同在一片蓝天下，我们用心浇灌，你用心耕耘，同心协力，共创心底的那份辉煌……

2013考研数学

成功数学模拟5套 数学一

合工大（共创）考研

www. hfutky.cn

- 名牌名校的超强辅导专家阵容
- 十八年考研辅导工作的结晶
- 五大顶尖数学名师亲临预测
- 每年最成功最负盛名模拟试卷
- 全国录取过线率最高的辅导团队

合肥共创（原合工大）考研辅导中心
Tel: 0551-2905018 18755102168

成就梦想 共创辉煌

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $x\to 0$ 时，$e^{x^3}-e^{\sin^3 x}$ 与 x^m 是同阶无穷小，则 $m=$（　　）.

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

(2) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 均存在,则（　）.

（A）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0), \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 均存在　（B）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

（C）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_1^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = x^{\frac{4}{3}}-16$，则 $f(x)=$（ ）.

（A）$x^{\frac{1}{3}}-1$　（B）$2x^{\frac{1}{3}}-3$　（C）$3x^{\frac{1}{3}}-5$　（D）$4x^{\frac{1}{3}}-7$

(4) 下列结论中正确的是（　）.

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必收敛

（B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 u_n 必为 $\frac{1}{n}$ 的高阶无穷小（$n\to\infty$）

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必为绝对收敛

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛

(5) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经第一行与第二行对调得矩阵 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 再经第一列与第二列对调得矩阵 $\boldsymbol{C}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 为（　）.

（A）相似、合同且等价（B）相似但不合同（C）合同但不相似（D）等价但不相似

(6) 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}, A\boldsymbol{\alpha}, A^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $A^3\boldsymbol{\alpha}=3A\boldsymbol{\alpha}-2A^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是（　）.

(A) $A^2\boldsymbol{\alpha}+2A\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　(B) $A^2\alpha+3A\alpha$　(C) $A^2\boldsymbol{\alpha}-A\boldsymbol{\alpha}$　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

(7) 设 X 与 Y 相互独立，$f_1(x), f_2(y)$ 及 $F_1(x), F_2(y)$ 分别是概率密度与分布函数，则 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度函数为（　　）

(A) $f_1(x)f_2(x)$　(B) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

(8) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关的充要条件是（　　）.

（A）$E(X)=E(Y)$　（B）$E(X^2)=E(Y^2)$

（C）$D(X)=D(Y)$　（D）$E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-f(x)\ln(1+x)}-1}{\tan x(e^x-1)}=1$，则 $f'(0)=$________.

(10) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)$, n 为正整数,则 $f^{(n)}(0)=$________.

(11) 微分方程 $xy'+y-y^2\ln x=0$ 的通解为____________.

(12) 设 L 是由 $x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x$ 所确定区域的边界，则 $\oint_L \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$_____.

(13)设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $|A^*+2A^{-1}+E|=$_______.

(14) 设 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，概率 $P\{\min\{X^2,Y\}\le 1\}=$________。

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\lambda\sin t,\\ y=1-\lambda\cos t\end{cases}$ 确定，其中 $\lambda\in(0,1)$ 为常数，$t\in(0,2\pi)$.（Ⅰ）求函数 $y(x)$ 的极值;（Ⅱ）求曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(xy+1)e^{xy}$，其中 $f(t)$，当 $t\ne 0$ 时，二阶导数连续，且 $f'(1)=f(1)=e+1$, 求 $f(xy)$.

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 是曲面：$z-1=-(x^2+y^2),(z\ge 0)$ 上侧.

