第一章

1.1 证明：1° 由数学期望的定义，且 X 是非负随机变量，有：$E(N)=\sum_{n=0}^{\infty}nP(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty}P(N=i)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N\geq n)$，令 $m=n-1$，有：$E(N)=\sum_{n=1}^{\infty}P(N\geq n)=\sum_{m=0}^{\infty}P(N\geq m+1)=\sum_{m=0}^{\infty}P(N>m)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N>n)$. 2° 先证明一般情况。由数学期望的定义，且 X 是非负随机变量，有：$E(X^n)=\int_0^{\infty}x^n\,\mathrm{d}F(x)=\int_0^{\infty}\int_0^{x}nt^{n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}F(x)=\int_0^{\infty}nt^{n-1}\int_t^{\infty}\mathrm{d}F(x)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}nt^{n-1}(1-F(t))\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}nx^{n-1}(1-F(x))\,\mathrm{d}x \quad (n\geq 1)$. 取 $n=1$，有：$E(X)=\int_0^{\infty}(1-F(x))\,\mathrm{d}x$.

1.3 解：1° 因为：$(N_1+N_2=n)=\bigcup_{k=0}^{n}(N_1=n-k,N_2=k)$，所以 $P(N_1+N_2=n)=P(\bigcup_{k=0}^{n}(N_1=n-k,N_2=k))=\sum_{k=0}^{n}P(N_1=n-k)P(N_2=k)=((\lambda_1+\lambda_2)^n/n!)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$. 为参数为 $(\lambda_1+\lambda_2)$ 的 Poisson 分布．2° 当 $1\leq k\leq n$ 时，$P(N_1=k|N_1+N_2=n)=P(N_1=k,N_2=n-k)/P(N_1+N_2=n)=((\lambda_1^k\lambda_2^{n-k})/(k!(n-k)!))(n!/(\lambda_1+\lambda_2)^n)=C_n^k(\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))^k(\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)^{n-k})\sim B(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$ 是参数为 $(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$ 的二项分布． 3° 证明：因为 N_1,N_2,N_3 相互独立，对 $\forall m,n\in N$，有：$P(N_1+N_2=m,N_3=n)=\sum_{k=0}^{m}P(N_1=k,N_2=m-k,N_3=n)=\sum_{k=0}^{m}P(N_1=k)P(N_2=m-k)P(N_3=n)=P(N_3=n)\sum_{k=0}^{m}P(N_1=k)P(N_2=m-k)=P(N_3=n)P(N_1+N_2=m)$ 因此，N_1+N_2 和 N_3 相互独立．4° 解：由第二问中的结论：$P(N_1=k|N_1+N_2=n)\sim B(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$，由二项分布的数学期望公式得：$E(N_1|N_1+N_2=n)=\lambda_1 n/(\lambda_1+\lambda_2)$. 故：$E(N_1|N_1+N_2)=(\lambda_1(N_1+N_2))/(\lambda_1+\lambda_2)$. 又因为 N_1 和 N_2 独立，所以 $E(N_1+N_2|N_1)=E(N_1|N_1)+E(N_2|N_1)=N_1+E(N_2|N_1)=N_1+\lambda_2$.

1.5 解：先分析，由于 X_i 非负，所以 ξ 取负整数的可能为 0，考察 ξ 取非负整数的可能，对 $\forall k\geq 0$：$(\xi=k)=(\sum_{i=1}^{N}X_i=k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{n}X_i=k,N=n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(N=n,\sum_{i=0}^{n}X_i=k)$ 又 $\sum_{i=1}^{k}X_i\sim B(k,p)$，且 N 与 $\{X_n\}$ 独立，有：$P(\xi=k)=\sum_{n=k}^{\infty}(P(\sum_{i=1}^{n}X_i=k)P(N=n))=\sum_{n=k}^{\infty}((\lambda^n/n!)e^{-\lambda})(C_n^kp^k(1-p)^{n-k})=((\lambda p)^k/k!)e^{-\lambda p}$. $\xi\sim Po(\lambda p)$ 仍然是泊松分布，所以：$E(\xi)=D(\xi)=\lambda p$

1.10 解：对任意 $t\geq 0$，记：$N(t)=\sum_{i=1}^{n}I_{(X_{(i)}\leq t)}=\sum_{i=1}^{n}I_{(X_i\leq t)}$ 1° 由 $0\leq X_{(1)}\leq X_{(n)}$，考虑 $0<x<y$，并取充分小的 $h>0$ 满足：$x<x+h<y<y+h$. 记事件：$A=(N(x)=0,N(x+h)-N(x)=1,N(y)-N(x+h)=n-2,N(y+h)-N(y)=1)$；$B=(x<X_{(1)}\leq x+h,y<X_{(n)}\leq y+h)$；显然有：$A\subset B$，且 $B=A+B\bar{A}$. 且由 Poisson 过程的定义，有 $P(B\bar{A})=o(h^2)$，那么：$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)=\lim_{h\to 0}(P(B)/h^2)=\lim_{h\to 0}(P(A)/h^2+o(h^2)/h^2)=\lim_{h\to 0}(P(A)/h^2)$ 而 $P(A)=(n(n-1)\lambda^2(e^{-\lambda x}-e^{-\lambda y})^{n-2}e^{-\lambda(x+y)})h^2+o(h^2)$ 所以：$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y)=(n(n-$

$1)\lambda^2(e^{-\lambda x}-e^{-\lambda y})^{n-2}e^{-\lambda(x+y)})I_{(0<x<y)}$ 2 ° 记事件: $C=(N(x)=i-1,N(x+h)-N(x)=1);B=(N(x)=i-1,N(x+h)-N(x)\geq 2);D=(x<X_{(i)}\leq x+h)=C+D\bar{C}$; 又因为 $D\bar{C}\subset DB$, 且由 Poisson 过程的定义, 显然有: $P(DB)=o(h^2)$, 那么: $\lim_{h\to 0}(P(D)/h)=\lim_{h\to 0}(P(C)/h)=iC_n^i(1-e^{-\lambda x})^{i-1}\lambda e^{-\lambda(n-i+1)x}I_{(x\geq 0)}$ 所以: $f_{X_{(i)}}(x)=i\lambda C_n^i(1-e^{-\lambda x})^{i-1}e^{-\lambda(n-i+1)x}I_{(x\geq 0)}\quad(1\leq i\leq n)$ 3 ° 对 $\forall x\geq 0$, 因为 X_1 和 X_2 相互独立, 所以: $P(X_1+X_2\leq x)=\int_0^\infty P(X_1+X_2\leq x|X_1=t_1)\,\mathrm{d}P(X_1\leq t_1)=\int_0^\infty P(X_2\leq x-t_1|X_1=t_1)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\,\mathrm{d}t_1=\int_0^\infty P(X_2\leq x-t_1)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\,\mathrm{d}t_1=\int_0^\infty(1-e^{-\lambda_2(x-t_1)})\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\,\mathrm{d}t_1$. 如果 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 那么: $P(X_1+X_2\leq x)=(1+(\lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1))e^{-\lambda_2 x}+(\lambda_2/(\lambda_1-\lambda_2))e^{-\lambda_1 x})I_{(x>0)}$. 如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 那么: $P(X_1+X_2\leq x)=(1-(1+\lambda x)e^{-\lambda x})I_{(x>0)}$.

1.14 证明: 1 ° 对 $\forall\omega\in(Y=y_j)$, 有: $E(X|Y)=E(X|Y=y_j)$ 那么 $(Y=y_j)$ 时: $E(E(X|Y,Z)|Y)=E(E(X|Y,Z)|Y=y_j)=E(\sum_{l,k}E(X|Y=y_l,Z=z_k)I_{(Y=y_l,Z=z_k)}|Y=y_j)=\sum_{l,k}E(X|Y=y_l,Z=z_k)E(I_{(Y=y_l,Z=z_k)}|Y=y_j)=\sum_k E(X|Y=y_j,Z=z_k)P(Z=z_k|Y=y_j)=E(X|Y=y_j)$, 因此: $E[E(X|Y,Z)|Y]=E(X|Y)$. 2 ° $E[E(X|Y)|Y,Z]=\sum_{j,k}E(E(X|Y)|Y=y_j,Z=z_k)I_{(Y=y_j,Z=z_k)}=\sum_{j,k}E(\sum_l E(X|Y=y_l)I_{(Y=y_l)}|Y=y_j,Z=z_k)I_{(Y=y_j,Z=z_k)}=\sum_{j,k}(\sum_l E(X|Y=y_l)E(I_{(Y=y_l)}|Y=y_j,Z=z_k))I_{(Y=y_j,Z=z_k)}=\sum_{j,k}E(X|Y=y_j)I_{(Y=y_j,Z=z_k)}=\sum_j E(X|Y=y_j)\sum_k I_{(Y=y_j,Z=z_k)}=\sum_j E(X|Y=y_j)I_{(Y=y_j)}=E(X|Y)$.

1.15 解: 1 ° 采用微元法: 注意到当 $x<0$ 时, $f_{X|X\geq 0}(x)=0$. 对 $\forall x\geq 0$, 因为: $P(x\leq X\leq x+h|X\geq 0)=P(x\leq X\leq x+h)/(1-\Phi(-\mu/\sigma))$ 所以: $f_{X|X\geq 0}(x)=(1/(1-\Phi(-\mu/\sigma)))\lim_{h\to 0}P(x\leq X\leq x+h)/h=(1/(1-\Phi(-\mu/\sigma)))(1/(\sqrt{2\pi}\sigma))e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}I_{x\geq 0}$. 2 ° $E(X|X\geq 0)=\int_0^\infty xf_{X|X\geq 0}(x)\,\mathrm{d}x=(1/(1-\Phi(-\mu/\sigma)))(1/(\sqrt{2\pi}\sigma))\int_0^\infty xe^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x=2.055$.

