绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

(模拟一)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一(模拟一)

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $f(u)$ 为可导函数，曲线 $y=f(e^x)$ 的过点 $(1,2)$，且它在点 $(1,2)$ 处的切线过点 $(0,0)$，那么函数 $f(u)$ 在 $u=e$ 处，当 u 取得增量 $\Delta u=0.01$ 时，相应的函数值增量的线性主部是（　　）.

(A) 0.02　　(B) $\dfrac{0.02}{e}$　　(C) $-\dfrac{0.02}{e}$　　(D) -0.02

(2) 设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=g(a)=0, f(b)=g(b)=2$，且 $f''(x)<0$，$g''(x)>0$，记 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$S_2<b-a<S_1$　　（B）$S_1<b-a<S_2$

（C）$S_1<S_2<b-a$　　（D）$b-a<S_2<S_1$

(3) 设函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$，则函数 $z=f(x,y)$（　　）

(A) 无极值　(B) 有有限个极值　(C)有无穷多个极大值　(D) 有无穷多个极小值

(4) 设曲线积分 $\int_L (f(x)-e^x)\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于(　　)

(A) $\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$　　(B) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　(C) $\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$　　(D) $1-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

(5) 下列矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}6&4&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 中两两相似的是(　　)

(A) A_3, A_4　　(B) A_1, A_2　　(C) A_1, A_3　　(D) A_2, A_3

(6) 设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)^T$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)^T$, $\eta_3=(1,0,5,1,1)^T$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组(I)的一个极大无关组是（　　）.

(A) α_1,α_2　　(B) α_1,α_4　　(C) α_3,α_5　　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

(7) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，数学期望 $E(X)=0$，则（　　）.

(A) $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f(-x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} f(-x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} xf(-x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} xf(-x)\mathrm{d}x$

(8) 设随机变量 X 不小于零，且分布函数为 $F(x)$，则对 $y>0$ 时，正确（　　）

(A) $Y=1-X$ 的分布函数 $F_Y(y)=1-F(1-y)$　　(B) $Y=X^2$ 的分布函数 $F_Y(y)=F(\sqrt{y})$

(C) $Y=aX$ 的分布函数 $F_Y(y)=F(ay)$　　(D) $Y=\dfrac{1}{X}$ 的分布函数 $F_Y(y)=F(\dfrac{1}{y})$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(9) 设 $f'(u)=\ln(1+u^2), g(x)=f(\frac{2x-1}{x+1})$，则 $g'(0)=$____ .

(10) 设点 a_n 满足等式 $\int_{a_n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\,x}{x(\ln x)^{n+1}}=2, n=1,2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$_________ .

(11) 设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)dxdy+2(x^2+y^2)$，则 $f(x,y)=$______.

(12) 设曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,-1)$，且其上任一点处的切线斜率为 $2x\ln(1+x^2)$，则 $f(x)=$________ .

(13) 已知 $D_4=\begin{vmatrix}5&-5&1&19\\7&8&2&9\\4&8&0&6\\3&1&3&4\end{vmatrix}$，则 $2A_{11}-4M_{21}-6M_{41}=$_______ .

(14) 设随机变量 X,Y,Z 两两不相关，方差相等且不为零，则 $X+Y$ 与 $X+Z$ 的相关系数为_______ .

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本小题满分 10 分) (I)在曲线 $y=e^x$ 上找一条切线使得该切线与曲线 $y=e^x$、y 轴及直线 $x=2$ 围成的图形面积最小；(Ⅱ)求(I)中的图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

(16) (本小题满分 10 分)设 $-1<a<b$，证明不等式：$(a+b)e^{a+b}<ae^{2a}+be^{2b}$.

(17) (本小题满分 10 分) 设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解.

(18) (本小题满分 10 分) 设 $f(t)=\iint\limits_D|xy-t|dxdy, t\in[0,1]$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$.

(Ⅰ)求 $f(t)$ 的初等函数表达式；(Ⅱ)证明：存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $f(t_0)$ 是 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 内唯一的最小点.

(19) (本小题满分 10 分) 将 $f(x)=x\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(20) (本小题满分 11 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$,问 a,b,c 为何值时,矩阵方程 $AX=B$ 有解,有解时,求出全部解.

