经济学核心课程

运 筹 学

(Operations Research)

绪 论

本章主要内容:

（1）运筹学简述

（2）运筹学的主要内容

（3）本课程的教材及参考书

（4）本课程的特点和要求

（5）本课程授课方式与考核

（6）运筹学在工商管理中的应用

运筹学简述

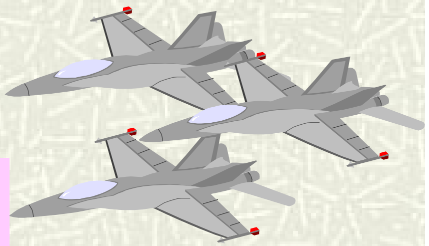
运筹学（Operations Research）

系统工程的最重要的理论基础之一，在美国有人把运筹学称之为管理科学(Management Science)。运筹学所研究的问题，可简单地归结为一句话：

"依照给定条件和目标，从众多方案中选择最佳方案"

故有人称之为最优化技术。

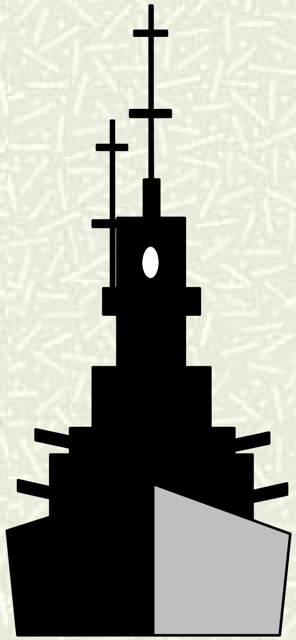
运筹学简述



运筹学的历史

“运作研究(Operational Research)小组”:解决复杂的战略和战术问题。例如:

1. 如何合理运用雷达有效地对付德军德空袭
2. 对商船如何进行编队护航，使船队遭受德国潜艇攻击时损失最少;
3. 在各种情况下如何调整反潜深水炸弹的爆炸深度，才能增加对德国潜艇的杀伤力等。



运筹学的主要内容

- 数学规划（线性规划、整数规划、目标规划、动态规划等）
- 图论
- 存储论
- 排队论
- 对策论
- 排序与统筹方法
- 决策分析

本课程的教材及参考书

选用教材

- 《运筹学基础及应用》胡运权主编　哈工大出版社

参考教材

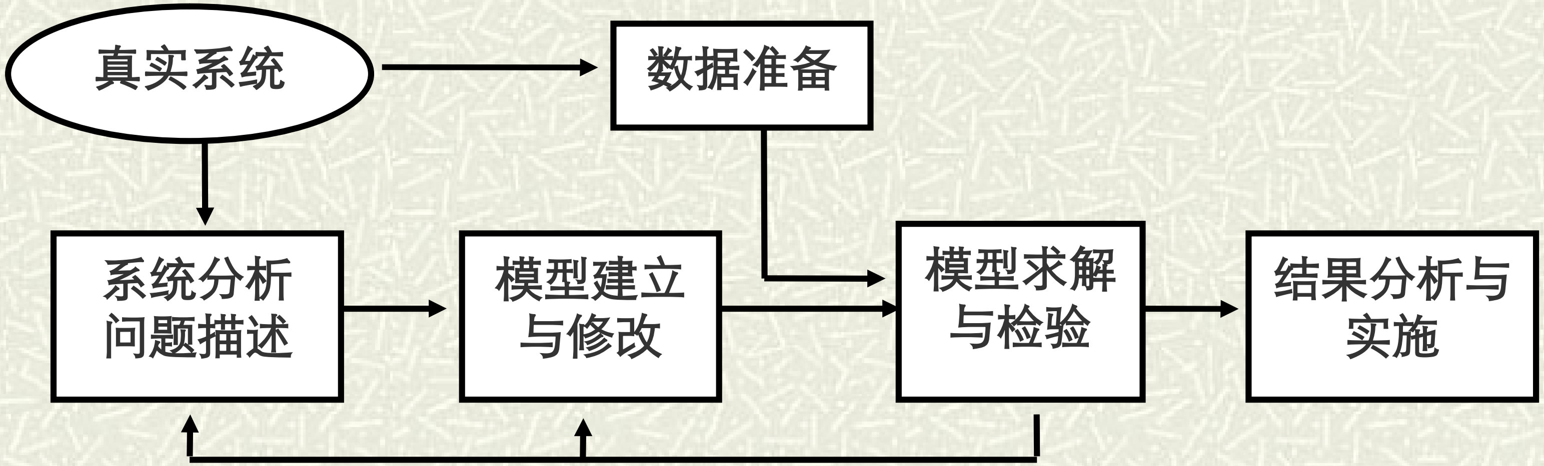
- 《运筹学教程》胡运权主编 （第2版）清华出版社
- 《管理运筹学》韩伯棠主编 （第2版）高等教育出版社
- 《运筹学》(修订版) 钱颂迪主编 清华出版社

本课程的特点和要求

先修课：高等数学，基础概率、线性代数

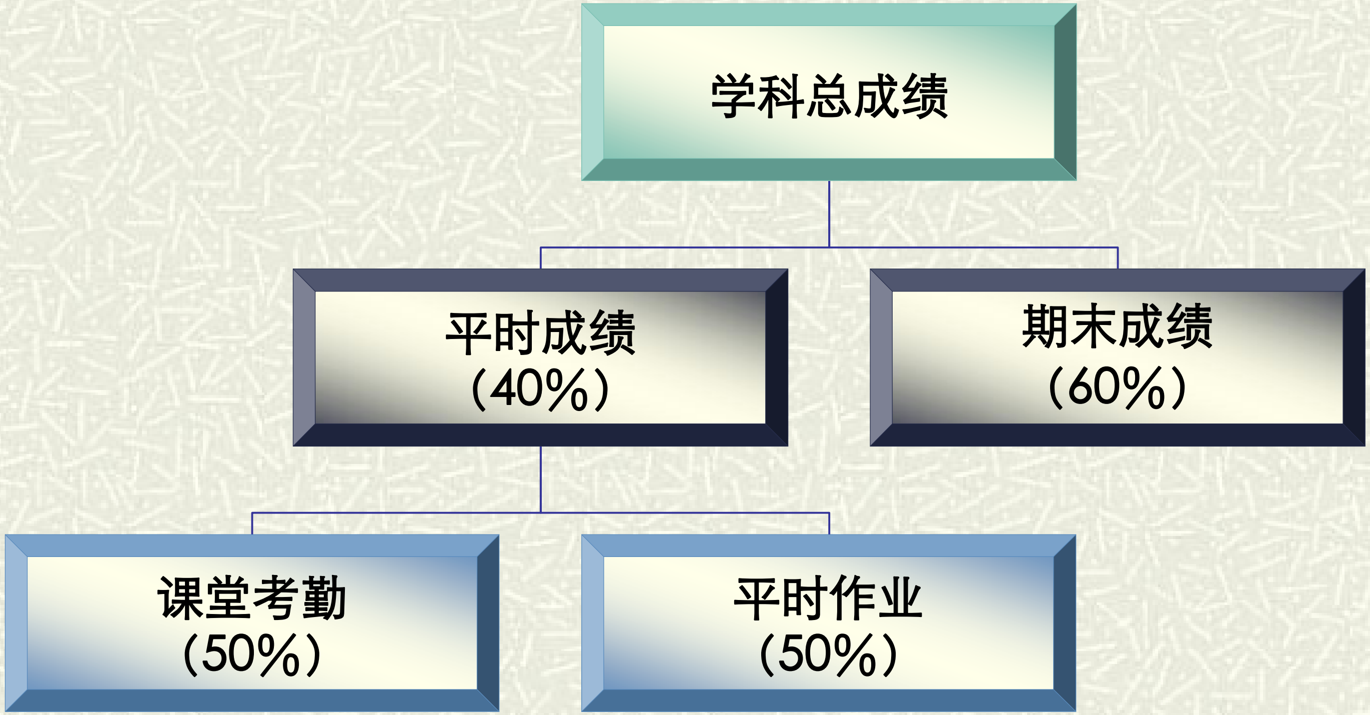
特点：系统整体优化；多学科的配合；模型方法的应用

运筹学的研究的主要步骤：



本课程授课方式与考核

讲授为主，结合习题作业



运筹学在工商管理中的应用

运筹学在工商管理中的应用涉及几个方面:

1. 生产计划
2. 运输问题
3. 人事管理
4. 库存管理
5. 市场营销
6. 财务和会计

另外，还应用于设备维修、更新和可靠性分析，项目的选择与评价，工程优化设计等。

运筹学在工商管理中的应用

Interface上发表的部分获奖项目

组织	应用	效果
联合航空公司	在满足乘客需求的前提下，以最低成本进行订票及机场工作班次安排	每年节约成本600万美元
Citgo石油公司	优化炼油程序及产品供应、配送和营销	每年节约成本7000万
AT&T	优化商业用户的电话销售中心选址	每年节约成本4.06亿美元，销售额大幅增加
标准品牌公司	控制成本库存（制定最优再定购点和定购量确保安全库存）	每年节约成本380万美元
法国国家铁路公司	制定最优铁路时刻表并调整铁路日运营量	每年节约成本1500万美元，年收入大幅增加。
Taco Bell	优化员工安排，以最低成本服务客户	每年节约成本1300万美元
Delta航空公司	优化配置上千个国内航线航班来实现利润最大化	每年节约成本1亿美元

“管理运筹学”软件介绍

“管理运筹学”2.0版包括：线性规划、运输问题、整数规划（0-1整数规划、纯整数规划和混合整数规划）、目标规划、对策论、最短路径、最小生成树、最大流量、最小费用最大流、关键路径、存储论、排队论、决策分析、预测问题和层次分析法，共15个子模块。

Chapter1 线性规划

(Linear Programming)

本章主要内容:

- LP的数学模型
- 图解法
- 单纯形法
- 单纯形法的进一步讨论－人工变量法
- LP模型的应用

线性规划问题的数学模型

1. 规划问题

生产和经营管理中经常提出如何合理安排，使人力、物力等各种资源得到充分利用，获得最大的效益，这就是规划问题。

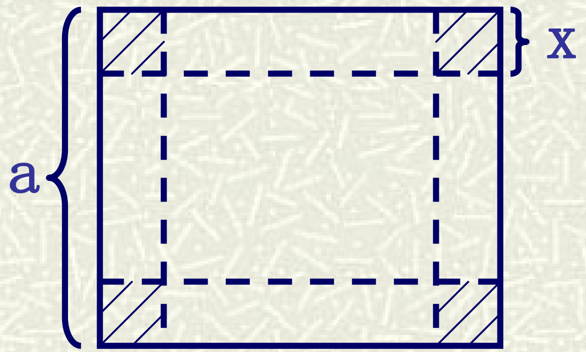
线性规划通常解决下列两类问题:

（1）当任务或目标确定后，如何统筹兼顾，合理安排，用最少的资源 （如资金、设备、原标材料、人工、时间等）去完成确定的任务或目标

（2）在一定的资源条件限制下，如何组织安排生产获得最好的经济效益（如产品量最多 、利润最大.）

线性规划问题的数学模型

例1.1 如何图所示，如何截取x使铁皮所围成的容积最大?



$$v = (a - 2x)^2 \cdot x$$

$$\frac{dv}{dx} = 0$$

$$2(a - 2x) \cdot x \cdot (-2) + (a - 2x)^2 = 0$$

$$x = \frac{a}{6}$$

线性规划问题的数学模型

例1.2 某企业计划生产甲、乙两种产品。这些产品分别要在A、B、C、D、四种不同的设备上加工。按工艺资料规定，单件产品在不同设备上加工所需要的台时如下表所示，企业决策者应如何安排生产计划，使企业总的利润最大?

设备 / 产品	A	B	C	D	利润（元）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
有效台时	12	8	16	12	

线性规划问题的数学模型

解：设x_1、x_2分别为甲、乙两种产品的产量，则数学模型为：

$$\max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

2. 线性规划的数学模型由三个要素构成

决策变量	Decision variables
目标函数	Objective function
约束条件	Constraints

怎样辨别一个模型是线性规划模型?

其特征是:

(1) 问题的目标函数是多个决策变量的**线性**函数，通常是求最大值或最小值;

(2) 问题的约束条件是一组多个决策变量的**线性**不等式或等式。

线性规划问题的数学模型

3. 线性规划数学模型的一般形式

目标函数： $\max\ (\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$

约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_1 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \le (= \cdot \ge)\ b_m \\ x_1 \ge 0 \cdots\cdots x_n \ge 0 \end{cases}$$

简写为：

$$\max(\min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= \cdot \ge)\ b_i \qquad (\mathrm{i} = 1 \cdot 2 \cdots m)$$

$$x_j \ge 0 \qquad (\mathrm{j} = 1 \cdot 2 \cdots n)$$

线性规划问题的数学模型

向量形式： $\max\ (\min)\ z = CX$

$$\begin{cases} \sum p_j x_j \le (= \cdot \ge)\ B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中： $C = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

线性规划问题的数学模型

矩阵形式:

$$\max \quad (\min) \quad Z = CX$$

$$\begin{cases} AX \le (= \cdot \ge) B \\ X \ge 0 \end{cases}$$

其中: $C = (c_1 \quad c_2 \cdots \quad c_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

3. 线性规划问题的标准形式

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

特点:

(1) 目标函数求最大值（有时求最小值）

(2) 约束条件都为等式方程，且右端常数项b_i都大于或等于零

(3) 决策变量x_j为非负。

(2) 如何化标准形式

目标函数的转换

如果是求极小值即 $\min z=\sum c_j x_j$，则可将目标函数乘以(-1)，可化为求极大值问题。

即 $\max z'=-z=-\sum c_j x_j$

也就是：令 $z'=-z$，可得到上式。

变量的变换

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j=x_j'-x_j''$

其中：$x_j', x_j''\geq 0$

线性规划问题的数学模型

- 约束方程的转换：由不等式转换为等式。

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \quad \Rightarrow \quad \sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0 \qquad \text{称为松弛变量}$$

$$\sum a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Rightarrow \quad \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0 \qquad \text{称为剩余变量}$$

- 变量$x_j \le 0$的变换

可令 $x_j' = -x_j$，显然 $x_j' \ge 0$

例1.3 将下列线性规划问题化为标准形式

$$\min \quad Z = -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \ge 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

解:（1）因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，所以

用 $x_3' - x_3''$ 替换 x_3，且 $x_3', x_3'' \ge 0$

线性规划问题的数学模型

(2) 第一个约束条件是“≤”号，在“≤”左端加入松驰变量x_4，$x_4 \geqslant 0$,化为等式;

(3) 第二个约束条件是“≥”号，在“≥”左端减去剩余变量x_5，$x_5 \geqslant 0$;

(4) 第3个约束方程右端常数项为-5，方程两边同乘以(-1),将右端常数项化为正数;

(5) 目标函数是最小值，为了化为求最大值，令z′=-z,得到max z′=-z，即当z达到最小值时z′达到最大值，反之亦然;

线性规划问题的数学模型

标准形式如下:

$$\max Z = 2x_1 - x_2 - 3(x_3' - x_3'') + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + (x_3' - x_3'') + x_4 \qquad = 7 \\ x_1 - x_2 - (x_3' - x_3'') \qquad - x_5 = 2 \\ 5x_1 - x_2 - 2(x_3' - x_3'') \qquad = 5 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题的数学模型

4. 线性规划问题的解

线性规划问题

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad ------------(1)$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) & --(2)\\ x_j\geq 0,\ j=1,2,\cdots,n & -------(3)\end{cases}$$

求解线性规划问题，就是从满足约束条件(2)、(3)的方程组中找出一个解，使目标函数(1)达到最大值。

线性规划问题的数学模型

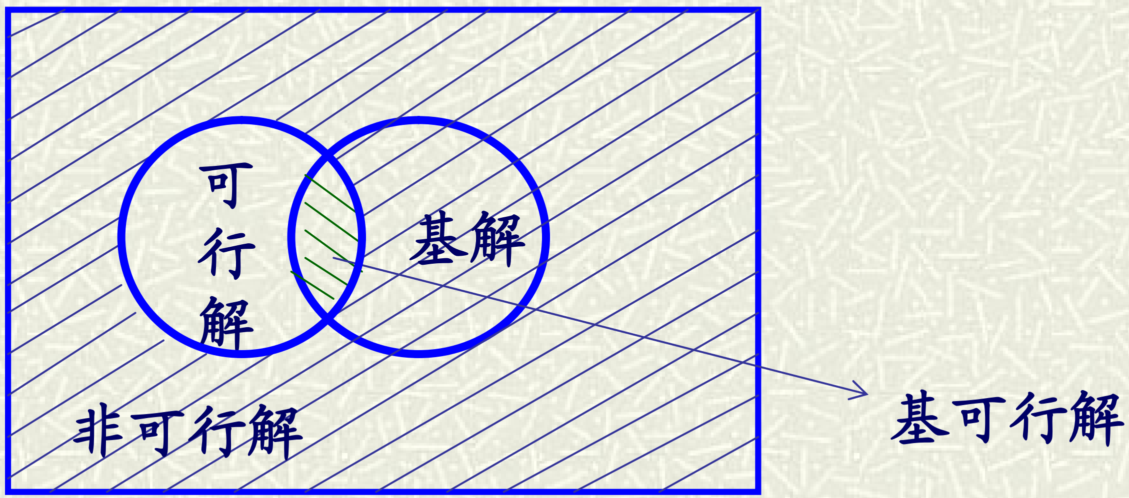
- 可行解：满足约束条件②、③的解为可行解。所有可行解的集合为可行域。
- 最优解：使目标函数达到最大值的可行解。
- 基：设A为约束条件②的m×n阶系数矩阵(m<n)，其秩为m，B是矩阵A中m阶满秩子矩阵（∣B∣≠0），称B是规划问题的一个基。设:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{bmatrix}=(p_1\cdots p_m)$$

称 B中每个列向量$P_j\ (j=1\ 2\ \cdots\ \cdots\ m)$ 为基向量。与基向量P_j对应的变量x_j 为基变量。除基变量以外的变量为非基变量。

线性规划问题的数学模型

- **基解**：某一确定的基B，令非基变量等于零，由约束条件方程②解出基变量，称这组解为基解。在基解中变量取非0值的个数不大于方程数m，基解的总数不超过 C_n^m
- **基可行解**：满足变量非负约束条件的基本解，简称基可行解。
- **可行基**：对应于基可行解的基称为可行基。



例1.4 求线性规划问题的所有基矩阵。

$$\max Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ -10x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

解: 约束方程的系数矩阵为2×5矩阵 $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -10 & 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

r(A)=2，2阶子矩阵有10个，其中基矩阵只有9个，即

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_7 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \quad B_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图解法

线性规划问题的求解方法

一般有两种方法：

- 图解法
  - 两个变量、直角坐标
  - 三个变量、立体坐标
- 单纯形法
  - 适用于任意变量、但必需将一般形式变成标准形式

下面我们分析一下简单的情况—— 只有两个决策变量的线性规划问题，这时可以通过图解的方法来求解。图解法具有简单、直观、便于初学者窥探线性规划基本原理和几何意义等优点。

图解法

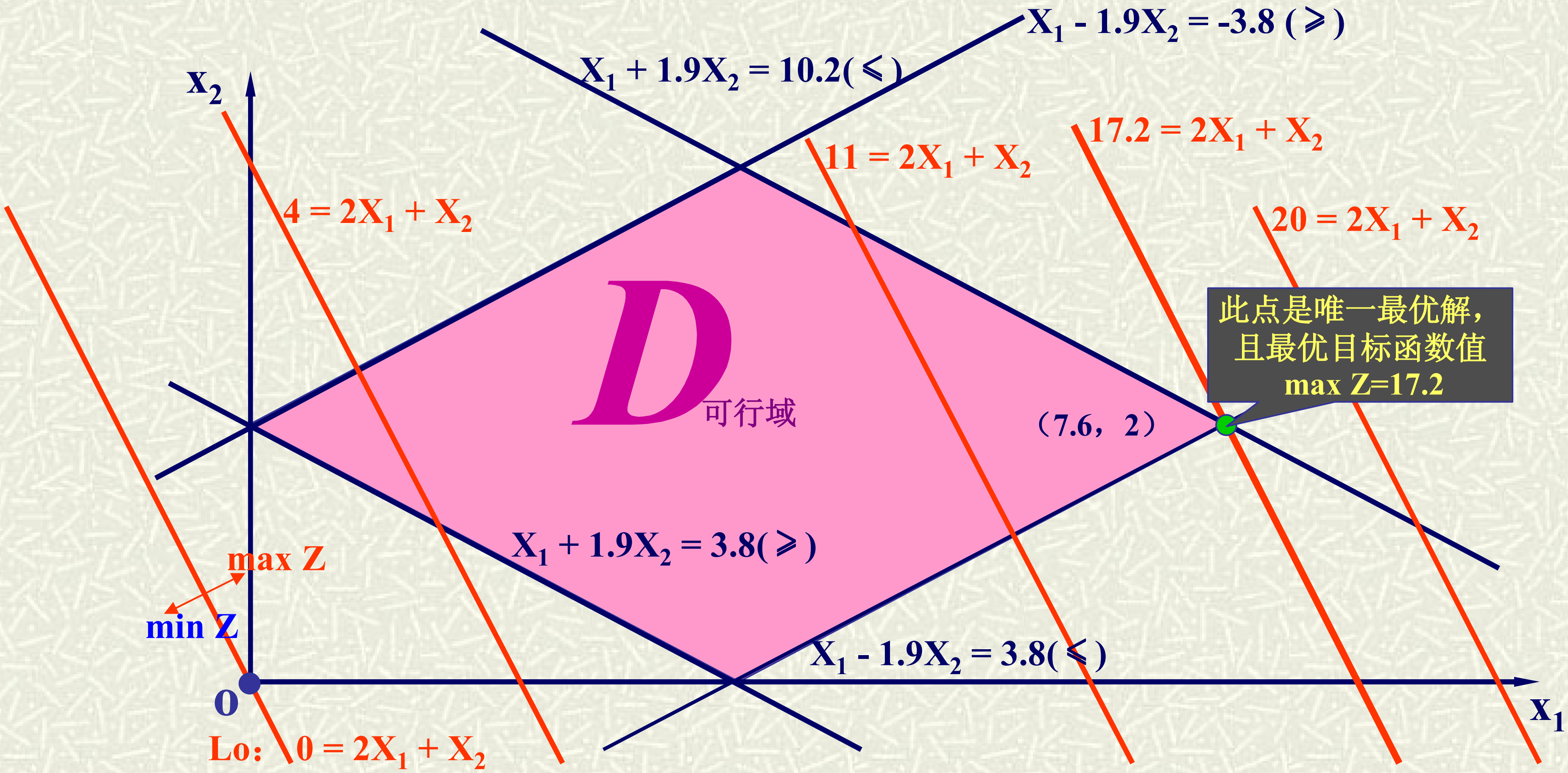
例1.5 用图解法求解线性规划问题

$$\max\ Z = 2X_1 + X_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} X_1 + 1.9X_2 \geqslant 3.8 \\ X_1 - 1.9X_2 \leqslant 3.8 \\ X_1 + 1.9X_2 \leqslant 10.2 \\ X_1 - 1.9X_2 \geqslant -3.8 \\ X_1\ ,\ X_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

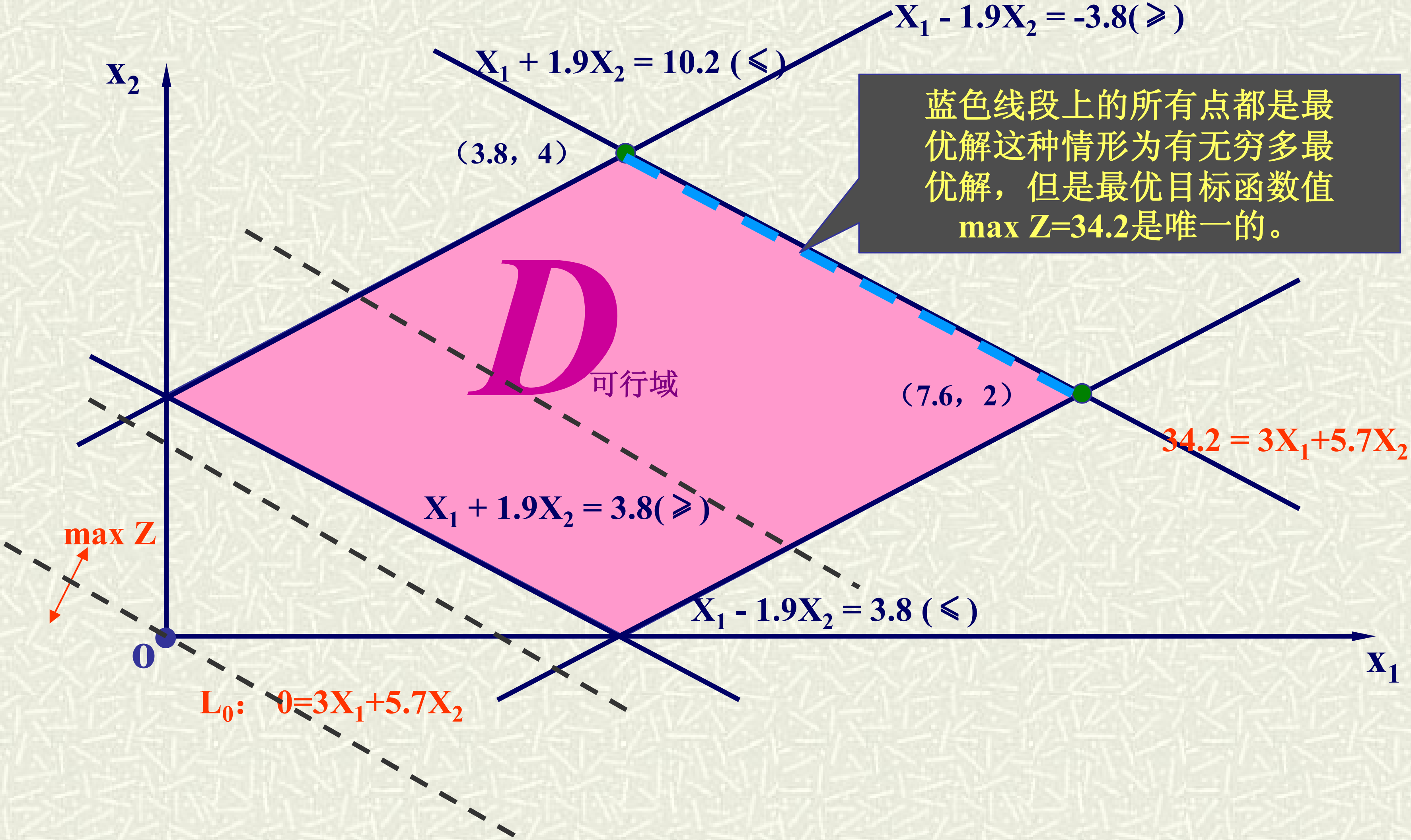
图解法

$$\max \ Z = 2X_1 + X_2$$



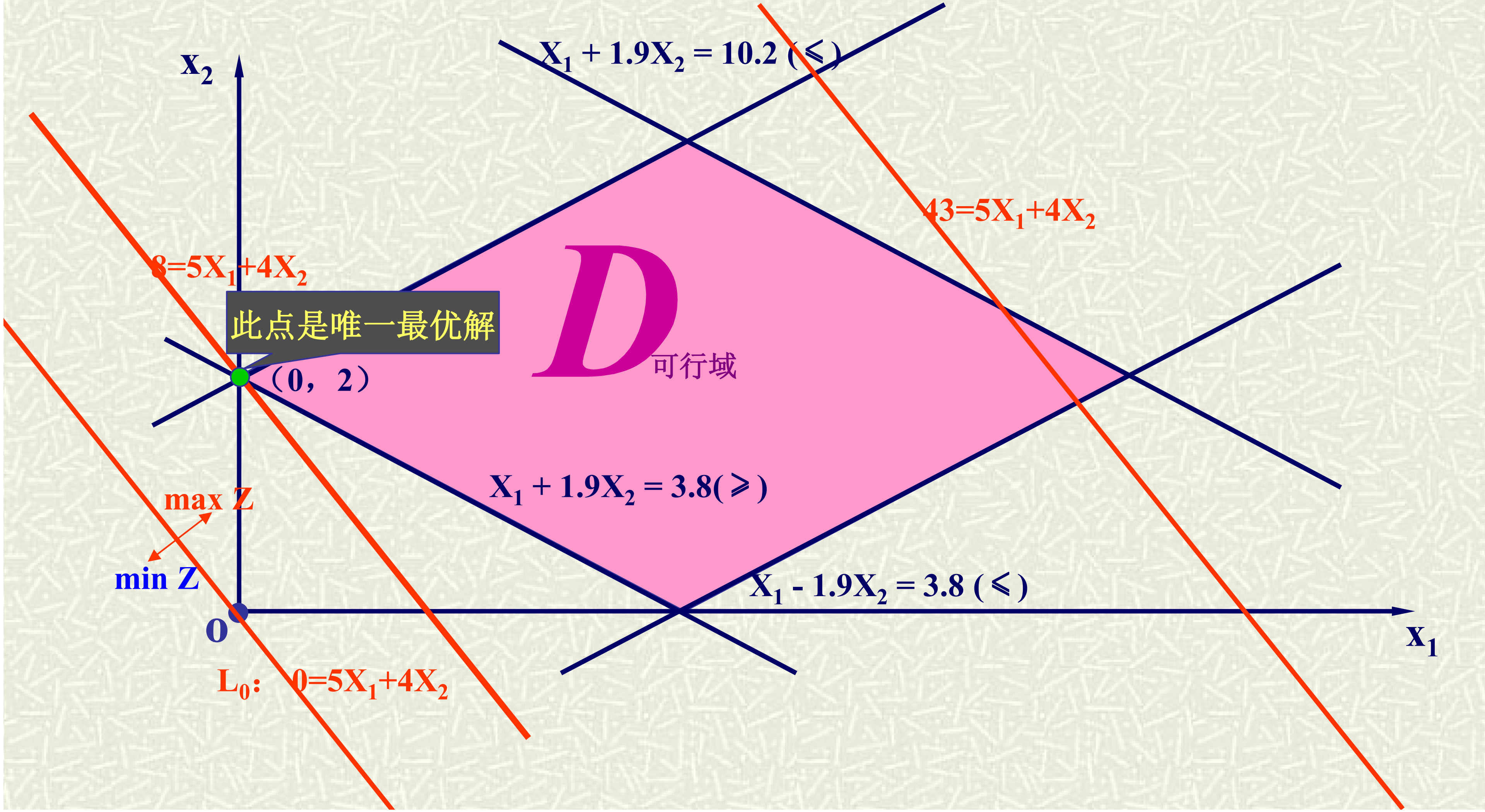
图解法

max $Z=3X_1+5.7X_2$

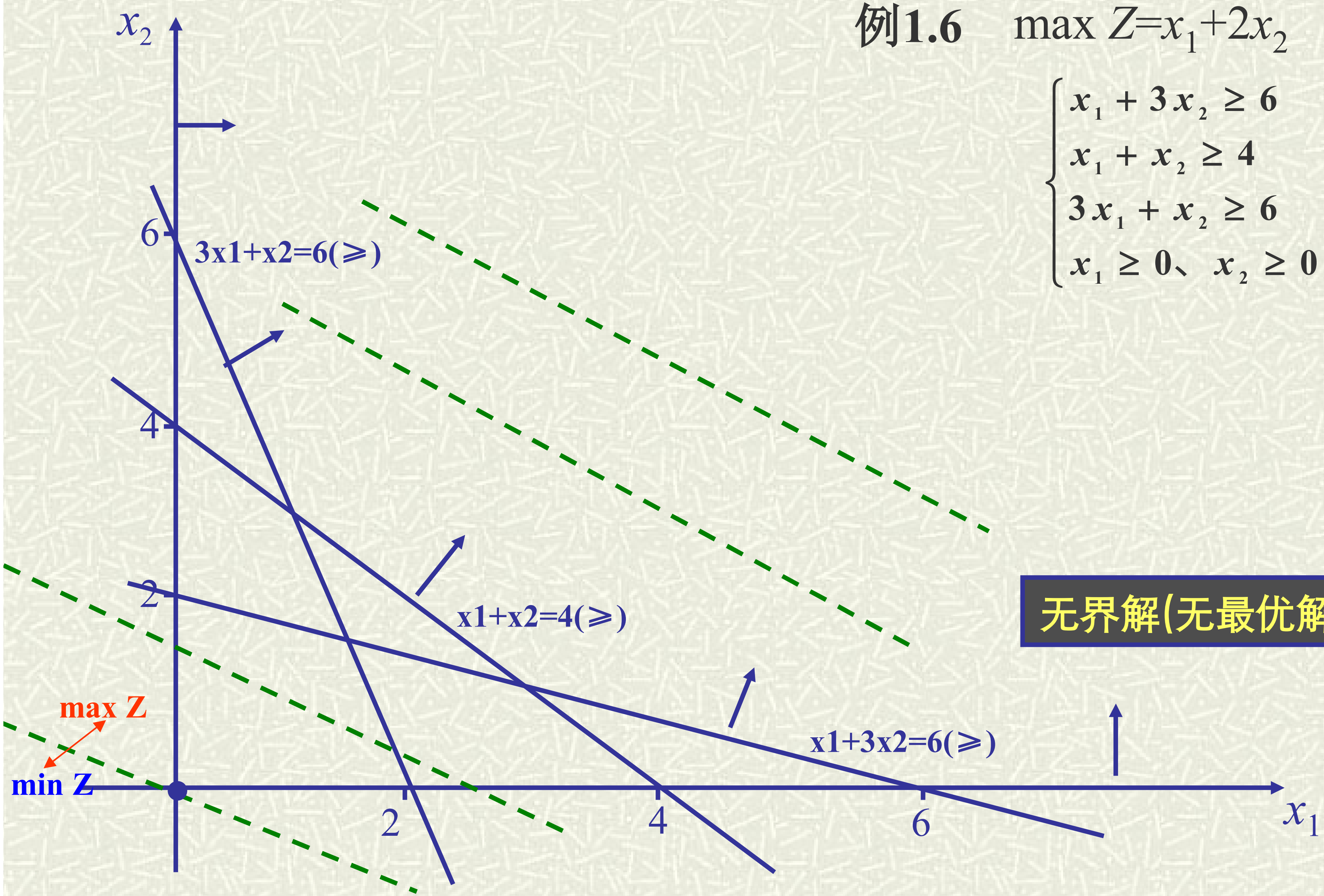


图解法

min Z=5X1+4X2



图解法



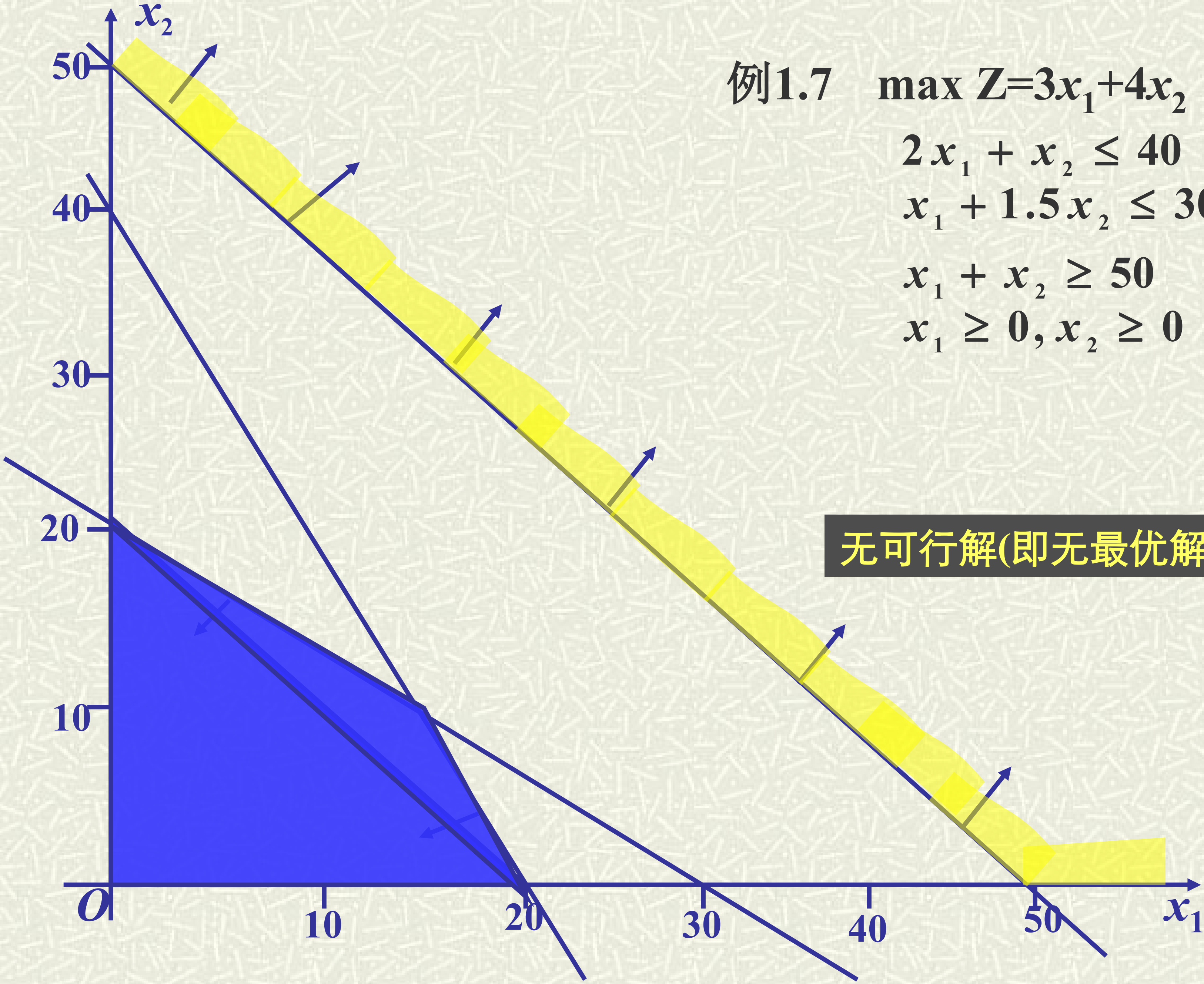
例1.6　$\max Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0、x_2 \ge 0 \end{cases}$$

无界解(无最优解)

例1.7　max $Z=3x_1+4x_2$

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \leq 40 \\
x_1 + 1.5x_2 \leq 30 \\
x_1 + x_2 \geq 50 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$



无可行解(即无最优解)

图解法

学习要点：

1. 通过图解法了解线性规划有几种解的形式（唯一最优解；无穷多最优解；无界解；无可行解）

2. 作图的关键有三点：

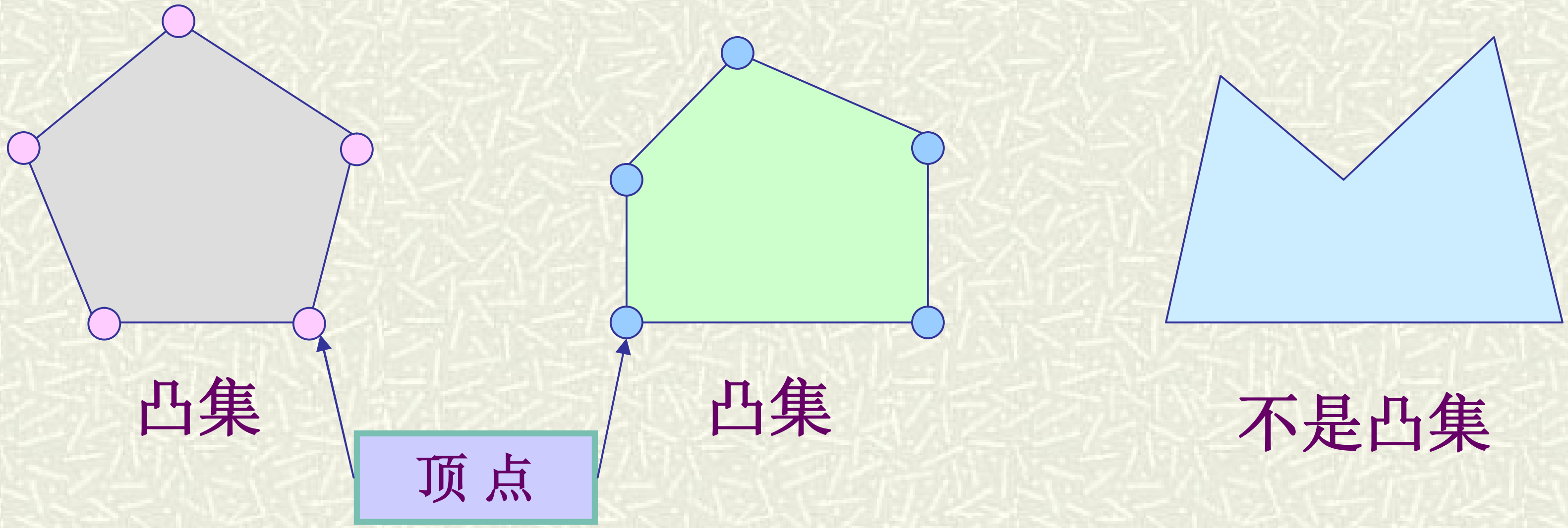
(1) 可行解区域要画正确

(2) 目标函数增加的方向不能画错

(3) 目标函数的直线怎样平行移动

单纯形法基本原理

凸集：如果集合C中任意两个点X1、X2，其连线上的所有点也都是集合C中的点，称C为凸集。



单纯形法基本原理

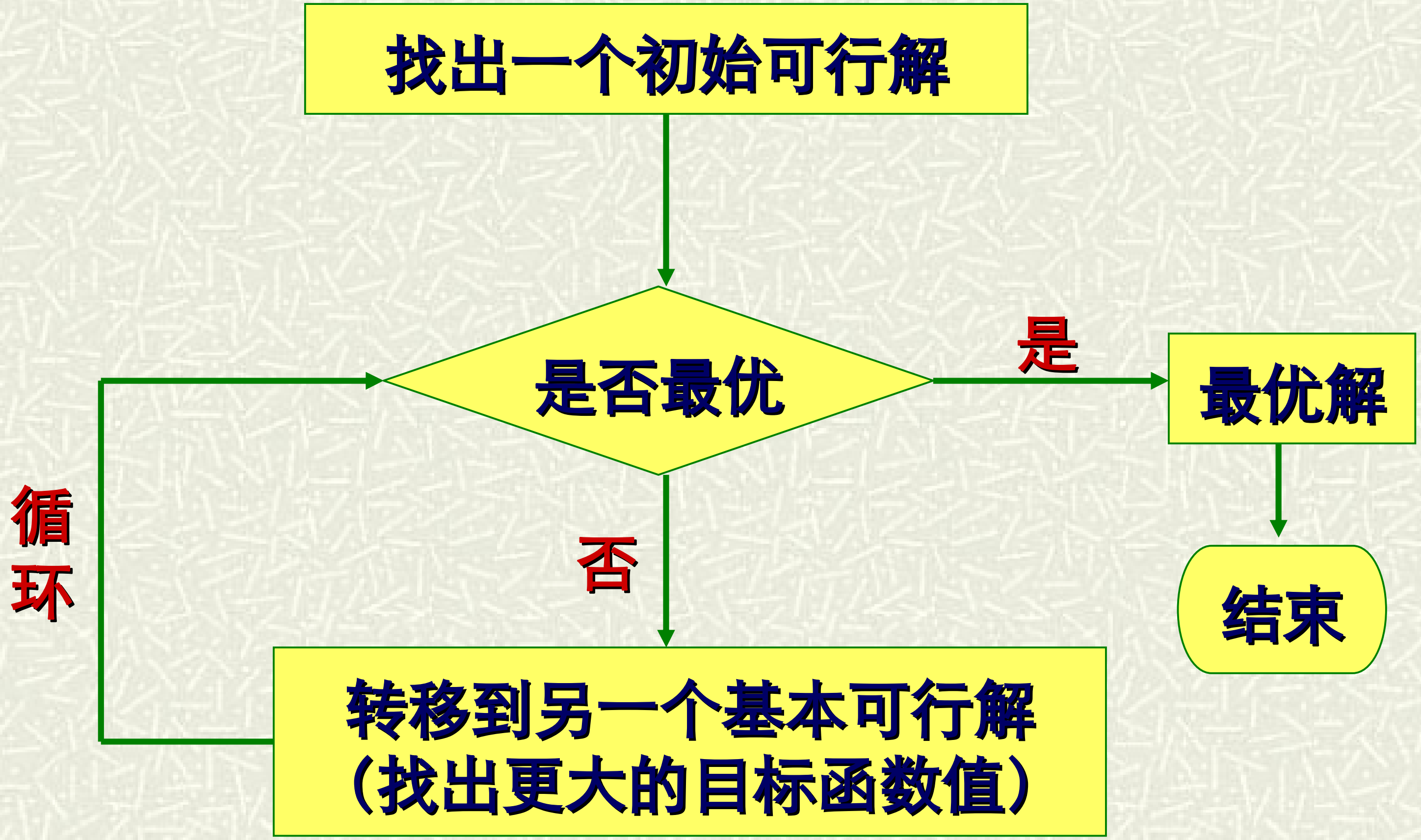
定理1：若线性规划问题存在可行解，则该问题的可行域是凸集。

定理2：线性规划问题的基可行解X对应可行域(凸集)的顶点。

定理3：若问题存在最优解，一定存在一个基可行解是最优解。（或在某个顶点取得）

单纯形法的计算步骤

单纯形法的思路



核心是：变量迭代

单纯形法的计算步骤

单纯形表

c_j			c_1	$\cdots$	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	$\cdots$	c_n	θ_i
c_B	X_B	b	x_1	$\cdots$	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	$\cdots$	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	$\cdots$	a_{1n}	θ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	b_m	0	$\cdots$	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	$\cdots$	a_{mn}	θ_m
σ_j			0	$\cdots$	$\cdots$	0	$\sigma_j = c_j - \sum c_i a_{ij}$				

其中： $\theta_i = \left.\dfrac{b_i}{a_{kj}}\right| a_{kj} > 0$

例1.8 用单纯形法求下列线性规划的最优解

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：1）将问题化为标准型，加入松弛变量$x3$、$x4$则标准型为:

$$\max \quad Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

单纯形法的计算步骤

2）求出线性规划的初始基可行解，列出初始单纯形表。

c_j			3	4	0	0	θ_i
c_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	
0	x_4	30	1	3	0	1	
σ_j			3	4	0	0	

检验数

$$\lambda_1 = c_1 - (c_3 a_{11} + c_4 a_{21}) = 3 - (0 \times 2 + 0 \times 1) = 3$$

单纯形法的计算步骤

3）进行最优性检验

如果表中所有检验数 $\sigma_j \le 0$ ，则表中的基可行解就是问题的最优解，计算停止。否则继续下一步。

4）从一个基可行解转换到另一个目标值更大的基可行解，列出新的单纯形表

① 确定换入基的变量。选择$\sigma_j > 0$，对应的变量x_j作为换入变量，当有一个以上检验数大于0时，一般选择最大的一个检验数，即：$\sigma_k = \max\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$ ，其对应的x_k作为换入变量。

② 确定换出变量。根据下式计算并选择θ ，选最小的θ对应基变量作为换出变量。

$$\theta_L = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\}$$

单纯形法的计算步骤

③　用换入变量xk替换基变量中的换出变量，得到一个新的基。对应新的基可以找出一个新的基可行解，并相应地可以画出一个新的单纯形表。

5）重复3）、4）步直到计算结束为止。

单纯形法的计算步骤

换入列

b_i/a_{i2}， $a_{i2}>0$

将3化为1

换出行

乘以1/3后得到

		c_j	3	4	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	40	2	1	1	0	40
0	x_4	30	1	3	0	1	10
σ_j			3	4	0	0	
0	x_3	30	5/3	0	1	−1/3	18
4	x_2	10	1/3	1	0	1/3	30
σ_j			5/3	0	0	−4/3	
3	x_1	18	1	0	3/5	−1/5	
4	x_2	4	0	1	−1/5	−2/5	
σ_j			0	0	−1	−1	

单纯形法的计算步骤

例1.9 用单纯形法求解

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 \le 20 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：将数学模型化为标准形式：

$$\max Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 15 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_5 = 20 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

不难看出x_4、x_5可作为初始基变量，列单纯形表计算。

单纯形法的计算步骤

c_j			1	2	1	0	0	θ_i
c_B	基变量	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_4	15	2	-3	2	1	0	—
0	x_5	20	1/3	1	5	0	1	20
σ_j			1	2	1	0	0	
0	x_4	75	3	0	17	1	3	25
2	x_2	20	1/3	1	5	0	1	60
σ_j			1/3	0	−9	0	−2	
1	x_1	25	1	0	17/3	1/3	1	
2	x_2	35/3	0	1	28/9	-1/9	2/3	
σ_j			0	0	-98/9	-1/9	-7/3	

单纯形法的计算步骤

学习要点：

1. 线性规划解的概念以及3个基本定理

2. 熟练掌握单纯形法的解题思路及求解步骤

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

人工变量法:

　　前面讨论了在标准型中系数矩阵有单位矩阵，很容易确定一组基可行解。在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大M法或两阶段法求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

例1.10 用大M法解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将数学模型化为标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

故人为添加两个单位向量，得到人工变量单纯形法数学模型:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,7 \end{cases}$$

其中：M是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值；再用前面介绍的单纯形法求解该模型，计算结果见下表。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

	c_j		3	2	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
0	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
-M	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
-M	x_7	1	2	-2	1	0	0	0	1	1 →
	σ_j		3-2M	2+M	-1+2M ↑	-M				
0	x_6	3	-6	5	0	-1	0	1		3/5 →
-M	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		—
	σ_j		5-6M	5M ↑	0	-M	0	0		
2	x_2	3/5	−6/5	1	0	−1/5	0			—
-M	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1			31/3 →
-1	x_3	11/5	−2/5	0	1	−2/5	0			—
	σ_j		5 ↑	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3			
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3			
	σ_j		0	0	0	-5	-25/3			

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

解的判别：

1）唯一最优解判别：最优表中所有非基变量的检验数非零，则线　规划具有唯一最优解。

2）多重最优解判别：最优表中存在非基变量的检验数为零，则线则性规划具有多重最优解（或无穷多最优解）。

3）无界解判别：某个$\lambda_k>0$且$a_{ik}\leqslant 0$（i=1，2,…,m）则线性规划具有无界解。

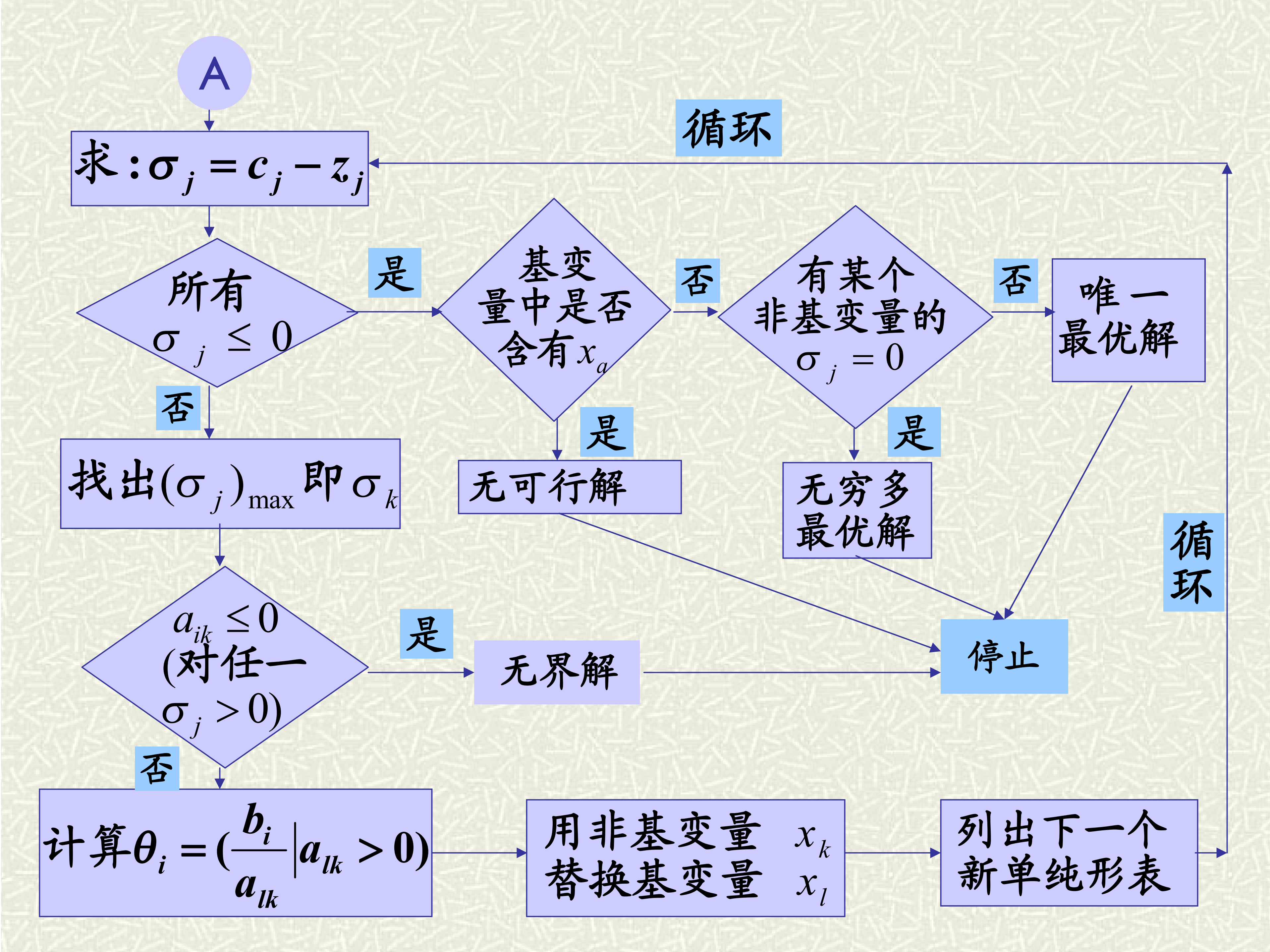
4）无可行解的判断：当用大M单纯形法计算得到最优解并且存在$Ri>0$时，则表明原线性规划无可行解。

5）退化解的判别：存在某个基变量为零的基本可行解。

单纯形法的进一步讨论－人工变量法

单纯性法小结:

建立模型	个数		取值			右端项		等式或不等式			极大或极小		新加变量系数	
	两个	三个以上	$x_j \geqslant 0$	x_j无约束	$x_j \leqslant 0$	$b_i \geqslant 0$	$b_i < 0$	$\leqslant$	$=$	$\geqslant$	maxZ	minZ	x_s	x_a
求解	图解法、单纯形法	单纯形法	不处理	令$x_j = x_j' - x_j''$ $x_j' \geqslant 0$ $x_j'' \geqslant 0$	令$x_j' = -x_j$	不处理	约束条件两端同乘以-1	加松弛变量x_s	加入人工变量x_a	减去x_s加入x_a	不处理	令$z' = -Z$ minZ $= -$ max z'	0	$-M$


A
求：$\sigma_j = c_j - z_j$
循环
所有 $\sigma_j \le 0$
是
基变量中是否含有 x_a
否
有某个非基变量的 $\sigma_j = 0$
否
唯一最优解
否
找出 $(\sigma_j)_{max}$ 即 σ_k
是
无可行解
是
无穷多最优解
循环
$a_{ik} \le 0$ (对任一 $\sigma_j > 0$)
是
无界解
停止
否
计算 $\theta_i = (\frac{b_i}{a_{lk}} \mid a_{lk} > 0)$
用非基变量 x_k 替换基变量 x_l
列出下一个新单纯形表

线性规划模型的应用

一般而言，一个经济、管理问题凡是满足以下条件时，才能建立线性规划模型。

- 要求解问题的目标函数能用数值指标来反映，且为线性函数
- 存在着多种方案
- 要求达到的目标是在一定条件下实现的，这些约束可用线性等式或不等式描述

线性规划在管理中的应用

1. 人力资源分配问题

例1.11　某昼夜服务的公交线路每天各时间段内所需司机和乘务人员人数如下表所示：

班次	时间	所需人员
1	6:00——10:00	60
2	10:00——14:00	70
3	14:00——18:00	60
4	18:00——22:00	50
5	22:00——2:00	20
6	2:00——6:00	30

设司机和乘务人员分别在各时间段开始时上班，并连续工作8小时，问该公交线路应怎样安排司机和乘务人员，即能满足工作需要，又使配备司机和乘务人员的人数减少？

线性规划在管理中的应用

解：设x_i表示第i班次时开始上班的司机和乘务人员人数。

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$s.t\begin{cases} x_1 + x_6 \geq 60 \\ x_1 + x_2 \geq 70 \\ x_2 + x_3 \geq 60 \\ x_3 + x_4 \geq 50 \\ x_4 + x_5 \geq 20 \\ x_5 + x_6 \geq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

此问题最优解：$x_1 = 50$， $x_2 = 20$， $x_3 = 50$， $x_4 = 0$， $x_5 = 20$，$x_6 = 10$，一共需要司机和乘务员150人。

2. 生产计划问题

某厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品，都分别经A、B两道工序加工。设A工序可分别在设备A1和A2上完成，有B1、B2、B3三种设备可用于完成B工序。已知产品Ⅰ可在A、B任何一种设备上加工；产品Ⅱ可在任何规格的A设备上加工，但完成B工序时，只能在B1设备上加工；产品Ⅲ只能在A2与B2设备上加工。加工单位产品所需工序时间及其他各项数据如下表，试安排最优生产计划，使该厂获利最大。

线性规划在管理中的应用

设备	产品			设备有效台时	设备加工费（单位小时）
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A1	5	10		6000	300
A2	7	9		10 000	321
B1	6	8	12	4000	250
B2	4			7000	783
B3	7		11	4000	200
原料费（每件）	0.25	0.35	0.5		
售价（每件）	1.25	2.00	2.8		

线性规划在管理中的应用

解：设x_{ijk}表示产品i在工序j的设备k上加工的数量。约束条件有：

$5x_{111}+10x_{211}\le 6000$ (设备A1)

$7x_{112}+9x_{212}+12x_{312}\le 10000$（设备A2）

$6x_{121}+8x_{221}\le 4000$ （设备B1）

$4x_{122}+11x_{322}\le 7000$ (设备B2)

$7x_{123}\le 4000$ (设备B3)

$x_{111}+x_{112}=x_{121}+x_{122}+x_{123}$ （产品I在工序A，B上加工的数量相等）

$x_{211}+x_{212}=x_{221}$ （产品II在工序A，B上加工的数量相等）

$x_{312}=x_{322}$ （产品III在工序A，B上加工的数量相等）

$x_{ijk}\ge 0$（$i=1,2,3;\ j=1,2;\ k=1,2,3$）

线性规划在管理中的应用

目标是利润最大化，即利润的计算公式如下：

$$利润 = \sum_{i=1}^{3}[(销售单价 - 原料单价)\times 该产品件数] - \sum_{i=1}^{5}(每台时的设备费用 \times 该设备实际使用台时)$$

带入数据整理得到：

$$\begin{aligned}\max\ & 0.75x_{111} + 0.775x_{112} + 1.15x_{211} + 1.36x_{212} \\ & + 1.915x_{312} - 0.375x_{121} - 0.5x_{221} - 0.448x_{122} \\ & - 1.23x_{322} - 0.35x_{123}\end{aligned}$$

因此该规划问题的模型为:

$$\max \quad 0.75x_{111} + 0.775x_{112} + 1.15x_{211} + 1.36x_{212} + 1.915x_{312} - 0.375x_{121} - 0.5x_{221} - 0.448x_{122} - 1.23x_{322} - 0.35x_{123}$$

$$s.t\begin{cases} 5x_{111} + 10x_{211} \le 6000 \\ 7x_{112} + 9x_{212} + 12x_{312} \le 10000 \\ 6x_{121} + 8x_{221} \le 4000 \\ 4x_{122} + 11x_{322} \le 7000 \\ 7x_{123} \le 4000 \\ x_{111} + x_{112} = x_{121} + x_{122} + x_{123} \\ x_{211} + x_{212} = x_{221} \\ x_{312} = x_{322} \\ x_{ijk} \ge 0\ (i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2,3) \end{cases}$$

3. 套裁下料问题

例：现有一批某种型号的圆钢长8米，需要截取2.5米长的毛坯100根，长1.3米的毛坯200根。问如何才能既满足需要，又能使总的用料最少?

解：为了找到一个省料的套裁方案，必须先设计出较好的几个下料方案。其次要求这些方案的总体能裁下所有各种规格的圆钢，以满足对各种不同规格圆钢的需要并达到省料的目的，为此可以设计出4种下料方案以供套裁用。

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
2.5m	3	2	1	0
1.3m	0	2	4	6
料头	0	0.4	0.3	0.2

设按方案Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ下料的原材料根数分别为x_j (j=1，2,3,4)，可列出下面的数学模型：

$$\min \ Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 100 \\ 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 200 \\ x_j \geq 0 (j = 1.2.3.4) \end{cases}$$

4. 配料问题

例：某人每天食用甲、乙两种食物（如猪肉、鸡蛋），其资料如下：问两种食物各食用多少，才能既满足需要、又使总费用最省?

含量 食物 / 成分	甲	乙	最低需要量
A_1	0.1	0.15	1.00
A_2	1.7	0.75	7.50
A_3	1.10	1.30	10.00
原料单价	2	1.5	

线性规划在管理中的应用

解：设X_j表示B_j种食物用量

$$\min\ Z = 2x_1 + 1.5x_2$$

$$\begin{cases} 0.10x_1 + 0.15x_2 \geq 1.00 \\ 1.70x_1 + 0.75x_2 \geq 7.50 \\ 1.10x_1 + 1.30x_2 \geq 10.00 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Chapter2 对偶理论

(Duality Theory)

本章主要内容:

- 线性规划的对偶模型
- 对偶性质
- 对偶问题的经济解释－影子价格
- 对偶单纯形法

1. 对偶问题的现实来源

设某工厂生产两种产品甲和乙，生产中需4种设备按A，B，C，D顺序加工，每件产品加工所需的机时数、每件产品的利润值及每种设备的可利用机时数列于下表：

产品数据表

产品 \ 设备	*A*	*B*	*C*	*D*	产品利润（元／件）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
设备可利用机时数（时）	12	8	16	12	

问：充分利用设备机时，工厂应生产甲和乙型产品各多少件才能获得最大利润?

线性规划的对偶模型

解：设甲、乙型产品各生产x_1及x_2件，则数学模型为：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

反过来问：若厂长决定不生产甲和乙型产品，决定出租机器用于接受外加工，只收加工费，那么 4 种机器的机时如何定价才是最佳决策?