第二章

2.1 解: 题中并没有指明这是 Poisson 过程, 应该当作一般计数过程来理解. 1 ° 由 $(N(t)\geq n)=(S_n\leq t)$, 并且 $(N(t)<n)=(N(t)\geq n)^C$; $(S_n>t)=(S_n\leq t)^C$, 所以: $(N(t)<n)=(S_n>t)$. 2 ° 若计数过程具有 Possion 过程的性质, 可不考虑同一时刻有 2 个以上”顾客”到达的情况, 即可忽略 $P(S_n=S_{n+1})=0$ 的小概率事件, 假设 $S_n<S_{n+1}$, 则由 $(N(t)\leq n)=(N(t)<n+1)=(S_{n+1}>t)$ 知 $(N(t)\leq n)\supset(s_n\geq t)$. 若是普通的计数过程, 则 $S_n\leq S_{n+1}$, 当 $S_n=S_{n+1}=t$ 时, $N(t)=n+1>n$, 两者无包含关系. 3 ° 这两个事件分别是 2 ° 中两个事件的补集, 由 2 ° 的结论, 这两个事件也彼此互不包含. 4 ° $(W(t)>x)=(S_{N(t)+1}-t>x)=(S_{N(t)+1}>t+x)$, 又 $(N(t)<n)\iff(S(n)>t)$, 所以 $(S_{N(t)+1}>t+x)=(N(t+x)<N(t)+1)=(N(t+x)-N(t)<1)=(N(t+x)-N(t)=0)$

2.3 解：1° 由 Poisson 分布增量独立性：$E[N(t)N(t+s)] = E[N(t)(N(t+s)-N(t)+N(t))] = E[N(t)(N(t+s)-N(t))] + E[N(t)N(t)] = E[N(t)]E[(N(t+s)-N(t))] + E[N(t)N(t)] = (\lambda t)(\lambda s) + (\lambda t)^2 + \lambda t = (\lambda t)(\lambda s + \lambda t + 1)$. 2° 由 Poisson 分布增量独立性：$E(N(s+t)|N(s)=m) = E(N(s+t)-N(s)+N(s)|N(s)=m) = E(N(s+t)-N(s)|N(s)=m) + m = \lambda t + m$. 故：$E(N(s+t)|N(s)) = \lambda t + N(s)$. 则 $E(N(s+t)|N(s))$ 的值域为 $(\lambda t, 1+\lambda t, 2+\lambda t, \cdots)$. 其分布 $P(E(N(s+t)|N(s)) = n+\lambda t) = P(N(s)=n) = ((\lambda s)^n/n!)e^{-\lambda s}$ $(n \in N_0)$. 3° 由 Poisson 过程增量平稳性，对 $\forall 0 \le s \le t$, 可知：$P(N(s) \le N(t)) = P(N(t)-N(s) \ge 0) = P(N(t-s) \ge 0)$. 而 $N(t-s) \ge 0$ 是必然事件，故 $P(N(s) \le N(t)) = 1$. 4° 由 Poisson 过程增量平稳性，$P(N(t)-N(s) > \varepsilon) = P(N(t-s) > \varepsilon)$. 又由 Poisson 过程的定义，$P(N(t-s)=1) = \lambda(t-s) + o(t-s)$; $P(N(t-s) \ge 2) = o(t-s)$. 即有：$P(N(t-s) \ge 1) = \lambda(t-s) + o(t-s)$, 故 $\lim_{t\to s} P(N(t-s) \ge 1) = 0$, 则 $\lim_{t\to s} P(N(t-s) = 0) = 1$, 又 $\varepsilon > 0$, 则有：$\lim_{t\to s} P(N(t-s) > \varepsilon) = 0$.

2.16 解：令 $\{X_n^*\} = \{X_n - \delta\}$, 则 $\{X_n^*\} i.i.d$, 且 X_n^* 的 p.d.f 为：$f(x^*) = \rho e^{-\rho x^*} I_{(x^*>0)}$. 即 $\{X_n^*\} \sim Ex(\rho)$, 对应的 $N^*(t)$ 是时齐 Poisson 过程. 若求 $P(N(t) \ge k) = P(S_k \le t) = P(\Sigma_{i=1}^k X_i \le t) = P(\Sigma_{i=1}^k (X_i^* + \delta) \le t)$, 即 $P(\Sigma_{i=1}^k X_i^* \le t - k\delta) = P(S_k^* \le t - k\delta) = P(N^*(t-k\delta) \ge k)$, 由 Poisson 过程的定义，得：$P(N^*(t-k\delta) \ge k) = 1 - P(N^*(t-k\delta) < k) = 1 - \Sigma_{i=0}^{k-1} (\rho t - \rho k\delta)^i e^{-\rho(t-k\delta)}/i!$ $(t \ge k\delta)$. 也就是更新过程中的概率 $P(N(t) \ge k) = 1 - \Sigma_{i=0}^{k-1} (\rho t - \rho k\delta)^i e^{-\rho(t-k\delta)}/i!$ $(t \ge k\delta)$。

2.17 解：由于 $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, 故 $\widetilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}F(t) = \lambda^2/(s^2 + 2s\lambda)$. 那么由 (2.9.6) 式可知，$\widetilde{m}(s) = \widetilde{F}(s)/(1-\widetilde{F}(s)) = (\lambda/2)(1/s - 1/(s+2\lambda))$. 进行反拉氏变换得 $'(t) = (\lambda/2)(1-e^{-2\lambda t})$, 由 $\widetilde{m}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}m(t)$ 可知：$m(t) = \int m'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda t/2 + e^{-2\lambda t}/4 + A$, 再利用 $m(0)=0$ 得 $m(t) = \lambda t/2 + (e^{-2\lambda t}-1)/4$.

2.24 解：$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 独立但是不同分布，证明如下. 先求 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 的联合概率密度函数. 仿照定理 2.2.1 的证明，令：$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 取充分小的 $h > 0$, 则 $P(x_1 < X_{(1)} < x_1 + h < x_2 < X_{(2)} < x_2 + h < \cdots < x_n < X_{(n)} < x_n + h) = n!P(x_1 < X_1 < x_1 + h < x_2 < X_2 < x_2 + h < \cdots < x_n < X_n < x_n + h)$, 又由 $\{X_i : 1 \le i \le n\}$ 独立同指数分布，那么：$\lim_{h\to\infty} P(x_1 < X_{(1)} < x_1 + h < x_2 < X_{(2)} < x_2 + h < \cdots < x_n < X_{(n)} < x_n + h)/h^n = n!\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$. 则 $X_{(1)}, X_{(2)}, \cdots, X_{(n)}$ 的联合概率密度函数为：$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} I_{(0<x_1<x_2<\cdots<x_n)}$. 再注意到：$Y_1 = X_{(1)}, Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}, \cdots, Y_n = X_{(n)} - X_{(n-1)}$, 令 $y_1 = x_1, y_i = x_i - x_{i-1}$ $(i \ge 2)$, 则变换的雅可比矩阵为 J, 可知 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 的联合概率密度函数为：$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \|J\| n!\lambda^n e^{-\lambda(\Sigma_{m=1}^n (n-m+1)y_m)} I_{(y_1>0, y_2>0, \cdots, y_n>0)}$. 由如下引理：如果 X_1, X_2 的联合概率密度函数 $f(x_1, x_2)$ 可以表示为 $f(x_1.x_2) = Ag(x_1)g(x_2)$, 其中 A 为常数项，可以知道 X_1, X_2 彼此独立. 可以知：$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \|J\| \prod_{m=1}^n g(y_m)$.

其中，$g(y_m)=\lambda(n-m+1)e^{-\lambda(n-m+1)y_m}I_{(y_m>0)}$，因此，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 独立但是不同分布.

2.25 解：1 ° 同分布但是不独立，证明如下. 由定理 2.4.2 可知：$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 在 $N(t)=n$ 条件下的概率密度函数是：$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=n!/t^nI_{(0<t_1<t_2<\cdots<t_n\le t)}$. 记 $X_1=S_1,X_2=S_2-S_1,\cdots,X_n=S_n-S_{n-1}$，易知其联合概率密度函数为：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n!/t^nI_{(0<x_k,x_1+x_2+\cdots+x_n\le t)}$. 积分得 $F_{X_k}(x)=1-(1-x/t)^n$，因此 $\{X_k\}$ 同分布，但是 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=(n!/t^n)\prod_{i=1}^n(1-x/t)^{i-1}\neq n!/t^n$，因此 $\{X_k\}$ 不独立. 2 ° 分两种情况讨论：当 $N(t)=0$ 时，由指数分布的无记忆性：$E(S_1|N(t)=0)=E(X_1|N(t)=0)=E(X_1|X_1>t)=t+1/lambda$. 当 $N(t)=k\ge 1$ 时，由定理 2.4.2 可知，$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 与 $[0,t]$ 上的相互独立的同均匀分布的顺序统计量的分布函数相同，故有：$E(S_1|N(t)=k)=E(U_{(1)})=t/(k+1)$. 分布律为：$P(E(S_1|N(t))=E(S_1|N(t)=0)=t+1/\lambda)=e^{-\lambda t}$；$P(E(S_1|N(t))=E(S_1|N(t)=k)=t/(k+1))=(\lambda t)^ke^{-\lambda t}/k!\ \ (k\ge 1)$. 3 ° 同样分两种情况讨论：当 $N(t)\ge k$ 时，由第一问知 $S_1,S_2-S_1,\cdots,S_k-S_{k-1}$ 同分布，则：$E(S_k|N(t))=E((S_k-S_{k-1})+(S_{k-1}-S_{k-2})+\cdots+(S_2-S_1)+S_1|N(t))=kt/(N(t)+1)$. 当 $N(t)<k$ 时，同样由指数分布的无记忆性得：$E(S_k|N(t))=t+(k-N(t))/\lambda$. 分布律为：$P(E(S_k|N(t))=E(S_k|N(t)=n)=(\lambda t)^ne^{-\lambda t}/n!$.

