绝密 * 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则关于 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\ (x\neq 0)$ 的下列四个结论

① 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也是奇函数；

② 若 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数，则 $F(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数；

③ 若 $f(x)$ 为 $(0,1)$ 内的有界函数，则 $F(x)$ 也是 $(0,1)$ 内的有界函数；

④ 若 $f(x)$ 为单调递增函数，则 $F(x)$ 也为单调递增函数

中正确的个数是（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）若 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$，则（　　）．

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　（B）$f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 连续，$f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 连续

（C）$df(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=0$　　（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任一方向 l 的方向导数均为零

（3）对于下列四个数项级数中，不收敛的是（　　）．

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$　　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n\cdot\cos n}{\sqrt{n^3+2n-2}}$　　（D）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin[(n+\frac{1}{\ln n})\pi]$

（4）设平面区域 D 由直线 $y=\frac{1}{2}x, x=\frac{1}{2}, x=1$ 及 x 轴围成，记 $I_1=\iint\limits_D[\ln(x-y)]^3 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x-y)^3 d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D e^{(x-y)^3}d\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 之间的关系是（　　）．

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_3<I_1<I_2$

（5）设 $\xi_1=(1,-2,3,2)^T, \xi_2=(2,0,5,-2)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量，则下列向量中，必是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解向量的是（　　）．

（A）$\alpha_1=(1,-3,3,3)^T$　（B）$\alpha_2=(0,0,5,-2)^T$　（C）$\alpha_3=(-1,-6,-1,10)^T$　（D）$\alpha_4=(1,6,1,0)^T$

（6）设 A 为三阶方阵，有下列三个命题：

① A 经初等行变换化为 $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 A 的特征值一定为 $1,2,3$；

② 若 A 的秩 $r(A)=2$，则 A 必有两个非零特征值；

③ 若三阶方阵 P，使得 $AP=P\Lambda,\Lambda$ 为对角阵，则 P 的列向量一定是 A 的特征向量．

其中正确的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）设 A,B 为随机事件，$P(A)=P(B)=\frac{3}{4}$，则 $P(A-B)=\frac{1}{4}$ 成立的一个充分条件为（　　）.

（A）A,B 相互独立　（B）$A=B$　（C）$A\cup B=\Omega$　（D）$AB=\varnothing$

（8）设随机变量 $X\sim N(0,1),\chi^2\sim\chi^2(1)$，给定 $\alpha\ (0<\alpha<1)$，数 U_α 满足 $P\{X>U_\alpha\}=\alpha$，数 $\chi_\alpha^2(1)$ 满足 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(1)\}=\alpha$，则 $\chi_{0.05}^2(1)=$（　　）.

（A）$U_{0.025}$　（B）$U_{0.025}^2$　（C）$U_{0.05}$　（D）$U_{0.05}^2$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，若 $\lim\limits_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arctan x}}=e$，则 $f'(0)=$________.

（10）设 f 可导，由参数方程 $\begin{cases}x=(t-2)f(t),\\ y=tf(t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{2t+1}{2t-3}$，则满足 $f(-\ln3)=1$ 的 $f(x)=$________.

（11）$\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=$________.

（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & x\geq0\end{cases}$ 可导，其中 a,b 为常数，则 $a^2+b^2=$________.

（13）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{pmatrix}$，$B,C$ 均为 3×2 矩阵，且有 $AB=C$，C 的第一列为 $(1,1,1)^T$，则 B 的第一列为________.

（14）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leq x\leq1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 则 $P\{X>EX\}=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）（Ⅰ）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq0$．证明点 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=1$．判别点 $(0,f(0))$ 是否是曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

（16）（本题满分 10 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n!(n+2)}$ 的和．

（17）（本题满分 10 分）设函数 $z=f(x,x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，而 $y=y(x)$ 是

由方程$x^2(y-1)+e^y=1$确定的隐含数，求$\left.\dfrac{d^2z}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(18)（本题满分 10 分）（Ⅰ）设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(x)$单调不减，证明：$\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.（Ⅱ）设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，若$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$. 证明：存在$\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)=0$.

