绝密★启用前

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（）.

(A) 若 $A\ge 0$,则 $\exists M\ge 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\ge 0$

(B) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

（2） 设 $\ln(1+x)(e^{x^n}-1)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=a\int_0^{\sin x}(\sqrt{1+t^3}-1)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则（ ）.

(A) $a=24,n=3$　　**(B)** $a=40,n=4$

(C) $a=24,n=4$　　**(D)** $a=40,n=3$

（3） 设曲线 $y=x^3-x$ 与直线 $y=2x-k$ 仅有一个交点，则 k 的取值范围是（ ）。

（A） $|k|>2$　（B） $|k|\le 2$　（C） $|k|\ge 1$　（D） $|k|<1$

（4） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界连续的奇函数,则 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）。

（A）必为有界的奇函数　（B）必为有界的偶函数

（C）为奇函数但未必有界　（D）为偶函数但未必有界

（5）已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 某领域内有定义，且 $f(0,0)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）.

(A) 连续但偏导数不存在　(B) 偏导数存在但不连续

(C) 连续且偏导数存在但不可微　(D) 可微

(6) 设 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\cos(xy)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{\max\{|x|,|y|\}\le 1}\cos(xy)d\sigma$，则有（ ）

(A) $I_1>I_2>I_3$.　(B) $I_2>I_1>I_3$.　(C) $I_3>I_1>I_2$.　(D) $I_2>I_3>I_1$.

(7) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,\ 1,\ a,\ 4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,\ 1,\ 5,\ a)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,\ 2,\ 10,\ 1)^T$ 是四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个不同特征值的特征向量，则 a 的取值为（ ）.

(A) $a\ne -4$　(B) $a\ne -3$　(C) $a\ne -3$ 且 $a\ne -4$　(D) $a\ne 5$

(8) $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是三阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}\alpha_1=\alpha_1$，$\boldsymbol{A}\alpha_2=\alpha_2$，$\boldsymbol{A}\alpha_3=0$，矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=diag(1,1,0)$ 是对角阵，则 $\boldsymbol{Q}$ 应是（ ）.

(A) $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_3)$　(B) $(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_1)$

(C) $(\alpha_1+\alpha_2,\ -\alpha_2,\ 2\alpha_3)$　(D) $(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+e^{\frac{\ln 2}{2}}+e^{\frac{\ln 3}{3}}+\cdots+e^{\frac{\ln n}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}=$______.

(10) 设 $\varphi(u)$ 可导，且 $\varphi(0)=1$，二元函数 $z=\varphi(x+y)e^{xy}$ 满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，则 $\varphi(u)=$__________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导， $f(0)=0$， f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{e^x}^{e^x+f(x)} f^{-1}(t-e^x)\,dt=x^2\cos x$，则 $f(x)$=________.

(12) 方程 $y'=\dfrac{1}{x+y}$ 的通解为____________.

(13) $\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{1}e^{y^2}dy=$_______.

(14) 已知三元二次型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$$

的秩为 2，则其规范形为______ .

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本小题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 ，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=4$ 处的切线方程.

(16)（本题满分 10 分） 设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$。（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$。

(17) (本小题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是单调可导函数， $f(-\frac{\pi}{2})=0, f(\frac{\pi}{2})=1$， $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，且 $f(x)$ 满足 $\int_0^{f(x)}g(t)\,dt=\int_0^x\left(\dfrac{1}{1+e^{\pi}}+\dfrac{\sin t}{1+e^t}\right)\sin t\,dt$，求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$ 的值.

(18) (本小题满分 10 分) 确定常数 A 的最小值及常数 B 的最大值,使得不等式 $\dfrac{B}{xy}\le\ln(x^2+y^2)\le A(x^2+y^2)$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}$ 内成立.

(19) (本小题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导， $f(0)=0$，且 $f'(x)$ 在 $(0,a)$ 内单调减少，证明

$$\int_0^a x^4 f(x)\,dx<\frac{5a}{6}\int_0^a x^3 f(x)\,dx.$$

(20) (本小题满分 11 分) 设平面区域为 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$， $f(x,y)$ 满足表达式 $xy(\iint\limits_D f(x,y)dxdy)^2=f(x,y)-1$,令 $I(t)=\int_t^1 f(x,t)dx$,求 $\int_0^1 I(t)dt$.

(21) (本小题满分 11 分) 设曲线 $y=y(x)$ 在 $(1,\frac{1}{4})$ 点与直线 $4x-4y-3=0$ 相切，且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$. 求该曲线在相应于 $x\in[-1,1]$ 上的点 (x,y) 处曲率.

