绝密★启用前

2018年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学二（模拟 1）参考答案

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

（1）【解】由极限的保号性知答案应该为 **B.**

(2) 【解】 $f(x)=\frac{1}{1+x}(e^{x^n}-1)+nx^{n-1}\ln(1+x)e^{x^n}\sim(n+1)x^n$，

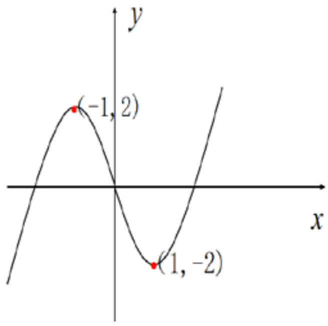
$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{a\cos x(\sqrt{1+\sin^3 x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{\frac{a}{2}x^3}=1$，故 $a=40,n=4$，答案 **B.**

(3)【解法一】交点处 x 坐标满足方程 $x^3-3x+k=0$，令 $f(x)=x^3-3x+k,\ f'(x)=3(x^2-1),\ f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 与 $[1,+\infty)$ 上单增，在 $[-1,1]$ 上单减，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$， $f(-1)=2+k$， $f(1)=-2+k$，由题设

有 $f(-1)<0$ 或者 $f(1)>0$，即 $|k|>2$。答案 **A**

【解法二】图形法 $y=x^3-3x$ 的图形为如图所示，



（4）【解】有题设知 $xe^{-x^2}f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必为奇函数,

又 $f(x)$ 有界,因而 $\exists M>0$,使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|f(x)|\le M$

相应的有 $|F(x)|=\left|\int_0^x te^{-t^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\left|\int_0^x\left|te^{-t^2}f(t)\right|\mathrm{d}t\right|\le\frac{M}{2}(1-e^{-x^2})\le\frac{M}{2}$，

因此 $F(x)$ 是有界的奇函数答案为 **A**。

（5）【解】 由 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$ 可得

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f_y'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，答案应该是 D.

(6) 【解】 记 $D_1:x^2+y^2\le1,D_2:|x|+|y|\le1,D_3:\max\{|x|,|y|\}\le1$，则有 $D_2\subset D_1\subset D_3$，且函数

$\cos(xy)$ 在各个区域上取值均为正，因此有 $I_2 < I_1 < I_3$．答案为 C．

(7) 【解】将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ $\boldsymbol{\alpha}_3$ 作为 A 的列向量组。将其化为阶梯形即可确定 a 的取值．$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ $\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三个不同特征值的特征向量，必线性无关．

由 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & a & 4 \\ -2 & 1 & 5 & a \\ a & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}^T \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & a & 4 \\ 0 & -1 & 5-2a & a-8 \\ 0 & a+2 & a^2+10 & 4a+1 \end{pmatrix}^T$

$$\to \begin{bmatrix} -1 & 1 & a & 4 \\ 0 & -1 & 5-2a & a-8 \\ 0 & 0 & (a+4)(5-a) & (a+3)(a-5) \end{bmatrix}^T$$

可知 $a \neq 5$。仅 (A) 入选．答案为 D.

(8)【解】 因 (A) 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 A 的不同特征值的特征向量的线性组合，故不是 A 的特征向量。排除 (A)．(B) 中 $\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 的排列顺序与其对角阵中特征值的排列顺序不一致。排除 (B)．
(D) 中 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是 A 的特征向量。排除 (D)。仅 (C) 入选．答案为 C.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

(9)【解】 因为 $\dfrac{\ln k}{k} < 1, k = 2,3,\cdots,n$，所以有

$(ne)^{\frac{1}{n}} \geq \left(1+e^{\frac{\ln 2}{2}}+e^{\frac{\ln 3}{3}}+\cdots+e^{\frac{\ln n}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} \geq 1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

由夹逼原理知原式 $=1$．应填 1．

(10) 【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y} = [\varphi'(x+y)+y\varphi(x+y)]e^{xy}+[\varphi'(x+y)+x\varphi(x+y)]e^{xy} = 0$，所以有 $2\varphi'(x+y)+(x+y)\varphi(x+y) = 0$，所以有 $2\varphi'(u)+u\varphi(u) = 0$，解方程可得 $\varphi(u) = Ce^{-\frac{u^2}{4}}, \varphi(0) = 1, C = 1$，因此 $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2}{4}}$．应填 $e^{-\frac{u^2}{4}}$．

