绝密 * 启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟一）

一、选择题：

（1）答案：选（B）.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$ 点 $x=0$ 为其跳跃间断点，故点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的其跳跃间断点，选（B）.

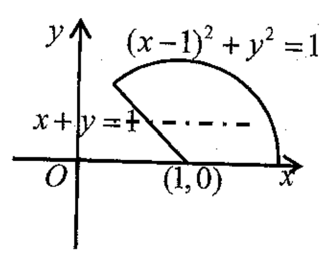
（2）答案：选（B）.

解 令 $x-u=t$， $F(x)=\int_x^0(x-2t)f(t)(-dt)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$.

因为 $f(t)$ 为奇函数，$tf(t)$ 为偶函数，所以 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数，$\int_0^x tf(t)dt$ 为奇函数，故 $F(x)$ 为奇函数．又因为 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)\cdot x-xf(x)\le 0$（$\xi$ 在0与 x 之间），故 $F(x)$ 单调减少.

（3）答案：选（C）.

（4）答案：选（D）.



解 $\begin{cases}x=1+r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，引入 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 分割区域，得

$$D=D_1+D_2 .$$

其中$D_1: 0 \le y \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$1-y \le x \le 1+\sqrt{1-y^2}$，

$D_2: \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le y \le 1$，$1-\sqrt{1-y^2} \le y \le 1+\sqrt{1-y^2}$.

（5）**答案**：选（A）.

解
$$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) \end{pmatrix}.$$

由$AB=O$知$r(A)+r(B)\le 3$．又由于A，B均为非零矩阵，则有$r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$.

当$a\ne 2$且$a\ne -1$时，$r(B)=3$，得$r(A)=0$，与$r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$矛盾.

当$a=-1$时，$r(B)=1$，此时$1\le r(A)\le 2$，（B） 和（C）错，

当$a=2$时，$r(B)=2$，必有$1\le r(A)\le 3-r(B)=1$，得$r(A)=1$．故（D）错，（A）正确.

（6）**答案**：选（C）.

解 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$，知$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=0, \end{cases}$取$\lambda_1=0$，则$\lambda_2\ne 0,\lambda_3\ne 0$，从而$\lambda_2=-\lambda_3$，故答案选(C).

（7）**答案**：选（D）.

解 由$P(B|A)=P(B|\overline{A})$得$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，整理得$P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件$A,B$相互独立，故选（D）.

（8） **答案**：选（D）.

解 由于$\{Y\le t\}\subset\{X\le t\}$，$\{X\le t, Y\le t\}=\{Y\le t\}$，故

$$P\{Y\le t\}\le P\{X\le t\},\quad P\{X\le t, Y\le t\}=P\{Y\le t\},$$

所以$F_Y(t)\le F_X(t), F(t,t)=F_Y(t)$.

二、填空题

（9）答案：填“$y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$”.

解 由题意知$f(1)=0$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=f'(1)\cdot(-\frac{1}{2})=2,$$

故$f'(1)=-4$.

又因为$f(x)$为偶函数，所以$f'(x)$为奇函数，故$f'(-1)=-f'(1)=4$，因此法线方程为

$$y-f(-1)=-\frac{1}{4}(x+1)\text{，即 }y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}.$$

（10）答案：填“$\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln(1+\cos^2 x)+C$”.

解 原积分$=-\int\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}d(\cos x)\ \underline{\underline{\cos x=t}}\int\frac{t(t^2-1)}{1+t^2}dt$

$$=\int\frac{t(1+t^2)-2t}{1+t^2}dt=\int(t-\frac{2t}{1+t^2})dt=\frac{1}{2}t^2-\ln(1+t^2)+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln(1+\cos^2 x)+C.$$

（11） 答案：填“1”.

解 方程两边对x求偏导，得$1-a\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot(-b\frac{\partial z}{\partial x})$, 所以$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{a-b\varphi'}$. 方程两边对$y$求偏导，得$-a\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot(1-b\frac{\partial z}{\partial y})$, 所以$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi'}{a-b\varphi'}$, 从而$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

（12）答案：填“$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$”.

解　原式$=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos x^2dx\int_0^{x^3}dy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x^3\cos x^2dx \underline{\underline{x^2=t}} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$.

（13）答案：填“$\begin{pmatrix}1+2n & -n & 0\\ 4n & 1-2n & 0\\ 6n & -3n & 1\end{pmatrix}$”.

解　$(E+\alpha\beta^T)^n=E+n\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1+2n & -n & 0\\ 4n & 1-2n & 0\\ 6n & -3n & 1\end{pmatrix}$.

（14）答案：填“2”.

解　由于$E(a^{X_i})=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{a\lambda}\cdot e^{-\lambda}=e^{(a-1)\lambda}$，　$i=1,2,\cdots,n$，故由

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^{X_i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(a^{X_i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{(a-1)\lambda}=e^{(a-1)\lambda}=e^{\lambda},$$

解得$a=2$.

三、解答题

（15）证　（Ⅰ）令$g(x)=\ln(1+x)-\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$，则$g'(x)=\frac{x(x-1)}{(x+1)^3}<0$，故$g(x)$单调减少. 当$0<x<1$时

$g(x)<g(0)=0$.

（Ⅱ）只需证$x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln 4$.

令
$$f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)-\ln 4,$$

则$f(1)=0$.

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)},$$

则 $f'(1)=0$.

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}[\ln(1+x)-\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}]<0,\quad f'(x)>f'(1)=0.$$

故 $f(x)$ 单调增加，所以 $f(x)<f(1)=0$， 故 $x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln 4$.

（16）**解**　（Ⅰ）将 $y^*=e^{-x}+x$ 分别代入上述两个微分方程，得

$$(a-2)e^{-x}+3+ax=P(x),\quad (b-1)e^{-x}+2+bx=Q(x).$$

由于 a,b 均为常数，$P(x),Q(x)$ 均为多项式函数，故

$$a=2,b=1;\quad P(x)=3+2x,Q(x)=2+x.$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知原微分方程分别为 $y''+3y'+2y=3+2x$ 和 $y''+2y'+y=2+x$，且 e^{-x} 均为对应的齐次方程的解，所以 $x=y^*-e^{-x}$ 均为其特解，故其通解分别为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+x \text{ 和 } y=e^{-x}(C_1x+C_2)+x,$$

由于 e^{-2x} 和 e^{-x}，xe^{-x} 和 e^{-x} 均线性无关，所以 $y''+3y'+2y=3+2x$ 和 $y''+2y'+y=2+x$ 的所有公共解为 $y=Ce^{-x}+x$，其中 C 为任意实数.

（17）**解**　过 A,B 两点的直线为 $x+y=10$．设 C 点坐标为 (x,y)，则 ΔABC 的面积为 $S=\sqrt{2}|x+y-10|$.

记 $L=(x+y-10)^2+\lambda(\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}-1)$，令

$$\begin{cases} L'_x = 2(x+y-10)+\dfrac{2x}{5}\lambda = 0, \\ L'_y = 2(x+y-10)+\dfrac{y}{10}\lambda = 0, \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}-1=0, \end{cases}$$

解得驻点 $(1,4)$ 及 $(-1,-4)$，$S(1,4)=5\sqrt{2}$，$S(-1,-4)=15\sqrt{2}$，所以 $S_{\max}=15\sqrt{2}, S_{\min}=5\sqrt{2}$.

（18）解　由 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$.

令 $\Delta x\to 0$，则有 $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，故有

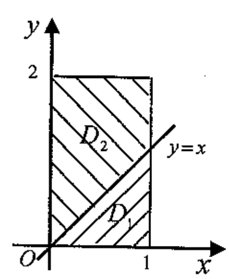
$$y(x)=\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\sqrt{2x-x^2}+C.$$

由 $y(1)=1$ 知 $C=0$，所以 $y=\sqrt{2x-x^2}$，于是

$$\int_1^2 y(x)dx=\int_1^2\sqrt{2x-x^2}dx=\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx \underline{\underline{x-1=\sin t}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{4}.$$

（19）解　$\displaystyle\iint_D|x-y|d\sigma=\iint_{D_1}(x-y)d\sigma+\iint_{D_2}(y-x)d\sigma$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x(x-y)dy+\int_0^1 dx\int_x^2(y-x)dy$$



$$=\int_0^1(xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^x dx+\int_0^1(\frac{1}{2}y^2-xy)\Big|_x^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(2-2x+\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{4}{3}.$$

法 1　$\displaystyle\iint_D(y-1)e^{x^2|y-1|}d\sigma=\int_0^1dx\int_0^2(y-1)e^{x^2|y-1|}dy=\int_0^1dx\int_{-1}^1 te^{x^2|t|}dt=0.$

法 2　D 关于 $y=1$ 对称，$(y-1)e^{x^2|y-1|}$ 关于 $y-1$ 成奇函数，所以 $\displaystyle\iint_D(y-1)e^{x^2|y-1|}d\sigma=0$，故 $I=\dfrac{4}{3}$.

(20) 解 (Ⅰ) $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}$，则 $A=B^TB$.

