绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】：$f(x)=kx^{k-1}\sin x+x^n\cos x\sim(k+1)x^k$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k(k+1)x^{k-1}}{a2x(\sqrt{1+x^2}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{k(k+1)x^{k-1}}{ax^3}=1$，故 $k=4,a=20$。答案 A .

（2）【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)x^2}{|x|x^2}=1, g(0)=0$，

$g_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-1, g_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$，$g'(0)$ 不存在。

答案是 A.

（3）【解】答案为 C . 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}[f'(x)+f''(x)]=f'(0)+f''(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)+f''(x)-f''(x)}{x}=f''(0)+f'''(0)=f'''(0)=2$.

（4）【解】：根据函数曲线的凹凸性可得答案是 A.

（5）【解】：答案： B .

（6）【解】：答案：（B）.

（7）【解】：答案：C.

（8）【解】：答案：A.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 【解】： 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\dfrac{\arctan x-x}{x})^{\frac{x}{\arctan x-x}}\right]^{\frac{\arctan x-x}{x^2}}$ ，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，所以原式

$=e^{-\frac{1}{3}}$.

（10）【解】有题设可知 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\cos x]=0, f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$，

左式 $=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x}]=f'(0)=1$，所以 $f'(0)=1$，所以所求切线

（11）【解】：$y'=\dfrac{3(1+t^2)}{2t}, y''=\dfrac{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{t^2})}{2t}=\dfrac{3(t^2-1)}{4t^3}, y''\big|_{t=1}=0, y''$ 在 $t=1$ 的两侧异号，故 $t=1$ 为曲线的拐点.即拐点为 $(1,4)$.

（12）【解】：由题设有 $\int_0^1[xf'(x)-f(x)]\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1xe^{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(e-1)$，

所以 $\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}(1-e)$.

（13）【解】：由题设知 $x=1,y=0$ 时 $z=0$，等式两边同时求微分可得，由于

$\dfrac{dz}{e+z}=2xzdx+(x^2-1)dz+(2+y)dx+xdy$，把 $x=1,y=0,z=0$ 代入可得 $dz\big|_{(1,0)}=2edx+edy$.

（14）【解】：因为 $\left|B^{-1}\right|=\dfrac{1}{3}$,所以 $|B|=3$,又因为 $A\sim B$,所以 A,B 有相同的特征值,设 A 的另一个特征值为 λ_3，由 $|A|=|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,得 $\lambda_3=-3$,因为 $A-3E$ 的特征值为 $-4,-2,-6$,所以 $|A-3E|=-48$.

又因为 $B^*+(-\dfrac{1}{4}B)^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1}$,所以 $\left|B^*+(-\dfrac{1}{4}B)^{-1}\right|=(-1)^3B^{-1}=-\dfrac{1}{3}$，

于是 $\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\dfrac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=\left|(A-3E)^{-1}\right|\left|B^*+(-\dfrac{1}{4}B)^{-1}\right|=\dfrac{1}{144}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【解】：$(1+ax+bx^2)\sqrt{1+x}-c=(1+ax+bx^2)[1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3+o(x^3)]-c$

$=1-c+(a+\dfrac{1}{2})x+(b+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4})x^2+(\dfrac{1}{2}b-\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{16})x^3$，

$x\to 0$ 时 $\sin x\ln(1+x^2)\sim x^3$，因此有 $1-c=0,(a+\dfrac{1}{2})=0,(b+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{4})=0$，解得

$c=1,a=-\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{8}$，$d=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a+\frac{1}{16})x^3}{x^3}=\dfrac{5}{16}$.

（16）【解】：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{e^{-y^2}\sin t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=e^{-y^2}\sin t$，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\sin t\right)=\sin t\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-y^2}\right)+e^{-y^2}\cos t\sqrt{1+t^2}$.

由题设知 $t=0$ 时 $y=1$．因此有 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{e}$.

（17）【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+xf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+xf_{12}'')+x(yf_{21}''+xf_{22}'')+f_2'=y^2f_{11}''+2xyf_{12}''+x^2f_{22}''+f_2'$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-yf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-y(xf_{21}''-yf_{22}'')-f_2'=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$，因此

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2$.