(11) 【解】 原等式可化为 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = x^2\cos x$，对 x 求导可得 $xf'(x) = 2x\cos x - x^2\sin x$，所以 $f'(x) = 2\cos x - x\sin x$， $f(x) = f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = x\cos x+\sin x$. 应填 $x\cos x+\sin x$．

(12)【解法一】 该方程可变化为 $\dfrac{dx}{dy} = x+y$，这是一阶线性微分方程，通解为

$x = e^{\int dy}(\int ye^{-\int dy}dy + C) = Ce^y - y - 1$，该方程的通解为 $x = Ce^y - y - 1$．应填 $x = Ce^y - y - 1$．

【解法二】 令 $u = x+y$，该方程可变化为 $\dfrac{du}{dx} - 1 = \dfrac{1}{u}, \dfrac{u}{u+1}du = dx$，积分后可得 $u - \ln(u+1) = x - \ln C, u = x+y$ 代入后可得方程通解为 $x = Ce^y - y - 1$．应填 $x = Ce^y - y - 1$．

(13)【解】原式$=2\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=2\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=2\int_0^1 ye^{y^2}dx=e-1$. 应填$e-1$.

(14)【解】因 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，且$r(A)=2$，故$|A|$=0。易求得

$$|A|=-(a+2)(a-1)^2。$$

于是由$r(A)=2$知，$a=-2$。由

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)=0$$

可知 A 的特征值为-3，0，3。在正交变换下该二次型的标准型为$3y_1^2-3y_3^2$，故其规范型为$y_1^2-y_3^2$. 应填$y_1^2-y_3^2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)【解】由题设有$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x}+f(x)}{x}=1$，所以有$\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{\ln(1+x)}{x}+f(x)]=0$，

$f(0)=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=-1$，由此可得

$$\lim_{x\to0}(\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x})=\lim_{x\to0}[(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x})+\frac{f(x)-f(0)}{x}]=\lim_{x\to0}(\frac{\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{x})+f'(0),$$

而$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，所以有$f'(0)=\dfrac{3}{2}$. 由周期性可得

$f(4)=f(0)=0, f'(4)=f'(0)=\dfrac{3}{2}$ 由此可得所求切线方程为$\dfrac{y+1}{x-4}=\dfrac{3}{2}$，即为$y=\dfrac{3}{2}x-7$.

(16)【证明】(Ⅰ) 令$f(x)=x-\arctan x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，因而函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上单增，当$x>0$时有$f(x)=x-\arctan x>f(0)=0$，由此可得数列$\{x_n\}$是单调递减的，又$x_n>0$，由单调有界收敛原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式$x_n=\arctan x_{n-1}$两边同时取极限可得$a=\arctan a$，

解得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}=\dfrac{1}{3}$.

(17)【解】 对等式$\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x(\dfrac{1}{1+e^\pi}+\dfrac{\sin t}{1+e^t})\sin t\,\mathrm{d}t$两边关于$x$同时求导可得

$xf'(x)=(\dfrac{1}{1+e^\pi}+\dfrac{\sin x}{1+e^x})\sin x$，上式两边同时在区间$[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$上积分后可得

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xf'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{1+e^\pi}+\dfrac{\sin x}{1+e^x})\sin x\,\mathrm{d}x$，注意到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+e^{\pi}} + \frac{\sin x}{1+e^{x}}\right)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+e^{\pi}}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{x}}\mathrm{d}x$$

$$= 0 + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x}{1+e^{x}} + \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

(18)【解】 由题设可知 $A = \max\limits_{(x,y)\in D}\{\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\}, B = \min\limits_{(x,y)\in D}\{xy\ln(x^2+y^2)\}$，

