绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\geq 0, \\ \dfrac{1}{1-x}+1, x<0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的（ ）。

(A)连续点 (B)可去间断点 (C)跳跃间断点 (D)无穷间断点

（2）设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续， $f(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)\ln(1+x^2)}{(e^{|x|}-1)\sin^2 x}, x\neq 0, \\ 1, \quad x=0, \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）.

（A） $g(0)=0, g'(0)$ 不存在 （B） $g(0)=0, g'(0)=1$

（C） $g(0)=1, g'(0)$ 不存在 （D） $g(0)=1, g'(0)=1$

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， $f(a)=f(b)=0$，且 $f'(a)f'(b)<0$，那么下列说法正确的是（ ）.

（A）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>0$

（B）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)<0$

（C）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$

（D）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$

(4) 设 $k\geq 0$，若方程 $\ln x=kx$ 有无实根，则必有（ ）。

(A） $k>\dfrac{1}{e}$ （B） $0<k<\dfrac{1}{e}$ （C） $k=\dfrac{1}{e}$ （D） $k=0$

（5）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为可导函数， $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则下列说法正确的是（ ）.

（A）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为偶函数

（B）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为奇函数

（C）若 $f'(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数

（D）若 $f'(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也奇函数

（6）已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 某领域内有定义，且 $f(0,0)=0$， $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

（A）连续且可微 （B）连续但不可微

（C）可微但不连续 （D）不连续也不可微

（7）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,则 A 与 B ( )

(A) 合同不相似 (B) 相似不合同 (C)合同且相似 (D) 不相似也不合同

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为3阶非0矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{pmatrix}$，则（）.

(A) $a=-1$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　(B) $a\neq -1$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(C) $a=2$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　(D) $a\neq 2$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 p 是满足一定条件的常数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})=1$，则 $p=$______________.

（10）设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\cos x}{\sqrt{1+2x}-1}=1$，那么曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程是______________________.

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sqrt{n^4+i^4}-n^2}{n^2 i}=$______________..

（12）积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x=$___________.

（13）方程 $y'=\dfrac{1}{xy+y^3}$ 的通解为_____________.

（14）设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，矩阵 A 满足 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=$_______ .

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 10 分） 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\\ \int_0^y \cos u^2\,\mathrm{d}u+\int_t^1\dfrac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

（16）（本小题满分 10 分） 求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2$ 在区域

$$D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{4}+y^2\le 1, y\ge\frac{1}{2}x-1\}$$

上的最大值与最小值.

（17）（本小题满分 10 分） 计算二重积分

$$I=\iint_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,d\sigma,$$　　其中 $D:0\le x\le\pi, 0\le y\le\pi$.

（18）（本小题满分 10 分）已知函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,\frac{1}{2})$，且对 $\forall t\in(0,+\infty)$，曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上的一段弧的弧长等于它与 x 轴与 y 轴及直线 $x=t$ 围成图形面积的两倍.（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的表达式;（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴，y 轴及直线 $x=1$ 围成的平面图形绕 x 旋转一周所形成立体的表面积.

(19)（本小题满分 10 分）设 $f(x)$ 是单调可导函数，$f(-\frac{\pi}{2})=0, f(\frac{\pi}{2})=1$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，且 $f(x)$ 满足 $\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x(\frac{1}{1+e^{\pi}}+\frac{\sin t}{1+e^t})\sin t\,\mathrm{d}t$，求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

（20）（本小题满分 11 分）设 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1=2, x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求它的值.

（21）（本小题满分 11 分）　证明：当 $x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\geq(x-1)^2$.

（22）（本小题满分 11 分）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零阵, 向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^{\mathrm{T}}{}_{,}\ \beta_2=(a,2,1)^T{}_{,}\ \beta_3=(b,1,0)^T$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解向量，且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解.（Ⅰ）　求常数 a,b 的值;（Ⅱ）求 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 通解

（23）（本小题满分 11 分）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.　（Ⅰ）求行列式 $\left|\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{A}^{-1}\right|$；（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$.

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均不存在，那么下列命题正确的是（ ）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也不存在

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也存在

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 均不存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 中只要有一个存在，另一个必定不存在

(2) 设 $f(u)$ 为可导函数，曲线 $y=f(e^x)$ 的过点 $(1,2)$，且它在点 $(1,2)$ 处的切线过点 $(0,0)$，那么函数 $f(u)$ 在 $u=e$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=0.1$ 时相应的函数值增量的线性主部是（ ）.

