绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 设 $x^k\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=a\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t}-1)\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则（　　）.

(A) $a=20,k=4$　　(B) $a=30,k=4$　　(C) $a=20,k=3$　　(D) $a=30,k=3$

（2）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当　　　　时，它们之间（　　）.

(A) 没有交点　　(B) 仅有一个交点　　(C) 有两个交点　　(D) 有三个交点

（3）已知微分方程 $y''-4y'+ay=xe^{bx}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+(Ax+B)e^{bx}$，则（　　）.

(A) $a=4,b=2$　　(B) $a=4,b\neq 2$　　(C) $a\neq 4,b=2$　　(D) $a\neq 4,b\neq 2$

（4）设累次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$，$a>0$，则 I 可写成（　　　）.

(A) $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $I=\int_0^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $I=\int_0^{a}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

（5）设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，$B=\begin{pmatrix}a_{12}+a_{13}&a_{11}&a_{13}\\a_{22}+a_{23}&a_{21}&a_{23}\\a_{32}+a_{33}&a_{31}&a_{33}\end{pmatrix}$ 又 $P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　　$P_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$　　$P_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

则 $B^{-1}=$ （　　　）

(A) $P_2A^{-1}P_4$　　(B) $A^{-1}P_2P_3$　　(C) $P_1P_3A^{-1}$　　(D) $P_4P_1A^{-1}$

（6）设矩阵 A 是秩为 2 的 4 阶矩阵，又 a_1,a_2,a_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，且 $a_1+a_2-a_3=\left(2,0,-5,4\right)^T,a_2+2a_3=\left(3,12,3,3\right)^T,a_3-2a_1=\left(2,4,1-2\right)^T$ 则方程组 $Ax=$ ，的通解 $x=$______

（A） $\begin{bmatrix}1\\4\\1\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-4\\-6\\3\end{bmatrix},$　　　　（B） $\begin{bmatrix}-2\\-4\\-1\\2\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\8\\2\\5\end{bmatrix},$

（C） $\begin{bmatrix}2\\0\\-5\\4\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\1\end{bmatrix},$　　　　（D） $\begin{bmatrix}-2\\-4\\-1\\2\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\12\\8\\-1\end{bmatrix}.$

（7）设随机事件 A,B 独立，且概率 $P(A)=0.4,P(\bar{A}\bar{B})=0.2$ $P(A\cup\bar{B})=$（　　）

（A） 0.6　　　（B） 0.2　　　（C） 0.3　　　（D）0.5

$\underline{1}$

3

（8）、 设随机变量 X 为具有概率密度函数 $f(x)$ 的非负随机变量，其方差存在，则 $\int_0^{+\infty}P(X>x)\mathrm{d}x=$（　　　）。

A. EX　　　B. EX^2　　　C. DX　　　D.1

$+\infty$　　$+\infty$　　$+\infty$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\arctan x}{x})^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}=$________.

1

（10）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=0$,且有 $xf'(x)-f(x)=xe^{x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=$__________.

（11）差分方程 $y_{x+1}-3y_x=2\cdot 3^x$ 的通解为 ______________.

（12）若将 $f(x)=xn^{-x}$ 的极值点记为 $a_n,(n=2,3,4\cdots)$，则幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为_________.

（13）已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}t\\4\\2\\0\end{pmatrix}$ 的秩是 2，则 $t=$________。

（14）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 与 X_{n+1} 是 X 的简单随机样本，而 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}X_i$ 为样本均值，方差 $D(X_{n+1}-\bar{X})^2=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ \int_1^y e^{u^2}\,\mathrm{d}u+\int_t^0 \frac{\sin u}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u=0 \end{cases}$ 确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

（16）（本题满分 10 分）设 $f(u,v)$ 有二阶连续的偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

（17）（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|dxdy$，区域 $D: y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成.

（18）（本题满分 10 分）求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$；且求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

（19）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$.

（Ⅰ）证明对 $\forall x\in(0,a]$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

；

（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$.

（20）（**本题满分 11 分**）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & 4 & 0\\ -1 & 0 & c\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$,问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解，有解时求出全部解.