令 $g(r) = \frac{\ln(r)}{r}, r\in(0,+\infty), g'(r) = \frac{1-\ln(r)}{r^2} = 0 \Rightarrow r = e, g''(e) = \frac{-1}{e^3} < 0$，所以 $r = e$ 是函数 $g(r)$ 取得极大值，同时也是最大值，且有 $g(e) = \frac{1}{e}$，相应的有 $x^2+y^2 = e$ 时，函数 $\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ 取得最大值，所以应取 $A = \frac{1}{e}$；

设 $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$，令
$$\begin{cases} f_x'(x,y) = y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0, \\ f_y'(x,y) = x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

上述方程组的第一式乘以 x 减去第二式乘以 y 可得 $\frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = 0$，由此可得函数 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点满足 $y = x$，把它代入到方程组的第一个式子中去可得 $x\ln(2x^2) + x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2e}}$，因而 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点为 $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$，因为驻点唯一，且实际问题有解，可知

$$B = f_{\min} = f(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = -\frac{1}{2e}.$$

(19) 【证明】令 $F(x) = \int_0^x (t - \frac{5x}{6})t^3 f(t)\,\mathrm{d}t, x\in[0,a]$，则 $F(0) = 0$，且

$F'(x) = \frac{1}{6}x^4 f(x) - \frac{5}{6}\int_0^x t^3 f(t)\,\mathrm{d}t, F'(0) = 0$， $F''(x) = \frac{1}{6}x^3[xf'(x) - f(x)]$，

$x\in(0,a)$，由拉格朗日中值定理知存在 $\xi\in(0,x)$，使得 $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$， $f(0) = 0$，因此有 $f(x) = f'(\xi)x$，由此可得 $F''(x) = \frac{1}{6}x^4[f'(x) - f'(\xi)]$，$f'(x)$ 单减，因而当 $x\in(0,a)$ 时有 $F''(x) < 0$，即函数 $F'(x)$ 在 $[0,a]$ 是单减函数，当 $x\in(0,a)$ 时有 $F'(x) < F'(0) = 0$，由此可得函数 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单减，因而有

$F(a) = \int_0^a (t - \frac{2a}{3})t^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a x^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{5a}{6}\int_0^a x^3 f(x)\,\mathrm{d}x < F(0) = 0$，即有

$$\int_0^a x^4 f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{5a}{6}\int_0^a x^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(20) 【解】设 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则有 $xyA^2=f(x,y)-1$，对等式 $xyA^2=f(x,y)-1$ 两边同时区域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 上做二重积分可得 $A^2\iint\limits_D xydxdy=A-1$，$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy=\frac{1}{4}$，因此有 $\frac{A^2}{4}=A-1$，解得 $A=2$，由题设可得 $f(x,y)=2xy+1$，函数 $f(x,y)=2xy+1$ 关于 x,y 是轮换对称的．记 $D_1:y\le x\le 1,0\le y\le 1$，$D_2:0\le x\le 1,0\le y\le x$，那么区域 D_1 与 D_2 关于直线 $y=x$ 对称，且 $D_1\cup D_2=D$ 因此有

$$\int_0^1 I(t)dt=\int_0^1 I(y)dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D (2xy+1)dxdy=\frac{1}{2}+\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy=\frac{3}{2}.$$

(21)【解】由已知 $y(1)=\frac{1}{4}$，$y'(1)=1$. 令 $y'=p$，则 $p\frac{dp}{dy}=6\sqrt{y}$. 解得 $p^2=8y^{\frac{3}{2}}+C_1$，即

$y'^2=8y^{\frac{3}{2}}+C_1$，

由题设知 $y(1)=\frac{1}{4},y'(1)=1$，代入可得 $C_1=0$，因此有 $y'=\pm 2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$，又 $y'(1)=1>0$，因此应该取 $y'=2\sqrt{2}y^{\frac{3}{4}}$，分离变量再积分后可得，$4y^{\frac{1}{4}}=2\sqrt{2}x+C_2$，由 $y(1)=\frac{1}{4}$ 可得 $C_2=0$，所以有 $y=\frac{1}{4}x^4,y'=x^3,y''=3x^2$，因此所求曲率

$$k=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^2}{\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(22)【解】由题设知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,1,0)^T$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)^T$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即有

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是 0 为 A 的二重特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为对应于 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的特征向量，又 $\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2)^T$ 为其特解，故

$$\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{b}，即\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},$$

于是 $\lambda_3=9$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的另一个特征值，$\boldsymbol{\beta}$ 为其对应 $\lambda_3=9$ 的特征向量。易看出 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关（对应分量不成比例）.

