绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二（模拟 1）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】 $f[f(x)]=\begin{cases} x+2, x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1-x}, +2, x<0 \end{cases}$，故 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的跳跃间断点。答案 C.

（2）【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)x^2}{|x|x^2}=1, g(0)=0$，

$g_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-1, g_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$，$g'(0)$ 不存在。

答案是 A.

(3) 【解】 $f'(a)f'(b)<0$，不妨设 $f'(a)>0, f'(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 必在在 (a,b) 内取得最大值，

即 $\exists x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，此时必有 $f'(x_0)=0$

(4) 【解】: 令 $f(x)=\ln x-kx,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}-k$，当 $k=0$ 时方程显然有根 $x=1$； $k>0$ 时 $f'(\dfrac{1}{k})=0$，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 当，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{k}]$ 上单增，在 $[\dfrac{1}{k},+\infty)$ 上单减，当 $f(\dfrac{1}{k})=-\ln k-1<0$

即 $k>\dfrac{1}{e}$ 时原方程无实根，答案 A .

（5）【解】答案 A 为正确.

（6）【解】由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$ 得， $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0=f(0,0)$，知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续

由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)}{x^2}=1$， $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y,0)}{y^2}=1$，故 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$

故 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta z}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x,y)}{\rho^2}\rho=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。选 A

（7）【解】: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0$， $\lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 3-\lambda & 2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0,\ \lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$$

A 与 B 为实对称矩阵，有相同的特征值，所以相似且合同。

（8）【解】答案 C . 因为 $a=2$ 时， $r(\boldsymbol{B})=2$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】应填 2 .

$$\lim_{x\to+\infty} x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}) \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{e^t-e^{\frac{t}{1+t}}}{t^p}=e^{\frac{t}{1+t}}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{t-\frac{t}{1+t}}-1}{t^p}=\lim_{t\to0^+}\frac{t-\dfrac{t}{1+t}}{t^p}=\lim_{t\to0^+}\frac{t^2}{(1+t)t^p}，\quad p=2 .$$

（10）【解】有题设可知 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\cos x]=0,\ f(0)=\lim\limits_{x\to0} f(x)=-1$，

左式 $=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x}]=f'(0)=1$，所以 $f'(0)=1$，所以所求切线方程为

$y=x+1$.

（11）【解】应填 $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1-\ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{2})$.

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\dfrac{i^3}{n^3}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^4}+1}\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}+1}\overset{u=\sqrt{1+x^4}}{=\!=}\dfrac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\dfrac{u\,\mathrm{d}u}{1+u}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1-\ln\dfrac{1+\sqrt{2}}{2})$.

（12）【解】应填$\dfrac{\sqrt{2}\pi}{3}-\dfrac{20\sqrt{2}}{9}$.

画出二重积分区域D，D_1是D的第一象限部分，由对称性，得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}r^2dr=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(8\cos^3\theta-2\sqrt{2})d\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}-\frac{20\sqrt{2}}{9}$$

（13）【解】应填$x=Ce^{\frac{1}{2}y^2}-y^2-2$

（14）【解】应填$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$. $|B|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2, B^{-1}=B^*A+A$两边左乘$B$得$E=2A+BA$, 即

$$(B+2E)A=E,\text{则 }A=(B+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{e^t}{\cos y^2\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=e^t\sec y^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^t\cos y^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\sqrt{1+t^2}e^t\sec y^2(1+2ye^t\sec y^2\tan y^2).$$

（16）【解】由 $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y + x = 0, \end{cases}$ 解得 D 内唯一驻点 $(0,0)$, $f(0,0) = 2$，在边界

$C: \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1, y \geq \dfrac{1}{2}x - 1$ 上，令 $F(x,y) = x^2 + 4y^2 + xy + 2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$，由方程组

$\begin{cases} F'_x = 2x + y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = x + 8y + 8\lambda y = 0, \text{解得} \\ F'_x = x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$（此点不在区域 D 内舍去）， $f(-\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 5$，

$f(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}) = f(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = 7$，在边界 $L: y = \dfrac{1}{2}x - 1(0 \leq x \leq 2)$ 上有 $f(x,y) = \dfrac{5}{2}(x-1)^2 + \dfrac{7}{2}$，因此函数 $f(x,y)$ 在 L 上最大值为 6，最小值为 $\dfrac{7}{2}$，比较前面的结果可知 $f(x,y)$ 在区域 D 上最大值为 7，最小值为 0 .