（21）（本题满分 11 分）已知三元二次型 $x^T Ax$ 的平方项系数均为 0，设 $\alpha=(1,2,\ 1)-\ {}^{T}$ 且满足 $A\alpha=2\alpha.$
(I) 求该二次型表达式；(II)求正交变换 $x=Qy$ 化二次形为标准型，并写出所用正交变换；(III)若 $A+kE$ 正定，求 k 的取值。

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+\dfrac{xy}{3},0<x<1,0<y<2 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

（I）求 X,Y 的边缘密度函数；（II）求 $P(X+Y\geq 1)$；（III）判断 X 与 Y 是否独立。

（23）设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,\dots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，（I）求参数 θ 矩估计 $\hat{\theta}_J$ 与极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（II）求 $\hat{\theta}_L$ 的分布密度函数 $f_{\hat{\theta}}(z)$；（III）求数学期望 $E(\hat{\theta}_J)$ 与方差 $D(\hat{\theta}_J)$.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}$ 的无穷间断点个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，又 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则（　　）.

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（3）设函数 $f(u)$ 具有连续导数，函数 $z=z(x,y)$ 由方程式 $x-z=yf(z^2-x^2)$ 确定，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

(A) x　　(B) y　　(C) $-x$　　(D) $-y$

（4）下列各项中正确的是 (　　) .

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\ge v_n$（$n=1,2,\cdots$），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

(B) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\ge\dfrac{1}{n}$

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{v_n}^2$ 均收敛 ,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_n v_n\right|$ 收敛 ,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{u_n}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{v_n}^2$ 收敛

（5）设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，β_1 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，则下列结论正确的是（　　）.

（A）α_1，α_2，β_2 线性相关　　（B）α_1，α_2，β_2 线性无关

（C）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性相关　　（D）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$,则 A 与 B(　　).

(A)合同不相似　　(B)相似不合同　　(C)合同且相似　　(D)不相似也不合同

（7）设随机事件 A,B 独立， $P(C)=0$，则下列说法正确的是（　　）.

(A). C 与 $A-B$ 不独立　　(B). A 与 $B\cup C$ 不独立

(C). $A\cup C$ 与 $B\cup\bar{C}$ 独立　　(D). B 与 $A-C$ 不独立

（8）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2,0<x<2\\0,其他\end{cases}$ 则 $\dfrac{1}{X^2}$ 的数学期望为（　　）.

（A）$\dfrac{3}{8}$　　（B）$\dfrac{7}{8}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,2)$，且当 x 在 $x=1$ 处取得增量 Δx 是相应的函数值增量 Δy 的线性主部是 $\dfrac{1}{2}\Delta x$，则曲线 $y=f(\dfrac{1-x}{1+x})$ 在 $x=0$ 处的法线方程是：________.

（10）设 $y=y(x)$ 满足 $y'+y=\sin kx$，且 $y(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x\tan 2x}=$ ________.

（11）设 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，则 $y=y(x)$ 的极值是________.

（12）积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}\,x=$ ________.

（13）设 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&a\\3&1&1\end{pmatrix}$（$a$ 为某常数），B 为 4×3 阶非零矩阵，且 BA=0，则 $\mathrm{R}(B)=$ ________.

（14）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 与 X_{n+1} 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$与S^2 分别是样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的样本均值与样本方差，对统计量：$\theta=C\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，则常数 $C=$ ________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}-xe^{x}, & x\le 0,\\ 1-\cos x, & x>0.\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$.

（16）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ 在集合 $D=\{(x,y)\,|\,x>-\dfrac{1}{2},y>-\dfrac{1}{2}\}$ 上的极值.

（17）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma$，区域 $D: x^2+y^2\le 1, y\ge 0$.

（18）（**本题满分 10 分**）在过原点和 $(1,2)$ 点的单调光滑曲线上任取一点，作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与 x 轴及曲线围成的面积是另一平行线与 y 轴及曲线围成面积的 2 倍，（I）求此曲线方程；（II）求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴及 $x=1$ 围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所成的立体体积。

（19）（**本题满分 10 分**）设 $x>0$，证明不等式：（I）$x-\sqrt{1+x}\ln(1+x)>0$；（II）$\dfrac{1}{x(1+x)}>\ln^2(1+\dfrac{1}{x})$.

