绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}$ 的可去断点个数为（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

（2）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$，则 $f(x)=$（ ）。

（A）$\sqrt{x}-1$ （B）$\sqrt{x}+1$ （C）$2\sqrt{x}-1$ （D）$2\sqrt{x}+1$

（3）设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,\ 1)$ 可微， 且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-f(1,1)+2x-3y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}=0$， 则 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(1+t,1)-f(1,1-2t)}{t}=$（ ）.

(A)1 (B) 2 (C)3 (D)4

（4）设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均不存在，那么下列命题正确的是（ ）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也不存在；

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 必也存在；

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 均不存在；

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)$ 中只要有一个存在，另一个必定不存在

（5）设 A,B 为正定矩阵，C 是可逆矩阵，下列矩阵不是正定矩阵的是（ ）

(A). C^TAC (B). $A^{-1}+B^{-1}$ (C). A^*+B^* (D). $A-B$

(6) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 3 维非零向量，则下述命题中，正确命题的个数为（ ）

(a) 如果 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 线性表出；

(b) 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

(c) 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $2\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\le3$；

(d) 如果 $r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\ \alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 则 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 线性表出。

（A）1; （B） 2; （C） 3; （D）4

（7）设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}Axe^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le0,\end{cases}$ 则数学期望 $E(X^2-X)=$（ ）.

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{4}$

.

（8）设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且有 $P\{X<\sigma\}>P\{X\ge\sigma\}$，则有比值 $\dfrac{\mu}{\sigma}$（　　　　）

（A）　等于1　　　B　大于1　　　C　小于 1　　　D　不能判别

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x-2\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=$ ________ .

（10）设 $f'(u)=\ln(1+u^2), g(x)=f(\dfrac{2x-1}{2x+1})$，则 $g'(0)=$ ____________.

（11）设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$ ____________. .

（12）差分方程 $y_{x+1}-3y_x=2\cdot 3^x$ 的通解为 ________________.

（13）已知 4 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\beta_i(i=1,2,3,4)$ 非 0 且与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，则秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$ ________________.

(14) 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\bar{X}$ 是样本均值，S^2 为样本方差，统计量 $E(\bar{X}S^2)^2=$ __________________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 **10** 分）设 D=$\left\{\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x+2y\right\}\right.$,求 $\iint\limits_{D}(x+y^2)d\sigma$

（16）（本小题满分 **10** 分）求 $y''+y'-2y=\min\{e^x,1\}$

（17）（本小题满分 **10** 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=1$，证明：$\exists\eta\in[0,1]$ 使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x-2$.

（18）　（本小题满分 **10** 分）15.设 $a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots,(a_0\ne 0)$ 为等差数，（I）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径；（II）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的和。

(19)（本小题满分 **10** 分）设 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$,试问参数 a,b 分别满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值？$f(x,y)$ 有唯一极小值？

（20）（本小题满分 **11** 分）

（I）已知 1 是 3 阶实对称矩阵 A 的一个特征值，且

$$A\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-4\\0&4\\0&-2\end{pmatrix}$$

（I）求矩阵 A 的特征值和特征向量；（II）如果 $\beta=\begin{pmatrix}1&-1&5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，求 $A^n\beta$

（21）（本小题满分 **11** 分）已知齐次方程组 $Ax=0$ 为

$\begin{cases} x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0 \end{cases}$，又矩阵 B 是 2×4 矩阵，$Bx=0$ 的基础解系为

$a_1=(1\quad -2\quad 3\quad -1)^T$，$a_2=(0\quad 1\quad -2\quad 1)^T$；

（I）求矩阵 B；（II）若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；（III）求方程组 $Ax=0$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解。

（22）（本小题满分 11 分） 设 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x$（$0<x<1$）的条件下，Y 在 $(0,x)$ 上服从均匀分布，试求：（I）(X,Y) 的密度函数；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$；（III）条件概率 $P(X+Y<1/Y>\frac{1}{2})$

（23）（本小题满分 11 分） 设连续型总体 X 的分布函数为

$F(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{a}{x^2}, & x>\theta \\ 0, & x\le\theta \end{cases}$ $(\theta>0)$，且 $X_1,\dots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，试求：（I）常数 a；（II）参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）求 $E(\hat{\theta}_L)$.

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $k>0$，若方程 $\ln x = kx$ 有实根，则必有（　　）。

（A）$k>\dfrac{1}{e}$　　（B）$k=e$　　（C）$0<k\le\dfrac{1}{e}$　　（D）$k=0$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为可导函数，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则下列说法正确的是（　　）.

