20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

(模拟一)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学一（模拟一）参考答案

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

(1) 【解】由题设有 $f'(e)e=2,\ f'(e)=\dfrac{2}{e}$，因而有 $\mathrm{d}\,f(u)\Big|_{\substack{u=e\\ \Delta u=0.01}}=\dfrac{0.02}{e}$，答案 B .

(2) 【解】根据函数曲线的凹凸性及定积分的几何意义可得答案是 A.
【答案】(A)

(3) 【解】$\begin{cases} z'_x=-(1+e^y)\sin x=0 \\ z'_y=e^y(\cos x-1-y)=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(k\pi,\cos k\pi-1)$，$\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

又 $z''_{xx}=-(1+e^y)\cos x, z''_{xy}=-e^y\sin x, z''_{yy}=e^y(\cos x-2-y)$,

(1) 当 $k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 时,驻点 $(k\pi,0)$,从而 $A=z''_{xx}(k\pi,0)=-2$, $B=z''_{xy}(k\pi,0)=0$, $C=z''_{yy}(k\pi,0)=-1$,于是 $AC-B^2>0$,又 $A=-2<0$,即驻点 $(k\pi,0)$ 均为极大值点,因此函数有无穷多个极大值;

(2) $k=\pm1,\pm3,\cdots$ 时,驻点 $(k\pi,-2)$,从而 $A=z''_{xx}(k\pi,-2)=1+e^{-2}$, $B=z''_{xy}(k\pi,-2)=0$, $C=z''_{yy}(k\pi,-2)=-e^{-2}$,于是 $AC-B^2<0$,,即驻点 $(k\pi,-2)$ 不是极值点.

(4) 【答案】(B).
(5) 【答案】(C)
(6) 【答案】(B)
(7) 【答案】(C)
(8)【解】随机变量 X 不小于零，所以 $P\{X\ge 0\}=1,\ Y=X^2$ 的分布函数：对 $y>0$时，有

$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})=F(\sqrt{y})$，其他均不一定成立，所以答案为(B).

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(9) 【解】$g'(x)=f'(\dfrac{2x-1}{x+1})\dfrac{3}{(x+1)^2}, g'(0)=3f'(-1)=3\ln 2$

(10) 【解】由题设 $\dfrac{1}{n(\ln a_n)^n}=2, \ln a_n=\dfrac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}}=e$.

(11) 【答案】 $f(x,y)=\pi xy+2(x^2+y^2)$

(12) 【解】易得微分方程 $y'=2x\ln\left(1+x^2\right)$，

直接积分得 $y=\int 2x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\int\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$，

利用分部积分法 $y=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2+C$，过点(0，-1)，代入可得 $C=-1$，

所以 $f(x)=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-1$.

(13) 【答案】 $\underline{\quad 0 \quad}$.

(14) 【解】$Cov(X+Y,X+Z)=Cov(X,X)+Cov(Y,X)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)=D(X)$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2D(X)$，$D(X+Z)=D(X)+D(Z)=2D(X)$，

$$\rho=\frac{Cov(X+Y,X+Z)}{\sqrt{D(X+Y)}\cdot\sqrt{D(Y+Z)}}=\frac{D(X)}{\sqrt{2D(X)}\cdot\sqrt{2D(X)}}=\frac{1}{2}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 【解】：(I) 设切点的横坐标为 x_0，则相应的切线方程为

$$\frac{y-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}，\text{即为 } y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$$

相应的平面图形面积为 $A(x_0)=\int_0^2[e^x-(e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0})]\mathrm{d}x=2(x_0-2)e^{x_0}+e^2-1$

$A'(x_0)=2(x_0-1)e^{x_0},A''(x_0)=2x_0e^{x_0},A'(1)=0,A''(1)=2e>0$，所以 $x_0=1$ 是相应的图形面积最小，故所求的切线方程为： $y=ex$；

$$\text{(II)}\,V=2\pi\int_0^2 x(e^x-ex)\,\mathrm{d}x=2\pi[(x-1)e^x-\frac{1}{3}ex^3]\Big|_0^2=2\pi(e^2-\frac{8}{3}e+1)。$$

(16) 【证法一】原不等式等价于 $be^b(e^b-e^a)>ae^a(e^b-e^a)$，即证明当 $-1<a<b$ 时，有 $be^b>ae^a$，令 $f(x)=xe^x$， $f'(x)=(x+1)e^x$，当 $x>-1$ 时 $f'(x)>0$，即函数 $f(x)=xe^x$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单增，因而当 $-1<a<b$ 时有 $f(b)>f(a)$，即 $be^b>ae^a$。

【证法二】令 $f(x)=xe^x$，则 $f''(x)=(x+2)e^x$，当 $x>-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上是凹的，取 $x_1=2a,x_2=2b$，那么 $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$，则有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，从而有 $(a+b)e^{a+b}<ae^{2a}+be^{2b}$。

(17) 【解】由 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$，有 $y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]$，

在条件 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，即 $f_1'(x,x)+f_2'(x,x)=\sin(u+v)e^{u+v}$，中令 $u=x,v=x$ 得 $f_1'(x,x)+f_2'(x,x)=\sin(2x)e^{2x}$，于是 $y(x)$ 满足一阶线性微分方程 $y'(x)+2y(x)=\sin 2x$.

通解为 $y(x)=e^{-2x}[\int\sin 2x\cdot e^{2x}dx+c]$，

由分部积分公式，可得 $\int\sin 2x\cdot e^{2x}dx=\frac{1}{4}(\sin 2x-\cos 2x)e^{2x}$，所以 $y(x)=\frac{1}{4}(\sin 2x-\cos 2x)+ce^{-2x}$.

注：也可由 $f(u,v)$ 满足的偏微分方程，直接得到 $y(x)$ 满足的常微分方程.

由 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，

令 $u=x,v=x$，上式转化为常微分方程 $\frac{d}{dx}f(x,x)=\sin(2x)\cdot e^{2x}$，

所以 $\frac{d}{dx}(y(x)e^{2x})=\sin(2x)\cdot e^{2x}$，得 $y(x)$ 满足的微分方程 $y'(x)+2y(x)=\sin 2x$.

