第3章 随机变量及其分布

3.1 随机变量的概念

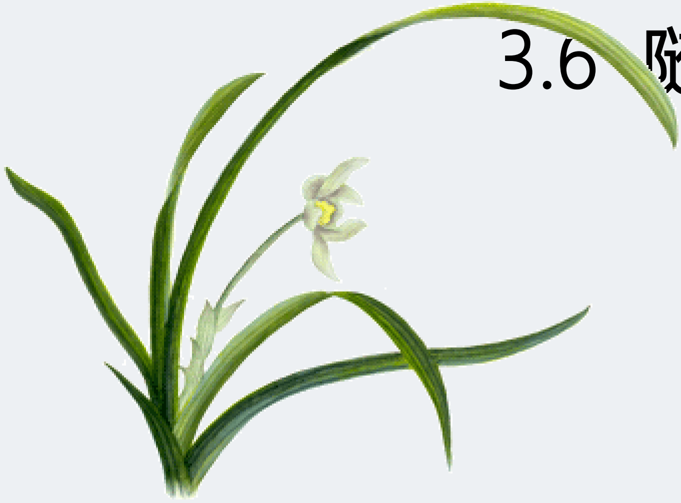
3.2 离散型随机变量

3.3 随机变量的分布函数

3.4 连续型随机变量

3.5 正态分布

3.6 随机变量函数的分布



复习

- 连续随机变量及其密度函数

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

- 密度函数的性质

$$(1)\ f(x)\ge 0,\ \ \forall x\in(-\infty,+\infty)$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

3.5 正态分布

- 正态分布
- 正态分布的概率计算

■ 正态分布 *Normal Distribution*

➢ 定义 **若连续型随机变量X的概率密度为**

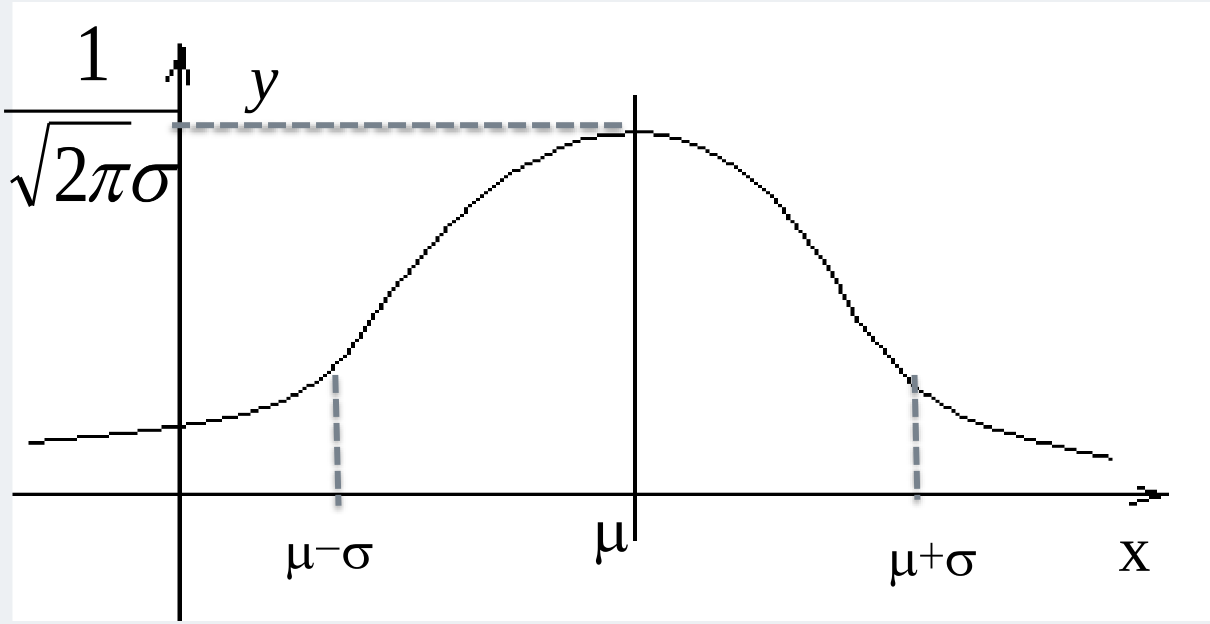
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,,\quad(\mu,\sigma>0)$$

