

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 (模拟四) 试题答案和评分参考

一、选择题

(1) 答案: 选 (D).

解

$$f(x) = \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} x}{|x|(x+2)(x-1)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} x}{x(x+2)(x-1)} = \frac{\sin 1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x-1} = -\frac{\pi}{6} \sin 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} x}{x(x+2)(x-1)} = -\frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} x}{-x(x+2)(x-1)} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin x \cos \frac{\pi}{2} x}{-x(x+2)(x-1)} = \infty.$$

由此知应选 (D).

(2) 答案: 选 (B).

解 令 $f(x) = \int_{-1}^x te^{\cos t} dt$, 显然 $f(-1) = 0$, 故 $x = -1$ 为一个实根.

又因为 $te^{\cos t}$ 是奇函数, 由积分的奇偶性可得 $f(1) = 0$, 故 $x = 1$ 也为一个实根.

由于 $f'(x) = xe^{\cos x}$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以方程 $\int_{-1}^x te^{\cos t} dt = 0$ 有 2 个实根.

(3) 答案: 选 (B).

解法 1 曲线的参数方程为: $x = t, y = 4, z = \frac{1}{4}(t^2 + 16)$, 在点 $(2, 4, 5)$ 处对应的参数值为 $t = 2$,

由于 $(x'_t, y'_t, z'_t) \Big|_{t=2} = (1, 0, 1)$, 又 x 轴的方向向量为 $(1, 0, 0)$, 故 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}$.

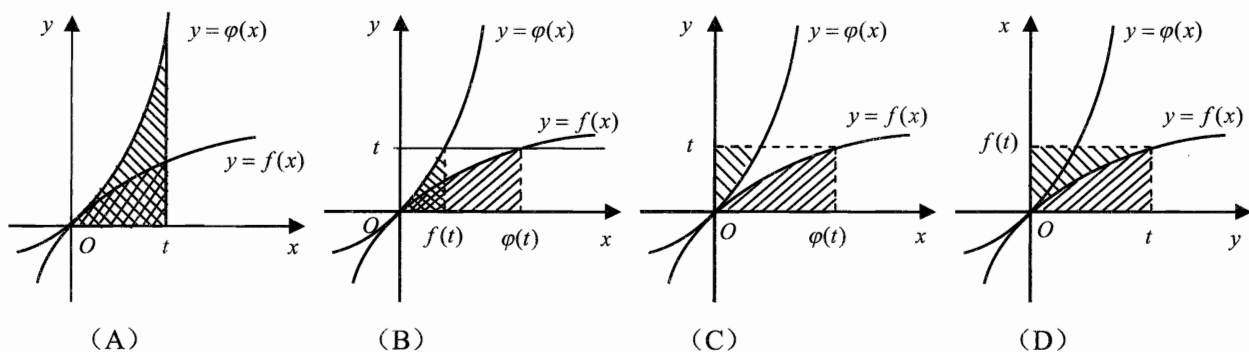
解法 2 在平面 $y = 4$ 上曲线方程为 $z = \frac{1}{4}(x^2 + 16)$, 由于 $\frac{dz}{dx} \Big|_{x=2} = \frac{x}{2} \Big|_{x=2} = 1$, 故由导数的几何意义知

曲线在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线的斜率为 1, 从而切线与轴正向所成的角为 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

(4) 答案: 选 (D).

解 各个积分所对应的面积如下:

超 越 考 研



(5) 答案: 选 (C).

解 因为 A 合同于 B , 所以存在可逆阵 P , 使得 $P^T A P = B$, 则有 $A = (P^T)^{-1} B P^{-1} = (P^{-1})^T B P^{-1}$, 故 $A^T = (P^{-1})^T B^T P^{-1} = (P^{-1})^T B P^{-1} = A$, 即 A 为对称阵, 故选 (C).

(6) 答案: 选 (C).

解 因为 $r(A) = m$, 所以 $Ax = 0$ 有 $n - m$ 个线性无关的解. $r(B) = n - m$ 表明 B 的列向量组为 $n - m$ 个线性无关的向量, 又 $AB = O$, 所以 B 的列向量组为 $Ax = 0$ 的基础解系. 由于 η 为 $Ax = 0$ 的解, 所以 η 由 B 的列向量组线性表示, 且表示式唯一, 故 $By = \eta$ 有唯一解.

(7) 答案: 选 (B).

解 $1 - P(B|\bar{A}) = P(\bar{B}|\bar{A})$, 所以 (A) 不正确.

$$1 - P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} \leq \frac{P(\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(B)}{P(\bar{A})}, \text{ 所以 (B) 正确.}$$

$$1 - P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} \geq 1 - \frac{P(B)}{P(\bar{A})}, \text{ 所以 (C) 不正确.}$$

$$1 - P(B|\bar{A}) = 1 - \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = 1 - \frac{P(B)P(\bar{A}|B)}{P(\bar{A})} \geq 1 - \frac{P(\bar{A}|B)}{P(\bar{A})}, \text{ 所以 (D) 不正确.}$$

(8) 答案: 选 (C).

