绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 二

（模拟一）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

数学二（模拟一）参考答案

（1）【解】 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=-e^{-1},\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=e^{-1},\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=0,1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 B.

（2）【解】本题可用排除法举反例说明 A,B,D 选项均为错误的，因而正确的结论必为 C。进一步的 $f'(a)f'(b)<0$，若 $f'(a)<0,f'(b)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值必在区间 (a,b) 的内部取得，反之则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值必在区间 (a,b) 的内部取得.

（3）【解】 n 为偶数时 $f(x)$ 无界的奇函数，且 $\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t>0$ 故 B，C，D 均不正确。答案 A。

（4）【答案】选（C）
（5）【答案】选（C）
（6）【答案】选（A）
（7）【答案】选（D）
（8）【答案】选（D）

（9）【解】 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}},f'(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}},f'(1)=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$,故所求切线方程为

$y=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}x+\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

（10）【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=1,\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\dfrac{1}{2}$,故所求斜渐近线为

$y=x+\dfrac{1}{2}$.

（11）【解】:两曲线交点分别为 $(-\dfrac{1}{1+a},-\dfrac{a}{1+a})$ 与 $(\dfrac{1}{1+a},-\dfrac{a}{1+a})$，由题设有

$$\int_{-\frac{1}{1+a}}^{\frac{1}{1+a}}(1-|x|-a|x|)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{1}{1+a}}[1-(1+a)x]\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1+a}=\frac{1}{3},a=2.$$

（12）【解】等式可改写为 $x^2+y^2+z^2=\int_{x-2y}^{-y}f(u)du$ 两边对 x 同时求偏导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=-f(x-2y)$，两边对 y 同时求偏导可得 $2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=2f(x-2y)-f(-y)$，由此可得

$$z(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1}{2}[f(x-2y)-f(-y)]-x-y.$$

（13）【解】 由题设有 $a=-2,b=1,$ 方程 $y''+ay'+by=x$ 的特解为 $y^*=x+2$，因此方程 $y''+ay'+by=x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，带入初始条件可得所求特解为 $y=(x-2)e^x+x+2$.

（14）【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$$

【答案】 $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$

（15）【解】 $\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t=1+\int_{0}^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t$

$$原式=\lim_{x\to0}\left(1+\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}}\right]^{\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}},$$

而 $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin tdt}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\frac{1}{2}$,

所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

（16）【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{e^t\cos y^2}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=e^t\cos y^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^t\cos y^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\sqrt{1+t^2}e^t\cos y^2-ye^{2t}\sin(2y^2).$$

（17）【证明】（Ⅰ）由题设有 $x_0f(x_0)=\frac{1}{1-x_0}\int_{x_0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$\int_{x_0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0)$，从而有 $f(\xi)=x_0 f(x_0)$；

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)$，而 $f(\xi)=x_0 f(x_0)$，因而有 $(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$。故原命题成立.

（18）【解】 原式 $=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\dfrac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}\,x$$

$$=x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C\,.$$

(19) 【解】（Ⅰ）设在时刻 t，桶内水的深度为 $h(t)$，由题设则有

$h'(t)=-k\sqrt{h(t)},h(0)=81cm,h(1)=64cm,$　由 $h'(t)=-k\sqrt{h(t)}$ 可得

$\dfrac{dh}{\sqrt{h}}=-kdt,2\sqrt{h}=-kt+C,h(0)=81,C=18,h(1)=64,k=2,\quad h(t)=(9-2t)^2(cm)$；

（Ⅱ）由 $h(t)=(9-2t)^2=0$，解得 $t=4.5$，即需要 4.5 小时后，桶内的水全部漏掉.

（20）【解】 ① 由于 $f_x{}'(x,y)=-ye^{-xy}$， $f_y{}'(x,y)=-xe^{-xy}$，所以在 D 的内部， $f(x,y)$ 有唯一的驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=1$, 在 D 的边界 $x^2+4y^2=1$ 上，作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1),\qquad \begin{cases} L_x{}'(x,y,\lambda)=-ye^{-xy}+2\lambda x=0,\\ L_y{}'(x,y,\lambda)=-xe^{-xy}+8\lambda y=0,\\ L_\lambda{}'(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0,\end{cases}$$

解得驻点 $(x,y)=\left(\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{4}\right),\left(\dfrac{\sqrt2}{2},-\dfrac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\dfrac{\sqrt2}{2},-\dfrac{\sqrt2}{4}\right)$，且