（A）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为偶函数

（B）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为奇函数

（C）若 $f'(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数

（D）若 $f'(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也奇函数

（3）设平面区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-x\le y\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-\sqrt{2x-x^2}\le y\le 1\}$，二重积分 $I_1=\iint\limits_{D_1}\ln(x+y)\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_2}\ln(x+y)\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D_2}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，则 I_1，I_2，I_3 的大小关系为(　　　)

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_3<I_2<I_1$.　　（C）$I_2<I_3<I_1$.　　（D）$I_1<I_3<I_2$.

（4）已知微分方程 $y''-2y'+\lambda y=xe^{ax}$ 的通解形式是 $y=c_1e^x+c_2xe^x+(Ax+B)e^{ax}$，则 (　　　)

（A）$\lambda=1, a=1$;　　(B) $\lambda=1, a\ne 1$;

(C) $\lambda\ne 1, a=1$;　　(D) $\lambda\ne 1, a\ne 1$

（5）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$,则 A 与 B (　　)

(A)合同不相似　　(B)相似不合同　　(C)合同且相似　　(D)不相似也不合同

（6）设 A 与 B 为 3 阶非 0 矩阵，满足 $AB=0$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{pmatrix}$，则

(A) $a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$　　(B) $a\ne -1$ 时，必有 $r(A)=2$

(C) $a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　　(D) $a\ne 2$ 时，必有 $r(A)=2$

（7）设 X,Y 是两个随机变量，$P(Y\ge 0)=\dfrac{3}{5}, P(X<0\,|\,Y<0)=\dfrac{1}{5}$, 则 $P(\max(X,Y)\ge 0)=$

$(A)\ \dfrac{2}{25}$　　$(B)\dfrac{1}{25}$　　$(C)\dfrac{4}{25}$　　$(D)\dfrac{23}{25}$

（8）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\2/3&1/3\end{pmatrix}, Y\sim e(\lambda)$ ($\lambda=\dfrac{1}{3}$ 的指数分布)，则概率 $P\{X+Y>E(X^2Y)\}=$（　　　）

(A) $\dfrac{1}{3}(e^{-\frac{1}{3}}+2)$　　(B) $\dfrac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+1)$　　(C) $\dfrac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+e^{-1})$　　(D) $\dfrac{1}{3}(3-e^{-\frac{1}{3}})$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a}-e^{\sqrt{4-x^2}}}{x\ln(1+x)}=b$，则$a=$______，$b=$________.

(10)　设函数$f(x)$的反函数为$g(x)$，且$f(a)=2, f'(a)=-1, f''(a)=3$，则$g''(2)=$__________。

（11）积分$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}\,x=$____________.

（12）设$f(x)$可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$F(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，则$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=$____________。

（13）设A为三阶实对称矩阵，$\xi_1=\begin{pmatrix}k\\-k\\1\end{pmatrix}$为方程组$AX=0$的解，$\xi_2=\begin{pmatrix}k\\2\\1\end{pmatrix}$为方程组$(2E-A)X=0$的一个解，$|E+A|=0$，则$A=$__________.

(14) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本，为使$Y=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$成为总体方差的无偏估计，则常数$k=$____________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 设函数$f(x)$在$x=0$处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\sin\frac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=2$，求$f''(0)$的值.

（16）（**本小题满分 10 分**）设函数$z=f(\varphi(x)+y,x\varphi(y))$，其中$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$\varphi(x)$具有一阶连续导数，试求：$\dfrac{\partial z}{\partial u}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

（17）（**本小题满分 10 分**）　设$f(x)$在$[-a,a]$上连续，在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq 0$.

（Ⅰ）证明对$\forall x\in(0,a],\theta\in(0,1)$使得$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}\,t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；（Ⅱ）求$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

（18）　（**本小题满分 10 分**）设函数满足方程　$F_n'(x)=F_n(x)+\dfrac{(-1)^n}{n}e^x x^n$（$n$为整数）且$F_n(0)=0$，试求：(I）函数$F_n(x)$的表达式；(II）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$的和函数；(III）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}$的值。

（19）（本题满分 10 分）已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线$C$距离$xOy$面最远的点和最近的点.

（20）（**本小题满分 11 分**）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\\2\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\b\end{pmatrix}$,$a_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\a\\-9\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\10\\a+b\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 当a,b为何值时，β不可由α_1，α_2，α_3线性表示;(Ⅱ) 当a,b为何值时，β可由α_1，α_2，α_3线性表示，写出表达式.

