使用拉格朗日乘数法求解约束优化问题

110gituser

1 问题描述

本问题的目标是在单位圆约束下，最小化一个二维函数：

$$\min_{x_1,x_2} \quad f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_2$$

约束条件为：

$$g(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-1=0$$

该约束表示解必须在单位圆上。

2 拉格朗日乘数法原理

拉格朗日乘数法是一种用于求解带等式约束的最优化问题的方法。其基本思想是：若函数 $f(x_1,x_2)$ 在约束 $g(x_1,x_2)=0$ 下有极值，则在极值点处，目标函数的梯度 ∇f 与约束函数的梯度 ∇g 必须共线，即存在一个实数 λ，使得：

$$\nabla f(x_1,x_2)=\lambda\nabla g(x_1,x_2)$$

我们引入拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)-\lambda g(x_1,x_2)$$

对其求偏导并令其为零，得到以下方程组：

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=2x_1-2\lambda x_1=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=2-2\lambda x_2=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=-(x_1^2+x_2^2-1)=0\end{cases}$$

求解该方程组可以得到所有可能的驻点。再将这些点代入目标函数 $f(x_1,x_2)$ 中，比较其函数值即可确定极小值点。

3 结论

该方法清晰地展示了如何在非线性约束下寻找目标函数的极值。通过引入拉格朗日乘子，我们将约束优化问题转化为无约束的方程组求解问题，便于理论分析与数值实现。