第4章 多维随机变量及其分布

4.1 二维随机变量及其联合分布函数

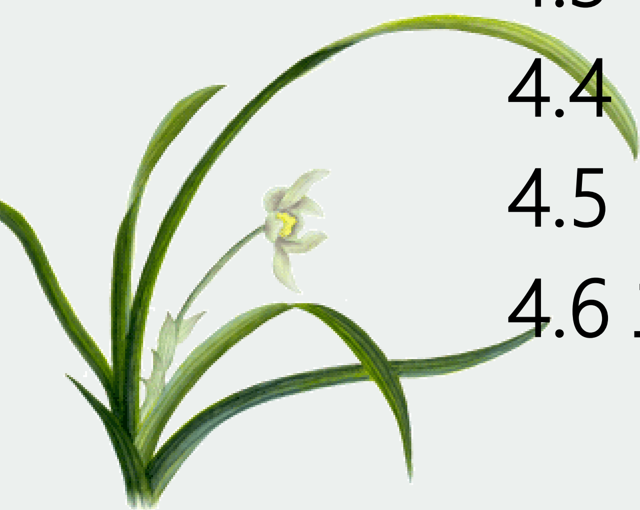
4.2 二维离散型随机变量

4.3 二维连续型随机变量

4.4 随机变量的独立性

4.5 条件分布

4.6 二维随机变量函数的分布



§4.3 二维连续随机变量

- 二维连续随机变量的联合密度
- 二维连续随机变量的边际密度
- 二维均匀分布
- 二维正态分布

□ 二维连续随机变量

定义 设 r.v (X, Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

若存在非负可积函数 $f(x,y) \ge 0$，使得

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv \quad (\forall\ (x,y) \in R^2)$$

则称 (X,Y) 为二维连续型r.v, $f(x,y)$ 称为联合密度函数(密度函数、密度), 或称为 X,Y 的联合概率密度.

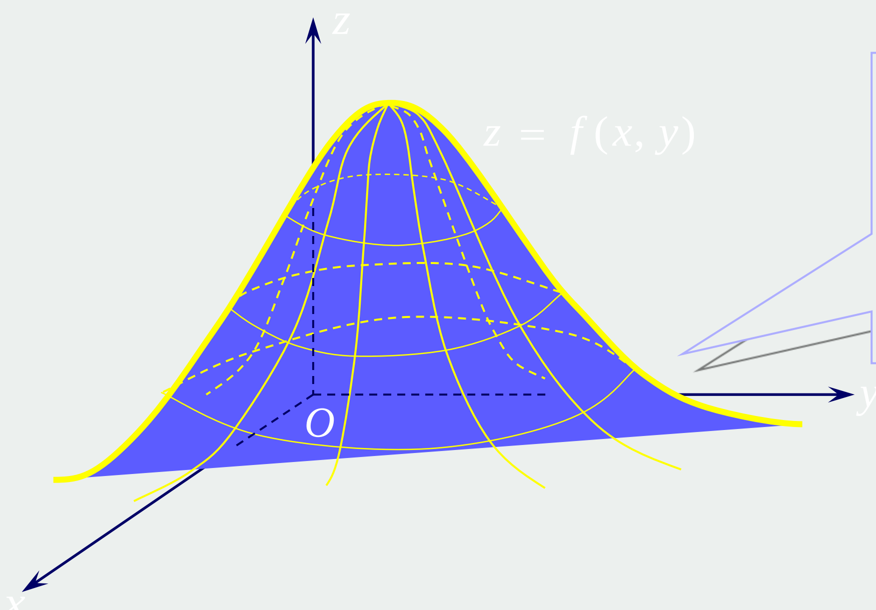
密度函数的基本性质

① $f(x,y) \geq 0 \quad (\forall (x,y) \in R^2)$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv = 1$

