绝密★启用前

2015年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟1）

考生注意：本试卷共二十三题，满分150分，考试时间为3小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题，每小题4分，共32分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)$ 为奇函数，$f'(0)=1,\ g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$，则（ ）.

（A）$x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点　（B）$x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点

（C）$x=0$ 是 $g(x)$ 的无穷间断点　（D）$x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类但非无穷间断点

【解】：由题设有 $f(0)=0$，$g(0^+)=f_+'(0)=1, g(0^-)=-f_-'(0)=-1$，故答案B。

(2) 设 $a_n=\cos n\pi\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})\ (n=1,2,3,\cdots)$，则级数（　　）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛。　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散。

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散。　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

【答】（C）

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+f(x)+e^{x^2}]}{2x^2}=1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）不可导点　（B）可导点但不是驻点

（C）驻点且为极小值点　（D）驻点且为极大值点

【解】：方法一：由题设可知 $x\to0$ 时

$f(x)+e^{x^2}=2x^2+o(x^2), f(x)=2x^2-e^{x^2}+o(x^2)=-1+x^2+o(x^2)$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点。答案为C。

方法二：（特殊值法）取 $f(x)+e^{x^2}=2x^2$，即 $f(x)=2x^2-e^{x^2}, f'(x)=4x-2xe^{x^2}, f'(0)=0,$ $f''(0)=2$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点。

(4) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成　（　　）

A $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　B $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

C $I=\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$　D $I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

【答案】：选D

(5) $\left|A_{n\times n}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于(　　)

(A) –n　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

【答案】：B

【解】：$A^* = \dfrac{A^{-1}}{|A|}$。由于 $|A| = (-1)^{\tau(n123\cdots(n-1))}(-1)^n = -1$，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = 1+1+\cdots+1 = n$$

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是

（A）$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

【答案】C

【分析】由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，可知矩阵 A 的特征是 $3,-3,0$，故秩 $\gamma(A)=2$，二次型 x^TAx 的正、负惯性指数均为1。

（A）中矩阵的秩为1，不可能与矩阵 A 等阶；（C）中矩阵的特征值为3，-3,0.与矩阵 A 不仅等价、合同，而且也是相似的，不符合题意。对于（D）,记其矩阵为 D，由

$|\lambda E - D| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，可知 D 的特征值为 $1,-1,0$。x^TAx 与 x^TDx 的正、负惯性指数一样，所以它们合同但不相似（因为特征值不同），符合题意，故应选（D）.

注意，（B）中矩阵的特征值为 $1,4,0$，正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，与 A 即不合同也不相似，但等阶（因为秩相等）

（7） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布为 $X \sim P\{X=i\}=\frac{1}{2},(i=0,1)$； X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y\le 1\}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}(1-e^{-1})$　（B）$1-\frac{1}{2}e^{-1}$　（C）$1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$　（D）$1-e^{-1}$

【答案】:（A）

【解】 $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}(P\{Y\le 1\}+P\{Y\le 0\})=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

（8） 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，且对常数 $a>0$，且满足：$E(X^2e^{-aX})=P\{X>1\}$，则 $a=$（　　）

（A）$\sqrt[3]{2e}-1$　（B）$\frac{1}{2}\sqrt[3]{e}$　（C）$\sqrt{2e}-1$　（D）$\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$

【解】 $E(X^2e^{-aX})=\int_0^{+\infty}x^2e^{-(a+1)x}dx=\frac{2}{(a+1)^3},P\{X>1\}=e^{-1}$, 所以 $\frac{2}{(a+1)^3}=e^{-1}$,

$(a+1)^3=2e,\ a=\sqrt[3]{2e}-1$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

（9）设曲线的方程为 $\begin{cases}x=\arctan 2t,\\ y-1+e^{y-1}=\ln(e+t),\end{cases}$ 则该曲线在 $x=0$ 处的切线方程是___________。

【解】: 由题设知 $x=0$ 是 $t=0$，因而 $y=1$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{(1+e^{y-1})(e+t)}}{\frac{2}{1+4t^2}}$，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{4e}$，所求曲线方程为

$y=\frac{1}{4e}x+1$。.

(10) 已知 $f(x)$ 满足 $xf(x)=1+\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}$.

【解】:两边对 x 求导得 $f(x)+xf'(x)=x^2f(x)$,整理得

$f'(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)f(x)$,

分离变量后积分得 $\ln f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x+\ln c$,即 $f(x)=\frac{c}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $x\neq 0$;

又当 $x=1$时, $f(1)=1+\int_0^1 t^2\frac{c}{t}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1+c(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1)$,即 $c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=1+c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-c$ 故 $c=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$，且对任给的 $x\in(0,2)$ 以及 $x+\Delta x\in(0,2)$，均有 $f(x+\Delta x)-f(x)$ $=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=$______________。

【解】: 由题设 $x\in(0,2)$ 时有 $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2x-x^2}$，

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

(12) 设 f,g 均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________。

【解】：f_2'。

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$（　）.

答案：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\cdots=48\Rightarrow\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\boldsymbol{A}}{48}$

(14) 设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，且 $X_1,\ldots,X_n$ 为简单随机样本则则参数 λ 的矩估计为________

【解】 $\mu=\int_0^{+\infty}xAxe^{-\lambda x}dx=\frac{A}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{A}{\lambda}(\frac{1}{\lambda^2}+(\frac{1}{\lambda})^2)=\frac{2A}{\lambda^3}=\frac{2}{\lambda}$（其中：$A=\lambda^2$）

令 $\mu=\overline{X}$，$\frac{2}{\lambda}=\overline{X}$，所以 $\frac{2}{\lambda}=\overline{X}$，$\lambda=\frac{2}{\overline{X}}$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}=1,\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{f(x)}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$，求 $f''(0)$ 的值。

【解】：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f[\ln(1+x)]}{\sin x}=1$ 可知 $f(0)=0,f'(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to0}\left((1+\frac{f(x)-e^x+1}{e^x-1})^{\frac{e^x-1}{f(x)-e^x+1}}\right)^{\frac{f(x)-e^x+1}{(e^x-1)f(x)}}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-e^x+1}{(e^x-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-e^x+1}{x^2}\times\frac{x}{f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}[\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}-\frac{e^x-1}{2x}]=\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $f''(0)=2$。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）假设生产某种产品需要 A,B,C 三种原料，该产品的产量 q 与三种原料 A,B,C 的用量 x,y,z 之间有如下关系：$q=0.0005x^2yz$，已知三种原料价格分别为 1 元、2 元、3 元，现用 2400 元购买原料，问三种原料各购进多少，可以使该产品产量最大?

【解】：由题意可归结为求 $q=0.0005x^2yz$ 满足条件 $x+2y+3z=2400$ 的条件极值问题. 令

$F(x,y,z,\lambda)=0.0005x^2yz+\lambda(x+2y+3z-2400)$，分别对 x,y,z,λ 求偏导可得

$$\begin{cases} F_x'=0.001xyz+\lambda=0, & (1)\\ F_y'=0.0005x^2z+2\lambda=0, & (2)\\ F_z'=0.0005x^2y+3\lambda=0, & (3)\\ F_\lambda'=x+2y+3z-2400=0. & (4)\end{cases}$$

由(1), (2), (3)式可得 $x=4y=6z$，带入到（4）式可解得 $x=1200, y=300, z=200$，因实际问题有解，上述方程组的解是惟一的，因此当 $x=1200$（单位），$y=300$（单位），$z=200$(时，可使产量最大.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(x^2y^2-2)e^{xy}$，其中 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时，具有二阶连续导数，试求 $f(xy)$ 的表达式.（2010 数三模 1(17)）

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy), \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)$，由此可得 $f'(xy)+xyf''(xy)=(x^2y^2-2)e^{xy}$，令 $t=xy$，因而有 $f'(t)+tf''(t)=(t^2-2)e^t$，两边积分后可得

$$tf'(t)=\int(t^2-2)e^t\,\mathrm{d}t,\ f'(t)=(t-2)e^t+\frac{C_1}{t},$$

$$f(t)=\int[(t-2)e^t+\frac{C_1}{t}]\,\mathrm{d}t=(t-3)e^t+C_1\ln|t|+C_2.$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

