绝密 * 启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}$，则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的（　　）．

（A）连续点　　（B）跳跃间断点　　（C）可去间断点　　（D）无穷间断点

（2）设 $f(x)$ 是连续且单调增加的奇函数，$F(x)=\int_0^x(2u-x)f(x-u)du$，则 $F(x)$ 是（　　）．

（A）单调增加的奇函数　　（B）单调减少的奇函数

（C）单调增加的偶函数　　（D）单调减少的偶函数

（3）设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{e^x-1}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}]=3$，则（　　）．

（A）$f(0)=-1,f'(0)=\dfrac{5}{2}$　　（B）$f(0)=-1,f'(0)=-\dfrac{5}{2}$

（C）$f(0)=1,f'(0)=\dfrac{5}{2}$　　（D）$f(0)=1,f'(0)=-\dfrac{5}{2}$

（4）设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx,J=\int_0^{\pi}\cos xe^{\sin^2x}dx$，则（　　）．

（A）$I>0,J<0$　　（B）$I>0,J=0$　　（C）$I<0,J>0$　　（D）$I<0,J=0$

（5）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）．

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在

（C）连续且偏导数存在　　（D）不连续且偏导数不存在

（6）将极坐标系下的二次积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(1+r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 转化成直角坐标系下的二次积分为（　　）．

（A）$\int_{-\frac{\sqrt2}{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

（B）$\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（D）$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_{1-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（7）设 A,B 均为三阶非零矩阵， 满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2a & 1-a & 2a \\ a & -a & a^2-2 \end{pmatrix}$，则（　　）.

（A）$a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　　　　（B）$a\neq 2$ 时，必有 $r(A)=2$

（C）$a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$　　　　（D）$a\neq -1$ 时，必有 $r(A)=2$

（8）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为 2，则该二次型的正负惯性指数分别为（　　）.

（A）2, 0　　（B）0, 2　　（C）1, 1　　（D）依赖于 a 的取值

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设 $f(x)$ 为可导的偶函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的法线方程为__________.

（10）$\displaystyle\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=$__________.

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\dfrac{1}{n})^{\frac{4}{3}}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})=$__________.

（12）微分方程 $y''+4y=2\cos^2 x$ 的特解形式为__________.

（13）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x-az=\varphi(y-bz)$ 确定，其中 φ 可导，a,b 为常数，且 $a-b\varphi'\neq 0$，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

（14）设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，对任意的正整数 n，矩阵 $(E+\alpha\beta^T)^n=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**设 $0<x<1$，证明（Ⅰ）$\ln(1+x)<\dfrac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$；（Ⅱ）$(1+\dfrac{1}{x})^x(1+x)^{\frac{1}{x}}<4$.

（16）**（本题满分 10 分）**将 yOz 坐标面上的曲线段 $y=f(z)$（$f(z)>0,0\le z\le 12$）绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面与 xOy 坐标面围成一个无盖容器．已知它的底面积为 $16\pi(m^2)$，如果以 $3(m^3/s)$ 的速度把水注入容器内，在高度为 z (m) 的位置，水的上表面积以 $\dfrac{3}{z+1}$ (m^2/s) 的速度增大．（Ⅰ）试求曲线 $y=f(z)$ 的方程；（Ⅱ）若将容器内水装满，问需要多少时间？

（17）（**本题满分 10 分**）已知平面上两点 $A(4,6),B(6,4)$，C 为椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$ 上的点，求 ΔABC 面积的最大值和最小值.

（18）（**本题满分 10 分**）设区域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 2$，计算 $I=\iint\limits_D[(y-1)e^{x^2|y-1|}+|x-y|]d\sigma$.

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y(1)=1$，计算 $\int_1^2 y(x)dx$.

（20）（**本题满分 10 分**）设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.（Ⅰ）求 L 的参数方程确定的函数 $y=y(x)$ 的定义域；（Ⅱ）求曲线 L 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转一周而形成的旋转体体积 V_y；（Ⅲ）设曲线 L 的形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$，求 $\overline{y}$.

（21）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f'(0)=f'(1)=0$.

（Ⅰ）证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $2f(\frac{1}{2})=f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi)}{4}$；

（Ⅱ）证明至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $|f(1)-f(0)|\le\frac{|f''(\eta)|}{4}$.

（22）（**本题满分 11 分**）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三个三维列向量，$A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T$.（Ⅰ）证明存在矩阵 B 使得 $A=B^TB$；（Ⅱ）当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关时，证明 $r(A)=3$；（Ⅲ）当 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$ 时，求 $Ax=0$ 的通解.

