绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2\tan\pi x}{|x^2-1|\sqrt{x+2}}$，则关于 $f(x)$ 间断点的描述不正确的是（　　）.

（A）$x=-2$ 为第二类间断点　　（B）$x=-1$ 为可去间断点

（C）$x=\dfrac{1}{2}$ 为第二类间断点　　（D）$x=1$ 为跳跃间断点

（2）以下三个二重积分的大小顺序为（　　）.

$$I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(e^{x^2+y^2}-1)d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(e^{x^2+y^2}-1)d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\sin(x^2+y^2)d\sigma$$

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

（3）设 $F(x^2-z^2,y^2-z^2)=0$ 确定了可微函数 $z=z(x,y)$，若 $F_1'+F_2'\ne 0$，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A） 0　　（B） 1　　（C）xyz　　（D）$\dfrac{xy}{z}$

（4）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内可导，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛，则在该邻域内必有（　　）.

(A) $f(x)=0,f(x)\ne 0$　　(B) $f(x)\ne 0,f(x)=0$

(C) $f(x)\ne 0,f(x)\ne 0$　　(D) $f(x)=0,f(x)=0$

（5）已知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，其中 A 为 n 阶矩阵，P 为 n 阶可逆矩阵，则下列四个向量组中是 $Ax=0$ 的基础解系的为（ ）.

（A）ξ_1,ξ_2,ξ_3 的一个等价向量组　　（B）$\xi_1,\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_2+\xi_3$

（C）$P\xi_1,P\xi_2,P\xi_3$　　（D）$(PA)x=0$ 的一个基础解系

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则下列条件

① $r(A)=1$　② $|A|<0$　③ $bc>0$　④ $r(A)=2$

中，A 与对角矩阵相似的充分条件是（ ）.

(A)①或②　（B）②或③　（C）③或④　（D）②或④

（7）设 A,B 为两个随机事件，$P(AB)>P(A)P(B)$，若存在 $C\subset AB$，使得 $A-C$ 与 B 相互独立，则 $P(C)=$（　　）.

(A) $P(A)-P(A|\overline{B})$　　(B) $P(A)-P(A|B)$

(C) $P(B)-P(B|\overline{A})$　　(D) $P(B)-P(B|A)$

（8）设随机变量 X_1,X_2 独立同分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(\left|\dfrac{X_2}{X_1}\right|<k)=\alpha$，则 $k=($　$)$.

20、21全程考研资料请加群712760929

（A）$t_{\frac{1-\alpha}{2}}(1)$　　（B）$t_{1-\alpha}(1)$　　（C）$F_{\frac{1-\alpha}{2}}(1,1)$　　（D）$F_{1-\alpha}(1,1)$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）若曲线$\begin{cases} x=e^t, \\ y=e^{2nt}+t \end{cases}$在点$(1,1)$处的切线与$x$轴的交点横坐标为$x_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n=$_____.

（10）微分方程$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}dx+(\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}})dy=0$（$x>0,y>0$）的通解为_____________.

（11）$\int_0^3 \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}dx=$___________.

（12）设$f(x,y)$可微分，且满足$f(x+y,\dfrac{y}{x})=x-y$，则$df(x,y)\big|_{(1,0)}=$_________.

（13）设A为$m\times n$矩阵，B为m阶方阵，C为$n\times m$矩阵，若$A=BA,\ CB=O,$且矩阵A的秩$r\ A=m$，则行列式$|AC-2B|=$______.

（14）设随机变量X服从参数为2指数分布，则反常积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t\ln^X t}dt$收敛的概率为_____.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**设函数$f(x)=x^4+ax^3+b$，其中a,b均为常数，且$a\neq 0$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小值；

（Ⅱ）分别讨论a,b满足何种关系时，方程$f(x)=0$无实根、有唯一实根或多个实根；

（Ⅲ）如果方程$f(x)=0$有唯一实根，且$(-2,f(-2))$为曲线$y=f(x)$的拐点，求a,b的值.