【证明】：原不等式等价于 $\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<0\ (0<x<\dfrac{\pi}{4})$，

令 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x, x\in(0,\dfrac{\pi}{4}]$，

$f'(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x\ln\sin x-\cos x\ln\cos x$，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时

$0<\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0<\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ln\cos x<0, \ln\sin x<0, f'(x)>0$，因而函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单增，即 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时有 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<f(\dfrac{\pi}{4})=0$，即

$\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<0$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $\iint\limits_D[|x^2+y^2-2|+e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(xy)]dxdy$，其中 D 是以 $A(-3,0), B(3,0), C(0,3)$ 为顶点的三角形区域。

【解】：由对称性，$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}(\sin xy)dxdy=0$.记

$D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 2\text{且}y\ge 0\}$，

D_2 为 D 的右半部分，则有原式= $2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2)dxdy+2\iint\limits_{D_2}(2-x^2-y^2)dxdy$

$=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy-18+2(2\pi-\pi)=4\iint\limits_{D_1}x^2dxdy-18+2\pi=9+2\pi.$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组

$$①\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases} \text{和 }② \begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值，并求满足 $x_1=x_2$ 的解。

【解】： 解方程组 $①\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}.$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&a\\3&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&a\\0&4&1&3a\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\eta_1=(-1\ ,1\ (-4\ \ 0^{T}$ $\eta_2=\ -a\ \ 0\ \ -3a\ \ 1^{T}$

对方程组（2），对 B 作初等行变换

$$B=\begin{pmatrix}1&-3&b&4\\1&5&1&4a\\2&-2&-1&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&b&4\\0&4&-1-2b&c-8\\0&0&3+3b&2a-c+6\end{pmatrix}$$

由于（1）与（2）同解， $r(A)=r(B)$,知 $\begin{cases}3+3b=0\\2a-c+6=0\end{cases}$.有 $b=-1$

由于（1）与（2）同解, η_1, η_2 也是（2）的基础解系，它应是

$\begin{cases}x_1-3x_2\text{-}x_3+4x_4=0\\4x_2+x_3+(c\text{-}8\ \ x_4=0\end{cases}$ 的解，从而 $\begin{cases}\text{-}a+3a+4=0\\-3a+c-8=0\end{cases}$ 得 $a=-2,c=2$

因此（1）与（2） 的通解为 $k_1(-1\quad 1\quad -4\quad 0)^T+k_2(2\quad 0\quad 6\quad 1)^T$

由 $x_1=x_2$ 即 $-k_1+2k_2=k_1$，知 $k_1=k_2$，所以满足 $x_1=x_2$ 的解为 $k(1\quad 1\quad 2\quad 1)^T$，k 为任意常数。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3$ 为 3 维到向量。A 为 3 阶方阵。且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$， $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$， $\alpha_1\neq 0$

①证明： $\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3$ 线性无关

②求 A 特征值 及 特征向量。

解①设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ①

$\because A\alpha_1=\alpha_1,\qquad A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,\qquad A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$, 有

$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0$

$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$

$\Rightarrow(k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3$ ②

②－①： $k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0$ ③

$\therefore k_2A\alpha_1+k_3A\alpha_2=0$

$k_2\alpha_1+k_3(\alpha_1+\alpha_2)=0$ ④

④ − ③：$k_3\alpha_1=0$ $\alpha_1\neq 0$ $k_3=0$

代入③① 得 $k_2=0$ $k_1=0$ $\therefore \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3$线性无关。

② 由$A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=\therefore(A\alpha_1\ \ A\alpha_2\ \ A\alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$ 则 $AP=P\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=B$ A 相似 B

又 B 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ $\therefore P^{-1}(E-A)P=E-B$ $R(E-A)=R(E-B)=2$

因此属于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 线性无关特征向量个数$3-R(E-A)=1$

$\therefore$属于 1 特征向量为$k\alpha_1$ $(k\neq 0)$

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le y<x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$，试求：

（I）概率$P\{X+Y>1\}$；（II）条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；（III）随机变量函数$Z=2X-Y$的密度函数。

【解】（I）$P\{X+Y>1\}=\int_{\frac12}^{1}3xdx\int_{1-x}^{x}dy=3\int_{\frac12}^{1}x(2x-1)dx=\dfrac58$；

（II） 先求 $0\le x\le 1$时，$f_X(x)=\int_0^x 3xdy=3x^2$；

由此条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac1x, & 0\le y<x\le 1;\\ 0, & 其他\end{cases}$

（III）$Z=2X-Y$，利用卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$，

讨论$\begin{cases}0\le x\le 1\\ x<z<2x\end{cases}$，$f(x,2x-z)=3x$，

1）$0\le z<1$，$f_Z(z)=\int_{\frac z2}^{z}3xdx=\dfrac98 z^2$

2）$1\le z<2$，$f_Z(z)=\int_{\frac z2}^{1}3xdx=\dfrac38(4-z^2)$

所以 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数：$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, & 0\le z<1\\ \dfrac{3}{8}(4-z^2), & 1\le z<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim E(\lambda),Y\sim E(2\lambda)$，且 $Z=X-Y$，试求：（1）Z 的概率密度函数 $f_Z(z,\lambda)$；（II）对 Z 的正样本 $Z_1,\dots,Z_n$（$Z_i>0$），求参数 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}$；（III）$E(Z^2)$

【解】 （1）由 X 与 Y 独立，则联合密度函数为

$$f(x,y;\lambda)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda^2e^{-\lambda(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由卷积公式可知，$Z=X-Y$ 的密度函数：$f_Z(z,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$

$$f(x,x-z)=2\lambda^2e^{-\lambda(x+2(x-z))}=2\lambda^2e^{2\lambda z}e^{-3\lambda x},\quad \begin{cases}x>0\\ z<x\end{cases},$$

1) $z>0$，$f_Z(z,\lambda)=2\lambda^2e^{2\lambda z}\int_z^{+\infty}e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}\int_z^{+\infty}3\lambda e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z}$

2) $z\le 0$，$f_Z(z,\lambda)=2\lambda^2e^{2\lambda z}\int_0^{+\infty}e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}\int_0^{+\infty}3\lambda e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}$

所以：$f_Z(z,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}, & z<0\\ \dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$

（II）由于样本 $Z_i>0$，则 $L=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z_i}=(\dfrac{2}{3})^n\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}z_i}$；

$$\ln L=n\ln(\frac{2}{3})+n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}z_i,\quad \frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}z_i=0$$

所以 $\dfrac{n}{\lambda}=\sum_{i=1}^{n}z_i$，，则 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i}=\dfrac{1}{\overline{Z}}$；

（III） 由于 $E(Z^2)=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{2}{3}\lambda z^2e^{2\lambda z}dz+\int_0^{+\infty}\dfrac{2}{3}\lambda z^2e^{-\lambda z}dz=\int_0^{+\infty}\dfrac{2}{3}\lambda t^2e^{-2\lambda t}dt+\int_0^{+\infty}\dfrac{2}{3}\lambda z^2e^{-\lambda z}dz$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{2}{3}\frac{2}{\lambda^2}=\frac{3}{2\lambda^2}$$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ 的可去间断点个数为（ ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】: 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ 当 $\left|x-n\pi\right|<\dfrac{\pi}{4}$ 时 （　　　　）

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不定

【解】: 当 $\left|x-n\pi\right|<\dfrac{\pi}{4}$ 时 $\left|\sin x\right|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=2\left|\sin x\right|<1$，故该级数绝对收敛。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}=$（ ）。

（A）$\dfrac{1}{2}\ln 2$　　（B）$\ln 2$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

【解】: 因为 $\dfrac{n}{1+n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln 2$，故答案应该是 A。

(4) 设平面区域 D 由 $x=0,x=1,x-y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x-y=1$ 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^3(x-y)\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x-y)\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_D(x-y)^3\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　　　）。

