绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)$ 为奇函数，$f'(0)=1$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$，则（ ）.

（A） $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点　　（B） $x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点

（C） $x=0$ 是 $g(x)$ 的无穷间断点　　（D） $x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类但非无穷间断点

(2) 设 $a_n=\cos n\pi\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则级数（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛。　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散。

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散。　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+f(x)+e^{x^2}]}{2x^2}=1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）不可导点　　（B）可导点但不是驻点

（C）驻点且为极小值点　　（D）驻点且为极大值点

(4) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成　（　　　）

A $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　B $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C $I=\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$　　D $I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

(5) $|A_{n\times n}|=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-1\\-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于(　　)

(A) –n　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是

20、21全程考研资料请加群712760929

（A）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（7） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布为 $X \sim P\{X=i\}=\frac{1}{2},(i=0,1)$； X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y\le 1\}=$（　　　）

（A） $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ （B） $1-\frac{1}{2}e^{-1}$ （C） $1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$ （D） $1-e^{-1}$

（8） 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，且对常数 $a>0$，且满足： $E(X^2e^{-aX})=P\{X>1\}$，则 $a=$（　　　）

（A） $\sqrt[3]{2e}-1$ （B） $\frac{1}{2}\sqrt[3]{e}$ （C） $\sqrt{2e}-1$ （D） $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9） 设曲线的方程为 $\begin{cases} x=\arctan 2t, \\ y-1+e^{y-1}=\ln(e+t), \end{cases}$ 则该曲线在 $x=0$ 处的切线方程是____________。

(10) 已知 $f(x)$ 满足 $xf(x)=1+\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ ________________

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$，且对任给的 $x\in(0,2)$ 以及 $x+\Delta x\in(0,2)$，均有 $f(x+\Delta x)-f(x)$ $=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$_______________。

(12) 设 f,g 均可微， $z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_________。

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$（　　）.

（14） 设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases} Axe^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，且 $X_1,\ldots,X_n$ 为简单随机样本则则参数 λ 的矩估计为________________

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$，求 $f''(0)$ 的值。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）假设生产某种产品需要 A,B,C 三种原料，该产品的产量 q 与三种原料 A,B,C 的用量 x,y,z 之间有如下关系：$q=0.0005x^2yz$，已知三种原料价格分别为 1 元、2 元、3 元，现用 2400 元购买原料，问三种原料各购进多少，可以使该产品产量最大?

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(x^2y^2-2)e^{xy}$，其中 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时，具有二阶连续导数，试求 $f(xy)$ 的表达式.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $\iint\limits_D [\left|x^2+y^2-2\right|+e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(xy)]dxdy$，其中 D 是以 $A(-3,0),B(3,0),C(0,3)$ 为顶点的三角形区域。

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组

$$①\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases} \quad 和 \quad ②\begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值，并求满足 $x_1=x_2$ 的解.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$ 为 3 维到向量。A 为 3 阶方阵。且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1\neq 0$

（I）证明：$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ 线性无关；（II）求 A 特征值 及 特征向量。

得分	评卷人

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le y<x\le 1\\0, & 其他\end{cases}$$，试求：

（I）概率 $P\{X+Y>1\}$；（II）条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；（III）随机变量函数 $Z=2X-Y$ 的密度函数。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim E(\lambda), Y \sim E(2\lambda)$，且 $Z = X - Y$，试求：（1）Z 的概率密度函数 $f_Z(z,\lambda)$；（II）对 Z 的正样本 $Z_1,\ldots,Z_n$（$Z_i > 0$），求参数 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}$；（III）$E(Z^2)$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ 的可去间断点个数为（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ 当 $|x-n\pi|<\dfrac{\pi}{4}$ 时 （ ）

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性不定

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}=$（ ）。

（A）$\dfrac{1}{2}\ln 2$ （B）$\ln 2$ （C）$\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{8}$

(4) 设平面区域 D 由 $x=0,x=1,x-y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x-y=1$ 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^3(x-y)\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x-y)\,\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_D(x-y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（ ）。