（16）**（本题满分 10 分）**设函数$g(x)$在$x=0$的某邻域内二阶可导，满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$g''(0)=1$，且函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数.令$z=f(g(xy),\ln(x+y))$，求二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,0)}$.

（17）**（本题满分 10 分）**设

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx\ \ (a>0).$$

（Ⅰ）当$a>0$时，证明$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$；

（Ⅱ）如果n为正整数，证明$\Gamma(n+1)=n!$；

（Ⅲ）已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，计算$\Gamma(\dfrac{3}{2})$.

（18）**（本题满分 10 分）**设定义在$[0,+\infty)$上的二阶可微函数$f(x)$满足$f(0)=0, f'(0)=1$，$f''(x)-2f'(x)+f(x)\geq 1$．证明

（Ⅰ）$f'(x)-f(x)+1\geq 2e^x$；

（Ⅱ）$f(x)\geq(2x-1)e^x+1$.

（19）**（本题满分 10 分）**设函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1, \\ xy\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2>1, \end{cases}$$

计算二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$.

（20）（**本题满分 11 分**）已知三阶矩阵A的 3 个特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，对应的特征向量依次为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2a\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}a\\a+3\\a+2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{pmatrix}$，若线性方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3\\2x_1+(a+4)x_2+5x_3=6\\-x_1-2x_2+ax_3=-3\end{cases}$有无穷多解，求矩阵$A$.

（21）（**本题满分 11 分**）已知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$（$n>1$），

（I）证明二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵$A=nE-\alpha\alpha^T$，其中$\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，E为n阶单位阵；

（II）求A^k（k为自然数）；

（III）求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在正交变换下的标准形以及规范形.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量X的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$Y=\max\{X,1\}$.

（I）令$Z=X+Y$，求Z的概率密度函数$f_Z(z)$；　（II）求$Cov(X,Y)$；

（23）（**本题满分 11 分**）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$X\sim U[a,b]$的简单随机样本，其中a,b未知，求$\theta=b-a$的矩估计量$\hat{\theta}_M$和极大似然估计量$\hat{\theta}_L$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})$（　　）.

（A）无水平渐近线，无垂直渐近线，有一条斜渐近线

（B）有一条水平渐近线，有一条垂直渐近线，无斜渐近线

（C）无水平渐近线，有无穷多条垂直渐近线，有一条斜渐近线

（D）有一条水平渐近线，有无穷多条垂直渐近线，无斜渐近线

（2）设反常积分

$$I_1=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+\sqrt{x})(1+x)},\quad I_3=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

则有（　　）.

（A）I_1,I_2 收敛，I_3 发散　　（B）I_1,I_3 收敛，I_2 发散

（C）I_2,I_3 收敛，I_1 发散　　（D）I_1,I_2,I_3 均收敛

（3）下列级数发散的是（　　）.

（A）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\ln n}$　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x^3}{1+x^2}dx$　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

（4）设 a,b,p,q 均为常数，则下列函数中，必不是微分方程 $y''+py'+qy=(ax+b)e^x$ 解的是（　　）.

（A）$y=1+xe^x$　　（B）$y=(1+\sin x)e^x$

（C）$y=(1+x^2)e^x$　　（D）$y=(x^2+\sin x)e^x$

（5）A 为 n 阶可逆矩阵，交换 A 的第一行和第二行得到矩阵 B，则下列矩阵中必为正交阵的是（　）.

（A）AB　　（B）AB^{-1}　　（C）$A^{-1}B$　　（D）$B^{-1}A$

（6）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，且 $AB=C$，则 A 的行向量组线性无关是 C 的行向量组线性无关的（　）.

（A）充分必要条件　　（B）充分不必要条件

（C）必要不充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）下列结论中，正确的是（　　）.

