2015 合工大超越数学五套题卷二答案

模拟一

一. 选择题:

1. D 分析: 由题意可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 存在，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x+b(x-\frac{1}{6}x^3)+o(x^3)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a-1)x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{(1+b)x-\frac{b}{6}x^3+o(x^3)}$ ∴ 只有当 $b\neq-1$ 时，该极限存在.

2. D. 解: $-f(x)<0$ 排除A; $[f(-x)]''=f''(-x)<0$ 排除B; $[\frac{1}{f(-x)}]'=\frac{f'(-x)}{f^2(-x)}>0$ 排除 C, 而 $\frac{1}{f(x)}>0$, $[\frac{1}{f(x)}]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0$, $[\frac{1}{f(x)}]''=-\frac{f(x)f''(x)-2f'^2(x)}{f^3(x)}>0$

∴ $\frac{1}{f(x)}$ 恒正, 单调下降且为凹函数. 选 D.

3. D. 解: ∵ $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 存在但值不一定相等

A. $x\to0^+$ 则与 $x\to0^-$, $-x\to0^+$ 等价 ∴ ✓; B. $x\to0$ 则 $|x|\to0^+$ 与 $x\to0^+$ 等价 ∴ ✓

C. $x\to0$ 则 $x^2\to0^+$ 与 $x\to0^+$ 等价 ∴ ✓ D. $x\to0$ 则 $x^3\to0$ 与 $x\to0^+$ 不等价 ∵ $x^3\to0$ 中 $x\to0^-$ 部分, 故 D(✗)

4. C. 令 $t=x-\pi$ 则 $\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\sin(t+\pi)+n(t+\pi))dt$

$=\begin{cases}\int_{-\pi}^{\pi}\sin[-\sin t+nt]dt & n\text{为偶}\\ -\int_{-\pi}^{\pi}\sin(-\sin t+nt)dt & n\text{为奇}\end{cases}$ ∵ $[-\sin t+nt]$ 为奇函数.

$\sin(-\sin t+nt)$ 也为奇函数, 区域对称. ∴原式 $=0$

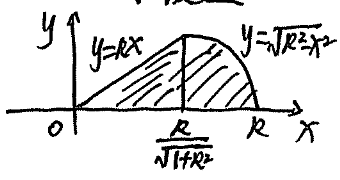
5. D. 解: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}(x-1)^2+(y-1)^2=0$ ∴ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}[f(x,y)-2x+2y]=\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}f(x,y)=0=f(1,1)$. A正确

记 $x-1=\Delta x$, $y-1=\Delta y$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+2y}{(x-1)^2+(y-1)^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(1+\Delta x,1+\Delta y)-f(1,1)-2\Delta x+2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1$

从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{\Delta z-2\Delta x+2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$. ∴ $\Delta z=2\Delta x-2\Delta y+o(\rho)$ 结合可微的充分必要条件 ∴ B.C正确.

D. 错 由B知 $f(x,y)$ 在点$(1,1)$处不取极值

6. B. 解: 积分区域如图所示:



7. C. 解: $A\neq0$, $r(A)\geq1$, $A\cdot A=0$ ∴ $r(A)+r(A)\leq3$, $r(A)\leq\frac{3}{2}$ ∴ $r(A)=1$

$Ax=0$ 有两个无关的解向量. ∴ $Ax=b$ 有三个线性无关的解.

8. D. 解 ∵ $A\overset{r_2+3r_1}{\sim}B$, 即 $E(2,1(3))A=B$, 故 $B^{-1}=A^{-1}E^{-1}(2,1(3))$

$=A^{-1}E(2,1(-3))$ 则 $A^{-1}\overset{c_1+(-3)c_2}{\sim}B^{-1}$, 故选 D.

二. 填空题:

9. $\frac{\pi}{8}$ 解: 令 $\arccos\frac{1}{x}=t$, $\Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}=\sec t$, 当 $x: 1\to+\infty$ 时, $t: 0\to\frac{\pi}{2}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\arccos\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin 2t\,dt=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\cos 2t$$
$$=\frac{\pi}{8}$$

10. $e^{\frac{1}{2}}$ 解: 由设 $f(x)$ 连续 及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1$,

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\ln\left[1+\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cot x\cdot\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\ln(1+x)}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)\cdot2x}{4x^3}}=e^{\frac{1}{2}f'(0)}=e^{\frac{1}{2}}$$

11. 答案: $\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\le1\end{cases}+C$

解. $f(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x>0\\ e^x-1 & x\le0\end{cases}$, $f(\ln x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x} & x>1\\ x-1 & 0<x\le1\end{cases}$ $\quad\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x+C, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+C_1, & 0<x\le1\end{cases}$

由 $1+C=-\frac{1}{2}+C_1\Rightarrow C_1=\frac{3}{2}+C$ $\therefore\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\le1\end{cases}+C$