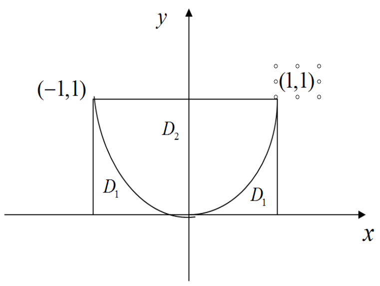
$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac14},\quad f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac14}.$$

比较函数值可得 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac14},$$

最小值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac14}.$$



（21） 【解】 用抛物线 $y=x^2$ 把区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分（如图），则　$I=-\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}x(x+ye^{x^2})\,d\sigma$

$$=-2\iint\limits_{D_1} x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D} x(x+ye^{x^2})d\sigma$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}(x^2+xye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+xye^{x^2})d\sigma$$

由于 D_1 和 D 均关于 y 轴对称，xye^{x^2} 关于 x 是奇函数，所以

故 $I=-2\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D}x^2d\sigma\ =-2\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}x^2dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}x^2dy\quad=-\dfrac{2}{15}$.

（22）【解】（I）记 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3), AP=A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此矩阵 P 可逆，因此有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$，即矩阵 A 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 相似，且所用的相似变换矩阵为 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此有 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{vmatrix}=10$.

（II）矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 有三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，因此矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，且相应的相似变换矩阵为 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

因此把矩阵 A 变成 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 的相似变换矩阵可取为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$

（23）【解】（I）$\overline{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&1\\1&2a+5&8&2a+3&3\\2&a+7&10&5&b\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行}}$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&1\\0&0&0&2a-1&1\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}\qquad(*)$$

据(*)知 $a\neq\dfrac{1}{2}$ 时，$R(A)=3$，此时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=R(A)=3$，此时 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以

是一个极大线性无关组。据（*）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$R(A)=2$，故此时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(A)=2$，此时 α_1,α_3 线性无关，所以 α_1,α_3 是一个极大线性无关组（不唯一）。

（Ⅱ）任意四维向量 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}=\gamma$ 均有解。

$\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma)$

$\because R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])\le 4$，若 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，则必有

$r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])=4=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])$

据（*）知，当 $a\ne\frac{1}{2}$，有 $b\ne 1$ 时，$R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])=4$，故当 $a\ne\frac{1}{2}$，$b\ne 1$ 时，任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学 二

（模拟二）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学二 (模拟二)参考解答

（1）【解】 由题设有 $f'(1)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}f(e^{x^2})}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{x^2}=\frac{1}{2}$$，故答案是 D

（2）【解】由题设有 $f(0)=0, f'(0)=1$，再利用 Taylor 公式可得 $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)<x$。答案 B

（3）【答案】：选 B

（4）【解】根据函数曲线的凹凸性及定积分的几何意义可得答案是 A.【答案】A

(5) 【解】 $\begin{cases} z'_x=-(1+e^y)\sin x=0 \\ z'_y=e^y(\cos x-1-y)=0 \end{cases}\Rightarrow$ 驻点 $(k\pi,\cos k\pi-1)$， $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

又 $z''_{xx}=-(1+e^y)\cos x, z''_{xy}=-e^y\sin x, z''_{yy}=e^y(\cos x-2-y)$,

(1) 当 $k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 时，驻点 $(k\pi,0)$，从而 $A=z''_{xx}(k\pi,0)=-2$，$B=z''_{xy}(k\pi,0)=0$，$C=z''_{yy}(k\pi,0)=-1$，于是 $AC-B^2>0$，又 $A=-2<0$，即驻点 $(k\pi,0)$ 均为极大值点，因此函数有无穷多个极大值;

(2) $k=\pm1,\pm3,\cdots$ 时，驻点 $(k\pi,-2)$，从而 $A=z''_{xx}(k\pi,-2)=1+e^{-2}$，$B=z''_{xy}(k\pi,-2)=0$，$C=z''_{yy}(k\pi,-2)=-e^{-2}$，于是 $AC-B^2<0$，,即驻点 $(k\pi,-2)$ 不是极值点，答案（C）.

(6) 【解】由条件知： $f(0)=0, f'(0)=2\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 2x=2$；

对二重积分作代换 $t-u=v, du=-dv$ 交换积分次序可知

$\int_0^x[\int_0^t f(t-u)du]dt=\int_0^x[\int_0^t f(v)dv]dt$，则

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^t f(v)dv]dt}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(v)dv}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{12x}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{12}f'(0)=\frac{1}{6},$$

故答案为 B .