（A）设 A,B 为任意两个随机事件，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

（B）设 A,B 为两个随机事件，若对任意的随机事件 C，均有 $AC=BC$，则 $A=B$

（C）若随机变量 X 和 Y 同分布，则 $X=Y$

（D）设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，若 $F(x_1)=F(x_2)$，则 $x_1=x_2$

（8）将长度为 1 米的木棒任意截成三段，前两段的长度分别为 X 和 Y，则 X 和 Y 的相关系数为：（　　）

（A）-1　　（B）$-\frac{1}{3}$　　（C）$\frac{1}{4}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3xy-1=0$ 确定，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=$________.

（10）设函数 $f(x)=\int_1^x \ln(t+x)dt$，则 $f^{(2019)}(1)=$________________.

（11）交换积分次序，$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{x-1}^1 f(x,y)dy=$

（12）设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$____________.

（13）已知 a,b 为非负实数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&a&-2\\0&-2&b\end{pmatrix}$ 有特征值 1 和 -2，则 $(a,b)=$__________.

（14）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{25}$ 为取自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$a>0,b>0$，$P\{|X-\mu|<a\}=P\{|\overline{X}-\mu|<b\}$，则 $\frac{a}{b}=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**设 $x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{1+x_n},n=1,2,\cdots$.

（Ⅰ）证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n+1}}{x_n})$.

（16）**（本题满分 10 分）**设可微函数 $f(x,y)$ 满足

$$df=e^{x+y^2}[(1+x+2y)dx+(2+2xy+4y^2)dy],$$

且 $f(0,0)=0$.

（Ⅰ）求 $f(x,y)$；（Ⅱ）讨论 $f(x,y)$ 是否具有极值.

（17）**（本题满分 10 分）**计算二重积分 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\operatorname{sgn}(y-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=\sqrt{2y-x^2}$，$x=1$，$x=-1$ 以及 x 轴所围区域.

（18）**（本题满分 10 分）**设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$．证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in[0,1]$，使 $(\xi-1)f(\xi)=\xi f(1-\xi)$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$，使 $\int_0^\eta f(x)dx=0$.

（19）**（本题满分 10 分）**设 $a_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}dx,n=1,2,\cdots$，证明：

（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；（Ⅱ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛.

（20）（**本题满分 11 分**）求所有正定阵 P ,使得 $P^{-1}AP=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为三阶方阵 A 的三个互异的特征值，对应的特征向量分别为 x_1,x_2,x_3.记 $\alpha=x_1+x_2+x_3$.

（I）证明 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha$ 线性无关；

（II）若 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$，且 $\left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)=E$，求 $A^3\alpha$.

（22）（**本题满分 11 分**）设有 n 个箱子，第 i 个箱子中装有 i 个红球，$n-i$ 个白球，$i=1,2,\cdots,n$. 现任意选定一个箱子，从中有放回地任取两个球. 记 p_n 为两个球颜色不同的概率，q_n 为两个球均为红球的概率.

（I）当 $n=3$ 时，求 p_3；　（II）求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$；　（III）求 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n$.

（23）（**本题满分 11 分**）设 (X_1,X_2) 为来自总体 $X\sim U[0,1]$ 的一个简单随机样本，其样本均值为 $\bar{X}$，样本方差为 S^2.

（Ⅰ）证明 (X_1,X_2) 服从区域 $\{(x_1,x_2):0\le x_1\le 1,0\le x_2\le 1\}$ 上的均匀分布；

（Ⅱ）计算 $P\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}$ 和 $P\{S^2\le\frac{1}{8}\}$；

（Ⅲ）问 $\bar{X}$ 与 S^2 是否相互独立？为什么？

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）．

（A）1　（B）3　（C）5　（D）7

（2）函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\operatorname{sgn}(t)e^{-t}dt$（其中 $\operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数）有（　　）.

（A）一个极值点，一个拐点　（B）一个极值点，两个拐点

（C）两个极值点，一个拐点　（D）两个极值点，两个拐点

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{n+3}{n}\int_0^1 dx\int_x^1 y(y-x)^n dy)=($　　$)$.

