模拟一试卷参考答案

一、选择题：1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(1)【解】由题设知 $e^{x^2}-e^{\sin^2 x}=e^{\sin^2 x}(e^{x^2-\sin^2 x}-1)\sim x^2-\sin^2 x=(x-\sin x)(x+\sin x)\sim\frac{1}{3}x^4$,所以有 $m=4$，答案为 B.

(2)【解】由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+g(x)$，$f'(0)=0$，

$f''(0)=(\frac{2x}{1+x^2})'\Big|_{x=0}+g'(0)=2$，故点 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的极小值点，【答案】A.

(3)【答案】A

(4)【答案】B

(5)【答案】C

(6)【答案】B

(7)【答案】C

(8)【解】求 A 的特征值，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & -X-\lambda & 1/4\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+X\lambda+\frac{1}{4})$，要使所以特征值为实数，则概率 $P\{X^2-1\ge 0\}=P\{(X-1)(X+1)\ge 0\}=P\{X\le -1\}+P\{X\ge 1\}=P\{X\ge 1\}$，由此知

$\frac{7}{8}=P\{X\ge 1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^3,(1-p)^3=\frac{1}{8}$，$p=\frac{1}{2}$，答案为 C.

二 填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9)【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)})^{\frac{\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}}\right]^{\frac{x-\ln(1+x)}{(e^x-1)\ln(1+x)}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{(e^x-1)\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$，所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

(10)【解】$f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+2n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$，

所以 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}2n!$.

(11)【答案】$\varphi(u)=e^{-\frac{u^2}{4}}$

(12)【答案】$2\sin 1+\frac{\pi}{4}\cos 1$

(13)【答案】$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1\quad 0)^T,\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{51}}(5\quad 4\quad 1\quad 3)^T$

(14)【答案】$\frac{2}{\lambda}+1$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本小题满分 10 分)

【解】(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\frac{dy}{dx}=0,t=\pi,\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\pi}=\frac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，

故 $t=\pi$ 时函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}=0,\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号，故点 $(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 与 $(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 均为曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

(16)(本小题满分 10 分)

【解】【解】由区域可知

$$I=\int_0^1 x\int_0^{1-x}e^{-y}dy+\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 r^3dr=\int_0^1 x(1-e^{x-1})dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-1}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-e^{-1}+\frac{\pi}{8}.$$

(17)(本小题满分 10 分)

【解】收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

$\int_0^x S(x)dx=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+2}=\dfrac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\dfrac{x}{2}\sin x$，

所以，$S(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

(18)(本小题满分 10 分)

【证明】令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x g(t)dt-(x-a)\int_a^x f(t)g(t)dt,F(a)=0$，

$F'(x)=f(x)\int_a^x g(t)dt+g(x)\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f(t)g(t)dt-(x-a)f(x)g(x)$

$=-\int_a^x[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]dt$，由于 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，因而当 $t<x$ 时有 $[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]>0$，即当 $x\in(a,b)$ 时有 $F'(x)<0$，因此函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，由此可得 $F(b)<F(a)=0,\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx-(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx<0$，

即 $\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx<(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(19)(本小题满分 10 分)

【解】Σ 方程为 $\dfrac{\xi x}{a^2}+\dfrac{\eta y}{b^2}+\dfrac{\zeta z}{c^2}=1$　Σ 法向量 $\vec{n}=\{\dfrac{\xi}{a^2},\dfrac{\eta}{b^2},\dfrac{\zeta}{c^2}$

$$I=\iint_\Sigma(x\cdot\frac{c^2\xi}{a^2\zeta}+y\cdot\frac{c^2\eta}{b^2\zeta}+z)dxdy=\iint_D[x\frac{c^2\xi}{a^2\zeta}+y\frac{c^2\eta}{b^2\zeta}+\frac{c^2}{\zeta}(1-\frac{\xi x}{a^2}-\frac{\eta y}{b^2})]dx\,c$$

$$=\iint_D\frac{c^2}{\zeta^2}dxdy=\frac{a^2b^2c^2}{2}\frac{1}{\xi\eta\zeta}$$

考虑 $f=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1$ 下.令 $F=\xi\eta\zeta+\lambda(\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2})$，

由 $\begin{cases} F'_\xi = 0 \\ F'_\eta = 0 \\ F'_\zeta = 0 \\ \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1 \end{cases}$ 得,驻点 $\xi=\dfrac{a}{\sqrt{3}},\eta=\dfrac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$,

此时 I 最小,最小值为 $I_{\min}=\dfrac{a^2b^2c^2}{2}\cdot\dfrac{(\sqrt{3})^3}{abc}=\dfrac{\sqrt{3}^3}{2}abc$

(20)(本小题满分 11 分)

【解】(1)因 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 1.故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值,设 A 属于 0 的特征向量为 $\xi=(x_1\quad x_2\quad x_3)^T$,由 $\xi\perp\xi_1$ 得,方程组 $-x_1+x_2+x_3=0$,

解得基础解系 $\xi_2=(1\quad 1\quad 0)^T,\xi_3=(1\quad 0\quad 1)^T$,故 ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 两个线性无关解.由 $R(A)=1$ 知,$\xi_2\ \xi_3$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系,故 $Ax=0$ 通解为 $x=k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1(1\quad 1\quad 0)^T+k_2(1\quad 0\quad 1)^T$;

(2)由(1)知 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 线性无关,

令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$,则 P 是可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$,

故 $A=P\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\cdots=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

(21)(本小题满分 11 分)

【解】(1) $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}$,由 $R(A)=1$ 得,$a=b$.

$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&a\\1&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&1\\0&1-a^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\pm1$.

又 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,得 $\begin{cases}a-1=0\\1-b=\lambda\\b-1=-\lambda\end{cases}\Rightarrow a=b=1,\lambda=0.$

(2) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 0,0,3.

$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$;$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

令 $Q=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 及 $X=QY$，则有 $f=3y_3^2$.

(22)(本小题满分 11 分)

【解】(1)由条件知 (X,Y) 密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}, & (x,y)\in G \\ 0, & (x,y)\notin G\end{cases}$，

又 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率 $P\{X^2-4Y\ge 0\}=P\{4Y\le X^2\}$，讨论：由于 $a=4$ 时，$y=\frac{x^2}{4}$ 过点(4,4)

(i) $a\le 4,\ P\{X^2-4Y\ge 0\}=\int_0^a dx\int_0^{x^2/4}\frac{1}{a^2}dxdy=\frac{a}{12}$;

(ii) $a>4,\ P\{X^2-4Y\ge 0\}=\int_0^a dy\int_{2\sqrt{y}}^a\frac{1}{a^2}dx=1-\frac{4}{3\sqrt{a}}$.

