20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】：$f(x)=kx^{k-1}\sin x+x^n\cos x\sim(k+1)x^k$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{k(k+1)x^{k-1}}{a2x(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{k(k+1)x^{k-1}}{ax^3}=1$$，故 $k=4,a=20$。答案A.

（2）【解】 两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$,令

$$f(x)=kx^2-\ln x,\ f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0,\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}},\ f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根,即两个曲线无交点.

注:本题也可以用取特殊值法，令 $k=1$，则讨论起来更方便.

（3）【解】：答案（A）

（4）【解】：答案(C)

（5）【解】：答案（C）

（6）【解】：答案（A）

（7）【解】：由于 $P(\bar{A}\bar{B})=0.2$，根据独立性 $0.2=P(\bar{A})P(\bar{B})=0.6P(\bar{B}),P(\bar{B})=\dfrac{1}{3}$，所以

$$P(A\cup\bar{B})=1-P(\bar{A}B)=1-P(\bar{A})P(B)=1-0.6\cdot\frac{2}{3}=0.6$$，答案（A）

（8）【解】：由于 $\int_0^{+\infty}P(X>x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(1-F(x))\mathrm{d}x=x(1-F(x))\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xf(x)dx=E(x)$，又因为方差存在，二阶矩 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$，上式中

$$\lim_{x\to+\infty}x(1-F(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-F(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\int_{-\infty}^{x}f(t)dt}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$$，答案：（A）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)【解】：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\dfrac{\arctan x-x}{x})^{\frac{x}{\arctan x-x}}\right]^{\frac{\arctan x-x}{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，所以原式 $=e^{-\frac{1}{3}}$.

（10）【解】：由题设有，$\int_0^1xf'(x)dx-\int_0^1f(x)dx=\int_0^1xe^{x^2}dx$，积分可得 $xf(x)\Big|_0^1-2\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(e-1)$，所以 $\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}(1-e)$.

（11）【解】：齐通解 $Y_x=C3^x$，特解为 $y_x^*=xA3^x$，由此 $y_{x+1}^*=(x+1)A3^{x+1}$，代入方程得 $A=\dfrac{2}{3}$，由此通解为

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$y_x=Y_x+y_x^*=C3^x+\dfrac{2}{3}x3^x$.

（12）【解】：$f'(x)=(1-x\ln n)n^{-x},a_n=\dfrac{1}{\ln n}$，收敛域为$[-1,1)$。

（13）【解】：答案：3.

（14）【解】：$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2)$，$\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{\dfrac{n+1}{n}\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，

由χ^2分布定义，所以$\dfrac{n^2}{(n+1)^2\sigma^4}D(X_{n+1}-\bar{X})^2=2$，$\therefore D(X_{n+1}-\bar{X})^2=\dfrac{2(n+1)^2\sigma^4}{n^2}$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{e^{-y^2}\sin t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=e^{-y^2}\sin t$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\sin t\right)=\sin t\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\right)+e^{-y^2}\cos t\sqrt{1+t^2}$．由题设知$t=0$时$y=1$．因此有$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{e}$.

（16）【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+xf_2',\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+xf_{12}'')+x(yf_{21}''+xf_{22}'')+f_2'=y^2f_{11}''+2xyf_{12}''+x^2f_{22}''+f_2'$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-yf_2',\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-y(xf_{21}''-yf_{22}'')-f_2'=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$，因此

$$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2.$$

（17）【解】：记$D_1:x^2+y^2\le1,0\le y\le x,D_2:1\le x^2+y^2\le\sqrt{2}x,0\le y\le x$，则

原式$=\iint\limits_{D_1}(1-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}(\sqrt{x^2+y^2}-1)\,\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}(1-\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}-1)\,\mathrm{d}\sigma$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1r(1-r)\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}\cos\theta}r(r-1)\,\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{12}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\theta-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

$=\dfrac{11}{36}-\dfrac{\pi}{12}$.

（18）（本题满分 10 分）求级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)}x^{n-1}$的收敛域及和函数$S(x)$；且求级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

【解】:（I）由于$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，且$x=-1,\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n^2-1)};x=1,\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)}$均收敛，收敛域为$-1\le x\le1$；

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n+1},$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n+1},S_1'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=xS_2(x),$

再令 $S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1},S_2'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},-1<x<1$，所以 $S_2(x)=-\ln(1-x)$；代入上式

$S_1'(x)=-x\ln(1-x)$，所以

$$S_1(x)=-\int_0^x t\ln(1-t)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\ln(1-t)dt^2=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)+\int_0^x\frac{t^2}{1-t}dt]=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)+\int_0^x\frac{t^2-1+1}{1-t}dt]$$

$$=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)-\frac{1}{2}x(x+2)-\ln(1-x)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)]$$

级数的和函数 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)], & -1<x<1,x\neq 0\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{4}, & x=1\\ -\frac{1}{4}, & x=-1\end{cases}$；

（II）由上式，可得 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n=\frac{1}{2x}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)]$，

令 $x=\frac{1}{2}$，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+2)+\frac{3}{4}\ln\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}(\frac{5}{2}-\ln 2)$.

（19）【解】：（Ⅰ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$F(x)-F(0)=F'(x)x$，即有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)=1$.

（20）【解】：令 $X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，矩阵方程化为 $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，即

$$\begin{cases}A\xi_1=\beta_1\\A\xi_2=\beta_2\\A\xi_3=\beta_3\end{cases}.\ (A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&-\frac{1}{2}(a-1)&b-2&1+\frac{c}{2}\end{pmatrix},$$

当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

此时 $(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

方程组 $A\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$（$l$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$（$t$ 为任意常数);

（21）　【解】（I）据已知条件，有 $\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&0&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}$，即

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$，所以 $x^TAx=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$。

（II）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 A 的特征值为 $2,2,-4$.