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.（Ⅰ）确定微分方程 $S'(x)+S(x)=f(x)$；（Ⅱ）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.（III）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^{n-1}(2n-1)!}$ 的和.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量组，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 已知线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为：$\vec{\xi}_0+k\vec{\xi}_1=(-1,1,0,2)^T+k(1,-1,2,0)^T$，（Ⅰ）考察 β 是否可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；（Ⅱ）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的一个极大无关组.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其三个线性无关的特征向量,且 $A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4a_3$．（Ⅰ）求矩阵 A 的特征值;（Ⅱ）求可逆 Q,使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} kx^2, & |x|<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

（Ⅰ）确定常数 k；（Ⅱ）求条件密度函数 $f_{Y/X}(y/x)$；（Ⅲ）求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设 X 与 Y 相互独立，且对应的概率密度分别是：

$$X\,\square\, f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \qquad Y\,\square\, f(y;\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}e^{-\frac{2}{\theta}y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$，若 $Z=\min\{X,Y\}$，试求：（Ⅰ）$Z=\min\{X,Y\}$ 的概率密度 $f(z,\theta)$；（Ⅱ）$Z_1,\cdots,Z_n$ 为来自 Z 的样本，求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$，（Ⅲ）考察 $\hat{\theta}_L$ 关于 θ 的无偏性.

数学一（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（ ）.

(A) $f(0)=0, f'(0)=0$ (B) $f(0)=0$ 与 $f'(0)$ 的取值无关

(C) $f'(0)=0$ 与 $f(0)$ 的取值无关 (D)与 $f(0)$ 及 $f'(0)$ 取值均无关

（2）若 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$，则 $a=$（ ）。

（A）-3 （B）$-\dfrac{3}{2}$ （C）$\dfrac{3}{2}$ （D）0

（3）设 $F(x)=\int_{e^{-x^2}}^{1}\mathrm{d}v\int_{-\ln v}^{x^2}f(v)\mathrm{d}u$，则 $xF''(x)-F'(x)=$（ ）

(4) 设 $0\le a_n<\dfrac{1}{n},(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是( )

（A） $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ；（B） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^{\ 2}$ ；

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ ；（D） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与矩阵 A 等阶、合同但不相似的是

（A） $\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(6) 设 A 、B 是 n 阶方阵，齐次方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则在下列方程组中以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为基础解系的方程组是(　　)

(A) $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ (B) $ABX=0$ (C) $BAX=0$ (D) $(A+B)X=0$

(7) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，且 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本方差，则方差 D(S^2) = (　　)

A. $\frac{\sigma^4}{n}$； B. $\frac{2\sigma^4}{n}$ ；. C. $\frac{\sigma^4}{n-1}$ D. $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

(8) 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y\quad V=X+Y$，则随机变量 U 与 V（　）。

（A）不独立；（B）独立；

（C）相关系数为零；（D）相关系数不为零。

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由方程式 $\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{y}\left|\sin t^2\right|\mathrm{d}t+\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t=0$ 确定，那么曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程是________.

(10) 二元函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f(x,y+g(x))=xy+g(y)$ 确定，其中 $g(y)$ 可微，则

$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________

(11) 微分方程 $\sin^2 x\cdot y'+y=\cot x$ 的通解为________；

(12) 曲面 $\sum$ 为圆柱面 $x^2+y^2=1$ 介于两平面 $z=x+2$ 与 $z=0$ 之间的部分，面密度函数 $\rho(x,y,z)=x$ 则 Σ 的质量 $M=$______。

(13) 设向量组 $a_1=(1,\ -1,\ 0)^T, a_2=(4,\ 2,\ a+2)^T,\ a_3=(2,\ 4,\ 3)^T$，$a_4=(1,\ a,\ 1)^T$ 中任何两个向量都可由向量组中另外两个向量线性表出，则 $a=$________.

14. 设两随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $0-1$ 分布

X	0	1
P	$1-p$	p

且方差 $D(X)=\dfrac{2}{9}$，$Z=\begin{vmatrix}X & Y\\ Y & X\end{vmatrix}$，则 $E(Z^4)=$________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

得分	评卷人

(15)（本小题满分 10 分）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

得分	评卷人

(16)（本小题满分 10 分）设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

得分	评卷人

(17)（本小题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1\le x\le 3\\ 0 & 其他\end{cases}$，求 $I=\iint\limits_D f(y+1)f(x+y^2)dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\le 16$。

