绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（A）．

解 点 $x=1$，$x=-1$ 及 $x=\dfrac{1}{2}$ 均为间断点，且

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\infty,$$

所以（B），（C），（D）$x=1$ 均正确．

由于当 $x<-2$ 时 $f(x)$ 没有定义，故由间断点的概念，点 $x=-2$ 为不是间断点．

(2)**答案**：选(C).

解 记 $D_1:|x|+|y|\le1,\ D_2:x^2+y^2\le1$．因为在 D_1 上

$$\sin(x^2+y^2)<x^2+y^2<e^{x^2+y^2}-1,$$

所以 $I_3<I_1$．

因为 I_1 与 I_2 的被积函数相同且被积函数非负，又 $D_1\subset D_2$，所以 $I_1<I_2$，故选(C).

（3）**答案**：选(D).

解 $F(z^2-x^2,z^2-y^2)=0$ 两边对 x 求偏导数，得 $F_1'(2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x)+F_2'2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得 $\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1'}{F_1'+F_2'}$．由对称性 $\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_2'}{F_1'+F_2'}$．所以 $\dfrac{z}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{z}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$，从而，$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xy}{z}$．

（4）**答案**：选(D)．

解 因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$．又因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})=0$，故 $f(0)=0$．

假设 $f'(0)\neq0$，不妨设 $f'(0)>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}[f(\frac{1}{n})-f(0)]/\frac{1}{n}=f'(0)>0.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 发散，矛盾．故选(D)．

（5）**答案**：选（D）．

解 注意到与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的向量组，其向量个数可以大于 3 个，且线性相关．同样，$\xi_1,\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_2+\xi_3$ 线性相关，而 $P\xi_1,P\xi_2,P\xi_3$ 未必是 $Ax=0$ 的解向量．当 P 为 n 阶可逆矩阵时，$(PA)x=0$ 与 $Ax=0$ 是同解线性方程组，故具有相同的基础解系，故选（D）．

（6）**答案**：选（B）.

解 矩阵能否与对角矩阵相似与它的秩没有必然的关系，如秩为 1 的两个矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，前者与对角阵相似，后者不能与对角阵相似；秩为 2 的两个矩阵$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$也是如此；故①，④均不正确，从而可排除（A）、（C）和（D）. 关于 ②，设A的特征值为λ_1，λ_2，则$|A|=\lambda_1\lambda_2<0$，这表明A有两个互异的特征值，故②是A与对角矩阵相似的充分条件；关于③，由$|\lambda E-A|=\lambda^2-(a+d)\lambda-bc$知，判别式$(a+d)^2+4bc>0$，故$A$有两个互异的特征值，故③也是$A$与对角矩阵相似的充分条件，综上知，应选（B）.

（7）**答案**：选（A）.

解 由$P((A-C)B)=P(A-C)P(B)$，得$P(AB)-P(C)=[P(A)-P(C)]P(B)$，解得

$$P(C)=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}=\frac{[P(A)-P(A)P(B)]-[P(A)-P(AB)]}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P(A)P(\overline{B})-P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=P(A)-P(A|\overline{B}).$$

（8）**答案**：选（A）.

解 因为 $\dfrac{X_2}{|X_1|}=\dfrac{\frac{X_2-0}{\sigma}}{\sqrt{(\frac{X_1-0}{\sigma})^2}}\sim t(1)$，所以$P(\left|\dfrac{X_2}{X_1}\right|<k)=P(-k<\dfrac{X_2}{|X_1|}<k)=\alpha$，故$k=t_{\frac{1-\alpha}{2}}(1)$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：填“$e^{-\frac{1}{2}}$”.

解 在点$(1,1)$处，曲线对应的参数$t=0$. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2ne^{2n+1}+1}{e^t}$.

当$t=0$时，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=2n+1$.所给曲线在$(1,1)$处的切线方程为：$y-1=(2n+1)(x-1)$.

切线与x轴的交点横坐标$x_n=1-\dfrac{1}{2n+1}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{2n+1})^n=e^{-\frac{1}{2}}$.

（10）**答案**：填“$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$”.

解 原方程即：$\sqrt{\dfrac{y}{x}}+(2-\sqrt{\dfrac{x}{y}})\dfrac{dy}{dx}=0$，为齐次方程. 令$u=\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，所以$\sqrt{u}+(2-\dfrac{1}{\sqrt{u}})(u+x\dfrac{du}{dx})=0$，整理得$(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{2u\sqrt{u}})du=-\dfrac{dx}{x}$，两边积分得$\ln u+\dfrac{1}{\sqrt{u}}=-\ln x+C$. 故原方程通解为$\sqrt{\dfrac{x}{y}}=C-\ln y$（$C$为常数）.

20、21全程考研资料请加群712760929

（11）**答案**：填“$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$”.

解法一 令 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}=t$，则 $x=\tan^2 t$，$dx=\frac{2\sin t}{\cos^3 t}dt$，

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{2t\sin t}{\cos^3 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}td\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{t}{\cos^2 t}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

解法二 由分部积分法

$$\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\pi-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

$$\overset{t=\sqrt{x}}{=}\pi-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2}{1+t^2}dt=\pi-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

（12）**答案**：填“$dx-2dy$”

解 令 $\begin{cases}x+y=u,\\ \frac{y}{x}=v,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{u}{1+v},\\ y=\frac{uv}{1+v},\end{cases}$ 代入原式并整理得

$$f(u,v)=u\frac{1-v}{1+v},\quad f(x,y)=x\frac{1-y}{1+y}.$$

$f_x'(x,y)=\frac{1-y}{1+y}$，$f_y'(x,y)=\frac{-2x}{(1+y)^2}$，故 $f_x'(1,0)=1$，$f_y'(1,0)=-2$，所以

$$df(x,y)\big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)dx+f_y'(1,0)dy=dx-2dy.$$

（13）**答案**：填“-2^m”.

解 由 $A=BA\Rightarrow(E-B)A=O\Rightarrow r(E-B)+r(A)\le m$，又 $r(A)=m$，可知 $B=E$．故由 $CB=O\Rightarrow C=O$，则 $|AC-2B|=|-2E|=(-2)^m$.

（14）**答案**：填“$\frac{1}{e^2}$”.

解 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln^X t}dt\overset{令u=\ln t}{=}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{u^X}du$，当且仅当 $X>1$ 时收敛，故反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{t\ln^X t}dt$ 收敛的概率为 $P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}2e^{-2x}dx=\frac{1}{e^2}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**解** （Ⅰ）$f'(x)=4x^3+3ax^2=x^2(4x+3a)$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=0,x_2=-\frac{3}{4}a$.

如果 $a>0$，则 $-\frac{3}{4}a<0$．当 $x\in(-\infty,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,0)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

如果 $a<0$，则 $-\frac{3}{4}a>0$．当 $x\in(-\infty,0)\cup(0,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

综上可知，当 $x\in(-\infty,-\frac{3}{4}a)$ 时，$f(x)$ 单调下降；当 $x\in(-\frac{3}{4}a,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调上升，所以 $f(x)$ 仅在点 $x=-\frac{3}{4}a$ 处取最小值 $f(-\frac{3}{4}a)=-\frac{27}{256}a^4+b$.

（II）利用（I）的结论，并且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，可得

①当 $-\frac{27}{256}a^4+b>0$ 时，方程 $f(x)=0$ 无实根；

②当 $-\frac{27}{256}a^4+b=0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有唯一实根；

③当 $-\frac{27}{256}a^4+b<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 有两个不同的实根.

（III）由（II）可知，如果方程 $f(x)=0$ 有唯一实根，则有 $-\frac{27}{256}a^4+b=0$.

又 $f''(x)=12x^2+6ax=6x(2x+a)$，令 $f''(x)=0$，得 $x_1=0,x_3=-\frac{1}{2}a$. 由题意知 $(-2,f(-2))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则有 $x_3=-\frac{1}{2}a=-2$，所以 $a=4$，进而 $b=\frac{27}{256}a^4=\frac{27}{256}\times4^4=27$.

（16）**解** 因为 $g''(0)=1$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，并由题设可知 $g(0)=0$，$g'(0)=0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'g'+\frac{1}{x+y}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'g'+yg'[xf_{11}''g'+\frac{1}{x+y}f_{12}'']+xyf_1'g''+\frac{1}{x+y}[xf_{21}''g'+\frac{1}{x+y}f_{22}'']-\frac{1}{(x+y)^2}f_2'.$$

从而代入点 $(1,0)$，有

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=f_{22}''(0,0)-f_2'(0,0).$$

（17）**证** （I） $\Gamma(a+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^a dx=-\int_0^{+\infty}x^a d(e^{-x})$

$$=-x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+a\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{a-1}dx=-\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}+a\Gamma(a);$$

运用罗必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}x^a e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{e^x}=\cdots=0,$$

所以 $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

（II）对于正整数 n，有 $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)$.

而 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$，所以 $\Gamma(n+1)=n!$.

（III） $\Gamma(\frac{3}{2})=\Gamma(\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

（18）**证** （Ⅰ）令 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，则 $\varphi'(x)=e^{-x}[f''(x)-2f'(x)+f(x)-1]$.

由题设知 $\varphi'(x)\geq 0$，故当 $x\geq 0$ 时，$\varphi(x)$ 单调不减，所以当 $x\geq 0$ 时，$\varphi(x)\geq\varphi(0)=2$，即 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]$，所以 $f'(x)-f(x)+1\geq 2e^{x}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $e^{-x}[f'(x)-f(x)]\geq 2-e^{-x}$，故 $[e^{-x}f(x)]'\geq 2-e^{-x}$.

当 $x\geq 0$ 时，上式两边从 0 到 x 积分，得 $e^{-x}f(x)\geq 2x+e^{-x}-1$，因此 $f(x)\geq(2x-1)e^{x}+1$.