(21) (本小题满分 11 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-x_3^2+8x_1x_2+2bx_1x_3+2cx_2x_3$ 矩阵 A 满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，

(Ⅰ)求正交变换 $x=Qy$，化二次形 f 为标准型，并写出所用正交变换；

(Ⅱ)判断矩阵 A 和 B 是否合同.

(22) (本小题满分 11 分)设 (X,Y) 在区域 $G=\{(x,y)\,|\,0<x<1,-1<y<1\}$ 服从均匀分布，试求：(I)概率 $\mathrm{P}\{X+2Y\ge 1\}$；(II) $Z=X-Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；(III) 方差 $D(X+2Y)$.

(23) (本题满分 11 分)设某批产品的一等品率为 1/10，从这批产品中任取 400 件，求其中一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值不超过 0.02 的概率.(I)用切比契夫不等式估计；(II)利用中心极限定理计算.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学 一

（模拟二）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}$ 的无穷间断点个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2） 设 n 为正整数， $f(x)=\int_0^x \sin^n t\,\mathrm{d}t$，则（　　）.

（A） n 为奇数是 $f(x)$ 为周期函数　　（B） n 为偶数时 $f(x)$ 为周期函数

（C） $f(x)$ 必为偶函数　　（D） $f(x)$ 必为有界函数

（3） 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处（　　）.

（A） 连续但偏导数不存在　　（B）偏导数存在但不连续

（C） 连续且偏导数存在但不可微　　（D）可微

（4）设 L 是 $|y|=1-x^2\ (-1\le x\le 1)$ 表示的围线的正向，则 $\oint_L \dfrac{2xdx+ydy}{2x^2+y^2}$ 之值等于（　　）.

（A） 0　　（B） 2π　　（C） -2π　　（D） $4\ln 2$

（5） 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列和第 j 列后，再交换第 i 行和第 j 行得矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间关系是（　　）.

（A）等价但不相似　　（B）相似但不合同

（C）相似，合同但不等价　　（D）等价，相似，合同

（6）. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，齐次方程式组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则在下列方程组中以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为基础解系的方程组是(　　).

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(B) $\boldsymbol{AB}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(C) $\boldsymbol{BA}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

（7） 设随机变量 $X\sim E(\lambda)$（参数为 λ 的指数分布），且 X 的数学期望 $E(X)=\dfrac{1}{2}$，对 X 进行独立观察，则第三次观察时事件 $\{X>\dfrac{1}{2}\}$ 第二次出现的概率（　　）.

(A) $\dfrac{2}{e^2}(1-\dfrac{1}{e})$　　(B) $1-\dfrac{1}{e}(1-\dfrac{1}{e})^2$　　(C) $\dfrac{2}{e}(1-\dfrac{1}{e})^2$　　(D) $\dfrac{1}{e}(1-\dfrac{1}{e})^2$

（8）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，对统计量 $Y=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，若满足 $E(Y)=\sigma^2$，则应选 k 为（　　）.

(A) $\dfrac{1}{n-1}$　　(B) $\dfrac{1}{n}$　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　(D) $\dfrac{1}{2n}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上.

（9）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}(1-\dfrac{x}{2t}+\dfrac{x^2}{2t^2})^t$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

（10） 若曲线 $y=1-|x|(a>0)$ 与 x 轴围成的图形被折线 $y=a|x|(a>0)$ 分割成面积相等的三个部分，则 $a=$_____ .

（11）函数 $u=3x^2y+x^2z^2-y^3\sin z$ 在点 $P(1,1,0)$ 处沿各方向的方向导数中，最大的方向导数为_______________.

（12）若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的解为____________.

（13） 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$_________.

（14）设 A 与 B 是相互独立两随机事件,且 $P(B)=0.6$, $P(B-A)=0.3$, 则概率

$P(\bar{A}\cup B)=$_________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 10 分）. 设 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值.

（16）（本小题满分 10 分） 设 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$x_0\in(0,1)$，且在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积等于函数 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的平均值。试证明：（Ⅰ）存在点 $\xi\in(x_0,1)$ 内使得 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$。

（17）（本小题满分 10 分） 计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-x^2)d\sigma$，其中 $D:-1\le x\le 1$，$0\le y\le 1$,且符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

（18）（本小题满分 10 分） 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数为 $y(x)$，且和函数 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$,（I）证明：$a_{n+2}=\dfrac{2a_n}{n+1}$，$n=1,2.3,\ldots\ldots$；（Ⅱ） 求 $y(x)$ 的表达式.

