目　录

高等数学部分：

高等数学部分：

第一章　函数与极限

1. 周期函数未必存在最小正周期。

例 1：常数函数 $f(x)=C,$ 它以任意数为周期，故不存在最小正周期。

例 2：狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & x为有理数\\ 0 & x为无理数\end{cases}$，它以任意有理数（或无理数）为周期，从而也没有最小正周期。

2. 周期函数之和未必是周期函数。

例 ： $f(x)=x-[x],\quad g(x)=\cos x.\ \ f(x)以1为周期$，g(x) 以$2\pi$为周期， 而$f(x)+g(x)=x-[x]+\cos x$ 却不是周期函数。

3. 有界函数与无界函数之积未必无界。

例 1：$f(x)=0,\quad g(x)=x$，在区间$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$ 有界，$g(x)$ 无界，而 $f(x)g(x)=0$ 却在区间$(-\infty,+\infty)$内有界。

例 2： $f(x)=e^{-x},\quad g(x)=x$，在区间$(0,+\infty)$内$|f(x)|<1$，而 $g(x)$ 是无界的，$f(x)g(x)=xe^{-x}$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$，从而易见 $f(x)g(x)$ 在区间$(0,+\infty)$内是有界的。

4. 无界函数之和（差，积，商）未必无界。

例 1：$f(x)=1-\dfrac{1}{x},\quad g(x)=\dfrac{1}{x}$，两函数均在区间$(0,1)$内无界，而 $f(x)+g(x)=1$却在区间$(0,1)$内有界。

例 2：$f(x)=\tan x,\quad g(x)=\cot x$，两函数均在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内无界，而 $f(x)g(x)=1$ 却在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内有界。

例 3：$f(x)=\dfrac{1}{x},\quad g(x)=\dfrac{1}{x^2}$，两函数均在区间$(0,1)$内无界，而$\dfrac{f(x)}{g(x)}=x$ 却在区间$(0,1)$内有界。

5. 有单值反函数的非单调函数。

例： $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数;} \\ -x, & x\text{为无理数.} \end{cases}$

$f(x)$ 是非单调函数，但是存在单值反函数；

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数;} \\ -x, & x\text{为无理数.} \end{cases}$$

可见函数在区间上上单调只是存在反函数的充分条件，并非必要。

6. 由于使用极限“ ε—δ ”定义不准确产生的反例。

函数 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上，$x_0\in(a,b)$，对任给 $\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0,$ 当 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，恒有 $f(x)-A<\varepsilon$，其中 A 是常数。但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq A$。

例： $f(x)=\sin x, A=1$

在 $x_0=0$ 点，对作给 $\varepsilon>0,$ 存在 $\delta>0,$ 当 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时，总有

$$f(x)-A=\sin x-1\leq 0<\varepsilon$$

但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\sin 0=0\neq 1$。

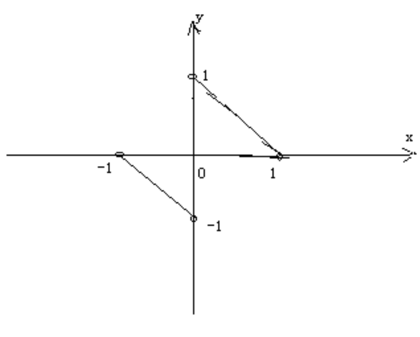
上面说明极限的定义是很严谨的，要想掌握好极限概念，有对其定义逐字推敲的必要。

7. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近有界，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在。

函数如果在某一点的极限存在，则在该点附近一定有界，但是反之结论不真。

例

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0<x<1 \\ 0, & x=0 \\ -x-1, & -1<x<0 \end{cases}$$



在（-1，1）内恒有 $\left|f(x)\right|<1$，但是

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1, \lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

8. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点没有极限，但对任意实数 a，存在收敛于 x_0 的数列 x_n，使得

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$$

如果函数在某一点的极限存在，那么收敛于这一点的任何一个子序列所对应的函数序列，必收敛到同一极限。但是一旦极限不存在，收敛于这一点的各子序列所对应的函数序列就可能出现各种性态。

例： $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$

因为 $x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时， $f(x_k)=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k=1,2,......,$

$x_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}$ 时， $f(x_k)=-2k\pi-\frac{3\pi}{2}, k=1,2,......,$

故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在。

而对任何一个实数 a，总存在正整数 k，使 $2k\pi>|a|$。假定 k_0 是使不等式成立的最小正整数，记 $k_n=k_0+n, n=1,2,3,......,$

显然， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2k_n\pi},\frac{1}{2k_{n-1}\pi}\right]$ 上连续且最大值为 $2k_{n-1}\pi+\frac{\pi}{2}$， 最小值为 $-(2k_{n-1}\pi+\frac{3}{2}\pi)$。因为 $-2k_{n-1}\pi-\frac{3}{2}\pi<-2k_0\pi<a<2k_0\pi<2k_{n-1}\pi+\frac{\pi}{2}$，

所以由连续函数的介值定理知存在 $x_n\in\left[\frac{1}{2k_n\pi},\frac{1}{2k_{n-1}\pi}\right]$，使得 $f(x_n)=a$

显然，对于数列 $\{x_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=a,$

1) 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\infty$ 的无界数列。

例： $x_n=[1+(-1)^n]^n$ 。

对任意正数 M，只要取 N= $\log_2 M$ ，当 $n=2k>N$ 时，就有

$|x_n|=[1+(-1)^{2k}]^{2k}=2^{2k}>2^{\log_2 M}=M$ ，所以数列 x_n 无界。但对 n=2k+1,k=1,2,……时 x_n =0，即 x_n 不收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq\infty$ 。

2) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 存在关系： $y_n\le x_n\le z_n, n=1,2,.....,\lim\limits_{n\to\infty}(z_n-y_n)=0,$ 但是极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 却不存在.

例： 数$\begin{cases} x_n = (-1)^n, \\ y_n = (-1)^n - \dfrac{1}{n} \\ z_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$ n=1,2,3,……

有 $y_n \le x_n \le z_n, n = 1,2,....., \lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n} = 0,$

但是极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

本例说明,极限存在准则 1 中条件 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 不能更换成 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = 0,$

9. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A, \lim\limits_{n\to A}\psi(x) = B,$ 但是 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x)) \ne B$ 的复合函数.

例： $$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, p, q\text{是互质整数}, q > 0; \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

因为对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \varepsilon$, 对 $a = 0$ 的 δ 邻域内的任何一点 x,

若 x 为无理数,则 $|\varphi(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$; 若 x 为有理数 $\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 为互质整数,且 q>0,

则 $|\varphi(x) - 0| = \dfrac{1}{q} \le \dfrac{|p|}{q} = |x - 0| < \delta = \varepsilon$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$.

对于 $\psi(x)$, 显然有 $\lim\limits_{n\to 0}\psi(x) = 1$, 然而

$$\psi(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & x\text{为有理数}; \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$ 不存在.

10.数列 x_n 收敛于零, y_n 是另一数列,而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = k \ne 0$

例： $x_n = \dfrac{1}{2^n}, y_n = 2^n$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在 , 然而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$, 即数列 $x_n y_n$ 收敛于 1.

11.两数列 x_n, y_n , 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, 但是数列 x_n, y_n 都不收敛于零.

两个数列对应项乘积作成的新数列收敛于零, 并不意味着这两个数列本身也必须收敛于

零. 因为乘积趋于无穷小,往往只需其中一个因子趋于无穷小, 而另一个保持有界就足够了.

例: $x_n = 1+\cos n\pi, y_n = 1-\cos n\pi$.

数列 x_n, y_n 都不收敛, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 n\pi = 0$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$ 的数列.

例: $x_n = \sin(n\pi + \dfrac{\pi}{4})$.

$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin(n\pi+\dfrac{\pi}{4})\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 但是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在. 因为

$n = 2k, k = 1,2,......$时, $x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $n = 2k+1, k = 1,2,......$时, $x_n = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13. 关于无穷小量、非无穷小量四则运算的反例.

a. 由无限多个无穷小量之和生成的非无穷小量.

有限多个无穷小量之和是无穷小量, 这个性质不能推广到无限多个. 将无限多个无穷小量累加起来, 就可能根本改变它们原有的特性.

例 1 : $x_{ni} = \begin{cases} \dfrac{1}{i(i+1)} & n \le i \\ \dfrac{1}{n} & n > i \end{cases}$ n=1,2,……, i 是确定的正整数.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = 0$. 当 i=1,2,……时, 就得到无限多个无穷小量 $x_{n1}, x_{n2}, ...$ 但是这无限多个无穷小量的和

$$s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ni} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ni} + \sum_{i=n}^{\infty} x_{ni} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n} + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=n}^{k}\frac{1}{i(i+1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} + \lim_{k\to\infty}[(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}) + ... + (\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})]$$

$$= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \quad .$$

因此, 这无限多个无穷小量之和是一个收敛于 1 的数列.

例 2 : $x_{ni} = \dfrac{1}{n+i}$ n=1,2,……, i 是确定的正整数.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = 0$. 当 i=1,2,……时, 就得到无限多个无穷小量. 但是这无限多个无穷小量的和 s_n 是正无穷大, 即

$$s_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ni} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n+i} = +\infty \quad .$$

这是因为上面的级数只不过是将调和级数删去前几项.

b.由无限多个无穷小量之积生成的非无穷小量.

例 1： $x_{ni}=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{i^2}, & n<i \\ (n+1)^{n-1} & n=i \\ \dfrac{1}{n} & n>i \end{cases}$ n=1,2,……, i 是确定的正整数.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni}=0$.　当 i=1,2,……时，就得到无限多个无穷小量. 而这无限多个无穷小量之积

$$D_n=\prod_{i=1}^{\infty} x_{ni}=(\prod_{i=1}^{n-1} x_{ni})\cdot x_{nn}\cdot(\prod_{i=n+1}^{\infty} x_{ni})=(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n})\cdot(n+1)^{n-1}\cdot(\prod_{i=n+1}^{\infty}\frac{(i-1)(i+1)}{i^2})$$

因为 $\prod\limits_{i=n+1}^{\infty}\dfrac{(i-1)(i+1)}{i^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\prod\limits_{i=n+1}^{k}\dfrac{(i-1)(i+1)}{i^2})$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\cdot\frac{(n+2)(n+4)}{(n+3)^2}\cdots\cdots\frac{(k-2)k}{(k-1)^2}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{n(k+1)}{(n+1)k}=\frac{n}{n+1}\quad ,$$

所以 $D_n=\dfrac{1}{n^{n-1}}(n+1)^{n-1}\cdot\dfrac{n}{n+1}=(1+\dfrac{1}{n})^{n-2}$,

而　$\lim\limits_{n\to\infty} D_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n-2}=e$

因此这无限多个无穷小量的积是一个收敛于 e 的数列.