则称X服从参数为 μ,σ^2 正态分布,记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

正态分布又称高斯Gauss分布，它可以描述很多不同的随机现象，例如人的身高、IQ得分的分布，气体分子的速度等等。

正态分布是概率论与数理统计的理论基础。



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad(-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0)$$

形态：钟形（中间高两边低）

➢ 正态分布密度函数的图形性质

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty<\mu<+\infty, \sigma>0)$$

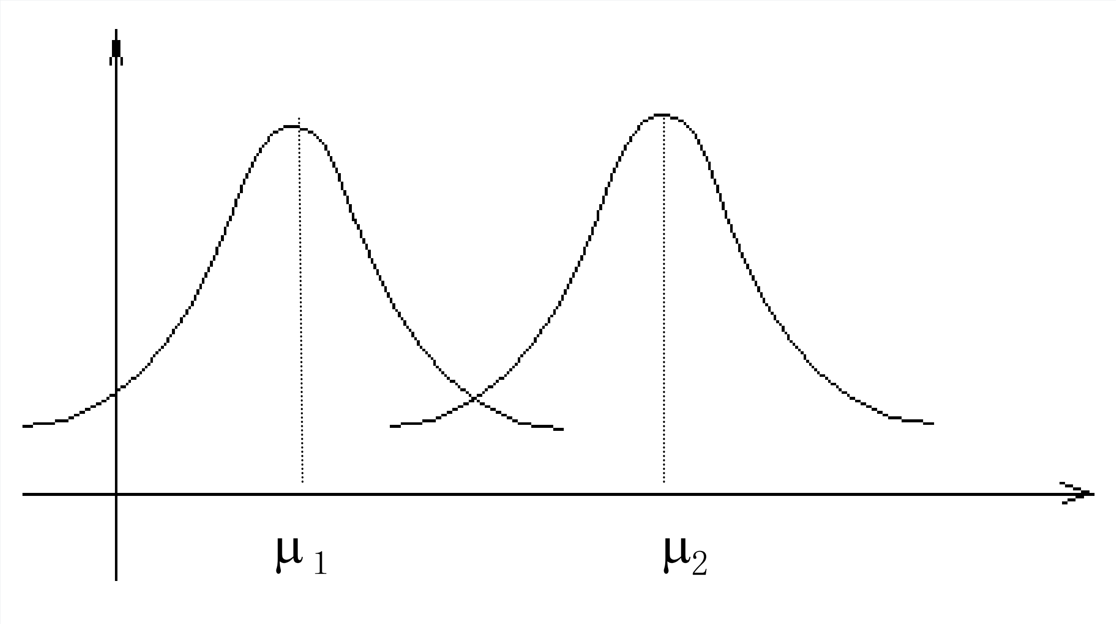
形态：钟形(中间高两边低)

- **最大值** $f_{\text{最大}}(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- **对称性** 关于 $x=\mu$ 对称
- **单调性** $(-\infty, \mu)$ 升，$(\mu, +\infty)$ 降
- **拐点** $\left(\mu\pm\sigma, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}}\right).$