密度函数的本质特征

几何意义



曲面 $z=f(x,y)$与平面 xOy围成的“山丘”的体积为1

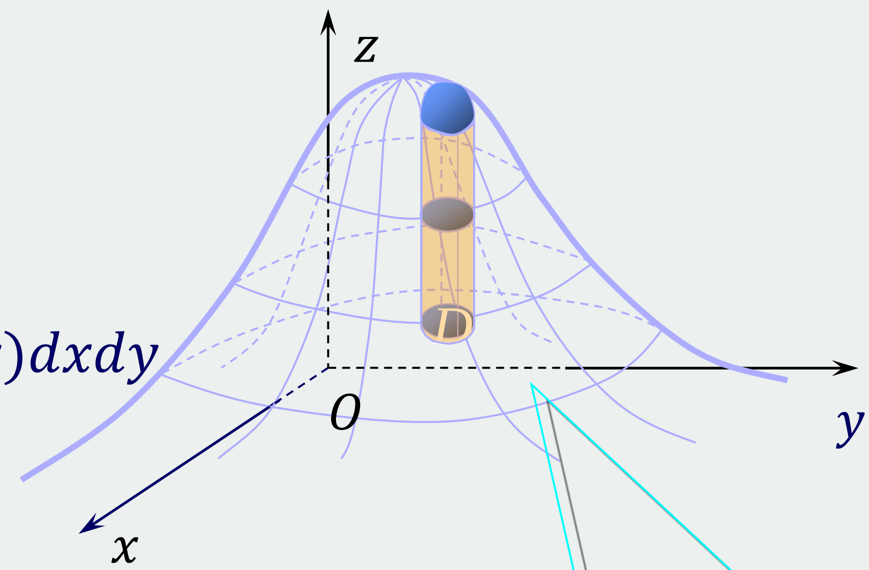
① $f(x,y) \geq 0 \quad (\forall (x,y) \in R^2)$

② $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1$$

③ $\forall D \subset R^2$

由逐段光滑曲线围成的平面区域

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$



$P\{(X,Y) \in D\} =$ 曲顶柱体体积

④ 在 $f(x,y)$ 的连续点处，有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

由性质(4)，在 $f(x,y)$ 的连续点处，有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y\to 0^+}}\frac{P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}}{\Delta x\Delta y}$$

故当 $\Delta x\Delta y$ 充分小时，有

面密度

$$P\{x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y\}\approx f(x,y)\Delta x\Delta y$$

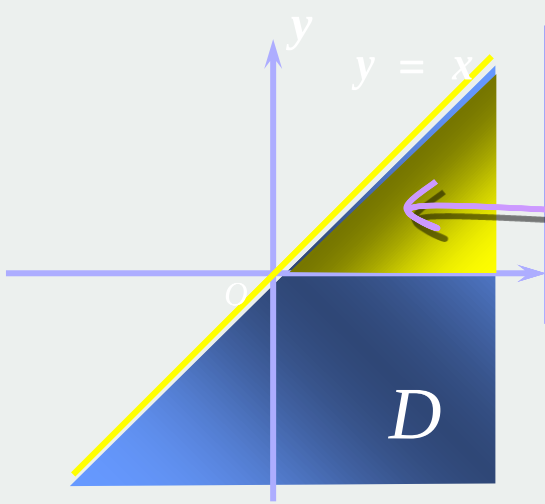
例1 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{12}{7}(x^2+xy), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

计算概率 $P\{X>Y\}$

解 记 $D=\{(x,y)|x>y, x,y\in(-\infty,\infty)\}$

$$P\{X>Y\}=P\{(X,Y)\in D\}=\iint f(x,y)dxdy$$



$$=\iint_{D\cap\{0\le x\le 1,0\le y\le 1\}}\frac{12}{7}(x^2+xy)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{12}{7}(x^2+xy)dy=\frac{9}{14}$$

例2 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, x>0, y>0 \\ 0\ , \quad\quad \text{其它} \end{cases}$$

① 确定常数 k；

② 求分布函数 $F(x,y)$；

③ 计算概率 $P\{Y \le X\}$ 和 $P\{X+Y \le 1\}$ 。

解 ①

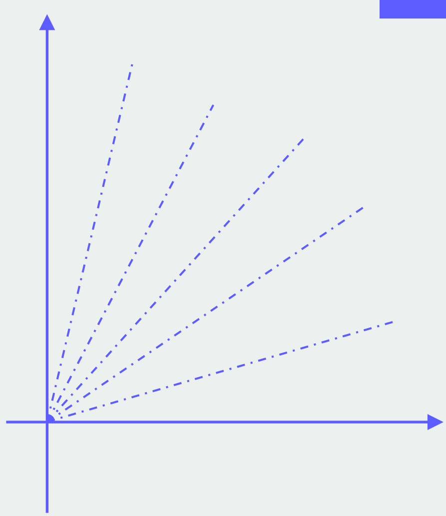
$$\because\ 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dudv$$

$$=k\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} e^{-(2x+y)}dxdy$$

$$=k\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-y}dy$$

$$=\frac{k}{2}$$

$$\therefore\ k=2$$



例2 设随机变量（X，Y ）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0\\ 0\ , \quad \text{其它}\end{cases}$$

