

习题详解

第 1 章

单项选择题 (1-1—1-10 题)

1-1 关于序列 $x[n]$ 的自相关 $r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[k+n]$, 错误的是 (D)

- (A) $r_{xx}[0] = E$, E 是序列的能量; (B) $x^*[-n]$ 的自相关等于 $x[n]$ 的自相关;
(C) $x[n-m]$ 的自相关等于 $x[n]$ 的自相关, m 是任意整数; (D) $r_{xx}[-n] = r_{xx}[n]$ 。

解: (A) $r_{xx}[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[0+k] = E$

(B) $x[k]$ 共轭翻褶再左移 n 得到 $x^*[-(k+n)]$

$$r_{x^*[-n]}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]x^*[-(n+k)] = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x[k'+n]x^*[k'] = r_x[n]$$

$$(C) \quad r_{x[n-m]}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[(k-m)]x[(k+n)-m] = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x^*[k']x[k'+n] = r_{x[n]}[n]$$

$$(D) \quad r_{xx}[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[-n+k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k'+n]x[k'] = r_{xx}^*[n]$$

若 $x[n]$ 是实序列则自相关偶对称

1-2 序列 $x[n] = 5\cos(\frac{11\pi}{6}n - \frac{\pi}{3})$ 的周期是 (A)

- (A) 12 (B) 11
(C) 12/11 (D) 6

解: $\frac{2\pi}{\frac{11\pi}{6}} = \frac{12}{11}$, 所以周期 12

1-3 下列系统因果且稳定的是 (B)

- (A) $T\{x[n]\} = 2^n x[n]$ (B) $T\{x[n]\} = x[n] - u[n+1]$
(C) $T\{x[n]\} = \log_{10} x[n]$ (D) $T\{x[n]\} = \sum_{k=n-5}^{n+5} x[k]$

1-4 下列系统线性且时不变的是 (B)

- (A) $T\{x[n]\} = \sum_{k=n_0}^n x[k]$ (B) $T\{x[n]\} = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
(C) $T\{x[n]\} = 0.5^{x[n]}$ (D) $T\{x[n]\} = x[-n]$

1-5 有一系统输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 满足关系 $y[n] = (x[n] * u[n+2])u[n]$, 则系统是 (A)

- (A) 线性的 (B) 时不变的 (C) 因果的 (D) 稳定的

解:

$$(A) T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ((ax_1[n] + bx_2[n]) * h[n])u[n]$$

$$= a(x_1[n] * h[n])u[n] + b(x_2[n] * h[n])u[n] = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

\therefore linear

$$(B) T\{x[n-1]\} = (x[n-1] * h[n])u[n] \neq y[n-1] = (x[n-1] * h[n])u[n-1]$$

\therefore time-variant

$$(C) y[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]u[k+2] \right) u[n]$$

$$= \left(\sum_{k=-2}^{\infty} x[n-k] \right) u[n] = (x[n+2] + \dots)u[n], \therefore \text{non-causal}$$

(D) unstable

1-6 LTI 系统的单位脉冲响应如下，因果且稳定的是 (C)

- (A) $h[n] = 2^n u[n]$ (B) $h[n] = a^n u[-n-1]$
 (C) $h[n] = \cos(0.5n)R_{10}[n]$ (D) $h[n] = u[n+2] - u[n-2]$

1-7 关于 LTI 系统，以下说法正确的是 (C)

- (A) IIR 不能实现； (B) IIR 是非因果系统；
 (C) IIR 不一定稳定； (D) IIR 不如 FIR 好。

1-8 有一系统，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 按图 T1-1 所示方框图关联。其中 $h[n]$ 是因果稳定的 LTI 系统的单位脉冲响应。则整个系统不是 (B)

- (A) 线性的 (B) 时不变的
 (C) 稳定的 (D) 因果的

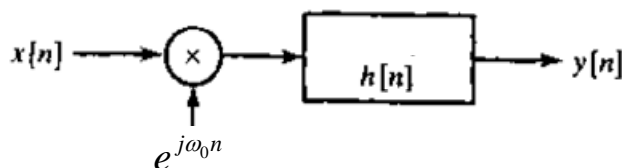


图 T1-1

解：

$$y[n] = x[n]e^{j\omega_0 n} * h[n]$$

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = (ax_1[n] + bx_2[n])e^{j\omega_0 n} * h[n]$$

$$= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}, \therefore \text{linear}$$

$$T\{x[n-n_0]\} = x[n-n_0]e^{j\omega_0 n} * h[n]$$

$$\neq y[n-n_0] = x[n-n_0]e^{j\omega_0(n-n_0)} * h[n], \therefore \text{time-variant}$$

if $(x[n])$ finite, then $(x[n]e^{j\omega_0 n})$ finite, then $(y[n])$ finite, \therefore stable

$$y[n] = x[n]e^{j\omega_0 n}h[0] + x[n-1]e^{j\omega_0(n-1)}h[1] + \dots, \therefore \text{causal}$$

1-9 设 LTI 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 和输入序列 $x[n]$ 如图 T1-2 所示，则输出样本正确的是 (D)

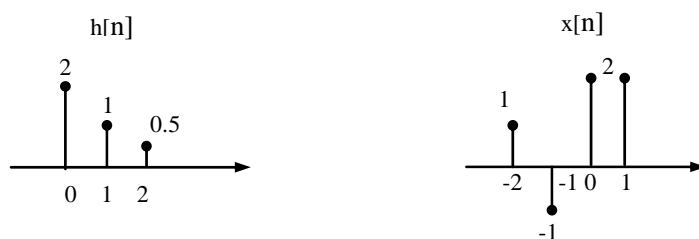


图 T1-2

- (A) $y[-2]=1$ (B) $y[-1]=-2$
(C) $y[0]=3$ (D) $y[1]=5.5$

解: $y[-2]=x[-2]h[0]=2$

$$y[-1]=x[-1]h[0]+x[-2]h[1]=-1$$

$$y[0]=x[0]h[0]+x[-1]h[1]+x[-2]h[2]=3.5$$

$$y[1]=x[1]h[0]+x[0]h[1]+x[-1]h[2]+x[-2]h[3]=5.5$$

1-10 关于 LTI 系统的实现, 以下说法错误的是 (C)

- (A) FIR 可以采用卷积和实现; (B) FIR 可以采用有递归的差分方程实现;
(C) IIR 可以采用卷积和实现; (D) IIR 可以采用有递归的差分方程实现。

填空题 (1-11—1-15 题)

1-11 用 $\delta[n]$ 的移位加权和表示图 T1-3 所示序列 $x[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ 。

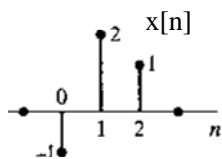


图 T1-3

1-12 设 $y[n] = x[n] * h[n]$, 则 $x[n-2] * h[n-3] = y[n-5]$ (用 $y[n]$ 表示)。

1-13 有限长序列 $x[n]$ 的非零区间是 $0 \leq n \leq 9$ 和 $30 \leq n \leq 39$, $y[n]$ 的非零区间是 $10 \leq n \leq 19$, 则 $w[n] = x[n] * y[n]$ 的非零区间是 $10 \leq n \leq 28$ 和 $40 \leq n \leq 58$ 。

1-14 已知回声系统的输入输出关系 $y[n] = x[n] + a \cdot x[n-n_0]$, 系统的单位脉冲响应 $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-n_0]$, 单位阶跃响应 $s[n] = u[n] + au[n-n_0]$ 。

1-15 线性常系数差分方程为 $y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$, 设输入是 $x[n] = \delta[n]$, 初始条件是

$$y[n] = 0, \quad n < 0, \quad \text{则 } y[3] = 0.5。$$

解: $y[0] = y[-1] - 0.25y[-2] + x[0] = 1$

$$y[1] = y[0] - 0.25y[-1] + x[1] = 1$$

$$y[2] = y[1] - 0.25y[0] + x[2] = 0.75$$

$$y[3] = y[2] - 0.25y[1] + x[3] = 0.5$$

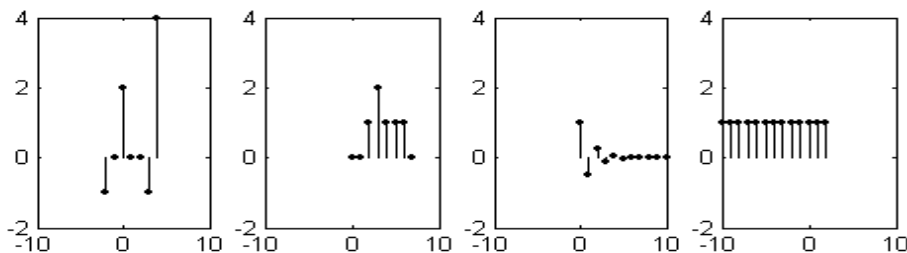
计算、证明与作图题 (1-16—1-31 题)

1-16 画出下列序列

(a) $x[n] = -\delta[n+2] + 2\delta[n] - \delta[n-3] + 4\delta[n-4]$ (b) $x[n] = R_5[n-2] + \delta[n-3]$

(c) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$ (d) $x[n] = u[-n+2]$

解:



1-17 证明卷积的交换律、结合律和分配律。

证明: (a) $x[n] * h[n] = \sum_k x[k]h[n-k] = \sum_{k'} x[n-k']h[k'] = h[n] * x[n]$

(b)

$$\begin{aligned}
 x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) &= \sum_k x[n-k](h_1[k] + h_2[k]) \\
 &= \sum_k x[n-k]h_1[k] + \sum_k x[n-k]h_2[k] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] &= \left(\sum_k x[k]h_1[n-k] \right) * h_2[n] \\
 &= \sum_m \left(\sum_k x[k]h_1[m-k] \right) h_2[n-m] = \sum_k x[k] \left(\sum_m h_2[n-m]h_1[m-k] \right) \\
 &= \sum_k x[k] \left(\sum_{m'} h_2[n-(m'+k)]h_1[m'] \right) \\
 &= \sum_k x[k] \left(\sum_{m'} h_2[(n-k)-m']h_1[m'] \right) = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])
 \end{aligned}$$

1-18 已知 $y[n] = x[n] * h[n]$ ，证明

$$(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \right) \quad (b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] \right)$$

解：(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h[n']$

(b)

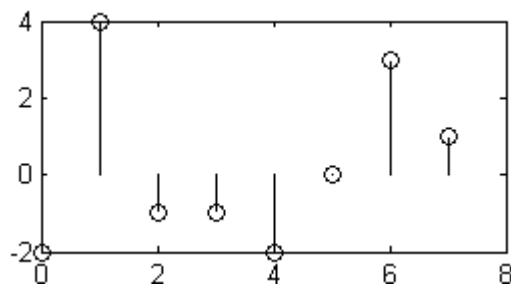
$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n-k] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (-1)^{n'+k} h[n'] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](-1)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n]
 \end{aligned}$$

1-19 求图 T1-4 中两个序列的卷积 $y[n]$ 。

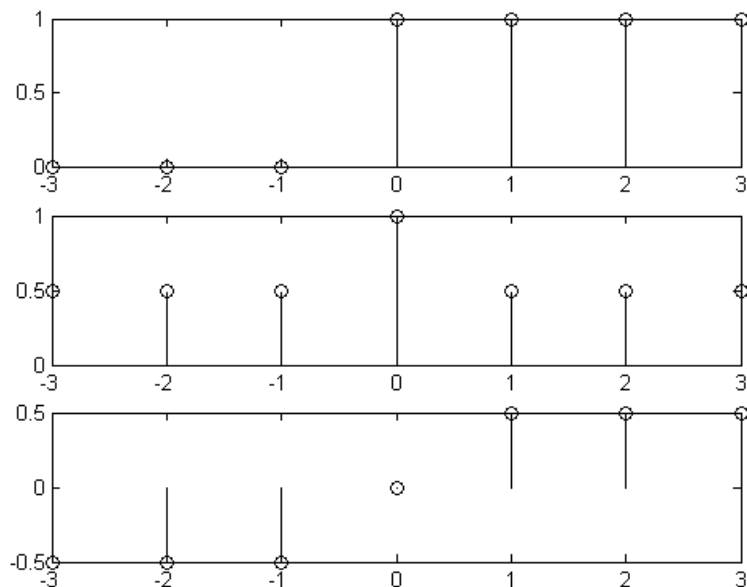


图 T1-4

解： $y[n] = -2\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2] - \delta[n-3] - 2\delta[n-4] + 3\delta[n-6] + \delta[n-7]$



1-20 设 $x[n] = R_4[n]$ ，画出其偶对称分量 $x_e[n]$ 和奇对称分量 $x_o[n]$ 。



1-21 证明：当输入全为零时，线性系统的输出也应该全为零。

证明：设输入 $x_1[n]=0$ ，因为线性，所以 $T\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=T\{bx_2[n]\}=aT\{x_1[n]\}+bT\{x_2[n]\}$

所以 $T\{x_1[n]\}=0$

1-22 对于下列系统，试判断系统的因果性、稳定性、线性和时不变性。

(a) $T\{x[n]\}=h[n]+x[n]$, $h[n]$ 有界

(b) $T\{x[n]\}=x^2[n]$

(c) $T\{x[n]\}=\sum_{k=-\infty}^0 x[n-k]$

(d) $T\{x[n]\}=x[n^2]$

(e) $T\{x[n]\}=x[n+n_0]$

(f) $T\{x[n]\}=e^{|x[n]|}$

解：(a) 因果，稳定，非线性，时变；

(b) 因果，稳定，非线性，时不变

(c) 因果，不稳定，线性，时不变；

(d) 非因果，稳定，线性，时变

(e) 稳定，线性，时不变，若 $n_0 \leq 0$ 则因果，否则非因果

(f) 因果，稳定，非线性，时不变

1-23 已知 LTI 系统的单位脉冲响应如下，指出系统的因果性和稳定性。

(a) $h[n]=a^n u[n+1]$

(b) $h[n]=2^n u[-n-1]$

(c) $h[n]=(1/2)^{|n|}$

(d) $h[n]=(1/3)^n u[n]+3^n u[-n-1]$

(e) $h[n]=0.7^n \cos(0.5\pi n)u[n]$

(f) $h[n]=2u[n+5]-u[n]-u[n-5]$

解：(a) 非因果， $|a|<1$ 则稳定，否则不稳定；(b) 非因果，稳定

(c) 非因果，稳定；

(d) 非因果，稳定

(e) 因果，稳定；

(f) 非因果，稳定

1-24 证明图 T1-5 中虚线框内的系统是 LTI 系统，其中 $h[n]$ 是一个 LTI 系统的单位脉冲响应。

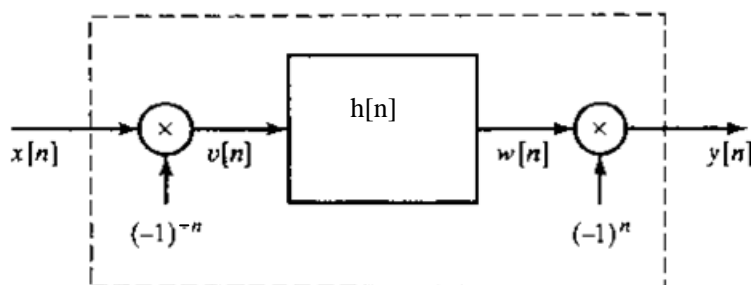


图 T1-5

证明:

$$\begin{aligned} y[n] &= \left((x[n](-1)^n) * h[n] \right) (-1)^n = \sum_k x[k] e^{-j\pi k} h[n-k] e^{j\pi n} \\ &= \sum_k x[k] e^{j\pi(n-k)} h[n-k] = x[n] * (h[n](-1)^n) \end{aligned}$$

1-25 证明: 对一个 LTI 系统, 如果输入序列是以 N 为周期的周期序列, 则输出序列也是以 N 为周期的周期序列。

$$\text{证明: } y[n+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = y[n]$$

1-26 对于 LTI 系统,

(a) 用单位阶跃响应 $s[n]$ 表示单位脉冲响应 $h[n]$;

(b) 已知单位脉冲响应为 $h[n] = a^n u[-n]$, $a > 1$, 求系统的单位阶跃响应;

(c) 证明: 如果系统稳定, 则单位阶跃响应有界。

解: (a) $h[n] = \delta[n] * h[n] = (u[n] - u[n-1]) * h[n] = s[n] - s[n-1]$

(b) 图解法或解析法

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[-k] u[n-k] \\ n \leq 0, s[n] &= \sum_{k=-\infty}^n a^k = \frac{a^n}{1-a^{-1}} \\ n \geq 0, s[n] &= \sum_{k=-\infty}^0 a^k = \frac{1}{1-a^{-1}} \\ \therefore s[n] &= \begin{cases} \frac{a^n}{1-a^{-1}}, & n \leq 0 \\ \frac{1}{1-a^{-1}}, & n \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(c) \because \text{stable}, \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty, \therefore |s[n]| = |h[n] * u[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^n h[k] \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

1-27 一个系统的差分方程是 $y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = \frac{1}{3} x[n]$, 输入信号是 $x[n] = \delta[n]$, 初始条件是 $y[-1] = 1$, 求输出信号 $y[n]$ 。

解:

$$n \geq 0, y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{3}x[n]$$

$$y[0] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, y[1] = \frac{5}{12}, y[2] = \frac{5}{24}, \dots, y[n] = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$n < 0, y[n-1] = 2y[n] - \frac{2}{3}x[n]$$

$$y[-2] = 2; y[-3] = 4, y[-4] = 8, \dots, y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore y[n] = \begin{cases} \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, & n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

*1-28 考虑下面 3 个序列

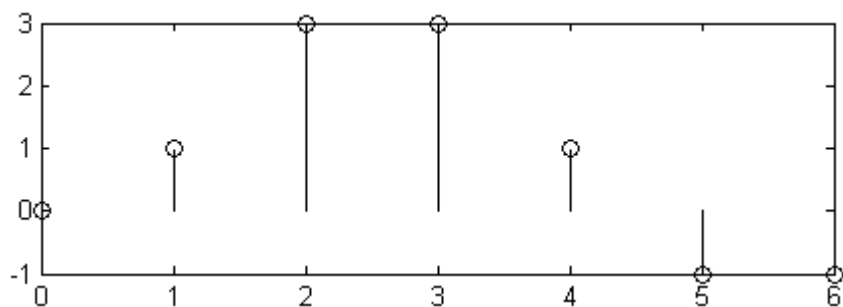
$$x[n] = u[n-1] - u[n-4]$$

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

(a) 求序列 $y[n]$; (b) 设 $w[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} y[k]$, 求序列 $w[n]$ 。

解: (a) $y[n] = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4] - \delta[n-5] - \delta[n-6]$



(b)

$$w[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} y[k] = y[n] * u[n-1] = x[n] * h[n] * u[n-1]$$

$$\therefore w[n] = h[n] * u[n-1] = u[n-1] + 2u[n-2] - u[n-4]$$

$$= \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2u[n-4]$$

*1-29 一个系统已知是线性的, 图 T1-6 中示出该系统对 3 个不同的输入信号 $x_1[n]$, $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 的输出信号 $y_1[n]$, $y_2[n]$ 和 $y_3[n]$ 。

(a) 求系统对 $\delta[n]$ 的响应;

(b) 确定系统是否是时不变的。

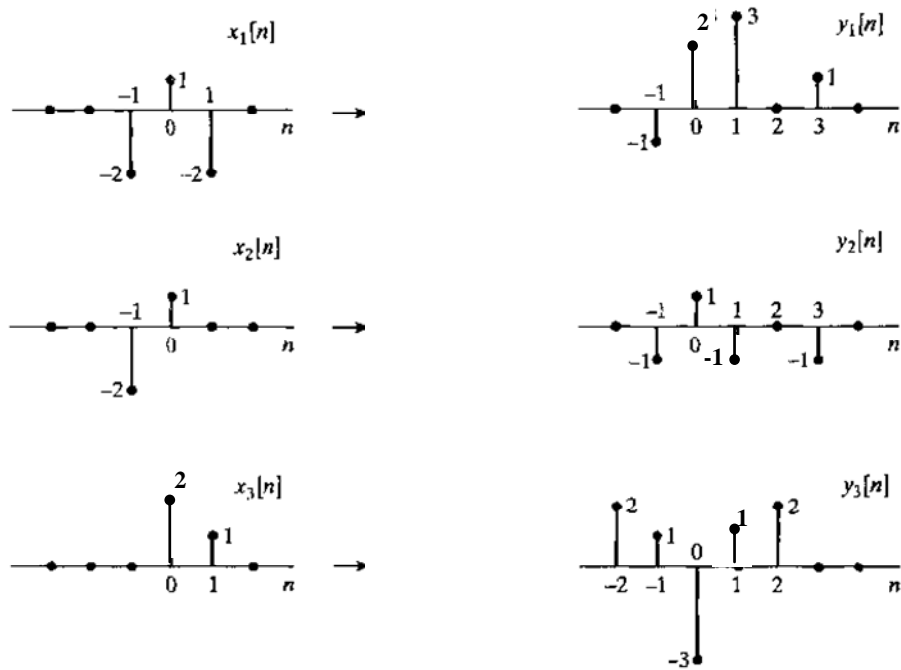


图 T1-6

解: (a)

$$\delta[n] = \left(\frac{1}{2} (x_1[n] - x_2[n]) + x_3[n] \right) \frac{1}{2}, \quad ($$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2} (y_1[n] - y_2[n]) + y_3[n] \right) \frac{1}{2} = \delta[n+2] + 0.5\delta[n+1] - 1.25\delta[n] + 1.5\delta[n-1] + \delta[n-2] + 0.5\delta[n-3]$$

(b)不是

$$\delta[n-1] = -\frac{1}{2} (x_1[n] - x_2[n])$$

$$T\{\delta[n-1]\} = -\frac{1}{2} (y_1[n] - y_2[n]) = -0.5\delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \neq h[n-1]$$

*1-30 单位脉冲响应分别为 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 的两个因果 LTI 系统级联, 已知其等效系统的单位脉冲响应是 $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n]$, 又已知 $h_1[n] = u[n] - u[n-2]$, 求 $h_2[n]$ 。

解:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n] + \delta[n-1]) * h_2[n] = h_2[n] + h_2[n-1]$$

$$\therefore h_2[n] = h[n] - h_2[n-1], \text{看成差分方程, 递推解}$$

$$h_2[0] = h[0] - h_2[-1] = 1, h_2[1] = h[1] - h_2[0] = 0, h_2[2] = h[2] - h_2[1] = 1, \dots,$$

$$h_2[n] = \frac{1 + (-1)^n}{2} u[n]$$

*1-31 考虑图 T1-7 所示系统。

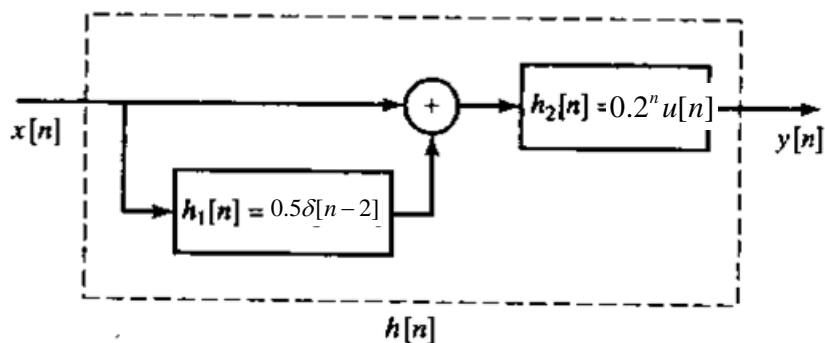


图 T1-7

- (a)求整个系统的单位脉冲响应 $h[n]$ ； (b)给出联系输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 的差分方程；
(c)该系统因果吗?稳定吗?

解: (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + x[n] * 0.5\delta[n-2]) * 0.2^n u[n] \\ \therefore h[n] &= (\delta[n] + \delta[n] * 0.5\delta[n-2]) * 0.2^n u[n] \\ &= 0.2^n u[n] + 0.5(0.2^{n-2})u[n-2] \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + x[n] * 0.5\delta[n-2]) * 0.2^n u[n] \\ \therefore y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n x[k]0.2^{n-k} + \sum_{k=-\infty}^n 0.5x[k-2]0.2^{n-k} = \sum_{k=-\infty}^n (x[k] + 0.5x[k-2])0.2^{n-k} \\ y[n] - 0.2y[n-1] &= \sum_{k=-\infty}^n (x[k] + 0.5x[k-2])0.2^{n-k} - 0.2 \sum_{k=-\infty}^{n-1} (x[k] + 0.5x[k-2])0.2^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^n (x[k] + 0.5x[k-2])0.2^{n-k} - \sum_{k=-\infty}^{n-1} (x[k] + 0.5x[k-2])0.2^{n-k} \\ &= x[n] + 0.5x[n-2] \\ \therefore y[n] - 0.2y[n-1] &= x[n] + 0.5x[n-2] \end{aligned}$$

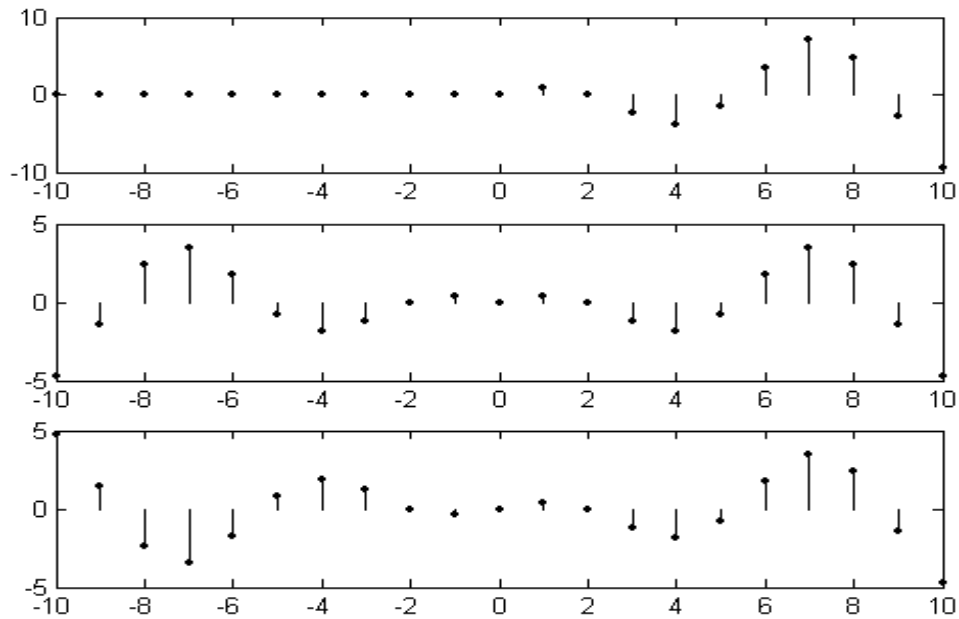
(c)因果稳定

MATLAB 上机题 (1-32—1-35)

1-32 画出序列 $x[n] = n \sin(0.3\pi n + 0.4\pi)$, $0 \leq n \leq 10$ 及其偶对称和奇对称分量。

提示: 可以调用的函数有 `fliplr()` 等。

解: `n=[-10:10];` `x=zeros(1,10), [0:10].*sin(0.3*pi*[0:10]+0.4*pi);`
`xe=(x+fliplr(x))/2;` `xo=(x-fliplr(x))/2;`
`subplot(3,1,1);` `stem(n,x, 'r');`
`subplot(3,1,2);` `stem(n,xe, 'r');`
`subplot(3,1,3);` `stem(n,xo, 'r');`



1-33 画长度为 10 的矩形序列的自相关序列。

提示：可以调用的函数有 ones()、fliplr()、conv() 和 xcorr() 等。

解：n=0:9; x=ones(1,10);

%解法 1:

n1=-n; x1=fliplr(x);

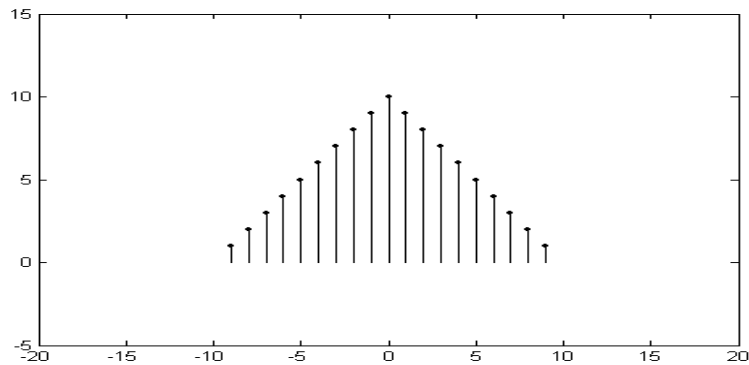
n2=[min(n)+min(n1):max(n)+max(n1)]; y=conv(x,x1);

stem(n2,y,'. '); axis([-20 20 -5 15]);

%解法 2:

n1=-n; n2=[min(n)+min(n1):max(n)+max(n1)]; y=xcorr(x,x);

stem(n2,y,'. '); axis([-20 20 -5 15]);



1-34 一个因果 LTI 系统的差分方程为

$$y[n] - 0.6y[n-1] + 0.36y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-3]。$$

(a) 在 $0 \leq n \leq 100$ 之间画出系统的单位脉冲响应，并确定系统的稳定性；

(b) 如果此系统的输入为 $x[n] = [5 + 3\cos(0.1\pi n) + 4\sin(0.4\pi n)]u[n]$ 。在 $0 \leq n \leq 50$ 间画出响应

$y[n]$ 。

提示：可以调用的函数有 impz() 和 filter() 等。

解： B=[1 2 1]; A=[1, -0.6 0.36];

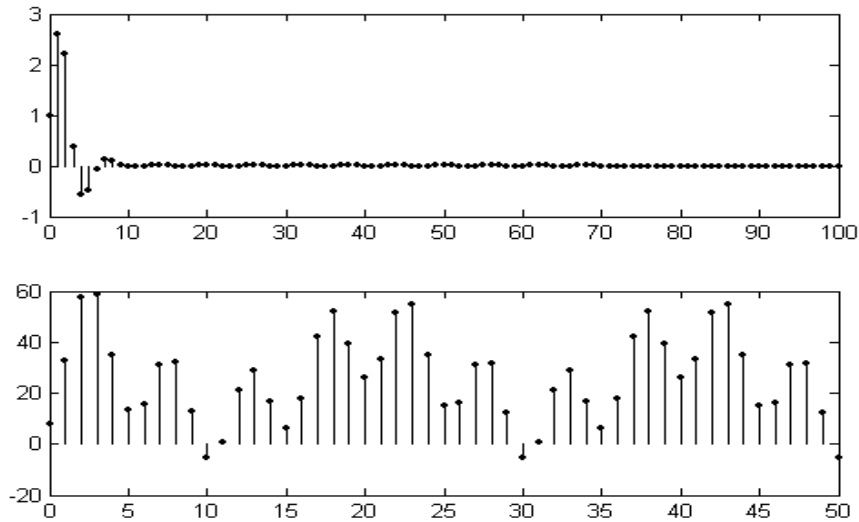
% (A) 输出：h[n] 趋于 0，所以稳定

解法 1:

```

x=zeros(1,101); h=filter(B,A,x); subplot(2,1,1); stem(n,h, 'l')
解法 2:
subplot(2,1,1);impz(B,A,101)
% (B)
n=0:50; x=5+3*cos(0.1*pi*n)+4*sin(0.4*pi*n);
y=filter(B,A,x); subplot(2,1,2); stem(n,y, 'l')

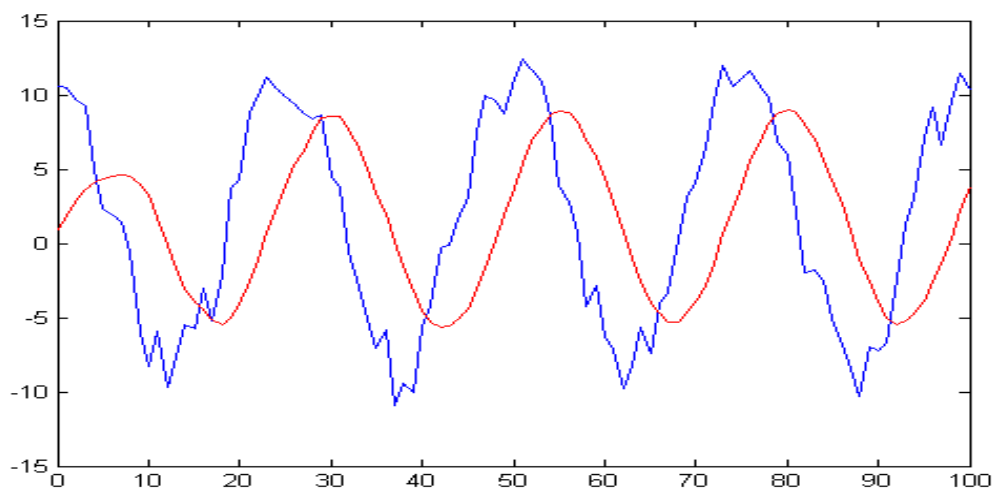
```



1-35 11 阶滑动平均系统的输入输出关系是 $y[n] = \frac{1}{11} \sum_{k=0}^{10} x[n-k]$ ，输入信号是 $x[n] = 10\cos(0.08\pi n) + w[n]$ ，其中 $w[n]$ 是一个在 $[-5, 5]$ 之间均匀分布的随机序列。用 `plot()` 函数在 $0 \leq n \leq 100$ 之间画出输入信号 $x[n]$ 和输出信号 $y[n]$ 。你发现了什么？

提示：可以调用的函数有 `ones()`、`rand()` 和 `filter()` 等。

解： `n=0:100; x=10*cos(0.08*pi*n)+rand(1,101)*5-1;`
`plot(n, x); hold on;`
`B1=ones(1,11)/11; y1=filter(B1, 1, x); plot(n, y1, 'r');`
 滑动平均系统是低通滤波器，能滤除高频噪声。



第2章

单项选择题 (2-1 题—2-8 题)

2-1 实序列的 z 变换的零极点图

(B)

- (A) 相对虚轴左右对称 (B) 相对实轴上下对称
(C) 相对原点中心对称 (D) 相对单位圆共轭倒数

解: 由 $x[n] = x^*[n]$ 可得, $X(z) = X^*(z^*)$ 。

如果 $X(z_0) = 0$, 则 $X^*(z_0^*) = X(z_0) = 0$;

如果 $X(z_0) = \infty$, 则 $X^*(z_0^*) = X(z_0) = \infty$ 。

即 z 变换的零极点图上下对称。

2-2 共轭对称序列的 z 变换的零极点图

(D)

- (A) 相对虚轴左右对称 (B) 相对实轴上下对称
(C) 相对原点中心对称 (D) 相对单位圆共轭倒数

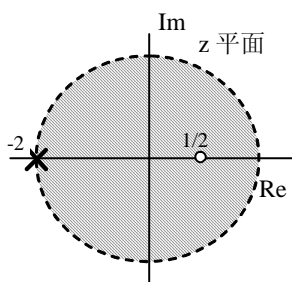
解:

$\because x[n] = x^*[-n], \therefore X(z) = X^*(1/z^*)$

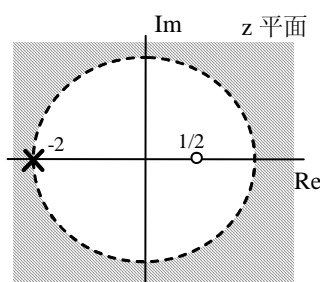
如果 $X(z_0) = 0$, 则 $X^*(1/z_0^*) = X(z_0) = 0$

如果 $X(z_0) = \infty$, 则 $X^*(1/z_0^*) = X(z_0) = \infty$

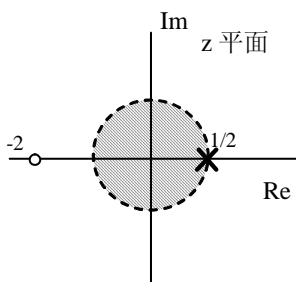
2-3 左边序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}$, 则其零极点图及 ROC 是图 T2-1 中的 (A)



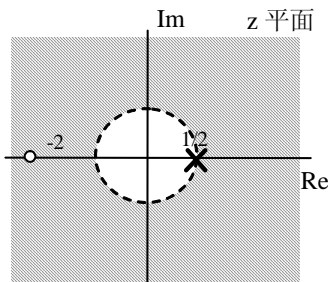
(A)



(B)



(C)



(D)

图 T2-1

2-4 以下几个 z 变换的 ROC (其中 a 和 b 是有限正数), 对应左边序列的是

(B)

- (A) $|z| > b$ (B) $0 < |z| < a$
(C) $b < |z| < a$ (D) $b < |z| < \infty$

2-5 序列 $x[n] = (1/2)^{|n|}$ 的 z 变换及收敛域为

(D)

- (A) $X(z) = \frac{3}{(2z-1)(2-z)}, \frac{1}{2} < |z| < 2$ (B) $X(z) = \frac{-3}{(2z-1)(2-z)}, |z| > 2$
(C) $X(z) = \frac{3z}{(2z-1)(2-z)}, |z| > 2$ (D) $X(z) = \frac{-3z}{(2z-1)(2-z)}, \frac{1}{2} < |z| < 2$

解:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0.5^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0.5^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n}$$

$$= \frac{0.5z}{1-0.5z} + \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{-z}{z-2} + \frac{z}{z-0.5} = \frac{-1.5z}{(z-0.5)(z-2)}$$

收敛域为 $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

2-6 已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$, ROC 是 $|z| > a$, 则 $x[-n-5]$ 的 z 变换和 ROC 是 (D)

(A) $z^{-5} X(1/z), |z| > 1/a$ (B) $z^5 X(1/z), |z| > 1/a$

(C) $z^{-5} X(1/z), |z| < 1/a$ (D) $z^5 X(1/z), |z| < 1/a$

解: $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n-5] z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] z^{-(-n'-5)} = z^5 \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n'] z^{n'} = z^5 X(1/z), |z| < 1/a$

2-7 已知 $n > 0$ 时序列 $x[n] = 0$, 其 z 变换为 $X(z) = \frac{2 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$, 则 $x[0]$ 的值为 (D)

(A) 2

(B) 1

(C) 1/3

(D) 1/6

解 1: 有非零极点, ROC 不是整个平面, 所以不可能是有限长序列, 是左边序列, ROC 是 $|z| < 2$ 。因为 $n > 0$ 时序列 $x[n] = 0$, 由初值定理的推广 $x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z)$ 可得 $x[0] = 1/6$ 。

解 2: $x[n] = -2 \times 2^n u[-n-1] + 1/3 \times 2^{n-1} u[-n], \therefore x[0] = 1/6$

2-8 已知 $x[n]$ 是一个长度大于 1 的因果序列, 且 $x[0] \neq 0$, 其 z 变换是 $X(z)$ 。则以下说法错误的是 (C)

(A) $X(z)$ 在 $z = \infty$ 处没有零点

(B) $X(z)$ 在 $z = \infty$ 处没有极点

(C) $X(z)$ 在 $z = 0$ 处有零点

(D) $X(z)$ 在 $z = 0$ 处有极点

解: (A) $x[n] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \neq 0$, 所以 $z = \infty$ 处没有零点。

(B) ROC 包括 $z = \infty$, 所以在 $z = \infty$ 处没有极点

(C) (D) 有 z 的负幂次方, 所以 $z = 0$ 一定是极点, 所以不是零点

填空题 (2-9 题—2-16 题)

2-9 考虑 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z)$, 其零极点图如图 T2-2 所示。

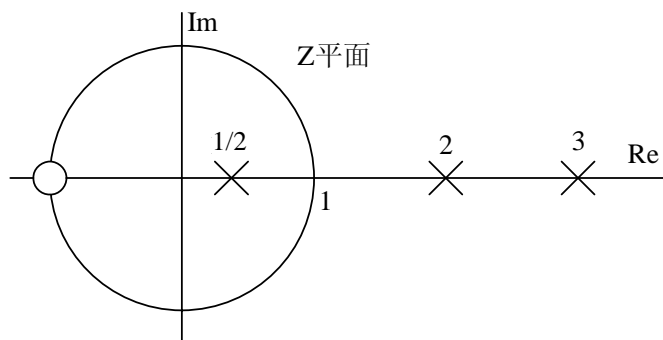


图 T2-2

(a) 若已知 $x[n]$ 绝对可和, 则 $X(z)$ 的收敛域为 $1/2 < |z| < 2$, 这时相应的序列是双边序列;

(b) 有 2 种可能的双边序列具有如 T2-2 所示的零极点图;

(c) 如果 $x[n]$ 是因果序列, 则 $X(z)$ 的收敛域为 $|z| > 3$ 。

2-10 不求出 $X(z)$, 直接写出下列序列 z 变换的 ROC。

- (a) $x[n] = \begin{cases} 1, & -10 \leq n \leq -5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 的 ROC 是 $0 \leq |z| < \infty$;
- (b) $x[n] = 3^n u[-n+2]$ 的 ROC 是 $0 < |z| < 3$;
- (c) $x[n] = [(\frac{1}{2})^{n+4} - (2e^{j\pi/5})^n] u[n+2]$ 的 ROC 是 $2 < |z| < \infty$;
- (d) $x[n] = (\frac{1}{3})^{n-1} u[n] + (1+j)^{n-2} u[-n-1]$ 的 ROC 是 $1/3 < |z| < \sqrt{2}$ 。

2-11 已知序列 $x[n] = \{ \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 2, 1 \}$, 写出其 z 变换 $X(z) = \frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}}{z \neq 0}$, ROC 为 $z \neq 0$ 。

2-12 $x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-2k]$ 的 z 变换是 $X(z) = \frac{1}{1-z^{-2}}$, ROC 为 $|z| > 1$ 。

解: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-2k] \right) z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-2k] z^{-n} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} = \frac{1}{1-z^{-2}}, |z| > 1$

2-13 $X(z) = (1-2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1})$ 的反变换为 $x[n] = -2\delta[n+1] - 3\delta[n] + 8\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$ 。

2-14 已知序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$, 其零点和极点分别是 $c_k, k=0,1,\dots,N-1$ 和 $d_k, k=0,1,\dots,M-1$ 。则序列 $y[n] = (-1)^n x[n]$ 的 z 变换 $Y(z) = X(-z)$ (用 $X(z)$ 表示), 零点是 $-c_k, k=0,1,\dots,N-1$, 极点是 $-d_k, k=0,1,\dots,M-1$ 。

解: $Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] (-z)^{-n} = X(-z)$

2-15 某序列 $x[n]$ 的 z 变换为 $X(z) = \frac{5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-3z^{-1}}$, 收敛域包括单位圆。则其 $x[0]$ 的值为 5。

解:

$$X(z) = \frac{5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-3z^{-1}}, 1/2 < |z| < 3$$

$$\therefore x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1-3z^{-1}} = 5$$

2-16 已知 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$, 写出序列 $r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[k+n]$ 的 z 变换 $R_{xx}(z) = X(z)X^*(1/z^*)$ 。

解: 因为 $r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[k+n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x^*[k-(-n)] = x^*[-n] * x[n]$

由 z 变换的卷积定理可得 $\mathbb{Z}[r_{xx}[n]] = \mathbb{Z}[x[n]] \cdot \mathbb{Z}[x^*[-n]] = X(z)X^*(1/z^*)$

计算、证明与作图题 (2-17 题—2-27 题)

2-17 画出下面每个 z 变换的零极点图, 并标出其收敛域。

(a) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$, $x[n]$ 为因果序列;

$$(b) X(z) = \frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{25}{12}z^{-1}+z^{-2}}, \quad x[n] \text{ 绝对可和。}$$

解：(a) 零点：0, 1/4; 极点：1/2, 2/3; $|z| > 2/3$ 。

$$(b) X(z) = \frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{25}{12}z^{-1}+z^{-2}} = \frac{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}{\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

零点：1, -2; 极点：4/3, 3/4; $3/4 < |z| < 4/3$ 。

$$2-18 \text{ 已知 } x[n] \text{ 的 } z \text{ 变换是 } X(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{9}z^{-2}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}, \quad X(z) \text{ 可能有多少种不同的}$$

收敛域? 分别对应什么类型的序列?