例 2：

$x_{ni}=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{i^2}, & n<i \\ (n+1)^{n} & n=i \\ \dfrac{1}{n} & n>i \end{cases}$ n=1,2,……, i 是确定的正整数.

当 i=1,2,…… 时，同样得到无限多个无穷小量，这时

$$D_n=\prod_{i=1}^{\infty} x_{ni}=(\prod_{i=1}^{n-1} x_{ni})\cdot x_{nn}\cdot(\prod_{i=n+1}^{\infty} x_{ni})=\frac{1}{n^{n-1}}(n+1)^n\cdot\frac{n}{n+1}=(n+1)(1+\frac{1}{n})^{n-2}\quad ,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)(1+\dfrac{1}{n})^{n-2}=+\infty$　.

即无限多个无穷小量的积是一个发散的数列.

有限个无穷小量的积是无穷小量，这性质同样不能推广到无限多个无穷小量的乘积上去．这是因为每个无穷小量只是在变化的某个时刻后才任意小，而在这时刻之前变量可以有较大的值．如果在构造这无穷多个无穷小量时，让其进入任意小的时刻构成一个趋于无穷大的序列，同时，适当选取这时刻前变量的值，这样，对应每一个子 n，只有有限多个无穷小量在这个时刻已进入任意小，而有无限多个无穷小量仍处在可以取较大值的阶段（这种特性是有限多个无穷小量的乘积所没有的），于是就可能出现性质上的变异．

c. 由两个非无穷小量之和生成的无穷小量．

例：$x_n=1, y_n=-\cos^2\dfrac{\pi}{n}, n=1,2,\ldots\ldots$

这里 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-\cos^2\dfrac{\pi}{n})=-1,$

而 $x_n+y_n=1-\cos^2\dfrac{\pi}{n}=\sin^2\dfrac{\pi}{n}, n=1,2,\ldots\ldots$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\dfrac{\pi}{n}=0, n=1,2,\ldots\ldots$

d. 由两个非无穷小量之积生成的无穷小量．

例：$x_n=1-\cos n\pi+\dfrac{1}{n}, y_n=1+\cos\dfrac{\pi}{n}$

这两个数列都是发散．但是

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=\lim_{n\to\infty}(1-\cos n\pi+\frac{1}{n})(1+\cos n\pi)=\lim_{n\to\infty}[(1-\cos^2 n\pi)+\frac{1}{n}(1+\cos n\pi)]=0$$

即它们的积是无穷小量．

e. 由一个无穷小量与一个非无穷小量之积生成的非无穷小量．

例：$x_n=\sin\dfrac{\pi}{n}, y_n=n$ ． 显然 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\pi$

１4．由无穷大量与有界函数之积生成的非无穷大量．

例：显然 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty, g(x)$ 在 x=0 领域内有界．

而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}x^2=0$

１5．不存在与任何无穷小相比都是低价的无穷小，也不存在与任何无穷小相比都是高阶的无穷小．

例：若取 $f(x)\equiv 0,-\infty<x<+\infty$，则当 $x\to 0$ 时，f(x)是无穷小．显然，没有一个无穷小与它相比是高阶无穷小．但是却存在与 f(x)无法相比的无穷小，如

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{当}x\text{为无理数}\\ x, & \text{当}x\text{为有理数}\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$，所以当 $x\to 0$ 时 g(x) 是无穷小．但是极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在，所以 f(x)

不是 g(x)的高阶无穷小，从而不存在与任何无穷小相比都是高阶的无穷小.

另一方面，对任何一个无穷小量 f(x)（$x \to 0$），

$$\lim_{x\to 0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} f(x) = 0 \quad .$$

式中$\left[\dfrac{1}{x}\right]$是表示不超过$\dfrac{1}{x}$的最大整数．显然$(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} f(x)$是无穷小量，但 f(x)不是它的低价无穷小，这是因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]} f(x)}{f(x)}$不存在．从而不存在与任何无穷小相比都是低价的无穷小.

16．由无穷小量分别加一对等价无穷小所得到的一对非等价无穷小.

若α是无穷小量，β与β'是等价无穷小量，这时$\alpha+\beta, \alpha+\beta'$并非一定是等价无穷小量.

例： $\alpha = x, \beta = -x - x^3, \beta' = -x - x^2$.

当 x 趋近于 0 时，α, β, β'都是无穷小量，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{\beta'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x-x^3}{-x-x^2} = 1$ ，

所以$x \to 0$时， $\beta \sim \beta'$．但是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{-x^2} = 0$ ，

所以$\alpha+\beta$与$\alpha+\beta'$不是等价无穷小.

本例说明：

1）之所以会出现这样的结果，问题出在β，β'不是α的高阶无穷小.

2）在使用等价无穷小替换定理时，必须注意定理条件：仅当$\alpha \sim \alpha'$， $\beta \sim \beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在时才能$\lim\dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

17.收敛数列x_n的算术平均值$y_n = \dfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n),\ n = 1,2,......$也收敛，但反之不真.

例： $x_n = (-1)^n$ n=1,2,……. 它的算术平均值数列是

$$y_n = \frac{(-1)+1+(-1)^3+1+......+(-1)^n}{n}, \quad n=1,2,.....$$

因为$-\dfrac{1}{n} \le y_n \le 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{1}{n}) = 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

但是原数列x_n却是发散的.

18．数列 x_n 发散，但是它满足 n>N 时，$\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$，（N，p 为确定正整数）.

例：$x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$，n=1,2,3,……

对于任意一个正数 ε 及确定的正整数 p，取 $\mathrm{N}=\left[\frac{p}{\varepsilon}-1\right]$，当 n>N ，

即 $n>\frac{p}{\varepsilon}-1$ 时，恒有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}+\ldots\ldots\frac{1}{n+1}=\frac{p}{n+1}<\varepsilon$$

但是数列 x_n 是发散的，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$

本例说明：使用柯西极限存在准则时，必须正确地使用准则的条件.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 存在，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在的数列 x_n.

如果数列 x_n，有 x_n >0，n=1,2,……，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 也存在，并且

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$，但是反之结论就不真.

例：$x_n=\frac{2+(-1)^n}{3}$

因为 $\sqrt[n]{\frac{1}{3}}\le\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{3}}\le\sqrt[n]{\frac{3}{3}}=1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3}}=1$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ =1. 但是

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{3}\cdot\frac{3}{2+(-1)^n}=\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$，　故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在.

20. 具有有界变差的数列一定收敛，但反之不真.

对于数列 x_n，若存在数 c，使

$\left|x_2-x_1\right|+\left|x_3-x_2\right|+\ldots+\left|x_n-x_{n-1}\right|<c$ 称此数列具有有界变差.

例：$x_n=\frac{1-(-1)^n}{2n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}=0$

但是 $\left|x_2-x_1\right|+\left|x_3-x_2\right|+\left|x_4-x_3\right|+\ldots+\left|x_{2n}-x_{2n-1}\right|$

$$=1+2\cdot\frac{2}{2\cdot3}+2\cdot\frac{2}{2\cdot5}+...+2\cdot\frac{2}{2\cdot(2n-1)}=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{2}{2n-1}$$

$$>1+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+...+\frac{2}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

$$>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+...+\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)$$

对任意的 c >0，只要 $n>e^c$ 就有 $|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+...+|x_{2n}-x_{2n-1}|>$c

数列 x_n 收敛，但是它没有有界变差.

第二章　一元函数的连续性

1. 由于使用连续函数" $\varepsilon-\delta$ "定义不准确产生的反例.

   a. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点，对于每一个正数 ε，都有 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得若 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则一定有 $|x-x_0|<\delta$. 然而这样的函数 $f(x)$,在 $x=x_0$ 点有可能不连续。

   例： $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当}x\text{为有理数；}\\ 1, & \text{当}x\text{为无理数}\end{cases}$

   显然 $f(0)=0$，而且对于任意的 $0<\varepsilon<1$，都存在 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，使得若

   $|f(x)-f(0)|=|f(x)|<\varepsilon$，则 x 必定是有理数，由此推得 $|f(x)|=|x|^2<\varepsilon$

   即　$|x-0|=|x|<\sqrt{\varepsilon}=\delta$

   但是函数在 $x_0=0$ 处显然是不连续的。

   本例说明：满足 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 的点 x，虽然一定落在 x_0 的 δ 邻域内，但是 x_0 的 δ 邻域内不排斥存在不满足上述不等式的点，从而破坏了在 x_0 的连续性。

   b. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点，对于每一个数 δ >0，都有数 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$，使得当 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\delta$，但是这时的函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点仍有可能不连续。

例： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{x}}, & x\neq\dfrac{1}{k}\\ x, & x=\dfrac{1}{k};k=\pm1,\pm2,\ldots\\ 0 & x=0\end{cases}$

对于每一个 0< δ <1, 存在 $\varepsilon=\delta$，使得：若 $x\neq 0$ 且 $\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f(x)\right|<\varepsilon$，

则必有 $x=\dfrac{1}{k}$. 这样由上式推得 $\left|x-0\right|=\left|x\right|=\left|f(x)\right|<\varepsilon=\delta$ ，

但是函数在 $x_0=0$ 处显然是不连续的.

显然可知, 由 δ 来确定 $\varepsilon>0$，有可能破坏 ε 为任意小这一要求, 从而破坏连续的实质性要求.

c. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点, 对于每一个数 δ >0，都有数 $\varepsilon=\varepsilon(\delta,x_0)>0$，使得当 $\left|x-x_0\right|<\delta$ 时, $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$.但是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点仍有可能不连续。

例： $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

在 $x_0=0$ 点，对于每一个 $\delta>0$，取 $\varepsilon=1+\delta>0$，当 $\left|x-x_0\right|=\left|x\right|<\delta$ 时

$\left|f(x)-f(0)\right|=\left|f(x)\right|=1<\varepsilon$.

然而函数在 $x_0=0$ 处显然是不连续的.

以上几例说明, 对于函数在一点连续的定义有进行逐字推敲的必要.

d. 函数 $f(x)$ 在每一个 $x=x_0$ 点, 对于任意的正数 ε，及在该点的任意一个邻域内, 都存在无限多个 x，使得 $\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$. 然而这样的函数 $f(x)$ 甚至有可能处处不连续.

例：迪里赫莱函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 若x为有理数\\ 0 & 若x为无理数\end{cases}$

对于每一个 $\varepsilon>0$，及每一点 x_0，在点 x_0 的任意一个 δ 邻域内:

(ⅰ)若 x_0 是有理数, 则该邻域内的一切有理数 x 处都有

$\left|f(x)-f(x_0)\right|=0<\varepsilon$；

(ⅱ) 若 x_0 是无理数，则该邻域内的一切无理数 x 处都有

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=0<\varepsilon$$

然而这一函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内处处不连续.