② 求分布函数 $F(x,y)$；

③ 计算概率 $P\{Y\le X\}$ 和 $P\{X+Y\le 1\}$ 。

解 ②

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y 2e^{-(2u+v)}dudv, x>0, y>0\\ 0\ , \quad \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\int_0^x e^{-2u}du\cdot\int_0^y e^{-v}dv, x>0, y>0\\ 0\ , \quad \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), x>0, y>0\\ 0\ , \quad \text{其它}\end{cases}$$

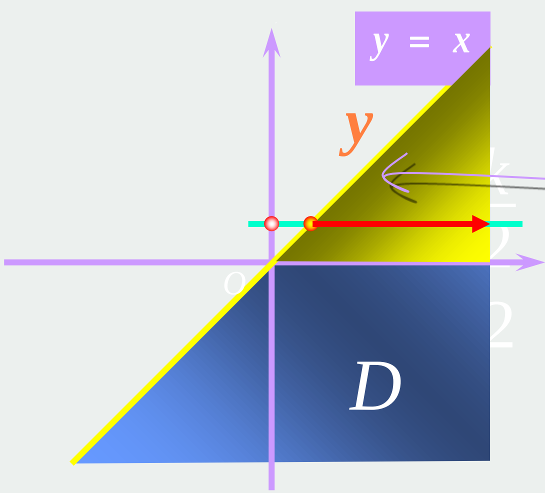
例2 设随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

③ 计算概率 $P\{Y\le X\}$ 和 $P\{X+Y\le 1\}$

解 ③ 记 $D=\{(x,y)\,|\,y\le x, x, y\in(-\infty,\infty)\}$

$$\therefore\ P\{Y\le X\}=P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$



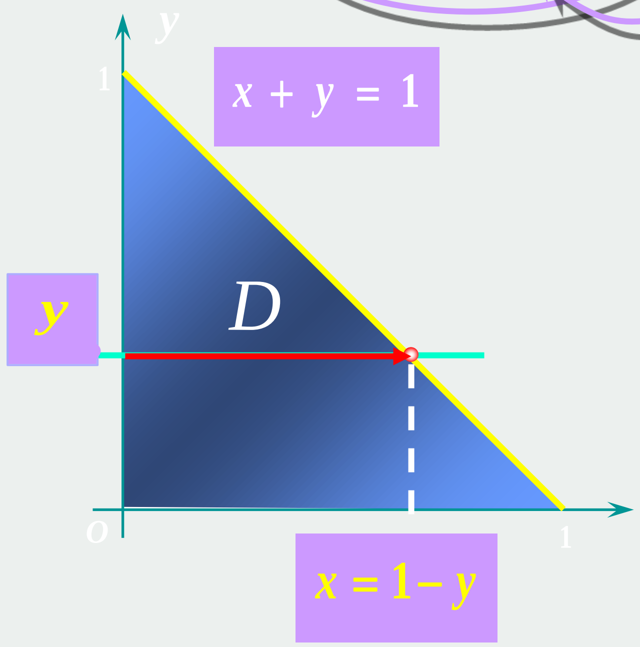
$$=\iint\limits_{D\cap\{x>0,\,y>0\}} 2e^{-(2x+y)}\,dxdy$$

$$=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{+\infty}2e^{-(2x+y)}\,dx=\frac{1}{3}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, x>0, y>0\\ 0\ , \qquad \text{其它}\end{cases}$$

