20、21全程考研资料请加群712760929

数学二模拟试卷 1 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

（2）【解】有题设知 $xe^{-|x|}f(x)$ 是偶函数， $F(x)$ 必为奇函数，又 $f(x)$ 有界，因而 $\exists M>0$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$均有 $|f(x)|\le M$ 相应的有

$|F(x)|=\left|\int_0^x te^{-|t|}f(t)\mathrm{d}t\right|\le M\int_0^{|x|}\left|te^{-|t|}f(t)\right|\mathrm{d}t\le M[2-(1+|x|e^{-|x|}]\le2M$，因此 $F(x)$ 是有界的奇函数，答案为 A．

（3）【解】原式 $\xlongequal{x=1+\sec t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$，答案 C．

（4）【解】 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在，则函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续，因此答案为 D

(5)【解】 由对称性及函数的奇偶性可得 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^3d\sigma=0$，而 $I_2>0,I_3<0$，因此答案是B

(6)【解】 由常系数非齐次微分方程解的性质知答案为 B．

(7)【解】 $t\ne-1$时，ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，因此必有 $r(A)=1$ 答案为 C

(8) 设 A 为可逆的实对称矩阵，则二次型 X^TAX 与 $X^TA^{-1}X$　（　）

（A）规范形与标准形都不一定相同　　（B）规范形相同但标准形不一定相同

（C）标准形相同但规范形不一定相同　　（D）规范形与标准形都相同

【答案】：B

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）【解】 对等式两边关于 x 同时求导可得：$1-e^{-(x+y)^2}(2+y')=0$，所以 $y'(0)=e-2$，故所求法线方程为 $y=-\dfrac{1}{e-2}x+1$．

（10）【解】 由题设知 $f(1+\ln x)=ex+\ln x+1$，令 $u=1+\ln x$，$x=e^{u-1}$，$f(u)=e^u+u$，因而相应的图形面积为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(e^x+x)\mathrm{d}x=e-\dfrac{1}{2}$．

（11）【解】 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d(\sqrt{x})=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx=2a-1+e^{-1}$．

（12）【解】 令 $u=y^2$ 方程可变为 $u'-xu=x$，解得

$u=e^{\frac{x^2}{2}}(\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+C)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1,y(0)=0,C=1$，由此可得所求方程通解为 $y^2=e^{\frac{1}{2}x^2}-1$

（13）【解】设 $D_1:0\le y\le x,0\le x\le1$，则

$$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{sgn}(x-y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x-y)d\sigma=\int_0^1dx\int_0^x(x-y)dy=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（14）【解】 $|B|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2, B^{-1}=B^{*}A+A$ 两边左乘 B 得 $E=2A+BA$，即 $(B+2E)A=E$，则

$$A=(B+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&3&0\\1&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。

（15）（本小题满分 10 分）

【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1-\sin x}{e^{x}-1}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(x)+1}{x}-\dfrac{\sin x}{x}]=2, \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+1}{x}=2$，

$f(0)=-1, f'(0)=2$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{m}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{mx^{m-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{mx^{m-2}}$ 存在且 $f(0)=-1$，因此必有 $m=2$．此时有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{m}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2}=-\dfrac{1}{2}$，从而有 $k=-\dfrac{1}{2}$．

（16）（本小题满分 10 分）

【解】 $\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=xf'(x)-f(x)+C$，

$\because\ f'(x)=g(x), g'(x)=f(x)+\varphi(x)$

$\therefore\ \int xf''(x)dx=xg(x)-[g'(x)-\varphi(x)]+C=xg(x)-g'(x)+\varphi(x)+C=-\cos x+C$

（17）（本小题满分 10 分）

【解】 令 $r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{du}{dr}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\cdot\dfrac{du}{dr}, \dfrac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=\dfrac{x^{2}}{r^{2}}\dfrac{d^{2}u}{dr^{2}}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{x^{2}}{r^{3}}\cdot\dfrac{du}{dr}$，同理

$\dfrac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=\dfrac{y^{2}}{r^{2}}\dfrac{d^{2}u}{dr^{2}}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{y^{2}}{r^{3}}\dfrac{du}{dr}$，代入原方程得　$\dfrac{d^{2}u}{dr^{2}}+u=r^{2}$　　（*）

（*）所对应的齐次方程通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r$，（*）的特解为 $u^{*}(r)=ar^{2}+br+c$，代入（*）得 $a=1, b=0, c=-2$，所以（*）的通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^{2}-2$