(Ⅱ) $r(A)=r(B)=3$.

(Ⅲ) $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $Ax=0$ 通解为

$x=k\begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数.

(21)解 (Ⅰ)由已知得 $A\alpha_1=2\alpha_1$，即 $\lambda_1=2$ 是 A 的特征值，而 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量，

又由 $A=A^T$，且 $r(A)=1$ 知，$\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值，$Ax=0$ 的非零解向量即是 A 的属于特征值 0 的特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的特征向量，因为 A 是实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量必正交，则有 $-x_1+x_2+x_3=0$，可取 $\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$，故方程组 $Ax=0$ 的通解为

$$x=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\ k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

(Ⅱ) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 为可逆阵，且

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}，\text{得}\quad A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix},$$

则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3.$$

(22) 解 由于 $p=P\{Y<2X<Y+2|2X+Y=1\}=P\{0<2X-Y<2|2X+Y=1\}$，故令

$$U=2X+Y,\quad V=2X-Y.$$

因为$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$，所以$(U,V)$服从二维正态分布．且

$$Cov(U,V) = Cov(2X+Y, 2X-Y) = 4DX - DY = 4-4=0,$$

可知U与V不相关，进而U与V相互独立．因此，$p = P\{0<V<2|U=1\} = P\{0<V<2\}$．又

$$EV=2EX-EY=2\cdot 0-0=0;$$

$$DV=4DX+DY-2Cov(2X,Y)=4+4-2\cdot 2\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}\cdot\frac{1}{2}=4,$$

所以$V \sim N(0,4)$，$\frac{V}{2} \sim N(0,1)$，故$p = P\{0<\frac{V}{2}<1\} = \Phi(1)-\Phi(0) = 0.8413-0.5=0.3413$．

（23）**解**　（I）由于$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=0$，故采用二阶原点矩估计$\lambda$．由

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=2\lambda^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

解得$\hat{\lambda}_M=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$．

（II）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\frac{1}{(2\lambda)^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，$\ln L(\lambda)=-n\ln 2\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，令

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0,$$

解得$\hat{\lambda}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$．

（III）由于$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\lambda$，所以

$$E(\hat{\lambda}_L)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda.$$

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试卷（模拟二）试题答案

一、选择题

（1）答案：选（A）.

解 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0, f'(0)=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-ax-b}{cx^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)-ax-b}{cx^2}=1,$$

故 $a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

（2）答案：选（C）.

解 $$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx,$$

而 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)dx\overset{t=\pi-x}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\sin t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx,$$

所以 $\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$，（A）正确.

$\int_0^{\pi}f(\sin^2 x)dx\overset{\text{周期性}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin^2 x)dx\overset{\text{奇偶性}}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin^2 x)dx$，（B）正确.

$\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)dx\overset{\text{周期性}}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)dx\overset{\text{奇偶性}}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)dx$，（D）正确.

（C）不正确，反例，取 $f(x)=x$， $\int_0^{\pi}\cos xdx=0\neq2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

（3）答案：选（D）.

解 $\iint\limits_{D_t}f(x^2+y^2)dxdy=2\pi\int_0^t f(r^2)rdr$，由题设知 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{2\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{at^k}=1$，

而 $$\lim_{t\to0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)rdr}{at^k}=\frac{2\pi}{a}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t^2)}{kt^{k-2}}=\frac{2\pi}{ak}\lim_{t\to0^+}[\frac{f(t^2)}{t^2}\cdot\frac{1}{t^{k-4}}],$$

由于 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t^2)}{t^2}=f'(0)=2$，所以 $k=4,a=\pi$，故选（D）.

（4）答案：选（C）.

解　由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=0,\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=\frac{x^2}{2}}}f(x,y)=1$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，故（A）不正确，进而（B）和（D）也都不正确.

另外，可直接计算得，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故（C）正确.

（5）答案：选（C）.

解　AB 为 n 阶方阵，则 $r(AB)=n$．又因

$n=r(AB)\le r(A)\le n,n=r(AB)\le r(B)\le n$，故 $r(A)=r(B)=n$，从而答案选（C）.

（6）答案：选（B）.

解 1　因为 $r(A)=1$，所以 $Ax=0$ 有两个线性无关的解向量，即 A 对应 $\lambda=0$ 有两个线性无关的特征向量。因为特征值的重根数≥对应的线性无关的特征向量的个数，故 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值，也可能是 A 的三重特征值，例如：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，\ r(A)=1\ \lambda=0 \text{ 是 } A \text{ 的三重特征值.}$$

解 2　$r(A)=1$，则 $A=\alpha\beta^T$，故 A 的特征值为 $0,0,\alpha^T\beta$（或 $\beta^T\alpha$）. 若 $\alpha^T\beta=0$，则 A 的特征值为 $0,0,0$，若 $\alpha^T\beta\ne0$，则 A 的特征值为 $\alpha^T\beta,0,0$.

（7）答案：选（C）.

解
$$P\{Y\le0|\ X+Y\le2\}=\frac{P\{X+Y\le2,Y\le0\}}{P\{X+Y\le2\}}.$$

$$P\{X+Y\le2\}=P\{X+Y\le2,X=1\}+P\{X+Y\le2,X=2\}$$
$$=P\{Y\le1,X=1\}+P\{Y\le0,X=2\}=\frac{3}{4},$$
$$P\{X+Y\le2,Y\le0\}=P\{X+Y\le2,Y\le0,X=1\}+P\{X+Y\le2,Y\le0,X=2\}$$
$$=P\{Y\le0,X=1\}+P\{Y\le0,X=2\}=\frac{1}{2},$$

所以
$$P\{Y\le0|\ X+Y\le2\}=\frac{P\{X+Y\le2,Y\le0\}}{P\{X+Y\le2\}}=\frac{2}{3}.$$

（8）答案：选（D）.

解　由于 $P\{Y=1\}=P\{X\ge0\}=\dfrac{1}{2}\ne0$，所以 Y 不是连续随机变量，排除（A）.

当 $-1\le X<0$ 时，$Y=1-4X\in(1,5]$，所以 Y 不是离散型随机变量，排除（B）.

又　$EY=\int_{-1}^{0}(1-4x)\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1}1\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$，故选（D）.

二、填空题

（9）**答案**：填“az”或“$ax^a f(\frac{y}{x^2})$”.

解　$x\frac{\partial z}{\partial x}=ax^a f(\frac{y}{x^2})-\frac{2y}{x^2}x^a f'(\frac{y}{x^2})$，$2y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2}x^a f'(\frac{y}{x^2})$，所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=ax^a f(\frac{y}{x^2})=az$.

（10）设二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=ae^x$（p,q,a 是常数）有两个特解 $y_1=xe^x$，$y_2=e^{2x}+xe^x$，则该方程的通解为__________.

答案：填“$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$”.

解　由 $y_2-y_1=e^{2x}$ 知特征方程有一根为 $r_1=2$.

①若 $r_1=2$ 是二重根，则该方程的通解形式为 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+Ae^x$（$A$ 为常数）与条件 $y_1=xe^x$ 为方程特解矛盾，故 $r_1=2$ 不是二重根.

②若另一个特征根 $r_2\neq 1$ 且 $r_2\neq 2$，则该方程通解形式为 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{r_2x}+Ae^x$，也与条件 $y_1=xe^x$ 为方程特解矛盾. 故由特解 $y_1=xe^x$ 和自由项 ae^x 知，特征方程有一根为 $r_2=1$，

综上，方程的通解 $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$.

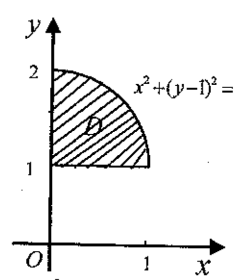
（11）**答案**：填“5820元”.

解　$R(t)=2000, r=0.02, n=3$，则

$$R=\int_0^n R(t)e^{-rt}dt=\int_0^3 2000e^{-0.02t}dt=2000\times\frac{1}{0.02}\times(-e^{-0.02t})\Big|_0^3=100000(1-e^{-0.06})$$

$$=100000(1-0.9418)=5820 \text{（元）}.$$

（12）**答案**：填“$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$”.



（13）**答案**：填“$\frac{1}{2}$”.

解　由 $A-E=(B-E)^{-1}$，$A=(B-E)^{-1}+E=(B-E)^{-1}(E+B-E)=(B-E)^{-1}\cdot B$，所以

$$|A|=\frac{|B|}{|B-E|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

（14）**答案**：填“$\frac{\sqrt{6}}{9}$”.