（A）$I_1<I_2<I_3$ （B）$I_3<I_2<I_1$ （C）$I_2<I_1<I_3$ （D）$I_3<I_1<I_2$

(5) 已知 5×4 矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，若 $\eta_1=\begin{pmatrix}3&1&-2&1\end{pmatrix}^T$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0&1&0&1\end{pmatrix}^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关； （2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出； （3）α_3,α_4 线性无关；

（4）秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4\right)=3$ 中正确的是（ ）

（A） （1）（3）； （B） （2）（4）； （C） （2）（3）； （D） （1）（4）

(6) 对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行，然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$，且 $|A|>0$，则 A 等于( )

(A) $-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ (B) $-\begin{pmatrix}&&1\\&1&-2\\1&&\end{pmatrix}$

(C) $-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}&&1\\-2&1&\\1&&\end{pmatrix}$

（7）设 A与B 是两事件，且 $P(B)=0.6,P(A|B)=0.5,$ 则 $P(A\cup\bar{B})=$（ ）

（A） 0.1 （B）0.7 （C） 0.3 （D） 0.5

（8）、设 X 与 Y 是两个随机变量，$f_1(x)$、$f_2(y)$ 与 $F_1(x)$、$F_2(y)$ 分别是对应的概率密度函数与分布函数，且 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 连续，则以下（　　　）仍是概率密度函数。

（A）$f_1(x)+f_2(y)$　　　　（B）$f_1(x)F_2(x)-f_2(x)F_1(x)$

（C）$f_1(x)f_2(x)$　　　　（D）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{x^2}{2n}+\dfrac{x}{n^2})^n$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

(10) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解是______________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导，$f(0)=1$，f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{x^2}^{x^2+f(x)} f^{-1}(t-x^2)\,\mathrm{d}t=x^2e^x$，则 $f(x)=$__________。

(12) 设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\,\mathrm{d}\sigma=$_______..

(13) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$_______.

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ 是 X 的简单随机样本，且 $\overline{X}$ 与 S^2 分别是样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的样本均值与样本方差，对统计量：$\theta=C\dfrac{(\overline{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，则常数 $C=$______________.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，若 $x\to 0$ 时 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\sim x^k-\sin x$，求常数 k 的值及 $f''(0)$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 $D:|x|+|y|\le 1$ 上的最大值与最小值。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ D 为全平面，求二重积分 $\iint\limits_D f(x^2-y)f(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $f(x)=x\arctan x$ 的麦克劳林级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)3^n}$ 的和

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是其导出组的基础解系，令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_t$

试证：（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 线性无关；

（Ⅱ）方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任意一解 r 均可表示为 $\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，其中

$$l_0+l_1+\cdots+l_t=1.$$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（I） 求参数 a； (II) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U[0,1]$, Y 服从参数为 1 的指数分布，（I）求 $Z=2X+Y$ 的密度函数；（II）求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$；（III）判断 X 与 Z 是否独立。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）求 $E(X^2)$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线有（　　）。

（A）1条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

(2) 设 $f(x), f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的解是(　　)

（A） $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}$；　　（B） $y=f(x)+1+ce^{-f(x)}$；

（C） $y=f(x)-c+ce^{-f(x)}$；　　（D） $y=f(x)+ce^{-f(x)}$

(3) 设 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, $h(x)=cx^k$，若 $x\to 0$ 时 $g(x)\sim h(x)$，则（ ）.

（A） $c=\dfrac{1}{2},k=2$　（B） $c=\dfrac{1}{3},k=2$　（C） $c=\dfrac{1}{3},k=3$　（D） $c=\dfrac{1}{6},k=3$

(4) 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x'(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y'(x,x^2)=$ （　　）

(A) $x+x^3$　　(B) $2x^2+2x^4$　　(C) x^2+x^5　　(D) $2x+2x^2$

(5) 设 A,B,C 是 n 阶矩阵，并满足 ABAC=E,则下列结论中不正确的是

（A） $A^TB^TA^TC^T=E.$　　(B) $BAC=CAB$

(C) $BA^2C=E$　　(D) $ACAB=CABA$

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是(　)

(A) 若 $AB=O$, 则 $B=O$　　(B) 对任意矩阵 B, 有 $r(AB)=r(B)$

(C) 存在 B, 使得 $BA=E$　　(D) 对任意矩阵 B, 有 $r(BA)=r(B)$

（7）设随机变量 $X\sim E(1)$, 记 $Y=\max\{X,1\}$，则 $E(Y)=$（　　　）.