(2)由卷积公式，$Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$，所以

$f(x,2x-z)=1$，对应积分区域为 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 2x-1\le z\le 2x\end{cases}$，对不同区域讨论如下：(I)

$-1\le z<0$，$f_Z(z)=\int_0^{\frac{1+z}{2}}dx=\frac{1+z}{2}$

(II) $0\le z<1$，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1+z}{2}}dx=\frac{1}{2}$

(III) $1\le z<2$，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx=1-\frac{z}{2}$

则 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}(1+z)/2, & -1\le z<0\\ 1/2, & 0\le z<1\\ 1-z/2, & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$.

(23).(本小题满分 11 分)

【解】(1)由样本的独立性知

$Cov(X_i,Y_i)=Cov(X_i,X_i-\bar{X})=DX_i-Cov(X_i,\bar{X})=\sigma^2-Cov(X_i,\frac{1}{n}X_i)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}Cov(X_i,Y_i)=(n-1)\sigma^2$；

(2)由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$，由此 $D(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$；

(3) $\theta=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\theta=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=(n-1)S^2$，

$$E(\theta^2)=E[(n-1)S^2]^2=(n-1)^2E(S^2)^2=(n-1)^2[D(S^2)+(ES^2)^2]$$

$$=(n-1)^2[\frac{2}{n-1}\sigma^4+\sigma^4]=(n^2-1)\sigma^4,$$

所以 θ^2 不是 $n^2\sigma^4$ 的无偏估计.

数学一模拟试卷 2 参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

(2)【解】 有题设知 $xe^{-|x|}f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必为奇函数，又 $f(x)$ 有界，因而 $\exists M>0$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|f(x)|\le M$ 相应的有

$|F(x)|=\left|\int_0^x te^{-|t|}f(t)\,dt\right|\le M\int_0^{|x|}\left|te^{-|t|}f(t)\right|dt\le M[2-(1+|x|e^{-|x|}]\le 2M$，因此 $F(x)$ 是有界的奇函数，答案为 A .

（3）【答案】A

（4）【答案】 D

（5）【解】$t\ne-1$ 时，ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，因此必有 $r(A)=1$.【答案】(C)

（6）【答案】 B

（7）【解】 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.15,\ P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)$

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-[P(B)-P(AB)]=P(\bar{A})+P(AB)=0.7+0.15=0.85$【答案】 (D)

(8)【解】对应概率为：第三次试验成功，概率为 p，而前 2 次恰有 1 次成功，由 Bernulli 概型的二项概率公式可知 $C_2^1p(1-p)p=2p^2(1-p)$.【答案】 (B)

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）【解】对等式两边关于 x 同时求导可得：$1-e^{-(x+y)^2}(2+y')=0$，所以 $y'(0)=e-2$，故所求法线方程为 $y=-\dfrac{1}{e-2}x+1$.

（10）【解】 由题设知 $f(1+\ln x)=ex+\ln x+1$，令 $u=1+\ln x,\ x=e^{u-1}$；$f(u)=e^u+u$，因而相应的图形面积为 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(e^x+x)\,dx=e-\dfrac{1}{2}$.

（11）【解】 令 $u=y^2$ 方程可变为 $u'-xu=x$，解得

$u=e^{\frac{x^2}{2}}(\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+C)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1,y(0)=0,C=1$，由此可得所求方程通解为 $y^2=e^{\frac{1}{2}x^2}-1$

（12）【解】设 $D_1:0\le y\le x,0\le x\le1$，则 $\iint\limits_D(x-y)\operatorname{sgn}(x-y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x-y)d\sigma$

$=\int_0^1dx\int_0^x(x-y)dy=\int_0^1\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{1}{6}$.

（13）【解】 $|B|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2,B^{-1}=B^*A+A$ 两边左乘 B 得 $E=2A+BA$，即 $(B+2E)A=E$，则

　

$$A=(B+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&3&0\\1&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（14）【解】 $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_X^2+\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_Y^2\sim\chi^2(2n-2),\bar{X}+\bar{Y}\sim N(\mu,\frac{2\sigma^2}{n}),\frac{\bar{X}+\bar{Y}-\mu}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1)$，

所以 $\theta=\frac{\frac{\bar{X}+\bar{Y}-\mu}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_X^2+\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_Y^2}{2n-2}}}=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}+\bar{Y}-\mu)}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$，答案：$t(2n-2)$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 10 分）

【解】 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1-\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}[\frac{f(x)+1}{x}-\frac{\sin x}{x}]=2,\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=2$，

$f(0)=-1,f'(0)=2$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{mx^{m-1}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{mx^{m-2}}$ 存在且 $f(0)=-1$，因此必有 $m=2$．此时有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2}=-\frac{1}{2}$，从而有 $k=-\frac{1}{2}$．

（16）（本小题满分 10 分）

【解】（I）$\because f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z),t>0$，

$\therefore$ 对 t 求导可得：$xf_1'+yf_2'+zf_3'=nt^{n-1}f$。

取 $t=1$ 即得 $S=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$。

（II）当 $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ 时，$n=6$，故 $S=6x^2y^2z^2$。

现求 $S=6x^2y^2z^2$ 在 $2x+3y+z=3$（$x,y,z>0$）上的最大值。

方法 1（拉格朗日乘数法）

作 $L=\ln x+\ln y+\ln z+\lambda(2x+3y+z-3)$，则由

$$\begin{cases}L_x=\frac{1}{x}+2\lambda=0,\\L_y=\frac{1}{y}+3\lambda=0,\\L_z=\frac{1}{z}+\lambda=0,\\2x+3y+z=3\end{cases}$$

　

可解得可能条件极大值点 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3},z=1$，由实际意义知：$S_{\max}=\frac{1}{6}$。

方法 2（均值不等式）

当 $2x=3y=z=1$，即 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{3},z=1$ 时，$S_{\max}=\frac{1}{6}$。

（17）（本小题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},|x|\le 1$，

$(\ln\sqrt{2+x^2})'=\frac{x}{2+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{n+1}},|x|\le\sqrt{2}$，所以有

$\ln\sqrt{2+x^2}=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^{n+1}})dt+\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n+1)2^{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n2^{n+1}}+\frac{1}{2}\ln 2$，

所以 $f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n2^{n+1}}-\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n2^{n+1}})x^{2n}-\frac{1}{2}\ln 2,|x|\le 1$。

（Ⅱ）令 $x=1$ 则有 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n2^{n+1}})-\frac{1}{2}\ln 2$，所以有

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n2^{n+1}-2n+1}{n(2n-1)2^{n+1}}=f(1)+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

（18）（本小题满分 10 分）

【证明】令 $F(x)=e^{f(x)}\arcsin x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，有积分中值定理知道 $\exists x_0\in[0,\frac{2}{\pi}]$ 上使得 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arcsin x\,dx=\int_0^{\frac{2}{\pi}}F(x)dx=F(x_0)\frac{2}{\pi}=1,F(x_0)=\frac{\pi}{2}$，而 $F(1)=\frac{\pi}{2}$，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=e^{f(\xi)}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{f(\xi)}f'(\xi)\arcsin\xi=0$，即有

$\sqrt{(1-\xi^2)}f'(\xi)\arcsin\xi=-1$.

