17 堂课搞定高数重难点

授课老师：武忠祥教授

武忠祥考研

武忠祥考研

专题 1：求极限的方法和技巧

(一) 求极限的常用方法

方法 1 利用基本极限求极限

1) 常用的基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a\quad (a>0),\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ \infty, & |x|>1,\\ 1, & x=1\\ \text{不存在，} & x=-1.\end{cases}\qquad \lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

2) “1^{∞}”型极限常用结论

若 $\lim\alpha(x)=0$， $\lim\beta(x)=\infty$， 且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^{A}$.

可以归纳为以下三步:

1) 写标准形式　原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2) 求极限　$\lim\alpha(x)\beta(x)=A$;

3) 写结果　原式 $=e^{A}$.

【例 1】 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{n^2+n+1}{n}}}{(n+1)^n}(\sqrt[n]{3}-1)$__________.　$[\frac{\ln 3}{e}]$

【例 2】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{(x+a)}(x+b)^{(x+b)}}{(x+a+b)^{(2x+a+b)}}=$________. $[e^{-(a+b)}]$

【例 3】(2002 年 3) 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$________. $[\dfrac{1}{1-2a}]$

【例 4】 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3})^x$ ，其中 $a>0,b>0,c>0.$

【解】原式 $=\lim\limits_{\to\infty}\left[1+\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3}\right]^x$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}-3}{3})x$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)+(b^{\frac{1}{x}}-1)+(c^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)$$

$$=\ln\sqrt[3]{abc}$$

原式 $=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}$

【例 5】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$； $[e^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}]$

【例 6】$\lim\limits_{n\to 0}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $\quad(x\neq 0)$ $\qquad[\dfrac{\sin x}{x}]$

【例 7】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}+x^{48}(2x-1)}=$ ________. $\qquad[(\dfrac{3}{2})^{30}]$

【例 8】已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax+b\right)=3$，则（ ）

（A）$a=-1,b=4.$ （B）$a=1,b=-4.$

（C）$a=1,b=4.$ （D）$a=-1,b=-4.$ $\qquad(C)$

【例 9】已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)}{(2x-1)^{\beta}}=\alpha\neq 0,$，则（ ）

（A）$\alpha=5!,\beta=5.$ （B）$\alpha=\dfrac{5!}{2^5},\beta=5.$

（C）$\alpha=\dfrac{1}{2^5},\beta=5.$ （D）$\alpha=\dfrac{5}{2^5},\beta=4.$ $\qquad(B)$

【例 10】已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)(5x+1)+ax+b}{x}=16,$，则（ ）

（A）$a=1,b=1.$ （B）$a=2,b=-1.$

（C）$a=5,b=1.$ （D）$a=1,b=-1.$ $\qquad(D)$

【例 11】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$，问 a,b 取何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

【解】$f(x)=\begin{cases} ax^2+b, & |x|<1, \\ x, & |x|>1, \\ \dfrac{-1+a-b}{2}, & x=-1, \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1. \end{cases}$

$$f(-1-0)=-1=f(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$$

$$f(-1+0)=a-b=f(-1)=\frac{-1+a-b}{2}$$

则 $a-b=-1$

$$f(1-0)=a+b=f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

$$f(1+0)=1=f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

则 $a+b=1$

故 $a=0,b=1$

【例 12】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 连续，问常数 a,b 必须满足什么条件？

【解】$f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<1, \\ \dfrac{1+a+b}{2}, & x=1, \\ x^2, & x>1. \end{cases}$

$$f(1-0)=a+b$$

$$f(1)=\frac{1+a+b}{2}$$

$$f(1+0)=1.$$

则 $a+b=1$

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln(n+1)}(\sqrt[n]{n}-1)$________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x-2}-ax+b\right)=0$，则（ ）

（A） $a=-1,b=4$. （B） $a=1,b=-4$.

（C） $a=1,b=4$. （D） $a=-1,b=-2$.

3.（2016 年，数二，数三，10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

4.（2018 年，数一, 4 分）

若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$, 则 $k=$ ________.

5.（2018 年，数二, 4 分）

若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$, 则（ ）

（A） $a=\dfrac{1}{2},b=-1$. （B） $a=-\dfrac{1}{2},b=-1$.

（C） $a=\dfrac{1}{2},b=1$. （D） $a=-\dfrac{1}{2},b=1$.

6. (2010 年 1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$ __________.

(A) 1. **(B)** e. **(C)** e^{a-b}. **(D)** e^{b-a}.

7. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$, 则 $f(x)$（ ）

（A）仅有一个可去间断点； （B）仅有一个跳跃间断点；

（C）有两个可去间断点； （D）有两个跳跃间断点；

答案

1. 1; 2. (D) 3. $e^{\frac{1}{3}}$; 4. -2; 5.（B）; 6. (D) ; 7. (D).

方法 2 利用等价无穷小代换求极限

1. 等价无穷小代换的原则

1）乘、除关系可以换；

若 $\alpha\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$, 则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

2）加、减关系在一定条件下可以换；

(1) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq 1$. 则 $\alpha - \beta \sim \alpha_1 - \beta_1$.

(2) 若 $\alpha \sim \alpha_1, \beta \sim \beta_1$, 且 $\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = A \neq -1$. 则 $\alpha + \beta \sim \alpha_1 + \beta_1$.

2. 常用等价无穷小　　当 $x \to 0$ 时,

1)　$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$;

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$,　$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，　$a^x - 1 \sim x \ln a$,

2)　$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$，　　$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$，　　$x - \ln(1+x) \sim \frac{x^2}{2}$

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$　，　$x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$

【注】(1) 这五个等价无穷小中前 3 个要记住，后两个可由前两个推得. 事实上由

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}$ 得，$\arcsin(\sin x) - \sin x \sim \frac{x^3}{6} \sim \frac{\sin^3 x}{6}$, 从而有

$\arcsin x - x \sim \frac{x^3}{6}$；同理可由 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ 推得 $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$.

(2) 由这几个等价无穷小及等价无穷小的性质，若 $\alpha \sim \beta$, 则

$\alpha = \beta + o(\beta)$, 可得到几个泰勒公式

事实上由 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$ 得，$(\tan x - x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$，即

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

同理可得

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

3）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 则

$$\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$$

【注】特别的如果当 $x\to 0$ 时， $f(x)\sim g(x)$，则 $\int_0^x f(t)dt \sim \int_0^x g(t)dt$.

例如当 $x\to 0$ 时， $\ln(1+x^2)\sim x^2$, 则 $\int_0^x \ln(1+t^2)dt \sim \int_0^x t^2 dt = \dfrac{1}{3}x^3$.

【例 1】（2000 年 2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}=$ ______. $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 2】（2007 年 2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - \sin x}{x^3}=$ __________ $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 3】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - \tan x}{\sin x - \sin(\sin x)}=$ ______.

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sqrt{1+x^2}}{x-\ln(1+x)}=$ ______.

【例 5】 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}$ $[\dfrac{1}{n!}]$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $\left(\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}\right)$

【例 7】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{x^2}=$ ______.

【例 8】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^x-2^x}{x^2}=$ ______.

【例 9】求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$

【解】 原式= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{\ln[1+(x-1)]-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-1)\ln x}{-\dfrac{1}{2}(x-1)^2}$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^2}$$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=2$$

【例 10】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-(\arctan x)^2}{\int_0^x \arcsin t^2dt\cdot\int_0^x \cos t^2dt}$.

【解】由于当 $x\to 0$ 时， $\arcsin x^2\sim x^2$, 则 $\int_0^x \arcsin t^2dt\sim\int_0^x t^2dt=\dfrac{1}{3}x^3$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x^2}{1}=1$, 则 $\int_0^x \cos t^2dt\sim\int_0^x 1dt=x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(\arctan x)^2}{\int_0^x \arcsin t^2dt\cdot\int_0^x \cos t^2dt}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+\arctan x)(x-\arctan x)}{\frac{1}{3}x^3\cdot x}$$

$$=3[\lim_{x\to 0}\frac{x+\arctan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}]\qquad (x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3})$$

$$=3[2\cdot\frac{1}{3}]=2$$

【例 11】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导，且 $f(a)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f(a)}-\frac{1}{\int_a^x f(x)dx}\right].$$

【解】 原式$=\lim_{x\to a}\dfrac{\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(a)}{(x-a)f(a)\int_a^x f(t)dt}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(a)}{(x-a)^2f^2(a)} \qquad [\int_a^x f(t)dt\sim\int_a^x f(a)dt=(x-a)f(a)]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)f^2(a)} \qquad \text{(洛必达法则)}$$

$$=\frac{f'(a)}{2f^2(a)} \qquad \text{（导数定义）}$$

【例 12】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内二阶可导，且 $f'(a)\neq 0$. 求极限

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{(x-a)f'(a)}-\frac{1}{f(x)-f(a)}\right].$$

【解】 原式$=\lim_{x\to a}\dfrac{[f(x)-f(a)]-(x-a)f'(a)}{(x-a)f'(a)[f(x)-f(a)]}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2f'^2(a)} \qquad [f(x)-f(a)\sim(x-a)f'(a)]$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)f'^2(a)} \qquad \text{(洛必达法则)}$$

$$=\frac{f''(a)}{2f'^2(a)} \qquad \text{（导数定义）}$$

【例 13】设 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^{2019}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\lambda\neq 0$，求 α 及 λ. （$\alpha=2020$, $\lambda=\dfrac{1}{2020}$）

【例 14】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}+xe^{\frac{1}{x}}\right)$ $(\frac{1}{2})$

【例 15】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[\sin^2 x-x^2]-[\ln(1+x^2)-x^2]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x)(\sin x-x)}{x^4}-\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{x^4} \qquad (x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2)$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \qquad (x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3)$$

【例 16】求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$. $[e^{\frac{1}{2}}]$

练习题

试求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$. (-6)

2. $\lim\limits_{x\to1}(\frac{a}{1-x^a}-\frac{b}{1-x^b})$; $(\frac{a-b}{2})$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{\frac{2}{x}}\sqrt{x^2+1}-x]$, (2)

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n)}-x\right]$ $(\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n})$

方法 3 利用有理运算法则求极限

若 $\lim f(x)=A,\quad \lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A\pm B;$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B;$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad (B\neq 0)$$

推论：1）若 $\lim f(x)=A\neq 0$，则

$$\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$$

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}\lim g(x)$$

（即:极限非零的因子极限可先求出来）

2）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$;

3）若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且 $\lim f(x)=0$，则 $\lim g(x)=0$;

【注】（1）若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 一定不存在；

（2）若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 不一定存在.

【例 1】（2018 年 3）已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]=2$，求 a,b.

【解】 $2=\lim\limits_{x\to+\infty}[(ax+b)e^{\frac{1}{x}}-x]$

$$=\lim_{x\to+\infty}be^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to+\infty}(axe^{\frac{1}{x}}-x)$$

$$=b+\lim_{x\to+\infty}x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$$

即 $2-b=\lim\limits_{x\to+\infty}x(ae^{\frac{1}{x}}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)\qquad (a=1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{x}\qquad \text{（等价无穷小代换）}$$

$$=1$$

故 $a=b=1$.

【例 2】（1997 年 4）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-(\dfrac{1}{x^2}-a^2)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq0)$ $\qquad(\dfrac{a^2}{2})$

【例 3】（1994 年 3）设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 则

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

【例 4】（1993 年 3）求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}$ （有理化）

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{(-x)(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{100}{-(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1)}=-50$$

【解 2】原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1)$.

$=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2)(\dfrac{1}{2}\dfrac{100}{x^2})$ （等价代换）

$=-50$

【例 5】（1997 年 2）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解 1】原式= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}$ （分子分母同除以 $-x$ ）

$=1$

【解 2】原式= $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\sin x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$ （拆项）

$=2-1+0=1$

【例 6】设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\dfrac{2}{3}$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$ ________.

【解】 $\dfrac{2}{3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x-2x}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2x+xf(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}(2x)^3}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}$$

$$=\frac{8}{3}+\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=-2$

【例 7】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n-1)n}{2n^2}=1$

【例 8】 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{n^2})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

方法 4　利用洛必达法则求极限

若　1） $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0(\infty)$;

2） $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

3） $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）；

则 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

【注】 1) 洛必达法则主要用于 7 种不定式：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}. 其中“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$” 可直接用，后 5 种可通过以下关系图化为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限来求.

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\ \Leftarrow\left\{\begin{array}{l}0\cdot\infty\ \Leftarrow\left\{\begin{array}{l}1^{\infty}\\ \infty^{0}\\ 0^{0}\end{array}\right.\\ \\ \infty-\infty\end{array}\right.$$

2) 使用洛必达法则应该注意的几个问题

(1) 使用洛必达法则之前，应该先检验其条件是否满足；

(2) 使用洛必达法则之后，如果问题仍然是未定型极限，且仍符合洛必达法则条件，可以再次使用洛必达法则；

(3) 如果“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型极限中的函数含有极限非零的因子，可以单独求极限，不必参与洛必达法则运算，以简化运算；

(4) 如果能进行等价无穷小量代换或恒等变形配合洛必达法则使用，也可以简化运算.

【例 1】(2016 年 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$ ______. $(\dfrac{1}{2})$

【例 2】设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(x-t)dt}{\int_0^x tf(x-t)dt}$. (2)

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. $(e^{-\frac{1}{6}})$

【例 4】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan n\right)^n$. $(e^{-\frac{2}{\pi}})$

【例 5】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

【例 6】设函数 $f(x)$ 可导，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x_0 f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

【例 7】设 $f(x)$ 二阶可导 $f(0)=0,\ f'(0)=2,\ f''(0)=1$. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}.$$

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-2}{2x}$ （洛必达法则）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\frac{f''(0)}{2} \qquad \text{（导数定义）}$$

$$=\frac{1}{2}$$

【解 2】函数 $f(x)$ 带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

即 $$f(x)=2x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

【注】 经典错误： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-2}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}=\dfrac{1}{2}.$

方法 5 利用泰勒公式求极限

定理（带 Peano 余项的泰勒公式）设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处 n 阶可导，则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o(x-x_0)^n$$

特别是当 $x_0=0$ 时

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

几个常用的泰勒公式

（1） $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

（2） $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$

（3） $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

（4） $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}x\sin x}{x^3}$.

【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}x\sin x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-\dfrac{1}{2}x\left[x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]}{x^3}$$ （泰勒公式）

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$. $(-\dfrac{1}{12})$

【例 3】已知当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$ 与 x^3 是等价无穷小，求常数 a,b.

$(a=-2,b=3)$

【例 4】设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某领域内二阶可导，且 $f(0)=-1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=\dfrac{4}{3}$.

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+xf(x)}{x^3}$.

【解 1】函数 $f(x)$ 带有佩亚诺余项的二阶麦克劳林公式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

即 $$f(x)=-1+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

则 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

【解 2】 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + f(x) + xf'(x)}{3x^2}$$ （洛必达法则）

$$= \frac{1}{3}[\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + f'(x)}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}]$$

$$= \frac{1}{3}[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}f'(0) + f'(0)]$$ （导数定义）

$$= \frac{1}{2}$$

【例 5】 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}.$$

【解】原式= $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} - e + \frac{e}{2}x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x)^2} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x)^2} - 1 + \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{[1 + (-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}) + \frac{1}{2}(-\frac{x}{2})^2 + o(x^2)] - 1 + \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x + \ln(1-x)]}$ $\left(\dfrac{1}{6}\right)$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x - 1 - x}{\sqrt{1-x} - \cos\sqrt{x}}$； (-3)

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n^3 - n^2 + \dfrac{n}{2})e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6}\right]$ $(\dfrac{1}{6})$

4.设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=2$, 求 a,b 的值. $(a=2,b=1)$

5.设 $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$, 求 a,b 的值. $(a=-3,b=\dfrac{9}{2})$

6.确定常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时， $e^x(1+bx+cx^2)=1+ax+o(x^3)$.

$$(a=\frac{1}{3},b=-\frac{2}{3},c=\frac{1}{6})$$

方法 6 利用夹逼准则求极限

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n+n}\right]$ $(\dfrac{1}{3})$

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}$. 其中 $a_i>0,(i=1,2,\cdots m)$

【解】 令 $\max a_i=a$, 则

$$\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}\le\sqrt[n]{ma^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}=a$$

【注】 这是一个常用结论.

【例 3】（2008 年 4）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$（ ）.

（A） a.　　（B） a^{-1}.　　（C） b.　　（D） b^{-1}.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\dfrac{1}{a})^n+(\dfrac{1}{b})^n}$

$$=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\}=\frac{1}{a}$$

则应选(B).

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$，$(x>0)$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}$

$$=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ x, & 1\le x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & 2\le x,\end{cases}$$

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ [1]

【例 6】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1)^n+(1+\frac{1}{2})^{2n}+\cdots(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$. $[e]$

【例 7】 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}dx=$ ________.

【例 8】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x]\ln(1+\frac{1}{x})=$ ________.

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(n+k)(n+k+1)}$ $[\frac{3}{2}]$

2 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$ [1]

方法 7　利用定积分的定义求极限

【例 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$

【注】由定积分定义可知，若将区间 $[0,1]$ n 等分，第 k 个子区间上的 ξ_k 取该子区间右端点，

此时 $\Delta x_k=\frac{1}{n}$，$\xi_k=\frac{k}{n}$，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

上式右端是一种常见的积分和式的极限. 所以，用定积分定义求极限的一般方法是先提“可爱因子” $\frac{1}{n}$, 然后再确定被积函数和积分区间.

【例 2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=$ ________. $[\ln(1+\sqrt{2}]$

【例 3】（2012 年 2） $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________. $[\frac{\pi}{4}]$

【例 4】（2017 年 1, 2, 3）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. $[\frac{1}{4}]$

方法 8 利用单调有界准则求极限

【例 1】 设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{1}{x_n^2}\right), \ n=1,2,\cdots,$ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】由题设知 $x_n>0$, 且

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(x_n+x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)$$

$$\geq \sqrt[3]{x_n\cdot x_n\cdot\frac{1}{x_n^2}}=1$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{3}\left[2+\frac{1}{x_n^3}\right]\leq\frac{1}{3}\left[2+\frac{1}{1}\right]=1$$

则数列 $\{x_n\}$ 单调减且下有界，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a.$

等式 $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{1}{x_n^2}\right)$ 两端取极限得

$$a=\frac{1}{3}\left(2a+\frac{1}{a^2}\right)$$

由此解得 $a=1$.

方法 9 利用拉格朗日中值定理求极限

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$; [1]

【例 2】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}})\ (a>0)$; [$\ln a$]

【例 3】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$; [0]

【例 4】 $\lim\limits_{n\to\infty}[\cos\sqrt{n+1}-\cos\sqrt{n}]$; [0]

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2[\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}]\ (a>0)$; $[a]$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]$; [1]

【例 7】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)}{x^4}$； $[-\dfrac{1}{6}]$

【例 8】 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n})$; $[e^2]$

【例 9】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+\sin^2 x)}{x\sin^3 x}$ $[\dfrac{1}{3}]$

【例 10】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$ $[-4]$

【例 11】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$. $[\dfrac{e}{2}]$

【例 12】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-(1+x)^{\frac{e}{x}}}{x^2}$.

【解】原式= $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\xi}[(1+x)^{\frac{1}{x}}-\dfrac{e\ln(1+x)}{x}]}{x^2}$

$$=e^e\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\dfrac{e\ln(1+x)}{x}}{x^2}$$

$$=e^e\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}-e[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)]}{x^2}$$

$$=e^{e+1}\lim_{x\to0}\frac{[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^2}{8}+o(x)^2]-[1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)]}{x^2}$$

$$=\frac{1}{8}e^{e+1}$$

17 堂课搞定高数重难点

授课老师：武忠祥教授

武忠祥考研

武忠祥考研

专题一：求极限常见题型

(一)函数的极限

求函数的极限，常见的是 7 种不定式. 即 $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}，这里考查的重点是"$\frac{0}{0}$"型和"1^{∞}"型.

1. "$\frac{0}{0}$"型极限

常用的方法有三种

1）洛必达法则

2）等价无穷小代换

3）泰勒公式

以上三种方法使用的同时要注意将原式化简，常用的方法有极限非零的因子极限先求出来、有理化及变量代换等.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\cos}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+x\cos}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right\}$ （有理化）

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ （极限非零的因子极限先求出来）

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$ （洛必达法则）

$=-\frac{1}{6}$

【解 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x\cos x-\sin x)}{x^3}$ (拉格朗日中值定理)

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ （极限非零的因子极限先求出来）

$=\frac{1}{2}[\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}]$

$=\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}]$

$=-\frac{1}{6}$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$.

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin^2x}\ln(1+t)dt}{\frac{1}{2}x^4}$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin^2x)2\sin x\cos x}{\frac{4}{2}x^3}$$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^3}{2x^3}=1$$ （等价无穷小代换）

【解 2】

【例 3】设函数 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0, f'(0)\neq0$, 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)}$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)dt+xf(x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}$$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)}{x}+f'(x)}=\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}$$ （导数定义）

$$=1$$

【解 2】

【例 4】（2011 年 3）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

【解 2】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}+x+1}\cdot\frac{1+2\sin x-(x+1)^2}{x^2}$$ （分子有理化）

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x-x)-x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

【解 3】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\sin 2x}-1}{x^2}$. [2]

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$. [0]

3 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(1)=1$, 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^{\frac{1}{x}}f(xt)dt}{x^3-1}$. $[-\dfrac{1}{3}]$

2. “$\dfrac{\infty}{\infty}$” 型极限

常用的方法有两种

1）洛必达法则

2）分子分母同除以分子和分母各项中最高阶的无穷大

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^2-2)}$.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^3+1)}{\ln(x^2-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{3x^2}{x^3+1}}{\dfrac{2x}{x^2-2}}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2-2)}{x^3+1}=\frac{3}{2}$$

【解 2】

【例 2】(2014 年 1, 2, 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

【解 1】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$ （洛必达法则）

$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}$ （变量代换）

$=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-1}{2t}$ （洛必达法则）

$=\dfrac{1}{2}$

【解 2】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$ （等价无穷小代换）

$=\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x]$$ （泰勒公式）

$$=\frac{1}{2}$$

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+x+2}-x}$

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(-x)[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}]}{(-x)[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1]}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x\int_2^x\frac{1}{\ln t}dt}{x}$. [1]

2.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$. [−1]

3. “$\infty-\infty$” 型极限

常用的方法有

1）通分化为 $\frac{0}{0}$ (适用于分式差)

2）根式有理化（适用于根式差）

3）提无穷因子, 然后等价无穷小代换

【例 1】(2004 年 3）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}+\lim_{x\to0}\frac{\sin^4 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+1$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}+1=\frac{4}{3}$$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

【解 1】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$ （有理化）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}$$ (分子分母同除 $\sqrt{x}$)

$$=\frac{1}{2}$$

【解 2】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}-1\right)$ （提出 $\sqrt{x}$ ）

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$$ （等价代换）

$$=\frac{1}{2}$$

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\left(\sqrt[6]{1+\frac{2x^5}{x^6-x^5}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6-x^5}\left(\frac{1}{6}\frac{2x^5}{x^6-x^5}\right)$$ （等价无穷小代换）

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{6}\frac{2x^6}{x^6-x^5}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

【解 2】原式 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left([\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}}-1]-[\sqrt[6]{1-\frac{1}{x}}-1]\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left([\frac{1}{6x}]-[-\frac{1}{6x}]\right)$$ （等价无穷小代换）

$$=\frac{1}{3}$$

【解 3】

【解 4】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$. [2]

2. (2005 年 3)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$. $[\frac{3}{2}]$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$ $[-\frac{1}{3}]$

4. “$0\cdot\infty$”型极限

常用的方法是化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型

【例 1】求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\frac{1}{\ln x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{-1}{x\ln^2 x}}$$ （洛必达法则）

$$=-\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$ （洛必达法则）

$$=2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

【解 2】

【例 2】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\right)$.