线性规划的对偶模型

在市场竞争的时代，厂长的最佳决策显然应符合两条：

（1）不吃亏原则。即机时定价所赚利润不能低于加工甲、乙型产品所获利润。由此原则，便构成了新规划的不等式约束条件。

（2）竞争性原则。即在上述不吃亏原则下，尽量降低机时总收费，以便争取更多用户。

设*A*、*B*、*C*、*D*设备的机时价分别为*y*1、*y*2、*y*3、*y*4，则新的线性规划数学模型为：

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

把同种问题的两种提法所获得的数学模型用表2表示，将会发现一个有趣的现象。

原问题与对偶问题对比表

	A（y_1）	B（y_2）	C（y_3）	D（y_4）	
甲（x_1）	2	1	4	0	2
乙（x_2）	2	2	0	4	3
	12	8	16	12	$\min\omega$ $\max z$

线性规划的对偶模型

2. 原问题与对偶问题的对应关系

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

原问题

（对偶问题）

$$\min \omega = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$s.t\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶问题

（原问题）

线性规划的对偶模型

（1）对称形式

特点：目标函数求极大值时，所有约束条件为≤号，变量非负;目标函数求极小值时，所有约束条件为≥号，变量非负.

$$P: \quad \max Z = CX \qquad \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$$D: \quad \min W = Y^T b \qquad \begin{cases} A^T Y \ge C^T \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

已知P，写出D

线性规划的对偶模型

例2.1 写出线性规划问题的对偶问题

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解：首先将原问题变形为对称形式

$$\max Z = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} -2x - 3x_2 + 5x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq -5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

对偶问题： $\min W = -2y_1 + 3y_2 - 5y_3$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 2 \\ -3y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -3 \\ 5y_1 + 7y_2 - 6y_3 \geq 4 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

线性规划的对偶模型

(2) 非对称型对偶问题

若给出的线性规划不是对称形式，可以先化成对称形式再写对偶问题。也可直接按教材表2-2中的对应关系写出非对称形式的对偶问题。

线性规划的对偶模型

<table>
<tr><th colspan="2">原问题（或对偶问题）</th><th colspan="2">对偶问题（或原问题）</th></tr>
<tr><td colspan="2">约束条件右端项</td><td colspan="2">目标函数变量的系数</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数变量的系数</td><td colspan="2">约束条件右端项</td></tr>
<tr><td colspan="2">目标函数 max</td><td colspan="2">目标函数 min</td></tr>
<tr><td rowspan="4">约束条件</td><td>m个</td><td>m个</td><td rowspan="4">变量</td></tr>
<tr><td>≤</td><td>≥0</td></tr>
<tr><td>≥</td><td>≤0</td></tr>
<tr><td>＝</td><td>无约束</td></tr>
<tr><td rowspan="4">变量</td><td>n个</td><td>n个</td><td rowspan="4">约束条件</td></tr>
<tr><td>≥0</td><td>≥</td></tr>
<tr><td>≤0</td><td>≤</td></tr>
<tr><td>无约束</td><td>＝</td></tr>
</table>

线性规划的对偶模型

例2.2 写出下列线性规划问题的对偶问题.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 \leq 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 \leq 0, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \text{无约束} \end{cases}$$

解：原问题的对偶问题为

$$\min W = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ -3y_1 + 4y_3 \geq -5 \\ 2y_1 + 7y_2 + y_3 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{无约束} \end{cases}$$

对偶性质

例2.3 分别求解下列2个互为对偶关系的线性规划问题

$$\max z = 2x_1 + x_2$$
$$s.t\begin{cases} 5x_2 + x_3 = 15 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0 \end{cases}$$

$$\min w = 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$$
$$s.t\begin{cases} 6y_2 + y_3 - y_4 = 2 \\ 5y_1 + 2y_2 + y_3 - y_5 = 1 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

分别用单纯形法求解上述2个规划问题，得到最终单纯形表如下表:

对偶性质

原问题最优表

X_B	b	原问题的变量		原问题的松弛变量		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	15/2	0	0	1	5/4	-15/2
x_1	7/2	1	0	0	1/4	-1/2
x_2	3/2	0	1	0	-1/4	3/2
σ_j		0	0	0	– 1/4	– 1/2

对偶问题最优表

X_B	b	对偶问题的变量			对偶问题的剩余变量	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_2	1/4	-4/5	1	0	-1/4	1/4
y_3	1/2	15/2	0	1	1/2	-3/2
σ_j		15/2	0	0	7/2	3/2

对偶性质

原问题与其对偶问题的变量与解的对应关系：

在单纯形表中，原问题的松弛变量对应对偶问题的变量，对偶问题的剩余变量对应原问题的变量。

对偶性质

性质1 对称性定理：对偶问题的对偶是原问题

$$\begin{aligned} \max\ & Z = CX \\ \text{s.t.}\ & AX \geqslant b \\ & X \geqslant 0 \end{aligned} \quad \rightleftarrows \quad \begin{aligned} \min\ & W = Yb \\ \text{s.t.}\ & YA \geqslant C \\ & Y \leqslant 0 \end{aligned}$$

对偶性质

性质2 弱对偶原理(弱对偶性)：设X^0和Y^0分别是问题(P)和(D)的可行解，则必有

$$CX^0 \le Y^0 b \qquad \text{即：} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

推论1: 原问题任一可行解的目标函数值是其对偶问题目标函数值的下届；反之，对偶问题任意可行解的目标函数值是其原问题目标函数值的上界。

推论2: 在一对对偶问题（P）和（D）中，若其中一个问题可行但目标函数无界，则另一个问题无可行解；反之不成立。这也是对偶问题的无界性。

对偶性质

推论3：在一对对偶问题（P）和（D）中，若一个可行（如P），而另一个不可行（如D），则该可行的问题目标函数值无界。

性质3 最优性定理：如果X^0是原问题的可行解，Y^0是其对偶问题的可行解，并且:

$$CX^0 = BY^0 \quad 即：z = w$$

则 X^0是原问题的最优解，Y^0是其对偶问题的最优解。

对偶性质

性质4 强对偶性：若原问题及其对偶问题均具有可行解，则两者均具有最优解，且它们最优解的目标函数值相等。

还可推出另一结论：若（*LP*）与（*DP*）都有可行解，则两者都有最优解，若一个问题无最优解，则另一问题也无最优解。

性质5 互补松弛性：设X^0和Y^0分别是P问题 和 D问题 的可行解，则它们分别是最优解的充要条件是:

$$\begin{cases} Y^0 X_s = 0 \\ Y_s X^0 = 0 \end{cases}$$

其中：X_s、Y_s为松弛变量

性质5的应用：

该性质给出了已知一个问题最优解求另一个问题最优解的方法，即已知Y^*求X^*或已知X^*求Y^*

$$\begin{cases} Y^* X_s = 0 \\ Y_s X^* = 0 \end{cases}$$

互补松弛条件

由于变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

若$Y^* \neq 0$，则X_s必为0；若$X^* \neq 0$，则Y_s必为0

利用上述关系，建立对偶问题（或原问题）的约束线性方程组，方程组的解即为最优解。

对偶性质

例2.4 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

的最优解是X * =(6,2,0)^T,求其对偶问题的最优解Y * 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min \ w = 10y_1 + 16y_2 \qquad \min \ w = 10y_1 + 16y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{cases}$$

对偶性质

设对偶问题最优解为Y * = (y_1，y_2),由互补松弛性定理可知，X * 和 Y * 满足:

$$Y_s X^* = 0 \qquad Y^* X_s = 0$$

即:

$$(y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

$$(y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0$$

因为$X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，所以对偶问题的第一、二个约束的松弛变量等于零，即$y_3 = 0$，$y_4 = 0$，带入方程中:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 = 4 \end{cases}$$

解此线性方程组得y_1=1,y_2=1,从而对偶问题的最优解为:

Y * =(1,1)，最优值w=26。

例2.5 已知线性规划

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

的对偶问题的最优解为Y * =(0,-2)，求原问题的最优解。

解: 对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约，} \ y_2 \le 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{标准化}}$$

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 - y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约}, y_2 \le 0, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

对偶性质

设对偶问题最优解为X * $=(x_1, x_2, x_3)^T$,由互补松弛性定理可知，X * 和 Y * 满足:

$$(y_3, y_4, y_5)(x_1, x_2, x_3)^T = 0$$

$$(y_1, y_2)(x_4, x_5)^T = 0$$

将Y * 带入由方程可知，$y_3 = y_5 = 0$，$y_4 = 1$。

$\because y_2 = -2 \neq 0 \quad \therefore x_5 = 0$

又$\because y_4 = 1 \neq 0 \quad \therefore x_2 = 0$

将x_2，x_5分别带入原问题约束方程中，得:
$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 4 \\ -x_1 - x_3 = 6 \end{cases}$$

解方程组得：$x_1=-5, x_3=-1$, 所以原问题的最优解为

$X^* = (-5,0,-1)$，最优值$z=-12$

对偶性质

原问题与对偶问题解的对应关系小结

对应关系		原问题		
		最优解	无界解	无可行解
对偶问题	最优解	(Y,Y) (N,N)	——	——
	无界解	——	——	(Y,Y)
	无可行解	——	(Y,Y)	无法判断

思考题

判断下列结论是否正确，如果不正确，应该怎样改正?

1）任何线性规划都存在一个对应的对偶线性规划.

2）原问题第*i*个约束是“≤”约束，则对偶变量$y_i \geq 0$.

3）互为对偶问题，或者同时都有最优解，或者同时都无最优解.

4）对偶问题有可行解，则原问题也有可行解.

5）原问题有多重解，对偶问题也有多重解.

6）对偶问题有可行解，原问题无可行解，则对偶问题具有无界解.

7）原问题无最优解，则对偶问题无可行解.

8）对偶问题不可行，原问题可能无界解.

9）原问题与对偶问题都可行，则都有最优解.

10）原问题具有无界解，则对偶问题不可行.

11）对偶问题具有无界解，则原问题无最优解.

12）若X^*、Y^*是原问题与对偶问题的最优解，则$X^*=Y^*$.

对偶问题的经济解释－影子价格

定义：在一对 P 和 D 中，若 P 的某个约束条件的右端项常数bi （第i种资源的拥有量）增加一个单位时，所引起目标函数最优值z* 的改变量称为第 i 种资源的影子价格，其值等于D问题中对偶变量y_i*。

1. 影子价格的数学分析：

$$\max Z = CX \qquad\qquad \min W = Yb$$

$$P\begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad \mathrm{D}\begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

由对偶问题得基本性质可得：

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

对偶问题的经济解释－影子价格

2. 影子价格的经济意义

1）影子价格是一种边际价格

在其它条件不变的情况下，单位资源数量的变化所引起的目标函数最优值的变化。即对偶变量y_i就是第 i 种资源的影子价格。即:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = y_i{}^*\,(i = 1,2\cdots m)$$

对偶问题的经济解释—影子价格

2）影子价格是一种机会成本

影子价格是在资源最优利用条件下对单位资源的估价，这种估价不是资源实际的市场价格。因此，从另一个角度说，它是一种机会成本。

若第i 种资源的单位市场价格为m_i，则有当$y_i^* > m_i$ 时，企业愿意购进这种资源，单位纯利为$y_i^* - m_i$，则有利可图；如果$y_i^* < m_i$，则企业有偿转让这种资源，可获单位纯利$m_i - y_i^*$，否则，企业无利可图，甚至亏损。

结论：若$y_i^* > m_i$ 则购进资源i，可获单位纯利$y_i^* - m_i$

若$y_i^* < m_i$则转让资源i，可获单位纯利$m_i - y_i$

对偶问题的经济解释－影子价格

3）影子价格在资源利用中的应用

根据对偶理论的互补松弛性定理:

$$Y^*X_s=0\ ,\ Y_sX^*=0$$

表明生产过程中如果某种资源bi未得到充分利用时，该种资源的影子价格为0；若当资源资源的影子价格不为0时，表明该种资源在生产中已耗费完。

对偶问题的经济解释－影子价格

4）影子价格对单纯形表计算的解释

单纯形表中的检验数

$$\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

其中c_j表示第j种产品的价格；$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$表示生产该种产品所消耗的各项资源的影子价格的总和,即产品的隐含成本。

当产值大于隐含成本时，即$\sigma_j > 0$，表明生产该项产品有利，可在计划中安排；否则$\sigma_j < 0$，用这些资源生产别的产品更有利，不在生产中安排该产品。

对偶单纯形法

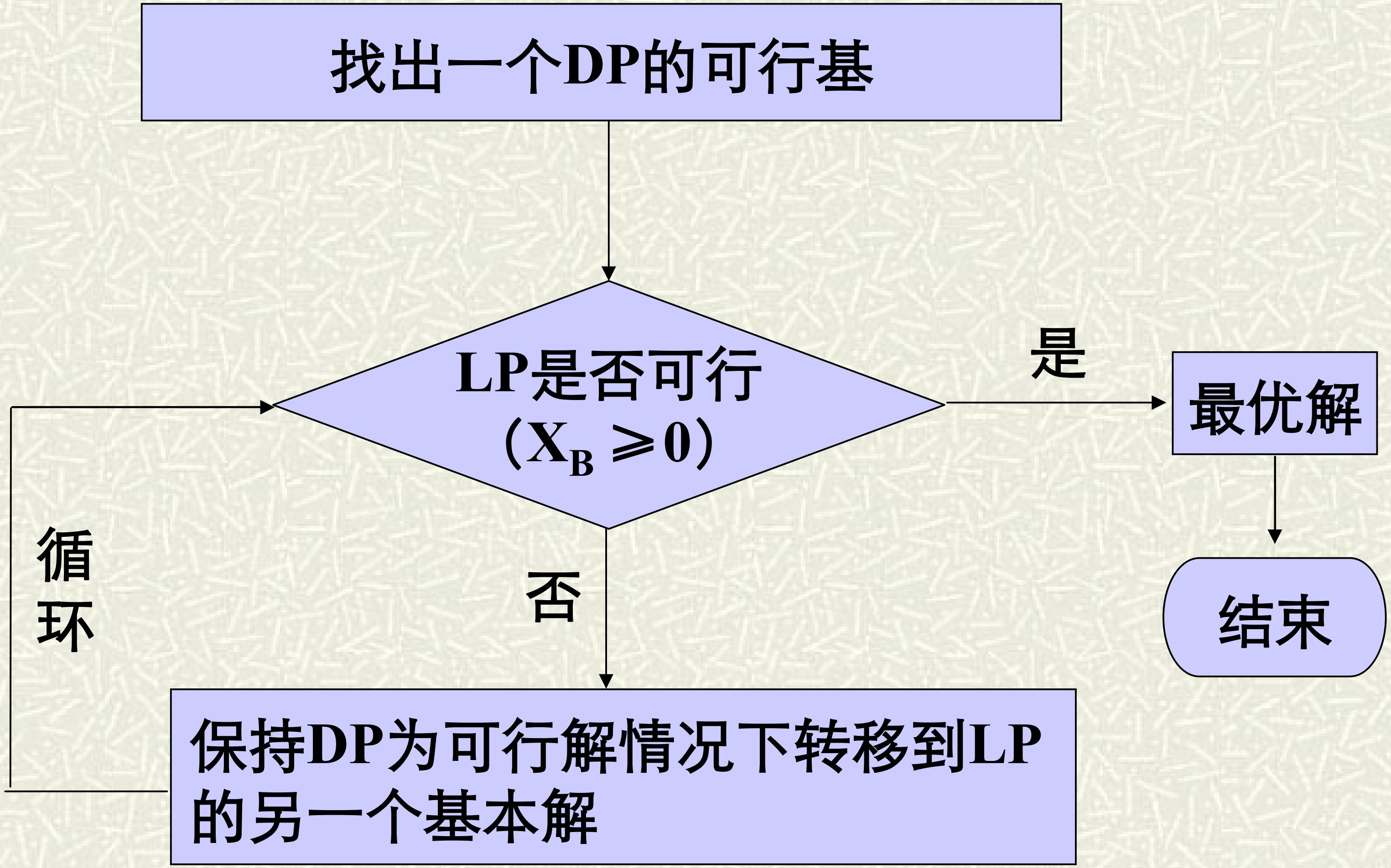
对偶单纯形法原理

对偶单纯形法是求解线性规划的另一个基本方法。它是根据对偶原理和单纯形法原理而设计出来的，因此称为对偶单纯形法。不要简单理解为是求解对偶问题的单纯形法。

对偶单纯形法基本思路:

找出一个对偶问题的可行基，保持对偶问题为可行解的条件下，判断X_B是否可行（X_B为非负），若否，通过变换基解，直到找到原问题基可行解（即X_B为非负），这时原问题与对偶问题同时达到可行解，由定理4可得最优解。

对偶单纯形法


找出一个DP的可行基
LP是否可行
（$X_B \geqslant 0$）
是
最优解
结束
否
循环
保持DP为可行解情况下转移到LP的另一个基本解

对偶单纯形法

例2.9 用对偶单纯形法求解:

$$\min \quad Z = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 12 \\ \quad x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14 \\ x_j \geq 0 (j = 1.2.3) \end{cases}$$

解:（1）将模型转化为求最大化问题，约束方程化为等式求出一组基本解，因为对偶问题可行，即全部检验数≤0（求max问题）。

对偶单纯形法

$$\max Z' = -9x_1 - 12x_2 - 15x_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -12 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 + x_6 = -14 \\ x_{1-6} \geq 0 \end{cases}$$

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-2	-2	-1	1	0	0	-10	
0	x_5	-2	-3	-1	0	1	0	-12	
0	x_6	-1	-1	-5	0	0	1	-14	(-9/-1.-12/-1. -15/-5)
λ_j		-9	-12	-15	0	0	0	0	

对偶单纯形法

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-9/5	-9/5	0	1	0	-1/5	-36/5	
0	x_5	-9/5	-14/5	0	0	1	-1/5	-46/5 →	
-15	x_3	1/5	1/5	1	0	0	-1/5	14/5	(-30/-9,-45/-14, -15/-1)
σ_j		-6	-9	0	0	0	-3	42	

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	b	θ_i
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	x_4	-9/14	0	0	1	-9/14	-1/14	-9/7 →	
-12	x_2	9/14	1	0	0	-5/14	1/14	23/7	
-15	x_3	1/14	0	1	0	1/14	-3/14	15/7	(-3/-9,-45/-9, -33/-1)
σ_j		-3/14	0	0	0	-45/14	-33/14		

对偶单纯形法

c_j		-9	-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
-9	x_1	1	0	0	-14/9	1	1/9	2
-12	x_2	0	1	0	1	-1	0	2
-15	x_3	0	0	1	1/9	0	-2/9	2
σ_j		0	0	0	-1/3	-3	-7/3	

原问题的最优解为：$X^*=（2,2,2,0,0,0）$，$Z^*=72$

其对偶问题的最优解为：$Y^*=（1/3,3,7/3）$，$W^*=72$

对偶单纯形法

对偶单纯形法应注意的问题:

- 用对偶单纯形法求解线性规划是一种求解方法，而不是去求对偶问题的最优解
- 初始表中一定要满足对偶问题可行，也就是说检验数满足最优判别准则
- 最小比值中 $\left|\dfrac{\sigma_j}{a_{ij}}\right|$ 的绝对值是使得比值非负，在极小化问题 $\sigma_j \geqslant 0$，分母 $a_{ij}<0$ 这时必须取绝对值。在极大化问题中， $\sigma_j \leqslant 0$，分母 $a_{ij}<0$， $\dfrac{\sigma_j}{a_{ij}}$ 总满足非负，这时绝对值符号不起作用，可以去掉。如在本例中将目标函数写成

$$\max z' = -4x_1 - x_2 - 3x_3$$

这里 $\sigma_j \leqslant 0$ 在求 θ_k 时就可以不带绝对值符号。

对偶单纯形法

- 对偶单纯形法与普通单纯形法的换基顺序不一样，普通单纯形法是先确定进基变量后确定出基变量，对偶单纯形法是先确定出基变量后确定进基变量；
- 普通单纯形法的最小比值是 $\min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right\}$ 其目的是保证下一个原问题的基本解可行，对偶单纯形法的最小比值是

$$\min_j \left\{ \left| \frac{\lambda_j}{a_{lj}} \right| \middle| a_{lj} < 0 \right\}$$

其目的是保证下一个对偶问题的基本解可行

- 对偶单纯形法在确定出基变量时，若不遵循 $b_l = \min\{b_i \mid b_i < 0\}$ 规则，任选一个小于零的b_i对应的基变量出基，不影响计算结果，只是迭代次数可能不一样。

本章小结

学习要点：

1. 线性规划解的概念以及3个基本定理

2. 熟练掌握单纯形法的解题思路及求解步骤

Chapter3 运输规划

(Transportation Problem)

本章主要内容：

- 运输规划问题的数学模型
- 表上作业法
- 运输问题的应用

运输规划问题的数学模型

例3.1 某公司从两个产地A_1、A_2将物品运往三个销地B_1, B_2, B_3，各产地的产量、各销地的销量和各产地运往各销地每件物品的运费如下表所示，问：应如何调运可使总运输费用最小?

	B1	B2	B3	产量
A1	6	4	6	200
A2	6	5	5	300
销量	150	150	200	

运输规划问题的数学模型

解：产销平衡问题：总产量 = 总销量 = 500

设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量，得到下列运输量表：

	B1	B2	B3	产量
A1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	200
A2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	300
销量	150	150	200	

$$\text{Min } C = 6x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 6x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 300 \\ & x_{11} + x_{21} = 150 \\ & x_{12} + x_{22} = 150 \\ & x_{13} + x_{23} = 200 \\ & x_{ij} \geqslant 0 \ (i = 1、2;\ j = 1、2、3) \end{aligned}$$

运输规划问题的数学模型

运输问题的一般形式：产销平衡

A_1、 A_2、…、 A_m 表示某物资的m个产地； B_1、B_2、…、B_n 表示某物质的n个销地；a_i 表示产地A_i的产量； b_j 表示销地B_j 的销量；c_{ij} 表示把物资从产地A_i运往销地B_j的单位运价。设 x_{ij} 为从产地A_i运往销地B_j的运输量，得到下列一般运输量问题的模型：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, & i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

运输规划问题的数学模型

变化:

1）有时目标函数求最大。如求利润最大或营业额最大等;

2）当某些运输线路上的能力有限制时，在模型中直接加入约束条件（等式或不等式约束);

3）产销不平衡时，可加入假想的产地（销大于产时）或销地（产大于销时）。

定理: 设有m个产地n个销地且产销平衡的运输问题，则基变量数为$m+n-1$。

表上作业法

表上作业法是一种求解运输问题的特殊方法，其实质是单纯形法。

步骤	描述	方法
第一步	求初始基行可行解（初始调运方案）	最小元素法、元素差额法、
第二步	求检验数并判断是否得到最优解当非基变量的检验数σ_{ij}全都非负时得到最优解，若存在检验数$\sigma_{ij}<0$，说明还没有达到最优，转第三步。	闭回路法和位势法
第三步	调整运量，即换基，选一个变量出基，对原运量进行调整得到新的基可行解，转入第二步	

表上作业法

例3.2 某运输资料如下表所示:

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

问：应如何调运可使总运输费用最小?

表上作业法

解：第1步 求初始方案

方法1：最小元素法

基本思想是就近供应，即从运价最小的地方开始供应（调运），然后次小，直到最后供完为止。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3	11	4 3	3 10	7
A_2	3 1	9	1 2	8	4
A_3	7	6 4	10	3 5	9
销量	3	6	5	6	

表上作业法

总的运输费 = $(3\times1)+(6\times4)+(4\times3)+(1\times2)+(3\times10)+(3\times5)=86$元

元素差额法对最小元素法进行了改进，考虑到产地到销地的最小运价和次小运价之间的差额，如果差额很大，就选最小运价先调运，否则会增加总运费。例如下面两种运输方案。

最小元素法:

8 10	5	10
2 5	1 15	20
15	15	

总运费是$z=10\times8+5\times2+15\times1=105$

表上作业法

后一种方案考虑到C_{11}与C_{21}之间的差额是8－2=6，如果不先调运x_{21}，到后来就有可能$x_{11}\neq 0$，这样会使总运费增加较大，从而先调运x_{21}，再是x_{22}，其次是x_{12}

8	5 10	10
2 15	1 5	20
15	15	

总运费$z=10\times 5+15\times 2+5\times 1=85$

用元素差额法求得的基本可行解更接近最优解，所以也称为近似方案。

表上作业法

方法2：Vogel法

1）从运价表中分别计算出各行和各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3	10	7	7
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

表上作业法

2）再从差值最大的行或列中找出最小运价确定供需关系和供需数量。当产地或销地中有一方数量供应完毕或得到满足时，划去运价表中对应的行或列。

重复1)和2)，直到找出初始解为至。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3 5	10	7	7
A_2	1	9	2	8	4	1
A_3	7	4	10	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

表上作业法

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3	11	3 5	10	7	7
A_2	1	9	2 ×	8	4	1
A_3	7	4	10 ×	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	1	3		

表上作业法

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3 ×	11	3 5	10	7	7
A_2	1 3	9	2 ×	8	4	7
A_3	7 ×	4	10 ×	5	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	2	5	—	3		

表上作业法

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量	行差额
A_1	3 ×	11 ×	3 5	10 2	7	1
A_2	1 3	9 ×	2 ×	8 1	4	1
A_3	7 ×	4 6	10 ×	5 3	9	1
销量	3	6	5	6		
列差额	—	5	—	3		

该方案的总运费:

$$(1\times3)+(4\times6)+(3\times5)+(2\times10)+(1\times8)+(3\times5)=85\text{元}$$

第2步 最优解的判别（检验数的求法）

求出一组基可行解后，判断是否为最优解，仍然是用检验数来判断，记x_{ij}的检验数为λ_{ij}由第一章知，求最小值的运输问题的最优判别准则是:

所有非基变量的检验数都非负，则运输方案最优

求检验数的方法有两种:

- 闭回路法
- 位势法（▲）

表上作业法

闭回路的概念

称集合 $\{x_{i_1 j_1}, x_{i_1 j_2}, x_{i_2 j_2}, x_{i_2 j_3}, \cdots, x_{i_s j_s}, x_{i_s j_1}\}$

(其中 $i_1, i_2, \cdots, i_s$; $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 互不相同)

为一个闭回路，集合中的变量称为回路的顶点，相邻两个变量的连线为闭回路的边。如下表

表上作业法

例下表中闭回路的变量集合是$\{x_{11},x_{12},x_{42},x_{43},x_{23},x_{25},x_{35}, x_{31}\}$共有8个顶点，这8个顶点间用水平或垂直线段连接起来，组成一条封闭的回路。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	X_{11}	X_{12}			
A_2			X_{23}		X_{25}
A_3	X_{31}				X_{35}
A_4		X_{42}	X_{43}		

一条回路中的顶点数一定是偶数，回路遇到顶点必须转90度与另一顶点连接，表3－3中的变量x_{32}及x_{33}不是闭回路的顶点，只是连线的交点。

表上作业法

闭回路 $\{x_{11}, x_{41}, x_{43}, x_{33}, x_{32}, x_{12}\}$

	B_1	B_2	B_3
A_1	X_{11}	X_{12}	
A_2			
A_3		X_{32}	X_{33}
A_4	X_{41}		X_{43}

例如变量组$A=\{x_{21}, x_{25}, x_{35}, x_{31}, x_{11}, x_{12}\}$不能构成一条闭回路，但$A$中包含有闭回路$\{x_{21}, x_{25}, x_{35}, x_{31}\}$

变量组$B=\{x_{33}, x_{32}, x_{12}, x_{11}, x_{21}\}$变量数是奇数，显然不是闭回路，也不含有闭回路；

表上作业法

用位势法对初始方案进行最优性检验:

1）由$\sigma_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$计算位势$U_i$， V_j，因对基变量而言有$\sigma_{ij}=0$，即$C_{ij}-(U_i+V_j)=0$，令$U_1=0$

2）再由$\sigma_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$计算非基变量的检验数$\sigma_{ij}$

	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	3 （1）	11 （2）	3 4	10 3	0
A_2	1 3	9 （1）	2 1	8 （-1）	-1
A_3	7 （10）	4 6	10 （12）	5 3	-5
Vj	2	9	3	10	

当存在非基变量的检验数$\sigma_{kl}\geqslant 0$，说明现行方案为最优方案，否则目标成本还可以进一步减小。

表上作业法

第3步 确定换入基的变量

当存在非基变量的检验数$\sigma_{kl} < 0$ 且$\sigma_{kl} =\min\{\sigma_{ij}\}$时，令$X_{kl}$进基。从表中知可选$X_{24}$进基。

第4步 确定换出基的变量

以进基变量x_{ik}为起点的闭回路中，标有负号的最小运量作为调整量θ，θ对应的基变量为出基变量，并打上“×”以示换出作为非基变量。

表上作业法

	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	3	11	3 5	10 2	
A_2	1 3	9	2	8 1	
A_3	7	4 6	10	5 3	
Vj					

$$\theta = \min\{x_{23}, x_{14}\} = \min\{1,3\} = 1$$

调整步骤为：在进基变量的闭回路中标有正号的变量加上调整量θ，标有负号的变量减去调整量θ，其余变量不变，得到一组新的基可行解。然后求所有非基变量的检验数重新检验。

表上作业法

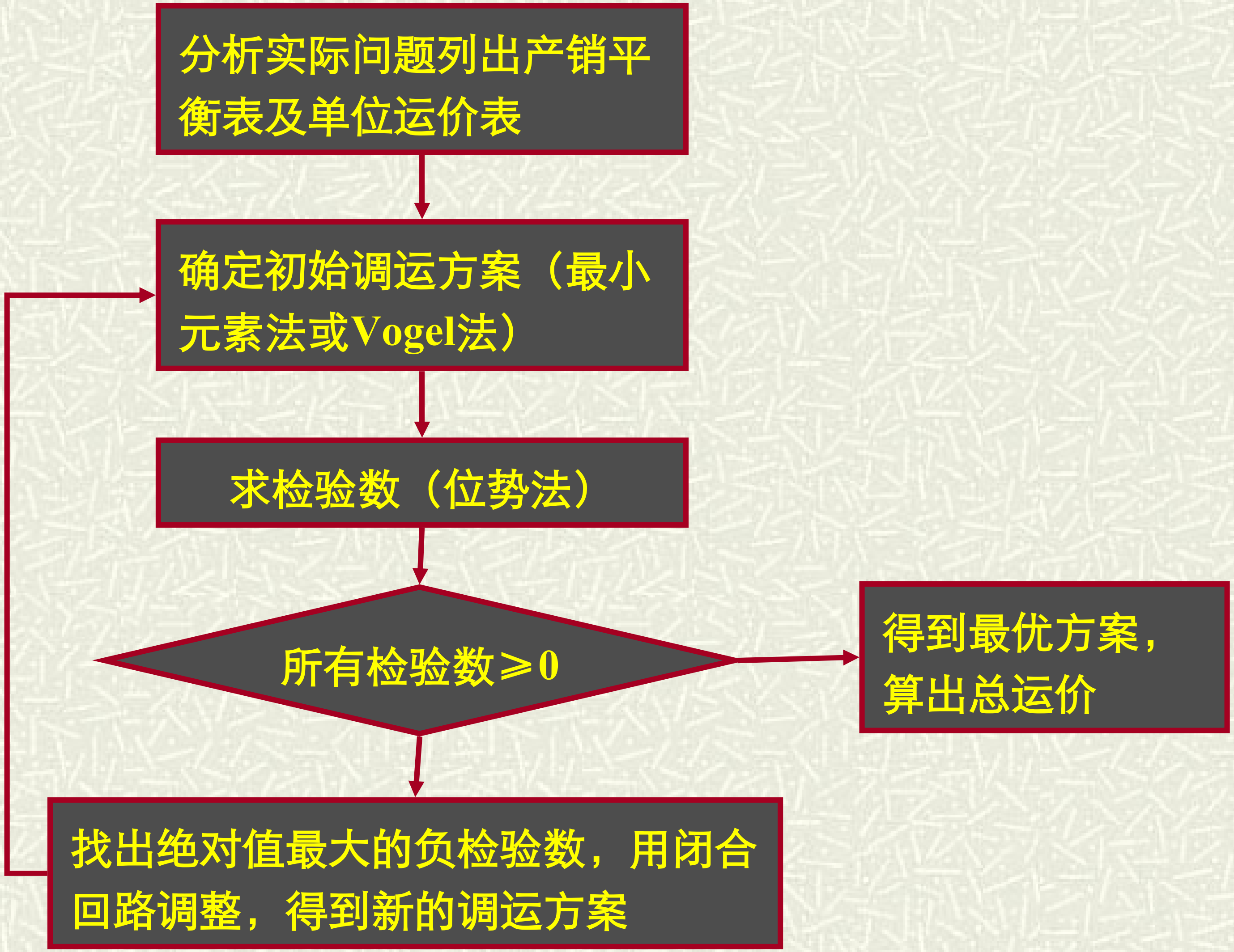
	B_1	B_2	B_3	B_4	U_i
A_1	（0） 3	（2） 11	5 3	2 10	0
A_2	3 1	（2） 9	（1） 2	1 8	-2
A_3	（9） 7	6 4	（12） 10	3 5	-5
Vj	3	9	3	10	

当所有非基变量的检验数均非负时，则当前调运方案即为最优方案，如表此时最小总运费：

$$Z = (1\times 3) + (4\times 6) + (3\times 5) + (2\times 10) + (1\times 8) + (3\times 5) = 85\text{元}$$

表上作业法

表上作业法的计算步骤：



表上作业法

表上作业法计算中的问题:

（1）若运输问题的某一基可行解有多个非基变量的检验数为负，在继续迭代时，取它们中任一变量为换入变量均可使目标函数值得到改善，但通常取$\sigma_{ij}<0$中最小者对应的变量为换入变量。

（2）无穷多最优解

产销平衡的运输问题必定存最优解。如果非基变量的$\sigma_{ij}=0$，则该问题有无穷多最优解。

表上作业法

⑵ 退化解：

※ 表格中一般要有(m+n-1)个数字格。但有时在分配运量时则需要同时划去一行和一列，这时需要补一个0，以保证有(m+n-1)个数字格作为基变量。一般可在划去的行和列的任意空格处加一个0即可。

※ 利用进基变量的闭回路对解进行调整时，标有负号的最小运量（超过2个最小值）作为调整量θ，选择任意一个最小运量对应的基变量作为出基变量，并打上“×”以示作为非基变量。

表上作业法

如下例中σ_{11}检验数是 0，经过调整，可得到另一个最优解。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4 (0)	12 (2)	4 **12**	11 **4**	16
A_2	2 **8**	10 (2)	3 (1)	9 **2**	10
A_3	8 (9)	5 **14**	11 (12)	6 **8**	22
销量	8	14	12	14	

表上作业法

例：用最小元素法求初始可行解

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	3 ×	11 ×	4 1	4 6	7
A_2	7 ×	7 ×	3 4	8 ×	4
A_3	1 3	2 6	10 ×	6 0	9
销量	3	6	5	6	20

在x_{12}、x_{22}、x_{33}、x_{34}中任选一个变量作为基变量，例如选x_{34}

运输问题的应用

1. 求极大值问题

目标函数求利润最大或营业额最大等问题。

$$\max Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, \ i = 1,2,\cdots m; j = 1,2,\cdots,n & \end{cases}$$

运输问题的应用

求解方法:

　　将极大化问题转化为极小化问题。设极大化问题的运价表为C，用一个较大的数M（$M \geqslant \max\{c_{ij}\}$）去减每一个$c_{ij}$得到矩阵$C'$，其中$C' = (M - c_{ij}) \geqslant 0$,将$C'$作为极小化问题的运价表，用表上用业法求出最优解。

运输问题的应用

例3.3 下列矩阵C是A_i（I=1，2，3）到B_j的吨公里利润,运输部门如何安排运输方案使总利润最大.

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	2	5	8	9
A_2	9	10	7	10
A_3	6	5	4	12
销量	8	14	9	

取$M = \max\{c_{ij}\} = c_{22} = 10, c'_{ij} = 10 - c_{ij}$

运输问题的应用

得到新的最小化运输问题，用表上作业法求解即可。

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1	2	5	8	9
A_2	9	10	7	10
A_3	6	5	4	12
销量	8	14	9	

运输问题的应用

2. 产销不平衡的运输问题

当总产量与总销量不相等时,称为不平衡运输问题.这类运输问题在实际中常常碰到,它的求解方法是将不平衡问题化为平衡问题再按平衡问题求解。

- 当产大于销时，即：$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

数学模型为:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \ge 0, \ i = 1,2,\cdots m; j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

运输问题的应用

由于总产量大于总销量，必有部分产地的产量不能全部运送完，必须就地库存，即每个产地设一个仓库，假设该仓库为一个虚拟销地B_{n+1}， b_{n+1}作为一个虚设销地B_{n+1}的销量(即库存量)。各产地A_i到B_{n+1}的运价为零，即$C_{i,n+1}$=0,（i=1，…，m）。则平衡问题的数学模型为：

$$\min \ Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n+1 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots m; \ j = 1,2, \end{cases}$$

具体求解时,只在运价表右端增加一列B_{n+1}，运价为零,销量为b_{n+1}即可

运输问题的应用

- 当销大于产时，即：$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$

数学模型为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots, \end{cases}$$

由于总销量大于总产量,故一定有些需求地不完全满足,这时虚设一个产地A_{m+1}，产量为：$\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

运输问题的应用

销大于产化为平衡问题的数学模型为：

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & i = 1,2,\cdots,m+1 \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j & j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\cdots,m+1; \ j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

具体计算时，在运价表的下方增加一行A_{m+1}，运价为零。产量为a_{m+1}即可。

运输问题的应用

例3.4 求下列表中极小化运输问题的最优解。

	B1	B2	B3	B4	a_i
A1	5	9	2	3	60
A2	--	4	7	8	40
A3	3	6	4	2	30
A4	4	8	10	11	50
b_j	20	60	35	45	180 \ 160

因为有:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 180 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 160$$

运输问题的应用

所以是一个产大于销的运输问题。表中A_2不可达B_1，用一个很大的正数M表示运价C_{21}。虚设一个销量为b_5=180-160=20，C_{i5}=0，i=1,2,3,4，表的右边增添一列，得到新的运价表。

	B1	B2	B3	B4	B5	a_i
A1	5	9	2	3	0	60
A2	M	4	7	8	0	40
A3	3	6	4	2	0	30
A4	4	8	10	11	0	50
b_j	20	60	35	45	20	180

运输问题的应用

下表为计算结果。可看出：产地A4还有20个单位没有运出。

	B1	B2	B3	B4	B5	Ai
A1			35	25		60
A2		40				40
A3		10		20		30
A4	20	10			20	50
Bj	20	60	35	45	20	180

运输问题的应用

3. 生产与储存问题

例3.5 某厂按合同规定须于当年每个季度末分别提供10、15、25、20台同一规格的柴油机。已知该厂各季度的生产能力及生产每台柴油机的成本如右表。如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需储存、维护等费用0.15万元。试求在完成合同的情况下，使该厂全年生产总费用为最小的决策方案。

季度	生产能力/台	单位成本/万元
Ⅰ	25	10.8
Ⅱ	35	11.1
Ⅲ	30	11
Ⅳ	10	11.3

运输问题的应用

解： 设 x_{ij}为第 i 季度生产的第 j 季度交货的柴油机数目，那么应满足：

交货：

$$
\begin{aligned}
x_{11} &= 10 \\
x_{12} + x_{22} &= 15 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 25 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 20
\end{aligned}
$$

生产：

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leqslant 25 \\
x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leqslant 35 \\
x_{33} + x_{34} &\leqslant 30 \\
x_{44} &\leqslant 10
\end{aligned}
$$

把第 i 季度生产的柴油机数目看作第 i 个生产厂的产量；把第 j 季度交货的柴油机数目看作第 j 个销售点的销量；设cij是第i季度生产的第j季度交货的每台柴油机的实际成本，应该等于该季度单位成本加上储存、维护等费用。可构造下列产销平衡问题：

运输问题的应用

j / i	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	产量
Ⅰ	10.8	10.95	11.1	11.25	25
Ⅱ	M	11.10	11.25	11.40	35
Ⅲ	M	M	11.00	11.15	30
Ⅳ	M	M	M	11.30	10
销量	10	15	25	20	100 / 70

由于产大于销，加上一个虚拟的销地D，化为平衡问题，即可应用表上作业法求解。

运输问题的应用

该问题的数学模型:

$$\text{Min } f = 10.8\,x_{11} + 10.95\,x_{12} + 11.1\,x_{13} + 11.25\,x_{14} + 11.1\,x_{22} + 11.25\,x_{23} + 11.4\,x_{24} + 11.0\,x_{33} + 11.15\,x_{34} + 11.3\,x_{44}$$

j / i	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	D	产量
Ⅰ	10.8	10.95	11.1	11.25	0	25
Ⅱ	M	11.10	11.25	11.40	0	35
Ⅲ	M	M	11.00	11.15	0	30
Ⅳ	M	M	M	11.30	0	10
销量	10	15	25	20	30	100 / 100

运输问题的应用

最优生产决策如下表，最小费用z＝773万元。

j / i	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	D	产量
Ⅰ	10	15	0			25
Ⅱ			0	5	30	35
Ⅲ			25	5		30
Ⅳ				10		10
销量	10	15	25	20	30	100 / 100

Chapter4 整数规划

(Integer Programming)

本章主要内容:

- 整数规划的特点及应用
- 分支定界法
- 分配问题与匈牙利法

整数规划的特点及应用

整数规划（简称：IP）

要求一部分或全部决策变量取整数值的规划问题称为整数规划。不考虑整数条件，由余下的目标函数和约束条件构成的规划问题称为该整数规划问题的松弛问题。若该松弛问题是一个线性规划，则称该整数规划为整数线性规划。

整数线性规划数学模型的一般形式：

$$\max Z(\text{或}\min Z) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1.2 \cdots m) \\ x_j \geq 0\,(\mathrm{j} = 1.2 \cdots \mathrm{n})\text{且部分或全部为整数} \end{cases}$$

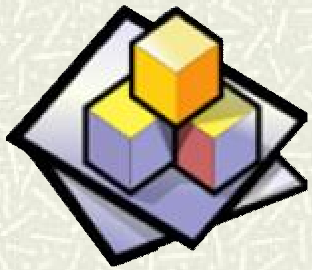
整数规划的特点及应用

整数线性规划问题的种类:

- 纯整数线性规划：指全部决策变量都必须取整数值的整数线性规划。

- 混合整数线性规划：决策变量中有一部分必须取整数值，另一部分可以不取整数值的整数线性规划。

- 0-1型整数线性规划：决策变量只能取值0或1的整数线性规划。



整数规划的特点及应用

整数规划的典型例子

例4.1 工厂A_1和A_2生产某种物资。由于该种物资供不应求，故需要再建一家工厂。相应的建厂方案有A_3和A_4两个。这种物资的需求地有B_1,B_2,B_3,B_4四个。各工厂年生产能力、各地年需求量、各厂至各需求地的单位物资运费c_{ij}，见下表:

	B1	B2	B3	B4	年生产能力
A1	2	9	3	4	400
A2	8	3	5	7	600
A3	7	6	1	2	200
A4	4	5	2	5	200
年需求量	350	400	300	150	

工厂A3或A4开工后，每年的生产费用估计分别为1200万或1500万元。现要决定应该建设工厂A3还是A4，才能使今后每年的总费用最少。

整数规划的特点及应用

解：这是一个物资运输问题，特点是事先不能确定应该建A3还是A4中哪一个，因而不知道新厂投产后的实际生产物资。为此，引入0-1变量：

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{若建工厂} \\ 0 & \text{若不建工厂} \end{cases} \quad (i = 1,2)$$

再设x_{ij}为由A_i运往B_j的物资数量，单位为千吨；z表示总费用，单位万元。

则该规划问题的数学模型可以表示为：

整数规划的特点及应用

$$\min z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+[1200y_1+1500y_2]$$

$$s.t\begin{cases}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=350\\x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=400\\x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=300\\x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=150\\x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=400\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=600\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=200y_1\\x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=200y_2\\x_{ij}\geq 0\quad (i,j=1,2,3,4)\\y_i=0,1\ \ (i=1,2)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 混合整数规划问题

整数规划的特点及应用

例4.2 现有资金总额为B。可供选择的投资项目有n个，项目j所需投资额和预期收益分别为a_j和c_j（$j = 1,2,..,n$），此外由于种种原因，有三个附加条件:

- 若选择项目1，就必须同时选择项目2。反之不一定
- 项目3和4中至少选择一个;
- 项目5,6,7中恰好选择2个。

应该怎样选择投资项目，才能使总预期收益最大。

整数规划的特点及应用

解：对每个投资项目都有被选择和不被选择两种可能，因此分别用0和1表示，令x_j表示第j个项目的决策选择，记为：

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{对项目}j\text{投资}\\ 0 & \text{对项目}j\text{不投资}\end{cases}\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

投资问题可以表示为：

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\le B\\ x_2\ge x_1\\ x_3+x_4\ge 1\\ x_5+x_6+x_7=2\\ x_j=0\text{或者}1\quad (\mathrm{j}=1,2,\cdots n)\end{cases}$$

整数规划的特点及应用

例4.3 指派问题或分配问题。人事部门欲安排四人到四个不同岗位工作，每个岗位一个人。经考核四人在不同岗位的成绩（百分制）如表所示，如何安排他们的工作使总成绩最好。

工作 人员	A	B	C	D
甲	85	92	73	90
乙	95	87	78	95
丙	82	83	79	90
丁	86	90	80	88

整数规划的特点及应用

设

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & 分配第\ i人做\ j工作时\\ 0 & 不分配第\ i人做\ j工作时\end{cases}$$

数学模型如下：

$$\begin{aligned}\max\ Z = {} & 85x_{11}+92x_{12}+73x_{13}+90x_{14}+95x_{21}+87x_{22}+\\ & +78x_{23}+95x_{24}+82x_{31}+83x_{32}+79x_{33}+90x_{34}+\\ & +86x_{41}+90x_{42}+80x_{43}+88x_{44}\end{aligned}$$

要求每人做一项工作，约束条件为：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{cases}$$

整数规划的特点及应用

每项工作只能安排一人，约束条件为:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \end{cases}$$

变量约束:

$$x_{ij}=0\text{或}1,\ \ i\text{、}j=1,2,3,4$$

整数规划的特点及应用

整数规划问题解的特征:

- 整数规划问题的可行解集合是它松弛问题可行解集合的一个子集，任意两个可行解的凸组合不一定满足整数约束条件，因而不一定仍为可行解。
- 整数规划问题的可行解一定是它的松弛问题的可行解（反之不一定），但其最优解的目标函数值不会优于后者最优解的目标函数值。

整数规划的特点及应用

例4.3 设整数规划问题如下

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

首先不考虑整数约束，得到线性规划问题（一般称为松弛问题）。

$$\max Z = x_1 + x_2$$

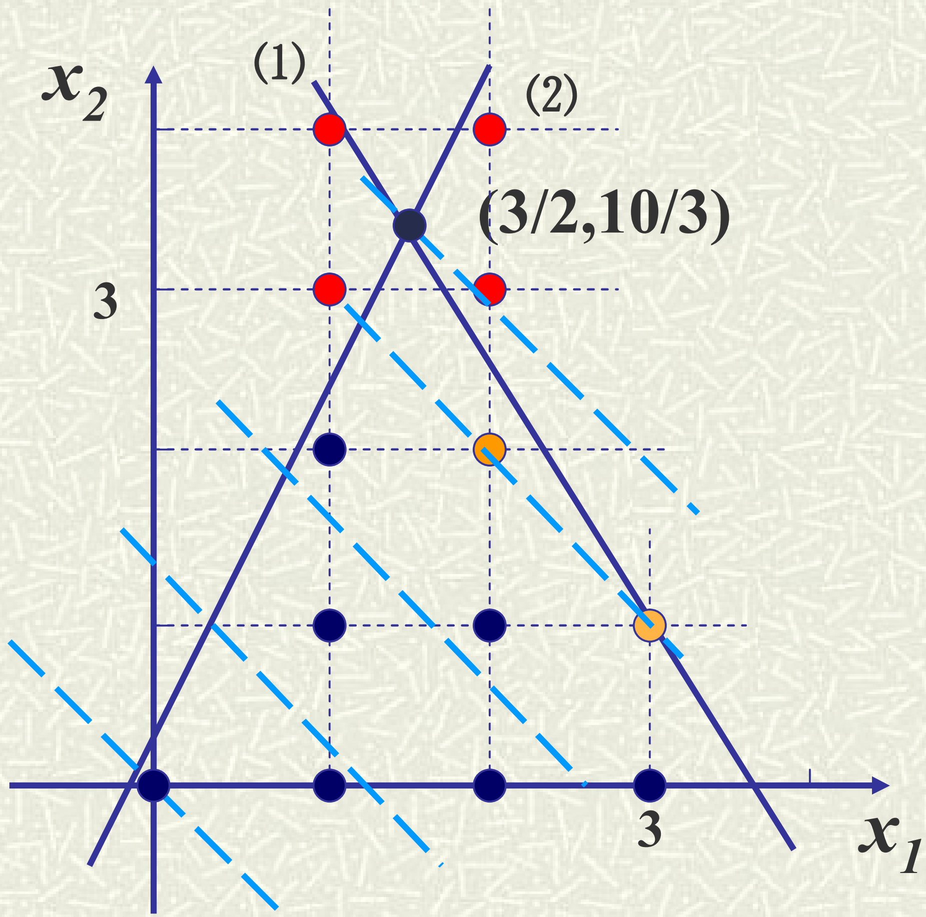
$$\begin{cases} 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

整数规划的特点及应用

用图解法求出最优解为：$x_1 = 3/2$，$x_2 = 10/3$，且有$Z = 29/6$

现求整数解(最优解):如用舍入取整法可得到4个点即(1，3),(2，3),(1，4),(2，4)。显然，它们都不可能是整数规划的最优解。

按整数规划约束条件，其可行解肯定在线性规划问题的可行域内且为整数点。故整数规划问题的可行解集是一个有限集，如右图所示。其中(2,2),(3,1)点的目标函数值最大，即为Z=4。



整数规划的特点及应用

整数规划问题的求解方法:

- 分支定界法和割平面法
- 匈牙利法（指派问题）

分支定界法的解题步骤:

1）求整数规划的松弛问题最优解;

若松弛问题的最优解满足整数要求，得到整数规划的最优解,否则转下一步;

2）分支与定界:

任意选一个非整数解的变量x_i，在松弛问题中加上约束:

$$x_i \leqslant [x_i] \quad \text{和} \quad x_i \geqslant [x_i]+1$$

组成两个新的松弛问题，称为分枝。新的松弛问题具有特征：当原问题是求最大值时，目标值是分枝问题的上界；当原问题是求最小值时，目标值是分枝问题的下界。

检查所有分枝的解及目标函数值，若某分枝的解是整数并且目标函数值大于（max）等于其它分枝的目标值，则将其它分枝剪去不再计算，若还存在非整数解并且目标值大于(max)整数解的目标值，需要继续分枝，再检查，直到得到最优解。

例4.4 用分枝定界法求解整数规划问题

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且全为整数} \end{cases} \qquad \text{IP}$$

解：首先去掉整数约束，变成一般线性规划问题(原整数规划问题的松弛问题)

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad\quad \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{LP}$$

分支定界法

用图解法求松弛问题的最优解，如图所示。

$x_1 = 18/11, x_2 = 40/11$

Z= – 218/11≈(– 19.8)

即Z 也是*IP*最小值的下限。

对于$x_1 = 18/11 \approx 1.64$，

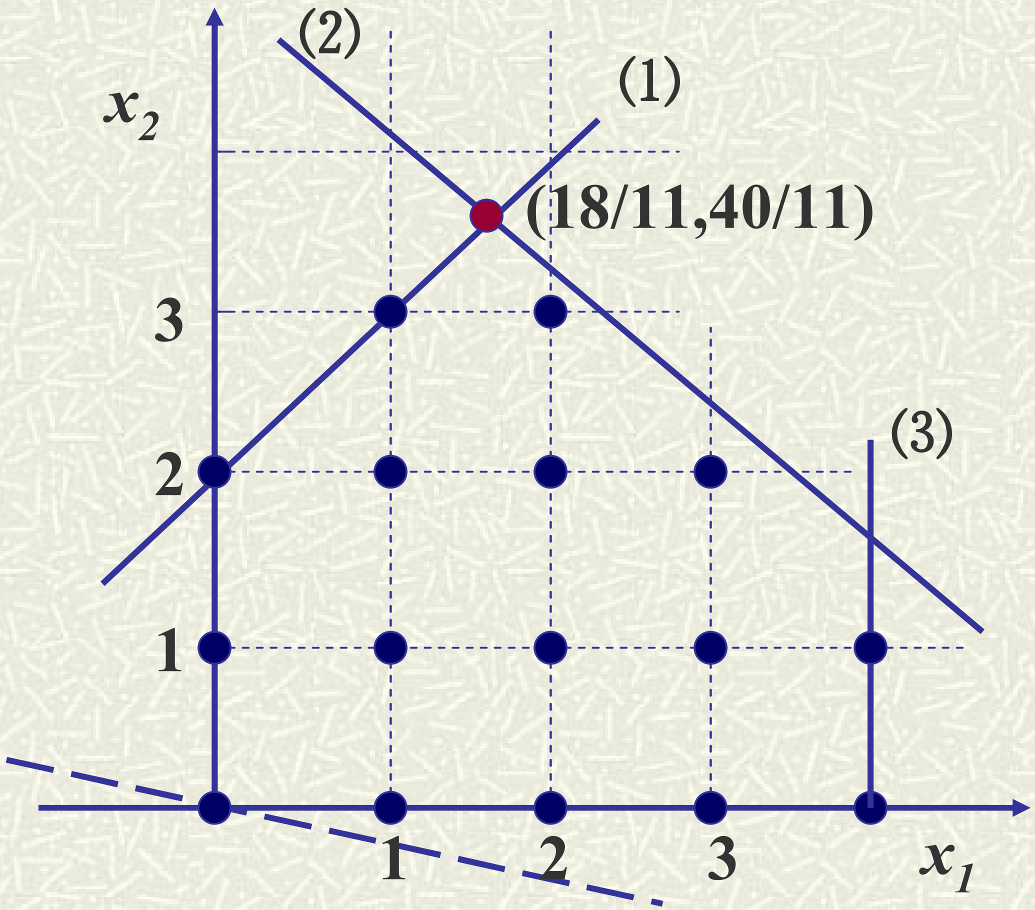
取值$x_1 \leqslant 1$， $x_1 \geqslant 2$

对于$x_2 = 40/11 \approx 3.64$，取值

$x_2 \leqslant 3$ ， $x_2 \geqslant 4$

先将（LP）划分为（LP1）

和（LP2）,取x1 ⩽1, x1 ⩾2



分支定界法

分支:

$$\min\ Z=-x_1-5x_2 \qquad\qquad \min\ Z=-x_1-5x_2$$

$$(IP1)\begin{cases} x_1-\ x_2\geq -2 \\ 5x_1+6x_2\leq 30 \\ x_1\qquad\quad \leq 4 \\ x_1\qquad\quad \leq 1 \\ x_1,x_2\geq 0\text{且为整数} \end{cases} \qquad (IP2)\begin{cases} x_1-\ x_2\geq -2 \\ 5x_1+6x_2\leq 30 \\ x_1\qquad\quad \leq 4 \\ x_1\qquad\quad \geq 2 \\ x_1,x_2\geq 0\text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出（*LP1*）和（*LP2*）的最优解。

分支定界法

先求*LP1*,如图所示。此时在*B*点取得最优解。

$x_1 = 1, x_2 = 3, Z^{(1)} = -16$

找到整数解，问题已探明，此枝停止计算。

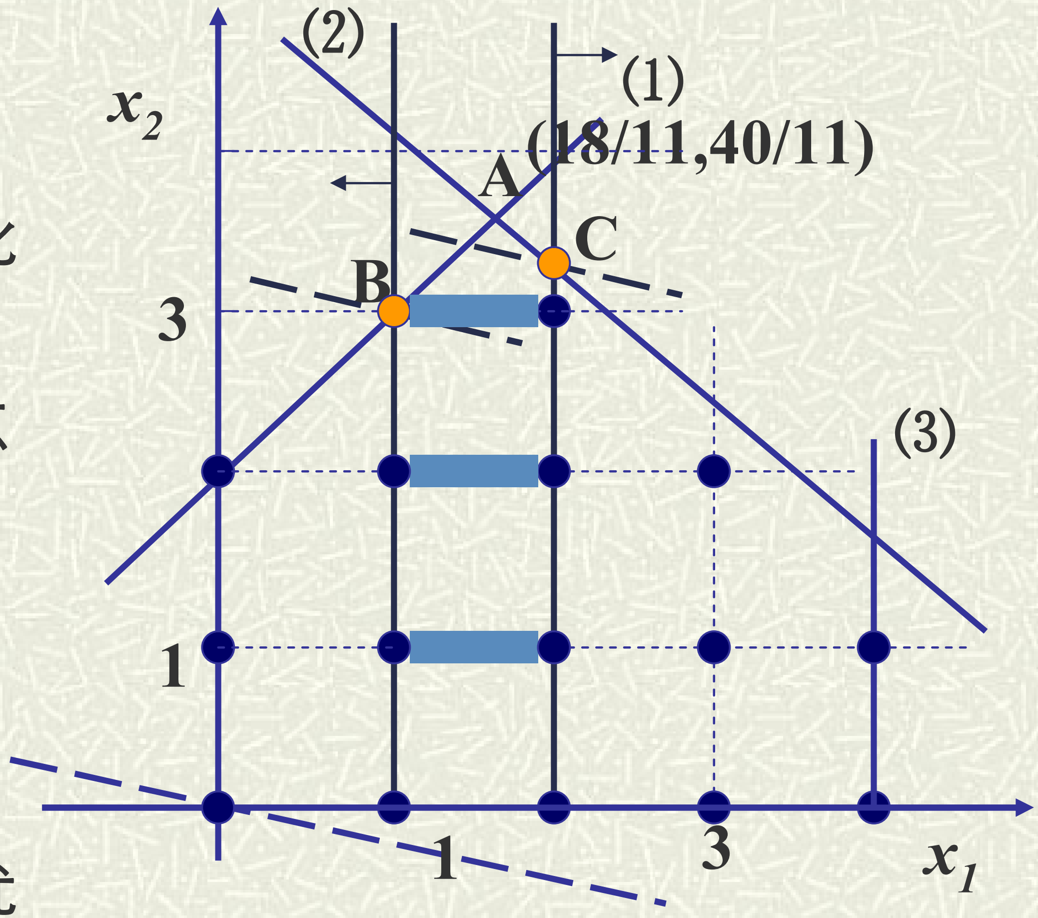
同理求*LP2*,如图所示。在*C* 点取得最优解。即:

$x_1 = 2, x_2 = 10/3,$

$Z^{(2)} = -56/3 \approx -18.7$

$\because Z^{(2)} < Z^{(1)} = -16$

$\therefore$原问题有比-16更小的最优解，但 *x2* 不是整数，故继续分支。



分支定界法

在IP2中分别再加入条件： $x_2 \leqslant 3, x_2 \geqslant 4$ 得下式两支：

$$
\min \ Z = -x_1 - 5x_2
$$

$$
(IP\,21)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \qquad\quad \le 4 \\ x_1 \qquad\quad \ge 2 \\ x_2 \qquad\quad \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}
$$

$$
\min \ Z = -x_1 - 5x_2
$$

$$
(IP\,22)\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 \ge -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1 \qquad\quad \le 4 \\ x_1 \qquad\quad \ge 2 \\ x_2 \qquad\quad \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0\text{且为整数} \end{cases}
$$

分别求出LP21和LP22的最优解

分支定界法

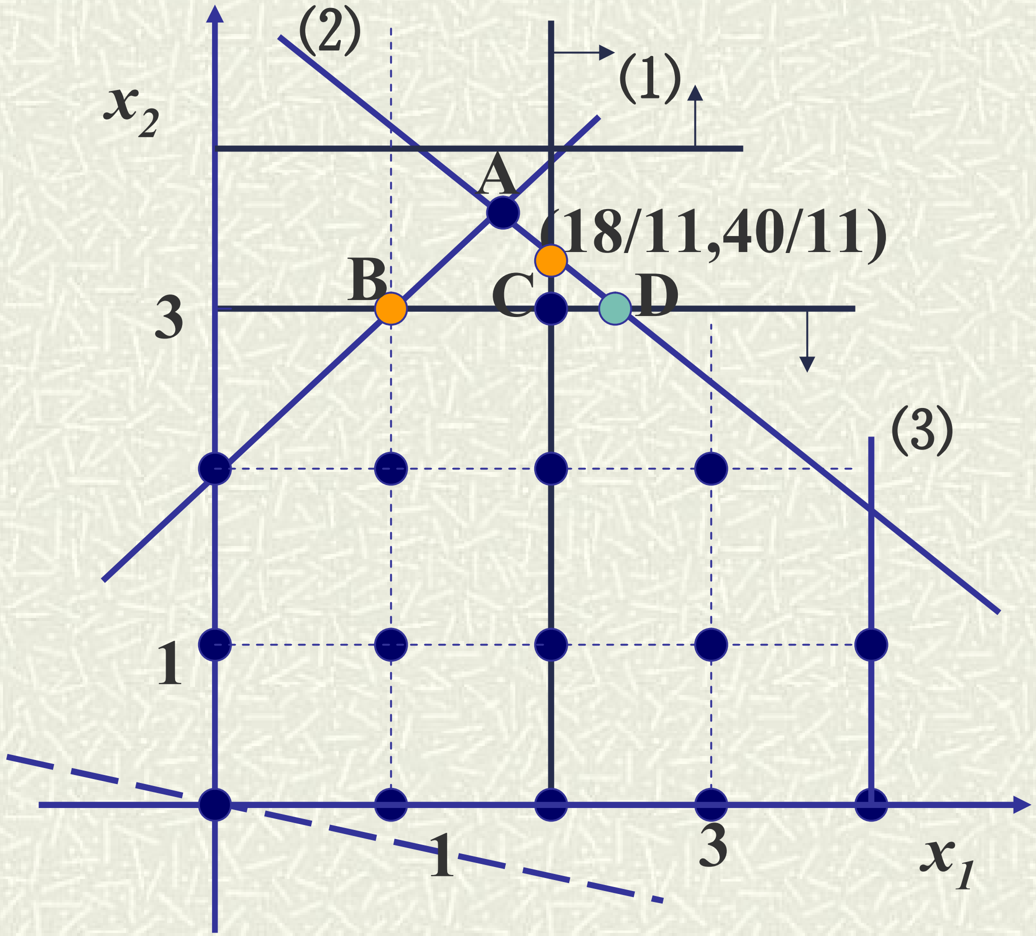
先求LP21,如图所示。此时D在点取得最优解。

即 $x_1 = 12/5 \approx 2.4$, $x_2 = 3$,

$Z^{(21)} = -87/5 \approx -17.4 < Z^{(1)} = -16$

但$x_1 = 12/5$不是整数，可继续分枝。即 $3 \leqslant x_1 \leqslant 2$。

求LP22，如图所示。无可行解，故不再分枝。



分支定界法

在（LP21）的基础上继续分枝。加入条件3≤x_1≤2有下式:

