绝密 * 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则关于 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\ (x\neq 0)$ 的下列四个结论

① 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也是奇函数；

② 若 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数，则 $F(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数；

③ 若 $f(x)$ 为 $(0,1)$ 内的有界函数，则 $F(x)$ 也是 $(0,1)$ 内的有界函数；

④ 若 $f(x)$ 为单调递增函数，则 $F(x)$ 也为单调递增函数

中正确的个数是（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）设 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx\ \ (a>0)$，则对任意的正整数 n，$\Gamma(n+1)=$（　　）.

（A）n　　（B）$n!$　　（C）$n+1$　　（D）$(n+1)!$

（3）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，则下列结论正确的是（　　）.

（A）如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处也取极值

（B）如果 $f'(-x)f'(x)<0\ (x\neq 0)$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值

（C）如果 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值

（D）如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)f'(0)\neq 0$，则 $\int_0^x tf(t)\,dt$ 在点 $x=0$ 处取极值

（4）已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos xt}{t}dt$，则（　　）.

（A）$f(0)=f(\frac{1}{2})$　　（B）$f(\frac{1}{2})=f(1)$　　（C）$f(1)=f(2)$　　（D）$f(0)=f(2)$

（5）若 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$，则（　　）.

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在　　（B）$f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续，$f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 连续

（C）$df(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=0$　　（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

（6）设平面区域 D 由直线 $y=\frac{1}{2}x, x=\frac{1}{2}, x=1$ 及 x 轴围成，记 $I_1=\iint\limits_D[\ln(x-y)]^3d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x-y)^3d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D e^{(x-y)^3}d\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 之间的关系是（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_3<I_1<I_2$

(7) 设 $\xi_1=(1,-2,3,2)^T,\xi_2=(2,0,5,-2)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量，则下列向量中，必是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量的是（ ）.

(A) $\alpha_1=(1,-3,3,3)^T$ (B) $\alpha_2=(0,0,5,-2)^T$ (C) $\alpha_3=(-1,-6,-1,10)^T$ (D) $\alpha_4=(1,6,1,0)^T$

(8) 设 A 为三阶方阵，有下列三个命题:

① A 经初等行变换化为 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 A 的特征值一定为 $1,2,3$；

② 若 A 的秩 $r(A)=2$，则 A 必有两个非零特征值;

③ 若三阶方阵 P，使得 $AP=P\Lambda,\Lambda$ 为对角阵，则 P 的列向量一定是 A 的特征向量.

其中正确的个数为（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，若 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arctan x}}=e$，则 $f'(0)=$________.

(10) 设 f 可导，由参数方程 $\begin{cases}x=(t-2)f(t),\\ y=tf(t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t+1}{2t-3}$，则满足 $f(-\ln3)=1$ 的 $f(x)=$________.

(11) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & x\geq0\end{cases}$ 可导，其中 a,b 为常数，则 $a^2+b^2=$________.

(12) $\displaystyle\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=$________.

(13) $\max\limits_{0\leq t\leq1}\displaystyle\int_0^1\left|x^2-t\right|dx$________.

(14) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$，$B,C$ 均为 3×2 矩阵，且有 $AB=C$，C 的第一列为 $(1,1,1)^T$，则 B 的第一列为________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^2}, & x\neq0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

若 $g'(0)=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

（16）（本题满分 10 分）（Ⅰ）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$. 证明点 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=1$. 判别点 $(0,f(0))$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $z=f(x,x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，而 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2(y-1)+e^y=1$ 确定的隐含数，求 $\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且满足 $\int_0^{\pi}\min\{x,y\}f(y)\,dy=4f(x)$，求 $f(x)$.

（19）（本题满分 10 分）求由方程 $x^2+2y^2+z^2-4yz+2z+3=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

（20）（本题满分 11 分）（Ⅰ）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f'(x)$ 单调不减，证明：$\int_a^b f(x)\,dx\geq(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$.（Ⅱ）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，若 $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\dfrac{a+b}{2})$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

（21）（本题满分 11 分）计算二重积分 $\iint\limits_D([y-x^2]+1)^2d\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=2$ 围成的平面区域.

（22）（本题满分 11 分）（Ⅰ）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是 4 个三维向量，且 α_1,α_2 线性无关，β_1,β_2 线性无关，证明存在非零向量 ξ，ξ 既可由 α_1,α_2 线性表出，又可由 β_1,β_2 线性表出.

（Ⅱ）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$. 求（Ⅰ）中的 ξ.

（23）（本题满分 11 分）已知 A 为三阶实对称阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，$|A|>0$，P 为三阶可逆矩阵，P 的第一列为 $(1,1,-1)^T$，$P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，求 A.