(19)（本题满分 10 分）计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{(2x+y)\,dydz+z\,dxdy}{x^2+y^2+1}$，其中$\Sigma$是圆柱面$x^2+y^2=1$被平面$x+y-z+2=0$与$z=0$所截下的有限部分，取外侧.

(20)（本题满分 11 分）（Ⅰ）已知$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$是4个三维列向量，其中$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\beta_1,\beta_2$线性无关，证明存在非零向量$\xi$，$\xi$既可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，又可由$\beta_1,\beta_2$线性表出.

（Ⅱ）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$；$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$. 求（Ⅰ）中的$\xi$.

(21)（本题满分 11 分）已知A为三阶实对称阵，A^*为A的伴随矩阵，$|A|>0$，P为三阶可逆矩阵，P的第一列为$(1,1,-1)^T$，$P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，（Ⅰ） 求$A$；（Ⅱ） 设$B=A+kE$，当$k$为何值时，二次曲面$x^TBx=-1$为圆柱面，其中$x=(x_1,x_2,x_3)^T$.

(22)（本题满分 11 分）设随机变量$X\sim U(-1,2)$，$X_1=\begin{cases}1, & 0<X<2,\\0, & -1<X\leq 0,\end{cases}$ $X_2=\begin{cases}1, & -1<X<1,\\0, & 1\leq X<2.\end{cases}$

（Ⅰ）求X_1,X_2的联合概率分布；（Ⅱ）求$D(X_1X_2)$和$D(X_1+X_2)$；（Ⅲ）求已知$X_1+X_2=1$的条件下，X_1的概率分布.

(23)（本题满分 11 分）设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geq\mu,\\0, & 其他.\end{cases}$其中$\theta>0$，$\theta$，$\mu$为参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体$X$的简单随机样本.（Ⅰ）如果参数$\mu$已知，求未知参数$\theta$的极大似然估计量$\hat{\theta}$；（Ⅱ）如果参数$\theta$已知，求未知参数$\mu$的极大似然估计量$\hat{\mu}$.

绝密 * 启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

① 函数 $f(x),g(x)$ 在区间 I 内无界，则 $f(x)g(x)$ 在 I 内也无界；

② 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也间断；

③ 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也不可导；

④ 函数 $f(x),g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取极小值，则 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也取极小值．

以上命题中正确的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设 $f(x)=x^3, g(x)=x^2$，则当 $x\to 0^+$ 时，下列结论中正确的是（　　）．

（A）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小

（B）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小

（C）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的低阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小

（D）$g(x)^{f(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小，$f(x)^{g(x)}-1$ 是 x^2 的高阶无穷小

（3）设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的二阶偏导数存在，则下列结论正确的个数为（　　）．

① $f(x,y)$ 在点 P_0 处连续　　② $f(x,y)$ 在点 P_0 处一阶偏导数连续

③ 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　④ $f(x,y)$ 在点 P_0 处的一阶偏导数存在

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$，记 $I_1=\int_0^1 f(x)\,dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\,dx$，则（　　）．

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_2>I_1>I_3$　　（C）$I_2>I_3>I_1$　　（D）$I_3>I_2>I_1$

（5）设 4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知齐次方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(1,-2,1,0)^T$，k 为任意常数，则下列命题不正确的是（　　）．

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关　　（B）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关

(6) 设 A 为4阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=O$，若 $r(A-E)=1$，则二次型 X^TAX 在正交变换下的标准形是（　　）.

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$　　(B) $y_1^2-3y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$

(C) $y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$

(7) 设连续型随机变量 X 的密度函数和分布函数分别为 $f(x),F(x)$，则下列选项一定正确的是（　　）.

(A) $0\le f(x)\le 1$　(B) $P\{X=x\}=f(x)$　(C) $P\{X<x\}<F(x)$　(D) $P\{X=x\}\le F(x)$

(8) 设随机变量 X 在 $[0,1]$ 中取值，且 X 的方差 DX 存在，则（　　）.

(A) $DX\le\frac{1}{4}$　(B) $DX>\frac{1}{4}$　(C) $DX\le\frac{1}{12}$　(D) $DX>\frac{1}{12}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设 $y=y(x)$ 是方程 $y'''-y'=0$ 的解，且 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是 x^2 的等价无穷小，则 $y=$______.

