同在一片蓝天下，我们用心浇灌，你用心耕耘，同心协力，共创心底的那份辉煌……

2013 考研数学

成功数学模拟3套 数学二

合工大（共创）考研

www. hfutky.cn

- 名牌名校的超强辅导专家阵容
- 十八年考研辅导工作的结晶
- 五大顶尖数学名师亲临预测
- 每年最成功最负盛名模拟试卷
- 全国录取过线率最高的辅导团队

合肥共创（原合工大）考研辅导中心
Tel： 0551-2905018 18755102168

成就梦想 共创辉煌

参考答案

数学二（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	A	D	C	A	C

（1）【解】 由极限的保号性知答案应该是 A

(2) 【解】 $f(x)=\begin{cases}0, |x|>1,\\ \sin\pi x, |x|<1,\\ 0, x=1\end{cases}$ $f_-'(1)=-\pi, f_+'(1)=0$， $f(-1)$ 无定义，答案 C。

(3) 【解】由题设知 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$， $f'(0)=0, f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)+\int_0^x(e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{x}=1$，故 $x=0$ 是函数 $y=f(x)$ 极小值点。答案 A。

（4）【解】有题设知 $xe^{-x^2}f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必为奇函数,又 $f(x)$ 有界,因而 $\exists M>0$,使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|f(x)|\le M$ 相应的有

$|F(x)|=\left|\int_0^x te^{-t^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_0^x\left|te^{-t^2}f(t)\right|\mathrm{d}t\right|\le\dfrac{M}{2}(1-e^{-x^2})\le\dfrac{M}{2}$,因此 $F(x)$ 是有界的奇函数答案为 A。

(5) 【解】 答案 D

(6) 【解】因为 (x,y)Î D 内部时，$\ln^3(x+y)<\sin^2(x+y)<x+y$，故答案为 C。

20、21全程考研资料请加群712760929

(7) 【解】答案为 A.

(8) 【解】答案 C

(9)【解】原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x})^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以

原式$=e^{\frac{1}{2}}$.

(10)【解】因为$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2+1}{n^3+2n^2+n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2+i}{n^3+2n^2+i}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2+n}{n^3+2n^2+1}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2+1}{n^3+2n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n}{n^3+2n^2+n}=\dfrac{1}{3}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2+n}{n^3+2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n^2}{n^3+2n^2+1}=\dfrac{1}{3}$，

故原式$=\dfrac{1}{3}$.

(11)【解】由题设有$\int_0^1[xf'(x)-f(x)]\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，

所以$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$.

(12) 【解】由题设知该方程的特征方程为$(r-1)(r^2+1)=0$，即为$r^3-r^2+r-1=0$，因此该方程的表达式为$y'''-y''+y'-1=0$。

(13) 【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{1+x^2}f_1'+yf_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{x}{1+x^2}f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$。

(14) 【解】$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$ 两边左乘 $\boldsymbol{B}$ 得 $\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BA}$，即

$(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(15)【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}]\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+at^2}-(1+bt)e^{-2t}}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+at^2}-1}{t^2}-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(1+bt)e^{-2t}-1}{t^2}=\dfrac{a}{2}-\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{(b-2-2bt)e^{-2t}}{2t}=1$，因此必有

$b=2,\dfrac{a}{2}+b=1,a=-2$。

（16） 【证明】（Ⅰ） 令 $f(x)=x-\arctan x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，因而函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$ 时有 $f(x)=x-\arctan x>f(0)=0$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的，又 $x_n>0$，由单调有界收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_n=\arctan x_{n-1}$ 两边同时取极限可得 $a=\arctan a$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

（Ⅱ） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan x_{n-1}-x_{n-1}}{(\arctan x_{n-1})^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=0。$$