【解 1】原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+(\frac{x}{x+1})^2}\cdot\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$ （洛必达法则）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2+2x+1}=\frac{1}{2}$$

【解 2】

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)$. $[\frac{1}{2}]$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$. $[\ln 3]$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$. [1]

5. "1^{∞}" 型极限

常用的方法有三种

1）凑基本极限 $\lim[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$, 其中 $\lim\varphi(x)=0 \quad (\varphi(x)\neq 0)$.

2）改写成指数 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$，用洛必达法则；

3）利用结论：若 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=\infty$，且 $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$.

则 $\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^{A}$.

可以归纳为以下三步：

1) 写标准形式： 原式 $=\lim[1+\alpha(x)]^{\beta(x)}$;

2) 求极限： $\lim\alpha(x)\beta(x)=A$;

3) 写结果： 原式 $=e^{A}$.

【例 1】(2011 年 1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^{x}-1}}$. $[e^{-\frac{1}{2}}]$

【例 2】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【解 1】 由于 $\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{xe}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-e}{xe}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}}{xe}$$ （拉格朗日中值定理）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

则 原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

【解 2】

【例 3】（1998 年 4）极限 $\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. $[e^{\frac{1}{3}}]$

【例 4】（1994 年 3）极限 $\lim_{n\to\infty}\tan^n(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})$. $[e^2]$

练习题

1. 若 $\lim_{x\to 0}(1+2x-x^2)^{\frac{1}{ax+bx^2}}=2$, 则（ ）

（A） $a=1,b=2.$ （B） $a=0,b=2.$

（C） $a=\ln 2,b=0.$ （D） $a=\frac{2}{\ln 2},b$ 任意. $[D]$

2.求极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a>0,b>0.$ $[\frac{1}{\sqrt{ab}}]$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$.　　[$e^{\frac{n+1}{2}e}$]

6. “∞^0”和“0^0”型极限

以上这两种极限求极限的函数一定是幂指函数，即 $\lim[f(x)]^{g(x)}$. 求解的方法是将其改写成指数形式 $\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}$，从而就化为“$0\cdot\infty$”型极限.

【例 1】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\sin 2x\ln\cot x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\sin 2x\ln\cot x=\lim_{x\to 0^+}2x\ln\cot x$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cot x}{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{-\frac{1}{x^2}}\qquad\text{（洛必达法则）}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\tan x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 2x}=e^0=1.$$

【例 2】(2010 年 3) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},\qquad\text{（洛必达法则）}$$

而当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\to 0$，故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}$.

练习题

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\arcsin x)^{\tan x}$. [1]

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. [$e^{-1}$]

(二) 数列的极限

求数列极限，常见的是两种类型. 即 n 项和的数列极限和用递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 定义的数列极限.

1. n 项和的数列极限

常用方法：1）夹逼原理 2）定积分定义 3）级数求和

【例 1】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$

【解】由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1$

【例 2】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]$

【解】
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$

【注】用定积分定义求极限一种常用且有效的方法是先提可“爱因子”$\dfrac{1}{n}$，然后再分析被积函数和积分区间，一种常见的极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

【例 3】 求极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

【解】 $\frac{1}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)\le\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

$$\le\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$<\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\cdots+2^{\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}$$

则 原式 $=\frac{1}{\ln 2}$

【例 4】设 $x_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ________.

【分析】由级数定义知 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$, 考虑幂级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, 则

$\lim_{n\to\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S(\frac{1}{2})$, 所以，先求 $S(x)$.

【解】 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$

则 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = S(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$$

【注】本题数学二不要求.

练习题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+\ln(1+1)}+\frac{2}{n^2+\ln(1+2^2)}+\cdots+\frac{n}{n^2+\ln(1+n^2)}\right]$ $[\frac{1}{2}]$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$; $[\frac{1}{3}]$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{2}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$; $[\sqrt{2}-1]$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{n+\frac{1}{k}}$. $[2\ln 2-1]$

2. 递推关系 $x_1 = a$ 和 $x_{n+1} = f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 定义的数列

常用方法

方法 1 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛（常用单调有界准则），然后令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限得 $A = f(A)$，由此求得极限 A.

方法 2 先令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，然后等式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两端取极限解得 A，最后再证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

一般来说，当数列 $\{x_n\}$ 具有单调性时用方法 1，而当数列 $\{x_n\}$ 不具有单调性或单调性很难判定时用方法 2. 单调性判定常用有三种方法

1）若 $x_{n+1}-x_n \ge 0\ (\le 0)$，则 $\{x_n\}$ 单调增（单调减）；

2）设 $\{x_n\}$ 不变号

（1）若 $x_n > 0$，则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1\ (\le 1)$ 时，$\{x_n\}$ 单调增（单调减）；

（2）若 $x_n<0,$ 则当 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geq 1\,(\leq 1)$ 时，$\{x_n\}$ 单调减（单调增）.

3）设数列 $\{x_n\}$ 由 x_1 和 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots),x_n\in I$ 所确定

（1）若 $f(x)$ 在 I 上单调增，则

当 $x_1\leq x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调增；

当 $x_1\geq x_2$ 时，$\{x_n\}$ 单调减.

（2）若 $f(x)$ 在 I 上单调减，则 $\{x_n\}$ 不单调.

【例 1】 设 $x_0>0,x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n},(n=1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

【证】 由 $x_0>0,x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n},(n=1,2,\cdots)$ 知 $x_n>0,$ 即 $\{x_n\}$ 下有界.

又 $$x_{n+1}=\left(\sqrt{\frac{x_n}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{x_n}}\right)^2\geq 2\sqrt{\frac{x_n}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_n}}=\sqrt{2}$$

而 $$x_{n+1}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}\leq 0$$

或者由 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_n^2}\leq 1$ 知 $\{x_n\}$ 递减，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$

等式 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$ 两端取极限得

$A=\frac{A}{2}+\frac{1}{A}$，由此解得 $A=\sqrt{2}$ 或 $A=-\sqrt{2}$（舍去）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

【例 2】 设 $x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,\ x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解 1】 令 $f(x)=\sqrt{2+x},$ 则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=f(x_n)$，由于 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2+x}}>0,$ 则 $f(x)$ 单调增，又 $x_1<x_2,$ 则 $\{x_n\}$ 单调增.

又 $x_1=\sqrt{2}<2$, 若 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$,由数学归纳法可知

$x_n<2$，即数列 $\{x_n\}$ 上有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 知， $A=\sqrt{2+A}$

解得 $A=2$，或 $A=-1$ （舍去）

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

【解 2】直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 知

$$|x_n-2|=\left|\sqrt{2+x_{n-1}}-2\right|=\frac{|x_{n-1}-2|}{\sqrt{2+x_{n-1}}+2}<\frac{1}{2}|x_{n-1}-2|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_1-2|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

【例 3】(2018 年 1, 2, 3) 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证】由于当 $x>0$ 时, $e^x-1>x$, 则由 $x_1>0, e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1$ 可知, $x_2>0$, 由归纳法可知 $x_n>0$, 即 $\{x_n\}$ 下有界. 由 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 知

$$e^{x_{n+1}}=\frac{e^{x_n}-1}{x_n}=\frac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}=e^{\xi_n} \qquad (\text{拉格朗日定理, 其中 } 0<\xi_n<x_n)$$

$$<e^{x_n}$$

由于 e^x 单调增，则 $x_{n+1}<x_n$, 即 $\{x_n\}$ 单调减，由单调有界准则知 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,

等式 $x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$ 两端取极限得

$$Ae^A=e^A-1$$

由此解得 $A=0$.

【例 4】设 $x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

【分析】令 $f(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$, 则 $x_{n+1}=f(x_n)$，显然 $x_n\ge 1$, $f(x)$ 在 $x\ge 1$ 处单调减，则 $\{x_n\}$ 不具有单调性，因此用方法 2.

【解】令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{x_n+1})$, 即 $A=1+\dfrac{1}{A+1}$, 则 $A=\pm\sqrt{2}$, 由题设知 $x_n\ge 1$, 则 $A=\sqrt{2}$. 以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

$$|x_n-A|=\left|(1+\frac{1}{x_{n-1}+1})-(1+\frac{1}{A+1})\right|=\left|\frac{x_{n-1}-A}{(A+1)(x_{n-1}+1)}\right|\le\frac{|x_{n-1}-A|}{2}$$

$$\le\frac{|x_{n-2}-A|}{2^2}\le\cdots\le\frac{|x_1-A|}{2^{n-1}}\to 0\qquad (n\to\infty)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\sqrt{2}$.

练习题

1. 设 $x_1=1,x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{x_n+1}\ (n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

$[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}]$

2. 设 $x_1=2,x_{n+1}=\sqrt{2x_n+3}\ (n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

[3]

3. 设 $x_1=1,x_{n+1}(x_n+1)-x_n=3,(n=1,2,\cdots)$, 证明：数列 $\{x_n\}$ 极限存在并求此极限.

$[\sqrt{3}]$

17 堂课搞定高数重难点

授课老师：武忠祥教授

武忠祥考研

武忠祥考研

专题 4 无穷小量阶的比较

1.无穷小量的概念

若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，则称 $f(x)$

为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

2.无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x)=0,\ \lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq 0$.

（1）高阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$； 记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

（2）低阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$；

（3）同阶： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$；

（4）等价： 若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$；记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

（5）无穷小的阶：若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

由无穷小量阶的定义可知，比较两个无穷小阶的问题就是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，所以，常用的方法就是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的常用三种方法

1）洛必达法则（求导定阶）

若当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f'(x)$ 是 x 的 $k\ (k\geq 0)$ 阶无穷小，则 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的 $k+1$ 阶无穷小量.

2）等价无穷小代换

若当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\sim Ax^k\ (A\neq 0,k>0)$, 则 $f(x)$ 是 $x\to 0$ 时的 k 阶无穷小量.

如当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^2\cdot x$, 则当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\sin x$ 是 x 的 3 阶无穷小。

3）泰勒公式

这里常见的有三类问题

一. 无穷小阶的比较及阶的确定

【例 1】(1993 年 1, 3) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小　　（B）同阶但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小　　（B）

【解 1】

【解 2】

【例 2】设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t t\ln(1+u^2)du,$，$g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)dt$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小　　（B）同阶但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小　　（D）

【例 3】(1997 年 2) 设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　)

（A）　1,　　（B）　2,　　（C）　3,　　（D）　4.　　(C)

【解 1】

【解 2】

【例 4】设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$ 的连续函数，且当 $x\to 0$ 时 $\int_0^{\sin^2 x} f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 x 的 n 阶无穷小，则 $n=$ ______. [6]

【解 1】

【解 2】

【解 3】

【例 5】当 $x\to 0$ 时，$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 x 的多少阶无穷小？（α 为参数）

【解】$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$

$$=1-[1-\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^4}{4!}+o(x^4)+\alpha[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)]$$

$$=\frac{\sin^2 x}{2}-\frac{\sin^4}{4!}+o(x^4)+\alpha[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}+\alpha,$$

若 $\alpha\neq-\dfrac{1}{2}$,则 $1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$ 是 x 的 2 阶无穷小.

若 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x+x][\sin x-x]}{x^4}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\neq 0$$

则$1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$是$x$的 4 阶无穷小.

二. 无穷小按阶排序或求最高（低）阶无穷小

【例 1】(2016 年 2)设$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1),\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当$x\to 0^+$时，以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　（B）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.　（C）$\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　（D）$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

【解】当$x\to 0$时

$$\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})\sim x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{6}}$$

$$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1.\sim\frac{1}{3}x$$

则以上 3 个无穷小量从低阶到高阶的排序是$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$,故选（B）.

【例 2】(1992 年 4,5）当$x\to 0$时，下列四个无穷小量中，比其他三个更高阶的无穷小量是（ ）.

（A）x^2　（B）$1-\cos x$　（C）$\sqrt{1-x^2}-1$　（D）$x-\tan x$

【例 3】当$x\to 0$时，下列无穷小中最高阶的是(　)

（A）$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$，　（B）$e^{\sin x}-e^{\tan x}$

（C）$e^{x^2}-\cos x$　（D）$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt$

【解】

（A）$\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$　（2 阶）

或 $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}=[\sqrt{1+x^2}-1]-[\sqrt{1-x^2}-1]$

$\sim[\frac{1}{2}x^2]-[-\frac{1}{2}x^2]=x^2$

（B）$e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)\sim\sin x-\tan x\sim-\frac{1}{2}x^3$　（3 阶）

或 $e^{\sin x}-e^{\tan x}=e^{\xi}(\sin x-\tan x)\sim\sin x-\tan x$

（C） $e^{x^2}-\cos x=[1+x^2+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2))]=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$ （2 阶）

或 $e^{x^2}-\cos x=[e^{x^2}-1]-[\cos x-1]\sim x^2-[-\frac{1}{2}x^2]=\frac{3}{2}x^2$

（D） $(\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt)'=\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}x^3$ （3 阶）

原无穷小是 4 阶，

或，由于 $\frac{\sin t^2}{t}\sim t$，则

$$\int_0^{1-\cos x}\frac{\sin t^2}{t}dt\sim\int_0^{1-\cos x}tdt=\frac{(1-\cos x)^2}{2}\sim\frac{1}{8}x^4$$

故选（D）

【例 4】当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中最低阶的是(　)

（A） $\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$，　　（B） $x-\sin x+\int_0^x t^2e^{t^2}dt$

（C） $x-\sin x\cos x\cos 2x$　　（D） $1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ （A）

三. 确定无穷小阶的比较问题中的参数

【例 1】（2001 年 2）设当 $x\to 0$ 时 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【解】当 $x\to 0$ 时

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^4$$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}$$

$$e^{x^2}-1 \sim x^2$$

由题设可知 $2<n+1<4$, 则 $n=2$, 故选（B）.

【例 2】（2014 年 2）当 $x \to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x), (1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是

（A）$(2,+\infty)$　　（B）$(1,2)$

（C）$(\frac{1}{2},1)$　　（D）$(0,\frac{1}{2})$

【解】当 $x \to 0$ 时

$$\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha$$

$$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$$

由题设可知 $\alpha>1$, 且 $\dfrac{2}{\alpha}>1$, 则 $1<\alpha<2$, 故选（B）.

【例 3】（2011 年 2, 3）

已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则

（A）$k=1, c=4.$　　（B）$k=1, c=-4.$

（C）$k=3, c=4.$　　（D）$k=3, c=-4.$

【解 1】（洛必达）
【解 2】（泰勒公式）
【解 3】（等价代换）

【解 4】（代入法）

【例 4】（1996 年 1, 2）设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$,

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$,且当 $x\to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 为同阶无穷小,则 k 等于（ ）

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【解 1】直接法

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x^{k-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$$=2\frac{f'(0)}{(k-1)(k-2)}\neq 0 \qquad (k=3)$$

故选（C）.

【解 2】排除法

【例 5】(2013 年 2, 3) 当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小, 求 n 与 a 的值.

【解 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\cos 3x+3\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{nax^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\cos 3x+3\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{2ax} \qquad (n=2)$$

$=\dfrac{1+4+9}{2a}=\dfrac{7}{a}$，则 $a=7$

【解 2】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)][1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)][1-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)]}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(3x)^2}{2}}{ax^n}=\lim_{x\to0}\frac{14x^2}{2ax^n}$$

则 $n=2,a=7.$

【解 3】 $1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\frac{1}{a}[\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)}{x^2}]\quad(n=2)$$

$$=\frac{1}{a}[\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}]=\frac{7}{a}$$

$a=7$

【例 6】(2006 年 2) 试确定常数 A,B,C 的值，使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

【解 1】 因为 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3),$

将其代入题设等式，整理得

$$1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3=1+Ax+o(x^3),$$

故有

$$\begin{cases}1+B=A,\\ \frac{1}{2}+B+C=0,\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\dfrac{1}{3},\quad B=-\dfrac{2}{3},\quad C=\dfrac{1}{6}.$

【解 2】 根据题设和罗必达法则，由于

$$0=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+B+Bx+2Cx+Cx^2)-A}{3x^2}\qquad(1+B-A=0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x[2C+1+2B+(B+4C)x+Cx^2]}{6x} \qquad (2B+2C+1=0)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{B+4C+2Cx}{6}. \qquad (B+4C=0)$$

即 $$\begin{cases}1+B-A=0,\\ 2B+2C+1=0,\\ B+4C=0,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{2}{3},\quad C=\frac{1}{6}.$

【例 7】（2015 年 1，2,3）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x.g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【解】 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

则 $f(x)=(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{ax^3}{3}+o(x^3)$

由于当 $x\to 0$ 时， $f(x)\sim kx^3$, 则

$$\begin{cases}1+a=0\\ b-\frac{a}{2}=0\\ \frac{a}{3}=k\end{cases}$$

故 $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}.$

练习题

1. 当 $x\to 0$ 时，下列无穷小量中最高阶的无穷小量是（ ）

（A）$\int_0^x \ln(1+t^{3/2})dt$; （B） $\tan x-\sin x$; （C）$\int_0^{\sin x}\sin t^2 dt$; （D）$\int_0^{1-\cos x}\sin^{3/2} t dt$.

2. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小中最高阶的是

$(A)\quad \sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1-3x}$ $\qquad (B)\quad x-\ln(1+\tan x)$

$(C)\quad e^{3x^2}-\cos 2x$　　　　$(D)\quad \int_0^{\arcsin x}\frac{1-\cos t^2}{t}dt$

3. 若 $\varphi(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 在 $x\to 0$ 时是与 x^5 同阶的无穷小量，则

（A）$a=\frac{4}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;　　（B）$a=-\frac{4}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;

（C）$a=\frac{1}{3}$ 且 $b=-\frac{1}{3}$;　　（D）$a=-\frac{1}{3}$ 且 $b=\frac{4}{3}$;

4. 已知 $x\to 0$ 时, $e^{-x^2}-\cos\sqrt{2}x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 求 n,a .

5. 已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=ax+b\sin x+\sin x\cos x$ 与 $g(x)=kx^5$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

练习题答案： 1.(D)； 2.(D)； 3. (A)； 4. $a=\frac{1}{3},n=4;$　5. $a=3,b=-4,k=\frac{1}{10}$.

17 堂课搞定高数重难点

授课老师：武忠祥教授

武忠祥考研

武忠祥考研

专题 5　导数的概念及应用

（一）导数概念

定义 1（导数）　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处可导，并称此极限值为** $f(x)$ **在点** x_0 **处的导数**，记为 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.如果上述极限不存在，则称 $f(x)$ **在点** x_0 **处不可导.**

【注】常用的导数定义的等价形式有：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\qquad f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定义 2（左导数） 若左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 3（右导数） 若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在时，则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右导数**，记为 $f'_+(x_0)$.

定理　可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数都存在且相等.

【例 1】　下面几个极限能作为 $f(x)$ 在 x_0 处导数定义的是

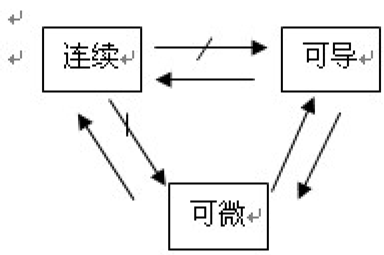
（A）$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$；

（B）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n[f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)]$；

（C）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+x^2)-f(x_0)}{x^2}$；

（D）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-x)}{x}$.

（二）连续、可导、可微之间的关系



【例 2】设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

(A) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导；

(B) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续；

(C) $f(x)$ 在 x_0 处连续；

(D) $f'(x)$ 在 x_0 处连续.

与导数概念相关题型主要有三种

（一）利用导数定义求极限

【例 1】设 $f'(1)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=$________.

[$9f'(1)$]

【例 2】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}=(\quad)$

(A) 0，　(B) $f''(a)$，　(C) $2f''(a)$，　(D) $\dfrac{1}{2}f''(a)$

【例 3】设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，α_n,β_n 为趋于零的正项数列，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}.$$

【解】 由 $f(x)$ 在 x_0 可导知，

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x. \qquad （其中 \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0）$$

则 $f(x_0+\alpha_n)=f(x_0)+f'(x_0)\alpha_n+\alpha\alpha_n$ （其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha=0$）

$f(x_0-\beta_n)=f(x_0)-f'(x_0)\beta_n-\beta\beta_n$ （其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta=0$）

$$\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)+\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$\left|\frac{\alpha\alpha_n+\beta\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right|\le\frac{\alpha_n|\alpha|}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{\beta_n|\beta|}{\alpha_n+\beta_n}\le|\alpha|+|\beta|\to 0$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}=f'(x_0)$

（二）利用导数定义求导数

【例 1】已知 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$，则 $f'(1)=$__________.

【解】 由导数的定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$$

【例 2】已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+e^x]^{\frac{1}{x}}=2,$ 则 $f'(0)$ 等于

(A) $\ln 2$, (B) e^2, (C) 2, (D) $-1+\ln 2$

【解】 由于 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+e^x]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln[f(x)+e^x]}{x}}=2$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x)+e^x]}{x}=\ln 2$

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[f(x)+e^x]=0,\ \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0,$

当 $x \to 0$ 时，$\ln[f(x)+e^x] = \ln[1+f(x)+e^x-1] \sim f(x)+e^x-1$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x)+e^x]}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+e^x-1}{x} = f'(0)+1 = \ln 2$

故 $f'(0) = -1+\ln 2$

【例 3】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0)=1, g'(0)=-1$

1）求 $f'(x)$

2）讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

（三）利用导数定义判定可导性

【例 1】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

【例 2】讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+x^2, & x\leq 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性.