解　$P\{X=1\}=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times 0.2=0.1$，

$$P\{Y=1\}=P(A\cup B)=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.5\times 0.8=0.6,$$

$$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P((AB)(A\cup B))=P(AB)=0.1,$$

所以 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix}$, $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$, $XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.9 & 0.1\end{pmatrix}$，进而得

$$EX=0.1, DX=0.09;\quad EY=0.6, DY=0.24;\quad E(XY)=0.1,$$

故
$$\rho_{XY}=\frac{0.1-0.1\times 0.6}{\sqrt{0.09}\sqrt{0.24}}=\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

三、解答题

（15）**解** 原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t dx\int_0^x f(x-y)dy}{(\sqrt[3]{1+(\cos t-1)}-1)\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t[\int_0^x f(x-y)dy]dx}{-\frac{1}{6}t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(t-y)dy}{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\overset{令u=t-y}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(u)du}{-\frac{1}{2}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{-t}=-f'(0).$$

又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，故 $f'(0)=0$.

（16）**证** （Ⅰ）令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}$，则 $F(0)=-\frac{1}{3}, F(1)=\frac{2}{3}$，由零点定理知存在 $a\in(0,1)$，使得 $F(a)=0$，即得 $f(a)=\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）令 $G(x)=f(x)-\frac{2}{3}$，则 $G(a)=-\frac{1}{3}, G(1)=\frac{1}{3}$，由零点定理知，存在 $b\in(a,1)$，使得 $G(b)=0$，即得 $f(b)=\frac{2}{3}$. 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(a)-f(0)}{a}=f'(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,a),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(a,b),$$

$$\frac{f(1)-f(b)}{1-b}=f'(\xi_3),\quad \xi_3\in(b,1),$$

所以
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\frac{1}{f'(\xi_3)}=\frac{a+b-a+1-b}{\frac{1}{3}}=3.$$

（17）**证** （Ⅰ）$\int_0^{2\pi}f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)]dx$

$=\int_0^{2\pi}f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta_0)]dx$ （其中 $\cos\theta_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$）

$$\overset{u=x+\theta_0}{=}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du \overset{\text{周期性}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du .$$

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)中的结论，得 $I_n=\int_{-\pi}^{\pi}(5\sin x)^n dx=5^n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n xdx$.

当 n 为正奇数时，由积分的奇偶性知，$I_n=0$.

当 n 为正偶数时，

$$I_n=2\times 5^n\int_0^{\pi}\sin^n xdx \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} 2\times 5^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt=4\times 5^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n tdt .$$

$$=4\times 5^n\times\frac{(n-1)!!}{n!!}\times\frac{\pi}{2}=2\pi\times 5^n\times\frac{(n-1)!!}{n!!} .$$

(18) 解 1　把 D 分成 D_1, D_2 两部分如图所示.

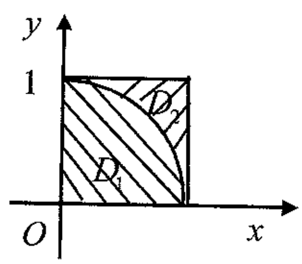
$$I=\iint_{D_1}xd\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma=\iint_{D_1}xd\sigma+\iint_{D}(x^2+y^2)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdr\right]d\theta+\int_0^1\left[\int_0^1(x^2+y^2)dy\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^2\cdot rdr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}+\int_0^1(x^2+\frac{1}{3})dx-\frac{\pi}{8}=1-\frac{\pi}{8} .$$

解 2　把 D 分成 D_1, D_2 两部分如图所示.

$$I=\iint_{D_1}xd\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma$$



$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r\cos\theta\cdot rdr\right]d\theta+\int_0^1\left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2)dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos\theta d\theta+\int_0^1(x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx$$

$$=\frac{1}{3}+\int_0^1[(x^2+\frac{1}{3})-(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}]dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\int_0^1[(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}]dx=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t\cos^2 t+\frac{1}{3}\cos^4 t)dt$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-\frac{2}{3}\cos^4 t)dt=1-(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{8} .$$

(19) 解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2n+3}{n+2}x^{2n+2}\Big/\frac{2n+1}{n+1}x^{2n}\right|=x^2$，所以级数的收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=\pm 1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n+1}$，发散，所以级数的收敛域为 $(-1,1)$.

19、20全程资料请加群690261900

设级数的和函数为$S(x)$，则

$$S(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{2n}=\frac{2x^2}{1+x^2}+S_1(x).$$

因为

$$x^2S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{2(n+1)},$$

$$(x^2S_1(x))'=(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{2(n+1)})'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}=\frac{-2x^3}{1+x^2},$$

所以

$$x^2S_1(x)=\int\frac{-2x^3}{1+x^2}dx=-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx^2=-x^2+\ln(1+x^2)+C.$$

令$x=0$，得$C=0$，所以

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & |x|<1,\text{且}x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{1+x^2}-1+\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^2), & |x|<1,\text{且}x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

（20）证 （Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\3&1&4&2\\a&1&3&b\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$Ax=\beta$有两个无关的解$\eta_1,\eta_2$，从而$Ax=0$有一个线性无关的解$\xi=\eta_1-\eta_2$，故$4-r(A)\geq 1$，因此$r(A)\leq 3$，又因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\3&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&-1&1\\3&-2&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

故$r(A)\geq 3$，从而$r(A)=3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，所以$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法唯一．有题意知$r(A)=r(A\vdots\beta)=3$.

$$r(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\3&1&4&2&0\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&-1&9&-3\\0&0&0&b-14a+31&4a-8\end{array}\right),$$

得$\begin{cases}b-14a+31=0,\\4a-8=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-3.\end{cases}$

(21) 解　(Ⅰ) 由 $p=1$ 且 $A^2-A=6E$ 知 A 的特征值为 λ_A: $3,-2,-2,-2$，则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $3y_1^2-2y_2^2-2y_3^2-2y_4^2$，规范形为 $z_1^2-z_2^2-z_3^2-z_4^2$；

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知 $|A|=-24$，而 $A^*=|A|A^{-1}=-24A^{-1}$，从而

$$\left|\frac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^4\frac{1}{|A|}=-\frac{2}{3};$$

(Ⅲ) 因为 $B=A^2-kA+6E$，则 λ_B: $15-3k,10+2k,10+2k,10+2k$，从而当 $-5<k<5$ 时 $g(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 正定.

(22) 解　(Ⅰ) $f(x)=ae^{-x^2}=ae^{-\frac{x^2}{2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}},-\infty<x<+\infty$，由正态分布的性质知 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

(Ⅱ) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}$.

(i) 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

(ii) 当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}=P\{X\le y,X^2\le y\}=P\{X\le y,-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le y\}=\int_{-\sqrt{y}}^{y}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx;$$

(iii) 当 $y\ge1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{\max\{X,X^2\}\le y\}=P\{X\le y,X^2\le y\}=P\{X\le y,-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx,$$

所以Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-y^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-y}), & 0\le y<1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}e^{-y}, & y\ge 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（23）**解**　（Ⅰ）由正态分布的性质知$Y_1\sim N(0,2),Y_2\sim N(0,2)$，得$\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\dfrac{Y_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，所以$\dfrac{Y_1^2}{2}\sim\chi^2(1),\dfrac{Y_2^2}{2}\sim\chi^2(1)$，且$\dfrac{Y_1^2}{2}$和$\dfrac{Y_2^2}{2}$相互独立，故

$$\frac{\dfrac{Y_1^2}{2}\Big/1}{\dfrac{Y_2^2}{2}\Big/1}=\frac{Y_1^2}{Y_2^2}\sim F(1,1),\qquad \frac{Y_1^2}{2}+\frac{Y_2^2}{2}=\frac{Y_1^2+Y_2^2}{2}\sim\chi^2(2).$$

（Ⅱ）记$U=\dfrac{Y_1}{\sqrt{2}},V=\dfrac{Y_2}{\sqrt{2}}$，则$U\sim N(0,1),V\sim N(0,1)$，$U$和$V$相互独立，故$(U,V)$的密度函数为

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}},\qquad (u,v)\in R^2,$$

所以

$$P\{Y_1^2+Y_2^2\le 8\ln 2\}=P\{U^2+V^2\le 4\ln 2\}=\iint\limits_{u^2+v^2\le 4\ln 2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{\ln 2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=1-e^{-2\ln 2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试卷（模拟三）试题答案

一、选择题

（1） 答案：选（A）.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]=0+0=0$，故 $x=0$ 不是垂直渐近线.

又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}[x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\arctan(x^2)]=1+0=1=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)-x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan(x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{3}(\frac{1}{x})^3}{\frac{1}{x^2}}+0=-\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=b,$$

所以 $y=x$ 为斜渐近线. 故选（A）.

（2）答案：选（A）.

解 $F(x)\overset{u=x^2-t}{=}\int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)\,du=x^2\int_0^{x^2}f(u)\,du-\int_0^{x^2}uf(u)\,du$，故 $F'(x)=2x\int_0^{x^2}f(u)\,du$.

当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值，选（A）.

或 取 $f(x)=1$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x^4$，同样选（A）.

（3）答案：选（D）.

解 （A）正确. 因为该级数的通项是两个收敛级数之和，故该级数收敛.

（B）正确. 因为该级数的前 n 项和为 $S_n=a_1^2-a_{n+1}^2$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_1^2$，故该级数收敛.

（C）正确. 因为该级数的一般项是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的相邻两项 a_n 与 a_{n+1} 之和，根据收敛级数可以任意加括号的性质可知该级数收敛.

