# 第1章  随机事件与概率

1.1　随机事件

1.2　事件的关系与运算

1.3　随机事件的概率

# 1.3　随机事件的概率

- 古典概率
- 几何概率
- 统计概率
- 概率的公理化定义

# 1.3 随机事件的概率

研究随机现象，不仅要知道可能出现哪些事件，还要知道各事件出现的可能性大小。

定义 随机事件*A*发生可能性大小的度量(数值)，称为事件*A*发生的概率，记作*P*(*A*).

存在性,客观性

对于一个给定的随机事件，它发生的可能性大小的度量——概率，究竟是多大呢？

历史上概率的三次定义

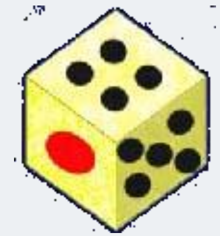
① 古典定义 —— 概率的最初定义

② 统计定义 —— 基于频率的定义

③ 公理化定义 —— 1930年后由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫给出

## ■ 古典概率

1. 古典概率模型



◆ 样本空间的**有限性**

试验的样本点只有有限多个，即样本空间 Ω是个有限集

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$$

◆ 基本事件发生的**等可能性**

每次试验中，每一种可能结果的发生的可能性相同，即

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=\frac{1}{n}$$

其中 $A_i=\{\omega_i\}$， $i=1,2,\cdots,n$ .

## 2. 古典概型的概率

**定义** 设试验 $E$ 共有 $n$ 个基本事件，且这些基本事件的发生是**等可能的**，若事件 $A$ 由其中的 $m$ 个基本事件组成，则

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

- 确定试验的基本事件总数 $n$;
- 确定事件 $A$ 包含的基本事件数 $m$;
- 计算事件 $A$ 的概率 $P(A)$.

## 3. 古典概率的性质

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}}$$

（1） $0 \le P(A) \le 1$

（2） $P(\Omega)=1, P(\phi)=0$

（3）若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$互不相容，则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

# 4. 古典概率的计算

例1：抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数，求事件“出现的点数是不小于3 的偶数”的概率.

- 试验

  抛掷一颗匀质骰子,观察出现的点数

- 样本空间

  $\Omega=\{1，2，3，4，5，6\}$ ，$n=6$

- 事件A

  $A$=“出现的点数是不小于3的偶数”=$\{4，6\}$，$m=2$

- 事件A的概率 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

为了计算更复杂形式的概率，复习乘法原理、排列组合等计算古典概率的重要方法.