解：

$$X(z) = \frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1+j\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-j\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

零点：-1/2, 0 (2阶), 极点： $j\frac{1}{3}, -j\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$

(a) $1/3 < |z| < 2/3$, 双边序列; (b) $|z| < 1/3$, 左边序列; (c) $|z| > 2/3$, 右边序列。

2-19 利用 z 变换的性质求下列序列的 z 变换, 并画出零极点图和收敛域。

$$(a) x[n] = \left(0.5e^{j0.3\pi}\right)^n R_N[n] \quad (b) x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq N \\ 2N-n, & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

解：(a)

$$X(z) = \frac{1 - \left(0.5e^{j0.3\pi}z^{-1}\right)^N}{1 - 0.5e^{j0.3\pi}z^{-1}}, \text{极点: } z = 0.5e^{j0.3\pi}$$

$$\text{零点: } \left(0.5e^{j0.3\pi}z^{-1}\right)^N = 1 = e^{j2\pi k}, \therefore 0.5e^{j0.3\pi}z^{-1} = e^{j2\pi k/N}$$

$$\therefore z = 0.5e^{j0.3\pi}e^{-j2\pi k/N} = 0.5e^{j(0.3\pi - 2\pi k/N)}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

第一个零点与极点抵消, 还有 $N-1$ 阶极点 $z = 0$

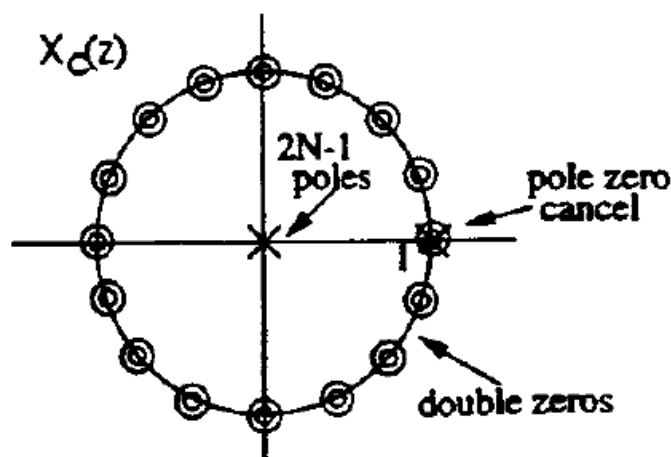
所以: 极点 $z = 0$ ($N-1$ 阶), 零点 $z = 0.5e^{j(0.3\pi - 2\pi k/N)}, k = 1, \dots, N-1$

所以 ROC $|z| > 0$

(b)

$$x[n] = R_N[n] * R_N[n-1], \therefore X(z) = z^{-1} \left(\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \right)^2 = \frac{1}{z^{2N-1}} \left(\frac{z^N-1}{z-1} \right)^2, |z| > 0$$

极点 $z = 0$ ($2N-2$ 阶), 零点 $z = e^{j2\pi k/N}$ (2阶), $k = 1, 2, \dots, N-1$



2-20 利用 \$z\$ 变换的性质求下列序列的 \$z\$ 变换及 ROC。

(a) \$x[n] = n(1/2)^n u[n-2]\$ (b) \$x[n] = n \cos(\omega_0 n) u[n]\$，其中 \$\omega_0\$ 为常数；

(c) \$x[n] = |n|(1/4)^{|n|}\$。

解：(a)

$$(1/2)^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - (1/2)z^{-1}}, |z| > 1/2$$

$$\therefore (1/2)^n u[n-2] \xleftrightarrow{z} \frac{(1/4)z^{-2}}{1 - (1/2)z^{-1}}$$

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{(1/4)z^{-2}}{1 - (1/2)z^{-1}} \right] = \frac{1}{2} z^{-2} \frac{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)^2}, |z| > 1/2$$

$$(b) \text{ 设 } y[n] = \cos(\omega_0 n) u[n], \text{ 则 } Y[z] = \frac{1 - z^{-1} \cos \omega_0}{1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$$

$$\text{而 } x[n] = ny[n], \text{ 所以 } X(z) = -z \frac{dY(z)}{dz} = \frac{z^{-1} \cos \omega_0 - 2z^{-2} + z^{-3} \cos \omega_0}{(1 - 2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2})^2}, |z| > 1$$

$$(c) x[n] = |n| \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = n \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - n \cdot 4^n u[-n-1]$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z\text{变换}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$

$$-4^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z\text{变换}} \frac{1}{1 - 4z^{-1}}, |z| < 4$$

由 \$z\$ 变换的导数性质可得

$$n \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{z\text{变换}} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \right) = \frac{\frac{1}{4} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{1}{4}$$

$$-n \cdot 4^n u[-n-1] \xleftrightarrow{z\text{变换}} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - 4z^{-1}} \right) = \frac{4z^{-1}}{(1 - 4z^{-1})^2}, |z| < 4$$

所以

$$X(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} + \frac{4z^{-1}}{\left(1 - 4z^{-1}\right)^2} = \frac{z^{-1}\left(\frac{17}{4} - 4z^{-1} + \frac{17}{4}z^{-2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)^2 \left(1 - 4z^{-1}\right)^2}, \quad \frac{1}{4} < |z| < 4$$

2-21 求以下 z 变换的反变换。

$$(a) \quad X(z) = \frac{1}{1 - a^2 z^{-2}}, |z| > |a| \quad (b) \quad X(z) = \frac{1}{1 - a^3 z^{-3}}, |z| > |a|$$

$$(c) \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-5}}, |z| > 1$$

解: (a) $X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + az^{-1}} + \frac{1}{1 - az^{-1}} \right), \therefore x[n] = \frac{1}{2} ((-a)^n u[n] + a^n u[n]) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} \delta[n - 2k]$

$$(b) \quad x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^{3k} \delta[n - 3k]$$

$$(c) \quad x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - 5k] - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - 1 - 5k]$$

2-22 用长除法求以下 z 反变换。

$$(a) \quad X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-3}}, \quad |z| > 2^{-1/3} \quad (b) \quad X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad x[n] \text{ 为右边序列}$$

$$(c) \quad X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})^2}, \quad |z| > 2$$

解 (a) 参照 2-21 (b) 解答, 或用长除法

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/3}, & n = 0, 3, 6, \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n - 3k] \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(b) \quad \text{方法 1: } x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] = 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \delta[n]$$

方法 2: 长除法

$x[n]$ is right-sided and

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Long division:

$$1 + \frac{1}{3}z^{-1} \overline{) \begin{array}{r} 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2} + \dots \\ 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \\ \hline -\frac{2}{3}z^{-1} \\ -\frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2} \\ \hline +\frac{2}{9}z^{-2} \end{array}}$$

Therefore, $x[n] = 2(-\frac{1}{3})^n u[n] - \delta[n]$

(c) 根据收敛域判断是因果序列，因而 $X(z)$ 分子分母应按 z 的降幂或 z^{-1} 的升幂排列，进行长除：

$$\begin{array}{r} z^{-1} + 4z^{-2} + 12z^{-3} + 32z^{-4} + 80z^{-5} + \dots \\ 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2} \overline{) z^{-1}} \\ \hline z^{-1} - 4z^{-2} + 4z^{-3} \\ \hline 4z^{-2} - 4z^{-3} \\ 4z^{-2} - 16z^{-3} + 16z^{-4} \\ \hline 12z^{-3} - 16z^{-4} \\ 12z^{-3} - 48z^{-4} + 48z^{-5} \\ \hline 32z^{-4} - 48z^{-5} \\ 32z^{-4} - 128z^{-5} + 128z^{-6} \\ \hline 80z^{-5} - 128z^{-6} \\ \vdots \end{array}$$

所以

$$X(z) = 1 \cdot 2^0 \cdot z^{-1} + 2 \cdot 2^1 \cdot z^{-2} + 3 \cdot 2^2 \cdot z^{-3} + 4 \cdot 2^3 \cdot z^{-4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{n-1} \cdot z^{-n}$$

由此得到

$$x[n] = n \cdot 2^{n-1} u[n-1]$$

2-23 序列 $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $x_2[n] = -3^n u[-n-1]$, 利用 z 变换求以下序列。

$$(a) \quad y[n] = x_1[n-3] * x_2[n+1] \quad (b) \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[k+n]$$

解：(a)

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \rightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2[n] = -3^n u[-n-1] \rightarrow X_2(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}, |z| < 3$$

$$x_1[n-3] \rightarrow \frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}, x_2[n+1] \rightarrow \frac{z}{1-3z^{-1}}, |z| < 3$$

$$\therefore Y(z) = \frac{z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{z}{1-3z^{-1}} = z^{-2} \left(\frac{-1/5}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6/5}{1-3z^{-1}} \right)$$

$$\therefore y[n] = -\frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] - \frac{6}{5} \times 3^{n-2} u[-n+1]$$

(b) 因为 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[k+n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[-k]x_2[-k'+n] = x_1[-n] * x_2[n]$

由 Z 变换的卷积定理可得

$$Y(z) = X_1(z^{-1})X_2(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} \cdot \frac{1}{1-3z^{-1}} = \frac{-2z^{-1}}{1-2z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-3z^{-1}} = -2z^{-1} \left(\frac{-2}{1-2z^{-1}} + \frac{3}{1-3z^{-1}} \right)$$

$$\therefore y[n] = -2 \left(2 \times 2^{n-1} u[-n] - 3 \times 3^{n-1} u[-n] \right) = 2 \left(3^n - 2^n \right) u[-n]$$

注意: $x_1[-n]$ 是左边序列

*2-24 图 T2-3 是一个因果序列 $x[n]$ 的 z 变换的零极点图, 不用求 z 变换, 直接画出以下序列 z 变换的零极点图和收敛域。

- (a) $y[n] = x[n-3]$ (b) $y[n] = x[-n]$ (c) $y[n] = x[4-n]$
 (d) $y[n] = x^*[n]$ (e) $y[n] = 0.2^n x[n]$

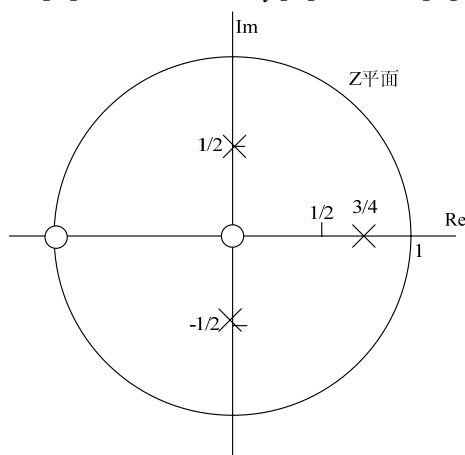


图 T2-3

解: $x[n]$ 因果, 所以零点: 0, -1, ∞ ; 极点: $3/4, 1/2j, -1/2j$; ROC: $|z| > 3/4$

(a)

$Y(z) = z^{-3}X(z)$, 新增零点 $z = \infty$ (3阶), 新增极点 $z = 0$ (3阶), 与原来的零点抵消掉1阶
 所以零点: -1, ∞ (4阶); 极点: 0 (2阶), $3/4, 1/2j, -1/2j$; ROC: $|z| > 3/4$

(b)

$Y(z) = X(1/z)$, 零点极点变成原来的倒数, 收敛域是圆的内部

零点: $0, -1, \infty$; 极点: $4/3, 2j, -2j$; $ROC: |z| < 4/3$

(c)

$Y(z) = z^{-4}X(1/z)$, 零点极点变成原来的倒数, 收敛域是圆的内部

增加零点 $z=\infty$ (4阶), 极点 $z=0$ (4阶), 与原来的零点抵消掉1阶

零点: $-1, \infty$ (5阶); 极点: 0 (3阶), $4/3, 2j, -2j$; $ROC: |z| < 4/3$

(d)

$Y(z) = X^*(z^*)$, 零点极点变成原来的共轭

零点: $0, -1, \infty$; 极点: $3/4, 1/2j, -1/2j$; $ROC: |z| > 3/4$

(e)

$Y(z) = X(z/0.2)$, 零点极点变成原来的0.2倍

零点: $0, -0.2, \infty$; 极点: $3/20, 1/10j, -1/10j$; $ROC: |z| > 3/20$

*2-25 已知 $x[n]$ 是因果序列, 其 z 变换为 $X(z)$, 收敛域为 $|z| > |a|$, 且 $X(z)$ 在 $z=1$ 处没有零

点。考虑序列 $y[n] = \sum_{m=0}^n x[m]$, 用 $X(z)$ 表示其 z 变换 $Y(z)$, 并写出收敛域。

解: $y[n] = \sum_{m=0}^n x[m] = x[n] * u[n]$, 所以 $Y(z) = \frac{z}{z-1} X(z)$, $z=1$ 新增了一个极点, 所以 $|z| > \max(1, |a|)$

解法 2: $\mathbb{Z}[y(n)] = \mathbb{Z}[\sum_{m=0}^n x(m)] = \sum_{n=0}^{\infty} [\sum_{m=0}^n x(m)] z^{-n}$

由于是因果序列的累加, 故有 $n \geq 0$ 。改变求和次序, 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\sum_{m=0}^n x(m)] &= \sum_{m=0}^n x(m) \sum_{n=m}^{\infty} z^{-n} = \sum_{m=0}^n x(m) \frac{z^{-m}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} \sum_{m=0}^n x(m) z^{-m} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} \mathbb{Z}[x(n)] = \frac{z}{z-1} X(z), \quad |z| > \max(|a|, 1) \end{aligned}$$

*2-26 利用序列的线性加权性质求解本题。

(a) 证明 $\mathbb{Z}\{n^2 x[n]\} = -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right]$; (b) 求 $x[n] = n^2 a^n u[n]$ 的 z 变换;

(c) 求 $x[n] = (n-1)^2 u[n-1]$ 的 z 变换;

(d) 求 $x[n] = (n+1)^2 (u[n] - u[n-3]) * (u[n] - u[n-4])$ 的 z 变换。

证明: (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\{n^2 x[n]\} &= \mathbb{Z}\{n \cdot nx[n]\} = -z \frac{d}{dz} \mathbb{Z}\{nx[n]\} = -z \frac{d}{dz} \left[-z \frac{d}{dz} X(z) \right] \\ &= z^2 \frac{d^2}{dz^2} X(z) + z \frac{d}{dz} X(z) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x[n] &= n^2 a^n u[n] \\
x_1[n] &= a^n u[n] \Leftrightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > a \\
x_2[n] = nx_1[n] &= na^n u[n] \Leftrightarrow X_2(z) = -z \frac{d}{dz} X_1(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > a \\
x[n] = nx_2[n] &= n^2 a^n u[n] \Leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X_2(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \right) \quad |z| > a \\
X(z) &= \frac{-az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3} \quad |z| > a
\end{aligned}$$

ROC 改成 $|z| > a$

(c)

(2) 设 $x_1(n) = (n-1)u(n-1)$, 则

$$X_1(Z) = Z^{-1} \frac{Z}{(Z-1)^2} = \frac{1}{(Z-1)^2} \quad |Z| > 1$$

因为

$$x_1(n) = (n-1)X_1(n-1)$$

故

$$\begin{aligned}
X_1(Z) &= -Z \frac{d}{dZ} X_1(Z) - X_1(Z) = \\
&= -Z \frac{d}{dZ} \left[\frac{1}{(Z-1)^2} \right] - \frac{1}{(Z-1)^2} = \\
&= \frac{Z+1}{(Z-1)^3} \\
&|z| > 1
\end{aligned}$$

(d) (3) 设 $x_1(n) = (n+1)[u(n) - u(n-3)]$, $x_2(n) = u(n) - u(n-4)$

$$\begin{aligned}
\text{则 } X_1(Z) &= \frac{Z}{(Z-1)^2} + \frac{Z}{Z-1} - \frac{3Z-2}{Z^2(Z-1)^2} = \\
&= \frac{1}{Z^2(Z-1)} = \frac{Z^3+Z^2-1}{Z^2(Z-1)^2} \quad |Z| > 1 \\
X_2(Z) &= \frac{Z}{Z-1} - \frac{Z^{-3}}{Z-1} = \frac{Z^4-1}{Z^3(Z-1)} = \\
&= \frac{(Z^2+1)(Z+1)}{Z^3} \quad |Z| > 1
\end{aligned}$$

根据卷积定理有

$$\begin{aligned}
X(Z) &= X_1(Z)X_2(Z) = \\
&= \frac{(Z^3+Z^2-1)(Z+1)(Z^2+1)}{Z^3(Z-1)} \quad |Z| > 1
\end{aligned}$$

(c) 和 (d) 中大写 Z 改成小写 z

*2-27 设因果序列 $g[n]$ 的 z 变换为 $G(z) = \sin(z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2})$, 求出 $g[11]$ 的值。

解:

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sin(z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2}) \\
&= (z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \frac{z^{-7}}{7!} + \frac{z^{-9}}{9!} - \frac{z^{-11}}{11!} + \cdots)(1+2z^{-1}+3z^{-2}) \\
&= \sum_n g[n]z^{-n}
\end{aligned}$$

$$g[11] = -\frac{1}{11!} + \frac{2}{9!} - \frac{3}{7!}$$

MATLAB 上机题 (2-28—2-30)

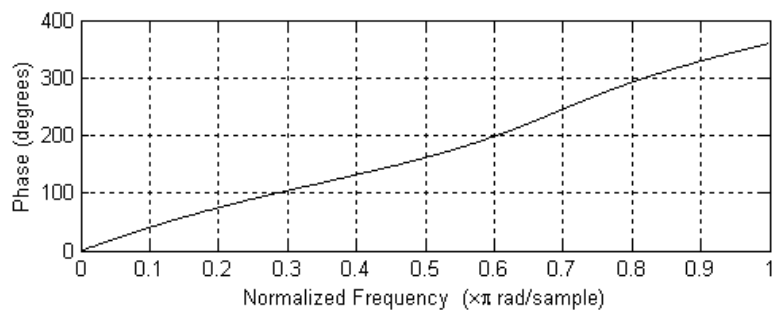
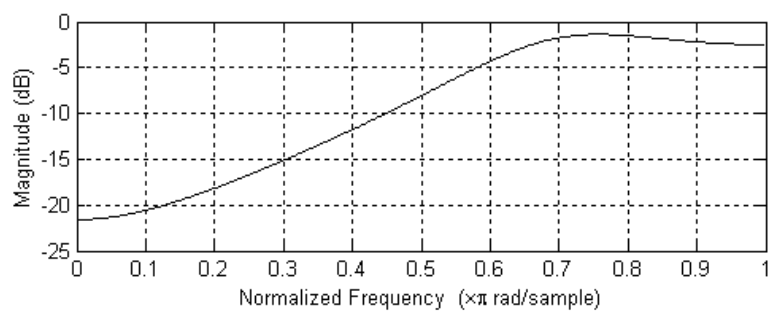
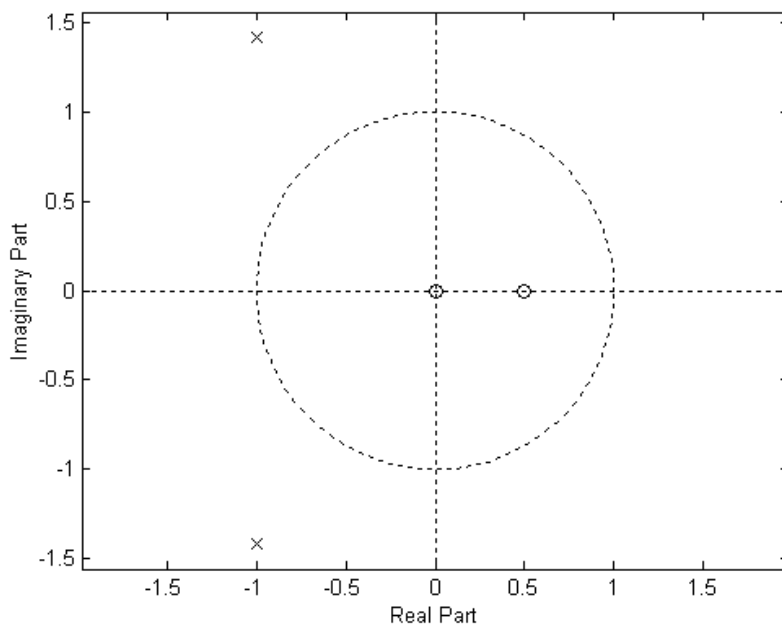
2-28 已知 z 变换 $X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$, ROC 包括单位圆。

- (a) 求零点和极点; (b) 画出零点和极点图;
(c) 画出 $X(z)$ 在单位圆上的函数值 (包括幅度和相位)。

提示: 可以调用的函数有 `tf2zp()`、`zplane()` 和 `freqz()` 等。

解: `B=[1, -0.5]; A=[1, 2, 3]; [z, p, k]=tf2zp(B, A);`
`figure; zplane(B, A); figure; freqz(B, A);`

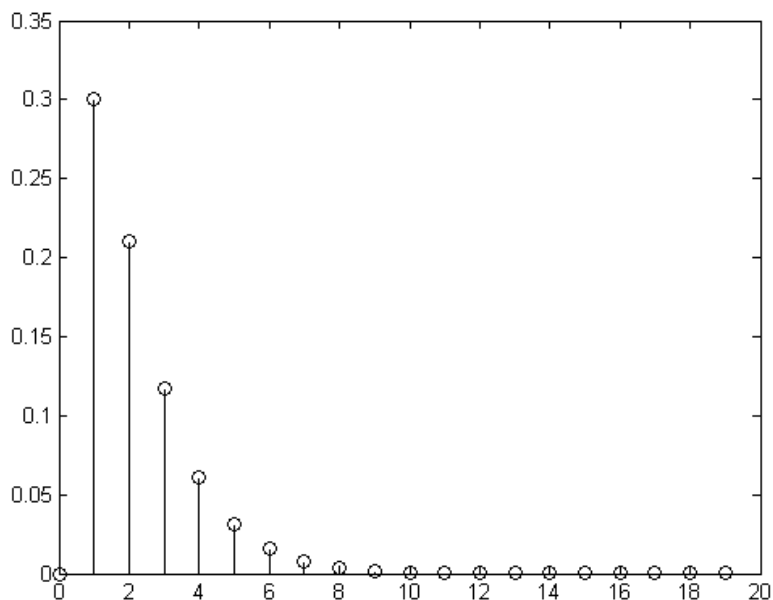
输出: $z = 0.5000$; $p = -1.0000 + 1.4142i, -1.0000 - 1.4142i$; $k = 1$



2-29 已知因果序列 $x[n]$ 的 z 变换 $X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1}{1-0.2z^{-1}}, |z| > 0.5$, 画出序列 $x[n]$ 的前 20 个样本。

提示: 可以调用的函数有 `impz()` 等。

解: `B1=1; A1=[1 -0.5]; B2=1; A2=[1, -0.2];`
`[x1, n1]=impz(B1, A1, 20); [x2, n2]=impz(B2, A2, 20);`
`x=x1-x2; stem(n1, x);`



2-30 将以下 z 变换分解成部分分式形式

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}, \frac{1}{4}|z| < \frac{1}{2}$$

提示: 可以调用的函数有 `residuez()` 等。

解: `B=[1 -0.5]; A=[1 0.75 0.125]; [r p k]=residuez(B, A);`

输出: `r = 4 -3; p = -0.5000 -0.2500; k = []`

$$\text{即 } X(z) = \frac{4}{1+0.5z^{-1}} - \frac{3}{1+0.25z^{-1}}$$

第3章

单项选择题 (3-1 题—3-8 题)

3-1 以下不是序列傅里叶变换存在的充分条件的是 (D)

- (A) 序列有限长 (B) 序列绝对可和
(C) 序列的 z 变换在单位圆上收敛 (D) 序列因果

3-2 设长度为 N 的序列 $x[n]$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$, 定义一个新序列 $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$,

则该序列的傅里叶变换为

(D)

- (A) $X(e^{j2\omega})$ (B) $X(e^{j\omega/2})$
(C) $\frac{1}{2}[X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega-2\pi)/2})]$ (D) $\frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega-\pi)})]$

解:

$$\because y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases} = \frac{1}{2}(1 + e^{j\pi n})x[n]$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})]$$

3-3 两个序列间的关系是 $y[n] = \sum_{k=0}^3 0.5^k x[n-k]$, 则它们的傅里叶变换间的关系是 (B)

- (A) $Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1-0.5e^{-j\omega}}$ (B) $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{1-\frac{1}{16}e^{-j4\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}}$
(C) $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{1+\frac{1}{16}e^{-j4\omega}}{1-0.5e^{-j\omega}}$ (D) $Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1+0.5e^{-j\omega}}$

解: 利用线性性质或卷积性质

$$\because y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}x[n-2] + \frac{1}{8}x[n-3]$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j3\omega}X(e^{j\omega})$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega} + \frac{1}{8}e^{-j3\omega}\right]X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1 - \frac{1}{16}e^{-j4\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

3-4 已知 $x[n]$ 的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$, 则 $e^{jn\pi/5}x[n-3]$ 的傅里叶变换是 (C)

- (A) $e^{-j3(\omega+\pi/5)}X(e^{j(\omega+\pi/5)})$ (B) $e^{j\omega 3}X(e^{j(\omega-\pi/5)})$
(C) $e^{-j3(\omega-\pi/5)}X(e^{j(\omega-\pi/5)})$ (D) $e^{-j\omega 3}X(e^{j(\omega-\pi/5)})$

解 1: 根据定义

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\pi/5}x[n-3]e^{-j\omega n} &= \sum_{n-3=n'}^{\infty} e^{j(n'+3)\pi/5}x[n']e^{-j\omega(n'+3)} \\ &= e^{-j\omega 3}e^{j3\pi/5} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{-j(\omega-\pi/5)n'} = e^{-j3(\omega-\pi/5)}X(e^{j(\omega-\pi/5)}) \end{aligned}$$

解 2: 利用时移和频移性质

$$x_1[n] = x[n]e^{jn\pi/5}, x_2[n] = x_1[n-3], y[n] = x_2[n]e^{j3\pi/5}$$

$$\therefore X_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi/5)}), X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 3} X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 3} X(e^{j(\omega-\pi/5)}),$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{j3\pi/5} X_2(e^{j\omega}) = e^{j3\pi/5} e^{-j\omega 3} X(e^{j(\omega-\pi/5)}) = e^{-j3(\omega-\pi/5)} X(e^{j(\omega-\pi/5)})$$

3-5 序列的实部和虚部的傅里叶变换分别 (C)

- (A) 共轭对称和共轭反对称 (B) 共轭反对称和共轭对称
(C) 共轭对称和共轭对称 (D) 共轭反对称和共轭反对称

解：虚部乘以 j 的 FT 是总 FT 的共轭反对称分量。所以虚部的 FT 是共轭反对称分量/j，即成为共轭对称的。或者考虑虚部也是实序列，所以 FT 共轭对称。

3-6 满足 $x[n] = -x^*[-n]$ 的复数序列，其傅里叶变换一定是 (D)

- (A) 共轭对称函数 (B) 共轭反对称函数
(C) 实函数 (D) 纯虚函数

解：共轭反对称分量的 FT 是总 FT 的虚部乘 j。所以任意共轭反对称序列的傅里叶变换是纯虚函数。

3-7 两个长度为 N 的实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ ，傅里叶变换分别为 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ ，

令 $Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + jX_2(e^{j\omega})$ ， $y[n]$ 是 $Y(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换，则 (A)

- (A) $x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, x_2[n] = \text{Im}\{y[n]\}$
(B) $x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, x_2[n] = j \text{Im}\{y[n]\}$
(C) $x_1[n] = \frac{y[n] + y^*[N-n]}{2}, x_2[n] = \frac{y[n] - y^*[N-n]}{2}$
(D) $x_1[n] = \frac{y[n] + y^*[N-n]}{2}, x_2[n] = \frac{y[n] - y^*[N-n]}{2j}$

解：利用实部和 j 倍虚部的 FT 是总 FT 的共轭对称和反对称分量

$\therefore x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是实序列，

$\therefore X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 是共轭对称复数函数，即 $jX_2(e^{j\omega})$ 是共轭反对称复数函数，

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + jX_2(e^{j\omega}) = Y_e(e^{j\omega}) + Y_o(e^{j\omega})$$

$$\therefore X_1(e^{j\omega}) = Y_e(e^{j\omega}), jX_2(e^{j\omega}) = Y_o(e^{j\omega})$$

$$\therefore Y_e(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} \text{Re}\{y[n]\}, Y_o(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} j \text{Im}\{y[n]\}$$

$$\therefore X_1(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, jX_2(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{IFT}} jx_2[n] = j \text{Im}\{y[n]\}$$

3-8 关于信号频谱错误的说法是 (D)

- (A) 离散时间信号的频谱是以 2π 为周期的周期函数；
(B) 周期性的连续时间信号的频谱是离散非周期的；
(C) 周期性的离散时间信号的频谱以 2π 为周期且离散的；
(D) 离散时间信号的频谱是离散的。

填空题 (3-9 题—3-15 题)

3-9 已知序列 $x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $X(e^{j\omega})$ 是其傅里叶变换。不明确求出 $X(e^{j\omega})$ 而计算

(a) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = 15$ ；(b) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = -3$ ；

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = 4\pi$ ；(d) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 110\pi$ 。

解: (a) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 15$

(b) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n = -3$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega 0}d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 110\pi = 110\pi$ 。

3-10 设 $X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 的傅里叶变换, 用 $X(e^{j\omega})$ 分别表示以下序列的傅里叶变换:

(a) $y[n] = x^2[n]$ 的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$;

(b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ 的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k) \right]$;

(c) $r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k]$ 的傅里叶变换 $R_{xx}(e^{j\omega}) = \left| X(e^{j\omega}) \right|^2$ 。

解: (a) 加窗性质

(b) 利用卷积性质

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k']u[k'] = x[n]*u[n],$$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k) \right]$$

(c) $\because r_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^*[-r]x[n-r] = x^*[-n]*x[n]$

又因为 $x^*[-n]$ 的傅立叶变换为 $X^*(e^{j\omega})$, 所以

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left| X(e^{j\omega}) \right|^2$$

3-11 求以下傅里叶变换的反变换。

(a) $X(e^{j\omega}) = (1-0.5e^{-j\omega})(1-2e^{j\omega})$ 的反变换 $x[n] = -2\delta[n+1] + 2\delta[n] - 0.5\delta[n-1]$;

(b) $X(e^{j\omega}) = \sin(2\omega) + \sin(-4\omega) + \cos(\omega)$ 的反变换

$$x[n] = \frac{1}{2j}(\delta[n-4] - \delta[n+4]) + \frac{1}{2j}(\delta[n+2] - \delta[n-2]) + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1]);$$

(c) $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-a^3e^{-j\omega 3}}, |a| > 1$ 的反变换 $x[n] = -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-3k}\delta[n+3k]$ 。

解: (a)

$$X(e^{j\omega}) = (1-0.5e^{-j\omega})(1-2e^{j\omega}) = 1 - 0.5e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + 1$$

$$\therefore x[n] = -2\delta[n+1] + 2\delta[n] - 0.5\delta[n-1]$$

(b)

$$X(e^{j\omega}) = \sin(2\omega) + \sin(-4\omega) + \cos(\omega) = \frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}}{2j} + \frac{e^{-j4\omega} - e^{j4\omega}}{2j} + \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$

$$\therefore x[n] = \frac{1}{2j}(\delta[n-4] - \delta[n+4]) + \frac{1}{2j}(\delta[n+2] - \delta[n-2]) + \frac{1}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1])$$

(c)

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-a^3 e^{-j\omega 3}}, |a| > 1, \because ROC \text{ 包括单位圆, 所以 } |z| < a, \text{ 左边序列} \\
 &= \frac{-a^{-3} e^{j\omega 3}}{1-a^{-3} e^{j\omega 3}} = -a^{-3} e^{j\omega 3} [1 + a^{-3} e^{j\omega 3} + a^{-6} e^{j\omega 6} + a^{-9} e^{j\omega 9} + \dots] \\
 \therefore x[n] &= -a^{-3} [\delta[n+3] + a^{-3} \delta[n+6] + a^{-6} \delta[n+9] + a^{-9} \delta[n+12] + \dots] \\
 &= -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-3k} \delta[n+3k]
 \end{aligned}$$

3-12 写出周期为 8 的序列 $\tilde{x}[n] = \begin{cases} 1, & n=0,1,2,3 \\ -1, & n=4,5,6,7 \end{cases}$ 的 DFS $\tilde{X}[k] =$

$$2 \frac{\sin^2(2\pi k/4)}{\sin(\pi k/8)} e^{-j\frac{7\pi}{8}k+j\pi/2} = 2e^{j3\pi k/8} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/8)}.$$

解: 从定义出发

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^3 W_8^{kn} - \sum_{n=4}^7 W_8^{kn} = \sum_{n=0}^3 W_8^{kn} - \sum_{n'=0}^3 W_8^{k(n'+4)} \\
 &= (1-W_8^{k4}) \sum_{n=0}^3 W_8^{kn} = (1-W_8^{k4}) \frac{1-W_8^{k4}}{1-W_8^k} = \frac{W_8^{k4} (W_8^{-k2} - W_8^{k2})^2}{W_8^{k/2} (W_8^{-k/2} - W_8^{k/2})} \\
 &= W_8^{k7/2} 2j \frac{\sin^2(\pi k/2)}{\sin(\pi k/8)} = 2 \frac{\sin^2(\pi k/2)}{\sin(\pi k/8)} e^{-j\frac{2\pi}{8}k7/2+j\pi/2}
 \end{aligned}$$

解 2:

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^3 W_8^{kn} - \sum_{n=4}^7 W_8^{kn} = \frac{1-W_8^{k4}}{1-W_8^k} + \frac{1-W_8^{k4}}{1-W_8^k} = \frac{2(1-W_8^{k4})}{1-W_8^k} \\
 &= 2 \frac{W_8^{k2}}{W_8^{k/2}} \frac{W_8^{-k2} - W_8^{k2}}{W_8^{-k/2} - W_8^{k/2}} = 2W_8^{3k/2} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/8)} = 2e^{j3\pi k/8} \frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/8)}
 \end{aligned}$$

3-13 周期为 8 的实序列的 DFS 主周期的前 5 点是 $\{0+j, 1+2j, 2+3j, 3+4j, 4+5j\}$, 则后 3 点是 $3-4j, 2-3j, 1-2j$ 。

3-14 周期为 7 的序列 $\tilde{x}_1[n]$ 、 $\tilde{x}_2[n]$ 和 $\tilde{x}_3[n]$, 其 DFS 分别是 $\tilde{X}_1[k]$ 、 $\tilde{X}_2[k]$ 和 $\tilde{X}_3[k]$, 已知序列 $\tilde{x}_2[n]$ 如图 T3-1 所示, 且 $\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k]$, 用 $\tilde{x}_1[n]$ 表示 $\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4]$ 。



图 T3-1

解: 利用时域周期卷积性质或时域移位性质:

$$\begin{aligned}
 \therefore \tilde{X}_2[k] &= \sum_{n=0}^6 \tilde{x}_2[n] W_7^{kn} = 1 + W_7^{4k}, \\
 \therefore \tilde{X}_3[k] &= \tilde{X}_1[k] \tilde{X}_2[k] = \tilde{X}_1[k] + W_7^{4k} \tilde{X}_1[k] \\
 \therefore \tilde{x}_3[n] &= \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4]
 \end{aligned}$$

3-15 有限长序列 $x[n]$ 与周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 间满足关系 $x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$ 。

(a) 用 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 表示 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}[k]$ =

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, k=0,1,\dots,N-1;$$

(b) 用 $X(e^{j\omega})$ 表示 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶变换 $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$ 。

解：时域无混叠的周期性延拓关系，则频域取样关系

$$(a) \because X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\therefore \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, k=0,1,\dots,N-1$$

$$(b) \because \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

$$\therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{2\pi}{N} X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}), & \omega = \frac{2\pi}{N}k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

计算、证明与作图题 (3-16 题—3-28 题)

3-16 已知 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的傅里叶变换分别为 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ ，证明以下傅里叶变换对成立。

(a) $ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{F} aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ ，其中 a 和 b 是任意常数；

(b) $x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$ ，其中 n_0 是任意整数；

(c) $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$ ，其中 ω_0 是任意实数；

(d) $nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$ ； (e) $x^*[n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$ ；

(f) $x^*[-n] \xleftrightarrow{F} X^*(e^{j\omega})$ ； (g) $x[n] * y[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ 。

证明：(d)

$$\because \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{d\omega} (e^{-j\omega n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n} = -jFT\{nx[n]\}$$

$$\therefore nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$(e) FT\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} \right)^* = X^*(e^{-j\omega})$$

$$(f) FT\{x^*[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[-n]e^{-j\omega n} = \left(\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x[n']e^{-j\omega n'} \right)^* = X^*(e^{j\omega})$$

(g)

$$\begin{aligned}
F\{x[n] * y[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n] * y[n])e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \right) e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]e^{-j\omega n} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega(n'+k)} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]Y(e^{j\omega})e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

3-17 已知矩形序列 $R_{M+1}[n]$ 的傅里叶变换为 $R(e^{j\omega})$ ，用 $R(e^{j\omega})$ 表示以下序列的傅里叶变换。

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad w[n] &= \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \\
\text{(b)} \quad w[n] &= \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}$$

解：利用频移性质或时域相乘性质：

(a)

$$\therefore w[n] = R_{M+1}[n] \cdot \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \right] = R_{M+1}[n] \cdot \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e^{j\frac{2\pi n}{M}} + e^{-j\frac{2\pi n}{M}}}{2} \right]$$

$$\therefore W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} R\left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})}\right) - \frac{1}{4} R\left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})}\right)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\therefore w[n] &= R_{M+1}[n] \cdot \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right) \right] \\
&= R_{M+1}[n] \cdot \left[0.42 - 0.5 \frac{e^{j\frac{2\pi n}{M}} + e^{-j\frac{2\pi n}{M}}}{2} + 0.08 \frac{e^{j\frac{4\pi n}{M}} + e^{-j\frac{4\pi n}{M}}}{2} \right] \\
\therefore W(e^{j\omega}) &= 0.42 R(e^{j\omega}) - 0.25 R\left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{M})}\right) - 0.25 R\left(e^{j(\omega - \frac{2\pi}{M})}\right) \\
&\quad + 0.04 R\left(e^{j(\omega + \frac{4\pi}{M})}\right) + 0.04 R\left(e^{j(\omega - \frac{4\pi}{M})}\right)
\end{aligned}$$

3-18 设 $X(e^{j\omega})$ 是有限长序列 $x[n], n=0, 1, \dots, N-1$ 的傅里叶变换，其中 N 为偶数，用 $X(e^{j\omega})$ 分别表示以下序列的傅里叶变换。

$$\text{(a)} \quad y[n] = x[N-1-n]$$

$$\text{(b)} \quad y[n] = (-1)^n x[n]$$

$$\text{(c)} \quad y[n] = \begin{cases} x[n], n=0, 1, \dots, N-1 \\ x[n-N], n=N, \dots, 2N-1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

解：利用 FT 定义及时移频移性质

(a)

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n]e^{-j\omega n} = \sum_{n'=0}^{N-1} x[n']e^{-j\omega(N-1-n')} = e^{-j\omega(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\omega n} = e^{-j\omega(N-1)} X(e^{-j\omega})$$

(b) $y[n] = e^{j\pi n} x[n], \therefore Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+\pi)})$

(c)

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n-N]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n'=0}^{N-1} x[n']e^{-j\omega(n'+N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} + e^{-j\omega N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega N} \end{aligned}$$

3-19 已知 $y[n] = x[n] * h[n]$ ，利用傅里叶变换的性质证明

(a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \right);$

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y[n] = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n h[n] \right).$

证明：（第 1 章采用的解法是直接代卷积的定义式。）

(a) 利用 FT 的定义和时域卷积性质

$$\therefore y[n] = x[n] * h[n], \therefore Y(e^{j\omega})|_{\omega=0} = X(e^{j\omega})|_{\omega=0} H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \right]$$

(b) 利用 FT 的定义和时域卷积性质

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} &= X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\pi n} \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\pi n} \right] \\ \therefore \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n](-1)^n \right] &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n \right] \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n](-1)^n \right] \end{aligned}$$

3-20 已知 $Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$ ，利用傅里叶变换的性质证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \right] \left[\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega \right]$$

证明：利用频域卷积性质

$$\begin{aligned} \therefore Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}), \therefore y[n]|_{n=0} = x[n]|_{n=0} h[n]|_{n=0} \\ \therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega|_{n=0} &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega|_{n=0} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega|_{n=0} \right] \end{aligned}$$

3-21 有一序列，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}$ ， $|a| < 1$ 。

(a) 求序列 $x[n]$ ；

(b) 计算 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sin(\omega) d\omega$ 。

解：(a) 转成 z 变换，因为暗含 ROC 包括 $|z|=1$ ，所以 $a < |z| < 1/a$ ，双边序列。

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

$$\therefore x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] = a^{|n|}$$

(b) 利用时移性质

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sin(\omega) d\omega / 2\pi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} d\omega \\
&= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{-j\omega} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{2j} (x[n+1] - x[n-1])_{n=0} = \frac{1}{2j} (a^{|n|} - a^{-|n|}) = 0
\end{aligned}$$

3-22 求以下各周期序列的 DFS 及傅里叶变换。

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \tilde{x}[n] = 1, \text{ 周期当成 } N & \text{(b)} \quad \tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - Nk] \\
&\text{(c)} \quad \tilde{x}[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 是整数 } N & \text{(d)} \quad \tilde{x}[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ 是有理数 } P/Q
\end{aligned}$$

解: (a)

$$\begin{aligned}
\tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases}, \quad \tilde{X}[k] \text{ 以 } N \text{ 为周期} = N \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[k - rN] \\
\therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[k - rN] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi k)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = 1, k=0, 1, \dots, N-1, \quad \tilde{X}[k] \text{ 以 } N \text{ 为周期, 实际上就是以 } 1 \text{ 为周期} \\
\therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
N = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} \cdot W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\omega_0 - 2\pi k/N)n} = \begin{cases} N, & \omega_0 - 2\pi k/N = 0, \text{ 即 } k = \omega_0 N / (2\pi) = 1 \\ 0, & k=0, 2, 3, \dots, N-1 \end{cases} \\
\therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}) \\
&= \left[\frac{2\pi}{N} 0 \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi 0}{N}) + \frac{2\pi}{N} N \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}) + \dots + \frac{2\pi}{N} 0 \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi(N-1)}{N}) + \dots \right] + [\text{其它周期 } k=(k+rN)] \\
\left(\because \frac{2\pi}{N} = \omega_0 \right) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)
\end{aligned}$$

解法2: 利用频移性质

$$\begin{aligned}
\tilde{x}[n] &= \tilde{x}_{(A)}[n] e^{j\omega_0 n}, \therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}_{(A)}(e^{j(\omega - \omega_0)}) \\
&\text{(d)}
\end{aligned}$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} Q = P, \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{P-1} e^{j\omega_0 n} \cdot W_P^{kn} = \sum_{n=0}^{P-1} e^{j(\omega_0 - 2\pi k/P)n} = \begin{cases} P, \omega_0 - 2\pi k/P = 0, \text{即 } k = \omega_0 P/(2\pi) = Q \\ 0, \text{其它} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{P} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{P}) \\ &= \left[\frac{2\pi}{P} 0 \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi 0}{P}) + \dots + \frac{2\pi}{P} P \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi Q}{P}) + \dots + \frac{2\pi}{P} 0 \cdot \delta(\omega - \frac{2\pi(P-1)}{P}) \right] + [\text{其它周期 } k' = (k + rP)] \\ &\left(\because \frac{2\pi}{P} Q = \omega_0 \right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \end{aligned}$$

解法2: 利用频移性质

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_{(A)}[n] e^{j\omega_0 n}, \therefore \tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}_{(A)}(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

3-23 设 $\tilde{x}[n]$ 是一个周期为 N 的周期序列, 其 DFS 为 $\tilde{X}[k]$ 。用 $\tilde{X}[k]$ 表示以下序列的 DFS。

$$(a) \tilde{y}[n] = \tilde{x}[-n] \quad (b) \text{周期为 } 2N \text{ 的周期序列 } \tilde{y}[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n/2], & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}$$

(c) 将 $\tilde{x}[n]$ 当成一个周期为 rN 的周期序列 $\tilde{y}[n]$

$$(d) \text{周期为 } 2N \text{ 的周期序列 } \tilde{y}[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n = N, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

$$\text{解: (a) } \tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[-n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{-(N-1)} \tilde{x}[n] W_N^{-kn} = \tilde{X}[-k]$$

(b) 时域内插 0, 频域后面复制:

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ 偶}}}^{2N-1} \tilde{x}[n/2] W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{(N-1)} \tilde{x}[n] W_{2N}^{k2n} = \tilde{X}[k], \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1$$

(c) 时域后面复制, 频域内插零, 实际频率成分没变

$$\begin{aligned} \tilde{Y}[k] &= \sum_{n=0}^{rN-1} \tilde{x}[n] W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_{2N}^{kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} \tilde{x}[n] W_{2N}^{kn} + \dots \sum_{n=(r-1)N}^{rN-1} \tilde{x}[n] W_{2N}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_{rN}^{kn} + \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}[n' + N] W_{rN}^{kn'} W_{rN}^{kN} + \dots \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}[n' + (r-1)N] W_{rN}^{kn'} W_{rN}^{(r-1)kN} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{(k/r)n} + \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}[n'] W_N^{(k/r)n'} W_r^k + \dots \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}[n'] W_N^{(k/r)n'} W_r^{(r-1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{(k/r)n} (1 + W_r^k + \dots W_r^{(r-1)k}) = \begin{cases} r\tilde{X}[k/r], & k = r \text{ 的整数倍} \\ 0, & k = \text{other} \end{cases} \end{aligned}$$

(d) 时域后面补零, 频域取样更密 (频域理想内插)。

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{(k/2)n} = \begin{cases} X[k/2], & k \text{ 为偶数} \\ \text{理想内插}, & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

*3-24 已知序列如图 T3-2 所示, 不明确求出 $X(e^{j\omega})$ 而计算

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega; \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega;$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{-j\omega}) d\omega。$$

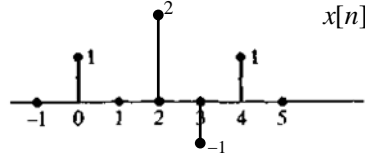


图 T3-2

解：(a) 利用 PASWAL 和微分性质

$$\begin{aligned} \text{let: } Y(e^{j\omega}) &= \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}, \text{ then: } jY(e^{j\omega}) = j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \\ \text{then: } jy[n] &= nx[n], \therefore y[n] = \{0, 0, 4, -3, 4\} / j \\ \therefore \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = 2\pi \cdot 41 \end{aligned}$$

(b) 利用卷积性质和 IFT 定义

$$\begin{aligned} x[n] * x[n] &= [1 \quad 0 \quad 4 \quad -2 \quad 6 \quad -4 \quad 5 \quad -2 \quad 1]; \\ \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega 0} d\omega = 2\pi x[n] * x[n] |_{n=0} = 2\pi \end{aligned}$$

(c) 利用加窗性质和 IFT 定义

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X(e^{-j\omega}) d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta |_{\omega=0} \\ &= 2\pi X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) |_{\omega=0} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x[n] e^{j\omega n} |_{\omega=0} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = 14\pi \end{aligned}$$

*3-25 求下列和式和积分的数值解

$$(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n\pi/3} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}; \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-2a\cos(\omega)+a^2)} d\omega.$$

解：利用 PASWAL 定理

(a)

$$\begin{aligned} \text{设: } x[n] &= \frac{\sin(n\pi/3)}{n\pi/3}, \quad y^*[n] = \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \\ \text{则 } X(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 3, & |\omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\omega| < \pi \end{cases}, \quad Y^*(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4, & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < |\omega| < \pi \end{cases} \\ \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] y^*[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) Y^*(e^{j\omega}) d\omega \\ \therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n\pi/3} \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 3 \cdot 4 d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[12 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-2a\cos(\omega)+a^2)} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\text{其中, } X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})} \leftrightarrow x[n] = a^n u[n]$$

$$\text{又} \therefore \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-2a\cos(\omega)+a^2)} d\omega = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

*3-26 已知离散时间信号 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 满足 $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-2\pi/3)})$ 。

(a) 证明 $x[n] = 0, n \neq 3$ 的整数倍；

(b) 令 $y[n] = x[3n]$, $z[n] = \begin{cases} y[n/3], n=3 \text{ 的整数倍} \\ 0, n \text{ 其它} \end{cases}$, 证明 $z[n] = x[n]$ 。

解: (a)

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j(\omega-2\pi/3)}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'}) e^{j\omega' n} e^{j2\pi n/3} d\omega' = e^{j2\pi n/3} x[n] \\ &= \begin{cases} x[n], n=3r \\ e^{j2\pi n/3} x[n], n \neq 3r, \text{ 对任意 } r \text{ 成立, } \therefore x[n] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因为 $X(e^{j\omega})$ 以 $2\pi/3$ 为周期, $x[n]$ 必然是某序列的 3 倍内插 0 (见附录 C.2)。

(b) 3 选 1 去掉 0 值得到 $y[n]$, 再内插 0 得到 $z[n]$, 所以 $z[n] = x[n]$ 。

*3-27 已知周期序列 $\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^4 a_k \cos(0.2\pi kn)$ 。

(a) 写出 $\tilde{x}[n]$ 的周期 N ; (b) 写出 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS $\tilde{X}[k]$ 在区间 $0 \leq k \leq N-1$ 的值。

