# 第4章 多维随机变量及其分布

**引例** 抽样调查15-18岁青少年的身高$X$与体重$Y$. 以研究当前该年龄段青少年的身体发育情况。

$$X \sim N(\cdot\ ,\cdot\ ),\qquad Y \sim N(\cdot\ ,\cdot\ )$$

但身高与体重之间是有一定关系的. $(X, Y)$ ?

我们需要研究的不仅仅是$X$及$Y$各自的统计性质，更需要了解这两个随机变量的相互依赖和制约关系.

又如:气象指标中的气温、气压与湿度也是相关联的.

由于同一对象的不同指标之间往往是有一定联系的所以可将它们作为一个整体来研究，称为随机向量。

本章研究二维或多维随机向量的联合概率结构.

# 4.1 二维随机变量及其联合分布函数

- 二维随机变量的概念
- 二维随机变量的联合分布函数
- 联合分布函数的性质
- 边际分布函数

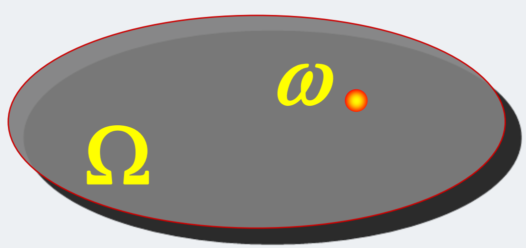
## 二维随机变量的概念

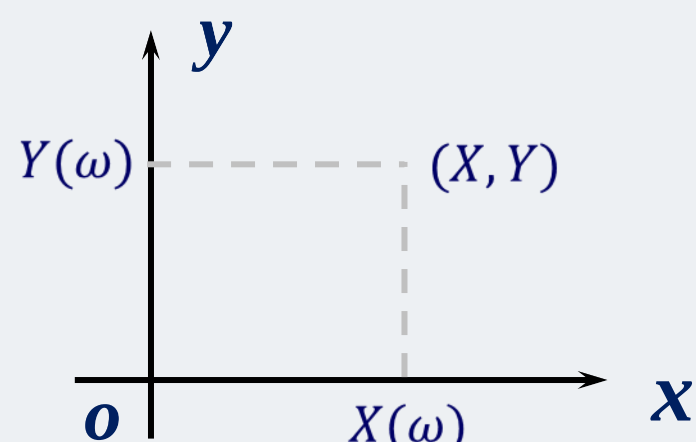
**定义** 设Ω为样本空间，$X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ 是定义在 Ω上的两个r.v. 记

$$(X,Y) \triangleq (X(\omega), Y(\omega)) \quad (\omega \in \Omega)$$

称 $(X,Y)$ 为二维随机变量（向量）.

注 一个试验产生的二维随机变量可视为向二维平面“投掷”一个“随机点”



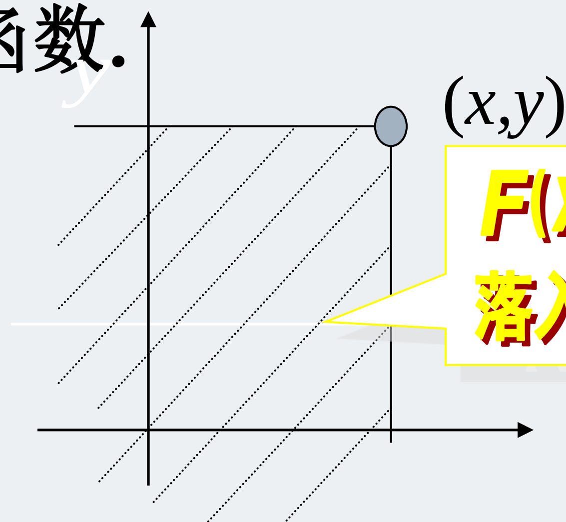
# ◘ 二维随机变量的联合分布函数

**定义** 设$(X,Y)$为二维 r.v, $\forall\, x,y\in(-\infty,\infty)$，定义

$$F(x,y)\triangleq P(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\})$$

$$\triangleq P\{X\le x, Y\le y\}$$

则称$F(x,y)$为二维 r.v $(X,Y)$的累积分布函数，或称为$X$与$Y$的 联合累积分布函数.