（19）**解** 用圆 $x^2+y^2=1$ 把 D 分成 D_1, D_2 两部分如图所示，则

$$I=\iint\limits_{D_1}\frac{2}{\pi}d\sigma+\iint\limits_{D_2}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}+\iint\limits_{D}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma-\iint\limits_{D_1}xy\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1\left[\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\ dy\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^4\cos\theta\sin\theta dr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^1 x\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 dx-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\int_0^1 x\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-x^3\right]dx-\frac{1}{10}$$

$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\left[(x^2+1)^{\frac{5}{2}}-x^5\right]_0^1=\frac{4}{15}(1+\sqrt{2}).$$

（20）**解** 方程组（Ⅰ）的系数矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&a+4&5\\-1&-2&a\end{pmatrix}$，由题设知 $r(\overline{B})=r(B)<3$，

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&a+4&5&6\\-1&-2&a&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&a&3&0\\0&0&a+1&0\end{pmatrix}\qquad(*)$$

据（*）得，$a=-1$ 或 $a=0$.

当 $a=-1$ 时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$，因 $\xi_1=-\xi_2$ 知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关，这与题设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 3 个不同特征值的特征向量必线性无关矛盾，故 $a=-1$ 不合题意，舍去.

当$a=0$时，$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，因$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq0$，知$\xi_1,\xi_2,\xi_3$线性无关，符合题意，故$a=0$.

令$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则P为可逆阵，且$P^{-1}AP=\Lambda$，其中$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&3&-1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&4&-6\\-1&1&-1\\-3&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{pmatrix}.$$

（21）**解**　（I）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

$$=x^T(nE)x-x^T(\alpha\alpha^T)x=x^T(nE-\alpha\alpha^T)x.$$

令$A=nE-\alpha\alpha^T$，易知$A^T=A$，故二次型的矩阵$A=nE-\alpha\alpha^T$，其中$\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$.

（II）$A^2=\left(nE-\alpha\alpha^T\right)^2$

$$=n^2E-2n\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\alpha\alpha^T=n^2E-n\alpha\alpha^T=n(nE-\alpha\alpha^T)=nA,$$

$A^3=nA^2=n^2A,\ \cdots,\ \ A^k=n^{k-1}A$，（$k$为自然数）；

（III）由于$\alpha\alpha^T$的特征值为$n,0,0,\cdots,0$，所以A的特征值为$0,n,n,\cdots,n$，则f在正交变换下的标准形为$f=n(y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2)$，规范形为$f=y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2$.

（22）**解**　（1）$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=P\{X+\max\{X,1\}\le z\}$

①当$z<1$时，$F_Z(z)=0$；

②当$z\ge4$时，$F_Z(z)=1$；

③当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=P\{0\le X\le z-1\}=\int_0^{z-1}\frac{x}{2}dx=\frac{(z-1)^2}{4}$；

④当$2\le z<4$时，$F_Z(z)=P\{0\le X\le\frac{z}{2}\}=\int_0^{\frac{z}{2}}\frac{x}{2}dx=\frac{z^2}{16}$

综上，$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<1,\\ \dfrac{(z-1)^2}{4}, & 1\le z<2,\\ \dfrac{z^2}{16}, & 2\le z<4,\\ 1, & z\ge 4.\end{cases}$ 得 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{(z-1)}{2}, & 1\le z<2,\\ \dfrac{z}{8}, & 2\le z<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（II）$EX=\int_0^2 x\cdot\dfrac{x}{2}dx=\dfrac{4}{3}$，

$$EY=E[\max\{X,1\}]=\int_0^2 \max\{x,1\}\frac{x}{2}dx=\int_0^1\frac{x}{2}dx+\int_1^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}=\frac{17}{12},$$

$$E(XY)=E[X\max\{X,1\}]=\int_0^2 x\max\{x,1\}\frac{x}{2}dx=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_1^2 x^3\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{6}+\frac{15}{8}=\frac{49}{24},$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{49}{24}-\frac{17}{12}\times\frac{3}{4}=$$

（23）**解** （I）由$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{\theta^2}{12}$，解得$\hat{\theta}_M=2\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$.

【若由$\begin{cases}\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=EX,\\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)\end{cases}$ 可得同样结果.】

（II）似然函数为$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{(b-a)^n}=\dfrac{1}{\theta^n}$，$a\le x_i\le b,\ i=1,2,\cdots,n$.

由于$L(\theta)$为θ的减函数，且$a\le\min\limits_{1\le i\le n}x_i, b\ge\max\limits_{1\le i\le n}x_i$，故$\theta=b-a$的取值范围为

$$\theta\ge\max_{1\le i\le n}x_i-\min_{1\le i\le n}x_i，即\theta\in[\max_{1\le i\le n}x_i-\min_{1\le i\le n}x_i,+\infty)，$$

故当$\theta=\max\limits_{1\le i\le n}x_i-\min\limits_{1\le i\le n}x_i$时，$L(\theta)$取最大值，所以$\hat{\theta}_L=\max\limits_{1\le i\le n}X_i-\min\limits_{1\le i\le n}X_i$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（C）.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}} y=-\infty,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，所以 $x=\dfrac{1}{2n\pi-\dfrac{\pi}{2}}$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 均为垂直渐近线.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1=k\,,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})-x]\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+\sin t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+\sin t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\cos t}{1+\sin t}-1}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1-\sin t}{2t(1+\sin t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+\sin t}\lim_{t\to0}\frac{-\sin t-\cos t}{2}=-\frac{1}{2}=b\,,$$

所以有一条斜渐近线 $y=x-\dfrac{1}{2}$．进而知无水平渐近线.

【注】由于有无穷多条垂直渐近线，所以答案在（C）和（D）之中，又

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}x^2\ln(1+\sin\frac{1}{x})=\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty\,,$$

故无水平渐近线，选（C）．不需要求斜渐近线.

（2）**答案：**选（D）.

解 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$0<\dfrac{1}{(1+\sqrt{x})(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{x^{3/2}}$．又 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^{3/2}}dx$ 收敛，故 I_1,I_2 收敛.

$$I_3=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx+I_1\,.$$

因为 $0<x<1$ 时，$0<\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$．又 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ 收敛，故 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ 收敛，又 I_1 收敛，所以 I_3 收敛.

（3） **答案**：选（D）.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{n\ln n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$，$\{\dfrac{1}{n\ln n}\}$ 单减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln n}=0$，所以收敛；

$\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{x^3}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{1}{n}}xdx=\dfrac{1}{2n^2}$，所以 B 选项收敛；

$\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{6n^3}$，所以 C 选项收敛；

$\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{n+1}\cdot(\dfrac{n}{n+1})^n\sim\dfrac{1}{(n+1)e}$，所以 D 选项发散.

（4）**答案：**选（D）.

解 根据解的结构知，$y''+py'+qy=(ax+b)e^x$ 的通解为下列几种情形：

① $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x(Ax+B)e^x; & k=1,\end{cases}$

20、21全程考研资料请加群712760929

② $y=(C_1+C_2x)e^{rx}+\begin{cases}(Ax+B)e^x, & k=0,\\ x^2(Ax+B)e^x, & k=2;\end{cases}$

③ $y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}+(Ax+B)e^x, \qquad k=0.$

对照形式，(D）不可能出现.

【注】(A)： $y=1+xe^x$ 是 $y''+y'=(2x+3)e^x$ 解.

(B)： $y=(1+\sin x)e^x$ 是 $y''-2y'+2y=e^x$ 解.

(C)： $y=(1+x^2)e^x$ 是 $y''-2y'+y=2e^x$ 解.

(5）**答案**：选（B）.

解 取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$，可验证（A)，(C)，(D）均不正确；

由题意知， $A\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}B,$ ，即 $E(1,2)A=B\Rightarrow B^{-1}=A^{-1}E(1,2)$，则 $AB^{-1}=E(1,2)$ 必为正交阵，故选（B）.

(6）**答案**：选（C）.

解 若 $r(C)=m$，由 $m=r(C)=r(AB)\le r(A)\le m$ 得 $r(A)=m$,则 A 的行向量组线性无关.

若 $r(A)=m$，取 $B=O$，则 $C=O$，则 C 的行向量组线性相关，故选（C）.

(7）**答案**：选（B).

解 （A）不正确，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

(B）正确，取 $C=\Omega$，即得 $A=B$.

(C）不正确， X 和 Y 同分布与 X 和 Y 的取值相同不是一回事.

(D）不正确，事实上 $F(x)$ 单调不减.

(8）**答案**：选(D)

解 设所截三段的长度分别为 X，Y 和 Z，则 X，Y 和 Z 同分布，且

$$\begin{aligned}X+Y+Z=1&\Rightarrow X+Y=1-Z\Rightarrow D(X+Y)=D(1-Z)\\&\Rightarrow DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DZ\Rightarrow DX=DY=-2\operatorname{cov}(X,Y)\\&\Rightarrow \rho_{XY}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9）**答案**：“1”.

解 在 $x^3+y^3-3xy-1=0$ 中令 $x=0$，得 $y^3-1=0$，解得 $y=1$.

$x^3+y^3-3xy-1=0$ 两边对 x 求导数，得 $3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0$，即

$$x^2+y^2y'-y-xy'=0. \qquad ①$$

在①中令 $x=0$，由 $y(0)=1$，知 $y'(0)=1$.

在①式两边再对 x 求导，得

$$2x+2y(y')^2+y^2y''-2y'-xy''=0. \qquad ②$$

在②中令 $x=0$，由 $y(0)=1$， $y'(0)=1$，得 $y''(0)=0$．因此

$$\lim_{x\to0}\frac{(x-1)y+1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{y+(x-1)y'}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2y'+(x-1)y''}{2}=\frac{2\times1+(0-1)\times0}{2}=1.$$

（10）答案：“$(\frac{1}{2^{2018}}-2)\cdot 2017!$”.