2. 函数 $u=g(x)$ 在 x_0 点不连续，$g(x_0)=u_0$，$f(u)$ 在 u_0 点连续，但复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 点却是连续的.

由于初等函数在其定义域内是连续的，它们构成的复合函数在定义域内也是连续的，致使人们常误认为只能由连续函数构成连续的复合函数. 事实并非如此，由不连续函数与连续函数也能复合成在其定义域内处处连续的函数.

例： $u=g(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\, x\ge 0;\\ -1 & \text{当}\, x<0\end{cases}$ $\qquad f(u)=1-u^2,-\infty<u<+\infty$

$g(x)$ 在 $x_0=0$ 点不连续，$u_0=g(0)=1$，$f(u)$ 在 u_0 点是连续的. 而 $f(g(x))\equiv 0$，它在 x_0 点是连续的.

3. 函数 $u=g(x)$ 在 x_0 点不连续，$g(x_0)=u_0$，$f(u)$ 在 u_0 点也不连续，而复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 点却是连续的.

例： $u=g(x)=\begin{cases}1, & \text{当}\, x\le 1;\\ 2 & \text{当}\, x>1\end{cases}$ $\qquad f(u)=\begin{cases}u & \text{当}\, u\le 1\\ 3u-5 & \text{当}\, u>1\end{cases}$

$g(x)$ 在 $x_0=1$ 点不连续，$u_0=g(x_0)=1$，函数 $f(u)$ 在 u_0 点也不连续的. 而 $f(g(x))\equiv 1$，它在 x_0 点是连续的.

4. 一个不常见的间断点类型.

常见的函数间断点类型有可去型,振荡型,无穷型和跳跃型. 然而还存在其它类型的间断点.

例： $f(x)=\begin{cases}n & \text{若}\, x=\dfrac{m}{n}, n,m\,\text{为互质的整数}, n>0;\\ 0 & \text{若}\, x\,\text{为无理数}\end{cases}$

数轴上的任何一个点 x_0 都是该函数的间断点，因为在 x_0 的任何邻域，都有无穷多个取值为零的点，所以 x_0 不是无穷型间断点.

若 $x_0=\dfrac{m}{n}$，则对于任何一个正数 M，及任何一个 $\delta>0$，总存在一个充分大的素数 p，

使 $p > \max\{n, |m|, M\}$， 且 $\frac{1}{p} < \delta$

取 $x' = x_0 + \frac{1}{p} = \frac{mp+n}{np}$，显然有 $|x' - x_0| = \frac{1}{p} < \delta$

由于 $p > n$，故 p 不能整除 $mp+n$．又因为 n 与 m 互质，n 与 p 互质，故 n 不能整除 $mp+n$．同样 n 的任何一个因子 n_1 也不能整除 $mp+n$．于是 np 与 $mp+n$ 互质，$f(x') = np > M$．

这样 x_0 既不可能是振荡型和跳跃型，也不可能是可去型.

若 x_0 是无理数，则对任何一个正数 M 及任何一个 $\delta > 0$，在这个 x_0 的 δ 邻域内，既有使 $f(x) = 0$ 的点，也有使 $f(x) \neq 0$ 的有理点 $x_0 = \frac{m}{n}$．这样由前面的论证知，在 x_0 的 δ 邻域内存在有使 $f(x) > M$ 的点 x'．因此，对 x_0 的间断性有同样的论述．这样，数轴上任意一点都是 $f(x)$ 的不是常见类型的间断点.

5. 只有在一点连续的函数.

例： $f(x) = \begin{cases} x, & 若x为有理数 \\ -x & 若x为无理数 \end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$，所以函数在 $x = 0$ 点连续．但是在任何一点 $x_0 \neq 0$，有

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \{有理数\}}} f(x) = |x_0| \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \{无理数\}}} f(x) = -|x_0|$$

所以函数在任何一点 $x_0 \neq 0$ 均不连续.

6. 其反函数连续的不连续函数.

例： $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{sgn} x$ ， 其中 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处间断．但其反函数

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x-1}, & x < -1 \end{cases}$$

在其定义域内是连续函数.

由于连续与不连续的概念都是在函数定义域内的点上讨论的，因此象例中列举的那样，对于具有跳跃性间断点的函数，它的反函数定义域内，没有原函数值跳跃过那段区间上的点，因此，反而出现了反函数连续的现象.

7. 在闭区间$\left[a,b\right]$上有最大值而无最小值的函数.

例： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{|x|}, & x\neq 0且-1\leq x\leq 1\\ 0, & x=0\end{cases}$

函数在闭区间[-1,1]上有最大值 $f(0)=0$,但无最小值. 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

8. $f(x)$在$\left(a,b\right)$内连续，$f(a)\cdot f(b)<0$. 但在$\left(a,b\right)$内方程$f(x)=0$却没有根.

例： $f(x)=\begin{cases}x+4, & 0<x\leq 1\\ -5, & x=0\end{cases}$

函数在开区间$\left(a,b\right)$内连续，$f(0)\cdot f(1)=-25<0$. 然而当$x\in(0,1)$时恒有 $f(x)$>4

本例说明，若将零点存在定理中之闭区间改为开区间，则结论不一定成立.

第三章 一元函数的导数

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$存在，但是函数$f(x)$在点$x=a$不可导.

例： $f(x)=|x|$

在$x=0$有 $f(0+h)=f(0-h)=|h|$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{h}=0$$

但是函数$f(x)$在点$x=a$不可导.

本例说明$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=2f'(a)$这一结论是在$f(x)$在$x=a$处可导的结论下成立.

2. 导函数是初等函数的非初等函数.

例： $f(x)=\int_a^x \sin(x^2)dx$

这个函数不是初等函数，它在区间$\left(-\infty,+\infty\right)$内都有定义,它的导函数

$f'(x)=\sin(x^2)$却是定义在区间$\left(-\infty,+\infty\right)$内的一个初等函数.

3. 由参数方程$x=\varphi(t), y=\psi(t)$所确定的函数$y=f(x)$在$t=t_0$点可导，但是在这一点不

能用参变量求导公式:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 1： $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^6 \end{cases}$

显然由参数方程确定的函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处可导。但是在点 $t=0$ 处

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=3t^2\Big|_{t=0}=0$$

所以不能使用参数方程求导公式。

4．参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 在 $t=t_0$ 点都不可导，但是由它确定的函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内却处处可导。

例： $x=\varphi(t)=\begin{cases} t, & t\ge 0 \\ \frac{1}{2}t, & t<0 \end{cases}$

$$y=\psi(t)=\begin{cases} 3t, & t\ge 0 \\ \frac{3}{2}t, & t<0 \end{cases}$$

因为

$$\varphi'(t)=\begin{cases} 1, & t>0 \\ \frac{1}{2}, & t<0 \end{cases} \qquad \varphi'_+(0)=1, \varphi'_-(0)=\frac{1}{2}$$

$$\psi'(t)=\begin{cases} 3, & t>0 \\ \frac{3}{2}, & t<0 \end{cases} \qquad \psi'_+(0)=3, \psi'_-(0)=\frac{3}{2}$$

所以 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 $t=0$ 点不可导。

但由参数方程确定的函数 $y=3x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处可导。

5. 函数 $\tilde{y}=|f(x)|$ 在全数轴上处处可导，但是函数 $y=f(x)$ 在全数轴上处处不可导。

例： $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 若x为有理数 \\ -x^2-1 & 若x为无理数 \end{cases}$

因为函数 $y=f(x)$ 处处不连续，自然它的每一点导数不存在。然而

$$\tilde{y}=|f(x)|=x^2+1, \quad -\infty<x<+\infty$$

这是一个在全体数轴上处处可导的函数。

6．导函数不连续的函数。

例：$y=f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ ， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

但是 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，所以 $f(x)$ 的导函数在 $x=0$ 点不连续。

7．函数 $y=f(x)$ 有有限的导数，但它的导数在闭区间上无界。

例：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$

所以函数在闭区间[-1，1]上处处有有限导数。但当 x 趋近于 0 时它的导数是无界的，如：

$f'(\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}})=-2\sqrt{2k\pi}$ 随着正整数 k 增大，绝对值也增大。

这个例子说明，即使一个函数在闭区间上每一点都可导，它的导函数在闭区间上也不一定连续，正因为这样，导函数在该区间上就可能没有最大值或最小值。

8．导函数不单调的单调函数。

例：$f(x)=x^3$

在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 单调增加，但是 $f'(x)=3x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内并不单调减少。

9. 非周期函数的导函数却可以是周期函数

例：$f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}$

它不是周期函数，但是

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\cos 2x}{4}=\sin^2 x$ 是一个以 π 为周期的周期函数。

10. $f(x)$ 为有界函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

例：$f(x)=\sin\sqrt{x}$

函数在 $(0,+\infty)$ 上有界. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}=0$$

而 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x}$ 不存在. 因为不管取多大的正数 M, 总有正整数 k_1,k_2，使得

$$x_1=\left(2k_1\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2>M,x_2=\left(2k_2\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2>M\ ,$$

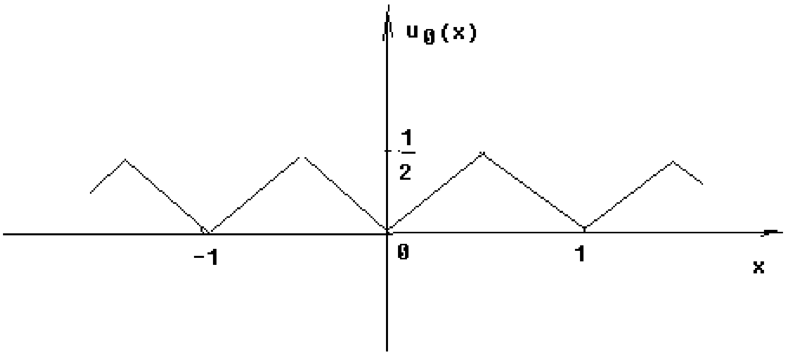
而 $\sin\sqrt{x_1}=\sin(2k_1\pi+\frac{\pi}{2})=1$， $\sin\sqrt{x_2}=\sin(2k_2\pi-\frac{\pi}{2})=-1$

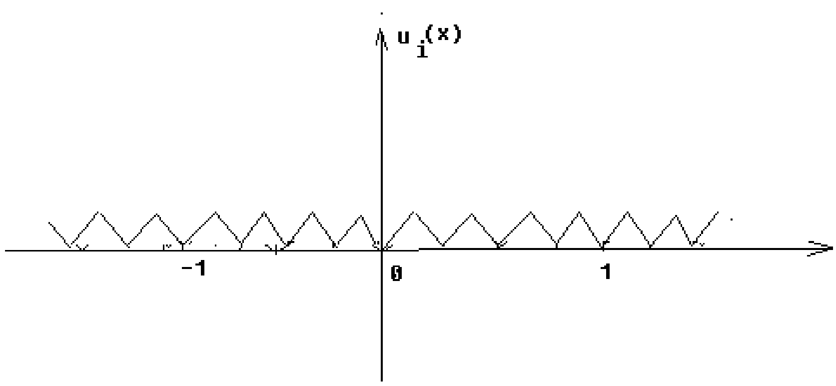
函数在一点可导, 则函数在这一点必须连续, 自然函数在这一点的极限存在. 但本例说明, 当把这样的点移到无穷远, 上述结论就不真.

11. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处不可导，但是在 $(-\infty,+\infty)$ 内内连续的函数。

例：
$$\begin{cases} u_0(x)=|x|, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}; \\ u_0(m+x)=u_0(x), & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}, m\text{为整数} \end{cases}$$

$$u_k(x)=\frac{u_0(4^k x)}{4^k},\qquad \text{k=1,2,……}$$





函数 $u_k(x)$ 在 $\left[\frac{s}{2\cdot4^k},\frac{s+1}{2\cdot4^k}\right]$ 上是连续的线性函数（s 是整数)，并有周期 $\frac{1}{4^k},k=0,1,2,.....$ 。

它的图形是齿形的，每一段折线的斜率是 1 或-1。

定义函数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$

因 $0\le u_k(x)\le\frac{1}{2\cdot 4^k}$ （k=0,1,2,……），

而且级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4^k}=\frac{2}{3}$，所以正函数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ 一致收敛，从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续。

在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一点 x_0，假定对于正整数 n（n=0,1,2,….）有

$$\frac{s_n}{2\cdot 4^n}\le x_0\le\frac{s_{n+1}}{2\cdot 4^n},$$

其中 s_n 是由 x_0 及 n 确定的整数。显然对应的区间：

$$\Delta_n=\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_{n+1}}{2\cdot 4^n}\right],\qquad n=0,1,2,\ldots\ldots,$$

随着 n 的增大有

$$\Delta_0\supset\Delta_1\supset\Delta_2\supset....\supset\Delta_n\supset......$$

在每一个区间上找一点 x_n，使

$$|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}\ ,\qquad n=0,1,2,\ldots\ldots,$$

自然当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0$. 由于

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}\ ,$$

及在式 $\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}$ 中 $u_k(x_n)$ 的周期是 $\frac{1}{4^k}$ ，

(ⅰ)若 $k>n$，则 $|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}=4^{k-(n+1)}\frac{1}{4^k}$，所以 $u_k(x_n)-u_k(x_0)=0$.

(ⅱ)若 $k\le n$，则 $|x_n-x_0|=\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{1}{4^{n+1}}\le\frac{1}{4\cdot 4^k}$. 这时

$$\Delta_k\supset\Delta_n$$

也即点 x_n,x_0 同时在区间 Δ_k 上。因为函数 $u_k(x)$ 在 Δ_k 上是线性的，因此

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm1,\ \text{k=0,1,2,……,}$$

从而有

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}(\pm1)$$

总而言之，当 n 为奇数时，这个比值等于偶整数，当 n 为偶数时，这个比值等于奇整数。因此在 $n\to\infty$ 时，这个比值不可能趋向有限的极限，即函数 $f(x)$ 在 x_0 点不可导。由于 x_0 点是任意的，说明函数在 $(-\infty,+\infty)$ 处处不可导。

本例说明，我们常见的函数在其其连续的区间内必有可微点存在的现象，不是连续函数本质的反映。

第四章　中值定理及导数的应用

1．罗尔定理中的条件稍作改变后引出的各种反例。

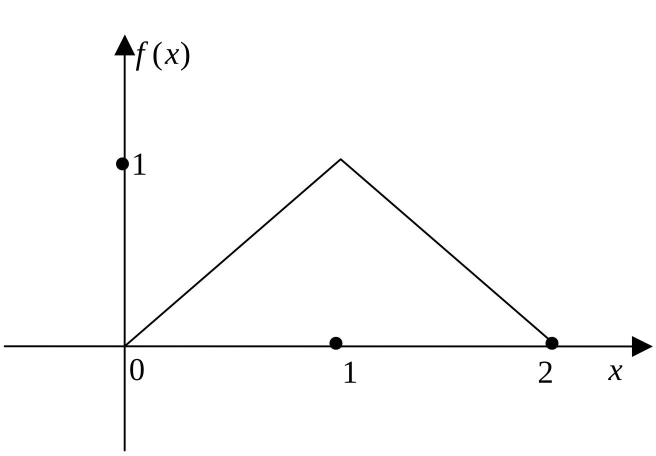
a. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，且存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$。但在闭区间 $[a,b]$ 上不存在 x_1,x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$。

例： $f(x)=x^5$

函数在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内可导， $f'(0)=0$。但在 $[-1,1]$ 上函数值处处不相等。

b. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续， $f(a)=f(b)$，它在开区间 (a,b) 内除一个点以外处处可导，但是在 (a,b) 内不存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

例： $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1;\\ 2-x, & 1\le x\le 2.\end{cases}$



函数在 $[0,2]$ 上连续， $f(0)=f(2)=0$。显然除 $x=1$ 点除外，它处处可导，且

$$f'(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ -1, & 1<x<2.\end{cases}$$

所以在$(0,2)$内不存在导数为零的点。

c. 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，但在(a,b)内不存在ξ点使$f'(\xi)=0$。

例：$f(x)=\dfrac{1}{x},\qquad 1\le x\le 2$。

函数在闭区间连续，在$(1,2)$内处处可导，但不存在导数为零的点。

d. 函数$f(x)$在(a,b)内连续、可导，$f(a)=f(b)$。但是在(a,b)内导函数无取值为零的点。

例：$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1;\\ 0, & x=1.\end{cases}$

$f'(x)=1,\ 0<x<1$，显然$f(0)=f(1)=0$。

e. 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)\ne f(b)$。但是存在$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$。

例：$f(x)=\sin x,\quad 0\le x\le\dfrac{3\pi}{4}$。

$$f(0)=0,\quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{及}\xi=\frac{\pi}{2}\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0。$$

2. 拉格朗日中值定理中的条件稍作改变后引出的各种反例。

a.函数$f(x)$在(a,b)内有连续导函数$f'(x)$，$\xi\in(a,b)$，但是不存在

$x_1,x_2\in(a,b)$使$x_1<\xi<x_2$及$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$。

例：$f(x)=tgx,\quad -1\le x\le 1$，

$$f'(0)=\sec^2 x\big|_{x=0}=1。$$

因为 $f(x)$ 关于原点中心对称，所以曲线在 I，III 象限分别处于直线 $y=x$ 的两侧。对于任何 $x_1<0<x_2$，过 $(x_1,\ f(x_1))$，$(x_2,\ f(x_2))$ 两点的直线必定与直线 $y=x$ 相交，所以它的斜率与直线 $y=x$ 的斜率决不会相等，即在 $[-1,\ 1]$ 内，不存在这样的点 $x_1<0<x_2$，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(0)=1。$$

b.函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 内某一点不连续，在 $(a,\ b)$ 内除去该点以外处处可导。但在 $(a,\ b)$ 内不存在 ξ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

例：
$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1;\\ 1, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

函数在 $(0,\ 2)$ 内除 $x=1$ 这点以外处处可导，

$$f'(x)=0 \qquad x\ne 1,\quad x\in(0,\ 2)。$$

显然找不到这样的 $\xi\in(0,\ 2)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{1}{2}。$$

c.函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内只有一点 x_0 不可导，但在 $(a,\ b)$ 内不存在 ξ，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

例：
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1;\\ x^3, & 1\le x\le \dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 3x^2, & 1<x<\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

显然函数在 $x=1$ 点不可导，并且当

$0<x<1$ 时，$0<f'(x)<2$，

$1<x<\dfrac{3}{2}$ 时，$3<f'(x)<\dfrac{27}{4}$。

然而 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f\left(\frac{3}{2}\right)-f(0)}{\frac{3}{2}-0}=\frac{9}{4},$$

所以$\left(a,\ b\right)$内不存在这样的ξ，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}。$$

例$a\sim c$结果的出现是由不满足拉格朗日中值定理条件所致。

4.柯西中值定理中的条件稍作改变后引出的各种反例。

a.函数$f(x)$，$F(x)$在闭区间$\left[a,\ b\right]$上有定义，在$\left(a,\ b\right)$内处处可导，而且$F'(x)\neq 0,\quad x\in(a,\ b)$，但是不存在$\xi\in\left(a,\ b\right)$，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \qquad (C)$$

成立。

例： $f(x)=x,\quad -1\leq x\leq 1,$

$$F(x)=\begin{cases}x, & -1\leq x<1;\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

$$f'(x)=F'(x)=1,\quad -1<x<1,$$

而 $$\frac{f(1)-f(-1)}{F(1)-F(-1)}=\frac{2}{3}。$$

故使等式$\left(C\right)$成立的ξ在$\left(-1,\ 1\right)$内不存在。

b.函数$f(x)$，$F(x)$在闭区间$\left[a,\ b\right]$上连续，$f(x)$在$\left(a,\ b\right)$内只有一点x_0不可导，$F'(x)\neq 0,\ x\in\left(a,\ b\right)$。但不存在$\xi\in\left(a,\ b\right)$，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \qquad (D)$$

成立。

例： $f(x)=\left|x\right|,\quad -1\leq x\leq 1$。

$$F(x)=x^2+3x,\quad -1\leq x\leq 1。$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0;\\ 1, & 0<x<1,\end{cases}$$

$$F'(x)=2x+3\neq 0,\quad -1<x<1。$$

在 $-1<x<0$ 时，$-1<\dfrac{f'(x)}{F'(x)}<-\dfrac{1}{3}$，

在 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1}{5}<\dfrac{f'(x)}{F'(x)}<\dfrac{1}{3}$，

而 $$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{1-1}{4-(-2)}=0。$$

故不存在这样的 $\xi\in(a,\ b)$，使等式 (D) 成立。

c.函数 $f(x)$，$F(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内可导，$F(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内只有一点 x_0 不可导，但有 $F'(x)\neq 0\ (x\neq x_0,\ x\in(a,\ b))$，而此式 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ 无意义。

例：$$f(x)=x,\quad F(x)=|\sin x|,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}。$$

$$f'(x)=1,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},$$

$$F'(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ -\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<0.\end{cases}$$

显然 $F(x)$ 在点 $x=0$ 不可导，但在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的其它点上导数不等于零。然而

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

无意义。

d.函数 $f(x)$，$F(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，在开区间 $(a,\ b)$ 内可导，$F(a)\neq F(b)$，但是对于 $\forall\xi\in(a,\ b)$，恒有

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\neq\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}\qquad (E)$$