解: $\tilde{x}[n]$ 已经是级数表达式。

$$\begin{aligned} (A) \tilde{x}[n] &= \sum_{k=0}^4 a_k \cos\left(\frac{2\pi}{10} kn\right), \text{ 基频 } \frac{2\pi}{10}, \text{ 周期 } N=10 \\ (B) \tilde{x}[n] &= \sum_{k=0}^4 a_k \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{10} kn} + e^{-j\frac{2\pi}{10} kn} \right) = \sum_{k=0}^4 a_k \frac{1}{2} (W_{10}^{-kn} + W_{10}^{kn}) \\ &= \sum_{k=0}^4 a_k \frac{1}{2} (W_{10}^{-kn} W_{10}^{10n} + W_{10}^{kn}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k W_{10}^{kn} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k W_{10}^{n(10-k)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k W_{10}^{kn} + \frac{1}{2} \sum_{k'=10}^6 a_{10-k'} W_{10}^{k'n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 a_k W_{10}^{kn} + \frac{1}{2} \sum_{k=6}^9 a_{10-k} W_{10}^{kn} + \frac{1}{2} a_0 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 \tilde{X}[k] W_{10}^{kn}, \\ \therefore \tilde{X}[k] &= \{a_0, \frac{1}{2} a_1, \frac{1}{2} a_2, \frac{1}{2} a_3, \frac{1}{2} a_4, 0, \frac{1}{2} a_4, \frac{1}{2} a_3, \frac{1}{2} a_2, \frac{1}{2} a_1\} \end{aligned}$$

*3-28 有限长序列 $x[n]$ 与周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$ 间满足关系 $x[n] = \tilde{x}[n] R_N[n]$, 证明:

$x[n]$ 的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 可以通过 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅立叶级数 $\tilde{X}[k]$ 内插得到, 即

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \frac{\sin[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\sin[(\omega N - 2\pi k)/(2N)]} e^{-j[(N-1)/2](\omega - 2\pi k/N)}$$

证明: 时域无混叠的周期性延拓关系, 频域取样 (或内插) 关系。

利用时域加窗性质:

$$\because x[n] = \tilde{x}[n]R_N[n]$$

$$\text{又} \because \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N}), \text{且 } R_N(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$\begin{aligned} \therefore X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j(\omega-\theta)}) R_N(e^{j\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \tilde{X}[k] \delta(\omega - \theta - \frac{2\pi k}{N}) \right] \left[\frac{\sin(\theta N/2)}{\sin(\theta/2)} e^{-j\theta(N-1)/2} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \theta - \frac{2\pi k}{N}) \left[\frac{\sin(\theta N/2)}{\sin(\theta/2)} e^{-j\theta(N-1)/2} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[k] \frac{\sin[(\omega N - 2\pi k)/2]}{\sin[(\omega N - 2\pi k)/(2N)]} e^{-j[(N-1)/2](\omega - 2\pi k/N)} \end{aligned}$$

MATLAB 上机题 (3-29 题—3-32 题)

3-29 画出下列序列傅里叶变换的幅度和相位。

(a) $x[n] = \{4, 3, 2, 1, 2, 3, 4\}, n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

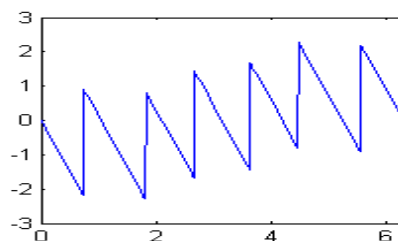
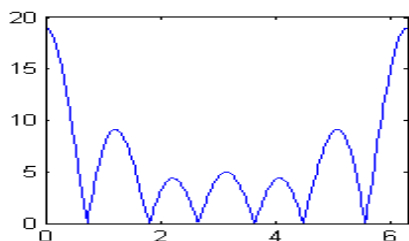
(b) $x[n] = \{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4\}, n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 。

注意观察幅度和相位的对称性。

提示: 可以调用的函数有 `fplot()`、`abs()`、`angle()` 或 `freqz()`、`exp()` 等。

解: (a) 解法 1:

```
n=0:6;          x=[4, 3, 2, 1, 2, 3, 4];
subplot(1,2,1);
fplot('abs(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)+2*exp(-j*4*w)+3*exp(-j*5*w)+4*exp(-j*6*w))',[0,2*pi]);
subplot(1,2,2);
fplot('angle(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)+2*exp(-j*4*w)+3*exp(-j*5*w)+4*exp(-j*6*w))',[0,2*pi])
```

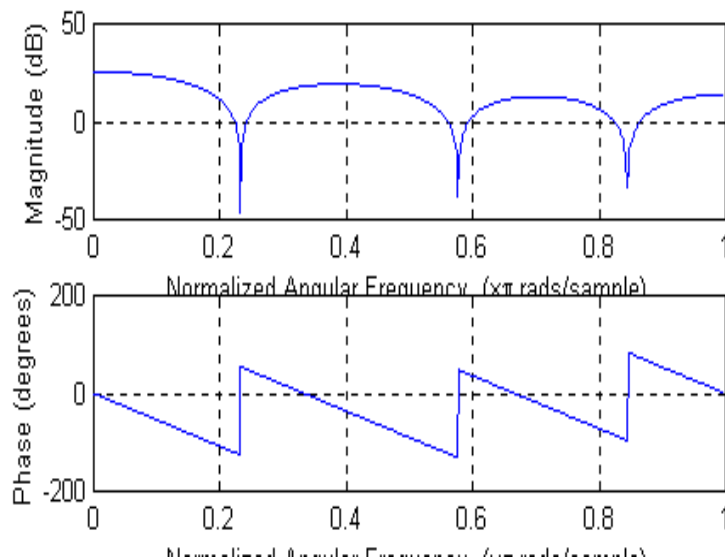


解法 2:

$$B = [4, 3, 2, 1, 2, 3, 4];$$

$$A = 1;$$

$$\text{freqz}(B, A)$$

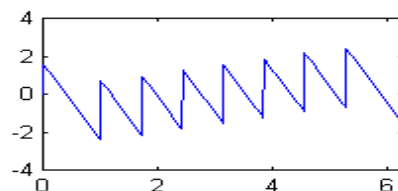
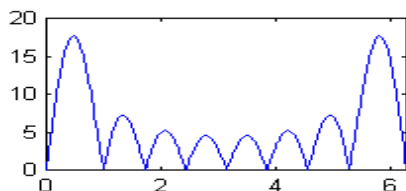


解法 3:

```
n=0:6; x=[4, 3, 2, 1, 2, 3, 4]; k=0:511;
W=exp(-j*2*pi/512).^(n'*k); X=x*W;
subplot(1,2,1); plot(k/256,abs(X)); subplot(1,2,2);
plot(k/256,angle(X))
```

(b) 解法 1:

```
n=0:8; x=[4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4]; subplot(1,2,1);
fplot('abs(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)-exp(-j*5*w)-2*exp(-j*6*w)-
3*exp(-j*7*w)-4*exp(-j*8*w))',[0,2*pi]); subplot(1,2,2);
fplot('angle(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)-exp(-j*5*w)-2*exp(-j*6*w)
)-3*exp(-j*7*w)-4*exp(-j*8*w))',[0,2*pi])
```



解法 2:

```
B=[4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4]; A=1; freqz(B,A)
```

解法 3:

```
n=0:8; x=[4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4]; k=0:511;
W=exp(-j*2*pi/512).^(n'*k); X=x*W;
subplot(1,2,1); plot(k/256,abs(X)); subplot(1,2,2);
plot(k/256,angle(X))
```

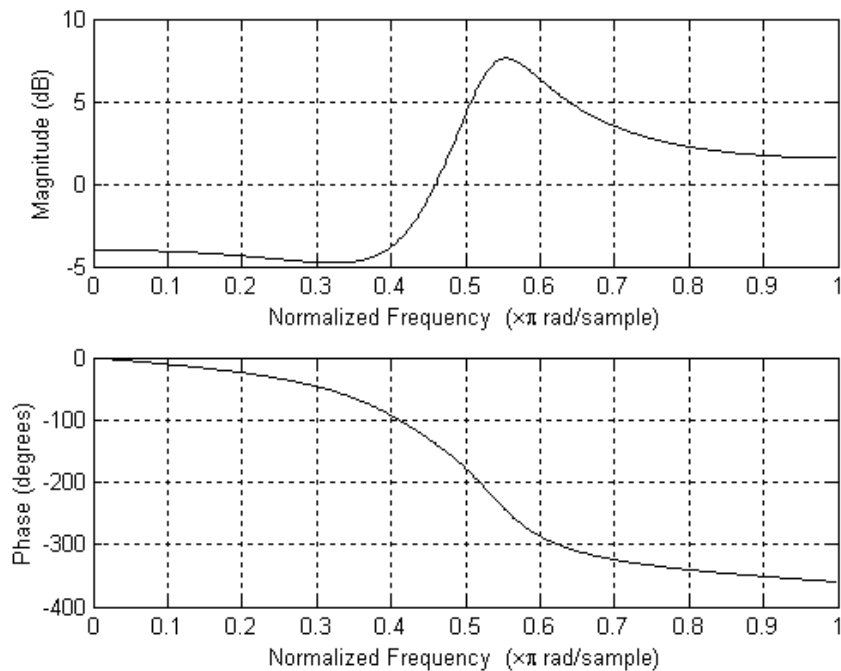
幅度偶对称，相位奇对称。

3-30 画出以下傅里叶变换的幅度和相位

$$X(e^{j\omega}) = \frac{0.5 - 0.3e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + 0.2e^{-j\omega} + 0.7e^{-2j\omega}}$$

提示：可以调用的函数有 freqz() 或 fplot() 等。

解：B=[0.5 -0.3 1] ; A=[1 0.2 0.7] ; freqz(B,A)

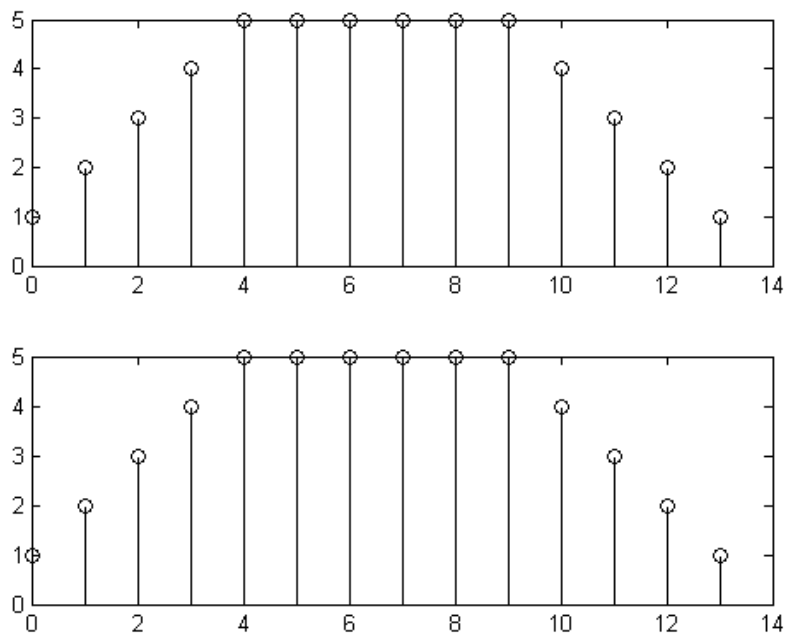


3-31 分别用时域卷积和傅里叶变换的方法画出下列序列的卷积结果，注意验证傅里叶变换的时域卷积性质：

$$x[n] = R_5[n] * R_{10}[n]$$

提示：可以调用的函数有 `freqz()`、`invfreqz()` 等。

解：`x1=ones(1,5); x2=ones(1,10); x3=conv(x1,x2);`
`subplot(2,1,1); stem([0:13],x3);`
`[X1,w1]=freqz(x1); [X2,w2]=freqz(x2); [x4,a]=invfreqz(X1.*X2,w1,13,0);`
`subplot(2,1,2); stem([0:13],x4);`



3-32 画出以下周期序列的 DFS 和傅里叶变换。

(a) $\tilde{x}[n] = \cos(0.8\pi n) + \cos(0.1\pi n)$

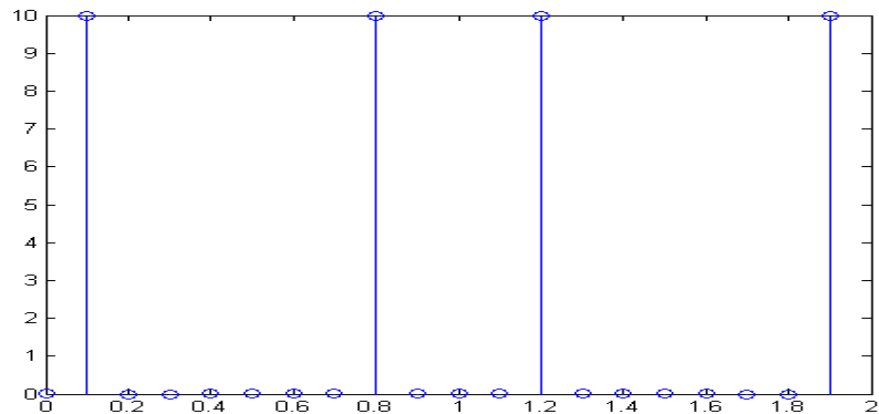
(b) $\tilde{x}[n] = \{0, 0, 1, 0, 0\}, N = 5$
 \uparrow

(c) $\tilde{x}[n] = \{3, -3, 3, -3\}, N = 4$
 \uparrow

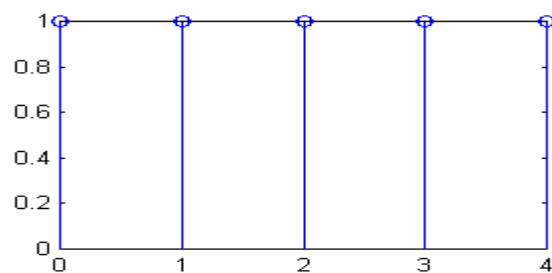
提示：可以调用的函数有 `fft()` 等。

解：(a) %周期 20

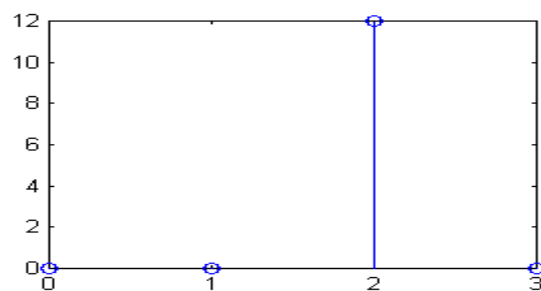
```
N=20; n=0:N-1; x=cos(0.8*pi*n)+cos(0.1*pi*n); X=fft(x,N);
stem(n/(N/2), abs(X));
```



(b) `n=0:4; x=[0, 0, 1, 0, 0]; X=fft(x, 5); stem(n, abs(X))`



(c) `n=0:3; x=[3, -3, 3, -3]; X=fft(x, 4); stem(n, abs(X))`



第 4 章

选择题 (4-1 题—4-10 题)

4-1 已知 LTI 系统的系统函数和输入信号的 z 变换分别为 $H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+(1/3)z^{-1}}$, $|z| > \frac{1}{3}$ 和

$X(z) = \frac{1}{(1-0.2z^{-1})(1+3z^{-1})}$, $\frac{1}{5} < |z| < 3$, 则输出信号的 z 变换的 ROC 为 (C)

(A) $\frac{1}{3} < |z| < 3$ (B) $\frac{1}{5} < |z| < \frac{1}{3}$

(C) $|z| > \frac{1}{3}$ (D) $|z| > \frac{1}{5}$

4-2 下列 LTI 系统是 IIR 系统的是 (D)

(A) 差分方程为 $y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-5]$;

(B) 单位脉冲响应为 $h[n] = a^n u[n+2] - a^n u[n-10]$;

(C) 系统函数为 $H(z) = (1-0.3e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.3e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.2e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.2e^{-j0.8\pi}z^{-1})$

(D) 系统函数的零点极点图如图 T4-1 所示。

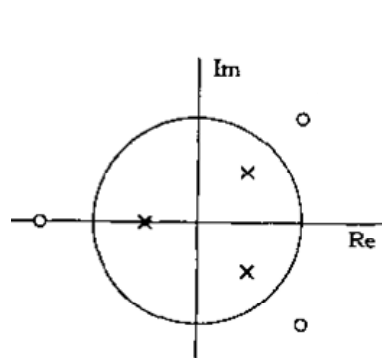


图 T4-1

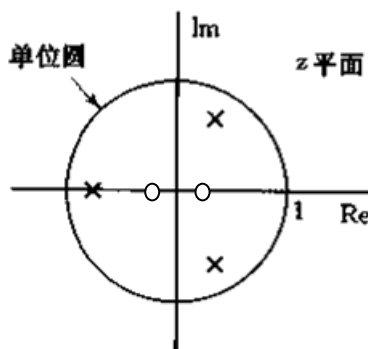


图 T4-2

4-3 若一个 LTI 系统的系统函数有如图 T4-2 所示的零极点, 并且系统是因果的, 则关于其逆系统, 正确的说法是 (提示: 零点极点个数相同) (C)

(A) 因果稳定

(B) 因果不稳定

(C) 稳定非因果

(D) 非因果, 不稳定

解: 无穷远还有一个零点。逆系统的 ROC 是圆外部, 但不包括无穷远, 非因果

4-4 已知二阶差分系统的差分方程 $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$, 该系统是 (B)

(A) 低通滤波器

(B) 高通滤波器

(C) 带通滤波器

(D) 带阻滤波器

解: $z=1$ 有零点, 采用几何法判断是高通。

4-5 已知 LTI 系统 1 的差分方程是 $y[n] = x[n] + 0.5y[n-1]$, 其频率响应为 $H_1(e^{j\omega})$, LTI 系统 2 的频率响应满足 $H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega})$, 则系统 2 是 (B)

(A) 低通滤波器

(B) 高通滤波器

(C) 带通滤波器

(D) 带阻滤波器

解: 就系统极点在 $z = 0.5$, 新系统 $H_2(z) = H_1(-z)$, 极点在 $z = -0.5$, 几何法确定是高通。

4-6 下列系统函数代表的不是全通系统的是 (D)

(A) $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$

(B) $H(z) = \frac{9-z^{-2}}{1-9z^{-2}}$

(C) $H(z) = z^{-2}$

(D) $H(z) = \frac{4 - z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}}$

解: (C) 是理想延迟系统

4-7 以下系统函数中是最小相位系统的是

(C)

(A) $H_1(z) = \frac{(1-3z^{-1})(1+0.5z^{-1})}{(1-0.2z^{-1})(1+0.2z^{-1})}$ (B) $H_2(z) = \frac{[1+(1+j)z^{-1}][1-(1-j)z^{-1}]}{(1-0.6z^{-1})(1+0.6z^{-1})}$

(C) $H_3(z) = \frac{(1-0.2z^{-1})}{(1-j0.5z^{-1})(1+j0.5z^{-1})}$ (D) $H_4(z) = \frac{z^{-1}(1-0.2z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.5z^{-1})}$

解: (C) $1+j$ 在单位圆以外;

(D) 有零点在无穷远。

4-8 以下说法错误的是

(B)

(A) 最小相位系统的级联也是最小相位系统; (B) 最小相位系统的并联也是最小相位系统;

(C) 最小相位系统的逆系统也是最小相位系统; (D) 全通系统的级联也是全通系统。

4-9 以下说法错误的是

(B)

(A) 广义线性相位系统级联是广义线性相位系统;

(B) 广义线性相位系统并联是广义线性相位系统;

(C) 零相位系统级联一定是线性相位系统;

(D) 零相位系统并联一定是线性相位系统。

4-10 可以采用四类线性相位 FIR 系统中任意一种实现的选频滤波器是

(C)

(A) 低通

(B) 高通

(C) 带通

(D) 带阻

填空题 (4-11 题—4-20 题)

4-11 已知 LTI 系统的输入和输出的 z 变换分别为

$$X(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{4} \quad \text{和} \quad Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \frac{1}{5} < |z| < \frac{1}{3}$$

则系统函数 $H(z)$ 的收敛域是 $\underline{1/5 < |z| < 1/3}$ 。

4-12 因果序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}$, 已知 $a^n x[n]$ 是一个实的最小相位

序列, 则 a 的取值范围是 $\underline{|a| < 2}$ 。

解: $Y(z) = X(z/a)$, 极点变成: $a/4, a/2, a/3$, 幅度均要求小于 1, 所以 $|a| < 2$ 。

4-13 一 LTI 系统, 其输入/输出关系是 $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-2]$, 系统的频率响应是

$H(e^{j\omega})$, 另一系统, 其频率响应是 $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$, 则 $h_1[n] =$

$\underline{\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]}$ 。

解: 利用频移性质, $h_1[n] = h[n](-1)^n$ 。

4-14 LTI 的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.5\pi \\ 0, & 0.5\pi \leq |\omega| < \pi \end{cases}$, 写出以下输入信号 $x[n]$ 经过该系统后的输出信号 $y[n]$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad x[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \text{ 对应的 } y[n] = \frac{\sin(0.5\pi n)}{\pi n} + \frac{\sin(0.5\pi(n-1))}{\pi(n-1)}; \\
 \text{(b)} \quad x[n] &= \cos(0.6\pi n) \text{ 对应的 } y[n] = \underline{0}; \\
 \text{(c)} \quad x[n] &= \frac{1}{2} + \cos(0.4\pi n) + \delta[n] \text{ 对应的 } y[n] = \frac{1}{2} + \cos(0.4\pi n) + \frac{\sin(0.5\pi n)}{\pi n}; \\
 \text{(d)} \quad x[n] &= 5 \frac{\sin(0.7\pi n)}{\pi n} + 10e^{j0.2\pi n} \text{ 对应的 } y[n] = \underline{5 \frac{\sin(0.5\pi n)}{\pi n} + 10e^{j0.2\pi n}}.
 \end{aligned}$$

解：(a) 频域法： $\delta[n]$ 的傅里叶变换是常数 1，与低通频响乘后得到低通频谱；

时域法： $y[n] = h[n] * \delta[n]$

(b) 频域法

(c) 第 1 项：常数的频谱只有直流，与低通频响乘后得到直流频谱；

第 2 项：频域法，冲击频谱与低通频响乘后得到冲击频谱；第 3 项同 (a)

(d) 第 1 项同 (a)，第 2 项同 (c) 的第 2 项

4-15 一稳定 LTI 系统，输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足差分方程 $y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$ ，

写出系统函数及收敛域

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z} = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - 3z^{-1})}, \frac{1}{3} < |z| < 3。$$

4-16 一 LTI 系统，其输入输出满足差分方程 $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$ ，写出其频率

$$\text{响应 } H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}。$$

4-17 两个幅度响应相同的 LTI 系统，已知其中一个的系统函数是 $H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}, |z| > 0.5$ ，

如果另一个系统稳定，且只有一个极点，则其系统函数 $H_2(z) = \frac{1}{z^{-1} - 0.5}, |z| < 2$ 。

解：

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|, \therefore |H_1(e^{j\omega})| \cdot \frac{1}{|H_2(e^{j\omega})|} = 1$$

$$\therefore H_1(z) \frac{1}{H_2(z)} = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.5z^{-1}}, \therefore H_2(z) = \frac{1}{z^{-1} - 0.5}, |z| < 2$$

4-18 设因果 LTI 系统的差分方程是 $y[n] - \frac{1}{3}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{3}x[n]$ ，已知输入信号的能量

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = 20, \text{ 则输出信号的能量 } \sum_{n=0}^{\infty} |y[n]|^2 = \underline{20}。$$

解：帕斯瓦尔定理和全通系统

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z^{-2} - 1/3}{1 - 1/3z^{-2}}, \therefore |H(e^{j\omega})| = 1 \\
\therefore |Y(e^{j\omega})| &= |X(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \\
\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \\
\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 20
\end{aligned}$$

4-19 滑动平均系统的单位脉冲响应是 $h[n] = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]/5$, $n = 0, 1, \dots, 4$, 写出其广义相位响应函数 $\Phi(\omega) = -2\omega$; 群延迟 $\text{grd}[H(e^{j\omega})] = 2$ 。

4-20 因果广义线性相位 FIR 系统, 单位脉冲响应 $h[n]$ 是实序列, 在 $0 \leq n \leq 6$ 以外是零, 且 $h[n] = h[6-n]$, 已知其系统函数的一个零点是 $0.5e^{j\pi/4}$, 写出系统函数 $H(z) = C(1 - 0.5e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.5e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 2e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 2e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$ 。

解: III 类广义线性相位

计算、证明及作图题 (4-21 题—4-31 题)

4-21 设 LTI 系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + 0.5e^{-j2\omega}}$, 输入信号为 $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, 求系统的输出信号。

解: 特征函数法

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + 1/2e^{-j2\omega}}, x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$\text{解法 (1)} \quad x[n] = \frac{e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2} \left[H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/2} e^{j\pi n/2} + H(e^{j\omega})|_{\omega=-\pi/2} e^{-j\pi n/2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1 - e^{-j\pi}}{1 + 1/2e^{-j\pi}} e^{j\pi n/2} + \frac{1 - e^{j\pi}}{1 + 1/2e^{j\pi}} e^{-j\pi n/2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1+1}{1-1/2} e^{j\pi n/2} + \frac{1+1}{1-1/2} e^{-j\pi n/2} \right] \\
&= \frac{4}{2} [e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}] = 4 \cos(\pi n/2)
\end{aligned}$$

解法(2): 因为 $h[n]$ 和 $x[n]$ 是实序列

$$\begin{aligned}
y[n] &= H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/2} \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \arg H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/2}\right) \\
&= \left| \frac{1 - e^{-j2\pi/2}}{1 + 1/2e^{-j2\pi/2}} \right| \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \arg\left(\frac{1 - e^{-j2\pi/2}}{1 + 1/2e^{-j2\pi/2}}\right)\right) = \left| \frac{1+1}{1-1/2} \right| \cos\left(\frac{\pi n}{2} + \arg\left(\frac{1+1}{1-1/2}\right)\right) \\
&= 4 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)
\end{aligned}$$

4-22 一个 LTI 系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j3\omega}, & |\omega| < 0.6\pi \\ 0, & 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$, 该系统的输入是

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - 4k], \text{ 求系统的输出 } y[n].$$

解：时域法：

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin(0.6\pi(n-3))}{\pi(n-3)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(0.6\pi(n-3-4k))}{\pi(n-3-4k)}$$

频域法：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \frac{2\pi k}{4})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{4} \left(\delta(\omega + \frac{2\pi 0}{4}) e^{-j\frac{2\pi 0}{4}3} + \delta(\omega + \frac{2\pi 1}{4}) e^{-j\frac{2\pi 1}{4}3} + \delta(\omega + \frac{2\pi(-1)}{4}) e^{-j\frac{2\pi(-1)}{4}3} \right)$$

$$y[n] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}n + \frac{3\pi}{2})$$

4-23 设 $h_p[n]$ 为某理想低通滤波器的单位脉冲响应，该滤波器通带内增益为 1，截止频率为 $\omega_c = \pi/3$ 。考虑图 T4-3 所示系统，其中每一个都等效为一种选频滤波器。对每个系统画出其等效频率响应，并标注出截止频率，指出它们是属于低通、高通、带通、带阻或多频带滤波器的哪一种。

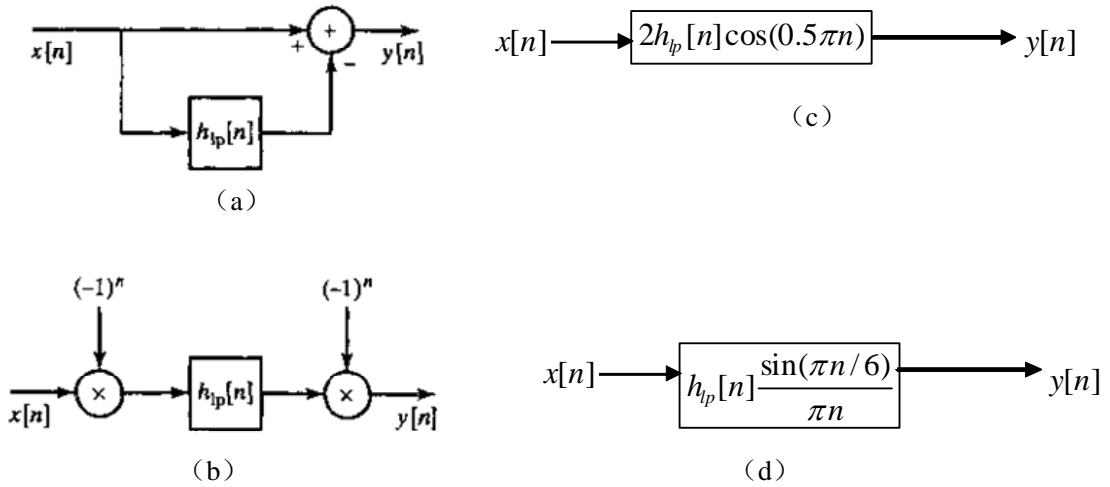


图 T4-3

解：

$$(a) y[n] = x[n] - x[n] * h_p[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 - H_p(e^{j\omega})), \quad \therefore H(e^{j\omega}) = 1 - H_p(e^{j\omega})$$

high pass, $\omega_c = \pi/3$, gain = 1

$$(b) y[n] = (x[n](-1)^n) * h_p[n](-1)^n = (x[n]e^{j\pi n}) * h_p[n]e^{j\pi n}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)-\pi})H_p(e^{j(\omega-\pi)}), \quad \therefore H(e^{j\omega}) = H_p(e^{j(\omega-\pi)})$$

high pass, $\omega_c = 2\pi/3$, gain = 1

$$(c) h_1[n] = 2h_p[n] \cos(0.5\pi n) = (e^{j0.5\pi n} + e^{-j0.5\pi n})h_p[n]$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H_p(e^{j(\omega-0.5\pi)}) + H_p(e^{j(\omega+0.5\pi)}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/6 \\ 1, & \pi/6 \leq |\omega| \leq 5\pi/6, \text{ 带通} \\ 0, & |\omega| > 5\pi/6 \end{cases}$$

$$(d) h_1[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n} h_p[n] = h_p'[n] h_p[n], \quad H_p'(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/6 \\ 0, & |\omega| > \pi/6 \end{cases}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_p'(e^{j\omega}) * H_p(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1/6, & |\omega| < \pi/6 \\ 1/4 - |\omega|/2\pi, & \pi/6 \leq |\omega| \leq \pi/2, \text{ 非理想低通} \\ 0, & |\omega| > \pi/2 \end{cases}$$

4-24 某因果 LTI 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, |z| > 1/2$,

已知输入信号为 $x[n] = u[n]$, 用两种方法求 $y[4]$ 。

(a) 递推法; (b) z 变换法。

解: (a) 递推法

\therefore 因果, \therefore 初始条件 $y[-1] = y[-2] = 0$

$$y[n] = x[n-2] + 5/6 y[n-1] - 1/6 y[n-2]$$

$$\therefore y[0] = 0, \quad y[1] = 0, \quad y[2] = x[0] = 1, \quad y[3] = x[1] + 5/6 y[2] = 11/6,$$

$$y[4] = x[2] + 5/6 y[3] - 1/6 y[2] = 1 + 55/36 - 1/6 = 85/36$$

(b) z 变换法求卷积

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} = \frac{-12}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{9}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{1 - z^{-1}}$$

$$y[n] = -12(1/2)^n u[n] + 9(1/3)^n u[n] + 3u[n]$$

$$\therefore y[4] = 85/36$$

4-25 考虑一个 LTI 系统, 其输入是 $x[n] = 0.5^n u[n] + u[-n-1]$, 输出是 $y[n] = 0.75^n u[n]$ 。

(a) 求该系统的系统函数, 画出 $H(z)$ 的零极点图并指出收敛域;

(b) 求系统的单位脉冲响应;

(c) 写出表征该系统的差分方程;

(d) 判断该系统的稳定性和因果性。

解: (a)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{1 - z^{-1}} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, 1/2 < |z| < 1$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}, |z| > 3/4$$

$$\therefore H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{-2z + 3 - z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}, 3/4 < |z| < \infty$$

$$(c) y[n] = 3x[n] - 2x[n+1] - x[n-1] + \frac{3}{4}y[n-1]$$

$$(b) \therefore h[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} u[n+1] - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(d) 非因果, 稳定

4-26 已知 LTI 系统的差分方程 $y[n] = x[n] - x[n-4]$ 。

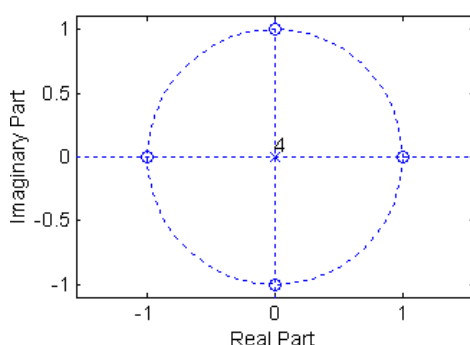
(a) 写出其系统函数, 画零点和极点图; (b) 用几何法画出其幅度响应。

解: (a)

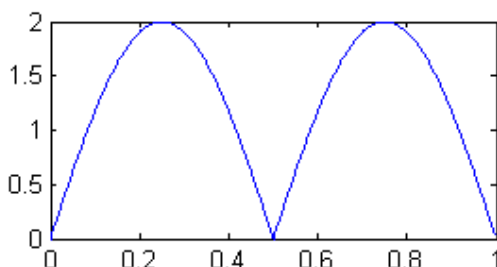
$$H(z) = 1 - z^{-4},$$

$$1 - z^{-4} = 0, \therefore z^{-4} = 1 = e^{j2\pi k}, \therefore z = e^{-j2\pi k/4}, k = 0, 1, 2, 3,$$

零点位于单位圆上, 从 $z=1$ 开始均分成 4 等分。



(b)



4-27 图 T4-4 中 $h_1[n]$ 是因果实序列, 是 LTI 系统的单位脉冲响应, $h_2[n]$ 表示的系统的输入输出关系是 $v[n] = w[-n]$, 输入 $x[n]$ 是实信号。证明整个系统是零相位。

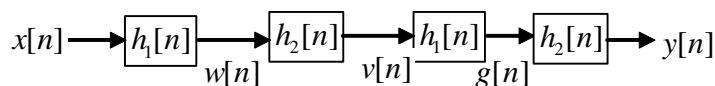


图 T4-4

证明:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= G(e^{-j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})V(e^{-j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})W(e^{j\omega}) \\ &= H_1^*(e^{j\omega})(H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega})) = |H_1(e^{j\omega})|^2 X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

*4-28 已知一个离散时间系统的输入信号是 $x[n] = \begin{cases} x[n], n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, \text{其它} \end{cases}$, 输出信号是 $x[n]$

的每一个非零值重复 L 次得到, 即

$$y[n] = \begin{cases} x[0], n = 0, 1, \dots, L-1 \\ x[L], n = L, L+1, \dots, 2L-1 \\ x[2L], n = 2L, 2L+1, \dots \\ \vdots \end{cases}$$

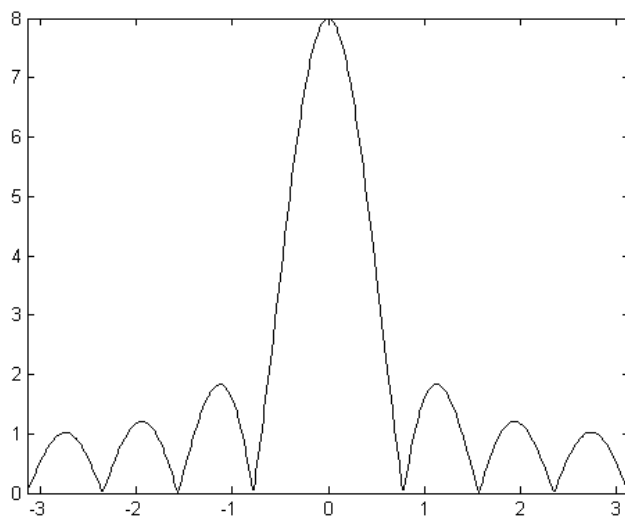
写出该系统的单位脉冲响应并画出系统的幅度响应，是哪一种选频滤波器？

解：是零阶保持内插。是低通滤波器

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-(L-1)]$$

$$\therefore h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[n-(L-1)] = R_L[n]$$

$$\therefore H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}$$



L=8

*4-29 定义稳定的 LTI 系统的**稳定响应**（**稳态响应**）为 $y_s[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n]$ ，**暂态响应**为

$$y_t[n] = y[n] - y_s[n]。$$

(a) 设因果稳定 IIR 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 和频率响应 $H(e^{j\omega_0})$ 已知，求 LTI 系统对 $x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n]$ 的稳态响应和暂态响应；

(b) 将 (a) 的稳态响应与系统对 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的响应作一比较；

(c) 设 $h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n]$ ，输入为 $x[n] = \cos(\pi n) u[n] = (-1)^n u[n]$ ，求该系统对该信号的稳态响应。

解：(a)

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0(n-k)} u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] e^{j\omega_0(n-k)} \\ &= H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) e^{j\omega_0 n} \end{aligned}$$

对于稳定的 IIR 系统

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} h[n] = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) = 0$$

$$\therefore y_s[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}$$

$$y_t[n] = y[n] - y_s[n] = \sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}$$

即当时间足够长，IIR 系统输出所需要的以前的输入权重很小可忽略时，系统输出与当输入是非因果信号时相近。

对于 FIR 系统，设 $h[n]$ 长度为 $M+1$ ，则

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) e^{j\omega_0 n} = \left(\sum_{k=n+1}^M h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) e^{j\omega_0 n}$$

$$\text{当 } n+1 > M \text{ 时, } \left(\sum_{k=n+1}^M h[k] e^{-j\omega_0 k} \right) e^{j\omega_0 n} = 0$$

$$\therefore y_s[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}$$

$$y_t[n] = y[n] - y_s[n] = \begin{cases} \sum_{k=n+1}^M h[k] e^{-j\omega_0 k}, & n \leq M-1 \\ 0, & n > M-1 \end{cases}$$

即当时间足够长为 M 时，FIR 系统输出所需要的以前的输入权重为 0 时，系统输出与当输入是非因果信号时相同。

(b) 相同

(c) 方法 1：求卷积再取极限

$$\lim_{n \leftarrow -\infty} y[n] = \lim_{n \leftarrow -\infty} x[n] * h[n] = \lim_{n \leftarrow -\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{j}{2} \right)^k (-1)^{n-k} u[n-k]$$

$$= \lim_{n \leftarrow -\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{j}{2} \right)^k (-1)^{-k} = \lim_{n \leftarrow -\infty} (-1)^n \frac{1 - \left(-\frac{j}{2} \right)^{n+1}}{1 + \frac{j}{2}} = \frac{(-1)^n}{1 + \frac{j}{2}} = \frac{\cos(\pi n)}{1 + \frac{j}{2}}$$

方法 2：求输入为无限长非因果序列时的输出，用特征函数法

$$\hat{x}[n] = \cos(\pi n) = \frac{e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}}{2}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}[n] &= H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} \frac{e^{j\pi n}}{2} + H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=-\pi} \frac{e^{-j\pi n}}{2} \\ &= \frac{1}{1 - j/2} \Big|_{\omega=\pi} \frac{e^{j\pi n}}{2} + \frac{1}{1 - j/2} \Big|_{\omega=-\pi} \frac{e^{-j\pi n}}{2} \\ &= \frac{1}{1 + j/2} \frac{e^{j\pi n}}{2} + \frac{1}{1 + j/2} \frac{e^{-j\pi n}}{2} = \frac{\cos(\pi n)}{1 + \frac{j}{2}} \end{aligned}$$

*4-30 考虑一个实序列 $x[n]$ ，在 $0 \leq n \leq 4$ 之外 $x[n] = 0$ ，它的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 。给出下面信息，确定并画出序列 $x[n]$ 。

$$(a) \text{ 群延迟 } \text{grd}[X(e^{j\omega})] = 2; \quad (b) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 20;$$

(c) 序列 $y[n] = x[n] * u[n]$, 且 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) e^{j2\omega} d\omega = 4$; (D) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0$ 。

解: 根据 (a), 对称中心在 2;

根据 (b), $2x[0]^2 + 2x[1]^2 + 2x[2]^2 = 20$;

根据 (c), $y[2] = 4 = x[2] + x[1] + x[0]$

根据 (d), 2 或 3 类广义线性相位, 因为 $M=4$, 所以 3 类, 奇对称, 所以 $x[2]=0$ 。

解出 $x[n] = [1 \ 3 \ 0 \ -3 \ -1]$ 或 $[3 \ 1 \ 0 \ -1 \ -3]$, $n=0,1,2,3,4$ 。

*4-31 希尔伯特变换器的频率响应是 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j = e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi \\ j = e^{j\pi/2}, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$ 。

(a) 是否是广义线性相位系统, 如果是写出广义幅度和广义相位;

(b) 求出系统的单位脉冲响应;

(c) 设图 T4-5 所示系统中, 实信号 $x_r[n]$ 的傅里叶变换是 $X_r(e^{j\omega})$, $x_i[n]$ 的傅里叶变换是 $X_i(e^{j\omega})$, 输出信号 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$ 的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 。证明: $X(e^{j\omega})$ 的虚部等于零, 即 $x[n]$ 是一个单边带复数信号, 且

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}, \quad X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

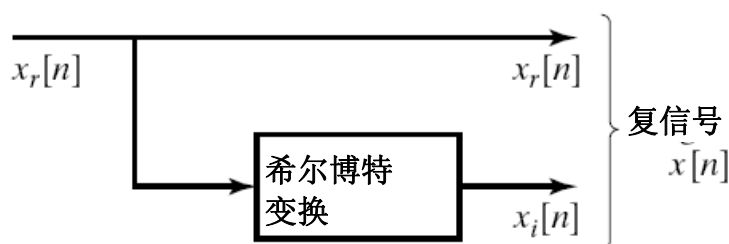


图 T4-5

解: (a) 是

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\pi/2}, \text{ 其中, 广义幅度 } A(e^{j\omega}) = \begin{cases} -1, & 0 < \omega < \pi \\ 1, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 je^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} je^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} \frac{2 \sin^2(\pi n / 2)}{\pi n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(c)

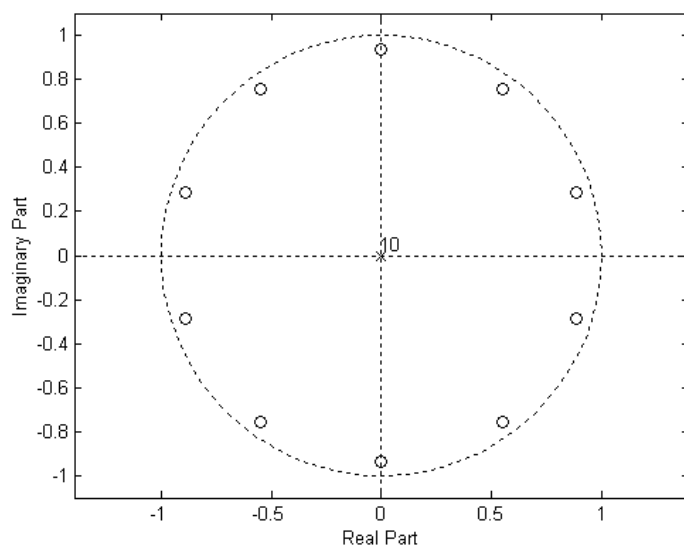
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \\ &= \begin{cases} X_r(e^{j\omega}) + jX_r(e^{j\omega})(-j), & 0 < \omega < \pi \\ X_r(e^{j\omega}) + jX_r(e^{j\omega})j, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} X_i(e^{j\omega})/(-j) + jX_i(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ X_i(e^{j\omega})/j + jX_i(e^{j\omega}), & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 \leq \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

MATLAB 上机题（4-32 题—4-34 题）

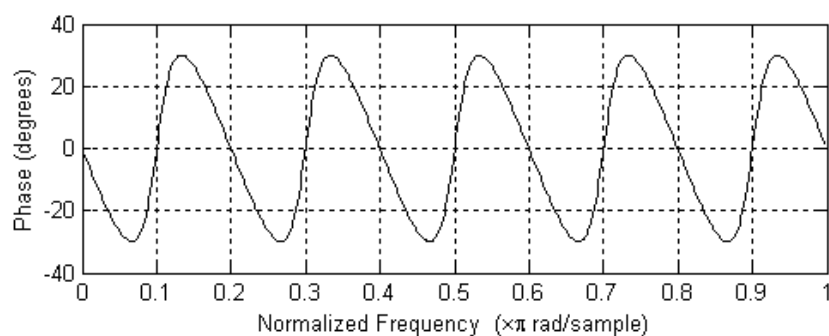
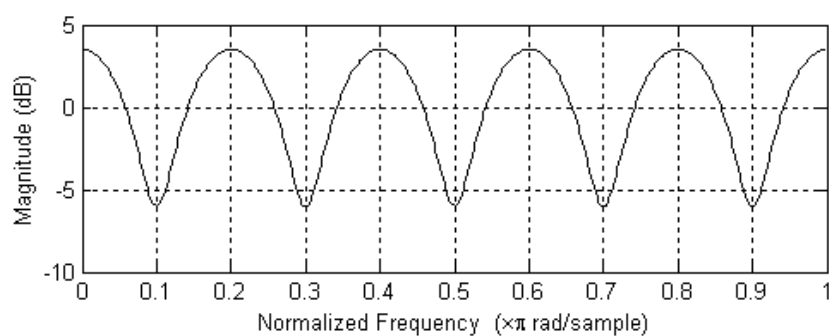
4-32 回声系统的差分方程是 $y[n] = x[n] + 0.5x[n-10]$ ，画出其零点极点图、幅度响应和群延迟。

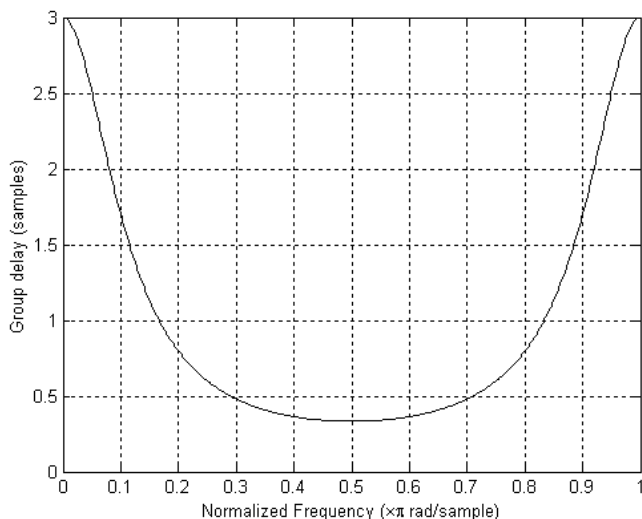
提示：可以调用的函数有 `zplane()`, `freqz()`, `grpdelay()` 等。

解： `h=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5]; zplane(h,1); figure; freqz(h,1);`
`figure; grpdelay(B,A);`