解 由于 θ 为未知参数, 并非随机变量, 故②和④的说法不正确.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 答案: 填 “32”.

解 由题意知 $f(0) = 0$, 进而 $f(4) = 0$, $f(8) = 0$, 且 $f'(x)$ 仍是以 4 为周期的函数, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) + f(x^2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - f(8) + f(x^2) - f(4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^3) - f(8)}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^3 - 8}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= 12f'(8) + 4f'(4) = 16f'(0) = 32. \end{aligned}$$

超 越 考 研

(10) 答案: 填 “ $e^x \tan \frac{x}{2} + C$ ”.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= \int e^x \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int e^x d \tan \frac{x}{2} + \int \tan \frac{x}{2} de^x \\ &= e^x \tan \frac{x}{2} - \int \tan \frac{x}{2} de^x + \int \tan \frac{x}{2} de^x = e^x \tan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

(11) 答案: 填 “ $(x+m)(y+n)e^{x+y}$ ”.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = ye^{x+y} + xye^{x+y} = (x+1)ye^{x+y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ye^{x+y} + (x+1)ye^{x+y} = (x+2)ye^{x+y}, \dots,$$

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = (x+m)ye^{x+y}. \quad \text{同理知 } \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = (x+m)(y+n)e^{x+y}.$$

(12) 答案: 应填 “ $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2$ ”.

$$\text{解 由于 } ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2} dt = dt, \text{ 所以}$$

$$\begin{aligned} \int_L ye^{-x} ds &= \int_0^1 (2 \arctan t - t) e^{-\ln(1+t^2)} dt = \int_0^1 (2 \arctan t - t) \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= (\arctan t)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

(13) 答案: 填 “0, 0, 3”.

解 $\xi_1 = (-1, 2, -1)^T, \xi_2 = (0, -1, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解向量, 表明 ξ_1, ξ_2 是 A 的对应于特征值 $\lambda = 0$ 的两个线性无关特征向量, 所以 $\lambda = 0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 $\eta = (1, 1, 1)^T$ 是 $Ax = b$ 的特解, 即 $A\eta = (3, 3, 3)^T = 3\eta$, 故 A 的特征值为 0, 0, 3.

(14) 答案: 填 “ $1 + 2x - 3x^2$ ”.

解 由题意知, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, X_1, X_2, X_3 的分布函数均为 $F(x) = x$. 进而 $\max\{X_1, X_2\}$ 的分布函数为 $F^2(x) = x^2$, 所以 $X = \min\{\max\{X_1, X_2\}, X_3\}$ 的分布函数为

$$1 - [1 - F^2(x)][1 - F(x)] = 1 - (1 - x^2)(1 - x) = x + x^2 - x^3,$$

所以当 $0 \leq x \leq 1$ 时, X 的密度函数为 $f_X(x) = 1 + 2x - 3x^2$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

超 越 考 研

(15) 证 (I) 对任意的 $x \in [a, b]$, $f(x_0)$ 在点 x 处的一阶 Taylor 公式为

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_0 - x)^2.$$

由于 $\frac{1}{2}f''(\xi)(x_0 - x)^2 \leq 0$, 所以 $f(x_0) \leq f(x) + f'(x)(x_0 - x)$.

(II) 由 (I) 知, 对任意的 $t \in [a, b]$, $f(x_0) \leq f(t) + f'(t)(x_0 - t)$. 在该式两边积分, 有

$$\int_a^b f(x_0) dt \leq \int_a^b [f(t) + f'(t)(x_0 - t)] dt,$$

$$\begin{aligned} \text{得 } (b-a)f(x_0) &\leq \int_a^b f(t) dt + \int_a^b f'(t)(x_0 - t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b (x_0 - t) df(t) \\ &= \int_a^b f(t) dt + (x_0 - t)f(t) \Big|_a^b - \int_a^b f(t) d(x_0 - t) \\ &= 2 \int_a^b f(t) dt + f(b)(x_0 - b) - f(a)(x_0 - a). \end{aligned}$$

由题意知 $f(x) \geq 0$, 所以 $f(b)(x_0 - b) - f(a)(x_0 - a) = -[f(b)(b - x_0) + f(a)(x_0 - a)] \leq 0$, 故

$$(b-a)f(x_0) \leq 2 \int_a^b f(t) dt,$$

$$\text{即 } f(x_0) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

由于 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的最大值, 所以对任意的 $x \in [a, b]$, 有 $f(x) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

(16) 解 在曲面 $x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 上取一点 (x_0, y_0, z_0) , 过该点的切平面方程

$$\text{为: } 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + \frac{z_0}{2}(z - z_0) = 0;$$

$$\text{即 } x_0x + y_0y + \frac{z_0}{4}z = 1.$$

该切平面在三个坐标轴上的截距分别为 $\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_0}, \frac{4}{z_0}$. 令

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{16}{z_0^2},$$

原问题即求在限制条件 $x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4}z_0^2 = 1$ ($x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$) 下, $f(x_0, y_0, z_0)$ 取得最小值问题.