➢ μ，σ 对密度曲线的影响

1. σ相同，μ不同

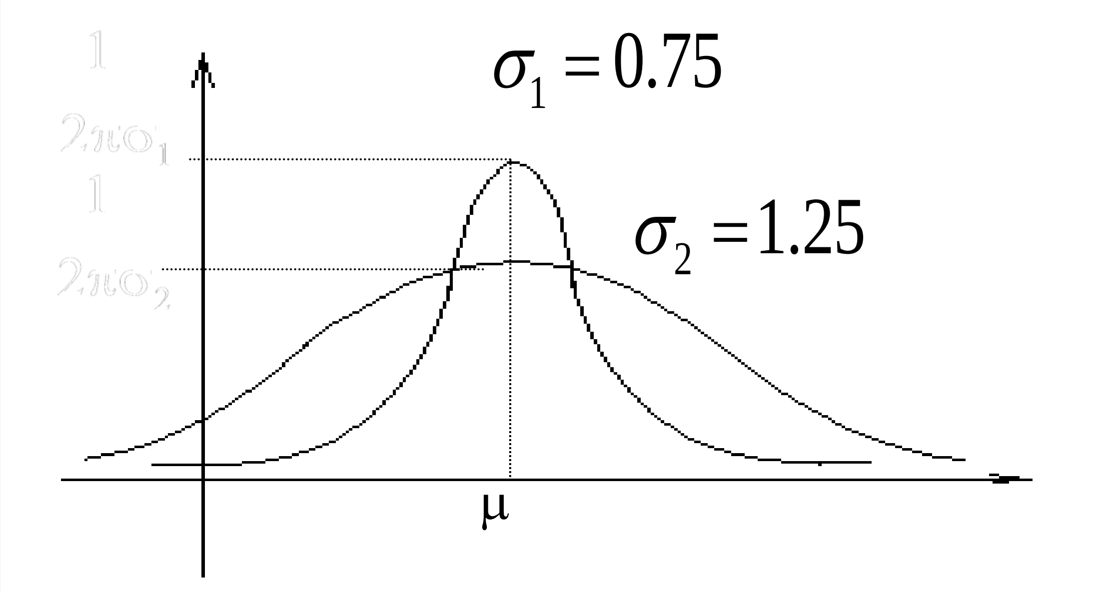
图形相似，位置平移



2. σ不同，μ相同

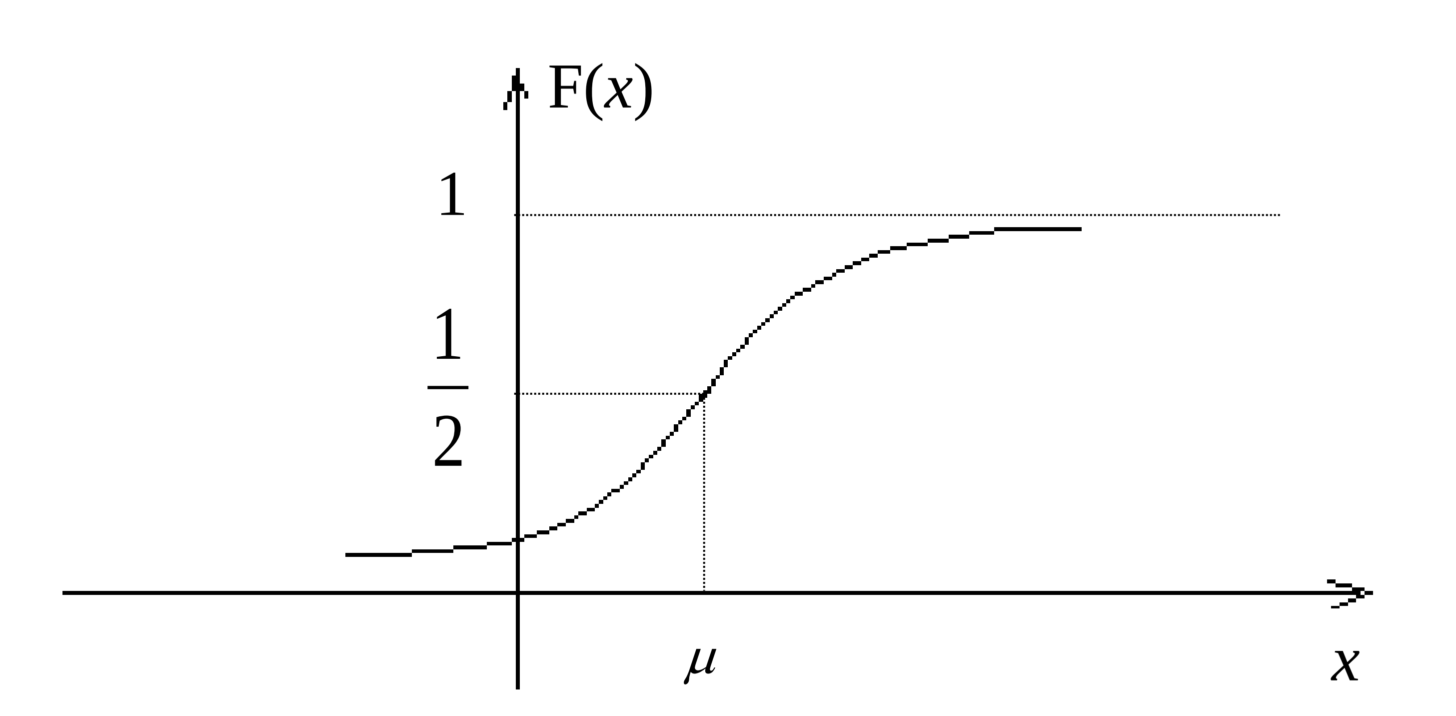
σ越小，图形越陡；

σ越大，图形越平缓



➢ 正态分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$



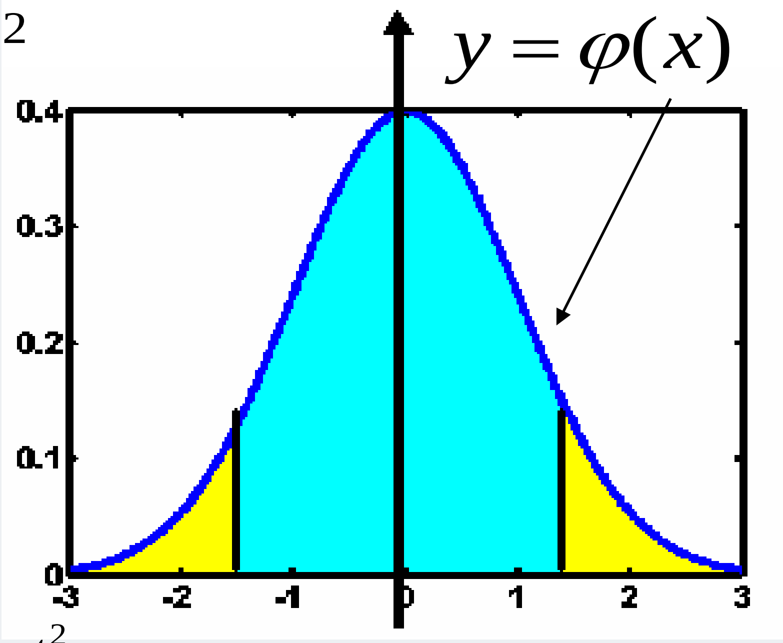
➢ 标准正态分布 Standard Normal distribution

$$\mu = 0,\ \sigma = 1$$

- **定义** $X \sim N(0,1)$分布称为标准正态分布.
- **密度函数**

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

偶函数



- **分布函数**

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi},$$

正态分布的概率计算

正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\mu, \sigma > 0)$$

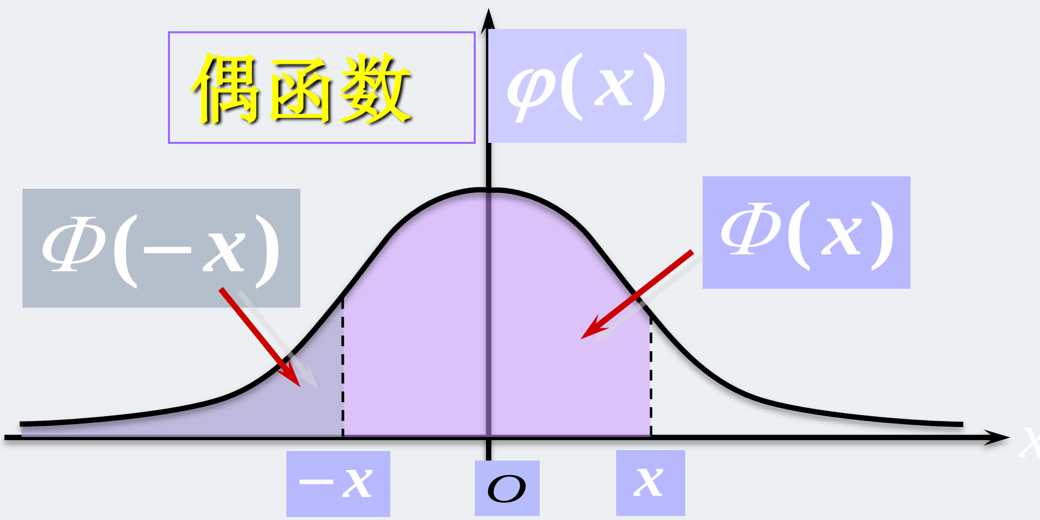
标准正态分布 $\mu = 0,\ \sigma = 1,\ X \sim N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

标准正态分布的概率计算

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

可查附表求 $\Phi(x)$ 值.

- **公式**

$X \sim N(0,1)$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$P(X\le b)=\Phi(b)$$

$$P(X\ge a)=1-\Phi(a)$$

$$P(a\le X\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

- **查表**

$$x\ge 0,\Phi(x)=P(X\le x)$$

$x<0$时，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

$$\Phi(x)\approx 1,(x>5)$$

主观题 10分

设置

查表求

(1) $\Phi(2) =$ ________;

(2) $\Phi(3)=$ ________;

(3) $\Phi(-1)=$ ________;

(4) $\Phi(4.5) =$ ________;

(5) $\Phi(x) = 0.90$, $x=$________.