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2

（4）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\cos\frac{a}{n}\ (0<a<1)$　(　　).

(A)发散　(B)条件收敛　(C)绝对收敛　(D)敛散性与 a 有关

（5）设 A 为 n 阶矩阵，将 A 的第一行加上第二行的 3 倍得到矩阵 B，则下列说法正确的是（　）.

（A）将 B 的第一列加上第二列的 3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（B）将 B 的第一列加上第二列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（C）将 B 的第二列加上第一列的 3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（D）将 B 的第二列加上第一列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似

（6）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正负惯性指数均为 1，则 a 等于（　）

（A）0　（B）-1　（C）2　（D）3

（7）设随机变量 $X\sim U[-1,1]$，$Y=\begin{cases}\sqrt{|X(1+X)|}, & X<0,\\ 1, & X\ge 0,\end{cases}$ 则（　　）.

（A）当 $X\ge 0$ 时，$EY=\frac{1}{2}$

（B）当 $X<0$ 时，$EY=\frac{\pi}{16}$

（C）$EY=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}$

（D）Y 既为非离散型随机变量，也非连续型随机变量，EY 不存在

（8）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，$F(1)=\frac{5}{12}$，且 X 的概率密度函数

$$f(x)=af_1(x)+bf_2(x),$$

其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(1,\sigma^2)$ 的密度函数，$f_2(x)$ 是在 $[0,3]$ 上服从均匀分布的密度函数，则 $(a,b)=$（　　）.

（A）$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　（B）$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　（C）$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$　（D）$(\frac{1}{6},\frac{2}{3})$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n \dfrac{x}{n^2+x}dx=$__________.

（10）曲线 $y=\int_0^x |t^2-1|dt$ 与直线 $x=1, x=2, y=0$ 所围成图形的面积为________.

（11）微分方程 $(xy^2-1)\dfrac{dy}{dx}+y^3=0$ 的通解为__________.

（12）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $(x-1)y-xz+\ln z=0$ 确定的隐函数，则 $dz\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=$_____.

（13）设 A 为 n 阶非零矩阵，且 $A^3=O$，矩阵 X 满足 $(E-A)X(E-A^2)=E$，则 $X=$______.

（14） 设随机事件 A,B,C 两两独立，其概率均为 $p\,(0<p<1)$，若 $A\cup B\cup C=\Omega$，且 $AB\subset C$，则 $p=$________ .

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将答案写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）(Ⅰ) 证明 $\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$ 为周期为 π 的周期函数，其中 $[x]$ 为取整函数；(Ⅱ) 计算定积分 $I=\int_0^{100\pi}(\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}])\dfrac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分，并求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x,0)-f(0,-3x)}{x}$.

（17）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=f(x,y)=xy-\dfrac{4}{3}x-y$ 在由抛物线 $y=4-x^2(x\ge0)$ 与两个坐标轴所围成的平面闭区域 D 上的最大值和最小值.

（18）（**本题满分 10 分**）设函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $f'(x)$；

(Ⅱ) 问是否有 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)$？

(Ⅲ) 求 $f'(\dfrac{1}{2k\pi})$ 及 $f'(\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}})$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 并问 $f(x)$ 是否是点 $x=0$ 的某邻域内的单调函数？

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n-1}}{n3^{n+1}}$ 的收敛域及和函数.

（20）（**本题满分 11 分**）已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&a&a\\a&4&a\end{pmatrix}$，矩阵方程 $BX=A$ 有解，

但 $AX=B$ 无解，求常数 a.

（21）（本题满分 11 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，通过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2$，其中 A 为实对称阵，且方程组 $Ax=0$ 有解 $(1,0,1)^T$，求所作的正交变换，并写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$，且 X 和 Y 相互独立.

（Ⅰ）令 $U=X+2Y,V=X+aY$，问常数 a 取何值时，U 和 V 相互独立?

