绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】：$f(x)=kx^{k-1}\sin x+x^n\cos x\sim(k+1)x^k$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{k(k+1)x^{k-1}}{a2x(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{k(k+1)x^{k-1}}{ax^3}=1$$，故 $k=4,a=20$。答案 A .

（2）【解】 两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$,令

$$f(x)=kx^2-\ln x,\ f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0,\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}},\ f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac12+\frac12\ln(2k),$$

当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根,即两个曲线无交点.

注:本题也可以用取特殊值法，令 $k=1$，则讨论起来更方便.

（3）【解】：答案（A）.

（4）【解】：答案：（B）.

（5）【解】：（C）.

（6）【解】：答案（A）.

（7）【解】：由于 $P(\bar{A}\bar{B})=0.2$，根据独立性 $0.2=P(\bar{A})P(\bar{B})=0.6P(\bar{B}),P(\bar{B})=\dfrac13$，所以

$$P(A\cup\bar{B})=1-P(\bar{A}B)=1-P(\bar{A})P(B)=1-0.6\cdot\frac23=0.6$$，答案（A）.

（8）【解】：由于 $\int_0^{+\infty}P(X>x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(1-F(x))\mathrm{d}x=x(1-F(x))\big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}xf(x)dx=E(x)$，又因为方差存在，二阶矩 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$，上式中

$$\lim_{x\to+\infty}x(1-F(x))=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-F(x)}{\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\int_{-\infty}^{x}f(t)dt}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$$，答案：（A）.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)【解】：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\dfrac{\arctan x-x}{x})^{\frac{x}{\arctan x-x}}\right]^{\frac{\arctan x-x}{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=-\dfrac13$，所以原式 $=e^{-\frac13}$.

（10）【解】：由题设有，$\int_0^1xf'(x)dx-\int_0^1f(x)dx=\int_0^1xe^{x^2}dx$，积分可得 $xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac12(e-1)$，

所以$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(1-e)$.

（11）【解】答案：$\frac{\pi}{4}$.

（12）【解】：$f'(x)=(1-x\ln n)n^{-x}, a_n=\frac{1}{\ln n}$，收敛域为$[-1,1)$.

（13）【解】：答案：3.

（14）【解】：$\bar{X}\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$，$\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\frac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{\frac{n+1}{n}\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，

由χ^2分布定义，所以$\frac{n^2}{(n+1)^2\sigma^4}D(X_{n+1}-\bar{X})^2=2$，$\therefore D(X_{n+1}-\bar{X})^2=\frac{2(n+1)^2\sigma^4}{n^2}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{e^{-y^2}\sin t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=e^{-y^2}\sin t$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\sin t\right)=\sin t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\right)+e^{-y^2}\cos t\sqrt{1+t^2}.$$

由题设知$t=0$时$y=1$．因此有$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{1}{e}$.

（16）【解】：$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+xf_2', \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+xf_{12}'')+x(yf_{21}''+xf_{22}'')+f_2'=y^2f_{11}''+2xyf_{12}''+x^2f_{22}''+f_2'$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-yf_2', \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-y(xf_{21}''-yf_{22}'')-f_2'=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$，因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2.$$

（17）【解】（I）由题设有$y-2xy-z^2+2xy+2f(z)+f(z)+zf'(z)-y=0$，所以函数$f(z)$满足方程$zf'+3f(z)=z^2$，上述方程通解为$f(z)=e^{-\int\frac{3}{z}\mathrm{d}z}(\int ze^{\int\frac{3}{z}\mathrm{d}z}\mathrm{d}z+C)=\frac{z^2}{5}+\frac{C}{z^3}$，又因为它在$(0,1)$内有界，因而必有$C=0$，即$f(z)=\frac{z^2}{5}$；

（II）令$\Sigma_1:z=2,x^2+y^2\le 1$，上侧为正侧，$\Omega$是由$\Sigma$与$\Sigma_1$围成的闭区域，则有

$$\text{原式}=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}+\iint\limits_{\Sigma_1}(xy-x^2y-xz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(xy^2+2yf(z))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(zf(z)-yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\,\mathrm{d}v+\iint\limits_{\Sigma_1}(xy-x^2y-xz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(xy^2+2yf(z))\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(zf(z)-yz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(2f(2)-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{8\pi}{5}.$$

（18）（**本题满分 10 分**）求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^{n-1}$的收敛域及和函数$S(x)$；且求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和.