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP211)\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad \leq 4 \\ x_1 \qquad \geq 2 \\ x_2 \qquad \leq 3 \\ x_1 \qquad \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

$$\min\ Z = -x_1 - 5x_2$$

$$(IP212)\begin{cases} x_1 - \ x_2 \geq -2 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \qquad \leq 4 \\ x_1 \qquad \geq 2 \\ x_2 \qquad \leq 3 \\ x_1 \qquad \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

分别求出（LP211）和（LP212）的最优解

分支定界法

先求（*LP211*）,如图所示。此时在*E*点取得最优解。即

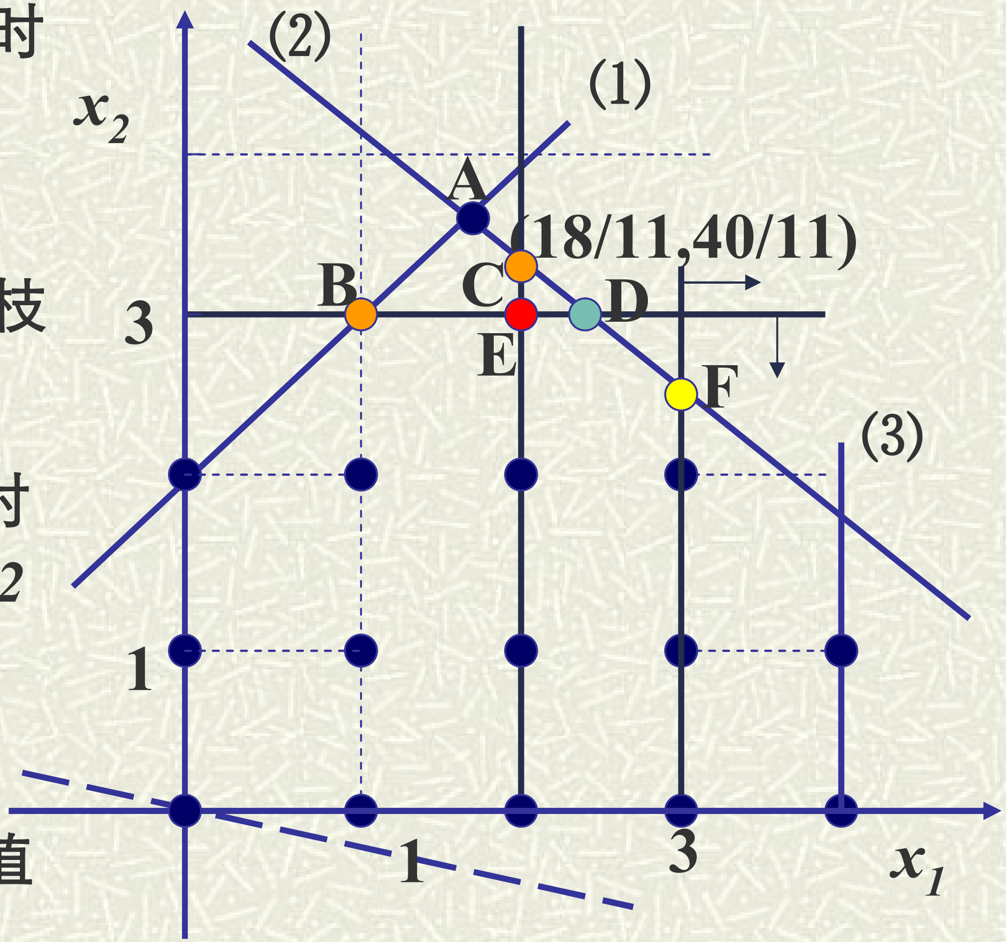
$x1 = 2, x2 = 3, Z^{(211)} = -17$

找到整数解，问题已探明，此枝停止计算。

求（*LP212*），如图所示。此时F在点取得最优解。即$x1 = 3, x2 = 2.5$,

$Z^{(212)} = -31/2 \approx -15.5 > Z^{(211)}$

如对LP212继续分解，其最小值也不会低于－15.5，问题探明,剪枝。

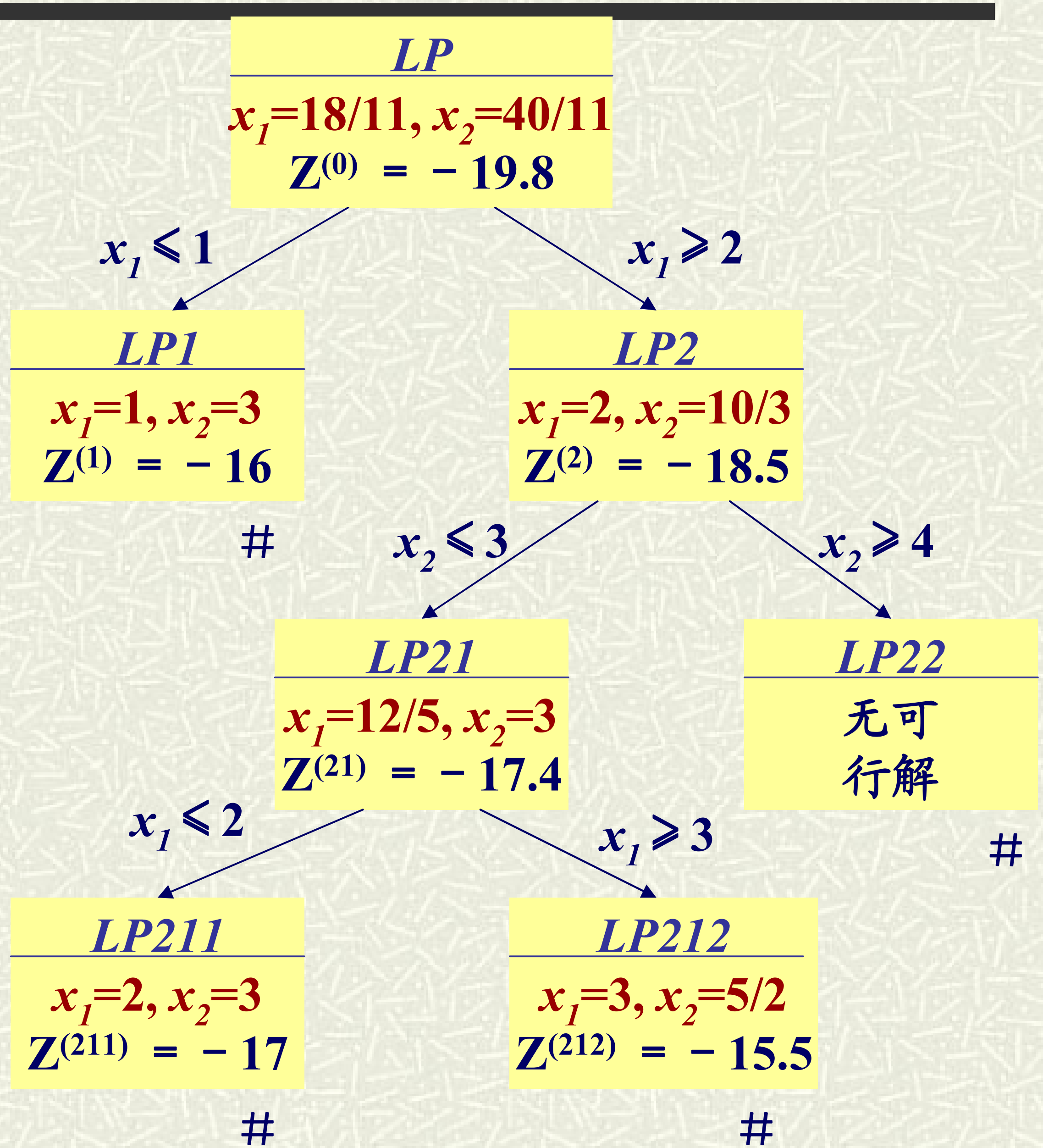


分支定界法

原整数规划问题的最优解为:

$x_1=2, x_2=3, Z^*=-17$

以上的求解过程可以用一个树形图表示如右:



分支定界法

例4.5 用分枝定界法求解

$$\max \quad Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0, \text{且均取整数} \end{cases}$$

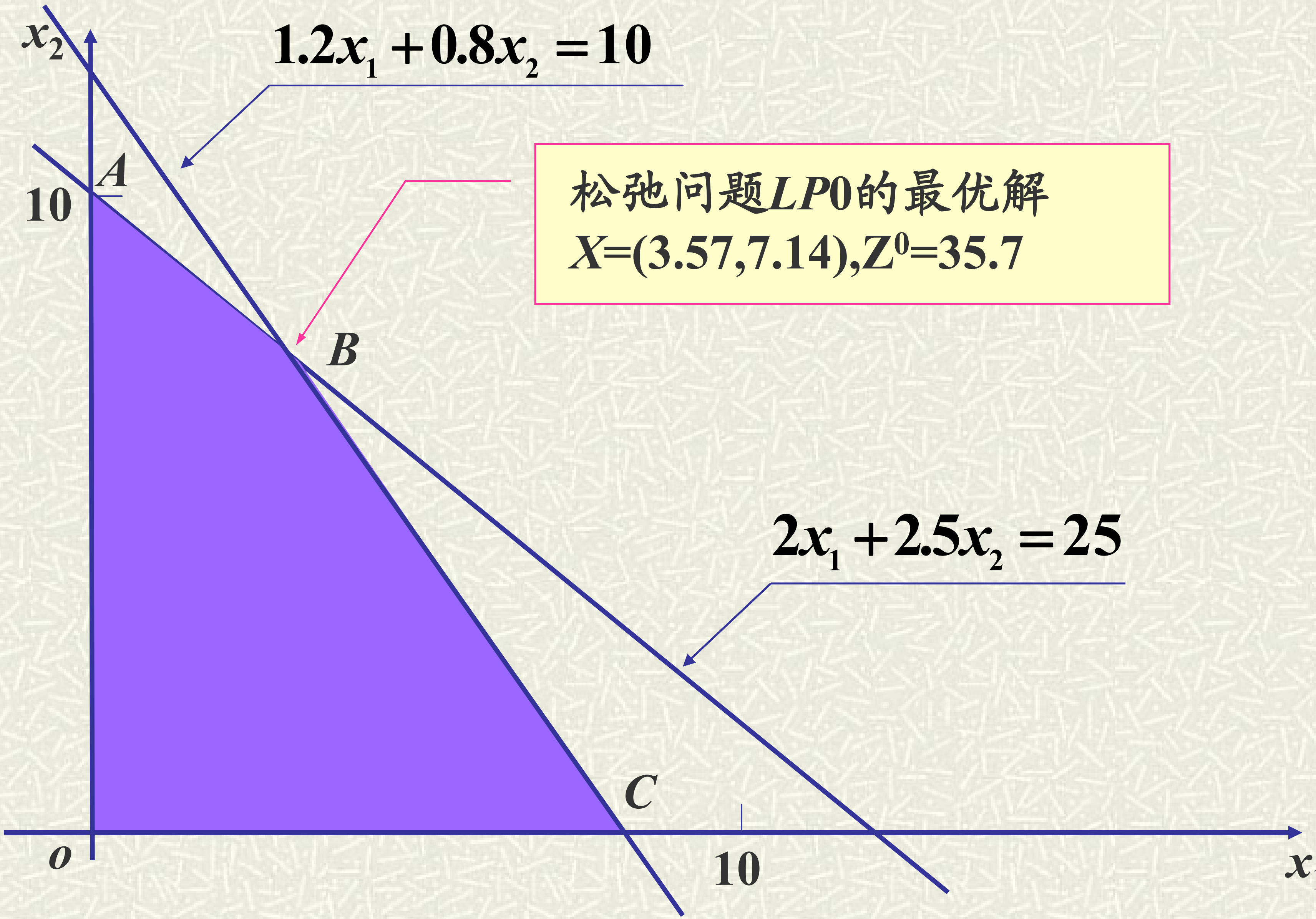
解：先求对应的松弛问题（记为LP^0）

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$st\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \qquad (LP^0) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

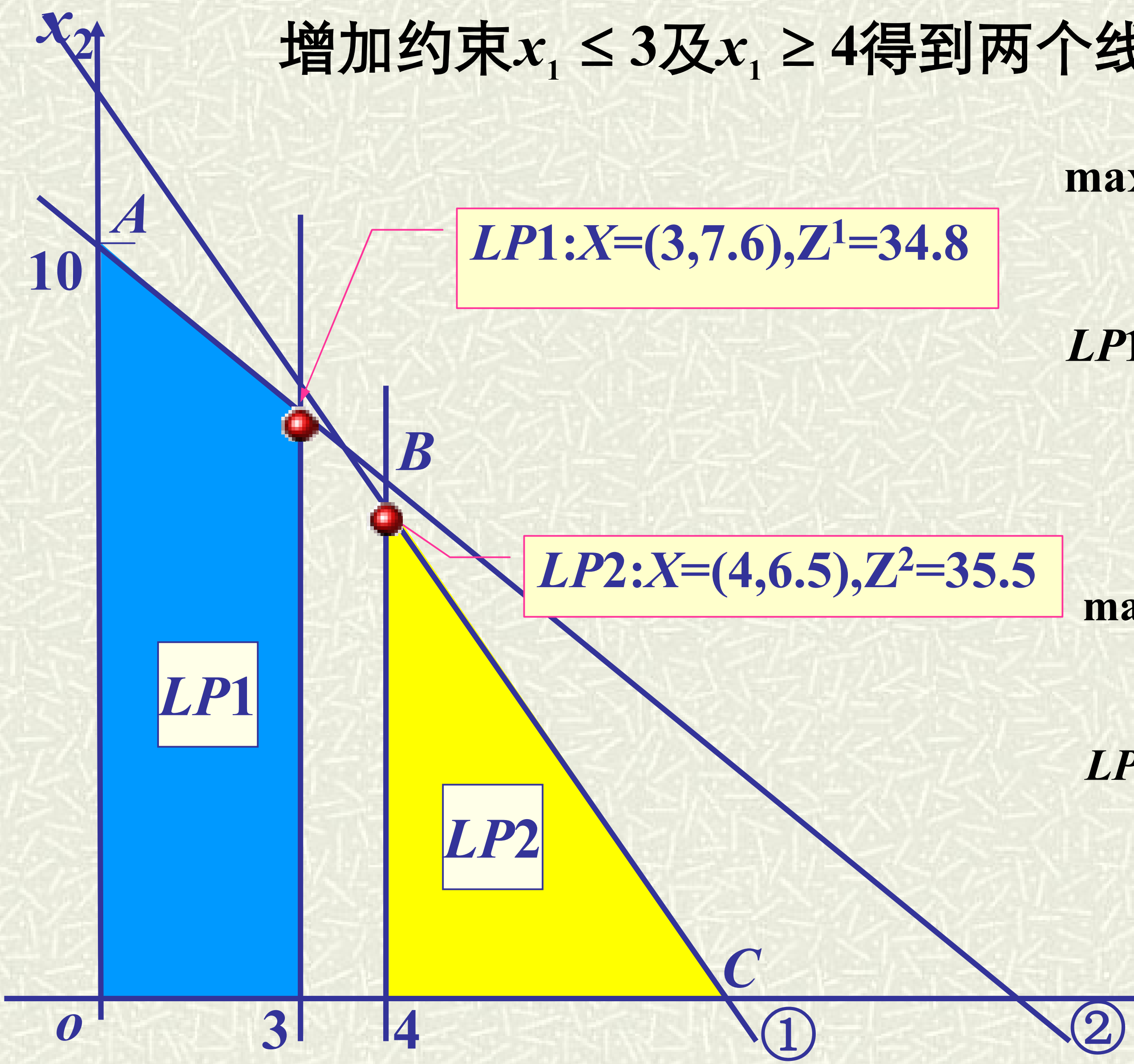
用图解法得到最优解$X = (3.57, 7.14)$,$Z^0=35.7$,如下图所示。

分支定界法



x_2
$1.2x_1+0.8x_2=10$
A
10
B
松弛问题LP0的最优解
$X=(3.57,7.14),Z^0=35.7$
$2x_1+2.5x_2=25$
C
o
10
x_1

增加约束$x_1 \le 3$及$x_1 \ge 4$得到两个线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

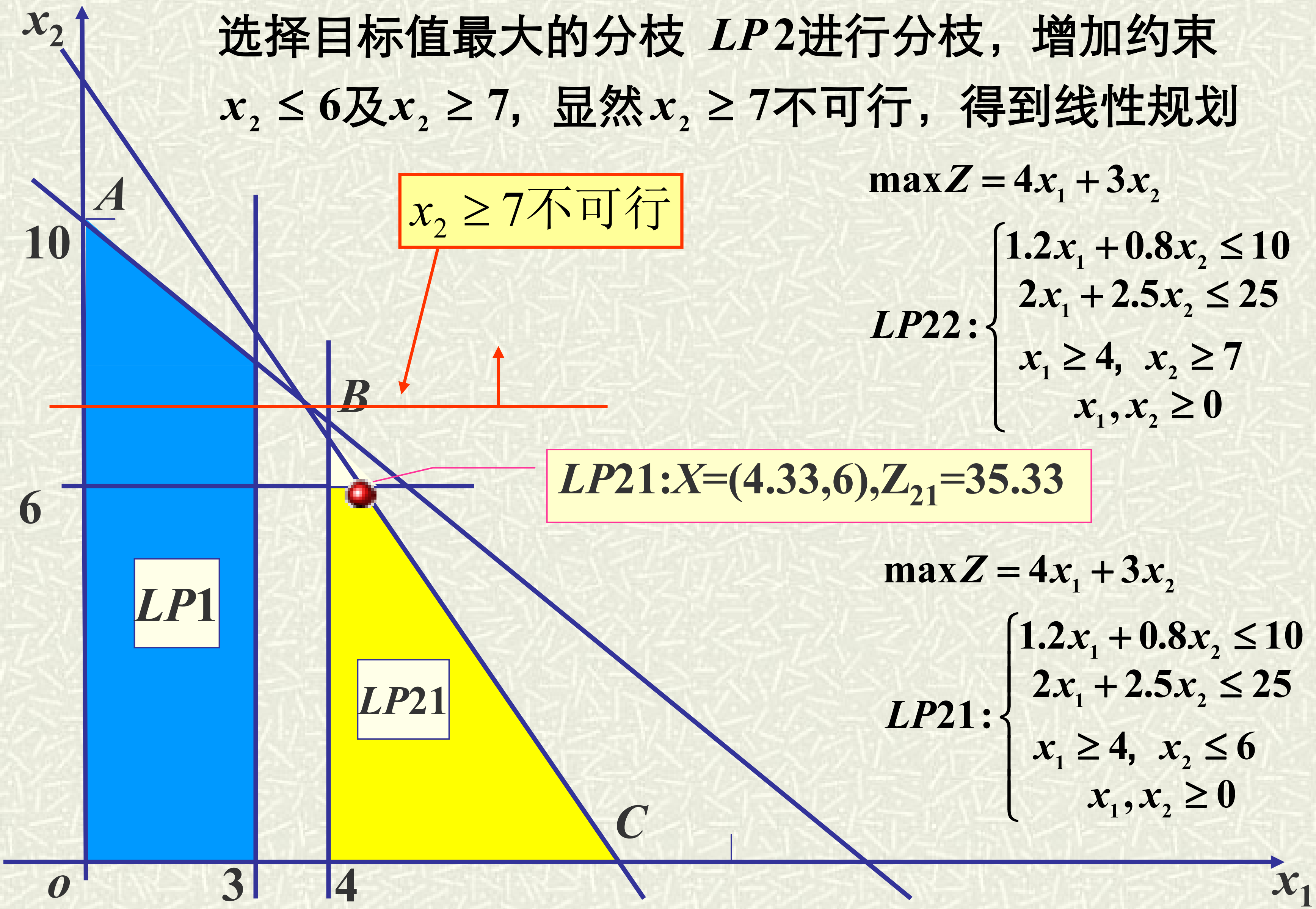
$$LP1:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP2:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

选择目标值最大的分枝 $LP2$进行分枝，增加约束 $x_2 \le 6$及$x_2 \ge 7$，显然$x_2 \ge 7$不可行，得到线性规划



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

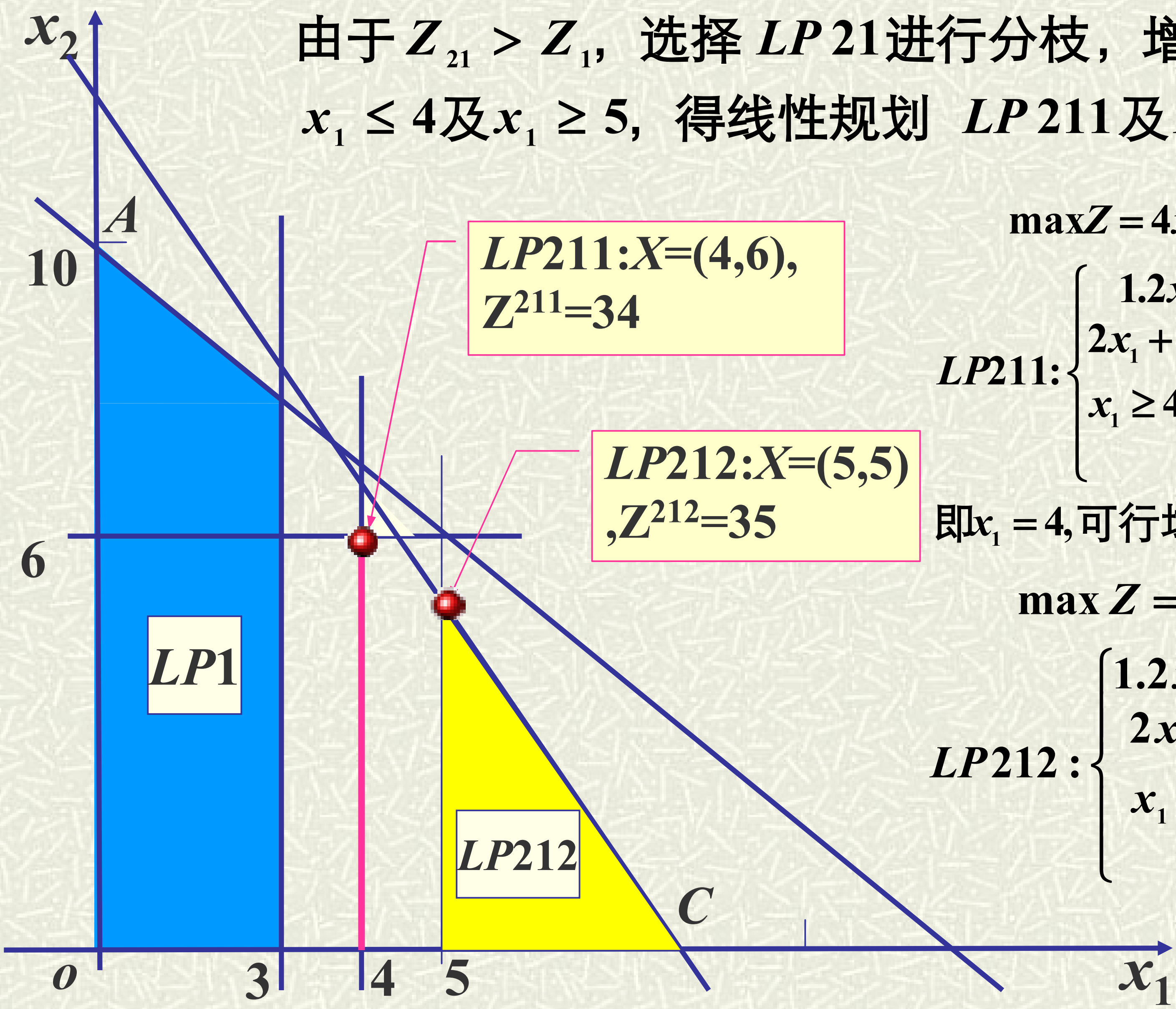
$$LP22: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP21: \begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

由于$Z_{21} > Z_{1}$，选择$LP21$进行分枝，增加约束$x_1 \le 4$及$x_1 \ge 5$，得线性规划 $LP211$及$LP212$:



$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP211:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 4,\ \ x_2 \le 6,\ \ x_1 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

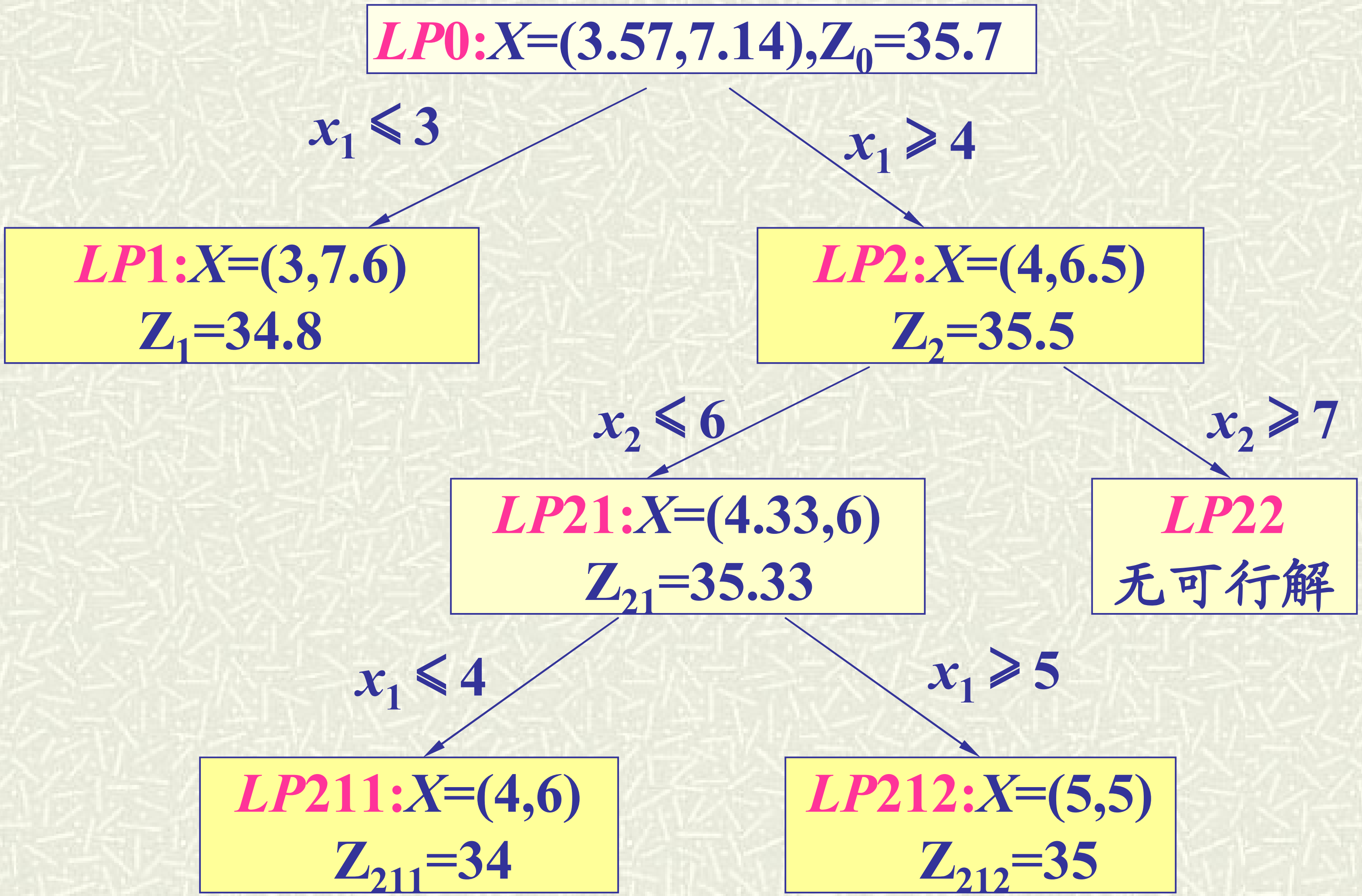
即$x_1 = 4$,可行域是一条线段

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$LP212:\begin{cases} 1.2x_1 + 0.8x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 2.5x_2 \le 25 \\ x_1 \ge 5,\ \ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

分支定界法

上述分枝过程可用下图表示:



小结

学习要点：

- 掌握一般整数规划问题概念及模型结构
- 掌握分支定界法原理
- 能够用分支定界法求解一般整数规划问题

课后练习：

指派问题的数学模型的标准形式:

设n 个人被分配去做n 件工作，规定每个人只做一件工作，每件工作只有一个人去做。已知第i个人去做第j 件工作的效率（时间或费用）为C_{ij}(i=1.2···n;j=1.2···n)并假设$C_{ij} \geqslant 0$。问应如何分配才能使总效率（时间或费用）最高?

设决策变量

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派第}i\text{个人做第}j\text{件事}\\ 0 & \text{不指派第}i\text{个人做第}j\text{件事}\end{cases} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

指派问题的数学模型为:

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1.2.\cdots .n) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1.2.\cdots .n) \\ x_{ij} \text{取 } 0 \text{ 或 } 1 (i, j = 1.2.\cdots .n) \end{cases}$$

克尼格定理：

如果从分配问题效率矩阵[a_{ij}]的每一行元素中分别减去(或加上)一个常数u_i，从每一列中分别减去(或加上)一个常数v_j，得到一个新的效率矩阵[b_{ij}]，则以[b_{ij}]为效率矩阵的分配问题与以[a_{ij}]为效率矩阵的分配问题具有相同的最优解。

分配问题与匈牙利法

指派问题的求解步骤：

1) 变换指派问题的系数矩阵(c_{ij})为(b_{ij})，使在(b_{ij})的各行各列中都出现0元素，即

- 从(c_{ij})的每行元素都减去该行的最小元素；
- 再从所得新系数矩阵的每列元素中减去该列的最小元素。

2) 进行试指派，以寻求最优解。

在(b_{ij})中找尽可能多的独立0元素，若能找出n个独立0元素，就以这n个独立0元素对应解矩阵(x_{ij})中的元素为1，其余为0，这就得到最优解。

分配问题与匈牙利法

找独立0元素，常用的步骤为:

- 从只有一个0元素的行开始，给该行中的0元素加圈，记作◎。然后划去◎ 所在列的其它0元素，记作∅；这表示该列所代表的任务已指派完，不必再考虑别人了。依次进行到最后一行。
- 从只有一个0元素的列开始（画∅的不计在内），给该列中的0元素加圈，记作◎；然后划去◎ 所在行的0元素，记作∅ ，表示此人已有任务，不再为其指派其他任务了。依次进行到最后一列。
- 若仍有没有划圈的0元素，且同行(列)的0元素至少有两个，比较这行各0元素所在列中0元素的数目，选择0元素少这个0元素加圈(表示选择性多的要“礼让”选择性少的)。然后划掉同行同列的其它0元素。可反复进行，直到所有0元素都已圈出和划掉为止。

- 若◎ 元素的数目m 等于矩阵的阶数n（即：$m = n$），那么这指派问题的最优解已得到。若$m < n$, 则转入下一步。

3) 用最少的直线通过所有0元素。其方法:

① 对没有◎的行打“√”；

② 对已打“√” 的行中所有含Ø元素的列打“√”；

③ 再对打有“√”的列中含◎ 元素的行打“√”；

④ 重复①、②直到得不出新的打√号的行、列为止;

⑤ 对没有打√号的行画横线，有打√号的列画纵线，这就得到覆盖所有0元素的最少直线数 l 。

注：l 应等于m，若不相等，说明试指派过程有误，回到第2步，另行试指派；若 l = m ＜ n，表示还不能确定最优指派方案，须再变换当前的系数矩阵，以找到n个独立的0元素，为此转第4步。

4) 变换矩阵(b_{ij})以增加0元素

在没有被直线通过的所有元素中找出最小值，没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线交点处的元素加上这个最小值。新系数矩阵的最优解和原问题仍相同。转回第2步。

分配问题与匈牙利法

例4.6 有一份中文说明书，需译成英、日、德、俄四种文字，分别记作A、B、C、D。现有甲、乙、丙、丁四人，他们将中文说明书译成不同语种的说明书所需时间如下表所示，问如何分派任务，可使总时间最少?

人员＼任务	A	B	C	D
甲	6	7	11	2
乙	4	5	9	8
丙	3	1	10	4
丁	5	9	8	2

分配问题与匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$(c_{ij})=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}6&7&11&2\\4&5&9&8\\3&1&10&4\\5&9&8&2\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}-2\\-4\\-1\\-2\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\begin{bmatrix}4&5&9&0\\0&1&5&4\\2&0&9&3\\3&7&6&0\end{bmatrix}\\\begin{array}{cccc}&&-5&\end{array}\end{array}\rightarrow\begin{bmatrix}4&5&4&0\\0&1&0&4\\2&0&4&3\\3&7&1&0\end{bmatrix}$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix}4&5&4&\circledcirc\\\circledcirc&1&\varnothing&4\\2&\circledcirc&4&3\\3&7&1&\varnothing\end{bmatrix}$$

找到 3 个独立零元素

但 $m=3<n=4$

3）作最少的直线覆盖所有0元素

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 & \circledcirc \\ \circledcirc & 1 & \varnothing & 4 \\ 2 & \circledcirc & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & \varnothing \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \surd \\ \\ \\ \surd \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \quad & \quad & \quad & \qquad\quad \surd \end{array} & \end{array}$$

独立零元素的个数m等于最少直线数l，即$l = m=3<n=4$；

4）没有被直线通过的元素中选择最小值为1，变换系数矩阵，将没有被直线通过的所有元素减去这个最小元素；直线交点处的元素加上这个最小值。得到新的矩阵，重复2）步进行试指派

$$
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{试指派}}
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & \circledcirc \\ \circledcirc & 1 & \varnothing & 5 \\ 2 & \circledcirc & 4 & 4 \\ 2 & 6 & \circledcirc & \varnothing \end{bmatrix}
$$

得到4个独立零元素， 所以最优解矩阵为:

$$
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

即完成4个任务的总时间最少为：2＋4＋1+8=15

分配问题与匈牙利法

例4.7 已知四人分别完成四项工作所需时间如下表，求最优分配方案。

人员＼任务	A	B	C	D
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

分配问题与匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$\begin{array}{c|c}\begin{bmatrix} 2 & 15 & 13 & 4 \\ 10 & 4 & 14 & 15 \\ 9 & 14 & 16 & 13 \\ 7 & 8 & 11 & 9 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -9 \\ -7 \end{matrix}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 13 & 11 & 2 \\ 6 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} & & -4 & -2 \end{matrix}\end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 13 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix} \varnothing & 13 & 7 & \circledcirc \\ 6 & \circledcirc & 6 & 9 \\ \circledcirc & 5 & 3 & 2 \\ \varnothing & 1 & \circledcirc & \varnothing \end{bmatrix}$$

独立0元素的个数为4，指派问题的最优指派方案即为甲负责D工作，乙负责B工作，丙负责A工作，丁负责C工作。这样安排能使总的工作时间最少，为4＋4＋9＋11＝28。

分配问题与匈牙利法

例4.8 已知五人分别完成五项工作耗费如下表，求最优分配方案。

人员 \ 任务	A	B	C	D	E
甲	7	5	9	8	11
乙	9	12	7	11	9
丙	8	5	4	6	8
丁	7	3	6	9	6
戊	4	6	7	5	11

分配问题与匈牙利法

解：1）变换系数矩阵，增加0元素。

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
7 & 5 & 9 & 8 & 11 \\
9 & 12 & 7 & 11 & 9 \\
8 & 5 & 4 & 6 & 9 \\
7 & 3 & 6 & 9 & 6 \\
4 & 6 & 7 & 5 & 11
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
-5 \\ -7 \\ -4 \\ -3 \\ -4
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 4 & 3 & 6 \\
2 & 5 & 0 & 4 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 2 & 5 \\
4 & 0 & 3 & 6 & 3 \\
0 & 2 & 3 & 1 & 7
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccc}
 & & & -1 & -2
\end{array}
\end{array}
\Rightarrow
$$

2）试指派（找独立0元素）

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & ◎ & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & Ø & 3 & ◎ \\ 4 & 1 & ◎ & 1 & 3 \\ 4 & Ø & 3 & 5 & 1 \\ ◎ & 2 & 3 & Ø & 5 \end{bmatrix}$$

独立0元素的个数l = 4<5，故画直线调整矩阵。

分配问题与匈牙利法

$$
\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
2 & \circledcirc & 4 & 2 & 4 \\
2 & 5 & \varnothing & 3 & \circledcirc \\
4 & 1 & \circledcirc & 1 & 3 \\
4 & \varnothing & 3 & 5 & 1 \\
\circledcirc & 2 & 3 & \varnothing & 5
\end{bmatrix}
&
\begin{matrix} \surd \\ \\ \\ \surd \\ \\ \end{matrix}
\\
\begin{matrix} & \surd & & & \end{matrix}
&
\end{array}
$$

选择直线外的最小元素为1；直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变。

分配问题与匈牙利法

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & \circledcirc & 3 & 1 & 3 \\
2 & 6 & \varnothing & 3 & \circledcirc \\
4 & 2 & \circledcirc & 1 & 3 \\
3 & \varnothing & 2 & 4 & \varnothing \\
\circledcirc & 3 & 3 & \varnothing & 5
\end{bmatrix}
\begin{array}{c} \surd \\ \surd \\ \surd \\ \surd \\ \end{array}
\\
\begin{array}{ccccc} & \surd & \surd & & \surd \end{array}
\end{array}
$$

$l=m=4<n=5$

选择直线外最小元素为1，直线外元素减1，直线交点元素加1，其他保持不变，得到新的系数矩阵。

分配问题与匈牙利法

$$
\begin{bmatrix}
\varnothing & \circledcirc & 3 & \varnothing & 3 \\
1 & 6 & \circledcirc & 2 & \varnothing \\
3 & 2 & \varnothing & \circledcirc & 3 \\
2 & \varnothing & 2 & 3 & \circledcirc \\
\circledcirc & 4 & 4 & \varnothing & 6
\end{bmatrix}
$$

总费用为
=5+7+6+6+4=28

注：此问题有多个最优解

分配问题与匈牙利法

$$
\begin{bmatrix}
\circledcirc & \emptyset & 3 & \emptyset & 3 \\
1 & 6 & \emptyset & 2 & \circledcirc \\
3 & 2 & \circledcirc & \emptyset & 3 \\
2 & \circledcirc & 2 & 3 & \emptyset \\
\emptyset & 4 & 4 & \circledcirc & 6
\end{bmatrix}
$$

总费用为=7+9+4+3+5=28

分配问题与匈牙利法

$$\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & 3 & ◎ & 3 \\ 1 & 6 & \emptyset & 2 & ◎ \\ 3 & 2 & ◎ & \emptyset & 3 \\ 2 & ◎ & 2 & 3 & \emptyset \\ ◎ & 4 & 4 & \emptyset & 6 \end{bmatrix}$$

总费用为=8+9+4+3+4=28

课堂练习：用匈牙利法求解下列指派问题。

练习1：

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 12 \\ 13 & 12 & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

练习2：

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

答案:

$$\begin{pmatrix} 7 & 9 & \boxed{10} & 12 \\ 13 & \boxed{12} & 16 & 17 \\ 15 & 16 & 14 & \boxed{15} \\ \boxed{11} & 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}_{48} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & \boxed{3} \\ 8 & 7 & \boxed{2} & 9 & 7 \\ 6 & \boxed{4} & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & \boxed{3} & 5 \\ \boxed{9} & 10 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}_{21}$$

分配问题与匈牙利法

非标准型的指派问题:

匈牙利法的条件是：模型求最小值、效率$c_{ij}\geqslant 0$。

当遇到各种非标准形式的指派问题时，处理方法是先将其转化为标准形式，然后用匈牙利法来求解。

分配问题与匈牙利法

1. 最大化指派问题

处理方法：设m为最大化指派问题系数矩阵C中最大元素。令矩阵B＝（m-c_{ij}）$_{nn}$则以B为系数矩阵的最小化指派问题和原问题有相同的最优解。

例4.9 某人事部门拟招聘4人任职4项工作，对他们综合考评的得分如下表（满分100分），如何安排工作使总分最多。

$$C=\begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \\ 丁 \end{array}\begin{bmatrix} 85 & 92 & 73 & 90 \\ 95 & 87 & 78 & 95 \\ 82 & 83 & 79 & 90 \\ 86 & 90 & 80 & 88 \end{bmatrix}$$

分配问题与匈牙利法

解: $M = 95$，令 $C' = (95 - c_{ij})$

$$C' = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 22 & 5 \\ 0 & 8 & 17 & 0 \\ 13 & 12 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

用匈牙利法求解C’，最优解为:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲安排做第二项工作、乙做第三项、丙做第四项、丁做第三项, 最高总分$Z = 92 + 95 + 90 + 80 = 357$

2. 不平衡的指派问题

- 当人数m大于工作数n时，加上m－n项虚拟工作，例如:

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 \\ 11 & 6 & 3 \\ 8 & 14 & 17 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 9 & 10 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 14 & 17 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 当人数m小于工作数n时，加上n－m个人，例如

$$\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分配问题与匈牙利法

3. 一个人可做几件事的指派问题

若某人可做几件事，则将该人化作相同的几个“人”来接受指派，且费用系数取值相同。

例如：丙可以同时任职A和C工作，求最优指派方案。

$$
\begin{array}{c} 甲 \\ 乙 \\ 丙 \end{array}
\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 7 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \\ 10 & 13 & 16 & 17 \end{bmatrix}
$$

4. 某事一定不能由某人做的指派问题

将该人做此事的效率系数取做足够大的数，可用M表示。

例4.10　分配甲、乙、丙、丁四个人去完成A、B、C、D、E五项任务。每个人完成各项任务的时间如表所示。由于任务数多于人数，考虑任务E必须完成，其他4项中可任选3项完成。试确定最优分配方案，使完成任务的总时间最少。

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45

分配问题与匈牙利法

解: 1) 这是不平衡的指派问题，首先转换为标准型，再用匈牙利法求解。

2) 由于任务数多于人数，所以假定一名虚拟人，设为戊。因为工作E必须完成，故设戊完成E的时间为M（M为非常大的数），其余效率系数为0，则标准型的效率矩阵表示为：

任务 人员	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45
戊	0	0	0	0	M

分配问题与匈牙利法

用匈牙利法求出最优指派方案为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即甲 – B，乙 – D，丙 – E，丁 – A, 任务C放弃。

最少时间为105。

Chapter5 目标规划

(Goal programming)

本章主要内容：

- 目标规划问题及其数学模型
- 目标规划的图解分析法
- 目标规划应用举例

目标规划问题及其数学模型

问题的提出:

目标规划是在线性规划的基础上，为适应经济管理多目标决策的需要而由线性规划逐步发展起来的一个分支。

由于现代化企业内专业分工越来越细，组织机构日益复杂，为了统一协调企业各部门围绕一个整体的目标工作，产生了目标管理这种先进的管理技术。目标规划是实行目标管理的有效工具，它根据企业制定的经营目标以及这些目标的轻重缓急次序，考虑现有资源情况，分析如何达到规定目标或从总体上离规定目标的差距为最小。

目标规划问题及其数学模型

例5.1 某企业计划生产甲，乙两种产品，这些产品分别要在A,B,C,D四种不同设备上加工。按工艺文件规定，如表所示。

	A	B	C	D	单件利润
甲	1	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
最大负荷	12	8	16	12	

问该企业应如何安排计划，使得计划期内的总利润收入为最大?

目标规划问题及其数学模型

解：设甲、乙产品的产量分别为x_1，x_2，建立线性规划模型：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

其最优解为$x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$z^* = 14$元

目标规划问题及其数学模型

但企业的经营目标不仅仅是利润，而且要考虑多个方面，如:

(1) 力求使利润指标不低于12元;

(2) 考虑到市场需求，甲、乙两种产品的生产量需保持1:1的比例;

(3) C和D为贵重设备，严格禁止超时使用;

(4) 设备B必要时可以加班，但加班时间要控制；设备A即要求充分利用，又尽可能不加班。

要考虑上述多方面的目标，需要借助目标规划的方法。

目标规划问题及其数学模型

线性规划模型存在的局限性:

1）要求问题的解必须满足全部约束条件，实际问题中并非所有约束都需要严格满足。

2）只能处理单目标的优化问题。实际问题中，目标和约束可以相互转化。

3）线性规划中各个约束条件都处于同等重要地位，但现实问题中，各目标的重要性即有层次上的差别，同一层次中又可以有权重上的区分。

4）线性规划寻求最优解，但很多实际问题中只需找出满意解就可以。

目标规划问题及其数学模型

目标规划怎样解决上述线性规划模型建模中的局限性?

1. 设置偏差变量，用来表明实际值同目标值之间的差异。

偏差变量用下列符号表示:

d^+——超出目标的偏差，称正偏差变量

d^-——未达到目标的偏差，称负偏差变量

正负偏差变量两者必有一个为0。

- 当实际值超出目标值时: $d^+>0, d^-=0;$
- 当实际值未达到目标值时: $d^+=0, d^->0;$
- 当实际值同目标值恰好一致时: $d^+=0, d^-=0;$

故恒有$d^+\times d^-=0$

目标规划问题及其数学模型

2. 统一处理目标和约束。

- 对有严格限制的资源使用建立系统约束，数学形式同线性规划中的约束条件。如C和D设备的使用限制。

$$4x_1 \le 16$$

$$4x_2 \le 12$$

- 对不严格限制的约束，连同原线性规划建模时的目标，均通过目标约束来表达。

1）例如要求甲、乙两种产品保持1:1的比例，系统约束表达为：$x_1=x_2$。由于这个比例允许有偏差，

当$x_1<x_2$时，出现负偏差d^-，即：$x_1+d^-=x_2$或$x_1-x_2+d^-=0$

当$x_1>x_2$时，出现正偏差d^+，即：$x_1-d^+=x_2$或$x_1-x_2-d^+=0$

目标规划问题及其数学模型

∵正负偏差不可能同时出现，故总有:

$$x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0$$

- 若希望甲的产量不低于乙的产量，即不希望$d^- > 0$,用目标约束可表为:

$$\begin{cases} \min\{d^-\} \\ x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

- 若希望甲的产量低于乙的产量，即不希望$d^+ > 0$,用目标约束可表为:

$$\begin{cases} \min\{d^+\} \\ x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

- 若希望甲的产量恰好等于乙的产量，即不希望$d^+ > 0$,也不希望$d^- > 0$用目标约束可表为:

$$\begin{cases} \min\{d^+ + d^-\} \\ x_1 - x_2 + d^- - d^+ = 0 \end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

2）力求使利润指标不低于12元，目标约束表示为:

$$\begin{cases} \min\{d^-\} \\ 2x_1 + 3x_2 + d^- - d^+ = 12 \end{cases}$$

3）设备B必要时可加班及加班时间要控制，目标约束表示为:

$$\begin{cases} \min\{d^+\} \\ x_1 + 2x_2 + d^- - d^+ = 8 \end{cases}$$

4）设备A既要求充分利用，又尽可能不加班，目标约束表示为:

$$\begin{cases} \min\{d^- + d^+\} \\ 2x_1 + 2x_2 + d^- - d^+ = 12 \end{cases}$$

3. 目标的优先级与权系数

在一个目标规划的模型中，为达到某一目标可牺牲其他一些目标，称这些目标是属于不同层次的优先级。优先级层次的高低可分别通过优先因子$P_1,P_2,\cdots$表示。对于同一层次优先级的不同目标，按其重要程度可分别乘上不同的权系数。权系数是一个个具体数字，乘上的权系数越大，表明该目标越重要。

现假定:

- 第1优先级P1——企业利润;
- 第2优先级P2——甲乙产品的产量保持1:1的比例
- 第3优先级P3——设备A,B尽量不超负荷工作。其中设备A的重要性比设备B大三倍。

目标规划问题及其数学模型

上述目标规划模型可以表示为:

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + +3P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_3 d_4^+$$

$$s.t.\begin{cases} 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,4) \end{cases}$$

目标规划问题及其数学模型

目标规划数学模型的一般形式

达成函数

$$\min \ Z = \sum_{l=1}^{L} P_l \left(\sum_{k=1}^{K} \omega_{lk}^{-} d_k^{-} + \omega_{lk}^{+} d_k^{+} \right)$$

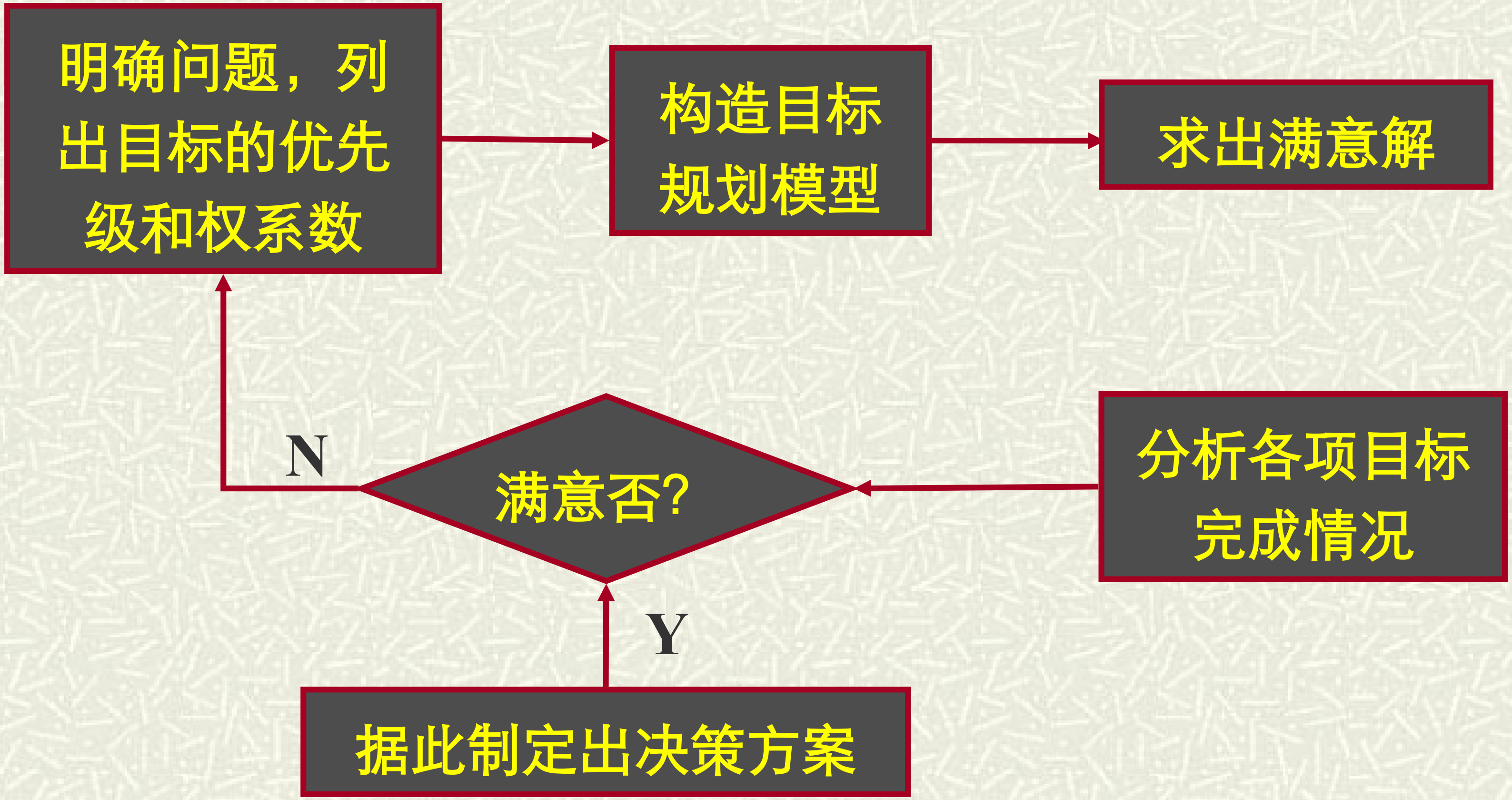
目标约束

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j + d_k^{-} - d_k^{+} = g_k \quad (k = 1.2 \cdots K) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (= . \ge) b_i \qquad (i = 1.2 \cdots m) \\ x_j \ge 0 \qquad (\mathrm{j} = 1.2 \cdots \mathrm{n}) \\ d_k^{+} . d_k^{-} \ge 0 \quad (k = 1.2 \cdots K) \end{cases}$$

其中：g_k为第k个目标约束的预期目标值，ω_{lk}^{-}和ω_{lk}^{+}为p_l优先因子对应各目标的权系数。

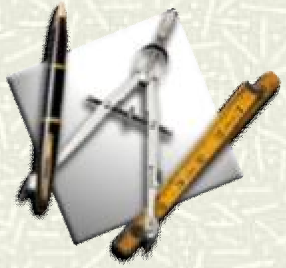
目标规划问题及其数学模型

用目标规划求解问题的过程:



目标规划的图解分析法

目标规划的图解法:



适用两个变量的目标规划问题，但其操作简单，原理一目了然。同时，也有助于理解一般目标规划的求解原理和过程。

图解法解题步骤:

1. 将所有约束条件（包括目标约束和绝对约束，暂不考虑正负偏差变量）的直线方程分别标示于坐标平面上。
2. 确定系统约束的可行域。
3. 在目标约束所代表的边界线上，用箭头标出正、负偏差变量值增大的方向

目标规划的图解分析法

3. 求满足最高优先等级目标的解

4. 转到下一个优先等级的目标，再不破坏所有较高优先等级目标的前提下，求出该优先等级目标的解

5. 重复4，直到所有优先等级的目标都已审查完毕为止

6. 确定最优解和满意解。

目标规划的图解分析法

例5.2 用图解法求解下列目标规划问题

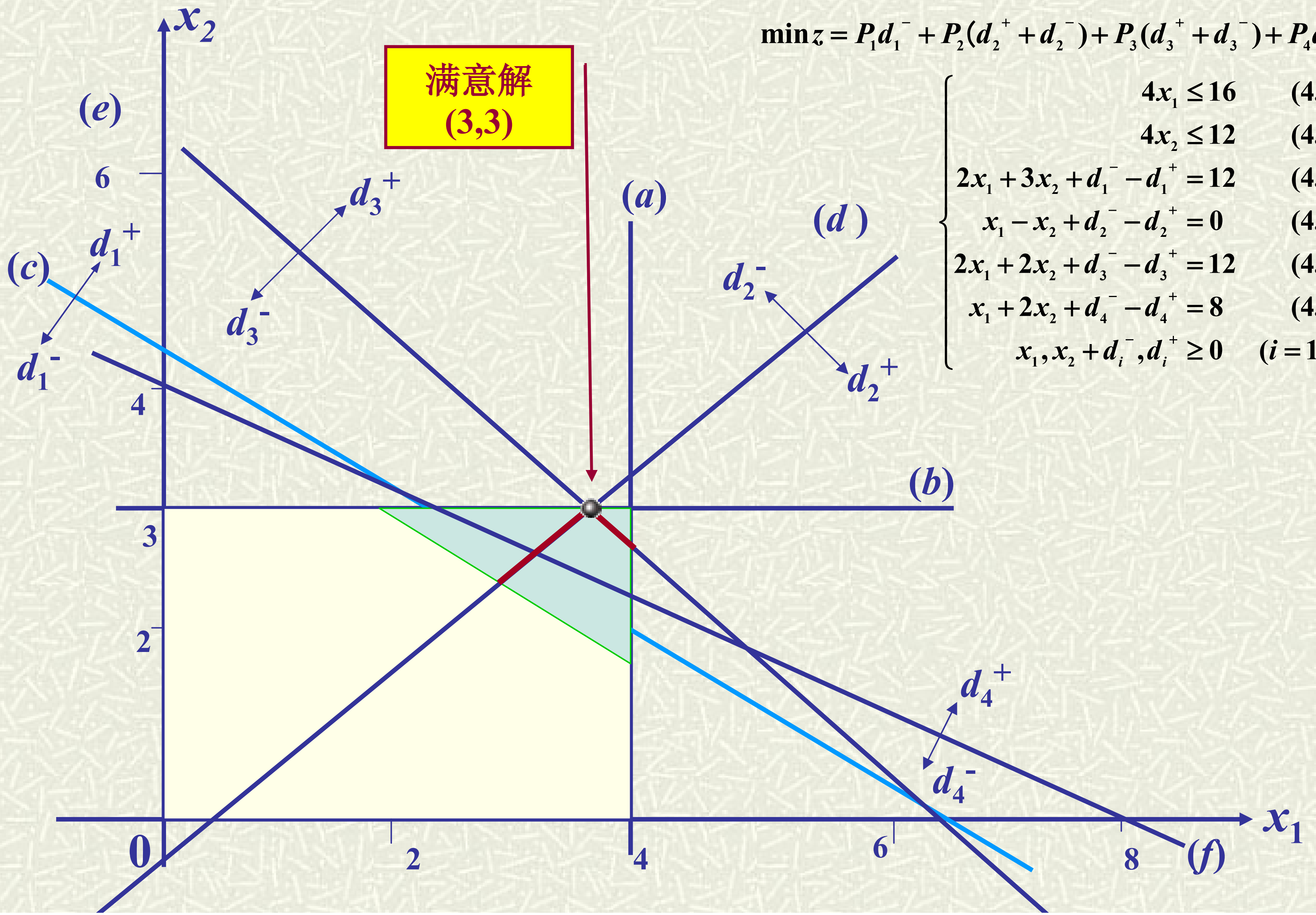
$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + 3P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_4 d_4^+$$

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 & (4.1a) \\ 4x_2 \le 12 & (4.1b) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 & (4.1c) \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (4.1d) \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 & (4.1e) \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 & (4.1f) \\ x_1, x_2 + d_i^-, d_i^+ \ge 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

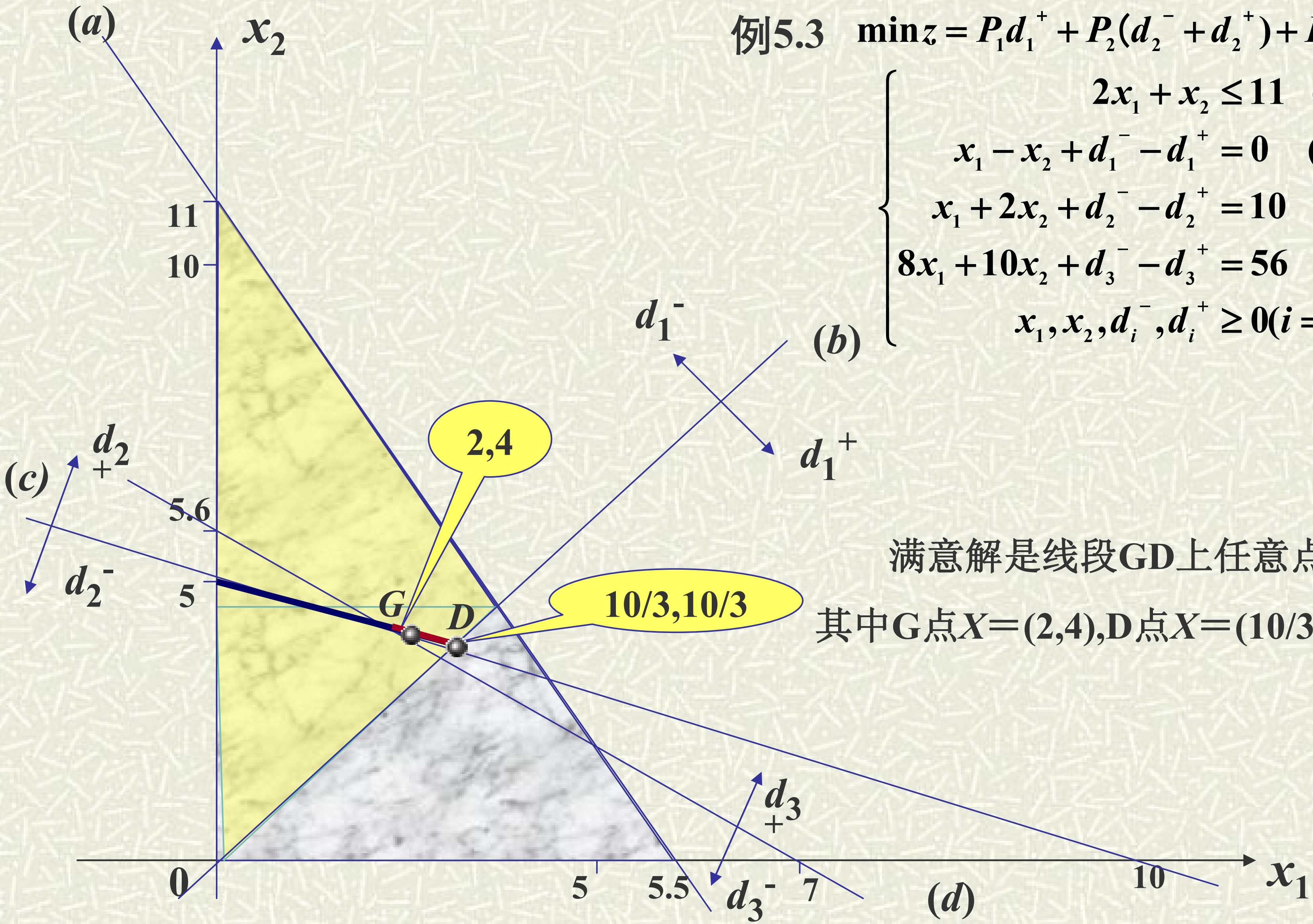
目标规划的图解分析法

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^+ + d_2^-) + P_3(d_3^+ + d_3^-) + P_4 d_4^+$$

$$\begin{cases} 4x_1 \le 16 & (4.1a) \\ 4x_2 \le 12 & (4.1b) \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 & (4.1c) \\ x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 & (4.1d) \\ 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 & (4.1e) \\ x_1 + 2x_2 + d_4^- - d_4^+ = 8 & (4.1f) \\ x_1, x_2 + d_i^-, d_i^+ \ge 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$



目标规划的图解分析法



例5.3 $\min z = P_1 d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 \le 11 & (1) \\
x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 & (2) \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 & (3) \\
8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 & (4) \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 (i = 1,2,3)
\end{cases}
$$

