同在一片蓝天下，我们用心浇灌，你用心耕耘，同心协力，共创心底的那份辉煌……

2013 考研数学

成功数学模拟3套 数学二

合工大（共创）考研

www. hfutky.cn

- 名牌名校的超强辅导专家阵容
- 十八年考研辅导工作的结晶
- 五大顶尖数学名师亲临预测
- 每年最成功最负盛名模拟试卷
- 全国录取过线率最高的辅导团队

合肥共创（原合工大）考研辅导中心
Tel： 0551-2905018 18755102168

成就梦想 共创辉煌

20、21全程考研资料请加群712760929

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　　）.

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(B) 若 $A\ge 0$,则 $\exists M\ge 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\ge 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

(2) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}{1+x^n}\sin\pi x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）.

（A）处处可导　　（B）仅有一个点处不可导

（C）有两个点处不可导　　（D）至少有三个点处不可导

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续的导数，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=1$，又 $f'(x)=\varphi(x)+\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t$，则（　　）.

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（4）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界连续的奇函数,则 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）。

（A）必为有界的奇函数　　（B）必为有界的偶函数

（C）为奇函数但未必有界　　（D）为偶函数但未必有界

(5) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$ 均存在,则（　　）。

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续　　(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0),\ \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 均存在

(6) 设 $0<a<1$，平面区域 D 由 $x+y=a,x+y=1$ 及 x 轴和 y 围成，$I_1=\iint\limits_D \sin^2(x+y)\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D \ln^3(x+y)\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<I_3$　（D）$I_3<I_1<I_2$

(7) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是它的伴随矩阵，则行列式 $\left|-2\begin{pmatrix} A^* & \mathbf{0} \\ A+A^* & A \end{pmatrix}\right|$ 的值为（　　）.

(A) $4^n|A|^n$　(B) $2^n|A|^n$　(C) $(-1)^n4^n|A|^n$　(D) $(-1)^n2^n|A|^n$

(8) 设向量组(I): $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和(II): $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 为两个 n 维列向量组,且它们的秩都等于 r,则下述结论成立的是（　　）.

(A)矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 与矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 等价

(B)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩等于 r

(C)当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时,则(I)与(II)等价

(D) 当 $s=t$ 时(I)与(II)等价。

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+1}{n^3+2n^2+1}+\dfrac{2^2+2}{n^3+2n^2+2}+\cdots+\dfrac{n^2+n}{n^3+2n^2+n}\right)=$____________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$,且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

(12) 以函数 $y=e^x+\sin x$ 为特解且阶数最低的常系数齐次线性微分方程是____________ .

(13) 设 $z=f(\frac{\pi}{2}-\arctan x,xy)$ ，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

(14) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ，矩阵 A 满足 $B^{-1}=B^*A+A$ ，则 $A=$____________.

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}]=1$ 试确定常数 a,b 的值。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设 $x_0=25,x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 。（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$ 。

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^z-xy^2z=e$ 确定的二元函数,求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})-x(x\ge0)$ 的反函数，求曲线 $x=\varphi(y)$ ，直线 $y=y(1)$ 及 y 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体体积。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设曲线 $y=y(x)$ 在位于上班平面内是向上凹的，它经过点 $(0,2)$，且在该点处的切线水平，又曲线上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率与 $\sqrt{y}$ 及 $1+y'^2$ 的乘积成反比，比例系数为 $k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ，求该曲线的

方程.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=0$，$f(b)>0$，又它在 $x=a$ 处的右导数且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $f(\xi)=0$；（Ⅱ）$\exists\eta\in(a,b)$ 内使得 $f''(\eta)>0$。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $D: x\le x^2+y^2\le 2x, y\le x^2+y^2\le 2y$，计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{xy}$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$ 是齐次次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解向量,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解.（Ⅰ）求 a,b 的值；（Ⅱ）求方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(a+4)x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$$

经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Uy}$ 化为标准形 $by_1^2+5y_2^2-y_3^2$.（I）求 a,b 的值以及所用的正交变换；（II）若（I）中的二次型是正定的，求 a 的值。

数学二（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a+x^2}-1}{e^x-1-x-bx^2}$ 的可去间断点，则常数 a,b 的取值为（ ）。

（A）$a=1,b$ 为任意实数　　（B）$b=\dfrac{1}{2},a$ 为任意实数

（C）$a\ne 1,b=\dfrac{1}{2}$　　（D）$a=1,b\ne\dfrac{1}{2}$

（2）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)(\cos x-1)}{\int_0^{x^3}e^t\,dt}, & x\ne 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 若 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）。

（A）$f(0)=0,f'(0)=2$　　（B）$f(0)=0,f'(0)=1$

（C）$f(0)=0,f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D）$f(0)=2$，不能确定 $f'(0)$ 是否存在

（3）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（ ）.

