第3章 随机变量及其分布

3.1 随机变量的概念

3.2 离散型随机变量

3.3 随机变量的分布函数

3.4 连续型随机变量

3.5 正态分布

3.6 随机变量函数的分布

对于非离散随机变量，其可能取值不能一一列举，因而不能像离散随机变量那样可以用分布列来描述它。

在实际中，对于随机变量，例如误差 ε，元件的寿命T等，我们并不会对误差ε =0.05mm，T=1251.5h感兴趣，而是关心误差落在某个区间内的概率，寿命T大于某个数值的概率等。

因此，我们转而研究随机变量所取值落在一个区间[*a*,*b*]的概率

$$P(a < X \leq b)$$

3.3 随机变量的分布函数

- 累积分布函数
- 分布函数的性质

□ 累积分布函数 Cumulative Distribution Function

由于 $P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$

因此 只需考察 $P(X \le x)$

定义 设X为一随机变量，则对任意实数 x，

$$\{X \le x\}$$

是一个随机事件，称

$$F(x) = P(X \le x)$$

为随机变量X的累积**分布函数(cdf)**.

定义域为 （$-\infty$，$+\infty$）；

值域为［0， 1］.

$F(x)$是一个普通实函数！

用分布函数表示事件的概率

引进分布函数$F(x)$后，事件的概率都可以用分布函数$F(x)$的函数值来表示。

对任意实数 $x_1 < x_2$, 有

$$P（x_1 < X \leq x_2）= F(x_2) - F(x_1)$$

- ✓ $P（X \leq b）= F(b)$
- ✓ $P（X > b）= 1 - P（X \leq b）= 1 - F(b)$
- ✓ $P（a < X \leq b）= F(b) - F(a)$

即分布函数完整地描述了随机变量的统计规律性.

例1 已知 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

求X的分布函数。

解

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & (x<-1)\\ 1/2 & (-1\le x<0)\\ 5/6 & (0\le x<1)\\ 11/12 & (1\le x<2)\\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

阶梯函数，在 $X=x_k$ 处有跃度 p_k！

例2 向区间$(a,b]$内任意投掷一质点，求落点坐标的分布函数。

解 此试验是几何概型，由题意，当$x \le a$时，

$$F(x)=P(X \le x)=P(\phi)=0$$

当$a<x<b$时，

$$F(x)=P(X \le x)=P(a<X \le x)=\frac{x-a}{b-a}$$

当$x \ge b$时，$F(x)=P(a<X \le b)=1$

于是 $$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b. \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

分布函数的性质

(1) $F(x)$是单调不减函数，即

$$若\ x_1 < x_2,\ 则 F(x_1) \le F(x_2)$$

(2) $0 \le F(x) \le 1$，且

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

$$F(-\infty) = P\{X < -\infty\} \longrightarrow$$ **不可能事件**

$$F(+\infty) = P\{X < +\infty\} \longrightarrow$$ **必然事件**

(3) $F(x)$处处右连续，即 $F(x+0) = F(x)$

满足上述三条的函数$F(x)$必是某随机变量的分布函数

例3 设某一随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+\dfrac{B}{2}e^{-3x}, x>0 \\ 0, \qquad x\le 0 \end{cases},$$

求：（1）常数 A,B;　　$(2) P(2<X\le 3)$

(1)因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+\dfrac{B}{2}e^{-3x})=1$

$$\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0+}(A+\frac{B}{2}e^{-3x})=F(0)=0$$

得 $A=1, B=-2$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

$$(2)P(2<X\le 3)$$

$$=F(3)-F(2)=e^{-6}-e^{-9}.$$

主观题 10分

设置

设某一随机变量的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-2x}, x>0 \\ 0, \qquad x\le 0 \end{cases},$$

求：（1）常数 A，B;

$(2)P(2<X\le 3)$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

问一问

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

是不是某一随机变量的分布函数?

不是. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$

而函数 $G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2} & (x\le 0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$

可作为某随机变量的分布函数.