例：$$f(x)=x^2,\quad F(x)=x(x-3),\quad 0\le x\le 1。$$

$$f'(x)=2x,\quad F'(x)=2x-3,\quad 0<x<1,$$

故恒有 $$\left|\frac{f'(x)}{F'(x)}\right|=\left|\frac{2x}{2x-3}\right|=\frac{2x}{3-2x}>0,\quad 0<x<1,$$

而 $$\frac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}。$$

不等式(E)在$(a,\ b)$内成立。

例$a\sim d$的结果之所以出现，是因为不满足柯西中值定理条件所致。

5．函数$f(x)$有$f'(a)=0,\quad f''(a)=0$。但是$f(x)$在$x=a$取得极值。

例：
$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin^2\dfrac{1}{x}-x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2\sin^2\dfrac{1}{x}-6x\sin\dfrac{2}{x}+2\cos\dfrac{2}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

显然函数$f(x)$在点$x=0$取得极小值。

由此看出，函数$f(x)$在点x_0一阶导数等于零，二阶导数不等于零，只是函数在这一点取得极值的充分条件，但是并非必要条件。

6．函数$f(x)$有$f'(a)=0$，并在点a取得极值，但在点a的两侧并非单调。

例：
$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin^2\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由例（5）知$f'(0)=0$，而当$x\neq 0$时，

$$f'(x)=x^2\left[4x\sin^2\frac{1}{x}-\sin\frac{2}{x}\right],$$

并且函数在$x=0$点取极小值。但是

当 $x_k=-\dfrac{4}{(4k+1)\pi},\quad k=1,2,\cdots,$ 时

$$f'(x_k)=x_k^2\left[-\frac{16}{(4k+1)\pi}\sin^2\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi+\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

$$=\left[1-\frac{8}{(4k+1)\pi}\right]x_k^2>0\,;$$

当 $x_i=-\dfrac{4}{(4i+3)\pi},\quad i=1,2,\cdots,$ 时

$$f'(x_i)=x_i^2\left[-\frac{16}{(4i+3)\pi}\sin^2\left(i+\frac{3}{4}\right)\pi+\sin\left(2i+\frac{3}{2}\pi\right)\right]$$

$$<0\,.$$

所以对任意小的正数 ε ，只要取 k 及 i 充分大，就有

$$-\varepsilon<x_k<0,\quad -\varepsilon<x_i<0\,,$$

即在区间 $(-\varepsilon,\ 0)$ 内 $f(x)$ 并不单调。同理可证在区间 $(0,\ \varepsilon)$ 内 $f(x)$ 也不单调。

本例说明用驻点两侧函数单调性的条件只是判断极值的充分条件，并非必要。在本例所给的条件下该判定方法失效。

7．函数在开区间内的唯一极大值点，可以不是最大值点。

例： $f(x)=x^4-x^2,\quad -3<x<3$。

因 $f'(x)=4x^3-2x,\quad x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 是函数在 $(-3,\ 3)$ 内的驻点。

$f''(x)=12x^2-2$ ，而 $f''(0)=-2<0,\quad f''\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4>0$ ，所以 $x=0$ 是函数在 $(-3,\ 3)$ 内的唯一的极大值点，$f(0)=0$。但是有 $f(2)=12>f(0)$，显然 $x=0$ 不是函数在区间上的最大值点。

8.两个凹函数的乘积可以是凸函数。

例： $f(x)=g(x)=-x^2$。

因为 $f''(x)=-2<0$，所以 $f(x)$， $g(x)$ 是凹函数。

若记

$$h(x)=f(x)g(x)=\left(-x^2\right)\left(-x^2\right)=x^4\,,$$

则

$$h''(x)=12x^2\geq 0\,,$$

也就是说 $f(x)\ g(x)$ 是凸函数。

9.两个凸函数的乘积可以是凹函数。

例： $f(x)=x^3,\quad g(x)=-\ln x,\quad e^{-\frac{5}{6}}<x<+\infty$ 。

因 $f''(x)=6x>0,\quad g''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ ，

所以 $f(x)$ ， $g(x)$ 在 $\left(e^{-\frac{5}{6}},\ +\infty\right)$ 内是凸函数。

若设 $h(x)=f(x)g(x),\quad e^{-\frac{5}{6}}<x<+\infty$ ，

则 $h'(x)=-3x^2\ln x-x^2$ ，

$$h''(x)=-6x\ln x-5x=-x\left[6\ln x+5\right],$$

在 $\left(e^{-\frac{5}{6}},\ +\infty\right)$ 内， $6\ln x+5>6\ln e^{-\frac{5}{6}}+5=0$ ，所以在这区间内恒有 $h''(x)<0$ ，也就是说 $f(x)\ g(x)$ 在这区间内是凹函数。

10．函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足罗必塔法则的全部条件，但是不能用罗必塔法则求不定式 $\left(\dfrac{0}{0}\text{或}\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 的极限。

例： $f(x)=\sqrt{1+x^2},\quad g(x)=x$ 。

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty,$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad g'(x)=1\neq 0,$$

而且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$ 。

但是

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

显然上式仍是不定式。如果再用罗必塔法则又恢复到原来 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的比式。因此若限于用罗必塔法则，就无法求得最终结果。

第五章　多元函数

1. $x\to\infty,\ y\to\infty$ 时累次极限都存在，而二重极限却不存在的函数。

二元函数在某一点（或无穷远）处的累次极限与二重极限是两个既互相联系又互相有区别的概念。在函数的连续区域内它们总是相等的，但是在其它情况下，却常常会呈现出不同的特性，这里给出的二元函数 $f(x,\ y)$，当 $x\to\infty,\ y\to\infty$ 时，它的两个累次极限存在且相等，然而它的二重极限却不存在。

例：　$f(x,\ y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$。

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to\infty}0=0\text{。}$$

同理　$$\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{xy}{x^2+y^2}=0\text{。}$$

但是，如果令 $y=kx$，则当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$，这时

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{kx^2}{x^2(k^2+1)}=\frac{k}{k^2+1},$$

显然其极限随着 k 而变动。所以 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在。

2.二重极限存在，而累次极限却不存在的二元函数。

例：　$f(x,\ y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2\sin^2 y}},\qquad x>0,\quad y>0$。

因为取序列 $y_k=k\pi,\quad k=0,1,2,\cdots$ 时，

$$f(x,\ y_k)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{x};$$

取序列 $y_k^{/}=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\quad k=0,1,2,\cdots$ 时，

$$f(x,\ y_k^{/})=\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2}}\to 0\qquad (k\to\infty);$$

所以 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,\ y)$ 不存在，自然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,\ y)$ 也不存在。

由于　$$0<\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2\sin^2 y}}<\frac{1}{\sqrt{x^2}},$$

对任给的$\varepsilon>0$，存在$A=\dfrac{1}{\varepsilon}$，当$x>A$时就有

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2\sin^2 y}}\right|<\frac{1}{x}<\frac{1}{A}=\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,\ y)=0$。

3.在某点累次极限存在而不相等的函数。

二元函数$f(x,\ y)$，即使它在某一点（或无穷远）处的两个累次极限都存在，它们的极限值也不一定相等。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin x+4\sin^2 y}{3x^2+4y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当$0<x<\pi,\quad 0<y<\pi$时，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\ y)&=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x\sin x+4\sin^2 y}{3x^2+4y^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y)&=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+4\sin^2 y}{3x^2+4y^2}\\&=\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2}=1,\end{aligned}$$

所以$f(x,\ y)$在原点处两个累次极限存在但不相等。

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y_0)$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,\ y)$存在，但是，$f(x,\ y)$在点$\left(x_0,\ y_0\right)$没有极限。

例：
$$f(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}。$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,\ y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1。$$

但是，若令$y=kx$，这时，

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2\left(1-k^2\right)}{x^2\left(1+k^2\right)}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

当 $x\to 0$ 时，其极限随着 k 而变动，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)\ \text{不存在。}$$

例 1~4 说明累次极限与二重极限是独立的两个概念。

5．函数 $f(x,\ y)$ 在原点没有极限，但沿任一直线逼近原点时极限值存在，且都等于零。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

当点 $P(x,\ y)$ 沿着直线 $x=0$ 趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y^3}{y^6}=0;$$

当点 $P(x,\ y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于原点时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^3x^4}{x^2+k^6x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{k^3x^2}{1+k^6x^4}=0\text{。}$$

但是，当点 $P(x,\ y)$ 沿着直线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 趋于原点时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to x^{\frac{1}{3}}}} f(x,\ y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

故 $f(x,\ y)$ 在原点没有极限。

可见，即使沿任意直线 $y=kx$ 逼近原点时 $f(x,\ y)$ 极限存在且相等，也不能由此断言在原点极限存在。

6.函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上分别对 $x,\ y$ 都连续，但是 $f(x,\ y)$ 在 D 上却不连续。

二元函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上如果连续，则函数在这区域上对于每一个单变量 x 或 y 来说一定连续，但是反之结论就不真。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

（i） $f(x,\ y_0)$。

当 $y_0 \neq 0$ 时，$f(x,\ y_0)=\dfrac{x^2 y_0}{x^4+y_0^2}$ 是关于 x 的一般的连续函数；

当 $y_0=0$ 时，$f(x,\ 0)\equiv 0$ 当然关于 x 连续。

（ii）$f(x_0,\ y)$。

当 $x_0 \neq 0$ 时，$f(x_0,\ y)=\dfrac{x_0^2 y}{x_0^4+y^2}$ 是关于 y 的一般的连续函数；

当 $x_0=0$ 时，$f(0,\ y)\equiv 0$ 当然关于 y 连续。但如果让 $y=kx^2$，这时

$$\frac{x^2 y}{x^4+y^2}=\frac{x^4 k}{x^4\left(1+k^2\right)}=\frac{k}{1+k^2},$$

当 $x\to 0$ 时，其极限随 k 而变动，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$ 不存在。因此 $f(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 不连续。

7．在某点偏导数存在，但在该点却不连续的二元函数。

例：

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & 若\ x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 若\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

在上例中已经证明 $f(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 不连续，但是

$$f_x(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y(0,\ 0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,\ y)-f(0,\ 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0,$$

即 $f(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 的两个一阶偏导数都存在。

此例说明一元函数导数存在的必要条件：函数连续，在多元函数中不再是必要的。

8．$f(x,\ y)$ 在某点 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在，但是沿其它任何方向的方向导数均不存在。

如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在点 $P(x,\ y)$ 是可微分的，那么函数在该点沿任一方向 L 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha,$$

其中 α 为 x 轴到方向 L 的转角。若仅仅有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在，那是不够的。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases} x, & 若\ y=0; \\ y, & 若\ x=0; \\ 1, & 若\ xy\neq 0,\quad \sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots \\ 0, & 其它点处. \end{cases}$$

