2015年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（D）.

解：$-f(x)<0$，排除（A）.

$[f(-x)]''=f''(-x)<0$，排除（B）.

$[\frac{1}{f(-x)}]'=\frac{f'(-x)}{f^2(-x)}>0$，排除（C）.

而 $\frac{1}{f(x)}>0,[\frac{1}{f(x)}]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0,[\frac{1}{f(x)}]''=-\frac{f(x)f''(x)-2f'^2(x)}{f^3(x)}>0$，所以 $\frac{1}{f(x)}$ 恒正、单调下降且为凹函数，选（D）.

（2）答案：选（D）.

解：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛区间相同.

记 $\lim_{n\to\infty}n^{\lambda}|a_n|=a$，则当 n 充分大时，$n^{\lambda}|a_n|<a+1$，$\frac{|a_n|}{n+1}<\frac{a+1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1}$ 收敛，即当 $x=\pm1$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 收敛．又因为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-3)^n$ 的收敛域为 $[2,4]$.

（3）答案：选（C）.

解：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f^{(2015)}(x)$ 为奇函数，所以（A）、（B）均正确.

又 $f(x)=(x^2-1)^{2015}=(x+1)^{2015}(x-1)^{2015}$，故由莱布尼兹公式

$$f^{(2015)}(x)=2015!(x-1)^{2015}+2015^2\cdot2015!(x+1)(x-1)^{2014}+\cdots+2015!(x+1)^{2015},$$

得 $f^{(2015)}(1)=2015!\cdot2^{2015},f^{(2015)}(-1)=-2015!\cdot2^{2015}$，故 $f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=2015!\cdot2^{2016}$，（D）正确.

（4）答案：选（B）.

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(x)f(y)}{(1+z)e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x)f'(y)}{(1+z)e^z}$，代入条件有 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{f''(x)f(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{f(x)f''(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f(x)f'(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{f'(x)f'(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

由于 $z(0,0)e^{z(0,0)}=f^2(0)>0$，所以 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=\frac{f''(0)f(0)}{(1+z(0,0))e^{z(0,0)}}>0$，$B=0$，

$$AC-B^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}-[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}]^2=\frac{[f''(0)]^2[f(0)]^2}{(1+z)^2e^{2z}}>0,$$

故 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值.

（5）答案：选（B）.

解：由题意知 $r(A^T)<n$，从而 $r(A)<n$，所以 $r(A^*)=0$ 或 $r(A^*)=1$，由 $A^*\neq0$，得 $r(A^*)=1$. 从而 $r(A)=n-1$，由 $A^TB=O$ 知 $r(A^T)+r(B)\le n$，得 $r(B)\le1$，又 $B\neq O,r(B)\ge1$，所以 $r(B)=1$.

（6）答案：选（C）.

解：因为 A 相似于 B，B 特征值为 $0,0,2$，则 A 特征值为 $0,0,2$．又 A 为三阶实对称矩阵，则 A 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似，所以 $r(A)=1$，故选（C）.

（7）答案：选（B）.

解：（A）不正确，因为 $P(A)=1\nRightarrow A=\Omega$ 知② $\nRightarrow$ ①.

（B）正确，若 $X=Y$ 则 $F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{Y\le x\}=F_Y(x)$.

（C）不正确，假设 X 和 Y 均服从 $[0,1]$ 上均匀分布且相互独立，则 $F_X(x)=F_Y(x)$ 但 $P\{X=Y\}=0$.

（D）不正确，例如 $X\sim N(1,1),Y\sim P(1)$，则 $EX=EY=1,DX=DY=1$，但 $F_X(x)\neq F_Y(x)$.

（8）答案：选（C）.

解：假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 原本为 $H_0:\mu\geq\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$，故排除（A）和（B）.

（C）表明检验结果出现了第一类错误，（D）表明检验结果出现了第二类错误.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）答案：填“-2”.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{x-1}-1)}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\ln x}{\ln x-x+1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+x-1}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1+1}{-1}=-2.$$

（10）答案：填“$\frac{\pi}{8}$”.

解：$y=x^2\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以所求面积为

$$S=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{\underset{0\leq t\leq\frac{\pi}{2}}{=}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\cos^4t)dt=2(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{8}.$$

（11）答案：填“b”.