解 $f(x)=\int_1^x \ln(t+x)dt \overset{u=t+x}{=} \int_{1+x}^{2x}\ln u du$. 由此，

$f'(x)=2\ln(2x)-\ln(1+x)=2\ln 2+2\ln x-\ln(1+x)$， $f''(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}$，所以

$$f^{(n+2)}(x)=[f''(x)]^{(n)}=(\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x})^{(n)}=(-1)^n n![\frac{2}{x^{n+1}}-\frac{1}{(1+x)^{n+1}}],$$

故 $f^{(2019)}(1)=(\frac{1}{2^{2018}}-2)\cdot 2017!$.

（11）答案：填 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{y+1} f(x,y)dx$.

（12） 答案：填“1”.

解 $f_x'(x,y,z)=e^x yz^2+e^x y\bullet 2z\bullet z_x'(x,y)$，

$f_x'(0,1,-1)=1+2\bullet(-1)\bullet z_x'(0,1)=1-2z_x'(0,1)$.

又由 $1+0+z_x'(x,y)+yz+xyz_x'(x,y)=0$ 得 $z_x'(0,1)=0$，所以 $f_x'(0,1,-1)=1$.

（13）答案：填“$(1,0)$”.

解 由题意知，$|A-E|=|A+2E|=0$，即

$$\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&a-1&-2\\0&-2&b-1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}4&-2&0\\-2&a+2&-2\\0&-2&b+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}ab-a-5b+1=0\\ab+2a+b-2=0\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}b=0\\a=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-1\\a=3\end{cases}$，由于 a,b 为非负实数，故 $(a,b)=(1,0)$.

（14）答案：填“5”.

解 $P\{-\frac{a}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{a}{\sigma}\}=2\Phi(\frac{a}{\sigma})$.

$$P\{|\overline{X}-\mu|<b\}=P\{-\frac{5b}{\sigma}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/5}<\frac{5b}{\sigma}\}=2\Phi(\frac{5b}{\sigma})-1$$

故 $\frac{a}{\sigma}=\frac{5b}{\sigma}\Rightarrow\frac{a}{b}=5$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）证 （Ⅰ）由题意知 $x_n>0,n=1,2,\cdots$，且 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n}{1+x_n}<1$，故数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界．由单调有界准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a\geq 0$，且 $a=\frac{a^2}{1+a}$，解得 $a=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅱ）由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n^2}{1+x_n}$ 得 $x_n^2-x_nx_{n+1}=x_{n+1}$，所以 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=x_n-x_{n+1},n=1,2,\cdots$. 故

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n+1}}{x_n})=\lim_{n\to\infty}[(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n+1})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}(x_1-x_{n+1})=x_1=2.$$

（16）**解**　（Ⅰ）由题意可知 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y^2}(1+x+2y)$，所以

$$f(x,y)=\int(1+x+2y)e^{x+y^2}dx=(1+2y)e^{x+y^2}+\int xde^{x+y^2}=(x+2y)e^{x+y^2}+C(y),$$

并由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}+C'(y)=(2+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，可得 $C(y)=C$.

代入初始条件，可得 $f(x,y)=(x+2y)e^{x+y^2}$.

（Ⅱ）由 $\begin{cases}1+x+2y=0,\\1+xy+2y^2=0\end{cases}$ 解得驻点为 $(-3,1)$.

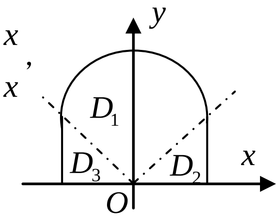
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+x+2y)e^{x+y^2}$，代入驻点 $(-3,1)$，得 $A=e^{-2}$；

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2+2y+2xy+4y^2)e^{x+y^2}$，$B=2e^{-2}$，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(2x+12y+4xy^2+8y^3)e^{x+y^2}$，$C=2e^{-2}$.

显然 $B^2-AC>0$，故在 $(-3,1)$ 不取极值.所以 $f(x,y)$ 无极值.

（17）　**解**　被积函数 $(x^2+y^2)\mathrm{sgn}(y-x)=\begin{cases}x^2+y^2 &,y>x\\-(x^2+y^2), & y<x\end{cases}$，



如图所示 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{sgn}(x-y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

其中 $\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r=2+\dfrac{3}{4}\pi$，

$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{3}$，$\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{3}$，

【或者由对称性可知：$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，】

所以所求 $I=2+\dfrac{3}{4}\pi$.

（18）**证** （Ⅰ）由$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$知$\int_0^1(1-x)f(x)dx=0$.

令$1-x=t$，得$\int_0^1 tf(1-t)dt=0$，即$\int_0^1 xf(1-x)dx=0$.

由此知$\int_0^1[(1-x)f(x)+xf(1-x)]dx=0$，由积分中值定理知，存在$\xi\in[0,1]$，使

$$(\xi-1)f(\xi)=\xi f(1-\xi).$$

（Ⅱ）令$\varphi(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$，则$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=\int_0^1(1-t)f(t)dt=0$，由$f(x)$在$[0,1]$上连续知$\varphi(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，由罗尔定理知，存在$\eta\in(0,1)$，使$\varphi'(\eta)=0$．而

$$\varphi(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt，\varphi'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt，$$

即$\int_0^\eta f(x)dx=0$.

（19） **证** （Ⅰ）由于 $\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\le\int_0^1 x^n dx$，即

$$\frac{1}{2(n+1)}\le a_n\le\frac{1}{n+1},$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$所以由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

（Ⅱ）因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$为交错级数，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，且

$$a_n-a_{n+1}=\int_0^1\frac{x^n(1-x)}{1+x}dx\ge0,$$

即$a_n\ge a_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，故由交错级数判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.

而$\left|(-1)^n a_n\right|=a_n\ge\frac{1}{2(n+1)}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$发散，因此由正项级数比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right|$发散.

综上可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$条件收敛.

（20）**解** 设$P=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$，由$AP=PB$得，

$$\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

乘开后得$\begin{cases}2a+b=a\\2c+d=a+c\\-a=b\\-c=b+d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b\\c=-b-d\end{cases}$， 所以$P=\begin{pmatrix}-b & -b-d\\ b & d\end{pmatrix}$，

$|P|=-bd+b^2+bd=b^2\geq 0$.由于P正定，故$b\neq 0$，$P=\begin{pmatrix}-b & -b-d\\ b & d\end{pmatrix}$.

又因为P对称且正定，所以$P=\begin{pmatrix}-b & b\\ b & -2b\end{pmatrix}$，且$b<0$，

故满足题意的所有正定阵为$k\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，其中$k>0$.

（21）证 （I）由题意，$Ax_i=\lambda_i x_i\quad (i=1,2,3)$，则有

$$\begin{cases}\alpha=x_1+x_2+x_3\\A\alpha=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3\\A^2\alpha=\lambda_1^2x_1+\lambda_2^2x_2+\lambda_3^2x_3\end{cases},\quad \left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}$$

由于$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异，可知$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{pmatrix}$可逆，又因为$x_1,x_2,x_3$线性无关，所以$\alpha,A\alpha,A^2\alpha$线性无关.

（II）因为$\left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)=E$，故由（1）可得

$$\left(x_1,x_2,x_3\right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

$$A^3\alpha=\lambda_1^3x_1+\lambda_2^3x_2+\lambda_3^3x_3=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}-1\\1\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

另解：$\begin{cases}\alpha=x_1+x_2+x_3\\A\alpha=-x_1+x_2+2x_3\\A^2\alpha=x_1+x_2+4x_3\end{cases}$，$A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3$，

$$\begin{cases}A^2\alpha-\alpha=3x_3\\-x_1+x_2=A\alpha-2x_3=A\alpha-\frac{2}{3}(A^2\alpha-\alpha)\end{cases},$$

则 $A^3\alpha=-x_1+x_2+8x_3=A\alpha-\frac{2}{3}A^2\alpha+\frac{2}{3}\alpha+\frac{8}{3}(A^2\alpha-\alpha)$

$$=2A^2\alpha+A\alpha-2\alpha=\left(\alpha,A\alpha,A^2\alpha\right)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

（22）解　设事件 A_i 表示从第 i 个箱子中取球，则 $P(A_i)=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，又设 B 表示两个球不同颜色，考虑到红球和白球的次序，得

$$P(B|A_i)=\frac{2i(n-i)}{n^2},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故由全概率公式

$$p_n=P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}.$$

（I）当 $n=3$ 时，$p_3=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{3}\times\frac{2i(3-i)}{3^2}=\frac{2}{3^3}(1\times2+2\times1+3\times0)=\frac{8}{27}$；

（II）**解法一**　由定积分定义知

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\times(1-\frac{i}{n})\times\frac{1}{n}=2\int_0^1x(1-x)dx=2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3};$$

解法二　$p_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{2i(n-i)}{n^2}=\frac{2}{n^3}[n\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]=\frac{n^2-1}{3n^2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{3n^2}=\frac{1}{3}.$$

（III）**解法一**　设 C 表示两个球均为红球，得 $P(C|A_i)=\frac{i^2}{n^2}$，$i=1,2,\cdots,n$，故由全概率公式

$$q_n=P(C)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(C|A_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i^2}{n^2},$$

故 $\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\times\frac{1}{n}=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}$.

解法二　$q_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i^2}{n^2}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$，所以 $\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$.

解法三　由对称性，$p_n+q_n+(q_n-\frac{1}{n})=1$，其中 $q_n-\frac{1}{n}$ 为两个球均为白球的概率，所以 $q_n=\frac{1}{2}(1-p_n+\frac{1}{n})$，因此 $\lim_{n\to\infty}q_n=\frac{1}{2}(1-\lim_{n\to\infty}p_n+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+0)=\frac{1}{3}$.