（A）0.02　　(B) $\dfrac{0.02}{e}$　　(C) $-\dfrac{0.02}{e}$　　(D) -0.02

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)\,\mathrm{d}t$，若 $f(x)$ 是单调增加的奇函数，则 $F(x)$ 是（　　）.

（A）单调增加的奇函数　　（B）单调减少的奇函数

（C）偶函数　　（D）奇偶性不确定

(4) 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)(C_1,C_2$ 为任意常数）是该方程同解的充分必要条件是（　　）.

（A）$y_1(x)y_1'(x)-y_2(x)y_2'(x)=0$　　（B）$y_1(x)y_1'(x)-y_2(x)y_2'(x)\neq 0$

（C）$y_1(x)y_2'(x)-y_1(x)y_2'(x)=0$　　（D）$y_1(x)y_2'(x)-y_1(x)y_2'(x)\neq 0$

(5) 设 $f(x,y)=g(x,y)|x-y|$，$g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，则 $g(0,0)=0$ 是 $f_x'(0,0)$ 和 $f_x'(0,0)$ 存在的（　　）.

(A)充分非必要条件　　(B)必要非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既然非充分也非必要条件

(6) 设 $D:|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D \dfrac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{3}$

(7) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（　　）.

(A) 3　　(B) -3　　(C) 6　　(D) -6

(8) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是（　　）.

(A) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　　(B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$　　(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\ln 3}{3}+\cos\dfrac{\ln 4}{4}+\cdots+\cos\dfrac{\ln(n+2)}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}}=$____________.

(10) 设 $f'(u)=\ln(1+u^2),g(x)=f(\dfrac{2x-1}{2x+1})$，则 $g'(0)=$__________.

(11) 设 $a>0$，则 $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\ln\dfrac{x-a+\sqrt{1+(x-a)^2}}{2}=$____________.

(12) 设曲线的参数方程为 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\ln\tan t+\cos t,\end{cases}$ 则对应于 $t\in[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ 的曲线弧长是__________.

(13) 积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x=$__________.

(14) 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $3,-3,0$ 则 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=$__________.

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)设 $f(x)=\begin{cases}e^x,x\le 0,\\ x^2,\quad x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x-\sin x}}$.

(16)(**本题满分 10 分**)设曲线 $y=y(x)$ 与直线 $4x-4y=3$ 在点 $(1,\dfrac{1}{4})$ 处相切，且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$，求曲线 $y=y(x)$ 在相应于 $x\in[-1,1]$ 的点 (x,y) 处的曲率.

(17)(**本题满分 10 分**) 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=f(xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2))$,求证关系式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$ 成立。

.

(18)(**本题满分 10 分**)由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y=0,x=4$ 围成一个曲边三角形，在曲边 $y=x^2$ 上任取一点 P，过 P 作抛物线的切线，设切线与抛物线 $y=x^2$、直线 $x=4$ 及 x 轴所围成的面积为 A.(Ⅰ)求出点 P 的坐标使面积 A 取值最小，并求这个最小值;(Ⅱ)求面积最小时的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的立体体.

(19)(**本题满分 10 分**)设函数 $y=y(x)$ 是初值问题 $xy'-(2x^2-1)y=x^3$， $y(1)=a$ 的解.(Ⅰ)求函数 $y(x)$ 的表达式;(Ⅱ)是否存在常数 a，使得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在有限极限值，若存在，试求该极限值.

(20)(**本题满分 11 分**) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续， 在 $(0,1)$ 内可导， 且 $f(0)f(1)>0,\ f(0)f(\dfrac{1}{2})<0$，证明:(Ⅰ)在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η 使得

$f(\xi)=f(\eta)=0$；（Ⅱ）$\exists\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$.

（21）（**本题满分 11 分**）计算二重积分 $\iint\limits_D x(y+1)d\sigma$，其中积分区域 D 由 y 轴与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}, y=\sqrt{2x-x^2}$ 围成.

（22）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$，（Ⅰ）问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解？（II）有解时求出全部解.

（23）（**本题满分 11 分**）（Ⅰ）已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 的平方项系数均为 0，设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)^T$，且满足 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$.（I）求该二次型表达式；（II）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次形为标准型，并写出所用坐标变换；（III）若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定，求 k 的取值范围.