(10) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 所确定，则 $y''(0)=$______.

(11) 设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $f(x-\frac{z}{a})=y-\frac{z}{b}$，则 $\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{b}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$______.

(12) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在点 $x=-1$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n}(x-3)^{n+1}$ 的收敛区间为______.

(13)设 A 为二阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A|=-1, B=2\begin{pmatrix}(2A)^{-1}-(2A)^* & O\\ O & A\end{pmatrix}$，则 $|B|=$______.

(14) 设盒子中有两个红球和一个白球，现从中任取一球，观察颜色后放回，并加入一个与其同色的球，则第三次取得红球的概率为______.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$．（Ⅰ）如果 $\max\limits_{a\le x\le b}f(x)\cdot\min\limits_{a\le x\le b}f(x)<0$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$；（Ⅱ）如果 $f''(x)+f(x)\ne 2f'(x)\ (x\in(a,b))$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内没有零点.

(16)（本题满分 10 分）求由方程 $x^2+2y^2+z^2-4yz+2z+3=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

20、21全程考研资料请加群712760929

(17)(本题满分 10 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2(x-1)^n$的收敛域与和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^n}$的和.

(18)(本题满分 10 分)设单增光滑曲线$y=y(x)$位于第一象限，当$x>0$时，在区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形绕x轴旋转一周所得旋转体体积值曲线$V(x)$与该曲边梯形的面积值$S(x)$之比为$\frac{3}{5}\pi y(x)$，且曲线$y=y(x)$过点$(1,1)$，求曲线$y=y(x)$的方程.

(19)(本题满分 10 分)计算曲线积分$I=\int_L\frac{ydx-xdy}{x^2+4y^2}$，其中$L$是抛物线$y=-x^2+x+1$从点$A(-1,-1)$到点$B(1,1)$的一段弧.

(20)(本题满分 11 分)已知$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$，$t$为常数，(Ⅰ)证明当$t=-1$时，$\xi_1,\xi_2,\xi_3$不可能同时是一个三元非齐次线性方程组的解(Ⅱ)当$t\neq-1$时，若$\xi_1,\xi_2,\xi_3$是一个三元非齐次线性方程组$Ax=b$的解，则$r(A)=1$.

(21)(本题满分 11 分)设三阶实对称矩阵A的秩$r(A)=2$，A有特征值1与2，矩阵A的属于特征值1与2的特征向量分别为$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix}$，(Ⅰ)求解$Ax=0$；(Ⅱ)求一个正交变换$x=Py$化二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$为标准形，并写出该标准形和正交变换.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量X在$[0,1]$上取值，其分布函数为$F(x)=\begin{cases}1, & x>1,\\ a+bx, & 0\le x\le1,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $P\{X=0\}=\frac{1}{4}$.(Ⅰ)求常数a,b；(Ⅱ)求$Y=-\ln F(X)$的分布函数$F_Y(y)$.

(23)(本题满分 11 分)设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X\sim P(1)$的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$p_n=P\{|\overline{X}-1|<\frac{1}{5}\}$.(Ⅰ)计算$p_2$；(Ⅱ)利用中心极限定理计算$p_{100}$($\Phi(2)=0.9772$)；(Ⅲ)根据切比雪夫不等式估计$p_n$.

绝密 * 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^{x}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{x}}\cdot\dfrac{\arctan x}{x}$ 有（　　）．

（A）三条渐近线和一个第一类间断点　　（B）三条渐近线和两个第一类间断点

（C）两条渐近线和两个第一类间断点　　（D）两条渐近线和一个第一类间断点

（2）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则有（　　）．

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2-a_{n+1}^2)$ 收敛　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 均收敛

（3）下列定积分大于零的是（　　）．

（A）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x(1-\cos x)dx$　（B）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x(1-\sin x)dx$　（C）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$　（D）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$

（4）设 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$I_1=\iint\limits_D\max\{x,y\}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\min\{x,y\}dxdy$，$I_3=\iint\limits_D[x+y]dxdy$，其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数，则有（　　）．