【解 1】 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x+x^2-1}{x}=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导，且 $f'(0)=0.$

【解 2】 $f'_-(0)=(\cos x+x^2)'\big|_{x=0}=(-\sin x+2x)\big|_{x=0}=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x\sin x}{2x}=0$$

【注】本题中用了三种求分段函数在分界点处导数的方法：

方法 1：导数定义

解 1 用的此方法.

方法 2：求导代入

解 2 中左导数 $f'_-(0)$ 用的此方法，其理论依据是：

若在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上，$f(x)=g(x)$, 则 $f'_-(x_0)=g'_-(x_0)$. 右导数有类似结论.

方法 3：导函数极限

解 2 中右导数 $f'_+(0)$ 用的此方法，其理论依据是：

若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上连续，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$ 存在，

则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$. 左导数有类似结论.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域有定义，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的一个充分条件是

（A） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在；　　（B） $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\dfrac{1}{n})-f(0)]$ 存在；

（C） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在；　　（D） $\lim\limits_{x\to\infty}x[f(\dfrac{1}{x})-f(0)]$ 存在.

【解】 应选（D）.

【例 4】（96 年 2）设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

A）间断点　　B）连续而不可导的点

C）可导的点，且 $f'(0)=0$　　D）可导的点且 $f'(0)\neq0$

【解 1】直接法

【解 2】排除法

【例 5】设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{1-\cos x}=1$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

（A）不可导.　　　　　　（B）可导且 $f'(0)=0$.

（C）可导且 $f'(0)=-2$.　　　　（D）可微且 $dy\big|_{x=0}=2dx$.

【解 1】直接法

由题设知 $f(0)=0$, 且

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2x}{\frac{1}{2}x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-2}{x}$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, $f'(0)=2$, 故应选（D）.

【解 2】排除法

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x}{1-\cos x}=1$ 知，令 $f(x)-2x=\dfrac{1}{2}x^2$, 即 $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}x^2$ 满足题设条件，但 $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}x^2$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=2$, 显然可排除（A）(B)（C），故应选（D）.

【例 6】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$ 不可导点的个数为

（A）0 个；　　（B）1 个；　　（C）2 个；　　（D）3 个.

【解】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+\mathrm{e}^{nx}}=\max\left\{1,|x|,e^x\right\}=\begin{cases}-x & x<-1\\ 1 & -1\le x\le 0\\ \mathrm{e}^x & x>0\end{cases}$（几何法）

$f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=0$ 不可导，选（C）(几何法)

【注】本题利用了结论：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max_{1\le i\le m}a_i,\text{其中 } a_i>0\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

【例 7】设有命题

1）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导；

2）若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

3）若 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数都存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

4）若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在。

则上述命题中正确的个数为

（A）0；（B）1；（C）2；（D）3.

【解】 应选（C）

2）正确.

⑴若 $f(x_0)>0,$ 则在 x_0 某邻域内，$|f(x)|=f(x),$ 从而 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

⑵若 $f(x_0)<0,$ 则在 x_0 某邻域内，$|f(x)|=-f(x),$ 从而 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

⑶若 $f(x_0)=0,$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}$ 存在，

而 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\ge 0,\ \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\le 0.$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=0,$ 因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}\right|=\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)}{x-x_0}\right|=0$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=0$，$f(x)$ 在 x_0 处可导.

3)正确.

由于 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处左连续；

由于 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处右连续；

从而 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

【例 8】设函数 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)dt$，其中 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(0)=2.$

（1）求 $\varphi'(x)$；

（2）讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

【解】 令 $tx^2=u$，则

$$\varphi(x)=\int_0^{x^2\sin x}\frac{1}{x^2}f(u)du=\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x}f(u)du \qquad (x\neq 0)$$

由已知得 $\varphi(0)=0.$

（1）当 $x\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\varphi'(x)&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)du+\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)\cdot(2x\sin x+x^2\cos x)\\&=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)du+f(x^2\sin x)(\frac{2}{x}\sin x+\cos x);\end{aligned}$$

在 $x=0$ 点处，由导数定义有

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)du\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{x^3}f(\xi) \qquad \text{（积分中值定理）}\\&=f(0)=2.\end{aligned}$$

所以 $\varphi'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}\displaystyle\int_0^{x^2\sin x}f(u)du+f(x^2\sin x)(\dfrac{2}{x}\sin x+\cos x), & x\neq 0;\\ 2, & x=0.\end{cases}$

（2）因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varphi'(x)&=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(u)du+f(x^2\sin x)(\frac{2}{x}\sin x+\cos x)\right]\\&=-2f(0)+3f(0)=2=\varphi'(0),\end{aligned}$$

故 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 点处连续；又当 $x\neq 0$ 时，$\varphi'(x)$ 连续，所以 $\varphi'(x)$ 处处连续.

练习题

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+\dfrac{\pi}{2}, & x\le 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的可导性.

2. 设 $f(a)=1, f'(a)=2,$ 则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{f(a+2x)}-e^{f(a-x)}}{\sin(x-a)}=$ ________.

3. 设 $f(0)=f'(0)=1$,则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(\sin 3x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{x}}=$ ________.

4. 已知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线过点 $(1,2)$，则

$$\lim_{x\to 0}[\cos x+\int_0^x f(t)dt]^{\frac{1}{x^2}}=\_\_\_\_\_\_.$$

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=a,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x}=b$, 则（ ）

（A） $f(x)$ 在 $x=0$ 处不一定连续, .

（B） $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导.

（C） $f(x)$ 在 $x=0$ 可导, 且 $f'(0)=b.$

（D） $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导函数连续.

6. 已知 $f(0)=1,$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0.$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（ ）

（A）不可导.　　（B） 可导且 $f'(0)=0.$

（C） 可导且 $f'(0)=-2.$　　（D） 可微且 $dy\big|_{x=0}=dx.$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的一个充分条件是

（A） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在；　　（B） $\lim\limits_{x\to\infty}x^2[f(x_0+\dfrac{1}{x^2})-f(x_0)]$ 存在；

（C） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^3)-f(x_0)}{\tan x^2}$ 存在;　　（D） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+x^3)-f(x_0)}{\sin^3 x}$ 存在.

练习题答案：1. 不可导，其中 $f'_-(1)=0\ f'_+(1)=-1;$　　2. $6e$　　3. e^2；

4. $e^{\frac{1}{2}}$;　　5. A ;　　6. D;　　7. D .

17 堂课搞定高数重难点

授课老师：武忠祥教授

武忠祥考研

武忠祥考研

专题 6 微分中值定理及其应用

定理 1（罗尔定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

（3） $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$。

定理 2（拉格朗日中值定理） 如果 $f(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论 如果在 (a,b) 内恒有 $f'(x)=0$，则在 (a,b) 内 $f(x)$ 为常数.

定理 3（柯西中值定理） 如果 $f(x)$，$F(x)$ 满足以下条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

（2）在开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 内每一点处均不为零，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

【注】（1）以上三个中值定理，特别是拉格朗日中值定理建立了函数在区间上的变化（改变量）与函数在该区间内一点处导数的关系，从而使我们能够利用导数来研究函数在区间上的整体性态.

（2）三个中值定理的关系如下：

罗尔定理　　拉格朗日中值定理　　柯西中值定理

应用举例

（一）方程的根

【例 1】设 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 求证：方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

（二）证明不等式

【例 1】证明不等式 $|\arctan b-\arctan a|\le|b-a|$.

（三）求极限

【例 1】（2014 年 2）设函数 $f(x)=\arctan x$, 若 $f(x)=xf'(\xi)$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=$

（A）1　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{1}{3}$

【解】应选（D）

由 $f(x)=\arctan x$, 及 $f(x)=xf'(\xi)$ 得

$$\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2}$$

则　$\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}\qquad (x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3)$$

$$=\frac{1}{3}$$

故应选（D）

【例 2】（2018 年 2） $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$ ________.

（四） **证明存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$**

此类问题的一般方法是将要证结论改写为 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$，然后构造辅助函数用罗尔定理. 而构造辅助函数的方法主要有两种

1. **分析法（还原法）**

根据对欲证的结论 $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$ 的分析, 确定辅助函数 $g(x)$, 使

$$g'(x)=F[x,f(x),f'(x)]$$

2. **微分方程法**

欲证： $F[\xi,f(\xi),f'(\xi)]=0$

1）求微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的通解 $H(x,y)=C$

2）设辅助函数： $g(x)=H(x,f(x))$

【例 1】（2003 年 3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【例 2】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, $f(1)=0$, 求证: $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$.

【分析】本题证明的关键是构造辅助函数，以下用两种方法构造

1. 分析法（还原法）

欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$，只要证 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，即 $\xi^2f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$ 则应

构造辅助函数 $g(x)$，使 $g'(\xi)=\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)$.因此，令 $g(x)=x^2 f(x)$，这里 $g'(x)=x^2 f'(x)+2xf(x)$.

2. 微分方程法

欲证 $f'(\xi)=\dfrac{-2f(\xi)}{\xi}$，解微分方程 $y'=\dfrac{-2y}{x}$, 得其通解为 $x^2y=C$. 则应构造辅助函数 $g(x)=x^2 f(x)$

【证】令 $g(x)=x^2 f(x)$，则 $g(0)=0,\quad g(1)=0,$

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $g'(\xi)=0$，即

$$\xi^2 f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$$

由此可得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$，原题得证.

【注】从以上例子可归纳出一类常用的辅助函数

（1）欲证 $\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0,$ 令 $F(x)=x^n f(x);$

（2）欲证 $\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0,$ 令 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x^n};$

这里 n 为正整数.

【例 3】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$.

求证: $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$..

【分析】欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0,$，解微分方程 $y'+\lambda y=0,$ 得其通解为 $e^{\lambda x}y=C$. 则应构造辅助函数 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，

【证】令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x)$，则 $F'(x)=e^{\lambda x}[f'(x)+\lambda f(x)],$

且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$F'(\xi)=0$$

即 $e^{\lambda\xi}[f'(\xi)+\lambda f(\xi)]=0$

但 $e^{\lambda\xi}\neq 0$，则

$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$

故原题得证.

【注】从本例可归纳出一类常用的辅助函数

（1）欲证 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\lambda x}f(x);$

特别地：

欲证 $f'(\xi)+f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{x}f(x);$

欲证 $f'(\xi)-f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{-x}f(x);$

（2）欲证 $\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\frac{\beta}{\alpha}x}f(x)\ (\alpha\neq 0);$

（3）欲证 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{g(x)}f(x);$

（4）欲证 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0,$ 令 $F(x)=e^{\int g(x)dx}f(x);$

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

试证 （1）存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使 $f(\eta)=\eta$.

（2）对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$。

【证】 （1）令 $F(x)=f(x)-x$

$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$， $F(1)=f(1)-1=-1<0$，

由零点定理知 $\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$

即 $f(\eta)=\eta$

（2）欲证 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$，只要证 $[f'(\xi)-1]+\lambda[f(\xi)-\xi]=0,$

因此，令 $\varphi(x)=e^{\lambda x}(f(x)-x)$，则

$$\varphi'(x)=e^{\lambda x}\{[f'(x)-1]+\lambda[f(x)-x]\},$$

且 $\varphi(0)=0$， $\varphi(\eta)=0$，由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,\eta)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，

从而有 $[f'(\xi)-1]+\lambda[f(\xi)-\xi]=0$

故 $f'(\xi)+\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(0)=f(1)$, .

试证存在 $\xi\in(0,1)$, 使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

【证】 只要证 $(\xi-1)f''(\xi)+2f'(\xi)=0$.

因此，$F(x)=(x-1)^2 f'(x)$

【例 5】 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

（2）存在 $\eta\in(-1,1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【证】（1）因为 $f(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，根据微分中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f(1)-f(0)=f'(\xi).$$

又因为 $f(1)=1$，所以 $f'(\xi)=1$.

（1） 欲证 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$, 考虑 $f''(x)+f'(x)=1$, 令 $f'(x)=y$, 则

$$y'+y=1$$

解该线性方程得其通解为 $[y-1]e^x=C$，则应考虑辅助函数

$$F(x)=[f'(x)-1]e^x$$

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，故 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

则 $F(x)$ 可导，且 $F(-\xi)=F(\xi)=0$.

根据罗尔定理，存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $F'(\eta)=0$.

由 $F'(\eta)=[f''(\eta)+f'(\eta)-1]e^\eta$ 且 $e^\eta\neq0$，得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【例 6】 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，试证：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

【证】要证 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，只要证

$$[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)+[g(\xi)-g(b)]f'(\xi)=0.$$

因此令 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(x)-g(b)]$

则 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi)=0$。

即 $[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)+[g(\xi)-g(b)]f'(\xi)=0$. 故原题得证。

（五）证明存在两个中值点 $\xi,\eta \in (a,b)$，使 $F[\xi,\eta,f(\xi),f(\eta),f'(\xi),f'(\eta)]=0$

方法：（1）不要求 $\xi \neq \eta$：

在同一区间 $[a,b]$ 上用两次中值定理（拉格朗日、柯西中值定理）

（2）要求 $\xi \neq \eta$：

将区间 $[a,b]$ 分为两个子区间，在两个子区间上分别用拉格朗日中值定理

【例 1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 a,b 同号，试证存在 $\xi,\eta \in (a,b)$. 使

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

【证】 由拉格朗日中知定理知 $\exists \xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

由柯西中值定理知，$\exists \eta \in (a,b)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

从而有 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在

$\xi,\eta\in(a,b)$ 使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

【证】只要证明 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

由拉格朗日中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$$

令 $F(x)=e^x f(x)$，由拉格朗日中值定理得，$\exists\eta\in(a,b)$，

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$$

即 $$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$$

从而有 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，其中 a,b 同号， $f(a)=f(b)=1$. 证明：

存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $abe^{\eta-\xi}=\eta^2[f(\eta)-f'(\eta)]$.

【分析】欲证 $abe^{\eta-\xi}=\eta^2[f(\eta)-f'(\eta)]$, 只要证 $abe^{-\xi}=\dfrac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$.

【证】由拉格朗日定理得

$$\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}\qquad \xi\in(a,b)$$

由柯西中值定理得

$$\frac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}\qquad \eta\in(a,b)$$

即 $$-ab\frac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}$$

$$abe^{-\xi}=\frac{e^{-\eta}[f'(\eta)-f(\eta)]}{-\dfrac{1}{\eta^2}}.$$

【例 4】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，常数 $a>0$ 与 $b>0$．求证：存在满足 $0<\xi<\eta<1$ 的 ξ 与 η．使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=0$.

【分析】（逆推法）设 $0<c<1$, 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi) \qquad \xi\in(0,c)$$

$$\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=f'(\eta) \qquad \eta\in(c,1)$$

$$af'(\xi)+bf'(\eta)=a\frac{f(c)-f(0)}{c}+b\frac{f(0)-f(c)}{1-c}=[f(c)-f(0)][\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}]$$

若 $\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}=0$ 原题得证，由 $\frac{a}{c}-\frac{b}{1-c}=0$ 解得 $c=\frac{a}{a+b}$.

【证】 由于 $\frac{a}{a+b}\in(0,1)$，由拉格朗日定理知

$\exists\xi\in(0,\frac{a}{a+b})$，使 $f(\frac{a}{a+b})-f(0)=f'(\xi)\frac{a}{a+b}$ ①

$\exists\eta\in(\frac{a}{a+b},b)$，使 $f(1)-f(\frac{a}{a+b})=f'(\eta)\frac{b}{a+b}$ ②

（1）式加（2）式得

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{a+b}[af'(\xi)+bf'(\eta)]=0$$

原题得证.

练习题

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$f(a)=f(b)=f(c)\ (a<c<b)$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$.

2.（1996 年 3）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

3.（2017 年 1，2） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：

（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导， $f(a)=f(b)=0$, 且存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)<0$. 试证：

$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, $f'(\xi)<0$, $f''(\eta)>0$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 a,b 同号，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导且 $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=2$.

求证: $\exists\xi\in(1,\ 2)$ 使 $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$.

7.设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$，且 $f(a)=f(b)=1$, 试证存在

$\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $(\frac{\eta}{\xi})^{n-1}=f(\xi)+\frac{\xi}{n}f'(\xi)$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明

(1) 在 $(0,1)$ 内存在 ξ, η, 使 $\eta f'(\xi)=f(\eta)f'(\eta)$;

(2) 存在 ξ 和 η. 满足 $0<\xi<\eta<1$，使 $f'(\xi)+f'(\eta)=2$.

专题 7　泰勒公式及其应用

(一) 泰勒公式

定理 1（皮亚诺型余项泰勒公式）

如果 $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

常称 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 为皮亚诺型余项.

若 $x_0=0$，则得麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

定理 2（拉格朗日型余项泰勒公式）

设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数，则当 $x\in(a,b)$ 时有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，这里 ξ 介于 x_0 与 x 之间，称为拉格朗日型余项.

几个常用的泰勒公式（拉格朗日型余项）

(1)　$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

(2)　$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\dfrac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(3)　$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\dfrac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

(4)　$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$

(5)　$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$$

(二) 泰勒公式本质及两个泰勒公式的异同点

1. 本质（相同点）

1）用多项式逼近函数

2）用已知点信息表示未知点

3）建立函数与高阶导数的关系

2. 不同点

1）条件不同

皮亚诺型余项： $f(x)$ 在点 x_0 有直至 n 阶的导数

拉格朗日型余项：$f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有 $n+1$ 阶的导数

2）余项不同

皮亚诺型余项： $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$； 定性；局部.

拉格朗日型余项：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$； 定量；整体.

【注】通常称皮亚诺型余项泰勒公式为**局部泰勒公式**，主要用来研究函数的局部性态（如：极限，极值）；而称拉格朗日型余项泰勒公式为**整体泰勒公式**，主要用来研究函数的整体性态（如：最值，不等式）.

(三) 泰勒公式的应用

1. 利用高阶导数研究函数性态

【例 1】若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0\ \ (n\geq 2)$，则当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 处有极值. 其中 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时极小， $f^{(n)}(x_0)<0$ 时极大；当 n 为奇数时 $f(x)$ 在 x_0 处无极值.

【例 2】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=1, f'(0)=0, |f''(x)|\le 1,$ 试证：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值不超过 $\frac{3}{2}$.

2. 计算函数近似值

【例 1】计算 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}.

【解】 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

取 $x=1$，得 $\quad e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

其误差 $\quad |R_n|=\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$

当 $n=10$ 时，误差不超过 10^{-6}. 得 $e\approx 2.718282$.

3. 求极限

【例 1】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; $\quad [-\frac{1}{12}]$

【例 2】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$

（1）求 $f(0), f'(0), f''(0)$; $\quad [f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9]$

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^2}\right)$. $[\dfrac{9}{2}]$

【例 3】（2001 年 1）设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（1）对于 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使

$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

【证】（1）任给非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad (0<\theta(x)<1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设

$f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单增，故 $\theta(x)$ 惟一.

（2）由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\qquad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

所以 $xf'(\theta(x))=f(x)-f(0)=f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，从而

$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0)$，

$\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=f''(0)$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

4. 求高阶导数

【例 1】（2015 年 2）函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ ________.

$[n(n-1)(\ln 2)^{n-2}]$

5. 证明不等式或等式

【例 1】 设 $f^{(4)}(x)>0, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$，试证：$f(x)>x^3 \quad (x\neq 0)$.

【例 2】（1996 年 1, 2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)|\le a$, $|f''(x)|\le b$, 其中 a,b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任一点.

（1）写出 $f(x)$ 在点 c 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式；

（2）证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

【证】（1） $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$

（2）在以上泰勒公式中，分别令 $x=0$ 和 $x=1$ 则有

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2 \quad (1)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2 \quad (2)$$

（2）式减（1）式得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-c)^2-f''(\xi_1)c^2]$$

$$|f'(c)|\le\left|f(0)\right|+\left|f(1)\right|+\frac{1}{2}[|f''(\xi_2)|(1-c)^2+|f''(\xi_1)|c^2]$$

$$\le 2a+\frac{b}{2}[(1-c)^2+c^2]$$

又因为当 $c\in(0,1)$ 时，$(1-c)^2+c^2\le 1$, 故 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.

【例 3】（2001 年 2）设 $f(x)$ 的区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

（1）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（2）证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【解】 （1）对任意 $x\in[-a,a]$，

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2=f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2!}x^2$，其中 ξ 在 0 与 x 之间.

（2）$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a} f(0)x\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\dfrac{x^2}{2!}f''(\xi)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\,\mathrm{d}x.$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故对任意的 $x\in[-a,a]$，有 $m\le f''(x)\le M$，其中 M，m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大、最小值，所以有

$$\frac{m}{2}\int_{-a}^{a}x^2\,\mathrm{d}x\le\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2 f''(\xi)\,\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}\int_{-a}^{a}x^2dx,$$

即 $$m\le\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\le M.$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知，至少存在一点 $\eta\in[-a,a]$，使

$$f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即 $$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

【例 4】（1999 年 2）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$.

【证法 1】 由麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中 η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$. 分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\quad -1<\eta_1<0$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\quad 0<\eta_2<1.$$

两式相减，可得

$$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$$

因 $f'''(x)$ 连续，$f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设其分别为 M 和 m，

则有

$$m \le \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \le M.$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点$\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1,1)$，使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 3.$$

【证法 2】

【例 5】设 $f(x)$ 在$[0, 1]$上二阶可导，$f(0) = f(1) = 0, \max\limits_{0 \le x \le 1} f(x) = 2$. 试证存在点 $\xi \in (0,1)$ 使 $f''(\xi) \le -16$.

【证法 1】设 $f(c) = \max\limits_{0 \le x \le 1} f(x) = 2$，则$0 < c < 1$，且 $f'(c) = 0$，

由泰勒公式知

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$$

在上式中分别令$x = 0$，和$x = 1$得

$$f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2} \qquad \xi_1 \in (0, c)$$

$$f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1-c)^2} \qquad \xi_2 \in (c,1)$$

若$c \le \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_1) = -\frac{4}{c^2} \le -\frac{4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$

若$c > \frac{1}{2}$，则 $f''(\xi_2) = -\frac{4}{(1-c)^2} \le -\frac{4}{(\frac{1}{2})^2} = -16$

故存在点$\xi \in (0,1)$使 $f''(\xi) \le -16$.

【证法 2】

思考题：

1. 试证 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}\quad (x>0).$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，试证存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

3. 设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(-1)=0, f(1)=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，试证存在 $\eta\in(-1,1)$，使

$f'''(\eta)\ge 3$.

4. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=f'(1)=0$，试证：$\xi\in[0,1]$，使 $|f''(\xi)|\ge 2$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内 $n+1$ 阶可导，且 $f^{(n+1)}(x_0)\ne 0$,

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(h)h).$$

求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)$.

答案提示：

1.【证】$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2}{2!}+R_2(x)$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+R_2(x)$$

其中 $R_2(x)=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-3}x^3,\quad (0<\theta<1).$

由于当 $x>0$ 时，$R_2(x)>0$, 则 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}\quad (x>0).$

2.【证 1】$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{a+b}{2})^2$

在上式中分别令 $x=a, x=b$ 得

$$f(a)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{a-b}{2})+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

$$f(b)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(\frac{b-a}{2})+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\frac{(b-a)^2}{4}$$

上式两端相加得

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]\frac{(b-a)^2}{8}$$

由 $f(x)$ 二阶可导及导函数的介值性知，存在 ξ 使得 $f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi)$. 则

$$f(a)+f(b)=2f(\frac{a+b}{2})+\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

【证 2】令 $\varphi(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$

$$\varphi(\frac{a+b}{2})-\varphi(a)=\varphi'(c)\frac{b-a}{2}=[f'(c+\frac{b-a}{2})-f'(c)]\frac{b-a}{2}$$

$$=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$$

即 $f(b)+f(a)-2f(\frac{a+b}{2})=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4}$

3. **提示：**由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知，$f(0)=0, f'(0)=0.$ 写出 $f(x)$ 在 $x=0$ 处拉格朗日余项的二阶泰勒公式，再将 $x=-1, x=1$ 代入便可证明.

4. **提示：**分别写出 $f(x)$ 在 $x=0, x=1$ 处拉格朗日余项的二阶泰勒公式，然后两式相减便可证明.

5. **提示：**参见：3. 求极限中的例 3，$\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=\frac{1}{n+1}$.

专题八　　不等式问题

不等式问题常见有两种，一种是函数不等式，另一种是积分不等式.

（一）函数不等式

函数不等式问题常用的五种方法:

1）单调性；　　2）最大最小值；　　3）拉格朗日中值定理；

4）泰勒公式；　　5）凹凸性；

常用不等式:

1） $2ab \le a^2 + b^2, (a > 0, b > 0)$;

2） $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, (a_i > 0, i = 1,2\cdots n)$;

3） $\sin x < x < \tan x, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$;

4） $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x \in (0, +\infty)$.

【例 1】试证：当$0 < x < 1$时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

【证】只要证$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$

即 $$(1+x)\ln(1+x) > \sqrt{1-x^2}\arcsin x$$

令 $$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$$

则 $$f'(x) = \ln(1+x) + 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - 1$$

$$= \ln(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x > 0$$

又 $f(0) = 0,$ 则当$0 < x < 1$时，$f(x) > 0,$ 原题得证.

【例 2】证明当$x > 0$时，$(1+x)^{1+\frac{1}{x}} < e^{1+\frac{x}{2}}$.

【证】取对数，则要证不等式变形为

$$(1+\frac{1}{x})\ln(1+x) < 1 + \frac{x}{2}$$

即 $$2(1+x)\ln(1+x) < 2x + x^2$$

令 $f(x)=2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x) \quad (x\geq 0)$

则 $f'(x)=2+2x-2\ln(1+x)-2$

$$=2[x-\ln(1+x)]>0$$

又 $f(0)=0$,则当 $x>0$ 时， $f(x)>0$,原题得证.

【例 3】（2002 年 2）设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

【证】先证左端不等式,由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\Big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi}.$$

由于 $0<a<\xi<b$，故 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，从而

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

再证右端不等式. 设

$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}} \quad (x\geq a),$$

因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

故当 $x>a$ 时, $\varphi(x)$ 单调减少. 又 $\varphi(a)=0$，所以，当 $x>a$ 时 $\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

从而当 $b>a$ 时，$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$，即

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

【例 4】（1993 年 5）设 p,q 是大于 1 的常数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明：对于任意的

$x > 0, \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q} \ge x$.

【证】令 $f(x) = \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q} - x \quad (x > 0)$

则 $f'(x) = x^{p-1} - 1$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 又 $f''(x) = (p-1)x^{p-2}$, $f''(1) = (p-1) > 0$,

由此可见当 $x = 1$ 时，$f(x)$ 取极小值.又因为极值点唯一，则该极小值也就是最小值.故对任意 $x > 0$, 有 $f(x) \ge f(1) = 0$, 即

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \ge x$$

【例 5】（1995 年 2, 3） 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$，且 $f''(x) > 0$，证明：$f(x) \ge x$.

【证 1】 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ 知 $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$，由泰勒公式知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \\ &= x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2 \\ &\ge x \qquad (f''(x) > 0) \end{aligned}$$

原式得证.

【证 2】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$ 知 $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$

又 $f''(x) > 0$，则 $f'(x)$ 单调增，由拉格朗日中值定理知

$f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)x$ （c 介于0与x之间）

由于 $f'(x)$ 单调增，则

$f(x) = f'(c)x \ge f'(0)x = x$

原题得证.

【证 3】 只要证 $f(x) - x \ge 0$，令 $F(x) = f(x) - x$，

只要证明 $F(x) \ge 0$，即只要证 $F(x)$ 的最小值大于等于零.

由于$F'(x)=f'(x)-1$

显然$F'(0)=f'(0)-1=0$

又$F''(x)=f''(x)>0$，则$F'(x)$单调增，$x=0$为$F'(x)$唯一的零点，即$x=0$为$F(x)$唯一驻点，又$F''(x)=f''(x)>0$，

则$x=0$为$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上唯一极值点，且在该点取极小值，因此$F(x)$在$x=0$处取得它在$(-\infty,+\infty)$上的最小值，

从而　$F(x)\geq F(0)=f(0)-0=0$

原题得证

【证4】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$知$f(0)=0$，$f'(0)=1$

则曲线$y=f(x)$在$(0,0)$点的切线方程为

$$y=x$$

又$f''(x)>0$，则曲线$y=f(x)$是凹的，由此可知曲线$y=f(x)$在$(0,0)$点的切线$y=x$的上方，故

$$f(x)\geq x$$

【例6】设函数$f(x)$在区间(a,b)内二阶可导，且$f''(x)>0$,证明对任意的$x_1,x_2\in(a,b)$,且$x_1\neq x_2$及$\lambda(0<\lambda<1)$,恒有$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

【证法1】令$x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，不妨设$x_1<x_2$,则$x_1<x<x_2$.

由拉格朗日中值定理得

$$f(x)-f(x_1)=f'(\xi_1)(x-x_1)=f'(\xi_1)(1-\lambda)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi_1<x)\qquad ①$$

$$f(x_2)-f(x)=f'(\xi_2)(x_2-x)=f'(\xi_2)\lambda(x_2-x_1)\qquad(x<\xi_2<x_2)\qquad ②$$

$\lambda\times$①$-(1-\lambda)\times$②得

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)=\lambda(1-\lambda)(x_2-x_1)[f'(\xi_1)-f'(\xi_2)]$$

由于$f''(x)>0$,则$f'(x)$单调增，从而有$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$,

$$f(x)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0$$

即 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$

【证法 2】令 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，由泰勒公式得

$$f(x_1)=f(x)+f'(x)(x_1-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2$$
$$=f(x)+f'(x)(1-\lambda)(x_1-x_2)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2$$
$$f(x_2)=f(x)+f'(x)(x_2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$$
$$=f(x)+f'(x)\lambda(x_2-x_1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$$

则 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=f(x)+\lambda\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x)^2+(1-\lambda)\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x)^2$

$$>f(x)$$

即 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$

【例 7】设 $p,q>0$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，又设 $x>0,y>0$，求证：$xy\le\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q$.

【证】只要证 $\ln(xy)\le\ln(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$

即只要证 $\frac{\ln x^p}{p}+\frac{\ln y^q}{q}\le\ln(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$

由例 6 可知，只要证 $f(x)=\ln x$ 是凸的即可，由于

$$f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}$$

则 $f(x)=\ln x$ 是凸的，故

$$\frac{f(x^p)}{p}+\frac{f(y^q)}{q}\le f(\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q)$$

原题得证.

（二）积分不等式

积分不等式问题常用的方法：

1）积分不等式性质； 2）变量代换； 3）积分中值定理 ；

4）变上限积分；　　　　　　5）柯希积分不等式；

常用的积分不等式:

1）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\le g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2）若 M 及 m 分别是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

3）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

4)柯西积分不等式:

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

【例 1】(2018 年 1, 2, 3) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,\ K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$, 则

$(A)\quad M>N>K,$　　　　$(B)\quad M>K>N,$

$(C)\quad K>M>N,$　　　　$(D)\quad K>N>M,$

【解】选(C)

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2x+x^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx$$

$$=\pi+0=\pi$$

由不等式 $e^x>1+x\ (x\ne 0)$ 可知

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\pi$$

则 $K>M>N$, 故应选(C).

【例 2】(2017 年 2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1,$ 且 $f''(x)>0,$ 则（ ）.

（A）$\int_{-1}^{1} f(x)dx>0.$ （B）$\int_{-1}^{1} f(x)dx<0.$

（C）$\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx.$ （D）$\int_{-1}^{0} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx.$ $[B]$

【例 3】(2012 年 1, 2) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x dx (k=1,2,3)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3.$ （B）$I_3<I_2<I_1.$

（C）$I_2<I_3<I_1.$ （D）$I_2<I_1<I_3.$ $[D]$

【例 4】（1994 年 3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 非负，单调减.

求证: $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx \quad (0<a<1)$

【证 1】 只要证 $\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^a f(x)dx + a\int_a^1 f(x)dx$

即 $(1-a)\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^1 f(x)dx$

由积分中值定理知

$(1-a)\int_0^a f(x)dx = a(1-a)f(c_1) \qquad 0<c_1<a$

$a\int_a^1 f(x)dx = a(1-a)f(c_2) \qquad a<c_2<1$

由于 $f(x)$ 单调减，则 $f(c_1)>f(c_2)$

则 $(1-a)\int_0^a f(x)dx \ge a\int_a^1 f(x)dx$

原题得证

【证 2】 $\int_0^a f(x)dx = a\int_0^1 f(at)dt$ （令 $x=at$）

$$= a\int_0^1 f(ax)dx$$

由于 $f(x)$ 单调减，而 $ax < x$，则 $f(ax) > f(x)$

从而有 $a\int_0^1 f(ax)dx > a\int_0^1 f(x)dx$

即 $\int_0^a f(x)dx > a\int_0^1 f(x)dx$

【证 3】 令 $F(u) = \int_0^u f(x)dx - u\int_0^1 f(x)dx \quad (0 \le u \le 1)$

则 $$F'(u) = f(u) - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= f(u) - f(c) \qquad (0 < c < 1)$$

显然 $F'(c) = 0,$ 当 $0 \le u < c$ 时，$F'(u) > 0,$ 当 $c < u \le 1$ 时，$F'(u) < 0.$ 则 $F(u)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值必在 $u = 0,$ 或 $u = 1$ 处取得，又 $F(0) = F(1) = 0,$ 则当 $0 < u < 1$ 时，$F(u) > 0,$ 即

$$\int_0^a f(x)dx > a\int_0^1 f(x)dx$$

【例 5】(2005 年 3) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0,\ f'(x) \ge 0$，$g'(x) \ge 0$.

证明:对任何 $a \in [0,1]$, 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \ge f(a)g(1).$$

【证法 1】 令 $F(x) = \int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t - f(x)g(1)$,

则 $$F'(x) = g(x)f'(x) - f'(x)g(1)$$

$$= f'(x)[g(x) - g(1)] \le 0$$

$F(x)$ 单调不增，又

$$F(1) = \int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t - f(1)g(1)$$

$$= \int_0^1 [g(t)f'(t) + f(t)g'(t)]dt - f(1)g(1)$$

$$= f(t)g(t)\Big|_0^1 - f(1)g(1)$$

$$= -f(0)g(0) = 0.$$

则 $F(x) \ge 0, x \in [0,1]$, 原题得证.

【证法 2】$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(a)g(a)+\int_a^1 f(x)g'(x)dx$$

$$\geq f(a)g(a)+\int_a^1 f(a)g'(x)dx$$

$$=f(a)g(a)+f(a)\int_a^1 g'(x)dx$$

$$=f(a)g(a)+f(a)[g(1)-g(a)]$$

$$\geq f(a)g(1)$$

【例 6】设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 试证柯西积分不等式

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

【证法 1】令 $F(t)=\int_a^t f^2(x)dx\int_a^t g^2(x)dx-(\int_a^t f(x)g(x)dx)^2$

则 $F(a)=0$, 且

$$F'(t)=f^2(t)\int_a^t g^2(x)dx+g^2(t)\int_a^t f^2(x)dx-2f(t)g(t)\int_a^t f(x)g(x)dx$$

$$=\int_a^t[f^2(t)g^2(x)+g^2(t)f^2(x)-2f(t)g(t)f(x)g(x)]dx$$

$$=\int_a^b[f(t)g(x)-f(x)g(t)]^2dx\geq 0$$

则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减，所以 $F(b)\geq F(a)=0$.

$$\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx-(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\geq 0$$

即 $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

【证法 2】若 $g(x)\equiv 0$, 结论显然成立，否则，对任意实数 λ 均有

$$\int_a^b[f(x)+\lambda g(x)]^2dx\geq 0$$

即 $\lambda^2\int_a^b g^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$

又 $\int_a^b g^2(x)dx>0$, 则关于 λ 的这个二次三项式的判别式

$$\Delta=4[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2-4\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\leq 0$$

即 $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

【例 7】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=0$,

求证: $\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)dx$

【证】 $\because$ $f(x)=\int_0^x f'(t)dt$

$$\therefore\ f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)dt\right)^2 \le \int_0^x 1^2 dt\cdot\int_0^x f'^2(t)dt \qquad \text{(柯西积分不等式)}$$

$$=x\int_0^x f'^2(t)dt \le x\int_0^1 f'^2(t)dt$$

$$\therefore\ \int_0^1 f^2(x)dx \le \int_0^1 xdx\cdot\int_0^1 f'^2(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(t)dt\ ;.$$

思考题

1. 证明当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x+\tan x>2x$.

2. 设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 证明: $\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$.

3. 试证 当 $0<x<1$ 时, $e^{2x}<\frac{1+x}{1-x}$

4. 当 $x>0$ 时, $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

5. 设 $a>1, n\ge 1$, 试证 $\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2}<\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a}<\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

6. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 证明对任何 $x_1>0$, $x_2>0$, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

7. 设 $x>0, x\ne 1$, 试证 $\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}}$.

8. 设 $0<\alpha<1$, 试证: $x^\alpha-\alpha x\le 1-\alpha \quad (x\ge 0)$.

9. 设 $I_1=\int_{-1}^1\frac{x}{\sin x}dx, I_2=\int_{-1}^1\frac{x^2}{\sin x}dx, I_3=\int_{-1}^1\frac{x}{\tan x}dx,$, 则

(A) $I_2<I_3<I_1$ (B) $I_2<I_1<I_3$

(C) $I_1<I_2<I_3$ (D) $I_1<I_3<I_2$

10. 设 $f(x)$ 在 $[0,b]$ 上有连续且单调递增, 证明: 当 $0<a\le b$ 时, 有

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{b}{2}\int_0^b f(x)dx-\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$,

求证：$\int_0^1 f^2(x)dx \le \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)dx.$

专题9 方程根的存在性及个数

方程 $f(x)=0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的零点,其几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 和 x 轴的交点.通常是以下两个问题

1.根的存在性

方法1：零点定理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0,$ 则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根.

【注】这个结论可推广为：若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha,$ $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta,\alpha\cdot\beta<0,$ 则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根. 这里 $a,b,$ α,β 可以是有限数，也可以是无穷大.

方法2：罗尔定理

若函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理三个条件，且

$$F'(x)=f(x),x\in(a,b),$$

则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根.

2.根的个数

方法1：单调性

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调（严格单调），则方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上最多一个实根.

方法2：罗尔定理推论

罗尔定理推论：若在区间 I 上 $f^{(n)}(x)\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 在 I 上最多 n 个实根.

【例1】 试证方程 $x^2+x-\cos x=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

【例2】(1989年1,2) 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

【解】 令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx \qquad x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增.

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减.

又 $f(e)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

则 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 和 $(e,+\infty)$ 内各有一个零点，故原方程有且仅有两个实根.

【例3】 设 a,b,c 为实数，求证方程 $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

【例4】（2015年2）已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 的零点个数.

【解1】由 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$ 知

$$f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}=(2x-1)\sqrt{1+x^2}$$

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\dfrac{1}{2}$

当 $x\in(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 是，$f'(x)<0,\ f(x)$ 单调减，$f(x)$ 在该区间最多一个零点；

当 $x\in(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 是，$f'(x)>0,\ f(x)$ 单调增，$f(x)$ 在该区间最多一个零点；

又 $f(-1)=\int_{-1}^1\sqrt{1+t^2}dt=2\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx>0$

$$f(0)=\int_0^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^0\sqrt{1+t}dt$$

$= \int_0^1 (\sqrt{1+t^2} - \sqrt{1+t})dx < 0 \qquad (\sqrt{1+t^2} < \sqrt{1+t},\ t \in (0,1))$

则 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上至少有一个零点，又 $f(1)=0,$ 则 $f(x)$ 共有两个零点.

【解2】 由 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt$ 知

$f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = (2x-1)\sqrt{1+x^2}$

令 $f'(x)=0$ 得，$x=\dfrac{1}{2}$

当 $x \in (-\infty, \dfrac{1}{2})$ 是，$f'(x)<0,\ f(x)$ 单调减，$f(x)$ 在该区间最多一个零点；

当 $x \in (\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 是，$f'(x)>0,\ f(x)$ 单调增，$f(x)$ 在该区间最多一个零点；

又 $f(1)=0,$ 由 $f(x)$ 在 $[\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 单调增可知，$f(\dfrac{1}{2})<0,$ 且

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \dfrac{1}{2})$ 上至少有一个零点,综上所述 $f(x)$ 共有两个零点.

【例5】 试证方程 $4^x - 3x^3 = 1$ 有且仅有4个实根.

【证】 令 $f(x) = 4^x - 3x^3 - 1$,则

$f(0)=0$，$f(1)=0$

$f(2) = -9 < 0$，$f(4) = 4^4 - 3\cdot 4^3 - 1 = 63 > 0$，则 $f(x)$ 在 $(2,4)$ 内至少有一个零点，

$f(-1) = \dfrac{1}{4} + 3 - 1 = \dfrac{9}{4} > 0, f(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} - 1 = -\dfrac{1}{8} < 0,$

则 $f(x)$ 在 $(-1, -\dfrac{1}{2})$ 内至少有一个零点，

即原方程至少有四个实根，又

$f'(x) = 4^x \ln 4 - 9x^2$，$f''(x) = 4^x \ln^2 4 - 18x$，$f'''(x) = 4^x \ln^3 4 - 18$

$f^{(4)}(x) = 4^x \ln^4 4 \neq 0$

从而原方程最多四个实根，故原题得证.

【例6】讨论方程 $\ln x = ax$ 实根个数.

【解1】将原方程变形得 $ax - \ln x = 0$

令 $f(x) = ax - \ln x \quad (x > 0),$ 则

$$f'(x) = a - \frac{1}{x}$$

1）若 $a \le 0$ 时, $f'(x) < 0,$ 则 $f(x)$ 单调减，又 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$ 则方程 $\ln x = ax$ 有唯一实根.

2）若 $a > 0$ 时,则当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时，$f'(x) < 0,$ $f(x)$ 单调减，当 $x > \frac{1}{a}$ 时，$f'(x) > 0,$ $f(x)$ 单调增.又 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$ 则当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a}) < 0,$ 原方程有两个实根；当 $a = \frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a}) = 0,$ 原方程有一个实根；则当 $a > \frac{1}{e}$ 时，$f(\frac{1}{a}) > 0,$ 原方程无实根.

综上所述，原方程

(1) $a > \frac{1}{e}$ 无实根； (2) $a = \frac{1}{e}$ 唯一实根；

(3) $0 < a < \frac{1}{e}$ 两个实根； (4) $a \le 0$ 唯一实根

【解2】将原方程变形得 $\frac{\ln x}{x} = a$ （分离参数）

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0),$ 则

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

令 $f'(x) = 0,$ 得 $x = e.$ 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调增；当 $e < x$ 时，$f'(x) < 0, f(x)$ 单调减；$f(e) = \frac{1}{e}, \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

画出函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (x > 0)$ 的图形，则原方程实根个数的几何意义就是直线 $y = a$

和曲线 $y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的交点个数.由图可知

(1) $a>\frac{1}{e}$ 无实根； (2) $a=\frac{1}{e}$ 唯一实根；

(3) $0<a<\frac{1}{e}$ 两个实根； (4) $a\le 0$ 唯一实根

【注】本题是一个带有参数的方程根的问题，将原方程 $\ln x=ax$ 变形得 $\frac{\ln x}{x}=a$ ，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x},$ 是将参数 a 分离出来，这是解决此类问题常用且有效的方法。

【例7】（2011年1）求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

【解1】令 $f(x)=k\arctan x-x$ ，则 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且

$$f(0)=0,f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

当 $k-1\le 0$ ，即 $k\le 1$ 时， $f'(x)<0(x\ne 0)$ ， $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少，方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=0.$

当 $k-1>0$ ，即 $k>1$ 时，在 $(0,\sqrt{k-1})$ 内， $f'(x)>0,f(x)$ 单调增加；在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内， $f'(x)<0,f(x)$ 单调减少，所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值。

由于 $f(0)=0$ ，所以 $f(\sqrt{k-1})>0.$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{k\arctan x}{x}-1)=-\infty$ ，所以存在 $\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$ ，使得 $f(\xi)=0.$

由 $f(x)$ 是奇函数及其单调性可知：当 $k>1$ 时，方程 $f(x)=0$ 有且仅有三个不同实根 $x=-\xi,x=0,x=\xi.$

【解2】由于 $k\arctan x-x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，则方程 $k\arctan x-x=0$ 实根关于原点对称，显然 $x=0$ 是一个根，所以只要确定该方程在区间 $(0,+\infty)$ 上的实根个数.即方程 $\frac{x}{\arctan x}=k$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的实根个数.

令 $f(x)=\dfrac{x}{\arctan x}$，则

$$f'(x)=\frac{\arctan x-\dfrac{x}{1+x^2}}{\arctan^2 x}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{1+\xi^2}-\dfrac{x}{1+x^2}}{\arctan^2 x}$$ （$0<\xi<x$，这里用了拉格朗日定理）

$$>0$$

则 $f(x)=\dfrac{x}{\arctan x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，从而，当 $k>1$ 时，方程 $\dfrac{x}{\arctan x}=k$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有唯一实根，$k\le 1$ 时，方程 $\dfrac{x}{\arctan x}=k$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上无实根.