解③ $D=\{\,(x,y)|x+y\le 1, x,y\in(-\infty,\infty)\,\}$

$$P\{X+Y\le 1\,\}=\iint_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy$$



$$=\iint_{\substack{x+y\le 1\\ x>0,y>0}} 2e^{-(2x+y)}dx\mathrm{dy}$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} 2e^{-(2x+y)}dx$$

$$=1-2e^{-1}+e^{-2}$$

二维连续随机变量的边际分布密度

设 (X,Y) 的分布函数和密度函数分别为 $F(x,y), f(x,y)$

则 r.v X 的分布函数为

$$F_X(x) = P\{X \le x\} \quad = P\{X \le x, Y < +\infty\}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)dy \right) du$$

故 r.v X 的密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

同理r.vY的分布函数为

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)dx \right) dv$$

$r.vY$的密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

定义 称 $f_X(x)$ 为 (X,Y) 关于 X 的**边际密度(函数)**

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad (-\infty<x<+\infty)$$

称 $f_Y(y)$ 为 (X,Y) 关于 Y 的**边际密度(函数)**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad (-\infty<y<+\infty)$$

例3 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y}, x>0, y>x\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

求(X,Y)关于 X 和 Y 的边际概率密度.

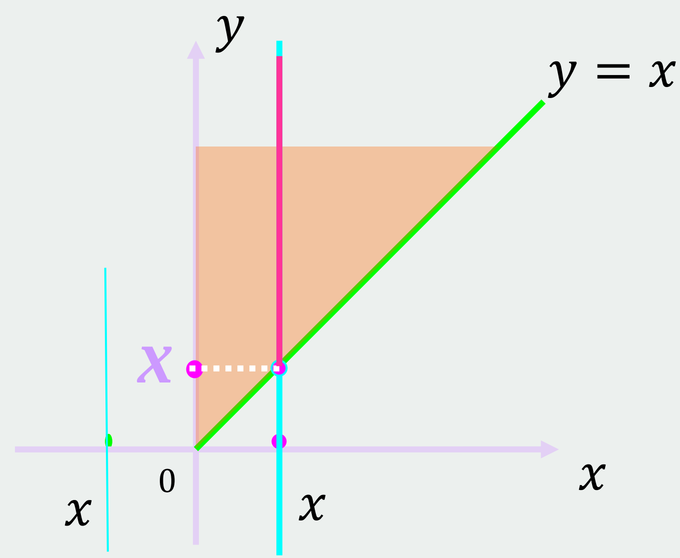
$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y}, x>0, y>x\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

解 $\quad f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ 　**暂时固定x**

当 $x\le 0$, 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$

当 $x>0$, 时, $f_X(x)=\int_{x}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}dy$

$$=-\lambda e^{-\lambda y}\Big|_{x}^{+\infty}=\lambda e^{-\lambda x}$$



故 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$ 　　$X\sim E(\lambda)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y}, x>0, y>x\\ 0, \quad \text{其它}\end{cases}$$

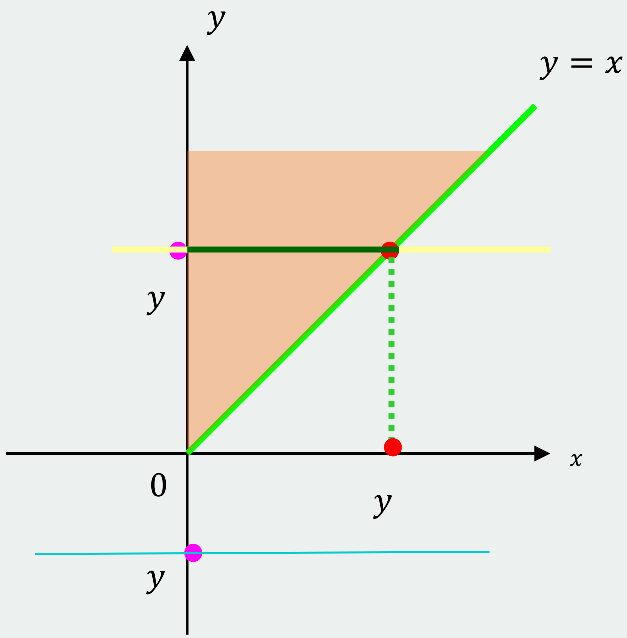
解 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