(19) （本小题满分 10 分） 设点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$(a>0,b>0,c>0)$ 在第一卦限上的点.

(I)求曲面在该点处的切平面方程；(II)设 Σ 是切平面被三坐标平面夹在第一卦限内的部分，问 ξ,η,ζ 取何值时，曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$ 取值最小。其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是切平面的方向余弦 $(0<\gamma<\dfrac{\pi}{2})$.

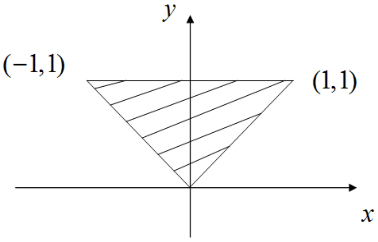
（20）（本小题满分 11 分） 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,a+4,2a+5,a+7)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,6,8,10)^T, \boldsymbol{\alpha}_4=(2,3,2a+3,5)^T$.（I）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩及一个极大线性无关组；（Ⅱ）令 $\boldsymbol{\beta}=(0,1,3,b)^T$,若任意的 4 维列向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示，求 a,b 的值.

（21）（本小题满分 11 分）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的三维列向量组，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$．（I）求 $|\boldsymbol{A}|$；（Ⅱ）证明 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似，并求相应的相似变换矩阵.

（22）（本小题满分 11 分）设 (X,Y) 密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1,\ |x|<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

，求：



（I）边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；（II）条件密度函数 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$；　（III）协方差 $\mathrm{COV}(X,2Y+1)$．

（23）（本小题满分 11 分）设总体 $\boldsymbol{X}$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0,\\ bx, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 α 是未知参数，对 X 的样本值为 0.5、-0.1、0.7、-0.5、0.8、-0.8、-0.2、-0.6.试求（I）参数 α 的矩估计；（II）参数 α 的最大似然估计.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

（模拟三）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：(1)～(8) 小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取得增量 Δx 时相应的函数值增量 $\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(1)=0$，则当 $x\to 0$ 时 $\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $\ln(1+x^4)$ 的（　）。

（A）高阶无穷小　（B）低阶无穷小　（C）等价无穷小　（D）同阶而非等价无穷小

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，$f''(0)<0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则有（ ）。

（A）$x\neq 0$ 时恒有 $f(x)>x$　(B) $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)<x$

(C) $x>0$ 时 $f(x)>x$，$x<0$ 时 $f(x)<x$　(D) $x>0$ 时 $f(x)<x$，$x<0$ 时 $f(x)>x$

(3) 已知 $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a 和 b 的值分别为（　　）

A $-2,2$　B $2,-2$　C $-3,3$　D $3,-3$

(4) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$（　）。

（A）收敛　（B）发散　（C）不定　（D）与 a_n 有关

(5) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，$B=\begin{pmatrix} a_{12}+a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22}+a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32}+a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ 又 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　$P_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $B^{-1}=$（　　）

(A) $P_2A^{-1}P_4$　(B) $A^{-1}P_2P_3$　(C) $P_1P_3A^{-1}$　(D) $P_4P_1A^{-1}$

(6) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+7\boldsymbol{\alpha}_3$. 则下列结论正确的是(　　).

（A）向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

（B）向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

（C）仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关

（D）仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关

(7) 设随机变量 X 服从正态分布，其概率密度函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有驻点，且 $f(1)=1$，则概率 $P\{X\geq 0\}$ 为（　　）.

(A) $1-\Phi(0)$　(B) $1-\Phi(\sqrt{2\pi})$　(C) $\Phi(1)$　(D) $\Phi(\sqrt{2\pi})$

(8) 设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<\mathrm{P}(A)<1$，$0<\mathrm{P}(B)<1$，令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$ X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　）.

(A) $\rho=0$　　(B) $\rho=1$　　(C) $\rho<0$　　(D) $\rho>0$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9） $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$________.

（10） 设函数 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\sin\dfrac{\pi x^2}{8}$，此处 n 为正整数，那么 $f^{(n)}(2)=$________.