零点从 $2\pi/10$ 开始 10 等分排列





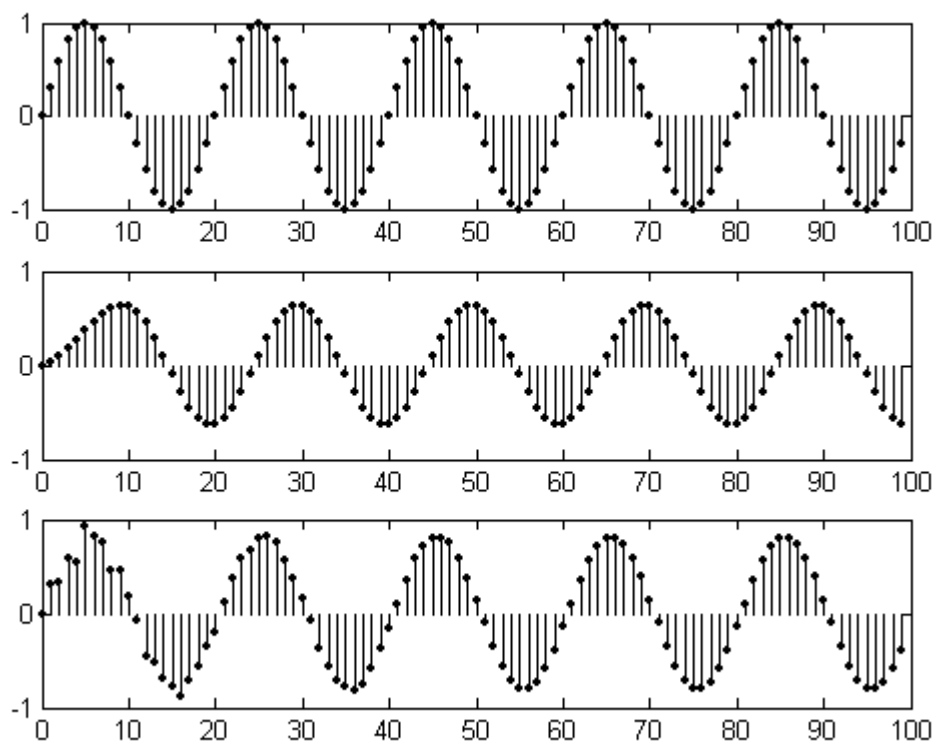
4-33 两个 LTI 系统的系统函数如下

$$H_1(z) = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 z^{-n}, H_2(z) = \frac{1 + z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.81z^{-1} + 0.81z^{-2} + 0.81z^{-3}}$$

输入信号为 $x[n] = \sin(0.1\pi n)u[n]$ ，在 $0 \leq n < 100$ 区间画出输入信号及两个系统的输出信号，比较 n 很大时输出信号与输入信号。

提示：可以调用的函数有 `filter()` 等。

解：`n=0:100-1; x=sin(0.1*pi*n); subplot(3,1,1); stem(n,x, '.');`
`h=ones(1,10)/10; y=filter(h,1,x); subplot(3,1,2); stem(n,y, '.');`
`B=[1 0 1 0 1]; A=[1 0.81 0.81 0.81]; z=filter(B,A,x); subplot(3,1,3); stem(n,z, '.');`



可见稳定后 LTI 系统输出几乎等于（IIR）或完全等于（FIR）输入信号，幅度可能有变化。

4-34 已知滑动平均系统的单位脉冲响应是 $h_M[n] = \frac{1}{M}R_M[n]$ ，其延时互补系统的单位脉冲响

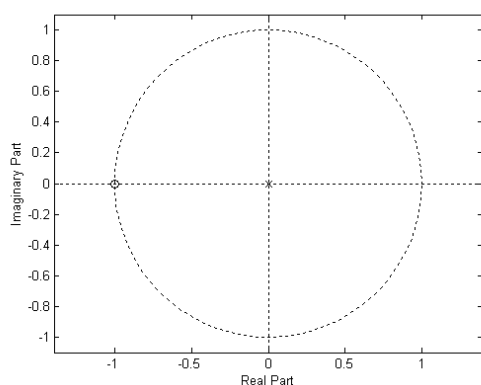
应是 $g_M[n] = \frac{\sin[\pi(n - \frac{M-1}{2})]}{\pi(n - \frac{M-1}{2})} - h_M[n]$ ，分别画出两个系统当 M=2、3、4 和 5 时系统的零点

极点图、幅度响应和相位响应。分别是哪类线性相位 FIR 系统？

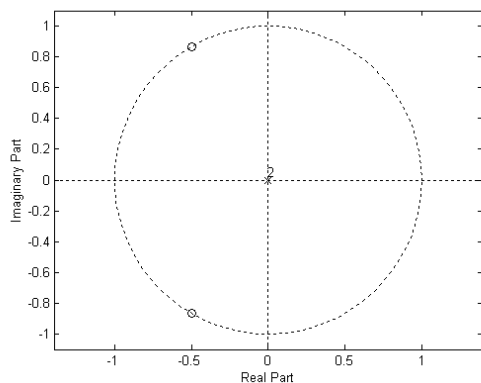
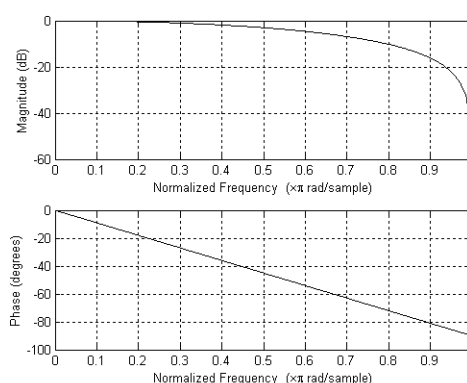
提示：可以调用的函数有 `zplane()` 和 `freqz()` 等。

解：滑动平均是低通滤波：

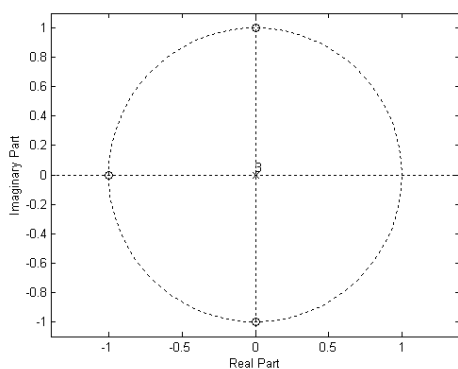
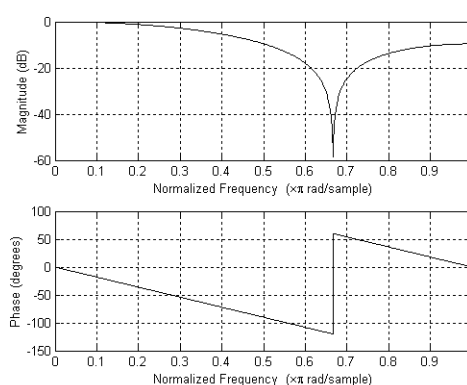
```
h2=[1 1]/2;      figure;zplane(h2,1);      figure; freqz(h2,1);
h3=[1 1 1]/3;    figure;zplane(h3,1);      figure; freqz(h3,1);
h4=[1 1 1 1]/4;  figure;zplane(h4,1);      figure; freqz(h4,1);
h5=[1 1 1 1 1]/5; figure;zplane(h5,1);      figure; freqz(h5,1);
```



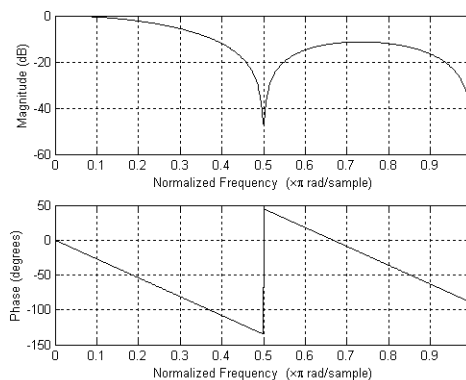
M=2 (2 类)

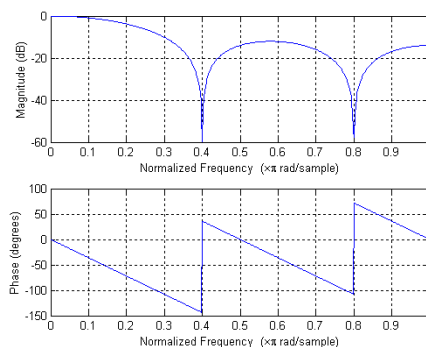
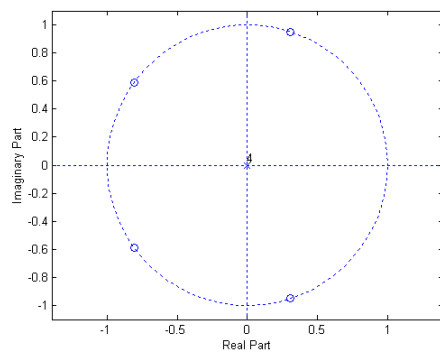


M=3 (1 类)



M=4 (2 类)



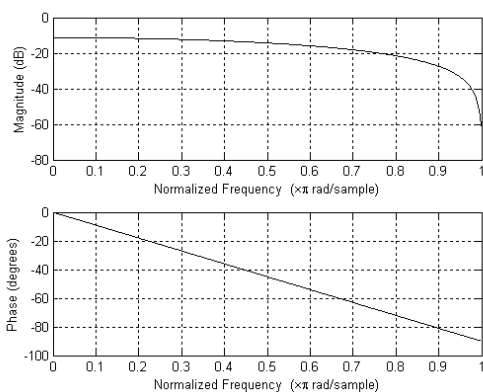


M=5 (1 类)

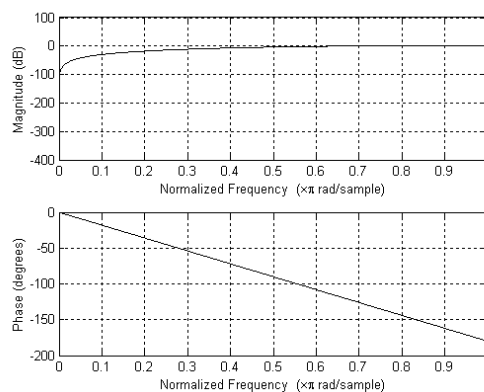
随着 M 增大，零点增多，低通的截止频率降低

滑动平均的延时互补系统是高通滤波：

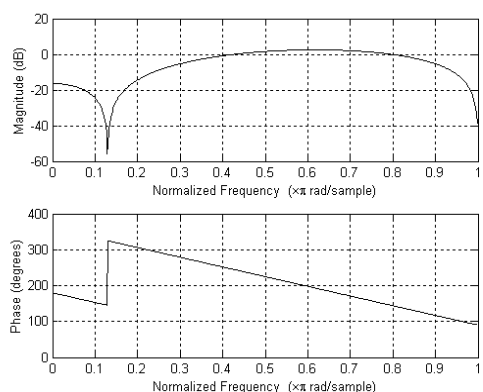
```
h2=sinc([0 1]-0.5)-[1 1]/2;figure;zplane(h2,1); figure;freqz(h2,1);
h3=[0 1 0]-[1 1 1]/3; figure;zplane(h3,1); figure;freqz(h3,1);
h4= sinc([0 1 2 3]-1.5)-[1 1 1 1]/4; figure;zplane(h4,1);
figure;freqz(h4,1);
h5=[0 0 1 0 0]-[1 1 1 1 1]/5;figure;zplane(h5,1);figure; freqz(h5,1);
```



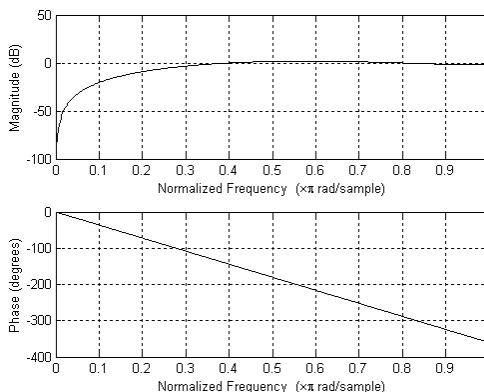
M=2 (2 类，不是高通)



M=3 (1 类线性相位)



M=4 (2 类，不是高通)



M=5 (1 类线性相位)

M=3 和 5 是线性相位高通滤波器。

第 5 章

单项选择题 (5-1 题—5-6 题)

5-1 序列 $x[n] = \cos(\frac{\pi}{5}n)$, $-\infty < n < \infty$ 是对模拟信号 $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t)$, $-\infty < t < \infty$

采样而得到的, 采样率为 1000Hz。那么 Ω_0 的取值不可能是 (D)

- (A) 200π (B) 2200π (C) 1800π (D) 3200π

解:

$$\because \Omega_0 T = \begin{cases} \omega_0 + 2\pi k \\ 2\pi k - \omega_0 \end{cases}, \therefore \Omega_0 = \begin{cases} (\omega_0 + 2\pi k) f_s \\ (2\pi k - \omega_0) f_s \end{cases}$$

$$\therefore \Omega_0 = (\frac{\pi}{5} + 2\pi k)1000 = -3800\pi, -1800\pi, 200\pi, 2200\pi, 4200\pi$$

$$\Omega_0 = (2\pi k - \frac{\pi}{5})1000 = -4200\pi, -2200\pi, -200\pi, 1800\pi, 3800\pi$$

5-2 用采样周期 T 对连续时间信号 $x_c(t) = \cos(200\pi t) + \sin(1800\pi t)$ 采样得到一离散时

间信号 $x[n] = \cos(\frac{\pi n}{4}) + \sin(\frac{\pi n}{4})$, 那么 T 的取值 (A)

- (A) 不唯一 (B) 没有解 (C) 只能是 $\frac{1}{800}s$ (D) (A) - (C) 均不正确

解:

$$\because 200\pi T = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_1, 1800\pi T = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2$$

$$(1) \text{ 如果 } k_1 = 0, \text{ 则 } T = \frac{1}{800}, k_2 = 1$$

$$(2) \text{ 如果 } k_1 = 1, T = \frac{9}{800}, k_2 = 10$$

.....

5-3 在图 5.3-1 中, 已知 $x_c(t) = \cos(2\pi \times 5t)$, $T = 1/8s$, 则 $x_r(t)$ 等于 (B)

- (A) $x_r(t) = \cos(2\pi \times 5t)$ (B) $x_r(t) = \cos(2\pi \times 3t)$
(C) $x_r(t) = \cos(2\pi \times 13t)$ (D) $x_r(t) = \cos(2\pi \times 21t)$

解: 采样频率 8HZ 低于 10HZ, 所以混叠

$$x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 5t)$$

$$x[n] = \cos(2\pi \cdot 5 \frac{1}{8}n) = \cos(\frac{5}{4}\pi n) = \cos\left(2\pi - \frac{5}{4}\pi\right)n$$

$$x_r(t) = \cos(\frac{3}{4}\pi n / T) = \cos(2\pi \cdot 3t)$$

5-4 在图 5.3-1 中, 假设 C/D 的采样周期是 T_1 , D/C 的采样周期是 T_2 , $T_1 \neq T_2$,

$X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T_1$, 则正确的是 (A)

- (A) $x_r(t) = x_c(\frac{T_2}{T_1}t)$ (B) $x_r(t) = x_c(\frac{T_1}{T_2}t)$
(C) $x_r(t) = \frac{T_2}{T_1}x_c(\frac{T_1}{T_2}t)$ (D) $x_r(t) = \frac{T_1}{T_2}x_c(\frac{T_2}{T_1}t)$

解：从频域解

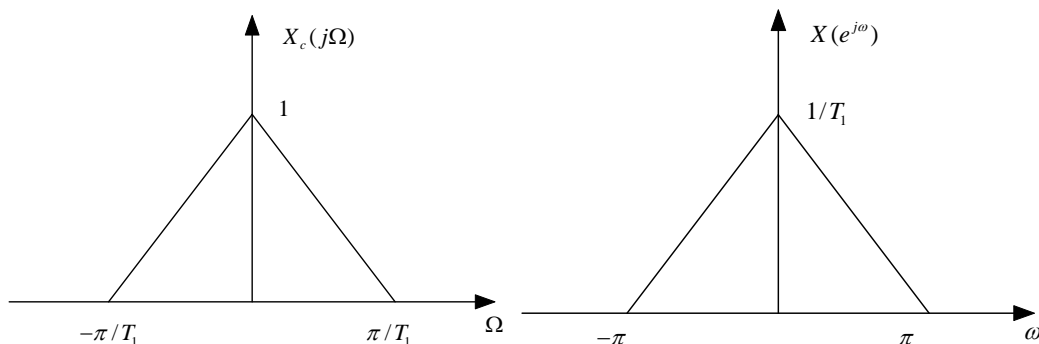
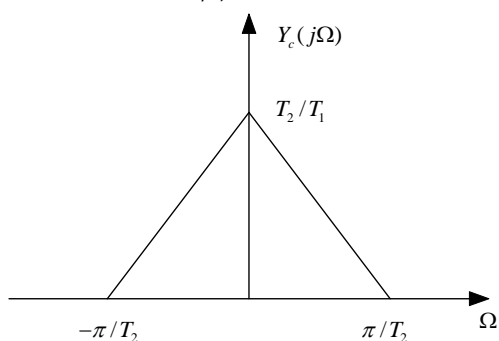


图 P4.23



$$\because X_r(j\Omega) = \frac{T_2}{T_1} X_c(j\Omega \frac{T_2}{T_1}), |\Omega| \leq \frac{\pi}{T_2}$$

$$\therefore x_r(t) = \int_{-\frac{\pi}{T_2}}^{\frac{\pi}{T_2}} \frac{T_2}{T_1} X_c(j\Omega \frac{T_2}{T_1}) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{T_2}}^{\frac{\pi}{T_2}} X_c(j\Omega \frac{T_2}{T_1}) e^{j\left(\Omega \frac{T_2}{T_1}\right)\left(t \frac{T_1}{T_2}\right)} d\left(\Omega \frac{T_2}{T_1}\right) = \int_{-\frac{\pi}{T_1}}^{\frac{\pi}{T_1}} X_c(j\Omega') e^{j\Omega' \left(t \frac{T_1}{T_2}\right)} d\Omega' = x_c\left(\frac{T_1}{T_2} t\right)$$

5-5 考虑图 5.4-1，若离散时间系统是 LTI 系统，但输入信号不是带限的，例如 $x_c(t) = 1, -1 \leq t \leq 1$ ，则整个等效连续时间系统是 (B)

(A) 线性时不变的 (B) 线性时变的 (C) 时不变非线性的 (D) 非线性且时变的。

解：该系统是线性的。因为 C/D 和 D/C 过程都是线性的，离散时间系统是一个 LTI 系统，所以整个系统是线性的。

该系统是时变的。

假设 $h[n] = \delta[n]$ ， $T=5$ 。

$x_c(t) = 1, -1 \leq t \leq 1$ 。则 $x[n] = \delta[n]$ ； $y_c(t) = \sin c(\pi/5)$ 。

假设输入为 $x_c(t-2)$ ，则 $x[n] = 0$ ； $y_c(t) = 0$ 。

可见该系统是时变系统。

5-6 考虑图 5.4-1 的系统， $x_c(t)$ 带限到 10kHz，并且要使 $y_r(t)$ 带限到 2kHz，则不可以实现该功能的组合是 (B)

- (A) 采样周期 $T = 0.05ms$ ，离散时间系统是截止频率 $\pi/5$ 弧度的理想低通滤波器；
- (B) 采样周期 $T = 1/30ms$ ，离散时间系统是截止频率 $\pi/3$ 弧度的理想低通滤波器；
- (C) 采样周期 $T = 0.025ms$ ，离散时间系统是截止频率 $\pi/10$ 弧度的理想低通滤波器；
- (D) 采样周期 $T = 0.1ms$ ，离散时间系统是截止频率 $2\pi/5$ 弧度的理想低通滤波器。

解：只要等效截止频率 2KHZ，允许混迭

$\Omega_c = \omega_c / T = 2\pi \cdot 2\text{kHz}, \therefore \omega_c / T = 4\pi k$ 就行

(A) $\omega_c / T = \pi / 5 / 0.05\text{ms} = 4\pi k$

(B) $\omega_c / T = \pi / 3 / (1/30\text{ms}) = 10\pi k$

(C) $\omega_c / T = \pi / 10 / (0.025\text{ms}) = 4\pi k$

(D) $\omega_c / T = 2\pi / 5 / 0.1\text{ms} = 4\pi k$

填空题 (5-7 题— 5-14 题)

5-7 $x_c(t) = \cos(2\pi \times 1000t)$, 以周期 T 采样得到离散时间信号 $x[n]$ (解题时要求数字角频率小于 π)。

(a) $T = (1/3000)\text{s}$, $x[n] = \cos(2\pi n/3)$; (b) $T = (1/1500)\text{s}$, $x[n] = \cos(2\pi n/3)$ 。

解: (a) $x[n] = x_c(nT) = \cos(2\pi(1000)/3000) = \cos(2\pi n/3)$, 无混叠;

(b) 有混叠

$x[n] = \cos(2\pi(1000)/1500) = \cos(4\pi n/3) = \cos(4\pi n/3 - 2\pi n) = \cos(2\pi n/3)$ 。

5-8 已知连续时间信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换是 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq 2\pi \times 100$, 采样后得到离散时间信号 $x[n] = x_c(nT)$ 。则

(a) 频谱不发生混叠的最小采样周期 $T = 1/200\text{s}$;

(b) $x[n]$ 的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega}) = 0, \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi$, 则采样周期 $T = 1/400\text{s}$ 。

解: (b) $T = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\pi/2}{2\pi \times 100} = \frac{1}{400}$

5-9 对模拟信号 $x_c(t) = \cos(2\pi \times 40t) \cdot \cos(2\pi \times 120t)$ 进行采样, 为了使频谱没有混叠, 采样点的时间间隔应该小于 $1/320\text{s}$ 。

解: $x_c(t) = 0.5\cos(2\pi \cdot 160 \cdot t) + 0.5\cos(2\pi \cdot 80 \cdot t)$

$f_s = 1/T \geq 2 \cdot 160, T \leq 1/320$

5-10 图 5.3-1 中, $x_c(t) = \cos(2\pi \times 120t)$ 。

(a) 采样率为 200Hz , 则 $x_r(t)$ 的频率是 80Hz ;

(b) 采样率为 100Hz , 则 $x_r(t)$ 的频率是 20Hz ;

(c) 采样率为 70Hz , 则 $x_r(t)$ 的频率是 20Hz 。

解: 有混迭。

(a) $200-120=80$

(b) $100-120=-20 \rightarrow 20$

(c) $120-70=50, 70-50=20\text{Hz}$ 。

5-11 已知采样率为 16kHz 的声音文件, 用声卡回放听到的声音信号的最高频率是 8kHz 。

5-12 考虑图 5.4-1 的系统, 已知 C/D 过程没有混叠。若离散时间系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega^2}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega T^2}, & |\Omega| \leq \omega_c / T \\ 0, & |\Omega| > \omega_c / T \end{cases}$$

解:

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| \leq \pi / T \\ 0, & |\Omega| > \pi / T \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\Omega T^2}, & |\Omega T| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\Omega T| < \infty \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\Omega T^2}, & |\Omega| \leq \omega_c / T \\ 0, & |\Omega| > \omega_c / T \end{cases}$$

5-13 考虑图 5.4-1 的系统, 已知 $x_c(t)$ 带限到 5kHz, 离散时间系统是一个截止频率为 $\pi/8$ 弧度/秒的理想低通滤波器。

- (a) 为了避免在 C/D 转换中发生混叠, T 的最大取值是 $\frac{1}{10000}$ s ;
 (b) 若 $1/T=10\text{kHz}$, 等效连续时间滤波器的截止频率是 $\frac{625}{10000}$ Hz;
 (c) 若 $1/T=20\text{kHz}$, 等效连续时间滤波器的截止频率是 $\frac{1250}{20000}$ Hz ;
 (d) 要想使等效连续时间滤波器的截止频率是 2.5kHz, $1/T=$ $\frac{40}{10000}$ kHz。

解: (a) $1/T \geq 2 \times 5\text{kHz}$, 则 $T_{\max} = \frac{1}{10000}$ s。

(b) $\frac{1}{T} = 10\text{kHz}$, $\omega = \Omega T$, $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{10000} \Omega_c$, $\Omega_c = 2\pi \cdot 625\text{rad/s}$, $f_c = 625\text{Hz}$

(c) $\frac{1}{T} = 20\text{kHz}$, $\omega = \Omega T$, $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{20000} \Omega_c$, $\Omega_c = 2\pi \cdot 1250\text{rad/s}$, $f_c = 1250\text{Hz}$

(d) $f_c = 2500\text{Hz}$

$$\Omega_c = 2\pi \cdot 2500\text{rad/s}, \quad \omega = \Omega T, \quad \frac{\pi}{8} = T \Omega_c, \quad \frac{1}{T} = \frac{8\Omega_c}{\pi} = 40\text{kHz}$$

5-14 在图 5.4-1 的系统中, 输入信号带限为 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| > \pi/T$ 。已知等效连续时间系统是积分器, 即输出 $y_c(t)$ 与输入 $x_c(t)$ 的关系是 $y_c(t) = \int_{-\infty}^t x_c(\tau) d\tau$ 。

(a) 写出等效连续时间系统的频率响应 $H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\Omega}, 0 < |\Omega| \leq \pi/T \\ \pi\delta(\Omega), \Omega = 0 \end{cases}$;

(b) 写出离散时间系统的频率响应 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega}, 0 < |\omega| \leq \pi \\ \pi/T\delta(\omega), \omega=0 \end{cases}$ 。

计算、证明与作图题 (5-15 题—5-24 题)

5-15 对连续时间信号 $x_c(t) = \sin(2\pi \times 140t)$ 进行理想采样得到离散时间信号 $x[n]$, 画出 $x[n]$ 的傅里叶变换, 其中采样率分别为

- (a) $f_s = 1000\text{Hz}$; (b) $f_s = 200\text{Hz}$; (c) $f_s = 100\text{Hz}$ 。

解: (a) 无混迭

$$x[n] = x_c(n/f_s) = \sin(2\pi \cdot 140 \cdot n/1000) = \sin(0.28\pi n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 0.28\pi + 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 0.28\pi + 2\pi k)$$

(b) 在 2PI 内折叠失真

$$x[n] = x_c(n/f_s) = \sin(2\pi \cdot 140 \cdot n/200) = \sin(1.4\pi n) = -\sin(0.6\pi n)$$

$$X(e^{j\omega}) = -\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 0.6\pi + 2\pi k) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 0.6\pi + 2\pi k)$$

(c) 有混迭失真

$$x[n] = x_c(n/f_s) = \sin(2\pi \cdot 140 \cdot n/100) = \sin(2.8\pi n) = \sin(0.8\pi n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 0.8\pi + 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 0.8\pi + 2\pi k)$$

5-16 在图 5.4-1 所示系统中, 离散时间系统的频率响应是 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, |\omega| \leq \pi/2 \\ 0, |\omega| > \pi/2 \end{cases}$, $X_c(j\Omega)$ 如

图 T5-1 所示。对下列各种情况画出 $y_r(t)$ 的傅里叶变换。

- (a) $1/T = 10^4$ (b) $1/T = 2 \times 10^4$

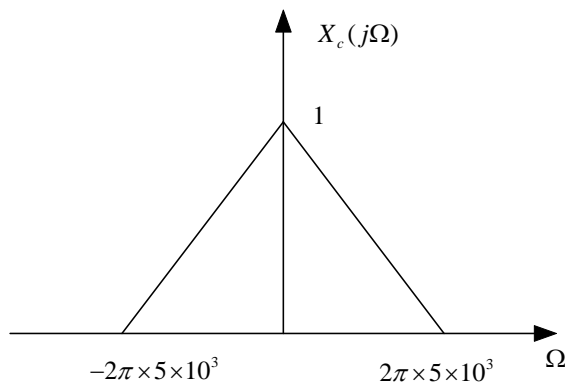
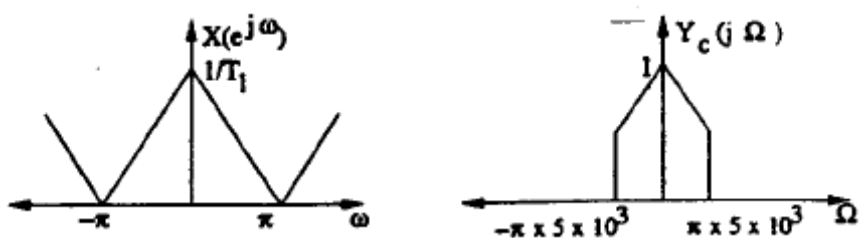
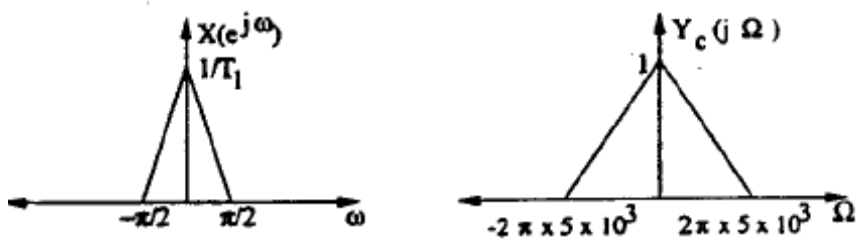


图 T5-1

解: (a)



(b)



5-17 考虑图 5.3-5, 已知采样周期 T , 连续时间信号 $x_a(t)$ 的傅里叶变换如图 T5-2 所示。

- (a) 画出抗混叠低通滤波器的频率响应 $H_a(jΩ)$;
(b) 画出 $x_c(t)$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换。

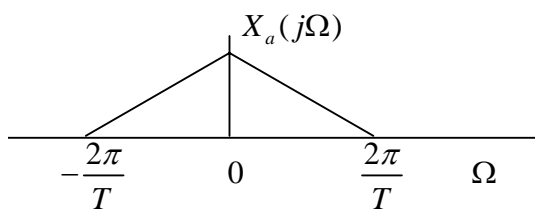


图 T5-2

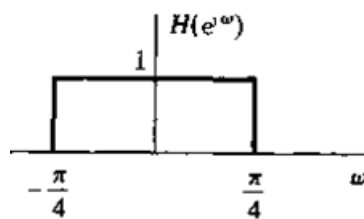
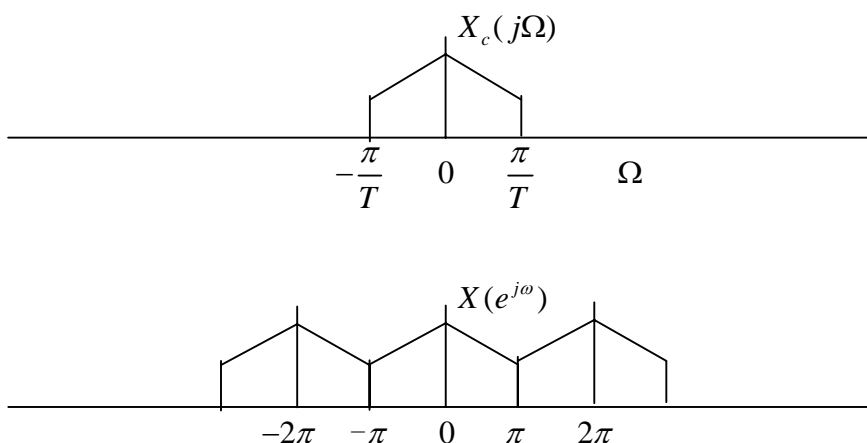


图 T5-3

解: (a)

$$H_a(jΩ) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

(b)



5-18 考虑图 5.4-1 所示系统。其中离散时间滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 如图 T5-3 所示，采样频率和重构频率 $1/T = 16\text{kHz}$ 。

(a) 画出整个系统的频率响应 $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ ；

(b) 确定 $x_c(t)$ 的最高频率的最大取值，以使等效连续时间系统是一个理想低通滤波器。

解：(a) 截止频率 $2\pi \times 2000$ 弧度/秒的低通滤波器

(b) $x[n]$ 的频谱混迭高于 $\pi/4$ ，

$$2\pi - \Omega_N T > \frac{\pi}{4}, \therefore \Omega_N < \frac{7}{4} \pi / T = 2\pi \times 14 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

5-19 图 5.4-1 所示系统中，已知离散时间系统是 LTI 的， $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq 2\pi \times 1000$ ，连续

时间系统也是 LTI 的，且频率响应是 $H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega}, & 2\pi \times 400 < |\Omega| < 2\pi \times 800 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，写出采样

周期 T 的最大取值，以及该采样周期下离散时间系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

解：带通滤波器，只要混迭发生在通带以外就可以。

$$2\pi - 2\pi \cdot 1000T > 2\pi \cdot 800T, \therefore T < 1/1800\text{s}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}(j\Omega)|_{\Omega=\omega/T} = \begin{cases} e^{-j\omega/T}, & 2\pi \cdot 400 < |\omega/T| < 2\pi \cdot 800 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-j\omega/T}, & \frac{4\pi}{9} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{9} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

*5-20 考虑图 5.1-3 中采样的数学模型，假设冲激串不是 (5.1-2) 式所示，而是由宽度为 τ 的

矩形脉冲串组成，即 $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t-nT)$ ，其中 $r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，用 $x_c(t)$ 的傅里叶变换表示

$x_s(t)$ 的傅里叶变换，证明采样定理成立。

解：

(1) $\because s(t)$ 是周期信号, \therefore 用傅立叶级数求频谱

$$S[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{\tau} 1 \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt = e^{-j\frac{\pi k\tau}{T}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k}{T}}$$

$$(2) \therefore S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[k] \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi k\tau}{T}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k}{T}} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$\therefore X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi k\tau}{T}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k}{T}} \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T})$$

$$\stackrel{\text{分配律}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi k\tau}{T}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k}{T}} X_c(j\Omega) * \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{T}) \stackrel{\text{同一律}}{=} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{\pi k\tau}{T}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}{\frac{\pi k}{T}} X_c(j(\Omega - k\frac{2\pi}{T}))$$

***5-21** 一个带通连续时间信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换如图 T5-4 所示, 以采样率 $\Omega_s = \frac{2}{3}\Omega_0$ 对该信号

号进行采样, 得到序列 $x[n] = x_c(nT)$ 。

(a) 画出序列 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$; (b) 画出重构滤波器的频率响应;

(c) 不会引起混叠失真的最低采样频率是多少?

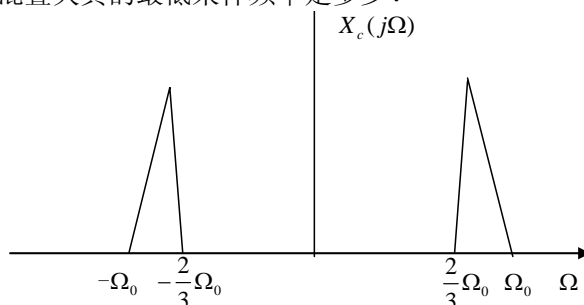
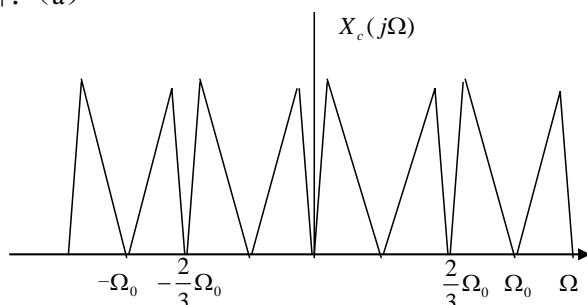
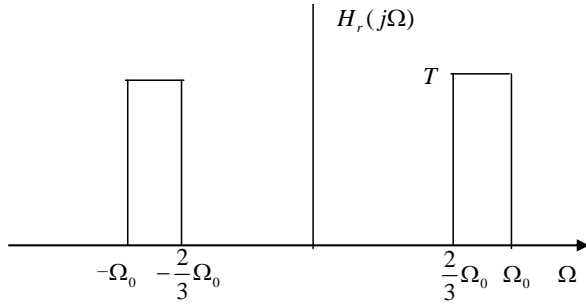


图 T5-4

解: (a)



(b) 带通滤波器



(c)

$$-\frac{2}{3}\Omega_0 + k\Omega_s < \frac{2}{3}\Omega_0, \therefore k\Omega_s < \frac{4}{3}\Omega_0$$

$$-\Omega_0 + (k+1)\Omega_s > \Omega_0, \therefore \Omega_s > 2\Omega_0 - k\Omega_s > \frac{2}{3}\Omega_0 = 2\Delta\Omega$$

***5-22** 图 T5-5 所示系统中, $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq 2\pi \times 5000$, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ 。

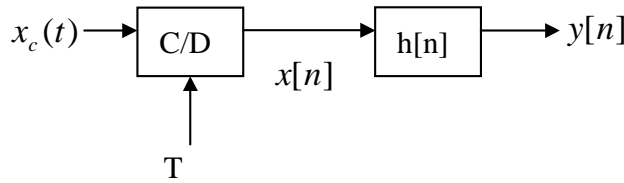


图 T5-5

(a) 将 $y[\infty]$ 用 $X(e^{j\omega})$ 表示; (b) 确定 T 的最大取值, 使 $y[n]|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)dt$ 。

解: (a) $y[\infty] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{j0 \times n} = X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$

(b)

$$y[n]|_{n=\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)e^{j0 \times t}dt = X_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

$\therefore X(e^{j0}) = X_c(j0)$, 即要求频率为 0 处不能混叠

$$\therefore \frac{1}{T} \geq 5000, T \leq 1/5000$$

***5-23** 考虑图 5.4-1 的系统。输入信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_N$ 。离散时间系统的频率响应为 $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, |\omega| < \omega_c \\ 0, \text{其它} \end{cases}$ 。

(a) 要使 $y_c(t) = x_c(t)$, 确定采样周期 T 的最大取值;

(b) 要使等效的连续时间滤波器是低通滤波器, 确定 T 的取值范围;

(c) 已知采样频率 $1/T = 20\text{kHz}$, 且等效连续时间滤波器是截止频率 3kHz 的理想低通滤波器, 确定 ω_c 以及 Ω_N 的取值范围。

解: (a)

等效模拟滤波器低通, 现要求全通, 则数字频谱的最高频率限制在 ω_c 内

$$\text{即 } \omega_N = \Omega_N T \leq \omega_c, \therefore T \leq \omega_c / \Omega_N$$

$$\text{或 } \omega_c / T = \Omega_c \geq \Omega_N$$

(b)

等效模拟滤波器低通，则数字频谱的最高频率大于 ω_c 无混迭，
或有混迭，混迭大于 ω_c ，

即 $\omega_N = \Omega_N T \geq \omega_c$ ，且 $2\pi - \Omega_N T \geq \omega_c$

$$\therefore \omega_c / \Omega_N \leq T \leq (2\pi - \omega_c) / \Omega_N$$

$$(c) \quad \omega_c = \Omega_c T = 2\pi \cdot 3k / 20k = 0.3\pi$$

Ω_N 的取值使采样后不混迭且高于 0.3π ，或混迭部分在 0.3π 以上，所以

$$\omega_N = \Omega_N T > 0.3\pi, \left(\frac{2\pi}{T} - \Omega_N \right) T > 0.3\pi$$

$$\therefore 0.3\pi < \Omega_N T < 2\pi - 0.3\pi$$

$$\therefore 2\pi \times 3k = 0.3\pi \times 20k < \Omega_N < 1.7\pi \times 20k = 2\pi \times 17k$$

***5-24** 考虑图 5.4-1 的系统，已知 $T = 1/300s$ 且没有混叠，离散时间系统的系统函数是 $H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$ ，等效的连续时间系统是点阻滤波器，即 $|H(j2\pi f_0)| = 0$ ，确定等效的连续时间系统的阻带频率 f_0 。

解：

$$\therefore H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} = \left(1 - \frac{1+j\sqrt{3}}{2} z^{-1}\right) \left(1 - \frac{1-j\sqrt{3}}{2} z^{-1}\right)$$

$$\therefore H(z) \Big|_{z=\frac{1+j\sqrt{3}}{2}=e^{j\pi/3}} = H(z) \Big|_{z=\frac{1-j\sqrt{3}}{2}=e^{-j\pi/3}} = 0$$

$$\text{又} \therefore |H(e^{j\omega})| = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\therefore |H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/3} = H(z) \Big|_{z=e^{j\pi/3}} = 0$$

$$\therefore \Omega = \omega / T = \frac{\pi}{3} \cdot 300 = 100\pi = 2\pi \cdot 50$$

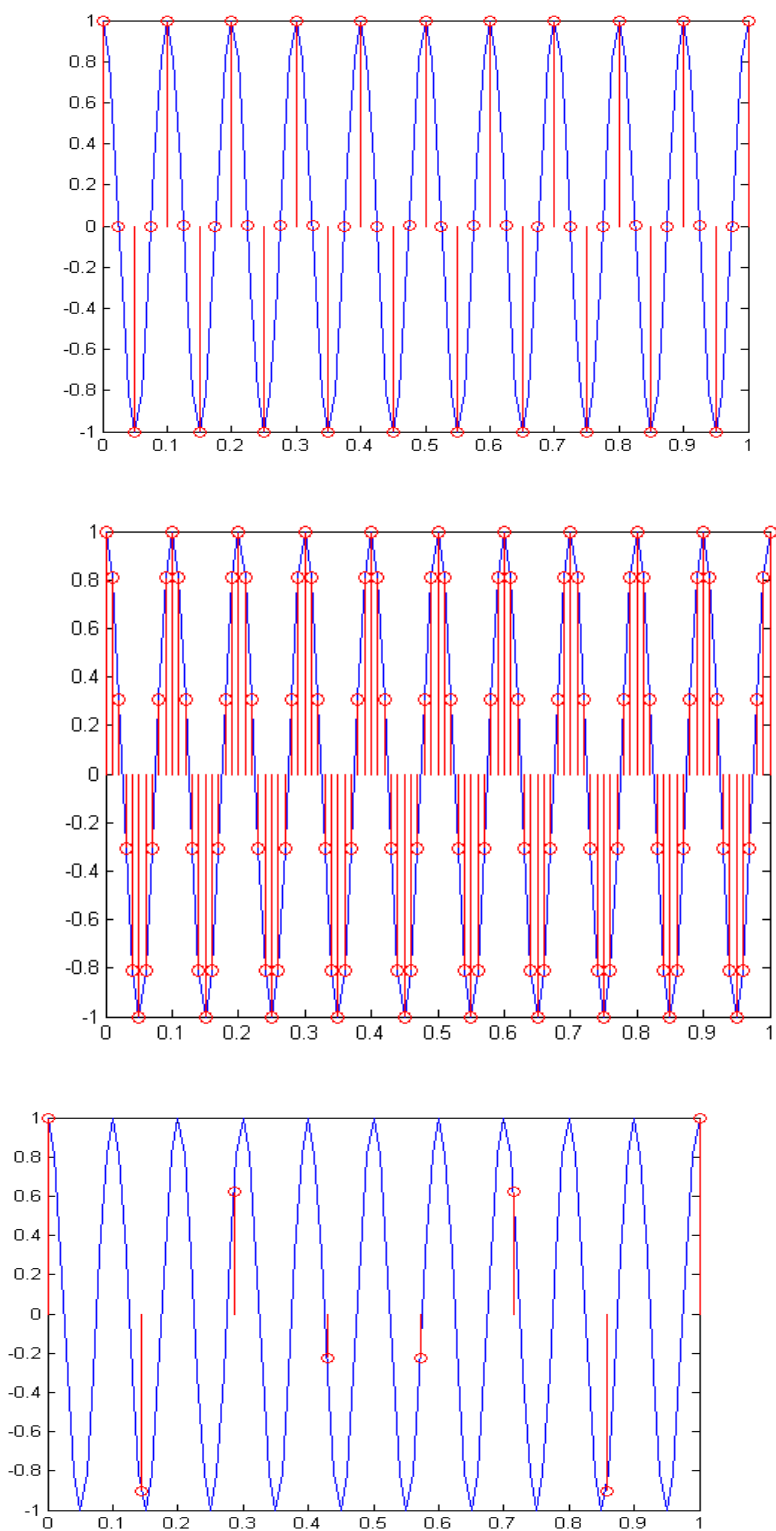
MATLAB 上机题 (5-25 题—5-27 题)

5-25 画出连续时间信号 $x_c(t) = \cos(2\pi \cdot 10t)$, $0 \leq t < 1s$ ，以及它的以下各采样信号。

(a) $x[n] = x_c(t) \Big|_{t=(1/40)n}$ ； (b) $x[n] = x_c(t) \Big|_{t=(1/100)n}$ ； (c) $x[n] = x_c(t) \Big|_{t=(1/4)n}$ 。

解：不同采样率可能混迭。

- (a) `t=0:0.01:1; xc=cos(20*pi*t); plot(t,xc);`
`hold on; stem([0:1/40:1],cos(20*pi*[0:40]/40), 'r');`
- (b) `t=0:0.01:1; xc=cos(20*pi*t); plot(t,xc);`
`hold on; stem([0:1/100:1],cos(20*pi*[0:100]/100), 'r');`
- (c) `t=0:0.01:1; xc=cos(20*pi*t); plot(t,xc);`
`hold on; stem([0:1/7:1],cos(20*pi*[0:7]/7), 'r');`



5-26 已知连续时间信号 $x_c(t) = \cos(10\pi t), 0 \leq t < 1$ ，用采样率 10Hz 采样得到离散时间信号 $x[n]$ ，画出 $x[n]$ ，并用理想内插画出重构后的连续时间信号。

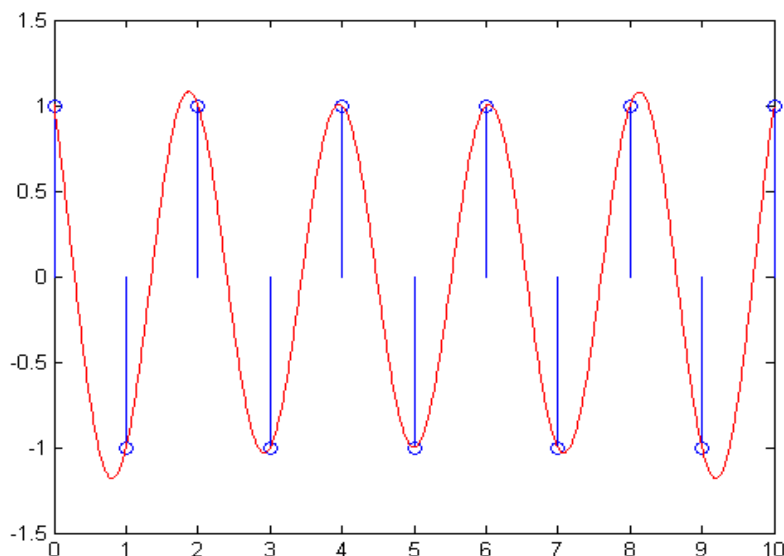
解： $x[n] = x_c(nT) = \cos(10\pi nT) = \cos(\pi n)$, 周期 $N = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

以上表明，每个周期采样 2 个点，所以 $x[n]$ 的周期是 2。

理想内插采用如下的矩阵乘法:

$$[y_0, y_1, \dots, y_{1000}] = [x_0, x_1, \dots, x_{10}] \begin{bmatrix} 0-0T & 1-0T & \dots & 1000-0T \\ 0-1T & 1-1T & \dots & 1000-1T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0-10T & 1-10T & \dots & 1000-10T \end{bmatrix}$$

```
T=0.1;
n=0:10; x=cos(10*pi*n*T); stem(n,x);
dt=0.001; t=ones(11,1)*[0:dt:1]; n=n'*ones(1,1/dt+1);
y=x*sinc((t-n*T)/T); hold on; plot(t/T,y,'r')
```