(18) 【解】(Ⅰ)令 $D_1=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\geq t\},D_2=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\leq t\}$，

$$f(t)=\iint\limits_D|xy-t|dxdy=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_D(xy-t)dxdy$$

$$=2\int_t^1dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_D xydxdy+t\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t).$$

(Ⅱ) $f'(t)=-1+2t(1-\ln t),f''(t)=-2\ln t\geq 0,t\in(0,1)$。

$f(0+)=\frac{1}{4},f(1)=\frac{3}{4}$， $f'(0+)=-1,f'(1)=1$。

因为 $f''(t)=-2\ln t\geq 0,t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。

又因为 $f'(0+)=-1,f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时， $f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时， $f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小点。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(19) 【解】 $g(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$

$$g'(x)=\frac{\dfrac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$f(x)=xg(x)$

$$g(x)-g(0)=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad g(0)=\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4},$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

所以 $f(x)=xg(x)=\dfrac{\pi}{4}x+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$， $x\in[-1,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=f(1)-\frac{\pi}{4}\cdot 1=1\cdot\arctan(+\infty)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

(20)【解】令 $X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 矩阵方程化为 $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 即 $\begin{cases}A\xi_1=\beta_1\\A\xi_2=\beta_2\\A\xi_3=\beta_3\end{cases}$.

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\dfrac{a-1}{2}&2&\dfrac{c}{2}\\0&0&0&-\dfrac{1}{2}(a-1)&b-2&1+\dfrac{c}{2}\end{pmatrix},$$

当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(A|B)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$

方程组 $A\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$，($k$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$，($l$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$，($t$ 为任意常数);

于是 $X=\begin{pmatrix}1-k&2-l&1-t\\-k&2-l&-1-t\\k&l&t\end{pmatrix}$，(其中 k,l,t 为任意常数).

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(21)【解】(1)由 $AB=O$ 知，$\lambda=0$ 是矩阵 A 的特征值且矩阵 B 的列向量 $(1\quad 0\quad 1)^T$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量，故有

$$\begin{pmatrix} a & 4 & b \\ 4 & 2 & c \\ b & c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$，于是 $\begin{cases} a+b=0 \\ 4+c=0 \\ b-1=0 \end{cases}$，得 $a=-1,b=1,c=-4$，有矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & -1 \\ -4 & \lambda-2 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)(\lambda+6)$$

知矩阵 A 的特征值为 6,0,-6

由 $(6E-A)x=0$ 得矩阵 A 属于特征值 6 的特征向量为 $(1\quad 2\quad -1)^T$

由 $(-6E-A)x=0$ 得矩阵 A 属于特征值-6 的特征向量为 $(-1\quad 1\quad 1)^T$

单位化，有 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1\quad 2\quad -1)^T,\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 0\quad 1)^T,\frac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1)^T$，令

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$，则有 $x^TAx=y^TAy=6y_1^2-6y_2^2$

(2)不合同.因为 $x^TAx=6y_1^2-6y_2^2$，$x^TBx=(x_1+x_3)^2=y_1^2$，它们的正负惯性指数不一样，所以不合同.

(22)【解】(I)易知 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2},0<x<1,-1<y<1 \\ 0, \qquad 其他 \end{cases}$

由此得 $P\{X+2Y\geq 1\}=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}(1-x)}^1 dy=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$；

(II) $Z=X-Y$，由公式可知：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx$，分析可知：

$f(x,x-z)=\frac{1}{2},\begin{cases} 0<x<1 \\ x-1<z<x+1 \end{cases}$，分别讨论积分可得：

1) $-1<z<0,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^{z+1}dx=\frac{z+1}{2}$;

2) $0<z<1,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}$,

3) $1<z<2,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{z-1}^1 dx=\frac{2-z}{2}$;

所以密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{z+1}{2}, & -1<z<0 \\ \frac{1}{2},0\leq z<1 \\ \frac{2-z}{2}, & 1\leq z<2 \end{cases}$；

(III)由于 (X,Y) 在矩形区域上服从均匀分布，所以 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(-1,1)$，

则 $D(X+2Y)=D(X)+4D(Y)=\frac{1}{12}+4\cdot\frac{2^2}{12}=\frac{17}{12}$。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(23)【解】设 X 表示 400 件产品中一等品的件数，则 $X \sim B(400, p_0), p_0 = 0.1$

所以 $E(X) = 40, D(X) = 36,$，试求概率 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 0.02 \times 400)$

(I)由切比契夫不等式 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 8) \geq 1 - \frac{D(X)}{8^2} = 1 - \frac{36}{64} = 0.4375$

（II）由中心极限定理 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 0.02 \times 400) = P(\frac{|X - 40|}{6} < 1.334)$

$= 2\Phi(1.334) - 1 = 2 \times 0.9099 - 1 = 0.8198$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

（模拟二）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学一（模拟二）参考答案

一、选择题：(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1)【解】 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=-e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=0,1$为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 B.

(2)【解】 n 为偶数时 $f(x)$ 无界的奇函数，且 $\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t>0$ 故 B，C，D 均不正确。答案 A。

(3)【答案】 选（C）

(4)【答案】(A)

(5)【答案】(D)

(6)【答案】(D)

(7)【解】 $E(X)=\dfrac{1}{2}, X\sim E(2)$， $p_0=P\{X>\dfrac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}2e^{-2x}dx=\dfrac{1}{e}$， 易知所以概率

$$\alpha=C_2^1p_0(1-p_0)p_0=2p_0^2(1-p_0)=\frac{2}{e^2}(1-\frac{1}{e}).$$

(8)【解】 $\sigma^2=E(Y)=kE\{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\mu-(X_i-\mu))^2\}=k[\sum\limits_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2-2\sum\limits_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu)+\sum\limits_{i=1}^{n-1}E(X_i-\mu)^2]$

$$=k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i-\mu)^2]=k2(n-1)\sigma^2，所以 k=\frac{1}{2(n-1)}.$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上.

(9)【解】 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}, f'(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}, f'(1)=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$,故所求切线方程为

$$y=-\frac{1}{2\sqrt{e}}x+\frac{3}{2\sqrt{e}}.$$

(10)【解】 两曲线交点分别为$(-\dfrac{1}{1+a},-\dfrac{a}{1+a})$与$(\dfrac{1}{1+a},-\dfrac{a}{1+a})$，由题设有

$$\int_{-\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{1+a}}(1-|x|-a|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{1}{1+a}}[1-(1+a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3},a=2.$$

(11)【解】 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=(6xy+2xz^2)|_P=6$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=(3x^2-3y^2\sin z)|_P=3$， $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=(2x^2z-y^3\cos z)|_P=-1$，

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{最大值}=|grad\ u|=|\{6,3,-1\}|=\sqrt{6^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{46}$， 所以答案 $\sqrt{46}$.