【解】:（I）由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，且$x=-1,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n^2-1)};x=1,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}$均收敛，收敛域为$-1\le x\le 1$；

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n+1},$$

令$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}x^{n+1},S_1'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^n=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1}=xS_2(x),$

再令$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}x^{n-1},S_2'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x},-1<x<1$，所以$S_2(x)=-\ln(1-x)$；代入上式

$S_1'(x)=-x\ln(1-x)$，所以

$$S_1(x)=-\int_0^x t\ln(1-t)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x\ln(1-t)dt^2=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)+\int_0^x\frac{t^2}{1-t}dt]=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)+\int_0^x\frac{t^2-1+1}{1-t}dt]$$

$$=-\frac{1}{2}[x^2\ln(1-x)-\frac{1}{2}x(x+2)-\ln(1-x)]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)]$$

$$\text{级数的和函数}S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x^2}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)], & -1<x<1,x\ne 0\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{4}, & x=1\\ -\frac{1}{4}, & x=-1\end{cases};$$

（II）由上式，可得$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n=\frac{1}{2x}[\frac{1}{2}x(x+2)+(1-x^2)\ln(1-x)]$，

令 $x=\frac{1}{2}$，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+2)+\frac{3}{4}\ln\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}(\frac{5}{2}-\ln 2)$.

（19）【解】:（Ⅰ）令$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t$，由 Lagrange 中值定理知$\exists\theta\in(0,1)$使得

$F(x)-F(0)=F'(x)x$，即有$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

（Ⅱ）$\lim_{x\to 0}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)=1$.

（20）【解】: 令$X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 矩阵方程化为$A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 即

$$\begin{cases}A\xi_1=\beta_1\\ A\xi_2=\beta_2\\ A\xi_3=\beta_3\end{cases}.$$

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-1}{2} & 2 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a-1) & b-2 & 1+\frac{c}{2} \end{pmatrix},$$

当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(A\vdots B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

方程组 $A\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$ (k 为任意常数);

方程组 $A\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$ (l 为任意常数);

方程组 $A\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$ (t 为任意常数);

（21）【解】（I）据已知条件，有 $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}$，即

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$，所以 $x^TAx=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$。

（II）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 A 的特征值为 $2,2,-4$.

由 $(2E-A)x=0,\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$;

由 $(-4E-A)\boldsymbol{x}=0,\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,则

$$\beta_2=a_2-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$，再对 β_1,β_2,β_3 单位化，有

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},$$

那么令$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,有$x^TAx=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

（III）因为$A+kE$的特征值为$k+2,k+2,k-4$,所以当$k>4$时,矩阵$A+kE$正定.

（22）【解】:（I）X边缘密度函数为$f_X(x)=\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})dy=2x(x+\frac{1}{3}),\ 0<x<1$,

Y边缘密度函数为$f_Y(y)=\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})dx=\frac{1}{3}(1+\frac{y}{2}),\ 0<y<2$;

（II）概率为$P(X+Y\ge 1)=1-\int_0^1dx\int_0^{1-x}(x^2+\frac{xy}{3})dy=\frac{65}{72}$;

（III）在有效区域$0<x<1,0<y<2$，$f_X(x)f_Y(y)=2x(x+\frac{1}{3})\frac{1}{3}(1+\frac{y}{2})=\frac{2x}{3}(x+\frac{1}{3})(1+\frac{y}{2})\neq f(x,y)$

所以X与Y不独立.

（23）【解】:　（I）　矩估计　$\mu=\int_0^\theta x\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$；令$\mu=\bar{X}$，即$\frac{3}{4}\theta=\bar{X}$，

所以θ的矩估计为$\hat{\theta}_J=\frac{4}{3}\bar{X}$；

极大似然估计　又由于$L=\prod_{i=1}^n\frac{3x_i^2}{\theta^3}=\frac{3^n(x_1x_2\cdots x_n)^2}{\theta^{3n}}$，$0<x_i<\theta$，

所以$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(n\ln 3+2\sum_{i=1}^n\ln x_i-3n\ln\theta)=-\frac{3n}{\theta}<0$，可知$L$单调减，又$0<x_i<\theta$，由定义知$\theta$的极大似然估计为$\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$;

（II）另一方面，容易知道X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$$
，　又而$\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}_L}(z)=(F(z))^n=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{x^{3n}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta\\ 1, & z>\theta\end{cases}$$
则$\hat{\theta}_L$对应密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_L}(z)=F'_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta\\ 0, & 其他\end{cases},$$