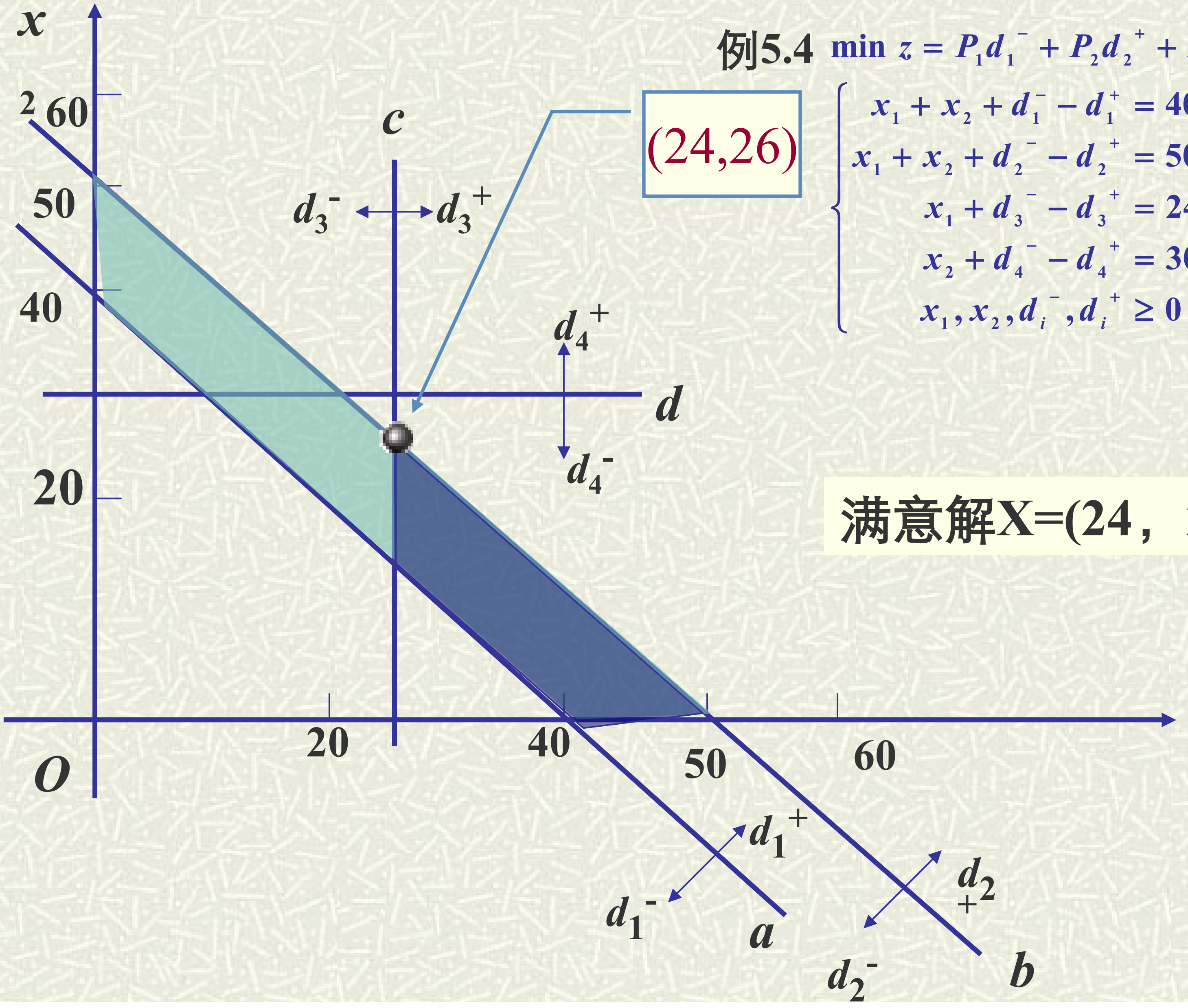
满意解是线段GD上任意点

其中G点X=(2,4),D点X=(10/3,10/3)

目标规划的图解分析法

例5.4 $\min z = P_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(2d_3^- + d_4^-)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 40 & (a) \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 50 & (b) \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 24 & (c) \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 30 & (d) \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 & (i = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$



满意解X=(24，26)

目标规划应用举例

例5.5 已知一个生产计划的线性规划模型如下，其中目标函数为总利润，x_1, x_2 为产品A、B产量。

$$\max Z = 30x_1 + 12x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 140 & (\text{甲资源}) \\ x_1 \le 60 & (\text{乙资源}) \\ x_2 \le 100 & (\text{丙资源}) \\ x_{1-2} \ge 0 \end{cases}$$

现有下列目标：

1. 要求总利润必须超过 2500 元；

2. 考虑产品受市场影响，为避免积压，A、B的生产量不超过 60 件和 100 件；

3. 由于甲资源供应比较紧张，不要超过现有量140。

试建立目标规划模型，并用图解法求解。

目标规划应用举例

解：以产品 A,B 的单件利润比 2.5 :1 为权系数，模型如下:

$$\min Z = P_1 d_1^- + 2.5P_2 d_3^+ + P_2 d_4^+ + P_3 d_2^+$$

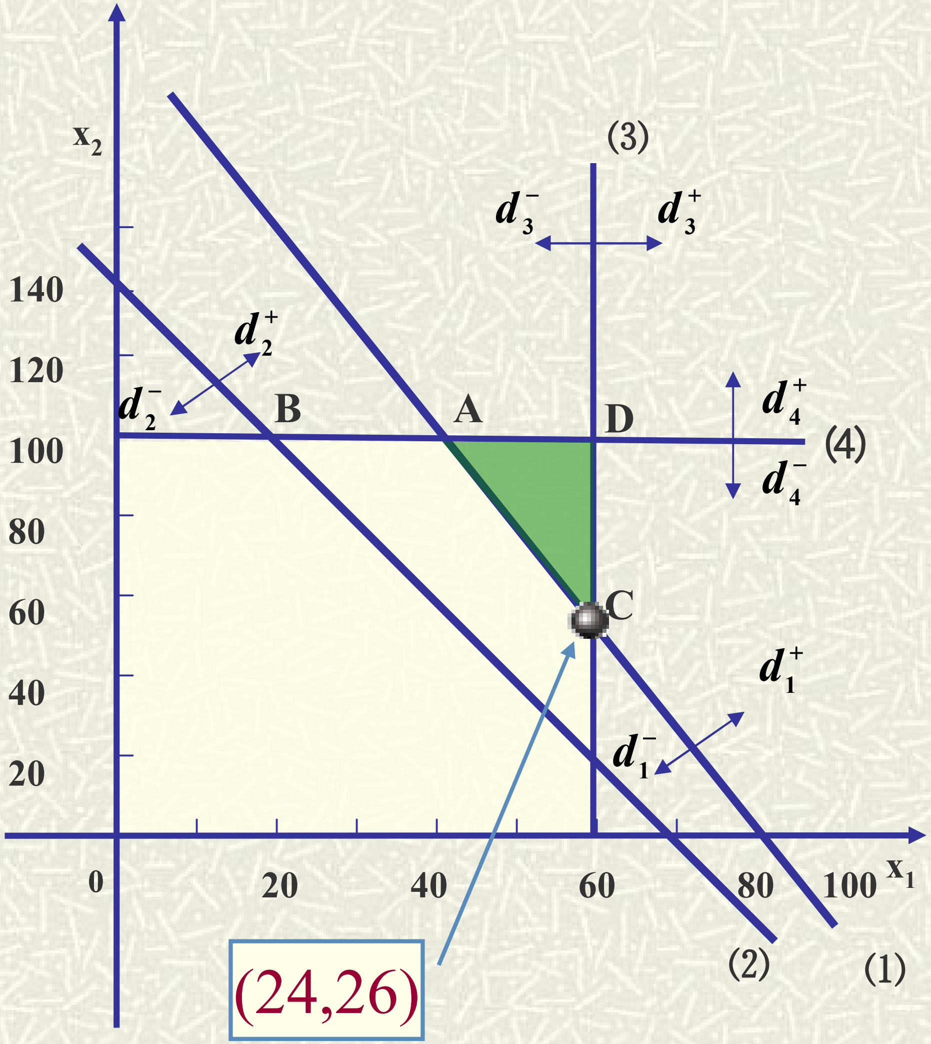
$$\begin{cases} 30x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500 \\ 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 140 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\ x_1 \le 60 \\ x_2 \le 100 \\ x_{1-2} \ge 0, d_l^+, d_l^- \ge 0 \quad (l = 1.2.3.4) \end{cases}$$

目标规划应用举例

$$\min Z = P_1 d_1^- + 2.5 P_2 d_3^+ + P_2 d_4^+ + P_3 d_2^+$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 12x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2500 \\ 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 140 \\ x_1 + d_3^- - d_3^+ = 60 \\ x_2 + d_4^- - d_4^+ = 100 \\ x_1 \le 60 \\ x_2 \le 100 \\ x_{1-2} \ge 0, d_l^+, d_l^- \ge 0 \quad (l = 1.2.3.4) \end{cases}$$

C(60 ,58.3)为所求的满意解。



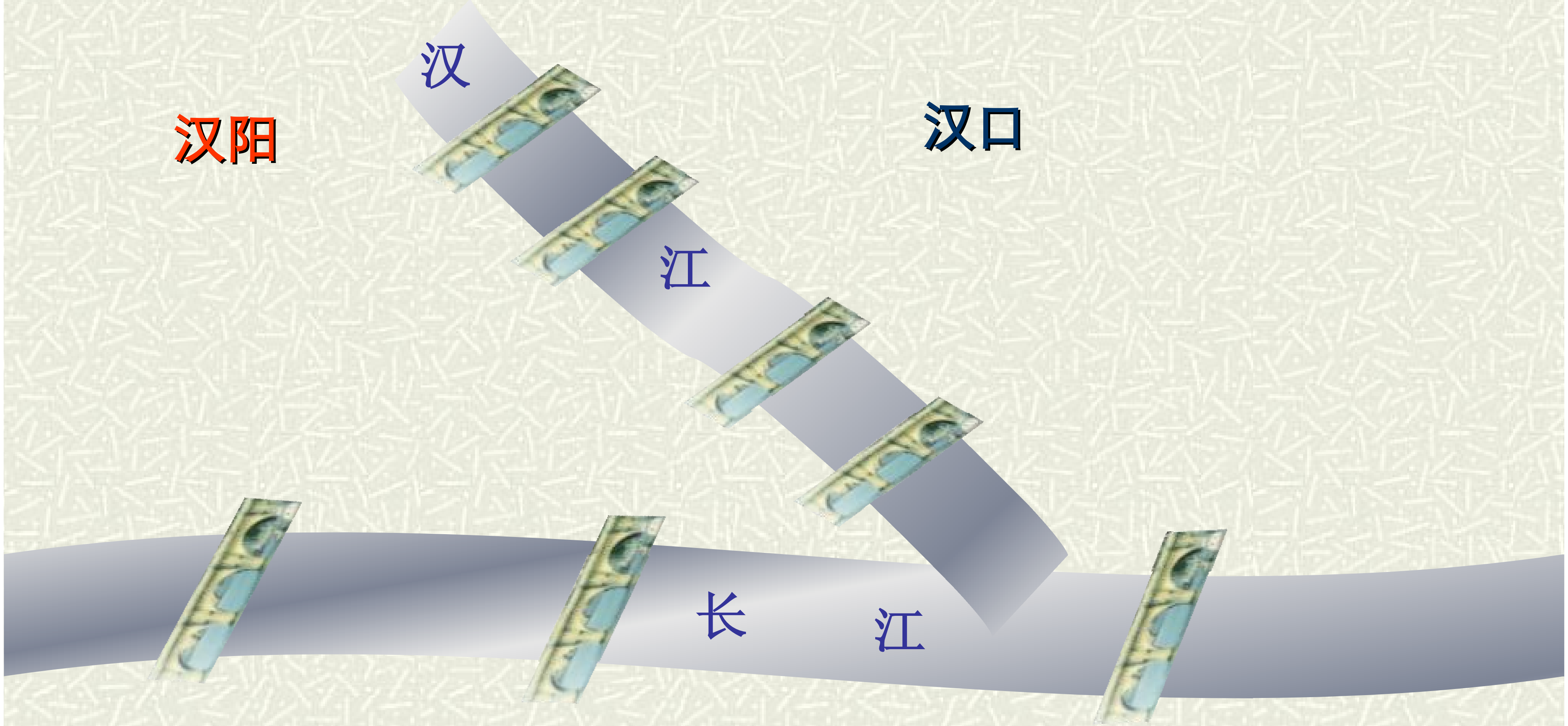
Chapter6 图与网络分析

(Graph Theory and Network Analysis)

本章主要内容：

- 图的基本概念与模型
- 树与图的最小树
- 最短路问题
- 网络的最大流

图的基本概念与模型



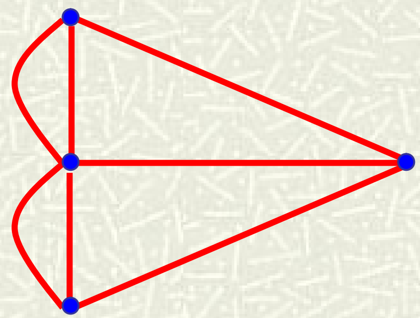
您能从武汉理工大学出发走过每座桥且只走一次然后回到学校吗?

武昌

图的基本概念与模型

近代图论的历史可追溯到18世纪的七桥问题—穿过KÖnigsberg城的七座桥，要求每座桥通过一次且仅通过一次。 这就是著名的“哥尼斯堡 7 桥”难题。Euler1736年证明了不可能存在这样的路线。

Königsberg桥对应的图



图的基本概念与模型

图论中图是由点和边构成，可以反映一些对象之间的关系。一般情况下图中点的相对位置如何、点与点之间联线的长短曲直，对于反映对象之间的关系并不是重要的。

图的定义：

若用点表示研究的对象，用边表示这些对象之间的联系，则图G可以定义为点和边的集合，记作：

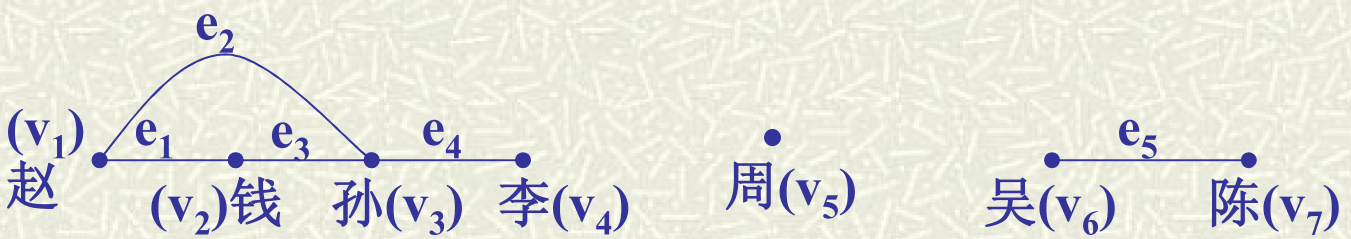
$$G = \{V, E\}$$

其中：V——点集　E——边集

※ 图G区别于几何学中的图。这里只关心图中有多少个点以及哪些点之间有连线。

图的基本概念与模型

例如：在一个人群中，对相互认识这个关系我们可以用图来表示。



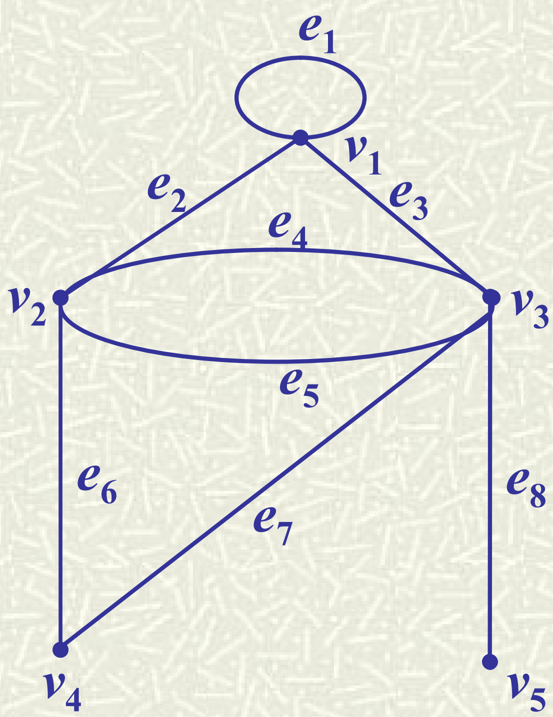
可见图论中的图与几何图、工程图是不一样的。

图的基本概念与模型

定义: 图中的点用v表示，边用e表示。对每条边可用它所连接的点表示，记作：$e_1=[v_1,v_1]$; $e_2=[v_1,v_2]$;

- 端点,关联边,相邻

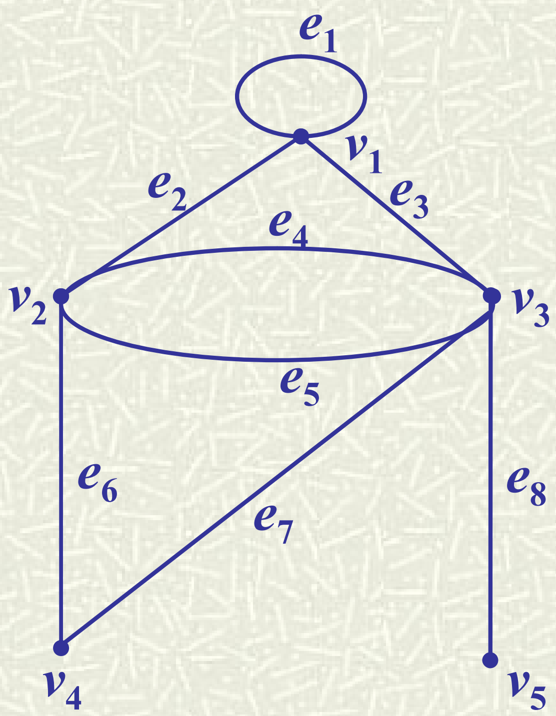
若有边e可表示为$e=[v_i,v_j]$，称v_i和v_j是边e的端点，反之称边e为点v_i或v_j的关联边。若点v_i、v_j与同一条边关联，称点v_i和v_j相邻；若边e_i和e_j具有公共的端点，称边e_i和e_j相邻。



图的基本概念与模型

环, 多重边, 简单图

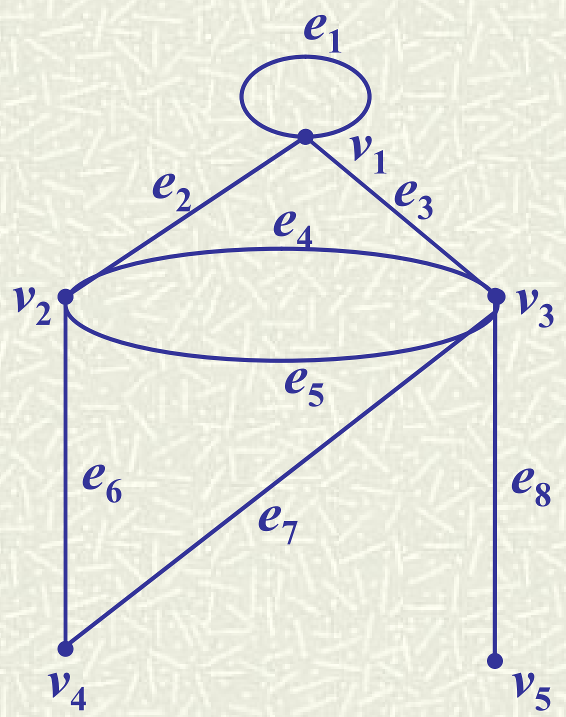
如果边e的两个端点相重，称该边为**环**。如右图中边e_1为环。如果两个点之间多于一条，称为**多重边**，如右图中的e_4和e_5，对无环、无多重边的图称作**简单图**。



图的基本概念与模型

次，奇点，偶点，孤立点

与某一个点v_i相关联的边的数目称为点v_i的次（也叫做度），记作$d(v_i)$。右图中$d(v_1) = 4$,$d(v_3)=5$,$d(v_5)=1$。次为奇数的点称作奇点，次为偶数的点称作偶点，次为1的点称为悬挂点，次为0的点称作孤立点。



图的次: 一个图的次等于各点的次之和。

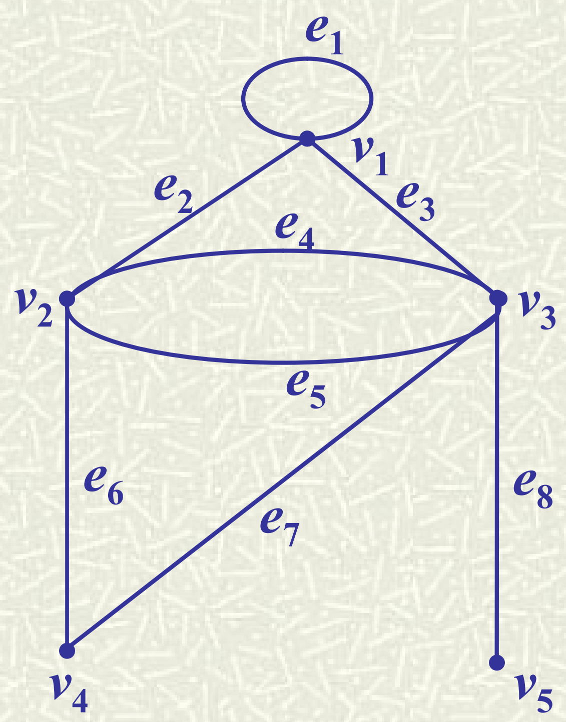
图的基本概念与模型

链，圈，连通图

图中某些点和边的交替序列，若其中各边互不相同，且对任意$v_{i,t-1}$和v_{it}均相邻称为**链**。用μ表示：

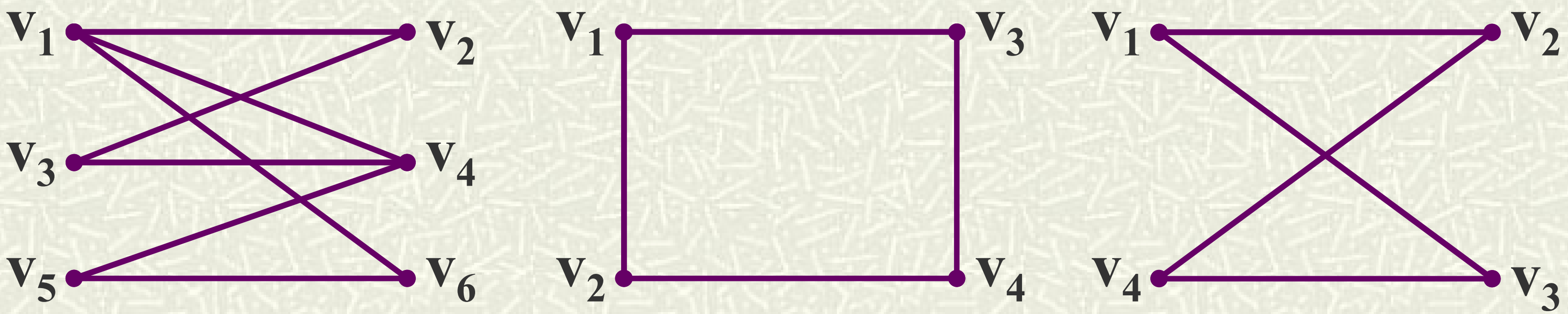
$$\mu = \{v_0, e_1, v_1, \cdots, e_k, v_k\}$$

起点与终点重合的链称作**圈**。如果每一对顶点之间至少存在一条链，称这样的图为**连通图**，否则称图不连通。



二部图（偶图）

图G=(V,E)的点集V可以分为两各非空子集X，Y，集X∪Y=V,X∩Y=Ø,使得同一集合中任意两个顶点均不相邻，称这样的图为偶图。

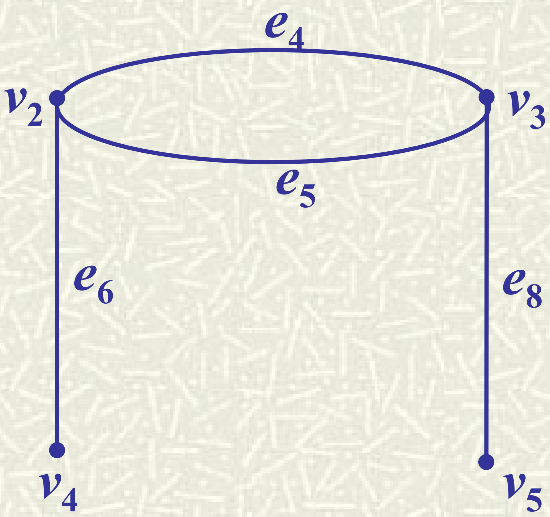


(a) (b) (c)

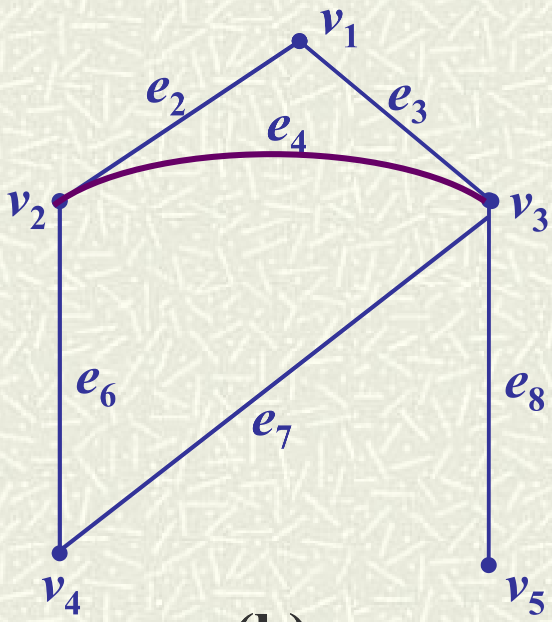
(a)明显为二部图，(b)也是二部图，但不明显，改画为(c)时可以清楚看出。

子图，部分图(支撑子图)

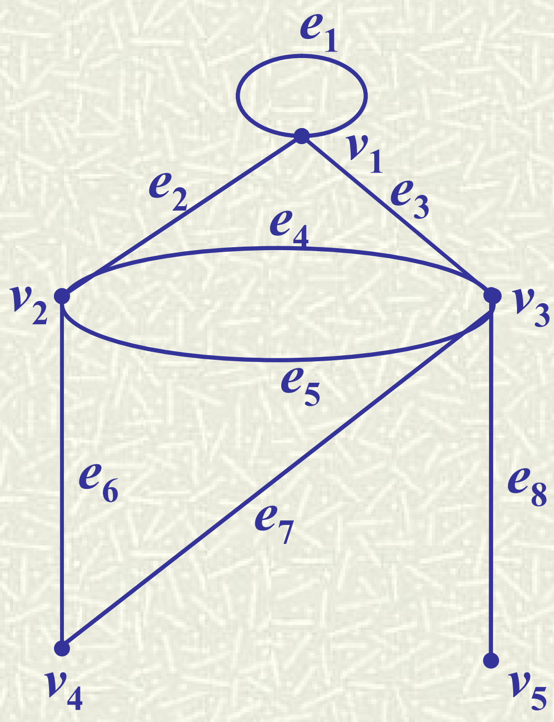
图G_1={V_1、E_1}和图G_2={V_2，E_2}如果有 $V_1 \subseteq V_2$和$E_1 \subseteq E_2$称G_1是G_2的一个**子图**。若有$V_1 = V_2$，$E_1 \subseteq E_2$，则称G_1是G_2的一个**部分图(支撑子图)**。



(a)



(b)



（G图）

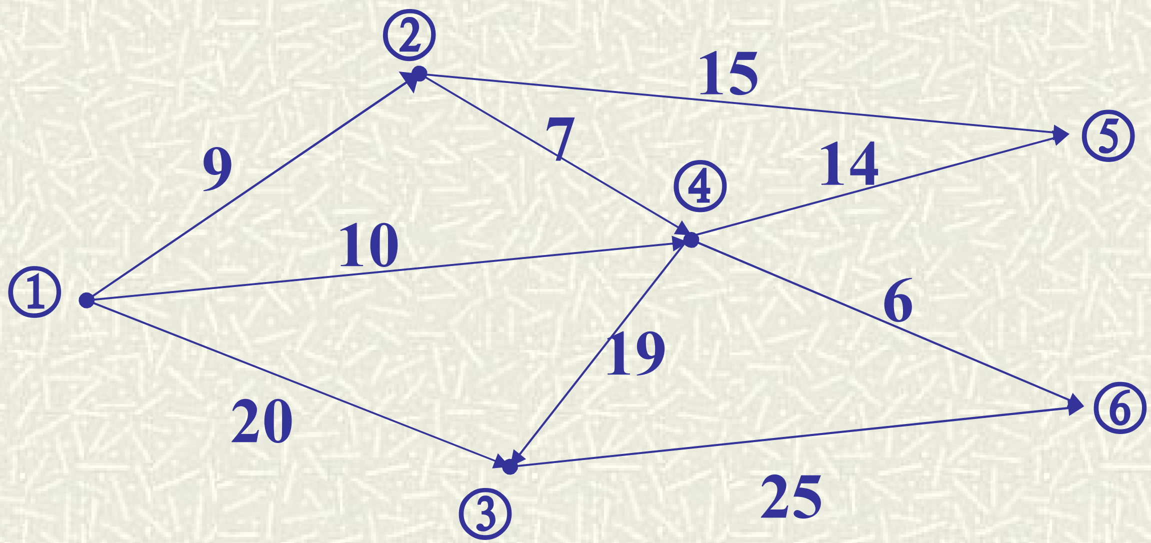
图的基本概念与模型

网络（赋权图）

设图G＝（V，E），对G的每一条边(v_i,v_j)相应赋予数量指标w_{ij}，w_{ij}称为边(v_i,v_j)的权,赋予权的图G称为网络(或赋权图）。

权可以代表距离、费用、通过能力(容量)等等。

端点无序的赋权图称为无向网络，端点有序的赋权图称为有向网络。



出次与入次

有向图中，以v_i为始点的边数称为点v_i的出次，用$d^+(v_i)$表示；以v_i为终点的边数称为点v_i 的入次，用表示$d^-(v_i)$ ；v_i 点的出次和入次之和就是该点的次。

※ 有向图中，所有顶点的入次之和等于所有顶点的出次之和。

图的基本概念与模型

图的模型应用

例6.1 有甲,乙,丙,丁,戊,己6名运动员报名参加A,B,C,D,E,F 6个项目的比赛。下表中打√的是各运动员报告参加的比赛项目。问6个项目的比赛顺序应如何安排，做到每名运动员都不连续地参加两项比赛。

	A	B	C	D	E	F
甲	√			√		
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊	√	√			√	
己			√	√		√

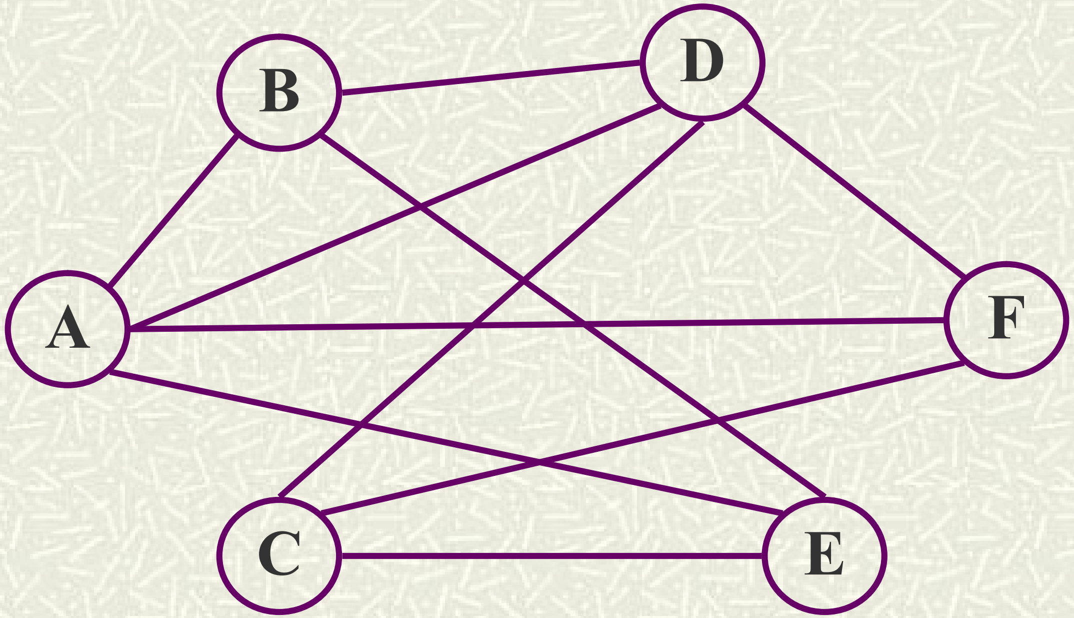
图的基本概念与模型

解：用图来建模。把比赛项目作为研究对象，用点表示。如果2个项目有同一名运动员参加，在代表这两个项目的点之间连一条线，可得下图。

在图中找到一个点序列，使得依次排列的两点不相邻，即能满足要求。如：

1) A,C,B,F,E,D

2) D,E,F,B,C,A



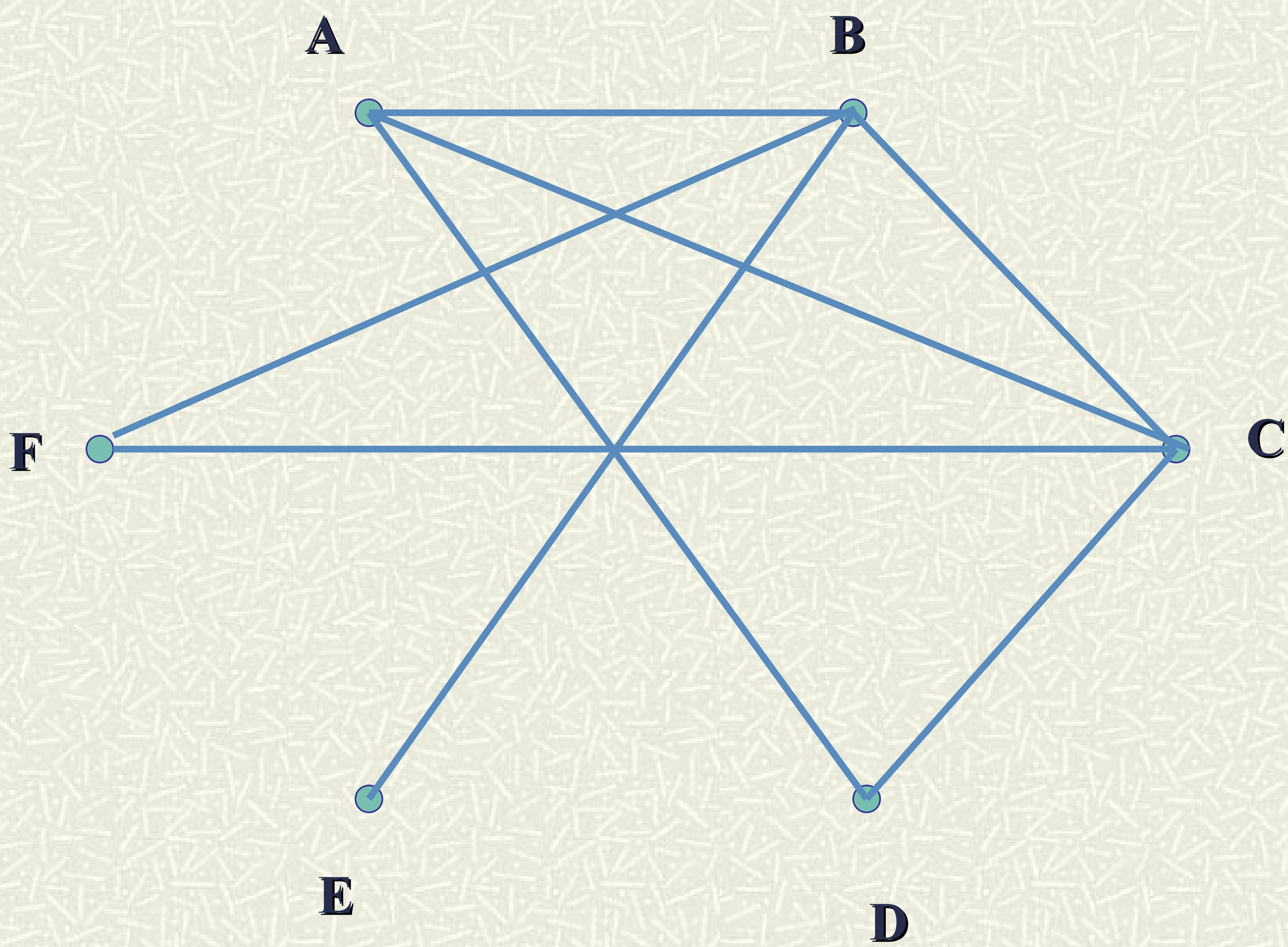
思考题

一个班级的学生共计选修A、B、C、D、E、F六门课程，其中一部分人同时选修D、C、A，一部分人同时选修B、C、F，一部分人同时选修B、E，还有一部分人同时选修A、B，期终考试要求每天考一门课，六天内考完，为了减轻学生负担，要求每人都不会连续参加考试，试设计一个考试日程表。

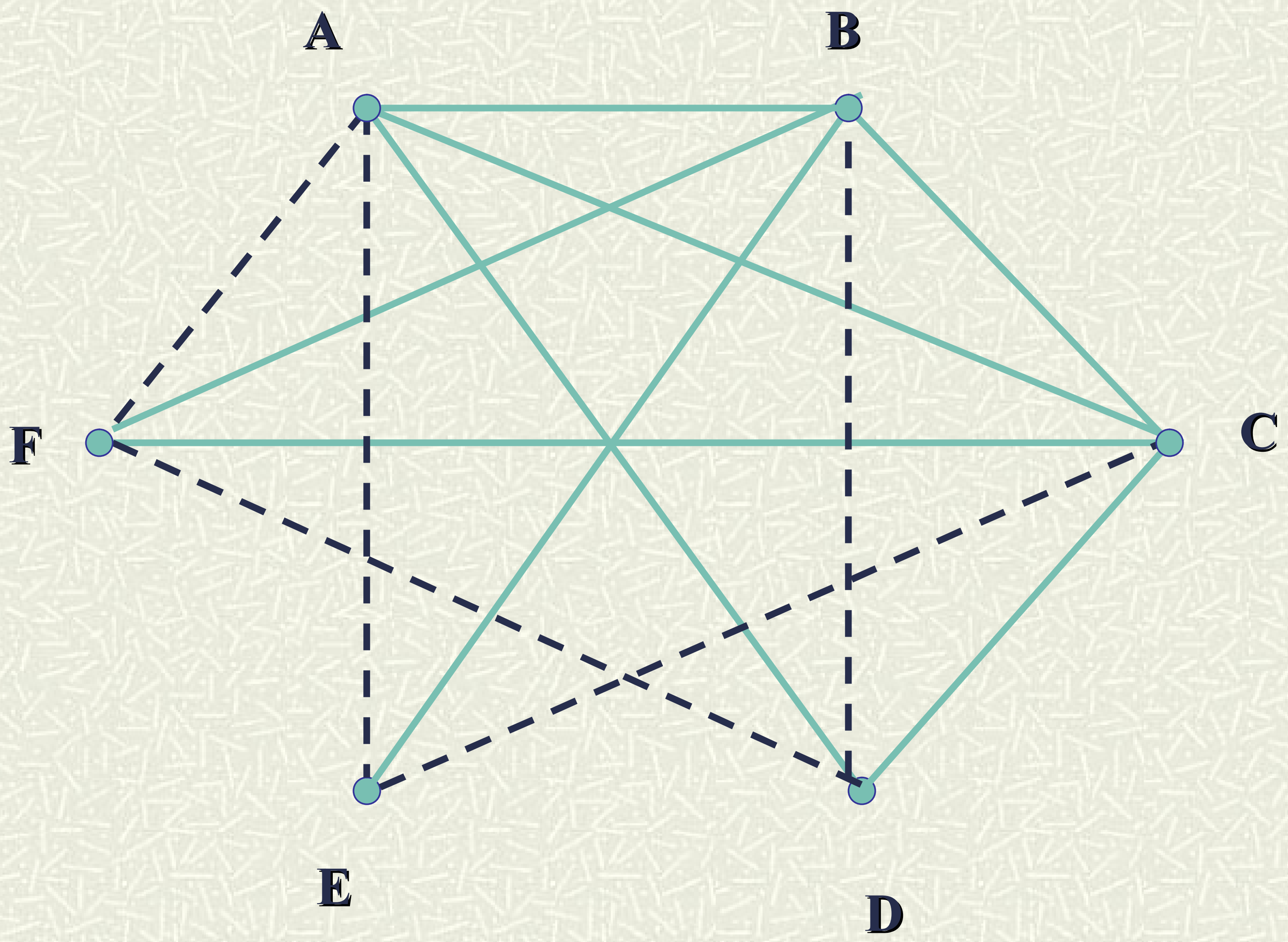
思考题解答:

以每门课程为一个顶点，共同被选修的课程之间用边相连，得图，按题意，相邻顶点对应课程不能连续考试，不相邻顶点对应课程允许连续考试，因此，作图的补图，问题是在图中寻找一条哈密顿道路，如**C—E—A—F—D—B**，就是一个符合要求的考试课程表。

图的基本概念与模型



图的基本概念与模型



图的基本性质:

定理1 任何图中，顶点次数之和等于所有边数的2倍。

证明：由于每条边必与两个顶点关联，在计算点的次时，每条边均被计算了两次，所以顶点次数的总和等于边数的2倍。

定理2 任何图中，次为奇数的顶点必为偶数个。

证明：设V1和V2分别为图G中奇点与偶点的集合。由定理1可得:

$$\sum_{v\in V_1} d(v)+\sum_{v\in V_2} d(v)=\sum_{v\in V} d(v)=2m$$

2m为偶数，且偶点的次之和$\sum_{v\in V_2} d(v)$也为偶数，所以 $\sum_{v\in V_1} d(v)$ 必为偶数，即奇数点的个数必为偶数。

图的矩阵描述：

如何在计算机中存储一个图呢？现在已有很多存储的方法，但最基本的方法就是采用矩阵来表示一个图，图的矩阵表示也根据所关心的问题不同而有：

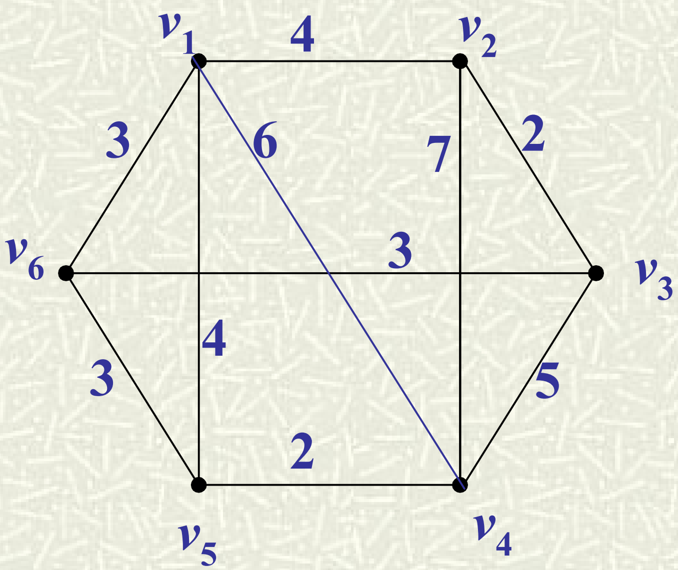
邻接矩阵、关联矩阵、权矩阵等。

1. 邻接矩阵

对于图G=（V，E），| V |=n， | E |=m，有n×n阶方矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当且仅档}v_i\text{与}v_j\text{之间有关联边时}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例6.2 下图所表示的图可以构造邻接矩阵A如下



$$A_{6\times 6}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. 关联矩阵

对于图$G=(V,E)$, $|V|=n$, $|E|=m$, 有$m\times n$阶矩阵$M=(m_{ij})_{m\times n}$,
其中:

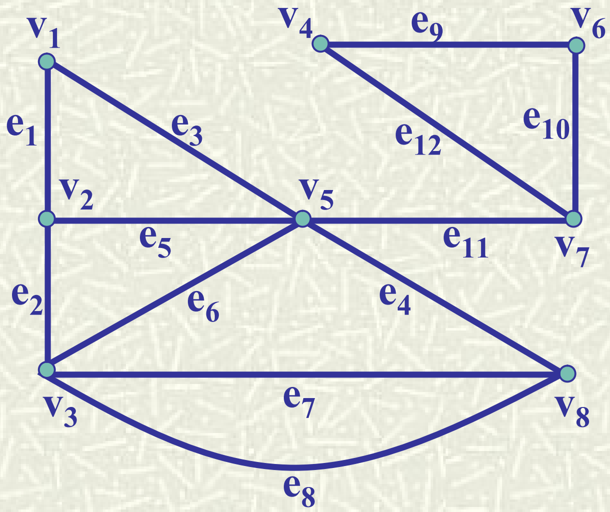
$$m_{ij}=\begin{cases}2 & \text{当且仅当}v_i\text{是边}e_j\text{的两个端点}\\ 1 & \text{当且仅当}v_i\text{是边}e_j\text{的一个端点}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

3. 权矩阵

对于赋权图$G=(V,E)$, 其中边(v_i,v_j)有权w_{ij}, 构造矩阵$B=(b_{ij})_{n\times n}$
其中:

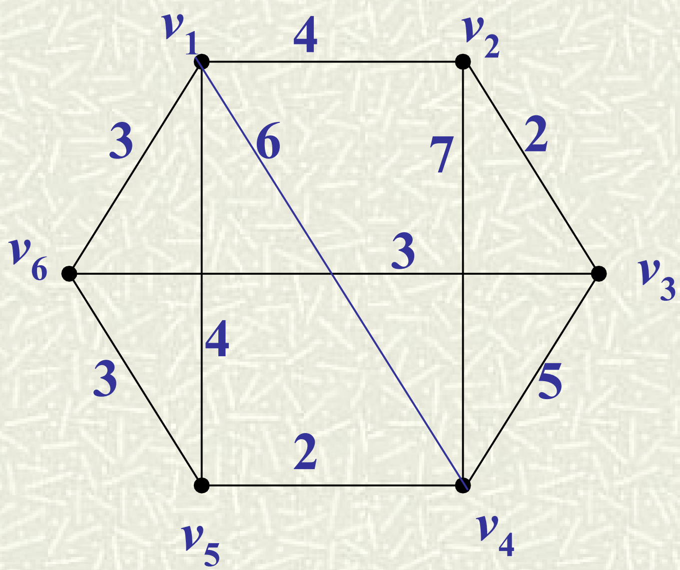
$$b_{ij}=\begin{cases}w_{ij} & (v_i,v_j)\in E\\ 0 & (v_i,v_j)\notin E\end{cases}$$

例6.3 下图所表示的图可以构造邻接矩阵M如下:



$$M=(m_{ij})=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 & e7 & e8 & e9 & e10 & e11 & e12 \end{array} \\ \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \\ v6 \\ v7 \\ v8 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

例6.4 下图所表示的图可以构造权矩阵B如下:

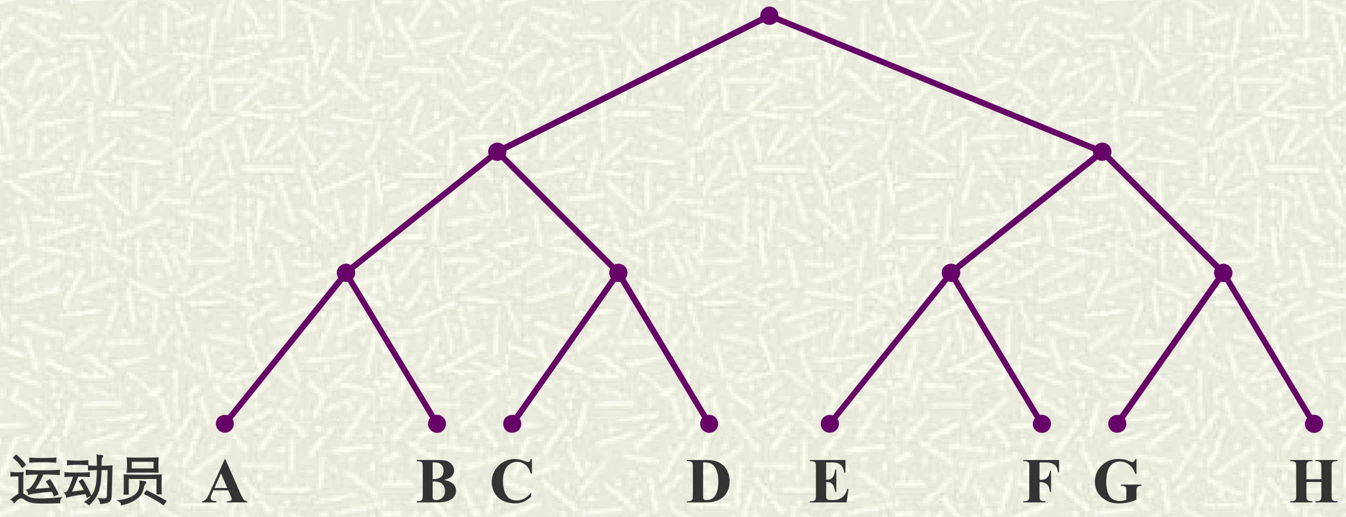


$$B = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \end{array}$$

树与图的最小树

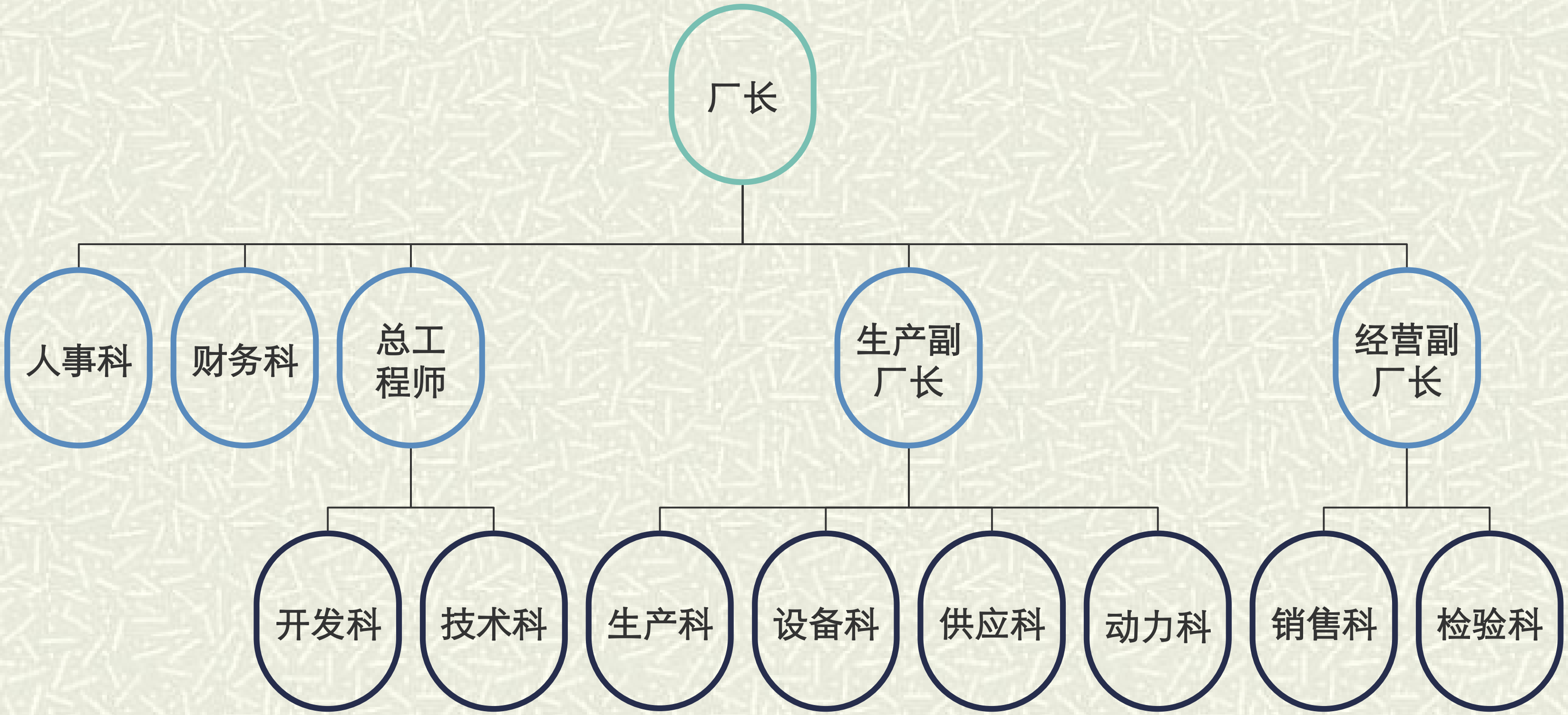
树是图论中结构最简单但又十分重要的图。在自然和社会领域应用极为广泛。

例6.2 乒乓球单打比赛抽签后，可用图来表示相遇情况，如下图所示。



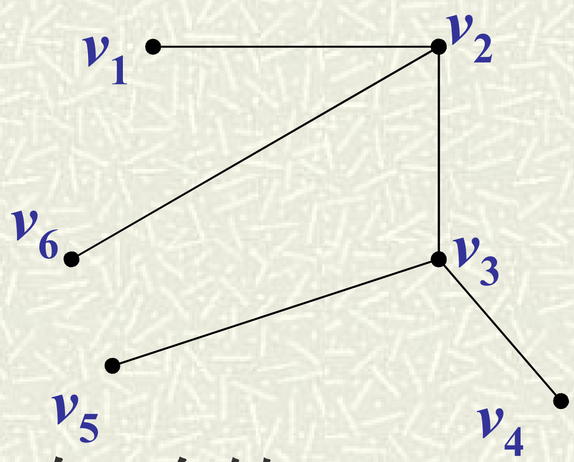
树与图的最小树

例6.3 某企业的组织机构图也可用树图表示。



树与图的最小树

- 树：无圈的连通图即为树



性质1：任何树中必存在次为1的点。

性质2：n 个顶点的树必有n-1 条边。

性质3：树中任意两个顶点之间，恰有且仅有一条链。

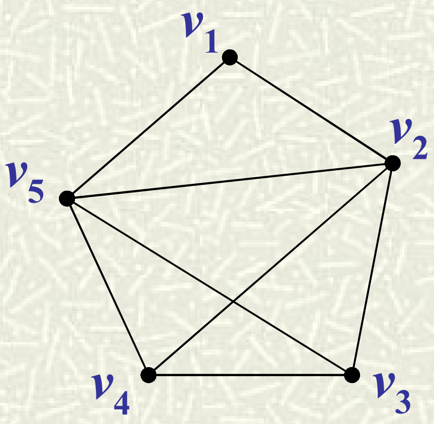
性质4：树连通，但去掉任一条边，必变为不连通。

性质5：树无回圈，但不相邻的两个点之间加一条边，恰得到一个圈。

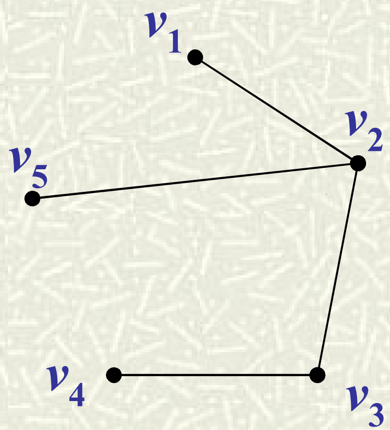
树与图的最小树

图的最小部分树(支撑树)

如果G2是G1的部分图，又是树图，则称G2是G1的部分树（或支撑树）。树图的各条边称为树枝，一般图G1含有多个部分树，其中树枝总长最小的部分树，称为该图的最小部分树（或最小支撑树）。