即　$u=C_1\cos\sqrt{x^{2}+y^{2}}+C_2\sin\sqrt{x^{2}+y^{2}}+(x^{2}+y^{2})-2$

(18)　（本小题满分 10 分）

【解】 $K=\dfrac{\frac{1}{x^{2}}}{\sqrt{(1+\frac{1}{x^{2}})^{3}}}=\dfrac{x}{(1+x^{2})^{\frac{3}{2}}}, K'=\dfrac{1-2x^{2}}{(1+x^{2})^{\frac{5}{2}}}=0, x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 或者 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（舍去），

$x\in(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 时 $K'>0$，$x\in(\dfrac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 时 $x\in(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 时 $K'>0$，所以 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时 K 取得最大值，即

$x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．　$S_1=-\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\ln x\,dx=(1+\ln\sqrt{2})\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，　$S_2=-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\ln x\,dx=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\ln\sqrt{2})$，　因

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$(1+\ln\sqrt{2})\sqrt{2}>1$，所以有 $(1+\ln\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2}>1-(1+\ln\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $S_1>S_2$.

(19)（本小题满分 10 分）

【证明】：令 $F(x)=e^{f(x)}\arcsin x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，有积分中值定理知道 $\exists x_0\in[0,\frac{2}{\pi}]$ 上使得 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arcsin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{2}{\pi}}F(x)\,\mathrm{d}x=F(x_0)\dfrac{2}{\pi}=1, F(x_0)=\dfrac{\pi}{2}$，而 $F[\quad=\dfrac{\pi}{2}$，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=e^{f(\xi)}\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{f(\xi)}f'(\xi)\arcsin\xi=0$，即有

$\sqrt{(1-\xi^2)}f'(\xi)\arcsin\xi=-1$.

(20)（本小题满分 11 分）

【解】 由区域可知

$$I=\int_0^1 x\int_0^{1-x}e^{-y}dy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r^3dr=\int_0^1 x(1-e^{x-1})dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\tan^2\theta}{(1+\tan\theta)^4}d\tan\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1+(u-1)^2}{u^4}du=\frac{2}{e}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}$$

(21)（本小题满分 11 分）

【解】 设物体温度为 $T(t)$，冷却系数为 $k>0$，则该问题的方程及条件为 $\begin{cases}\dfrac{dT}{dt}=-k(T-20)\\ T(0)=100\end{cases}$.

方程中的负号是因为介质温度 $20<T$ 时，物体放热，是降温过程，此时 $\dfrac{dT}{dt}<0$. 该方程是一阶线性非齐次方程，其解是 $T(t)=80e^{-kt}+20$. 这里冷却系数是未知的，它可由另一个条件：前 600 秒物体温度下降到 60^0C，即 $T(600)=60$ 来确定，将其代入解中，化简得 ： $e^{-600k}=\dfrac{1}{2}, k=\dfrac{1}{600}\ln 2$.

由此求出，当 $T(t)=25$ 时，$25-20=80e^{-\frac{\ln 2}{600}t}$，解出 $t=2400$，即 2400 秒后，物体温度下降到 25^0C.

(22)（本小题满分 11 分）

【解】 （I）设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

从而 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$，由此可得 $\xi=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$ 是方程 $Ax=\beta$ 的解，因此

$\xi-\xi_0=(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的解，由题设知 $\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个解。由题设 $\xi_1=(1\quad -1\quad 2\quad 0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。而 $\xi-\xi_0$ 显然不能由 ξ_1 线性表示。矛盾！所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（II）由题设知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha$ 与矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$ 的秩都是 3，$\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的一个基础解系，因此必有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 作

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的极大无关组，同时它也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

(23)（本小题满分 11 分）

【解】(1) 由题设条件知

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\cdots&\cdots&&\\n&2n&\cdots&n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)=\alpha\alpha^T\quad 故\ r(A)=1;$$

(2) 因 $A^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)A$, $|A|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 A 特征值.