解：$a\varphi_1'\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\varphi_2'-c\varphi_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\varphi_3'=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{a\varphi_3'-b\varphi_2'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，同理得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{b\varphi_1'-c\varphi_3'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，故

$$c\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=b.$$

（12）答案：填“$\frac{2}{3}$”.

解：$\pi:2x+2y-z-2=0$，则 $d=\dfrac{|2\cdot0+2\cdot0-1\cdot0-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{2}{3}$.

（13）答案：填“0 或 4”.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-a&1\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\0&\lambda-a&1\\\lambda&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda-a&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-a)(\lambda-4)$.

故 a 只能为 0 或 4.

20、21全程考研资料请加群712760929

当 $a=0$ 时，$\lambda=4,0,0$，$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，故 $\lambda=0$ 只有一个无关的特征向量，符合题意.

当 $a=4$ 时，$\lambda=4,4,0$，$4E-A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(4E-A)=2$，故 $\lambda=4$ 只有一个无关的特征向量，也符合题意.

（14）答案：填“$\frac{1}{2}$”.

解：由 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$ 知 $a=1$．由于 $F(x)$ 单调不减，故 $b\geq0$．若 $b=0$，则 $F(x)=0$ 不是分布函数，故 $b>0$，故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-bx}, & x>0,\\0, & x\leq0,\end{cases}$ 所以 $X\sim E(b)$.

由 $E(X)=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$ 得 $b=2$，知 $X\sim E(2)$，故 $DX=\dfrac{1}{4}$，因此 $E(X^2)=DX+(EX)^2=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（Ⅰ）**证 1**：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x)=1+2f(x)+2[e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt-e^{-x}\cdot e^xf(x)]=1+2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt,$$ ……2 分

由①知 $2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt=x+2\int_0^xf(t)dt-f(x)$，代入上式得

$$f'(x)=1+x+2\int_0^xf(t)dt-f(x),$$ ②

由②知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)=1+2f(x)-f'(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$． ……4 分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$． ……5 分

证 2：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且 $e^xf(x)=xe^x+2e^x\int_0^xf(t)dt-2\int_0^xe^tf(t)dt$，两边求导得

$$e^x[f(x)+f'(x)]=(1+x)e^x+2e^x\int_0^xf(t)dt+2e^xf(x)-2e^xf(x),$$ ……2 分

20、21全程考研资料请加群712760929

化简得 $f(x)+f'(x)=1+x+2\int_0^x f(t)dt$ ， ②

再两边求导得 $f'(x)+f''(x)=1+2f(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$． ……4 分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$． ……5 分

（Ⅱ）解：由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 知对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，故可设 $y^*=a$，将其代入上式即得 $y^*=-\frac{1}{2}$．因此 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 的通解为

$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{2}$． ……8 分

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=-\frac{1}{6}$，所以 $f(x)=\frac{2}{3}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}$． ……10 分

（16）解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>0$，故当 $x\ge1$ 时，$g(x)$ 单调增加．

当 $x<-1$ 时，$g(x)=-2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=-2\int_0^1 e^{t^2}dt<0$ 故当 $x\le 1$ 时 $g(x)$ 单调减少； …… 3 分

当 $-1<x<1$ 时，

$g(x)=\int_{-1}^x (x-t)e^{t^2}dt+\int_x^1 (t-x)e^{t^2}dt=x\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_{-1}^x te^{t^2}dt+\int_x^1 te^{t^2}dt-x\int_x^1 e^{t^2}dt$，

$g'(x)=\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_x^1 e^{t^2}dt=\int_{-x}^x e^{t^2}dt$． …… 7 分

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$．当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>2\int_0^1 dt=2$， …… 9 分

$g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}dt=e^{t^2}|_0^1=e-1$，故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=e-1$． ……10 分

（17）证（Ⅰ）令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，则

$$F(a)=F(c)=0,F(b)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=0，$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$． …… 2 分

令 $\varphi(x)=F(x)e^{-x},x\in[a,b]$，则 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$，得 $F'(\xi_1)-F(\xi_1)=0,F'(\xi_2)-F(\xi_2)=0$，即得

$$f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1} f(x)dx,f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2} f(x)dx． \quad …… 6 分$$