(A) 没有交点　(B) 仅有一个交点　(C) 有两个交点　(D) 有三个交点

（4）积分 $I=\int_a^{a+\pi}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ 的值（ ）。

（A）是与 a 无关的正的常数　（B）是与 a 无关的负的常数

（C）恒为零　（D）不为常数

（5）设 $y_1(x)$ 是方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的一个特解，则该方程的通解为（ ）

(A) $y=y_1(x)+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$　(B) $y=y_1(x)+Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

(C) $y=Cy_1(x)+e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$　(D) $y=y_1(x)+e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$

（6）设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 处可微，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，则

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,0)-f(1,2h)}{h}=$（ ）。

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（7）n 阶实矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$，则下列命题正确的是（ ），

（A）$3E-A$ 可逆，$3E+A$ 也可逆　（B）$2E-A$ 可逆，$2E+A$ 也可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 也可逆　（D）$4E-A$ 可逆，$4E+A$ 也可逆

（8）设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$，对任意的 n 维向量 β，向量组 $\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\alpha_3$，线性相关，则参数 a,b 应满足条件( )

(A) $a=b$　(B) $a=-b$　(C) $a=2b$　(D) $a=-2b$

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 $y=y(x)$ 由 $\cos(x^2+2y)+e^y-x^2y^3=0$，则 $\mathrm{d}y=$________.

（10）曲线 $y=\sqrt{x^2-x+1},x>0$ 的斜渐近线是____________.

（11）$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}\mathrm{d}y=$________。

（12）微分方程 $y''+2y'+y=e^{-x}$ 的通解为____________；

（13）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{1+e^{2x}}\mathrm{d}x=$__________.

（14）设 A 为三阶矩阵,其特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$,其对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,令 $P=(4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3)$,则 $P^{-1}(A^*+3E)P$ 为____________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

得分	评卷人

（15）**（本小题满分 10 分）**.

设 $f(x)$ 可导的偶函数，且在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(\cos x)-ef(\ln(e+x^2))=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程。

得分	评卷人

（16）（本小题满分 10 分）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\lambda\sin t, \\ y=1-\lambda\cos t \end{cases}$ 确定，其中 $\lambda\in(0,1), t\in(0,2\pi)$。（Ⅰ）求函数 $y(x)$ 的极值；（Ⅱ）求曲线 $y=y(x)$ 的拐点。

得分	评卷人

（17）（本小题满分 10 分）设 $f(x,y)=e^{-x}(ax+b-y^2)$，其中 a,b 为常数，若 $f(-1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极大值，试确定常数 a,b 满足的条件。

得分	评卷人

（18）（本小题满分 10 分）设当 $x\in[0,1]$ 时，p,q 满足条件 $px+q\le e^x$，求使得积分

$$\int_0^1 [e^x-(px+q)]\,\mathrm{d}x$$

取得最小值的 p,q 值。

得分	评卷人

(19)（本小题满分 10 分）设有微分方程初值问题 $\begin{cases} xy'-(2x^2-1)y=x^3, x\ge 1, \\ y(1)=a, \end{cases}$ 其中 a 为常数。（Ⅰ）求上述初值问题的解；（Ⅱ）是否存在 a，使极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$ 存在？若存在，则求 a 的值及相应的极限。

得分	评卷人

（20）（本小题满分 11 分）求 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D: y\ge 0, x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\le 2x$.

得分	评卷人

（21）（本小题满分 11 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

（22）（本小题满分 11 分）．已知齐次线性方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \end{cases}$ 的解全部是 4 元方程（Ⅱ）$x_1+x_2+x_3=0$ 的解.

（1） 求常数 a 的值;（2）求齐次方程组（Ⅰ）的解.

得分	评卷人

（23）（本小题满分 11 分）设 A 是 n 阶矩阵，A 的第 i 行，j 列元素 $a_{ij}=i\cdot j$

（1）求 $r(A)$；（2）求 A 的特征值，特征向量，并问 A 能否相似于对角阵，若能，求出相似对角阵，若不能，则说明理由.

