绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三（模拟一）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】：函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm 1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{-(1+x)}=e^{-1},\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1$ 均为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

（2）【解】：由题设有 $xf'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x},\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x)=\sqrt{x}+C,\ f(9)=2$，故 $C=-1$，即 $f(x)=\sqrt{x}-1$，答案 A .

（3）【解】：应选(D).

由已知 $f_x'(1,1)=-2,\ f_y'(1,1)=3$，

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{f(1+t,1)-f(1,1)}{t}-\dfrac{f(1,1-2t)-f(1,1)}{t}\right]$

$=f_x(1,1)+\lim\limits_{t\to 0}2\dfrac{f(1,1-2t)-f(1,1)}{-2t}=f_x(1,1)+2f_y(1,1)=4$，所以选(D).

（4）【解】：由 $x_n=\dfrac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)],\ y_n=\dfrac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$ 知答案为 D.

（5）【解】答案 D.　因为 A,B 为正定矩阵，则对应的特征值均为大于 0，但不一定保证 $A-B$ 特征值大

于 0. 从而 $A-B$ 不是正定矩阵。

(6) 【解】答案：（D）。

对于（1）因 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关，从而 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 线性表出；

对于（2）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关，则 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，与已知矛盾；

对于（3） 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 3 维非零向量，而 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，所以 $r(\alpha_4,\alpha_i)=2\quad(i=1,2,3)$,从而 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\ge 2$，于是 $2\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\le 3$；

对于（4）因初等变换不改变矩阵的秩，由 $\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\ \alpha_3\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$, 得 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3\right)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，表明对应的方程组有解，故 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 线性表出。

因此，命题（a）（b）（c）（d）都是正确的。选（D）

（7）【解】答案：（A）

$$1=A\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=\frac{A}{2}\int_0^{+\infty}x2e^{-2x}dx=\frac{A}{4},\quad A=4;$$

$$E(X)=4\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=2\int_0^{+\infty}x^2 2e^{-2x}dx=2(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=1$$

$$E(X^2)=4\int_0^{+\infty}x^3e^{-2x}dx=-2\int_0^{+\infty}x^3de^{-2x}=3\int_0^{+\infty}x^2 2e^{-2x}dx=\frac{3}{2}$$

$$E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\ .$$

（8）【解】答案：（A）

由于 $P\{X<\sigma\}>P\{X\ge\sigma\}=1-P\{X<\sigma\}, P\{X<\sigma\}=\frac{1}{2}$，

即 $\Phi(0)=\frac{1}{2}=P\{X<\sigma\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}<1-\frac{\mu}{\sigma}\}=\Phi(1-\frac{\mu}{\sigma}),1-\frac{\mu}{\sigma}=0$，所以 $\frac{\mu}{\sigma}=1$。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+\frac{3\ln x}{x-2\ln x})^{\frac{x-2\ln x}{3\ln x}}\right]^{\frac{3x}{x-2\ln x}}=e^3$

（10）【解】：$g'(x)=f'(\frac{2x-1}{2x+1})\frac{4}{(2x+1)^2}, g'(0)=4f'(-1)=4\ln 2$

（11）【解】：$f_x'(0,1,-1)=1$，$f_x'(x,y,z)=e^xyz^2+e^xy\cdot 2z\cdot z_x'(x,y)$，

$$f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1)\,.$$

又由 $1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$ 得 $z_x'(0,1)=0$，所以 $f_x'(0,1,-1)=1$.

（12）【解】：应填 $2x3^{x-1}+A3^x$.

齐次方程的通解是 $A3^x$，设此方程的一个特解为 $cx3^x$，代入方程求得 $c=\frac{2}{3}$，得所求的通解为 $2x3^{x-1}+A3^x$

（13）【解】 记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$A$ 是秩为 3 的 3×4 的矩阵，由于 β_i 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，故 β_i 是齐次方程组 $Ax=0$ 的非 0 解，由因 β_i 非 0，故 $1\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le n-r(A)=1$，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=1$。

(14) 【解】【分析】由 $\bar{X}$ 与 S^2 独立性，$E(\bar{X}S^2)^2=E(\bar{X}^2)E(S^2)^2$，由于 $E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E(\bar{X})^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$，

又 $E(S^2)=\sigma^2$，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\ D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

所以 $E(S^2)^2=D(S^2)+(E(S^2))^2=(\dfrac{2}{n-1}+1)\sigma^4$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】：$x^2+y^2\le 2x+2y$ 即 $(x-1)^2+(y\text{-}1)^2\le 2$．令 $x-1=u,y-1=v$，则

$$\iint\limits_{D}(x+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}(u+2v+2+v^2)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\iint\limits_{u^2+v^2\le2}(2+v^2)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$=4\pi+\frac{1}{2}\iint\limits_{u^2+v^2\le2}(u^2+v^2)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=4\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\,\mathrm{d}r=5\pi$$

（16）【解】：原方程即 $y''+y'-2y=\begin{cases}e^x, & x\le0\\ 1 & x>0\end{cases}$

分别解之。对于 $y''+y'-2y=e^x$，特征方程 $r^2+r-2=(r+2)(r-1)=0$，对应的齐次微分方程同解为 $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$，设其特解为 $y_1^*=Axe^x$，由待定系数法可求得 $y_1^*=\frac{1}{3}xe^x$，从而 $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x$，对于 $y''+y'-2y=1$，

容易求得 $Y=C_3e^{-2x}+C_4e^x\text{-}\frac{1}{2}$

为使所得到的解在 $x=0$ 处连续且一阶导数连续，则 C_1，C_2，C_3，C_4 之间应满足

$\begin{cases}C_1+C_2=C_3+C_4-\dfrac{1}{2}\\ -2C_1+C_2+\dfrac{1}{3}=-2C_3+C_4\end{cases}$ 有 $C_3=C_1+\dfrac{1}{18}$，$C_4=C_2+\dfrac{4}{9}$，从而得原方程通解为

$$y=\begin{cases}C_1e^{-2x}+C_2e^x+\frac{1}{3}xe^x & x\le0\\ (C_1+\dfrac{1}{18})e^{-2x}+(C_2+\dfrac{4}{9})e^x\text{-}\frac{1}{2} & x>0\end{cases}$$

（17）【证明】：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\},m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知 $x\in(0,1)$ 时有 $1+mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le1+Mx\ (\xi\in(0,x)$ 对不等式 $1+mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le1+Mx$ 两边同时在区间 $[0,1]$ 上积分可得

$\dfrac{m}{2}\le\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-1\le\dfrac{M}{2}$ 即 $m\le2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得 $f'(\eta)=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2$.