（Ⅱ）令 $\psi(x)=[F'(x)-F(x)]e^x,x\in[a,b]$，则 $\psi(\xi_1)=\psi(\xi_2)=0$， …… 8 分

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

超 越 考 研

再由罗尔中值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\psi'(\eta)=0$，得 $F''(\eta)-F(\eta)=0$，即有

$$f'(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx． \quad ……10 分$$

（18）（Ⅰ）证：由 $y=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 知 $y'=\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1},y''=\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}$，故由

$xy''+(1-x)y'-2y=0$ 知 $\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^\infty na_nx^n+\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=0$， …… 2 分

所以 $n(n+1)a_{n+1}-na_n+(n+1)a_{n+1}-2a_n=0$，即有 $(n+1)^2a_{n+1}=(n+2)a_n$． …… 4 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知 $n^2a_n=(n+1)a_{n-1}$，所以

$$a_n=\frac{n+1}{n^2}a_{n-1}=\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{n}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n-1}{(n-2)^2}a_{n-3}$$

$$=\frac{n+1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)^2}a_{n-3}=\cdots=\frac{n+1}{n!}，\quad n=1,2,\cdots， \quad ……7 分$$

故 $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{n+1}{n!}x^n=1+x\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n!}=xe^x+e^x$，所以

$$y(x)=(x+1)e^x,x\in(-\infty,+\infty)． \quad ……10 分$$

（19）解：曲面 Σ 的方程为 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(x^2+y^2\le1)$．补平面 $\Sigma_1:z=e$ $(x^2+y^2\le1)$，取上侧，记 Σ 与 Σ_1 所围成的立体为 Ω．Ω 在 xOy 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\le1$． ……3 分

原积分 $=\iint_\Sigma \quad =\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} \quad -\iint_{\Sigma_1}$

$=\iiint_\Omega(2xz+2y+2z)\,\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}(z^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……5 分

$=\iiint_\Omega 2z\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}(z^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint_D[\int_{e^r}^e 2z\mathrm{d}z]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta-\iint_D(e^2-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……7 分

$=\iint_D(e^2-e^{2r})r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta-\pi e^2=\int_0^{2\pi}[\int_0^1(e^2-e^{2r})r\mathrm{d}r]\mathrm{d}\theta-\pi e^2$

$=\pi-\pi e^2=\pi(1-e^2)$． ……10 分

20、21全程考研资料请加群712760929

（20）解：（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&0&2&1\\3&1&t&5\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&-2&t+3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&t-1&0\end{pmatrix}$.

……4 分

当 $t=1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=2$，故两个向量组等价. ……6 分

（Ⅱ）当两个向量组等价时，$A\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&\frac{7}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， ……8 分

故 $\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_1=\frac{7}{9}\beta_1+\frac{4}{9}\beta_2$，$\alpha_2=\frac{1}{9}\beta_1+\frac{2}{9}\beta_2$. ……11 分

（21）解：（Ⅰ）由 $A^2=2A$ 得 A 的特征值只能为 0 或 2，由于 $r(A)=2$，故 A 的特征值为 $2,2,0,0$，

……4 分

从而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}=\Lambda$，二次型 x^TAx 的标准型为 $2y_1^{\,2}+2y_2^{\,2}$. ……6 分

（Ⅱ）$P^{-1}(E+A+A^2+A^3)P=\begin{pmatrix}15&0&0&0\\0&15&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 ……9 分

$$\left|E+A+A^2+A^3\right|=15^2=225.$$ ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由于 $f(x)=ae^{\frac{x(b-x)}{4}}=ae^{\frac{b^2}{16}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac{b}{2})^2}{4}}$，故 $X\sim N(\frac{b}{2},2)$. …… 3 分

因为 $EX=\frac{b}{2}$，$DX=2$，且 $2EX=DX$，知 $b=2$．又由 $ae^{\frac{b^2}{16}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，解得

$a=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$，因此 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$ $(-\infty<x<+\infty)$. …… 5 分

（Ⅱ）$E(X^2e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^x\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$. …… 7 分

