超越2020考研工大五套卷

勘误表

数一模五

（2）平面曲线$\begin{cases} y^2+\dfrac{z^2}{2}=1, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周形成的曲面在点$P_0(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$处的法线$L$与平面$\pi: x+2y+z=3$位置关系为（　　）.

(A) $L//\pi$且L不在π上　　(B) L在π上　　(C) $L\perp\pi$　　(D) 与π斜交

答案　选(A).

解　曲线绕z轴旋转一周形成的曲面为$\Sigma: x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1$，$\Sigma$在点$P_0$处的法向量为$\vec{n}=\{2x,2y,z\}\big|_{P_0}=\{1,-1,1\}$，$\Sigma$在点$P_0$处的法线为$L: \dfrac{x-\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{y+\frac{1}{2}}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$，$\pi$的法向量为$\overrightarrow{n_0}=\{1,2,1\}$.因为$\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_0}=0$，$L//\pi$.$L$上的点$P_0$显然不在$\pi$上，故选(A).

数二模二

（20）**（本题满分 11 分）**设炮弹以初速度v_0且与水平线成α角从炮口射出，如果空气的阻力与速度成正比，比例系数为k，其中$k>0$，炮弹质量为m，求当$k=mg$时，炮弹飞行过程中的最高高度.（其中g为重力加速度）.

解　以炮弹的射出点为直角坐标系的原点，设$y=y(t)$为炮弹在飞行过程中的t时刻纵向位移函数，依题知及牛顿第二定律得到关于$y(t)$的二阶微分方程为

$$\frac{md^2y}{dt^2}=-mg-\frac{kdy}{dt},\qquad \cdots\cdots 3\text{分}$$

所以　$$\frac{d^2y}{t^2}=-g\frac{dy}{dt}-g,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=v_0\sin\alpha.$$

对应的齐次方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}+g\dfrac{dy}{dt}=0$的通解为

$Y=C_1+C_2e^{-gt}$.　　　　……5 分

非齐次方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}+g\dfrac{dy}{dt}=-g$的一个特解可设为$y^*=At$，代人方程得$A=-1$，所以通解为

$Y=C_1+C_2e^{-gt}-t$.由初始条件得

$$C_1=\frac{1}{g}(1+v_0\sin\alpha),\quad C_2=-\frac{1}{g}(1+v_0\sin\alpha),$$

所以

$$y=y(t)=\frac{1}{g}(1+v_0\sin\alpha)-\frac{1}{g}(1+v_0\sin\alpha)e^{-gt}-t\ .$$ ……7 分

又 $y'(t)=(1+v_0\sin\alpha)e^{-gt}-1$， $y''(t)=-(1+v_0\sin\alpha)ge^{-gt}<0$， 令 $y'(t)=0$，得唯一驻点 $t_0=\frac{1}{g}\ln(1+v_0\sin\alpha)$，且 $y''(t_0)<0$，所以

$$y(t_0)=\frac{1}{g}[v_0\sin\alpha-\ln(1+v_0\sin\alpha)]$$

为炮弹的飞行中的最高高度. ……11 分

数二模三

（22）（**本题满分 11 分**）设 $A=\begin{pmatrix}3&7&9\\1&7&11\\7&7&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&5&10\\-3&4&14\\6&7&2\end{pmatrix}$，问是否存在 X，使得 $AX-A=BX$？若存在，求所有的 X；若不存在，说明理由.

解 $(A-B)X=A$，其中 $A-B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\4&3&-3\\1&0&3\end{pmatrix},|A-B|=0$，故 $A-B$ 不可逆. ……4 分

$$(A-B\vdots A)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}3&2&-1&3&7&9\\4&3&-3&1&7&11\\1&0&3&7&7&5\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&3&7&7&5\\0&1&-5&-9&-7&-3\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

得 $r(A,B)=r(A-B\vdots A)$，故存在 X，使得 $(A-B)X=A$，且

$$X=\begin{pmatrix}7-3k_1&5-3k_2&7-3k_3\\-9+5k_1&-3+5k_2&-7+5k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},$$ 其中 k_1,k_2,k_3 是任意常数. ……11 分

数二模四

（16）（**本题满分 10 分**）已知平面上两点 $A(4,6),B(6,4)$，C 为椭圆 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1$ 上的点，求 ΔABC 面积的最大值和最小值.

解 过 A,B 两点的直线为 $x+y=10$．设 C 点坐标为 (x,y)，则 ΔABC 的面积为

$S=|x+y-10|$.

……4 分

记 $L=(x+y-10)^2+\lambda(\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}-1)$，令

$$\begin{cases} L'_x=2(x+y-10)+\frac{2x}{5}\lambda=0, \\ L'_y=2(x+y-10)+\frac{y}{10}\lambda=0, \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}-1=0, \end{cases}$$

解得驻点 $(1,4)$ 及 $(-1,-4)$， $S(1,4)=5$， $S(-1,-4)=15$，所以 $S_{\max}=15, S_{\min}=5$.

……10 分

数三模三

（16）（**本题满分 10 分**）已知 $z=xf(\frac{y}{x})+2yf(\frac{x}{y})$，其中 f 有二阶导数，若 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-y^2$，求 $f(y)$.

解

$\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2f'(\frac{x}{y})$,　　　　……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-2\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y})=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-2\frac{x}{y^2}f''(\frac{x}{y}),$$

$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-yf''(y)-\frac{2}{y^2}f''(\frac{1}{y})$.　　　　……5 分

由 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1}=-y^2$ 得 $-yf''(y)-\frac{2}{y^2}f''(\frac{1}{y})=-y^2$，进而

$$y^3f''(y)+2f''(\frac{1}{y})=y^4. \qquad \cdots\cdots①$$

将 y 换成 $\frac{1}{y}$，得

$$f''(\frac{1}{y})+2y^3f''(y)=\frac{1}{y}\ ,$$ … … …

②　　　　　　　　　　　……8 分

①-2*②，得 $f''(y)=-\frac{y}{3}+\frac{2}{3y^4}$，从而

$$f'(y)=-\frac{y^2}{6}-\frac{2}{9y^2}+C_1$$ ，

$$f(y)=-\frac{y^3}{18}+\frac{1}{9y}+C_1y+C_2.$$ ……10 分