(12)【解】由题设有 $a=-2,b=1$,方程 $y''+ay'+by=x$ 的特解为 $y^*=x+2$，由此方程 $y''+ay'+by=x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，带入初始条件可得所求特解为 $y=(x-2)e^x+x+2$.

(13)【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$$

【答案】 $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（14）【解】 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3, P(AB)=P(A)P(B)=0.3, P(A)=0.5$，
$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=0.5+0.6-0.3=0.8$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n=\dfrac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}, x_1=2>1, n>1$ 时有

$x_n-1=\dfrac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3)}{3x_{n-1}^2+1}-1=\dfrac{(x_{n-1}-1)^3}{3x_{n-1}^2+1}$，由归纳法可知，对 $\forall n$ 均有 $x_n>1$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调减少正的数列，由单调有界收敛原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$ 两边同时取极限可得 $a=\dfrac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$，解方程可得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

（16）【证明】（Ⅰ）由题设有 $x_0f(x_0)=\dfrac{1}{1-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，令 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$\displaystyle\int_{x_0}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0)$，从而有 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；

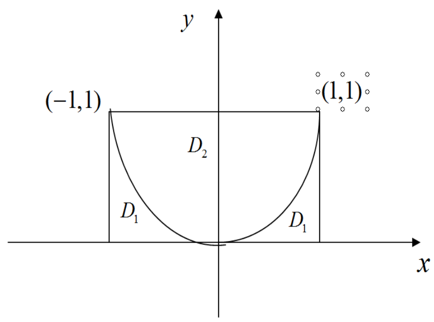
（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Largrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)$，而 $f(\xi)=x_0f(x_0)$，因而有 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$。故原命题成立.

（17）【解】 用抛物线 $y=x^2$ 把区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分

（如图），则

$$I=-\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D_2}x(x+ye^{x^2})d\sigma$$
$$=-2\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D}x(x+ye^{x^2})d\sigma$$
$$=-2\iint\limits_{D_1}(x^2+xye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+xye^{x^2})d\sigma$$



由于 D_1 和 D 均关于 y 轴对称，xye^{x^2} 关于 x 是奇函数，所以

故
$$I=-2\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D}x^2d\sigma$$

$$=-2\int_{-1}^1dx\int_0^{x^2}x^2dy+\int_{-1}^1dx\int_0^1x^2dy\quad=-\frac{2}{15}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（18）【解】（I）由 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,得 $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$,

$y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$　代入 $y''-2xy'-4y=0$，得

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$，比较 x^n 的系数可得

$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n=0$，　化简即得 $a_{n+2}=\dfrac{2a_n}{n+1}$，$n=1,2,3,......$

（II）由 $y(0)=0,y'(0)=1$，可得到 $a_0=0,a_1=1$，所以 $a_n=\begin{cases}0, & n\text{是偶数,}\\ \dfrac{1}{(\frac{n+1}{2})!}, & n\text{为奇数.}\end{cases}$

因此 $y(x)=x+\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^5}{3!}+\dfrac{x^7}{4!}+...+\dfrac{x^{2n-1}}{n!}+...$　$=\dfrac{1}{x}(-1+1+x^2+\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^6}{3!}+...+\dfrac{x^{2n}}{n!}+\cdots)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(19)【解】（I）设 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1$，则 $F'_x=\dfrac{2x}{a^2},F'_y=\dfrac{2y}{b^2},F'_z=\dfrac{2z}{c^2}$，

所以，曲面在点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 处的切平面方程为

$\dfrac{\xi}{a^2}(x-\xi)+\dfrac{\eta}{b^2}(y-\eta)+\dfrac{\zeta}{c^2}(z-\zeta)=0$，即 $\Sigma:\dfrac{\xi x}{a^2}+\dfrac{\eta y}{b^2}+\dfrac{\zeta z}{c^2}=1$，$\Sigma$ 与三个坐标轴的交点分别为

$A(\dfrac{a^2}{\xi},0,0),B(0,\dfrac{b^2}{\eta},0),C(0,0,\dfrac{c^2}{\zeta})$；

（II）设 Ω 为切平面与三坐标平面所围立体，$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma$ 为其外表面，$\Sigma_1:x=0$ 的后侧，$\Sigma_2:y=0$ 的左侧，$\Sigma_3:z=0$ 的下侧，则

$$\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS$$

$$=\iint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy\qquad(\Sigma\text{为平面的上侧})$$

$$=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}3dv=\frac{a^2b^2c^2}{2\xi\eta\zeta}$$

显然 $\xi\eta\zeta$ 最大时，此积分值最小.

设 $G(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda(\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1)$，则 $\begin{cases}G'_\xi=\eta\zeta+\dfrac{2\lambda\xi}{a^2}=0\\ G'_\xi=\xi\zeta+\dfrac{2\lambda\eta}{b^2}=0\\ G'_\xi=\xi\eta+\dfrac{2\lambda\zeta}{c^2}=0\\ \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=1\end{cases}$　解得：$\begin{cases}\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\\ \eta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b\\ \zeta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\end{cases}$

因为问题本身有最大值，且函数只有一个驻点，故驻点处的函数值即为它的最大值，因此 $\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\eta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b,\zeta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$ 时，曲面积分值最小.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（20）【解】（I）$\overline{A}=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\beta)=\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&1\\1&2a+5&8&2a+3&3\\2&a+7&10&5&b\end{pmatrix}\xrightarrow{行}$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&1\\0&0&0&2a-1&1\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}\qquad(*)$$

据(*)知$a\neq\frac{1}{2}$时，$R(A)=3$,此时$R(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=R(A)=3$,此时$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$是一个极大线性无关组。据(*)当$a=\frac{1}{2}$时，$R(A)=2$，故此时$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(A)=2$，此时$\alpha_1,\alpha_3$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_3$是一个极大线性无关组（不唯一）。

（II）任意四维向量γ可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性表示$\Leftrightarrow$方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}=\gamma$均有解。

$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma)$

$\because R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])\leq 4$，若$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，则必有

$r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])=4=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])$

据（*）知，当$a\neq\frac{1}{2}$，有$b\neq 1$时，$R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])=4$，故当$a\neq\frac{1}{2}$，$b\neq 1$时，任意的 4 维列向量$\gamma$均可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$线性表示.