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次方程组 $Ax=0$ 为 $\begin{cases}x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0\\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0\\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0\end{cases}$，$B$ 是 2×4 矩阵，$Bx=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-2,1)^T$；（I）求矩阵 B；（II）若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；（III）求方程组 $Ax=0$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解.

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 与对角矩阵相似，（1）求可逆变换 $X=CY$，化二次型 $f=X^TAX$ 为标准形；（2）指出 $X^TAX=0$ 表示什么曲面。

（22）（**本题满分 11 分**）设平面区域 D 由曲线 $y=1/x$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，求（I）条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；（II）概率 $P(Y<\dfrac{1}{2}\,|\,X=\dfrac{3}{2})$；（III）$E(XY)$.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 具有概率密度函数

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>c,\\ 0, & x\le c\end{cases}$$

其中 $c>0$ 已知，$\theta>1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从该总体中抽取的一个简单随机样本。

（I）求参数 θ 的矩估计；（II）求参数 θ 的最大似然估计.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试
数学（三）试卷 （模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\ge 0 \\ \dfrac{1}{1-x}-1, & x<0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的（ ）.

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点 (C) 无穷间断点 (D) 连续点

（2）设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=g(a)=1, f(b)=g(b)=3$，且 $f''(x)>0$，$g''(x)<0$，记 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，则（ ）.

（A）$S_1<2(b-a)<S_2$ （B）$S_2<2(b-a)<S_1$

（C）$S_1<S_2<2(b-a)$ （D）$2(b-a)<S_2<S_1$

（3）设有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\dfrac{\sin a}{n^3}+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})]$ 收敛，其中 a 为常数，则此级数（ ）.

（A）条件收敛 （B）绝对收敛 （C）发散 （D）敛散性与 a 的取值有关

（4）函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分条件是（ ）

①函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在

②偏导函数 $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

③ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y]=0$

④ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{[f(x,y)-f(0,0)]-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 存在

⑤ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{[f(x,y)-f(0,0)]-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（A） ① ③ （B）②⑤ （C）③⑤ （D）④⑤

（5）设 A,B 均为 n 阶矩阵，其中 B 为可逆阵，且满足 $(A+B)^2=E$，则 $(E+AB^{-1})^{-1}=$（ ）。

（A）$E+A^{-1}B$ （B）$E+BA$ （C）$A(A+B)$ （D）$B(A+B)$

（6）设 A 是 3 阶矩阵，P 是 3 阶可逆阵，且满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，若 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=0$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维非零向量，且 α_1,α_2 线性无关，则矩阵 P 不能是（ ）。

(A) $(-\alpha_1,5\alpha_2,\alpha_3)$ (B) $(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$ (C) $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ (D) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$

（7）设随机变量 X 与 Y 独立，且 $P\{X=-1\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2},Y\sim U(0,1)$ 均匀分布，则正确（　　）

（A）$P\{X+Y\le\frac{3}{2}\}=\frac{1}{2}$　　（B）$P\{X+Y\le\frac{3}{2}\}=\frac{3}{4}$

（C）$P\{X+Y\le\frac{3}{2}\}=\frac{1}{4}$　　（D）$P\{X+Y\le\frac{3}{2}\}=\frac{1}{3}$

（8）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为从某总体 X 中抽取的一个简单随机样本，$EX=\mu$ 和 $DX=\sigma^2$ 均存在，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下面说法正确的是（　　）.

（A）$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$　　（B）$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立

（C）$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$　　（D）$ES^2=\sigma^2$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}+x^2+y=e+2$ 确定，则 $dy\big|_{x=1}=$______________。

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n\sqrt{n^2+i^2}}=$________________.

（11）方程 $xy'+2y=\frac{1}{x}\cos 2x$ 的通解是________________。

（12）设 $I(a)=\int_0^{2a}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}}e^{x^2-y^2}\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{I(a)}{\ln(1+a^2)}=$________.

（13）设 A,B 为三阶矩阵，A 相似 B，$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 为矩阵 A 的两个特征值,又 $\left|B^{-1}\right|=\frac{1}{3}$,则

$$\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（14）设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{12\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\right\}$$

则 $E(X+2Y)(3X-Y)=$_______________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+ax+bx^2)\sqrt{1+x}-c}{\sin x\ln(1+x^2)}=d$，求常数 a,b,c,d 的值.

