普通高等教育管理工程类规划教材

运 筹 学 习 题 集

(第三版)

胡运权　主编

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是原国家教委管理工程类专业第二届教学指导委员会统一组织编写的普通高等教育管理工程类规划教材。同 1995 年本书修订版相比,这次修订时又增加了近百道新习题,主要选自近年来报考硕士和博士生的试题,以及根据国外教材有关内容进行的改编,从而使习题集的题型更广泛,内容更丰富、更具启发性。

本书含线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论、对策论、决策论和多目标决策共 14 章,计 700 余题,分别给出答案、证明或题解。本书是学习掌握运筹学理论和方法的重要辅助教材,也是自学运筹学和考研的常备参考材料。

本书适用于大学本科生教学,特别是参加研究生考试的学生,使用本书可以获得很好的学习效果。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学习题集/ 胡运权主编 .—3 版 .—北京:清华大学出版社,2002

ISBN 7-302-05434-7

Ⅰ .运… Ⅱ .胡… Ⅲ .运筹学 - 习题 Ⅳ .O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040548 号

出 版 者:清华大学出版社 (北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

http://www.tup.tsinghua.edu.cn

责任编辑:魏荣桥

印 刷 者:北京市清华园胶印厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×960 1/16 印张:19.25 字数:397 千字

版 次:2002 年 9 月第 3 版 2002 年 9 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-05434-7/F·414

印 数:0001～5000

定 价:25.00 元

第　一　章

线性规划及单纯形法

复习思考题

1．试述线性规划数学模型的结构及各要素的特征。

2．求解线性规划问题时可能出现哪几种结果，哪些结果反映建模时有错误。

3．什么是线性规划问题的标准形式，如何将一个非标准型的线性规划问题转化为标准形式。

4．试述线性规划问题的可行解、基解、基可行解、最优解的概念以及上述解之间的相互关系。

5．试述单纯形法的计算步骤，如何在单纯形表上去判别问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

6．如果线性规划的标准型式变换为求目标函数的极小化 $\min z$，则用单纯形法计算时如何判别问题已得到最优解。

7．在确定初始可行基时，什么情况下要在约束条件中增添人工变量，在目标函数中人工变量前的系数为$(-M)$的经济意义是什么。

8．什么是单纯形法计算的两阶段法，为什么要将计算分两个阶段进行，以及如何根据第一阶段的计算结果来判定第二阶段的计算是否需继续进行。

9．简述退化的含义及处理退化的勃兰特规则。

10．举例说明生产和生活中应用线性规划的方面，并对如何应用进行必要描述。

11．判断下列说法是否正确：

(a) 图解法同单纯形法虽然求解的形式不同，但从几何上理解，两者是一致的；

(b) 线性规划模型中增加一个约束条件，可行域的范围一般将缩小，减少一个约束条件，可行域的范围一般将扩大；

(c) 线性规划问题的每一个基解对应可行域的一个顶点；

(d) 如线性规划问题存在最优解,则最优解一定对应可行域边界上的一个点;

(e) 对取值无约束的变量 x_j,通常令 $x_j = x_j' - x_j''$,其中 $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$,在用单纯形法求得的最优解中有可能同时出现 $x_j' > 0$, $x_j'' > 0$;

(f) 用单纯形法求解标准型式的线性规划问题时,与 $\sigma_j > 0$ 对应的变量都可以被选作换入变量;

(g) 单纯形法计算中,如不按最小比值原则选取换出变量,则在下一个解中至少有一个基变量的值为负;

(h) 单纯形法计算中,选取最大正检验数 σ_k 对应的变量 x_k 作为换入变量,将使目标函数值得到最快的增长;

(i) 一旦一个人工变量在迭代中变为非基变量后,该变量及相应列的数字可以从单纯形表中删除,而不影响计算结果;

(j) 线性规划问题的任一可行解都可以用全部基可行解的线性组合表示;

(k) 若 X^1、X^2 分别是某一线性规划问题的最优解,则 $X = \lambda_1 X^1 + \lambda_2 X^2$ 也是该线性规划问题的最优解,其中 λ_1、λ_2 为正的实数;

(l) 线性规划用两阶段法求解时,第一阶段的目标函数通常写为 $\min z = \sum_i x_{ai}$ (x_{ai} 为人工变量),但也可写为 $\min z = \sum_i k_i x_{ai}$,只要所有 k_i 均为大于零的常数;

(m) 对一个有 n 个变量、m 个约束的标准型的线性规划问题,其可行域的顶点恰好为 C_n^m 个;

(n) 单纯形法的迭代计算过程是从一个可行解转换到目标函数值更大的另一个可行解;

(o) 线性规划问题的可行解如为最优解,则该可行解一定是基可行解;

(p) 若线性规划问题具有可行解,且其可行域有界,则该线性规划问题最多具有有限个数的最优解;

(q) 线性规划可行域的某一顶点若其目标函数值优于相邻的所有顶点的目标函数值,则该顶点处的目标函数值达到最优。

练习题

1.1 用图解法求解下列线性规划问题,并指出各问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

(a) $\min z = 6x_1 + 4x_2$

$$\text{st.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 1.5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b) $\max z = 4x_1 + 8x_2$

$$\text{st.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(c) $\max\ z = x_1 + x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq -12 \\ 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(d) $\max\ z = 3x_1 - 2x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(e) $\max\ z = 3x_1 + 9x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 22 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(f) $\max\ z = 3x_1 + 4x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.2　某炼油厂根据计划每季度需供应合同单位汽油 15 **万** t(**吨**)、**煤油** 12 **万** t、**重油** 12 **万** t。**该厂从** A,B **两处运回原油提炼,已知两处原油成分如表** 1-1 **所示。又如从** A **处采购原油每** t **价格(包括运费、下同)为** 200 **元**,B **处原油每** t **为** 310 **元。试求**: (a) **选择该炼油厂采购原油的最优决策**;(b) **如** A **处价格不变**,B **处降为** 290 **元**/ t,**则最优决策有何改变**?

表　1-1

	A/ %	B/ %
含　汽　油	15	50
含　煤　油	20	30
含　重　油	50	15
其　　他	15	5

1.3　线性规划问题:

$\max\ z = a x_1 + x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

试用图解法分析,问题最优解随 $a\ (-\infty < a < \infty)$**取值不同时的变化情况。**

1.4　将下列线性规划问题变换成标准型,并列出初始单纯形表:

(a) $\min\ z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

(b) $\max\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ x_1,\ x_3 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_4 \text{ 无约束} \end{cases}$$

1.5 列出下述线性规划问题的初始单纯形表:

(a) $\max\ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_{ik} / p_k$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \leq b_i \quad (i = 1, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_{ik} = d_k \quad (k = 1, \cdots, m) \\ x_{ik} \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

(b) $\min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \cdots, n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

(c) $\max\ z = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_j} (C_j X_{jk}) \rho_{jk}$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n_j} (A_j X_{jk}) \rho_{jk} + X_s = b_0 \\ \sum_{k=1}^{n_j} \rho_{jk} = 1 \quad (j = 1, \cdots, N) \\ \rho_{jk} \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, N;\ k = 1, \cdots, n_j) \end{cases}$$

1.6 判断下列集合是否为凸集:

(a) $X = \{[x_1, x_2] \mid x_1 x_2 \geq 30,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$

(b) $X = \{[x_1, x_2] \mid x_2 - 3 \leq x_1^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$

(c) $X = \{[x_1, x_2] \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

1.7 在下列线性规划问题中,找出所有基解。指出哪些是基可行解并分别代入目标函数,比较找出最优解。

(a) $\max\ z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(b) $\min \ z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

1.8 已知线性规划问题:

$\max \ z = x_1 + 3x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 & ① \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 & ② \\ x_2 + x_5 = 4 & ③ \\ x_1, \cdots, x_5 \geq 0 & ④ \end{cases}$$

表 1-2 **中所列的解**(a)～(f)**均满足约束条件①②③,试指出表中哪些解是可行解,哪些是基解,哪些是基可行解。**

表 1-2

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(a)	2	4	3	0	0
(b)	10	0	-5	0	4
(c)	3	0	2	7	4
(d)	1	4.5	4	0	-0.5
(e)	0	2	5	6	2
(f)	0	4	5	2	0

1.9 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题,并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点。

(a) $\max \ z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b) $\max \ z = 100x_1 + 200x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 200 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 1\,200 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.10　已知某线性规划问题的约束条件为

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 30 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 85 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

判断下列各点是否为该线性规划问题可行域的凸集的顶点:

(a) $X = (5, 15, 0, 20, 0)$

(b) $X = (9, 7, 0, 0, 8)$

(c) $X = (15, 5, 10, 0, 0)$

1.11　已知下述线性规划问题具有无穷多最优解,试写出其最优解的一般表达式。

$\max\ z = 10x_1 + 5x_2 + 5x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leq 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1.12　线性规划问题:

$\min\ z = CX$

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

其可行域为 R,**目标函数最优值为** z^*,**若分别发生下列情形之一时,其新的可行域为** R',**新的目标函数最优值为**$(z^*)'$,**试分别回答**(a)(b)(c)**三种情况下** R **与** R'**及** z^* **与**$(z^*)'$**之间的关系**:

(a) **增添一个新的约束条件**;

(b) **减少一个原有的约束条件**;

(c) **目标函数变为** $\min\ z = \dfrac{CX}{\lambda}$,**同时约束条件变为** $AX = \lambda b,\ X \geq 0\ (\lambda > 1)$。

1.13　在单纯形法迭代中,任何从基变量中替换出来的变量在紧接着的下一次迭代中会不会立即再进入基变量,为什么?

1.14　会不会发生在一次迭代中刚进入基变量的变量在紧接着的下一次迭代中立即被替换出来?什么情况下有这种可能,试举例说明。

1.15　已知线性规划问题:

$$\max\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

用图解法求解时,得其可行域顶点分别为 0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (**见图** 1-1)。**试问** c_1, c_2 **如何变化时,目标函数值分别在上述各顶点实现最优。**

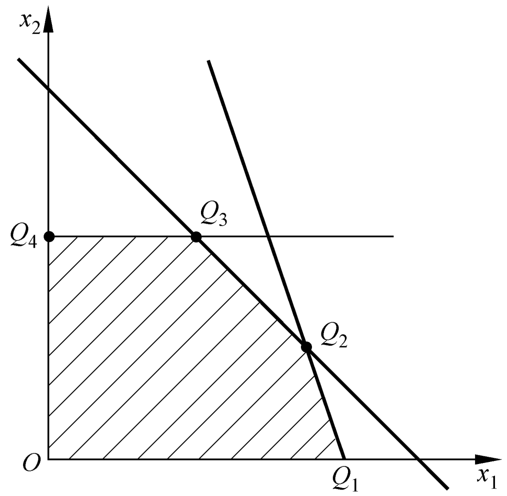


图 1-1

1.16 求解线性规划问题当某一变量 x_j **的取值无约束时,通常用** $x_j = x_j' - x_j''$**来替换,其中** $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$。**试说明** x_j'、x_j''**能否在基变量中同时出现,为什么?**

1.17 下述线性规划问题中,分别求目标函数值 z **的上界**$\overline{z^*}$**和下界**$\underline{z^*}$:

(a) $\max\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

式中: $1 \leq c_1 \leq 3$, $4 \leq c_2 \leq 6$; $8 \leq b_1 \leq 12$, $10 \leq b_2 \leq 14$;

$-1 \leq a_{11} \leq 3$, $2 \leq a_{12} \leq 5$; $2 \leq a_{21} \leq 4$, $4 \leq a_{22} \leq 6$

(b) $\max\ z = c_1 x_1 - c_2 x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} -a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ a_{21} x_1 - a_{22} x_2 \leq b_2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

式中: $2 \leq c_1 \leq 3$, $4 \leq c_2 \leq 6$; $8 \leq b_1 \leq 12$, $10 \leq b_2 \leq 15$;

$-1 \leq a_{11} \leq 1$, $2 \leq a_{12} \leq 4$; $2 \leq a_{21} \leq 5$, $4 \leq a_{22} \leq 6$

1.18 用单纯形法求解下列线性规划问题,并指出问题的解属于哪一类:

(a) $\max\ z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(b) $\max\ z = 2x_1 - x_2 + x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+x_2+x_3\le 60\\x_1-x_2+2x_3\le 10\\x_1+x_2-x_3\le 20\\x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0\end{cases}$$

(c) $\max\ z=6x_1+2x_2+10x_3+8x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}5x_1+6x_2-4x_3-4x_4\le 20\\3x_1-3x_2+2x_3+8x_4\le 25\\4x_1-2x_2+x_3+3x_4\le 10\\x_{1\sim 4}\ge 0\end{cases}$$

(d) $\max\ z=x_1+6x_2+4x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+2x_2+2x_3\le 13\\4x_1-4x_2+x_3\le 20\\x_1+2x_2+x_3\le 17\\x_1\ge 1,\ x_2\ge 2,\ x_3\ge 3\end{cases}$$

1.19 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题,并指出问题的解属于哪一类:

(a) $\max\ z=4x_1+5x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\ge 18\\2x_1+x_2\le 4\\x_1+x_2-x_3=5\\x_j\ge 0\quad(j=1,2,3)\end{cases}$$

(b) $\max\ z=2x_1+x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3\ge 4\\2x_1+4x_2\le 20\\4x_1+8x_2+2x_3\le 16\\x_j\ge 0\quad(j=1,2,3)\end{cases}$$

(c) $\max\ z=x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+6x_2\ge 24\\4x_1+6x_2\ge -12\\2x_2\ge 4\\x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

(d) $\max\ z=x_1+2x_2+3x_3-x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=15\\2x_1+x_2+5x_3=20\\x_1+2x_2+x_3+x_4=10\\x_j\ge 0\quad(j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

1.20 下表(表 1-3)为用单纯形法计算时某一步的表格。已知该线性规划的目标函数为 $\max\ z=5x_1+3x_2$**,约束形式为**$\le$**,** x_3、x_4 **为松弛变量,表中解代入目标函数后得** $z=10$。

表 1-3

		x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	2	c	0	1	1/5
x_1	a	d	e	0	1
c_j-z_j		b	-1	f	g

(a) 求 $a \sim g$ 的值;

(b) 表中给出的解是否为最优解。

1.21 表 1-4 中给出某线性规划问题计算过程中的一个单纯形表,目标函数为 $\max\ z = 28x_4 + x_5 + 2x_6$,约束条件为 $\leq$,表中 x_1, x_2, x_3 为松弛变量,表中解的目标函数值为 $z = 14$。

表 1-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	a	3	0	-14/3	0	1	1
x_2	5	6	d	2	0	5/2	0
x_4	0	0	e	f	1	0	0
$c_j - z_j$		b	c	0	0	-1	g

(a) 求 $a \sim g$ 的值;

(b) 表中给出的解是否为最优解。

1.22 表 1-5 为某求极大值线性规划问题的初始单纯形表及迭代后的表,x_4、x_5 为松弛变量,试求表中 $a \sim l$ 的值及各变量下标 $m \sim t$ 的值。

表 1-5

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_m	6	b	c	d	1	0
x_n	1	-1	3	e	0	1
$c_j - z_j$		a	1	-2	0	0
x_s	f	g	2	-1	1/2	0
x_t	4	h	i	1	1/2	1
$c_j - z_j$		0	7	j	k	l

1.23 求下述线性规划问题的解:

$$\max\ z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{st}\begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b \\ 0 \leq x_j \leq u_j \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

假定模型中所有参数 $c_j, a_j, u_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 均为正,且有

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

1.24 线性规划问题 $\max\ z = CX,\ AX = b,\ X \geq 0$,如 X^* 是该问题的最优解,又 $\lambda > 0$ 为某一常数,分别讨论下列情况时最优解的变化。

(a) 目标函数变为 $\max\ z = \lambda CX$;

(b) 目标函数变为 $\max\ z=(C+\lambda)X$;

(c) 目标函数变为 $\max\ z=\dfrac{C}{\lambda}X$, 约束条件变为 $AX=\lambda b$。

1.25　试将下述问题改写成线性规划问题

$$\max_{x_i}\ \min\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\ x_i\geq 0,\quad i=1,\cdots,m\end{cases}$$

1.26　讨论如何用单纯形法求解下述线性规划问题

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j\,|x_j|$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,\cdots,m)\\ x_j\ \text{取值无约束}\end{cases}$$

1.27　线性回归是一种常用的数理统计方法, 这个方法要求对图上的一系列点 $(x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots(x_n,y_n)$选配一条合适的直线拟合。方法通常是先定直线方程为 $y=a+bx$, 然后按某种准则求定 a, b。通常这个准则为最小二乘法, 但也可用其他准则。试根据以下准则建立这个问题的线性规划模型:

$$\min\sum_{i=1}^{n}|y_i-(a+bx_i)|$$

1.28　表 1-6 中给出某求极大化问题的单纯形表, 问表中 a_1, a_2, c_1, c_2, d 为何值时以及表中变量属哪一种类型时有:

(a) 表中解为惟一最优解;

(b) 表中解为无穷多最优解之一;

(c) 表中解为退化的可行解;

(d) 下一步迭代将以 x_1 替换基变量 x_5;

(e) 该线性规划问题具有无界解;

(f) 该线性规划问题无可行解。

表 1-6

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	-1	-5	0	1	0
x_5	3	a_2	-3	0	0	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	0

1.29 试利用两阶段法第一阶段的求解,找出下述方程组的一个可行解,并利用计算得到的最终单纯形表说明该方程组有多余方程。

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.30 考虑线性规划问题

$$\max\ z = \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 4 + 2\beta & (1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\beta & (2) \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

模型中 α,β为参数,要求:

(a) 组成两个新的约束(1)' = (1) + (2),(2)' = (2) - 2(1),根据(1)',(2)'以 x_1,x_2 为基变量列出初始单纯形表;

(b) 假定 β= 0,则 α为何值时,x_1,x_2 为问题的最优基;

(c) 假定 α= 3,则 β为何值时,x_1,x_2 为问题的最优基。

1.31 线性规划问题 $\max\ z = CX,\ AX = b,\ X \geq 0$,设 X°为问题的最优解,若目标函数中用 C^* 代替 C 后,问题的最优解变为 X^*,求证:

$$(C^* - C)(X^* - X^\circ) \geq 0$$

1.32 某医院昼夜 24 h 各时段内需要的护士数量如下:2:00～6:00 10 人,6:00～10:00 15 人,10:00～14:00 25 人,14:00～18:00 20 人,18:00～22:00 18 人;22:00～2:00 12 人。护士分别于 2:00,6:00,10:00,14:00,18:00,22:00 分 6 批上班,并连续工作 8 h。试确定:

(a) 该医院至少应设多少名护士,才能满足值班需要;

(b) 若医院可聘用合同工护士,上班时间同正式工护士。若正式工护士报酬为 10 元/h,合同工护士为 15 元/h,问医院是否应聘合同工护士及聘多少名?

1.33 某人有一笔 30 万元的资金,在今后三年内有以下投资项目:

(1) 三年内的每年年初均可投资,每年获利为投资额的 20%,其本利可一起用于下一年投资;

(2) 只允许第一年投入,第二年末可收回,本利合计为投资额的 150%,但此类投资限额不超过 15 万元;

(3) 于三年内第二年初允许投资,可于第三年末收回,本利合计为投资额的 160%,这类投资限额 20 万元;

(4) 于三年内的第三年初允许投资,一年回收,可获利 40%,投资限额为 10 万元。

1.34 某糖果厂用原料 A,B,C 加工成三种不同牌号的糖果甲、乙、丙。已知各种牌号糖果中 A,B,C 的含量,原料成本,各种原料每月的限制用量,三种牌号糖果的单位加工费及售价如表 1-7 所示。

表 1-7

	甲	乙	丙	原料成本/元/kg	每月限制用量/kg
A	≥60%	≥15%		2.00	2 000
B				1.50	2 500
C	≤20%	≤60%	≤50%	1.00	1 200
加工费/元/kg	0.50	0.40	0.30		
售价/元/kg	3.40	2.85	2.25		

问该厂每月生产这三种牌号糖果各多少 kg,使得到的利润为最大?试建立这个问题的线性规划数学模型。

1.35 某饲养场饲养动物出售,设每头动物每天至少需 700 g 蛋白质、30 g 矿物质、100 mg 维生素。现有五种饲料可供选用,各种饲料每 kg 营养成分含量及单价如表 1-8 所示。

表 1-8

饲料	蛋白质/g	矿物质/g	维生素/mg	价格/元/kg
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

要求确定既满足动物生长的营养需要,又使费用最省的选用饲料的方案。(建立这个问题的线性规划模型,不求解。)

1.36 一贸易公司专门经营某种杂粮的批发业务。公司现有库容 5 000 担的仓库。1 月 1 日,公司拥有库存 1 000 担杂粮,并有资金 20 000 元。估计第一季度杂粮价格如表 1-9 所示。

表 1-9

	进货价/元/担	出货价/元/担
1 月	2.85	3.10
2 月	3.05	3.25
3 月	2.90	2.95

如买进的杂粮当月到货,但需到下月才能卖出,且规定“货到付款”。公司希望本季末库存为 2 000 担,问应采取什么样的买进与卖出的策略使 3 个月总的获利最大?(列出问题的线性规划模型,不求解)

1.37 某农场有 100 hm^2(公顷)土地及 15 000 元资金可用于发展生产。农场劳动力情况为秋冬季 3 500 人日,春夏季 4 000 人日,如劳动力本身用不了时可外出干活,春夏季收入为 2.1 元/人日,秋冬季收入为 1.8 元/人日。该农场种植三种作物:大豆、玉米、小麦,并饲养奶牛和鸡。种作物时不需要专门投资,而饲养动物时每头奶牛投资 400 元,每只鸡投资 3 元。养奶牛时每头需拨出 1.5 hm^2 土地种饲草,并占用人工秋冬季为 100 人日,春夏季为 50 人日,年净收入 400 元/每头奶牛。养鸡时不占土地,需人工为每只鸡秋冬季需 0.6 人日,春夏季为 0.3 人日,年净收入为 2 元/每只鸡。农场现有鸡舍允许最多养 3 000 只鸡,牛栏允许最多养 32 头奶牛。三种作物每年需要的人工及收入情况如表 1-10 所示。

表 1-10

	大豆	玉米	麦子
秋冬季需人日数	20	35	10
春夏季需人日数	50	75	40
年净收入/(元/hm^2)	175	300	120

试决定该农场的经营方案,使年净收入为最大。(建立线性规划模型,不求解)

1.38 市场对Ⅰ、Ⅱ两种产品的需求量为:产品Ⅰ在 1～4 月每月需 10 000 件,5～9 月每月 30 000 件,10～12 月为每月 100 000 件;产品Ⅱ在 3～9 月每月 15 000 件,其他月每月 50 000 件。某厂生产这两种产品成本为:产品Ⅰ在 1～5 月内生产每件 5 元,6～12 月内生产每件 4.50 元;产品Ⅱ在 1～5 月内生产每件 8 元,6～12 月内生产每件 7 元。该厂每月生产两种产品能力总和应不超过 120 000 件。产品Ⅰ容积每件 0.2 m^3,产品Ⅱ每件 0.4 立方米,而该厂仓库容积为 15 000 m^3,要求:(a) 说明上述问题无可行解;(b) 若该厂仓库不足时,可从外厂租借。若占用本厂每月每 m^3 库容需 1 元,而租用外厂仓库时上述费用增加为 1.5 元,试问在满足市场需求情况下,该厂应如何安排生产,使总的生产加库存费用为最少(建立模型,不需求解)。

1.39 对某厂Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品下一年各季度的合同预订数如表 1-11 所示。

表 1-10

产品	季度			
	1	2	3	4
Ⅰ	1 500	1 000	2 000	1 200
Ⅱ	1 500	1 500	1 200	1 500
Ⅲ	1 000	2 000	1 500	2 500

该三种产品1季度初无库存,要求在4季度末各库存150件。已知该厂每季度生产工时为15 000 h,生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ产品每件分别需时2,4,3 h。因更换工艺装备,产品Ⅰ在2季度无法生产。规定当产品不能按期交货时,产品Ⅰ,Ⅱ每件每迟交一个季度赔偿20元,产品Ⅲ赔偿10元;又生产出的产品不在本季度交货的,每件每季度的库存费用为5元。问该厂应如何安排生产,使总的赔偿加库存的费用为最小(要求建立数学模型,不需求解)。

1.40 某厂生产Ⅰ,Ⅱ两种食品,现有50名熟练工人,已知一名熟练工人可生产10 kg/ h食品Ⅰ或6 kg/ h食品Ⅱ。据合同预订,该两种食品每周的需求量将急剧上升,见表1-12。为此该厂决定到第8周末需培训出50名新的工人,两班生产。已知一名工人每周工作40 h,一名熟练工人用两周时间可培训出不多于三名新工人(培训期间熟练工人和培训人员均不参加生产)。熟练工人每周工资360元,新工人培训期间工资每周120元,培训结束参加工作后工资每周240元,生产效率同熟练工人。在培训的过渡期间,很多熟练工人愿加班工作,工厂决定安排部分工人每周工作60 h,工资每周540元。又若预订的食品不能按期交货,每推迟交货一周每kg的赔偿费食品Ⅰ为0.50元,食品Ⅱ为0.60元。在上述各种条件下,工厂应如何作出全面安排,使各项费用的总和为最小(建立模型,不需求解)。

表 1-12　　　　单位:t/ 周

食品 \ 周次	1	2	3	4	5	6	7	8
Ⅰ	10	10	12	12	16	16	20	20
Ⅱ	6	7.2	8.4	10.8	10.8	12	12	12

1.41 有一艘货轮,分前、中、后三个舱位,它们的容积与最大允许载重量如表1-13所示。

表 1-13

	前舱	中舱	后舱
最大允许载质量/ t	2 000	3 000	1 000
容积/ m^3	4 000	5 400	1 000

现有三种货物待运,已知有关数据列于表1-14。

表 1-14

商品	数量/ 件	每件体积/ m^3/ 件	每件质量/ t/ 件	运价/ 元/ 件
A	600	10	8	1 000
B	1 000	5	6	700
C	800	7	5	600

又为了航运安全,要求前、中、后舱在实际载重量上大体保持各舱最大允许载重量的比例关系。具体要求前、后舱分别与中舱之间载重量比例上偏差不超过 15%,前、后舱之间不超过 10%。问该货轮应装载 A,B,C 各多少件,运费收入为最大?试建立这个问题的线性规划模型。

1.42 某厂在今后四个月内需租用仓库堆存物资。已知各个月所需的仓库面积数字列于表 1-15。

表 1-15

月　份	1	2	3	4
所需仓库面积/100 m^2	15	10	20	12

仓库租借费用,当租借合同期限越长时,享受的折扣优待越大,具体数字列于表 1-16。

表 1-16

合同租借期限	1 个月	2 个月	3 个月	4 个月
合同期内仓库面积的租借费用/元/100 m^2	2 800	4 500	6 000	7 300

租借仓库的合同每月初都可办理,每份合同具体规定租用面积数和期限。因此该厂可根据需要在任何一个月初办理租借合同,且每次办理时,可签一份,也可同时签若干份租用面积和租借期限不同的合同,总的目标是使所付的租借费用最小。试根据上述要求,建立一个线性规划的数学模型。

1.43 某钢厂生产三种型号钢卷,其生产过程如图 1-2 所示。图中Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ为生产设备,又知有关生产数据列于表 1-17。

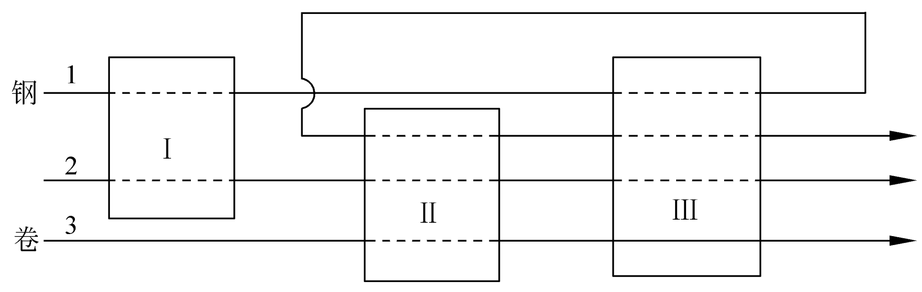


图 1-2

表 1-17

设备名称	台数	每周生产班数(每班 8 h)	生产时间利用率/ %
Ⅰ	4	21	95
Ⅱ	1	20	90
Ⅲ	1	12	100

钢卷	操作工序	机器效率	每月需要量	销售利润
1	Ⅰ Ⅲ (1) Ⅱ Ⅲ (2)	10 t/ 28 h 50 m/ min 20 m/ min 25 m/ min	≤1 250(t)	250 元/ t
2	Ⅰ Ⅱ Ⅲ	10 t/ 35 h 20 m/ min 25 m/ min	≤250(t)	350 元/ t
3	Ⅱ Ⅲ	16 m/ min 20 m/ min	≤1 500(t)	400 元/ t

设钢卷每件长 400 m,重 4 t,试建立这个问题的线性规划模型。

1.44 某战略轰炸机群奉命摧毁敌人军事目标。已知该目标有四个要害部位,只要摧毁其中之一即可达到目的。为完成此项任务的汽油消耗量限制为 48 000 L、重型炸弹 48 枚、轻型炸弹 32 枚。飞机携带重型炸弹时 L 汽油可飞行 2 km,带轻型炸弹时每 L 汽油可飞行 3 km。又知每架飞机每次只能装载一枚炸弹,每出发轰炸一次除来回路程汽油消耗(空载时每升汽油可飞行 4 km)外,起飞和降落每次各消耗 100 L。有关数据如表1-18 所示。

表 1-18

要害部位	离机场距离/ km	摧毁可能性	
		每枚重型弹	每枚轻型弹
1	450	0.10	0.08
2	480	0.20	0.16
3	540	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

为了使摧毁敌方军事目标的可能性最大,应如何确定飞机轰炸的方案。要求建立这个问题的线性规划模型。

1.45 一个大的造纸公司下设 10 个造纸厂,供应 1 000 个用户。这些造纸厂内应用

三种可以互相代换的机器,四种不同的原材料生产五种类型的纸张。公司要制订计划,确定每个工厂每台机器上生产各种类型纸张的数量,并确定每个工厂生产的哪一种类型纸张,供应哪些用户及供应的数量,使总的运输费用最少。已知:

D_{jk}——j 用户每月需要 k 种类型纸张数量;

r_{klm}——在 l 型设备上生产单位 k 种类型纸所需 m 类原材料数量;

R_{im}——第 i 纸厂每月可用的 m 类原材料数;

c_{kl}——在 l 型设备上生产单位 k 型纸占用的设备台时数;

c_{il}——第 i 纸厂第 l 型设备每月可用的台时数;

P_{ikl}——第 i 纸厂在第 l 型设备上生产单位 k 型纸的费用;

T_{ijk}——从第 i 纸厂到第 j 用户运输单位 k 型纸的费用。

试建立这个问题的线性规划模型。

1.46 一个木材储运公司有很大的仓库用以储运出售木材。由于木材季度价格的变化,该公司于每季度初购进木材,一部分于本季度内出售,一部分储存起来以后出售。已知该公司仓库的最大储存量为 20 万 m^3,储存费用为$(a+bu)$元/ m^3,式中 $a=70$, $b=100$, u为储存时间(季度数)。已知每季度的买进卖出价及预计的销售量如表 1-19 所示。

表 1-19

季度	买进价/ 元/ m^3	卖出价/ 元/ m^3	预计销售量/ 万 m^3
冬	410	425	100
春	430	440	140
夏	460	465	200
秋	450	455	160

由于木材不宜久贮,所有库存木材应于每年秋末售完,试建立这个问题的线性规划模型。

1.47 某厂在 n个计划期阶段内要用到一种特殊的工具,在第 j 阶段需要 r_j 个专用工具,到阶段末,凡在这个阶段内使用过的工具都应送去修理后才能使用。修理分两种方式:一种为慢修,费用便宜些(每修一个需 b元),时间长一些(需 p个阶段才能取回);另一种方式为快修,每件修理费 c元($c>b$),时间快一些,只需 q个阶段就能取回($q<p$)。当修理取回的工具满足不了需要时就需新购,新购一件费用为 a元($a>c$)。又这种专用工具在 n个阶段后就不再使用,试决定一个最优的新购与修理工具的方案,使计划期内花在工具上的费用为最少。

1.48 某厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品。产品Ⅰ依次经 A、B 设备加工,产品Ⅱ经 A、C

设备加工,产品Ⅲ经 C、B 设备加工。已知有关数据如表 1-20 所示,请为该厂制订一个最优的生产计划。

表 1-20

产品	机器生产率/件/h			原料成本/元	产品价格/元
	A	B	C		
Ⅰ	10	20		15	50
Ⅱ	20		5	25	100
Ⅲ		10	20	10	45
机器成本/元/h	200	100	200		
每周可用时间/h	50	45	60		

1.49 战斗机是一种重要的作战工具,但要使战斗机发挥作用必须有足够的驾驶员。因此生产出来的战斗机除一部分直接用于战斗外,需抽一部分用于培训驾驶员。已知每年生产的战斗机数量为 $a_j\ (j=1,\cdots,n)$,又每架战斗机每年能培训出 k 名驾驶员,问应如何分配每年生产出来的战斗机,使在 n 年内生产出来的战斗机为空防作出最大贡献?

1.50 某公司有三项工作需分别招收技工和力工来完成。第一项工作可由一个技工单独完成,或由一个技工和两个力工组成的小组来完成。第二项工作可由一个技工或一个力工单独去完成。第三项工作可由五个力工组成的小组完成,或由一个技工领着三个力工来完成。已知技工和力工每周工资分别为 100 元和 80 元,他们每周都工作 48 h,但他们每人实际的有效工作小时数分别为 42 和 36。为完成这三项工作任务,该公司需要每周总有效工作时间为:第一项工作 10 000 h。第二项工作 20 000 h,第三项工作 30 000 h。能招收到的工人数为技工不超过 400 人,力工不超过 800 人。试建立数学模型,确定招收技工和力工各多少人。使总的工资支出为最少(建立数学模型,不求解)。

1.51 旭日公司签订了 5 种产品($i=1,\cdots,5$)下一年度 1~6 月份的交货合同。已知这 5 种产品的订货量(件)、单件售价(元)、成本价(元)及生产每件产品所需工时(h)分别为 D_i, S_i, C_i, a_i。1~6 月的各个月内该厂正常生产工时及最大允许加班工时数如表 1-21。

表 1-21

月份	1	2	3	4	5	6
正常生产工时/h	12 000	11 000	13 000	13 500	13 500	14 000
最大允许加班工时/h	3 000	2 500	3 300	3 500	3 500	3 800

但加班时间内生产的每件产品成本增加 C_i'元,因生产准备及交货要求,其中产品 1

最早安排从 3 月份开始生产,产品 3 需在 4 月底前交货,产品 4 最早可于 2 月份起生产,并于 5 月底前全部交货。若产品 3 和 4 延期交货,于 6 月底前每拖一个月分别罚款 $p3$ 和 $p4$ 元,全部产品必须于 6 月底前交货。请为该厂设计一个保证完成合同又使盈利为最大的生产计划安排,并建立数学模型。

1.52 红升厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种产品,都经过 A、B 两道工序加工。设 A 工序有 A_1、A_2 两台设备,B 工序有 B_1、B_2、B_3 三台设备。已知产品Ⅰ可在 A、B 任何一种设备上加工,产品Ⅱ柯在任一规格 A 设备上加工,但 B 工序只能在 B_2 设备上加工,产品Ⅲ两道工序只能在 A_2、B_2 设备上加工。加工单位产品所需工序时间及其他有关数据见表 1-22,问应如何安排生产计划,使该厂获利最大。

表 1-22

设备	产品			设备有效台时	设备加工费/元·h^{-1}
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		
A_1	5	10		6 000	0.05
A_2	7	9	12	10 000	0.03
B_1	6	8		4 000	0.06
B_2	4		11	7 000	0.11
B_3	7			4 000	0.05
原料费/(元·件$^{-1}$)	0.25	0.35	0.50		
售价/(元·件$^{-1}$)	1.25	2.00	2.80		

第　二　章

对偶理论与灵敏度分析

复习思考题

1.对用矩阵形式表达的一般线性规划问题 $\max\{z = CX + 0X_s \mid AX + IX_s = b, X \geq 0, X_s \geq 0\}$,若以 X_B 表示基变量,X_N 表示非基变量,C_B,C_N 为它们相应在目标函数中的系数,试据此列出初始单纯形表及迭代后的单纯形表。

2.简述改进单纯形法的计算步骤,说明它在哪些方面对单纯形法计算作了改进。

3.已知单纯形法某一步迭代的基为 B,对应的基变量为$(x_1, \cdots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_m)$,经迭代后其基为 B_1,对应的基变量为$(x_1, \cdots, x_{l-1}, x_k, x_{l+1}, \cdots, x_m)$,试写出 B_1^{-1} 同 B^{-1} 之间的关系式。

4.试从经济上解释对偶问题及对偶变量的含义。

5.根据原问题同对偶问题之间的对应关系,分别找出两个问题变量之间、解以及检验数之间的对应关系。

6.什么是资源的影子价格,同相应的市场价格之间有何区别,以及研究影子价格的意义。

7.试述对偶单纯形法的计算步骤,它的优点及应用上的局限性。

8.将 a_{ij},b_i,c_j 的变化分别直接反映到最终单纯形表中,表中原问题和对偶问题的解各自将会出现什么变化,有多少种不同情况以及如何去处理。

9.试述参数线性规划问题的分析步骤,它同灵敏度分析的相似处及主要差别表现在哪里?

10.判断下列说法是否正确:

(a) 任何线性规划问题存在并具有惟一的对偶问题;

(b) 对偶问题的对偶问题一定是原问题;

(c) 根据对偶问题的性质,当原问题为无界解时,其对偶问题无可行解,反之,当对偶

问题无可行解时,其原问题具有无界解;

(d) 设 $\hat{x}_j$, $\hat{y}_i$ 分别为标准形式的原问题与对偶问题的可行解, x_j^* , y_i^* 分别为其最优解,则恒有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$$

(e) 若线性规划的原问题有无穷多最优解,则其对偶问题也一定具有无穷多最优解;

(f) 已知 y_i^* 为线性规划的对偶问题的最优解,若 $y_i^* > 0$,说明在最优生产计划中第 i 种资源已完全耗尽;

(g) 已知 y_i^* 为线性规划的对偶问题的最优解,若 $y_i^* = 0$,说明在最优生产计划中第 i 种资源一定有剩余;

(h) 若某种资源的影子价格等于 k,在其他条件不变的情况下,当该种资源增加 5 个单位时,相应的目标函数值将增大 $5k$;

(i) 应用对偶单纯形法计算时,若单纯形表中某一基变量 $x_i < 0$,又 x_i 所在行的元素全部大于或等于零,则可以判断其对偶问题具有无界解;

(j) 若线性规划问题中的 b_i, c_j 值同时发生变化,反映到最终单纯形表中,不会出现原问题与对偶问题均为非可行解的情况;

(k) 在线性规划问题的最优解中,如某一变量 x_j 为非基变量,则在原来问题中,无论改变它在目标函数中的系数 c_j 或在各约束中的相应系数 a_{ij},反映到最终单纯形表中,除该列数字有变化外,将不会引起其他列数字的变化。

练习题

2.1 已知线性规划问题用单纯形法计算时得到的初始单纯形表及最终单纯形表如表 2-1(a)和(b)所示,请将表中空白处数字填上。

表 2-1(a)

			2	-1	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	60	3	1	1	1	0	0
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0
0	x_6	20	1	1	-1	0	0	1
	$c_j - z_j$		2	-1	1	0	0	0
	…				…			
0	x_4					1	-1	-2
2	x_1					0	1/2	1/2
-1	x_2					0	-1/2	1/2
$c_j - z_j$								

表　2-1(b)

			-2	-3	-2	0	$-M$	0	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$-M$	x_5	8	1	4	2	-1	1	0	0
$-M$	x_7	6	3	2	2	0	0	-1	1
	$c_j - z_j$		$-2+4M$	$-3+6M$	$-2+4M$	$-M$	0	$-M$	0
	…					…			
-3	x_2						0.3		-0.1
-2	x_1						-0.2		0.4
	$c_j - z_j$						$-M+0.5$		$-M+0.5$

2.2　已知线性规划问题:

$$\max\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$\text{st.}\quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5)$$

用单纯形法求解得最终单纯形表如表 2-2 所示。

(a) 求 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ 和 b_1, b_2;

(b) 求 c_1, c_2, c_3。

表　2-2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3/2	1	0	1	1/2	$-1/2$
x_2	2	1/2	1	0	-1	2
$c_j - z_j$		-3	0	0	0	-4

2.3　已知下表(表 2-3)是求某极大化线性规划问题的初始单纯形表和迭代计算中某一步的表。试求表中未知数 $a \sim l$ 的值。

表　2-3

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_5	20	5	-4	13	b	1	0
x_6	8	j	-1	k	c	0	1

续表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$c_j - z_j$	1	6	-7	a	0	0
…	…					
x_3 d	-1/7	0	1	-2/7	f	4/7
x_2 e	l	1	0	-3/7	-5/7	g
$c_j - z_j$	72/7	0	0	11/7	h	j

2.4 用改进单纯形法求解线性规划问题:

(a) $\max\ z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$

$$\text{st.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \le 30 \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(b) $\min\ z = -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6$

$$\text{st.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \le 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 \le 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, 6)$$

2.5 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

试根据改进单纯形法中求逆矩阵的方法原理求下述矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$,已知

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2.6 写出下列线性规划问题的对偶问题:

(a) $\min\ z = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

$$\text{st.}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 3 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 \ge 0,\ x_4 \le 0,\ x_2, x_3\ \text{无约束} \end{cases}$$

(b) $\min\ z = -5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$$\text{st.}\ \begin{cases} -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \ge 15 \\ -5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \le 20 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 \le 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3\ \text{无约束} \end{cases}$$

(c) $\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & (i=1,\cdots,m_1)\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i=m_1+1,\cdots,m_2)\\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & (i=m_2+1,\cdots,m)\\ x_j \leq 0 & (j=1,\cdots,n_1)\\ x_j \geq 0 & (j=n_1+1,\cdots,n_2)\\ x_j\ \text{无约束} & (j=n_2+1,\cdots,n)\end{cases}$$

(d) $\max\ z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{ik} x_{ik}$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_{ik} = s_k & (k=1,\cdots,m)\\ \sum_{k=1}^{m} b_{ik} x_{ik} = p_i & (i=1,\cdots,n)\\ x_{ik} \geq 0 & (i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m)\end{cases}$$

(e) $\min\ z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4-i+1} c_j x_{ij}$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{4-i+1} x_{ij} \geq r_k & (k=1,2,3,4)\\ x_{ij} \geq 0 & (i=1,\cdots,4;\ j=1,\cdots,4-i+1)\end{cases}$$

(f) $\max\ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(p_j x_j)+\sum_{k=1}^{l} g_k y_k$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j+\sum_{k=1}^{l} d_{ik} y_k \leq b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j \geq 0,\ y_k\ \text{无约束}\end{cases}$$

2.7 已知线性规划的原问题与对偶问题分别为:

(P) **原问题**: $\max\ z=CX$ (D) **对偶问题**: $\min\ w=Yb$

$$\text{st.}\begin{cases}AX\leq b\\ X\geq 0\end{cases}\qquad\qquad \text{st.}\begin{cases}YA\geq C\\ Y\geq 0\end{cases}$$

若 Y^* **为对偶问题最优解,又原问题约束条件右端项用** $\bar{b}$ **替换之后其最优解为** $\bar{X}$**,试证明有** $C\bar{X}\leq Y^*\bar{b}$。

2.8 已知线性规划问题:

① $\max\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\quad (i=1,\cdots,m),\ x_j \geq 0\quad (j=1,\cdots,n)$;

② $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} = b_i$ $(i = 1, \cdots, m), x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$;

③ $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} M x_{ai}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{si} + x_{ai} = b_i$ $(i = 1, \cdots, m), x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$

(M为任意大正数)

分别写出①,②,③的对偶问题,认真分析比较并由此得出结论。

2.9 已知线性规划问题:

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

试应用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

2.10 已知线性规划问题:

$$\max z = x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 - x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

应用对偶理论证明上述线性规划问题无最优解。

2.11 已知线性规划问题:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

要求: a) 写出它的对偶问题;

(b) 应用对偶理论证明原问题和对偶问题都存在最优解。

2.12 已知线性规划问题:

$$\max z = 4x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

应用对偶理论证明该问题最优解的目标函数值不大于 25。

2.13 已知线性规划问题 $\max z = CX, AX = b, X \geq 0$,分别说明发生下列情况时,其对偶问题的解的变化:

(a) 问题的第 k 个约束条件乘上常数 $\lambda(\lambda\neq 0)$;

(b) 将第 k 个约束条件乘上常数 $\lambda(\lambda\neq 0)$后加到第 r 个约束条件上;

(c) 目标函数改变为 $\max\ z=\lambda CX(\lambda\neq 0)$;

(d) 模型中全部 x_1 用 $3x_1'$代换。

2.14 已知线性规划问题:

$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leq b_i & (i=1,\cdots,m)\\ x_j\geq 0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

若$(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_m^*)$为其对偶问题的最优解。又若原问题约束条件的右端项 b_i 变换为 b_i',这时原问题的最优解变为$(x_1',\cdots,x_n')$,试证明

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j'\leq\sum_{i=1}^{m} b_i' y_i^*$$

2.15 已知下表(表 2-4)为求解某线性规划问题的最终单纯形表,表中 x_4, x_5 为松弛变量,问题的约束为≤形式。

表 2-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	5/2	0	1/2	1	1/2	0
x_1	5/2	1	-1/2	0	-1/6	1/3
c_j-z_j		0	-4	0	-4	-2

(a) 写出原线性规划问题;

(b) 写出原问题的对偶问题;

(c) 直接由表 2-4 写出对偶问题的最优解。

2.16 已知线性规划问题:

$$\min\ z=2x_1-x_2+2x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=4\\ -x_1+x_2-kx_3\leq 6\\ x_1\leq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\ \text{无约束}\end{cases}$$

其最优解为 $x_1=-5$, $x_2=0$, $x_3=-1$;

(a) 求 k 的值;

(b) 写出并求其对偶问题的最优解。

2.17 已知线性规划问题:

$$\min\ z=2x_1+3x_2+5x_3+6x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

(a) 写出其对偶问题;

(b) 用图解法求对偶问题的解;

(c) 利用(b)的结果及对偶性质求原问题解。

2.18 对下述线性规划问题:

$$\max \ z = 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 25x_5$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 57 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(a) 以 y_1, y_2 为对偶变量写出其对偶问题,并证明$(y_1, y_2) = (4, 5)$是其一个可行解;

(b) 利用(a) 的结果分别对原问题及对偶问题求出最优解。

2.19 已知线性规划问题:

$$\max \ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

其对偶问题最优解为 $y_1 = 1.2$, $y_2 = 0.2$,试根据对偶理论求出原问题的最优解。

2.20 已知线性规划问题:

$$\max \ z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0, \ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

(a) 写出其对偶问题;

(b) 已知原问题用两阶段法求解时得到的最终单纯形表如表 2-5 所示。

试写出其对偶问题的最优解。

表 2-5

			5	3	6	-6	0
			x_1	x_2	x_3'	x_3''	x_4
0	x_4	8	0	1	0	0	1
5	x_1	14	1	2	0	0	0
-6	x_s''	4	0	1	-1	1	0
$c_j - z_j$			0	-1	0	0	0

2.21 已知线性规划问题:

$$\min\ z = 15x_1 + 33x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ x_2 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(a) **写出其对偶问题;**

(b) **已知原问题用两阶段法求解时得到的最终单纯形表如表** 2-6 **所示。**

表 2-6

			-15	-33	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	3	0	0	-2	1	3
-15	x_1	4/3	1	0	-1/3	0	2/3
-33	x_2	1	0	1	0	0	-1
	$c_j - z_j$		0	0	-5	0	-23

试写出其对偶问题的最优解。

2.22 已知线性规划问题:

$$\min\ z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_3 + x_4 \geq 2 \\ x_1 + x_3 \geq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

(a) **写出其对偶问题;**

(b) **已知原问题最优解为** $X^* = (1, 1, 2, 0)$, **试根据对偶理论, 直接求出对偶问题的最优解。**

2.23 已知线性规划问题:

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) & (1) \\ x_j \leq u_j \quad (j = 1, \cdots, n) & (2) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

式中 u_j 为大于零的常数,对应第(1)(2)组约束条件的对偶变量分别为 y_i 和 z_j,如令

$$聊 = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$$

则问题的最优性条件等价于

$$\text{当}\quad \begin{cases} x_j = 0 \text{ 时},聊 \leq 0 \\ 0 < x_j < u_j \text{ 时},聊 = 0 \\ x_j = u_j \text{ 时},聊 \geq 0 \end{cases}$$

2.24 已知某实际问题的线性规划模型为:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{st.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

若第 i 项资源的影子价格为 y_i,

(a) 若第一个约束条件两端乘以 2,变为 $\sum_{j=1}^{n} (2a_{1j}) x_j = 2b_1$, $\hat{y}_1$ 是对应这个新约束条件的影子价格,求 $\hat{y}_1$ 与 y_1 的关系;

(b) 令 $x_1' = 3x_1$,用 $(x_1'/3)$替换模型中所有的 x_1,问影子价格 y_i 是否变化?若 x_1 不可能在最优基中出现,问 x_1'有否可能在最优基中出现;

(c) 如目标函数变为 $\max z = \sum_{j=1}^{n} 2c_j x_j$,问影子价格有何改变?

2.25 下述线性规划问题:

$$\max z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5$$

$$\text{st.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 180 & (\text{资源 } 1) \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 270 & (\text{资源 } 2) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 180 & (\text{资源 } 3) \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

已知最优解中的基变量为 x_3, x_1, x_5,且已知

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

要求根据上述信息确定三种资源各自的影子价格。

2.26 已知线性规划问题:

$$\max z = 3x_1 + x_2 + 4x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}6x_1+3x_2+5x_3\le 25\\3x_1+4x_2+5x_3\le 20\\x_j\ge 0\quad (j=1,2,3)\end{cases}$$

用单纯形法求解时,其最优解的表见表 2-7。

表 2-7

		x_1	x_2	x_3	x_{s1}	x_{s2}
x_1	5/3	1	-1/3	0	1/3	-1/3
x_3	3	0	1	1	-1/5	2/5
c_j-z_j		0	-2	0	-1/5	-3/5

要求:

(a) 直接写出上述问题的对偶问题及其最优解;

(b) 若问题中 x_2 列的系数变为$(3,2,3)^T$,问表 2-7 中的解是否仍为最优解;

(c) 若增加一个新的变量 x_4,其相应系数为$(2,3,2)^T$,问增加新变量后表 2-7 中的最优解是否发生变化。

2.27 若线性规划问题 $\min z=CX$,约束于 $AX=b$, $X\ge 0$,具有最优解,试应用对偶性质证明下述线性问题不可能具有无界解,$\min z=CX$,约束于 $AX=d$, $X\ge 0$, d 是可以取任意值的向量。

2.28 用对偶单纯形法求解下列线性规划问题:

(a) $\min z=2x_1+3x_2+4x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\ge 3\\2x_1-x_2+3x_3\ge 4\\x_{1\sim 3}\ge 0\end{cases}$$

(b) $\min z=4x_1+12x_2+18x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+3x_3\ge 3\\2x_2+2x_3\ge 5\\x_{1\sim 3}\ge 0\end{cases}$$

(c) $\min z=3x_1+2x_2+x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 6\\x_1-x_3\ge 4\\x_2-x_3\ge 3\\x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

2.29 证明当用对偶单纯形法求解线性规划问题时,若有 $b_r<0$,而 $a_{rj}\ge 0$ $(j=$

$1,\cdots,n)$,则该对偶问题具有无界解。

2.30 考虑线性规划问题:

$$\max\ z=2x_1+4x_2+3x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3\le 60\\ 2x_1+x_2+2x_3\le 40\\ x_1+3x_2+2x_3\le 80\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

(a) 写出其对偶问题;

(b) 用单纯形法求解原问题,列出每步迭代计算得到的原问题的解与互补的对偶问题的解;

(c) 用对偶单纯形法求解其对偶问题,并列出每步迭代计算得到的对偶问题解及与其互补的对偶的对偶问题的解;

(d) 比较 (b) (c) 计算结果。

2.31 已知线性规划问题:

$$\max\ z=6x_1+14x_2+13x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}\frac{1}{2}x_1+2x_2+x_3\le 24 & (1)\\ x_1+2x_2+4x_3\le 60 & (2)\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

用单纯形法求解时得到的最终单纯形表如表 2-8 所示。

表 2-8

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	36	1	6	0	4	-1
x_3	6	0	-1	1	-1	1/2
c_j-z_j		0	-9	0	-11	-1/2

求: a) 当约束条件 (1) 变为 $x_1+4x_2+2x_3\le 68$ 时,问题的最优解如何变化?

(b) 如约束条件不变,目标函数变为 $\max\ z(\theta)=6x_1+(14+3\theta)x_2+13x_3$ 时,求 θ 在 $[0,4]$ 区间范围内变化时最优解的变化。

2.32 已知线性规划问题:

$$\max\ z=10x_1+5x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1+4x_2\le 9\\5x_1+2x_2\le 8\\x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

用单纯形法求得最终表如表 2-9 所示。

表 2-9

		x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	3/2	0	1	5/14	-3/14
x_1	1	1	0	-1/7	2/7
$c_j - z_j$		0	0	-5/14	-25/14

试用灵敏度分析的方法分别判断:

(a) 目标函数系数 c_1 或 c_2 分别在什么范围内变动,上述最优解不变;

(b) 约束条件右端项 b_1, b_2 当一个保持不变时,另一个在什么范围内变化,上述最优基保持不变;

(c) 问题的目标函数变为 $\max\ z=12x_1+4x_2$ 时上述最优解的变化;

(d) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}11\\19\end{pmatrix}$ 时上述最优解的变化。

2.33 已知线性规划问题:

$$\max\ z=2x_1-x_2+x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\le 6\\-x_1+2x_2\le 4\\x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0\end{cases}$$

用单纯形法求解得最终单纯形表如表 2-10 所示。

表 2-10

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6	1	1	1	1	0
x_5	10	0	3	1	1	1
$c_j - z_j$		0	-3	-1	-2	0

试说明分别发生下列变化时,新的最优解是什么?

(a) 目标函数变为 $\max\ z=2x_1+3x_2+x_3$;

(b) 约束条件右端项由 $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$;

(c) 增添一个新的约束 $-x_1+2x_3\geq 2$。

2.34 已知线性规划问题:

$$\max z=(c_1+t_1)x_1+c_2x_2+c_3x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+x_4=b_1+3t_2\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+x_5=b_2+t_2\\ x_j\geq 0\quad(j=1,\cdots,5)\end{cases}$$

当 $t_1=t_2=0$ 时求解得最终单纯形表见表 2-11。

表 2-11

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	5/2	0	1/2	1	1/2	0
x_1	5/2	1	-1/2	0	-1/6	1/3
c_j-z_j		0	-4	0	-4	-2

(a) 确定 c_1, c_2, c_3, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} 和 b_1, b_2 的值;

(b) 当 $t_2=0$ 时, t_1 在什么范围内变化上述最优解不变;

(c) 当 $t_1=0$ 时, t_2 在什么范围内变化上述最优基不变。

2.35 某厂生产甲、乙、丙三种产品,已知有关数据如表 2-12 所示,试分别回答下列问题:

表 2-12

产品 消耗定额 原料	甲	乙	丙	原料拥有量
A	6	3	5	45
B	3	4	5	30
单件利润	4	1	5	

(a) 建立线性规划模型,求使该厂获利最大的生产计划;

(b) 若产品乙、丙的单件利润不变,则产品甲的利润在什么范围内变化时,上述最优解不变;

(c) 若有一种新产品丁,其原料消耗定额: A 为 3 单位, B 为 2 单位,单件利润为 2.5 单位。问该种产品是否值得安排生产,并求新的最优计划;

(d) 若原材料 A 市场紧缺,除拥有量外一时无法购进,而原材料 B 如数量不足可去

市场购买,单价为 0.5,问该厂应否购买,以购进多少为宜;

(e) 由于某种原因该厂决定暂停甲产品的生产,试重新确定该厂的最优生产计划。

2.36 某厂生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品,分别经过 A,B,C 三种设备加工。已知生产单位各种产品所需的设备台时、设备的现有加工能力及每件产品的预期利润见表 2-13。

表 2-13

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	设备能力(台·h)
A	1	1	1	100
B	10	4	5	600
C	2	2	6	300
单位产品利润(元)	10	6	4	

(a) 求获利最大的产品生产计划;

(b) 产品Ⅲ每件的利润增加到多大时才值得安排生产? 如产品Ⅲ每件利润增加到 50/6 元,求最优计划的变化;

(c) 产品Ⅰ的利润在多大范围内变化时,原最优计划保持不变;

(d) 设备 A 的能力如为 $100+10\theta$,确定保持最优基不变的 θ 的变化范围;

(e) 如有一种新产品,加工一件需设备 A,B,C 的台时各为 1,4,3h,预期每件的利润为 8 元,是否值得安排生产;

(f) 如合同规定该厂至少生产 10 件产品Ⅲ,试确定最优计划的变化。

2.37 分析下列参数规划问题中当 θ 变化时最优解的变化情况:

(a) $\max\ z(\theta)=(3+2\theta)x_1+(5-\theta)x_2 \quad (\theta\geq 0)$

$$
\text{st.}\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1+2x_2\leq 18 \\ x_1,\ x_2\geq 0 \end{cases}
$$

(b) $\min\ z(\theta)=x_1+x_2-\theta x_3+2\theta x_4 \quad (-\infty<\theta<+\infty)$

$$
\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_3+2x_4 = 2 \\ 2x_1+x_2+3x_4=5 \\ x_j\geq 0 \quad (j=1,\cdots,4) \end{cases}
$$

(c) $\max\ z(\theta)=45x_1+80x_2 \quad (-\infty<\theta<+\infty)$

$$
\text{st.}\begin{cases} 5x_1+20x_2\leq 400+\theta \\ 10x_1+15x_2\leq 450+5\theta \\ x_1,\ x_2\geq 0 \end{cases}
$$

(d) $\min\ z = 2x_4 + 8x_5$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 3x_4 - x_5 = 3 - \theta \\ x_2 - 4x_4 + 2x_5 = 1 + 2\theta \\ x_3 - x_4 + 3x_5 = -1 + \theta \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

2.38 下列参数规划问题中,分析 $\theta \geq 0$ 时最优解的变化,并以 θ 为横坐标、$z(\theta)$ 为纵坐标作图表示。

(a) $\max\ z(\theta) = (1 + \theta)x_1 + 3x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 + \theta \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(b) $\max\ z(\theta) = (2 + \theta)x_1 + (1 + 2\theta)x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} 5x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 24 + 4\theta \\ x_1 + x_2 \leq 5 + \theta \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.39 分析下述参数规划问题中使 $z(\lambda_1, \lambda_2)$ 实现最小值的 λ_1, λ_2 的变化范围。

$\min\ z(\lambda_1, \lambda_2) = x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

2.40 下述线性规划问题:

$\min\ z(\lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 - (1 + \lambda_1)x_2 + 2x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - kx_3 \leq 6 + \lambda_2 \\ x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时,求得其最优解为 $x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = -1$。

要求:

(a) **确定 k 的值;**

(b) **写出其对偶问题最优解;**

(c) 当 $\lambda_2=0$ 时,分析 $\lambda_1 \geq 0$ 时 $z(\lambda_1)$的变化;

(d) 当 $\lambda_1=0$ 时,分析 $\lambda_2 \geq 0$ 时 $z(\lambda_2)$的变化。

2.41 下述线性规划问题:

$$\max\ z = -x_1 + 18x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 15 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \leq 5 + \lambda \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

要求:

(a) 以 x_1、x_2 为基变量,列出单纯形表(当 $\lambda = 0$ 时);

(b) 若 x_1、x_2 为最优基,确定问题最优解不变时 c_3、c_4 的变化范围;

(c) 保持最优基不变时的 λ 的变化范围;

(d) 增加一个新变量,其系数为$(c_5, 2, 3)^{\mathrm{T}}$,求问题最优解不变时 c_5 的取值范围。

2.42 参数线性规划问题:

$$\max\ z(\lambda_1, \lambda_2) = (2+\lambda_1)x_1 + (3-\lambda_1)x_2 + (1+\lambda_1)x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 \qquad = 1 + \lambda_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \qquad + x_5 = 3 - \lambda_2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时,得最终单纯形表(见表 2-14)。

表 2-14

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	-1	4	-1
x_2	2	0	1	2	-1	1
$c_j - z_j$		0	0	-3	-5	-1

要求:

(a) 当 $\lambda_2 = 0$ 时,分析 $-2 \leq \lambda_1 \leq 2$ 范围内变化时 $z(\lambda_1)$的变化;

(b) 当 $\lambda_1 = 0$ 时,分析 $-1 \leq \lambda_2 \leq 3$ 范围内目标函数值的变化。

2.43 从 M_1, M_2, M_3 三种矿石中提炼 A, B 两种金属。已知每吨矿石中金属 A, B 的含量和各种矿石的每吨价格如表 2-15 所示。

表 2-15

	每吨矿石中金属含量/ g · t^{-1}		
	M_1	M_2	M_3
A	300	200	60
B	200	240	320
每吨矿石价格(元/ t)	60	48	56

如需金属 A 48 kg,金属 B 56 kg,问:

(a) 用各种矿石各多少 t,使总的费用最省?

(b) 如矿石 M_1, M_2 的单价不变, M_3 的单价降为 32 元/ t,则最优决策有何变化?

2.44 某文教用品厂用原材料白坯纸生产原稿纸、日记本和练习本三种产品。该厂现有工人 100 人,每月白坯纸供应量为 30 000 kg。已知工人的劳动生产率为: 每人每月可生产原稿纸 30 捆,或生产日记本 30 打,或练习本 30 箱。已知原材料消耗为: 每捆原稿纸用白坯纸 $3\frac{1}{3}$ kg,每打日记本用白坯纸 $13\frac{1}{3}$ kg,每箱练习本用白坯纸 $26\frac{2}{3}$ kg。又知每生产一捆原稿纸可获利 2 元,生产一打日记本获利 3 元,生产一箱练习本获利 1 元。试确定:

(a) 现有生产条件下获利最大的方案;

(b) 如白坯纸的供应数量不变,当工人数不足时可招收临时工,临时工工资支出为每人每月 40 元,则该厂要不要招收临时工,招多少临时工最合适?

2.45 某出版单位有 4 500 个空闲的印刷机时和 4 000 个空闲的装订工时,拟用于下列 4 种图书的印刷和装订。已知各种书每册所需的印刷和装订工时如表 2-16 所示。

表 2-16

工序 \ 书种	1	2	3	4
印 刷	0.1	0.3	0.8	0.4
装 订	0.2	0.1	0.1	0.3
预期利润/ [千元 · (千册)$^{-1}$]	1	1	4	3

设 x_j 为第 j 种书的出版数(单位:千册),据此建立如下线性规划模型:

$$\max\ z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 4x_4 \leq 45 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 40 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 4) \end{cases}$$

用单纯形法求解得最终单纯形表见表 2-17,试回答下列问题(各问题条件互相独立):

表 2-17

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	5	1	-1	-4	0	-3/5	4/5
x_4	10	0	1	3	1	2/5	-1/5
$c_j - z_j$		0	-1	-1	0	-3/5	-1/5

(a) 据市场调查第 4 种书最多只能销 5 000 册,当销量多于 5 000 时,超量部分每册降价 2 元,据此找出新的最优解;

(b) 经理对不出版第 2 种书提出意见,要求该种书必须出 2 000 册,求此条件下最优解;

(c) 作为替代方案,第 2 种书仍须出 2 000 册,印刷由该厂承担,装订工序交别的厂承担,但装订每册的成本比该厂高 0.5 元,求新的最优解;

(d) 出版第 2 种书的另一方案是提高售价,若第 2 种书的印刷加装订成本合计每册 6 元,则该书售价应为多高时,出版该书才有利?

第　三　章

运 输 问 题

复习思考题

1．试述运输问题数学模型的特征，为什么模型的$(m+n)$个约束中最多只有$(m+n-1)$个是独立的。

2．写出运输问题数学模型的约束条件的系数矩阵和其中变量 x_{ij} 的系数列向量 p_{ij} 的表达式。

3．试述用最小元素法确定运输问题的初始基可行解的基本思路和基本步骤。

4．为什么用伏格尔法给出的运输问题的初始基可行解，较之用最小元素法给出的更接近于最优解。

5．试述用闭回路法计算检验数的原理和经济意义，如何从任一空格出发去寻找一条闭回路。

6．概述用位势法求检验数的原理和步骤。

7．试述表上作业法计算中出现退化的涵义及处理退化的方法。

8．如何把一个产销不平衡的运输问题（含产大于销和销大于产）转化为产销平衡的运输问题。

9．一般线性规划问题应具备什么特征才可以转化并列出运输问题的数学模型，并从而用表上作业法求解。

10．判断下列说法是否正确：

(a) 运输问题是一种特殊的线性规划模型，因而求解结果也可能出现下列四种情况之一：有惟一最优解，有无穷多最优解，无界解，无可行解；

(b) 在运输问题中，只要任意给出一组含$(m+n-1)$个非零的$\{x_{ij}\}$，且满足$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i$，$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j$，就可以作为一个初始基可行解；

(c) 表上作业法实质上就是求解运输问题的单纯形法;

(d) 按最小元素法(或伏格尔法)给出的初始基可行解,从每一空格出发可以找出而且仅能找出惟一的闭回路;

(e) 如果运输问题单位运价表的某一行(或某一列)元素分别加上一个常数 k,最优调运方案将不会发生变化;

(f) 如果运输问题单位运价表的某一行(或某一列)元素分别乘上一个常数 k,最优调运方案将不会发生变化;

(g) 如果在运输问题或转运问题模型中,C_{ij} 都是从产地 i 到销地 j 的最小运输费用,则运输问题同转运问题将得到相同的最优解;

(h) 当所有产地产量和销地的销量均为整数值时,运输问题的最优解也为整数值。

练习题

3.1 判断表 3-1(a),(b),(c)中给出的调运方案能否作为表上作业法求解时的初始解,为什么?(抽象讨论运输问题不标明单位)

表 3-1 (a)

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1	20	10					30
A_2		30	20				50
A_3			10	10	50	5	75
A_4						20	20
销量	20	40	30	10	50	25	

表 3-1 (b)

产地\销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1					30		30
A_2	20	30					50
A_3		10	30	10		25	75
A_4					20		20
销量	20	40	30	10	20	25	

表　3-1（c）

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1			6	5	11
A_2	5	4		2	11
A_3		5	3		8
销量	5	9	9	7	

3.2　已知运输问题的产销地、产销量及各产销地间的单位运价如表3-2(a)，(b)**所示，试据此分别列出其数学模型。**

表　3-2(a)

产地＼销地	甲	乙	丙	产量
1	20	16	24	300
2	10	10	8	500
3	M	18	10	100
销量	200	400	300	

表　3-2（b）

产地＼销地	甲	乙	丙	产量
1	10	16	32	15
2	14	22	40	7
3	22	24	34	16
销量	12	8	20	

3.3　已知运输问题的供需关系表与单位运价表如表3-3**所示，试用表上作业法求**(a)～(d)**的最优解（表中** M **代表任意大正数）。对其中的**(b)(d)**分别用伏格尔（**Vogel)**法直接给出近似最优解。**

表　3-3(a)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	3	2	7	6	50
2	7	5	2	3	60
3	2	5	4	5	25
销量	60	40	20	15	

表 3-3 (b)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	18	14	17	12	100
2	5	8	13	15	100
3	17	7	12	9	150
销量	50	70	60	80	

表 3-3 (c)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	9	8	11	10	7	5
2	8	12	14	11	10	7
3	7	10	9	8	7	6
销量	2	2	5	4	5	

表 3-3 (d)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1	8	6	3	7	5	20
2	5	M	8	4	7	30
3	6	3	9	6	8	30
销量	25	25	20	10	20	

3.4 某一实际的运输问题可以叙述如下:有 n 个地区需要某种物资,需要量分别不少于 b_j $(j=1,\cdots,n)$。这些物资均由某公司分设在 m 个地区的工厂供应,各工厂的产量分别不大于 a_i $(i=1,\cdots,m)$,已知从 i 地区工厂至第 j 个需求地区单位物资的运价为 c_{ij},又 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,试写出其对偶问题,并解释对偶变量的经济意义。

3.5 已知某运输问题的产销平衡表,单位运价表及给出的一个调运方案分别见表 3-4 和表 3-5。判断所给出的调运方案是否为最优?如是,说明理由;如否,也说明理由。

表 3-4 产销平衡表及某一调运方案

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1		40			10		50
A_2	5	10	20		5		40
A_3	25			24		11	60
A_4				16	15		31
销量	30	50	20	40	30	11	

表 3-5　单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	2	1	3	3	2	5
A_2	3	2	2	4	3	4
A_3	3	5	4	2	4	1
A_4	4	2	2	1	2	2

3.6　某地区有三个化肥厂,除供应外地区需要外,估计每年可供应本地区的数字为:化肥厂 A——7 万 t,B——8 万 t,C——3 万 t。有四个产粮区需要该种化肥,需要量为:甲地区——6 万 t,乙地区——6 万 t,丙地区——3 万 t,丁地区——3 万 t。已知从各化肥厂到各产粮区的每 t 化肥的运价如表 3-6 所示(表中单位: 元/ t)。

表　3-6

化肥厂＼产粮区	甲	乙	丙	丁
A	5	8	7	3
B	4	9	10	7
C	8	4	2	9

试根据以上资料制订一个使总的运费为最少的化肥调拨方案。

3.7　某玩具公司分别生产三种新型玩具,每月可供量分别为 1 000 件,2 000 件,2 000 件,它们分别被送到甲、乙、丙三个百货商店销售。已知每月百货商店各类玩具预期销售量均为 1 500 件,由于经营方面原因,各商店销售不同玩具的盈利额不同(见表 3-7)。又知丙百货商店要求至少供应 C 玩具 1 000 件,而拒绝进 A 种玩具。求满足上述条件下使总盈利额为最大的供销分配方案。

表　3-7

	甲	乙	丙	可供量
A	5	4	—	1 000
B	16	8	9	2 000
C	12	10	11	2 000

3.8　已知某运输问题的产销平衡表与单位运价表如表 3-8 所示。

表　3-8

产地＼销地	A	B	C	D	E	产量
Ⅰ	10	15	20	20	40	50
Ⅱ	20	40	15	30	30	100
Ⅲ	30	35	40	55	25	150
销量	25	115	60	30	70	

(a) 求最优调拨方案;

(b) 如产地Ⅲ的产量变为 130,又 B 地区需要的 115 单位必须满足,试重新确定最优调拨方案。

3.9 已知某运输问题的产销平衡表和单位运价表如表 3-9 所示。

表 3-9

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1	2	1	3	3	3	5	50
A_2	4	2	2	4	4	4	40
A_3	3	5	4	2	4	1	60
A_4	4	2	2	1	2	2	31
销量	30	50	20	40	30	11	

(a) 求最优的运输调拨方案;

(b) 单位运价表中的 c_{12}, c_{35}, c_{41} 分别在什么范围内变化时,上面求出的最优调拨方案不变。

3.10 某一实际的运输问题可以叙述如下:有 n 个地区需要某种物资,需要量分别为 $b_j\ (j=1,\cdots,n)$。这些物资均由某公司分设在 m 个地区的工厂供应,各工厂的产量分别为 $a_i\ (i=1,\cdots,m)$,已知从 i 地区工厂至第 j 个需求地区单位物资的运价为 c_{ij},又 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,试阐述其对偶问题,并解释对偶变量的经济意义。

3.11 已知某运输问题的产销平衡表,最优调运方案及单位运价表分别如表 3-10 和表 3-11 所示。由于从产地 2 至销地 B 的道路因故暂时封闭,故需对表 3-10 中的调运方案进行修正。试用尽可能简便的方法重新找出最优调运方案。

表 3-10

产地 \ 销地	A	B	C	D	E	产量
1			4	5		9
2		4				4
3	3	1		1	3	8
销量	3	5	4	6	3	

表 3-11

产地 \ 销地	A	B	C	D	E
1	10	20	5	9	10
2	2	10	10	30	6
3	1	20	7	10	4

3.12 已知某运输问题的产销平衡表、单位运价表及给出的一个最优调运方案分别见表 3-12 和表 3-13，试确定表 3-13 中 k 的取值范围。

表 3-12

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		5		10	15
A_2	0	10	15		25
A_3	5				5
销量	5	15	15	10	

表 3-13

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	1	20	11
A_2	12	k	9	20
A_3	2	14	16	18

3.13 表 3-14 和表 3-15 分别是一个具有无穷多最优解的运输问题的产销平衡表、单位运价表。表 3-14 中给出了一个最优解，要求再找出两个不同的最优解。

表 3-14

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	14			18
A_2			24		24
A_3	2		4		6
A_4			7	5	12
销量	6	14	35	5	

表 3-15

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	8	13	14
A_2	10	10	12	14
A_3	8	9	11	13
A_4	10	7	11	12

3.14 已知某运输问题的供需关系及单位运价表如表 3-16 及表 3-17 所示。

表 3-16

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	产量
A_1				8
A_2				7
A_3				4
销量	4	8	5	

表 3-17

产地＼销地	B_1	B_2	B_3
A_1	4	2	5
A_2	3	5	3
A_3	1	3	2

要求:

(a) 用表上作业法找出最优调运方案;

(b) 分析从 A_1 到 B_1 的单位运价 c_{11} 的可能变化范围,使上面的最优调运方案保持不变;

(c) 分析使该最优方案不变时从 A_2 到 B_3 的单位运价 c_{23} 的变化范围。

3.15 给出某运输问题的产销平衡表、单位运价表及最优调运方案分别如表 3-18,表 3-19 所示。

表 3-18 产销平衡表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1	20	30					50
A_2		20	20				40
A_3	10			39		11	60
A_4				1	30		31
销量	30	50	20	40	30	11	

表 3-19 单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	2	1	3	3	3	5
A_2	4	2	2	4	4	4
A_3	3	5	4	2	4	1
A_4	4	2	2	1	2	2

试确定单位运价表中的 c_{12}, c_{35} 和 c_{41} 分别在什么范围内变动时,表 3-18 中给出的最优调运方案不变。

3.16 如表 3-20 所示的运输问题中,若产地 i 有一个单位物资未运出,则将发生储存费用。假定 1,2,3 产地单位物资储存费用分别为 5,4 和 3。又假定产地 2 的物资至少运出 38 个单位,产地 3 的物资至少运出 27 个单位,试求解此运输问题的最优解。

表 3-20

产地 \ 销地	A	B	C	产量
1	1	2	2	20
2	1	4	5	40
3	2	3	3	30
销量	30	20	20	

3.17 某化学公司有甲,乙,丙,丁四个化工厂生产某种产品,产量分别为 200,300,400,100(t),供应Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ六个地区的需要,需要量分别为 200,150,400,100,150,150(t)。由于工艺、技术等条件差别,各厂每 kg 产品成本分别为 1.2,1.4,1.1,1.5(元),又由于行情不同,各地区销售价分别为每 kg 2.0,2.4,1.8,2.2,1.6,2.0(元)。已知从各厂运往各销售地区每 kg 产品运价如表 3-21 所示。

表 3-21

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
甲	0.5	0.4	0.3	0.4	0.3	0.1
乙	0.3	0.8	0.9	0.5	0.6	0.2
丙	0.7	0.7	0.3	0.7	0.4	0.4
丁	0.6	0.4	0.2	0.6	0.5	0.8

如第Ⅲ个地区至少供应 100 t,第Ⅳ个地区的需要必须全部满足,试确定使该公司获利最大的产品调运方案。

3.18 某糖厂每月最多生产糖 270 t,先运至 A_1, A_2, A_3 三个仓库,然后再分别供应 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 五个地区需要。已知各仓库容量分别为 50,100,150(t),各地区的需要量分别为 25,105,60,30,70(t)。已知从糖厂经由各仓库然后供应各地区的运费和储存费如表 3-22 所示。

表 3-22

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	15	20	20	40
A_2	20	40	15	30	30
A_3	30	35	40	55	25

试确定一个使总费用最低的调运方案。

3.19 有甲、乙、丙三个城市,每年分别需要煤炭 320,250,350(万 t),由 A,B 两个煤矿负责供应。已知煤矿年产量 A 为 400 万 t,B 为 450 万 t,从两煤矿至各城市煤炭运价(元/ t)如表 3-23 所示。由于需求大于产量,经协商平衡,甲城市必要时可少供 0～30 万 t,乙城市需求量须全部满足,丙城市需求量不少于 270 万 t。试求将甲、乙两矿煤炭全部分配出去,满足上述条件又使总运费为最低的调运方案。