(A) 1　　(B) $1+e^{-1}$　　(C) $1-e^{-1}$　　(D) e^{-1}

（8）、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，对统计量 $Y=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，若要使 $E(Y)=\sigma^2$，则应选 k 为（　　　）.

(A) $\dfrac{1}{n-1}$　　(B) $\dfrac{1}{n}$　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　(D) $\dfrac{1}{2n}$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$____________。

（10） 已知方程 $y''-y=0$ 的积分曲线在点 $O(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切，则该积分曲线的方程为________________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(1)=1$，且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

(12) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{3}y}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x=$__________.

(13) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为____________.

(14) 设随机变量 X 服从 $[-1,2]$ 上的均匀分布，则随机变量的函数 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$________________。

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$。（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）求二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}d\sigma$，其中：积分区域 $D=\{(x,y)\mid y=x^2+1, x=0, x=1, y=0$ 围成$\}$

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）求椭圆 $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）已知函数 $y=y(x)$ 满足等式 $y'=x+y$，且 $y(0)=1$，试讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

的收敛性.

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）（**本题满分 11 分**）已知齐次方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+x_2\quad+x_4=0\\ ax_1+\quad a^2x_3\quad=0\\ ax_2+\quad a^2x_4=0\end{cases}$ 的解全是 4 元方程（Ⅱ）$x_1+x_2+x_3=0$ 的解。(1) 求 a；　(2) 求齐次方程组（Ⅰ）的解。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$,其中 b 为非零的实数（I）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（II）求出该二次型正定的充要条件。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}Ae^{-ax+b}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中 b 是任意常数，若 $E(X)=2$， 且 $Y=\begin{cases}4, & X\le 1\\ 2X, & 1<X<2\\ 2, & X\ge 2\end{cases}$，试求：（I）常数 A 与 a；（II）概率 $P\{Y>3\}$；（III）Y 的分布函数。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X\sim U(\alpha,\alpha+\beta)\ \ (\beta>0)$，$X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 α、β 的矩估计；（II）α、β 的极大似然估计.

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 4）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题，每小题 4 分，共 32 分.
在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 不可导点个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

(2) 微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）$(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$　　（B）$(Ax^2+Bx)\cos 2x$

（C）$A\cos 2x+B\sin 2x$　　（D）$(Ax+B)\cos 2x$

(3) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I_1<1<I_2$　　（B）$1<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<1$　　（D）$I_2<1<I_1$

(4) 设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列判断不正确的是（　　）

（A）$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$　　（B）$f(0,0)=0$

（C）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　　（D）$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微

(5) $a=-5$ 是齐次方程组 $\begin{cases}3x_1+(a+2)x_2+4x_3=0\\ 5x_1+ax_2+(a+5)x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ 有非零解的（　）

(A)充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件
(C)必要而非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

（7）设随机变量 X 与 Y 具有相同分布：$P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，且 $D(X-Y)=2$，则 $E(XY)=$（　　）

（A） 0　　（B）1　　（C） 2　　（D） 3

（8）设随机变量 X 服从标准正态分布，且 $Y=X^2$，则 X 与 Y（　　）

（A）相互独立且相关　　（B）相互独立且不相关
（C）不独立且相关　　（D）不独立但不相关

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ________。

(10) 微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解为 ________。

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$ ________。

(12) 设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g(xf(x+y,2y))$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

(13) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}=$ ________.