（19）（本小题满分 10 分）

【解】$\Sigma:z=e^{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\in D:x^2+y^2\le 1$，下侧。

设 $\Sigma':z=e,(x,y)\in D$，Σ' 取上侧，则 Σ' 与 Σ 围成区域 Ω，由高斯公式可得：

$$\oiint_{\Sigma'+\Sigma}=\iiint_{\Omega}(z-2z)dv=-\iiint_{\Omega}zdv$$

$$=-\int_1^e zdz\iint_{x^2+y^2\le\ln^2 z}dxdy=-\pi\int_1^e z\ln^2 zdz$$

$$=-\frac{1}{2}\pi[z^2\ln^2 z|_1^e-\int_1^e z^2\cdot 2\ln z\cdot\frac{1}{z}dz]=-\frac{1}{2}\pi[e^2-\int_1^e\ln zd(z^2)]$$

$$=-\frac{1}{2}\pi e^2+\frac{1}{2}\pi[z^2\ln z|_1^e-\int_1^e z^2\cdot\frac{dz}{z}=-\frac{1}{4}\pi z^2|_1^e=\frac{1-e^2}{4}\pi,$$

而 $\iint_{\Sigma'}xzdydz-2yzdzdx+dxdy=\iint_{\Sigma'}dxdy=\iint_D dxdy=\pi$，故

$$I=\frac{1-e^2}{4}\pi-\pi=-\frac{3+e^2}{4}\pi\text{。}$$

(20)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

从而 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$，由此可得 $\xi=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$ 是方程 $Ax=\beta$ 的解，因此

$\xi-\xi_0=(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的解，由题设知 $\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个解。由题设 $\xi_1=(1\ \ -1\ \ 2\ \ 0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。而 $\xi-\xi_0$ 显然不能由 ξ_1 线性表示。矛盾！所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（Ⅱ）由题设知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 与矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$ 的秩都是 3，$\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的一个基础解系，因此必有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 作为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的极大无关组，同时它也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

(21)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）由题设条件知

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\cdots&\cdots&&\\n&2n&\cdots&n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)=\alpha\alpha^T\quad\text{故}\ r(A)=1;$$

（Ⅱ）因 $A^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)A$，$|A|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 A 特征值。

对应特征向量满足 $Ax=\alpha\alpha^Tx=0$　　因 $\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^n i^2\neq0$

故方程组 $\alpha\alpha^Tx=0$ 与 $\alpha^Tx=0$ 是同解方程组，

只需解方程 $\alpha^Tx=0$　　即满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$

有线性无关特征向量为

$$\xi_1=(-2\ \ 1\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0)^T,\quad \xi_2=(-3\ \ 0\ \ 1\ \ \cdots\ \ 0)^T,\cdots,\ \xi_{n-1}=(-n\ \ 0\ \ \cdots\ \ 1)^T$$

由此可知　$\lambda=0$ 至少是 $n-1$ 重根

又　$trA=\sum_{i=1}^n i^2=\sum_{i=1}^n \lambda^2\neq0$。故 A 有一个非零特征值 $\lambda_n=\sum_{i=1}^n i^2\neq0$

当 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2=\alpha^T\alpha$ 时　由 $(\lambda E-A)x=(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$

由观察可知 $x=\alpha$ 时

$(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$。故 $\alpha=(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ n)^T=\xi_n$ 是对应 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2$ 特征向量。

A 有 n 个线性无关特征向量，A 能相似对角化。

取 $P=(\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_{n-1} \quad \xi_n)=\begin{pmatrix} -2 & -3 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & & & & 2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & n \end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 \end{pmatrix}=\Lambda$

(22)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）由于 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ \dfrac{1}{4}, & 0\le x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则

概率 $P\{|X|>5X-2\}=P\{X\le -5X+2, X\le 0\}+P\{X>5X-2, X>0\}$

$=P\{X\le 0\}+P\{0\le X<\frac{1}{2}\}=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}dx=\frac{5}{8}$;

（Ⅱ） $E(2|X|-1)=2E(|X|)-1=2\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx-1=2[-\int_{-1}^{0}x(x+1)dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx]-1=\frac{1}{3}$

（Ⅲ）$Y=X^2$,讨论分布函数 $F_Y(y)$ 则

（1）由于 $y=x^2$,有效区间为 $0<y<4$, $y=1$ $(x=-1)$ 是分界点,

（2）讨论 $y<0$, $F_Y(y)=0$

$0\le y<1$, $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}(x+1)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt{y}}dx$

$1\le y<4$, $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt{y}}dx$

$y\ge 4$, $F_Y(y)=1$

（3） $Y=X^2$ 的概率密度函数：

$$f_Y(x)=F_Y'(y)=\begin{cases} \dfrac{3}{8\sqrt{y}}+\dfrac{1}{2}, & 0<y<1 \\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4 \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

(23)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）$1=C\int_{0}^{+\infty}\theta^x\ln\theta dx=C\ln\theta\int_{0}^{+\infty}\theta^x dx=-C$，所以 $C=-1$

（Ⅱ）$L=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(-\ln\theta)^n$，$x_i>0$，

取对数：$\ln L=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\ln\theta+n\ln(-\ln\theta)$ ，求导数 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\ln\theta}\frac{1}{\theta}=0$，解得：$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\ln\theta}=0$

$\ln\theta = -\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = -\dfrac{1}{\overline{X}}$，所以最大似然估计 $\hat{\theta}_L = e^{-\frac{1}{\overline{X}}}$；

（Ⅲ）$E(\ln(\hat{\theta}_L)^{-1}) = -E\overline{X} = -EX$，

又 $EX = -\int_0^{+\infty} x\theta^x \ln\theta dx = -\ln\theta\int_0^{+\infty} x\theta^x dx = -\int_0^{+\infty} xd\theta^x = -x\theta^x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\theta^x dx = -\dfrac{1}{\ln\theta} = -(\ln\theta)^{-1}$，

由此可知：$E(\ln(\hat{\theta}_L)^{-1}) = (\ln\theta)^{-1}$，所以 $\ln(\hat{\theta}_L)^{-1}$ 是 $\ln(\theta)^{-1}$ 的无偏估计。

　

数学一模拟试卷 3 参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】 当$|x|>1$时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^n}\sin\pi x=0$，当$|x|<1$时，$f(x)=\sin\pi x$，

当$f(1)=0$，$f(-1)$无定义，所以$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \sin\pi x, & -1<x<1,\\ 0, & x\geq 1.\end{cases}$ $f(-1)$无定义，因此$f'(-1)$不存在，

$f'_-(1)=\pi\cos\pi x|_{x=1}=-\pi, f'_+(1)=0$，因此$f'(1)$也不存在，答案为 C .