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<I_3$　（D）$I_3<I_1<I_2$

【解】: 因为 $(x,y)\in D$ 时有 $\ln(x-y)^3<\sin(x-y)^3<(x-y)^3$，答案为（C）。

(5) 已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\quad 1\quad -2\quad 1)^T$，$\eta_2=(0\quad 1\quad 0\quad 1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关；（2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；（3）α_3,α_4 线性无关；

（4）秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4\right)=3$ 中正确的是（　　）

（A）（1）（3）；（B）（2）（4）；（C）（2）（3）；（D）（1）（4）

【答案】：C

(6) 对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行，然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$，且 $|A|>0$，则 A 等于(　)

(A) $-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(B) $-\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & -2 \\ 1 & & \end{pmatrix}$

(C) $-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

【解】: 由 $-E=E_{13}A^*E_{23}(-2)$ 得 $A^*=-E_{13}^{-1}E_{23}^{-1}(-2)$，因为 $|A^*|=|A|^2=1$ 且 $|A|>0$, 所以 $|A|=1$, 于是 $A^*=A^{-1}$, 故

$$A=(A^*)^{-1}=-E_{23}^{-1}(2)E_{13}^{-1}=-E_{23}(-2)E_{13}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，选(A).

（7）设 A与B 是两事件，且 $P(B)=0.6, P(A\,|\,B)=0.5$, 则 $P(A\cup\bar{B})=$（　　）

（A）0.1　（B）0.7　（C）0.3　（D）0.5

【答案】：（B）

【解】　由于 $P(A/B)=0.5,\ \dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.5$, 所以 $P(AB)=0.3$，又

$P(A\cup\bar{B})=1-P(\bar{A}B)=1-P(B)+P(AB)=0.7$。

（8）、设 X 与 Y 是两个随机变量，$f_1(x)$、$f_2(y)$ 与 $F_1(x)$、$F_2(y)$ 分别是对应的概率密度函数与分布函数，且 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 连续，则以下（　　）仍是概率密度函数。

（A）$f_1(x)+f_2(y)$　　（B）$f_1(x)F_2(x)-f_2(x)F_1(x)$

（C）$f_1(x)f_2(x)$　　（D）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

【答案】：（D）

【解】检验两个基本条件是否满足即可，对（D）

1）$f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)\geq 0$

2）$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x))dx=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)dF_2(x)=1$

所以是概率密度函数。

得分	评卷人

二、填空题: (9)～(14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{x^2}{2n}+\dfrac{x}{n^2})^n$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

【解】: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,故所求切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}x+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

(10) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解是______________.

【解】：方程可变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2x+e^{2y},x=e^{2y}(y+C)$，应填 $x=e^{2y}(y+C)$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导，$f(0)=1$，f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{x^2}^{x^2+f(x)} f^{-1}(t-x^2)\mathrm{d}t=x^2e^x$，则 $f(x)$=__________。

【解】：原等式可化为 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}u=x^2e^x$，对 x 求导可得 $xf'(x)=(x^2+2x)e^2$，

所以 $f'(x)=(x+2)e^x$，$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=(x+1)e^x$.

(12) 设 D=$\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\mathrm{d}\sigma=$_______.

【解】：由对称性可知 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(e^{\frac{y}{x}}-e^{\frac{x}{y}}+2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D 4\mathrm{d}\sigma=2\pi$.

(13) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$______.

【答案】：1

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_n,X_{n+1}$ 是 X 的简单随机样本，且 $\overline{X}$ 与 S^2 分别是样本 $X_1,\dots,X_n$ 的样本均值与样本方差，对统计量：$\theta=C\dfrac{(\overline{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，则常数 $C=$________________.

【解】：由题设有 $\overline{X}-X_{n+1}\sim N(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2),\sqrt{\dfrac{n}{(n+1)\sigma}}(\overline{X}-X_{n+1})\sim N(0,1)$，$\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$，

因此 $\dfrac{\dfrac{n}{(n+1)\sigma^2}(\overline{X}-X_{n+1})^2}{\dfrac{S^2}{\sigma^2}}=\dfrac{n}{n+1}\dfrac{(\overline{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，因填 $C=\dfrac{n}{n+1}$.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，若 $x\to0$ 时 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim x^k-\sin x$，求常数 k 的值及 $f''(0)$。

【解】：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=f'(0)=0$，由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{kx^{k-1}-\cos x}=1$，因此必有 $\lim\limits_{x\to0}(kx^{k-1}-\cos x)=0$，故 $k=1$，由此可得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1。$$

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 $D:|x|+|y|\le1$ 上的最大值与最小值。

【解】：$z_x'=2x-y=0, z_y'=2y-x=0$ 解得函数 z 在区域 D 的内部有唯一的驻点 $P_1(0,0)$。

在边界 $x+y=1(0<x<1)$ 上，令 $F=x^2+y^2-xy+\lambda(x+y-1)$，由 $F_x'=2x-y+\lambda=0$，$F_y'=2y-x+\lambda=0$ 及 $x+y=1$ 解得 Lagrange 函数 F 的驻点为 $P_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，同理在边界 $x-y=1(0<x<1)$ 上可求得 Lagrange 函数的驻点为 $P_3(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，在边界 $-x-y=1(-1<x<0)$ 与 $-x+y=1(-1<x<0)$ 相应的 Lagrange 函数的驻点为分别为 $P_4(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 与 $P_5(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，又记 D 的边界四个顶点分别为 $P_6(1,0)$，$P_7(0,1)$，$P_8(-1,0)$ 及 $P_9(0,-1)$。函数 z 在上述 9 个点处的值分别为 $0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1$。由此可得 $z_{\max}=1, z_{\min}=0$。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ D 为全平面，求二重积分 $\iint\limits_D f(x^2-y)f(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值.

【解】：由题设知当 $D_1: 0\le x\le 3, x^2-2\le y\le x^2+1$ 时 $f(x^2-y)f(x-1)=(x^2-y)(x-1)$，其它的点均有

$f(x^2-y)f(x-1)=0$，因此有 $\iint\limits_D f(x^2-y)f(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)(x-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^3\mathrm{d}x\int_{x^2-2}^{x^2+1}(x^2-y)(x-1)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\int_0^3(x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

【证明】：令 $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 由于

$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，因而 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)-\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x}{\xi^2}=0，即 \int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)，故原命题得证。$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $f(x)=x\arctan x$ 的麦克劳林级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)3^n}$ 的和.

【解】 $f(x)=x\arctan x=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n},\quad |x|\le 1$$

收敛域为$[-1,1]$，令$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)3^n}=f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设$\boldsymbol{\alpha}$是线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是其导出组的基础解系，令 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_t$

试证：（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$线性无关；

（Ⅱ）方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$任一解 r均可表示为$\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，其中$l_0+l_1+\cdots+l_t=1$.

