绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项符合要求, 将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $f(x)$ 为奇函数， $f'(0)=1$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$， 则（ ）.

（A） $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点　　（B） $x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点

（C） $x=0$ 是 $g(x)$ 的无穷间断点　　（D） $x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类但非无穷间断点

(2) 设 $a_n=\cos n\pi\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则级数（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛。　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散。

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散。　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+f(x)+e^{x^2}]}{2x^2}=1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）不可导点　　（B）可导点但不是驻点

（C）驻点且为极小值点　　（D）驻点且为极大值点

(4) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成　（　　　）

（A） $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　（B）B $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（C） $I=\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$　　（D） $I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

(5) $|A_{n\times n}|=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-1\\-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$， A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于（　　）

(A) $-$n　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布为 $X \sim P\{X=i\}=\frac{1}{2},(i=0,1)$； X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y\le 1\}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ （B）$1-\frac{1}{2}e^{-1}$ （C）$1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$ （D）$1-e^{-1}$

（8）设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，且对常数 $a>0$，且满足：$E(X^2e^{-aX})=P\{X>1\}$，则 $a=$（　　）

（A）$\sqrt[3]{2e}-1$ （B）$\frac{1}{2}\sqrt[3]{e}$ （C）$\sqrt{2e}-1$ （D）$\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设曲线的方程为 $\begin{cases} x=\arctan 2t, \\ y-1+e^{y-1}=\ln(e+t), \end{cases}$ 则该曲线在 $x=0$ 处的切线方程是__________。

(10) 已知 $f(x)$ 满足 $xf(x)=1+\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$ __________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$，且对任给的 $x\in(0,2)$ 以及 $x+\Delta x\in(0,2)$，均有 $f(x+\Delta x)-f(x)$ $=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}\,x=$__________。

(12) 设 f,g 均可微，$z=f(xy,\ \ln x+g(xy))$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________。

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$（　　）.

（14）设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases} Axe^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，且 $X_1,\ldots,X_n$ 为简单随机样本，则参数 λ 的矩估计为____________

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=1,\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$$，求 $f''(0)$ 的值。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）已知曲面 $4x^2+4y^2-z^2=1$ 与平面 $x+y-z=0$ 的交线在 xoy 平面上的投影为一椭圆，求此椭圆的面积。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，G 为不包含原点的单连通域，任取 $M,N\in G$，在 G 内曲线积分 $\int_M^N \frac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$ 与路径无关，

（I）求 $f(x)$；（II）求 $\int_\Gamma \frac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$，其中 $\Gamma: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，取正向。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$，证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $\iint\limits_D [\left|x^2+y^2-2\right|+e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(xy)]dxdy$，其中 D 是以 $A(-3,0),B(3,0),C(0,3)$ 为顶点的三角形区域。

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组

①$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0 \\ 3x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$ 和 ②$\begin{cases} x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0 \\ x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0 \\ 2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0 \end{cases}$ 同解，求 a,b,c 的值，并求满足 $x_1=x_2$ 的解。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维到向量。A 为 3 阶方阵。且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1\neq 0$

（I）证明：α_1 α_2 α_3 线性无关；（II）求 A 特征值 及 特征向量。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0\le y<x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$，试求：

（I）概率 $P\{X+Y>1\}$；（II）条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；（III）随机变量函数 $Z=2X-Y$ 的密度函数。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim E(\lambda),Y\sim E(2\lambda)$，且 $Z=X-Y$，试求：（1）Z 的概率密度函数 $f_Z(z,\lambda)$；（II）对 Z 的正样本 $Z_1,\ldots,Z_n$（$Z_i>0$），求参数 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}$；（III）考察 $b=\frac{1}{\hat{\lambda}}$ 是否为 $\frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 2）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ 的可去间断点个数为（　　）.

(A)　0　　　(B)　1　　　(C)　2　　　(D)　3

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ 当 $|x-n\pi|<\dfrac{\pi}{4}$ 时　　（　　）

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不定

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}=$（　　）。

（A）$\dfrac{1}{2}\ln 2$　　（B）$\ln 2$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

(4) 设平面区域 D 由 $x=0,x=1,x-y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x-y=1$ 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^3(x-y)\,\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x-y)\,\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D(x-y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　）。

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<I_3$　　（D）$I_3<I_1<I_2$

(5) 已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\quad1\quad-2\quad1)^T$，$\eta_2=(0\quad1\quad0\quad1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关；　（2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；　（3）α_3,α_4 线性无关；