在点 $(0,\ 0)$ 处

$$f_x(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1 。$$

同理 $f_y(0,\ 0)=1$。

但是沿由点 $(0,\ 0)$ 发出的其它任何一条射线：

$$\begin{cases} x=t\cos\alpha; \\ y=t\sin\alpha. \end{cases}$$

其中参数 $t>0$, α 为给定常数，$0<\alpha<2\pi$ 且 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}$，则有

$$\begin{aligned} f(x,\ y)&=f\left(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha\right) \\ &=\begin{cases} 1, & 若\ \sqrt{x^2+y^2}=t=\dfrac{1}{n}; \\ 0, & 若\ t\neq\dfrac{1}{n}, \end{cases} \end{aligned}$$

其中 $n=1,2,\cdots$。显然函数 $f(x,\ y)$ 沿射线在点 $(0,\ 0)$ 的方向导数不存在。

9．函数 $f(x,\ y)$ 在某一点可微，但它的偏导数在该点不连续。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & 当\ x^2+y^2=0. \end{cases}$$

$$f_x(0,\ 0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0 。$$

同理 $f_y(0,\ 0)=0$。而在其它各点处有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} 。$$

因为点$(x,\ y)$沿x轴趋于点$(0,\ 0)$时，$2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\to 0$，

$-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$极限不存在，所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}$在点$(0,\ 0)$不连续。同理，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在点$(0,\ 0)$也不连续。

然而

$$f(x,\ y)-f(0,\ 0)-f_x(0,\ 0)\Delta x-f_y(0,\ 0)\Delta y=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2},$$

当$\rho\to 0$时，有 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$，

所以$f(x,\ y)$在原点可微。

本例说明偏导数连续不是可微的必要条件。

10．在某点沿任意方向方向导数都存在的函数，在该点全微分可能不存在。

例：

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1-x-y, & \text{当 } x\ge 0,\ y\ge 0;\\ 1+x-y, & \text{当 } x\le 0,\ y\ge 0;\\ 1+x+y, & \text{当 } x\le 0,\ y\le 0;\\ 1-x+y, & \text{当 } x\ge 0,\ y\le 0.\end{cases}$$

$f(x,\ y)$在点$(0,\ 0)$连续，且$f(0,\ 0)=1$，在例 7 中已证$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\,0)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\,0)}$都不存在，所以$f(x,\ y)$在点$(0,\ 0)$不可微。

但是，对于从点$(0,\ 0)$出发，与x轴正向夹角成α角的有向直线l，有$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,\,0)}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x,\ y)-f(0,\ 0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

（i）当$0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$时，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,\,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1-x-y-1}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\left(-\cos\alpha-\sin\alpha\right)}{\rho}$$
$$=-\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right);$$

（ii）当$\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$时，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1+x-y-1}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\rho}$$
$$=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

同理有

（iii）当 $\pi\le\alpha\le\frac{3\pi}{2}$ 时，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\cos\alpha+\sin\alpha$；

（iv）当 $\frac{3\pi}{2}\le\alpha\le 2\pi$ 时，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=-\cos\alpha+\sin\alpha$。

即 $f(x,y)$ 在原点沿任意方向的方向导数都存在。

此例说明方向导数存在不是全微分存在的充分条件。

11．$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$，但是 $f_{xy}(x,y)$，$f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续。

例： $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4+y^4}$。

由于

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{4/3}}{x}=0,$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^4+y^4}-\sqrt[3]{y^4}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x\left[\sqrt[3]{(x^4+y^4)^2}+\sqrt[3]{y^4(x^4+y^4)}+\sqrt[3]{y^8}\right]}$$
$$=0\quad(y\ne 0)$$

所以 $$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0。$$

同理可得 $f_{yx}(0,0)=0$。因此

$$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)。$$

然而在 $x^2+y^2\ne 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\frac{4x^3}{3}\left(x^4+y^4\right)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f_{xy}(x,\ y)=-\frac{32x^3y^3}{9\left(x^4+y^4\right)^{5/3}},$$

$f_{xy}(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处不连续。事实上，让 $y=x$，且 $x\to 0$ 时，

$$-\frac{32x^3y^3}{9\left(x^4+y^4\right)^{5/3}}=-\frac{32x^6}{9x^{20/3}\cdot 2^{5/3}}=-\frac{2^{10/3}}{9}\cdot\frac{1}{x^{2/3}}\to\infty。$$

这说明 $f_{xy}\left(x,\ y\right)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处极限不存在，自然也就不连续。同理 $f_{yx}\left(x,\ y\right)$ 在点 $(0,\ 0)$ 处也不连续。

12．复合函数 $z=f(x,\ y),\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ 的 $\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}$ 都存在，但 $\frac{dz}{dt}\neq\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$。

如果函数 $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ 在点 $t=t_0$ 处可导，函数 $z=f(x,\ y)$ 在对应点 $(x_0,\ y_0)$ 有连续偏导数，那么复合函数 $z=f\left[\varphi(t),\ \psi(t)\right]$ 在点 $t=t_0$ 可导，且有 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$，但是若减弱条件，公式就可能不成立。

例 1：

$$z=f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & 当\ x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & 当\ x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_x\left(0,\ 0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y\left(0,\ 0\right)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,\ y)-f(0,\ 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0。$$

若令 $x=t,\ y=t$，代入已给函数 $z=f(x,\ y)$，则得

$$z=\frac{t^2\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{t}{2}\qquad（包括\ t=0\ ），$$

显然 $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{2}$。

但是，如果用复合函数的导数公式就会得出错误的结论：

$$\frac{dz}{dt}=f_x\left(0,\ 0\right)\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}+f_y\left(0,\ 0\right)\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0。$$

产生错误的原因是 $z=f(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 不连续。事实上，当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,\ y)=\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

如果让 $y=kx$，且 $x\to 0$，则

$$\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2k^3x^4}{x^4\left(1+k^2\right)^2}=\frac{2k^3}{\left(1+k^2\right)^2}$$

的极限随 k 而变更，故 $f_x(x,\ y)$ 在点 $(0,\ 0)$ 的极限不存在，自然也就不连续。

例 2： $$z=f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{x^{5/3}y}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_x\left(0,\ 0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=0\text{。}$$

同理 $f_y\left(0,\ 0\right)=0$。

（i）如果令 $x=t,\ y=t$，代入已给函数 $z=f(x,\ y)$ 得

$$z=\frac{t^{5/3}\cdot t}{t^2+t^2}=\frac{1}{2}t^{2/3},$$

在 $t=0$ 时，它的导数为无穷。

（ii）如果令 $x=t,\ y=\begin{cases}t^{4/3}\cdot\sin\dfrac{1}{t}, & t\neq 0;\\ 0, & t=0,\end{cases}$

代入已给函数 $z=f(x,\ y)$ 得

$$z=\begin{cases}\dfrac{t\sin\frac{1}{t}}{1+t^{2/3}\sin^2\frac{1}{t}}, & t\neq 0;\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

在 $t=0$ 时，它的导数不存在。

假如用复合函数的导数公式就会得到完全错误的结论。

13．点 $(x_0,\ y_0)$ 是 $f(x,\ y)$ 的驻点，但是它不是函数的极值点。

例：$f(x,\ y) = xy$。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

点$(0,\ 0)$是函数的驻点。但是

当$xy > 0$时，$f(x,\ y) = xy > 0 = f\left(0,\ 0\right)$，

当$xy < 0$时，$f(x,\ y) = xy < 0 = f\left(0,\ 0\right)$，

所以点$(0,\ 0)$不是函数的极值点。

此例说明驻点仅是极值点的必要条件。

14．函数$f(x,\ y)$在某个区域内只有一个极值，并且是极大值，但是它却不是函数在该区域内的最大值。

例：$f(x,\ y) = \left[1 - \left(x^2 + y^2\right)\right]^2$。

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x\left(x^2 + y^2 - 1\right), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

故$(0,\ 0)$和一切满足$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$的点$(x_0,\ y_0)$都是$f(x,\ y)$的驻点。

又由于 $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y - 4,$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy,$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 4x^2 - 4.$$

（i）在驻点$(0,\ 0)$处，

$$A = -4 < 0, \quad B = 0, \quad C = -4,$$
$$B^2 - AC = -16 < 0,$$

所以在原点函数取得极大值，$f(0,\ 0) = 1$。

（ii）在满足$x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$的驻点$(x_0,\ y_0)$处，函数值都是 0，这些点落在圆周$x^2 + y^2 = 1$上，所以都不是极值点。

如果取包含原点的区域D：$x^2+y^2\le 4$，那么$f(0,\ 0)$并不是D上的最大值。例如点$(2,\ 0)$在D上，而$f(2,\ 0)=9>f(0,\ 0)$。

15．函数$f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$的某个领域内连续，有一阶及二阶偏导数，又$f_x(x_0,\ y_0)=f_y(x_0,\ y_0)=0$，$f_{xx}(x_0,\ y_0)>0,\ \ B^2-AC<0$，但是点$(x_0,\ y_0)$不是$f(x,\ y)$的极值点。

例：

$$f(x,\ y)=\begin{cases} x^2+y^2-\dfrac{5x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{当}\left(x,\ y\right)\ne\left(0,\ 0\right); \\ 0, & \text{当}\left(x,\ y\right)=\left(0,\ 0\right). \end{cases}$$

函数$f(x,\ y)$当$(x,\ y)\ne\left(0,\ 0\right)$时显然连续，而在原点，因为有

$$\left|f(x,\ y)\right|=\left|x^2+y^2-\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|x^2+y^2\right|+\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$\le\left(x^2+y^2\right)+5y^2,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)$，

即函数$f(x,\ y)$在任意点都连续。

当$(x,\ y)\ne\left(0,\ 0\right)$时，

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=2x-\frac{10xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=2y-\frac{10x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}。$$

当$(x,\ y)=\left(0,\ 0\right)$时，

$$f_x\left(0,\ 0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,\ 0)-f(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}x=0。$$

同理

$$f_y\left(0,\ 0\right)=0,$$

$$f_{xx}\left(0,\ 0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f_x(x,\ 0)-f_x(0,\ 0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2,$$

$$f_{yy}\left(0,\ 0\right)=2,$$

$$f_{xy}\left(0,\ 0\right)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,\ y)-f_x(0,\ 0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y}=0\text{。}$$

所以 $A>0,\quad B^2-AC=0-2^2=-4<0$。

若令 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，那么对任意 $(x,\ y)$ 就有

$$f(x,\ y)-f(0,\ 0)=x^2+y^2-\frac{5x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$=r^2-\frac{5r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}=r^2\left[1-\frac{5}{4}\sin 2\theta\right].$$

显然在 $0\le\theta<2\pi$ 内 $f(x,\ y)-f(0,\ 0)$ 可正可负，所以点 $\left(0,\ 0\right)$ 不是 $f(x,\ y)$ 的极值点。