（17）【解】如图所示，将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2，所以

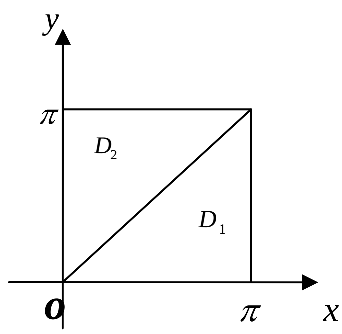
$$I = \iint\limits_{D_1} x \sin x \sin y \,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} y \sin x \sin y \,\mathrm{d}\sigma$$

在利用积分得轮换对称性知

$$I = 2\iint\limits_{D_1} x \sin x \sin y \,\mathrm{d}\sigma = 2\int_0^{\pi} \left[\int_0^x x \sin x \sin y \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\pi} [x \sin x \cdot (1 - \cos x)] \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}\left(-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x \right)$$

$$= 2x\left(-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x \right)\Bigg|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x \right) \mathrm{d}x = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{2}\pi .$$



（18）【解】由题设可知 $y = f(x)$ 满足 $\int_0^t \sqrt{1 + (y')^2} \,\mathrm{d}x = 2\int_0^t y \,\mathrm{d}x$，对 t 求导后可得 $\sqrt{1 + (y')^2} = 2y$，解的

$y' = \pm\sqrt{4y^2 - 1}$，因 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单增，所以又 $y' = \sqrt{4y^2 - 1}$. 上述方程分离变量后可得

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4y^2 - 1}} = \mathrm{d}t$，积分后可得 $\ln(2y + \sqrt{4y^2 - 1}) = 2t + C, y(0) = \dfrac{1}{2}, C = 0, y(t) = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{4}$，即

$f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$；

（II） $A = \dfrac{\pi}{4} + \pi(\dfrac{e^2 + e^{-2}}{4})^2 + 2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \,\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}+\pi\frac{e^4+e^{-4}+2}{16}+\frac{\pi}{4}\int_0^1(e^{4x}+e^{-4x}+2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(7+e^4)}{8}$$

(19)【解】对原等式两边关于 x 同时求导可得 $xf'(x)=(\frac{1}{1+e^{\pi}}+\frac{\sin x}{1+e^x})\sin x$，再对上述等式两边同时在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上积分可得 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+e^{\pi}}+\frac{\sin x}{1+e^x})\sin x\,\mathrm{d}x$，

而 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{1+e^{\pi}}+\frac{\sin x}{1+e^x})\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+e^{\pi}}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

记 $\varphi(x)=\frac{\sin^2 x}{1+e^x}$，则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\varphi(x)+\varphi(-x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^x})\,\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi}{4}$，所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

（**20**）【证明】$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n=\frac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}, x_1=2>1, n>1$ 时有

$x_n-1=\frac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3)}{3x_{n-1}^2+1}-1=\frac{(x_{n-1}-1)^3}{3x_{n-1}^2+1}$，由归纳法可知，对 $\forall n$ 均有 $x_n>1$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调减少正的数列，由单调有界收敛原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$ 两边同时取极限可得 $a=\frac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$，解方程可得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

（**21**）【证法一】原不等式等价于 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq 0\ (0<x<+\infty)$，令

$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$f(1)=0, f'(x)=2x\ln x+2-x-\frac{1}{x}, f'(1)=0, f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, f''(1)=2$，

$f'''(x)=\frac{2(x^3-1)}{x^3}$，当 $x>1$ 时，$f'''(x)>0, f''(x)>f''(1)=2, f'(x)>f'(1)=0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，因此当 $x>1$ 时，$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq f(1)=0$；

当 $0<x<1$ 时 $f'''(x)<0, f''(x)>f''(1)=2, f'(x)<f'(1)=0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，因此当 $0<x<1$ 时，$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq f(1)=0$.

【证法二】原不等式等价于 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq 0\ (0<x<+\infty)$.

（1）当 $x\geq 1$ 时，该不等式等价于 $(x+1)\ln x-x+1\geq 0$，

令 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1, f(1)=0, f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}, f'(1)=1, f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，当 $x>1$ 时有

$f''(x)>0, f'(x)>1>0$，因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单增，即当 $x\geq 1$ 时，

有 $f(x)=(x+1)\ln x-x+1\geq f(1)=0$；

（2）当$0<x\le 1$时该不等式等价于$(x+1)\ln x-x+1\le 0$，此时有$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}<0, f'(x)$在$(0,1]$上单调递减，因此当$0<x<1$时$f'(x)>f'(1)=0$，即$f(x)$在区间$(0,1]$也是单增，因此当$0<x<1$时有$f(x)=(x+1)\ln x-x+1<f(1)=0$，因而有$f(x)=(x+1)\ln x-x+1\le f(1)=0$；

综合前面的讨论可知当当$x>0$时，有$(x^2-1)\ln x\ge (x-1)^2$.