**$F(x,y)$表示随机点$(X,Y)$落入阴影区域的概率**

$$F_X(x)=P(X\le x)$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)$$

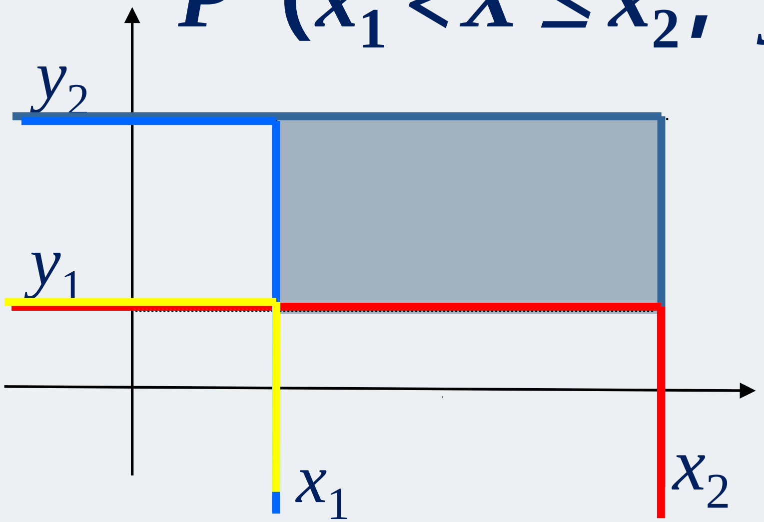
分别称为二维 r.v $(X,Y)$ 关于$X$、$Y$的边际分布函数.

**marginal distribution**

# 几何意义

用联合分布函数表示矩形域概率：

$$P\left(x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\right)$$




$$F(x_2, y_2)$$

$$-F(x_2, y_1)$$

$$-F(x_1, y_2)$$

$$+F(x_1, y_1)$$

$$P\left(x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\right)$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

## □ 联合分布函数的基本性质

① 任意固定 $x_0, F(x_0, y)$ 是 $y$ 的单调不减函数；

任意固定$y_0, F(x, y_0)$ 是 $x$ 的单调不减函数.

② $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0, F(x, -\infty) = 0 \ \ (\forall\ x, y)$$

③ $F(x, y) = F(x, y + 0)$, 即 $F(x, y)$ 关于$y$ 右连续；

$F(x, y) = F(x + 0, y)$, 即 $F(x, y)$ 关于$x$右连续.

④ $\forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$ 有

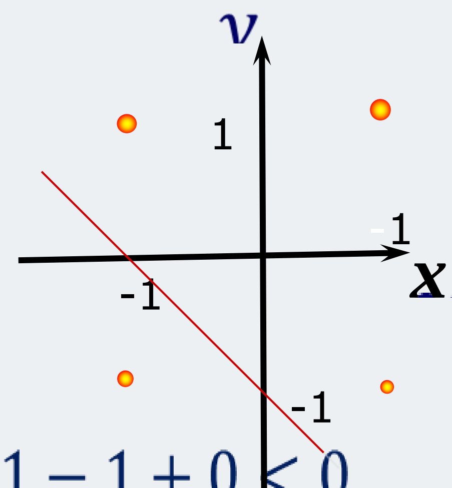
$$P\ (x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2) =$$

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

注 性质 ①②③④ 是分布函数的本质特征.

**注意**：联合分布函数$F(x, y)$的性质(4)不能由前三条性质推出.

**反例**：令 $F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y>-1\\ 0, & x+y\le -1\end{cases}$




显然$F(x, y)$满足(1)(2)(3)三条性质，但它不满足(4)，因为：

$$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)=1-1-1+0<0$$

这说明性质(4)不能由前三条性质推出，故定义一个二元函数为分布函数时性质(4)不能省.

二维 r.v 的整体概率特性：$(X,Y)\sim F(x,y)$

两个一维 r.v 的概率特性：$X\sim F_X(x)$， $Y\sim F_Y(y)$

问 $F(x,y), F_X(x), F_Y(y)$ 之间有什么关系 ？

分析 $F_X(x)=P\{X\le x\}$

$=P\{X\le x, Y<+\infty\}$

$=F(x,+\infty)$

$$\boxed{F_X(x)=F(x,+\infty)}$$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

$=P\{X<+\infty, Y\le y\}$

$=F(+\infty,y)$

$$\boxed{F_Y(y)=F(+\infty,y)}$$

结论 随机变量的边际分布完全由它们的联合分布确定. 反之不成立.

