20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（A）.

解 点 $x=1$，$x=-1$ 及 $x=\frac{1}{2}$ 均为间断点，且

$$\lim_{x\to-1} f(x)=0,\quad \lim_{x\to1^-} f(x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\infty,$$

所以（B），（C），（D）$x=1$ 均正确.

由于当 $x<-2$ 时 $f(x)$ 没有定义，故由间断点的概念，点 $x=-2$ 为不是间断点.

（2）**答案：**选（B）.

解 当 $x<1$ 时，$f(x)=ax+b$；当 $x=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(a+b+1)$；当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2$.

由 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$ 得 $a+b=1$．又 $f'_-(1)=a, f'_+(1)=2$，故 $a=2,b=-1$.

（3） **答案：**选(D).

解 $F(z^2-x^2,z^2-y^2)=0$ 两边对 x 求偏导数，得 $F_1'(2z\frac{\partial z}{\partial x}-2x)+F_2'2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\frac{z}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}$．由对称性 $\frac{z}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}$．所以 $\frac{z}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{z}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=1$，从而，$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy}{z}$.

（4）**答案：**选（C）.

解 由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 存在，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，（C）正确.

（A）反例：取 $x_n=1-\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则 $0\le x_n<1$，$n=1,2,\cdots$，但

$$\lim_{n\to\infty}x_n^n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}\neq0.$$

（B）反例：取 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 为单增函数，$x_1=1$，则 $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^n},(n=1,2,\cdots)$ 为单减数列.

（D）反例：取 $f(x)=e^x,g(x)=0$，则 $f(x)>g(x)$，但 $\int_1^0 e^x dx=1-e<\int_1^0 0dx=0$.

（5）**答案：**选（A）.

解 $$\int_a^{a+2\pi}\cos x\ln(2+\cos x)dx=\int_0^{2\pi}\ln(2+\cos x)d\sin x$$

$$=\sin x\ln(2+\cos x)\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx>0.$$

（6）**解** 区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，由于 $\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}=-\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}$，故 $I=-I$，$I=0$.

（7）**答案：**选（D）.

解 注意到与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的向量组，其向量个数可以大于 3 个，且线性相关. 同样，$\xi_1,\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_2+\xi_3$ 线性相关，而 $P\xi_1,P\xi_2,P\xi_3$ 未必是 $Ax=0$ 的解向量. 当 P 为 n 阶可逆矩阵时，$(PA)x=0$ 与 $Ax=0$ 是同解线性方程组， 故具有相同的基础解系，故选（D）.

（8）**答案**：选（B）.

解 矩阵能否与对角矩阵相似与它的秩没有必然的关系，如秩为 1 的两个矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，前者与对角阵相似，后者不能与对角阵相似；秩为 2 的两个矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$也是如此；故①，④均不正确，从而可排除（A），（C）和（D）. 关于 ②，设A的特征值为λ_1，λ_2，则$|A|=\lambda_1\lambda_2<0$，这表明A有两个互异的特征值，故②是A与对角矩阵相似的充分条件；关于③，由$|\lambda E-A|=\lambda^2-(a+d)\lambda-bc$知，判别式$(a+d)^2+4bc>0$，故$A$有两个互异的特征值，故③也是$A$与对角矩阵相似的充分条件，综上知，应选（B）.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：填“$e^{-\frac{1}{2}}$”.

解 在点$(1,1)$处，曲线对应的参数$t=0$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2ne^{2n+1}+1}{e^t}$

当$t=0$时，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=2n+1$.所给曲线在$(1,1)$处的切线方程为：$y-1=(2n+1)(x-1)$.

切线与x轴的交点横坐标$x_n=1-\dfrac{1}{2n+1}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n+1})^n=e^{-\frac{1}{2}}$.

（10）**答案**：填“$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$”.

解 原方程即$\sqrt{\dfrac{y}{x}}+(2-\sqrt{\dfrac{x}{y}})\dfrac{dy}{dx}=0$，为齐次方程．令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，所以

$\sqrt{u}+(2-\dfrac{1}{\sqrt{u}})(u+x\dfrac{du}{dx})=0$，整理得$(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{2u\sqrt{u}})du=-\dfrac{dx}{x}$，两边积分得

$\ln u+\dfrac{1}{\sqrt{u}}=-\ln x+C$．故原方程通解为$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$（$C$为常数）.

（11）**答案**：“$\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$”.

解法一 令$\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}=t$，则$x=\tan^2 t$，$dx=\dfrac{2\sin t}{\cos^3 t}dt$

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2t\sin t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}t\,d\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{t}{\cos^2 t}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

解法二 由分部积分法

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{t^2}{1+t^2}dt=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

（12）答案："$\frac{1}{2}$".

解 $a_n=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\{f(\frac{x}{1\cdot3})+f(\frac{x}{3\cdot5})+\cdots+f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]\}$

$$=\lim_{x\to0}\{\frac{1}{1\cdot3}\frac{f(\frac{x}{1\cdot3})-f(0)}{\frac{x}{1\cdot3}-0}+\frac{1}{3\cdot5}\frac{f(\frac{x}{3\cdot5})-f(0)}{\frac{x}{3\cdot5}-0}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]-f(0)}{\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}-0}\}$$

$$=[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]f'(0)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$.

（13） 答案：填"$dx-2dy$".