（D）错误．例如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，此时$a_{2n}-a_{2n+1}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n}-a_{2n+1})$发散．

（4）答案：选（C）．

解　因为在D上$xy\ge 0,(x+y)^2<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin(x^2+y^2)\le\sin(x+y)^2$，且等于号仅在原点处成立，从而$\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma<\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma$．

又因为在D上$0\le y\le x\le\frac{1}{2}$，$\sin(x+y)^2\le\sin(4x^2)$，且等于号仅在直线段$y=x\ (0\le x\le\frac{1}{2})$上成立，从而$\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma<\iint\limits_D\sin(4x^2)d\sigma$，故选（C）．

（5）答案：选（C）．

解　若$Ax=0$仅有1个线性无关的解，则$r(A)=n-1$，故$r(A^*)=1$，从而（C）正确．

（6）答案：选（B）．

解　设$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$|\lambda E-A|=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，$B$的特征值为$2,2,0$．

一方面，如果A与B相似，则A的特征值也为$2,2,0$，故$a=0,b=2$，此时

$$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix},$$

B能对角化的条件为

$$r(2E-B)=r\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-c\\0&0&2\end{pmatrix}=1,$$

故c为任意常数．另一方面，如果$a=0,b=2,c$为任意常数时，可直接验证A与B相似，，故选（B）．

（7）答案：选（B）．

解　由于$g(x)$为凹函数，故有$g(x)\ge g(EX)+g'(EX)(x-EX)$，从而有

$$g(X)\ge g(EX)+g'(EX)(X-EX),$$

两边取数学期望，并利用$E(X-EX)=0$，得

$$Eg(X)\ge Eg(EX)+g'(EX)E(X-EX)=g(EX).$$

（8）答案：选（C）．

解 由 $P\{|X-EX|\le\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ 知 $EX=0$，$\varepsilon=1$，$DX=\dfrac{1}{3}$.

又 $X:U(a,b)$，所以 $\dfrac{a+b}{2}=0$，$\dfrac{(a-b)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$，解得 $a=-1,b=1$。故选（C).

二、填空题

（9）答案：填"$\dfrac{1}{2}-\ln 2$".

解 因为 $f(x)=[\ln(x+1)]'=\dfrac{1}{x+1}$，所以

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\cdot\frac{x}{t^2}=x\lim_{t\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{t})-f(x)}{\frac{1}{t}}=xf'(x)=x(\frac{1}{x+1})'=-\frac{x}{(x+1)^2},$$

故 $$\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1\frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx=-\int_0^1[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx=-[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

或 $$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 xd\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\ln(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

（10）答案："$y_t=2^t+t2^{t-1}$".

解 （i）求 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解.

由于特征方程为 $r-2=0$，特征值为 $r=2$，故 $y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $Y_t=C2^t$.

（ii）求 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的特解 y_t^*.

因为 $d=2$ 是特征值，应设 $y_t^*=at2^t$，代入原方程可得 $a=\dfrac{1}{2}$，即 $y_t^*=\dfrac{1}{2}t2^t=t2^{t-1}$.

（iii）求 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解.

由解的结构知，$y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=C2^t+t2^{t-1}$.

（iv）$y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的满足 $y_0=1$ 的特解.

由 $y_0=1$，解得 $C=1$，所以所求特解为 $y_t=2^t+t2^{t-1}$.

（11）答案："8π".

解法 1 $V=4\times4\pi-\pi\int_{-1}^3(1+y)dy=8\pi$.

解法 2 $V=2\pi\int_1^2 x(x^2-1)dx+2\pi\int_0^1 x(1-x^2)dx+(4\pi-\pi)\times1=8\pi$.

解法 3 $V=2\pi\int_1^2 x(x^2-1)dx+\pi\int_{-1}^0[2^2-(1+y)]dy=8\pi$.

解法 4 将曲边梯形上移一个单位，即为曲线 $y=x^2$，直线 $y=0,x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2dy=8\pi$.

错误解法 1 $V=2\pi\int_0^2 x(x^2-1)dx$.

错误解法 2 $V=2\pi\int_0^2 x|x^2-1|dx$.

（12）答案：填"$\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$".

解 由得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 为 x 的可微函数，于是

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=\varphi(x), \tag{1}$$

由 $z(x,0)=x$ 得

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=1. \tag{2}$$

故由（1），（2）知 $\varphi(x)=1$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+1$，从而 $z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+\psi(y)$，其中 $\psi(y)$ 为 y 的可微函数．由 $z(0,y)=y^2$ 得 $\psi(y)=y^2$，因此

$$z=z(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2.$$

（13）答案：填"$-\frac{3}{5}\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2$".

解 设 $\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，故 $-\alpha_1+\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，即 $(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=$ $(\beta_1,\beta_2)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix}$，所以 $\xi=-\frac{3}{5}\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2$.

（14）答案：填"0.1".

解 因为 A,B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$．又由于 A,C 互斥，故 $P(AC)=0$，从而 $P(ABC)=0$，因此

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{0.2\times0.3}{1-0.4}=0.1.$$

三、解答题

(15)证 (Ⅰ)由于$\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{x}{1+\xi}$,其中$0<\xi<x$,所以$1<1+\xi<1+x$,得$\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$,故$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$,即得$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$\dfrac{xt}{1+xt}<\ln(1+xt)<xt$,其中$x>0,0<t<1$,故$\dfrac{x}{1+xt}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$.

由于$0<t<1$,故$\dfrac{x}{1+xt}>\dfrac{x}{1+x}$,得$\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$,进而

$$\frac{x}{1+x}\cos\frac{\pi}{2}t<\frac{\ln(1+xt)}{x}\cos\frac{\pi}{2}t<x\cos\frac{\pi}{2}t,$$

在$(0,1)$内对t积分得$\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{x}{1+x}<I(x)<\dfrac{2}{\pi}x$,故$\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{I(x)}{x}<\dfrac{2}{\pi}$. 因为$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2}{\pi}$,由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

(16)解 (Ⅰ)记$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=S(x)+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=S(x)+\frac{3x}{(1-x)^2},$$

即得

$$S'(x)-S(x)=\frac{3x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1,$$

且$S(0)=a_0=5$.

(Ⅱ)解1 $S(x)=e^x(3\int e^{-x}\dfrac{x}{(1-x)^2}dx+C)=e^x(\dfrac{3e^{-x}}{1-x}+C)=Ce^x+\dfrac{3}{1-x}$.

由$a_0=5=S(0)$知,$C=2$,故

$$S(x)=2e^x+\frac{3}{1-x},\quad -1<x<1.$$

解2 由题设得,$n(a_n-3)=a_{n-1}-3$. 令$b_n=a_n-3$,所以$nb_n=b_{n-1}$,则$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{1}{n}$,…,$\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{1}{2}$,又因为$b_1=a_1-3=a_0-3=2$,所以$b_n=\dfrac{2}{n!}$,故$a_n=\dfrac{2}{n!}+3$,故

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{n!}+3)x^n=2e^x+\frac{3}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

(17)解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi'f_2';$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$$

$$+xy^2\varphi'[(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\varphi'2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi' f_2'$$

$$=-f_1'+4xy\varphi' f_2'+2x^2y^3\varphi'' f_2'-xf_{11}''+(2x^2y-xy^2)\varphi' f_{12}''+2x^2y^3\varphi'^2 f_{22}'',$$

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$，从而

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)+4f_2'(0,1)-f_{11}''(0,1).$$

（18）证　（Ⅰ）用反证法. 假设 $g(b)-g(a)=g'(a)(b-a)$，由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使

$$g(b)-g(a)=g'(\xi_1)(b-a),$$

从而由假设知 $g'(\xi_1)=g'(a)$，再由 Rolle 中值定理知，存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$，使 $g''(\xi_2)=0$，这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾，因此 $g(b)-g(a)\neq g'(a)(b-a)$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),\ G(x)=g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)$，则

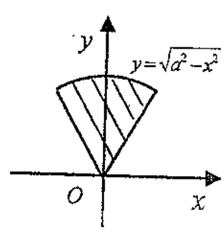
$$F(a)=G(a)=0,\quad F'(a)=G'(a)=0,\ 且\quad F''(x)=f''(x),G''(x)=g''(x),$$

故对 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次运用 Cauchy 中值定理得

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_3)}{G'(\xi_3)}=\frac{F'(\xi_3)-F'(a)}{G'(\xi_3)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)},$$

其中 $\xi_3\in(a,b)$，$\xi\in(a,\xi_3)\subset(a,b)$.

（19）解　（Ⅰ）由对称性知 $\iint\limits_{D(a)}2xy\,d\sigma=0$，所以



$$\iint\limits_{D(a)}(x+y)^2d\sigma=\iint\limits_{D(a)}(x^2+y^2)d\sigma=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_0^a r^2 r\,dr=\frac{\pi}{12}a^4;$$

又 $\iint\limits_{D(a)}\dfrac{\pi}{3}y\,d\sigma=\dfrac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_0^a r\sin\theta\cdot r\,dr=\dfrac{\pi}{9}a^3$；$\iint\limits_{D(a)}6\,d\sigma=6\cdot\dfrac{1}{6}\pi a^2=\pi a^2$，

所以 $I(a)=\pi a^2\left(\dfrac{a^2}{12}-\dfrac{a}{9}-1\right)$.