表 3-23

	甲	乙	丙
A	15	18	22
B	21	25	16

3.20 某造船厂根据合同要在当年算起的连续三年年末各提供三条规格相同的大型货轮。已知该厂今后三年的生产能力及生产成本如表 3-24 所示。

表 3-24

年度	正常生产时可完成的货轮数	加班生产时可完成的货轮数	正常生产时每条货轮成本/ 万元
第一年	2	3	500
第二年	4	2	600
第三年	1	3	550

已知加班生产情况下每条货轮成本比正常生产时高出 70 万元。又知造出的货轮如当年不交货,每条货轮每积压一年增加维护保养等损失为 40 万元。在签订合同时该厂已有两条积压未交货的货轮,该厂希望在第三年末在交完合同任务后能储存一条备用,问该厂应如何安排计划,使在满足上述要求的条件下,使总的费用支出为最少?(列出运输问题的产销平衡表和单位运价表,不具体求解)

3.21 在 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 六个地点之间有下列物资需要运输,见表 3-25。

表 3-25

货物	起运点	到达点	运量/ 车次
砖	A_1	A_3	11
砖	A_1	A_5	2
砖	A_1	A_6	6
砂子	A_2	A_1	14
砂子	A_2	A_3	3
砂子	A_2	A_6	3
炉灰	A_3	A_1	9
块石	A_3	A_4	7
块石	A_3	A_6	5
炉灰	A_4	A_1	4
卵石	A_4	A_2	8
卵石	A_4	A_5	3
木材	A_5	A_2	2
钢材	A_6	A_4	4

已知各点之间的距离,见表 3-26(单位:km)。试确定一个最优的汽车调度方案。

表 3-26

A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
2	11	9	13	15	A_1
	2	10	14	10	A_2
		4	5	9	A_3
			4	16	A_4
				6	A_5

3.22 为确保飞行的安全,飞机上的发动机每半年必须强迫更换进行大修。某维修厂估计某种型号战斗机从下一个半年算起的今后三年内每半年发动机的更换需要量分别为:100,70,80,120,150,140。更换发动机时可以换上新的,也可以用经过大修的旧的发动机。已知每台新发动机的购置费为 10 万元,而旧发动机的维修有两种方式:快修,每台 2 万元,半年交货(即本期拆下来送修的下批即可用上);慢修每台 1 万元,但需一年交货(即本期拆下来送修的需下下批才能用上)。设该厂新接受该项发动机更换维修任务,又知这种型号战斗机三年后将退役,退役后这种发动机将报废。问在今后三年的每半年内,该厂为满足维修需要各新购,送去快修和慢修的发动机数各多少,使总的维修费用为最省?(将此问题归结为运输问题,只列出产销平衡表与单位运价表,不求数值解)。

3.23 已知甲、乙两处分别有 70 和 55 t 物资外运,A,B,C 三处各需要物资 35,40,50(t)。物资可以直接运达目的地,也可以经某些点转运,已知各处之间的距离(km)如表 3-27,3-28,3-29 所示,试确定一个最优的调运方案。

表 3-27

从 \ 到	甲	乙
甲	0	12
乙	10	0

表 3-28

从 \ 到	A	B	C
甲	10	14	12
乙	15	12	18

表 3-29

从 \ 到	A	B	C
A	0	14	11
B	10	0	4
C	8	12	0

3.24 某厂在 A,B,C 三处设仓库供应①,②,…,⑧点处的各零售商,详见图 3-1。图中各边数字为沿该线路运送一单位物资所需费用(元)。已知 A,B,C 仓库内现贮存物资数分别为 200,170,160 单位,①,②,…,⑧各零售点所需物资数分别列于表 3-30 中。由于需求大于供应,规定对某零售点供应短缺一单位时的罚款见表 3-30。应如何确立各仓库对各零售点的分配量,使总的运输费和罚款之和为最小。

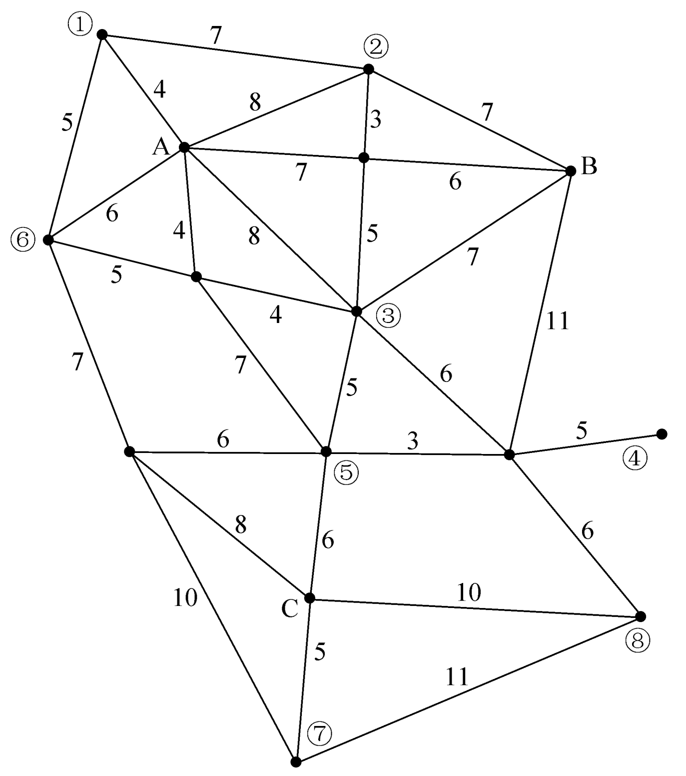


图 3-1

表 3-30

零售点	需求	罚款/元
①	75	10
②	60	8
③	35	5
④	70	10
⑤	100	10
⑥	40	8
⑦	90	5
⑧	80	8

第 四 章

目标规划

复习思考题

1. **试述目标规划的数学模型同一般线性规划数学模型的相同和异同之点。**

2. **通过实例解释下列概念:**

(a) **正负偏差变量**;(b) **绝对约束与目标约束**;(c) **优先因子与权系数。**

3. **为什么求解目标规划时要提出满意解的概念,它同最优解有什么区别。**

4. **试述求解目标规划的单纯形法与求解线性规划的单纯形法的相同及异同点。**

5. **判断下列说法是否正确:**

(a) **线性规划问题是目标规划问题的一种特殊形式**;

(b) **正偏差变量应取正值,负偏差变量应取负值**;

(c) **目标规划模型中,应同时包含系统约束(绝对约束)与目标约束**;

(d) **当目标规划问题模型中存在** $x_1 + x_2 + d^- = 4$ **的约束条件,则该约束为系统约束。**

练习题

4.1 用图解法找出下列目标规划问题的满意解:

(a) $\min z = p_1 \cdot d_1^+ + p_2 \cdot d_3^+ + p_3 \cdot d_2^+$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4 \\ x_1 - 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4 \\ x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 8 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

(b) $\min z = p_1 \cdot d_3^+ + p_2 \cdot d_2^- + p_3 \cdot (d_1^- + d_1^+)$

$$\text{st.}\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 24 \\ x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 5 \\ 5x_2 + d_3^- - d_3^+ = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

(c) $\min\ z = p_1 \cdot (d_1^- + d_1^+) + p_2 \cdot (d_2^- + d_2^+)$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 18 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2) \end{cases}$$

(d) $\min\ z = p_1 \cdot d_1^- + p_2 \cdot d_2^-$

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + d_1^- - d_1^+ = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2) \end{cases}$$

4.2 已知目标规划问题的约束条件如下:

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + d_2^- - d_2^+ = 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2) \end{cases}$$

求在下述各目标函数下的满意解:

(a) $\min\ z = p_1 \cdot (d_1^- + d_1^+ + d_2^- + d_2^+)$

(b) $\min\ z = 2p_1 \cdot (d_1^- + d_1^+) + p_2 \cdot (d_2^- + d_2^+)$

(c) $\min\ z = p_1 \cdot (d_1^- + d_1^+) + 2p_2 \cdot (d_2^- + d_2^+)$

(d) $\min\ z = p_1 \cdot (d_1^- + d_1^+) + p_2 \cdot (d_2^- + d_2^+)$

4.3 用单纯形法求下列目标规划问题的满意解:

(a) $\min\ z = p_1 \cdot d_1^- + p_2 \cdot d_2^+ + p_3 \cdot (d_3^- + d_3^+)$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + d_1^- - d_1^+ = 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 + d_3^- - d_3^+ = 20 \\ x_i \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

(b) $\min\ z = p_1 \cdot d_1^- + p_2 \cdot d_4^+ + 5p_3 \cdot d_2^- + 3p_3 \cdot d_3^- + p_4 \cdot d_1^+$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 80 \\
x_1 + d_2^- - d_2^+ = 60 \\
x_2 + d_3^- - d_3^+ = 45 \\
x_1 + x_2 + d_4^- - d_4^+ = 90 \\
x_1,\ x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4)
\end{cases}
$$

4.4 给定目标规划问题:

$$\min\ z = p_1 \cdot d_1^- + p_2 \cdot d_2^+ + p_3 \cdot d_3^-$$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
-5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + d_1^- - d_1^+ = 100 \\
-x_1 + x_2 + 3x_3 + d_2^- - d_2^+ = 20 \\
12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + d_3^- - d_3^+ = 90 \\
x_i \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3)
\end{cases}
$$

(a) **求该目标规划问题的满意解;**

(b) **若约束右端项增加** $\Delta b = (0,0,5)^T$,**问满意解如何变化?**

(c) **若目标函数变为** $\min\ z = p_1(d_1^- + d_2^+) + p_3 d_3^-$,**则满意解如何改变?**

(d) **若第二个约束右端项改为** 45,**则满意解如何变化?**

4.5 考虑下述目标规划问题:

$$\min\ z = p_1 \cdot (d_1^+ + d_2^+) + 2p_2 \cdot d_4^- + p_2 \cdot d_3^- + p_3 \cdot d_1^-$$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
x_1 + d_1^- - d_1^+ = 20 \\
x_2 + d_2^- - d_2^+ = 35 \\
-5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 220 \\
x_1 - x_2 + d_4^- - d_4^+ = 60 \\
x_1,\ x_2 \geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4)
\end{cases}
$$

(a) **求满意解;**

(b) **当第二个约束右端项由** 35 **改为** 75 **时,求解的变化;**

(c) **若增加一个新的目标约束** $-4x_1 + x_2 + d_5^- - d_5^+ = 8$ **该目标要求尽量达到目标值,并列为第一优先级考虑,求解的变化;**

(d) **若增加一个新变量** x_3,**其系数列向量为**$(0,1,1,-1)^T$,**则满意解如何变化?**

4.6 线性规划问题:

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1,\cdots,m) \\
x_j \geq 0 \quad (j = 1,\cdots,n)
\end{cases}
$$

其含义是在严格满足 m 类资源约束条件下,确定变量 $x_j\ (j=1,\cdots,n)$的取值,使目标函数值极大化。试依据上述含义,将其改写成一个目标规划的模型。

4.7 本习题集习题 1.34 要求建立某糖果厂生产计划优化的数学模型。若该糖果厂确立生产计划的目标优先级为:

p_1: 利润目标;

p_2: 甲、乙、丙三种糖果的原材料比例上应满足配方要求;

p_3: 充分利用又不超出规定的原材料供应量。

根据上述要求,对此问题建立目标规划的数学模型。

4.8 某彩色电视机组装工厂,生产 A,B,C 三种规格电视机。装配工作在同一生产线上完成,三种产品装配时的工时消耗分别为 6,8 和 10 h。生产线每月正常工作时间为 200 h;三种规格电视机销售后,每台可获利分别为 500 元,650 元和 800 元。每月销量预计为 12 台、10 台、6 台。该厂经营目标如下:

p_1: 利润指标定为每月 1.6×10^4 元;

p_2: 充分利用生产能力;

p_3: 加班时间不超过 24 h;

p_4: 产量以预计销量为标准。

为确定生产计划,试建立该问题的目标规划模型。

4.9 某市准备在下一年度预算中购置一批救护车,已知每辆救护车购置价为 20 万元。救护车用于所属的两个郊区县,各分配 x_A 和 x_B 台。A 县救护站从接到电话到救护车出动的响应时间为$(40-3x_A)$min,B 县相应的响应时间为$(50-4x_B)$min。该市确定如下优先级目标:

p_1: 用于救护车购置费用不超过 400 万元;

p_2: A 县的响应时间不超过 5 min;

p_3: B 县的响应时间不超过 5 min。

要求:

(a) 建立目标规划模型,并求出满意解;

(b) 若对优先级目标作出调整,p_2 变 p_1,p_3 变 p_2,p_1 变 p_3,重新建立模型并求出满意解。

4.10 友谊农场有 3 万亩(每亩等于 666.66 平方米)农田,欲种植玉米、大豆和小麦三种农作物。各种作物每亩需施化肥分别为 0.12、0.20、0.15 t。预计秋后玉米每亩可收获 500 kg,售价为 0.24 元/kg,大豆每亩可收获 200 kg,售价为 1.20 元/kg,小麦每亩可收获 300 kg,售价为 0.70 元/kg。农场年初规划时考虑如下几个方面:

p_1: 年终收益不低于 350 万元;

p_2: 总产量不低于 1.25 万 t;

p_3: 小麦产量以 0.5 万 t 为宜;

p_4: 大豆产量不少于 0.2 万 t;

p_5: 玉米产量不超过 0.6 万 t;

p_6: 农场现能提供 5 000 t 化肥;若不够,可在市场高价购买,但希望高价采购量愈少愈好。

试就该农场生产计划建立数学模型。

4.11 某公司下属三个小型煤矿 A_1, A_2, A_3,每天煤炭的生产量分别为 12 t,10 t,10 t,供应 B_1,B_2,B_3,B_4 四个工厂,需求量分别为 6 t,8 t,6 t,10 t。公司调运时依次考虑的目标优先级为:

p_1: A_1 产地因库存限制,应尽量全部调出;

p_2: 因煤质要求,B_4 需求最好由 A_3 供应;

p_3: 满足各销地需求;

p_4: 调运总费用尽可能小。

从煤矿至各厂调运的单位运价表见表 4-1,试建立该问题的目标规划模型。

表 4-1

煤矿 \ 工厂	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	6	5	2
A_2	2	4	4	1
A_3	4	3	6	3

4.12 东方造船厂生产用于内河运输的客货两用船。已知下年度各季的合同交货量、各季度正常及加班时间内的生产能力及相应的每条船的单位成本如表 4-2 所示。

表 4-2

季度	合同交货数	正常生产		加班生产	
		能力	每条成本/百万元	能力	每条成本/百万元
1	16	12	5.0	7	6.0
2	17	13	5.1	7	6.4
3	15	14	5.3	7	6.7
4	18	15	5.5	7	7.0

该厂确定安排生产计划的优先级目标为:

p_1: 按时完成合同交货数;

p_2: 每季度末库存数不超过 2 条(年初无库存);

p_3: 完成全年合同的总成本不超过 355 万元。

要求建立相应的目标规划的数学模型。

4.13 彩虹集团准备为他在甲、乙两市设立的分公司招聘从事三个专业的职员 170 名，具体情况见表 4-3。

表 4-3

城市	专业	招聘人数
甲	生产	20
甲	营销	30
甲	财务	40
乙	生产	25
乙	营销	20
乙	财务	35

集团将应聘经审查合格人员共 180 人按适合从事专业、本人希望从事专业及本人希望工作的城市，分成 6 个类别，具体情况见表 4-4。

表 4-4

类别	人数	适合从事的专业	本人希望从事的专业	希望工作的城市
1	30	生产、营销	生产	甲
2	30	营销、财务	营销	甲
3	30	生产、财务	生产	乙
4	30	生产、财务	财务	乙
5	30	营销、财务	财务	甲
6	30	财务	财务	乙

集团确定具体录用与分配的优先级顺序为：

p_1：集团恰好录用到应招聘而又适合从事该专业工作的职员；

p_2：80%以上录用人员从事本人希望从事的专业；

p_3：80%以上录用人员去本人希望工作的城市工作。

据此建立目标规划的数学模型。

第 五 章

整数规划

复习思考题

1．试述研究整数规划的意义，并分别举出一个纯整数规划、混合整数规划和 0-1 规划的例子。

2．有人提出，求解整数规划时可先不考虑变量的整数约束，而求解其相应的线性规划问题，然后对求解结果中为非整数的变量凑整。试问这种方法是否可行，为什么？

3．试述用分枝定界法求解问题的主要思想及主要步骤，并说明这种方法的优缺点。

4．试述用割平面法求解整数规划问题时的主要思想，又在构造割平面时如何做到从原可行域中只切去变量的非整数解。

5．除教材中列举的例子外，你认为引进 0-1 变量对建立实际问题的数学模型还有哪些作用，试举例说明。

6．什么是隐枚举法，为什么说分枝定界法也是一种隐枚举法。

7．指派问题是 0-1 型整数规划的一类特殊例子，你能否设计一个用分枝定界法来求解指派问题的程序步骤。

8．判断下列说法是否正确

(a) 整数规划解的目标函数值一般优于其相应的线性规划问题的解的目标函数值；

(b) 用分枝定界法求解一个极大化的整数规划问题时，任何一个可行解的目标函数值是该问题目标函数值的下界；

(c) 用分枝定界法求解一个极大化的整数规划问题，当得到多于一个可行解时，通常可任取其中一个作为下界值，再进行比较剪枝；

(d) 用割平面法求解整数规划时，构造的割平面有可能切去一些不属于最优解的整数解；

(e) 用割平面法求解纯整数规划时，要求包括松弛变量在内的全部变量必须取整

数值;

(f) 指派问题效率矩阵的每个元素都乘上同一常数 k,将不影响最优指派方案;

(g) 指派问题数学模型的形式同运输问题十分相似,故也可以用表上作业法求解;

(h) 求解 0-1 规划的隐枚举法是分枝定界法的特例;

(i) 分枝定界法在需要分枝时必须满足: 一是分枝后的各子问题必须容易求解;二是各子问题解的集合必须覆盖原问题的解。

练习题

5.1 下述整数规划问题:

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \text{且取整数值} \end{cases}$$

说明能否用先求解相应的线性规划问题然后凑整的办法来求得该整数规划的一个可行解。

5.2 考虑下列数学模型:

$$\min\ z = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

且满足约束条件:

① 或 $x_1 \geq 10$ 或 $x_2 \geq 10$;

② 下列各不等式至少有一个成立:

$$2x_1 + x_2 \geq 15$$
$$x_1 + x_2 \geq 15$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 15$$

③ $|x_1 - x_2| = 0$ 或 5 或 10;

④ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$。

其中

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 20 + 5x_1, & \text{如 } x_1 > 0 \\ 0, & \text{如 } x_1 = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 12 + 6x_2, & \text{如 } x_2 > 0 \\ 0, & \text{如 } x_2 = 0 \end{cases}$$

将此问题归结为混合整数规划的模型。

5.3 下列数学模型:

$$\max\ z = 3x_1 + f(x_2) + 4x_3 + g(x_4)$$

满足约束条件:

① $2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 15$;

② 下列条件之一成立:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 20$$

③ 下列条件中至少有两个成立:

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 30$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 30$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 30$$
$$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 30$$

④ $x_3 = 2$ 或 3 或 4;

⑤ $x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$。

又知

$$f(x_2) = \begin{cases} -10 + 2x_2, & \text{如 } x_2 > 0 \\ 0, & \text{如 } x_2 = 0 \end{cases}$$

$$g(x_4) = \begin{cases} -5 + 3x_4, & \text{如 } x_4 > 0 \\ 0, & \text{如 } x_4 = 0 \end{cases}$$

5.4 某科学实验卫星拟从下列仪器装置中选若干件装上。有关数据资料见表 5-1。

表 5-1

仪器装置代号	体积	重量	实验中的价值
A_1	v_1	w_1	c_1
A_2	v_2	w_2	c_2
A_3	v_3	w_3	c_3
A_4	v_4	w_4	c_4
A_5	v_5	w_5	c_5
A_6	v_6	w_6	c_6

要求:

① 装入卫星的仪器装置总体积不超过 V,总重量不超过 W;

② A_1 与 A_3 中最多安装一件;

③ A_2 与 A_4 中至少安装一件;

④ A_5 与 A_6 或者都安上,或者都不安。总的目的是装上去的仪器装置使该科学卫星发挥最大的实验价值。试建立这个问题的数学模型。

5.5 某钻井队要从以下 10 个可供选择的井位中确定 5 个钻井探油,使总的钻探费

用为最小。若 10 个井位的代号为 $s_1, s_2, \cdots, s_{10}$,相应的钻探费用为 $c_1, c_2, \cdots, c_{10}$,并且井位选择方面要满足下列限制条件:

① 或选择 s_1 和 s_7,或选择钻探 s_8;

② 选择了 s_3 或 s_4 就不能选 s_5,或反过来也一样;

③ 在 s_5, s_6, s_7, s_8 中最多只能选两个;试建立这个问题的整数规划模型。

5.6 便民超市准备在城市西北郊新建的居民小区中开设若干连锁店。为方便购物,规划任一居民小区至其中一个连锁店的距离不超过 800 m。表 5-2 给出了新建的居民小区及离该居民小区半径 800 m 内的各个小区,问该超市最少应在上述小区中建多少个连锁店及建于哪些小区内。

表 5-2

小区代号	该小区 800 m 半径内的各小区
A	A C E G H I
B	B H I
C	A C G H I
D	D J
E	A E G
F	F J K
G	A C E G
H	A B C H I
I	A B C H I
J	D F J K L
K	F J K L
L	J K L

5.7 用分枝定界法求解下列整数规划问题:

(a) $\max\ z = x_1 + x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + \dfrac{9}{14}x_2 \leq \dfrac{51}{14} \\ -2x_1 + x_2 \leq \dfrac{1}{3} \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(b) $\max\ z = 2x_1 + 3x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(c) $\max\ z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(d) $\max\ z = 3x_1 + 2x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + 0.5x_2 \leq 4.5 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

5.8 用割平面法求解下列整数规划问题:

(a) $\max\ z = 7x_1 + 9x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(b) $\min\ z = 4x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(c) $\max\ z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(d) $\max\ z = 11x_1 + 4x_2$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

5.9 用隐枚举法求解下列 0-1 规划问题:

(a) $\max\ z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 4 \\ 7x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 \leq 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 3x_5 \geq 3 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(b) $\max\ z=2x_1-x_2+5x_3-3x_4+4x_5$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+4x_5\leq 6\\ x_1-x_2+2x_3-4x_4+2x_5\leq 0\\ x_j=0\text{ 或 }1\quad(j=1,\cdots,5)\end{cases}$$

(c) $\max\ z=8x_1+2x_2-4x_3-7x_4-5x_5$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5\leq 4\\ 5x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5\leq 4\\ x_j=0\text{ 或 }1\quad(j=1,\cdots,5)\end{cases}$$

5.10 用匈牙利法求解下述指派问题,已知效率矩阵分别如下:

(a)

$$\begin{bmatrix}7&9&10&12\\13&12&16&17\\15&16&14&15\\11&12&15&16\end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix}3&8&2&10&3\\8&7&2&9&7\\6&4&2&7&5\\8&4&2&3&5\\9&10&6&9&10\end{bmatrix}$$

5.11 已知下列五名运动员各种姿势的游泳成绩(各为 50 m)如表 5-3 所示,试问如何从中选拔一个参加 200 m 混合泳的接力队,使预期比赛成绩为最好。

表 5-3 单位:s

游泳姿势	赵	钱	张	王	周
仰泳	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
蛙泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

5.12 分配甲、乙、丙、丁四个人去完成五项任务。每人完成各项任务时间如表 5-4 所示。由于任务数多于人数,故规定其中有一个人可兼完成两项任务,其余三人每人完成一项。试确定总花费时间为最少的指派方案。

表 5-4

人 \ 任务	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45

5.13 某航空公司经营 A, B, C 三个城市之间的航线, 这些航线每天班机起飞与到达时间如表 5-5 所示。

表 5-5

航班号	起飞城市	起飞时间	到达城市	到达时间
101	A	9:00	B	12:00
102	A	10:00	B	13:00
103	A	15:00	B	18:00
104	A	20:00	C	24:00
105	A	22:00	C	2:00(次日)
106	B	4:00	A	7:00
107	B	11:00	A	14:00
108	B	15:00	A	18:00
109	C	7:00	A	11:00
110	C	15:00	A	19:00
111	B	13:00	C	18:00
112	B	18:00	C	23:00
113	C	15:00	B	20:00
114	C	7:00	B	12:00

设飞机在机场停留的损失费用大致与停留时间的平方成正比, 又每架飞机从降落到下班起飞至少需 2 h 准备时间, 试决定一个使停留费用损失为最小的飞行方案。

5.14 运筹学中著名的旅行商贩(货郎担)问题可以叙述如下: 某旅行商贩从某一城市出发, 到其他 n 个城市去推销商品, 规定每个城市均须到达而且只到达一次, 然后回到原出发城市。已知城市 i 和城市 j 之间的距离为 d_{ij}, 问该商贩应选择一条什么样的路线顺序旅行, 使总的旅程为最短。试对此问题建立整数规划模型。

5.15 用你认为合适的方法求解下述问题:

$$\max \ z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{st.}\quad \begin{cases} |-x_1+10x_2-3x_3| \geq 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

5.16 设有 m 个某种物资的生产点,其中第 i 个点$(i=1,\cdots,m)$的产量为 a_i。该种物资销往 n 个需求点,其中第 j 个需求点所需量为 $b_j\ (j=1,\cdots,n)$。已知 $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$。又知从各生产点往需求点发运时,均需经过 p 个中间编组站之一转运,若启用第 k 个中间编组站,不管转运量多少,均发生固定费用 f_k,而第 k 个中间编组站转运最大容量限制为 $q_k\ (k=1,\cdots,p)$。用 c_{ik} 和 c_{kj} 分别表示从 i 到 k 和从 k 到 j 的单位物资的运输费用,试确定一个使总费用为最小的该种物资的调运方案。

5.17 有 10 种不同零件,它们都可以在设备 A,或在设备 B 或在设备 C 上加工,其单件加工费用见表 5-6。又只要有零件在上述设备上加工,不管加工 1 种或多种,分别发生的一次性准备费用为 d_A, d_B, d_C 元。若要求:

① 上述 10 种零件每种加工 1 件;

② 若第 1 种零件在设备 A 上加工,则第 2 种零件应在设备 B 或 C 上加工,反之若第 1 种零件在设备 B 或 C 上加工,则第 2 种零件应在设备 A 上加工;

③ 零件 3,4,5 必须分别在 A,B,C 三台设备上加工;

④ 在设备 C 上加工的零件种数不超过 3 种。试对此问题建立整数规划的数学模型,目标是使总的费用为最小。

表 5-6

设备 \ 零件	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}

5.18 一种产品可分别在 A,B,C,D 4 种设备的任一种上加工。已知每种设备启用时的准备结束费用,生产上述产品时的单件成本以及每种设备的最大加工能力如表 5-7 所示。如需生产该产品 2 000 件,如何使总的费用最少,试建立数学模型。

表 5-7

设备	准备结束费/元	生产成本/(元·件$^{-1}$)	最大加工能力/件
A	1 000	20	900
B	920	24	1 000
C	800	16	1 200
D	700	28	1 600

5.19 有三个不同产品要在三台机床上加工,每个产品必须首先在机床 1 上加工,然后依次在机床 2,3 上加工。在每台机床上加工三个产品的顺序应保持一样,假定用 t_{ij} 表示在第 j 机床上加工第 i 个产品的时间,问应如何安排,使三个产品总的加工周期为最短。试建立这个问题的数学模型。

5.20 某电子系统由三种元件组成,为使系统正常运转,每个元件都必须工作良好。如一个或多个元件安装几个备用件将提高系统的可靠性。已知系统运转可靠性为各元件可靠性的乘积,而每一元件的可靠性则是备用件数量的函数,具体数值见表 5-8。

表 5-8

备用件数	元件可靠性		
	1	2	3
0	0.5	0.6	
1	0.6	0.75	0.7
2	0.7	0.95	0.9
3	0.8	1.0	1.0
4	0.9	1.0	1.0
5	1.0	1.0	1.0

又三种元件分别的价格和重量如表 5-9 所示。已知全部备用件的费用预算限制为 150 元,重量限制为 20 kg,问每个元件各安装多少备用件(每个元件备用件不得超过 5 个),使系统可靠性为最大。试列出这个问题的整数规划模型。

表 5-9

元件	每件价格/元	重量/(kg·件$^{-1}$)
1	20	2
2	30	4
3	40	6

5.21 如图 5-1 所示,有 4 个用户,每年需求量分别为 D_1, D_2, D_3, D_4,拟在 3 个允许最大容量各为 A_1, A_2, A_3 的三个备选地点建立两处仓库。箭线指向为若在该处建仓库后可供应的用户,c_{ij} 为从 i 仓库至 j 用户单位物资的调运费用。设三处仓库的建设投资分别为 k_1, k_2, k_3,投资均匀分摊到 10 年回收,不计利息。单位物资在各仓库周转保管费分别为 p_1, p_2, p_3。问应选择哪两处建仓库,使每年的各项费用和为最小,要求建立数学模型。

5.22 某大学计算机实验室聘用 4 名大学生(代号 1,2,3,4)和 2 名研究生(代号 5,6)值班答疑。已知每人从周一至周五最多可安排的值班时间及每人每小时值班报酬如表

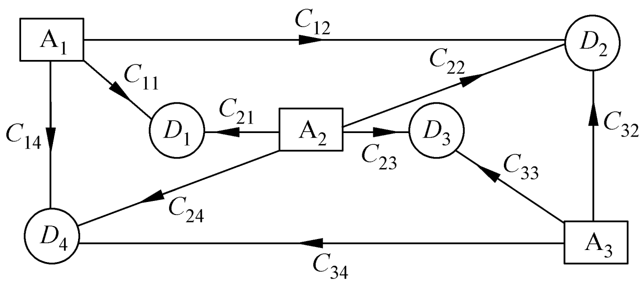


图 5-1

5-10 所示。

表 5-10

学生代号	报酬/(元·h⁻¹)	每天最多可安排的值班时间/h				
		周一	周二	周三	周四	周五
1	10.0	6	0	6	0	7
2	10.0	0	6	0	6	0
3	9.9	4	8	3	0	5
4	9.8	5	5	6	0	4
5	10.8	3	0	4	8	0
6	11.3	0	6	0	6	3

该实验室开放时间为上午 8:00 至晚上 10:00,开放时间内须有且仅须一名学生值班。又规定每名大学生每周值班不少于 8 h,研究生每周不少于 7 h。要求:

(a) 建立使该实验室总支付报酬为最小的数学模型;

(b) 在上述基础上补充下面要求,一是每名学生每周值班不超过 2 次,二是每天安排值班的学生不超过 3 人,据此重新建立数学模型。

5.23 红豆服装厂利用三种专用设备分别生产衬衣、短袖衫和休闲服,已知上述三种产品的每件用工量、用料量、销售价及可变费用如表 5-11 所示。

表 5-11

产品名称	单件用工	单件用料	销售价	可变费用
衬衣	3	4	120	60
短袖衫	2	3	80	40
休闲服	6	6	180	80

已知该厂每周可用工量为 150 单位,可用料量为 160 单位,生产衬衣、短袖衫和休闲服三种专用设备的每周固定费用分别为 2 000,1 500 和 1 000。要求为该厂设计一个周的生产计划,使其获利为最大。

5.24 某大学运筹学专业硕士生要求课程计划中必须选修两门数学类,两门运筹学

类和两门计算机类课程,课程中有些只归属某一类,如微积分归属数学类,计算机程序归属计算机类;但有些课程是跨类的,如运筹学可归为运筹学类和数学类,数据结构归属计算机类和数学类,管理统计归属数学和运筹学类,计算机模拟归属计算机类和运筹学类,预测归属运筹学类和数学类,凡归属两类的课程选学后可认为两类中各学了一门课。此外有些课程要求先学习先修课,如学计算机模拟或数据结构必须先修计算机程序,学管理统计须先修微积分,学预测必须先修管理统计。问一个硕士生最少应学几门及哪几门,才能满足上述要求。

5.25 红星塑料厂生产 6 种规格的塑料容器,每种容器的容量(cm^3)、需求量及可变费用(元/件)如表 5-12 所示。

表 5-12

容器代号	1	2	3	4	5	6
容量/cm^3	1 500	2 500	4 000	6 000	9 000	12 000
需求量	500	550	700	900	400	300
可变费用/元/件	5	8	10	12	16	18

每种容器分别用不同专用设备生产,其固定费用均为 1 200 元。当某种容器数量上不能满足需要时,可用容量大的代替。问在满足需求情况下,如何组织生产,使总的费用为最小。

5.26 长江综合商场有 5 000 m^2 面积招租,拟吸收以下 5 类商店入租。已知各类商店开设一个店铺占用的面积,在该商场内最少与最多开设的个数,以及每类商店开设不同个数时每个商店的全年预期利润(万元)如表 5-13 所示。各商店按年盈利的 20%作为租金上交商场。问该商场应招租上述各类商店各多少个,使总租金的收入为最大。

表 5-13

代号	商店类别	一个店铺面积/m^2	开设数		不同开设数时一个店铺利润/万元		
			最少	最多	1	2	3
1	珠宝	250	1	3	9	8	7
2	鞋帽	350	1	2	10	9	—
3	百货	800	1	3	27	21	20
4	书店	400	0	2	16	10	—
5	餐饮	500	1	3	17	15	12

5.27 有 8 个分别由 3 个英文字符组成的字串:① DBE; ②DEG; ③ADI; ④FFD; ⑤GHI; ⑥BCD; ⑦FDF; ⑧BAI,称每个字符在英文字母中的排列顺序数为该字符的位值,如 A 的位值为 1,D 为 4,G 为 7 等。问如何从中选取 4 个字串,使其第 1 个字符的位值和不小于第 2 个字符的位值和,并使第 3 个字符的位值和达到最大。

5.28　图 5-2 中给出了 6 个居民小区，它们的邻接关系及每个小区内的居民人数(括弧中数字)。限于各方面条件限制，目前暂时只能在其中 2 个小区开设医疗门诊所，且每个门诊所只服务相邻的两个小区(如在 A 开设门诊所，可服务于 A 和 B 或 A 和 C)。问应在哪两个小区开设门诊所，及分别为哪些小区服务，使其覆盖的居民人数为最多。

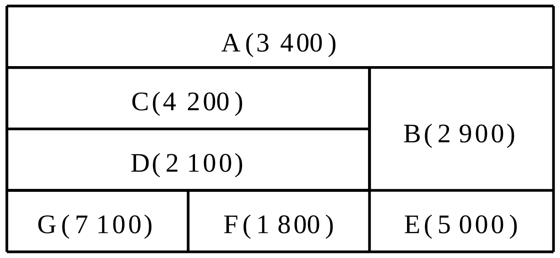


图　5-2

5.29　汉光汽车制造厂生产珠江、松花江、黄河三种牌号的汽车，已知各生产一台时的钢材、劳动力的消耗和利润值，每月可供使用的钢材及劳动小时数如表 5-14 所示。

表　5-14

项目	珠江	松花江	黄河	每月可供量
钢材/t	1.5	3.0	5.0	6 000
劳动力/h	300	250	400	600 000
预期利润/元	2 000	3 000	4 000	

已知这三种汽车生产的经济批量为月产量 1 000 台以上，即各牌号汽车月产量或大于1 000 台，或不生产。试为该厂找出一个使总利润为最大的生产计划安排。

5.30　团结乡有 8 个村镇，各村镇位置坐标及小学生人数如表 5-15 所示。

表　5-15

村镇代号	坐标位置		小学生人数
	x	y	
1	0	0	60
2	10	3	80
3	12	15	100
4	14	13	120
5	16	9	80
6	18	6	60
7	8	12	40
8	6	10	80

考虑到学校的规模效益，拟选其中两个村镇各建一所小学。问两所小学各建于何处，使小学生上学所走路程为最短(小学生所走路程按两村镇之间的欧氏距离计算)。

第　六　章

非线性规划

复习思考题

1. 试述非线性规划数学模型的一般形式及其同线性规划模型的主要区别。

2. 分别说明在什么条件下,称 X^* 为 $f(X)$ 在 R 上的:(a) 局部极小点;(b) 严格局部极小点;(c) 全局极小点;(d) 严格全局极小点。

3. 分别写出下述概念的数学表达式:(a) 函数 $f(X)$ 在 X^* 处的梯度;(b) $f(X)$ 在 X^* 处的海赛(Hesse)矩阵;(c) 二次型;(d) 正定、半正定、负定、半负定二次型的充要条件。

4. 试述凸函数、严格凸函数、凹函数和严格凹函数的定义;凸函数的性质及判断一个函数是否为凸函数的一阶及二阶条件。

5. 试述用迭代法求解无约束函数 $f(X)$ 最优值的基本思想,及下降迭代算法的具体步骤。

6. 分述一维搜索中斐波那契法及 0.618 法(黄金分割法)的主要思想、主要步骤及适用范围。

7. 简述最速下降法(梯度法)、共轭梯度法和变尺度法的基本原理、计算步骤,比较各自的优缺点。

8. 试述步长加速法的基本原理、计算步骤,它同前几种计算方法比各具有什么特点以及其适用的范围。

9. 为什么求解约束极值问题较之求解无约束的极值问题要困难得多。对具约束的极值问题,为简化其优化工作,通常可采用哪些方法?

10. 解释下列概念:(a) 不起作用约束,起作用约束;(b) 可行方向;(c) 下降方向;(d) 可行下降方向。

11. 什么是库恩-塔克条件和库恩-塔克点,为什么满足库恩-塔克条件是点 X^* 成为

最优点的必要条件。

12．写出二次规划数学模型的一般表达式，又在满足什么条件时，二次规划属凸规划。

13．如何将一个二次规划问题转化成线性规划问题，试写出转化后的线性规划问题的数学模型，并说明模型中各个符号的意义。

14．说明用可行方向法求解非线性规划问题的主要思想及具体迭代步骤。

15．试述惩罚函数和惩罚项、惩罚因子的物理概念及经济意义。如何构造惩罚函数，将一个带约束的极值问题转化为无约束的极值问题。

16．试述障碍函数、障碍项及障碍因子的概念，为什么称通过叠加障碍函数将原问题转化为无约束极值问题的方法为内点法，它同上面通过叠加惩罚函数的方法在解法思路上有何区别？

练习题

6.1 某电视机厂要制定下年度的生产计划。由于该厂生产能力和仓库大小的限制，它的月生产量不能超过 b 台，存贮量不能大于 c 台。按照合同规定，该厂于第 i 月份月底需交付商业部门的电视机台数为 d_i。现以 x_i 和 y_i 分别表示该厂第 i 个月份电视机的生产台数和存贮台数，其月生产费用和存贮费用分别是 $f_i(x_i)$ 和 $g_i(y_i)$。假定本年度结束时的存贮量为零，试确定使下年度费用(包括生产费用和存贮费用)最低的生产计划(即确定每月的生产量)。要求写出数学模型。

6.2 设有一质量 $m = 1\,000$ kg 的物体悬挂在两根钢丝绳上(见图 6-1)，已知钢丝绳的许用应力 $[\sigma] = 10\,000$ N/cm^2，弹性模量 $E = 2.0\times10^7$ N/cm^2。钢丝绳中的应力不应大于其许用应力，而且，悬挂点的垂直位移不应超过 0.5 cm。要求在满足上述条件的限制下，两根钢丝绳的重量之和最小。试写出该问题的数学模型。

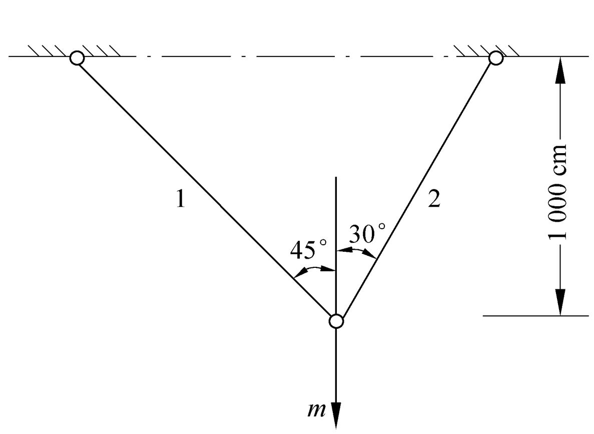


图 6-1

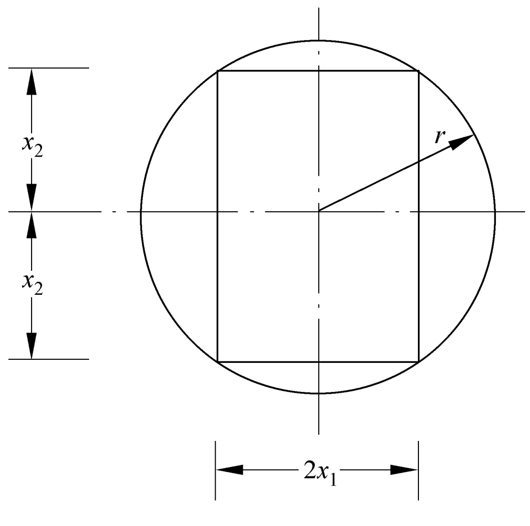


图 6-2

注:若以 L_1 和 L_2 分别表示钢丝绳 1 和钢丝绳 2 的长度,F_1 和 F_2 分别表示它们的截面积,N_1 和 N_2 分别表示它们所受的拉力,$\bar{N}_1$ 和 $\bar{N}_2$ 分别表示当 $m = 1$ kg 时它们所受的拉力,则位移条件可表示为

$$\frac{N_1 \bar{N}_1 L_1}{EF_1} + \frac{N_2 \bar{N}_2 L_2}{EF_2} \leq 0.5$$

此外,在力 $m = 10\,000$ N 的作用下,由静力平衡可知,$N_1 = 5\,180$ N,$N_2 = 7\,320$ N。

6.3 有一圆棍,其半径为 r。现欲从该圆棍上切出一矩形断面梁(断面尺寸沿梁长不变),其断面尺寸应使该梁所能承受的弯矩为最大,试写出这一问题的数学模型,并设法求出其最优解。

注:设梁的宽度为 $2x_1$,高度为 $2x_2$,在某一弯矩 M 的作用下,梁截面上的最大弯曲应力为(见图 6-2)。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} x_2 = \frac{M x_2}{\frac{1}{12}(2x_1)(2x_2)^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{x_1 x_2^2}$$

6.4 试计算以下各函数的梯度和 Hesse 矩阵:

(a) $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(b) $f(X) = \ln(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$

(c) $f(X) = 3x_1 x_2^2 + 4e^{x_1 x_2}$

(d) $f(X) = x_1^{x_2} + \ln(x_1 x_2)$

6.5 试确定以下矩阵为正定、负定、半正定、半负定或不定:

(a)

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6 已知 $f(x) = 4 - 7x + x^2$,要求:

(a) 计算该函数在 $x_0 = 2$ 点的值;

(b) 利用 $f(x)$的导数及(a)的结果求 $f(x)$在 $x = 4$ 这一点的值。

6.7 已知 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$,要求:

(a) 计算 $f(x)$在 $x_0 = 3$ 的值;

(b) 利用 $f(x)$的导数及(a)的结果求 $f(x)$在 $x=7$ 的值。

6.8 $f(X)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$,已知 $X^*=(x_1, x_2)=(2, 3)$时,$f(X)=19$,求 $f(X)$在 $X=(3,5)$点的值。

6.9 试判定以下函数的凸凹性:

(a) $f(x)=(4-x)^3, \quad x\leq 4$

(b) $f(x)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad x<0$

(d) $f(x)=x_1x_2$

6.10 求下列各函数的驻点,并判定它们是极大点、极小点或鞍点:

(a) $f(x)=x^3+x$

(b) $f(x)=x^4+x^2$

(c) $f(x)=4x^4-x^2+5$

(d) $f(x)=(3x-2)^2(2x-3)^2$

(e) $f(x)=6x^5-4x^3+10$

6.11 试求以下各函数的驻点,并判定它们是极大点、极小点或是鞍点:

(a) $f(X)=5x_1^2+12x_1x_2-16x_1x_3+10x_2^2-26x_2x_3+17x_3^2-2x_1-4x_2-6x_3$

(b) $f(X)=x_1^2-4x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2-10x_2x_3+8x_3^2$

(c) $f(X)=-x_1^2+x_1-x_2^2+x_2x_3+2x_3$

(d) $f(X)=8x_1x_2+3x_2^2$

6.12 试证明下述函数:

$f(X)=2x_1x_2x_3-4x_1x_3-2x_2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1-4x_2+4x_3$ 具有驻点(0,3,1),(0,1,-1),(1,2,0),(2,1,1),(2,3,-1),再应用充分性条件找出其极点。

6.13 判定下述非线性规划是否为凸规划:

(a) $\max\ f(X)=x_1+2x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1^2+x_2^2\leq 9\\ x_2\geq 0\end{cases}$$

(b) $\max\ f(X)=x_1^2+x_2^2-2x_1+x_1x_2+1$

$$\text{st.}\quad \begin{aligned}&g_1(X)=3x_1+5x_2-4\geq 0\\ &g_2(X)=3x_1^2+x_2^2-12x_1x_2-8x_2+10\geq 0\\ &x_1, x_2\geq 0\end{aligned}$$

6.14 用斐波那契法求函数:

$$f(x)=-3x^2+21.6x+1$$

在区间[0,25]上的极大点,要求缩短后的区间长度不大于原区间长度的 8%。

6.15　用黄金分割法重新求解题 6.14，并将计算结果同上题进行比较。

6.16　用黄金分割法求下述函数的极小值：

$$f(x) = x^4 - 15x^3 + 72x^2 - 135x, \qquad 1 \leq x \leq 15$$

要求 $|f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq 0.50$

6.17　用最速下降法(梯度法)求函数：

$$f(X) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

的极大点。给定初始点 $X^0 = (1,\ 1)^{\mathrm{T}}$

6.18　用最速下降法求下述函数的极大点，给定初始点 $X^0 = (0,0)^{\mathrm{T}}$，要求迭代 4 步。

$$f(X) = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

6.19　有一种加速梯度法收敛的算法，对于 n 元正定二次函数，经 $2n-1$ 次最速下降算法可达函数的极小点。当函数为二元时，先任选初始点 $X^{(0)}$，再用最速下降算法得点 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$，然后沿 $X^{(0)} - X^{(2)}$ 方向做最优一维搜索，即可得最优点 $X^{(3)}$。

试用这种算法求函数

$$f(X) = x_1^2 + 2x_2^2$$

的极小点，从初始点 $X^{(0)} = (5,\ 5)^{\mathrm{T}}$ 开始迭代。

6.20　试用梯度法求函数

$$f(X) = 36 - 9(x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 6)^2$$

的极大点。要求迭代两步，而且每次迭代都使目标函数值的增加值大约为上次目标函数值的 10%，取 $X^{(0)} = (7,9)^{\mathrm{T}}$ 为初始点。

注：为满足该题目中的要求，可取步长

$$\lambda_k = \frac{1}{10} \frac{|f(X^{(k)})|}{\nabla f(X^{(k)})^{\mathrm{T}} \nabla f(X^{(k)})}$$

为什么？

6.21　令 $X^{(i)}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为一组 $\boldsymbol{A}$ 共轭向量(假定为列向量)，$\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 对称正定阵，试证

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} A X^{(i)}}$$

6.22　试用共轭梯度法求二次函数：

$$f(X) = \frac{1}{2} X^{\mathrm{T}} A X$$

的极小点，其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6.23　用变尺度法重做 6.22，并将计算结果和过程同上题进行比较。

6.24　试用牛顿法求解：

$$\min f(X) = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 2)}$$

取初始点 $X^{(0)} = (4,0)^{\mathrm{T}}$**,并将采用最佳步长和采用固定步长** $\lambda = 1.0$ **时的情形做比较。**

6.25　试用变尺度法求解:

$$\min f(X) = x_1^4 + (x_2 + 1)^2$$

按以下要求进行:

(a) $X^{(0)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$**,用最佳步长;**

(b) $X^{(0)} = (1,1)^{\mathrm{T}}$**,用固定步长** $\lambda = 0.5$**,做一个循环。**

6.26　试用无约束极小化方法解联立方程组

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

先建立数学模型,再以 $X^{(0)} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ **为初始点进行迭代计算。**

6.27　用步长加速法求下述函数的极小点:

$$\min f(X) = 3x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 - 8x_2$$

取初始点为 $X^{(0)} = (1,1)^{\mathrm{T}}$**,其初始步长** $\Delta = (0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$

6.28　步长加速法也可用于求解约束问题。方法是,若探索或加速时越出了可行域,就认为这次探索或加速失败。试用这种方法求解非线性规划:

$$\begin{cases} \min f(X) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

取初始基点 $B_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$**,步长**

$$\Delta_1 = \begin{matrix} 0.2 \\ 0 \end{matrix} \qquad \Delta_2 = \begin{matrix} 0 \\ 0.2 \end{matrix}$$

6.29　分析非线性规划问题:

$$\min f(X) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

在下列各点的可行下降方向:

(a) $X^{(1)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$;

(b) $X^{(2)} = (4,0)^{\mathrm{T}}$;

(c) $X^{(3)} = (2,3)^{\mathrm{T}}$;

(d) $X^{(4)} = (0,2)^{\mathrm{T}}$;

(e) $X^{(5)} = \left(\frac{48}{13}, \frac{6}{13}\right)^T$。

6.30　试写出非线性规划:

$$\begin{cases} \max\ f(x) = (x-4)^2 \\ 1 \le x \le 6 \end{cases}$$

在点 x^* 的 Kuhn-Tucker 条件,并进行求解。

6.31　某工厂向用户提供发动机,按合同规定,其交货数量和日期是:第一季末交 40 台,第二季末交 60 台,第三季末交 80 台。工厂的最大生产能力为每季 100 台,每季的生产费用是 $f(x) = 50x + 0.2x^2$ (元),此处 x 为该季生产发动机的台数。若工厂生产的多,多余的发动机可移到下季向用户交货,这样,工厂就需支付存贮费,每台发动机每季的存贮费为 4 元。问该厂每季应生产多少台发动机,才能既满足交货合同,又使工厂所花费的费用最少(假定第一季开始时发动机无存货)。要求建立数学模型,并用 Kuhn-Tucker 条件来求解。

6.32　分别写出下述非线性规划问题的 Kuhn-Tucker 条件,并根据这些条件求解非线性规划问题:

(a) $\max\ f(X) = \ln(x_1 + x_2)$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(b) $\min\ f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$\text{st.}\quad \begin{aligned} &5 - 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ &2 - x_1 - x_3 \ge 0 \\ &x_1 - 1 \ge 0 \\ &x_2 - 2 \ge 0 \\ &x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

6.33　试用 Kuhn-Tucker 条件求解以下非线性规划:

(a)
$$\begin{aligned} &\max\ f(X) = x_1 \\ &(1 - x_1)^3 - x_2 \ge 0 \\ &x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} &\min\ f(X) = x_1 \\ &(1 - x_1)^3 - x_2 \ge 0 \\ &x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} &\min\ f(X) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ &4 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ &x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

6.34 求解二次规划：

$$\max\ f(X)=5x_1+x_2-(x_1-x_2)^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leq 2\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

6.35 给出二次规划：

$$\max\ f(X)=4x_1-x_1^2+8x_2-x_2^2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leq 2\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

(a) **用** Kuhn-Tucker **条件求最优解；**

(b) **写出等价的线性规划问题并求解。**

6.36 给出二次规划：

$$\max\ f(X)=10x_1+4x_2-x_1^2+4x_1x_2-4x_2^2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{array}{l}x_1+x_2\leq 6\\ 4x_1+x_2\leq 18\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{array}$$

(a) **写出** Kuhn-Tucker **条件并求最优解；**

(b) **写出等价的线性规划问题并求解。**

6.37 试解非线性规划：

$$\max\ f(X)=-x_1^2+x_1x_2-2x_2^2+x_1+x_2$$

$$x_1-x_2\geq 3$$

$$x_1+x_2=4$$

6.38 试用可行方向法求解非线性规划：

$$\begin{cases}\min\ f(X)=x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2+8\\ x_1+2x_2-4\leq 0\end{cases}$$

从初始点 $X^{(0)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ **出发，迭代两步。**

6.39 用可行方向法求解非线性规划，以 $X^{(0)}=(0,0.75)^{\mathrm{T}}$ **为初始点，迭代两步。**

$$\min\ f(X)=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2$$

$$x_1+5x_2\leq 5$$

$$2x_1^2-x_2\leq 0$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

6.40 试用外点法求解非线性规划：

$$\min\ f(X)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2$$

$$x_1^2-x_2=0$$

6.41 **试用外点法求解非线性规划:**

$$\max\ f(X) = 4x_1 - x_1^2 + 9x_2 - x_2^2 + 10x_3 - 2x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

6.42 **用内点法重新求解题** 6.40。

6.43 **用内点法求解非线性规划:**

$$\min\ f(X) = \frac{(x_1 + 1)^3}{3} + x_2$$

$$x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 0$$

6.44 **用内点法求解非线性规划:**

$$\min\ f(X) = x_1^2 - 6x_1 + 9 + 2x_2$$

$$x_1 \geq 3,\ x_2 \geq 3$$

6.45 **试用内点法求解非线性规划:**

$$\min\ f(X) = (x+1)^2$$

$$x \geq 0$$

要求分别采用以下方法:

(a) **障碍项采用倒数函数;**

(b) **障碍项采用对数函数。**

6.46 **试用** SUMT **法求解非线性规划:**

$$\min\ f(X) = \log x_1 - x_2$$

$$x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$$

要求对第一个约束条件使用内点法,对第二个约束条件使用外点法。

第 七 章

动态规划

复习思考题

1．举例说明什么是多阶段的决策过程及具有多阶段决策问题的特性。

2．解释下列概念:

(a) 状态;

(b) 决策;

(c) 最优策略;

(d) 状态转移方程;

(e) 指标函数和最优值函数;

(f) 边界条件。

3．建立动态规划模型时应注意哪些点,它们在模型中的作用是什么?

4．试述动态规划方法的基本思想,动态规划基本方程的结构、方程中各个符号的含义及正确写出动态规划基本方程的关键因素。

5．试述动态规划的最优化原理,以及它同动态规划基本方程之间的关系。

6．试述动态规划方法与逆推解法和顺推解法之间的联系及应注意之处。

7．对静态规划的模型(如线性规划、非线性规划、整数规划等),一般可以采用动态规划的方法求解,对此你能否评说一下各自的优缺点。

8．什么是随机动态规划问题,它具有什么特征,试举例说明。

9．什么是动态规划算法中的维数灾难,并举例说明什么情况下会出现维数灾难。

10．判断下列说法是否正确:

(a) 在动态规划模型中,问题的阶段数等于问题中的子问题的数目;

(b) 动态规划中,定义状态时应保证在各个阶段中所做决策的相互独立性;

(c) 动态规划的最优性原理保证了从某一状态开始的未来决策独立于先前已做出的

决策;

(d) 对一个动态规划问题,应用顺推或逆推解法可能会得出不同的最优解;

(e) 动态规划计算中的"维数障碍"主要是由于问题中阶段数的急剧增加而引起;

(f) 假如一个线性规划问题含有 5 个变量和 3 个约束,则用动态规划方法求解时将划分为 3 个阶段,每个阶段的状态将由一个 5 维的向量组成;

(g) 一个动态规划问题若能用网络表达时,节点代表各阶段的状态值,各条弧代表了可行的方案选择;

(h) 动态规划的基本方程是将一个多阶段的决策问题转化为一系列具有递推关系的单阶段的决策问题;

(i) 在动态规划基本方程中,凡子问题具有叠加性质的,其边界条件取值均为零;子问题为乘积型的,边界条件取值均为 1;

(j) 一个线性规划问题若转化为动态规划方法求解时,应严格按变量的下标顺序来划分阶段,如将决定 x_1 的值作为第一阶段,决定 x_2 的值作为第二阶段等。

练习题

7.1 计算如图 7-1 所示的从 A 到 E 的最短路线及其长度。

(a) 用逆推解法;

(b) 用标号法。

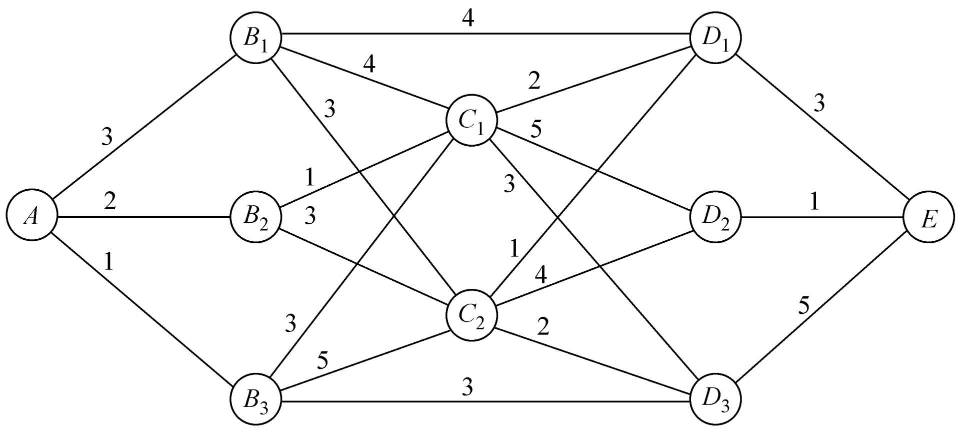


图 7-1

7.2 已知网络图各段路线所需费用如图 7-2 所示,试选择从 A 线到 B 线的最小费用路线,并计算其总的费用。图中 A 线和 B 线上的数字分别代表相应点的有关费用。

7.3 写出下面问题的动态规划的基本方程:

(a) $\max\ z = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$

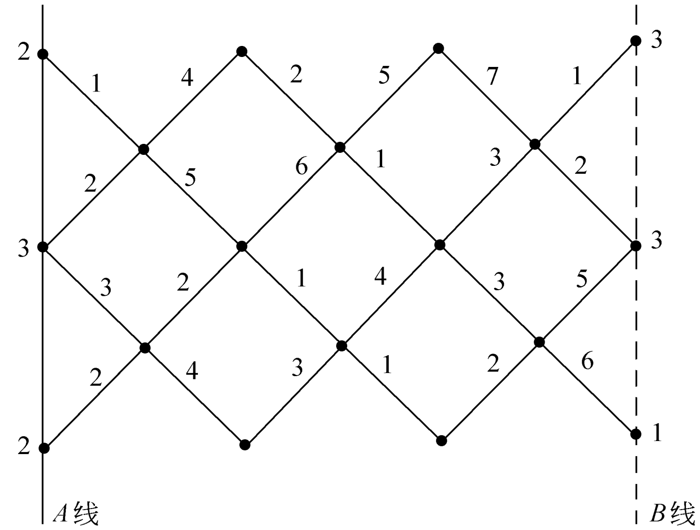


图　7-2

$$\text{st.}\ \begin{cases}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ 0 \le x_i \le c_i, \quad i = 1,2,\cdots,n\end{cases}$$

(b) $\max\ z = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)$

$$\text{st.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ 0 \le x_j \le c_j & j = 1,2,\cdots,n\end{cases}$$

7.4　用动态规划方法求解下列问题:

(a) $\max\ z = x_1^2 x_2 x_3^3$

$$\text{st.}\ \begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3\end{cases}$$

(b) $\max\ z = 5x_1 - x_1^2 + 9x_2 - 2x_2^2$

$$\text{st.}\ \begin{cases}x_1 + x_2 \le 5 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2\end{cases}$$

(c) $\min\ z = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2$

$$\text{st.}\ \begin{cases}x_1 x_2 x_3 \ge 9 \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3\end{cases}$$

(d) $\max\ z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$

$$\text{st.}\ \begin{cases}x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 - 3x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0\end{cases}$$

(e) $\max\ z = 8x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^3$

$$2x_1 + x_2 + 10x_3 = b$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3$$

$$b \text{ 为正数}$$

(f) $\max \ z = a x_1^2 + x_2 x_3 + x_2 x_4$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$\text{s.t.} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4$$

$$a \text{ 为实数}$$

7.5　利用动态规划方法证明某些不等式:

(a) **平均值不等式**

设 $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$

则有 $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$

(b) **比值不等式**

设 $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$

则有 $\min\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \dfrac{x_i}{y_i} \right\} \leq \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i} \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left\{ \dfrac{x_i}{y_i} \right\}$

7.6　某人在每年年底要决策明年的投资与积累的资金分配。设开始时,他可利用的资金数为 C,年利率为 $\alpha(\alpha > 1)$。在 i 年里若投资 y_i 所得到的效益用 $g_i(y_i) = by_i$ (b 为常数)来表示。试用逆推解法和顺推解法来建立该问题在 n 年里获得最大效益的动态规划模型。

7.7　已知某指派问题的有关数据(每人完成各项工作的时间)如表 7-1 所示,试对此问题用动态规划方法求解。要求:

(a) **列出动态规划的基本方程;**

(b) **用逆推解法求解。**

表　7-1

人 \ 工作	1	2	3	4
1	15	18	21	24
2	19	23	22	18
3	26	18	16	19
4	19	21	23	17

7.8　考虑一个有 m 个产地和 n 个销地的运输问题。设 a_i 为产地 i ($i = 1, \cdots, m$)可发运的物资数,b_j 为销地 j ($j = 1, \cdots, n$)所需要的物资数。又从产地 i 往销地 j 发运 x_{ij} 单

位物资所需的费用为 $h_{ij}(x_{ij})$,试将此问题建立动态规划的模型。

7.9 某公司去一所大学招聘一名管理专业应届毕业生。从众多应聘学生中,初选 3 名决定依次单独面试。面试规则为:当对第 1 人或第 2 人面试时,如满意(记 3 分),并决定聘用,面试不再继续;如不满意(记 1 分),决定不聘用,找下一人继续面试;如较满意(记 2 分)时,有两种选择,或决定聘用,面试不再继续,或不聘用,面试继续。但对决定不聘用者,不能同在后面面试的人比较后再回过头来聘用。故在前两名面试者都决定不聘用时,第三名面试者不论属何种情况均需聘用。根据以往经验,面试中满意的占 20%,较满意的占 50%,不满意者占 30%。要求用动态规划方法帮助该公司确定一个最优策略,使聘用到的毕业生期望的分值为最高。

7.10 某公司打算在三个不同的地区设置 4 个销售点,根据市场预测部门估计,在不同的地区设置不同数量的销售店,每月可得到的利润如表 7-2 所示。试问在各个地区应如何设置销售点,才能使每月获得的总利润最大?其值是多少?

表 7-2

利润 / 地区 \ 销售店	0	1	2	3	4
1	0	16	25	30	32
2	0	12	17	21	22
3	0	10	14	16	17

7.11 某工厂购进 100 台机器,准备生产 p_1, p_2 两种产品。若生产产品 p_1,每台机器每年可收入 45 万元,损坏率为 65%;若生产产品 p_2,每台机器每年收入为 35 万元,但损坏率只有 35%;估计三年后将有新的机器出现,旧的机器将全部淘汰。试问每年应如何安排生产,使在三年内收入最多?

7.12 设有两种资源,第一种资源有 x 单位,第二种资源有 y 单位,计划分配给 n 个部门。把第一种资源 x_i 单位,第二种资源 y_i 单位分配给部门 i 所得的利润记为 $r_i(x_i, y_i)$。如设 $x=3$, $y=3$, $n=3$,其利润 $r_i(x, y)$列于表 7-3 中。试用动态规划方法如何分配这两种资源到 i 个部门去,使总的利润最大?

表 7-3

	$r_1(x,y)$				$r_2(x,y)$				$r_3(x,y)$			
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	0	1	3	6	0	2	4	6	0	3	5	8
1	4	5	6	7	1	4	6	7	2	5	7	9
2	5	6	7	8	4	6	8	9	4	7	9	11
3	6	7	8	9	6	8	10	11	6	9	11	13

7.13 某公司有三个工厂，它们都可以考虑改造扩建。每个工厂都有若干种方案可供选择，各种方案的投资及所能取得的收益如表 7-4 所示(单位:千万元)。现公司有资金 5 千万元，问应如何分配投资使公司的总收益最大?

表 7-4 / 千万元

m_{ij} (方案)	工厂 $i=1$		工厂 $i=2$		工厂 $i=3$	
	C(投资)	R(收益)	C(投资)	R(收益)	C(投资)	R(收益)
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	—	—
4	—	—	4	12	—	—

(注:表中“—”表示无此方案)

7.14 某工厂根据国家的需要其交货任务如表 7-5 所示。表中数字为月底的交货量。该厂的生产能力为每月 400 件，该厂仓库的存货能力为 300 件，已知每 100 件货物的生产费为 10 000 元，在进行生产的月份，工厂要支出经常费 4 000 元，仓库保管费为每百件货物每月 1 000 元。假定开始时及 6 月底交货后无存货。试问应在每个月各生产多少件物品，才能既满足交货任务又使总费用最小?

表 7-5

月　份	1	2	3	4	5	6
货物量/百件	1	2	5	3	2	1

7.15 某商店在未来的 4 个月里，准备利用商店里一个仓库来专门经销某种商品，该仓库最多能装这种商品 1 000 单位。假定商店每月只能卖出它仓库现有的货。当商店决定在某个月购货时，只有在该月的下个月开始才能得到该货。据估计未来 4 个月这种商品买卖价格如表 7-6 所示。假定商店在 1 月开始经销时，仓库贮存商品有 500 单位。试问:如何制订这 4 个月的订购与销售计划，使获得利润最大?(不考虑仓库的存贮费用)

表 7-6

月份(k)	买价(c_k)	卖价(p_k)
1	10	12
2	9	9
3	11	13
4	15	17

7.16 某厂准备连续 3 个月生产 A 种产品,每月初开始生产。A 的生产成本费为 x^2,其中 x 是 A 产品当月的生产数量。仓库存货成本费是每月每单位为 1 元。估计 3 个月的需求量分别为 $d_1 = 100$, $d_2 = 110$, $d_3 = 120$。现设开始时第一个月月初存货 $s_0 = 0$,第三个月的月末存货 $s_3 = 0$。试问:每月的生产数量应是多少才使总的生产和存货费用为最小。

7.17 某鞋店出售橡胶雪靴,热销季节是从 10 月 1 日至次年 3 月 31 日,销售部门对这段时间的需求量预测如表 7-7 所示。

表 7-7

月份	10	11	12	1	2	3
需求/双	40	20	30	40	30	20

每月订货数目只有 10,20,30,40,50 几种可能性,所需费用相应地为 48,86,118,138,160 元。每月末的存货不应超过 40 双,存贮费用按月末存靴数计算,每月每双为 0.2 元。因为雪靴季节性强,且式样要变化,希望热销前后存货均为零。假定每月的需求率为常数,贮存费用按月存货量计算,订购一次的费用为 10 元。求使热销季节的总费用为最小的订货方案。

7.18 设某商店一年分上、下半年两次进货,上、下半年的需求情况是相同的,需求量 y 服从均匀分布,其概率密度函数为

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

其进货价格及销售价格在上、下半年中是不同的,分别为 $q_1 = 3$, $q_2 = 2$; $p_1 = 5$, $p_2 = 4$。年底若有剩货时,以单价 $p_3 = 1$ 处理出售,可以清理完剩货。设年初存货为 0,若不考虑存贮费及其他开支,问两次进货各应为多少,才能获得最大的期望利润?

7.19 某工厂生产三种产品,各种产品重量与利润关系如表 7-8 所示。现将此三种产品运往市场出售,运输能力总重量不超过 10 t,问如何安排运输使总利润最大?

表 7-8

种类	重量/(t·件$^{-1}$)	利润/(元·件$^{-1}$)
1	2	100
2	3	140
3	4	180

7.20 设有一辆载重卡车,现有 4 种货物均可用此车运输。已知这 4 种货物的重量、容积及价值关系如表 7-9 所示。

表　7-9

货物代号	重量/ t	容积/ m^3	价值/ 千元
1	2	2	3
2	3	2	4
3	4	2	5
4	5	3	6

若该卡车的最大载重为 15 t,最大允许装载容积为 10 m^3,在许可的条件下,每车装载每一种货物的件数不限。问应如何搭配这四种货物,才能使每车装载货物的价值最大。

7.21　设某台机床每天可用工时为 5 h,生产每单位产品 A 或 B 都需要 1 h,其成本分别为 4 元和 3 元。已知各种单位产品的售价与该产品的产量具有如下线性关系:

$$\text{产品 A} \qquad p_1 = 12 - x_1$$

$$\text{产品 B} \qquad p_2 = 13 - 2x_2$$

其中 x_1, x_2 分别为产品 A,B 的产量。问如果要求机床每天必须工作 5 h,产品 A 和 B 各应生产多少,才能使总的利润最大?

7.22　用动态规划方法求解下列问题:

(a) $\max\ z = 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 6x_4$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 \leq 11 \\ x_i \geq 0,\text{且为整数},\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

(b) $\max\ z = 3x_1(2 - x_1) + 2x_2(2 - x_2)$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0,\text{且为整数},\ i = 1,2 \end{cases}$$

(c) $\min\ z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

$$\text{st}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10 \\ x_i \geq 0,\text{且为整数},\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

7.23　为保证某一设备的正常运转,需备有三种不同的零件 E_1, E_2, E_3。若增加备用零件的数量,可提高设备正常运转的可靠性,但增加了费用,而投资额仅为 8 000 元。已知备用零件数与它的可靠性和费用的关系如表 7-10 所示。

表　7-10

备件数	增加的可靠性			设备的费用/ 千元		
	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3
$z = 1$	0.3	0.2	0.1	1	3	2
$z = 2$	0.4	0.5	0.2	2	5	3
$z = 3$	0.5	0.9	0.7	3	6	4

现要求在既不超出投资额的限制，又能尽量提高设备运转的可靠性的条件下，问各种零件的备件数量应是多少为好？

7.24 如图 7-3，P_0OP_n 是单位圆上的一扇形，中心角为 α，$P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 是圆上的一些任选点，则折线段总长为

$$2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2}$$

这儿的 θ 是 OP_{i-1} 与 OP_i 之间的夹角。如 $f_n(\alpha)$ 是 $P_0P_1\cdots P_n$ 折线的最大长度，即有

$$f_n(\alpha) = \max_{0\le\theta\le\alpha}\left[2\sin\frac{\theta}{2} + f_{n-1}(\alpha-\theta)\right]$$

要求：

(a) 用归纳法证明 $f_n(\alpha) = 2n\sin\dfrac{\alpha}{2n}$；

(b) 由此推论圆的 n 边内接多边形中，以正多边形周界为最长。

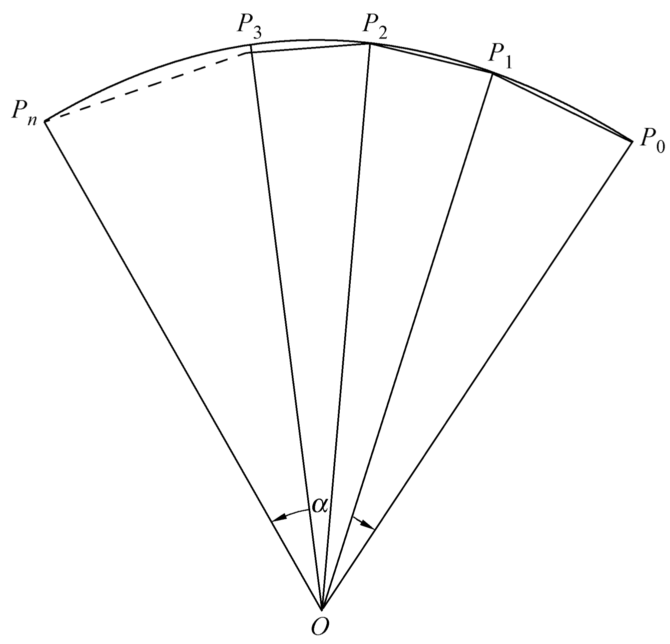


图 7-3

7.25 某警卫部门有 12 支巡逻队负责 4 个仓库的巡逻。按规定对每个仓库可分别派 2～4 支队伍巡逻。由于所派队伍数量上的差别，各仓库一年内预期发生事故的次数如表 7-11 所示。试应用动态规划的方法确定派往各仓库的巡逻队数，使预期事故的总次数为最少。

表 7-11

预期事故次数 仓库 / 巡逻队数	1	2	3	4
2	18	38	14	34
3	16	36	12	31
4	12	30	11	25

7.26 考虑一个总期限为 $N+1$ 年的设备更新问题。已知一台新设备的价值为 C 元，其 T 年末的残值为

$$S(T) = \begin{cases} N - T, & \text{当 } N \ge T \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

又对有 T 年役龄的该设备，其年创收益为

$$P(T) = \begin{cases} N^2 - T^2, & \text{当 } N \ge T \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

要求：

(a) 对此问题建立动态规划模型；

(b) 当 $N = 3$，$C = 10$ 时求数字解。

第　八　章

图与网络分析

复习思考题

1．通常用 $G=(V,E)$来表示一个图，试述符号 V，E 及这个表达式的涵义。

2．解释下列各组名词，并说明相互间的联系和区别：(a) 端点，相邻，关联边；(b) 环，多重边，简单图；(c) 链，初等链；(d) 圈，初等圈，简单圈；(e) 回路，初等路；(f) 节点的次，悬挂点，悬挂边，孤立点；(g) 连通图，连通分图，支撑子图；(h) 有向图，基础图，赋权图。

3．图论中的图同一般工程图、几何图的主要区别是什么，试举例说明。

4．试述树图、图的支撑树及最小支撑树的概念定义，以及它们在实际问题中的应用。

5．阐明 Dijkstra 算法的基本思想和基本步骤，为什么用这种算法能在图中找出从一点至任一点的最短路。

6．最大流问题是一个特殊的线性规划问题，试具体说明这个问题中的变量、目标函数和约束条件各是什么？

7．什么是增广链，为什么只有不存在关于可行流 f^* 的增广链时，f^* 即为最大流。

8．试述什么是截集、截量以及最大流最小截量定理，为什么用 Ford-Fulkerson 标号法在求得最大流的结果，同时得到一个最小截集。

9．简述最小费用最大流的概念以及求取最小费用最大流的基本思想和方法。

10．试用图的语言来表达中国邮递员问题，并说明该问题同一笔画之间的联系和区别。

11．判断下列说法是否正确：

(a) 图论中的图不仅反映了研究对象之间的关系，而且是真实图形的写照，因而对图中点与点的相对位置、点与点连线的长短曲直等都要严格注意；

(b) 在任一图 G 中，当点集 V 确定后，树图是 G 中边数最少的连通图；

(c) 如图中某点 v_i 有若干个相邻点,与其距离最远的相邻点为 v_j,则边[i, j]必不包含在最小支撑树内;

(d) 如图中从 v_1 至各点均有惟一的最短路,则连接 v_1 至其他各点的最短路在去掉重复部分后,恰好构成该图的最小支撑树;

(e) 求图的最小支撑树以及求图中一点至另一点的最短路问题,都可以归结为求解整数规划问题;

(f) 求网络最大流的问题可归结为求解一个线性规划模型。

练习题

8.1 有甲、乙、丙、丁、戊、己 6 名运动员报名参加 A, B, C, D, E, F 6 个项目的比赛。表 8-1 中打※的是各运动员报名参加的比赛项目。问 6 个项目比赛顺序如何安排,做到每名运动员不连续参加两项比赛。

表 8-1

	A	B	C	D	E	F
甲				※		※
乙	※	※		※		
丙			※		※	
丁	※				※	
戊		※			※	
己		※		※		

8.2 若图 G 中任意两点之间恰有一条边,称 G 为完全图。又若图 G 中顶点集合 V 可分为两个非空子集 V_1 和 V_2,使得同一子集中任何两个顶点都不邻接,称 G 为二部图(偶图)。试问: (a) 具有 P 个顶点的完全图有多少条边; (b) 具有 n 个顶点的偶图最多有多少条边。

8.3 证明有 n 个节点的简单图,当边数大于 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 条时,一定是连通图。

8.4 已知有 16 个城市及它们之间的道路联系(见图 8-1)。某旅行者从城市 A 出发,沿途依次经 J, N, H, K, G, B, M, I, E, P, F, C, L, D, O, C, G, N, H, K, O, D, L, P, E, I, F, B, J, A,最后到达城市 M。由于疏忽,该旅行者忘了在图上标明各城市的位置。请应用图的理论,在图 8-1 中标明

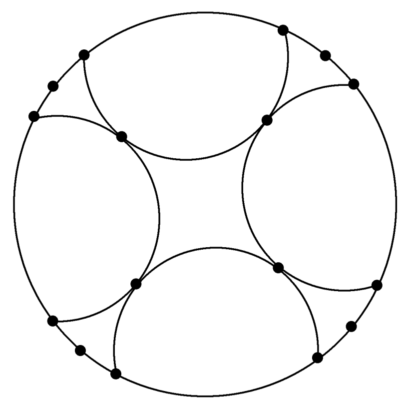


图 8-1

A～P 各城市位置。

8.5 有 4 个立方体,在各自的 6 个面上分别涂上红、白、蓝、绿 4 种颜色,如把 4 个立方体一个压一个堆起来,如何做到使堆成的 4 侧每一侧面恰好包含红、白、蓝、绿 4 种颜色。已知 4 个立方体各个面颜色如表 8-2 所示。

表 8-2

立方体	北	南	东	西	上	下
1	红	红	红	白	白	白
2	蓝	白	蓝	绿	绿	绿
3	红	白	白	绿	红	蓝
4	蓝	白	蓝	绿	蓝	绿

8.6 有 16 名运动员参加 8 个项目的游泳比赛,已知运动员号码及参加比赛项目如表 8-3 所示(表中打※者为参加项目)。为使参加多项比赛的运动员恢复体力,要求比赛顺序安排保证每个运动员不连续参加两项比赛,问如何安排才能做到这一点。

表 8-3

比赛项目 / 运动员号	100 m 自由泳	100 m 蛙 泳	200 m 自由泳	200 m 蛙泳	100 m 仰泳	100 m 蝶泳	200 m 混合接力	400 m 混合接力
1	※		※					
2	※		※					
3	※		※					
4					※			※
5					※	※		
6				※		※		※
7		※		※				
8		※		※				
9		※		※				
10	※							
11							※	※
12						※	※	
13						※		※
14			※		※		※	
15					※		※	
16		※						

8.7 10 名研究生参加 6 门课程的考试。由于选修内容不同,考试门数也不一样。表 8-4 给出了每个研究生应参加考试的课程(打※的)。

表 8-4

研究生 \ 考试课程	A	B	C	D	E	F
1	※	※		※		
2	※		※			
3	※					※
4		※			※	※
5	※		※	※		
6			※		※	
7			※		※	※
8		※		※		
9	※	※				※
10	※		※			※

规定考试在三天内结束,每天上下午各安排一门。研究生提出希望每人每天最多考一门,又课程 A 必须安排在第一天上午考,课程 F 安排在最后一门,课程 B 只能安排在下午考,试列出一张满足各方面要求的考试日程表。

8.8 分别用破圈法和避圈法求图 8-2 中各图的最小支撑树(最小部分树)。

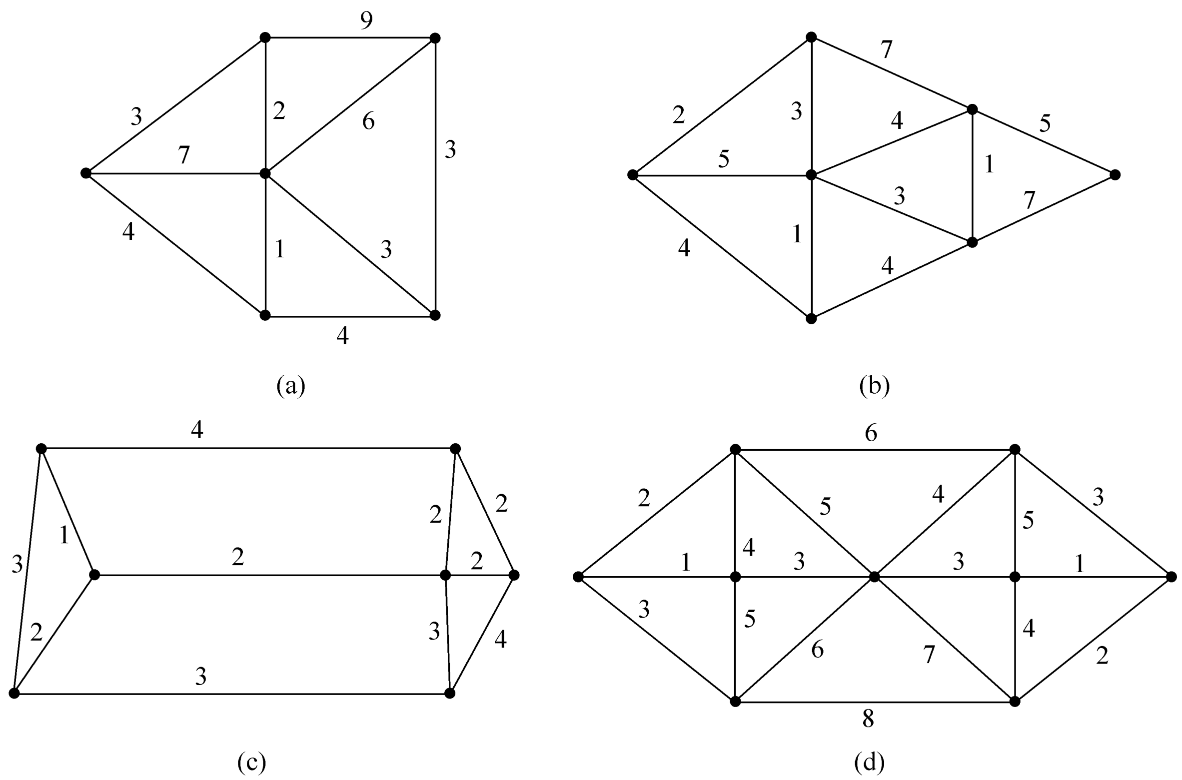


图 8-2

8.9 证明若树图 T 中点的最大次大于等于 k,则 T 中至少有 k 个悬挂点。

8.10 将在图 8-3 中求最小支撑树的问题归结为求解整数规划问题,试列出这个整

数规划的数学模型。

8.11 一个硬币正面为币值,反面为国徽图案。如将这个硬币随机掷 10 次,用树图表示所有可能出现的结果。问这个树图有多少个节点、多少条边?