对应特征向量满足 $Ax=\alpha\alpha^T x=0$　　因 $\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^n i^2\neq 0$

故方程组　$\alpha\alpha^T x=0$ 与 $\alpha^T x=0$ 是同解方程组,

只需解方程 $\alpha^T x=0$　　即满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$，有线性无关特征向量为

$\xi_1=(-2\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)^T$,　$\xi_2=(-3\ \ 0\ \ 1\ \ \cdots\ \ 0)^T,\cdots,\xi_{n-1}=(-n\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1)^T$

由此可知　$\lambda=0$ 至少是 $n-1$ 重根

又 $trA=\sum_{i=1}^n i^2=\sum_{i=1}^n \lambda^2\neq 0$。故 A 有一个非零特征值 $\lambda_n=\sum_{i=1}^n i^2\neq 0$

当 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2=\alpha^T\alpha$ 时　由 $(\lambda E-A)x=(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$

由观察可知 $x=\alpha$ 时

$(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$。故 $\alpha=(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)^T=\xi_n$ 是对应 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2$ 特征向量。

A 有 n 个线性无关特征向量，A 能相似对角化.

$$取\ P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \cdots\ \ \xi_{n-1}\ \ \xi_n)=\begin{pmatrix}-2&-3&\cdots&-n&1\\1&&&&2\\&1&&&\vdots\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&n\end{pmatrix}\ 则\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&\\&&&&\sum_{i=1}^n i^2\end{pmatrix}=\Lambda$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二模拟 2 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】 解法一：两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$，令

$f(x)=kx^2-\ln x, f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k)$，

当 $k>\frac{1}{2e}$ 时有 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{2k}})$ 上单减，在 $(\frac{1}{\sqrt{2k}},+\infty)$ 上单增，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 有无实根，即两个曲线有没有交点，答案 A.

解法二：（取特殊值法）取 $k=\frac{1}{2}>\frac{1}{2e}$，则两曲线交点横坐标满足方程 $\frac{1}{2}x^2-\ln x=0$，

令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, f'(x)=x-\frac{1}{x}=0, x=\pm1, f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f''(x)=\frac{1}{x^2}>$，因此函数

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹的，即 $f(1)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值，由于 $f(1)=\frac{1}{2}>0$ 因此

函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，因此两曲线无交点，答案为 A .

（2）【解】 因为 $\ln(1+e^{\cos x})\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1+e^{\cos x})\cos x\,dx=\sin x\ln(1+e^{\cos x})\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}dx>0$$，故选 A.

（3）【解】 令 $xt=u$，$dt=\frac{du}{x}$，$\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du=af(x)$，$\int_0^x f(u)du=axf(x)$，$f(x)=a(f(x)+xf'(x))$，

$f(x)=a(f(x)+xf'(x))$ 得微分方程：$\frac{1-a}{a}\frac{f(x)}{x}=f'(x)$，$f(1)=1$，解得 $f(x)=x^{\frac{1-a}{a}}$，选 A.

（4）【解】 由题设有 $2f'(2)=4, f'(2)=2$，因而有 $d f(u)\Big|_{\substack{u=2\\ \Delta u=0.01}}=0.02$，答案 B .

（5）【答案】(B)

（6）【解】 由对称性：$P=\iint\limits_D(x+y)^3dxdy=0$，

$\cos x\sin y^2$ 关于 x 与 y 均为偶函数，在区域 D 上 $\cos x\sin y^2\ge0$，所以

$Q=\iint\limits_D(\cos x\sin y^2)dxdy\ge0$

又在区域 D 上，$e^{-x^2-y^2}-1\le0$，由此 $R=\iint\limits_D(e^{-x^2-y^2}-1)dxdy\le0$

所以有 $Q\ge P\ge R$。答案为（B）

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（7）【解】由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}$，$|B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-6$.

（8）【答案】（A）

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）【解】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)}{x(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$.

（10）【解】 令 $u=e^x$ ，$x\in(-\infty,0]$ 时 $u\in(0,1]$ ，$x\in(0,+\infty)$ 时 $u\in(1,+\infty)$，因而有

$$f'(u)=\begin{cases}\ln u+1, u\in(0,1],\\ 1,\quad u\in(1,+\infty),\end{cases}\quad f(x)=\int_1^x f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty).\end{cases}$$ 答案是

$$f(x)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

（11）【解】方程两边积分，$\int_0^1 xdf(x)-\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$，$xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{4}$，代入条件 $f(1)=0$，可知 $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{\pi}{8}$.

（12）【解】 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

（13）【答案】1

（14）【解】 因为 A 的特征值为 3，-3，0，所以 $A-E$ 特征值为 2，-4，-1，从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$，即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1$，$B^{-1}$ 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$，于是 $|B^{-1}+2E|=-8$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.