（22）【解】:（Ⅰ）由题设$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3$均为$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解$\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{0}$，

知$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3$线性相关（否则由$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$基础解系所含向量个数≥3 $\Rightarrow \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 矛盾！）于是

$0=\left|\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3\right|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a$，故$a=3b$，因为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$有解，所以$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}_3)$，

$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{\beta}_3)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&3&9&6\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\dfrac{5-b}{3}\end{pmatrix}$，由$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}_3)$可得$\dfrac{5-b}{3}=0$，即$b=5$；

(2)由$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2$秩为2， 知$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2$线性无关，故$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$至少有两个线性无关解，$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2$，而$\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{0}$，因而基础解系由$3-r(\boldsymbol{B})\le 2$个线性无关解向量组成　于是$\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2$可作为$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$基础解系。故通解为$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_1(0\quad 1\quad -1)^T+k_2(15\quad 2\quad 1)^T$.

（23）【解】（Ⅰ）$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,-1,2$，$|\boldsymbol{A}|=-2$，

$\left|\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|\,|\boldsymbol{A}|A^{-1}-2\boldsymbol{A}^{-1}\right|=\left|-4\boldsymbol{A}^{-1}\right|=(-4)^3\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|=32$；

（Ⅱ）由题意$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}\Rightarrow \boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^T$

$$\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}\left[\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]\boldsymbol{P}^T$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&&\\&6&\\&&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学二（模拟二）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】由 $x_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)],y_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$ 知是答案 D.

(2) 【解】由题设有 $f'(e)e=2,f'(e)=\frac{2}{e}$，因而有 $\mathrm{d}\,f(u)\big|_{\substack{u=e\\ \Delta u=0.01}}=\frac{0.02}{e}$，答案 B .

(3) 【解】$F(x)=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u,F'(x)=\int_0^x[f(u)-f(x)]\,\mathrm{d}u$，$f(x)$ 为奇函数，则 $F'(x)$ 为偶函数，且可以证明 $x\neq0$ 时，$F'(x)<0$，因此 $F(x)$ 是单调减少的奇函数，答案 B .

(4)【解】答案为 C .

(5)【解】答案为 C .

(6) 【解】由对称性可得 $\iint\limits_D\frac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\frac{e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{e^x+e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=1$. 答案为 A .

(7) 【解】$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix},|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=6$，答案为 C .

(8) 【解】 由 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$，得 $(A-E)(A^2\alpha+3A\alpha)=0,A(A^2\alpha+3A\alpha)=A^2\alpha+3A\alpha$，即 $A^2\alpha+3A\alpha$ 是矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量.　答案：B

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）【解】应填 1. 令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}<0\,(x>e)$，那么函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(x)>0$，由此可得

$$n^{\frac{1}{n}} \geq \left(\cos\frac{\ln 3}{3} + \sin\frac{\ln 4}{4} + \cdots + \cos\frac{\ln(n+2)}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(n\cos\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cos\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$，由夹逼原理知原式 $=1$.

(10) 【解】: $g'(x) = f'(\frac{2x-1}{2x+1})\frac{4}{(2x+1)^2}, g'(0) = 4f'(-1) = 4\ln 2$.

(11) 【解】应填 $-\frac{\pi a^2 \ln 2}{2}$

原式 $\overset{u=x-a}{=\!=}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}[\ln(u+\sqrt{1+u^2})-\ln 2]\,\mathrm{d}u = -\ln 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{\pi a^2\ln 2}{2}$.

(12)【解】应填 $\ln 2$. $s = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t + (\csc t - \sin t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cot t\,\mathrm{d}t = \ln 2$.