8.12 证明任何有 n 个节点 n 条边的简单图中必存在圈。

8.13 有一项工程,要埋设电缆将中央控制室与 15 个控制点连通。图 8-4 中的各线段标出了允许挖电缆沟的地点和距离(单位:hm)。若电缆线 10 元/m,挖电缆沟(深 1 m,宽 0.6 m)土方 3 元/m^3,其他材料和施工费用 5 元/m,请作该项工程预算回答最少需多少元?

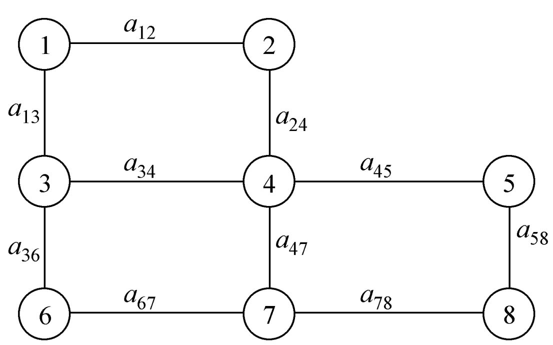


图 8-3

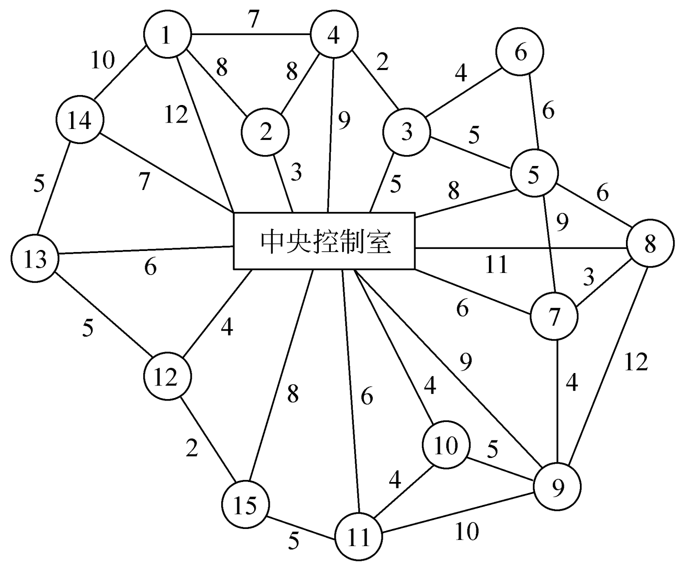
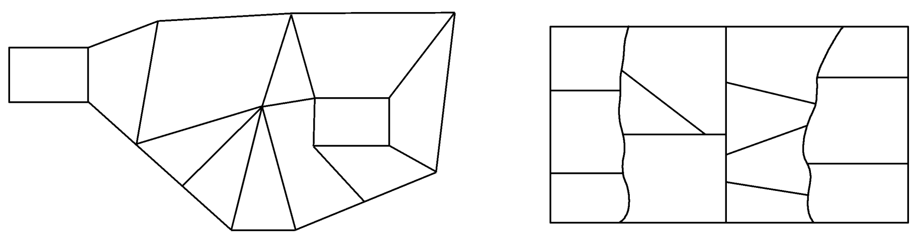


图 8-4

8.14 图 8-5 表示某两个生产队的水稻田,用堤埂分隔成很多小块。为了用水灌溉,需要挖开一些堤埂。问两个队各最少挖开多少堤埂,才能使水浇灌到每小块稻田。



(a) (b)

图 8-5

8.15 某项大型考试有 50 000 人参加,按得分高低在试卷上分别标记 A,B,C,D,E。按历年同类考试成绩,这 5 档成绩的得分比例为 10%,25%,30%,20%,15%。若用计算机按得分标记将 5 档试卷分检(计算机每次只能识别一个标记),问应按什么顺序,使分检的总工作量为最小。

8.16 已知 8 口海上油井,相互间距离如表 8-5 所示。已知 1 号井离海岸最近,为 5

mile(海里)。问从海岸经 1 号井铺设油管将各油井连接起来，应如何铺设使输油管长度为最短(为便于计量和检修，油管只准在各井位处分叉)。

表 8-5　各油井间距离　　　　单位：mile

从 \ 到	2	3	4	5	6	7	8
1	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2		0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3			2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4				0.7	1.6	1.5	0.9
5					0.9	1.1	0.8
6						0.6	1.0
7							0.5

8.17　求图 8-6 的最小树和 v_1 至各点的最短链。

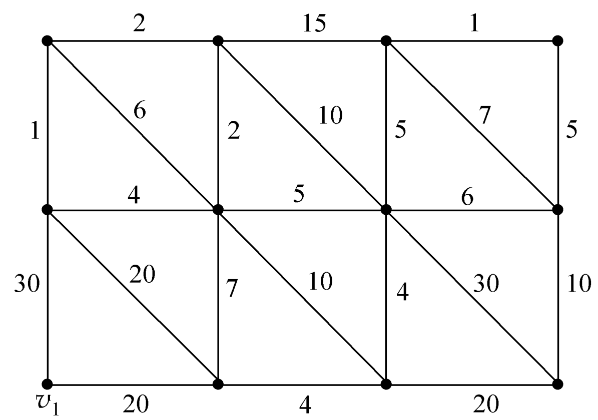


图　8-6

8.18　用标号法求图 8-7(a)，(b)中 v_1 至各点的最短距离与最短路径。

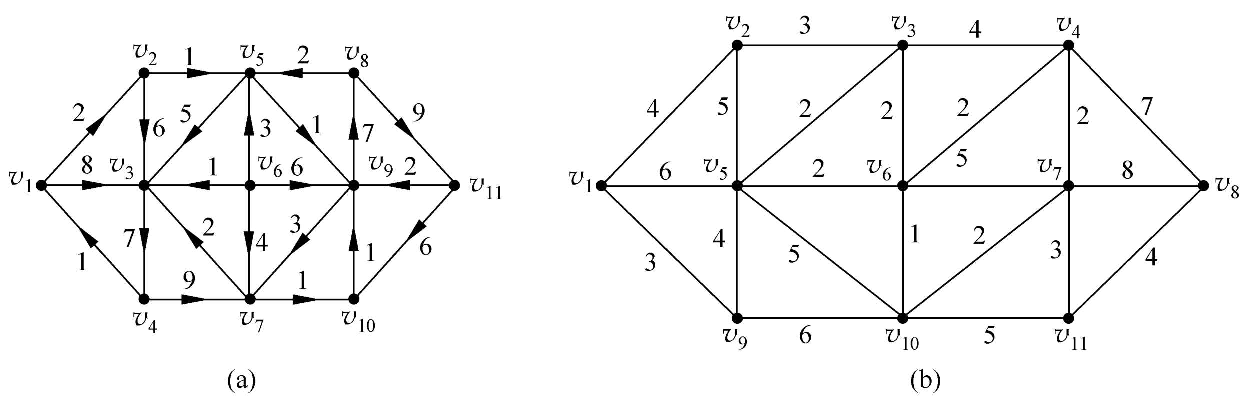


图　8-7

8.19　某公司了解到竞争对手将推出一种具有很大市场潜力的新产品。该公司正在

研制性能类似产品,并接近完成,为此公司决定加快研制进程。已知该产品投入市场前尚有 4 个阶段工作,下表(表 8-6)列出各阶段工作在正常情况、采取应急措施和特别措施时各需完成的时间(周),表 8-7 列出了各阶段相应情况下所需投入(万元)。已知研制该产品剩下最大允许投入费用(含追求部分)为 30 万元,要求:

(a) 将此问题归结为求最短路问题,画出相应网络图;

(b) 应用 Dijkstra 算法找出最佳的剩余阶段的研制开发方案。

表 8-6 / 周

措施	阶段			
	1	2	3	4
正常	5			
应急	4	3	5	2
特殊	2	2	3	1

表 8-7 / 万元

措施	阶段			
	1	2	3	4
正常	3			
应急	6	6	9	3
特殊	9	9	12	6

8.20 试将图 8-8 中求 v_1 至 v_7 点的最短路问题归结为求解整数规划问题,具体说明整数规划模型中变量、目标函数和约束条件的含义。

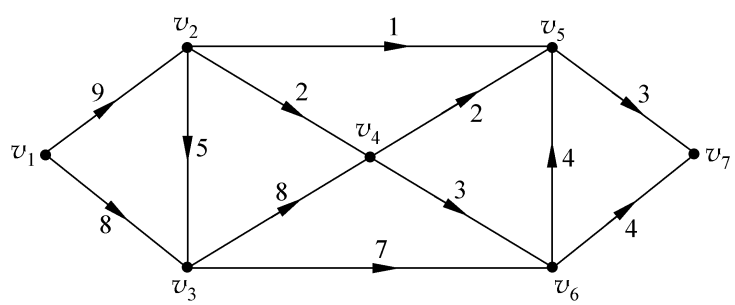


图 8-8

8.21 天源纸盒厂生产 5 种规格的包装箱,每种包装箱的容积(cm^3)、需求量及生产一个的可变费用(元/ 件)如表 8-8 所示。不同规格包装箱生产时需调整设备,其固定费用为 1 100 元。当某种包装箱不能满足需要时,可用规格大的替代。问在满足需求情况下,如何组织生产,使总的费用为最小。将此问题归结于求最短路的问题。

表 8-8

包装箱代号	1	2	3	4	5
容积/ cm^3	15 000	25 000	40 000	60 000	90 000
需求量	1 000	1 200	2 600	1 800	1 800
可变费用/ (个 · 元$^{-1}$)	3.5	4.2	5.0	6.0	6.5

8.22 见图 8-9,某人每天从住处①开车至工作地⑦上班。由于每天早上他总习惯

于处理很多事务，所以上班路上经常超速开车，这样就要受到交警的拦阻并罚款。图中各弧旁数字为该人开车上班时在各条路线上碰不到交通警察的可能性，试问该人应选择一条什么路线，使从家出发至工作地，路上碰到交警的可能性为最小。

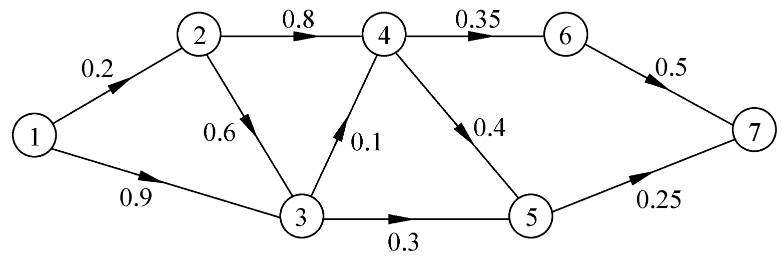


图 8-9

8.23 某台机器可连续工作 4 a(年)，也可于每年末卖掉，换一台新的。已知于各年初购置一台新机器的价格及不同役龄机器年末的处理价如表 8-9 所示。又新机器第一年运行及维修费为 0.3 万元，使用 1～3 年后机器每年的运行及维修费用分别为 0.8，1.5，2.0 万元。试确定该机器的最优更新策略，使 4 a 内用于更换、购买及运行维修的总费用为最省。

表 8-9 / 万元

j	第一年	第二年	第三年	第四年
年初购置价	2.5	2.6	2.8	3.1
使用了 j 年的机器处理价	2.0	1.6	1.3	1.1

8.24 图 8-10 中从一点沿连线走到另一点算一步，问从 A 点到 B 点至少走几步。找出步数最少的一条链。

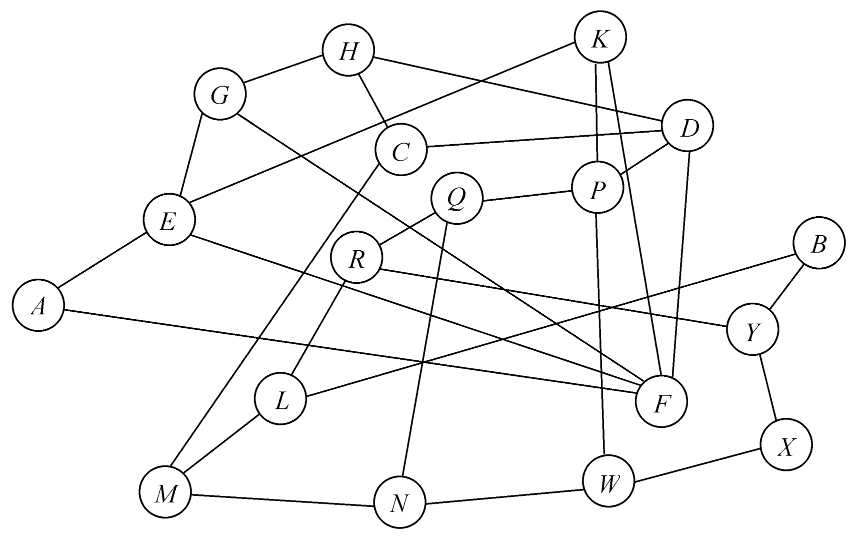


图 8-10

8.25 **某公司在六个城市 $c_1, \cdots, c_6$ 中有分公司,从 c_i 到 c_j 的直接航程票价记在下述矩阵中的(i, j)位置上。(∞表示无直接航路),请帮助该公司设计一张任意两城市间的票价最便宜的路线表。**

$$
\begin{matrix}
0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\
50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\
\infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\
40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\
25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\
10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0
\end{matrix}
$$

8.26 **已知有 6 个村子,相互间道路的距离如图 8-11 所示。拟合建一所小学,已知 A 处有小学生 50 人,B 处 40 人,C 处 60 人,D 处 20 人,E 处 70 人,F 处 90 人,问小学应建在哪一个村子,使学生上学最方便(走的总路程最短)。**

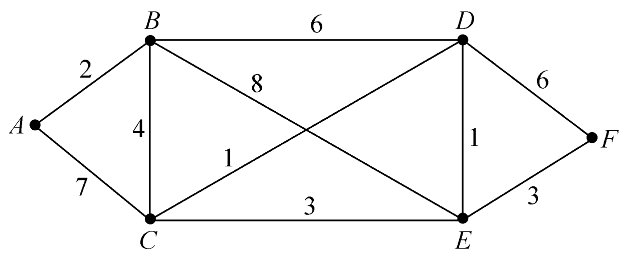


图 8-11

8.27 **已知某城市街道分布及各街区的距离(单位:百米)如图 8-12 所示。**

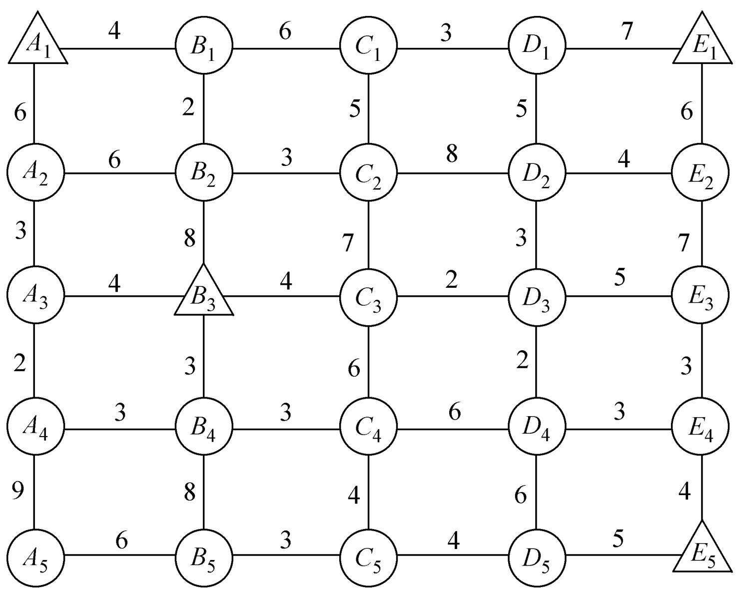


图 8-12

(a) **某食品厂(位于 C_3)每天往位于 A_1, B_3, E_1, E_5 的 4 个门市部各送一车食品。设空车由位于 C_4 的车库出发,往各点送完食品后直接回车库,试帮助确定一条汽车行驶最**

短的路线。

(b) 又如从 C_4 出发,分别去 A_1,B_3,E_1,E_5 各点拉一车货送到 C_3,最后回车库,汽车怎样行驶其路线最短。

8.28 如图 8-13,一个人从 C_3 骑自行车出发去 A_2,C_1,E_2 三处送紧急文件,然后回 C_3,试帮助设计一条最短路线。如图中数字单位为 hm,自行车速度 15 km/h,送文件时每处耽误 5 min,问从出发算起 30 min 内该人能否回到出发地点?

8.29 用标号法求图 8-14 所示的网络中从 v_s 到 v_t 的最大流量,图中弧旁数字为容量 c_{ij}。

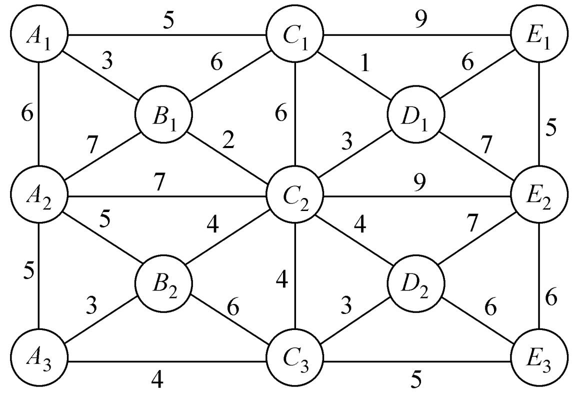


图 8-13

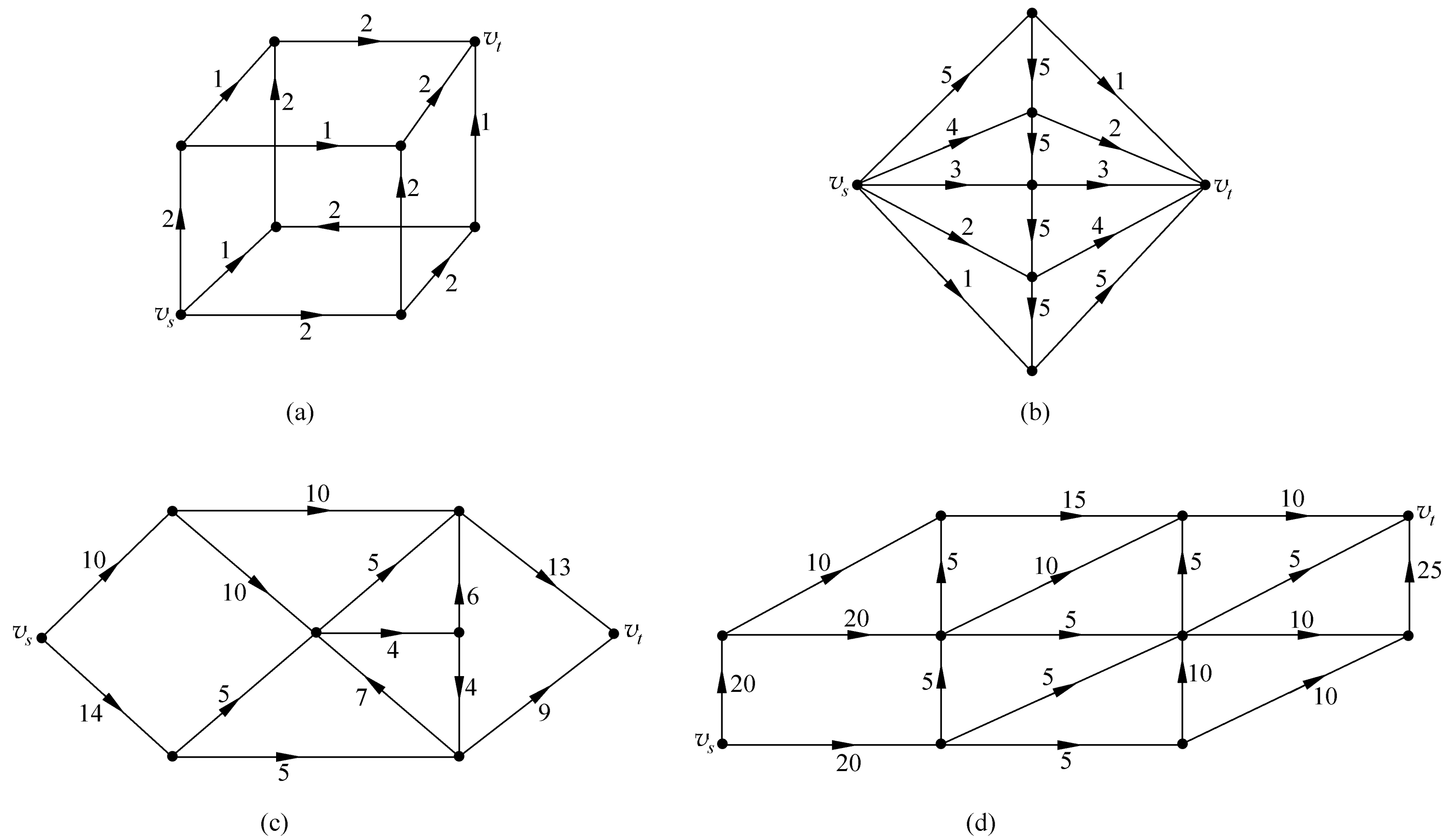


图 8-14

8.30 如图 8-15,从三口油井①②③经管道将油输至脱水处理厂⑦和⑧,中间经④⑤⑥三个泵站。已知图中弧旁数字为各管道通过的最大能力(t/h),求从油井每 h 能输送到处理厂的最大流量。

8.31 某产品从仓库运往市场销售。已知各仓库的可供量、各市场需求量及从 i 仓库至 j 市场的路径的运输能力见表 8-10 所示(表中数字 0 代表无路可通),试求从仓库可

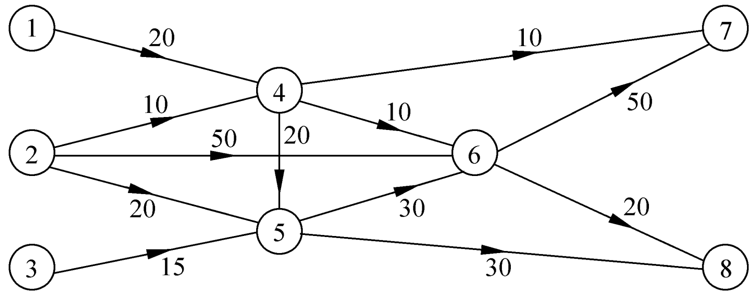


图　8-15

运往市场的最大流量,各市场需求能否满足?

表　8-10

市场 / 仓库	1	2	3	4	可供量
A	30	10	0	40	20
B	0	0	10	50	20
C	20	10	40	5	100
需求量	20	20	60	20	

8.32　图 8-16 中 A, B, C, D, E, F 分别表示陆地和岛屿,①,②,…,⑭表示桥梁及其编号。若河两岸分别为互为敌对的双方部队占领,问至少应切断几座桥梁(具体指出编号)才能达到阻止对方部队过河的目的。试用图论方法进行分析。

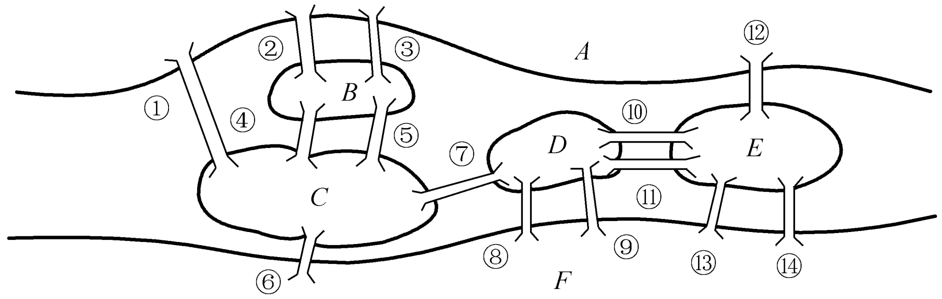


图　8-16

8.33　某单位招收懂俄、英、日、德、法文的翻译各一人,有 5 人应聘。已知乙懂俄文,甲、乙、丙、丁懂英文,甲、丙、丁懂日文,乙、戊懂德文,戊懂法文,问这 5 个人是否都能得到聘书?最多几个得到招聘,招聘后每人从事哪一方面翻译任务?

8.34　求图 8-17(a)(b)中从 v_s 至 v_t 的最小费用最大流,图中弧旁数字为(b_{ij}, c_{ij})。

8.35　表 8-11 给出某运输问题的产销平衡表与单位运价表。将此问题转化为最小费用最大流问题,画出网络图并求数值解。

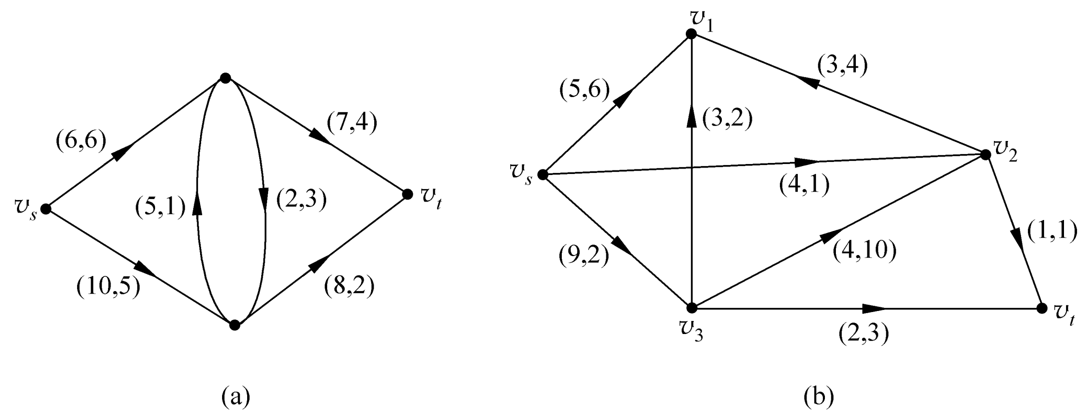


图　8-17

表　8-11

产地＼销地	1	2	3	产量
A	20	24	5	8
B	30	22	20	7
销量	4	5	6	

8.36　将本习题集题 3.19 的煤炭调运问题转化为最小费用最大流问题，画出其网络图并求数值解。

8.37　将本习题集题 3.20 的客货轮生产安排问题转化为最小费用最大流问题，画出网络图并求数值解。

8.38　一条流水线有 5 个岗位，分别完成某产品装配的 5 道工序。现分配甲、乙、丙、丁、戊 5 个工人去操作。由于每人专长不同，各个工人在不同岗位上生产效率不一样，具体数字见表 8-12（单位：件/min）。问到底怎样分配每个工人的操作岗位，使这条流水线的生产能力为最大？

表　8-12

工人＼工位	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
甲	2	3	4	1	7
乙	3	4	2	5	6
丙	2	5	3	4	1
丁	5	2	3	2	5
戊	3	7	6	2	4

8.39　将本习题集题 8.30 求最大流的问题用线性规划模型表示。

8.40　有 4 个公司来某重点高校招聘企业管理（A）、国际贸易（B）、管理信息系统

(C)、工业工程(D)、市场营销(E)专业的本科毕业生。经本人报名和两轮筛选,最后可供选择的各专业毕业生人数分别为 4,3,3,2,4 人。若公司①想招聘 A,B,C,D,E 各专业毕业生各 1 人;公司②拟招聘 4 人,其中 C,D 专业各 1 人,A,B,E 专业生可从任两个专业中各选 1 人;公司③招聘 4 人,其中 C,B,E 专业各 1 人,再从 A 或 D 专业中选 1 人;公司④招聘 3 人,其中须有 E 专业 1 人,其余 2 人可从余下 A,B,C,D 专业中任选其中两个专业各 1 人。问上述 4 个公司是否都能招聘到各自需要的专业人才,并将此问题归结为求网络最大流问题。

8.41 某工程公司在未来 1～4 月份内需完成三项工程:第一项工程工期为 1～3 月份共三个月,总计需劳动力 80 人月,第二项工程工期 4 个月,需劳动力总计 100 人月,第三项工程工期从 3 至 4 月份共两个月,总计需 120 人月的劳力。该公司每月可用劳力为 80 人,但任一项工程上投入的劳动力任一月内不准超过 60 人。问该工程公司能否按期完成上述三项工程任务,应如何安排劳力,试将此问题归结为求网络最大流问题。

8.42 如下图 8-18,要铺设一条从 A 至 E 的管道,各箭线旁数字为相应的两点间距离。

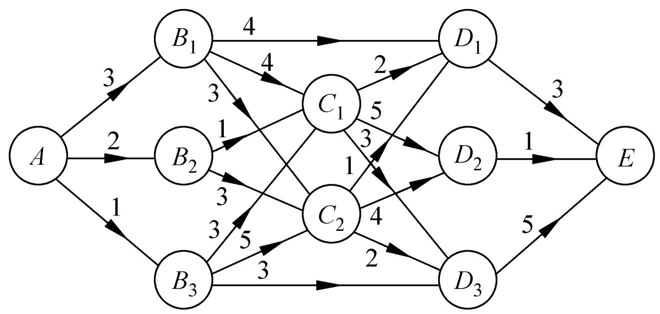


图 8-18

甲、乙、丙、丁 4 人讨论用什么样的运筹学模型方法求解。甲提出用 Dijkstra 算法求 A 至 E 的最短距离和最短路程;乙认为可用动态规划求解,但丙和丁认为从 $A—B_1—D_1—E$ 为三个阶段,而从 $A—B_2—C_2—D_2—E$ 为四个阶段,因而乙的建议不可行;丙提出这个问题可通过建立整数规划的模型求解,但甲和乙对此持怀疑态度;丁设想先找出图中最小支撑树,由树图中任意两点间存在惟一的链,故最小支撑树中从 A 至 E 的链即为从 A 至 E 铺设管道的最短路径,对此乙和丙不同意。因此除甲的方法一致同意外,对乙、丙、丁的方法设想均有争议。试发表你对乙、丙、丁所提方法的评论意见并说明同意或反对的理由。

8.43 图 8-19 中 A, B, C, D, E, F 分别代表岛和陆地,它们之间有桥相连。问一个人能否经过图中的每座桥恰好一次既无重复也无遗漏?

8.44 邮递员投递区域及街道分布如图 8-20 所示,图中数字为街道长度, 为邮局

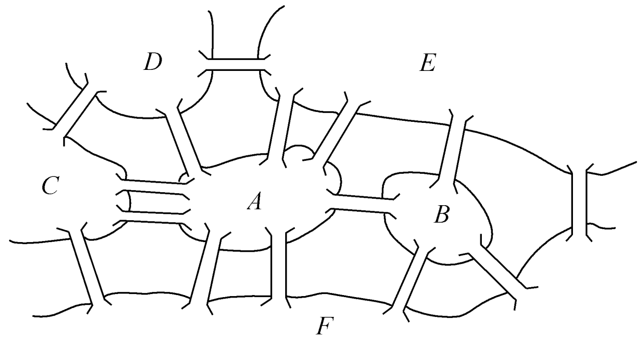


图　8-19

所在地，试分别为邮递员设计一条最佳的投递路线。

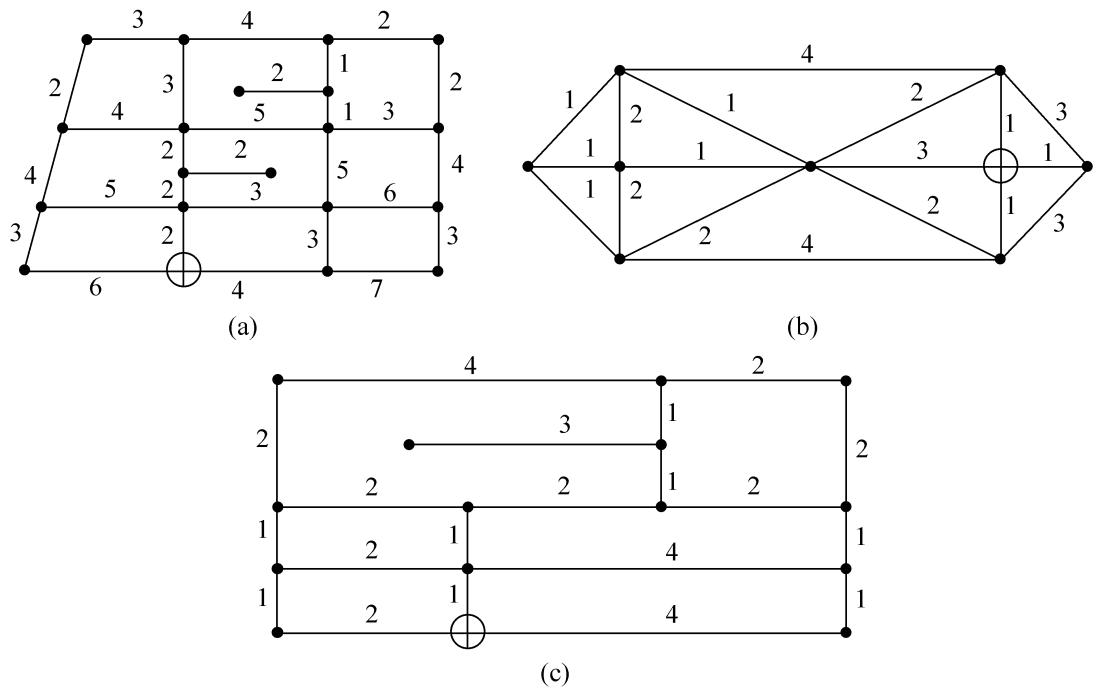


图　8-20

第　九　章

网络计划与图解评审法

复习思考题

1．解释下列概念：

(a) PERT 网络图；

(b) 关键路线；

(c) 紧前或紧后工序，虚工序；

(d) 作业时间及三点时间估计法；

(e) 事项最早时间、最迟时间，工序的最早开始、最早结束、最迟开始、最迟结束时间；

(f) 工序的总时间与单时差；

(g) 网络图的分解与综合。

2．试述编制网络计划包括的内容，网络计划的优点及适用范围。

3．简述绘制网络图应遵循的主要规则及网络图布局上应注意的事项。

4．什么是网络优化，时间优化、时间-资源优化和时间-费用优化的主要内容、步骤及相互间的关系。

5．试述图解评审法的基本原理与一般程序。

6．分述图解评审法中解析法与模拟法的计算程序。

7．判断下列说法是否正确：

(a) 网络图中任何一个结点都表示前一工序的结束和后一工序的开始；

(b) 在网络图中只能有一个始点和一个终点；

(c) 结点最早时间同最迟时间相等的点连结的线路就是关键路线；

(d) 工序的总时差越大，表明该工序在整个网络中的机动时间就越大；

(e) 总时差为零的各项工序所组成的线路就是网络图的关键路线；

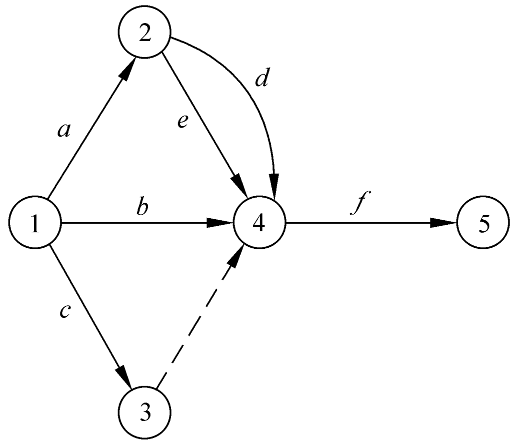
(f) 工序的最早开始时间等于该工序箭头事项最早开始时间；

(g) 直接费用变动率的值 g 越小，则每缩短单位作业时间所增加的直接费用就越小；

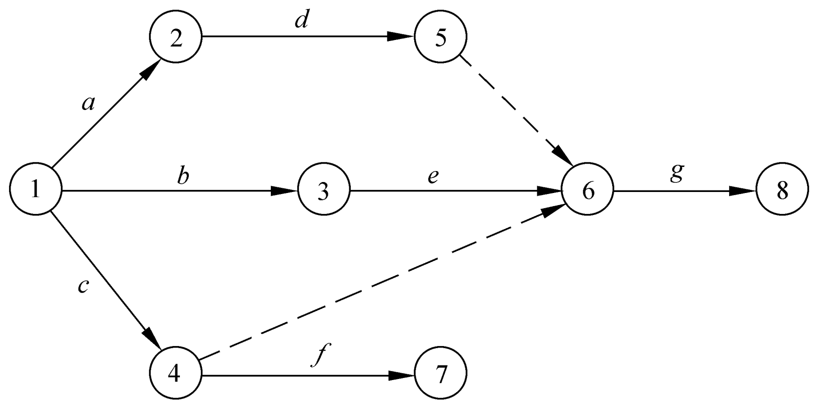
(h) 工序总时差越大,表明该工序在整个网络中的机动时间就越大。

练习题

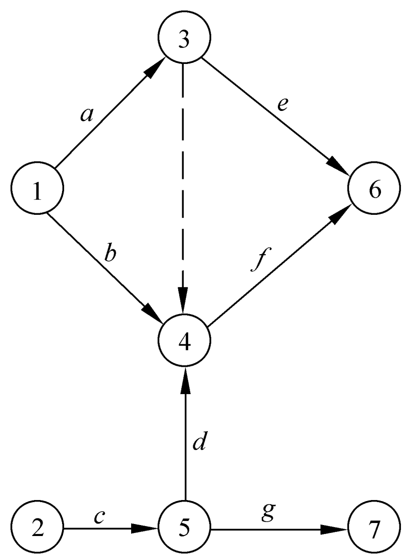
9.1 指出图 9-1(a) (b) (c) (d)**所示网络图的错误,若能够改正,试予以改正。**



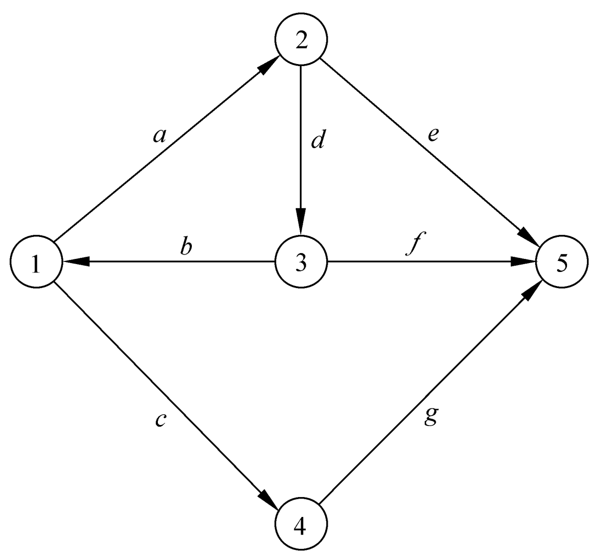
(a)



(b)



(c)



(d)

图 9-1

9.2　根据表 9-1,表 9-2,表 9-3,表 9-4 所示的作业明细表,绘制网络图。

表　9-1

工序	紧前工序
a	—
b	—
c	—
d	a
e	c
f	d
g	f, b, e

表　9-2

工序	紧前工序
a	—
b	—
c	a, b
d	a, b
e	b
f	c
g	c
h	d, e, f

表　9-3

工序	紧前工序
a_1	—
a_2	a_1
a_3	a_2
b_1	a_1
b_2	b_1, a_2
b_3	b_2, a_3
c_1	—
c_2	c_1
c_3	c_2
d_1	b_1, c_1
d_2	b_2, c_2, d_1
d_3	b_3, c_3, d_2

表　9-4

工序	紧前工序
a	—
b	—
c	—
d	a, b
e	b
f	b
g	f, c
h	b
i	h, e
j	h, e
k	d, j, c, f
l	k
m	l, i, g

9.3　根据表 9-5,表 9-6 所示作业明细表绘制网络图。

表　9-5

工序	紧前工序	紧后工序
a	—	d
b	—	d, e
c	—	f
d	a, b	f
e	b	f
f	c, d, e	—

表 9-6

工序	紧前工序	紧后工序
a	—	b, c
b	a	d, e
c	a	e
d	b	f, g
e	b, c	f, g
f	d, e	—
g	d, e	—

9.4 已知图 9-2 网络图,计算各结点的最早时间与最迟时间,各工序的最早开工、最早完工、最迟开工及最迟完工时间。

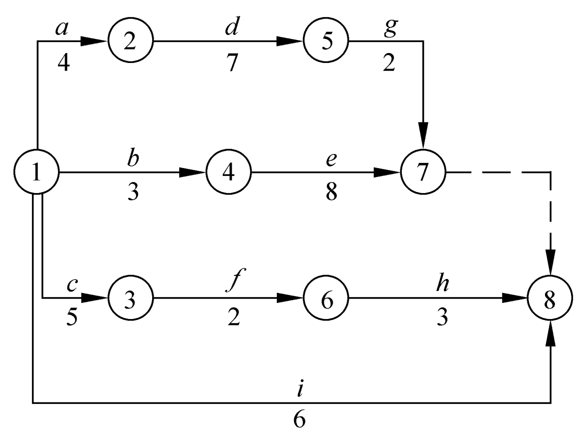


图 9-2

9.5 已知表 9-7 所列资料:

表 9-7

工序	紧前工序	工序时间/d	工序	紧前工序	工序时间/d	工序	紧前工序	工序时间/d
a	g, m	3	e	c	5	i	a, l	2
b	h	4	f	a, e	5	k	f, i	1
c	—	7	g	b, c	2	l	b, c	7
d	l	3	h	—	5	m	c	3

要求:

(a) **绘制网络图;**

(b) **计算各工序的最早开工、最早完工、最迟开工、最迟完工时间及总时差,并指出关键工序;**

(c) 若要求工程完工时间缩短 2 d(天),缩短哪些工序时间为宜。

9.6 已知表 9-8 所列资料:

表 9-8

工序	紧前工序	工序时间/ d	工序	紧前工序	工序时间/ d	工序	紧前工序	工序时间/ d
a	—	60	*g*	*b*, *c*	7	*m*	*j*, *k*	5
b	*a*	14	*h*	*e*, *f*	12	*n*	*i*, *l*	15
c	*a*	20	*i*	*f*	60	*o*	*n*	2
d	*a*	30	*j*	*d*, *g*	10	*p*	*m*	7
e	*a*	21	*k*	*h*	25	*q*	*o*, *p*	5
f	*a*	10	*l*	*j*, *k*	10			

要求:

(a) 绘制网络图,计算各结点时间,确定关键路线;

(b) 若在工序 *n* 完成后,需要增加一道工序 *t*(工序时间为 3 d,工序 *t* 完成后接工序 *o*),而工序 *t* 只能在第 180 d 开工。试绘制网络图,计算各结点时间,确定关键路线。

9.7 已知表 9-9 所列资料:

表 9-9

工序	紧前工序	工序时间/ d	工序	紧前工序	工序时间/ d
a	—	3	*f*	*c*	8
b	*a*	4	*g*	*c*	4
c	*a*	5	*h*	*d*, *e*	2
d	*b*, *c*	7	*i*	*g*	3
e	*b*, *c*	7	*j*	*j*, *h*, *i*	2

要求:

(a) 绘制网络图;

(b) 计算各结点的最早时间与最迟时间;

(c) 计算各工序的最早开工、最早完工、最迟开工及最迟完工时间;

(d) 计算各工序的总时差;

(e) 确定关键路线。

9.8 已知图 9-3、图 9-4 网络图,计算各结点的最早时间与最迟时间,各工序的最早

开始、最早结束、最迟开始及最迟结束时间,计算各工序的总时差,找出关键路线。

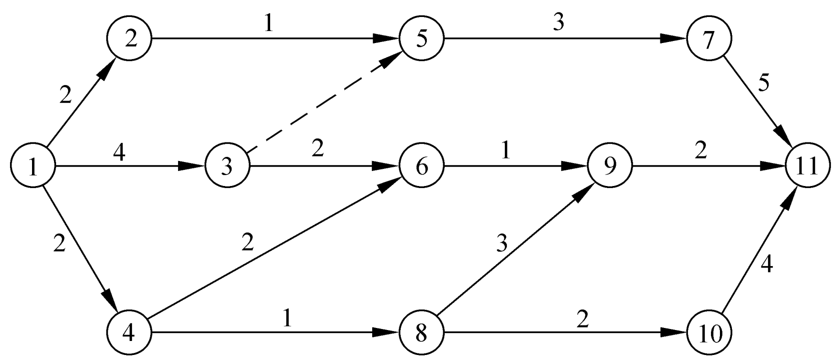


图 9-3

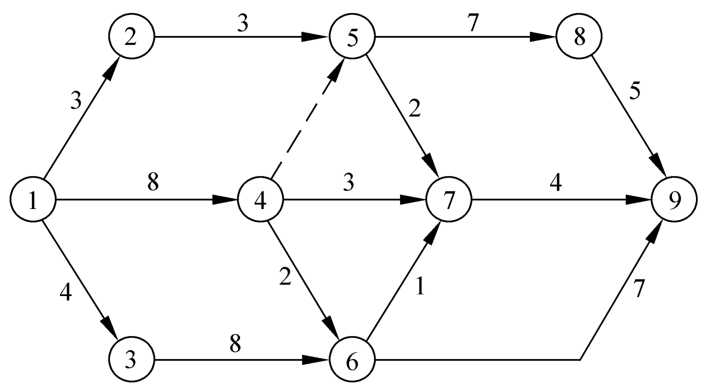


图 9-4

9.9 **已知图** 9-5 **网络图,计算各结点的最早时间与最迟时间。图中各工序下面数字为** a-m-b。

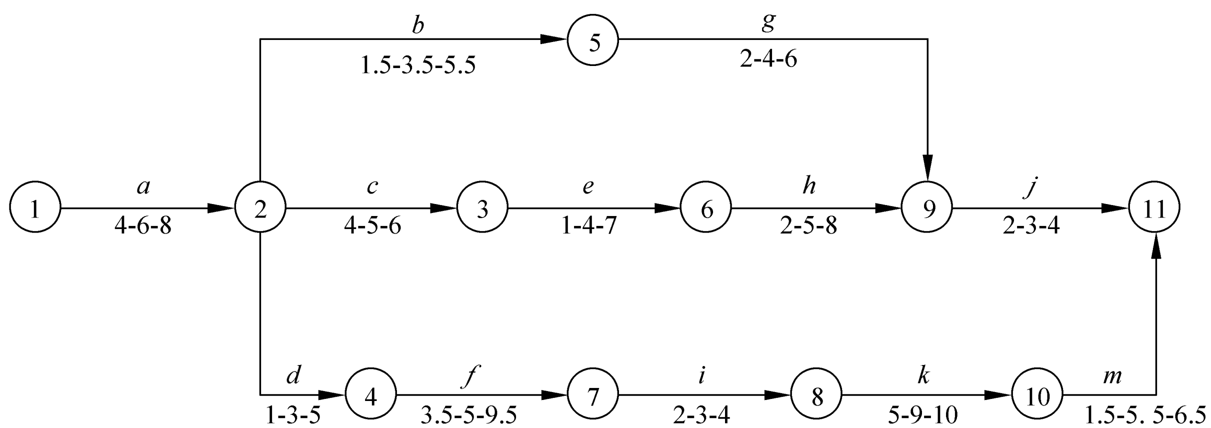


图 9-5

9.10 **已知图** 9-6 **网络图,计算各结点的最早时间与最迟时间,各工序的最早开工、最早完工、最迟开工及最迟完工时间。图中工序下面数字为** a-m-b。

9.11 **已知建设一个汽车库及引道的作业明细表如表** 9-10 **所示。**

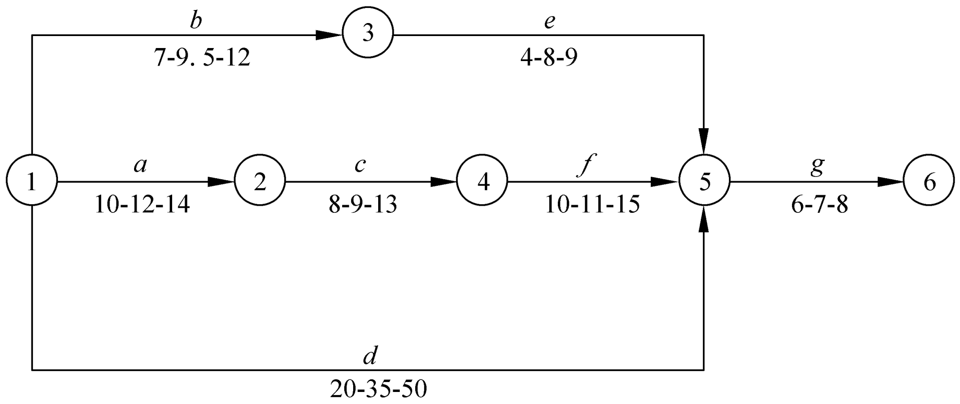


图 9-6

要求:

(a) 该项工程从施工开始到全部结束的最短周期;

(b) 若工序 l 拖期 10 d,对整个工程进度有何影响;

(c) 若工序 j 的工序时间由 12 d 缩短到 8 d,对整个工程进度有何影响;

(d) 为保证整个工程进度在最短周期内完成,工序 i 最迟必须在哪一天开工;

表 9-10

工序代号	工序名称	工序时间/ d	紧前工序
a	清理场地,准备施工	10	—
b	备料	8	—
c	车库地面施工	6	a, b
d	预制墙及房顶的桁架	16	b
e	车库混凝土地面保养	24	c
f	立墙架	4	d, e
g	立房顶桁架	4	f
h	装窗及边墙	10	f
i	装门	4	f
j	装天花板	12	g
k	油漆	16	h, i, j
l	引道混凝土施工	8	c
m	引道混凝土保养	24	l
n	清理场地,交工验收	4	k, m

(e) 若要求整个工程在 75 d 完工,要不要采取措施?应从哪些方面采取措施?

9.12 已知某计划项目的资料如表 9-11 所示:

表 9-11

工序	紧前工序	需要时间/d		
		最乐观的 a	最可能的 m	最悲观的 b
a	—	7	7	7
b	—	6	7	9
c	—	8	10	15
d	b, c	9	10	12
e	a	6	7	8
f	d, e	15	20	27
g	d, e	18	20	24
h	c	4	5	7
i	g, f	4	5	7
j	i, h	7	10	30

要求:

(a) **计算完成这一计划项目需要的天数;**

(b) **画出网络图并按平均工序时间计算有关时间,找出关键路线;**

(c) **该计划项目在** 60 d **内完成的概率是多少。**

9.13 已知某项工程的网络图如图 9-7 **所示,设该项工程开工时间为零,合同规定该项工程的完工时间为** 25 d。

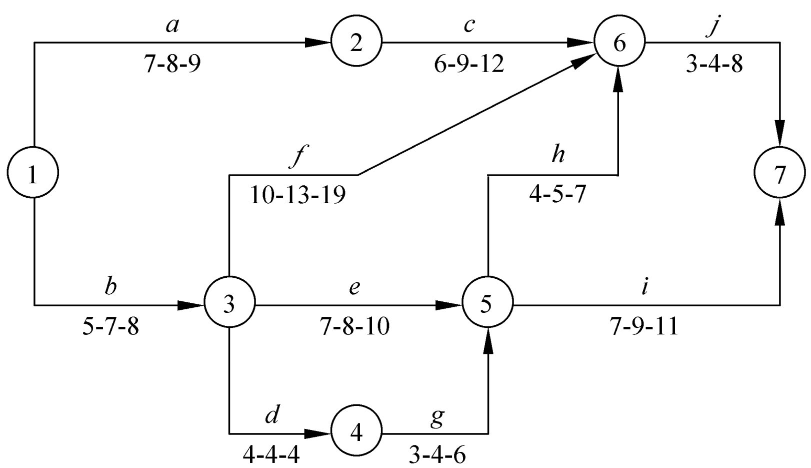


图 9-7

要求:

(a) **确定各工序的平均工序时间和均方差;**

(b) 画出网络图并按平均工序时间找出网络图中的关键路线;

(c) 求该项工程按合同规定的日期完工的概率。

9.14 根据图 9-8 所示的网络图

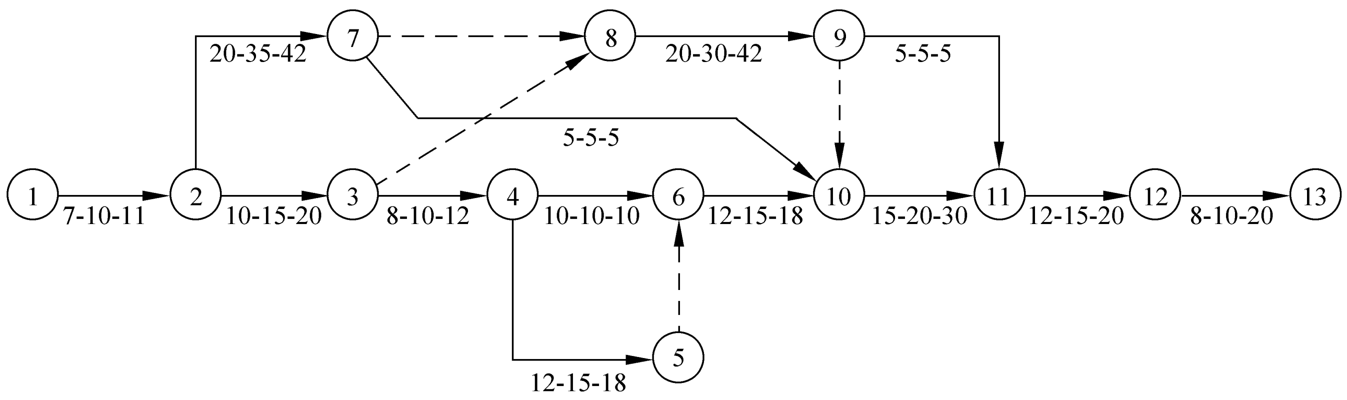


图　9-8

要求:

(a) 计算各工序的平均工序时间;

(b) 计算各结点的最早时间;

(c) 115 d(天)完成该项工程的概率是多少;

(d) 在 96 d 内完成结点 1 以前所有工序的概率是多少。

9.15 某计划任务的网络图如图 9-9 所示,试计算该项任务在 30 d 完成的可能性;如果完成该项任务的可能性要求达到 99.2%,则计划工期应规定为多少天?

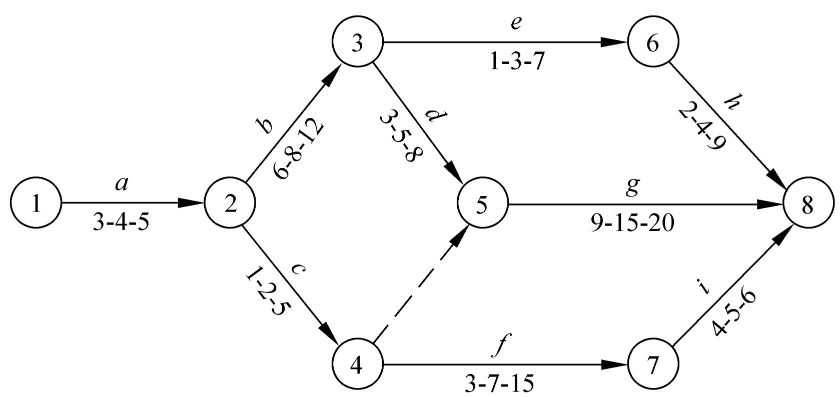


图　9-9

9.16 已知图 9-10 的网络图及有关资料如表 9-12 所示。

要求:

(a) 若工程完工时间缩短 1 d,缩短哪个工序的工序时间最好,并指出这种情况下的关键路线;

(b) 再缩短 1 d(合计为 2 d)怎样缩短最好。其中各工序只能缩短 1 d。

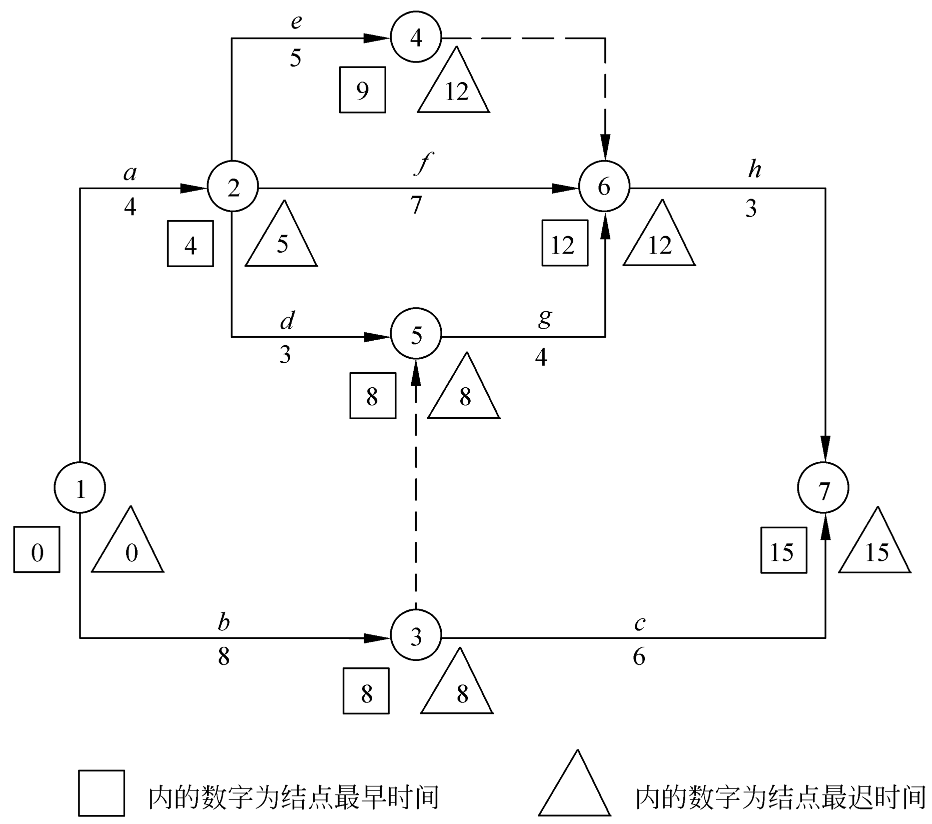


图 9-10

表 9-12

工序	箭线 (i, j)	所需天数 t_{ij}	最早开工时间	最迟完工时间	总时差/ d	缩短 1 d 所需的追加费用/ 百元
a	(1,2)	4	0	5	1	5
b	(1,3)	8	0	8	0	4
e	(2,4)	5	4	12	3	4
d	(2,5)	3	4	8	1	2
f	(2,6)	7	4	12	1	7
	(3,5)	0	8	8	0	
c	(3,7)	6	8	15	1	3
	(4,6)	0	9	12	3	
g	(5,6)	4	8	12	0	3
h	(6,7)	3	12	15	0	6

9.17 已知某项工程的作业明细表及有关资料如表 9-13 **所示,试计算最低成本日程。**

表 9-13

工序代号	紧前工序	正 常 进 度		赶 工 进 度		每赶工一天所需要的费用/(元·d^{-1})
		工序时间/d	直接费用/元	工序时间/d	直接费用/元	
a	—	3	10	1	18	4
b	*a*	7	15	3	19	1
c	*a*	4	12	2	20	4
d	*c*	5	8	2	14	2
间接费用为 4.5 元/d。						

9.18 在习题 9.11 中,若要求该项工程在 70 d 内完工,又知各道工序按正常进度的工序时间与每天的费用以及赶工作业的工序时间与每天的费用如表 9-14 所示,试确定在保证 70 d 内完成,而又使全部费用最低的施工方案。

表 9-14

工序代号	正 常 工 作		赶 工 作 业	
	工序时间/d	费用/(元·d^{-1})	工序时间/d	费用/(元·d^{-1})
a	10	50	6	75
b	8	40	8	40
c	6	40	4	60
d	16	60	12	85
e	24	5	24	5
f	4	40	2	70
g	4	20	2	30
h	10	30	8	40
i	4	30	3	45
j	12	25	8	40
k	16	50	12	80
l	8	40	6	60
m	24	5	24	5
n	4	10	4	10

9.19 某项工程各工序的工序时间及所需要的人数如表 9-15 所示,现有人数为 10 人,试确定工程完工时间最短的各工序的进度计划。

表 9-15

工序代号	紧前作业	工序时间/ d	需要人员数
a	—	4	9
b	—	2	3
c	—	2	6
d	—	2	4
e	*b*	3	8
f	*c*	2	7
g	*f*, *d*	3	2
h	*e*, *g*	4	1

9.20 已知表 9-16 所列资料,试求该工程项目的最低成本日程。

表 9-16

活动	作业时间	紧前活动	正常完成进度的直接费用/ 百元	赶进度一天所需费用/ 百元
a	4		20	5
b	8		30	4
c	6	*b*	15	3
d	3	*a*	5	2
e	5	*a*	18	4
f	7	*a*	40	7
g	4	*b*, *d*	10	3
h	3	*e*, *f*, *g*	15	6
合　计			153	
工程的间接费用			5/ (百元 · d^{-1})	

9.21 生产某种产品,生产过程所经过的工序及作业时间如表 9-17 所示。作业时间按常数或均值计算,试绘制这一问题的随机网络图,并假设产品生产过程经过工序 *g* 即

为成品，试计算产品的成品率与产品完成的平均时间。

表 9-17

工序	概率	作业时间(常数或期望值) / h	紧后作业
a	1	25	b 或 f
b	0.7	6	c 或 d
c	0.7	4	g
d	0.3	3	e
e	1	4	c
f	0.3	6	g
g	1	2	—

第十章

排队论

复习思考题

1. 试述排队系统的三个基本组成部分及各自的特征;当用符号 $X/Y/Z/A/B/C$ 来表示一个排队模型时,符号中的各个字母分别代表什么?

2. 解释下列符号或名词的概念,并写出它们之间的关系表达式:L_s, L_q, W_s, W_q, $P_n(t)$, $P_n(n=0,\cdots,\infty)$, n, 忙期。

3. 分别写出下列分布的概率密度函数及说明这些分布的主要性质:(a) 普阿松分布;(b) 负指数分布;(c) 爱尔朗分布;(d) 定长分布。

4. 分别说明在系统容量有限及顾客源有限时的排队系统中,有效到达率 λ_e 的含义及其计算表达式。

5. 什么是"即时制"的排队系统,它在哪些实际问题中得到应用?

6. 试述排队系统中影响服务水平高低的因素,它同系统中各项费用的关系,以及排队系统优化设计的含义。

7. 试述用随机模拟法分析排队系统的主要概念和主要步骤,举例说明这种方法的应用前景。

8. 判断下列说法是否正确:

(a) 若到达排队系统的顾客为普阿松流,则依次到达的两名顾客之间的间隔时间服从负指数分布;

(b) 假如到达排队系统的顾客来自两个方面,分别服从普阿松分布,则这两部分顾客合起来的顾客流仍为普阿松分布;

(c) 若两两顾客依次到达的间隔时间服从负指数分布,又将顾客按到达先后排序,则第 1, 3, 5, 7, …名顾客到达的间隔时间也服从负指数分布;

(d) 对 $M/M/1$ 或 $M/M/C$ 的排队系统,服务完毕离开系统的顾客流也为普阿松流;

(e) 在排队系统中,一般假定对顾客服务时间的分布为负指数分布,这是因为通过对大量实际系统的统计研究,这样的假定比较合理;

(f) 一个排队系统中,不管顾客到达和服务时间的情况如何,只要运行足够长的时间后,系统将进入稳定状态;

(g) 排队系统中,顾客等待时间的分布不受排队服务规则的影响;

(h) 在顾客到达及机构服务时间的分布相同的情况下,对容量有限的排队系统,顾客的平均等待时间将少于允许队长无限的系统;

(i) 在顾客到达的分布相同的情况下,顾客的平均等待时间同服务时间分布的方差大小有关,当服务时间分布的方差越大时,顾客的平均等待时间将越长;

(j) 在机器发生故障的概率及工人修复一台机器的时间分布不变的条件下,由 1 名工人看管 5 台机器,或由 3 名工人联合看管 15 台机器时,机器因故障等待工人维修的平均时间不变。

练习题

10 1 指出下列排队系统中的顾客和服务员:

(a) 机场起飞的客机;

(b) 十字路口红灯前的车辆;

(c) 超级市场收款台前的顾客;

(d) 高速公路收费口;

(e) 汽车加油站;

(f) 电报局。

10 2 列举生产或生活中下列各类排队服务系统的例子:

(a) 无限等待空间;

(b) 有限等待空间;

(c) 无等待空间;

(d) 先到先服务;

(e) 具有优先权的服务规则;

(f) 随机服务规则;

(g) 成批服务;

(h) 服务时间随队长而变化;

(i) 串连的排队系统;

(j) 顾客源有限的排队系统。

10 3 表 10-1,表 10-2 为某排队服务系统顾客到达与服务员对每名顾客服务时间

分布的统计。假设顾客的到达服从普阿松分布,服务时间服从负指数分布,试用 χ^2 检验,在置信度为 95%时上述假设能否接受。

表 10-1

每小时到达的顾客数 k	频数 f_k
0	23
1	58
2	69
3	51
4	35
5	18
6	11
7	3
8	1
9	1
合　　计	270

表 10-2

对每名顾客的服务时间 t	频数 f_i
$0 \leq t < 10$	54
$10 \leq t < 20$	34
$20 \leq t < 30$	18
$30 \leq t < 40$	12
$40 \leq t < 50$	8
$50 \leq t < 60$	6
$60 \leq t < 70$	3
$70 \leq t < 80$	1
$80 \leq t < 90$	1
$90 \leq t < 100$	1
合　　计	138

10.4　某市消费者协会一年 365 天接受顾客对产品质量的申诉。设申诉以 $\lambda = 4$ 件/d 的普阿松流到达,该协会处理申诉的定额为 5 件/d,当天处理不完的将移交专门小组处理,不影响每天业务。试求:(a) 一年内有多少天无一件申诉;(b) 一年内多少天处理不完当天的申诉。

10.5　来到某餐厅的顾客流服从普阿松分布,平均 20 人/h。餐厅于上午 11:00 开始营业,试求:(a) 当上午 11:07 有 18 名顾客在餐厅时,于 11:12 恰好有 20 名顾客的概率(假定该时间区间内无顾客离去);(b) 前一名顾客于 11:25 到达,下一名顾客在 11:28 至 11:30 之间到达的概率。

10.6　某地区的人口出生数服从 $1/\lambda = 2$ h 的负指数分布,试计算:(a) 某一天内无婴儿诞生的概率;(b) 某天内恰好诞生 20 名婴儿的概率;(c) 在 4 h 内诞生 5 名婴儿的概率;(d) 在 4 h 内诞生 5 名以上婴儿的概率。

10.7　某牙科诊所,病人可以预约在上午 9:00, 10:00, 11:00 一直到下午 4:00 前去治疗。该所有一名牙科医生,治疗一名病人的时间服从负指数分布,平均为 10 min。如果该诊所希望任何 1 h 预约的病人在下批预约病人到达前治疗完毕的概率不低于 80%,问每小时预约的病人人数应不超过多少名。

10.8　来到一个汽车加油站加油的汽车服从普阿松分布,平均每 5 min 到达 1 辆。设加油站对每辆汽车的加油时间为 10 min,问在这段时间内发生以下情况的概率:(a) 没有一辆汽车到达;(b) 有两辆汽车到达;(c) 不少于五辆汽车到达。

10 9 假定一个排队系统中有两个服务员,到达该系统的顾客数服从普阿松分布,平均 1 人/ h;又每个服务员对顾客的服务时间服从负指数分布,平均 1 人/ h。如有一名顾客于中午 12 点到达该排队系统情况下,试求:(a) 下一名顾客在下午一点前、一点到两点之间、两点以后到达的概率为多大?(b) 假定下午一点前没有别的顾客到达,则下一名顾客于一点到两点间到达的概率为多大?(c) 在一点到两点间顾客到达数分别为 0,1 和不少于 2 的概率;(d) 假定两个服务员于下午一点都正在为顾客服务,则两个被服务的顾客于下午 2:00 前, 1:10 前, 1:01 前都没有被服务完的概率分别为多大?

10 10 设到达一个加工中心的零件平均为 60 件/ h,该中心的加工能力为平均 75 件/ h,问处于稳定状态时该加工中心的平均输出率为 60 件/ h 还是 75 件/ h?简要说明理由。

10 11 到达只有一台加油设备加油站的汽车的平均到达率为 60 台/ h,由于加油站面积小且较拥挤,到达的汽车中平均每 4 台中有 1 台不能进入站内而离去。这种情况下排队等待加油的汽车队列(不计正在加油的)为 3.5 台,求进入该加油站汽车等待加油的平均时间。

10 12 一个有 2 名服务员的排队系统,该系统最多容纳 4 名顾客。当系统处于稳定状态时,系统中恰好有 n 名顾客的概率为: $P_0 = \frac{1}{16}$, $P_1 = \frac{4}{16}$, $P_2 = \frac{6}{16}$, $P_3 = \frac{4}{16}$, $P_4 = \frac{1}{16}$。试求:

(a) 系统中的平均顾客数 L_s;

(b) 系统中平均排队的顾客数 L_q;

(c) 某一时刻正在被服务的顾客的平均数;

(d) 若顾客的平均到达率为 2 人/ h,求顾客在系统中的平均逗留时间 W_s;

(e) 若 2 名服务员具有相同的服务效率,利用(d)的结果求服务员为一名顾客服务的平均时间($1/\mu$)。

10 13 一个顾客来到有 2 名并联服务员的排队系统,服务员的服务时间均为平均值 10 min 的负指数分布,分别求下列情况的值: (a) 到达时 2 名服务员均忙碌,则顾客需等待时间为 t_1 的概率分布 $f(t_1)$; (b) 第一名顾客已等了 5 min,则尚需等待时间为 t_2 的期望值 $E(t_2)$及标准差;(c) 若顾客到达时前面已有 2 人在等待,则轮到他被服务时所需的时间 t_3 的期望值 $E(t_3)$及标准差。

10 14 一个有 2 名服务员的排队系统各自独立为顾客服务,服务时间均为平均值 15 min 的负指数分布。设顾客甲到达时两名服务员均空闲,5 min 后顾客已到达,这时甲未服务完,再过 10 min 第三名顾客丙到达,这时甲和乙均正被服务中。试回答出现下列情况的概率: (a) 甲在乙之前结束服务; (b) 丙在甲之前结束服务; (c) 丙在乙之前结束服务。

10.15 一个自服务的排队系统,即该系统中每名顾客自身就是服务员。设顾客到达为参数 λ 的普阿松分布,对顾客的服务为参数 μ 的负指数分布。要求:(a) 画出生死过程发生率图;(b) 推导 P_0 与 P_n 的表达式。

10.16 某加油站有一台油泵。来加油的汽车按普阿松分布到达,平均每小时 20 辆,但当加油站中已有 n 辆汽车时,新来汽车中将有一部分不愿等待而离去,离去概率为 $n/4$ $(n=0,1,2,3,4)$。油泵给一辆汽车加油所需要的时间为具有均值 3 min 的负指数分布。

(a) 画出此排队系统的速率图;

(b) 导出其平衡方程式;

(c) 求出加油站中汽车数的稳态概率分布;

(d) 求那些在加油站的汽车的平均逗留时间。

10.17 某试验中心新安装一台试验机,为保证机器正常运转,减少试件往返搬运,在试验机周围要留一些放试件的面积。如试件的送达服从普阿松分布,平均 3 件/h,每个试件占用机器时间服从负指数分布,平均 0.3 h/件。如每个试件占用存放面积 1 m^2,则该试验机周围应留多少面积,保证(a) 50%;(b) 90%;(c) 90%的试件就近存放,不往返搬运。

提示:试验机周围 n m^2 则 $\sum_{i=1}^{n+1} P_i \geq \begin{matrix} 0.50 \\ 0.90 \\ 0.99 \end{matrix}$

10.18 汽车按普阿松分布到达某高速公路收费口,平均 90 辆/h。每辆车通过收费口平均需时 35 s,服从负指数分布。司机抱怨等待时间太长,管理部门拟采用自动收款装置使收费时间缩短到 30 s,但条件是原收费口平均等待车辆超过 6 辆,且新装置的利用率不低于 75%时才采用,问上述条件下新装置能否被采用。

10.19 有一台电话的公用电话亭打电话顾客服从 $\lambda=6$ 个/h 的普阿松分布,平均每人打电话时间为 3 min,服从负指数分布。试求:(a) 到达者在开始打电话前需等待 10 min 以上的概率;(b) 顾客从到达时算起到打完电话离开超过 10 min 的概率;(c) 管理部门决定当打电话顾客平均等待时间超过 3 min 时,将安装第二台电话,问当 λ 值为多大时需安装第二台。

10.20 某工厂有大量同一型号的车床,当该种车床损坏后或送机修车间或由机修车间派人来修理。已知该种车床损坏率是服从普阿松分布的随机变量,平均每天 2 台。又知机修车间对每台损坏车床的修理时间为服从负指数分布的随机变量,平均每台的修理时间为 $1/\mu$ d。但 μ 是一个与机修人员编制及维修设备配备好坏(即与机修车间每年开支费用 K)有关的函数。已知

$$\mu(K) = 0.1 + 0.001K \qquad (K \geq 1\,900 \text{ 元})$$

又已知机器损坏后,每台的生产损失为 400 元/ d,试决定使该厂生产最经济的 K 及 μ 的值。

10 21　某排队系统,顾客按参数为 λ 的普阿松分布到达。当系统中只有一名顾客时,由一名服务员为其服务,平均服务率为 μ;当系统中有两名以上顾客时,增加一名助手,并由服务员和助手一起共同对每名顾客依次服务,其平均服务率为 $m\ (m>\mu)$。上述情况下,服务时间均服从负指数分布。该系统中顾客源无限,等待空间无限,服务规则为 FCFS,试求:(a) 系统中无顾客的概率;(b) 服务员及助手的平均忙期;(c) 当 $\lambda=15$, $\mu=20$ 和 $m=30$ 时,求(a),(b) 的数值解。

10 22　某街道口有一电话亭,在步行距离为 4 min 的拐弯处有另一电话亭。已知每次电话的平均通话时间为 $1/\mu=3$ min 的负指数分布,又已知到达这两个电话亭的顾客均为 $\lambda=10$ 个/ h 的普阿松分布。假如有名顾客去其中一个电话亭打电话,到达时正有人通话,并且还有一个人在等待,问该顾客应在原地等待,还是转去另一电话亭打电话。

10 23　某排队系统有两名服务员,到达该系统的顾客流服从普阿松分布,平均 1 人/ h,又每个服务员服务一名顾客的时间平均都为 1 h,服从负指数分布。要求:(a) 画出该排队系统的生死过程发生率图;(b) 计算该系统的平均队长;(c) 计算服务员的平均忙期。

10 24　到达某铁路售票处顾客分两类:一类买南方线路票,到达率为 λ_1/ h,另一类买北方线路票,到达率为 λ_2/ h,以上均服从普阿松分布。该售票处设两个窗口,各窗口服务一名顾客时间均服从参数 $\mu=10$ 的负指数分布。试比较下列情况时顾客分别等待时间 W_q:(a) 两个窗口分别售南方票和北方票;(b) 每个窗口两种票均出售。(分别比较 $\lambda_1=\lambda_2=2,4,6,8$ 时的情形)

10 25　某无线电修理商店保证每件送到的电器在 1 h 内修完取货,如超过 1 h 分文不收。已知该商店每修一件平均收费 10 元,其成本平均每件 5.50 元,即每修一件平均盈利 4.5 元。已知送来修理的电器按普阿松分布到达,平均 6 件/ h,每维修一件的时间平均为 7.5 min,服从负指数分布。试问:(a) 该商店在此条件下能否盈利;(b) 当每小时送达的电器为多少件时该商店的经营处于盈亏平衡点。

10 26　一个有一套洗车设备的洗车店,要求洗车的车辆平均每 4 min 到达一辆,洗每辆车平均需 3 min,以上均服从负指数分布。该店现有 2 个车位,当店内无车时,到达车辆全部进入;当有一辆车时,有 80%进入;2 个车位均有车时,到达车辆全部离去。要求:(a) 画出此排队系统的生死过程发生率图;(b) 求洗车设备平均利用率及一辆进入该店车辆的平均停留时间 W_s;(c) 为减少顾客损失,该店拟租用第 3 个车位,这样当店内已有 2 辆车时,新到车辆有 60%进入,有 3 辆车时,新到车辆全部离去。若该车店每天营业 12 h,新车位租金为 100 元/ d,洗一辆车的净盈利为 5 元,则第 3 个车位是否值得租用?