数学二（模拟 3）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $x\to 0$ 时 $e^{x^3}-e^{\sin^3 x}$ 与 x^m 是同阶无穷小，则 $m=$（　　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时必有（ ）.

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$　　（B）$(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

（C）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0$　　（D）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0$

(3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$，则 $a=$（　）。

（A）3　　（B）$\dfrac{3}{2}$　　（C）1　　（D）0

(4) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_1^{f(x)}f^{-1}(t)\,dt=x^{\frac{4}{3}}-16$，则 $f(x)=$（　　）。

（A）$x^{\frac{1}{3}}-1$　　（B）$2x^{\frac{1}{3}}-3$　　（C）$3x^{\frac{1}{3}}-5$　　（D）$4x^{\frac{1}{3}}-7$

(5) 设 D 由直线 $x=1, y=1$ 及 $y=-x$ 围成的区域，D_1 为 D 位于第四象限内部分，则二重积分 $\iint\limits_D(xy+\sin x\cos y)\,dx\,dy=$(　　).

（A）$2\iint\limits_{D_1}xy\,dx\,dy$　　（B）$2\iint\limits_{D_1}\sin x\cos y\,dx\,dy$

（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+\sin x\cos y)\,dx\,dy$　　（D）0

(6) 设 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义，函数 $f(x,y)=\left|x-y^2\right|\varphi(x,y)$，那么 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在的一个充分条件是（ ）.

（A）$\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　　(B) $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可求偏导数

(C) $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微 $\varphi(x,y)$

(D) $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某个邻域内有界，且 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,0)=\varphi(0,0)=0$

(7) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经第一行与第二行对调得矩阵 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 再经第一列与第二列对调得矩阵 $\boldsymbol{C}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为（ ）。

（A）等价但不相似　　（B）相似但不合同

（C）合同但不相似　　（D）相似、合同且等价

(8) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是(　).

(A) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　　(B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A\alpha}$　　(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$　　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程式 $\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{y}\left|\sin t^2\right|\mathrm{d}t+\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t=0$ 确定，那么曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程是________________.

(10) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)$，$n$ 为正整数，则 $f^{(n)}(0)=$__________.

(11) 设曲线 C 的参数方程为 $x=\sin t,\ y=\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t$，则 C 对应于参数 $t\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 上的一段曲线弧长是____________ ；

(12) 设 $y_1=e^{2x}+e^{2x}\cos x\ \ y_2=e^{2x}-2e^{2x}\sin x$ 均为某个二阶常系数非齐次线性微分方程的特解，则该方程的通解为______________.

(13) 二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$__________.

(14) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $|A^*+2A^{-1}+E|=$________.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $x>0$，求使不等式 $x^a\le e^x$ 成立的正数 a 的最大值。

得分	评卷人

(16)　（**本题满分 10 分**）设 $z=(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶数，且 $\varphi'\ne-1$，$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y})$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）计算 $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$。

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）已知函数 $\varphi(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，且 $\varphi(0)=1$，$f(x)=\int_0^{2x}|x-t|\varphi(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f'(T)$ 的值。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设曲线 C 为在原点处与 x 轴相切，位于第一象限内的光滑曲线，$P(x,y)$ 为曲线上的任意一点. 设曲线在原点与 P 点之间的弧长为 s_1；曲线在 P 处的切线在 P 点与切线跟 y 轴的交点之间的长度为 s_2，且 $\frac{3s_1+2}{s_2}=\frac{2(x+1)}{x}$，求曲线 C 的方程.

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）计算 $\iint\limits_D \max\{\cos(x+y),\sin(x+y)\}\,dx\,dy$，

其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \frac{\pi}{2};0\le y\le \frac{\pi}{2}\}$.

得分	评卷人

(21)（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\neq 0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

得分	评卷人

(22)（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 为 4 维列向量组，且 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，已知线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为：$\xi_0+k\xi_1=(-1,1,0,2)^T+k(1,-1,2,0)^T$，(I) 考察 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；(II) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的一个极大无关组。

得分	评卷人

(23)（**本题满分 11 分**）设 A 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维线性无关的向量组,且 $A\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2, A\boldsymbol{\alpha}_2=5\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$A\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.
(Ⅰ)求矩阵 A 的特征值；(Ⅱ)求可逆 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}A\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.