由 $(2E-A)x=0,\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$;

由 $(-4E-A)\boldsymbol{x}=0,\begin{bmatrix}-4&-2&-2\\-2&-4&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$\beta_2=a_2-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$，再对 β_1,β_2,β_3 单位化，有

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

那么令 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，有 $x^TAx=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

（III）因为 $A+kE$ 的特征值为 $k+2,k+2,k-4$，所以当 $k>4$ 时，矩阵 $A+kE$ 正定.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（22）【解】:（I） X 边缘密度函数为 $f_X(x)=\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})dy=2x(x+\frac{1}{3}),\ 0<x<1$，

Y 边缘密度函数为 $f_Y(y)=\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}(1+\frac{y}{2}),\ 0<y<2$；

（II）概率为 $P(X+Y\ge 1)=1-\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+\frac{xy}{3})dy=\frac{65}{72}$；

（III）在有效区域 $0<x<1, 0<y<2$， $f_X(x)f_Y(y)=2x(x+\frac{1}{3})\frac{1}{3}(1+\frac{y}{2})=\frac{2x}{3}(x+\frac{1}{3})(1+\frac{y}{2})\ne f(x,y)$

所以 X 与 Y 不独立.

（23）【解】: （I） 矩估计 $\mu=\int_0^\theta x\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$；令 $\mu=\bar{X}$，即 $\frac{3}{4}\theta=\bar{X}$，

所以 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_J=\frac{4}{3}\bar{X}$ ；

极大似然估计　又由于 $L=\prod_{i=1}^n\frac{3x_i^2}{\theta^3}=\frac{3^n(x_1x_2\cdots x_n)^2}{\theta^{3n}}$， $0<x_i<\theta$，

所以 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(n\ln 3+2\sum_{i=1}^n\ln x_i-3n\ln\theta)=-\frac{3n}{\theta}<0$，可知 L 单调减，又 $0<x_i<\theta$，由定义知 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$；

（II）另一方面，容易知道 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$

又而 $\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$ 的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}_L}(z)=(F(z))^n=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{x^{3n}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta,\\ 1, & z>\theta\end{cases}$$

则 $\hat{\theta}_L$ 对应密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_L}(z)=F'_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$$

（III） 首先 $E(\hat{\theta}_J)=E(\frac{4}{3}\bar{X})=\frac{4}{3}E(\bar{X})=\frac{4}{3}\mu=\theta$，由于 $E(X^2)=\int_0^\theta x^2\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{5}\theta^2$ 则总体方差为 $D(X)=E(X^2)-\mu^2=\frac{3}{5}\theta^2-\frac{9}{16}\theta^2=\frac{3}{80}\theta^2$，所以 $D(\hat{\theta}_J)=\frac{16}{9}D(\bar{X})=\frac{16}{9}\frac{D(X)}{n}=\frac{\theta^2}{15n}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=0,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=\infty,\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\sqrt{2}}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1,\pm\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 D.

（2）【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}[2\cos x^2+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（3）【解】：答案（A）.

（4）【解】 $u_n^2+v_n^2\geq 2|u_nv_n|$ 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n{}^2$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，即则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，答案（C）.

（5）【解】：因为 β_1 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，所以 $\beta_1+\beta_2$ 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，从而 α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关，故选（D）.

（6）【解】答案：C.

（7）【解】由于 $P(C)=0$，所以对任何事件 A，均有 $P(AC)=0,P(A\cup C)=P(A),P(A\bar{C})=P(A)$，又由 $P((A\bigcup C)(B\bigcup\bar{C}))=1-P(\overline{(A\bigcup C)}\cup\overline{(B\bigcup\bar{C})})=1-P((\bar{A}\bar{C})\cup(\bar{B}C))=1-P(\bar{A}\bar{C})=1-P(\bar{A})=P(A)$；而 $P(A\bigcup C)=P(A),P(B\bigcup\bar{C}))=P(B)+P(\bar{C})-P(B\bar{C})=1$，所以 $A\bigcup C$ 与 $B\bigcup\bar{C}$ 独立，答案（C）.

（8）【解】 $E(\dfrac{1}{X^2})=\int_0^2\dfrac{1}{x^2}\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{3}{4}$； 答案（C）.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 【解】：有题设有 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $[f(\dfrac{1-x}{1+x})]'\Big|_{x=0}=f'(\dfrac{1-x}{1+x})\times\dfrac{-2}{(1+x)^2}\Big|_{x=0}=-1$，

因此曲线 $y=f(\dfrac{1-x}{1+x})$ 在 $x=0$ 处的法线方程是 $\dfrac{y-2}{x-1}=1$，即为 $y=x+1$.

（10）【解】由题设 $y'(0)=0,y''(0)=-k$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y'(x)}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y''(x)}{4}=-\dfrac{k}{4}$.

（11）【解】：两边求导 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$，令 $y'(x)=0$，可得所以 $y=x$，代入原方程，所以 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$，可得极值点 $x=1$，由此知极值为 $y(1)=1$.

（12）【解】：对称性 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}\,x=2\int_0^1\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\,x$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^3-1)d\theta=\frac{2}{3}(4\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\pi).$$

（13）【解】答案：1.

（14）【解】由于 $\bar{X}-X_{n+1}\sim N(0,\dfrac{1+n}{n}\sigma^2)$，$\dfrac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\dfrac{1+n}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\therefore\ \dfrac{n}{n+1}\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，又由于 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，由 χ^2 分布定义与 $\bar{X}$，S^2 的独立性知，$\dfrac{\dfrac{n}{n+1}\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}/1}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}\sim F(1,n-1)$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$\Rightarrow \frac{\frac{n}{n+1}(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$$，常数 $C=\dfrac{n}{n+1}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：令 $y=\left(\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$, $\ln y=\dfrac{\ln\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\dfrac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x(1-\cos x^2)}{2(x-\tan x)(1-\sec^2 x)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{x^5}{(x-\tan x)\tan^2 x}=-\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x}=-\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\sec^2 x}=3,$$

所以原式$=e^3$.