（23）**证** （Ⅰ）X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 所以由代表性知，X_1 和 X_2 的密度函数分别为

$$f(x_1)=\begin{cases}1, & 0\le x_1\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases} \text{和 } f(x_2)=\begin{cases}1, & 0\le x_2\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

由于 X_1 和 X_2 相互独立，所以 (X_1,X_2) 的密度函数为

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)=\begin{cases}1, & 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

即得 (X_1,X_2) 服从区域 $\{(x_1,x_2):0\le x_1\le 1,0\le x_2\le 1\}$ 上的均匀分布.

（Ⅱ）$\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$，$S^2=\dfrac{1}{2-1}\sum\limits_{i=1}^{2}(X_i-\bar{X})^2=\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2}$，因此利用几何概型计算得

$$P\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$P\{S^2\le\frac{1}{8}\}=P\{\frac{(X_1-X_2)^2}{2}\le\frac{1}{8}\}=P\{|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}=1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

（Ⅲ）由于 $\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}\subset\{|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}$，故

$$P\{\bar{X}\le\frac{1}{4},S^2\le\frac{1}{8}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2},|X_1-X_2|\le\frac{1}{2}\}=P\{X_1+X_2\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{4}$$

$$\ne P\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}P\{S^2\le\frac{1}{8}\}=\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32},$$

所以事件 $\{\bar{X}\le\frac{1}{4}\}$ 和 $\{S^2\le\frac{1}{8}\}$ 不相互独立，进而 $\bar{X}$ 与 S^2 不相互独立.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（C）.

解　$3x-4\sin x+\sin x\cos x=3x-4\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$=3x-4\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)+\frac{1}{2}\left[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{120}(2x)^5+o(x^5)\right]$$

$$=3x-4x+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$=\dfrac{1}{10}x^5+o(x^5)$，故 $n=5$.

【注】本题也可运用洛必达法则求解.

（2）**答案**：选（D）.

解　当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_0^x(t-1)e^{-t}dt$，$f'(x)=(x-1)e^{-x}$，$f''(x)=(2-x)e^{-x}$，不难得到 $x=1$ 为极小值点，$(2,f(2))$ 为拐点.

当 $x<0$ 时，$f(x)=\int_0^x(1-t)e^{-t}dt$，$f'(x)=(1-x)e^{-x}>0$，$f''(x)=(x-2)e^{-x}<0$，无极值点和拐点.

又 $f(x)$ 为连续函数，在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 为极大值点，$(0,0)$ 为拐点.

（3）**答案**：选（C）.

解　交换积分次序

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 y(y-x)^n\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y y(y-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{n+1}y^{n+2}\mathrm{d}y=\frac{1}{(n+1)(n+3)},$$

所以原级数可化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$，该级数的前 n 项和

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+3}{n}\int_0^1dx\int_x^1 y(y-x)^n dy\right)=1$，选(C).

（4）**答案**：选(C).

解　当 $n\to\infty$ 时，$\ln\cos\dfrac{a}{n}=\ln\left[1-2\sin^2\dfrac{a}{2n}\right]\sim-2\sin^2\dfrac{a}{2n}\sim-\dfrac{a^2}{2n^2}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|-\dfrac{a^2}{2n^2}\right|$ 收敛，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\cos\dfrac{a}{n}\right|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

（5）**答案**：选（D）.

解　由题意，$E(1,2(3))\cdot A=B$，若 $B\cdot E(1,2(-3))=C$，即 $E(1,2(3))\cdot A\cdot E(1,2(-3))=C$ 时，A 与 C 相似，即将 B 的第二列加上第一列的 -3 倍得到 C，则 A 与 C 相似，故选（D）.

（6）**答案**：选（A）.

解 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，$A$ 的特征值为 $a,a+1,a-2$，由题意知，A 的特征值必为一个正、一个负、一个为零，从而 $a=0$，故选（A）.

（7）**答案**：选（C）.

解 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{|x(1+x)|}\cdot\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1}dx\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{-x(1+x)}dx+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}dx+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}.$$

（利用定积分的几何意义求得）

（8） **答案**：选（C）.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} af_1(x)+bf_2(x)dx=a+b=1$

$$F(1)=\int_{-\infty}^{1} af_1(x)+bf_2(x)dx=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=\frac{5}{12}$$

故 $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）**答案**：填“$\frac{1}{2}$”.

解法一 由于 $\int_0^n \frac{x}{n^2+n}dx\le\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx\le\int_0^n\frac{x}{n^2}dx$，得 $\frac{n}{2(n+1)}\le\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx\le\frac{1}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx=\frac{1}{2}$.

解法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^n\frac{x}{n^2+x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\times\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}$.

（10）**答案**：“$\frac{13}{12}$”.

解 $y=\int_0^1(1-t^2)dt+\int_1^x(t^2-1)dt=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}(x^3-3x+4)$．因此所求图形的面积为

$$\int_1^2\frac{1}{3}(x^3-3x+4)dx=\frac{1}{3}(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+4x)\Big|_1^2=\frac{13}{12}.$$

（11）**答案**：填“$x=\frac{Cy-1}{y^2}$”.

解 原方程可转化为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^3}{xy^2-1}$，从而 $\frac{dx}{dy}=-\frac{xy^2-1}{y^3}=-\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}$，所以 $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=\frac{1}{y^3}$，其通解为

$$x=e^{-\int\frac{dy}{y}}(\int\frac{1}{y^3}e^{\int\frac{dy}{y}}dy+C)=\frac{1}{y}(\int\frac{dy}{y^2}+C)=\frac{1}{y}(-\frac{1}{y}+C)=\frac{Cy-1}{y^2}.$$

(12)答案： 填“$e(e-1)dx+edy$”.

解 把$x=0,\ y=1$代入原方程，可得$z=e$.原方程两边取全微分，有

$$ydx+(x-1)dy-zdx-xdz+\frac{1}{z}dz=0.$$

把$x=0,\ y=1,\ z=e$代入上式，解得$dz\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=e(e-1)dx+edy$.

（13）**答案**：填“$E+A+2A^2$”.

解 由于$A^3=O$，所以$E-A^3=E\Rightarrow(E-A)(E+A+A^2)=E$，故$(E-A)^{-1}=E+A+A^2$.

同理可求得，$(E-A^2)(E+A^2)=E\Rightarrow(E-A^2)^{-1}=E+A^2$，

由$(E-A)X(E-A^2)=E$得$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=(E+A+A^2)(E+A^2)=E+A+2A^2$.

（14） **答案**：填$p=\dfrac{1}{2}$.

解 由$AB\subset C$得$AB=ABC$，故$P(AB)=P(ABC)$，进而

$$P(A)P(B)=P(A\cup B\cup C)-P(A)-P(B)-P(C)+P(A)P(B)+P(B)P(C)+P(A)P(C),$$

得$p^2=1-3p+3p^2$，即$2p^2-3p+1=0$，解得$p=1$（舍），$p=\dfrac{1}{2}$.

原型问题：$\Omega=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{1,3\}$，$C=\{1,4\}$.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**解** （Ⅰ）记$f(x)=\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$，则

$$f(x+\pi)=\frac{x+\pi}{\pi}-[\frac{x+\pi}{\pi}]=\frac{x}{\pi}+1-[\frac{x}{\pi}+1]=\frac{x}{\pi}+1-([\frac{x}{\pi}]+1)=\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]=f(x),$$

所以$f(x)=\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}]$为周期为$\pi$的周期函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$(\dfrac{x}{\pi}-[\dfrac{x}{\pi}])\dfrac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}$仍为周期为$\pi$的周期函数.

解法一 $I=100\displaystyle\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当$0\le x<\pi$时，$[\dfrac{x}{\pi}]=0$，$|\sin x|=\sin x$，故

$$I=\frac{100}{\pi}\int_0^{\pi}x\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx\overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=}\frac{100}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(t+\frac{\pi}{2})\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}=100\times\arctan(\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

解法二 $I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}])\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx$.

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$，且 $x\neq 0$ 时，$\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2}$ 为奇函数，故

$$I=100\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\frac{x}{\pi}-[\frac{x}{\pi}]-\frac{1}{2})+\frac{1}{2})\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin x|}{1+\cos^2 x}dx=100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-100\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}dx=-100\times\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=25\pi.$$

（16）**解** 因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0，且\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0，$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[f(x,y)-x+2y-1]=0$，即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=1$. 又因为 $f(x,y)$ 连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)$，

故 $f(0,0)=1$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-x+2y-1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 得 $f(x,y)-x+2y-1=o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，所以

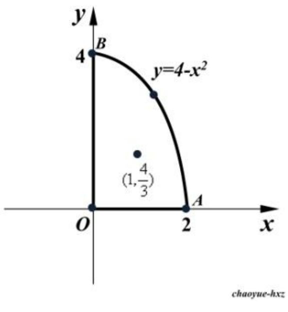
$$f(x,y)-f(0,0)=x-2y+o(\rho)，$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分，且 $f'_x(0,0)=1,\ f'_y(0,0)=-2.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x,0)-f(0,-3x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(2x,0)-f(0,0)}{2x}+3\lim_{x\to 0}\frac{f(0,-3x)-f(0,0)}{-3x}$$

$$=2f'_x(0,0)+3f'_y(0,0)=-4.$$

（17） **解** 设 $\begin{cases} f'_x=y-\frac{4}{3}=0,\\ f'_y=x-1=0\end{cases}$ 得驻点 $(1,\frac{4}{3})$，且 $f(1,\frac{4}{3})=-\frac{4}{3}$.



在抛物线段 AB 上，将 $y=4-x^2$ 代入 $z=xy-\frac{4}{3}x-y$ 中，得

$z=-x^3+x^2+\frac{8}{3}x-4$，$0\le x\le 2$. $\frac{dz}{dx}=-3x^2+2x+\frac{8}{3}$.

令 $\frac{dz}{dx}=0$ 得驻点 $x_1=\frac{4}{3}$，且 $z\Big|_{\frac{4}{3}}=-\frac{28}{27}$.