## 复习

**加法原理：** 设完成一件事可有两种途径，第一种途径有$n_1$种方法，第二种途径有$n_2$种方法，则完成这件事共有$n_1+n_2$种方法。

**乘法原理：** 设完成一件事需分两步，第一步有$n_1$种方法，第二步有$n_2$种方法，则完成这件事共有$n_1n_2$种方法。

## 加法原理

做一件事共有 $n$ 类方法

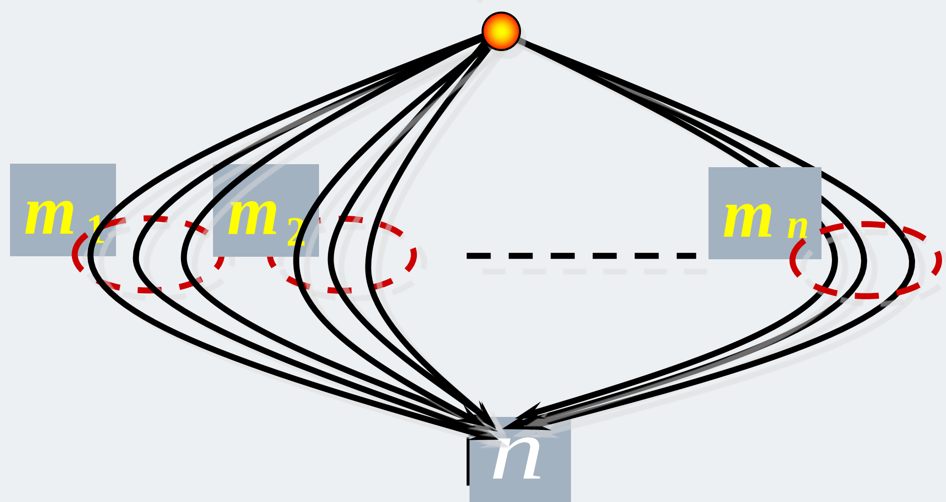
第一类方法有 $m_1$ 种方法

第二类方法有 $m_2$ 种方法

…

…

第 $n$ 类方法有 $m_n$ 种方法

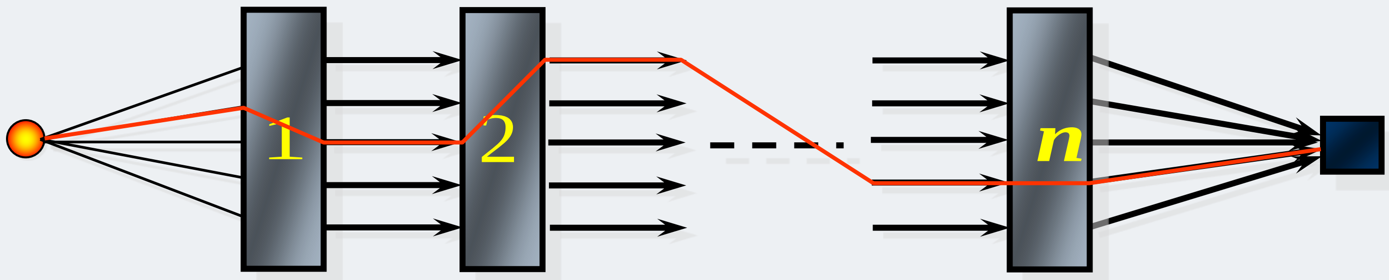



完成这件事的方法总数

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

## 乘法原理

做一件事共有 $n$ 个步骤
- 第一步有 $m_1$ 种方法
- 第二步有 $m_2$ 种方法
- ……
- 第 $n$ 步有 $m_n$ 种方法




完成这件事的方法总数

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$$

# 排列与组合

**选排列** 从 $n$ 个不同的元素中，任取 $k\ (\le n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列，全部排列个数为

$$P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**全排列** 当 $k = n$ 时，称为全排列，计算公式为

$$P_n^n = n!$$

排列数与次序有关

**组　合** 从 $n$ 个不同的元素中，任取 $k\ (\le n)$ 个元素并成一组，全部组合数为

组合数与次序无关

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{P_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

# 随机抽样：有放回抽样与无放回抽样

例2：设在10 件产品中，有2件次品，8件正品．求 A=“第一次抽取正品，第二次抽取次品”的概率.

- 有放回抽样：第一次抽取后，产品放回去。

$$n=10\times 10 \qquad m_A=8\times 2 \qquad P(A)=\frac{8\times 2}{10\times 10}=0.16$$

- 无放回抽样：第一次抽取后，产品不放回去。

$$n=10\times 9 \qquad m_A=8\times 2 \qquad P(A)=\frac{8\times 2}{10\times 9}=0.1778$$

例3：设在100 件产品中，有 4 件次品，其余均为正品.

- 求次品率. $A$=“任取一件产品为次品”