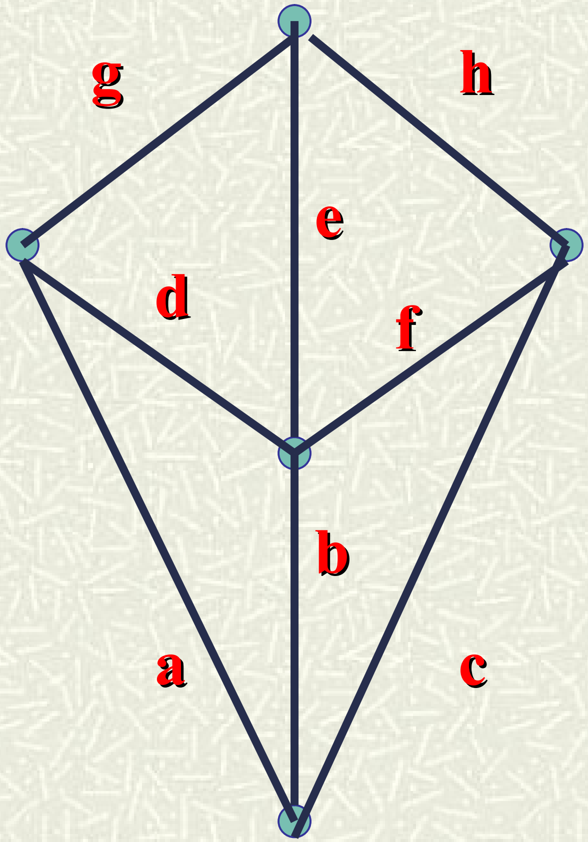


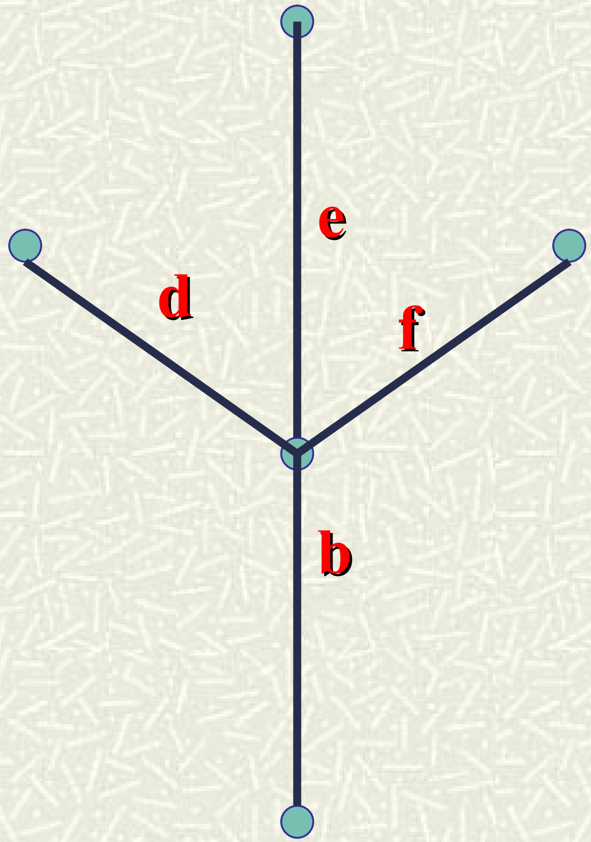
G1



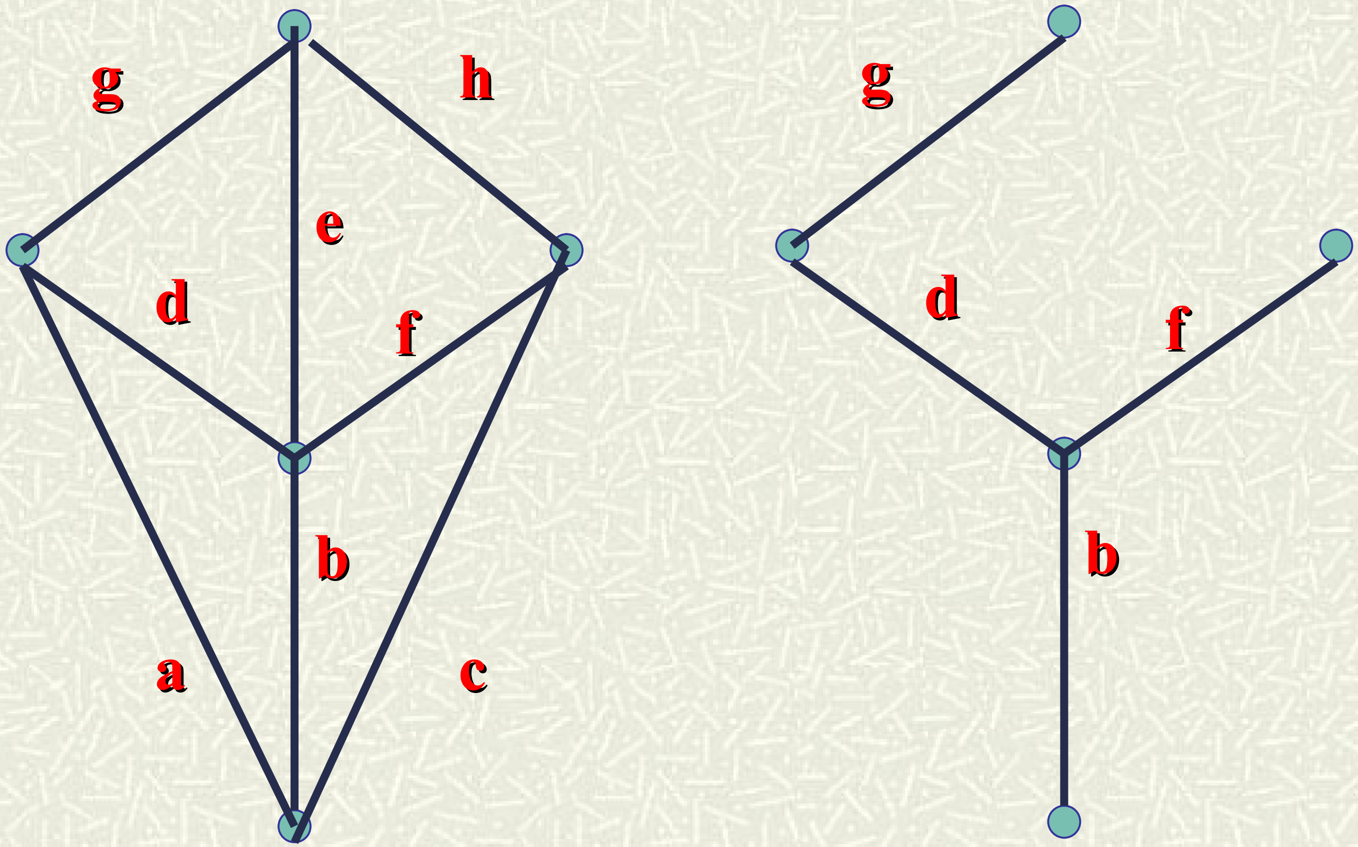
G2

树与图的最小树

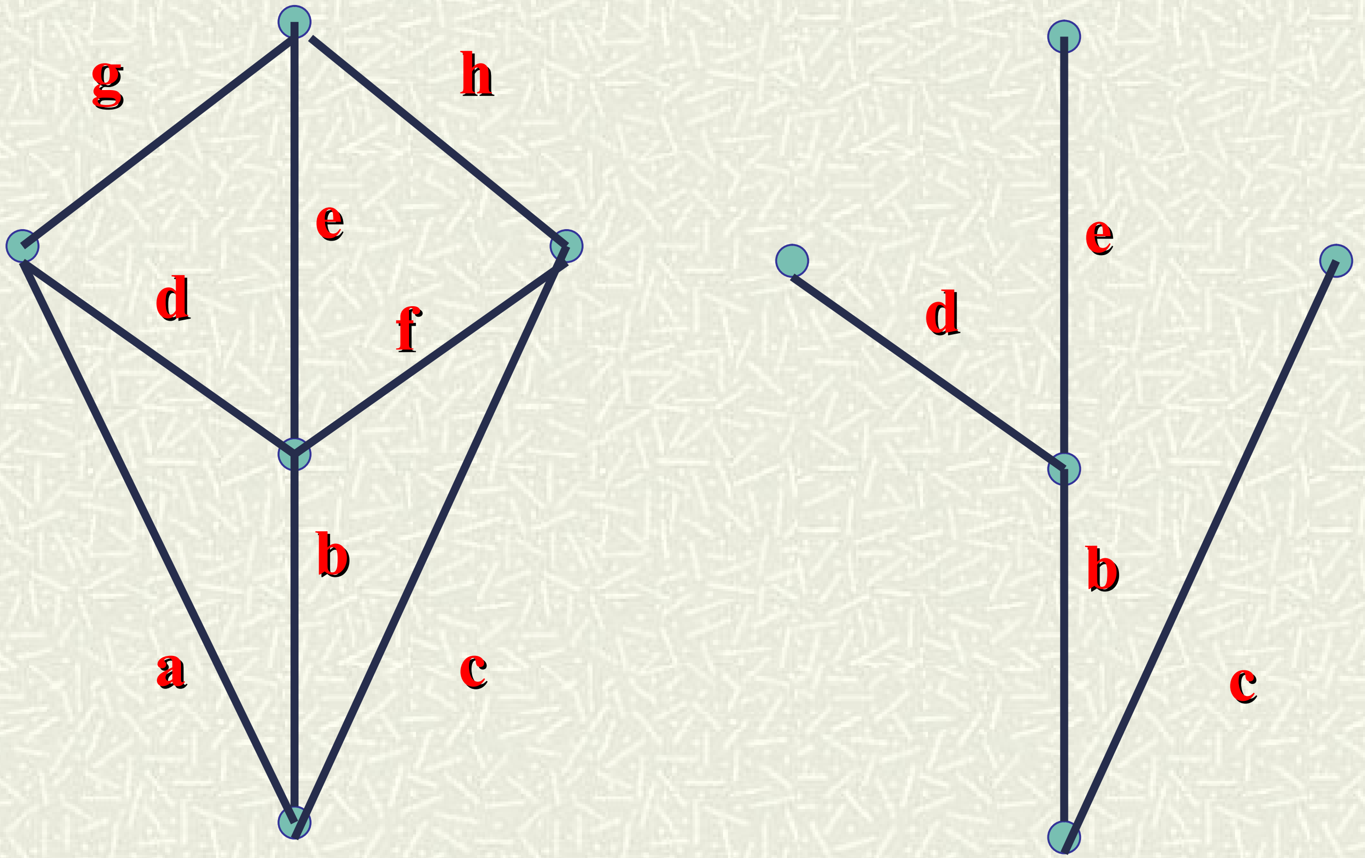




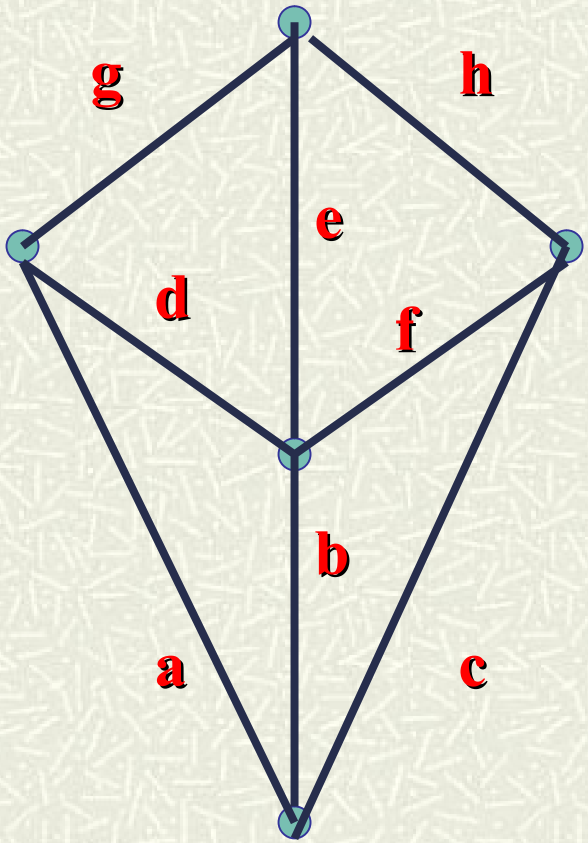
树与图的最小树

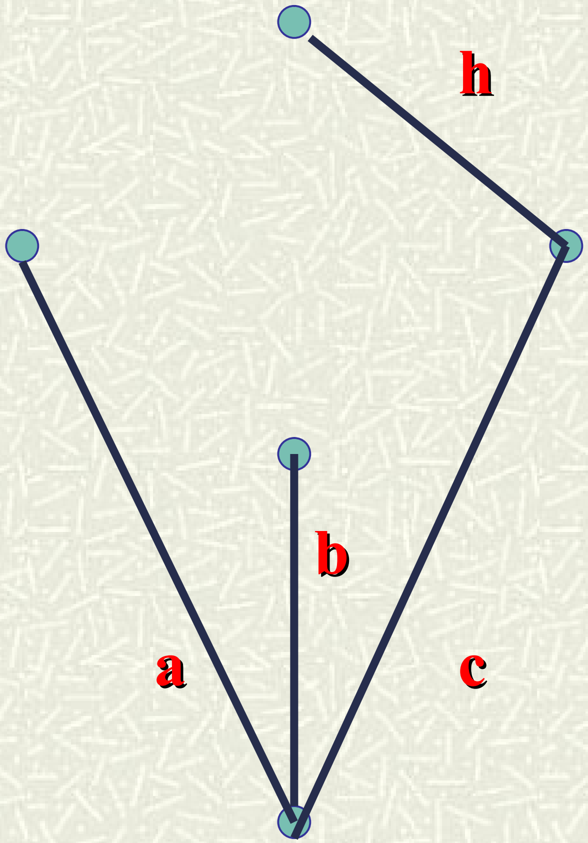


树与图的最小树

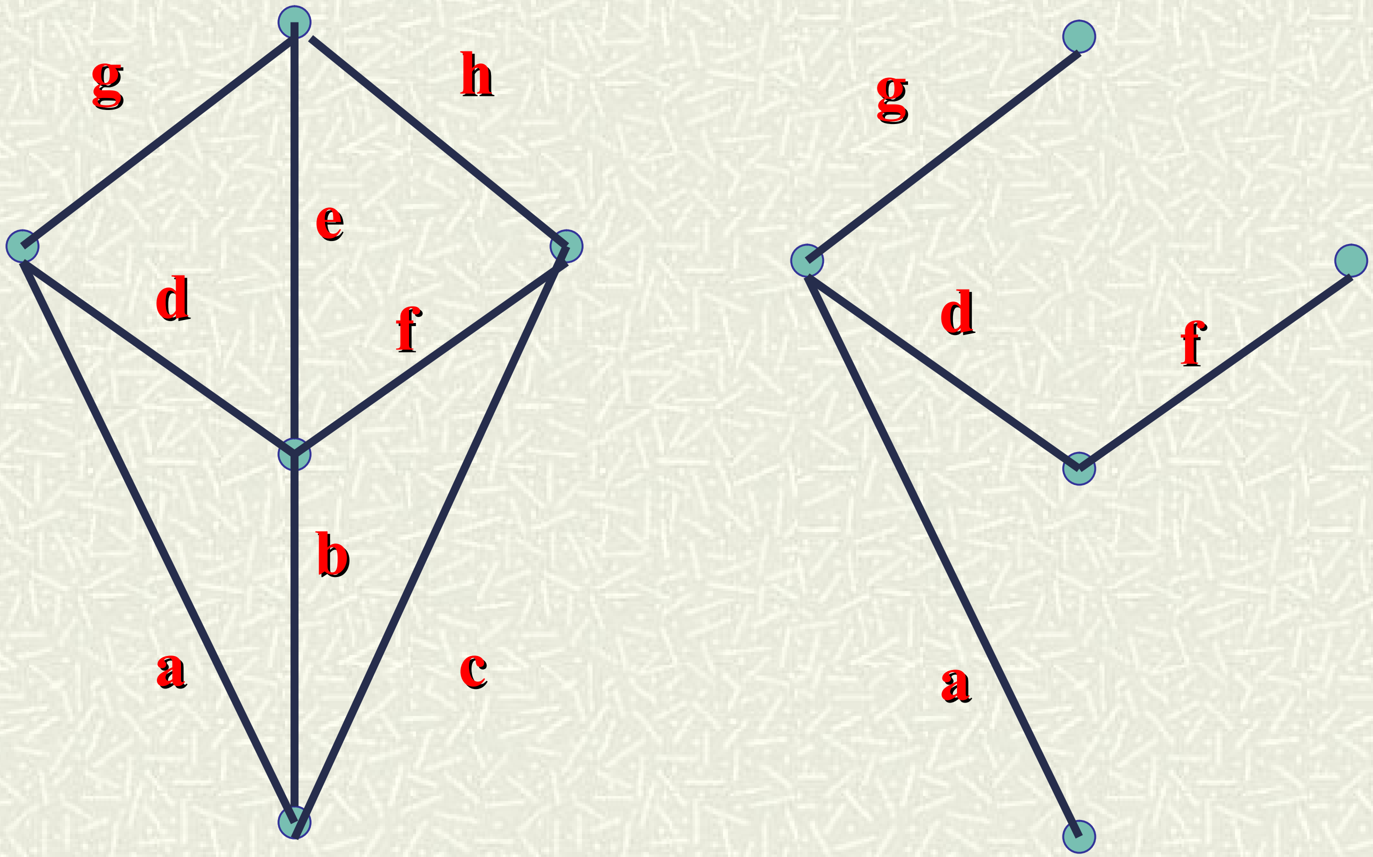


树与图的最小树



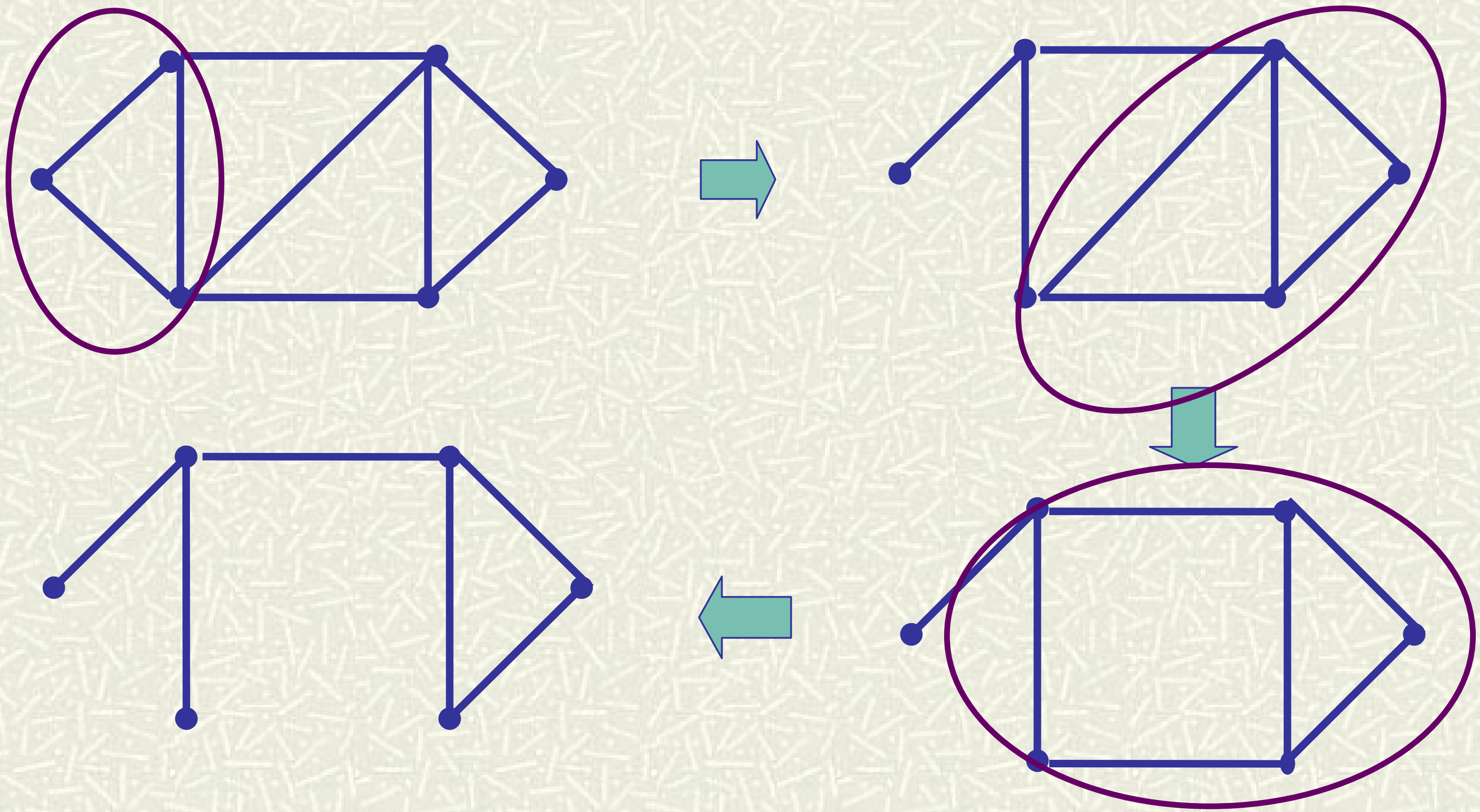


树与图的最小树

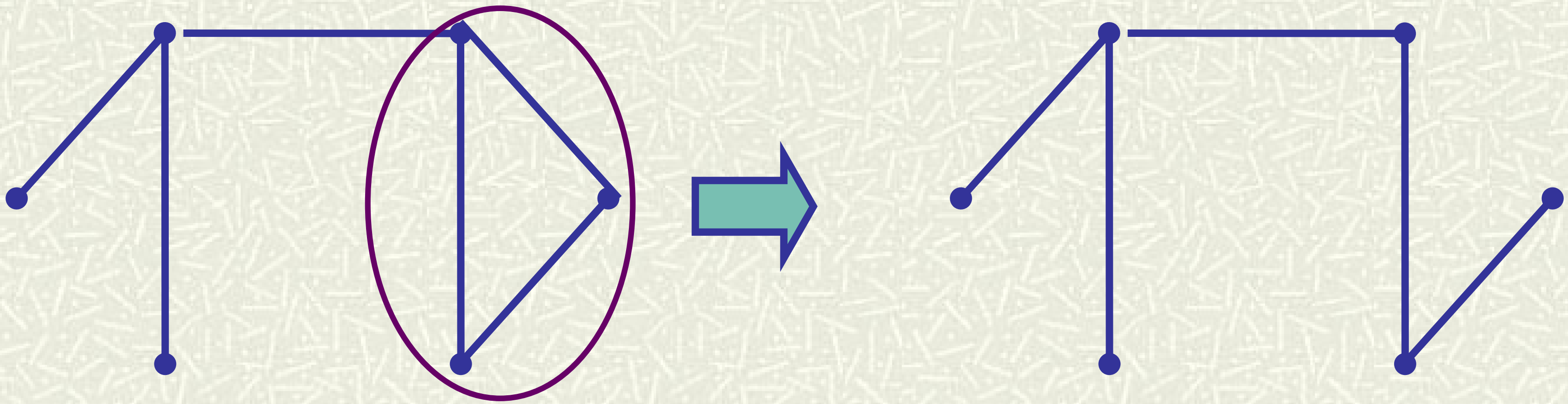


求树的方法：破圈法和避圈法

破圈法

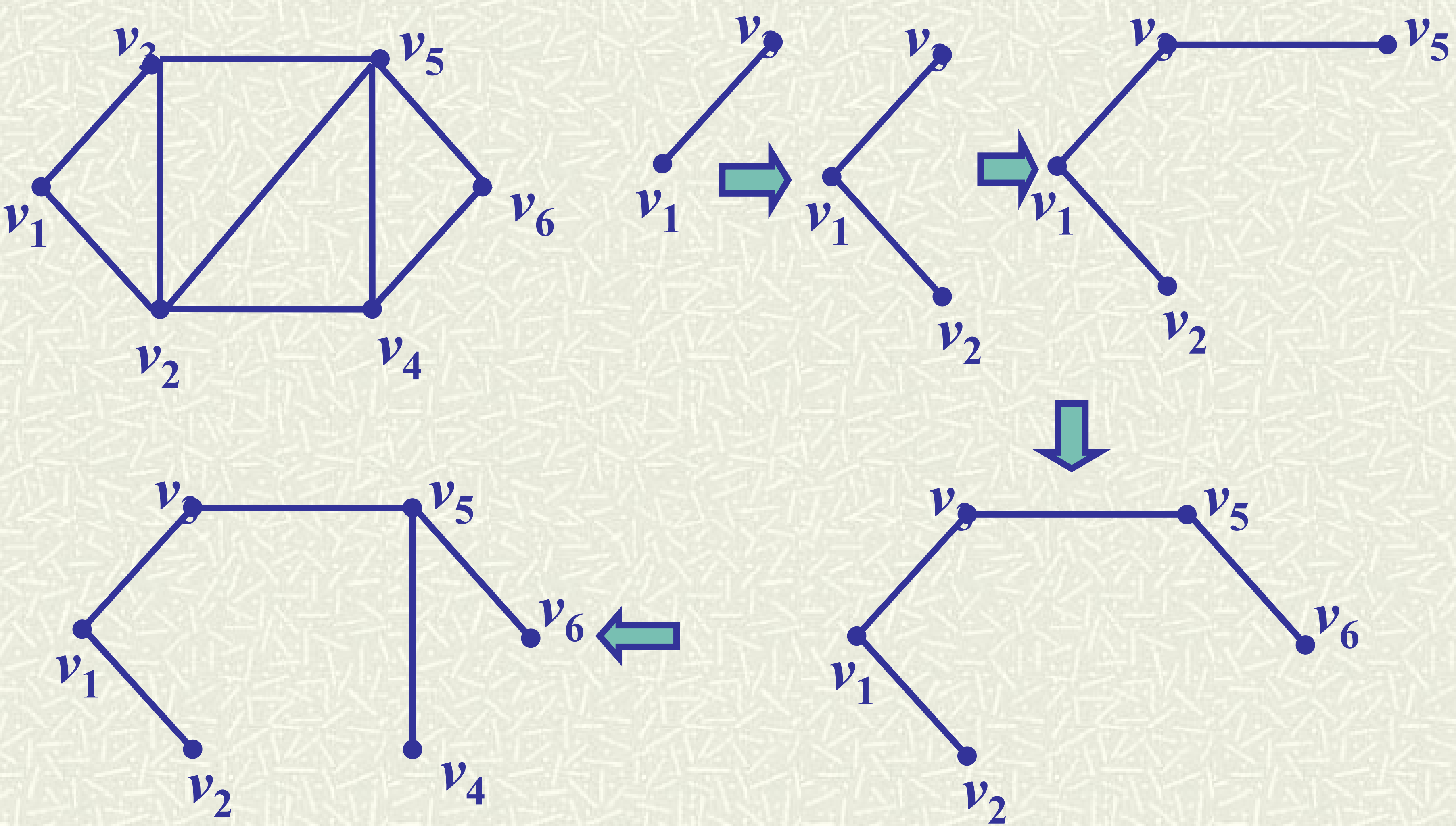


树与图的最小树



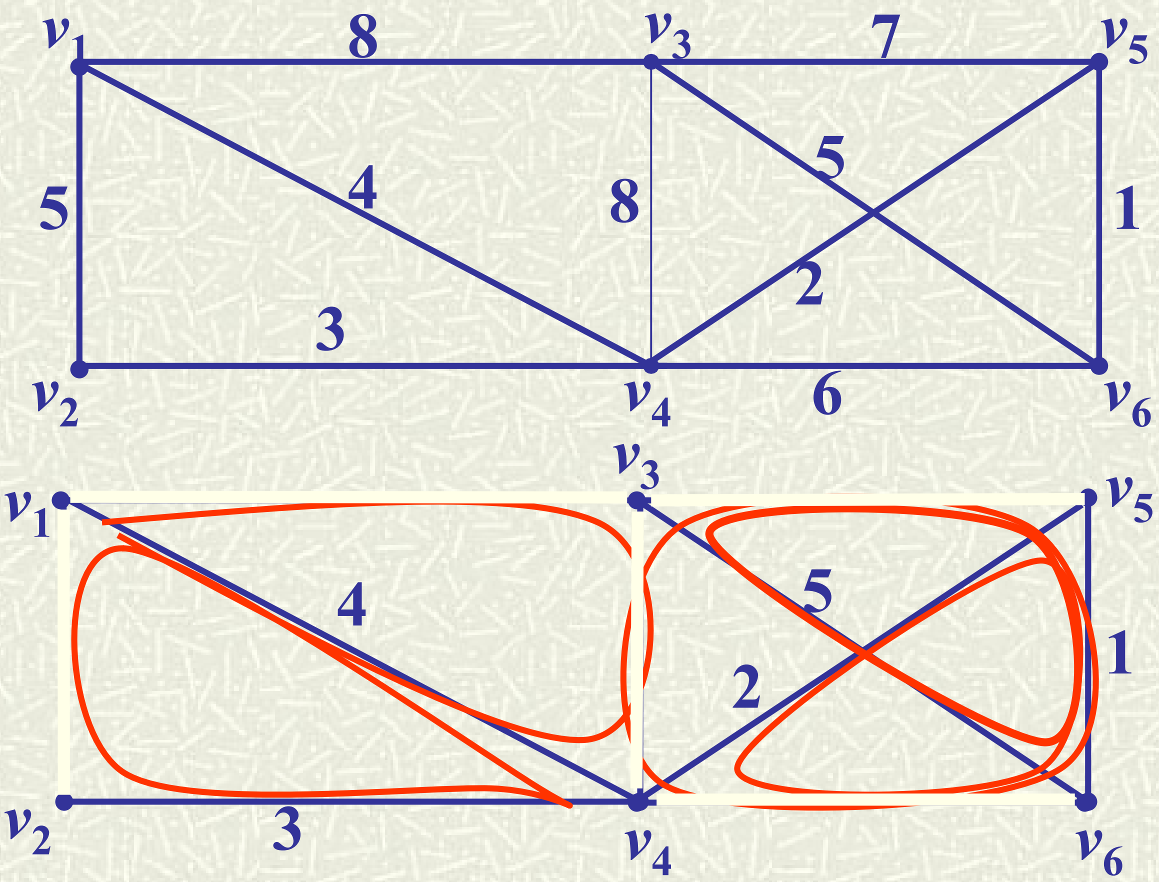
部分树

避圈法



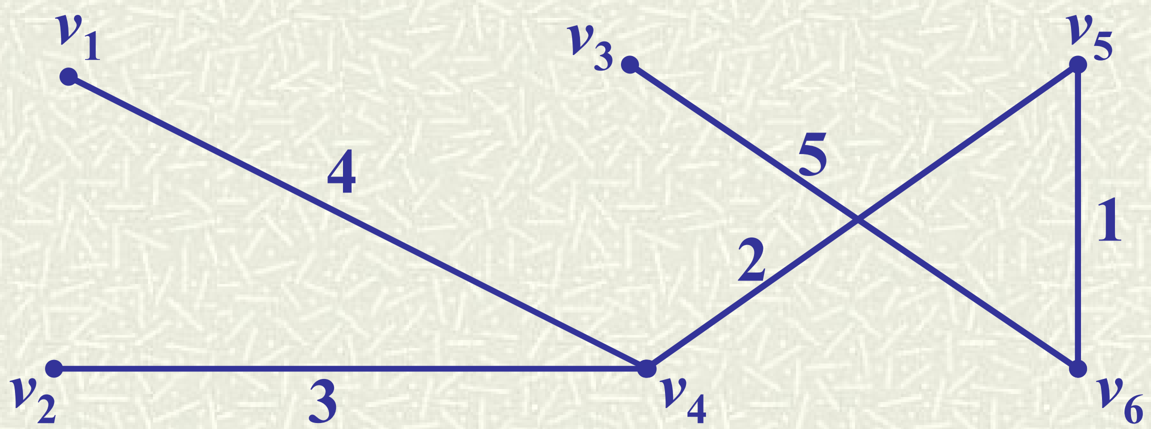
赋权图中求最小树的方法：破圈法和避圈法

破圈法：任取一圈，去掉圈中最长边，直到无圈。



边数 = n-1=5

得到最小树:



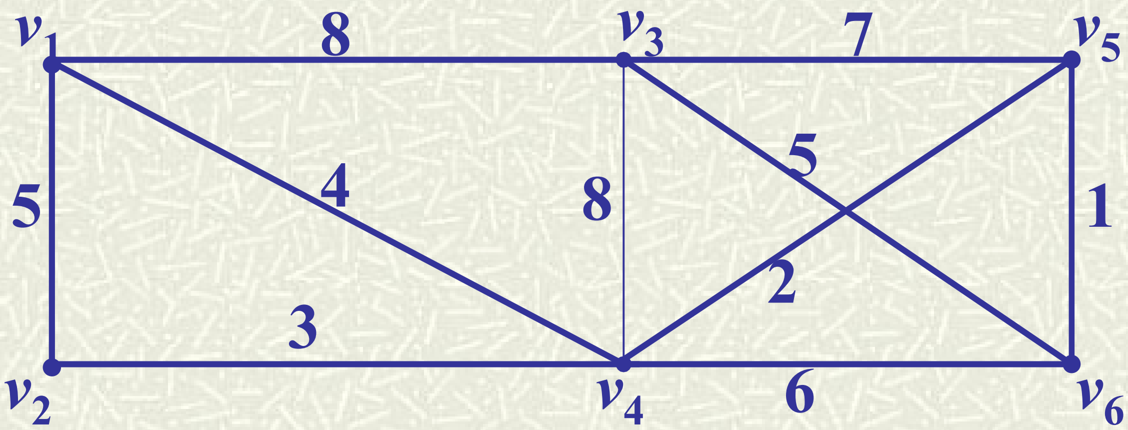
Min C(T)=15

树与图的最小树

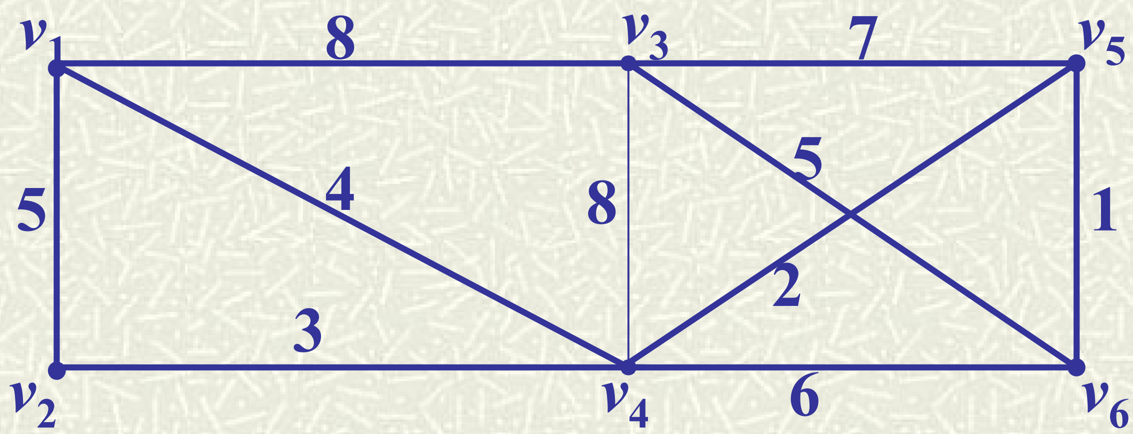
避圈法:

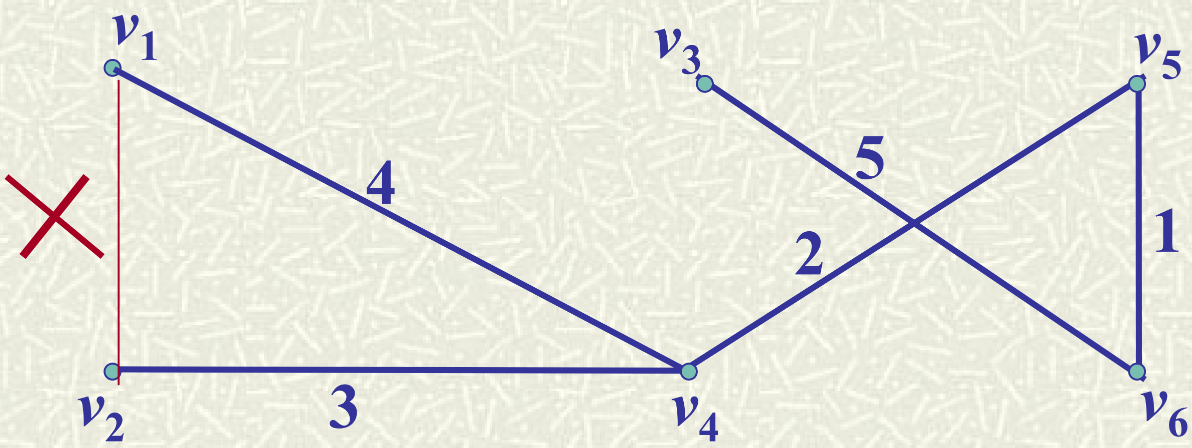
去掉G中所有边，得到n个孤立点；然后加边。

加边的原则为：从最短边开始添加，加边的过程中不能形成圈，直到点点连通(即:n-1条边)。



树与图的最小树

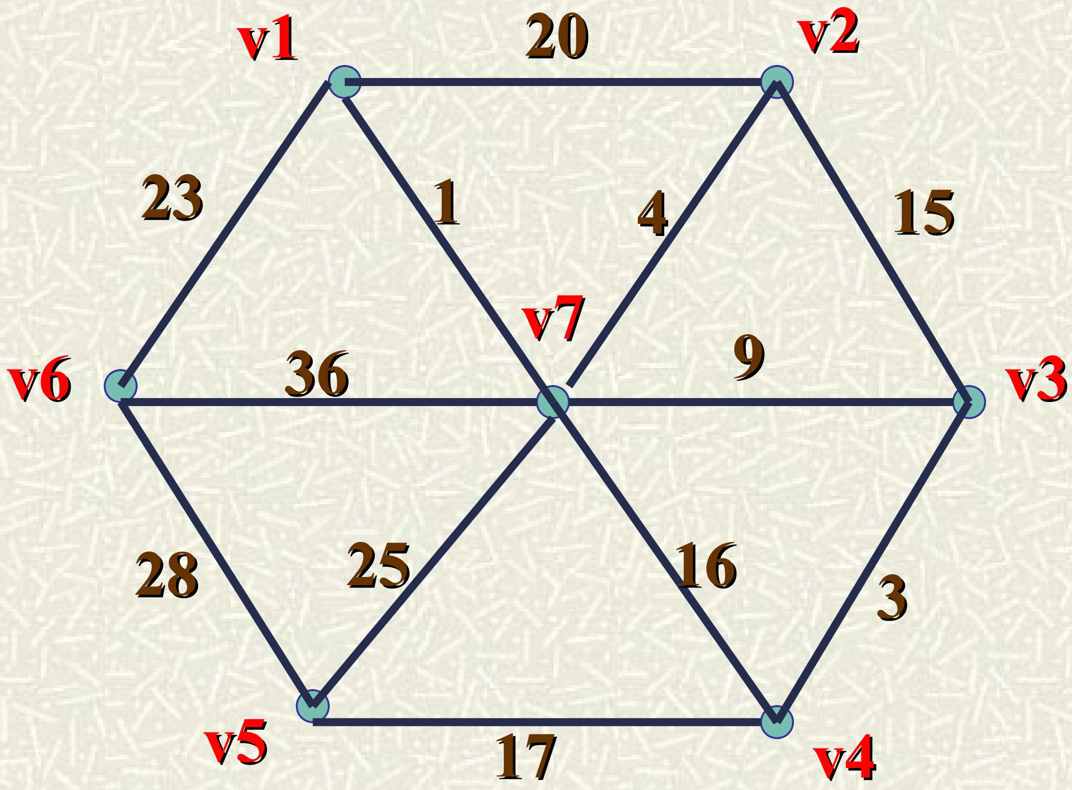




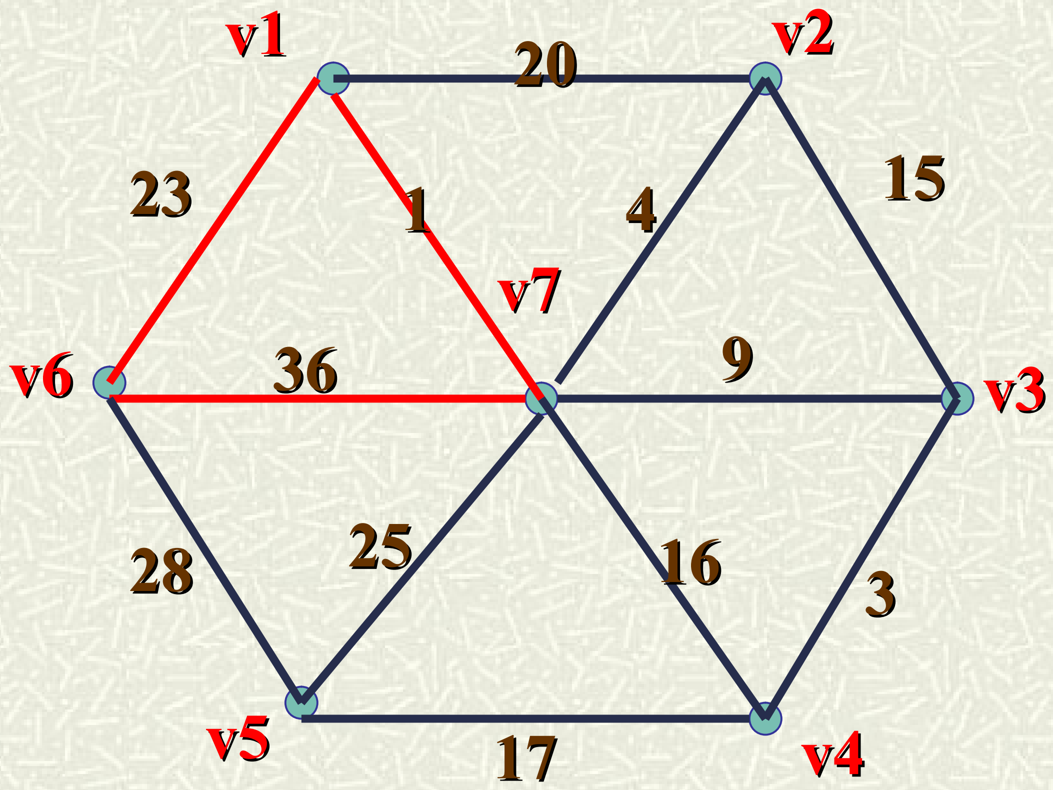
Min C(T)=15

树与图的最小树

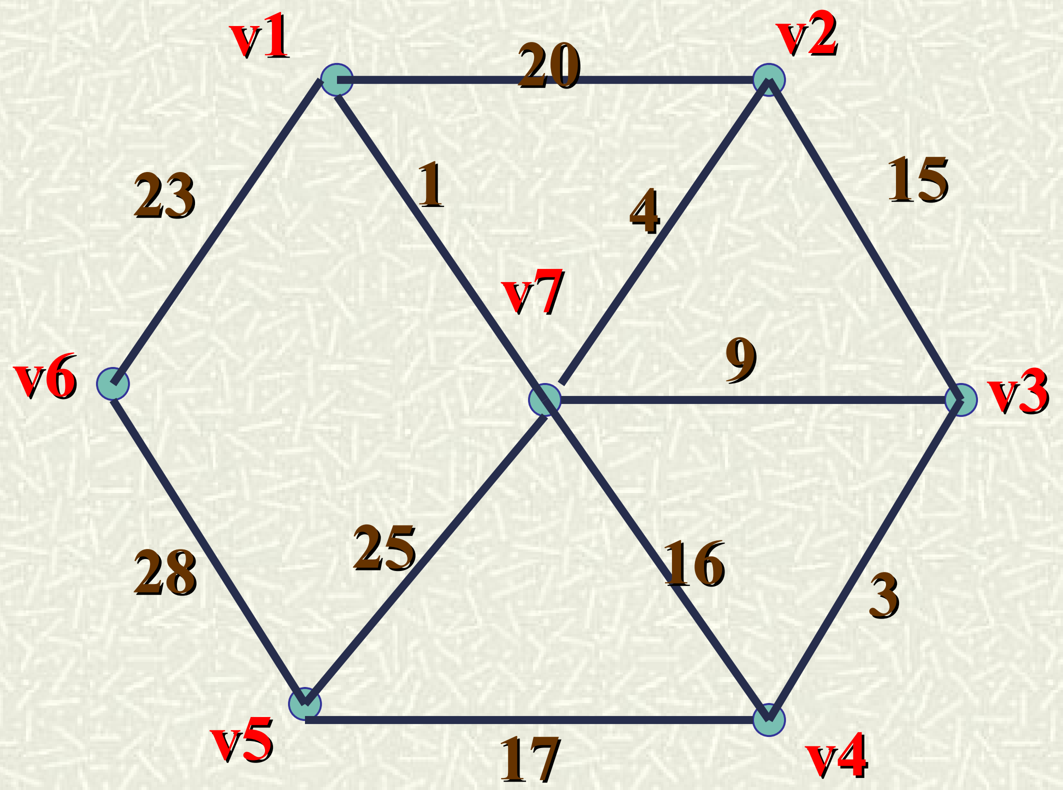
练习：应用破圈法求最小树



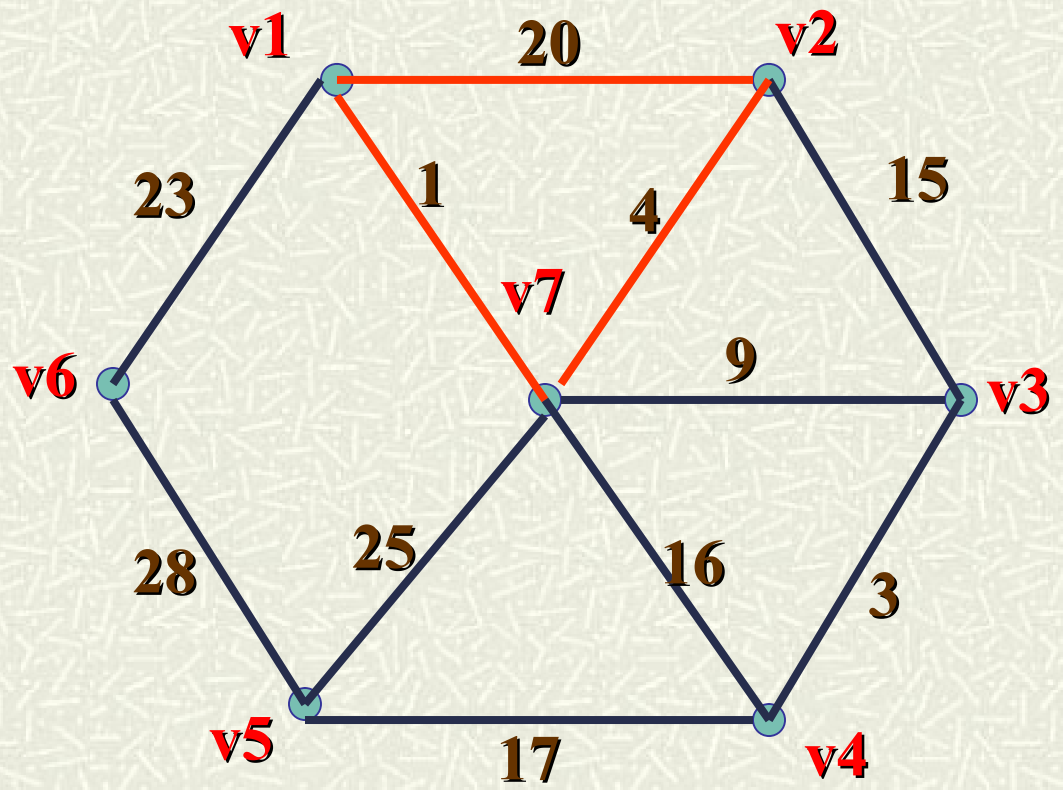
树与图的最小树



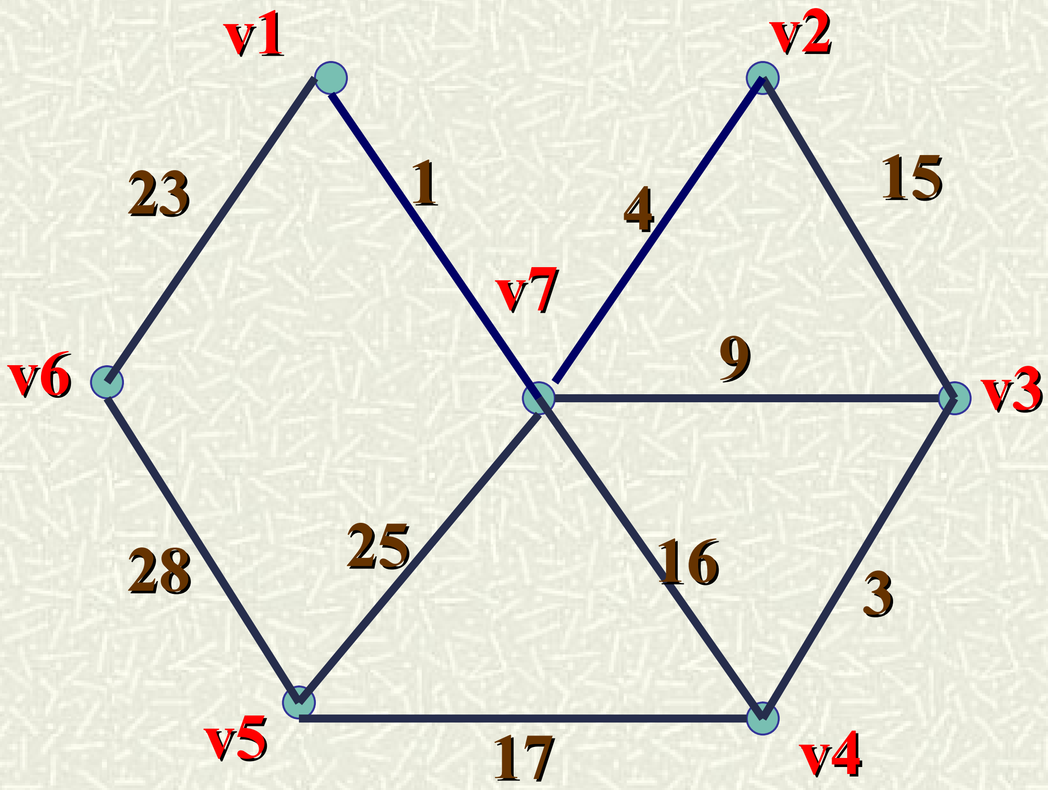
树与图的最小树



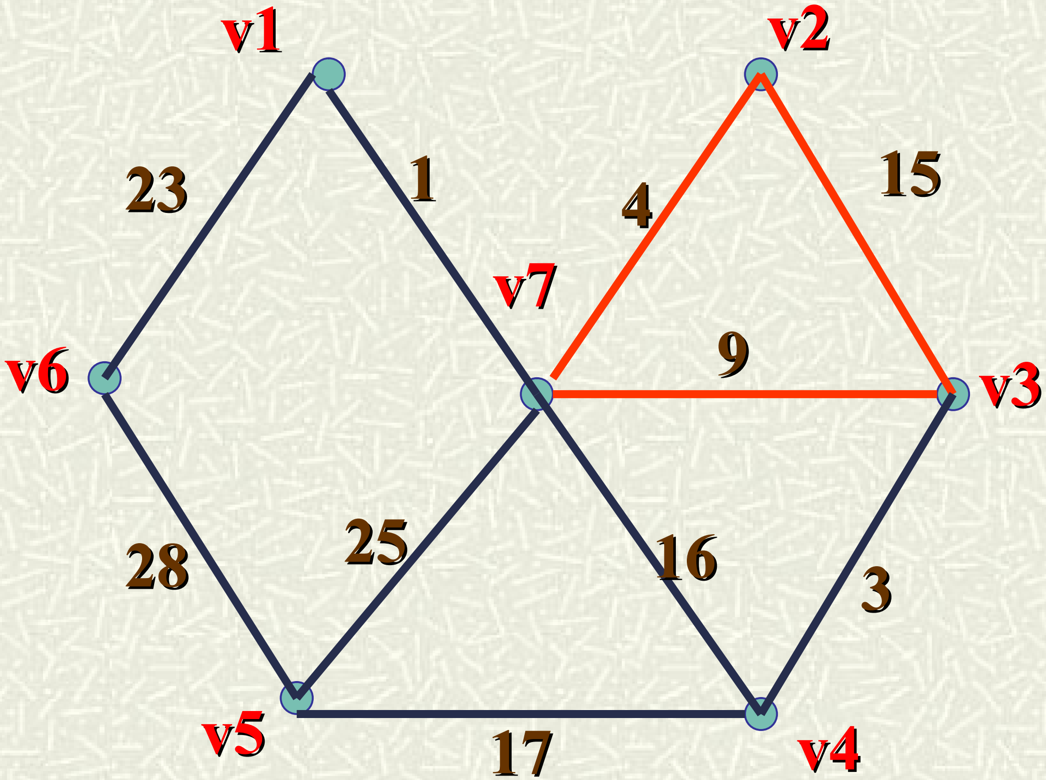
树与图的最小树



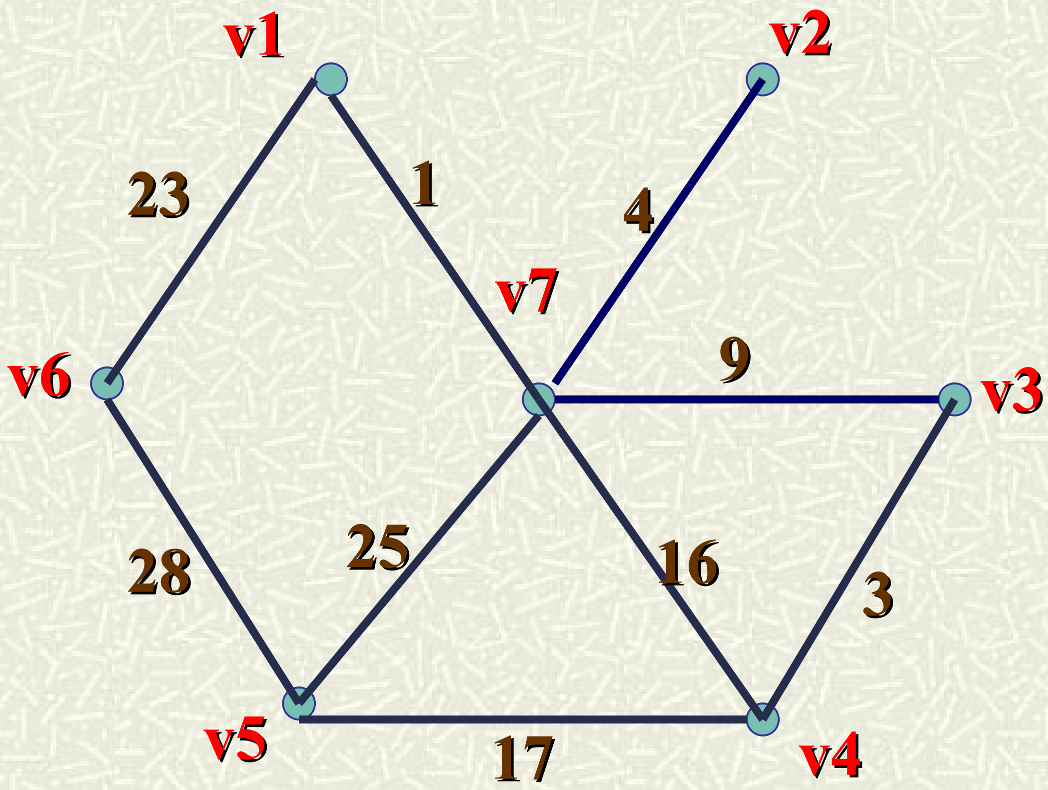
树与图的最小树



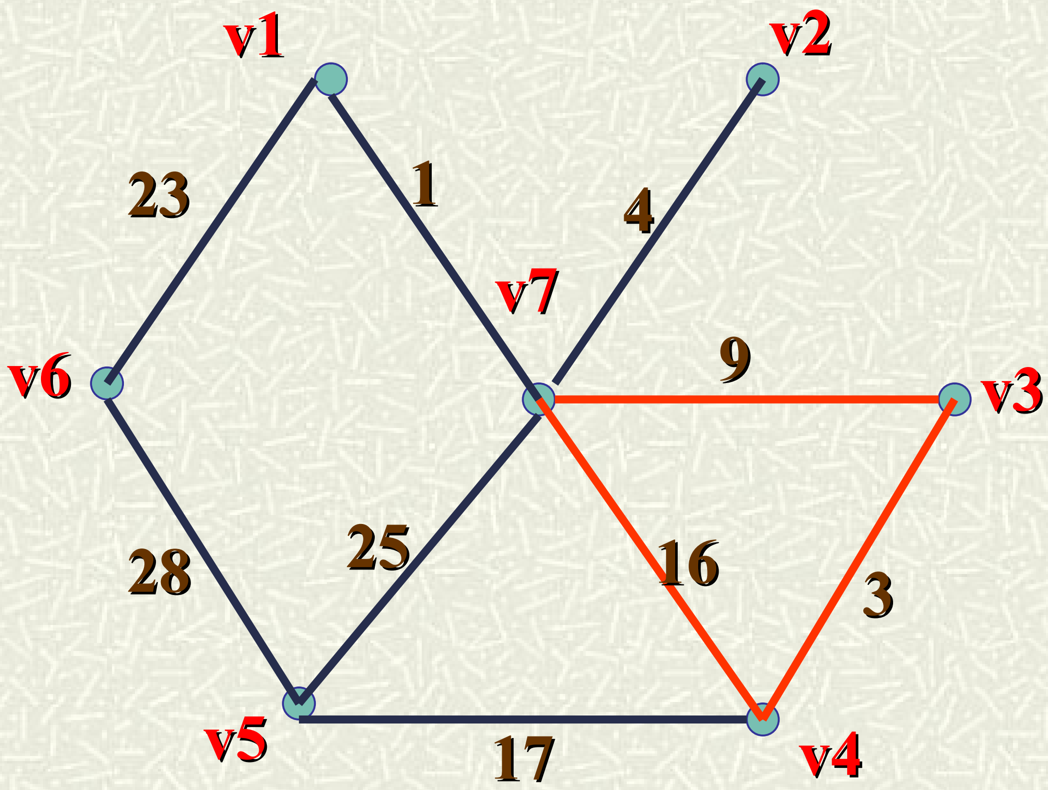
树与图的最小树



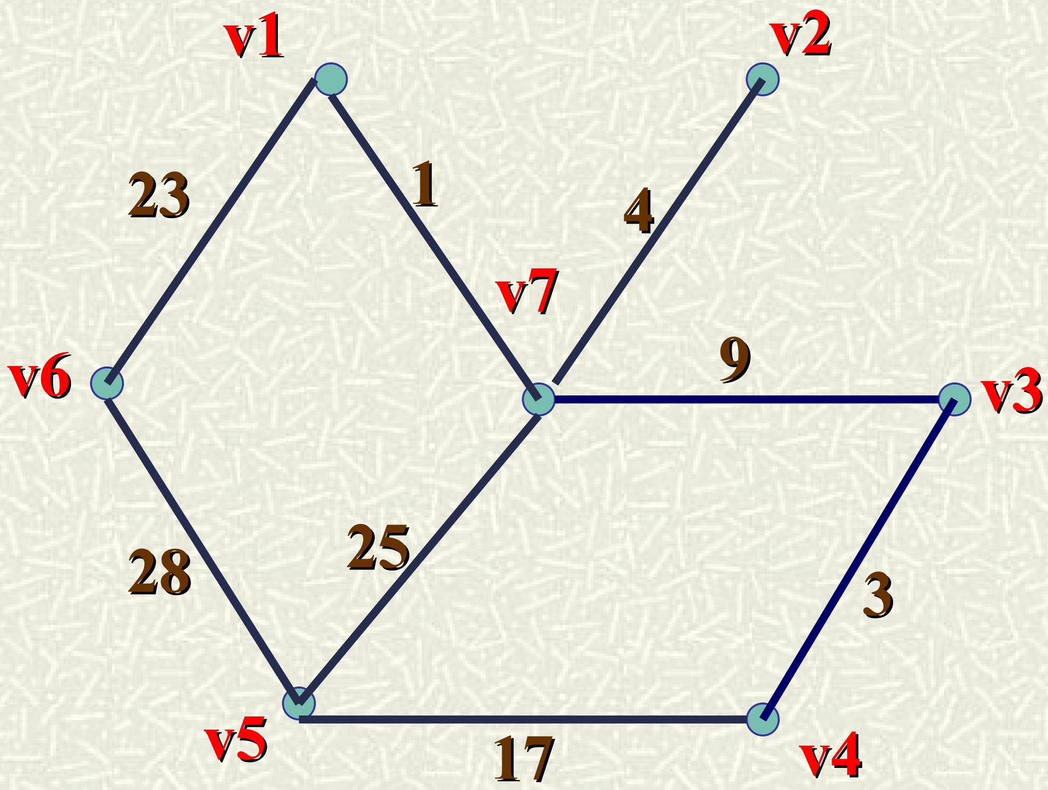
树与图的最小树



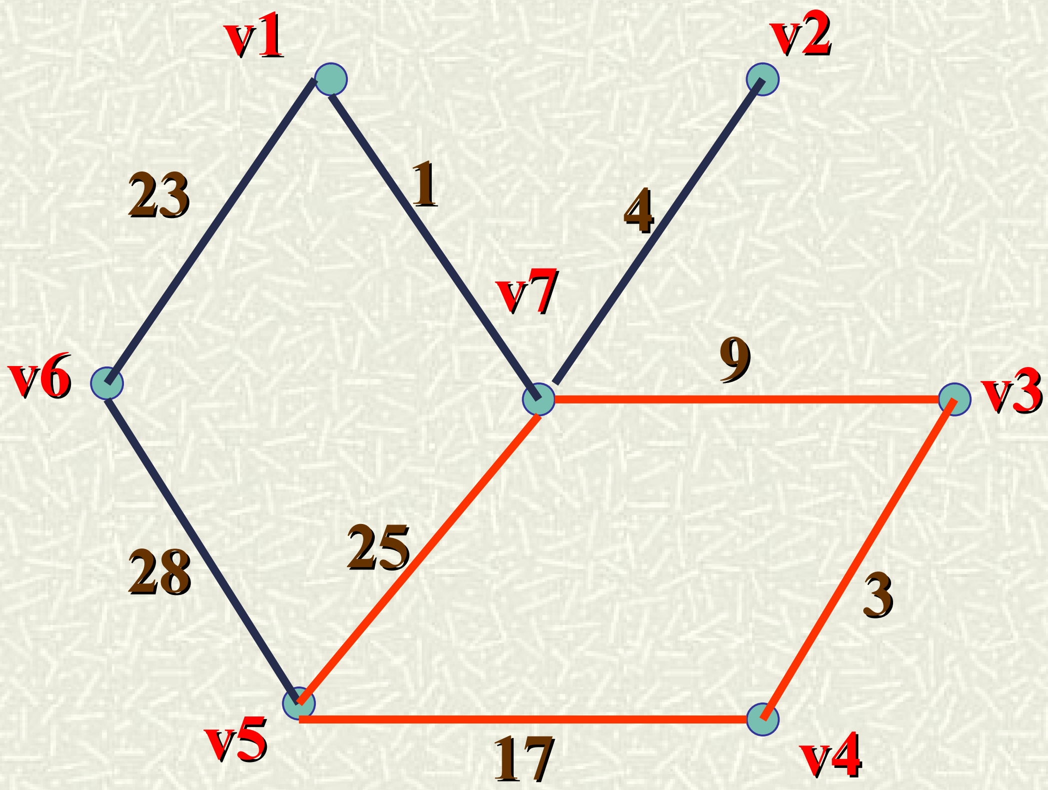
树与图的最小树



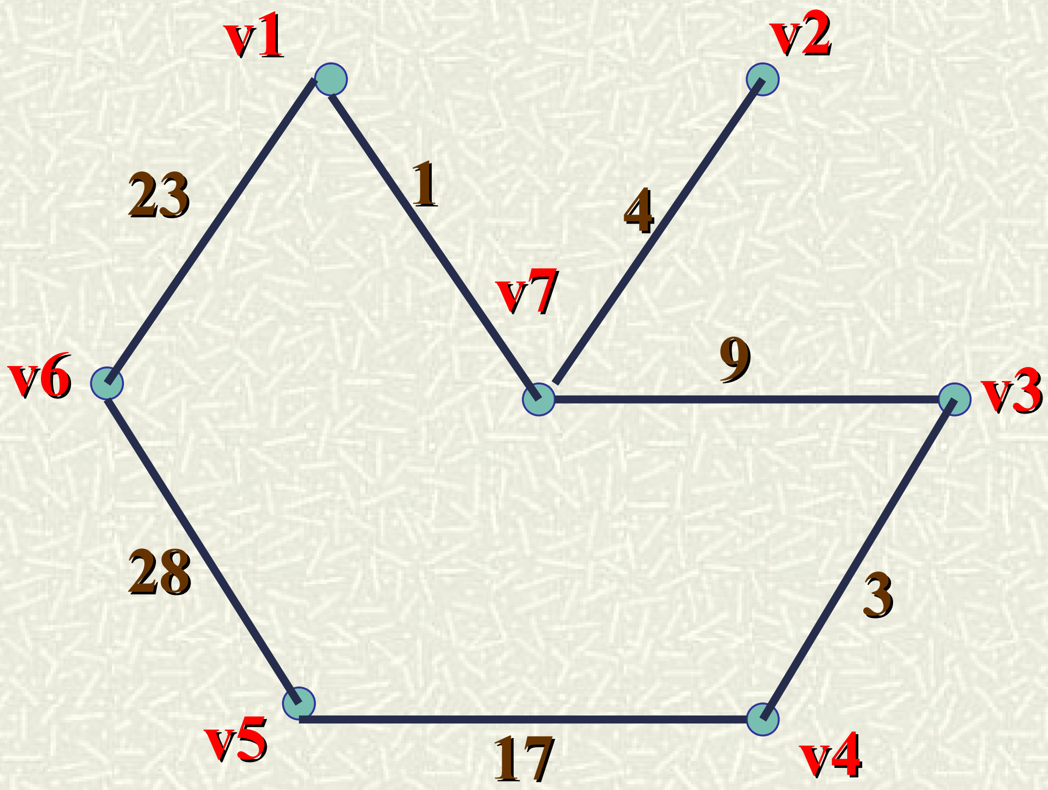
树与图的最小树



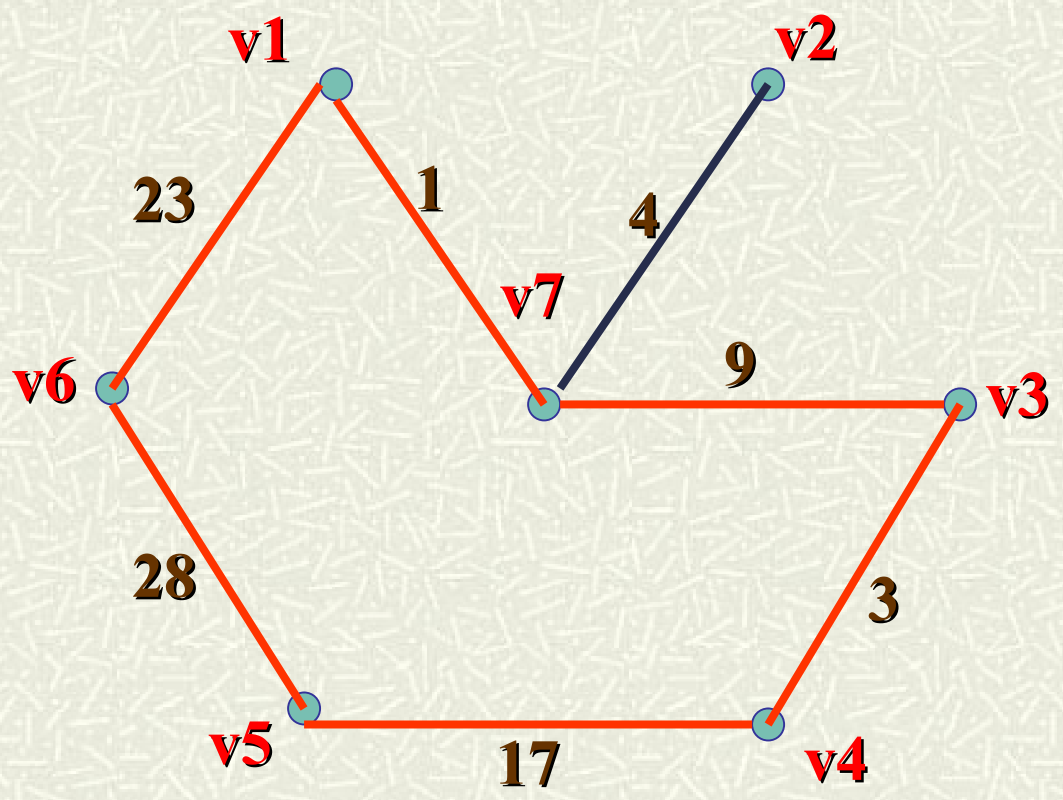
树与图的最小树



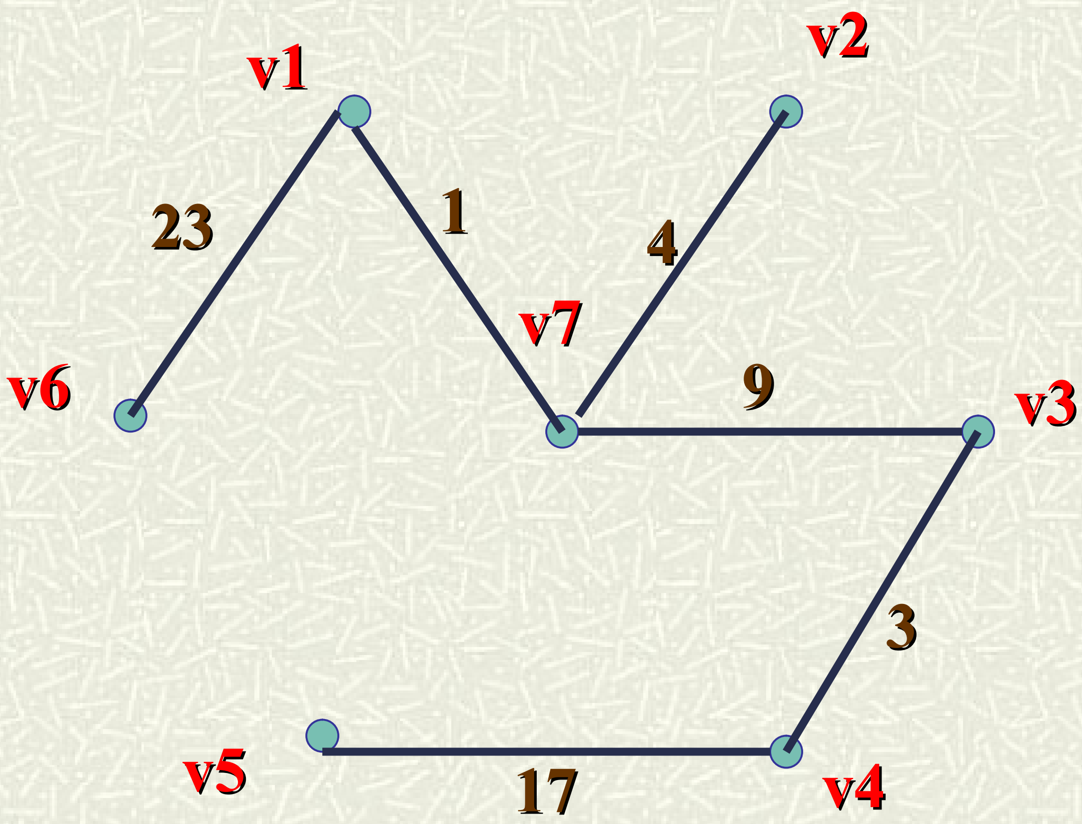
树与图的最小树



树与图的最小树

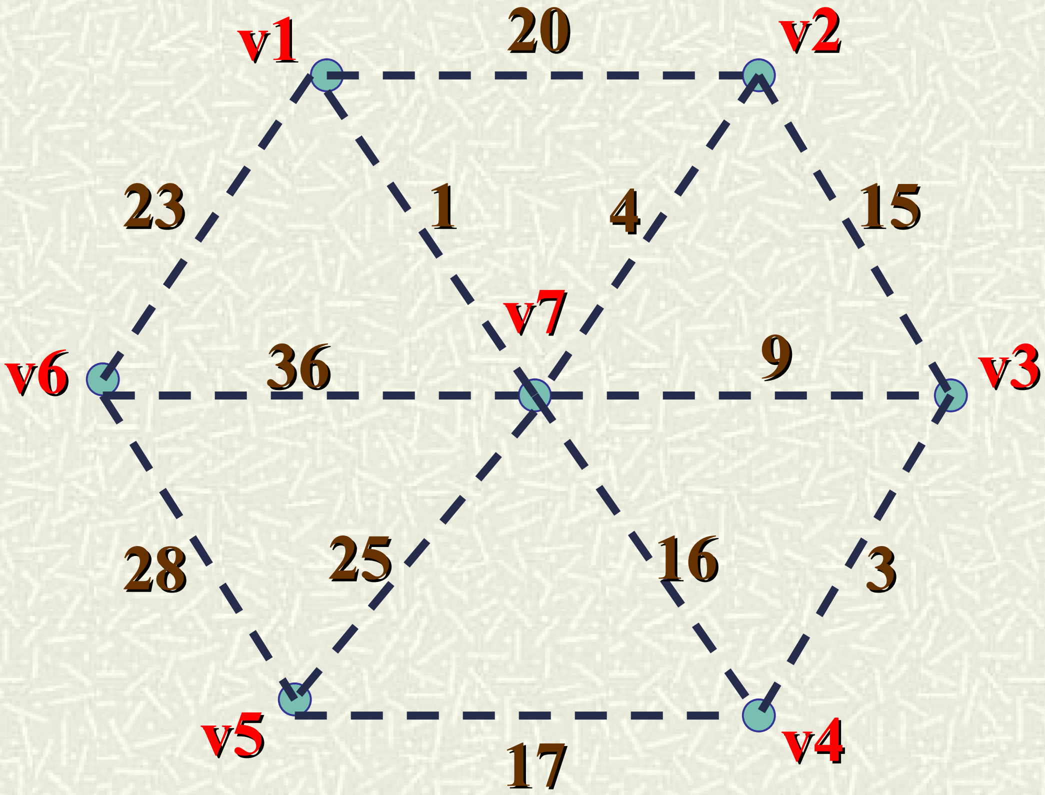


树与图的最小树

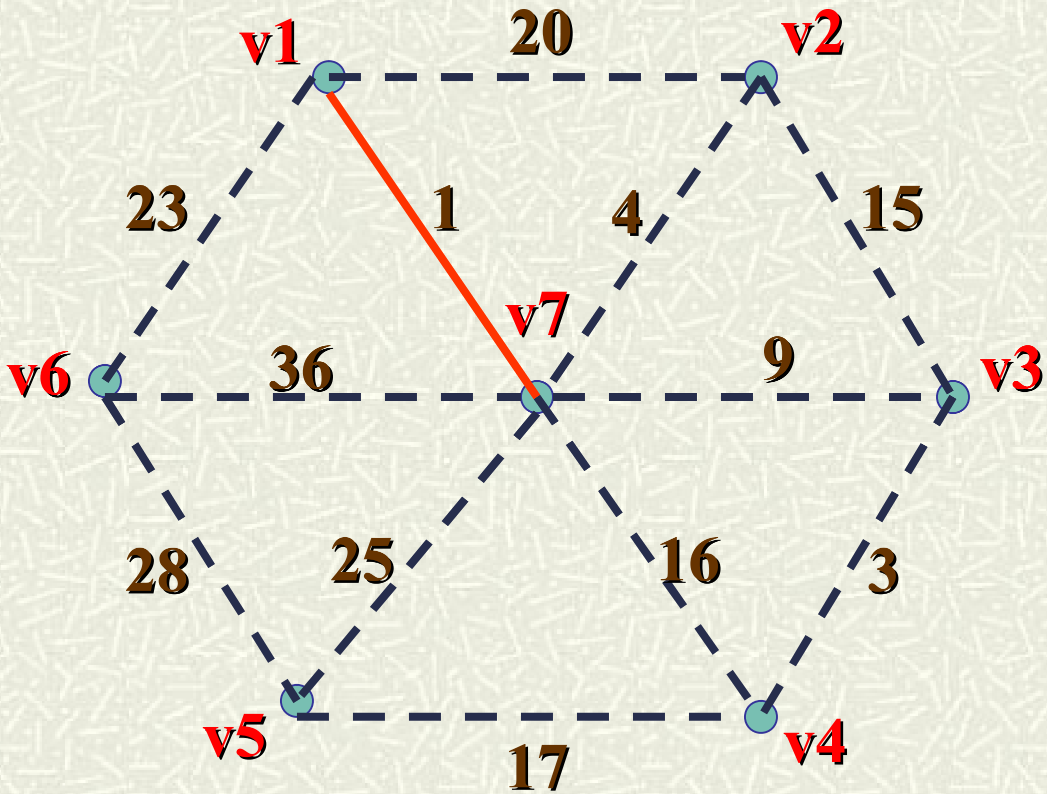


min=1+4+9+3+17+23=57

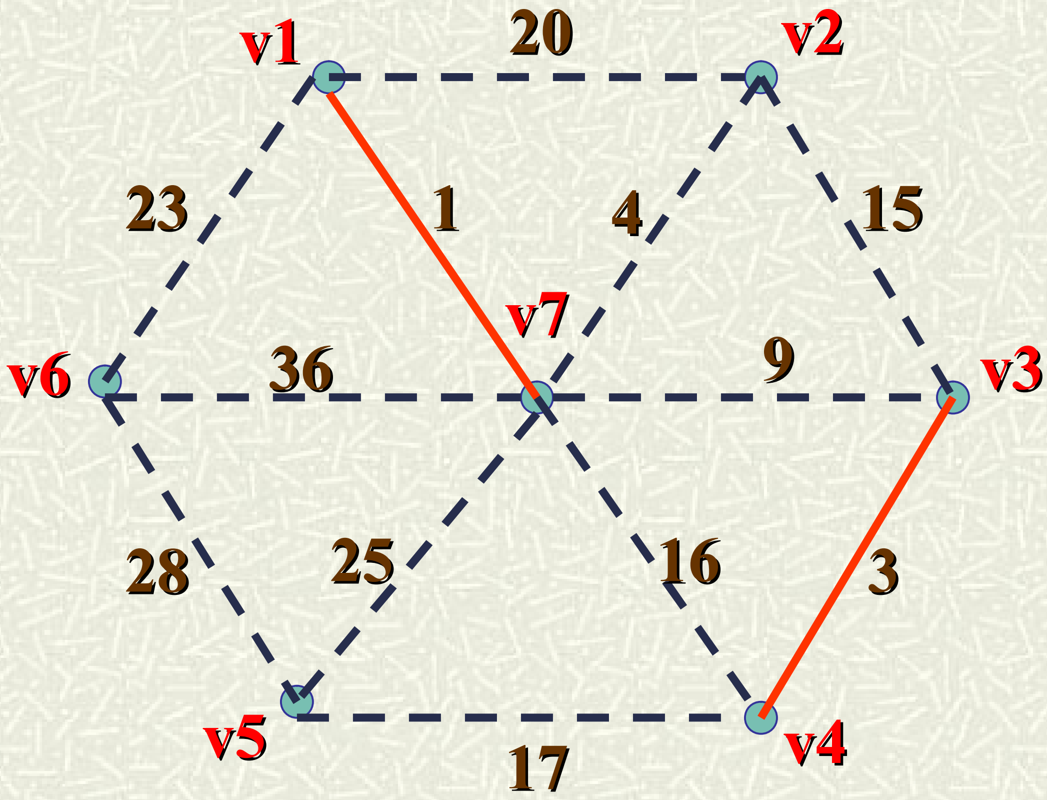
练习：应用避圈法求最小树



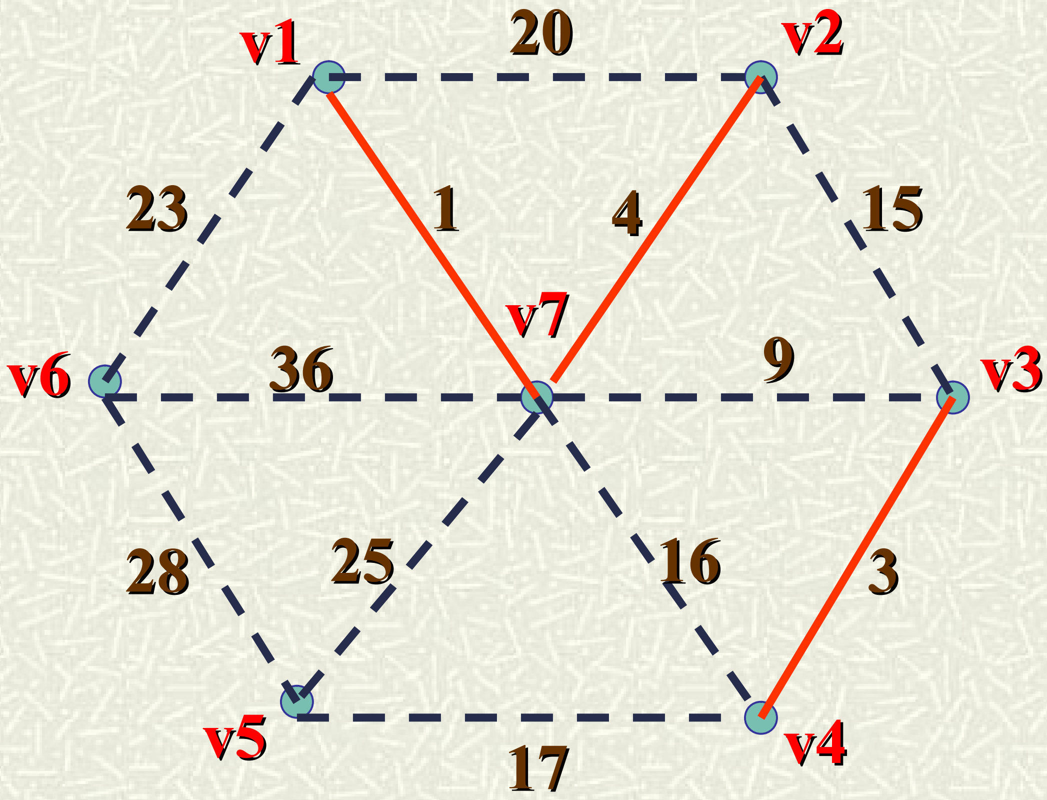
树与图的最小树



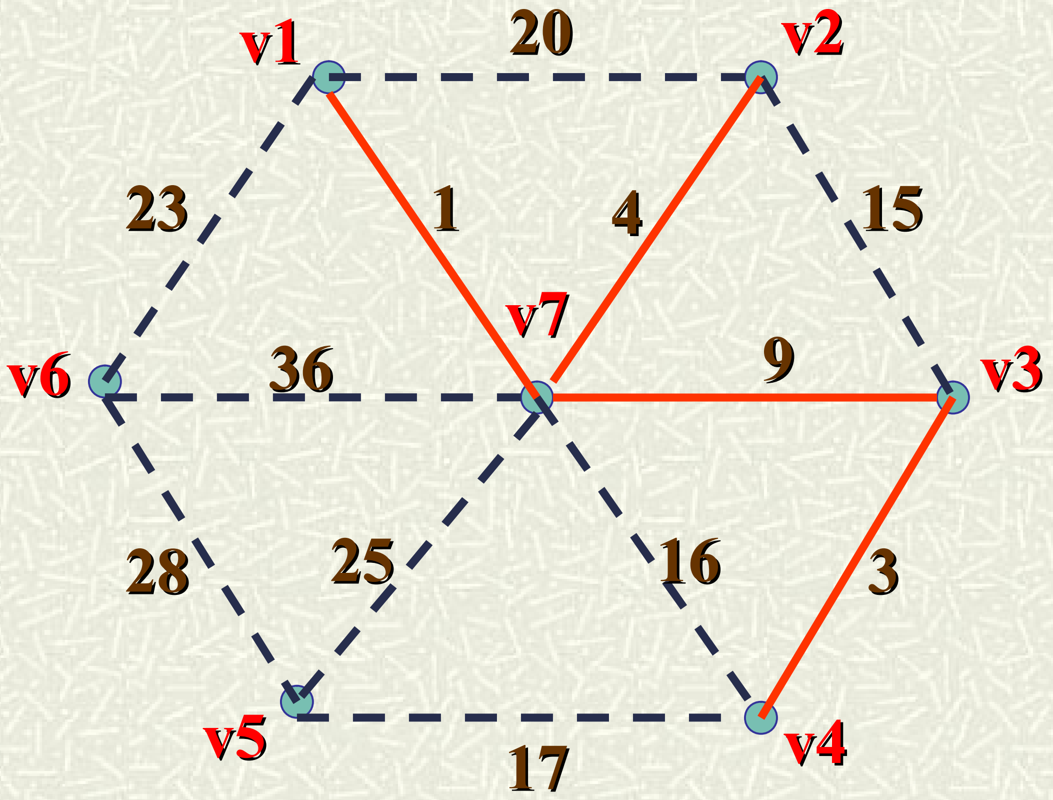
树与图的最小树



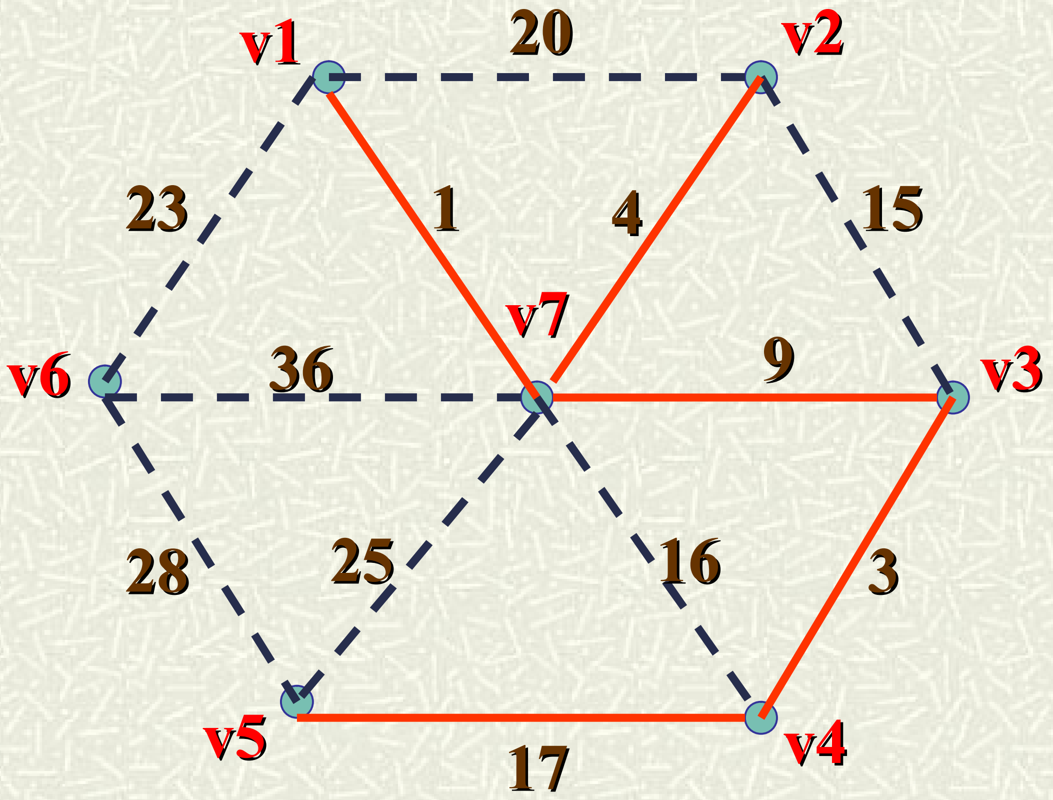
树与图的最小树



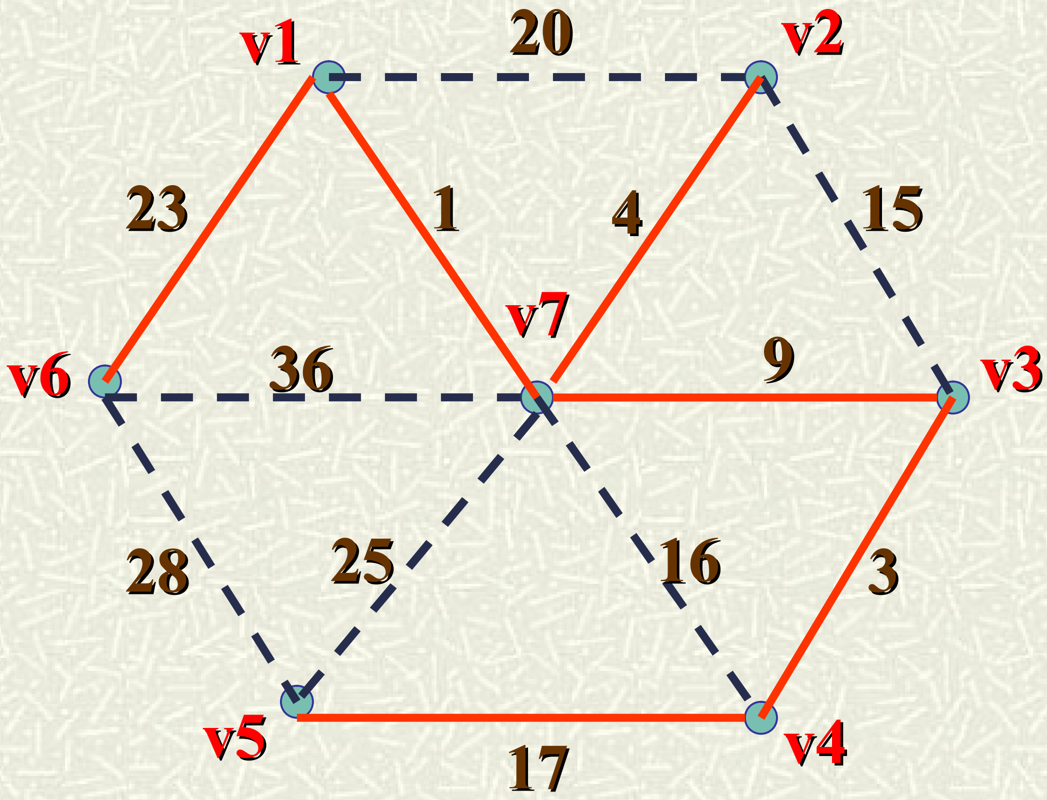
树与图的最小树



树与图的最小树



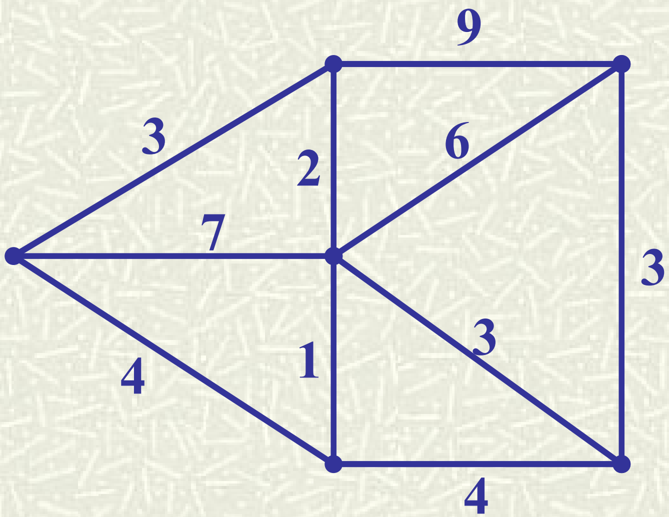
树与图的最小树

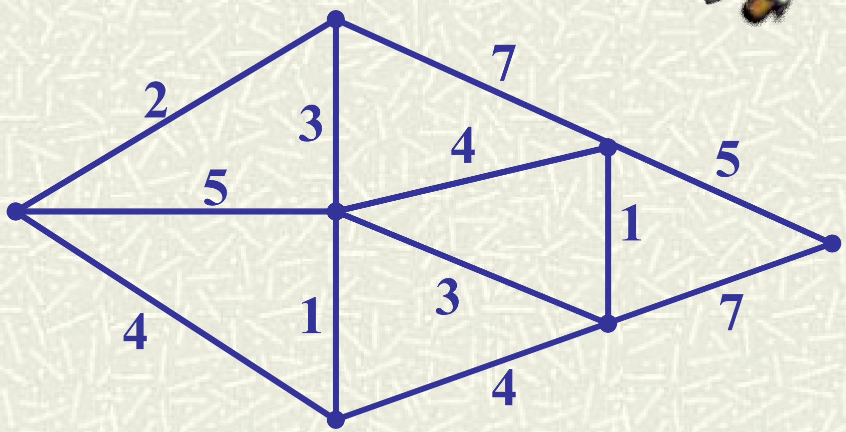


min=1+4+9+3+17+23=57

树与图的最小树

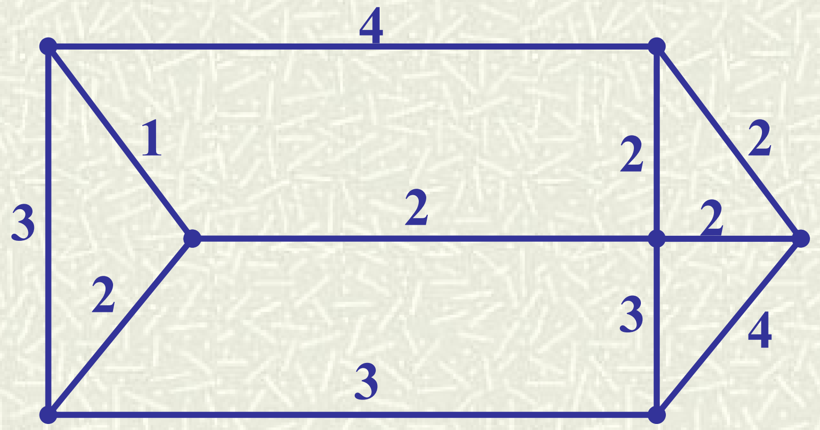
课堂练习：



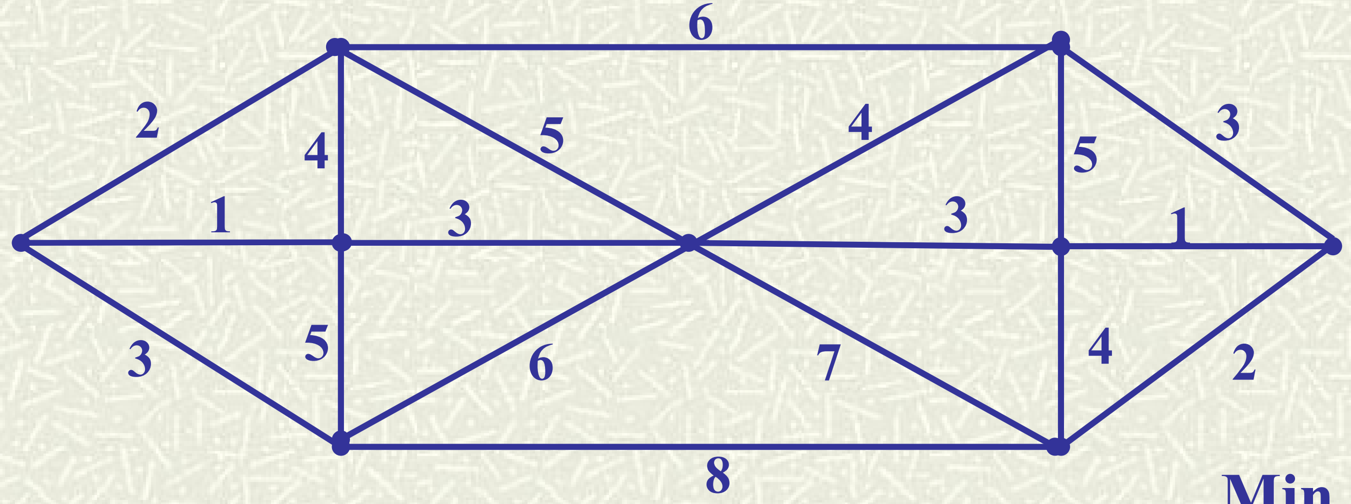


答案：　**Min C(T)=12**　　**Min C(T)=15**

树与图的最小树



Min C(T)=12

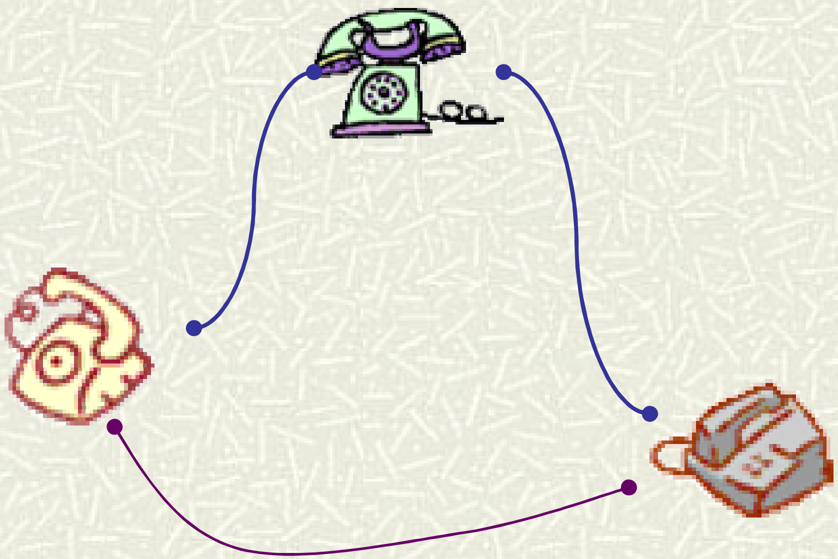


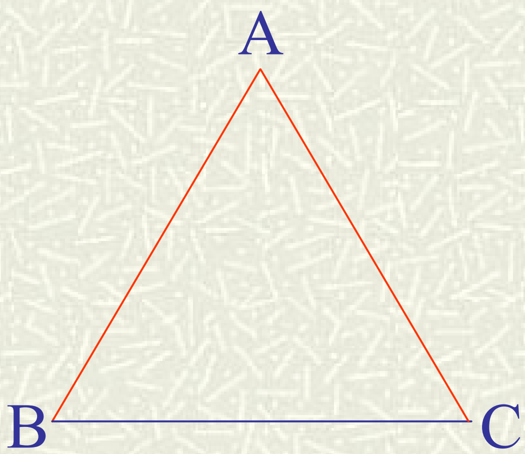
Min C(T)=18

最短路问题

如何用最短的线路将三部电话连起来?

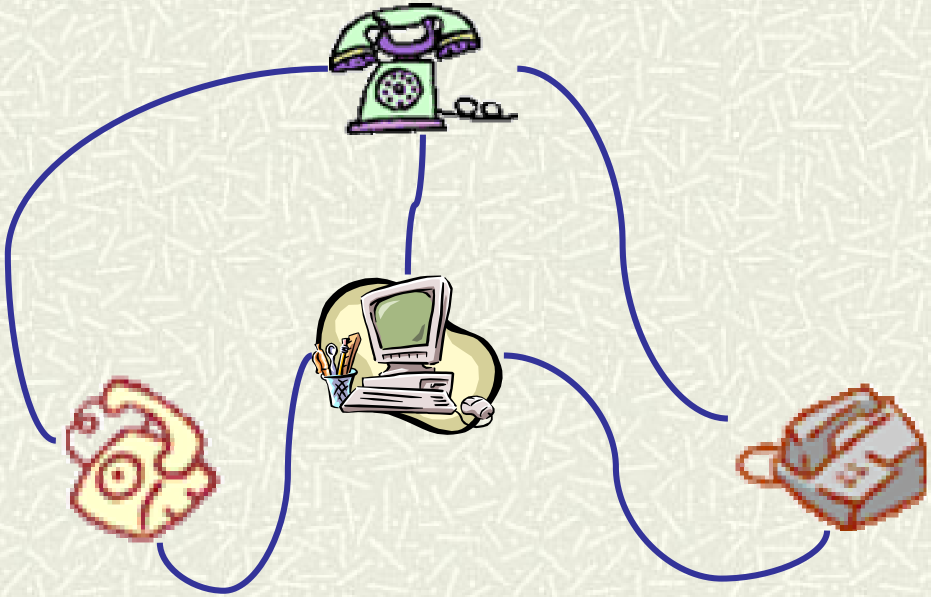
此问题可抽象为设△ABC为等边三角形，，连接三顶点的路线（称为网络）。这种网络有许多个，其中最短路线者显然是二边之和（如AB∪AC）。

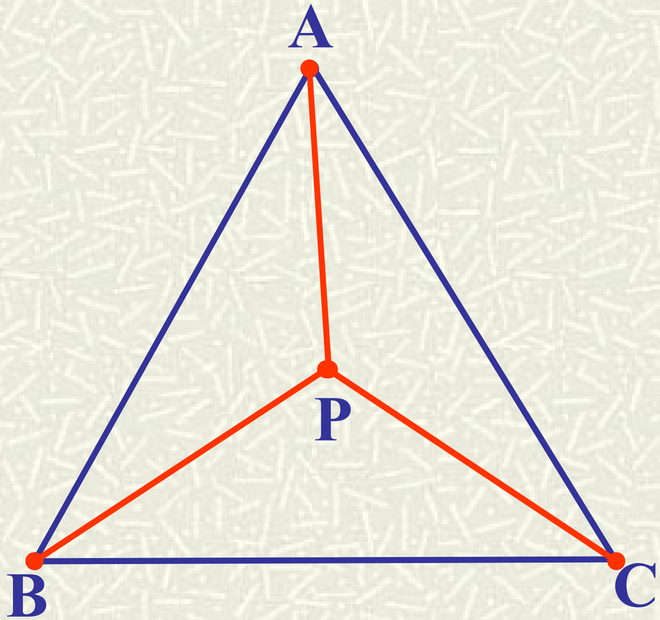




最短路问题

但若增加一个周转站（新点P），连接4点的新网络的最短路线为PA＋PB＋PC。最短新路径之长N比原来只连三点的最短路径O要短。这样得到的网络不仅比原来节省材料，而且稳定性也更好。





最短路问题

问题描述:

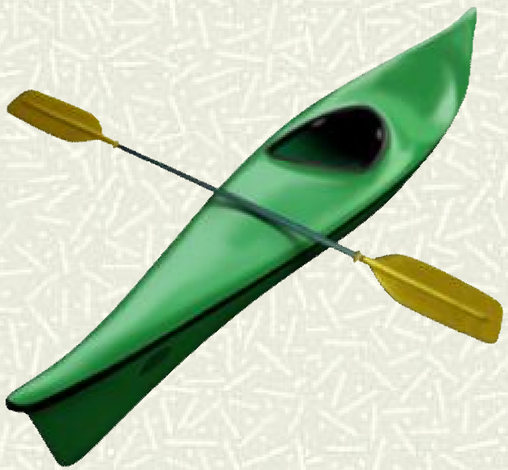
就是从给定的网络图中找出一点到各点或任意两点之间距离最短的一条路.

有些问题，如选址、管道铺设时的选线、设备更新、投资、某些整数规划和动态规划的问题，也可以归结为求最短路的问题。因此这类问题在生产实际中得到广泛应用。

最短路问题

例6.4 渡河游戏

一老汉带了一只狼、一只羊、一棵白菜想要从南岸过河到北岸，河上只有一条独木舟，每次除了人以外，只能带一样东西；另外，如果人不在，狼就要吃羊，羊就要吃白菜，问应该怎样安排渡河，才能做到既把所有东西都运过河去，并且在河上来回次数最少？这个问题就可以用求最短路方法解决。



最短路问题

定义:

1）人—M（Man），狼—W（Wolf）， 羊—G（Goat），草—H（Hay）

2） 点—— v_i 表示河岸的状态

3） 边—— e_k 表示由状态 v_i 经一次渡河到状态 v_j

4） 权——边 e_k 上的权定为 1

我们可以得到下面的加权有向图

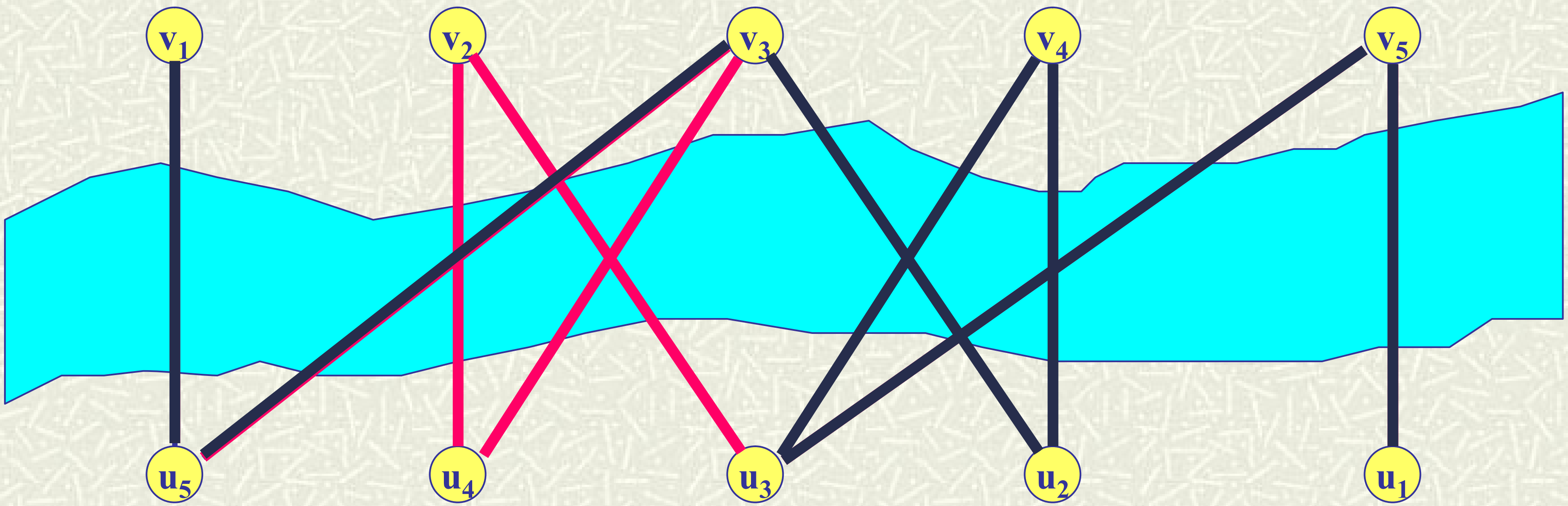
最短路问题

状态说明:

v_1,u_1 =(M,W,G,H); v_2,u_2 =(M,W,G); v_3,u_3 =(M,W,H);

v_4,u_4=(M,G,H); v_5,u_5 =(M,G)

此游戏转化为在下面的二部图中求从 v_1 到 u_1 的最短路问题。



最短路问题

求最短路有两种算法:

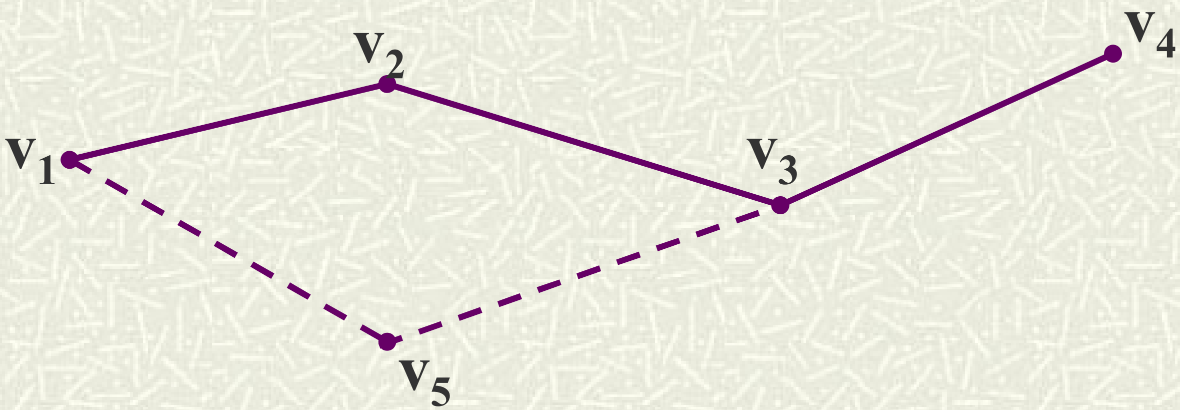
- 狄克斯屈拉(Dijkstra)标号算法
- 逐次逼近算法

最短路问题

狄克斯屈拉(Dijkstra)标号算法的基本思路:

若序列{ $v_s, v_1 \ldots\ldots v_{n-1}, v_n$ }是从v_s到v_t间的最短路，则序列{ $v_s, v_1 \ldots\ldots v_{n-1}$ } 必为从v_s 到v_{n-1}的最短路。

假定$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$是$v_1 \rightarrow v_4$的最短路，则$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$一定是$v_1 \rightarrow v_3$的最短路，$v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$也一定是$v_2 \rightarrow v_4$的最短路。



最短路问题

求网络图的最短路，设图的起点是v_s,终点是v_t ,以v_i为起点v_j为终点的弧记为 (i, j) 距离为d_{ij}

P标号(点标号)：$b(j)$ —起点v_s到点v_j的最短路长；

T标号(边标号)： $k(i,j)=b(i)+d_{ij}$,

步骤：

1. 令起点的标号；$b(s) = 0$。

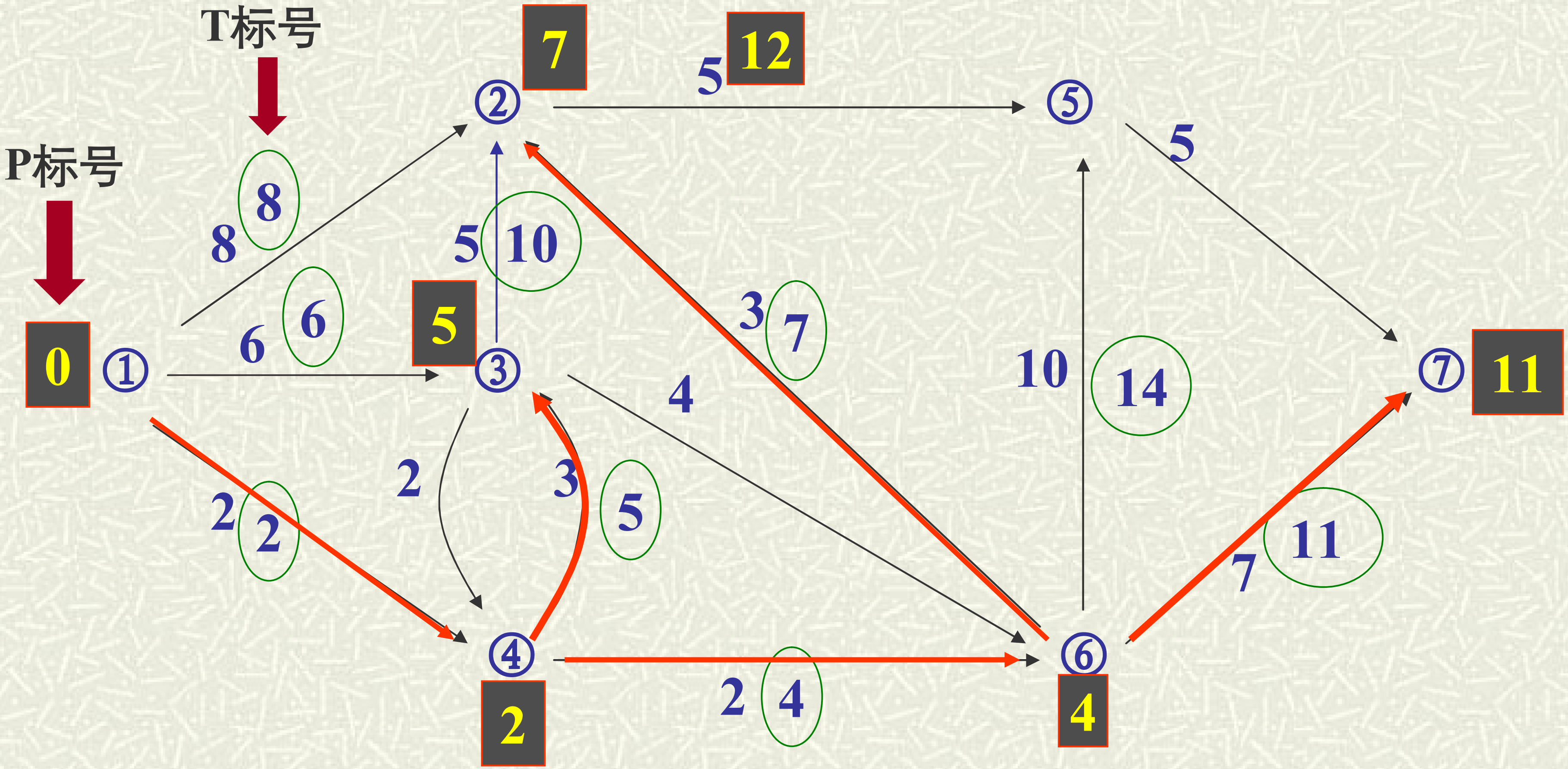
2. 找出所有v_i已标号v_j未标号的弧集合 B={(i, j)} 如果这样的弧不存在或v_t已标号则计算结束；

3. 计算集合B中弧$k(i，j)=b(i)+d_{ij}$的标号

4. 选一个点标号 $b(l) = \min_j\left\{k(i,j) \mid (i,j) \in B\right\}$, 在终点$v_l$处标号b(l)，返回到第2步。

最短路问题

例6.5 求下图$v1$到$v7$的最短路长及最短路线



v_7已标号，计算结束。从$v1$到$v7$的最短路长是 11,

最短路线： $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$

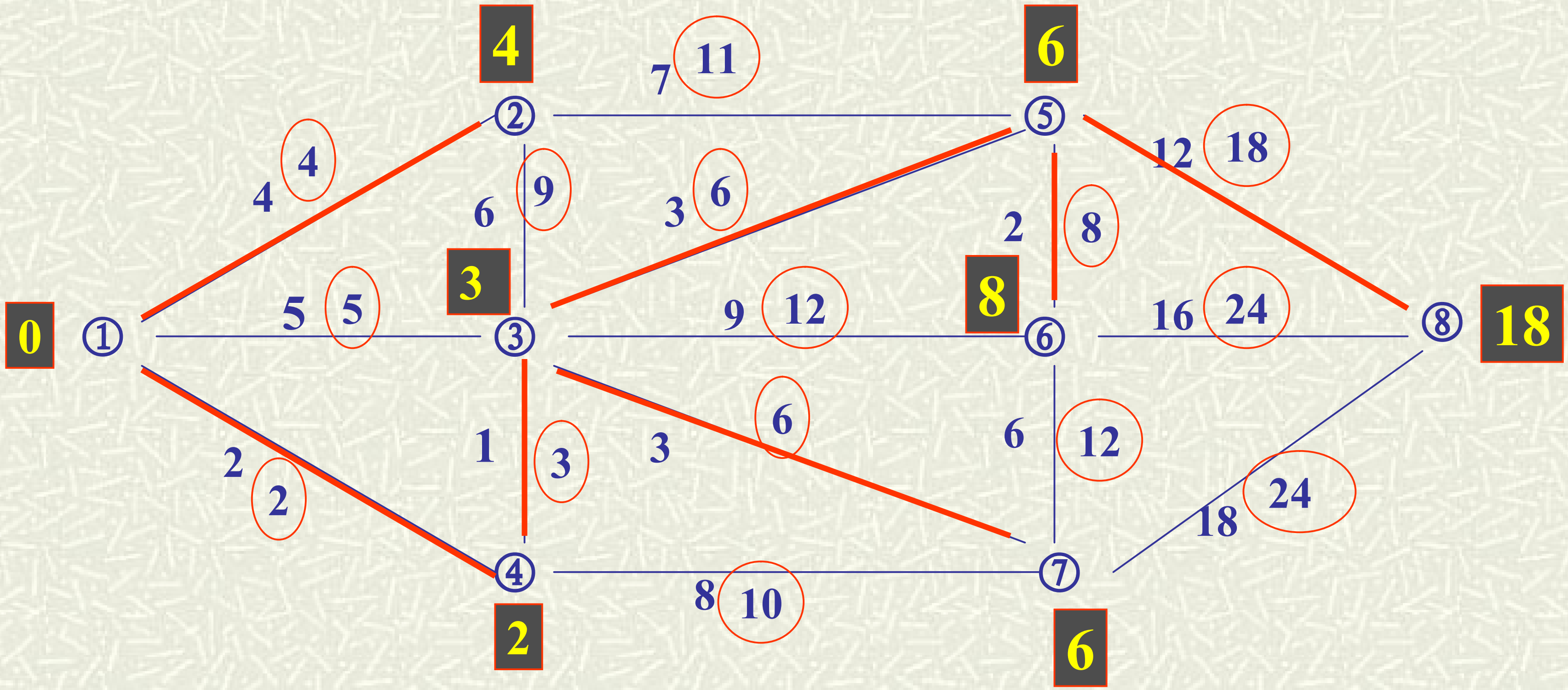
最短路问题

从上例知，只要某点已标号，说明已找到起点v_s到该点的最短路线及最短距离，因此可以将每个点标号，求出v_s到任意点的最短路线，如果某个点v_j不能标号，说明v_s不可达v_j。

注：无向图最短路的求法只将上述步骤2将弧改成边即可。

最短路问题

例6.6 求下图v_1到各点的最短距离及最短路线。

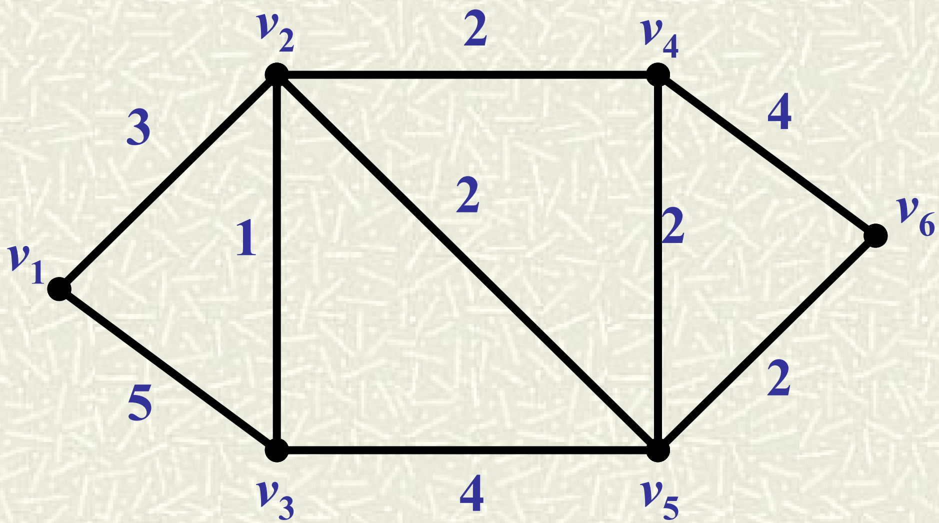


所有点都已标号，点上的标号就是v1到该点的最短距离，最短路线就是红色的链。

最短路问题

课堂练习:

1. 用Dijkstra算法求下图从v_1到v_6的最短距离及路线。

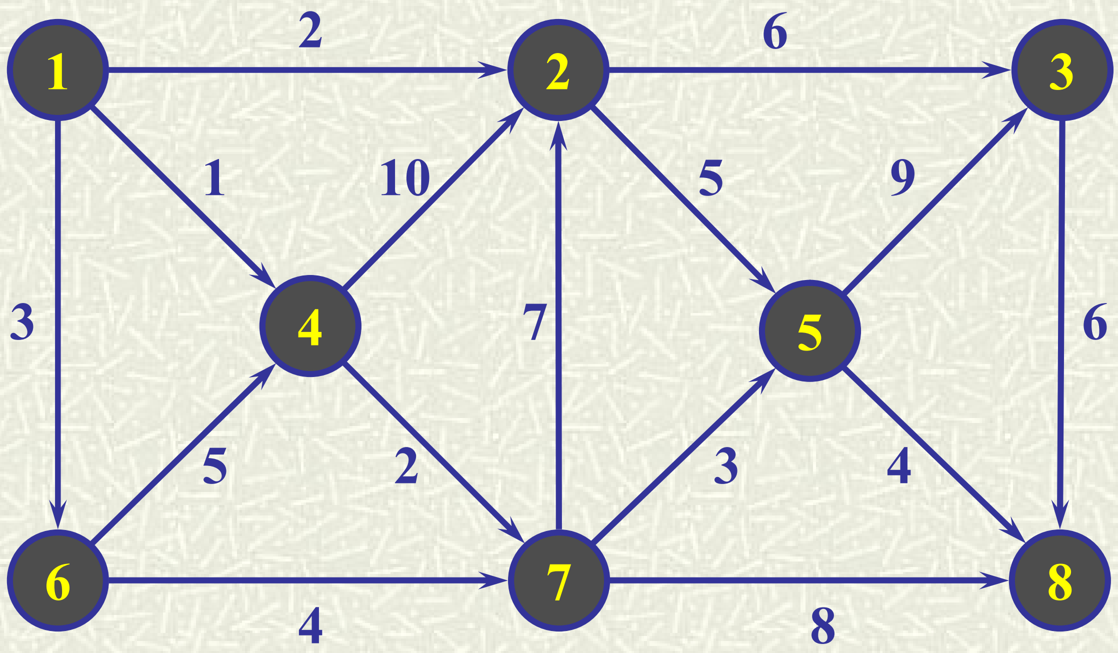


v_1到v_6的最短路为:

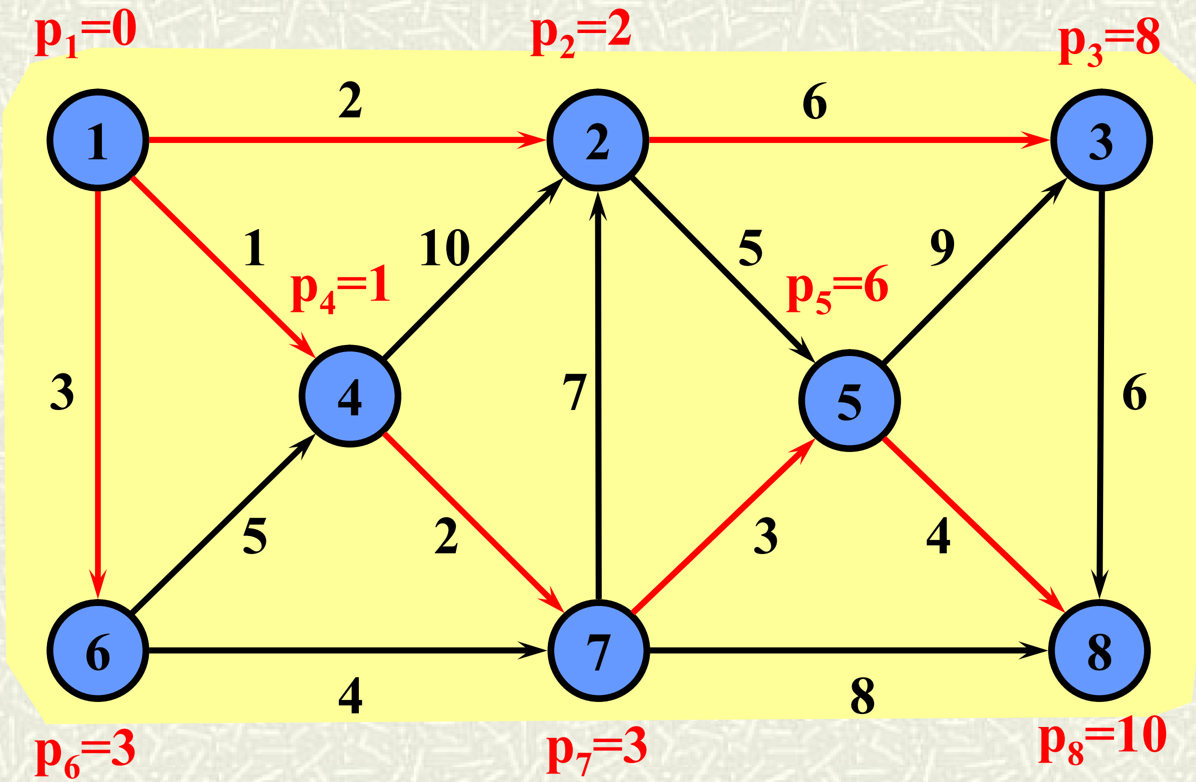
$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6$$

最短路问题

2. 求从v1到v8的最短路径



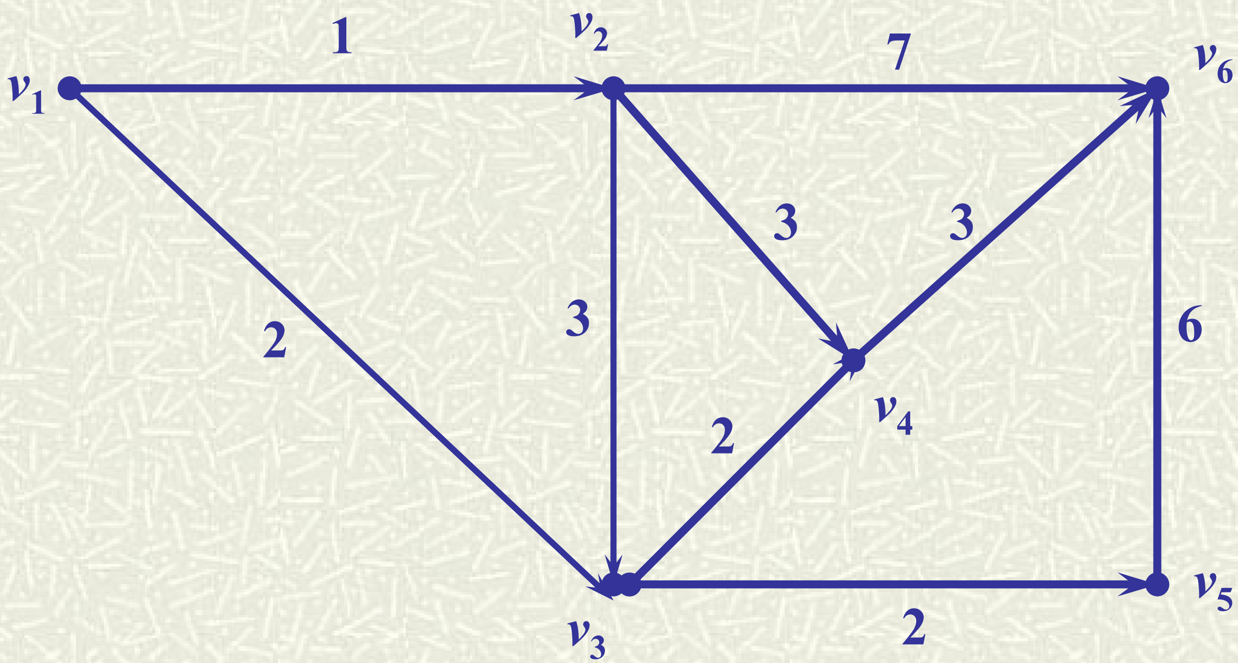
最短路问题



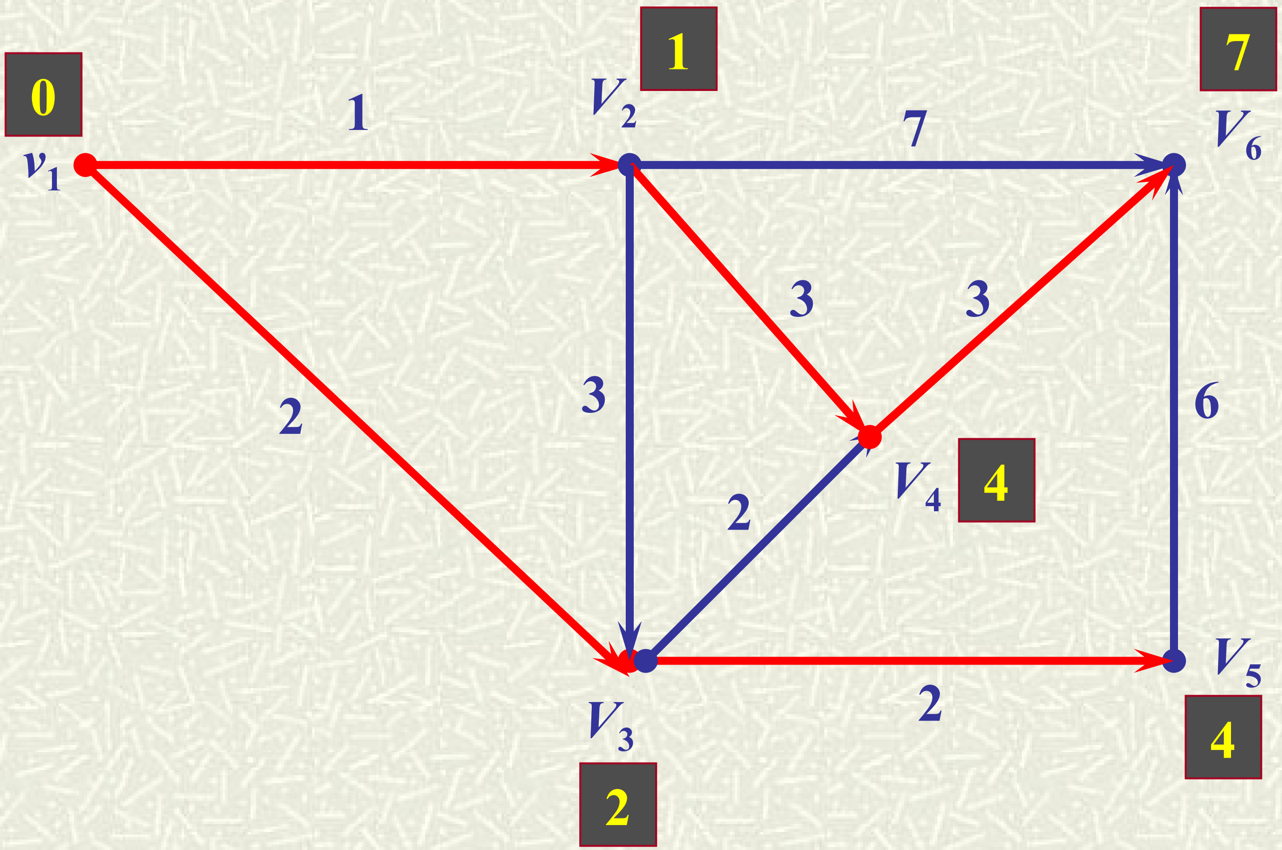
v_1到v_8的最短路径为$v_1 \to v_4 \to v_7 \to v_5 \to v_8$，最短距离为10