12. $\cos x-\sin x$ 解: $y'+y=\sin x+\cos x$ 的通解为 $y=Ce^{-x}+\sin x$ 故对任意的 C

$y=Ce^{-x}+\sin x$ 为 $y''+y'+ay=f(x)$ 的解 $\therefore y=e^{-x}$ 为 $y''+y'+ay=0$ 的解

代入 $a=0$ $\quad y=\sin x$ 为 $y''+y'+ay=f(x)$ 即 $y''+y'=f(x)$ 的特解 代入得

$f(x)=\cos x-\sin x$

13. b. 解: $a\varphi_1'\frac{\partial z}{\partial x}+b\varphi_2'-c\varphi_2'\frac{\partial z}{\partial x}-a\varphi_3'=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a\varphi_3'-b\varphi_2'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$ 同理得

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{b\varphi_1'-c\varphi_3'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$ $\quad\therefore c\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=b$

14. E. 解: $f(A)=A^3-6A^2+11A-5E$, $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 则

$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)=\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(2)&0\\0&0&f(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E$ $\quad\therefore f(A)=E$

三. 解答题:

15. 证: (I) 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=f(0)\ne0$ $\therefore$ 当 $x\to0$ 时, $\int_0^x f(t)dt\sim f(0)x$

(II) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{xf(0)\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{x^2f^2(0)}$

$=\frac{1}{f^2(0)}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0)-f(x)}{2x}=-\frac{f'(0)}{2f^2(0)}$

(III) 解: $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(0)-xf(\xi)}{x^2f^2(0)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0)-f(\xi)}{xf^2(0)}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\eta)\xi}{xf^2(0)}$

其中 η 介于 ξ 与 0 之间, 当 $x\to0$ 时 $\xi\to0$, $\eta\to0$ $\because f'(x)$ 连续, 且 $f'(0)\ne0$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=-\frac{f'(0)}{f^2(0)}\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=-\frac{f'(0)}{2f^2(0)}$ $\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}$

16. 解：由题知：$y(0)=0,\ y'(0)=0$，$S_1=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$，P点的切线为 $Y-y=y'(X-x)\Rightarrow$

$A(0,y-xy')\Rightarrow S_2=\sqrt{x^2+(xy')^2}=x\sqrt{1+y'^2}$ 由 $x(3S_1+2)=2(x+1)S_2$

$\Rightarrow x(3\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx+2)=2(x+1)\cdot x\sqrt{1+y'^2}\Rightarrow 2(x+1)y'y''=1+y'^2$

令 $y'=p,\ y''=\frac{dp}{dx}$. $\int\frac{2p}{1+p^2}dp=\int\frac{dx}{1+x}\Rightarrow \ln(1+p^2)=\ln(1+x)+\ln C_1\Rightarrow 1+y'^2=C_1(1+x)$

代入初始条件 $C_1=1\Rightarrow y'^2=x\Rightarrow y'=\sqrt{x}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2\Rightarrow C_2=0$

∴曲线方程 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

17. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi'f_2'$；$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$

$+xy^2\varphi'[(f_{21}''(-1)+f_{22}''\varphi'2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi'f_2'$

$=-f_1'+4xy\varphi'f_2'-xf_{11}''+2x^2y^3\varphi''f_2'+2x^2y^3\varphi'^2f_{22}''+(2x^2y-xy^2)\varphi'f_{12}''$

又∵ $\varphi(x)$满足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$ ∴ $\varphi(1)=1,\ \varphi'(1)=0,\ \varphi''(1)=2$

∴ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)-f_{11}''(0,1)+4f_2'(0,1)$

18. 证：I. 由于 $f(x)=x+2\int_0^x f(t)dt-2e^{-x}\int_0^x e^t(f(t))dt$ ① 可知 $f(x)$可导，且 $e^xf(x)=xe^x+$

$2e^x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x e^tf(t)dt$ 两边求导：$e^x[f(x)+f'(x)]=(1+x)e^x+2e^x\int_0^x f(t)dt$

$+2e^xf(x)-2e^xf(x)\to f(x)+f'(x)=1+x+2\int_0^x f(t)dt$

两边求导：$f'(x)+f''(x)=1+2f(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ ②

由 $f(0)=0\Rightarrow$ 由②得 $f'(0)=1$

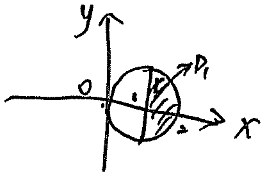
II. 解：由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 知 对应齐次微分特征方程 $r^2+r-2=0$

$\Rightarrow r_1=1,\ r_2=-2\Rightarrow y^*=a\Rightarrow y^*=-\frac{1}{2}$ ∴ $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 通解为

$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{2}$，由 $f(0)=0,\ f'(0)=1\Rightarrow C_1=\frac{2}{3},\ C_2=-\frac{1}{6}$

∴ $f(x)=\frac{2}{3}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}$

19. 解：由对称性知：$\iint_D\frac{y}{x^2+y^2}d\sigma=0$



记D_1为D的上半部分 则 原式 $=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma$

$=2\iint_{D_1}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r^4}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\frac{1}{4\cos^2\theta})d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta\, d\theta=\frac{\pi}{8}$

20

令 $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x$，则 $f'(x)=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}>0$.