(13) 【解】应填 $\frac{20\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$. 画出二重积分区域 D， D_1 是 D 的第一象限部分，由对称性，得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x = \iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_1}(\sqrt{x^2+y^2})dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}r^2dr = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(8\cos^3\theta - 2\sqrt{2})d\theta = \frac{20\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

(14) 【解】应填 -8 . 因为 A 的特征值为 3，-3，0，所以 $A-E$ 特征值为 2，-4，-1,从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$ ， 即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-1$ ， B^{-1} 的特征值为 $2,-4,-1$ ，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$ ，于是 $|B^{-1}+2E| = -8$

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【解】 $x>0, \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{1}{3}x^3$,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x - \sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{x^3}}\right]^{\frac{x^3}{3(\tan x - \sin x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3\cos x}{3\sin x(1-\cos x)}} = e^{\frac{2}{3}}$$

（16）【解】由题设有 $y(1)=\frac{1}{4}, y'(1)=1$，令 $y'=p$，则原方程可化为 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p = 6\sqrt{y}$ ，解得

$p^2 = 8y^{\frac{3}{2}}, y' = 2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$ 或者 $y' = -2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$（舍去），再积分可得

$4y^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2}x + C,\ y(1) = \frac{1}{4}, C = 0, y = \frac{1}{4}x^4$，由此可得所求曲率为 $K = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{3x^2}{\sqrt{(1+x^6)^3}}$.

（17） 【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + xf_2', \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(yf_{11}'' + xf_{12}'') + x(yf_{21}'' + xf_{22}'') + f_2' = y^2 f_{11}'' + 2xyf_{12}'' + x^2 f_{22}'' + f_2'$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-yf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-y(xf_{21}''-yf_{22}'')-f_2'=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$，因此

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2$.

(18)【解】(Ⅰ) 设 P 的坐标为 (x_0,y_0)，则抛物线该点处切线方程为 $y=2x_0x-x_0^2$，切线与 x 轴交点为 $(\dfrac{1}{2}x_0,0)$，切线与直线 $x=4$ 的交点为 $(4,8x_0-x_0^2)$ 相应的图形面积为

$A=\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x-\dfrac{1}{4}x_0(8-x_0)^2=\dfrac{64}{3}-\dfrac{1}{4}x_0(8-x_0)^2(0\le x_0\le 4)$，

令 $A'=\dfrac{1}{4}(8-x_0)(3x_0-8)=0$，解得 $x_0=\dfrac{8}{3}$ 或者 $x_0=8$（舍去），驻点惟一，因此当 $x_0=\dfrac{8}{3}$ 时，面积 A 取值最小，且最小值为 $A=\dfrac{1216}{81}$；

(Ⅱ) $V=\pi\int_0^4 x^4\,\mathrm{d}x-\dfrac{1}{3}\pi\times\dfrac{8}{3}\times\left(\dfrac{128}{9}\right)^2=\pi(\dfrac{4^5}{5}-\dfrac{4\cdot 8^3}{9^3})$.

(19)【解】:(Ⅰ) 方程 $xy'-(2x^2-1)y=x^3$ 的通解为 $y=e^{\int(2x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}[\int x^2e^{-\int(2x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C]$，即为

$y=C\dfrac{e^{x^2}}{x}-\dfrac{1+x^2}{2x},y(1)=a,C=\dfrac{1+a}{e}$，即 $y=\dfrac{(1+a)e^{x^2}}{ex}-\dfrac{1+x^2}{2x}$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{(1+a)e^{x^2}}{ex^2}-\dfrac{1+x^2}{2x^2}]$ 存在，则必有 $1+a=0,a=-1$，相应的极限值为

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

(20)【证明】:(Ⅰ) 由连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\dfrac{1}{2}),\exists\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

(Ⅱ) 令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0$，即有 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

(21)【解】:引入极坐标 (r,θ) 满足 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，在极坐标 (r,θ) 中积分区域 D 可表示为 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},2\cos\theta\le r\le 2\}$，于是

$$\iint_D x(y+1)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^2 r\cos\theta(r\sin\theta+1)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\int_{2\cos}^2 r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{2\cos}^2 r^2dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^4}{4}\cos\theta\sin\theta[1-\cos^4\theta]d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^3}{3}\cos\theta[1-\cos^3\theta]d\theta$$

$$=I+J$$

由于 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^4}{4}\cos\theta\sin\theta[1-\cos^4\theta]d\theta=4\int_0^1 t(1-t^4)dt=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=\frac{4}{3}$,

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^3}{3}\cos\theta[1-\cos^3\theta]d\theta=\frac{8}{3}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta)=\frac{8}{3}(1-\frac{3\cdot1\cdot\pi}{4\cdot2\cdot2})=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}$

故 $\iint\limits_D x(y+1)d\sigma=I+J=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}=4-\frac{\pi}{2}$ 。

（22） 【解】令 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,矩阵方程化为 $\boldsymbol{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,即

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&\frac{1-a}{2}&b-2&\frac{2+c}{2}\end{pmatrix},$$

因此当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）;

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$（$l$ 为任意常数）;

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$（$t$ 为任意常数）;

于是矩阵的全部解是 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1-k&2-l&1-t\\-k&2-l&-1-t\\k&l&t\end{pmatrix}$（其中 k,l,t 为任意常数）.