解 令 $\begin{cases}x+y=u,\\ \frac{y}{x}=v,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{u}{1+v},\\ y=\frac{uv}{1+v},\end{cases}$ 代入原式并整理得

$$f(u,v)=u\frac{1-v}{1+v},\quad f(x,y)=x\frac{1-y}{1+y}.$$

$f_x'(x,y)=\frac{1-y}{1+y}$，$f_y'(x,y)=\frac{-2x}{(1+y)^2}$，故 $f_x'(1,0)=1$，$f_y'(1,0)=-2$，所以

$$df(x,y)|_{(1,0)}=f_x'(1,0)dx+f_y'(1,0)dy=dx-2dy.$$

（14）答案：填"-2^m".

解 由 $A=BA\Rightarrow(E-B)A=O\Rightarrow r(E-B)+r(A)\le m$，又 $r(A)=m$，可知 $B=E$. 故由 $CB=O\Rightarrow C=O$，则 $|AC-2B|=|-2E|=(-2)^m$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**解** （Ⅰ） $f'(x)=4x^3+3ax^2=x^2(4x+3a)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0,x_2=-\frac{3}{4}a$.

如果 $a>0$，则 $-\frac{3}{4}a<0$. 当 $x\in(-\infty,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

如果 $a<0$，则 $-\frac{3}{4}a>0$. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

综上可知，当 $x\in(-\infty,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f(x)$ 单调下降；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调上升，所以 $f(x)$ 仅在点 $x=-\frac{3}{4}a$ 处取最小值 $f(-\frac{3}{4}a)=-\frac{27}{256}a^4+b$.

超越考研0551-62905788

（II）利用（I）的结论，并且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，可得

①当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 无实根；

②当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b=0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有唯一实根；

③当 $-\dfrac{27}{256}a^4+b<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有两个不同的实根.

（III）由（II）可知，如果方程 $f(x)=0$ 有唯一实根，则有 $-\dfrac{27}{256}a^4+b=0$.

又 $f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$，令 $f''(x)=0$，得 $x_1=0, x_3=-\dfrac{1}{2}a$．由题意知 $(-2,f(-2))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则有 $x_3=-\dfrac{1}{2}a=-2$，所以 $a=4$，进而 $b=\dfrac{27}{256}a^4=\dfrac{27}{256}\times 4^4=27$.

（16）证　（I）$\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^a dx=-\int_0^{+\infty}x^a d(e^{-x})$

$$=-x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx=-\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}+a\Gamma(a)\text{；}$$

运用罗必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{e^x}=\cdots=0,$$

所以 $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

（II）对于正整数 n，有 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$.

而 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$，所以 $\Gamma(n+1)=n!$.

（III）$\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

（17）　解　因为 $g''(0)=1$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并由题设可知 $g(0)=0$，$g'(0)=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'g'+\frac{1}{x+y}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'g'+yg'[xf_{11}''g'+\frac{1}{x+y}f_{12}'']+xyf'g''+\frac{1}{x+y}[xf_{21}''g'+\frac{1}{x+y}f_{22}'']-\frac{1}{(x+y)^2}f_2'.$$

从而代入点 $(1,0)$，有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=f_{22}''(0,0)-f_2'(0,0).$$

（18）证　（I）令 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}[f''(x)-2f'(x)+f(x)-1]$.

由题设知 $\varphi'(x)\ge 0$，故当 $x\ge 0$ 时，$\varphi(x)$ 单调不减，所以当 $x\ge 0$ 时，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=2$，即 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，所以 $f'(x)-f(x)+1\ge 2e^x$.

超越考研0551-62905788

（II）由（I）得$e^{-x}[f'(x)-f(x)]\ge 2-e^{-x}$，故$[e^{-x}f(x)]'\ge 2-e^{-x}$.

当$x\ge 0$时，上式两边从0到x积分，得$e^{-x}f(x)\ge 2x+e^{-x}-1$，因此

$$f(x)\ge(2x-1)e^{x}+1.$$

（19）**解**　由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}2ax+2by=3,\\ 2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当$8a^2-4b^2\ne 0$，即$2a^2-b^2\ne 0$时，$f(x,y)$有唯一驻点$\left(\dfrac{3a-2b}{2a^2-b^2},\dfrac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$. ……4 分

记

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a.$$ ……6 分

当$AC-B^2=8a^2-4b^2>0$即$2a^2-b^2>0$时，$f(x,y)$有极值．并且当$A=-2a>0$即$a<0$时，

$f(x,y)$有极小值；当$A=-2a<0$即$a>0$时，$f(x,y)$有极大值. ……9 分

综上所述，得

当$2a^2-b^2>0$且$a<0$时，$f(x,y)$有唯一极小值；

当$2a^2-b^2>0$且$a>0$时，$f(x,y)$有唯一极大值. ……10 分

（20）**解**　用圆$x^2+y^2=1$把D分成D_1, D_2两部分如图所示，则

$$I=\iint\limits_{D_1}\frac{2}{\pi}d\sigma+\iint\limits_{D_2}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}+\iint\limits_{D}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint\limits_{D_1}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1\left[\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^4\cos\theta\sin\theta dr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 x\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1dx-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\int_0^1 x\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-x^3\right]dx-\frac{1}{10}$$

20、21全程考研资料请加群712760929

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\left[(x^2+1)^{\frac{5}{2}}-x^5\right]_0^1=\frac{4}{15}(1+\sqrt{2}).$$

（21）**解** （Ⅰ）$y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为

$$y=e^{-\int(-2x)dx}\left[\int\frac{1}{3}x^3e^{\int(-2x)dx}dx+C\right]=e^{x^2}\left[\int\frac{1}{3}x^3e^{-x^2}dx+C\right]=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（Ⅱ）**法一** $y''-2xy'-2y=x^2$ 可变形为

$$y''-2(xy)'=x^2,\quad 即\quad (y'-2xy)'=x^2.$$

两边积分，得 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3+C_1$．由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，故 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$．