2.26 解：1 ° 对 $\forall 0<x<y$，取充分小的 h，使得 $0<x<S_2\le x+h<y<S_5\le y+h$，记事件：$B=\{0<x<S_2\le x+h<y<S_5\le y+h\}$；$A=\{N(x)=1,N(x+h)=2,N(y)=4,N(y+h)=5\}$，则：$B=A\cup(B\cup\bar{A})$，所以 $P(B)=P(A)+P(B\cup\bar{A})$. 由 Poisson 过程的定义知道：$P(B\cup\bar{A})=o(h^2)$. 故 $P(B)=(\lambda xe^{-\lambda x})(\lambda h)(\lambda(y-x-h)^2/2)e^{-\lambda(y-x-h)}+o(h^2)$. 则 (S_2,S_5) 的联合概率密度函数为：$f(x,y)=\lim_{h\to 0}P(B)/h^2=\lambda^5x(y-x)^2e^{-\lambda y}/2I_{(y>x>0)}$. 2 ° 运用公式 $E(X)=E(X|Y)P(Y)+E(X|\bar{Y})P(\bar{Y})$，有：$E(S_1)=E(S_1|N(t)=0)P(N(t)=0)+E(S_1|N(t)\ge 1)P(N(t)\ge 1)$，即：$1/\lambda=(t+1/\lambda)e^{-\lambda t}+E(S_1|N(t)\ge 1)(1-e^{-\lambda t})$，解得：$E(S_1|N(t)\ge 1)=1/\lambda-(te^{-\lambda t})/(1-e^{-\lambda t})$. 3 ° 由 Poisson 过程定义，在 $N(t)=1$ 的条件下，(S_2-t) 与 S_1 是独立的. 故 S_2 与 S_1 是独立的. 又在 $N(t)=1$ 的条件下，S_1 是 $(0,t]$ 上的均匀分布，而 (S_2-t) 是指数分布 (无记忆性)，故 $f_{S_1,S_2}(t_1,t_2)=\lambda e^{-\lambda(t_2-t)}/tI_{(0<t_1<t<t_2)}$.

第三章

3.1 (1) 解：1 ° $E(X_2)=\Sigma_{i=1}^3(iP(X_2=i))=\Sigma_{i=1}^3(i(\Sigma_{j=1}^3P(X_2=i|X_1=j)P(X_1=j|X_0=3)))=23/9$. 2 ° 计算知：$E(X_2|X_1=2)=\Sigma_{i=1}^3(iP(X_2=i|X_1=2))=7/3$ 且 $E(X_2|X_1=3)=\Sigma_{i=1}^3(iP(X_2=i|X_1=3))=8/3$，分布为：$P(E(X_2|X_1)=7/3)=P(X_1=2)=1/3\quad P(E(X_2|X_1)=8/3)=P(X_1=3)=2/3$. 3 ° 计算

知： $E(X_3|X_2=1)=1$ $E(X_3|X_2=2)=7/3$ $E(X_3|X_2=3)=8/3$. 分布为： $P(E(X_3|X_2)=1)=P(X_2=1)=1/3$ $P(E(X_3|X_2)=7/3)=P(X_2=2)=2/9$ $P(E(X_3|X_2)=8/3)=P(X_2=3)=6/9$. 4 ° $\pi(2)=\pi(0)\mathbf{P_1}^2=(1/9,2/9,6/9)$. (2) 解： $P(T=1|X_0=3)=P(X_1=1|X_0=3)=0$; $P(T=2|X_0=3)=P(X_2=1,X_1\neq 1|X_0=3)=1/9$; $P(T=3|X_0=3)=P(X_3=1,X_2\neq 1,X_1\neq 1|X_0=3)=\Sigma_{i=2}^3\Sigma_{j=2}^3 P(X_3=1,X_2=i,X_1=j|X_0=3)=2/27$. $E(T\wedge 4|X_0=3)=\Sigma_{i=1}^3(iP(T=i|X_0=3))+4P(T\geq 4|X_0=3)=\Sigma_{i=1}^3(iP(T=i|X_0=3))+4[1-P(T<4|X_0=3)]=100/27$. s(3) 解：由定义： $f_{11}^{(n)}=P(T_{11}=n|X_0=1)=P(X_n=1,X_l\neq 11\leq l\leq n-1|X_0=1)$. 有： $f_{11}^{(1)}=p_{11}^{(1)}=0$; $f_{11}^{(n)}=p_{12}f_{21}^{(n-1)}+p_{13}f_{31}^{(n-1)}=(2/3)^{n-2}/3$ $(n\geq 2)$. 因此： $ET_11=\Sigma_{n=1}^{\infty}(nf_{11}^{(n)})=4$.

3.7 解 1 ° 由 $\pi=\pi\mathbf{P}$ 得 $\pi_1=0.5\pi_1+0.3\pi_2+0.2\pi_3$, $\pi_2=0.4\pi_1+0.4\pi_2+0.3\pi_3$ 及 $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$, 解得 $\pi_1=21/62,\pi_2=23/62,\pi_3=18/62$, 故 $\pi=(21/62,23/62,18/62)$. 由 $\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\pi_j=1/\mu_j$, 故 $\mu_1=62/21,\mu_2=62/23,\mu_3=62/18$. 且 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n=\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}0.5&0.4&0.1\\0.3&0.4&0.3\\0.2&0.3&0.5\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}21/62&23/62&18/62\\21/62&23/62&18/62\\21/62&23/62&18/62\end{bmatrix}$. 2 ° 由 $\pi(0)=\pi(0)\mathbf{P}$ 得 $\pi(0)=(21/62,23/62,18/62)$, 此时马氏链是平稳的. $EX_n=\Sigma_{i=1}^3(i\pi_i(n))=121/62$ 且 $E(X_n)^2=\Sigma_{i=1}^3(i^2\pi_i(n))=275/62$, 那么 $DX_n=E(X_n)^2-(EX_n)^2\approx 0.627$

3.11 证：1 ° 由马氏性, 对 $\forall n\in N$:/ $E(e^{-2\alpha X_{n+1}}|X_0,X_1,\cdots X_n)=E(e^{-2\alpha X_{n+1}}|X_n)$. 又： $E(e^{-2\alpha X_{n+1}}|X_n=i)=\Sigma_{j=0}^N(e^{-2\alpha j}p_{ij})=\Sigma_{j=0}^N(C_N^j(e^{-2\alpha}\pi_i)^j(1-\pi_i)^{N-j})=e^{-2\alpha i}$. 所以： $E(e^{-2\alpha X_{n+1}}|X_0,X_1,\cdots X_n)=e^{-2\alpha X_n}$. 2 ° 令 $V_n=e^{-2\alpha X_n}$, 由上面的证明， V_n 是鞅. 令 $T=min(n:X_n=0或X_n=N)$ 参照第四章的定理 4.3.2 可以证明 T 关于 V_n 是停时. 所以有 $EV_T=EV_0$. 又 $EV_T=e^{-2\alpha N}P_N(k)+e^{-2\alpha 0}(1-P_N(k))$,$EV_0=e^{-2\alpha k}$. 因此得 $P_N(k)=(1-e^{-2\alpha k})/(1-e^{-2\alpha N})$.

3.14 证明： 1 ° 我们记 $T_n=\Sigma_{i=1}^n(X_i-Y_i)$, 则 $T_n,n\geq 0$ 是 M.C., 状态空间 $S=S_1\bigcup S_0$, $S_1=-1,0,1$ 为瞬时态集， $S_0=-2,2$ 为吸收态集。定义： $p=p_1(1-p_2)$ $q=p_2(1-p_1)$, 状态转移矩阵为: $\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\q&1-p-q&p&0&0\\0&q&1-p-q&p&0\\0&0&q&1-p-q&p\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

记 $\mathbf{P_0}=\begin{bmatrix}1-p-q&p&0\\q&1-p-q&p\\0&q&1-p-q\end{bmatrix}$ 为瞬时态转移矩阵，有： $\Sigma_{k=1}^{\infty}\mathbf{P_0}^k=$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P_0})^{-1} = (1/((p+q)(p^2+q^2)))\begin{bmatrix} ((p+q)^2-pq) & p(p+q) & p^2 \\ q(p+q) & (p+q)^2 & p(p+q) \\ q^2 & q(p+q) & ((p+q)^2-pq) \end{bmatrix}.$$

那么： $g_{-2}(0) = (0,1,0)(\mathbf{I}-\mathbf{P_0})^{-1}(q,0,0)^T = q^2/(p^2+q^2)$; $g_2(0) = (0,1,0)(\mathbf{I}-\mathbf{P_0})^{-1}(0,0,p)^T = p^2/(p^2+q^2)$. 所以，在 $p_1 > p_2$ 的条件下，误判 $p_2 > p_1$ 的概率为： $g_{-2}(0)/(g_{-2}(0)+g_2(0)) = 1/(1+(p/q)^2) = 1/(1+\lambda^2)$. 2 ° 采用上问中的定义，有： $EN = \Sigma_{k=1}^{\infty} kP(N=k) = \Sigma_{k=1}^{\infty} k(0,1,0)\mathbf{P_0}^{k-1}(q,0,p)^T = (0,1,0)(\Sigma_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P_0}^{k-1})(q,0,p)^T = (0,1,0)(\mathbf{I}-\mathbf{P_0})^{-2}(q,0,p)^T = (0,1,0)(1/((p+q)^2(p^2+q^2)^2))\begin{bmatrix} ((p+q)^2-pq)^2 & p^2(p+q)^2 & p^4 \\ q^2(p+q)^2 & (p+q)^4 & p^2(p+q)^2 \\ q^4 & q^2(p+q)^2 & ((p+q)^2-pq)^2 \end{bmatrix}(q,0,p)^T = (2p+2q)/(p^2+q^2) = (2(\lambda^2-1))/((p_1-p_2)(\lambda^2+1))$.