（17）【解】由题设知 $x=0,y=1$ 时 $z=1$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y^2z}{e^z-xy^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2xyz}{e^z-xy^2}$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\dfrac{1}{e}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(2xz+2xy\frac{\partial z}{\partial y})(e^z-xy^2)-2xyz(e^z\frac{\partial z}{\partial y}-2xy)}{(e^z-xy^2)^2}=\frac{2xz}{e^z-xy^2}+\frac{8x^2y^2z}{(e^z-xy^2)^2}-\frac{4x^2y^2z^2e^z}{(e^z-xy^2)^3}$$

（18）【解】解法一：

$$V=\pi\int_0^{y(1)}\varphi^2(y)\,\mathrm{d}y\overset{y=f(x)}{=\!=\!=}\pi\int_0^1 x^2f'(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 x^2[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1]\,\mathrm{d}x=\pi(\frac{e}{2}-\frac{5}{2e}-\frac{1}{3})$$

解法二: $V=2\pi\int_0^1 x[f(1)-f(x)]\,\mathrm{d}x=\pi f(1)+\dfrac{2}{3}\pi-\pi\int_0^1 x(e^x-e^{-x})\,\mathrm{d}x=\pi(\dfrac{e}{2}-\dfrac{5}{2e}-\dfrac{1}{3})$

（19）【解】由题设知 $y''(x)\geq 0$,因而有 $\dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2y}(1+y'^2)},y(0)=2,y'(0)=0$，

方程可以化简为 $\dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2y}}$，令 $p=y'$，则有 $\dfrac{p\,\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{2y}}$，积分后可得

$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{\dfrac{y}{2}}+C_1,p(2)=0,C_1=0$， 解 得 $y'=p=\pm\sqrt{\dfrac{y-2}{2}}$， 积 分 后 可 得

$2\sqrt{y-2}=\pm\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C_2,y(0)=2,C_2=0$，所以所求曲线方程为 $y=\dfrac{x^2}{8}+2$.

（20）【证明】（Ⅰ）由 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ 可知 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<0$ 从而有 $f(x_0)<0$,对函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b]$ 上应用连续函数的零点定理知可知 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $f(\xi)=0$；

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a,x_0]$ 及 $[x_0,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists x_1\in(a,x_0)$ 及 $x_2\in(x_0,b)$,使得 $f'(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<0,f'(x_2)=\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$，再对函数 $f'(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得

$f''(\eta)=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}>0$，命题得证.

（21）【解】区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，令

$D_1: x\le x^2+y^2\le 2y, y\le x$，则有 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{xy}=2\iint\limits_{D_1}\frac{dxdy}{xy}$

$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\cos\theta}^{2\sin\theta}\frac{dr}{r\sin\theta\cos\theta}=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)d\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)d(\tan\theta)}{\tan\theta}$

$=\ln^2(2\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln^2 2$。

（22）【解】（Ⅰ）由题设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{0}$，知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，否则 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 基础解系所含向量个数大于等于 3，因而必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，矛盾，于是有

$0=|(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a$，故 $a=3b$，因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解，所以

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta}_3)$，$(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{pmatrix}$，由 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}_3)$ 可得

$\frac{5-b}{3}=0, b=5, a=15$；

(Ⅱ) 由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩为 2 知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 至少有两个线性无关解 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$，又 $\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{0}, r(\boldsymbol{B})\ge 1$， 因而方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 基础解系由 $3-r(\boldsymbol{B})\le 2$ 个线性无关解向量组成于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可作为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 基础解系。故通解为 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2=k_1(0,1,-1)^T+k_2(15,2,1)^T$.

（23）【解】(Ⅰ) 二次型 f 矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a+4&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}b&&\\&5&\\&&-1\end{pmatrix}$，

因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，所以 $\begin{cases}\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Lambda}\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\Lambda}|\end{cases}$，$\begin{cases}1+a+4+3=b+5-1\\3a-4=-5b\end{cases}$，由此可得 $\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$

$\boldsymbol{A}$ 特征值 $2,5,-1$，依次解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$，规范化后可得

$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$，所求的正交变换矩阵为 $\boldsymbol{U}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，

相应的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Uy}$；

（Ⅱ）$f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式 $\Delta_1=1>0,\Delta_2=a>0,\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=3a-4>0$，

由此可得 $a>\dfrac{4}{3}$.