10 27 两个各有一名理发员的理发店,且每个店内都只能容纳 4 名顾客。两个理发店具有相同顾客到达率,$\lambda=10$ 人/ h,服从普阿松分布。当店内顾客满员时,新来顾客自动离去。已知第一个理发店内,对顾客服务时间平均每人 15 min,收费 11 元,第二个理发店内,对顾客服务时间平均每人 10 min,收费 7.5 元,以上时间服从负指数分布。若两个理发店每天均营业 12 h,问哪个店内的理发员收入更高一些?

10 28 某公司的一个仓库可同时贮存 4 件物品,对该物品的需求服从普阿松分布。平均 10 件/ 月,当取走一件物品时,立即提出订货,但平均需 1 个月到货,服从负指数分布。如有顾客购货而仓库内无货时,该顾客将去别处购买。求该公司由于仓库无货而离去的顾客与总顾客的比例。

10 29 某场篮球比赛前来到体育馆某售票口买票的观众按普阿松分布到达,平均 1 人/ min,设该口售票速度服从负指数分布,平均售每张票时间为 20s,试回答:

(a) 如有一个球迷于比赛前 2 min 到达售票口,并设买到票后需 1.5 min 才能找到座位坐下,求该球迷在比赛开始前找到座位坐下的概率;

(b) 如该球迷希望有 99%的把握在比赛开始前找到座位坐下,则他最迟应提前多少 min 到达售票口。

10 30 考虑一个顾客输入为普阿松流、服务时间为负指数分布的排队服务系统,求:

(a) 有一个服务站时,当平均服务时间为 6 s,到达时间分别为有 5.0,9.0,9.9 名/ min 时的 L_s,L_q,W_s 和 W_q;

(b) 有两个并联服务站时,当平均服务时间为 12 s,到达时间分别为 5.0,9.0,9.9 名/ min 时的 L_s,L_q,W_s 和 W_q。

10 31 顾客按普阿松分布到达只有一名理发员的理发店。平均 10 人/ h。理发员对每名顾客的服务时间服从负指数分布,平均为 5 min。理发店内包括理发椅共有三个座位,当顾客到达无座位时,就依次站着等待。试求:(a) 顾客到达时有座位的概率;(b) 到达的顾客需站着等待的概率;(c) 顾客从进入理发店到离去超过 20 min 的概率;(d) 理发店内应有多少座位,才能保证 80%顾客在到达时就有座位。

10 32 为开办一个小汽车冲洗站,必须决定提供等待汽车使用的场地的大小。假设要冲洗的汽车到达服从普阿松分布,平均 1 辆/ 4 min。冲洗的时间服从负指数分布,平均 1 辆/ 3 min。如果所提供的场地仅容纳(a) 1 辆;(b) 3 辆;(c) 5 辆汽车(包括正在冲洗的 1 辆),比较由于等待场地不足而转向其他冲洗站的汽车占要冲洗汽车的比例。

10 33 某停车场有 10 个停车位置,车辆按普阿松流到达,平均 10 辆/ h。每辆车在该停车场存放时间为 $1/\mu=10$ min 的负指数分布。试求:(a) 停车场平均空闲的车位;(b) 一辆车到达时找不到空闲车位的概率;(c) 该停车场的有效到达率;(d) 若该停车场每天营业 10 h,则平均有多少台汽车因找不到空闲车位而离去。

10 34 某只有一名服务员的排队系统,其等待空间总共可容纳 3 名顾客,即系统中总顾客数不允许超过 4 人。已知对每名顾客的服务时间服从负指数分布,平均为 5 min;顾客到达服从普阿松分布,平均 10 人/ h。试求:(a) 系统中顾客数分别为 $n=0,1,2,3,4$ 的概率;(b) 系统中顾客的平均数;(c) 1 名新到的顾客需要排队等待服务的概率;(d) 1 名新到的顾客未能进入该排队系统的概率。

10 35 送到一台研磨机的工件按普阿松分布到达,平均 25 件/ h。研磨 1 个工件所需时间服从负指数分布,平均需 2 min。试求:

(a) 该研磨机空闲的概率;

(b) 一个工件从送达到研磨完超过 20 min 的概率;

(c) 等待研磨的工件的平均数;

(d) 等待研磨的工件在 8～10 件之间的概率;

(e) 在下列条件下,分别计算等待研磨的工件数:(i) 研磨的速度加快 20%,(ii) 到达工件数减少 20%,(iii) 到达减少 20%同时研磨速度加快 20%。

10 36 某中心医院有一台专用于抢救服务的电话,并设一名话务员值班。该电话机连接有一个 N 条线路的开关闸,当有一个电话呼唤到达,话务员处于繁忙状态时,只要 N 条线路未被占满,该呼唤将等待,只有当 N 条线路均被占满时,新的呼唤将得到一个忙音而不能进入系统。已知到达的电话呼唤流服从普阿松分布,$\lambda=10$ 个/ h,又每个电话的通话时间服从负指数分布,$1/\mu=3$ min。要求确定 N 的值,使到达的电话呼唤得到忙音的概率小于 1%。

10 37 某博物馆有 4 个大小一致的展厅。来到该博物馆参观的观众服从普阿松分布,平均 96 人/ h。观众大致平均分散于各展厅,且在各展厅停留时间服从 $1/\mu=15$ min 的负指数分布,在参观完 4 个展厅后离去。问该博物馆的每个展厅应按多大容量(可容纳的观众人数)设计,使在任何时间内观众超员的概率小于 5%。

10 38 某单位电话交换台有一部 200 门内线的总机。已知在上班的时间内,有 20%内线分机平均每 40 min 要一次外线电话,80%的分机平均隔 2 h 要一次外线电话,又知从外单位打来电话的呼唤率平均 1 次/ min。设通话时间长度平均 3 min,又以上时间均属负指数分布。如果要求外线电话接通率为 95%以上,问该交换台应设置多少条外线?

10 39 某医院门前有一出租汽车停车场,因场地限制,只能同时停放 5 辆出租汽车,当停满 5 辆后,后来的车就自动离去。从医院出来的病人在有车时就租车乘坐,停车场无车时,就向附近出租汽车站要车。设出租汽车到达医院门口按 $\lambda=8$ 辆/ h 的普阿松分布,从医院依次出来的病人的间隔时间为负指数分布,平均间隔时间 6 min。又设每辆车每次只载一名病人,并且汽车按到达先后次序排列接客,试求:(a) 出租汽车开到医院门口时,

停车场有空闲停车场地的概率;(b) 汽车进入停车场到离开医院的平均停留时间;(c) 从医院出来的病人在医院门口要到出租车的概率。

10.40 一个车间内有 10 台相同的机器,每台机器运行时能创造利润 4 元/h,且平均损坏 1 次/h。而一个修理工修复一台机器平均需 4 h。以上时间均服从负指数分布。设一名修理工工资为 6 元/h,试求:

(a) 该车间应设多少名修理工,使总费用为最小;

(b) 若要求不能运转的机器的期望数小于 4 台,则应设多少名修理工;

(c) 若要求损坏机器等待修理的时间少于 4 h,又应设多少名修理工。

10.41 某公司打字室平均每天接到 22 份要求打字文件,一个打字员完成一个文件打字平均需时 20 min,以上分别服从普阿松分布和负指数分布。为减轻打字员负担,有两个方案:一是增加一名打字员,每天费用为 40 元,其工作效率同原打字员;二为购一台自动打字机,以提高打字效率,已知有三种类型打字机,其费用及提高打字的效率如表 10-3 所示。

表 10-3

型号	每天费用/元	打字员效率提高程度/%
1	37	50
2	39	75
3	43	150

据公司估测,每个文件若晚发出 1 h 将平均损失 0.80 元。设打字员每天工作 8 h,试确定该公司应采用的方案。

10.42 某企业有 5 台运货车辆,已知每台车每运行 100 h 平均需维修 2 次,每次需时 20 min,以上分别服从普阿松及负指数分布。求该企业全部车辆正常运行的概率,及分别有 1,2,3 辆车不能正常运行时的概率。

10.43 设每台机器平均每小时损坏一次,服从普阿松分布;一名工人用于维修机器的时间为 $1/\mu = 6$ min 的负指数分布。对 $(M/M/1/\infty/6)$ 和 $(M/M/3/\infty/20)$ 的两种模型分别计算得到的 P_n 值如表 10-4 和表 10-5 所示。

表 10-4

n	P_n	n	P_n
0	0.4845	4	0.0175
1	0.2907	5	0.0035
2	0.1454	6	0.0003
3	0.0582		

表　10-5

n	P_n	n	P_n	n	P_n
0	0.13625	6	0.02347	12	0.00007
1	0.27250	7	0.01095	13	
2	0.25890	8	0.00475	…	0.00000
3	0.15533	9	0.00190	20	
4	0.08802	10	0.00070		
5	0.04694	11	0.00023		

试对上述两个模型的计算结果进行分析比较,并根据直观判断作出解释。

10.44　一个修理工负责 5 台机器的维修。每台机器平均损坏 1 次/ 2 d,又修理工修复一台机器平均需时 18.75 min,以上时间均服从负指数分布。试求:

(a) 所有机器均正常运行的概率;

(b) 等待维修的机器的期望数;

(c) 假设该维修工照管 6 台机器,重新求上述(a),(b)的数字解;

(d) 假如希望做到至少在一半时间内所有机器都同时正常运行,则该维修工最多看管多少台机器。

10.45　上题中假如维修工工资为 8 元/ h,机器不能正常运行时损失为 40 元/ h,则该维修工应看管多少台机器较为合适。

10.46　顾客按普阿松分布到达有两个服务窗口的服务站,$\lambda = 6$ 人/ h。设 1 号窗口服务员 S_1 对每名顾客平均服务时间为$\dfrac{1}{\mu_1} = 10$ min,2 号窗口服务员 S_2 对每名顾客平均服务时间为$\dfrac{1}{\mu_2} = 15$ min,以上均服从负指数分布。当两个窗口均空闲时,到达顾客中有 2/ 3 去 1 号窗口,1/ 3 去 2 号窗口。又该服务站最多能容纳 3 名顾客,当满员时新到顾客将自动离去。要求:(a) 画出生死过程发生率图;(b) 计算系统中平均顾客数 L_s;(c) 计算服务员 S_1 与 S_2 为顾客服务时间占全部工作时间的比例。

10.47　某货场计划安装起重设备专为来运货的汽车装货。有三种起重设备可供选择,如表 10-6 所示。

表　10-6

起重机械	每天固定费用/ 元	每小时操作费/ 元	平均每小时装载能力/ t
甲	60	10	100
乙	130	15	200
丙	250	20	600

设来运货的汽车按普阿松分布到达,平均到达 150 辆/ d,每辆车载重量 5 t,由于货物包装、品种上差别,每辆汽车实际装载时间服从负指数分布,已知该货场工作 10 h/ d,又每辆汽车停留的经济损失为 10 元/ h。试决定该货场应安装哪一种起重机械最合算?

10.48 某工具室有 k 名工人,到达工具室要求得到服务的顾客流为 $1/\lambda=1.5$ min 的负指数分布,每名工人对顾客的服务时间为 $1/\mu=0.8$ min 的负指数分布。假如工具室工人费用为 9 元/ h,生产工人(顾客)等待损失为 18 元/ h,试决定工具室工人的最佳数字 k。

10.49 要求在某机场着陆的飞机服从普阿松分布,平均 18 架次/ h,每次着陆需占用机场跑道的时间为 2.5 min,服从负指数分布。试问该机场应设置多少条跑道,使要求着陆飞机需在空中等待的概率不超过 5%;求这种情况下跑道的平均利用率。

10.50 假定有一名维修工负责看管 3 台机器。每台机器在两次维修间的正常运行时间服从负指数分布,平均间隔为 9 h。又维修工修复一台机器平均需 2 h,也服从负指数分布。要求:

(a) 计算机器处于待修状态的平均概率;

(b) 如按粗略计算,假定顾客源为无限,则需维修机器按每小时为 3/ 9 台的普阿松流到达,试重新计算这种情况下机器处于待修状态的概率,并与(a)的结果进行比较;

(c) 设当多于一台机器需维修时,将派出另一名维修工参加维修(维修工效率同前一名),求这时机器处于待修状态的概率。

10.51 考虑某个只有一个服务员的排队系统,输入为参数 λ 的普阿松流,假定服务时间的概率分布未知,但期望值已知为 $1/\mu$。

(a) 比较每个顾客在队伍中的期望等待时间,如服务时间的分布分别为: ①负指数分布; ②定长分布; ③爱尔朗分布,σ'值为负指数分布 σ 的 1/ 2;

(b) 如 λ 与 μ 值均增大为原来的 2 倍,σ 值也相应变化,求上述三种分布情况下顾客在队伍中期望等待时间的改变情况。

10.52 考虑一个顾客到达服从普阿松分布的排队系统。服务员必须对每名顾客依次完成两项不同的服务工作,即对每名顾客的总的服务时间是上述两项服务时间的总和(彼此统计独立)。

(a) 假定第一项服务时间为 $1/\mu=1$ min 的负指数分布,第二项服务时间为爱尔朗分布,平均为 3 min, $k=3$,问应该用哪一种排队理论模型代表上述系统;

(b) 如(a) 中第一项服务时间变为 $k=3$ 的爱尔朗分布,平均服务时间仍为 1 min,又应该用哪一种排队理论模型来代表这个系统?

10.53 汽车按普阿松分布到达一个汽车服务部门,平均 5 辆/ h。洗车部门只拥有一套洗车设备,试分别计算在下列服务时间分布的情况下系统的 L_s, L_q, W_s 与 W_q 的值:

(a) 洗车时间为常数,每辆需 10 min;

(b) 负指数分布,$1/\mu = 10$ min;

(c) t 为 5～15 min 的均匀分布;

(d) 正态分布,$\mu = 9$ min, $Var(t) = 4^2$;

(e) 离散的概率分布 $P(t=5) = 1/4$, $P(t=10) = 1/2$, $P(t=15) = 1/4$。

10.54 某有一名理发员的理发店除理发椅外,尚有一把等待用椅。顾客按普阿松流到达,平均 6 人/h,理发员为顾客服务分两阶段:(1) 推剪;(2) 洗发吹干,均为平均用时 $3\frac{1}{3}$ min 的负指数分布。当顾客到达时,若理发椅及等待用椅均有人,将自动离去不再进入,否则将进入该理发店。要求:

(a) 画出生死过程发生率图;

(b) 平均自动离去顾客与总顾客的百分比;

(c) 进入系统内顾客在系统中的平均逗留时间 W_s。

10.55 某飞机维修中心专门负责波音 747 大型客机的定期全面维修。为了使飞机尽快投入运行,原先的方案是每次只检修 4 台发动机中的 1 台,这种情况下来检修的飞机平均每天到达一架,服从普阿松分布,而每台发动机实际需检修时间(不计可能的等待时间)为 0.5 d,服从负指数分布。后来有人提出新的维修方案,即对来维修的飞机依次对 4 台发动机均检修一遍(检修组同一时间内只能对一台发动机进行检修),因此前来检修的飞机将减少到平均每天$\frac{1}{4}$架,仍为普阿松分布。试比较上述两种检修方案下,使飞机因发动机检修耽误的时间更少一些。

10.56 某工序依次用两把刀具对工件进行加工:第一把刀具的加工时间为常数,等于 30 min,第二把刀具加工时间需时为 5～15 min 的均匀分布。已知工件到达该工序服从普阿松分布,$\lambda = 1.5$ 件/h,试求该工序前排队等待加工的工件的平均数。

10.57 集成电路浸蚀的过程分成两阶段进行,一是等离子浸蚀,二是光致抗蚀。要浸蚀的晶片按普阿松流到达,平均 10 片/min。每个阶段的加工时间均为平均需 2.5 s 的负指数分布。已知前一晶片完成两个阶段的加工后,紧接着的晶片才能进入加工,试求:

(a) 一个晶片从到达到浸蚀完离去的平均时间;

(b) 假如该加工设备处不允许排队,计算该加工设备的平均利用时间。

10.58 某门诊所有一名医生为病人进行诊断检查,对每个病人需进行 4 项检查,每项所需时间均为平均 4 min 的负指数分布。设到达该门诊所进行诊断的病人按普阿松流到达,平均 3 人/h,求每个病人在该门诊所停留的期望时间。

10.59 某系统有两名服务员,到达顾客要依次分别经过两名服务员服务。设顾客到达为普阿松流,平均率为 λ 个/h,两名服务员对顾客的服务时间分别为 $1/\mu_1$ 和 $1/\mu_2$ h,服从负指数分布。试推导并计算该系统各种状态的概率。

10.60 某仓库贮存的一种商品,每天的到货与出货量分别服从普阿松分布,其平均值为 λ 和 μ,因此该系统可近似看成为 $(M/M/1/\infty/\infty)$ 的排队系统。设该仓库贮存费为每天每件 c_1 元,一旦发生缺货时,其损失为每天每件 c_2 元,已知 $c_2>c_1$,要求:

(a) 推导每天总期望费用的公式;

(b) 使总期望费用为最小的 $\rho=\lambda/\mu$ 值。

10.61 已知某串连排队系统中有两名服务员,标志 S_1 和 S_2,服务速率依次为 μ_1 和 μ_2(见图 10-1)。顾客按普阿松分布到达,平均速率为 λ。在 S_1 和 S_2 前分别有一个和两个等待位置,要求画出该系统的生死过程发生率图。

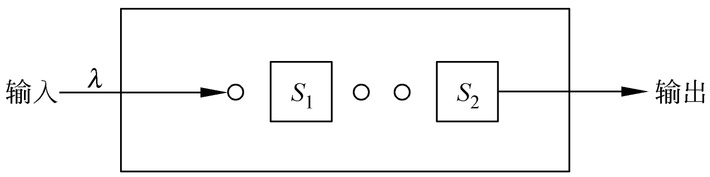


图 10-1

10.62 某生产线由 k 台加工设备顺序排列组成(见图 10-2)。假定到达第一台设备的工件按普阿松流到达,平均值为 λ。由第 i 台设备加工完的工件作为第 $(i+1)$ 台设备的输入。加工过程中会产生不合格品,设第 i 台设备加工的合格品率为 $100\alpha(0\leq\alpha\leq1)$,即不合格品率为 $100(1-\alpha)$。又知在第 i 台设备上加工一个工件所需时间服从负指数分布,平均时间为 $1/\mu_i$。

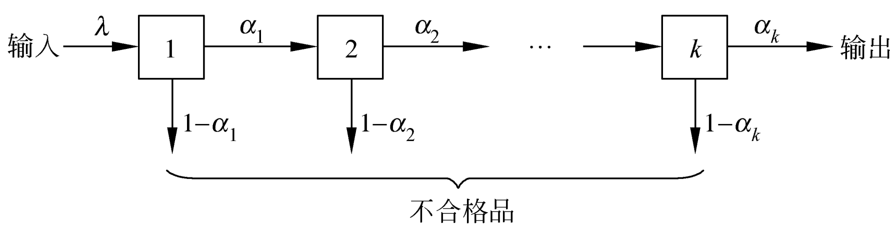


图 10-2

(a) 推导一个一般表达式,决定每台设备前应能存放多少个工件,使到达的工件在 $\beta\%$ 的时间内能就地存放;

(b) 设 $\lambda=20$ 件/h,$\mu_i=30$ 件/h,$\alpha=0.9$ $(i=1,\cdots,k)$,$k=5$,$\beta=95\%$,试根据(a)推导的表达式求出数字解;

(c) 利用(b)的结果,求时间 T(h)内在所有加工设备上产生的不合格品工件的总和。

10.63 上题中若对每台加工设备都配备一台返修设备(见图 10-3)。对第 i 台设备上产生的不合格品首先送至相应的返修设备上返修,其中修复的部分再送到第 $(i+1)$ 台设备加工。假定第 i 台返修设备返修一个工件的时间服从参数为 γ_i 的负指数分布,经返修后的合格率为 $\delta\%$,试求

(a) 若 $\gamma_i = 4$ 件/h, $\delta_i = 1/(i+1)$ $(i = 1, \cdots, 5)$,其他数据同上题,按上题(b)的要求找出有关数字解;

(b) 决定每台返修设备前各能存放多少个返修工件,使到达的返修品能在 90%以上的时间内就地存放;

(c) 每台返修设备系统内工件数;

(d) 一个工件从到达该生产线算起,到离开第 $k = 5$ 台设备的期望时间;

(e) 假定 $\delta = 1$ $(i = 1, \cdots, 5)$,重新计算上面(a)～(d)的结果。

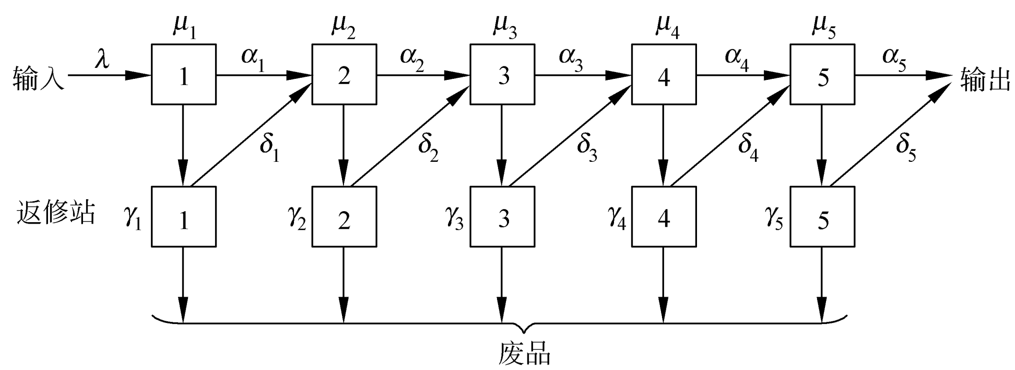


图 10-3

10.64 一条传送带连接的分装配线含两个工作站。由于所装产品的尺寸较大,每个站只能容纳一件产品。要装配的产品按普阿松分布到达,平均 10 件/h,工作站 1 和 2 用于装配产品时间为负指数分布,且平均时间均为 5 min。对不能进入该分装线的产品被送到别的装配线。试求:

(a) 每小时不能进入该分装线的产品数;

(b) 对进入该分装线的产品在该系统中的平均停留时间。

10.65 工件按普阿松流到达某加工设备,$\lambda = 20$ 个/h,据测算该设备每多加工一个工件将增加收入 10 元,而由于工件多等待或滞留将增加支出 1 元/h,试确定该设备最优的加工效率 μ。

10.66 在$(M/M/1/\infty/\infty)$的排队系统中,有 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = n^a \mu$(a 称为压力系数,$a > 0$),即服务速率随系统中顾客数的增加而加快。试证明有:

$$P_0 = \frac{1}{Q}, \quad P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{(n!)^a Q} \ (n = 1, 2, \cdots), \quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{(n!)^a}$$

10.67 试证明对$(M/M/1/N/\infty)$的排队系统有:

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}, \quad \rho \neq 1$$

当 $N = \infty$时,化简此公式并加以直观解释。

10.68 对$(M/M/1/\infty/\infty)$的排队模型,试证明:

(a) 顾客排队时间的概率分布为

$$w_q(t) = \begin{cases} 1-\rho, & t = 0 \\ \mu\rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, & t > 0 \end{cases}$$

(b)
$$w_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

10.69 在$(M/M/1/\infty/\infty)$的排队系统中，试证明：

(a) 在顾客必须排队等待条件下的期望队长为 $1/(1-\rho)$；

(b) 在顾客必须排队等待条件下的期望等待时间为 $1/(\mu-\lambda)$。

10.70 试证明对$(M/M/c/\infty/m)$的排队系统有：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}(m - L_s)$$

10.71 试证明对$(M/M/c/N/\infty)$的排队系统有：

$$L_q = \frac{\rho\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C P_0}{C!(1-\rho)^2}\ 1 - \rho^{N-C} - (1-\rho)(N-C)\rho^{N-C}$$

式中 $\rho = \dfrac{\lambda}{C\mu}$

第十一章

存　贮　论

复习思考题

1．举出在生产和生活中存贮问题的例子，并说明研究存贮论对改进企业经营管理的意义。

2．分别说明下列概念的涵义：(a) 存贮费；(b) 订货费；(c) 生产成本；(d) 缺货损失；(e) 订货提前期；(f) 订货点；(g) t_0-循环存贮策略；(h) (s, S)存贮策略；(i) (t, s, S)存贮策略。

3．在确定性存贮的 4 类模型中，即：

(a) 不允许缺货，生产时间很短；

(b) 不允许缺货，生产需一定时间；

(c) 允许缺货(缺货需补足)，生产时间很短；

(d) 允许缺货(缺货需补足)，生产需一定时间，说明(a)～(c)是(d)的特例，可以从模型(d)的公式推导出模型(a)～(c)的相应公式。

4．什么是定期定量的订货的存贮策略，它的应用条件，在本章哪几个模型中采用的是这种策略。

5．什么是定期订货，但订货数量不定的存贮策略，它的应用条件，以及在本章哪些模型中采用的是这种策略。

6．什么是缓冲存贮量，建立缓冲存贮量的目的，以及它同订货点之间的联系和区别。

7．判断下列说法是否正确：

(a) 订货费为每订一次货发生的费用，它同每次订货的数量无关；

(b) 在同一存贮模型中，可能既发生存贮费用，又发生短缺费用；

(c) 在允许发生短缺的存贮模型中，订货批量的确定应使由于存贮量减少带来的节约能抵消缺货时造成的损失；

(d) 当订货数量超过一定值允许价格打折扣的情况下,打折条件下的订货批量总是要大于不打折时的订货批量;

(e) 在其他费用不变的条件下,随着单位存贮费用的增加,最优订货批量也相应增大;

(f) 在其他费用不变的条件下,随着单位缺货费用的增加,最优订货批量将相应减小;

(g) 在单时期的随机存贮模型中,计算时都不包括订货费用这一项。原因是该项费用通常很小可忽略不计。

练习题

11.1 若某产品中有一外购件,年需求量为 10 000 件,单价为 100 元。由于该件可在市场采购,故订货提前期为零,并设不允许缺货。已知每组织一次采购需 2 000 元,每件每年的存贮费为该件单价的 20%,试求经济订货批量及每年最小的存贮加上采购的总费用。

11.2 加工制作羽绒服的某厂预测下年度的销售量为 15 000 件,准备在全年的 300 个工作日内均衡组织生产。假如为加工制作一件羽绒服所需的各种原材料成本为 48 元,又制作一件羽绒服所需原料的年存贮费为其成本的 22%,提出一次订货所需费用为 250 元,订货提前期为零,不允许缺货,试求经济订货批量。

11.3 上题中若工厂一次订购一个月所需的原材料时,价格上可享受 9 折优待(存贮费也为折价后的 22%),试问该羽绒服加工厂应否接受此优惠条件?

11.4 依据不允许缺货、生产时间很短模型的计算,A 公司确定对一种零件的订货批量定为 $Q^* = 80$。但由于银行贷款利率及仓库租金等费用的增加,每件的存贮费将从原来占成本的 22%上升到占成本的 27%,求在这个新条件下的经济订货批量。

11.5 某单位每年需零件 A 5 000 件,这种零件可以从市场购买到,故订货提前期为零。设该零件的单价为 5 元/件,年存贮费为单价的 20%,不允许缺货。若每组织采购一次的费用为 49 元,又一次购买 1 000～2 499 件时,给予 3%折扣,购买 2 500 件以上时,给予 5%折扣。试确定一个使采购加存贮费用之和为最小的采购批量。

11.6 一条生产线如果全部用于某种型号产品生产时,其年生产能力为 600 000 台。据预测对该型号产品的年需求量为 260 000 台,并在全年内需求基本保持平衡,因此该生产线将用于多品种的轮番生产。已知在生产线上更换一种产品时,需准备结束费 1350 元,该产品每台成本为 45 元,年存贮费用为产品成本的 24%,不允许发生供应短缺,求使费用最小的该产品的生产批量。

11.7 某生产线单独生产一种产品时的能力为 8 000 件/年,但对该产品的需求仅为

2 000 件/年,故在生产线上组织多品种轮番生产。已知该产品的存贮费为 1.60 元/年·件,不允许缺货,更换生产品种时,需准备结束费 300 元。目前该生产线上每季度安排生产该产品 500 件,问这样安排是否经济合理。如不合理,提出你的建议,并计算你建议实施后可能节约的费用。

11.8 某电子设备厂对一种元件的需求为 $R=2\,000$ 件/年,订货提前期为零,每次订货费为 25 元。该元件每件成本为 50 元,年存贮费为成本的 20%。如发生供应短缺,可在下批货到达时补上,但缺货损失为每件每年 30 元。要求:

(a) 经济订货批量及全年的总费用;

(b) 如不允许发生供应短缺,重新求经济订货批量,并同(a)的结果进行比较。

11.9 某公司经理一贯采用不允许缺货的经济批量公式确定订货批量,因为他认为缺货虽然随后补上总不是好事。但由于激烈竞争迫使他不得不考虑采用允许缺货的策略。已知对该公司所销产品的需求为 $R=800$ 件/年,每次的订货费用为 $C_3=150$ 元,存贮费为 $C_1=3$ 元/(件·年),发生短缺时的损失为 $C_2=20$ 元/(件·年),试分析:

(a) 计算采用允许缺货的策略较之原先不允许缺货策略带来的费用上的节约;

(b) 如果该公司为保持一定信誉,自己规定缺货随后补上的数量不超过总量的 15%,任何一名顾客因供应不及时需等下批货到达补上的时间不得超过 3 周,问这种情况下,允许缺货的策略能否被采用?

11.10 某出租汽车公司拥有 2 500 辆出租车,均由一个统一的维修厂进行维修。维修中某个部件的月需量为 8 套,每套价格 8 500 元。已知每提出一次订货需订货费 1 200 元,年存贮费为每套价格的 30%,订货提前期为 2 周。又每台出租车如因该部件损坏后不能及时更换每停止出车一周,损失为 400 元,试决定该公司维修厂订购该种部件的最优策略。

11.11 对某产品的需求量为 350 件/年(设一年以 300 工作日计),已知每次订货费为 50 元,该产品的存贮费为 13.75 元/(件·年),缺货时的损失为 25 元/(件·年),订货提前期为 5 天。该种产品由于结构特殊,需用专门车辆运送,在向订货单位发货期间,每天发货量为 10 件。试求:

(a) 经济订货批量及最大缺货量;

(b) 年最小费用。

11.12 在不允许缺货,生产时间很短的确定性存贮模型中,计算得到最优订货批量为 Q^*,若实际执行时按 $0.8Q^*$ 的批量订货,则相应的订货费与存贮费是最优订货批量时费用 C^* 的多少倍。

11.13 某医院从一个医疗供应企业订购体温计。订购价同一次订购数量 Q 有关,当 $Q<100$ 时,每支 5.00 元,当 $Q\geq 100$ 时,每支 4.80 元,年存贮费为订购价的 25%。若分别用 EOQ_1 和 EOQ_2 代表订购价为 5.00 元和 4.80 元时的最优订货批量,要求:

(a) 说明 $EOQ_2 > EOQ_1$;

(b) 说明最优订购批量必是以下三者之一: EOQ_1, EOQ_2, 100;

(c) 若 $EOQ_1 > 100$, 则最优订货量必为 EOQ_2;

(d) 若 $EOQ_1 < 100$, $EOQ_2 < 100$, 则最优订购量必为 EOQ_1 或 100;

(e) 若 $EOQ_1 < 100$, $EOQ_2 > 100$, 则最优订购量必为 EOQ_2。

11.14 某大型机械含三种外购件, 其有关数据见表 11-1。

表 11-1

外购件	年需求量/件	订货费/元	单件价格/元	占用仓库面积/m^2
1	1 000	1 000	3 000	0.5
2	3 000	1 000	1 000	1
3	2 000	1 000	2 500	0.8

若存贮费占单件价格的 25%, 不允许缺货, 订货提前期为零。又限定外购件库存总费用不超过 240 000 元, 仓库面积为 250 m^2, 试确定每种外购件的最优订货批量。

11.15 已知某产品所需三种配件的有关数据见表 11-2 所示:

表 11-2

配件	年需求/件	订货费/元	单价/元	年存贮费占单价的分数/%
1	1 000	50	20	20
2	500	75	100	20
3	2 000	100	50	20

若订货提前期为零, 不允许缺货, 又限定这三种配件年订货费用的总和不准超过 1 500 元, 试确定各自的最优订货批量。

11.16 试根据下列条件推导并建立一个经济订货批量的公式: (a) 订货必须在每个月月初的第一天提出; (b) 订货提前期为零; (c) 每月需求量为 R, 均在各月中的 15 日一天内发生; (d) 不允许发生供货短缺; (e) 存贮费为每件每月 C 元; (f) 每次订货的费用为 V 元。

11.17 某出租汽车公司有 2 500 辆出租车, 由该公司维修厂统一维修。出租车中一易损部件每月需求量为 8 件, 每件价格 8 500 元。已知每提出一次订货需订货费 1 200 元, 该部件年存贮费为价格的 25%, 订货提前期为 2 周。又出租车因该部件缺货不能及时维修更换, 停车损失为 1 600 元/月, 要求为该公司维修部门确定:

(a) 当库存量多大时应提出订货;

(b) 每次订购的最优批量。

11.18 某汽车厂的多品种装配线轮换装配各种牌号汽车。已知某种牌号汽车每天

需 10 台,装配能力为 50 台/ d。该牌号汽车成本为 15 万元/ 台,当更换产品时需准备结束费用 200 万元/ 次。若规定不允许缺货,存贮费为 50 元/ (台 · d)。试求:

(a) 该装配线最佳的装配批量;

(b) 若装配线批量达到每批 2 000 台时,汽车成本可降至 14.8 万元/ 台(存贮费、准备结束费不变),问该厂可否采纳此方案。

11 19 若某种物品每天的需求量为正态分布 $N(100, 10^2)$,每次订货费为 100 元,每天每件的存贮费用为 0.02 元,订货提前期为 2 d。要求确定缓冲存贮量 B,使在订货提前期内发生短缺的可能性不超过 5%。

11 20 某多时期的存贮问题有关数据如表 11-3 所示。

表 11-3

时间 i	需求 R_i	订购费 C_{3i}	存贮费 C_{1i}
1	56	98	1
2	80	185	1
3	47	70	1

各时期内每件生产成本不变,均为 4 元,即 $C_i(q_i) = 4q_i$。该产品期初库存 $x_1 = 3$ 件,要求期末库存 $x_4 = 10$ 件。试确定各期的最佳订货批量 q_i^*,使在三个时期内各项费用之和为最小。

11 21 某商店准备在新年前订购一批挂历批发出售,已知每售出一批(100 本)可获利 70 元。如果挂历在新年前售不出去,则每 100 本损失 40 元。根据以往销售经验,该商店售出挂历的数量如表 11-4 所示。

表 11-4

销售量/ 百本	0	1	2	3	4	5
概率	0.05	0.10	0.25	0.35	0.15	0.10

如果该商店对挂历只能提出一次订货,问应订几百本,使期望的获利数为最大。

11 22 某航空旅游公司经营 8 架直升机用于观光旅游。该直升机上有一种零件需经常备用更换,据过去经验,对该种零件的需求服从普阿松分布,平均每年 2 件。由于现有直升机机型两年后将淘汰,故生产该机型的工厂决定投入最后一批生产,并征求旅游公司对该种零件备件的订货。规定如立即订货每件收费 900 元,如最后一批直升机投产结束后提出临时订货,按每件 1 600 元收费,并需 2 周的订货提前期。又如直升机因缺乏该种备件停飞时,每周的损失为 1 200 元。对订购多余的备件当飞机淘汰时其处理价为每件 100 元。试求该航空旅游公司应立即提出多少个备件的订货,做到最经济合理。

11 23 对某产品的需求量服从正态分布，已知 $\mu=150$，$\sigma=25$。又知每个产品的进价为 8 元，售价为 15 元，如销售不完按每个 5 元退回原单位。问该产品的订货量应为多少个，使预期的利润为最大。

11 24 某商店代销一种产品，每件产品的购进价格为 800 元，存贮费每件 40 元，缺货费每件 1 015 元，订购费一次 60 元，原有库存 10 件。已知对产品需求的概率见表 11-5。

表 11-5

需求量 x	30	40	50	60
$P(x)$	0.20	0.20	0.40	0.20

试确定该商店的最佳订货数量。

11 25 某商店存有某种商品 10 件，每件的进价为 3 元，存贮费为 1 元，缺货费为 16 元。已知对该种商品的需求量服从 $\mu=20$，$\sigma=5$ 的正态分布，求商店对该种商品的最佳订货量。

11 26 某商店准备订购一批圣诞树迎接节日，据历年经验，其销量服从正态分布，$\mu=200$，$\sigma^2=300$。每棵圣诞树售价为 25 元，进价为 15 元。如果进了货卖不出去，则节后其残值基本为零。试回答：

(a) 该商店应进多少棵圣诞树，使期望利润值为最大；

(b) 如果商店按销售量的期望值 200 棵进货，则期望的利润值为多大；

(c) 如商店按(a) 计算数字进货，则未能销售出去的圣诞树的期望值是多少。

11 27 某厂在包装车间安装了一台价值数百万元的自动包装机，生产速度为包装 50 件/h。由于包装机需定期检修，故在生产车间同包装车间之间需建立一定量的缓冲贮备。据测算包装机在检修时的停工损失为 500 元/h，产品的存贮费为 0.05 元/(件·h)，包装机每工作 100 h 需停机检修一次，每次检修时间服从负指数分布，$1/\mu=2$ h。试确定缓冲贮备的数量，使各项费用和的期望值为最小。

11 28 某产品的单价为 10 元/件，每个时期的存贮费为 1 元/件，对该产品需求量为 x 的概率值见表 11-6。

表 11-6

需求量 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0.05	0.1	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05	0.05	0.05

问缺货损失的费用值在什么范围内变化时，对该产品的最佳订货批量为 4 件？

11 29 对某产品的需求服从负指数分布，需求之间的平均间隔时期为 10 个单位。

假如在一个时期内的存贮费与短缺费分别为 1 和 3,产品的单价为 2,试找出下列条件的最优订货批量:

(a) 期初库存为 2;

(b) 期初库存为 5。

11 30 已知某产品的单位成本 $K=3.0$,单位存贮费 $C_1=1.0$,单位缺货损失 $C_2=5.0$,每次订购费 $C_3=5.0$。需求量 x 的概率密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & \text{当 } 5\leq x\leq 10\\ 0, & x\text{ 为其他值}\end{cases}$$

设期初库存为零,试依据$(s.S)$型存贮策略的模型确定 s 和 S 的值。

11 31 一个面包门市部每天从面包房进货,进价每个 0.80 元,售价每个 1.20 元。如购进的面包当天销售不完,则从次日起以每个 0.60 元削价出售。不考虑存贮费用,但当发生短缺时,给门市部带来的商誉损失为每短缺一个损失 0.2 元。若每天需求为 1 000～2 000 的均匀分布,问该门市部每天应订购多少面包使预计盈利最大。

11 32 某航空公司在 A 市到 B 市的航线上用波音 737 客机执行飞行任务。已知该机有效载客量为 138 人。按民用航空有关条例,旅客因有事或误机,机票可免费改签一次,此外也有在飞机起飞前退票的。为避免由此发生的空座损失,该航空公司决定每个航班超量售票(即每班售出票数为 $138+S$ 张)。但由此会发生持票登机旅客多于座位数情况,这种情况下,航空公司规定,对超员旅客愿改乘本公司后续航班的,机票免费(即退回原机票款);若换乘其他航空公司航班的,按机票价的 150%退款。据统计前一类旅客占超员中的 80%,后一类占 20%。又据该公司长期统计,每个航班旅客退票和改签发生的人数 i 的概率 $p(i)$如下表 11-7 所示。

表 11-7

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(i)$	0.18	0.25	0.25	0.16	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01

试确定该航空公司从 A 市到 B 市的航班每班应多售出的机票张数 S,使预期的获利最大。

第十二章

矩 阵 对 策

复习思考题

1．试述组成对策模型的三个基本要素及各要素的涵义。

2．试述二人零和有限对策在研究对策模型中的地位、意义，为什么它又被称为矩阵对策。

3．解释下列概念，并说明同组概念之间的联系和区别：

(a) 策略，纯策略，混合策略；

(b) 鞍点，平衡局势，纯局势，纯策略意义下的解；

(c) 混合扩充，混合局势，混合策略意义下的解；

(d) 优超，某纯策略被另一纯策略优超，某纯策略为其他纯策略的凸线性组合所优超。

4．判断下列说法是否正确：

(a) 矩阵对策中，如果最优解要求一个局中人采取纯策略，则另一局中人也必须采取纯策略；

(b) 矩阵对策中当局势达到平衡时，任何一方单方面改变自己的策略(纯策略或混合策略)将意味着自己更少的赢得或更大的损失；

(c) 任何矩阵对策一定存在混合策略意义下的解，并可以通过求解两个互为对偶的线性规划问题得到；

(d) 矩阵对策的对策值相当于进行若干次对策后局中人Ⅰ的平均赢得值或局中人Ⅱ的平均损失值；

(e) 假如矩阵对策的支付矩阵中最大元素为负值，则求解结果 A 的赢得值恒为负值；

(f) 在二人零和对策支付矩阵的某一行(或某一列)上加上一个常数 k，将不影响双方各自的最优策略；

(g) 二人零和对策支付矩阵的所有元素乘上一个常数 k,将不影响对策双方各自的最优策略。

练习题

12.1 A,B 两人各有 1 角、5 分和 1 分的硬币各一枚。在双方互不知道情况下各出一枚硬币,并规定当和为奇数时,A 赢得 B 所出硬币;当和为偶数时,B 赢得 A 所出硬币。试据此列出二人零和对策的模型,并说明该项游戏对双方是否公平合理。

12.2 甲、乙两个游戏者在互不知道的情况下,同时伸出 1,2 或 3 个指头。用 k 表示两人伸出的指头总和。当 k 为偶数,甲付给乙 k 元,若 k 为奇数,乙付给甲 k 元。列出甲的赢得矩阵。

12.3 A,B 两人在互不知道的情况下,各在纸上写$\{-1,0,1\}$三个数字中的任意一个。设 A 所写数字为 s,B 所写数字为 t,答案公布后 B 付给 A$[s(t-s)+t(t+s)]$元。试列出此问题对 A 的支付矩阵,并说明该游戏对双方是否公平合理。

12.4 两个游戏者分别在纸上写$\{0,1,2\}$三个数字中的任一个,且不让对方知道。先让第一个人猜两人所写数字总和,再让第二个人猜,但规定第二个人猜的数不能与第一个人相同。猜中者从对方赢得 1 元,如谁都猜不中,算和局。试回答两个游戏者各有多少个纯策略。

12.5 任放一张红牌或黑牌,让 A 看但不让 B 知道。如为红牌,A 可以掷一枚硬币或让 B 猜。掷硬币出现正反面概率各为 1/2,如出现正面,A 赢得 p 元,出现反面,A 输 q 元;若让 B 猜,B 猜红,A 输 r 元,猜黑,A 赢 s 元。如为黑牌,A 只能让 B 猜,如猜红,A 赢 t 元,如猜黑,A 输 u 元。试列出对 A 的赢得矩阵。

12.6 已知 A,B 两人对策时对 A 的赢得矩阵如下,求双方各自的最优策略及对策值。

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & -5 & 6 \\ -3 & -4 & -9 & -2 \\ 6 & 7 & -8 & -7 \\ 7 & 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$　　(h) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ 6 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

12.7　若 $a_{i_1 j_1}$ 和 $a_{i_2 j_2}$ 是矩阵对策 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 的两个鞍点,求证有

$$a_{i_1 j_1} = a_{i_1 j_2} = a_{i_2 j_1} = a_{i_2 j_2}$$

12.8　将 $m \times n$ 个连续的整数随机填入 $m \times n$ 矩阵的每一位置,试证明在该矩阵中存在一个鞍点的概率为 $\dfrac{m!\,n!}{(m+n-1)!}$。

12.9　在下列矩阵中确定 p 和 q 的取值范围,使得该矩阵在 (a_2, b_2) 交叉处存在鞍点。

(a) $\begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & q & 6 \\ a_2 & p & 5 & 10 \\ a_3 & 6 & 2 & 3 \end{array}$　　(b) $\begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 2 & 4 & 5 \\ a_2 & 10 & 7 & q \\ a_3 & 4 & p & 6 \end{array}$

12.10　A 和 B 进行一种游戏。A 先在横坐标 x 轴的 $[0,1]$ 区间内任选一个数,但不让 B 知道,然后 B 在纵坐标轴 y 的 $[0,1]$ 区间内任选一个数。双方选定后,B 对 A 的支付为

$$p(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - 2x^2 - 2xy + \frac{7}{2}x + \frac{5}{4}y$$

求 A,B 各自的最优策略和对策值。

12.11　下面矩阵为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 对策时 $\boldsymbol{A}$ 的赢得矩阵,什么条件下矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ 对角线上三个元素 $(1,1)(2,2)(3,3)$ 分别为鞍点。

12.12　证明下列矩阵对策具有纯策略解(矩阵元素 a, b, c, d, e, f, g 为任意实数):

(a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ a & d \\ c & b \end{bmatrix}$　　(b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & e & a & e & a & e & a & e \\ b & f & b & f & f & b & f & b \\ c & g & g & c & c & g & g & c \end{bmatrix}$

12.13　下列矩阵为 A, B 对策时 A 的赢得矩阵,先尽可能按优超原则简化,再用图解法求 A, B 各自的最优策略及对策值。

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{matrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} -1 & 3 & -5 & 7 & -9 \\ 2 & -4 & 6 & -8 & 10 \end{matrix}$

(e) $\begin{matrix} -3 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{matrix}$ (f) $\begin{matrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \end{matrix}$

(g) $\begin{matrix} 16 & 14 & 6 & 11 \\ -14 & 4 & -10 & -8 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \\ 22 & -12 & 6 & 10 \end{matrix}$ (h) $\begin{matrix} 6 & 5 \\ 8 & 9 \\ 11 & 7 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

12.14 写出与下列对策问题等价的线性规划问题:

(a) $\begin{matrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & 0 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} -5 & -9 & 4 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & -8 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & -9 & -6 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & 3 & -7 \end{matrix}$

12.15 用线性规划方法求解下列对策问题:

(a) $\begin{matrix} 3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 3 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{matrix}$

(c) $\begin{matrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{matrix}$ (d) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}$

(e) $\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{matrix}$ (f) $\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}$

12.16 A 手中有两张牌,分别为 2 点和 5 点。B 从两组牌中随机抽取一组: 一组为 1 点和 4 点各一张,另一组为 3 点和 6 点各一张。然后 A,B 两人将手中牌分两次出,例如 A 可以先出 2 点,再出 5 点,或先出 5 点再出 2 点;B 也将抽到的一组牌,先出大的点或先出小的点。每出一次,当两人所出牌的点数和为奇数时 A 获胜,B 付给 A 相当两张牌点数和的款数;当点数和为偶数时,A 付给 B 相当两张牌点数和的款数。两张牌出完后算一局,再开局时,完全重复上述情况和规则。要求确定:

(a) A,B 各自的策略集;

(b) 列出对 A 的赢得矩阵;

(c) 找出 A,B 各自的最优策略,计算对策值并说明上述对策对双方是否公平合理。

12.17 桌上放 1,2,3 点三张牌,甲和乙各从中任取一张并互不知道对方牌的点数。先由甲表态,甲可以认输,付给乙 1 元,也可以打赌。当甲打赌时,乙可以认输,付给甲 1 元,也可以叫真。当乙叫真时,双方就要翻牌,由点小者付给点大者 2 元。要求列出甲、乙各自的策略集,并指出各自有哪些策略明显不合理。

12.18 每行与每列均包含有整数 $1,\cdots,m$ 的 $m\times m$ 矩阵称为拉丁方。例如一个 4×4 的拉丁方为:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}$$

试证明对策矩阵为拉丁方的 $m\times m$ 矩阵对策的值为 $(m+1)/2$。

12.19 若矩阵对策 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ 的对策值为 v,试证明矩阵对策 $B=[b_{ij}]_{m\times n}$,若 $b_{ij}=ka_{ij}$ 对 $i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$ 成立,则其对策值为 kv,且双方最优策略与矩阵对策 A 相同。

12.20 在一个矩阵对策问题中,如对策矩阵为反对称矩阵,证明对策者 Ⅰ 和对策者 Ⅱ 的最优策略相同,并且其对策值为零。

12.21 若 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 分别代表两个 $m\times n$ 的矩阵对策,其中 $b_{ij}=a_{ij}+k$ $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$。若 A 的对策值为 v,试证明 B 的对策值为 $v+k$,且 B 中对策双方的最优策略与 A 相同。

12.22 已知矩阵对策:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & -6 \end{matrix}$$

双方的最优策略为 $X^*=(0, 11/14, 3/14)$, $Y^*=(0,13/14,1/14)$,对策值 $v=59/14$。求下列矩阵对策的最优解和对策值:

(a) $\begin{matrix} 5 & 6 & 9 \\ 12 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & -2 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \\ -8 & 3 & -3 \end{matrix}$

(c) $\begin{matrix} 8 & 10 & 16 \\ 24 & 14 & 20 \\ 6 & 16 & -6 \end{matrix}$

12.23 根据矩阵对策的性质,用尽可能简便的方法求解下列矩阵对策问题:

(a) $\begin{matrix} 4 & 8 & 6 & 0 \\ 8 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 16 \end{matrix}$　　(b) $\begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{matrix}$

(c) $\begin{matrix} 5 & 5/2 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{matrix}$　　(d) $\begin{matrix} 8 & 10 & 12 \\ 6 & 8 & 14 \\ 4 & 2 & 8 \end{matrix}$

12 24　甲、乙两人玩一种游戏。甲有两个球,乙有三个球,在互不知道的情况下将球分别投入 A,B 两个箱中。设甲投入 A,B 箱中球数分别为 n_1 和 n_2,乙投入两个箱中球数分别为 m_1 和 m_2;

若 $n_1 > m_1$,甲赢(m_1+1), $n_2 > m_2$,甲赢(m_2+1);

$n_1 < m_1$,甲输(n_1+1), $n_2 < m_2$,甲输(n_2+1)。

在其他情况下双方无输赢。试将此问题表达成一个二人零和对策问题,并求各自的最优解和对策值。

12 25　有一种赌博游戏,游戏者Ⅰ拿两张牌:红 1 和黑 2,游戏者Ⅱ也拿两张牌:红 2 和黑 3。游戏时两人各同时出示一张牌,如颜色相同,Ⅱ付给Ⅰ钱,如果颜色不同,Ⅰ付给Ⅱ钱。并且规定,如Ⅰ打的是红 1,按两人牌上点数差付钱。如Ⅰ打的是黑 2,按两人牌上点数和付钱。求游戏者Ⅰ,Ⅱ的最优策略,并回答这种游戏对双方是否公平合理?

12 26　A,B 两名游戏者双方各持一枚硬币,同时展示硬币的一面。如均为正面,A 赢 2/3 元,均为反面,A 赢 1/3 元,如为一正一反,A 输 1/2 元。写出 A 的赢得矩阵,A,B 双方各自的最优策略,并回答这种游戏是否公平合理?

12 27　在一场敌对的军事行动中,甲方拥有三种进攻性武器 A_1, A_2, A_3,可分别用于摧毁乙方工事;而乙方有三种防御性武器 B_1, B_2, B_3 来对付甲方。据平时演习得到的数据,各种武器间对抗时,相互取胜的可能如下:

A_1 对 B_1	2∶1	A_3 对 B_1	3∶7
A_1 对 B_2	3∶1	A_2 对 B_2	3∶2
A_1 对 B_3	1∶2	A_2 对 B_3	1∶3
A_3 对 B_1	3∶1	A_3 对 B_3	2∶1
A_3 对 B_2	1∶4		

试确定甲、乙双方使用各种武器的最优策略,回答总的结果对甲、乙哪一方有利?

12 28　甲、乙两人对策。甲手中有三张牌:二张 K 一张 A。甲任意藏起一张后然后宣称自己手中的牌是 KK 或 AK,对此乙可以接受或提出异议。如甲叫的正确乙接受,甲得一元;如甲手中是 KK 叫 AK 时乙接受,甲得二元;甲手中是 AK 叫 KK 时乙接受,甲输二元。如乙对甲的宣称提出异议,输赢和上述恰相反而且钱数加倍。列出甲、乙各自的

纯策略,求最优解和对策值,说明对策是否公平合理?

12 29 有一种游戏:任意掷一个钱币,先将出现是正面或反面的结果告诉甲。甲有两种选择:①认输,付给乙一元;②打赌,只要甲认输,这一局就终止重来。当甲打赌时,乙也有两种选择:①认输,付给甲一元;②叫真,在乙叫真时,如钱币掷的是正面,乙输给甲二元,如钱币是反面,甲输给乙二元。试建立甲方的赢得矩阵,求对策值及双方各自的最优策略。

12 30 有甲、乙两支游泳队举行包括三个项目的对抗赛。这两支游泳队各有一名健将级运动员(甲队为李,乙队为王),在三个项目中成绩都很突出,但规则准许他们每人只能参加两项比赛,每队的其他两名运动员可参加全部三项比赛。已知各运动员平时成绩(s)见表 12-1。

表 12-1

项目	甲队			乙队		
	A_1	A_2	李	王	B_1	B_2
100 m 蝶泳	59.7	63.2	57.1	58.6	61.4	64.8
100 m 仰泳	67.2	68.4	63.2	61.5	64.7	66.5
100 m 蛙泳	74.1	75.5	70.3	72.6	73.4	76.9

假定各运动员在比赛中都发挥正常水平,又比赛第一名得 5 分,第二名得 3 分,第三名得 1 分,问教练员应决定让自己队健将参加哪两项比赛,使本队得分最多?(各队参加比赛名单互相保密,定下来后不准变动)

12 31 有两张牌,红和黑各一。A 先任抓一张牌看后叫赌,赌金可定 3 元或 5 元。B 或认输或应赌,如认输,付给 A 1 元:如应赌,当 A 抓的是红牌,B 输钱,A 抓的是黑牌,B 赢钱,输赢钱数是 A 叫赌时定下的赌金数。列出 A,B 各自的纯策略并求最优解。

12 32 有分别为 1,2,3 点的三张牌。先给 A 任发一张牌,A 看了后可以叫"小"或"大",如叫"小",赌注为 2 元,叫"大"时赌注为 3 元。接下来给 B 任发剩下来牌中的一张,B 看后可有两种选择:①认输,付给 A 1 元;②打赌,如 A 叫"小",谁的牌点子小谁赢,如叫"大",谁的牌点子大谁赢,输赢钱数为下的赌注数。问在这种游戏中 A,B 各有多少个纯策略,根据优超原则说明哪些策略是拙劣的,在对策中不会使用,再求最优解。

12 33 A,B 两人玩一种游戏:有三张牌,分别记为高、中、低,由 A 任抽一张,由 B 猜。B 只能猜高或低,如所抽之牌恰为高或低,则 B 猜对时,A 输 3 元,否则 B 输 2 元。又若 A 所抽的牌为中,则当 B 猜低时,B 赢 2 元,猜高时,由 A 再从剩下两张牌中任抽一张由 B 猜,当 B 猜对时,B 赢 1 元,猜错时 B 输 3 元。将此问题归结成二人零和对策问题,列出对 A 的赢得矩阵,并求出各自的最优解和对策值。

12 34 有三张纸牌,点数分别为 1,2,3,显然按大小顺序为 $3>2>1$。先由 A 任抽

一张,看过后反放在桌上,并任喊大(H)或小(L)。然后由 B 从剩下纸牌中任抽一张,看过后,B 有两种选择:第一,弃权,付给 A 1 元;第二,翻 A 的牌,当 A 喊 H 时,得点数小的牌者付给对方 3 元,当 A 喊 L 时,得点数大的牌者付给对方 2 元。要求:

(a) 说明 A,B 各有多少个纯策略;

(b) 根据优超原则淘汰具有劣势的策略,并列出对 A 的赢得矩阵;

(c) 求解双方各自的最优策略和对策值。

12 35 A,B,C 三人进行围棋擂台赛。已知三人中 A 最强,C 最弱,又知一局棋赛中 A 胜 C 的概率为 p,A 胜 B 的概率为 q,B 胜 C 的概率为 r。擂台赛规则为先任选两人对垒,其胜者再同第三者对垒,若连胜,该人即为优胜者;反之,任何一局对垒的胜者再同未参加该局比赛的第三者对垒,并往复进行下去,直至任何一人连胜两局对垒为止,该人即为优胜者。考虑到 C 最弱,故确定由 C 来定第一局由哪两人对垒。试问 C 应如何抉择,使自己成为优胜者的概率为最大。

第十三章

决　策　论

复习思考题

1．简述决策的分类、决策的过程和程序、构成决策模型的各要素，并举例说明。

2．简述确定型决策、风险型决策和不确定型决策之间的区别。不确定型决策能否设法转化为风险型决策？若能转化，对决策的准确性有什么影响？

3．什么是决策矩阵？收益矩阵、损失矩阵、风险矩阵、后悔值矩阵在含义方面各有什么区别？

4．对比分析不确定型决策中的悲观主义决策准则、乐观主义决策准则、等可能性准则、最小机会损失准则、折衷主义准则之间的区别与联系，并指出采用不同准则时决策者所面临的环境和心理条件。

5．什么是乐观系数 α？你认为应该如何来确定？

6．什么是 EMV 决策准则与 EOL 决策准则？为什么用这两个准则计算所得结果是相同的？

7．试述全情报价值的概念和计算公式。

8．什么是主观概率？试述确定主观概率的直接估计法与间接估计法。

9．试述效用的概念及其在决策中的意义和作用。

10．什么是效用曲线？如何确定出某个人的效用曲线？

11．对下面几种人分别勾画出其效用曲线的特征走向，并进行比较：

(a) 经常购买中奖率小但奖额大的奖券；

(b) 经常购买中奖率大但奖金额相对较小的奖券；

(c) 把钱存入银行，不购买任何奖券。

12．什么是转折概率？如何确定转折概率？

13. 试述决策树中的决策点和事件点。

14. 判断下列说法是否正确:

(a) 在不确定型决策中, Laplace 准则较之 Savage 准则具有较小的保守性;

(b) 应用最小机会损失准则决策时, 如果用一般的损益矩阵来代替机会损失矩阵, 则 Savage 准则将建立在 maxmin 条件, 而不是 minmax 条件上;

(c) 不管决策问题怎么变化, 一个人的效用曲线总是不变的;

(d) 具有中间型效用曲线的决策者, 对收入的增长以及对损失的金额都不敏感;

(e) 决策树比决策矩阵更适宜于描绘序列决策过程。

练习题

13 1 某一决策问题的损益矩阵如表 13-1 所示, 其中矩阵元素值为年利润。

表 13-1 单位:元

方案 \ 事件 / 概率	E_1	E_2	E_3
	P_1	P_2	P_3
S_1	40	200	2 400
S_2	360	360	360
S_3	1 000	240	200

(a) 若各事件发生的概率 P_j 是未知的, 分别用 maxmin 决策准则、maxmax 决策准则、拉普拉斯准则和最小机会损失准则选出决策方案。

(b) 若 P_j 值仍是未知的, 并且 α是乐观系数, 问 α取何值时, 方案 S_1 和 S_3 是不偏不倚的?

(c) 若 $P_1 = 0.2$, $P_2 = 0.7$, $P_3 = 0.1$, 那么用 EMV 准则会选择哪个方案?

13 2 某地方书店希望订购最新出版的好的图书。根据以往经验, 新书的销售量可能为 50, 100, 150 或 200 本。假定每本新书的订购价为 4 元, 销售价为 6 元, 剩书的处理价为每本 2 元。要求:

(a) 建立损益矩阵;

(b) 分别用悲观法、乐观法及等可能法决定该书店应订购的新书数字;

(c) 建立后悔矩阵, 并用后悔值法决定书店应订购的新书数。

13 3 上题中如书店据以往统计资料预计新书销售量的规律见表 13-2:

表 13-2

需求数	50	100	150	200
占的比例/ %	20	40	30	10

(a) 分别用期望值法和后悔值法决定订购数量;

(b) 如某市场调查部门能帮助书店调查销售量的确切数字,该书店愿意付出多大的调查费用?

13.4 某钟表公司计划通过它的销售网推销一种低价钟表,计划零售价为每块 10 元。对这种钟表有三个设计方案:方案Ⅰ需一次投资 10 万元,投产后每块成本 5 元;方案Ⅱ需一次投资 16 万元,投产后每块成本 4 元;方案Ⅲ需一次投资 25 万元,投产后每块成本 3 元。该种钟表需求量不确切,但估计有三种可能:

$$E_1 —— 30\,000;\ E_2 —— 120\,000;\ E_3 —— 200\,000$$

(a) 建立这个问题的损益矩阵;

(b) 分别用悲观法、乐观法及等可能法决定公司应采用哪一个设计方案;

(c) 建立后悔矩阵,用后悔值法决定采用哪一个设计方案。

13.5 某非确定型决策问题的决策矩阵如表 13-3 所示:

表 13-3

方案 \ 事件	E_1	E_2	E_3	E_4
S_1	4	16	8	1
S_2	4	5	12	14
S_3	15	19	14	13
S_4	2	17	8	17

(a) 若乐观系数 $\alpha = 0.4$,矩阵中的数字是利润,请用非确定型决策的各种决策准则分别确定出相应的最优方案。

(b) 若表 13-3 中的数字为成本,问对应于上述各决策准则所选择的方案有何变化?

13.6 某一季节性商品必须在销售之前就把产品生产出来。当需求量是 D 时,生产者生产 x 件商品获得的利润(元)为:

$$利润\ f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq D \\ 3D - x & x > D \end{cases}$$

设 D 只有 5 个可能的值:1 000 件,2 000 件,3 000 件,4 000 件和 5 000 件,并且它们的概率都是 0.2。生产者也希望商品的生产量也是上述 5 个值中的某一个。问:

(a) 若生产者追求最大的期望利润,他应选择多大的生产量?

(b) 若生产者选择遭受损失的概率最小,他应生产多少商品?

(c) 生产者欲使利润大于或等于 3 000 元的概率最大,他应选取多大的生产量?

13.7 某邮局要求当天收寄的包裹当天处理完毕。根据以往记录统计,每天收寄包裹的情况见表 13-4。

表 13-4

收寄包裹数	41～50	51～60	61～70	71～80	81～90
占的比例/ %	10	15	30	25	20

已知每个邮局职工平均处理包裹 4 个/ h,工资为 5 元/ h。规定每人实际工作 7 h/ d,如加班工作,工资额增加 50%,但加班时间每人不得超过 5 h/ d(加班以 h 计,不足 1 h 的以 1 h 计算)。试用期望值法确定该邮局最优雇佣工人的数量。

13.8 在一台机器上加工制造一批零件共 10 000 个,如加工完后逐个进行修整,则全部可以合格,但需修整费 300 元。如不进行修整据以往资料统计,次品率情况见表 13-5。

表 13-5

次品率 (E)	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
概率 $P(E)$	0.20	0.40	0.25	0.10	0.05

一旦装配中发现次品时,需返工修理费为每个零件 0.50 元。要求:

(a) 分别用期望值和后悔值法决定这批零件要不要整修;

(b) 为了获得这批零件中次品率的正确资料,在刚加工完的一批 10 000 件中随机抽取 130 个样品,发现其中有 9 件次品,试修正先验概率,并重新按期望值和后悔值法决定这批零件要不要整修。

13.9 一台模铸机用于生产某种铝铸件。根据以前使用这种机器的经验和采用模具的复杂程度,这种机器正确安装的概率估计为 0.8。如果机器安装正确,那么生产出合格产品的概率是 0.9。如果机器安装不正确,则 10 个产品中只有 3 个是可以接受的。现在已铸造出第一个铸件,检验后发现:

(a) 第一个铸件是次品,根据这个补充资料,求机器正确安装的概率;

(b) 若第一个铸件是合格品,问机器正确安装的概率是多少?

13.10 某决策者的效用函数可由下式表示:

$$U(x) = 1 - e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 10\,000 \text{ 元}$$

如果决策者面临下列两份合同,见表 13-6 所示。

表 13-6

合同＼获利＼概率	$P_1 = 0.6$	$P_2 = 0.4$
A/ 元	6 500	0
B/ 元	4 000	4 000

问决策者倾向于签订哪份合同?

13.11 计算下列人员的效用值:

(a) 某甲失去500元时效用值为1,得到1 000元时效用值为10;又肯定能得到5元与发生下列情况对他无差别:以概率0.3失去500元和概率0.7得到1 000元。问某甲5元的效用值有多大?

(b) 某乙-10元的效用值为0.1;200元的效用值为0.5,他自己解释肯定得到200元和以下情况无差别:0.7的概率失去10元和0.3的概率得到2 000元。问对某乙2 000元效用值为多少?

(c) 某丙1 000元的效用值为0;500元的效用值为-150,并且对以下事件上效用值无差别:肯定得到500元或0.8机会得到1 000元和0.2机会失去1 000元,则某丙失去1 000元的效用值为多大?

13.12 某丁2 000元的效用值为10;500元的效用值为6;-100元效用值为0,试找出概率P使以下情况对他来讲无差别:肯定得到500元或以概率P得到2 000元和以概率$(1-P)$失去100元。

13.13 A先生失去1 000元时效用值为50,得到3 000元时效用值为120,并且在以下事件上无差别:肯定得到10元或以0.4机会失去1 000元和0.6机会得到3 000元。

B先生在-1 000元与10元时效用值与A同,但他在以下事件上态度无差别:肯定得到10元或0.8机会失去1 000元和0.2机会得到3 000元。问:

(a) A先生10元的效用值有多大?

(b) B先生3 000元的效用值为多大?

(c) 比较A先生与B先生对风险的态度。

13.14 某公司经理的决策效用函数$U(M)$如表13-7所示,他需要决定是否为该公司的财产保火险。据大量社会资料,一年内该公司发生火灾概率为0.001 5,问他是否愿意每年付100元保10 000元财产的潜在火灾损失。

表 13-7

$U(M)$	M
-800	-10 000
-2	-200
-1	-100
0	0
250	10 000

13.15 某人有20 000元钱,可以拿出其中10 000元去投资,有可能全部丧失掉或第二年获得40 000元。

(a) 用期望值法计算当全部丧失掉的概率最大为多少时该人投资仍然有利;

(b) 如该人的效用函数为 $U(M) = \quad M + 50\,000$,重新计算全部丧失掉概率为多大时该人投资仍有利。

13.16 题 13.2 中如果该地方书店货币(M)的效用函数为

$$U(M) = \frac{M + 1\,000}{1\,000}$$

(a) 建立效用值表;

(b) 利用题 13.3 中给出的各种需求量的比例数字重新决定该书店应当订购新书的最优数字。

13.17 某工厂正在考虑是现在还是明年扩大生产规模问题。由于可能出现的市场需求情况不一样,预期利润也不同。已知市场需求为高(E_1)、中(E_2)、低(E_3)的概率及不同方案时的预期利润 (单位:万元)如表 13-8 所示。

表 13-8

方案 \ 概率 \ 事件	E_1	E_2	E_3
	$P(E_1) = 0.2$	$P(E_2) = 0.5$	$P(E_3) = 0.3$
现在扩大	10	8	-1
明年扩大	8	6	1

对该厂来说损失 1 万元效用值为 0,获利 10 万元效用值为 100,对以下事件效用值无差别:

① 肯定得 8 万元或 0.9 概率得 10 万和 0.1 概率失去 1 万;

② 肯定得 6 万元或 0.8 概率得 10 万和 0.2 概率失去 1 万;

③ 肯定得 1 万元或 0.25 概率得 10 万和 0.75 概率失去 1 万。

要求:

(a) 建立效用值表;

(b) 分别根据实际盈利额和效用值按期望值法确定最优决策。

13.18 有一块海上油田进行勘探和开采的招标。根据地震试验资料的分析,找到大油田的概率为 0.3,开采期内可赚取 20 亿元;找到中油田的概率为 0.4,开采期内可赚取 10 亿元;找到小油田概率为 0.2,开采期内可赚取 3 亿元;油田无工业开采价值的概率为 0.1。按招标规定,开采前的勘探等费用均由中标者负担,预期需 1.2 亿元,以后不论油田规模多大,开采期内赚取的利润中标者分成 30%。有 A,B,C 三家公司。其效用函数分别为:

$$\text{A 公司} \quad U(M) = (M + 1.2)^{0.9} - 2$$

$$\text{B 公司} \quad U(M) = (M + 1.2)^{0.8} - 2$$

C 公司 $U(M) = (M + 1.2)^{0.6} - 2$

试根据效用值用期望值法确定每家公司对投标的态度。

13.19 某工程队承担一座桥梁的施工任务。由于施工地区夏季多雨,需停工三个月。在停工期间该工程队可将施工机械搬走或留在原处。如搬走,需搬运费 1 800 元。如留原处,一种方案是化 500 元筑一护堤,防止河水上涨发生高水位的侵袭。若不筑护堤,发生高水位侵袭时将损失 10 000 元。如下暴雨发生洪水时,则不管是否筑护堤,施工机械留在原处都将受到 60 000 元的损失。据历史资料,该地区夏季高水位的发生率是 25%,洪水的发生率是 2%,试用决策树法分析该施工队要不要把施工机械搬走及要不要筑护堤?

13.20 有一种游戏分两阶段进行。第一阶段,参加者需先付 10 元,然后从含 45%白球和 55%红球的罐子中任摸一球,并决定是否继续第二阶段。如继续需再付 10 元,根据第一阶段摸到的球的颜色在相同颜色罐子中再摸一球。已知白色罐子中含 70%蓝球和 30%绿球,红色罐子中含 10%的蓝球和 90%的绿球。当第二阶段摸到为蓝色球时,参加者可得奖 50 元,如摸到的是绿球或不参加第二阶段游戏的均无所得。试用决策树法确定参加者的最优策略。

13.21 某公司有 50 000 元多余资金,如用于某项开发事业估计成功率为 96%,成功时一年可获利 12%,但一旦失败,有丧失全部资金的危险。如把资金存放到银行中,则可稳得年利 6%。为获取更多情报,该公司求助于咨询服务,咨询费用为 500 元,但咨询意见只是提供参考,帮助下决心。据过去咨询公司类似 200 例咨询意见实施结果,情况见表 13-9。

表 13-9

咨询意见 \ 实施结果	投资成功	投资失败	合计
可以投资	154 次	2 次	156 次
不宜投资	38 次	6 次	44 次
合　计	192 次	8 次	200 次

试用决策树法分析:

(a) 该公司是否值得求助于咨询服务;

(b) 该公司多余资金应如何合理使用?

13.22 在题 13.4 中如该钟表公司负责人预测三种需求量的概率见表 13-10。

表 13-10

事　件	E_1	E_2	E_3
概　率	0.15	0.75	0.10

(a) 分别用期望值法和后悔值法决定该公司应采用哪一个设计方案;

(b) 如有一个部门能帮助调查市场的确切需要量,该公司最多愿化多少调查费用?

