绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

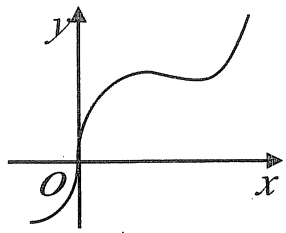
一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

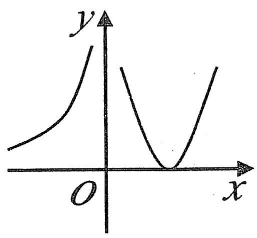
（1）设 $x>0$，则曲线 $y=\sqrt{\dfrac{(1+x)^3}{x}}$（　）．

（A）有一条铅直渐近线和一条斜渐近线　　（B）有一条水平渐近线和一条铅直渐近线

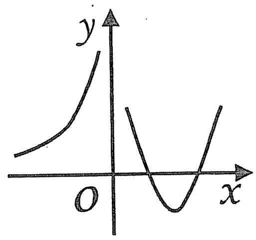
（C）有一条水平渐近线和一条斜渐近线　　（D）只有一条铅直渐近线

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，曲线 $y=y(x)$ 的图像见右图，则其导函数 $y=y'(x)$ 的图像为（　）．

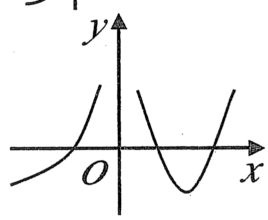




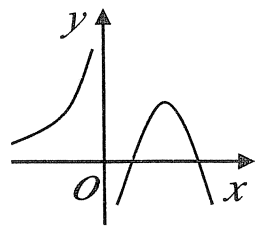
（A）



（B）



（C）



（D）

（3）设当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-ax-bx^2\sim 2x^2$，则（　）．

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　（B）$a=0,b=-2$　（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　（D）$a=1,b=-2$

（4）设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_{-1}^{1}|x-\sin t|f(t)\,dt$，则下列命题

①若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也为奇函数　②若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

③若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也为偶函数　④若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

正确的是（　）．

（A）①②　（B）③④　（C）①③　（D）②④

（5）设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\ (\alpha>0)$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）．

（A）连续，但不可偏导　　（B）可偏导，但不连续

（C）$f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续　　（D）以上均不正确

（6）将极坐标系下的二次积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$$

化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$（　）．

（A）$\int_0^1dx\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$　　（B）$\int_0^1dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1}f(x,y)\,dy$

（C）$\int_0^1dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1}f(x,y)\,dx$　　（D）$\int_0^1dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{0}f(x,y)\,dx$

（7）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为 n 维列向量，已知对任意不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，都有 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\neq 0$，则必有（　　）.

（A）$m>n$　　　　（B）$m<n$

（C）存在 m 阶可逆阵 P，使得 $AP=\begin{pmatrix}E_m\\O\end{pmatrix}$　　　　（D）存在 n 阶可逆阵 P，使得 $PA=\begin{pmatrix}E_m\\O\end{pmatrix}$

（8）设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，$C=\begin{pmatrix}A^T & O\\O & B^{-1}\end{pmatrix}$，则行列式 $|-2C|$ 的值为（　　）.

（A）$(-2)^n|A||B|^{-1}$　　（B）$-2|A^T||B|$　　（C）$-2|A||B^{-1}|$　　（D）$(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设 a,b 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)=$________.

（10）设 $x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$，则 $(\frac{dy}{dx})^2-y\frac{d^2y}{dx^2}=$________.

（11）设 $f(x)$ 是二次可微函数，若在点 $(a,f(a))$ 处的切线倾角是 $\frac{\pi}{3}$，在点 $(b,f(b))$ 处的法线与直线 $x+y=2$ 平行，则积分 $\int_a^b e^{f'(x)}f''(x)\,dx=$________.

（12）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x tf(x-t)\,dt=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)\,dt$，则 $f(x)=$__________.

（13）设函数 $f(x,y,z)=e^z yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f'_y(0,1,-1)=$__________.