（21）【解】：（I）记$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),AP=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，因此矩阵$P$可逆，因此有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$，即矩阵$A$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$相似，且所用的相似变换矩阵为$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此有$|A|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{vmatrix}=10$.

（II）矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$有三个特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，因此矩阵$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$与对角阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，且相应的相似变换矩阵为$P_1=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

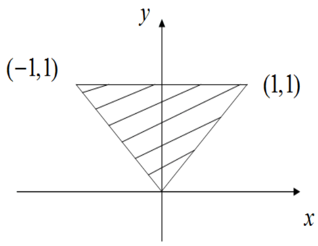
因此把矩阵A变成$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$的相似变换矩阵可取为

$Q=PP_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3)$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（22）　【解】（I）$f_X(x)=\begin{cases}(1+x)^2, & -1<x<0\\ 1-x^2, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，



$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

（II）$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & -x<y<1\ (-1<x<0)\\ \dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\quad (0\le x<1)\\ 0, & 其他\end{cases}$，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|x|}, & |x|<y<1\quad (|x|<1)\\ 0, & 其他\end{cases}$；

（III）$\mathrm{COV}(X,2Y+1)=2\mathrm{COV}(X,Y)=2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$$=2[\frac{2}{15}-\frac{1}{12}\bullet\frac{2}{3}]=\frac{7}{45}$$

其中：$E(XY)=\int_{-1}^{1}x(1+x)dx\int_{|x|}^{1}ydx=\int_{-1}^{1}x(1+x)(1-x^2)dx=\frac{2}{15}$，

$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)^2dx+\int_{0}^{1}x(1-x^2)dx=-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$　　$E(Y)=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$．

（23）　【解】（I）由于$1=\int_{-1}^{0}\alpha dx+\int_0^1 bxdx=\alpha+\frac{b}{2}$，所以$b=2(1-\alpha)$，则密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0\\ 2(1-\alpha)x, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由于　$\mu=E(X)=\int_{-1}^{0}\alpha xdx+\int_0^1 2(1-\alpha)x^2dx=\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\alpha,$，　令　$\mu=\bar{X}$　所以　$\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\alpha=\bar{X}$　，　即　$\hat{\alpha}=\frac{6}{7}(\frac{2}{3}-\bar{X})$，而$\bar{x}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{8}\times(-0.2)=-0.025$，$\alpha$的矩估计为$\hat{\alpha}=\frac{6}{7}(\frac{2}{3}+0.025)=0.593$；

（II）似然函数为$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\alpha^5(2(1-\alpha))^3(0.5\times0.7\times0.8)=0.224\alpha^5(1-\alpha)^3$

$\frac{d\ln L}{d\alpha}=\frac{d}{d\alpha}(\ln 0.224+5\ln\alpha+3\ln(1-\alpha))=\frac{5}{\alpha}-\frac{3}{1-\alpha}=0$，解得$\hat{\alpha}=\frac{5}{8}$=0.625．

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 一

（模拟三）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学一（模拟三）答案

（1）【解】：由题设有 $f'(1)=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{2xe^{x^2}f(e^{x^2})}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{x^2}=\frac{1}{2}$$，故答案是 D

（2）【解】：由题设有 $f(0)=0, f'(0)=1$，再利用 Taylor 公式可得 $x\neq0$ 时恒有 $f(x)<x$。答案 B

（3）【答案】：选 B

（4）【解】：设级数的前 n 项和 $\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}n(a_n-a_{n-1})=(a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+\cdots n(a_n-a_{n-1})$

$=-a_0-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+na_n$；由此设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的对应前 $n-1$ 项和可表达为：

$$S_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=-\sigma_n-a_0+na_n$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，及 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n-a_{n-1}\right)$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，由此可知：

$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=-\lim_{n\to\infty}(\sigma_n-a_0+na_n)=\sigma-a_0$，　　则命题（A）正确。

（5）【答案】：（C）

（6）【答案】：（B）

(7) 【解】由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 驻点，显然 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$，又 $f(1)=1$，所以 $\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$，由此

$X\sim N(1,\dfrac{1}{2\pi})$；又由于

$P\{X\geq0\}=1-P\{X\leq0\}=\Phi(\sqrt{2\pi})$。

(8)

【解】设 $P(A)=p, P(B)=q$，由于 A 和 B 互不相容，

则 $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=0$，不难得到联合分布律为(右表)，所以

X \ Y	0	1	$p_{i.}$
0	$1-p-q$	q	$1-p$
1	p	0	p
$p_{.j}$	$1-q$	q	

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-pq$

即 $\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\sqrt{\dfrac{pq}{(1-p)(1-q)}}<0$.

（9）【解】　原式 $\lim_{x\to0}\left[(1+\dfrac{e^x-1-x}{x})^{\frac{x}{e^x-1-x}}\right]^{\frac{e^x-1-x}{x\sin x}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（10）【解】设 $u(x)=(x-2)^n, v(x)=(x-1)^n\sin\dfrac{\pi x^2}{8}$，则 $f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^iu^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(2)=0\,(i=0,1,\cdots,n-1), u^{(n)}(2)=n!, v(2)=(2-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，所以有 $f^{(n)}(2)=n!$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（11）【解】令 $F=2x^2+y^2+3z^2-3$，曲面在点 $Q(1,1,0)$ 的外法向量 $\vec{n}=2\{2x,y,3z\}\big|_{(1,1,0)}=2\{2,1,0\}$，则单位外法方向为 $\vec{n}^0=\frac{1}{\sqrt{5}}\{2,1,0\}$；　而对函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $P(1,0,1)$ 处，有

$u'_x\big|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{(x+\sqrt{y^2+z^2})}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$，同理：　$u'_y\big|_{(1,0,1)}=0$，$u'_z\big|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}$；所以对应的方向导数为

$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

（12）【答案】$\underline{2\sin 1+\frac{\pi}{4}\cos 1}$

（13）　【答案】. $\underline{\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}}$

(14)　【解】：由于 X 与 Y 相互独立由独立性，及 X 与 Y 分布可知：

$P(\max\{X,Y\}>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=1-P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{Y\le\frac{1}{2}\}=1-\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】：由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=3$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[\frac{\sin x}{x}+f(x)]=0$，　$f(0)=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=-1$

由此可得 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to0}[(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})+\frac{f(x)-f(0)}{x}]=\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})+f'(0)$，

而 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=3$.