（16）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(x,xy,e^z)$，且函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\int_{xy}^{z}g(xy+z-t)dt=e^{xz}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$.

（17）（**本题满分 10 分**）计算$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}\,x$.

（18）（**本题满分 10 分**）设$a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots,(a_0\neq 0)$为公差为正数$d$的等差数列（1）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径；（2）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$的和.

（19）（**本题满分 10 分**）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续在$(0,1)$内可导，$g(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，且$g'(x)\neq 0,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}\,x=0$，求证：（Ⅰ）$\exists\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=0$；（Ⅱ）$\exists\eta\in(0,1)$使得$f'(\eta)=0$.

（20）（**本题满分 11 分**）已知三阶实对称矩阵A的特征值为 0，1，1，α_1,α_2为A的两个特征向量，$\alpha_1\neq\alpha_2$，且$A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$，(I）证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2$线性无关；(II）求$A\boldsymbol{x}=\alpha_2$的通解。

（21)（**本题满分 11 分**)已知二次型$f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}=x^TAx$通过正交变换$x=Uy$化为标准形：$2{y_1}^2+2{y_2}^2$，且线性方程组$Ax=0$有解$\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，(I）求所作的正交变换；(II）求该二次型.

（22）（**本题满分 11 分**）设(X,Y)概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}Ax & ,0\le y<x<1\\ 0, & Other\end{cases}$，试求（I）常数$A$；(II）边缘概率密度函数$f_Y(y)$与条件概率密度函数$f_{X|Y}(x\,|\,y)$；(III）函数$\mathrm{Z}=XY$的概率密度函数.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体X服从均匀分布$U(\theta,2\theta)$，其中$\theta>0$为未知参数，又$X_1,X_2,\cdots,X_n$为从该总体中抽取的一个简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，(I）求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；并判断$\hat{\theta}_1$的数学期望是否存在，若存在，其大小是否等于θ，若不存在，请说明理由；(II）求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）下列命题中不正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右导数均存在但不相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续。

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

（C）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, A$为有限值，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在

（D）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

（2）设 $I_1=\dfrac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}\,\mathrm{d}x, I_2=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\,\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I_1<1<I_2$　（B）$1<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<1$　（D）$I_2<1<I_1$

（3）若 $f(x,x^2)=x^2e^{-x}$，$f_x'(x,y)|_{y=x^2}=-x^2e^{-x}$，则 $f_y'(x,y)|_{y=x^2}=$（　　）.

(A) $2xe^{-x}$　(B) $(-x^2+2x)e^{-x}$　(C) e^{-x}　(D) $(2x-1)e^{-x}$

（4）设微分方程 $y''-2y'+3y=e^x\sin(\sqrt{2}x)$ 的特解的形式是（　　）.

(A) $e^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$　(B) $xe^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$

(C) $Ae^x\sin(\sqrt{2}x)$　(D) $Ae^x\cos(\sqrt{2}x)$

（5）设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)$，$\eta_3=(1,0,5,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组（Ⅰ）的一个极大无关组是（　　）.

(A) α_1,α_2　(B) α_1,α_4　(C) α_3,α_5　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A、B 为 3 阶非 0 矩阵，满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{pmatrix}$，则

(A) $a=-1$时，必有 $r(A)=1$　(B) $a\neq-1$时，必有 $r(A)=2$

(C) $a=2$时，必有 $r(A)=1$　(D) $a\neq2$时，必有 $r(A)=2$

（7）设 X_1,X_2,X_3,X_4为从正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 中抽取的一个简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，令统计量 $T=\dfrac{2\bar{X}}{S}$，若 $P(T<-1)=0.15$，则 $P(0<T<1)=$（　　）.

（A）0.15　（B）0.25　（C）0.35　(D) 0.45

（8）设总体 X 的均值为 μ，标准差为 $\sigma=2$，现抽样 $X_1,X_2,\ldots,X_n$，是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 是样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的样本均值，若要至少使得 99.7%的概率保证 $\left|\bar{X}-\mu\right|<0.5$，试利用中心极限定理，估计出样本容量 n 应该不小于（　　）（其中已知，正态分布表 $\Phi(2.97)=0.9985$）.