本例说明，函数 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 的某一领域内一阶及二阶偏导数连续，对函数在该点取得极值有很强的制约作用。

16． $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 的领域内有连续的一阶及二阶偏导数，且 $f_x(x_0,\ y_0)=f_y\left(x_0,\ y_0\right)=0,\quad B^2-AC=0$，而 $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 的情形将不定。

a. $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 取得极值。

例： $f(x,\ y)=x^4+y^4-2x^3-2y^3+2x^2+2y^2+xy-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{5}{8}$。

$f(x,\ y)$ 的各阶偏导数都存在且连续，函数本身也连续，其中

$$f_x\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=f_y\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=0$$

$$f_{xx}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=f_{yy}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=1,\quad f_{xy}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=1,$$

所以 $B^2-AC=0$。但是 $f(x,\ y)$ 变形后为

$$f(x,\ y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{1}{2}\left(x+y-1\right)^2,$$

显然函数在点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 处取得极小值。

b. $f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 不取得极值。

例： $f(x,\ y)=x^5+y^5+x^3+y^3$。

因为 $f_x(x,\ y)=5x^4+3x^2$， $f_{xx}(x,\ y)=20x^3+6x$， $f_{xy}(x,\ y)=0$，

$$f_y(x,\ y)=5y^4+3y^2,\quad f_{yy}(x,\ y)=20y^3+6y,$$

显然在点 $(0,\ 0)$ 的某个领域内 $f(x,\ y)$ 的各阶偏导数存在且连续，且

$$f_x(0,\ 0)=f_y(0,\ 0)=0,\quad B^2-AC=0。$$

但是 $x>0,\ y>0$ 时， $f(x,\ y)>0$，

而 $x<0,\ y<0$ 时， $f(x,\ y)<0$，

所以函数在点 $(0,\ 0)$ 处并未取得极值。

17．函数 $f(x,\ y)$ 在条件 $\phi(x,\ y)=0$ 下有极值，但是相应的拉格朗日函数却无极值。

例：求在条件 $xy=C^2$ 下函数 $f(x,\ y)=x+y\ \ (x>0,\ y>0)$ 的最小值，其中 $C>0$。

显然有 $f(x,\ y)=x+y\geq 2\sqrt{xy}=2\sqrt{C^2}=2C$，当且仅当 $x=y=C$ 时函数达到最小值 $f(C,\ C)=2C$。

但若取拉格朗日函数

$$L(x,\ y,\ \lambda)=x+y+\lambda\left(xy-C^2\right)$$

则 $$\frac{\partial L}{\partial x}=1+\lambda y,\qquad \frac{\partial L}{\partial y}=1+x,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\lambda。$$

令 $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=0$，得 $x=y=-\dfrac{1}{\lambda}$。

代入 $xy=C^2$ 得 $\lambda=-\dfrac{1}{C}$（因为 $x>0,\ y>0$ ），但这时 $B^2-AC=\lambda^2=\dfrac{1}{C^2}>0$。

所以函数 $L\left(x,\ y,\ \lambda\right)$ 却无极值。

造成这种现象的原因是 $dx,\ dy$ 受条件 $\phi(x,\ y)=0$ 约束，不是独立变量。

第六章　积　分

1．不具有原函数的初等函数。

例：　$f(x,\ y)=\sqrt{\cos x-1}$。

$f(x)$ 为初等函数，定义域是无穷个孤立点：

$$x=2k\pi,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots,$$

即定义域不含有区间。故 $f(x)$ 没有原函数。

2．原函数不是初等函数的初等函数。

例：$$f(x,\ y)=\frac{\sin x}{x},\qquad 0<x<+\infty\ 。$$

$f(x)$ 是区间 $(0,\ +\infty)$ 内的初等函数。取级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}\ 。$$

因为

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}&=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+1)!}{|x|^{2n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot x^2}{(2n+3)^2(2n+2)}=0,\end{aligned}$$

所以级数在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内收敛且在任意闭区间上一致收敛，记它在这区间上的和函数为 $F(x)$，

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!},\qquad -\infty<x<+\infty\ 。$$

它可以逐项微分：

$$\begin{aligned}F'(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\\&=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sin x}{x}\quad (x\neq 0),\end{aligned}$$

即在 $(0,\ +\infty)$ 内 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。但是 $F(x)$ 本身并不是区间 $(0,\ +\infty)$ 内的初等函数。

3．一个在闭区间上有无穷多个间断点的可积函数。

例：$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

该函数在区间 $[0,\ 1]$ 上又可以更具体地写成

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\ \dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k};\\ 0, & 若\ x=0\ 或\ x=\dfrac{1}{k},\quad k=1,2,3,\cdots;\\ -1, & 若\ \dfrac{1}{2k}<x<\dfrac{1}{2k-1}.\end{cases}$$

对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数$N>\dfrac{4}{\varepsilon}$，取$0<\lambda<\dfrac{\varepsilon}{8(N-1)}$，当将闭区间$[0,\ 1]$任意分割成$n$个小区间，并保证每个小区间长$\Delta x_i<\lambda$时，我们将全部小区间分成三大类（如果$x=\dfrac{1}{N}$不是分点，则增加这一点作分点。）。

〈i〉小区间$\Delta x_i\subset\left[0,\ \dfrac{1}{N}\right]$，把这样的小区间集合记作$M_1$，在这些小区间上函数的振幅不超过 2。

〈ii〉小区间$\Delta x_i\subset\left[\dfrac{1}{N},\ 1\right]$，且小区间$\Delta x_i$中必须含有形如$x=\dfrac{1}{k}$的点（$k$可取$1,2,3,\cdots,N$中的任何一个数），把这样的小区间集合记作$M_2$，在这些小区间上函数的振幅是 1 或是 2。显然这种小区间至多有$2N-2$个。

〈iii〉小区间$\Delta x_i\subset\left[\dfrac{1}{N},\ 1\right]$，且小区间$\Delta x_i$中不含任何形如$x=\dfrac{1}{k}$的点（$1\le k\le N$，$k$为正整数），把这样的小区间集合记作$M_3$，在这些小区间上函数的振幅是零。这样对选定的$\lambda$就有

$$\begin{aligned}\sum\omega_i\Delta x_i &=\sum_{\Delta x_i\in M_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\Delta x_i\in M_2}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\Delta x_i\in M_3}\omega_i\Delta x_i\\ &=\sum_{\Delta x_i\in M_1}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\Delta x_i\in M_2}\omega_i\Delta x_i\\ &\le 2\left[\sum_{\Delta x_i\in M_1}\Delta x_i+\sum_{\Delta x_i\in M_2}\Delta x_i\right]\\ &\le 2\left[\frac{1}{N}+(2N-2)\lambda\right]\\ &<2\left[\frac{1}{N}+(2N-2)\cdot\frac{\varepsilon}{8(N-1)}\right]\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

也就是说

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0,$$

所以函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\ 1]$ 上可积分。

这个例子告诉我们：函数在闭区间上有界，且只有有限个间断点，只是函数在该区间上可积的充分条件，并非必要。

4. $|f(x)|$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上可积，但是 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上却不可积。

如果函数 $f(x)$ 在闭区间上可积，则 $|f(x)|$ 在该区间上也可积，但是反之结论就不真。

例：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\in[a,\ b] \text{ 为有理数;}\\ -1, & \text{若 } x\in[a,\ b] \text{ 为无理数.}\end{cases}$$

这时 $|f(x)|=1,\quad a\le x\le b$。

显然 $|f(x)|$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上可积。但是 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上却不可积。这是因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 的任一子区间的振幅均为 2，故

$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a)。$$

对任何一种区间划分，当 $\max\Delta x_i\not\to 0$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\neq 0。$$

5. 在闭区间 $[a,\ b]$ 上除一点 x_0 以外，处处有 $F'(x)=f(x)$，但是 $\int_a^b f(x)dx\neq F(b)-F(a)$。

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的一个原函数，则，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，但是条件稍一减弱，结论就可能不成立。

例：

$$F(x)=\begin{cases}arctg\dfrac{x(2-x)}{1-x}, & x\neq 1, x\in[0,\ 2];\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

在 $x\neq 1$ 处，有

$$F^{/}(x)=\frac{1}{1+\frac{x^2(2-x)^2}{1-x}}\cdot\frac{(2-2x)\left(1-x\right)+x(2-x)}{\left(1-x\right)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x+2}{\left(1-x\right)^2+x^2(2-x)^2},$$

$$F(2)-F(0)=arctg0-arctg0=0.$$

但是

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{x^2-2x+2}{(1-x)^2+x^2(2-x)^2}dx\neq 0。$$

这是因为在闭区间$\left[0,\ 2\right]$上，$f(x)$是初等连续函数，而且$f(x)>0$，从而应有$\int_0^2 f(x)dx>0$。

因此 $$\int_a^b f(x)dx\neq F(x)\Big|_0^2。$$

6．$f(x)$在点$x_0\in\left[a,\ b\right]$不连续，在两子区间$\left(a,\ x_0\right)$及$\left(x_0,\ b\right)$内$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，而$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$却仍然成立。

例： $$f(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

函数$f(x)$在$x_0=0$处间断，若

$$F(x)=\begin{cases}-x-1, & -1\le x\le 0;\\ x-1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

则有 $$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^0(-1)dx+\int_0^1 dx=0,$$

$$F(1)-F(-1)=0-0=0。$$

这里有 $$\int_{-1}^1 f(x)dx=F(1)-F(-1)。$$

7．函数$f(x)$在闭区间$\left[a,\ b\right]$上不连续，在$\left(a,\ b\right)$内不存在ξ，使

$$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx。$$

例： $$f(x)=\begin{cases}1, & a\le x<\frac{a+b}{2};\\ 2, & \frac{a+b}{2}\le x\le b.\end{cases}$$

函数 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处不连续，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b 2dx=\frac{3}{2}(b-a)。$$

但不存在 $\xi\in(a,\ b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{3}{2}$。

8. $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 存在，但是 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 发散。

例： $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$。

因

$$\int_{-A}^{A}f(x)dx=\int_{-A}^{A}\frac{1+x}{1+x^2}dx$$

$$=arctgx+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{-A}^{A}=2arctgA.$$

所以 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx=\lim\limits_{A\to+\infty}2arctgA=\pi$。

又因为在 $[0,\ +\infty]$ 上，$f(x)>0$ 而且

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=1>0,$$

因此广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 发散，从而广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 也发散。

产生这种结果的主要原因是积分 $\int_{-A}^{A}f(x)dx$ 对积分上下限有严格要求，有时正是利用对称区间，消去积分结果中一些无穷大量。但是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx+\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$ 中上下限是任意的，它失去了前一积分中的有利因素，因此结果可能就不一样。

