绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】：由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=2$，由连续性可得 $f'(0)=f(0)=0$，

由导数定义 $2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)-[f'(x)-f'(0)]}{x}=f'(0)-f''(0)=-f''(0),$

可知 $f''(0)=-2<0,$ 所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

（2）【解】：答案为（B）.

（3）【解】：函数 $f(x,y)$ 关于 x 轴方向是减函数，关于 y 轴方向是增函数，由此答案（A）

（4）【解】：因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.

综上有 $I_2>I_1>I_3$，答案（B）.

（5）【解】：由基本公式：$A^*=|A|A^{-1}$，A_{ij} 为 A^* 中 (j,i) 的元素，

由于 $|A|=(-1)^{1+n}(-1)\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0\\0&-1&0&\cdots&0\\ &&\cdots&&\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}_{n-1}=(-1)^{2n-1}=-1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\\-1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，故

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=1+1+\cdots+1=n$，答案：（B）.

（6）【解】： 答案：C

（7）【解】：X 分布律 $\begin{pmatrix}1&2\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，随机变量 Y 概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3},-1<y<2\\0,\quad 其他\end{cases}$，则概率

$P\{XY>1\}=P\{X=1,Y>1\}+P\{X=2,Y>\frac{1}{2}\}=\frac{2}{3}P\{Y>1\}+\frac{1}{3}P\{Y>\frac{1}{2}\}=\frac{7}{18}$，答案（D）.

（8）【解】：由于 $\alpha=0.05$，对应的拒绝域为 $I=\{u/|u|\ge1.96\}$，由于 $u=-0.8\notin I$，不能拒绝 H_0，所以接受 H_0，答案（B）.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9)【解】：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{-t^2}}{t^2}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\dfrac{(\frac{e^{-t^2}}{t^2})'}{-\frac{t^2}{1+t^2}}\right|_{t=1}=-\left.\dfrac{2(1+t^2)^2e^{-t^2}}{t^5}\right|_{t=1}=-\dfrac{8}{e}$.

（10）设 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nf(n)+nf(n-2)\right)^{\frac{n}{2}}=$__________.

【解】：原式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$.

（11）【解】:，由于 $\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}|_{(1,1,1)}=\{1,2,3\}$，所以曲面 $F(x,y^2,z^3)=0$ 在点 $(1,1,1)$ 的法向量为 $\vec{n}_1=\{F'_x,2yF'_y,3zF'_z\}|_{(1,1,1)}=\{1,4,9\}$，由此 $(1,1,1)$ 处法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{9}$.

（12）【解】: $s(\dfrac{7}{2})=s(-\dfrac{1}{2})=-s(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}\{f[(\dfrac{1}{2})^-]+f[(\dfrac{1}{2})^+]\}=-\dfrac{1-\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{1}{2}}{2}=-\dfrac{9}{8}$

（13）【解】: 答案: $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ \beta^T & c-b \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix}=a(c-b)$。

（14）【解】: 由于 $X\sim f(x)=Ae^{-x^2+2x-1+1}=Aee^{-(x-1)^2}=Ae\sqrt{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，其中 $A=\dfrac{1}{e\sqrt{\pi}}$，所以 $X\sim N(1,\dfrac{1}{2})\Rightarrow DX=\dfrac{1}{2}$，$D(\bar{X})=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{1}{2n}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】: 由定积分的几何意义知积分 $\int_a^b(px+q-\ln x)\,\mathrm{d}\,x$ 是由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=px+q$ 以及 $x=a,x=b$ 围成的图形面积。

设切点横坐标为 $x=x_0$，相应的切向方程为 $y=\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$，面积为

$$A(x_0)=\int_a^b(\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0-\ln x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{b^2-a^2}{2x_0}+(b-a)\ln x_0-b+a-\int_a^b\ln x\,\mathrm{d}\,x$$

$A'(x_0)=\dfrac{b^2-a^2}{2x_0^2}+\dfrac{b-a}{x_0}$，令 $A'(x_0)=0$ 的 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，由于实际问题有解，驻点唯一，因此当 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 时，相应的积分取值最小，$p=\dfrac{2}{a+b},q=\ln\dfrac{a+b}{2}-1$.

（16）【解】: 点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面的最远点和最近点的坐标，等价于求函

数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

所以 $\begin{cases} L'_x=2\lambda x+\mu=0 & (1 \\ L'_y=2\lambda y+\mu=0 & (2 \\ L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0 & (\\ x^2+y^2-2z^2=0 & (4 \\ x+y+3z=5 & (5 \end{cases}$

由(1)(2)得 $x=y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases}x^2-z^2=0\\2x+3z=5\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$.

（17）【解】:（I）令 $D_1=D\cap\{(x,y)\mid xy\ge t\},D_2=D\cap\{(x,y)\mid xy\le t\}$，

则 $f(t)=\iint\limits_D|xy-t|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D_2}(xy-t)dxdy$

$$=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D}(xy-t)dxdy=2\int_t^1dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_{D}xydxdy+t\iint\limits_{D}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t)；$$

（II） $f'(t)=-1+2t(1-\ln t),f''(t)=-2\ln t\ge 0,t\in(0,1)$。

$f(0+0)=\dfrac{1}{4},f(1)=\dfrac{3}{4}$， $f'(0+0)=-1,f'(1)=1$。

因为 $f''(t)=-2\ln t\ge 0,t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。

又因为 $f'(0+0)=-1,f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时， $f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时， $f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小点.

