绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2\tan\pi x}{|x^2-1|\sqrt{x+2}}$，则关于 $f(x)$ 间断点的描述不正确的是（　　）.

（A）$x=-2$ 为第二类间断点　　（B）$x=-1$ 为可去间断点

（C）$x=\dfrac{1}{2}$ 为第二类间断点　　（D）$x=1$ 为跳跃间断点

（2）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 可导，则（　　）.

（A）$a=2,b=1$　（B）$a=2,b=-1$　（C）$a=-2,b=1$　（D）$a=-2,b=-1$

（3）设 $F(x^2-z^2, y^2-z^2)=0$ 确定了可微函数 $z=z(x,y)$，若 $F_1'+F_2'\neq 0$，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A）　0　　（B）　1　　（C）xyz　　（D）$\dfrac{xy}{z}$

（4）下列命题正确的是（　　）.

（A）设有数列 $\{x_n\}$，如果 $0\le x_n<1,\ n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$

（B）设函数 $f(x)$ 单调增加，如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$，则 $\{x_n\}$ 单调增加

（C）设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（D）设函数 $f(x),g(x)$ 处处连续，如果 $f(x)>g(x)$，a,b 为常数，则 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$

（5）设 a 为常数，则积分 $\int_a^{a+2\pi}\cos x\ln(2+\cos x)dx$ 的值（　　）.

（A）大于零　（B）等于零　（C）小于零　（D）与 a 有关

（6）设积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\le4,\ xy\ge3\}$，则二重积分 $I=\iint\limits_D\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}dxdy$（　　）.

(A) >0　(B) <0　(C) $=0$　(D) $\neq0$

（7）已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，其中 A 为 n 阶矩阵，P 为 n 阶可逆矩阵，则下列四个向量组中是 $Ax=0$ 的基础解系的为（　　）.

（A）ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组　（B）$\xi_1,\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_2+\xi_3$

（C）$P\xi_1,P\xi_2,P\xi_3$　（D）$(PA)x=0$ 的一个基础解系

（8）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则下列条件

① $r(A)=1$　② $|A|<0$　③ $bc>0$　④ $r(A)=2$

中，A 与对角矩阵相似的充分条件是（　）.

(A)①或②　（B）②或③　（C）③或④　（D）②或④

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）若曲线 $\begin{cases}x=e^t,\\ y=e^{2nt}+t\end{cases}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点横坐标为 x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=$______.

（10）微分方程 $\dfrac{1}{\sqrt{xy}}dx+(\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}})dy=0$（$x>0,y>0$）的通解为 ________.

（11）$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx=$________.

（12）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，记

$$a_n=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{f(\frac{x}{1\cdot 3})+f(\frac{x}{3\cdot 5})+\cdots+f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]\},\quad n=1,2,3,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

（13）设 $f(x,y)$ 可微分，且满足 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x-y$，则 $df(x,y)\big|_{(1,0)}=$________.

（14）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 m 阶方阵，C 为 $n\times m$ 矩阵，若 $A=BA,\ CB=O,$ 且矩阵 A 的秩 $r\ \ A\ =m$，则行列式 $|AC-2B|=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)=x^4+ax^3+b$，其中 a,b 均为常数，且 $a\neq 0$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）分别讨论 a,b 满足何种关系时，方程 $f(x)=0$ 无实根、有唯一实根或多个实根；

（Ⅲ）如果方程 $f(x)=0$ 有唯一实根，且 $(-2,f(-2))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，求 a,b 的值．

（16）（**本题满分 10 分**）设 $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx\ \ (a>0)$．

（Ⅰ）当 $a>0$ 时，证明 $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$；

（Ⅱ）如果 n 为正整数，证明 $\Gamma(n+1)=n!$；

（Ⅲ）已知 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，计算 $\Gamma(\dfrac{3}{2})$．

（17）设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$g''(0)=1$，且函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数.令 $z=f(g(xy),\ln(x+y))$，求二阶偏导数 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}$．

（18）（**本题满分 10 分**）设定义在 $[0,+\infty)$ 上的二阶可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0,f'(0)=1$，$f''(x)-2f'(x)+f(x)\geq 1$．证明

（Ⅰ）$f'(x)-f(x)+1\geq 2e^x$；　（Ⅱ）$f(x)\geq(2x-1)e^x+1$．

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试问参数 a,b 分别满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值？$f(x,y)$ 有唯一极小值？

（20）（**本题满分 11 分**）设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1,\\ xy\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2>1,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D:0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1$.

（21）**（本题满分 11 分）**（Ⅰ）求微分方程 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解；

（Ⅱ）利用（Ⅰ），求满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的微分方程 $y''-2xy'-2y=x^2$ 的特解.