综上所述，方程 $k\arctan x-x=0$ 在 $k\le 1$ 时有唯一实根，而在 $k>1$ 时有三个实根.

【例8】 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f(a)>0, f'(a)<0.$ 当 $x>a$ 时，$f''(x)<0.$ 证明方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 有且仅有一个实根.

【证】 由 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减，又 $f'(a)<0$，则当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调减，方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 上最多一个实根.

由泰勒公式知当 $x\in(a,+\infty)$ 时

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2$$

$$\le f(a)+f'(a)(x-a)\to-\infty. \quad (x\to+\infty)$$

故存在 $b>a$，使得 $f(b)<0$，又 $f(a)>0$，由连续函数的零点定理知，方程 $f(x)=0$ 在($a,+\infty$)内有根.

故 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 有且仅有一个实根.

【例9】(2012年2)（I）证明方程 $x^n+x^{n-1}+$? $+x=1$ （n 为大于1的整数）在区间（$\dfrac{1}{2},1$）内有且仅有一个实根；

（II）记（I）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

【证】（I）令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\boxed{?}+x-1(n>1)$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，且

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0,\ f(1)=n-1>0$$

，

由闭区间上连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内至少有一个实根.

当 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时，$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\boxed{?}+2x+1>0,$

故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内单调增加.综上所述，方程 $f(x)=0$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根.

（II）由 $x_n\in(\frac{1}{2},1)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界，又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\boxed{?}+x_n=1,$$

$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\boxed{?}+x_{n+1}=1.$$

于是有 $x_n>x_{n+1}, n=1,2,\boxed{?},$

即 $\{x_n\}$ 单调减少.综上所述，数列 $\{x_n\}$ 单调有界，故 $\{x_n\}$ 收敛.

记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 由于 $\dfrac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1,$

令 $n\to\infty$ 并注意到 $\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，则有 $\dfrac{a}{1-a}=1$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$

【例10】（2017年1,2）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有2阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0.$ 证明：

（I）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

（II）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

思考题

1．求证方程$x+p+q\cos x=0$恰有一个实根，其中p,q为常数且$0<q<1$.

2．当a取下列哪个值时，函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$恰有两个不同的零点

（A）2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

3. 求方程$k\arctan x-x=0$不同实根的个数，其中k为参数.

4. 讨论曲线$y=4\ln x+k$与$y=4x+\ln^4 x$的交点个数.

5.设函数$f(x)$可导，试证$f(x)$的两个零点之间必有$f(x)+f'(x)$的零点。

6. 设在$[0,+\infty)$上函数$f(x)$有连续导数，且$f'(x)\ge k>0$，$f(0)<0$，证明$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点.

7. 试确定方程$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^3-x$的实根个数.

答案：2.（B）；　3. $k\le 1,$ 唯一实根；$k>1,$ 三个实根；

4. $k<4$ 无交点；$k=4$ 一个交点；$k>4$ 两个交点；

7. 提示：$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-x^3+x$为奇函数，共三个根.

专题 10　计算不定积分和定积分的方法和技巧

(一) 不定积分

(1) 三种主要的积分法

1）第一类换元法（凑微分法）

若$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$，且$\varphi(x)$可导，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$$

2）第二类换元法

设函数$x=\varphi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$, 又设

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)+C$$

则　$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

三种常用的变量代换

（1）被积函数中含有$\sqrt{a^2-x^2}$时，令$x=a\sin t$, 或$x=a\cos t$;

（2）被积函数中含有$\sqrt{a^2+x^2}$时，令$x=a\tan t$；

（3）被积函数中含有$\sqrt{x^2-a^2}$时，令$x=a\sec t$；

3）分部积分法

设$u(x),v(x)$有连续一阶导数，则

$$\int udv = uv - \int vdu$$

【注】(1) 分部积分法常用于被积函数为两类不同函数相乘的不定积分；

(2)分部积分法选择$u(x),v(x)$的原则是$\int vdu$比$\int udv$好积， 设$p_n(x)$是n次多项式，则

形如$\int \mathrm{p}_n(x)e^{\alpha x}\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\sin\alpha x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\cos\alpha x dx$ 的积分都是先把多项式以外的函数凑进微分号，然后分部积分；

形如 $\int \mathrm{p}_n(x)\ln x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{p}_n(x)\arcsin x dx$ 的积分都是先把多项式函数凑进微分号，然后分部积分；

形如 $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x,\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ 的积分可连续两次将指数函数凑进微分号分部积分还原,求得原不定积分.

(2) 三类常见函数的积分

1）有理函数积分 $\int R(x)\,\mathrm{d}x$

（1）一般方法（部分分式法）

（2）特殊方法（加项减项拆或凑微分绛幂）;

2）三角有理式积分 $\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x$

（1）一般方法（万能代换） 令 $\tan\frac{x}{2}=t$

$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2}{1+t^2}dt$$

（2）特殊方法 （三角变形，换元，分部）

几种常用的换元法

i)若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\cos x$;

ii)若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\sin x$;

iii)若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则 令 $u=\tan x$.

3）简单无理函数积分 $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})\,\mathrm{d}x$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$, 将其化为有理函数积分进行计算.

【例 1】$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$____________________. （ $(\arctan\sqrt{x})^2+C$ ）

【例 2】$\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx=$____________.

【解】$\int \frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx = \int \frac{\ln\tan x}{2\sin x\cos x}dx$

$$= \int \frac{\ln\tan x}{2\tan x}d\tan x = \frac{1}{2}\int \ln\tan x d\ln\tan x$$

$$= \frac{1}{4}(\ln\tan x)^2 + C$$

【例 3】(2018 年 3) $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx =$ ________.

【解】$\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}dx = \int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}de^x$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int \frac{e^x d\sqrt{1-e^{2x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-e^{2x}})^2}}$$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \int d\sqrt{1-e^{2x}}$$

$$= e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C$$

【例 4】(2018 年 1, 2) 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

【解】$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$= \int \sqrt{e^x-1}de^x + \int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$= \frac{2}{3}(e^x-1)\sqrt{e^x-1} + 2\sqrt{e^x-1} + C$$

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}(e^x+2)\sqrt{e^x-1} + C$$

【例 5】(2003 年 2) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

【解 1】 设 $x = \tan t$，则

$$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int = \frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$$

又 $\int \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t = \int \sin t\,\mathrm{d}e^t = e^t\sin t - \int \mathrm{e}^t\cos t dt$

$$=e^t\sin t-\int\cos t de^t$$

$$=\mathrm{e}^t\sin t-e^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t,$$

故 $$\int\mathrm{e}^t\sin t dt=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C.$$

因此 $$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C$$

$$=\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【解 2】 $$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{\arctan x}$$

$$=\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

移项整理，得

$$\int\frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C.$$

【例 6】 $\displaystyle\int\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx$

【解 1】 令 $\displaystyle\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

由 $Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=3-x^2$

得 $$\begin{cases}A+C=-1\\A+B=0\\B=3\end{cases}$$

解得 $A=-3,B=3,C=2.$

$$\int\frac{x^3+3}{x^2(1+x)}dx=\int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=x-3\ln|x|-\frac{3}{x}+2\ln|x+1|+C$$

【解 2】

【例 7】 $\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx$

【解 1】由于 $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$，设

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

则 $$x\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

由此解得 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}.$

$$\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

【解 2】

【例 8】 $\int \frac{dx}{\sin x\cos 2x}$

【解】原式 $=\int \frac{dx}{\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)}$ $\qquad (R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$

$$=\int \frac{-d\cos x}{(1-\cos^2 x)(2\cos^2 x-1)}$$

$$=-\int \frac{2(1-u^2)+(2u^2-1)}{(1-u^2)(2u^2-1)}du$$

$$=-2\int \frac{du}{2u^2-1}+\int \frac{du}{u^2-1}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

（二）定积分

定积分的计算常用方法有以下五种

1）牛顿-莱布尼兹公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a);$$

2）换元积分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足以下条件：

（1）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；

（2）$\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi=[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3）分部积分法

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续一阶导数，则

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

4）利用奇偶性和周期性

(1) 设 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上的连续函数（$a>0$），则

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ 为奇函数时}, \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x, & f(x) \text{ 为偶函数时}. \end{cases}$$

(2) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任给数 a，总有

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5）利用公式

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

$$(2)\ \int_0^\pi x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x \quad （\text{其中}f(x)\text{在}[0,1]\text{上连续}）$$

【例 1】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\cos^2 x + \int_0^x e^{-t^2}dt]\sin^2 x dx =$ ____________.

【解】 e^{-t^2} 偶函数，则 $\int_0^x e^{-t^2}dt$ 奇函数.

$$原式=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^2 x dx=\frac{\pi}{8}.$$

【例 2】(2012 年 1) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=$________.

【解 1】 $原式=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$$\underline{\underline{x-1=\sin t}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2 t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$$

【解 2】 $原式=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$$=\int_0^2[(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}dx$$

$$=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\qquad（几何意义）$$

【例 3】 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=$__________.

【解】 $原式=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x dx$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin x dx\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

【例 4】(2013 年 1) 计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}dt.$

【解】 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}dx$

$$=-4\int_0^1\ln(1+x)d\sqrt{x}=-4\ln(1+x)\sqrt{x}\Big|_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$=-4\ln 2+8-2\pi$$

【例 5】计算定积分 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

【解】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan x}{2+\tan^2 x}$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\pi$$

【例 6】计算定积分 $\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx.$

【解】令 $x=2-t,$ 则 $dx=-dt,$

$$\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx=\int_0^2\frac{2-t}{e^{2-t}+e^t}dt.$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^2\frac{x}{e^x+e^{2-x}}dx+\int_0^2\frac{2-x}{e^x+e^{2-x}}dx]$$

$$=\int_0^2\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_0^2\frac{de^x}{e^{2x}+e^2}$$

$$=\frac{1}{e}\arctan\frac{e^x}{e}\Big|_0^2=\frac{1}{e}[\arctan e-\arctan\frac{1}{e}]$$

【例 7】计算定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

【解】 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt\overset{t=\frac{\pi}{4}-u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}]du$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan u}du=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan u)du$$

$$=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

【例 8】（1995 年 3）设 $f(x),g(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）

1）证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx$

2）利用 1）计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$

【证】（1）令 $x=-t$，则

$$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f(-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-a}^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

于是 $$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^a[f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

（2）令 $f(x)=\arctan\mathrm{e}^x$，$g(x)=|\sin x|$，$a=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数.

又因为 $(\arctan e^x+\arctan e^{-x})'=0$，所以 $\arctan e^x+\arctan e^{-x}=A.$

令 $x=0$，得 $2\arctan 1=A$，故 $A=\dfrac{\pi}{2}$，即

$$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}.$$

于是，有 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}.$

【例 9】 设 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$，$f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)$

$$=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2dx$$

$$=\int_0^1(1-x)\arctan(x-1)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan u\,du \qquad （令 (x-1)^2=u）$$

$$=\frac{1}{2}u\arctan u\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{u}{1+u^2}du=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

【例 10】 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且 $f(x)\int_0^x f(x-t)dt=\sin^4 x$，求 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的平均值.

【解】 令 $x-t=u$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

$$f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\sin^4 x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(x)\int_0^x f(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}(\int_0^x f(u)\mathrm{d}u)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的平均值为 $\dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx}{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2\pi}}$

思考题

1. 求下列不定积分

1) $\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx$

2) $\int \frac{3x+2}{x(1+x^2)}dx$

3) $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}$

5) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

6) $\int x\arcsin x dx$

7) $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

8) $\int \arcsin x \arccos x dx.$

2. 计算下列定积分

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$

2) $\int_0^6 x^2\sqrt{6x-x^2}dx$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^9 x dx$

4) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}dx$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$

6) $\int_0^1 x^2 f(x)dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x \sqrt{1+t^4}dt.$

7) $\int_0^1 f(x)dx$ 其中 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt.$

答案

1. 求下列不定积分

1） $2\ln|x+1|+3\ln|x-2|+C$

2） $\ln x^2-\ln(1+x^2)+3\arctan x+C$

3） $-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$

4） $\frac{\sqrt{2x-4}}{4x}+\frac{1}{4}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$

5） $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$

6） $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

7） $e^x\tan\frac{x}{2}+C$

8) $x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}\arccos x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+2x+C$

2. 计算下列定积分

1) $\dfrac{\pi}{16}$.

2) $\dfrac{405\pi}{8}$.

3) $\dfrac{128\pi}{315}$.

4) $\dfrac{\pi}{4}$.

5) $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

6) $\dfrac{\pi}{16}$.

7) $\dfrac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$

8) $\dfrac{1}{4}(\cos 1-1)$

专题 11　平面域的面积与旋转体的体积

（一）平面图形的面积

计算平面图形的面积时，利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 设有平面域 D，则该平面域 D 的面积为

$$S=\iint_D 1d\sigma$$

1）若平面域 D 由曲线 $y=f(x), y=g(x)$ ($f(x)\ge g(x)$)，

$x=a$， $x=b$（$a<b$）所围成（如右图），则

$$S=\iint_D 1d\sigma=\int_a^b dx\int_{g(x)}^{f(x)}1dy=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx$$

2）若平面域 D 由曲线曲 $\rho=\rho(\theta)$， $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$

所围成（如右图），则其面积为

$$S=\iint_D 1d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\rho(\theta)}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

【注】　平面域 D 的面积直接用二重积分 $S=\iint_D 1d\sigma$ 计算，然后根据积分域 D 选择计算二重积分的方法（直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性）.

（二）旋转体的体积

旋转体的体积的一般的问题是平面域 D 绕直线

$L: ax+by+c=0$（该直线不穿过区域 D, 如右图）

旋转所得旋转体体积，记该体积为 V. 解决该问题

利用二重积分比利用一元定积分的元素法方便. 在

区域 D 中取一小区域 $(d\sigma)$，其面积记为 $d\sigma$, (x,y) 为区域 $(d\sigma)$ 中的任一点, 则该小区域绕直线 L 旋转所得环状体的体积近似值为

$$dV=2\pi\, r(x,y)d\sigma$$

其中 $r(x,y)$ 为点 (x,y) 到直线 L 的距离，即 $r(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 则

$$V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma$$

特别的, 若区域 D 由曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$)，

和直线 $x=a$，$x=b$ $(0\le a<b)$ 及 x 轴所围成

（如右图），则

（1）区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_x=2\pi\iint_D y\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)}ydy=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

（2）区域 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y=2\pi\iint_D x\,d\sigma=2\pi\int_a^b dx\int_0^{f(x)}xdy=2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}\,x$$

【注】 平面域 D 绕直线 $L:ax+by+c=0$（该直线不穿过区域 D) 旋转所得旋转体体积直接用二重积分 $V=2\pi\iint_D r(x,y)d\sigma$ 计算，然后选择计算二重积分的方法（直角坐标、极坐标、奇偶性、对称性）. 用这个方法比用一元的元素法简单的多.

【例 1】 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为

________.　　　　　　　　$[\frac{3}{2}-\ln 2]$

【例 2】 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|\,\mathrm{d}\,t$, 则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成封闭图形的面积

为__________.

【解】 由于 $t|t|$ 为奇函数，则 $f(x)=\int_{-1}^{x}t|t|\,\mathrm{d}\,t$ 为偶函数，

而 $f'(x)=x|x|<0,(x<0)$, $f(-1)=0$,

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(-t^2)dt=-\frac{1}{3}(x^3+1)\qquad (x\le 0)$$

$$S=2\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}(x^3+1)dx=\frac{1}{2}$$

【例 3】(1996 年 3) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$（m 为常数），则曲线 $y=g(x)$，$y=f(x)$，$x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转

体体积为（ ）.

（A）$\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（B）$\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（C）$\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

（D）$\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ (B)

【例 4】 设平面图形 A 由 $x^2+y^2\le 2x$ 所确定, 试求

(Ⅰ)图形 A 绕 y 旋转一周所得旋转体的体积;

(Ⅱ)图形 A 绕 $x=3$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(Ⅲ)图形 A 绕 $y=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解】(Ⅰ)**方法一** $V_y=4\pi\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$

$=4\pi\int_0^2[(x-1)+1]\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$=4\pi\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx$ （奇偶性平移）

$=4\pi\cdot\frac{\pi}{2}$ （定积分几何意义）

$=2\pi^2$

方法二 $V_y=2\pi\iint\limits_D r(x,y)d\sigma=2\pi\iint\limits_D xd\sigma$

$=2\pi\iint\limits_D[(x-1)+1]d\sigma$

$=2\pi\iint\limits_D d\sigma$ （奇偶性平移）

$=2\pi^2$

（Ⅱ）$V_{x=3}=2\pi\iint\limits_D r(x,y)d\sigma=2\pi\iint\limits_D(3-x)d\sigma$

$$= 2\pi \iint_D [2-(x-1)] d\sigma$$

$$= 2\pi \iint_D 2 d\sigma \qquad \text{（奇偶性平移）}$$

$$= 4\pi^2$$

（Ⅲ）$V_{y=2} = 2\pi \iint_D r(x,y) d\sigma = 2\pi \iint_D (2-y) d\sigma$

$$= 2\pi \iint_D 2 d\sigma \qquad \text{（奇偶性）}$$

$$= 4\pi^2$$

【例 5】过点 $(0,1)$ 作曲线 $L: y = \ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 围成. 求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】设切点 A 的坐标为 (x_1, y_1)，则切线方程为

$$y - y_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1),$$

将点 $(0,1)$ 代入，得 $x_1 = e^2, y_1 = 2$.

所求面积为 $S = \int_1^{e^2} \ln x dx - \frac{1}{2}(e^2-1)\cdot 2$

$$= x\ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx - e^2 + 1$$

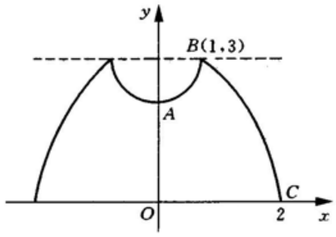
$$= 2e^2 - e^2 + 1 - e^2 + 1 = 2$$

所求体积为 $V = \pi \int_1^{e^2} \ln^2 x dx - \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot(e^2-1)$

$$= \pi(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x)\Big|_1^{e^2} - \frac{4\pi}{3}(e^2-1) = \frac{2\pi}{3}(e^2-1).$$

【例 6】求曲线 $y = 3 - |x^2 - 1|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转所得的旋转体体积.

【解 1】 作出图形. $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $y = x^2 + 2$ $(0 \le x \le 1)$，$\overset{\frown}{BC}$ 的方程为 $y = 4 - x^2$ $(1 \le x \le 2)$.



设旋转体在区间 $[0,1]$ 上体积为 V_1，在区间 $[1,2]$ 上的体积为 V_2，则它们的体积元素分别为

$$\mathrm{d}V_1 = \pi\{3^2 - [3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x = \pi[8 + 2x^2 - x^4]\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi[8+2x^2-x^4]\mathrm{d}x.$$

由对称性得 $V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{448}{15}\pi.$$

【解 2】$V=2\pi\iint\limits_D(3-y)d\sigma=2\pi\int_{-2}^{2}dx\int_0^{3-\left|x^2-1\right|}(3-y)dy$

$$=-\pi\int_{-2}^{2}[(x^2-1)^2-9]dx=\frac{448}{15}\pi$$

【例 7】设曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $y=2$ 所围区域为 D，

1）求区域 D 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转的体积；

2）求区域 D 分别绕 $x=2$ 和 $y=2$ 旋转所得旋转的体积.

【解】 1）$V_x=2\pi\iint\limits_D yd\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}ydx=\dfrac{8\pi}{3}$

$$V_y=2\pi\iint\limits_D xd\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}xdx=\frac{11}{6}\pi$$

2）区域 D 绕 $x=2$ 旋转所得旋转的体积为

$$V=2\pi\iint\limits_D(2-x)d\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2-x)dx=\pi(\frac{25}{6}-4\ln 2)$$

区域 D 绕 $y=2$ 旋转所得旋转的体积为

$$V=2\pi\iint\limits_D(2-y)d\sigma=2\pi\int_1^2dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}(2-y)dx=4\pi(\frac{5}{6}-\ln 2)$$

【例8】求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围区域为 D 绕直线 $y=x$ 旋转一周所得旋转体的体积.

【解】 $r(x,y)=\dfrac{|y-x|}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$

$$V=2\pi\iint\limits_D\frac{x-y}{\sqrt{2}}d\sigma=2\pi\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}\frac{x-y}{\sqrt{2}}dy=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

【例 9】设平面域 D 由曲线 $\rho=(1+\cos\theta)$ 所围成，试求

1）区域 D 的面积；

2）区域 D 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】 1）解 $S=\iint\limits_{D}1\,d\sigma=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho d\rho=\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta=\dfrac{3\pi}{2}$

2） 由于 D 在极轴上方和下方两部分绕极轴旋转产生的旋转体重合，则

$$V_x=2\pi\iint\limits_{D_{y\ge 0}}yd\sigma=2\pi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\rho$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{8\pi}{3}$$

【例 10】 已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}(0\le t<\dfrac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且

$f(0)=0, f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1.

1) 求函数 $f(t)$ 的表达式;

2）求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积及绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

【解】 1) 曲线 L 的切线斜率 $k=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，切线方程为

$$y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}(x-f(t)).$$

令 $y=0$，得切线与 x 轴交点的横坐标为 $x_0=f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}+f(t)$.

由题意得 $\left[f'(t)\dfrac{\cos t}{\sin t}\right]^2+\cos^2 t=1$.

因为 $f'(t)>0$，解得 $f'(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\dfrac{1}{\cos t}-\cos t$.

由于 $f(0)=0$，所以 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

2）因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}f(t)=+\infty$，所以以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域是无界区域，其面积为

$$S=\int_0^{+\infty}ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt\ =\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=\frac{1}{4}\pi.$$

$$V_x=\pi\int_0^{+\infty}y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot f'(t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt=\frac{\pi}{3}$$

【例 11】设曲线 $y=\sin x\ (0\le x\le n\pi, n=1,2\cdots)$ 和 x 轴所围成的区域为 A, 区域 A 绕 y 轴旋转所得旋转体体积为 S_n.

（Ⅰ）求 S_n;

（Ⅱ）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$.