得分	评卷人

(18)（本小题满分 10 分）设 $f(u)$ 连续，L 为区域 $D:x>y>0$ 内任意简单曲线，计算，$I=\int_L\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}[xf(x^2-y^2)dx-yf(x^2-y^2)dy]$，其中 L 为由 $A(1,0)$ 到 $B(2,\sqrt{3})$ 的光滑曲线段。

得分	评卷人

(19)（本小题满分 10 分）设 $f'''(x)$ 在某领域 $N(0,\delta)$ 内有界，且 $f(0)=f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$，问 α 取何值时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n^{\alpha})$ 必收敛。

得分	评卷人

(20)（本小题满分 11 分）．设 A 是 3 阶实对称矩阵 秩（A）=1 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个特征值。对应的一个特征向量 $\xi_1=(-1\ \ 1\ \ 1)^T$ (I)求 $Ax=0$ 通解 (II)求矩阵

得分	评卷人

(21)（本小题满分 11 分）已知二次型

$f(x_1\ \ x_2\ \ x_3)=x^TAx=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2,

（I）求参数 a 及 A 的特征值；(II)求 $A^3-13A^2+36A+2E$

得分	评卷人

(22)（本小题满分 11 分）设 X 与 Y 的分布律分别是

X	0	1	Y	-1	0	1
P	1/3	2/3	P	1/6	1/6	2/3

且 $P\{X-Y\neq 1\}=1$，试求：(I) (X,Y) 的联合分布律；(II) $Z=X^2+Y^2$ 的分布律；（III）$Cov(X,2X-Y)$

得分	评卷人

(23)（本小题满分 11 分）设 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases} cxe^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 简单随机样本，试确定：(1) 常数 c; (II) 参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；(III) 参数 $b=P\{X\leq 1\}$ 的极大似然估计

数学一（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a+x^2}-1}{e^x-1-x-bx^2}$ 的可去间断点，则常数 a,b 的取值为(　　).

（A）$a=1,b$ 为任意实数　（B）a 为任意实数，$b=\frac{1}{2}$

（C）$a\neq 1,b=\frac{1}{2}$　（D）$a=1,b\neq\frac{1}{2}$

(2) 设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\frac{1}{2e}$ 时，它们之间(　　).

(3) 积分 $I=\int_a^{a+\pi}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ 的值(　　).

（A）是与 a 无关的负的常数　（B）是与 a 无关的正的常数

（C）恒为零　（D）不为常数

(4) 函数 $f(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}$ 在 $P_0(-1,-2,3)$ 点，函数值增加最快的方向是(　　).

（A）$\frac{1}{4}\{1,\ 2,\ 1\}$　（B）$\{1,\ -2,\ 3\}$

（C）$\{-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\}$　（D）$\{\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}\}$

(5) n 阶实矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$，则下列命题正确的是(　　).

（A）$3E-A$ 可逆，$3E+A$ 也可逆　（B）$2E-A$ 可逆，$2E+A$ 也可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 也可逆　（D）$4E-A$ 可逆，$4E+A$ 也可逆

(6) 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$,对任意的 n 维向量 β,向量组 $\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\alpha_3$ 线性相关，则参数 a,b 应满足条件(　　).

(A) $a=-b$　(B) $a=b$　(C) $a=-2b$　(D) $a=2b$

(7) 某人打靶的命中率为$\frac{1}{2}$，当他连射三次后检查目标，发现靶已命中，则他在第一次射击时就已命中目标的概率为(　　).

(A) $\frac{3}{7}$　(B) $\frac{4}{7}$　(C) $\frac{3}{8}$　(D) $\frac{1}{2}$

(8) 设随机变量X,Y相互独立，且均服从参数为λ的指数分布，$P(X>1)=e^{-2}$，则$P\{\min(X,Y)\le 1\}=$(　　).

(A) e^{-2}　(B) $1-e^{-1}$　(C) $1-e^{-4}$　(D) e^{-4}

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在题中横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由 $\cos(x^2+2y)+e^y-x^2y^3=0$ 确定，则 $dy=$________.

(10) 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}dy=$________

(11) 微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}$ 的通解为____________；

(12) 设Σ为有向曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 的下侧，某流体流速 $v=(x^2+1)^2\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}$，则液体在单位时间内穿过$\Sigma$的流量为______________.