3.4 连续随机变量

- 连续随机变量及其密度函数
- 密度函数的性质
- 连续随机变量的分布函数的性质
- 几种重要的连续随机变量

3.4 连续随机变量及其密度函数

□ 连续随机变量

◆ 定义 设 X为一随机变量，$F(x)$为 X 的分布函数，若存在非负可积的实函数 $f(x)$，使对任意实数 x，有

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

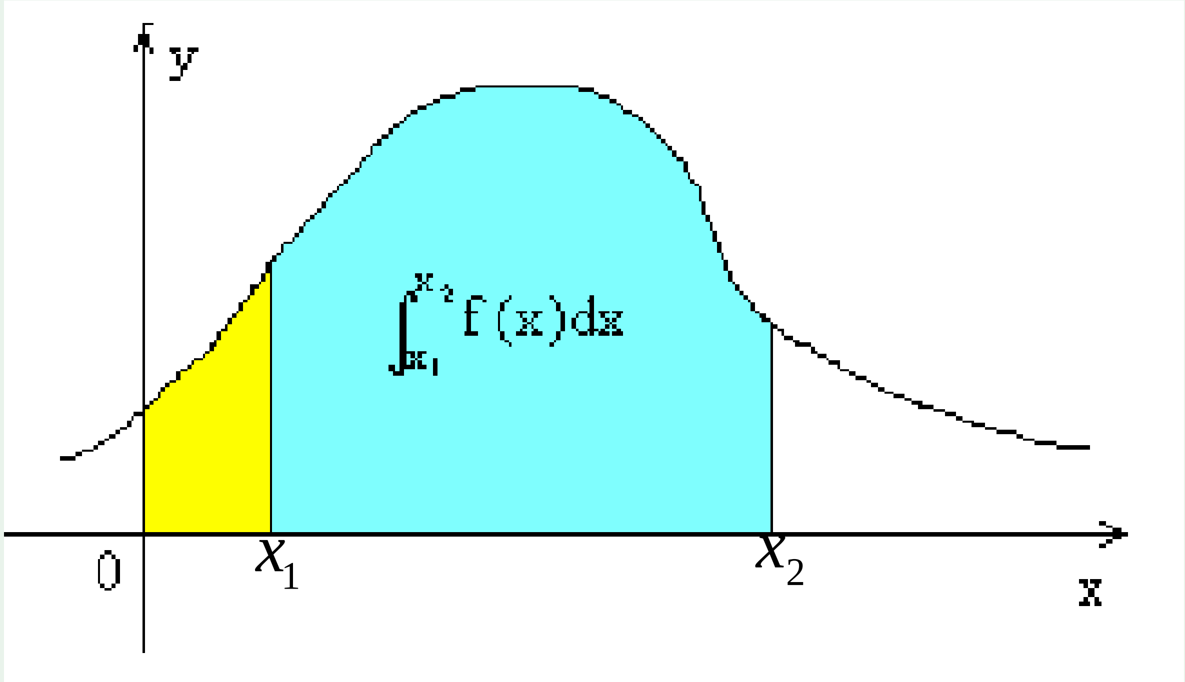
则称 X为连续型随机变量，$f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度或密度函数.