（18）【解】（I）令 $a_1=a_0+d$，则 $a_n=a_0+nd$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}=1$，故 $\mathrm{R}=1$

（II）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_0+nd}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_0}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{nd}{2^n}=2a_0+d\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{2^n}$,则

$\int f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}=\dfrac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{2-x}$, $f(x)=\dfrac{2}{(2-x)^2}$, $f(1)=2$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}=2$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_0+nd}{2^n}=2(a_0+d)$

(19) 【解】: 由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}2ax+2by=3,\\ 2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当 $8a^2-4b^2\neq 0$，即 $2a^2-b^2\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一驻点 $\left(\dfrac{3a-2b}{2a^2-b^2},\dfrac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$.

记 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$，$B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b$，$C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a$.

当 $AC-B^2=8a^2-4b^2>0$ 即 $2a^2-b^2>0$ 时，$f(x,y)$ 有极值．并且当 $A=-2a>0$，
即 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有极小值；当 $A=-2a<0$ 即 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有极大值.
综上所述，得,当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极小值；
当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极大值.

（20）【解】: 由于 $A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, 知特征值 λ_2=0, λ_3=-2，相应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_3=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

设特征值 λ_1=1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,则

$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$，解得特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

所有特征值 λ_1=1，λ_2=0, λ_3=-2，的特征向量依次为 $k_1\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$k_2\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $k_3\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, ,
其中 k_1，k_2，k_3 全不为 0

（II）设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$,解出 $x_1=-1, x_2=1, x_3=1$, 即 β=-α_1+α_2+α_3，从而

$A^n\beta=A^n(-\alpha_1)+A^n\alpha_2+A^n\alpha_3=-\alpha_1+(-2)^n\alpha_3$

$=(-1+(-1)^n2^{n+1},\quad -2+(-2)^n2^{n+1},\quad -2+(-2)^n2^n)^T$

（21）【解】:（1）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$,有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 B^{T} 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$

的解。解此方程组的基础解系$(1\quad 2\quad 1\quad 0)^{\mathrm{T}}$,$(-1\quad -1\quad 0\quad 1)^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) 由于两个方程组同解，那么 α_1，α_2 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0 \text{ 即}\begin{cases}1\text{-}2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(3) 由于 $Ax=0$ 的通解是

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$,因为 $x_3=-x_4$,即 $3k_1-2k_2=k_1\text{-}k_2$,，即 $k_2=2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为$(k\quad 0\quad -k\quad k)^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数。

(22)【解】:(I) 由题知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$， $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 (X,Y) 的密度函数：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(II) 边缘密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(III) $$P(X+Y<1/Y>\frac{1}{2})=\frac{P(0<X<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<Y<1-X)}{P(Y>\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx\int_0^{1-x}dy}{-\int_{1/2}^{1}\ln(1-y)dy}$$

$$=\frac{1/2}{\frac{1}{2}(1+\ln 2)}=\frac{1}{1+\ln 2}$$

..

(23)【解】:(I) 由 $F(x)$ 连续性，$0=F(\theta+0)=\lim\limits_{x\to\theta^+}(1-\dfrac{a}{x^2})=1-\dfrac{a}{\theta^2}$，所以 $a=\theta^2$，则概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$；

(II) θ 的似然函数为 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2\theta^2}{x_i^3}=\dfrac{2^n\theta^{2n}}{x_1x_2\cdots x_n}$，

$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i)=\dfrac{2n}{\theta}>0$，所以 L 关于 θ 单调增，且 $x_i>\theta\ \ (i=1,2,\cdots,n)$

由极大似然估计的定义可知θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_L=\min\{x_i\}$或$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$

（III）由于$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$，对应的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}_L}(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-(\dfrac{\theta}{z})^{2n}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$ $(\theta>0)$，对应的概率密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\dfrac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_L)=\int_\theta^{+\infty}z\frac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}dz=2n\theta^2\int_\theta^{+\infty}\frac{1}{z^{2n}}dz=\frac{2n}{2n-1}\theta.$$

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三（模拟二）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: 令 $k>0, f(x)=\ln x-kx, f'(x)=\frac{1}{x}-k=0$， $x=\frac{1}{k}$ 为驻点，又 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}, f''(\frac{1}{k})=-k<0$ 所以 $f(\frac{1}{k})$ 为极大， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ，若 $f(\frac{1}{k})=-\ln k-1\geq 0$，则至少有一个实根，即 $-\ln k\geq 1$，所以 $0<k\leq\frac{1}{e}$ 时，原方程实根。答案 C

(2)【解】: 答案 A 为正确.

（3）【答案】 :（B）.

（4）【解】答案：$\lambda=1$时，特征方程 $(r-1)^2=0$，特征根为 $r=1$ 为重根，齐通解才是 $Y=c_1e^x+c_2xe^x$；若 $a=1$，则是重根，对应特解应为 $y^*=(A+Bx)x^2e^{ax}$ 。应该是(B)。

（5）【解】答案：C

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0，\lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$$

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 3-\lambda & 2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0,\ \lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$$

A 与 B 为实对称矩阵，有相同的特征值，所以相似;，且合同。

（6）【解】: $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1+a & 0\\ 0 & 0 & (a-2)(a+1)\end{pmatrix}$，$a=2$ 时，$r(B)=2$，由 $AB=0$ 知，

$r(A)+r(B)\le 3,\ r(A)\le 1$，又 $A\ne o\,0, r(A)\ge 1$,所以 $r(A)=1$。答案：(C)

（7）【解】答案：(D).

$$P(\max(X,Y)\ge 0)=1-P\{X<0,Y<0\}=1-P\{Y<0\}P\{X<0|Y<0\}$$

$$=1-(1-P\{Y\ge 0\})P\{X<0|Y<0\}=1-\frac{2}{5}\frac{1}{5}=\frac{23}{25}.$$

（8）【解】答案：（B）

由独立性知 $E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=1$； 概率 $P\{X+Y>E(X^2Y)\}=P\{X+Y>1\}$

$$=P\{X+Y>1,X=0\}+P\{X+Y>1,X=1\}=\frac{2}{3}P\{Y>1\}+\frac{1}{3}P\{Y>0\}=\frac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+1)\text{。}$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】: 有题设有 $a=2$，左式 $=-e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{4-x^2}-2}-1}{x^2}=-e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x^2}=\dfrac{e^2}{4}$，所以 $b=\dfrac{e^2}{4}$.