【解】（Ⅰ）$S_n=2\pi\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$ （令 $x=n\pi-t$）

$$=2\pi\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=2n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-S_n$$

$$S_n=n\pi^2\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n^2\pi^2\int_0^{\pi}\sin tdt=2n^2\pi^2$$

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{S_1}{n^3+1^3}+\frac{S_2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{S_n}{n^3+n^3}]$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}[\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}]$$

$$=2\pi^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{(\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^3}+\frac{(\frac{2}{n})^2}{1+(\frac{2}{n})^3}+\cdots+\frac{(\frac{n}{n})^2}{1+(\frac{n}{n})^3}]$$

$$=2\pi^2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{2\pi^2}{3}\ln 2$$

思考题

1. 曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$______.

2. 位于曲线 $y=x\mathrm{e}^{-x}\ (0\le x<+\infty)$ 下方， x 轴上方的无界图形的面积是______.

3. 设曲线的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}\ (a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为________.

4. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表为（ ）.

（A）$-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

（B）$\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

（C）$-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

（D）$\int_0^2 x(x-1)(2-x)\,\mathrm{d}x$

5. 设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$ $(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

（I）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

（II）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

6. 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1)求 D 的面积 A;

(2)求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

7. 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}, (0\le t\le \frac{\pi}{2})$ 围成的平面区域，求 D 饶 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

答案

1. $\frac{37}{12}$;　　2. 1;　　3. $\frac{1}{4a}(e^{4\pi a}-1)$;　　4. C;

5. $V(a)=\frac{\pi a^2}{\ln^2 a}$, $V_{\min}(e)=\pi e^2$;　　6. $A=\frac{1}{2}e-1, V=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$;

7. $\frac{18}{35}\pi$.

专题 12　微分方程有关综合题

【例 1】设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$, 且 $f(0)=2$, 则

$f(1)=$ __________.

【解】由 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$ 知

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2xf(x)+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

上式中令 $\Delta x\to 0$ 得　　$f'(x)=2xf(x)$

解方程得　　$f(x)=Ce^{x^2}$

又 $f(0)=2$, 则 $C=2$, $f(x)=2e^{x^2}$, $f(1)=2e$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f'(1)=1$，对任意的正数

x,y，$f(xy)=yf(x)+xf(y)$ 求 $f(x)$.

【解】

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+(1+\frac{\Delta x}{x})f(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}+\frac{f(x)}{x}\qquad (f(1)=0)$$

$$=f'(1)+\frac{f(x)}{x}$$

$$=1+\frac{f(x)}{x}$$

解该线性方程得　　$f(x)=x\ln x$

【例 3】设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件

$y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（ ）.

（A）不存在　　（B）等于 1　　（C）等于 2　　（D）等于 3

【解】由 $y''+py'+qy'=e^{3x}$ 知 $y''(x)$ 连续且 $y''(0)=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2$$

$y''(0)=2,$ 故应选（C）.

【例 4】已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2.$

（Ⅰ）求 $f(x);$

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 $1,$ 求 a 的值.

【解】（Ⅰ）令 $x-t=u,$ 则 $dt=-du,$

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

由题设条件得

$$\int_0^x f(u)du+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$$

上式两端求导得

$$f(x)+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=2ax$$

$$f(x)+\int_0^x f(u)du=2ax$$

由此可知 $f(x)$ 不但连续，而且可导，且 $f(0)=0.$ 再求导得

$$f'(x)+f(x)=2a$$

$$f(x)=e^{-x}[\int 2ae^x dx+C]$$

$$=Ce^{-x}+2a$$

由 $f(0)=0,$ 可得 $C=-2a,$ 从而

$$f(x)=2a(1-e^{-x})$$

（Ⅱ）由题意可知

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx=1$$

即 $$\int_0^1 2a(1-e^{-x})dx=1$$

解得 $a=\frac{e}{2}$

【例 5】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足

$$f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)e^{-x}$$

求 $f(x)$.

【解】 等式 $f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)e^{-x}$ 两端同乘 e^x 得

$$e^x f(x)\left[\int_0^x e^t f(t)dt+1\right]=(x+1)$$

令 $\int_0^x e^t f(t)dt+1=F(x)$，则

$$F'(x)F(x)=x+1$$

$$\frac{1}{2}[F^2(x)]'=x+1$$

$$[F^2(x)]'=2(x+1)$$

$$F^2(x)=(x+1)^2+C$$

又 $F(0)=1$, 则 $F(x)=x+1$, 即

$$\int_0^x e^t f(t)dt+1=x+1$$

$$e^x f(x)=1$$

$$f(x)=e^{-x}$$

【例 6】 设 $f(x)$ 为连续函数，

（1）求初值问题 $\begin{cases} y'+ay=f(x), \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 a 是正常数；

（2）若 $|f(x)|\le k$（k 为常数），证明当 $x\ge 0$ 时，有 $|y(x)|\le \frac{k}{a}(1-e^{-ax})$.

【证 1】（1）原方程的通解为

$$y(x)=e^{-\int adx}\left[\int f(x)e^{ax}dx+C\right]=e^{-ax}[F(x)+C],$$

其中$F(x)$是$f(x)e^{ax}$的任一原函数. 由$y(0)=0$，得$C=-F(0)$，故

$$y(x)=e^{-ax}[F(x)-F(0)]=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt.$$

（2）$|y(x)|\le e^{-ax}\int_0^x |f(t)|e^{at}dt\le ke^{-ax}\int_0^x e^{at}dt=\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)$

$$=\frac{k}{a}(1-e^{-ax}),\quad x\ge 0.$$

【证 2】（1）在原方程的两端同乘以e^{ax}，得

$$y'e^{ax}+aye^{ax}=f(x)e^{ax},$$

从而$(ye^{ax})'=f(x)e^{ax}$，所以$ye^{ax}=\int_0^x f(t)e^{at}dt$，或

$$y(x)=e^{-ax}\int_0^x f(t)e^{at}dt.$$

（2）同证法一.

【例 7】设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，$f(0)=1$，且满足等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

（1）求导数$f'(x)$；

（2）证明：当$x\ge 0$时，成立不等式：$e^{-x}\le f(x)\le 1$.

【解】（1）由题设知$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$，

上式两边对x求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

令$u=f'(x)$，则有$\frac{du}{dx}=-\frac{x+2}{x+1}u$，

解之得 $f'(x)=u=\frac{Ce^{-x}}{x+1}$..

由$f(0)=1$及$f'(0)+f(0)=0$，知$f'(0)=-1$，

从而$C=-1$，因此$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{x+1}$.

（2）**【证 1】** 当$x\ge 0$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$单调减少，又$f(0)=1$，所以

$$f(x)\le f(0)=1.$$

设 $\varphi(x)=f(x)-e^{-x}$，则 $\varphi(0)=0,\varphi'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{x}{x+1}e^{-x}$.

当 $x\ge 0$ 时，$\varphi'(x)\ge 0$，即 $\varphi(x)$ 单调增加，因而

$$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0\text{，即有}\quad f(x)\ge e^{-x}..$$

综上所述，当 $x\ge 0$ 时，成立不等式 $e^{-x}\le f(x)\le 1..$

【证 2】 由于 $\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)=f(x)-1$，所以 $f(x)=1-\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt.$

注意到当 $x\ge 0$ 时，$0\le\int_0^x\dfrac{e^{-t}}{t+1}dt\le\int_0^x e^{-t}dt=1-e^{-x}$，

因而 $e^{-x}\le f(x)\le 1$.

【例 8】 设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0,$ 其中 $0<k<1.$

（Ⅰ）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛;

（Ⅱ）若 $y(0)=1,y'(0)=1,$ 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

【解】（Ⅰ）该方程的特征方程为 $r^2+2r+k=0,$

解得 $r_1=-1+\sqrt{1-k},\ r_2=-1-\sqrt{1-k},$

因为 $0<k<1,$ 所以 $r_1<0,r_2<0,$ 从而 $\int_0^{+\infty}e^{r_1x}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}e^{r_1x}dx$ 收敛.

由于 $r_1\ne r_2,$ 所以 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$，其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

由此可知，反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$r_1<0,r_2<0,$ 所以

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}[C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=\lim_{x\to+\infty}[C_1r_1e^{r_1x}+r_2C_2e^{r_2x}]=0$$

又 $y(0)=1,y'(0)=1,$ 所以

$$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}[-\frac{1}{k}(y''(x)+2y'(x))]dx$$

$$=-\frac{1}{k}(y'(x)+2y(x))\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{3}{k}$$

【例 9】设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续二阶导数， $f(1)=0,\ f'(1)=1,$ 且

$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值。

【解】令 $x^2+y^2=t,$ 则 $z=tf(t)=z(t)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'(t)\cdot 2x,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2z'(t)+4x^2z''(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2z'(t)+4y^2z''(t)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)z''(t)+4z'(t)=0$$

$$tz''(t)+z'(t)=0,\qquad z(1)=0,\ z'(1)=1.$$

解得 $z(t)=\ln t,\ f(t)=\frac{\ln t}{t},$

$f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2},$ 令 $f'(t)=0,$ 得 $t=e,$ 又 $f'(t)$ 在 $t=e$ 两侧由正变负，则 $f(t)$ 在 $t=e$ 取极大值，又因为 $t=e$ 是 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上唯一的极值点，则 $f(e)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值， $f(e)=\frac{1}{e}.$

【例 10】设函数 $u(x,y)$ 的全微分 $du=[e^x+f''(x)]ydx+f(x)dy$，其中 f 具有二阶连续的导数，且 $f(0)=4,\ f'(0)=3,$ 求 $f(x)$ 及 $u(x,y).$

【解】由题设 $du=[e^x+f''(x)]ydx+f(x)dy$ 知

$$[e^x+f''(x)]=f'(x)$$

即 $$f''(x)-f'(x)=-e^x$$

解方程得 $$f(x)=C_1+C_2e^x-xe^x,$$

由 $f(0)=4,\ f'(0)=3,$ 得 $C_1=0,C_2=4.$

则 $f(x)=4e^x-xe^x.$

$$du=[e^x+f''(x)]ydx+f(x)dy$$

$$=yf'(x)dx+f(x)dy=ydf(x)+f(x)dy=d(yf(x))$$

故 $u(x,y)=yf(x)+C=y(4-x)e^x+C.$

【例 11】设 $f(x)$ 连续, 且 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}(x^2+y^2)f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy+t^4$，求 $f(x)$.

【解】 $f(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t\rho^2 f(\rho)\rho d\rho+t^4$

$$=2\pi\int_0^t\rho^3 f(\rho)d\rho+t^4$$

由于 $f(x)$ 连续, 由此可知 $f(x)$ 可导且 $f(0)=0$, 上式两端对 t 求导得

$$f'(t)=2\pi t^3 f(t)+4t^3$$

即 $f'(t)-2\pi t^3 f(t)=4t^3$

$$f(t)=e^{2\pi\int t^3dt}\left[\int e^{-2\pi\int t^3dt}(4t^3)dt+C\right]$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}t^4}\left[-\frac{1}{\pi}e^{-\frac{\pi}{2}t^4}+C\right]=Ce^{\frac{\pi}{2}t^4}-\frac{1}{\pi}$$

由 $f(0)=0$, 知 $C=\frac{1}{\pi}$. 则

$$f(x)=\frac{1}{\pi}(e^{\frac{\pi}{2}x^4}-1)$$

【例 12】(I) 验证函数

$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

(II) 利用 (I) 的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

【解】(1) 因为

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=e^x,$$

（2）与 $y''+y'+y=e^x$ 相应的齐次微分方程为

$$y''+y'+y=0,$$

其特征方程为

$$\lambda^2+\lambda+1=0,$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此齐次微分方程的通解为

$$Y=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

设非齐次微分方程的特解为

$$y^*=Ae^x.$$

将 y^* 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 得 $A=\frac{1}{3}$，于是

$$y^*=\frac{1}{3}e^x.$$

方程通解为

$$y=Y+y^*=e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]+\frac{1}{3}e^x.$$

当 $x=0$ 时，有

$$\begin{cases} y(0)=1=C_1+\frac{1}{3}, \\ y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}. \end{cases}$$

由此，得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=0$. 于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为

$$Y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x \quad (-\infty<x<+\infty).$$

【例 13】设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线. 当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\le x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

【解】 当 $-\pi<x<0$ 时，设 (x,y) 为曲线上任一点，由导数几何意义，法线斜率为 $k=-1\Big/\frac{dy}{dx}$. 由题意，法线斜率为 $\frac{y}{x}$，所以有

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

分离变量，解得

$$x^2+y^2=C.$$

由初始条件 $y\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，得 $C=\pi^2$，所以

$$y=\sqrt{\pi^2-x^2},\quad -\pi<x<0. \qquad ①$$

当 $0\le x<\pi$ 时，$y''+y+x=0$ 的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-x, \qquad ②$$

$$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x-1. \qquad ③$$

因为曲线 $y=y(x)$ 光滑，所以 $y(x)$ 连续且可导，由①式知

$$y(0)=\lim_{x\to 0^-}y(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\pi^2-x^2}=\pi,$$

$$y'(0)=y'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\pi^2-x^2}-\pi}{x}=0.$$

代入②，③式，得 $C_1=\pi,C_2=1$，故

$$y=\pi\cos x+\sin x-x,\quad 0\le x<\pi.$$

因此

$$y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

【例 14】设函数 $y=y(x)$ 是方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（Ⅰ）求 $y(x)$;

（Ⅱ）设平面域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转的体积.

【解】（Ⅰ）由一阶线性方程通解公式得

$$y(x)=e^{\int xdx}[\int\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}e^{-\int xdx}dx+C]$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$$

由 $y(1)=\sqrt{e}$ 可知，$C=0$. 则

$$y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

（Ⅱ）设平面域 D 绕 x 轴旋转的体积为

$$V=\int_1^2\pi y^2(x)dx$$

$$=\int_1^2\pi xe^{x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$$

思考题

1.（1994 年 3）设 $y=f(x)$ 是微分方程

$$y''-y'-e^{\sin x}=0$$

的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在（ ）.

（A）x_0 的某个邻域内单调增加　　（B）x_0 的某个邻域内单调减少

（C）x_0 处取得极小值　　（D）x_0 处取得极大值

2.（1998 年 1,2）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于（ ）.

（A）2π　　（B）π　　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$　　（D）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$

3. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$f'(1)=1$，对任意的正数

x, y，$f(xy)=\dfrac{f(x)}{y}+\dfrac{f(y)}{x}$ 求 $f(x)$.

4.（1997 年 1）设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases} y''+4y'+4y=0, \\ y(0)=2, y'(0)=-4, \end{cases}$ 求广义积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$.

6.（2016 年 3）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$, 求 $f(x)$.

7.（1997 年 3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(t)$.

8.(2009 年 2)设非负函数 $y=y(x)$ $(x\ge 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$. 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面区域 D 的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

答案

1. C;　　2. D;　　3. $\dfrac{\ln x}{x}$;　　4. $C_1e^u+C_2e^{-u}$;

5. 1;　　6. $-\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;　　7. $(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}$;　　8. $-\dfrac{17}{6}\pi$.

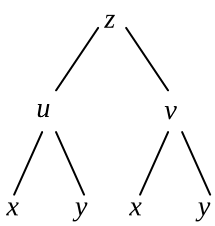
专题 13：多元复合函数与隐函数求导的方法和技巧

(一) 复合函数求导法

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$可导，$z=f(u,v)$在相应点有连续一阶偏导数, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$



(二) 全微分形式不变性

设$z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$都有连续一阶偏导数. 则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,,\qquad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

(三) 隐函数求导法

1）由一个方程所确定的隐函数

设$F(x,y,z)$有连续一阶偏导数，$F_z'\neq 0, z=z(x,y)$由$F(x,y,z)=0$所确定.

方法:

（1） 公式：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'};$

（2） 等式两边求导 $F_x'+F_z'\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F_y'+F_z'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

（3） 利用微分形式不变性：$F_x'dx+F_y'dy+F_z'dz=0$

2）由方程组所确定的隐函数（仅数一要求）

设$u=u(x,y),v=v(x,y)$由$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$所确定

方法:

（1）等式两边求导 $\begin{cases}F_x'+F_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\G_x'+G_u'\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v'\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$

（2）利用微分形式不变性 $\begin{cases}F_x'dx+F_y'dy+F_u'du+F_v'dv=0\\G_x'dx+G_y'dy+G_u'du+G_v'dv=0\end{cases}$

1.复合函数偏导数与全微分

【例 1】设 $z=\dfrac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=$ ______. (-1)

【例 2】设函数 $z=(1+\dfrac{x}{y})^{\frac{x}{y}}$，则 $dz|_{(1,1)}=$ ______. $(1+2\ln 2)(dx-dy)$

【例 3】设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ______.

【解 1】 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ ，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{y^2\cos(xy)(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2},$$

故 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4.$

【解 2】 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{y\sin xy}{1+x^2y^2}$ ， $F_x(x,2)=\dfrac{2\sin 2x}{1+4x^2}$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=F_{xx}(0,2)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x(1+4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(1+4x^2)}=4$$

【例 4】设 $z=(1+x^2y^2)^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解 1】 由原题设可知 $z=e^{xy\ln(1+x^2y^2)}$，两端对 x,y 分别求偏导.

【解 2】 由原题设知 $\ln z=xy\ln(1+x^2y^2)$，两端对 x,y 分别求偏导.

【解 3】 令 $u=1+x^2y^2, v=xy$，则 $z=u^v$，由复合函数求导法可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}2xy^2+u^v\ln u\cdot y$$

$$=(1+x^2y^2)^{xy}[\frac{2x^2y^3}{1+x^2y^2}+y\ln(1+x^2y^2)].$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【注】解法 3 也可用于一元幂指函数，如 $y=(1+x^2)^{\sin x}$，可令

$u=1+x^2, v=\sin x.$

【例 5】(2007 年 1) 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$__________.

$[yx^{y-1}f_1+y^x\ln yf_2]$

【例 6】设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是( )

(A) $\frac{1}{2},0.$ (B) $0,\frac{1}{2}.$ (C) $-\frac{1}{2},0.$ (D) $0,-\frac{1}{2}.$

【解 1】令 $x+y=u, \frac{y}{x}=v$，则

$$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}$$

故 $$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$$

所以 $\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{1+v},\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{2u^2}{(1+v)^2}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\ \left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$$

【解 2】令 $x+y=u,\frac{y}{x}=v$, 则当 $u=1,v=1$时，$x=y=\frac{1}{2}$. 等式 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$ 两端分别对 x,y 求偏导得

$$f_u+f_v(-\frac{y}{x^2})=2x$$

$$f_u+f_v(\frac{1}{x})=-2y$$

将 $x=y=\frac{1}{2}$ 代入上式得 $\begin{cases} f_u(1,1)-2f_v(1,1)=1 \\ f_u(1,1)+2f_v(1,1)=-1 \end{cases}$

由此解得 $f_u(1,1)=0,\ f_v(1,1)=-\frac{1}{2}$.

【例 7】设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,$

$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$..

【解】 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1,$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]\Big|_{x=1}$$

$$=3\cdot 1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

【例 8】设 $z=x^3f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$， f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2',$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left[xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right]+x^2\left[xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right]=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3 f_1'+x^4\left[yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right]+2xf_2'+x^2\left[yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''.$$

【例 9】设 $u=f(x,y,z), z=\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt$. 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, 其中 f 有二阶连续偏导数.

【例 10】设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】 由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'+yf_3'$， $\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'-f_2'+xf_3'$，所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(f_1'+f_2'+yf_3')\mathrm{d}x+(f_1'-f_2'+xf_3')\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''-f_{12}''+xf_{13}''+f_{21}''-f_{22}''+xf_{23}''+f_3'+y(f_{31}''-f_{32}''+xf_{33}'')$$

$$=f_{11}''+(x+y)f_{13}''-f_{22}''+(x-y)f_{23}''+xyf_{33}''+f_3'.$$

【例 11】设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

【解 1】 由 $z=f(xy,yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yg'(x)f_2',$$

上式两端对 y 求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}'']+g'(x)f_2'+yg'(x)[xf_{21}''+g(x)f_{22}''].$$

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0,$ 在上式中令 $x=1, y=1$ 得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

【解 2】　由 $z = f(xy, yg(x))$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + yg'(x) f_2',$$

由题意 $g(1)=1, g'(1)=0,$ 在上式中令 $x=1$ 得

$$z_x(1,y) = yf_1'(y,y)$$

上式两端对 y 求偏导得

$$z_{xy}(1,y) = f_1'(y,y) + y[f_{11}''(y,y) + f_{22}''(y,y)]$$

令 $y=1$ 得　$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

【例 12】设变换 $\begin{cases} u = x-2y, \\ v = x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a.

【解 1】将 z 视为以 u,v 为中间变量的 x,y 的复合函数，由题设可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将上述结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + (6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

依题意 a 应满足

$$6+a-a^2 = 0 \quad 且 \quad 10+5a \neq 0,$$

解之得　$a=3.$

【解 2】将 z 视为以 x,y 为中间变量的 u,v 的复合函数，由题设可得

$$x = \frac{au+2v}{a+2}, \quad y = \frac{-u+v}{a+2}.$$

从而 $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{a}{a+2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{a}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)-\frac{1}{a+2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$

$$=\frac{2a}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{a-2}{(a+2)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{a+2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$ 得，$2a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

依题意 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ 可知 $\frac{2a}{6}=\frac{a-2}{1}=\frac{-1}{-1}$

故 $a=3.$

【例 13】已知函数 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$. 设 $u=x,v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 对函数 $\psi=\psi(u,v)$，求证 $\frac{\partial\psi}{\partial u}=0.$

【证】 由 $\begin{cases}u=x\\ v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=u,\\ y=\frac{u}{1+uv}.\end{cases}$ 这样 $\psi=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ 便是 u,v 的复合函数，对 u 求偏导数得

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u})+\frac{1}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+uv)^2})+\frac{1}{u^2},$$

利用 $\frac{1}{1+uv}=\frac{y}{x}$ 和 $z(x,y)$ 满足的等式，有

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2x^2}(x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y})+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}=0.$$

2. 隐函数的偏导数与全微分

【例 1】若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则

$dz|_{(0,0)}=$ ________.