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$ 可看作随机变量 Y^2 的期望，其中 $Y\sim N(3,2)$，而 …… 9 分

$$E(Y^2)=DY+(EY)^2=2+3^2=11,$$

故 $E(X^2e^X)=11e^2$. ……11 分

（23）解：（Ⅰ）X_n 的分布律为

$$P\{X_n=k\}=\frac{C_{1200}^kC_{n-1200}^{1000-k}}{C_n^{1000}},\quad k=0,1,2,\cdots,1000.$$ ……3 分

（Ⅱ）由题意知，现从总体 X_n 中取了一个容量为1的样本，并得观测值 $k_1=100$，因此似然函数为

$$L(n)=P\{X_n=100\}=\frac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}.$$ ……5 分

现在的问题是：求 $\hat{n}$，使得 $L(\hat{n})$ 为最大值．由于

$$\frac{L(n)}{L(n-1)}=\frac{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}}{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1-1200}^{900}}{C_{n-1}^{1000}}}=\frac{(n-1200)(n-1000)}{(n-2100)n}=\frac{(n-2200)n+1200000}{(n-2200)n+100n}.$$ ……7 分

当 $100n\le1200000$，即 $n\le12000$ 时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\ge1$，表明 $L(n)$ 随着 n 增大而不减少.

当 $100n\ge1200000$，即 $n\ge12000$ 时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\le1$，表明 $L(n)$ 随着 n 增大而不增加.……9 分

因此当 $n=12000$ 时，$L(n)$ 取最大值，所以 n 的最大似然估计值为 $\hat{n}=12000$. ……11 分

2015年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（A）．

解：由题意知

$f(x_0)=g(x_0), f'(x_0)=g'(x_0), f''(x_0)=g''(x_0)$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=\frac{1}{2}[f''(x_0)-g''(x_0)]=0,$$

即当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-g(x)$ 是 $(x-x_0)^2$ 的高阶无穷小．

（2）**答案**：选（D）．

解：（A），（B），（C）不正确．反例：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，但不连续，进而不可微．取 $y=x(x>0)$ 方向，由于 $\lim\limits_{\substack{y=x\\ x\to 0^+}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，所以方向导数 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}$ 不存在．（D）正确．$\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{\substack{y=0\\ x\to 0^-}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{-x}=-\dfrac{\partial z}{\partial x}=-a$．

（3）**答案**：选（B）．

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}=\max\{1-x^2,x^2\}=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le\dfrac{1}{\sqrt2},\\ x^2, & \dfrac{1}{\sqrt2}<x\le 1.\end{cases}$ 经验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在点 $x=\dfrac{1}{\sqrt2}$ 处不可导，在点 $x=\dfrac{1}{\sqrt2}$ 处取极小值，点 $(\dfrac{1}{\sqrt2},\dfrac12)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

（4）**答案**：选（C）．

解：$\ln(1+|xy|)\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}\le x^2+y^2\le e^{x^2+y^2}-1$，故 $I_3\le I_1\le I_2$，故选（C）．

（5）**答案**：选（A）．

解：由题意知 $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}+1=r\begin{pmatrix}A & 0\\ \beta^T & 1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=r(A)+1$，$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=r(A)$．

（6）**答案**：选（A）．

20、21全程考研资料请加群712760929

超 越 考 研

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，$f(1,-1,0)=a_{11}+a_{22}-2a_{12}>0$，故 $a_{11}+a_{22}>2a_{12}$．

（7）**答案**：选（D）．

解：（A），（B），（C）均不正确．反例：设 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，且1,2,3,4等概率出现，可验证 $A=\{1,2\},B=\{1,3\},C=\{1,4\}$ 两两独立，但不相互独立．此时（A），（B），（C）的条件均满足，经计算 $P(AB|C)=\dfrac12$，$P(A|C)P(B|C)=P(A)P(B|C)=P(AB)=\dfrac14$．

（D）正确．$P(AB|C)=\dfrac{P(ABC)}{P(C)}=\dfrac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)}=P(A)P(B)$．

（8）**答案**：选（A）．

解：（B）当 $y\ge0$ 时，$F(x,y)$ 关于 x 为单调不增，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=-\infty$，排除（B）．