为此, 作拉格朗日函数:

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{y_0^2} + \frac{16}{z_0^2} + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + \frac{1}{4}z_0^2 - 1),$$

超 越 考 研

令 $L'_{x_0} = L'_{y_0} = L'_{z_0} = 0$, 得 $-\frac{2}{x_0^3} + 2\lambda x_0 = 0$, $-\frac{2}{y_0^3} + 2\lambda y_0 = 0$, $-\frac{32}{z_0^3} + \frac{\lambda}{2} z_0 = 0$,

及 $x_0^2 + y_0^2 + \frac{z_0^2}{4} - 1 = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \sqrt{2}$, $\lambda = 16$, 进而可得 $f_{\min} = 16$ 即为可求最小值.

(17) 解 $a_0 = \int_{-1}^1 (|x| + x) dx = 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 (|x| + x) \cos n\pi x dx = \int_{-1}^1 |x| \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d(\sin n\pi x) \\ &= \frac{2}{n\pi} [x \sin n\pi x]_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 (|x| + x) \sin n\pi x dx = \int_{-1}^1 x \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 x d(\cos n\pi x) = -\frac{2}{n\pi} [x \cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi}. \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

由于当 $x = -1$ 或 $x = 1$ 时, 级数收敛于 $\frac{0+2}{2} = 1$, 所以

$$|x| + x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1} 2}{n\pi} \sin n\pi x \right], \quad -1 < x < 1.$$

在上式中取 $x = 0$, 得 $0 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1)$, 即 $0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(18) 解 积分区域 Ω_t 与垂直于 z 轴的平面的交集在 xoy 平面上的投影为

$$D_t(z): \frac{x^2}{4(t^2 - z^2)} + \frac{y^2}{9(t^2 - z^2)} \leq 1, \quad -t < z < t.$$

$$\begin{aligned} F(t) &= -3 \iiint_{\Omega_t} z^2 dv + 2 \iiint_{\Omega_t} dv = -3 \int_{-t}^t z^2 dz \iint_{D_t(z)} dx dy + 2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2t \cdot 3t \cdot t \\ &= -3 \int_{-t}^t z^2 \cdot \pi \cdot 2\sqrt{t^2 - z^2} \cdot 3\sqrt{t^2 - z^2} dz + 16\pi t^3 \\ &= -18\pi \int_{-t}^t z^2 (t^2 - z^2) dz + 16\pi t^3 = -\frac{24}{5} \pi t^5 + 16\pi t^3 = 8\pi \left(-\frac{3}{5} t^5 + 2t^3 \right). \end{aligned}$$

$$F'(t) = 8\pi(-3t^4 + 6t^2), \quad F''(t) = 96\pi t(1 - t^2), \quad \text{令 } F''(t) = 0, \text{ 得 } t = 1, \text{ 且 } F(1) = \frac{56}{5} \pi.$$

当 $0 < t < 1$ 时, $F''(t) > 0$; 当 $t > 1$ 时, $F''(t) < 0$, 所以曲线 $u = F(t)$ 的凹区间为 $(0, 1)$, 凸区间为 $(1, +\infty)$,

拐点为 $(1, \frac{56}{5} \pi)$.

超 越 考 研

(19) 解 特征方程: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, 即 $(r-1)^3 = 0$, 解得 $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, 所以原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$.

又曲线 $y = y(x)$ 过点 $(0, 0)$, 所以 $y(0) = 0$. 且

$$(x-1) + (y-1)y' = 0, \quad 1 + (y')^2 + (y-1)y'' = 0,$$

进而得 $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$.

将 $y(0) = 0$ 代入 $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$ 得 $C_1 = 0$, 所以 $y = (C_2x + C_3x^2)e^x$.

$$y' = [C_2 + (C_2 + 2C_3)x + C_3x^2]e^x, \quad y'' = [2(C_2 + C_3) + (C_2 + 4C_3)x + C_3x^2]e^x,$$

代入 $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$ 得 $C_2 = -1$, $2(C_2 + C_3) = 2$, 解得 $C_2 = -1$, $C_3 = 2$, 所以

$$y(x) = x(2x-1)e^x.$$

(20) 解 设 x 为非零公共解, 则 $x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 = \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 \neq 0$, 由此可得齐次线性方程组

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 - \mu_1\beta_1 - \mu_2\beta_2 = 0, \quad \text{即} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

解此线性方程组知, 其基础解系只含一个解向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, 所以 $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, 即

$$\lambda_1 = 3k, \lambda_2 = -k, \mu_1 = k, \mu_2 = -4k,$$

所以 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的非零公共解为 $x = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 = 3k\alpha_1 - k\alpha_2 = k(5, -2, -3, -4)^T, k \neq 0$.

(21) 解 (I) 当 $a = 0$ 时, $|A - E| = |A - 2E| = |A + E| = 0$, 所以 A 的特征值为 $1, 2, -1$, $A + 3E$ 的特征值为 $4, 5, 2$, 因此 $|A + 3E| = 4 \cdot 5 \cdot 2 = 40$.

