

$Z = |X - Y|$ 均值与方差。

得分	评卷人

(23) (本题满分 11 分) 设某批产品的一等品率为 $1/10$, 从这批产品中任取 n 件, 求其中一等品所占比例与 $1/10$ 之差的绝对值不超过 0.02 的概率, (I) $n = 400$ 时用切比契夫不等式估计; (II) 若要使得一等品所占比例与 $1/10$ 之差的绝对值的概率不小于 0.95 时, 至少需要取多少件产品 (利用中心极限定理计算) ($\Phi(1.96) = 0.975$)

参考答案

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一 (模拟 1)

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时。

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	A	B	D	C

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 【解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - e^{\sin^3 x}}{x^m} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}(1 - e^{\sin^3 x - x^3})}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin^3 x - x^3}}{x^m} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - x^3}{x^m} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x - x^3}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x^2 + x \sin x + \sin^2 x)}{x^m} \\
 &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{m-2}} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(m-2)x^{m-3}} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}, \text{ 所以有 } m-3=2, m=5.
 \end{aligned}$$

(2) 【略】

$$(3) \text{ 【解】 由题设有 } xf'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}, f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} + C, f(8) = 1, \text{ 故 } C = -7,$$

$$\text{即 } f(x) = 4x^{\frac{1}{3}} - 7$$

(4) 【略】

(5) 【解】 由于 $E(1,2)AE(1,2) = C$, 相似、合同且等价。

$$(6) \text{ 【解】 } A^3\alpha + 2A^2\alpha - 3A\alpha = (A - E)(A^2 + 3A)\alpha = 0$$

$$(7) \text{ 【解】 } \because F_z(z) = F_1(z)F_2(z), \therefore f_z(z) = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$$

$$(8) \text{ 【解】 } E(X+Y)(X-Y) = E(X+Y)E(X-Y)$$

$$\Rightarrow EX^2 - EY^2 = (EX)^2 - (EY)^2 \Rightarrow D(X) = D(Y)$$

二、填空题:

$$\text{【答案】 (9) } -3, (10) \frac{n}{2}(n+1)!, (11) y^{-1} = cx + \ln x - 1, (12) 2\sin 1 + \frac{\pi}{4}\cos 1,$$

$$(13) 165, (14) \frac{1}{2}.$$

$$(9) \text{ 【解】 由题设有 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}f(x)\ln(1+x)}{\tan x(e^x - 1)} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

因而有 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -3$.

$$(10) \text{ 【解】 } f(x) = x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{2} x^n + \cdots + n!, f^{(n)}(x)$$

$$= (n+1)!x + \frac{n(n+1)}{2} n!, f^{(n)}(0) = \frac{n}{2}(n+1)!$$

$$(11) \text{ 贝努力方程, } \frac{dy^{-1}}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}, \text{ 由公式可得}$$

$$y^{-1} = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(-\int e^{-\int \frac{1}{x} dx} \frac{\ln x}{x} dx + C \right) = \ln x + Cx + 1$$

$$(12) \text{ 【解】 } \iint_L \cos \sqrt{x^2 + y^2} ds = \cos 1 \int_{L_1} ds + \int_{L_2} \cos \sqrt{2} x ds \int_{L_3} \cos x ds$$

$$= \cos 1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos \sqrt{2} x d\sqrt{2} dx + \int_0^1 \cos x dx = \frac{\pi}{4} \cos 1 + 2 \sin 1$$

(13) 【解】 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$, 所以 $|A| = 6$, 而矩阵 $A^* + 2A^{-1} + E$ 的特

征值为 $\frac{|A|}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} + 1$ 对应的特征值分别为: $9, \frac{11}{3}, 5$; 则 $|A^* + 2A^{-1} + E| = 165$.

(14) 【解】 由于 X, Y 相互独立且均服从 $N(1, \sigma^2)$, 所以

$$P\{\min\{X^2, Y\} \leq 1\} = 1 - P\{X^2 > 1, Y > 1\} = 1 - (1 - P\{X^2 \leq 1\})(1 - P\{Y \leq 1\})$$

$$= 1 - (1 - P\{|X| \leq 1\})(1 - P\{Y \leq 1\}) = 1 - 2(1 - \Phi(0))^2 = \frac{1}{2}$$

三、解答题:

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{【解】 (I) } \frac{dy}{dx} = \frac{\lambda \sin t}{1 - \lambda \cos t}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda \cos t - \lambda^2}{(1 - \lambda \cos t)^3}, \frac{dy}{dx} = 0, t = \pi, \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=\pi} = \frac{-\lambda}{(1 + \lambda)^2} < 0,$$

故 $t = \pi$ 时, 函数 $y(x)$ 有极大值为 $y = 1 + \lambda$;

$$(II) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda \cos t - \lambda^2}{(1 - \lambda \cos t)^3} = 0, \cos t = \lambda, t = \arccos \lambda \text{ 或者 } t = 2\pi - \arccos \lambda, \text{ 由于}$$

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增, 因而 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\lambda(\cos t - \lambda)}{(1 - \lambda \cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号, 故点 $(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1 - \lambda^2}, 1 - \lambda^2)$ 与

$(2\pi - \arccos \lambda + \lambda\sqrt{1 - \lambda^2}, 1 - \lambda^2)$ 均为曲线 $y = y(x)$ 的拐点.

(16) (本题满分 10 分)

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x} = yf'(xy)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f'(xy) + xyf''(xy) = (xy+1)e^{xy}$, 记 $xy = t$, 则有

$f'(t) + tf''(t) = (t+1)e^t$, 即 $(tf'(t))' = (t+1)e^t$, 积分得 $tf'(t) = te^t + C_1$, 解得

$f'(t) = e^t + \frac{1}{t}C_1$, 代入 $f'(1) = e+1$, $C_1 = 1$; 再积分得:

$f(t) = \int (e^t + \frac{1}{t})dt = e^t + \ln|t| + C_2$, 代入 $f(1) = e+1$, 可得 $C_2 = 1$, 即 $f(t) = e^t + \ln|t| + 1$

所以 $f(xy) = e^{xy} + \ln|xy| + 1$

(17) (本题满分 10 分)

【解】 【解】 设曲面 $\Sigma_1: z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧, 又 $\Sigma_\varepsilon: x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2$ 取内侧; 而 $\Sigma_0: z = 0$ 取上侧

由于 $(\iint_{\Sigma+\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_\varepsilon}) \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} &= -\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iint_{\Sigma_\varepsilon} xdydz + ydzdx + zdx dy = \frac{3}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} dV = 4\pi \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\pi - \iint_{\Sigma_1} \frac{xdydz + ydzdx + zdx dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= 4\pi - \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= 4\pi - \iint_{\Sigma_0+\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdx dy + \iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + zdx dy \\ &= 4\pi - 3 \iiint_{\Omega} dV + 0 = 2\pi, \quad (\text{其中: } \iint_{\Sigma_0} xdydz + ydzdx + zdx dy = 0) \end{aligned}$$

(18) (本题满分 10 分)

【证明】 令 $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, & x \in (0, 1), \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 因而 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导,

由 Rolle 定理知 $\exists \xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = \frac{\xi f(\xi) - \int_0^\xi f(x) dx}{\xi^2} = 0$, 即 $\int_0^\xi f(x) dx = \xi f(\xi)$,

故原命题得证.

