第4章 多维随机变量及其分布

4.1 二维随机变量及其联合分布函数

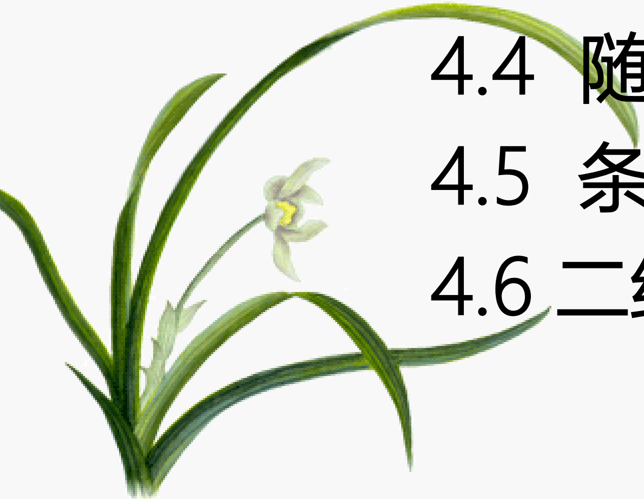
4.2 二维离散型随机变量

4.3 二维连续型随机变量

4.4 随机变量的独立性

4.5 条件分布

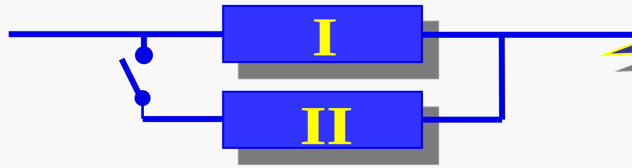
4.6 二维随机变量函数的分布



实际背景

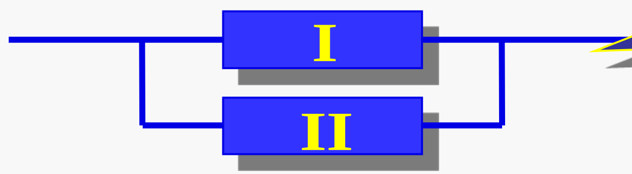
设有两个部件 I、II, 其工作寿命分别为 X, Y

冷冗余系统： 部件 I 坏了, 换上备用部件 II 继续工作



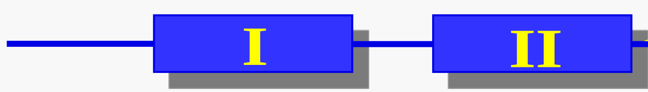
系统寿命 $X+Y$

并联系统： 部件I、II 并联同时工作, 仅当两个部件都损坏时，整个系统才失效



系统寿命 $\max\{X,Y\}$

串联系统： 部件I、II 串联同时工作, 只要有一个部件损坏，整个系统就失效



系统寿命 $\min\{X,Y\}$

问题 怎样确定上述各系统的寿命？

问题 question

若 $(X,Y) \sim f(x,y)$, (p_{ij})

怎样求随机变量（X，Y）的函数的分布？

特别地

$$X+Y,$$

$$\max\{X,Y\},\ \min\{X,Y\}$$

的概率分布？

§4.5 二维随机变量函数的分布

(一) $Z=X+Y$ 的分布

(二) 极值 $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ 的分布

问题 question

一般地 若 $(X,Y) \sim f(x,y)$,

$z = g(x,y)$是一个二元函数,

怎样求 r.v $Z = g(X,Y)$的分布密度?