(c) 进行灵敏度分析,确定用期望值法决策时的转折概率。

13 23 某投资商有一笔投资,如投资于 A 项目,一年后能肯定得到一笔收益 C;如投资于 B 项目,一年后或以概率 p 得到收益 C_1,或以概率$(1 - p)$得到收益 C_2,已知 $C_1 < C < C_2$。试依据 EMV 原则讨论 p 为何值时,投资商将分别投资于 A,B,或两者收益相等。

13 24 一个超市准备进 24 000 个灯泡。如从 A 供应商处进货,每个 4.00 元,当发现有损坏时,供应商不承担责任,只同意仍按批发价以一换一。如从 B 供应商处进货,每个 4.15 元,但当发现有损坏时,供应商同意更换一个只付 1.00 元。灯泡在超市售价 4.40 元,损坏的灯泡超市免费为顾客更换。依据历史资料,这批灯泡损坏率及其概率值见表 13-11 所示,试依据 EMV 原则帮助该超市决策从哪一个供应商处进货。

表 13-11

概率 / 供应商 \ 损坏率	3%	4%	5%	6%
供应商 A	0.10	0.20	0.40	0.30
供应商 B	0.05	0.10	0.60	0.25

13 25 有一种游戏为掷两颗骰子,其规则为当点数和为 2 时,游戏者输 10 元,点数和为 7 或 11 时,游戏者赢 x 元,其他点数时均输 1 元。试依据 EMV 准则,决定当 x 为何值时对游戏者有利。

13 26 A 和 B 两家厂商生产同一种日用品。B 估计 A 厂商对该日用品定价为 6,8,10 元的概率分别为 0.25,0.50 和 0.25。若 A 的定价为 p_1,则 B 预测自己定价为 p_2 时它下一月度的销售额为 $1\,000 + 250(p_2 - p_1)$元。B 生产该日用品的每件成本为 4 元,试帮助其决策当将每件日用品分别定价为 6,7,8,9 元时的各自期望收益值,按 EMV 准则选哪种定价为最优。

13 27 天龙服装厂设计了一款新式女装准备推向全国。如直接大批生产与销售,主观估计成功与失败概率各为 0.5,其分别的获利为 1 200 万元与 -500 万元,如取消生产销售计划,则损失设计与准备费用 40 万元。为稳妥起见,可先小批生产试销,试销的投入需 45 万元,据历史资料与专家估计,试销成功与失败概率分别为 0.6 与 0.4,又据过去情况大批生产销售为成功的例子中,试销成功的占 84%,大批生产销售失败的事例中试销成功的占 36%。试根据以上数据,先计算在试销成功与失败两种情况下,进行大批量生产与销售时成功与失败的各自概率,再画出决策树按 EMV 准则确定最优决策。

13 28　某投资者的效用函数为:

$$U(M) = \begin{cases} M^2, & \text{当 } M \geq 0 \\ M, & \text{当 } M < 0 \end{cases}$$

该投资者有两个投资方案 A **和** B,**其决策树如图** 13-1 **所示**:

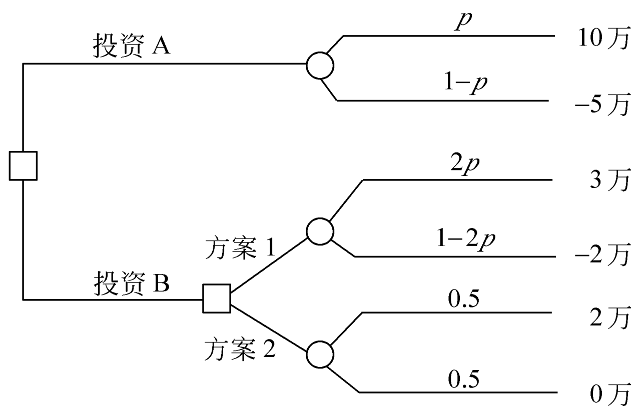


图　13-1

(a) **当** $p = 0.25$ **时**,**依据期望效用值最大准则分析哪一投资方案更优**;

(b) **分析** p **为何值时**$(0 \leq p \leq 0.5)$,**按期望效用值计算得到的最优投资方案与**(a)**的结果同。**

13 29　某甲的效用函数为 $U(x) = \quad x$,**根据表** 13-12 **给出的资料**,**确定** p **为何值时方案** A **具有最大的期望效用值。**

表　13-12

状态 / 方案	损　益　值	
	状态 1	状态 2
A	25	36
B	100	0
C	0	49
概率	p	$1 - p$

第十四章

多目标决策

复习思考题

1．列举实际生产、生活中多目标决策的例子，提出你对解决这些例子的想法。

2．分别通过实例来解释和说明下列概念：

(a) 劣解；

(b) 非劣解；

(c) 非劣点或有效点；

(d) 弱非劣解；

(e) 多目标问题的最优解。

3．通常可以采用哪些方法将多目标问题转化为单目标问题或双目标问题，试分别说明各方法的思路、特点及适用范围。

4．试述用多层序列法处理多目标问题的主要思想，它同目标规划处理多目标问题的方法有何相同及不同之处。

5．什么是直接求非劣解方法的主要思想，这种方法同将多目标问题转化为单目标或双目标问题的求解方法有什么区别？

6．试述求解多目标线性规划问题中逐步法的主要思想和主要步骤，为什么这种方法又被称为对话式的方法。

7．试述求解多目标线性规划问题中妥协约束法的主要思想和主要步骤，对这个方法中的权系数 w，你认为应如何取值。

8．应用层次分析法的关键和前提是构造好问题的层次结构图，试用具体例子来说明该图的构造方法及其中目标层、准则层和措施层的含义。

9．什么是层次分析法中判断矩阵的一致性，它的衡量指标，以及如何理解对高维判断矩阵的一致性引入修正系数来放宽要求。

练习题

14 1　某厂拟从下列 4 种新研制的产品中组织并选择 2 种产品进行生产。由于对市场的需求预测不准,故对每种产品分别估计了在销售好与销售不好情况下的预期利润。上述 4 种产品均需经 A,B 两台设备加工,已知各产品分别在 A,B 设备上的单位加工时间,A,B 设备可用的加工时间及有关预期利润如表 14-1 所示。

要求:

(a) **分别列出各生产方案的多目标决策模型;**

(b) **对目标 f_1 和 f_2 分别求解,并在以 f_1 和 f_2 为坐标轴的直角平面坐标上标出各个方案解的相应点;**

(c) **比较确定劣解、非劣解,以及是否存在最优解。**

表　14-1

单位加工时间 \ 产品 \ 设备	1	2	3	4	工时
A	4	3	6	5	45
B	2	5	4	3	30
销售好时预期利润/(元·件$^{-1}$)	8	6	10	12	
销售不好时预期利润/(元·件$^{-1}$)	5	5	6	4	

14 2　在下列各题中分别求 $V-\max\limits_{x\in R}F(x)$:

(a) $f_1(x)=\dfrac{3}{2}+x-\dfrac{1}{2}x^2$,　　$f_2(x)=\begin{cases}1+x & 0\leq x\leq 1\\ 3-x & 1\leq x\leq 3\end{cases}$

$0\leq x\leq 3$

(b) $f_1(x)=4x_1+6x_2$,　　$f_2(x)=4x_1+8x_2$

$$R:\quad\begin{cases}3x_1+5x_2\leq 15\\ 5x_1+3x_2\leq 15\\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\end{cases}$$

(c) $f_1(x)=\dfrac{3}{2}+x-\dfrac{1}{2}x^2$,　　$f_2(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}x$

$R=[0,3]$

14 3　用线性加权和法中的 α 法求解下述多目标决策问题:

$$f_1(x)=\min\{4x_1+6x_2\}$$
$$f_2(x)=\max\{3x_1+3x_2\}$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 14$$
$$6x_1 + 3x_2 \le 24$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14.4　用理想点法求解下述多目标决策问题:

$$f_1(x) = \max\{4x_1 + 4x_2\}$$
$$f_2(x) = \max\{x_1 + 6x_2\}$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$
$$2x_1 + 6x_2 \le 22$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14.5　应用逐步法求解多目标线性规划问题,要求先求出理想解,再迭代一步:

$\max\ z_1 = x_1 + 3x_2$

$\min\ z_2 = 2x_1 + x_2$

$$5x_1 + 10x_2 \le 50$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14.6　用妥协约束法求解下述多目标线性规划问题:

$\max\ z_1 = 4x_1 + 6x_2$

$\max\ z_2 = 7.2x_1 + 3.6x_2$

$$x_1 \le 4$$
$$x_2 \le 5$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 16$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

14.7　给出如下的判断矩阵,试确定当具有完全一致性时,该矩阵中的 b_{ij} 应取何值?

	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	1	2	1/3	5
B_2	b_{21}	1	b_{23}	b_{24}
B_3	b_{31}	b_{32}	1	b_{34}
B_4	b_{41}	b_{42}	b_{43}	1

14.8　给出如下判断矩阵,试求 B 层各元素对准则 A 的权重,并检验随机一致性指标。

	B_1	B_2	B_3	B_4
B_1	1	1/7	1/3	1/5
B_2	7	1	3	2
B_3	3	1/3	1	1/2
B_4	5	1/2	2	1

14 9 某企业计划开发 4 种产品,但因力量有限,只能分轻重缓急逐步开发。该企业考虑开发产品的准则为:(1) 投产后带来的经济效益;(2) 满足开发所需资金的可能性;(3) 产业政策是否符合。为用层次分析法确定这 4 种产品开发的重要性程度,构造了层次结构图(图 14-1):

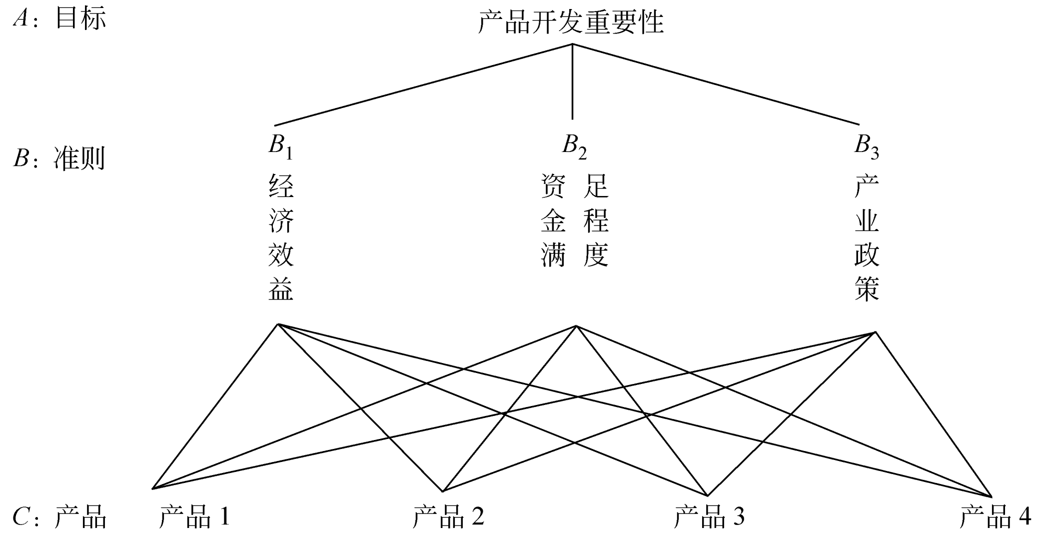


图 14-1

经企业决策层讨论研究及专家咨询论证,得出如下判断矩阵:

A	B_1	B_2	B_3
B_1	1	2	3
B_2	1/2	1	1
B_3	1/3	1	1

B_1	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	1/2	1/7	1/5
C_2	2	1	1/4	1/3
C_3	7	4	1	1
C_4	5	3	1	1

B_2	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	1/2	1/5	1/7
C_2	2	1	1/3	1/5
C_3	5	3	1	1/2
C_4	7	5	2	1

B_3	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	1	2	1/5	1/4
C_2	1/2	1	1/7	1/3
C_3	5	7	1	2
C_4	4	3	1/2	1

试依据上述数据对各产品的重要性进行排序,并进行一致性检验。

习 题 答 案

一、线性规划及单纯形法

复习思考题之 11,其中(a) (b) (d) (f) (g) (i) (j) (l) (q)为正确,(c) (e) (h) (k) (m) (n) (o) (p)为不正确。

1.1 (a) 惟一最优解,$z^* = 3$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$; (b) 无可行解; (c) 有可行解,但 max z 无界; (d) 无可行解; (e) 无穷多最优解,$z^* = 66$; (f) 惟一最优解,$z^* = 30\dfrac{2}{3}$, $x_1 = 20/3$, $x_2 = 8/3$。

1.2 (a) 每季度从 A 处采购 27.27 万吨,从 B 处采购 21.82 万吨,总费用 12 218.2 万元;

(b) 改为每季度从 A 处采购 15 万吨,从 B 处采购 30 万吨,总费用 11 700 万元。

1.3 本题图解见图 1A-1,可行域为 $OABC$。最优解随 C_1 值的变化对照关系如下:

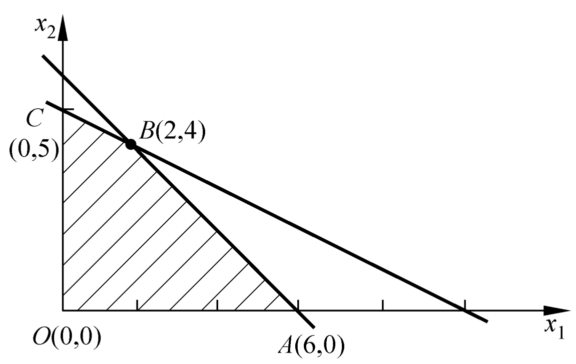


图 1A-1

C_1 值	最优解
$-\infty < C_1 < 1$	A 点
$C_1 = 1$	AB 线段
$1 < C_1 < 2$	B 点
$C_1 = 2$	BC 线段
$2 < C_1 < \infty$	C 点

1.4 (a) 令 $x_1' = -x_1$, $x_3 = x_3' - x_3''$,化为标准型为:

$$\max\ z = 2x_1' + x_2 - 2x_3' + 2x_3'' - Mx_4 + 0x_5$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1' + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 4 \\ x_1' + x_2 - x_3' + x_3'' + x_5 = 6 \\ x_1', x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(b) 令 $x_2' = -x_2$，$x_4 = x_4' - x_4''$，化为标准型为:

$$\max\ z = 2x_1 - x_2' + 3x_3 + x_4' - x_4'' + 0x_5 - Mx_6 + 0x_7 - Mx_8$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 - x_2' + x_3 + x_4' - x_4'' + x_5 = 7 \\ -2x_1 - 3x_2' - 5x_3 + x_6 = 8 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4' - 2x_4'' - x_7 + x_8 = 1 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 8 \end{cases}$$

1.5 略

1.6 (a) (c) 是凸集，(b) 不是。

1.7 表中打△的是基可行解，有 * 号的为最优解。

(a)，(b) 答案如表 1A-1 所示。

表 1A-1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
△	0	0	4	12	18	0	0	0	0	-3	-5	
△	4	0	0	12	6	12	3	0	0	0	-5	
	6	0	-2	12	0	18	0	0	1	0	-3	
△	4	3	0	6	0	27	-9/2	0	5/2	0	0	
△	0	6	4	0	6	30	0	5/2	0	-3	0	
* △	2	6	2	0	0	36	0	3/2	1	0	0	△ *
	4	6	0	0	-6	42	3	5/2	0	0	0	△
	0	9	4	-6	0	45	0	0	5/2	9/2	0	△

1.8 可行解有(a) (c) (e) (f)，基解有(a) (b) (f)，基可行解有(a) (f)。

1.9 (a) 单纯形表的计算见下表，图解法及两者对应关系见图 1A-2。

			10	5	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	9	3	4	1	0	相当 O 点
0	x_4	8	$\boxed{5}$	2	0	1	
	$c_j - z_j$		10	5	0	0	
0	x_3	21/5	0	[14/5]	1	-3/5	相当 Q_1 点
10	x_1	8/5	1	2/5	0	1/5	
	$c_j - z_j$		0	1	0	-2	
5	x_2	3/2	0	1	5/14	-3/14	相当 Q_2 点
10	x_1	1	1	0	-1/7	2/7	
	$c_j - z_j$		0	0	-5/14	-25/14	

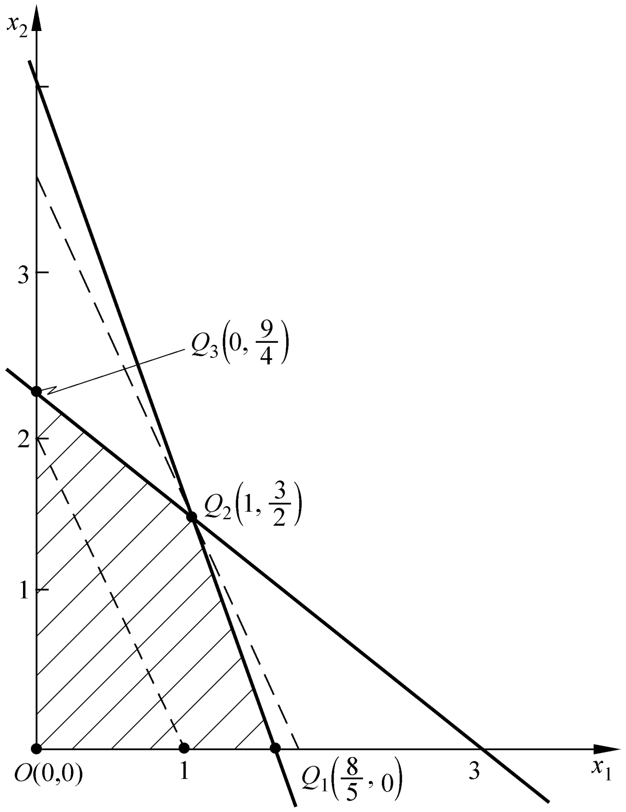


图 1A-2

(b) **略**

1.10　该线性规划问题中

$$p_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\quad p_2=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}\quad p_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad p_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad p_5=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

(a) **因有** $-p_1+p_2+p_4=0$,**故不是凸集顶点**;

(b) $(9,7,0,0,8)$**为非可行域的点**;

(c) **因** p_1,p_2,p_3 **线性相关,故非凸集的顶点。**

1.11　找出其中两个最优解: $X^1=\left(1,\frac{3}{2},0\right)$, $X^2=\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,**最优解一般表达式为**

$$X=\alpha\left(1,\frac{3}{2},0\right)+(1-\alpha)\left(\frac{3}{2},0,\frac{1}{2}\right),\quad(1\geq\alpha\geq0)$$

1.12　(a) $R\,\underline{\quad}\,R'$, $z^*\leq(z^*)'$;

(b) $R\quad R'$, $z^*\geq(z^*)'$;

(c) $R\quad R'$, $z^*=(z^*)'$。

1.13　不可能,因刚从基中被替换出来的变量在下一个单纯形表中,其检验数一定为负。

1.14 若变量 x_k 和 x_k'的检验数均大于零,当选入基变量时,主元素分别为 a_{lk}和 a_{lk}'。若有 $c_l\theta < c_l\theta'$,若选了 x_l 为进入基的变量,则有可能在紧接着的下一次迭代中被替换出来。

1.15 答案如表 1A-2 所示:

表 1A-2

c_1	c_2	c_1/c_2	目标函数达到最优的顶点
>0	>0	$c_1/c_2>3$ $c_1/c_2=3$ $1<c_1/c_2<3$ $c_1/c_2=1$	Q_1 Q_1, Q_2 Q_2 Q_2, Q_3
0	>0	$=0$	Q_3, Q_4
>0	0	—	Q_1
>0	<0	不限	Q_1
<0	>0	不限	Q_4
<0	<0	不限	O

1.16 不可能。因 $p_j'=-p_j''$,故 $p_j'+p_j''=0$。

1.17 (a) 由 L'和 L''分别解出其下界和上界

$$L': \max z = x_1 + 4x_2 \qquad\qquad L'': \max z = 3x_1 + 6x_2$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 8 \qquad\qquad -x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 10 \qquad\qquad 2x_1 + 4x_2 \leq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0$$

由 L'解出下界$\underline{z}^*=32/5$,由 L'解出上界$\overline{z}^*=21$;

(b) 下界$\underline{z}^*=4$,上界$\overline{z}^*=22.5$。

1.18 各题结果分别见表 1A-3(a)~(d)。

表 1A-3(a)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	0	0	1	1/3	-1/3
x_2	6	0	1	0	1/2	0
x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
c_j-z_j		0	0	0	-3/2	-1

表 1A-3 (b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4 10	0	0	1	1	-1	-2
x_1 15	1	0	1/2	0	1/2	1/2
x_2 5	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2
$c_j - z_j$	0	0	-3/2	0	-3/2	-1/2

表 1A-3 (c)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_6 70	11	0	0	12	2	1	0
x_2 5	-5	1	0	2	1	0	-2
x_3 20	-6	0	1	7	2	0	-3
$c_j - z_j$	76	0	0	-66	-22	0	34

max z 无界

(d) 令 $x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 - 2$, $x_3' = x_3 - 3$,代入化简得

$$\max\ z = x_1' + 6x_2' + 4x_3' + 25$$

$$\text{st.}\begin{cases} -x_1' + 2x_2' + 2x_3' \leq 4 \\ 4x_1' - 4x_2' + x_3' \leq 21 \\ x_1' + 2x_2' + x_3' \leq 9 \\ x_1', x_2', x_3' \geq 0 \end{cases}$$

计算得最终单纯形表如表 1A-3(d):

表 1A-3 (d)

	x_1'	x_2'	x_3'	x_4	x_5	x_6
x_2' 1/4	0	1	0	-1/8	-1/8	3/8
x_3' 4	0	0	1	1/2	1/6	-1/6
x_1' 9/2	1	0	0	-1/4	1/12	5/12
$c_j - z_j$	0	0	0	-1	0	-2

有无穷多最优解。其中之一为 $x_1 = \dfrac{11}{2}$, $x_2 = \dfrac{9}{4}$, $x_3 = 7$

1.19 (a) 无可行解;

(b) 有无穷多最优解,例如 $X^1 = (4, 0, 0)$, $X^2 = (0, 0, 8)$;

(c) 有可行解，最优解无界；

(d) 惟一最优解 $X^* = (5/2, 5/2, 5/2, 0)$。

1.20 $a=2$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, $e=4/5$, $f=0$, $g=-5$；表中给出的解为最优解。

1.21 $a=7$, $b=-6$, $c=0$, $d=1$, $e=0$, $f=1/3$, $g=0$；表中给出的解为最优解。

1.22 $a=-3$, $b=2$, $c=4$, $d=-2$, $e=2$, $f=3$, $g=1$, $h=0$, $i=5$, $j=-5$, $k=3/2$, $l=0$；变量 x 的下标为：m——4，n——5，s——1，t——6。

1.23 $\because \dfrac{c_2}{a_2} \leq \dfrac{c_1}{a_1}$，当 $a_1 x_1 = a_2 x_2$ 时，有 $c_1 x_1 \geq c_2 x_2$，故问题解的特点为：

$$\text{对} \begin{cases} \sum_{j=1}^{i} a_j u_j \leq b \\ \sum_{j=1}^{i+1} a_j u_j > b \end{cases} \text{有 } x_j = \begin{cases} u_j & (\text{对 } j \leq i+1) \\ b - \sum_{j=1}^{i} a_j u_j & (\text{对 } j = i+1) \\ 0 & (\text{对 } j > i+1) \end{cases}$$

1.24 (a) X^* 仍为最优解，$\max z = \lambda CX$；

(b) 除 C 为常数向量外，一般 X^* 不再是问题的最优解；

(c) 最优解变为 λX^*，目标函数值不变。

1.25 令 $v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_2, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_n\right)$ 则问题可化为

$$\max z = v$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v & (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 & (i = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

1.26 令 $x_j' = \begin{cases} x_j, & \text{当 } x_j \geq 0 \\ 0, & \text{当 } x_j < 0 \end{cases}$

$x_j'' = \begin{cases} 0, & \text{当 } x_j \geq 0 \\ -x_j, & \text{当 } x_j < 0 \end{cases}$

由此 $x_j = x_j' - x_j''$，$|x_j| = x_j' + x_j''$，代入原问题得

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j' + x_j'')$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j' - x_j'') = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j', x_j'' \geq 0 \end{cases}$$

这是标准型,可用单纯形法求解。

1.27 令 $u_i = y_i - (a + bx_i)$, u_i 可能为正,也可能为负。

设 $u_i' = \begin{cases} y_i - (a+bx_i), & 当\ y_i \geq a+bx_i \\ 0, & 当\ y_i \leq a+bx_i \end{cases}$

$u_i'' = \begin{cases} 0, & 当\ y_i \geq a+bx_i \\ (a+bx_i) - y_i, & 当\ y_i \leq a+bx_i \end{cases}$

$\therefore \quad u_i' - u_i'' = y_i - (a+bx_i)$

$|u_i| = u_i' + u_i'' \qquad u_i'、u_i'' \geq 0$

所以这个问题的线性规划模型为:

$$\min \sum_{i=1}^{n} (u_i' + u_i'')$$

$$\begin{cases} u_i' - u_i'' = y_i - (a + bx_i) & (i = 1, \cdots, n) \\ u_i', u_i'' \geq 0 & (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

1.28 (a) $d \geq 0$, $c_1 < 0$, $c_2 < 0$;

(b) $d \geq 0$, $c_1 \leq 0$, $c_2 \leq 0$, 但 c_1, c_2 中至少一个为零;

(c) $d = 0$, 或 $d > 0$, 而 $c_1 > 0$ 且 $d/4 = 3/a_2$;

(d) $c_1 > 0$, $3/a_2 < d/4$;

(e) $c_2 > 0$, $a_1 \leq 0$;

(f) x_5 为人工变量,且 $c_1 \leq 0$, $c_2 \leq 0$。

1.29 用两阶段法求解时,第一阶段的线性规划模型为:

$$\min z = x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{st.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_6 = 7 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

用单纯形法经两次迭代得表 1A-4:

表 1A-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$1/2$	1	$-5/2$	0	$1/2$	$-1/2$	0
x_3	$3/2$	0	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	0
x_6	0	0	0	0	-3	-1	1
$c_j - z_j$		0	0	0	4	2	0

由于非基变量 x_2 的检验数为零，即问题有无穷多最优解，说明此线性方程组有多余方程。

1.30 (a) 先列出两个新的约束：

$(1)'\ 3x_1 \qquad + 3x_3 - 3x_4 = 9 + 9\beta$

$(2)' \qquad -3x_2 + 3x_3 = -3 + 3\beta$

以 x_1, x_2 为基列出初始单纯形表如表 1A-5 所示。

表 1A-5

			α	2	1	-4
			x_4	x_1	x_2	x_3
α	x_1	$3+3\beta$	1	0	1	-1
2	x_2	$1-\beta$	0	1	-1	0
$c_j - z_j$			0	0	$3-\alpha$	$\alpha-4$

(b) $\beta = 0$ 时，$3 \leq \alpha \leq 4$ 时，最优基不变；

(c) $\alpha = 3$ 时，$-1 \leq \beta \leq 1$ 时最优基不变。

1.31 $\because CX^0 \geq CX^* \qquad \therefore C(X^* - X^0) \leq 0 \qquad (1)$

又 $C^* X^* \geq C^* X^0 \qquad$ 有 $C^*(X^* - X^0) \geq 0 \qquad (2)$

$(2)-(1)$ 得 $(C^* - C)(X^* - X^0) \geq 0$

1.32 (a) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 分别代表于早上 2:00，6:00 直至晚上 22:00 开始上班的护士数，则可建立如下数学模型：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_6 + x_1 \geq 10 & x_3 + x_4 \geq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 15 & x_4 + x_5 \geq 18 \\ x_2 + x_3 \geq 25 & x_5 + x_6 \geq 12 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

解得 $x_1 = 0, x_2 = 15, x_3 = 10, x_4 = 16, x_5 = 2, x_6 = 10$，总计需 53 名护士。

(b) 在(a)的基础上设 $x_1', x_2', \cdots, x_6'$ 分别为早上 2:00，6:00 直至晚上 22:00 开始上班的合同工护士数，则有：

$$\min z = 80\sum_{j=1}^{6} x_j + 120\sum_{j=1}^{6} x_j'$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_6 + x_6' + x_1 + x_1' \geq 10 & x_3 + x_3' + x_4 + x_4' \geq 20 \\ x_1 + x_1' + x_2 + x_2' \geq 15 & x_4 + x_4' + x_5 + x_5' \geq 18 \\ x_2 + x_2' + x_3 + x_3' \geq 25 & x_5 + x_5' + x_6 + x_6' \geq 12 \\ x_j, x_j' \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

解得 $x_j'=0(j=1,\cdots,6)$ x_1 至 x_6 的数字同上。

1.33 设 x_{ij} 为第 i 年初投放到 j 项目的资金数,其数学模型为:

$$\max\ z=1.2x_{31}+1.6x_{23}+1.4x_{34}$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}=300\ 000 \\ x_{21}+x_{23}=1.2x_{11} \\ x_{31}+x_{34}=1.2x_{21}+1.5x_{12} \\ x_{12}\leq 150\ 000 \\ x_{23}\leq 200\ 000 \\ x_{34}\leq 100\ 000 \\ x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

解得 $x_{11}=166\ 666.7$, $x_{12}=133\ 333.3$, $x_{21}=0$, $x_{23}=200\ 000$, $x_{31}=100\ 000$, $x_{34}=100\ 000$, 第三年末本利总和为 580 000 元。

1.34 设 x_{ij} 为生产 i 种糖果所使用的 j 种原材料数, $i=1,2,3$ 分别代表甲、乙、丙, $j=1,2,3$ 分别代表 A, B, C。其数学模型为:

$$\max\ z=(3.4-0.5)(x_{11}+x_{12}+x_{13})+(2.85-0.4)(x_{21}+x_{22}+x_{23})+(2.25-0.3)(x_{31}+x_{32}+x_{33})-2.0(x_{11}+x_{21}+x_{31})-1.5(x_{12}+x_{22}+x_{32})-1.0(x_{13}+x_{23}+x_{33})$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 2\ 000 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}\leq 2\ 500 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}\leq 1\ 200 \\ \dfrac{x_{11}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\geq 0.6 \quad \dfrac{x_{21}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}}\geq 0.15 \\ \dfrac{x_{13}}{x_{11}+x_{12}+x_{13}}\leq 0.2 \quad \dfrac{x_{23}}{x_{21}+x_{22}+x_{23}}\leq 0.6 \\ \dfrac{x_{33}}{x_{31}+x_{32}+x_{33}}\leq 0.5 \quad x_{ij}\geq 0 \end{cases}$$

1.35 略

1.36 设 x_i 为每月买进的杂粮担数, y_i 为每月卖出的杂粮担数,则线性规划模型为:

$$\max\ z=3.10y_1+3.25y_2+2.95y_3-2.85x_1-3.05x_2-2.90x_3$$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
y_1 \le 1\,000 \\
y_2 \le 1\,000 - y_1 + x_1 & \text{存货限制} \\
y_3 \le 1\,000 - y_1 + x_1 - y_2 + x_2 \\
1\,000 - y_1 + x_1 \le 5\,000 & \text{库容限制} \\
1\,000 - y_1 + x_1 - y_2 + x_2 \le 5\,000 \\
x_1 \le \dfrac{20\,000 + 3.10y_1}{2.85} \\
x_2 \le \dfrac{20\,000 + 3.10y_1 - 2.85x_1 + 3.25y_2}{3.05} & \text{资金限制} \\
x_3 \le \dfrac{20\,000 + 3.10y_1 - 2.85x_1 + 3.25y_2 - 3.05x_2 + 2.95y_3}{2.90} \\
1\,000 - y_1 + x_1 - y_2 + x_2 - y_3 + x_3 = 2\,000 & \text{期末库存} \\
x_{1-3} \ge 0,\ y_{1-3} \ge 0
\end{cases}
$$

1.37 用 x_1, x_2, x_3 分别代表大豆、玉米、麦子的种植面积 (hm^2,公顷);x_4, x_5 分别代表奶牛和鸡的饲养数;x_6, x_7 分别代表秋冬季和春夏季多余的劳动力(人日),则有

$$
\max\ z = 175x_1 + 300x_2 + 120x_3 + 400x_4 + 2x_5 + 1.8x_6 + 2.1x_7
$$

$$
\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + 1.5x_4 \le 100 & (\text{土地限制}) \\
400x_4 + 3x_5 \le 15\,000 & (\text{资金限制}) \\
20x_1 + 35x_2 + 10x_3 + 100x_4 + 0.6x_5 + x_6 = 3\,500 & (\text{劳动力限制}) \\
50x_1 + 175x_2 + 40x_3 + 50x_4 + 0.3x_5 + x_7 = 4\,000 \\
x_4 \le 32 & (\text{牛栏限制}) \\
x_5 \le 3\,000 & (\text{鸡舍限制}) \\
x_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, 7)
\end{cases}
$$

1.38 (a) 因 10～12 月份需求总计 450 000 件,这三个月最多只能生产 360 000 件,故需 10 月初有 90 000 件的库存,超过该厂最大仓库容积,故按上述条件,本题无解;

(b) 考虑到生产成本、库存费用和生产能力,该厂 10～12 月份需求的不足只需在 7～9 月份生产出来留用即可,故设

x_i ——第 i 个月生产的产品Ⅰ数量

y_i ——第 i 个月生产的产品Ⅱ数量

z_i, w_i 分别为第 i 个月末产品Ⅰ、Ⅱ库存数

s_{1i}, s_{2i} 分别为用于第 $(i+1)$ 个月库存的原有及租借的仓库容积 (m^3)。则可建立如下模型:

$$\min z = \sum_{i=7}^{12}(4.5x_i + 7y_i) + \sum_{i=7}^{11}(s_{1i} + 1.5s_{2i})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_7 - 30\ 000 = z_7 & y_7 - 15\ 000 = w_7 \\ x_8 + z_7 - 30\ 000 = z_8 & y_8 + w_7 - 15\ 000 = w_8 \\ x_9 + z_8 - 30\ 000 = z_9 & y_9 + w_8 - 15\ 000 = w_9 \\ x_{10} + z_9 - 100\ 000 = z_{10} & y_{10} + w_9 - 50\ 000 = w_{10} \\ x_{11} + z_{10} - 100\ 000 = z_{11} & y_{11} + w_{10} - 50\ 000 = w_{11} \\ x_{12} + z_{11} = 100\ 000 & y_{12} + w_{11} = 50\ 000 \\ x_i + y_i \le 120\ 000 \quad (7 \le i \le 12) \\ 0.2z_i + 0.4w_i = s_{1i} + s_{2i} \quad (7 \le i \le 11) \\ s_{1i} \le 15\ 000 \quad (7 \le i \le 12) \\ x_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i,\ s_{1i},\ s_{2i} \ge 0 \end{cases}$$

1.39 设 x_{ij} 为第 j 季度生产的产品 i 的数量, s_{ij} 为 j 季度末需库存的产品 i 的数量, F_{ij} 为第 j 季度末交货的产品 i 的数量, R_{ij} 为第 j 季度对产品 i 的预订数,则有

$$\min z = \sum_{j=1}^{3}(20F_{1j} + 10F_{2j} + 5F_{3j}) + 5\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}s_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_{1j} + 4x_{2j} + 3x_{3j} \le 15\ 000 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \\ x_{12} = 0 \\ \sum_{j=1}^{4}x_{ij} = \sum_{j=1}^{4}R_{ij} + 150 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \sum_{k=1}^{j}x_{ik} + F_{ij} - s_{ij} = \sum_{k=1}^{j}R_{ik} \quad (i = 1, 2, 3) \\ x_{ij},\ s_{ij},\ F_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

1.40 设 x_i, y_i 分别为第 i 周内用于生产食品Ⅰ和Ⅱ的工人数; z_i 为第 i 周内加班工作的工人数; w_i 为从 i 周开始抽出来培训新工人的原来工人数; n_i 为从 i 周起开始接受培训的新工人数; F_{i1} 和 F_{i2} 分别为第 i 周末未能按期交货的食品Ⅰ和Ⅱ的数量; R_{1i} 和 R_{2i} 分别为第 i 周内对食品Ⅰ和Ⅱ的需求量,则有

$$\min z = \sum_{i=1}^{8}540z_i + \sum_{i=1}^{7}(0.5F_{i1} + 0.6F_{i2}) + \sum_{k=1}^{7}[240 + 240(7-k)]n_k$$

$$400\sum_{t=1}^{i} x_t + F_{i1} = \sum_{t=1}^{i} R_{1t} \quad (t = 1, \cdots, 7)$$

$$400\sum_{i=1}^{8} x_i = 116\ 000$$

$$240\sum_{t=1}^{i} y_t + F_{i2} = \sum_{t=1}^{i} R_{2t} \quad (t = 1, \cdots, 7)$$

$$240\sum_{i=1}^{8} y_i = 79\ 200$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + y_1 + w_1 \leq 50 + 0.5z_1 \\ x_2 + y_2 + w_1 + w_2 = 50 + 0.5z_2 \\ x_i + y_i + w_{i-1} + w_i = 50 + \sum_{t=1}^{i-2} n_t + 0.5z_i \quad (3 \leq i \leq 8) \\ w_8 = 0 \\ \sum_{i=1}^{7} n_i = 50 \\ n_i \leq 3w_i \\ x_i,\ y_i,\ z_i,\ w_i,\ n_i,\ F_{1i},\ F_{2i} \geq 0 \end{cases}$$

1.41　用 $i=1, 2, 3$ 分别代表商品 A,B,C, $j=1, 2, 3$ 分别代表前、中、后舱, x_{ij} 为装于 j 舱位的 i 种商品的数量,目标函数为总运费收入最大,约束条件需分别考虑舱位载重限制,舱位容量限制,商品数量限制及各舱位载重的平衡限制。

1.42　设 x_{ij} $(i=1, \cdots, 4;\ j=1, \cdots, 4-i+1)$为第 i 个月初签订的租借期限为 j 个月的合同租借面积(单位: 100 m^2; r_i 表示第 i 个月所需的仓库面积; c_j 表示每 100 m^2 仓库面积租期为 j 个月的租借费。则问题的线性规划模型为

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4-i+1} c_j x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k-i+1}^{4-i+1} x_{ij} \geq r_k \quad (k = 1,2,3,4) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, 4;\ j = 1, \cdots, 4-i+1) \end{cases}$$

1.43　用 x_1, x_2, x_3 代表钢卷 1,2,3 规格的每月生产量。先算出各种设备每月的有效台时数　每月 $4\frac{1}{3}$周　:

设备 I 为　$4\times21\times8\times4\frac{1}{3}\times0.095 = 2\ 766.2$

设备Ⅱ为　$1\times20\times8\times4\frac{1}{3}\times0.90=624$

设备Ⅲ为　$1\times12\times8\times4\frac{1}{3}\times1.0=416$

再统一每台设备加工不同产品时的工作效率 (t/h), 见表 1A-6:

表　1A-6

钢卷	工序	设　备　效　率
1	Ⅰ	10 t/28 h = 0.357 t/h
	Ⅲ(1)	50 m/min = 30 t/h
	Ⅱ	20 m/min = 12 t/h
	Ⅲ(2)	25 m/min = 15 t/h
2	Ⅰ	10 t/35 h = 0.286 t/h
	Ⅱ	20 m/min = 12 t/h
	Ⅲ	25 m/min = 15 t/h
3	Ⅱ	16 m/min = 9.6 t/h
	Ⅲ	20 m/min = 12 t/h

问题的线性规划模型为

$$\max\ z=250x_1+350x_2+400x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1\leq 1\ 250 \\ x_2\leq 250 \quad \text{需求限制} \\ x_3\leq 1\ 500 \\ \dfrac{x_1}{0.357}+\dfrac{x_2}{0.286}\leq 2\ 766.2 \\ \dfrac{x_1}{30}+\dfrac{x_1}{15}+\dfrac{x_2}{15}+\dfrac{x_3}{12}\leq 416 \quad \text{设备生产能力限制} \\ \dfrac{x_1}{12}+\dfrac{x_2}{12}+\dfrac{x_3}{9.6}\leq 624 \\ x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

1.44　用 $i=1,2$ 分别代表重型和轻型炸弹, $j=1,2,3,4$ 分别代表四个要害部位, x_{ij} 为投到第 j 部位的 i 种型号炸弹的数量, 则问题的数学模型为

$$\min\ z=(1-0.10)^{x_{11}}(1-0.20)^{x_{12}}(1-0.15)^{x_{13}}(1-0.25)^{x_{14}}(1-0.08)^{x_{21}}$$
$$(1-0.16)^{x_{22}}(1-0.12)^{x_{23}}(1-0.20)^{x_{24}}$$

$$\frac{1.5\times 450}{2}x_{11}+\frac{1.5\times 480}{2}x_{12}+\frac{1.5\times 540}{2}x_{13}+\frac{1.5\times 600}{2}x_{14}+$$

$$\frac{1.75\times 450}{3}x_{21}+\frac{1.75\times 480}{3}x_{22}+\frac{2\times 540}{3}x_{23}+\frac{2\times 600}{3}x_{24}+$$

$$\text{st.}\begin{cases}100(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24})\leq 48\ 000\\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leq 32\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leq 48\\ x_{ij}\geq 0\quad i=1,2;\ j=1,\cdots,4\end{cases}$$

式中目标函数非线性,但 $\min z$ 等价于 $\max \lg(1/z)$,因此目标函数可改写为

$$\max \lg(1/z)=0.045\,7x_{11}+0.096\,9x_{12}+0.070\,4x_{13}+0.124\,8x_{14}+0.036\,2x_{21}+$$
$$0.065\,6x_{22}+0.055\,4x_{23}+0.096\,9x_{24}$$

1.45 用 x_{ijkl} 代表第 i 造纸厂供应 j 用户,用 l 种类型机器生产的 k 种类型纸张的数量。则问题的模型为

$$\min z=\sum_i\sum_k\sum_l p_{ikl}\sum_j x_{ijkl}+\sum_i\sum_j\sum_k T_{ijk}\sum_l x_{ijkl}$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_i\sum_l x_{ijkl}\geq D_{jk}\\ \quad (j=1,\cdots,1\ 000;\ k=1,\cdots,5)\\ \sum_k\sum_l r_{klm}\sum_j x_{ijkl}\leq R_{im}\\ \quad (i=1,\cdots,10;\ m=1,\cdots,4)\\ \sum_k c_{kl}\sum_j x_{ijkl}\leq c_{il}\\ \quad (i=1,\cdots,10;\ l=1,2,3)\\ x_{ijkl}\geq 0\end{cases}$$

1.46 用 x_{ij} 代表第 i 季度采购的用于第 j 季度销售的木材数,据此建立模型。

1.47 用 x_j 表示 j 阶段计划新购的工具数,y_j 为 j 阶段末送去慢修的工具数,z_j 为 j 阶段末送去快修的工具数,s_j 为 j 阶段末已使用过但未送去修理的工具数。问题的数学模型为:

$$\min z=\sum_{j=1}^{n}(ax_j+by_j+cz_j)$$

$$\text{st.}\begin{cases}x_j=r_j\quad (j=1,\cdots,q+1)\\ x_j+z_{j-q-1}=r_j\quad (j=q+2,\cdots,p+1)\\ x_j+y_{j-q-1}+z_{j-q-1}=r_j\quad (j=p+2,\cdots,n)\\ y_j+z_j+s_j-s_{j-1}=r_j\quad (j=1,\cdots,n)\\ y_j=0\quad (j\geq n-p)\\ z_j=0\quad (j\geq n-q)\\ x_j,y_j,z_j,s_j\geq 0\quad (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

1.48 用 x_j 表示第 j 种产品的生产数量,使该厂获利最大的线性规划模型为:

$$\max\ z=(50-15)x_1+(100-25)x_2+(45-10)x_3-\frac{200}{20}+\frac{100}{20}\ x_1-$$
$$\frac{200}{20}+\frac{200}{50}\ x_2-\ \frac{100}{10}+\frac{200}{20}\ x_3$$

$$\text{st.}\begin{cases}\dfrac{x_1}{10}+\dfrac{x_2}{20}\leq 50\\ \dfrac{x_1}{20}+\dfrac{x_3}{10}\leq 45\\ \dfrac{x_2}{5}+\dfrac{x_3}{20}\leq 60\\ x_j\geq 0\quad j=1,2,3\end{cases}$$

1.49 用 x_j 表示第 j 年生产出来分配用于作战的战斗机数;y_j 为第 j 年已培训出来的驾驶员总数;(a_j-x_j)为第 j 年用于培训驾驶员的战斗机数;z_j 为第 j 年用于培训驾驶员的战斗机总数。问题的线性规划模型为:

$$\max\ z=nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n$$

$$\text{st.}\begin{cases}z_j=z_{j-1}+(a_j-z_j)\quad (j=1,\cdots,n)\\ y_j=y_{j-1}+kz_{j-1}\quad (j=1,\cdots,n)\\ x_1+x_2+\cdots+x_j\leq y_j\quad (j=1,\cdots,n)\\ x_j,\ y_j,\ z_j\geq 0\quad (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

1.50 设 x_{ij}为用 j $(j=1,2)$种方式完成第 i $(i=1,2,3)$项工作时招收的工人组数(第一项工作用第一种方式完成时,每个工人组内含技工 1 人,如用第二种方式完成时,每个组含技工 1 人、力工 2 人等)。则问题的线性规划模型可写为:

$$\min\ z=100(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{32})+80(2x_{12}+x_{22}+5x_{31}+3x_{32})$$

$$\text{st.}\begin{cases}42x_{11}+(42+2\times 36)x_{12}\geq 10\ 000\\ 42x_{21}+36x_{22}\geq 20\ 000\\ (5\times 36)x_{31}+(42+3\times 36)x_{32}\geq 30\ 000\\ x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{32}\leq 400\\ 2x_{12}+x_{22}+5x_{31}+3x_{32}\leq 800\\ x_{ij}\geq 0\quad (i=1,2,3;\ j=1,2)\end{cases}$$

注:实际招收的技工人数为 $(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{32})$人,力工人数为 $(2x_{12}+x_{22}+5x_{31}+3x_{32})$人。

1.51 设 x_{ij}为 i 种产品在 j 月正常生产时间内产量

x_{ij}' 为 i 种产品在 j 月加班时间内生产量,$j=1,\cdots,6$,其数学模型为:

$$\max\ z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{6}[(s_i - c_i)x_{ij} + (s_i - c_i - c_i')x_{ij}'] - p_3(x_{35} + x_{35}') - 2p_3(x_{36} + x_{36}') - p_4(x_{46} + x_{46}')$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{6}(x_{ij} + x_{ij}') = D_i \quad (i = 1,\cdots,5) & \text{满足订货量} \\ \sum_{i=1}^{5} a_{ij}x_{ij} \le t_j \quad (j = 1,\cdots,6) & t_j \text{ 与 } t_j' \text{分别为 } j \text{ 月内正常与加班工时} \\ \sum_{i=1}^{5} a_{ij}x_{ij}' \le t_j' \quad (j = 1,\cdots,6) \\ x_{11} = x_{12} = 0 \quad x_{11}' = x_{12}' = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{ij},\ x_{ij}' \ge 0 \quad (i = 1,\cdots,5;\ j = 1,\cdots,6) \end{cases}$$

1.52 设 x_1、x_2、x_3 分别为产品Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的产量，产品Ⅰ有 6 种加工方案，即 $(A_1, B_1)(A_1, B_2)(A_1, B_3)(A_2, B_1)(A_2, B_2)(A_2, B_3)$，其各自产量分别用 x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{14}、x_{15}、x_{16} 表示，即 $x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16}$；产品Ⅱ有两种加工方案：$(A_1, B_1)(A_2, B_2)$，其生产量分别用 x_{21}、x_{22} 表示，有 $x_2 = x_{21} + x_{22}$，故有如下数学模型：

$$\max\ z = (1.25 - 0.25)x_1 + (2.0 - 0.35)x_2 + (2.8 - 0.5)x_3 - 0.05(5x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} + 10x_{21}) - 0.03(7x_{14} + 7x_{15} + 7x_{16} + 9x_{22} + 12x_3) - 0.06(6x_{11} + 6x_{14} + 8x_{21} + 8x_{22}) - 0.11(4x_{12} + 4x_{22} + 11x_3) - 0.05(7x_{13} + 7x_{23})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 5x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} + 10x_{21} \le 6\ 000 \\ 7x_{14} + 7x_{15} + 7x_{16} + 9x_{22} + 12x_3 \le 10\ 000 \\ 6x_{11} + 6x_{14} + 8x_{21} + 8x_{22} \le 4\ 000 \\ 4x_{12} + 4x_{22} + 11x_3 \le 7\ 000 \\ 7x_{13} + 7x_{23} \le 4\ 000 \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

二、对偶理论与灵敏度分析

复习思考题之 10 中,(a)(b)(d)(e)(f)(i)(k)为正确,(c)(g)(h)(j)为不正确。

2.1 答案见表 2A-1(a)和(b)

表 2A-1(a)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	10	0	0	1			
2	x_1	15	1	0	1/2			
-1	x_2	5	0	1	-3/2			
	$c_j - z_j$		0	0	-3/2	0	-3/2	-1/2

表 2A-1(b)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-3	x_2	1.8	0	1	0.4	-0.3		0.1	
-2	x_1	0.8	1	0	0.4	0.2		-0.4	
	$c_j - z_j$		0	0	0	-0.5		-0.5	

2.2 $a_{11}=9/2$, $a_{21}=5/2$, $a_{12}=1$, $a_{22}=1$, $a_{13}=4$, $a_{23}=2$; $b_1=8$, $b_2=5$; $c_1=7$, $c_2=4$, $c_3=8$。

2.3 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, $d=12/7$, $e=4/7$, $f=-1/7$, $g=13/7$, $h=23/7$, $i=-50/7$, $j=1$, $k=5$, $l=-12/7$。

2.4 (a) **最优解为** $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=0$, $x_4=5/2$, $x_5=0$, $\max z=50$;

(b) **最优解为** $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=2$, $x_6=0$, $\min z=-16$。

2.5 **先设** $C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $\because A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/4\\ -1/2\\ -7\end{pmatrix}$

$\therefore C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 11/2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & -14 & 1\end{pmatrix}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 5/2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & -6 & 1\end{pmatrix}$

$\because B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$ **有** $C^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/2\\ -2\\ -13\end{pmatrix}$

$\therefore B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 11/26\\ 0 & 1 & -2/13\\ 0 & 0 & -1/13\end{pmatrix}\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}-9/26 & -1/26 & 11/26\\ 8/26 & -2/26 & -4/26\\ 4/26 & 12/26 & -2/26\end{pmatrix}$

2.6 (a) $\max\ w=3y_1-5y_2+2y_3$

$$\text{st.}\begin{cases} y_1+2y_3\leq 3\\ -2y_1+y_2-3y_3=2\\ 3y_1+3y_2-7y_3=-3\\ 4y_1+4y_2-4y_3\geq 4\\ y_1\leq 0,\ y_2\geq 0,\ y_3\ \text{无约束}\end{cases}$$

(b) $\max\ w=15y_1+20y_2-5y_3$

$$\text{st.}\begin{cases} -y_1-5y_2+y_3\geq -5\\ 5y_1-6y_2-y_3\leq -6\\ -3y_1+10y_2-y_3=-7\\ y_1\geq 0,\ y_2\leq 0,\ y_3\ \text{无约束}\end{cases}$$

(c) $\min\ w=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\leq c_j & (j=1,\cdots,n_1)\\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\geq c_j & (j=n_1+1,\cdots,n_2)\\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=c_j & (j=n_2+1,\cdots,n)\\ y_i\geq 0 & (i=1,\cdots,m_1)\\ y_i\ \text{无约束} & (i=m_1+1,\cdots,m_2)\\ y_i\leq 0 & (i=m_2+1,\cdots,m)\end{cases}$$

(d) $\min\ w = \sum_{k=1}^{m} s_k y_k + \sum_{i=1}^{n} p_i z_i$

$$\text{st.}\begin{cases} a_{ik} y_k + b_{ik} z_i \geq c_{ik} & (i = 1, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, m) \\ y_k,\ z_i\ \text{无约束} \end{cases}$$

(e) $\max\ w = \sum_{t=1}^{4} r_t y_t$

$$\text{st.}\begin{cases} y_t \leq c_1 & (t = 1, 2, 3, 4) \\ y_t + y_{t+1} \leq c_2 & (t = 1, 2, 3) \\ y_t + y_{t+1} + y_{t+2} \leq c_3 & (t = 1, 2) \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq c_4 \\ y_t \geq 0 & (t = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

(f) $\min\ w = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_j p_j & (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} d_{ik} z_i = q_k & (k = 1, \cdots, l) \\ z_i \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m) \end{cases}$$

2.7　原问题右端项 b 用珔替换后,新的原问题 P'及对偶问题 D'为

P':　$\max\ z' = CZ$　　　　D':　$\min\ w' = Y$珔

st. $AZ \leq$珔，$Z \geq 0$　　　　st. $YA \leq C$，$Y \geq 0$

设 D'的最优解为珘,因有 C珘 = 珘珔,有 Y^* 是 D'的可行解,故有珘珔 $\leq Y^*$珔,由此 C珘 $\leq Y^*$珔。

2.8　线性规划问题①②③是等价的,写出其对偶问题经对比也完全一致。结论是任何线性规划问题,不管形式上作何变换,其对偶问题是惟一的。

2.9　该问题存在可行解,如 $X = (0, 0, 0)$;又上述问题的对偶问题为:

$\min\ w = 2y_1 + y_2$

$$\text{st.}\begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

由第一个约束条件知对偶问题无可行解,由此可知其原问题无最优解。

2.10　该问题存在可行解,如 $X = (4, 0, 0)$,写出其对偶问题,容易判断无可行解,

由此原问题无最优解。

2.11 (a) 略;

(b) 容易看出原问题和其对偶问题均存在可行解,据对偶理论,两者均存在最优解。

2.12 写出其对偶问题,容易看出 $Y=(1, 1.5)$ 是一个可行解,代入目标函数得 $w=25$。因有 $\max z \leq w$,故原问题最优解不超过 25。

2.13 (a) ∵对偶变量 $Y=C_B B^{-1}$,第 k 个约束条件乘上 λ,即 B^{-1} 的 k 列将为变化前的$\frac{1}{\lambda}$,由此对偶问题变化后的解 $(y_1', y_2', \cdots, y_k', \cdots, y_m')=\left(y_1, y_2, \cdots, \frac{1}{\lambda}y_k, \cdots, y_m\right)$;

(b) 与前类似,$y_r'=\frac{b_r}{b_r+\lambda b_k}y_r$, $y_i'=y_i(i\neq r)$;

(c) $y_i'=\lambda y_i(i=1, \cdots, m)$;

(d) $y_i(i=1, \cdots, m)$不变。

2.14 原问题右端项变为 b_i'后,其对偶问题为:

$$\min z=\sum_{i=1}^{m} b_i' y_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & (j=1, \cdots, n)\\ y_i \geq 0 & (i=1, \cdots, m)\end{cases}$$

由于约束条件不变,$(y_1^*, \cdots, y_m^*)$必为上述问题的可行解。根据对偶理论有:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j' \leq \sum_{i=1}^{m} b_i' y_i^*$$

2.15 (a) 原线性规划问题如下:

$$\max z=6x_1-2x_2+10x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_2+2x_3 \leq 5\\ 3x_1-x_2+x_3 \leq 10\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

(b) 略;

(c) 对偶问题最优解为 $Y^*=(4, 2)$。

2.16 (a) (b)先写出其对偶问题如下:

$$\max w=4y_1+6y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-y_1-y_2 \geq 2\\ y_1+y_2 \leq -1\\ y_1-ky_2=2\\ y_1 \text{ 无约束}, y_2 \leq 0\end{cases}$$

由 $z^* = w^*$ 及互补松弛性质得

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 = 2 \\ 4y_1 + 6y_2 = -12 \end{cases}$$

解得 $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, 代入求得 $k = 1$。

2.17 (a) 略;

(b) 对偶问题最优解为 $Y^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right)$;

(c) 依据 $z^* = w^*$ 及互补松弛性,有 $x_4 = 0$,且

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 19/5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

解得原问题最优解 $X^* = (7/5, 0, 1/5, 0)$。

2.18 (a) 略;

(b) 由 $Y = (4, 5)$ 代入对偶问题约束条件,知这时仅 $y_4 = y_7 = 0$ 为非基变量。根据原问题与对偶问题变量之间的对应关系,相应原问题中 x_2, x_5 为基变量。令原问题中非基变量(含松弛变量) $x_1 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$,有

$$\begin{cases} x_2 + 5x_5 = 19 \\ 4x_2 + x_5 = 57 \end{cases}$$

解得 $x_2 = 14$, $x_5 = 1$。由于 $X = (0, 14, 0, 0, 1)$是原问题可行解,故 X, Y 分别是原问题和对偶问题的最优解。

2.19 写出对偶问题并根据互补松弛性质可求得原问题最优解为 $X^* = (0, 0, 4, 4)$

2.20 (a) 其对偶问题为:

$$\min \ w = 18y_1 + 16y_2 + 10y_3$$

$$\text{st.} \begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 & (1) \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 & (2) \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 6 & (3) \\ y_1 \geq 0, \ y_2、y_3 \text{ 无约束} \end{cases}$$

(b) 设第(1)个约束条件的松弛变量为 y_{s1},第(2)个约束条件的松弛变量为 y_{s2},由原问题用两阶段法求得之最终单纯形表知 $y_{s1} = 0$, $y_{s2} = 1$, $y_1 = 0$,代入约束条件(1)~(3)有

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 = 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - 1 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 = 6 \end{cases}$$

解得 $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 3)$。

2.21 (a) 略;(b) 由互补松弛性质得对偶问题最优解为 $Y^* = (5, 0, 23)$。

2.22 写出对偶问题,并根据互补松弛性质解得对偶问题最优解为 $Y^* = (2, 2, 1, 0)$。

2.23 写出其对偶问题:

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} u_j z_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + z_j \geq c_j \quad (j = 1, \cdots, n) \\ y_i \text{ 无约束}, z_j \geq 0\end{cases}$$

当 $x_j = 0$ 时,有 $z_j = 0$,故 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $\overline{c_j} \leq 0$

当 $0 < x_j < u_j$ 时,由 $x_j > 0$,有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + z_j = c_j$

又由 $x_j < u_j$,有 $z_j = 0$,故 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, $\overline{c_j} = 0$

当 $x_j = u_j$ 时,先由 $x_j > 0$,有 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + z_j = c_j$

又由 $x_j = u_j$,有 $z_j \geq 0$,故 $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j$, $\overline{c_j} \geq 0$

2.24 (a) $\hat{y}_1 = \frac{1}{2} y_1$;(b) 影子价格 y_i 不变,又 x_1 不在最优基中出现,x_1' 也不可能在最优基中出现;(c) 影子价格 y_i 也增大两倍。

2.25 三种资源的影子价格分别为 $\frac{4}{3}, 1, \frac{8}{3}$。

2.26 (a) 其对偶问题为:

$$\min w = 25 y_1 + 20 y_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 6y_1 + 3y_2 \geq 3 & (1) \\ 3y_1 + 4y_2 \geq 1 & (2) \\ 5y_1 + 5y_2 \geq 4 & (3) \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

其最优解为 $y_1^* = 1/5$, $y_2^* = 3/5$

(b) x_2 系数变化后,对偶问题第(2)个约束将相应变为 $2y_1 + 3y_2 \geq 3$,将 y_1^*、y_2^* 代入不满足,故原问题最优解将发生变化;

(c) 相应于新变量 x_4,因有 $2 - (3, 2)\begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = 2 - \frac{9}{5} > 0$,故原问题最优解将发生

变化。

2.27　分别写出两个问题的对偶问题见 L_1 和 L_2：

$$L_1: \max w = Yb \qquad\qquad L_2: \max w = Yd$$

$$\text{st.}\begin{cases} YA \geq C \\ Y \quad \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \text{st.}\begin{cases} YA \geq C \\ Y \quad \geq 0 \end{cases}$$

显然 L_1 的最优解是 L_2 的可行解，由此 L_2 的原问题具有下界。

2.28　用对偶单纯形法求得的最终单纯形表分别见表 2A-2(a)，(b)，(c)。

表　2A-2 (a)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_2	2/5	0	1	-1/5	-2/5	1/5
-2	x_1	11/5	1	0	7/5	-1/5	-2/5
	$c_j - z_j$		0	0	-9/5	-8/5	-1/5

表　2A-2 (b)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-18	x_3	1	1/3	0	1	-1/3	0
-12	x_2	3/2	-1/3	1	0	1/3	-1/2
	$c_j - z_j$		-2	0	0	-2	-6

表　2A-2 (c)

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-1	0	0	1	1	1	1
-3	x_1	4	1	0	-1	0	-1	0
-2	x_2	3	0	1	-1	0	0	-1
	$c_j - z_j$		0	0	-6	0	-3	-2

由于变量 x_4 行的 a_{ij} 值全为非负，故问题无可行解。

2.29　设 w 为迭代前对偶问题的目标函数值，用 x_k 替换 x_r 后，新解的目标函数值为 w'，有

$$w' = w + \theta b_r = w - \theta(-b_r)$$

$$\theta = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} \,\middle|\, a_{rj} < 0 \right\}$$

因 $a_{rj} \geq 0$，故 θ可任意增大不受限制，又 $(-b_r) > 0$，故 w'可无限制减小。

2.30 (a) 其对偶问题为

$$\min\ z = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

(b) 用单纯形法求解原问题时每步迭代结果:

	原问题解	互补的对偶问题解
第一步	(0,0,0,60,40,80)	(0,0,0,-2,-4,-3)
第二步	(0,15,0,0,25,35)	(1,0,0,1,0,-1)
第三步	(0,20/3,50/3,0,0,80/3)	(5/6,2/3,0,11/6,0,0)

(c) 用对偶单纯形法求解对偶问题时每步迭代结果:

	对偶问题解	对偶问题互补的对偶问题解
第一步	(0,0,0,-2,-4,-3)	(0,0,0,60,40,80)
第二步	(1,0,0,1,0,-1)	(0,15,0,0,25,35)
第三步	(5/6,2/3,0,11/6,0,0)	(0,20/3,50/3,0,0,80/3)

(d) 对偶单纯形法实质上是将单纯形法应用于对偶问题的求解,又对偶问题的对偶即原问题,因此(b)、(c)的计算结果完全相同。

2.31 (a) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 68$ 等价于 $\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 34$,因此约束条件(1)只是右端项发生变化。与上题类似,将变化反映到最终单纯形表中,并用对偶单纯形法迭代得到新的最优解为 $X = (52, 4, 0)$, $\max\ z = 368$。

(b) 当 $0 \leq \theta \leq 3$ 时,最优解 $X = (36, 0, 6)$;当 $3 \leq \theta \leq 4$ 时,最优解为 $X = (0, 6, 12)$

2.32 (a) $15/4 \leq c_1 \leq 50$, $4/5 \leq c_2 \leq 40/3$

(b) $24/5 \leq b_1 \leq 16$, $9/2 \leq b_2 \leq 15$

(c) $X^* = (8/5, 0, 21/5, 0)$

(d) $X^* = (11/3, 0, 0, 2/3)$

2.33 (a) $X^* = (8/3, 10/3, 0, 0, 0)$

(b) $X^* = (3, 0, 0, 0, 7)$

(c) $X^* = (10/3, 0, 8/3, 0, 22/3)$

2.34 (a) $c_1 = 6$, $c_2 = -2$, $c_3 = 10$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 1$,

$b_1 = 5$, $b_2 = 10$

(b) $-6 \le t_1 \le 8$

(c) $-5/3 \le t_2 \le 15$

2.35 (a) 以 x_1, x_2, x_3 分别代表甲、乙、丙产品产量,则有 $X^* = (5, 0, 3)$,最大盈利 $z^* = 35$

(b) 产品甲的利润变化范围为[3, 6]

(c) 安排生产丁有利,新最优计划为安排生产产品丁 15 件,而 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

(d) 购进原材料 B15 单位为宜

(e) 新计划为 $X^* = (0, 0, 6)$, $z^* = 30$

2.36 用 x_1, x_2, x_3 分别代表Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品的产量,则有

(a) $X^* = (100/3,\ 200/3,\ 0)$

(b) $X^* = (175/6,\ 275/6,\ 25)$

(c) $6 \le c_1 \le 15$

(d) $-4 \le \theta \le 5$

(e) 该新产品值得安排生产

(f) $X^* = (95/3,\ 175/3,\ 10)$

2.37 (a) $0 \le \theta \le 9/7$ 时, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$

$9/7 \le \theta \le 5$ 时, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$

$\theta \ge 5$ 时, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$

(b) $\theta \le \frac{1}{2}$ 时, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, $z^* = 5 - 2\theta$

$\frac{1}{2} \le \theta \le 1$ 时, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = \theta$, $z^* = 3$

$\theta \ge 1$ 时, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $z^* = 2 + 2\theta$

(c) $\theta < -90$,无可行解

$-90 \le \theta \le -\frac{600}{17}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 30 + \frac{1}{3}\theta$, $z^* = 2\,400 + \frac{80}{3}\theta$

$-\frac{600}{17} \le \theta \le \frac{350}{3}$, $x_1 = 24 + \frac{17}{25}\theta$, $x_2 = 14 - \frac{3}{25}\theta$, $z^* = 2\,200 + 21\theta$

$\theta \ge \frac{350}{3}$, $x_1 = 80 + \frac{1}{5}\theta$, $x_2 = 0$, $z^* = 3\,600 + 9\theta$

(d) $\theta < 0$ 时,无可行解

$0 \le \theta \le 1$, $x_1 = 2\theta$, $x_2 = 5 - 2\theta$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1 - \theta$, $x_5 = 0$, $z^* = 2 - 2\theta$

$1 \le \theta \le 3$, $x_1 = 3 - \theta$, $x_2 = 1 + 2\theta$, $x_3 = -1 + \theta$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $z^* = 0$

$3 \le \theta \le 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 7$, $x_3 = 8 - 2\theta$, $x_4 = 0$, $x_5 = -3 + \theta$, $z^* = -24 + 8\theta$

$\theta > 4$ 时，无可行解

2.38 (a) $0 \leq \theta \leq 2$，$x_1 = 2 + \theta/2$，$x_2 = 6 + \theta/2$，$z^* = 20 + 4\theta + \dfrac{1}{2}\theta^2$

$2 \leq \theta \leq 8$，$x_1 = 6$，$x_2 = 2 + \theta$，$z^* = 12 + 9\theta$

$\theta \geq 8$，$x_1 = 6$，$x_2 = 10$，$z^* = 36 + 6\theta$

(b) $0 \leq \theta \leq 1$，$x_1 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}\theta$，$x_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\theta$，$z^* = \dfrac{17}{2} + 8\theta + \dfrac{3}{2}\theta^2$

$1 \leq \theta \leq 3$，$x_1 = 2 + \theta$，$x_2 = 3$，$z^* = 7 + 10\theta + \theta^2$

$\theta \geq 3$，$x_1 = 3 + \dfrac{2}{3}\theta$，$x_2 = 3$，$z^* = 9 + \dfrac{31}{3}\theta + \dfrac{2}{3}\theta^2$

2.39 将此问题化为标准型并列出单纯形表如表 2A-3:

表 2A-3

			-1	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	5	1	0	0	-1	0	-2
$-\lambda_1$	x_2	3	0	1	0	2	-3	1
$-\lambda_2$	x_3	5	0	0	1	2	-5	6
	$c_j - z_j$		0	0	0	$-1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$	$-3\lambda_1 - 5\lambda_2$	$-2 + \lambda_1 + 6\lambda_2$

使表中解为最优的条件为

$$-1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1/2$$
$$-3\lambda_1 - 5\lambda_2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \geq 0$$
$$-2 + \lambda_1 + 6\lambda_2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 + 6\lambda_2 \leq 2$$

由上述三个不等式围成的图形见图 2A-1 中的 B_1。

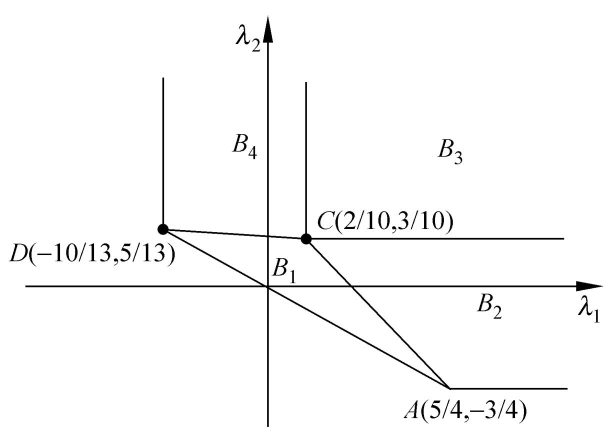


图 2A-1

此问题的可行基除 P_1, P_2, P_3 外,尚有 P_1, P_3, P_4; P_1, P_4, P_6 和 P_1, P_2, P_6。现列出后三个可行基的单纯形表,见表 2A-4:

表 2A-4

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-1	x_1	$13/2$	1	$1/2$	0	0	$-3/2$	$-3/2$
0	x_4	$3/2$	0	$1/2$	0	1	$-3/2$	$1/2$
$-\lambda_2$	x_3	2	0	-1	1	0	-2	$[5]$
$c_j - z_j$			0	$+\frac{1}{2}-\lambda_1-\lambda_2$	0	0	$-\frac{3}{2}-2\lambda_2$	$-\frac{3}{2}+5\lambda$
-1	x_1	$71/10$	1	$1/5$	$3/10$	0	$-21/10$	0
0	x_4	$13/10$	0	$[3/5]$	$-1/10$	1	$-13/10$	0
0	x_6	$2/5$	0	$-1/5$	$1/5$	0	$-2/5$	1
$c_j - z_j$			0	$-\lambda+\frac{1}{5}$	$-\lambda_2+\frac{3}{10}$	0	$-21/10$	0
-1	x_1	$20/3$	1	0	$1/3$	$-1/3$	$-5/3$	0
$-\lambda_1$	x_2	$13/6$	0	1	$-1/6$	$5/3$	$-13/6$	0
0	x_6	$5/6$	0	0	$1/6$	$1/3$	$-5/6$	1
$c_j - z_j$			0	0	$\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\lambda_1-\lambda_2$	$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\lambda_1$	$-\frac{3}{5}-\frac{13}{6}\lambda_1$	0

由表 2A-3,2A-4 可得出如下结论,见表 2A-5:

表 2A-5

基	P_1, P_2, P_3	P_1, P_3, P_4	P_1, P_4, P_6	P_1, P_2, P_6
λ_1, λ_2 的取值约束	$\lambda_1+\lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ $3\lambda_1+5\lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1+6\lambda_2 \leq 2$	$\lambda_1+\lambda_2 \geq \frac{1}{2}$ $\lambda_2 \geq -\frac{3}{4}$ $\lambda_2 \leq \frac{3}{10}$	$\lambda_1 \geq \frac{1}{5}$ $\lambda_2 \geq \frac{3}{10}$	$\lambda_1+6\lambda_2 \geq 2$ $\lambda_1 \leq \frac{1}{5}$ $\lambda_1 \geq -\frac{10}{13}$
相应图 2A-1 中的区域	B_1	B_2	B_3	B_4
$z(\lambda_1, \lambda_2)$实现最小的 λ_1, λ_2 的变化范围	线段 AD $z(\lambda_1, \lambda_2)=5$	A 点 $z(\lambda_1, \lambda_2)=5$	B_3 内任意点 $z(\lambda_1, \lambda_2)=\frac{71}{10}$	D 点 $z(\lambda_1, \lambda_2)=5$

2.40 (a) **当** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ **时，其对偶问题为：**

$$\max\ w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\text{s t .}\begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - ky_2 = 2 \\ y_1\ \text{无约束},\ y_2 \leq 0 \end{cases}$$

由互补松弛性质有

$$-y_1 - y_2 = 2$$

$$y_1 - ky_2 = 2$$

又 $$4y_1 + 6y_2 = -12 \quad (z^* = w^*)$$

解得 $$k = 1$$

(b) **对偶问题最优解为** $y_1^* = 0$，$y_2^* = -2$

(c) **当** $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ **时**，$z(\lambda_1) = -12$

当 $\lambda_1 \geq 1$ **时**，$z(\lambda_1) = -7 - 5\lambda_1$

(d) **当** $\lambda_2 \geq 0$ **时**，$z(\lambda_2) = -12 - 2\lambda_2$

2.41 (a) **见表** 2A-6

表 2A-6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{s1}	x_{s2}
x_1 5	1	0	11/5	14/5	2/5	-1/5
x_2 5	0	1	2/5	3/5	3/10	1/10
$c_j - z_j$	0	0	$c_3 - 5$	$c_4 - 8$	-5	-2

(b) $c_3 \leq 5$，$c_4 \leq 8$

(c) $-50 \leq \lambda \leq 25$

(d) $c_k - (2,3)\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \leq 0 \quad \therefore\ c_k \leq 16$

2.42 (a) $-2 \leq \lambda_1 \leq -1$，$z = \dfrac{27}{4} - \dfrac{9}{4}\lambda_1$

$-1 \leq \lambda_1 \leq \dfrac{1}{2}$，$\quad z = 8 - \lambda_1$

$\dfrac{1}{2} \leq \lambda_1 \leq 2$，$\quad z = 6 + 3\lambda_1$

(b) $-1 \leq \lambda_2 \leq -\dfrac{1}{5}$，$z = 9 + 9\lambda_2$

$-\frac{1}{5} \leq \lambda_2 \leq 1$, $z = 8 + 4\lambda_2$

$1 \leq \lambda_2 \leq 3$, $z = 18 - 6\lambda_2$

2.43 (a) **用矿石** M_1 **为** 10 t, M_2 **为** 225 t, **总费用为** 1.14 **万元**;

(b) **最优决策变为用矿石** M_1 **为** 142.8 t, **矿石** M_3 **为** 85.7 t, **总费用为** 1.13 **万元。**

2.44 (a) **分别用** x_1, x_2, x_3 **代表原稿纸、日记本和练习本的每月生产量。建立线性规划模型并求解得最终单纯形表如表** 2A-7 **所示。**

表 2A-7

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	2 000	0	1	7/3	1/10	-10
x_1	1 000	1	0	-4/3	-1/10	40
$c_j - z_j$		0	0	-10/3	-1/10	-50

(b) **临时工影子价格高于市场价格，故应招收。用参数规划计算确定招** 200 **人为最适宜。**

2.45 (a) **将** 5 000 **册第** 4 **种书所需工时扣除，并将其利润降为** 1, **重新求解得** $x_2 = 35/3$, $x_4 = 5$, $z^* = 31\frac{2}{3}$ (**单位为千元**);

(b) $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, $x_4 = 8$, $z^* = 33$;

(c) $x_1 = 43/5$, $x_2 = 2$, $x_4 = 38/5$, $z^* = 32\frac{2}{5}$;

(d) **书的售价应高于** 8 **元。**

三、运 输 问 题

复习思考题之 10,**其中**(c) (d) (e) (g) (h)**为正确**,(a) (b) (f)**为不正确。**

3.1 (a) **可作为初始方案;**

(b) **中非零元素少于** 9(**产地** + **销地** - 1),**不能作为初始方案;**

(c) **中存在以非零元素为顶点的闭回路,不能作为初始方案。**

3.2 **略**

3.3 **各题的最优解如下**(**见表** 3A-1(a)～(d))

表 3A-1(a)

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	产量
1	35	15			50
2		25	20	15	60
3	25				25
销 量	60	40	20	15	

表 3A-1(b)

产地 \ 销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1				10	90	100
2	50		50			100
3		70	10	70		150
销 量	50	70	60	80	90	

表　3A-1(c)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1		2			3	5
2	2			3	2	7
3			5	1		6
销　　量	2	2	5	4	5	

表　3A-1(d)

产地＼销地	甲	乙	丙	丁	戊	产量
1			20			20
2	20			10		30
3	5	25				30
4	0				20	20
销　　量	25	25	20	10	20	

3.4　由题意其数学模型为

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1,\cdots,m) & (1)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1,\cdots,n) & (2)\\ x_j \geq 0\end{cases}$$

(1)**式可改写为** $-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq -a_i$,**则上述问题的对偶问题为**:

$$\max\ w = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

$$\text{st.}\begin{cases} v_j \leq u_i + c_{ij} \quad (i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n)\\ u_i, v_j \geq 0\end{cases}$$

对偶变量 u_i, v_j **的经济意义分别为单位物资在** i **产地和** j **销地的价格。对偶问题的经济意义为:如该公司欲自己将该物资运至各地销售,其差价不能超过两地之间的运价(否则买主将在** i **地购买自己运到** j **地)。在此条件下,希望获得利最大。**

3.5　题中给出的调运方案有 11 **个非零元素,不是基可行解,应先调整得到基可行解,然后通过求检验数,判别是否最优。**

3.6　化肥的最优调运方案见表 3A-2:

表 3A-2

	甲	乙	丙	丁	供应量
A		4		3	7
B	6	2			8
C		0	3		3
需 求 量	6	6	3	3	

3.7 增加一个假想需求部门丁，最优调拨方案见表 3A-3，**表中将** A **调拨给丁** 500 **件，表明玩具** A **有** 500 **件销不出去。**

表 3A-3

	甲	乙	丙	丁	可供量
A		500		500	1 000
B	1 500	500			2 000
C		500	1 500		2 000
销 售 量	1 500	1 500	1 500	500	

3.8 (a) **最优调拨方案见表** 3A-4。

表 3A-4

	A	B	C	D	E	产量
Ⅰ	15	35				50
Ⅱ	10		60	30		100
Ⅲ		80			70	150
销 量	25	115	60	30	70	

(b) **根据题设条件重新列出这个问题的产销平衡表与单位运价表见表** 3A-5。

表 3A-5

	A	B	C	D	E	产量
Ⅰ	10	15	20	20	40	50
Ⅱ	20	40	15	30	30	100
Ⅲ	30	35	40	55	25	130
Ⅳ(假想)	0	M	0	0	0	20
销 量	25	115	60	30	70	

重新求出最优调拨方案见表 3A-6。

表　**3A-6**

	A	B	C	D	E	产量
Ⅰ		50				50
Ⅱ	25		60	15		100
Ⅲ		65			65	130
Ⅳ				15	5	20
销　量	25	115	60	30	70	

3.9　(a) 最优的调拨方案见表 3A-7。

表　**3A-7**

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	产量
A_1	20	30					50
A_2		20	20				40
A_3	10			39		11	60
A_4				1	30		31
销　量	30	50	20	40	30	11	

(b) 保持最优调拨方案不变的 c_{ij} 变化范围为: $c_{13} \geq 1; c_{35} \geq 3; c_{41} \geq 2$

3.10　由题给出的条件,数学模型可写为

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{st.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \cdots, m) & (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \cdots, n) & (2) \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

(1)式可改写为 $-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq -a_i$,写出上述问题的对偶问题

$$\max\ z' = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

$$\text{st.}\ \begin{cases} v_j \leq u_i + c_{ij} \quad (i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n) \\ u_j,\ v_j \geq 0 \end{cases}$$