（Ⅱ）$I'(a)=\dfrac{\pi}{3}a^3-\dfrac{\pi}{3}a^2-2\pi a=\dfrac{\pi}{3}a(a^2-a-6)\overset{令}{=}0$，又因为 $a>0$，所以 $a=3$.

$I''(a)=\pi a^2-\frac{2\pi}{3}a-2\pi, I''(3)=5\pi>0$. 从而当 $a=3$ 时，$I(a)$ 最小.

（20）解 由题意可知 $r(A)=2$，且有

$$\begin{cases}\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_1+2\alpha_2+0\cdot\alpha_3+\alpha_4=0,\\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+0\cdot\alpha_4=0,\end{cases} \text{得} \begin{cases}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\\ \alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2,\\ \beta=2\alpha_1-5\alpha_2+0\cdot\alpha_3,\end{cases}$$

可知 α_1,α_2 线性无关，故 $r(B)=2$，并由此知 $By=0$ 的基础解系中只含一个向量，且 $(2, -5, 0)^T$ 为 $By=\beta$ 的一个特解.

又由 $-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ 知 $(-1, 1, 1)^T$ 为 $By=0$ 的非零解，可作为基础解系，故 $By=\beta$ 的通解为

$$y=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R.$$

（21）解 （Ⅰ）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，$|A|=a^2-4$. 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+(-1)+0=0.$$

若 $a>2$，则 $|A|>0$，故 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0$. 由此知 A 的特征值为正负负，故 A 的规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

（Ⅱ）由题意知 $|A|=0$，从而 $a^2=4$，从而 $|\lambda E-A|=\lambda^3-(5+a^2)\lambda-a^2+4=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，所以在正交变换下的标准形为 $3y_1^2-3y_2^2$.

（22）解 （Ⅰ）由几何概型知 $P\{R\le\frac{1}{2},\Theta\le\frac{\pi}{2}\}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{16}$.

（Ⅱ）记 (R,Θ) 的分布函数为 $F_{R,\Theta}(r,\theta)$，则 $F_{R,\Theta}(r,\theta)=P\{R\le r,\Theta\le\theta\}$.

当 $r<0$ 或 $\theta<0$ 时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=0$；当 $r>1$ 且 $\theta>2\pi$ 时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=1$；

当 $0\le r\le1, 0\le\theta\le2\pi$ 时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{r^2\pi\times\frac{\theta}{2\pi}}{\pi}=\frac{r^2\theta}{2\pi}$；

同理. 当 $r>1, 0\le\theta\le2\pi$ 时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{\theta}{2\pi}$；当 $0\le r\le1, \theta>2\pi$ 时，$F_{R,\Theta}(r,\theta)=r^2$.

19、20全程资料请加群690261900

进而得

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=\frac{\partial^2 F_{R,\Theta}(r,\theta)}{\partial r\partial\theta}=\begin{cases}\dfrac{r}{\pi}, & 0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

并且 R 和 Θ 的边缘密度分别为

$$f_R(r)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R,\Theta}(r,\theta)d\theta=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{r}{\pi}d\theta, & 0\le r\le 1,\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2r, & 0\le r\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

$$f_\Theta(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{R,\Theta}(r,\theta)dr=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1}\frac{r}{\pi}dr, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta\le 2\pi,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

由于 $f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)f_\Theta(\theta)$，所以 R 和 Θ 相互独立.

（23）解　设 $X_i=\begin{cases}1, & 第i次取到涂有颜色的球,\\ 0, & 第i次取到没有颜色的球,\end{cases}$ $i=1,2\cdots 6$，由题意，总体 $X:\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\dfrac{10}{N} & \dfrac{10}{N}\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）令 $\overline{x}=EX$，得 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{10}{N}$，解得 $\hat{N}=15$.

（Ⅱ）$L=(\dfrac{10}{N})^4(1-\dfrac{10}{N})^2$，$\ln L=4\ln\dfrac{10}{N}+2\ln(1-\dfrac{10}{N})$，令 $\dfrac{d\ln L}{dN}=-\dfrac{4}{N}+2(\dfrac{1}{N-10}-\dfrac{1}{N})=0$，解得 $\hat{N}=15$.

（Ⅲ）第 4 次取球恰好第 2 次取到涂有颜色的球的概率的极大似然估计值为

$$p=C_3^1(\frac{10}{N})(1-\frac{10}{N})^2\cdot\frac{10}{N}=3(\frac{10}{N})^2(1-\frac{10}{N})^2,$$

则 p 的极大似然估计值 $\hat{p}=3\cdot(\dfrac{2}{3})^2\cdot(1-\dfrac{2}{3})^2=\dfrac{4}{27}$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）答案：选（A）.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1+xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+f(x)+xf'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+f(0)}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f'(x)=3$，

故知 $f(0)=-1$；又

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+f(0)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0),\ \frac{1}{2}\lim_{x\to0}f'(x)=\frac{1}{2}f'(0),$$

所以 $\dfrac{1}{2}+f'(0)=3$，得 $f'(0)=\dfrac{5}{2}$，故选（A）.

（2）答案：选（D）.

解 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值 $f(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$，则 $f'(x_0)=0,f(x_0)>0$．但由已知条件得 $f''(x_0)=-v(x_0)f(x_0)>0$，所以 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值 $f(x_0)$，矛盾，故 $f(x)$ 在 (a,b) 不能取正的最大值，同理知 $f(x)$ 在 (a,b) 内也不能取负的最小值，选（D）.

（3）答案：选（B）.

解 由于 $\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{x^4+x^4}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

又因为 $f_x'(0,0)=0,f_y'(0,0)=0$，知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处两个偏导数均存在.

（4）答案：选（C）.

解 由于 $$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以 $F'(0)=1$.

$$\text{由于}\lim_{x\to0^-}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{G(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{G'(x)}{1}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以 $G_-'(0)=1$；又

19、20全程资料请加群690261900

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0,$$

所以$G'_+(0)=0$，故$G(x)$在点$x=0$处不可导.

（5）答案：选（B）.

解　由题意知，$r(A)=2$，故α_1,α_2无关. 又因$\alpha_1{}^T\xi=\alpha_2{}^T\xi=0$，得$\xi^T\alpha_1=\xi^T\alpha_2=0$，若有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\xi=0,$$

上式左乘ξ^T,得$k_3\xi^T\xi=0$，故$k_3=0$，代入上式，得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$，从而有$k_1=k_2=0$，选（B）.

（6）答案：选（B）.

解　由题意可知，$E(3,1(2))AE(3,1(-2))=B$，即$E^{-1}(3,1(-2))AE(3,1(-2))=B$，所以$A,B$相似. 又$A$为实对称阵，所以$A$相似于对角阵$\Lambda$，由传递性知，$B$必相似于对角矩阵.

（7）答案：选（D）.

解　$F(x)=\dfrac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$在点$x=0$处不右连续，（A）不正确.

$F(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$不是非负函数，如$F(-1)=\dfrac{-1}{e-1}<0$. 另外，$F'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$，当$x<-1$时，$F(x)$为单减函数，（B）不正确.

$F(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$，有$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，（C）不正确. 故选（D）.

（8）答案：选（A）.

解　如果$X\sim B(1,p),Y\sim B(1,p)$，则

X与Y不相关$\Leftrightarrow E(XY)=EXEY\Leftrightarrow P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}\Leftrightarrow X$与$Y$相互独立.

(详细过程参见 2015 年超越强化班讲义第 282 页例 4(4))

二、填空题

（9）答案：填“$(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}$”.

解 1　$f^{(2n+1)}(x)=C_{2n+1}^0\cdot x^2(\sin 2x)^{(2n+1)}+C_{2n+1}^1\cdot 2x(\sin 2x)^{(2n)}+C_{2n+1}^2\cdot 2(\sin 2x)^{(2n-1)}$，

所以　$$f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)\cdot 2n\cdot 2^{2n-1}\cdot\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})=(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}.$$

19、20全程资料请加群690261900

解 2　一方面，

$$f(x)=x^2[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots]=2x^3-\frac{2^3x^5}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n+1}}{(2n-1)!}+\cdots.$$

另一方面，　$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots.$$

比较系数，有 $\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}=(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$，故 $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^{n-1}2n(2n+1)2^{2n-1}$.

（10）答案：填“2”.

解　$\int_0^1(\ln x)^2dx=x\ln^2x\Big|_0^1-2\int_0^1\ln xdx=-2\int_0^1\ln xdx=-2(x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1dx)=2$.

（11）答案：填“$f_1'(0,0)$”.