(13) 设 A 为三阶矩阵,其特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$,其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,令

(14) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)$，则随机变量$(2X,Y+1)$的概率密度函数 $f_1(x,y)=$______________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（本小题满分 10 分）. 设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(\cos x)-ef(\ln(e+x^2))=2x^2+o(x^2)$，求

得分	评卷人

(16)（本小题满分 10 分）

求函数 $z=f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ 在闭区域 $D:0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}$ 上的最大值与最小值.

得分	评卷人

(17)（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.证明:（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

得分	评卷人

(18)（本小题满分 10 分）

求 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}$ 的和.

得分	评卷人

(19)（本小题满分 10 分）

设 L 为任意包含原点的正向闭曲线，计算

$$I=\oint_L \frac{x}{x^2+y^2}dy+\frac{y}{x^2+2y^2}dx-\oint_L \frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+2y^2}dy$$

得分	评卷人

(20)（本小题满分 11 分）

已知齐次方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \end{cases}$ 的解全是 4 元方程（Ⅱ）$x_1+x_2+x_3=0$ 的解.（1）求 a.（2）求齐次方程组（Ⅰ）的解.

得分	评卷人

(21)（本小题满分 11 分）

设 A 是 n 阶矩阵，A 的第 i 行，j 列元素 $a_{ij}=i\cdot j\ (i,j=1,\cdots,n)$

（1）求 $r(A)$；（2）求 A 的特征值与特征向量，并问 A 能否相似于对角阵，若能，求出相似对角阵，若不能，则说明理由.

得分	评卷人

(22)（本小题满分 11 分）

设随机变量 (ξ,η) 的联合分布律如表所示，

令 $X=\min\{\xi,\eta\},Y=\max\{\xi,\eta\}$

ξ \ η	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.1
1	0.4	0.1	0.1

试求：(I) (X,Y) 联合分布律；

（Ⅱ）协方差 $Cov(X,X+2Y)$；（Ⅲ）$Y=-1$ 时，X 的条件分布律.

得分	评卷人

(23)（本小题满分 11 分）

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 简单随机样本，且 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，试求：(I) $E(X_1Q^2)$ (II) 方差 $D(\bar{X}-Q^2)$

数学一（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}{1+x^n}\sin\pi x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）.

（A）处处可导　　（B）仅有一个点处不可导

（C）有两个点处不可导　　（D）至少有三个点处不可导

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n\sin^n x}{n^2}$， （$|x-k\pi|\le\arcsin\frac{1}{3}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$）　（C）

（A）发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不定

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续的导数，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}=1$，又 $f'(x)=\varphi(x)+\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t$，则（ ）.

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　（B） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $0<a<1$，平面区域 D 由 $x+y=a,x+y=1$ 及 x 轴和 y 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x+y)\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　　）.

（A） $I_1<I_2<I_3$　（B） $I_3<I_2<I_1$　（C） $I_2<I_1<I_3$　（D） $I_3<I_1<I_2$

(5) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是它的伴随矩阵，则行列式 $\left|-2\begin{pmatrix}A^* & 0\\ A+A^* & A\end{pmatrix}\right|$ 的值为（ ）.

(A) $4^n|A|^n$　(B) $2^n|A|^n$　(C) $(-1)^n4^n|A|^n$　(D) $(-1)^n2^n|A|^n$

(6) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$，则三个平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ 两两相交成三条平行直线的充分必要条件是（　）.

(A)秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$；秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$

(B) 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$；秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任两个向量均线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任两个向量均线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

(7) 设概率 $P(A)=P(B)=\frac{3}{5}$,则条件概率 $P(A|B)$ 最小可能取值是（ ）.

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{1}{6}$

（8）在长为 a 的线段上任意取两点 M_1,M_2 长度的数学期望为( ).

(A) a　(B) $\frac{a}{2}$　(C) $\frac{a}{3}$　(D) 0

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9） $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$________.

(10) 微分方程 $y''-4y'+4y=1+xe^{2x}$ 的通解为____________________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$, 且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$______.