（7）【答案】 （C）

（8）【答案】 （B）

（9）【解】 原式 $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\frac{e^x-1-x}{x})^{\frac{x}{e^x-1-x}}\right]^{\frac{e^x-1-x}{x\sin x}}=e^{\frac{1}{2}}$。

（10）【解】 设 $u(x)=(x-2)^n, v(x)=(x-1)^n\sin\frac{\pi x^2}{8}$，则 $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(2)=0\ (i=0,1,\cdots,n-1), u^{(n)}(2)=n!, v(2)=(2-1)^n\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，所以有 $f^{(n)}(1)=n!$

（11）【解】 $g'(x)=f'(\dfrac{2x-1}{x+1})\dfrac{3}{(x+1)^2}, g'(0)=3f'(-1)=3\ln 2$

(12) 【解】方程两边求微分可得：$F_1'(\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy)+F_2' 2zdz=y^2dx+2xydy-e^{-z}dz$，

解得 $(2zF_2'+e^{-z})dz=(y^2-\dfrac{1}{y}F_1')dx+(2xy+\dfrac{x}{y^2}F_1')dy$，由此全微分为：

$$dz=\frac{1}{(2zF_2'+e^{-z})}[(y^2-\frac{1}{y}F_1')dx+(2xy+\frac{x}{y^2}F_1')dy]\ .$$

（13）【解】 易得微分方程 $y'=2x\ln\left(1+x^2\right)$，

直接积分得 $y=\int 2x\ln\left(1+x^2\right)dx=\int\ln\left(1+x^2\right)d\left(1+x^2\right)$，

利用分部积分法 $y=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2+C$，过点(0，-1)，代入可得 $C=-1$，

所以 $f(x)=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-1.$

(14) 【答案】. $\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}$

（15)【证明】 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n=\dfrac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}, x_1=2>1, n>1$时有

$x_n-1=\dfrac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3)}{3x_{n-1}^2+1}-1=\dfrac{(x_{n-1}-1)^3}{3x_{n-1}^2+1}$，由归纳法可知，对 $\forall n$ 均有 $x_n>1$，由此可得数列$\{x_n\}$是单调减少正的数列，由单调有界收敛原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$ 两边同时取极限可得 $a=\dfrac{a(a^2+3)}{3a^2+1}$，解方程可得 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

（16）【解】 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=3$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{\sin x}{x}+f(x)]=0$， $f(0)=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$

由此可得 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to0}[(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+f'(0)$，

而 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=3$。

（17）【解】 (I)设切点的横坐标为 x_0，则相应的切线方程为

$\dfrac{y-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}$，即为 $y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$

相应的平面图形面积为 $A(x_0)=\int_0^2[e^x-(e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0})]\,dx=2(x_0-2)e^{x_0}+e^2-1$

20、21全程考研资料请加群712760929

$A'(x_0)=2(x_0-1)e^{x_0}, A''(x_0)=2x_0e^{x_0}, A'(1)=0, A''(1)=2e>0$，所以 $x_0=1$ 是相应的图形面积最小，故所求的切线方程为：$y=ex$；

$$\text{(II)} V=2\pi\int_0^2 x(e^x-ex)\,\mathrm{d}x=2\pi[(x-1)e^x-\frac{1}{3}ex^3]\Big|_0^2=2\pi(e^2-\frac{8}{3}e+1)。$$

(18)【解】 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(u)+\dfrac{x}{y}f'(u)+(g_1'y+2xg_2')$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}f'(u)+(xg_1'-g_2')$;

又由此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2x}{y^2}f'(u)-\dfrac{x^2}{y^3}f''(u)+(y\dfrac{\partial}{\partial y}(g_1')+g_1'+2x\dfrac{\partial}{\partial y}(g_2'))$；

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+y(xg_{11}''-g_{12}'')+g_1'+2x(xg_{21}''-g_{22}'')$$

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+xyg_{11}''+(2x^2-y)g_{12}''+g_1'-2xg_{22}''$$