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

法二 所给方程 $y''-2xy'-2y=x^2$ 两边从0到 x 积分，得

$$\int_0^x y''(t)dt-2\int_0^x ty'(t)dt-2\int_0^x y(t)dt=\int_0^x t^2dt,$$

利用分部积分法，得 $y'(x)-2[ty(t)\big|_0^x-\int_0^x y(t)dt]-2\int_0^x y(t)dt=\frac{1}{3}x^3$，化简得 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$．

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（22）解 方程组（Ⅰ）的系数矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&a+4&5\\-1&-2&a\end{pmatrix}$，由题设知 $r(\overline{B})=r(B)<3$，

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&a+4&5&6\\-1&-2&a&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&a&3&0\\0&0&a+1&0\end{pmatrix}\qquad(*)$$

据（*）得，$a=-1$ 或 $a=0$．

当 $a=-1$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$，因 $\xi_1=-\xi_2$ 知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关，这与题设

ξ_1,ξ_2,ξ_3 为3个不同特征值的特征向量必线性无关矛盾，故 $a=-1$ 不合题意，舍去．

当 $a=0$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，因 $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq0$，知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线

性无关，符合题意，故 $a=0$．

20、21全程考研资料请加群712760929

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 P 为可逆阵，且 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-6\\-1&1&-1\\-3&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}.$$

（23）**解** （I）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

$$=x^T(nE)x-x^T(\alpha\alpha^T)x=x^T(nE-\alpha\alpha^T)x,$$

令 $A=nE-\alpha\alpha^T$，易知 $A^T=A$，故二次型的矩阵 $A=nE-\alpha\alpha^T$，其中 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$.

（II）$A^2=\left(nE-\alpha\alpha^T\right)^2$

$$=n^2E-2n\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=n^2E-n\alpha\alpha^T=n(nE-\alpha\alpha^T)=nA,$$

$A^3=nA^2=n^2A,\ \cdots,\ \ A^k=n^{k-1}A$，（$k$ 为自然数）;

（III）由于 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n,0,0,\cdots,0$，所以 A 的特征值为 $0,n,n,\cdots,n$，

则 f 在正交变换下的标准形为 $f=n(y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2)$，规范形为 $f=y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2$.

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（C）．

解 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}} y=-\infty$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，所以 $x=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$均为垂直渐近线．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1=k\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})-x]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+\sin t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+\sin t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{\cos t}{1+\sin t}-1}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1-\sin t}{2t(1+\sin t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\sin t}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\cos t}{2}=-\frac{1}{2}=b\,,$$

所以有一条斜渐近线 $y=x-\dfrac{1}{2}$．进而知无水平渐近线．

【注】由于有无穷多条垂直渐近线，所以答案在（C）和（D）之中，又

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x=+\infty\,,$$

故无水平渐近线，选（C）．不需要求斜渐近线．

（2）**答案**：选（D）．

解 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$0<\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{x^{3/2}}$．又 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛，故 I_1,I_2 收敛．

$$I_3=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+I_1\,.$$

因为 $0<x<1$ 时，$0<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$．又 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，故 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 收敛，又 I_1 收敛，所以 I_3 收敛．

（3）**答案**：选（D）．

解 根据解的结构知，$y''+py'+qy=(ax+b)e^x$ 的通解为下列几种情形：

① $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x(Ax+B)e^x; & k=1,\end{cases}$

② $y=(C_1+C_2x)e^{rx}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x^2(Ax+B)e^x, & k=2;\end{cases}$

③ $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}+(Ax+B)e^x,\qquad k=0.$

对照形式，（D）不可能出现．

【注】（A）：$y=1+xe^x$ 是 $y''+y'=(2x+3)e^x$ 解．

（B）：$y=(1+\sin x)e^x$ 是 $y''-2y'+2y=e^x$ 解．

（C）：$y=(1+x^2)e^x$ 是 $y''-2y'+y=2e^x$ 解．

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（4）答案：选（D）.

解　$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, $x - \sin x = \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

由题设知，$x - \sin x + f(x) = x^4 + o(x^4)$，故 $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^4 + o(x^4)$，所以

$$\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6} + x + o(x)\text{，}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}\text{，}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{f(x)} = -6\,.$$

（5）答案　选(C).

解　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}} = 1$ 等价于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1\,. \qquad ①$$

(A)，(B)错误.例如取 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$，则在点$(0,0)$处 $f(x,y)$ 连续，但是偏导数不存在、不可微分.

因为 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$. 又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2} = 0$，由①式知

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$，故 $f(0,0) = 0$. 再由①式和极限的保号性知，存在点$(0,0)$某邻域，在该邻域内有

$\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$，$f(x,y) > 0$，即 $f(x,y) > f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处取极小值.

（6）答案：选(C).

解　记 $D_1 : |x| + |y| \le 1,\ D_2 : x^2 + y^2 \le 1$.因为在 D_1 上

$$\sin(x^2+y^2) < x^2 + y^2 < e^{x^2+y^2} - 1\text{，}$$

所以 $I_3 < I_1$.

因为 I_1 与 I_2 的被积函数相同且被积函数非负，又 $D_1 \subset D_2$，所以 $I_1 < I_2$，故选(C).

（7）答案：选（B）.

解　取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，可验证（A），（C），（D）均不正确；由题意知，$A \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim} B,$ ，

即 $E(1,2)A = B \Rightarrow B^{-1} = A^{-1}E(1,2)$，则 $AB^{-1} = E(1,2)$ 必为正交阵，故选（B）.

（8）答案：选（C）.

解　若 $r(C) = m$，由 $m = r(C) = r(AB) \le r(A) \le m$ 得 $r(A) = m$,则 A 的行向量组线性无关.