（11）设函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $P(1,0,1)$处曲面 $2x^2+y^2+3z^2=3$ 在点 $Q(1,1,0)$ 处切平面的外法向量的方向导数为________________.

（12） 设 L 是由 $x^2+y^2\le1, 0\le y\le x$ 所确定区域的边界，则 $\oint_L\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$______ .

（13） 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=$________.

(14) 设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1)$, $Y\sim E(\lambda)$ 且 Y 的数学期望为 1/2，则概率

$P(\max\{X,Y\}>\dfrac{1}{2})=$______________ .

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）**（本题满分 10 分）** 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$，求 $f'(0)$。

（16）**（本题满分 10 分）** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=0$，证明：$\exists\eta\in[0,1]$ 使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

（17）**（本题满分 10 分）** 设函数 $z=xf(\dfrac{x}{y})+g(xy,x^2-y)$, 且函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$g(v,w)$ 具有二阶连续

导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

（18）**（本题满分 10 分）** 设两曲线积分 $I_1=\int_L(3xy^2+x^3)\,dx+P(x,y)\,dy$ 及 $I_2=\int_L P(x,y)\,dx+(3xy^2+x^3)\,dy$ 在平面内对积分路径无关，且 $P(0,1)=1$.（I）求 $P(x,y)$ 的表达式；（II）求曲线积分 $I=\int_L P(x,y)dx+(3xy^2+x^3)\,dy$ 的值，此处 L 为曲线 $y=x^2+1$ 上，从 $(0,1)$ 到 $(1,2)$ 的路径。

20、21全程考研资料请加群712760929

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数．且计算 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$ 的值

（20）（**本题满分 11 分**）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 后化为 $f=-2y_1^2+y_2^2+y_3^2$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^T$．求（I）常数 a；（II）正交矩阵 $\boldsymbol{P}$．

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \ \ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，证明：（I）齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；（II）$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵．

（22）（**本题满分 11 分**）设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}A, & -2<x<0,\\ Bx, & 0\le x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且 $E(X^2)=\frac{11}{12}$．试求（I）常数 A、B；（II）$Y=|X|$ 的概率密度函数 $f_Y(x)$；(III) 方差 $D(Y)$．

（23）（**本题满分 11 分**）设连续型总体 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\frac{a}{x^2}, & x>\theta,\\ 0, & x\le\theta,\end{cases}$（其中 $\theta>0$），且 $X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本．试求：（I）常数 a；（II）参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）$\hat{\theta}=\frac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L$ 关于 θ 的无偏性.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

（模拟四）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)(\sqrt{1+x^2}-1)}{\arctan x^3}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 若 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（　）。

（A） $f(0)=2,\ f'(0)$ 不存在　　（B） $f(0)=2$ 不能确定 $f'(0)$ 是否存在

（C） $f(0)=0,\ f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D） $f(0)=0,\ f'(0)=2$

（2）若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x$，则 $a=$（　）。

（A）-3　　（B）$-\dfrac{3}{2}$　　（C）-1　　（D）0

（3）设函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(ax+b-y^2)$ 中常数 a,b 满足条件（　　）时，$(-1,0)$ 为其极大值点。

（A ） $a<0,b=-2a$　　（B） $a=0,b=-2a$　　（C） $a>0,b=2a$　　（D） $a\geq 0,b=2a$

（4）微分方程 $y''+4y=e^{-2x}+\sin 2x$ 的一个特解形式是（　　）.

（A） $Ae^{-2x}+B\cos 2x+C\sin 2x$　　（B） $Axe^{-2x}+B\cos 2x+C\sin 2x$

（C） $Ae^{-2x}+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$　　（D） $Axe^{-2x}+x(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$，则三个平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，

$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ 两两相交成三条平行直线的充分必要条件是（　　）

(A) 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$；秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ ；

(B) 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$；秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$；

(C) α_1,α_2，α_3 中任两个向量均线性无关，且 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

(D) α_1,α_2，α_3 中任两个向量均线性无关，且 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

（6）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\ \ 1\ \ -2\ \ 1)^T$，$\eta_2=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关；　（2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

（3）α_3,α_4 线性无关；　（4）秩 $r(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$ 中正确的是

（A）（1）（3）　（B）（2）（4）　（C）（2）（3）　（D）（1）（4）

(7) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度函数为（　　）.