【另证】 令 $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, 1]$

(19) (本题满分 10 分)

【解】 (I) 易求出收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

$$\text{由于 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$S'(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

$$\text{所以 } S(x) + S'(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = e^x$$

$$\text{即 } S'(x) + S(x) = e^x$$

$$(II) \text{ 解此一阶线性方程, 得通解为 } S(x) = ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x$$

$$\text{又 } S(0) = 1, \text{ 代入上式得 } c = \frac{1}{2}$$

$$\text{故幂级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x. \text{ 两边求导数可得:}$$

$$(III) \text{ 两边求导数可得: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}(2n-1)!} = e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}.$$

(20) (本题满分 11 分)

【解】① 设 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示, 则 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + 0\alpha_4 = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而 $\xi = (k_1, k_2, k_3, 0)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个解,

故 $\xi - \xi_0 = (k_1 + 1, k_2 - 1, k_3, -2)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个解.

由题设 $\xi_1 = (1, -1, 2, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 而 $\xi - \xi_0$ 显然不能由 ξ_1 线性表示, 矛盾!

$\therefore \beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

② 由题设 $Ax = \beta$ 有无穷多个解, 秩 $(A) = \text{秩}(A | \beta) = 4 - 1 = 3$,

从而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 的秩 = 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩 = 3, 故 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 极大无关组由 3 个线性无关向量组成

$$0 = A\xi_1 = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \text{ 故 } \alpha_1 = \alpha_2 - 2\alpha_3$$

$$\text{由 } \xi_0 \text{ 是 } Ax = \beta, \text{ 解得 } \beta = A\xi_0 = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$$

故 $\beta = -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4$, 从而 $(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \beta) \xrightarrow{\text{列}} (0 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ 0)$

$\therefore \text{秩}(0 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ 0) = \text{秩}(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \beta) = 3$,

故 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\therefore \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 的一个极大无关组.

(21) (本题满分 11 分)

【解】(I) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 P 可逆,

因为 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, 5\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{即 } AP = P \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B, \text{于是有 } A \sim B$$

$$\text{由 } |\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -5 & -1 \\ -3 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 4)^2 = 0$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

(II) 因为 $A \sim B$, 所以 B 的特征值为 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

$$\text{当 } \lambda_1 = -4 \text{ 时, 由 } (B + 4E)x = 0, \text{ 得 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } \lambda_2 = \lambda_3 = 4 \text{ 时, 由 } (B - 4E)x = 0, \text{ 得 } \xi_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{令 } P_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{则 } P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} -4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

因为 $P^{-1}AP = B$, 所以

$$P_1^{-1}P^{-1}APP_1 = P_1^{-1}BP_1 = \begin{pmatrix} -4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix}, \text{即 } (PP_1)^{-1}A(PP_1) = \begin{pmatrix} -4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{pmatrix},$$

取 $Q = PP_1 = (-\alpha_1 + \alpha_2, 5\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_3)$, 则.

(22) (本题满分 11 分)

$$\text{【解】(I) } 1 = 2k \int_0^1 x^2 dx \int_x^1 dy = \frac{1}{6}k, \quad k = 6;$$

$$\text{(II) } f_x(x) = \begin{cases} 6x^2(1+x), & -1 < x < 0 \\ 6x^2(1-x), & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{即 } f_x(x) = \begin{cases} 6x^2(1-|x|), & |x| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-|x|}, & |x| < y < 1, (-1 < x < 1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(III) Z = X + Y$$

$$\text{由公式可知 } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx$$

$$f(x, z-x) = 6x^2, \begin{cases} -1 < x < 0, & 0 < z < 1+x \\ 0 < x < 1, & 2x < z < 1+x \end{cases} \quad (\text{作图})$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{\frac{z}{2}} 6x^2 dx = \frac{1}{4}[z^3 - 8(z-1)^3], \quad 0 < z < 2,$$

$$\text{即 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}[z^3 - 8(z-1)^3], & 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(23) (本题满分 11 分)

【解】(I) 由于 X 与 Y 独立性, 则 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z; \theta) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{3}{\theta}z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}, \text{ 所以对应概率密度为}$$

$$f_Z(z; \theta) = \begin{cases} \frac{3}{\theta} e^{-\frac{3}{\theta}z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases};$$

$$(II) \theta \text{ 的似然函数为 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(z_i; \theta) = \frac{3^n}{\theta^n} e^{-\frac{3}{\theta} \sum_{i=1}^n z_i},$$

$$\ln L(\theta) = n \ln 3 - n \ln \theta - \frac{3}{\theta} \sum_{i=1}^n z_i, \quad \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{3}{\theta^2} \sum_{i=1}^n z_i = 0, \text{ 因此解得极大}$$

$$\text{似然估计为 } \hat{\theta}_L = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n z_i = 3\bar{Z};$$

$$(III) E(\hat{\theta}_L) = 3E(\bar{Z}) = 3E(Z) = 3 \frac{\theta}{3} = \theta.$$

数学一 (模拟 2)

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	B	D	A	D	C

$$(1) \text{【解】: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = f'(0), \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(|x|) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(-x) - f(0)}{x} = -f'(0),$$

所以必有 $f'(0) = 0$ 与 $f(0)$ 的取值无关.

(2) 【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}} = e^{\frac{a}{2}},$

$$\int_{-a}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}x} dx = -2x e^{-\frac{1}{2}x} \Big|_{-a}^{+\infty} + 2 \int_{-a}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} dx = 2(-a+2)e^{\frac{a}{2}}, a = \frac{3}{2}.$$

(3) 【解】 先交换次序, 再求导。

(4) 【略】(B)

(5) 【解】 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3),$ 可知矩阵 A 的特征是

3, -3, 0, 故秩 $r(A) = 2$, 二次型 $x^T A x$ 的正、负惯性指数均为 1。

(A) 中矩阵的秩为 1, 不可能与矩阵 A 等阶; (C) 中矩阵的特征值为 3, -3, 0. 与矩阵 A 不仅等价、合同, 而且也是相似的, 不符合题意。对于 (D), 记其矩阵为 D , 由

$$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1),$$
 可知 D 的特征值为 1, -1, 0. $x^T A x$ 与

$x^T D x$ 的正、负惯性指数一样, 所以它们合同但不相似 (因为特征值不同), 符合题意。注意, (B) 中矩阵的特征值为 1, 4, 0, 正惯性指数 $p = 2$, 负惯性指数 $q = 1$, 与 A 即不合同也不相似, 但等阶 (因为秩相等)。

(6) 【略】(A)

(7) 【解】 利用 $\chi^2 \sim \chi^2(n), E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n,$

(8) 【略】(C)

二、填空题:

(9) 【解】 由题设可知 $x=0$ 时 $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 方程式两边对 x 同时求导可得

$$y' |\sin y|^2 + \cos x \sqrt{1 + \sin^3 x} = 0, \text{ 将 } x=0, y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ 代入可得 } y'|_{x=0} = -\sqrt{2}, \text{ 因而相应的法线}$$

$$\text{方程为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(10) 【解】: 记 $u = x, v = y + g(x), \begin{cases} x = u \\ y = v - g(u) \end{cases} \therefore f(u, v) = u(v - g(u)) + g(v - g(u))$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial u} = v - g(u) - u g'(u) + g'(v - g(u))(-g'(u)), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 1 - g''(v - g(u)) g'(u)$$

(11) 【解】 $y = \cot x + 1 + c e^{\cot x};$

(12) 【解】 $M = \iint_{\Sigma} x dS$, 化为 zox 上二重积分, $D_{xy}: z = x+2, z=0, x=\pm 1$ 围成,

$$M = 2 \iint_D x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx dy = \pi$$

(13) 【解】 $a = 1$

(14) 【解】: $Z = X^2 - Y^2$, $p = \frac{1}{3}$ 不难得到 由此

Z	-1	0	1
P	2/9	5/9	2/9

$$E(Z^4) = \frac{4}{9}.$$

三、解答题:

(15) 【解】解法一: 由题设有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+bx-(1+c \sin x)e^x}{x^3} = 0$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 0} [a+bx-(1+c \sin x)e^x]$$

$$= a-1=0, a=1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+bx-(1+c \sin x)e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}, b-1-c=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2c \cos x)e^x}{6x} = 0, c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}.$$

解法二: $a+bx-(1+c \sin x)e^x = a+bx-[1+cx-\frac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$$= a-1+(b-c-1)x-(c+\frac{1}{2})x^2-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c)x^3+o(x^3), \text{ 所以有}$$

$$a=1, b-c-1=0, c+\frac{1}{2}=0, \frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c=0, \text{ 即 } a=1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}.$$

(16) 【证明】: 原不等式等价于 $\cos x \ln \sin x - \sin x \ln \cos x < 0$ ($0 < x < \frac{\pi}{4}$),

令 $f(x) = \cos x \ln \sin x - \sin x \ln \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \sin x \ln \sin x - \cos x \ln \cos x, \text{ 当 } x \in (0, \frac{\pi}{4}) \text{ 时}$$

$0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}, \ln \cos x < 0, \ln \sin x < 0, f'(x) > 0$, 因而函数 $f(x)$ 在区间

$(0, \frac{\pi}{4}]$ 上单增, 即 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时有 $f(x) = \cos x \ln \sin x - \sin x \ln \cos x < f(\frac{\pi}{4}) = 0$, 即

$$\cos x \ln \sin x - \sin x \ln \cos x < 0.$$

(17) 【解】 $f(y+1) = \begin{cases} y+2 & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}, f(x+y^2) = \begin{cases} x+y^2+1 & 1 \leq x+y^2 \leq 3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

记 D_1 为 $f(y+1)f(x+y^2)$ 的非零值区域为 $D_1: \begin{cases} 1 \leq x+y^2 \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$$I = \iint_D f(y+1)f(x+y^2)dx dy = \iint_{D_1} (y+2)(x+y^2+1)dx dy = \int_0^2 dy \int_{1-y^2}^{3-y^2} (y+2)(x+y^2+1)dx = 36$$

(18) 【解】 由于 $\frac{f(u)}{\sqrt{u}}$ 连续, 故存在原函数, 设为 $F(u)$, 即 $dF(u) = \frac{f(u)}{\sqrt{u}} du$

$$\therefore I = \frac{1}{2} \int_L \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}} [f(x^2-y^2)dx^2 - f(x^2-y^2)dy^2]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_L \frac{f(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 - y^2}} d(x^2 - y^2) = \frac{1}{2} \int_L dF(x^2 - y^2) \\
 &= \frac{1}{2} F(x^2 - y^2) \Big|_{(1,0)}^{(2,\sqrt{3})} = \frac{1}{2} (F(1) - F(1)) = 0
 \end{aligned}$$

(19) 【解】由题设, 有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0) = 0$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展为二阶泰勒公式, 则有

$$f(x) = \frac{1}{3!} f'''(\theta x) x^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

令 $x = n^\alpha$, 则

$$f(n^\alpha) = \frac{1}{3!} f'''(\theta n^\alpha) n^{3\alpha}$$

由 $f'''(x)$ 在某内有界, 则当 $\alpha < 0, n \rightarrow \infty$ 时, $f'''(\theta n^\alpha)$ 有界, 即 $\exists N$ 与 $M > 0$, 使当 $n > M$ 时, $|f'''(\theta n^\alpha)| \leq M$. 于是

$$|f(n^\alpha)| \leq \frac{1}{3!} M n^{3\alpha} = \frac{M}{3!} \frac{1}{n^{-3\alpha}}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3\alpha}$ 只当 $-3\alpha > 1$ 即 $\alpha < -\frac{1}{3}$ 时收敛, 由比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^\alpha)$ 在 $\alpha < -\frac{1}{3}$ 时必收敛且绝对收敛。

(20) 【解】(I) 因 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 1。故 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 是 A 的二重特征值。设 A 属于 0 特征向量为 $\xi = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ 由 $\xi \perp \xi_1$ 得方程组 $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 得基础解系 $\xi_2 = (1 \ 1 \ 0)^T$ $\xi_3 = (1 \ 0 \ 1)^T$ 故 ξ_2, ξ_3 是 $Ax=0$ 两个线性无关解。由秩 $(A)=1$ 知 ξ_2, ξ_3 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

故 $Ax=0$ 通解为 $k_1 \xi_2 + k_2 \xi_3 = k_1 (1 \ 1 \ 0)^T + k_2 (1 \ 0 \ 1)^T$

(II) 由 (2) 知 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 令 $P = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$, 则 P 是可逆矩阵, 且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{故 } A = P \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(21) 【解】(I) 由已知 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$

$$\therefore R(A) = 2 \quad \therefore |A| = 0 \quad \Rightarrow a = 3$$

$$\text{由 } |\lambda E - A| = 0 \quad \text{解得 } \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 9$$

(II) 由 (1) 知 A 与矩阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 4 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$ 相似

即存在正交变换 $x = Py$ 使 $P^{-1}AP = \Lambda$, 从而使 $f(A) = A^3 - 13A^2 + 36A + 2E$ 与 $f(\Lambda) = \Lambda^3 - 13\Lambda^2 + 36\Lambda + 2E$ 也相似,

所以

$$f(A) = Pf(\Lambda)P^{-1} = P \cdot 2EP^{-1} = 2E$$

(22) 【解】

(I) 由于 $P\{X-Y=1\}=0$, 所以(II) $Z = X^2 + Y^2$ 的分布律为

Z	0	1	2
P	1/6	1/6	2/3

X \ Y	-1	0	1	P
0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	0	1/2	2/3
P	1/6	1/6	2/3	

$$(III) \operatorname{Cov}(X, 2X-Y) = 2D(X) - \operatorname{Cov}(X, Y) = 2 \times \frac{2}{9} - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{9}.$$

$$(23) \text{【解】} (I) 1 = \int_0^{+\infty} cxe^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = c \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = -\frac{c}{2} \theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}} d\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) = \frac{c}{2} \theta, \text{ 所以 } c = \frac{2}{\theta};$$

$$\text{概率密度为 } f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(II) L = \prod_{i=1}^n f(z_i; \theta) = \frac{2^n}{\theta^n} (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad x_i > 0$$

$$\ln L = n \ln 2 - n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{d \ln L}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\hat{\theta}_L = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(III) 由于 $b = P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{2}{\theta} xe^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}}$ 关于 θ 的减函数, 由极大似然估计的性质

$$\text{可知 } b \text{ 的极大似然估计为 } \hat{b} = 1 - e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_L}} = 1 - e^{-\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}}.$$