（16）【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}$，

解方程组 $\begin{cases}-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}=0,\\ -2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}=0.\end{cases}$ 得函数 z 在集合 D 内有三个驻点 $(0,0),(0,1),(1,0)$.

（1）在点 $(0,0)$ 处 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2, B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0, C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$，

$AC-B^2=-4<0$，因此 $(0,0)$ 不是函数 z 的极值点;

（2）在点 $(0,1)$ 处 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=\dfrac{4}{e}, B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=0, C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)}=\dfrac{4}{e}$，

$AC-B^2=\dfrac{16}{e^2}>0, A>0$，因此 $(0,1)$ 是函数 z 的极小值点，且 z 在 $(0,1)$ 处取得的极小值为 $z(0,1)=-\dfrac{1}{e}$;

（3）在点 $(1,0)$ 处 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{4}{e}, B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0, C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{4}{e}$,

$AC-B^2=\dfrac{16}{e}>0, A<0$，因此 $(1,0)$ 是函数 z 的极大值点，且 z 在 $(0,1)$ 处取得的极大值为 $z(1,0)=\dfrac{1}{e}$.

（17）【解】：设 $D_1: x^2+y^2\le1, x\ge0, y\ge0$，由对称性：

$$I=\iint_D\frac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\frac{x^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}(1-\frac{1}{1+x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}(1-\ln2).$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（18）【解】:（I） $\int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x [f(x)-f(t)]dt,\ f(x)=2xf'(x),\ f(x)=C\sqrt{x},\ f(1)=2, C=2$；

（II） $V = 4\pi\int_0^1 xf(x)dx = 4\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \dfrac{8\pi}{5}$.

（19）【证明】:（I）则原不等式等价于 $t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0,(t>0)$.

令 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t), t\in[0,+\infty)$，则 $f(0)=0$，

$$f'(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}},$$

令 $g(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，则 $g(0)=$（， $g'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}$，当 $t>0$ 时 $g'(t)>0$，因而有 $f'(t)>0$，即函数 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单增，因而当 $t>0$ 时有

$$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>f(0)=0.$$

原不等式得证;

（II）作变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，原不等式等价于 $\dfrac{t^2}{1+t}>\ln^2(1+t)$，令 $F(t)=\dfrac{t^2}{1+t}-\ln^2(1+t)$，

由于 $F'(t)=\dfrac{t^2+2\mathrm{t}}{(1+t)^2}-2\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}=\dfrac{t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)^2}$,

再令 $\varphi(t)=t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t),\ \varphi'(t)=2(t-\ln(1+t))>0\quad(t>0)$

所以 $\varphi(t)\nearrow$，又 $\varphi(0)=0$，即 $\varphi(t)>0\quad(t>0)$，代入上式知 $F'(t)>0\Rightarrow F(x)\nearrow$, 又 $F(0)=0$，则 $F(t)>0\ (t>0)$，不等式成立。

（20）【解】:（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$,有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 B^{T} 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$ 的解。解此方程组的基础解系 $(1\quad 2\quad 1\quad 0)^{\mathrm{T}},(-1\quad -1\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1&a_2&a_3&a_4\\a_1&4&a_2&a_3\\2&7&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=0 \text{ 即}\begin{cases}1\text{-}2a_2+3a_3-a_4=0\\a_2-2a_3+a_4=0\\a_1-8+3a_2-a_3=0\\4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$,因为 $x_3=-x_4$,即 $3k_1-2k_2{=}k_1\text{-}k_2$,，即 $k_2{=}2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为（$k\quad 0\quad -k\quad k)^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数

（21）【解】:（1） $|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$，得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$，由 A 与对角阵相似知 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的有两个线性无关的特征向量，即 $(6E-A)x=0$ 得基础解系有两个解向量 $3-r(6E-A)=2$，故 $r(6E-A)=1$， $6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&a&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $a=0$。此时二次

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

型为 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$

$=2(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-\frac{21}{2}x_2^2+6x_3^2$，令 $\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{5}{2}y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，则有

$f=X^TAX=Y^TC^TACY=2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2$

（2） $X^TAX=0$ 即 $2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2=0$ 表示锥面。

（22）【解】 由二维均匀分布定义可知，概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\0, & 其他\end{cases}$ 其中 D 的面积为：$S_D=2$

（I） X 边缘密度函数 $f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2x}$， $1<x<e^2$；

条件密度函数为 $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}x, & 0<y<\frac{1}{x}\ (1<x<e^2)\\0 & 其他\end{cases}$

（II）由（I）的条件概率密度函数知，当 $X=\frac{3}{2}$， $f_{Y/X=\frac{3}{2}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}, & 0<y<\frac{2}{3}\\0, & 其他\end{cases}$，

由此 $P(Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dy=\frac{3}{4}$.

（III） $E(XY)=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}xdx\int_0^{\frac{1}{x}}ydy=\frac{1}{4}\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}$.

（23）【解】（I）由于 $\mu=E(X)=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^\theta\int_c^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{c\theta}{\theta-1}$；令 $\mu=\bar{X}$，

所以 $\frac{c\theta}{\theta-1}=\bar{X}\quad\Rightarrow c\theta=\bar{X}(\theta-1)$, 可知 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$；

（II）求最大似然估计，

1）$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}=\theta^nc^{n\theta}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\theta+1)}$；

2）$\ln L=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$，$\frac{dL}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$

3）由此解得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i-\ln c}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】：$f[f(x)]=\begin{cases} x+2, x\geq 0, \\ \dfrac{x}{1-2x}, x<0 \end{cases}$，故 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的跳跃间断点。答案 B.