在直线段 $\overline{OA}$ 上，$z=-\frac{4}{3}x$，$0\le x\le 2$，且 $z\big|_0=0$，$z\big|_2=-\frac{8}{3}$.

在直线段 $\overline{OB}$ 上，$z=-y, 0\le y\le 4$，且 $z\big|_0=0$，$z\big|_4=-4$.

比较函数值的大小，得 $z_{\max}=0$，$z_{\min}=-4$.

（18）**解**　（Ⅰ）$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x\sin\dfrac{1}{x})=1+0=1$.

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$，进而得

$$f'(x)=\begin{cases}1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

（Ⅱ）由于 $\lim\limits_{x\to 0}1=1,\ \lim\limits_{x\to 0}4x\sin\dfrac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to 0}2\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}[1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}]$ 不存在，因此 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)\neq f'(0)$.

（Ⅲ）$f'(\dfrac{1}{2k\pi})=1+\dfrac{4}{2k\pi}\sin 2k\pi-2\cos 2k\pi=-1$，

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\sin(2k\pi+\frac{\pi}{2})-2\cos(2k\pi+\frac{\pi}{2})=1+\frac{4}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},$$

其中 $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

对任意的 $\delta>0$，由于当 $k\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2k\pi}\to 0,\ \dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$，故当 $|k|$ 充分大时，在点 $x=0$ 的邻域 $(-\delta,\delta)$ 内总存在点 $x=\dfrac{1}{2k\pi}$ 和 $x=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$，使得 $f'(\dfrac{1}{2k\pi})<0,\ f'(\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}})>0$，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任意邻域 $(-\delta,\delta)$ 内不是单调函数.

【注】本题背景：1. 可导时未必有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$；2. 函数在某一点处的导数大于零，不能说明函数在该点附近单调增加.

（19）**解**　令 $x+2=t$，原幂级数 $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n-1}}{n\cdot 3^{n+1}}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)}\right|=\dfrac{t^2}{3}<1$ 得 $|t|<\sqrt{3}$，所以 $R_t=\sqrt{3}$.

当 $t=\pm\sqrt{3}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n-1}}{n\cdot 3^{n+1}}$ 均收敛，故其收敛域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$. 因为 $t=x+2$，所以原幂级数的收敛域为 $[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]$.

设 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{n\cdot 3^{n+1}}$，$t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，则

$$S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t^{2n-1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3t}\frac{-\frac{t^2}{3}}{1+\frac{t^2}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{3+t^2},\quad t\in(-\sqrt{3},\sqrt{3}),$$

$$S(t)=S(0)-\frac{2}{3}\int_0^t\frac{u}{3+u^2}du=-\frac{1}{3}\ln(3+u^2)\Big|_0^t=-\frac{1}{3}\ln(1+\frac{t^2}{3}),\quad t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}],$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-1}}{n\cdot 3^{n+1}}=\begin{cases}\dfrac{S(t)}{t}=\dfrac{1}{t}[-\dfrac{1}{3}\ln(1+\dfrac{t^2}{3})]=-\dfrac{1}{3t}\ln\left(1+\dfrac{t^2}{3}\right), & t\in[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}],\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

由于$x+2=t$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n-1}}{n\cdot 3^{n+1}}=\begin{cases}-\dfrac{1}{3(x+2)}\ln\left[1+\dfrac{(x+2)^2}{3}\right], & x\in[-2-\sqrt{3},-2)\cup(-2,-2+\sqrt{3}],\\ 0, & x=-2.\end{cases}$$

（20）**解**　由题意知，$\begin{cases}r(B)=r(A\vdots B)\\ r(A)<r(A\vdots B)\end{cases}$，从而$|A|=0$，否则$AX=B$必有唯一解，

$|A|=-(a-1)^2(a+2)=0$，得$a=1$或$a=-2$.

（i）$a=1$时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&-2&-2\\0&0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0&-3\end{array}\right)$，$r(A)=1,r(B)=r(A\vdots B)=3$，符合题意.

（ii）$a=-2$时，$(A\vdots B)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&-2&-2\\0&-3&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&-6\end{array}\right)$，$r(A\vdots B)=3,r(A)=r(B)=2$，可见

$AX=B$无解，$BX=A$也无解，不符合题意，故$a=1$.

（21）**解**　由题设知A的三个特征值为$2,2,0$，设$\xi_3=(1,0,1)^T$为$\lambda_3=0$的特征向量，利用实对称阵A的属于不同特征值的特征向量正交，可解出$\lambda_1=\lambda_2=2$的两个线性无关的特征向量为

$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,注意到$\xi_1,\xi_2,\xi_3$已两两正交，将$\xi_1,\xi_2,\xi_3$单位化得，

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad 令P=\begin{pmatrix}\eta_1&\eta_2&\eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

20、21全程考研资料请加群712760929

则 P 为正交矩阵，于是所求的正交变换为 $x=Py$.

由 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^{T}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

（22）解　（Ⅰ）由于 $Cov(U,V)=Cov(X+2Y,X+aY)=1+2a$，故当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$Cov(U,V)=0$，此时 $U=X+2Y,V=X-\dfrac{1}{2}Y$．由题意知 $(X,Y)\sim N(0,0;1,$ ，且 $\begin{vmatrix}1&2\\1&-\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}\neq 0$，所以 (U,V) 服从二维正态分布．所以当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，U 和 V 相互独立.

（Ⅱ）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$U=X+2Y,V=X-\dfrac{1}{2}Y$，得 $X=\dfrac{1}{5}U+\dfrac{4}{5}V$，所以

$$P\{X>0|X+2Y=2\}=P\{\frac{1}{5}U+\frac{4}{5}V>0|U=2\}=P\{V>-\frac{1}{2}|U=2\}.$$

计算得 $EV=0,DV=\dfrac{5}{4}$，所以 $V\sim N(0,\dfrac{5}{4})$，又因为 U 和 V 相互独立，故

$$P\{X>0|X+2Y=2\}=P\{V>-\frac{1}{2}\}=P\{\frac{V}{\sqrt{5}/2}>-\frac{1}{\sqrt{5}}\}=1-\Phi(-\frac{1}{\sqrt{5}})=\Phi(\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

（23）　解　（Ⅰ）

$$\begin{aligned}P\{Y=0\}&=P(\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\}\cup\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\})=P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=0\}+P\{\sum_{i=1}^{100}X_i=1\}\\&=P\{X_1=X_2=\cdots=X_{100}=0\}+P\{X_1=1,X_2=\cdots=X_{100}=0\}\\&\quad+\cdots+P\{X_1=X_2=\cdots=0,X_{100}=1\}\\&=(P\{X=0\})^{100}+100P\{X=1\}(P\{X=0\})^{99}\\&=(e^{-1})^{100}+100\cdot1\cdot e^{-1}\cdot(e^{-1})^{99}=101e^{-100}.\end{aligned}$$

（Ⅱ）中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{100}X_i\overset{近似}{\sim}N(100,100)$，所以

$$\begin{aligned}P\{Y<9900\}&=P\{(\sum_{i=1}^{100}X_i)^2-\sum_{i=1}^{100}X_i<9900\}=P\{-99<\sum_{i=1}^{100}X_i<100\}\\&=P\{-19.9<\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100}{10}<0\}=\Phi(0)-\Phi(-19)=0.5-0=0.\end{aligned}$$

（Ⅲ）
$$\begin{aligned}EY&=E[(\sum_{i=1}^{100}X_i)^2-\sum_{i=1}^{100}X_i]=D\sum_{i=1}^{100}X_i+(E\sum_{i=1}^{100}X_i)^2-E\sum_{i=1}^{100}X_i\\&=100\lambda+10000\lambda^2-100\lambda=10000\lambda^2.\end{aligned}$$

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（四）解答

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（B）．

解 当 $x<1$ 时，$f(x)=ax+b$；当 $x=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}(a+b+1)$；当 $x>1$ 时，$f(x)=x^2$．由 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$ 得 $a+b=1$．又 $f'_-(1)=a, f'_+(1)=2$，故 $a=2,b=-1$．

（2）**答案**：选(C)．

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f'_x(x,y)=2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}$；当 $(x,y)=(0,0)$ 时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2\alpha-1}=0.$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}2\alpha x(x^2+y^2)^{\alpha-1}=0=f'_x(0,0)$，所以 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续. 由 x,y 得对称性知 $f'_y(x,y)$ 也在点 $(0,0)$ 处连续，故选(C)．

（3）**答案**：选（D）．

解 取 $n=1,b_n=-1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$ 收敛，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ 均发散；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)$ 发散；$1-1+1-1+\cdots$ 发散，所以(A),(B),(C)都不正确. 由级数收敛的定义知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 的部分和数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right\}$ 有界，故选(D)．

（4）**答案**：选（C）．

解 由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，（C）正确．

（A）反例：取 $x_n=1-\frac{1}{n}, n=1,\cdots$，则 $0\le x_n<1, n=1,\cdots$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}\neq 0$．

（B）反例：取 $f(x)=\frac{1}{2}x$ 为单增函数，$x_1=1$，则 $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n=\frac{1}{2^n},(n=1,2,\cdots)$ 为单减数列．

（D）反例：取 $f(x)=e^x,g(x)=0$，则 $f(x)>g(x)$，但 $\int_1^0 e^x dx=1-e<\int_1^0 0dx=0$．

（5） **答案**：选（A）．

解 由于 $r(A)=r\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}\ge r(A\vdots\alpha)\ge r(A)$，知 $r(A)=r(A\vdots\alpha)$，则 $Ax=\alpha$ 有解；同理，由 $r(A)=r\begin{pmatrix}A & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}\ge r\begin{pmatrix}A\\ \alpha^T\end{pmatrix}\ge r(A)$，知 $r(A)=r\begin{pmatrix}A\\ \alpha^T\end{pmatrix}=r(A^T\vdots\alpha)$，即 $A^Tx=\alpha$ 有解，从而

20、21全程考研资料请加群712760929

$Ax=\alpha$ 与 $A^T x=\alpha$ 都有解，故选（A）.