数学一 (模拟 3)

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时。

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	D	C	B	C

(1) 【解】 由题设知

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{a+x^2} - 1) = 0, a=1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x - 1 - x - bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1 - 2bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 2b} \text{ 存在, 故 } b \neq \frac{1}{2}$$

(2) 【解】 两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2 - \ln x = 0$, 令

$$f(x) = kx^2 - \ln x, f'(x) = 2kx - \frac{1}{x} = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2k}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2k),$$

当 $k > \frac{1}{2e}$ 时, 有 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}}) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 因此方程 $kx^2 - \ln x = 0$ 无

实根, 即两个曲线无交点.

【注】本题也可以用取特殊值法, 令 $k=1$, 则讨论起来更方便.

(3) 【解】因为 $\ln(3+\sin 2x)\sin 2x$ 是周期为 π 的周期函数, 故该积分与 a 无关, 因而

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(3+\sin 2x)\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \ln(3+\sin 2x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x} dx > 0, \text{ 故选 B.}$$

(4) 【解】 $\text{grad} f = -\frac{y+z}{(x+z)^2}i + \frac{1}{(x+z)}j + \frac{x-y}{(x+z)^2}k = \frac{1}{4}\{-1, 2, 1\}$

(5) 【解】由于 A 满足 $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, 则 λ 为 1 或 2 或 3, 所以 $E-A$ 、 $2E-A$ 、 $3E-A$ 可能不可逆, 选(D)

(6) 【解】由已知条件 $\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$ 知

$$(\alpha_1 + a\beta, \alpha_2 + b\beta, \alpha_3) = (\alpha_1 + a\beta, \alpha_2 + b\beta, \frac{1}{3}(2\alpha_2 - \alpha_1)) = (\alpha_1, \alpha_2, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

对任意的 n 维向量 β , 当向量 $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 线性无关时, 向量组 $\alpha_1 + a\beta, \alpha_2 + b\beta, \alpha_3$ 线性相关

对应的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = 0$, 从而有 $a = -2b$.

(7) 【解】设 A 表示事件“至少有一次命中”, B 表示事件“第一次命中”,

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{1-P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{4}{7}$$

(8) 【解】 $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = e^{-\lambda} = e^{-2}$, 故 $\lambda = 2$.

$$P\{\min(X, Y) \leq 1\} = 1 - P\{\min(X, Y) > 1\} = 1 - P(X > 1)P(Y > 1) = 1 - e^{-4}.$$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中横线上.

(9)

$$\frac{2xy^3 + 2x\sin(x^2 + 2y)}{e^y - 2\sin(x^2 + 2y) - 3x^2y^2} dx, (10) \frac{1}{2}(e^4 - e), (11) y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}, (12) \frac{\pi}{3}$$

(13) $\begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, (14) \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}, y-1).$

(9) 【解】对等式两边同时求微分可得

$$-\sin(x^2+2y)(2x dx+2 dy)+e^y dy-2xy^3 dx-3x^2y^2 dy=0,$$

$$\text{解得 } dy = \frac{2xy^3+2x\sin(x^2+2y)}{e^y-2\sin(x^2+2y)-3x^2y^2} dx$$

(10) 【解】用极坐标

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2} (e^4 - e) d\theta = \frac{1}{2} (e^4 - e)$$

(11) 略.

(12) 【解】流量 $Q = \iint_{\Sigma} (x^2+1)^2 dz dx + (z-1) dx dy$, 添加平面 $S_1: z=1$ 上侧, 由 $\Sigma + S_1$ 围成 Ω ,

$$\Sigma = \iiint_{\Omega} dv + \iint_{D_{xy}} 0 dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz = \frac{\pi}{3}$$

(13) 【解】因为 A 的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, 所以为 A^* 的特征值为 $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = -2$,

$A^* + 3E$ 的特征值为 $4, 1, 1$, 又因为 $4\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3$ 也为 A 的线性无关的特征向量, 所以

$4\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3$ 也是 $A^* + 3E$ 的线性无关的特征向量, 所以

$$P^{-1}(A^* + 3E)P = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(14) 【解】随机变量 $(2X, Y+1)$ 的分布函数为

$$F_1(x, y) = P(2X \leq x, Y+1 \leq y) = P(X \leq \frac{x}{2}, Y \leq y-1) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} \int_{-\infty}^{y-1} f(x, y) dx dy,$$

$$\text{因此 } f_1(x, y) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}, y-1\right).$$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 【解】令 $x \rightarrow 0$ 可得 $f(1) - ef(1) = 0, f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\cos x) - ef(\ln(e+x^2))}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(1+\cos x - 1) - f(1)}{x^2} - e \frac{f[1+\ln(1+\frac{x^2}{e})] - f(1)}{x^2} \right) = -\frac{3}{2} f'(1) = 2, \text{ 所以}$$

$f'(1) = -\frac{3}{4}$, $f(x)$ 为偶函数, $f'(x)$ 为奇函数, 从而有 $f(-1) = 0, f'(-1) = \frac{3}{4}$, 故所求

的切线方程为 $y = \frac{3}{4}(x+1)$.

(16) (本小题满分 10 分)

$$\text{【解】 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x - \sin(x-y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos x - \cos(x-y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin(x-y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y)$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \sin x + \sin y = 0$$

故在区域内部无零点, 即内部无极大值点, 最值点只能在边界上达到.

$$f(0,0)=3, f(0,\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2},0)=f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=1$$

故最大值为 3, 最小值为 1.

(17) (本小题满分 10 分)

【证明】(I) 由 $\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ 可知 $\int_a^b [f(x) - x]dx = 0$, 记 $F(x) = f(x) - x$, 那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点, 那么 $x \in (a,b)$ 时恒有 $F(x) > 0$ (或者 $F(x) < 0$) 相应的必有 $\int_a^b F(x)dx > 0$ (或 < 0) 与 $\int_a^b [f(x) - x]dx = 0$ 矛盾, 故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点, 即 $\exists \xi \in (a,b)$ 内, 使 $\xi = f(\xi)$;

(II) 令 $G(x) = e^{-x}[f(x) - x]$, 则有 $G(a) = G(\xi) = 0$, 由 Rolle 定理知 $\exists \eta \in (a,\xi)$ 使得 $G'(\eta) = e^{-\eta}[f'(\eta) - 1] - e^{-\eta}[f(\eta) - \eta] = 0$, 即有 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

(18) (本小题满分 10 分)

$$\text{【解】 } x \arctan x - \ln \sqrt{2+x^2} = x \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}, \quad |x| \leq 1$$

$$\ln \sqrt{2+x^2} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{x^2}{2}) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n} x^{2n}, \quad |x| \leq \sqrt{2}$$