(10)【解】: 由于 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$, 即 $f'(x)g'(y)=1$，两边求导数，可得 $f''(x)g'(y)+f'(x)g''(y)y'=0,$

$f''(x)g'(y)+[f'(x)]^2g''(y)=0$ 又 $f(a)=2$，代入可得 $f''(a)g'(2)+[f'(a)]^2g''(2)=0$，
又 $f'(x)g'(y)=1$，$f'(a)g'(2)=1$，$3\times(-1)+g''(2)=0$，所以 $g''(2)=3$。

（11）【解】 画出二重积分区域 D，D_1 是 D 的第一象限部分，由对称性，得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}\,x=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)dxdy=2\iint_{D_1}(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(8\cos^3\theta-2\sqrt{2})d\theta=\frac{20\sqrt{2}}{9}-\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

（12）【解】: 作代换：$xt=u,\ xdt=du,\ F(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$，求导数：

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\frac{1}{x}f(x)\text{，则}$$

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}]=1-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（13）【解】：显然 $\xi_1=\begin{pmatrix}k\\-k\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}k\\2\\1\end{pmatrix}$ 为 A 对应不同特征值 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$ 的特征向量，因为 A 为实对称阵，所以 $\xi_1^T\xi_2=k^2-2k+1=0$，解得 $k=1$，于是 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

又因为 $|E+A|=0$，所以 $\lambda_3=-1$ 为 A 的特征值，令 $\lambda_3=-1$ 对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

由 $\begin{cases}\xi_1^T\xi_3=0\\ \xi_2\xi_3=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$，得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$，得 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&4&5\\4&8&4\\5&4&-1\end{pmatrix}$.

（14）【解】：

$$E(Y)=kE\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\mu-(X_i-\mu))^2=kE[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\mu)^2-2(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu)+(X_i-\mu)^2]$$

$$=k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2-2E(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu)+E(X_i-\mu)^2]$$

$$=k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2+E(X_i-\mu)^2]=2k(n-1)\sigma^2,$$

由 $E(Y)=\sigma^2$，所以 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)【解】：由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\ln[1+\sin\frac{f(x)}{x}]=0$，$\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{f(x)}{x}=\sin\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，因此

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

又由于 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+\sin\frac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}$，即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=4$，且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，

则有 $f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=4$.

（16）【解】 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\varphi'(x)+f_2'\varphi(y)$；

2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_1'+x\varphi'(y)f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi'(x)f_1'+x\varphi(y)f_2')=\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial y}(f_1')+x\varphi'(y)f_2'+x\varphi(y)\frac{\partial}{\partial y}(f_2')$$
$$=\varphi'(x)[f_{11}''+x\varphi'(y)f_{12}'']+\varphi'(y)f_2'+\varphi(y)[f_{21}''+x\varphi'(y)f_{22}'']$$
$$=\varphi'(x)f_{11}''+(x\varphi'(x)\varphi'(y)+\varphi(y))f_{12}''+\varphi'(y)f_2'+x\varphi(y)\varphi'(y)f_{22}''\ .$$
,

（17）【证明】:（Ⅰ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$，即有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\times 2\theta=\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$，对上述等式两边同时取极限 $x\to 0^+$ 可得: $2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)$，

$f'(0)\neq 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

（18）【解】:（I）由于微分方程 $F_n'(x)-F_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-x}x^n$，由线性微分方程公式知:

$$F_n(x)=e^{\int dx}[\int\frac{(-1)^n}{n}e^x x^n e^{-\int dx}dx+C]=e^x[\frac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}+C]$$

代入 $F_n(0)=0$，$C=0$; 所以有 $F_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}e^x$

（II）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}$，以下求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的和函数，令

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}$，$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$; $S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=-\dfrac{1}{1+x},|x|<1$

$S'(x)=-\ln(1+x)$，$S(x)=-\int_0^x\ln(1+x)dx=-x\ln(1+x)+\int_0^x\dfrac{x}{1+x}dx=x-(1+x)\ln(1+x)$，

所以有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}=[x-(1+x)\ln(1+x)]e^x$；$|x|<1$；

（III）由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}=x-(1+x)\ln(1+x)$，令 $x=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{3}{2}$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}=2-6\ln\dfrac{3}{2}$。

（19）【解】: 点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

令 $\quad L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

所以 $\begin{cases} L'_x = 2\lambda x + \mu = 0 & (1) \\ L'_y = 2\lambda y + \mu = 0 & (2) \\ L'_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 & (4) \\ x + y + 3z = 5 & (5) \end{cases}$

由(1)(2)得 $x = y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

（20）【解】

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & a & 10 \\ 2 & b & -9 & a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & a+12 & 6 \\ 0 & b-2 & -3 & a+b-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & b-5 & a+2b-4 \end{pmatrix}$$

1)当 $a \ne -6, a+2b-4 \ne 0$ 时,因为 $r(A) \ne r(\overline{A})$, 所以 β 不可由 α_1, α_2, α_3 线性表示;

2)当 $a \ne -6, a+2b-4 = 0$ 时,

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-5 & a+2b-4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, β 可由 α_1, α_2, α_3 唯一线性表示,表达式为

$\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 0\alpha_3$;

当 $a = -6$ 时,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & a & 10 \\ 2 & b & -9 & a+b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b-5 & 2b-10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $a = -6, b \ne 5$ 时,由 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, β 可由 α_1, α_2, α_3 唯一线性表示,表达式为

$\beta = 6\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3$;

当 $a = -6, b = 5$ 时,由 $\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, β 可由 α_1, α_2, α_3 线性表示,表达式为

$\beta = (2k+2)\alpha_1 + (k-1)\alpha_2 + k\alpha_3$; 其中 k 为任意常数.

（21）【解】（Ⅰ）A 的特征值为 1,-1, 2. $|A|=-2$，

$$\left|A^*-2A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=32$$

（Ⅱ）由题意 $p^TAp=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

$$A=P\Lambda P^T\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^T=P\begin{pmatrix}1^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}P^T$$

$$A^3-2A^2-A+4E=P\left[\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]P^T$$

$$=P(2E)P^T=2E$$

（22）【解】:（I）设该企业在这段时间内生产 t 件产品，且该企业的利润为：

$$L=\begin{cases}aX-b(t-X), & X\le t\\ at, & X>t\end{cases}$$

（II）利润的数学期望：

$$E(L)=\int_0^t(ax-b(t-x))f(x)dx+\int_t^{\infty}at\,f(x)dx=(a+b)\int_0^t xf(x)dx-tb\int_0^t f(x)dx+at\int_t^{\infty}f(x)dx;$$

$$\frac{dE(L)}{dt}=(a+b)tf(t)-b\int_0^t f(x)dx-btf(t)+a\int_t^{\infty}f(x)dx-atf(t)=a\int_t^{\infty}f(x)dx-b\int_0^t f(x)dx$$

$$=(a+b)e^{-t}-b=0$$

所以 $(a+b)e^{-t}=b,\ e^{-t}=\dfrac{b}{a+b}$，及生产 $t=\ln(1+\dfrac{a}{b})$ 件产品时，利润达到最大。

（23）【解】　（I）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，所以 $1=\dfrac{A}{\theta^4}\int_0^{\theta}x(\theta^2-x^2)dx=\dfrac{A}{4}$，则 $A=4$；

（II）$\mu=E(X)=\dfrac{4}{\theta^4}\int_0^{\theta}x^2(\theta^2-x^2)dx=\dfrac{8}{15}\theta$，令 $\mu=\bar{X}$，所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_0=\dfrac{15}{8}\bar{X}$；

（III）$\sigma^2=D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\dfrac{4}{\theta^4}\int_0^{\theta}x^3(\theta^2-x^2)dx-(\dfrac{8\theta}{15})^2=\dfrac{\theta^2}{3}-\dfrac{64}{225}\theta^2=\dfrac{11}{225}\theta^2$

由此知　$D(\hat{\theta}_0)=\dfrac{225}{64}D(\bar{X})=\dfrac{225}{64}\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{11}{64n}\theta^2$.

