绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数　学二

（模拟一）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二（模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）. 函数 $f(x)=\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}$ 的无穷间断点个数为（ ）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）下列命题中正确的是（　　）.

（A）设 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $x=x_0$ 一定不是函数 $f(x)$ 的极值点

（B）设 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，则必有 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$

（C）设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)f'(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值必有一个在区间 (a,b) 的内部取得

（D）设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个驻点 x_0，且 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的最小值

（3）设 n 为正整数，$f(x)=\int_0^x \sin^n t\,dt$，则（ ）。

（A）n 为奇数是 $f(x)$ 为周期函数　　（B）n 为偶数时 $f(x)$ 为周期函数

（C）$f(x)$ 必为偶函数　　（D）$f(x)$ 必为有界函数

（4）微分方程 $y''+4y=e^{-2x}+\sin 2x$ 的一个特解形式是（　　）.

（A）$Ae^{-2x}+B\cos 2x+C\sin 2x$　　（B）$Axe^{-2x}+B\cos 2x+C\sin 2x$

（C）$Ae^{-2x}+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（D）$Axe^{-2x}+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（5）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处　　（　　）

（A）连续但偏导数不存在　　（B）偏导数存在但不连续

（C）连续且偏导数存在但不可微　　（D）可微

（6）设在极坐标系下二次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$，那么在直角坐标系下有 $I=$（ ）.

（A）$\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dy$　　（B）$\int_0^1 dx\int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

（C）$\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dy$　　（D）$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x,y)dy$

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列后，再交换第 i 行和第 j 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间关系是（　　）.

（A）等价但不相似　　（B）相似但不合同

（C）相似，合同但不等价　　（D）等价，相似，合同

（8）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，齐次方程式组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则在下列方程组中以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为基础解系的方程组是(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{AB}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(C) $\boldsymbol{BA}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{x}{2t}+\dfrac{x^2}{2t^2})^t$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为________.

（10）曲线 $y=\sqrt{x^2+x+1}, x>0$ 的斜渐近线是__________.

（11）若曲线 $y=1-|x|(a>0)$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$_____.

（12）设 $f(u)$ 为连续函数，且 $x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(x-y-t)dt$，那么 $z(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y})=$________.

（13）若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的解为__________

（14）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 10 分）. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, x\le 0,\\ \sin x,\quad x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^4}}$。

（16）（本小题满分 10 分） 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\\ \int_0^y \cos u^2\,\mathrm{d}u+\int_t^1 \dfrac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

（17）（本小题满分 1 1 分） 设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值。试证明：

（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$ 内使得 $f(\xi)=x_0 f(x_0)$；

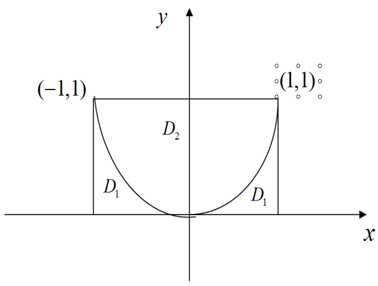
（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$.

（18）　（本小题满分 10 分） 计算 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$。

(19)（本小题满分 10 分） 雨水从屋檐上滴入下面的圆柱形水桶中，当下雨停止时桶内雨水以与水深的平方根成正比的速率向桶外渗漏，如果桶内水面高度在开始的 1 小时内由开始的 81 cm 减少至 64 cm.（Ⅰ）试求出桶内水面的高度与时间的函数关系；（Ⅱ）问需要多少时间桶内的水全部漏掉？

（20）　（本小题满分 10 分） 求函数 $f(x,y)=e^{-xy}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

（21）（本小题满分 11 分） 计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-x^2)\,d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le$ ，



$0 \le y \le 1$,且符号函数 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

(22)（本小题满分 11 分） 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量组，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$.（I）求 $|\boldsymbol{A}|$；（II）证明 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，并求相应的相似变换矩阵.

(23)（**本小题满分 11 分**）设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,8,10)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,2a+3,5)^T$. （I）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及一个极大线性无关组；（II）令 $\boldsymbol{\beta}=(0,1,3,b)^T$，若任意的 4 维列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，求 a,b 的值.

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数　学二

（模拟二）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学二 (模拟二)

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：(1) ～ (8) 小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得增量 Δx 时相应的函数值增量 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(1)=0$，则当 $x\to 0$ 时 $\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $\ln(1+x^4)$ 的（ ）。

（A）高阶无穷小 （B）低阶无穷小 （C）等价无穷小 （D）同阶而非等价无穷小

（2） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导， $f''(0)<0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则有（ ）。

（A） $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)>x$ (B) $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)<x$

(C) $x>0$ 时 $f(x)>x$， $x<0$ 时 $f(x)<x$ (D) $x>0$ 时 $f(x)<x$， $x<0$ 时 $f(x)>x$

（3） 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a 和 b 的值分别为 （ ）

(A) $-2,2$ (B) $2,-2$ (C) $-3,3$ (D) $3,-3$

（4）设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=g(a)=0,\ f(b)=g(b)=2$，且 $f''(x)<0$，$g''(x)>0$，记 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，则（ ）.