（16）【证明】：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\},m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知

$x\in(0,1)$ 时有 $\frac{m}{2}x\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le\frac{M}{2}x\ (\xi\in(0,x)$ 对不等式

$mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le Mx$ 两边同时在区间 $[0,1]$ 上积分可得

$\frac{m}{2}\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\frac{M}{2}$ 即 $m\le2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得

$f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（17）【解】　由于 $\frac{\partial z}{\partial x}=f(u)+\frac{x}{y}f'(u)+(g_1'y+2xg_2')$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}f'(u)+(xg_1'-g_2')$；

又由此 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+(y\frac{\partial}{\partial y}(g_1')+g_1'+2x\frac{\partial}{\partial y}(g_2'))$；

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+y(xg_{11}''-g_{12}'')+g_1'+2x(xg_{21}''-g_{22}'')$$

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+xyg_{11}''+(2x^2-y)g_{12}''+g_1'-2xg_{22}''.$$

（18）【解】：（I）　因为两个积分都与路径无关，所以有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(3xy^2+x^3)}{\partial y}=6xy\quad,\qquad(1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(3xy^2+x^3)}{\partial x}=3y^2+3x^2.\qquad(2)$$

（1）式两边对 x 积分，得　$P=3x^2y+\varphi(y)$.

上式对 y 求偏导，得　$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+\varphi'(y)$.

比较（2）式，得　$\varphi'(y)=3y^2$，　$\varphi(y)=y^3+C$，

因此　$P=3x^2y+y^3+C$.

又因为 $P(0,1)=1$，所以 $C=0$，进而得　$P=P(x,y)=3x^2y+y^3$；

（II）$I=\int_{(0,1)}^{(1,2)}P(x,y)dx+(3xy^2+x^3)dy=\int_0^1(3x^2+1)dx+\int_1^2(3y^2+1)dy=10$.

（19）【解】：（I）　由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-1+2}{n+1}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$，$\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}$，$|x|<1$，则 $S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，$S_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，　则　$S_2(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n=\begin{cases}\frac{x^2}{(1-x)^2}-\frac{2}{x}\ln(1-x), & -1<x<1, x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

（II）又由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x),|x|<1$　代入 $x=-\frac{1}{3}$，　则 $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{3^n}=-\ln(\frac{4}{3})$,

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}=3(\ln 4-\ln 3)$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（20）【解】　（I）f 与标准型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$．因为用正交变换化 f 为标准型，所以 f 与其标准型对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由 $|A|=|B|$ 有 $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$．

（II）（方法一）这时 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$．对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2, \lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$．将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　将 ξ_2,ξ_3 正交化 $\eta_2=\xi_2$，

$\eta_3=\xi_3-\frac{[\eta_2,\xi_3]}{\|\eta_2\|^2}\eta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，再将 η_2,η_3 单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

由 p_1,p_2,p_3 构成正交矩阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$，满足 $P^TAP=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$．

（方法二）对于 A 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$．将 ξ_1 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2,\xi_3$ 已正交，单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$．由 p_1,p_2,p_3 即可构成所求正交矩阵．

（21）【证】：　（I）　因为 $A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_1+\alpha_2\ \ \alpha_2+\alpha_3)$，所以 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，即 $(A-E)\alpha_1=O$，$(A-E)\alpha_2=\alpha_1$，$(A-E)\alpha_3=\alpha_2$．设存在一组数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0} \qquad (*)$$

用 $A-E$ 左乘（*）两次，得 $k_3\alpha_1=\mathbf{0}$，因为 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_3=0$．再用 $A-E$ 左乘（*）一次，得 $k_2\alpha_1=\mathbf{0}$，因为 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_2=0$．此时（*）为 $k_1\alpha_1=\mathbf{0}$，因为 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_1=0$．故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，于是 $B=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$ 列满秩，因此齐次线性方程组 $Bx=\mathbf{0}$ 仅有零解．

（II）对任何非零 3 维列向量 x，因为方程组 $Bx=\mathbf{0}$ 仅有零解，所以恒有 $Bx\neq\mathbf{0}$．又因为 $x^TB^TBx=(Bx)^T(Bx)=\|Bx\|^2>0$，所以 B^TB 是正定矩阵．

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（22）【解】:（I）由$1=\int_{-2}^{0}Adx+\int_{0}^{1}Bxdx=2A+\dfrac{B}{2}$，

$E(X^2)=\int_{-2}^{0}Ax^2dx+\int_{0}^{1}Bx^3dx=\dfrac{8}{3}A+\dfrac{B}{4}=\dfrac{11}{12}$，解得$A=\dfrac{1}{4},B=1$；

（II）$Y=|X|$对应函数$y=|x|$，可知$0<y<2$，$y=1$是分界点

分段讨论：　$y<0, F_Y(y)=0; y\geq 2, F_Y(y)=$

$0\leq y<1, F_Y(y)=P\{|X|\leq y\}=P\{-y\leq X\leq y\}=\int_{-y}^{0}\dfrac{1}{4}dx+\int_{0}^{y}xdx$

$1\leq y<2, F_Y(y)=P\{-y\leq X\leq y\}=\int_{-y}^{0}\dfrac{1}{4}dx+\int_{0}^{1}xdx$，

$Y=|X|$的密度函数为$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}+y, & 0\leq y<1\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leq y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$；

（III）　由于$D(Y)=E(X^2)-(E|X|)^2=\dfrac{3}{4}-(\dfrac{5}{6})^2=\dfrac{1}{18}$

其中：$E(|X|)=-\dfrac{1}{4}\int_{-2}^{0}xdx+\int_{0}^{1}x^2=\dfrac{5}{6}$（或　$EY=\int_{0}^{1}y(\dfrac{1}{4}+y)dy+\int_{1}^{2}\dfrac{1}{4}ydy=\dfrac{5}{6}$).