（2）【解】：根据函数曲线的凹凸性可得答案是 A。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（3）【解】：由于$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin a}{n^3}+\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})]$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin a}{n^3}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$条件收敛，所以原级数条件收敛.

（4）【解】答案：B

（5）【解】：答案：D

（6）【解】答案：D

（7）【解】由于$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P\{X=-1,Y\le z+1\}+P\{X=1,Y\le z-1\}$$

$$=\frac{1}{2}[F_Y(z+1)+F_Y(z-1)],$$

对$Z=X+Y$的概率密度函数为$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<z<0\\ \frac{1}{2}, & 1<z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，由此知$P\{X+Y\le 1\}=\frac{3}{4}$，答案为（B）.

（8）【解】由于总体X不一定是正态分布，所以答案（D）

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

（9）【解】：有题设知$y(1)=1$，对等式两边同时求微分可得$e^{xy}(ydx+xdy)+2xdx+dy=0$，将$x=1,y=1$代入可得$dy\big|_{x=1}=-\frac{e+2}{e+1}dx$.

（10）【解】：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1$。

（11）【解】：解法一：$x^2y=\frac{1}{2}\sin 2x+C$。

解法二：$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int\frac{1}{x^2}\cos 2xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C)=\frac{1}{2x^2}\sin 2x+\frac{C}{x^2}$。

（12）【解】：$\lim\limits_{a\to0^+}\frac{I(a)}{\ln(1+a^2)}=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{\frac{\pi a^2}{2}e^{\xi^2-\eta^2}}{a^2}=\frac{\pi}{2}$

（13）【解】：因为$|B^{-1}|=\frac{1}{3}$,所以$|B|=3$,又因为$A\sim B$,所以A,B有相同的特征值,设A的另一个特征值为λ_3,由$|A|=|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,得$\lambda_3=-3$,因为$A-3E$的特征值为$-4,-2,-6$,所以$|A-3E|=-48$.

因为$B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1}$,所以

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$\left|B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\right|=(-1)^3\left|B^{-1}\right|=-\frac{1}{3}$，于是$\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=\left|(A-3E)^{-1}\right|\left|B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\right|=\frac{1}{144}$.

（14）【解】：$\boldsymbol{E(X+2Y)(3X-Y)=3E(X^2)-2E(Y^2)+5E(XY)=-6}$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：$(1+ax+bx^2)\sqrt{1+x}-c=(1+ax+bx^2)[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)]-c$

$$=1-c+(a+\frac{1}{2})x+(b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{4})x^2+(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a+\frac{1}{16})x^3,$$

$x\to 0$ 时 $\sin x\ln(1+x^2)\sim x^3$，因此有 $1-c=0,(a+\frac{1}{2})=0,(b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{4})=0$，解得

$c=1,a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{8}$，$d=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a+\frac{1}{16})x^3}{x^3}=\frac{5}{16}$.

（16）【解】：作代换 $u=xy+z-t,du=-dt$，所以 $\int_{xy}^{z}g(u)du=e^{xz}$, 可知

$$g(z)\frac{\partial z}{\partial x}-yg(xy)=e^{xz}(z+x\frac{\partial z}{\partial x})\qquad \frac{\partial z}{\partial x}(g(z)-xe^{xz})=yg(xy)+ze^{xz},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yg(xy)+ze^{xz}}{g(z)-xe^{xz}}$$

$$g(z)\frac{\partial z}{\partial y}-xg(xy)=xe^{xz}\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y}(g(z)-xe^{xz})=xg(xy),\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xg(xy)}{g(z)-xe^{xz}},$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(x+y)g(xy)+ze^{xz}}{g(z)-xe^{xz}}$，

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+e^z f_3'\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+e^z f_3'\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'+(x+y)f_2'+e^z f_3'(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=f_1'+(x+y)f_2'+e^z f_3'\frac{(x+y)g(xy)+ze^{xz}}{g(z)-xe^{xz}}.$$

（17）【解】：$\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\frac{1}{1+x^2})$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\int\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C,$$

所以 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

（18）【解】：（1）令 $a_1=a_0+d$，则 $a_n=a_0+nd$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}=1$，故 $\mathrm{R}=1$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=a_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n+d\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $\int_0^x f(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$，

$f(x)=(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+d\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{a_0}{1-x}+d\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{a_0+(d-a_0)x}{(1-x)^2}=s(x),$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=s(\dfrac{1}{2})=2(a_0+d).$

（19）【证明】:（Ⅰ）方法一　$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恒不为零，则必有 $f(x)$ 恒为正（或者恒为负）由此可得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$（或者 <0）与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故必 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$；

方法二　$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上应用拉格朗日中值定理即可；

（Ⅱ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则有 $F(0)=F(1)=0$，

$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}[F(x)]=g(x)F(x)\big|_0^1-\int_0^1 F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=0$，由（Ⅰ）的结论知 $\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)g'(x_0)=0$，$g'(x_0)\neq0$，从而有 $F(x_0)=0$，对函数分别在区间 $[0,x_0]$ 及 $[x_0,1]$ 上应用 Rolle 定理知，$\exists\xi_1\in(0,x_0),\exists\xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=f(\xi_1)=F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0$，再对函数 $f(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\eta)=0$ 成立.