（15）（本小题满分 10 分）

【解】 $f(x)=\begin{cases}ax+x^c\sin\dfrac{1}{x}, x>0,\\ e^{3x}+b,\quad x\le0,\end{cases}$ 可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to0^+}(ax+x^c\sin\dfrac{1}{x})=f(0)=b+1$，必有

$b=-1$，且 $c>0$，又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=3$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{ax+x^c\sin\frac{1}{x}}{x}=a+\lim_{x\to0^+}x^{c-1}\sin\frac{1}{x}=3，所以有 a=3,c>1.$$

（16）（本小题满分 10 分）

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【解】(I) 作积分变换：$xt=u$, $xdt=du$，方程为：

$$\frac{1}{x}\int_0^{f(x)} g(u)du=(x+1)f(x),\text{ 由此 }\int_0^{f(x)} g(u)du=(x+1)xf(x),$$

令 $f(x)=1$，所以 $\int_0^1 g(u)du=(x+1)x$；

(II) 两边求导：$xf'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$，可得：

$$x^2f'(x)=-(2x+1)f(x),\quad \frac{df(x)}{f(x)}=-(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})dx,$$

可得解为 $\ln x^2 f(x)=\frac{1}{x}+C_1$，$f(x)=\frac{C}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$；代入条件 $f(1)=1$，所以 $C=e^{-1}$，得所求函数为：

$$f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}-1}.$$

(17)（本小题满分 10 分）

【解】(I) 求全微分 $dz-[f_1'(2xdx+2ydy)+f_2'dz]=ydx+xdy$，令 $u=x^2+y^2$ 可得

$$dz=\frac{y+2xf_u'}{1-f_z'}dx+\frac{x+2yf_u'}{1-f_z'}dy$$

(II) 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+2xf_u'}{1-f_z'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x+2yf_u'}{1-f_z'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{[1+2x(f_{uu}''2y+f_{uz}''\frac{\partial z}{\partial y})](1-f_z')+(y+2xf_u')(f_{zu}''2y+f_{zz}''\frac{\partial z}{\partial y})}{(1-f_z')^2}$$

代入点 $(1,1)$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0$；$1+2f_u'=0$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{(1+4f_{uu}'')(1-f_z')+2y(1+2f_u')f_{zu}''}{(1-f_z')^2}=\frac{1+4f_{uu}''}{1-f_z'}.$$

(18)（本小题满分 10 分）

【证明】(I) 由题设知 $f(0)$ 与 $f(1)$ 取值同为正数或同为负数，$f(0)f(\frac{1}{2})<0$，则必有 $f(\frac{1}{2})f(1)<0$，根据连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2}),\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

(II) 令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0,\text{ 即有 }f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0.$$

(19)（本小题满分 10 分）

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【解】$I=\iint\limits_D \frac{x^3y-x-y-2}{2-x^3y}e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\iint\limits_D(1+\iint\limits_D\frac{x+y}{2-x^3y})e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

其中：$f(x,y)=\frac{x+y}{2-x^3y}e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ 关于原点对称，所以 $\iint\limits_D\frac{x+y}{2-x^3y})e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$，

由此 $I=-\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 re^r dr=-2\pi\int_0^1 rde^r=-2\pi$。

(20)（本小题满分 11 分）

【解】(I) 由题所设，在曲线上点 (x,y) 处，对应面积与曲线对应的弧长相等：

$\int_0^x y(t)dt=\int_0^x\sqrt{1+[y'(t)]^2}dt$，求导可得：$y(x)=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\Rightarrow y'(x)=\sqrt{y^2(x)-1}$，

且 $f(0)=1$；解微分方程：

$$\frac{dy(x)}{\sqrt{y^2(x)-1}}=dx\Rightarrow\ln(y+\sqrt{y^2-1})=x+C_1,\text{所以 } y+\sqrt{y^2-1}=Ce^x，\text{代入 } f(0)=1，$$

对应曲线为 $y+\sqrt{y^2-1}=e^x$，两边取倒数：$e^{-x}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=y-\sqrt{y^2-1}$，