（III）　首先由于$E(\hat{\theta}_J)=E(\frac{4}{3}\bar{X})=\frac{4}{3}E(\bar{X})=\frac{4}{3}\mu=\theta$，$\hat{\theta}_J$是$\theta$的无偏估计性。

又由于 $E(\hat{\theta}_L)=\int_0^{\theta} z\dfrac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}}dz=\dfrac{3n}{3n+1}\theta$；$\hat{\theta}_L$ 不是 θ 的无偏估计.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=0,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=\infty,\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\sqrt{2}}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1,\pm\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 D.

（2）【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$， $f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}[2\cos x^2+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C.

（3）【解】：答案（A）.

（4）　【解】　$u_n^2+v_n^2\ge2\left|u_nv_n\right|$ 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n{}^2$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|u_nv_n\right|$ 收敛，即则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，答案（C）.

（5）【解】：因为 β_1 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，所以 $\beta_1+\beta_2$ 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，从而 α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关，故选（D）.

（6）【解】答案：C.

（7）【解】由于 $P(C)=0$，所以对任何事件 A，均有 $P(AC)=0,P(A\cup C)=P(A),P(A\bar{C})=P(A)$，又由 $P((A\cup C)(B\cup\bar{C}))=1-P(\overline{(A\cup C)}\cup\overline{(B\cup\bar{C})})=1-P((\bar{A}\bar{C})\cup(\bar{B}C))=1-P(\bar{A}\bar{C})=1-P(\bar{A})=P(A)$；而 $P(A\cup C)=P(A),P(B\cup\bar{C}))=P(B)+P(\bar{C})-P(B\bar{C})=1$，所以 $A\cup C$ 与 $B\cup\bar{C}$ 独立，答案（C）.

（8）【解】 $E(\dfrac{1}{X^2})=\int_0^2\dfrac{1}{x^2}\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{3}{4}$； 答案（C）.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 【解】：有题设有 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $[f(\dfrac{1-x}{1+x})]'\Big|_{x=0}=f'(\dfrac{1-x}{1+x})\times\dfrac{-2}{(1+x)^2}\Big|_{x=0}=-1$，

因此曲线 $y=f(\dfrac{1-x}{1+x})$ 在 $x=0$ 处的法线方程是 $\dfrac{y-2}{x-1}=1$，即为 $y=x+1$.

（10）【解】由题设 $y'(0)=0,y''(0)=-k$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y'(x)}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y''(x)}{4}=-\dfrac{k}{4}$.

（11）【解】　$s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec xdx=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$.

（12）【解】：$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

（13）【解】答案：1.

（14）【解】由于 $\bar{X}-X_{n+1}\sim N(0,\frac{1+n}{n}\sigma^2)$，$\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{1+n}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\therefore \frac{n}{n+1}\frac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，又由于

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，由 χ^2 分布定义与 $\bar{X}$，S^2 的独立性知，$\dfrac{\frac{n}{n+1}\frac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}\sim F(1,n-1)$

$\Rightarrow\dfrac{\frac{n}{n+1}(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，常数 $C=\frac{n}{n+1}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：令 $y=\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$，$\ln y=\frac{\ln\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x(1-\cos x^2)}{2(x-\tan x)(1-\sec^2 x)}$$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5}{(x-\tan x)\tan^2 x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\sec^2 x}=3$，所以原式 $=e^3$.

（16）【解】：$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}$，

解方程组 $\begin{cases}-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}=0,\\-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}=0.\end{cases}$ 得函数 z 在集合 D 内有三个驻点 $(0,0),(0,1),(1,0)$.

（1）在点 $(0,0)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2,B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$，

$AC-B^2=-4<0$，因此 $(0,0)$ 不是函数 z 的极值点；

（2）在点 $(0,1)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=\frac{4}{e},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)}=\frac{4}{e}$，

$AC-B^2=\frac{16}{e^2}>0,A>0$，因此 $(0,1)$ 是函数 z 的极小值点，且 z 在 $(0,1)$ 处取得的极小值为 $z(0,1)=-\frac{1}{e}$；

（3）在点 $(1,0)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-\frac{4}{e},B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0,C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-\frac{4}{e}$，

$AC-B^2=\frac{16}{e}>0,A<0$，因此 $(1,0)$ 是函数 z 的极大值点，且 z 在 $(0,1)$ 处取得的极大值为 $z(1,0)=\frac{1}{e}$.