（14）设 A,B 均为四阶方阵，$r(A)=3,r(B)=4$，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则 $r(A^*B^*)=$____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 **10** 分）过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，求由该切线、y 轴及曲线 $y=e^x$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积．

（16）（本题满分 **10** 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $f(0),f'(0)$，$f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

(17)（本题满分 10 分）设 $a>0$，若在 $[-a,a]$ 上 $f(x)$ 为连续的偶函数，证明：对任意实数 λ，有 $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-\lambda x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$，并利用上式计算积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$.

(18)（本题满分 10 分）已知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,-2x)}{3x}$.

(19)（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆弧 $x^2+y^2=1$ $(x\geq 0,y\geq 0)$，直线 $y=x$，$x+y=2$ 及 x 轴所围成的平面区域.

(20)（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx<-\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明方程 $f(x)+x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个根.

(21)（本题满分 11 分）设曲线 $y=y(x)$ $(x\geq 0)$ 过点 $(0,1)$，且 $y'(x)>0$. 如果曲线上任一点 P 的法线段 PQ（其中 Q 是过 P 点所作曲线法线与 x 轴的交点）的中点位于直线 $y=\frac{1}{3}x$ 上，求此曲线方程.

(22)（本题满分 11 分）设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $AB=O$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\k&4&6\end{pmatrix}$，$PA=C$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&-2&0\\b&c&6\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.（Ⅰ）求常数 k 的值；（Ⅱ）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示.

(23)（本题满分 11 分）设 A 为三阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的互不相等的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是其对应的特征向量，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，（Ⅰ）证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关；（Ⅱ）若 $A^3\beta=2A\beta$，$P=(\beta,A\beta,A^2\beta)$，求 $P^{-1}AP$，并证明 $(A^2-2E)x=0$ 的通解为 $x=c_1A\beta+c_2A^2\beta$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)=-f(-x), f(x)=f(x+1)$．若 $f'(1)>0$，则（　　）.

（A）$f''(-2)\le f'(-2)\le f(-2)$　　（B）$f(-2)=f''(-2)<f'(-2)$

（C）$f'(-2)\le f(-2)\le f''(-2)$　　（D）$f(-2)<f'(-2)=f''(-2)$

（2）下列命题正确的是（　　）.

（A）若可导函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有界，则其导函数 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内也有界

（B）若可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有界，则函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内也有界

（C）若可导函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内无界，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也必无界

（D）若可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内无界，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内也无界

（3）已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$（　　）.

（A）等于 $\frac{\pi}{2}$　　（B）等于1　　（C）等于0　　（D）发散

（4）设函数 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆为 $x^2+(y-1)^2=1$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 为 x^2 的（　　）.

（A）高阶无穷小　　（B）低阶无穷小　　（C）等价无穷小　　（D）同阶但不等价无穷小

（5）设函数 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 可微分，则 $dz=$（　　）.

（A）$f'_x(x^2+y^2)\,dx+f'_y(x^2+y^2)\,dy$　　（B）$2xf'(x^2+y^2)\,dx+2yf'(x^2+y^2)\,dy$

（C）$f'(x^2+y^2)\,dx+f'(x^2+y^2)\,dy$　　（D）$2xf'_x(x^2+y^2)\,dx+2yf'_y(x^2+y^2)\,dy$

（6）设 D 是直线 $y=x, y=-x, x=1$ 围成的有界区域，则下列二重积分中，小于零的是（　　）.

（A）$\iint\limits_D y\,dxdy$　　（B）$\iint\limits_D x\,dxdy$　　（C）$\iint\limits_D (x-|y|)\,dxdy$　　（D）$\iint\limits_D (|y|-|x|)\,dxdy$

（7）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=m<n$，则下列说法不正确的是（　　）.

（A）A 一定可以只经过一系列的初等行变换化为 (E_m,O)，E_m 为 m 阶单位矩阵

（B）任意的 n 维列向量 b，$Ax=b$ 有无穷多解

（C）m 阶方阵 B 满足 $BA=O$，则一定有 $B=O$

（D）行列式 $|A^TA|=0$

20、21全程考研资料请加群712760929

（8）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为4阶方阵，A 经过初等行变换化为 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则下列说法不正确的是（　）.