最短路问题

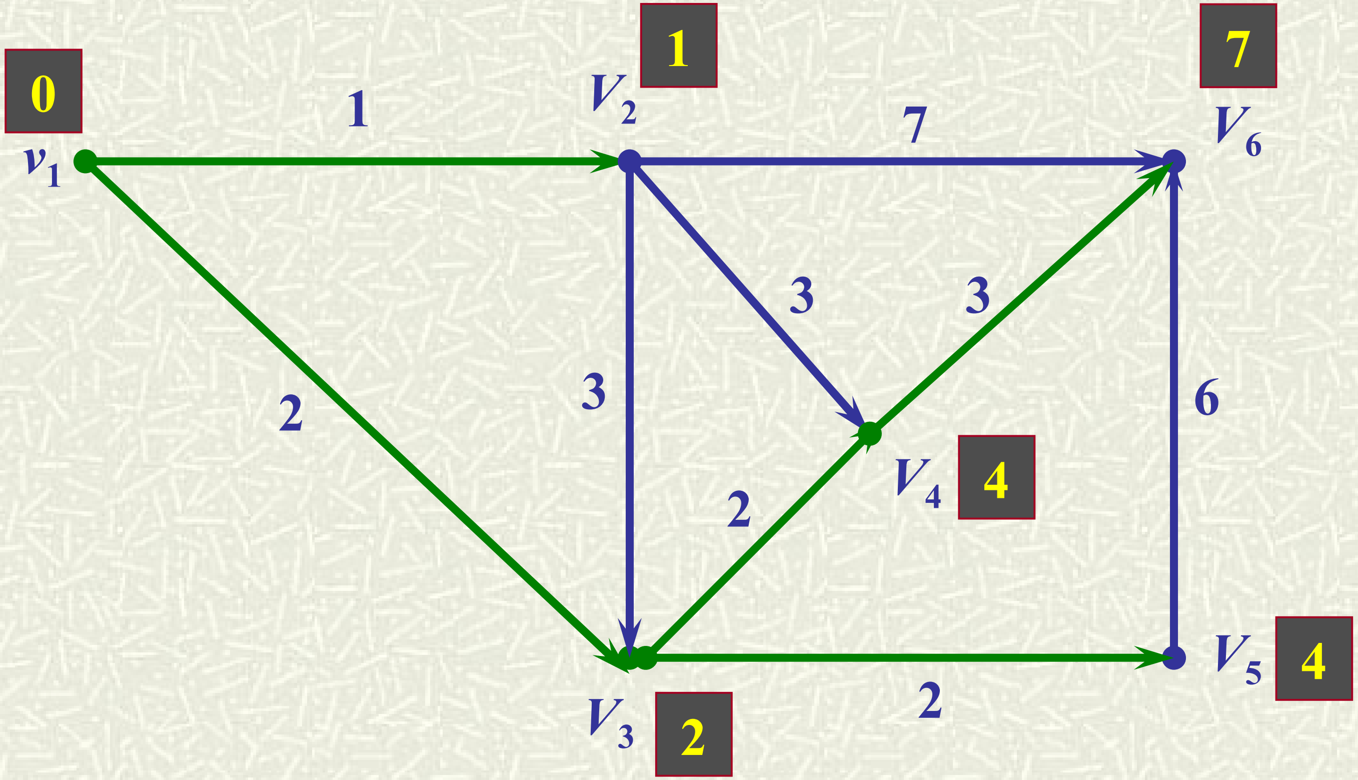
3. 求下图中$v1$点到另外任意一点的最短路径



最短路问题



最短路问题

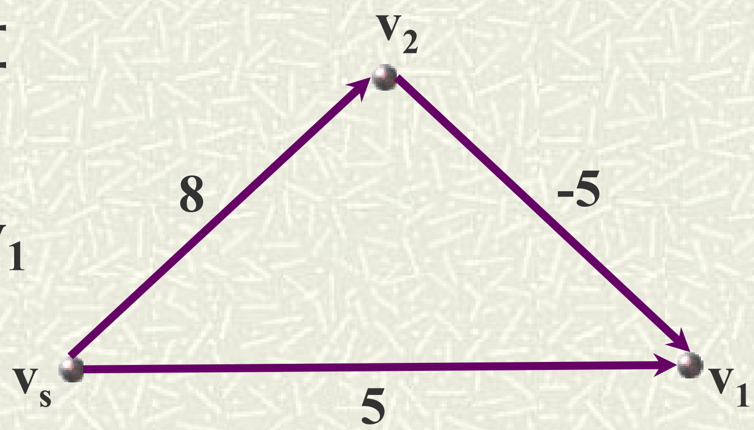


最短路问题

算法适用条件:

Dijkstra算法只适用于全部权为非负情况，如果某边上权为负的，算法失效。此时可采用逐次逼近算法。

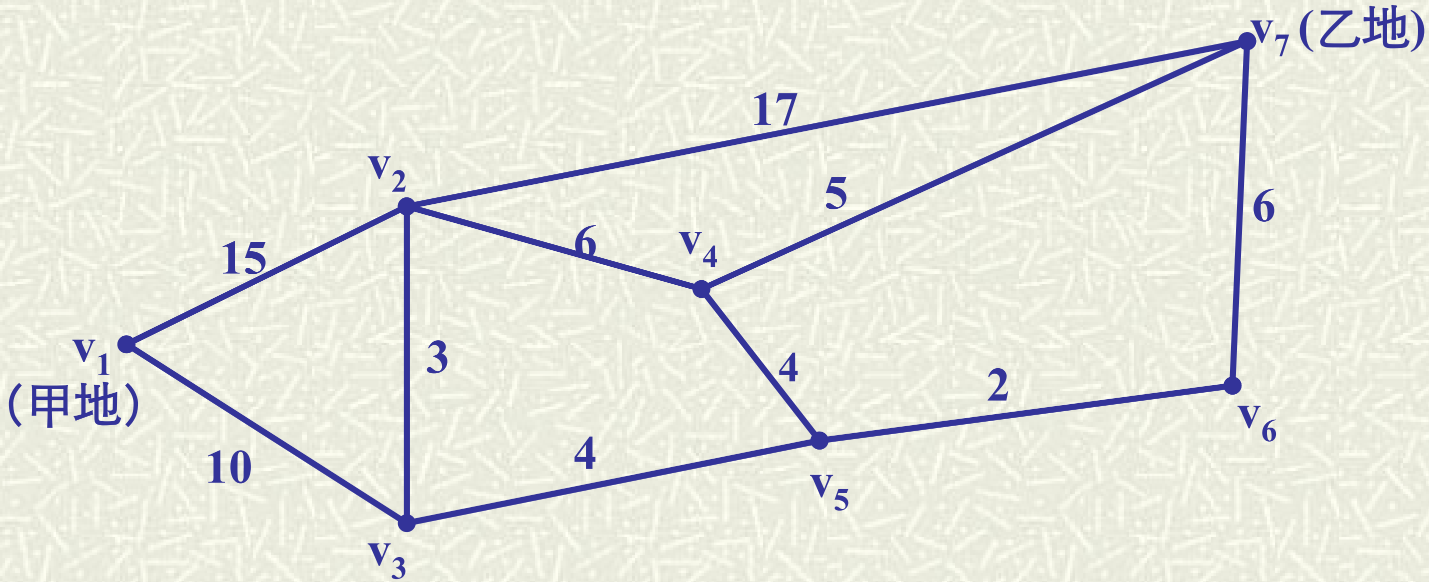
例6.7 如右图所示中按dijkstra算法可得$P(v_1)=5$为从$v_s \rightarrow v_1$的最短路长显然是错误的，从$v_s \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$路长只有3。



最短路问题

最短路问题的应用:

例6.7 电信公司准备准备在甲、乙两地沿路架设一条光缆线，问如何架设使其光缆线路最短？下图给出了甲乙两地间的交通图。权数表示两地间公路的长度（单位：公里）。



最短路问题

解：这是一个求无向图的最短路的问题。

最短路问题

例6.8 设备更新问题。某公司使用一台设备，在每年年初，公司就要决定是购买新的设备还是继续使用旧设备。如果购置新设备，就要支付一定的购置费，当然新设备的维修费用就低。如果继续使用旧设备，可以省去购置费，但维修费用就高了。请设计一个五年之内的更新设备的计划，使得五年内购置费用和维修费用总的支付费用最小。已知:

设备每年年初的价格表

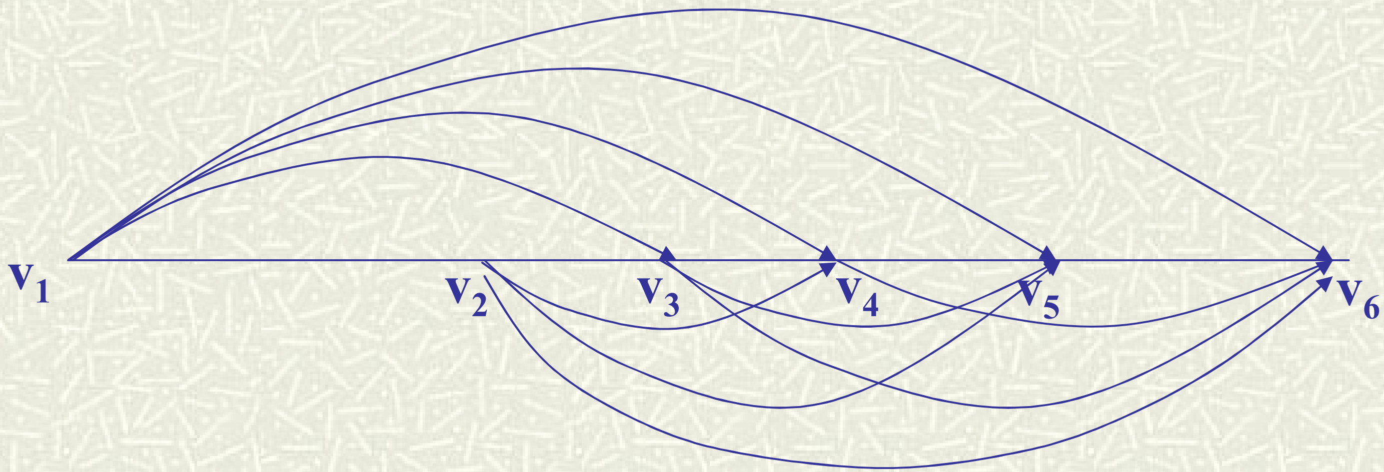
年份	1	2	3	4	5
年初价格	11	11	12	12	13

最短路问题

设备维修费如下表

使用年数	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
每年维修费用	5	6	8	11	18

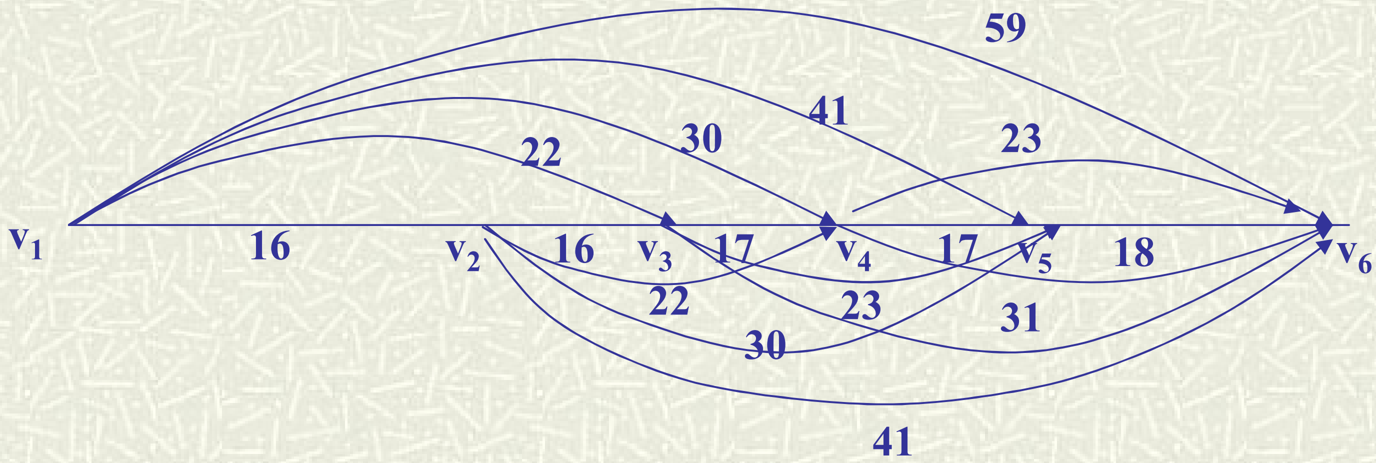
解：将问题转化为最短路问题，如下图：用v_i表示“第i年年初购进一台新设备”,弧（vi,vj）表示第i年年初购进的设备一直使用到第j年年初。



最短路问题

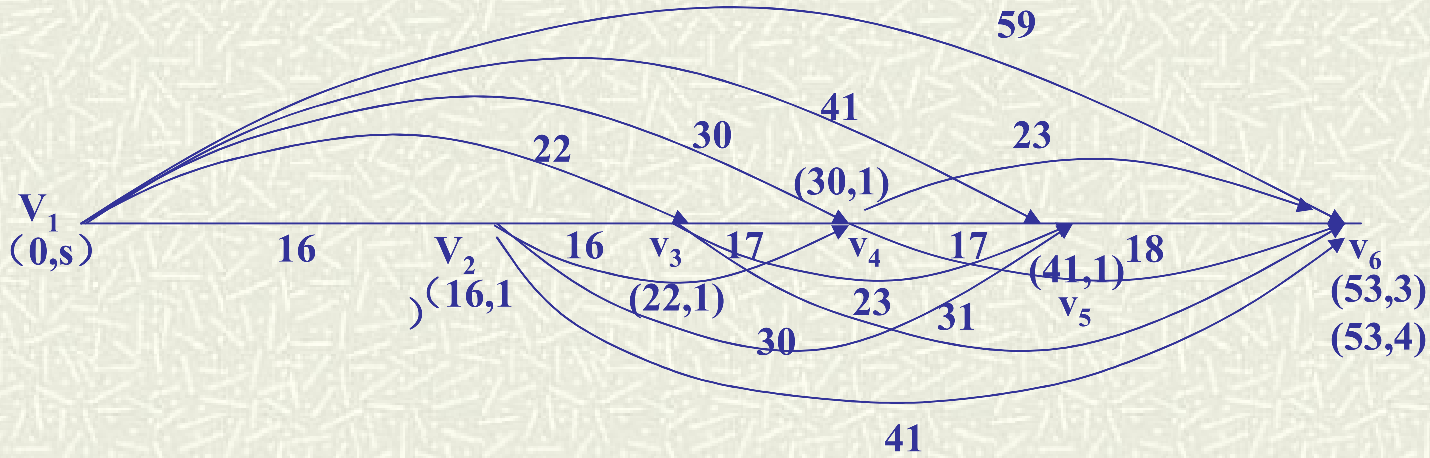
把所有弧的权数计算如下表，**把权数赋到图中，再用 Dijkstra算法求最短路。**

	1	2	3	4	5	6
1		16	22	30	41	59
2			16	22	30	41
3				17	23	31
4					17	23
5						18
6						



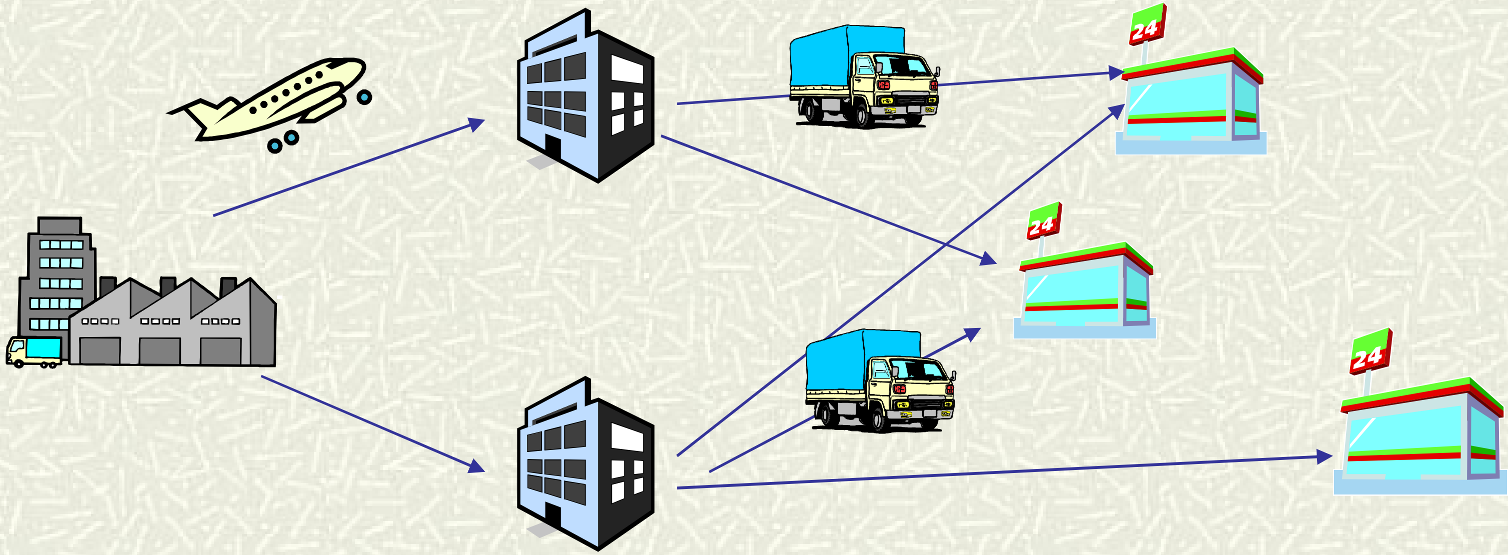
最短路问题

最终得到下图，可知，v_1到v_6的距离是53，最短路径有两条：$v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_6$和 $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_6$



网络的最大流

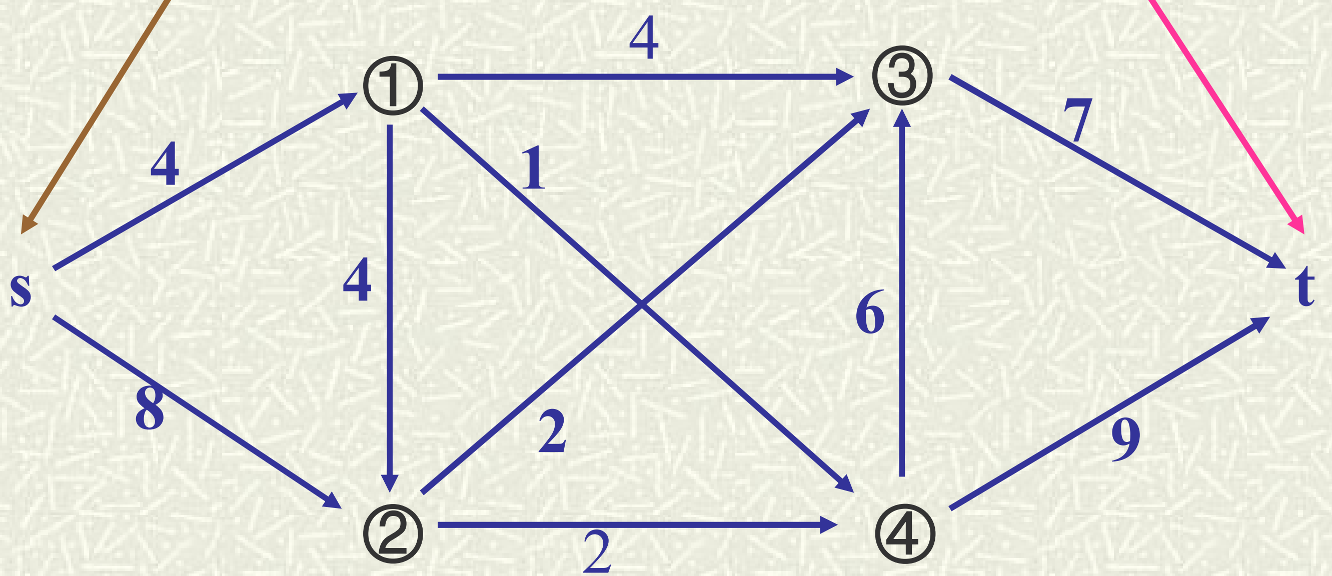
如何制定一个运输计划使生产地到销售地的产品输送量最大。这就是一个网络最大流问题。



网络的最大流

基本概念：

1. 容量网络： 队网络上的每条弧(v_i,v_j)都给出一个最大的通过能力，称为该弧的**容量**，简记为c_{ij}。容量网络中通常规定一个**发点**(也称源点，记为s)和一个**收点**(也称汇点，记为t)，网络中其他点称为**中间点**。



2. 网络的最大流

是指网络中从发点到收点之间允许通过的最大流量。

3. 流与可行流

流是指加在网络各条弧上的实际流量，对加在弧(v_i,v_j)上的负载量记为f_{ij}。若$f_{ij}=0$，称为零流。

满足以下条件的一组流称为可行流。

- 容量限制条件。容量网络上所有的弧满足：$0 \leqslant f_{ij} \leqslant c_{ij}$
- 中间点平衡条件。

$$\sum f(v_i,v_j)-\sum f(v_j,v_i)=0 \quad (i \neq s,t)$$

- 若以v(f)表示网络中从s→t的流量，则有：

$$v(f)=\sum f(v_s,v_j)-\sum f(v_j,v_t)=0$$

结论：任何网络上一定存在可行流。（零流即是可行流）

网络最大流问题：

指满足容量限制条件和中间点平衡的条件下，使v(f)值达到最大。

网络的最大流

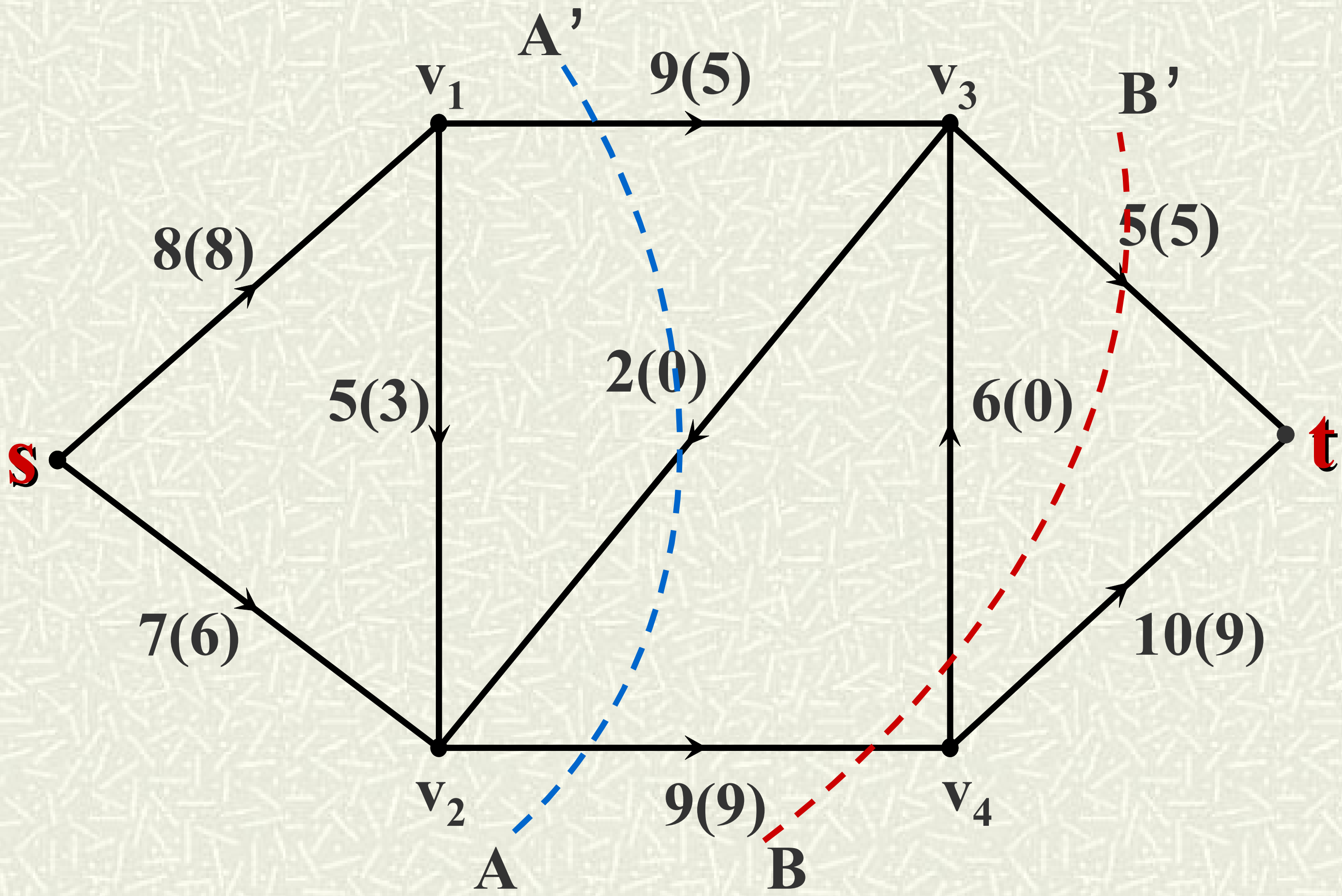
- 割与割集

割是指容量网络中的发点和收点分割开，并使s→t的流中断的一组弧的集合。割容量是组成割集合中的各条弧的容量之和，用 $c(V,\overline{V})$表示。

$$c(V,\overline{V}) = \sum_{(i,j)\in(V,\overline{V})} c(v_i,v_j)$$

如下图中，AA′ 将网络上的点分割成 $V,\overline{V}$ 两个集合。并有$s\in V, t\in\overline{V}$ ，称弧的集合{(v_1,v_3),(v_2,v_4)}是一个割，且 $V\to\overline{V}$的流量为18。

网络的最大流



网络的最大流

定理1 设网络N中一个从 s 到 t 的流 f 的流量为$v(f)$， (V, V') 为任意一个割集，则

$$v(f) = f(V, V') - f(V', V)$$

推论1 对网络 N中任意流量$v(f)$和割集 (V, V')，有

$$v(f) \le c(V, V')$$

[证明] $w = f(V, V') - f(V', V) \le f(V, V') \le c(V, V')$

推论2 最大流量$v^*(f)$不大于最小割集的容量，即:

$$v^*(f) \le \min\{c(V, V')\}$$

定理2 在网络中s→t的最大流量等于它的最小割集的容量，即:

$$v^*(f) = c^*(V, V')$$

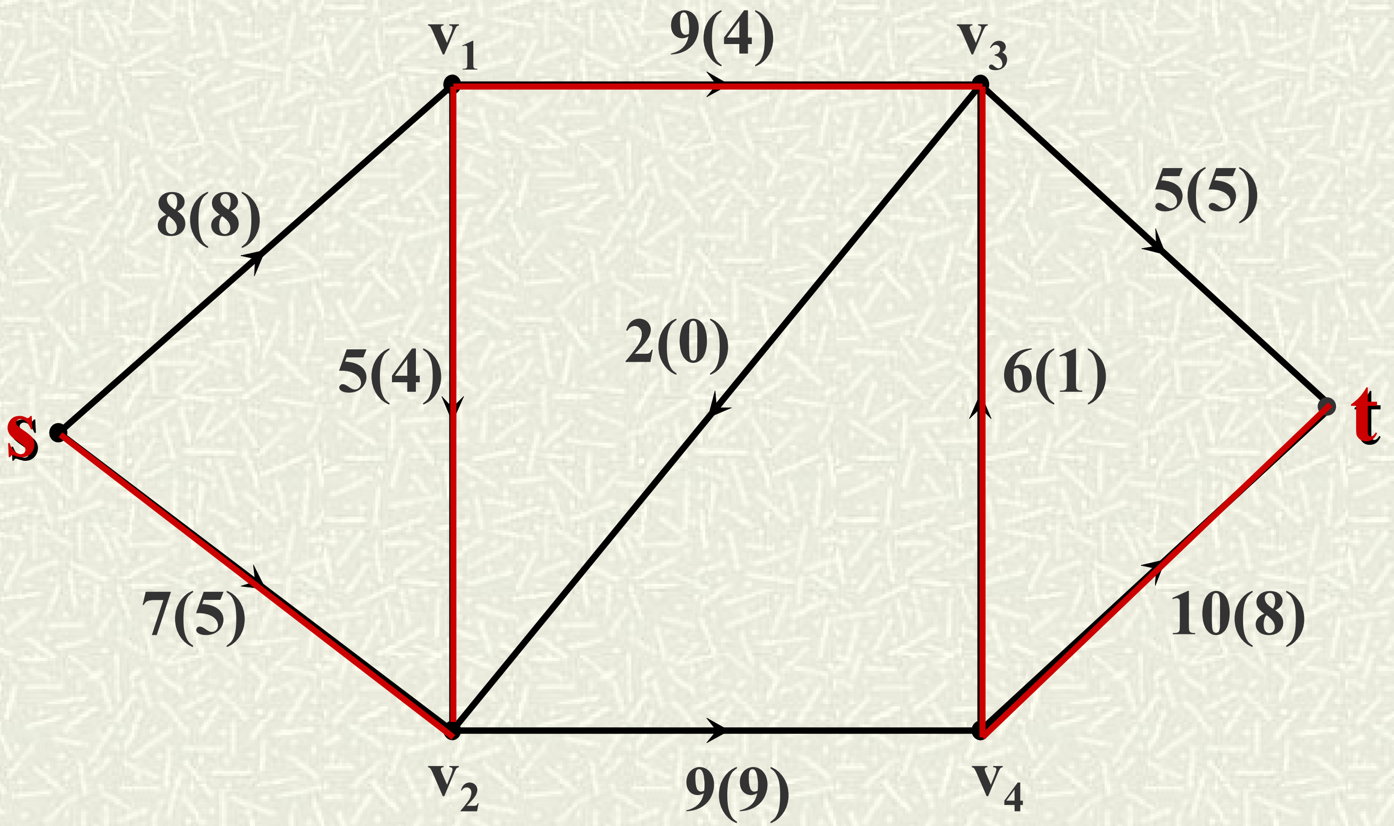
网络的最大流

增广链

在网络的发点和收点之间能找到一条链，在该链上所有指向为s→t的弧，称为前向弧，记作μ^{+},存在$f<c$；所有指向为t→s的弧，称为后向弧，记做μ^{-}，若$f>0$，则称这样的链为增广链。例如下图中，$s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to t$。

定理3 网络N中的流f是最大流当且仅当N中不包含任何增广链

网络的最大流



求网络最大流的标号算法:

[基本思想]

由一个流开始，系统地搜寻增广链，然后在此链上增流，继续这个增流过程，直至不存在增广链。

[基本方法]

(1) 找出第一个可行流，（例如所有弧的流量f_{ij}=0。）

(2) 用标号的方法找一条增广链

- 首先给发点s标号(∞),标号中的数字表示允许的最大调整量。
- 选择一个点 v_i 已标号并且另一端未标号的弧沿着某条链向收点检查:

网络的最大流

- 如果弧的起点为v_i，并且有$f_{ij}<C_{ij}$，则给v_j标号为$(C_{ij}-f_{ij})$
- 如果弧的方向指向v_i，并且有$f_{ji}>0$，则v_j标号(f_{ji})

(3) 重复第(2)步，可能出现两种结局:

- 标号过程中断，t无法标号，说明网络中不存在增广链，目前流量为最大流。同时可以确定最小割集，记已标号的点集为V,未标号的点集合为V′,(V,V′)为网络的最小割。
- t得到标号，反向追踪在网络中找到一条从s到t得由标号点及相应的弧连接而成的增广链。继续第(4)步

(4) 修改流量。设原图可行流为f，令

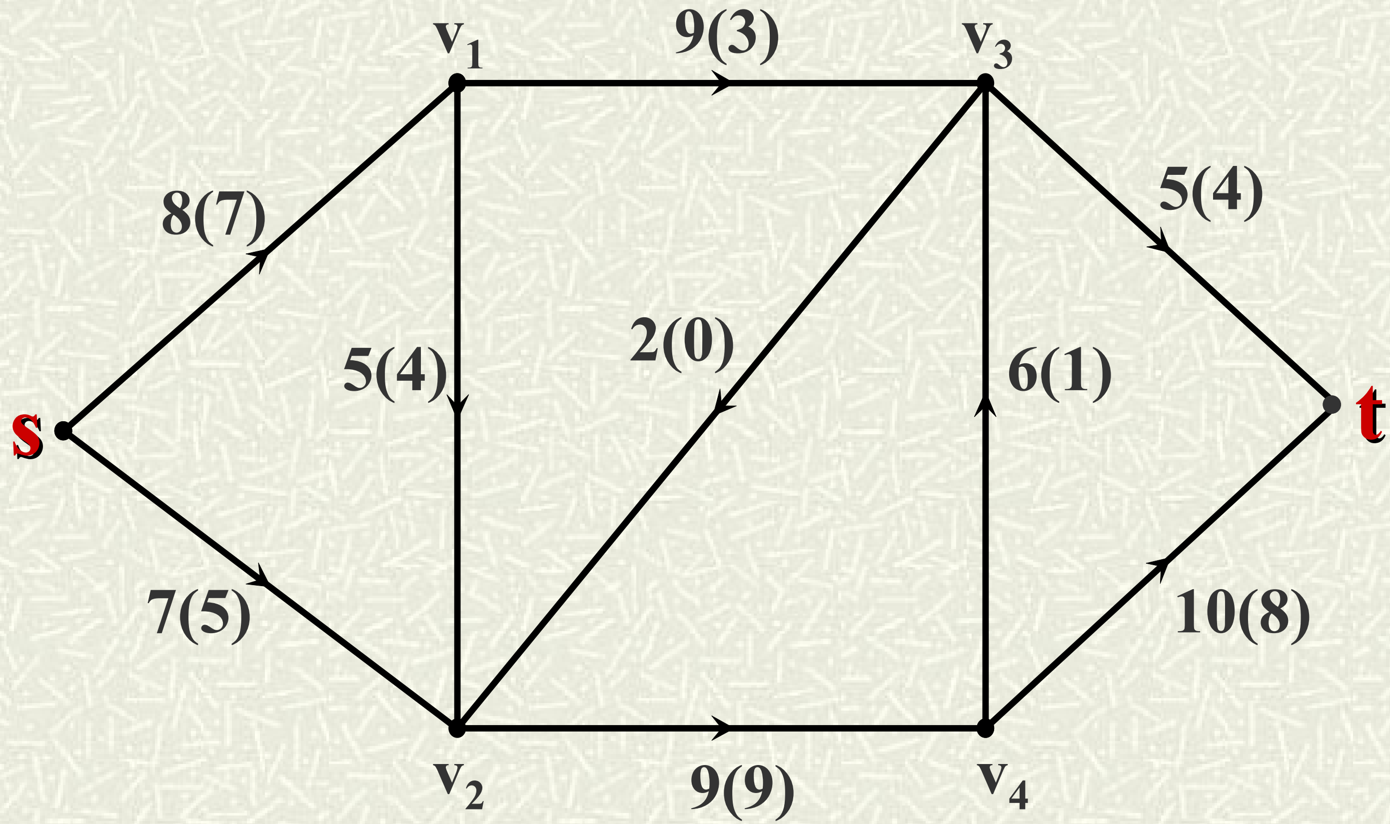
$$f' = \begin{cases} f + \varepsilon(t) & \text{对增广链上所有前向弧} \\ f - \varepsilon(t) & \text{对增广链上所有后向弧} \\ f & \text{所有非增广链上的弧} \end{cases}$$

得到网络上一个新的可行流f’。

(5) 擦除图上所有标号，重复(1)-(4)步，直到图中找不到任何增广链，计算结束。

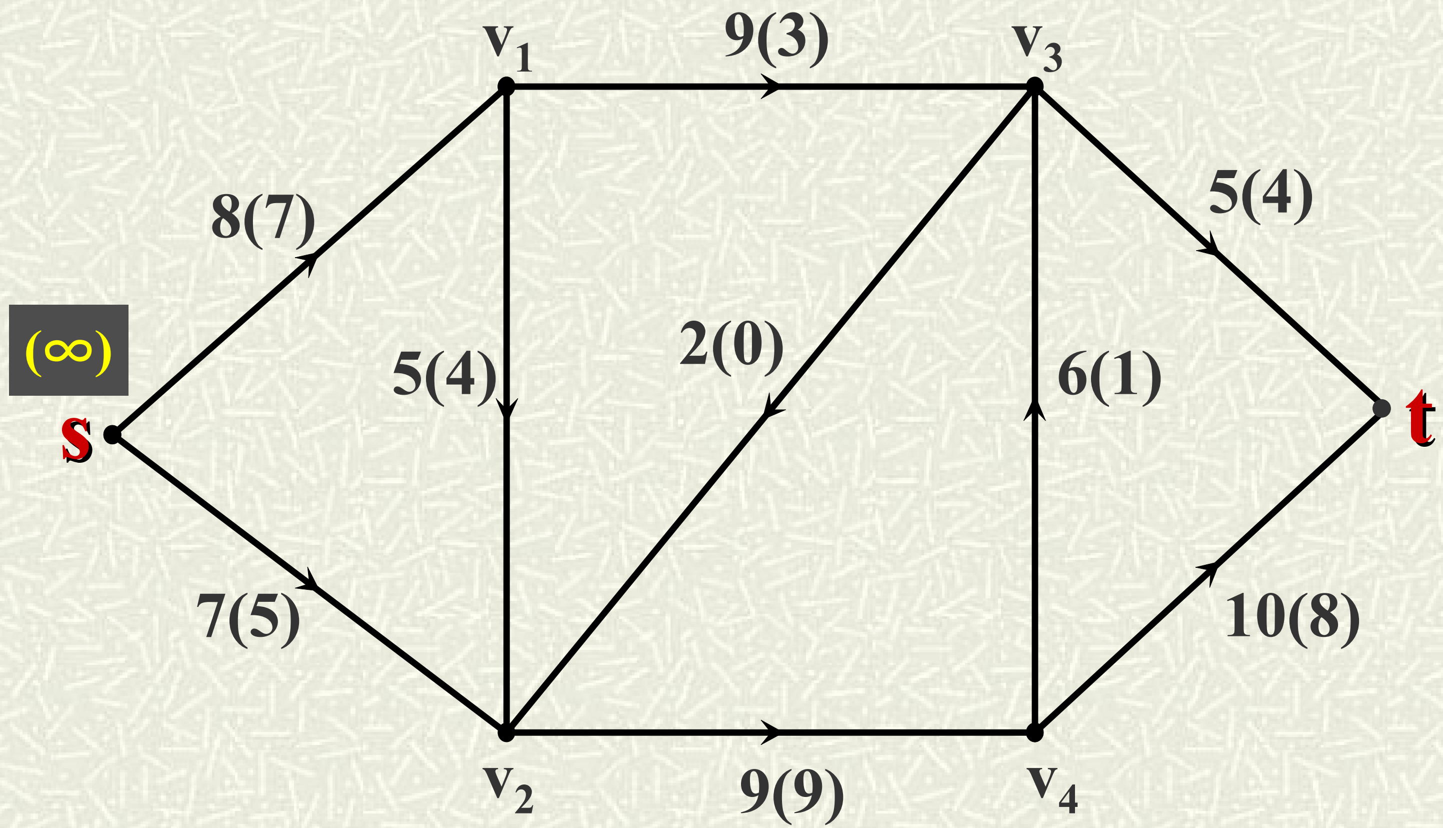
网络的最大流

例6.10 用标号算法求下图中s→t的最大流量，并找出最小割。



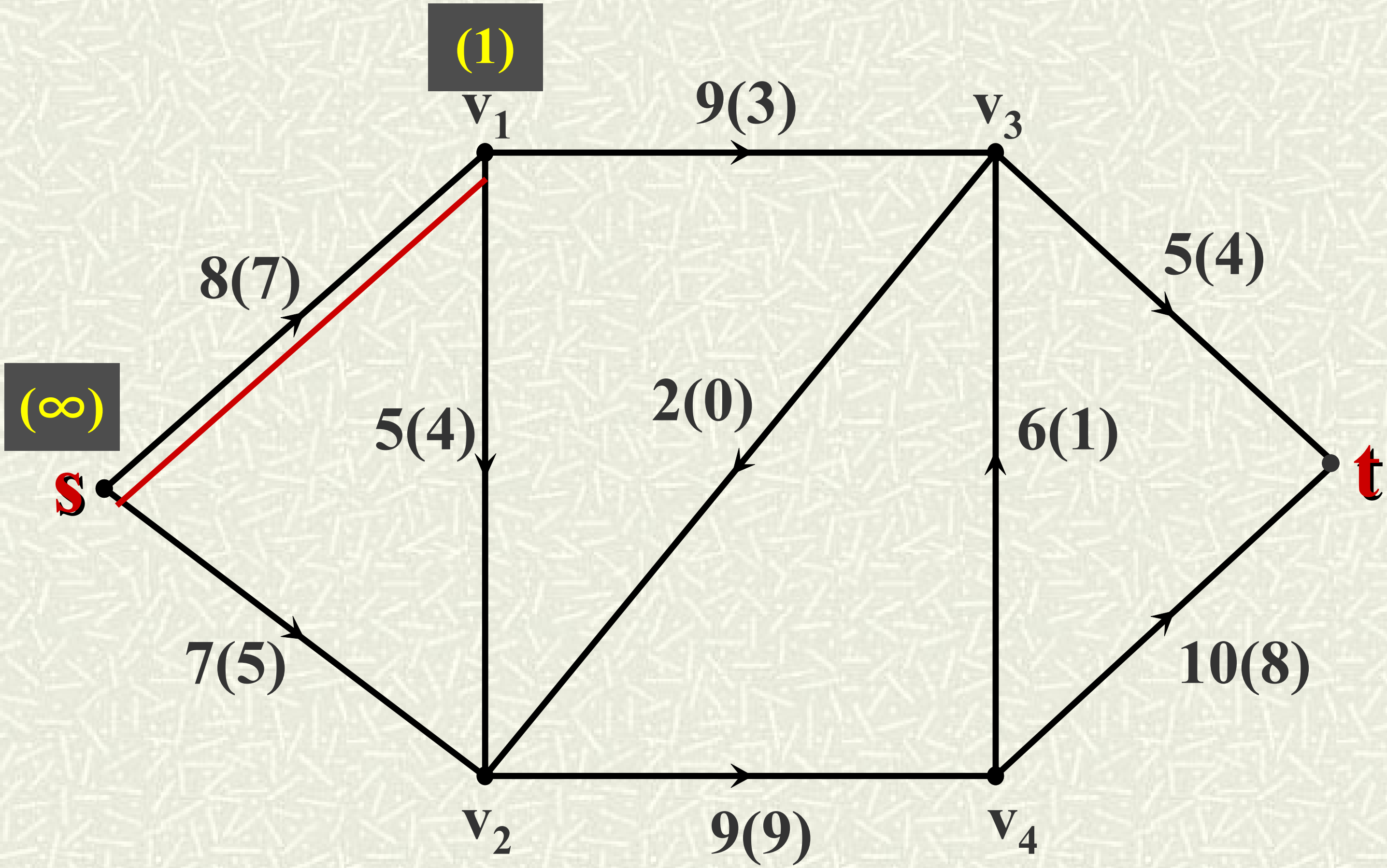
网络的最大流

解：(1) 先给s标号(∞)

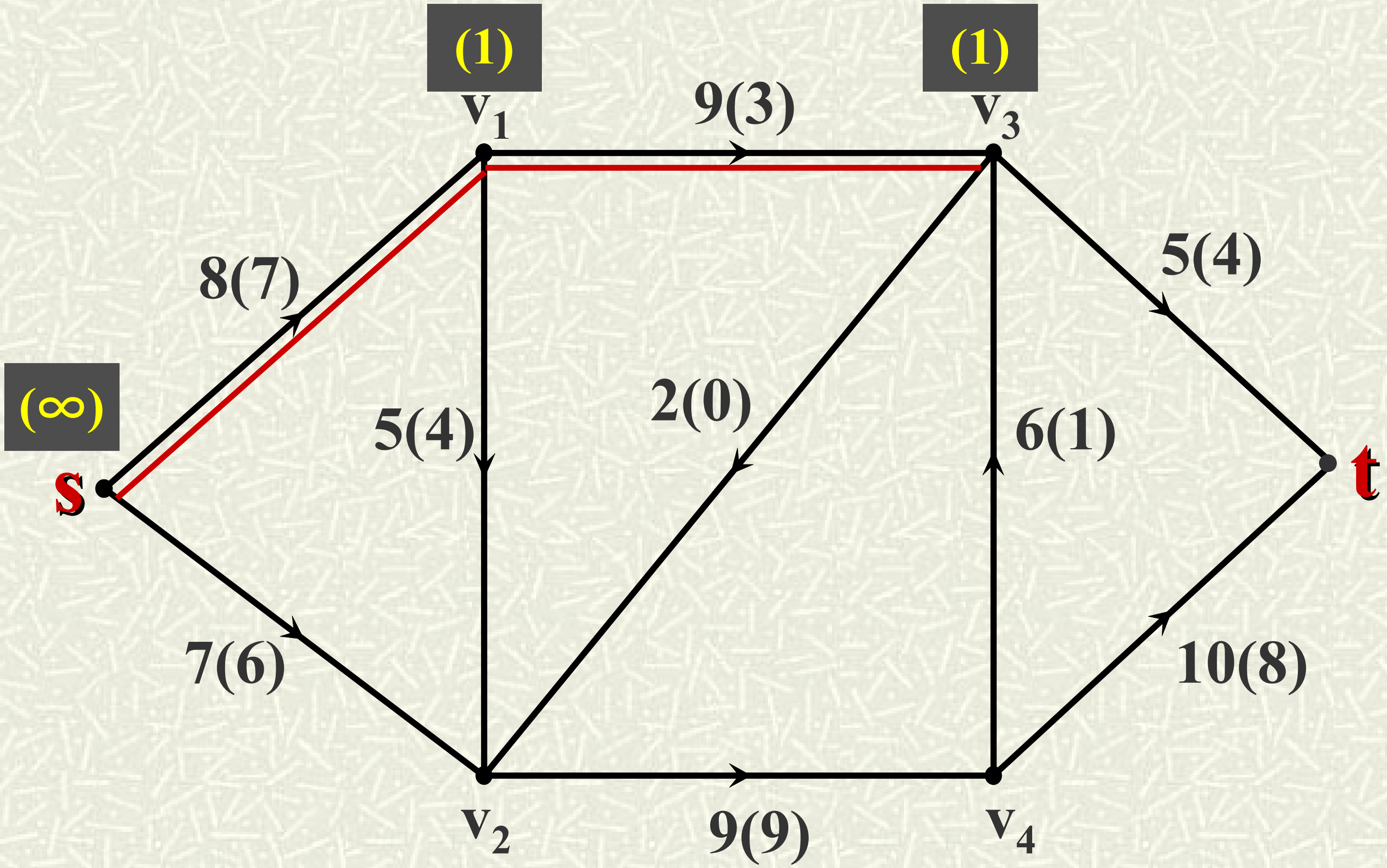


网络的最大流

(2) 检查与s点相邻的未标号的点，因$f_{s1}<c_{s1}$，故对v_1标号 $\varepsilon(1)=\min\{\infty, c_{s1}-f_{s1}\}=1$,

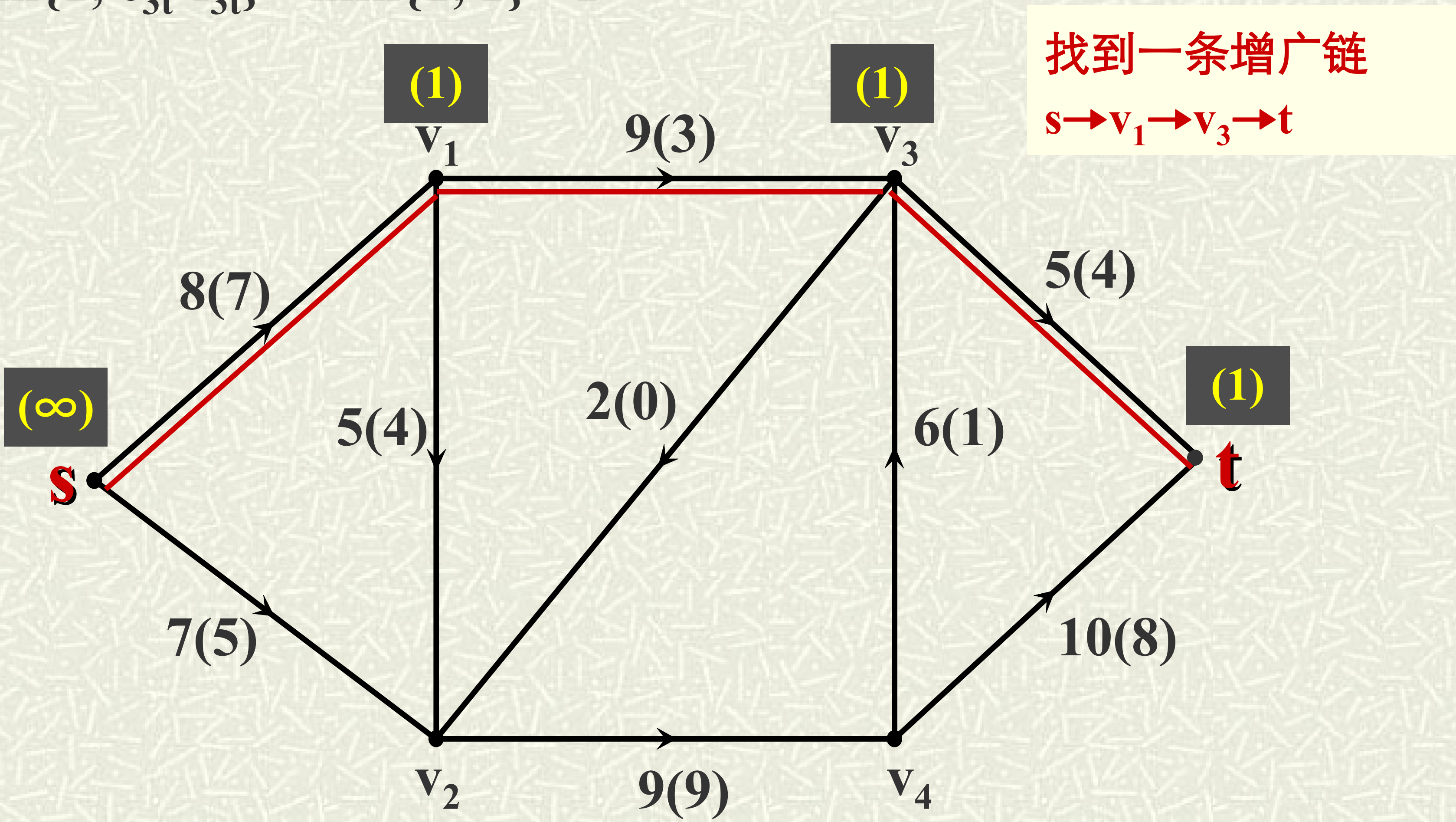


(2) 检查与v_1点相邻的未标号的点，因$f_{13}<c_{13}$，故对v_3标号$\varepsilon(3)=\min\{1, c_{13}-f_{13}\}=\min\{1, 6\}=1$



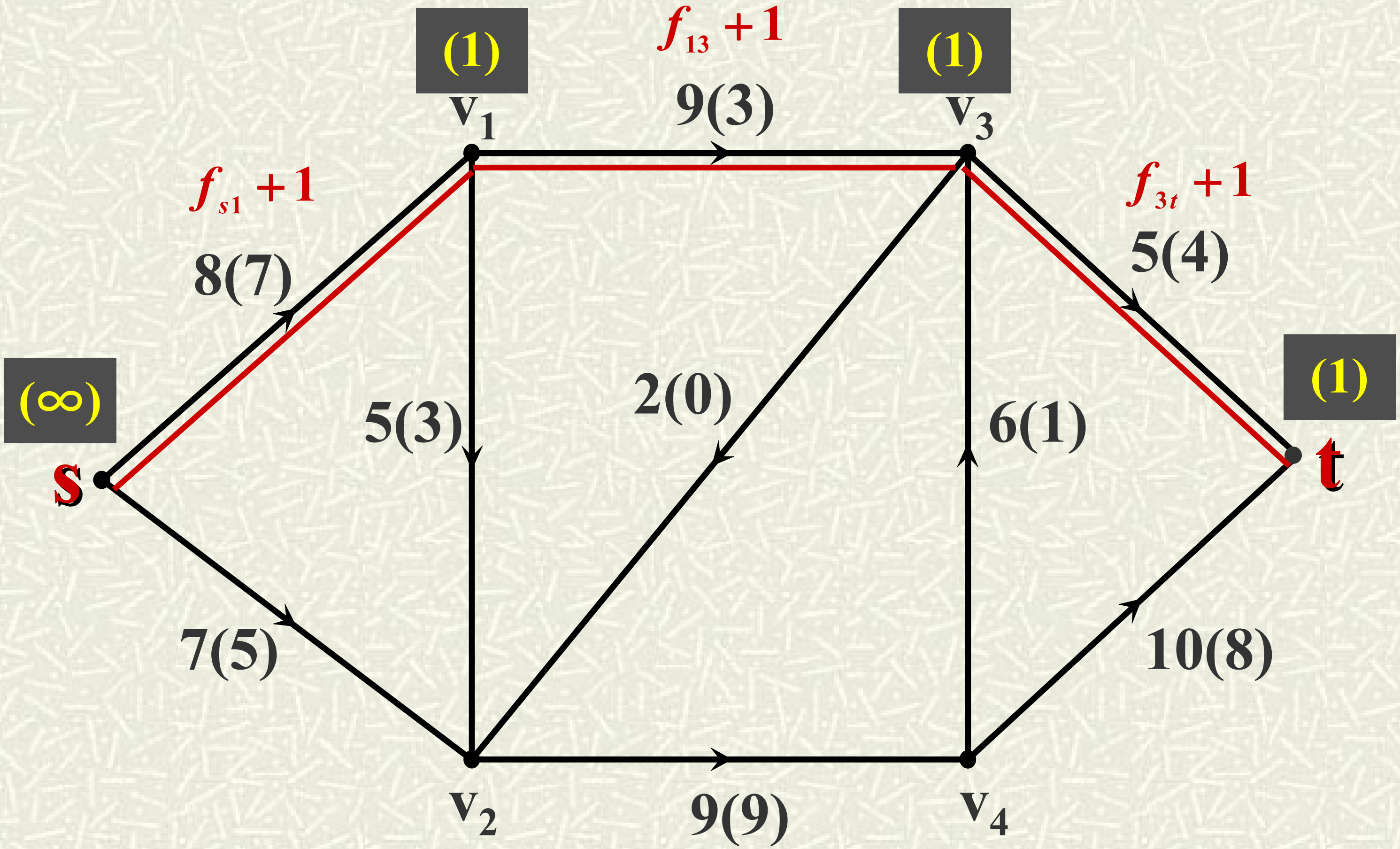
网络的最大流

(3) 检查与v_3点相邻的未标号的点，因$f_{3t}<c_{3t}$，故对v_t标号 $\varepsilon(t)=\min\{1, c_{3t}-f_{3t}\}=\min\{1, 1\}=1$