（A）565　　（B） 142　　（C） 12　　（D） 24

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 已知 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$____________.

（10）设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1],\\ x, & x\in(1,+\infty),\end{cases}$ 又 $f(0)=1$，则 $f(x)=$__________.

（11）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz^2+\sqrt{x^2+y^2}+z=2$ 确定，则 $dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$__________.

（12）二次积分 $\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy=$__________.

（13）**已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 5 & a\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是_______.**

（14）设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1),\ Y\sim E(\lambda)$ 指数分布，且 Y 的数学期望为 $\frac{1}{2}$，则概率 $P\{\max\{X,Y\}>\frac{1}{2}\}$=__________ .

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$，求 $f''(0)$ 的值.

（16）（本题满分 10 分）假设生产某种产品需要 A,B,C 三种原料，该产品的产量与三种原料的用量 x,y,z 之间有如下关系：$q=0.0005x^2yz$，已知三种原料价格分别为 1 元、2 元、3 元，现用 2400 元购买原料，问三种原料各购进多少，可以使该产品产量最大？

（17）（本题满分 10 分）多元设平面区域为 $D:0\le x\le1,0\le y\le1$，若表达式为

$$xy\left(\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2 = f(x,y),$$ 且 $I(t)=\int_t^1 f(x,t)\mathrm{d}x$，试求积分 $\int_0^1 I(t)\mathrm{d}t$.

（18）（**本题满分 10 分**）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx, n=0,1,2\cdots$，（I）求 I_n；（II）求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)I_n$ 的和.

（19）（**本题满分 10 分**）设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$a\in(0,1)$，且 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的平均值等于在 $[a,1]$ 上以 $f(a)$ 为高的矩形面积．试证明：（Ⅰ）存在点 $\xi\in(0,a)$ 内使得 $f(\xi)=f(a)(1-a)$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-a)f'(\eta)=-af(a)$.

（20）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关，后 $n-1$ 个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，(I)证明：方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多个解；(II)若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n=1$.

（21）（**本题满分 11 分**）已知 3 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 3，且齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1=(1,0,-2)^T,\alpha_2=(2,1,0)^T$，（I）证明:A 能与对角阵相似；（II）求 A 及 A^{1000}.

（22）（**本题满分 11 分**）设 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<y<1, y<x<2-y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：(I) 边缘密度函数 $f_X(x)$、$f_Y(y)$；(II) X 与 Y 的独立性与相关性；（III）$Z=X+Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)$.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}a\theta x^{a-1}e^{-\theta x^a}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，若 $\theta>0$ 为未知参数，a 是已知常数，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，(I) 求参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$，(II) 在 $a=1$ 时，求数学期望 $E(\hat{\theta}^{-1})$.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合要求, 把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数， $f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=1$，则有（　　）.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极小值　　(D) 不能判别 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值

（2）下列广义积分收敛的是（　　）.

（A）$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}dx$　　（B）$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}dx$

（C）$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx$　　（D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\tan x}dx$

（3）设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$， $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　　）

（A） $x_1>x_2$， $y_1<y_2$.　　（B） $x_1<x_2$， $y_1<y_2$.

（C） $x_1>x_2$， $y_1>y_2$.　　（D） $x_1<x_2$， $y_1>y_2$.

（4）设平面区域 $D:x^2+y^2\le 1$，记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2 \sin y^2 d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma,$$

则有（　　）.

（A） $I_1>I_2>I_3$　（B） $I_2>I_1>I_3$　（C） $I_1>I_3>I_2$　（D） $I_2>I_3>I_1$

（5）$|A_n|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于（　　）.

(A) $-n$　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

（6）二次型 $x^T Ax=\left(x_1+2x_2+a_3x_3\right)\left(x_1+5x_2+b_3x_3\right)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是

（A） $p=2,q=1$　　（B） $p=2,q=0$

（C） $p=1,q=1$　　（D）与 a_3,b_3 有关，不能确定。

（7）设 X 与 Y 相互独立，X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \dfrac{2}{3}, & 1\le x<2\\ 1, & x>2\end{cases}$，且 $Y\sim U(-1,2)$（均匀分布），则概率 $P\{XY>1\}=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\dfrac{1}{3}$　（C）$\dfrac{1}{18}$　（D）$\dfrac{7}{18}$

（8）设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu_1,\mu_2;\frac{1}{4},\frac{1}{4};\frac{1}{2})$，则 $\mathrm{Cov}\left(X+1,\dfrac{5-Y}{3}\right)=$（　　）.