（A）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的列向量组的最大无关组

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

（C）有一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

（D）α_4 必可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt-1}{x^2}=$____________.

（10）$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x+x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$_________.

（11）设函数 $f(x)=xe^{x^2}+x^2e^x$，则 $f^{(100)}(0)=$____________.

（12）设函数 $y=u(x)e^{ax}$ 是微分方程 $y''-2ay'+a^2y=(1+x)e^{ax}$ 的一个解，则 $u''(x)=$_________.

（13）二次积分 $\int_0^1dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}dx$ 的值为_________.

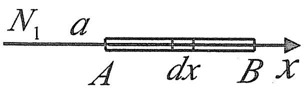
（14）设 A 为三阶方阵，其特征值为 $1,2,0$，将 A 的第2行加到第1行得 B，再将 B 的第1列的 -1 倍加到第2列得到 C，则 $|C+E|=$_________.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

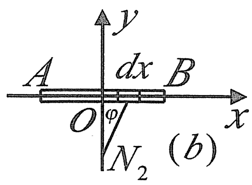
（15）（本题满分**10**分）试证明方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 仅在 $(-1,1)$ 内有两个异号实根.

（16）（本题满分**10**分）设光滑曲线 C 位于第一象限，且在原点处与 x 轴相切．$P(x,y)$ 为 C 上任意一点，设曲线 C 上介于原点与 P 点之间的弧长为 l_1，P 点处的切线和 y 轴交点与 P 点之间的距离为 l_2，若 $\dfrac{3l_1+2}{l_2}=\dfrac{2(x+1)}{x}$，求该曲线 C 的方程.

（17）（本题满分 **10** 分）设有质量均匀的细杆 AB，粗细到处一样，其长为 l，质量为 M，如图所示，（Ⅰ）在 AB 的延长线上与其一个端点 A 的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_1，求细杆对 N_1 的引力；（Ⅱ）在 AB 的中垂线上到杆距离为 a 处有一质量为 m 的质点 N_2，求细杆对 N_2 的引力．



(a)



(b)

（18）（本题满分 **10** 分）设函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-e^x-x}{x}, & x<0,\\ ax+b, & x\ge 0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=1$．（Ⅰ）问 a,b 分别为何值时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？（Ⅱ）又问 a,b 分别为何值时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导？

（19）（本题满分 **10** 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0,\ x\in(0,1)$．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0,\ x\in(0,1)$．（Ⅰ）证明对于任意的正整数 n，有 $f(\dfrac{1}{n+1})+f'(\dfrac{1}{n+1})(x-\dfrac{1}{n+1})\le f(x)\le f(0)+[f(1)-f(0)]x$，$x\in[0,1]$；（Ⅱ）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx$．

（20）（本题满分 **11** 分）求函数 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值．

（21）（本题满分 **11** 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x\le 2,\\ 0, & ,\end{cases}$ 求二重积分 $\iint\limits_{xOy} f(x)f(x^2-y)\,d\sigma$．

（22）（本题满分 **11** 分）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，（Ⅰ）求解齐次线性方程组 $(A^TA)x=0$；

（Ⅱ）问 a,b 分别取何值时，向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$ 可由 A 的列向量组线性表示？并求出一般表示式．

（23）（本题满分 **11** 分）设 A 为三阶实对称矩阵，且满足

$$(A-E)\alpha_1=0,(\frac{1}{2}A+E)\alpha_2=0,\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix},$$

A^2 为非正定矩阵，求（Ⅰ）常数 a 的值；（Ⅱ）一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵．

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x[(x-1)^n-1]}$，则（　　）.

（A）点 $x=0,x=2$ 均为 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）点 $x=0,x=2$ 均为 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，点 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点

（D）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，点 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点

（2）如果函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的某邻域 U 内有定义，那么下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导

（B）若 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（C）若 $f(x)$ 在 U 内可导，且 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导

（D）若 $|f(x)|$ 在 U 内可导，且 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（3）设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f'''(x)+f'(x)=(x-1)^2$，且 $f'(1)=f''(1)=0$，则（　　）.