【证明】：设$x,x_1,\cdots,x_t$是一组数，使$x\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\gamma}_1+x_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\gamma}_t=0$，代入整理得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，　　（1）

用矩阵$\boldsymbol{A}$左乘上式，由于$\boldsymbol{\beta}_i$是$\boldsymbol{AX}=0$的解，$\boldsymbol{A\beta}_i=\mathbf{0}$，于是得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{A\alpha}=(x_1+x_2+\cdots+x_t)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，但$\boldsymbol{b}\ne\mathbf{0}$，所以$x+x_1+x_2+\cdots x_t=0$　　（2）

将（2）代入（1）得$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，由于$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$是$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的基础解系，故线性无关，得$x_1=x_2=\cdots=x_t=0$，代入（2）得知$x=0$，于是$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$线性无关。

（II）由非齐次方程组解得结构知若$\boldsymbol{\gamma}$是$Ax=b$的解，其解γ可表示为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\alpha}+k_1(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\alpha})+k_2(\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_t(\boldsymbol{\gamma}_t-\boldsymbol{\alpha}),$$

$$=(1-k_1-k_2-\cdots-k_t)\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t$$

令$l_0=1-k_1-k_2-\cdots-k_t,l_1=k_1,\cdots,l_t=k_t$，上式可表示为$\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，且$l_0+l_1+\cdots+l_t=1$。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$能相似对角化，

（I）　求参数 a；　(II) 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$化二次型$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$化为标准形。

【解】　(I) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=6\quad\lambda_3=-2$　由已知$\boldsymbol{A}$可对角化，故$\lambda=6$必有 2 个线性无关的特征向量

由$R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$，得$a=0$

(II)　因此　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$　　对应二次型矩阵　$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$　知二次型　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}$特征值$6,7,-3$

对$\lambda=6$　由$(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得　$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^T$

对 $\lambda=7$ 　　由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 　　得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$

对 $\lambda=-3$ 　　由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 　　得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0)^T$

单位化　$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 　$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 　$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

又 A_1 特征值为 $6,7,-3$，经过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U[0,1]$, Y 服从参数为 1 的指数分布，（I）求 $Z=2X+Y$ 的密度函数；（II）求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$；（III）判断 X 与 Z 是否独立。

【解】由于 $X\sim U[0,1]$, 即 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$Y$ 的密度函数为

$$f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & y>o\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（I）$Z=2X+Y$，由卷积公式为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-2x)dx$，由 X 与 Y 相互独立，则

$f(x,z-2x)=e^{-z}e^{2x}$，对应区域为 $\begin{cases}0<x<1\\ z>2x\end{cases}$，则分别积分为：

1）$0\le z<2$，$f_Z(z)=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}}e^{2x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$；

2）$z\ge 2,$，$f_Z(z)=e^{-z}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1)$

则 $$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1), & z\ge 2\\ 0, & 其他\end{cases}；$$

（II）由于 X 与 Y 相互独立，则

$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,2X+Y)=2\mathrm{Cov}(Y,X)+D(Y)=D(Y)=1$

（III）又因 $\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,2X+Y)=2D(X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{6}$ 为，所以 X 与 Z 相关，可知 X 与 Z 不独立。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为
$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）求 $E(X^2)$.

【解】:（I）求 θ 的矩估计，

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=-\int_0^{+\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}})=-xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta,$$

令 $\mu=\bar{X}$，$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta=\bar{X}$ 所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_L=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$

（II）θ 的极大似然估计，

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2},\quad \ln L=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-2n\ln\theta-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=0,\quad \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2n,$$

所以 θ 的极大似然估计为： $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$；

（III）$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx\overset{t=\frac{x^2}{2\theta^2}}{=\!=}2\theta^2\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t=2\theta^2.$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线有（　　）。

（A）1条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

【解】: $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$， $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\infty$， $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x-1}}-1)-1]=0$，所以 $y=x$ 是它的斜渐近线，故共有 3 条，答案 C。

(2) 设 $f(x), f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的解是(　　　)

（A） $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}$；　　（B） $y=f(x)+1+ce^{-f(x)}$；

（C） $y=f(x)-c+ce^{-f(x)}$；　　（D） $y=f(x)+ce^{-f(x)}$

【答案】 A

(3) 设 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$， $h(x)=cx^k$，若 $x\to 0$ 时 $g(x)\sim h(x)$，则（ ）.

（A） $c=\dfrac{1}{2},k=2$　（B） $c=\dfrac{1}{3},k=2$　（C） $c=\dfrac{1}{3},k=3$　（D） $c=\dfrac{1}{6},k=3$

【解】: 由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{ck(k-1)x^{k-2}}=\dfrac{f''(0)}{ck(k-1)}$，故 $c=\dfrac{1}{6},k=3$，答案 D

(4) 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x'(x,x^2)=x^2-2x^4$， 则 $f_y'(x,x^2)=$ （　　　）

A $x+x^3$　　B $2x^2+2x^4$　　C x^2+x^5　　D $2x+2x^2$

答案：选 A

(5) 设 A,B,C 是 n 阶矩阵，并满足 ABAC=E,则下列结论中不正确的是

（A） $A^TB^TA^TC^T=E.$　　(B) $BAC=CAB$

(C) $BA^2C=E$　　(D) $ACAB=CABA$

【答案】C

【分析】这一类型题目要注意的是矩阵乘法没有交换律、有零因子、没有消去律等法则，由 $ABAC=E$ 知矩阵 A,B,C 均可逆，那么由

$ABAC=E\Rightarrow ABA=C^{-1}\Rightarrow CABA=E$。从而 $(CABA)^T=E$, 即 $A^TB^TA^TC^T=E$，故　（A）正确。

由 $ABAC=E$ 知 $A^{-1}=BAC$，由 $CABA=E$ 知 $A^{-1}=CBA$，从而 $BAC=CAB$，故（B）正确。
由排除法可知，（C）不正确，故选（C）.

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$，则下列结论不正确的是(　)

(A) 若 $AB=O$，则 $B=O$　　(B) 对任意矩阵 B，有 $r(AB)=r(B)$

(C) 存在 B，使得 $BA=E$　　(D) 对任意矩阵 B，有 $r(BA)=r(B)$

【解】：因为 $r(A)=n$，所以方程组 $AX=0$ 只有零解，而由 $AB=O$ 得 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解，故若 $AB=O$，则 $B=O$；

令 $BX=O$，$ABX=0$ 为两个方程组，显然若 $BX=O$，则 $ABX=0$，反之，若 $ABX=0$，因为 $r(A)=n$，所以方程组 $AX=0$ 只有零解，于是 $BX=O$，即方程组 $BX=O$ 与 $ABX=0$ 为同解方程组，故 $r(AB)=r(B)$；

因为 $r(A)=n$，所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$，令 $B=(E_n\quad O)P$，则 $BA=E$；

令 $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$，$r(A)=0$，但 $r(BA)=0\neq r(B)=1$，选(D).

（7）设随机变量 $X\sim E(1)$，记 $Y=\max\{X,1\}$，则 $E(Y)=$（　　　　）.

(A)　1　　(B) $1+e^{-1}$　　(C)　$1-e^{-1}$　　(D) e^{-1}

【解】：应选(B).

由于指数分布的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0. & x\le 0.\end{cases}$

$$E(Y)=E(\max\{x,1\})=\int_{+\infty}^{-\infty}\max\{x,1\}f(x)\mathrm{d}(-x)=\int_0^{+\infty}\max\{x,1\}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=1+e^{-1}.$$

（8）、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，对统计量 $Y=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$，若要使 $E(Y)=\sigma^2$，则应选 k 为（　　　）.

(A) $\dfrac{1}{n-1}$　　(B) $\dfrac{1}{n}$　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　(D) $\dfrac{1}{2n}$

【解】：应选 C

$X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$，于是 $E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=2\sigma^2$，

$E(Y)=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2(n-1)\sigma^2k$，要使 Y 为总体方差 σ^2 的无偏估计，

即 $E(Y)=\sigma^2$，故 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

.

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14)小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$__________。

【解】: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-5\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n+3\ln n}{-5\ln n}}\right]^{\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{-5\ln n}{n+3\ln n}}=e^{-5}$

(10) 已知方程 $y''-y=0$ 的积分曲线在点 $O(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切，则该积分曲线的方程为________________.

【答案】: $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=shx$

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(1)=1$，且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=$__________.

【解】: 由题设有 $\int_0^1[xf'(x)-f(x)]\,\mathrm{d}\,x=xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{2}{3}$,

所以 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{6}$.

(12) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\,y\int_{\frac{\sqrt{3y}}{3}}^{\sqrt{3y}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}\,y\int_{\frac{\sqrt{3y}}{3}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\,x=$__________。

【解】: 原式 $=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 e^{-r^2}r\,\mathrm{d}\,r=\dfrac{\pi}{12}(1-e^{-1})$.

(13) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为____________.