(1) 0.9772.;

(2) 0.9987;

(3) 0.1587;

(4) 1;

(5) x=1.28.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例8 设 $X \sim N(0,1)$ 求下列概率

$P(1 \le X \le 2)$; $P(X \le -1)$; $P(|X| \le 1)$

解 $P(1 \le X \le 2) = \Phi(2) - \Phi(1)$

$= 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$

$P(X \le -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

$= 1 - 0.8413 = 0.1587$

$P(|X| \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6826$

➢ 正态分布的标准化

定理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $F(x)$ 为X的分布函数，则

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

证 $F(x)=P(X \le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$

$$\underline{\underline{u=\frac{t-\mu}{\sigma}}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

➢ 一般正态分布的概率计算公式

设 $$X \sim F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

则 $$P(X\le b)=F(b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X>a)=1-F(a)=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

查标准正态
分布表

例9 设$X \sim N$（1，4），求 P(0<X<1.6)

解 $\mu = 1,\ \sigma = 2$

$$P(0 < X < 1.6) = \Phi(\frac{1.6-1}{2}) - \Phi(\frac{0-1}{2})$$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$$

$$= 0.6179 - 1 + 0.6915 = 0.3094$$

$$\boxed{P(a < X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})}$$

例10 设从某地前往火车站，可以乘坐公共汽车，也可以乘坐地铁，所需时间分别为X，Y(单位：min)，若有70分钟可用，问选择哪种交通工具好？已知

$$X \sim N\left(50,10^2\right), Y \sim N\left(60,4^2\right)$$

解：比较选择哪种交通工具在允许时间内及时赶到的概率更大：

$$P(X \le 70), P(Y \le 70)$$

$$P(X \le 70) = \Phi(\frac{70-50}{10}) = \Phi(2) = 0.9772,$$

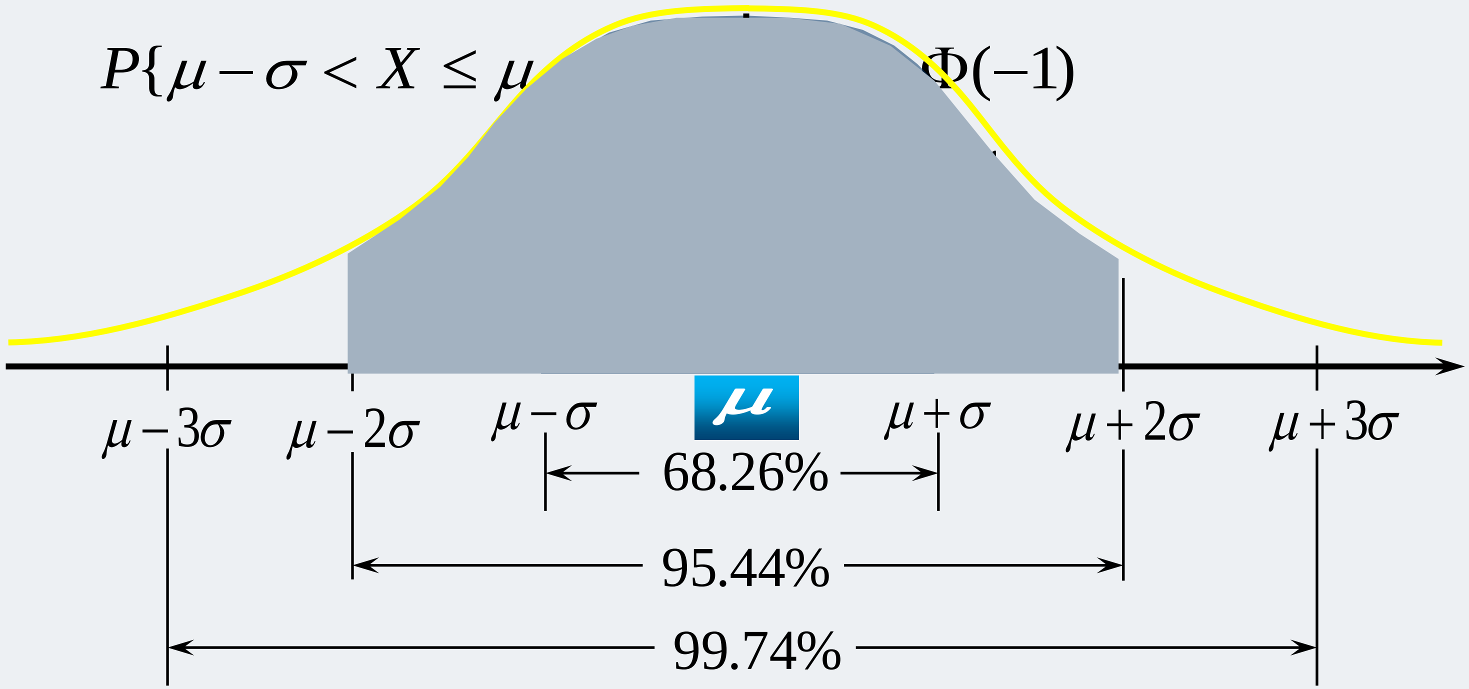
$$P(Y \le 70) = \Phi(\frac{70-60}{4}) = \Phi(2.5) = 0.9938,$$