合并上面两级数, 得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{2^n} x^{2n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}} \right) x^{2n} \end{aligned}$$

收敛域为 $[-1, 1]$, 令 $x=1$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n2^{n+1} - 2n - 1}{n(2n-1)2^{n+1}} = f(1) + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

(19) (本小题满分 10 分)

【解】 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + 2y^2} = I_1 + I_2$, 作: $L_1: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ (L_1 含于 L 内), 顺

时针方向, L_1 所围区域为 D_1 , $I_1 = \oint_{L+L_1} - \oint_{L_1} = 0 - \oint_{L_1} \frac{1}{\varepsilon^2} (-ydx + xdy) = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_1} 2dxdy = 2\pi$,

作 $L_2: x^2 + 2y^2 = \varepsilon^2$ (L_2 含于 L 内), 顺时针方向, L_2 所围区域为 D_2 ,

$I_2 = \oint_{L+L_2} - \oint_{L_2} = 0 - \oint_{L_2} \frac{1}{\varepsilon^2} (ydx - xdy) = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_2} -2dxdy = -\sqrt{2}\pi$;

$I = I_1 + I_2 = (2 - \sqrt{2})\pi$.

(20) (本小题满分 11 分)

【解】 (1) 因为方程组 (I) 的解全是 (II) 的解, 所以 (I) 与 (III)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ ax_1 + a^2x_3 = 0 \\ ax_2 + a^2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \text{同}$$

解

那么 (I) 与 (III) 的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有相同的

秩.

如 $a=0$ 则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$, 所以假设 $a \neq 0$

由于 $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$, $\therefore r(A)=3$

又 $B \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $r(B)=3$ 此时 (I) 与 (III) 同解,

(II) 由于 $A \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

基础解系 $\eta = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right)^T$, 则通解为 $k\eta$.

(21) (本小题满分 11 分)

【解】 ① 由题设条件知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2n \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n & 2n & \cdots & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} (1 \ 2 \ \cdots \ n) = \alpha \alpha^T, \text{ 故 } R(A) = 1$$

② 因 $A^2 = (\alpha \alpha^T)(\alpha \alpha^T) = (\alpha^T \alpha) A = \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) A$, $|A| = 0, \lambda = 0$ 是 A 特征值.

对应特征向量满足 $Ax = \alpha \alpha^T x = 0$, 因 $\alpha^T \alpha = \sum_{i=1}^n i^2 \neq 0$,

故方程组 $\alpha \alpha^T x = 0$ 与 $\alpha^T x = 0$ 是同解方程组,

只需解方程 $\alpha^T x = 0$, 即满足 $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$ 的线性无关特征向量为

$$\xi_1 = (-2 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)^T, \xi_2 = (-3 \ 0 \ 1 \ \cdots \ 0)^T, \cdots, \xi_{n-1} = (-n \ 0 \ \cdots \ 1)^T$$

由此可知 $\lambda = 0$ 至少是 $n-1$ 重根, 又 $\text{tr} A = \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda^2 \neq 0$. 故 A 有一个非零特征值

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n i^2 \neq 0,$$

当 $\lambda = \sum_{i=1}^n i^2 = \alpha^T \alpha$ 时, 由 $(\lambda E - A)x = (\alpha^T \alpha E - \alpha \alpha^T)x = 0$, 由观察可知 $x = \alpha$ 时

$(\alpha^T \alpha E - \alpha \alpha^T)\alpha = 0$, 故 $\alpha = (1 \ 2 \ \cdots \ n)^T = \xi_n$, 是对应 $\lambda = \sum_{i=1}^n i^2$ 特征向量.

A 有 n 个线性无关特征向量, A 能相似对角化.

取 $P = (\xi_1 \ \xi_2 \ \cdots \ \xi_{n-1} \ \xi_n) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & & & & 2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & n \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \sum_{i=1}^n i^2 \end{pmatrix} = A$$

(22) (本小题满分 11 分)

【解】 X 与 Y 的可能取值分别 $-1, 0, 1; -1, 0, 1;$

(I) 由于 $X \leq Y$, 所以 $P(X=i, Y=j)=0, i > j$,

$$P(X=-1, Y=-1)=P(\xi=-1, \eta=-1)=0.1,$$

$$P(X=0, Y=-1)=P(\xi=-1, \eta=0)=0.2,$$

$$P(X=0, Y=0)=0,$$

$$P(X=1, Y=-1)$$

$$=P(\xi=-1, \eta=1)+P(\xi=1, \eta=-1)=0.5$$

$$\text{同理, } P(X=1, Y=0)=0.1, P(X=1, Y=1)=0.1$$

$$(II) E(X)=0.6, E(Y)=-0.7, D(X)=0.44,$$

$$\text{Cov}(X, X+2Y)=D(X)-2\text{Cov}(X, Y)$$

$$=0.44-2 \times 0.12=0.2$$

(III) $Y=-1$ 时, X 的条件分布律

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	-1	0	1	p_{ig}
-1	0.1	0	0	0.1
0	0.2	0	0	0.2
1	0.5	0.1	0.1	0.7
p_{gj}	0.8	0.1	0.1	1

$X=x_i / Y=-1$	-1	0	1
p_i	1/8	1/4	5/8

(23) (本小题满分 11 分)

【解】 (I) 由于 $E(X_1 Q^2)=E(X_2 Q^2)=\cdots=E(X_n Q^2)$, 且 \bar{X} 与 S^2 的独立性, 所以

$$E(X_i Q^2)=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i Q^2)=\frac{1}{n} E(n \bar{X} Q^2)=(n-1) E(\bar{X} S^2)$$

$$=(n-1) E(\bar{X}) E(S^2)=(n-1) \mu \sigma^2$$

(II) 由于 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$, 及 \bar{X} 与 S^2 的独立性可知:

$$D(\bar{X} - Q^2) = D(\bar{X}) + (n-1)^2 D(S^2) = \frac{1}{n} \sigma^2 + \sigma^4 D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sigma^2 + 2(n-1) \sigma^4$$

数学一 (模拟 4)

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	A	C	A	C	B	C

$$(1) \text{【解】 } f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \sin \pi x, & |x| < 1, f'_-(1) = -\pi, f'_+(1) = 0, f(-1) \text{ 无定义, 答案 C.} \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

(2) 【解】 当 $|x - k\pi| \leq \arcsin \frac{1}{3}$ 时有 $|\sin x| < \frac{1}{3}$, 故该级数绝对收敛, 答案 C

$$(3) \text{【解】 由题设知 } \varphi(0)=0, \varphi'(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) + \int_0^x (e^t - 1) dt}{x} = 1,$$

故 $x=0$ 是函数 $y=f(x)$ 极小值点. 答案 A.

(4) 【解】 因为 $(x, y) \in D$ 内部时, $\ln^3(x+y) < \sin^2(x+y) < x+y$, 故答案为 C.