数学二（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	A	A	B	D	D	C

（1）【解】 由题设知

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{a+x^2}-1)=0, a=1, \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-1-x-bx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1-2bx}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-2b}$ 存在，故 $b\neq\dfrac{1}{2}$ 答案 D。

（2）【解】由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)x^2}{2x^3e^{\xi}}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2, f(0)=0, f'(0)=2$，其中 ξ 为介于 0 到 x 之间的某个点，答案 A。

（3）【解】两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$,令

$f(x)=kx^2-\ln x, f'(x)=2kx-\dfrac{1}{x}=0$, 解得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2k}}, f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(2k)$ ，当

$k>\dfrac{1}{2e}$ 时有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$,因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根,

即两个曲线无交点.答案 A。

注:本题也可以用取特除值法，令 $k=1$，则讨论起来更方便.

（4）【解】因为 $\ln(3+\sin 2x)\sin 2x$ 是周期为 π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x\ln(3+\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}dx$$

$=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}dx>0$，故选 A.

（5）【解】根据线性微分方程解的结构知答案为 B。

（6）【解】由题知 $f'_x(1,0)=2, f'_y(1,0)=-1$，而

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)-[f(1,2h)-f(1,0)]}{h}=f'_x(1,0)-2f'_y(1,0)=4$$

答案为 D

（7）【解】由于 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$,

则 λ 为 1 或 2 或 3，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$、$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可能不可逆，选(D)

（8）【解】答案 C

（9）【解】对等式两边同时求微分可得

$$-\sin(x^2+2y)(2x\,dx+2\,dy)+e^y\,dy-2xy^3\,dx-3x^2y^2\,dy=0,$$

解得 $\mathrm{d}y=\dfrac{2xy^3+2x\sin(x^2+2y)}{e^y-2\sin(x^2+2y)-3x^2y^2}\mathrm{d}x$

（10）【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=-\dfrac{1}{2}$,故所求斜渐近线为 $y=x-\dfrac{1}{2}$.

（11）【解】原式 $=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}e^{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}re^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}r-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}re^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}r$

$=\dfrac{\pi}{4}(e^4-e)$

（12）【解】应填 $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$.

（13）【解】原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x(\dfrac{1}{1+e^{2x}}+\dfrac{1}{1+e^{-2x}})\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（14）【解】 因为 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$,所以为 A^* 的特征值为 $\mu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=-2$，A^*+3E 的特征值为 4,1,1 ,又因为 $4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3$ 也为 A 的线性无关的特征向量,所以

$4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3$ 也是 A^*+3E 的线性无关的特征向量,所以

$$P^{-1}(A^*+3E)P=\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

（15）【解】令 $x\to0$ 可得 $f(1)-ef(1)=0,f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\cos x)-ef(\ln(e+x^2))}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{x^2}-e\dfrac{f[1+\ln(1+\frac{x^2}{e})]-f(1)}{x^2}\right)=-\dfrac{3}{2}f'(1)=2$，所以

$f'(1)=-\dfrac{4}{3}$，$f(x)$ 为偶函数，$f'(x)$ 为奇函数，从而有 $f'(-1)=\dfrac{4}{3}$，故所求的切线方程为 $y=\dfrac{4}{3}(x+1)$。

（16）【解】（Ⅰ） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,t=\pi,$

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\pi}=\dfrac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，故 $t=\pi$ 时函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

（Ⅱ） $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3}=0,\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号，故点$(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$与$(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$均为曲线$y=y(x)$的拐点。

（17）【解】由题设有$f_x'=e^{-x}(-ax-b+y^2+a)\big|_{(-1,0)}=e(2a-b)=0, f_y'=-2ye^{-x}\big|_{(-1,0)}=0$，所以有$b=2a$。$A=f_{xx}''(-1,0)=e(b-3a), B=f_{xy}''(-1,0)=0, C=f_{yy}''(-1,0)=-2e,$ $\Delta=AC-B^2=-2e^2(b-3a)=2ae^2$，$f(-1,0)$为$f(x,y)$的极大值，则有D □0。若$a<0$，则$f(-1,0)$必不能取得极值；当$a=0$时$b=0$，$f(x,y)=-y^2e^{-x}\le 0=f(-1,0)$，此时$f(-1,0)$为$f(x,y)$的极大值；当$a>0$时，$\Delta>0, A=-ae<0, C<0$，因此$f(-1,0)$为$f(x,y)$的极大值的条件为$b=2a\ge 0$.