（18）【解】：两边求 x 的导数，$xf'(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+e^x}$，而

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}-(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\mathrm{d}x)=\frac{\pi}{2}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$.

(19)【解】(Ⅰ)由题设可知 $y=f(x)$ 满足 $\int_0^t\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^t y\,\mathrm{d}x$,对 t 求导后可得 $\sqrt{1+(y')^2}=2y$,解的 $y'=\pm\sqrt{4y^2-1}$,因 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增,所以又 $y'=\sqrt{4y^2-1}$. 上述方程分离变量后可得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4y^2-1}}=\mathrm{d}t$,积分后可得 $\ln(2y+\sqrt{4y^2-1})=2t+C, y(0)=\dfrac{1}{2}, C=0, y(t)=\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{4}$,即

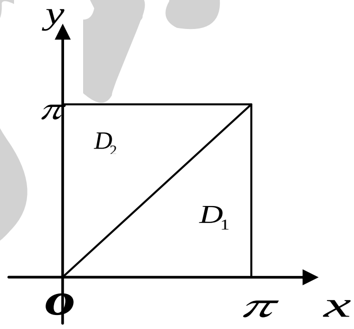
$f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$;

(Ⅱ) $A=\dfrac{\pi}{4}+\pi(\dfrac{e^2+e^{-2}}{4})^2+2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{4}+\pi\frac{e^4+e^{-4}+2}{16}+\frac{\pi}{4}\int_0^1(e^{4x}+e^{-4x}+2)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(7+e^4)}{8}$$

(20)【解】:如图所示,将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2,所以

$$I=\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}y\sin x\sin y\,\mathrm{d}\sigma$$



在利用积分得轮换对称性知

$$I=2\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{\pi}\left[\int_0^x x\sin x\sin y\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\pi}\left[x\sin x\cdot(1-\cos x)\right]\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)$$

$$=2x\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)\Bigg|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin^2x\right)\mathrm{d}x=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi.$$

(21)【证明】:(Ⅰ)令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t$,由 Lagrange 中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $F(x)-F(0)=F'(x)x$,即有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$;

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 $\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\times2\theta=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$,对上述等式两边同时取极限 $x\to0^+$ 可得

$$2f'(0)\lim_{x\to0^+}\theta=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0),$$

$$f'(0)\neq0,\text{所以}\lim_{x\to0^+}\theta=\frac{1}{2}.$$

(22)【解】:令 $X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3), B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,矩阵方程化为 $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,即 $\begin{cases}A\xi_1=\beta_1\\A\xi_2=\beta_2\\A\xi_3=\beta_3\end{cases}$.

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-1}{2} & 2 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(a-1) & b-2 & 1+\frac{c}{2} \end{pmatrix},$$

当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(A\vdots B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

方程组 $A\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-k \\ -k \\ k \end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）;

方程组 $A\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-l \\ 2-l \\ l \end{pmatrix}$（$l$ 为任意常数）;

方程组 $A\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-t \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}$（$t$ 为任意常数）;

（23）【解】:（1）据已知条件，有 $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$，即

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$，所以 $x^TAx=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$。

（2）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 A 的特征值为 $2,2,-4.$

由 $(2E-A)x=0,\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=2$ 的特征向量

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^\gamma,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$;

由 $(-4E-A)\boldsymbol{x}=0,\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$,

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, 则 $\beta_2=a_2-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta1)}\beta_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，再对 β_1,β_2,β_3 单位

化，有 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，那么令 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，有

$x^TAx=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2.$

（3）因为 $A+kE$ 的特征值为 $k+2,k+2,k-4,$ 所以当 $k>4$ 时,矩阵 $A+kE$ 正定.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=0,\ \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}=\infty,\lim_{x\to0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\pm\sqrt{2}}f(x)=\infty$$，故 $x=0,-1,\pm\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 D.

（2）【解】:两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$，令

$$f(x)=kx^2-\ln x,\ f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0,x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}},f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\frac{1}{2e}$ 时有 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}})>0$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$,因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根,即两个曲线无交点.