【答案】: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}$

(14) 设随机变量 X 服从 $[-1,2]$ 上的均匀分布，则随机变量的函数 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$____________________。

【解】: 由于 X 的密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}$, $-1<x<2.$，则 $Y=X^2$ 的密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$。（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$。

【证明】:（Ⅰ）令 $f(x)=x-\arctan x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，因而函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$

时有 $f(x)=x-\arctan x>f(0)=0$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的，又 $x_n>0$，由单调有界收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_n=\arctan x_{n-1}$ 两边同时取极限可得 $a=\arctan a$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 可得

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan x_{n-1}-x_{n-1}}{(\arctan x_{n-1})^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}d\sigma$，其中：积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,y=x^2+1,x=0,x=1,y=0$ 围成$\}$

【解】 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|y-x^2|}d\sigma$，为了去掉绝对值，如图将 D 划分为 D_1 与 D_2 两部分，如图所示，其中

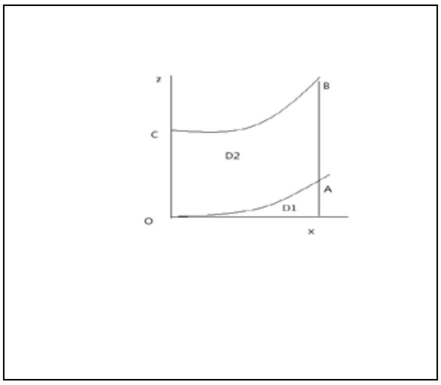
$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x^2,0\le x\le1\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x^2+1,0\le x\le1\right\}$

于是 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}d\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}d\sigma=$

$=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dz+\int_0^1dx\int_{x^2}^{x^2+1}\sqrt{y-x^2}dz$

$=\int_0^1\dfrac{2}{3}x^3dx+\int_0^1\dfrac{2}{3}xdx=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{6}$



得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）求椭圆 $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离。

【解】：设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点，到直线 $x+y=8$ 距离的平方为 $d^2=\dfrac{(x+y-8)^2}{2}$，

由拉格朗日乘数法可得： $L(x,y)=\dfrac{(x+y-8)^2}{2}+\lambda(x^2+2xy+5y^2-16y)$

$$\begin{cases}L_x'=x+y-8-2\lambda(x+y)=0\\L_y'=x+y-8-\lambda(2x+10y-16)=0\\x^2+2xy+5y^2-16y=0\end{cases}$$

解得： $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6\\y=2\end{cases}$；由此知对应距离 $d_1=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt2}\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt2$， $d_2=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt2}\Big|_{\substack{x=-6\\y=2}}=6\sqrt2$

最短距离为 $d_{\min}=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt2}\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt2$。

得分	评卷人

(18)(**本题满分 10 分**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明：(Ⅰ)$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；(Ⅱ)在 (a,b) 内存在与(Ⅰ)中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

【证明】：(Ⅰ)由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=0$，记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$）相应的必有 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

(Ⅱ)令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

(19)(**本题满分 10 分**)已知函数 $y=y(x)$ 满足等式 $y'=x+y$，且 $y(0)=1$，试讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

的收敛性。

【**解**】：因为 $y'=x+y$，所以 $y''=1+y'$。由 $y(0)=1$，得 $y'(0)=1,\ y''(0)=2$。根据泰勒公式，得

$$\begin{aligned}y\left(\frac{1}{n}\right)&=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

所以 $\left|y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right|$ 在 $n\to\infty$ 时与 $\frac{1}{n^2}$ 等价，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$$

绝对收敛。

得分	评卷人

(20)(**本题满分 11 分**)(**本题满分 11 分**)已知齐次方程组(Ⅰ)$\begin{cases}x_1+x_2\quad+x_4=0\\ax_1+\quad a^2x_3\quad=0\\ax_2+\quad a^2x_4=0\end{cases}$ 的解全是 4 元方程(Ⅱ)$x_1+x_2+x_3=0$ 的解。(1)求 a；　(2)求齐次方程组(Ⅰ)的解。

【解】　(1) 因为方程组(Ⅰ)的解全是(Ⅱ)的解，所以(Ⅰ)与方程组(Ⅲ)$\begin{cases}x_1+x_2\quad+x_4=0\\ax_1+\quad a^2x_3\quad=0\\ax_2\quad+a^2x_4\quad=0\\x_1+x_2+x_3\quad=0\end{cases}$ 同

解，那么（Ⅰ）与（III）的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ 有相同的秩。

如 $a=0$ 　则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$，所以假设 $a\neq 0$

由于 $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\end{pmatrix}$ 　　$\therefore\ r(A)=3$

又 $B\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\\0&0&0&2a-1\end{pmatrix}$ 　当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$r(B)=3$ 　此时（Ⅰ）与（III）同解，

（Ⅱ）由于 $A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-2&-1&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ 基础解系 $\eta=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right)^T$，则通解为 $k\eta$。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$，其中 b 为非零的实数（I）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（II）求出该二次型正定的充要条件。

【解】:（I） $f=x^TAx$，其中：$A=\begin{pmatrix}1&b&b&b\\b&1&b&b\\b&b&1&b\\b&b&b&1\end{pmatrix}$

$|\lambda E-A|=(\lambda-(1+3b))[\lambda-(1-b)]^3$ 　$\lambda_1=1+3b$ 　$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1-b$

解方程 $(\lambda_1E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(1,1,1,1)^T$

解方程 $(\lambda_2E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$

正交化 　$\xi_2=\alpha_1$ 　$\xi_3=(-1,-1,2,0)^T$ 　$\xi_4=(-1,-1,-1,3)^T$

单位化 　得

$\eta_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$ 　$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^T$ 　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)^T$ 　$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,-1,3)^T$

令 $U=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)$，则 U 为正交阵，且 $U^{-1}AU=U^TAU=\begin{pmatrix}1+3b&&&\\&1-b&&\\&&1-b&\\&&&1-b\end{pmatrix}$

校准形 　$f=(1+3b)y_1^2+(1-b)y_2^2+(1-b)y_3^2+(1-b)y_4^2$

（II） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow 1+3b>0$ 且 $1-b>0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<b<1$

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases} Ae^{-ax+b}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，其中 b 是任意常数，若 $E(X)=2$，且

$Y=\begin{cases} 4, & X\le 1 \\ 2X, & 1<X<2 \\ 2, & X\ge 2 \end{cases}$，试求：（I）常数 A 与 a；（II）概率 $P\{Y>3\}$；（III）Y 的分布函数。

【解】（I）由于 $1=\int_0^{+\infty} Ae^{-ax+b}dx=\dfrac{Ae^b}{a}\int_0^{+\infty} ae^{-ax}dx=\dfrac{Ae^b}{a}$，$A=ae^{-b}$，

又 $E(X)=2$，所以 $2=\dfrac{1}{a}$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，所以有 $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

（II）$P\{Y>3\}=1-P\{Y\le 3\}=1-(P\{Y=2\}+P\{2<Y\le 3\})$

$=1-(P\{X\ge 2\}+P\{2<2X\le 3\})=1-e^{-1}-P\{1<X\le \dfrac{3}{2}\}=1-e^{-1}-e^{-\frac{3}{4}}+e^{-\frac{1}{2}}$；

（III）由于 $2\le y\le 4$, Y 的分布函数为：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

1） $y<2,\ F_Y(y)=0$

2） $2\le y<4,\ F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=2\}+P\{2<Y\le y\}$

$=P\{X\ge 2\}+P\{2<2X\le y\}=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le \dfrac{y}{2}\}$

$=e^{-1}+\int_1^{\frac{y}{2}}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{y}{4}}$

3） $y\ge 4,\ F_Y(y)=1$

所以 Y 的分布函数为：$F_Y(y)=\begin{cases} 0, & y<2 \\ e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{y}{4}}, & 2\le y<4 \\ 1, & y\ge 4 \end{cases}$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X\sim U(\alpha,\alpha+\beta)$ $(\beta>0)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 α、β 的矩估计；（II）α、β 的极大似然估计。

【解】:（I）由于 $E(X)=\alpha+\dfrac{\beta}{2}$，$D(X)=\dfrac{\beta^2}{12}$，令

$\mu=\bar{X},\sigma^2=S_n^2$；$\bar{X}=\alpha+\dfrac{\beta}{2}$，$S_n^2=\dfrac{\beta^2}{12}$，