分析: $F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X,Y) \le z\}$

$$= \iint\limits_{g(x,y) \le z} f(x,y)\,dxdy$$

参见4.3 例5.

$$= \cdots = \int_{-\infty}^{z} f_Z(u)\,du$$

$$\therefore \quad Z \sim f_Z(z)$$

(一) $Z=X+Y$ 的分布（先讨论连续型）

设 $(X,Y)\sim f(x,y)$, 则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

若 X,Y 相互独立, 则 $Z=X+Y$ 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

称为**卷积公式**, 记为

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例1 设 X,Y 相互独立, 且都服从参数为 λ 的指数分布, 求 r.v $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由卷积公式有, Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\cdot\lambda e^{-\lambda(z-x)}dx, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

被积函数的非零区域

$$\begin{cases}x>0\\ z-x>0\end{cases}\Rightarrow 0<x<z$$

$$=\begin{cases}\lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}\sim\Gamma(2,\lambda)$$

一般地, 若 X,Y 相互独立, 且

$$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda),\ Y\sim\Gamma(\beta,\lambda),$$

则 $X+Y\sim\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$

例2 设r.v X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$, 求 $Z = X + Y$ 的分布密度.

解 由独立性及卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} dx$$

令 $t = x - \frac{z}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}$$

$\therefore \quad X + Y \sim N(0, 2).$

有什么结论?

独立正态 r.v 和的一般结果

1. 设 X,Y 相互独立，且

$$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

则
$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

2. 一般地，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则对于不全为零的常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有

$$a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right)$$

独立正态r.v的非零线性组合仍服从正态分布

例3 某电气设备中的两个部件存在接触电阻 R_1, R_2, 两个部件的工作状态是相互独立的, 概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10,\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

求 R_1, R_2 串联后的总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 由卷积公式有

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^z \frac{10-x}{50}\cdot\frac{10-(z-x)}{50}dx, & 0\le z<10\\ \displaystyle\int_{z-10}^{10}\frac{10-x}{50}\cdot\frac{10-(z-x)}{50}dx, & 10\le z\le 20\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10\\ (20-z)^3/15000\ , & 10\le z<20\\ 0\ , & \text{其它}\end{cases}$$

(再讨论离散型)

设 X, Y 相互独立, 其分布列分别为

$$P\{X=i\}=p_i \quad (i=1,2,\cdots)$$
$$P\{Y=j\}=q_j \quad (j=1,2,\cdots)$$

令 $Z=X+Y$, 则

$$\begin{aligned}P\{Z=k\} &= P\{X+Y=k\}\\ &=\sum_{i=1}^{k} P\{X=i\}\cdot P\{Y=k-i\}\\ &=\sum_{i=1}^{k} P\{X=k-i\}\cdot P\{Y=i\},(k=1,2,\ldots)\end{aligned}$$

(离散卷积公式)

比较一下连续型卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例4 设 X, Y 独立,且 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$, 求 $Z = X + Y$ 的分布.

解 由离散卷积公式有

$$P\{Z = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X = k - i\} \cdot P\{Y = i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{i}}{i!} e^{-\lambda_2}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!(k-i)!} \lambda_1^{k-i} \cdot \lambda_2^{i}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1^{k-i} \cdot \lambda_2^{i}$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\therefore \quad Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

两个独立随机变量的和的分布

如果X与Y相互独立，则

记住结论!

$$\left.\begin{array}{l} X \sim P(\lambda_1) \\ Y \sim P(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim B(m, p) \\ Y \sim B(n, p) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim B(m+n, p)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu_1, \sigma_1{}^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2{}^2) \end{array}\right\} \Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2)$$

(二) 极值 $\max(X, Y)$, $\min(X, Y)$ 的分布

① 设 $X \sim F_X(x), Y \sim F_Y(y)$, 且 X, Y 相互独立，则

$$F_{\max}(z) = P\{\max(X,Y) \le z\}$$
$$= P\{X \le z, Y \le z\}$$

② 设 $X_i \sim F_{X_i}(x), i = 1,2,\cdots,n$, 且 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则

$$F_{\max}(z) = P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\}$$
$$= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

$$F_{\min}(z) = P\{\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \le z\}$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(z)]$$

③ 特别当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $F(x)$ 时有

$$F_{\max}(z) = F^n(z)$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

问题 question

设 X, Y 独立同分布，具有密度 $f(x)$，怎样求 $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$ 的密度？