（6）**答案**：选（C）.

解　由题意知 A 的特征值只能为 ± 1，而 $\mathrm{tr}A=-1$，则 A 的特征值为 $-1,-1,1$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的规范形为 $-y_1^2-y_2^2+y_3^2$，故选（C）.

（7）**答案**：选（D）.

解　以连续型随机变量为例．设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=0$，所以

$$EX=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}[\int_0^x f(x)dt]dx=\int_0^{+\infty}[\int_t^{+\infty}f(x)dx]dt$$

$$=\int_0^{+\infty}[1-\int_{-\infty}^{t}f(x)dx]dt=\int_0^{+\infty}[1-F(t)]dt=\int_0^{+\infty}[1-F(x)]dx.$$

本题也可设 $X\sim U[0,1]$，直接验证即可.

（8）**答案**：选（D）.

解　设 A_i：所取的两个球有 i 个黑球（i=1, 2），B：从两个球中取得的是黑球，则 A_1,A_2 构成完备事件组，且

$$P(A_1)=\frac{4\times3\times2}{36}=\frac{2}{3},\quad P(A_2)=\frac{4\times3}{36}=\frac{1}{3};$$

从而

$$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}。$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：“$\frac{1}{2}$”.

解　$a_n=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\{f(\frac{x}{1\cdot3})+f(\frac{x}{3\cdot5})+\cdots+f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]\}$

$$=\lim_{x\to0}\{\frac{1}{1\cdot3}\frac{f(\frac{x}{1\cdot3})-f(0)}{\frac{x}{1\cdot3}-0}+\frac{1}{3\cdot5}\frac{f(\frac{x}{3\cdot5})-f(0)}{\frac{x}{3\cdot5}-0}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{f[\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}]-f(0)}{\frac{x}{(2n-1)(2n+1)}-0}\}$$

$$=[\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}]f'(0)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$.

（10）**答案**：“$\frac{3}{16}\pi^2$”.

解　$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cdot\arctan e^x dx\overset{t=-x}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 t\cdot\arctan e^{-t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 t\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^t)dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cdot(\frac{\pi}{2}-\arctan e^x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 xdx-\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cdot\arctan e^x dx,$$

所以

20、21全程考研资料请加群712760929

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\cdot\arctan e^x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 xdx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\pi\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi^2.$$

(11)答案：填“$2\ln 2-1$”.

解　把原积分化为二重积分，积分区域是由直线 $y=x,x=1$ 及 x 围成的三角形 D，

$$原积分=\iint\limits_D\frac{\ln(1+x)}{x}d\sigma=\int_0^1\left[\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dy\right]dx=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\Big[x-\ln(1+x)\Big]_0^1=2\ln 2-1.$$

（12）答案：填“0”

解　区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，由于 $\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}=-\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{x^2+y^2}$，故 $I=-I$，$I=0$.

（13）答案：填“$\dfrac{1}{3}$”.

解　由题意可知，矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，故 $2E-A$ 的特征值为 $1,3,4$，于是，$|2E-A|=12$. 故

$$\begin{vmatrix}(2E-A)^{-1} & O\\ O & (-B)^*\end{vmatrix}=\left|(2E-A)^{-1}\right|\left|(-B)^*\right|=\frac{1}{12}|B|^2=\frac{1}{3}.$$

（14）答案：填“e^{-4}”.

解法一　由 $X\sim\chi^2(2)$ 知 $X=X_1^2+X_2^2$，其中 $X_i\sim N(0,1)$, $i=1,2$.且 X_1 和 X_2 相互独立

又 $EX^2=DX+(EX)^2=4+2^2=8$

$$P\{X\ge EX^2\}=P\{X\ge 8\}=P\{X_1^2+X_2^2\ge 8\}=1-P\{X_1^2+X_2^2<8\}$$

$$=1-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot rdr=e^{-4}.$$

解法二　由 $X\sim\chi^2(2)$ 知 $X\sim E\left(\dfrac{1}{2}\right)$，又 $EX^2=8$，故 $P\{X\ge 8\}=e^{-4}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）解　（Ⅰ）$y'-2xy=\dfrac{1}{3}x^3$ 的通解为

$$y=e^{-\int(-2x)dx}\left[\int\frac{1}{3}x^3e^{\int(-2x)dx}dx+C\right]=e^{x^2}\left[\int\frac{1}{3}x^3e^{-x^2}dx+C\right]=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（Ⅱ）法一　$y''-2xy'-2y=x^2$ 可变形为 $y''-2(xy)'=x^2$，即 $(y'-2xy)'=x^2$.

两边积分，得 $y'-2xy=\dfrac{1}{3}x^3+C_1$. 由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，故 $y'-2xy=\dfrac{1}{3}x^3$.

20、21全程考研资料请加群712760929

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

法二 所给方程 $y''-2xy'-2y=x^2$ 两边从0到 x 积分，得

$$\int_0^x y''(t)dt-2\int_0^x ty'(t)dt-2\int_0^x y(t)dt=\int_0^x t^2dt,$$

利用分部积分法，得 $y'(x)-2[ty(t)\big|_0^x-\int_0^x y(t)dt]-2\int_0^x y(t)dt=\frac{1}{3}x^3$，化简得 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$．

由（Ⅰ）知 $y'-2xy=\frac{1}{3}x^3$ 的通解为 $y=Ce^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2)$．由 $y(0)=1$ 得 $C=\frac{7}{6}$，所以

$$y=\frac{7}{6}e^{x^2}-\frac{1}{6}(1+x^2).$$

（16）**解** 曲线 C 与 x 轴，y 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所生成立体体积为

$$V=\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})^4dy\overset{1-\sqrt{y}=u}{=}\pi\int_1^0 u^4\cdot 2(1-u)(-du)=\frac{\pi}{15}\text{（为定值）}.$$

因此，问题转化为求切线 l 与 x 轴，y 轴所围三角形区域绕 y 轴旋转一周所得立体体积的最大值.

由 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 知 $y'=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$．设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，其中 $0<x_0<1$，则切线 l 的方程为

$$y-(1-\sqrt{x_0})^2=-\frac{1-\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)，化简得\quad x=-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0}.$$

令 $y=0$ 得 $x=\sqrt{x_0}$；令 $x=0$ 得 $y=1-\sqrt{x_0}$，故 l 与 x 轴，y 轴的交点分别为 $(\sqrt{x_0},0),(0,1-\sqrt{x_0})$.

直线 l 与 x 轴，y 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得立体体积为

$$V(x_0)=\pi\int_0^{1-\sqrt{x_0}}(-\frac{\sqrt{x_0}}{1-\sqrt{x_0}}y+\sqrt{x_0})^2dy=\frac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0}),$$

或利用圆锥体的体积 $V(x_0)=\frac{1}{3}\times\pi(\sqrt{x_0})^2\times(1-\sqrt{x_0})=\frac{\pi}{3}x_0(1-\sqrt{x_0})$.

由 $V'(x_0)=\frac{\pi}{3}(1-\frac{3}{2}\sqrt{x_0})=0$，得 $x_0=\frac{4}{9}$ 为 $V(x_0)$ 的唯一驻点.

由于 $V''(\frac{4}{9})=-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x_0}}\Big|_{x=\frac{4}{9}}=-\frac{\pi}{3}<0$，故 $x_0=\frac{4}{9}$ 为 $V(x_0)$ 的最大值点，且最大值为

$$V(x_0)_{\max}=\frac{\pi}{3}[\frac{4}{9}-(\frac{2}{3})^3]=\frac{4}{81}\pi,$$

因此当点 P 的坐标为 $(\frac{4}{9},\frac{1}{9})$ 时，所求旋转体体积的最小值为 $\frac{\pi}{15}-\frac{4}{81}\pi=\frac{7}{405}\pi$.

（17）**解** 如图所示，取整函数

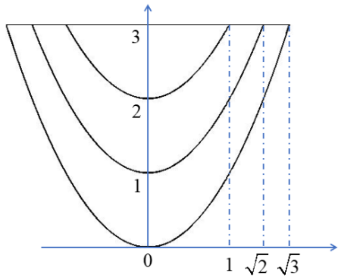
$$\left[y-x^2\right]=\begin{cases}0, & x^2\le y<x^2+1,\\ 1, & x^2+1\le y<x^2+2,\\ 2, & x^2+2\le y<3.\end{cases}$$

结合二重积分的区域可加性、奇偶对称性可知

$$I=2\int_0^1 dx\int_{x^2+2}^{3}\sqrt{2}dy+2\left[\int_0^1 dx\int_{x^2+1}^{x^2+2}dy+\int_1^{\sqrt{2}}dx\int_{x^2+1}^{3}dy\right]$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)dx+2\left[\int_0^1 dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)dx\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+2\left[1+2\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right]=4\sqrt{2}-\frac{4}{3}.$$



(18) **证** （Ⅰ）在 $[-2,0]$ 和 $[0,2]$ 上分别对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(-2,0),\ \xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

进而 $|f'(\xi_1)|=\dfrac{|f(0)-f(-2)|}{2}\le\dfrac{|f(0)|+|f(-2)|}{2}\le\dfrac{1+1}{2}=1$，同理有 $|f'(\xi_2)|\le 1$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f^2(x)+f'^2(x)$，则 $F(x)$ 在 $[-2,2]$ 上可导，且

$$F(\xi_1)=f^2(\xi_1)+f'^2(\xi_1)\le 2,\quad F(\xi_2)=f^2(\xi_2)+f'^2(\xi_2)\le 2,\quad F(0)>2.$$

故 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上的最大值一定在 (ξ_1,ξ_2) 内取得，即存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F(\xi)=\max\limits_{x\in[\xi_1,\xi_2]}F(x)>2$. 由费马定理知 $F'(\xi)=0$.