（A）$I_1+I_2=I_3$　　（B）$I_1\cdot I_2=I_3$　　（C）$I_1+I_3=I_2$　　（D）$I_1\cdot I_3=I_2$

（5）设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的三个不同的解，给出四个命题：

① 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 与 $Ax=0$ 的一个基础解系等价，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 也是 $Ax=0$ 的基础解系；

② 如果 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=0$ 的每个解都可以用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示，并且表示式唯一；

③ 如果 $Ax=0$ 的每个解都可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示，并且表示式唯一，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 的一个基础解系；

④ 若 $n-r(A)=3$，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是基础解系．

其中正确的为（　　）．

（A）①②　　（B）①④　　（C）②③　　（D）③④

（6）设 A,B 为 n 阶方阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则下列线性方程组中，与 $Ax=0$ 同解的个数为（　　）．

① $(A+B)x=0$；　② $ABx=0$；　③ $BAx=0$；　④ $\begin{pmatrix}A-B\\A+B\end{pmatrix}x=0$；　⑤ $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

(7) 设有随机事件 A,B，$0<P(A)<1$，则下列说法必正确的是（　　）.

(A) 若 $P(A\cup B)=P(AB)$，则 $A=B$　　(B) 若 $P(B|A)=1$，则 A 与 $\overline{B}$ 互斥

(C) 若 $P(A|A\cup B)=1$，则 $B\subset A$　　(D) 若 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，则 A,B 相互独立

(8) 设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=n\}=\dfrac{k}{n^2-1},n=2,3,4,\cdots$，其中 k 为常数，则反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t\ln^{X-2}t}dt$ 收敛的概率为（　　）.

(A) $\dfrac{3k}{4}$　　(B) $\dfrac{11k}{24}$　　(C) $\dfrac{7}{18}$　　(D) $\dfrac{1}{2}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}x[\sin\ln(1+\dfrac{a}{x})-\sin\ln(1+\dfrac{1}{x})]=3$，则常数 $a=$_________.

(10) 设正值连续函数 $y(x)$ 满足 $y(0)=1$，$\int_{-\infty}^{x}y(t)dt\int_{x}^{+\infty}\dfrac{1}{y(t)}dt=1$，则 $y(x)=$___________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，且 $f(1)=3$．若 $f(x)$ 的反函数 $\varphi(x)$ 满足 $\int_2^{f(\ln x+1)}\varphi(t)dt=x\ln x$，则 $f(x)=$_________.

(12) 设 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一象限内的部分，取上侧，椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的立体体积为 V，则 $\iint\limits_{\Sigma}z\,dxdy=$__________.

(13) 设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性无关的列向量，且满足 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$A(\alpha_1+\alpha_2)=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，则 $|A|=$____________.

(14) 已知某种木材的横纹抗压力 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现对十个试件作横纹抗压力实验，测得 $s=5$．则 σ^2 的置信水平为 0.90 的置信区间为___________.

（附：$\chi^2_{0.05}(9)=16.919,\chi^2_{0.95}(9)=3.325;\chi^2_{0.05}(10)=18.307,\chi^2_{0.95}(10)=3.940$）

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)=x+\ln(2-x)$，$x\in(-\infty,2)$．（Ⅰ）求 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 内的最大值；（Ⅱ）若 $x_1=\ln 2$，$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(16)(本题满分 10 分)设$u(x,y)=\int_0^1 f(t)|xy-t|dt$,其中$f(t)$在$[0,1]$上连续,$0\le x\le 1$,$0\le y\le 1$,求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(17)(本题满分 10 分)将函数$f(x)=x\cdot\arctan x^2$展开成x的幂级数,并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和.

(18)(本题满分 10 分)用变量代换$x=e^t$化简微分方程$(x^2\ln x)y''-xy'+y=0$,再通过变换$z=\dfrac{dy}{dt}-y$,求该微分方程的通解.

(19)(本题满分 10 分)计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$,其中$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & z\ge\sqrt{x^2+y^2}, \\ 1, & z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

(20)(本题满分 11 分)已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$有特征向量

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

(Ⅰ)证明$r(A)=2$;(Ⅱ)求$Ax=\xi_3$的通解.