若 $r(A) = m$，取 $B = O$，则 $C = O$，则 C 的行向量组线性相关，故选（C）.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案**：填“1”.

解 在 $x^3+y^3-3xy-1=0$ 中令 $x=0$，得 $y^3-1=0$，解得 $y=1$.

$x^3+y^3-3xy-1=0$ 两边对 x 求导数，得 $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$，即

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0. \qquad ①$$

在①中令 $x=0$，由 $y(0)=1$，知 $y'(0)=1$.

在①式两边再对 x 求导，得

$$2x+2y(y')^2+y^2y''-2y'-xy''=0. \qquad ②$$

在②中令 $x=0$，由 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，得 $y''(0)=0$．因此

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{y+(x-1)y'}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2y'+(x-1)y''}{2}=\frac{2\times1+(0-1)\times0}{2}=1.$$

（10）**答案**：填“$(\frac{1}{2^{2018}}-2)\cdot2017!$”.

解 $f(x)=\int_1^x\ln(t+x)dt\overset{u=t+x}{=}\int_{1+x}^{2x}\ln u\,du$．由此，

$f'(x)=2\ln(2x)-\ln(1+x)=2\ln2+2\ln x-\ln(1+x)$，$f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}$，所以

$$f^{(n+2)}(x)=[f''(x)]^{(n)}=(\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x})^{(n)}=(-1)^nn![\frac{2}{x^{n+1}}-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}],$$

故 $f^{(2019)}(1)=(\frac{1}{2^{2018}}-2)\cdot2017!$.

（11）**答案**：填“$\frac{3}{16}\pi^2$”.

解 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx\overset{t=-x}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4t\cdot\arctan e^{-t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4t\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^t)dt$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4xdx-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx$,

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4x\cdot\arctan e^xdx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4xdx=\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{3}{16}\pi^2.$$

（12）**答案**：填“$\frac{4}{e}$”.

解 记 $x_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$，则

$\ln x_n=\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)]-\ln n$

$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln2-1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{2\ln2-1}=\frac{4}{e}$.

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（13） 答案：填“1”.

解 $f_x'(x,y,z)=e^xyz^2+e^xy\cdot 2zz_x'(x,y)$,

$$f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1).$$

又由$1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$得$z_x'(0,1)=0$，所以$f_x'(0,1,-1)=1$.

（14）答案：填“$(1,0)$”.

解 由题意知，$|A-E|=|A+2E|=0$，即

$$\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&a-1&-2\\0&-2&b-1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}4&-2&0\\-2&a+2&-2\\0&-2&b+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}ab-a-5b+1=0\\ab+2a+b-2=0\end{cases},$$

解得$\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}$或$\begin{cases}b=-1\\a=3\end{cases}$，由于$a,b$为非负实数，故$(a,b)=(1,0)$.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

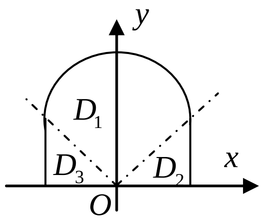
（15）**证** （Ⅰ）由题意知$x_n>0,n=1,2,\cdots$，且$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x_n}{1+x_n}<1$，故数列$\{x_n\}$单调下降且有下界．由单调有界准则知数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$a\ge0$，且$a=\dfrac{a^2}{1+a}$，解得$a=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ）由$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{1+x_n}$得$x_n^2-x_nx_{n+1}=x_{n+1}$，所以$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=x_n-x_{n+1},n=1,2,\cdots$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty}[(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n+1})]$$
$$=\lim_{n\to\infty}(x_1-x_{n+1})=x_1=2.$$

（16） **解** 被积函数$(x^2+y^2)\operatorname{sgn}(y-x)=\begin{cases}x^2+y^2&,y>x\\-(x^2+y^2),&y<x\end{cases}$,



如图所示$I=\displaystyle\iint_D(x^2+y^2)\operatorname{sgn}(x-y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

其中$\displaystyle\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=2+\frac{3}{4}\pi$,

$$\iint_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3},\quad\iint_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3},$$

20、21全程考研资料请加群712760929

超越考研0551-62905788

【或者由对称性可知：$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，】

所以所求 $I=2+\dfrac{3}{4}\pi$.

（17）**解**　（Ⅰ）$\ln f(x)=(x+1)\ln(x+2)-x\ln(x+1)$，上式两边对 x 求导数，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}. \qquad ①$$

当 $x\geq 0$ 时，由于 $\ln(x+2)>\ln(x+1)$, $\dfrac{x+1}{x+2}>\dfrac{x}{x+1}$，且 $f(x)>0$，故 $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 单调递增.

（Ⅱ）对任意正整数 n，由（1）知，$\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}>\dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$，得 $\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}>\dfrac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}$

即得 $(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\dfrac{1}{n})^{n-1}$.

(Ⅲ) 由①知，

$$f'(x)=f(x)[\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}]=(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}+\frac{1}{x+2}],$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1+\dfrac{1}{x+1})^{x+1}+\dfrac{1}{x+2}]=e(\ln e+0)=e$.

（18）　**解**　（Ⅰ）　由题意可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y^2}(1+x+2y)$，所以

$$f(x,y)=\int(1+x+2y)e^{x+y^2}dx=(1+2y)e^{x+y^2}+\int x e^{y^2}de^x=(x+2y)e^{x+y^2}+C(y),$$

并由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}+C'(y)=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，可得 $C(y)=C$.