（21）（**本小题满分 11 分**）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.　（Ⅰ）求行列式$\left|A^*-2A^{-1}\right|$;　（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E 。

（22）（**本小题满分 11 分**）设企业在竞争的市场中，已知在某时间内生产出的产品，每个单位产品获利润a元，若这段时间的后期，市场中会出现比该产品更好新产品替代，此时每单位个产品会亏损b元，假设这段时间内市场对该产品的需求量是 X，且 X 服从参数为$\lambda=1$的指数分布，试求:（I）该企业在这段时间内生产 t 件单位产品时，利润函数的表达式;（II）t 是多少时，能使得利润的数学期望达到最大?

（23）（**本小题满分 11 分**）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{\theta^4}(\theta^2-x^2), & 0<x<\theta \\ 0, & 其他\end{cases},$$

$X_1,\ldots,X_n$是 X 的简单随机样本，试求:（I）确定常数A，(II)θ的矩估计$\hat{\theta}_0$;（III）$D(\hat{\theta}_0)$.

绝密★启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)\ln(1+x^2)}{(e^{|x|}-1)\sin^2 x}, x\neq 0,\\ 1, \quad x=0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）.

（A）$g(0)=0,g'(0)$ 不存在　　（B）$g(0)=0,g'(0)=1$
（C）$g(0)=1,g'(0)$ 不存在　　（D）$g(0)=1,g'(0)=1$

(2) 设有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\dfrac{\sin a}{n^3}+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})]$ 收敛，其中 a 为常数，则此级数（　　）.

（A）条件收敛　（B）绝对收敛　（C）发散　（D）敛散性与 a 的取值有关

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)\,\mathrm{d}t$，若 $f(x)$ 是单调增加的奇函数，则 $F(x)$ 是（ ）.

（A）单调增加的奇函数　（B）单调减少的奇函数
（C）偶函数　（D）奇偶性不确定

(4) 设 $D:|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D \dfrac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{1}{3}$

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3)$，
$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（ ）.

(A) 3　(B) -3　(C) 6　(D) -6

(6) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　(B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A\alpha}$　(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

(7) 在 3 次的独立试验中，每次试验成功的概率为 p，且至少成功一次的概率为 $\dfrac{37}{64}$，则概率 $p=$（　　）.

(A) $\dfrac{27}{64}$　(B) $\dfrac{37}{64}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

（8）设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\overline{X}$ 是样本均值，S^2 为样本方差，则统计量（　　）$\sim\chi^2(n)$。

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$　(B) $\dfrac{X^2{}_i}{\sigma^2}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (D) $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

.

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）设曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$，且当 x 在 $x=0$ 处取得增量 Δx 是相应的函数值增量 $\Delta y=3\Delta x+o(\Delta x)\,(\Delta x\to 0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\ln[1+f(\frac{1}{n})]\right\}^n=$_____________。

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y\left(0\right)=0,y'\left(0\right)=0$ 的解为 $y=$____________;

(11) 设 $a>0$，则 $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\ln\frac{x-a+\sqrt{1+(x-a)^2}}{2}=$_____________.

(12) 设 $f(x,y)$ 可微分，且满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x-y$，则 $\mathrm{d}\,f(x,y)\big|_{(1,0)}=$____________.

(13) 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $3,-3,0$ 则 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=$_____________.

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，若 $E(X+Y)^2-2E(X+Y)=0$，则概率 $P(X+Y\geq 2)=$_________________ .

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\leq 0,\\ x^2,\quad x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x-\sin x}}$.

（16）(**本题满分 10 分**)假设生产某种产品需要 A,B,C 三种原料，该产品的产量与三种原料的用量 x,y,z 之间有如下关系：$q=0.0005x^2yz$，已知三种原料价格分别为 1 元、 2 元、 3 元，现用 2400 元购买原料，问三种原料各购进多少，可以使该产品产量最大？

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D x(x+ye^{x^2})\operatorname{sgn}(y-x^2)\,d\sigma$，其中 $D:-1\leq x\leq 1$，

$$0\leq y\leq 1,\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}-1,\ u<0,\\ 0,\ u=0,\\ 1, u>0.\end{cases}$$

（18）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0, f(0)f(\frac{1}{2})<0$，证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；（Ⅱ）$\exists\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

（19）（**本题满分 10 分**）已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(x)$ 是微分方程 $xy'+y=e^x$ 满足初始条件 $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=1$ 的特解。将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$,（I）问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解？（II）有解时求出全部解.

（21）（**本题满分 11 分**）（I）已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 的平方项系数均为 0，设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)^T$，且满足 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$.