Probability density function（pdf）

◆ 密度函数在区间上的积分

= 随机变量在该区间上取值的概率

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



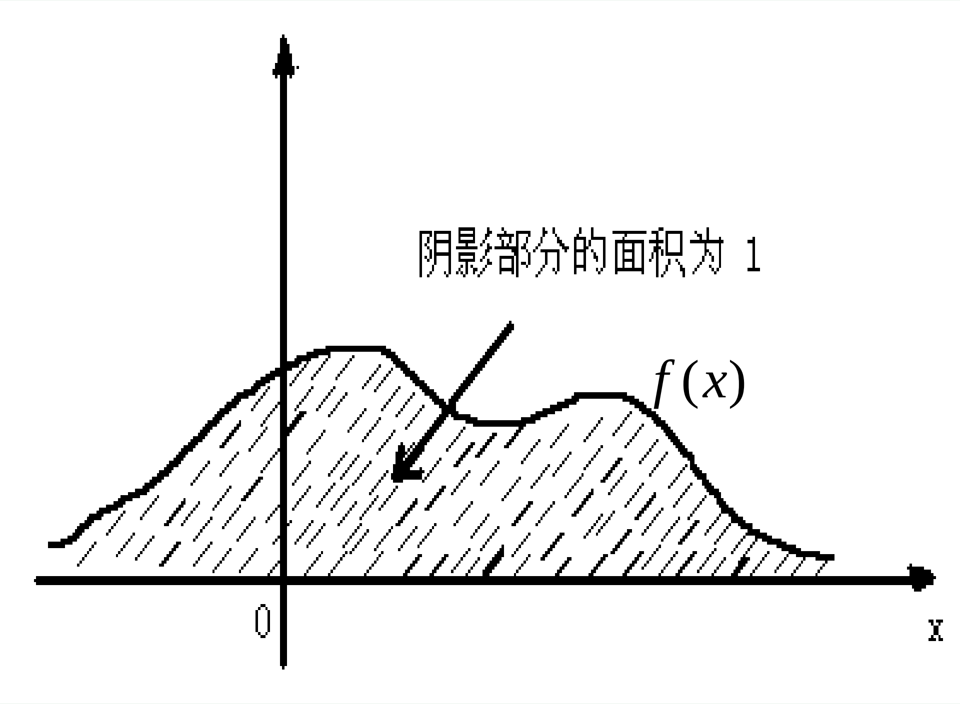
密度函数的性质

(1) 非负性

$$f(x) \geq 0, \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$$

(2) 规范性

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

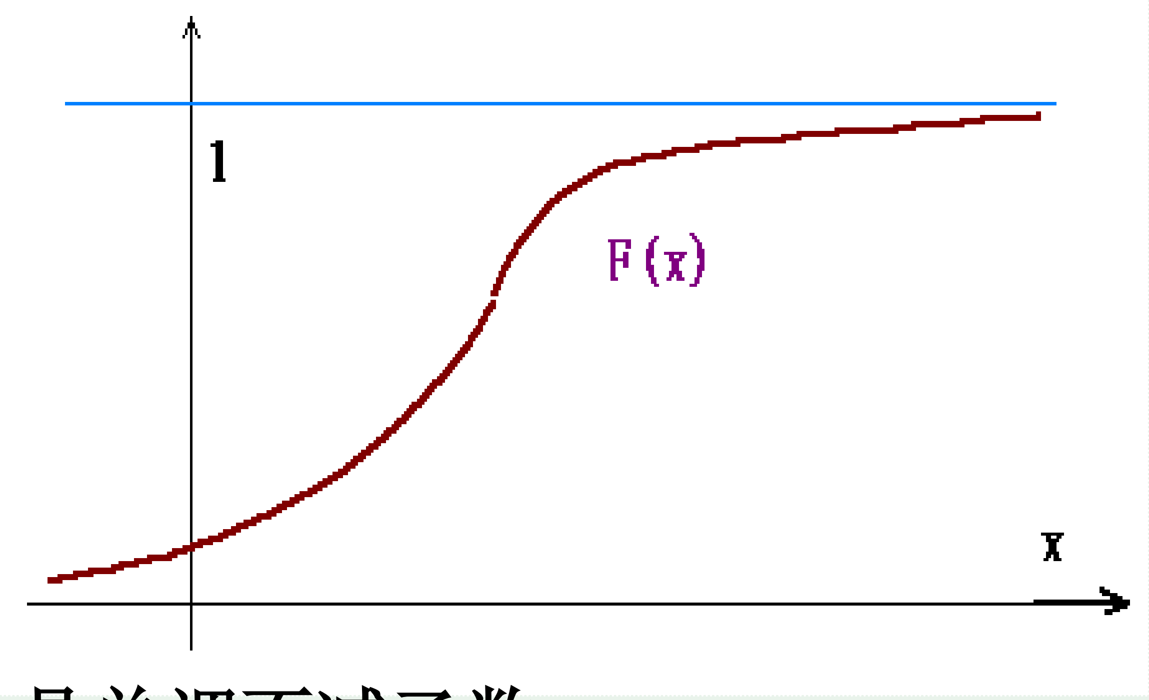


$$P\{-\infty < x < +\infty\} = 1$$

□ 连续随机变量分布函数的性质

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

连续随机变量的分布函数 $F(x)$ 的图形



- $F(x)$是单调不减函数；

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- 连续随机变量的分布函数在实数域内处处连续.
- 连续随机变量取任意指定实数值 c 的概率为 **0**，即

$$\boxed{P(X=c)=0,\forall c\in R}$$

- $$P(a<X<b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)$$
$$=P(a\le X\le b)=\int_{a}^{b} f(x)dx，\quad \forall a,b(a<b)$$

- 若 $f(x)$ 在 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$

◆ 已知密度函数求概率

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

例3 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \text{求 } P(0 \le X \le \frac{\pi}{4})$$