分析

$$\because \quad F_{\max}(z) = F^2(z)$$

$$\therefore \quad f_{\max}(z) = 2f(z)F(z) = 2f(z)\int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

$$\because \quad F_{\min}(z) = 1-[1-F(z)]^2$$

$$\therefore \quad f_{\min}(z) = 2f(z)[1-F(z)] = 2f(z)[1-\int_{-\infty}^{z} f(t)dt]$$

同理可推广，求出 n 个独立同分布的r.v.的极值的密度.

$$\boxed{f_{\max}(z) = nf(z)[F(z)]^{n-1}} \qquad \boxed{f_{\min}(z) = nf(z)[1-F(z)]^{n-1}}$$

例 体育馆的大屏幕由信号处理机和显示屏构成，它们的寿命分别为 X, Y，若它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$. 试求大屏幕系统的寿命 Z 的概率密度.

解 大屏幕系统寿命 $Z=\min(X,Y)$，由独立性有

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-\alpha z}e^{-\beta z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$\therefore\quad f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

可见指数分布的串联系统仍服从指数分布

其失效率是每个部件的失效率之和

例5 设X,Y独立同分布,其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x>0, \\ 0 \quad , x\le 0, \end{cases}$$

直接法

求$Z=X/Y$的概率密度.

解 Z的分布函数为 $F_Z(z)=P\{X/Y\le z\}$

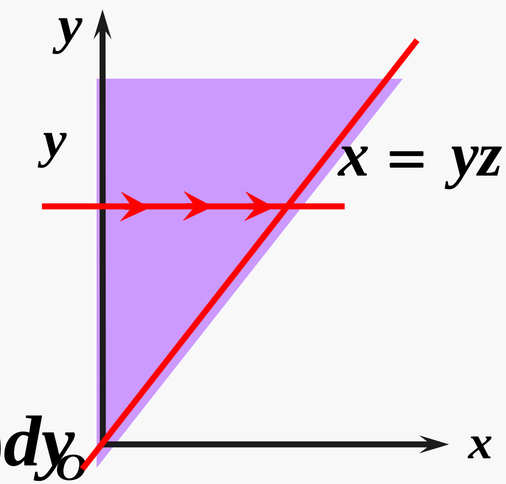
$$=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x/y\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$$

当 $z\le 0$时 $F_Z(z)=0,$

当 $z>0$时 $F_Z(z)=\iint\limits_{\begin{cases}x/y\le z\\ x>0,y>0\end{cases}} e^{-(x+y)}dxdy$

$$=\int_0^{\infty}dy\int_0^{yz}e^{-(x+y)}dx=\int_0^{\infty}e^{-y}(1-e^{-yz})dy$$

$$=1-\frac{1}{1+z} \qquad \therefore \quad f_Z(z)=\begin{cases}(1+z)^{-2}, z>0\\ 0 \quad , z\le 0\end{cases}$$



例6 设 X,Y相互独立同分布，服从 $N(0,\sigma^2)$，求r.v $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解 $F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}$ 当 $z\le 0$时 $F_Z(z)=0$,

当 $z\ge 0$时 $F_Z(z)=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f_X(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \end{cases}$$