（4）秩 $r(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$ 中正确的是

（A）　（1）（3）　　（B）　（2）（4）　　（C）　（2）（3）　　（D）　（1）（4）

(6) 对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行，然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$，且 $|A|>0$，则 A 等于(　　)

(A) $-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $-\begin{pmatrix}&&1\\&1&-2\\1&&\end{pmatrix}$

(C) $-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}&&1\\-2&1&\\1&&\end{pmatrix}$

(7) 设 A 与 B 是两事件，且 $P(B)=0.6,P(A|B)=0.5$, 则 $P(A\cup\bar{B})=$（　　）

（A）　0.1　　（B）0.7　　（C）　0.3　　（D）　0.5

。

(8) 设 X 与 Y 是两个随机变量，$f_1(x)$、$f_2(y)$ 与 $F_1(x)$、$F_2(y)$ 分别是对应的概率密度函数与分布函数，且 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 连续，则以下函数中仍是概率密度函数的是（ ）.

(A) $f_1(x)+f_2(x)$　　(B) $f_1(x)F_2(x)-f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)f_2(x)$　　(D) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{x^2}{2n}+\dfrac{x}{n^2})^n$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

(10) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解是______________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导，$f(0)=1$，f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{x^2}^{x^2+f(x)}f^{-1}(t-x^2)\,\mathrm{d}t=x^2e^x$，则 $f(x)=$__________.

(12) 设 D=$\{(x,y)\big|(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\,\mathrm{d}\sigma=$_______.

(13) 设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$______.

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_n,X_{n+1}$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 与 S^2 分别是样本 $X_1,\dots,X_n$ 的样本均值与样本方差，对统计量：$\theta=C\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，则常数 $C=$________________.

三、解答题：(15)～(23)小题，共94分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分10分**）1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，若 $x\to0$ 时 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\sim x^k-\sin x$，求常数 k 的值及 $f''(0)$。

得分	评卷人

(16)（**本题满分10分**）求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 $D:|x|+|y|\le1$ 上的最大值与最小值。

(17)（**本题满分10分**）设曲面 $\Sigma: x^2+y^2=5z(0\le z\le1)$，其法向量与 z 轴正向成钝角，已知连续函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+\iint\limits_{\Sigma}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y,z)$ 的表达式.

得分	评卷人

(18)（**本题满分10分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}$ 的和.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是其导出组的基础解系，令 $\gamma_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1,\gamma_2=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\gamma_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_t$

试证：（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性无关；

（Ⅱ） 方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的任意一解$r$可表示为$\gamma=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\gamma_1+l_2\gamma_2+\cdots+l_t\gamma_t$, 其中

$$l_0+l_1+\cdots+l_t=1.$$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（1） 求参数 a； (2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U[0,1]$, Y 服从参数为 1 的指数分布，（I）求 $Z=2X+Y$ 的密度函数；（II）求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$ ；（III）判断 X与Z 是否独立。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$ $X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）$\hat{\theta}_L^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计.

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线有（　　）。

（A）1条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

(2) 设 $f(x), f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的解是(　　)

（A） $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}$；　　（B） $y=f(x)+1+ce^{-f(x)}$；

（C） $y=f(x)-c+ce^{-f(x)}$；　　（D） $y=f(x)+ce^{-f(x)}$

(3) 设 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $h(x)=cx^k$，若 $x\to 0$ 时 $g(x)\sim h(x)$，则（　　）.

（A） $c=\dfrac{1}{2},k=2$　　（B） $c=\dfrac{1}{3},k=2$　　（C） $c=\dfrac{1}{3},k=3$　　（D） $c=\dfrac{1}{6},k=3$

(4) 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x'(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y'(x,x^2)=$ （　　）

（A） $x+x^3$　　（B） $2x^2+2x^4$　　（C） x^2+x^5　　（D） $2x+2x^2$

(5) 设 A,B,C 是 n 阶矩阵，并满足 ABAC=E,则下列结论中不正确的是

（A） $A^TB^TA^TC^T=E.$　　(B) $BAC=CAB$

(C) $BA^2C=E$　　(D) $ACAB=CABA$

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是(　)

(A) 若 $AB=O$, 则 $B=O$　　(B) 对任意矩阵 B, 有 $r(AB)=r(B)$

(C) 存在 B, 使得 $BA=E$　　(E) 对任意矩阵 B, 有 $r(BA)=r(B)$

(7) 设随机变量 $X\sim E(1)$, 记 $Y=\max\{X,1\}$，则 $E(Y)=$ （　　）.