(5) 【解】 答案 A

(6) 【略】答案 C

(7) 【解】条件概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5}{3} P(AB)$, 只要取 $P(AB)$ 的最小值即可。

由于 $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 所以

$$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

即 $P(A \cup B) = 1$ 时, $P(AB)$ 达到最小值 $\frac{1}{5}$, 所以 $P(A/B) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$

(8) 【解】设 M_1, M_2 线段的某一端点的距离分别为 X, Y , 则线段 $M_1 M_2$ 的长度为 $|X - Y|$, 那么二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{因而所求数学期望为 } E|X - Y| = \frac{1}{a^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} |x - y| dx dy = \frac{2}{a^2} \int_0^1 dx \int_0^x (x - y) dy = \frac{a}{3}$$

(9) 【解】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{\ln(1+x) - x}{x} \right)^{\frac{x}{\ln(1+x) - x}} \right]^{\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$, 所以原式 $= e^{\frac{1}{2}}$.

(10) 【解】方程 $y'' - 4y' + 4y = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, 方程 $y'' - 4y' + 4y = 1$ 的特解为

$y_1^* = \frac{1}{4}$, 方程 $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ 的特解可设为 $y_2^* = Q(x)e^{2x}$ 代入可得 $Q(x) = x$, $Q(x) = \frac{x^3}{6}$, 故方程通解为 $y = (C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6})e^{2x} + \frac{1}{4}$

(11) 【解】由题设有 $\int_0^1 [xf'(x) - f(x)] dx = xf(x)|_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{3}$, 所以 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

(12) 【解】 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2} f_1' + y f_2'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{1+x^2} f_{12}'' + x y f_{22}'' + f_2'$.

(13) 【解】 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$, $B^{-1} = B^* A + A$ 两边左乘 B 得 $E = 2A + BA$, 即

$$(B + 2E)A = E, \text{ 则 } A = (B + 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(14) 【解】

$$P(X+Y \geq 1) = P(X=-1, Y \geq 2) + P(X=0, Y \geq 1) + P(X=1, Y \geq 0) = \frac{1}{3}(1 + e^{-1} + e^{-2}),$$

$$(15) \text{ 【解】 } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^4 + ax^2} - (x^2 + bx)e^{\frac{2}{x}}] \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+at^2} - (1+bt)e^{-2t}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+at^2} - 1}{t^2} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1+bt)e^{-2t} - 1}{t^2} = \frac{a}{2} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(b-2-2bt)e^{-2t}}{2t} = 1, \text{ 因此必有}$$

$$b=2, \frac{a}{2} + b = 1, a = -2.$$

(16) 【解】(I) 切平面的法向量为

$$\vec{n} = \{2(x-y), 2(y-x), -2z\}|_{(1,0,0)} = \{2, -2, 0\}, \pi: x-y-1=0;$$

(II) 原点到 S 上点的最短距离平方可以归结为求函数 $u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 满足条件 $(x-y)^2 - z^2 = 1$, 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda[(x-y)^2 - z^2 - 1]$, 由

$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0 \\ F'_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } x = -y \text{ 代入到 } (x-y)^2 - z^2 = 1 \text{ 中可得 } 4x^2 - z^2 = 1, \text{ 相应}$$

的有 $u = f(x, y, z) = 6x^2 - 1$, 因 $(x, y, z) \in S, x = -y$ 时有 $4x^2 = z^2 + 1 \geq 1$, 因此函数

$u = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 满足条件 $(x-y)^2 - z^2 = 1$ 的最小值为 $u = 6x^2 - 1|_{x^2=\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, 即

原点到 S 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 而原点到 π 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 因而该结论成立。

(17) 【解】区域 D 关于直线 $y=x$ 对称, 令 $D_1: x \leq x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq x$, 则有

$$\iint_D \frac{dx dy}{xy} = 2 \iint_{D_1} \frac{dx dy}{xy}$$

$$= 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \sin \theta} \frac{dr}{r \sin \theta \cos \theta} = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \tan \theta) d\theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \int_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2 \tan \theta) d(\tan \theta)}{\tan \theta}$$

$$= \ln^2(2 \tan \theta) \Big|_{\arctan \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln^2 2.$$

(18) 【证明】(I) 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ 可知 $\exists x_0 \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < 0$ 从而

有 $f(x_0) < 0$, 对函数 $f(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上应用连续函数的零点定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 内, 使 $f(\xi) = 0$;

(II) 对函数 $f(x)$ 分别在区间 $[a, x_0]$ 及 $[x_0, b]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists x_1 \in (a, x_0)$ 及

$x_2 \in (x_0, b)$, 使得 $f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} < 0, f'(x_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$, 再对函数 $f'(x)$

在区间 $[x_1, x_2]$ 应用 Lagrange 中值定理知 $\exists \eta \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得

$$f''(\eta) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \text{ 命题得证.}$$

(19) 【解】由已知条件可得微分方程

$$f'_n(x) - f_n(x) = x^{n-1}e^x$$

据一阶微分方程解的公式得到

$$f_n(x) = e^{\int dx} \left(\int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} + c \right) = e^x \left(\frac{x^n}{n} + c \right)$$

由已知 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 得 $c = 0$, 故 $f_n(1) = \frac{x^n e^x}{n}$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 记

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ 其收敛域为 } [-1, 1), \text{ 当 } x \in (-1, 1) \text{ 时, 有 } S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},$$

$$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x), \text{ 当 } x = -1 \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(-1) = -e^{-1} \ln 2, \text{ 因此, 当 } -1 \leq x < 1$$

时, 所求级数和为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -e^x \ln(1-x)$.

(20) 【解】(I) 由题设 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 均为 $Bx = 0$ 的解, $B \neq 0$, 知向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性相关, 否则 $Bx = 0$ 基础解系所含向量个数大于等于 3, 因而必有 $B = 0$, 矛盾, 于是有

$$0 = |(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3b - a, \text{ 故 } a = 3b, \text{ 因为 } Ax = \beta_3 \text{ 有解, 所以}$$

$$r(A) = r(A\beta_3), \quad (A\beta_3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & b \\ 0 & -6 & -12 & 1-2b \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5-b}{3} \end{pmatrix}, \text{ 由 } r(A) = r(A\beta_3) \text{ 可得}$$

$$\frac{5-b}{3} = 0, b = 5, a = 15;$$

(2) 由 β_1, β_2 的秩为 2 知 β_1, β_2 线性无关, 故 $Bx = 0$ 至少有两个线性无关解 β_1, β_2 , 又 $B \neq 0, r(B) \geq 1$, 因而方程 $Bx = 0$ 基础解系由 $3 - r(B) \leq 2$ 个线性无关解向量组成,

于是 β_1, β_2 可作为 $Bx = 0$ 基础解系. 故通解为 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = k_1(0, 1, -1)^T + k_2(15, 2, 1)^T$.

$$(21) 【解】(I) \text{ 二次型 } f \text{ 矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a+4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} b & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{因 } A \text{ 与 } A \text{ 相似, 所以 } \begin{cases} \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A, \\ |A| = |A| \end{cases}, \quad \begin{cases} 1+a+4+3 = b+5-1 \\ 3a-4 = -5b \end{cases}, \text{ 由此可得 } \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

A 特征值 2, 5, -1, 依次解方程组 $(2E - A)x = 0, (5E - A)x = 0, (-E - A)x = 0$ 可得对

$$\text{应的特征向量分别为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 规范化后可得}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \eta_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \eta_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ 所求的正交变换矩阵为 } U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ 相}$$

应的正交变换为 $x = Uy$;

(II) $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的顺序主子式 $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = a > 0, \Delta_3 = |A| = 3a - 4 > 0$,

由此可得 $a > \frac{4}{3}$.