（A）$-\dfrac{1}{24}$　（B）$-\dfrac{1}{12}$　（C）$\dfrac{1}{24}$　（D）$\dfrac{1}{2}$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $\begin{cases}x=\arctan t-t,\\ y=\displaystyle\int_1^t \frac{e^{-t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$__________.

（10）设 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nf(n)+nf(n-2)\right)^{\frac{n}{2}}=$__________.

（11）设 $u=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=$__________.

（12）设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在点 $x=3$ 处绝对收敛，设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n 2^n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 的收敛域为__________.

（13）设 A 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量，a,b,c 是数，已知 $|\boldsymbol{A}|=a$，$\begin{vmatrix}A & \alpha\\ \beta^T & b\end{vmatrix}=0$，则 $\begin{vmatrix}A & \alpha\\ \beta^T & c\end{vmatrix}=$__________.

（14）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=Ae^{-x^2+2x}$ 函数，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为的 X 简单随机样本，样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则方差 $D(\bar{X})=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $1<a<b$，直线 $y=px+q$ 是曲线 $y=\ln x$ 在某点的切线，求使得积分 $\int_a^b(px+q-\ln x)\,\mathrm{d}x$ 取得最小值的 p,q 值.

（16）（**本题满分 10 分**）设某商品的需求函数为$Q(p)$ 其中 p 为商品的价格，若需求价格弹性$\eta=-2p$，且市场的最大需求量为Q_0，试求：(I）需求函数$Q(p)$；(II）价格为多少时，该商品的收益达到最大（商品处在卖方市场）.

（17）（**本题满分 10 分**）设 $f(t)=\iint\limits_D |xy-t|dxdy, t\in[0,1]$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。(I）求 $f(t)$的初等函数表达式；(II）证明：存在$t_0\in[0,1]$，使得 $f(t_0)$是 $f(t)$在$(0,1)$内唯一的最小点.

（18）（**本题满分 10 分**）将函数 $f(x)=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$ 展开成x的幂级数，且求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}$的和.

（19）（**本题满分 10 分**）设偶函数 $f(x)$ 在$[-1,1]$上二阶可导，且 $f(-1)f(0)>0, f(0)f(\frac{1}{2})<0$，证明：（Ⅰ）存在$\xi\in(0,1)$使得 $f'(\xi)=0$；（Ⅱ）存在$\eta\in(0,1)$使得 $f''(\eta)=2\eta f'(\eta)$.

（20）（**本题满分 11 分**）设A为三阶矩阵，α_1，α_2，α_3是三维线性无关的特征向量组,且 $A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4a_3$.（Ⅰ)求矩阵$A$的特征值；（Ⅱ)求可逆$Q$,使得$Q^{-1}AQ$为对角阵.

（21）（**本题满分 11 分**）设$A_{m\times n}$为实矩阵，A^T是A的转置矩阵，证明：
（Ⅰ）$Ax=0$与$A^TAx=0$同解；（Ⅱ）$A^{\mathrm{T}}Ax=A^Tb$　（其中b为任意n维列向量）恒有解.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量U,V,W相互独立，且均服从$N(\mu,\frac{1}{2})$，令随机变量 $X=U-V, Y=V-W$，试求：(I）求X,Y的相关性；(II）求X,Y的概率密度函数与(X,Y)的联合概率密度函数；(III）X与U的独立性，给出理由.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体X的分布函数为$F(x;\ \theta)=\begin{cases} A(\theta^x-1), & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，$X_1,\ldots,X_n$为$X$的简单随机样本，(I)确定常数$A$与概率密度函数$f(x;\theta)$；(II)求参数$\theta$的最大似然估计$\hat{\theta}$；(III)考察$[\ln\hat{\theta}]^{-1}$是否为$[\ln\theta]^{-1}$的无偏性；(III）求数学期望$E[\ln\hat{\theta}]^{-1}$.