3.18 解： 1 ° 由题意可知，从 $X_0 = 1$ 出发，被 0 吸收所需要的步数必然为奇数，设步数为 $2k+1 (k \geq 0, k \in N)$ 。其中有 $k+1$ 步向左运动， k 步向右运动，且彼此相间。那么 $P(T_1 = 2k+1|X_0 = 1) = p^k q^{k+1}$ 。同理，质点被 3 吸收所需要的步数必然为偶数，设步数为 $2k+2 (k \geq 0, k \in N)$ 。其中有 k 步向左运动， $k+2$ 步向右运动，除最后两步连续向右以外，左右运动彼此相间。那么 $P(T_1 = 2k+2|X_0 = 1) = p^{k+2}q^k$. 2 ° 即求最终被 3 吸收的概率。有： $P(X_{T_1} = 3|X_0 = 1) = (\sum_{k=0}^{\infty} q^k p^{k+2})/(\sum_{k=0}^{\infty}[q^k p^{k+2} + p^k q^{k+1}]) = p^2/(1-p+p^2)$

3.20 解： 1 ° 由转移概率矩阵知，这是一个非周期的不可约 M.C. 考察它是否具有平稳分布. 由 $\pi = \pi\mathbf{P}$ 得 $\pi_1 = 5\pi_1/8 + \pi_2/3 + 3\pi_3/4$, $\pi_2 = \pi_1/4 + \pi_2/2 + \pi_3/4$ 及 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, 解得 $\pi_1 = 44/81, \pi_2 = 27/81, \pi_3 = 10/81$, 此时： $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 44/81 & 27/81 & 10/81 \\ 44/81 & 27/81 & 10/81 \\ 44/81 & 27/81 & 10/81 \end{bmatrix}$. 并且有： $\lim_{n\to\infty} E(X_n|X_0 = 1) = \Sigma_{i=1}^{3}(i\pi(i)) = 128/81$.

2 ° $(T_1 = k)$ 和 $(\tau_1 = k)$ 仅与 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 有关，而与 $X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots$ 无关，因此 T_1 和 τ_1 是停时的. 3 ° $(T_1 = k) = (X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = 1, X_k = 2)\bigcup(X_0 = X_1 = \cdots = X_{k-1} = 1, X_k = 3)$, 因此： $P(T_1 = k) = p_{11}^{k-1}(p_{21} + p_{31}) = (5/8)^{k-1}(3/8)$. $E(T_1) = \Sigma_{k=1}^{\infty} kP(T_1 = k) = (3/5)\Sigma_{k=1}^{\infty}(k(5/8)^k) = 8/3$. 下面求将 $E(\tau_1)$, 将 T_1 作为初始状态， $\pi(0) = (2/3, 1/3)$, 瞬时态集的转移矩阵 $\mathbf{P} == \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$. $E(\tau_1) = E(\tau_1 - T_1) + E(T_1) = 8/3 + \Sigma_{i=1}^{\infty}(iP(\tau_1 - T_1 = i)) = 8/3 + \Sigma_{i=1}^{\infty} i\pi\mathbf{P}^{i-1}(1/3, 3/4)^T = 8/3 + \pi(\Sigma_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}^{i-1})(1/3, 3/4)^T = 8/3 + \pi(\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-2}(1/3, 3/4)^T = 162/33 \approx 4.91$. 4 ° $N(3) = \Sigma_{m=1}^{\infty} I_{T_m \leq 3}$, 考虑到 $T_m \geq 2m-1$, 那么： $N(3) = I_{T_1\leq 3} + I_{T_2 \leq 3}$. 计算概率分布： $P(N(3) = 0) = P(I_{T_1\leq 3} = 0, I_{T_2\leq 3} = 0) = (p_{11})^3 = 125/512$; $P(N(3) = 1) = P(I_{T_1\leq 3} = 1, I_{T_2\leq 3} = 0) = \Sigma_{k=1}^{3} P(T_1 = k, T_2 > 3) = 353/512$; $P(N(3) = 2) =$

$P(I_{T_1\le 3}=1, I_{T_2\le 3}=1)=34/512$; $P(N(3)=k)=0 \quad (k\ge 3)$. $(N(4)=2)=(T_1=1,T_2=3)\bigcup(T_1=1,T_2=4)\bigcup(T_1=2,T_2=4)$, 那么： $P(N(4)=2)=P(T_1=1,T_2=3)+P(T_1=1,T_2=4)+P(T_1=2,T_2=4)=0.1807$.

第四章

4.1 1 ° 证明： (A) 因为 $E|U_n|=E|X_n-n(p-q)|\le E|X_n|+n(p-q)\le n+n(p-q)<\infty$, 并且有 $E(U_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(U_n+Y_{n+1}-(p-q)|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(U_n|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)+E(Y_{n+1})-(p-q)=U_n$, 因此 $\{U_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是鞅. (B) 因为 $E|V_n|=E|(q/p)^{X_n}|=E|(q/p)^{Y_1}(q/p)^{Y_2}\cdots(q/p)^{Y_n}|=(p+q)^n=1<\infty$, 并且有 $E(V_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(V_n(q/p)^{Y_{n+1}}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(V_n|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)E((q/p)^{Y_{n+1}}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=V_n(p+q)=V_n$, 因此 $\{V_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是鞅. (C) 因为 $E|W_n|=E|V_n^2-n[1-(p-q)^2]|\le E|V_n^2|+n[1-(p-q)^2]<\infty$, 并且有 $E(W_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(V_n^2-n[1-(p-q)^2]+2V_n[Y_{n+1}-(p-q)]+[Y_{n+1}-(p-q)]^2-[1-(p-q)^2]|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=W_n+E([Y_{n+1}-(p-q)]^2|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)-[1-(p-q)^2]=W_n$, 因此 $\{W_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是鞅. 2 ° 证明：显然 X_n 是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数，且有 $E(X_n^+)<\infty$, 又因为 $p>q$, 所以 $E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(X_n+Y_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n+(p-q)>X_n$, 因此 $\{X_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是下鞅. 3 ° 解：记 $T_n=U_{m+n}-U_m$, 有 T_n 与 U_m 独立. 得 $cov(U_m,U_{m+n})=EU_m^2+EU_mET_n=EU_m^2$, 有 $\rho(U_m,U_{m+n})=cov(U_m,U_{m+n})/(\sigma_{U_m}\sigma_{U_{m+n}})=\sqrt{EU_m^2/EU_{m+n}^2}=\sqrt{m/(m+n)}$. 4 ° 证明： $E(U_{n+k}|X_n)=E(X_{n+k}-(n+k)(p-q)|X_n)=E(X_n+Y_{n+1}+\cdots+Y_{n+k}-(n+k)(p-q)|X_n)=X_n+k(p-q)-(n+k)(p-q)=X_n-n(p-q)=U_n$. 所以 $E(U_3|X_2)=U_2=X_2-2(p-q)$, 它的分布律为： $P(E(U_3|X_2)=-2-2(p-q))=q^2; P(E(U_3|X_2)=-2(p-q))=2pq; P(E(U_3|X_2)=2-2(p-q))=p^2$. 5 ° 解： $E(V_8|X_7=3)=E((q/p)^{X_7}(q/p)^{Y_8}|X_7=3)=(q/p)^3$.

4.3 证明：1 ° 由 T_b 的定义知 T_b 是停时的，又由习题 3.19 中的结论知 $ET_b<\infty$, 以及本章练习题 1 中的证明知 $\{U_n,n\ge 0\}$ 是鞅. 对 $\forall n<T$, 有 $E(|U_{n+1}-U_n||Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(|Y_{n+1}-(p-q)||Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\le E(|Y_{n+1}|)+(p-q)=4pq<\infty$, 因此由定理 4.3.1 的推论知，有： $EU_{T_b}=EU_0=0=E(X_{T_b}-T_b(p-q))$, 所以 $ET_b=EX_{T_b}/(p-q)=b/(p-q)$. 2 ° 类似于上问中的方法，可以得到 $ET=EX_T/(p-q)$. 引入 V_a 表示首达 $-a$ 的概率，则上式化为 $ET=(-aV_a+b(1-V_a))/(p-q)$, 现设法计算 V_a. 由本章练习题 1 中的证明知 $\{V_n,n\ge 0\}$ 是鞅，由 $-a\le X_n\le b, 0<(q/p)<1$, 有 $(q/p)^b\le V_n\le (q/p)^{-a}$, 所以 $E|V_T|=EV_T\le (q/p)^{-a}<\infty$, 且有 $0\le \lim_{n\to\infty}E(V_nI_{(T>n)})\le \lim_{n\to\infty}(q/p)^{-a}E(I_{(T>n)})=\lim_{n\to\infty}(q/p)^{-a}P(T>n)=0$, 这里 $\lim_{n\to\infty}P(T>n)=0$ 是因为 $p-q>0$ 时, $[-a,b]$ 为吸收态, $(X_n=i\in(-a,b))$