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y(f_1'+f_2'\cdot 2xy)=yf_1'+2xy^2f_2',$$

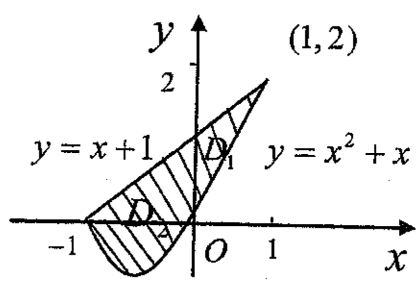
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot x^2)+4xyf_2'+2xy^2(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot x^2)$$

$$=f_1'+4xyf_2'-yf_{11}''+xy(x-2y)f_{12}''+2x^3y^2f_{22}''.$$

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f_1'(0,0)$.

（12）答案：填“$\int_{-1}^1dx\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)dy$”.

积分区域如图所示.



（13）答案：填“2”.

解　由 $A\neq O$，得 $r(A)\geq 1$，由 $A^2=O$，得 $r(A)+r(A)\leq 3$，故 $r(A)\leq\dfrac{3}{2}<2$，从而 $r(A)=1$，故填“2”.

（14）答案：填“$1-e^{-2}$”.

解　$P\{Y<EY\}=P\{(X-EX)^2<DX\}=P\{|X-EX|<\sqrt{DX}\}=P\{\left|X-\frac{1}{\lambda}\right|<\frac{1}{\lambda}\}$

$$=P\{0<X<\frac{2}{\lambda}\}=\int_0^{\frac{2}{\lambda}}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{\frac{2}{\lambda}}=1-e^{-2}.$$

三、解答题

（15）解 $m=e^{-x}(x^2-3)$，令 $\varphi(x)=e^{-x}(x^2-3)$，则 ……3 分

$\varphi'(x)=-e^{-x}(x^2-3)+e^{-x}\cdot 2x=-e^{-x}(x+1)(x-3)$，解 $\varphi'(x)=0$，得 $x_1=-1,x_2=3$，

由此可得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	单调递减	$-2e$	单调递增	$6e^{-3}$	单调递减

故 $\varphi(x)$ 当 $x=-1$ 时取极小值 $-2e$；当 $x=3$ 时取极大值 $6e^{-3}$，又 $\varphi(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to 0$，因此 ……6 分

①当 $m<-2e$ 时方程无实根；

②当 $-2e<m\le 0$ 及 $m=6e^{-3}$ 时，方程有两个实根；

③当 $0<m<6e^{-3}$ 时方程为三个实根；

④ $m>6e^{-3}$ 时，方程有一个实根. ……10 分

（16）证 （Ⅰ）在已知方程两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$F_1'\frac{z-z_0-\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)}{(z-z_0)^2}+F_2'\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}(y-y_0)}{(z-z_0)^2}=0,$$

$$F_1'\frac{-\frac{\partial z}{\partial y}(x-x_0)}{(z-z_0)^2}+F_2'\frac{z-z_0-\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)}{(z-z_0)^2}=0,$$ ……3 分

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(z-z_0)F_1'}{(x-x_0)F_1'+(y-y_0)F_2'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(z-z_0)F_2'}{(x-x_0)F_1'+(y-y_0)F_2'}$. 从而

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$ ……5 分

（Ⅱ）在（Ⅰ）式两边分别对x,y求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+(x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x},\ (x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y},$$ ……7分

得$(x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，$(x-x_0)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+(y-y_0)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 移项后相乘，并消去$x-x_0,y-y_0$，

整理即得$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$. ……10分

（17）解　首先考虑正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx.$$ ……2分

因为当$x\in[0,1]$时，$\ln(1+x)\le x$，$(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)\le(1-x)x^n$，所以

$$\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\le\int_0^1(1-x)x^n dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^2}.$$ ……6分

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx$也收敛.

注意到

$$\left|\sin n\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\right|\le\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx,$$ ……8分

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin n\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx\right|$，即原级数绝对收敛. ……10分

（18）解　由于$y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]$，又由题设知

$f_1'(x,x)+f_2'(x,x)=x^2$，故$y'(x)=-2y(x)+x^2e^{-2x}$，即$y'(x)+2y(x)=x^2e^{-2x}$. ……6分

解此一阶线性微分方程，得$y(x)=e^{-\int 2dx}(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C)=(\frac{x^3}{3}+C)e^{-2x}$，

由$y(0)=1$知$C=1$，所以$y(x)=(\frac{x^3}{3}+1)e^{-2x}$. ……10分

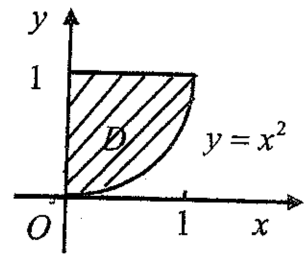
19、20全程资料请加群690261900

（19）解 $I=\iint\limits_D xe^{-(1-x^2)^2}d\sigma+\iint\limits_D xe^{-y^2}d\sigma=I_1+I_2$. ……2 分

$I_1=\int_0^1[\int_{x^2}^1 xe^{-(1-x^2)^2}dy]dx=\int_0^1(1-x^2)xe^{-(1-x^2)^2}dx$

$=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-(1-x^2)^2}d(1-x^2)^2=\frac{1}{4}e^{-(1-x^2)^2}\Big|_0^1$

$=\frac{1}{4}(1-e^{-1})$. ……6 分



$I_2=\int_0^1[\int_0^{\sqrt{y}}xe^{-y^2}dx]dy=\frac{1}{2}\int_0^1 ye^{-y^2}dy=-\frac{1}{4}e^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(1-e^{-1})$, ……8 分

所以$I=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$. ……10 分

（20）解 （Ⅰ）因为$r(B)=2$，故$Bx=0$的基础解系含有2个无关的解，进而得$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. 又

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&-1&a\\1&1&b\\2&4&6\\3&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&2&b-a\\0&6&6-2a\\0&2&2-3a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&2&b-a\\0&0&6-3b+a\\0&0&2-b-2a\end{pmatrix},$$

所以$\begin{cases}6-3b+a=0,\\2-b-2a=0,\end{cases}$得$a=0,b=2$. ……5 分

（Ⅱ）由于α_1,α_2线性无关，且$4-r(B)=2$，所以α_1,α_2为$Bx=0$的基础解系. ……7 分

方法1 把α_1,α_2正交化，取

$$\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\ \beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\begin{pmatrix}k_1-k_2\\k_1+k_2\\2k_1+4k_2\\3k_1-k_2\end{pmatrix},$$

由$\beta_1\perp\beta_2$，得$k_1-k_2+k_1+k_2+4k_1+8k_2+9k_1-3k_2=0$，即$k_2=-3k_1$，取$k_1=1,k_2=-3$，得

$\beta_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\-10\\6\end{pmatrix}$，可取$\frac{\beta_2}{2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\3\end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\\3\end{pmatrix}$为$Bx=0$的正交的基础解系. ……11 分

方法 2 由施密特正交化公式：

$$\beta_1=\alpha_1,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\\-3\end{pmatrix},$$

则 β_1,β_2 为 $Bx=0$ 的正交的基础解系. ……11 分

(21) 解 (Ⅰ) 记 $x=(x_1,x_2,x_3)^T,\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3})^T,i=1,2,3$，则 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix},A^T=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

由于 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=x^T\alpha_1=\alpha_1^Tx$，故

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)^2=x^T\alpha_1\alpha_1^Tx.$$

同理，$(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)^2=x^T\alpha_2\alpha_2^Tx$，$(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)^2=x^T\alpha_3\alpha_3^Tx$，因此，

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)^2=x^T(\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T)x=x^T(A^TA)x.$$

所以 f 的矩阵为 A^TA. …… 7 分

(Ⅱ) $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow\forall x\neq0,x^T(A^TA)x>0$，即

$$(Ax)^TAx>0\Leftrightarrow\forall x\neq0,\|Ax\|^2>0\Leftrightarrow\forall x\neq0,Ax\neq0\Leftrightarrow|A|\neq0.$$ ……11 分

(22) 解 (Ⅰ) 设 A_n 表示第 n 次试验成功，$n=1,2,\cdots$，则 $P(A_1)=P_1=\frac{1}{2}$，且当 $n\geq2$ 时，

$$P_n=P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A}_{n-1})P(A_n|\overline{A}_{n-1})=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{3}{4}(1-P_{n-1})=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}P_{n-1}.$$ ……3 分

由于

$$P_n-\frac{3}{5}=-\frac{1}{4}(P_{n-1}-\frac{3}{5})=\cdots=(-\frac{1}{4})^{n-1}(P_1-\frac{3}{5})=-\frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1},$$

所以

$$P_n=\frac{3}{5}-\frac{1}{10}(-\frac{1}{4})^{n-1},\ n=1,2,\cdots.$$ ……6 分

(Ⅱ) $P\{X=1\}=P_1=\frac{1}{2}$；当 $n\geq2$ 时，

$$P\{X=n\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_n|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_n|\overline{A}_{n-1})=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{n-2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\cdot(\frac{1}{4})^{n-2},$$ ……8 分

所以

$$EX=1\times\frac{1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot\frac{3}{8}(\frac{1}{4})^{n-2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot4\sum_{n=2}^{\infty}n(\frac{1}{4})^{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\sum_{n=2}^{\infty}x^n)'\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{x^2}{1-x})'\Big|_{x=\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}[\frac{1}{(1-x)^2}-1]\Big|_{x=\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}[\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2}-1]=\frac{5}{3}.$$ ……11 分

（23）解 （Ⅰ）由题意知，$Y=\ln X$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<y<+\infty$.