又 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 均线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}$，线性无关。所以 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，必与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=diag(0,0,9)$ 相似，取 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda},$$

即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5&4\\2&4&5\\1&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}。$$

注意到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}(1,\ 2,\ -2)=\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T,$$

其中$\boldsymbol{\eta}=(1,\ 2,\ -2)^T$，则$\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta}=9$，

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T)(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T)=\boldsymbol{\eta}\left(\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta}\right)\boldsymbol{\eta}^T=9\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^T=9\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A}^{100}=9^{99}\boldsymbol{A}$$

或

$$\boldsymbol{A}^{100}=\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&5&4\\2&4&5\\1&2&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9^{99}&2\times9^{99}&-2\times9^{99}\end{pmatrix}=9^{99}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}=9^{99}\boldsymbol{A}$$

(23)【解】（I）矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$等价$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵。且$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&a-6&0\end{pmatrix}$$

由$R(\boldsymbol{B})=2$ 知$R(\boldsymbol{A})=2$，故$a=6$.

（II）$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\0&8&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&8&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-\frac{1}{2}c_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

把所用的用初等矩阵写出，得

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\1&-4&1\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

绝密★启用前

2018 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学二（模拟 3）参考答案

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.

（1）【解】由 $x_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)],y_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$ 知是答案 D.

（2）【解】$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{xe^x}}dx\overset{x=t^2}{=\!=}2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ 收敛，答案为 B.

（3）【解】$r^2+4=0,\ r_{1,2}=\pm 2i$，为单根 $a\cos 2x,k=1$，所以特解为（D）

（4）【解】根据定积分的几何意义及函数曲线的凹凸性可得答案是 A.

（5）【解】由题知 $f(0)=1,f'(0)=2$，因此 $x=0$ 处法线方程为 $x+2y=2$. 答案：（B）

（6）【解】虽然区域关于 y 轴对称，由于被积函数 $f(x,y)$ 的奇偶性未知，所以不能用对称性计算，该题作图，化极坐标即可，答案：（C）

（7）【解】由题设有 $E_{i+1,j+1j}AE_{ij}=B$，E_{ij} 有些什么性质呢？

（1）$\left|E_{ij}\right|=-1$，因而 $\left|E_{i+1,j+1j}\right|\left|E_{ij}\right|=1$，故

$$\left|E_{i+1,j+1j}\right|\left|A\right|\left|E_{ij}\right|=\left|B\right|，即\ \left|A\right|=\left|B\right|。$$

（2）因 $\left|E_{ij}\right|\neq 0$，故 E_{ij} 可逆，所以 $r(B)=r(E_{i+1,j+1j}AE_{ij})=r(AE_{ij})=r(A)$。

（3）由 $E_{i+1,j+1j}AE_{ij}=B$ 说明了 $A\cong B$（A 与 B 等价）。

（4）因 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，故 $E_{i+1,j+1j}AE_{ij}=E_{i+1,j+1j}^{-1}AE_{ij}=B$，所以 A 与 B 不相似。

（5）因 $E_{ij}=E_{ij}^{T}$，故 $E_{i+1,j+1j}AE_{ij}=E_{i+1,j+1j}^{T}AE_{ij}=B$，所以 A 与 B 不合同。

因此，选项（C）正确。

（8）【解】：由于 $n-r=3$, 则 $r=r(A)=2$, 即 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=2$，又由于 η_1,η_2,η_3 是方程 $AX=0$ 的基础解系，则满足 $-\alpha_1+\alpha_2=0,\quad \alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0,\quad \alpha_1+5\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=0$，所以答案为（B）.