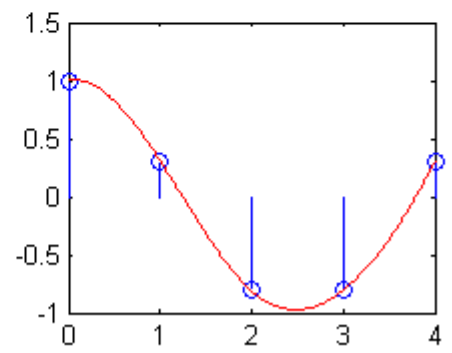
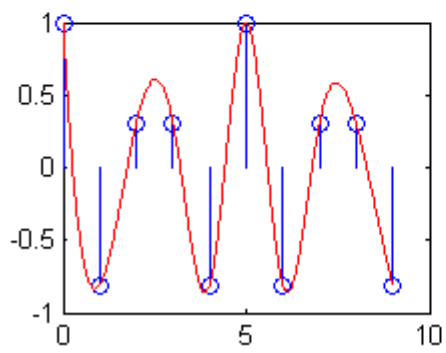
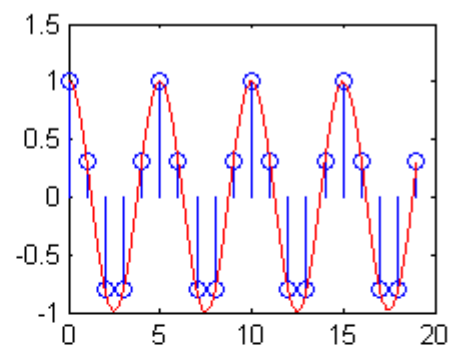
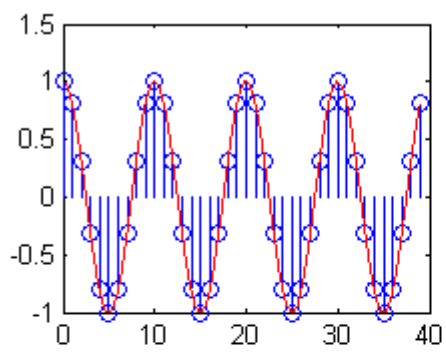
5-27 画出序列 $x[n] = \cos(0.2\pi n)$, $0 \leq n < 40$ 以及如下序列, 并且用三次样条内插分别重构连续时间信号, 比较各重构信号。

(a) $x_1[n] = x[2n]$; (b) $x_2[n] = x[4n]$; (c) $x_3[n] = x[8n]$ 。

提示: 可以调用的 MATLAB 函数有 `spline()` 等。

解: (c) 的抽选产生混迭失真

```
n=0:39; x=cos(0.2*pi*n); subplot(2,2,1); stem(n,x)
dt=0.01; t=[0:dt:max(n)]; y=spline(n,x,t); hold on; plot(t,y, 'r');
x1=x(1:2:40); subplot(2,2,2); stem([0:19],x1)
dt=0.01; t=[0:dt:19]; y1=spline([0:19],x1,t); hold on; plot(t,y1, 'r');
);
x2=x(1:4:40); subplot(2,2,3); stem([0:9],x2)
dt=0.01; t=[0:dt:9]; y2=spline([0:9],x2,t); hold on; plot(t,y2, 'r');
);
x3=x(1:8:40); subplot(2,2,4); stem([0:4],x3)
dt=0.01; t=[0:dt:4]; y3=spline([0:4],x3,t); hold on; plot(t,y3, 'r');
);
```



第 6 章

单项选择题 (6-1 题—6-26 题)

6-1 以下关于频域取样错误的是 (D)

- (A) 如果频域取样点数大于序列长度则可以通过频域取样重构时域信号;
- (B) 如果频域取样点数小于序列长度则无法通过频域取样重构时域信号;
- (C) 当频域取样点数小于序列长度时, 也可以通过 DFT 计算频域取样;
- (D) 序列的频域取样如果是实序列, 则傅里叶变换一定是实函数。

6-2 两个有限长序列 $x[n]$ 和 $x_1[n]$, 它们的 8 点 DFT 分别为 $X[k]$ 和 $X_1[k]$, 且有关系

$$X_1[k] = X[k]W_8^1, \text{ 则以下错误的是 (D)}$$

- (A) $x_1[n] = x[((n-1)_8)R_8[n]$
- (B) $x_1[n] = x[((n-9)_8)R_8[n]$
- (C) $x_1[n] = x[((n+7)_8)R_8[n]$
- (D) $x_1[n] = x[((n+9)_8)R_8[n]$

解: 时域循环右移 1。

6-3 图 T6-1 所示序列是周期性偶对称即满足 $x[n] = x[N-n], n=1, \dots, N-1$ 的是 (C)

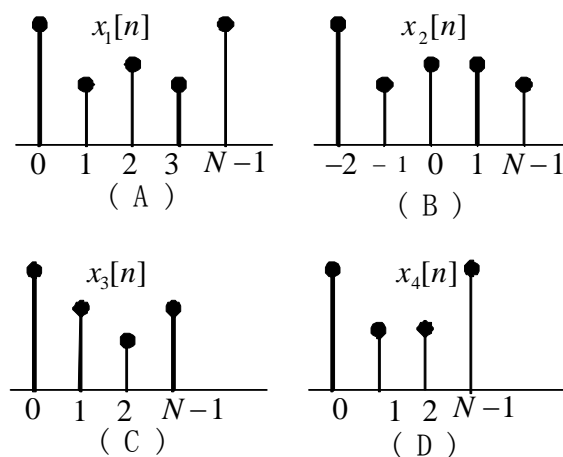


图 T6-1

解: (B) 不是因果序列, 且周期性延拓后不是相对原点偶对称。

6-4 一个序列的 N 点 DFT 是实序列, 则该序列一定满足 (B)

- (A) $x[n] = x[N-n], 1 \leq n \leq N-1$
- (B) $x[n] = x^*[N-n], 1 \leq n \leq N-1$
- (C) $x[n] = x[N-1-n], 0 \leq n \leq N-1$
- (D) $x[n] = x^*[N-1-n], 0 \leq n \leq N-1$

6-5 满足 $x[n] = -x^*[N-n], n=1, \dots, N-1$ 的复数序列, 其 N 点 DFT 一定是 (D)

- (A) 周期共轭对称序列
- (B) 周期共轭反对称序列
- (C) 实序列
- (D) 纯虚序列

6-6 序列 $x[n]$ 的长度是 N , 其 N 点 DFT 是 $X[k]$, 另两个长度为 $2N$ 的序列分别是

$$y_1[n] = \begin{cases} x[n], & n=0, \dots, N-1 \\ x[n-N], & n=N, \dots, 2N-1 \end{cases} \text{ 和 } y_2[n] = \begin{cases} x[n], & n=0, \dots, N-1 \\ 0, & n=N, \dots, 2N-1 \end{cases}$$

其 $2N$ 点 DFT 分别为 $Y_1[k]$ 和 $Y_2[k]$, 则错误的是 (D)

- (A) $Y_1[k]$ 是 $X[k]$ 的零值内插的 2 倍;
- (B) $Y_2[k]$ 是 $X[k]$ 的理想内插;
- (C) $X[k] = Y_2[2k], k=0, \dots, N-1$;
- (D) $X[k] = \begin{cases} Y_1[k], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & N \leq k \leq 2N-1 \end{cases}$ 。

解: $y_1[n]$:

$$Y_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n])W_{2N}^{kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} (x[n-N])W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n])W_{2N}^{kn} + \sum_{n'=0}^{N-1} (x[n'])W_{2N}^{k(n'+N)};$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] (1 + (-1)^k) W_N^{kn/2} = \begin{cases} 2X[k/2], & k = \text{偶数} \\ 0, & k = \text{奇数} \end{cases}, k = 0, \dots, 2N-1$$

两点之间内插 0。

$y_2[n]$: 时域补 0 则频域取样更密, 即理想内插。

$$Y_2[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} y_2[n] W_{2N}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{kn} = X[k/2], \quad 0 \leq k \leq 2N-1, \quad k \text{ 为偶数}$$

$$\therefore X[k] = Y_2[2k] = Y_1[2k]$$

6-7 序列 $x[n] = R_5[n]$, 傅里叶变换和 5 点 DFT 分别为 $X(e^{j\omega})$ 和 $X[k]$, 则错误的是 (A)

(A) $X(e^{j\omega}) = e^{-j2.5\omega} A(e^{j\omega})$, 其中 $A(e^{j\omega})$ 是实函数;

(B) $X[k] = e^{-j4\pi k/5} A[k]$, 其中 $A[k]$ 是实序列;

(C) $X[k]$ 是实序列;

(D) $X[k] = X[(N-k)]_N R_N[n]$ 。

解: (A) 应该是 $X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} A(e^{j\omega})$;

(B) FT 是广义线性相位, 则取样 DFT 也是广义线性相位, 实际上只有 $A[0] \neq 0$, 即是实序列。

(C) 时域周期性对称, 所以 DFT 是实序列。

(D) 时域实序列且周期性对称, 则 DFT 周期性对称且是实序列。

6-8 图 T6-1 (A) 和 (C) 所示两个序列 $x_1[n]$ 和 $x_3[n]$, 它们的 N 点 DFT 分别为 $X_1[k]$ 和 $X_3[k]$, 则错误的是 (A)

(A) $X_1[k]$ 是实序列

(B) $X_3[k]$ 是实序列

(C) $X_1[k]$ 是广义线性相位

(D) $X_3[k]$ 是广义线性相位

解: $x_1[n]$: 偶对称则 FT 是相位非 0 的线性相位, DFT 是 FT 的取样, 所以也是相位非 0 的线性相位。

$x_3[n]$: 周期性共轭对称, 所以 FT 不是线性相位, DFT 是实序列, 即相位为 0 的线性相位。

6-9 已知 FIR 的单位脉冲响应 $h[n]$ 在 $0 \leq n \leq M-1$ 之外为零, 输入信号 $x[n]$ 在 $0 \leq n \leq L-1$ 之外为零 ($L > M$), $y[n] = x[n] * h[n]$ 。采用 DFT 求 $y[n]$ 在区间 $M-1 \leq n \leq L-1$ 的值, 则 DFT 的最小点数是 (C)

(A) M

(B) M-1

(C) L

(D) L+M-1

解: 循环卷积是线性卷积的周期性延拓取主周期。本题只需线性卷积的中间段, 两头允许混叠, 即允许求 L 点的循环卷积, 其中间 M-1 到 L-1 点是没有混叠的线性卷积。

6-10 利用短时 DFT 分析信号频谱, 分别采用矩形窗和汉宁窗 (采用相同窗长和 DFT 点数), 正确的说法是 (A)

(A) 前者较后者频率分辨率高;

(B) 前者较后者时间分辨率高;

(C) 前者较后者旁瓣相对幅度小;

(D) 前者较后者频域取样更密。

填空题 (6-11 题-6-25 题)

6-11 已知 $x[n] = 4\delta[n] + 7\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + \delta[n-3] + 2\delta[n-4]$, 其 6 点 DFT 是 $X[k]$,

$Y[k] = X[3k] (k = 0, 1)$, 则 $Y[k]$ 的 2 点 IDFT $y[n] = 9\delta[n] + 8\delta[n-1]$ 。

解 1: $Y[k]$ 是 6 点序列的 2 点频域取样, 则重构后是原序列以 2 为周期的混迭。

解 2:

$$\begin{aligned}
X[k] &= 4 + 7W_6^{1k} + 3W_6^{2k} + W_6^{3k} + 2W_6^{4k} \\
Y[k] &= X[3k] = 4 + 7W_6^{3k} + 3W_6^{6k} + W_6^{9k} + 2W_6^{12k} \\
&= 4 + 3 + 2 + (7W_2^k + W_2^{3k}) = 4 + 3 + 2 + (7W_2^k + W_2^k)
\end{aligned}$$

6-12 $X[k]$ 是序列 $x[n] = n+1, 0 \leq n \leq 3$ 的 4 点 DFT, 不直接计算 $X[k]$ 写出下列值。

- (a) $X[0] = \underline{10}$; (b) $X[2] = \underline{-2}$;
(c) $\sum_{k=0}^3 X[k] = \underline{4}$; (d) $\sum_{k=0}^3 e^{-j2\pi k/4} X[k] = \underline{16}$;
(e) $\sum_{k=0}^3 (X[k])^2 = \underline{104}$; (f) $\sum_{k=0}^3 |X[k]|^2 = \underline{120}$ 。

解: 利用 DFT、IDFT 定义, 循环卷积, PASWAL 定理

- (a) $X[0] = \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{n0} = \sum_{n=0}^3 x[n] = 1+2+3+4 = 10$
(b) $X[2] = \sum_{n=0}^3 x[n]W_4^{n2} = \sum_{n=0}^3 x[n](-1)^n = 1-2+3-4 = -2$
(c) $\sum_{k=0}^3 X[k] = \sum_{k=0}^3 X[k]W_N^{0k} = 4x[0] = 4$
(d) $\sum_{k=0}^3 e^{-j2\pi k/4} X[k] = \sum_{k=0}^3 X[k]W_4^{1k} = \sum_{k=0}^3 X[k]W_4^{-3k} = 4x[3] = 16$
(e) 时域循环卷积在 $n=0$ 点的取值。采用线性卷积混叠求循环卷积
- $$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^3 (X[k])^2 &= \sum_{k=0}^3 (X[k])^2 W_4^{-0k} = 4x[n](4)x[n]|_{n=0} \\
&= 4(x[n] * x[n]|_{n=0} + x[n] * x[n]|_{n=4}) \\
&= 4(x[0]x[0] + 4(0x[0] + x[3]x[1] + x[2]x[2] + x[1]x[3])) \\
&= 4(1 + 4*2 + 3*3 + 2*4) = 104
\end{aligned}$$
- (f) PASWAL 定理 $\sum_{k=0}^3 |X[k]|^2 = 4 \sum_{n=0}^3 |x[n]|^2 = 120$

6-13 一个长度为 8 的序列 $x[n]$ 在 $0 \leq n \leq 7$ 之外为零, 其 8 点 DFT 为

$$\begin{aligned}
X[k] &= 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi k}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{4\pi k}{8}\right) + 4\sin\left(\frac{6\pi k}{8}\right), \text{ 则 } x[n] = \\
&\delta[n] - \frac{1}{j}\delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-2] - \frac{2}{j}\delta[n-3] + \frac{2}{j}\delta[n-5] + \frac{3}{2}\delta[n-6] + \frac{1}{j}\delta[n-7]。
\end{aligned}$$

解:

$$\begin{aligned}
X[k] &= 1 + 2\sin\left(\frac{2\pi k}{8}\right) + 3\cos\left(\frac{4\pi k}{8}\right) + 4\sin\left(\frac{6\pi k}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{j}\left(e^{j\frac{2\pi k}{8}} - e^{-j\frac{2\pi k}{8}}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{4\pi k}{8}} + e^{-j\frac{4\pi k}{8}}\right) + \frac{2}{j}\left(e^{j\frac{3\pi k}{8}} - e^{-j\frac{3\pi k}{8}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{j}\left(W_8^{-k}W_8^{8k} - W_8^k\right) + \frac{3}{2}\left(W_8^{-2k} + W_8^{2k}\right) + \frac{2}{j}\left(W_8^{-3k} - W_8^{3k}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{j}W_8^k + \frac{1}{j}W_8^{7k} + \frac{3}{2}W_8^{2k} + \frac{3}{2}W_8^{6k} - \frac{2}{j}W_8^{3k} + \frac{2}{j}W_8^{5k} \\
\therefore x[n] &= \delta[n] - \frac{1}{j}\delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-2] - \frac{2}{j}\delta[n-3] + \frac{2}{j}\delta[n-5] + \frac{3}{2}\delta[n-6] + \frac{1}{j}\delta[n-7]
\end{aligned}$$

6-14 一个 40 点长的有限长序列 $x[n]$ ， $X(e^{j\omega})$ 是它的傅里叶变换，现希望用一个 N 点的 DFT 求出 $\omega = \pi/2, \pi/3$ 和 $\pi/4$ 处的 $X(e^{j\omega})$ ，则 DFT 点数 N 可取的最小值为 24。

解：频域取样。 N 是 4、6、8 的最小公倍数。时域以 24 为周期混叠取主周期，得到 24 点序列，再作 24 点 DFT。

6-15 序列 $x[n]$ 在 $0 \leq n \leq N-1$ 之外为零，且 $x[n] = x[N-1-n], n = 0, 1, \dots, N-1$ ， N 是偶数，其 N 点 DFT 是 $X[k]$ ，则 $X[N/2] = \underline{0}$ 。

解：

$$\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \\
\therefore X[N/2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(N/2)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n](-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n](-1)^n + \sum_{n=N/2}^N x[n](-1)^n = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n](-1)^n + \sum_{n=N/2}^N x[N-1-n](-1)^n \\
\underline{N-1-n=m} &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n](-1)^n + \sum_{m=0}^{N/2-1} x[m](-1)^{N-1-m} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n][(-1)^n + (-1)^{n+1}] = 0
\end{aligned}$$

解法2:

II 类线性相位， $\therefore X(z)|_{z=-1} = 0, \therefore X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0$

\therefore 取样值 $X[k]|_{k=N/2} = X(e^{j2\pi(N/2)/N}) = 0$

6-16 设长度为 N 的序列 $x[n], n = 0, \dots, N-1$ ，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ ，另一长度为 M 的序列

$y[n] = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+mM] \right] R_M[n]$ ，其 M 点 DFT 是 $Y[k]$ ，则用 $X(e^{j\omega})$ 表示 $Y[k] = \underline{X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/M}, k = 0, 1, \dots, M-1}$ 。

解：时域周期性延拓混迭，则频域取样。

6-17 设长度为 N 的序列 $x[n]$ 的 N 点 DFT 是 $X[k]$ ， $x_1[n] = x[n] \sin\left(\frac{2\pi mn}{N}\right) R_N[n]$ 的 N 点 DFT

是 $X_1[k]$ ，用 $X[k]$ 表示 $X_1[k] = \underline{\frac{1}{2j} X[((k-m))_N] R_N[n] - \frac{1}{2j} X[((k+m))_N] R_N[n]}$ 。

解：频域循环移位性质。

6-18 已知实序列 $x[n]$ 的 8 点 DFT $X[k]$ 的前 5 点为 $\{1, 2+3j, 4+5j, 6+7j, 7\}$,

(a) 后 3 点为 $\{6-7j, 4-5j, 2-3j\}$; (b) $x_1[n] = x[n]e^{j\pi n/2}$, 则其 8 点 DFT $X_1[k] = \{4-5j, 2-3j, 1, 2+3j, 4+5j, 6+7j, 7, 6-7j\}$ 。

解: (a) 实序列的 DFT 周期性共轭对称。

(b) 频域循环移位性质 $X_1[k] = X[((k-2))_8]R_8[n]$

6-19 两个 8 点实序列 $x[n]$ 和 $y[n]$ 在 $0 \leq n \leq 7$ 之外为零, $X(z)$ 是 $x[n]$ 的 z 变换, $Y[k]$ 是 $y[n]$ 的 8 点 DFT。已知 $Y[k] = X(z)|_{z=0.5\exp(j(2\pi k+0.5\pi)/8)}, 0 \leq k \leq 7$, 则用 $x[n]$ 表示 $y[n] =$

$$x[n] \left(0.5e^{j\frac{\pi}{16}} \right)^{-n}, n=0, \dots, 7。$$

解: 非单位圆上的频域取样

$$\begin{aligned} Y[k] &= X(z)|_{z=0.5e^{j\frac{2\pi k+0.5\pi}{8}}} = \sum_{n=0}^7 x[n] z^{-n} |_{z=0.5e^{j\frac{2\pi k+0.5\pi}{8}}} \\ &= \sum_{n=0}^7 x[n] \left(0.5e^{j\frac{\pi}{16}} \right)^{-n} e^{-j\frac{2\pi k}{8}n} = \sum_{n=0}^8 y[n] e^{-j\frac{2\pi k}{8}n} \\ \therefore y[n] &= x[n] \left(0.5e^{j\frac{\pi}{16}} \right)^{-n}, n=0, \dots, 7 \end{aligned}$$

6-20 有限长序列 $x_1[n]$ 在 $0 \leq n \leq 3$ 区间以外为 0, $x_2[n]$ 在 $1 \leq n \leq 5$ 区间以外为 0。使得 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 N 点循环卷积等于这两个序列的线性卷积的最小 N 值是 9。

解: 线性卷积非零区间 $1, \dots, 8$, 长度为 8。如果 $N=8$, 则 8 点循环卷积是线性卷积以 8 为周期混叠, 取 $n=0, \dots, 7$, 虽然没有混叠, 但是是线性卷积以 8 为模循环右移 1 位。

6-21 有两个有限长序列 $x_1[n]$ 在 $15 \leq n \leq 30$ 之外为零, 和 $x_2[n]$ 在 $0 \leq n \leq 20$ 之外为零, 序列

$y[n] = \sum_{k=0}^{39} x_1[k] x_2[n - k]_{40}, 0 \leq n \leq 39$, 则 $y[n]$ 与 $x_1[n] * x_2[n]$ 数值相等的 n 的取值范围是 $11 \leq n \leq 39$ 。

解: 与前题的解法及结果完全相同。

因为 $x_1[n]$ 的非零区间 $[15, 30]$, $x_2[n]$ 的非零区间 $[0, 20]$, 所以线性卷积 $x_1[n] * x_2[n]$ 所得序列只有在 $15 \leq n \leq 50$ 上非零。 $y[n]$ 是 40 点循环卷积, 是线性卷积以 40 为周期的混迭。未混迭的是 $11 \leq n \leq 39$ 。

6-22 考虑图 6.5-4 所示系统, 设连续时间信号的最高频率为 4000Hz, 采样率为 8000Hz, DFT 点数为 500, 则 $V[10]$ 对应的连续时间信号的频率是 160 Hz。

$$\text{解: } f = \Omega / (2\pi) = \omega f / (2\pi) = \frac{2\pi}{500} \times 10 \times 8000 / (2\pi) = 160$$

6-23 考虑图 6.5-4 所示系统, 设连续时间信号的最高频率为 1kHz, 采用矩形窗, 要求频谱分辨率 $F \leq 50\text{Hz}$, 试确定以下各参数:

(a) 最大取样间隔 $T = \underline{0.5\text{ms}}$; (b) 最小采集时间为 0.04s;

(c) 当采用 (a) 中的最大取样间隔时, 最少采样点数为 80;

(d) 如果采用汉宁窗, 则最小采样点数更 大 (大/小)。

解: (a) $1/T \geq 2k\text{Hz}, \therefore T \leq 0.5\text{ms}$

(b) 将能分辨的频率间隔换算成离散时间频率间隔为 $\Delta\omega_{\min} = 2\pi \cdot \Delta f_{\min} T_{\text{rad}}$,

查表 6.5-1 知矩形窗主瓣宽为 $\Delta_{ml} = \frac{4\pi}{M}$ ，为了满足频率分辨率的要求，必须使

$$\Delta_{ml} = \frac{4\pi}{M} \leq \Delta\omega_{\min}, \text{ 所以窗长 } M \geq \frac{2}{\Delta f_{\min} T}, \text{ 对应于采集时间是 } MT = \frac{2}{\Delta f_{\min}} \geq 0.04s;$$

(c) $L = 0.04/T = 80$

(d) 同样窗长，主瓣更宽，要使分辨率相同即主瓣宽相同，必须增加窗长。

6-24 考虑图 6.5-4 所示系统，设窗为矩形窗，要求能分辨的最小频率间隔为 0.05π 弧度，则矩形窗的最小长度为 80。

解: $\frac{4\pi}{N} \leq \Delta\omega_{\min} = 0.05\pi, \therefore N \geq 80$

6-25 考虑图 6.5-4 所示系统，设连续时间信号为 $f(t) = \cos(2\pi \times 88t)$ ，采样率为 $f_s = 1024\text{Hz}$ ，窗为长度 128 的矩形窗，DFT 点数为 128，写出 $V[k]$ 中幅度不为零的谱线序号 $k = \underline{11, 117}$ 。

解: $88 = k\Delta f = k \frac{f_s}{128}, \therefore k = 11$, 根据对称性还有 $128 - 11 = 117$

计算、证明与作图题 (6-26 题--6-40 题)

6-26 计算下列各长度为 N (N 为偶数) 的有限长序列的 N 点 DFT。

(a) $x[n] = \delta[n] + \delta[n - n_0], 0 \leq n_0 \leq N - 1$ (b) $x[n] = a^n R_N[n]$

(c) $x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, 0 \leq n \leq N - 1$ (d) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ 0, & N/2 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$

(e) $x[n] = e^{ja_0 n}$ (f) $x[n] = n R_N[n]$

解: 根据 DFT 的定义

(a) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (\delta[n] + \delta[n - n_0]) W_N^{kn} = 1 + W_N^{kn_0}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$

(b) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} = \frac{1 - a^N e^{-j2\pi k}}{1 - a e^{-j(2\pi k)/N}} = \frac{1 - a^N}{1 - a e^{-j(2\pi k)/N}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$

(c)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2kn} \stackrel{\text{利用正交性}}{=} \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

$$\text{或} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(4\pi k)/N}} = \frac{e^{-j2\pi k} (e^{j\pi k} - e^{-j\pi k})}{e^{-j(2\pi k)/N} (e^{j(2\pi k)/N} - e^{-j(2\pi k)/N})} = e^{-j2\pi k(1-1/N)} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(2\pi k/N)}$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2kn} = \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

(d) $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} a^n W_N^{kn} = \frac{1 - a^{N/2} e^{-j\pi k}}{1 - a e^{-j(2\pi k)/N}}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$

(e)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{kn} = \frac{1 - e^{-j((2\pi k/N) - \omega_0)N}}{1 - e^{-j((2\pi k/N) - \omega_0)}} = \frac{1 - e^{j\omega_0 N}}{1 - e^{-j((2\pi k/N) - \omega_0)N}}$$

$$= e^{-j((2\pi k/N) - \omega_0)(\frac{N-1}{2})} \frac{\sin\left[\left((2\pi k/N) - \omega_0\right)N/2\right]}{\sin\left[\left((2\pi k/N) - \omega_0\right)/2\right]} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

(f)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = 0 + W_N^{k1} + 2W_N^{k2} + 3W_N^{k3} + \dots + (N-1)W_N^{k(N-1)}$$

$$W_N^k X[k] = 0 + W_N^{k2} + 2W_N^{k3} + 3W_N^{k4} + \dots + (N-1)W_N^{kN}$$

$$\therefore X[k] - W_N^k X[k] = \sum_{n=1}^{N-1} W_N^{kn} - (N-1) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} - 1 - (N-1) = -N$$

$$\therefore X[k] = \frac{-N}{1 - W_N^k}, k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{N(N-1)}{2}, k = 0$$

$$X[k] = \begin{cases} \frac{-N}{1 - W_N^k}, k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{N(N-1)}{2}, k = 0 \end{cases}$$

6-27 求以下 N 点 DFT $X[k]$ 的反变换。

(a) $X[k] = \delta[k]$

(b) $X[k] = R_N[k]$

(c) $X[k] = W_N^{mk}, 0 < m < N$

(d) $X[k] = \begin{cases} 1, k = N/2 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$

(e) $X[k] = \begin{cases} 1, k = N/4, 3N/4 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$, 其中 m 为整数, $0 < m < N/2$ 。

解: 利用 IDFT 的定义

(a) 只有直流成分 $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (\delta[k]) W_N^{-kn} = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1$

(b) 白色谱 $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi n}}{1 - e^{-j(2\pi n)/N}} = \delta[n], \quad 0 \leq n \leq N-1$

(c) (B) 的时移 $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{km} W_N^{-kn} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases} = \delta[n-m], \quad 0 \leq n \leq N-1$

(d) 只有频率为 π 的成分

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} = \frac{1}{N} X[N/2] W_N^{-Nn/2} = \frac{1}{N} e^{j\pi n} = \frac{1}{N} (-1)^n, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

(e) 只有频率为 $\pi/2$ 的成分

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} = \frac{1}{N} (X[N/4] W_N^{-Nn/4} + X[3N/4] W_N^{-3Nn/4})$$

$$= \frac{1}{N} (e^{j\pi n/2} + e^{j3\pi n/2}) = \frac{1}{N} e^{j\pi n} (e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/2}) = \frac{2}{N} (-1)^n \cos(\pi n/2), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

6-28 设长度为 8 的序列 $x[n]$ 的 8 点 DFT $X[k]$ 如图 T6-2 所示。定义一个长度为 16 的新序列

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}, \text{ 画出该序列的 16 点 DFT。}$$

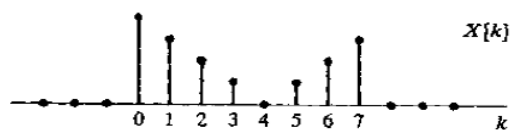
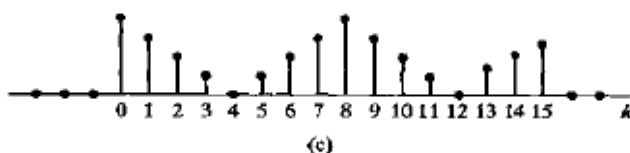


图 T6-2

解:

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \sum_{n=0}^{15} x_1[n] W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^7 x[n] W_{16}^{2kn} = X[k], \quad 0 \leq k \leq 15 \\ &= \begin{cases} X[k], & 0 \leq k \leq 7 \\ X[k-8], & 8 \leq k \leq 15 \end{cases}, \because X[k] \text{ 以 8 为周期} \end{aligned}$$



6-29 考虑有限长序列 $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$, 令

$X(z)$ 为 $x[n]$ 的 z 变换。如果我们在 $z = e^{j(2\pi/4)k}, k = 0, 1, 2, 3$ 处对 $X(z)$ 采样得到

$X_1[k] = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/4)k}}, k = 0, 1, 2, 3$, 画出作为 $X_1[k]$ 的 4 点 DFT 反变换的序列 $x_1[n]$ 。

解: 考查 DFT 与 Z 变换的关系以及频域取样问题。

采样为 4, $X_1[k] = X(z)|_{z=e^{j(2\pi/4)k}}$

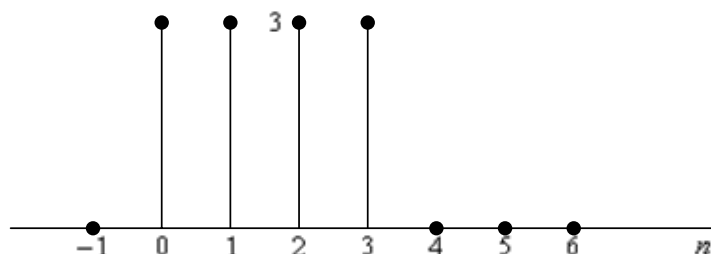
又因为 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$, 从而有 $X_1[k] = \sum_{n=0}^5 x[n] W_4^{kn}, \quad 0 \leq k \leq 4$

根据序列值, 有 $X_1[k] = W_4^{0k} + 2W_4^k + 3W_4^{2k} + 3W_4^{3k} + 2W_4^{4k} + W_4^{5k}, \quad 0 \leq k \leq 4$

因为 $W_4^{0k} = W_4^{4k}, W_4^k = W_4^{5k}$,

所以 $X_1[k] = 3W_4^{0k} + 3W_4^k + 3W_4^{2k} + 3W_4^{3k}, \quad 0 \leq k \leq 3$

所以 $x_1[n] = 3R_4[n]$



6-30 研究 20 点有限长序列 $x[n], 0 \leq n \leq 19$, 其傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$ 。

(a) 如果希望通过计算一个 N 点 DFT 求出在 $\omega = 8\pi/25$ 处的 $X(e^{j\omega})$, 请确定最小可能的 N , 并指出具体实现方法。

(b) 如果希望通过计算一个 N 点 DFT 来求出在 $\omega = 5\pi/6$ 处的 $X(e^{j\omega})$, 请确定最小可能的 N ,

并指出具体实现方法。

(c) 如果希望通过计算一个 N 点 DFT 来求出在 $\omega = 10\pi/27$ 和 $\omega = 8\pi/9$ 处的 $X(e^{j\omega})$ ，请确定最小可能的 N 。

解：用 DFT 求 FT 的取样。

(a) 最小长度 $N=25$ 。因为 DFT 长度大于序列长度，我们对 $x[n]$ 添加 5 个零点：

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq 19 \\ 0, & 20 \leq n \leq 24 \end{cases}$$

我们作 25 点 DFT，取 $X_1[4]$ 得到 $X(e^{j8\pi/25}) = X_1[4]$ 。

(b) $\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi \times 5}{12}$ ，所以取 $N=12$ ，时域混叠得到

$$x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+12r], n=0,1,\dots,11$$

作 12 点 DFT，取 $X_2[5]$ 可以得到 $X(e^{j5\pi/6}) = X_2[5]$ 。

(c) 取 27 和 9 的最小公倍数 $N=27$ ， $x[n]$ 补零，取 $X[5]$ 和 $X[12]$ 。

6-31 考虑如图 T6-3 所示的有限长序列 $x[n]$ ，其 6 点 DFT 是 $X[k]$ 。画出以下 6 点序列，它们的 6 点 DFT 为

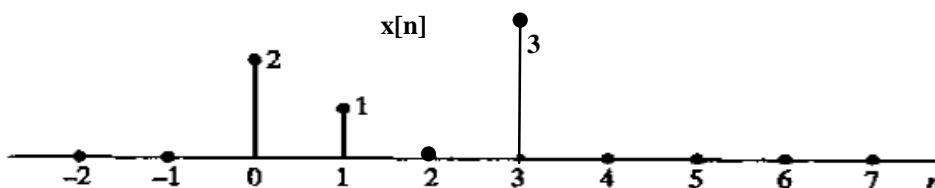


图 T6-3

$$(a) Y[k] = W_2^{-k} X[k] \quad (b) Y[k] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) X[k]$$

$$(c) Y[k] = X[((-k))_6] R_6[n] \quad (d) Y[k] = \text{Re}\{X[k]\}$$

解：(a) 时域循环移位性质： $y[n] = x[((n+3))_6] R_6[n]$

(b) 时域循环移位性质

$$Y[k] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) X[k] = \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{4\pi}{6}k} + e^{-j\frac{4\pi}{6}k} \right] X[k] = \frac{1}{2} X[k] W_6^{-2k} + \frac{1}{2} X[k] W_6^{2k}$$

$$\therefore y[n] = \frac{1}{2} (x[((n+2))_6] + x[((n-2))_6]) R_6[n]$$

(c) 时域共轭翻褶再共轭

$$y[n] = \sum_{k=0}^5 X[((-k))_6] W_6^{-kn} = \sum_{k=0}^5 X[6-k] W_6^{-kn}$$

$$= \sum_{k'=6}^1 X[k'] W_6^{-(6-k')n} = \sum_{k=6}^1 X[k] W_6^{kn}$$

$$y[((6-n))_6] = \sum_{k=6}^1 X[k] W_6^{k(6-n)} = \sum_{k=6}^1 X[k] W_6^{-kn} = x[n] \text{ (只要是一个周期就行)}$$

$$\therefore y[n] = x[((6-n))_6] R_6[n]$$

(d) 对 $Y[k] = \text{Re}\{X[k]\}$, 有 $W[k] = \frac{X[k] + X^*[k]}{2}$

从而 $\omega[n] = \frac{1}{2} \text{IDFT}\{X[k]\} + \frac{1}{2} \text{IDFT}\{X^*[k]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[((-n))_N])$

对 $0 \leq n \leq N-1$, 且 $x[n]$ 是实的, 有 $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[N-n])$

6-32 一个长度为 N 的有限长序列 $x[n], n=0, \dots, N-1$, 其 N 点 DFT 是 $X[k]$ 。用 $X[k]$ 表示以下序列的 N 点 DFT。

(a) $x_1[n] = x[N-1-n], 0 \leq n \leq N-1$; (b) $x_2[n] = x[((-n))_N], 0 \leq n \leq N-1$;

(c) $x_3[n] = (-1)^n x[n], 0 \leq n \leq N-1$; (d) $x_4[n] = \begin{cases} x[n+N/2], & 0 \leq n \leq N/2-1 \\ x[n-N/2], & N/2 \leq n \leq N-1 \end{cases}$;

(e) $x_5[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 偶} \\ 0, & n \text{ 奇} \end{cases}, 0 \leq n \leq N-1$ 。

解: 根据 DFT 的定义。

(a)

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n] W_N^{kn} = \sum_{n'=0}^{N-1} x[n'] W_N^{k(N-1-n')} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn} W_N^{-k} = W_N^{-k} X[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

(b) 是 (A) 的循环右移 1 位

$$\begin{aligned} X_2[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[((-n))_N] R_N[n] W_N^{kn} = x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[N-n] W_N^{kn} \\ &= x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[n'] W_N^{k(N-n')} = x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[n] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn} = X[((-k))_N], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

(c) 频域循环移位性质

$$\begin{aligned} X_3[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} e^{j\pi n 2N/2N} \\ &= \sum_{n'=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn-nN/2} = X[((k-N/2))_N] R_N[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

(d) 时域循环移位 $N/2$

$$\begin{aligned} X_4[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n-N/2] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n'] W_N^{k(n'-N/2)} + \sum_{n'=0}^{N/2-1} x[n'] W_N^{k(n'+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n'] W_N^{k(n'-N/2)} = (-1)^n X[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

(e) 奇数点清 0

$$\begin{aligned}
 X_5[k] &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} [1 + (-1)^n] x[n] W_N^{kn} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} e^{j\pi n 2(N/2)/N} \\
 &= \frac{1}{2} (X[k] + X[(k - N/2)_N]), \quad 0 \leq k \leq N-1
 \end{aligned}$$

6-33 已知两个序列的线性卷积 $y[n]$ 如图 T6-4 所示。

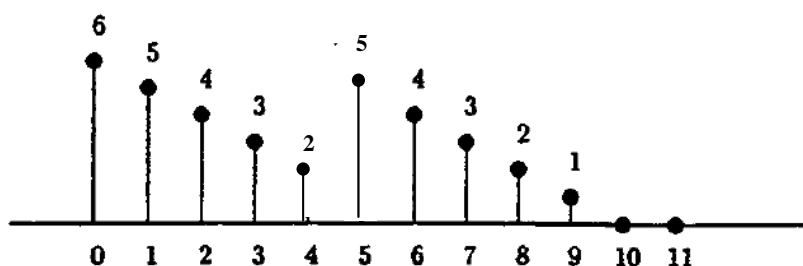


图 T6-4

- (a) 画出 6 点循环卷积; (b) 画出 10 点循环卷积。

解: 用线性卷积求循环卷积。

- (a) 对 $N=6$, 后四点 $6 \leq n \leq 9$ 加到 $0 \leq n \leq 3$, 最终只取 $n=0, \dots, 5$ 。
 (b) 对 $N=10$, 循环卷积与线性卷积相同。

6-34 考虑如图 T6-5 所示的有限长序列 $x[n]$, 其 8 点 DFT 是 $X[k]$ 。画出以下序列。

- (a) 4 点序列 $y[n]$, 其 4 点 DFT 为 $Y[k] = X[2k]$, $k=0, 1, 2, 3$;
 (b) 16 点序列 $y[n]$, 其 16 点 DFT 为 $Y[k] = \begin{cases} X[k/2], & k=0, 2, 4, \dots, 14 \\ 0, & k=1, 3, \dots, 15 \end{cases}$;
 (c) 8 点序列 $y[n]$, 其 8 点 DFT 为 $Y[k] = X[k]^2$, $k=0, \dots, 7$;
 (d) 4 点序列 $y[n]$, 其 4 点 DFT 为 $Y[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X[k+r4]R_4[k]$, $k=0, 1, 2, 3$;
 (e) 8 点序列 $y[n]$, 其 8 点 DFT 为 $Y[k] = \begin{cases} 2X[k], & k=0, 2, 4, 6 \\ 0, & k=1, 3, 5, 7 \end{cases}$ 。

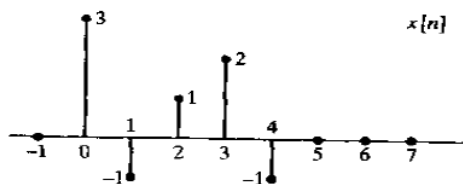


图 T6-5

解: (a) 频域取样, 时域以 4 为周期混迭。 $y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r4]R_4[n]$

解 2: 因为 $X[k] = 3 - W_8^k + W_8^{2k} + 2W_8^{3k} - W_8^{4k}$, $0 \leq k \leq 7$

$$Y[k] = X[2k] = 3 - W_8^{2k} + W_8^{4k} + 2W_8^{6k} - W_8^{8k} = 2 - W_4^k + W_4^{2k} + 2W_4^{3k}, \quad 0 \leq k \leq 3$$

$$\therefore y[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

(b) 频域内插 0, 则时域产生镜像。

$$Y[k] = \begin{cases} X[k/2], & k=0,2,4,\dots,14 \\ 0, & k=1,3,\dots,15 \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{15} Y[k] W_N^{kn} = \frac{1}{16} \sum_{k=\text{偶}}^{15} X[k/2] W_{16}^{kn} = \frac{1}{16} \sum_{r=0}^7 X[r] W_{16}^{2rn} = \frac{1}{2} x[n], n=0,\dots,7$$

利用DFT固有的周期性

$$y[n] = \begin{cases} x[n]/2, & 0 \leq n \leq 7 \\ x[n-8]/2, & 8 \leq n \leq 15 \end{cases}$$

(c) 解 1:

$$X[k] = 3 - W_8^k + W_8^{2k} + 2W_8^{3k} - W_8^{4k}, \quad 0 \leq k \leq 7$$

$$\begin{aligned} Y[k] &= X^2[k] = 9 - 3W_8^k + 3W_8^{2k} + 6W_8^{3k} - 3W_8^{4k} \\ &\quad - 3W_8^k + W_8^{2k} - W_8^{3k} - 2W_8^{4k} + W_8^{5k} \\ &\quad + 3W_8^{2k} - W_8^{3k} + W_8^{4k} + 2W_8^{5k} - W_8^{6k} \\ &\quad + 6W_8^{3k} - 2W_8^{4k} + 2W_8^{5k} + 4W_8^{6k} - 2W_8^{7k} \\ &\quad - 3W_8^{4k} + W_8^{5k} - W_8^{6k} - 2W_8^{7k} + W_8^{8k} \\ &= 10 - 6W_8^k + 7W_8^{2k} + 10W_8^{3k} - 9W_8^{4k} + 6W_8^{5k} + 2W_8^{6k} - 4W_8^{7k} \\ y[n] &= 10\delta[n] - 6\delta[n-1] + 7\delta[n-2] + 10\delta[n-3] - 9\delta[n-4] \\ &\quad + 12\delta[n-5] + 2\delta[n-6] - 4\delta[n-7] \end{aligned}$$

解 2: $Y[k] = X[k]^2, \therefore y[n] = x[n](8)x[n]$

(d) 频域混迭, 则时域采样

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y[k] W_4^{-kn} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (X[k] + X[k+4]) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k+4] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 X[k] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4} \sum_{k=4}^7 X[k] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 2x[2n] \end{aligned}$$

(e) 频域奇数点清零, 则时域是原序列+循环移位 4 点的序列

$$Y[k] = X[k] + (-1)^k X[k] = X[k] + W_8^{4k} X[k]$$

由 DFT 时域循环移位性质可得: $y[n] = x[n] + x[(n-4)_8] R_8[n]$

*6-35 已知两个 FIR 系统其单位脉冲响应分别为 $h_1[n]$ 在 $0 \leq n \leq 2N-1$ 之外为零和

$$h_2[n] = \begin{cases} h_1[n] + h_1[n+N], & n=0,1,\dots,N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \text{ 证明它们对周期为 } N \text{ 的输入信号 } \tilde{x}[n] \text{ 的响应相}$$

同。

解:

方法1: 利用频响在N个频率点(周期信号的频率)取样相同

$$\begin{aligned}
 \because h_2[n] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[n+rN]R_N[n] \\
 \therefore H_2(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} &= H_1(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, k=0,1,\dots,N-1 \\
 \therefore H_2(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \tilde{X}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} &= [H_2(e^{j\omega})\tilde{X}(e^{j\omega})]|_{\omega=2\pi k/N} \\
 &= H_1(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \tilde{X}(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} = [H_1(e^{j\omega})\tilde{X}(e^{j\omega})]|_{\omega=2\pi k/N} \\
 \therefore \tilde{Y}_2(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} &= \tilde{Y}_1(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \\
 \therefore \tilde{y}_2[n] &= \tilde{y}_1[n+rN], \tilde{y}_1[n] = \tilde{y}_1[n+rN] \\
 \therefore \tilde{Y}_2(e^{j\omega}) &= \tilde{Y}_1(e^{j\omega}) = 0, \omega \neq 2\pi k/N \\
 \therefore \tilde{Y}_2(e^{j\omega}) &= \tilde{Y}_1(e^{j\omega}), 0 \leq \omega \leq 2\pi, \therefore \tilde{y}_2[n] = \tilde{y}_1[n]
 \end{aligned}$$

方法2: 利用输入信号的周期性

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_1[n] &= (\tilde{x}[n]h_1[0] + \dots + \tilde{x}[n-N+1]h_1[N-1]) + (\tilde{x}[n-N]h_1[N] + \dots + \tilde{x}[n-2N+1]h_1[2N-1]) \\
 &= \tilde{x}[n](h_1[0] + h_1[N]) + \dots + \tilde{x}[n-N+1](h_1[N-1] + h_1[2N-1]) \\
 &= \tilde{x}[n]h_2[0] + \dots + \tilde{x}[n-N+1]h_2[N-1] = \tilde{y}_2[n]
 \end{aligned}$$

*6-36 一个 16 点序列 $x[n]$ 的 z 变换是 $X(z)$ ，现在希望求出 $X(z)$ 在

$z = 0.5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}$, $k = 0, \dots, 9$ 处的 10 个等间隔点处的样本，如何修正 $x[n]$ 以得到一个 10 点序列 $x_1[n]$ ，使其 10 点 DFT $X_1[k] = X(z)|_{z=0.5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}$ 。

解:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{15} x[n]z^{-n} \\
 X_1[k] &= X(z)|_{z=0.5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}} = \sum_{n=0}^{15} x[n]\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/10}\right)^{-n} W_{10}^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^9 x[n]\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/10}\right)^{-n} W_{10}^{kn} + \sum_{n=10}^{15} x[n]\left(\frac{1}{2}e^{j\pi/10}\right)^{-n} W_{10}^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^9 x[n]\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n/10}\right) W_{10}^{kn} + \sum_{n=0}^5 x[10+n']\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n'/10} \cdot e^{-j\pi n}\right) W_{10}^{k(n'+10)} \\
 &= \sum_{n=0}^9 \left(x[n]\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n/10}\right) + (-1)^n x[10+n]\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n/10}\right)\right) W_{10}^{kn} \\
 x_1[n] &= x[n]\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n/10}\right) + (-1)^n x[10+n]\left(\frac{1}{2}e^{-j\pi n/10}\right), \text{即乘指数序列后再混迭}
 \end{aligned}$$