（22）**（本题满分 11 分）**已知三阶矩阵 A 的 3 个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应的特征向量依次为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$，若线性方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\2x_1+(a+4)x_2+5x_3=6\\-x_1-2x_2+ax_3=-3\end{cases}$ 有无穷多解，求矩阵 A.

（23）**（本题满分 11 分）**已知二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$（$n>1$），

（I）证明二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 $A=nE-\alpha\alpha^T$，其中 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，E 为 n 阶单位阵；

（II）求 A^k（k 为自然数）；

（III）求二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在正交变换下的标准形以及规范形.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})$（　　）.

（A）无水平渐近线，无垂直渐近线，有一条斜渐近线

（B）有一条水平渐近线，有一条垂直渐近线，无斜渐近线

（C）无水平渐近线，有无穷多条垂直渐近线，有一条斜渐近线

（D）有一条水平渐近线，有无穷多条垂直渐近线，无斜渐近线

（2）设反常积分 $I_1=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+\sqrt{x})(1+x)}, I_3=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$，则有（　　）.

（A）I_1,I_2 收敛，I_3 发散　　（B）I_1,I_3 收敛，I_2 发散

（C）I_2,I_3 收敛，I_1 发散　　（D）I_1,I_2,I_3 均收敛

（3）设 a,b,p,q 均为常数，则下列函数中，必不是微分方程 $y''+py'+qy=(ax+b)e^x$ 解的是（　　）.

（A）$y=1+xe^x$　（B）$y=(1+\sin x)e^x$　（C）$y=(1+x^2)e^x$　（D）$y=(x^2+\sin x)e^x$

（4）设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{f(x)}=$（　　）.

（A）∞　（B）0　（C）6　（D）-6

（5）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）.

(A) 两个偏导数都存在　(B) 可微分　(C) 取极小值　(D) 取极大值

（6）以下三个二重积分的大小顺序为（　　）.

$$I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\le1}(e^{x^2+y^2}-1)d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(e^{x^2+y^2}-1)d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_{|x|+|y|\le1}\sin(x^2+y^2)d\sigma$$

(A) $I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_2<I_1$　(C) $I_3<I_1<I_2$　(D) $I_2<I_1<I_3$

（7）设 A 为 n 阶可逆矩阵，交换 A 的第一行和第二行得到矩阵 B，则下列矩阵中必为正交阵的是（　）.

（A）AB　（B）AB^{-1}　（C）$A^{-1}B$　（D）$B^{-1}A$

（8）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，且 $AB=C$，则 A 的行向量组线性无关是 C 的行向量组线性无关的（　）.

（A）充分必要条件　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　（D）既不充分也不必要条件

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3xy-1=0$ 确定，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=$________.

（10）设函数 $f(x)=\int_1^x\ln(t+x)dt$，则 $f^{(2019)}(1)=$____________.

（11）利用恒等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\ (x\ne0)$，计算得 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^x dx=$_____.

（12）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$__________.

（13）设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则

$f_x'(0,1,-1)=$____________.

（14）已知 a,b 为非负实数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&a&-2\\0&-2&b\end{pmatrix}$ 有特征值 1 和 -2，则 $(a,b)=$_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设 $x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{1+x_n},n=1,2,\cdots$.

（Ⅰ）证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$.

（16）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)\operatorname{sgn}(y-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=\sqrt{2y-x^2}$，$x=1$，$x=-1$ 以及 x 轴所围区域.

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)=\dfrac{(x+2)^{x+1}}{(x+1)^x}$，$x\ge 0$.

（Ⅰ）证明 $f(x)$ 为单调递增函数；

（Ⅱ）对任意正整数 n，证明 $(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\dfrac{1}{n})^{n-1}$；

（Ⅲ）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

（18）（**本题满分 10 分**）设可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$df=e^{x+y^2}[(1+x+2y)dx+(2+2xy+4y^2)dy],$$

且 $f(0,0)=0$.

（Ⅰ）求 $f(x,y)$；　　（Ⅱ）讨论 $f(x,y)$ 是否具有极值.

（19）（**本题满分 10 分**）过曲线 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上的一点 P 作 C 的切线 l，试求点 P 的坐标，使切线 l、曲线 C 及两个坐标轴所围图形绕 y 旋转一周所生成立体的体积最小，并求出此最小值.

（20）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$．证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in[0,1]$，使 $(\xi-1)f(\xi)=\xi f(1-\xi)$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$，使 $\int_0^\eta f(x)dx=0$.

（21）（**本题满分 11 分**）一辆赛车从静止开始，沿一条直路在一分钟内驶过 2384 m 就停下来．若该车的调速器可防止速度达到每秒 40 m，证明在行驶的某个时刻，该车的加速度或减速度的绝对值至少有 100 m/s^2.