可知 α、β 的矩估计分别是 $\hat{\alpha}=\bar{X}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_n^2$、$\hat{\beta}=\sqrt{3}S_n$

（II）似然函数为$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta^n}$ ，　　　$\alpha<x_i<\alpha+\beta$

$L=\frac{1}{\beta^n}$ 是参数β的减函数，由极大似然估计定义，在$\alpha<x_i<\alpha+\beta$时，要使L达到最大，参数α要大，β要小，由此可知：

α、β的极大似然估计为：$\hat{\alpha}=\min\{X_i\}$、$\hat{\beta}=\max\{X_i\}-\alpha$。

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 不可导点个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【解】: $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ 1, & -1\le x\le 0,\\ -x, & x<-1,\end{cases}$ 所以 $x=0,x=-1$ 均为 $f(x)$ 的不可导点，答案 C。

(2) 微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）$(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$　　（B）$(Ax^2+Bx)\cos 2x$

（C）$A\cos 2x+B\sin 2x$　　（D）$(Ax+B)\cos 2x$

【答案】: A

(3) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I_1<1<I_2$　　（B）$1<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<1$　　（D）$I_2<1<I_1$

【解】: 因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，因而有 $I_1>1$，又 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\pi}{2}$，因而有 $I_2<1$，答案是 D.

(4) 设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列判断不正确的是（　　）

（A）$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$　　（B）$f(0,0)=0$

（C）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　　（D）$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微

【答案】: D

(5) $a=-5$ 是齐次方程组 $\begin{cases}3x_1+(a+2)x_2+4x_3=0\\ 5x_1+ax_2+(a+5)x_3=0\\ x_1-x_2+2x_3=0\end{cases}$ 有非零解的（　）

(A)充分必要条件　　(B) 充分而非必要条件

(C)必要而非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

【答案】: B

(6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

【答案】: C

（7）设随机变量 X 与 Y 具有相同分布：$P\{X=k\}=\dfrac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，且 $D(X-Y)=2$，则 $E(XY)=$（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】：（B）

【解】由于 $D(X-Y)=2$，即 $2=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2(E(XY)-E(X)E(Y))$

$=2\lambda-2(E(XY)-\lambda^2)=2\{1+1-E(XY)\}$，所以 $E(XY)=1$

（8）设随机变量 X 服从标准正态分布，且 $Y=X^2$，则 X 与 Y（　　）

（A）相互独立且相关　　（B）相互独立且不相关

（C）不独立且相关　　（D）不独立但不相关

【答案】：（D）

【解】 由于 $E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\varphi(x)dx=0$；又 $E(X)=0$，所以 $E(XY)=E(X)E(Y)$;

所以 $Cov(X,Y)=0$，即不相关；

概率 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1,X^2\le 1\}=P\{|X|\le 1\}=2\Phi(1)-1$，

$P\{X\le 1\}=\Phi(1)$

$P\{Y\le 1\}=P\{X^2\le 1\}=2\Phi(1)-1$，$P\{X\le 1,Y\le 1\}\ne P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$，$X$ 与 Y 不相互独立。

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ ________。

【解】：由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，对方程式两边关于 x 同时求导可得 $1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0$，对上述方程关于 x 再求导可得 $2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0$，把 $x=0,y=1$ 代人到上述两个方程式中可解得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2e^2$。

(10) 微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解为 ________。

【答案】：$x=y(c-e^y)$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$ ________。

【解】：$1\le(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则可知原式 $=1$。

(12) 设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g(xf(x+y,2y))$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

【答】案：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f+xf_1')(f_1'+2f_2')g''+[f_1'+2f_2'+x(f_{11}''+2f_{12}'')]g'$.

(13) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}=$ ________.

【答案】：解： $X(E-B^{-1}A)^T B^T = E \Rightarrow X[B(E-B^{-1}A)]^T = E \Rightarrow X(B-A)^T = E$

$$\because \left|(B-A)^T\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0，\ \therefore X = [(B-A)^T]^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(14) 设总体 $X \sim N(\mu, 0.5)$， $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 是 X 的简单随机样本，且 $\overline{X}$ 是样本 $X_1, \ldots, X_n$ 的样本均值，若要至少使得 99. 7%的概率保证 $\left|\overline{X}-\mu\right| < 0.1$，则样本容量 $n =$__________

【答案】：利用中心极限定理知： 1513

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x \to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

【解】方法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$

$=a-1=0, a=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}, b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0, c=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}$。

方法二： $a+bx-(1+c\sin x)e^x = a+bx-[1+cx-\dfrac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\dfrac{1}{2})x^2-(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1, b-c-1=0, c+\dfrac{1}{2}=0, \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c=0$， 即 $a=1, b=\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{2}$。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续且满足

$f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$， 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】两边乘 $\sin x$， 且积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi^2}{2};$$

则 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\dfrac{\pi^2}{2}$

(其中： $\int_0^{\pi}\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 也可作代换 $u=\pi-x,\ dx=-du$，

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}\,u=\frac{\pi^2}{4}\text{）}$$

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le x+y\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$

【解】利用极坐标可得：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}d(\cos\theta+\sin\theta)^2r^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}d(\cos\theta+\sin\theta)^2r^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}(e^{16}-e^1)d\theta=\frac{e^{16}-e^1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}d(1+\tan\theta)$$

$$=-\frac{e^{16}-e^1}{2}\frac{1}{1+\tan\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{16}-e^1}{2}.$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\ne 0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

【证明】：（反证法）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个或更多的零点，则 $\exists x_1\in(a,b),x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2,f(x_1)=f(x_2)=0$。令 $F(x)=e^xf(x)$，则有 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，因而有 $f(\xi)+f'(\xi)=0$，与 $f(x)+f'(x)\ne 0$ 矛盾。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$ 的和函数

【解】：

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^nn!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^nn!}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^nn!}x^{n-1}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^nn!}x^n\right)'=x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nn!}x^n\right)'\right]'$$

$$=x\left[x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'\right]'=x\left[x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\right]'=\frac{1}{4}x(x+2)e^{\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=e^{\frac{x}{2}}$$

因此，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=[\frac{1}{4}x(x+2)+1]e^{\frac{x}{2}}$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数。

（I）求 A。　（II）求 A^{100}。

【解】：(I) 由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$　$\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量。又 $\eta=(1\quad 2\quad -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，知 $\xi_3=(1\quad 2\quad -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)$　则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（II）$A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+ax_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求常数 a；(Ⅱ)用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

【解】　(Ⅰ)令 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&a&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$.

因为 A 与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同，所以 $r(A)=2<3$，故 $|A|=0$.

由 $|A|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&a&-3\\3&-3&3\end{vmatrix}=3(2a-10)=0$ 得 $a=5$，$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&-3\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ 得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$　$\lambda_3=9$.