（A） $S_2<b-a<S_1$ （B） $S_1<b-a<S_2$

（C） $S_1<S_2<b-a$ （D） $b-a<S_2<S_1$

(5) 设函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$，则函数 $z=f(x,y)$（ ）

(A) 无极值 (B) 有有限个极值 (C)有无穷多个极大值 (D) 有无穷多个极小值

(6) 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\tan 2x$ 在原点处相切，则极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^t f(t-u)du]dt}{x^2(1-e^{-2x})}=$（ ）

(A) 0 (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{1}{12}$ (D) 1

（7） 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$为可逆矩阵， $B=\begin{pmatrix} a_{12}+a_{13} & a_{11} & a_{13}\\ a_{22}+a_{23} & a_{21} & a_{23}\\ a_{32}+a_{33} & a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}$ 又 $P_1=\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$ $P_4=\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

则 $B^{-1}=$ （ ）

(A) $P_2A^{-1}P_4$ (B) $A^{-1}P_2P_3$ (C) $P_1P_3A^{-1}$ (D) $P_4P_1A^{-1}$

（8） 已知 $\boldsymbol\beta_1=\boldsymbol\alpha_1+2\boldsymbol\alpha_2+3\boldsymbol\alpha_3$，$\boldsymbol\beta_2=-\boldsymbol\alpha_1+\boldsymbol\alpha_2$，$\boldsymbol\beta_3=5\boldsymbol\alpha_1+2\boldsymbol\alpha_2+7\boldsymbol\alpha_3$. 则下列结论正确的是( ).

（A）向量组 $\boldsymbol\beta_1$， $\boldsymbol\beta_2$， $\boldsymbol\beta_3$ 线性无关

（B）向量组 $\boldsymbol\beta_1$， $\boldsymbol\beta_2$， $\boldsymbol\beta_3$ 线性相关

（C）仅当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性无关

（D）仅当向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关时，向量组$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$线性相关

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$__________.。

（10）　设函数$f(x)=(x^2-3x+2)^n\sin\dfrac{\pi x^2}{8}$，此处$n$为正整数，那么$f^{(n)}(2)=$________。

（11）设$f'(u)=\ln(1+u^2),g(x)=f(\dfrac{2x-1}{x+1})$，则$g'(0)=$_____.

(12) 设函数$F(x,y)$具有一阶连续偏导数，函数$z=z(x,y)$由方程$F(\dfrac{x}{y},z^2)=xy^2+e^{-z}$决定，则全微分$dz=$______________.

（13）设曲线$y=f(x)$过点(0，-1)，且其上任一点处的切线斜率为$2x\ln(1+x^2)$，则$f(x)=$_______.

(14) 设 3 阶方阵$\boldsymbol{A}$有可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本题满分 10 分**）设$\{x_n\}$满足条件$x_1=2,x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求它的值.

（16）(**本题满分 10 分**）设函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=3$，求$f'(0)$。

（17）(**本题满分 10 分**）(I)在曲线$y=e^x$上找一条切线使得该切线与曲线$y=e^x$、y轴及直线$x=2$围成的图形面积最小；(Ⅱ)求(I)中的图形绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

(18)(**本题满分 10 分**)设函数$z=xf(\dfrac{x}{y})+g(xy,x^2-y)$, 且函数$f(u)$具有二阶连续导数，$g(v,w)$具有二阶连续导数，试求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

（19）(**本题满分 10 分**）设$y=f(x)$在$x=0$处可导，且由方程$xy+e^{-y}=\sin 2x+1$决定，试求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\ln(1+2t^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}f(2\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

（20）(**本题满分 10 分**）设$f(x)$在$[0,1]$上有连续的导数，且$f(0)=0$，证明：$\exists\eta\in[0,1]$使得$f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

(21)　(**本题满分 11 分**）设$f(t)=\iint\limits_D|xy-t|dxdy,t\in[0,1]$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$.

(I) 求$f(t)$的初等函数表达式；(II) 证明：存在$t_0\in[0,1]$，使得$f(t_0)$是$f(t)$在(0,1)内唯一的最小点.

（22）(**本题满分 11 分**）已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$经过正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$后

化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$．求（I）常数 a；（II）正交矩阵 $\boldsymbol{P}$．

（23）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（II）$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵．

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学 二

（模拟三）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二（模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均不存在，那么下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也不存在

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也存在

（C）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 均不存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 中只要有一个存在，另一个必定不存在

（2）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\arctan x^3}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 若 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）.