暂时固定y

当 $y \le 0$ **时,** $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$

当 $y > 0$ **时,** $f_Y(y)=\int_{0}^{y} \lambda^2 e^{-\lambda y}dx$

$$=\lambda^2 y e^{-\lambda y}$$



故 $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda^2 y e^{-\lambda y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$ $\qquad Y\sim\Gamma(2,\lambda)$

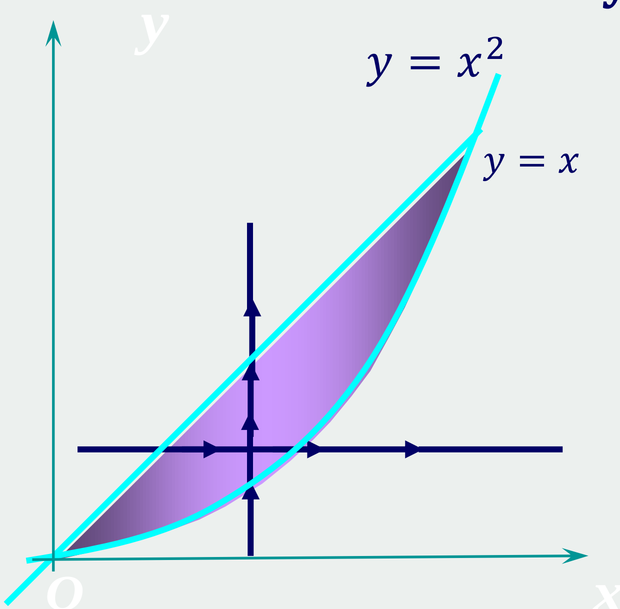
例4 设 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, x^2\le y\le x\\ 0,\ 其它\end{cases}$$

求边际密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 (如图) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6dy\ , 0\le x\le 1\\ 0,\qquad 其它\end{cases}$

$$=\begin{cases}6x(1-x), 0\le x\le 1\\ 0,\qquad 其它\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}} 6dx=6(\sqrt{y}-y)\ , \quad 0\le y\le 1\\ 0,\qquad 其它\end{cases}$$

二维均匀分布

由逐段光滑曲线围成的平面区域

设G 是平面上的有界区域,其面积为 A. 若 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, (x,y)\in G\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

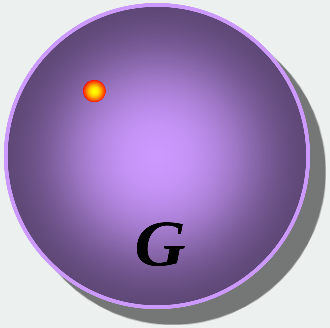
$\forall D\subset G$

$$P\{(X,Y)\in D\}=\frac{S(D)}{S(G)}$$

则称 (X,Y) 服从区域 G上的均匀分布.

若随机点 (X,Y) 在平面区域 G 上"等可能"取值,则 (X,Y) 服从G 上的均匀分布.

例如 设雷达的圆形屏幕半径为1, 当用雷达捕捉目标时, 可认为目标出现点 (X,Y)在屏幕上服从圆域 $G: x^2+y^2\le 1$ 上的均匀分布.



例5 设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

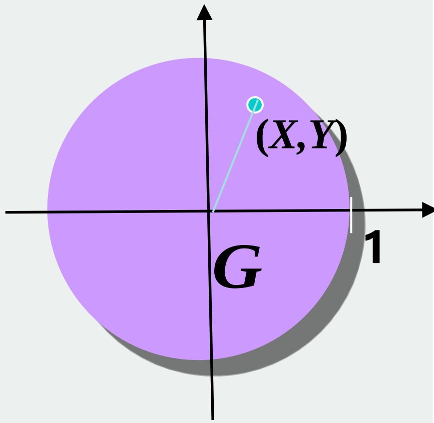
① **求边际密度** $f_X(x), f_Y(y)$

② 计算随机点到原点的距离R 的分布

解 ①

$$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy, |x|\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, |x|\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$



$$\boxed{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, |y|\le 1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

由此看出，X，Y的分布都不是均匀分布.