（18）【解】由定积分的几何意义知积分$\int_0^1(e^x-px-q)\,\mathrm{d}x$是由曲线$y=e^x$与直线$y=px+q$以及$x=0,x=1$围成的图形面积，只有当直线$y=px+q$与曲线$y=e^x$相切时才有可能取得最小值。

设切点横坐标为$x=x_0$，相应的切向方程为$y=e^{x_0}x+(1-x_0)e^{x_0}$，相应的图形面积为

$$A(x_0)=\int_0^1[e^x-(e^{x_0}x+(1-x_0)e^{x_0}]\,\mathrm{d}x=(x_0-\frac{3}{2})e^{x_0}+e-1$$

$A'(x_0)=(x_0-\dfrac{1}{2})e^{x_0}$，令$A'(x_0)=0$，得$x_0=\dfrac{1}{2}$，由于实际问题有解，驻点唯一，因此当$x_0=\dfrac{1}{2}$时，相应的积分取值最小，$p=\sqrt{e}, q=\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$。

(19)【解】(Ⅰ) 方程$xy'-(2x^2-1)y=x^3$可变形为$y'-(2x-\dfrac{1}{x})y=x^2$，

解得$y=e^{\int(2x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}(\int x^2e^{-\int(2x-\frac{1}{x})\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C)$，即为$y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}+C\dfrac{e^{x^2}}{x}, y(1)=a, C=\dfrac{a+1}{e}$，

所以相应的初值问题解为$y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}+(a+1)\dfrac{e^{x^2}}{ex}$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}+(a+1)\dfrac{e^{x^2}}{ex^2})$存在，则必有$a+1=0, a=-1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}=-\dfrac{1}{2}$。

（20）【解】原式$=\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}xy\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}(2y\sqrt{1-y^2}-y)\,\mathrm{d}y$

$$=[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}y^2]\Big|_0^{\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{5}{48}$$

（21）【证明】(Ⅰ) 由$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$可知$\int_a^b[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=0$，记$F(x)=f(x)-x$，那么函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，若$F(x)$在$(a,b)$无零点，那么$x\in(a,b)$时恒有$F(x)>0$（或者$F(x)<0$）相应的必有$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x>0$（或$<0$）与

$\int_a^b [f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（Ⅱ）令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

（22）【解】(1)因为方程组（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解，所以（Ⅰ）与（Ⅲ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ ax_1+a^2x_3=0\\ ax_2+a^2x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$

同解，那么（Ⅰ）与（Ⅲ）的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\\1&1&1&0\end{pmatrix}$

有相同的秩。

如 $a=0$，则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$,所以假设 $a\neq0$，由于 $A\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\end{pmatrix}$，所以

$r(A)=3$，

又 $B\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\\0&0&0&2a-1\end{pmatrix}$ 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$r(B)=3$ 此时（Ⅰ）与（Ⅲ）同解；

（2）由于 $A\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$，所以方程的基础解系 $\boldsymbol{\eta}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right)^T$，则通解为

$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}$。

（23）【解】（1）由题设条件知 $A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\cdots&\cdots&\vdots&\vdots\\n&2n&\cdots&n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}(1\quad2\quad\cdots\quad n)=\boldsymbol{\alpha\alpha}^T$，故

$r(A)=1$；

（2）因 $A^2=\left(\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\right)\left(\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\right)=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}A=\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)A$，$|A|=0,\lambda=0$ 是 A 特征值，对应特征向

量满足 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\boldsymbol{x}$，因 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^n i^2\neq0$，故方程组 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，