解： **Step1:** **利用密度函数的性质求出常数 *a*.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Step2: **密度函数在区间的积分得到此区间的概率**

$$P(0 \le X \le \frac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

◆ 已知分布函数求密度函数

例4 随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x^2 & 0<x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

(1) 求 $P(0.3<X<0.7)$

(2) 求 X 的密度函数

解 (1) $P(0.3<X<0.7)=F(0.7)-F(0.3)$

$$=0.7^2-0.3^2=0.4$$

（2）密度函数为

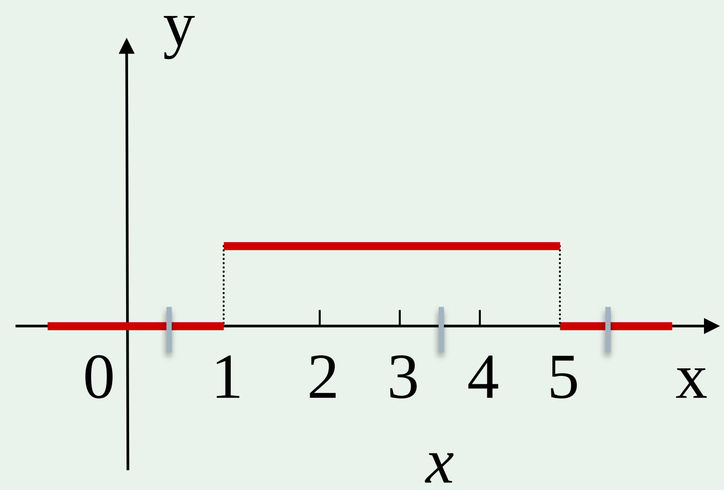
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

◆ 已知密度函数求分布函数

例5 已知连续随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & x\in(1,5)\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求 X 的分布函数



解 当 $x\le 1$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=0$$

当$1<x\le 5$ 时

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{x}f(x)dx=\int_{1}^{x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(x-1)$$

当 $x>5$ 时

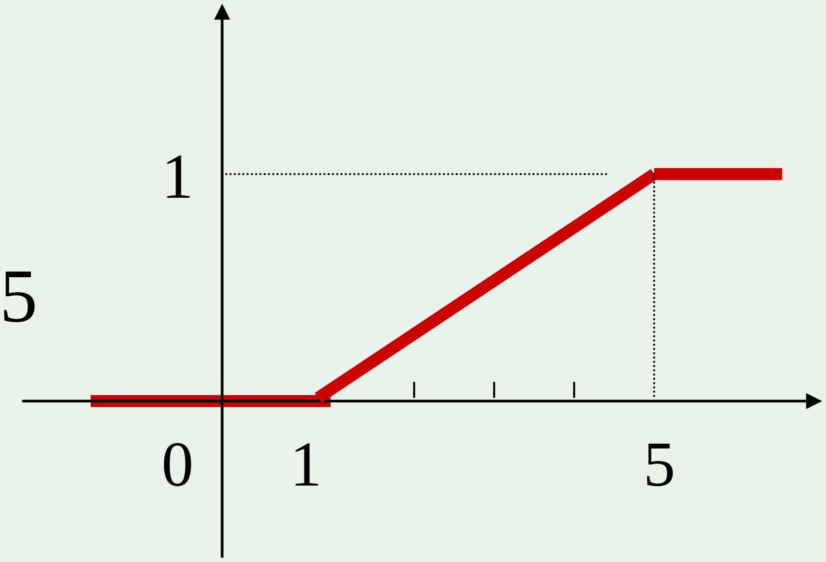
当 $x>5$ 时 $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx+\int_{5}^{x} f(x)dx$$

$$=0+\int_{1}^{5}\frac{1}{4}dx+0=\frac{1}{4}(5-1)=1$$

所以

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 1 \\ \frac{1}{4}(x-1) & 1<x\le 5 \\ 1 & x>5 \end{cases}$$



□ 几种重要的连续随机变量

■ 均匀分布 Uniform Distribution

➢ 定义　若连续型随机变量*X*的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则称*X*在区间 (***a***，***b***)上服从均匀分布.记为 ***X ~ U(a,b)***