对偶变量 u_i 的经济意义为在 i 产地单位物资的价格, v_j 的经济意义为在第 j 销地单位物资的价格。对偶问题的经济意义为:如该公司欲自己将该种物资运至各地销售,其差价不能超过两地之间的运价(否则买主将在 i 地购买自己运至 j 地),在此条件下,希望获利为最大。

3.11 将 2→B 的单位运价改为 M,计算检验数并进行调整,其新的最优方案见表 3A-8:

表 3A-8

	A	B	C	D	E	产量
1			4	5		9
2	3				1	4
3		5		1	2	8
销　　量	3	5	4	6	3	

3.12 依据表 3-12 和表 3-13 求出各空格处检验数见表 3A-9。

表 3A-9

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$k-3$		$k+10$	
A_2				$10-k$
A_3		$24-k$	17	$18-k$

使表中检验数全部大于等于零时有 $3\leq k\leq 10$。

3.13 因 (A_4, B_2) 格检验数为 0,从该空格寻找闭回路调整可得另一最优解,将两个不同最优解对应格数字相加除以 2,即得第三个最优解。

3.14 (a) 增加一个假想销地 B_4,得最优调运方案见表 3A-10。

表 3A-10

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1		8			8
A_2			5	2	7
A_3	4	0	0		4
销　量	4	8	5	2	

(b) $c_{11} \geq 0$; (c) $2 \leq c_{23} \leq 4$

3.15 $0 \leq c_{12} \leq 2$, $c_{41} \geq 2$, $c_{35} \geq 3$。

3.16 增加假想销地 D,**销量为** 20。**将产地分列为** 1, 2, 2′, 3, 3′, **其中** 2′**与** 3′**的物资必须全部运出**,**不准分给** D,**由此将表** 3-20 **改列成下表**,**见表** 3A-11,**再用表上作业法求最优方案**。

表 3A-11

产地＼销地	A	B	C	D	产量
1	1	2	2	0	20
2	1	4	5	0	2
2′	1	4	5	M	38
3	2	3	3	0	3
3′	2	3	3	M	27
销　　量	30	20	20	30	

3.17 同上题类似,**先重列这个问题的产销平衡表和单位运价表见表** 3A-12,**再用表上作业法求最优解见表** 3A-13。

表 3A-12

	I	**II**	**III**	**III′**	**IV**	**V**	**VI**	**产量**
甲	-0.3	-0.8	-0.3	-0.3	-0.6	-0.1	-0.7	200
乙	-0.3	-0.2	0.5	0.5	-0.3	0.4	-0.4	300
丙	-0.2	-0.6	-0.4	-0.4	-0.4	-0.1	-0.5	400
丁	0.1	-0.5	-0.1	-0.1	-0.1	0.4	0.3	100
戊(假想)	0	0	0	M	M	0	0	150
销　　量	200	150	300	100	100	150	150	

表 3A-13

	I	**II**	**III**	**III′**	**IV**	**V**	**VI**	**产量**
甲		50					150	200
乙	200				100		0	300
丙			300	100				400
丁		100		0				100
戊(假想)			0			150		150
销　　量	200	150	300	100	100	150	150	

3.18 仓库总容量为 300 t,各地区需要量总计 290 t。仓库有 30 t 装不满,各地区有 20 t 需要不能满足。可虚设一库容 20 t 的仓库 A_4 来满足需要,相应虚设一地区 B_6 来虚购仓库中未装进的 30 t 糖。由此列出产销平衡表与单位运价表见表 3A-14。

表 3A-14

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	供应
A_1	10	15	20	20	40	0	50
A_2	20	40	15	30	30	0	100
A_3	30	35	40	55	25	0	150
A_4	0	0	0	0	0	M	20
需　求	25	105	60	30	70	30	

再从表 3A-14 按表上作业法求最优解。

3.19 参考题 3.15 或 3.16 的解法,略。

3.20 设 x_{ij} 为第 i 年生产于第 j 年交货的货轮数,c_{ij} 为相应的货轮成本(生产费 + 存贮费),则该问题可列出如下的产销平衡表与单位运价表,见表 3A-15。

表 3A-15

	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 3 年末贮存	多余	产量
期初贮存	0	40	80	120	0	2
第 1 年正常生产数	500	540	580	620	0	2
第 1 年加班生产数	570	610	650	690	0	3
第 2 年正常生产数	M	600	640	680	0	4
第 2 年加班生产数	M	670	710	750	0	2
第 3 年正常生产数	M	M	550	590	0	1
第 3 年加班生产数	M	M	620	660	0	3
需要量	3	3	3	1	7	

3.21 汽车的最优调度实质上就是使运输量损失(空车行驶)的 t · km 最少。先列出各点汽车的平衡表,见表 3A-16,表中“ + ”号表示该点产生空车,“ - ”号表示需要调进空车。

表　3A-16

	出车数	来车数	平衡结果
A_1	19	27	+8
A_2	20	10	-10
A_3	19	14	-5
A_4	15	11	-4
A_5	2	5	+3
A_6	4	14	+10

平衡结果 A_1，A_5，A_6 除装运自己物资外，可多出空车 21 车次，A_2，A_3，A_4 缺 19 车次。除 2 车次直接调回车库外，其余按最少空驶调拨，可据此列出产销平衡表并求最优解。

3.22　用 x_j 表示每期（半年一期）的新购数，y_{ij} 表示第 i 期更换下来送去修理用于第 j 期的发动机数。显然当 $j > i+1$ 时，应一律送慢修，c_{ij} 为相应的修理费。每期的需要数 b_j 为已知，而每期的供应量分别由新购与大修送回来的满足。如第 1 期拆卸下来的发动机送去快修的可用于第 2 期需要，送去慢修的可用于第 3 期及以后各期的需要。因此每期更换下来的发动机数也相当于供应量，由此列出这个问题用运输问题求解时的产销平衡表与单位运价表见表 3A-17。

表　3A-17

	1	2	3	4	5	6	库存	供应量
新购	10	10	10	10	10	10	0	660
第 1 期送维修的	M	2	1	1	1	1	0	100
第 2 期送维修的	M	M	2	1	1	1	0	70
第 3 期送维修的	M	M	M	2	1	1	0	80
第 4 期送维修的	M	M	M	M	2	1	0	120
第 5 期送维修的	M	M	M	M	M	2	0	150
需求量	100	70	80	120	150	140	520	

3.23　这是一个转运问题，先列出产销平衡表与单位运价表见表 3A-18，再用表上作业法求最优解。

表 3A-18

	甲	乙	A	B	C	产量
甲	0	12	10	14	12	195
乙	10	0	15	12	18	180
A	10	15	0	14	11	125
B	14	12	10	0	4	125
C	12	18	8	12	0	125
销 量	125	125	160	165	175	

3.24 本题总供给 530,**总需求为** 550,D **为假想供应点,供应量为** 20,**由** A,B,C **至各点运费可由图** 3-1 **中按两点间连线的最小费用计算,由** D **点供应量实际为短缺量,故按罚款数列入。由此可建立如表** 3A-19 **所示的产销平衡表及单位运价表。**

表 3A-19

零售点 仓库	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	供应量
A	4	8	8	19	11	6	22	20	200
B	14	7	7	16	12	16	23	17	170
C	20	19	11	14	6	15	5	10	160
D	10	8	5	10	10	8	5	8	20
需求量	75	60	35	70	100	40	90	80	

四、目 标 规 划

复习思考题之 5,其中(a)为正确,(b) (c) (d)均为不正确。

4.1 (a) 如图 4A-1 所示,满意解为图中各点:$O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(6,1)$, $C(2,3)$, $D(0,2)$所围成的区域

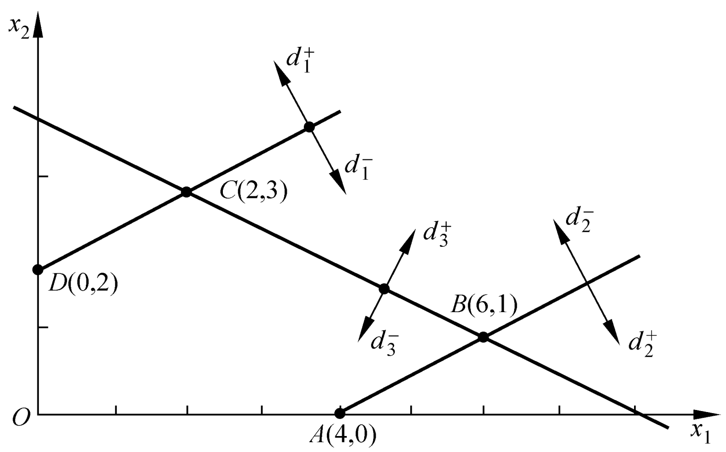


图 4A-1

(b) 满意解为由 $X_1=(3,3)^T$ 和 $X_2=(3.5, 1.5)^T$ 所连线段

(c) 满意解为点 $X=(2, 2)^T$

(d) 满意解为点 $X=(2, 2)^T$

4.2 (a) 满意解为 $X_1=(1, 0)^T$, $X_2=(3, 0)^T$ 所连线段

(b) 满意解为 $X=(1, 0)^T$

(c) 满意解为 $X=(3, 0)^T$

(d) 满意解为 $X=(3,0)^T$

4.3 最终单纯形表如下:

(a) 如表 4A-1 所示:

表 4A-1

$c_j \rightarrow$			0	0	0	p_1	0	0	p_2	p_3	p_3
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_3	10			1	1	-1	-1	1	-2	2
0	x_1	10	1			-1/2	1/2	1	-1	3/2	-3/2
0	x_2	20		1		3/2	-3/2	-2	2	-5/2	5/2
$c_j - z_j$		p_1				1					
		p_2							1		
		p_3								1	1

(b) 如表 4A-2 所示:

表 4A-2

$c_j \rightarrow$			0	0	p_1	p_4	$5p_3$	0	$3p_3$	0	0	p_2
c_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
0	x_2	30		1			-1	1			1	-1
0	x_1	60	1				1	-1			-1	1
$3p_3$	d_3^-	15					1	-1	1	-1	-1	1
p_4	d_1^+	10			-1	1					1	-1
$c_j - z_j$		p_1			1							
		p_2										1
		p_3					2	3		3	3	-3
		p_4			1						-1	1

4.4 (a) 满意解为 $X = \left(\frac{5}{8}, \frac{165}{8}\right)^T$, $d_i^- = d_i^+ = 0$, 最终单纯形表如表 4A-3 所示。

表 4A-3

$c_j \rightarrow$			0	0	0	p_1	0	0	p_2	p_3	0
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
p_2	d_2^+	0			-11/5	1/5	-1/5	-1	1		
0	x_2	165/8		1	5/4	3/20	-3/20			1/16	-1/16
0	x_1	5/8	1		9/20	-1/20	1/20			1/16	-1/16
$c_j - z_j$		p_1				1					
		p_2			11/5	-1/5	1/5	1			
		p_3								1	

(b) 满意解为 $X = (15/16,\ 335/16)^{\mathrm{T}}$, $d_i^- = d_i^+ = 0$

(c) 满意解为 $X = (5/8,\ 165/8)^{\mathrm{T}}$, $d_i^- = d_i^+ = 0$

(d) 满意解为 $X = (5/8,\ 165/8)^{\mathrm{T}}$, $d_2^- = 25$,其余 $d_i^- = 0$, $d_i^+ = 0$

4.5 (a) 满意解为 $X = (0, 35)^{\mathrm{T}}$, $d_1^- = 20$, $d_3^- = 115$, $d_4^- = 95$,其余 $d_i^- = d_i^+ = 0$,最终单纯形表如表 4A-4 所示。

表 4A-4

	$c_j \rightarrow$		0	0	p_3	p_1	0	p_1	p_2	0	$2p_2$	
c_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+
p_3	d_1^-	20	1		1	-1						
0	x_2	35		1			1	-1				
p_2	d_3^-	115	-5				-3	3	1	-1		
$2p_2$	d_4^-	95	1				1	-1			1	-1
$c_j - z_j$		p_1				1		1				
		p_2	3				1	-1		1		2
		p_3	-1									

(b) 满意解为 $X = \left(0, 73\dfrac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$, $d_1^- = 20$, $d_2^- = 5/3$, $d_4^- = 133\dfrac{1}{3}$,其余 $d_i^- = d_i^+ = 0$。

(c) 满意解为 $X = (0, 35)^{\mathrm{T}}$, $d_1^- = 20$, $d_2^- = 115$, $d_4^- = 95$, $d_5^- = 27$,其余 $d_i^- = d_i^+ = 0$。

(d) 满意解不变。

4.6

$$\min\ z = p_1 \sum_{i=1}^{m} d_i^- + p_2 d_{m+1}^-$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + d_{m+1}^- - d_{m+1}^+ = z^* \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n);\ d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, m+1) \end{cases}$$

4.7 糖果厂生产计划优化的目标规划模型可写为

$$\min\ z = p_1 d_1^- + p_2 (d_2^- + d_3^+ + d_4^- + d_5^+ + d_6^+) + p_3 (d_7^- + d_7^+ + d_8^- + d_8^+ + d_9^- + d_9^+)$$

$$
\text{st.}\begin{cases}
0.9x_{11}+1.4x_{12}+1.9x_{13}+0.45x_{21}+0.95x_{22}+1.45x_{23} \\
\quad -0.05x_{31}+0.45x_{32}+0.95x_{33}+d_1^- - d_1^+ = 4\,500 \\
x_{11}-0.6(x_{11}+x_{12}+x_{13})+d_2^- - d_2^+ = 0 \\
x_{13}-0.2(x_{11}+x_{12}+x_{13})+d_3^- - d_3^+ = 0 \\
x_{21}-0.15(x_{21}+x_{22}+x_{23})+d_4^- - d_4^+ = 0 \\
x_{23}-0.6(x_{21}+x_{22}+x_{23})+d_5^- - d_5^+ = 0 \\
x_{31}-0.5(x_{31}+x_{32}+x_{33})+d_6^- - d_6^+ = 0 \\
x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_7^- - d_7^+ = 2\,000 \\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_8^- - d_8^+ = 2\,500 \\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_9^- - d_9^+ = 1\,200 \\
x_{ij}\geq 0 \quad (i=1,2,3;\ j=1,2,3);\ d_k^-,d_k^+\geq 0 \quad (k=1,\cdots,9)
\end{cases}
$$

4.8　设生产电视机 A 型为 x_1 台,B 型为 x_2 台,C 型为 x_3 台,该问题的目标规划模型为:

$$
\min\ z=p_1\cdot d_1^- + p_2\cdot d_2^- + p_3\cdot d_3^+ + p_4(d_4^- + d_4^+ + d_5^- + d_5^+ + d_6^- + d_6^+)
$$

$$
\text{st.}\begin{cases}
500x_1+650x_2+800x_3+d_1^- - d_1^+ = 1.6\times 10^4 \\
6x_1+\ \ 8x_2+\ \ 10x_3+d_2^- - d_2^+ = 200 \\
d_2^+ + d_3^- - d_3^+ = 24 \\
x_1+d_4^- - d_4^+ = 12 \\
x_2+d_5^- - d_5^+ = 10 \\
x_3+d_6^- - d_6^+ = 6 \\
x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0;\ d_i^-,\ d_i^+\geq 0 \quad (i=1,\ \cdots,\ 6)
\end{cases}
$$

4.9　设 x_A 为分配给 A 县的救护车数,x_B 为分配给 B 县的救护车数量。

(a) **其目标规划模型为:**

$$
\min\ z=p_1d_1^+ + p_2d_2^+ + p_3d_3^+
$$

$$
\text{st.}\begin{cases}
20x_A+20x_B+d_1^- - d_1^+ = 400 \\
40-3x_A+d_2^- - d_2^+ = 5 \\
50-4x_B+d_3^- - d_3^+ = 5 \\
x_A,x_B\geq 0;\ d_i^-,d_i^+\geq 0 \quad (i=1,2,3)
\end{cases}
$$

求解得 $x_A=11\dfrac{2}{3},\ x_B=9\dfrac{1}{3}$

(b) **目标规划模型中约束条件不变,目标函数变为** $\min\ z=p_1d_2^+ + p_2d_3^+ + p_3d_1^+$,**求**

解结果得 $x_A = 11\frac{2}{3}$, $x_B = 11\frac{1}{4}$。

4.10 设种植玉米 x_1 亩,大豆 x_2 亩,小麦 x_3 亩,则该问题的数学模型为:

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3 (d_3^- + d_3^+) + p_4 d_4^+ + p_5 d_5^+ + p_6 d_6^+$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \times 10^4 \\ 120x_1 + 240x_2 + 245x_3 + d_1^- - d_1^+ = 350 \times 10^4 \\ 1\,000x_1 + 400x_2 + 700x_3 + d_2^- - d_2^+ = 2\,500 \times 10^4 \\ 700x_3 + d_3^- - d_3^+ = 1\,000 \times 10^4 \\ 400x_2 + d_4^- - d_4^+ = 400 \times 10^4 \\ 1\,000x_1 + d_5^- - d_5^+ = 1\,200 \times 10^4 \\ 0.12x_1 + 0.20x_2 + 0.15x_3 + d_6^- - d_6^+ = 5\,000 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0,\ d_i^-,\ d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

4.11 设 x_{ij} 为从 i 产地调运给 j 工厂的煤炭数量,a_i 为 i 产地产量,b_j 为 j 工厂需要量,c_{ij} 为从 i 产地调给 j 厂的单位运价。其目标规划数学模型为:

$$\min z = p_1 d_1^- + p_2 d_2^- + p_3 \sum_{j=1}^{4} d_{2+j}^- + p_4 d_7^-$$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \cdots, 4) \\ \sum_{j=1}^{4} x_{1j} + d_1^- - d_1^+ = a_1 \\ x_{34} + d_2^- - d_2^+ = b_4 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_{2+j}^- - d_{2+j}^+ = b_j \quad (j = 1, \cdots, 4) \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + d_7^- - d_7^+ = 80 \\ x_{ij} \geq 0 \quad d_k^-, d_k^+ \geq 0 \quad (k = 1, \cdots, 7) \end{cases}$$

4.12 设 x_i 为 i 季度正常生产的船只,y_i 为 i 季度加班时间内生产的船只,S_i 为 i 季度末库存数($S_0 = 0$)。本题的目标规模模型为:

$$\min z = p_1 \sum_{i=1}^{4} d_i^- + p_2 \sum_{i=1}^{4} d_{i+4}^+ + p_3 d_9^-$$

$$
\text{s.t.}\left\{\begin{aligned}
&x_1 + y_1 + d_1^- - d_1^+ = 16\\
&x_2 + y_2 + S_1 + d_2^- - d_2^+ = 17\\
&x_3 + y_3 + S_2 + d_3^- - d_3^+ = 15\\
&x_4 + y_4 + S_3 + d_4^- - d_4^+ = 18\\
&S_i + d_{i+4}^- - d_{i+4}^+ = 2 \quad (i = 1,2,3,4)\\
&\sum_{i=1}^{4} (p_i x_i + q_i y_i) + d_9^- - d_9^+ = 355\\
&S_i = x_i + y_i + S_{i-1} - t_i\,(i = 1,\cdots,4)(t_i \text{ 为 } i \text{ 季度交货量})\\
&x_i, y_i \geq 0 \quad (i = 1,\cdots,4);\ d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i = 1,\cdots,9)
\end{aligned}\right.
$$

4.13 设 x_{ijk} 为集团从 i 类($i = 1,\cdots,6$)人员中录用的分配从事 j 专业且到 k 城工作的职员数。$j = 1,2,3$,以 1 代表生产,2 代表营销,3 代表财务。则问题的目标规划模型可写为:

$$
\min z = p_1 \sum_{i=1}^{3} d_i^- + d_i^+ + p_2 \sum_{i=4}^{6} d_i^- + p_3 d_7^-
$$

$$
\text{s.t.}\left\{\begin{aligned}
&x_{111} + x_{112} + x_{121} + x_{122} \leq 30\\
&x_{221} + x_{222} + x_{231} + x_{232} \leq 30\\
&x_{311} + x_{312} + x_{331} + x_{332} \leq 30\\
&x_{411} + x_{412} + x_{431} + x_{432} \leq 30\\
&x_{521} + x_{522} + x_{531} + x_{532} \leq 30\\
&x_{631} + x_{632} \leq 30\\
&x_{111} + x_{112} + x_{311} + x_{312} + x_{411} + x_{412} + d_1^- - d_1^+ = 45\\
&x_{121} + x_{122} + x_{221} + x_{222} + x_{521} + x_{522} + d_2^- - d_2^+ = 50\\
&x_{231} + x_{232} + x_{331} + x_{332} + x_{431} + x_{432} + x_{531} + x_{532} +\\
&\quad x_{631} + x_{632} + d_3^- - d_3^+ = 75\\
&0.2(x_{111} + x_{112} + x_{311} + x_{312}) - 0.8(x_{411} + x_{412}) +\\
&\quad d_4^- - d_4^+ = 0\\
&0.2(x_{221} + x_{222}) - 0.8(x_{121} + x_{122} + x_{521} + x_{522}) +\\
&\quad d_5^- - d_5^+ = 0\\
&0.2(x_{431} + x_{432} + x_{531} + x_{532} + x_{631} + x_{632}) -\\
&\quad 0.8(x_{231} + x_{232} + x_{331} + x_{332}) + d_6^- - d_6^+ = 0\\
&0.2(x_{111} + x_{121} + x_{221} + x_{231} + x_{312} + x_{332} + x_{412} +\\
&\quad x_{432} + x_{521} + x_{531} + x_{632}) - 0.8(x_{112} + x_{122} +\\
&\quad x_{222} + x_{232} + x_{311} + x_{331} + x_{411} + x_{431} +\\
&\quad x_{522} + x_{532} + x_{631}) + d_7^- - d_7^+ = 0\\
&x_{ijk} \geq 0 \quad (i = 1,\cdots,6;\ j = 1,\cdots,3;\ k = 1,2)\\
&d_l^-, d_l^+ \geq 0 \quad (l = 1,\cdots,7)
\end{aligned}\right.
$$

五、整 数 规 划

复习思考题之8,**其中**(b) (e) (g) (h) (i)**为正确**,(a) (c) (d) (f)**为不正确**。

5.1 **当不考虑整数约束,求解相应线性规划得最优解为** $x_1 = 10/3$,$x_2 = x_3 = 0$。**用凑整法时令** $x_1 = 3$,$x_2 = x_3 = 0$,**其中第** 2 **个约束无法满足,故不可行**。

5.2 $\min\ z = 20y_1 + 5x_1 + 12y_2 + 6x_2$

$$
\text{st.}\quad
\begin{array}{ll}
 & x_1 \leq y_1 \cdot M;\quad x_2 \leq y_2 \cdot M \\
① & x_1 \geq 10 - y_3 \cdot M \\
 & x_2 \geq 10 - (1 - y_3) M \\
② & 2x_1 + x_2 \geq 15 - y_4 M \\
 & x_1 + x_2 \geq 15 - y_5 M \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 15 - y_6 M \\
 & y_4 + y_5 + y_6 \leq 2 \\
③ & x_1 - x_2 = 0y_7 - 5y_8 + 5y_9 - 10y_{10} + 11y_{11} \\
 & y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} = 1 \\
④ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;\ y_i = 0\ \text{或}\ 1\ (i = 1, \cdots, 11)
\end{array}
$$

5.3 $\max\ z = 3x_1 - 10y_9 + 20x_2 + 4x_3 - 5y_{10} + 3x_4$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
x_2 \le y_9 \cdot M, \quad x_4 \le y_{10} \cdot M \\
① \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \le 15 \\
② \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 10 + y_1 M \\
\qquad 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le 20 + (1 - y_1) M \\
③ \quad 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \le 30 + (1 - y_2) M \\
\qquad 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \le 30 + (1 - y_3) M \\
\qquad -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 30 + (1 - y_4) M \\
\qquad 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 30 + (1 - y_5) M \\
\qquad y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \ge 2 \\
④ \quad x_3 = 2y_6 + 3y_7 + 4y_8 \\
\qquad y_6 + y_7 + y_8 = 1 \\
⑤ \quad x_1,\ x_1,\ x_3,\ x_4 \ge 0 \quad y_i = 0 \text{ 或 } 1 \ (i = 1, \cdots, 10)
\end{cases}
$$

5.4 $\max z = \sum_{j=1}^{6} c_j x_j$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{6} v_j x_j \le V \\
\sum_{j=1}^{6} w_j x_j \le W \\
x_1 + x_3 \le 1 \\
x_2 + x_4 \ge 1 \\
x_5 = x_6 \\
x_j = \begin{cases} 1, & \text{安装 } A_j \text{ 仪器} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}
\end{cases}
$$

5.5 $\min z = \sum_{j=1}^{10} c_j x_j$

$$
\text{st.}\quad
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{10} x_j = 5 \\
x_1 + x_8 = 1 \qquad x_3 + x_5 \le 1 \\
x_7 + x_8 = 1 \qquad x_4 + x_5 \le 1 \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \le 2 \\
x_j = \begin{cases} 1, & \text{选择钻探第 } s_j \text{ 井位} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}
\end{cases}
$$

5.6 设 $x_j = \begin{cases} 1, & \text{在 } j \text{ 居民小区建连锁店,} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \quad j = A, B, \cdots, L$

则数学模型为:

$$\min \ z = x_A + x_B + \cdots + x_L$$

$$\text{st.} \begin{cases} x_B + x_H + x_I \geq 1 \\ x_A + x_C + x_G + x_H \geq 1 \\ x_D + x_J \geq 1 \\ x_A + x_E \geq 1 \\ x_F + x_J + x_K \geq 1 \\ x_J + x_K + x_L \geq 1 \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

答案为 $x_E = x_H = x_J = 1$,其余 x_j 为 0。

5.7 (a) 见图 5A-1

(b) 最优解 $x_1 = 4$, $x_2 = 2$; $z = 14$

(c) 最优解 $x_1 = 4$, $x_2 = 1$; 或 $x_1 = 5$, $x_2 = 0$; $z = 5$

(d) 最优解 $x_1 = 4$, $x_2 = 1$; $z = 14$

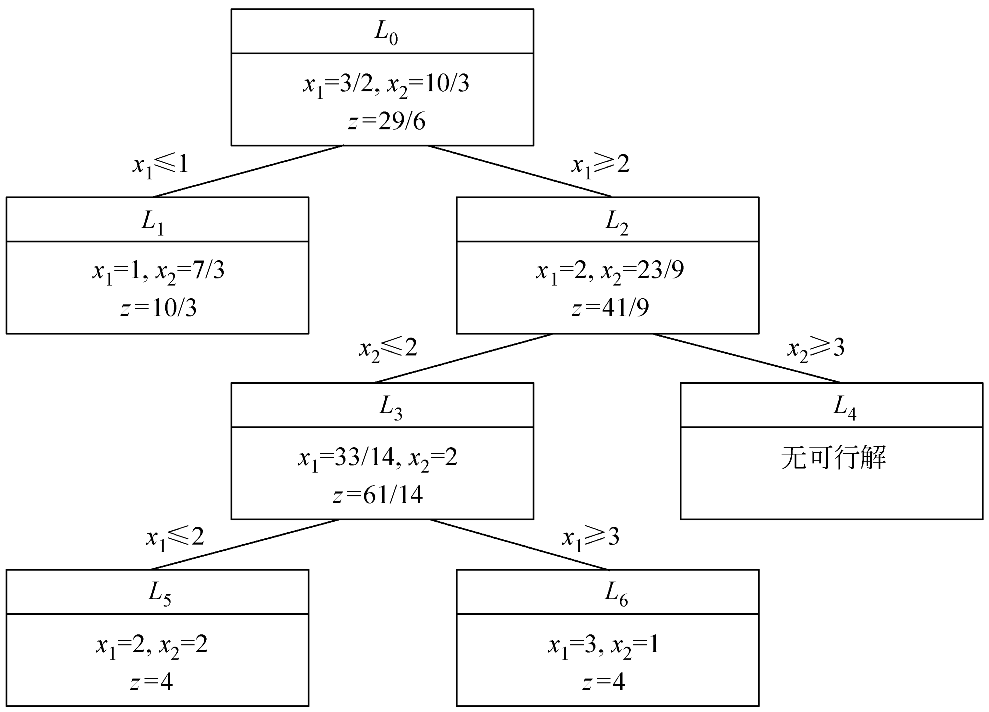


图 5A-1

5.8 (a) 不考虑整数约束,用单纯形法求解相应线性规划问题得最终单纯形表,见表 5A-1。

表　5A-1

		x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	7/2	0	1	7/22	1/22
x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22
$c_j - z_j$		0	0	-28/11	-15/11

从表中第 1 **行得**

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = \frac{7}{2}$$

由此
$$x_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 \leq 0$$

即
$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + s_1 = -\frac{1}{2}$$

将此约束加上,并用对偶单纯形法求解得表 5A-2。

表　5A-2

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0
x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0
s_1	-1/2	0	0	[-7/22]	-1/22	1
$c_j - z_j$		0	0	-28/11	-15/11	0
x_2	3	0	1	0	0	1
x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7
x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7
$c_j - z_j$		0	0	0	-1	-8

由表 5A-2 **的** x_1 **行可写出**

$$x_1 + \left(0 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)s_1 = 4 + \frac{4}{7}$$

又得到一个新的约束

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + s_2 = -\frac{4}{7}$$

再将此约束加上,并用对偶单纯形法求解得表 5A-3。

表 5A-3

		x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
x_2	3	0	1	0	0	1	0
x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7	0
x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7	0
s_2	-4/7	0	0	0	[-1/7]	-6/7	1
$c_j - z_j$		0	0	0	-1	-8	0
x_2	3	0	1	0	0	1	0
x_1	4	1	0	0	0	-1	1
x_3	1	0	0	1	0	-4	1
x_4	4	0	0	0	1	6	-7
$c_j - z_j$		0	0	0	0	-2	-7

因此本题最优解为 $x_1=4$，$x_2=3$，$z=55$

(b) 本题最优解为 $x_1=2$，$x_2=1$，$z=13$

(c) 本题最优解为 $x_1=2$，$x_2=1$，$x_3=6$，$z=26$

(d) 本题最优解为 $x_1=2$，$x_2=3$，$z=34$

5.9 (a) 最优解为 $x_1=x_2=1$，$x_3=x_4=x_5=0$，$z=5$

(b) 最优解为 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=1$，$x_5=1$，$z=6$

(c) 最优解为 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=0$，$x_5=0$，$z=4$

5.10 (a) 最优指派方案为 $x_{13}=x_{22}=x_{34}=x_{41}=1$，最优值为 48;

(b) 最优指派方案为 $x_{15}=x_{23}=x_{32}=x_{44}=x_{51}=1$;最优值为 21。

5.11 由下列运动员组成混合接力队:张游仰泳,王游蛙泳,钱游蝶泳,赵游自由泳,预期总成绩为 126.2s。

5.12 加上假设的第五个人是戊,他完成各项工作时间取甲、乙、丙、丁中最小者,构造表为 5A-4。

表 5A-4

人 \ 任务	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	37	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45
戊	24	27	26	20	32

对表 5A-4 再用匈牙利法求解，得最优分配方案为甲-B，乙-B 和 C，丙-E，丁-A，总计需要 131 h。

5.13 把从某城市起飞的飞机当作要完成的任务，到达的飞机看作分配去完成任务的人。只要飞机到达后 2 h，即可分配去完成起飞的任务。这样可以分别对城市 A，B，C 各列出一个指派问题。各指派问题效率矩阵的数字为飞机停留的损失费用。设飞机在机场停留损失为 a 元/h，则停留 2 h 损失为 $4a$ 元，停留 3 h 损失为 $9a$ 元，依次类推。

对 A，B，C 三个城市建立的指派问题的效率矩阵分别见表 5A-5，表 5A-6，表 5A-7。

表 5A-5　城市 A

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
106	$4a$	$9a$	$64a$	$169a$	$225a$
107	$361a$	$400a$	$625a$	$36a$	$64a$
108	$225a$	$256a$	$441a$	$4a$	$16a$
109	$484a$	$529a$	$16a$	$81a$	$121a$
110	$196a$	$225a$	$400a$	$625a$	$9a$

表 5A-6　城市 B

到达 \ 起飞	106	107	108	111	112
101	$256a$	$529a$	$9a$	$625a$	$36a$
102	$225a$	$484a$	$4a$	$576a$	$25a$
103	$100a$	$289a$	$441a$	$361a$	$576a$
113	$64a$	$225a$	$361a$	$289a$	$484a$
114	$256a$	$529a$	$9a$	$625a$	$36a$

表 5A-7　城市 C

到达 \ 起飞	109	110	113	114
104	$49a$	$225a$	$225a$	$49a$
105	$25a$	$169a$	$169a$	$25a$
111	$169a$	$441a$	$441a$	$169a$
112	$64a$	$256a$	$256a$	$64a$

对上述指派问题用匈牙利法求解，即可得到一个使停留费用损失最小的方案。

5.14 设 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{旅行商贩从 } i \text{ 直接去 } j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

由此可写出其整数规划模型为

$$\min z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \cdots, n) \\ u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \\ u_i \text{ 为连续变量} \quad (i = 1, \cdots, n)\text{，也可取整数值} \\ i, j = 1, \cdots, n, \ i \neq j \end{cases}$$

5.15　将问题改写为

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 10x_2 + 3x_3 \leq -15 + My \\ -x_1 + 10x_2 - 3x_3 \leq -15 + (1 - y)M \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3),\ y = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

求解得 $x_1 = 0$，$x_2 = 0$，$x_3 = 10$，$y = 1$，$z = 50$

5.16　设 $y_k = \begin{cases} 1, & \text{启用第 } k \text{ 个编组站} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

则问题的数学模型可表述为:

$$\min z = \sum_k f_k \cdot y_k + \sum_i \sum_k c_{ik} \cdot x_{ik} + \sum_k \sum_j c_{kj} x_{kj}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_k x_{ik} \leq a_i & (i = 1, \cdots, m) \\ \sum_k x_{kj} = b_j & (j = 1, \cdots, n) \\ \sum_i x_{ik} \leq q_k & (k = 1, \cdots, p) \\ \sum_i x_{ik} = \sum_j x_{kj} & (k = 1, \cdots, p) \\ \sum_i x_{ik} \leq M \cdot y_k & (k = 1, \cdots, p) \\ x_{ik} \geq 0, x_{kj} \geq 0 \quad y_k = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

5.17　$\min z = \sum_i y_i d_i + \sum_i \sum_j a_j x_{ij}$

$$
\text{st.}\begin{cases}
\sum_i x_{ij} = 1 & (j = 1, \cdots, 10) \\
x_{i1} + x_{i2} = 1 & (i = A, B, C) \\
x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} = 1 & (i = A, B, C) \\
\sum_j x_{cj} \leq 3 & \\
\sum_j x_{ij} \leq y_i M & (i = A, B, C) \\
x_{ij} = \begin{cases} 1, & j \text{ 种零件在 } i \text{ 设备上加工} \\ 0, & \text{否则} \end{cases} & \\
y_i \text{ 为 } 0\text{-}1 \text{ 变量} &
\end{cases}
$$

5.18 设 x_j 为在第 j 设备上加工的产品数 $(j=1,\cdots,4)$;

$$
y_j = \begin{cases} 1, & \text{启用设备 } j \text{ 加工产品} \\ 0, & \text{设备 } j \text{ 不启用} \end{cases} \quad (j=1,\cdots,4)
$$

本题的数学模型可归结为

$$
\min z = 1\,000y_1 + 20x_1 + 920y_2 + 24x_2 + 800y_3 + 16x_3 + 700y_4 + 28x_4
$$

$$
\text{st.}\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\,000 \\
x_1 \leq 900y_1 \qquad x_2 \leq 1\,000y_2 \\
x_3 \leq 1\,200y_3 \qquad x_4 \leq 1\,600y_4 \\
x_j \geq 0 \quad y_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, \cdots, 4)
\end{cases}
$$

5.19 用 x_{ij} 表示第 i 种产品在 j 机床上开始加工的时刻,则问题的数学模型可表示为:

$$
\min z = \max\{x_{13} + t_{13},\ x_{23} + t_{23},\ x_{33} + t_{33}\}
$$

$$
\text{st.}\begin{cases}
x_{ij} + t_{ij} \leq t_{i,j+1} \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2) \text{ 加工顺序约束} \\
\left.\begin{array}{l} x_{ij} + t_{ij} - x_{i+1,j} \leq M\delta_i \\ x_{i+1,j} + t_{i+1,j} - x_{ij} \leq M(1 - \delta) \end{array}\right\} \text{ 互斥性约束} \\
i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3;\ \delta = 0 \text{ 或 } 1 \\
x_{ij} \geq 0
\end{cases}
$$

5.20 用 x_1, x_2, x_3 分别表示 1,2,3 三个元件安装的备用件数量。根据题中条件及费用、重量的限制,元件 1 的备件最多安装 5 个,元件 2 备件最多 5 个,元件 3 的备件最多安装 3 个。故问题的数学模型可表为:

$$
\max z = (0.5y_1 + 0.6y_2 + 0.7y_3 + 0.8y_4 + 0.9y_5 + y_6) \times
$$

$$
(0.6y_7 + 0.75y_8 + 0.95y_9 + y_{10}) \times (0.7y_{11} + 0.9y_{12} + y_{13})
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
20x_1+30x_2+40x_3\le 150\\
2x_1+4x_2+6x_3\le 20\\
\sum_{i=1}^{6}y_i=1\\
\sum_{i=7}^{10}y_i=1\\
\sum_{i=11}^{13}y_i=1\\
x_j\ge 0\quad (j=1,2,3)\\
y_i=0\text{ 或 }1\quad (i=1,\cdots,13)
\end{cases}
$$

5.21 设 x_{ij} 为从 i 仓库运送至 j 用户的物资单位数,

$$
y_i=\begin{cases}1 & \text{在 } i \text{ 处建仓库},\ i=1,2,3\\ 0 & \text{否则}\end{cases}
$$

则问题的数学模型为

$$
\min z=0.1\sum_{i=1}^{3}k_iy_i+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}p_ix_{ij}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
y_1+y_2+y_3=2 & x_{11}+x_{12}+x_{14}\le A_1y_1\\
x_{11}+x_{21}\ge D_1 & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le A_2y_2\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}\ge D_2 & x_{32}+x_{33}+x_{34}\le A_3y_3\\
x_{23}+x_{33}\ge D_3 & \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}\ge D_4 & x_{ij}\ge 0\quad y_i=0\text{ 或 }1
\end{cases}
$$

5.22 设 x_{ij} 为学生 i 在周 j 的值班时间

$$
y_{ij}=\begin{cases}1 & \text{学生 } i \text{ 在周 } j \text{ 安排值班}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}
$$

(a) 设 a_{ij} 为学生 i 在周 j 最多可安排的值班时间, c_i 为 i 学生的小时报酬,则有

$$
\min z=\sum_i\sum_j c_ix_{ij}
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_{ij}\le a_{ij} & (i=1,\cdots,6;\ j=1,\cdots,5)\\
\sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 8 & (i=1,\cdots,4)\\
\sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 7 & (i=5,6)\\
\sum_{i=1}^{6}x_{ij}=14 & (j=1,\cdots,5)\\
x_{ij}\ge 0
\end{cases}
$$

(b) 数学模型为

$$\min\ z=\sum_i\sum_j c_i x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{ij}\le a_{ij}\,y_{ij} \quad (i=1,\cdots,6;\ j=1,\cdots,5) \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 8 \quad (i=1,\cdots,4) \qquad \sum_{j=1}^{5}y_{ij}\le 2 \quad (i=1,\cdots,6) \\ \sum_{j=1}^{5}x_{ij}\ge 7 \quad (i=5,6) \qquad \sum_{i=1}^{6}y_{ij}\le 3 \quad (j=1,\cdots,5) \\ \sum_{i=1}^{6}x_{ij}=14 \quad (j=1,\cdots,5) \qquad x_{ij}\ge 0 \quad y_{ij}=0\text{ 或 }1 \end{cases}$$

5.23 设该厂生产衬衣 x_1 件,短袖衫 x_2 件,长裤 x_3 件

$$y_j=\begin{cases}1 & \text{启动相应的 } j \text{ 种专用设备}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

则本题的数学模型为

$$\max\ z=120x_1-(2\ 000y_1+60x_1)+80x_2-(1\ 500y_2+40x_2)+150x_3-(1\ 000y_3+80x_3)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1+2x_2+6x_3\le 150\\ 4x_1+3x_2+6x_3\le 160\\ x_1\le 40y_1\\ x_2\le 53y_2\\ x_3\le 25y_3\\ x_j\ge 0,\ y_j=0\text{ 或 }1 \quad (j=1,2,3)\end{cases}$$

5.24 对微积分、运筹学、数据结构、管理统计、计算机模拟、计算机程序、预测 7 门课程分别编号为 1,2,3,⋯,7。

设 $x_j=\begin{cases}1 & \text{选学第 } j \text{ 课程}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

则本题的数学模型如下:

$$\min\ z=x_1+x_2+\cdots+x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_7\ge 2\\ x_2+x_4+x_5+x_7\ge 2 \quad \text{每类课程至少选 2 门}\\ x_3+x_5+x_6\ge 2\\ x_1\ge x_4 \quad x_6\ge x_5 \quad \text{选修课要求}\\ x_6\ge x_3 \quad x_4\ge x_7\\ x_j=0\text{ 或 }1\end{cases}$$

5.25 设 x_j 为 j 种容器生产的数量

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{生产 } j \text{ 种容器} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

则本题的数学模型可写为

$$\min \ z = 1\,200 \sum_j y_j + 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 12x_4 + 16x_5 + 18x_6$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3\,350 \\ x_6 \geq 300 \\ x_5 + x_6 \geq 700 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1\,600 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2\,300 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2\,850 \\ x_j \leq My_j \quad (j = 1, \cdots, 6) \\ x_j \geq 0 \quad y_j = 0 \text{ 或 } 1 \ (j = 1, \cdots, 6) \end{cases}$$

5.26 设 x_{ij} 为开设代号为 i 类别商店数恰好为 j 个,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{执行该方案} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

则本问题的数学模型为

$$\max \ z = 0.20(9x_{11} + 16x_{12} + 21x_{13} + 10x_{21} + 18x_{22} + 27x_{31} + 42x_{32} + 60x_{33} + 16x_{41} + 20x_{42} + 17x_{51} + 30x_{52} + 36x_{53})$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\ x_{21} + x_{22} \leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\ x_{41} + x_{42} \leq 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} \leq 1 \\ 250x_{11} + 500x_{12} + 750x_{13} + 350x_{21} + 700x_{22} + 800x_{31} + 1\,600x_{32} + \\ \quad 2\,400x_{33} + 400x_{41} + 800x_{42} + 500x_{51} + 1\,000x_{52} + 1\,500x_{53} \leq 5\,000 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

5.27 设 $x_j = \begin{cases} 1 & \text{选上编号为 } j \text{ 的字串} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

则本问题的数学模型为

$$\max \ z = 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 4x_6 + 6x_7 + 9x_8$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=4 \\ 4x_1+4x_2+x_3+6x_4+7x_5+2x_6+6x_7+2x_8 \geq \\ \quad 2x_1+5x_2+4x_3+6x_4+8x_5+3x_6+4x_7+x_8 \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

5.28 设 x_1——在 A 开门诊所,并服务 A 与 B, x_2——在 A 开门诊所,并服务 A 与 C, x_3——在 B 开门诊所,并服务 B 与 C, x_4——在 B 开门诊所,并服务 B 与 D, x_5——在 B 开门诊所,并服务 B 与 E, x_6——在 C 开门诊所,并服务 C 与 D, x_7——在 D 开门诊所,并服务 D 与 E, x_8——在 D 开门诊所,并服务 D 与 F, x_9——在 D 开门诊所,并服务 D 与 G, x_{10}——在 E 开门诊所,并服务 E 与 F, x_{11}——在 F 开门诊所,并服务 F 与 G。

$$x_j=\begin{cases}1 & \text{采用该方案} \\ 0 & \text{否则}\end{cases} \qquad j=1,\cdots,11$$

本题数学模型为

$$\max\ z=6\ 300x_1+7\ 600x_2+7\ 100x_3+5\ 000x_4+8\ 500x_5+6\ 300x_6+7\ 700x_7+3\ 900x_8+9\ 200x_9+7\ 400x_{10}+8\ 900x_{11}$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=2 \\ x_1+x_2\leq 1 \\ x_1+x_3+x_4+x_5\leq 1 \\ x_2+x_3+x_6\leq 1 \\ x_4+x_6+x_7+x_8+x_9\leq 1 \\ x_5+x_7+x_{10}\leq 1 \\ x_8+x_{10}+x_{11}\leq 1 \\ x_9+x_{11}\leq 1 \\ x_j=0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1,\cdots,11) \end{cases}$$

5.29 用 x_1 表珠江牌汽车产量, x_2 表松花江牌汽车产量, x_3 表黄河牌汽车产量。按题意应有

$$(1)\begin{cases}x_1=0 \text{ 或} \\ x_1\geq 1\ 000\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}x_2=0 \text{ 或} \\ x_2\geq 1\ 000\end{cases} \qquad (3)\begin{cases}x_3=0 \text{ 或} \\ x_3\geq 1\ 000\end{cases}$$

由(1)写成(1)′

$$(1)'\begin{cases}x_1\leq 0 \\ 1\ 000-x_1\leq 0\end{cases}$$

由钢材及劳动力的约束,即使全部用于生产珠江牌汽车,也有 $x_1\leq 2\ 000$,由此得(1)″

$$(1)''\begin{cases}x_1\leq 2\ 000y, \\ 1\ 000-x_1\leq 1\ 000(1-y_1) \quad y_1=0 \text{ 或 } 1\end{cases}$$

由此本题数学模型可写为

$$\max\ z = 2\ 000x_1 + 3\ 000x_2 + 4\ 000x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 1.5x_1 + 3.0x_2 + 5.0x_3 \leq 6\ 000 \\ 300x_1 + 250x_2 + 400x_3 \leq 600\ 000 \\ x_1 \leq 2\ 000y_1 \\ 1\ 000 - x_1 \leq 1\ 000(1 - y_1) \\ x_2 \leq 2\ 000y_2 \\ 1\ 000 - x_2 \leq 1\ 000(1 - y_2) \\ x_3 \leq 1\ 200y_3 \\ 1\ 000 - x_3 \leq 1\ 000(1 - y_3) \\ x_j \geq 0,\ y_j = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,2,3) \end{cases}$$

5.30 先计算出各村镇间的欧氏距离 d_{ij}，如表 5A-8 所示。

表 5A-8 d_{ij} 值

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	10.4	19.2	19.1	18.4	19.0	14.4	11.7
2		0	12.2	10.8	8.5	8.5	9.2	8.1
3			0	2.8	7.2	9.2	4.6	7.8
4				0	4.8	8.1	6.1	8.5
5					0	3.6	8.1	10.0
6						0	11.7	12.6
7							0	2.8
8								0

令 $z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{安排 } i \text{ 村镇小学生去 } j \text{ 村镇上学} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

则本题数学模型为

$$\min\ w = \sum_i \sum_j p_i d_{ij} \quad (p_i \text{ 为 } i \text{ 村镇小学生数})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_i \sum_j z_{ij} = 8 & (i = 1,\cdots,8;\ j = 1,\cdots,8) \\ \sum_j z_{ij} = 1 & (i = 1,\cdots,8) \\ z_{ij} \leq z_{ii} & (i \neq j) \\ \sum_i z_{ii} = 2 \\ z_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

六、非线性规划

6.1　其数学模型为

$$\min F(X) = \sum_{i=1}^{12} [f_i(x_i) + g_i(y_{i-1} + x_i - d_i)]$$

$$y_{i-1} + x_i - d_i \le c$$

$$y_0 = 0$$

$$x_i \le b, \quad i = 1, \cdots, 12$$

6.2　其数学模型是

$$\min f(F) = 1\,414 F_1 + 1\,155 F_2$$

$$F_1 - 0.518 \ge 0$$

$$F_2 - 0.732 \ge 0$$

$$0.5 - \frac{0.190}{F_1} - \frac{0.309}{F_2} \ge 0$$

6.3　其数学模型是

$$\min f(X) = \frac{3}{4x_1 x_2^2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

或

$$\max f(X) = \frac{4}{3} x_1 x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

最优解是 $X^{*}=(x_1^{*},\ x_2^{*})^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{3}r,\frac{2}{3}r\right)^{\mathrm{T}}$

6.4 (a) è $f(X)=(2x_1,\ 2x_2,\ 2x_3)^{\mathrm{T}}$

$$H(X)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

(b) è $f(X)=\left(\dfrac{2x_1+x_2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2},\ \dfrac{x_1+2x_2}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}\right)^{\mathrm{T}}$

$$H(X)=\frac{1}{(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)^2}\begin{bmatrix}-2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 & -x_1^2-4x_1x_2-x_2^2\\ -x_1^2-4x_1x_2-x_2^2 & x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2\end{bmatrix}$$

(c) è $f(X)=(3x_2^2+4x_2\mathrm{e}^{x_1x_2},6x_1x_2+4x_1\mathrm{e}^{x_1x_2})^{\mathrm{T}}$

$$H(X)=\begin{bmatrix}4x_2^2\mathrm{e}^{x_1x_2} & 6x_2+4\mathrm{e}^{x_1x_2}(1+x_1x_2)\\ 6x_2+4\mathrm{e}^{x_1x_2}(1+x_1x_2) & 6x_1+4x_1^2\mathrm{e}^{x_1x_2}\end{bmatrix}$$

(d) è $f(X)=\left(x_2x_1^{x_2-1}+\dfrac{1}{x_1},\ x_1^{x_2}\ln x_1+\dfrac{1}{x_2}\right)^{\mathrm{T}}$

$$H(X)=\begin{bmatrix}x_2(x_2-1)x_1^{x_2-2}-\dfrac{1}{x_2} & x_2x_1^{x_2-2}\ln x_1+x_1^{x_2-1}\\ x_2x_1^{x_2-1}\ln x_1+x_1^{x_2-1} & x_1^{x_2}(\ln x_1)^2-\dfrac{1}{x_2^2}\end{bmatrix}$$

6.5 (a) **正定。**

(b) **不定。**

(c) **半正定。**

6.6 (a) $f(x_0=2)=4-7(2)+4=-6$

(b) $f'(x)=2x-7$ $\quad f''(x)=2$ $\quad f\ \ (x)=0$

$$f(x=4)=f(x_0)+f'(x_0)(2)+\frac{f''(x_0)}{2!}(2)^2=-8$$

6.7 (a) $f(x_0=3)=26$

(b) $f(x=7)=542$

6.8 $f(X)=f(x^{*})+\left(\dfrac{f}{x_1}\right)^{*}\Delta x_1+\left(\dfrac{f}{x_2}\right)^{*}\Delta x_2+\dfrac{1}{2}\Delta X^{\mathrm{T}}[H(x)]\Delta X$

$\because\ \Delta X^{\mathrm{T}}=(1,\ 2)$

$\dfrac{f}{x_1}=2x_1+x_2,\quad \dfrac{f}{x_2}=2x_2+x_1$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}=1$$

$\therefore\ H(X)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

由此

$$f(x)=19+7(1)+8(2)+\frac{1}{2}(1,\ 2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=49$$

6.9 (a), (b) 为严格凸函数

(c) 为严格凹函数

(d) 非凸也非凹

6.10 (a) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}=3x^2+1=0$, $x=\pm\sqrt{-1/3}$, 故无驻点

(b) $x=0$ 为驻点,且为极小点

(c) $x=0$ 为极大点, $x=\pm 0.352$ 处为极小点

(d) 存在 3 个驻点, $x=2/3$ 为极小点, $x=3/2$ 和 $x=13/12$ 处均为极大点

(e) 有 3 个驻点, $x=0$ 处为拐点, $x=0.63$ 处为极小点, $x=-0.63$ 处为极大点

6.11 (a) $X=(11,\ 95,\ 78)^{\mathrm{T}}$ 是严格极小点

(b) $X=(0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 是鞍点

(c) $X=(1/2,\ 2/3,\ 4/3)$ 是严格极大点

(d) $X=(0,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 是鞍点

6.12 在$(0,3,1)$, $(0,1,-1)$, $(2,1,1)$, $(2,3,-1)$各点二次型不定,只有在$(1,2,0)$点二次型正定,故该点为极小点。

6.13 (a), (b)均为凸规划。

6.14 $f(x)$为严格凹函数。因 $\delta=0.08$, $F_n=1/\delta=12.5$,由书中表 6-1 查得 $n=6$,再由公式(6.33)计算得

$$t_1=b_0+\frac{F_5}{F_6}(a_0-b_0)=25+\frac{8}{13}(0-25)=9.615\ 4$$

$$t_1'=a_0+\frac{F_5}{F_6}(b_0-a_0)=0+\frac{8}{13}(25-0)=15.384\ 6$$

$$f(t_1)=-68.671\ 5>f(t_1')=-376.750\ 4$$

故取 $a_1=0$, $b_1=15.384\ 6$, $t_2'=9.615\ 4$

$$t_2=b_1+\frac{F_4}{F_5}(a_1-b_1)=5.769\ 2$$

因 $f(t_2)=25.7624>f(t_2')$，故取 $a_2=0$，$b_2=9.6154$，$t_3'=5.7692$

$$t_3=b_2+\frac{F_3}{F_4}(a_2-b_2)=3.8462$$

因 $f(t_3)=39.698>f(t_3')$，故取 $a_3=0$，$b_3=5.7692$，$t_4'=3.8462$

$$t_4=b_3+\frac{F_2}{F_3}(a_3-b_3)=1.9231$$

因 $f(t_4)=31.444<f(t_4')$，故取 $a_4=1.9231$，$b_4=5.7692$，$t_5=1.9231$，并令 $\varepsilon=0.01$

$$t_5'=a_4+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)(b_4-a_4)=3.850$$

因 $f(t_5')=39.6924>f(t_5)$，故取 $a_5=3.85$，$b_5=5.7692$，因 $f(t_5')<f(t_3)$，故 $t_3=3.8642$ 为近似最优点。

6.15 用黄金分割法求解过程见表 6A-1:

表 **6A-1**

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_n	$f(x_n)$	**缩小后区间**
2	15.45	-381.3875	9.55	-66.3275	[0,15.45]
3	9.55	-66.3275	5.90	24.01	[0,9.55]
4	5.90	24.01	3.65	39.8725	[0,5.90]
5	3.65	39.8725	2.25	34.4125	[2.25,5.90]
6	4.506	37.4175	3.65	39.8725	[2.25,4.506]
7	3.65	39.8725	3.112	39.1656	[3.112,4.506]

经 6 **次迭代,近似最优点为** 3.65,**近似值为** 39.8725,**优于上题计算结果。**

6.16 经检验 $f(x)$**为严格凸函数,用黄金分割法计算过程见表** 6A-2:

表 **6A-2**

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	x_n	$f(x_n)$	**缩小后区间**
2	9.652	59.570	6.348	-168.80	[1,9.652]
3	6.348	-168.80	4.304	-100.06	[4.304,9.652]
4	7.609	-114.64	6.348	-168.80	[4.304,7.609]
5	6.348	-168.80	5.566	-147.61	[5.566,7.609]
6	6.828	-166.42	6.348	-168.80	[5.566,6.828]
7	6.348	-168.80	6.048	-163.25	[6.048,6.828]
8	6.530	-169.83	6.348	-168.80	[6.348,6.828]

6.17　用最速下降法迭代计算过程见表 6A-3:

表　6A-3

步骤 k	$x^{(k)}$	λ_k	x_1	x_2	$\frac{f(x^{(k)})}{x_1}$	$\frac{f(x^{(k)})}{x_2}$	$f(x^{(k)})$
0	$x^{(0)}$	1/4	1	1	-2	0	4
1	$x^{(1)}$	1/4	1/2	1	0	1	$4\frac{1}{2}$
2	$x^{(2)}$	1/4	1/2	5/4	-1/2	0	$4\frac{5}{8}$
3	$x^{(3)}$	1/4	3/8	5/4	0	1/4	$4\frac{21}{32}$
4	$x^{(4)}$	1/4	3/8	21/16	-1/8	0	$4\frac{170}{256}$
5	$x^{(5)}$		11/32	21/16	0	1/16	$4\frac{341}{512}$

6.18　迭代计算过程见表 6A-4:

表　6A-4

步骤 k	$x^{(k)}$	λ_k	x_1	x_2	$\frac{f}{x_1}$	$\frac{f}{x_2}$	$f(x^{(k)})$
0	$x^{(0)}$	1/4	0	0	0	2	0
1	$x^{(1)}$	1/2	0	1/2	1	0	1/2
2	$x^{(2)}$	1/4	1/2	1/2	0	1	3/4
3	$x^{(3)}$	1/2	1/2	3/4	1/2	0	7/8
4	$x^{(4)}$	1/4	3/4	3/4	0	1/2	15/16

6.19　计算结果如表 6A-5 所示:

表　6A-5

迭代次数 k	λ_k	$X^{(k)}$
0	5/18	(5,5)
1	5/12	(20/9, -5/9)
2	10/125	(10/27, 10/27)
3		(0,0)

6.20　计算结果见表 6A-6:

表 6A-6

迭代次数 k	λ_k	$X^{(k)}$	$f(X^{(k)})$
0	0.001	$(7.0, 9.0)$	-9.0
1	0.0009 2	$(6.982, 8.976)$	-8.105
2		$(6.966, 8.954)$	-7.303

6.21 证:

由于 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 共轭,故它们线性独立。设 Y 为 E^n 中的任一向量,则存在 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,使

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{(i)}$$

用 A 左乘上式,得

$$AY = \sum_{i=1}^{n} a_i A X^{(i)} = a_1 AX^{(1)} + a_2 AX^{(2)} + \cdots + a_n AX^{(n)}$$

分别用 $X^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$ 左乘上式,并考虑到共轭关系,

则有

$$(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AY = a_i (X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而

$$a_i = \frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

现令

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}}$$

用 AY 右乘上式,得

$$\begin{aligned} BAY &= \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}} AY \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AY}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}} X^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{(i)} = Y \end{aligned}$$

从而

$$BA = I \text{(单位阵)}$$

即

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{X^{(i)}(X^{(i)})^{\mathrm{T}}}{(X^{(i)})^{\mathrm{T}} AX^{(i)}} = A^{-1}$$

6.22 若取初始点 $X^{(0)} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$,则可算出: $\lambda_0 = \frac{13}{34}$, $X^{(1)} = \left(\frac{8}{34}, -\frac{5}{34}\right)^{\mathrm{T}}$,

$\beta = \dfrac{1}{33 \times 34}$, $\lambda = \dfrac{34}{13}$, 从而得到极小点 $X^{(2)} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$

6.23 取初始点 $X^{(0)} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda = \dfrac{13}{24}$, $X^{(1)} = \left(\dfrac{8}{34}, -\dfrac{5}{34}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda = \dfrac{34}{13}$, $X^{(2)} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$

6.24 取步长 $\lambda = 1.0$ 时不收敛, 取最佳步长时收敛, 极小点为 $X^{*} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$, $f(x^{*}) = -0.5$

6.25 (a) $\lambda = 1/2$, 得极小点 $X^{(1)} = (0, -1)^{\mathrm{T}}$

(b) $P^{(0)} = (-4, -4)^{\mathrm{T}}$, $X^{(1)} = (-1, -1)^{\mathrm{T}}$, $\overline{H}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.366\,7 & -0.233\,3 \\ -0.233\,3 & 0.966\,7 \end{pmatrix}$

$P^{(1)} = (1.466\,8, -0.933\,2)^{\mathrm{T}}$, $X^{(2)} = (-0.266\,6, -1.466\,6)^{\mathrm{T}}$

6.26 假定 $X = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 为任一近似解, 它不正好满足方程组, 则把它代入方程组中将产生误差, 使它对各方程产生的误差的平方和最小化, 即得如下数学模型:

$$\min f(X) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2)^2 + (3x_1 - 2x_2 + x_3 - 7)^2 + (x_1 + x_2 - x_3 - 1)^2$$

该方程组的精确解是 $X^{*} = \left(\dfrac{13}{8}, -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{7}{8}\right)^{\mathrm{T}}$

6.27 题中给定初始点 $X^{(0)} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, 初始步长 $\Delta = (0.5, 0.5)^{\mathrm{T}}$, 由此出发进行探索。因有

$x_1^{(1)} = 1 + 0.5 = 1.5 \qquad f(1.5, 1) = -18.25 < f(1, 1)$

$x_2^{(1)} = 1 + 0.5 = 1.5 \qquad f(1.5, 1.5) = -21.0 < f(1.5, 1)$

得新的基点 $X^{(1)} = (1.5, 1.5)$, $f(X^{(1)}) = -21.0$。由 $X^{(1)}$ 和 $X^{(0)}$ 确定第一模矢, 并求得第二模矢的初始临时矢点。

$X^{(2)} = X^{(0)} + 2(X^{(1)} - X^{(0)}) = 2X^{(1)} - X^{(0)} = (2.0, 2.0)^{\mathrm{T}}$

$f(X^{(2)}) = -24.0$

再在 $X^{(2)}$ 附近进行同上类似的探索, 因有

$x_1^{(3)} = 2.0 + 0.5 = 2.5 \qquad f(2.5, 2) = -23.25 > f(2, 2)$

$x_1^{(3)} = 2.0 - 0.5 = 1.5 \qquad f(1.5, 2) = -23.25 > f(2, 2)$

$x_2^{(3)} = 2.0 + 0.5 = 2.5 \qquad f(2.0, 2.5) = -25.75 < f(2, 2)$

又得新的基点 $X^{(3)} = (2.0, 2.5)^{\mathrm{T}}$, $f(X^{(3)}) = -25.75$。由 $X^{(3)}$ 和 $X^{(1)}$ 确定第二模矢, 并求得第三模矢的初始临时矢点

$$X^{(4)} = 2X^{(3)} - X^{(1)} = (2.5, 3.5)^{\mathrm{T}}, \quad f(X^{(4)}) = -27$$

在 $X^{(4)}$ 附近探索, 有

$x_1^{(5)} = 2.5 + 0.5 = 3.0 \qquad f(3.0, 3.5) = -24.75 > f(2, 2.5)$

$x_1^{(5)} = 2.5 - 0.5 = 2.0 \qquad f(2.0, 3.5) = -27.75 < f(2, 2.5)$

$$x_2^{(5)} = 3.5 + 0.5 = 4.0 \qquad f(2.0,\ 4.0) = -28.0 < f(2,\ 3.5)$$

故又得新的基点 $X^{(5)} = (2.0,\ 4.0)^{\mathrm{T}}$, $f(X^{(5)}) = -28.0$。由 $X^{(5)}$ 和 $X^{(3)}$ 确定第三模矢,求得该模矢的初始临时矢点

$$X^{(6)} = 2X^{(5)} - X^{(3)} = (2.0,\ 5.5)^{\mathrm{T}}, \quad f(X^{(6)}) = -25.75$$

再在 $X^{(6)}$ 附近探索,因有

$$x_1^{(7)} = 2.0 + 0.5 = 2.5 \qquad f(2.5,\ 5.5) = -25 > f(2,\ 4)$$

$$x_1^{(7)} = 2.0 - 0.5 = 1.5 \qquad f(1.5,\ 5.5) = -25 > f(2,\ 4)$$

$$x_2^{(7)} = 5.5 + 0.5 = 6.0 \qquad f(2.0,\ 6.0) = -24 > f(2,\ 4)$$

$$x_2^{(7)} = 5.5 - 0.5 = 5.0 \qquad f(2.0,\ 5.0) = -27 > f(2,\ 4)$$

可以回过来在 $X^{(5)}$ 附近以 $\Delta 2$ 为步长探索,最后结果 $X^{(5)} = (2.0,\ 4.0)^{\mathrm{T}}$ 为最优解。

6.28 极小点的精确解为

$$X^* = \frac{5}{6}, \frac{1}{6}^{\mathrm{T}}, \quad f(X^*) = -\frac{1}{12}$$

6.29 (a) $d_1 > 0,\ d_2 > 0,\ d_1 < \frac{1}{3} d_2$

(b) $d_2 > 0,\ -d_2 < d_1 < -\frac{2}{3} d_2$

(c) $d_1 > 2d_2,\ d_1 < -\frac{2}{3} d_2$

(d) $d_1 > 2d_2,\ d_1 > 0$

(e) 无可行下降方向。

6.30 原题可改写为

$$\min\ f(x) = -(x-4)^2$$

$$g_1(x) = x - 1 \geq 0$$

$$g_2(x) = 6 - x \geq 0$$

K-T 条件为:

$$\begin{aligned} -2(x^* - 4) - \gamma_1^* + \gamma_2^* &= 0 \\ \gamma_1^*(x^* - 1) &= 0 \\ \gamma_2^*(6 - x^*) &= 0 \\ \gamma_1^* \geq 0 \quad \gamma_2^* &\geq 0 \end{aligned}$$

解得 $x^* = 1$ 为最优,$f(x^*) = 9$

6.31 其数学模型为

$$\min\ f(X) = 58x_1 + 0.2x_1^2 + 54x_2 + 0.2x_2^2 + 50x_3 + 0.2x_3^2 - 560$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 180 \\ x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1 &\geq 40 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

为便于求解,可利用第一个约束(等式约束)消去一个变量。最优解为: $x_1^* = 50$, $x_2^* = 60$, $x_3^* = 70$,**最小费用** $f(X^*) = 11\ 280$

6.32 (a) **其 K-T 条件为**

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{x_1 + x_2} + \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ &-\frac{1}{x_1 + x_2} - 2\gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ &\gamma_1(5 - x_1 + 2x_2) = 0 \\ &\gamma_2 x_1 = 0 \\ &\gamma_3 x_2 = 0 \\ &\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解得 $x_1^* = 5$, $x_2^* = 0$, $f(X^*) = 1.609\ 4$

(b) **其 K-T 条件为**

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0, && \gamma_3(x_1 - 1) = 0 \\ &2x_2 + \gamma_1 - \gamma_4 = 0, && \gamma_4(x_2 - 2) = 0 \\ &2x_3 + \gamma_2 - \gamma_5 = 0, && \gamma_5 x_3 = 0 \\ &\gamma_1(5 - 2x_1 - x_2) = 0, && \\ &\gamma_2(2 - x_1 - x_3) = 0 && \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5 \geq 0 \end{aligned}$$

解得 $x_1^* = 1$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 0$, $f(X^*) = 5$

6.33 (a) **无满足** Kunh-Tucker **条件的解,但有极大点** $X = (1,\ 0)^T$,**这时**, $f(X) = 1$

(b) **解得** $x_1^* = 0$, $0 \leq x_2^* \leq 1$, $\gamma_1^* = 0$, $\gamma_2^* = 1$, $\gamma_3^* = 0$; $f(X^*) = 0$

(c) **解得** $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, $\gamma_1^* = 2$, $\gamma_2^* = \gamma_3^* = 0$; $f(X^*) = 2$

6.34 **原式可改写为**:

$$\begin{aligned} \min f'(x) &= -5x_1 - x_2 + (x_1 - x_2)^2 \\ &= -5x_1 - x_2 + \frac{1}{2}(2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{st.}\ \begin{cases} 2 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

即有 $c_1 = -5$, $c_2 = -1$, $c_{11} = 2$, $c_{22} = 2$, $c_{12} = -2$, $c_{21} = -2$, $b_1 = 2$, $a_{11} = -1$, $a_{12} = -1$,

所以原式可写为:

$$\min \varphi(z) = z_1 + z_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + y_3 - y_1 + z_1 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + y_3 - y_2 + z_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{所有 } x_j,\ y_j,\ z_j \geq 0 \end{cases}$$

解得 $x_1^* = 3/2$, $x_2^* = 1/2$, $x_3^* = 0$, $y_1^* = y_2^* = 0$, $y_3^* = 3$, $z_1^* = z_2^* = 0$,**由此** $f(x) = 7$

6.35 (a) K-T **条件可写为**:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4 + \gamma_1 - \gamma_2 = 0 \\ 2x_2 - 8 + \gamma_1 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1(2 - x_1 - x_2) = 0 \\ \gamma_2 x_1 = 0 \\ \gamma_3 x_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0$$

求解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$。

(b) **其等价的线性规划问题为**

$$\min \varphi(z) = z_1 + z_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - y_1 + y_3 + z_1 = 4 \\ 2x_2 - y_2 + y_3 + z_2 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_{1-3} \geq 0 \quad y_{1-3} \geq 0 \quad z_{1-2} \geq 0 \end{cases}$$

求解得 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 0)$; $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 4)$; $(z_1, z_2) = (0, 0)$。

6.36 (a) K-T **条件可写为**

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 10 + \gamma_1 + 4\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4 + \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_4 = 0 \\ \gamma_1(6 - x_1 - x_2) = 0 \\ \gamma_2(18 - 4x_1 - x_2) = 0 \\ \gamma_3 x_1 = 0 \\ \gamma_4 x_2 = 0 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \geq 0 \end{cases}$$

求解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_4 = 0$

(b) **其等价的线性规划问题为**

$$\min \varphi(z) = z_1 + z_2$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
2x_1 - 4x_2 - y_1 + y_3 + 4y_4 + z_1 = 10\\
4x_1 - 8x_2 - y_2 + y_3 + y_4 + z_2 = 4\\
x_1 + x_2 + x_3 = 6\\
4x_1 + x_2 + x_4 = 18\\
x_{1-4} \geq 0,\ y_{1-4} \geq 0,\ z_{1-2} \geq 0
\end{cases}
$$

求解得 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 2, 0, 0)$; $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 2, 2)$; $(z_1, z_2) = (0, 0)$

6.37 $x_1^* = \frac{7}{2}$, $x_2^* = \frac{1}{2}$, $f(X^*) = -7$

6.38 **第一次迭代用梯度法,第二次迭代借助于线性规划求可行下降方向。前两次的迭代结果是**

$$X^{(0)} = (0, 0)^{\mathrm{T}}, \quad P^{(0)} = (1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \lambda_0 = \frac{4}{3}$$

$$X^{(1)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)^{\mathrm{T}}, \quad P^{(1)} = (1.0, -0.7)^{\mathrm{T}}, \quad \lambda_1 = 0.314$$

$$X^{(2)} = (1.467, 1.239)^{\mathrm{T}}, \quad f(X^{(2)}) = 0.863;$$

该问题的最优解是

$$X^* = (1.6, 1.2)^{\mathrm{T}}, \quad f(X^*) = 0.8$$

6.39 **选初始点** $X^{(0)} = (0.0, 0.75)^{\mathrm{T}}$, $\nabla f(X) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6)$; **第一次迭代**: **在** $X^{(0)}$ **点**, $\nabla f(X^{(0)}) = (-5.5, -3.0)$, **因第 3 个约束为有效约束,且** $\nabla g_3(X^{(0)}) = (-1, 0)$, **故有**

$$\min \eta$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
-5.5d_1 - 3.0d_2 \leq \eta\\
-d_1 \leq \eta\\
1 \leq d_j \leq 2 \quad (j = 1, 2)
\end{cases}
$$

解得 $d_1 = (1, -1)$, $\eta = -1.0$。**又** $X^{(0)} + \lambda d_1 = (\lambda, 0.75 - \lambda)$, **由第 2 个约束知** $\lambda \leq 0.4114$, **又** $f(X^{(0)} + \lambda d_1) = 6\lambda^2 - 2.5\lambda - 3.375$, **故可由下面的规划问题来确定** λ **值**:

$$\min \quad 6\lambda^2 - 2.5\lambda - 3.375$$

$$0 \leq \lambda \leq 0.4114$$

解得 $\lambda_1 = 0.2083$, **由此** $X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda_1 d_1 = (0.2083, 0.5417)$。

第二次迭代: **因有** $\nabla f(X^{(1)}) = (-4.25, -4.25)$, **无有效约束,由此用下式寻找搜索方向**:

$$\min \eta$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
-4.25d_1 - 4.25d_2 \leq \eta\\
-1 \leq d_j \leq 1 \quad (j = 1, 2)
\end{cases}
$$

最优解为 $d=(1,1)$，$\eta=-8.50$。又 $X^{(1)}+\lambda d=(0.2083+\lambda, 0.5417+\lambda)$。由第 1 个约束限定 $\lambda\leq 0.3472$。其 λ 的值由下式来确定：

$$\min f(X^{(1)}+\lambda d)=2\lambda^2-8.5\lambda+3.6354$$
$$0\leq\lambda\leq 0.3472$$

解得 $\lambda_2=0.3472$，由此 $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_2 d=(0.5555, 0.8889)$

6.40　构造罚函数

$$P(x,M)=(x_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+M[\min(0,-(x_1^2-x_2))]^2$$

取 $X^{(1)}=(2,1)$为初始点，有 $f(X^{(1)})=0$，经 5 次迭代，趋于问题的极小解 $X_{\min}=(1,1)$，迭代计算的有关数据见表 6A-7：

表　6A-7

k	M_k	$X^{(k+1)}$	$f(X^{(k+1)})$
1	0.1	(1.4539, 0.7608)	0.0935
2	1.0	(1.1687, 0.7407)	0.5753
3	10.0	(0.9906, 0.8425)	1.5203
4	100.0	(0.9507, 0.8875)	1.8917
5	1 000.0	(0.94611, 0.89344)	1.9405

6.41　转化为求极小，构造罚函数，经 5 次迭代逼近真实最优解 $X=(0.4102, 3.2308, 1.8975)$，$f(X)=28.8205$，迭代计算过程见表 6A-8：

表　6A-8

k	M_k	$X^{(k+1)}$	$f(X^{(k+1)})$
1	1	(0.4856, 3.2671, 1.9021)	28.9710
2	10	(0.4179, 3.2349, 1.8981)	28.8362
3	100	(0.4111, 3.2309, 1.8977)	28.8221
4	1 000	(0.4103, 3.2308, 1.8974)	28.8206
5	10 000	(0.4103, 3.2308, 1.8974)	28.8205

6.42　先构造障碍函数

$$\text{瑚}(x,r)=(X_1-2)^4+(x_1-2x_2)^2+\frac{r}{-(x_1^2-x_2)}$$

迭代计算过程见表 6A-9：

表 6A-9

k	r_k	$X^{(k+1)}$	$f(X^{(k+1)})$
1	10.0	(0.7079, 1.5315)	8.3338
2	1.0	(0.8282, 1.1098)	3.8214
3	0.1	(0.8989, 0.9638)	2.5282
4	0.01	(0.9294, 0.9162)	2.1291
5	0.001	(0.9403, 0.9011)	2.0039
6	0.0001	(0.94389, 0.89635)	1.9645

6.43 构造障碍函数

$$珚(X, r) = \frac{(x_1+1)^3}{3} + x_2 + r\left(\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2}\right)$$

迭代计算过程见表 6A-10。

表 6A-10

k	r_k	$X^{(k+1)}$	$f(X^{(k+1)})$
1	1	(1.4142, 1)	5.69
2	0.01	(1.0488, 0.1)	2.97
3	0.0001	(1.0050, 0.01)	2.70
4	10^{-6}	(1.0005, 0.001)	2.67

真实最优解为 $X^* = (1, 0)^T$, $f(X^*) = 2.67$

6.44 构造障碍函数

$$珚(X, r) = x_1^2 - 6x_1 + 9 + 2x_2 + r\left(\frac{1}{x_1-3} + \frac{1}{x_2-3}\right)$$

当 $r \to 0$ 时,趋近真实最优解 $X^* = (3, 3)^T$,有 $f(X^*) = 6$

6.45 最优解为 $X^* = 0$

6.46 最优解为 $X^* = (1, 3)^T$

七、动 态 规 划

复习思考题之 10,**其中**(a) (b) (c) (g) (h)**正确**,(d) (e) (f) (i) (j)**为不正确。**

7.1　最短路线 $A—B_2—C_1—D_1—E$,**其长度为** 8。

7.2　最小费用路线有两条:一条是从 A **线最上方费用为** 2 **的点到** B **线最上方费用为** 3 **的点止。其总费用为** $2+(1+4+2+1+3+1)+3=17$。

另一条是从 A **线最下方费用为** 2 **的点到** B **线上费用为** 1 **的点止。其总费用为** $2+(2+2+1+1+2+6)+1=17$

7.3　(a) **基本方程**

$$f_{n+1}(S_{n+1}) = 0$$

$$f_k(S_k) = \max_{x_k \in D_k(S_k)} \{ g_k(x_k) + f_{k+1}(S_{k+1}) \}$$

$$k = n, n-1, \cdots, 1$$

允许决策集合

$$D_k(S_k) = \left\{ x_k \mid 0 \leq x_k \leq \min \left\{ c_k, \frac{S_k}{a_k} \right\} \right\}$$

可达状态集合

$$S_k = \{ S_k \mid 0 \leq S_k \leq b \} \qquad 1 < k \leq n$$

$$S_1 = b$$

状态转移函数

$$S_{k+1} = S_k - a_k x_k$$

(b) **由于对每一个约束条件,都有一个状态变量** S_{ik},**故在** m **维空间里,共有** m **个状态变量分量。于是有**

$$f_k(S_{1k}, S_{2k}, \cdots, S_{mk}) = \max_{x_k \in D_k(\cdot)} \{ g_k(x_k) + f_{k+1}(S_{1\,k+1}, S_{2\,k+1}, \cdots, S_{m\,k+1}) \}$$

$$D_k(\cdot) = D_k(S_{1k}, S_{2k}, \cdots, S_{mk}) = \left\{ x_k \mid 0 \leq x_k \leq \min \left\{ c_k, \frac{S_{1k}}{a_{1k}}, \cdots, \frac{S_{mk}}{a_{mk}} \right\} \right\}$$

$$S_{ik} = \{ S_{ik} \mid 0 \le S_{ik} \le b_i \} \quad (1 < k \le n), \; S_{i1} = b_i$$
$$S_{i\,k+1} = S_{ik} - a_{ik} x_k$$