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二（模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}$ 的可去断点个数为（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2)设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得增量 Δx 时相应的函数值增量 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(1)=0$，则当 $x\to 0$ 时 $\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $\ln(1+x^4)$ 的（ ）。

（A）高阶无穷小 （B）低阶无穷小 （C）等价无穷小 （D）同阶而非等价无穷小

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶导数连续，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=2$，则有（ ）。

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，但点 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，但点 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（C） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，但点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，且点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（4）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$，则 $f(x)=$（ ）。

（A） $\sqrt{x}-1$ （B） $\sqrt{x}+1$ （C） $2\sqrt{x}-1$ （D） $2\sqrt{x}+1$

（5） 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（ ）

（A） $x_1>x_2,y_1<y_2$ （B） $x_1<x_2,y_1<y_2$

（C） $x_1>x_2,y_1>y_2$ （D） $x_1<x_2,y_1>y_2$

（6）设平面区域 $D:x^2+y^2=1$，记 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,I_2=\iint\limits_D \cos x^2\cos y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则有（ ）.

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_2<I_1<I_3$ (C) $I_3<I_1<I_2$ (D) $I_3<I_2<I_1$

（7）设 A,B 为正定矩阵，C 是可逆矩阵，下列矩阵不是正定矩阵的是（ ）

（A） C^TAC （B） $A^{-1}+B^{-1}$ （C） A^*+B^* （D） $A-B$

（8）已知5×4矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，若$\boldsymbol{\eta}_1=(3\quad 1\quad -2\quad 1)^T$，$\eta_2=(0\quad 1\quad 0\quad 1)^T$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，现有下列四个命题：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.　　（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表出.

（3）$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关.　　（4）秩$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1,+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)=3$.

上述四个命题中正确的是（　　）.

（A）（1）（3）　　（B）（2）（4）　　（C）（2）（3）　　（D）（1）（4）\

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x-2\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=$______.

（10）设$y=y(x)$由$(\cos x)^y=(\sin y)^x$确定，则$\mathrm{d}\,y=$______.

（11）设$x>1$，那么曲线$y=\dfrac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2-1}}$的斜渐近线是______.

（12）设$A>0$，点a_n满足等式$\displaystyle\int_{a_n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^{n+1}}=A\,(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______.

(13)微分方程$y''+a^2y=\dfrac{1}{2}\sin ax\,(a>0)$的通解是______.

(14)设 4 维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$均为非零向量，且均与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$正交，则$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（**本小题满分 10 分**）设函数$f(x)$在$x=0$处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\sin\frac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=1$，求$f''(0)$的值.

(16)（**本小题满分 10 分**）求$\displaystyle\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}\,x$.

.

(17)（**本小题满分 10 分**）设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，且$f(0)=1$，证明：$\exists\eta\in[0,1]$使得$f'(\eta)=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x-2$.

(18)（**本小题满分 10 分**）高温物体的冷却速度遵循所谓的冷却定理：“物体冷却速度与该物体与周围介质的温度差成正比”. 设某物体开始温度为$100^\circ C$，放在$20^\circ C$的空气中，经过600秒后下降到$60^\circ C$，问从$100^\circ C$下降到$25^\circ C$需要多少时间？

(19)（**本小题满分 10 分**）设$f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$,试问参数$a,b$分别满足什么条件时，$f(x,y)$有唯一极大值？$f(x,y)$有唯一极小值？

（**20**）(**本小题满分 11 分**)计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由不等式 $x^2+y^2\le 4, x^2+y^2\ge 2y$ 确定的区域.

（**21**）（**本小题满分 11 分**）设 $f(x)=\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t\ (x\ge 0)$。

(I) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值； (II) 问 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是否有最大值？为什么？

（**22**）（**本小题满分 11 分**）已知 1 是 3 阶实对称矩阵 A 的一个特征值，且

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

（I）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；（Ⅱ）如果 $\boldsymbol{\beta}=(1,-1,5)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$

（**23**）（**本小题满分 11 分**）已知齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为

$$\begin{cases} x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0 \end{cases},$$

又矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 2×4 矩阵， $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-2,1)^T$；

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{B}$；(Ⅱ)若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；(III)求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解。