$$n = 100 \qquad m_A = 4 \qquad P(A) = \frac{4}{100} = 0.04$$

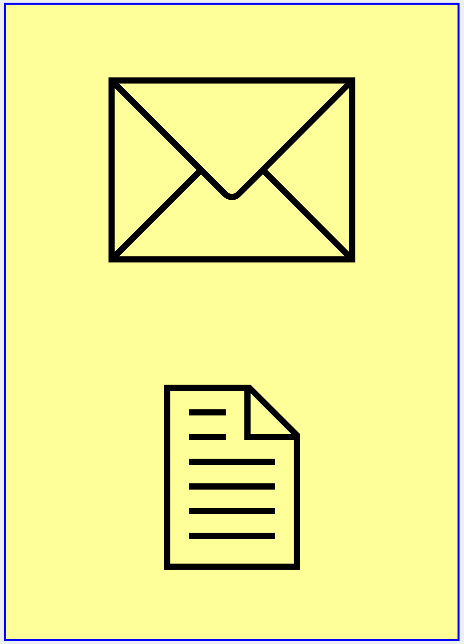
- 求 $B$=“任取3件，全是正品”的概率

$$n = C_{100}^{3} \qquad m_B = C_{96}^{3} \qquad P(B) = \frac{C_{96}^{3}}{C_{100}^{3}}$$

- 求 C=“任取3件，刚好两件正品” 的概率

$$n = C_{100}^{3} \qquad m_C = C_{96}^{2} C_{4}^{1} \qquad P(C) = \frac{C_{96}^{2} C_{4}^{1}}{C_{100}^{3}}$$

例4（匹配问题）：某人写了4封信和4个信封，现随机地将信装入信封中，求全部装对的概率。



解　设“全部装对”为事件A

基本事件的总数为 4!

A所包含的基本事件数为 1

所以$P(A)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}\approx 0.042$

练习：求最多装对一个的概率。

例5（抽签问题）：10个学生，以抽签的方式分配3张音乐会入场券：依次抽取10张外观相同的纸签，其中3张代表入场券. 求 $\boldsymbol{A}$={第五个抽签的学生抽到入场券}的概率。

解：◆基本事件总数 $n = 10!$

◆$\boldsymbol{A}$中基本事件总数 $m_A = C_3^1 \cdot 9!$

第五个学生抽到入场券纸签

另外9个学生抽到其余9张纸签

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_3^1 \cdot 9!}{10!} = \frac{3}{10}$$

与抽取次序无关

例6（摸球问题）：袋中有$a$只白球，$b$只黑球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求$A_k$=“第$k$（$k\le a+b$）次摸出的球是白球”的概率.

解法1. 把$a$只白球和$b$只黑球分别看成是无区别的。

设想把取出的球依次放在排列成一直线的$a+b$个位置上，因为$a$只白球的位置一经排定，则剩下的位置必然是放黑球的，故黑白球的一切可能排列方式，即总的基本事件数

$$n = C_{a+b}^{a}$$

在考虑事件$A_k$包含的基本事件个数时，注意到第$k$个位置必须是白球，而剩下的白球可以放在其它$a+b$-1个位置上的任意$a$-1个位置上.不同的排列方式，即$A_k$包含的基本事件个数共有

$$m = C_{a+b-1}^{a-1}$$

从而

$$P(A_k) = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}} = \frac{a}{a+b}$$

例6（摸球问题）：袋中有$a$只白球，$b$只黑球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求$A_k$=“第$k$（$k\le a+b$）次摸出的球是白球”的概率.

解法2. 把$a$只白球和$b$只黑球分别看成是不同的（如设想把它们编号）.

设想把取出的球仍依次放在排列成一直线的$a+b$个位置上，则总的基本事件数就等于$a+b$个位置的所有排列的种数，即

$$n=(a+b)!$$

在考虑事件$A_k$包含的基本事件个数时，注意到第$k$个位置必须是白球，可以是$a$个白球中的任意一个，有$a$种排法；剩余$a+b$-1个位置上的排列种数为$(a+b-1)!$，即