(21)(本题满分 11 分)已知三元二次型X^TAX的平方项系数为0,并且$\alpha=(1,2,-1)^T$满足$A\alpha=2\alpha$,(Ⅰ)求该二次型表达式;(Ⅱ)求出正交变换下的二次型的标准形;(Ⅲ)若$A^3+2A^2-4A+kE$正定,求k的范围.

(22)(本题满分 11 分)设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases} 8xy, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$计算$P\{Y<EY|X=EX\}$.

(23)(本题满分 11 分)设总体X的密度函数为$f(x;\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X$的一个简单随机样本.(Ⅰ)求$EX$和$E(X^2)$;(Ⅱ)利用原点矩求$\sigma^2$的矩估计量$\widehat{\sigma}_M^2$,并讨论其无偏性.

绝密 * 启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（四）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，则下列结论正确的是（　　）．

(A) 如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处也取极值

(B) 如果 $f'(-x)f'(x)<0\ (x\neq 0)$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值

(C) 如果 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极值

(D) 如果 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f(0)f'(0)\neq 0$，则 $\int_0^x tf(t)dt$ 在点 $x=0$ 处取极值

(2) 设直线 L 的方程为 $\begin{cases}x+y-z=2,\\ 2x+4y=3,\end{cases}$ 平面 π 的方程为 $2x-y+z=1$，则（　　）．

(A) L 平行 π　　(B) L 垂直于 π

(C) L 在 π 上　　(D) L 与 π 斜交

(3) 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos xt}{t}dt$，则（　　）．

(A) $f(0)=f(\frac{1}{2})$　　(B) $f(\frac{1}{2})=f(1)$

(C) $f(1)=f(2)$　　(D) $f(0)=f(2)$

(4) 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处取极小值，则 $f''_{xx}(x_0,y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)$ 的值（　　）．

(A) 非正　　(B) 非负　　(C) 等于0　　(D) 不能确定

(5) 设 a,b,c,d 为互不相同的实数，$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{pmatrix}$，则下列结论中正确的是（　　）．

(A) 方程组 $Ax=0$ 只有零解　　(B) 方程组 $A^Tx=0$ 有非零解

(C) 方程组 $A^TAx=0$ 只有零解　　(D) 方程组 $AA^Tx=0$ 只有零解

(6) 设 A 为三阶方阵，ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的基础解系，且 $A\xi_3=\xi_3\ (\xi_3\neq 0)$，则下列选项中，满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$ 的矩阵 P 是（　　）．

(A) $(\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_1,\xi_3)$　　(B) (ξ_1,ξ_3,ξ_2)

(C) $(2\xi_1-\xi_2,\xi_1+\xi_2,2\xi_3)$　　(D) $(\xi_1,\xi_2,\xi_2+\xi_3)$

（7）设当$x\geq 0,y\geq 0$时，二维随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)=(a-e^{-x})(b-e^{-y})$，其中常数$a>0,b>0$，则$F(0,0)$的值为（　　）.

（A）$\frac{a}{2}$　　（B）$\frac{b}{2}$　　（C）0　　（D）$\frac{1}{2}$

（8）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X\sim B(1,p)$的简单随机样本，p为未知参数，$\overline{X}$是样本均值，则$P\{\overline{X}=\frac{2}{n}\}=$（　　）.

（A）p　　（B）$1-p$　　（C）$C_n^2p^2(1-p)^{n-2}$　　（D）$C_n^2p^{n-2}(1-p)^2$

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若方程$x^2-x-1=ae^x$无实根，则常数a的取值范围为__________.

（10）$\max\limits_{0\leq t\leq 1}\int_0^1\left|x^2-t\right|dx=$__________.

（11）设圆$x^2+y^2=2$在点$P_0(1,-1)$处指向内侧的法向量为$\vec{n}$，则函数$z=x^2e^{1+y}$在点P_0处沿$\vec{n}$方向的方向导数为__________.

（12）幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n(n+1)}(x+1)^{3n}$的收敛域为__________.