（A）$f(0)=2, f'(0)$ 不存在　　（B）$f(0)=2$ 不能确定 $f'(0)$ 是否存在

（C）$f(0)=0, f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D）$f(0)=0, f'(0)=2$

（3）设单调函数 $f(x)$ 及其反函数 $f^{-1}(x)$ 都可导，且有 $\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$ 则 $f(x)=$（　　）.

（A）$\sqrt{x}-1$　　（B）$\sqrt{x}+1$　　（C）$2\sqrt{x}-1$　　（D）$2\sqrt{x}+1$

（4）若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$，则 $a=$（　　）.

（A）-3　　（B）$-\dfrac{3}{2}$　　（C）-1　　（D）0

（5）设函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(ax+b-y^2)$ 中常数 a,b 满足条件（　　）时，$(-1,0)$ 为其极大值点.

A　$a<0,b=-2a$　　B　$a=0,b=-2a$　　C　$a>0,b=2a$　　D　$a\geq 0,b=2a$

【答案】选（D）

(6) 设平面区域 $D:x^2+y^2\leq 1$，记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2 d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma,$$

则有（　　）.

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_2>I_1>I_3$　　（C）$I_1>I_3>I_2$　　（D）$I_2>I_3>I_1$

（7）设 $\boldsymbol{A}$ 三阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶可逆阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维非向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不能是（　　）.

（A）$(-\boldsymbol{\alpha}_1,5\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（B）$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（C）$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（D）$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\xi_1=(1,2,-2)^T,\xi_2=(2,1,-1)^T,\xi_3=(1,1,t)^T$ 是非齐次线性方程组的 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解向量,其中 $\boldsymbol{b}=(1,3,-2)^T$，则（　　）.

（A）$t=-1$，必有 $R(\boldsymbol{A})=1$　　　　（B）$t=-1$，必有 $R(\boldsymbol{A})=2$

（C）$t\neq-1$，必有 $R(\boldsymbol{A})=1$　　　　（D）$t\neq-1$，必有 $R(\boldsymbol{A})=2$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[\sin\dfrac{\pi}{n^2}+2\sin\dfrac{2^2\pi}{n^2}+\cdots+(n-1)\sin\dfrac{(n-1)^2\pi}{n^2}]=$_________.

（10）　设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$___________.

（11）设 $C:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\ln\tan(\sec t+\tan t)-\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$,则曲线 C 的弧长是________.

（12）设函数 $z=f(x,y)=\dfrac{\sin(x-1)\cos y-y\cos\sqrt{x+1}}{x+\sin y}$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$____________.

（13）　微分方程 $y^2dx+(x-2xy-y^2)dy=0$ 的通解为____________.

（14）向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 的一个最大线性无关组为________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本小题满分 10 分**）　设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+bx^2)\cos x-a}{\sin^2x\ln(1+x^2)}=c$，求常数 a,b,c 的值.

（16）（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)=x^3-px+q(p>0)$，（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值点与极值；（Ⅱ）证明：当 $-2\left(\dfrac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}<q<2\left(\dfrac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ 时，方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

（17）（**本小题满分 10 分**）设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$F(0)=1$，且 $F(x)f(x)=\cos 2x$，求 $\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

（18）（**本小题满分 1 1 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(xy+1)e^{xy}$，其中 $f(t)$，当 $t\neq0$ 时，二阶导数连续，且 $f'(1)=f(1)=e+1$, 求 $f(xy)$.

（19）（**本小题满分 1 1 分**）设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 通过 $(0,0),(1,2)$ 两点，且 $a<0$.（Ⅰ）试确定 a,b,c 的值使该抛物线与 x 轴围成的图形 D 面积最小；（Ⅱ）求满足（Ⅰ）的图形 D 绕直线 $x=\dfrac{3}{4}$ 旋转一周所得到的旋转体的表面积.

（20）（ **本小题满分 10 分**）计算二重积分

$$I=\iint_D\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}d\sigma，其中 D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi.$$

（21）（**本小题满分 1 1 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且在 $(0,a)$ 内取得最小值，又 $|f''(x)|\le M$，求证 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

（22）**（本小题满分 11 分）** 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^T$ 是二次型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量，（Ⅰ）求 a,b,λ 的值；（Ⅱ）利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

（23）**（本小题满分 1 1 分）** 设 ξ 为 $n(n>1)$ 维单位列向量，即 $\xi^T\xi=1$，$\boldsymbol{A}=\xi\xi^T$.（Ⅰ）证明：$\boldsymbol{A}\xi=\xi$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$；（Ⅱ）证明： $R(\boldsymbol{A})=1,R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-1$；（Ⅲ）计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

20、21全程考研资料请加群712760929