绝密 * 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

① 函数 $f(x),g(x)$ 在区间 I 内无界，则 $f(x)g(x)$ 在 I 内也无界；

② 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也间断；

③ 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也不可导；

④ 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取极小值，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也取极小值．

以上命题中正确的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设 $f(x)=x^3, g(x)=x^2$，则当 $x\to 0^+$ 时，下列结论中正确的是（　　）．

（A）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小

（B）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小

（C）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小

（D）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小

（3）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，记 $I_1=\int_0^1 f(x)\,dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,dx$，则（　　）．

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_2>I_1>I_3$　　（C）$I_2>I_3>I_1$　　（D）$I_3>I_2>I_1$

（4）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f''(x)>0, f(0)=0$，则（　　）．

（A）$f(1)>2f(\frac{1}{2})$　　（B）$f(1)<2f(\frac{1}{2})$　　（C）$f'(1)>2f'(\frac{1}{2})$　　（D）$f'(1)<2f'(\frac{1}{2})$

（5）设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的二阶偏导数存在，则下列结论正确的个数为（　　）．

① $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续　　② $f(x,y)$ 在点 P_0 处一阶偏导数连续

③ 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　④ $f(x,y)$ 在点 P_0 处的一阶偏导数存在

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（6）把极坐标系下的二次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$

化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　　）.

（A）$\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

（C）$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx$　　（D）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx$

（7）设 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知齐次方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(1,-2,1,0)^T$，k 为任意常数，则下列命题不正确的是（　　）.

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关　　（B）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

（8）设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 X^TAX 在正交变换下的标准形是（　　）.

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$　　（B）$y_1^2-3y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$

（C）$y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-\int_1^{x+y} e^{-t^2}dt=0$ 所确定，则 $y''(0)=$__________.

（10）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] \dfrac{2}{\pi}, & x=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 $f'(\dfrac{\pi}{2})=$__________.

（11）设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(x-\dfrac{z}{a})=y-\dfrac{z}{b}$，则 $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

（12）椭圆盘 $x^2+\dfrac{y^2}{3}\le 1$ 和 $\dfrac{x^2}{3}+y^2\le 1$ 的公共部分的面积等于__________.

（13）微分方程 $(x\dfrac{dy}{dx}-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ 的通解为__________.

（14）设 A 为二阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=-1, B=2\begin{pmatrix}(2A)^{-1}-(2A)^* & O\\ O & A\end{pmatrix}$，则 $|B|=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-y=|x|$ 的通解.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，证

明函数 $z=f(e^x\sin y,\ e^x\cos y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（17）（本题满分 10 分）设 $\begin{cases} x=4t^2+5t-7y, \\ e^{y+1}-\cos t+ty=0, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

（18）（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \min\{xy,x^2\}\,d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1,0\le y\le 1$.

（19）（本题满分 10 分）设单增光滑曲线 $y=y(x)$ 位于第一象限，当 $x>0$ 时，在区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积值曲线 $V(x)$ 与该曲边梯形的面积值 $S(x)$ 之比为 $\dfrac{3}{5}\pi y(x)$，且曲线 $y=y(x)$ 过点 $(1,1)$，求曲线 $y=y(x)$ 的方程.

（20）（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$.（Ⅰ）设 $\varphi(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$，$x\in[0,1]$，求 $\varphi'''(x)$；（Ⅱ）证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^1 tf(1-t)\,dt=\dfrac{1}{6}f'(\xi)$.

（21）（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$.（Ⅰ）如果 $\max\limits_{a\le x\le b} f(x)\cdot\min\limits_{a\le x\le b} f(x)<0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$；（Ⅱ）如果 $f''(x)+f(x)\ne 2f'(x)\ (x\in(a,b))$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内没有零点.

（22）（本题满分 11 分）已知 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$，$t$ 为常数，（Ⅰ）证明当 $t=-1$ 时，ξ_1,ξ_2,ξ_3 不可能同时是一个三元非齐次线性方程组的解（Ⅱ）当 $t\ne -1$ 时，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是一个三元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $r(A)=1$.

（23）（本题满分 11 分）设三阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A)=2$，A 有特征值 1 与 2，矩阵 A 的属于特征值 1 与 2 的特征向量分别为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix}$，（Ⅰ）求解 $Ax=0$；（Ⅱ）求一个正交变换 $x=Py$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 为标准形，并写出该标准形和正交变换.