（20）【证明】:（I）若 α_1 α_2 均为 A 属于 0 的特征向量　则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=0$
由题设 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2\neq0$ 矛盾；类似 若 α_1,α_2 均为 A 属于 1 特征向量。则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2\neq\alpha_2$ 也与题设矛盾,故 α_1 α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量

又 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$　知 α_1 是 A 属于 0 的特征向量，α_2 是 A 属于 1 的特征向量。因 A 是实对称矩阵 故 α_1 α_2 线性无关。

（II）因 A 是实对称矩阵。故 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$ 相似。从而秩（A）=秩 $(\Lambda)=2$。表明齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数 $3-$秩$(A)=1$，由此 $A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=\alpha_2$　故 α_1 是 $Ax=0$ 基础解系，α_2 是 $Ax=\alpha_2$ 的一个特解，$\therefore Ax=\alpha_2$ 通解 $\alpha_2+k\alpha_1$.

（21）【解】:（I）由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量。设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)^T$　则由 $<x,\xi_3>=0$ 可得 $x_1+x_3=0$　及基础解系 $\xi_1=(1\ \ 0\ \ -1)^T$ $\xi_2=(0\ \ 1\ \ 0)^T$。
即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量。

单位化 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $U=(\eta_1\ \ \eta_2\ \ \eta_3)$ 即为所求。

（II）由题得知 $A=U\Lambda U^T$，所以矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，由此原二次型为

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}-2x_1x_3$.

（22）【解】:（I）由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，可得$1=A\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\dfrac{A}{3}$, 由此$A=3$；

（II）边缘概率密度 $f_Y(y)=3\int_y^1 xdx=\dfrac{3}{2}(1-y^2)$，$0<y<1$; ；

且条件概率密度函数 $f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1(0<y<1)\\ 0, & other\end{cases}$；

（III）由于$\mathrm{Z}=XY$，由此根据分布函数知，$F_Z(z)=P\{XY\le z\}$

对$z<0$，$F_Z(z)=0$, $z\ge 1$, $F_Z(z)=1$

对 $0\le z<1$, $F_Z(z)=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{xy\le z}f(x,y)dxdy=1-3\int_{\sqrt{z}}^1 xdx\int_{\frac{z}{x}}^x dy=3z-2z^{\frac{3}{2}}$；

由此可知，对分布函数求导可得，$\mathrm{Z}=XY$ 的概率密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}3(1-\sqrt{z}), & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（23）【解】:（I）X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$X$ 的均值为$\mu=E(X)=\dfrac{3\theta}{2}$，令$\mu=\bar{X}$

可得θ的矩估计为$\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{3}\bar{X}$，$E(\hat{\theta}_1)=\dfrac{2}{3}E(\bar{X})=\dfrac{2}{3}\mu=\theta$；

（II）求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$，

1）似然函数$L=\prod\limits_{i=1}^n\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{1}{\theta^n}$，$\theta<x_i<2\theta$，由于$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}<0$, 所以$L$关于$\theta$的减函数，

2）在 $\theta<x_i<2\theta$条件下，要使L大，只需θ小即可，由最大似然估计的定义知，θ的最大似然估计为$\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2}\max\{x_i\}$，或$\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2}\max\{X_i\}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】：当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在但 $g(x)$ 为有界函数时，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 是存在的，故答案是 C。

（2）【解】：因为 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$1<\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$，因而有 $I_1<1$，又 $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{\tan x}<1$，因而有

$I_2>1$，由此 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\frac{\tan x}{x}<1$，$I_1<\frac{\pi}{4}$; 又 $1<\frac{4}{\pi}\frac{x}{\tan x}<\frac{4}{\pi},\frac{\pi}{4}<I_2<1$，所以 $I_1<\frac{\pi}{4}<I_2<1$ 答案是 C.

（3）【解】：由隐函数方程的偏导数， $f_x'+f_y'2x=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$, 代入可得

$2xf_y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}-f_x'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}+x^2e^{-x}=2xe^{-x}$, 所以 $f_y'(x,y)|_{y=x^2}=e^{-x}$， 答案：（C）.

（4）【解】：特征方程为 $r^2-2r+3=0$, 特征根为 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{2}i$，而 $\lambda=1+\sqrt{2}i$ 是特征根，由此答案（B）.

（5）【解】：答案 B

（6）【解】答案：C

（7）【解】：答案 C

（8）【解】 题意可知概率 $P\{|\bar{X}-\mu|<0.5\}\geq 0.997$，由中心极限定理可知，n 很大时，

$P\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{n\sigma}\leq x_0\}\approx\Phi(x_0)$，在由此 $P\{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right|<0.5n\}\geq 0.997$,

$$P\{\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right|}{n\sigma}<\frac{0.5\sqrt{n}}{\sigma}\}\geq 0.997，\quad 2\Phi(\frac{0.5\sqrt{n}}{\sigma})-1\}\geq 0.997, \Phi(\frac{0.5\sqrt{n}}{\sigma})\geq 0.998,$$

$\frac{0.5\sqrt{n}}{\sigma}\geq 2.97$，$\sqrt{n}\geq 11.88$, 由此可知，抽取样本容量大致为 $n\geq 141.1$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9)【解】：方法一， $f(x)=x^2\ln(1-x^2)=-x^2[x^2+\frac{x^4}{2}+\cdots+\frac{x^{2m}}{m}+\cdots]$， $n=2(m+1), m=\frac{n}{2}-1$,

所以 x^n 对应系数 $-\frac{1}{\frac{n}{2}-1}=-\frac{2}{n-2}$，则 $f^{(n)}(0)=-\frac{2}{n-2}n!$.

方法二， $f^{(n)}(x)=[x^2\ln(1+x)+x^2\ln(1-x)]^{(n)}$

$$=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}+\cdots$$

$$+x^2\frac{(-1)(n-1)!}{(1-x)^n}+2nx\frac{(-1)(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}+\cdots，\text{所以}$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$f^{(n)}(0)=-\frac{[1+(-1)^{n-2}]n!}{(n-2)}=-\frac{2}{(n-2)}n!$.