注:本题也可以用取特殊值法，令 $k=1$，则讨论起来更方便.

（3）　【解】: $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{4}$ 答案 C.

（4）【解】: 由题设知 $g(0)=g'(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$， $f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim_{x\to0}[2\cos x^2+\frac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C.

（5）【解】: 因为 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$1<\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$，因而有 $I_1<1$， 又 $\frac{\pi}{4}<\frac{x}{\tan x}<1$，因而有

$I_2>1$，由此 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}\frac{\tan x}{x}<1$, $I_1<\frac{\pi}{4}$;又 $1<\frac{4}{\pi}\frac{x}{\tan x}<\frac{4}{\pi},\frac{\pi}{4}<I_2<1$，所以 $I_1<\frac{\pi}{4}<I_2<1$ 答案是 C.

（6）【解】: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+2xyf'}{1+2yzf'},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-f}{1+2yzf'},z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z+2xyzf'+yf}{1+2yzf'}=\frac{x+2xyzf'}{1+2yzf'}=x$，答案 A.

（7）【解】: 因为 β_1 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，所以 $\beta_1+\beta_2$ 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，从而 α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关，故选（D）.

（8）【解】: 答案：C.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 【解】: 有题设知 $y(1)=1$，对等式两边同时求微分可得 $e^{xy}(ydx+xdy)+2xdx+dy=0$，

将 $x=1,y=1$ 代入可得 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}=-\frac{e+2}{e+1}\mathrm{d}x$.

（10）【解】: $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x+1)}e^{\frac{1}{x}}=1,\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)-e^{\frac{1}{x}}+\frac{2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}]=0$，因此该曲线的斜渐近线是 $y=x$.

（11）【解】: $s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec xdx=\ln(\sec x+\tan x)\big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3}).$

（12）【解】：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1$.

（13）【解】：方法一：$x^2y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$ 。

方法二：$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int\dfrac{1}{x^2}\cos 2xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C)=\dfrac{1}{2x^2}\sin 2x+\dfrac{C}{x^2}$.

（14）【解】：答案：1.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：令 $y=\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$,$\ln y=\dfrac{\ln\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\dfrac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x(1-\cos x^2)}{2(x-\tan x)(1-\sec^2x)}$$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5}{(x-\tan x)\tan^2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x-\tan x}=\dfrac{1}{2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\sec^2x}=\dfrac{3}{2}$，所以原式$=e^{\frac{3}{2}}$.

（16）【解】：原式$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}\dfrac{1}{2(1-x^2)}=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\int\dfrac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$,

$$\int\frac{1}{2(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=\!=}\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\cos^2t-\sin^2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int(\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin t}+\frac{1}{1-\sqrt{2}\sin t})\,\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C,$$

原式$=\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C$.

（17）【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2},\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}$,

解方程组$\begin{cases}-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}=0,\\-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}=0.\end{cases}$得函数 z 在集合 D 内有三个驻点 $(0,0),(0,1),(1,0)$.

（1）在点 $(0,0)$ 处 $A=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2,B=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0,C=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$,

$AC-B^2=-4<0$，因此 $(0,0)$ 不是函数 z 的极值点；

（2）在点 $(0,1)$ 处 $A=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=\dfrac{4}{e},B=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=0,C=\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)}=\dfrac{4}{e}$,

$AC-B^2=\dfrac{16}{e^2}>0,A>0$，因此 $(0,1)$ 是函数 z 的极小值点，且 z 在 $(0,1)$ 处取得的极小值为 $z(0,1)=-\dfrac{1}{e}$；

20、21全程考研资料请加群712760929

（3）在点$(1,0)$处$A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{4}{e},B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0,C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-\dfrac{4}{e}$，

$AC-B^2=\dfrac{16}{e}>0,A<0$，因此$(1,0)$是函数$z$的极大值点，且$z$在$(0,1)$处取得的极大值为$z(1,0)=\dfrac{1}{e}$.