(II) 当 $a = 2$ 时, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则有
$$\begin{cases} (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1) = 2 \\ (\lambda_1 - 2)(\lambda_2 - 2)(\lambda_3 - 2) = 2, \text{ 展开后得} \\ (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_3 + 1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 3, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + 4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 10, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 1, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2. \end{cases}$$

超 越 考 研

$$\begin{aligned} \text{所以 } |A+3E| &= (\lambda_1+3)(\lambda_2+3)(\lambda_3+3) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) + 9(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 27 \\ &= 0 - 3 + 18 + 27 = 42. \end{aligned}$$

(22) 解 Y 的分布函数为 $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X_1 + \cdots + X_N \leq y\}$, 由全概率公式得

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{N=1, X_1 + \cdots + X_N \leq y\} + P\{N=2, X_1 + \cdots + X_N \leq y\} \\ &\quad + P\{N=3, X_1 + \cdots + X_N \leq y\} + P\{N=4, X_1 + \cdots + X_N \leq y\} \\ &= P\{N=1, X_1 \leq y\} + P\{N=2, X_1 + X_2 \leq y\} \\ &\quad + P\{N=3, X_1 + X_2 + X_3 \leq y\} + P\{N=4, X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq y\} \\ &= P\{N=1\}P\{X_1 \leq y\} + P\{N=2\}P\{X_1 + X_2 \leq y\} \\ &\quad + P\{N=3\}P\{X_1 + X_2 + X_3 \leq y\} + P\{N=4\}P\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq y\} \\ &= 0.1P\{X_1 \leq y\} + 0.2P\{X_1 + X_2 \leq y\} \\ &\quad + 0.3P\{X_1 + X_2 + X_3 \leq y\} + 0.4P\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq y\}. \end{aligned}$$

记 $X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ 的分布函数分别为 $F_1(y), F_2(y), F_3(y), F_4(y)$, 密度

分布函数分别为 $f_1(y), f_2(y), f_3(y), f_4(y)$, 则 $F_Y(y) = 0.1F_1(y) + 0.2F_2(y) + 0.3F_3(y) + 0.4F_4(y)$,

且 Y 的密度函数为 $f_Y(y) = 0.1f_1(y) + 0.2f_2(y) + 0.3f_3(y) + 0.4f_4(y)$. 因此 Y 的数学期望为

$$\begin{aligned} EY &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= 0.1 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_1(y) dy + 0.2 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y) dy + 0.3 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_3(y) dy + 0.4 \int_{-\infty}^{+\infty} y f_4(y) dy \\ &= 0.1E(X_1) + 0.2E(X_1 + X_2) + 0.3E(X_1 + X_2 + X_3) + 0.4E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= 0.1 \times \frac{1}{2} + 0.2 \times \frac{2}{2} + 0.3 \times \frac{3}{2} + 0.4 \times \frac{4}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(23) 解 设 $X = \begin{cases} 1, & \text{电子元件寿命不超过 } k \text{ 小时,} \\ 0, & \text{电子元件寿命超过 } k \text{ 小时,} \end{cases}$ 所以

$$P\{X=0\} = \int_k^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda k}, \quad P\{X=1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - e^{-\lambda k}.$$

所以总体 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{-\lambda k} & 1 - e^{-\lambda k} \end{pmatrix}$, 并且样本值为 m 个 1, $n-m$ 个 0.

(I) $\bar{x} = EX$, 即 $\frac{m}{n} = 1 - e^{-\lambda k}$, 得 λ 的矩估计值 $\hat{\lambda}_M = \frac{1}{k} \ln \frac{n}{n-m}$.

超 越 考 研

(II) 似然函数为 $L(\lambda) = (e^{-\lambda k})^{n-m} (1 - e^{-\lambda k})^m = e^{-\lambda k(n-m)} (1 - e^{-\lambda k})^m$,

$$\ln L(\lambda) = -\lambda k(n-m) + m \ln(1 - e^{-\lambda k}),$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = -k(n-m) + m \frac{k e^{-\lambda k}}{1 - e^{-\lambda k}} = 0,$$

解得 λ 的极大似然估计值 $\hat{\lambda}_L = -\frac{1}{k} \ln \frac{n-m}{n}$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 (模拟五) 试题答案和评分参考

一、选择题

(1) 答案: 选 (D).

$$\text{解 } F(x) \stackrel{u=x-t}{=} \int_0^x (x-u)^2 f(u) du = x^2 \int_0^x f(u) du - 2x \int_0^x u f(u) du + \int_0^x u^2 f(u) du,$$

$$\text{故 } F'(x) = 2x \int_0^x f(u) du - 2 \int_0^x u f(u) du, \quad F''(x) = 2 \int_0^x f(u) du, \quad F'''(x) = 2f(x).$$

由题意知, $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0, F'''(x) > 0$. ④ 正确.当 $x > 0$ 时, $F''(x)$ 单增, $F''(x) > F''(0) = 0$; $F'(x)$ 单增, $F'(x) > F'(0) = 0$; $F(x)$ 单增.当 $x < 0$ 时, $F''(x)$ 单增, $F''(x) < F''(0) = 0$; $F'(x)$ 单减, $F'(x) > F'(0) = 0$; $F(x)$ 单增.另外, $f(x)$ 为偶函数, 故 $F(x)$ 为奇函数. 进而知①②③都正确.