至多有限次，故 $P(T<\infty)=1$，即 $\lim_{n\to\infty}P(T>n)=0$. 那么，由定理 4.3.2 有 $EV_T=EV_0=1$，解得 $V_a=(1-(q/p)^b)/((q/p)^{-a}-(q/p)^b)$. 代入 ET 的计算式有 $ET=b/(p-q)-((b+a)/(p-q))((1-(q/p)^b)/((q/p)^{-a}-(q/p)^b))=b/(p-q)-((b+a)/(p-q))((1-(p/q)^b)/(1-(p/q)^{a+b})$. 3° 由本章练习题 1 中的证明知 $\{W_n,n\ge 0\}$ 是鞅，且对 $\forall n<T$，有 $E|W_{T_b\wedge n}|\le E|W_{T_b\wedge n}I_{(T_b\ge n)}|+E|W_{T_b\wedge n}I_{(T_b<n)}|=E|W_nI_{(T_b\ge n)}|+E|W_{T_b}I_{(T_b<n)}|$. 又 $E|W_nI_{(T_b\ge n)}|<E|W_n|<4n^2+n<\infty$;$E|W_{T_b}I_{(T_b<n)}|=E|(U_{T_b}^2-T_b[1-(p-q)^2])I_{(T_b<n)}|\le E|U_{T_b}^2I_{(T_b<n)}|+E|T_bI_{(T_b<n)}|<\infty$，所以 $E|W_{T_b\wedge n}|<\infty$. 且有 $\lim_{n\to\infty}E(X_nI_{(T>n)})\le\lim_{n\to\infty}EX_n=0$. 故有 $EW_{T_b}=EW_0=0$，即 $E(U_{T_b}^2-T_b[1-(p-q)^2])=0$. 由 X_{T_b} 的定义和上面已证得的 $ET_b=b/(p-q)$，解得 $E(T_b^2)=b(1-(p-q)^2)/(p-q)^3+b^2/(p-q)^2$. 因此，最后有 $VarT_b=E(T_b^2)-(ET_b)^2=b(1-(p-q)^2)/(p-q)^3$，证毕.

4.8 证明：对 $\forall k\in[1,n],1-Y_{k-1}<Y_k\le 1$，那么 $(1-Y_k)/Y_{k-1}<1$. 于是 $E|X_n|=E|2^n((1-Y_1)/Y_0)\cdots((1-Y_n)/Y_{n-1})|\le E|2^n|=2^n<\infty$. 又 $E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=E(2X_n(1-Y_{n+1})/Y_n|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=(2X_n/Y_n)E(1-Y_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n$. 因此 $\{X_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是鞅.

4.9 证明： 1° (A) 首先 $E|X_n|=EX_n=\Sigma_{k=0}^N kP(X_n=k)\le\Sigma_{k=0}^N k=N(N+1)/2<\infty$. 又由马氏性 $E(X_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)=E(X_{n+1}|X_n)$. 考察 $E(X_{n+1}|X_n=n)=\Sigma_{k=0}^N kC_N^k(n/N)^k(1-n/N)^{N-k}=n\Sigma_{k=0}^N C_{N-1}^{k-1}(n/N)^{k-1}(1-n/N)^{N-k}=n$. 所以 $E(X_{n+1}|X_n)=X_n$，因此 $\{X_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是鞅. (B) 首先 $E|V_n|=EV_n\le(N/2)^2/(1-1/N)^n<\infty$. 又由马氏性 $E(V_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)=E(V_{n+1}|X_n)$. 考察 $E(V_{n+1}|X_n=k)=(1/(1-1/N)^{n+1})\Sigma_{j=0}^N[j(N-j)C_N^j(k/N)^j(1-k/N)^{N-j}]=(k(N-k)/(1-1/N)^n)\Sigma_{t=0}^{N-2}[C_{N-2}^t(k/N)^t(1-k/N)^{N-2-t}]=k(N-k)/(1-1/N)^n$. 所以 $E(V_{n+1}|X_n)=X_n(N-X_n)/(1-1/N)^n=V_n$，因此 $\{V_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是鞅. 2° 由马氏性可以得到 $E(W_{n+1}|X_0,X_1,\cdots,X_n)=E(W_{n+1}|X_n)$. 考察 $E(W_{n+1}|X_n=k)=(1/\lambda^{n+1})\Sigma_{j=1}^{N-1}[j(N-j)C_{2k}^jC_{2N-2k}^{N-j}/C_{2N}^N]=(4k(N-k)/(\lambda^{n+1}C_{2N}^N))\Sigma_{t=0}^{N-2}[C_{2k-1}^tC_{(2N-2)-(2k-1)}^{N-2-t}]=4k(N-k)C_{2N-2}^{N-2}/(\lambda^{n+1}C_{2N}^N)$. 又 $W_n=X_n(N-X_n)/\lambda^n$，若 $\{W_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是鞅，则 $\lambda=(2N-2)/(2N-1)$.

4.23 证明： 1° 因为 $\{X_n,n\ge 0\}$ 关于 $\{Y_n,n\ge 0\}$ 是鞅，那么 X_n 是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数. 于是 $X_n\vee c$ 也可以看作是 $Y_0,Y_1,\cdots,Y_n$ 的函数. 满足下鞅定义的条件 3. 又已知 $E|X_n\vee c|<+\infty$，那么 $E((X_n\vee c)^+)<+\infty$，满足下鞅定义的条件 1. 又因为 $X_{n+1}\vee c\ge X_{n+1}$ 且 $\{X_n,n\ge 0\}$ 是鞅，故 $E(X_{n+1}\vee c|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\ge E(X_{n+1}|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)=X_n$. 同样的有 $X_{n+1}\vee c\ge c$，故 $E(X_{n+1}\vee c|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\ge c$. 因此 $E(X_{n+1}\vee c|Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)\ge X_n\vee c$，满足下鞅定义的条件 2. 所以 $\{X_n\vee c,n\ge 0\}$ 是下鞅. 2° 取 $c=0$，由第一问的证明即得.

第五章

5.1 解：1 ° 由定理 5.1.3 知：$cov(B(s),B(t)) = E[B(s)B(t)] - E[B(s)]E[B(t)] = s\wedge t+0 = s\wedge t$. 2 ° 由定理 5.1.1 知：在 $B(s)=x$ 的条件下，$B(s+t)$ 的条件概率密度是：$p(y-x,t) = e^{-(y-x)^2/2t}/(\sqrt{2\pi t})$. 3 ° 计算有 $\partial p/\partial t = -t^{-3/2}e^{-x^2/2t}/(2\sqrt{2\pi}) + x^2t^{-5/2}e^{-x^2/2t}/(2\sqrt{2\pi})$, 又 $\partial^2 p/\partial x^2 = -t^{-3/2}e^{-x^2/2t}/(\sqrt{2\pi}) + x^2t^{-5/2}e^{-x^2/2t}/(\sqrt{2\pi})$. 所以，有 $\partial p/\partial t = (1/2)\partial^2 p/\partial x^2$ 成立. 4 ° $B(s),B(t),B(u)$ 的联合概率密度函数：$f(x_1,x,x_2) = e^{(-x_1^2/2s-(x-x_1)^2/2(t-s)-(x_2-x)^2/2(u-t))}/((2\pi)^{3/2}\sqrt{s(t-s)(u-t)})$, $B(s),B(u)$ 的 j.p.d.f: $f(x_1,x_2) = e^{(-x_1^2/2s-(x_2-x_1)^2/2(u-s))}/(2\pi\sqrt{s(u-s)})$, 在 $B(s)=x,B(u)=y$ 的条件下，$B(t)$ 的条件概率密度函数为：$f_{B(t)|B(s)=x,B(u)=y}(z|x,y) = e^{(-(z-x)^2/2(t-s)-(y-z)^2/2(u-t)+(y-x)^2/2(u-s))}/\sqrt{2\pi(t-s)(u-t)/(u-s)}$ 也为正态分布，因此 $E[B(t)|B(s)=x,B(u)=y] = x+(t-s)(y-x)/(u-s)$. 又 $X(t)=B(t)+\mu t, D[X(t)|B(s)=x,B(u)=y] = D[B(t)|B(s)=x,B(u)=y] = (t-s)(u-t)/(u-s)$. 7 ° 因为 $E(B(2)|B(3)=a) = E[B(2)|B(3)=a,B(0)=0] = 2a/3$, 故有 $E(B(2)|B(3)) = 2B(3)/3$. 又 $E[B(2)B(4)|B(3)] = E[B(2)(B(4)-B(3)+B(3))|B(3)] = E[B(2)B(3)|B(3)]+E[B(2)(B(4)-B(3))|B(3)] = B(3)E[B(2)|B(3)]+E[B(2)(B(4)-B(3))|B(3)] = B(3)E[B(2)|B(3)]+E[B(2)|B(3)]E[(B(4)-B(3))|B(3)] = 2[B(3)]^2/3$. 最后 $E[B(2)B(6)|B(3),B(4),B(5)] = E[B(2)(B(6)-B(5)+B(5))|B(3),B(4),B(5)] = E[B(2)B(5)|B(3),B(4),B(5)]+E[B(2)(B(6)-B(5))|B(3),B(4),B(5)] = 2B(3)B(5)/3$.