（2）【解】因为$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$时，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，因而有$I_1>1$，又$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\pi}{2}$，因而有

$I_2<1$，答案是 D。

（3）【答案】D

(4) 【解】由区域D的图形及函数的奇偶性，根据对称性知：

$$\iint\limits_D x[\ln(y+\sqrt{1+y^2})+1]dxdy=2\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\frac{2}{3}$$

（5）【答案】B

【提示】$A^*=\dfrac{A^{-1}}{|A|}$。由于$|A|=(-1)^{\tau(n123\cdots(n-1))}(-1)^n=-1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，故

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=1+1+\cdots+1=n$

（6）【答案】C

（7）【解】 $0.5=P\{\max\{X,Y\}>c\}=P\{(X>c)\cup(Y>c)\}=P(X>c)+P(Y>c)-P\{X>c,Y>c\}$
$=1.2-P\{X>c,Y>c\}$，$\therefore P\{X>c,Y>c\}=0.7$　则$P\{\min\{X,Y\}\leq c\}=1-P\{X>c,X>c\}=0.3$

（8）【解】由于相关系数$\rho=0$，所以X与Y相互独立，且$X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$所以$Y\text{-}1\sim N(\text{-}1,1)$，

$$D(XY-X)=D[X(Y-1)]=E[X^2(Y-1)^2]-[EXE(Y-1)]^2$$
$$=E(X^2)E(Y-1)^2-(EX)^2[E(Y-1)]^2=3$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

（9）【解】 令$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则$f'(x)=(1-x)e^{-x}$，那么函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x}$在$[1,+\infty)$上单调递减，因此有

$0<\dfrac{n}{e^n}\leq\dfrac{1}{e}$，由此可得

　

$$\left(\cos\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\cos\frac{1}{e}+\cos\frac{2}{e^2}+\cdots+\cos\frac{n}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}}\ge n^{\frac{1}{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼原理知原式$=1$.

（10）【解】 由题设 $x\in(0,2)$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x\dfrac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt=\sqrt{2x-x^2}$，

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$.

（11）【答案】 $1-e^x$

（12）【答案】 -80

（13）【答案】 -4

（14）【解】 由条件已知 $X_1^2,\ldots,X_n^2$ 独立同分布，由大数定律可知 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于：

$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda(1+\lambda)$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 10 分）

【解】 解法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$

$=a-1=0,a=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2},b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0,\lim\limits_{x\to0}(1+2c\cos x)=0$，由此可得

$a=1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

解法二：$a+bx-(1+c\sin x)e^x=a+bx-[1+cx-\dfrac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\dfrac{1}{2})x^2-(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1;b-c-1=0,c+\dfrac{1}{2}=0,\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c=0$，即 $a=1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

（16）（本小题满分 10 分）

【解】 1）区域 D 内：$f_x'(x,y)=y-1=0,f_y'(x,y)=x=0,\Rightarrow(0,1)$ 函数值为 $f(0,1)=0$;

2）直线 L_1 $y=x$，，代入：$f=x(x-1)$　　$x\in[-\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3}]$

　

$f'=2x-1=0,\ x=\frac{1}{2}$，所以：$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$；

端点上：$f(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3})=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$；$f(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$；

3）园 L_2：$x^2+y^2=3$，

作 Lagrange 函数 $L=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2=3)$，

$$\begin{cases}L'_x=y-1+2x\lambda=0\\ L'_y=x+2y\lambda=0\\ x^2+y^2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-y-x^2=0\\ x^2+y^2=3\end{cases}\Rightarrow 2y^2-y-3=0,$$

所以解得 $(2y-3)(y+1)=0$, 得点

$$(-\sqrt{2},-1),\ f(-\sqrt{2},-1)=2\sqrt{2};\ (-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}),\ f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{4};\ (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}),\ f(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

即知：

$$f_{\min}=f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{4},\ f_{\max}=f(-\sqrt{2},-1)=2\sqrt{2}。$$

（17）（本小题满分 10 分）

【解】（I）缺项幂级数　(1)　$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4n+1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{4n-3}{n(2n-1)}}x^2=x^2$

$\therefore$由比值法知：当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数发散，故幂级数收敛半径 $R=1$。

(2) 当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n-3}{n(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{3}{n}-\frac{2}{2n-1})$ 收敛，故原幂级数收敛域为 $[-1,1]$。

（II）$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n-3}{n(2n-1)}x^{2n}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}$，而其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2)^n}{n}=\ln(1+x^2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=xs(x),$$

这里，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，$s(0)=0$，逐项求导可得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},|x|<1,$$

积分可得：$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$。

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n-3}{n(2n-1)}x^{2n}=3\ln(1+x^2)-2x\arctan x,x\in[-1,1]$.

　

(18)（本小题满分 10 分）

【证明】(Ⅰ)由 $\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b [f(x)-x]\,dx=0$，记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$）相应的必有 $\int_a^b F(x)\,dx>0$（或 <0）与 $\int_a^b [f(x)-x]\,dx=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（Ⅱ）令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

(19)（本小题满分 10 分）

【解】 (1)由旋转曲面可知积分曲面方程为

$$\Sigma: z=x^2+(y-1)^2+1,\ (x,y)\in D: x^2+y^2\le 1，上侧，$$

其向上法向量为 $\vec{n}=\{-z_x,-z_y,1\}=\{-2x,-2(y-1),1\}$。

(2)利用向量法可得：

$$I=\iint_D \{2x,0,z+3-y\}\cdot\{-2x,-2(y-1),1\}dxdy$$

$$=\iint_D(-4x^2+z+3-y)dxdy=\iint_D(-3x^2+y^2+5)dxdy=\frac{9}{2}\pi.$$

(20)（本小题满分 11 分）

【解】 (1)由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量；又 $\eta=(1\ \ 2\ \ -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}，$$ 知 $\xi_3=(1\ \ 2\ \ -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)$ 则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（2）$A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

（21）（本小题满分 11 分）

【解】（I）据已知条件，有 $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$，即

解出 $a_{12}=2, a_{13}=2, a_{23}=-2$，所以　$x^T Ax = 4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$。

（II）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 A 的特征值为 $2,2,-4$.