绝密★启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三（模拟三）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)x^2}{|x|x^2}=1, g(0)=0$，

$g_-'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-1, g_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$， $g'(0)$ 不存在。

答案是 A.

(2) 【解】：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin a}{n^3}$ 绝对收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 条件收敛，该级数条件收敛．答案 A．

(3) 【解】：$F(x)=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u, F'(x)=\int_0^x[f(u)-f(x)]\,\mathrm{d}u$，$f(x)$ 为奇函数，则 $F'(x)$ 为偶函数，且可以证明 $x\neq 0$ 时， $F'(x)<0$，因此 $F(x)$ 是单调减少的奇函数，答案 B．

(4) 【解】：由对称性可得 $\iint\limits_D\dfrac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\dfrac{e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\dfrac{e^x+e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=1$．答案为 A．

(5) 【解】: $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=6$，答案为(D).

(6) 【解】: 答案: B

由 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$，得 $(A-E)(A^2\alpha+3A\alpha)=0, A(A^2\alpha+3A\alpha)=A^2\alpha+3A\alpha$，即 $A^2\alpha+3A\alpha$ 是矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量.

(7) 【解】 成功的概率为 p，3 次中至少有一次成功的概率为 $1-(1-p)^3=\dfrac{37}{64}$，所以 $(1-p)^3=\dfrac{27}{64}=(\dfrac{3}{4})^3$，

即 $p=\dfrac{1}{4}$，答案为 D.

（8）【解】: 答案 D .

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）【解】: 应填 e^3 .

由题设有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，所以

$\lim\limits_{x\to\infty}n\{1+\ln[1+f(\dfrac{1}{n})]\}=\lim\limits_{x\to\infty}nf(\dfrac{1}{n})=3$，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\left\{1+\ln[1+f(\frac{1}{n})]\right\}^{\frac{1}{\ln[1+f(\frac{1}{n})]}}\right)^{n\ln[1+f(\frac{1}{n})]}=e^3$$

(10) 【解】: 应填 $y=(x-2)e^x+x+2$.

由题设有 $a=-2,b=1$，方程特解应该为 $y^*=x+2$，该方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，由 $y(0)=0, y'(0)=0$ 可得所求解为 $y=(x-2)e^x+x+2$

(11) 【解】: 应填 $-\dfrac{\pi a^2\ln 2}{2}$.

$$\text{原式}\xlongequal{u=x-a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}[\ln(u+\sqrt{1+u^2})-\ln 2]\mathrm{d}u=-\ln 2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{\pi a^2\ln 2}{2}.$$

(12) 【解】: 应填 $\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

令 $\begin{cases}x+y=u,\\ \dfrac{y}{x}=v,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v},\\ y=\dfrac{uv}{1+v},\end{cases}$，则 $f(u,v)=u\dfrac{1-v}{1+v}$，$f(x,y)=x\dfrac{1-y}{1+y}$.

$f_x'(x,y)=\dfrac{1-y}{1+y}$，$f_y'(x,y)=\dfrac{-2x}{(1+y)^2}$，故 $f_x'(1,0)=1$，$f_y'(1,0)=-2$，所以

$\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

(13) 【解】: 应填 -8 .

因为 A 的特征值为 3，-3，0，所以 $A-E$ 特征值为 2，-4，-1，从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$，

即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-1$， B^{-1} 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$， 于是 $\left|B^{-1}+2E\right|=-8$， 故应填 -8

(14) 【解】：应填 $1-2e^{-1}$.

由泊松分布的可加性知， $X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布，于是 $E(X+Y)=\lambda_1+\lambda_2$，

$D(X+Y)=\lambda_1+\lambda_2$.由 $E(X+Y)^2-2E(X+Y)=0$ 得

$\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)^2-2(\lambda_1+\lambda_2)=0$，解得 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 或 0 （舍去）

故 $P(X+Y\ge 2)=1-P(X+Y=0)-P(X+Y=1)=1-2e^{-1}$.

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【解】： $x>0,\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} e^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}x^3$，

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x-\sin x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{x^3}}\right]^{\frac{x^3}{3(\tan x-\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3\cos x}{3\sin x(1-\cos x)}}=e^{\frac{2}{3}}$$

（16）【解】：由题意可知，问题归结为求 $q=0.0005x^2yz$ 满足条件 $x+2y+3z=2400$ 的条件极值问题

令 $F(x,y,z,\lambda)=0.0005x^2yz+\lambda(x+2y+3z-2400)$

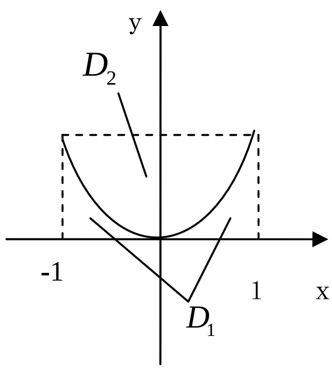
对 $F(x,y,z,\lambda)$ 关于 x,y,z,λ 分别求导，并令其为零，可得方程组：

$$\begin{cases} F_x'=0.001xyz+\lambda=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ F_y'=0.0005x^2z+2\lambda=0,\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ F_z'=0.0005x^2z+3\lambda=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ F_\lambda'=x+2y+3z-2400=0,\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)式可得 $x=4y=6z$，结合(4)式可得 $x=1200,y=300,z=200$，由于实际问题有解，上述方程组解唯一，所以当 $x=1200,y=300,z=200$ 时，可使产量最大.

（17）【解】 用抛物线 $y=x^2$ 把区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分（如图），

则



$$I=-\iint_{D_1} x(x+ye^{x^2})\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} x(x+ye^{x^2})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=-\iint_{D_1}(x^2+xye^{x^2})\,\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2}(x^2+xye^{x^2})\,\mathrm{d}\sigma .$$

由于 D_1 和 D_2 均关于 y 轴对称， xye^{x^2} 关于 x 是奇函数，所以

$\iint_{D_1} xye^{x^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_2} xye^{x^2}\,\mathrm{d}\sigma=0$. 故

$$I=-\iint_{D_1} x^2 d\sigma+\iint_{D_2} x^2 d\sigma=-2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} x^2\,\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 x^2\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{15}$$

（18）【证明】：（Ⅰ）由连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2}),\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0$，即有 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

（19）【解】$F(x)=\dfrac{1}{x}(\int e^x\,\mathrm{d}x+C)=\dfrac{e^x+C}{x},\lim\limits_{x\to0}y(x)=1,C=-1$，

$$f(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+2)!},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=f(1)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\bigg|_{x=1}=1.$$

（20）【解】令 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，矩阵方程化为 $\boldsymbol{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，即 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{A}\xi_3=\boldsymbol{\beta}_3\end{cases}$.