*6-37 一个长度为 5 的序列 $x[n]$ 在 $0 \leq n \leq 4$ 之外为零，给出以下已知条件，确定该序列。

(a) $x[n]$ 的 5 点 DFT 有形式 $X[k] = A_0 + A_1 \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + A_2 \cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right)$ ，其中 A_0 A_1 和 A_2 为某未知常数；

- (b) $\sum_{n=0}^4 (-1)^n x[n] = 1$; (c) $X[0] = 2$;
 (d) $\sum_{m=0}^7 \omega[m] x[\left((n-m)\right)_8] \big|_{n=2} = 8$, 其中序列 $\omega[n]$ 如图 T6-6 所示。

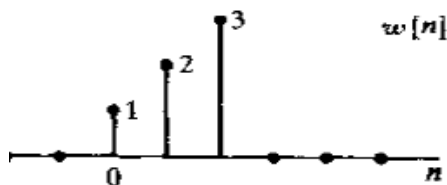


图 T6-6

解：根据条件 A：

$$\begin{aligned}
 X[k] &= A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) + A_2 \sin\left(\frac{4\pi k}{5}\right) \\
 &= A_0 + \frac{1}{2} A_1 \left(e^{j\frac{2\pi k}{5}} + e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \right) + \frac{1}{2} A_2 \left(e^{j\frac{4\pi k}{5}} + e^{-j\frac{4\pi k}{5}} \right) \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} W_5^k + \frac{A_1}{2} W_5^{-k} W_5^{5k} + \frac{A_2}{2} W_5^{2k} + \frac{A_2}{2} W_5^{-2k} W_5^{5k} \\
 &= A_0 + \frac{A_1}{2} W_5^k + \frac{A_2}{2} W_5^{2k} + \frac{A_2}{2j} W_5^{3k} + \frac{A_1}{2j} W_5^{4k} \\
 \therefore x[n] &= A_0 \delta[n] + \frac{A_1}{2} \delta[n-1] + \frac{A_2}{2} \delta[n-2] + \frac{A_2}{2} \delta[n-3] + \frac{A_1}{2} \delta[n-4]
 \end{aligned}$$

根据条件 B: $\sum_{n=0}^4 (-1)^n x[n] = 1, \therefore A_0 - \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} - \frac{A_2}{2} + \frac{A_1}{2} = 1, \therefore A_0 = 1$

根据条件 C: $\sum_{n=0}^4 x[n] = 2, \therefore A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_2}{2} + \frac{A_1}{2} = 2, \therefore 1 + A_1 + A_2 = 2$

根据条件 D: 已知 $x[n]$ 和 $\omega[n]$ 循环卷积 $n=2$ 的值。因为 $N = 8 > 5 + 3 - 1$, 所以线性卷积就等于循环卷积, 所以

$$\sum_{m=0}^7 \omega[m] x[\left((n-m)\right)_8] = (x[n] + 2x[n-1] + 3x[n-2]) \big|_{n=2} = 8$$

$$\therefore x[2] + 2x[1] + 3x[0] = 8, \therefore \frac{1}{2} A_2 + A_1 + 3 = 8$$

解出: $A_1=9, A_2=-8$

$$x[n] = \delta[n] + \frac{9}{2} \delta[n-1] - 4\delta[n-2] - 4\delta[n-3] + \frac{9}{2} \delta[n-4]$$

*6-38 设信号 $x[n]$ 长度为 N , 下面的步骤试图从频域实现对 $x[n]$ 的理想低通滤波。

步骤 1. 对信号作 N 点 DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, k = 0, \dots, N-1$$

步骤 2. 将 $X[k]$ 的高频清零得到输出信号的 DFT:

$$Y[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0, \dots, N/4-1, 3N/4, \dots, N-1 \\ 0, & k = N/4, \dots, 3N/4-1 \end{cases}$$

步骤 3. 对 $Y[k]$ 作 N 点 IDFT 得到输出信号:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} Y[k] W_N^{-nk}, n = 0, \dots, N-1$$

分析 $y[n]$ 是否是对 $x[n]$ 理想滤波的结果? 即以下两式是否成立:

$$y[n] = x[n] * h_d[n], n = 0, \dots, N-1$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_d(e^{j\omega})$$

其中 $h_d[n]$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 分别是截止频率为 $\pi/2$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应和频率响应。

解: 对理想低通频响 N 点取样得到

$$H_d[k] = H_d(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, k = 0, \dots, N-1$$

则步骤 2 相当于

$$Y[k] = X[k] H_d[k], k = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

$$\text{设 } h_d[n] = \text{IDFT}\{H_d(e^{j\omega})\}$$

$$h[n] = \text{IDFT}\{H_d[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d[n-rN] R_N[n] \neq h_d[n]$$

因为 (1) 式, 所以

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] (N) h[n], n = 0, \dots, N-1 \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m] h[(n-m)_N] \right] R_N[n] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d[n-m+rN] \right] R_N[n] \\ &= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x[m] h_d[n-m+rN] \right) \right] R_N[n] = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n] * h_d[n+rN] \right] R_N[n] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_d[n+rN] R_N[n] \neq x[n] * h_d[n], \text{ 其中 } y_d[n] = x[n] * h_d[n] \end{aligned}$$

所以不成立。也就是说, 不能采用对 DFT 的高频谱线清零的方式来实现理想的低通滤波。因为对高频 DFT 谱线 (只是傅立叶变换的取样) 清零不表示对高频傅里叶变换清零。

*6-39 图 6.5-4 所示系统中, 已知 $x_c(t) = 1 + \cos(160\pi t) + \cos(320\pi t)$, $1/T = 1024\text{Hz}$, 对于以下两种情况, 不用计算 DFT 的解析表达式, 分别画出 64 点 DFT 的幅度 $|V[k]|$ 的草图, 要求标出峰值点的频率。

$$(a) \quad v[n] = x_c(t)|_{t=nT} \quad 0 \leq n \leq 63;$$

$$(b) \quad v[n] = w_h[n] x_c(t)|_{t=nT} \quad 0 \leq n \leq 63, \text{ 其中 } w_h[n] \text{ 是汉宁窗。}$$

解：本题考察窗形状对谱分析的影响。

解：矩形窗：

$$(1) \text{加窗后主瓣宽: } \Delta m l_1 = \frac{2f_s}{L} = 32 \text{ Hz}$$

$$(2) \text{频谱取样后: 谱线间隔 } \Delta f = \frac{f_s}{N} = 16 \text{ Hz}$$

3个频率对应的谱线: $k_0 = 0$

$$f_1 = k_1 \Delta f, k_1 = 5, 64 - 5$$

$$f_2 = k_2 \Delta f, k_2 = 10, 64 - 10$$

主瓣宽正好谱线间隔的2倍, 所以只有5根谱线非0, $k = 0, 5, 10, 54, 59$

汉宁窗：

$$(1) \text{加窗后主瓣宽 } \Delta m l_2 = \frac{4f_s}{L} = 64 \text{ Hz},$$

$$(2) \text{频谱取样后: 谱线间隔 } \Delta f = \frac{f_s}{N} = 16 \text{ Hz}$$

3个频率对应的谱线: $k_0 = 0$

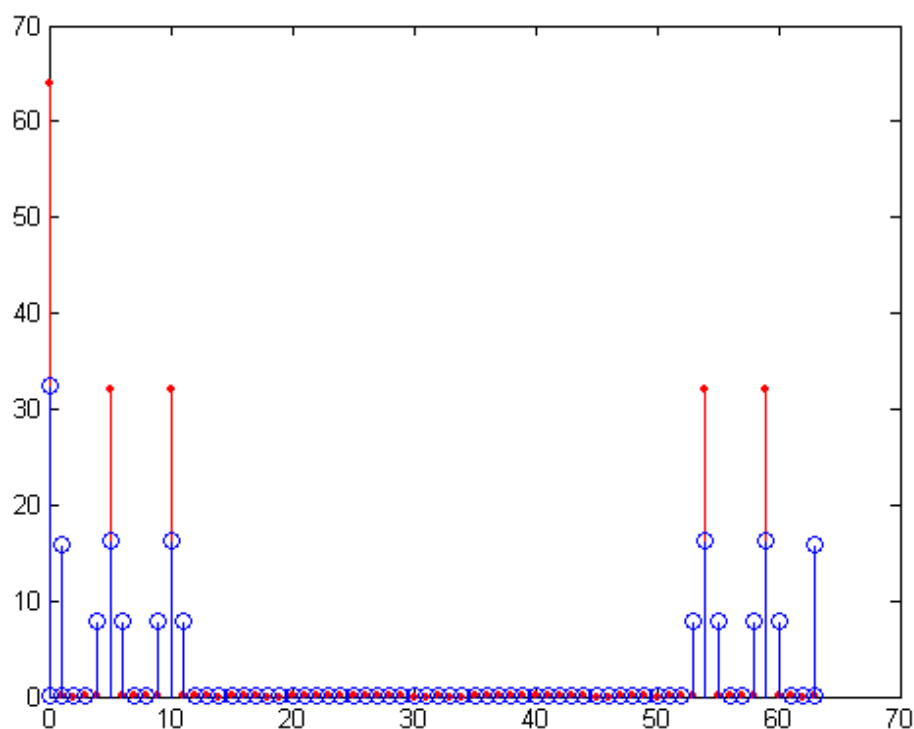
$$f_1 = k_1 \Delta f, k_1 = 5, 64 - 5$$

$$f_2 = k_2 \Delta f, k_2 = 10, 64 - 10$$

主瓣宽正好谱线间隔的4倍, 还有8根谱线非0

$k = 0, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 53, 54, 55, 58, 59, 60$

下图：红色矩形窗，兰色汉宁窗。



*6-40 图 6.5-4 所示系统中, 已知无限长正弦信号为 $x[n] = \cos(0.45\pi n)\cos(0.55\pi n)$ 。要求取一段作 DFT, 其结果就是该周期信号的 DFS, 则应如何选择窗口的形状、长度和 DFT 点数。

解 1: $x[n] = \cos(0.45\pi n) \cos(0.55\pi n) = \frac{1}{2} \cos(\pi n) + \cos(0.1\pi)$

信号周期为 20。根据 DFS 的定义，取若干个周期作同样点的变换，，
所以窗长和 DFT 点数均为 20 的整数倍，采用矩形窗。

解 2: 根据信号两个频率 π 和 0.1π ，要被取样到：

$$\pi = \frac{2\pi}{N} k_1, (0.1\pi) = \frac{2\pi}{N} k_2$$

$$\therefore N = 2k_1, N = 20k_2$$

所以 N 取 2 和 20 的最小公倍数 20 的整数倍， $k_2 = 1$ ， $k_1 = 10$ 。

要使只取样主瓣的极大点和旁瓣的零点，需主瓣宽为取样间隔的 2 倍

即 $4\pi/20$ ，另外要求 DFT 点数大于等于窗长，所以只能选矩形窗，窗长和 DFT 点数均为 20 的倍数。

MATLAB 上机题 (6-41 题—6-44 题)

6-41 已知序列 $x[n] = \{4, 3, 2, 1, 2, 3, 4\}, 0 \leq n \leq 6$ 。

(a) 画出 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的幅度和相位曲线；

(b) 画出 $x[n]$ 的 32 点 DFT $X[k]$ 的幅度和相位，要求与 (a) 画在一幅图上，验证频域取样关系；

(c) 画出用 $X[k]$ 经过 32 点 IDFT 得到的 $x[n]$ ，验证 DFT 和 IDFT 的唯一性。

提示：可以调用的函数有 `fplot()`、`freqz()`、`fft()`、`ifft()` 等。

解：验证正反变换及频域取样。

(a) 解法 1:

```
n=0:6;          x=[4,3,2,1,2,3,4];          subplot(1,2,1);
fplot('abs(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)+2*exp(-j*4*w)+3*exp(-j*5*w)
+4*exp(-j*6*w))', [0,2*pi], 'r');          subplot(1,2,2);
fplot('angle(4+3*exp(-j*w)+2*exp(-j*2*w)+exp(-j*3*w)+2*exp(-j*4*w)+3*exp(-j*5*
w)+4*exp(-j*6*w))', [0,2*pi], 'r');
```

解法 2:

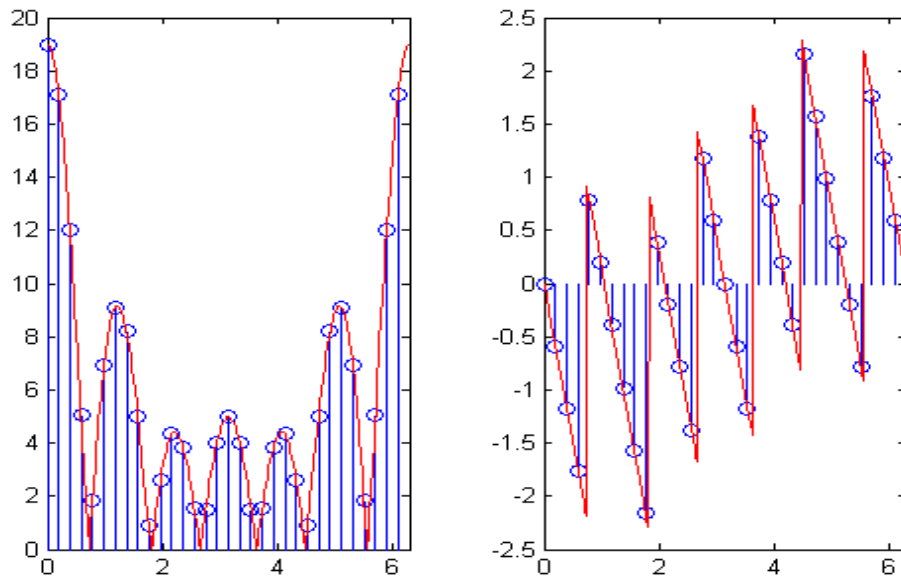
```
B=[4,3,2,1,2,3,4];      A=1;          freqz(B,A)
```

解法 3:

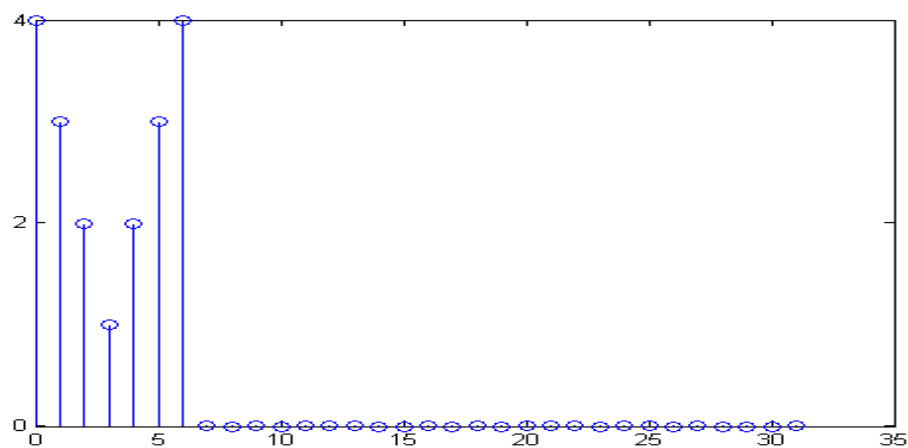
```
n=0:6;          x=[4,3,2,1,2,3,4];      k=0:511;
W=exp(-j*2*pi/512).^(n'*k);      X=x*W;
subplot(1,2,1);      plot(k/256,abs(X)); subplot(1,2,2);      plot(k/256,angle(X))
```

(b)

```
x=[4,3,2,1,2,3,4];      X=fft(x,32);      k=0:31;
subplot(1,2,1);      hold on; stem(pi*k/16,abs(X));
subplot(1,2,2);      hold on; stem(pi*k/16,angle(X))
```



(c) `x=ifft(X,32);` `figure; stem([0:31],x);`



6-42 画出以下序列的 10 点 DFT 的幅度和相位。

(a) $x_1[n] = 0.2^n, 0 \leq n \leq 9$

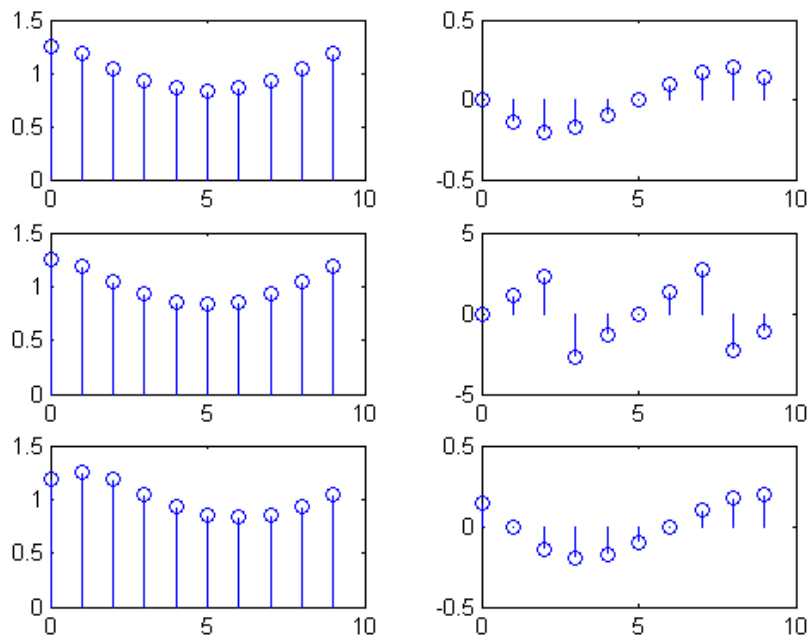
(b) $x_2[n] = x_1[((n-3))_{10}], 0 \leq n \leq 9$

(c) $x_3[n] = x_1[n]e^{j0.4\pi n}, 0 \leq n \leq 9$

提示：可以调用的函数有 `circshift()` 和 `fft()` 等。

解：验证时域和频域循环移位性质。

```
n=0:9; x1=0.2.^n; X1=fft(x1,10);
subplot(3,2,1); stem(n,abs(X1)); subplot(3,2,2); stem(n,angle(X1));
x2=[x1(3:10) x1(1:2)]; X2=fft(x2,10); %or x2=circshift(x1,[0,3]);
subplot(3,2,3); stem(n,abs(X2)); subplot(3,2,4); stem(n,angle(X2));
x3=x1.*exp(j*0.2*pi*n); X3=fft(x3,10);
subplot(3,2,5); stem(n,abs(X3)); subplot(3,2,6); stem(n,angle(X3));
```



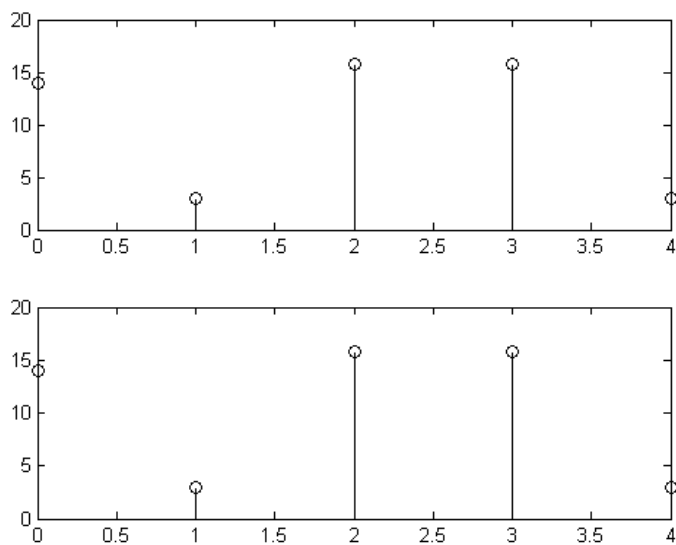
6-43 对于序列 $x_1[n] = \{2, 1, 0, 4\}$ 和 $x_2[n] = \{1, 0, 2, -1\}$, $0 \leq n \leq 3$

(a) 画出它们的 5 点 DFT 的乘积; (b) 画出它们的 5 点循环卷积的 5 点 DFT。
比较两个结果。

提示: 可以调用的函数有 `fft()`、`ifft()` 和 `circshift()` 等。

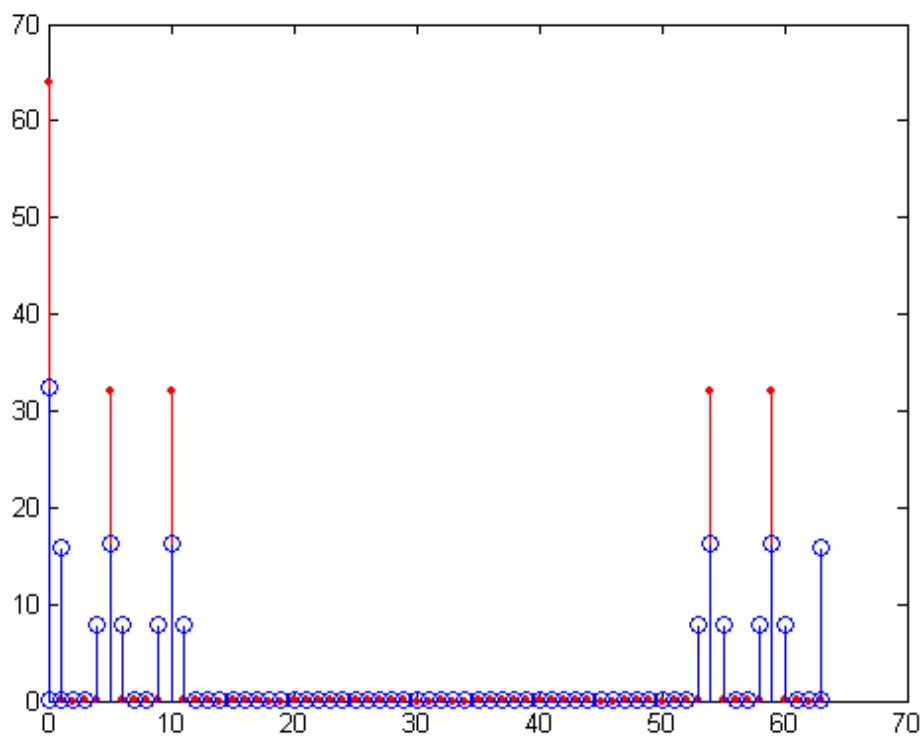
解: 验证循环卷积性质。

```
x1=[2 1 0 4 0];    x2=[1 0 2 -1 0];    X=fft(x1,5).*fft(x2,5);
subplot(2,1,1);      stem([0:4],abs(X));
x2=[x2(1) x2(5):-1:2];
x3(1)=sum(x1.*x2);
for n=1:4
    tmp=circshift(x2,[0,n]);
    x3(n+1)=sum(x1.*tmp);
end
X3=fft(x3,5);
subplot(2,1,2);      stem([0:4],abs(X3));
```



6-44 同题 6-39，注意观察窗形状对结果的影响。

解： $n=0:63;$ $x=1+\cos(2\pi*80*n/1024)+\cos(2\pi*160*n/1024);$
 $k=0:63;$ $X=\text{fft}(x,64);$ $\text{stem}(k,\text{abs}(X),'r')$
 Hold on
 $y=(1+\cos(2\pi*80*n/1024)+\cos(2\pi*160*n/1024)).*\text{hanning}(64);$
 $Y=\text{fft}(y,64);$ $\text{stem}(k,\text{abs}(Y),'r')$



第 7 章

单项选择题 (7-1 题—7-8 题)

- 7-1 关于基 2FFT 算法错误的说法是 (A)
- (A) 时域抽选只能采取输入序列倒位序和输出序列正常位序的方式排列
 (B) 时域抽选和频域抽选算法的运算量和占用存储空间相同
 (C) 时域抽选与频域抽选算法流图的本质区别是基本蝶型运算不同 ;
 (D) 输入和输出均正常位序排列的算法不能采用同址运算
- 7-2 利用基 2 DIT-FFT 算法计算 1024 点 DFT, 需要蝶型的级数和每级蝶型数分别为 (C)
- (A) 11 和 1024 (B) 11 和 512
 (C) 10 和 512 (D) 1024 和 10
- 7-3 512 点时域抽选输入倒位序排列的基 2FFT 算法信号流图中, 输入数列 $X_0[3]$ 位置处应该是 (B)
- (A) $x[3]$ (B) $x[384]$
 (C) $x[2]$ (D) $x[272]$
- 解: 000000011—>1, 1000, 0000=180H
- 7-4 利用基 2DIF-FFT 算法计算 16 点 DFT, 对于输入正常位序排列且同址计算的流图, 第二级的旋转因子从上到下依次是 (B)
- (A) $W_{16}^0, W_{16}^1, W_{16}^2, W_{16}^3, W_{16}^4, W_{16}^5, W_{16}^6, W_{16}^7$
 (B) $W_{16}^0, W_{16}^2, W_{16}^4, W_{16}^6, W_{16}^0, W_{16}^2, W_{16}^4, W_{16}^6$
 (C) $W_{16}^0, W_{16}^4, W_{16}^0, W_{16}^4, W_{16}^0, W_{16}^4, W_{16}^0, W_{16}^4$
 (D) $W_{16}^0, W_{16}^4, W_{16}^2, W_{16}^6, W_{16}^0, W_{16}^4, W_{16}^2, W_{16}^6$
- 7-5 N 点基 2 FFT 算法的实数乘法与实数加法次数分别为 (A)
- (A) $2N \log_2 N, 3N \log_2 N$ (B) $\frac{N}{2} \log_2 N, N \log_2 N$
 (C) $2N \log_2 N, 4N \log_2 N$ (D) $4N \log_2 N, 4N \log_2 N$
- 7-6 图 T7-1 中的蝶型是从一个 $N=32$ 的频域抽选的基 2FFT 中取出的, 输入序列按正常顺序排列, 分成 1-5 级, 则该蝶型在流图中的级数是 (A)
- (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 无法确定

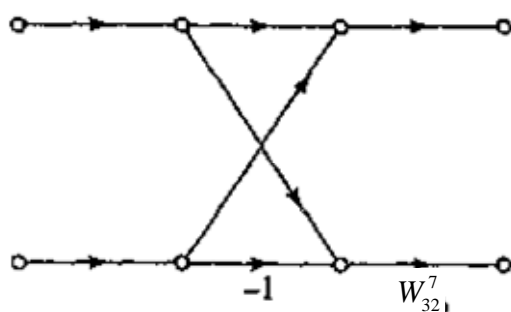


图 T7-1

- 7-7 考虑 $N=64$ 的基 2 FFT 算法, 分成 1-6 级, 已知其第 2 级的一个蝶型中具有旋转因子 W_{32}^2 。则正确的是 (B)
- (A) 是时域抽选算法 (B) 是频域抽选算法
 (C) 任何一种抽选算法都不可能在第 2 级出现该旋转因子 (C) 无法确定
- 7-8 两个长度为 N 的实序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$, 其 N 点 DFT 分别为 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$, 令 $Y[k] = X_1[k] + jX_2[k], k = 0, \dots, N-1$, 现利用快速算法得到 $Y[k]$ 的 N 点 DFT 反变换 $y[n]$,

则 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的获得方法是

(A)

(A) $x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, x_2[n] = \text{Im}\{y[n]\}$

(B) $x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, x_2[n] = j\text{Im}\{y[n]\}$

(C) $x_1[n] = \frac{y[n] + y^*[N-n]}{2}, x_2[n] = \frac{y[n] - y^*[N-n]}{2}$

(D) $x_1[n] = \frac{y[n] + y^*[N-n]}{2}, x_2[n] = \frac{y[n] - y^*[N-n]}{2j}$

解: 根据 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是实序列, 所以它们的 DFT 都是周期性共轭对称的, 也就是说 $X_1[k]$ 是 $Y[k]$ 的周期性共轭对称分量, 而 $jX_2[k]$ 是 $Y[k]$ 的周期性共轭反对称分量。 $X_1[k]$ 和 $jX_2[k]$ 的反变换即 $x_1[n]$ 和 $jx_2[n]$ 分别是 $y[n]$ 的实部和虚部乘以 j , 所以

$$x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}$$

$$x_2[n] = \text{Im}\{y[n]\}$$

填空题 (7-9 题—7-13 题)

7-9 28 点长的序列采用基 2FFT 算法求傅里叶变换的取样, 应至少将序列补零到 32 点。

7-10 考虑输入倒位序排列的 16 点基 2FFT 算法, 按顺序写出输入信号的序号 0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15。

解:

$$0 = 0000 \rightarrow 0000 = 0$$

$$1 = 0001 \rightarrow 1000 = 8$$

$$2 = 0010 \rightarrow 0100 = 4$$

$$3 = 0011 \rightarrow 1100 = 12$$

$$4 = 0100 \rightarrow 0010 = 2$$

$$5 = 0101 \rightarrow 1010 = 10$$

$$6 = 0110 \rightarrow 0110 = 6$$

$$7 = 0111 \rightarrow 1110 = 14$$

$$8 = 1000 \rightarrow 0001 = 1$$

$$9 = 1001 \rightarrow 1001 = 9$$

$$10 = 1010 \rightarrow 0101 = 5$$

$$11 = 1011 \rightarrow 1101 = 13$$

$$12 = 1100 \rightarrow 0011 = 3$$

$$13 = 1101 \rightarrow 1011 = 11$$

$$14 = 1110 \rightarrow 0111 = 7$$

$$15 = 1111 \rightarrow 1111 = 15$$

7-11 考虑 1024 点基 2FFT 算法输入正常位序输出倒位序排列的信号流图, 倒数第 2 个输出为 $X[511]$ 。

解: 11, 1111, 1110—>01, 1111, 1111=511

7-12 考虑采用基 2FFT 算法计算 128 点 DFT 的信号流图, 总共有 7 级, 每级有 64 个蝶型。

7-13 1024 点 DFT 采用直接计算需要的复数乘法次数是 1024^2 , 复数加法次数是 1024×1023 , 采用基 2FFT 算法需要的复数乘法的次数是 5120, 复数加法的次数是 10240。

如果采用可编程 DSP 芯片, 设计算一次实数乘法和一次实数加法均需要 10ns, 则采用基 2FFT 算法计算一次 1024 点 DFT 总共需要 0.512ms, 而直接计算耗时是快速算法的 133 倍。设信号的采样率是 44100Hz, 则快速算法 能 (能/否) 实现实时处理。

解: (5) 实乘和实加总次数: $N/2 \log_2 N \times 4 + (N/2 \log_2 N \times 2 + N \log_2 N \times 2) = 5N \log_2 N$

$$\text{所以 } 5 \times 1024 \times 10 \times 10 \text{ns} = 0.512 \text{ms}$$

$$(6) [4N^2 + (2N^2 + 2N(N-1))] / 5N \log_2 N = 133.11$$

(7) 1024 点信号更新 (采样) 的时间是 $1024/44100 = 23 \text{ms} > 0.512 \text{ms}$, 所以能。

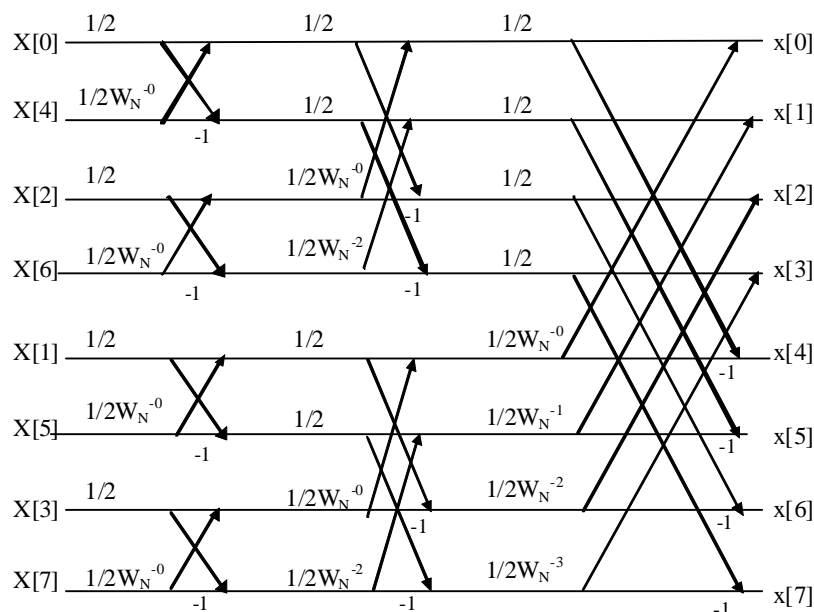
计算、证明与作图题 (7-14 题—7-24 题)

7-14 将图 7.1-3 的算法流图转置, 即所有箭头反向, 传输比不变, 输入输出信号交换, 得到一个新的算法流图, 将之与图 7.2-3 的流图作一比较, 你得出了什么结论。

解: 二者相同。验证了第 9 章的流图转置实现, 互为转置的流图代表相同的输入输出关系。

7-15 试将基 2 DIT-FFT 算法的信号流图的系数加以修改, 使之成为 IDFT 的快速算法, 画出信号流图。

解:



7-16 考虑复数乘法 $X + jY = (A + jB)(C + jD)$ 。证明可以采用以下两种计算方法，并比较两种方法需要的实数乘法和实数加法次数：

(a) $X + jY = (AC - BD) + j(BC + AD)$;

(b) $X = (A - B)D + (C - D)A$, $Y = (A - B)D + (C + D)B$ 。

解：(a) 1 次复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法。

(b)

$$(A - B)D + (C - D)A = AD - BD + AC - AD = AC - BD = X$$

$$(A - B)D + (C + D)B = AD - BD + BC + BD = AD + BC = Y$$

3 次实数乘法和 5 次实数加法完成 1 次复数乘法。

7-17 考虑采用 DSP 芯片计算 1024 点 DFT 的其中 M 点，设 DSP 芯片实现一次实数乘法和一次实数加法需要相同的时间。问：当 M 小于等于多少时，直接计算比基 2FFT 算法耗时更少？设输入是复数信号。

解：基 2FFT 实数乘法和加法的总运算次数： $[(N/2) * (4+2) + N * 2] \log_2 N = 5N \log_2 N$

$$\text{直接计算总的运算次数：} NM * (4+2) + M(N-1) * 2 = 8NM - 2M$$

$$8NM - 2M < 5N \log_2 N, M \leq 6$$

*7-18 图 T7-2 中有两片用于 4 点 DFT 计算的芯片，芯片内部采用基 2DIT-FFT 算法，输入倒位序输出正常顺序排列。下图的目的是利用这两片芯片计算一个 8 点序列 $x[n]$ 的 DFT，将该信号流程图补充完整填入方框内。

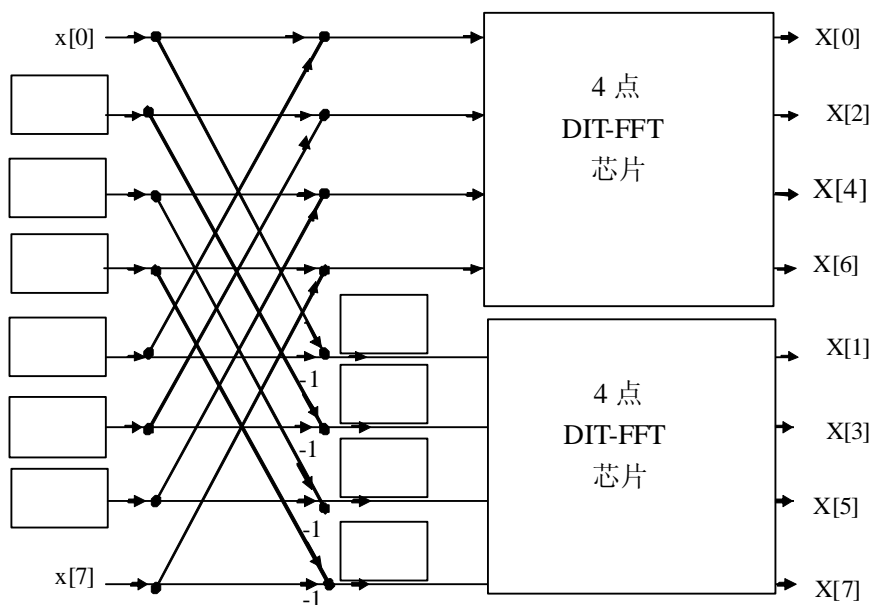


图 T7-2

解：从上到下从左到右依次是： $x[2], x[1], x[3], x[4], x[6], x[5]$ ， $W_8^0, W_8^2, W_8^1, W_8^3$ 。

利用的是 DIF-FFT 第 1 次分解的原理。蝶型组合后需根据芯片的需要倒位序排列。

*7-19 $x[n]$ 和 $h[n]$ 是两个有限长实序列， $x[n]$ 在区间 $0 \leq n \leq L-1$ 之外为零， $h[n]$ 在区间 $0 \leq n \leq M-1$ 之外为零。考虑计算二者的卷积 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。

- 直接计算卷积和，给出求 $y[n]$ 全部的非零样本需要的实数乘法和实数加法次数；。
- 采用基 2FFT 来计算卷积和，设 FFT 点数为 N ，给出计算 $y[n]$ 全部非零样本需要的实数乘法和实数加法次数；
- 设采用 DSP 芯片实现，计算一次实数乘法和实数加法需要的时间相同， $L = M, N = L + M$ ，则 N 大于等于多少时，FFT 方法比直接计算卷积和需要较少的计算时间？

解： (a)

设 $M \geq L$,

实乘: $[1+2+3, \dots, L] + [L \dots + L] + [L + (L-1) + \dots + 1]$

↑

M-L-1个

$$= 2 \sum_{k=1}^L k + (M-L-1)L = L(L+1) + (M-L-1)L = LM$$

实加: $[0+1+2, \dots, L-1] + [(L-1) \dots + (L-1)] + [(L-1) + \dots + 1 + 0]$

$$= 2 \sum_{k=1}^{L-1} k + (M-L-1)(L-1) = L(L-1) + (M-L-1)(L-1) = (L-1)(M-1)$$

设 $M < L$,

实乘: $[1+2+3, \dots, M] + [M \dots + M] + [M + (M-1) + \dots + 1]$

$$= 2 \sum_{k=1}^M k + (L-M-1)M = M(M+1) + (L-M-1)M = LM$$

实加: $[0+1+2, \dots, M-1] + [(M-1) \dots + (M-1)] + [(M-1) + \dots + 1 + 0]$

$$= 2 \sum_{k=1}^{M-1} k + (L-M-1)(M-1) = M(M-1) + (L-M-1)(M-1) = (L-1)(M-1)$$

所以, 实乘总是 LM 次, 实加总是 $(L-1)(M-1)$ 次。

(b) 步骤一: 计算 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的 N 点 DFT。

步骤二: 将两个 DFT 相乘, 即 $Y[k] = H[k]X[k]$ 。

步骤三: 利用 IDFT 计算 $y[n]$ 。

复乘: $(N/2) \log_2 N * 3 + N$ 复加: $N \log_2 N * 3$

实乘: $[(N/2) \log_2 N * 3 + N] * 4 = 6N \log_2 N + 4N$

实加: $[(N/2) \log_2 N * 3 + N] * 2 + N \log_2 N * 3 * 2 = 9N \log_2 N + 2N$

(c) 直接 $\left(\frac{N}{2}\right)^2 + \left(\frac{N}{2} - 1\right)^2$ FFT $(15 \log_2 N + 6)N$

N=8	25	408
N=16	113	1056
N=32	481	4800
N=64	1985	6144
N=128	8065	14208
N=256	32513	32256

所以 $N \geq 256$ 时 FFT 比直接计算快。如果步骤 2 后 3 分别采用 $N/2$ 点复数序列的 FFT 则答案更小。

*7-20 考虑一个 $2N$ 点实序列 $x[n]$, 其 $2N$ 点 DFT $X[k]$ 已知, 要求利用一次 N 点 IDFT 运算计算出 $x[n]$, 写出实现步骤。

解: 思路如下:

设 $x[n]$ 分解成 $x_1[n] = x[2n], x_2[n] = x[2n+1], n = 0, 1, \dots, N-1$, 则有

$$X[k] = X_1[k] + W_{2N}^k X_2[k], k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[k+N] = X_1[k] - W_{2N}^k X_2[k], k = 0, 1, \dots, N-1$$

所以

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X[k+N]}{2}, k = 0, \dots, N-1$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X[k+N]}{2W_{2N}^k}, k = 0, \dots, N-1$$

二者均周期共轭对称。可以利用 7-8 题将二者合成一个序列 $Y[k]$ ，作反变换。所以步骤如下：

$$(1) X_1[k] = \frac{X[k] + X[k+N]}{2}, k = 0, \dots, N-1$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X[k+N]}{2W_{2N}^k}, k = 0, \dots, N-1$$

$$(2) Y[k] = X_1[k] + jX_2[k], k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(3) y[n] = \text{IFFT}\{Y[k]\}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(4) x_1[n] = \text{Re}\{y[n]\}, x_2[n] = \text{Im}\{y[n]\}, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(5) x[n] = \begin{cases} x_1[n/2], n \text{ 偶} \\ x_2[(n-1)/2], n \text{ 奇} \end{cases}, n = 0, 1, \dots, 2N-1$$

*7-21 考虑一个长度为 N 的周期性偶对称的实序列 $x_1[n] = x_1[N-n], 1 \leq n \leq N-1$ ，和一个长度为 N 的周期性奇对称的实序列 $x_2[n] = -x_2[N-n], 1 \leq n \leq N-1$ ，写出利用一次 $N/2$ 点 FFT 运算计算出这两个序列的 N 点 DFT 的步骤。

解：

$$(1) x[n] = x_1[n] + x_2[n], n = 0, \dots, N-1$$

$$(2) g[n] = x[2n], n = 0, \dots, N/2-1$$

$$h[n] = x[2n+1], n = 0, \dots, N/2-1$$

$$y[n] = g[n] + jh[n], n = 0, \dots, N/2-1$$

$$(3) Y[k] = \text{FFT}\{y[n]\}, k = 0, \dots, N/2-1$$

$$(4) G[k] = \frac{Y[k] + Y^*[N/2-k]}{2}, k = 0, \dots, N/2-1$$

$$H[k] = \frac{Y[k] - Y^*[N/2-k]}{2}, k = 0, \dots, N/2-1$$

$$(5) X[k] = G[k] + W_N^k H[k], k = 0, \dots, N/2-1$$

$$X[k+N/2] = G[k] - W_N^k H[k], k = 0, \dots, N/2-1$$

$$(6) X_1[k] = \text{Re}\{X[k]\}, k = 0, \dots, N-1$$

$$X_2[k] = j \text{Im}\{X[k]\}, k = 0, \dots, N-1$$

*7-22 考虑一个 N 点偶对称的实序列 $x[n] = x[N-1-n], n = 0, \dots, N-1$ ，其 N 点 DFT 是 $X[k]$ 。

(a) 证明可以只利用 $x[n]$ 一半的数据（即 $x[n], n = 0, \dots, N/2-1$ ）计算出 $X[k]$ ；

(b) 定义以下 $N/2$ 点实序列 $y[n]$

$$\begin{cases} y[n] = x[2n], n = 0, \dots, \frac{N}{4}-1 \\ y[\frac{N}{2}-n-1] = x[2n+1], n = \frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

其 $N/2$ 点 DFT 是 $Y[k]$ ，写出由 $Y[k]$ 获得 $X[k]$ 的方法。

解: (a)

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[N-n'-1]W_N^{k(N-n'-1)} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n](W_N^{kn} + W_N^{k(N-n'-1)}) = 2W_N^{-k/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] \cos\left(\frac{2n+1}{N}k\pi\right)
 \end{aligned}$$

所以可以。

(b)

$$\begin{aligned}
 X[k] &= 2W_N^{-k/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] \cos\left(\frac{2n+1}{N}k\pi\right) \\
 &= 2W_N^{-k/2} \left[\sum_{n=0}^{N/4-1} x[2n] \cos\left(\frac{4n+1}{N}k\pi\right) + \sum_{n=0}^{N/4-1} x[2n+1] \cos\left(\frac{4n+3}{N}k\pi\right) \right] \\
 &= 2W_N^{-k/2} \left[\sum_{n=0}^{N/4-1} y[n] \cos\left(\frac{4n+1}{N}k\pi\right) + \sum_{n=0}^{N/4-1} y\left[\frac{N}{2}-n-1\right] \cos\left(\frac{4n+3}{N}k\pi\right) \right] \\
 &= 2W_N^{-k/2} \left[\sum_{n=0}^{N/4-1} y[n] \cos\left(\frac{4n+1}{N}k\pi\right) + \sum_{n'=N/4}^{N/2-1} y[n'] \cos\left(\frac{4n'+1}{N}k\pi\right) \right] \\
 &= 2W_N^{-k/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} y[n] \cos\left(\frac{4n+1}{N}k\pi\right) \\
 &= 2W_N^{-k/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} y[n] \operatorname{Re}\{e^{j\frac{4n+1}{N}k\pi}\} = 2W_N^{-k/2} \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N/2-1} y[n] e^{j\frac{4n}{N}k\pi} e^{j\frac{1}{N}k\pi}\right\} \\
 &= 2W_N^{-k/2} \operatorname{Re}\{e^{j\frac{1}{N}k\pi} \sum_{n=0}^{N/2-1} y[n] e^{j\frac{2n}{N/2}k\pi}\} = 2W_N^{-k/2} \operatorname{Re}\{e^{j\frac{k\pi}{N}} \cdot \frac{N}{2} \text{点DFT}\{y[n]\}\}
 \end{aligned}$$

*7-23 当 N 不是 2 的整数幂时, 虽然可以通过对序列补零的方式用基 2FFT 计算序列的 DFT。但是在很多情况下, 为了更高效的计算往往不希望增加 DFT 的点数。当 N 为合数即两个或更多整数因子的乘积时, 可采用类似于基 2FFT 算法的抽选方法。例如: 若 $N=RQ$, 则有可能将 N 点 DFT 表示为 R 个 Q 点 DFT 的和或 Q 个 R 点 DFT 的和, 这样可以减少计算的次数。如果 N 有许多因子, 则对每个因子均可重复这一过程。下面考虑 9 点时域抽选基 3FFT 算法。

(a) 推导并画出信号流程图 (提示: 参照附录 E.1 的基 4FFT 算法);