（14）设总体 $X\sim N(\mu,0.5)$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$，是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 是样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的样本均值，若要至少使得 99.7%的概率保证 $\left|\bar{X}-\mu\right|<0.1$，则样本容量 $n=$ ________

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且满足

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x,$$ 求 $f(x)$ 的表达式.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}dxdy$，其中

$D=\{(x,y)|1\le x+y\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\neq 0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数。

（I）求 A。 （II）求 A^{100} 。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+ax_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. （Ⅰ）求常数 a；（Ⅱ）用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求： （I） 常数 A；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$； （III）条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$；

（IV）概率 $P\{Y\le X\}$；概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的均值与方差分别是 $E(X)=\mu$、$D(X)=\sigma^2$，从 X 中分别抽取二组相互独立且容量为 n_1、n_2 的简单随机样本，样本均值分别 $\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$，若常数 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 时，（I）求证：对 $T=\lambda_1\overline{X}_1+\lambda_2\overline{X}_2$ 有是 $E(T)=\mu$；（II）且确定 λ_1、λ_2 多少时，方差 $D(T)$ 达到最小.

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(B) 若 $A\geq 0$,则 $\exists M\geq 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\geq 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

(2) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$.　　（B）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$.

（C）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$.　　（D）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$.

(3) 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且满足 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$，则（　　）

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序得（其中 $f(x,y)$ 连续）（　　）

A $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　B $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

C $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　D $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

(5) 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$, 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相等的解, 则 $Ax=0$ 的基础解系为（　　）。

（A）$\xi_1-\xi_3$　　(B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

(6) 二次型 $x^TAx=(x_1+2x_2+a_3x_3)(x_1+5x_2+b_3x_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是

(A) $p=2,q=1$　　(B) $p=2,q=0$

(C) $p=1,q=1$　　(D) 与 a_3,b_3 有关，不能确定。

(7) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度函数为（　　）

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$　　(D) $f_1(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

（8）设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　　）

(A) $\rho=0$　　(B) $\rho=1$　　(C) $\rho<0$　　(D) $\rho>0$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$______________。

(10) 以 $y_1=e^{2x}$，$y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为:_____________.

(11) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}x=$______________________。

(12) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=3^t-2$ 满足条件 $y_0=\dfrac{5}{2}$ 的特解为____________________.

(13) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$________.

（14）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E[(\overline{X}+S^2)^2]=$____________________ .

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）过点 $(1,5)$ 作曲线 $C: y=x^3$ 的切线，设切线为 l。（Ⅰ）求 l 的方程；（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积；（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(x^2y^2-2)e^{xy}$，其中 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时，具有二阶连续导数，求 $f(xy)$.

（17）

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）已知某制造商的生产量函数为 $f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$（$\alpha$ 与 β 是常数，对应比例为 $3:2$），其中 x 代表劳动力的数量，y 为资本数量，每个劳动力与每单位资本的成本分别是 150 元和 200 元，经过对市场的测算总预算是 10000 元，试求：（I）如何分配这笔钱用于雇佣劳动力和资本，以使生产量最高；（II）最大生产量是多少。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $a>1,b>0$，讨论方程 $\log_a^x = x^b$ 有实根时，a,b 所满足的条件。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (x\in R)$，满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n = e^x$$，求 $f(x)$ 及 a_n

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.（Ⅰ）求行列式 $\left|A^*-2A^{-1}\right|$;（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)$ 的前 n-1 个列向量线性相关，后 n-1 个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（I）证明：方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多个解；（II）若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n=1$。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设口袋中有红球 2 个白球 1 个黑球 2 个，连续取 2 个球(每次取一个不返回)，令 X、Y、Z 分别表示其中红球、白球与黑球的个数，试求：

（I）概率 $P\{Y=1/X=0\}$；（II）(X,Y) 的联合分布律；（III）$Z=X+2Y$ 分布律；（VI) 协方差 $Cov(X+2Y,X)$。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{2n}(n\geq 2)$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ 及统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$，（I）求统计量 Y 的数学期望 $E(Y)$；（II）$\mu=0$ 时，求 $D(\bar{X}^2)$。