(22)　(本小题满分 11 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{b}=(9,18,-18)^T$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有通解

$$k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T,$$

其中 k_1，k_2 为任意常数，求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{100}$．

(23)　(本小题满分 11 分) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等价，

（I）求常数 a 的值；　（II）求可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

绝密★启用前

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim_{n\to\infty} y_n$ 均不存在，那么下列命题正确的是（ ）.

（A）若 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 不存在，则 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也不存在

（B）若 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也存在

（C）若 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 均不存在

（D）若 $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 中只要有一个存在，另一个必定不存在

（2）. 下列广义积分收敛的是（ ）.

（A）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$ （B）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xe^x}}dx$

（C）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$ （D）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$

（3）. 方程 $y''+4y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 的特解形式为( ).

(A) $a\cos 2x$; (B) $ax\cos 2x$;

(C) $a\sin 2x+b\cos 2x$; (D) $ax\cos 2x+bx\sin 2x$

（4）设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[0,2]$上二阶可导，且 $f(0)=g(0)=0, f(2)=g(2)=1$，且 $f''(x)>0$，$g''(x)<0$，记 $S_1=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$，则（ ）.

（A）$S_1<1<S_2$ （B）$S_2<1<S_1$

（C）$S_1<S_2<1$ （D）$1<S_2<S_1$

（5）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内连续，且极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{2(e^x-1)}=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为（ ）.

（A）$y-2x=1$ （B）$x+2y=2$ （C）$2y-x=2$ （D）$x+y=1$

（6）二次积分 $I=\int_0^{2R}dy\int_{-\sqrt{2Ry-y^2}}^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)dx$ 化为极坐标的积分为（ ）

（A）$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ （B）$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（C）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ （D）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（7） 设 A 是一个 n 阶矩阵，先交换 A 的第 i 列与第 j 列，然后再交换第 i+1 行与第 $j+1$ 行得到的矩阵

记为B，现有下列五个关系：

(1) $|A|=|B|$；(2) $r(A)=r(B)$；(3) A 与 B 合同；(4) A 与 B 相似；(5) A 与 B 等价。

则其中正确的有（　）。

（A）(1), (2)　　　　　　　　（B）(1), (2), (3)

（C）(1), (2), (5)　　　　　　（D）(1), (2), (3), (4), (5)

（8） 设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\eta_3=(1,0,5,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组（Ⅰ）的一个极大无关组是（　　）。

(A) α_1,α_2　　　(B) α_1,α_4　　　(C) α_3,α_5　　　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

（9）设 $y=y(x)$ 由方程 $\tan(x+y)-2\sin x+\ln(1+xy)=0$ 确定，且 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 则 $\mathrm{d}\,y|_{x=0}=$_____.

（10）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定的二元隐函数，则 $z'_x+z'_y=$_________.

（11）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}\,x=$_______________.

（12）求曲线 $y=\ln\cos x, x\in[0,\frac{\pi}{3}]$ 的弧长。

（13）求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{1}{n}+2\cos\frac{2}{n}+\cdots+n\cos\frac{n}{n})$

（14）　已知 $A=\begin{bmatrix}2&3&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $\left(\frac{1}{4}A^*A^2\right)^{-1}=$_______.

三、解答题：15～23小题，共94分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）**(本小题满分10分)** 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\le 0\\ e^{x^2}-1, & x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}\,t\right)^{\frac{1}{(x-\sin x)^2}}$。

（16）**(本小题满分10分)** 求函数 $f(x,y)=e^{-xy}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

（17）**(本小题满分 10 分)** 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，且 $\varphi'\ne 1$.（I）求 dz；（II）记 $u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

（18）**(本小题满分10分)** 计算 $\iint\limits_D|x^2+y^2-x|dxdy$，其中 D 为区域 $x^2+y^2\le 1, x\ge 0$。

（19）**(本小题满分 10 分)** 设函数 $f(x)$ 二阶导数连续，满足方程 $f'(x)=e^{-2x}-2\int_0^1 xf'(xt)dt$，且

20、21全程考研资料请加群712760929

$f(0)=1$，求函数 $f(x)$.

（20）**(本小题满分 11 分)** 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(2)=4$. 证明：存在点 $\xi\in(0,1)$、$\eta\in(1,2)$，是得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$.

（21）**(本小题满分 11 分) 设一质点在平面内运动，它在时刻 t 的坐标为 $x=t^3-t, y=t^4+t$ $(-\infty<t<+\infty)$，证明质点运动曲线在 $t=0$ 处有一拐点，且运动速度在 $t=0$ 处取得极大值。**

（22）**(本小题满分 11 分)**设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵 $r(\boldsymbol{A})=1$，$\lambda_1=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应的一个特征向量

$\xi_1=(-1\ \ 1\ \ 1)^T$.（Ⅰ）求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解；　（Ⅱ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（23）**(本小题满分 11 分)**已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.　（Ⅰ）求行列式 $|A^*-2A^{-1}|$;（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E。