5.4 解：$\forall x>0, P(|B(t)|<x) = P(-x<B(t)<x) = \int_{-x}^{x} e^{-a^2/2t}/(\sqrt{2\pi t})\,\mathrm{d}a$. $f_{|B(t)|}(x) = 2e^{-x^2/2t}/(\sqrt{2\pi t})I_{(x>0)}$. 又 $P(M(t)\ge a) = 2P(B(t)\ge a) = 2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$. 可知 $M(t)$ 和 $|B(t)|$ 同分布. 且由对称性，$P(|\min_{0\le s\le t}B(s)|<a) = P(|M(t)|<a) = P(M(t)<a)$, 所以 $|\min_{0\le s\le t}B(s)|$ 也和 $|B(t)|$ 同分布. 下面证明 $\delta(t)=M(t)-B(t)$ 和 $|B(t)|$ 也是同分布的. 由 §5.5 结果，得到 $(M(t),B(t))$ 的联合概率密度函数是：$f_{(M(t),B(t))}(x,y) = -2(y-2x)e^{-(y-2x)^2/2t}/(t\sqrt{2\pi t})I_{(x\ge 0,x\ge y)}$. 进行变量替换，设 $m=x-y>0, n=y$, 易知 $|J|=1$. 那么上面概率密度函数变为：$f_{(\delta(t),B(t))}(m,n) = 2(2m+n)e^{-(2m+n)^2/2t}/(t\sqrt{2\pi t})I_{(m\ge 0,n\ge -m)}$. 对 n 积分，得到 $\delta(t)$ 的分布 $\int_{-m}^{\infty} 2(2m+n)e^{-(2m+n)^2/2t}/(t\sqrt{2\pi t})\,\mathrm{d}n = \int_{m}^{\infty} 2xe^{-x^2/2t}/(t\sqrt{2\pi t})\,\mathrm{d}x = 2e^{-m^2/2t}/(\sqrt{2\pi t})$ 上面推导中，有 $m\ge 0$ 条件. 考察上面的概率密度函数，与 $|B(t)|$ 的概率密度函数，因此 $\delta(t)$ 也和 $|B(t)|$ 同分布. 此外，下面提供一种证明 $\delta(t)$ 与 $M(t)$ 同分布的方法. 因 $\delta(t) = \max_{0\le s\le t}B(s)-B(t) = \max_{0\le s\le t}(B(s)-B(t))$, 又 $B(s)-B(t)$ 与 $B(t-s)$ 同分布，故 $\forall a\ge 0$, 有：$P(\max_{0\le s\le t}(B(s)-B(t))\ge a) = P(\max_{0\le s\le t}B(t-s)\ge a) = P(\max_{0\le s\le t}B(s)\ge a) = P(M(t)\le a)$, 即 $\delta(t)$ 与 $M(t)$ 同分布.

5.5 解：由定理 5.5.1 可知 $E[S(t)]=0, \forall 0\le\delta\le t$, 有 $\mathrm{Cov}[S(\delta),S(t)] = (\delta^2/2)(t-\delta/3)$. 那么 $D[S(t)] = t^3/3$. 且是正态分布，下面求 $(S(t_1),S(t_2))$ $t_1\le t_2$ 的 j.p.d.f. $f(x_1,x_2) = e^{-(1/2(1-\rho^2))[(x_1-\mu_1)^2/\sigma_1^2-2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)/\sigma_1\sigma_2+(x_2-\mu_2)^2/\sigma_2^2]}/(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})$. 上式中，

$\sigma_1 = t_1\sqrt{t_1/3}, \sigma_2 = t_2\sqrt{t_2/3}, \mu_1 = \mu_2 = 0, \rho = t_1(3t_2 - t_1)/(2t_2\sqrt{t_1 t_2})$.

5.14 解： Δ_{nk} 服从期望为 0, 方差是 $1/2^n$ 的正态分布. 且由 Brown 运动性质，可以知道 $\Delta_{nk}(1 \le k \le 2^n)$ 相互独立，那么得到 $E(S_n) = 1$, 显然有 $E(S_2) = 1$). 设 $\Delta_{nk} = m^2, m \ge 0$, 那么 $E(\Delta_{nk}|\Delta_{nk}^2 = m^2) = -m/2 + m/2 = 0$. 故 $E(\Delta_{nk}|\Delta_{nk}^2) = 0$. 由于 Δ_{nk} 和 Δ_{nk+1} 相互独立, 且由上面结论, 易知 $E(\Delta_{nk}\Delta_{nk+1}|\Delta_{nk}^2, \Delta_{nk+1}^2) = 0$. 下面求 $E(S_{n+1}|S_n)$ 和 $E(S_n|S_{n+1})$. 先证明几个简单的结论. 首先, 有 $\Delta_{nk} = \Delta_{(n+1)2k} + \Delta_{(n+1)(2k-1)}$, 直接由它们的定义就可以得到. 而 $E[(\Delta_{(n+1)2k} + \Delta_{(n+1)(2k-1)})(\Delta_{(n+1)2k} - \Delta_{(n+1)(2k-1)})] = E[\Delta_{(n+1)2k}^2 - \Delta_{(n+1)(2k-1)}^2] = 0$, 且他们各自的数学期望是 0, 相关系数为零. 又是正态分布, 所以 $\Delta_{(n+1)2k} + \Delta_{(n+1)(2k-1)}$ 和 $\Delta_{(n+1)2k} - \Delta_{(n+1)(2k-1)}$ 相互独立 $E((\Delta_{(n+1)2k} - \Delta_{(n+1)(2k-1)})^2|\Delta_{nk}^2) = 1/2^n$, 有 $E(S_{n+1}|S_n) = E(\sum_j \Delta_{(n+1)j}^2|S_n) = E\big(\sum_{j=1}^{2^n}(\Delta_{(n+1)(2j)}^2 + \Delta_{(n+1)(2j-1)}^2)|S_n\big) = E\big(\sum_{j=1}^{2^n}[(\Delta_{(n+1)(2j)} + \Delta_{(n+1)(2j-1)})^2 + (\Delta_{(n+1)(2j)} - \Delta_{(n+1)(2j-1)})^2]|S_n\big)/2 = S_n/2 + E\big(\sum_j(\Delta_{(n+1)(2j)} - \Delta_{(n+1)(2j-1)})^2|S_n\big)/2 = S_n/2 + E\big(E\big(\sum_{j=1}^{2^n}(\Delta_{(n+1)(2j)} - \Delta_{(n+1)(2j-1)})^2\big)|\Delta_{n1}^2, \Delta_{n2}^2, \cdots, \Delta_{n2^n}^2\big)|S_n\big)/2 = S_n/2 + E\big(\sum_{j=1}^{2^n} E\big((\Delta_{(n+1)(2j)} - \Delta_{(n+1)(2j-1)})^2|\Delta_{nj}^2\big)|S_n\big)/2 = (S_n+1)/2$, $E(S_3|S_2) = \frac{1}{2}(S_2 + 1)$. $E(S_n|S_{n+1}) = E(\sum_k \Delta_{nk}^2|S_{n+1}) = S_{n+1} + 2E(\sum_k \Delta_{(n+1)(2k)}\Delta_{(n+1)(2k-1)}|S_{n+1}) = S_{n+1} + 2E(E\big(\sum_{k=1}^{2^n}\Delta_{(n+1)(2k)}\Delta_{(n+1)(2k-1)}|\Delta_{(n+1)1}^2, \cdots, \Delta_{(n+1)(2^n+1)}^2\big)|S_{n+1}) = S_{n+1} + 2E(E\big(\sum_{k=1}^{2^n}\Delta_{(n+1)(2k)}\Delta_{(n+1)(2k-1)}|\Delta_{(n+1)(2k)}^2, \Delta_{(n+1)(2k-1)}^2\big)|S_{n+1}) = S_{n+1}$. 于是可以得到 $E(S_2|S_3) = S_3$.

5.20 证：记 $Y_k = B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})) - B(t_{k-1})$ $(1 \le k \le n)$, 故 $Y_k \sim N(0, \theta(t_k - t_{k-1}))$; 由正态分布的性质知 $EY_k^4 = 3\cdot[\theta(t_k - t_{k-1})]^2, EY_k^2 = DY_k = \theta(t_k - t_{k-1})$; 又 $Y_k^2(1 \le k \le n)$ 相互独立，故当 $k \ne l$ 时， $EY_k^2Y_l^2 = EY_k^2EY_l^2 = \theta^2(t_k - t_{k-1})(t_l - t_{l-1})$, 因此 $E[\sum_{k=1}^n[B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})) - B(t_{k-1})]^2 - \theta t]^2 = E[\sum_{k=1}^n Y_k^2 - \theta t]^2 = E(\sum_{k=1}^n Y_k^2)^2 - 2\theta E(\sum_{k=1}^n Y_k^2)t + (\theta t)^2 = 3\cdot\theta^2\sum_{k=1}^n(t_k - t_{k-1})^2 + 2\cdot\theta^2\sum_{i<j}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) - 2\cdot\theta^2[\sum_{k=1}^n(t_k - t_{k-1})]t + (\theta t)^2 = 2\cdot\theta^2\sum_{k=1}^n(t_k - t_{k-1})^2$. 因为 $\sum_{k=1}^n(t_k - t_{k-1})^2 \le \lambda\cdot\sum_{k=1}^n(t_k - t_{k-1}) = \lambda t$, 所以当 $\lambda \to 0$ 时, 有 $E[\sum_{k=1}^n Y_k^2 - \theta t]^2 \to 0$. 故 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n[B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})) - B(t_{k-1})]^2 \overset{m.s.}{=} \theta t$. 且有 $E[\sum_{k=1}^n[B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})) - B(t_{k-1})]^2 - \theta t] = 0$. 记： $X = \sum\limits_{k=1}^n B^2(t_k) - B^2(t_{k-1}) = B^2(t); Y = \sum\limits_{k=1}^n[B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1})) - B(t_{k-1})]^2; Z = \sum\limits_{k=1}^n[B(t_k) - B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1}))]^2$. 则显然有 $\sum\limits_{k=1}^n B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1}))(B(t_k) - B(t_{k-1})) = (X + Y - Z)/2$. 由上面的讨论，可知： $\lim_{\lambda\to 0}(Y - \theta t) = 0, \lim_{\lambda\to 0}[Z - (1 - \theta t)] = 0, \lim_{\lambda\to 0}(Y - \theta t)^2 = 0, \lim_{\lambda\to 0}[Z - (1 - \theta t)]^2 = 0$. 那么 $\lim_{\lambda\to 0}\{(X + Y - Z) - [B^2(t) + (2\theta - 1)t]\}^2 = \lim_{\lambda\to 0}E[(Y - \theta t) - (Z - (1 - \theta t))]^2 = \lim_{\lambda\to 0}\{E(Y - \theta t)^2 + E[Z - (1 - \theta t)]^2 - 2E[(X - \theta t)(Z - (1 - \theta t))]\} = -2\lim_{\lambda\to 0}\{E(Y - \theta t)E[Z - (1 - \theta t)]\} = 0$ (由独立性). 因此 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n B(t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1}))(B(t_k) - B(t_{k-1})) \overset{m.s.}{=} B^2(t)/2 + (2\theta - 1)t/2$.