（I）求该二次型表达式;（II）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次形为标准型，并写出所用坐标变换;（III）若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定，求 k 的取值范围.

.

（22）（**本题满分 11 分**）设 (X,Y) 在方形区域 $G=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试求：（I）概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}$；（II）$Z=|X-Y|$ 的密度函数 $f_Z(z)$；（III）$Z=|X-Y|$ 均值与方差。

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，（I）求参数 θ 矩估计 $\hat{\theta}_J$ 与极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（II）求 $\hat{\theta}_L$ 的分布密度函数 $f_{\hat{\theta}}(z)$；（III）计算 $E(\hat{\theta}_J)$ 与 $E(\hat{\theta}_L)$.

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1-x}+1, x<0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的（　　）

(A)连续点　　(B)可去间断点　　(C)跳跃间断点　　(D)无穷间断点

（2）设 $x^n\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，则 $n=$（　　）

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

（3）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y^1(x,y)\ne 0$．已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\ne 0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\ne 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\ne 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\ne 0$.

（4）设 $f(x,y)$ 连续，且满足 $f(x,-y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（　　）

（A）$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　（B）$2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

（C）$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$　　（D）$2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

.

（5）设 A、B 是 n 阶实对称可逆矩阵，则下列关系式错误的是（　　）

(A) 存在可逆阵 P、Q，使 $PAQ=B$　　(B) 存在可逆阵 P，使 $P^{-1}ABP=BA$

(C) 存在可逆阵 P，使 $P^TA^2P=B^2$　　(D) 存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=B$

（6）设 A 为可逆矩阵，令 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}P_1^{100}AP_2^{-1}$ 等于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$，$0<p<1$，若 $P\{XY<0\}=\frac{1}{2}$，则 $p=$（　　）

(A)1/4　　(B)1/3　　(C)1/2　　(D)3/4

（8）设 $f(x)$ $F(x)$ 分别是随机变量 X 的密度函数及分布函数，且 $f(x)$ 为连续函数，则以下（　　）为概率密度函数。

(A) $f^2(x)$　　(B) $f(x)F(x)$　　(C) $2f(x)F(x)$，　　(D) $\frac{1}{2}f(x)F(x)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 p 是满足一定条件的常数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})=1$，则 $p=$______.

（10）设 $f(x)=\sqrt{1+x^2}+a+b\cos x$，若当 $x\to0$ 时 $f(x)=o(x^2)$，则 $a=$______，$b=$______。

（11）已知方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ 的两个特解 $y_1=e^x, y_2=x$，则该方程满足初值 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的解为____________；

（12）设 $f(x)$ 单调且具有一阶连续导数，$z=f(x+\varphi(y))$ 满足 $\varphi(y)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$，则函数 $\varphi(y)=$_____.

（13）设向量组 $a_1=(1,\ -1,\ 0)^T, a_2=(4,\ 2,\ a+2)^T, a_3=(2,\ 4,\ 3)^T, a_4=(1,\ a,\ 1)^T$，中任何两个向量都可由向量组中另外两个向量线性表出，则 $a=$________.

（14）设 X,Y 相互独立，且 X 服从两点分布，分布律为

X	1	2
p_i	$2/3$	$1/3$

$Y\sim e(\lambda)$（$\lambda=1$ 的指数分布），则 $Z=XY$ 的分布函数为 $F_Z(z)=$____________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本小题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ \int_0^y \cos u^2\,\mathrm{d}u+\int_t^1 \frac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=0 \end{cases}$ 确定，求二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。
.

（16）（**本小题满分 10 分**）设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，$z=f(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

（17）（**本小题满分 10 分**）证明：当 $x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

（18）（**本小题满分 10 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}x^n$ 的收敛域及和函数。

(19)（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)=\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t\ (x\ge0)$， （I）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值；(II) 问 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是否有最大值？为什么？

（20）（**本小题满分 11 分**）设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数，

试求：（I）A.（II）A^{100}.

（21）（**本小题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（I）求参数 a；(II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TA^2x$ 化为标准形。

（22）（**本小题满分 11 分**）设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ a-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（I）确定 a；（II）分布函数 $F(x)$；（III）$Y=F(X)$ 求 Y 的分布函数 $G(X)$ 4）概率 $P\{2Y^2\le E(Y)\}$.

（23）（**本小题满分 11 分**）设总体 X 服从 $U(\theta_0,\theta_0+\theta)$（均匀分布，$\theta_0$ 为已知常数），$X_1,\dots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$，（III）$\hat{\theta}_L$ 是否为 θ 的无偏估计。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟五）

考生注意:本试卷共二十三题,满分150分,考试时间为3小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题4分,共32分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $x^n\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，则 $n=$（　）.