代入初始条件，可得 $f(x,y)=(x+2y)e^{x+y^2}$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases}1+x+2y=0,\\1+xy+2y^2=0\end{cases}$ 解得驻点为 $(-3,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+x+2y)e^{x+y^2}$，代入驻点 $(-3,1)$，得 $A=e^{-2}$；

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2+2y+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，$B=2e^{-2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(2x+12y+4xy^2+8y^3)e^{x+y^2}$，$C=2e^{-2}$.

显然 $B^2-AC>0$，故在 $(-3,1)$ 不取极值.所以 $f(x,y)$ 的无极值.

20、21全程考研资料请加群712760929

（19）**解**　曲线C与x轴，y轴所围图形绕y轴旋转一周所生成立体体积为

$$V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})^4dy\overset{1-\sqrt{y}=u}{=}\pi\int_1^0u^4\cdot2(1-u)(-du)=\frac{\pi}{15}\text{（为定值）}.$$

因此，问题转化为求切线l与x轴，y轴所围三角形区域绕y轴旋转一周所得立体体积的最大值.

由$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$知$y'=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. 设点$P$的坐标为$(x_0,y_0)$，其中$0<x_0<1$，则切线$l$的方程为

$$y-(1-\sqrt{x_0})^2=-\frac{1-\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)\text{，化简得 }x=-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0}\ .$$

令$y=0$得$x=\sqrt{x_0}$；令$x=0$得$y=1-\sqrt{x_0}$，故l与x轴，y轴的交点分别为$(\sqrt{x_0},0),(0,1-\sqrt{x_0})$.

直线l与x轴，y轴所围图形绕y轴旋转一周所得立体体积为

$$V(x_0)=\pi\int_0^{1-\sqrt{x_0}}(-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0})^2dy=\frac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0}),$$

或利用圆锥体的体积$V(x_0)=\frac{1}{3}\times\pi(\sqrt{x_0})^2\times(1-\sqrt{x_0})=\frac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0})$.

由$V'(x_0)=\frac{\pi}{3}(1-\frac{3}{2}\sqrt{x_0})=0$，得$x_0=\frac{4}{9}$为$V(x_0)$的唯一驻点.

由于$V''(\frac{4}{9})=-\frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{x_0}}\Big|_{x=\frac{4}{9}}=-\frac{3\pi}{8}<0$，故$x_0=\frac{4}{9}$为$V(x_0)$的最大值点，且最大值为

$$V(x_0)_{\max}=\frac{\pi}{3}[\frac{4}{9}-(\frac{2}{3})^3]=\frac{4}{81}\pi,$$

因此当点P的坐标为$(\frac{4}{9},\frac{1}{9})$时，所求旋转体体积的最小值为$\frac{\pi}{15}-\frac{4}{81}\pi=\frac{7}{405}\pi$.

（20）**证**　（Ⅰ）由$\int_0^1f(x)dx=\int_0^1xf(x)dx$知$\int_0^1(1-x)f(x)dx=0$.

令$1-x=t$，得$\int_0^1tf(1-t)dt=0$，即$\int_0^1xf(1-x)dx=0$.

由此知$\int_0^1[(1-x)f(x)+xf(1-x)]dx=0$，由积分中值定理知，存在$\xi\in[0,1]$，使

$$(\xi-1)f(\xi)=\xi f(1-\xi).$$

（Ⅱ）令$\varphi(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$，则$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=\int_0^1(1-t)f(t)dt=0$，由$f(x)$在$[0,1]$上连续知$\varphi(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，由罗尔定理知，存在$\eta\in(0,1)$，使$\varphi'(\eta)=0$. 而

$$\varphi(x)=x\int_0^xf(t)dt-\int_0^xtf(t)dt,\quad \varphi'(x)=\int_0^xf(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^xf(t)dt,$$

即$\int_0^\eta f(x)dx=0$.

（21）**解**　（反证法）假设在行驶的任意时刻，该车的加速度或减速度的绝对值都不足$100\ m/s^2$，即对于任意$t\in[0,60]$（单位：s），加速度或减速度的绝对值满足$|v'(t)|<100\ m/s^2$，从而有

$$v'(t)<100,\qquad -v'(t)<100.\ \text{并且 }v(0)=v(60)=0,$$

所以

$$v(t)=\int_0^tv'(\tau)d\tau<\int_0^t100d\tau=100t,\quad v(t)=\int_t^{60}[-v'(\tau)]d\tau<\int_t^{60}100d\tau=100(60-t).$$

又由题意，$0\le v(t)<40(m/s)$，故

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

$$0 \le v(t) < \min\{100t,\ 100(60-t),\ 40\},$$

因此，

$$\int_0^{60} v(t)dt < \int_0^{60} \min\{100t,\ 100(60-t),\ 40\}dt$$

$$= \int_0^{0.4} 100tdt + \int_{0.4}^{59.6} 40dt + \int_{59.6}^{60} 100(60-t)dt = 2384(m).$$

由题设知，该车在一分钟内驶过 $2384\ m$，即 $\int_0^{60} v(t)dt = 2384(m)$，矛盾，所以在行驶的某个时刻，该车的加速度或减速度的绝对值至少有 $100\ m/s^2$.

（22）**解** 设 $P=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$，由 $AP=PB$ 得，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

乘开后得 $\begin{cases} 2a+b=a \\ 2c+d=a+c \\ -a=b \\ -c=b+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=-b-d \end{cases}$， 所以 $P=\begin{pmatrix} -b & -b-d \\ b & d \end{pmatrix}$，

$|P| = -bd+b^2+bd=b^2 \ge 0$，由于 P 正定，故 $b \ne 0$，$P=\begin{pmatrix} -b & -b-d \\ b & d \end{pmatrix}$，

又因为 P 对称且正定，所以 $P=\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -2b \end{pmatrix}$，且 $b<0$，

故满足题意的所有正定阵为 $k\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，其中 $k>0$.