（A） 1　　（B） $1+e^{-1}$　　（C） $1-e^{-1}$　　（D） e^{-1}

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，为使 $Y=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 成为总体方差的无偏估计，则应选 k 为（　　）.（A）　（B）　（C）　（D）

（A） $\dfrac{1}{n-1}$　　（B） $\dfrac{1}{n}$　　（C） $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　（D） $\dfrac{1}{2n}$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$______。

(10) 已知方程 $y''-y=0$ 的积分曲线在点 $O(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切，则该积分曲线的方程为______.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$,且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=$______.

(12) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{3}y}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}\,y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x=$______。

(13) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为______.

(14) 设随机变量 X 服从 $[-1,2]$ 上的均匀分布，则随机变量的函数 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$______。

三、解答题:(15)～(23)小题，共94分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)(**本题满分10分**)设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$。(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值;(Ⅱ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$

得分	评卷人

(16)(**本题满分10分**)设函数 $f(x,y,z)$ 连续，

$\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$，记 Ω 在 xOz 平面上的投影区域为 D_{xz}，

求二重积分 $I=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}\,d\sigma$。

得分	评卷人

(17)(**本题满分10分**)计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}yz(y-z)dydz+zx(z-x)dzdx+xy(x-y)dxdy$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\,(R\ge 1)$ 在柱面 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$ 之内部分的上侧。

得分	评卷人

(18)(**本题满分10分**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导， $f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明:(Ⅰ) $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$;(Ⅱ)在 (a,b) 内存在与(Ⅰ)中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

(19)(**本题满分10分**)已知函数 $y=y(x)$ 满足等式 $y'=x+y$，且 $y(0)=1$，试讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right]$ 的收敛性。

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次方程组（I）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \end{cases}$的解全是4 元方程（II）$x_1+x_2+x_3=0$的解。（1）求$a$；（2）求齐次方程组（Ⅰ）的解。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$,其中 b 为非零的实数（I）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（II）求出该二次型正定的充要条件。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量X的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} Ae^{-ax+b}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

，其中b是任意常数，若$E(X)=2$，且

$$Y=\begin{cases} 4, & X\le 1 \\ 2X, & 1<X<2 \\ 2, & X\ge 2 \end{cases}$$

，试求：

（I）常数 A 与a；（II）概率$P\{Y>3\}$；（III）Y的分布函数

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量$X\sim U(\alpha,\alpha+\beta)$ $(\beta>0)$，$X_1,\ldots,X_n$是总体X的简单随机样本，试求：（I）参数α、β的矩估计；（II）α、β的极大似然估计.

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 不可导点个数为（ ）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

(2) 微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）$(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$　　（B）$(Ax^2+Bx)\cos 2x$

（C）$A\cos 2x+B\sin 2x$　　（D）$(Ax+B)\cos 2x$

(3) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

(4) 设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列判断不正确的是（　　）

（A）$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$　　（B）$f(0,0)=0$

（C）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　　（D）$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微

(5) $a=-5$ 是齐次方程组 $\begin{cases}3x_1+(a+2)x_2+4x_3=0\\5x_1+ax_2+(a+5)x_3=0\\x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ 有非零解的（　　）

(A)充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C)必要而非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则必有（　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

（7）设随机变量 X 与 Y 具有相同分布：$P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，且 $D(X-Y)=2$，则 $E(XY)=$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（8）设随机变量 X 服从标准正态分布，且 $Y=X^2$，则 X 与 Y（　　）

（A）相互独立且相关　　（B）相互独立且不相关

（C）不独立且相关　　（D）不独立但不相关

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14)小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$______________。

(10) 微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解为______________.

(11) 由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}, y=2-x$ 及 y 轴围成的平面图形边界曲线周长是_______________。

(12) 设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g(xf(x+y,2y))$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________

(13) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}=$_________.

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,0.5)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$，是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 是样本 $X_1,\dots,X_n$ 的样本均值，若要至少使得 99.7%的概率保证 $|\bar{X}-\mu|<0.1$，则样本容量 $n=$__________.