又 $F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$，故

$$F'(\xi)=2f(\xi)f'(\xi)+2f'(\xi)f''(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0.$$

由于 $F(\xi)=f^2(\xi)+f'^2(\xi)>2,\ |f(\xi)|\le 1$，所以 $f'(\xi)\ne 0$，从而 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

（19）**解** 令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=n\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{n\pi}t|\sin t|dt,$$

所以 $a_n=\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=\dfrac{n^2}{2}\int_0^{\pi}|\sin t|dt=n^2$,（$n=1,2,3,\cdots$），从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n-1}-\frac{(-1)^n}{2n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}+\frac{1}{2}$$

考虑幂级数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}$，易知其收敛域为 $[-1,1]$.由于

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=\frac{-1}{1+x^2}\ (-1<x<1),$$

从而

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{-1}{1+t^2}dt=-\arctan x\ （-1\le x\le 1），$$

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=f(1)=-\frac{\pi}{4}$，因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4a_n-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

（20）**解** （Ⅰ）由题设 β_1,β_2,β_3 均为 $Bx=0$ 的解向量，且 $B\neq O$ 知，β_1,β_2,β_3 必线性相关（否则由 $Bx=0$ 的基础解系所含的向量个数 ≥ 3 可推出 $B=O$，与题设 $B\neq O$ 矛盾），

于是有

$$0=\left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=3b-a\Rightarrow a=3b,$$

由题设 $Ax=\beta_3$ 有解，故 $r(A)=r(A,\beta_3)$，

$$(A,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 2 & 0 & 6 & 1\\ -3 & 1 & -7 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & b\\ 0 & -6 & -12 & 1-2b\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5-b}{3}\end{pmatrix},$$

据 $r(A)=r(A,\beta_3)\Leftrightarrow b=5,$ 则 $a=15,\ b=5.$

（Ⅱ）由于 β_1,β_2 线性无关，故 $Bx=0$ 至少有两个线性无关的解向量 β_1,β_2，即 $r(B)\leq 1$，又由于 $B\neq O$ 知 $r(B)\geq 1$，故 $r(B)=1$，于是 β_1,β_2 可作为 $Bx=0$ 的一个基础解系，故 $Bx=0$ 的通解为 $x=k_1\left(0,1,-1\right)^T+k_2\left(15,2,1\right)^T$,，其中 k_1,k_2 为任意常数.

（21）**解** （Ⅰ）$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$,

得 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.由于 A 对称，所以 $k_1=k_3=0$，$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & k_2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$,

故 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+k_2x_2^2$，又因为 $f(1,1,1)=3$，所以 $k_2=1$，$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$.

（Ⅱ）令 $\begin{cases}x_1=y_1+y_3\\ x_2=y_2\\ x_3=y_1-y_3\end{cases}$，$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$,

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经可逆变换 $x=Cy$ 化成的标准形为 $f=2y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

（22）**解** （Ⅰ）$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{F(X)\leq y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leq y<\dfrac{1}{2}$ 时，$F_Y(y)=P\{X\leq 2y\}=F(2y)=y$；

当 $\dfrac{1}{2}\leq y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{X<1\}=F(1-0)=\dfrac{1}{2}$；

20、21全程考研资料请加群712760929

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

综上可得 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\le y<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{F_Y(Y)\le z\}$.

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le z<\dfrac{1}{2}$ 时，$F_Z(z)=P\{Y\le z\}=F_Y(z)=z$；

当 $\dfrac{1}{2}\le z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{Y<1\}=F_Y(1-0)=\dfrac{1}{2}$；

当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$；

综上可得 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z, & 0\le z<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2}\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$

【注】由于 $F_Y(y)$ 与 $F_Z(z)$ 是同一函数，所以 $Y=F(X)$ 与 $Z=F_Y(Y)=F_Y(F(X))$ 同分布.

（23）**解** （I）由密度函数的性质知 $\int_0^1 dx\int_{-x}^{x} c(x+y)dy=1 \Rightarrow c=\dfrac{3}{2}$.

（II）当 $-1\le y\le 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-y}^{1}\dfrac{3}{2}(x+y)dx=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{4}y^2$，

当 $0<y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-y}^{1}\dfrac{3}{2}(x+y)dx=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{9}{4}y^2$，

故，当 $-1\le y\le 0$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{1+2y+y^2}, & -y\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$.

当 $0<y\le 1$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2(x+y)}{1+2y-3y^2}, & y\le x\le 1\\ 0,其他\end{cases}$

（III）$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\middle|Y=\dfrac{1}{4}\right\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f_{X|Y}(x\mid\dfrac{1}{4})dx=\dfrac{16}{21}$.

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五)解答

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案：**选（D）.

解 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, $x - \sin x = \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

由题设知，$x - \sin x + f(x) = x^4 + o(x^4)$，故 $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^4 + o(x^4)$，所以

$$\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6} + x + o(x), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{f(x)} = - \ .$$

（2）**答案** 选(C).

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x, y)}{1 - e^{-\sqrt{x^2+y^2}}} = 1$ 等价于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 . \qquad ①$$

(A)，(B)错误.例如取 $f(x, y) = -\sqrt{x^2+y^2}$ ，则在点 $(0, 0)$ 处 $f(x, y)$ 连续，但是偏导数不存在、不可微分.

因为 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = f(0, 0)$ ．又因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2} = 0$，由①式知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$，故 $f(0,0) = 0$．再由①式和极限的保号性知，存在点 $(0, 0)$ 某邻域，在该邻域内有 $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$，$f(x,y) > 0$，即 $f(x,y) > f(0,0)$，故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取极小值.

（3）**答案：**选（A）.

解 $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\pi + x}dx = \int_0^{\pi}\frac{\pi \sin x}{x(\pi + x)}dx > 0$；

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{\pi + x}}\right)dx > \ .$$

（4）**答案：**选(C).

解 因为正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以数列 S_n 有界，存在 $M > 0$，使得对任意的正整数 n，都有 $0 \le S_n \le M$．因为 $|a_n S_n| \le M|a_n|$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M|a_n|$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n S_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n S_n$ 绝对收敛，故选(C).

（5）**答案：**选（D）.

解 因为 $r(A^TA) \le r(A^TA \vdots A^T\beta) = r[A^T(A \vdots \beta)] \le r(A^T)$，而 $r(A^TA) = r(A^T) = r(A)$，所以

$r(A^TA \vdots A^T\beta)=r(A^TA)$，这就是说无论 $Ax=\beta$ 是否有解，$A^TAx=A^T\beta$ 总有解，所以（A）（B）（C）均错误，（D）正确.

事实上，若 $Ax=\beta$ 有唯一解，则必有 $r(A)=n$，从而 $r(A^TA)=n$，而 A^TA 为 n 阶方阵，所以 $A^TAx=A^T\beta$ 必有唯一解.故选（D）.

（6）**答案**：选（A）.

解　AA^T 为 m 阶对称阵，A^TA、BB^T 及 A^TA+BB^T 均为 n 阶对称矩阵.

由于 $AB=E$，得 $r(A)=r(B)=m<n$，于是 $r(A^TA)=r(A^TA)=r(B^TB)$.

故 $\left|A^TA\right|=0,\left|BB^T\right|=0$，从而 A^TA，BB^T 不是正定阵.

由 $r(A)=m\Rightarrow r(A^T)=m\Rightarrow A^Tx=0$ 仅有零解，即 $\forall x\neq 0,\ A^Tx\neq 0$，

故 $x^TAA^Tx=(A^Tx)^T\cdot(A^Tx)>0$，故选（A）.

（7）**答案**：选（D）.

解　以 X 为连续型随机变量为例.

设 $f(x)$ 为 X 的概率密度，由于 X 取值非负，则 $\int_0^{+\infty}f(t)dt=1$，$EX=\int_0^{+\infty}tf(t)dt=\mu$，故

$$P\{X\leq 1\}=\int_0^1 f(t)dt=1-\int_1^{+\infty}f(t)dt\geq 1-\int_1^{+\infty}tf(t)dt\geq 1-\int_0^{+\infty}tf(t)dt=1-EX=1-\mu,$$

所以选（D）.

（8）**答案**：选（A）.

解　设 $Y=X^2$，其中 $X\sim N(0,1)$，则

$$P\{Y\geq 3\}=P\{X^2\geq 3\}=P\{\left|X\right|\geq\sqrt{3}\}=P\{\left|X-EX\right|\geq\sqrt{3}\}\leq\frac{DX}{(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3}.$$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）**答案**：填“$\frac{4}{e}$”.

解　记 $x_n=\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$，则

$$\ln x_n=\frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)]-\ln n$$
$$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})],$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$.

（10）**答案**：填“$\ln 2-\frac{1}{2}$”.

解法一　$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}dx=\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})\frac{1}{x+1}dx$

20、21全程考研资料请加群712760929

$$=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\left(\ln\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)\bigg|_1^{+\infty}=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

解法二 $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)^2}dx\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\int_1^0\frac{t}{(\frac{1}{t}+1)^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_0^1\frac{t}{(t+1)^2}dt=\int_0^1\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$$

$$=\left[\ln(t+1)+\frac{1}{t+1}\right]\bigg|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

（11）**答案**：填“$e-1$”.

解 积分区域由直线 $y=x,y=2-x$ 及 x 轴围成，

$$I=\iint\limits_{D_1\cup D_2}e^{(y-1)^2}d\sigma=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}e^{(y-1)^2}dx=-\int_0^1 2(y-1)e^{(y-1)^2}dy$$

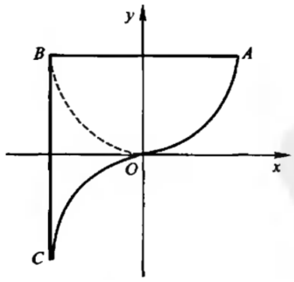
$$=-e^{(y-1)^2}\Big|_0^1=e-1.$$

（12）**答案**：填“$\frac{12}{7}$”.