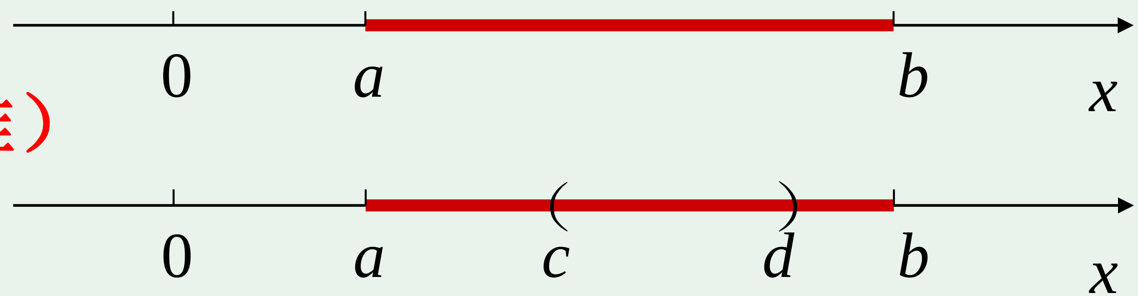
➢ 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

注意不等号!

➢ 意义

几何概型（一维）



$$P\{c < X \le d\} = \int_c^d f(x)dx$$

$$= \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$$

X“等可能”地取区间（a,b）中的值，这里的“等可能”理解为：X落在区间(a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的。或者说它落在子区间内的概率只依赖于子区间的长度而与子区间的位置无关。

例6某线路公交车每5分钟发一班，设在任一时刻 某一乘客到了车站。求乘客候车时间不超过2分钟的概率。

解 设随机变量X为候车时间，则

$$X \sim U（0，5）$$

$$P(X \leq 2) = F(2)$$

$$= \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5}$$

■ 指数分布 Exponential Distribution

➢ 定义　若连续随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\quad(\lambda>0\text{为常数})$$

则称X服从参数为 λ 的指数分布. 记为

$$X \sim E(\lambda)$$

➢ 分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$$

例7 设X服从参数λ=3的指数分布，求它的密度函数

及 $P(X \geq 1)$ 和 $P(-1 < X \leq 2)$

解 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$\boxed{P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}$$

$$P(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} 3e^{-3x}dx = e^{-3}$$

$$P(-1 < X \leq 2) = \int_0^2 3e^{-3x}dx = 1 - e^{-6}$$

指数分布在可靠性理论与排队论中有广泛的应用

例8 设已经使用了t小时的电子管，在以后的 Δt 小时内损坏的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ ，其中λ是正常数，若电子管寿命X为零的概率为零，求X的概率分布。

解 由题意，有关系式

$$P(t<X\le t+\Delta t\mid X>t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

由条件概率的定义，有

$$P(t<X\le t+\Delta t\mid X>t)=\frac{P\{(t<X\le t+\Delta t)\cap(X>t)\}}{P(X>t)}$$

$$=\frac{P(t<X\le t+\Delta t)}{1-P(X\le t)}=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

即 $$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

两边除以 Δt，变形得

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=[1-F(t)][\lambda+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}]$$

即有 $F'(t)=\lambda[1-F(t)],(\Delta t\to 0)$

解这个关于函数$\boldsymbol{F(x)}$的一阶常微分方程，得通解

$$F(t)=Ce^{-\lambda t}+1$$

根据初始条件 $F(t)|_{t=0}=0$, 得$\boldsymbol{C=-1}$

$$F(t)=1-e^{-\lambda t},t>0$$

$F(x)$是一个指数分布！

➢ 指数分布的无记忆性 memoryless

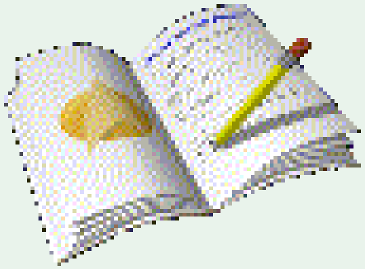
若 $T \sim E(\lambda)$，则 $\forall t, s > 0$

$$P(T > t + s \mid T > s) = \frac{P(T > t + s, T > s)}{P(T > s)}$$

$$= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T > t)$$

与 **s** 无关

即 若用指数随机变量刻画元件的寿命，则当元件已经生存了时长 **s**，它至少再存活 **t** 个时间单位的概率与 **s** 无关，这一性质称为指数分布的无记忆性.



课后作业

习题3

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18。