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$　　(D) $f_1(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

(8) 设 X 与 Y 相互独立，X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{2}{3}, & 1\le x<2,\\ 1, & x>2,\end{cases}$ 且 $Y\sim E(\lambda)$（$\lambda=1$ 的指数分布），则概率 $P\{XY>1\}=$（　　）.

(A) $1-\frac{1}{3}(2e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}})$　(B) $2e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}$　(C) $\frac{1}{3}(2e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}})$　(D) $\frac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1})$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 $y=y(x)$ 由方程 $\tan(x^2+y)-e^x+xy=0$ 确定，且 $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 则 $\mathrm{d}\,y|_{x=0}=$________。

（10）设 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

（11） 计算 $I=\int_0^1dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}dy=$________.

（12）设 $z=\int_1^{x^2y}f(t,e^t)dt$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

（13）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\1&-1&2&-1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=0$ 解空间的一组规范正交基为________.

（14）设 X,Y 相互独立同分布 $N(0,4)$，且 $X_1,\cdots,X_4$ 是来自 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 为样本均值，记 $Z=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}$，若统计量 $C\frac{Y}{Z}$ 服从 t 分布，则常数 $C=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）**（本题满分 10 分）**设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x\le 0,\\ \sin x, & x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^4}}$。

（16）**（本题满分 10 分）**设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导，且在 $(0,a)$ 内取得最小值，又 $|f''(x)|\le M$，证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$。

（17）**（本题满分 10 分）**设 $u=f(xy)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(xy+1)e^{xy}$，其中 $f(t)$，当 $t\neq 0$ 时，二阶导数连续，且 $f'(1)=f(1)=e+1$, 求 $f(xy)$.

（18）**（本题满分 10 分）**求函数 $f(x,y)=e^{-xy}$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+4y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

（19）**（本题满分 10 分）**计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\Sigma$ 是由园抛物面：$z+a=x^2+y^2\ (0<a<1)$ 与平面 $z=1$ 围成的闭曲面的外侧.

（20）（**本题满分 11 分**） （I）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&a\\1&4&9&a^2\\1&8&27&a^3\end{pmatrix}$，若存在 4 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，问①$\boldsymbol{B}$ 是否可逆？②a 可能取哪些值？（II）已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$1,2,-3$，求$|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|$.

(22)（**本小题满分 11 分**）设随机变量T 为在$[-1,3]$上的均匀分布，令

$$X=\begin{cases}1, & T>0,\\ 0, & T\le 0,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & T>1,\\ 0, & T\le 1.\end{cases}$$

试求：（I）(X,Y)联合分布律；（II）$Z=X+Y$ 的分布律；（III）方差 $D(X-Y)$.

(23)（**本小题满分 11 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_{2n}(n\ge 2)$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ 及统计量$Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$.（I）考察统计量Y 关于σ^2 的无偏性;（II）$\mu=0$时，试求 $D(\bar{X}^2)$.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学 一

（模拟五）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟五）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）．设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均不存在，那么下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也不存在

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也存在

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 均不存在

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 中只要有一个存在，另一个必定不存在

（2）　下列命题中正确的是（ ）.

(A) 设 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $x=x_0$ 一定不是函数 $f(x)$ 的极值点

(B) 设 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，则必有 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$

(C) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)f'(b)<0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值必有一个在区间 (a,b) 的内部取得

(D) 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个驻点 x_0，且 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的最小值

（3）　函数 $f(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}$ 在 $P_0(-1,-2,3)$ 点，函数值增加最快的方向是(　　).

（A）　$-1,\ 2,\ 1$　　　　（B）　$-1,\ -2,\ 3$

（C）$\{-1,\ 2,\ -1\}$　　　　（D）$\{1,\ -2,\ -1\}$

（4）设平面区域 $D: x^2+y^2\le 1$，记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2 d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma,$$

则有（　　）

（A）$I_1>I_2>I_3$.　（B）$I_2>I_1>I_3$.　（C）$I_1>I_3>I_2$.　（D）$I_2>I_3>I_1$.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 三阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 是 3 阶可逆阵，且满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维非向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，则矩阵 $\boldsymbol{P}$ 不能是（　　）.