（18）【解】:（I）令 $x^2=t$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{(2n)!}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0,R_t=\infty$; 所以级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$；

（II）设和函数 $y(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$， $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 且 $y(0)=2,y'(0)=0$，

$y''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}\overset{n-1=m}{=}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}=1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$，代入方程

$y''-y=1+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}-2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=-1$，满足方程 $y''-y=-1$；

解方程 $y''-y=-1$， $y(0)=2,y'(0)=0$，可知特征方程为 $r^2-1=0,$ 特征根 $r^2-1=0,r_{1,2}=\pm1,$

可知微分方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+1$，代入条件 $y(0)=2,y'(0)=0$， $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$，所以和函数为

$y(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})+1.$

（19）【证明】:（I） $f(x)$ 是偶函数，因此有 $f(0)f(1)=f(0)f(-1)>0$，又 $f(0)f(\dfrac{1}{2})<0$，由连续函数的零点定理知存在 $x_1\in(0,\dfrac{1}{2})$ 及 $x_2\in(\dfrac{1}{2},1)$ 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由 Rolle 定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$；

（II）令 $F(x)=f'(x)e^{-x^2}$，由于 $f(x)$ 是偶函数，因此 $f'(x)$ 是奇函数，故有 $f'(0)=0$. 因而有 $F(0)=F(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$$F'(\eta)=f''(\eta)e^{-\eta^2}-2\eta f'(\eta)e^{-\eta^2}=0,$$

即有 $f''(\eta)=2\eta f'(\eta)$.

（20）【解】：（Ⅰ）令 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，因为 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 线性无关，所以 P 可逆，

因为 $A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4a_3$，

所以 $(A\alpha_1,\ A\alpha_2, A\alpha_3)=(\alpha_1+3\alpha_2, 5\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1-\alpha_2+4a_3)$，

从而 $A(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$，即 $AP=P\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$ 或者 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}=B$，于是有 $A\sim B$.

由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&-1\\-3&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-4)^2=0$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=4$.

（Ⅱ）因为 $A\sim B$，所以 B 的特征值为 $\lambda_1=-4,\ \lambda_2=\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-4$ 时，由 $(-4E-B)X=O$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-B)X=O$ 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix},\ \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$，

令 $P_1=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

因为 $P^{-1}AP=B$，所以

$P_1^{-1}P^{-1}APP_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$ 或 $(PP_1)^{-1}A(PP_1)=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$，

取 $Q=PP_1=(-\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_1+3\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

（21）【解】（Ⅰ）考虑方程组 $\begin{cases}Ax=0\\A^TAx=0\end{cases}$ 显然①的解为②的解。

设②有解 $x=\xi$ 即 $A^TA\xi=0$ 用 ξ^T 左乘三可得 $\xi^TA^TA\xi=\xi^T\cdot 0=0$

$(A\xi)^T\cdot A\xi=0=\|A\xi\|^2=0$ 固 $A\xi=0$ 即②的解也是①的解，从而方程组同解，即：$r(A)=r(A^TA)=r(A^T)$

（Ⅱ）$\because r(A)=r(A^TA)\le r(A^TA, A^Tb)=r[A^T(A,b)]\le r(A^T)=r(A)$

（又 $r(A^TA)=r(A)$）$\Rightarrow r(A^TA)=r(A^TA, A^Tb)$，得证.

（22）【解】：（Ⅰ）X,Y 协方差为

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(U-V)(V-W)-E(U-V)E(V-W)$$

$$=E(UV-UW-V^2+VW)=\mu^2-EV^2-0=\mu^2-(\frac{1}{2}+\mu^2)=-\frac{1}{2}$$

所以 X,Y 相关，且相关系数为 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=-\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=-\dfrac{1}{2}$

（Ⅱ）由 U,V,W 的独立性知 $X=U-V\sim N(0,1),\ Y=V-W\sim N(0,1)$，$X,Y$ 具有相同分布，对应

概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$(X,Y)$ 的联合概率密度函数服从二维正态分布，$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;\rho)$，其中 $\rho=-\frac{1}{2}$.

（III）考察协方差：$Cov(X,U)=Cov(U+V,U)=D(U)+Cov(V,U)=D(U)+0=\frac{1}{2}$，所以 X 与 U 相关，所以 X 与 U 不能相互独立.

（23）【解】:（I）由 X 分布函数可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x;\ \theta)=1$，所以常数 $A=-1$；对应的概率密度函数为：

$$f(x;\theta)=\begin{cases}-\theta^x\ln\theta, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

（II）θ 的最大似然估计：

1）$L=\prod\limits_{i=1}^{n}\theta^{x}(-\ln\theta)=\theta^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(-\ln\theta)^n$，$x_i>0$

2）$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}[n\ln[-\ln\theta]+\ln\theta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i]=-\frac{n}{\ln\theta}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，

3）解得 $\ln\theta=-\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，解得极大似然估计 $\hat{\theta}=e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}}=e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$；

（III）由于 $E[\ln\hat{\theta}]^{-1}=E[\frac{1}{\ln\hat{\theta}}]=-E(\bar{X})\ =-E(X)=\int_0^{+\infty}x\theta^x\ln\theta dx=\int_0^{+\infty}xd\theta^x$

$=x\theta^x\big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\theta^x dx=-\frac{\theta^x}{\ln\theta}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\ln\theta}=[\ln\theta]^{-1}$，所以 $[\ln\hat{\theta}]^{-1}$ 是 $[\ln\theta]^{-1}$ 的无偏估计.