（23）【解】:（I）据已知条件，有 $\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&0&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}2a_{12}-a_{13}=2,\\a_{12}-a_{23}=4,\\a_{13}+2a_{23}=-2,\end{cases}$

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$，所以该二次型表达式为 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$；

（II）由$\left|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -2\\ -2 & \lambda & 2\\ -2 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$2,2,-4.$

由$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0,\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得$\lambda=2$的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_{1=}(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T$; 由$(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ -2 & -4 & 2\\ -2 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得$\lambda=-4$的特征向量$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$，将$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$单位化，可得令$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\alpha}_3$则所求正交变换矩阵为$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，令

$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$，则有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

（III）因为$A+kE$的特征值为$k+2,k+2,k-4,$所以当$k>4$时,矩阵$A+kE$正定.

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学二（模拟 3）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】答案为C． 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{-(1+x)}=e^{-1},\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1$ 均为 $f(x)$ 的可去间断点.

(2)【解】答案为D． 由题设有 $f'(1)=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{e^{x^2}}f(t)\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}f(e^{x^2})}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(3) 【解】答案为C． 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}[f'(x)+f''(x)]=f'(0)+f''(0)=0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)+f''(x)-f''(x)}{x}=f''(0)+f'''(0)=f'''(0)=2\,.$$

（4）【解】答案为A． 由题设有 $xf'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x},\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x)=\sqrt{x}+C,\ f(9)=2$，故 $C=-1$，即

$f(x)=\sqrt{x}-1$.

（5）【解】答案为A． $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加，当 $x_1>x_2,y_1<y_2$ 时， $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

（6）【解】答案为C． $I_3<0=I_1<I_2$.

（7）【解】答案为 D.

（8）【解】答案为 C.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】原式 $=\lim_{x\to+\infty}\left[(1+\frac{3\ln x}{x-2\ln x})^{\frac{x-2\ln x}{3\ln x}}\right]^{\frac{3x}{x-2\ln x}}=e^3$

（10）【解】对等式两边同时取对数，再求微分可得

$\ln\cos x\,\mathrm{d}y-y\tan x\,\mathrm{d}x=\ln\sin y\,\mathrm{d}x+x\cot y\,\mathrm{d}y$，由此可得 $\mathrm{d}y=\frac{\ln\sin y+y\tan x}{\ln\cos x-x\cot y}\mathrm{d}x$

（11）【解】应填 $y=x$.

因为 $\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1,\ \lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=1+\lim_{x\to+\infty}x(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})=1$

所以所求斜渐近线为 $y=x$.

（12）【解】应填 e． 由题设有 $\frac{1}{n(\ln a_n)^n}=A,\ln a_n=(nA)^{-\frac{1}{n}},\lim_{n\to\infty}\ln a_n=1$，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=e$.

(13)【解】应填 $y=C_1\sin ax+C_2\cos ax-\frac{1}{4a}\cos ax$.

方程 $y''+a^2y=0$ 的通解为 $y=C_1\sin ax+C_2\cos ax$， 方程 $y''+a^2y=\frac{1}{2}\sin ax$ 的特解可设为

$y^*=x(A\cos ax+B\sin ax)$ 代入可解得 $A=-\frac{1}{4a},B=0$，因此该方程的通解为

$y=C_1\sin ax+C_2\cos ax-\frac{1}{4a}\cos ax$.

(14)【解】应填 1． 方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=0$ 的基础解系只有一个向量 ξ， $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 可由 ξ 表示，因此答案为 1.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（**15**）【解】 由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+\sin\dfrac{f(x)}{x}]=0,\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{f(x)}{x}=\sin\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， 因此当 $x\to 0$ 有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\sin\dfrac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=1$, $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=2$.