（Ⅱ）求 $P\{X>0|X+2Y=2\}$.

（计算结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 表示）

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_{100})$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i-1)$.

（Ⅰ）当 $\lambda=1$ 时，计算 $P\{Y=0\}$；

（Ⅱ）当 $\lambda=1$ 时，利用中心极限定理计算 $P\{Y<9900\}$；

（Ⅲ）求 EY.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（四）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 可导，则（　　）.

（A）$a=2,b=1$　（B）$a=2,b=-1$　（C）$a=-2,b=1$　（D）$a=-2,b=-1$

（2）函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^\alpha\ (\alpha>1)$ 在点 $(0,0,)$ 处（　　）.

(A)连续，但不可偏导　(B)可偏导，但不连续

(C)偏导函数均连续　(D)偏导函数均不连续

（3）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛，则下列结论正确的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

(C) $a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n+\cdots$ 收敛　(D)数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right\}$ 有界

（4）下列命题正确的是（　　）.

（A）设有数列 $\{x_n\}$，如果 $0\le x_n<1,\ n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$

（B）设函数 $f(x)$ 单调增加，如果数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n),n=1,2,\cdots$，则 $\{x_n\}$ 单调增加

（C）设连续函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（D）设函数 $f(x),g(x)$ 处处连续，如果 $f(x)>g(x)$，a,b 为常数，则 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$

（5）设 A 为 n 阶方阵，α 为 n 维非零列向量，a 为实数，若 $r(A)=r\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}$，则对两个非齐次线性方程组和 $Ax=\alpha$ $A^Tx=\alpha$ 必定（　）.

（A）都有解　（B）都无解

（C）$Ax=\alpha$ 有解，但 $A^Tx=\alpha$ 未必有解　（D）$A^Tx=\alpha$ 有解，但 $Ax=\alpha$ 未必有解

（6）若 A 为三阶实对称正交阵，且 $\mathrm{tr}A=-1$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的规范形为（　）

（A）$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$　（B）$-y_1^2+y_2^2+y_3^2$　（C）$-y_1^2-y_2^2+y_3^2$　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）设随机变量 X 的取值非负，其分布函数为 $F(x)$，且 EX 存在，则 $EX=$（　　）.

（A）$\int_0^{+\infty}xF(x)dx$　（B）$\int_0^{+\infty}x[1-F(x)]dx$

（C）$\int_0^{+\infty}F(x)dx$　（D）$\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx$

（8）某袋中有 3 个白球，4 个黑球，从中任取两个，已知至少有一个是黑球。再从所取的两个球中任取一球，则取得的是黑球的概率为（　）.

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{3}{4}$　　（D）$\frac{2}{3}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可微，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，记

$$a_n=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{f\left(\frac{x}{1\cdot 3}\right)+f\left(\frac{x}{3\cdot 5}\right)+\cdots+f\left[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}\right]\right\},\ n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______．

（10）利用恒等式 $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\ (x\neq 0)$，计算 $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cdot\arctan e^x dx=$______．

(11) 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\ln(1+r\cos\theta)}{\cos\theta}dr\right]d\theta$ ______．

（12）设积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\leq 4,\ xy\geq 3\}$，则二重积分 $I=\iint\limits_D\frac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}dxdy=$

______．

（13）已知 A,B 为 3 阶相似矩阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 是矩阵 A 的两个特征值，$|B|=2$，则 $\begin{vmatrix}(2E-A)^{-1} & O\\ O & (-B)^*\end{vmatrix}=$______．

（14）设随机变量 $X\sim\chi^2(2)$,则 $P\{X\geq EX^2\}=$______．

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**（Ⅰ）求微分方程 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解；

（Ⅱ）利用（Ⅰ），求满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的微分方程 $y''-2xy'-2y=x^2$ 的特解．