（10）【解】：分别讨论，$0<x\le 1$，$f'(\ln x)=1,\int f'(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx,\Rightarrow f(\ln x)=\ln x+C,$ 令 $x=1,$ 代入 $f(0)=1$，所以 $C=1$，即 $f(x)=x+1$;同理讨论 $x>1$ 情形，可得 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0<x\le 1\\ e^x, & x>1\end{cases}$.

（11）【解】：方程两边同时求全微分，将 $x=1,y=0,z=1$ 代入可得 $dx+dy+dz=0,dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-dx-dy$。

（12）【解】：$\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy=\int_0^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy\int_0^y dx=\int_0^{2\pi}|\sin y|dy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy=4$.

（13）【解】：**答案：$\boldsymbol{k(-1\ \ 1\ \ 1)^T,k\neq 0}$**

（14）【解】： 由于 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$， $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-2y}, & y\ge 0\end{cases}$ 由独立性，

由于 $P\{\max\{X,Y\}>\frac{1}{2}\}=1-P\{\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2}\}=1-P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}$

$$=1-P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{Y\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}(1+e^{-1})$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 可知 $f(0)=0,f'(0)=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\frac{f(x)-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{f(x)-\sin x}}\right)^{\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}}=\sqrt{e}$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x^2}\times\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}-\frac{\cos x-1}{2x}]=\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2},$$

所以 $f''(0)=1$.

（16）【解】：由题意可知，问题归结为求 $q=0.0005x^2yz$ 满足条件 $x+2y+3z=2400$ 的条件极值问题令 $F(x,y,z,\lambda)=0.0005x^2yz+\lambda(x+2y+3z-2400)$

对 $F(x,y,z,\lambda)$ 关于 x,y,z,λ 分别求导，并令其为零，可得方程组：

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$\begin{cases} F_x' = 0.001xyz + \lambda = 0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ F_y' = 0.0005x^2z + 2\lambda = 0, \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ F_z' = 0.0005x^2z + 3\lambda = 0, \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \\ F_\lambda' = x + 2y + 3z - 2400 = 0, \cdots\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)式可得 $x = 4y = 6z$，结合(4)式可得 $x = 1200, y = 300, z = 200$，由于实际问题有解，上述方程组解唯一，所以当 $x = 1200, y = 300, z = 200$ 时，可使产量最大.

（17）【解】：设 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = A$，等式两边同时积分可得 $A^2\iint\limits_D xydxdy = A-1, A^2-4A+4=0, A=2.$

所以 $xy(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2 = f(x,y)-1$，$f(x,y) = 4xy+1$，

$$\int_0^1 I(t)dt = \int_0^1 dt\int_t^1 f(x,t)dx = \int_0^1 dt\int_0^t (4xt+1)dx \quad = 4\int_0^1 tdx\int_0^t xdx + \frac{1}{2} = 1$$

（18）【解】：（I）$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n xd\sin x = \left.\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}$，

（II）令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2+3n+3)}{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+2)x^{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1}]$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 1 = (\frac{1}{1-x})' - 1 = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x),$$

$$f(x) = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - \ln(1-x), x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)I_n = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})^2} - \ln(2-\sqrt{2}) + \ln 2.$$

（19）【证明】：（Ⅰ）由题设有 $f(a)(1-a) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(0,a)$ 有 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(a)-F(0) = F'(\xi)a = f(\xi)a$，从而有 $f(\xi) = f(a)(1-a)$；

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[\xi,a]$ 上应用 Largrange 中值定理知 $\exists\eta\in(\xi,a)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)-f(a) = f'(\eta)(\xi-a)$，而 $f(\xi) = f(a)(1-a)$，因而有

$$(\xi-a)f'(\eta) = -af(a).$$

故原命题成立.

（20）【解】：(I) 证明：由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，可推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 $\beta = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 等价从而秩相同。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

据此增广矩阵 $\overline{A}=(A\beta)$ 的秩 $=r(A)=n-1<n$　因此方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多解。

（II）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-1}\alpha_{n-1}=0$

故 $A\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=0$

又 $\because$ $r(A)=n-1$　$\therefore (l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系；

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}x=\alpha_1+\cdots\alpha_n=\beta$ 知 $\left(1,1,\cdots,1\right)^T$ 是 $Ax=\beta$ 特解；

于是 $Ax=\beta$ 通解是 $(1,1,\cdots,1)^T+k(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T=(1+kl_1,\cdots 1+kl^{n-1},1)^T$，因此若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 解时,必有 $k_n=1$.

（21）【解】:（I）$\because$ $A\alpha_1=0$　$A\alpha_2=0$　表明 α_1，α_2 是特征向量且无关，

设 $A=(a_{ij})_3$，$\because \begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases} \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 因此，A 有另一特征值 3。$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为其对应的特征向量。$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关　$\therefore$A 可对角化

（II）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$，　$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}$

$$A^{1000}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{1000}=P\Lambda^{1000}P^{-1}=3^{999}\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}.$$

（22）解】:（I）边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x^4, & 0<x<1\\ 2x(2-x)^3, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}，\quad f_X(x)=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(II) X与Y 的独立性：　由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，X与Y 不独立；

X与Y 相关性：　$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

而 $E(XY)=6\int_0^1 y^3dy\int_y^{2-y}x^2dx=2\int_0^1 y^3(8-12y+6y^2)dy=\dfrac{6}{5}$

$E(X)=\int_0^1 2x^5dx+\int_1^2 2x^2(2-x)^3dx=\dfrac{16}{15}$，　$E(Y)=\int_0^1 12y^3(1-y)dy=\int_0^1=\dfrac{3}{5}$

所以 $Cov(X,Y)=\dfrac{6}{5}-\dfrac{16}{15}\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{25}$，可知 X与Y 相关.