当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(1)=0$，即 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x<0$ 所以 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，即 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x>0$，所以 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

综上，设 $x>0$ 且 $x\neq 1$，有 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

21

① 在D的内部，由 $\begin{cases} f_x'(x,y)=2x+y=0 \\ f_y'(x,y)=8y+x=0 \end{cases}$，可得D内的唯一驻点 $(0,0)$，$f(0,0)=2$.

② D的边界由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y>\frac{1}{2}x-1)$ 和 $y=\frac{1}{2}x-1$ $(0\le x\le 2)$ 组成.

在 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y>\frac{1}{2}x-1)$ 上，$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=xy+6$.

令 $L(x,y)=xy+6+\lambda(x^2+4y^2-4)$，由 $\begin{cases} L_x'=y+2\lambda x=0 \\ L_y'=x+8\lambda y=0 \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$（舍去）.

且 $f(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=f(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=7$，$f(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=5$.

在 $y=\frac{1}{2}x-1$ $(0\le x\le 2)$ 上，$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=\frac{5}{2}x^2-5x+6$，由 $\frac{df}{dx}=5(x-1)=0$ 得 $x=1$，$y=-\frac{1}{2}$，且 $f(1,-\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$，$f(0,-1)=f(2,0)=6$.

综上所知，$f(x,y)$ 在D上的最大值为7，最小值为2.

22

① $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -7 \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，通解为 $x=k\xi$，任意 $k\in R$.

② 将 $Ax=0$ 的基础解系代入 $Bx=0$ 中，得 $-6-5a-4=0 \Rightarrow a=-2$. b 为任意实数时

$B \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & b \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -10 & b \end{bmatrix} \overset{行}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

23

① $AB=0$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}$, 因为 $r(B)=2\Rightarrow r(A)=1$, 则得 A 的三个特征值为 $1,0,0$

由 $AB=0$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}$ 知 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

设 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, 则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_2=0\end{cases}$ 解 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化

$\gamma_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, $\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$, $\gamma_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$ $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{bmatrix}$ 即为

所求正交矩阵. 在正交变换 $x=Py$ 下, 二次型 f 的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2$.

② 由 $P^{-1}AP=\Lambda$ 得 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac16&\frac16&-\frac13\\\frac16&\frac16&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}$

则该二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}\frac16&\frac16&-\frac13\\\frac16&\frac16&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac16x_1^2+\frac16x_2^2+\frac23x_3^2+\frac13x_1x_2-\frac23x_1x_3-\frac23x_2x_3$

2015 年模拟二答案

一、选择题.

1. B. $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=2$, $g(x)=x$, $f'(x)=0$, $g'(x)=1$, $2>x$, 但 $0>1$ 不成立, 故①错误.
$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac12x^2+2$, $f'(x)=2x$, $g'(x)=x$, 当 $1\le x\le2$ 时, $f'(x)>g'(x)$, $1\le f(x)\le4$
$\frac52\le g(x)\le4$, $f(x)\ge g(x)$ 不成立, 故②错误. $\int_0^1x\,dx=\frac12>\int_0^1\frac13dx$, 在 $[0,1]$ 上 $x>\frac13$ 不成立.
故④也不正确.

2. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}-x}=0$, 水平渐近线 $y=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+\sin^2x}}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}+1=2$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}+x}=0$. 斜渐近线 $y=2x$.

（3）答案：选（B）.

解: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}=\max\{1-x^2,x^2\}=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le\frac{1}{\sqrt2},\\ x^2, & \frac{1}{\sqrt2}<x\le1.\end{cases}$ 经验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处不可导, 在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处取极小值, 点 $(\frac{1}{\sqrt2},\frac12)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

4. D. $I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)f(x)(\sin x-\cos x)dx$
而 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\frac{\pi}{2}-x)(\cos x-\sin x)dx$. 故
$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(\frac{\pi}{2}-x)-f(x)](\cos x-\sin x)dx$.
当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{2}-x>x>0$, 由 $f(x)$ 单调增及 $\cos x>\sin x$. 所以 $I_1>I_2$
又当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $\tan x>\sin x$, $f(x)>0$, 故 $I_3>I_1$.

5、

D. $z=x^2+y^2$ 当$(x,y)\neq(0,0)$时均不为极值点，但满足条件

6、

D. 因为$f(x,y)$在点$(0,0)$处一阶偏导存在，故$f(x,y)$在点$(0,0)$处关于x连续，同时关于y也连续，即$\lim\limits_{x\to0}f(x,0)=\lim\limits_{y\to0}f(0,y)=f(0,0)$.