（16）**（本题满分 10 分）**过曲线 $C:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上的一点 P 作 C 的切线 l，试求点 P 的坐标，使切线 l、曲线 C 及两个坐标轴所围图形绕 y 旋转一周所生成立体的体积最小，并求出此最小值．

（17）**（本题满分 10 分）**设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2\leq y\leq 3\right\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{\left[y-x^2\right]}d\sigma$，其中 $[u]$ 表示不超过 u 的最大整数．

（18）**（本题满分 10 分）**设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，$|f(x)|\leq 1$，且 $f^2(0)+f'^2(0)>2$，证明：

（Ⅰ）存在不同的两个点 $\xi_1,\xi_2\in(-2,2)$，使得 $|f'(\xi_1)|\leq 1,\ |f'(\xi_2)|\leq 1$；

（Ⅱ）存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$．

（19）**（本题满分 10 分）**设 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx$，（$n=1,2,\cdots$），试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}$ 的和．

（20）**（本题满分 11 分）**设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\ 2 & 0 & 6\\ -3 & 1 & -7\end{pmatrix}$，矩阵 B 为 3 阶非零矩阵，已知向量组

$\beta_1=(0,1,-1)^T$，$\beta_2=(a,2,1)^T$，$\beta_3=(b,1,0)^T$ 是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的 3 个解向量，且线性方程组 $Ax=\beta_3$ 有解.

（Ⅰ）求 a,b 的值；（Ⅱ）求 $Bx=0$ 的通解.

(21)（**本题满分 11 分**）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，A 为实对称矩阵，且 $f(1,1,1)=3$，且

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},$$

求（Ⅰ）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$；（Ⅱ）可逆变换 $x=Cy$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

(22)（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

（Ⅰ）求 $Y=F(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$；

（Ⅱ）求 $Z=F_Y(Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

(23) 已知随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(x+y), & |y|\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(I) 求 c；(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；(III) 计算概率 $P\left\{X>\frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{4}\right\}$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=$（　　）.

（A）∞　　（B）0　　（C）6　　（D）-6

（2）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{1-e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

(A) 两个偏导数都存在　　(B) 可微分　　(C) 取极小值　　(D) 取极大值

（3）设积分 $I_1=\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin x}{x}dx, I_2=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx$，则有（　　）.

（A）$I_1>0,I_2>0$　　（B）$I_1>0,I_2<0$　　（C）$I_1<0,I_2>0$　　（D）$I_1<0,I_2<0$

（4）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.记 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，$n=1,2,\cdots$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nS_n$（　　）.

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不定

（5）A 为 $m\times n$ 矩阵，β 为任一非零列向量，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $A^TAx=A^T\beta$ 有唯一解，则 $Ax=\beta$ 也有唯一解

（B）若 $A^TAx=A^T\beta$ 有无穷多解，则 $Ax=\beta$ 也有无穷多解

（C）若 $Ax=\beta$ 无解，则 $A^TAx=A^T\beta$ 也无解

（D）若 $Ax=\beta$ 有唯一解，则 $A^TAx=A^T\beta$ 也有唯一解

（6）已知 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，$m<n, AB=E$，则下列必为正定矩阵的是（　）.

（A）AA^T　　（B）A^TA　　（C）BB^T　　（D）A^TA+BB^T

（7）设 X 是非负随机变量，$EX=\mu$ $(0<\mu<1)$，则必有（　　）.

（A）$P\{X\le 1\}<\mu$　　（B）$P\{X\le 1\}\ge\mu$

（C）$P\{X\le 1\}<1-\mu$　　（D）$P\{X\le 1\}\ge 1-\mu$

（8）设随机变量 $Y\sim\chi^2(1)$，则根据切比雪夫不等式可估计得（　　）.

（A）$P\{Y\ge 3\}\le\dfrac{1}{3}$　　（B）$P\{Y\ge 3\}>\dfrac{1}{3}$　　（C）$P\{Y\ge 3\}\le\dfrac{2}{3}$　　（D）$P\{Y\ge 3\}>\dfrac{2}{3}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$________.