只需解方程 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$ 的线性无关特征向量为

$\xi_1=(-2,1,0,\cdots,0)^T$，$\xi_2=(-3,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\xi_{n-1}=(-n,0,\cdots,1)^T$，由此可知 $\lambda=0$ 至少

是 $n-1$ 重根，又 $\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n} i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda^2\neq 0$，故 A 有一个非零特征值 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n} i^2\neq 0$，当 $\lambda=\sum_{i=1}^{n} i^2=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$ 时由 $(\lambda E-A)\boldsymbol{x}=\left(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，由观察可知 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ 时，$\left(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}E-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 故 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,\cdots,n)^T=\xi_n$ 是对应 $\lambda=\sum_{i=1}^{n} i^2$ 特征向量. A 有 n 个线性无关特征向量，因而可以相似对角化。

取 $\boldsymbol{P}=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)=\begin{pmatrix}-2 & -3 & \cdots & -n & 1\\ 1 & & & & 2\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & n\end{pmatrix}$

数学二（模拟 3）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	B	D	B	D	D	B

(1) 【解】：由题设知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-e^{\sin^3 x}}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^3 x}(e^{x^3-\sin^3 x}-1)}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-\sin^3 x}{x^m}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2 x)}{x^m}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{m-2}}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}}$，所以有 $m-3=2, m=5$，答案为 B.

(2)【解】由题设知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，又 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时有 $f(x)-f(a)\geq 0$；因此有 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\dfrac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\leq 0$，故答案为 D.

(3) 【解】$\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=e^{\frac{a}{2}}, \int_{-a}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

$=-2xe^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-a}^{+\infty}+2\int_{-a}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx=2(2-a)e^{\frac{a}{2}}$，$a=\dfrac{3}{2}$，

答案 B。

(4) 【解】由题设有 $xf'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, f'(x)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}, f(x)=4x^{\frac{1}{3}}+C, f(8)=1$，故 $C=-7$，

即 $f(x)=4x^{\frac{1}{3}}-7$，答案为 D。

(5) 【解】根据奇偶函数积分性质以及区域 D 的对称性应该选 B.

(6) 【解】 答案 D.

(7) 【解】答案 D

20、21全程考研资料请加群712760929

(8) 【解】 由题设有 $A(A^2\alpha+3A\alpha)=A^2\alpha+3A\alpha$,答案 B。

(9)【解】由题设可知 $x=0$ 时 $y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,方程式两边对 x 同时求导可得

$y'\left|\sin y^2\right|+\cos x\sqrt{1+\sin^3 x}=0$, 将 $x=0$, $y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 代入可得 $y'|_{x=0}=-\sqrt{2}$,因而相应的法线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(10) 【解】 $f(x)=x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}x^n+\cdots+n!, f^{(n)}(x)=(n+1)!x+\frac{n(n+1)}{2}n!$.

$f^{(n)}(0)=\frac{n}{2}(n+1)!$

(11) 【解】 $s=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t+(\frac{1}{\sin t}-\sin t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\csc^2 t-1}\,\mathrm{d}t=\ln\sin t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 2$。

(12) 【解】答案为 $y=e^{2x}+e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$。

(13) 【解】原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=1$,答案为1.

(14).【解】 $|A^*+2A^{-1}+E|=\left|A^{-1}\right|\left|AA^*+2AA^{-1}+A\right|=\frac{1}{24}\begin{vmatrix}27&2&3\\0&30&5\\0&0&32\end{vmatrix}=1080$。

(15)【解】$a>0$，当 $x\in(0,1]$ 时上述不等式显然成立，当 $x>1$ 上述不等式等价于 $a\le\frac{x}{\ln x}$，因此只要取 a 为函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内最小值即可， $f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ ，令 $f'(x)=0, x=e$，当 $x\in(1,e)$ 时 $f'(x)<0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，因而 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ 在 $x=e$ 处取得最小值，且有 $f(e)=e$，因此 a 可以取的最大值为 e。

(16)【解】对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边同时求全微分可得

$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z), \mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y$,

$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}-\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'})=\frac{2}{1+\varphi'}$,

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''}{(1+\varphi')^2}(1+\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{-2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^3}$.