（A）　$(-\boldsymbol{\alpha}_1,5\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（B）　$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（C）　$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$　（D）　$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\xi_1=(1\quad 2\quad -2)^T$，$\xi_2=(2\quad 1\quad -1)^T$，$\xi_3=(1\quad 1\quad t)^T$ 是线性非齐次方程组的 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 解向量,其中 $\boldsymbol{b}=(1\quad 3\quad -2)^T$,则（　　）.

(A)　$t=-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　　　(B)　$t=-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(C)　$t\ne-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　　　(D)　$t\ne-1$,必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

（7） $X \sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $(\lambda>0)$，且概率 $P(X>D(X))=e^{-2}$，则参数 $\lambda=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　　(B)1　　　(C)0　　　(D)2

（8）设 X 的分布函数与密度函数分别为 $F(x)$ 及 $f(x)$，若 X 与 $-X$ 具有相同的分布函数，则对任意的实数 x，有（　　）.

(A) $F(-x)=F(x)$　　(B) $F(-x)=-F(x)$　　(C) $f(-x)=f(x)$　　(D) $f(-x)=-f(x)$

【答案】（C）.

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[\sin\dfrac{\pi}{n^2}+2\sin\dfrac{2^2\pi}{n^2}+\cdots+(n-1)\sin\dfrac{(n-1)^2\pi}{n^2}]=$__________.

（10） 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$____________.

（11）. 设函数 $z=f(x,y)=\dfrac{\sin(x-1)\cos y-y\cos\sqrt{x+1}}{x+\sin y}$，求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$_____________.

（12）微分方程 $y^2dx+(x-2xy-y^2)dy=0$ 的通解为____________.

(13) 向量组：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 的一个最大线性无关组为________.

（14） 设二维随机变量服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，且 $\mu=0$ 时，则有 $D(2X-Y^2)=$________.

【解】由于 $\rho=0$，即 X 与 Y^2 独立，所以 $D(2X-Y^2)=4D(X)+D(Y^2)=2\sigma^2(2+\sigma^2)$。

其中：由于 $Y\sim N(0,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{Y}{\sigma}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\dfrac{1}{\sigma^4}D(Y^2)=2,$ 可知 $D(Y^2)=2\sigma^4$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本题总分 10 分**） 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx^2)\cos x-a}{\sin^2 x\ln(1+x^2)}=c$，求常数 a,b,c 的值.

（16）（**本题总分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减的连续函数。证明：$a>0$ 时有

$$3\int_0^a x^2f(x)\,\mathrm{d}x<a^2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

（17）. 求椭圆 $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离.

（18）（**本题总分 10 分**）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{y\,dzdx+(z-2)\,dxdy}{x^2+y^2+4z^2}$，其中曲面 Σ 是上半椭球面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1\,(z\ge 0)$，且取下侧.

（19）（**本题总分 10 分**） 设 $f(x)$ 在（0，1）内可导，且导数 $f'(x)$ 有界，证明：

（I）$\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})]$绝对收敛；　　（II）$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{2^n})$存在.

(20) （本题总分 11 分）已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^T$是二次型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+4x_2^2+bx_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$$

对应矩阵$\boldsymbol{A}$属于λ的特征向量，（Ⅰ）求a,b,λ的值；（Ⅱ）利用正交变换将二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

(21) （本题总分 11 分）设ξ为$n(n>1)$维单位列向量，即$\xi^T\xi=1$，$\boldsymbol{A}=\xi\xi^T$.（Ⅰ）证明：$\boldsymbol{A}\xi=\xi$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$；（Ⅱ）证明：$R(\boldsymbol{A})=1,R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-1$；（III）计算$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

（22）（本小题满分 11 分）设(X,Y)联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax^2e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(I) 考查X与Y的独立性；（II）求条件密度函数$f_{X/Y}(x/y)$；（III）求条件概率$\mathrm{P}\{X<1/Y=2\}$.

（23）（本题总分 11 分）设$X_1,\ldots,X_n$为总体X的简单随机样本，总体X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

试求：（I）参数θ的最大似然估计$\hat{\theta}$；（II）考察$\hat{\theta}^2$是否为θ^2的无偏估计