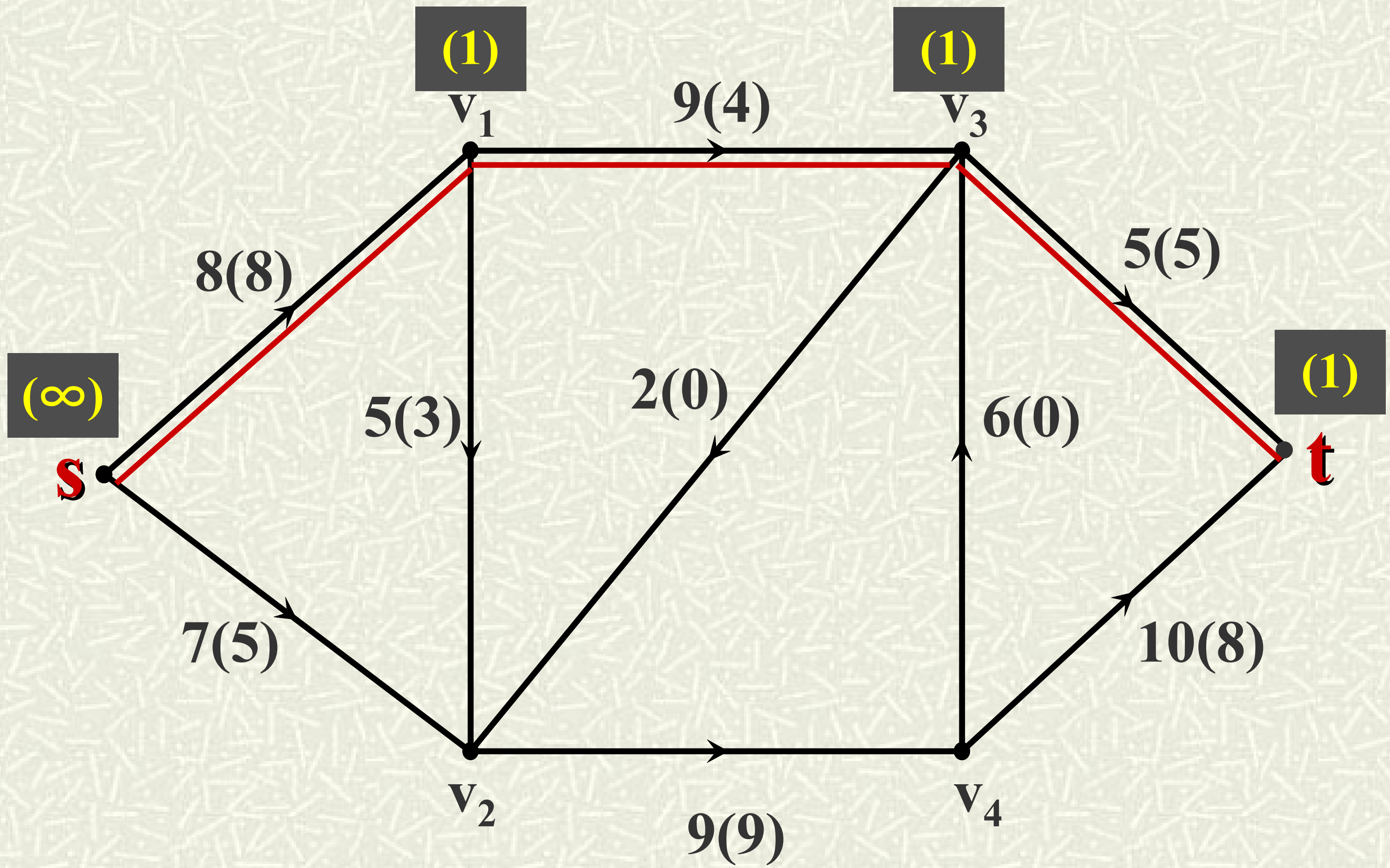
网络的最大流

(4) 修改增广链上的流量，非增广链上的流量不变，得到新的可行流。



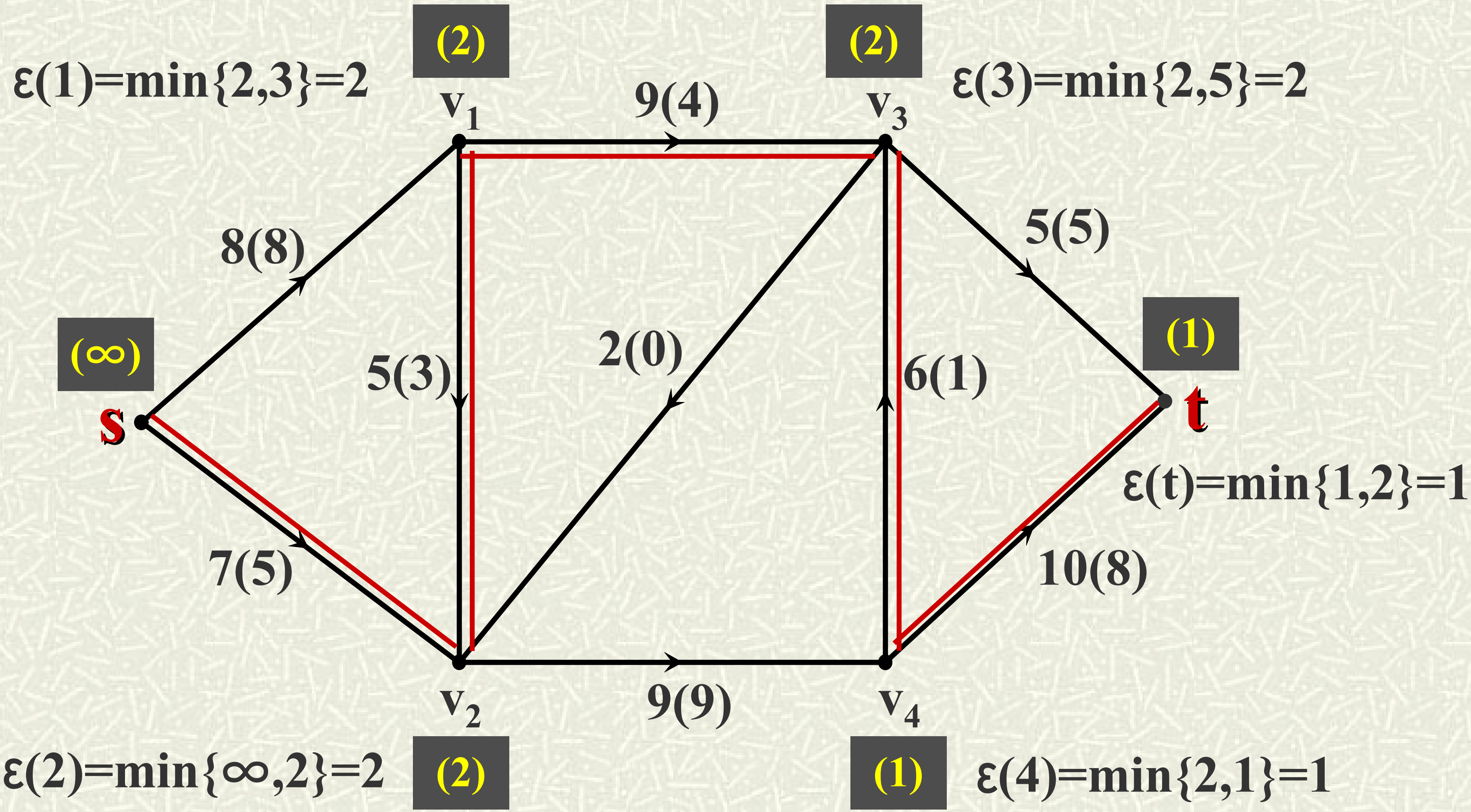
网络的最大流

(5) 擦除所有标号，重复上述标号过程，寻找另外的增广链。



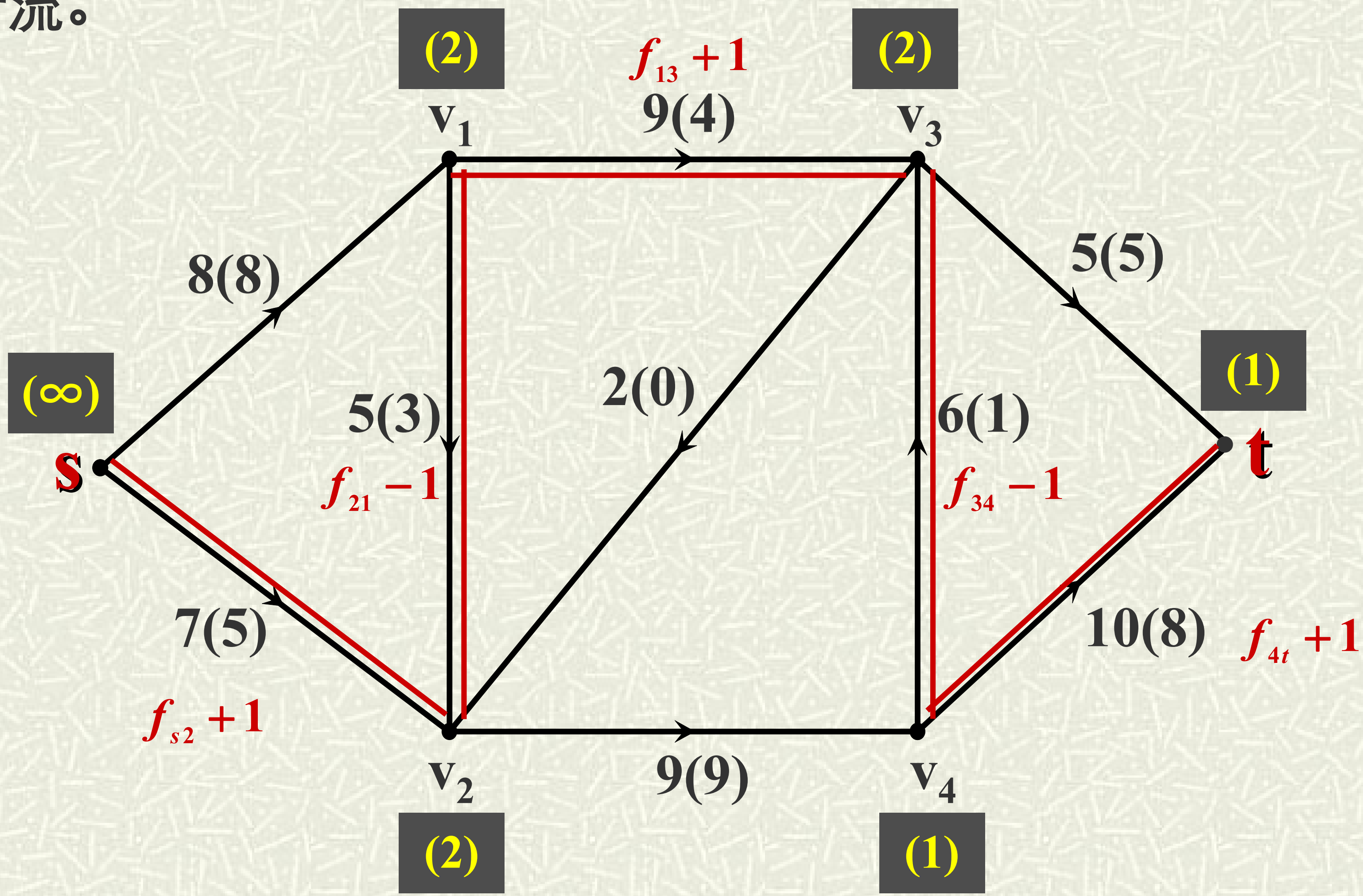
网络的最大流

(5) 擦除所有标号，重复上述标号过程，寻找另外的增广链。



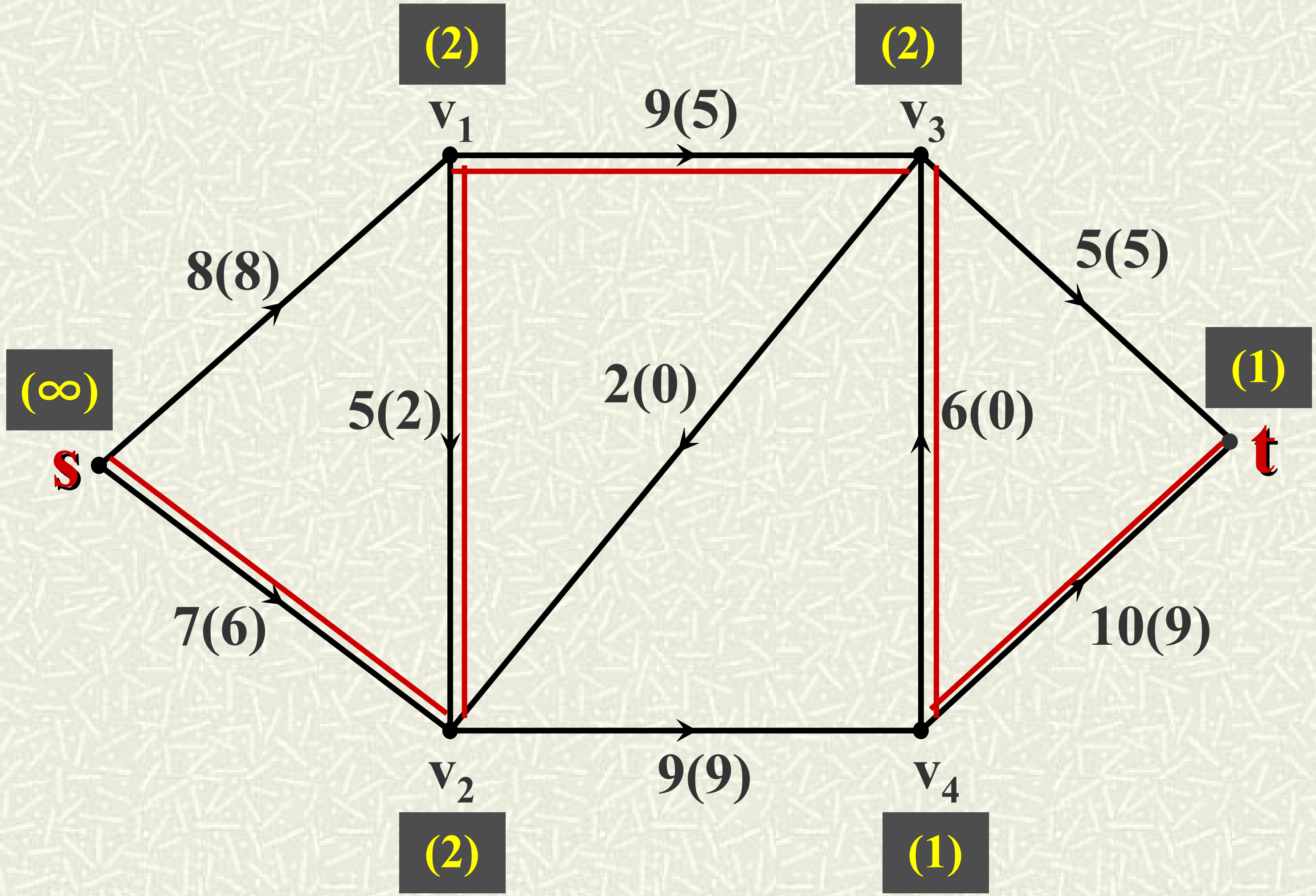
网络的最大流

(6) 修改增广链上的流量，非增广链上的流量不变，得到新的可行流。



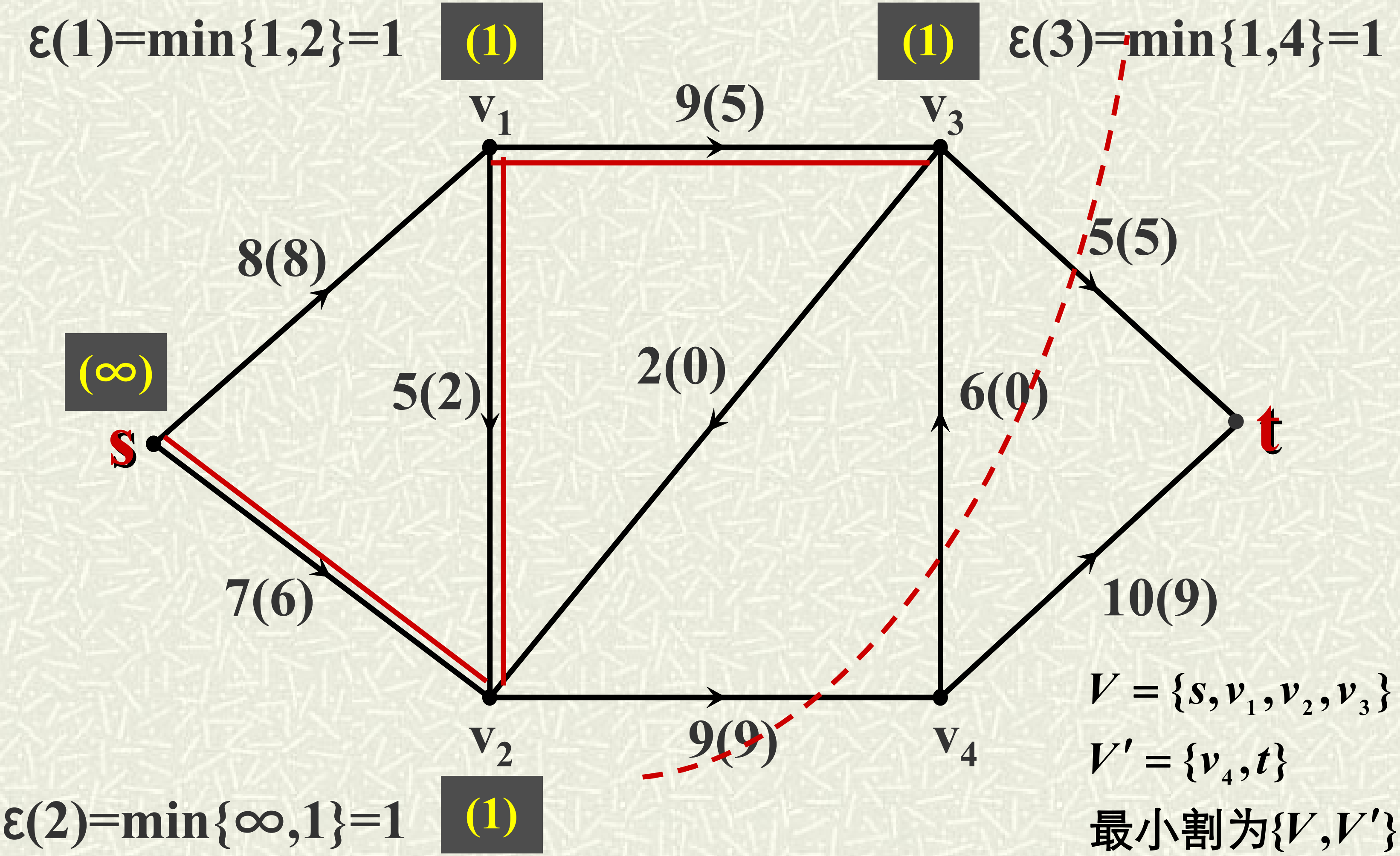
网络的最大流

(7) 擦除所有标号，重复上述标号过程，寻找另外的增广链。



网络的最大流

(7) 擦除所有标号，重复上述标号过程，寻找另外的增广链。



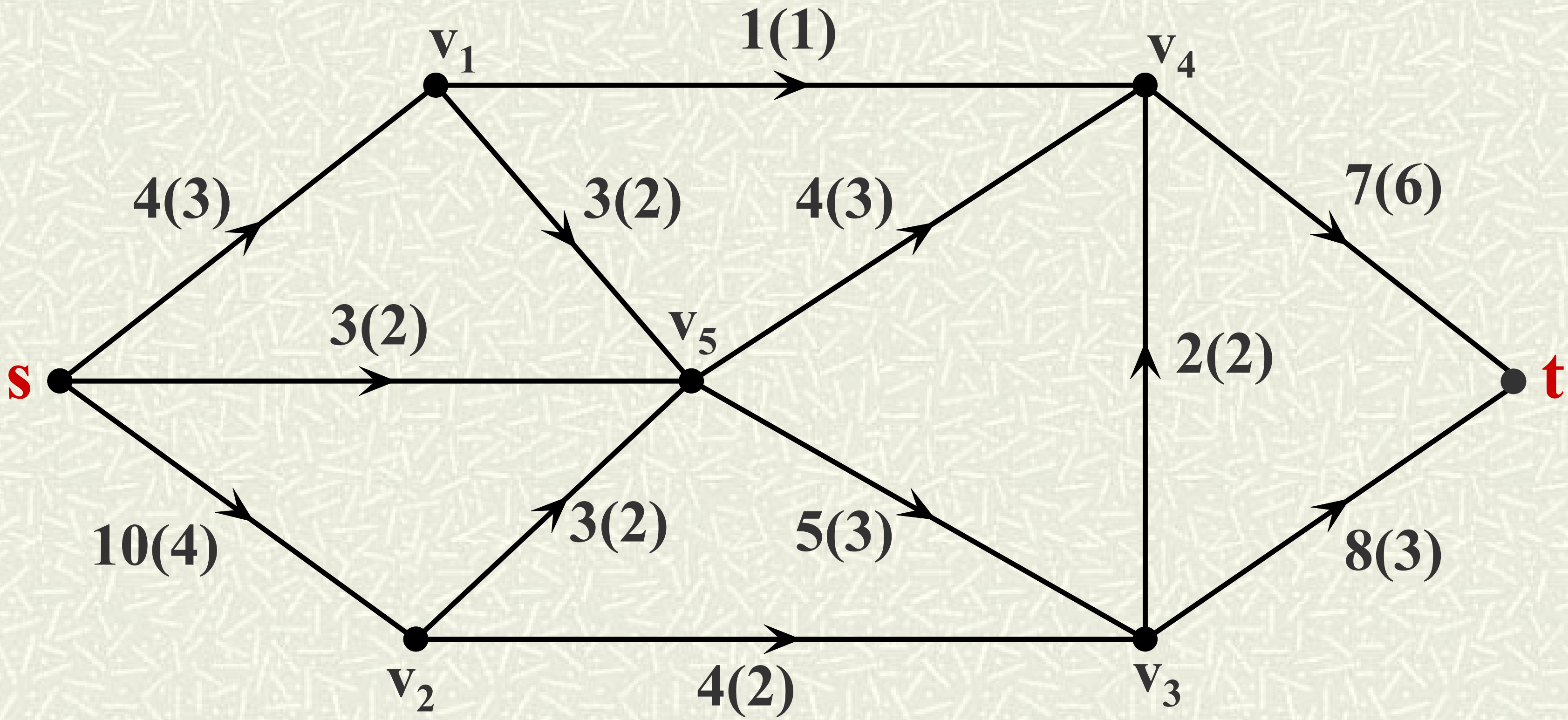
$V=\{s,v_1,v_2,v_3\}$

$V'=\{v_4,t\}$

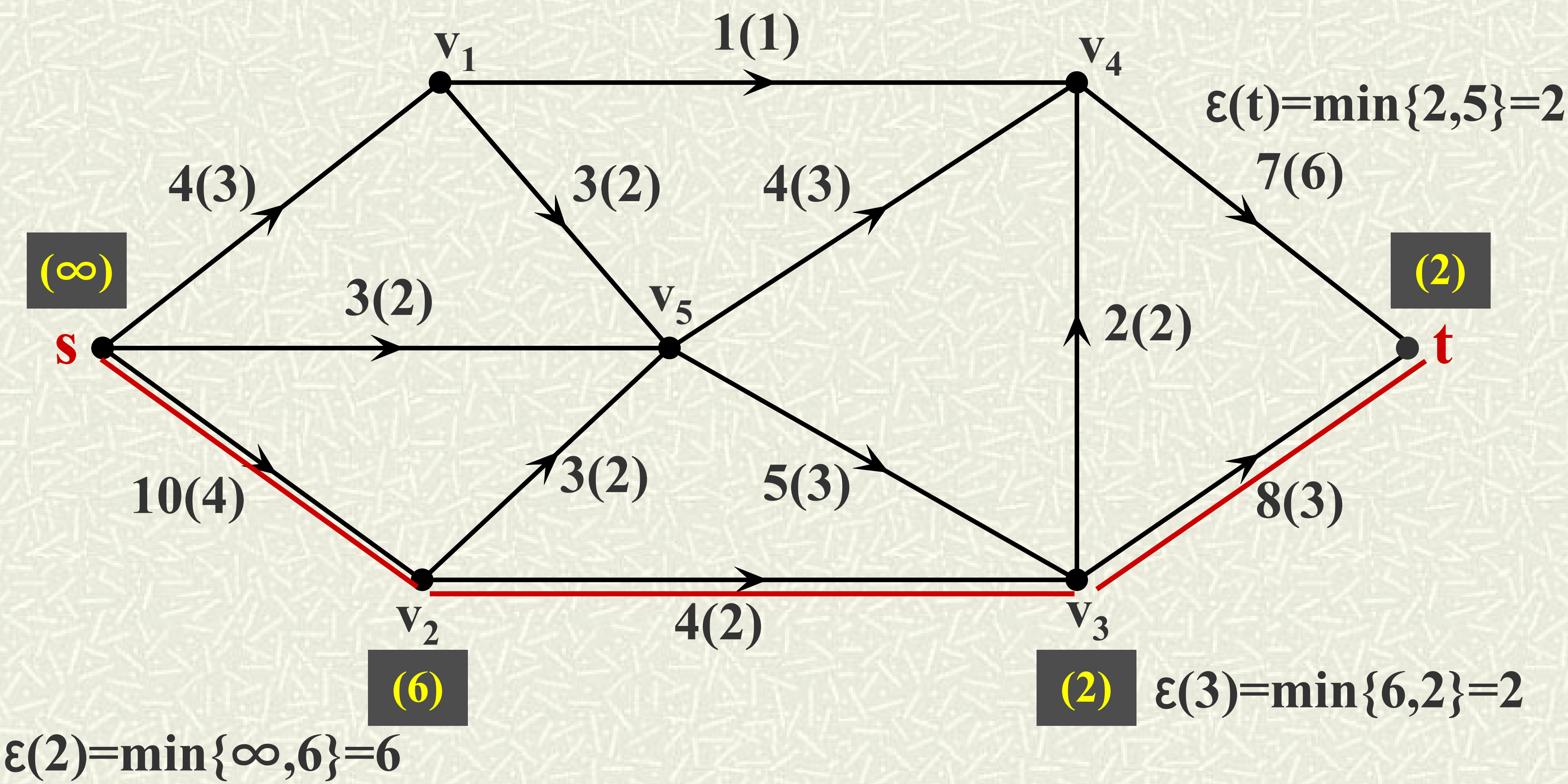
最小割为$\{V,V'\}$

网络的最大流

例6.9 求下图$s \rightarrow t$的最大流，并找出最小割



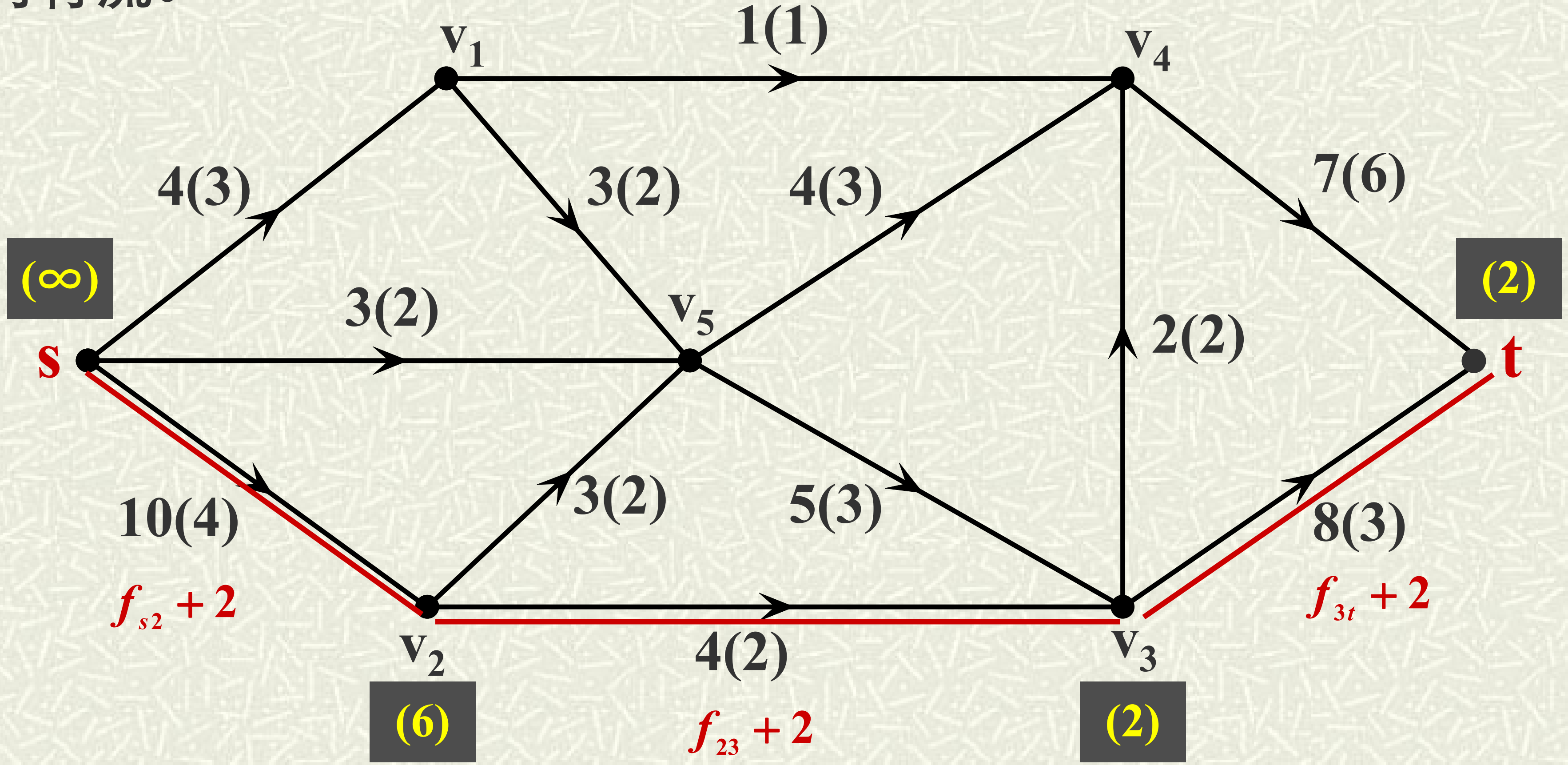
解: (1) 在已知可行流的基础上，通过标号寻找增广链。



存在增广链 $s \to v_2 \to v_3 \to t$

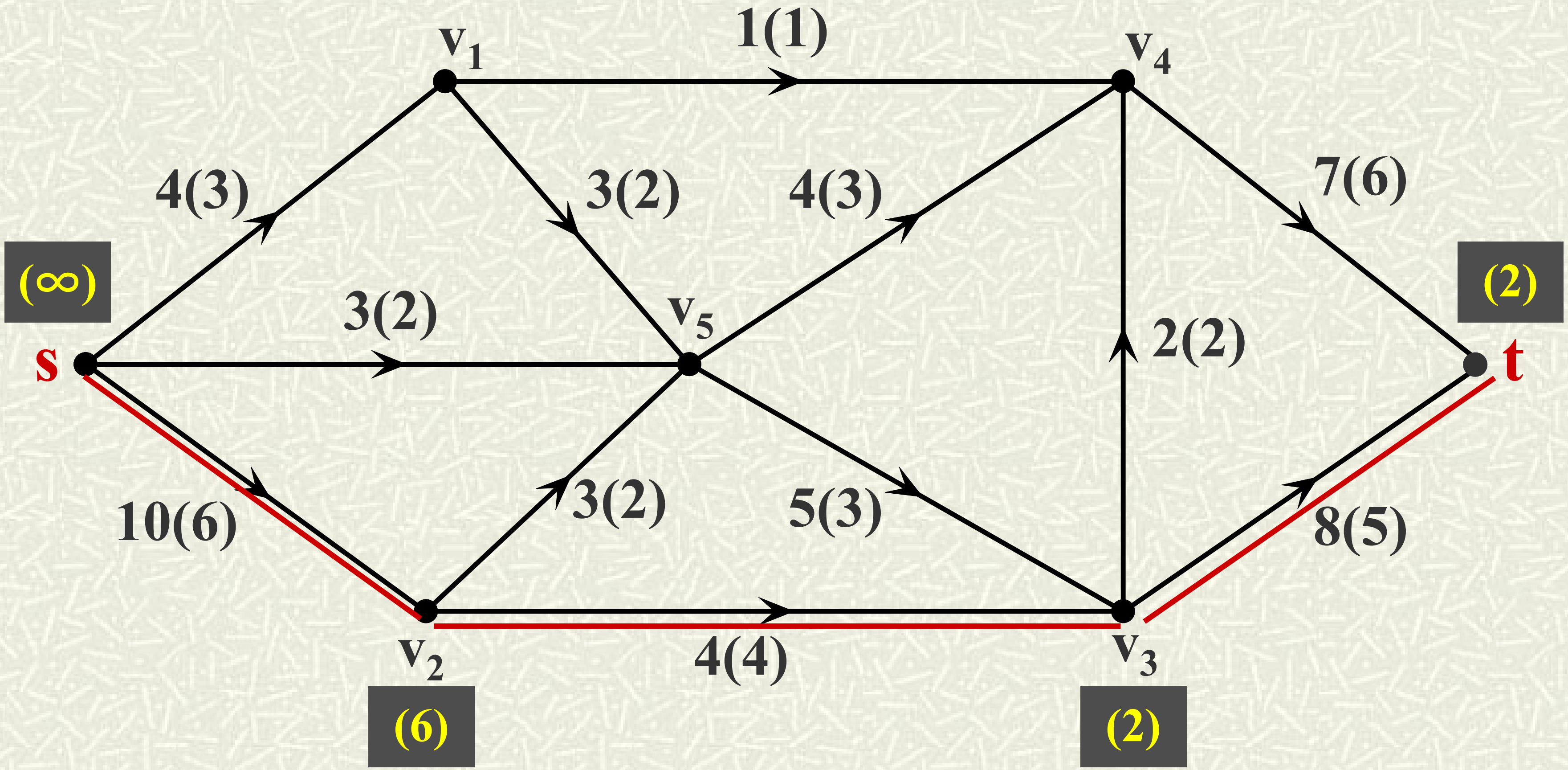
网络的最大流

(2) 修改增广链上的流量，非增广链上的流量不变，得到新的可行流。



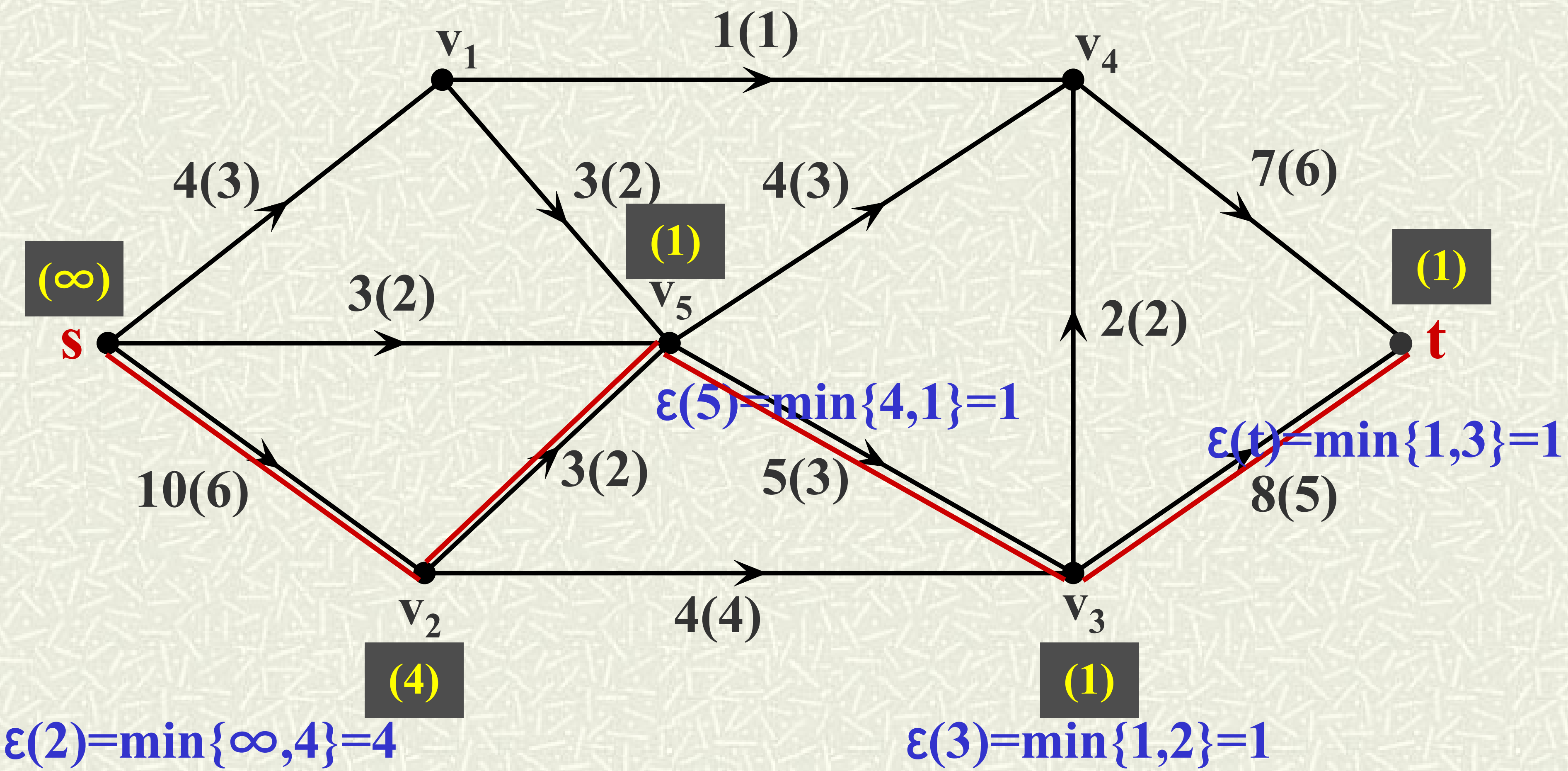
网络的最大流

(3) 擦除原标号，重新搜寻增广链。

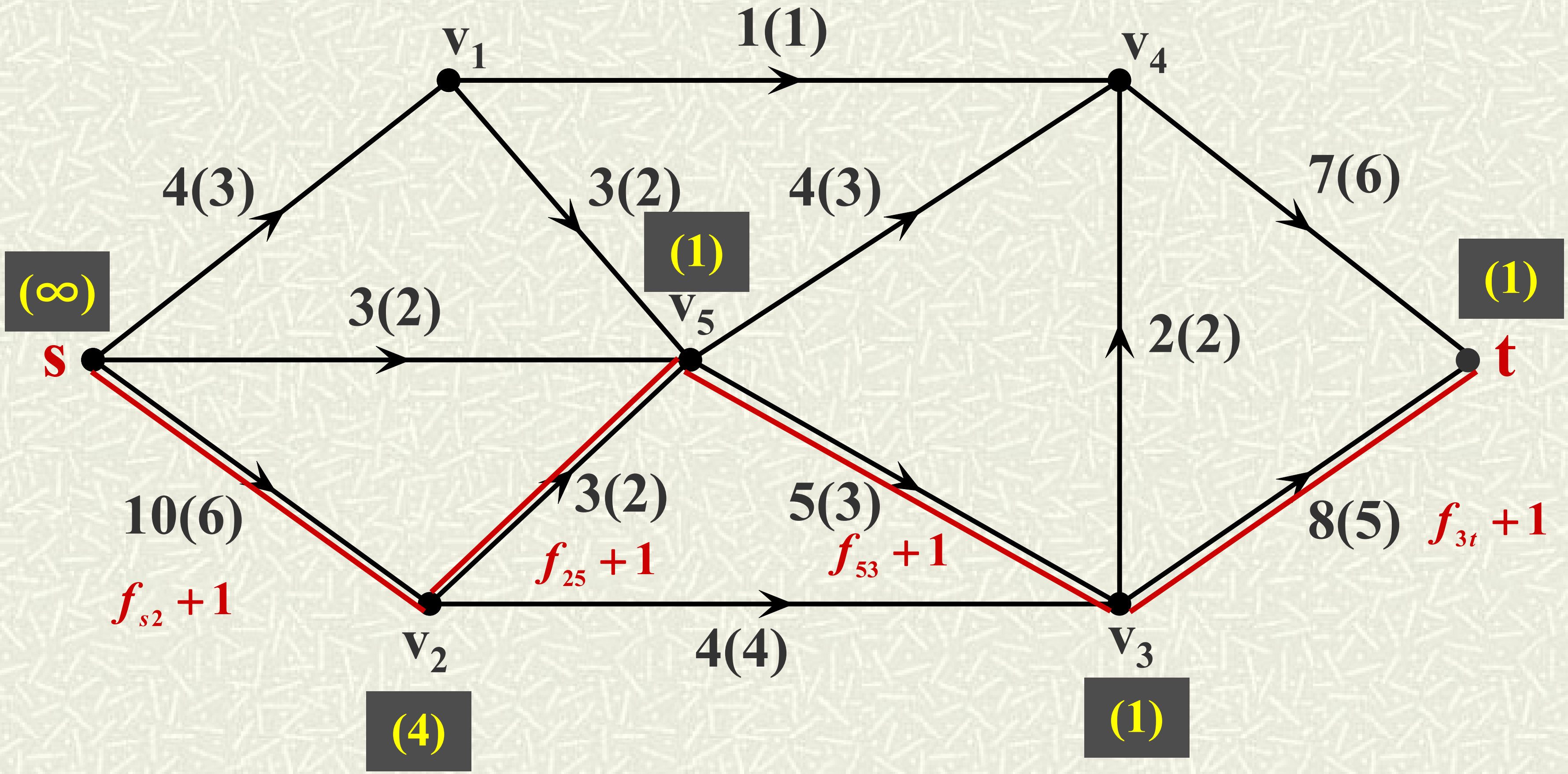


(4) 重新搜寻增广链。

存在增广链：$s \to v_2 \to v_5 \to v_3 \to t$

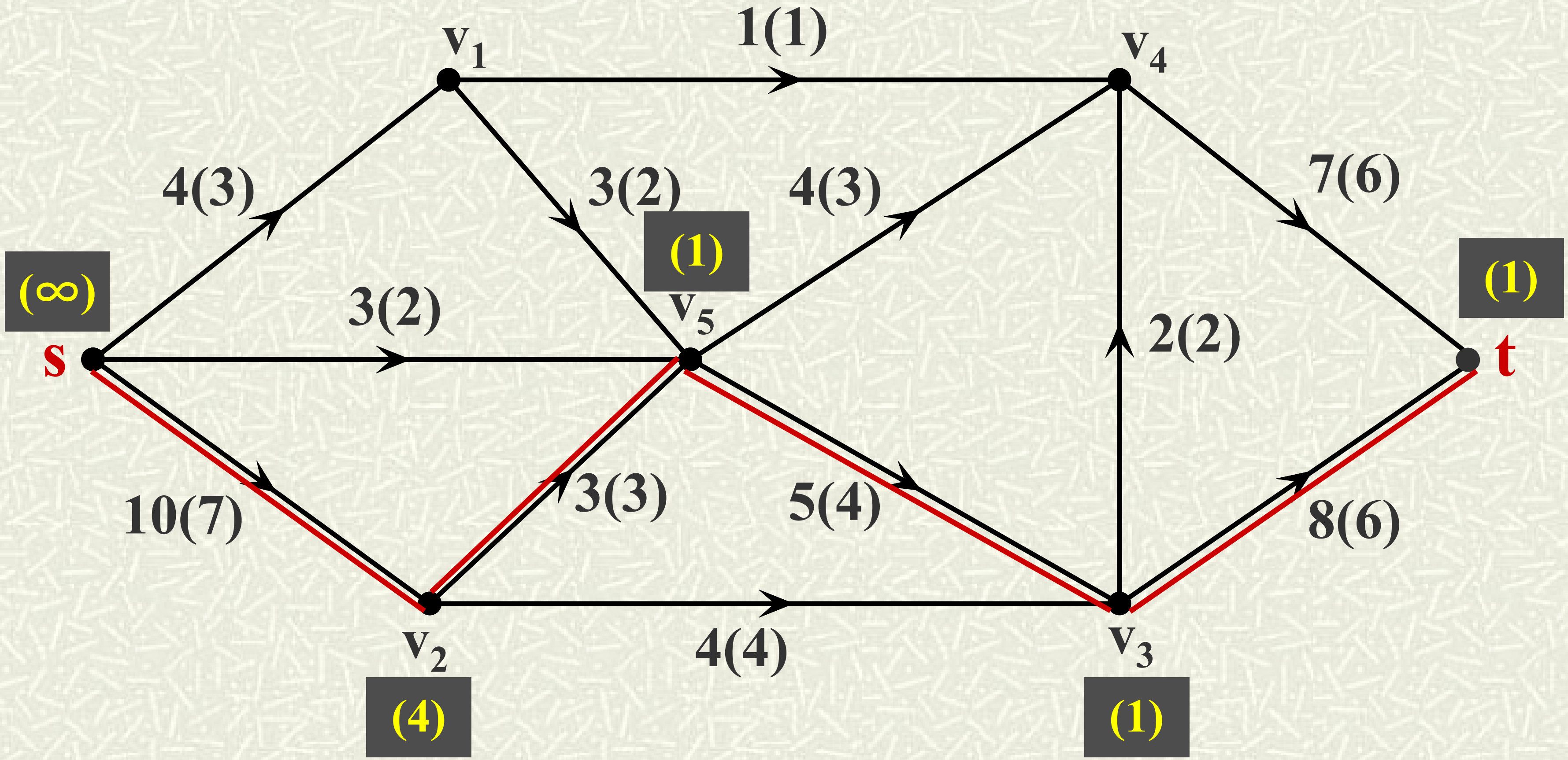


(5) 修改增广链上的流量，非增广链上的流量不变，得到新的可行流。



网络的最大流

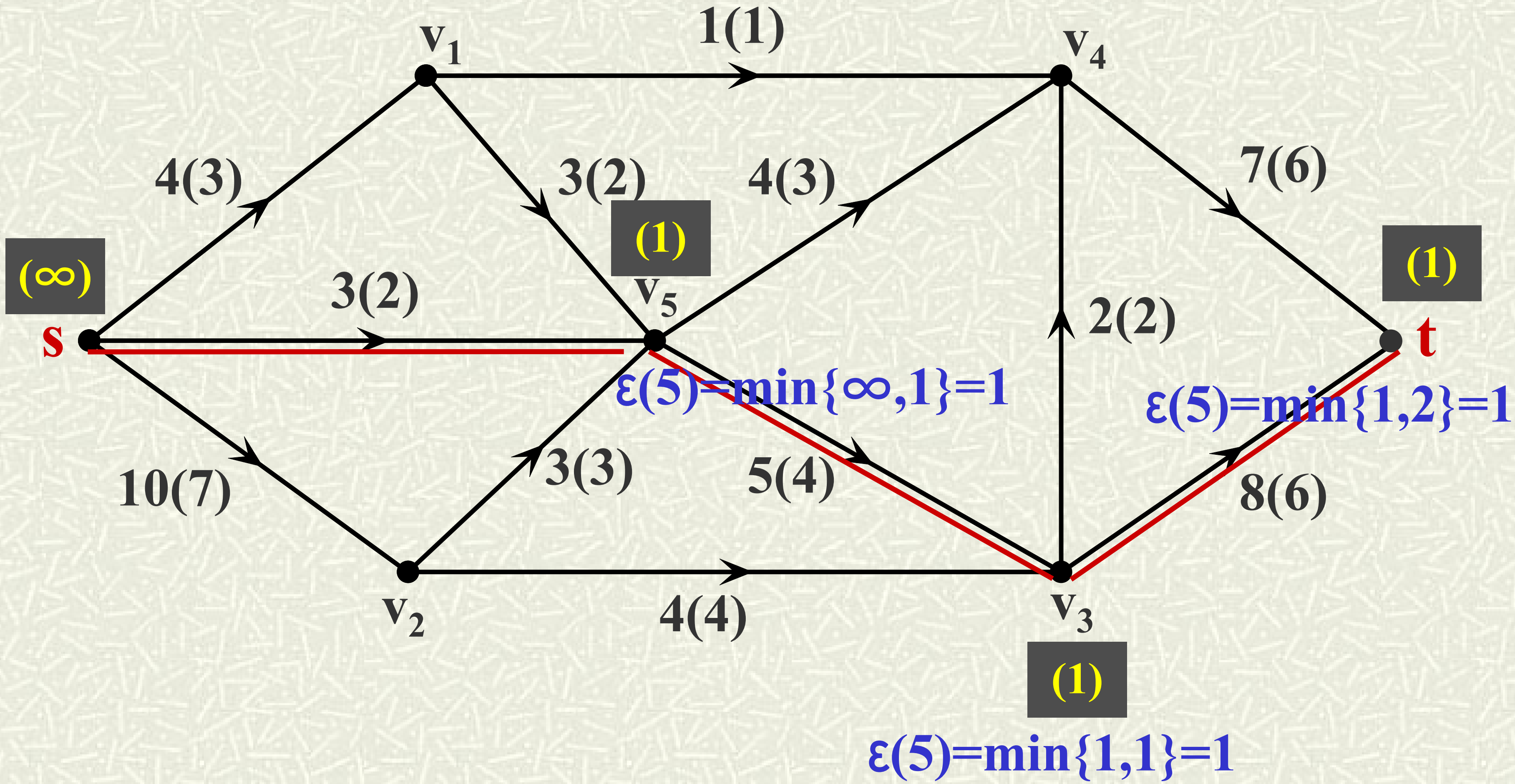
(6) 擦除原标号



网络的最大流

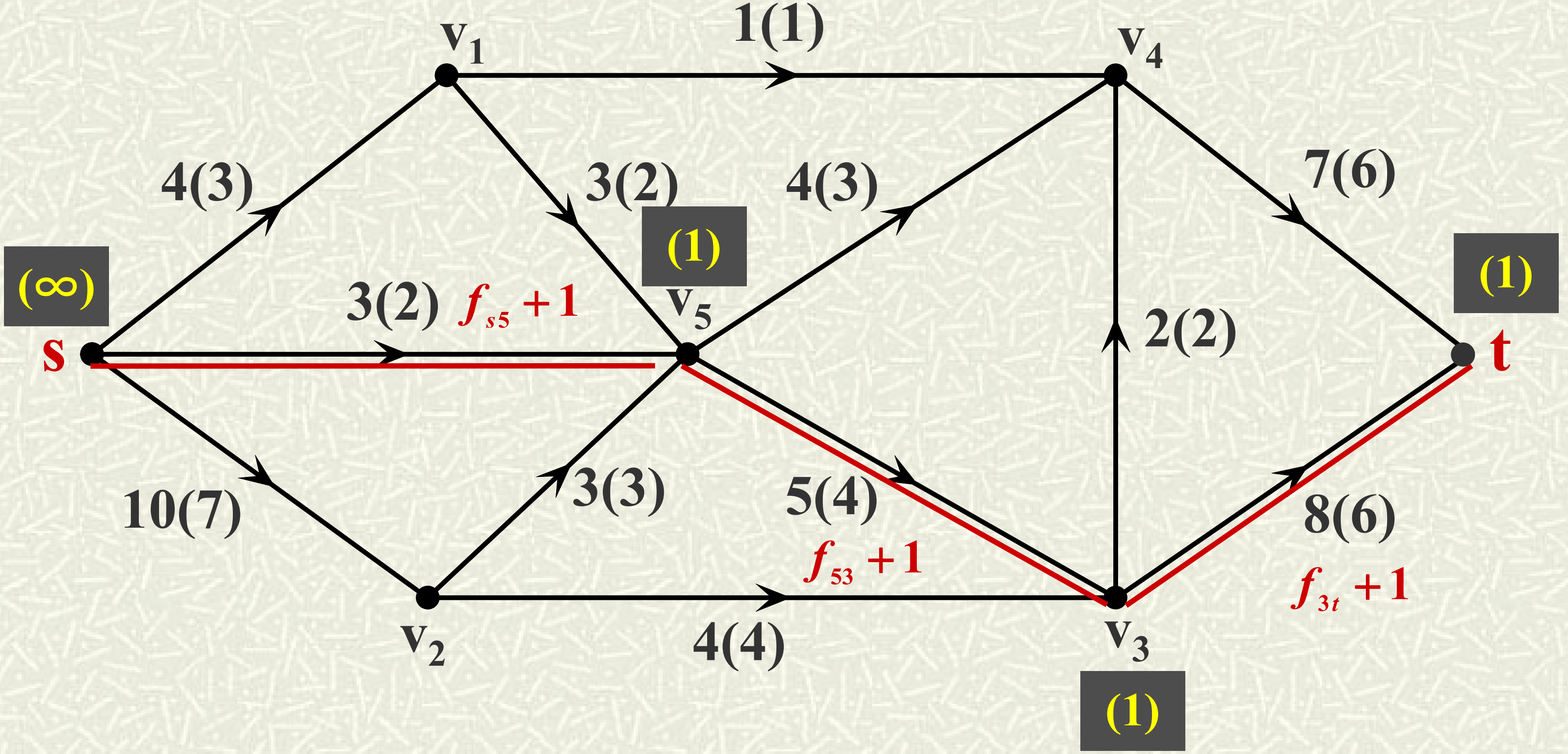
(7) 重新搜寻增广链。

存在增广链：$s \to v_5 \to v_3 \to t$



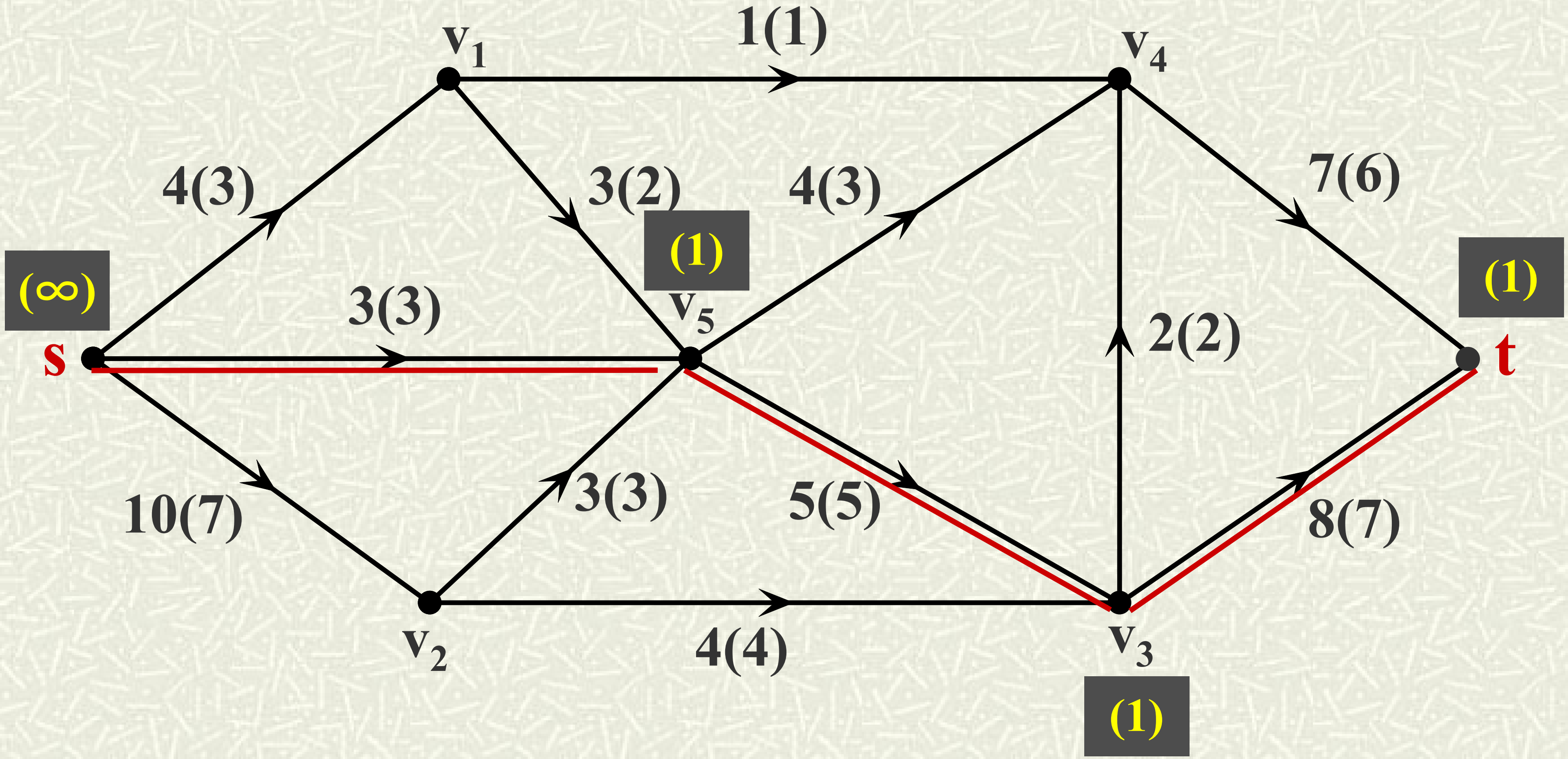
网络的最大流

(8) 调整增广链上的流量，非增广链流量不变，得到新的可行流



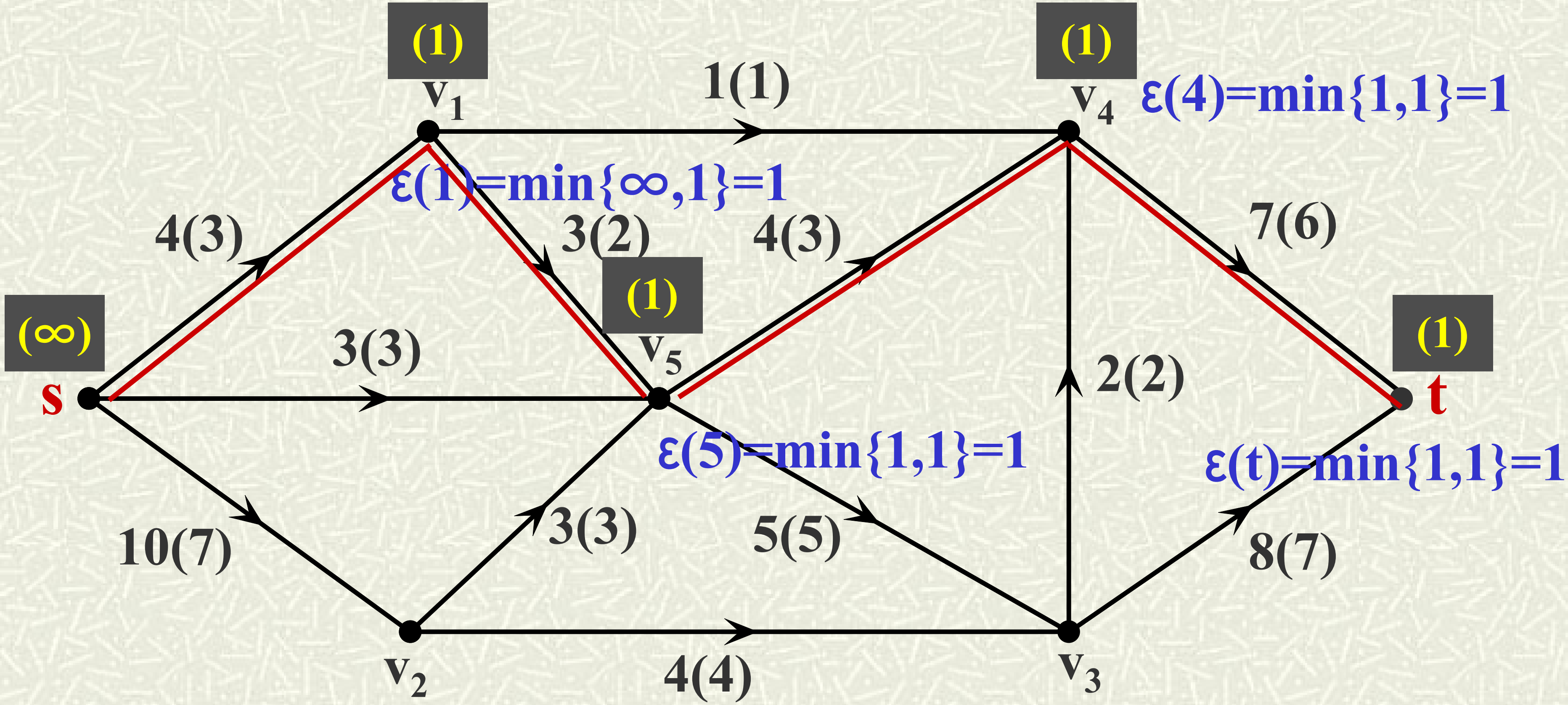
网络的最大流

(9) 擦除原标号



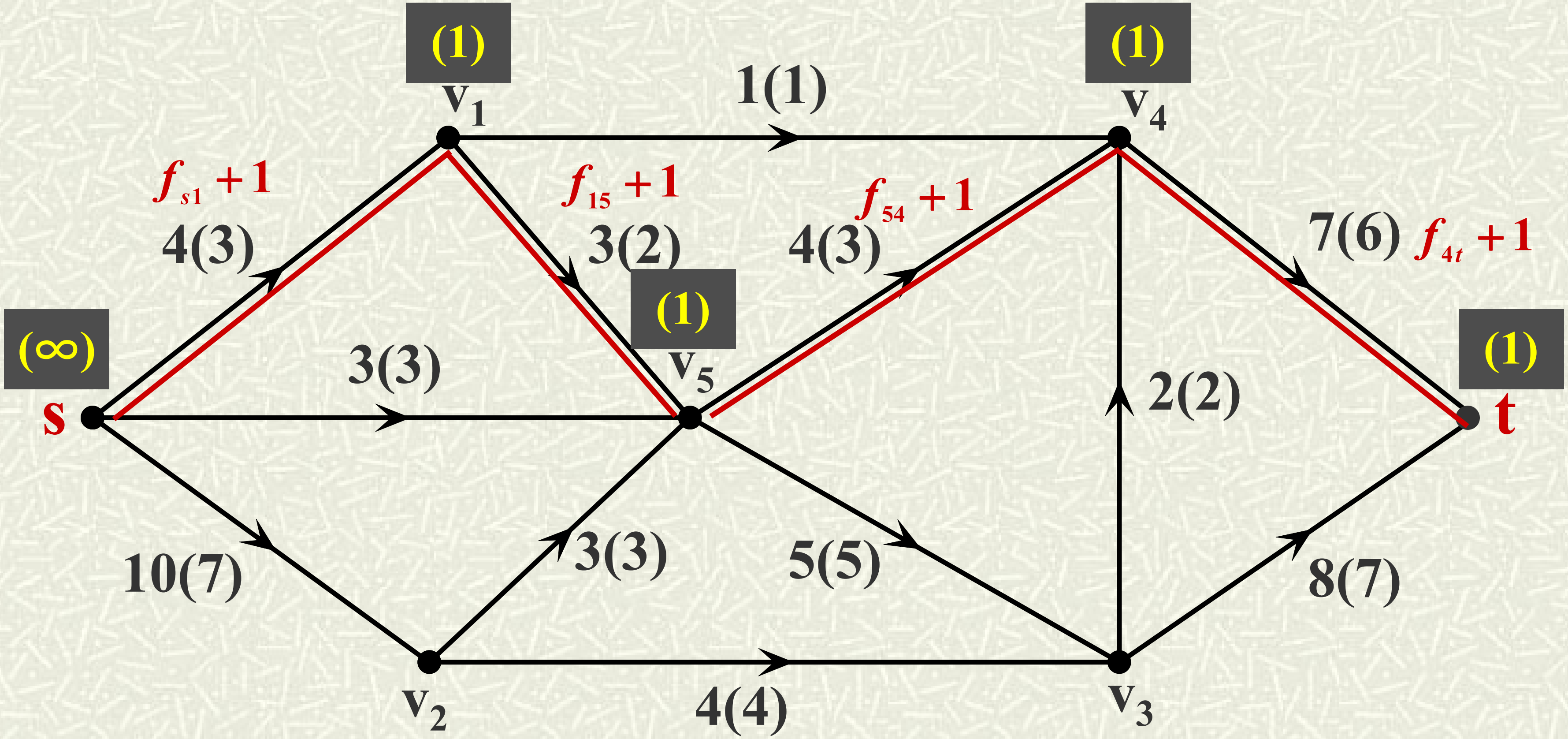
网络的最大流

(10) 重新标号，搜索增广链　　**存在增广链：$s \rightarrow v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow t$**



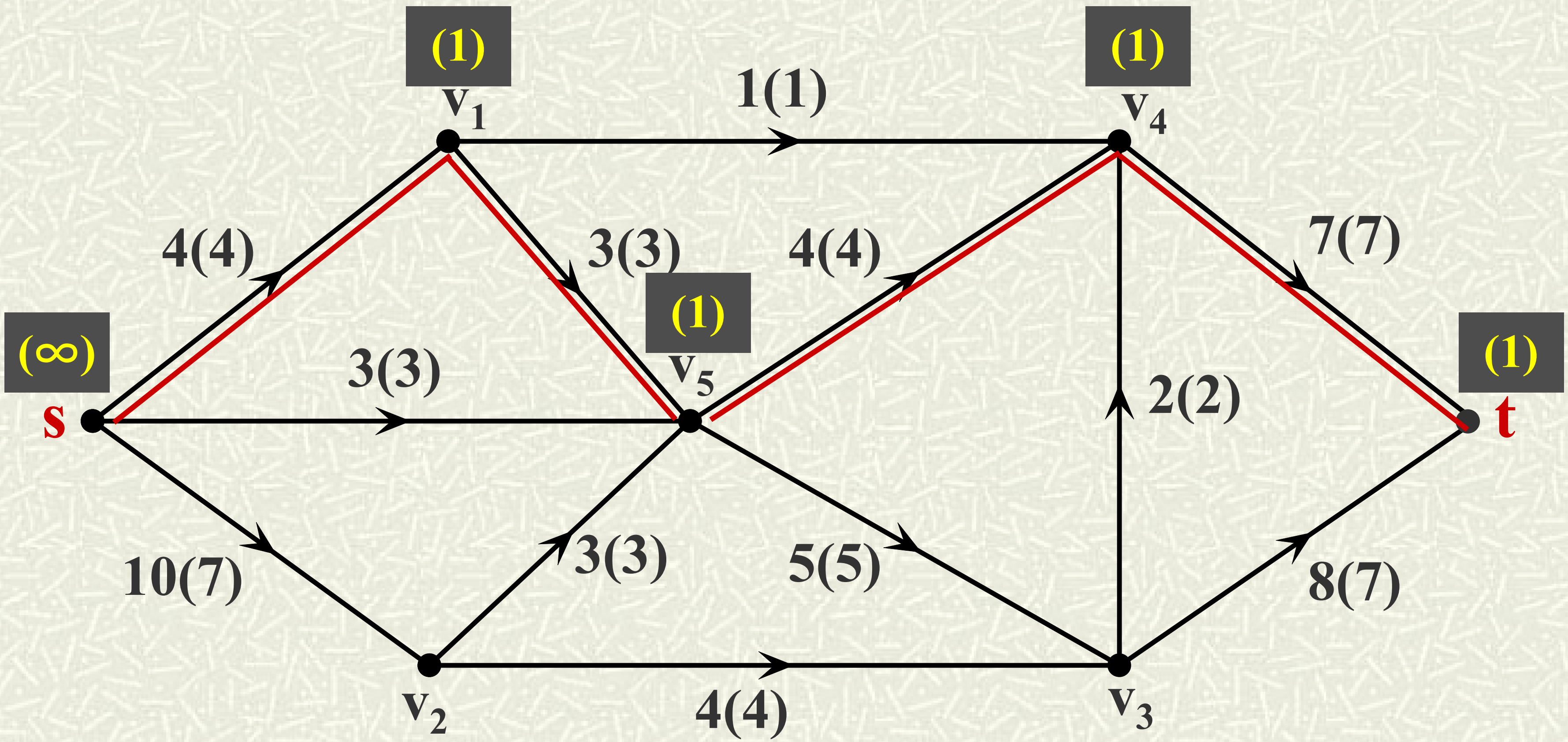
网络的最大流

(11) 调整增广链上的流量，非增广链流量不变，得到新的可行流



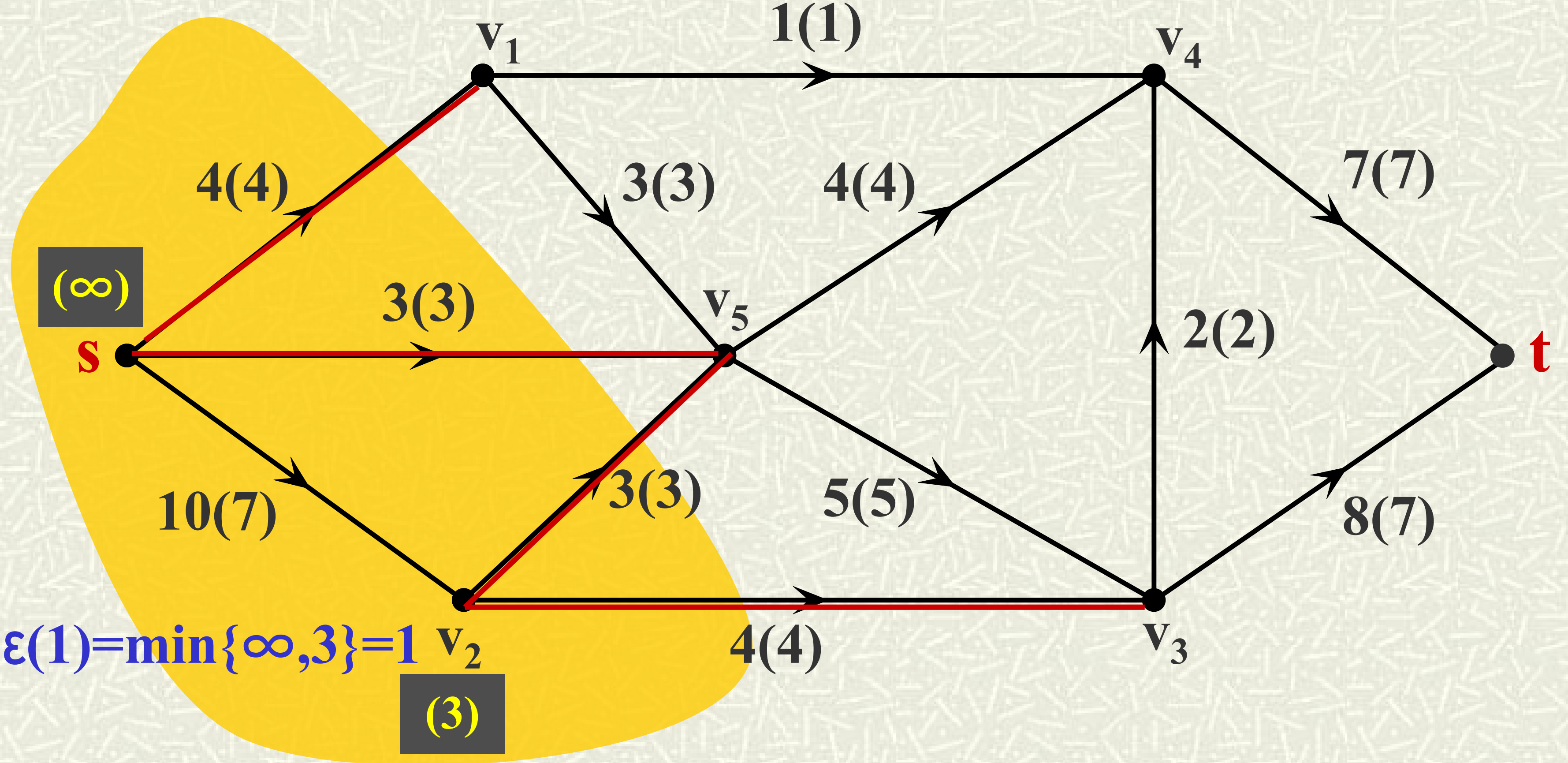
网络的最大流

(11) 擦除标号，在新的可行流上重新标号。



网络的最大流

(11) 擦除标号，在新的可行流上重新标号。



无法标号，不存在增广链，此可行流已为最大流。最大流量为14。

$V=\{s,v_2\}, V'=\{v_1,v_3,v_4,v_5,t\}$, 最小割为 $\{V,V'\}$