②

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

$$F_R(r)=P(R\le r)=F(X^2+Y^2\le r^2)=\begin{cases}0, & r\le 0\\ \dfrac{\pi r^2}{\pi}=r^2, & 0<r\le 1\\ 1, & r>1\end{cases}$$

$$f_R(r)=F_R'(r)=2r, \quad \boxed{0\le r\le 1}$$

二维正态分布

若 X,Y 的联合密度为

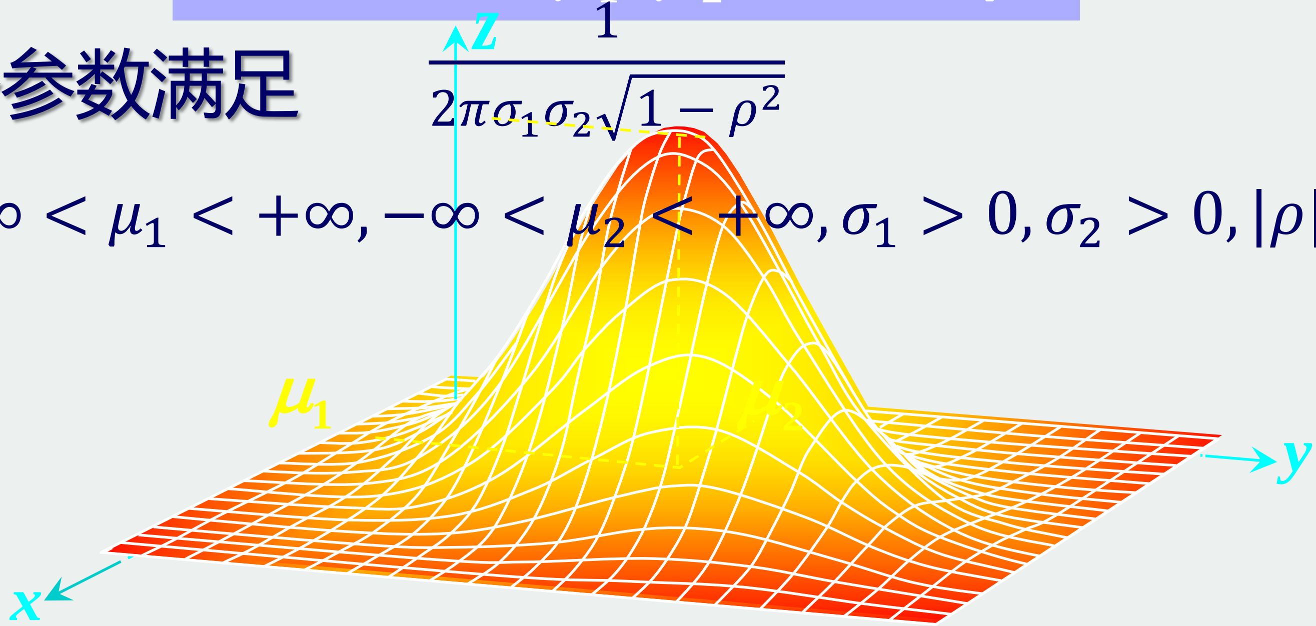
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的**二维正态分布**,记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

其中各参数满足

$$-\infty<\mu_1<+\infty,-\infty<\mu_2<+\infty,\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$$



定理 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

证

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad \left(\text{令}t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$\therefore\ X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

同理可证 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

问

由(X,Y)的边际分布能否确定联合分布？

(X,Y)的两个边际分布均不含参数 ρ，可见

边际分布不能确定联合分布！

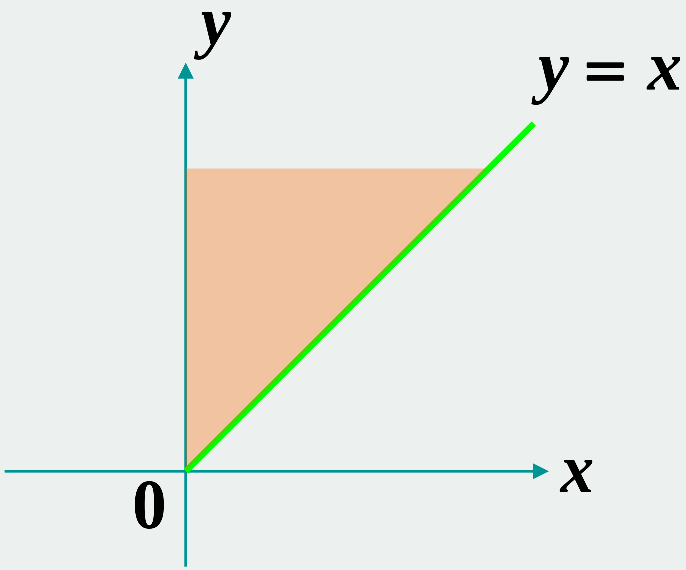
练一练

设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, others \end{cases}$$

求(X,Y)关于 X 和 Y 的边际概率密度.