（19）【解】（I）对隐函数方程可知，$x_0=0, y_0=0$ 求导数：$y+xy'-e^{-y}y'=2\cos 2x$，代入可知 $f'(0)=-2$；

（II）由极坐标积分法可知，

$$I=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\ln(1+2t^2)}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(2\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t^3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(2r)rdr$$

$$=\pi\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(2r)rdr}{t^3}=\pi\lim_{t\to 0}\frac{f(2t)t}{3t^2}=\frac{\pi}{3}\lim_{t\to 0}\frac{f(2t)}{t}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\lim_{t\to 0}\frac{f(2t)-f(0)}{2t}=\frac{2\pi}{3}f'(0)=-\frac{4\pi}{3}$$

（20）【证明】　因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}, m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知 $x\in(0,1)$ 时有 $\dfrac{m}{2}x\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le\dfrac{M}{2}x$ ($\xi\in(0,x)$ 对不等式

$$mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le Mx$$

两边同时在区间 $[0,1]$ 上积分可得: $\dfrac{m}{2}\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{M}{2}$ 即 $m\le 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$。

(21)【解】(I)令 $D_1=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\ge t\}, D_2=D\cap\{(x,y)\,|\,xy\le t\}$，

$$f(t)=\iint\limits_D|xy-t|dxdy=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_D(xy-t)dxdy$$

$$=2\int_t^1 dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_D xydxdy+t\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t).$$

(II) $f'(t)=-1+2t(1-\ln t), f''(t)=-2\ln t\ge 0, t\in(0,1)$。

$f(0+)=\dfrac{1}{4}, f(1)=\dfrac{3}{4}$，$f'(0+)=-1, f'(1)=1$。

因为 $f''(t)=-2\ln t\ge 0, t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。

又因为 $f'(0+)=-1, f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时，$f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小点。

（22）【解】　（I）f 与标准型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$. 因为用正交变换化 f 为标准型，所以 f 与其标准型对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 有 $\begin{vmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$.

（II）（方法一）这时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. 将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，　将 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 正交化 $\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2$,

$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\xi}_3]}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|^2}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$，再将 $\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$。

（方法二）对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. 将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 已正交，单位化，得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$. 由

$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 即可构成所求正交矩阵.

（23）【证】:　（I）因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$. 设存在一组数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）两次，得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_3=0$. 再用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘（*）一次，得 $k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_2=0$. 此时（*）为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以 $k_1=0$. 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ 列满秩，因此齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.

（II）对任何非零 3 维列向量 $\boldsymbol{x}$，因为方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，所以恒有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 又因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\|^2>0$，所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 二

（模拟三）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

数学二（模拟三）参考解答

（1）【解】由 $x_n=\dfrac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)],y_n=\dfrac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$ 知是答案 D.

（2）【解】 由题设知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=1,f(0)=0,f'(0)=2$，答案 D。

（3）【解】等式 $\int_2^{f(x)}f^{-1}(t)dt=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$ 两边同时求导可得 $xf'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x},f(x)=\sqrt{x}+C$，又

$(\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9)\Big|_{x=9}=0,f(9)=2,C=-1$，答案为 A .

（4）【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=e^{\frac{a}{2}},\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=-2xe^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-a}^{+\infty}+2\int_{-a}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=2(a+2)e^{\frac{a}{2}}$

$a=-\dfrac{3}{2}$，答案 C.

（5）【答案】选（D）

(6) 【解】因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.
综上有 $I_2>I_1>I_3$，选（B).

（7）**【答案】**（D）

（8）**【答案】（C）**

（9）【解】原式 $=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{\pi}$.

（10）【解】由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，对方程式两边关于 x 同时求导可得 $1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0$，对上述方程关于 x 再求导可得 $2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0$，把 $x=0,y=1$ 代人到上述两个方程式中可解得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=2e^2$.

（11）【解】 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin^2t+(\sec t-\cos t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan t\,\mathrm{d}t=-\ln\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2}\ln2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

（12）【解】 $f(1,0)=0$， $f_x'(1,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\Delta x}{1+\Delta x}-0}{\Delta x}=1$

$$f_y'(1,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,\Delta y)-f(1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta y\cos\sqrt{2}}{1+\sin\Delta y}-0}{\Delta y}=-\cos\sqrt{2},$$

$$\therefore \mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\cos\sqrt{2}\mathrm{d}y\ .$$

（13）【解】将 x 看作 y 的函数，即对 $x=x(y)$ 进行求解，可将原方程化为未知函数为 $x=x(y)$ 的线性方程

$\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1-2y}{y^2}x=1$，方程的通解为 $x=e^{\int\frac{2y-1}{y^2}dy}(\int e^{\int\frac{2y-1}{y^2}dy}dy+\mathrm{C})$

因此该方程的通解为 $x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2$.