(2) 答案: 选 (A).

解 将 $f(x)$ 奇延拓成 $[-4, 4]$ 上的函数 $F(x)$, 再将 $F(x)$ 以 8 为周期作周期延拓, 将 $F(x)$ 展开成 Fourier 级数, 即将 $f(x)$ 展开成正弦级数, 由 Dirichlet 收敛定理知

$$S(2) = \frac{1}{2}[F(2+0) + F(2-0)] = \frac{1}{2}[f(2+0) + f(2-0)] = \frac{1}{2}(0+4) = 2,$$

$$S(-9) = S(-1) = F(-1) = -F(1) = -f(1) = -3,$$

所以 $S(2) + S(-9) = -1$.

(3) 答案: 选 (B).

$$\text{解 } I_1 \stackrel{x^2=t}{=} \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt,$$

$$\text{而 } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt \stackrel{t=\pi-u}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos u}{\sqrt{\pi-u}} du = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\pi-t}} dt,$$

$$\text{故 } I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{\pi-t}} \right) dt. \text{ 当 } 0 < t \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{\pi-t}}, \text{ 所以 } I_1 > 0.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{x} \cos x dx,$$

$$\text{而 } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sqrt{x} \cos x dx \stackrel{x=\pi-t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\pi-t} \cos t dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi-x} \cos x dx,$$

$$\text{故 } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sqrt{x} - \sqrt{\pi-x}) dx. \text{ 当 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 时, } \sqrt{x} \leq \sqrt{\pi-x}, \text{ 所以 } I_2 < 0.$$

超 越 考 研

(4) 答案: 选 (D).

解 由于 $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 均发散, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 均收敛, 故 $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 发散;

$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ 收敛.

(5) 答案: 选 (D).

解 由 $AB = 2A + 3B$ 得 $(A - 3E)(B - 2E) = 6E$, 所以 $A - 3E$ 和 $B - 2E$ 都可逆, 故选 (D).

(6) 答案: 选 (C).

解 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, 显然 $|A| = 0$. 因为 $A \neq O$, 不妨设 $a \neq 0$, 从而 $\begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2 \neq 0$, 故

$r(A) = 2$, 所以 $r(A^*) = 1$.

(7) 答案: 选 (B).

解 ①和③正确.

由于 $-|X| \leq X \leq |X|$, 所以 $-E|X| \leq EX \leq E|X|$, 即 $|EX| \leq E|X|$.

又 $D|X| = E(|X|^2) - (E|X|)^2 = E(X^2) - (E|X|)^2 \geq 0$, 所以 $E|X| \leq \sqrt{E(X^2)}$, 故①正确.

将 $E|X| \leq \sqrt{E(X^2)}$ 中的 X 换成 $X - EX$, 则有 $E|X - EX| \leq \sqrt{E(X - EX)^2} = \sqrt{DX}$.

另外, $DX = E(X^2) - (EX)^2 \leq E(X^2)$, 故③正确.

(8) 答案: 选 (A).

解 由题意知, 所建立的假设为 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.

根据假设检验的思想知, 当 H_0 成立, 即生产线实际工作正常时, 构造统计量

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1) \text{ 或 } g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n).$$

再由 $\alpha = 0.05$, 确定 H_0 的拒绝域 W , 此时检验结果认为生产线工作正常的概率为

$$P\{g(X_1, X_2, \dots, X_n) \notin W\} = 1 - \alpha = 0.95.$$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 答案: 填 “-z”.

解 在方程两边分别对 x 和 y 求偏导, 则

$$z + x \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' \cdot z + \varphi' \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

超 越 考 研

解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{y\varphi' - x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z\varphi'}{x - y\varphi'}$, 所以 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -z$.

(10) 答案: 填 “ $y(x) = \begin{cases} x-1+(e+C\sqrt{e})e^{-x}, & x \leq 1, \\ 1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 1. \end{cases}$ ”

解 当 $x \leq 1$ 时, 微分方程为 $y' + y = x$, 其通解为 $y = x - 1 + C_1 e^{-x}$;

当 $x > 1$ 时, 微分方程为 $y' + xy = x$, 其通解为通解 $y = 1 + C_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$. 又因为 $y(x)$ 可导, 故

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1 + C_1 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + C_2 e^{-\frac{x^2}{2}})$, 得 $C_1 = e + C_2 \sqrt{e}$. 记 $C = C_2$, 所以通解为

$$y(x) = \begin{cases} x - 1 + (e + C\sqrt{e})e^{-x}, & x \leq 1, \\ 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 1. \end{cases}$$

(11) 答案: 填 “ $2\sqrt{17}$ ”.

解 记 $P = 2x + \lambda xy$, $Q = x^2 - 2y$. 因为 $\{2x + \lambda xy, x^2 - 2y\}$ 为 $f(x, y)$ 的梯度, 所以 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 即

$2x = \lambda x$, 故 $\lambda = 2$.