由于后者概率更大，所以选择乘坐地铁较好。

例 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求下列概率值

$$P\{\mu-\sigma < X \le \mu+\sigma\} = 0.6826$$
$$P\{\mu-2\sigma < X \le \mu+2\sigma\} = 0.9544$$
$$P\{\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\} = 0.9974$$

$P\{\mu-\sigma < X \le \mu$ … $\Phi(-1)$



$$P\{\mu-2\sigma < X \le \mu+2\sigma\} = 2\Phi(2)-1 = 0.9544$$

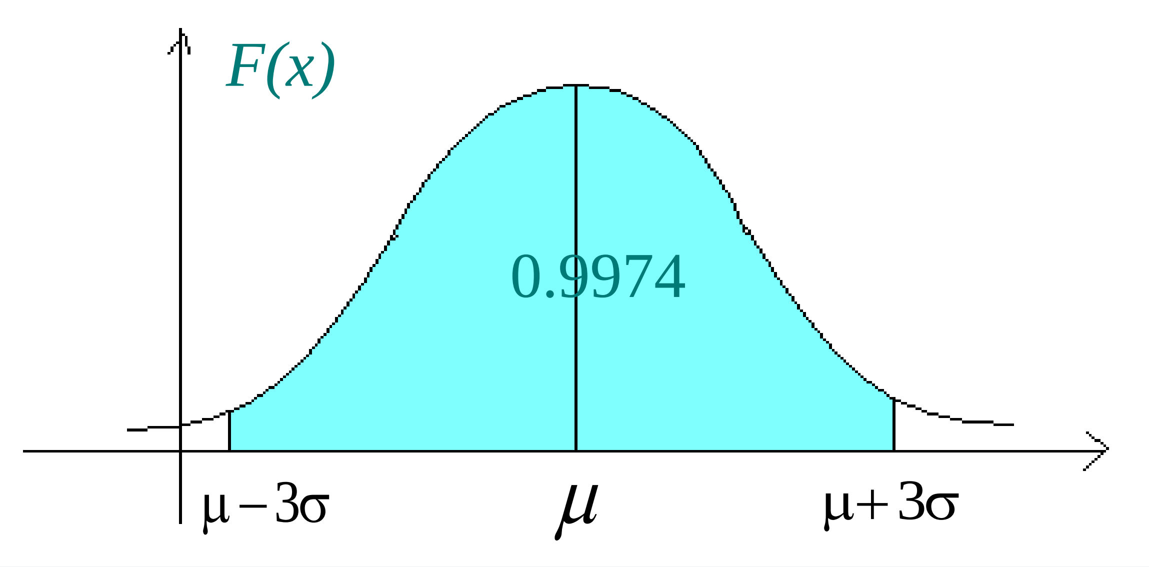
$$P\{\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\} = 2\Phi(3)-1 = 0.9974$$

◆ 3σ准则

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$P\{\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\} = \Phi(3)-\Phi(-3)$$
$$= 2\Phi(3)-1 = 0.9974$$

即 X的取值几乎都落入以μ为中心，以3σ为半径的区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内。



$\{|X-\mu|>3\sigma\}$

是小概率事件

称为3σ 准则

➢ 正态分布的实际应用

例11 某单位招聘155人，按考试成绩录用，共有526人报名，假设报名者的考试成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

已知**90**分以上的**12**人，**60**分以下的**83**人,若从高分到低分依次录取，某人成绩为**78**分，问此人能否被录取？

分析 首先求出 μ 和 σ

然后根据录取率或者分数线确定能否录取.