7、

D. ②正确. 若$r(A_{m\times n})=m$，则$r(A_{m\times n})=r(A_{m\times n},b)=m$，故$Ax=b$必有解.

③正确，显然成立. ④正确. 因为$r(A^TA)\le r(A^TA,A^Tb)=r(A^T(A,b))\le r(A^T)=r(A)$

由③知$r(A^TA)=r(A^TA,A^Tb)$，则$A^TAx=A^Tb$必有解.

8、

C. A,B为实对称矩阵，其相似的充要条件为特征值相同，即$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

二、填空题

（9）答案：填“-2”.

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{x-1}-1)}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\ln x}{\ln x-x+1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+x-1}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1+1}{-1}=-2.$$

10、$\underline{1}$. 解：在$e^y\sin t-y=0$两边对t求导，得$e^y\sin t\dfrac{dy}{dt}+e^y\cos t-\dfrac{dy}{dt}=0$，

所以 $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{e^y\cos t}{e^y\sin t-1}$

由$x=t^2+t$知$\dfrac{dx}{dt}=2t+1$，故$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^y\cos t}{(2t+1)(e^y\sin t-1)}$，当$t=0$时，$x=y=0$，故$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=1$.

11. $2f(0)$. $F(x)=\int_0^{x^2}du\int_{0-u}^{1}f(u)dv=\int_0^{x^2}f(u)(1-e^{-u})du$. 所以$F'(x)=f(x^2)(1-e^{-x^2})2x$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2)(1-e^{-x^2})2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2f(x^2)}{x^2}=2f(0)$.

12、

解：$y=x^2\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$，所以所求面积为

$$S=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin t}{\underset{0\le t\le\frac{\pi}{2}}{=}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\cos^4t)dt=2\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

13、

$-(2x)^{\frac{1}{3}}$. 两边对 x 求导得 $y'=-\frac{y}{y^2x}$，此得 $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-y$ 为一阶线性方程

解得 $x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int -y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right)=y\left(-\frac{1}{2}y^2+c\right)$，由 $y(\frac{1}{2})=-1$ 得 $c=0$，故 $x=-\frac{1}{2}y^3$.

即 $y=-(2x)^{\frac{1}{3}}$.

14、

-2. $(A\vdots B)=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\-1&2&1&2&k\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\overset{行}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&3&3&6&k-1\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\overset{行}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&k+2\end{array}\right]\Rightarrow k=-2$.

$\frac{2}{9}$. 由于 $\frac{9S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$，所以 $E\frac{9S^2}{\ldots}$ ……

三、解答题

15、解：先求齐次方程通解：$y''-3y'+2y=0$ 即 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，得 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$

$\therefore$ 通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

将原方程为 $\begin{cases}y''-3y'+2y=e^{2x}(4x+5) & ①\\ y''-3y'+2y=e^{2x}\cos x & ②\end{cases}$

对于①，其特解形式为：$e^{2x}x(Cx+D)$

对于②，其特解形式为：$e^{2x}(E\cos x+F\sin x)$

分别代入①、②解得：$C=2$，$D=1$

$E=\frac{1}{2}$，$F=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{2x}x(2x+1)+e^{2x}\left(\frac{\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}\right)$

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. 将 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为

$\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\left(2a-\frac{1}{2}b\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{1}{4}b^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$;

由题设知 $a^2-\frac{1}{4}=0$，$1-\frac{1}{4}b^2=0$，$2a-\frac{1}{2}b\neq0$，故 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$，$b=2$.

17、

证：因为 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt\geq\int_0^1 x_{n-1}dt=x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调递增.

假设 $0<x_{n-1}<1$，则 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt=\int_0^{x_{n-1}}x_{n-1}dt+\int_{x_{n-1}}^1 tdt$

$=x_{n-1}^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_{n-1}^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}^2<1$.

由数学归纳法知，对任意的 $n\in N$，有 $0<x_n<1$，数列 $\{x_n\}$ 单调有界一定存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 得到 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2$，解得 $a=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

18、

解：$P(x,y)=y^2$，$Q(x,y)=2xy+1$，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$f(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy=\int_0^x 0dx+\int_0^y(2xy+1)dy=xy^2+y+C$

由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$，所以 $f(x,y)=xy^2+y$

Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D：$x^2+(y-1)^2\le 1$.

$I=\iint_\Sigma zf(x,y)dS=\iint_\Sigma z(xy^2+y)dS=\iint_\Sigma yz\,dS=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$

$=\sqrt{2}\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\int_0^\pi\left[\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\cdot r\,dr\right]d\theta$

19、

（16）解：（Ⅰ）设在时刻 t 动点 M 所在的位置为 (x,y)，则有 $\frac{y}{x-t}=\frac{dy}{dx}$， ①

由①解得 $t=x-y\frac{dx}{dy}$，从而得 $\frac{dt}{dy}=-y\frac{d^2x}{dy^2}$. ② ……2 分

又 $\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}=2$，由于 $\frac{dt}{dy}<0$，故 $\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}=-2\frac{dt}{dy}$. ③ …… 3 分

由②和③可得 $\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{dx}{dy})^2+1}=y\frac{d^2x}{dy^2}$. …… 4 分

令 $p=\frac{dx}{dy}$，则上述方程为 $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{2}\frac{dy}{y}$，积分得 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{1}{2}(\ln y+\ln C_1)$.