（18）【解】：由题设有$y(1)=\dfrac{1}{4},y'(1)=1$，令$y'=p$，则原方程可化为$\dfrac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,y}p=6\sqrt{y}$，解得

$p^2=8y^{\frac{3}{2}},y'=2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$或者$y'=-2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$（舍去），再积分可得

$4y^{\frac{1}{4}}=2\sqrt{2}x+C,\ y(1)=\dfrac{1}{4},C=0,y=\dfrac{1}{4}x^4$，由此可得所求曲率为$K=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}=\dfrac{3x^2}{\sqrt{(1+x^6)^3}}$.

（19）【解】：（Ⅰ）由定积分的几何意义知$\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}\,t=\dfrac{\pi}{2}x^2$，当$x\in(0,1)$时

$\int_0^1|x-t|\mathrm{d}\,t=\int_0^x(x-t)\mathrm{d}\,t+\int_x^1(t-x)\mathrm{d}\,t=x^2-x+\dfrac{1}{2}$，当$x\geq1$时有

$\int_0^1|x-t|\mathrm{d}\,t=x-\dfrac{1}{2}$，从而$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+2}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2},x\in[0,1],\\ \dfrac{\pi}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2},\quad x>1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}(2+\pi)x-1,x\in(0,1],\\ \pi x+1,\quad x>1,\end{cases}$由$f'(x)$的表达式可知$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{2+\pi}]$上单减，在$[\dfrac{1}{2+\pi},+\infty)$上单增，

因而$f(\dfrac{1}{2+\pi})=\dfrac{1+\pi}{2(2+\pi)}$是函数的极小值，同时也是最小值；

（Ⅱ）因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而$f(x)$在$[0,+\infty)$内没有最大值.

（20）【解】：区域D关于y轴对称，$\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$关于$x$为奇函数，$\dfrac{x^2}{1+x^2+y^2}$关于$x$为偶函数，设$D_1$为区域$D$位于第一象限内部分，则有

$$I=\iint_D\frac{x^2}{1+x^2+y^2}d\sigma+\iint_D\frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma\quad=2\iint_{D_1}\frac{x^2}{1+x^2+y^2}d\sigma=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r^3}{1+r^2}dr\overset{u=r^2}{=\!=\!=}\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{u}{1+u}du=\frac{\pi}{4}(1-\ln2).$$

（21）【证明】：（I）则原不等式等价于$t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0,(t>0)$.

令$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t),t\in[0,+\infty)$，则$f(0)=0$，

$$f'(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}},$$

令$g(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，则$g(0)=$ (，$g'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}$，当$t>0$时$g'(t)>0$，因而有$f'(t)>0$，即函数$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$在区间$[0,+\infty)$上单增，因而当$t>0$时有

$$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>f(0)=0.$$

原不等式得证；

（II）作变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，原不等式等价于 $\dfrac{t^2}{1+t}>\ln^2(1+t)$，令 $F(t)=\dfrac{t^2}{1+t}-\ln^2(1+t)$，

由于 $F'(t)=\dfrac{t^2+2t}{(1+t)^2}-2\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}=\dfrac{t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)^2}$，

再令 $\varphi(t)=t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t),\ \varphi'(t)=2(t-\ln(1+t))>0\quad(t>0)$

所以 $\varphi(t)\nearrow$，又 $\varphi(0)=0$，即 $\varphi(t)>0\quad(t>0)$，代入上式知 $F'(t)>0\Rightarrow F(x)\nearrow$，又 $F(0)=0$，则 $F(t)>0\ (t>0)$，不等式成立.

（22）【解】：（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$，有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 B^{T} 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$ 的解。解此方程组的基础解系 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0 \text{ 即}\begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$，因为 $x_3=-x_4$，即 $3k_1-2k_2=k_1\text{-}k_2$，即 $k_2=2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k\quad 0\quad -k\quad k)^{\mathrm{T}}$，k 为任意常数.