由 $(0E-A)X=O$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，由 $(4E-A)X=O$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；由 $(9E-A)X=O$ 得

$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$Q^TAQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & 9\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX\overset{X=QY}{=\!=}Y^T(Q^TAQ)Y=4y_2^2+9y_3^2$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：（I） 常数 A；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$；（III）条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$；

（IV）概率 $P\{Y\le X\}$；概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})$

【解】：（I）由于 $1=2A\int_0^1dx\int_{x^2}^1ydy=A\int_0^1(1-x^4)dx=\dfrac{4A}{5}$，所以 $A=\dfrac{5}{4}$；

（II） $f_Y(y)=2\int_0^{\sqrt y}\dfrac{5}{4}ydx=\dfrac{5}{2}y^{\frac{3}{2}}\quad 0\le y\le 1$

（III） 对 $0<y\le 1$， $f_{X/Y}(x/y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt y}, & |x|\le\sqrt y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（IV） $P\{Y\le X\}=\dfrac{5}{4}\int_0^1dx\int_{x^2}^1ydy=\dfrac{5}{8}\int_0^1(1-x^4)dx=\dfrac{1}{2}$；

$Y=\dfrac{1}{4}$， $f_{X/Y=\frac{1}{4}}(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则条件概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx=0.5$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的均值与方差分别是 $E(X)=\mu$、$D(X)=\sigma^2$，从 X 中分别抽取二组相互独立且容量为 n_1、n_2 的简单随机样本，样本均值分别 $\bar X_1$、$\bar X_2$，若常数 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 时，（I）求证：对 $T=\lambda_1\bar X_1+\lambda_2\bar X_2$ 有是 $E(T)=\mu$；（II）且确定 λ_1、λ_2 多少时，方差 $D(T)$ 达到最小；

【**解**】：（I） 取数学期望 $E(T)=\lambda_1E(\bar X_1)+\lambda_2E(\bar X_2)=(\lambda_1+\lambda_2)\mu=\mu$，所以对任何满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的 λ_1、λ_2，结论成立；

（II）由于两组样本相互独立，所以 $\bar{X}_1$与$\bar{X}_2$ 相互独立，则取方差得：

$D(T)=\lambda_1^2 D(\bar{X}_1)+\lambda_2^2 D(\bar{X}_2)=\lambda_1^2\frac{\sigma^2}{n_1}+\lambda_2^2\frac{\sigma^2}{n_2}=(\lambda_1^2\frac{1}{n_1}+\lambda_2^2\frac{1}{n_2})\sigma^2$，在条件 $\lambda_1+\lambda_2=1$

考察 $D(T)$ 的最小值，由拉格朗日乘数法，作函数

$$L=(\lambda_1^2\frac{1}{n_1}+\lambda_2^2\frac{1}{n_2})+\mu(\lambda_1+\lambda_2-1)$$

$L'_{\lambda_1}=2\lambda_1\frac{1}{n_1}+\mu=0$，$L'_{\lambda_2}=2\lambda_2\frac{1}{n_2}+\mu=0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，解得：

$$\lambda_1\frac{1}{n_1}=\lambda_2\frac{1}{n_2}\Rightarrow\lambda_1=\frac{n_1}{n_1+n_1},\lambda_2=\frac{n_2}{n_1+n_1}。$$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 5）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(B) 若 $A\ge 0$,则 $\exists M\ge 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\ge 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

【解】：由极限的保号性知答案应该是 A

(2) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　　）

（A） $x_1>x_2$， $y_1<y_2$.　　　　（B） $x_1<x_2$， $y_1<y_2$.

（C） $x_1>x_2$， $y_1>y_2$.　　　　（D） $x_1<x_2$， $y_1>y_2$.

【答案】: A.

【解】 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加，

当 $x_1>x_2$， $y_1<y_2$ 时， $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

(3) 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$， $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且满足 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则（　　）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B） $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$， $f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C。

(4) $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序得（其中 $f(x,y)$ 连续）（　　）

A $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　　　B $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

C $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　　　D $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

【答案】：选 D

(5) 设n阶方阵A的伴随矩阵$A^*\neq 0$, 若ξ_1,ξ_2,ξ_3是线性方程组$Ax=b$的三个互不相等的解, 则$Ax=0$的基础解系为（　　）。

（A）$\xi_1-\xi_3$　　(B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

【答案】(A)

【解】$Ax=0$　为齐次方程组，n未知量个数

①$\because \xi_1,\xi_2,\xi_3$为$Ax=b$的三个相异解，$\therefore Ax=b$有无穷多解，$\therefore r(A)=r(A,b)<n$-------(i)

②$\because A^*$为非零。$r(A^*)\geq 1$从而$r(A)=n-1$　-------------(ii)

由（i）,(ii)可得$r(A)=n-1$　　$\therefore n-r(A)=1$

(6) 二次型$x^TAx=\left(x_1+2x_2+a_3x_3\right)\left(x_1+5x_2+b_3x_3\right)$的正惯性指数$p$与负惯性指数$q$分别是

(A) $p=2,q=1$　　(B) $p=2,q=0$

(C) $p=1,q=1$　　(D)与a_3,b_3有关，不能确定。

【答案】: C

（7）设随机变量X的概率密度函数为$f(x)$，则随机变量$|X|$的概率密度函数为（　　）

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$　　(D) $f_1(x)=\begin{cases}f(x)+f(-x), & x>0,\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

【解】: 应选(D).

设$|X|$的分布密度函数为$F_1(x)$，

则当$x\leq 0$时，$F_1(x)=P(|X|\leq x)=0$，即$f_1(x)=0$；

则当$x>0$时，$F_1(x)=P(|X|\leq x)=P(-x\leq X\leq x)=\int_{-x}^{+x}f(x)dx=F(x)-F(-x)$，

即$f_1(x)=f(x)+f(-x)$.

此题也可采用排除法.

（8）设随机事件A和B互不相容，且$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令

$$X=\begin{cases}1, & A发生,\\ 0, & A不发生,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B发生,\\ 0, & B不发生,\end{cases}$$

X与Y的相关系数为ρ，则（　　）

(A) $\rho=0$　(B) $\rho=1$　(C) $\rho<0$　(D) $\rho>0$

【解】: 应选(C).

因为A和B互不相容，于是$P(X=1,Y=1)=P(AB)=0$，

$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)$，

$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)$，

$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)$.

因此$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-P(A)P(B)$，

$$D(X)=P(A)(1-P(A)),\quad D(Y)=P(B)(1-P(B)),\quad \rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}<0.$$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$______________。

【解】：$f^{(n)}(x)=x^2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$，所以

$f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-3}n!}{(n-2)}$。

(10) 以 $y_1=e^{2x}$，$y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为 $\underline{y''-4y'+4y=0}$

【答案】：

(11) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}x=$__________________。

【解】：原式 $\overset{}{\underset{x=1+\sec t}{=\!=}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\tan t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$。

(12) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=3^t-2$ 满足条件 $y_0=\dfrac{5}{2}$ 的特解为__________________.

【答案】：$y=\dfrac{3^t}{2}-2t+2$

【解】：齐次差分方程 $y_{t+1}-ay_t=0$ 的通解为 $y=Ca^x$. 若 $a=1$，则通解为 $y=C$。非齐次差分方程 $y_{t+1}-ay_t=f(t)$ 的通解为 $y=Ca^t+y*$. 其中 y^* 为 $y_{t+1}-ay_t=f(t)$ 任一特解。当 $f(t)=b^tP_n(t)$（$P_n(t)$ 为关于 t 的 n 次多项式）时，$y_{t+1}-ay_t=f(t)$ 有形为 $y=b^tQ_n(t)t^k$ 的特解，其中的 k 在 $b=a$ 时取 1，否则取 0. $y_{t+1}-ay_t=b$ 的特解当 $a\neq 1$ 可取常数函数，$a=1$ 时取为 $y=bt$。

(13) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$________.

【答案】：$t=\underline{1}$；

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E[(\overline{X}+S^2)^2]=$____________________.

【解】：应填 $\dfrac{n^2+2n+1}{n(n-1)}$.

$E[(\overline{X}+S^2)^2]=D(\overline{X}+S^2)+[E(\overline{X}+S^2)]^2$.

由 $\overline{X}$ 与 S^2 的性质知，$\overline{X}$ 与 S^2 独立，这里有 $E(\overline{X})=0$，$D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$，$E(S^2)=1$，

$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，$D[(n-1)S^2]=2(n-1)$，

从而 $D(S^2)=\dfrac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]=\dfrac{2(n-1)}{(n-1)^2}=\dfrac{2}{n-1}$，

$E[(\overline{X}+S^2)^2]=D(\overline{X}+S^2)+[E(\overline{X}+S^2)]^2=D(\overline{X})+D(S^2)+[E(\overline{X})+E(S^2)]^2$

$=\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n-1}+(0+1)^2=\dfrac{n^2+2n+1}{n(n-1)}$.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）过点 $(1,5)$ 作曲线 $C: y=x^3$ 的切线，设切线为 l。（Ⅰ）求 l 的方程；（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积；（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

【解】：（Ⅰ）设切点为 (x_0,x_0^3)，则有 $\dfrac{5-x_0^3}{1-x_0}=3x_0^2$，解得 $x_0=-1$，相应的切线 l 的方程为

$y=3x+2$；

（Ⅱ）l 与 C 的交点满足方程 $\begin{cases} y=x^3 \\ y=3x+2 \end{cases}$，解得 $x=-1$ 与 $x=2$，因而 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4]\Big|_{-1}^{2}=\frac{51}{4};$$

（Ⅲ）所求体积 $V=2\pi\int_0^2 x(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=2\pi[x^3+x^2-\frac{1}{5}x^5]\Big|_0^2=\dfrac{56\pi}{5}$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(x^2y^2-2)e^{xy}$，其中 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时，具有二阶连续导数，求 $f(xy)$.

