bar{A})P(B)+P(A)P(\bar{B})=0.5$$

$$(3)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.8$$

$$(P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=0.8)$$

有限多个事件的独立性

如果事件 A，B，C 满足

$$\left.\begin{aligned} P(AB)&=P(A)P(B) \\ P(AC)&=P(A)P(C) \\ P(BC)&=P(B)P(C) \end{aligned}\right\}$$

事件A，B，C 两两相互独立.

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A，B，C 相互独立。

注意

事件A，B，C相互独立与事件A，B，C两两独立不同，两两独立是指上述式子中前三个式子成立。因此，相互独立一定两两独立，但反之不一定。

例：掷一枚硬币两次，观察正面出现的情况。

Ω ={++，+−，−+，−−}

A：第一次抛掷出现正面: **{++，+−}**,

B：第二次抛掷出现正面: **{++，−+}**,

C：恰出现一次正面: {+−，−+ }.

则 ***A***，**B**，***C*** 两两独立，但 ***A***，***B***，***C*** 不独立.

事实上 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$ABC=\phi,\ P(ABC)=P(\phi)=0$$

$$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$$

一般地，

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个事件。如果对于所有可能的组合$1 \le i < j < k < \cdots \le n$下列各式同时成立

$$\begin{cases} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) & C_n^2 \\ P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) & C_n^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) & C_n^n \end{cases}$$

那么称$A_1, A_2, \cdots, A_n$是相互独立的。

$$C_n^2 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^1 - C_n^0 = 2^n - n - 1$$

共有（2^n-n-1）个等式！

例2. 某工人照看三台机床，已知在一个小时内1号，2号，3号机床需要照看的概率分别为0.3, 0.2, 0.1。设各机床之间是否需要照看是相互独立的，求在一小时内：

1）没有一台机床需要照看的概率；

2）至少有一台不需要照看的概率；

3）至多有一台需要照看的概率。

解　设A_i表示“第i台机床需要照看”,（i=1，2，3）

则 $P(A_1)=0.3$；$P(A_2)=0.2$；$P(A_3)=0.1$，由独立性

解 设A_i表示“第i台机床需要照看”，（i=1，2，3）

则 $P(A_1)=0.3$；$P(A_2)=0.2$；$P(A_3)=0.1$，由独立性

$$(1)\ p_1=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$$

$$=0.7\times0.8\times0.9=0.504$$

$$(2)\ p_2=P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3})=P(\overline{A_1A_2A_3})$$

$$=1-P(A_1A_2A_3)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$=1-0.3\times0.2\times0.1=0.994$$

$$(3)\ p_3=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$=0.902$$

主观题 10分

设置

某工人照看三台机床，已知在一个小时内1号，2号，3号机床需要照看的概率分别为0.3, 0.2, 0.1。设各机床之间是否需要照看是相互独立的，求在一小时内至少有两台机床需要照看的概率。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

$$p=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

或 $p=1-p_3=0.098$

END

2.4 贝努力Bernoulli概型

- 相互独立的试验
- 贝努力概型
- 贝努力定理——二项概率公式

2.4 贝努力**Bernoulli**概型

- 相互独立的试验

将试验 E 重复进行 n 次, 若各次试验的结果互不影响, 则称这 n 次试验是相互独立的.

- 贝努力试验

设随机试验E只有两种可能的结果: A 及 $\bar{A}$， 且 $P(A)=p$, 在相同的条件下将 E 重复进行 n 次独立试验, 则称这一串试验为 <u>n 重贝努力试验,</u> 简称贝努力试验(*Bernoulli trials*).

◻ 贝努力定理

引例 某射手打靶，每次的命中率都是0.8，求5次射击中:

（1）前两次命中，后三次没命中的概率；

（2）恰有两次命中的概率.

■ 分析 $n=5$ 的 *Bernoulli* 试验

设$\boldsymbol{A_i}$={第i次射击命中, i=1, 2, 3, 4, 5}，

B={前两次命中，后三次没命中}，

C={恰好有2次命中}.

则 $P(A_i)=p=0.8, P(\bar{A}_i)=q=0.2$

$$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5,$$

$$C = A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \cup \cdots \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4 A_5.$$

共有 C_5^2 项.

因为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 相互独立，所以

$$(1) P(B) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) = P(A_1) P(A_2) P(\overline{A}_3) P(\overline{A}_4) P(\overline{A}_5)$$

$$= 0.8^2 \times 0.2^3 = p^2 q^{5-2}$$

$$(2) P(C) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5 \cup \cdots \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4 A_5)$$

$$= 10 \times 0.8^2 \times 0.2^3 = 0.0512 = C_5^2 p^2 q^{5-2}$$

定理（Bernoulli）设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p $(0<p<1)$，则事件 A 在n重贝努力试验中恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

二项概率

其中 $q=1-p$ （$k=0，1，2，…，n$）

注意到 $C_n^k p^k q^{n-k}$（$k=0，1，2，…，n$）恰好是 $(p+q)^n$ 展开式的各项，称为二项概率公式。

推论 $\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=1$

例3 有一批棉花种子,其出苗率为0.67，现每穴种4粒种子,

(1) 求恰有k 粒出苗的概率($0\le k\le 4$);

(2) 求至少有两粒出苗的概率.