（13）设$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$|A|=2$，$B=\begin{pmatrix}-a_{11}&a_{12}&2a_{12}+a_{13}\\-a_{21}&a_{22}&2a_{22}+a_{23}\\-a_{31}&a_{32}&2a_{32}+a_{33}\end{pmatrix}$，$A^*$为$A$的伴随矩阵，则$A^*B=$__________.

（14）已知$P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，则$P(B|A\cup\overline{B})=$__________.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）求微分方程$\frac{dy}{dx}-y=|x|$的通解.

（16）（本题满分10分）设函数$f(x)$具有二阶连续导数，令$g(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$若$g'(0)=1$，求$f(0),f'(0),f''(0)$.

（17）（本题满分10分）设$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{\cos\beta}{\beta}-\frac{1}{\beta}<\frac{\cos\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$.

（18）（本题满分 10 分）设 $p>0$ 为常数，讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

（19）（本题满分 10 分）计算曲线积分 $I=\int_L(3x^2e^y+ye^{\sin x}\cos x)dx+(x^3e^y+xy^3+e^{\sin x})dy$，其中 L 是从点 $A(-a,0)$ 到点 $B(a,0)$ 的上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\ge 0)$.

（20）（本题满分 11 分）（Ⅰ）设 A 为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位阵，问 A 满足什么条件时，存在 n 阶方阵 $B(\ne E)$，使得 $AB=A$？（Ⅱ）当 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ 时，求所有的 $B(\ne E)$，使得 $AB=A$.

（21）（本题满分 11 分）已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，（Ⅰ）解齐次线性方程组 $(A^TA)x=0$；（Ⅱ）讨论二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的正定性.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y_1,Y_2 相互独立，$X\sim B(1,\frac{1}{2}),Y_1\sim U[0,1],\ Y_2\sim U[0,1]$. 令 $U=XY_1,V=(1-X)Y_2$.（Ⅰ）求 $Z=U+V$ 的密度函数 $f_Z(z)$；（Ⅱ）求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV}.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的数学期望 $EX=\mu(\ne 0)$，方差为 $DX=1$. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{2n})$ 是来自总体 X 的两个独立简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\overline{Y}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}Y_i$.（Ⅰ）证明 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 均为 μ 的无偏估计，并问哪个更有效？（Ⅱ）记 $\hat{\mu}=a\overline{X}+b\overline{Y}$. 问常数 a,b 分别取何值时，$\hat{\mu}$ 仍为 μ 的无偏估计，且 $D\hat{\mu}$ 最小. 并解释其统计意义.

绝密 * 启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（五）

（科目代码：301）

.com/

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f''(x)>0, f(0)=0$，则（　　）．

（A）$f(1)>2f(\frac{1}{2})$　（B）$f(1)<2f(\frac{1}{2})$　（C）$f'(1)>2f'(\frac{1}{2})$　（D）$f'(1)<2f'(\frac{1}{2})$

（2）把极坐标系下的二次积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$$

化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　　）．

（A）$\int_0^1dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1f(x,y)\,dy$　　（B）$\int_0^1dx\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$

（C）$\int_0^1dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^1f(x,y)\,dx$　　（D）$\int_0^1dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^1f(x,y)\,dx$

（3）下列反常积分中，发散的反常积分是（　　）．

① $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx$　② $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$　③ $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$　④ $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

（A）①②　（B）①③　（C）②③　（D）③④

（4）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1,R_2，记 $R=\min\{R_1,R_2\}$，则下列结论正确的个数为（　　）．

① $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R；　② $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径不小于 R；

③ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+b_n}{a_{n+1}+b_{n+1}}\right|=\frac{1}{R}$；　④ 对任意的 $x\in(-R,R)$，都有 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)x^n=0$．

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（5）设 n 阶矩阵 A 的各列元素之和为 2，且 $|A|=6$，则它的伴随矩阵 A^* 的各列元素之和为（　　）．

（A）2　（B）$\frac{1}{3}$　（C）3　（D）6

（6）设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，λ 为实数，E 为 n 阶单位矩阵，有以下三个命题：

① A,B 等价，则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价；　② A,B 相似，则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 相似；

③ A,B 合同，则 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 合同；

其中正确的个数为（　　）．

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（7）设 X 为随机变量，s,t 为正数，m,n 为正整数．下列结论中正确的个数为（　　）．

① 若 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>s+t\mid X>s\}$ 与 s 无关.