（III）$Z=X+Y$ 是密度函数 $f_Z(z)$，可以利用公式法，由于有效区域图形知利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$，由此 $f(z-y,y)=6(z-y)y^2, 0<y<1, 2y<z<2.$，

所以在 $0\le z<2$ 时，$f_Z(z)=6\int_0^{\frac{z}{2}}(z-y)y^2dy=\dfrac{5}{32}z^4$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

由此知 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{5}{32}z^4, & 0\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

（23）【解】:（I）求最大似然估计

（1）似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}a\theta x_i^{a-1}e^{-\theta x_i^a}=a^n\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{a-1}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^a}$ ，知

（2） $\ln L=n\ln a+n\ln\theta+(a-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i^a$ ， $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^a=0,$

（3）解得 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^a}$.

（II）若 $a=1$ 时，. $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$ ， $E(\hat{\theta}^{-1})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=E(\overline{X})=\mu=\int_0^{+\infty}x\theta e^{-\theta x}dx=\dfrac{1}{\theta}=\theta^{-1}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】：由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=2$，由连续性可得 $f'(0)=f(0)=0$，

由导数定义 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)-[f'(x)-f'(0)]}{x}=f'(0)-f''(0)=-f''(0),$

可知 $f''(0)=-2<0,$ 所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

（2）【解】：答案为（B）.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（3）【解】：函数 $f(x,y)$ 关于 x 轴方向是减函数，关于 y 轴方向是增函数，由此答案（A）

（4）【解】：因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.
综上有 $I_2>I_1>I_3$，答案（B）.

（5）【解】：由基本公式：$A^*=|A|A^{-1}$，A_{ij} 为 A^* 中 (j,i) 的元素，

由于 $|A|=(-1)^{1+n}(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\cdots & 0\\ 0 & -1 & 0\cdots & 0\\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots-1\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$，故

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=1+1+\cdots+1=n$，答案：（B）.

（6）【解】： 答案：C

（7）【解】：X 分布律 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，随机变量 Y 概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}, -1<y<2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$，则概率

可知 $P\{XY>1\}=P\{X=1,Y>1\}+P\{X=2,Y>\frac{1}{2}\}=\frac{2}{3}P\{Y>1\}+\frac{1}{3}P\{Y>\frac{1}{2}\}=\frac{7}{18}$，答案（D）.

（8）【解】：由协方差的性质，与相关系数的定义可知：

$$\mathrm{Cov}\left(X+1,\frac{5-Y}{3}\right)=-\frac{1}{3}\mathrm{Cov}\left(X,Y\right)=-\frac{1}{3}\sqrt{D(X)D(Y)}\rho_{XY}=-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{24}$$，答案：（A）.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9)【解】：$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^{-t^2}}{t^2}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\frac{(\frac{e^{-t^2}}{t^2})'}{-\frac{t^2}{1+t^2}}\right|_{t=1}=-\left.\frac{2(1+t^2)^2e^{-t^2}}{t^5}\right|_{t=1}=-\frac{8}{e}$.

（10）【解】：原式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（11）【解】：$f_x'(0,1,-1)=1$，$f_x'(x,y,z)=e^xyz^2+e^xy\cdot2z\cdot z_x'(x,y)$，

$$f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1).$$

又由 $1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$ 得 $z_x'(0,1)=0$，所以 $f_x'(0,1,-1)=1$

（12）【解】：答案：$[-3,1]$。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（13）【解】：答案：$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ \beta^T & c-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = a(c-b)$。

（14）【解】：由于 $X \sim f(x) = Ae^{-x^2+2x-1+1} = Aee^{-(x-1)^2} = Ae\sqrt{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，其中 $A = \dfrac{1}{e\sqrt{\pi}}$，所以 $X \sim N(1,\dfrac{1}{2}) \Rightarrow DX = \dfrac{1}{2}$，$D(\bar{X}) = \dfrac{D(X)}{n} = \dfrac{1}{2n}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：由定积分的几何意义知积分 $\int_a^b (px+q-\ln x)\,\mathrm{d}\,x$ 是由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=px+q$ 以及 $x=a, x=b$ 围成的图形面积。

设切点横坐标为 $x=x_0$，相应的切向方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$，面积为

$$A(x_0)=\int_a^b(\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0-\ln x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{b^2-a^2}{2x_0}+(b-a)\ln x_0-b+a-\int_a^b \ln x\,\mathrm{d}\,x$$

$A'(x_0)=\dfrac{b^2-a^2}{2x_0^2}+\dfrac{b-a}{x_0}$，令 $A'(x_0)=0$ 的 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，由于实际问题有解，驻点唯一，因此当 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 时，相应的积分取值最小，$p=\dfrac{2}{a+b}, q=\ln\dfrac{a+b}{2}-1$.

（16）【解】：（I）由于需求价格弹性为 $\eta=\dfrac{dQ}{dp}\dfrac{p}{Q}$，所以可得 $\dfrac{dQ}{dp}\dfrac{p}{Q}=-2p^2$，由此得微分方程：

$\dfrac{dQ}{Q}=-2pdp$，$Q(0)=Q_0$，解得 $\ln Q=-p^2+C_1 \Rightarrow Q=Ce^{-p^2}$，代入 $Q(0)=Q_0$，所以 $Q=Q_0e^{-p^2}$；

（II）该商品的收益函数为 $R(p)=pQ(p)=Q_0pe^{-p^2}$，求导数可得

$R'(p)=Q_0(1-2p^2)e^{-p^2}=0 \Rightarrow p_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即价格为 $p_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，该商品的收益达到最大.