（23）【解】：（I）由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量。设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$　　则

$\begin{pmatrix}x & \xi_3\end{pmatrix}=0$　可得　$x_1+x_3=0$ 及基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T$　　$\xi_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$。

即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量。

单位化 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，

令 $U=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}$ 即为所求；

（II）由题得知 $A=U\Lambda U^T$，$\therefore$ 二次型 f 矩阵为　$f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}=x^TAx=x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+x_3^{\,2}-2x_1x_3$.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】：当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在但 $g(x)$ 为有界函数时，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 是存在的，故答案是 C.

（2）【解】：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=2$，由连续性可得 $f'(0)=f(0)=0$，

由导数定义 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)-[f'(x)-f'(0)]}{x}=f'(0)-f''(0)=-f''(0),$

可知 $f''(0)=-2<0,$ 所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

（3）【解】：答案为（B）.

（4）【解】：函数 $f(x,y)$ 关于 x 轴方向是减函数，关于 y 轴方向是增函数，由此答案（A）

（5）【解】：由 $f''_{xy}(x,y)=1$ 对变量 y 积分， $f'_x=y+C(x)$，代入 $f'_x(x,0)=2x$，所以 $C(x)=2x$，

由此 $f'_x=y+2x$，对变量 x 积分， $f(x,y)=xy+x^2+C(y)$，代入 $f(0,y)=1$，则 $f(x,y)=xy+x^2+1$.

答案：（B）.

（6）【解】：因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.

综上有 $I_2>I_1>I_3$，答案（B).

（7）【解】：答案 B.

（8）【解】答案：C.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9)【解】：令 $\dfrac{t}{x}=u, dt=xdu$，所以

$$f(x)=\int_0^x e^{-2x}\left|\ln\frac{t}{x}\right|dt=e^{-2x}\int_0^x\left|\ln\frac{t}{x}\right|dt\overset{\frac{t}{x}=u}{=\!=}xe^{-2x}\int_0^1|\ln u|du=-xe^{-2x}\int_0^1\ln u du=xe^{-2x};$$

由此 $f(x)=xe^{-2x}=x(1-2x+\dfrac{2^2}{2!}x^2-\cdots+(-1)^n\dfrac{2^n}{n!}x^n+\cdots)$,

所以 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}n!=(-1)^{n-1}n2^{n-1}$.

（10）【解】：原式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（11）【解】： $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{-t^2}}{t^2}$， $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\dfrac{\left(\dfrac{e^{-t^2}}{t^2}\right)'}{-\dfrac{t^2}{1+t^2}}\right|_{t=1}=-\left.\dfrac{2(1+t^2)^2e^{-t^2}}{t^5}\right|_{t=1}=-\dfrac{8}{e}$.

（12）【解】： $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{x+n(1-x)}+x^{2n}}{e^{n(1-x)}+x^{2n+1}}=\begin{cases}xe^x, & 0\le x<1\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$，所以

$$\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx=\int_0^1 xde^x+\int_1^e\frac{1}{x}dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx+1=2.$$

（13）【解】：等式两边同时求全微分，将 $x=1,y=0,z=1$ 代入可得 $dx+dy+dz=0, dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-dx-dy$.

（14）【解】：答案：$\boldsymbol{k(-1\ \ 1\ \ 1)^T, k\neq 0}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可知 $f(0)=0, f'(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\lim_{x\to0}\left((1+\frac{f(x)-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{f(x)-\sin x}}\right)^{\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}}=\sqrt{e}$$，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-\sin x}{x^2}\times\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}[\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}-\frac{\cos x-1}{2x}]=\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2}$$，所以 $f''(0)=1$.

（16）【解】：积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le1,\sqrt{2-x^2}\le y\le1+\sqrt{1-x^2}\}$

而 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le1,\sqrt{2-x^2}\le y\le1+\sqrt{1-x^2}\}$ 是 D 在第一象限的部分，由对称性知：

$$I=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\sqrt2}^{2\sin\theta}r^2dr$$

$$=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\sin^3\theta-2\sqrt2)d\theta=\frac{20\sqrt2}{9}-\frac{\sqrt2}{3}\pi.$$

（17）【解】：由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}2ax+2by=3,\\2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当 $8a^2-4b^2\neq0$，即 $2a^2-b^2\neq0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一驻点 $\left(\dfrac{3a-2b}{2a^2-b^2},\dfrac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$.