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&\frac{1-a}{2}&b-2&\frac{2+c}{2}\end{pmatrix},$$

因此当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）；

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$（$l$ 为任意常数）；

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$（$t$ 为任意常数）；

于是矩阵的全部解是 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1-k&2-l&1-t\\-k&2-l&-1-t\\k&l&t\end{pmatrix}$（其中 k,l,t 为任意常数）.

（21）【解】:（I）据已知条件，有 $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$，即 $\begin{cases} 2a_{12} - a_{13} = 2, \\ a_{12} - a_{23} = 4, \\ a_{13} + 2a_{23} = -2, \end{cases}$

解出 $a_{12} = 2, a_{13} = 2, a_{23} = -2$，所以该二次型表达式为 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$；

（II）由 $|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, 2, -4$.

由 $(2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0, \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\lambda = 2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_{1=}(0,1,-1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,1)^T$; 由 $(-4\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $\lambda = -4$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-1,1,1)^T$，将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，可得令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\alpha}_3$ 则所求正交变换矩阵为 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，令

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = y^T A y = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$.

（III）因为 $A + kE$ 的特征值为 $k+2, k+2, k-4,$ 所以当 $k > 4$ 时,矩阵 $A + kE$ 正定.

（22）【解】:（I）由题可知 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1;\ 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，

概率 $P\{\frac{1}{2} \le X + Y \le \frac{3}{2}\} = 1 - 2\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dy = \frac{3}{4}$；

（II）$Z = |X - Y|$ 的对应函数为 $z = |x - y|$ 的取值范围是 $0 < z < 1$，当 $z < 0$ 时 $F_Z(z) = 0$ ，当 $z > 1$ 时 $F_Z(z) = 1$，当 $0 \le z < 1$ 时 $F_Z(z) = P\{|X - Y| \le z\} = \iint\limits_{|x-y|\le z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 - (1-z)^2$，因此 $Z = |X - Y|$ 的密度函数为 $f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$；

（III） $E(Z)=E(|X-Y|)=\iint\limits_{D}|x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$，

$E(Z^2)=E(|X-Y|^2)=\iint\limits_{D}(x-y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\,\mathrm{d}(x-y)$

$=\dfrac{1}{3}\int_0^1[x^3-(x-1)^3]dx=\dfrac{1}{6}$， $D(Z)=D(|X-Y|)=\dfrac{1}{6}-(\dfrac{1}{3})^2=\dfrac{1}{18}$.

（23）【解】:（I） 矩估计 $\mu=\int_0^\theta x\dfrac{3x^2}{\theta^3}dx=\dfrac{3}{4}\theta$；令 $\mu=\bar{X}$， 即 $\dfrac{3}{4}\theta=\bar{X}$，

所以 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_J=\dfrac{4}{3}\bar{X}$；

$L=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{3x_i^2}{\theta^3}=\dfrac{3^n(x_1x_2\cdots x_n)^2}{\theta^{3n}}$， $0<x_i<\theta$， $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(n\ln 3+2\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-3n\ln\theta)=-\dfrac{3n}{\theta}<0$，因此 L 关于参数 θ 单调递减，又 $0<x_i<\theta$，由定义知 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$；

（II） X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$，因而 $\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$ 的分布函数为

$F_{\hat{\theta}_L}(z)=[F(z)]^n=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{x^{3n}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta\\ 1, & z>\theta\end{cases}$，由此可得 $\hat{\theta}_L$ 的密度函数为

$f_{\hat{\theta}_L}(z)=F_{\hat{\theta}_L}^{'}(z)=\begin{cases}\dfrac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三（模拟四）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: $f[f(x)]=\begin{cases} x+2, x\geq 0, \\ \dfrac{1}{1-x}+2, x<0 \end{cases}$，故 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的跳跃间断点。答案 C.

（2）【解】: $f(x)=nx^{n-1}\sin x+x^{n}\cos x\sim(n+1)x^{n}$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{2x(\sqrt{1+x^{4}}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{x^{5}}$，故 $n=6$，答案 D

（3）【答案】:　D

（4）【答案】:　B. 由题设知

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1,y\geq 0} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\ .$$

（5）【解】　选 D

对 A，由已知得 A,B 等价，故 A 成立；　对 B，取 $P=A$ 即可，故 B 成立；

对 C，由已知得 A^2,B^2 合同，故 C 成立；由已知条件，不能保证 A,B 相似，故 D 不成立。

（6）【解】：$P_1=E_{23}$，因为 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，所以 $E_{ij}^2=E$，$P_1^{100}=E.P_2=E_{13}(4)$，因为 $E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，所以 $P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是 $A^{-1}P_1^{100}AP_2^{-1}=P_2^{-1}$，选（B）。

（7）【解】答案：(C)

由于 $\dfrac{1}{2}=P\{XY<0\}=P\{X<0,Y>0\}+P\{X>0,Y<0\}=2p(1-p)$，$p(1-p)=\dfrac{1}{4}$，

所以 $p=\dfrac{1}{2}$。

（8）【解】分析：本题关键是考察概率密度函数的两个基本条件。

显然 $\dfrac{1}{2}f(x)F(x)\geq 0$；又有 $\int_{-\infty}^{+\infty}2f(x)F(x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)F'(x)dx=2\dfrac{1}{2}F^2(x)|_{-\infty}^{+\infty}=1$。

答案：(C)。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^t-e^{\frac{t}{1+t}}}{t^p}=e^{\frac{t}{1+t}}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{e^{t-\frac{t}{1+t}}-1}{t^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t-\frac{t}{1+t}}{t^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t^2}{(1+t)t^p}$，$p=2$.

（10）【解】：因为 $x\to0$ 时 $\sqrt{1+x^2}=1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2),\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$，

由此可得 $f(x)=1+a+b+\dfrac{1}{2}(1-b)x^2+o(x^2)$，所以有 $a=-2,b=1$.

（11）【解】 y_1,y_2 线性无关，该方程通解为 $y=C_1e^x+C_2x$，由初始条件得 $C_1=C_2=1$，故 $y=e^x+x$

(12)【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\varphi'(y)$，代入方程 $\varphi(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得 $\varphi(y)\cdot f'-f'\varphi'(y)=0$，

即 $\varphi'(y)=\varphi(y)$，解得 $\varphi(y)=C\mathrm{e}^x$，其中 C 为任意常数.