解 (1) 试验为 4 重贝努利试验

$$n=4, p=0.67, q=1-p=0.33$$

$$P_4(k)=C_4^k p^k q^{4-k} \quad (0\le k\le 4)$$

(2) 设 B表示至少有2粒出苗的事件, 则

$$P(B)=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)\approx 0.8918$$

例4 设某电子元件的使用寿命在1000小时以上的概率为0.2，当三个电子元件相互独立使用时，求在使用了1000小时的时候，最多只有一个损坏的概率。

解 设A表示“元件使用1000小时不坏”，则

$$p = P(A) = 0.2$$

设B表示“三个元件中至多一个损坏”，则

$$P(B) = P_3(3) + P_3(2) = C_3^3 \cdot 0.2^3 + C_3^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8$$

$$= 0.104$$

例5　一批种子的发芽率为80%，试问每穴至少播种几粒种子，才能保证99%以上的穴不空苗。

分析：“穴不空苗”即“至少有一颗种子发芽”

解　假设每穴播 n 颗种子，则 依题意可得

$$1-P_n(0)=1-(1-0.8)^n\geq 0.99$$

即　$$0.2^n\leq 0.01$$

$\ln 0.2<0$　可解得 $n\geq\dfrac{\ln 0.01}{\ln 0.2}=2.8614,$

所以，每个穴中宜种3颗种子。

主观题 10分

设置

一批种子的发芽率为80%，试问每穴至少播种几粒种子，才能保证90%以上的穴至少有一颗种子发芽。

作答

$$1-P_n(0)=1-(1-0.8)^n \geq 0.9$$

$$0.2^n \leq 0.1$$

$$n \geq \frac{\ln 0.1}{\ln 0.2} \quad (=\frac{1}{2}\frac{\ln 0.01}{\ln 0.2})=1.43,$$

所以，每个穴中宜种2颗种子。

END

例6 某种数字传输器以每米512×10³个0或1的序列传送消息，由于各种干扰，在传送过程中会产生将0误为1或将1误为0的情况，这两种情况称为“误码”．设误码的概率为10^{-7}，求在10秒钟内出现一个误码的概率.

解 将传输一个数字0或1看作一次试验，并将误码和不误码看成试验的两个结果，于是这个问题可看成重数为 $n=512\times10^3\times10$的贝努力试验，而所求的概率为

$$P_{512\times10^4}(1)=C_{512\times10^4}^{1}\times10^{-7}\times(1-10^{-7})^{512\times10^4-1}.$$

计算困难！

二项概率的泊松近似

The Poisson Approximation to the Binomial Distribution

泊松定理

如果 $n \to \infty, p \to 0, \lambda = np$ 保持为正常数，

则

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

实际应用中：当 n 较大，p 较小，np 适中时，即可用泊松公式近似替换二项概率公式.

例7 某人骑摩托车上街, 出事故率为 0.02，独立重复上街400次，求出事故至少两次的概率.

解 400次上街⇔n=400重，p=0.02的Bernoulii试验.

记 A 为出事故至少两次的事件，则

$$P_n\{k\} = C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k} \approx \frac{8^k}{k!}e^{-8}$$

$$P(A) = 1 - P_{400}(0) - P_{400}(1) \approx 1 - e^{-8} - 8e^{-8}$$

$$=1-0.98^{400}-400\ (0.02)(0.98^{399}) \approx 0.9970$$

≈ 0.9972

泊松定理

随着实验次数的增多，小概率事件总会发生的！

例8（寿险问题）某保险公司有2500个同龄和同社会阶层的人参加了人寿保险，每个参保人年缴费12元，参保人一年内死亡家属可领取2000元丧葬费，设年死亡率为0.002，求

（1）保险公司亏本的事件***A***的概率；

（2）保险公司获利不少于10000元的事件***B***的概率.

解 保险公司一年的总收入为 $2500 \times 12 = 30000$ 元.

记 X 为一年内死亡的参保人数，则

$$(1)\quad P(A) = P\{2000X > 30000\} = P\{X > 15\}$$

$$(1)\quad P(A)=P\{2000X>30000\}=P\{X>15\}$$

$$=\sum_{k=16}^{2500}P_{2500}(k)=\sum_{k=16}^{2500}C_{2500}^{k}\times 0.002^{k}\times 0.998^{2500-k}$$

泊松定理

$$\overset{\lambda=np=5}{=}\sum_{k=16}^{2500}\frac{5^k}{k!}e^{-5}\approx\sum_{k=16}^{\infty}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=0.00007.$$

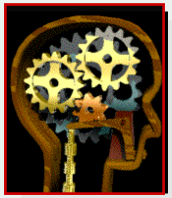
$$(2)\quad P(B)=P\{30000-2000X\geq 10000\}=P\{X\leq 10\}$$

$$=\sum_{k=0}^{10}P_{2500}(k)=\sum_{k=0}^{10}C_{2500}^{k}\times 0.002^{k}\times 0.998^{2500-k}$$

泊松定理

$$\overset{\lambda=np=5}{=}\sum_{k=0}^{10}\frac{5^k}{k!}e^{-5}\approx 0.9863.$$

课后作业



习题2

15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 27, 30, 33, 34.

END