（14）【解】　因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&2&4&1\\1&5&7&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&2&2&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为所求最大无关组.

（15）【解】由题设有 $a=1$，

左式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx^2)[1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)]-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(b-\dfrac{1}{2})x^2+(\dfrac{1}{24}-\dfrac{b}{2})x^4+o(x^4)}{x^4}=c$

由此可得 $b=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5}{24}$.

（16）【解】 $f'(x)=3x^2-p=0,x=\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}},f''(x)=6x,f''(\sqrt{\dfrac{p}{3}})>0,f''(-\sqrt{\dfrac{p}{3}})<0$，因而

$x=-\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ 时 $f(x)$ 取得极大值，且有极大值为 $f(-\sqrt{\dfrac{p}{3}})=\dfrac{2p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}+q$

$x=\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ 时 $f(x)$ 取得极小值，且有极小值为 $f(\sqrt{\dfrac{p}{3}})=q-\dfrac{2p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}$；

（Ⅱ）因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{p}{3}}]$ 与 $[\sqrt{\dfrac{p}{3}},+\infty)$ 上单增，在 $[-\sqrt{\dfrac{p}{3}},\sqrt{\dfrac{p}{3}}]$ 上单减，故当 $f(-\sqrt{\dfrac{p}{3}})=\dfrac{2p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}+q>0$， $f(\sqrt{\dfrac{p}{3}})=q-\dfrac{2p^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}<0$ 是原方程正好有三个实根，分别位于区间 $(-\infty,-\sqrt{\dfrac{p}{3}}),(-\sqrt{\dfrac{p}{3}},\sqrt{\dfrac{p}{3}}),(\sqrt{\dfrac{p}{3}},+\infty)$ 内各有一根.

（17）【解】由题设有 $F(x)F'(x)=\cos 2x$，对上述等式两边同时积分可得 $F^2(x)=\sin 2x+C$，由

$F(0)=1$ 可得 $C=1$，所以 $|F(x)|=\sqrt{\sin 2x+1}=|\cos x+\sin x|$，因此有

$|f(x)|=\left|\dfrac{\cos 2x}{F(x)}\right|=|\cos x-\sin x|$，所以，

$\int_0^{\pi}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x=2\sqrt{2}$.

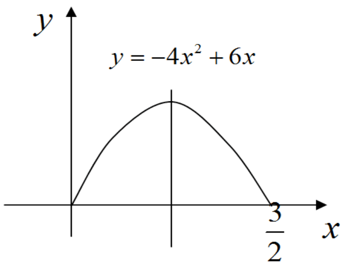
（18）【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)=(xy+1)e^{xy}$，记 $xy=t$，则有

$f'(t)+tf''(t)=(t+1)e^t$，即 $(tf'(t))'=(t+1)e^t$，积分得 $tf'(t)=te^t+C_1$，解得

$f'(t)=e^t+\dfrac{1}{t}C_1$，代入 $f'(1)=e+1$，$C_1=1$；再积分得；

$f(t)=\int(e^t+\dfrac{1}{t})dt=e^t+\ln|t|+C_2$，代入 $f(1)=e+1$，可得 $C_2=1$，即 $f(t)=e^t+\ln|t|+1$ 所以 $f(xy)=e^{xy}+\ln|xy|+1$.

（19）【解】（Ⅰ）由题设有 $c=0,a+b=2$，所以抛物线的方程为 $y=ax^2+(2-a)x$，它与 x 轴的交点横坐标分别为 $x=0,x=1-\dfrac{2}{a}$，相应的图形面积为



$A(a)=\int_0^{1-\frac{2}{a}}(ax^2+(2-a)x)\,\mathrm{d}x=(\dfrac{a}{3}x^3+\dfrac{2-a}{2}x^2]\Big|_0^{1-\frac{2}{a}}=\dfrac{(2-a)^3}{6a^2}$，