（23）**证** （I）由题意，$Ax_i=\lambda_i x_i \quad (i=1,2,3)$，则有

$$\begin{cases} \alpha = x_1+x_2+x_3 \\ A\alpha = \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3 \\ A^2\alpha = \lambda_1^2 x_1+\lambda_2^2 x_2+\lambda_3^2 x_3 \end{cases}, \qquad (\alpha, A\alpha, A^2\alpha) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互异，可知 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$ 可逆，又因为 x_1,x_2,x_3 线性无关，所以 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关.

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

(II) 因为$\left(\alpha, A\alpha, A^2\alpha\right)=E$，故由（1）可得

$$\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$A^3\alpha=\lambda_1^3x_1+\lambda_2^3x_2+\lambda_3^3x_3=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

另解：$\begin{cases}\alpha=x_1+x_2+x_3\\A\alpha=-x_1+x_2+2x_3\\A^2\alpha=x_1+x_2+4x_3\end{cases}$，$A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3$，

$$\begin{cases}A^2\alpha-\alpha=3x_3\\-x_1+x_2=A\alpha-2x_3=A\alpha-\frac{2}{3}(A^2\alpha-\alpha)\end{cases},$$

则 $A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3=A\alpha-\frac{2}{3}A^2\alpha+\frac{2}{3}\alpha+\frac{8}{3}(A^2\alpha-\alpha)$

$$=2A^2\alpha+A\alpha-2\alpha=\left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

超越考研0551-62905788

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）解答

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

超越考研0551-62905788

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（C）.

解 $3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$=3x-4(x-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{120}x^5+o(x^5))+\dfrac{1}{2}[2x-\dfrac{1}{6}(2x)^3+\dfrac{1}{120}(2x)^5+o(x^5)]$

$=3x-4x+\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{30}x^5+x-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$

$=\dfrac{1}{10}x^5+o(x^5)$，故 $n=5$.

【注】本题也可运用洛必达法则求解.

（2）答案：选(C).

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f_x'(x,y)=2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}$；当 $(x,y)=(0,0)$ 时，

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2\alpha-1}=0.$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x'(x,y)=\lim_{x\to 0}2\alpha x(x^2+y^2)^2=0=f_x'(0,0),$$

所以 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 由 x,y 得对称性知 $f_y'(x,y)$ 也在点 $(0,0)$ 处连续，故选(C).

（3）答案：选（D）.

解 当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_0^x(t-1)e^{-t}dt$，$f'(x)=(x-1)e^{-x}$, $f''(x)=(2-x)e^{-x}$，不难得到 $x=1$ 为极小值点，$(2,f(2))$ 为拐点.

当 $x<0$ 时，$f(x)=\int_0^x(1-t)e^{-t}dt$，$f'(x)=(1-x)e^{-x}>0,\ f''(x)=(x-2)e^{-x}<0$，无极值点和拐点.

又 $f(x)$ 为连续函数，在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 为极大值点，$(0,0)$ 为拐点.

（4）答案:选(D).

解 令 $z=1+3x+y$，$(x,y)\in D$，则 $z(x,y)$ 连续可导且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3,\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，故函数 $z(x,y)$ 的极值 D 的内部无驻点，因而 $z(x,y)$ 的极值只能在 D 的边界上取得.

当 $x=0$ 时，$z=1+y$（$0\le y\le 1$），故 $1\le z\le 2$；

当 $y=0$ 时，$z=1+3x$（$0\le x\le 1$），故 $1\le z\le 4$；

当 $x+y=1$ 时，$z=2+2x$（$0\le x\le 1$），故 $2\le z\le 4$；

比较后知，在 D 的边界上 $e^{\sqrt{1+3x+y}}$ 可取得最小值 e，最大值 e^2，又 D 的面积为 $\dfrac{1}{2}$，因此，$\dfrac{1}{2}e<I<\dfrac{1}{2}e^2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

（5）**答案**：选（C）.

解 $f(x+1)-f(x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x$

$$=\ln(x+1)+[x\ln(x+1)-x\ln x]=\ln(x+1)+\ln(1+\frac{1}{x})^{x}$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$.

$$0<\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}=\frac{f(x+1)-f(x)}{\sqrt{f(x+1)}+\sqrt{f(x)}}\le\frac{f(x+1)-f(x)}{\sqrt{f(x+1)}},$$

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)-f(x)}{\sqrt{f(x+1)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)+\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}{\sqrt{(x+1)\ln(x+1)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)}}+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})^{x}}{\sqrt{(x+1)\ln(x+1)}}]=0$，

由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{f(x+1)}-\sqrt{f(x)}]=0$.

（6）**答案**：选（D）.

解 $y'=-\sin x$，$l_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 x}dx$.

椭圆的参数方程为：$x=\sqrt{2}\cos t, y=\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$，$x_t'=-\sqrt{2}\sin t, y_t'=\cos t$，所以

$$l_2=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 t}dt.$$

因此 $l_1=l_2$.

（7）**答案**：选（D）.

解 由题意，$E(1,2(3))\cdot A=B$，若 $B\cdot E(1,2(-3))=C$，即 $E(1,2(3))\cdot A\cdot E(1,2(-3))=C$ 时，A 与 C 相似，即将 B 的第二列加上第一列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似，故选（D）.

（8）**答案**：选（B）.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，$A$ 的特征值为 $a,a+1,a-2$，由题意知，A 的特征值必为一个正、一个负、一个为零，从而 $a=0$，故选（B）.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案**：填“$\frac{1}{2}$”.