（13）【答案】：1

（14）【解】$F_Z(z)=P\{XY<z\}=P\{Y<z,X=1\}+P\{Y<\dfrac{z}{2},X=2\}=\dfrac{2}{3}P\{Y<z\}+\dfrac{1}{3}P\{Y<\dfrac{z}{2}\}$

$=\dfrac{2}{3}F_Y(z)+\dfrac{1}{3}F_Y(\dfrac{z}{2})=1-\dfrac{2}{3}e^{-z}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{z}{2}}$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{e^t}{\cos y^2\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{e^t}{\cos y^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e^t}{\cos y^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{e^t\sqrt{1+t^2}}{\cos y^2}+\dfrac{2ye^{2t}\sin y^2}{(\cos y^2)^3}$.

（16）【解】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+xf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+xf_{12}'')+x(yf_{21}''+xf_{22}'')+f_2'=y^2f_{11}''+2xyf_{12}''+x^2f_{22}''+f_2'$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-yf_2',\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-y(xf_{21}''-yf_{22}'')-f_2'=x^2f_{11}''-2xyf_{12}''+y^2f_{22}''-f_2'$，因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2.$$

（17）【证法一】：原不等式等价于 $(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq 0$，令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$f(1)=0,\ f'(x)=2x\ln x+2-x-\dfrac{1}{x},\ f'(1)=0,\ f''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2},\ f''(1)=2$，

$f'''(x)=\dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$，当 $x>1$ 时，$f'''(x)>0,\ f''(x)>f''(1)=2,\ f'(x)>f'(1)=0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，因此当 $x>1$ 时，$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq f(1)=0$；

当 $0<x<1$ 时 $f'''(x)<0,\ f''(x)>f''(1)=2,\ f'(x)<f'(1)=0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，因此当 $0<x<1$ 时，$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\geq f(1)=0$.

【证法二】：当 $x=1$ 时显然有 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$；

当 $x>1$ 时，不等式等价于 $\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\geq 0$，令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$，则有

$f(1)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{1+x^2}{x(x+1)^2}>0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，因此当 $x>1$ 时，有 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\geq f(1)=0$；

当 $0<x<1$ 时，不等式等价于 $\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\leq 0$，由前面的讨论可知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减，因此当 $0<x<1$ 时，有 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\leq f(1)=0$.

（18）【解】（求收敛域）$a_n=\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n+2}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}\right|=0$，因此收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

（求和函数）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$，则 $xS(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^{n+1}$

$$[xS(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n-1)!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!}]'$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{(n-1)!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)!}=x\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m+1}x^m}{m!}=-xe^x$

故 $[xS(x)]'=x(x-1)e^{-x}$，因此 $xS(x)=\int_0^x(t^2-t)e^{-t}dt=1-e^{-x}(1+x+x^2)$

综上所述，$S(x)=\begin{cases}1-e^{-x}(1+x+x^2),x\neq 0\\ 0\qquad\qquad ,x=0\end{cases}$

(19)【解】:（I）由定积分的几何意义知 $\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}x^2$，当 $x\in(0,1)$ 时

$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\,\mathrm{d}t=x^2-x+\frac{1}{2}$，当 $x\geq 1$ 时有

$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=x-\frac{1}{2}$，从而 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi+2}{2}x^2-x+\frac{1}{2}, x\in[0,1],\\ \frac{\pi}{2}x^2+x-\frac{1}{2}, \quad x>1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}(2+\pi)x-1, x\in(0,1],\\ \pi x+1, \quad x>1,\end{cases}$ 由 $f'(x)$ 的表达式可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2+\pi}]$ 上单减，在 $[\frac{1}{2+\pi},+\infty)$ 上单增，因而 $f(\frac{1}{2+\pi})=\frac{1+\pi}{2(2+\pi)}$ 是函数的极小值，同时也是最小值；

(II) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内没有最大值.

（20）【解】:(I) 由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$ $\quad\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量。 又 $\eta=(1\quad 2\quad -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，知 $\xi_3=(1\quad 2\quad -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)$ 则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$， $A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（II） $A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

（21）【解】 （I） $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$， $\lambda_1=\lambda_2=6$ $\qquad\lambda_3=-2$

由已知 A 可对角化，故 $\lambda=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量，由 $R(6E-A)=R\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$

得 $a=0$.

（II）由（1）得 $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$

二次型矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ 。由 $|\lambda E-A_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$

知二次型 $x^TAx=x^TA_1x$ 特征值 6，7，-3

对 $\lambda=6$ 由 $(6E-A_1)x=0$ 得 $\alpha_1=(0.0.1)^T$

对 $\lambda=7$ 由 $(7E-A_1)x=0$ 得 $\alpha_2=(1.1.0)^T$

对 $\lambda=-3$ 由 $(-3E-A_1)x=0$ 得 $\alpha_3=(1.-1.0)^T$

单位化 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 令 $P=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$

又A^2特征值为6^2，7^2， 3^2， 经过 $x=Py$ 有 $x^TA^2x=36y_1^2+49y_2^2+9y_3^2$ 。

（22）【解】（I）由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，所以$1=\int_0^1 xdx+\int_1^2(a-x)dx=\frac{1}{2}+a-\frac{3}{2}=a-1,\ a=2$

(II) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x tdt\ , & 0\le x<1\\ \int_0^1 tdt+\int_0^x(2-t)dt, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}(1+4x-x^2), & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(III) 对应$Y=F(X)$的函数为分布函数$y=F(x)$，单调非降的连续函数，且$0\le y\le 1$，因此

$y<0, G(y)=0;\quad y\ge 0, G(y)=1;$

$0\le y<1,\ G(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F(F^{-1}(y))=y;$

所以有$Y=F(X)$的分布函数 $G(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y>0\end{cases}$

4） $P\{2Y^2\le E(Y)\}=P\{2Y^2\le\frac{1}{2}\}=P\{|Y|\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$

（23）【解】 （I） 由于 $\mu=\frac{a+b}{2}=\theta_0+\frac{\theta}{2}$， 令 $\mu=\overline{X}$ ，所以 $\theta_0+\frac{\theta}{2}=\overline{X}$，则 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=2(\overline{X}-\theta_0)$；

（II） 似然函数为 $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\theta^n}$， $\theta_0<x_i<\theta_0+\theta$；又因为 $\ln L=-n\ln\theta$，$\frac{d}{d\theta}\ln L=-\frac{n}{\theta}<0$，

所以满足 $\theta_0<x_i<\theta_0+\theta$ 时，有 L 关于 θ 单调减；即 $\theta_0+\theta=\max\{x_i\}$，所以 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L=\max\{x_i\}-\theta_0$；