(22) 【解】(I) $Y = X^2 - 1$ 的分布函数为 $F_Y(y) = P\{X^2 - 1 \leq y\}$, 那么有

1) $y \leq -1$ 时 $F_Y(y) = 0$, $y \geq 3$ 时 $F_Y(y) = 1$

2) $-1 < y < 0$, $F_Y(y) = P\{-\sqrt{y+1} \leq X \leq \sqrt{y+1}\} = 2 \int_0^{\sqrt{y+1}} \frac{x}{2} dx = \int_0^{\sqrt{y+1}} x dx$

3) $0 \leq y < 3$, $F_Y(y) = P\{-\sqrt{y+1} \leq X \leq \sqrt{y+1}\} = \int_{-1}^1 \frac{|x|}{2} dx + \int_1^{\sqrt{y+1}} \frac{1}{2} dx$

所以对应的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq y < 0, \\ \frac{1}{4\sqrt{y+1}}, & 0 \leq y < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(X, X^2 - 1) = \text{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$,

$$E(X) = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 x \frac{|x|}{2} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{3}{4},$$

$$E(X^2) = \int_{-1}^1 x^2 \frac{|x|}{2} dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{4} + \frac{7}{6} = \frac{17}{12},$$

$$E(X^3) = \int_{-1}^1 x^3 \frac{|x|}{2} dx + \int_1^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^3 dx = \frac{15}{8},$$

$$\text{则 } \text{Cov}(X, Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = \frac{15}{8} - \frac{3}{4} \times \frac{17}{12} = \frac{13}{16}.$$

(23) 【解】(I) X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} ae^{-a(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \leq \theta \end{cases}$, 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本的一组观察值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n ae^{-(x_i-\theta)} = a^n e^{-\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)}, x_i > \theta, \frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{d}{d \theta} \left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \right) = n > 0, L \text{ 关于 } \theta \text{ 单调增, } x_i > \theta (i=1, 2, \dots, n), \text{ 要使 } L \text{ 最大, 可取 } \hat{\theta}_L = \min\{X_i\} \text{ 为 } \theta \text{ 的最大似然估计;}$$

(II) $\hat{\theta}_L = \min\{X_i\}$ 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}_L}(z) = 1 - (1 - F(z))^n = \begin{cases} 1 - e^{-na(z-\theta)}, & z > \theta \\ 0, & z \leq \theta \end{cases}$, 所以

它的概率密度函数为 $f_{\hat{\theta}_L}(z) = \begin{cases} ane^{-na(z-\theta)}, & z > \theta \\ 0, & z \leq \theta \end{cases}$;

(III) $E(\hat{\theta}_L) = an \int_{\theta}^{+\infty} ze^{-na(z-\theta)} dz = \theta + \frac{1}{na}$, 所以 $\hat{\theta}_L$ 不是 θ 的无偏估计。

数学一 (模拟 5)

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	A	D	A	D

(1) 【解】由题设知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 又 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ 时有 $f(x) - f(a) \geq 0$; 因此有

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(x)}{(t-x)^2} = \frac{f(a) - f(x)}{(a-x)^2} \leq 0, \text{ 故答案为 D.}$$

(2) 【略】

【答案】(C)

$$(3) \text{ 【解】原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t d(\tan^2 t) = t \tan^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t dt = \frac{\pi}{4} - (\tan t - t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

【答案】(B)

(4) 【略】【答案】(C)

(5) 【略】【答案】(A)

(6) 【解】因为 $r(A) = n$, 所以方程组 $AX = 0$ 只有零解, 而由 $AB = O$ 得 B 的列向量为方程组 $AX = 0$ 的解, 故若 $AB = O$, 则 $B = O$;

令 $BX = O, ABX = 0$ 为两个方程组, 显然若 $BX = O$, 则 $ABX = 0$, 反之, 若 $ABX = 0$, 因为 $r(A) = n$, 所以方程组 $AX = 0$ 只有零解, 于是 $BX = O$, 即方程组 $BX = O$ 与 $ABX = 0$ 为同解方程组, 故 $r(AB) = r(B)$;

因为 $r(A) = n$, 所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$, 即存在可逆矩阵 P 使得 $PA = \begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$,

令 $B = (E_n \ O)P$, 则 $BA = E$;

$$\text{令 } A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = (1 \ 1 \ 1), r(A) = 0, \text{ 但 } r(BA) = 0 \neq r(B) = 1, \text{ 选(D).}$$

(7) 【略】【答案】(A)

(8) 【略】【答案】(D)

$$(9) \text{ 【答案】 } -\frac{2\varphi''(2x+1)}{(1+\varphi')^3}.$$

$$(10) \text{ 【答案】 } x = y(c - e^y)$$

$$(11) \text{ 【答案】 } \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^2 f(x, y) dx$$

$$(12) \text{ 【答案】 } \frac{\pi}{4}$$

(13) 【答案】 $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1 \ 1 \ 1 \ 0)^T, \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{51}}(5 \ 4 \ 1 \ 3)^T$

(14) 【解】

由于 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-2y}, & y \geq 0 \end{cases}$ 由独立性, 所以

$Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数是 $F_{\max}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z(1 - e^{-2z}), & 0 \leq z < 1 \\ 1 - e^{-2z}, & z \geq 1 \end{cases}$ 则概率

$P(\max\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

【答案】 $P(\max\{X, Y\} \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$

三、解答题:

(15) 【解】在椭圆上任取一点 $P(x, y)$, 椭圆中心为 $O(0, 0)$, O 点到 P 点距离最大值是半长轴 d_{\max} , O 点到 P 点距离最小值是半短轴 d_{\min} , 椭圆面积等于 $\pi d_{\max} d_{\min}$, 问题化为求 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在约束条件 $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ 下的最值点, 计算后得 $d_{\max} = 3$, $d_{\min} = 1$, 面积等于 3π .