由 $(2E-A)x=0$, $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\alpha_1=(1,1,0)^T, \alpha_2=(1,0,1)^T$;

由 $(-4E-A)x=0$, $\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $\alpha_3=(-1,1,1)^T$, 将 $\alpha_1\alpha_2$ 正交化，令 $\beta_1=\alpha_1$, 则

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta1)}\beta_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$，再对 β_1,β_2,β_3 单位化，有

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 那么令 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，有

$x^T Ax = y^T Ay = 2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

（III）因为 $A+kE$ 的特征值为 $k+2, k+2, k-4$, 所以当 $k>4$ 时, 矩阵 $A+kE$ 正定.

（22）（本小题满分 11 分）

【解】：X 与 Y 的可能取值分别 ：

$-1,0,1$; $-1,0,1$

（I）由于 $X\le Y$，所以 $P(X=i,Y=j)=0\ \ i>j$

$P(X=-1,Y=-1)=P(\xi=-1,\eta=-1)=0.1$，

$P(X=-1,Y=0)=P(\xi=-1,\eta=0)=0.2$，

$P(X=-1,Y=1)=P(\xi=-1,\eta=1)$

$+P(\xi=1,\eta=-1)=0.5$

$P(X=0,Y=0)=P(\xi=0,\eta=0)=0$

同理，$P(X=0,Y=1)=0.1$，$P(X=1,Y=1)=0.1$

（II）$Y=1$时，X 的条件分布律（右图）

X \ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0.1	0.2	0.5	0.8
0	0	0	0.1	0.1
1	0	0	0.1	0.1
$p_{\cdot j}$	0.1	0.2	0.7	1

$X=x_i/Y=1$	-1	0	1
p_i	5/7	1/7	1/7

（III）$E(X)=-0.7$，$E(Y)=0.6$，$D(X)=0.41$

$E(XY)=-0.3$，$Cov(X,Y)=0.12$

$Cov(X,X+2Y)=D(X)+2Cov(X,Y)$

$=0.41+2\times 0.12=0.65$

（23）（本小题满分 11 分）

【解】（I）由于 $X=e^Y$，$E(X)=\int_0^{\infty} e^y \lambda y e^{-\lambda y}dy=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\int_0^{\infty} y(\lambda-1)e^{-(\lambda-1)y}dy=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$；

（II）$X_1,\dots,X_n$是总体 X 的简单随机样本，对应 $Y=\ln X$ 的样本为 $Y_i=\ln X_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

则似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}\lambda y_i e^{-\lambda y_i}=\lambda^n(y_1y_2\cdots y_n)e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i}$　$(y_i>0)$，

取对数可知 $\ln L=n\ln\lambda+\ln(y_1\cdots y_n)-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i$，$\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，

由此 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i}$，或 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$；

（III）$b=E(X)=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$ 可以证明在 $\lambda>1$ 时，为单调减连续函数，由最大似然估计性质 $b=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$

的最大似然估计 $\hat{b}=\dfrac{\hat{\lambda}}{(\hat{\lambda}-1)^2}=\dfrac{1}{\hat{\lambda}}\dfrac{1}{(1-\frac{1}{\hat{\lambda}})^2}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$.

数学一模拟 4 参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下面每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）【解】 由题设有 $2f'(2)=4, f'(2)=2$，因而有 $\mathrm{d}\, f(u)\big|_{\substack{u=2\\ \Delta u=0.01}}=0.02$，答案 B .

（2）【解】 $I=\int_0^1\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$，$I$ 收敛的充分必要条件是积分 $\int_0^1\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$ 都收敛，前者收敛则必有 $b<1$，后者收敛则必有 $a>1$，因此答案为C .

（3）【解】由轮换对称性：

$$I=\iint_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\frac{af(x)+bf(y)+af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)\iint_D dxdy=\frac{1}{2}(a+b)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(a+b).$$ 选（D）

(4)【答案】A

（5）【答案】C

（6）【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$, 可知矩阵 A 的特征是 $3,-3,0$, 故秩 $\gamma(A)=2$,二次型 x^TAx 的正、负惯性指数均为1。

（A）中矩阵的秩为1，不可能与矩阵 A 等阶；（C）中矩阵的特征值为3，-3,0.与矩阵 A 不仅等价、合同，而且也是相似的，不符合题意．对于（D）,记其矩阵为 D，由

$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，可知 D 的特征值为 $1,-1,0$ 。x^TAx 与 x^TDx 的正、负惯性指数一样，所以它们合同但不相似（因为特征值不同），符合题意，

固应选（D）

注意，（B）中矩阵的特征值为 $1,4,0$, 正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，与 A 即不合同也不相似，但等阶（因为秩相等）.所以选C。

（7）【解】$P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{1-P(\bar{A}\bar{B})}=\frac{P(A)P(B)}{1-P(\bar{A})P(\bar{B})}=0.25$,其中由

$P(A-B)=P(B-A)$

即 $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})\Rightarrow P(A)(1-P(B))=P(B)(1-P(A))$, 可知 $P(A)=P(B)$=0.3.

（8）【解】$Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为 $F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n$，则概率密度函数为 $f_Z(z)=n[1-F(z)]^{n-1}F'(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

　

（9）【解】 对等式两边同时取对数，再求微分可得

$\ln\cos y\,\mathrm{d}x-x\tan y\,\mathrm{d}y=y\cot x\,\mathrm{d}x+\ln\sin x\,\mathrm{d}y$，由此可得 $\mathrm{d}y=\dfrac{\ln\cos y-y\cot x}{x\tan y+\ln\sin x}\mathrm{d}x$。

（10）【解】由题设有 $\int_0^{x^2+2x}f(u)\,\mathrm{d}u=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{e^{-t^2}\ln(1+t-x)}{\sin(x-t)}=-e^{-x^2}$，对等式两边同时关于 x 同时求导可得 $2(x+1)f(x^2+2x)=2xe^{-x^2}$，令 $x^2+2x=3$ 解得 $x=1$ 或者 $x=-3$（舍去），所以有 $f(3)=\dfrac{1}{2e}$；

（11）【答案】1

（12）【答案】$\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$

（13）【解】设矩阵 A 与 B 有相同特征值，由于 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|B|,2\lambda_3=2,\Rightarrow\lambda_3=1$，所以 A 与 B 的特征值均为：

$1,1,2$；$A+E$ 的特征值分别为 $2,2,3$；则 $(A+E)^{-1}$ 特征值分别为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$，