第六章

6.2 解：参照 6.2 节例 1. 1 ° $E(X(t)) = 1 \times P(X(t) = 1) = P_1(t) = P_{01}(t) = \lambda/(\lambda+\mu) - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}/(\lambda+\mu)$. 2 ° 由定理 6.1.3 知，系统逗留在 $X(0) = i$ 的时间 τ_1 是服从参数为 q_i 的指数分布，那么： $E(\tau_1|X(0) = 0) = q_0^{-1} = 1/\lambda$. 3 ° 不妨假设 $t \geq s$,$\mathrm{Cov}\,(X(s), X(t)) = E(X(s)X(t)) - EX(s)EX(t) = P(X(s) = 1, X(t) = 1) - EX(s)EX(t) = P_{01}(s)P_{11}(t-s) - P_{01}(s)P_{01}(t)$. 4 ° 由 M.C. 时齐性， $E(X(s+t)|X(s) = 1) = P(X(s+t) = 1|X(s) = 1) = P(X(t) = 1|X(0) = 1) = P_{11}(t) = \lambda/(\lambda+\mu) + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}/(\lambda+\mu)$.

6.5 解: 令 $A = \Sigma_{k=1}^{\infty}(\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1})/(\mu_1\mu_2\cdots\mu_k)$. 由 $\lambda_n = \lambda q^n$,$A = \Sigma_{k=1}^{\infty}(\lambda^k q^{k(k-1)/2}/\mu^k)$. 又因为 $q < 0$, 故当 $\lambda < \mu$ 时存在平稳分布. 平稳分布为: $\mathbf{P_0} = (1+A)^{-1}$,$\mathbf{P_k} = (\lambda^k q^{k(k-1)/2}/\mu^k)\mathbf{P_0}\ \ (k \geq 1)$.

6.8 解：因为 $P(A|BC) = P(AB|C)/P(B|C)$, 又因为 X_1, X_2 独立，所以 $P(X_1(t) = k|X_1(t) + X_2(t) = N, X_1(0) = n_1, X_2(0) = n_2) = P(X_1(t) = k, X_1(t) + X_2(t) = N|X_1(0) = n_1, X_2(0) = n_2)/P(X_1(t) + X_2(t) = N|X_1(0) = n_1, X_2(0) = n_2) = P(X_1(t) = k|X_1(0) = n_1)P(X_2(t) = N-k|X_2(0) = n_2)/P(X_1(t)+X_2(t) = N|X_1(0)+X_2(0) = n_1+n_2) = P_{n_1k}(t)P_{n_2(N-k)}(t)/P_{(n_1+n_2)N}(t)$. 其中 $P_{kn}(t)$ 的定义参见教材. 当 $n_1 \leq k \leq N - n_2$ 时上式不为 0. 故: $P(X_1(t) = k|X_1(t) + X_2(t) = N, X_1(0) = n_1, X_2(0) = n_2) = (C_{k-1}^{k-n_1}C_{N-k-1}^{N-k-n_2}/C_{N-1}^{N-n_1-n_2})I_{(n_1 \leq k \leq N-n_2)}$.

6.10 解: 注意到理发店只能容纳两名顾客, 所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3; \mu_1 = \mu_2 = 4, \mathbf{P_k} = 0\ \ (k > 2)$. 由 $\mathbf{P_1} = 3\mathbf{P_0}/4; \mathbf{P_2} = 9\mathbf{P_0}/16; \mathbf{P_0} + \mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} = 1$ 解得 $\mathbf{P_0} = 16/37; \mathbf{P_1} = 12/37; \mathbf{P_2} = 9/37$. 1 ° 店中顾客的平均数 $L = \mathbf{P_1} + 2\mathbf{P_2} = 30/37$. 2 ° 当店中没有顾客或者只有一个顾客的时候, 新的顾客才能进店. 那么, 进店顾客的比例 $= \mathbf{P_0} + \mathbf{P_1} = 28/37$. 3 ° 当理发员加快一倍的工作时， $\mu_1 = \mu_2 = 8$. 重新计算得 $\mathbf{P'_0} = 64/97; \mathbf{P'_1} = 24/97; \mathbf{P'_2} = 9/97$. 新的进店顾客的比例 $= 88/97$. 那么多做的生意为原来的 $(88/97)/(28/37) \approx 1.2$ 倍. 每小时多做生意 $3 * (88/97 - 28/37) \approx 0.45$ 人.

6.19 解：设系统的状态空间为 $S = 0, 1$, 其中 1 代表工作状态， 0 代表非工作状态. 令 Y_i 表示第 i 台机器工作的寿命， $Y_{(i)}$ 为其顺序统计量. 令 Z_i 表示第 i 台机器修理所需要的时间. $(X(t) = 1, X(t+h) = 1) = \bigcap_{i=1}^{n}(Y_i > h)\bigcup A$, 其中 $P(A) = o(h)$, 故 $P_{11}(h) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i h + o(h)$, 令 $h \to 0$, 得： $q_1 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. 那么 $q_{11} = -q_1 = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 又 $P_{01}h = P(X(t) = 0, X(t+h) = 1) = \sum_{i=1}^{n}P(Y_i = Y_{(1)})P(Z_i \leq h)$ 且由全概率公式和 Y_i 彼此独立： $P(X_1 = X_{(1)}) = P(Y_1 \leq Y_2, \cdots, Y_1 \leq Y_n) = \int_0^{\infty}P(Y_1 \leq Y_2, \cdots, Y_1 \leq Y_n|Y_1 = u)\,\mathrm{d}P(Y_1 \leq u) = \int_0^{\infty}P(Y_1 \leq Y_2)\cdots P(Y_1 \leq Y_n)\,\mathrm{d}P(Y_1 \leq u) = \lambda_1/(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$. 所以 $P_{01}h = P(X(t) = 0, X(t+h) = 1) = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i h)/(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$ 得 $q_{01} = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i)/(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$. 参考教材 6.2 节例 1 的解法，解得 $P_1 = (\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i)/(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)$.

6.20 解： 1° 令 $\theta_n=\tau_n-\tau_{n-1}$，则 $P(\tau_2\le t)=P(\tau_1+\theta_2\le t)$．又 0 是吸收态，故第一次跳转时不能到 0，否则就不会有第二次跳转．由全概率公式：$P(\tau_1+\theta_2\le t)=\int_0^t P(\tau_1+\theta_2\le t\big|X(0)=1,\tau_1=u,X(\tau_1)=2)\,\mathrm{d}(P(\tau_1\le u\big|X(0)=1,X(\tau_1)=2)P(X(\tau_1)=2\big|X(0)=1)P(X(0)=1))+\int_0^t P(\tau_1+\theta_2\le t\big|X(0)=2,\tau_1=u,X(\tau_1)=1)\,\mathrm{d}(P(\tau_1\le u\big|X(0)=2,X(\tau_1)=1)P(X(\tau_1)=1\big|X(0)=2)P(X(0)=2))$．化简得：$P(\tau_1+\theta_2\le t)=\alpha_1\int_0^t(1-e^{-q_2(t-u)})q_{12}e^{-q_1u}\,\mathrm{d}u+\alpha_2\int_0^t(1-e^{-q_1(t-u)})q_{21}e^{-q_2u}\,\mathrm{d}u=3\alpha_1\int_0^t(1-e^{-3(t-u)})e^{-4u}\,\mathrm{d}u+2\alpha_2\int_0^t(1-e^{-4(t-u)})e^{-3u}\,\mathrm{d}u=\alpha_1(3/4+9e^{-4t}/4-3e^{-3t})+\alpha_2(2/3-8e^{-3t}/3+2e^{-4t})=(2+\alpha_1/4)e^{-4t}-(8/3+\alpha_1/3)e^{-3t}+(2/3+\alpha_1/12)$．那么 $E\tau_2=\int_0^\infty P(\tau_2>t)\,\mathrm{d}t=\infty$．2° $P(T\le x)=\alpha_1P(T\le x\big|X(0)=1)+\alpha_2P(T\le x\big|X(0)=2)$. 按教材定理 6.9.2 的定义, 经过 Laplace-Stieltjes 变换, 由定理 6.9.3 得：$\Phi_1(s)=(s+q_1)^{-1}q_{10}+(s+q_1)^{-1}q_{12}\Phi_2(s);\Phi_2(s)=(s+q_2)^{-1}q_{20}+(s+q_2)^{-1}q_{21}\Phi_1(s)$，联立解得 $\Phi_1(s)=\Phi_2(s)=1/(s+1)$．那么，对 $P(T\le x)$ 进行 Laplace-Stieltjes 变换的结果为 $\alpha_1\Phi_1(s)+\alpha_2\Phi_2(s)=(\alpha_1+\alpha_2)/(s+1)=1/(s+1)$．反变化得到 $P(T\le x)=1-e^{-x}$. 那么 $ET=\int_0^\infty P(T>x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x=1$.