解法一 由于 $\int_0^n\dfrac{x}{n^2+n}dx\le\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}dx\le\int_0^n\dfrac{x}{n^2}dx$，得 $\dfrac{n}{2(n+1)}\le\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}dx\le\dfrac{1}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}dx=\dfrac{1}{2}$.

解法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\dfrac{x}{n^2+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\dfrac{1}{n}-\ln(1+\dfrac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\times\dfrac{1}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

（10）**答案**：填“$\frac{13}{12}$”

解 $y=\int_0^1(1-t^2)dt+\int_1^x(t^2-1)dt=\dfrac{1}{3}x^3-x+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{3}(x^3-3x+4)$. 因此所求图形的面积为

$$\int_1^2\frac{1}{3}(x^3-3x+4)dx=\frac{1}{3}(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_1^2=\frac{13}{12}.$$

（11）**答案**：填“$\ln 2-\frac{1}{2}$”.

20、21全程考研资料请加群712760929

解法一 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\frac{1}{x+1}dx$

$$=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2})dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2})dx$$

$$=(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1})\Big|_1^{+\infty}=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

解法二 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_1^0\frac{t}{(\frac{1}{t}+1)^2}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^1\frac{t}{(t+1)^2}dt=\int_0^1[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}]dt$

$$=[\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}]\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

（12）答案：填“$=\frac{Cy-1}{y^2}$”.

解　原方程可转化为$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{xy^2-1}$，从而$\frac{dx}{dy}=-\frac{xy^2-1}{y^3}=-\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}$，所以$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^3}$，其通解为

$$x=e^{-\int\frac{dy}{y}}(\int\frac{1}{y^3}e^{\int\frac{dy}{y}}dy+C)=\frac{1}{y}(\int\frac{dy}{y^2}+C)=\frac{1}{y}(-\frac{1}{y}+C)=\frac{Cy-1}{y^2}.$$

（13）答案：填“$e(e-1)dx+edy$”.

解　把$x=0,\ y=1$代入原方程，可得$z=e$. 原方程两边取全微分，有

$$ydx+(x-1)dy-zdx-xdz+\frac{1}{z}dz=0.$$

把$x=0,\ y=1,\ z=e$代入上式，解得$dz\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=e(e-1)dx+edy$.

（14）答案：填“$E+A+2A^2$”.

解　由于$A^3=O$，所以$E-A^3=E\Rightarrow(E-A)(E+A+A^2)=E$，故$(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

同理可求得，$(E-A^2)(E+A^2)=E\Rightarrow(E-A^2)^{-1}=E+A^2$，

由$(E-A)X(E-A^2)=E$得$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=(E+A+A^2)(E+A^2)=E+A+2A^2$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(15) 解　因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\quad 且\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-x+2y-1]=0$，即$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=1$. 又因为$f(x,y)$连续，所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=f(0,0)$，

20、21全程考研资料请加群712760929

故 $f(0,0)=1$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得 $f(x,y)-x+2y-1=o(\rho)$, 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以

$$f(x,y)-f(0,0)=x-2y+o(\rho),$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分，且 $f_x'(0,0)=1,\ f_y'(0,0)=-2$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x,0)-f(0,-3x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x,0)-f(0,0)}{2x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(0,-3x)-f(0,0)}{-3x}$$
$$=2f_x'(0,0)+3f_y'(0,0)=-4.$$

（16）证　（Ⅰ）因为 $\int_0^1 f(x)dx=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不为常数，所以 $f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)>0$，从而

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx\le\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x_0)dx=f(x_0)\int_0^{x_0}(x+x^2)dx=f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3),$$

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx-x_0^2f(x_0)\le f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3-x_0^2)=f(x_0)(\frac{1}{3}x_0^3-\frac{1}{2}x_0^2)<0,$$

因此
$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx<x_0^2f(x_0).$$

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取最小值 $f(x_1)$，且 $f(x_1)<0$．与（Ⅰ）同理可证

$$\int_0^{x_1}(x+x^2)f(x)dx>x_1^2f(x_1).$$

令 $\varphi(x)=\int_0^x(t+t^2)f(t)dt-x^2f(x)$，$0\le x\le 1$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\varphi(x_0)<0$，$\varphi(x_1)>0$，故由零点定理知，存在 ξ 介于 x_0 与 x_1 之间，使 $\varphi(\xi)=0$，进而知 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^{\xi}(x+x^2)f(x)dx=\xi^2f(\xi).$$

（17）解　（Ⅰ）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x\sin\dfrac{1}{x})=1+0=1$.

当 $x\ne 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$，进而得

$$f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）由于 $\lim\limits_{x\to 0}1=1,\ \lim\limits_{x\to 0}4x\sin\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to 0}2\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}[1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}]$ 不存在，因此 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\ne f'(0)$.

（Ⅲ）$f'(\dfrac{1}{2k\pi})=1+\dfrac{4}{2k\pi}\sin 2k\pi-2\cos 2k\pi=-1$，

$$f'(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})-2\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

对任意的 $\delta>0$，由于当 $k\to\infty$ 时，$\frac{1}{2k\pi}\to 0,\ \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$，故当 $|k|$ 充分大时，在点 $x=0$ 的邻域 $(-\delta,\delta)$ 内总存在点 $x=\frac{1}{2k\pi}$ 和 $x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，使得 $f'(\frac{1}{2k\pi})<0,\ f'(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})>0$，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任意邻域 $(-\delta,\delta)$ 内不是单调函数.

【注】本题背景：1. 可导时未必有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$；2. 函数在某一点处的导数大于零，不能说明函数在该点附近单调增加.