当 $y=1$ 时，$p=\frac{dx}{dy}=0$，得 $C_1=1$. 故 $p+\sqrt{1+p^2}=\sqrt{y}$，$p-\sqrt{1+p^2}=-\frac{1}{\sqrt{y}}$，所以

$$p=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}})\text{，即}\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}).$$

积分后可得 $x=\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+C_2$. …… 6 分

由于 $x=0$ 时，$y=1$，可得 $C_2=\frac{2}{3}$，因而动点 M 的轨迹方程为 $x=\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}$. ……8 分

（Ⅱ）当 M 追赶到点 P 时，$y=0$，此时 P 走过的路程为 $\frac{2}{3}$. ……10 分

20、

（18）解：（Ⅰ）令 $x=a+b-t$，则

$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx$

$=\int_a^b f(x)[m-g(x)]dx=m\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx$， ……3 分

即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$. ……4 分

（Ⅱ）取 $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}$，$g(x)=\frac{1}{e^x+1}$，则 $f(-x)=f(x)$，$g(x)+g(-x)=1$. 由（Ⅰ），

$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}dx=\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\cos^2x+1}dx$. ……7 分

再取 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2x+1}$，$g(x)=x$，则 $f(\pi-x)=f(x)$，$g(x)+g(\pi-x)=\pi$，再由（Ⅰ），

$I=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{\sin x}{\cos^2x+1}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\frac{d\cos x}{\cos^2x+1}=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^\pi=-\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}$. ……10 分

21、

证：因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，故存在 m, M，使 $m\le f(x)\le M$. 从而

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot x\sin x\,dx \le M\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = (-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = 1$，所以 $m\le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,x\sin x\,dx \le M$.

由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\xi_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x\, f(x)dx = f(\xi_1)$ ①

由于 $m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x_2)\le M$，所以 $m\le \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\le M$. 故存在 $\xi_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

使 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=f(\xi_2)$ ②

由①②知 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$，对 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上运用罗尔定理可存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\pi)$

使得 $f'(\xi)=0$.

22、

证. ① 由 $A^2-2AB=E$ 得 $A(A-2B)=E$，故 $A^{-1}=A-2B$，从而 $(A-2B)A=E$，故 $AB=BA$.

② 由①知 $AB-2BA+3A=3A-AB=A(3E-B)$

由于 A 可逆，从而 $r(AB-2BA+3A)=r(A(3E-B))=r(3E-B)=2$.

23、

① 由 $A^*\alpha=4\alpha$ 得 $A\alpha=-3\alpha$，所以 $\alpha=(1,0,-2)^T$ 是 A 的对应特征值 $\lambda_3=-3$ 的特征向量；

设 A 的另外两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-12\end{cases}$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由正交性得 $x_1-2x_3=0$，基础解系为

$\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$. ⑧

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\alpha)$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$. 则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$. 所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

② $(A^*+6E)x=0$ 得 $(AA^*+6A)x=0$，则有 $(A-2E)x=0$，其通解为

$x=k_1(0,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟三）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（C）．

解:在（C）中，因为 $f'(x)$ 为奇函数，所以 $\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$ 为偶函数，此时 $f(x)$ 也是偶函数，从而 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数．

（A）不正确．例如 $\cos x$ 为偶函数，而 $\int_{2\pi}^x \cos t dt = \sin x$ 是奇函数．

（B）不正确．例如 $f(x) = C$ 以任意实数为周期，但是 $\int_0^x C dt = Cx$ 不是周期函数．

（D）不正确．取 $f(x) = x+1$，则 $f'(x) = 1$ 为偶函数，但是 $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (t+1)dt = \frac{1}{2}x^2 + x$ 不是偶函数．

（2）答案：选（B）．

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) + f'(2x)] = f(0) + f'(0) = 0$，又因为 $f(0) = 0$，所以得 $f'(0) = 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x} + \lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{f'(2x)-f'(0)}{x} = f'(0) + 2f''(0) = 1,$$

推得 $f''(0) = \frac{1}{2} > 0$，所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，选（B）．

（3）答案：选（C）．

解：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f^{(2015)}(x)$ 为奇函数，所以（A），（B）均正确．

又 $f(x) = (x^2-1)^{2015} = (x+1)^{2015}(x-1)^{2015}$，故由莱布尼兹公式

$$f^{(2015)}(x) = 2015!(x-1)^{2015} + 2015^2\cdot 2015!(x+1)(x-1)^{2014} + \cdots + 2015!(x+1)^{2015},$$