解 **1**）由成绩**X**服从 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

$$P\{X > 90\} = \frac{12}{526} \approx 0.0228, \quad P\{X < 60\} = \frac{83}{526} \approx 0.1588$$

可得

$$P\{X \le 90\} = \Phi\left(\frac{90-\mu}{\sigma}\right) \approx 1-0.0228 = 0.9772$$

查表得 $\dfrac{90-\mu}{\sigma} \approx 2.0,$

$$P\{X < 60\} = \Phi\left(\frac{60-\mu}{\sigma}\right) \approx 0.1588$$

得 $\Phi\left(\dfrac{\mu-60}{\sigma}\right) \approx 1-0.1588 = 0.8412$

查表得 $\dfrac{\mu-60}{\sigma} \approx 1.0$

由 $\dfrac{90-\mu}{\sigma} \approx 2.0,\quad \dfrac{\mu-60}{\sigma} \approx 1.0$ 解得 $\mu = 70$ ， $\sigma = 10$

故 $X \sim N\left(70, 10^2\right)$

2）录取率为 $\dfrac{155}{526} \approx 0.2947$

设录取的最低分为 x ,则应有 $P\left\{X \geq x\right\} = 0.2947$

$$P\left\{X < x\right\} \approx 1 - 0.2947 = 0.7053$$

得 $\Phi\left(\dfrac{x-70}{10}\right) = 0.7053$

查表得 $\dfrac{x-70}{10} \approx 0.54,\quad x = 75.4$

某人**78**分，可被录取。

主观题 10分

设置

某单位计划招聘150人，按考试成绩录用，共有526人报考，假设报名者的考试成绩

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

已知90分以上的12人，60分以下的83人,若从高分到低分依次录取，某人成绩为75分，问此人能否被录取?

作答

3.6 随机变量函数的分布

- 离散随机变量函数的分布
- 连续随机变量函数的分布

密度函数　　随机变量　　分布函数

$f_X(x)$ —— X —— $F_X(x)$

$f_Y(y)$ —— $Y = g(X)$ —— $F_Y(y)$

随机变量的函数

□ 离散随机变量函数的分布

例1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.4	0.1

求$Y=2X^2+1$的分布律.

解 由题设可得如下表格

X	-1	0	1	2
$Y=2X^2+1$	3	1	3	9
概率	0.2	0.3	0.4	0.1

所以，$Y=2X^2+1$ 的分布律为

Y	1	3	9
p_k	0.3	0.6	0.1

注意：将y=3的两项合并!

一般的，若X为离散随机变量, 其分布律为

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	p_3	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots$

则 随机变量X的函数 $Y= g(X)$ 的分布律为

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$\cdots\cdots$	$g(x_n)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	p_3	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots$

如果$g(x_i)$与$g(x_j)$相同，此时将两项合并，对应概率相加.

□ 连续随机变量函数的分布

首先，如果某随机变量X的分布函数 $F(x)$ 连续，并且除有限个点外，导函数 $F'(x)$ 存在且连续，令

$$f(x)=\begin{cases} F'(x), F'(x) & \text{存在的点，} \\ 0, \quad F'(x) & \text{不存在的点.} \end{cases}$$

则 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ ，即随机变量X是连续型的，且其概率密度 $f(x)$由上式确定。

由此，可以得到求连续随机变量函数的分布的方法——分布函数法.

例2 设随机变量*X*的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8},0<x<4\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

求随机变量 ***Y*=2*X*+8** 的概率密度。

解（1）先求***Y*=2*X*+8**的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(2X+8\le y\right)$$

$$=P(X\le\frac{y-8}{2})=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}}f(x)dx=F(\frac{y-8}{2})$$

（2）再求$Y=2X+8$的概率密度

$$F'_Y(y) = \left[f\left(\frac{y-8}{2}\right) \left(\frac{y-8}{2}\right)' \right]$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{y-8}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{2}, & 0 < \dfrac{y-8}{2} < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

一般方法

设X为一个连续随机变量，其概率密度函数为$f(x)$，$y=g(x)$为一个连续函数，求随机变量$Y=g(X)$的概率密度函数.