（23）【解】:（I）由$F(x)$连续性，$0=F(\theta+0)=\lim\limits_{x\to\theta^+}(1-\dfrac{a}{x^2})=1-\dfrac{a}{\theta^2}$，所以$a=\theta^2$，则概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x>\theta\\ 0, & x\leq\theta\end{cases}$；

（II）θ的似然函数为$L=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2\theta^2}{x_i^3}=\dfrac{2^n\theta^{2n}}{x_1x_2\cdots x_n}$，

$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i)=\dfrac{2n}{\theta}>0$，所以$L$关于$\theta$单调增，且$x_i>\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$

由极大似然估计的定义可知θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_L=\min\{x_i\}$或$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$

（III）由于$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$，对应的分布函数为

$F_{\hat{\theta}_L}(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-(\dfrac{\theta}{z})^{2n}, & z>\theta\\ 0, & z\leq\theta\end{cases}$　$(\theta>0)$，对应的概率密度函数为

$f_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\dfrac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}, & z>\theta\\ 0, & z\leq\theta\end{cases}$

$E(\hat{\theta}_L)=\int_{\theta}^{+\infty}z\dfrac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}dz=2n\theta^2\int_{\theta}^{+\infty}\dfrac{1}{z^{2n}}dz=\dfrac{2n}{2n-1}\theta$，

$E(\hat{\theta})=E(\dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L)=\dfrac{2n-1}{2n}E(\hat{\theta}_L)=\theta$，所以$\hat{\theta}=\dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L$是$\theta$的无偏性.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数　学 一

（模拟四）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学一（模拟四）参考答案

（1）【解】 由题设知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=1, f(0)=0, f'(0)=2$，答案 D。

（2）【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=e^{\frac{a}{2}},\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=-2xe^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-a}^{+\infty}+2\int_{-a}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=2(a+2)e^{\frac{a}{2}}$，

$a=-\dfrac{3}{2}$，答案（C）.

（3）【答案】选（D）

（4）【答案】 （C）

（5）【答案】（C）

（6）【答案】 （C）

(7) 【解】 设随机变量 $Y=|X|$ 的分布函数为

$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=F_X(y)-F_X(-y)$，

所以对应的密度函数为 $f_Y(y)=f(y)+f(-y)$，即 $f_1(x)=f(x)+f(-x)$，选择(B)

(8) 【解】已知 X 的分布律为 $P\{X=1\}=\dfrac{2}{3},P\{X=2\}=\dfrac{1}{3}$，且 Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，

则 $P\{XY>1\}=P\{Y>1,X=1\}+P\{Y>\dfrac{1}{2},X=2\}=\dfrac{2}{3}P\{Y>1\}+\dfrac{1}{3}P\{Y>\dfrac{1}{2}\}=\dfrac{2}{3}e^{-1}+\dfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}}$，由此答案为(C).

（9）【解】 对原方程式两边同时求微分可得 $\sec^2(x^2+y)(2x\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-e^x\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0$，又方程式可知 $x=0$ 时 $y=\dfrac{\pi}{4}$，所以有 $\mathrm{d}y|_{x=0}=\dfrac{4-\pi}{8}\mathrm{d}x$.

（10）【解】由于 $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x+1+1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}$，因此可知：

$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{2}[3\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}]$

（11）【答案】 $\dfrac{1}{2}(e^4-e)$

（12）【答案】 $2xf(x^2y,e^{x^2y})+2x^3y[f_1'+e^{x^2y}f_2']$

（13）【答案】 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1\quad 0)^T,\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{51}}(5\quad 4\quad 1\quad 3)^T$

（14）【解】由于 $\sigma=2$, $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{2}\sim\chi^2(3)$，且 $\dfrac{Y}{2}\sim N(0,1)$ 且与 Z 相互独立，由 t-分布定义，知

$\dfrac{Y/2}{\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{2}\Big/3}}\sim t(3)$，所以 $C\dfrac{Y}{Z}\sim t(3)$,其中常数 $C=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（15）【解】 $\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x^2} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi(1+t^2)}\,dt+\int_{0}^{x^2}\sin t\,dt=1+\int_{0}^{x^2}\sin t\,dt$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\int_{0}^{x^2}\sin t\,dt\right)^{\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\int_{0}^{x^2}\sin t\,dt\right)^{\frac{1}{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}}\right]^{\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,dt}{x^4}}$，

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}$，所以原式$=e^{\frac{1}{2}}$.

（16）【证明】由题设知 $\exists x_0\in(0,a)$ 使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,a]} f(x)$，由极值的必要条件可知必有 $f'(x_0)=0$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使得 $f'(0)=f'(x_0)-f''(\xi_1)x_0\Rightarrow|f'(0)|=|f''(\xi_1)|x_0\le Mx_0$，同理可证 $|f'(a)|\le M(a-x_0)$，由此可得 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

（17）【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)=(xy+1)e^{xy}$，记 $xy=t$，则有

$f'(t)+tf''(t)=(t+1)e^t$，即 $(tf'(t))'=(t+1)e^t$，积分得 $tf'(t)=te^t+C_1$，解得

$f'(t)=e^t+\frac{1}{t}C_1$，代入 $f'(1)=e+1$，$C_1=1$；再积分得 $f(t)=\int(e^t+\frac{1}{t})dt=e^t+\ln|t|+C_2$，代入

$f(1)=e+1$，可得 $C_2=1$，即 $f(t)=e^t+\ln|t|+1$ 所以 $f(xy)=e^{xy}+\ln|xy|+1$.

（18）【解】① 由于 $f_x'(x,y)=-ye^{-xy}$，$f_y'(x,y)=-xe^{-xy}$，所以在 D 的内部，$f(x,y)$ 有唯一的驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=1$，在 D 的边界 $x^2+4y^2=1$ 上，作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1),\quad \begin{cases}L_x'(x,y,\lambda)=-ye^{-xy}+2\lambda x=0,\\ L_y'(x,y,\lambda)=-xe^{-xy}+8\lambda y=0,\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0,\end{cases}$$

解得驻点 $(x,y)=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)$，且

$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$，$f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}}$.