得 $f^{(2015)}(1) = 2015!\cdot 2^{2015}, f^{(2015)}(-1) = -2015!\cdot 2^{2015}$，故 $f^{(2015)}(1) - f^{(2015)}(-1) = 2015!\cdot 2^{2016}$，（D）正确．

（4）答案：选（C）．

解：$e^x\sin x$ 为一个特解，则该微分方程有特征根 $1\pm i$；x 为一个特解，则该微分方程有特征根 0（至少二重），于是该方程至少为 4 阶，对应特征方程为

$$[r-(1+i)][r-(1-i)]r^2 = 0,$$

即 $r^4 - 2r^3 + 2r^2 = 0$，故该微分方程至少为 4 阶，方程为 $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' = 0$．

（5）答案：选（D）．

解：$f(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi}\sin^n t dt = \int_0^x \sin^n t dt + \int_x^{x+2\pi}\sin^n t dt$．

当 n 为奇数时，$\int_x^{x+2\pi}\sin^n t dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^n t dt = 0$，故 $f(x+2\pi) = f(x)$，选（D）．

（6）答案 ：选（C）．

解：由于 $\ln(1+|xy|) \le |xy| \le \frac{x^2+y^2}{2} \le x^2+y^2 \le e^{x^2+y^2} - 1$，故 $I_3 \le I_1 \le I_2$，故选（C）．

（7）答案：选（A）．

解：$(\alpha_1 + A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3) = (\alpha_1+\lambda_2\alpha_3, \lambda_1\alpha_2 - \lambda_2\alpha_3, \lambda_1\alpha_1 + \alpha_3)$

$$= (\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{pmatrix},$$

令 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2\lambda_1^2 = \lambda_1(1-\lambda_1\lambda_2) = 0$，得 $\lambda_1 = 0$ 或 $\lambda_1\lambda_2 = 1$，故选（A）．

（8）答案：选（D）．

解：（A），（B）不正确．如：$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$A^2$ 正定，但 A 不正定，A^* 不正定．又因为 A^2 正定，所以 $|A^2| = |A|^2 \ne 0$，即 $|A| \ne 0$，故 $|A^*| \ne 0$，从而 $A^*x = 0$ 仅有零解，因此（C）不正确，（D）正确．若 $A^*x = 0$ 仅有零解，故 $|A^*| \ne 0$，从而 $|A| \ne 0$，所以 A 的特征值不等于 0，从而 A^2 的特征值全大于 0，即 A^2 正定．

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填“$\lambda > 3$”．

解：显然 $x=0$ 不是 $x^3-\lambda x+2=0$ 的解．当 $x\neq 0$ 时，$\lambda=x^2+\dfrac{2}{x}$．

令 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，则 $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$，由 $f(x)=0$ 解得 $x=1$．并且当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以在点 $x=1$ 处，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=3$．

又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$，故当 $\lambda>3$ 时，$y=\lambda$ 与 $y=f(x)$ 有三个交点，即方程 $x^3-\lambda x+2=0$ 有三个不相等的实根．

（10）**答案**：填"$(2x+y)(y-x)^2=C$"．

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{1+\dfrac{y}{x}}$．令 $u=\dfrac{y}{x}$，因此，$u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2}{1+u}$，所以 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2-u-u^2}{1+u}$．分离变量并分解，得 $-\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2+u}+\dfrac{2}{u-1})du=\dfrac{dx}{x}$．两边积分得 $-\dfrac{1}{3}(\ln|2+u|+2\ln|u-1|)=\ln|x|-\dfrac{1}{3}\ln|C|$．将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入并化简得所求通解为 $(2x+y)(y-x)^2=C$．

（11）**答案**：填"$\dfrac{\pi}{6}$"．

解法 1：曲线直角坐标方程为 $\begin{cases}x=\sin\theta\cos\theta,\\ y=\sin^2\theta.\end{cases}$ 故

$$V=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta 2\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta d\theta=\frac{\pi}{6}.$$

解法 2：曲线 $r=\sin\theta$ 在直角坐标系中表示圆周 $x^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 表示 y 轴正半轴，故旋转体为半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的球体，其体积为 $\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{\pi}{6}$．

（12）**答案**：填"$(-1,0)$"．

解 1：$2yy'-2=2e^y y'$，即 $yy'-1=e^y y'$； ①

$y'^2+yy''=e^y y'^2+e^y y''$； ②

$3y'y''+yy'''=e^y y'^3+3e^y y'y''+e^y y'''$． ③

令 $y''=0$，由②得 $y'^2=e^y y'^2$．再由①知 $y'\neq 0$，所以 $e^y=1$，得 $y=0$．代入原方程得 $x=-1$；

代入①得 $y'(-1)=-1$．

最后将 $x=-1,y(-1)=0,y'(-1)=-1,y''(-1)=0$ 代入③ $y'''(-1)=1\neq 0$，故 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$．