因为 $x=e^y$ 单增，$y=\ln x$，由公式得 $X=e^Y$ 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ ……5 分

（Ⅱ）$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}$,

$$\ln L(\lambda)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2,$$

由 $\frac{d\ln L}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2=0$，得 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2$.

（Ⅲ）$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}(\ln X_i-\mu)^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\ln X_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D(\ln X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$.

……11 分

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）答案：选（D）.

解　由题意知 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$，故

$$\lim_{x\to -1^-} f(-x) \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1)\text{，}\quad \lim_{x\to -1^+} f(-\frac{1}{x}) \overset{t=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 1^+} f(t)=f(1).$$

（2）答案：选（C）.

解　（A）设有 $|b_n|\le M$，从而 $|a_nb_n|\le M|a_n|$，由比较判别法可知（A）正确.

（B）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 T_n，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 存在. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 的部分和为

$$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})=T_n-na_{n+1}\text{，}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_{n+1}=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(T_n-na_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 存在，故（B）正确.

（C）不正确. 如 $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1<1$，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散.

（D）设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_n+a_2a_n+\cdots+a_n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nS_n$. 又正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故其部分和数列 T_n 有界，设 $T_n\le M$，所以 $|S_n|\le T_n\le M$，从而 $|a_nS_n|\le M|a_n|$，由比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_n+a_2a_n+\cdots+a_n^2)$ 收敛.

（3）答案：选（C）.

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=2$，由极限保号性定理可知存在 $\delta>0$，在 $(0,\delta)$ 内有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增，所以选（C）.

取 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 得 $f'(x)=2\,(x\ne 0)$，故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=2$. 但 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x-1}{x}=\infty$，

即 $f_+'(0)$ 不存在，故（A）不正确；

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$，故（B）不正确；且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，故（D）不正确.

（4）答案：选（B）.

解 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx \overset{x=\sqrt{u}}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du)$，

而
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du \overset{x=\pi-t}{=} -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{\pi-t}}dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{\pi-u}}du$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\left(\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{\pi-u}}\right)du>0.\qquad J \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin te^{\cos^2 t}dt=0,$$

所以选（B）.

（5）答案：选（B）.

解 $A_1x=\beta_1$ 与 $A_2x=\beta_2$ 同解的充要条件为 $(A_1\vdots\beta_1)$ 与 $(A_2\vdots\beta_2)$ 的行向量组等价，故 A_1 与 A_2 的行向量组必等价，（Ⅲ）正确．又由

$$r(A_1\vdots\beta_1)=r(A_2\vdots\beta_2)=r\begin{pmatrix}A_1 & \beta_1\\ A_2 & \beta_2\end{pmatrix}，\text{及}\quad r(A_1\vdots\beta_1)=r(A_1),\ r(A_2\vdots\beta_2)=r(A_2)$$

知（Ⅰ）正确，因此正确的个数为 2.

反例，取 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$；$A_2=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. 显然

$$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\2x_1+2x_2=2\end{cases}\quad\text{与}\quad\begin{cases}3x_1+3x_2=3,\\x_1+x_2=1\end{cases}$$

同解，但（Ⅱ），（Ⅳ），（Ⅴ）不正确；故选（B）.

（6）答案：选（C）.

解 $\begin{vmatrix}c & \alpha^T\\ \beta & A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b+b & \alpha^T\\ 0+\beta & A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c-b & \alpha^T\\ 0 & A\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & \alpha^T\\ \beta & A\end{vmatrix}=(c-b)|A|+0=(c-b)a$，故选（C）.

（7）答案：选（A）．

解　由$P(AB)>P(A)P(B)$知，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$．

由$P((A-C)B)=P(A-C)P(B)$，得$P(AB)-P(C)=[P(A)-P(C)]P(B)$，解得

$$P(C)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{[P(A)-P(A)P(B)]-[P(A)-P(AB)]}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P(A)P(\overline{B})-P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)-P(A|\overline{B}).$$

（8）答案：选（A）．

解　(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他,\end{cases}$所以

$$EU-EV=E(U-V)=E|X-Y|=\iint\limits_D|x-y|\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}.$$

二、填空题

（9）答案：填“$\frac{3}{4}$”．

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{4}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{3}{4}$．

（10）答案：填“$a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$”．

解　特征方程为$r^2+4=0$，特征根为$r_{1,2}=\pm 2i$．

将微分方程转化为$y''+4y=1+\cos 2x$．

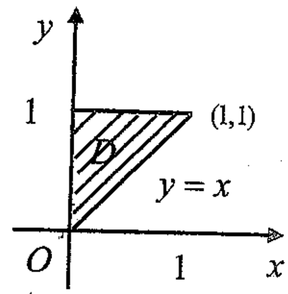
对于$f_1(x)=1$，可设$y_1^*=a$；对于$f_2(x)=\cos 2x$，可设$y_2^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，

由叠加原理可知特解形式为$y^*=y_1^*+y_2^*=a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$．

（11）答案：填“$2xf+2x^3y(f_1'+e^{x^2y}f_2')$”．

解　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf(x^2y,e^{x^2y})$，$\dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}=2xf+2xy(f_1'\cdot x^2+f_2'\cdot e^{x^2y}\cdot x^2)=2xf+2x^3y(f_1'+e^{x^2y}f_2')$．

（12）答案：填“$\dfrac{\pi-2}{6\pi}$”.



解　原式$=\iint\limits_D y\cdot\dfrac{1}{2}(1-\cos\dfrac{\pi x}{2y})d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^y\dfrac{1}{2}y(1-\cos\dfrac{\pi x}{2y})dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2y}\right)\Big|_0^y dx=\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{\pi}\right)dx=\frac{\pi-2}{6\pi}.$$

（13）答案：填“$\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$”.

解　由$A\alpha=\beta,A\beta=\alpha$，知$A(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,A(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$，得$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$为$A$的两个特征值，又由于$A$为不可逆矩阵，故$|A|=0$，即$\lambda_3=0$为$A$的特征值，因为三阶矩阵$A$的特征值互异，所以$A$相似于对角阵$\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}$.

（14）答案：填“$1-5e^{-4}$”.

解　由泊松分布的性质知$\sum\limits_{i=1}^{4}X_i\sim P(4)$，所以

$$P\{\overline{X}>\frac{1}{4}\}=P\{\sum_{i=1}^{4}X_i>1\}=1-P\{\sum_{i=1}^{4}X_i=0\}-P\{\sum_{i=1}^{4}X_i=1\}=1-\frac{1}{0!}e^{-4}-\frac{4}{1!}e^{-4}=1-5e^{-4}.$$

三、解答题

（15）证　（Ⅰ）由题设知$x_n>0,n=1,2,\cdots$. 由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{4}x_n+\frac{1}{x_n^3}\geq 4\sqrt[4]{(\frac{1}{4})^3}=\sqrt{2},$$

故$x_n\geq\sqrt{2},n=1,2,\cdots$.

或令$f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{x^3},x>0$，则$f'(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{x^4}=\dfrac{3(x^4-4)}{4x^4}$，

当$0<x<\sqrt{2}$时，$f'(x)<0$；当$\sqrt{2}<x<+\infty$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$取最小值$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，从而$x_n\geq\sqrt{2},n=1,2,\cdots$.