比较函数值可得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac{1}{4}},$$

最小值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac{1}{4}}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（19）【解】由于 Σ 为包含原点的闭曲面，且

$$P(x,y,z)=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},Q(x,y,z)=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},R(x,y,z)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{，}\ \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^3-3x^2r}{r^6}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}\text{，同理}\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5}\text{，}\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

所以 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$；

令 $\Sigma_0:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 取外侧，由 Gauss 定理，知 $\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=0$，由此

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=(\oiint_{\Sigma+\Sigma_0^-}-\oiint_{\Sigma_0^-})\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_0^+}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_0^+}xdydz+ydzdx+zdxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega}3dxdydz=\frac{3}{\varepsilon^3}\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi\,.$$

（20）【解】　（I）①若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{O}$ 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾！故 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

② $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{AB}=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le 4\\ \boldsymbol{B}\ne 0\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\ge 1\end{array}\right\}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})\le 3\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0\\ |\boldsymbol{A}|=2(a-1)(a-2)(a-3)\end{array}\right\}\Rightarrow a=1,2,3$$

（II）$|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=|1\cdot 2\cdot(-3)\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}|$

$$=|2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}|=\left(2-\frac{6}{1}\right)\left(2-\frac{6}{2}\right)\left(2-\frac{6}{-3}\right)=16.$$

（21）【解】　（I）矩阵 A 的各行元素之和均为 0，即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，知 0 是 A 的特征值，

$\alpha_1=(1\quad 1\quad 1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 A 属于特征值 0 的特征向量。又 $A(\alpha+\beta)=3(\alpha+\beta),A(\alpha-\beta)=-3(\alpha-\beta)$，且由 α，β 是线性无关，知 $\alpha+\beta$，α-β 均不是 0 向量，从而，3 和-3 都是矩阵 A 的特征值，$\alpha+\beta$，α-β 分别是特征值，3 和-3 对应的特征向量，那么矩阵 A 有三个不同的特征值，从而矩阵 A 和对角矩阵相似。

（II）当 $\alpha=(0\quad -1\quad 1)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(1\quad 0\quad -1)^{\mathrm{T}}$ 时，按已知有

$$A\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&-3\\0&-3&3\end{pmatrix},\text{所以}\ A=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix};$$

（III）$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+x_2^2\text{-}2x_3^2\text{-}4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1+2x_2-x_3)^2-3(x_2-x_3)^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，有 $x^TAx=y_1^2\text{-}3y_2^2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(22) 【解】:（I） X与Y 的可能取值分别 0，1； 0，1

$P(X=0,Y=0)=P(T\le 0,T\le 1)=P(T\le 0)=$

$P(X=0,Y=1)=P(T\le 0,T>1)=$

$P(X=1,Y=0)=P(0<T\le 1)=$

$P(X=1,Y=1)=P(T>0,T>1)=P(T>1)=$

Y \ X	0	1	$p_{i.}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{.j}$	1/2	1/2	

（II）$Z=X+Y$ 的分布律

$Z=X+Y$	0	1	2
p_i	1/4	1/4	1/2

（III） $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$

$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}-2\times(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{2})=\frac{3}{16}.$$

(23) 【解】: 由于样本的独立同分布，考察 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2}\dots,X_n+X_{2n}$，

（I） $X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，可知

样本均值：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$，样本方差：$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Y=S^2$

由于 $E(S^2)=2\sigma^2$，所以 $E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$，即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$，Y 不是 σ^2 的无偏估计；

（II） 在 $\mu=0$时，$X_i+X_{n+i}\sim N(0,2\sigma^2),(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$2\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})\sim N(0,\frac{2\sigma^2}{n})$$

则 $\frac{2\bar{X}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，由此可知 $(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$，

又可得 $D(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2=2\times1=2,\qquad \therefore D(\bar{X}^2)=\frac{\sigma^4}{2n^2}.$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数　学　一

（模拟五）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学一（模拟五）参考答案

（1）【解】由 $x_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)], y_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$ 知是答案 D.

（2）【解】本题可用排除法举反例说明 A,B,D 选项均为错误的，因而正确的结论必为 C。进一步的 $f'(a)f'(b)<0$，若 $f'(a)<0, f'(b)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值必在区间 (a,b) 的内部取得，反之则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值必在区间 (a,b) 的内部取得，答案（C）。

（3）【解】$gradf=-\frac{y+z}{(x+z)^2}i+\frac{1}{(x+z)}j+\frac{x-y}{(x+z)^2}k=\frac{1}{4}\{-1,\ 2,\ 1\}$.取（C）

（4）【解】因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.

综上有 $I_2>I_1>I_3$，选（B）.

（5）【答案】（D）

（6）【解】$\boldsymbol{B}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-1\\0&0&t+1\end{pmatrix}$，当 $t\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=3$，ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，故 $\xi_1-\xi_2,\xi_1-\xi_3$ 线性无关且是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，但 $\boldsymbol{A}\neq0$，否则非齐次方程组无解，矛盾. 所以 $r(\boldsymbol{A})=1$，选 C.

（7）【答案】:（A）

（8）【答案】（C）.

（9）【解】原式 $=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}$.

（10）【解】由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，对方程式两边关于 x 同时求导可得 $1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0$，对上述方程关于 x 再求导可得 $2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0$，把 $x=0,y=1$ 代人到上述两个方程式中可解得 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2e^2$。

（11）【解】$f(1,0)=0$，$f_x'(1,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{\sin\Delta x}{1+\Delta x}-0}{\Delta x}=1$

$$f_y'(1,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(1,\Delta y)-f(1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\frac{-\Delta y\cos\sqrt{2}}{1+\sin\Delta y}-0}{\Delta y}=-\cos\sqrt{2},$$

$\therefore \mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\cos\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

（12）【解】将 x 看作 y 的函数，即对 $x=x(y)$ 进行求解，可将原方程化为未知函数为 $x=x(y)$ 的线性方程

$\frac{dx}{dy}+\frac{1-2y}{y^2}x=1$，方程的通解为 $x=e^{\int\frac{2y-1}{y^2}dy}(\int e^{\int\frac{2y-1}{y^2}dy}dy+C)$,因此该方程的通解为

$x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(13) 【解】因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\ &1&2&4&1\\1&5&7&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&-\\0&2&2&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为所求最大无关组.

（14） 设二维随机变量服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，且 $\mu=0$ 时，则有 $D(2X-Y^2)=$________.

（15）【解】 由题设有 $a=1$，

$$左式=\lim_{x\to0}\frac{(1+bx^2)[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]-1}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(b-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{24}-\frac{b}{2})x^4+o(x^4)}{x^4}=c$$

由此可得 $b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{24}-\frac{1}{4}=-\frac{5}{24}$.