$(0\le\rho\le z, 0\le\phi\le 2\pi)$

雅可比式：$J=\rho$

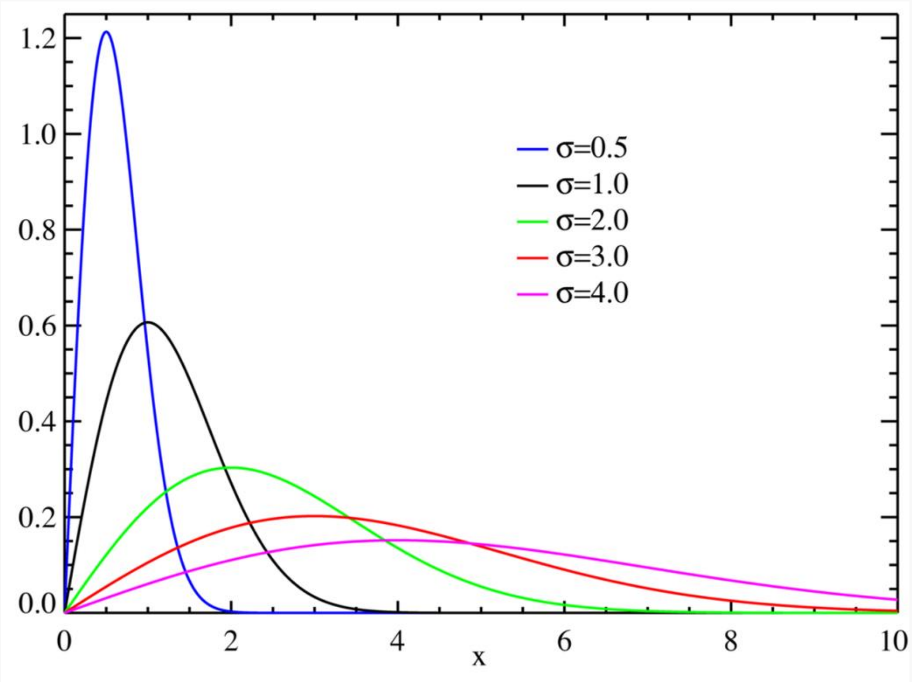
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^z d\rho\int_0^{2\pi}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\varphi$$

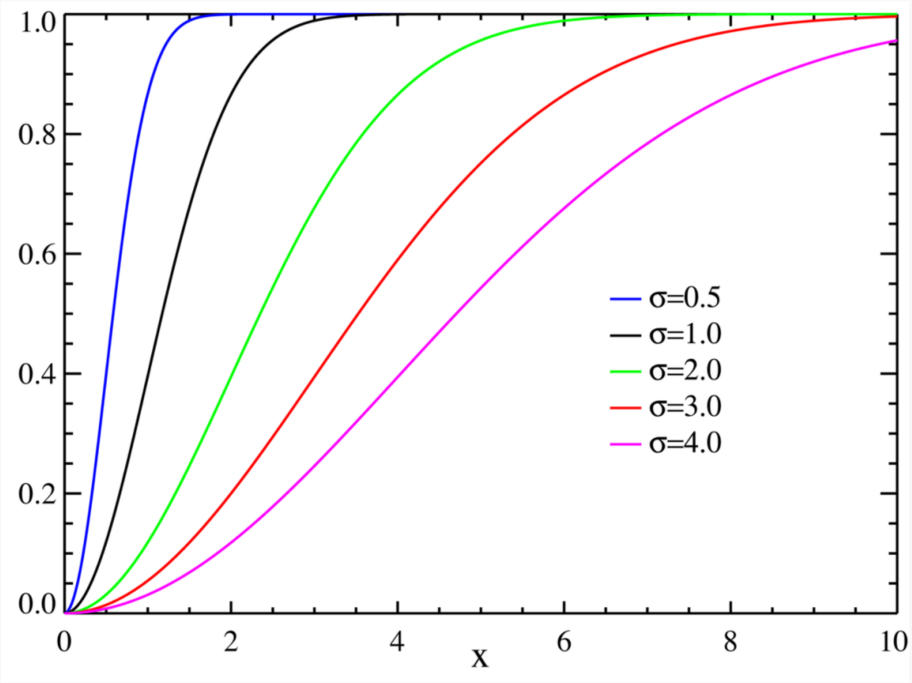
$$=2\int_0^z e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\frac{\rho^2}{2\sigma^2}=2(1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}})$$

$$\therefore \quad f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$$

（瑞利Rayleigh分布）

瑞利Rayleigh分布





$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z \geq 0 \\ 0 \quad , \quad z < 0 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, z \geq 0 \\ 0, \quad z < 0 \end{cases}$$

课后作业

P89：习题4

14，15，18，20，21，23，25，26。33.

练一练

设两元件寿命分别为 X, Y，若它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求连接方式为并联和冗余两种情况的系统的寿命分布.