（18）解　（Ⅰ）记 $f(x)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]$，则

$$f(x+\pi)=\frac{x+\pi}{\pi}-[\frac{x+\pi}{\pi}]=\frac{x}{\pi}+1-[\frac{x}{\pi}+1]=\frac{x}{\pi}+1-([\frac{x}{\pi}]+1)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]=f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]$ 为周期为 π 的周期函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}$ 仍为周期为 π 的周期函数.

解法一　$I=100\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当 $0\le x<\pi$ 时，$[\frac{x}{\pi}]=0$，$|\sin x|=\sin x$，故

$$I=\frac{100}{\pi}\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=}\frac{100}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t+\frac{\pi}{2})\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}=100\times\arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi.$$

解法二　$I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，且 $x\ne0$ 时，$\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2}$ 为奇函数，故

$$I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

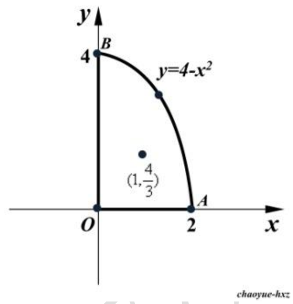
$$=-100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}dx=-100\times\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi.$$

（19）解　$I=\iint\limits_D|3x+4y|d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r|3\cos\theta+4\sin\theta|r\,dr=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}|3\cos\theta+4\sin\theta|d\theta$

$$=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\left|\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right|d\theta=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\left|\sin(\theta+\arctan\frac{4}{3})\right|d\theta=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin\theta|d\theta=\frac{20}{3}$$

20、21全程考研资料请加群712760929

（20）解　设$\begin{cases} f_x' = y - \dfrac{4}{3} = 0, \\ f_y' = x - 1 = 0 \end{cases}$ 得驻点$(1,\dfrac{4}{3})$，且$f(1,\dfrac{4}{3}) = -\dfrac{4}{3}$.



在抛物线段AB上，将$y = 4 - x^2$代入$z = xy - \dfrac{4}{3}x - y$中，得

$z = -x^3 + x^2 + \dfrac{8}{3}x - 4$，$0 \le x \le 2$．$\dfrac{dz}{dx} = -3x^2 + 2x + \dfrac{8}{3}$.

令$\dfrac{dz}{dx} = 0$得驻点$x_1 = \dfrac{4}{3}$，且$z\Big|_{\frac{4}{3}} = -\dfrac{28}{27}$.

在直线段$\overline{OA}$上，$z = -\dfrac{4}{3}x$，$0 \le x \le 2$，且$z\big|_0 = 0$，$z\big|_2 = -\dfrac{8}{3}$.

在直线段$\overline{OB}$上，$z = -y, 0 \le y \le 4$，且$z\big|_0 = 0$，$z\big|_4 = -4$.

比较函数值的大小，得 $z_{\max} = 0$，$z_{\min} = -4$.

（21）（Ⅰ）证　$y = f(x)$在点(x,y)处的切线方程为$Y - y = y'(X - x)$.

由上式知该切线与x轴交点的坐标为$(x - \dfrac{y}{y'}, 0)$，与y轴交点坐标为$(0, y - xy')$．于是该切线与坐标轴围成的三角形面积为

$$\frac{1}{2}(x - \frac{y}{y'})(y - xy') = m \text{（}m\text{ 为常数），即 } 2xy - x^2y' - \frac{y^2}{y'} = 2m.$$

在上式两边对x求导数，得$2y + 2xy' - 2xy' - x^2y'' - \dfrac{1}{(y')^2}[2y(y')^2 - y^2y''] = 0$，整理得

$$\frac{y''}{(y')^2}[y^2 - x^2(y')^2] = 0\text{，即 } y''[y^2 - x^2(y')^2] = 0.$$

（Ⅱ）解　由题设知$y'' = f''(x) \ne 0$，故由（Ⅰ）知$y^2 - x^2(y')^2 = 0$，即$(y - xy')(y + xy') = 0$．再由$y = f(x) > 0, x > 0, y'(x) = f'(x) < 0$，所以$y - xy' > 0$．因此$y + xy' = 0$，得$\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$.两边积分，$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$.

由于当$x > 0$时，$y = f(x) > 0$，故$|y| = y, |x| = x$，所以$xy = k$，$y = \dfrac{k}{x}$，其中常数$k = e^C > 0$，因此所求的函数为

$$f(x) = \frac{k}{x}\text{（其中 }k > 0\text{ 为常数），} x > 0.$$

（22）解　由题意知$\begin{cases} r(B) = r(A \vdots B) \\ r(A) < r(A \vdots B) \end{cases}$，从而$|A| = 0$，否则$AX = B$必有唯一解，

$|A| = -(a-1)^2(a+2) = 0$，得$a = 1$或$a = -2$.

超越考研0551-629057

20、21全程考研资料请加群712760929

（i）$a=1$时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{array}\right)$，$r(A)=1,r(B)=r(A\vdots B)=3$，符合题意.

（ii）$a=-2$时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{array}\right)$，$r(A\vdots B)=3,r(A)=r(B)=2$，可见

$AX=B$无解，$BX=A$也无解，不符合题意，故$a=1$.

（23）**解**　由题设知A的三个特征值为$2,2,0$，设$\xi_3=(1,0,1)^T$为$\lambda_3=0$的特征向量，利用实对称阵A的属于不同特征值的特征向量正交，可解出$\lambda_1=\lambda_2=2$的两个线性无关的特征向量为

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,注意到$\xi_1,\xi_2,\xi_3$已两两正交，将$\xi_1,\xi_2,\xi_3$单位化得,

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad 令P=\begin{pmatrix}\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

则P为正交矩阵，于是所求的正交变换为$x=Py$.

由$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

则二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

超越考研0551-62905788