另一方面 $(2B)^*=2^{n-1}B^*=4B^*$，此时可得：

$$\begin{vmatrix}(\mathrm{A}+\mathrm{E})^{-1} & 0\\ 0 & (2\mathrm{B})*\end{vmatrix}=|(A+E)^{-1}||(2B)^*|=|(A+E)^{-1}||4B^*|=\frac{1}{12}4^3|B|^2=\frac{64}{3}$$

（14）【解】由题可知 $P\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le64\}\le0.977=\Phi(2)$，根据中心极限定理知：

$$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le64\}\approx\Phi\left(\frac{64-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{64-n2}{4\sqrt{n}}\right)，则\ \Phi\left(\frac{64-2n}{4\sqrt{n}}\right)<\Phi(2)\Rightarrow\frac{64-2n}{4\sqrt{n}}<2$$

即 $n+4\sqrt{n}-32>0$，可知 $n>16$。

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。

（15）（本小题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）设切点为 (x_0,x_0^3)，则有 $\dfrac{5-x_0^3}{1-x_0}=3x_0^2$，解得 $x_0=-1$，相应的切线 l 的方程为 $y=3x+2$；

（Ⅱ）l 与 C 的交点满足方程 $\begin{cases}y=x^3\\y=3x+2\end{cases}$，解得 $x=-1$ 与 $x=2$，因而 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}x=[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4]\Big|_{-1}^{2}=\frac{51}{4};$$

（Ⅲ）所求体积 $V=2\pi\int_0^2x(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}x=2\pi[x^3+x^2-\frac{1}{5}x^5]\Big|_0^2=\dfrac{56\pi}{5}$。

（16）（本小题满分 10 分）

【解】$xy'+y=e^x \Rightarrow \quad (xy)'=e^x \quad xy=e^x+c \quad y=\dfrac{e^x+c}{x}$

$\because \lim\limits_{x\to 0} y(x)=1$　有　$c=-1$　故　$F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

于是　$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})$

而　$\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{x}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}-1)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$

故 $f(x)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})=\dfrac{d}{dx}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!})=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(n-1)x^{n-2}}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$　$(x\neq 0)$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=[\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})]|_{x=1}=1$.

(17)（本小题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）对等式两边关于 x 同时求导可得

$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=3 \\ 4x-6y\dfrac{dy}{dx}+10z\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$ 令 $x=1,y=1,z=1$ 可得该方程的解为 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P=\dfrac{9}{16},\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_P=-\dfrac{1}{16}$，故

所求切线方程为 $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$，上述切线的参数方程为 $x=1+16t,y=1+9t,z=1-t$ 代入到平面的方程中则有 $1+16t+a(1+9t)+b(1-t)+3=0$，即有 $\begin{cases} a+b+4=0 \\ 9a-b+16=0 \end{cases}$ 解得 $a=b=-2$.

(18)（本小题满分 10 分）

【证明】证法一　原不等式可改写为 $be^{-b}+\dfrac{b}{e^2}>ae^{-a}+\dfrac{a}{e^2}$，令 $f(x)=xe^{-x}+\dfrac{x}{e^2},x\in[0,2]$，

则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}+\dfrac{1}{e^2}$，$f''(x)=(x-2)e^{-x}$，$x\in(0,2)$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上单减，$f'(2)=0$，所以 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>f'(2)=0$，即函数 $f(x)=xe^{-x}+\dfrac{x}{e^2}$ 在 $[0,2]$ 上单增，所以当 $0<a<b<2$ 时，有不等式 $be^{-b}-ae^{-a}>\dfrac{1}{e^2}(a-b)$ 成立.

证法二　令 $f(x)=xe^{-x},x\in[0,2]$，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，对函数 $f(x)=xe^{-x}$ 在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=be^{-b}-ae^{-a}=f'(\xi)(b-a)=(1-\xi)e^{-\xi}(b-a),$$

又 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$，$x\in(0,2)$ 时，$f''(x)=(x-2)e^{-x}<0$，所以 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$ 在 $[0,2]$ 上单减，所以有 $f'(\xi)=(1-\xi)e^{-\xi}>f'(2)=\dfrac{1}{e^2}$，由此可得

$be^{-b}-ae^{-a}=(1-\xi)e^{-\xi}(b-a)>\dfrac{1}{e^2}(b-a)$.

(19)（本小题满分 10 分）

【解】不难得到Σ的曲面方程为 $z^2+x^2=y+1$ $(-1\le y\le 1)$，由此代入曲面方程 $y-(z^2+x^2)=-1$ 曲面积分：　$I=-\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+(1-y^3)dzdx+(2y^2z-z^2)dxdy$，

取曲面 $\Sigma_1: y=1, dy=0$, 有 Gauss 公式可知：

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^2dydz+(1-y^3)dzdx+(2y^2z-z^2)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2x-y^2-2z)dv$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}y^2dv=-\int_{-1}^{1}y^2dy\iint\limits_{D_y}dzdx=-\pi\int_{-1}^{1}y^2(y+1)dy=-\frac{2}{3}$$

其中对 $y=y\in[-1,1], D_y: z^2+x^2\le y+1$，利用截面法积分.

另一方面，在曲面 $\Sigma_1: y=1$ 上积分 $\iint\limits_{\Sigma_1}x^2dydz+(1-y^3)dzdx+(2y^2z-z^2)dxdy=0$，由此知

$$I=-\iint\limits_{\Sigma}=-(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})x^2dydz+(1-y^3)dzdx+(2y^2z-z^2)dxdy$$

$$=-\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x^2dydz+(1-y^3)dzdx+(2y^2z-z^2)dxdy=\frac{2}{3}$$

(20)（本小题满分 11 分）

【解】(1) 设（Ⅰ）（Ⅱ）的系数矩阵分别为 A、B，则

$$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&1&-1&-6\\3&a&1&-2\\0&2&-5&a-1\\1&-1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{解}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&-2\\0&0&-1&2\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组有非零公共解 $\Rightarrow a=-1$

(2) 求解 $Cx=0$ 得基础解系 $\eta=(2,6,2,1)^T$，$\therefore$ 非 0 公共解为 $k\eta$　$(k\ne 0)$

(21)（本小题满分 11 分）

【解】(1) $|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$，得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$，由 A 与对角阵相似知 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的有两个线性无关的特征向量，即 $(6E-A)x=0$ 得基础解系有两个解向量 $3-r(6E-A)=2$，故 $r(6E-A)=1$，$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&a&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $a=0$。此时二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$

$=2(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-\frac{21}{2}x_2^2+6x_3^2$，令 $\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{5}{2}y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，则有

$f=X^TAX=Y^TC^TACY=2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2$

　