9. 广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$。

例： 取 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2g(x)},\qquad x\in[0,\ +\infty)$

其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & n<x<n+1;\\ 0, & x=n,\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$。又因为 $f(x)\geq0$，故证明广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，只需证明对任给 $A>0$，递增变量 $\int_0^A f(x)dx$ 有上界即可。不访设 N 为

比 A 大的最小正整数，则

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2g(x)} < \int_0^N \frac{dx}{1+x^2g(x)} = \sum_{k=1}^{N}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{1+x^2g(x)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\int_0^1 \frac{dt}{1+(t+K-1)^2g(t)} = \sum_{k=1}^{N}\int_0^1\frac{dt}{1+(t+K-1)^2}$$

$$< 1+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{K^2} < 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K^2} = \frac{\pi}{6}+1.$$

本题反映了广义积分与数项级数在收敛性方面的一个差别。

10．$f\left(x,\ y\right)$在矩形域$a\le x\le b,\ \ \alpha\le y\le\beta$上连续，偏导数$\dfrac{\partial f\left(x,\ y\right)}{\partial x}$在该区域上不连续，但是公式

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,\ y)dy\right) = \int_a^b\frac{\partial f\left(x,\ y\right)}{\partial x}dy$$

却仍成立。

例：$$f(x,\ y) = \begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0;\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}\qquad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$$

因为 $$\left|f\left(x,\ y\right)\right| = |x|\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\le|x|\qquad\left(x^2+y^2\ne 0\right),$$

所以 $$\lim_{x^2+y^2\to 0} f\left(x,\ y\right) = 0 = f(0,\ 0)\text{。}$$

由此推得$f\left(x,\ y\right)$在矩形域$0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$上连续。

而当$x^2+y^2\ne 0$时，

$$\frac{\partial f\left(x,\ y\right)}{\partial x} = \frac{3x^2\left(x^2+y^2\right)-4x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

当沿直线$y=kx$趋于原点时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \lim_{y\to 0}\frac{x^4+3k^2x^4}{\left(1+k^2\right)^2x^4} = \frac{1+3k^2}{\left(1+k^2\right)^2},$$

在$k=0$时上式等于 1；$k=2$时上式等于$\dfrac{13}{25}$，所以$\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$在原点不连续。

但是 $$\int_0^1 f\left(x,\ y\right)dy = \int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dy = x^2 arctg\frac{1}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(x,\ y)dy\right)=\left(x^2 arctg\frac{1}{x}\right)'$$
$$=2xarctg\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2}{1+x^2}.$$

而

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dy=\int_0^1 \frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$$
$$=3x^2\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}-2x^4\int_0^1 \frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=3xarctg\frac{1}{x}-x^2\left[\left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_0^1+\int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2}\right]$$
$$=2xarctg\frac{1}{x}-\frac{x^2}{1+x^2},$$

所以 $$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 f(x,\ y)dy\right)=\int_0^1 \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}dy.$$

11． $f(x,\ y)$ 在 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 上二重积分存在，但是它的两个累次积分都不存在。

例：

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}, & (x,\ y)=\left(\dfrac{p}{m},\ \dfrac{q}{m}\right)\text{其中 } p \text{ 与 } m \\ & \text{互质，} m>0\text{，} q \text{ 与 } n \text{ 互质，} \\ & n>0,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1; \\ 0, & (x,\ y)\text{为其它，}\quad 0\le x\le 1, \\ & 0\le y\le 1.\end{cases}$$

因为对任意小的正数 $\varepsilon>0$，在区域 $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ 内只有有限个点使函数值大于 $\frac{\varepsilon}{2}$，不妨设它们是 $(x_1,\ y_1),\cdots,(x_k,\ y_k)$，对区域进行任意分划，使 λ（部分区域的最大直径）小于 $\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{k}}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i p_i=\sum_{k=1}^{j}\omega_k p_k+\sum_{i=1}^{n-j}\omega_i p_i\ ,$$

其中等式右边第一项的每一个部分区域中至少包含 $(x_1,\ y_1),\cdots,(x_k,\ y_k)$ 中的一个点，而第二项中每一个部分区域不包含上述的点。于是

$$\sum_{k=1}^{j}\omega_k p_k < \sum_{k=1}^{j}2p_k < \sum_{k=1}^{j}2\cdot\lambda^2 < k\cdot 2\cdot\lambda^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n-j}\omega_i p_i < \sum_{i=1}^{n-j}p_i\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i p_i < \varepsilon$，即二重积分

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} f(x,\ y)dxdy$$

存在但等于 0。

然而当 x 是有理数时 $\left(\text{如 } x=\dfrac{p}{m}\right)$，对于无理数 y 有 $f(x,\ y)=0$；对于有理数有 $y=\dfrac{q}{n}$ 有 $f(x,\ y)=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$。因此函数当 x 固定为有理数的一个定值时，它在 y 的任何一个区间上振幅大于 $\dfrac{1}{m}$，所以 $\int_0^1 f(x,\ y)dy$ 不存在。

当 x 为无理数时，显然 $\int_0^1 f(x,\ y)dy=0$。因此累次积分 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\ y)dy$ 不存在。同理 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)dx$ 也不存在。

12．累次积分存在相等，而二重积分不存在的函数。

例：
$$f(x,\ y)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{p}{m},\ y=\dfrac{q}{m},\ p \text{ 与 } m,\ q \text{ 与 } m \text{ 都是互质的，}\\ & \text{且 } m>0,\quad 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

因为在正方形的任何部分内，函数的振幅都等于 1，故二重积分 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} f(x,\ y)dxdy$ 不存在。

但是对于固定的 x，函数 $f(x,\ y)$ 在 $0\le y\le 1$ 时仅有有限个异于 0 的点，所以 $\int_0^1 f(x,\ y)dy=0$。同时 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\ y)dy=0$。

同理 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,\ y)dx=0$。

第七章　级　数

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ 不收敛。

例： $$1-\underbrace{\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}}_{2\text{项}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\cdots-\underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}-\cdots-\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n\text{项}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\cdots.$$

显然 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\to 1\quad(n\to+\infty)。$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=1-\frac{1}{2^3\cdot 2}-\frac{1}{2^3\cdot 2}+\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n^3\cdot n}$$
$$-\frac{1}{n^3\cdot n}-\cdots-\frac{1}{n^3\cdot n}+\frac{1}{n}-\cdots,$$

它的前$\dfrac{(n+4)(n-1)}{2}$项之和。

$$1-\frac{1}{2^3\cdot 2}-\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3}\to+\infty\quad(n\to+\infty),$$

这个级数是发散的。

2．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，$a_n>0$，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散。

例： $$a_n=\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots。$$

显然级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$是收敛的，但是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$是发散的。

3．正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其中$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho<1$，但是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在。

例： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tau(n)\cdot q^n$，其中$\tau(n)$表示自然数$n$的除数的个数，$0<q<1$。

因为 $$q\le\sqrt[n]{u_n}=\sqrt[n]{\tau(n)q^n}\le\sqrt[n]{n}q,$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot q=q$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q<1。$$

根据正项级数的柯西判别法，级数是收敛的。由于$\tau(n)$的变化是不规则的，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\lim_{n\to\infty}\frac{\tau(n+1)}{\tau(n)}\text{不存在。}$$

由此例看出，高斯验敛法的运用范围比达朗贝尔判敛法要广。

4．条件收敛的级数可以不是交错级数。

例：
$$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3}$$
$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2^5}+\cdots$$
$$+(-1)^n\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}+\cdots.$$

因为
$$S_{2n}=-1+\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}$$
$$=\left[-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}\right]+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=\left[-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}\right]+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2}},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=K+1$，其中$K=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[S_{2n}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]=K+1。$$
故级数收敛。但是
$$S_{2n}^{/}=\sum_{i=1}^{2n}|u_i|=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

及
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}^{/}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right]=+\infty。$$

从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散。所以原级数条件收敛。但是它不是交错级数。

可见，条件收敛级数并不一定是交错级数，莱布尼兹判敛法并不能判定所有条件收敛级数的收敛性。

5．不能用莱布尼兹收敛准则判断的交错收敛级数。

例：
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\cdots。$$

因为
$$S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot3^n}\right),$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{2}。$$

又 $$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

故级数和为 $\frac{1}{2}$。但是当 $n>1$ 时恒有

$$u_{2n} = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^{n+1}} = u_{2n+1},$$

这不符合莱布尼兹准则的条件。

6．函数项级数 $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$ 处处收敛，但是(除 x_0 外)不收敛到 $f(x)$。

例： $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & 当\ x \neq 0; \\ 0, & 当\ x = 0. \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的任意阶导数都等于零，自然每一个系数都是零的幂级数

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

在任何一点 x 都收敛到 0。然而收敛的值与原函数值都不相同($x=0$ 除外)。

此例说明 $f(x)$ 的泰勒级数不一定收敛于函数本身。

7．不能逐项微分的函数项级数。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上收敛于和 $f(x)$，它的各项 $u_n(x)$ 都具有连续导数 $u_n'(x)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上也一致收敛，且可逐项求导。当然，如果削弱条件，结论就可能不真。

例： $$u_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n-1}}, \qquad n = 2, 3, \cdots。$$

$$\begin{aligned} S_{n-1}(x) &= \sum_{k=2}^{n} u_k(x) = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}} - \frac{\sin(k-1)x}{\sqrt{k-1}} \right) \\ &= \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \sin x, \end{aligned}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \sin x \right) = -\sin x,$$

并且 $f'(x)=-\cos x$。另一方面

$$u_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx-\sqrt{n-1}\cos(n-1)x,\quad n=2,3,\cdots,$$

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 的前 $n-1$ 项部分和

$$\overline{S}_{n-1}(x)=\sum_{k=2}^{n}u_k'(x)=\sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt{k}\cos kx-\sqrt{k-1}\cos(k-1)x\right)$$
$$=\sqrt{n}\cos nx-\cos x,$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_{n-1}(x)$ 不存在。

因此 $$f'(x)\neq\sum_{n=2}^{\infty}u_n'(x)。$$

8．不能逐项积分的函数项级数。

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可以逐项积分。削弱了其中的条件，结论就可能不真。

例： $$u_n(x)=nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2},\quad n=1,2,\cdots,\ x\in[0,\ 1]。$$

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[kxe^{-kx^2}-(k-1)xe^{-(k-1)x^2}\right]=nxe^{-nx^2},$$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx^2}=0,\quad x\in[0,\ 1].$$

显然 $$\int_0^1 f(x)dx=0。$$

同时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx$ 的前 n 项部分和

$$\overline{S}_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 u_k(x)dx=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}u_k(x)dx$$
$$=\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right]=\frac{1}{2}.$$

因此 $$\int_0^1 f(x)dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 u_n(x)dx。$$