（C）当 $y=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x,1)=1-e^{-1}\neq F(0,1)=0$，所以 $F(x,1)$ 在点 $x=0$ 处不右连续，排除（C）．

（D）$P\{0<X\le1,0<Y\le1\}=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=-(1-e^{-1})^2<0$，排除（D）．

（A）正确，若 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)\\ 1\end{pmatrix}$，则 (X,Y) 的分布函数是 $F(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge0,y\ge0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案**：填“$(-1,0)$”．

解1：$2yy'-2=2e^yy'$，即 $yy'-1=e^yy'$； ①

$y'^2+yy''=e^yy'^2+e^yy''$； ②

$3y'y''+yy'''=e^yy'^3+3e^yy'y''+e^yy'''$． ③

令 $y''=0$，由②得 $y'^2=e^yy'^2$．再由①知 $y'\neq0$，所以 $e^y=1$，得 $y=0$．代入原方程得 $x=-1$；代入①得 $y'(-1)=-1$．将 $x=-1,y(-1)=0,y'(-1)=-1,y''(-1)=0$ 代入③ $y'''(-1)=1\neq0$，故 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$．

解2：将原方程转化为 $x=\dfrac12y^2-e^y$，则 $\dfrac{dx}{dy}=y-e^y,\dfrac{d^2x}{dy^2}=1-e^y,\dfrac{d^3x}{dy^3}=-e^y$．

20、21全程考研资料请加群712760929

令 $\frac{d^2x}{dy^2}=0$，得 $y=0$，进而有 $x(0)=-1$ 及 $\left.\frac{d^3x}{dy^3}\right|_{y=0}=-1\neq0$，所以 $x=\frac{1}{2}y^2-e^y$ 的拐点为 $(0,-1)$.

再利用反函数的性质知 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$.

（10）答案：填"$y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''=0$".

解：$e^x\sin x$ 为一个特解，则该微分方程有特征根 $1\pm i$；x 为一个特解，则该微分方程有特征根0（至少二重），于是该方程至少为4阶，对应特征方程为 $[r-(1+i)][r-(1-i)]r^2=0$，即 $r^4-2r^3+2r^2=0$，故该微分方程至少为4阶，方程为 $y^{(4)}-2y^{(3)}+2y''=0$.

（11）答案：填"$\frac{1}{16}\pi$".

解法1：
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{2i-1}{2n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{4}\arctan x\Big|_0^1=\frac{1}{16}\pi.\quad 其中\ \xi_i=\frac{\frac{i}{n}+\frac{i-1}{n}}{2}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ i=1,2\cdots n.$$

解法2：由于 $\frac{n}{4n^2+4i^2}\le\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}$，所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4i^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}.$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4i^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{16},$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i-1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{16},$$
所以由夹逼准则知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\frac{1}{16}\pi$.

（12）答案：填"$\frac{9}{4}\pi$".

解：令 $x^2+y^2=u,\ x^2-y^2=v$，则 $x^2=\frac{1}{2}(u+v),\ y^2=\frac{1}{2}(u-v)$.代入原式，有
$$f(u,v)=\frac{9}{4}-u^2-(v+\frac{1}{2})^2,$$
所以 $f(x,y)=\frac{9}{4}-x^2-(y+\frac{1}{2})^2$.

原积分 $=\iint\limits_D\sqrt{\frac{9}{4}-x^2-(y+\frac{1}{2})^2}\ d\sigma$. 令 $x=r\cos\theta,\ y=-\frac{1}{2}+r\sin\theta$，则

20、21全程考研资料请加群712760929

原积分 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}-r^2}\ rdr=2\pi\cdot\frac{-1}{3}(\frac{9}{4}-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}\pi$.

（13）答案：填"$x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数".

解：由 $r(A)=2\Rightarrow r(A^*)=1\Rightarrow n-r(A^*)=3-1=2$，则 $A^*x=0$ 的基础解系中含两个无关的解向量，又由 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow A^*A=|A|E=0\Rightarrow A$ 的列向量均是方程 $A^*x=0$ 的解向量，即

$$A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}5\\2\\4-3a\end{pmatrix}=0\Rightarrow A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}=0,\ 且\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}线性无关，$$

则 $A^*x=0$ 的通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

（14）答案：填"4".