$A'(a)=\dfrac{(a-2)^2(a+4)}{6a^3}$，令 $A'(a)=0$ 可得 $a=-4$ 或 $a=2$
（不合题意舍去），由于实际问题有解且驻点唯一，故 $a=-4$
时相应的平面图形面积最小，相应的 $b=6$；
（Ⅱ）该抛物线方程为 $y=-4x^2+6x$，它与 x 轴的交点横坐标分别为 $x=0,x=\dfrac{3}{2}$，由微元法思想可得所求旋转体表面积为

$$S=2\pi\int_0^{\frac{3}{4}}(\frac{3}{4}-x)\,\mathrm{d}s+\frac{9\pi}{16}$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{3}{4}}(\frac{3}{4}-x)\sqrt{1+(8x-6)^2}\,\mathrm{d}x+\frac{9\pi}{16}$$

$$\overset{u=x-\frac{3}{4}}{=\!=\!=}2\pi\int_0^{\frac{3}{4}}u\sqrt{1+64u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{9\pi}{16}=\frac{\pi}{96}(1+64u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{3}{4}}=\frac{\pi}{96}(37\sqrt{37}-1)+\frac{9\pi}{16}.$$

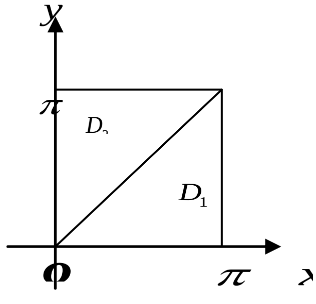
（20）【解】如图所示，将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2，所以

$$I=\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma+\iint_{D_2}y\sin x\sin y\,d\sigma$$

在利用积分得轮换对称性知

$$I=2\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma$$

$$=2\int_0^{\pi}\left[\int_0^{x}x\sin x\sin y\,dy\right]dx$$



$$=2\int_0^{\pi}\left[x\sin x\cdot(1-\cos x)\right]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}x\,d\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)$$

$$=2x\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin^2 x\right)dx=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi.$$

（21）【证明】由题设知$\exists x_0\in(0,a)$使得$f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,a]}\{f(x)\}$，由极值的必要条件可知必有$f'(x_0)=0$，由 Lagrange 中值定理知$\exists\xi_1\in(0,x_0)$使得

$f'(0)=f'(x_0)-f''(\xi_1)x_0\Rightarrow\left|f'(0)\right|=\left|f''(\xi_1)\right|x_0\le Mx_0$，同理可证$\left|f'(a)\right|\le M(a-x_0)$，由此可得$\left|f'(0)\right|+\left|f'(a)\right|\le Ma$.

（22）【解】（Ⅰ）二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}$．由$\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^T$是矩阵$\boldsymbol{A}$属于特征值$\lambda$的特征向量，可得

$$\begin{pmatrix}a&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix},$$

于是$\begin{cases}a+4+4=\lambda,\\-2-8-8=-2\lambda,\\2+8+2b=2\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=4,\\\lambda=9.\end{cases}$从而$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）由特征多项式

$$\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)^2,$$

可知$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

当$\lambda_1=\lambda_2=0$时，由$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(4,1,-1)^T$，

当$\lambda_3=9$时，由$(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得基础解系$\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,2)^T$.

将$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$单位化，得$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^T,\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(4,1,-1)^T,\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{3}(1,-2,2)^T$.

正交变换$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，正交矩阵$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{\sqrt{18}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{18}}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{18}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$$，二次型化为标准形 $x^T A x = y^T A y = 9y_3^2$.

（23）【证明】（Ⅰ）在 $A = \xi\xi^T$ 两边右乘 ξ，得 $A\xi = (\xi\xi^T)\xi = \xi(\xi^T\xi) = \xi$，

$$A^2 = (\xi\xi^T)(\xi\xi^T) = \xi(\xi^T\xi)\xi^T = \xi\xi^T = A；$$

（Ⅱ）由于 $1 \le R(A) = R(\xi\xi^T) \le R(\xi) =$，所以 $R(A) = 1$．又 $A(A-E) = A^2 - A = O$，所以 $R(A) + R(A-E) \le n$，而

$$R(A) + R(A-E) = R(A) + R(E-A) \ge R(A+E-A) = n，$$

从而 $R(A) + R(A-E) = n$，$R(A-E) = n-1$．

（Ⅲ）解：因为 $A^2 = A$，所以 A 的特征根只能取 $0,1$．由 $A\xi = \xi$ 知 $\lambda = 1$ 是 A 的特征根；由 $R(A) = 1$，知 $\lambda = 0$ 是 A 的特征根，且 A 对应于特征值 $\lambda = 0$ 必有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，所以 $\lambda = 1$ 是 A 的单根，$\lambda = 0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征根．所以 $A+E$ 的特征根为 $2,1$（其中 1 是 $n-1$ 重根），$|A+E| = 2$．