（10）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx=$ ________.

（11）积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^x e^{(y-1)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(y-1)^2}dy$ 的值等于________.

（12）设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^3\le y\le 1,-1\le x\le 1\right\}$，$f(x)$ 是定义在 $[-a,a](a\ge 1)$ 上的任意连续函数，则 $\iint\limits_D 2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)+1\right]\mathrm{d}\sigma=$________.

（13）四阶线性方程组为 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+4x_3+8x_4=8\\ x_1+3x_2+9x_3+27x_4=27\\ x_1-x_2+x_3-x_4=-1\end{cases}$，则 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=$______.

（14） 设 D 为平面区域 $-1<x<1,-1<y<1$，(X,Y) 服从 D 内的均匀分布，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $E(\max([X],Y))=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）某公司投资 2000 万建成一条生产线，投产后，在时刻 t 的追加成本和追加利润分别为 $G(t)=5+2t^{\frac{2}{3}}$（百万元/年）和 $\Phi(t)=17-t^{\frac{2}{3}}$（百万元/年）.

（Ⅰ）解释追加成本和追加利润的经济意义；

（Ⅱ） 试确定该生产线在何时停产可获得最大利润？分别讨论问 a,b 满最大利润是多少？

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)=\frac{(x+2)^{x+1}}{(x+1)^x}$，$x\ge 0$.

（Ⅰ）证明 $f(x)$ 为单调递增函数；

（Ⅱ）对任意正整数 n，证明 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^{n-1}$；（Ⅲ）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$.

(17) （**本题满分 10 分**）计算 $\iint\limits_D\frac{y+1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 2x$ 且 $x\ge 1$ 的部分.

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$．若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不为常数，且在点 $x=x_0$（$0\le x_0\le 1$）处取得最大值．证明：

（Ⅰ）$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx<x_0^2 f(x_0)$；

（Ⅱ）存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\int_0^{\xi}(x+x^2)f(x)dx=\xi^2 f(\xi)$.

（19）（**本题满分 10 分**）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在区间 $(-1,1$内收敛，且系数满足 $a_0=2, na_n=a_{n-1}+n-1$，$n=1,2,3,\cdots$，求此幂级数在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

（20）**（本题满分 11 分）**已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个三维列向量，$A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T$.

（Ⅰ）证明存在矩阵B，使得$A=B^TB$；

（Ⅱ）当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，证明$r(A)=3$；

（Ⅲ）当$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$时，求$Ax=0$的通解.

（21）已知$\xi=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}3&a&1&1\\-1&1&1&1\\0&b&1&-2\\c&0&-3&2\end{pmatrix}$的特征向量，

（Ⅰ）求a,b,c及ξ所对应的特征值；　（Ⅱ）问A是否能对角化？

（22）**（本题满分 11 分）**设随机变量X的密度函数为$f(x)$．分布函数为$F(x)$．当$x<0$时，$f(x)=0$；当$x\geq 0$时，$f(x)$连续，$f(0)=\lambda>$．若对任意的$x\geq 0,y\geq 0$，$P\{X>x+y\mid X>x\}=P\{X>y\}$.

（Ⅰ）证明当$x\geq 0,y\geq 0$时，$F(x+y)=F(x)+F(y)-F(x)F(y)$；

（Ⅱ）求$f(x)$.

（23）**（本题满分 11 分）**设$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})\,(n_1>1)$为来自总体$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$的一个简单随机样本，$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})\,(n_2>1)$为来自总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$的一个简单随机样本，且两个样本相互独立．其样本均值分别为$\bar X,\bar Y$；样本方差分别为S_1^2,S_2^2，记$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$，证明：

（Ⅰ）$\bar X-\bar Y\sim N(\mu_1-\mu_2,(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2})\sigma^2)$；

（Ⅱ）$\dfrac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$；

（Ⅲ）$\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$.