解：设正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，则 $Y_1=a_{11}X_1+a_{21}X_2,Y_2=a_{12}X_1+a_{22}X_2$.

$EY_1=a_{11}EX_1+a_{21}EX_2=0$，同理 $EY_2=0$，①正确.

$DY_1=a_{11}^2DX_1+a_{21}^2DX_2=a_{11}^2+a_{21}^2=1$，同理 $DY_2=1$，②正确.

$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(a_{11}X_1+a_{21}X_2,a_{12}X_1+a_{22}X_2)=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$，③正确.

由于 $|A|\neq0$，所以 (Y_1,Y_2) 服从二维正态分布，由③正确知 Y_1 与 Y_2 不相关，从而 Y_1 与 Y_2 相互独立，④正确.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi'f_2'$；　……2分

$$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$$
$$+xy^2\varphi'[(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\varphi'2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot2xy+2xy\varphi'f_2'$$
$$=-f_1'+4xy\varphi'f_2'-xf_{11}''+2x^2y^3\varphi''f_2'+2x^2y^3\varphi'^2f_{22}''+(2x^2y-xy^2)\varphi'f_{12}'',$$　……6分

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$， ……8 分

从而 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)-f_{11}''(0,1)+4f_2'(0,1)$． ……10 分

（16）解：（Ⅰ）设在时刻 t 动点 M 所在的位置为 (x,y)，则有 $\frac{y}{x-t}=\frac{dy}{dx}$， ①

由①解得 $t=x-y\frac{dx}{dy}$，从而得 $\frac{dt}{dy}=-y\frac{d^2x}{dy^2}$． ② ……2 分

又 $\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=2$，由于 $\frac{dt}{dy}<0$，故 $\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}=-2\frac{dt}{dy}$． ③ …… 3 分

由②和③可得 $\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}=y\frac{d^2x}{dy^2}$． …… 4 分

令 $p=\frac{dx}{dy}$，则上述方程为 $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2}\frac{dy}{y}$，积分得 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{1}{2}(\ln y+\ln C_1)$．

当 $y=1$ 时，$p=\frac{dx}{dy}=0$，得 $C_1=1$．故 $p+\sqrt{1+p^2}=\sqrt{y}$，$p-\sqrt{1+p^2}=-\frac{1}{\sqrt{y}}$，所以

$$p=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}})，即 \frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}).$$

积分后可得 $x=\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+C_2$． …… 6 分

由于 $x=0$ 时，$y=1$，可得 $C_2=\frac{2}{3}$，因而动点 M 的轨迹方程为 $x=\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}$． ……8 分

（Ⅱ）当 M 追赶到点 P 时，$y=0$，此时 P 走过的路程为 $\frac{2}{3}$． ……10 分

（17）解：将 $f(x)$ 作周期为 2π 的延拓，则

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx=\frac{2}{3}\pi$，$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$， ……5 分

所以 $f(x)$ 的傅立叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\right]$$

$$=\begin{cases}x^2+x, & -\pi<x<\pi.\\ \frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\pi^2, & x=\pm\pi.\end{cases}$$ ……8 分

令 $x=\pi$ 有：$\pi^2=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$． ……10 分

（18）解：（Ⅰ）令 $x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)[m-g(x)]dx=m\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx，$$ ……3 分

即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$． ……4 分

（Ⅱ）取 $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}$，$g(x)=\frac{1}{e^x+1}$，则 $f(-x)=f(x)$，$g(x)+g(-x)=1$．由（Ⅰ），

$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}dx$． ……7 分

再取 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2x+1}$，$g(x)=x$，则 $f(\pi-x)=f(x)$，$g(x)+g(\pi-x)=\pi$，再由（Ⅰ），

$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2x+1}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{\cos^2x+1}=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}$． ……10 分

（19）解：$I=[\int_L(\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}-y)dx+\frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}dy]+\int_L\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\overset{\Delta}{=}I_1+I_2$． …… 2 分