（2）$X^TAX=0$ 即 $2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2=0$ 表示锥面。

（22）（本小题满分 11 分）

【解】（I）X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

$$P\{Y\le \frac{1}{2}\}=P\{X\le \frac{1}{2},|X|\le 1\}+P\{X\ge -1,|X|>1\}$$

$$=P\{-1\le X\le \frac{1}{2}\}+P\{X>1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx+e=1-e^{-1}+\text{e}.$$

（II）由于 $y=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ -x, & |x|>1 \end{cases}$，$x\ge 0$，$Y$ 的有效区域为 $y<1$，$y=-1$，$y=0$，$y=1$ 均为分界点，Y 分布函数：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le y,|X|\le 1\}+P\{X\ge -y,|X|>1\}$，

讨论：

1) $y<-1$，$F_Y(y)=P\{X\ge -y,X>1\}=P\{X\ge -y\}=1-P\{X\le -y\}=e^{y}$；

2) $-1\le y<0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\ge -y,X>1\}=P\{X\ge 1\}=e^{-1}$；

3) $0\le y<1$，$F_Y(y)=P\{0\le X\le y\}+P\{X>1\}=1-e^{-y}+e^{-1}$

4) $y\ge 1$，$F_Y(y)=1$

由此分布函数为　$F_Y(y)=\begin{cases} e^{y}, & y<-1 \\ e^{-1}, & -1\le y<0 \\ 1-e^{-y}+e^{-1}, & 0\le y<0 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$；

（III）$E(XY)=\int_0^1 x^2e^{-x}dx-\int_1^{\infty}x^2e^{-x}dx=2\int_0^1 x^2e^{-x}dx-1=2-5e^{-1}$。

（23）（本小题满分 11 分）

【解】（I）X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)}{2\sigma^2}}$，似然函数为：

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}，\text{取对数有：}$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2，\quad \frac{d\ln L}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$$

解得：最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ 或 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$；

(II) 由于 $X-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，$\theta=P\{X-\mu_0\le 1\}=P\{\frac{X-\mu_0}{\sigma}\le \frac{1}{\sigma}\}=\Phi(\frac{1}{\sigma})$，

由最大似然估计的性质知，σ 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}$，又 $\Phi(x)$ 为单调连续函数，所

　

以 $\theta=P\{X-\mu_0\le 1\}$ 的最大似然估计为 θ $\hat{\theta}=\Phi(\frac{1}{\hat{\sigma}})=\Phi(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}})$；

(III) $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$，因为 $X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，由样本独立性，及 χ^2 分布的定义可知 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，所以 $\frac{D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)}{\sigma^4}=2n$，$D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)=2n\sigma^4$

即 $D(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)=\frac{2}{n}\sigma^4$.

数学一模拟 5 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(1)【解】 解法一：两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$，令

$$f(x)=kx^2-\ln x, f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\frac{1}{2e}$ 时有 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{2k}})$ 上单减，在 $(\frac{1}{\sqrt{2k}},+\infty)$ 上单增，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 有无实根，即两个曲线有没有交点，答案 A.

解法二：（取特殊值法）取 $k=\frac{1}{2}>\frac{1}{2e}$，则两曲线交点横坐标满足方程 $\frac{1}{2}x^2-\ln x=0$，

令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, f'(x)=x-\frac{1}{x}=0, x=\pm1, f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f''(x)=\frac{1}{x^2}>$，因此函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹的，即 $f(1)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值，由于 $f(1)=\frac{1}{2}>0$ 因此函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，因此两曲线无交点，答案为 A.

(2)【解】 因为 $\ln(1+e^{\cos x})\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1+e^{\cos x})\cos x\,dx=\sin x\ln(1+e^{\cos x})\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}dx>0$$，故选 A.

(3)【解】(A) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{a_k}{a_{k+1}})=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}})\le\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_{k+1}-a_k}{a_1})$

$=\frac{1}{a_1}[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1}\le M$，($\{a_n\}$ 单增有界)；所以收敛.其他都不正确.

(4)【答案】(B)

(5)【解】由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}, |B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-6.$

(6)【答案】(A)

(7)【解】Bayes 公式问题，设事件 $A=\{$先取的球为红球$\}$，$B=\{$后取的两个球均为白球$\}$，由全概率公式知

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{3}{10}\frac{C_7^2}{C_9^2}+\frac{7}{10}\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{7}{12};$$

则先取球为红球的概率为 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{3}{10}$

(8)【解】已知 X 为两点分布 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 独立，可知 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(x)=P\{X+Y\le x\}=P\{Y\le x,X=0\}+P\{Y\le x-1,X=1\}$$
$$=\frac{1}{2}[P\{Y\le x\}+P\{Y\le x-1\}]=\frac{1}{2}[F_2(x)+F_2(x-1)]$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9)【解】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos xe^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)}{x(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$.

(10)【解】令 $u=e^x$，$x\in(-\infty,0]$ 时 $u\in(0,1]$，$x\in(0,+\infty)$ 时 $u\in(1,+\infty)$，因而有 $f'(u)=\begin{cases}\ln u+1, u\in(0,1],\\ 1,\quad u\in(1,+\infty),\end{cases}$ $f(x)=\int_1^x f'(u)\,du+f(1)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty).\end{cases}$ 答案是 $f(x)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$

(11)【解】 欧拉方程，令 $x=e^t,t=\ln x$，$x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt},x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$，代入可得微分方程：

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0$，特征方程为 $(r+1)^2=0$，$r_{1,2}=-1$，通解为：

$y=(C_1+C_2t)e^{-t}$，代入 $x=1,t=0$，$y(0)=2,y'(0)=0$，所以 $C_1=C_2=2$，得解为

$y=\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$.

(12)【解】$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(13)【解】 因为 A 的特征值为 3，-3，0，所以 $A-E$ 特征值为 2，-4，-1，从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$，即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1$，$B^{-1}$ 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$，于是 $|B^{-1}+2E|=-8$

(14)【解】 由于下侧分位点 $u_{\alpha/2}$=1.64 时，方差 σ^2 已知时，μ 的 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的下侧为 $\bar{X}-u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=20-1.64\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，即 $20-1.64\dfrac{1}{\sqrt{n}}$=19.59，解得 $n=16$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。

(15)（本小题满分 10 分）

【解】 $f(x)=\begin{cases}ax+x^c\sin\dfrac{1}{x}, x>0,\\ e^{3x}+b,\quad x\le0,\end{cases}$ 可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to0^+}(ax+x^c\sin\dfrac{1}{x})=f(0)=b+1$，必有 $b=-1$，且 $c>0$，又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=3$，

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+x^c\sin\frac{1}{x}}{x}=a+\lim_{x\to 0^+}x^{c-1}\sin\frac{1}{x}=3，所以有\ a=3,c>1.$$