(12)设 $z=f(\frac{\pi}{2}-\arctan x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______.

(13) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 A 满足 $B^{-1}=B^*A+A$，则 $A=$______.

(14) 设 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布律为 $P(X=i)=\frac{1}{3},i=-1,0,1$，$Y$ 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P(X+Y\geq 1)=$______。

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}]=1$ 试确定常数 a,b 的值。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设曲面 $S:(x-y)^2-z^2=1$。(Ⅰ) 求 S 在点 $M(1,0,0)$ 处的切平面 p 的方程；(Ⅱ) 证明：原点到 S 上点的最近距离等于原点到 π 的距离。

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）设 $D:x\leq x^2+y^2\leq 2x, y\leq x^2+y^2\leq 2y$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy}$.

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=0$，$f(b)>0$,又它在 $x=a$ 处的右导数且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$。证明：(Ⅰ) $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $f(\xi)=0$；(Ⅱ) $\exists\eta\in(a,b)$ 内使得 $f''(\eta)>0$。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）已知 $f_n(x)$ 满足

$$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x \quad (n\text{ 为正整数})$$

且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，向量 $\beta_1=(0,1,-1)^T,\beta_2=(a,2,1)^T,\beta_3=(b,1,0)^T$ 是齐次次方程组 $Bx=0$ 的 3 个解向量,且方程组 $Ax=\beta_3$ 有解.(Ⅰ) 求 a,b 的值；(Ⅱ) 求方程 $Bx=0$ 的通解.

得分	评卷人

（21）（本题满分 11 分）（I）已知二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+\left(a+4\right)x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$$

经正交变换 $x=Uy$ 化为标准形 $by_1^2+5y_2^2-y_3^2$.（I）求 a,b 的值以及所用的正交变换；（II）若（I）中的二次型是正定的，求 a 的值。

得分	评卷人

（22）（本题满分 11 分）设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{2}, & |x|<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，

且 $Y=X^2-1$，试求：（I）随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$ ；（II）$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设总体的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-a(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

，其中 a 为已知正的常数，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。（Ⅰ）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$；（Ⅱ）求 $\hat{\theta}_L$ 的概率密度函数 $\varphi(x)$；（Ⅲ）讨论 $\hat{\theta}_L$ 的无偏性。

数学一（模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时必有（ ）

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)]\ge0$　　（B）$(x-a)[f(x)-f(a)]\le0$

（C）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge0$　　（D）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le0$

(2) 设 $D=\begin{cases}y-x\ge0\\5x-y\ge0\\x-1\le0\end{cases}$，则 $I=\iint\limits_D(x+6y)d\sigma=$（ ）

(A) $\dfrac{74}{3}$　　(B) $\dfrac{75}{3}$　　(C) $\dfrac{76}{3}$　　(D) $\dfrac{77}{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^1\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=$（ ）

（A）π　　（B）$\dfrac{\pi}{2}-1$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　（D）1

(4) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛,则下列各选项中正确的是(　　)

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$发散；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$条件收敛;

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\ 2}}{1+a_n^{\ 2}}$绝对收敛;　　（D）$\lim_{x\to\infty} na_n = \lambda(\neq 0)$

(5) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且$A^2+2A-3E=0$.若$r(A-E)=1$,，则二次型$x^T Ax$在正交变换下的标准形是

$(A)\ y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.　　$(B)\ y_1^2-3y_2^2-y_3^2-3y_4^2$.

$(C)\ y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$.　　$(D)\ y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.