（III） $E(\hat{\theta}_L)=E(\max\{X_i\})-\theta_0$，

其中： X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta_0\\ \frac{x-\theta_0}{\theta}, & \theta_0\le x<\theta_0+\theta\\ 1, & x\ge\theta_0+\theta\end{cases}$，

$\hat{\theta}_L$ $U=\max\{X_i\}$ 的分布函数为 $F_U(z)=(F(z))^n=\begin{cases}0, & z<\theta_0\\ \dfrac{(z-\theta_0)^n}{\theta^n}, & \theta_0\le z<\theta_0+\theta\\ 1, & z\ge\theta_0+\theta\end{cases}$，

对应概率密度为 $f_U(z)=\begin{cases}\dfrac{n(z-\theta_0)^{n-1}}{\theta^n}, & \theta_0\le z<\theta_0+\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$ ，由此可知：

$E(\max\{X_i\})=\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} z\dfrac{n(z-\theta_0)^{n-1}}{\theta^n}dz=\dfrac{n}{\theta^n}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} z(z-\theta_0)^{n-1}dz$，作代换 $z-\theta_0=t, dz=dt$，

所以 $E(\max\{X_i\})==\dfrac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta}(\theta_0+t)t^{n-1}dt=\theta_0+\dfrac{n}{n+1}\theta$，则 $E(\hat{\theta}_L)=E(\max\{X_i\})-\theta_0=\dfrac{n}{n+1}\theta$，即

$\hat{\theta}_L=\max\{x_i\}-\theta_0$ 不是 θ 的无偏估计。

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三（模拟五）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: $f(x)=nx^{n-1}\sin x+x^{n}\cos x\sim(n+1)x^{n}$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{2x(\sqrt{1+x^{4}}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{x^{5}}$，故 $n=6$，答案 D.

（2）【解】: $f'(a)f'(b)<0$，不妨设 $f'(a)>0,f'(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 必在在 (a,b) 内取得最大值，即 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，此时必有 $f'(x_0)=0$.

(3). 【答案】: A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加，

当 $x_1>x_2$， $y_1<y_2$ 时， $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

（4）【答案】: D

（5）【答案】（D）

【解】由于 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$, 则 λ 为 1 或 2 或 3，所以 $E-A$、$2E-A$、$3E-A$ 可能不可逆，选(D)

（6）【答案】:（B）

(7)【解】:答案 (D)

$D(X-Y)=DX+DY-2(E(XY)-E(X)E(Y))$, $EXY>EXEY$， $EXY-EXEY>0$，

所以 $D(X-Y)<DX+DY$.

（8）【解】: 应选(C).

因为 A 和 B 互不相容，于是 $P(X=1,Y=1)=P(AB)=0$，

$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)$，

$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)$，

$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)$.

因此 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-P(A)P(B)$，

$D(X)=P(A)(1-P(A))$， $D(Y)=P(B)(1-P(B))$， $\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}<0$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{3-1}{3!}+\cdots+\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)!}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!})+\cdots+(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(\mathrm{n}+1)!}\right)=1$$

（10）【解】: 有题设可知 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\cos x]=0,\ f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$，

左式 $=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x}]=f'(0)=1$，所以 $f'(0)=1$，所以所求切线方程为 $y=x-1$.

（11）【答案】: 4

原式 $=\int_0^{2\pi}[\int_0^y\dfrac{|\sin y|}{y}dx]\,dy=\int_0^{2\pi}\dfrac{|\sin y|}{y}\cdot y\,dx=\int_0^{2\pi}|\sin y|\,dy=4.$

（12）【解】: $f_x'(0,1,-1)=1$

$$f_x'(x,y,z)=e^xyz^2+e^xy\cdot2z\cdot z_x'(x,y)，$$

$$f_x'(0,1,-1)=1+2\cdot(-1)\cdot z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1).$$

又由$1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$得$z_x'(0,1)=0$，所以 $f_x'(0,1,-1)=1$.

（13）【答案】：-10

（14）【解】：由于$n\overline{X}=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim B(n,p)$，

所以$P\{n\overline{X}>2\}=1-P\{n\overline{X}\le 1\}=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】：（Ⅰ）由题设有$a=\lim\limits_{x\to 0^+}[\frac{\ln(1+x^2)}{x}-\sin x]=0=\lim\limits_{x\to 0^-}[\frac{\arcsin x}{x}+e^{\frac{1}{2x}}+B]=1+B$，因而有$A=0,B=-1$；

（Ⅱ）
$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x}-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}-1=0,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\arcsin x}{x}+e^{\frac{1}{2x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\arcsin x-x}{x^2}+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x}=0,$$ 因而有 $f'(0)=0$.

（16）【解】如图所示，将积分区域D分为D_1和D_2，所以

$$I=\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}y\sin x\sin y\,d\sigma$$

在利用积分得轮换对称性知

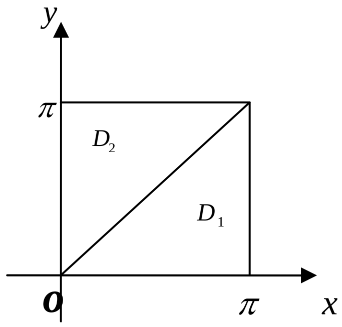
$$I=2\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma$$

$$=2\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x}x\sin x\sin y\,dy\right]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\left[x\sin x\cdot(1-\cos x)\right]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}x\,d\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)$$

$$=2x\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)dx=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi.$$



（17）【证明】：（Ⅰ）令$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对函数$F(x)$在区间$[a,b]$上应用 Rolle 定理知$\exists c\in(a,b)$使得$F'(c)=f(c)=0$，令$G(x)=e^{-x}f(x)$，则$G(a)=G(c)=G(b)=0$，对函数$G(x)$分别在区间$[a,c]$与$[c,b]$上应用 Rolle 定理知$\exists\xi\in(a,c),\eta\in(c,b)$使得$G'(\xi)=G'(\eta)=0$，即有$f'(\xi)-f(\xi)=f'(\eta)-f(\eta)=0$；

（Ⅱ）令$H(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，则有$H(\xi)=H(\eta)=0$，由 Rolle 定理知$\exists\zeta\in(\xi,\eta)$使得$H'(\zeta)=e^{\zeta}[f''(\zeta)-f'(\zeta)]+e^{\zeta}[f'(\zeta)-f(\zeta)]=e^{\zeta}[f''(\zeta)-f(\zeta)]=0$，即有$f''(\zeta)=f(\zeta)$.