（16）（本小题满分 10 分）

【解】（I）求全微分 $dz-[f_1'(2xdx+2ydy)+f_2'dz]=ydx+xdy$，令 $u=x^2+y^2$ 可得

$$dz=\frac{y+2xf_u'}{1-f_z'}dx+\frac{x+2yf_u'}{1-f_z'}dy$$

（II）由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y+2xf_u'}{1-f_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2yf_u'}{1-f_z'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{[1+2x(f_{uu}''2y+f_{uz}''\frac{\partial z}{\partial y})](1-f_z')+(y+2xf_u')(f_{zu}''2y+f_{zz}''\frac{\partial z}{\partial y})}{(1-f_z')^2}$$

代入点 $(1,1)$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0,\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0;\ \ 1+2f_u'=0$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{(1+4f_{uu}'')(1-f_z')+2y(1+2f_u')f_{zu}''}{(1-f_z')^2}=\frac{1+4f_{uu}''}{1-f_z'}$$

（17）（本小题满分 10 分）

【解】对 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(x-t)dt$，令 $x-t=u,dt=-du$ 则方程为：

$f(x)=\sin x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$，所以 $f'(x)=\cos x+\int_0^x f(u)du$，

又可得 $f(0)=0,f'(0)=1$，则在 $x=0$ 的领域内有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 为增函数，所以 $x>0,f(x)>0$，对于 $a_n=f(\frac{1}{n})$，$a_n\ge a_{n+1}$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})=f(0)=0$，所以交错级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛；

另一方面，$1=f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$，所以 $f(\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 发散。

（18）（本小题满分 10 分）

【证明】（I）由题设知 $f(0)$ 与 $f(1)$ 取值同为正数或同为负数，$f(0)f(\frac{1}{2})<0$，则必有 $f(\frac{1}{2})f(1)<0$，根据连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2}),\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

（II）令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1)$ 使得

$F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0$，即有 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

（19）（本小题满分 10 分）

【解】（I）由 Gauss 公式可知：$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$, 由此知微分方程：

$xf'(x)+2f(x)-x^2=0,\ f'(0^+)=0$ 解微分方程为：

$f(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[\int xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C]=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{C}{x^2}$，代入 $f'(0^+)=0,\ C=0$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$。

（II）设 $\Sigma_1: z=1, x^2+y^2\le 1$ 下侧为正侧，Ω 为由 Σ 和 Σ_1 围成的闭区域，由此可知

原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}0dv=0$, 所以原式：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}=-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-x^2)dxdy=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr=-\frac{\pi}{4}$$

（20）（本小题满分 11 分）

【解】（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$, 有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 B^{T} 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$ 的解。

解此方程组的基础解系 $(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{T}}, (-1\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 α_1，α_2 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0 \text{即} \begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\ \ -2k_1+k_2\ \ 3k_1-2k_2\ \ -k_1+k_2)^T$, 因为 $x_3=-x_4$, 即 $3k_1-2k_2=k_1\text{-}k_2$，即 $k_2=2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k\ \ 0\ \ -k\ \ k)^{\mathrm{T}}$, k 为任意常数。

（21）（本小题满分 11 分）

【解】（I）由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量。设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由不同特征值对应特征向量正交，则 $x_1+x_3=0$，对应基础解析：

$\xi_1=(1,0,-1)^T$，$\xi_2=(0,1,0)^T$ 即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量，单位化：

$\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,-1)^T$，$\eta_2=(0,1,0)^T$　$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0\,1)^T$，令 $U=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 可知：

$$U^TAU=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix};$$

（II）由以上得知 $A=U\Lambda U^T$ 为二次型矩阵，对应二次型为 $f=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$.

　

(22)（本小题满分 11 分）

【解】（I）由于$1=C\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} ydy=\frac{2}{5}C$，则$C=\frac{5}{2}$，

又$f_X(x)=\frac{5}{2}\int_{x^2}^{x} ydy=\frac{5}{4}x^2(1-x^2), 0<x<1$；

（II）$f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2(1-x^2)}, & x^2<y<x(0<x<1)\\ 0, & others\end{cases}$

(III)　$Z=X-Y$，代入公式

$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x\quad$，$f(x,x-z)=\frac{5}{2}(x-z)$ $D_Z:\begin{cases}0<x<1\\ 0<z<x-x^2\end{cases}$

由$0<z<x-x^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$，讨论：

$0\le z<\frac{1}{4}$，$f_z(z)=\frac{5}{2}\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-z}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-z}}(x-z)dx=\frac{5}{2}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-z}-2z\sqrt{\frac{1}{4}-z}]=\frac{5}{4}(1-4z)\sqrt{\frac{1}{4}-z}$

所以知　$f_z(z)=\begin{cases}\frac{5}{4}(1-4z)\sqrt{\frac{1}{4}-z}, & 0<z<\frac{1}{4}\\ 0, & others\end{cases}$

(23)（本小题满分 11 分）

【解】（I）求矩估计：

由于$\mu=\int_{\theta}^{+\infty} x2e^{-2(x-\theta)}dx=\int_0^{+\infty}(\theta+t)2e^{-2t}dt=\theta+\frac{1}{2}$

令$\mu=\bar{X}$，$\therefore\bar{X}=\theta+\frac{1}{2}$，所以$\theta$的矩估计为$\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$；

（II）求矩估计：

1）$L=\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)}=2^n e^{2n\theta-2\sum_{i=1}^{n}x_i}$，$x_i\ge\theta$

2）$\ln L=n\ln 2+2n\theta-2\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\frac{d\ln L}{d\theta}=2n>0$，所以$L$为$\theta$的单调增函数，要使$L$大，只须$\theta$大即可；

3）在$x_i\ge\theta$下，由最大似然估计的定义知：θ的最大似然估计为

$\hat{\theta}_L=\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$

（III）由于X的分布函数为$F(x;\ \theta)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，由公式知

$\hat{\theta}_L=\min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$的分布函数为$F_{\hat{\theta}_L}(z;\ \theta)=1-(1-F(x;\ \theta))^n=\begin{cases}1-e^{-2n(z-\theta)}, & z\ge\theta\\ 0, & z<\theta\end{cases}$，

因此可知 $\hat{\theta}_L$的概率密度函数为 $f_{\hat{\theta}_L}(z;\ \theta)=\begin{cases}2ne^{-2n(z-\theta)}, & z\ge\theta\\ 0, & z<\theta\end{cases}$，对应概率：

$P\{\hat{\theta}_L\le 2\theta\}=\int_{\theta}^{2\theta}2ne^{-2n(z-\theta)}dz=\int_0^{\theta}2ne^{-2nt}dt=1-e^{-2n\theta}$.

　