② 若 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$ 则当 $t>1$ 时，$P\{X\ge 2t\mid X\ge t\}$ 与 t 无关.

③ 若 X 服从参数为 p 的几何分布，则 $P\{X>m+n\mid X>m\}$ 与 m 无关.

④ 若 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{k(k+1)},k=1,2,\cdots$，则 $P\{X\ge 2n\mid X\ge n\}$ 与 n 无关.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 σ^2 未知．对于假设 $H_0:\sigma=\sigma_0;H_1:\sigma\ne\sigma_0$，选择检验统计量及其分布为（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma_0}(\overline{X}-\mu_0)\sim N(0,1)$　　（B）$\dfrac{n}{\sigma_0^2}(\overline{X}-\mu_0)^2\sim\chi^2(1)$

（C）$\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\sim\chi^2(n)$　　（D）$\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）椭圆盘 $x^2+\dfrac{y^2}{3}\le 1$ 和 $\dfrac{x^2}{3}+y^2\le 1$ 的公共部分的面积等于________.

（10）微分方程 $(xy'-y)\arctan\dfrac{y}{x}=x$ 的通解为________.

（11）由曲线 $y=\dfrac{3}{x}\ (x>0)$ 与直线 $x+y=4$ 所围平面图形 D 的形心坐标为________.

（12）设 L 为曲线 $|x|+|y|=2$ 的正向，则 $\oint_L\dfrac{(x+y^2)\,dx+x^3dy}{|x|+|y|}=$________.

（13）已知三阶矩阵 A 的第一行是 $(1,1,1)$，且 $A^2=O$，则 $Ax=0$ 的通解为________.

（14）设有三箱同型号产品，其中第 i 箱产品的次品率为 $0.01i$，$i=1,2,3$．现从每箱中任取一个产品，则所取三个产品中平均次品个数为________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设函数 $z=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=0$，证明函数 $z=f(e^x\sin y,\ e^x\cos y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(16)(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且满足 $\int_0^{\pi}\min\{x,y\}f(y)dy=4f(x)$，求 $f(x)$.

(17)(本题满分 10 分)求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2+n-1}$ 的和.

(18)(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$.(Ⅰ)设 $\varphi(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$，$x\in[0,1]$，求 $\varphi'''(x)$；(Ⅱ)证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^1 tf(1-t)dt=\frac{1}{6}f'(\xi)$.

(19)(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一阶导数连续，且 $f(0)=0$. 如果对平面上任一条简单封闭曲线 L，都有 $\oint_L 2xyf(x^2)dx+[f(x^2)-x^2]dy=0$，求 $f(x)$，并计算积分

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,2)}2xyf(x^2)dx+[f(x^2)-x^2]dy.$$

(20)(本题满分 11 分)设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\a&1&b\\-2&c&d\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶方阵，$B^*\neq O$，且 $AB=O$，问 A 是否可以相似对角化. 若 A 可以相似对角化，则求可逆矩阵 P 和对角阵 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$；若 A 不可以相似对角化，则说明理由.

(21)(本题满分 11 分)已知 $A=\begin{pmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{pmatrix}$，$ab\neq0$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\c\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，(Ⅰ)求 a,b 满足的关系及 c 的值；(Ⅱ)求正交阵 Q，使 $Q^TAQ=\Lambda$ 为对角阵.

(22)(本题满分 11 分)设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}+axy, & |x|\le1,|y|\le1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$

其中常数 a 满足 $|a|\le\frac{1}{4}$. 记随机事件 $A=\{X\ge0\},B=\{Y\ge0\}$. 证明下面三个结论分别相互等价

① A,B 相互独立；　② X 与 Y 不相关；　③ X 与 Y 相互独立.

(23)(本题满分 11 分)设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(n>1)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，(Ⅰ)求 $Y_i=X_i-\overline{X}$ 的密度函数 $f_{Y_i}(y)$ $(i=1,2,\cdots,n)$；(Ⅱ)求常数 k 的值，使得 $\hat{\sigma}=k\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 为 σ 的无偏估计量.