(17)【解】 原式$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C\text{。}$$

(18)【解】 $f(x)=\int_0^x(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

$=x\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}t\varphi(t)\mathrm{d}t$，

$f'(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t+2x\varphi(x)$，

所以 $f'(T)=\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_T^{2T}\varphi(t)\mathrm{d}t+2T\varphi(T)$，

因 $\varphi(x)$ 周期为 T 的周期函数，故有 $\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_T^{2T}\varphi(t)\mathrm{d}t$，所以 $f'(T)=2T$。

(19)【解】设所求曲线方程为 $y=y(x)$，由题设有 $y(0)=0,y'(0)=0$，曲线在 P 点的切线方程为 $Y=y'(X-x)+y$，切线与 y 轴交点坐标为 $(0,y-xy')$，因此 $s_2=x\sqrt{1+y'^2},s_1=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 代入到式子 $\frac{3s_1+2}{s_2}=\frac{2(x+1)}{x}$ 中化简后可得 $3\int_0^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x+2=2(x+1)\sqrt{1+y'^2}$，两边对 x 求导后可得 $1+y'^2=2(x+1)y'y''$，令 $p=y'$，得 $\frac{2pp'}{1+p^2}=\frac{1}{1+x}$，积分后可得 $1+p^2=C_1(1+x)$，即 $1+y'^2=C_1(1+x)$，由 $y'(0)=0$，得 $C_1=1$，因曲线位于第一象限，应有 $y'=\sqrt{x}$，积分后可得 $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C_2$，由 $y(0)=0$，得 $C_2=0$，因此所求曲线方程为 $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

(20)【解】设 $D_1=\{(x,y)\mid x\ge0,y\ge0,x+y\le\frac{\pi}{4}\},D_2=D-D_1$，则

原式 $=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_{D_1}[\cos(x+y)-\sin(x+y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{4}-x}[\cos(x+y)-\sin(x+y)]\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}-\sin x-\cos x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x-\cos(\frac{\pi}{2}+x)]\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+1$

(21)【证明】(反证法)若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个或更多的零点，则 $\exists x_1\in(a,b),x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2,f(x_1)=f(x_2)=0$。令 $F(x)=e^xf(x)$，则有 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，因而有 $f(\xi)+f'(\xi)=0$，与 $f(x)+f'(x)\ne0$ 矛盾。

(22)【解】(I) 设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示，则 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$

从而 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\xi=(k_1,k_2,k_3,0)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的一个解，故 $\xi-\xi_0=(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个解。由题设 $\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。而 $\xi-\xi_0$ 显然不能由 ξ_1 线性表示，矛盾！所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（II）由题设 $Ax=\beta$ 有无穷多个解，$r(A)=r(A\ \beta)=3$，从而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的秩等于 3，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 极大无关组由 3 个线性无关向量组成，由 $A\xi_1=0$ 可得 $\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$，因此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示，可取 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 作为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的极大无关组。

（23）【解】（I）令 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，因为 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性无关，所以 P 可逆，由题设有

$A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$，即 $AP=P\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$ 或者

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}=B$，于是有 A 与 B 相似，因而它们有相同的特征值，由

$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&-1\\-3&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-4)^2=0$ 可得得 A 的特征值为 $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=4$；

（II）矩阵 B 对应于特征值为 $\lambda_1=-4$ 的特征向量满足方程 $(-4E-B)x=0$，解得 $\xi_1=(-1,1,0)^T$；对应于 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 的特征向量满足方程 $(4E-B)x=0$，解得 $\xi_2=(5,3,0)^T,\xi_3=(1,0,3)^T$，令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则有 $P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

令 $Q=PP_1=(-\alpha_1+\alpha_2,5\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_3)$，那么有

$$Q^{-1}AQ=P_1^{-1}P^{-1}APP_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$$