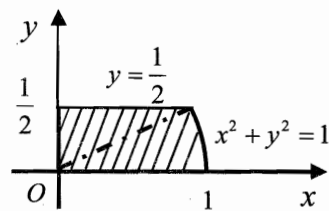
又 $|\text{grad } f| = \sqrt{(2x + 2xy)^2 + (x^2 - 2y)^2}$, 所以最大方向导数为 $|\text{grad } f|_{(2,1)} = 2\sqrt{17}$.

(12) 答案: 填 “ $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ 或 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ ”.

解 如图所示, 得

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx,$$

$$\text{或 } \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y) dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$



(13) 答案: 填 “ $\frac{8}{3}$ ”.

解 由 $A^2 - 3A + 2E = O$ 知, A 的特征值只能为 1 或 2. 又因为 A 相似于 B , 且 $|B| = 2$, 可得 A 的三个特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 因此 $A + E$ 的特征值为 2, 2, 3, 于是

$$|A + E| = 12, \quad |2B^*| = 2^3 |B^*| = 2^3 |B|^2 = 32,$$

故
$$\begin{vmatrix} (A+E)^{-1} & O \\ O & 2B^* \end{vmatrix} = |A+E|^{-1} |2B^*| = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}.$$

超 越 考 研

(14) 答案: 填 “0.818”.

解 由泊松分布的可加性知 X 可表示为 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$, 其中 $X_i \sim P(1)$, $i = 1, 2, \cdots, 100$, 且 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立. 由中心极限定理, $X \stackrel{\text{近似}}{\sim} N(100, 100)$, 所以

$$\begin{aligned} P\{80 < X < 110\} &= P\{-2 < \frac{X-100}{10} < 1\} = \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 = 0.841 + 0.977 - 1 = 0.818. \end{aligned}$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 证 (I) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$,

$$y'(x) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.$$

因此

$$\begin{aligned} (1+2x)y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} + 2n(n+1) a_{n+1}] x^n. \end{aligned}$$

由 $a_{n+1} = \frac{1-2n}{1+n} a_n$ 知 $a_{n+2} = \frac{-2n-1}{n+2} a_{n+1} = -\frac{2n+1}{n+2} a_{n+1}$, 所以

$$(n+1)(n+2) a_{n+2} + 2n(n+1) a_{n+1} = -(n+1)(2n+1) a_{n+1} + 2n(n+1) a_{n+1} = -(n+1) a_{n+1},$$

于是有 $(1+2x)y'' = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = -y'$, 因此 $(1+2x)y'' + y' = 0$.

(II) 由 (I) 知 $(1+2x)y'' + y' = 0$, 且 $y(0) = a_0 = 1$, $y'(0) = a_1 = 1$.

令 $y' = p$, 则 $(1+2x) \frac{dp}{dx} + p = 0$, 由此解得 $p = \frac{C_1}{\sqrt{1+2x}}$, 即 $y' = \frac{C_1}{\sqrt{1+2x}}$.

由 $y'(0) = 1$ 知 $C_1 = 1$, 故 $y' = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, 再解得 $y = \sqrt{1+2x} + C_2$, 由 $y(0) = 1$, 知 $C_2 = 0$, 因此

$$y = \sqrt{1+2x}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

(16) 解法 1 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 知 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, 解得 $\frac{\partial u}{\partial x} = C_1(x) e^{-y}$.

超 越 考 研

由于 $u(x, 0) = \sin x$, 得 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{y=0} = \cos x$, 所以 $C_1(x) = \cos x$. 进而 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \cos x$.

两边对 x 积分得 $u = e^{-y} \sin x + C_2(y)$.

由 $u(0, y) = \ln(1+y)$ 得 $C_2(y) = \ln(1+y)$, 所以 $u = u(x, y) = e^{-y} \sin x + \ln(1+y)$.

解法 2 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 知 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + u \right) = 0$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial y} + u = \varphi(y)$, 其中 $\varphi(y)$ 为 y 的函数. 又

$$e^y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + u \right) = e^y \varphi(y), \text{ 即 } \frac{\partial}{\partial y} (e^y u) = e^y \varphi(y),$$

故 $e^y u = \int e^y \varphi(y) dy + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 为 x 的函数, 所以 $u = e^{-y} \int e^y \varphi(y) dy + e^{-y} \psi(x)$.

令 $e^{-y} \int e^y \varphi(y) dy = f(y)$, 则 $u = f(y) + e^{-y} \psi(x)$, 由题设知

$$u(0, y) = f(y) + e^{-y} \psi(0) = \ln(1+y),$$

故

$$f(y) = \ln(1+y) - e^{-y} \psi(0) \quad (1)$$

又 $u(x, 0) = f(0) + \psi(x) = \sin x$, 所以 $\psi(x) = \sin x - f(0)$, 从而

$$u(x, y) = \ln(1+y) + e^{-y} \sin x - e^{-y} [\psi(0) + f(0)].$$

在(1)中令 $y=0$ 得 $\psi(0) + f(0) = 0$, 因此 $u(x, y) = \ln(1+y) + e^{-y} \sin x$.