补有向直线段 $\overrightarrow{BA}:y=x\ (-1\le x\le1)$，设 L 与 $\overrightarrow{BA}$ 围成区域 D，由格林公式， …… 4 分

$$I_1=\int_L=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}-\int_{\overrightarrow{BA}}=\iint_D d\sigma-\int_{-1}^{1}(2\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}-x)dx=\pi.$$ …… 6 分

L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=\sqrt{2}\sin t,\end{cases}\ \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{5\pi}{4}$，

$$I_2=\int_L\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=\int_L\frac{1}{\sqrt{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\sqrt{2}\cos tdt=-\sqrt{2}，$$ …… 8 分

所以 $I=I_1+I_2=\pi-\sqrt{2}$． ……10 分

（20）解：由题设 $\beta=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$ 知：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(3,-2,-1,1)^T=\beta$，所以 $Ax=\beta$ 有一个特解为 $\eta=(3,-2,-1,1)^T$． …… 2 分

由题设 α_1,α_4 线性无关，$\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+(-\alpha_1+\alpha_4)+4\alpha_4=2\alpha_1+5\alpha_4$，从而 α_1,α_4 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，则方程 $Ax=0$ 的基础解系中含 $4-2=2$ 个无关的解向量． …… 6 分

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}=0$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$，即知 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的解且线性无关，所以 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的一个基础解系， ……9 分

故方程组 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$，其中 k_1,k_2 为任意常数. ……11 分

（21）解：（Ⅰ）因为 $A\xi_1=0$，故 $\lambda_1=0$ 为 A 的特征值，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. ……2 分

又 $A\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $A(2\eta_1-\eta_2)=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，从而 $\lambda_2=1$ 为 A 的特征值，对应的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $2\eta_1-\eta_2$ 为对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量. ……5 分

（Ⅱ）A 主对角元素之和为 2，即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$，所以 $\lambda_3=1$ 为 A 的另一特征值. ……7 分

设 λ_3 对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由 $[\xi_3,\xi_1]=0,[\xi_3,\xi_2]=0$ 得 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 取 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. ……9 分

因为 A 为对称阵，故取 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则 $A=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Q^{-1}$，$A^n=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^nQ^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由题意知，X 的取值为1,2,3，Y 的取值为1,2，且 $\{X=1,Y=1\},\{X=2,Y=2\}$ 和 $\{X=3,Y=2\}$ 均为不可能事件. ……2 分

由乘法公式得 $P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$，同理 $P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{3}$，

$P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{3}$，故 X 和 Y 的联合概率律为 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. ……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 X 和 Y 的边缘分布律分别为 $X\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}1&2\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。进而计算得

$$EX=2,DX=\frac{2}{3},\quad EY=\frac{4}{3},DY=\frac{2}{9},$$ ……7 分

又 $E(XY)=\frac{7}{3}$，故 $Cov(X,Y)=\frac{7}{3}-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$，所以 $\rho=\dfrac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……9 分

（Ⅲ）由 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 得 $(U,V)\sim\begin{pmatrix}(2,2)&(3,3)\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，所以

$$P\{U=V\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$ ……11 分

或由于 (X,Y) 只取值 $(1,2),(2,1),(3,1)$，故 (U,V) 只取值 $(2,2),(3,3)$，因此有 $U=V$，从而

$$P\{U=V\}=1.$$ ……11 分

（23）证：由 $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 知，χ^2 可表示为 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$. 进而知 $X_i^2\sim\chi^2(1)$，$E(X_i^2)=1$，$D(X_i^2)=2$，$i=1,2,\cdots,n$. ……3 分

因此当 n 充分大时，由中心极限定理知 $\chi^2\overset{近似}{\sim}N(n,2n)$，故 $\dfrac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$， ……5 分

由 $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=P\{\dfrac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\dfrac{\chi^2_\alpha(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=\alpha$，可得 $\dfrac{\chi^2_\alpha(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_\alpha$，所以

$$\chi^2_\alpha(n)\approx n+\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……8 分

由 $P\{\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(n)\}=P\{\dfrac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\dfrac{\chi^2_{1-\alpha}(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=1-\alpha$，可得 $\dfrac{\chi^2_{1-\alpha}(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_{1-\alpha}=-U_\alpha$，所以

$$\chi^2_{1-\alpha}(n)\approx n-\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……11 分