(1) 求Y的分布函数 $F_Y(y)$

$$F_Y(y) \xlongequal{\text{根据分布函数的定义}} P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$= P(X \in \{x \mid g(x) \le y\})$$

(2) 对$F_Y(y)$ 求导，得到 $f_Y(y)$

$$f_Y(y) = [F_Y(y)]'$$

例3 设随机变量X服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

求 $Y=aX+b$ ($a\neq 0$)的概率密度。

解 先求分布函数 $F_Y(y)$。

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(aX+b\le y)$$

当 $a>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(X\le \frac{y-b}{a})=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

所以，

$$f_Y(y)=f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

当 $a<0$ 时，

$$F_Y(y)=P(X\geq\frac{y-b}{a})=1-P(X<\frac{y-b}{a})$$

$$=1-F_X(\frac{y-b}{a})$$

$$f_Y(y)=-f(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\cdot e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$$

所以， $Y\sim N\left(a\mu+b,(|a|\sigma)^2\right)$

正态r. v的线性函数仍是正态r. v

定理1 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$Y = aX + b(a \neq 0)$，则

$$Y \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$$

正态分布的线性函数仍服从正态分布

推论

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

正态分布的标准化

*定理2

设连续随机变量 X 和随机变量 $Y=g(X)$ 的密度函数分别为 $f_X(x)$ $f_Y(y)$, 若 $g(x)$ 为严格单调可微函数，则

$$f_Y(y) = f_X[(G(y))]\left|G'(y)\right|$$

其中 $x = G(y)$ 为 $y = g(x)$ 的反函数.

对于某些特殊的问题，从头推导通常比辨识符号并利用这个命题来得更容易些.

例5 设随机变量服从[90，110]上的均匀分布，求Y=0.1*X*+10的密度函数。

解 *X*的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 90\le x\le 110\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$G(y)=\frac{y-10}{0.1}$$

Y=0.1*X*+10的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X[(G(y)]\left|G'(y)\right|$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{0.1}f_X(\frac{y-10}{0.1})=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 19\le y\le 21\\ 0, & others\end{cases}.$$

即 *Y* 服从[19,21]上的均匀分布U(19,21).

定理3 设$X \sim N(0，1)$，则 $Y = X^2$的概率密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$\alpha=\lambda=\frac{1}{2}$
的伽马分布

证 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$=\begin{cases}P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}), y\ge 0\\ 0, \quad y<0\end{cases}=\begin{cases}2\Phi(\sqrt{y})-1, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

称 Y 服从自由度为1的 χ^2 分布,记作 $Y\sim\chi^2(1)$.

结论：若 $X\sim N(0,1)$,则 $X^2\sim\chi^2(1)$

例6 设一质点*M*随机地落在以原点为圆心，以*R*为半径的圆周上，并且对弧长是均匀分布的，求质点*M*的横坐标*X*的概率密度(如图）。

解：设*x*轴与*OM*的夹角为*Z*，则由题意，$Z \sim U(-\pi, \pi)$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, z \in (-\pi, \pi) \\ 0, \qquad others. \end{cases}$$

$$X = R\cos Z, f_X(x) = ?$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(R\cos Z \le x) = P(\cos Z \le \frac{x}{R})$$

$$x \le -R, F_X(x) = 0,\ f_X(x) = 0,$$

$$x \ge R, F_X(x) = 1,\ f_X(x) = 0,$$

$$x \in (-R, R), F_X(x) = P(\cos Z \le \frac{x}{R})$$

$$= P(-\pi \le Z \le -arc\cos\frac{x}{R}) + P(arc\cos\frac{x}{R} \le Z \le \pi)$$

$$= F(-arc\cos\frac{x}{R}) + 1 - F(arc\cos\frac{x}{R})$$

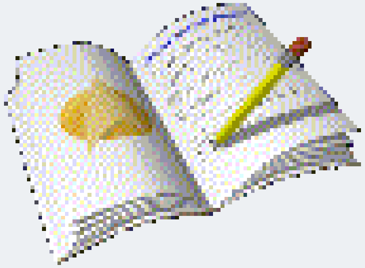
$$f_X(x) = F_X^{'}(x)$$

$$= f_X(-arc\cos\frac{x}{R})\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}}\frac{1}{R} + f_X(arc\cos\frac{x}{R})\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{R})^2}}\frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\therefore\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2 - x^2}}, & x \in (-R, R) \\ 0, & , others. \end{cases}$$

课后作业



习题3

20, 21, 22, 25, 27, 28, 30。