三、解答题：(15)～(23)小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

得分	评卷人

(16)(**本题满分 10 分**)设抛物面 $\sum_1: z=1+x^2+y^2$，圆柱面 $\sum_2:(x-1)^2+y^2=1$。在 $\sum_1$ 上求一点（x_0,y_0）使得过（x_0,y_0）的 $\sum_1$ 的切平面与 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 围成的体积最小。

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$ 的外侧，连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=2(x-y)^2+\iint_{\Sigma}x(z^2+e^z)dydz+y(z^2+e^z)dzdx+(zf(x,y)-2e^z)dxdy$$

求 $f(x,y)$。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\neq 0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数。

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数。

（I）求 A。　（II）求 A^{100}。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+ax_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.（Ⅰ)求常数 a；(Ⅱ)用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

试求：（I） 常数 A；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$；（III）条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$；

（IV）概率 $P\{Y\le X\}$; 概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的均值与方差分别是 $E(X)=\mu$、$D(X)=\sigma^2$，从 X 中分别抽取二组相互独立且容量为 n_1、n_2 的简单随机样本，样本均值分别 $\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$，若常数 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 时，（I）求证：$T=\lambda_1\overline{X}_1+\lambda_2\overline{X}_2$ 是 μ 的无偏估计；（II）且确定 λ_1、λ_2 多少时，方差 $D(T)$ 达到最小；（III）λ_1、λ_2 多少时，$T=\lambda_1\overline{X}_1+\lambda_2\overline{X}_2$ 依概率收敛 μ，即对任意 $\varepsilon>0$, 满足 $\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|T-\mu|<\varepsilon\}=1$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(B) 若 $A\geq 0$,则 $\exists M\geq 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\geq 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

(2) 设 $f(x,y)$ 在（0,0）的某一邻域内有定义， $f_x'(0,0)=3, f_y'(0.0)=-1,$ 则下列结论正确的是（　　）

（A） $dz\big|_{(0,0)}=3dx-dy;$

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0.0.f(0,0))$ 处有一法向量 $(3,-1,1)$；

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 有一切向量 $(1,0,3)$；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处有一切向量 $(3,0,1)$

(3) 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且满足 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得（　　）

（A）极小值　　（B）极大值

（C） $(0,f(0))$ 是曲线的拐点　　（D）不是极值，且点 $(0,f(0))$ 也不是曲线的拐点

(4) $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序得（其中 $f(x,y)$ 连续）（　　）

（A） $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　（B） $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

（C） $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　（D） $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

(5) 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$, 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相等的解, 则 $Ax=0$ 的基础解系为（　　）。

（A） $\xi_1-\xi_3$　　(B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

(6) 二次型 $x^TAx=(x_1+2x_2+a_3x_3)(x_1+5x_2+b_3x_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是

$(A)\ p=2,q=1$　　$(B)\ p=2,q=0$

$(C)\ p=1,q=1$　　　　(D) 与 a_3,b_3 有关，不能确定。

(7) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度函数为（　　）.

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$　　(D) $f_1(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(8) 设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　）.

(A) $\rho=0$　(B) $\rho=1$　(C) $\rho<0$　(D) $\rho>0$

得分	评卷人

二、填空题: (9)～(14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$________。

(10) 以 $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为________.

(11) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}\,x=$________.

(12) 若 Γ 是以 $A(0,1),B(-1,0),C(0,-1),D(1,0)$ 为顶点的四边形的边，则 $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{x^2}{|x|+|y|}ds=$________.

(13) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E[(\overline{X}+S^2)^2]=$________ .

三、解答题: (15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）过点 $(1,5)$ 作曲线 $C: y=x^3$ 的切线，设切线为 l。（Ⅰ）求 l 的方程；（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积；（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求函数 u 在点 M（1,1,1）处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$.

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）计算 $I=\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 为从原点 $O(0,0)$ 经圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 至点 $B(2,0)$ 的路径.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $a>1, b>0$，讨论方程 $\log_a^x = x^b$ 有实根时，a,b 所满足的条件。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (x\in R)$，满足

$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n = e^x$，求 $f(x)$ 及 a_n

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.（Ⅰ）求行列式 $\left|A^*-2A^{-1}\right|$;（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)$ 的前 n-1 个列向量线性相关，后 n-1 个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（I）证明：方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多个解。（II）若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n=1$。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设口袋中有红球 2 个白球 1 个黑球 2 个，连续取 2 个球(每次取一个不返回)，令 X、Y、Z 分别表示其中红球、白球与黑球的个数，试求：（I）概率 $P\{Y=1/X=0\}$；（II）(X,Y) 的联合分布律；（III）$Z=X+2Y$ 分布律；（IV）协方差 $Cov(X+2Y,X)$。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{2n}(n\ge 2)$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ 及统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$，（I）考察统计量 Y 关于 σ^2 的无偏性；（II）$\mu=0$ 时，求 $D(\bar{X}^2)$。