（16）【证明】 令 $F(x)=3\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t-x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[0,+\infty))$，则 $F(0)=0$，且 $F'(x)=2x^2f(x)-2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2x\int_0^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$， f 单减， 当 $x>0$ 且 $t\in[0,x)$ 时有 $f(x)-f(t)<0$，因而有 $F'(x)<0$，即函数 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，因而当 $a>0$ 时有 $F(a)=3\int_0^a x^2f(x)\mathrm{d}x-a^2\int_0^a f(x)\mathrm{d}t<F(0)=0$ 即 $3\int_0^a x^2f(x)\mathrm{d}x<a^2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

（17）【解】设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点，到直线 $x+y=8$ 距离的平方为 $d^2=\frac{(x+y-8)^2}{2}$，由拉格朗日乘数法可得：$L(x,y)=\frac{(x+y-8)^2}{2}+\lambda(x^2+2xy+5y^2-16y)$

$$\begin{cases}L'_x=x+y-8-2\lambda(x+y)=0\\L'_y=x+y-8-\lambda(2x+10y-16)=0\\x^2+2xy+5y^2-16y=0\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6\\y=2\end{cases}$；由此知对应距离 $d_1=\left.\frac{|x+y-8|}{\sqrt{2}}\right|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt{2}$，$d_2=\left.\frac{|x+y-8|}{\sqrt{2}}\right|_{\substack{x=-6\\y=2}}=6\sqrt{2}$

最短距离为 $d_{\min}=\left.\frac{|x+y-8|}{\sqrt{2}}\right|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt{2}$.

（18）【解】 $I=\frac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma}y\,dzdx+(z-2)\,dxdy$.　　补 Σ_1： $z=0\,(x^2+y^2\le4)$，并取上侧.

$$I=\frac{1}{4}\left[\oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}y\,dzdx+(z-2)\,dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}y\,dzdx+(z-2)\,dxdy\right].$$

设 Σ 与 Σ_1 围成空间立体为 Ω，由高斯公式，

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}y\,dzdx+(z-2)\,dxdy=-\iiint\limits_{\Omega}2\,dxdydz=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot2\cdot2\cdot1=-\frac{16}{3}\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}y\,dzdx+(z-2)\,dxdy=-2\iint\limits_{x^2+y^2\le4}dxdy=-2\pi\cdot2^2=-8\pi,$$

所以 $I=\frac{1}{4}(-\frac{16}{3}\pi+8\pi)=\frac{2}{3}\pi$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（19）【证明】（I）$f'(x)$ 有界，则存在常数 M>0 $\Rightarrow \left|f'(x)\right| \le M$

由拉格朗日中值定理有

$$\left|f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})\right| = \left|f'(\varepsilon)\right|\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right| \le M\frac{1}{2^{n+1}}$$

由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})]$ 绝对收敛。

（II）证 $s_n=\sum_{i=1}^{n}[f(\frac{1}{2^i})-f(\frac{1}{2^{i+1}})]=f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{2^{n+1}})$

$\because \lim\limits_{n\to 0} s_n \exists$ 而 $f(\frac{1}{2})$ 为常数。故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{2^n})\exists$.

(20)【解】(Ⅰ) 二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}$. 由 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，可得

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} a+4+4=\lambda, \\ -2-8-8=-2\lambda, \\ 2+8+2b=2\lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=4, \\ \lambda=9. \end{cases}$ 从而 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 由特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)^2,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\xi_1=(0,1,1)^T,\xi_2=(4,1,-1)^T$，

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\xi_3=(1,-2,2)^T$.

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(4,1,-1)^T,\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

正交变换 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$，二次型化为标准形 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=9y_3^2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(21)【证明】(Ⅰ) 在 $A=\xi\xi^T$ 两边右乘 ξ，得 $A\xi=(\xi\xi^T)\xi=\xi(\xi^T\xi)=\xi$，

$$A^2=(\xi\xi^T)(\xi\xi^T)=\xi(\xi^T\xi)\xi^T=\xi\xi^T=A;$$

(Ⅱ) 由于 $1\le R(A)=R(\xi\xi^T)\le R(\xi)=1$，所以 $R(A)=1$．又 $A(A-E)=A^2-A=O$，所以 $R(A)+R(A-E)\le n$，而 $R(A)+R(A-E)=R(A)+R(E-A)\ge R(A+E-A)=n$，

从而 $R(A)+R(A-E)=n$，$R(A-E)=n-1$．

(Ⅲ)解：因为 $A^2=A$，所以 A 的特征根只能取 $0,1$．由 $A\xi=\xi$ 知 $\lambda=1$ 是 A 的特征根；由 $R(A)=1$，知 $\lambda=0$ 是 A 的特征根，且 A 对应于特征值 $\lambda=0$ 必有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，所以 $\lambda=1$ 是 A 的单根，$\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征根．所以 $A+E$ 的特征根为 $2,1$（其中 1 是 $n-1$ 重根），$|A+E|=2$．

(22)【解】：由于 $1=A\int_0^{+\infty}x^2dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=A\int_0^{+\infty}x^2(e^{-x})dx=2A$，$A=\dfrac{1}{2}$；

(I) 考察 X 与 Y 的独立性，可知边缘密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{6}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

对满足 $0<x<y$ 的 (x,y)，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2e^{-y}$；　$f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{x^2}{2}e^{-x}\bullet\dfrac{y^3}{6}e^{-y}\ne f(x,y)$

所以 X 与 Y 的不独立；

(II) 对如何 $y>0$，
$$f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(III) 对 $Y=2$，
$$f_{X/Y=2}(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{2^3}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由此可知条件概率：　$P\{X<1/Y=2\}=\dfrac{3}{8}\int_0^1x^2dx=\dfrac{1}{8}$.

(23)【解】：(I) 求参数 θ 的最大似然估计 $\hat\theta$

1)　$L=\prod\limits_{i=1}^n\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}=(\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}})^ne^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$

2)　$\ln L=n(\ln 2-\ln\theta-\dfrac{1}{2}\ln\pi)-\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$，　$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{2}{\theta^3}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=0$

3)　解得 θ 的最大似然估计　$\hat\theta=\sqrt{\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$

(II) 考察 $\hat\theta^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计，

由于　$E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\dfrac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\dfrac{\theta^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\dfrac{\theta^2}{2}$

所以　$E(\hat\theta^2)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n E(X_i^2)=\theta^2$，即 $\hat\theta^2=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ 是为 θ^2 的无偏估计.

20、21全程考研资料请加群712760929