**例1** 设二维随机变量（*X*，*Y*）的分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y),$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

（1）试确定常数*A*，*B*，*C* 的值；

（2）求 $P(0<X\le 1,0<Y\le 1)$；

（3）求边际分布函数 $F_X(x),F_Y(y)$ ；

（4）求$P(X>1)$ .

**解**（1） 由分布函数的性质

$$\begin{cases} F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 \\ F(-\infty,+\infty)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=0 \\ F(+\infty,-\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$ 解得：$\begin{cases} A=\dfrac{1}{\pi^2} \\ B=\dfrac{\pi}{2} \\ C=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ .

故 $$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

（2）$P(0<X\le 1,0<Y\le 1)=F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)$

$$=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{9}{16}-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

（3）$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)\pi$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,-\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y,-\infty<y<+\infty.$$

（4） $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-F_X(1)$

$$=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan x)(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$$

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x,-\infty<x<+\infty.$$

$$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan y,-\infty<y<+\infty.$$

# §4.2　二维离散随机变量

- 二维离散型随机变量
- 联合分布列的基本性质
- 二维离散随机变量的边际分布列

# 二维离散随机变量

二维随机变量的基本类型 $\begin{cases} \text{二维离散型 r. v} \\ \text{二维连续型 r. v} \end{cases}$

**定义** 设 r.v $(X, Y)$ 的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j) \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

取值的概率为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

称$(X,Y)$为二维离散r.v，称上式为二维离散r.v$(X,Y)$的联合分布列或联合频率函数.

*joint frequency function.*

## 联合分布列的基本性质

设 r.v $(X, Y)$ 的联合分布列为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad (i, j = 1,2,\cdots)$$

则 ① $p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1,2,\cdots)$

② $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

离散r.v联合分布列的本质特征

联合分布列的表格表示法

| Y \ X | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_i$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{21}$ | $\cdots$ | $p_{i1}$ | $\cdots$ |
| $y_2$ | $p_{12}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $y_j$ | $p_{1j}$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

**例2** 袋中装有2只白球及3只黑球，现进行无放回的摸球，定义随机变量如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次摸出白球}\\0, & \text{第一次摸出黑球}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次摸出白球}\\0, & \text{第二次摸出黑球}\end{cases}$$

求 $(X,Y)$ 的联合分布列.

**解**

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0|X=0\}\cdot P\{X=0\}=(2/4)\cdot(3/5)$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1|X=0\}\cdot P\{X=0\}=(2/4)\cdot(3/5)$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{Y=0|X=1\}\cdot P\{X=1\}=(3/4)\cdot(2/5)$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1|X=1\}\cdot P\{X=1\}=(1/4)\cdot(2/5)$$

**例3** 有一个射击游戏，参加游戏的人先掷一次骰子，若出现点数为$X$，则射击$X$ 次. 设某人击中目标概率为 $p=0.9$，记击中目标的次数为$Y$. 求 $(X,Y)$ 的联合分布列.

**解** $X$的取值为 $1,2,\cdots,6$ ，$Y$ 的取值为 $0,1,2,\cdots,X$

当$X=i$时， $Y\sim B(i,p)$ $(i=1,2,3,4,5,6)$

由乘法公式求得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}\cdot P\{X=i\}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{6}C_i^j p^j(1-p)^{i-j}, 0\le j\le i, i=1,2,\cdots,6\\ 0\ , \quad \text{其它}\end{cases}$$

代入 $p = 0.9$，求得 $(X, Y)$ 的联合分布列为

| $Y \backslash X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.017 | 0.0017 | 0.00017 | 0.000017 | 0.0000017 | 0.00000017 |
| 1 | 0.15 | 0.03 | 0.0045 | 0.0006 | 0.000075 | 0.000009 |
| 2 | 0 | 0.14 | 0.0405 | 0.0081 | 0.00135 | 0.000203 |
| 3 | 0 | 0 | 0.1215 | 0.0486 | 0.01215 | 0.002430 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0.1094 | 0.05468 | 0.016403 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.09842 | 0.059049 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.088573 |