【解 1】将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3z}=1,$ 则 $z=0$

方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 两端微分得

$$e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0$$

将 $x=0,y=0,z=0$ 代入上式得

$$dx+2dy+3dz=0$$

则 $dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(dx+2dy).$

【解 2】将 $x=0,y=0$ 代入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中得 $e^{3z}=1,$ 则 $z=0$

$$dz\big|_{(0,0)}=z_x(0,0)dx+z_y(0,0)dy$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $y=0$ 得，$e^{x+3z}=1,$ 两边对 x 求导得

$$e^{x+3z}(1+3z_x)=0,$$

$$z_x(0,0)=-\frac{1}{3}$$

在 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 中令 $x=0$ 得，$e^{2y+3z}=1,$ 两边对 y 求导得

$$e^{2y+3z}(2+3z_y)=0,$$

$$z_y(0,0)=-\frac{2}{3}$$

则 $dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(dx+2dy)..$

【例 2】设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，

且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A）x　　（B）z　　（C）$-x$　　（D）$-z$

【解】
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\frac{y}{x^2}F_1-\frac{z}{x^2}F_2}{\frac{1}{x}F_2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{1}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-\frac{y}{x}F_1-\frac{z}{x}F_2}{\frac{1}{x}F_2}-\frac{\frac{y}{x}F_1}{\frac{1}{x}F_2}$$

$$=z$$

故应选（B）.

【例 3】设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：

$$\mathrm{e}^{xy}-xy=2 \quad 和 \quad \mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$$

求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

【解 1】 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}. \quad (1)$$

由 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$.

又由 $\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \quad 即 \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{\mathrm{e}^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

将其代入(1)式，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{\mathrm{e}^{x}(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【解 2】 $$du=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \quad (1)$$

等式 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 两端微分得

$$\mathrm{e}^{xy}(ydx+xdy)-(ydx+xdy)=0,$$

$$dy=-\frac{y}{x}dx$$

等式 $\mathrm{e}^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两端微分得

$$\mathrm{e}^x\,dx=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(dx-dz) \quad 即 \quad dz=(1-\frac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)})dx.$$

将其代入(1)式，得

$$du=[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}]dx$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left[1-\frac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\partial f}{\partial z}.$$

【例 4】设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\neq -1$.

（I）求 $\mathrm{d}z$；（II）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

【解 1】（I）设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$，则

$$F_x'=2x-\varphi',\quad F_y'=2y-\varphi',\quad F_z'=-1-\varphi'.$$

由公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}.$$

所以

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\varphi'}[(2x-\varphi')\mathrm{d}x+(2y-\varphi')\mathrm{d}y].$$

（II）由于 $u(x,y)=\dfrac{2}{1+\varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2}{(1+\varphi')^2}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi''=-\frac{2(2x+1)\varphi''}{(1+\varphi')^2}.$$

【解 2】（I）对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$，两端求微分，得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z).$$

解出 $\mathrm{d}z$，得

$$\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y.$$

（II）同解 1.

【例 5】设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(y-x,yz)=0$ 所确定的隐函数，其中函数 f 对各个变量具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

【解】方程 $f(y-x,yz)=0$ 的两边对 x 求导，得

$$-f_1'+yf_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad ①$$

解得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'}{yf_2'}. \qquad ②$$

①两边再对 x 求导，得

$$f_{11}''-yf_{12}''\frac{\partial z}{\partial x}-yf_{21}''\frac{\partial z}{\partial x}+y^2f_{22}''(\frac{\partial z}{\partial x})^2+yf_2'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

解出 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，并将②式代入，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{yf_2'}[-y^2f_{22}''(\frac{\partial z}{\partial x})^2+y(f_{12}''+f_{21}'')\frac{\partial z}{\partial x}-f_{11}'']$$

$$=\frac{1}{yf_2'}[-y^2f_{22}''\frac{f_1^{'2}}{y^2f_2^{'2}}+y(f_{12}''+f_{21}'')\frac{f_1'}{yf_2'}-f_{11}'']$$

$$=\frac{1}{yf_2^{'3}}(-f_1^{'2}f_{22}''+2f_1'f_2'f_{12}''-f_1^{'2}f_{11}'').$$

思考题

1. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$ 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

2. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\dfrac{y^2}{x})$ 则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

3. 设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

4. 已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

答案

1. $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$;

2. $yf(\frac{y^2}{x})$;

3. $a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$;

4. $1-3f_{11}-f_{22}$;

专题 14：多元函数的极值与最值

（一）无条件极值

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若对该邻域内任意的点 $P(x,y)$ 均有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\text{（或 }f(x,y)\ge f(x_0,y_0)\text{）},$$

则称 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的**极大值点**（或**极小值点**）；称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的**极大值**（或**极小值**）。极大值点和极小值点统称为**极值点**；极大值和极小值统称为**极值**。

定理 1（极值的必要条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点，则

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定理 2（极值的充分条件） 设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)=0$。记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0),$$

则有下述结论：

（1）若 $AC-B^2>0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极值点.

① $A<0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极大值点；

② $A>0$，则 (x_0,y_0) 为 $f(x,y)$ 的极小值点.

（2）若 $AC-B^2<0$，则 (x_0,y_0) 不为 $f(x,y)$ 的的极值点.

（3）若 $AC-B^2=0$，则 (x_0,y_0) 可能为 $f(x,y)$ 的极值点，也可能不为 $f(x,y)$ 的极值点(此时，一般用定义判定).

求具有二阶连续偏导数二元函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤为：

（1）求出 $f(x,y)$ 的驻点 $P_1,\cdots,P_k$。

（2）利用极值的充分条件判定驻点 P_i 是否为极值点。

【注】 二元函数 $z=f(x,y)$ 在偏导数不存在的点也可能取到极值（如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ ），而这种点是否取得极值一般用极值定义判定.

(二) 条件极值及拉格朗日乘数法

求 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值的一般方法为：

（1）构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

（2）将 $F(x,y,\lambda)$ 分别对 x ， y ， λ 求偏导数，构造方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

解出 x,y 及 λ ，则其中 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能的极值点.

以上方法可推广到对于 n 元函数在 m 个约束条件下的极值问题，如求 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ ， $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值，可构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f+\lambda\varphi+\mu\psi,$$

将 F 对 x,y,z,λ,μ 分别求偏导数，并构造方程组

$$\begin{cases} f_x'(x,y,z)+\lambda\varphi_x'(x,y,z)+\mu\psi_x'(x,y,z)=0, \\ f_y'(x,y,z)+\lambda\varphi_y'(x,y,z)+\mu\psi_y'(x,y,z)=0, \\ f_z'(x,y,z)+\lambda\varphi_z'(x,y,z)+\mu\psi_z'(x,y,z)=0, \\ \varphi(x,y,z)=0, \\ \psi(x,y,z)=0, \end{cases}$$

解出 x,y,z,λ 及 μ ，则其中 (x,y,z) 就是可能的极值点。

对于实际问题，如果驻点唯一，且由实际意义知问题存在最大（小）值，则该驻点即为最大（小）值点。如果存在多个驻点，且由实际意义知道问题既存在最大值也存在最小值，只需比较各驻点处的函数值，最大的则为最大值，最小的则为最小值。

（三）最大最小值

1）求连续函数 $f(x,y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值三部曲.

（1）求 $f(x,y)$ 在 D 内部可能的极值点.

（2）求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大最小值.

（3）比较

2）应用题

1. 极值问题

【例 1】 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　）

（A）$(0,0)$,　　（B）$(0,3)$,　　（C）$(3,0)$,　　（D）$(1,1)$.

【解】 $\begin{cases} z_x = y(3-2x-y)=0 \\ z_y = x(3-2y-x)=0 \end{cases}$

$(0,0)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(1,1)$. 都满足上式.

$z_{xx}=-2y, z_{yy}=-2x, z_{xy}=3-2x-2y.$

在 $(0,0)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值；

在 $(0,3)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值；

在 $(3,0)$ 点　　$AC-B^2=-9<0,$ 无极值；

在 $(1,1)$ 点　　$AC-B^2=3>0,$ 有极值.

故应选(D).

【例 2】 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0$，$g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）.

（A）$f''(0)<0, g''(0)>0$　　（B）$f''(0)<0, g''(0)<0$

（C）$f''(0)>0, g''(0)>0$　　（D）$f''(0)>0, g''(0)<0$

【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)，\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y).$$

在 $(0,0)$ 处，

$$AC-B^2=f''(0)g(0)\cdot f(0)g''(0)-[f'(0)g'(0)]^2$$

$$=f''(0)g''(0)f(0)g(0).$$

由于 $f(0)>0$，$g(0)<0$，若 $f''(0)<0$，$g''(0)>0$，则 $f''(0)g''(0)f(0)g(0)>0$，且 $A=f''(0)g(0)>0$.故 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.故选（A）.

【例 3】 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy,(a>0)$，则函数 $f(x,y)$

(A)无极值点；　　(B)点 (a,a) 为极小值点；

(C)点 (a,a) 为极大值点；　　(D)是否有极值点与 a 的取值有关。

【解】 由 $dz=(ay-x^2)dx+(ax-y^2)dy$ 知，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=ay-x^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax-y^2$

令 $\begin{cases}ay-x^2=0\\ax-y^2=0\end{cases}$ 得 $x=y=a,$ 或 $x=y=0.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2x,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2y,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=a.$$

在点 (a,a) 处

$$AC-B^2=3a^2>0,A=-2a<0$$

则点 (a,a) 为极大值点.

在点 $(0,0)$ 处

$$AC-B^2=-a^2<0,$$

则点 $(0,0)$ 不是极值点.

【例 4】 已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，则

（A） 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　（B） 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

【解】由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$ 可知,

$$\frac{f(x,y)-(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+\alpha(x,y),\quad f(0,0)=0,$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha(x,y)=0,$

则 $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}+\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)$

令 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho,$ 则

$$f(x,y)=a\rho+o(\rho)+\rho^2$$

1）当 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值;

2）当 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极大值;

3）当 $a=0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不一定有极值，例如

$$f(x,y)=(2x+y)\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)$$

$$f(0,0)=0,\ f(x,0)=2x|x|+x^2$$

当 $x>0$ 时，$f(x,0)>0;$ 当 $x<0$ 时，$f(x,0)<0;$ 则点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

故应选（D）.

【例 5】设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0.$ 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（ ）.

（A）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ （B）若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

（C）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$ （D）若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$

【解】构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，

令 $F'_x(x,y,\lambda)=F'_y(x,y,\lambda)=0$ 得

$$f_x'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x'(x_0,y_0)=0, \qquad (1)$$

$$f_y'(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y'(x_0,y_0)=0. \qquad (2)$$

若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，由（1）式知 $\lambda\neq 0$, 又 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$, 此时由（2）式可知 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

故应选（D）.

【例 6】求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

【解】 $f_x'(x,y)=2x(2+y^2)$， $f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1$.

令 $\begin{cases} f_x'(x,y)=0, \\ f_y'(x,y)=0, \end{cases}$ 解得唯一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

$$A=f_{xx}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2(2+y^2)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right),$$

$$B=f_{xy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=4xy\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=0,$$

$$C=f_{yy}''\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\mathrm{e},$$

所以 $AC-B^2=2\mathrm{e}\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)\neq 0$，且 $A>0$. 从而 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值，极小值为

$f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【例 7】已知函数 $f(x,y)$ 满足

$$f_{xy}''=2(y+1)e^x,\ f_x'(x,0)=(x+1)e^x,\ f(0,y)=y^2+2y,$$

求 $f(x,y)$ 的极值.

【解】由 $f_{xy}''=2(y+1)e^x$, 得 $f_x'=(y+1)^2e^x+\varphi(x)$.

因为 $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$, 所以 $e^x+\varphi(x)=(x+1)e^x$.

得 $\varphi(x)=xe^x$, 从而 $f_x'=(y+1)^2e^x+xe^x$.

对 x 积分得 $\quad f(x,y)=(y+1)^2e^x+(x-1)e^x+\psi(y)$.

因为 $f(0,y)=y^2+2y$, 所以 $\psi(y)=0$, 从而

$$f(x,y)=(x+y^2+2y)e^x$$

于是 $f_y'=(2y+2)e^x, f_{xx}''=(x+y^2+2y+2)e^x, f_{yy}''=2e^x.$

令 $f_x'=0, f_y'=0$, 得驻点 $(0,-1)$, 所以

$A=f_{xx}''(0,-1)=1, B=f_{xy}''(0,-1)=0, C=f_{yy}''(0,-1)=2.$

由于 $AC-B^2>0, A>0$, 所以极小值为 $f(0,-1)=-1.$

2. 最大最小值

【例 1】设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则

（A） $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

（B） $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

（C） $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值都在 D 的边界上取得

（D） $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值都在 D 的边界上取得

【解】 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=A, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=B$

由题设 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 可知, $B\neq 0, A+C=0$, 则

$$AC-B^2<0$$

故函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内无极值点, 因此, $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得. 故应选（A）.

【例 2】已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y$，并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+\dfrac{y^2}{4}\leq 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

【解 1】 由 $\mathrm{d}z = 2x\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$ 可知 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + C.$

再由 $f(1,1)=2$，得 $C=2$，故 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2.$

令 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0,$ 解得驻点 $(0,0)$.

在椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上，$z = x^2 - (4-4x^2) + 2$，即

$$z = 5x^2 - 2 \quad (-1 \le x \le 1),$$

其最大值为 $z\big|_{x=\pm1} = 3$，最小值为 $z\big|_{x=0} = -2$. 再与 $f(0,0)=2$ 比较，可知 $f(x,y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

【解 2】 同解法一，得驻点 $(0,0)$. 用拉格朗日乘数法求此函数在椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上的极值.

设 $L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1\right)$，令

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = -2y + \dfrac{\lambda}{2} y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0, \end{cases}$$

解得 4 个可能的极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0)$ 和 $(-1,0)$.

又 $f(0,2)=-2, f(0,-2)=-2, f(1,0)=3, f(-1,0)=3$，再与 $f(0,0)=2$ 比较，得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 3，最小值为 -2.

【解 3】 同解法一，得驻点 $(0,0)$. 椭圆 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = 2\sin t.$

则 $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2 = \cos^2 t - 4\sin^2 t + 2$

$= 3 - 5\sin^2 t$

故 $f_{\max} = 3, f_{\min} = -2$

【例 3】 设函数 $z = z(x,y)$ 的微分 $dz = (2x+12y)dx + (12x+4y)dy$，且 $z(0,0)=0$，求

函数 $z=z(x,y)$ 在 $4x^2+y^2\le 25$ 上的最大值。

【解】 由 $dz=(2x+12y)dx+(12x+4y)dy$ 知，$z=x^2+12xy+2y^2$

令 $\begin{cases} z_x=2x+12y=0 \\ z_y=12x+4y=0 \end{cases}$

驻点：$(0,0), z(0,0)=0$

$$F(x,y,\lambda)=x^2+12xy+2y^2+\lambda(4x^2+y^2-25)$$

$$\begin{cases} F_x=2x+12y+8\lambda x=0 & (1) \\ F_y=12x+4y+2\lambda y=0 & (2) \\ F_\lambda=4x^2+y^2-25=0 \end{cases}$$

由（1）和（2）式知：

$\begin{cases} (1+4\lambda)x+6y=0 \\ 6x+(2+\lambda)y=0 \end{cases}$ 且有非零解.

则 $\begin{vmatrix} 1+4\lambda & 6 \\ 6 & 2+\lambda \end{vmatrix}=0$, 解得 $\lambda_1=2, \lambda_2=-\frac{17}{4}$

$\lambda_1=2$ 时，驻点 $P_1(2,-3), P_2(-2,3), z=-50.$

$\lambda_2=-\frac{17}{4}$ 时，驻点 $P_3(\frac{3}{2},4), P_4(-\frac{3}{2},-4), z=\frac{425}{4}.$

比较得 $z_{\max}=\frac{425}{4}$

【例 4】 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

【解】 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4).$$

令 $\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=2y+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=2z-\lambda+\mu=0, \\ F'_\lambda=x^2+y^2-z=0, \\ F'_\mu=x+y+z-4=0, \end{cases}$

解方程组，得 $(x_1,y_1,z_1)=(1,1,2),$ ，$(x_2,y_2,z_2)=(-2,-2,8).$ 故所求的最大值为 72，最小值为 6.

【例 5】求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1\ (x \ge 0, y \ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

【解】$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 - xy + y^3 - 1)$$

令 $$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + (3x^2 - y)\lambda = 0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + (3y^2 - x)\lambda = 0 \qquad ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^3 - xy + y^3 - 1 = 0 \qquad ③$$

当 $x > 0, y > 0$ 时, 由①, ②得 $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3x^2 - y}{3y^2 - x}$, 即 $3xy(y - x) = (x + y)(x - y)$,

得 $y = x$ 或 $3xy = -(x + y)$（由于 $x > 0, y > 0$, 舍去）.

将 $y = x$ 代入③得 $2x^3 - x^2 - 1 = 0$, 即 $(2x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$.

所以, $(1,1)$ 是唯一可能的极值点，此时 $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$;

当 $x = 0, y = 1$ 或 $x = 1, y = 0$ 时，$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$,

故所求最长距离为 $\sqrt{2}$ ，最短距离为1.

【例 6】将长为 $2m$ 的铁丝分成三段，以次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在，求出最小值.

【解】设圆的半径为 x, 正方形与正三角形的边长分别为 y 和 z, 则围成圆、正方形与正三角形三个图形的面积之和为

$$S(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$$

且 $$2\pi x + 4y + 3z = 2 \qquad (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$$

令 $$L(x,y,z,\lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} z + 3\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $x_0 = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$, $y_0 = \dfrac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$, $z_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$,

且 $S(x_0, y_0, z_0) = \dfrac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

所以，三个图形的面积之和存在最小值，最小值为

$$S(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

【例 7】已知 $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, x, y > 0$. 求证：$xy \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

【证】只要证明函数 xy 在条件 $\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} = k(k > 0)$ 下的最大值不超过 k .

令 $L(x, y) = xy + \lambda(\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - k)$

则 $\begin{cases} L_x = y + \lambda x^{p-1} = 0 \\ L_y = x + \lambda y^{q-1} = 0 \\ L_\lambda = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - k = 0 \end{cases}$

由此解得 $x = k^{\frac{1}{p}}, y = k^{\frac{1}{q}}$，这是唯一的驻点，为最大值点，则

$$xy \le k^{\frac{1}{p}} \cdot k^{\frac{1}{q}} = k^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = k = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

思考题：

1. 已知函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定，求 $z = z(x, y)$ 的极值.

2. 在椭圆$3x^2+2xy+3y^2=1$的第一象限部分上求一点，使该点的切线与两坐标轴所围成三角形面积最小，并求面积的最小值。

答案与提示：

1.【解】等式$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$两端分别对$x$和$y$求偏导数，得

$$\begin{cases} 2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0, \\ 2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0. \end{cases} \quad ①$$

令$\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$解得$x=y=-\dfrac{1}{z}.$将$x=y=-\dfrac{1}{z}$代入方程

$$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$$

得$\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0,$可知$z=1,$从而得函数$z=z(x,y)$的驻点$(-1,-1).$

在①中两式两边分别对x和y求偏导数, 得

$$\begin{cases} 2z+4x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ 2x\dfrac{\partial z}{\partial y}+2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \\ 2z+4y\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{z^2}(\dfrac{\partial z}{\partial y})^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \end{cases} \quad ②$$

把$x=y=-1, z=1$以及$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$代入②中各式, 得

$$\begin{cases} 2+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \\ 2+3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \end{cases}$$

从而$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,-1)}=-\dfrac{2}{3},\ B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,-1)}=0,\ C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,-1)}=-\dfrac{2}{3},$

由于$AC-B^2>0, A<0,$所以$z(-1,-1)=1$是$z(x,y)$的极大值.

2.【解】设切点为$P(x,y),$切线为 $Y-y=y'(x)(X-x)$

$$y'(x)=-\frac{3x+y}{x+3y}$$

截距 $X_0=\frac{1}{3x+y}, Y_0=\frac{1}{x+3y}$

$$S=\frac{1}{2(1+8xy)} \qquad (x>0, y>0)$$

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(3x^2+2xy+3y^2-1)$$

$$x^2=y^2 \qquad x=y=\frac{1}{\sqrt{8}}, \quad S=\frac{1}{4}$$

专题 15：计算二重积分的方法和技巧

二重积分的计算方法

1．利用直角坐标计算

1）先 y 后 x

若积分域 D 是 X 型区域, 即积分域 D

可以用不等式 $y_1(x) \le y \le y_2(x), a \le x \le b$,

来表示, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

2）先 x 后 y

若积分域 D 是 Y 型区域, 即积分域 D

可以用不等式 $x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d$,

来表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

2．利用极坐标计算

1）先 ρ 后 θ

若积分域 D 可以用不等式

$$\rho_1(\theta) \le \rho \le \rho_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta,$$

来表示，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

【注】适合用极坐标计算的二重积分的特征

（1）适合用极坐标计算的被积函数：$f(\sqrt{x^2+y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y});$

（2）适合用极坐标的积分域：

如 $x^2+y^2 \le R^2;\ r^2 \le x^2+y^2 \le R^2;\ x^2+y^2 \le 2ax;\ x^2+y^2 \le 2by;$

3．利用对称性和奇偶性计算

1）若积分域 D 关于 y 轴对称，$f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性, 则:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_{x\geq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(-x,y)=f(x,y),\\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y).\end{cases}$$

2）若积分域关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint_{D_{y\geq 0}} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y),\\ 0, & f(x,-y)=-f(x,y).\end{cases}$$

4．利用变量对称性计算

若积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma.$$

特别的 $$\iint_D f(x)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y)\mathrm{d}\sigma.$$

【例 1】 积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=$____________. $(-\ln\cos 1)$

【例 2】 二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$__________.

【解】 积分 $\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx$ 中的第二项适合先对 x 后对 y 积分, 但第一项适合先对 y 后对 x 积分.

$$\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}(e-1)$$

【例 3】 积分 $\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ 的值等于____________. $(\frac{16}{9})$

【例 4】设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (3x+4y)^2\,dxdy=$__________. $(\frac{25\pi}{4})$

【例 5】设 D 是 xOy 平面上以（1, 1）（−1, 1）和（−1, −1）为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于（　　）

（A）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　（B）$2\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$　　（D）0.

【例 6】设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=-\frac{\pi}{2}, y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D (xy^5-1)dxdy=$

（A）π.　　（B）2.　　（C）-2.　　（D）$-\pi$.　　(D)

【例 7】积分 $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy=$（ ）

(A) $\frac{5}{3}$, (B) $\frac{5}{6}$, (C) $\frac{7}{3}$, (D) $\frac{7}{6}$,

【解】$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)dy$

$$=2\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=2\int_{0}^{1}[2-x^2-x]dx=\frac{7}{3}$$

【例 8】设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2,x=1$所围区域，则 $f(x,y)$ 等于（C）.