记 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$，$B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b$，$C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a$.

当 $AC-B^2=8a^2-4b^2>0$ 即 $2a^2-b^2>0$ 时，$f(x,y)$ 有极值. 并且当 $A=-2a>0$，
即 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有极小值；当 $A=-2a<0$ 即 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有极大值.
综上所述，得,当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极小值；当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极大值.

（18）【解】：设 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，等式两边同时积分可得 $A^2\iint_D xydxdy=A-1, A^2-4A+4=0, A=2.$

所以 $xy(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2=f(x,y)-1$，$f(x,y)=4xy+1$，

$$\int_0^1 I(t)\,dt=\int_0^1 dt\int_t^1 f(x,t)dx=\int_0^1 dt\int_0^t x(4t\,dx+1)=\int_0^1 t\,dt\,4\int_0^t xdx+\frac{1}{2}=\ .$$

（19）【解】：（I）令 $D_1=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\ge t\}, D_2=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\le t\}$，

20、21全程考研资料请加群712760929

则 $f(t)=\iint\limits_{D}|xy-t|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D_2}(xy-t)dxdy$

$$=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D}(xy-t)dxdy=2\int_t^1dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_{D}xydxdy+t\iint\limits_{D}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t);$$

（II） $f'(t)=-1+2t(1-\ln t),f''(t)=-2\ln t\geq 0,t\in(0,1)$，

$f(0+0)=\frac{1}{4},f(1)=\frac{3}{4}$， $f'(0+0)=-1,f'(1)=1$。因为 $f''(t)=-2\ln t\geq 0,t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。又因为 $f'(0+0)=-1,f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时， $f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时， $f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小点.

（20）【证明】:（Ⅰ）由题设有 $f(a)(1-a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=F(a)-F(0)=F'(\xi)a=f(\xi)a$，从而有 $f(\xi)=f(a)(1-a)$；

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[\xi,a]$ 上应用 Largrange 中值定理知 $\exists\eta\in(\xi,a)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)-f(a)=f'(\eta)(\xi-a)$，而 $f(\xi)=f(a)(1-a)$，因而有

$$(\xi-a)f'(\eta)=-af(a).$$

故原命题成立.

（21）【解】：方程两边 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上积分： $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t-x)f(t)dt]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4x)dx$

左边 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\int_0^x f(t-x)dt\overset{t-x=u}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx\int_0^x f(u)du=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx]^2$；

右边 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4x)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{5}{16}\pi$，所以 $[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx]^2=\frac{5}{8}\pi$ ，由函数为正值函数，所以

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\sqrt{\frac{5}{8}\pi}=\frac{\sqrt{10\pi}}{4}$，由此平均值为 $f(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{\sqrt{10\pi}}{2\pi}$.

（22）【解】：(I) 证明：由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，可推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 等价从而秩相同。

据此增广矩阵 $\overline{A}=(A\beta)$ 的秩＝ $r(A)=n-1<n$ 因此方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多解。

（II）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-1}\alpha_{n-1}=0$

故 $A\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=0$

又$\because\ r(A)=n-1$ $\quad\therefore\ (l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}x=\alpha_1+\cdots\alpha_n=\beta$ 知 $\left(1,1,\cdots,1\right)^T$ 是 $Ax=\beta$ 特解。

于是 $Ax=\beta$ 通解是 $(1,1,\cdots,1)^T+k(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T=(1+kl_1,\cdots1+kl^{n-1},1)^T$

因此若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 解时,必有 $k_n=1$.

（23）【解】:（I）$\because\ A\alpha_1=0\qquad A\alpha_2=0$ 表明 α_1，α_2 是特征向量且无关，

设 $A=(a_{ij})_3$， $\because\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases}\Rightarrow\ A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 因此，A 有另一特征值 3。$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为其对应的特征向量. $\because\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\quad\therefore$ A 可对角化

（II）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$， $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}$

$$A^{1000}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{1000}=P\Lambda^{1000}P^{-1}=3^{999}\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}.$$