(16) 【解】 $\because f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 因而在 $[0, a]$ 上有最值, 从而 $|f_0(x)|$ 在 $[0, a]$ 上也有最大值, 设 $M = \max_{0 \leq x \leq a} \{|f_0(x)|\}$

则 $|f_1(x)| = \left| \int_0^x f_0(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_0(t)| dt \leq Mx$

同理 $|f_2(x)| = \left| \int_0^x f_1(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_1(t)| dt \leq \frac{1}{2!} Mx^2$

$|f_3(x)| = \left| \int_0^x f_2(t) dt \right| \leq \int_0^x |f_2(t)| dt \leq \frac{1}{3!} Mx^3$

可得: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!} Mx^n$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} x^n$ 在 $[0, a]$ 上收敛, 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ 收敛

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 绝对收敛.

$$(17) \text{【解】} f(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + \int_x^{2x} (t-x)\varphi(t)dt$$

$$= x \int_0^x \varphi(t)dt - x \int_x^{2x} \varphi(t)dt - \int_0^x t\varphi(t)dt + \int_x^{2x} t\varphi(t)dt,$$

$$f'(x) = \int_0^x \varphi(t)dt - \int_x^{2x} \varphi(t)dt + 2x\varphi(x),$$

$$\text{所以 } f'(T) = \int_0^T \varphi(t)dt - \int_T^{2T} \varphi(t)dt + 2T\varphi(T),$$

$$\text{因 } \varphi(x) \text{ 周期为 } T \text{ 的周期函数, 故有 } \int_0^T \varphi(t)dt = \int_T^{2T} \varphi(t)dt,$$

$$\text{所以 } f'(T) = 2T.$$

(18)【证明】(反证法)若 $f(x)$ 在 (a, b) 内有两个或更多的零点, 则 $\exists x_1 \in (a, b), x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, f(x_1) = f(x_2) = 0$. 令 $F(x) = e^x f(x)$, 则有 $F(x_1) = F(x_2) = 0$, 由 Rolle 定理知 $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ 使得 $F'(\xi) = e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = 0$, 因而有 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$, 与 $f(x) + f'(x) \neq 0$ 矛盾.

$$(19) \text{【解】(1) 由全微分方程 } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ 得: } \begin{cases} f'(x) + \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \\ f(\pi) = 1 \end{cases}$$

两边同乘 x , 得 $(xf(x))' = \sin x$, 再两边在 $[\pi, x]$ 上积分, 得

$$xf(x) - \pi f(\pi) = \int_\pi^x \sin x dx$$

$$\text{故 } f(x) = -\frac{1}{x}(\cos x + 1 - \pi)$$

(2) 代入题设方程, 用凑微分法求解

$$(\sin x + \frac{\cos x + 1 - \pi}{x}) \frac{y}{x} dx - \frac{\cos x + 1 - \pi}{x} dy = 0$$

$$(1 - \pi) \frac{y dx - x dy}{x^2} + \frac{xy \sin x dy + y \cos x dx}{x^2} = 0$$

$$(\pi - 1) d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{-xd(y \cos x) + y \cos x dx}{x^2} = 0$$

$$(\pi - 1) d\left(\frac{y}{x}\right) - d\left(\frac{y \cos x}{x}\right) = 0$$

$$\text{由此得到解 } (\pi - 1) \frac{y}{x} - \frac{y \cos x}{x} = c$$

$$\text{即 } y = \frac{cx}{\pi - 1 - \cos x}.$$

$$(20) \text{【解】(I) } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 0 \\ -8 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -a & \lambda - 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)^2 (\lambda + 2), \lambda_1 = \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2 \text{ 为特征}$$

值. 由已知 A 可对角化, 故 $\lambda = 6$ 必有 2 个线性无关的特征向量

$$\text{由 } R(6E - A) = R \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ 所以 } a = 0.$$

(II) 因此 $x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 10x_1x_2$, 二次型矩阵 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

由 $|\lambda E - A_1| = \cdots = (\lambda - 6)(\lambda - 7)(\lambda + 3)$

知二次型 $x^T A x = x^T A_1 x$ 特征值 6, 7, -3

对 $\lambda = 6$ 由 $(6E - A_1)x = 0$ 得 $\alpha_1 = (0, 0, 1)^T$

对 $\lambda = 7$ 由 $(7E - A_1)x = 0$ 得 $\alpha_2 = (1, 1, 0)^T$

对 $\lambda = -3$ 由 $(-3E - A_1)x = 0$ 得 $\alpha_3 = (1, -1, 0)^T$

单位化 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

令 $P = (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

又 A^2 特征值为 $6^2, 7^2, 3^2$

经过 $x = Py$ 有 $x^T A^2 x = 36y_1^2 + 49y_2^2 + 9y_3^2$

(21) 【证】(I) 若 α_1, α_2 均为 A 属于 0 的特征向量 则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0$$

由题设 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 \neq 0$ 矛盾!

类似 若 α_1, α_2 均为 A 属于 1 特征向量。则

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2 \neq \alpha_2 \text{ 也与题设矛盾}$$

故 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量

又 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$ 知 α_1 是 A 属于 0 的特征向量, α_2 是 A 属于 1 的特征向量。因 A 是实对称矩阵 故 α_1, α_2 线性无关。

(II) 因 A 是实对称矩阵。故 A 与对角阵 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 相似。从而秩 $(A) = \text{秩}(\Lambda) = 2$ 。表

明齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系所含向量个数 $3 - \text{秩}(A) = 1$

现在: $A\alpha_1 = 0$ $A\alpha_2 = \alpha_2$ 故 α_1 是 $Ax = 0$ 基础解系, α_2 是 $Ax = \alpha_2$ 的一个特解。

$\therefore Ax = \alpha_2$ 通解 $\alpha_2 + k\alpha_1$ 。

(22) 【解】由题可知 (X, Y) 的密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

(I) 概率 $P\{\frac{1}{2} \leq X + Y \leq \frac{3}{2}\} = 1 - 2 \int_0^{1/2} dx \int_0^{1-x} dy = \frac{3}{4}$;

(II) $Z = |X - Y|$ 的对应函数为 $z = |x - y|$ 的范围 $0 < z < 1$

分段讨论 $z < 0, F_Z(z) = 0; z \geq 0, F_Z(z) = 1$

$$0 \leq z < 1, F_Z(z) = P\{|X - Y| \leq z\} = \iint_{|x-y| \leq z} dx dy = 1 - (1-z)^2$$

则 $Z = |X - Y|$ 的密度函数为 $f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$;

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad E(Z) &= E(|X - Y|) = \iint_D |x - y| dx dy = \iint_{D_1} (x - y) dx dy - \iint_{D_2} (x - y) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^x (x - y) dy = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E(|X - Y|^2) = \iint_D (x - y)^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x - y)^2 dy = - \int_0^1 dx \int_0^1 (x - y)^2 d(x - y) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 - (x-1)^3) dx = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$D(Z) = D(|X - Y|) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

注: 也可直接用 $f_Z(z)$ 求 $Z = |X - Y|$ 的均值与方差。

(23) 【解】 设 X 表示 400 件产品中一等品的件数, 则 $X \sim B(400, p_0)$, $p_0 = 0.1$
所以 $E(X) = 40$, $D(X) = 36$, 试求概率

$$P\left(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02\right) = P(|X - 40| < 0.02 \times 400)$$

(I) 由切比契夫不等式

$$P\left(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02\right) = P(|X - 40| < 8) \geq 1 - \frac{D(X)}{8^2} = 1 - \frac{36}{64} = 0.4375$$

(II) 由中心极限定理

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{10}\right| < 0.02\right) = P\left(\frac{|X - 0.1n|}{\sqrt{0.09n}} < \frac{0.02}{\sqrt{0.09n}} n\right) \approx 2\Phi\left(\frac{0.02}{0.3}\sqrt{n}\right) - 1 \geq 0.95,$$

$$\Phi\left(\frac{0.02}{0.3}\sqrt{n}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96). \text{ 由于 } \Phi(x) \text{ 单调增, 则 } \frac{0.02}{0.3}\sqrt{n} \geq 1.96, \sqrt{n} \geq 29.4$$

n 不小于 864.36, 即至少要取 865 次。