$A_k$包含的基本事件个数共有 $m=a\cdot(a+b-1)!$

从而

$$P(A_k)=\frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

例7（投球入盒）：把 $r$ 个小球随机地投入 $n$ 个盒内($r \le n$)。设球与盒都是可识别的。

- $A$=“某指定的$r$个盒内各有一球

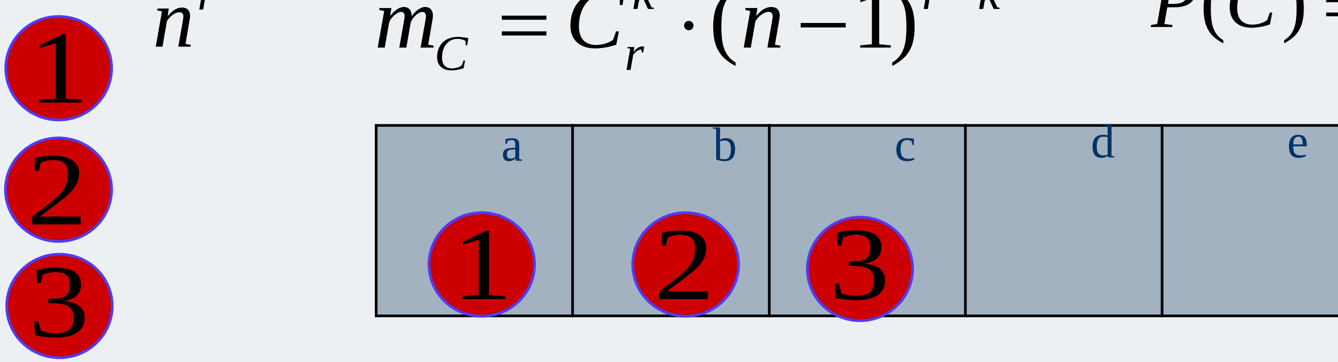
$n^r$ $\quad m_A = r!$ $\quad P(A) = \dfrac{r!}{n^r}$

- $B$ =“恰有$r$个盒，其中各有一球

$n^r$ $\quad m_B = C_n^r \cdot r!$ $\quad P(B) = \dfrac{C_n^r \cdot r!}{n^r}$

- $C$ =“某指定的盒中恰有$k$($k \le r$)个球.

$n^r$ $\quad m_C = C_r^k \cdot (n-1)^{r-k}$ $\quad P(C) = \dfrac{C_r^k \cdot (n-1)^{r-k}}{n^r}$



古典概率的计算：生日问题

例8（生日问题）：某班有50个学生，求他们的生日各不相同的概率（设一年365天）

◆分析 此问题可以用投球入盒模型来模拟

50个学生 $\longrightarrow$ 50个小球

365天 $\longrightarrow$ 365个盒子

$$P(A)=\frac{C_{365}^{50}\cdot 50!}{365^{50}}\approx 0.03$$

相似地有分房问题

人 $\longrightarrow$ 小球

房子 $\longrightarrow$ 盒子

## ■ 几何概率 Geometric Probability

将古典概型中的有限性推广到无限性，而保留等可能性，就得到**几何概型**。

### 1. 几何概型

若一个试验具备以下特点

①**可度量性:** 样本空间Ω充满某个几何区域，其度量(长度、面积、体积)为$S_{\Omega}$;

②**等可能性:** 点落在Ω中的任一子区域 $A$的概率，只与子区域的度量$S_A$有关，而与子区域的位置无关.

则称这样的试验是几何概型. 事件$A$的概率为:

### 2. 几何概率

$$P(A)= S_A / S_{\Omega}$$

## 3. 几何概率的性质

$$P(A) = S_{\boldsymbol{A}} / S_{\Omega}$$

（1） $0 \leq P(A) \leq 1$

（2） $P(\Omega) = 1, P(\Phi) = 0$

（3） 若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

若 $A_1, A_2, \cdots$两两互斥，则

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}$$

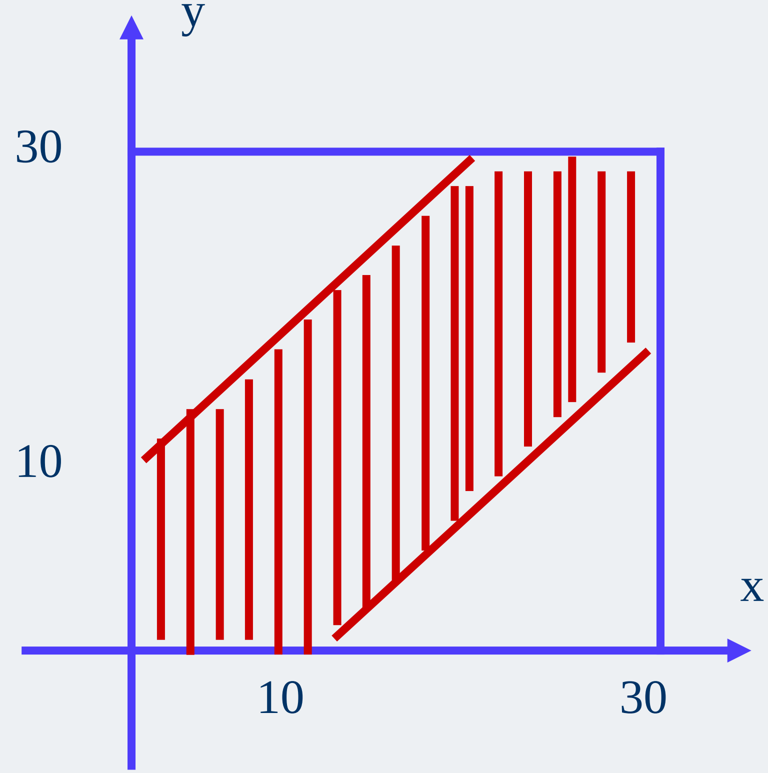
# 4. 几何概率的计算

**例9(会面问题):** 甲乙二人相约定6:00-6:30在预定地点会面，先到的人要等候另一人10分钟后，方可离开。求甲乙二人能会面的概率，假定他们在6:00-6:30内的任意时刻到达预定地点的机会是等可能的。

**解** 设甲乙二人到达预定地点的时刻分别为 $x$ 及 $y$（分钟），则 $0 \le x \le 30$，$0 \le y \le 30$

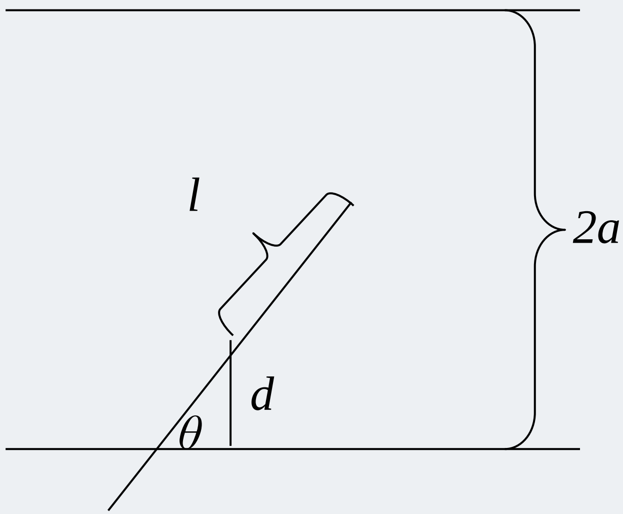
二人会面 $\Leftrightarrow |x-y|<10$

$$p = \frac{30^2-(30-10)^2}{30^2} = \frac{5}{9}$$



**例10(蒲丰投针问题):** 设平面上画着一些有相等距离 $2a$（$a>0$）的平行线，向此平面上投一枚质地匀称的长为$2l$（$l<a$）的针，求针与直线相交的概率。

解 设针的中点离较近直线的距离为$d$，针与较近直线的交角为$\theta$ (如图). 则 $d$与$\theta$的可取值为

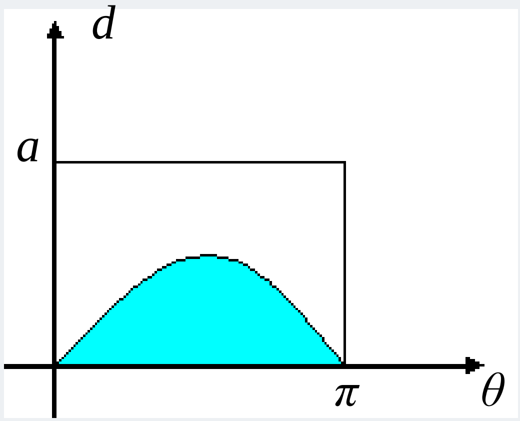



$$0<d<a\ ,\ 0<\theta<\pi$$

针与直线相交 ⟺ $0<d<l\sin\theta$

所求概率为

$$P(A)=\frac{\int_0^{\pi} l\sin\theta d\theta}{\pi a}=\frac{2l}{\pi a}$$

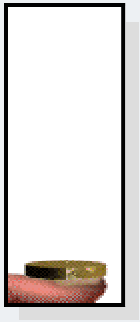


## 统计概率

### 1. 频率

在相同的条件下,进行了 $n$ 次试验,在这 $n$ 次试验中,事件 $A$ 发生的次数 $n_A$ 称为事件 $A$ 发生的频数.比值 $\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 $A$ 发生的频率,并记成 $f_n(A)$.

**实例** 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次, 各做 7 遍, 观察正面出现的次数及频率.



| 试验序号 | $n=5$ | | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_H$ | $f$ | $n_H$ | $f$ | $n_H$ | $f$ |
| 1 | 2 | 0.4 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 3 | 0.6 | 25 | 0.50 | 249 | 0.498 |
| 3 | 1 | 0.2 | 21 | 0.42 | 256 | 0.512 |
| 4 | 5 | 1.0 | 25 | 0.50 | 247 | 0.494 |
| 5 | 1 | 0.2 | 24 | 0.48 | 251 | 0.502 |
| 6 | 2 | 0.4 | 18 | 0.36 | 262 | 0.524 |