(b) 写出其复数乘法和复数加法的次数, 与采用 16 点基 2FFT 算法实现的运算量作一比较。

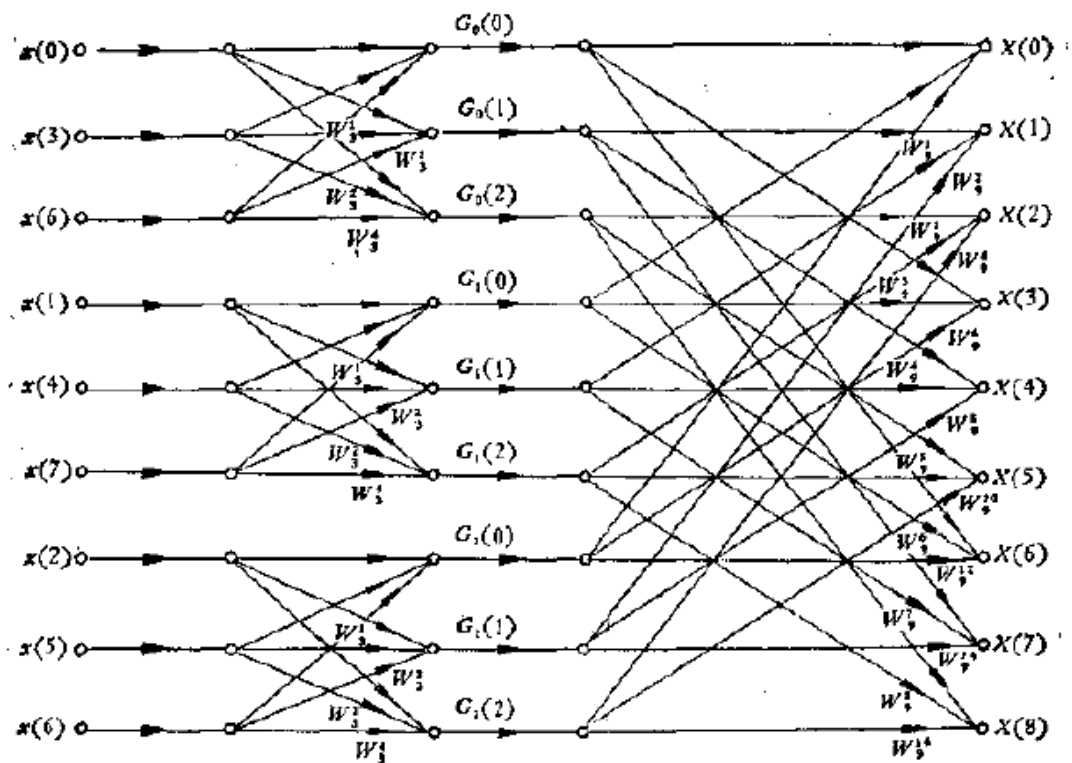
解: (a)

$$X[k] = G_0[k] + W_9^k G_1[k] + W_9^{2k} G_2[k], k = 0, \dots, 8$$

其中: $g_0[m] = x[3m], m = 0, 1, 2$

$g_1[m] = x[3m+1], m = 0, 1, 2$

$g_2[m] = x[3m+2], m = 0, 1, 2$



(b)

复数乘法: $6 \cdot \frac{N}{3} \cdot \log_3^N = 2N \log_3^N = 36(N=9)$

复数加法: $6 \cdot \frac{N}{3} \cdot \log_3^N = 2N \log_3^N = 36(N=9)$

实数乘法和实数加法总次数: $144 + 72 + 72 = 288$

基2FFT: $N = 16$

复数乘法: $\frac{N}{2} \log_2^N = 32$

复数加法: $N \log_2^N = 64$

实数乘法和实数加法总次数: $128 + 64 + 128 = 320$

*7-24 图 T7-3 给出了采用戈泽尔 (Goertzel) 算法计算输入信号 $x[n]$ 的 N 点 DFT 中某一个 $X[k]$ 的实现框图。其中输入信号是因果实序列 $x[n] \neq 0, n = 0, \dots, N-1$, 两个因果稳定系统的系统函数分别是 $H_1(z) = \frac{1}{1 - 2\cos(2\pi k_0/N)z^{-1} + z^{-2}}$ 和 $H_2(z) = 1 - W_N^{k_0}z^{-1}$, 其中 k_0 是常数。

(a) 证明 $y[N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{k_0 n} = X[k_0]$;

(b) 写出计算输出序列的第 N 个值 $y[N]$ 的递推过程, 给出实现过程中需要的实数乘法和加法的次数 (提示: 第 2 个系统只需实现一次, 无需递推 $y[N]$ 以前的样值);

(c) 与采用直接法计算一个 $X[k]$ 所需要的运算量作一比较。

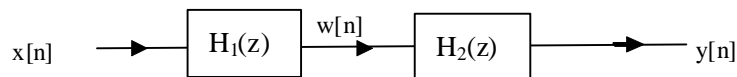


图 T7-3

解: (a)

$$H(z) = \frac{1 - W_N^{k_0} z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k_0 / N) z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{1 - W_N^{-k_0} z^{-1}}$$

$$y[n] = x[n] + W_N^{-k_0} y[n-1], n = 0, \dots, N$$

$$\begin{aligned} y[N] &= (x[N] + W_N^{-k_0} x[N-1] + \dots W_N^{-(N-1)k_0} x[1] + W_N^{-Nk_0} x[0]) W_N^{Nk_0} \\ &= W_N^{-(N-1)k_0} x[N-1] + \dots W_N^{-k_0} x[1] + x[0] = X[k_0] \end{aligned}$$

(b)

$$\therefore H_1(z) = \frac{1}{1 - 2\cos(2\pi k_0 / N) z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\therefore w[n] = x[n] + 2\cos(2\pi k_0 / N) y[n-1] + y[n-2], n = 0, \dots, N$$

实数乘法: N , 实数加法: $2N$

$$\therefore H_2(z) = 1 - W_N^{k_0} z^{-1}$$

$$\therefore y[N] = w[N] - W_N^{k_0} w[N-1]$$

实数乘法: 2, 实数加法: 1

总共实乘: $N+2$, 实加: $2N+1$

(c) 直接实乘: $2N$, 实加: $2N-2$

实乘约为直接的一半。

MATLAB 上机题 (7-25 题-7-26 题)

7-25 考虑实数序列 $x[n] = n/10 + 0.2^n + 4\cos(0.2\pi n)$, $0 \leq n \leq 31$ 。

(a) 采用 32 点 FFT 运算, 求出并画出其 DFT 的实部和虚部;

(b) 对 (a) 的结果再采用 32 点 FFT 运算, 求出并画出 $x[n]$ 的 DFT 的反变换;

(c) 采用 16 点 FFT 运算, 求出并画出 $x[n]$ 的 32 点 DFT 的实部和虚部。

提示: 可以调用的函数有 `fft()`、`real()` 和 `imag()` 等

解: % (a)

```
n=0:31;          x=0.1*n+0.2.^n+4*cos(0.2*pi*n);      X=fft(x,32);
subplot(3,2,1);stem(n,real(X), '.');      subplot(3,2,2);stem(n,imag(X), '.');
```

% (b) 验证 DFT 对偶性

```
subplot(3,2,3);      stem(n, x, '.');
```

```
x=conj(fft(conj(X)))/32; subplot(3,2,4);      stem(n, x, '.');
```

% (c) 实序列的 FFT 快速算法

```
x1(1:16)=x(2*[0:15]+1);      x2(1:16)=x(2*[1:16]);
```

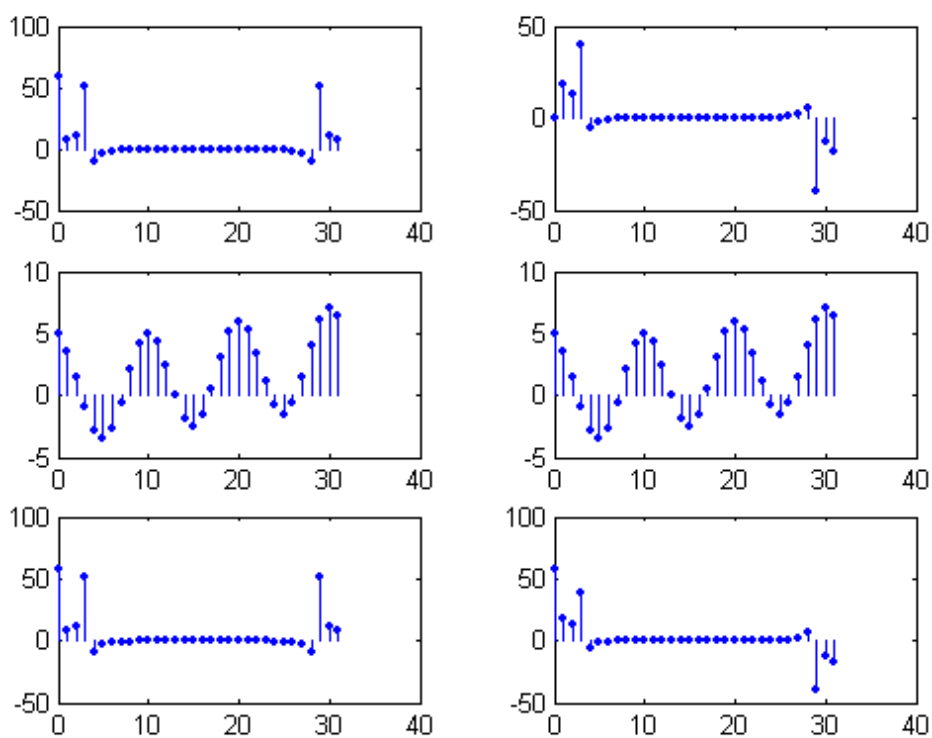
```
y=x1+j*x2;      Y=fft(y,16);
```

```
X1=[Y(1) (Y([1:15]+1)+conj(Y([15:-1:1]+1)))/2]; %注意
```

```
X2=[Y(1) (Y([1:15]+1)-conj(Y([15:-1:1]+1)))/2/j];
```

```
X=[X1+X2.*exp(-j*2*pi*[0:15]/32) X1-X2.*exp(-j*2*pi*[0:15]/32)];
```

```
subplot(3,2,5);stem(n,real(X), '.'); subplot(3,2,6);stem(n,imag(X), '.');
```



7-26 对于下列序列分别采用直接计算和 FFT 求出并画出其线性卷积。

(a) $x_1[n] = R_5[n]$, $x_2[n] = (-1)^n R_7[n]$;

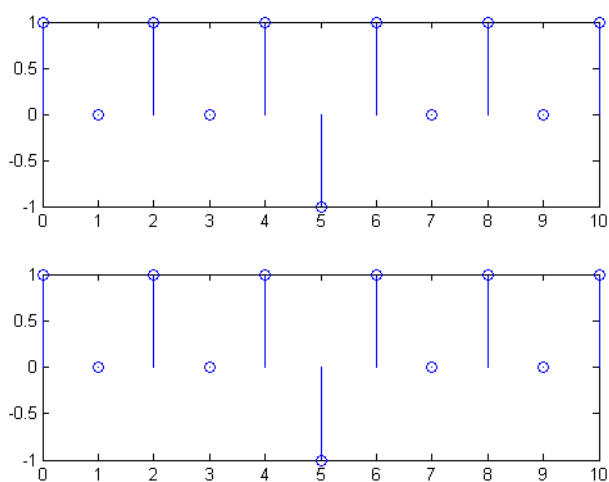
(b) $x_1[n] = \{2, 1, 1, 2\}$, $x_2[n] = 0.5^n R_5[n]$ 。

↑

提示：可以调用的函数有 `fft()`、`ifft()` 和 `conv()` 等。

解：(a)

```
x1=[1,1,1,1,1];          x2=[1 -1 1 -1 1 -1 1];
x3=conv(x1,x2);           subplot(2,1,1);      stem([0:10],x3)
x4=ifft(fft(x1,11).*fft(x2,11),11); subplot(2,1,2);      stem([0:10],x4)
```



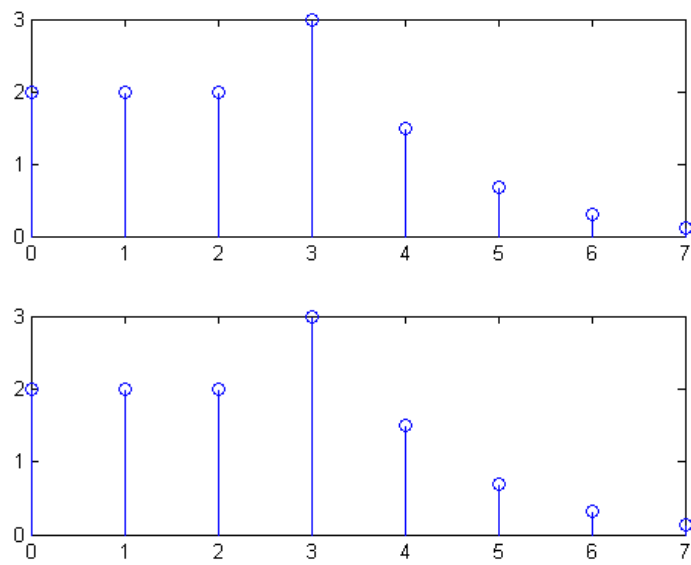
(b)

```
x1=[2,1,1,2];          x2=0.5.^[0:4];
```

```

x3=conv(x1,x2);          subplot(2,1,1);          stem([0:7],x3)
x4=ifft(fft(x1,8).*fft(x2,8),8);  subplot(2,1,2);          stem([0:7],x4)

```



第 8 章

单项选择题 (8-1 题—8-10 题)

8-1 关于 IIR 滤波器设计正确的说法是 (D)

- (A) 连续时间滤波器法不能用来设计高通滤波器
- (B) 脉冲响应不变法不能用来设计带通滤波器
- (B) 双线性变换法不能用来设计低通滤波器
- (C) 双线性变换法不能将连续时间微分器转换成离散时间微分器

8-2 关于 IIR 滤波器设计正确的说法是 (A)

- (A) 双线性变换法将连续时间滤波器的极点 s_k 映射成离散时间滤波器的极点 $\frac{2+T_d s_k}{2-T_d s_k}$
- (B) 最小相位连续时间系统经过脉冲响应不变法一定得到最小相位离散时间系统
- (C) 连续时间全通系统经过双线性变换法得到的不是离散时间全通系统
- (D) 脉冲响应不变法将连续时间滤波器的零点 s_k 映射成离散时间滤波器的零点 $e^{s_k T_d}$

解: (B) (D) 只有极点按左半平面到单位圆内的方式映射。

8-3 关于双线性变换法设计 IIR 滤波器错误的说法是 (A)

- (A) 如果原型连续时间滤波器是常数群延迟, 则离散时间滤波器也有具有常数群延迟;
- (B) 能保证离散时间滤波器和原型连续时间滤波器的频率响应满足 $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)\big|_{\Omega=0}$;
- (C) 如果三个原型连续时间系统满足 $H_c(s) = H_{c1}(s)H_{c2}(s)$, 则分别对它们变换得到的离散时间系统满足 $H(z) = H_1(z)H_2(z)$;
- (D) 如果三个原型连续时间系统满足 $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$, 则分别对它们变换得到的离散时间系统满足 $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$ 。

解: 线性相位畸变成非线性相位。

8-4 考虑图 5.4-1 所示系统, 其中的离散时间系统是一个采用双线性变换法设计得到的截止频率为 0.3π 弧度的低通滤波器, 则整个等效的连续时间系统的截止频率是 (B)

- (A) $0.3\pi T$
- (B) $0.3\pi / T$
- (C) $\frac{2}{T} \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right)$
- (D) $2 \tan^{-1}\left(\frac{0.3\pi T}{2}\right)$

解: 离散时间系统与等效连续时间系统的频响关系始终线性, 与离散时间系统是 IIR 还是 FIR, 以及什么方法设计的没有关系。

8-5 一连续时间滤波器的 3dB 截止频率为 1kHz , 其系统函数是 $H_c(s)$, 采用

$H(z) = H_c(s)\big|_{s=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 得到一离散时间滤波器, 正确的说法是 (C)

- (A) 离散时间滤波器的 3dB 截止频率为 $\frac{2}{T_d} \tan(1000/2)$;
- (B) $H(z)$ 与 T_d 的取值无关;
- (C) 如果要求离散时间滤波器的 3dB 截止频率为 0.5π 弧度, T_d 应选择 $1/(1000\pi)$;
- (D) 如果将该离散时间系统用于图 5.4-1 所示系统, 采样周期为 T , 则等效的连续时间滤波器的 3dB 截止频率为 $1000T/T_d$ 。

8-6 关于窗函数法设计 FIR 滤波器, 错误的说法是 (B)

- (A) 增加窗长可以减小过渡带宽;
- (B) 增加窗长可以增加阻带衰减;
- (C) 改变窗形状可以改变阻带衰减;
- (D) 改变窗形状可以改变过渡带宽。

8-7 关于窗函数法设计 FIR 滤波器, 正确的说法是 (B)

- (A) 先根据过渡带宽要求选择窗形状, 再根据阻带衰减要求选择窗长;
- (B) 先根据阻带衰减要求选择窗形状, 再根据过渡带宽要求选择窗长;

- (C) 先根据过渡带宽要求选择窗长, 再根据阻带衰减要求选择窗形状;
 (D) 先根据阻带衰减要求选择窗长, 再根据过渡带宽要求选择窗形状。

8-8 关于窗函数法设计 FIR 滤波器, 错误的说法是 (C)

- (A) 采用 $\beta=6$ 的凯泽窗比 $\beta=3$ 的凯泽窗阻带衰减更大;
 (B) 为了达到相同的过渡带宽, 采用汉宁窗比采用矩形窗需要更大的窗长;
 (C) 采用汉明窗, 窗越长则通带阻带波纹越小;
 (D) 通带阻带最大误差相同。

8-9 图 T8-1 两个序列作为 FIR 滤波器的单位脉冲响应, 正确的说法是 (D)

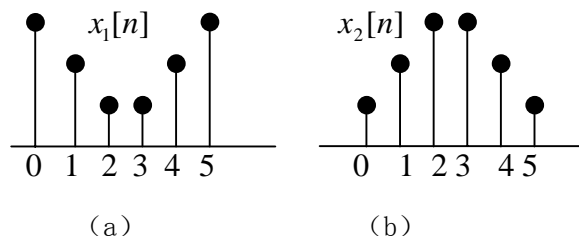
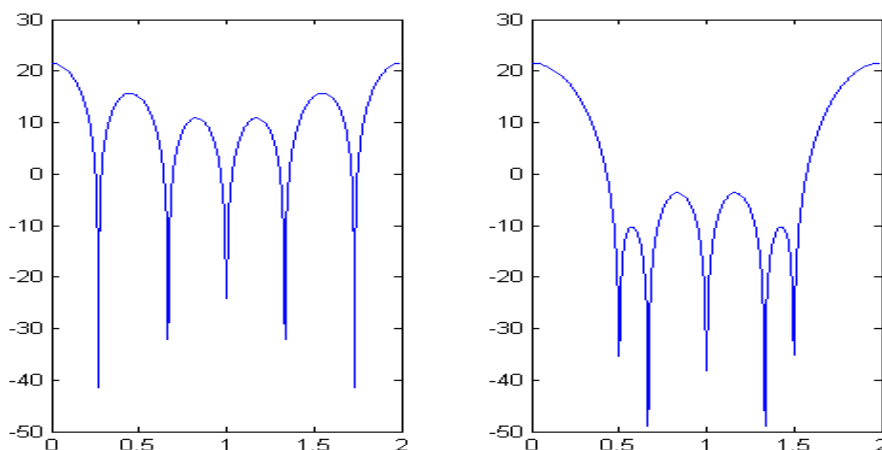


图 T8-1

- (A) 过渡带宽相同 (B) 图 (b) 较图 (a) 的过渡带宽小
 (C) 阻带衰减相同 (D) 图 (b) 较图 (a) 的阻带衰减大

解: 第 2 个序列在时域更平缓地过度到零, 所以高频少, 作为滤波器的单位脉冲响应, 则阻带衰减大, 相应地在过渡带宽方面付出代价。频响如下图。



8-10 关于离散时间滤波器的设计, 正确的说法是 (C)

- (A) 脉冲响应不变法不能设计高通 IIR 滤波器是因为系统函数在 $z=-1$ 处有零点;
 (B) 不能采用 II 类广义线性相位 FIR 滤波器设计高通滤波器是因为频率响应有混叠;
 (C) 相同技术指标下, 采用 IIR 滤波器可用比 FIR 滤波器阶数更低;
 (D) 只要设计方法得当, FIR 和 IIR 滤波器都能得到真正的广义线性相位。

解: 脉冲响应不变法不能设计高通 IIR 滤波器是因为频率响应有混叠;
 不能采用 II 类广义线性相位 FIR 滤波器设计高通滤波器是因为系统函数在 $z=-1$ 处有零点。

填空题 (8-11 题—8-22 题)

8-11 假设一离散时间滤波器的通带最大误差是 0.01, 阻带最大误差是 0.1, 则用相对误差表示为通带最大衰减 0.087 dB, 阻带最小衰减 20 dB。

解: 绝对误差 \rightarrow 相对误差

$$\alpha_p = -20 \log_{10} (1 - 0.01) = -20 \log_{10} 0.99 = 0.087 \text{ dB}$$

$$\alpha_s = -20 \log_{10} 0.1 = 20 \text{ dB}$$

8-12 一连续时间滤波器的系统函数为 $H_c(s) = \frac{1}{s^2 + s}$, 依据 $h[n] = T_d h_c(nT_d)$ 将其转换成离散

时间滤波器，其中 $T_d=1$ ，则离散时间滤波器的系统函数 $H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$ 。

解：

$$H_c(s)=\frac{1}{s^2+s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

$$\therefore H(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$$

8-13 需要设计通带截止频率为 $\pi/4$ 弧度的离散时间滤波器，采用脉冲响应不变法，设 $T_d=1\text{ms}$ ，则原型连续时间原型滤波器的通带截止频率为 125 Hz。

解：脉冲法：数字指标 \rightarrow 原型指标。

$$\Omega_c = \omega_c / T_d = \pi / 4 / 1\text{ms}$$

$$f_c = \Omega_c / 2\pi = 125\text{Hz}$$

8-14 已知一连续时间滤波器的 20dB 截止频率为 $2\pi \times 100 \text{ rad/s}$ ，采用脉冲响应不变法转换成离散时间滤波器，要求其 20dB 截止频率为 $0.5\pi \text{ rad}$ 。

(a) T_d 应该取值 2.5 ms；

(b) 将该离散时间滤波器用于图 5.4-1 所示系统，则整个系统的 20dB 截止频率是 250 Hz (设采样周期 $T=1/1000\text{ms}$)。

解：

$$(A) \omega_c = \Omega_c T_d, \therefore T_d = 0.5\pi / (2\pi \cdot 100) = 0.0025$$

$$(B) f_{c\text{eff}} = \Omega_{c\text{eff}} / 2\pi = \omega_c / T / 2\pi = 0.5\pi \cdot 1000 / 2\pi = 250\text{Hz}$$

8-15 已知采用脉冲响应不变法设计得到的离散时间系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega + 4, & \pi/3 \leq \omega \leq \pi/2 \\ \omega - 4, & -\pi/2 \leq \omega \leq -\pi/3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

设原型连续时间系统转成离散时间系统后频响无混叠，写出原型连续时间系统的频率响应

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} -\Omega T_d + 4, & \frac{\pi}{3T_d} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{2T_d} \\ \Omega T_d - 4, & -\frac{\pi}{2T_d} \leq \Omega \leq -\frac{\pi}{3T_d} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

解：脉冲法：数字频响 \rightarrow 原型频响

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T_d} = \begin{cases} -\Omega T_d + 4, & \frac{1}{3}\pi \leq \Omega T_d \leq \frac{1}{2}\pi \\ \Omega T_d - 4, & -\frac{1}{2}\pi \leq \Omega T_d \leq -\frac{1}{3}\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

8-16 已知连续时间系统的系统函数 $H_c(s)=\frac{1}{s+1}$ ，采用双线性变换法转换得到离散时间系统

的系统函数 $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$ (设 $T_d = 2$)。

解:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_d} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{1+z^{-1}}{2}$$

8-17 一连续时间滤波器的系统函数是 $H_c(s)$ ，其 3dB 截止频率为 $1kHz$ ，用

$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=1000 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 将之转换成离散时间滤波器，则离散时间滤波器的 3dB 截止频率为 0.8995π 弧度。

解：双线性法：原型指标 \rightarrow 数字指标。

$$\frac{2}{T_d} = 1000, \therefore T_d = 2 \times 10^{-3}$$

$$\Omega_c = \frac{2}{T_d} \tan \frac{\omega_c}{2}, \therefore \omega_c = 2 \tan^{-1} \left(2000\pi \cdot \frac{1}{1000} \right) = 0.8995\pi$$

8-18 现有一个 20dB 截止频率为 $2\pi(500)$ 弧度/秒的连续时间低通滤波器，用双线性变换法将之转换成一个 20dB 截止频率为 $\pi/3$ 弧度的离散时间低通滤波器，则应选择参数 $T_d = 0.184 \times 10^{-3}$ 。

$$\text{解： } 2\pi \cdot 500 = \frac{2}{T_d} \tan \frac{\pi/3}{2}, \therefore T_d = 0.184 \times 10^{-3}$$

8-19 窗函数法设计线性相位 FIR 滤波器时，滤波器的阻带衰减由 窗形状（窗形状/窗长）决定，过渡带宽由 窗形状和窗长（窗形状/窗长）决定。

8-20 设离散时间 FIR 滤波器的指标要求通带最大衰减即 $0.1dB$ ，阻带最小衰减 $30dB$ ，采用窗函数法设计，则在选择窗形状时应该考虑最大误差小于 38.82 dB。

解：

$$-20 \log_{10}(1 - \delta_p) = 0.1dB \Rightarrow \delta_p = 1 - 10^{-0.1/20} = 0.01145$$

$$-20 \log_{10} \delta_s = 30dB \Rightarrow \delta_s = 10^{-30/20} = 0.03162$$

$$\therefore \delta = \min\{\delta_p, \delta_s\} = 0.01145, \therefore -20 \log_{10} \delta = 38.82dB$$

8-21 采用布莱克曼窗族设计一个满足如下指标的 FIR 低通滤波器

$$\begin{cases} 0.98 < |H(e^{j\omega})| < 1.02, & 0 \leq |\omega| \leq 0.6\pi \\ 0 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 0.002, & 0.65\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(a) 采用海明窗可以满足以上要求且使滤波器具有最短单位脉冲响应；

(b) 用窗函数的主瓣宽的一半作为滤波器的过渡带宽的估值，估计滤波器单位脉冲响应的最小长度 $M+1 = \underline{81}$ 。

$$\text{解： } 20 \log_{10} 0.002 = -53.98dB, \therefore \text{hamming. } \frac{4\pi}{M} = 0.05\pi, \therefore M = 80, M+1 = 81$$

8-22 用窗函数法设计 FIR 高通滤波器, 要求: 阻带衰减 A 大于等于 35dB, 过渡带宽 $\Delta\omega$ 小于等于 $\pi/8$, 采用凯则窗, 则窗形状参数 $\beta = \underline{2.78}$, 窗长为 33.

解: 注意 M 取偶数。

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(A-8.7) & A > 50 \\ 0.584(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) & 21 \leq A \leq 50 \\ 0 & A < 21 \end{cases}$$

$$= 0.584(35-21)^{0.4} + 0.07886(35-21) = 2.7823$$

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega} = \frac{35-8}{2.285\pi/8} = 30.0897 \rightarrow 31 \rightarrow 32$$

所以窗长 $M+1=33$ 。

计算、证明与作图题 (8-23 题—8-29 题)

8-23 考虑图 5.4-1 所示系统, 其中采样周期为 T , 离散时间系统是一个上通带截止频率、下通带截止频率、上阻带截止频率和下阻带截止频率分别为 0.7π 、 0.3π 、 0.75π 和 0.25π 弧度的带通滤波器。

- 写出等效连续时间滤波器的四个截止频率;
- 采用脉冲响应不变法设计该离散时间滤波器, 写出原型连续时间滤波器的截止频率;
- 采用双线性变换法设计该离散时间滤波器, 写出原型连续时间滤波器的截止频率。

解:

$$(A) \Omega_{ceff} = \omega_c / T: 0.7\pi / T, 0.3\pi / T, 0.75\pi / T \text{ 和 } 0.25\pi / T$$

$$(B) \Omega_c = \omega_c / T_d: 0.7\pi / T_d, 0.3\pi / T_d, 0.75\pi / T_d \text{ 和 } 0.25\pi / T_d$$

$$(C) \Omega_c = \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right): \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.7\pi}{2}\right), \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right), \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.75\pi}{2}\right), \frac{2}{T_d} \tan\left(\frac{0.25\pi}{2}\right)$$

8-24 对于如下几种相位为零的理想滤波器, 分别写出其单位脉冲响应。

- 频率响应如下所示的理想带阻滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| < \omega_{c1} \\ 0, & \omega_{c1} < |\omega| < \omega_{c2} \\ 2, & \omega_{c2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- 频率响应如图 T8-2 所示

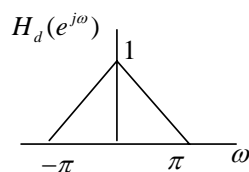


图 T8-2

- 具有如下频率响应的理想离散时间微分器

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = j\omega e^{-j\omega M/2}, -\pi < \omega < \pi$$

- 具有如下频率响应的理想离散时间希尔伯特变换器

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

解: (a) $h_d[n] = \frac{\sin(\omega_{c2}n)}{\pi n} - \frac{\sin(\omega_{c1}n)}{\pi n}, n = -\infty, \dots, \infty$

(b)

$$\because H_d(e^{j\omega}) = 2 \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * H_d(e^{j\omega}), \text{其中 } H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$\therefore h_d[n] = 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi n}, n = -\infty, \dots, \infty$$

(c)

$$H_{diff}'(e^{j\omega}) = j\omega, -\pi < \omega < \pi$$

$$\begin{aligned} h_{diff}'[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega}{n} e^{j\omega n} dj\omega n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\omega}{n} d e^{j\omega n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{n} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d \frac{\omega}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{n} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{jn^2} e^{j\omega n} dj\omega n \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega}{n} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{jn^2} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{\pi}{n} e^{j\pi n} - \frac{-\pi}{n} e^{-j\pi n} \right] - \left[\frac{1}{jn^2} e^{j\pi n} - \frac{1}{jn^2} e^{-j\pi n} \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{\pi}{n} 2 \cos(\pi n) \right] - \left[\frac{1}{n^2} 2 \sin(\pi n) \right] \right) = \frac{\cos(\pi n)}{n} - \frac{\sin(\pi n)}{\pi n^2} \\ \therefore h_{diff}'[n] &= \begin{cases} \frac{\cos(\pi(n-M/2))}{(n-M/2)} - \frac{\sin(\pi(n-M/2))}{\pi(n-M/2)^2}, & -\infty < n < \infty, n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} -j e^{j\omega n} d\omega + \int_{-\pi}^0 j e^{j\omega n} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{j\omega n}}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{e^{j\omega n}}{n} \Big|_{-\pi}^0 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{e^{j\pi n}}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{e^{-j\pi n}}{n} \right) = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(\pi n)) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} \sin^2(\pi n/2), & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

8-25 考虑采用凯泽窗设计具有如下技术指标的离散时间广义线性相位带通 FIR 滤波器

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| \leq 0.05, & 0 \leq |\omega| \leq 0.3\pi \\ 0.95 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.05, & 0.36\pi \leq |\omega| \leq 0.64\pi \\ |H(e^{j\omega})| \leq 0.05, & 0.7\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

(a) 写出采用的理想脉冲响应 $h_d[n]$;

(b) 求窗参数 β 的值;

(c) 求单位脉冲响应的最小长度 $(M+1)$ 的值。

解: (a) $h_d[n] = \frac{\sin[0.67\pi(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} - \frac{\sin[0.33\pi(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}, n = -\infty, \dots, \infty$

$$(b) A = -20 \log_{10} \delta = 26 \text{ dB}, \quad \beta = 0.5842(26-21)^{0.4} + 0.07886(26-21) = 1.5064$$

$$(c) M = \frac{26-8}{2.285(0.7\pi-0.64\pi)} = 41.79 \rightarrow 42$$

窗长 $M+1=43$ 。

*8-26 一个连续时间系统其单位阶跃响应是 $s_c(t)$ ，系统函数是 $H_c(s) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{s-s_k}$ ，

一个离散时间系统其单位阶跃响应与 $s_c(t)$ 的关系是 $s[n] = T_d s_c(t) \Big|_{t=nT_d}$ ，求离散时间系统的系统函数 $H(z)$ 。

解：阶跃响应不变法系统函数间的关系。

$$H_c(s) \rightarrow S_c(s) \rightarrow S(z) \rightarrow H(z)$$

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{s-s_k}$$

$$\because s_c(t) = u_c(t) * h_c(t), \therefore S_c(s) = U_c(s) H_c(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{s-s_k} = \sum_{k=1}^M \left(\frac{-A_k/s_k}{s} + \frac{A_k/s_k}{s-s_k} \right)$$

$$s[n] = T_d s_c(t) \Big|_{t=nT_d}, \therefore S(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{-T_d A_k/s_k}{1-e^{0T_d} z^{-1}} + \frac{T_d A_k/s_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}} \right)$$

$$\because s[n] = h[n] * u[n], \therefore S(z) = H(z) \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\therefore H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{-T_d A_k/s_k}{1-e^{0T_d} z^{-1}} + \frac{T_d A_k/s_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}} \right) (1-z^{-1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(-T_d A_k/s_k + \frac{T_d A_k/s_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}} (1-z^{-1}) \right)$$

*8-27 考虑到采用连续时间滤波器法设计的 IIR 滤波器在通带的最大幅度为 1，若给定的技术指标为

$$\begin{cases} 1-\delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1+\delta_p, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_p \\ |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, & \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{T8-1})$$

(a) 首先必须将上述指标归一化成如下形式

$$\begin{cases} 1-\delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_p \\ |H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, & \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{T8-2})$$

用 δ_p 和 δ_s 表示其中的 δ_1 和 δ_2 。

(b) 假设已经设计得到了满足 (T8-2) 式指标的离散时间滤波器的系统函数 $H_1(z)$ ，如何得到满足 (T8-1) 式指标的离散时间滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

(c) 设 (b) 中 $H_1(z)$ 的指标中 $\delta_1 = 0.1, \delta_2 = 0.01$ ，则通过 (b) 的方法得到的 $H(z)$ 的指标中的 δ_p 和 δ_s 分别是多少？

解：IIR 设计的指标归一化问题。

(a) 所有幅度除以 $1+\delta_p$ 得到归一化的幅度

$$1 - \delta_1 = \frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p}, \therefore \delta_1 = \frac{2\delta_p}{1 + \delta_p}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_s}{1 + \delta_p}$$

$$(b) \quad H(z) = H_1(z)(1 + \delta_p)$$

(c)

$$\delta_1 = \frac{2\delta_p}{1 + \delta_p}, \quad \delta_2 = \frac{\delta_s}{1 + \delta_p}$$

$$\therefore \delta_p = \frac{\delta_1}{2 - \delta_1} = \frac{0.1}{2 - 0.1} = 0.05263, \quad \delta_s = \frac{2 \cdot 0.01}{2 - 0.01} = 0.001$$

*8-28 考虑采用代数变换公式 $s = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ 从一个连续时间低通滤波器的系统函数转换得到离散时间滤波器的系统函数，设连续时间滤波器的通带截止频率和阻带截止频率分别为 Ω_p 和 Ω_s 。

(a) 给出连续时间系统与离散时间系统的频率响应之间的对应关系；

(b) 离散时间系统是哪种选频滤波器？

(c) 用 Ω_p 和 Ω_s 表示离散时间滤波器的通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 。

解：双线性变换+频率转换

$$(a) \quad s = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}, \therefore j\Omega = \frac{e^{-j\omega} + 1}{1 - e^{-j\omega}} = j \tan(\omega/2), \therefore H(e^{j\omega}) = H_c(j\Omega) \big|_{\Omega=\tan(\omega/2)}$$

(b)

$$\Omega = \tan(\omega/2),$$

$\therefore \Omega = \infty$ 映射到 $\omega = 0$, 阻带; $\Omega = -\infty$ 映射到 $\omega = 2\pi$, 阻带,

\therefore 低通 \rightarrow 高通

$$(c) \quad \Omega_p = \tan(\omega_p/2), \Omega_s = \tan(\omega_s/2), \therefore \omega_p = 2 \tan^{-1} \Omega_s, \quad \omega_s = 2 \tan^{-1} \Omega_p$$

*8-29 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $h_d[n]$ 分别是一理想滤波器的频率响应和单位脉冲响应，对 $h_d[n]$ 加窗得到一个 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h[n] = h_d[n]w[n]$ ，其频率响应为 $H(e^{j\omega})$ ， $w[n]$ 是长度为 $M+1$ 的窗序列。定义滤波器的频率响应与理想频率响应间的均方误差为

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

证明 $w[n]$ 采用矩形窗能使均方误差最小。

解：利用 PASWAL 定理

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_d[n] - h[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} |h_d[n]|^2 + \sum_{n=0}^M |h_d[n] - h[n]|^2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} |h_d[n]|^2 \end{aligned}$$

要使 ε 最小，则第2项最小，即 $h_d[n] = h[n], n = 0, \dots, M$

$\therefore w[n]$ 选矩形窗

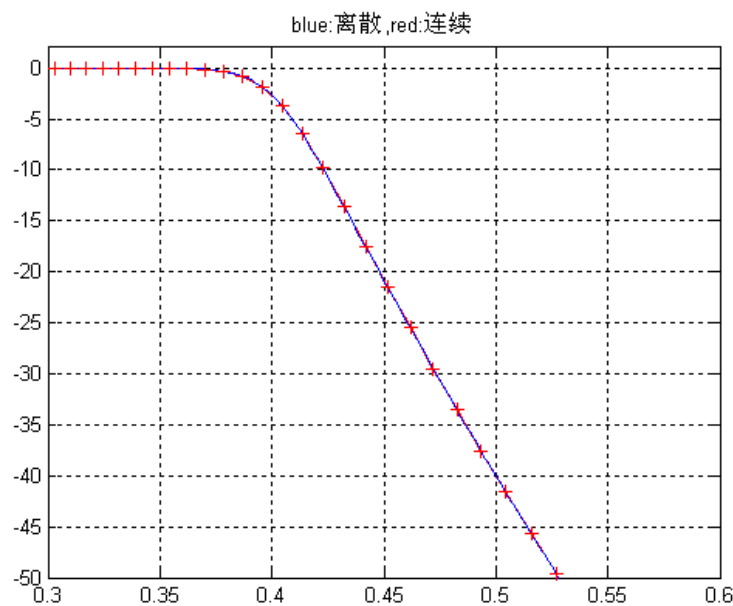
MATLAB 上机题 (8-30 题—8-35 题)

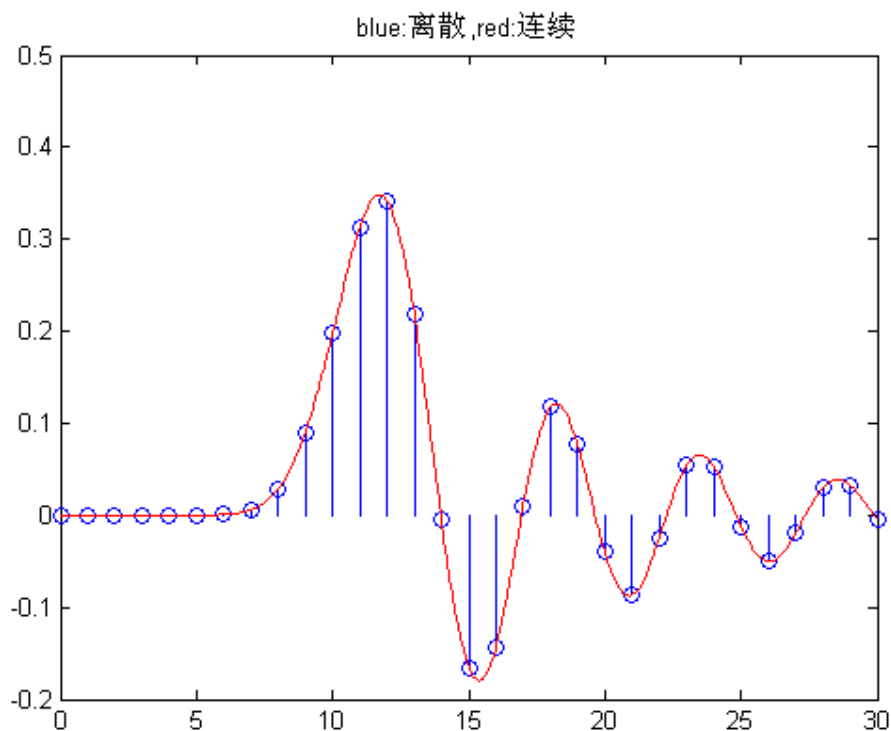
8-30 采用脉冲响应不变法设计一个巴特沃斯型离散时间低通 IIR 滤波器, 要求通带截止频率 $\omega_p = 0.4\pi$ 弧度, 阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi$ 弧度, 通带最多衰减 $\alpha_p = 3dB$, 阻带至少衰减 $\alpha_s = 40dB$ 。取 $T_d = 1$, 给出直接形式的系统函数, 画出连续时间和离散时间系统的对数幅度响应和单位脉冲响应。

提示: 可以调用的函数有 buttord()、butter()、impinvar()、freqs()、freqz()、impz()、tf() 和 impulse() 等。

解:

```
wp=0.4*pi;      ws=0.5*pi;      ap=3;      as=40;
Td=1;           Wp=wp/Td;       Ws=ws/Td;
[N,Wc]=buttord(Wp, Ws, ap, as, 's');
[Bs, As]=butter(N, Wc, 's');      [Bz, Az]=impinvar(Bs, As, 1/Td);
[H, W]=freqs(Bs, As);             plot(W*Td/pi, 20*(log10(abs(H))), 'r+');
hold on;
[H, w]=freqz(Bz, Az);             plot(w/pi, 20*(log10(abs(H))));
axis([0.3, 0.6, -50, 2]);          grid; title('blue:离散,red:连续');
figure;                          [h, n]=impz(Bz, Az); stem(n, h); hold on;
g=tf(Bs, As);                    [h1, t]=impulse(g, [0:0.1:30]); plot(t, h1, 'r');
title('blue:离散,red:连续');      axis([0, 30, -0.2, 0.5]);
```





8-31 采用脉冲响应不变法设计一个巴特沃斯型离散时间带通 IIR 滤波器，要求下上阻带截止频率分别为 $\omega_{p1} = 0.2\pi$ 和 $\omega_{p2} = 0.8\pi$ 弧度，下上通带截止频率分别为 $\omega_{p1} = 0.3\pi$ 和 $\omega_{p2} = 0.7\pi$ 弧度，通带最多衰减 $\alpha_p = 1dB$ ，阻带至少衰减 $\alpha_s = 30dB$ 。给出级联形式的系统函数，画出对数幅度响应。

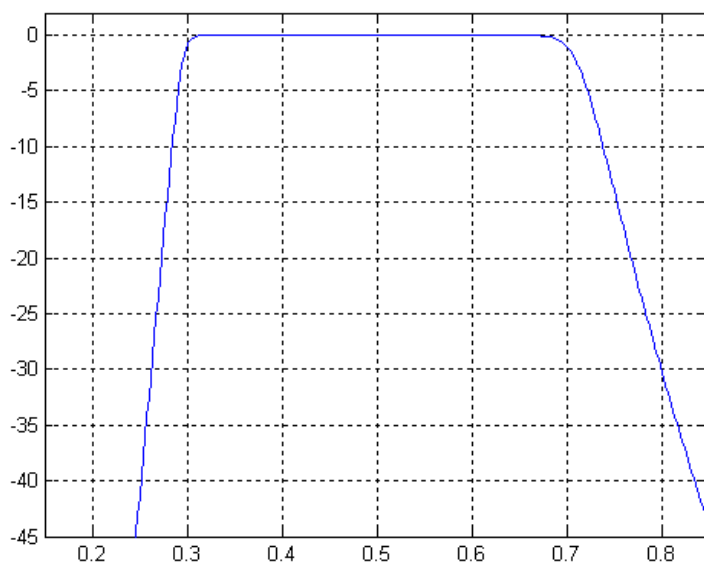
提示：可以调用的函数有 buttord()、butter()、impinvar()、freqz()和 tf2zp()等。

解：

```

wp=[0.3*pi 0.7*pi]; ws=[0.2*pi 0.8*pi]; ap=1; as=30;
Td=1; Wp=wp/Td; Ws=ws/Td;
[N,Wc]=buttord(Wp, Ws, ap, as, 's');
[Bs,As]=butter(N,Wc, 's'); [Bz,Az]=impinvar(Bs,As,1/Td);
[H,w]=freqz(Bz,Az); plot(w/pi,20*(log10(abs(H))));
axis([0.15,0.85,-45,2]); grid
[z,p,k]=tf2zp(Bz,Az)

```



8-32 设计一个切比雪夫 II 型的离散时间 IIR 高通滤波器, 要求阻带截止频率分别为 $\omega_p = 0.6\pi$ 弧度, 通带截止频率分别为 $\omega_s = 0.7\pi$ 弧度, 通带最多衰减 $\alpha_p = 3dB$, 阻带至少衰减 $\alpha_s = 40dB$ 。

(a) 采用脉冲响应不变法; (b) 采用双线性变换法。

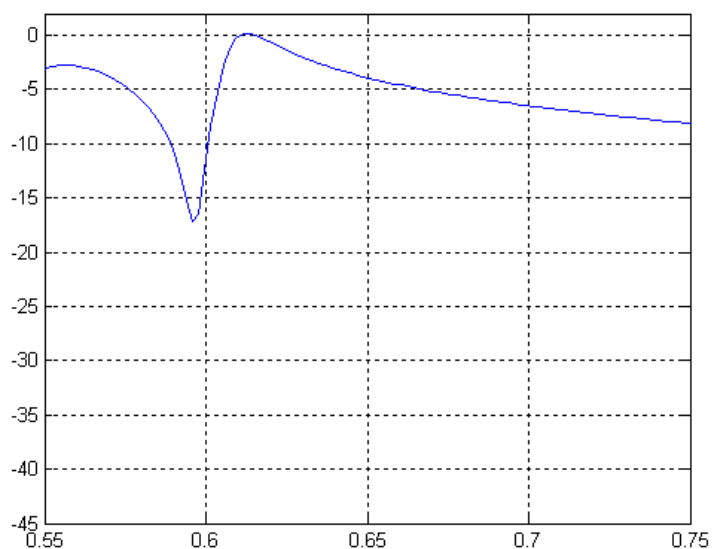
画出对数幅度响应, 你发现了什么?