（17）【解】设 $D_1:x^2+y^2\le1,x\ge0,y\ge0$，由对称性：

$$I=\iint_D\frac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\frac{x^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}(1-\frac{1}{1+x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}(1-\ln2).$$

（18）【解】:（I）$\int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x [f(x)-f(t)]dt,\ f(x)=2xf'(x),\ f(x)=C\sqrt{x},\ f(1)=2, C=2$；

（II）$V = 4\pi\int_0^1 xf(x)dx = 4\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \dfrac{8\pi}{5}$.

（19）【证明】:（I）则原不等式等价于$t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0,(t>0)$.

令 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t), t\in[0,+\infty)$，则 $f(0)=0$，

$$f'(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}},$$

令 $g(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，则 $g(0)=($，$g'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}$，当 $t>0$ 时 $g'(t)>0$，因而有 $f'(t)>0$，即函数 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$ 在区间$[0,+\infty)$上单增，因而当$t>0$时有

$$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>f(0)=0.$$

原不等式得证；

（II）作变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，原不等式等价于 $\dfrac{t^2}{1+t}>\ln^2(1+t)$，令 $F(t)=\dfrac{t^2}{1+t}-\ln^2(1+t)$，

由于 $F'(t)=\dfrac{t^2+2\mathrm{t}}{(1+t)^2}-2\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}=\dfrac{t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)^2}$,

再令 $\varphi(t)=t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t),\ \varphi'(t)=2(t-\ln(1+t))>0 \quad (t>0)$

所以$\varphi(t)\nearrow$，又$\varphi(0)=0$，即$\varphi(t)>0 \quad (t>0)$，代入上式知$F'(t)>0\Rightarrow F(x)\nearrow$, 又$F(0)=0$，则 $F(t)>0\ (t>0)$，不等式成立。

（20）【解】:（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$,有$(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 B^{T} 的列向量是方程组$(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$ 的解。解此方程组的基础解系$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么$\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组 $\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0$ 即$\begin{cases}1\text{-}2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases}$，解出 $a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_4=1$；

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1 \quad -2k_1+k_2 \quad 3k_1-2k_2 \quad -k_1+k_2)^T$,因为 $x_3=-x_4$,即 $3k_1-2k_2$=k_1-k_2,，即 k_2=2k_1，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为（$k \quad 0 \quad -k \quad k$）$^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数.

（21）【解】: （I）$|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$，得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2$，由 A 与对角阵相似知 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的有两个线性无关的特征向量，即 $(6E-A)x=0$ 得基础解系有两个解向量 $3-r(6E-A)=2$，故 $r(6E-A)$ =1，$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $a=0$。此时二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$$

$=2(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-\frac{21}{2}x_2^2+6x_3^2$，令$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{5}{2}y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，则有

$$f=X^TAX=Y^TC^TACY=2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2$$

（II） $X^TAX=0$ 即 $2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2=0$ 表示锥面.

（22）【解】 由二维均匀分布定义可知，概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},&(x,y)\in D\\0,&其他\end{cases}$ 其中 D 的面积为：$S_D=2$

（I） X 边缘密度函数 $f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2x}$， $1<x<e^2$；

条件密度函数为 $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}x,&0<y<\frac{1}{x}\ (1<x<e^2)\\0&其他\end{cases}$

（II）由（I）的条件概率密度函数知，当 $X=\frac{3}{2}$， $f_{Y/X=\frac{3}{2}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{2},&0<y<\frac{2}{3}\\0,&其他\end{cases}$，

由此 $P(Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dy=\frac{3}{4}$.

（III） $E(XY)=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}xdx\int_0^{\frac{1}{x}}ydy=\frac{1}{4}\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}$.

（23）【解】（I）由于 $\mu=E(X)=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^\theta\int_c^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{c\theta}{\theta-1}$；令 $\mu=\bar{X}$，

所以 $\frac{c\theta}{\theta-1}=\bar{X}\ \Rightarrow c\theta=\bar{X}(\theta-1)$, 可知 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$；

（II）求最大似然估计，

1） $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}=\theta^n c^{n\theta}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\theta+1)}$；

2） $\ln L=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^n\ln x_i$， $\frac{dL}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$

3）由此解得 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i-\ln c}$.