（22）（**本题满分 11 分**）求所有正定阵P,使得$P^{-1}AP=B$，其中$A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

（23）（**本题满分 11 分**）设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为三阶方阵$A$的三个互异的特征值，对应的特征向量分别为$x_1,x_2,x_3$.记

$\alpha=x_1+x_2+x_3$.

（I）证明$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关;

（II）若$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$，且$\left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)=E$，求$A^3\alpha$.

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）．

（A）1　　（B）3　　（C）5　　（D）7

（2）函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\alpha}\ (\alpha>1)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）．

(A)连续，但不可偏导　　(B)可偏导，但不连续

(C)偏导函数均连续　　(D)偏导函数均不连续

（3）函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\operatorname{sgn}(t)e^{-t}dt$（其中 $\operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数）有（　　）.

（A）一个极值点，一个拐点　　（B）一个极值点，两个拐点

（C）两个极值点，一个拐点　　（D）两个极值点，两个拐点

（4）设 $I=\iint\limits_D e^{\sqrt{1+3x+y}}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 1\}$，则对 I 正确的估计是（　　）.

（A）$2e<I<e^2$　　（B）$0<I<\frac{1}{2}e$　　（C）$\frac{7}{5}e<I<\frac{3}{2}e$　　（D）$\frac{1}{2}e<I<\frac{1}{2}e^2$

（5）设函数 $f(x)=x\ln x$，$x\ge 1$，则（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}]=+\infty$

（B）$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}]=0$

（C）$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}]=0$

（D）$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0,\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}]=+\infty$

（6）设 l_1 为余弦曲线 $y=\cos x$ 上相应于 $0\le x\le 2\pi$ 的一段弧长，l_2 为椭圆 $x^2+2y^2=2$ 的周长，则（　　）.

（A）$l_1>l_2$　　（B）$l_1<l_2$　　（C）$|l_1-l_2|=\pi$　　（D）$l_1=l_2$

（7）设 A 为 n 阶矩阵，将 A 的第一行加上第二行的 3 倍得到矩阵 B，则下列说法正确的是（　　）.

（A）将 B 的第一列加上第二列的 3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（B）将 B 的第一列加上第二列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（C）将 B 的第二列加上第一列的 3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（D）将 B 的第二列加上第一列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（8）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正负惯性指数均为 1，则 a 等于（　　）

（A）0　　（B）-1　　（C）2　　（D）3

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx=$__________.

（10）曲线 $y=\int_0^x |t^2-1|dt$ 与直线 $x=1,x=2,y=0$ 所围成图形的面积为________.

（11）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx=$_______.

（12）微分方程 $(xy^2-1)\frac{dy}{dx}+y^3=0$ 的通解为__________.

20、21全程考研资料请加群712760929

（13）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $(x-1)y-xz+\ln z=0$ 确定的隐函数，则 $dz\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=$______.

（14）设 A 为 n 阶非零矩阵，且 $A^3=O$，矩阵 X 满足 $(E-A)X(E-A^2)=E$，则 $X=$____.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(15)（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x,0)-f(0,-3x)}{x}$.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$．若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不为常数，且在点 $x=x_0$（$0\le x_0\le1$）处取得最大值．证明：

（Ⅰ）$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx<x_0^2 f(x_0)$；

（Ⅱ）存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\int_0^{\xi}(x+x^2)f(x)dx=\xi^2 f(\xi)$.

（17）（本题满分 10 分）设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）问是否有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$？

（Ⅲ）求 $f'(\dfrac{1}{2k\pi})$ 及 $f'(\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，并问 $f(x)$ 是否是点 $x=0$ 的某邻域内的单调函数?

（18）（本题满分 10 分）（Ⅰ）证明 $\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$ 为周期为 π 的周期函数，其中 $[x]$ 为取整函数；（Ⅱ）计算定积分 $I=\int_0^{100\pi}(\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}])\dfrac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

（19）（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D|3x+4y|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le1$.

（20）（本题满分 11 分）求函数 $z=f(x,y)=xy-\dfrac{4}{3}x-y$ 在由抛物线 $y=4-x^2(x\ge0)$ 与两个坐标轴所围成的平面闭区域 D 上的最大值和最小值.

（21）（本题满分 11 分）当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)<0$，曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 (x,y) 处的切线与坐标轴围成的三角形面积恒为常数.

（Ⅰ）证明 $y''[y^2-x^2(y')^2]=0$；

（Ⅱ）若 $f''(x)\ne0$，求 $f(x)$.

（22）（本题满分 11 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&a&a\\a&4&a\end{pmatrix}$，矩阵方程 $BX=A$ 有解，但 $AX=B$ 无解，求常数 a.

（23）（本题满分 11 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，通过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2$，其中 A 为实对称阵，且方程组 $Ax=0$ 有解 $(1,0,1)^T$，求所作的正交变换，并写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.