提示: 可以调用的函数有 `cheb2ord()`、`cheby2()`、`impinvar()` 和 `freqz()` 等。

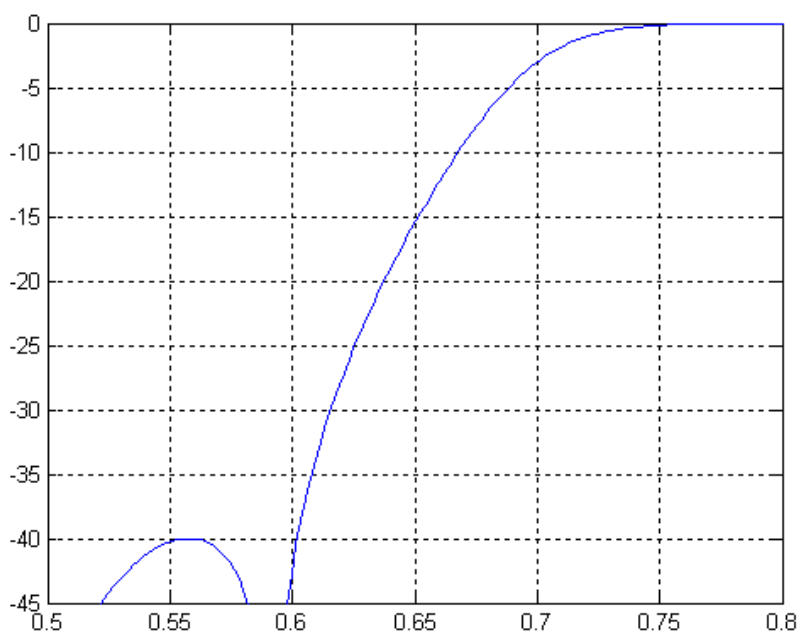
解: 脉冲法和双线性法设计高通, 前者混迭

(a)

```
ws=0.6*pi; wp=0.7*pi;      ap=3;  as=40;
Td=1;      Wp=wp/Td;      Ws=ws/Td;
[N, Wc]=cheb2ord(Wp, Ws, ap, as, 's')
[Bs, As]=cheby2(N, ap, Wc, 'high', 's'); [Bz, Az]=impinvar(Bs, As, 1/Td);
[H, w]=freqz(Bz, Az);      plot(w/pi, 20*(log10(abs(H))));
axis([0.55, 0.75, -45, 2]);      grid
```



(b) `ws=0.6*pi; wp=0.7*pi; ap=3; as=40;`
`[N,wc]= cheb2ord(wp/pi,ws/pi,ap,as);[Bz,Az]= cheby2(N,as,wc,'high');`
`[H,w]=freqz(Bz,Az);`
`plot(w/pi,20*(log10(abs(H)))); axis([0.5,0.8,-45,0]);grid`



8-33 采用布莱克曼窗族设计一个带阻 FIR 数字滤波器，要求下阻带截止频率为 0.45π ，上阻带截止频率为 0.6π ，阻带衰减至少 40dB，下通带截止频率为 0.3π ，上通带截止频率为 0.75π ，误差小于 0.5dB，画出单位取样响应和幅度响应。

提示：可以调用的函数有 `fir1()` 等。

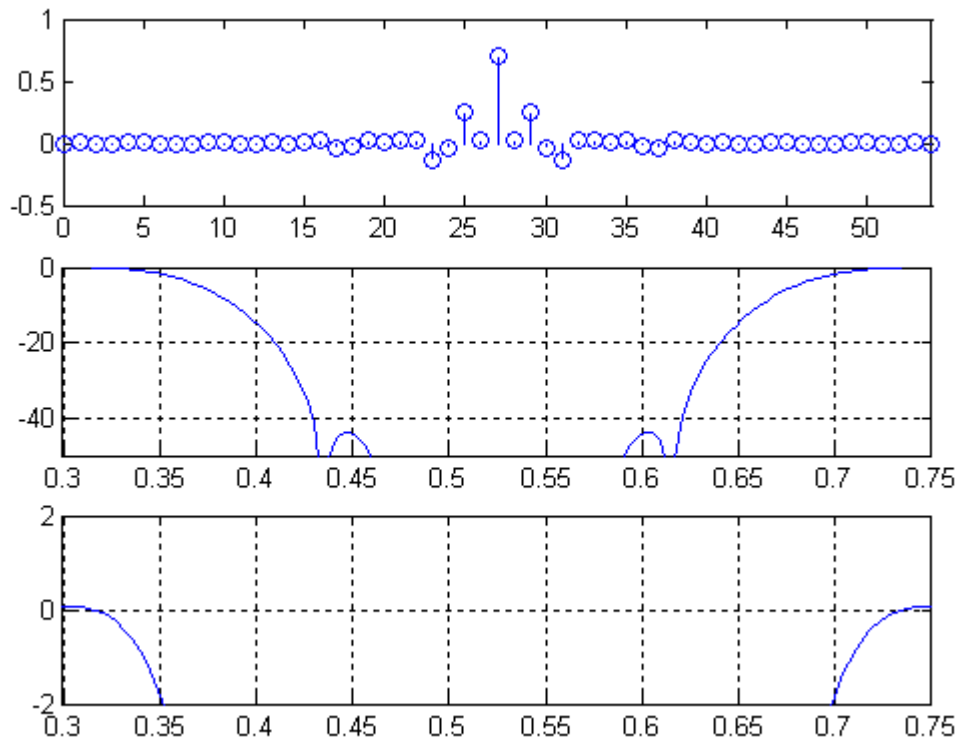
解：

`dp=1-10^(-0.5/20); ds=10^(-40/20); d=min(dp,ds);`
`A=20*log10(d) %选汉宁窗`

```

M= ceil(8*pi/((0.45-0.3)*pi))
wc=[0.375 0.675];
h=fir1(M,wc, 'stop',hanning(M+1));
n=0:M; subplot(3,1,1); stem(n,h); axis([0,M,-0.5,1]);
H=fft(h,512); k=[0:511];
subplot(3,1,2); plot(k/256,20*log10(abs(H)));
axis([0.3,0.75,-50,0]); grid on
subplot(3,1,3); plot(k/256,20*log10(abs(H)));
axis([0.3,0.75,-2,2]); grid on %放大通带截止频率

```



8-34 用凯泽窗设计一个线性相位 FIR 高通滤波器，要求通带截止频率 $\omega_p = 0.7\pi$ 弧度，阻带截止频率 $\omega_s = 0.5\pi$ 弧度，通带最大衰减 $\alpha_p = 0.3\text{dB}$ ，阻带至少衰减 $\alpha_s = 40\text{dB}$ 。

提示：可以调用的函数有 `fir1()` 等。

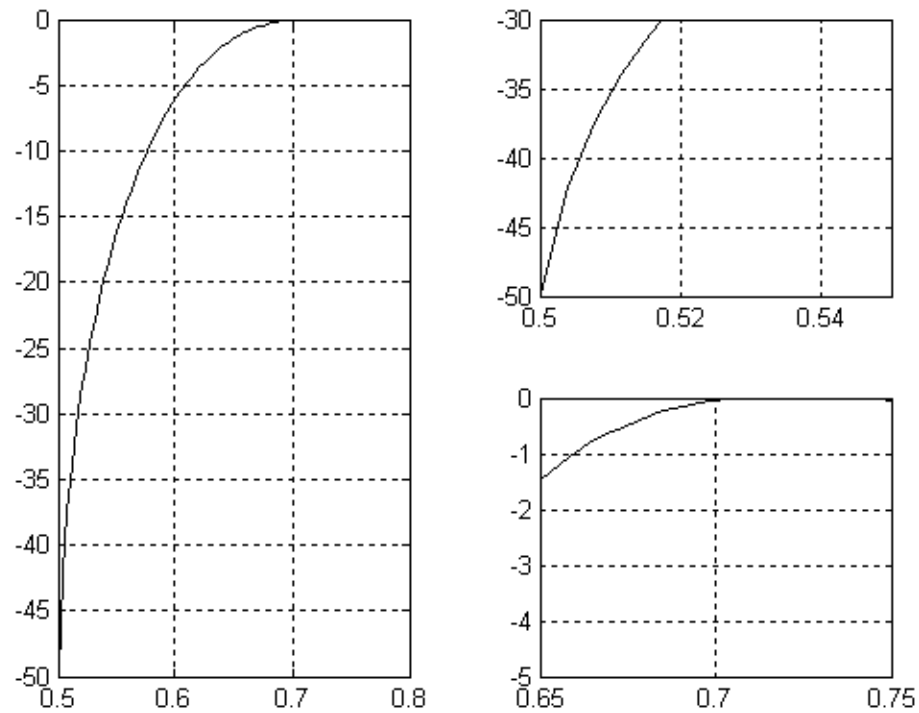
解：

```

wp=0.7*pi; ws=0.5*pi; ap=0.3; as=40;
wc=(wp+ws)/2; A=-20*log10(min(1-10^(-ap/20), 10^(-as/20)));
if A<=21
    beta=0
elseif (A>21) & (A<=50)
    beta=0.5842*(A-21).^0.4+0.07886*(A-21)
else
    beta=0.1102*(A-8.7)
end
M=ceil((A-8)/(2.285*abs(wp-ws))); M=M+rem(M,2);
h=fir1(M,wc/pi, 'high',kaiser(M+1,beta)); H=fft(h,512); k=0:511;
subplot(1,2,1); plot(k/256,20*log10(abs(H))); axis([0.5,0.8,-50,0]); grid on;
subplot(2,2,2); plot(k/256,20*log10(abs(H))); axis([0.5,0.55,-50,-30]); grid on

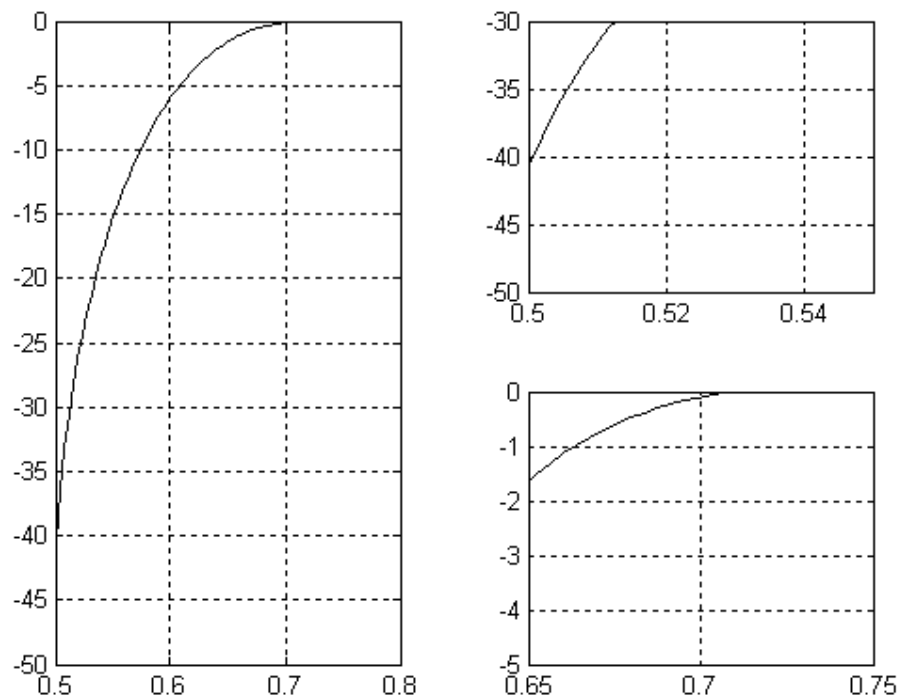
```

```
subplot(2,2,4);    plot(k/256,20*log10(abs(H)));    axis([0.65,0.75,-5,0]);    grid on
```



从输出的频响发现通带误差超过指标要求，还可调整截止频率、窗形状，以减小窗的长度，最终结果如下，阶数从 24 减到了 22。

```
h=fir1(22,0.6, 'high',kaiser(23,beta-0.1));    H=fft(h,512);    k=0:511;
subplot(1,2,1);    plot(k/256,20*log10(abs(H)));    axis([0.5,0.8,-50,0]);    grid on;
subplot(2,2,2);    plot(k/256,20*log10(abs(H)));    axis([0.5,0.55,-50,-30]);    grid on
subplot(2,2,4);    plot(k/256,20*log10(abs(H)));    axis([0.65,0.75,-5,0]);    grid on
```

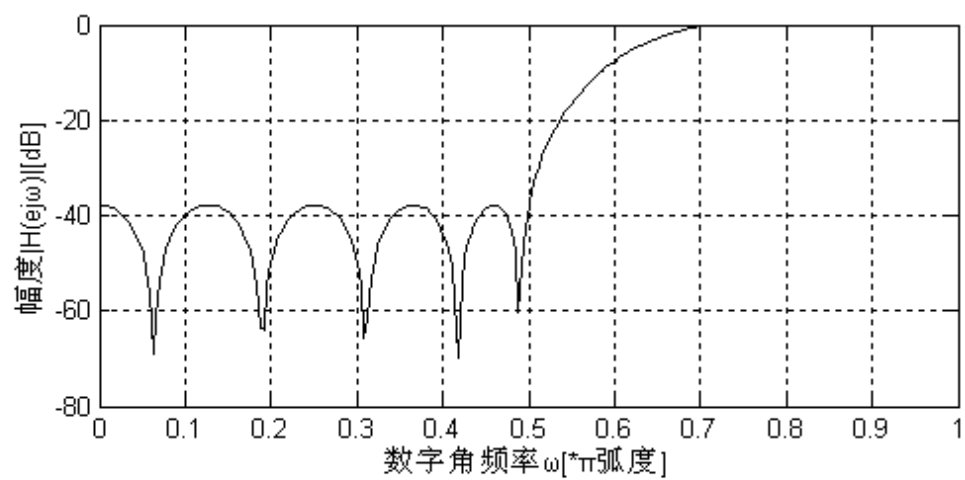
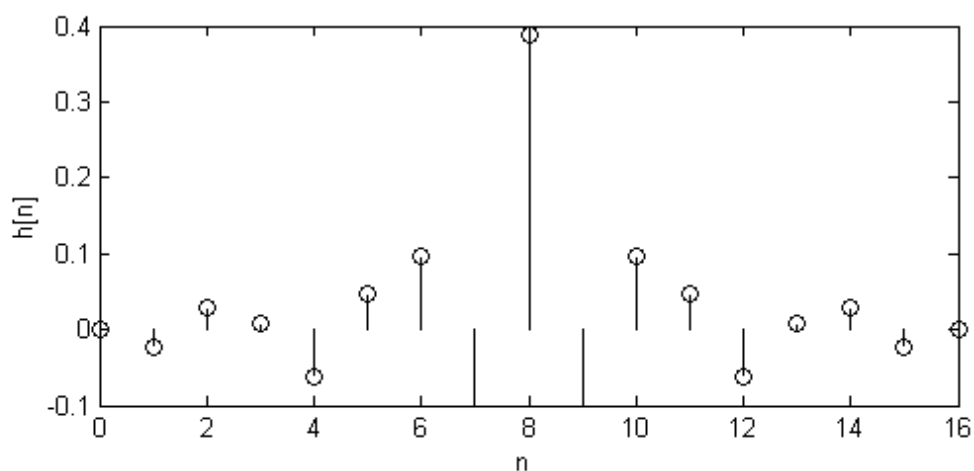


8-35 用 Remez 算法设计题 8-34 要求的 FIR 滤波器。

提示：可以调用的函数有 `remezord()` 和 `remez()`。

解：

```
deltap=1-10^(-0.3/20) ;      deltas=10^(-40/20) ;
[M,Fo,Ao,w] = remezord( [0.5/2 0.7/2], [0 1], [deltas deltap], 1);
h=remez(M,Fo,Ao,w);      n=[0:M];
subplot(2,1,1);          stem(n,h)
xlabel('n');              ylabel('h[n]');      axis([0,M,-0.1,0.4])
H=fft(h,512);            k=[0:511];
subplot(2,1,2);          plot(k/256,20*log10(abs(H)))
xlabel('数字角频率  $\omega$  [* $\pi$  弧度]');      ylabel('幅度 |H(ej $\omega$ )| [dB]')
axis([0,1,-80,0])
```



第 9 章

单项选择题 (9-1 题—9-11 题)

9-1 IIR 滤波器的直接 II 型实现结构与直接 I 型实现结构比较优势是 (C)

- (A) 乘法次数较少 (B) 加法次数较少
(C) 延迟较少 (D) 易于调整零点和极点

9-2 关于滤波器的实现错误的说法是 (C)

- (A) IIR 的并联型比级联型的硬件实现速度更快;
(B) FIR 的线性相位型比直接型需要的乘法次数少;
(C) FIR 和 IIR 都可以采用重叠保留法在频域实现;
(D) FIR 的直接型实现可以采用递归或非递归的实现结构。

9-3 图 T9-1 所示流图对应 IIR 系统的是

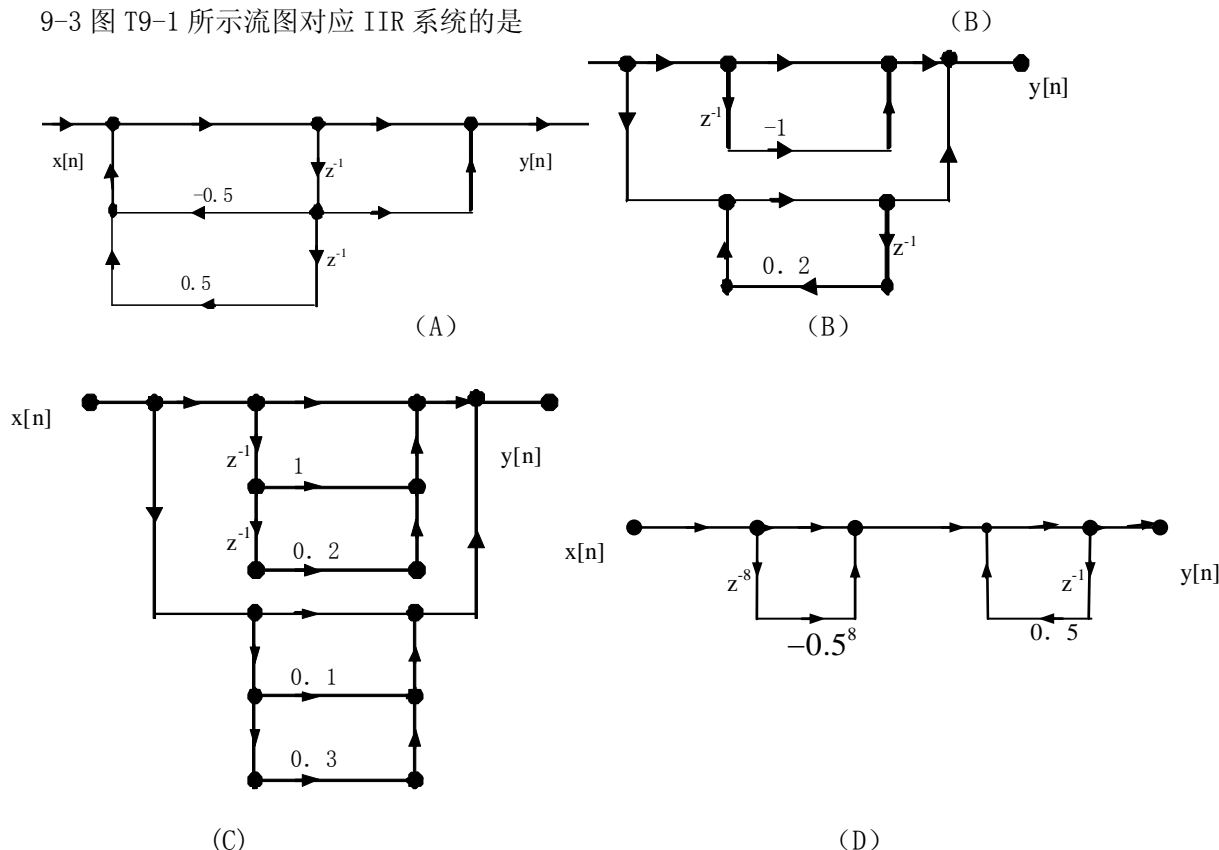


图 T9-1

解: (A) $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1+0.5z^{-1}-0.5z^{-2}} = \frac{1+z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1+z^{-1})}$, 零点和极点抵消

$$(B) \quad H(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{1-0.2z^{-1}} = \frac{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}{(1-0.2z^{-1})}$$

(C) FIR 的并联仍是 FIR

$$(D) \quad H(z) = \frac{1-0.5^8 z^{-8}}{1-0.5z^{-1}}, \text{ 有反馈, 但是 FIR}$$

填空题 (9-4 题—9-9 题)

9-4 图 T9-2 所示信号流图表示的系统函数是 $H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+z^{-1}-5z^{-2}}$ 。

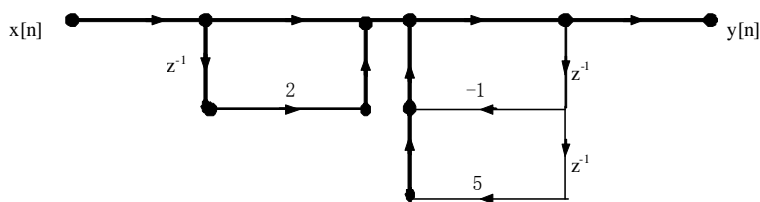


图 T9-2

解：IIR 直接 I 型

9-5 图 T9-3 所示信号流图表示的系统函数 $H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$ 。

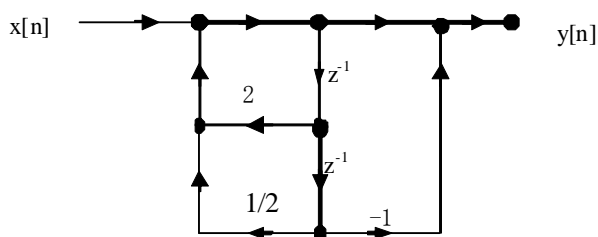


图 T9-3

解：IIR 直接 II 型

9-6 给出图 T9-4 所示流图的系统函数 $H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 8z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}} \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)$ 。

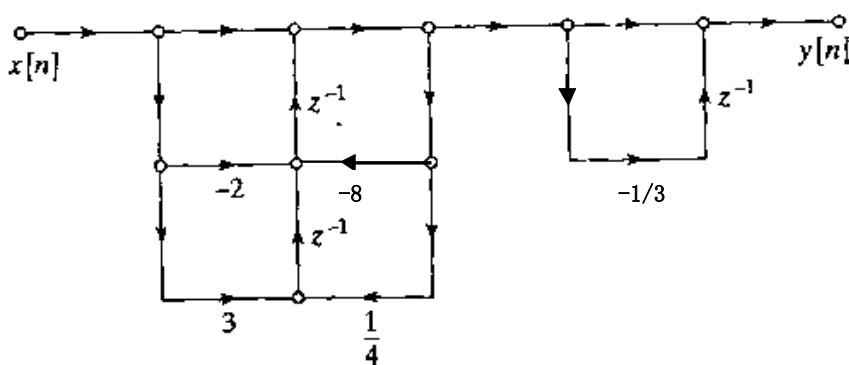


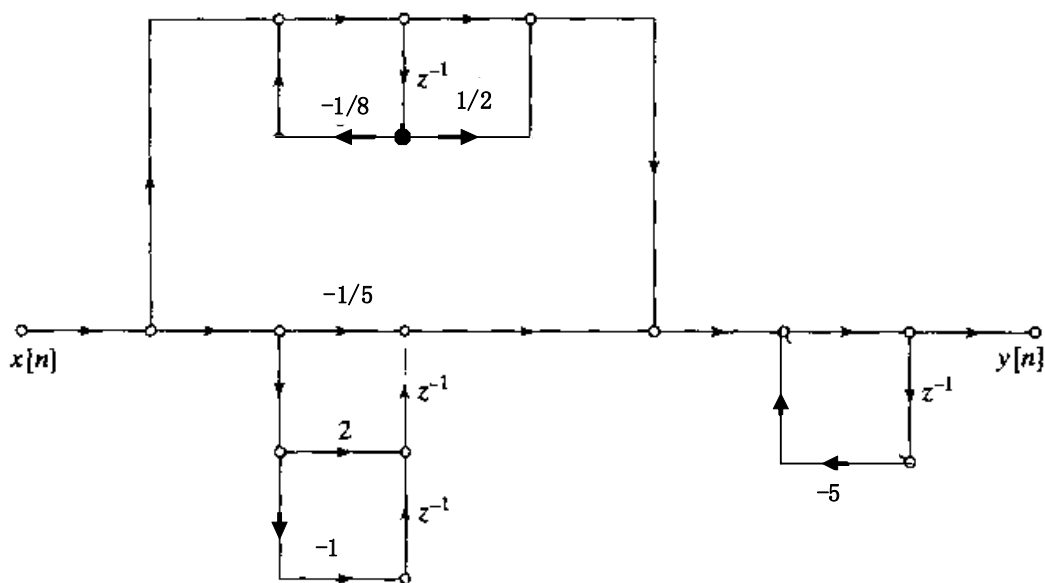
图 T9-4

解：级联，典范型转置

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + 8z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}} \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)$$

9-7 给出图 T9-5 所示流图表示的差分方程

$$y[n] = -\frac{39}{8}y[n-1] + \frac{5}{8}y[n] + \frac{4}{5}x[n] + \frac{99}{40}x[n-1] - \frac{3}{4}x[n-2] - \frac{1}{8}x[n-3]$$



T9-5

解:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \left[\frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{8}z^{-1}} + (-1/5 + 2z^{-1} - z^{-2}) \right] \frac{1}{(1 + 5z^{-1})} \\
 &= \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - 1/5 + 2z^{-1} - z^{-2} - 1/40z^{-1} + 1/4z^{-2} - 1/8z^{-3}}{\left(1 + \frac{1}{8}z^{-1}\right)(1 + 5z^{-1})} \\
 &= \frac{\frac{4}{5} + \frac{99}{40}z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}{1 + \frac{41}{8}z^{-1} + \frac{5}{8}z^{-2}} \\
 y[n] &= -\frac{41}{8}y[n-1] - \frac{5}{8}y[n-2] + \frac{4}{5}x[n] + \frac{99}{40}x[n-1] - \frac{3}{4}x[n-2] - \frac{1}{8}x[n-3]
 \end{aligned}$$

9-8 给出图 T9-6 所示流图的单位脉冲响应 $h[n] = -\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{2}{3}\delta[n-2]$ 。

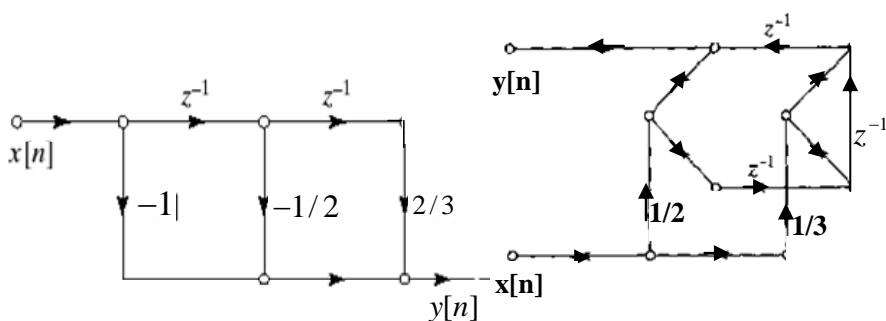


图 T9-6

图 T9-7

9-9 给出图 T9-7 所示流图的单位脉冲响应 $h[n] =$

$$\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{3}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

计算、证明与作图题 (9-10 题—9-21 题)

9-10 考虑图 T9-8 的信号流图, 写出其表示的系统的差分方程。

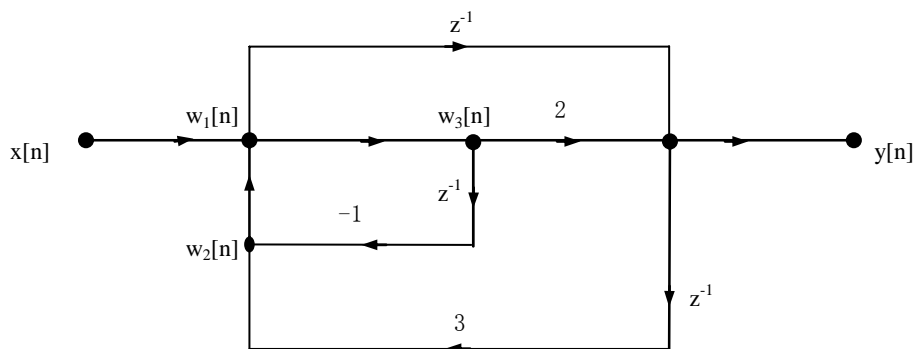


图 T9-8

解:

列出方程组

$$W_1(z) = X(z) + W_2(z)$$

$$W_2(z) = 3z^{-1}Y(z) - W_3(z)z^{-1}$$

$$W_3(z) = W_1(z)$$

$$Y(z) = z^{-1}W_1(z) + 2W_3(z)$$

解出结果是

$$Y(z) = X(z) \frac{(2 - z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 3z^{-3}}$$

所以系统函数是

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(2 - z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 3z^{-3}}$$

差分方程是

$$y[n] - y[n-1] + 2y[n-2] - 3y[n-3] = 2x[n] - x[n-1] + x[n-2]$$

9-11 根据以下系统函数画出直接 I 型和直接 II 型信号流图。

$$(a) H(z) = \frac{2 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-1} + 2z^{-2} - 3z^{-3}}$$

$$(b) H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$(c) H(z) = \frac{1 + \frac{1}{6}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-4}}$$

解: 略。

9-12 设一因果 LTI 系统的差分方程是 $y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] = \frac{1}{4}x[n] + x[n-1]$, 画出系统的直接 II 型和转置型信号流图。

解: 略。

9-13 已知 IIR 系统的系统函数为 $H(z) = \frac{3 + 2z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$ 。

(a) 画出两种级联型实现结构信号流图, 每个子系统采用典型型;

(b) 画出并联型实现结构信号流图。

解:

$$H(z) = \frac{3 + 2z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

$$\text{级联型 } H(z) = \frac{(3 + 2z^{-1})}{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.4z^{-1})} = \frac{(3 + 2z^{-1})}{(1 + 0.5z^{-1})} \frac{1}{(1 - 0.4z^{-1})} = \frac{(3 + 2z^{-1})}{(1 - 0.4z^{-1})} \frac{1}{(1 + 0.5z^{-1})}$$

$$\text{并联型 } H(z) = \frac{5/9}{1 + 0.5z^{-1}} + \frac{32/9}{1 - 0.4z^{-1}}$$

9-14 图 T9-9 给出了一个 LTI 系统的实现流图。

- (a) 写出系统的差分方程； (b) 需要几个延迟单元？
(c) 是否有一种减少延迟单元的实现结构？如果有，画出流图；如果没有，解释为什么。

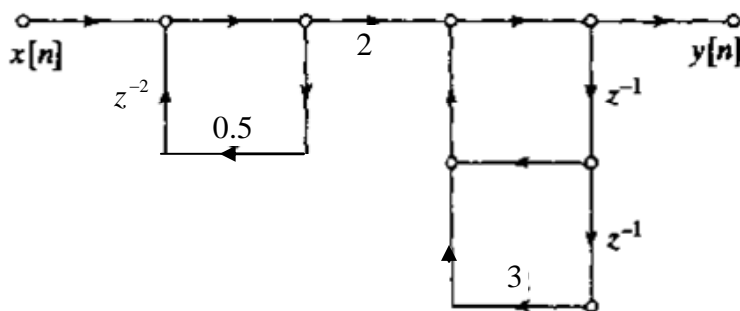


图 T9-9

解：(a)

$$H(z) = \frac{2}{1 - 0.5z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{2}{1 - z^{-1} - 3.5z^{-2} + 0.5z^{-3} + 1.5z^{-4}}$$

$$y[n] = 2x[n] + y[n-1] + 3.5y[n-2] - 0.5y[n-3] - 1.5y[n-4]$$

(b) 4 个

(c) 没有，因为输入无延迟

9-15 已知 FIR 系统的系统函数 $H(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})(0.5 + 0.25z^{-1} + 0.5z^{-2})$ 。

- (a) 画出直接型结构流图；
(b) 画出级联型结构流图（采用二阶子系统，子系统采用直接型）；
(c) 画出线性相位型结构流图；
(d) 设输入是实信号，比较 (A) 和 (C) 的实数乘法次数。

解：

(a) $H(z) = 0.5 + 1.25z^{-1} + 1.5z^{-2} + 1.25z^{-3} + 0.5z^{-4}$

(b) 略

(c) 略

(d) (A) 5 次，(C) 3 次

9-16 已知 FIR 系统的系统函数 $H(z) = (1 - z^{-2})(0.5 + z^{-1} + 0.5z^{-2})$ ，画出其线性相位型结构流图。

解： $H(z) = 0.5 + z^{-1} - z^{-3} - 0.5z^{-4}$

9-17 一 LTI 系统的单位脉冲响应是 $h[n] = \begin{cases} 0.5^n, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 。

(a) 根据系统函数 $H(z) = 1 - 0.5z^{-1} - 0.25z^{-2} - 0.125z^{-3}$ ，画出该系统的一种直接型非递推实现流图；

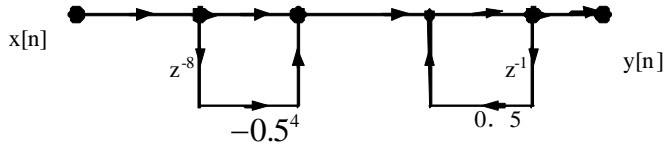
(b) 根据系统函数 $H(z) = \frac{1 - 0.5^4 z^{-4}}{1 - 0.5z^{-1}}$ ，画出该系统的一种直接 I 型递推实现流图；

(c) 该系统是 FIR 还是 IIR? 根据 (a) 和 (b) 你对该类系统的实现有什么结论?

(d) 比较 (a) 和 (b) 的实现中需要的延迟数和乘法加法次数。

解: (a) 略

(b)



(c) FIR

(d) (a): 3 次延迟, 3 次乘法, 3 次加法

(b): 5 次延迟, 2 次乘法, 2 次加法

*9-18 已知 FIR 系统的系统函数 $H(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-2})(1 + z^{-1} + 2z^{-2})(2 + z^{-1} + z^{-2})$ 。

(a) 写出所有零点, 具有什么特点?

(b) 画出级联型结构流图, 采用四阶子系统, 子系统采用直接型;

(c) 画出级联型结构流图, 采用四阶子系统, 子系统采用线性相位型。

解: $H(z) = 2 + 7z^{-1} + 16z^{-2} + 25z^{-3} + 28z^{-4} + 25z^{-5} + 16z^{-6} + 7z^{-7} + 2z^{-8}$

$h[n] = [2, 7, 16, 25, 28, 25, 16, 7, 2]$

有对称性, 每个 2 阶子系统不一定线性相位。

(a)

零点: (1) -1 (2阶)

(2) $+j, -j$: 单位圆上共轭

(3) 4个一组: $\frac{-1 \pm \sqrt{7}j}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{7}j}{4}$,

因为 $\left| \frac{-1 \pm \sqrt{7}j}{2} \right| \cdot \left| \frac{-1 \pm \sqrt{7}j}{4} \right| = \sqrt{2} \sqrt{1/2} = 1$, 所以互为共轭反演

(b) (c) $H(z) = (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4})(2 + 3z^{-1} + 6z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4})$

每个 4 阶子系统一定是线性相位型。

*9-19 一因果 LTI 系统有系统函数为 $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1.01z^{-1} + 0.99z^{-2}}$ 。

(a) 该系统稳定吗?

(b) 若采用定点 DSP 芯片实现该系统, 小数部分只用 4 位二进制表示, 后面的位采用“0 舍 1 入”, 得到的系统还是稳定的吗?

解: 有限字长效应对 IIR 稳定性的影响。

(a) 极点: $\frac{1.01 \pm \sqrt{1.01^2 - 4 \times 0.99}}{2} = 0.505 \pm j0.8573$, $|\text{极点}| = 0.989988 < 1$, 稳定

(b)

1.01 的二进制 0001.0000, 0.99 的二进制 0001.0000, 都成了 1

极点: $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1}}{2} = \frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\text{极点}| = 1$, 不稳定

*9-20 考虑图 T9-10 所示的格型实现结构, 写出其表示的系统的系统函数, 是 IIR 还是 FIR 系统。格型实现对有限字长效应的敏感程度低, 在功率谱估计、语音处理、自适应滤波、线性预测和逆滤波等方面有广泛的应用。

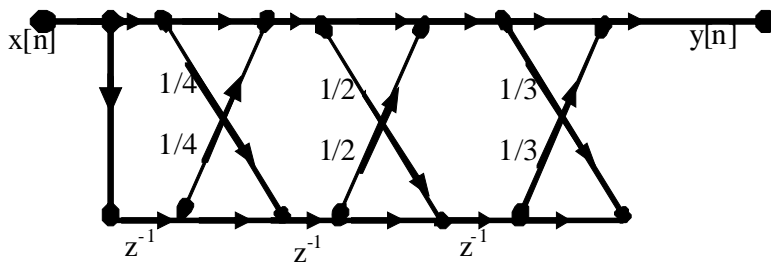


图 T9-10

解:

从左到右从上到下定义节点1-6, 7-12

$$W_1(z) = X(z), \quad W_2(z) = W_1(z) + 1/4 W_7(z)$$

$$W_3(z) = W_2(z), \quad W_4(z) = W_3(z) + 1/2 W_9(z)$$

$$W_5(z) = W_4(z), \quad W_6(z) = W_5(z) + 1/3 W_{11}(z)$$

$$W_7(z) = X(z)z^{-1}, \quad W_8(z) = 1/4 W_1(z) + W_7(z)$$

$$W_9(z) = W_8(z)z^{-1}, \quad W_{10}(z) = 1/2 W_3(z) + W_9(z)$$

$$W_{11}(z) = W_{10}(z)z^{-1}, \quad W_{12}(z) = 1/3 W_5(z) + W_{11}(z)$$

$$Y(z) = W_6(z)$$

$$\therefore H(z) = 1 + \frac{13}{24} z^{-1} + \frac{5}{8} z^{-2} + \frac{1}{3} z^{-3}$$

*9-21 本题讨论 FIR 系统的频域采样实现结构, 设 FIR 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 在 $0 \leq n \leq N-1$ 之外为零, 其 N 点 DFT (即系统频率响应的 N 点取样) 是 $H[k]$ 。

(a) 证明系统函数 $H(z)$ 可以用 $H[k]$ 表示成
$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1-W_N^{-k} z^{-1}};$$

(b) 写出系统函数的极点;

(c) 根据 (a) 中的 $H(z)$ 证明单位脉冲响应是
$$h[n] = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] W_N^{-kn} \right) (u[n] - u[n-N]);$$

(d) 该系统可用系统函数为 $(1-z^{-N})$ 的 FIR 系统与一阶 IIR 系统的并联组合的级联来实现, 画出这种实现的信号流程图;

(e) 如果 $h[n]$ 是实数且 N 为偶数, 证明该系统可用系统函数为 $(1-z^{-N})$ 的 FIR 系统与若干二阶 IIR 系统 (系数均为实数) 的并联组合的级联来实现。

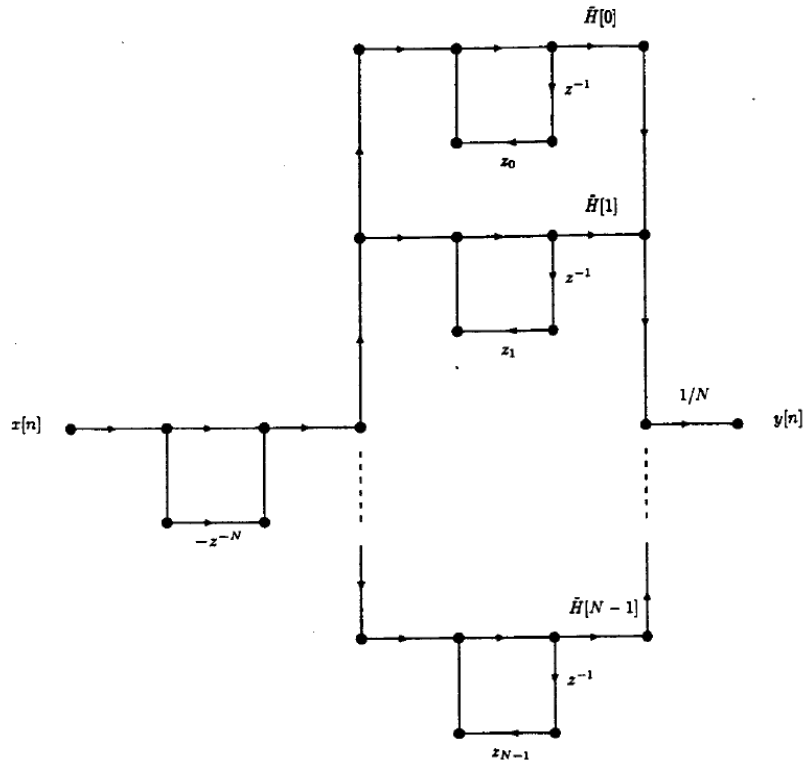
解: (a)

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] W_N^{-kn} \right) z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(H[k] \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k] (1-z^{-N})}{1-W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1-W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

(b) FIR, 极点=0。可以证明 $H(z)$ 是一个 $(N-1)$ 阶的 z^{-1} 多项式, 除 $z=0$ 外没有任何极点, 也没有高于 $(N-1)$ 次的 z^{-1} 项。

(c) 提示: 求出该系统 FIR 和 IIR 部分的脉冲响应, 然后将它们卷积以得到总单位脉冲响应。

(d)



(e) 若 $h[n]$ 是实数且 N 是偶数,

设 $z_k = W_N^{-k}, k = 0, 1, \dots, N-1$

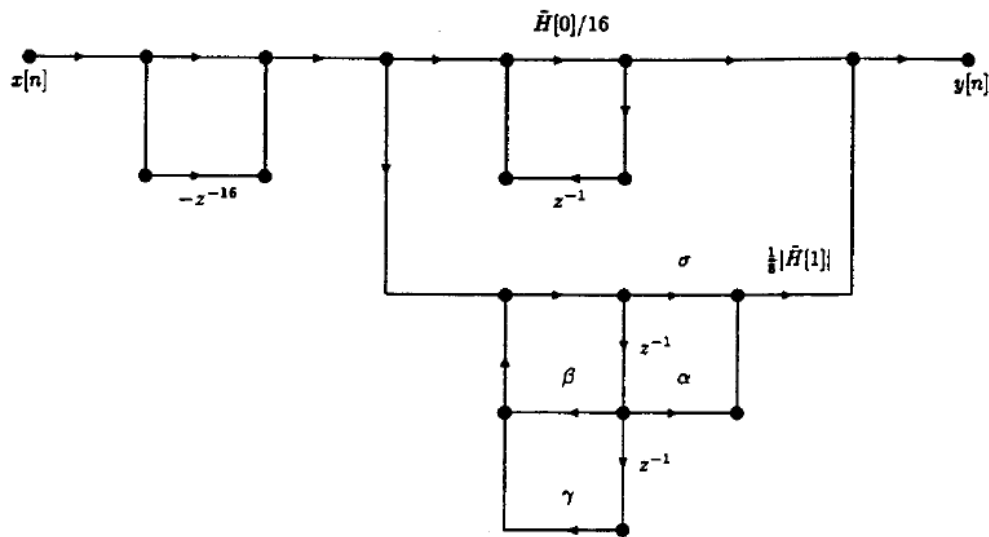
$$\text{则 } H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - z_k z^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1 - z^{-N}) \left[\frac{\hat{H}[0]/N}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\hat{H}[k]/N}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N/2]/N}{1 - z_{N/2} z^{-1}} + \sum_{\ell=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \frac{\hat{H}[\ell]/N}{1 - z_\ell z^{-1}} \right] \\
&= (1 - z^{-N}) \left[\frac{\hat{H}[0]/N}{1 - z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N/2]/N}{1 + z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\hat{H}[k]/N}{1 - z_k z^{-1}} + \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\hat{H}[N-p]/N}{1 - z_{N-p} z^{-1}} \right] \\
&= (1 - z^{-N}) \left[\frac{\hat{H}[0]/N}{1 - z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N/2]/N}{1 + z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{\hat{H}[k]/N}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N-k]/N}{1 - z_{-k} z^{-1}} \right) \right] \\
&= (1 - z^{-N}) \left[\frac{\hat{H}[0]/N}{1 - z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N/2]/N}{1 + z^{-1}} + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\hat{H}[k](1 - z_{-k} z^{-1}) + \hat{H}[N-k](1 - z_k z^{-1})}{(1 - z_k z^{-1})(1 - z_{-k} z^{-1})} \right] \\
&= (1 - z^{-N}) \left[\frac{\hat{H}[0]/N}{1 - z^{-1}} + \frac{\hat{H}[N/2]/N}{1 + z^{-1}} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2\hat{H}[k]}{N} \cdot \frac{\cos(\hat{\theta}[k]) - z^{-1} \cos(\hat{\theta}[k] - 2\pi k/N)}{1 - 2 \cos \frac{2\pi k}{N} z^{-1} + z^{-2}} \right]
\end{aligned}$$

since $\hat{H}[0] = H(1)$, $\hat{H}[N/2] = H(-1)$,

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1 - z^{-N}) \left[\frac{H(1)/N}{1 - z^{-1}} + \frac{H(-1)/N}{1 + z^{-1}} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2[H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})]}{N} \cdot \frac{\cos[\theta(2\pi k/N)] - z^{-1} \cos[\theta(2\pi k/N) - 2\pi k/N]}{1 - 2 \cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}} \right].
\end{aligned}$$

式中 $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$, 当 $N=16$ 和 $H(e^{j\omega_k}) = 0$, $k=3, 4, \dots, 14$ 时, 该系统的信号流图:



where $\sigma = \cos(\hat{\theta}[1])$, $\alpha = -\cos(\hat{\theta}[1] - (2\pi/16))$, $\beta = 2 \cos(2\pi/16)$, and $\gamma = -1$.

MATLAB 上机题 (9-22 题--9-23 题)

9-22 因果 LTI 系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0.3z^{-1}} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+0.1z^{-1}-0.2z^{-2}} = \frac{1+\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}{1+0.4z^{-1}-0.17z^{-2}-0.06z^{-3}},$$

输入信号是 $x[n] = \cos(0.2\pi n) + 0.2\cos(0.8\pi n)$, $0 \leq n \leq 20$, 分别用以下方法求出并画出输出信号。

(a) 采用直接 I 型实现结构;

(b) 采用直接 II 型实现结构;

(c) 采用 1 阶和 2 阶 IIR 的级联实现结构, 子系统采用直接 II 型的转置实现结构。

提示: 直接 II 型的转置结构实现可以调用 FILTER () 函数。

解: $n=0:20$; $x=\cos(0.2*\pi*n)+0.2*\cos(0.7*\pi*n)$;

$B=[1 \ 2.5 \ 1]$; $A=[1 \ 0.4 \ -0.17 \ -0.06]$;

$y=\text{filter}(B, A, x)$; $\text{plot}(n, x)$; hold ; $\text{plot}(n, y, 'r')$

9-23 已知 FIR 系统的单位脉冲响应 $h[n]=[1 \ 0.5 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.5 \ 1]$, $0 \leq n \leq 5$, 输入信号

$x[n]=0.2^{n/5}$, $0 \leq n \leq 20$, 分别用以下方法求出并画出输出信号。

(a) 采用直接型实现结构;

(b) 采用线性相位型实现结构;

(c) 采用 DFT 实现。

提示: 直接型实现可以调用 FILTER () 函数, DFT 实现可以调用 FFT ()。

解:

$n=0:20$; $x=0.2.^{(n/5)}$; $h=[1 \ 0.5 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.5 \ 1]$;

$y=\text{filter}(h, 1, x)$; $\text{plot}(n, x)$; hold ; $\text{plot}(n, y, 'r')$