（17）【解】：（I）令 $D_1=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\ge t\}, D_2=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\le t\}$，

则 $f(t)=\iint\limits_D |xy-t|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D_2}(xy-t)dxdy$

$$=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D}(xy-t)dxdy=2\int_t^1 dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_D xydxdy+t\iint\limits_D dxdy$$

$$=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t)。$$

（II） $f'(t)=-1+2t(1-\ln t), f''(t)=-2\ln t\ge 0, t\in(0,1)$，$f(0+0)=\dfrac{1}{4}, f(1)=\dfrac{3}{4}$，

$f'(0+0)=-1, f'(1)=1$，因为 $f''(t)=-2\ln t\ge 0, t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。

又因为 $f'(0+0)=-1, f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时，$f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

点.

（18）【解】: $f(x)=\dfrac{-2}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{(1-x)^3}=-2(\dfrac{1}{1-x})'+(\dfrac{1}{1-x})''$

$$=-2(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'+(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''=-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n \quad (|x|<1)$$

所以$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{2^n}-1=f(\frac{1}{2})-1=8-1=7$.

（19）【证明】:（Ⅰ） $f(x)$是偶函数，因此有$f(0)f(1)=f(0)f(-1)>0$，又$f(0)f(\dfrac{1}{2})<0$，由连续函数的零点定理知存在$x_1\in(0,\dfrac{1}{2})$及$x_2\in(\dfrac{1}{2},1)$使得$f(x_1)=f(x_2)=0$，由 Rolle 定理知存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）令$F(x)=f'(x)e^{-x^2}$，由于$f(x)$是偶函数，因此$f'(x)$是奇函数，故有$f'(0)=0$. 因而有$F(0)=F(\xi)=0$，由 Rolle 定理知$\exists\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$使得

$$F'(\eta)=f''(\eta)e^{-\eta^2}-2\eta f'(\eta)e^{-\eta^2}=0,$$

即有$f''(\eta)=2\eta f'(\eta)$.

（20）【解】:（Ⅰ）令$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, 因为$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$线性无关,所以$P$可逆,

因为$A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4a_3$,

所以$(A\alpha_1,\ A\alpha_2, A\alpha_3)=(\alpha_1+3\alpha_2, 5\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2+4a_3)$,

从而$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$,即$AP=P\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$或者$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}=B$, 于是有$A\sim B$.

由$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&-1\\-3&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-4)^2=0$，得$A$的特征值为$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=4$.

（Ⅱ）因为$A\sim B$, 所以B的特征值为$\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=-4$时,由$(-4E-B)X=O$得$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; 当$\lambda_2=\lambda_3=4$时,由$(4E-B)X=O$得$\xi_2=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$,

令$P_1=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 则$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

因为$P^{-1}AP=B$, 所以$P_1^{-1}P^{-1}APP_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$或$(PP_1)^{-1}A(PP_1)=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$,

取$Q=PP_1=(-\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_3)$, 则$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（21）【解】:　（Ⅰ）考虑方程组$\begin{cases} Ax=0 \\ A^TAx=0 \end{cases}$　显然①的解为②的解。

设②有解 $x=\xi$ 即 $A^TA\xi=0$　用　ξ^T 左乘三可得 $\xi^TA^TA\xi=\xi^T\cdot 0=0$

$(A\xi)^T\cdot A\xi=0=\|A\xi\|^2=0$ 固 $A\xi=0$　即②的解也是①的解，从而方程组同解，即：$r(A)=r(A^TA)=r(A^T)$

（Ⅱ）$\because r(A)=r(A^TA)\le r(A^TA,A^Tb)=r\,[\,A^T(A,b)\,]\le r(A^T)=r(A)$

（又 $r(A^TA)=r(A)$）$\Rightarrow r(A^TA)=r(A^TA,A^Tb)$，得证。

（22）【解】:（I）X,Y 协方差为

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(U-V)(V-W)-E(U-V)E(V-W)$$
$$=E(UV-UW-V^2+VW)=\mu^2-EV^2-0=\mu^2-(\frac{1}{2}+\mu^2)=-\frac{1}{2}$$

所以 X,Y 相关，且相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=-\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=-\dfrac{1}{2}$

（II）由 U,V,W 的独立性知 $X=U-V\sim N(0,1),\ Y=V-W\sim N(0,1)$，$X,Y$ 具有相同分布，对应概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$(X,Y)$ 的联合概率密度函数服从二维正态分布，$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;\rho)$，其中 $\rho=-\dfrac{1}{2}$.

（III）考察协方差：$Cov(X,U)=Cov(U+V,U)=D(U)+Cov(V,U)=D(U)+0=\dfrac{1}{2}$，所以 X 与 U 相关，所以 X 与 U 不能相互独立.

（23）【解】:（I）由 X 分布函数可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x;\ \theta)=1,$ 所以常数 $A=-1$；对应的概率密度函数为:

$$f(x;\theta)=\begin{cases} -\theta^x\ln\theta, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases},$$

（II）θ 的最大似然估计:

1）$L=\prod\limits_{i=1}^{n}\theta^x(-\ln\theta)=\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(-\ln\theta)^n,\ x_i>0$

2）$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}[n\ln[-\ln\theta]+\ln\theta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i]=-\dfrac{n}{\ln\theta}\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，

3）解得 $\ln\theta=-\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$,解得极大似然估计 $\hat{\theta}=e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}=e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$；

（III）由于 $E[\ln\hat{\theta}]^{-1}=E[\dfrac{1}{\ln\hat{\theta}}]=-E(\bar{X})\ =-E(X)=\int_0^{+\infty}x\theta^x\ln\theta dx=\int_0^{+\infty}xd\theta^x$

$$=x\theta^x\,|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\theta^xdx=-\frac{\theta^x}{\ln\theta}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln\theta}=[\ln\theta]^{-1}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929