（A）xy （B）$2xy$ （C）$xy+\frac{1}{8}$ （D）$xy+1$

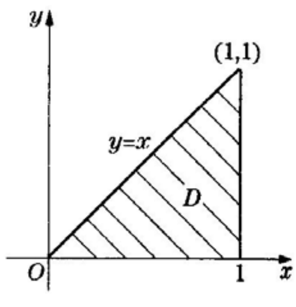
【例 9】计算二重积分

$$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

其中 $D=\left\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}.$

【解】由题设知，积分区域 D 如图所示，将积分化为直角坐标系下的二重积分为

$$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$



$$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\,\mathrm{d}x.$$

设 $x=\sin t$，则

$$I=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

【例 10】已知平面域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2y\}$，计算二重积分

$$I=\iint_D (x+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解】 $I=\iint_D (x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

由于 D 关于 y 轴对称，且函数 $2x$ 是 x 的奇函数，所以 $\iint_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

$$I=\iint_D (x^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\cos^2\theta\rho d\rho+\pi$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta+\pi$$

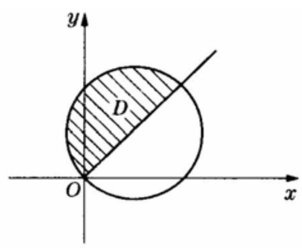
$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)d\theta+\pi$$

$$=8\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\pi=\frac{5}{4}\pi$$

【例 11】计算二重积分 $\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中

$$D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}.$$

【解法一】 如图所示，区域 D 的极坐标表示为



$$0\le r\le 2(\sin\theta+\cos\theta),\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}.$$

$$\iint_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\sin\theta+\cos\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{3}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

【解法二】极坐标平移，令 $x-1=r\cos\theta, y-1=r\sin\theta,$ 则

$$\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r^2(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos\theta-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

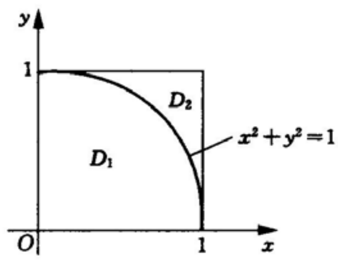
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\sin\theta+\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

【例 12】计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| d\sigma$，其中

$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。

【解】 如图所示，将 D 分成 D_1 与 D_2 两部分.



$$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma.$$

$$=\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$+[\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)d\sigma]$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D (x^2+y^2-1)d\sigma]$$

由于 $$\iint\limits_{D_1}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{8},$$

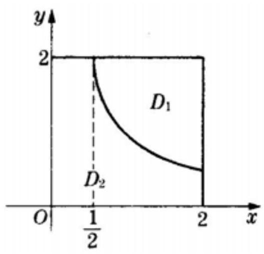
$$\iint\limits_D (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}$$

因此 $$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

【例 13】计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

【解】 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如右图所示的两个区域 D_1 和 D_2



$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{2}xy\,\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2.$$

【例 14】设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数，计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

【解 1】 $$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta[1+r^2]\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3[1+r^2]\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\,\mathrm{d}r\right)=\frac{3}{8}.$$

【解 2】 记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x\ge 0,y\ge 0\}$,

$$D_2=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\},$$

则有

$$[1+x^2+y^2]=1,\quad (x,y)\in D_1,\quad [1+x^2+y^2]=2,\quad (x,y)\in D_2.$$

于是

$$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.$$

【例 15】设平面域 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$, 计算

$$\iint\limits_D\frac{x^2y^2\sin(x-y)+x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

【解】由于积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \frac{x^2y^2\sin(y-x)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = -\iint_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

故 $$\iint_D \frac{x^2y^2\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 0$$

又 $$\iint_D \frac{x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_D \frac{y^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\iint_D \frac{x^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy + \iint_D \frac{y^2\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 \rho^2\ln\rho^2 d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^2 \rho^2\ln\rho d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6}[8\ln 2 - \frac{7}{3}]$$

【例 16】 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴围成，计算二重积分 $\iint_D (x+2y)dxdy.$

【解】区域 D 关于 $x = \pi$ 对称，则 $\iint_D (x-\pi)dxdy = 0.$

设曲线 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的直角坐标方程为 $y = y(x)$, 则

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \iint_D (x-\pi)dxdy + \iint_D (2y+\pi)dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}(2y+\pi)dy$$

$$= \int_0^{2\pi}[y^2(x)+\pi y(x)]dx$$

$$= \int_0^{2\pi}[(1-\cos t)^3 + \pi(1-\cos t)^2]dt$$

$$= \int_0^{2\pi}[(2\sin^2\frac{t}{2})^3 + \pi(2\sin^2\frac{t}{2})^2]dt$$

$$= 2\int_0^{\pi}[(2\sin^2 u)^3 + \pi(2\sin^2 u)^2]du$$

$$= 32\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u du + 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du$$

$$= 5\pi + 3\pi^2$$

【例 17】已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0,$

$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

【解 1】 因为 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，所以 $f'_y(1,y)=0, f'_x(x,1)=0.$ 从而

$$I=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,ydy)\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=a.$$

【解 2】

思考题：

1. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成，计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 dxdy.$ $[\frac{\sqrt{3}}{16}(\frac{\pi}{2}-1)]$

2. 计算积分 $I=\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}\,\mathrm{d}xdy,$ 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域. $[\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi]$

3. 已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\},$ 计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy.$

$[\frac{32}{3}+5\pi]$

4. 设 D 时由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分

$\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy.$ $[1-\frac{\pi}{2}]$

5. 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

$[e-1]$

专题 16：常数项级数的敛散性

(一)级数的概念与性质

1．级数的定概念

设$\{u_n\}$是一数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**，简称**级数**. $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ 称为级数的**部分和**.若部分和数列$\{s_n\}$有极限 s, 即

$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称这个极限值 s 为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**，记为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$.

如果极限$\lim_{n\to\infty} s_n$不存在，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

2．级数的性质

1）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛，且其和为 ks.

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s,σ，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛于 $s\pm\sigma$.

【注】1）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$必发散；

2）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$敛散性不定.

3) 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性.

4) 收敛级数加括号仍收敛且和不变.

【注】1)若级数加括号以后收敛，原级数不一定收敛；

2)若级数加括号以后发散，则原级数一定发散.

5)(级数收敛的必要条件) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

【注】1）若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛；

2）若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散.

（二）级数的审敛准则

1．正项级数（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n \geq 0$）

基本定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ s_n 上有界。

1）比较判别法：设 $u_n \leq v_n$，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

2）比较法极限形式：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l(0 \leq l \leq +\infty)$

①若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

②若 $l = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

③若 $l = +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

【注】使用比较法和比较法的极限形式时，需要适当的选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准. 最常用的是 p 级数和等比级数.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$. 当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散；

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^n$. 其中 a 和 q 为正数，当 $q < 1$ 时收敛，当 $q \geq 1$ 时发散.

3）比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ $\begin{cases} \text{收敛}, & \rho < 1, \\ \text{发散}, & \rho > 1, \\ \text{不一定}, & \rho = 1, \end{cases}$

4) **根值法**：若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}收敛, & \rho<1,\\ 发散, & \rho>1,\\ 不一定, & \rho=1,\end{cases}$

2. **交错级数**（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n>0$）

莱不尼兹准则：若(1) $\{u_n\}$单调减；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

【注】$\{u_n\}$单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛的充分条件，但非必要条件. 如交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n+(-1)^n}}$ 收敛，但$u_n=\dfrac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ 并不递减.

3. **任意项级数**（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n$**为任意实数**）

1)绝对收敛与条件收敛概念

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛，此时称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**；

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，此时称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**；

2)绝对收敛和条件收敛的基本结论

（1）绝对收敛的级数一定收敛, 即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）条件收敛收敛的级数的所有正项(或负项)构成的级数一定发散.

即：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n+|u_n|}{2}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n-|u_n|}{2}$发散.

典型例题

【例 1】级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$（常数$\alpha>0$）（ ）.

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）收敛性与α有关

【例 2】设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数（　）.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 而发散　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 而收敛

【例 3】下列选项正确的是（ ）.

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛

（C）若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\ge\dfrac{1}{n}$

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\ge v_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛

【解】　因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2+2u_nv_n)$，又 $|u_nv_n|\le\dfrac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 也收敛，故应选（A）.

【例 4】设 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$（　）.

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）收敛性与 λ 有关

【解】 因正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 也收敛. 又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}n\tan\frac{\lambda}{n}=\lambda,\lambda>0.$$

故由正项级数的比较审敛法知结论为（C）.

【例 5】设有以下命题：

①若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

②若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

④若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以上命题中正确的是（　）.

（A）①②　　（B）②③　　（C）③④　　（D）①④

【解】 取 $u_{2n-1}=1,u_{2n}=-1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；取 $u_n=1,v_n=-1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均发散，故①，④错误，应选（B）. 另外，由于级数增加或减少有限项不影响其敛散性，故②正确. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，由保号性知：存在整数 N，当 $n>N$ 时，$|u_{n+1}|>|u_n|$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0, \lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，故③正确.

【例 6】设 $a_n>0,n=1,2,\cdots$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是（　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛

【解】 由于收敛级数任意加括号后仍收敛，而将 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 两两加括号后即得 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$，故应选（D）.

特别取 $a_n=\dfrac{1}{n}>0\,(n=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 均发散，也应选（D）.

【例 7】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数（ ）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

【解】 由收敛的数项级数之和仍收敛知应选（D）.

取 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 均发散，故（A），（B），（C）均不正确.

【例 8】 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则（ ）.

（A）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 收敛　（B）当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散

（C）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 收敛　（D）当 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 发散

【解】 取 $a_n=b_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 发散，故（A）不正确；取 $a_n=\dfrac{1}{n^3}$，$b_n=n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 均发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2$ 均收敛，故（B），（D）均不正确.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故 $\{a_n\}$ 有界. 设 $|a_n|\le M$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 b_n^2\le M^2\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$. 再由 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$

收敛. 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$收敛，故应选（C）.

【例 9】设$\{u_n\}$是数列，则下列命题正确的是（ ）.

（A）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛

（B）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

（C）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛

（D）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

【解】由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则其加括号以后的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$也收敛，故应选（A）.

【例 10】已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$绝对收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛，则

（A）$0<\alpha\le\dfrac{1}{2}.$　　（B）$\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1.$

（C）$1<\alpha\le\dfrac{3}{2}.$　　（D）$\dfrac{3}{2}<\alpha<2.$

【解】由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^a}$收敛，又

$$\sin\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{1}{n^\alpha}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\dfrac{1}{n^a}$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$收敛，由此可得$\alpha-\dfrac{1}{2}>1,$故$\alpha>\dfrac{3}{2}.$

又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-a}}$条件收敛，则$0<2-\alpha\le 1,$即$1\le\alpha<2.$

综上所述，$\dfrac{3}{2}<\alpha<2.$故应选（D）.

【例 11】设$\{a_n\}$为正项数列, 下列选项正确的是

（A）若$a_n>a_{n+1}$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛；

（B）若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$；

（C）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在；

（D）若存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 .

【解】若存在常数 $p>1$, 使 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在, 即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，由比较法的极限形式可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故应选（D）.

【例 12】下列级数中发散的是（　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$.

（C）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

【解】由交错级数的莱布尼兹准则知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，又

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散，选（C）.

【例 13】级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)$　（k 为常数）（　）

（A）绝对收敛　　（B）条件收敛

（C）发散　　（D）收敛性与 k 有关

【解】由于 $\left|(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\dfrac{1}{2}$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，则原级数绝对收敛，故选（A）.

【例 14】若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})]$ 收敛，则 $k=(\quad)$

（A）1.　　（B）2.　　（C）-1.　　（D）-2.

【解】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})}{\dfrac{1}{n}}=1+k$

如果 $1+k\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})]$ 与级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 同敛散，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，则选项（A）(B)(D)都不正确，故应选（C）.

【例 15】设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，

（1）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；　（2）试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

【证】（1）因为 $\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\dfrac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx\overset{\tan x=t}{=\!=\!=}\frac{1}{n}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n(n+1)},$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(a_i+a_{i+2})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1.$

（2）因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx\overset{\tan x=t}{=\!=\!=}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

【例 16】 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$. 证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

【证】（Ⅰ）由于 $x_{n+1}=f(x_n)$，所以

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|=\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=\left|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})\right|,$$ 其中 ξ 介于 x_n 与 x_{n+1} 之间.

又因为 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，所以

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|\le\frac{1}{2}\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\cdots\le\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

（Ⅱ）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=x_{n+1}-x_1$.

由（Ⅰ）知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_{n+1}=f(x_n)$ 及 $f(x)$ 的连续性，等式两端取极限得 $a=f(a)$.

即 a 是函数 $g(x)=x-f(x)$ 的零点. 由于

$$g(0)=-1<0,$$

$$g(2)=2-f(2)=1-[f(2)-f(0)]=1-2f'(\eta)>0,$$ 其中 $\eta\in(0,2)$.

又 $g'(x)=1-f'(x)>0$，所以 $g(x)$ 存在唯一的零点，且零点位于区间 $(0,2)$ 内，于是

$$0<\lim_{n\to\infty}x_n<2.$$

【例 17】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

（I）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，并求其和;

（II）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$收敛.

【证】（I）令$S_n=\sum_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]$,则

$$S_n=[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]$$
$$=f(n)-f(0)$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$可知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-f(0)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，且其和为$1-f(0)$.

（II）由$f''(x)<0$可知，$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，则$f'(x)$下有界.否则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$, 又

$$f(x+1)-f(x)=f'(\xi)\qquad (x<\xi<x+1)\qquad（1）$$

由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x+1)-\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

又由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=-\infty$可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi)=-\infty$, 矛盾.则$f'(x)$下有界. 又$f'(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在，由（1）式知$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 则$f'(x)\ge 0$, 从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$为正项级数，又

$$f(n)-f(n-1)=f'(\xi)\qquad (n-1<\xi<n)$$
$$>f'(n)$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'(n)$也收敛.

思考题：

1. 设$a_n>0, p>1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}n^p(e^{\frac{1}{n}}-1)a_n=1$. 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$p$的取值范围为_________.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^p+a}}$ $(a>0)$ 为条件收敛，则 p 的取值范围为__________.

3. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为（　　）

（A）发散的正项级数.　　　　（B）收敛的正项级数.

（C）发散的交错级数.　　　　（D）收敛的交错级数.

4. 下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛;

(B) 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n^2$ 收敛.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

5. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散 $(b_n\neq 0)$, 则下列级数中一定发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$;　　　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$;　　　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$;

6. 若 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，试证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

7. 已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)>0, |f'(x)|\le k|f(x)|$, 其中 $0<k<1$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

思考题答案：

1. $p>2$　　2. $0<p\le 2$　　3.D　　4.D　　5.C　　6.提示：$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}$

专题 17：级数求和

级数求和常见的是两种问题，幂级数求和及常数项级数求和.

1)幂级数求和的方法：

利用已有的几个展开式（$\frac{1}{1\pm x}, e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^{\alpha}$）以及幂级数的性质（有理运算，逐项求导，逐项积分）来求幂级数的和函数；

2)常数项级数求和的方法：

求常数项级数的和最常用的方法是借助于幂级数求和. 常见的求和级数形式为

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$, 此时，考虑相应的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 并求出其和函数 $S(x)$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n = S(b).$$

（一）幂级数的性质

1)有理运算性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R_1, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_2, 令

$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

（1）加法： $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n, \qquad x \in (-R, R)$$

（2）减法： $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n, \qquad x \in (-R, R)$$

（3）乘法： $$\begin{aligned}&(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_0 + a_1 b_0)x + (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots \\ &\quad + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots. \qquad x \in (-R, R)\end{aligned}$$

（4）除法： $$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad x \in (-R, R)$$

其中系数 c_n（$n = 0,1,2\cdots$）由 $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 所确定.

2）分析性质

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$, 和函数为$S(x)$, 则

（1）连续性：$S(x)$在其收敛域I上连续；

（2）可积性：$S(x)$在其收敛域I上可积，且可逐项积分，即

$$\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_n x^{n+1}.$$

积分后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（3）可导性：$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导，且可逐项求导，即

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

（二）几个常用的展开式

（1）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (-1 < x < 1)$

（2）$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1)$

（3）$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（4）$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（5）$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$

（6）$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1)$

（7）$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \qquad (-1 < x < 1)$$

典型例题

1. 幂级数求和

【例 1】幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(2n+1)!}$在$(-\infty,+\infty)$内的和函数$S(x)=$________.

【解】 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(2n+1)!}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=x^2\sin x^2$$

【注】这里用到公式$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

【例 2】求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域，并求其和函数.

【解】 因为$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$，所以$R=\frac{1}{\rho}=1$.

显然，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$在$x=\pm1$时发散，故此幂级数的收敛域是$(-1,1)$.

幂级数的和函数是

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2},\qquad -1<x<1.$$

【例 3】求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$的收敛域及和函数.

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1,\ R=1,$ 当 $x=\pm1$ 时原级数显然发散，则其收敛域为 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\left(-(x+1)+\frac{1}{1-x}\right)''+\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{3-x}{(1-x)^3}\qquad x\in(-1,1).$$

【例 4】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

【解】 易求得该幂级数收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}\qquad x\in[-1,1]$. 当 $x=0$ 时，$S(x)=0$.

当 $0<|x|\le1$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x),$$

故 $$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+(\dfrac{1}{x}-1)\ln(1-x), & 0<|x|\le1.\end{cases}$$

【注】本题用到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，这是一个常用的结论，望读者记住.

【例 5】求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

【解】 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n-1}{2n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$，

因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼兹判别法知此级数收敛，因此幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\le x\le 1)$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}.$$

又 $S(0)=0$，故 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=\arctan x$，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x,\ x\in[-1,1].$$

【例 6】求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

【解】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{(n+2)(2n+3)}}{\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}}\right|=1$, 则 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$ 收敛，所以该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}, x\in[-1,1]$, 则

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2},x\in(-1,1).$$

因为 $S(0)=0,S'(0)=0$, 所以当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$S'(x)=\int_0^x S''(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\ln(1+x)-\ln(1-x)$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\ln(1+t)dt-\int_0^x\ln(1-t)dt$$

$$=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

又$S(1)=\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=2\ln2,\ S(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}S(x)=2\ln2,$

所以$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1),\\ 2\ln2, & x=\pm1.\end{cases}$

【例 7】 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛，其和函数$y(x)$满足

$$y''-2xy'-4y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

（I）证明$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots$；

（II）求$y(x)$的表达式.

【解】 （I）对$y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$求一、二阶导数，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2},$$

代入$y''-2xy'-4y=0$并整理，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0,$$

于是$\begin{cases}2a_2-4a_0=0,\\(n+1)(n+2)a_{n+2}-2(n+2)a_n=0,\ n=1,2,\cdots,\end{cases}$

从而 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots.$

（II）因为$y(0)=a_0=0,\ y'(0)=a_1=1$，故

$$a_{2n}=0,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n\cdot(2n-2)\cdot\cdots\cdot4\cdot2}a_1=\frac{1}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

从而

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

【例 8】设 $a_0=1, a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,3,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（Ⅰ）证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

（Ⅱ）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,(x\in(-1,1))$, 并求 $S(x)$ 的表达式.

【解】（Ⅰ）因为 $a_0=1, a_1=0$, 所以 $0\le a_0\le 1,\ 0\le a_1\le 1$. 若 $0\le a_{n-1}\le 1,\ 0\le a_n\le 1$. 由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 可知，$0\le a_{n+1}\le 1$. 即 $0\le a_n\le 1$.

当 $|x|<1$ 时，$|a_nx^n|<|x|^n$, 且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在区间 $(-1,1)$ 上收敛，则其收敛半径 $R\ge 1$.

（Ⅱ）因为，$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 所以

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n\\&=x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}\\&=xS'(x)+xS(x)\end{aligned}$$

则 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0,(x\in(-1,1))$. 解方程得 $S(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{1-x}$.

由 $S(0)=a_0=1$ 得 $C=1$，故 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

2.常数项级数求和

【例 1】已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于（ ）.

（A）3　（B）7　（C）8　（D）9

【解】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$

则 $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 8.$$

【例 2】$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$_________.

【解】 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$，则当 $-1<x<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 收敛，且有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}-1\right)',$$

从而 $S(x)=\frac{1}{(1-x)^2}, \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = S\left(\frac{1}{2}\right)=4.$

【例 3】 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = (\quad)$

(A) $\sin 1+\cos 1.$　　(B) $2\sin 1+\cos 1.$

(C) $2\sin 1+2\cos 1.$　　(D) $2\sin 1+3\cos 1.$

【解】

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = \cos 1 + 2\sin 1$$

故应选(B).

【注】这里用到公式：$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$

【例 4】求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

【解】 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中 $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$，$x\in(-1,1)$,

则 $S(x)=\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2S(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1),\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{27},$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

【解】 因 $\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, $x\in(-1,1)$，故

$$\arctan x=\int_0^x(\arctan x)'dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

于是

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1],$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$

思考题

1.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$..

3. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\ (n\ge 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（1）证明：$S''(x)-S(x)=0$;

（2）求 $S(x)$ 的表达式.

4. 设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

（I）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程；（II）$S(x)$ 的表达式.

答案与提示

1.【解】设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$，$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}$，$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$，

则 $S(x)=S_1(x)-S_2(x),\quad x\in(-1,1).$

由于 $S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$，

$$(xS_1(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\quad x\in(-1,1),$$

因此 $xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$

又由于 $S_1(0)=0$，故 $S_1(x)=\begin{cases}-1+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

所以 $S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2.【解】 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}\cdot n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)x^{2n+1}}\right|=x^2$，

所以当 $x^2<1$ 即 $-1<x<1$ 时，原幂级数绝对收敛；

当 $x=\pm 1$ 时，级数为 $\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$，显然收敛，故原幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$，设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=f(x), x\in(-1,1)$，则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2nx^{2n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

因为 $f'(0)=0, f(0)=0$，所以

$$f'(x)=\int_0^x f''(t)dt+f'(0)=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}dt=2\arctan x,$$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)=2\int_0^x\arctan t\,dt$$

$$=2\left(t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\right)$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1],$$

从而 $S(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$

3.【解】$S(x)=3+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$$

即 $S''(x)-S(x)=0$

解此线性线性常系数齐次微分方程得

$$S(x)=C_1e^{-x}+C_2e^x$$

由 $S(0)=3, S'(0)=1$ 知，$C_1=1, C_2=2.$

故 $S(x)=2e^x+e^{-x}$

4.【解】(I) $S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$

易见 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)$$

$$=x\left[\frac{x^2}{2}\right]+S(x).$$

因此$S(x)$是初值问题$y'=xy+\frac{x^3}{2}$，$y(0)=0$，的解.

（II）方程$y'=xy+\frac{x^3}{2}$的通解为

$$y=e^{\int xdx}\left[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int xdx}dx+C\right]=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件$y(0)=0$，求得$C=1$.

故$y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数$S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$.