第七章 (仅供参考)

7.3 解： 1° $E(X(t))=E(X+tY)=EX+tEY=0$; $Cov(X(s),X(t))=Cov(X,X)+(s+t)Cov(X,Y)+stCov(Y,Y)=\sigma_1^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2+st\sigma_2^2$．4° $Y'(t)=\lim_{h\to0}(Y(t+h)-Y(t))/h=\lim_{h\to0}(\int_0^{t+h}X(\mu)\,\mathrm{d}\mu-\int_0^t X(\mu)\,\mathrm{d}\mu)/h=\lim_{h\to0}\int_t^{t+h}X(\mu)\,\mathrm{d}\mu/h=\lim_{h\to0}\int_t^{t+h}(X+\mu Y)\,\mathrm{d}\mu/h=\lim_{h\to0}(Xh+Y(2th+h^2)/2)/h=X+tY=X(t)$. 同理可得：$Z'(t)=\lim_{h\to0}(Z(t+h)-Z(t))/h=\lim_{h\to0}(\int_0^{t+h}X^2(\mu)\,\mathrm{d}\mu-\int_0^t X^2(\mu)\,\mathrm{d}\mu)/h=\lim_{h\to0}\int_t^{t+h}X^2(\mu)\,\mathrm{d}\mu/h=\lim_{h\to0}\int_t^{t+h}(X^2+2XY\mu+Y^2\mu^2)\,\mathrm{d}\mu/h=\lim_{h\to0}(X^2h+XY(2th+h^2)+Y^2(3t^2h+3th^2+h^3)/3)/h=X^2+2tXY+t^2Y^2=X^2(t)$.

7.7 证明： 1° 要证明该命题，只需要证明 $\lim_{\delta_n\to0}E[\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k-t]^2=0$．为此计算 $E[\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k-t]^2$．又 $\Delta B_k\sim N(0,\Delta t_k)$．由正态分布的性质知 $E\Delta^4B_k=3\Delta^2t_k,E\Delta^2B_k=\Delta t_k$. 又 $\Delta^2B_k(1\le k\le n)$ 相互独立, 故当 $k\ne l$ 时，$E\Delta^2B_k\Delta^2B_l=E\Delta^2B_kE\Delta^2B_l=\Delta t_k\Delta t_l$, 故：$E[\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k-t]^2=E(\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k)^2-2E(\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k)t+t^2=3\Sigma_{k=1}^n\Delta^2t_k+2\Sigma_{i<j}\Delta t_i\Delta t_j-2t\Sigma_{k=1}^n\Delta t_k+t^2=2\Sigma_{k=1}^n\Delta^2t_k\le2\delta_n\Sigma_{k=1}^n\Delta t_k=2\delta_nt$. 所以当 $\delta_n\to0$ 时，$E[\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k-t]^2\to0$. 故 $\lim_{\delta_n\to0}E\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k\overset{m.s.}{=}t$. 4° 令 $A_n=\Sigma_{k=1}^nB_k\Delta B_k,C_n=\Sigma_{k=1}^nB_{k-1}\Delta B_k$，则 $A_n+C_n=\Sigma_{k=1}^n(B_k+B_{k-1})\Delta B_k=\Sigma_{k=1}^n(\Delta^2B_k-\Delta^2B_{k-1})=B^2(t);A_n-C_n=\Sigma_{k=1}^n(B_k-B_{k-1})\Delta B_k=\Sigma_{k=1}^n\Delta^2B_k$. 由上问中的结论 $A_n-C_n\overset{m.s.}{=}t$, 由均方收敛的定义知：$\lim_{\delta_n\to0}E(A_n-C_n-t)^2=0$, 所以 $\lim_{\delta_n\to0}E(B^2(t)-2C_n-t)^2=0$, 所以 $\lim_{\delta_n\to0}E(C_n-(B^2(t)-t)/2)^2=0$, 由此可得 $\lim_{\delta_n\to0}C_n\overset{m.s.}{=}(B^2(t)-t)/2$. 5° 由上问, 同理可证 $\lim_{\delta_n\to0}A_n\overset{m.s.}{=}(B^2(t)+t)/2$.

7.8 解： 3° 因为 $EY(t)=E(\int_0^t X(s)\,\mathrm{d}s)=\int_0^t EX(s)\,\mathrm{d}s=0$. 所以 $Cov(Y(s),Y(t))=$

$E(Y(s),Y(t)) = E(\int_0^s X(u)\,\mathrm{d}u \int_0^t X(v)\,\mathrm{d}v) = \int_0^s \int_0^t E(X(v)X(u))\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$. 由已知条件 $X(t), t \in R$ 是平稳过程和 $R(\tau) = e^{-2|\tau|}$, 得: $Cov(Y(s),Y(t)) = \int_0^s \int_0^t e^{-2|u-v|}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$. 不妨设 $0 \le s \le t$, 则 $Cov(Y(s),Y(t)) = \int_0^s \int_0^u e^{-2(u-v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u + \int_0^s \int_u^t e^{2(u-v)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = s + (e^{-2s} - 1)/4 - e^{-2t}(e^{2s} - 1)/4$.

7.14 解: 1° 令 $f(t,x) = x^3, X(t) = f(t,B(t)) = B^3(t)$. 则 $b = 0, \sigma = 1, \partial f/\partial t = 0, \partial f/\partial x = 3x^2, \partial^2 f/\partial x^2 = 6x$. 所以 $\mathrm{d}X(t) = \sigma(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}B(t) + [\partial f/\partial t + b(\partial f/\partial x) + (\sigma^2/2)(\partial^2 f/\partial x^2)]\,\mathrm{d}t = 3B^2(t)\,\mathrm{d}B(t) + 3B(t)\,\mathrm{d}t$. 2° 令 $f(t,x) = \alpha + t + e^x, X(t) = f(t,B(t)) = \alpha + t + e^{B(t)}$. 则 $b = 0, \sigma = 1, \partial f/\partial t = 1, \partial f/\partial x = e^x, \partial^2 f/\partial x^2 = e^x$. 所以 $\mathrm{d}X(t) = \sigma(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}B(t) + [\partial f/\partial t + b(\partial f/\partial x) + (\sigma^2/2)(\partial^2 f/\partial x^2)]\,\mathrm{d}t = e^{B(t)}\,\mathrm{d}B(t) + (1 + e^{B(t)}/2)\,\mathrm{d}t$. 3° 令 $f(t,x) = e^{\mu t + \alpha x}, X(t) = f(t,B(t)) = e^{\mu t + \alpha B(t)}$. 则 $b = 0, \sigma = 1, \partial f/\partial t = \mu e^{\mu t + \alpha x}, \partial f/\partial x = \alpha e^{\mu t + \alpha x}, \partial^2 f/\partial x^2 = \alpha^2 e^{\mu t + \alpha x}$. 所以 $\mathrm{d}X(t) = \sigma(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}B(t) + [\partial f/\partial t + b(\partial f/\partial x) + (\sigma^2/2)(\partial^2 f/\partial x^2)]\,\mathrm{d}t = \alpha e^{\mu t + \alpha B(t)}\,\mathrm{d}B(t) + (\mu + \alpha^2/2)e^{\mu t + \alpha B(t)}\,\mathrm{d}t = \alpha X(t)\,\mathrm{d}B(t) + (\mu + \alpha^2/2)X(t)\,\mathrm{d}t$. 4° 令 $f(t,x) = e^{t/2}\cos x, X(t) = f(t,B(t)) = e^{t/2}\cos B(t)$. 则同理有 $b = 0, \sigma = 1, \partial f/\partial t = e^{t/2}\cos x/2, \partial f/\partial x = -e^{t/2}\sin x, \partial^2 f/\partial x^2 = -e^{t/2}\cos x$. 那么 $\mathrm{d}X(t) = \sigma(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}B(t) + [\partial f/\partial t + b(\partial f/\partial x) + (\sigma^2/2)(\partial^2 f/\partial x^2)]\,\mathrm{d}t = -e^{t/2}\sin B(t)\,\mathrm{d}B(t)$.

7.15 解: 2° 令 $f(t,x) = xe^t, Y(t) = f(t,X(t)) = X(t)e^t$. 则 $b = -x, \sigma = e^{-t}, \partial f/\partial t = xe^t, \partial f/\partial x = e^t, \partial^2 f/\partial x^2 = 0$. 所以 $\mathrm{d}X(t) = \sigma(\partial f/\partial x)\,\mathrm{d}B(t) + [\partial f/\partial t + b(\partial f/\partial x) + (\sigma^2/2)(\partial^2 f/\partial x^2)]\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}B(t) + (X(t)e^t - X(t)e^t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}B(t)$. 两边从 t_0 到 t 积分 $(\forall 0 \le t_0 < t \le T)$, 有 $X(t)e^t - X(t_0)e^{t_0} = B(t) - B(t_0)$, 所以 $X(t) = (B(t) - B(t_0))e^{-t} + X(t_0)e^{t_0 - t}$. 3° 由公式 7.5.10 得, 对应的齐次线性方程的基本解为: $\rho_{t_0}(t) = e^{\int_{t_0}^t (-\alpha^2/2)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \alpha\,\mathrm{d}B(s)} = e^{-\alpha^2(t-t_0)/2 + \alpha(B(t) - B(t_0))}$. 又由公式 7.5.13 得, 本题的一般解为: $X(t) = \rho_{t_0}(t)[X(t_0) + \int_{t_0}^t \gamma\rho_{t_0}^{-1}(s)\,\mathrm{d}s] = \gamma e^{-\alpha^2 t/2 + \alpha B(t)} \int_{t_0}^t e^{\alpha^2 s/2 - \alpha B(s)}\,\mathrm{d}s + X(t_0)e^{-\alpha^2(t-t_0)/2 + \alpha(B(t) - B(t_0))}$. 4° 由公式 7.5.10 得, 对应的齐次线性方程的基本解为: $\rho_{t_0}(t) = e^{-\int_{t_0}^t \mathrm{d}s} = e^{t_0 - t}$. 又由公式 7.5.13, 一般解为: $X(t) = \rho_{t_0}(t)[X(t_0) + \int_{t_0}^t me^{s - t_0}\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \sigma e^{s - t_0}\,\mathrm{d}B(s)] = X(t_0)e^{-t + t_0} + m(1 - e^{-t + t_0}) + \sigma e^{-t}\int_{t_0}^t e^s\,\mathrm{d}B(s)$.