二、填空题:(9)～(14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）【解】：对原方程式两边同时求微分可得

$$\sec^2(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-2\cos x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{1+xy}(x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)=0,$$

又方程式可知 $x=0$ 时 $y=0$，所以有 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=\mathrm{d}x$。

（10）【解】所给方程两边分别对 x 和 y 求偏导数得

$$\begin{cases}2\cos(x+2y-3z)(1-3z_x')=1-3z_x',(1)\\2\cos(x+2y-3z)(2-3z_y')=2-3z_y',(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-3z_x'=0,\\2-3z_y'=0,\end{cases}\Rightarrow z_x'+z_y'=1$$

（11）【解】原式 $\xlongequal[x=1+\sec t]{}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$。

（12）【解】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec xdx=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(\sqrt{3}+2)$

（13）【解】 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{1}{n}+2\cos\frac{2}{n}+\cdots+\text{n}\cos\frac{n}{n})=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n}=\int_0^1 x\cos xdx$

$$=\int_0^1 xd\sin x=x\sin x\big|_0^1-\int_0^1\sin xdx=\sin1+\cos1-1$$

（14）【解】由于 $|A|=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot2=-2$，则 $\left(\frac{1}{4}A^*A^2\right)^{-1}=4(A^2)^{-1}(A^*)^{-1}=4(A^{-1})^2\cdot\frac{A}{|A|}$

$$=(4A^{-1}A^{-1}\cdot A)/(-2)=-2A^{-1}=-2\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=-2\begin{bmatrix}-1&3&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-6&0&0\\-2&4&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】 $x\neq0$ 时，$\int_{-\infty}^{x^2}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}t^2e^{\frac{t^2}{3}}dt+\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt=1+\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)dt$，

且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\sin x)^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left\{\left(1+\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{(x-\sin x)^2}{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}}\right\}^{\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{(x-\sin x)^2}}$，

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{(x-\sin x)^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(e^{x^4}-1)}{2(x-\sin x)(1-\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{x-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x^6}{1-\cos x} = 12$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\sin x)^2}} = e^{12}$．

（16）【解】1） 区域 D 内：

由 $f(x,y)=e^{-xy}$， $f_x'(x,y)=-ye^{-xy}=0,\ f_y'(x,y)=-xe^{-xy}=0$，

可得 $x_0=y_0=0$，所以 $z_0=f(0,0)=1$；

2）区域 D 的边界 $x^2+4y^2=1$ 上：

作拉格朗日函数：$L=-xy+\lambda(x^2+4y^2-1)$，因此知：

$$\begin{cases} L_x' = -y+2\lambda x = 0 \\ L_y' = -x+4\lambda y = 0 \\ x^2+4y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{1,2} = \mp\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases},\quad \begin{cases} x_{3,4} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_{3,4} = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases},$$

所以 $z_{1,2}=f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{2\sqrt{2}})=e^{\frac{1}{4}}, z_{3,4}=f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{2\sqrt{2}})=e^{-\frac{1}{4}}$；

3）比较以上函数值知，函数的最大值为 $f_{\max}==f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\frac{1}{2\sqrt{2}})=e^{\frac{1}{4}}$，

函数的最小值为 $f_{\min}=f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{2\sqrt{2}})=e^{-\frac{1}{4}}$ ．

（17）【解】：（I）两边求全微分：令 $t=x+y+z$

$2xdx+2ydy-dz=\varphi'(t)(dx+dy+dz)$, 所以 $dz=\dfrac{2x-\varphi'(t)}{1+\varphi'(t)}dx+\dfrac{2y-\varphi'(t)}{1+\varphi'(t)}dy$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'(t)}{1+\varphi'(t)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'(t)}{1+\varphi'(t)}$，

（II）所以 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{2}{1+\varphi'(t)}$， $t=x+y+z$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2}{(1+\varphi'(t))^2}\varphi''(t)[1+\dfrac{\partial z}{\partial x}]=-\dfrac{2\varphi''(t)}{(1+\varphi'(t))^2}[1+\dfrac{2x-\varphi'(t)}{1+\varphi'(t)}]$．