(17) 证 由 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} - x_n \right) > 0$, 所以数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 下面证明数列 $\{x_n\}$ 有上界.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) > 1,$$

设 $x_n > 1 (n \geq 2)$, 则

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} \right) > \frac{1}{2} (1 + 1) = 1,$$

故由归纳法原理知, 对任意自然数 n , $x_n > 1 (n=1, 2, \dots)$. 因此

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_n^2 + \frac{1}{n^2}} + x_n} < \frac{1}{4n^2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

从而有 $x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) < x_1 + \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right]$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以数列 $\{x_n\}$ 有上界, 由于单调有界数列必有极限, 故 $\{x_n\}$ 收敛.

(18) 解 (I) 由题意知, 当 $x \neq k$ 时, $f(x)$ 可导, 且 $f(k) = 0, k=1, 2, \dots$.

对于给定的正整数 k ,

超 越 考 研

当 $k-1 \leq x < k$ 时, $f(x) = a_{k-1}f(x-k+1) = a_{k-1}(k-x)\ln(2+x-k)$;

当 $k \leq x < k+1$ 时, $f(x) = a_k f(x-k) = a_k(1+k-x)\ln(1+x-k)$;

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k^-} \frac{a_{k-1}(k-x)\ln(2+x-k)}{x - k} = -a_{k-1} \ln 2, \text{ 故 } f'_-(k) = -a_{k-1} \ln 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{a_k(1+k-x)\ln(1+x-k)}{x - k} = a_k, \text{ 故 } f'_+(k) = a_k.$$

由 $f'_+(k) = f'_-(k)$ 得 $a_k = -a_{k-1} \ln 2$, $k=1, 2, \dots$, 且由题意知 $a_0 = 1$, 所以

$$a_k = (-1)^k (\ln 2)^k, \quad k=1, 2, \dots.$$

$$(II) \quad A = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(x)| dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} |(-1)^k (\ln 2)^k f(x-k)| dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\ln 2)^k \int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (\ln 2)^k \cdot \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{1 - \ln 2} \int_0^1 f(t) dt.$$

而

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (1-t) \ln(1+t) dt = 2 \ln 2 - \frac{5}{4},$$

$$\text{所以 } A = \frac{1}{1 - \ln 2} \cdot (2 \ln 2 - \frac{5}{4}) = \frac{8 \ln 2 - 5}{4(1 - \ln 2)}.$$

(19) 解法 1 把圆的方程 $x^2 + y^2 = 4$ 代入积分的被积函数, 得

$$I = \int_L \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{4 + x^2}.$$

补有向线段 $\overline{BA}: y=0 (x: 2 \rightarrow -2)$, 记 L 与 \overline{BA} 围成的平面区域为 D , 由格林公式,

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{4 + x^2} = \int_{\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{4 + x^2} \\ &= - \iint_D \left(\frac{-2x \sin y}{(4 + x^2)^2} - \frac{2y}{4 + x^2} \right) d\sigma - \int_{\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{4 + x^2} \end{aligned}$$

由对称性知, $\iint_D \frac{2x \sin y}{(4 + x^2)^2} d\sigma = 0$, 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{2y}{4 + x^2} dy \right] dx - \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + x^2} dx = \int_{-2}^2 \frac{4 - x^2}{4 + x^2} dx - \int_{-2}^2 \frac{1}{4 + x^2} dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(\frac{9}{4 + x^2} - 1 \right) dx = \frac{9\pi}{4} - 4. \end{aligned}$$

解法 2 把圆的方程 $x^2 + y^2 = 4$ 代入积分的被积函数, 得

$$I = \int_L \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{8 - y^2}.$$

补有向线段 $\overline{BA}: y=0 (x: 2 \rightarrow -2)$, 记 L 与 \overline{BA} 围成的平面区域为 D , 由格林公式,

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{8 - y^2} = \int_{\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{8 - y^2} \\ &= - \iint_D \left(-\frac{18y}{(8 - y^2)^2} \right) d\sigma - \int_{\overline{BA}} \frac{(y^2 + 1)dx + \sin y dy}{8 - y^2} \\ &= \int_{-2}^2 \left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{18y}{(8 - y^2)^2} dy \right] dx - \int_{-2}^2 \frac{1}{8} dx \end{aligned}$$

超 越 考 研

$$= \int_{-2}^2 \frac{9}{8-y^2} \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx + \frac{1}{2} = 9 \int_{-2}^2 \left(\frac{1}{4+x^2} - \frac{1}{8} \right) dx + \frac{1}{2}$$

$$= 9 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{9\pi}{4} - 4.$$

(20) 解 设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 由 $AX - XA = E$ 得 $\begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 & -2x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ x_1 - 2x_3 - x_4 & x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解法 1 由上得非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ 对其增广矩阵作初等行变换

$$(B:b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{行}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

由于 $r(B) = 2 \neq r(B:b) = 3$, 故 $AX - XA = E$ 无解.