（A）点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(1,f(1))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

（D）点 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(1,f(1))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

（4）微分方程 $y''-2y'+y=3xe^x+\sin x$ 的特解形式为（　　）.

（A）$(ax+b)x^2e^x+A\cos x+B\sin x$　　（B）$(ax+b)e^x+A\cos x+B\sin x$

（C）$(ax+b)x^2e^x+A\sin x$　　（D）$(ax+b)xe^x+A\sin x$

（5）若函数 f,g 均可微，$z=f[xy,\ln x+g(xy)]$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

（A）f_1'　　（B）f_2'　　（C）0　　（D）1

20、21全程考研资料请加群712760929

（6）设$I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|=1}(x^2+y^2+1)\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，则（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_1<I_3<I_2$　　（D）$I_2<I_1<I_3$

（7）设A,B,C均为n阶方阵，且满足$ABAC=E$，其中E为n阶单位矩阵，则（　　）.

（A）$A^TB^TA^TC^T=E$　（B）$A^2B^2A^2C^2=E$　（C）$BA^2C=E$　（D）$CA^2B=E$

（8）设向量$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T,\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$线性无关，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(\alpha\beta^T)x,$$

则下列结论中不正确的是（　　）.

（A）f的秩为1　　　　（B）f的规范形为$f=z_1^2-z_2^2$

（C）f必不正定　　　　（D）$\left|\alpha\beta^T+\beta\alpha^T\right|=0$

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2n-1^2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{4n-2^2}}{n^2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{2n^2-n^2}}{n^2}\right)=$ ________.

（10）$\int\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx=$ ________.

（11）微分方程$(1+y^2)\,dx+(x-\arctan y)\,dy=0$的通解为________.

（12）设n为正整数，则$\int_0^{n\pi}x|\sin x|\,dx=$ ________.

（13）设函数$z=z(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，且$z\big|_{(0,y)}=y^2$，$z'_x\big|_{(x,0)}=x$，求$z(x,y)=$ ________.

（14）设A为三阶方阵，其主对角线元素之和为零，且满足$A^2-A-2E=O$，则$|A|=$ ________.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分**10**分）设$y=y(x)$是由$\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ y=e^y\sin t+1\end{cases}$所确定的函数，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

(16)(本题满分 10 分)设函数 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$,求 $f(\ln x)$.

(17)(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且满足 $f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$,(Ⅰ)求 $f(0)$;(Ⅱ)证明 $f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$;(Ⅲ)若已知 $f''(1)=f(1)=1$,求 $f(x)$.

(18)(本题满分 10 分)计算二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$,其中 D 是由圆弧 $x^2+y^2=1$ $(x\ge 0, y\ge 0)$,直线 $y=x$,$x+y=2$ 及 x 轴所围成的平面区域.

(19)(本题满分 10 分)设当 $x\ge 1$ 时,函数 $f(x)$ 满足 $(x^2+f^2(x))f'(x)=1$,并且 $f(1)=1$,

(Ⅰ)证明当 $x>1$ 时,$1<f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$; (Ⅱ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

(20)(本题满分 11 分)设函数 $u=f(x^2,y-z)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,而 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{x+y}\sin(x+z)=\sqrt{2}$ 确定的隐函数,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

(21)(本题满分 11 分)证明 $\int_0^a dx\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}dy-\int_0^1 dv\int_{-\infty}^a 2ue^{-u^2(1+v^2)}du=\dfrac{\pi}{4}$,其中 $a\ge 0$.

(22)(本题满分 11 分)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 n 维单位列向量,且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 两两正交,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 线性相关.(Ⅰ)证明 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示;(Ⅱ)记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$,证明 β 为 A 的属于特征值 0 的特征向量,γ 为 A 的属于特征值 1 的特征向量.

(23)(本题满分 11 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$,$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}\ne 0$, ξ_1,ξ_2 均为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解.(Ⅰ)求线性方程组 $Ax=b$ 的通解;(Ⅱ)问 A 是否可以相似对角化?