解 被积函数可化为

$$2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)+1\right]=2xy\left[f(x)+f(-x)\right]+2y\left[f(x)-f(-x)\right]+2y.$$

由于 $f(x)+f(-x)$，$f(x)-f(-x)$ 是关于 x 的偶、奇函数，



故 $2xy\left[f(x)+f(-x)\right]$，$2y\left[f(x)-f(-x)\right]$ 既是关于 x 的奇函数，同时也是关于 y 的奇函数；另一方面，积分区域如图所示，可以分为一个关于 x 轴上下对称的区域和一个关于 y 轴左右对称的区域。利用二重积分的区域可加性、奇偶对称性立得

$$\iint\limits_D 2y\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\mathrm{d}\sigma=0.$$

又

$$\iint\limits_D 2y\,\mathrm{d}\sigma=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 2y\mathrm{d}y=2\int_0^1\left(1-x^6\right)\mathrm{d}x=\frac{12}{7},$$

故答案为 $\frac{12}{7}$.

（13）**答案**：填“-4”.

解 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&3&9&2\\1&-1&1&-\end{pmatrix}$，$|A|$ 为范德蒙行列式，因为 A 可逆，故由克莱姆法则知，

20、21全程考研资料请加群712760929

$x_1=x_2=x_3=0$，$x_4=-4$，于是 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-4$.

（14） **答案**：填“0.125”.

解 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}0.25 & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 所以

$$E(\max(X,Y))=\iint_D \max(x,y)dxdy\cdot 0.25=0.25\iint_D \max(x,y)dxdy$$

$$=0.25\left[\iint_{\substack{-1<x<0\\-1<y<1}}\max(x,y)dxdy+\iint_{\substack{0<x<1\\-1<y<1}}\max(x,y)dxdy\right]$$

$$=0.25\left[\iint_{\substack{-1<x<0\\-1<y<1}}ydxdy+\iint_{\substack{0<x<1\\0<y<1}}ydxdy\right]+0=0.25\times\frac{1}{2}.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**解** （Ⅰ）追加成本是指总成本对时间的变化率．追加利润总利润对时间的变化率.

（Ⅱ）由于 $G'(t)=\frac{4}{3}t^{-\frac{1}{3}}>0$，$\Phi(t)=-\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}<0$，意味着生产费用逐年增加，而所得利润逐年减少，长此下去，必有某一时刻，追加费用与追加收益持平．过了这个时刻，费用大于收益，再生产就会亏损，因此应该停产．由追加费用与追加收益持平知，$G(t)=\Phi(t)$，即 $5+2t^{\frac{2}{3}}=17-t^{\frac{2}{3}}$，解得 $t=8$（年）．又 $(\Phi(t)-G(t))'=\Phi'(t)-G'(t)<0$，所以生产线在投资 8 年时停产可获得最大利润.

由经济意义知 $\Phi(t)-G(t)$ 为追加利润，即总利润对时间的变化率．所以最大利润为

$$L=\int_0^8[\Phi(t)-G(t)]dt-20=\int_0^8[(17-t^{\frac{2}{3}})-(5+2t^{\frac{2}{3}})]dt-20$$

$$=\int_0^8(12-3t^{\frac{2}{3}})dt-20=12\times8-\frac{9}{5}t^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8-20=38.4-20=18.4\text{（百万元）}.$$

（16）**解** （Ⅰ）$\ln f(x)=(x+1)\ln(x+2)-x\ln(x+1)$，上式两边对 x 求导数，得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}.\qquad ①$$

当 $x\ge0$ 时，由于 $\ln(x+2)>\ln(x+1)$，$\frac{x+1}{x+2}>\frac{x}{x+1}$，且 $f(x)>0$，故 $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 单调递增.

（Ⅱ）对任意正整数 n，由①知，$\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}>\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$，得 $\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}>\frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}}$，即得 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^{n-1}$.

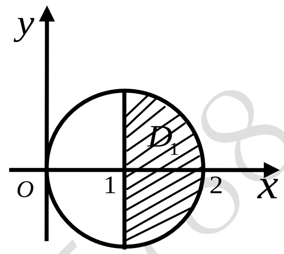
（Ⅲ）由①知，

$$f'(x)=f(x)[\ln(x+2)+\frac{x+1}{x+2}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}]=(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1+\frac{1}{x+1})^{x+1}+\frac{1}{x+2}],$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x+1})^{x+1}[\ln(1-\frac{1}{x+1})^{x+1}+\frac{1}{x+2}]=e^{-1}(-1+0)=-e^{-1}$.

(17)**解** 由对称性知 $\iint\limits_D\frac{y}{(x^2+y^2)^2}d\sigma=0$．记 D_1 为 D 的上半部分，则

$$\text{原式}=\iint\limits_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma$$



$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r^4}\cdot rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\frac{1}{4\cos^2\theta})d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

（18）**证** （Ⅰ）因为 $\int_0^1 f(x)dx=0$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不为常数，所以 $f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le1}f(x)>0$，从而

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx\le\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x_0)dx=f(x_0)\int_0^{x_0}(x+x^2)dx=f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3),$$

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx-x_0^2f(x_0)\le f(x_0)(\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{3}x_0^3-x_0^2)=x_0^2f(x_0)(\frac{1}{3}x_0-\frac{1}{2})<0,$$

因此

$$\int_0^{x_0}(x+x^2)f(x)dx<x_0^2f(x_0).$$

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可取最小值 $f(x_1)$，且 $f(x_1)<0$．与（Ⅰ）同理可证

$$\int_0^{x_1}(x+x^2)f(x)dx>x_1^2f(x_1).$$

令 $\varphi(x)=\int_0^x(t+t^2)f(t)dt-x^2f(x)$，$0\le x\le1$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\varphi(x_0)<0$，$\varphi(x_1)>0$，故由零点定理知，存在 ξ 介于 x_0 与 x_1 之间，使 $\varphi(\xi)=0$，进而知 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\int_0^{\xi}(x+x^2)f(x)dx=\xi^2f(\xi).$$

（19）**解** 由 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 知

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=2+S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

20、21全程考研资料请加群712760929

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)^2},$$

所以$S'(x)=2+S(x)+\dfrac{x}{(1-x)^2}$，且$S(0)=0$，解此一阶线性微分方程，得

$$S(x)=Ce^x+\frac{1}{1-x}-2.$$

由$S(0)=0$知$C=1$，故 $S(x)=-e^x+\dfrac{1}{1-x}-2$，$x\in(-1,1)$.

（20）**解** （Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，令$B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，则$A=B^TB$.

（Ⅱ）$r(A)=r(B)=3$.

（Ⅲ）$Ax=0$与$Bx=0$同解，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$Ax=0$通

解为$x=k\begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$为任意实数.

（21）**解** （Ⅰ）设ξ所对应的特征值为λ，则$A\xi=\lambda\xi$，即

$$\begin{pmatrix}3&a&1&1\\-1&1&1&1\\0&b&1&-2\\c&0&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \text{于是}\quad \begin{cases}-3+a=-\lambda,\\ 2=\lambda,\\ b=0,\\ c=0,\end{cases}$$

因此，$a=1,\ b=c=0,\ \lambda=2$.

（Ⅱ）$|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda-4)$，故$A$可以相似对角化的充要条件为$r(A-2E)=2$，而

$$A-2E\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad r(A-2E)=3,$$

因此A不能对角化.

（22）**解** （Ⅰ）当$x\ge 0,y\ge 0$时，

$$P\{X>x+y\mid X>x\}=\frac{P\{X>x,X>x+y\}}{P\{X>x\}}=\frac{P\{X>x+y\}}{P\{X>x\}},$$

得$\dfrac{P\{X>x+y\}}{P\{X>x\}}=P\{X>y\}$，即$P\{X>x+y\}=P\{X>x\}P\{X>y\}$，所以

$$1-P\{X\le x+y\}=[1-P\{X\le x\}][1-P\{X\le y\}].$$

即$1-F(x+y)=[1-F(x)][1-F(y)]$，得

$$F(x+y)=F(x)+F(y)-F(x)F(y).$$

（Ⅱ）又由题意知当$x\ge 0$时，$F(x)$可导，故在上式两边同时对y求导，得

$$F'(x+y)=F'(y)-F(x)F'(y),$$

令$y=0$，并注意到$F'(0)=f(0)=\lambda$，得$F'(x)=\lambda-\lambda F(x)$，即$F'(x)+\lambda F(x)=\lambda$．解得

$$F(x)=e^{-\int\lambda dx}[\int\lambda e^{\int\lambda dx}dx+C]=1-Ce^{-\lambda x}.$$

由于$F(0)=P\{X\le 0\}=0$，解得$C=1$，所以$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，进而$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，所以

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

（23）**证** （Ⅰ）由于$\bar X\sim N(\mu_1,\dfrac{\sigma^2}{n_1}),\bar Y\sim N(\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{n_2})$，又$\bar X$与$\bar Y$相互独立，由正态分布的性质得

$$\bar X-\bar Y\sim N(\mu_1-\mu_2,(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})\sigma^2).$$

（Ⅱ）由于$\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1-1),\ \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_2-1)$，且$\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}$与$\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}$相互独立，故由$\chi^2$分布的可加性得

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}=\frac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2).$$

（Ⅲ）由于$\bar X-\bar Y\sim N(\mu_1-\mu_2,(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2})\sigma^2)$，故$\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}\sim N(0,1)$，又

$\dfrac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$，且$\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}$与$\dfrac{(n_1+n_2-2)S_\omega^2}{\sigma^2}$相互独立，所以

$$\frac{\dfrac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\Big/n_1+n_2-2}}=\frac{(\bar X-\bar Y)-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2).$$