| 7 | 4 | 0.8 | 27 | 0.54 | 258 | 0.516 |

发现了什么？

0.5

# Experiment of tossing coin

◆历史纪录

| 试 验 者 | 抛 掷 次 数$n$ | 出现正面的次数$m$ | 出现正面的频率$m/n$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 德.摩 根 | 2048 | 1061 | 0.518 |
| 蒲　丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维　尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |

◆ 程序模拟

抛掷硬币模拟试验

## 2. 频率的特征

**从上述数据可得知**

◆ 频率的随机波动性

频率具有随机波动性,即对于同样的 $n$, 所得的 $f$ 不一定相同;

◆ 频率的统计稳定性

随机事件$\boldsymbol{A}$在相同条件下重复多次时，事件$\boldsymbol{A}$ 发生的频率在一个固定的数值 $p$ 附近摆动，且随试验次数的增加更加明显.

3. 频率的性质

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$

(2) $f_n(\Omega) = 1, f_n(\phi) = 0$

(3) 若$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$互斥，则 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$

注：（3）可推广到有限个两两互斥事件的和事件.

显然，由频率的稳定性知，概率是可以通过频率来“测量”的，或者说，频率可以作为概率的一个近似。因此，我们可以利用频率及其性质来研究概率。

## 4. 概率的统计定义

$$频率\ f_n(A)=\frac{m}{n}\ 稳定于概率\ \ p=P(A)$$

**定义** 在随机试验中, 若事件**A**出现的频率 $f$ 随着试验次数$n$的增加, 趋于某一常数 $p$, $0\le p\le 1$ ，则 定义事件$A$的概率为 $p$, 记作 $P(A)=p$ .

**概率应具有的性质**（由频率的性质）

(1) 对任一事件$A$ ,有 $0\le P(A)\le 1$;

(2) $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$;

(3)对于两两互斥的有限多个事件$A_1, A_2, \cdots, A_m$,

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_m)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots P(A_m)$$

## ■ 概率的公理化定义

**定义**　给定一个随机试验E，Ω是它的样本空间，对于任意一事件 $A$，赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(\bullet)$ 满足下列三条：

- 非负性：　$P(A) \geq 0$
- 规范性：　$P(\Omega)=1$
- **可列**可加性：设 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥时，

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}$$

那么，称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率.

