

FC系统证明思维

xyfjASON

概述

公理与（有用的）定理

例题

例一（2019深圳）

例二（2017本部）

例三（2017本部）

例四（2015本部）

例五（2015本部）

概述

FC 系统本质是 PC 系统的扩展：在 PC 系统中，我们考虑的最小单元是原子公式 p, q, r, \dots ，然后用联结词 \rightarrow, \neg 把它们组合起来得到公式。但是在 FC 系统中，原子公式被进一步细化为 $P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ ，其中 $P^{(n)}$ 是 n 元谓词符号， t_1, t_2, \dots, t_n 是项；项又被细化为常元、变元和函词的组合；用联结词 $\rightarrow, \neg, \forall$ 把原子公式组合起来的到公式。因此，FC 系统确实比 PC 系统复杂了许多。

不过，正因如此，PC 系统中的所有定理在 FC 中自然成立，我们只需进一步研究 FC 中新引入的东西。又由于谓词、函词、常元是在给定实际背景后人为解释的，所以我们研究 FC 中的定理时，就是在和 $\forall(\exists)$ 打交道（其中 $\exists vA$ 定义为 $\neg\forall v\neg A$ ）。

和 PC 与 ND 中的证明一样的，我们着重思维过程，证明过程倒着写即可。

另外，允许在证明 FC 的过程中用 ND 的推理规则。

公理与（有用的）定理

$A_1 :$	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
$A_2 :$	$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
$A_3 :$	$(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
$A_4 :$	$\forall v A \rightarrow A_t^v$
$A_5 :$	$\forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall v A \rightarrow \forall v B)$
$A_6 :$	$A \rightarrow \forall v A \quad (v \text{ 在 } A \text{ 中无自由出现})$
Thm 1:	$\vdash \forall v A \rightarrow A$
Thm 2:	$\vdash A \rightarrow \exists v A$
Thm 3:	$\vdash \forall v A \rightarrow \exists v A$
Thm 4:	if $\vdash A$, then $\vdash \forall v A$
Thm 5:	if $\Gamma \vdash A$, then $\Gamma \vdash \forall v A \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 中无自由出现})$
Thm 10:	if $\Gamma \vdash \exists v A$ and $\Gamma; A \vdash B$, then $\Gamma \vdash B \quad (v \text{ 在 } \Gamma \text{ 和 } B \text{ 中无自由出现})$

关于 $A_5 \sim \text{Thm 5}$ ，可以概括为下图：

关于 Thm 10，其可以视为 ND 中析取消除规则的推广：考虑 $(\vee-)$ 规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$$

意识到 $\exists v A$ 的本质就是一系列的或： $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ ，故而我们可以推广得到：

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma \vdash \exists v A}{\Gamma \vdash B}$$

与 $(\vee-)$ 规则的作用类似，存在消除定理的用法是：当 \exists 出现在 \vdash 前时，即需要证明 $\Gamma; \exists A \vdash B$ 时，只需要证明 $\Gamma; \exists A, A \vdash B$ 即可。但是千万千万要注意 v 不能在 Γ （假设集）和 B （结论）里面自由出现！

例题

例一（2019深圳）

求证： $\vdash_{FC} \exists v(B \rightarrow A) \leftrightarrow (\forall v B \rightarrow A)$ ，其中 v 在 A 中无自由出现。

思维过程：

例二（2017本部）

求证： $\vdash_{FC} (\exists x A \rightarrow \forall x \neg B) \rightarrow \forall x (A \rightarrow \neg B)$

思维过程：

例三（2017本部）

求证： $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), \neg \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x)) \vdash_{FC} \exists x \neg (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$

思维过程：

例四（2015本部）

求证： $\vdash_{FC} (\exists x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

思维过程：

例五（2015本部）

求证： $\forall x (P(x) \rightarrow \neg (Q(y) \rightarrow \neg R(x))) \vdash_{FC} \exists x P(x) \rightarrow Q(y)$

思维过程：