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'(a)f'(b)<0$，那么下列说法正确的是（ ）.

（A）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>0$

（B）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)<0$

（C）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$

（D）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$

(3). 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$.　　（B）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$.

（C）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$.　　（D）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$.

（4）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　）

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（5）n 阶实矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0,$ 则下列命题正确的是（），

（A）$3E-A$ 可逆，$3E+A$ 也可逆　　（B）$2E-A$ 可逆，$2E+A$ 也可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 也可逆　　（D）$4E-A$ 可逆，$4E+A$ 也可逆

（6）设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)$，$\eta_3=(1,0,5,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组（Ⅰ）的一个极大无关组是（　　）。

(A) α_1,α_2　　(B) α_1,α_4　　(C) α_3,α_5　　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

（7）已知随机变量 X 与 Y 满足 $EXY>EXEY$,并且 $DX>0,DY>0$，则

（A）$D(X+Y)\geq DX+DY;$　　（B）$D(X+Y)<DX+DY;$

（C）$D(X-Y)\geq DX+DY;$　　（D）$D(X-Y)<DX+DY;$

（8）设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & \bar{A}\text{发生},\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & \bar{B}\text{发生},\end{cases}$ X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　　）.

(A) $\rho=0$　　**(B)** $\rho=1$　　# **(C)** $\rho<0$　　**(D)** $\rho>0$

.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right)=$________________。

（10）设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+\cos x}{\sqrt{1+2x}-1}=1$，那么曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程是________________.

（11）二次积分 $\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\dfrac{|\sin y|}{y}dy=$______________.

（12）设 $f(x,y,z)=e^xyz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$___________.

.

（13）设 A 是正负惯性指数均为 1 的三阶实对称矩阵，且满足 $|E+A|=|E-A|=0$,则 $|2E+3A|=$________________。

（14）设总体 X 服从0-1分布，即 $P\{X=0\}=1-p,P\{X=1\}=p$, $X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\bar{X}$ 是样本均值，则 $P\{n\bar{X}>2\}=$________________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本小题满分 10 分**）（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}-\sin x, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{\arcsin x}{x}+e^{\frac{1}{2x}}+b, & -1\le x<0,\end{cases}$（Ⅰ）求常数 A,B 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;（Ⅱ）就所求的 A,B 值，判别 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导则求 $f'(0)$。

（16）（**本小题满分 10 分**）计算二重积分

$$I=\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,d\sigma\text{，其中 }D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\ .$$

（17）（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，在 (a,b) 内二阶可导，且

$f(a)=f(b)=0=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=0$. 证明：

（Ⅰ）在 (a,b) 内存在两个不同的点 ξ,η，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=f'(\eta)-f(\eta)=0$ 成立;

（Ⅱ）$\exists\zeta\in(a,b)$ 使得等式 $f''(\zeta)=f(\zeta)$ 成立.

（18）（**本小题满分 10 分**）.（I）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx,n=0,1,2\cdots$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n$。

（II）求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$的和。

(19) （**本小题满分 10 分**）设方程$2x^3-6xy+3y^2+\frac{1}{e}z\ln z=0$确定了$z=z(x,y)$，求$z(x,y)$的极值.

（20）（**本小题满分 11 分**）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$B$为三阶非零阵, 向量

$\beta_1=(0,1,-1)^T$, $\beta_2=(a,2,1)^T$, $\beta_3=(b,1,0)^T$是齐次方程组$Bx=0$的 3 个解向量,且方程$Ax=\beta_3$有解，试求：(1) a,b; (2) $Bx=0$通解

（21）（**本小题满分 11 分**）设二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$,其中 b 为非零的实数（1）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（2）求出该二次型正定的充要条件。

（22）（**本小题满分 11 分**）设 U与V 相互独立同分布，且对应的分布律为$P\{U=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，而随机变量函数$X=\max\{U,V\}$,$Y=\min\{U,V\}$， 试求：（I）(X,Y)的联合分布律；（II）概率$P\{|XY|=1\}$；(III) $Cov\{X,Y\}$.

（23）（**本小题满分 11 分**）设总体X的分布律是$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p^k$（参数为p的几何分布），$X_1,\ldots,X_n$对应的样本，（I）求p的矩估计$\hat{p}$；（II）求p的最大似然估计$\hat{p}_L$及样本值：3、4、6、2、3、2 时$\hat{p}_L$估计值；（III）计算$E(\frac{n}{\hat{p}^2})$