相加可解得函数为：$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=chx$；

(II) $V_y=2\pi\int_0^1 xchxdx=\pi\int_0^1 x(e^x+e^{-x})dx=2\pi(1-e^{-1})$。

(21)（本小题满分 11 分）

【解】(I) $F(x)=\int_{-a}^a|x-t|f(t)dt=\int_{-a}^x(x-t)f(t)dt+\int_x^a(t-x)f(t)dt=$

$$=x\int_{-a}^x f(t)dt+\int_{-a}^x tf(t)dt+\int_x^a tf(t)dt-x\int_x^a f(t)dt$$

$F'(x)=\int_{-a}^x f(t)dt-\int_x^a f(t)dt$；$F''(x)=2f(x)>0$，所以 $F'(x)\nearrow$；

(II) 令 $F'(x)=0$，$\int_{-a}^x f(t)dt=\int_x^a f(t)dt$，由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $x=0$ 取得极值，且 $F''(0)=2f(0)>0$，且唯一性，则 $x=0$ 处函数 $F(x)$ 取得最小值，最小值为 $F(0)=\int_{-a}^a|t|f(t)dt=$ $=2\int_0^a tf(t)dt$；

(III) 由题设：$2\int_0^a tf(t)dt=f(a)-a^2-1$，两边求导可知：$2xf(x)=f'(x)-2x$，$f'(x)-2xf(x)=2x$，$f(0)=1$ 解线性微分方程知：$f(x)=-2+Ce^{x^2}$，$f(0)=1, C=3$，函数为 $f(x)=3e^{x^2}-2$.

(22)（本小题满分 11 分）

【解】(1) 由 $B(\alpha_1\ \ \alpha_2)=0$，有 $(\alpha_1\ \ \alpha_2)^T B^T=0$，所以 B^T 的列向量是方程组 $(\alpha_1\ \ \alpha_2)^T x=0$ 的解。

解此方程组的基础解系 $(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0)^T,(-1\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^T$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 α_1，α_2 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0 \text{ 即 }\begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$，因为 $x_3=-x_4$，即 $3k_1-2k_2=k_1-k_2$，即 $k_2=2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k\quad 0\quad -k\quad k)^T$，k 为任意常数.

(23)（本小题满分 11 分）

【解】 (I) 由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量，设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由不同特征值对应特征向量正交，则 $x_1+x_3=0$，对应基础解析，

$\xi_1=(1,0,-1)^T$，$\xi_2=(0,1,0)^T$ 即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量，单位化，

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,-1)^T$，$\eta_2=(0,1,0)^T$　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0\,1)^T$，令 $U=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 可知：

$$U^TAU=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix};$$

(II) 由以上得知 $A=U\Lambda U^T$ 为二次型矩阵，

对应二次型为 $f=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二模拟试卷 3 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】由题设知 $e^{x^2}-e^{\sin^2 x}=e^{\sin^2 x}(e^{x^2-\sin^2 x}-1)\sim x^2-\sin^2 x=(x-\sin x)(x+\sin x)$
$\sim\frac{1}{3}x^4$，所以有 $m=4$，答案为 B .

(2)【解】 当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^n}\sin\pi x=0$，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\sin\pi x$，

当 $f(1)=0$，$f(-1)$ 无定义，所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \sin\pi x, & -1<x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$ $f(-1)$ 无定义，因此 $f'(-1)$ 不存在，

$f'_-(1)=\pi\cos\pi x|_{x=1}=-\pi, f'_+(1)=0$，因此 $f'(1)$ 也不存在，答案为 C .

(3) 【解】由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+g(x)$，$f'(0)=0$，

$f''(0)=(\frac{2x}{1+x^2})'\Big|_{x=0}+g'(0)=2$，故点 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的极小值点，答案 A .

(4) 【解】因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，因而有 $I_1>1$，又 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\pi}{2}$，因而有 $I_2<1$，答案是 D 。

(5) 【解】$f(x,0)=g(x,0)|x|$，所以 $f'_x(0,0)$ 存在的充分必要条件是 $g(0,0)=0$，同理 $f'_y(0,0)$ 存在的充分必要条件也是 $g(0,0)=0$．因此答案为 C .

（6）【解】 $\iint\limits_D f(y)dxdy=\int_0^1 f(y)dy\int_0^{1-y}dx=\int_0^1(1-y)f(y)dy=0$，答案为 D

(7) 【解】 由题设知 $3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0$，$\alpha_2+\alpha_4=0$，$3\alpha_1-2\alpha_3=0$，$r(A)=2$ 答案：C

(8) 【解】 $AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A_1B_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&5&-2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&6\\0&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\0&1&-6\end{pmatrix}$，答案： B

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）【解】 因为 $\frac{n}{1+n}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2+n+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2+i^2}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln 2$，答案为 $\frac{1}{2}\ln 2$.