(6) 设A是$m\times n$矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是(　)

(A)若$AB=O$,则$B=O$　　(B)对任意矩阵B,有$r(AB)=r(B)$

(C)存在B,使得$BA=E$　　(D)对任意矩阵B,有$r(BA)=r(B)$

(7) $X\sim E(\lambda)$(指数分布)，且概率 $P(X>D(X))=e^{-2}$，则参数$\lambda=$（　　）

A. 1/2　　B. 1　　C. 0　　D. 2

(8) 独立的抛 n 次硬币，用 Y 表示正面出现的次数，X 表示反面出现的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. −1

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) 设$z=(x,y)$是由方程$x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$所确定的函数，其中φ具有二阶导数且$\varphi'\neq -1$，$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})$，则$\frac{\partial u}{\partial x}=$________。

(10) 微分方程$xdy-ydx=y^2e^y dy$的通解为________。

(11) 交换积分次序：$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=$__________。

(12) 设$\Omega:\begin{cases} z\geq\sqrt{x^2+y^2} \\ 0\leq z\leq 1\end{cases}$，则$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dv=$____________ 。

(13) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=0$ 解空间的一组规范正交基为__________。

(14) 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1)$, $Y\sim E(\lambda)$ 且 Y 的数学期望为 1/2，则概率 $P(\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2})=$______________ 。

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 9 分**）求椭圆 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 所围平面区域面积。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 11 分**）设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$，且 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt, x\in[0,a]$,试证:无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上绝对收敛.

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）已知函数 $\varphi(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，且 $\varphi(0)=1$， $f(x)=\int_0^{2x}|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t$ ，求 $f'(T)$ 的值。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\neq 0$，证明： $f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 导数连续， $f(\pi)=1$,且方程

$$(\sin x-f(x))\frac{y}{x}dx+f(x)dy=0$$

是全微分方程,求 $f(x)$ 及方程之通解.

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 8 & 2 & 0\\ 0 & a & 6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（I） 求参数 a ； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TA^2x$ 化为标准形。

得分	评卷人

(21)（**本题满分 11 分**）已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 0，1，1，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为 A 的两个互异特征向量，且 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=\vec{\alpha}_2$。(I) 证明：向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关；(II) 求 $A\vec{x}=\vec{\alpha}_2$ 的通解。

得分	评卷人

(22)（**本题满分 11 分**）设 (X,Y) 在方形区域 $G=\{(x,y)/0<x<1,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试求：(I) 概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}$；（II） $Z=|X-Y|$ 的密度函数 $f_Z(z)$；（III）

$Z=|X-Y|$ 均值与方差。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设某批产品的一等品率为 1/10，从这批产品中任取 n 件，求其中一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值不超过 0.02 的概率，（I）$n=400$ 时用切比契夫不等式估计；（II）若要使得一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值的概率不小于 0.95 时，至少需要取多少件产品（利用中心极限定理计算）（$\Phi(1.96)=0.975$）

参考答案

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 1）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	A	B	D	C

(1)【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-e^{\sin^3x}}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}(1-e^{\sin^3x-x^3})}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{\sin^3x-x^3}}{x^m}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3x-x^3}{x^m}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3x-x^3}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2x)}{x^m}$

$=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^{m-2}}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}}=3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}$，所以有 $m-3=2,m=5$.

(2)【略】

(3)【解】由题设有 $xf'(x)=\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},f'(x)=\dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}},f(x)=4x^{\frac{1}{3}}+C,f(8)=1$，故 $C=-7$，

即 $f(x)=4x^{\frac{1}{3}}-7$

(4)【略】

(5)【解】由于 $E(1,2)AE(1,2)=C$，相似、合同且等价.

(6)【解】$A^3\alpha+2A^2\alpha-3A\alpha=(A-E)(A^2+3A)\alpha=0$

(7)【解】$\because F_Z(z)=F_1(z)F_2(z)$，$\therefore f_Z(z)=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8)【解】$E(X+Y)(X-Y)=E(X+Y)E(X-Y)$

$\Rightarrow EX^2-EY^2=(EX)^2-(EY)^2\Rightarrow D(X)=D(Y)$

二、填空题：

【答案】(9) $\underline{-3}$，(10) $\underline{\dfrac{n}{2}(n+1)!}$，(11) $\underline{y^{-1}=cx+\ln x-1}$，(12) $\underline{2\sin1+\dfrac{\pi}{4}\cos1}$，

(13) $\underline{165}$，(14) $\underline{\dfrac{1}{2}}$.

(9)【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{3}f(x)\ln(1+x)}{\tan x(e^x-1)}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，