……2分

又$x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{x_n^3}-\dfrac{1}{4}x_n=\dfrac{4-x_n^4}{4x_n^3}\leq 0$，故$x_{n+1}\leq x_n$，从而数列$\{x_n\}$单减有下界，因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

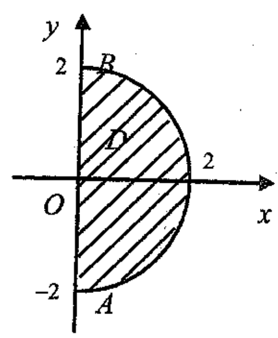
……4分

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$x_n\geq\sqrt{2}$知$a\geq\sqrt{2}$. 在$x_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{x_n^3}$两边令$n\to\infty$，有$a=\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{a^3}$，整理得

$a^4=4$，所以 $a=\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$．　　……6 分

（Ⅱ）由于 $x_{n+1}-x_n\le 0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x_{n+1}-x_n)$ 为交错级数．由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$．再由 $\{x_n\}$ 单调递减知，$\{\frac{1}{4}x_n-\frac{1}{x_n^3}\}$ 也单调递减，亦即 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 单调递减，利用莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x_n-x_{n+1})$ 收敛．　　……10 分

（16）解　$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2,\frac{\partial z}{\partial x}=2y+2$，由此得 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点 $(1,-1)$．　　……2 分



在直线段 $\overline{AB}:x=0\,(-2\le y\le 2)$ 上，将 $x=0$ 代入函数，得

$$z=y^2+2y\quad(-2\le y\le 2).$$

由 $\frac{dz}{dy}=2y+2=0$ 得 $y_0=-1$，所以驻点为 $(0,-1)$．　……2 分

在半圆 $\overset{\frown}{AB}:x^2+y^2=4\,(x\ge 0)$ 上，记

$$F(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+\lambda(x^2+y^2-4),$$

令

$$\begin{cases}F_x'=2x-2+2\lambda x=0, & (1)\\ F_y'=2y+2+2\lambda y=0, & (2)\\ x^2+y^2-4=0. & (3)\end{cases}$$

显然 $\lambda=-1$ 不是上述方程组的解．由(1),(2)两式解得 $x=\frac{1}{\lambda+1},y=-\frac{1}{\lambda+1}$，代入(3)式，得 $\frac{1}{\lambda+1}=\pm\sqrt{2}$．注意到在 $\overset{\frown}{AB}$ 上有 $x\ge 0$，所以由（1），（2），（3）可解得驻点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$．　　……8 分

比较下列函数值的大小：

$$z\big|_{(1,-1)}=-2,\quad z\big|_{(0,-1)}=-1,\quad z\big|_{(0,-2)}=0,\quad z\big|_{(0,2)}=8,\quad z\big|_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})}=4(1-\sqrt{2}),$$

得函数在 D 上的最大值为 8，最小值为 -2．　　……10 分

（17）解　（Ⅰ）$f(x+\pi)=\frac{x+\pi}{\pi}-[\frac{x+\pi}{\pi}]=\frac{x}{\pi}+1-[\frac{x}{\pi}+1]=\frac{x}{\pi}+1-([\frac{x}{\pi}]+1)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]=f(x)$，

所以 $f(x)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]$ 是以 π 为周期的周期函数．　　……2 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}$ 仍是以 π 为周期的周期函数．　　……3 分

解 1　$I=100\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$．

当 $0 \le x < \pi$ 时，$[\frac{x}{\pi}] = 0$，$|\sin x| = \sin x$，故

$$I = \frac{100}{\pi}\int_0^{\pi} x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} \frac{100}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t+\frac{\pi}{2})\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$ ……7 分

$$=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt = 100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t} = 100\times\arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 25\pi$$ ……10 分

解 2 $I = 100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$，且 $x \ne 0$ 时，$\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2}$ 为奇函数，故

$$I = 100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx = 100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx = 100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}dx = -100\times\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 25\pi.$$ ……10 分

（18）证 由 $f(\frac{1}{2})$ 分别在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的泰勒公式得

$$f(\frac{1}{2}) = f(0)+f'(0)(\frac{1}{2}-0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{1}{2}-0)^2 = f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{8},\quad \xi_1\in(0,\frac{1}{2});$$

$$f(\frac{1}{2}) = f(1)+f'(1)(\frac{1}{2}-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{1}{2}-1)^2 = f(1)+\frac{f''(\xi_2)}{8},\quad \xi_2\in(\frac{1}{2},1).$$ ……4 分

（I） 两式相加，得

$$2f(\frac{1}{2}) = f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}.$$

由于 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理知，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，所以有

$$2f(\frac{1}{2}) = f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi)}{4}.$$ ……7 分

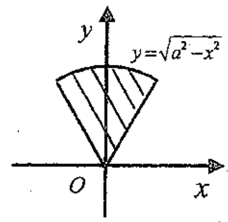
（II） 两式相减．并取绝对值，得

$$|f(1)-f(0)| = \frac{1}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)| \le \frac{1}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].$$

记 $|f''(\eta)| = \max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则 $\eta = \xi_1$ 或 $\xi_2 \in (0,1)$，且

$$|f(1)-f(0)| \le \frac{1}{8}[|f''(\eta)|+|f''(\eta)|] = \frac{1}{4}|f''(\eta)|.$$ ……10 分

(19) 解 （Ⅰ）由对称性知 $\iint\limits_{D(a)} 2xy d\sigma = 0$，所以 ……2 分



$$\iint\limits_{D(a)} (x+y)^2 d\sigma = \iint\limits_{D(a)} (x^2+y^2) d\sigma = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int_0^a r^2 r dr = \frac{\pi}{12} a^4;$$ ……4 分

又 $\iint\limits_{D(a)} \frac{\pi}{3} y d\sigma = \frac{\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int_0^a r\sin\theta \cdot r dr = \frac{\pi}{9} a^3$； $\iint\limits_{D(a)} 6 d\sigma = 6 \cdot \frac{1}{6}\pi a^2 = \pi a^2$， ……6 分

所以
$$I(a) = \pi a^2 \left(\frac{a^2}{12} - \frac{a}{9} - 1\right).$$ ……7 分

（Ⅱ）$I'(a) = \frac{\pi}{3} a^3 - \frac{\pi}{3} a^2 - 2\pi a = \frac{\pi}{3} a(a^2 - a - 6) \overset{令}{=} 0$，又因为 $a > 0$，所以 $a = 3$.

$I''(a) = \pi a^2 - \frac{2\pi}{3} a - 2\pi, I''(3) = 5\pi > 0$．从而当 $a = 3$ 时，$I(a)$ 最小. ……10 分

(20) 解 由题意知 $X_0 = O, X_1 = E$，且 $X_{k+1} = AX_k + E$，$X_k = AX_{k-1} + E$，则

$$X_{k+1} - X_k = A(X_k - X_{k-1}) = A^2(X_{k-1} - X_{k-2}) = \cdots = A^k(X_1 - X_0) = A^k,$$ ……3 分

故

$$X_n - X_{n-1} = A^{n-1}, X_{n-1} - X_{n-2} = A^{n-2}, \cdots, X_2 - X_1 = A, X_1 = E,$$

相加得 $X_n = A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + E$. ……7 分

由于 $A^2 = A^T, A^3 = E$，故

$$X_n = \begin{cases} mJ, & n = 3m \text{时}, \\ mJ + E, & n = 3m+1 \text{时}, \\ mJ + E + A, & n = 3m+2 \text{时}, \end{cases}$$

其中 $J = E + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$m = 0, 1, \cdots$. ……11 分

(21) 解 （Ⅰ）因为 A 与 Λ 合同，所以 A 的特征值为零正正，故 $|A| = 0$，计算得 $a = 2$. ……3 分

（Ⅱ）由 $|A - \lambda E| = 0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$. ……6 分

$Ax = 0$ 得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$； $(A - E)x = 0$ 得 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$； $(A - 3E)x = 0$ 得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ……9 分

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化得

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \text{取}\quad Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

令 $x=Qy$，则有 $f=y_2^2+3y_3^2$.

……11 分

（22）解　（Ⅰ）由于 $P\{Y=1\}=P\{X\geq 0\}=\frac{3}{4}$，所以 Y 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

$$P\{X\leq\frac{1}{2}\Big|Y=1\}=\frac{P\{X\leq\frac{1}{2},Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{P\{X\leq\frac{1}{2},X\geq 0\}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}.$$

……4 分

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{XY\leq z\}$.

（i）当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；　　（ii）当 $z\geq 3$ 时，$F_Z(z)=1$；

……7 分

（iii）当 $0\leq z<3$ 时，

法 1
$$F_Z(z)=P\{Y=0,Z\leq z\}+P\{Y=1,Z\leq z\}$$
$$=P\{X<0,0\leq z\}+P\{X\geq 0,X\leq z\}=\frac{1}{4}+\frac{z}{4};$$

法 2　由于 $Z=XY=\begin{cases}0, & X<0,\\ X, & X\geq 0,\end{cases}$　故　$F_Z(z)=P\{-1\leq X\leq z\}=\frac{z+1}{4}$.

综上，Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{z+1}{4}, & 0\leq z<3,\\ 1, & z\geq 3.\end{cases}$

……11 分

（23）解　（Ⅰ）由于 $\chi^2\sim\chi^2(1)$，可设 $X\sim N(0,1)$，$\chi^2=X^2$，故

$P\{\chi^2\leq 1\}=P\{X^2\leq 1\}=P\{-1\leq X\leq 1\}=2\Phi(1)-1=2\times 0.8413-1=0.6826$；

……4 分

（Ⅱ）由于 $F\sim F(1,1)$，得 $\frac{1}{F}\sim F(1,1)$，所以 $P\{F\leq 1\}=P\{\frac{1}{F}\geq 1\}=P\{F\geq 1\}$，又因为

$P\{F\leq 1\}+P\{F\geq 1\}=1$，所以 $P\{F\leq 1\}=\frac{1}{2}$.

……8 分

（Ⅲ）由于 $T\sim T(1)$，得 $T^2\sim F(1,1)$，所以 $P\{-1\leq T\leq 1\}=P\{T^2\leq 1\}=\frac{1}{2}$.

……11 分