注意，如果不掷骰子，直接射击一次，则

$$P\{Y = 0\} = 0.1, \quad P\{Y = 1\} = 0.9$$

概率不一样！

## 二维离散随机变量的边际分布列

设 $(X,Y)$ 的联合分布列为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots)$$

则 r.v $X$ 的边际分布列是

$$P\{X=x_i\}=P(\{X=x_i\}\cap\Omega)$$

$$=P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})\Big)$$

$$=P\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X=x_i, Y=y_j\}\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,\ Y=y_j)=\sum^{\infty}p_{ij}$$

$$P\{X=x_i\}=\sum^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\quad (i=1,2,\cdots)$$

同理 $Y$ 的分布列是

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\quad(j=1,2,\cdots)$$

定义 称数列$\{p_{i\cdot}\}$为 $(X,Y)$ 关于 $X$ 的边际分布列

称数列$\{p_{\cdot j}\}$为 $(X,Y)$ 关于 $Y$ 的边际分布列

①它是一维r.v的分布列

②它可通过二维r.v的分布列计算得到

**例4** 在10件产品中，有2件一等品，7件二等品和 1件次品，从中抽取 3件，用 $X$和 $Y$分别表示抽到一等品和二等品的件数，求（$X$，$Y$）的联合分布列和边际分布列。

**解** $X=0,1,2,\qquad Y=0,1,2,3.$

$$p_{ij}=P(X=i,Y=j),$$

$$=\begin{cases}\dfrac{C_2^iC_7^jC_1^{3-i-j}}{C_{10}^3}, & 2\le i+j\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad i=0,1,2;\ j=0,1,2,3.$$

由此 $X, Y$ 的联合分布列和边际分布列如下表

| X\ Y | 0 | 1 | 2 | 3 | $p_{i\cdot}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{21}{120}$ | $\frac{35}{120}$ | $\frac{56}{120}$ |
| 1 | 0 | $\frac{14}{120}$ | $\frac{42}{120}$ | 0 | $\frac{56}{120}$ |
| 2 | $\frac{1}{120}$ | $\frac{7}{120}$ | 0 | 0 | $\frac{8}{120}$ |
| $p_{\cdot j}$ | $\frac{1}{120}$ | $\frac{21}{120}$ | $\frac{63}{120}$ | $\frac{35}{120}$ | 1 |

例5 设 r.v $X$ 从 1,2,3,4 中等可能取值，又设 r.v $Y$ 从 $1\sim X$ 中等可能取值. 求 $X, Y$ 的联合分布列及边际分布列.

解 $Y$ 取值为 1.2.3.4 ，而当 $X=i\ (i=1,2,3,4)$ 时，$Y$ 的取值为 $1\sim i$ .由乘法公式有

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}\cdot P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4}\ (1\le j\le i)$$

故 $X, Y$ 的联合分布列为

| Y\X | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 1/8 | 1/12 | 1/16 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/12 | 1/16 |
| 3 | 0 | 0 | 1/12 | 1/16 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/16 |

## 由$X,Y$的联合分布列

| Y\X | 1 | 2 | 3 | 4 | $p_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/4 | 1/8 | 1/12 | 1/16 | 25/48 |
| 2 | 0 | 1/8 | 1/12 | 1/16 | 13/48 |
| 3 | 0 | 0 | 1/12 | 1/16 | 7/48 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1/16 | 1/16 |
| $p_{i\cdot}$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1 |

## 由$X,Y$的边际分布列

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{i\cdot}$ | 1/4 | 1/4 | 1/4 | 1/4 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $p_{\cdot j}$ | 25/48 | 13/48 | 7/48 | 3/48 |

**练习** 设二维随机变量（$X$，$Y$）的分布函数为

$$F(x, y) = A\left(\frac{B}{2} + \arctan x\right)\left(C + \arctan y\right),$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

（1）试确定常数$A$，$B$，$C$ 的值；

（2）求 $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1)$；

（3）求边际分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$；

（4）求 $P(Y > 1)$ .

# 课后作业

P88： 习题4，

1， 2，