解 2：将原方程转化为 $x=\dfrac{1}{2}y^2-e^y$，则 $\dfrac{dx}{dy}=y-e^y,\dfrac{d^2x}{dy^2}=1-e^y,\dfrac{d^3x}{dy^3}=-e^y$．

令 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=0$，得 $y=0$，进而有 $x(0)=-1$ 及 $\left.\dfrac{d^3x}{dy^3}\right|_{y=0}=-1\neq 0$，所以 $x=\dfrac{1}{2}y^2-e^y$ 的拐点为 $(0,-1)$．

再利用反函数的性质知 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$．

（13）**答案**：填"π"．

解 1：$\cos^2 x=1-\sin^2 x$，$\iint\limits_D\cos^2 xdxdy=\iint\limits_D dxdy-\iint\limits_D\sin^2 xdxdy$．

但 $\iint\limits_D\sin^2 xdxdy=\iint\limits_D\sin^2 ydxdy$，故原式 $\iint\limits_D dxdy=\pi$．

解 2：原式 $=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D[(\cos^2 x+\sin^2 y)+(\cos^2 y+\sin^2 x)]dxdy$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D 2dxdy=\iint\limits_D dxdy=\pi.$$

（14）**答案**：填"$\dfrac{1}{144}$"．

解：$|A|=|B|=3$，从而 $\lambda_3=-3$ 为 A 的特征值，故 $A-3E$ 的特征值为 $-4,-2,-6$．

$$|A-3E|=-48,|(A-3E)^{-1}|=-\frac{1}{48}.$$

$$B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}=B^*-4B^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1},\quad |-B^{-1}|=-\frac{1}{3}.$$

原行列式 $=-\dfrac{1}{48}\times(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{144}$，故应填 $\dfrac{1}{144}$．

三、解答题：**15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

（15）**证**：（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{1}{x^4}[(\dfrac{1}{1+x}-1)x^2-2x\ln(1+x)+2x^2]=\dfrac{2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^3}$．

……2 分

令 $g(x)=2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)$，则 $g(0)=0$，而

20、21全程考研资料请加群712760929

$$g'(x)=2+2x-2\ln(1+x)-2=2[x-\ln(1+x)]>0,\quad x>0,$$

故 $g(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，$g(x)>g(0)=0$，故 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 单调递增. ……6 分

（Ⅱ）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\ln2-1$. ……9 分

故由（Ⅰ）知 $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}<\ln2-1$.

整理即得所证不等式. ……10 分

（16）解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1e^{t^2}dt$，$g'(x)=2\int_0^1e^{t^2}dt>0$，故当 $x\ge1$ 时，$g(x)$ 单调增加.

当 $x<-1$ 时，$g(x)=-2x\int_0^1e^{t^2}dt$，$g'(x)=-2\int_0^1e^{t^2}dt<0$ 故当 $x\le1$ 时 $g(x)$ 单调减少；…… 3 分

当 $-1<x<1$ 时，

$$g(x)=\int_{-1}^x(x-t)e^{t^2}dt+\int_x^1(t-x)e^{t^2}dt=x\int_{-1}^xe^{t^2}dt-\int_{-1}^xte^{t^2}dt+\int_x^1te^{t^2}dt-x\int_x^1e^{t^2}dt,$$

$$g'(x)=\int_{-1}^xe^{t^2}dt-\int_x^1e^{t^2}dt=\int_{-x}^xe^{t^2}dt.$$ …… 7 分

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$. 当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1e^{t^2}dt>2\int_0^1dt=2$， …… 9 分

$g(0)=2\int_0^1te^{t^2}dt=e^{t^2}\big|_0^1=e-1$，故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=e-1$. ……10 分

（17）证：（Ⅰ）$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=0$，同理，$f'_y(0,0)=0$. ……2 分

当 $x^2+y^2\ne0$ 时，

$$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

由对称性，$$f'_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$ ……5 分

（Ⅱ）沿直线 $y=x$，有

$$\lim_{\substack{y=x\\x\to0}}f'_x(x,y)=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

上述极限不存在，所以 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 同理 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. …… 7 分

因为

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分. ……10 分

（18）证（Ⅰ）令 $F(x)=\int_a^xf(t)dt,x\in[a,b]$，则

$$F(a)=F(c)=0,F(b)=\int_a^cf(x)dx+\int_c^bf(x)dx=0,$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$. …… 2 分

令 $\varphi(x)=F(x)e^{-x},x\in[a,b]$，则 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$，得 $F'(\xi_1)-F(\xi_1)=0,F'(\xi_2)-F(\xi_2)=0$，即得

$$f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1}f(x)dx,f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2}f(x)dx.$$ …… 6 分

（Ⅱ）令 $\psi(x)=[F'(x)-F(x)]e^x,x\in[a,b]$，则 $\psi(\xi_1)=\psi(\xi_2)=0$， …… 8 分

再由罗尔中值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\psi'(\eta)=0$，得 $F''(\eta)-F(\eta)=0$，即有

$$f'(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx.$$ ……10 分

（19）证：（Ⅰ）令 $f(x)=\tan^nx-\tan x^n(0\le x\le\frac{\pi}{4})$，则 $f'(x)=n\tan^{n-1}x\sec^2x-\sec^2x^n\cdot nx^{n-1}$.