（10）【解】 $f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$，所以

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}n!}{(n-2)}.$$

(11) 【解】 由题设 $x\in(0,2)$ 时有 $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt=\sqrt{2x-x^2}$，

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

(12)【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=e^{xy}\varphi'+ye^{xy}\varphi+e^{xy}\varphi'+xe^{xy}\varphi=0$，$(x+y)\varphi(x+y)+\varphi'(x+y)=0$，所以 $\varphi(u)$ 满足方程 $\varphi'(u)+u\varphi(u)=0$，$\varphi(u)=\frac{C}{u},\varphi(0)=1,C=1,\varphi(u)=\frac{1}{u}$

(13)【解】 设 $D_1: y\le 4-x^2, y\ge -3x, \ge 3x, D_2: -3x\le y\le 3x, 0\le x\le 1$，则 D_1 关于 x 轴对称，则 D_2 关于 y 轴对称，函数 $\ln(y+\sqrt{1+y^2})$ 为奇函数，因此

$$\iint_D x[\ln(y+\sqrt{1+y^2})+1]dxdy=\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy+\iint_D xdxdy$$

$$=\iint_{D_1} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy+\iint_{D_1} xdxdy+\iint_{D_2} x\ln(y+\sqrt{1+y^2})dxdy+\iint_{D_2} xdxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_{-3x}^{3x}xdy=6\int_0^1 x^2dx=2$$

(14)【解】 由 $r(A-E)=1$ 知 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 是矩阵 A 的二重特征值，由 $A+A-2E=0$ 知矩阵 A 的另一个特征值为 $\lambda_3=-2$，因此矩阵 $|A-2E|$ 的三个特征值分别为 $-1,-1,-4$，由此可得 $|A-2E|=-4$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.

(15)（本小题满分 10 分）

【解】 解法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$

$=a-1=0,a=1,\lim\limits_{x\to0}\frac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2},b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0,\lim\limits_{x\to0}(1+2c\cos x)=0$，由此可得

$a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{1}{2}$.

解法二：$a+bx-(1+c\sin x)e^x=a+bx-[1+cx-\frac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\frac{1}{2})x^2-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1,b-c-1=0,c+\frac{1}{2}=0,\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c=0$，即 $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{1}{2}$.

(16)（本小题满分 10 分）

【解】(Ⅰ) $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\frac{dy}{dx}=0,t=\pi,\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi}=\frac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

故 $t=\pi$ 时函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

（II）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}=0,\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号，故点 $(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 与 $(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 均为曲线 $y=y(x)$ 的拐点。

（17）（本小题满分 10 分）

【证明】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x g(t)dt-(x-a)\int_a^x f(t)g(t)dt,F(a)=0$，

$F'(x)=f(x)\int_a^x g(t)dt+g(x)\int_a^x g(t)dt-\int_a^x f(t)g(t)dt-(x-a)f(x)g(x)$

$=-\int_a^x[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]dt$，由于 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，因而当 $t<x$ 时有 $[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]>0$，即当 $x\in(a,b)$ 时有 $F'(x)>0$，因此函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，由此可得

$F(b)<F(a)=0,\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx-(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx<0$，即

$\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx<(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$

（18）（本小题满分 10 分）

【解】1）区域 D 内：$f_x'(x,y)=y-1=0,f_y'(x,y)=x=0,\Rightarrow(0,1)$ 函数值为 $f(0,1)=0$;

2）直线 L_1 $y=x$，代入 $f=x(x-1)$，$x\in[-\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3}]$

$f'=2x-1=0,\ x=\dfrac12$，所以 $(\dfrac12,\dfrac12)$，$f(\dfrac12,\dfrac12)=-\dfrac14$;

端点上：$f(-\dfrac{\sqrt6}{3},-\dfrac{\sqrt6}{3})=\dfrac23+\dfrac{\sqrt6}{3}$；$f(\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3})=\dfrac23-\dfrac{\sqrt6}{3}$；

3）圆 L_2：$x^2+y^2=3$，

作 Lagrange 函数 $L=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2=3)$，

$$\begin{cases}L_x'=y-1+2x\lambda=0\\L_y'=x+2y\lambda=0\\x^2+y^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-y-x^2=0\\x^2+y^2=3\end{cases}\Rightarrow 2y^2-y-3=0,$$