（18）【解】：设 $D_1: x^2+y^2-x\le 0$，则有

$$\iint\limits_{D}\left|x^2+y^2-x\right|dxdy=\iint\limits_{D_1}\left|x^2+y^2-x\right|dxdy+\iint\limits_{D-D_1}\left|x^2+y^2-x\right|dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-x)dxdy+\iint\limits_{D-D_1}(x^2+y^2-x)dxdy$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-x)dxdy+\iint\limits_{D}(x^2+y^2-x)dxdy$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}(r^2-r\cos\theta)rdr+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{1}(r^2-r\cos\theta)rdr$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos\theta)d\theta=\frac{5\pi}{16}-\frac{2}{3}.$$

（19）【解】(1) 做代换 $xt=u,\ xdt=du$，则方程为 $f'(x)=e^{-2x}-2\int_0^x f'(u)du$，求导数：

$f''(x)=-2e^{-2x}-2f'(x)$，因此可得 $\begin{cases} f''(x)+2f'(x)=-2e^{-2x} \\ f(0)=1,\ f'(0)=1 \end{cases}$

（2）解微分方程 $y''+2y'=-2e^{-2x}$ 得特解 $y^*=\dfrac{-2xe^{-2x}}{-4+2}=xe^{-2x}$，通解为

$f(x)=C_1+C_2e^{-2x}+xe^{-2x}$，代入 $f(0)=1,\ f'(0)=1$，可得 $C_1=1,\ C_2=0$，

所求函数为 $f(x)=1+xe^{-2x}$.

（20）【证明】：令 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}x^4$，对函数 $F(x)$ 分别在区间 $[0,1]$ 与 $[1,2]$ 应用拉格朗日中值定理，

可得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(1)-F(0)=f(1)-\dfrac{1}{4}=F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^3$，

存在 $\eta\in(1,2)$ 使得 $F(2)-F(1)=-f(1)+\dfrac{1}{4}=F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^3$，

结合上述两式可得 $f'(\xi)-\xi^3=\eta^3-f'(\eta)$，即有 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$.

（21）【解】 在时刻 t，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4t^3+1}{3t^2-1},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{6t(2t^3-2t-1)}{(3t^2-1)^3}$，由于在 $t=0$ 的左侧邻近点处 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$，

在 $t=0$ 的右侧邻近点处 $\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$，因此该质点运动曲线在 $t=0$ 处有一拐点.

又质点的运动速度为 $v(t)=\left|\{x',y'\}\right|=\left|\{3t^2-1,4t^3+1\}\right|=\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}$，

$$v'(t)=\frac{12t(3t^2-1)+12t^2(4t^3+1)}{\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}}=\frac{12t(3t^2-1)+12t^2(4t^3+1)}{\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}}=\frac{12t(4t^4+3t^2+t-1)}{\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}}\ ,\quad v'(0)=0\ ,$$

$$v''(0)=\left\{\frac{12(4t^4+3t^2+t-1)}{\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}}+12t[\frac{(4t^4+3t^2+t-1)}{\sqrt{(3t^2-1)^2+(4t^3+1)^2}}]'\right\}\Bigg|_{t=0}=-6\sqrt{2}<0,$$

因此该质点运动速度 $v(t)$ 在 $t=0$ 处取得极大值.

（22）【解】(Ⅰ) 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1，故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值.设 $\boldsymbol{A}$ 属于 0 的特征向量

为 $\xi=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$，由 ξ 与 ξ_1 正交得方程组 $-x_1+x_2+x_3=0$.得基础解系

$\xi_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$，故 ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 两个线性无关解.由 $r(\boldsymbol{A})=1$ 知 ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为 $k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T+k_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$；

（Ⅱ）由（2）知 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

（23）【解】:（Ⅰ）A 的特征值为 1，-1,2. $|A|=-2$，

$$\left|A^*-2A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=32$$

（Ⅱ）由题意 $P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

由此：$A=P\Lambda P^T\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^T=P\begin{pmatrix}1^n & & \\ & (-1)^n & \\ & & 2^n\end{pmatrix}P^T$

可知 $A^3-2A^2-A+4E=P\left[\begin{pmatrix}1^3 & & \\ & (-1)^3 & \\ & & 2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2 & & \\ & (-1)^2 & \\ & & 2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 2\end{pmatrix}\right]P^T$

$=P(2E)P^T=2E$.