解法 2 由于 $-x_2 + 2x_3 = 1$ 与 $x_2 - 2x_3 = 1$ 矛盾, 所以非齐次线性方程组 $\begin{cases} -x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 无解,

从而 $AX - XA = E$ 无解.

解法 3 由于 $AX - XA$ 的迹

$$\text{tr}(AX - XA) = (-x_2 + 2x_3) + (x_2 - 2x_3) = 0 \neq \text{tr}(E),$$

所以 $AX - XA = E$ 无解.

【注】事实上, 对任意 n 阶方阵 A, B , 均有 $\text{tr}(AB - BA) = 0$, $AB - BA = E$ 总不成立.

(21) 解 (I) $\eta = (-1, 2, 0)^T$ 不是线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

假如 $\eta = (-1, 2, 0)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的解, 则 η 是 A 的属于特征值 0 的特征向量. 又 A 为实对称矩阵, 由实对称矩阵的性质知 ξ, η 一定正交, 而 $\xi^T \eta = -5 \neq 0$, 矛盾, 故 $\eta = (-1, 2, 0)^T$ 不是线性方程组 $Ax = 0$ 的解.

(II) 因为三阶实对称阵 A 的秩 $r(A) = 1$, 故 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 是 A 的二重特征值. 设其对应的特征向量为 $\xi = (x_1, x_2, x_3)^T$, 由于 ξ 与 ξ_1 正交, $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$, 解得基础解系为 $\xi_2 = (2, 1, 0)^T, \xi_3 = (-2, 0, 1)^T$, 故线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为 $x = k_1 \xi_2 + k_2 \xi_3 = k_1 (2, 1, 0)^T + k_2 (-2, 0, 1)^T$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(III) 令 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则 P 为可逆阵, 且 $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, 由 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 得

超 越 考 研

$$A = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(22) 解 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ 得 $k = \frac{\lambda}{2}$, 所以 $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, $\lambda > 0$.

(II) $D(XY) = D(X|X|) = E[(X|X|)^2] - (E(X|X|))^2$, 其中

$$E[(X|X|)^2] = E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = \frac{1}{\lambda^4} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^4 e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{4!}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^4},$$

$$E(X|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|x| \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} dx = 0,$$

$$\text{因此 } D(XY) = \frac{24}{\lambda^4}.$$

(III) $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x, |X| \leq y\}$.

(i) 当 $y < 0$ 时, $F(x, y) = 0$;

(ii) 当 $y \geq 0$ 时, $F(x, y) = P\{X \leq x, -y \leq X \leq y\}$.

① 当 $x \leq -y \leq 0$ 时, $F(x, y) = 0$;

② 当 $-y < x \leq 0$ 时, $F(x, y) = P\{-y \leq X \leq x\} = \int_{-y}^x \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda y})$;

③ 当 $0 < x \leq y$ 时, $F(x, y) = P\{-y \leq X \leq x\} = \int_{-y}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt + \int_0^x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} dt = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda y} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$;

④ 当 $0 \leq y \leq x$ 时, $F(x, y) = P\{-y \leq X \leq y\} = 1 - e^{-\lambda y}$.

$$\text{综上得 } (X, Y) \text{ 的分布函数为 } F(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{\lambda x} - e^{-\lambda y}), & -y < x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda y} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & 0 < x \leq y, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(23) 解 (I) 由于 X_1, X_2, \dots, X_{10} 相互独立, 且 $X_i \sim B(1, 0.2)$, $i = 1, 2, \dots, 10$, 故

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim B(10, 0.2).$$

同理, $X_1^2, X_2^2, \dots, X_{10}^2$ 相互独立, 且 $X_i^2 \sim B(1, 0.2)$, $i = 1, 2, \dots, 10$, 故 $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \sim B(10, 0.2)$.

$$\begin{aligned} \text{(II) ① } P\{\bar{X} \leq \frac{1}{10}\} &= P\{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i \leq \frac{1}{10}\} = P\{\sum_{i=1}^{10} X_i \leq 1\} = P\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 0\} + P\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 1\} \\ &= 0.8^{10} + C_{10}^1 0.2 \times 0.8^9 = 2.8 \times 0.8^9. \end{aligned}$$

$$\text{② } P\{S^2 = \frac{5}{18}\} = P\{\frac{1}{9}[\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - \frac{1}{10}(\sum_{i=1}^{10} X_i)^2] = \frac{5}{18}\} = P\{10 \sum_{i=1}^{10} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{10} X_i)^2 = 25\}.$$

由于 X_i 只取 0 或 1, $i = 1, 2, \dots, 10$, 所以 $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = \sum_{i=1}^{10} X_i$, 所以

$$P\{S^2 = \frac{5}{18}\} = P\{(\sum_{i=1}^{10} X_i)^2 - 10 \sum_{i=1}^{10} X_i + 25 = 0\} = P\{\sum_{i=1}^{10} X_i = 5\} = C_{10}^5 0.2^5 \times 0.8^5 = 252 \times 0.16^5.$$