所以解得 $(2y-3)(y+1)=0$, 得点

$(-\sqrt2,-1)$，$f(-\sqrt2,-1)=2\sqrt2$；$(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac32)$，$f(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac32)=-\dfrac{\sqrt3}{4}$；$(\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac32)$，$f(\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac32)=\dfrac{\sqrt3}{4}$

即知：

$f_{\min}=f(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac32)=-\dfrac{\sqrt3}{4},f_{\max}=f(-\sqrt2,-1)=2\sqrt2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（19）（本小题满分 10 分）

【解】设 D_1: $\le x\le\pi$ $x\le y\le\pi$，D_2: $\le x\le\pi; 0\le y\le x$

则原式 $I=\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin y\,dxdy+\iint\limits_{D_2}y\sin x\sin y\,dxdy$

$=\int_0^\pi x\sin x dx\int_x^\pi \sin y dy+\int_0^\pi y\sin y dy\int_y^\pi \sin x dx=2\int_0^\pi x\sin x(1+\cos x)dx$

$=2x(-\cos x)|_0^\pi+2\sin x|_0^\pi-\frac{1}{2}x\cos 2x|_0^\pi+\frac{1}{4}\sin 2x|_0^\pi=\frac{3}{2}\pi$.

（20）（本小题满分 11 分）

【解】方程可等价变形为 $\frac{\ln x}{x^b}=\ln a$，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x^b}-\ln a$，$f'(x)=\frac{1-b\ln x}{x^{b+1}}$，

$f'(x)=0$，解得 $x=e^{\frac{1}{b}}$，$f(x$ 在 $(0,e^{\frac{1}{b}}]$ 上单增，在 $[e^{\frac{1}{b}},+\infty)$ 上单减，又

$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\ln a<0$，$f(e^{\frac{1}{b}})=\frac{1}{be}-\ln a$，因而当 $\frac{1}{be}-\ln a\ge0$，即

a,b 满足条件 $b\ln a\le\frac{1}{e}$ 时，该方程有实根.

（21）（本小题满分 11 分）

【解】曲线在 $P(x,y)$ 处的切线方程为 l: $Y-y=y'(X-x)$，此处 (X,Y) 为切线上的动点，它与 y 轴交点为 $(0,y-xy')$，$S_1=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$，$S_2=x\sqrt{1+y'^2}$，由题设有 $\frac{3\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx+2}{x\sqrt{1+y'^2}}=\frac{2(1+x)}{x}$，所以有 $3\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx+2=2(1+x)\sqrt{1+y'^2}$，上述等式两边同时对 x 求导可得

$3\sqrt{1+y'^2}=2\sqrt{1+y'^2}+2(1+x)\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}$，即有 $1+y'^2=2(1+x)y'y''$，且 $y(0)=y'(0)=0$，令

$p=y'$ 分离变量可得 $\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dx}{1+x}$，所以 $\ln(1+p^2)=\ln(1+x)+\ln c_1$，即 $1+y'^2=c_1(1+x)$

由 $y'(0)=0$ 可得 $c_1=1$，所以 $y'=\sqrt{x}$ 或者 $y'=-\sqrt{x}$（舍去），积分得 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c_2$，又 $y(0)=0$，

所以 $c_2=0$ 即 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

（22）（本小题满分 11 分）

【解】（I）因 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 1，故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值。设 A 属于 0 特征向量为 $\xi=(x_1\quad x_2\quad x_3)^T$ 由 $\xi\perp\xi_1$ 得方程组 $-x_1+x_2+x_3=0$

得基础解系 $\xi_2=(1,1,0)^T$，$\xi_3=(1,0,1)^T$，故 ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 两个线性无关解. 由秩 $r(\boldsymbol{A})=1$ 知 ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1(1,1,0)^T+k_2(1,0,1)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数.

（II）由（I）的解可知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=0$ 线的三个特征向量.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 P 是可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$，故

$$A=P\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix}.$$

（23）（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$，由 $r(A)=1$ 得 $a=b$，$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&1\\0&1-a^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\pm1$.

又 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，得 $\begin{cases}a-1=0\\1-b=\lambda\\b-1=-\lambda\end{cases}\Rightarrow a=b=1,\lambda=0.$

（Ⅱ）$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $0,0,3$.

$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $Q=\begin{pmatrix}0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$ 及 $x=Qy$，则有 $f=3y_3^2$.

20、21全程考研资料请加群712760929