【解】：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy),\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy).$

由题设有 $(x^2y^2-2)e^{xy}=f'(xy)+xyf''(xy)$

从而一元函数 $f(t)$ 满足微分方程 $tf''(t)+f'(t)=(t^2-2)e^t$。即 $(tf'(t))'=(t^2-2)e^t$，解得 $tf'(t)=\int(t^2-2)e^t dt=(t^2-2t)e^t+C_1$，故 $f'(t)=(t-2)e^t+\dfrac{C_1}{t}$，从而 $f(t)=(t-3)e^t+C_1\ln|t|+C_2$.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）已知某制造商的生产量函数为 $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$（α 与 β 是常数，对应比例为 $3:2$），其中 x 代表劳动力的数量，y 为资本数量，每个劳动力与每单位资本的成本分别是 150 元和 200 元，经过对市场的测算总预算是 10000 元，试求：(I) 如何分配这笔钱用于雇佣劳动力和资本，以使生产量最高；(II) 最大生产量是多少。

【解】在 $150x+200y=10000$ 的条件下求 $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ 的最大值，

(I) 由拉格朗日函数可知：

$$L=\alpha\ln x+\beta\ln y+\lambda(150x+200y\text{-}10000) \quad \text{其中：}\ (\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{2})$$

$$\begin{cases} L_x'=\dfrac{\alpha}{x}+150\lambda=0 \\ L_y'=\dfrac{\beta}{y}+200\lambda=0 \\ 150x+200y=10000 \end{cases}$$

可得：$x=2y$，代入：$150x+200y=10000$，得 $x=4$ 个劳动力数量，$y=2$ 个资本数量；

（II） 此时最大生产产量为 $f_{\max}=f(4,2)=4^{\alpha}\times 2^{\beta}=2^{\frac{8}{3}\alpha}$ 。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设 $a>1,b>0$，讨论方程 $\log_a^x=x^b$ 有实根时，a,b 所满足的条件。

【解】：方程可等价变形为 $\dfrac{\ln x}{x^b}=\ln a$，令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a$， $f'(x)=\dfrac{1-b\ln x}{x^{b+1}}$，

$f'(x)=0$，解得 $x=e^{\frac{1}{b}}$， $f(x$ 在 $(0,e^{\frac{1}{b}}]$ 上单增，在 $[e^{\frac{1}{b}},+\infty)$ 上单减，又

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\ln a<0$， $f(e^{\frac{1}{b}})=\dfrac{1}{be}-\ln a$，因而当 $\dfrac{1}{be}-\ln a\geq 0$，即 a,b 满足条件 $b\ln a\leq\dfrac{1}{e}$ 时，该方程有实根。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (x\in R)$，满足

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=e^x$， 求 $f(x)$ 及 a_n

【解】 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$， $x\in(-\infty,+\infty)$，代入方程得

$$f'(x)+f(x)=e^x \quad\Rightarrow\quad f(x)=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$$

由 $f(0)=0$，得 $C=-\dfrac{1}{2}$， 故 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}e^{-x}$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2(n!)}x^n,\quad a_n=\frac{1+(-1)^n}{2(n!)}$$

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$. （Ⅰ）求行列式 $\left|A^*-2A^{-1}\right|$;

（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E 。

【解】（Ⅰ） A 的特征值为 1，-1,2. $|A|=-2$，

$$\left|A^*-2A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=32$$

（Ⅱ）由题意 $p^TAp=\wedge=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

$$A = P \wedge P^T \Rightarrow A^n = P \wedge^n P^T = P\begin{pmatrix} 1^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 2^n \end{pmatrix}P^T$$

$$A^3-2A^2-A+4E = P\left[\begin{pmatrix} 1^3 & & \\ & (-1^3) & \\ & & 2^3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1^2 & & \\ & (-1)^2 & \\ & & 2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\right]P^T$$

$$= P(2E)P^T = 2E$$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ 的前 n-1 个列向量线性相关，后 n-1 个列向量线性无关，$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$。

（I）证明：方程组 $Ax = \beta$ 必有无穷多个解；（II）若 $(k_1, \cdots, k_n)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n = 1$。

【解】:（I）由题设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关，可推得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 知 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性表示

故 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \beta$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ 等价从而秩相同。

据此增广矩阵 $\overline{A} = (A\beta)$ 的秩 $= r(A) = n-1 < n$　因此方程组 $Ax = \beta$ 必有无穷多解。

（II）$\because \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1, l_2, \cdots, l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{n-1}\alpha_{n-1} = 0$

故 $A\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

又 $\because r(A) = n-1$　$\therefore (l_1, \cdots, l_{n-1}, 0)^T$ 是 $Ax = 0$ 一个基础解系

由 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}x = \alpha_1 + \cdots \alpha_n = \beta$ 知 $(1,1,\cdots,1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 特解。

于是 $Ax = \beta$ 通解是

$(1,1,\cdots,1)^T + k(l_1, \cdots, l_{n-1}, 0)^T = (1+kl_1, \cdots 1+kl^{n-1}, 1)^T$

因此若 $(k_1, \cdots, k_n)^T$ 是 $Ax = \beta$ 解时,必有 $k_n = 1$。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设口袋中有红球 2 个白球 1 个黑球 2 个，连续取 2 个球(每次取一个不返回)，令 X、Y、Z 分别表示其中红球、白球与黑球的个数，试求：

（I）概率 $P\{Y = 1 / X = 0\}$；（II）(X, Y) 的联合分布律；（III）$Z = X + 2Y$ 分布律；（VI）协方差 $Cov(X + 2Y, X)$。

【解】 （I）$P\{Y=1/X=0\}=\dfrac{P\{Y=1,X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{Y=1,Z=1\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{2}{3}$

（II）(X,Y) 的联合分布律；

X \ Y	0	1
0	1/10	1/5
1	2/5	1/5
2	1/10	0

(III) $Z=X+2Y$ 的分布律

Z	0	1	2	3
p_i	1/10	2/5	3/10	1/5

（VI)

$$Cov(X+2Y,X)$$
$$=D(X)+2Cov(X,Y)$$
$$=\frac{9}{25}+2\times\frac{1}{5}=\frac{19}{25}\text{。}$$

由于 X 的分布律为

X	0	1	2
p_i	3/10	3/5	1/10

其中： $E(X)=4/5 \quad D(X)=1-(\frac{4}{5})^2=\frac{9}{25}$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_{2n}(n\geq 2)$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ 及统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$，（I）求统计量 Y 的数学期望 $E(Y)$；（II） $\mu=0$ 时，求 $D(\bar{X}^2)$。

【解】：由于样本的独立同分布，考察 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2}\cdots,X_n+X_{2n}$，

（I） $X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，可知

样本均值：$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$，样本方差：$\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\dfrac{1}{n-1}Y=S^2$

由于 $E(S^2)=2\sigma^2$，所以 $E(\dfrac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$，即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$；

（II）在 $\mu=0$时，$X_i+X_{n+i}\sim N(0,2\sigma^2),(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $2\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})\sim N(0,\dfrac{2\sigma^2}{n})$

则 $\dfrac{2\bar{X}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，由此可知 $(\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$，

又可得 $D(\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2=2\times1=2,\qquad \therefore D(\bar{X}^2)=\dfrac{\sigma^4}{2n^2}$