……3 分

当 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$ 时，由于 $\tan x\ge x,x\ge x^n(n=1,2\cdots)$，故

$$\tan^{n-1}x\ge x,\quad\cos x\le\cos x^n,\quad\sec^2x\ge\sec^2x^n,$$

从而 $f'(x)\ge0$，$f(x)$ 单调不减，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)\ge0$，即 $\tan^nx\ge\tan x^n$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nxdx\ge\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x^ndx,\quad\text{即}\quad a_n\ge b_n(n=1,2,3\cdots).$$ ……6 分

（Ⅱ）由 $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nxd\tan x=\dfrac{1}{n+1}$ 知 $0<a_n\le\dfrac{1}{n+1}$，故由夹逼原则知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 又

$a_n \ge b_n \ge 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$． ……10 分

（20）解：（Ⅰ）由$f(x)$连续知右端函数可导，从而$f(x)$可导．在方程两边求导，得

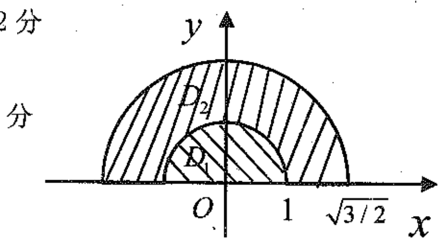
$$f'(x)=e^x-e^x\int_0^x[f(t)]^2\,dt-e^x[f(x)]^2. \qquad \text{……2 分}$$

再由原方程可知$f'(x)=f(x)-e^x[f(x)]^2$，或$\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{1}{f(x)}=-e^x$． ……4 分

（Ⅱ）令$u=\dfrac{1}{f(x)}$，则$u'+u=e^x$，解得$u=e^{-x}(\int e^{2x}dx+C)=Ce^{-x}+\dfrac12 e^x$，故 ……7 分

$f(x)=\dfrac{1}{Ce^{-x}+\frac12 e^x}$．由原方程知$f(0)=1$，代入上式得$C=\dfrac12$，所以$f(x)=\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$． ……10 分

（21）解：令$\sqrt{3-2x^2-2y^2}=x^2+y^2$，得$x^2+y^2=1$.用半圆周$x^2+y^2=1\,(y\ge 0)$把$D$分成两部分$D_1,D_2$如图所示． ……2 分



$$\text{原积分}=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}(\sqrt{3-2x^2-2y^2})\,d\sigma \qquad \text{……5 分}$$

$$=\int_0^\pi d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr+\int_0^\pi d\theta\int_1^{\sqrt{\frac32}}\sqrt{3-2r^2}\;r\,dr \qquad \text{……7 分}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\pi(-\frac16)(3-2r^2)^{3/2}\Big|_1^{\sqrt{\frac32}}=\frac{\pi}{4}+\pi(-\frac16)(-1)=\frac{5}{12}. \qquad \text{……10 分}$$

（22）解：$(A-B)X=A$，其中$A-B=\begin{pmatrix}3&2&-1\\4&3&-3\\1&0&3\end{pmatrix}$，$|A-B|=0$，故$A-B$不可逆．……2 分

$$(A-B\vdots A)=\begin{pmatrix}3&2&-1&3&7&9\\4&3&-3&1&7&11\\1&0&3&7&7&5\end{pmatrix}\overset{\text{行}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&7&7&5\\0&1&-5&-9&-7&-3\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \text{……4 分}$$

得$r(A-B)=r(A-B\vdots A)$，故存在X，使得$(A-B)X=A$，且 ……6 分

$$X=\begin{pmatrix}7-3k_1&5-3k_2&7-3k_3\\-9+5k_1&-3+5k_2&-7+5k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}，\text{其中}k_1,k_2,k_3\text{是任意常数}. \qquad \text{……11 分}$$

（23）解：二次型矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}$． ……1 分

由二次型正负惯性指数都是1，可知$r(A)=2,|A|=-(a+2)(a-1)^2=0$，所以$a=-2$或$a=1$． ……4 分

当$a=1$时，$r(A)=1$，不合题意，故$a=-2$．此时$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$，所以$A$的特征值是$3,-3,0$． ……6 分

$\lambda=3$时，$(\lambda E-A)\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

$\lambda=-3$时，$(\lambda E-A)\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$；

$\lambda=0$时，$(\lambda E-A)\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$． ……8 分

将ξ_1,ξ_2,ξ_3单位化，得$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，取$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，故所求正交变换为$x=Py$，即$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，得标准型为$f=3y_1^{\,2}-3y_2^{\,2}$． ……11 分