（**16**）【解】原式 $=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}\dfrac{1}{2(1-x^2)}=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\int\dfrac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$，

$$\int\frac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=\!=}\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\cos^2 t-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin t}+\frac{1}{1-\sqrt{2}\sin t}\right)\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C,$$

$$\text{原式}=\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C.$$

（**17**）【证明】因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\},m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知 $x\in(0,1)$ 时有 $1+\dfrac{m}{2}x\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le 1+\dfrac{M}{2}x\ (\xi\in(0,x)$，

对不等式 $1+mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le 1+Mx$ 两边同时在区间 $[0,1]$ 上积分可得

$\dfrac{m}{2}\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-1\le\dfrac{M}{2}$ 即 $m\le 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2$.

（**18**）【解】设物体的温度为 $T=T(t)$，则有 $T'(t)=-k[T(t)-20]$ 其中 k 为待定正的常数，该方程的同解为

$T=20+Ce^{-kt},T(0)=100,T(600)=60,C=80,k=\dfrac{\ln 2}{600}$，即 $T=20+80e^{-\frac{\ln 2}{600}t}$，将 25 带入解得 $t=2400$ (秒).

(19) 【解】由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}2ax+2by=3,\\ 2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当$8a^2-4b^2\neq 0$，即$2a^2-b^2\neq 0$时，$f(x,y)$有唯一驻点$\left(\dfrac{3a-2b}{2a^2-b^2},\dfrac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$.

记 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$， $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b$， $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a$.

当$AC-B^2=8a^2-4b^2>0$即$2a^2-b^2>0$时，$f(x,y)$有极值. 并且当$A=-2a>0$，即$a<0$时，$f(x,y)$有极小值；当$A=-2a<0$即$a>0$时，$f(x,y)$有极大值.

综上所述，得,当$2a^2-b^2>0$且$a<0$时，$f(x,y)$有唯一极小值；

当$2a^2-b^2>0$且$a>0$时，$f(x,y)$有唯一极大值.

（20）【解】原式$=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\,\mathrm{d}r=\dfrac{15\pi}{2}$

（21）【解】（Ⅰ）由定积分的几何意义知$\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}x^2$，当$x\in(0,1)$时

$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\,\mathrm{d}t=x^2-x+\dfrac{1}{2}$，当$x\geq 1$时有

$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=x-\dfrac{1}{2}$，从而 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+2}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}, x\in[0,1],\\ \dfrac{\pi}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}, \quad x>1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}(2+\pi)x-1, x\in(0,1],\\ \pi x+1, \quad x>1,\end{cases}$ 由$f'(x)$的表达式可知$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2+\pi}]$上单减，在$[\dfrac{1}{2+\pi},+\infty)$上单增，因而$f(\dfrac{1}{2+\pi})=\dfrac{1+\pi}{2(2+\pi)}$是函数的极小值，同时也是最小值；

（Ⅱ）因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而$f(x)$在$[0,+\infty)$内没有最大值.

（22）【解】(I) 由于$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$,知特征值$\lambda_2$=0，$\lambda_3=-2$，相应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,2)^{\mathrm T}$和$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-2,1)^{\mathrm T}$。

设特征值λ_1=1的特征向量为$(x_1\quad x_2\quad x_3)^{\mathrm T}$,则

$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$，解得特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,-2)^{\mathrm T}$。

所有特征值λ_1=1,λ_2=0，$\lambda_3=-2$，的特征向量依次为$k_1(2\quad 1\quad -2)^{\mathrm T}$，$k_2(1\quad 2\quad 2)^{\mathrm T}$，$k_3(2\quad -2\quad 1)^{\mathrm T}$，其中$k_1,k_2,k_3$ k_3全不为0；

（2）由方程$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,解出$x_1=-1,x_2=1,x_3=1$,即$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，从而

$\boldsymbol{A}^n\beta=\boldsymbol{A}^n(-\boldsymbol{\alpha}_1)+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+(-2)^n\boldsymbol{\alpha}_3$

$=(-2+(-1)^n2^{n+1},\quad -1+(-1)^{n+1}2^{n+1},\quad 2+(-1)^n2^n)^{\mathrm{T}}$

.

（23）【解】(Ⅰ)由 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$,有 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量是方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。解此方程组的基础解系 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(Ⅱ)由于两个方程组同解，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 必是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，解此方程组

$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0$ 即 $\begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases}$，

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(Ⅲ) 由于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=(k_1,-2k_1+k_2,3k_1-2k_2,3k_1-2k_2)^{\mathrm{T}}$，因为 $x_3=-x_4$，即 $3k_1-2k_2=k_1-k_2$，，即 $k_2=2k_1$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k,0,-k,k)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数.