（18）【解】 （1） $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xd\sin x=\left.\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}$

$I=\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$ ， 令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$

$I=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2})$

（2） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

令 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n$ ，易求收敛区间为 $(-1,1)$ 。

$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n=x^2(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2})=x^2(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1})'$

$=x^2[(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n)']'=\frac{2x^2}{(1+x)^3}$

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}=f(\frac{1}{2})=\frac{4}{27}$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$

(19)【解】：先求 $z(x,y)$ 的驻点，分别在方程的两边同时对 x 求偏导及同时对 y 求偏导，

$$6x^2-6y+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_x'=0,$$

$$-6x+6y+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_y'=0.$$

令 $z_x'=0,z_y'=0$，得 $\begin{cases}y=x^2,\\y=x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 故 $z(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$， $(1,1)$． 代入原方程，得 $z(0,0)=1$， $z(1,1)=e$． 再求二阶偏导，

$$12x+\frac{1}{e}\frac{1}{z}(z_x')^2+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_{xx}''=0,$$

$$6+\frac{1}{e}\frac{1}{z}(z_y')^2+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_{yy}''=0,$$

$$-6+\frac{1}{e}\frac{1}{z}z_x'z_y'+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_{xy}''=0\ .$$

将 $(0,0)$ 代入上式，得 $A_1=z_{xx}''(0,0)=0$， $B_1=z_{xy}''(0,0)=6e$， $C_1=z_{yy}''(0,0)=-6e$．

由 $A_1C_1-B_1^2=-36e^2<0$ 知函数在点 $(0,0)$ 处不取极值． 将 $(1,1)$ 代入上式得

$A_2=z_{xx}''(1,1)=-6e$， $B_2=z_{xy}''(1,1)=3e$， $C_2=z_{yy}''(1,1)=-3e$．

由于 $A_2C_2 - B_2^{\ 2} = 9e^2 > 0$，且 $A_2 < 0$，可知 $z(1,1) = e$ 为 $z(x,y)$ 的极大值.

（20）【解】：①由题设 $\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3$ 均为 $Bx=0$ 的解 $\quad B \neq 0$

知 $\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3$ 线性相关（否则由 $Bx=0$ 基础解系所含向量个数≥3 $\Rightarrow B=0$ 矛盾！）于是

$$0 = \left|\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3b-a \qquad 故\ a=3b \quad \because AX=\beta_3 有解，\therefore r(A)=r(A \quad \beta_3)$$

$$(A \quad \beta_3) \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5-b}{3} \end{pmatrix}, \quad 由 r(A)=r(A \quad \beta_3) \Rightarrow \frac{5-b}{3}=0,\ \ b=5$$

(2) 由 $\beta_1 \quad \beta_2$ 秩为 2 知 β_1,β_2 线性无关

故 $Bx=0$ 至少有两个线性无关解 β_1,β_2 $\because B \neq 0 \qquad r(B) \geq 1$ 因而基础解系由 $3-r(B) \leq 2$ 个线性无关解向量组成 于是 $\beta_1 \quad \beta_2$ 可作为 $Bx=0$ 基础解系。故通解为

$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1(0 \quad 1 \quad -1)^T + k_2(15 \quad 2 \quad 1)^T$ 。

（21）【解】：（1） $f = x^T Ax$ 其中：$A = \begin{pmatrix} 1 & b & b & b \\ b & 1 & b & b \\ b & b & 1 & b \\ b & b & b & 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda \mathrm{E} - \mathrm{A}| = (\lambda-(1+3b))[\lambda-(1-b)]^3$，$\lambda_1 = 1+3b \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1-b$

解方程 $(\lambda_1 \mathrm{E} - \mathrm{A})x = 0$ 得特征向量 $\xi_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$

解方程 $(\lambda_2 \mathrm{E} - \mathrm{A})x = 0$ 得特征向量 $\alpha_1 = (-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = (-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \alpha_3 = (-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$

正交化 $\quad \xi_2 = \alpha_1 \quad \xi_3 = (-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}} \quad \xi_4 = (-1,-1,-1,3)^{\mathrm{T}}$

单位化 得

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}} \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}} \qquad \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}} \qquad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,-1,3)^{\mathrm{T}}$$

令 $U = (\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)$，则 U 为正交阵，且 $\mathrm{U^{-1}AU} = U^T AU = \begin{pmatrix} 1+3b & & & \\ & 1-b & & \\ & & 1-b & \\ & & & 1-b \end{pmatrix}$

校准形 $\quad (1+3b)y_1^2 + (1-b)y_2^2 + (1-b)y_3^2 + (1-b)y_4^2$

（22）【解】 （I） X 与 Y 的取值分别是：i,j 分别取 -1,0,1，

1） $i<j, P\{X=i,Y=j\} = P\{\max\{U,V\}=i, \min\{U,V\}=j\} = 0$

2） $i>j, P\{X=i,Y=j\} = P\{\max\{U,V\}=i, \min\{U,V\}=j\}$

$$= P\{U=i,V=j\} + P\{U=j,V=i\} = \frac{2}{9} \ ;$$

3） $i=j, P\{X=i,Y=j\} = P\{\max\{U,V\}=i, \min\{U,V\}=i\}$

$=P\{X=i,Y=i\}=\dfrac{1}{9}$

所以(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	1/9	0	0
0	2/9	1/9	0
1	2/9	2/9	1/9

（II）$P\{|XY|=1\}$

$$=P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)=\frac{4}{9}$$

（III）　X与Y的边缘分布律分别为

X	-1	0	1
p	1/9	3/9	5/9

Y	-1	0	1
P	5/9	3/9	1/9

所以　$E(X)=\dfrac{4}{9}$　，$E(Y)=-\dfrac{4}{9}$

方差为$D(X)=D(Y)=\dfrac{20}{81}$，且

$E(XY)=\dfrac{2}{9}$　　，

$Cov\{X,Y\}=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{34}{81}$，则相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{34/81}{20/81}=\frac{17}{10}。$$

（23）【解】:（I）p 的矩估计 $\hat{p}$

由于 $\mu=\dfrac{1}{p}$，令 $\mu=\overline{X}$，即 $\overline{X}=\dfrac{1}{p}$，所以 p 的矩估计 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$；

（II）p 的最大似然估计 $\hat{p}_L$

1）$L=\prod\limits_{i=1}^{n}(1-p)^{1-x_i}p=(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)}p^n$

2）$\ln L=\sum\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)+n\ln p$，$\dfrac{d\ln L}{dp}=-\dfrac{n\sum\limits_{i=1}^{}x_i}{(1-p)}+\dfrac{n}{p}=0$

3）解得 $\hat{p}_L=\dfrac{1}{\overline{X}}$

所以对应的样本值 $\overline{x}=\dfrac{1}{6}(3+4+6+2+3+2)=\dfrac{10}{3}$，则 $\hat{p}_L=\dfrac{3}{10}$

（III）$E(\dfrac{n}{\hat{p}^2})=E(n\overline{X}^2)=n(D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2)=n(\dfrac{1-p}{np^2}+(\dfrac{1}{p})^2)=\dfrac{n+1-p}{p^2}$