绝密 * 启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{x}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{x}}\cdot\dfrac{\arctan x}{x}$ 有（　　）．

（A）三条渐近线和一个第一类间断点　　（B）三条渐近线和两个第一类间断点

（C）两条渐近线和两个第一类间断点　　（D）两条渐近线和一个第一类间断点

（2）下列定积分大于零的是（　　）．

（A）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(1-\cos x)\,dx$　　（B）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(1-\sin x)\,dx$

（C）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,dx$　　（D）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,dx$

（3）$\int_{1}^{2}\sqrt{\ln x}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{\ln 2}} e^{x^{2}}\,dx=$（　　）．

（A）2　　（B）4　　（C）e　　（D）$2\sqrt{\ln 2}$

（4）设 $y(x)$ 是周期为 π 的二阶可微周期函数，则在下列方程中 $y(x)$ 不可能是其解的方程是（　　）．

（A）$y''+4y=0$　　（B）$y'^{2}+4y^{2}=4$

（C）$y''+4y=\sin 2x$　　（D）$y''+y=\cos 2x$

（5）下列反常积分发散的是（　　）．

① $\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln\sqrt{x})^{2}}\,dx$　② $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\,dx$　③ $\int_{0}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$　④ $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x)}\,dx$

（A）①②　　（B）①③　　（C）②③　　（D）③④

（6）设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取极小值，则 $f''_{xx}(x_0,y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)$ 的值（　　）．

（A）非正　　（B）非负　　（C）等于 0　　（D）不能确定

（7）设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的三个不同的解，给出四个命题：

① 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $Ax=0$ 的一个基础解系等价，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的基础解系；

② 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=0$ 的每个解都可以用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示，并且表示式唯一；

③ 如果 $Ax=0$ 的每个解都可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示，并且表示式唯一，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的一个基础解系；

④ 若 $n-r(A)=3$，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是基础解系．

其中正确的为（　　）.

（A）①②　　（B）①④　　（C）②③　　（D）③④

（8）设 A,B 为 n 阶方阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则下列线性方程组中，与 $Ax=0$ 同解的个数为（　　）.

① $(A+B)x=0$；　② $ABx=0$；　③ $BAx=0$；

④ $\begin{pmatrix} A-B \\ A+B \end{pmatrix}x=0$；　⑤ $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=0$.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $\lim\limits_{x\to\infty} x[\sin\ln(1+\frac{a}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})]=3$，则常数 $a=$________.

（10）设正值连续函数 $y(x)$ 满足 $y(0)=1$，$\int_{-\infty}^{x} y(t)dt\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{y(t)}dt=1$，则 $y(x)=$________

（11）设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且 $f(1)=3$. 若 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$ 满足 $\int_{2}^{f(\ln x+1)}\varphi(t)dt=x\ln x$，则 $f(x)=$________.

（12）若方程 $x^2-x-1=ae^x$ 无实根，则常数 a 的取值范围为________.

（13）由曲线 $y=\frac{3}{x}$ $(x>0)$ 与直线 $x+y=4$ 所围平面图形 D 的形心坐标为________.

（14）设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量，且满足 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$A(\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，则 $|A|=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=x+\ln(2-x)$，$x\in(-\infty,2)$.（Ⅰ）求 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 内的最大值；（Ⅱ）若 $x_1=\ln 2$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $e^{-y}+\int_0^x e^{-t^2}dt-y+x=1$ 确定的隐函数.

（Ⅰ）证明 $y(x)$ 单调增加；（Ⅱ）求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)$.

（17）（本题满分 10 分）设 $u(x,y)=\int_0^1 f(t)|xy-t|dt$，其中 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$0\le x\le 1, 0\le y\le 1$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

（18）（本题满分 10 分）用变量代换 $x=e^t$ 化简微分方程 $(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$，再通过变换 $z=\dfrac{dy}{dt}-y$，求该微分方程的通解.

（19）（本题满分 10 分）设 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}$.

（20）（本题满分 11 分）设有一根长度为 $2l$ 的细棒 L，其各点处的线密度为该点到 L 中点的距离. 在 L 的中垂线上到 L 距离 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，其中 l,a,m 均为正数，求 L 对 M 的引力 $\overline{F}$.

（21）（本题满分 11 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\operatorname{sgn}(x+y-1)\,d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le 1$ $(x\ge 0,y\ge 0)$.

（22）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 有特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},$$

（Ⅰ）证明 $r(A)=2$；（Ⅱ）求 $Ax=\xi_3$ 的通解.

（23）（本题满分 11 分）已知三元二次型 X^TAX 的平方项系数为 0，并且 $\alpha=(1,2,-1)^T$ 满足 $A\alpha=2\alpha$，（Ⅰ）求该二次型表达式；（Ⅱ）求出正交变换下的二次型的标准形；（Ⅲ）若 $A^3+2A^2-4A+kE$ 正定，求 k 的范围.