## ● 概率的性质

由概率的定义，可推出如下性质

**(1)** $P(\varnothing)=0.$

**证明** $\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\varnothing+\cdots$

由概率的可列可加性得

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$$

$$P(\varnothing)\geq 0 \;\Rightarrow\; P(\varnothing)=0.$$

$\boxed{\text{不可能事件的概率为零,但反之不一定成立。}}$

(2) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$**是两两互斥的事件,则有**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

**概率的有限可加性**

**证明** 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing,$

$$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing,\ i \neq j,\quad i, j = 1,2,\cdots.$$

由概率的可列可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

古典概率满足概率的三条公理,即古典概率是概率.

(3) **设** $A, B$ **为两个事件,且** $A \subset B$,**则**

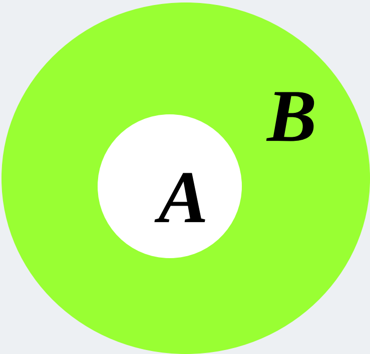
$$P(B-A)=P(B)-P(A). \quad P(A) \le P(B),$$

**证明** 因为 $A \subset B$,

所以 $B = A \cup (B-A)$.

又 $(B-A) \cap A = \varnothing$,

得 $P(B)=P(A)+P(B-A)$




于是 $\boxed{P(B-A)=P(B)-P(A).}$

又因 $P(B-A) \ge 0$, 故 $P(A) \le P(B)$.

**推论** **设** $A, B$ **为两个事件,则**

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

(4) 设 $\overline{A}$ 是 $A$ 的对立事件, 则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明

因为 $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $P(\Omega) = 1$,

所以 $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A})$

$$= P(A) + P(\overline{A})$$

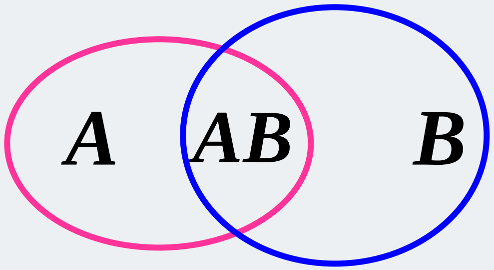
$$\Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

(5) (加法公式)对于任意两事件 $A, B$ 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**证明**　由图可知

$$A \cup B = A \cup (B - AB),$$




且 $A \cap (B - AB) = \varnothing$,

故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$

又由性质 3 得

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB),$$

因此得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

**推广 ------ 三个事件和的情况**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = ?$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3)$$

$$+ P(A_1A_2A_3).$$

***n* 个事件和的情况**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_iA_j)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n).$$

**例11** 设 $A$ 与 $B$ 是两个互不相容的事件,已知 $P(A)=0.2, P(B)=0.7$,

求 $P(\bar{A}), P(A+B), P(A\bar{B}), P(\bar{A}\bar{B})$ 和 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

解 $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0.2=0.8$

因 $A$ 与 $B$ 互不相容,故 $P(AB)=0$,于是有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.2+0.7=0.9$$

$$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.2-0=0.2$$

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(AB)=1-0=1$$

## 主观题 10分

设置

在例11中，将条件“设*A*和*B*互不相容”改为

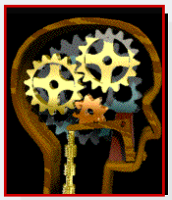
**设** $A, B$ **为两个事件**，**且** $A \subset B$

应怎样计算各事件的概率？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

# 课后作业



P24： 4， 5， 6， 7， 14，

16， 17， 19， 20， 23， 24， 26.

END