（23）（**本题满分 11 分**）设 A 是二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵，$r(A)=1$. 齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$ 的通解为 $x=k\alpha_1$，其中 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$，k 为任意实数.（Ⅰ）求解齐次线性方程组 $Ax=0$；（Ⅱ）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-ax-b}{x^2}=c\neq 0$，则（　　）．

（A） $a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$　　（B） $a=1,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$

（C） $a=1,b=0,c=f''(0)$　　（D） $a=1,b=1,c=f''(0)$

（2）设函数 $f(x)$ 连续，则下列结论不成立的是（　　）．

（A） $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$　　（B） $\int_0^{\pi} f(\sin^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx$

（C） $\int_0^{\pi} f(\cos x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$　　（D） $\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx$

（3）函数 $f(x)=|x|\max\{1,|x^3|\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不可导点的个数为（　　）．

（A） 0　　（B） 1　　（C） 2　　（D） 3

（4）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=2$，则（　　）．

（A） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续，但右导数不一定存在

（B） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右导数存在且 $f'_+(0)=2$

（C） 存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增

（D） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处一定不取极值

（5）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)+u(x)f'(x)+v(x)f(x)=0$，其中 $v(x)<0$，则下列结论正确的是（　　）．

（A） $f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值，但不可取负的最小值

（B） $f(x)$ 在 (a,b) 内可取负的最小值，但不可取正的最大值

（C） $f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值，也可取正的最小值

（D） $f(x)$ 在 (a,b) 内不能取正的最大值，也不能取负最小值

（6）设平面点集 $D=\left\{(x,y)\middle|0<y<x^2,-\infty<x<+\infty\right\}$，函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 则在点 $(0,0)$ 处（　　）．

（A） $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在　　（B） $f(x,y)$ 连续　　（C） $f(x,y)$ 偏导数存在　　（D） $f(x,y)$ 可微

（7）设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，且 AB 可逆，则必有（　　）.

（A） A 的行向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

（B） A 的列向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（C） A 的行向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（D） A 的列向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

（8）设 A 是三阶矩阵，A 的秩 $r(A)=1$，A 有特征值 $\lambda=0$，则 $\lambda=0$（　　）.

（A）必是 A 的二重特征值　　（B）至少是 A 的二重特征值

（C）最多是 A 的二重特征值　　（D）可能是 A 的一、二或三重特征值

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）已知参数方程 $\begin{cases} x=e^t, \\ \sin t=\int_0^y e^{-u^2}du, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=$__________.

（10）设二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=ae^x$（p,q,a 是常数）有两个特解 $y_1=xe^x$，$y_2=e^{2x}+xe^x$，则该方程的通解为__________.

（11）把直角坐标系下的二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标系下的二次积分为________.

（12）方程 $x^5+2x+\cos x=a$ 的实根个数为__________.

（13）$\int_0^1(\ln x)^2dx=$__________.

（14）已知 A 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，若 $(A-E)^{-1}=B-E$，则 $|A|=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t dy\int_y^t f(x-y)dx}{(\sqrt[3]{\cos t}-1)\cdot\sin t}$.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $y(x)$ $(x\ge 1)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0, y''(x)>0$，$y(1)=1$．如果曲线 $y=y(x)$ 从点 $P_0(1,1)$ 到其上任一点 $P(x,y)$ 的弧长等于曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的切线在 y 轴截距的绝对值，求此曲线方程.

（17）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=f(x,y)=x^2+y^2-2x+2y$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\le 4, x\ge 0$ 上的最大值与最小值.

(18)(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x, & x^2+y^2\le 1,\\ x^2+y^2, & x^2+y^2>1,\end{cases}$ 计算二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,其中 $D:0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

(19)(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x)$ 连续.(Ⅰ)证明:对于任意的实数 a,b,均有

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx;$$

(Ⅱ)计算 $I_n=\int_0^{2\pi}(3\cos x+4\sin x)^n dx$,其中 n 为正整数.

(20)(**本题满分 11 分**)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,$f(0)=0, f(1)=1$.(Ⅰ)证明存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f(a)=\dfrac{1}{3}$;(Ⅱ)证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$,有 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{1}{f'(\xi_3)}=3$.

(21)(**本题满分 11 分**)设 $f(x)=\arctan x,\ g(x)=x-ax^3$.若对任意的 $x>0, f(x)\ge g(x)$,求常数 a 的最小值.

(22)(**本题满分 11 分**)已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ 3x_1+x_2+4x_3+2x_4=0,\\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有两个线性无关的解.

(Ⅰ)证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=3$;(Ⅱ)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\3\\5\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}a\\1\\3\\b\end{pmatrix}$,证明 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法唯一,并求 a,b 的值.

(23)(**本题满分 11 分**)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$ 的正惯性指数为 $p=1$,二次型的矩阵 A 满足 $A^2-A=6E$.(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形,并写出二次型的规范形;(Ⅱ)求行列式 $\left|\dfrac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵;(Ⅲ)记 $B=A^2-kA+6E$,问 k 满足何条件时,二次型 $g(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TBx$ 正定?