参见 例3



练一练 设 (X,Y) 的概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, x>0, y>x \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$$

求(X,Y)关于 X 和 Y 的边际概率密度.

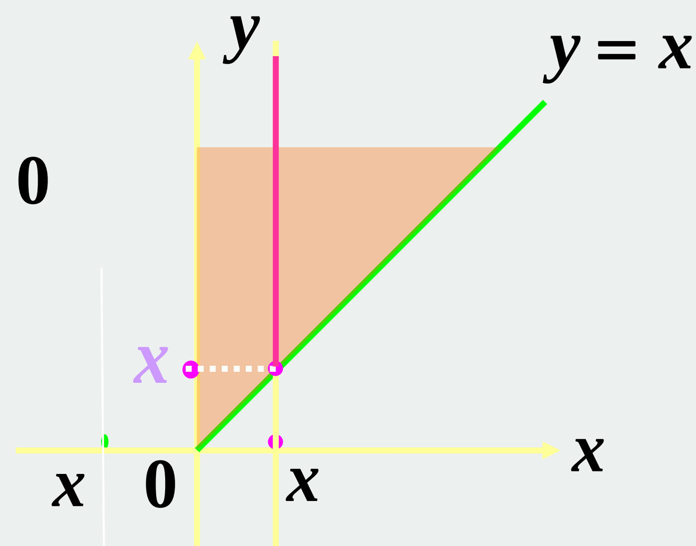
暂时固定

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

当 $x\le 0$ 时, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$

当 $x>0$ 时, $f_X(x)=\int_{x}^{+\infty} e^{-y}dy$

$$=-e^{-y}\Big|_x^{+\infty}=e^{-x}$$



故 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

暂时固定

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

当 $y \le 0$ 时,

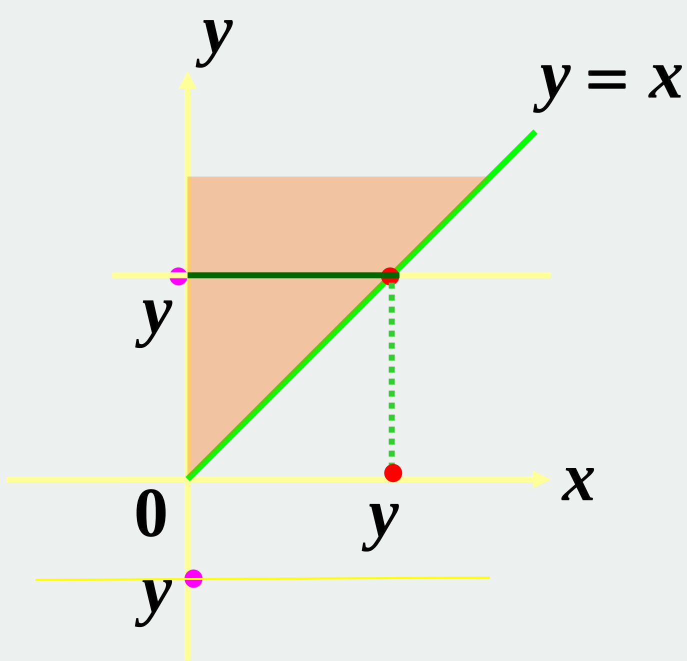
$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx=0$$

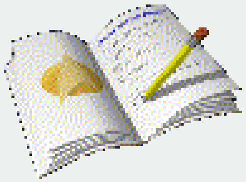
当 $y>0$ 时,

$$f_Y(y)=\int_0^y e^{-y}dx$$

$$=ye^{-y}$$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$





课后作业

P88：3，5，6，7。