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=x^2\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\arctan(x^2)$（　　）．

（A）有一条渐近线　（B）有两条渐近线　（C）有三条渐近线　（D）没有渐近线

（2）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)>0$． $F(x)=\int_0^{x^2} tf(x^2-t)\,dt$，则（　　）．

（A） $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值　（B） $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最大值

（C） $F'(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值　（D） $F'(x)$ 在点 $x=0$ 处取最大值

（3）设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处右连续，则（　　）．

（A） $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续， $f(-\dfrac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

（B） $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续， $f(-\dfrac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

（C） $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续， $f(-\dfrac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

（D） $f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续， $f(-\dfrac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\leq 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$，则在点 $x=0$ 处（　　）．

（A） $F(x)$ 不可导； $G(x)$ 不可导　（B） $F(x)$ 不可导； $G(x)$ 可导

（C） $F(x)$ 可导； $G(x)$ 不可导　（D） $F(x)$ 可导； $G(x)$ 可导

（5）设 D 是由直线 $y=x, x=\dfrac{1}{2}$ 及 x 轴所围成的区域，则二重积分

$$I_1=\iint_D \sin(x+y)^2\,d\sigma,\quad I_2=\iint_D \sin(x^2+y^2)\,d\sigma,\quad I_3=\iint_D \sin(4x^2)\,d\sigma$$

的大小关系为（　　）．

（A） $I_1<I_2<I_3$　（B） $I_3<I_2<I_1$　（C） $I_2<I_1<I_3$　（D） $I_2<I_3<I_1$

（6）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$， $f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则 $(f^{-1}(x))'=$（　　）．

（A） $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$　（B） $\dfrac{1}{f'(x)}$　（C） $\dfrac{1}{f'(f(x))}$　（D） $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

（7）设 A 为 n 阶方阵 $(n>2)$，A^* 为 A 的伴随矩阵，则下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $Ax=0$ 有 n 个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 仅有零解

（B）若 $Ax=0$ 仅有 $n-1$ 个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 仅有一个线性无关的解

（C）若 $Ax=0$ 仅有 1 个线性无关的解，则 $A^*x=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解

（D）若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $A^*x=0$ 有 n 个线性无关的解

（8）矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）.

（A）$a=0,b=2,c=2$　　　　（B）$a=0,b=2,c$ 为任意常数

（C）$a=0,b=0,c=0$　　　　（D）$a=2,b=2,c$ 为任意常数

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）当 $x>-1$ 时，函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，若 $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\sin\frac{x}{t^2}$，则 $\int_0^1 F(x)dx=$__________.

（10）已知凹曲线 $y=y(x)$ 在任一点 $P(x,y)$ 处的曲率 $K=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$，且 $y(0)=0, y'(0)=0$，则 $y(x)=$__________.

（11）由曲线 $y=x^2-1$，直线 $y=-1, x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为__________.

（12）设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y, z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$，则 $z(x,y)=$__________.

（13）设函数 $f(x)=x^2\sin 2x$，则当 $n\ge 1$ 时，$f^{(2n+1)}(0)=$__________.

（14）设向量 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$ 和 $\beta_1=(2,1)^T$，$\beta_2=(1,3)^T$，$\xi=-\alpha_1+\alpha_2$，则 ξ 由 β_1,β_2 线性表示的表达式为 $\xi=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$．若对任意的 $n=1,2,\cdots$，有 $f(2n-1)>f(2n+1)>f(2n+2)>f(2n)$，证明数列 $\{f(n)\}$ 收敛.

（16）（**本题满分 10 分**）设 $I(a)=\iint\limits_{D(a)}[(x+y)^2-\dfrac{\pi}{3}y-6]d\sigma$，其中 $D(a)$ 为 $y=\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 与 $y=\sqrt{3}|x|$ 所围区域.（Ⅰ）求 $I(a)$；（Ⅱ）求 a，使得 $I(a)$ 最小.

（17）（**本题满分 11 分**）已知 m 为实常数，讨论方程 $x^2-me^x-3=0$ 实根的个数.

（18）（**本题满分 10 分**）设 $I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$，$n=0,1,2,\cdots$.（Ⅰ）证明 $I_n=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin nx}{\sin x}dx$；（Ⅱ）当 $n\ge 2$ 时，证明 $I_n=I_{n-2}$，并求 I_n，$n=0,1,2,\cdots$.

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$，f 具有二阶连续偏导数，φ 具有二阶导数，且 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（20）（**本题满分 11 分**）（Ⅰ）证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）设 $I(x)=\int_0^1\dfrac{\ln(1+xt)}{t}\cos\dfrac{\pi}{2}t\,dt$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x}$.

（21）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均二阶可导，且 $g''(x)\ne0$，证明：（Ⅰ）$g(b)-g(a)\ne g'(a)(b-a)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

（22）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，已知非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数），试求 $By=\beta$ 的通解.

（23）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$.（Ⅰ）若 $a>2$，求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形；（Ⅱ）若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数均为1，求该二次型在正交变换下的标准形.