7.4 (a) **最优解为**: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$; $z_{\max} = 108$

(b) **最优解为**: $x_1 = 5/2$, $x_2 = 9/4$; $z_{\max} = 131/8$

(c) **最优解为**: $x_1 = 1.82$, $x_2 = 1.574$, $x_3 = 3.147$; $z_{\max} = 29.751$

(d) **最优解为**: $x_1 = 9.6$, $x_2 = 0.2$; $z_{\max} = 702.92$

(e) **当** $b > 4\,000$ **时**, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = b/10$; $z_{\max} = b^3/10^3$

当 $0 < b < 4\,000$ **时**, $x_1 = 0$, $x_2 = b$, $x_3 = 0$; $z_{\max} = 4b^2$

(f) **当** $a > 1/4$ **时**, $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $z_{\max} = 100a$

当 $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$ **时,最优决策有两个**:

即 $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$, $x_4 = 0$

或 $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5$; $z_{\max} = 25$

当 $a < -\frac{1}{4}$ **时,最优决策有两个**:

即 $x_1 = \frac{10}{4a+1}$, $x_2 = \frac{20a}{4a+1}$, $x_3 = \frac{20a}{4a+1}$, $x_4 = 0$ **或**

$x_1 = \frac{10}{4a+1}$, $x_2 = \frac{20a}{4a+1}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{20a}{4a+1}$, $z_{\max} = \frac{100}{4a+1}a$

7.5 (a) **提示:先将该不等式转化为与它等价的数学规划问题**:

$$\max \; (x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a \quad (a > 0) \\ x_i > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

然后利用动态规划来求解,令最优值函数为

$$f_k(y) = \max_{x_1 + \cdots + x_k = y} (x_1 x_2 \cdots x_k)$$
$$x_i > 0, \quad i = 1, \cdots, k$$

其中 $y > 0$。**因而,证明该不等式成立,只需证明** $f_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right)^n$,**再用归纳法证明之。**

(b) **提示:思想方法类似**(a),**以右端不等式为例,它可转化为等价的数学规划问题为**

$$\min \max_{1 \le i \le n} \frac{x_i}{y_i}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a \quad (a > 0)$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b \quad (b > 0)$$
$$x_i > 0, y_i > 0, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

然后利用动态规划来求解。类似(a)设最优值函数,从而只需证明 $f_n(a, b)=\frac{a}{b}$即可。

7.6 逆推解法:设状态变量 s_i 表示第 i 年初拥有的资金数,则有逆推关系式

$$f_n(s_n) = \max_{y_n = s_n}\{g_i(y_n)\}$$

$$f_i(s_i) = \max_{0\le y_i\le s_i}\{g_i(y_i) + f_{i+1}[\alpha(s_i - y_i)]\}$$

$$i = n-1, \cdots, 2, 1$$

顺推解法:设状态变量 s_i 表示第 $i+1$ 年初所拥有的资金数,则有顺推关系式

$$f_1(s_1) = \max_{0\le y_1\le \alpha c - s_1}\{g_1(y_1)\}$$

$$f_i(s_i) = \max_{0\le y_i\le \alpha^i c - s_i}\left[g_i(y_i) + f_{i-1}\left(\frac{y_i + s_i}{\alpha}\right)\right]$$

$$i = 2, \cdots, n$$

7.7 (a) 任务的指派分 4 个阶段完成,用状态变量 s_k 表第 k 阶段初未指派的工作的集合,决策变量为 u_{kj}

$$u_{kj} = \begin{cases} 1, & k\text{阶段被指派完成第 } j \text{ 项工作}, \\ 0, & \text{否则}。\end{cases}$$

状态转移 $s_{k+1} = \{D_k(s_k)\setminus j, 当 u_{kj} = 1\}$。本问题的逆推关系式为

$$f_4(s_4) = \min_{u_{4j}\in D_4(S_4)}\{a_{4j}\}$$

$$f_k(s_k) = \min_{u_{kj}\in D_k(S_k)}\{a_{kj} + f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

(b) 当 $k = 4, 3, 2, 1$ 时,其计算表式分别见表 7A-1,表 7A-2,表 7A-3 和表 7A-4。

表 7A-1

s_4	1	2	3	4
a_{4j}	19	21	23	17
u_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$f_4(s_4)$	19	21	23	17

表 7A-2

3 j / 3	$a_{3j} + f_4(s_4)$				$f_3(s_3)$	u_{3j}^*
	$u_{31}=1$	$u_{32}=1$	$u_{33}=1$	$u_{34}=1$		
(1,2)	26+21	18+19			37	$u_{32}=1$
(1,3)	26+23		16+19		35	$u_{33}=1$
(1,4)	26+17			19+19	38	$u_{34}=1$
(2,3)		18+23	16+21		37	$u_{33}=1$
(2,4)		18+17		19+21	35	$u_{32}=1$
(3,4)			16+17	19+23	33	$u_{33}=1$

表　7A-3

2j / 2	$a_{2j}+f_3(s_3)$				$f_2(s_2)$	u_{2j}^*
	$u_{21}=1$	$u_{22}=1$	$u_{23}=1$	$u_{24}=1$		
(1,2,3)	19 + 37	23 + 35	22 + 37		56	$u_{21}=1$
(1,2,4)	19 + 35	23 + 38		18 + 37	54	$u_{21}=1$
(1,3,4)	19 + 33		22 + 38	18 + 35	52	$u_{21}=1$
(2,3,4)		23 + 33	22 + 35	18 + 37	55	$u_{24}=1$

表　7A-4

1j / 1	$a_{1j}+f_2(s_2)$				$f_1(s_1)$	u_{1j}^*
	$u_{11}=1$	$u_{12}=1$	$u_{13}=1$	$u_{14}=1$		
(1,2,3,4)	15 + 55	18 + 52	21 + 54	24 + 56	70	$u_{11}=1$ 或 $u_{12}=1$

本题有两组最优解: $u_{11}=u_{24}=u_{33}=u_{42}=1$ 或 $u_{12}=u_{21}=u_{33}=u_{44}=1$。

7.8　用 x_i^k 表示从产地 i $(i=1,\cdots,m)$分配给销地 $k,k+1,\cdots,n$ 的物资的总数,则采用逆推算法时,动态规划的基本方程可写为

$$f_k(x_1^k,\cdots,x_m^k)=\min_{x_{ik}}\left[\sum_{i=1}^{m}h_{ik}(x_{ik})+f_{k+1}(x_1^k-x_{1k},\cdots,x_m^k-x_{mk})\right]$$

式中

$$0\leq x_{ik}\leq x_i^k$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ik}=b_k,\quad(k=1,\cdots,n)$$

$$f_{n+1}=0$$

并且有　$x_i^1=a_i,\quad(i=1,\cdots,m)$

7.9　用 k 表示阶段, $k=1,2,3$。

状态变量 s_k, $s_k=\begin{cases}1, & k\text{阶段尚需面试录用}\\0, & \text{否则}\end{cases}$

决策变量 x_k, $x_k=\begin{cases}1, & \text{对 }k\text{阶段面试者决定录用}\\0, & \text{否则}\end{cases}$

状态转移方程

$$s_{k+1}=s_k-x_k$$

动态规划基本方程

$$f_k(s_k)=\max_{x_k\in\{0,1\}}\{c_k(x_k)\cdot f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

$c_k(x_k)$为 k 阶段期望的记分值。

边界条件

$$f_4(0)=1$$

当 $k=3$ 时

$$f_3(1)=\max\{(0.2\times3+0.5\times2+0.3\times1)f_4(0)\}=1.9$$

$$f_2(1)=\max\begin{Bmatrix}(0.2\times3+0.5\times2)f_3(0)+0.3f_3(1)\\(0.2\times3)f_3(0)+(0.5+0.3)f_3(1)\end{Bmatrix}=2.19$$

$$f_1(1)=\max\begin{Bmatrix}(0.2\times3+0.5\times2)f_2(0)+0.3f_2(1)\\(0.2\times3)f_2(0)+(0.5+0.3)f_2(1)\end{Bmatrix}=2.336$$

结论:对第一人面试时对较满意者不录用,对第二人面试时,对较满意者应录用,使录用人员的总期望分为 2.336 分。

7.10 最优决策为:在第一个地区设置 2 个销售点,在第二个地区设置 1 个销售点,在第三个地区设置 1 个销售点。每月可获得总利润为 47。

7.11 最优决策为:第一年将 100 台机器全部生产产品 P_2,第二年把余下的机器继续生产产品 P_2,第三年把余下的所有机器全部生产产品 P_1。三年的总收入为 7 676.25 万元。

7.12 最优决策为: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=2$, $y_2=0$; $x_3=0$, $y_3=3$。最大利润为 $r_1(1,0)+r_2(2,0)+r_3(0,3)=4+4+8=16=f_1(3,3)$。

7.13 最优方案有三个。即

$(m_{1j},m_{2j},m_{3j})=(3,2,2)$或$(2,3,2)$或$(2,4,1)$,总收益都是 17 千万元。

7.14 各月份生产货物数量的最优决策为:

月　份	1	2	3	4	5	6
生产货物量(百件)	4	0	4	3	3	0

7.15 各月份订购与销售的最优决策为:

月	期前存货(s_k)	售出量(x_k)	购进量(y_k)
1	500	500	0
2	0	0	1 000
3	1 000	1 000	1 000
4	1 000	1 000	0

利润最大值为 $f_1(500)=12\times500+10\times1\,000=16\,000$

7.16 最佳生产量为: $x_1=110$, $x_2=110\frac{1}{2}$, $x_3=109\frac{1}{2}$;总的最低费用为

36 321 元。

7.17 热销季节每月最佳订货方案为:

月　　份	10	11	12	1	2	3
订 购 数/双	40	50	0	40	50	0

订购与贮存的最小费用为 606 元。

7.18 最优决策为:上半年进货 $26\dfrac{2}{3}$ 个单位,若上半年销售后剩下 s_2 个单位的货,则下半年再进货 $26\dfrac{2}{3}-s_2$ 个单位的货。这时将获得期望利润 $93\dfrac{1}{3}$。

7.19 最优解有两个:

① $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=1$

② $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=0$

总利润为 480 元。

7.20 最优解有三个:

① $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=1$, $x_4=0$

② $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=0$

③ $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=0$, $x_4=0$

最大价值为 20 千元。

7.21 最优决策为:产品 A 生产 3 件,产品 B 生产 2 件,最大利润为 27。

7.22 (a) $x_1=11$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$; $z_{\max}=55$

(b) $x_1=1$, $x_2=1$; $z_{\max}=3$

(c) 最优解有 6 个:

① $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=3$, $x_4=2$

② $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=2$

③ $x_1=3$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=2$

④ $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=3$

⑤ $x_1=2$, $x_2=3$, $x_3=2$, $x_4=3$

⑥ $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=3$

最优值均为 $z_{\min}=26$

7.23 最优方案为: E_1 备用 1 个, E_2 备用 1 个, E_3 备用 3 个,其总费用为 8 000 元,提高设备的可靠性为 0.042。

7.24 (a) $\because f_1(\alpha)=2\sin\frac{\alpha}{2}$, $n=1$ 时显然为真。

设对于 $k<n$, $f_k(\alpha)=2k\sin\frac{\alpha}{2k}$为真。

当 $n=k+1$ 时

$$f_{k+1}(\alpha)=\max_{0\le\theta\le\alpha}\left[2\sin\frac{\theta}{2}+f_k(\alpha-\theta)\right]=\max_{0\le\theta\le\alpha}\left[2\sin\frac{\theta}{2}+2k\sin\frac{\alpha-\theta}{2k}\right]$$

令
$$2\sin\frac{\theta}{2}+2k\sin\frac{\alpha-\theta}{2k}=s$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\alpha-\theta}{2k}=0,\quad \frac{\theta}{2}=\frac{\alpha-\theta}{2k},\quad \therefore\theta=\frac{\alpha}{k+1}$$

$$\frac{d^2s}{d\theta^2}=-\sin\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2k}\sin\frac{\alpha-\theta}{2k}<0\quad[\because\alpha,\ \theta<360°]$$

即 $\theta=\frac{\alpha}{k+1}$时, s 取最大值, 将 θ代入得

$$f_{k+1}(\alpha)=2\sin\frac{\alpha}{2(k+1)}+2k\sin\frac{k\alpha}{2k(k+1)}=2(k+1)\sin\frac{\alpha}{2k+1}$$

由此
$$f_n(\alpha)=2n\sin\frac{\alpha}{2n}$$

(b) 上式中令 $\alpha=360°$, $\frac{\alpha}{n}$恰好就是 n 边正多边形每边所对的中心角大小。由此圆的 n边内接多边形中, 以正多边形周界为最长。

7.25 把往 4 个仓库派巡逻队划分成 4 个阶段, 状态变量 s_k 为 k 阶段初拥有的未派出的巡逻队数, 决策变量 u_k 为 k 阶段派出的巡逻队数, 状态转移方程为 $s_{k+1}=s_k-u_k$。用逆推解法时写出的动态规划基本方程为

$$f_4(s_4)=\min_{u_k\in D_k(s_k)}\{p_k(u_k)\}$$

$$f_k(s_k)=\min_{u_k\in D_k(s_k)}\{p_k(u_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

式中 $p_k(u_k)$为 k 阶段派出 u_k 个巡逻队时预期发生的事故数。

本问题最优策略为 $u_1^*=2$, $u_2^*=4$, $u_3^*=2$, $u_4^*=4$, 总预期事故数 $f_1(s_1)=87$

7.26 (a) 设状态变量 T_i 为第 i 年末时该设备的役龄, 则用逆推解法时, 动态规划的基本方程可写为

$$f_N(T_N)=\max_{T_N\le N}\begin{cases}N^2-T_N^2+N-(T_N+1), & \text{不更新设备}\\ (N^2-0)+(N-1)-C+(N-T_N), & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$f_i(T_i)=\max_{T_N\le N}\begin{cases}N^2-T_i^2+f_{i+1}(T_i+1), & \text{不更新设备}\\ (N^2-0)+(N-T_i)-C+f_{i+1}(1), & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,N-1$$

(b) 当 $N=3$，$C=10$ 时有

$$f_3(T_3)=\max_{T_3\le 3}\begin{cases}11-T_3-T_3^2, & \text{不更新设备}\\ 4-T_3, & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$f_i(T_i)=\max_{T_i\le 3}\begin{cases}9-T_i^2+f_{i+1}(T_{i+1}), & \text{不更新设备}\\ 2-T_i+f_{i+1}(1), & \text{更新设备}\end{cases}$$

$$i=1,2$$

求解得最优策略为:第一年末不更新,第二年末不更新,第三年末更新;或第一年末不更新,第二年末更新,第三年末不更新。总收益均为 13。

八、图与网络分析

复习思考题之 11,**其中** (b),(e),(f) **为正确**,(a),(c),(d)**不正确**。

8.1　把比赛项目作为研究对象,用点表示。如果两个项目有同一运动员报名参加,则在代表这两个项目的点之间连一条线,作图。只要在图中找出一个点的序列,使依次排列的两个点不相邻,就能做到每名运动员不连续地参加两项比赛。满足要求的排列方案有多个,例如 B,C,A,F,E,D **就是其中之一。**

8.2　(a) $\dfrac{p(p-1)}{2}$

(b) **如果** n **为偶数,最多边为** $\left(\dfrac{n}{2}\right)^2$;**如** n **为奇数,最多边数为**

$$\left(\frac{n}{2}+0.5\right)\left(\frac{n}{2}-0.5\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^2-0.25$$

8.3　用反证法。如图不连通,至少分成两个互相独立部分,一部分含 p **个点,一部分含** $(n-p)$ **个点,且** $p\geq 1$,$(n-p)\geq 1$。**含** p **个节点简单图最多边数为** $\dfrac{p(p-1)}{2}$,**含** $(n-p)$ **个点的部分最多边数为** $\dfrac{(n-p)(n-p-1)}{2}$,**因此两部分最多边数之和为**

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[p(p-1)+(n-p)(n-p-1)]\\=&\frac{1}{2}[(n-1)(n-2)+2p^2-2np+2n-2]\\=&\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-(p-1)(n-p-1)\\\leq&\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\end{aligned}$$

与题中给的条件矛盾,故图必连通。

8.4 图中有四个点的次为 4,八个点的次为 3,四个点的次为 2。旅行者依次经过的城市必须相邻,因此可画出各城市的相邻关系图(见图 8A-1(a))

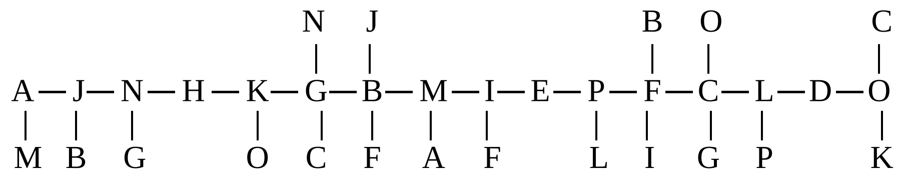


图 8A-1(a)

根据以上关系,可画出各城市的位置如图 8A-1(b)所示。

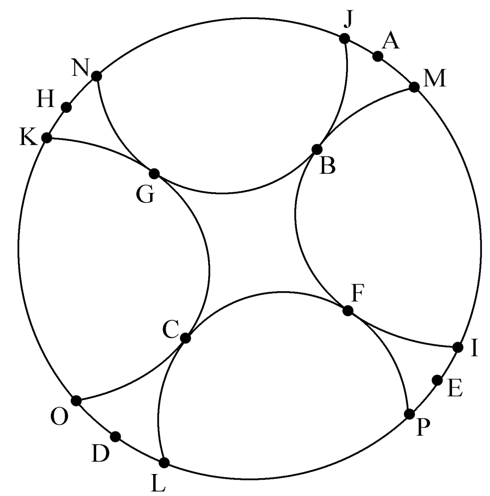
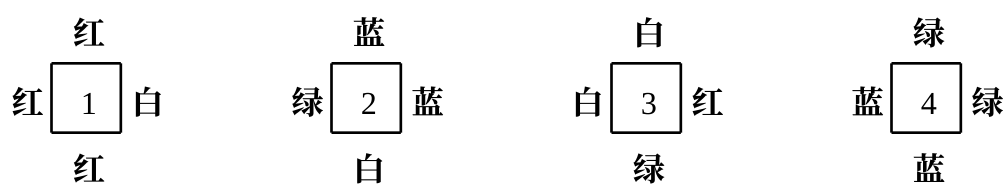


图 8A-1(b)

8.5 将红、蓝、白、绿四种颜色分别用四个点表示,把四个立方体上互为相反面(如南与北,东与西)的颜色的点连一条边得图 8A-2。要求 4 个侧面分别为 4 种颜色,就要从图中去掉 4 条边,并使每个点的次为 4(每种颜色出现 4 次),得图 8A-3。

由此 4 个立方体各个侧面显示的颜色应是:



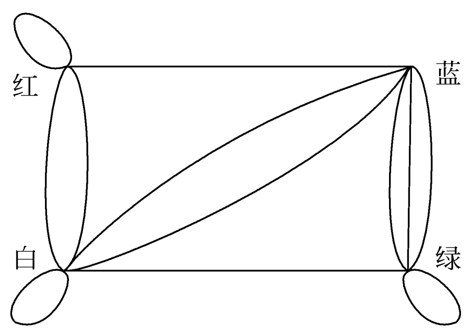


图 8A-2

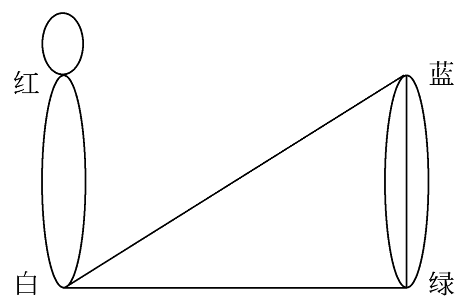


图 8A-3

8.6 将每个比赛项目用一个点表示,同一运动员参加比赛项目的点用边相连,安排比赛顺序时做到相邻点的项目间隔开。安排顺序上可以有多个方案,如下列顺序就是满足题意要求的一个方案:① 100 m 仰泳;② 200 m 蛙泳;③ 200 m 混合接力;④ 100 m 自由泳;⑤ 400 m 混合接力;⑥ 100 m 蛙泳;⑦ 100 m 蝶泳;⑧ 200 m 自由泳。

8.7 把同一个研究生参加的考试课程用边连接,得图 8A-4。由图看出,课程 A 只能同 E 排在一天,B 同 C 安排一天,D 同 F 在一天。再根据题意要求,满足各方面要求的考试日程表只能是表 8A-1。

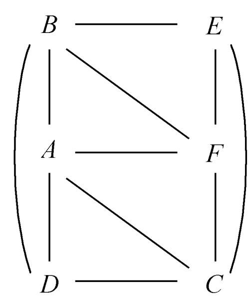


图 8A-4

表 **8A-1**

	上午	下午
第 一 天	A	E
第 二 天	C	B
第 三 天	D	F

8.8 (a) 最小支撑树树枝总长 12;

(b) 树枝总长 15;

(c) 树枝总长 12;

(d) 树枝总长 18。

8.9 边数为$(p-1)$、节点数为 p 的树图,其各点次的总和为$(2p-2)$。若减去次为 k 的点,则图中尚余$(p-1)$个点,这些点的次的总和为$(2p-2-k)$。因树图中无孤立点,故推算出至少有 k 个点的次为 1,即至少有 k 个悬挂点。

8.10 设 $x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{边}[i,j]\text{包含在最小支撑树内}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$

则其数学模型为
$$\min z=\sum_{ij}a_{ij}x_{ij}$$
$$\sum_{ij}x_{ij}=7 \qquad (8\text{ 个点的树图边数为 }7)$$

此外不允许出现圈,如应有 $x_{12}+x_{13}+x_{24}+x_{34}\leq 3$,一共可写出 6 个类似约束。

8.11 有 $1+2+2^2+\cdots+2^{10}=2^{11}-1$ 个节点,$(2^{11}-2)$条边。

8.12 若图连通,若无圈,则该图为树图,含 n 个节点恰有$(n-1)$条边,与题设矛盾。若图不连通,则其中至少有一连通片,其边数大于等于节点数,同上证明此连通片中必存在圈。

8.13 埋设电缆的最优方案为总长 6 200m,故工程费用预算为 $6\,200(10+0.6\times3+5)=104\,160$ 元。

8.14 将每小块稻田及水源地各用一个点表示,连接这些点的树图的边数即为至少要挖开的堤埂数。由此 A 队至少挖开 11 条,B 队至少挖开 13 条。

8.15 应按占比例最大的试卷检出,再依次类推,如图 8A-5 所示。圈中数字分别为

检出的和需检的试卷数。总分检量为 12 500×4 + 22 500×3 + 35 000×2 + 50 000 = 237 500 份次。

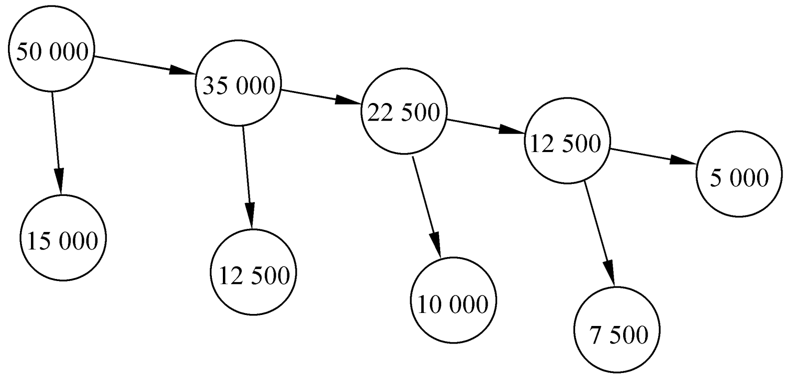


图 8A-5

8.16 输油管线总长为 10.2 mile(海里)。

8.17 略

8.18 (a) v_1 至各点最短距离为: $v_2(2)$, $v_3(8)$, $v_4(15)$, $v_5(3)$, $v_6(10)$, $v_7(7)$, $v_8(11)$, $v_9(4)$, $v_{10}(8)$, $v_{11}(20)$

(b) v_1 至各点最短距离为: $v_2(4)$, $v_3(7)$, $v_4(11)$, $v_5(7)$, $v_6(9)$, $v_7(11)$, $v_8(18)$, $v_9(3)$, $v_{10}(9)$, $v_{11}(14)$

8.19 以 4 个阶段为横坐标,每阶段初剩余的投资为纵坐标,可作出图 8A-6。图中

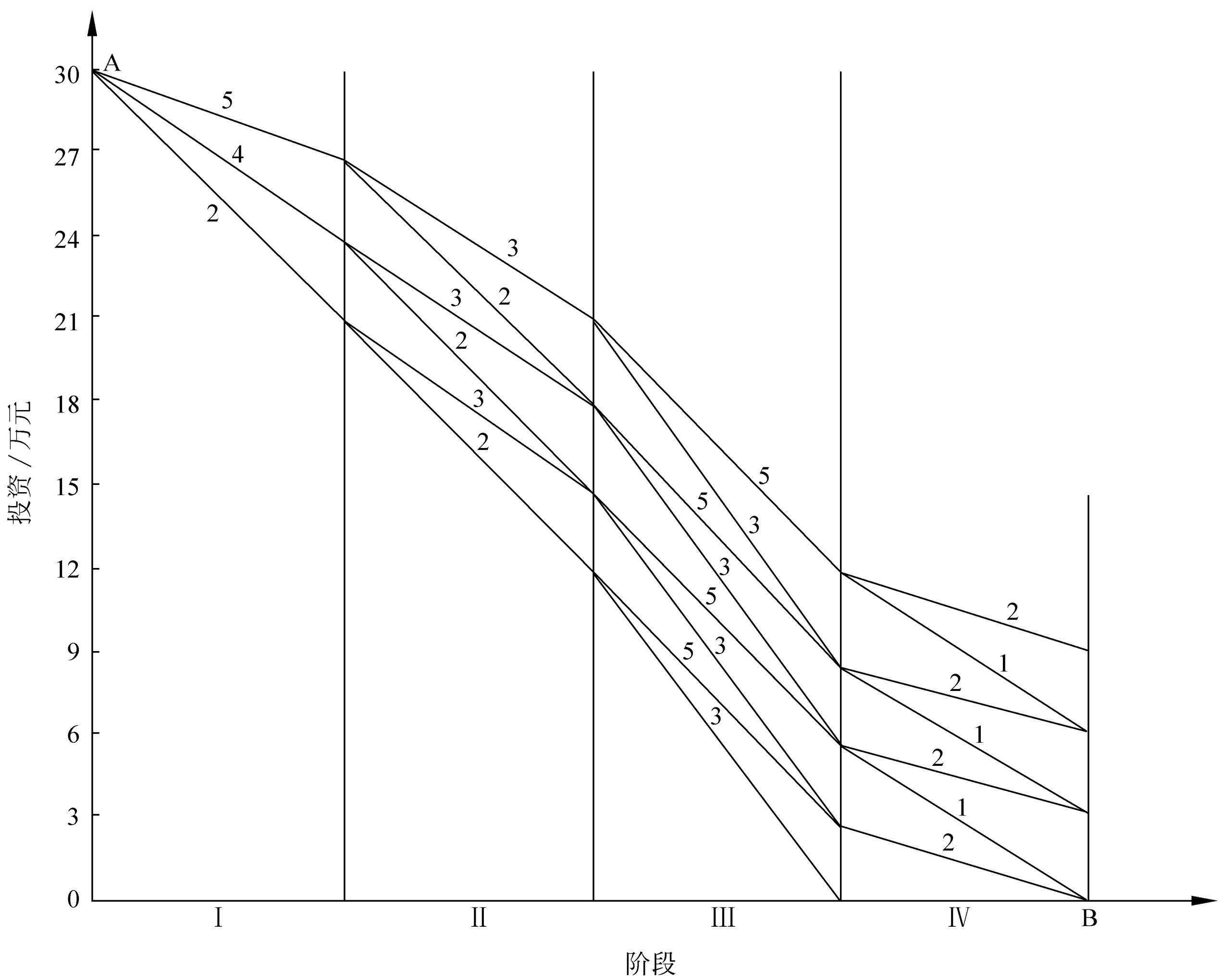


图 8A-6

从 A 至 B 的最短路径即为最佳研制开发方案。图中各线旁数字为完成该阶段任务所需的时间(周)。

8.20 设 $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{最短路径弧 } (i, j) \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$

其数学模型为

$$\min z = \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij}$$

$$\text{st.} \begin{cases} x_{12} + x_{13} = 1 & x_{24} + x_{34} = x_{45} + x_{46} \\ x_{12} = x_{23} + x_{24} + x_{25} & x_{25} + x_{45} + x_{65} = x_{57} \\ x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{36} & x_{36} + x_{46} = x_{65} + x_{67} \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 & \end{cases}$$

8.21 将线段分成 5 部分, AB, BC, CD, DE, EF,分别生产 5 种包装箱所需费用, AC 表用 2 号箱替代 1 号箱时,生产 2 100 个 2 号箱费用, AD 表用 3 号箱替代 1,2 号箱,生产 3 500 个 3 号箱费用。依此类推,得图 8A-7。

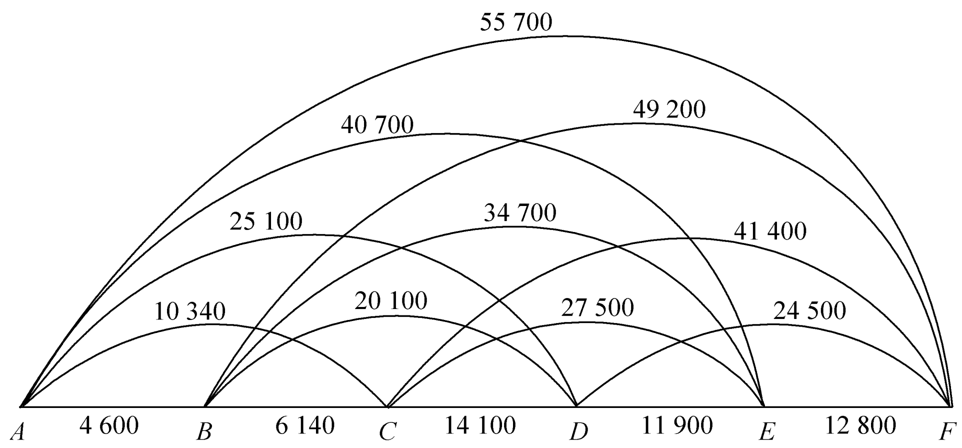


图 8A-7

8.22 问题是寻找一条路线,使在各路段碰不到交警的概率的乘积为最大。乘积最大可转化为求对数和为最大,因此先通过表 8A-2 进行转换,将相应的$(-\lg p_{ij})$标注到各路段上,再从中找出一条最短路。本题最优解为①—②—③—⑤—⑦。

表 8A-2

路段(i, j)	p_{ij}	$\lg p_{ij}$	$-\lg p_{ij}$
(1, 2)	0.2	-0.698 97	0.698 97
(1, 3)	0.9	-0.045 76	0.045 76
(2, 3)	0.6	-0.221 85	0.221 85
(2, 4)	0.8	-0.096 91	0.096 91
(3, 4)	0.1	-1.0	1.0

续表

路段(i, j)	p_{ij}	$\lg p_{ij}$	$-\lg p_{ij}$
(3, 5)	0.3	-0.522 88	0.522 88
(4, 5)	0.4	-0.397 94	0.397 94
(4, 6)	0.35	-0.455 93	0.455 93
(5, 7)	0.25	-0.602 06	0.602 06
(6, 7)	0.5	-0.301 03	0.301 03

8.23　化为求最短路径问题,最优更新策略为于每年末都换一辆新车,到第 4 **年末处理掉,总费用为** 4.2 **万元。**

8.24　至少走 6 **步,走法为** $A \to F \to D \to C \to M \to L \to B$。

8.25　任意两城市间的最便宜路线和票价如表 8A-3 **所示**:

表　8A-3

起终城市	最便宜路线	票价
C_1　C_2	C_1　C_6　C_2	35
C_3	C_1　C_5　C_3 或 C_1　C_6　C_4　C_3	45
C_4	C_1　C_5　C_4 或 C_1　C_6　C_4	35
C_5	C_1　C_5	25
C_6	C_1　C_6	10
C_2　C_3	C_2　C_3	15
C_4	C_2　C_4	20
C_5	C_2　C_4　C_5	30
C_6	C_2　C_6	25
C_3　C_4	C_3　C_4	10
C_5	C_3　C_5 或 C_3　C_4　C_5	20
C_6	C_3　C_4　C_6	35
C_5　C_5	C_4　C_5	10
C_6	C_4　C_6	25
C_5　C_6	C_5　C_1　C_6 或 C_5　C_4　C_6	35

8.26　先求出任意两点间的最短路程如表 8A-4 **所示。**

表 8A-4

从＼到	A	B	C	D	E	F
A	0	2	6	7	8	11
B	2	0	4	5	6	9
C	6	4	0	1	2	5
D	7	5	1	0	1	4
E	8	6	2	1	0	3
F	11	9	5	4	3	0

将表中每行数字分别乘上各村小学生数得表 8A-5。

按列相加,其总和最小的列为 D,即小学校应建立在 D 村。

表 8A-5

A	B	C	D	E	F
0	100	300	350	400	550
80	0	160	200	240	360
360	240	0	60	120	300
140	100	20	0	20	80
560	420	140	70	0	210
990	810	450	360	270	0
2 130	1 670	1 070	1 040	1 050	1 500

8.27 先找出 A_1, E_1, E_5, D_3 分别至 C_3 和 C_4 的最短路径:

$A_1 — B_1 — B_2 — C_2 — C_3$　16;　$A_1 — A_2 — A_3 — A_4 — B_4 — C_4$　17

$E_1 — E_2 — D_2 — D_3 — C_3$　15;　$E_1 — E_2 — D_2 — D_3 — D_4 — C_4$　21

$E_5 — E_4 — D_4 — D_3 — C_3$　11;　$E_5 — D_5 — C_5 — C_4$　13

$D_3 — C_3$　4;　$D_3 — B_4 — C_4$　6

(a) 从 C_3 往各处送货,送最后一处时直接返回 C_4,即少走 C_3 至最后一处路程,多走最后一处至 C_4 的路程,后者路程减去前者值最小的一个即为最后一处送货点。由前面数据知

$$\min\{17-16,\ 21-15,\ 13-11,\ 6-4\} = 17-16 = 1$$

即 A_1 为最后一个送货点。由此最短路线为从 C_4 至 C_3,由 C_3 分别去 E_1, E_5, D_3,每次都返回 C_3,最后由 C_3 至 A_1,再由 A_1 至 C_4。每一段都应走两点间的最短路线。

(b) 与前面分析类似,路线刚好反过来。先由 C_4 至 A_1,由 A_1 去 C_3,再由 C_3 分别去 E_1, E_5, D_3,每次返回 C_3,再由 C_3 回 C_4。又每一段走的都是两点间的最短路线。

8.28 先找出 C_3, A_2, C_1, E_2 各点间最短距离如表 8A-6 所示:(单位:hm)

表 8A-6

从 \ 到	C_3	A_2	C_1	E_2
C_3	-	9	8	10
A_2	9	-	11	12
C_1	8	11	-	8
E_2	10	12	8	-

按货郎担问题求解得最短路线为① $C_3-A_2-E_2-C_1-C_3$;② $C_3-C_1-E_2-A_2-C_3$,距离均为 3 700 m。按所给数据,骑车和送文件耽搁时间共

$$\frac{3\ 700}{15\ 000}\times 60+5\times 3=29.8(\mathrm{min})$$

故从出发算起半小时内该人能回到出发地点。

8.29 $v_s\to v_t$ 的最大流量分别为:(a) 5;(b) 13;(c) 20;(d) 25。

8.30 最大流量为 110 t/h。

8.31 从仓库运往市场的最大流量为 110 单位,其中市场 3 只能满足 50 单位,差 10 单位。

8.32 将 A, B, C, D, E, F 分别用一个点表示,相互之间有桥梁相连的连一条弧,弧的容量就是两点间的桥梁数(见图 8A-8)。根据最大流量最小截集原理,用标号法找出图 8A-8 所表示网络的最小截集,截集所包含的弧 AE, CD, CF,即⑥、⑦、⑫号桥为切断 A, F 之间联系的最少要破坏的桥梁。

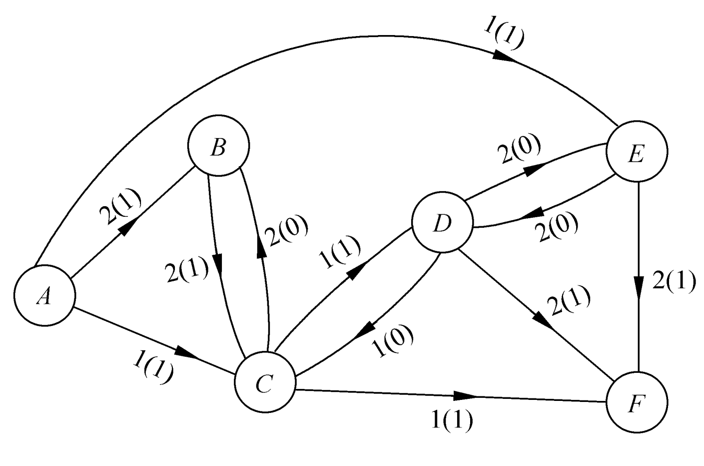


图 8A-8

8.33 将五个人与五个外语语种分别用点表示,把各个人与懂得的外语语种之间用弧相连。(见图 8A-9)规定每条弧的容量为 1,求出图 8A-9 网络的最大流量数字即为最多能得到招聘的人数。从图中看出只能有四个人得到招聘,方案为:甲—英,乙—俄,丙—日,戊—法,丁未能得到应聘。

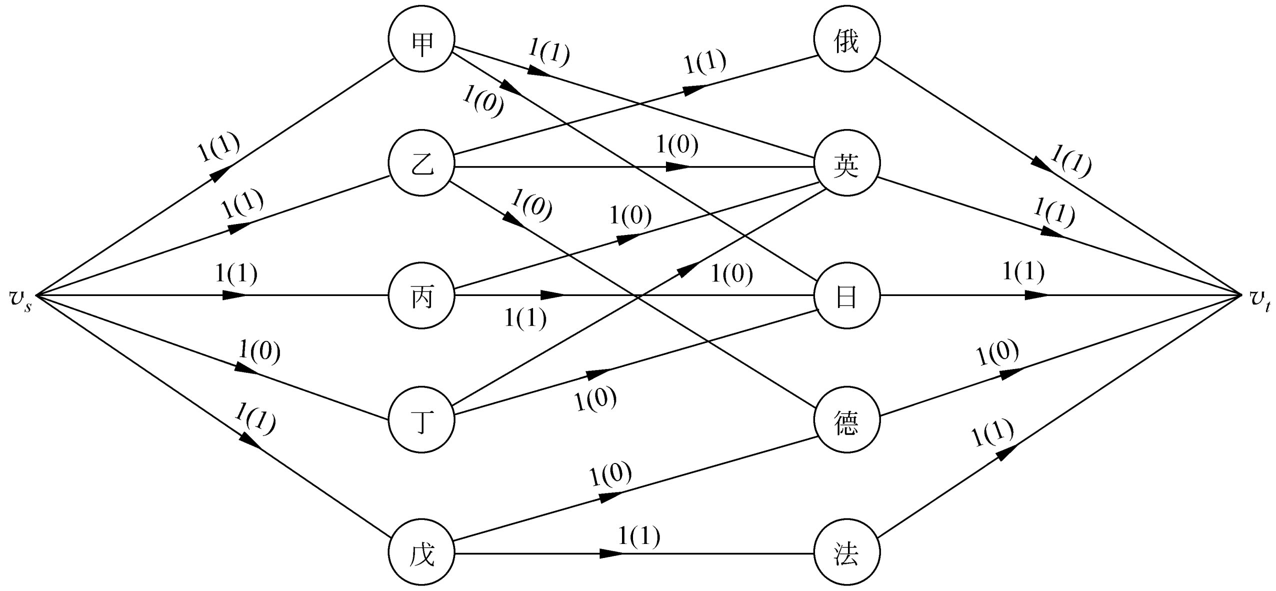


图　8A-9

8.34　(a) **最大流量为** 6,**费用为** 84。

(b) **最大流量为** 3,**费用为** 27。

8.35　**网络图见图** 8A-10,**图中弧旁数字为** (b_{ij}, c_{ij})。**因本题中实际上不受容量限制,其最小总费用为** 240。

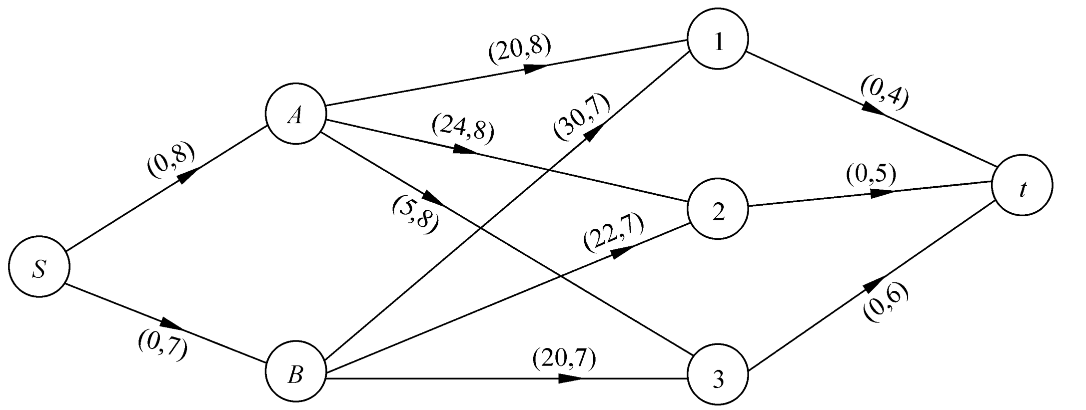


图　8A-10

8.36　**作网络图方法上同上题类似,只需将城市甲和丙分别分成甲$_1$、甲$_2$、丙$_1$ 和丙$_2$,其中甲$_1$ 和丙$_1$ 为最低需求部分,甲$_2$ 和丙$_2$ 为可减少供应部分。**

8.37　**用** x_1 **和** x_2 **分别表示该厂正常生产和加班生产的状态,**(x_1, v_j)**表第** j **年正常生产的货轮,**(x_2, v_j)**表第** j **年加班生产的货轮,**(v_i, v_j)**表第** i **年生产留至第** j **年交货。则可建立如图** 8A-11 **所示的网络图,图中各弧旁数字为**(b_{ij}, c_{ij})。

8.38　**先任意找出一个可行方案,例如甲—Ⅱ,乙—Ⅰ,丙—Ⅳ,丁—Ⅲ,戊—Ⅴ,其最小值为** 3。**将表中所有小于** 3 **的数字划去得表** 8A-7。**从表中再找出一个可行方案,例如为甲—Ⅲ,乙—Ⅳ,丙—Ⅱ,丁—Ⅰ,戊—Ⅴ,最小值为** 4,**再将表中小于** 4 **的数字划去得表** 8A-8。**从表** 8A-8 **中可继续找到一个可行解:甲—Ⅴ,乙—Ⅳ,丙—Ⅱ,丁—Ⅰ,戊—Ⅲ。**

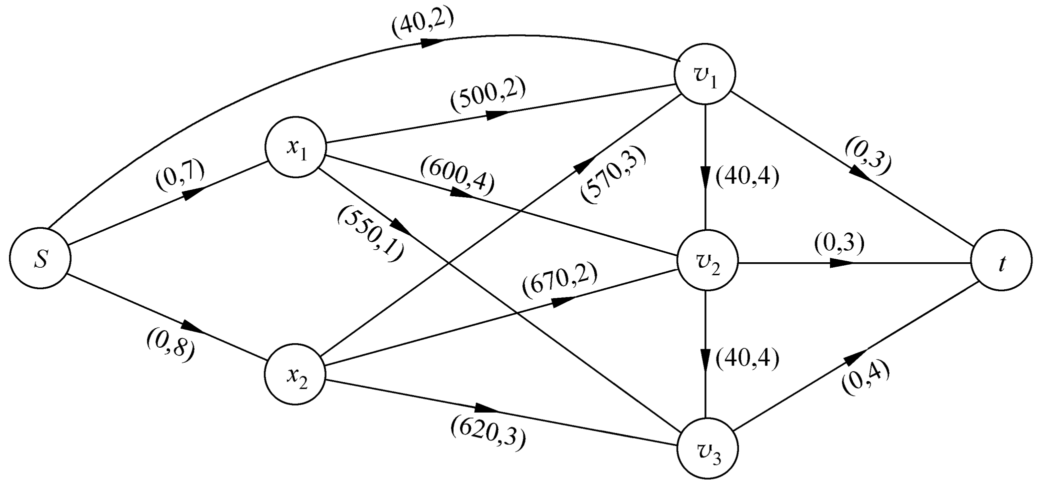


图 8A-11

这是使流水线生产能力达到最大的分配方案。

表 8A-7

	I	II	III	IV	V
甲	×	×	4	×	7
乙	×	4	×	5	6
丙	×	5	×	4	×
丁	5	×	×	×	5
戊	×	7	6	×	4

表 8A-8

	I	II	III	IV	V
甲	×	×	×	×	7
乙	×	×	×	5	6
丙	×	5	×	×	×
丁	5	×	×	×	5
戊	×	7	6	×	×

8.39 增加一个虚设发点 s 和一个虚设收点 t,设各弧上的流量为 f_{ij},则有

$$\max\ z = f_{s1} + f_{s2} + f_{s3} = f_{7t} + f_{8t}$$

$$\text{st.}\begin{cases} f_{ij} \le c_{ij} & \text{(容量限制条件)} \\ \sum_i f_{ij} = \sum_k f_{jk} & \text{(中间点平衡条件)} \\ f_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

例如对中间点④有 $f_{14} + f_{24} = f_{45} + f_{46} + f_{47}$

8.40 在以下容量网络图(图 8A-12)中,如其最大流量为 16,则各公司都能招聘到

所需人才。图中各弧旁数字为容量。

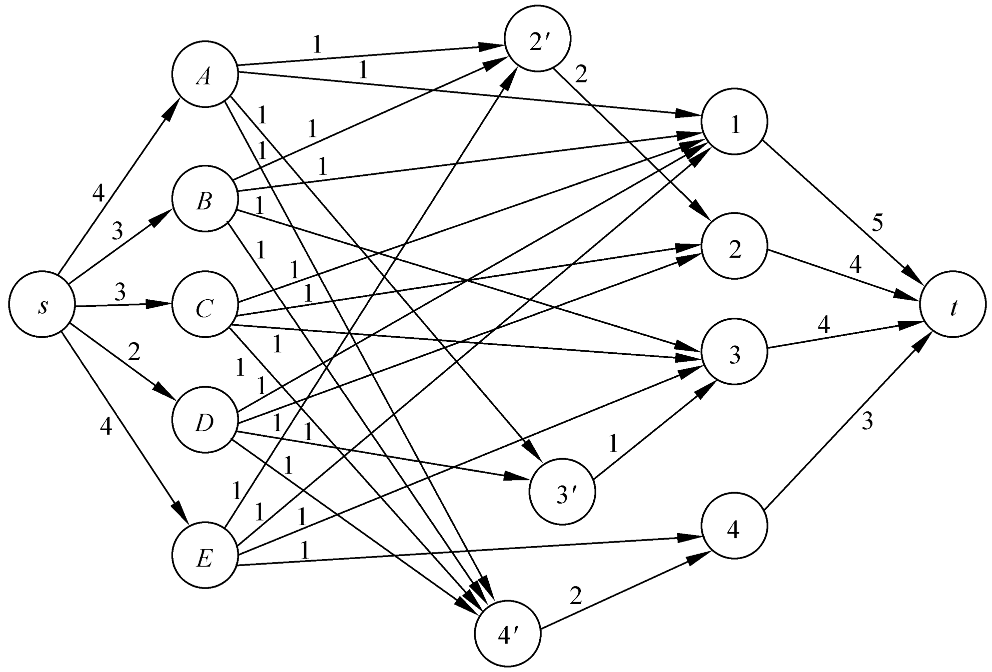


图　8A-12

8.41　以 M_1, M_2, M_3, M_4 分别代表 1 至 4 月, A, B, C 为 3 项工程, A_i, B_i, C_i 为三项工程在 i 月内施工完成的部分,则可作出以下容量网络图(图 8A-13)。如在该图中能得到最大流量为 300,表明公司能按时完成各项工程。

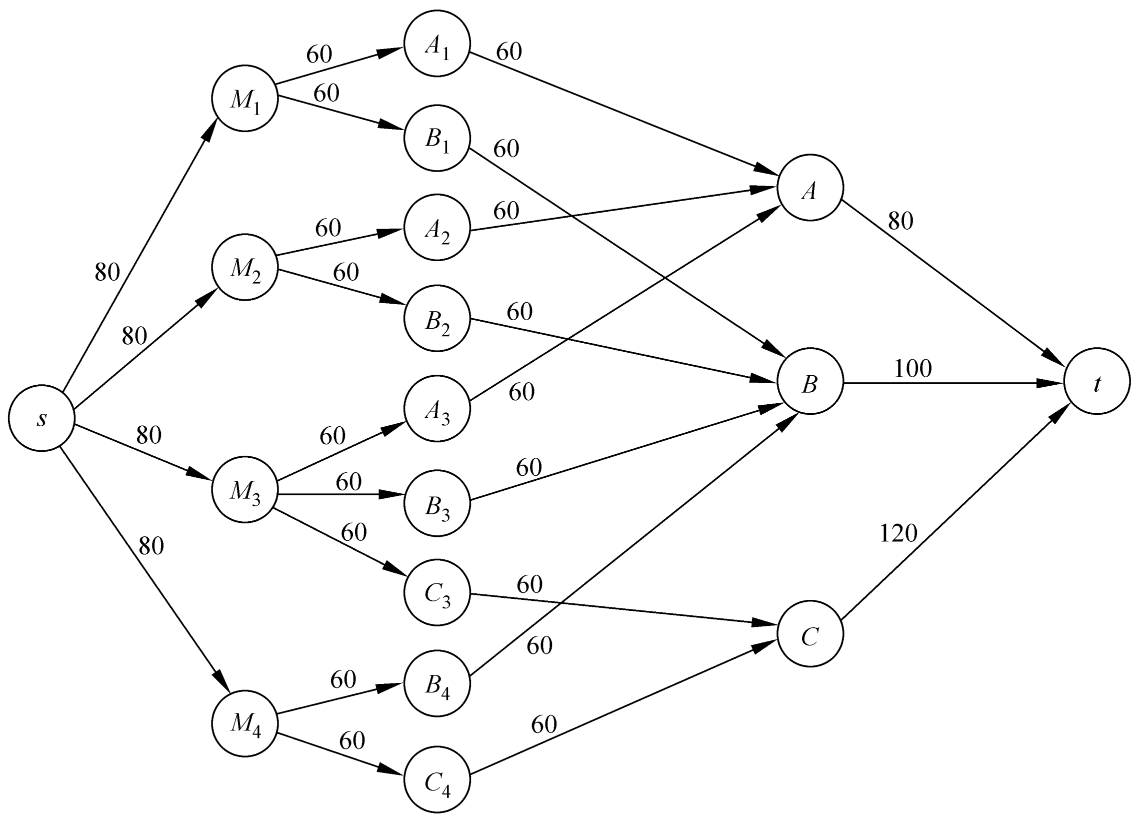


图　8A-13

8.42 乙的建议可行,只需在 B_1 和 D_1 及 B_3 和 D_3 间各增加一个虚设点即可。丙的建议也可行,即把一个求最短路径问题归结为建立整数规划模型求解,建模方法参见本习题集题 8.20。丁的设想不正确,因为最小支撑树中两点间的链,不等同两点间最短距离的连线。

8.43 用点代表岛和陆地,边代表桥,得图 8A-14。在这个图中有两个奇点:D 和 E。因而一个人从 D 出发到 E,或从 E 出发到 D,可以做到经过每座桥一次既无重复又无遗漏。

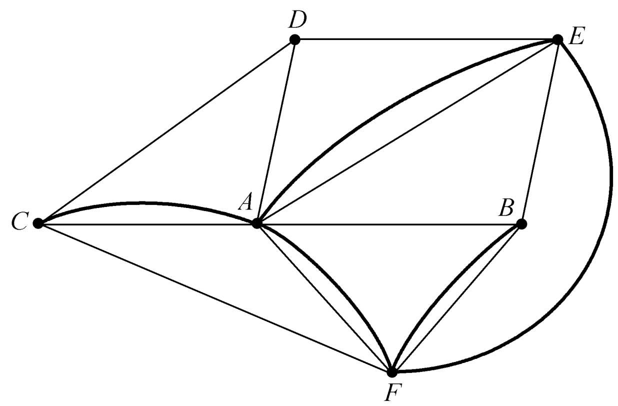


图 8A-14

8.44 分别找出各个图中的奇点,然后将图中奇点按最短连线两两相连即可。

九、网络计划与图解评审法

复习思考题之 7,其中(b) (d) (e) (g) (h)为正确,(a) (c) (f)为不正确。

9.1 (a) 工序 d, e 具有完全相同的箭尾结点与箭头结点。应在结点②与④之间增加一个结点和一道虚工序。

(b) 图中有⑦和⑧两个终端结点,应去掉一个,将工序 f, g 归结到一个结点。此外虚工序⑤→⑥可省略。

(c) 图中有两个始点和两个终点,均可合并。

(d) 工序 a, d, e 形成循环,不允许。

9.2 表 9-1 和表 9-2 对应的图略,表 9-3 和表 9-4 对应的网络图分别见图 9A-1,图 9A-2。

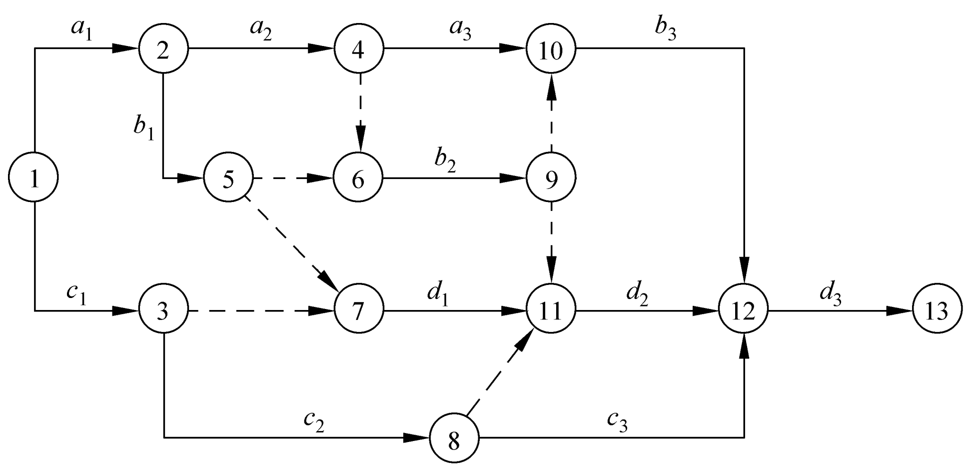


图 9A-1

9.3 同表 9-5,表 9-6 对应的网络图分别见图 9A-3,图 9A-4。

9.4 见表 9A-1 和表 9A-2。

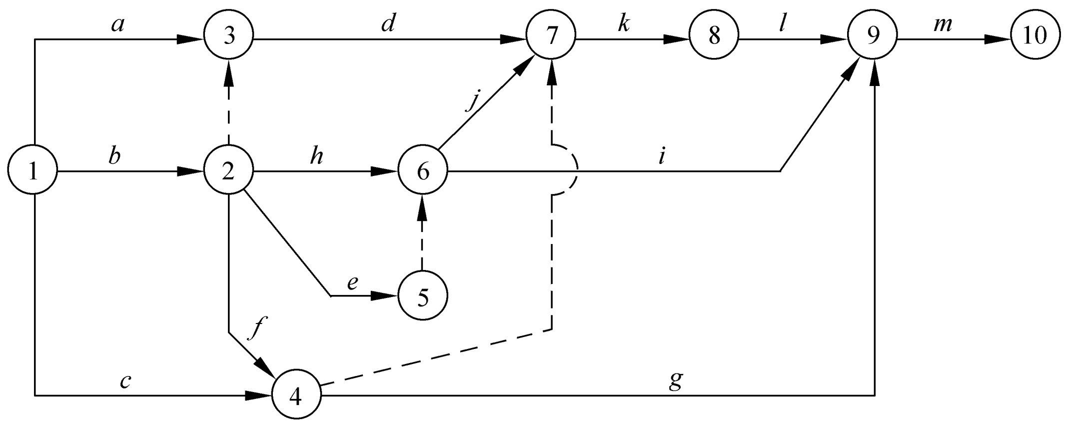


图 9A-2

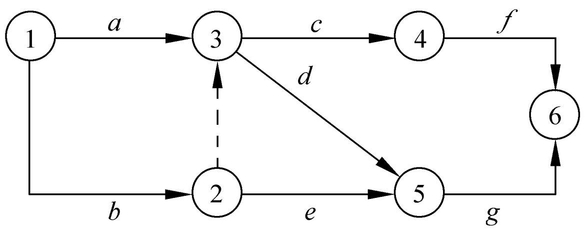


图 9A-3

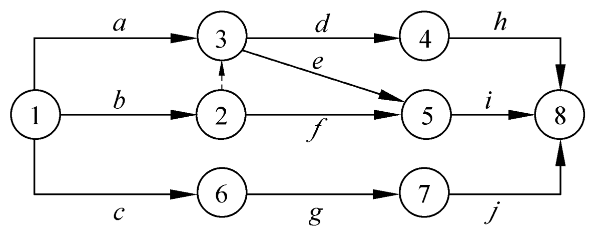


图 9A-4

表 9A-1

结　　点	最早时间	最迟时间
①	0	0
②	4	4
③	5	8
④	3	5
⑤	11	11
⑥	7	10
⑦	13	13
⑧	13	13

表 9A-2

工序	最早开工时间	最早完工时间	最迟开工时间	最迟完工时间
a	0	4	0	4
b	0	3	2	5
c	0	5	3	8
d	4	11	4	11

续表

工序	最早开工时间	最早完工时间	最迟开工时间	最迟完工时间
e	3	11	5	13
f	5	7	8	10
g	11	13	11	13
h	7	10	10	13
i	0	6	7	13

9.5 (a) **网络图见图** 9A-5。

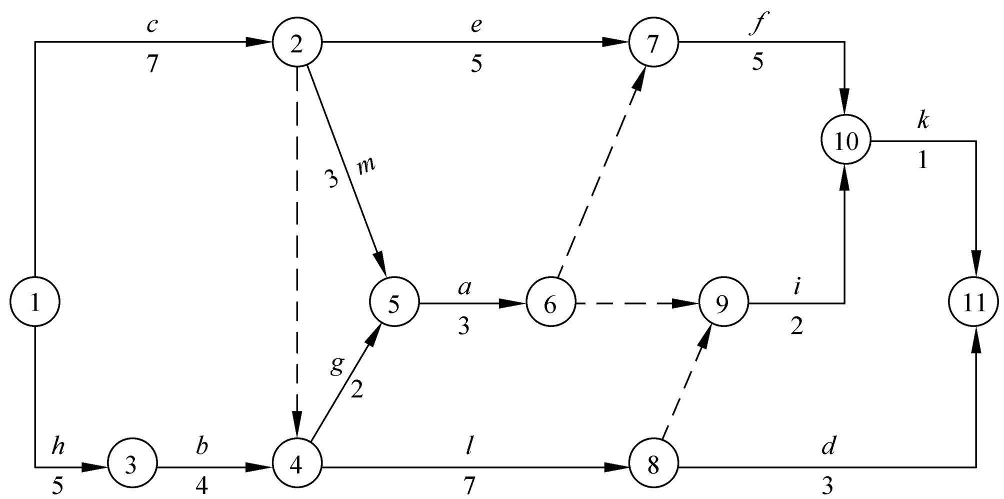


图 9A-5

(b) **各工序最早开工**(*ES*),**最早完工**(*EF*),**最迟开工**(*LS*),**最迟完工**(*LF*)**及总时差**(*TF*),**关键工序如表** 9A-3 **所示。**

表 9A-3

工序	*i*	*j*	工序时间	*ES*	*EF*	*LS*	*LF*	*TF*	关键工序
c	1	2	7	0	7	1	8	1	
h	1	3	5	0	5	0	5	0	*
虚	2	4	0	7	7	9	9	2	
m	2	5	3	7	10	8	11	1	
e	2	7	5	7	12	9	14	2	
b	3	4	4	5	9	5	9	0	*
g	4	5	2	9	11	9	11	0	*
l	4	8	7	9	16	10	17	1	
a	5	6	3	11	14	11	14	0	*
虚	6	7	0	14	14	14	14	0	*
虚	6	9	0	14	14	17	17	3	

续表

工序	i	j	工序时间	ES	EF	LS	LF	TF	关键工序
f	7	10	5	14	19	14	19	0	*
虚	8	9	0	16	16	17	17	1	
d	8	11	3	16	19	17	20	1	
i	9	10	2	16	18	17	19	1	
k	10	11	1	19	20	19	20	0	*

(c) 因本题未涉及缩短工序时间的费用支出及各工序允许缩短时间，故只要缩短表 9A-3 中各关键工序时间合计 2d 即可。

9.6 (a) 见图 9A-6，图中△内数字为结点最迟时间，□内数字为结点最早时间，粗线表示关键路线。

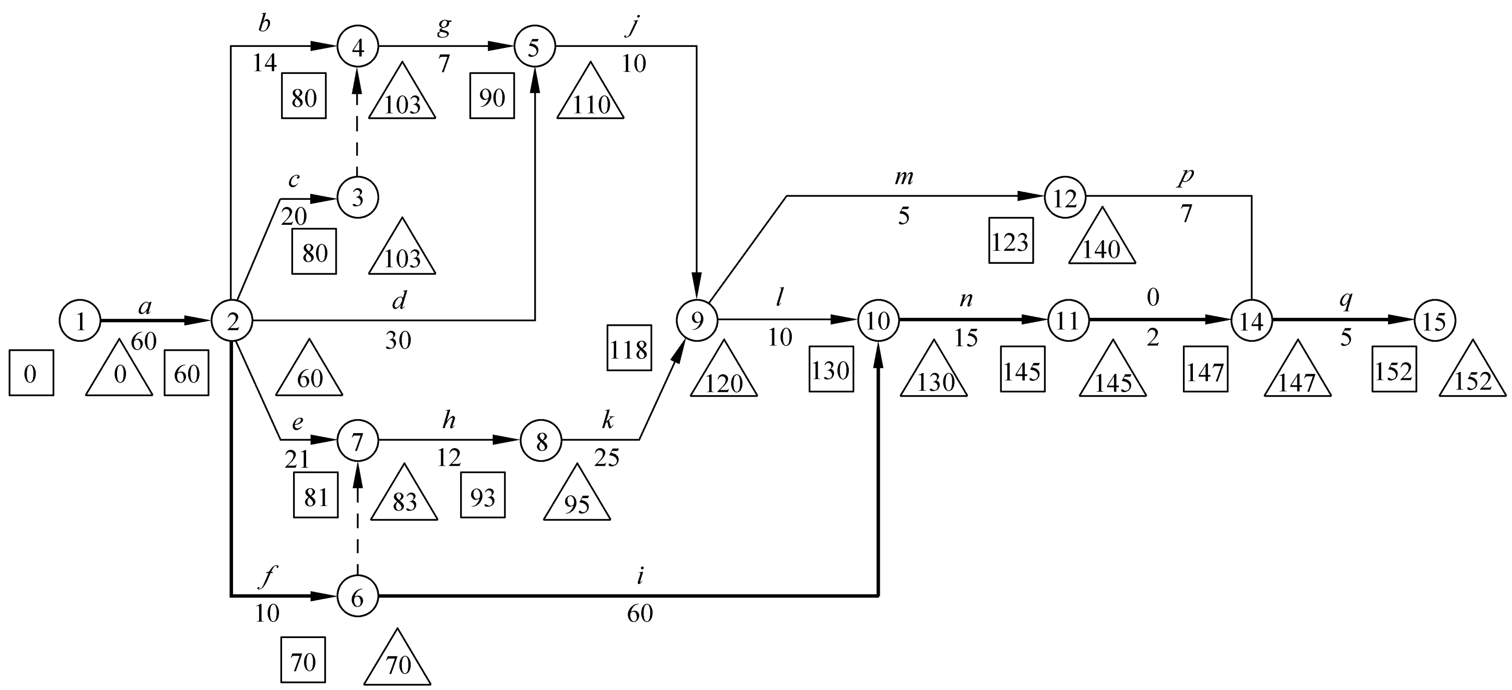


图 9A-6

(b) 增加 t 工序后的网络图，结点时间及关键路线见图 9A-7。

9.7 略

9.8 略

9.9 略

9.10 分别见表 9A-4 和表 9A-5。

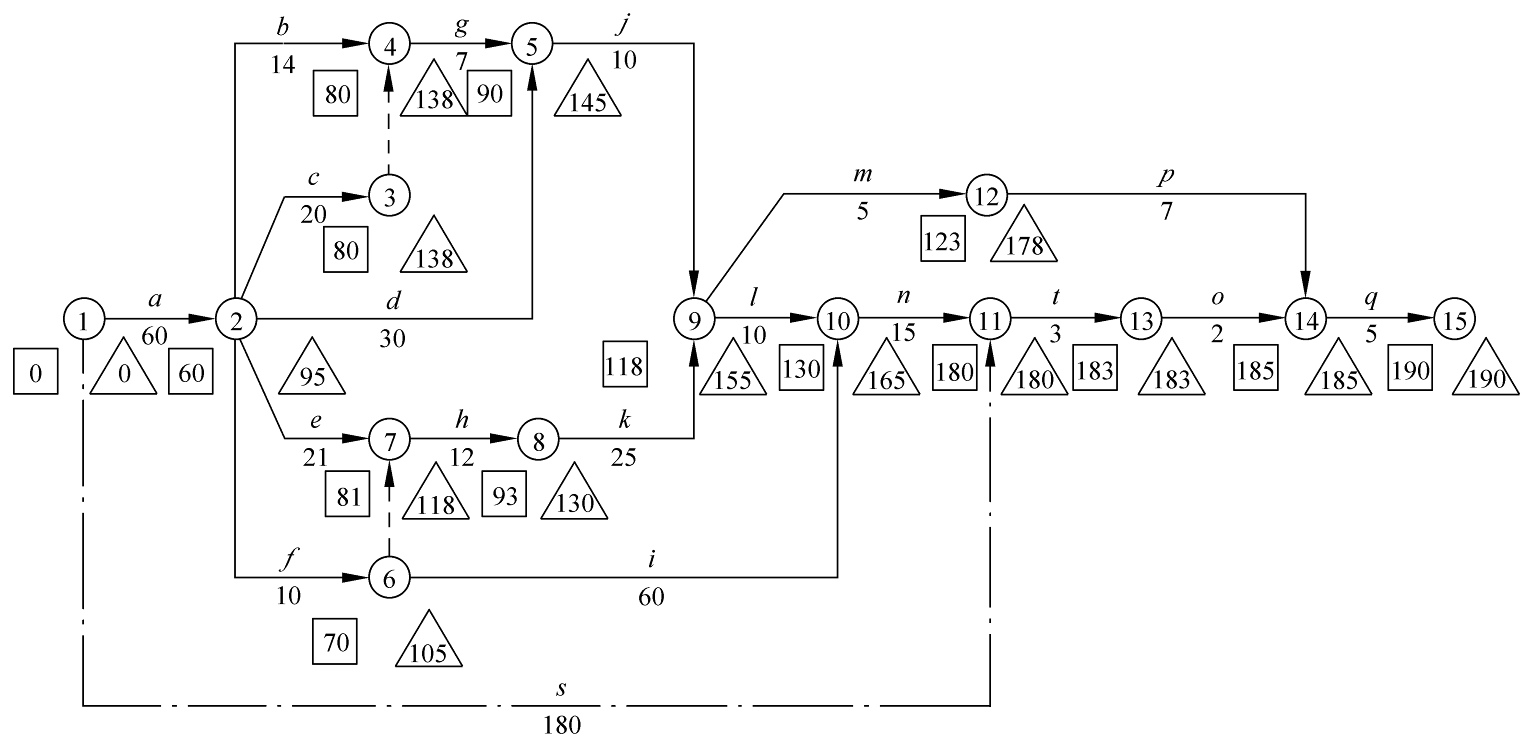


图 9A-7

表 9A-4

结点	最早时间	最迟时间
①	0	0
②	12	14
③	9.5	27.5
④	21.5	23.5
⑤	35	35
⑥	42	42

表 9A-5

工序	最早开工时间	最早完工时间	最迟开工时间	最迟完工时间
a	0	12	2	14
b	0	9.5	18	27.5
c	12	21.5	14	23.5
d	0	35	0	35
e	9.5	17	27.5	35
f	21.5	33	23.5	35
g	35	42	35	42

9.11　(a) 80 d(天)。

(b) 无影响。

(c) 缩短 4 d。

(d) 工程开工后的第 56 d。

(e) 需要采取措施,应设法缩短关键路线上的工序 a, c, e, f, g, j, k, n 的工序时间,共需缩短 5 d 的时间。

9.12　(a) 按如下公式计算工序平均时间 D_{ij} 及方差 σ_{ij}^2 的结果见表 9A-6。

$$D_{ij} = \frac{1}{6}(a + 4m + b),\quad \sigma_{ij}^2 = \left[\frac{1}{6}(b - a)\right]^2$$

表　9A-6

工序	D	σ^2	工序	D	σ^2
a	7	0	f	20.33	4
b	7.16	0.25	g	20.33	1
c	10.50	1.36	h	5.16	0.25
d	10.16	0.25	i	5.16	0.25
e	7	0.11	j	12.83	14.67

(b) 网络图及有关计算见图 9A-8。

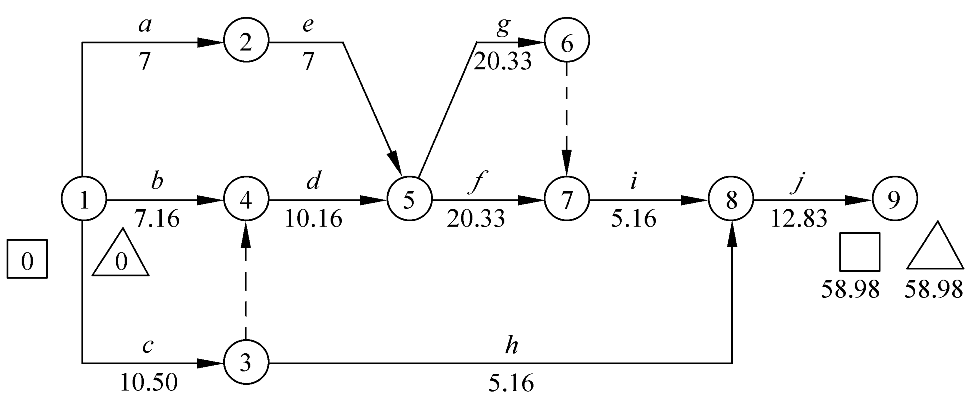


图　9A-8

完成该计划项目所需天数的期望值为 59 d。

(c) $\sigma^2 = \sum \sigma_{ij}^2 = 20.53$

$$\lambda = \frac{T_K - T_E}{\sigma} = \frac{60 - 58.98}{20.53} \approx 0.22$$

注　$\lambda = 0.22$,查正态分布表,$p(\lambda) = 0.587$,即计划项目在 60 d 内完工的概率为 0.587。

9.13　(a) 见表 9A-7:

表 9A-7

工序	工序平均时间/d	均方差
a	8.00	0.33
b	6.83	0.50
c	9.00	1.00
d	4.00	0
e	8.17	0.50
f	13.50	1.50
g	4.17	0.50
h	5.17	0.50
i	9.00	0.67
j	4.50	0.83

(b) 略;

(c) 按合同规定时间完工的概率为 0.54。

9.14 (a) (b) 计算结果见表 9A-8:

表 9A-8

结点 *i*	工序 (*i*, *j*)	*a*	*m*	*b*	平均工序时间	方差	结点最早时间
1	(1,2)	7	10	11	9.67	0.44	0
2	(2,3)	10	15	20	15.00	2.78	9.67
	(2,7)	30	35	42	35.33	4.60	9.67
3	(3,4)	8	10	12	10.00	0.44	24.67
4	(4,5)	12	15	18	15.00	1.00	34.67
	(4,6)	10	10	10	10.00	0	34.67
5	(5,6)	0	0	0	0	0	49.67
6	(6,10)	12	15	18	15.00	1.00	49.67
7	(7,10)	5	5	5	5.00	0	45.00
8	(8,9)	20	30	32	28.67	4.00	45.00
9	(9,11)	5	5	5	5.00	0	73.67
10	(10,11)	15	20	30	20.83	6.25	73.67
11	(11,12)	12	15	20	15.33	1.78	94.50
12	(12,13)	8	10	20	11.33	4.00	109.83
13							121.17

(c) 115 d 完成该项工程的概率

求 λ值 $\lambda = \dfrac{T_K - T_E}{\sigma} = \dfrac{115 - 121.17}{17.7} = -1.4$

查正态分布表　当 $\lambda = -1.4$ 时, $p(\lambda) = 0.08$

(d) 在 96 d 内完成结点 1 以前所有工序的概率: $\lambda = \dfrac{96 - 94.5}{13.7} = 0.4$

查正态分布表得 $p(\lambda) = 0.65$

9.15　见表 9A-9

表　9A-9

工序	a, m, b	平均工序时间/d	方差	关键工序作业时间
a	3,4,5	4	0.11	4
b	6,8,12	8.3	1	8.3
c	1,2,5	2.3		
d	3,5,8	5.2	0.69	5.2
e	1,3,7	3.3		
f	3,7,15	7.7		
g	9,15,20	14.8	3.4	14.8
h	2,4,9	4.5		
i	4,5,6	5		

30 d 完成的概率:

求 λ值 $\lambda = \dfrac{T_K - T_E}{\sigma} = \dfrac{30 - 32.3}{5.2} = -1.0$

查正态分布表,当 $\lambda = -1.0$ 时, $p(\lambda) = 15.9\%$

如果完成该项任务的可能性要求达到 99.2%, 则概率系数为 2.4, 计划工期应规定为:

$$32.3 + 2.4 \times 2.3 = 37.82(\mathrm{d})$$

9.16　(a) 缩短工序 g 为宜(追加费用最少), 这时的网络图都有相应的改变。结点⑦的最迟时间为 14, 工序 c, a, f 都成为关键路线。

(b) 在(1)的基础上, 有以下几个方案:

① 工序 a 与 b 同时缩短一天, 追加费用为 5 + 4 = 9

② 工序 b 与 f 同时缩短一天, 追加费用为 4 + 7 = 11

③ 工序 c 与 h 同时缩短一天, 追加费用为 3 + 6 = 9

④ 工序 b 与 h 同时缩短一天, 将工序 g 延长一天, 追加费用为 4 + 6 - 3 = 7

四个方案中, 方案④最好。

9.17　计算结果见表 9A-10。

表　9A-10

方案	工 程 进 度 /d	工程完工时间 /d	直 接 费 用/元		间接费用 /元	合计费用 /元
			正常进度	赶工进度		
1	正常进度 工序 *a*：3 *b*：7 *c*：4 *d*：5	12	45	0	12×4.5	99
2	工序 *b* 赶工 1 d *d* 赶工 3 d	9	45	1×1 3×2	9×4.5	92.5
3	工序 *a* 赶工 2 d *b* 赶工 1 d *d* 赶工 3 d	7	45	2×4 1×1 3×2	7×4.5	91.5
4	工序 *a* 赶工 2 d *b* 赶工 3 d *c* 赶工 2 d *d* 赶工 3 d	5	45		5×4.5	92.5

计算结果表明应采用第 3 方案。

9.18　工序 *g*(立房顶桁架)、工序 *j*(装天花板)及工序 *c*(车库地面施工)全部赶工作业。工序 *a*(清理场地,准备施工)5 天正常工作,3 天赶工作业。其他工序一律按正常施工。

9.19　网络图见图 9A-9:

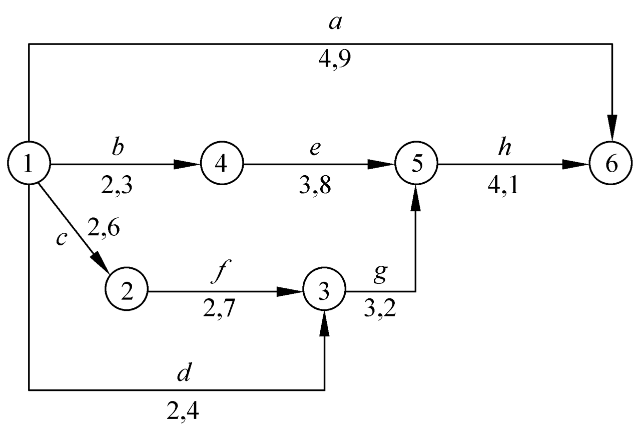


图　9A-9

箭线下面的第一个数字为该工序的时间,第二个数字为该工序需要的人数。

现有人数为 10 人,工程完工时间最短的进度计划见表 9A-11。

表 9A-11

工序代号	$i \to j$	工序时间 /d	$R(i, j)$	工程进度 /d										
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	①→⑥	4	7	※	※	※	※	※	※	※	9	9	9	9
b	①→④	2	2	※	※	3	3							
c	①→②	2	0	6	6									
d	①→③	2	2	4	4	※	※							
e	④→⑤	3	2			※	※	8	8	8				
f	②→③	2	0			7	7							
g	③→⑤	3	0					2	2	2				
h	⑤→⑥	4	0								1	1	1	1
每天用人数合计				10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

注:有※的为总时差;有 .的为关键工序的进度。

9.20 工期为 14 d 时,总成本最小。

9.21 绘制随机网络图见图 9A-10。

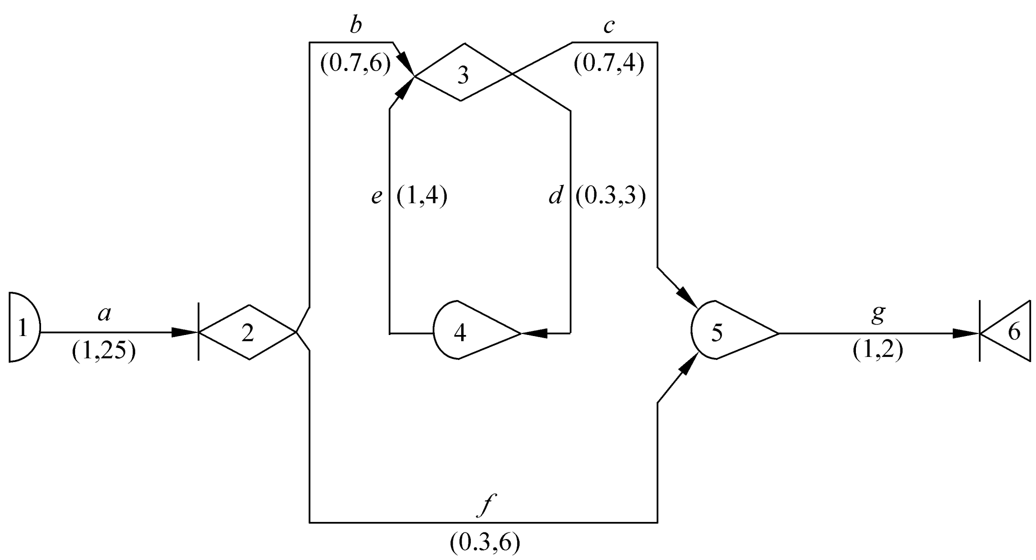


图 9A-10

产品的成品率为

$$P_c = \sum p_i = 0.937 = 93.7\%$$

产品平均完成的时间为

$$T_c = \frac{1}{P_c} \sum p_i t_i = 36.8(\mathrm{h})$$

十、排　队　论

复习思考题之 8，**其中**(a) (b) (d) (h) (i)**正确**，(c) (e) (f) (g) (j)**不正确。**

10.1　**略**

10.2　**略**

10.3　**均可以接受**

10.4　(a) 7 d;

(b) 79 d

10.5　(a) 0.262 3;

(b) 0.179

10.6　(a) $0.614\,4\times10^{-5}$;

(b) $0.961\,2\times10^{-2}$;

(c) 0.036 1;

(d) 0.052 65

10.7　**设** S **为** n **个负指数分布之和(具有相同参数** μ**)，则**

$$f(S)=\frac{\mu(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{-\mu t}$$

$$P\{S\leq t\}=1-e^{-\mu t}\left[1+\mu t+\frac{(\mu t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

当 $t=1$，$\mu=6$ **时，当** $n=4$ **时**，$P=0.151\,2$，$n=5$ **时**，$P=0.309\,8$，**故每小时预约病人应不超过** 4 **人。**

10.8　(a) 0.135;

(b) 0.270;

(c) 0.052 7

10.9　(a) 0.632，0.233，0.135

(b) 0.632

(c) 0.368, 0.368, 0.264

(d) 0.135, 0.717, 0.967

10.10 **稳定状态时平均输出率为** 60 **件**/h

10.11 **本文所求为** $W_q = L_q/\lambda$，**题中给出** $L_q = 3.5$，λ**应为实际进入加油站汽车数，为** $60\left(1-\frac{1}{4}\right) = 45$ **台**/h，**由此**

$$W_q = \frac{3.5}{45} = 0.077\ \text{h} = 4.62\ \text{min}$$

10.12 (a) $L_s = \sum_{n=0}^{4} np_n = 2$(人)；

(b) $L_q = \sum_{n=3}^{4}(n-2)p_n = 0.375$(人)；

(c) $p_1 + 2(p_2 + p_3 + p_4) = 1.625$(人)；

(d) $W_s = L_s/\lambda$，λ**应为实际进入系统人数** $\lambda = 2(1-p_4) = \frac{30}{16}$，**故** $W_s = 2\times\frac{16}{30} = \frac{16}{15}$ h = 64 min；

(e) **由** $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda}(L_s - L_q)$，**得** $\frac{1}{\mu} = \frac{26}{30}$ h = 52 min

10.13 (a) **两名服务员均忙碌时顾客平均输出为** $\frac{1}{\mu} = 5$ min **的负指数分布，故** $f(t_1) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t_1}$；

(b) **因负指数分布的缺乏记忆性，故** $E(t_2) = 5$ min，$\sigma = \frac{1}{\mu} = 5$ min；

(c) t_3 **为** $k=2$，$k\mu = 5$ min **的** Erlang **分布**，

$$E(t_3) = 10\ \text{min},\ \sigma = \frac{1}{k\mu} = \frac{5}{2} = 3.5356(\text{min})$$

10.14 (a) 1/2；

(b) 1/4；

(c) 1/4

10.15 (a) **生灭过程发生率图见图** 10A-1。

(b) $c_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$，$p_0 = 1/\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$，$p_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0$。

10.16 (a) **见图** 10A-2 **速率图和表** 10A-1 **所示**。

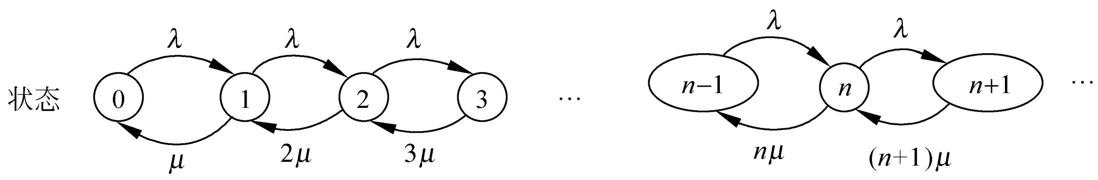


图　10A-1

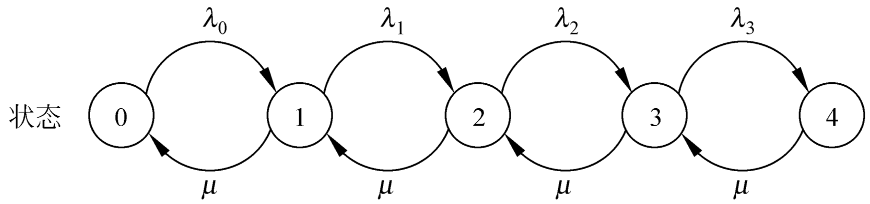


图　10A-2

表　10A-1

状态	进速率 = 出速率
0	$\mu P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu P_2 = (\lambda_1 + \mu) P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu P_3 = (\lambda_2 + \mu) P_2$
3	$\lambda_2 P_2 + \mu P_4 = (\lambda_3 + \mu) P_3$
4	$\lambda_3 P_3 = \mu P_4$

(b) $\because \sum_{i=0}^{4} P_i = 1$, $\therefore P_0\left(\frac{\lambda_0}{\mu} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu^2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu^3} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu^4} + 1\right) = 1$

$\mu = 20$ 辆/ h

$\lambda_0 = 20$ 辆/ h　$\lambda_1 = 15$ 辆/ h　$\lambda_2 = 10$ 辆/ h　$\lambda_3 = 5$ 辆/ h

(c) $P_0 = \left(1 + \frac{20}{20} + \frac{20\times15}{20^2} + \frac{20\times15\times10}{20^3} + \frac{20\times15\times10\times5}{20^4}\right)^{-1} = 0.311$

$P_1 = 0.311$; $P_2 = \frac{15}{20}\times0.311 = 0.233$; $P_3 = \frac{10}{20}\times0.233 = 0.117$

$P_4 = 0.028$

(d) $W_S = \frac{L_S}{\bar{\lambda}} \approx 0.088$ (h)

10.17　(a) 5 m^2;

(b) 20 m^2;

(c) 42 m^2

10.18　原收费口平均等待车辆 $L_q = 6.12$, **采用新装置后利用率可达** 75%, **故应采用新装置。**

10.19 (a) 0.029 1;

(b) 0.097 0;

(c) $\lambda \geq 10/\mathrm{h}$

10.20 **在这个问题中包括两方面费用**:①**机器损坏造成的生产损失** S_1 **和**②**机修车间的开支** S_2,**要使整个系统生产最经济,就是要使** $S = S_1 + S_2$ **为最小。下面以一个月为期进行计算**:

$$S_1 = (\text{正在修理和待修机器数}) \times (\text{每台每天的生产损失}) \times (\text{每个月的工作日数})$$

$$= L_s \times 400 \times 25.5 = 10\,200 \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 10\,200 \frac{\lambda}{0.1 + 0.001K - \lambda}$$

$$= 10\,200 \frac{2}{0.001K - 1.9}$$

$$S_2 = K/12$$

$$\therefore \quad S = K/12 + 10\,200 \frac{2}{0.001K - 1.9}$$

令

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}K} = \frac{1}{12} - \frac{20\,400}{(0.001K - 1.9)^2}(0.001) = 0$$

计算得 $K = 17\,550$ **元**,$\mu = 17.65$,$S = 2\,767$ **元**。

10.21 (a) $P_0 = 1 \Big/ \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu m} + \frac{\lambda^3}{\mu m^2} + \cdots\right)$

(b) **平均忙期为** $1 - \frac{2P_0 + P_1}{2}$

(c) $P_0 = 0.4$,**平均忙期为** 0.525

10.22 **如去另一电话亭时**,$W_q = 3$ min,**加步行共需** 7 min,**而原地等待平均只需** 6 min,**故结论为应在原地等待**。

10.23 (a) **略**;

(b) $P_0 = 1/3$,$L_q = 1/3$,$L_s = 4/3$;

(c) **平均忙期为** 1/2

10.24 **两种情况下的** W_q **值见表** 10A-2:

表 10A-2

$\lambda_1 = \lambda_2$ 的值	(a) 分售南方和北方票	(b) 联合售票
2	0.025	0.004 167
4	0.066 7	0.019 0
6	0.15	0.056 25
8	0.40	0.177 77

10 25 (a) $P\{W\leq 1\}=1-e^{-\mu(1-\rho)}=0.865$

$4.50\times 0.865-5.50\times 0.135=3.149$

故在此保证条件下,商店可以盈利;

(b) 盈亏平衡时有

$$4.5\times P\{W\leq 1\}=5.5\times P\{W>1\}$$

解得 $\lambda=7.2$。

10 26 (a) 生死过程发生率图见图 10A-3

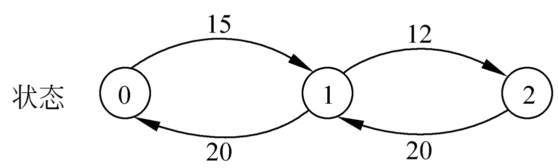


图 10A-3

(b) 由图 10A-3 列出状态平衡方程并求解得到 $p_0=0.4545$, $p_1=0.3409$, $p_2=0.2046$,洗车设备平均利用率为$(1-p_0)=0.5455$。$W_s=\dfrac{L_s}{\lambda_{eff}}=\dfrac{\sum_{n=0}^{2}np_n}{\lambda(1-p_2)}=\dfrac{0.75}{11.931}=0.0629(\text{h})=3.77(\text{min})$

(c) 当租用第 3 个车位时,可用与上述相同步骤求得 $p_0=0.416$, $p_1=0.312$, $p_2=0.187$, $p_3=0.085$。有 2 个车位时每天损失顾客为 $12\times 15\times 0.2046=36.8$ 辆,增加到 3 个车位时损失顾客 $12\times 15\times 0.085=15.3$ 辆,即每天少损失 21.5 辆,可增加收入 $21.5\times 5=107.5$(元),大于租金 100 元,故值得租用。

10 27 因有 $p_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$,题中 $N=4$ 第一个理发店 $\rho=\dfrac{10}{4}=2.5$,第二个理发店 $\rho=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}$。计算得第一个理发店 $p_0=0.026$,理发员收入为 $12\times 4\times 11(1-0.026)=514.272$(元);第二个理发店 $p_0=0.056$,理发员收入为 $12\times 6\times 3.5(1-0.056)=509.76$(元)。

10 28 本题中将存贮的物品当作服务员,订货所需时间看作服务员对一名顾客的服务时间,当 4 件物品均在订购途中时,即 4 名服务员均处于忙碌,到达顾客将离去,其概率为

$$p_4=\frac{(\lambda/\mu)^4/4!}{\sum_{n=0}^{4}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n/n!}=0.647$$

10 29 (a) $P\{W_s\leq 0.5\}=1-e^{-\mu(1-\rho)\times 0.5}=1-e^{-1}=0.632$

(b) 设提前时间为 $t'=t+1.5$, t 为买票时间

$$P\{W_s > t\} = e^{-\mu(1-\rho)t} = 0.01$$

$$e^{-2t} = 0.01, \quad 得\ t = 2.3$$

$t' = 3.8$ 分，即球迷至少提前 3.8 min 到达。

10.30 (a)和(b)的计算结果分别见表 10A-3 和表 10A-4。

表 10A-3

λ	L_q	L_s	W_q	W_s	P_0
5.0	0.50	1	0.10	0.20	0.5
9.0	8.10	9	0.90	1.00	0.1
9.9	98.01	99	9.90	10.00	0.01

表 10A-4

λ	L_q	L_s	W_q	W_s	P_0
5.0	0.333	1.333	0.067	0.267	0.333
9.0	7.727	9.527	0.859	1.059	0.053
9.9	97.030	99.010	9.801	10.001	0.005

10.31 (a) 0.421 3;

(b) 0.578 7;

(c) 0.513 4;

(d) 9 个座位。

10.32

(a) $N_1 = 1 \qquad \dfrac{\lambda - \mu(1-P_0)}{\lambda} = \dfrac{15-20(1-0.571)}{15} \approx 0.428 = 42.8\%$

(b) $N_2 = 3 \qquad \dfrac{\lambda - \lambda_e}{\lambda} = \dfrac{15-20(1-0.366)}{15} \approx 0.155 = 15.5\%$

(c) $N_3 = 5 \qquad \dfrac{\lambda - \lambda_e}{\lambda} = \dfrac{15-20(1-0.304)}{15} \approx 0.072 = 7.2\%$

10.33 (a) $E_0 = \sum_{n=0}^{10}(10-n)P_n = 8.326\ 2$;

(b) $P_{10} \approx 0$;

(c) 10;

(d) 0

10.34 (a) $P_0 = 0.278\ 6$, $P_1 = 0.232\ 2$, $P_2 = 0.193\ 5$, $P_3 = 0.161\ 2$, $P_4 = 0.134\ 4$;

(b) $L_s = 4.328$;

(c) 0.721 4;

(d) 0.134 4

10.35 (a) $P_0 = 0.166\ 7$

(b) $P\left(W_s > \dfrac{1}{3}\right) = e^{-5/3} = 0.188\ 9$

(c) $L_q = 4.166\ 7$

(d) $P_9 + P_{10} + P_{11} = 0.032\ 3 + 0.026\ 9 + 0.022\ 4 = 0.081\ 6$

(e) (i) 1.578 3 (ii) 1.333 3 (iii) 0.694

10.36 对该系统有

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 \qquad (\text{当 } n \leq N),\ \therefore P_0 = \left(\sum_{n=0}^{N} P_n\right)^{-1}$$

题中 $\lambda = 10$, $\mu = 20$, **计算过程见表** 10A-5。

表 10A-5

N	P_0	$P_N = \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot P_0$
1	3/3	0.333 3
2	4/7	0.142 8
3	8/15	0.066 7
4	16/31	0.032 2
5	32/63	0.015 8
6	64/127	0.007 9
7	128/255	0.003 9

由表 10A-5, $N \geq 6$。

10.37 本题为自服务的排队系统,服务员数 $C = \infty$, **将此代入公式**

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{C} (1/k!)(\lambda/\mu)^k\right]^{-1} = e^{-\lambda/\mu}$$

$$P_n = \frac{1}{n!}(\lambda/\mu)^n \cdot P_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot e^{-\lambda/\mu}$$

题中每个展厅内 $\lambda = 24$, $\mu = 4$, **故** $\lambda/\mu = 6$。**要确定展厅容量** S, **使观众超过** S **的概率小于** 0.05, **即有**

$$0.05 \geq \sum_{n=S}^{\infty} \frac{6^n}{n!} \cdot e^{-6}$$

由普阿松累积分布表查得 $S \geq 10$。

10 38 (1) 来到电话交换台的呼唤有两类:一是各分机往外打的电话,二是从外单位打进来的电话。前一类 $\lambda_1 = \left(\frac{60}{40}\times 0.2 + \frac{1}{2}\times 0.8\right)\times 200 = 140$,后一类 $\lambda_2 = 60$,根据普阿松分布性质,来到交换台的总呼唤流仍为普阿松分布,其参数 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 200$。

(2) 这是一个多个服务站的带消失的系统,要使电话接通率达到 95%以上,即损失要低于 5%,也即

$$P_s = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \Big/ S!}{\sum_{n=0}^{S}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \Big/ n!} \leq 0.05$$

问题中 $\mu = 20$,$\frac{\lambda}{\mu} = 10$,可以用表 10A-6 进行计算,求 S。

表 10A-6

S	$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S / S!$	$\sum_{n=0}^{S}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n / n!$	P_S
0	1.0	1.0	1.0
1	10.0	11.0	0.909
2	50.0	61.0	0.820
3	166.7	227.7	0.732
4	416.7	644.4	0.647
5	833.3	1 477.7	0.564
6	1 388.9	2 866.6	0.485
7	1 984.1	4 850.7	0.409
8	2 480.2	7 330.9	0.338
9	2 755.7	10 086.6	0.273
10	2 755.7	12 842.3	0.215
11	2 505.2	15 347.5	0.163
12	2 087.7	17 435.2	0.120
13	1 605.9	19 041.1	0.084
14	1 147.1	20 188.2	0.056
15	764.7	20 952.9	0.036

根据计算看出为了外线接通率达到 95%时,应不少于 15 条外线。

10 39 这个问题中如把汽车当成服务机构,对顾客病人来说就构成一个待消失的服务系统。但在这个系统中服务站的个数是未知数,不好求解,因此,只能先求解另一个服务系统,把停车场停放位置与到达的汽车当成一个有限排队的系统。在这个系统中:

$$\mu = 10(1 - P_0)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} 0.8(1 - P_0) = 0.8 \Big/ \left[1 - \frac{1-(\lambda/\mu)^{M+1}}{1-\lambda/\mu}\right]$$

$$= 0.8 \frac{1-(\lambda/\mu)^{M+1}}{(\lambda/\mu)-(\lambda/\mu)^{M+1}}$$

将 $M = 5$ 代入

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^7 = 0.8\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^6\right]$$

因 $0 < \rho < 1$，求得 $\frac{\lambda}{\mu} = 0.973$

由此

$$\mu = \frac{8}{0.973} = 8.222$$

$$P_0 = \frac{1-0.973}{1-0.973^6} = 0.178$$

$$L = \sum_{n=0}^{M} nP_n = 2.423$$

(a) 出租汽车到达时，停车场有空闲概率为

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_5 = 1 - 0.156 = 0.844$$

因为 $\lambda = 8$，而其中有 84.4% 进入停车场，所以有效输入率

$$\lambda_{eff} = 8 \times 0.844 = 6.752$$

(b) 汽车在停车场的平均停留时间

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{2.423}{6.752} = 0.359(\mathrm{h}) = 21.5\ (\mathrm{min})$$

(c) 从医院出来病人在门口要到出租汽车的概率为

$$1 - P_0 = 0.822$$

即每小时出来的十个病人中只有 8.22 人在门口要到车，另有 1.78 人将向附近出租汽车站要车。

10.40 (a) 设该车间有 x 名修理工，则机器停工损失加修理工工资的费用(/ h)如表 10A-7 所示：

表 10A-7

x	L_s	$4L_s + 6x$
1	8.25	39.0
2	6.5	38.0
3	5.02	38.08
4	4.15	40.6
5	3.78	45.12
6	3.67	50.68

由表 10A-7,应设 2 名修理工;

(b) 5 名;

(c) 计算不同 x 时的 W_s 值见表 10A-8。

表 10A-8

x	1	2	3	4	5	6
W_s	33.3	14.3	7.07	4.96	4.26	3.67

故应设 6 名修理工。

10.41 该系统总费用 $TC = C + (0.8)(8)\cdot L_s$,式中 C 为每天固定费用。对 4 个方案的计算见表 10A-9。

表 10A-9

项目	λ	μ	L_s	$TC = C + (0.8)(8)\cdot L_s$
增加 1 名打字员	22	24	1.24	$40 + 6.4\times1.24 = 47.94$
购 1 型新机器	22	36	1.57	$37 + 6.4\times1.57 = 47.05$
购 2 型新机器	22	42	1.1	$39 + 6.4\times1.1 = 46.04$
购 3 型新机器	22	60	0.58	$43 + 6.4\times0.58 = 46.70$

故结论为购买一台 2 型的自动打字机。

10.42 全部车辆运转概率为 0.966 8,有一台不能运转概率为 0.032 2,两台不能运转概率 0.000 859,三台不能运转概率为 0.000 017 2。

10.43 联合作业由于工人间相互协作,提高了机器的利用率。

10.44 (a) 0.387 4;

(b) 0.467 2;

(c) 0.292 3; 0.766 4;

(d) 3 台

10.45 设维修工看管 m 台机器,比较不同的 m 值,使 $\frac{1}{m}[8 + 40L_s(m)]$ 为最小。经比较最优看管数仍为 3 台。

10.46 (a) 生死过程发生率图见图 10A-4,图中状态 10 为第一个窗口有顾客,第二个窗口空闲,状态 01 为第一窗口空闲,第二窗口有顾客。

(b) 列出状态平衡方程并计算得 $p_0 = 0.290$, $p_{01} = 0.185$, $p_{10} = 0.167$, $p_2 = 0.232$, $p_3 = 0.126$

$$L_s = p_{01} + p_{10} + 2p_2 + 3p_3 = 1.194$$

(c) 服务员 s_1 为 $p_{10} + p_2 + p_3 = 0.543 = 54.3\%$

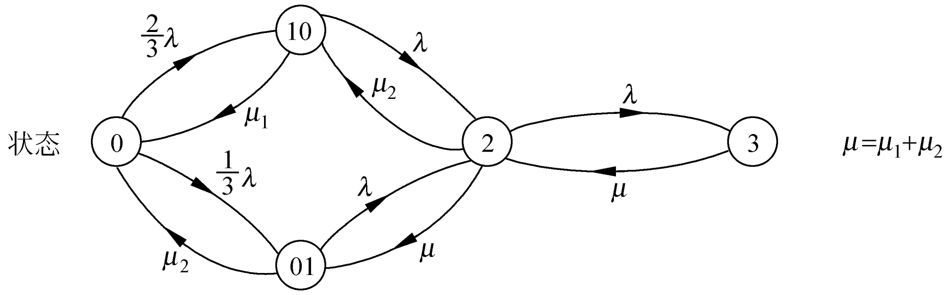


图　10A-4

服务员 s_2 为 $p_{01}+p_2+p_3=0.525=52.5\%$

10.47　$\lambda=15$ 车/h，$\mu_{甲}=20$ 车/h，$\mu_{乙}=40$ 车/h，$\mu_{丙}=120$ 车/h，见表 10A-10：

表　**10A-10**

安装起重机	固定费用	$\frac{\lambda}{\mu}$×(每小时操作费)×(工作时间)	$\frac{1}{\mu-\lambda}$×(车辆数)×每小时损失	合计
甲	60	$\frac{15}{20}\times10\times10=75$	$\frac{1}{20-15}\times150\times10=300$	435
乙	130	$\frac{15}{40}\times15\times10=56$	$\frac{1}{40-15}\times150\times10=60$	246*
丙	250	$\frac{15}{120}\times20\times10=25$	$\frac{1}{120-15}\times150\times10=14$	289

结论：安装起重机械乙最合算。

10.48　3 名工人。

10.49　通过计算比较，机场应设 3 条跑道，其利用率为 24.99%。

10.50　(a) 0.239；

(b) 顾客源无限，但系统容量有限，最大为 3，这时机器待修概率为 0.338；

(c) 0.184

10.51　(a) ①　$W_q=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

②　$W_q=\frac{1}{2}\;\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

③　$\because\ \sigma'=\frac{1}{2\mu}$　$\therefore\ [\sigma]^2=\frac{1}{4\sigma^2}$，即　$k=4$

$W_q=\frac{5}{8}\;\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

(b) 令(a) 中的 $W_q=K\;\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$，$K$ 分别为 $1,\frac{1}{2},\frac{5}{8}$。因为 $\lambda^*=2\lambda$，$\mu^*=2\mu$，代入得

$$W_q^* = K\frac{\lambda^*}{\mu^*(\mu^* - \lambda^*)} = K\frac{2\lambda}{2\mu(2\mu - 2\lambda)} = \frac{K}{2}\frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

即平均等待时间分别都为原来的一半。

10.52 (a) **用** $M/E_k/1$ **模型,** E_k **参数为** $\mu = \frac{1}{4}$, $k = 4$;

(b) **用** $M/G/1$ **模型,** G **分布的期望值为** 4;

$$\sigma^2 = \frac{1}{3\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{3(1)^2} = \frac{10}{3}$$

10.53 各项计算结果见表 10A-11:

表 10A-11

	L_s	L_q	W_s/h	W_q/h
(a)	2.917	2.083	0.583	0.417
(b)	5.0	4.17	1.0	0.83
(c)	3.09	2.257	0.618	0.451
(d)	1.93	1.18	1.93	0.236
(e)	3.18	2.347	0.636	0.469

10.54 (a) **生死过程发生率图见图** 10A-5

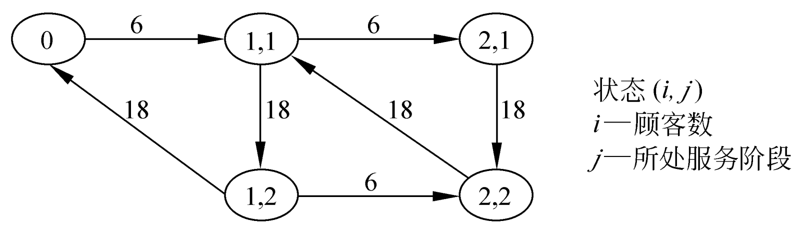


图 10A-5

(b) **列出状态平衡方程计算得** $p_0 = 0.458$, $p_{11} = 0.203$, $p_{12} = 0.153$, $p_{21} = 0.068$, $p_{22} = 0.118$, **自动离去顾客比为** $p_{21} + p_{22} = 0.186 = 18.6\%$

(c) $W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}} = \frac{0.592}{4.884} = 0.121\ 2(\text{h}) = 7.272\ 7(\text{min})$

10.55 原维修方案为 $M/M/1$ **模型** $W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 1(\text{d})$, **一架飞机** 4 **台发动机须维修** 4 **次,共耽误** 4 d。**改进后方案为** $M/E_4/1$ **模型,** $\lambda = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{\mu} = 2$, $\frac{1}{\mu} = 2$, $\sigma^2 = 1$, $\rho = \frac{1}{2}$, **有** $W_s = 3.25(\text{d})$, **优于原方案。**

10.56 7.04 **件**

10.57 (a) 23.75 秒;

(b) 45.45%

10.58 0.933 小时

10.59 $P_{00} = 1 \Big/ \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^2 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} \right]$

$P_{01} = \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot P_{00}$; $P_{11} = P_{b1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^2 \cdot P_{00}$

$P_{10} = \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} \right) P_{00}$

10.60 (a) **每天总期望费用** $E(TC) = C_1 \cdot \frac{\rho}{1-\rho} + C_2(1-\rho)$

(b) $\rho^* = 1 - \frac{C_1}{C_2}$

10.61 **略**

10.62 (a) $N_i \geq \frac{\ln(1-\beta)}{\ln\rho} - 1$

(b) $N_1 \geq 6.5$ (**取** 7); $N_2 \geq 4.75$ (**取** 5); $N_3 \geq 3.85$ (**取** 4); $N_4 \geq 3.2$ (**取** 4); $N_5 \geq 2.62$ (**取** 3)

(c) 8.2 T

10.63 (a) $N_1 \geq 6.5$ (**取** 7), $N_2 \geq 5.3$ (**取** 6), $N_3 \geq 4.6$ (**取** 5), $N_4 \geq 3.95$ (**取** 4), $N_5 \geq 3.7$ (**取** 4);

(b) $K_1 \geq 2.45$ (**取** 3), $K_2 \geq 2.1$ (**取** 3), $K_3 \geq 1.8$ (**取** 2), $K_4 \geq 1.6$ (**取** 2), $K_5 \geq 1.5$ (**取** 2);

(c) **略**;

(d) $W_s = 0.101 + 0.091 + 0.084 + 0.073 + 0.071 = 0.551$;

(e) **所有** $N_i \geq 6.5$ (**取** 7), **所有** $K_i \geq 3.3$ (**取** 4), $W_s = 0.755$。

10.64 (a) **本题为串连的排队系统,为分析先画出生死过程发生率图见图** 10A-6, **图中**(i, j)**分别为两个站的状态。**

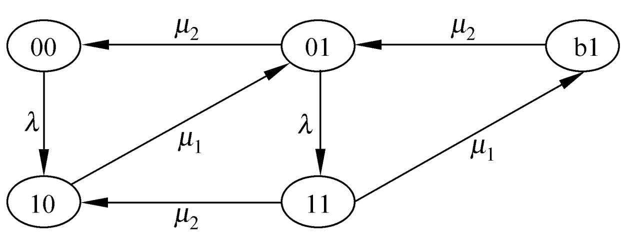


图 10A-6

写出状态平衡方程并求解得 $p_{00}=0.2697$, $p_{01}=0.2247$, $p_{10}=0.3184$, $p_{11}=p_{b1}=0.0936$,故每小时不能进入的产品数为 $\lambda(p_{10}+p_{11}+p_{b1})=5.056$ 件。

(b) $W_s=\dfrac{L_s}{\lambda_{\text{eff}}}=\dfrac{0.9175}{4.944}=0.1856(\text{h})=11.13(\text{min})$。

10.65 $\mu=20+\dfrac{20}{10}=21.414$

10.66 画出生死过程发生率图,并导出

$$C_n=\frac{\lambda^n}{(n!)^a\mu^n},$$ 即可证明。

10.67 证明略

10.68 (a) 用 $w_{n+1}(t)$代表一名顾客到达时系统中已有 n 名顾客条件下,他排队时间的概率密度函数,因这是 n 个负指数分布和的概率密度函数,故有

$$w_{n+1}(t)=\frac{\mu(\mu t)^{n-1}e^{-\mu t}}{(n-1)!}$$

又

$$w_q(t)=\sum_{n=1}^{\infty}w_{n+1}(t)\cdot P_n$$

(b) $w_q=\int_0^{\infty}t\cdot w_q(t)\,dt$

10.69 (a) $\because$ $P\{$排队的顾客数 $i|i\geq1\}$

$$=P\{\text{系统中有 } n \text{ 个顾客} \mid n\geq2\}$$

$$=P_n\Big/\sum_{i=2}^{\infty}P_i,$$

由此顾客必须排队条件下的期望队长为

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\quad P_n\Big/\sum_{i=2}^{\infty}P_i$$

(b) 略

10.70 $\because$ $\lambda_e=\lambda(m-L_s)$,所以只需证明 $L_s=L_q+\dfrac{\lambda_e}{\mu}$

10.71 $L_q=\sum_{n=0}^{N}(n-c)P_n$,据此推导可证。

十一、存 贮 论

复习思考题之 7,**其中**(a) (b) (c) (d)**正确**,(e) (f) (g)**不正确**。

11 .1　本题中 $R = 10\ 000$，$C_3 = 2\ 000$，$C_1 = 20$

$$Q_0 = \frac{2\times 2\ 000\times 10\ 000}{20} = 1\ 414$$

$$C_0 = 2\times 20\times 2\ 000\times 10\ 000 = 28\ 284\ .27$$

11 2

$$Q_0 = \frac{2\times 250\times 15\ 000}{10\ .526} = 844$$

11 3　原订货批量的费用为

$$C_0 = 2\times 10\ .526\times 250\times 15\ 000 = 8\ 885\ .1$$

按新的条件

$$C_0 = 12\times 250 + \frac{1}{2}\times 10\ .526\times 0\ .9\times \frac{15\ 000}{12} = 8\ 920\ .87$$

故羽绒加工厂不能接受此优惠条件。

11 .4　本题中 $C = 0\ .22$，$C' = 0\ .27$

$$Q_0' = 80\ \frac{C_1}{C'} = 72$$

11 5　先分别计算享受不同折扣时的经济订货批量,有:

$$Q_1 = \frac{2\times 5\ 000\times 49}{0\ .20\times 5\ .0} = 700$$

$$Q_2 = \frac{2\times 5\ 000\times 49}{0\ .20\times 4\ .85} = 711$$

$$Q_3 = \frac{2\times 5\ 000\times 49}{0\ .20\times 4\ .75} = 718$$

因享受折扣的订购量均大于经济订货批量,故按享受折扣的订购量分别计算见表 11A-1。

表　**11A-1**

单件价	订购量	年订货量	5 000 件的价格	年存贮费	年总费用
5.0	700	350	25 000	350	25 700
4.85	1 000	245	24 250	485	24 980
4.75	2 500	98	23 750	1 188	25 036

结论是该单位应采用每次购 1000 件,享受 3%折扣的策略。

11.6　本题中 $R = 260\,000$, $P = 600\,000$, $C_3 = 1\,350$, $C_1 = 45 \times 24\% = 10.8$,故有

$$Q_0 = \frac{2(1\,350)(260\,000)(600\,000)}{(10.8)(600\,000 - 260\,000)} = 33\,870$$

11.7　按不允许缺货,生产需一定时间的确定性的存贮模型中有关公式计算分别得 $Q_0 = 1\,000$, $C(t_0) = 1\,200$。若按原来每季度生产 500 件,其总费用为

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{R}{P}\right)QC_1 + \frac{R}{Q}C_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\,000}{8\,000}\right)(500)(1.60) + \frac{2\,000}{500}(300) = 1\,500$$

故按每半年组织生产一批,每批生产 1 000 件,全年可节约费用 300 元。

11.8　(a) 本题为允许缺货(缺货需补足),生产时间很短的确定性存贮模型。代入有关公式计算得 $Q_0 = 115$, $C_0(t_0, S_0) = 866$。

(b) 按不允许缺货,生产时间很短的确定性存贮模型的有关公式计算得到 $Q_0 = 1\,000$, $C_0 = 1\,000$。

11.9　(a) 不允许缺货时 $Q_0 = 283$, $C_0 = 848.53$,而允许缺货时 $Q_0 = 303$, $C_0(t_0, S_0) = 791.27$,故可节约费用 57.26 元。

(b) 最大缺货量 $Q_0 - S_0 = \frac{2RC_3C_1}{C_2(C_1 + C_2)} = 40$,故缺货比例为 40/303 = 13.2%,因缺货等待的最大时间为$\frac{40}{800}(365) = 18.25$(d),小于 3 周,故允许缺货的策略可以接受。

11.10　本题属允许缺货(缺货需补足),生产时间很短的确定性存贮模型。题中 $R = 96$ 套/年, $C_3 = 1\,200$, $C_1 = 8\,500 \times 0.3 = 2\,550$, $C_2 = 400 \times 52 = 20\,800$,代入公式得 $Q_0 = 10.07$,又计算得最大缺货量为 1 套。按题意,对该部件每周需 2 套,提前期为 2 周,故当存贮量降至 3 件时,应立即提出订货。

11.11　(a) 本题属允许缺货(需补足缺货),生产需一定时间的存贮模型,代入有关公式得 $Q_0 = 67$,最大缺货量为 23.7。

(b) 年最小费用为 523.69 元。

11.12 当实际订货量为 $0.8Q^*$ 时，全年订货与存贮费用之和为

$$\frac{C_3 R}{0.8Q^*} + \frac{1}{2}C_1(0.8Q^*) = 1.25C_3\frac{R}{Q^*} + 0.4C_1Q^*$$

$$= 1.25C_3R\sqrt{\frac{C_1}{2C_3R}} + 0.4C_1\sqrt{\frac{2C_3R}{C_1}} = (0.625+0.4)\sqrt{2C_1C_3R}$$

$$= 1.025C^*$$

11.13 (a) 具有价格折扣情况下，为享受到价格折扣，订货批量一般总要大一些，只要能享受到的价格折扣的优惠以及减少的一次性订货费能抵消由于订货批量增大而增加的存贮费用即可。

(b) (c) (d) (e) 略。

11.14 不考虑库存总费用和仓库面积的限制条件时，分别计算三种外购件的经济订货批量为 $Q_1 = 52$，$Q_2 = 155$，$Q_3 = 80$

因
$$\frac{1}{2}(52\times3\,000 + 155\times1\,000 + 80\times2\,500) = 255\,500 > 240\,000$$

$$52\times0.5 + 155\times1 + 80\times0.8 = 245 < 250$$

看出按经济订货批量订货将受资金限制。考虑限制条件的最佳订货批量为

$$Q_i = \sqrt{\frac{2C_{3i}R_i}{I_iC_i - 2\lambda C_i}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

经试算取 $\lambda = -0.02$，$I_i = 0.25$，故有

$$Q_1' = \sqrt{\frac{2\times1\,000\times1\,000}{3\,000\times0.25 + 3\,000\times0.04}} = 48$$

$$Q_2' = \sqrt{\frac{2\times3\,000\times1\,000}{1\,000\times0.25 + 1\,000\times0.04}} = 144$$

$$Q_3' = \sqrt{\frac{2\times2\,000\times1\,000}{2\,500\times0.25 + 2\,500\times0.04}} = 74$$

因有 $\frac{1}{2}(48\times3\,000 + 144\times1\,000 + 74\times2\,500) = 236\,500 < 240\,000$，故 Q_1'，Q_2'，Q_3' 即为三种外购件的最佳订货批量。

11.15 不考虑约束时三种配件的订货批量分别为 $Q_1 = 158$，$Q_2 = 61$，$Q_3 = 200$。考虑到年总订货费用的限制有

$$Q_i' = Q_i\sqrt{1-\lambda}$$

经计算 $\sqrt{1-\lambda} = 1.285\,7$，故有 $Q_1' = 207$，$Q_2' = 78$，$Q_3' = 257$

11.16 本题订货量与存贮量变化的情况见图 11A-1。图中 Q 为订货批量，设 n 为两次订货之间的间隔期（以多少个月表示），则分摊到一个月的订货加存贮费之和为

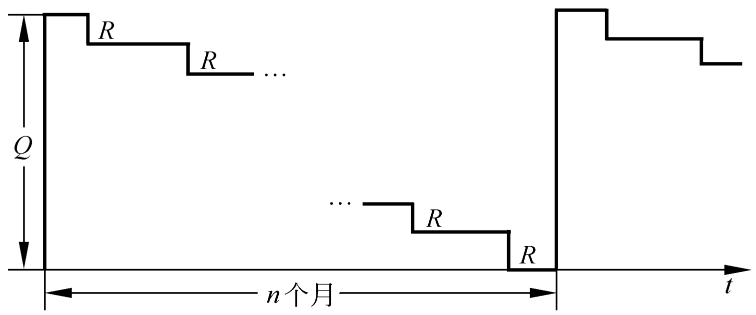


图 11A-1

$$C(Q) = \frac{12}{n} \quad V + C \quad \frac{1}{2}Q + (Q - R) + (Q - 2R) + \cdots + (Q - (n-1)R)$$

$$\because \quad C \quad \frac{1}{2}Q + (Q - R) + \cdots + (Q - (n-1)R)$$

$$= CR \quad 1 + 2 + \cdots + n - \frac{1}{2}n = CR \cdot \frac{n^2}{2}$$

令
$$\frac{\mathrm{d}C(Q)}{\mathrm{d}n} = -\frac{2V}{n^2} + 6CR = 0$$

有
$$n^* = \frac{2V}{CR}, \qquad Q^* = \frac{2VR}{C}$$

11.17 本题应用允许缺货(缺货需补足),生产时间很短的确定性存贮模型计算。代入有关公式

$$Q^* = \frac{2RC_3(C_1 + C_2)}{C_1C_2} = \frac{2\times 8\times 1\ 200(212.5 + 1\ 600)}{212.5\times 1\ 600} = 10.11$$

$$S^* = \frac{2RC_3C_1}{C_2(C_2 + C_1)} = \frac{2\times 8\times 1\ 200\times 212.5}{1\ 600(1\ 600 + 212.5)} = 1.186$$

因提前期内需要 4 套,又允许缺货 1 套,故库存降至 3 套时应提出订货。

11.18 本题应用不允许缺货,生产需一定时间的存贮模型进行计算。

(a) $Q^* = \dfrac{2C_3RP}{C_1(P-R)} = \dfrac{2\times 2\ 000\ 000\times 10\times 50}{50(50-10)} = 1\ 000$

(b) **每批装配 1 000 台时费用为**

$$150\ 000\times 10 + \quad 2C_3C_1R \quad 1 - \frac{R}{P} \quad = 1\ 540\ 000$$

当每批装配 2 000 台时的费用为

$$148\ 000\times 10 + C_3 \cdot \frac{R}{Q} + \frac{1}{2}C_1Q \quad \frac{P-R}{P}$$

$$= 1\ 480\ 000 + 2\ 000\ 000\times\frac{10}{2\ 000} + \frac{1}{2}\times 50\times 2\ 000 \quad \frac{50-10}{50} \quad = 1\ 530\ 000$$

故可以接受每批装配 2 000 台的方案。

11 19　因订货提前期为 2d，故订货期内的需求 x_L 其期望值为 $\mu_L = 2\ 000$ 标准差 $\sigma_L = \quad 2\times10^2 = 14.14$

$$P\{x_L \geq \mu_L + B\} \leq 0.05$$

或
$$P\left\{\frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} = P\left\{\frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L} \geq \frac{B}{14.14}\right\} \leq 0.05$$

由正态分布表查得 $\frac{B}{\sigma_L} \geq 1.64$　即 $B \geq 23.2$

11 20　本题为动态的存贮问题，因各时期存贮费及制造费用均为线性函数，故各时期的最佳订货批量 q_i^* 或为本时期需求量，或为本时期与随后若干时期的需求量之和。

动态规划的基本方程为

$$f_i(x_i) = \min_{q_i \in D_i(x_i)} \{c_{3i} + c_i(q_i) + c_{1i}(x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}$$

边界条件 $f_4(x_4) = 0$

当 $i = 3$ 时，计算表格见表 11A-2

表　11A-2

3 \ 3	$c_{33} + c_3(q_3) + c_{13}(x_4)$		$f_3(x_3)$	q_3^*
	0	57		
0	——	70 + 4×57 + 10	308	57
57	0 + 0 + 10	——	10	0

当 $i = 2$ 时，计算表格见表 11A-3

表　11A-3

2 \ 2	$c_{32} + c_2(q_2) + c_{12}(x_3) + f_3(x_3)$			$f_2\ cx_2$	q_2
	0	80	137		
0	——	185 + 320 + 0 + 308	185 + 548 + 57 + 10	800	137
80	0 + 0 + 0 + 308	——	——	308	0
13 .7	0 + 0 + 57 + 10	——	——	67	0

当 $i = 1$ 时，计算表格见表 11A-4

表　11A-4

1 \ 1	$c_{31} + c_1(q_1) + c_{11}(x_2) + f_2(x_2)$			$f_1(x_1)$	q_1^*
	53	133	190		
3	98 + 212 + 0 + 800	98 + 532 + 80 + 308	98 + 760 + 137 + 67	1 018	133

由此各时期最佳订货批量为 $q_1^* = 133$, $q_2^* = 0$, $q_3^* = 57$, 总费用 $f_1(x_1) = 1\,018$。

11.21　本题中 $k = 70$, $h = 40$, $\frac{k}{k+h} = \frac{70}{110} = 0.636\,36$, 由公式 $\sum_{r=0}^{Q-1} P(r) < \frac{k}{k+h} < \sum_{r=0}^{Q} P(r)$, 求得 $Q = 3$。即应订购 300 本挂历, 预期利润 144 元。

11.22　本题中 $k = 1\,600 + 1\,200 \times 2 = 4\,000$, $h = 900 - 100 = 800$, 故 $\frac{k}{k+h} = 0.833\,3$。因对零件需求为普阿松分布, 故有 $P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$, 而 $\lambda = 2 \times 2 = 4$。因 $\sum_{r=0}^{6} P(r) = 0.785$, $\sum_{r=0}^{7} P(r) = 0.889$, 故该航空旅游公司应立即提出 7 个备件的订货。

11.23　本题中 $k = 15 - 8 = 7$, $h = 8 - 5 = 3$, 故

$$\frac{k}{k+h} = 0.7$$

$$\int_0^Q P(r)\mathrm{d}r = \int_0^Q \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}r = 0.7$$

得　$\frac{Q-150}{25} = 0.525$, 故 $Q = 163$

11.24　本题中 $K = 800$, $C_1 = 40$, $C_2 = 1\,015$, 故有

$$\frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = \frac{1\,015 - 800}{40 + 1\,015} = 0.203\,8$$

又

$$\sum_{r \leq 30} P(r) = 0.20$$

$$\sum_{r \leq 40} P(r) = 0.40$$

应订购 40 件, 但减去原有库存, 本期初应订购 30 件。

11.25　因 $\frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = \frac{13}{17} = 0.764\,7$, 考虑到已有的 10 件, 本期最佳订货量为 14 件。

11.26　(a) $\int_0^Q P(r)\,\mathrm{d}r = \frac{k}{k+h} = \frac{10}{10+15} = 0.4$, 有 $\frac{Q-200}{300} = 0.253$, 故 $Q = 200 - 0.253 \quad 300 = 196$;

(b) 如按 200 棵进货, 期望利润为 1 827.28 元;

(c) 如按 196 棵进货, 则销不出去的圣诞树的期望值为 5.09 棵。

11.27　设 S 为缓冲贮备数, λ 为包装速度, C_1 为每件每小时的存贮费, C_2 为包装机每小时的停工损失, T 为包装机停工检修的间隔时间, τ 为每次停机检修的时间。这种情况下, 单位时间内存贮费为 $C_1 S$, 又当 $\tau > S/\lambda$ 时, 单位时间内的停机损失为

$$\frac{C_2}{T}\int_{S/\lambda}^{\infty}\left(\tau - \frac{S}{\lambda}\right) f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

故当缓冲贮备为 S **时,单位时间的期望总费用为**

$$K = C_1 S + \frac{C_2}{T}\int_{S/\lambda}^{\infty}\left(\tau - \frac{S}{\lambda}\right) f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

令
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}S} = C_1 + \frac{C_2}{T}\left(-\frac{1}{\lambda}\int_{S/\lambda}^{\infty} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right) = C_1 - \frac{C_2}{T\lambda}\left[1 - F\left(\frac{S}{\lambda}\right)\right] = 0$$

则
$$1 - F\left(\frac{S}{\lambda}\right) = \frac{C_1 T\lambda}{C_2}$$

本题中 $C_2 = 500$, $C_1 = 0.05$, $T = 100$, $\lambda = 50$

$\therefore$
$$1 - F\left(\frac{S}{\lambda}\right) = \frac{0.05\times100\times50}{500} = 0.5$$

又
$$F\left(\frac{S}{\lambda}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{\lambda}} = 1 - \mathrm{e}^{-0.01S}$$

故有 $\mathrm{e}^{-0.01S} = 0.5$,**计算得到** $S = 69$

11.28　由本题的表 11-6 **可计算得表** 11A-5。

表　11A-5

需求量 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0.05	0.1	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05	0.05	0.05
$F(x)$	0.05	0.15	0.25	0.45	0.70	0.85	0.90	0.95	1.0

由表 11A-5 **知**

$$P\{x\leqslant 4-1\} = 0.45$$
$$P\{x\leqslant 4\} = 0.70$$

故有
$$0.45 \leqslant F(Q) = \frac{C_2 - 10}{C_2 + 1} \leqslant 0.70$$

得
$$19 \leqslant C_2 \leqslant 35.7$$

11.29　因有

$$P\{x \leqslant Q\} = \int_0^Q 0.1\mathrm{e}^{-0.1x}\mathrm{d}x = \frac{C_2 - K}{C_1 + C_2} = \frac{3-2}{3+1} = 0.25$$

$\therefore\ 1 - \mathrm{e}^{-0.1Q} = 0.25$,**得** $Q = 2.88$

(a) **应订** $2.88 - 2 = 0.88$(**取** 1)**件**;

(b) **当期初库存为** 5 **时不订货**。

11.30　先计算临界值 $N = \dfrac{5-3}{5+1} = 0.333$,**因有**

$$\int_0^S f(x)\mathrm{d}x = \int_5^S \frac{1}{5}\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(S-5) = 0.333$$

由此 $S = 6.7$。再利用下面的不等式求 s

$$Ks + \int_5^s C_1(s-x)f(x)\mathrm{d}x + \int_s^{10} C_2(x-s)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq C_3 + KS + \int_5^S C_1(S-x)f(x)\mathrm{d}x + \int_S^{10} C_2(x-S)f(x)\mathrm{d}x$$

将有关数字代入后计算得

$$0.6s^2 - 8s + 21.67 \leq 0$$

取等号并解得 $s = 3.78$ 或 9.55，因 9.55 已超过 S 的值 6.7，显然不合理，故应取 $s = 3.78$。

11 31 本题中需求为均匀分布，故按需求为连续随机变量的单时期存贮模型计算。

$$\int_Q^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{0.2}{0.4+0.2+0.2} = 0.25$$

即
$$\int_0^Q f(x)\mathrm{d}x = 1 - 0.25 = 0.75$$

故每天应订购 $1\,000 + (2\,000 - 1\,000) \times 0.75 = 1\,750$ 个

11 32 本题类似报童问题，属需求为随机离散的单时期的存贮模型。设每张票价为 A 元，多售出的票当飞机不超员时为收入(盈利) A 元，当发生超员时，每张亏损

$$0.8A + 0.2(0.5A) = 0.9A(\text{元})$$

即
$$k = A,\ h = 0.9A$$

$$\sum_{i=0}^{Q-1} p(i) \leq \frac{A}{A+0.9A} = 0.526\,3 \leq \sum_{i=0}^{Q} p(i)$$

得 $Q = 2$，即每个航班应售出 $(138+2) = 140$ 张票。

十二、矩阵对策

复习思考题之 4,**其中**(a)**不正确**,(b) (c) (e) (g)**正确**,(d) (f)**不正确**。

12 1 用 1,5,10 **分别代表** A **或** B **出** 1 **分**、5 **分和** 1 **角硬币的策略**,**则对** A **的赢得见表** 12A -1。

表 12A-1

	1	5	10
1	- 1	- 1	10
5	- 5	- 5	10
10	1	5	- 10

解得 A **的最优策略为** $X = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, B **的最优策略为** $Y = \left(\frac{10}{11}, 0, \frac{1}{11}\right)$,**对策值** $v = 0$,**即该项游戏公平合理**。

12 2 对甲的赢得矩阵见表 12A -2。

表 12A-2

甲 \ 乙	1	2	3
1	- 2	3	- 4
2	3	- 4	5
3	- 4	5	- 6

12 3 对 A **的支付矩阵**(**赢得表**)**见表** 12A -3。**游戏公平合理**。

表 12A-3

	-1	0	1
-1	2	-1	-2
0	1	0	1
1	-2	-1	2

12.4 用 a 表第一个人写的数, b 表猜的数, a 有三种选择, b 有五种选择, 因此第一个人有 15 个纯策略。第二个人纯策略用 $(c, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ 表示, c 为写的数, 有三种选择, d_i 为等第一人猜数后第二人猜的数, $d_i \in \{0,1,2,3,4\}/\{b\}$, 有四种选择, 故第二人纯策略数为 $3\times 4^5 = 3\ 072$。

12.5 A 的纯策略有两个: 掷硬币, 让 B 猜; B 的纯策略也有两个: 猜红, 猜黑。先列出各个事件出现的概率和采取不同策略时的得失, 见表 12A-4。

表 12A-4

	红 牌 $\frac{1}{2}$				黑 牌 $\frac{1}{2}$	
	掷正面 $\frac{1}{2}$		掷反面 $\frac{1}{2}$			
	猜红	猜黑	猜红	猜黑	猜红	猜黑
掷硬币	p	p	$-q$	$-q$	t	$-u$
让 B 猜	$-r$	s	$-r$	s	t	$-u$

再计算得 A 的赢得矩阵为

$$\begin{array}{ccc} & \text{猜红} & \text{猜黑} \\ \text{掷硬币} & \frac{1}{4}(p-q+2t) & \frac{1}{4}(p-q-2u) \\ \text{让 B 猜} & \frac{1}{2}(t-r) & \frac{1}{2}(s-u) \end{array}$$

12.6 用 (a_i, b_j); v 分别表双方最优策略和对策值, 各题答案如下:

(a) (a_1, b_2); 1

(b) (a_2, b_2); 0

(c) (a_2, b_3); 4

(d) (a_1, b_1); 1

(e) (a_2, b_2); 0

(f) (a_1, b_1); 0

(g) (a_1, b_3); -5

(h) (a_3, b_4); 2

12 .7 $a_{i_1 j_1}$ **是鞍点,有** $a_{i_2 j_1} \le a_{i_1 j_1} \le a_{i_1 j_2}$

$a_{i_2 j_2}$ **是鞍点,有** $a_{i_1 j_2} \le a_{i_2 j_2} \le a_{i_2 j_1}$

因 $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2}$ **,故得证。**

12 .8 由于填入的数均不同,不存在两个以上鞍点,又鞍点出现在任一格上的概率相同,不失一般性,计算鞍点在最左上角出现概率。考虑矩阵最左边一列和最上面一行的 $(m+n-1)$ **个数,左上角数字应为所在列中最大的和所在行中最小的,故任意** $(m+n-1)$ **个数使左上角出现鞍点的排列方法有** $(m-1)!(n-1)!$ **种。** $m\times n$ **个数的总计排列法有** $mn!$ **种,从中选出** $(m+n-1)$ **个数的方法有** C_{mn}^{m+n-1} **种,除最左列最上行数字外,其余数字排列方法有** $(m-1)(n-1)!$ **种。故左上角出现鞍点的概率为**

$$\frac{C_{mn}^{m+n-1}\cdot(m-1)(n-1)!(m-1)!(n-1)!}{mn!}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

在矩阵任意一格出现鞍点的概率为

$$\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}\times mn=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}$$

12 .9 (a) $p\ge 5$, $q\le 5$;

(b) $p\le 7$, $q\ge 7$

12 .10 令

$$\frac{p}{x}=-4x-2y+\frac{7}{2}=0$$
$$\frac{p}{y}=-2x+y+\frac{5}{4}=0$$

解得 $x=\frac{3}{4}$, $y=\frac{1}{4}$

又 $$P\left(x,\frac{1}{4}\right)\le P\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\le P\left(\frac{3}{4},y\right)$$

即 $(x,y)=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$ **是鞍点,** $v=\frac{47}{32}$

12 .11 $(1,1)$ **为鞍点条件为**: $a\ge 0$ $b\ge 0$

$(2,2)$ **为鞍点条件为**: $a\le 0$ $c\ge 0$

$(3,3)$ **为鞍点条件为**: $b\le 0$ $c\le 0$

12 .12 (a) **将** a, b, c, d **的大小进行对比,必出现以下四种情况之一**: ① $c\ge a$, $b\ge d$, **第四行优超其他三行**; ② $c\ge a$, $b\le d$, **第二行优超其他各行**; ③ $a\ge c$, $b\ge d$, **第一行优超各行**; ④ $a\ge c$, $b\le d$, **第三行优超各行。以上情况均有纯策略解。**

(b) **将** a, b, c, e, f, g **进行大小对比有八种情况,证明方法同上。**

12 .13 设 X^* **为** A **方最优策略,** Y^* **为** B **方最优策略,** v **为对策值,各题的解为**:

(a) $X^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $Y^*=\left(\frac{2}{3},0,0,\frac{1}{3}\right)$, $v=\frac{2}{3}$

(b) $X^* = \ 0, \frac{4}{5}, \ \frac{1}{5} \ \ , \ Y^* = \ \frac{2}{5}, \frac{3}{5} \ \ , \ v = \frac{7}{5}$

(c) $X^* = \ \frac{2}{3}, \ \frac{1}{3} \ \ , \ Y^* = \ 0, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \ \ , \ v = 1$

(d) $X^* = \ \frac{7}{13}, \ \frac{6}{13} \ \ , \ Y^* = \ 0, \ \frac{19}{26}, \ 0, \ 0, \ \frac{7}{26} \ \ , \ v = -\frac{3}{13}$

(e) $X^* = \ \frac{1}{6}, \ 0, \ \frac{3}{6}, \frac{2}{6} \ \ , \ Y^* = \ \frac{2}{6}, \ 0, \ \frac{1}{6}, \frac{3}{6} \ \ , \ v = 0$

(f) $X^* = \ 0, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{4}, \ 0 \ \ , \ Y^* = \ \frac{1}{4}, \ 0, \ \frac{3}{4}, \ 0 \ \ , \ v = \frac{5}{2}$

(g) $X^* = \ \frac{18}{23}, \ 0, \ \frac{5}{23}, \ 0 \ \ , \ Y^* = \ 0, \ 0, \ \frac{17}{23}, \ \frac{6}{23} \ \ , \ v = \frac{168}{23}$

(h) $X^* = \ 0, \frac{4}{5}, \ \frac{1}{5}, 0 \ \ , \ Y^* = \ \frac{2}{5}, \ \frac{3}{5} \ \ , \ v = \frac{43}{5}$

12.14 略

12.15 (a) $X^* = \ \frac{20}{45}, \ \frac{11}{45}, \ \frac{14}{45} \ \ , \ Y^* = \ \frac{14}{45}, \frac{11}{45}, \ \frac{20}{45} \ \ , \ v = -\frac{29}{45}$

(b) $X^* = \ \frac{17}{46}, \ \frac{20}{46}, \ \frac{9}{46} \ \ , \ Y^* = \ \frac{14}{46}, \frac{12}{46}, \ \frac{20}{46} \ \ , \ v = \frac{30}{46}$

(c) $X^* = \ \frac{13}{35}, \ \frac{10}{35}, \ \frac{12}{35} \ \ , \ Y^* = \ \frac{21}{35}, \frac{13}{35}, \ \frac{1}{35} \ \ , \ v = \frac{124}{35}$

(d) $X^* = \ \frac{11}{20}, \ \frac{4}{20}, \ \frac{5}{20} \ \ , \ Y^* = \ \frac{8}{20}, \frac{7}{20}, \ \frac{5}{20} \ \ , \ v = \frac{37}{20}$

(e) $X^* = (0, \ 0, \ 1), \ Y^* = \ \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \ 0 \ \ , \ v = 2$

(f) $X^* = \ \frac{1}{3}, \ 0, \ \frac{2}{3} \ \ , \ Y^* = \ \frac{1}{3}, \ 0, \ \frac{2}{3} \ \ , \ v = \frac{7}{3}$

12.16 (a) A 的策略集：a_1 为先出 2，再出 5；a_2 为先出 5 再出 2；B 的策略集：b_1 为无论抓到哪一组先出小牌后出大牌，b_2 为无论抓到哪一组，先出大牌；b_3 为如抓到 1 点和 4 点先出小，抓到 3 点和 6 点先出大；b_4 为如抓到 3 点和 6 点先出小，抓到 1 点和 4 点先出大。

(b)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	14^*	-14	-2	2
a_2	-14	14	2	-2^{**}

* $14 = \frac{1}{2}(3 + 9 + 5 + 11)$

** $-2 = \frac{1}{2}(9 + 3 - 8 - 8)$

(c) A 的最优策略 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,B 的最优策略 $\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,对策值 $v=0$,故对双方公平合理。

12.17 甲的策略有:

① 无论抓 1,2,3 点都认输; ② 抓 1,2,3 点都打赌;
③ 抓 1,2 点认输,抓 3 点打赌; ④ 抓 1,2 点打赌,抓 3 点认输;
⑤ 抓 1,3 点认输,抓 2 点打赌; ⑥ 抓 1,3 点打赌,抓 2 点认输;
⑦ 抓 2,3 点认输,抓 1 点打赌; ⑧ 抓 2,3 点打赌,抓 1 点认输。

其中①④⑤⑦策略明显不合理。

当甲打赌时,乙的策略有:

① 抓 1,2,3 点都认输; ② 抓 1,2,3 点都叫真;
③ 抓 1,2 点认输,抓 3 点打赌; ④ 抓 1,2 点叫真,抓 3 点认输;
⑤ 抓 1,3 点认输,抓 2 点打赌; ⑥ 抓 1,3 点叫真,抓 2 点认输;
⑦ 抓 2,3 点认输,抓 1 点打赌; ⑧ 抓 2,3 点叫真,抓 1 点认输。

其中①②④⑤⑥⑦明显不合理。

12.18 显然对策双方最优策略相同,即有 $X^*=Y^*=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\cdots,\frac{1}{m}\right)$,

$E(X^*,Y^*)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j=\frac{1}{m^2}[m(1+2+\cdots+m)]=\frac{1}{2}(m+1)$,故得证。

12.19 因矩阵 A 和 B 元素一一对应,两个对策具有相同的混合策略集合 S_1^*, S_2^*

$$E_B(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_iy_j=k\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=kE_A(X,Y)$$

$$\max_{X\in S_1^*}E_B(X,Y)=\max_{X\in S_1^*}kE_A(X,Y)=k\max_{X\in S_1^*}E_A(X,Y)$$

由此 $$\min_{Y\in S_2^*}\max_{X\in S_1^*}E_B(X,Y)=k\min_{Y\in S_2^*}\max_{X\in S_1^*}E_A(X,Y)=kE_A(X^*,Y^*)$$

12.20 $$E(X,Y^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(X^*,Y) \qquad (1)$$

根据本题给定条件有

$$E(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_iy_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ji}x_jy_i=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij})x_jy_i$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_ix_j=-E(Y,X)$$

将 (1)式乘(-1)并重新排列得

$$E(Y,X^*)\le E(X^*,Y^*)\le E(Y^*,X)$$

即 Y^* 成了对策者 I 的最优策略,X^* 成了对策者 II 的最优策略。

又由于 $E(X^*,Y^*)=-E(Y^*,X^*)=v$,所以 $v=0$

12 21 令 x^0, y^0 表矩阵对策 A 中的双方最优策略，以 $P(x, y)$ 表支付函数，则有 $P(x^0, y^0) = v$。

$$P(x, y^0) \leq v \leq P(x^0, y) \tag{1}$$

设矩阵对策 B 的支付函数为 $Q(x, y)$，有

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i (a_{ij} + k) y_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i k y_j = P(x, y) + k \end{aligned}$$

由式(1) $Q(x, y^0) \leq v + k \leq Q(x^0, y)$，由此得证。

12 22 (a) 为原矩阵各元素加 4，故有

$$X^* = \left(0, \frac{11}{14}, \frac{3}{14}\right), \quad Y^* = \left(0, \frac{13}{14}, \frac{1}{14}\right), \quad v = \frac{123}{14}$$

(b) 为原矩阵 1, 3 列交换后再将各元素减 2，故

$$X^* = \left(0, \frac{11}{14}, \frac{3}{14}\right), \quad Y^* = \left(\frac{1}{14}, \frac{13}{14}, 0\right), \quad v = \frac{31}{14}$$

(c) 为原矩阵数字乘 2 倍再分别加 6，故双方最优策略不变，

$$v = \frac{59}{14} \times 2 + 6 = \frac{202}{14}$$

12 23 (a) 先按优超原则简化，解得

$$X^* = \left(0, 0, \frac{16}{25}, \frac{9}{25}\right), \quad Y^* = \left(0, \frac{16}{25}, 0, \frac{9}{25}\right), \quad v = \frac{144}{25}$$

(b) 矩阵中每个元素减 3 得拉丁方，故原问题解

$$X^* = Y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad v = 3 + \frac{1+3}{2} = 5$$

(c) 先按优超原则简化，解得

$$X^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad Y^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad v = 4$$

(d) 矩阵每个元素减去 8 得一反对称矩阵，故原题解

$$X^* = (1, 0, 0), \quad Y^* = (1, 0, 0), \quad v = 8$$

12 24 对甲的赢得表见表 12A-5:

表 12A-5

甲 \ 乙	(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)
(0,2)	-3	-1	1	0
(1,1)	-1	-2	-2	-1
(2,0)	0	1	-1	-3

解得 $X^* = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$, $Y^* = \frac{5}{15}, \frac{3}{15}, 0, \frac{7}{15}$, $v = -\frac{6}{5}$

12 25　列出游戏者 I 的赢得矩阵,解得

$$X^* = \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \ , \ Y^* = \frac{7}{12}, \frac{5}{12} \ , \ v = -\frac{1}{4}$$

12 26　列出对 A 的赢得矩阵,解得

$$X^* = \frac{5}{12}, \frac{7}{12} \ , \ Y^* = \frac{5}{12}, \frac{7}{12} \ , \ v = -\frac{1}{72}$$

12 27　先分别列出甲、乙双方的赢得的可能性矩阵,将甲方矩阵减去乙方矩阵的对应元素,得零和对策时甲方的赢得矩阵如下:

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.334	0.50	-0.334
A_2	-0.40	0.20	-0.50
A_3	0.50	-0.60	0.334

得解 $X^* = (0.528, 0, 0.472)$, $Y^* = (0, 0.378, 0.622)$, $v = -0.019$,故乙方有利。

12 28　甲的纯策略:①剩 AK 叫 AK;②剩 KK 叫 AK;③剩 AK 叫 KK;④剩 KK 叫 KK。乙的纯策略为:①甲叫 AK 或 KK 均接受;②叫 AK 时接受叫 KK 时异议;③叫 KK 时接受叫 AK 时异议;④叫 AK 或 KK 时均异议。列出甲的赢得矩阵为

	①	②	③	④
①	1	1	-2	-2
②	2	2	-4	-4
③	-2	4	-2	4
④	1	-2	1	-2

解得 $X^* = 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

$Y^* = 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

$v = 0$,**游戏公平合理。**

12 29　甲有四个纯策略:①不管正面或反面均认输;②不管正面或反面均打赌;③正面认输反面打赌;④正面打赌反面认输。乙有两个纯策略:①叫真;②认输。计算双方采取各种策略时,甲赢得的期望值,建立对甲的赢得矩阵。如:甲采取策略③,乙采取策略①时,甲的赢得期望值为

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-2) = -\frac{3}{2}$$

又甲采取策略③,乙采取策略②时,甲的赢得期望值为

$$\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0$$

列出对甲的赢得矩阵并解得

$$X^* = 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \ , \ Y^* = \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \ , \ v = \frac{1}{3}$$

12 30 先构造两名健将不参加某项比赛时甲、乙两队的得分表,见表 12A-6,表 12A-7:

表 12A-6 甲队得分表

		王健将不参加此项比赛		
		蝶泳	仰泳	蛙泳
李健将不参加此项比赛	蝶泳	14	13	12
	仰泳	13	12	12
	蛙泳	12	12	13

表 12A-7 乙队得分表

		王健将不参加此项比赛		
		蝶泳	仰泳	蛙泳
李健将不参加此项比赛	蝶泳	13	14	15
	仰泳	14	15	15
	蛙泳	15	15	14

将甲队得分表减去乙队得分表,得甲队赢得矩阵,并解得

$$X^* = \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \quad Y^* = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \quad v = -2$$

结论是:甲队李健将应参加仰泳比赛,并以各$\frac{1}{2}$概率参加蝶泳与蛙泳比赛;乙队王健将应参加蝶泳比赛,并以各$\frac{1}{2}$概率参加仰泳与蛙泳比赛。

12 31 A 的纯策略有:①抓红牌或黑牌均赌 3 元;②抓红牌赌 3 元,抓黑牌赌 5 元;③抓红牌赌 5 元,抓黑牌赌 3 元;④抓红或黑牌均赌 5 元。B 的纯策略有:①赌 3 元时应赌,赌 5 元时认输;②赌 3 元或 5 元均应赌;③赌 3 元或 5 元均认输;④赌 5 元时应赌,赌 3 元时认输。列出 A 的赢得矩阵,并解得

$$X^* = 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad Y^* = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, \quad v = \frac{1}{3}$$

12 32 A 的纯策略有 8 个;①不管 1,2,3 点都叫"大";②1 点叫"大",2 或 3 点叫"小";③2 点叫"大",1 或 3 点叫"小";④3 点叫"大",1 或 2 点叫"小";⑤1,2 点叫"大",3 点叫"小";⑥1,3 点叫"大",2 点叫"小";⑦2,3 点叫"大",1 点叫"小";⑧1,2,3 点都叫"小"。显然只有④,⑦两个策略是合理的,称为 A_1,A_2,其余策略均不会使用。

B 的纯策略有 $2^6 = 64$ 个,如其中之一为:

得 1 点　A 叫"大"时认输,叫"小"时应赌

得 2 点　A 叫"大"时认输,叫"小"时应赌

得 3 点　A 叫"大"时应赌,叫"小"时认输

经过分析去掉不合理的,B 合理的策略只有 4 个。计算双方应用各种策略时 A 赢得的期

望值,列出对 A 的赢得矩阵,解得 $v = \frac{1}{2}$。

12 33 A 有 4 个策略: ①抽高;②抽中,需再次抽时抽高;③抽中,再次时抽低;④抽低。B 有 3 个策略: ①猜高,需再次猜时仍猜高;②猜高,再次猜时猜低;③猜低。列出对 A 的赢得矩阵见表 12A-8。

表 **12A-8**

	①	②	③
①	- 3	- 3	2
②	- 1	3	- 2
③	3	- 1	- 1
④	2	2	- 3

解得 $X^* = \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}$, $Y^* = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, $v = -\frac{1}{2}$

12 34 A 可以有 8 个纯策略,记为

① 1H 2H 3H ② 1H 2H 3L

③ 1H 2L 3H ④ 1H 2L 3L

⑤ 1L 2H 3H ⑥ 1L 2H 3L

⑦ 1L 2L 3H ⑧ 1L 2L 3L

经分析其中只有⑤⑦两个是合理的,分别记为 a_1, a_2。B 共有 64 个纯策略,经分析只有 4 个是合理的。用 1,2,3 表 B 抽到的纸牌点数,AH 为 A 喊大,AL 为 A 喊小,F 为弃权,S 为翻看,则 B 的 4 个合理策略可写为

b_1: 1,AH/ F,AL/ S 2,AH/ F,AL/ F 3,AH/ S,AL/ F

b_2: 1,AH/ F,AL/ S 2,AH/ F,AL/ S 3,AH/ S,AL/ F

b_3: 1,AH/ F,AL/ S 2,AH/ S,AL/ F 3,AH/ S,AL/ F

b_4: 1,AH/ F,AL/ S 2,AH/ S,AL/ S 3,AH/ S,AL/ F

计算各对策略的期望值,如

$$E(a_1, b_1) = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1)\ + \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(1)\ + \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1)\ = \frac{1}{2}$$

其余为:

$$E(a_1, b_2) = \frac{2}{3},\ E(a_1, b_3) = \frac{5}{6},\ E(a_1, b_4) = 1$$

$$E(a_2, b_1) = \frac{1}{3}, E(a_2, b_2) = \frac{1}{2}, E(a_2, b_3) = \frac{2}{3}, E(a_2, b_4) = \frac{5}{6}$$

列出对 A 的赢得矩阵,见表 12A-9:

表　12A-9

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1/2	2/3	5/6	1
a_2	1/3	1/2	2/3	5/6

表中(a_1, b_1)**处为鞍点。**

12.35　C**有三种选择,第一局由** A **同** C **对垒,** A **同** B **对垒或** B **同** C **对垒,分别用** AC, AB, BC**表示。画出这个问题的对策树如图** 12A-1。

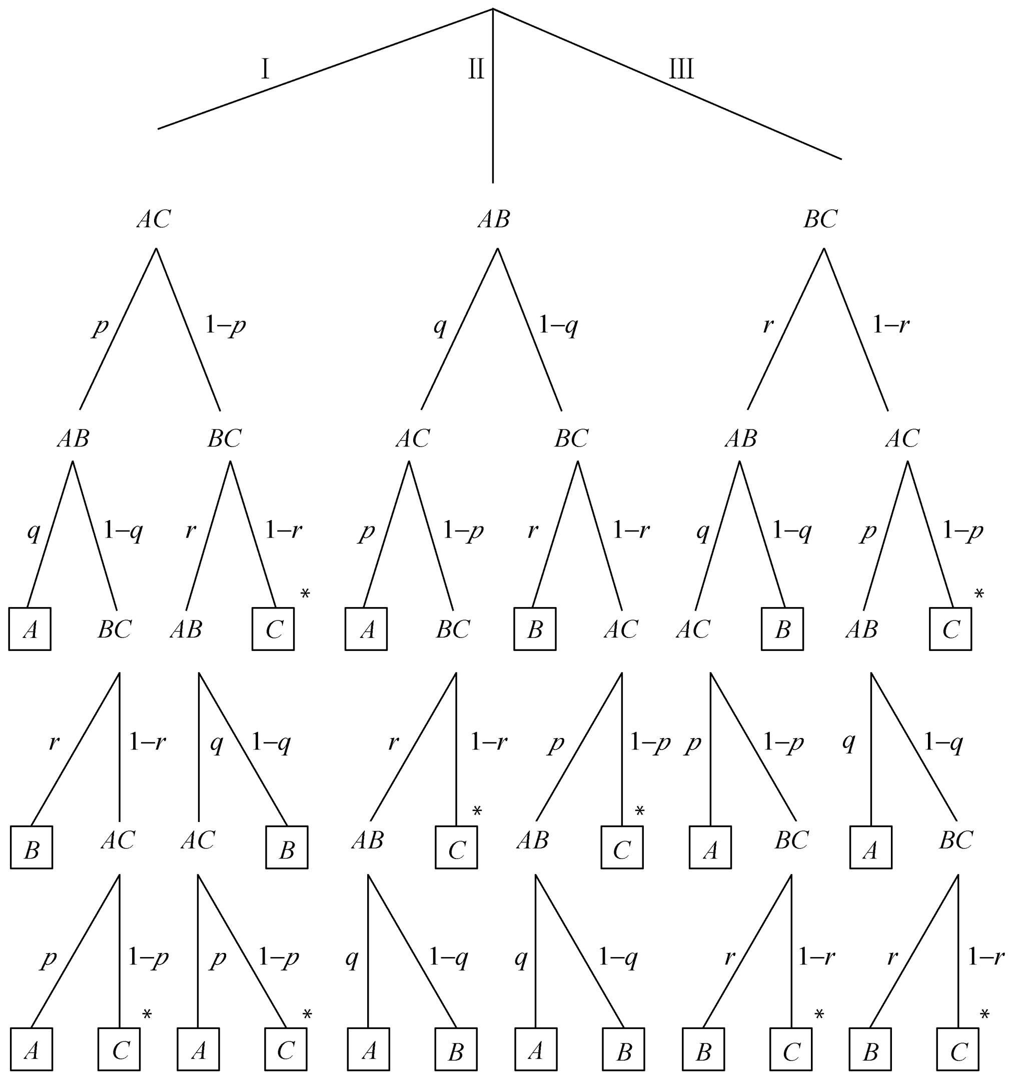


图　12A-1

据图算出三种选择下 C **成为最后胜利者的概率**:

Ⅰ: $(1-p)(1-r)(1-q)p+(1-p)qr(1-p)+(1-r)(1-p)$

Ⅱ: $(1-r)(1-p)q+(1-p)(1-r)(1-q)$

Ⅲ: $(1-r)(1-p)qr+(1-r)(1-q)p(1-r)+(1-p)(1-r)$

显然选择Ⅱ时 C **获胜概率为最小。又因** $p>r$,

故
$$(1-r)(1-q)p(1-r)>(1-p)(1-r)(1-q)p$$
$$(1-r)(1-p)qr>(1-p)qr(1-p)$$

由此 C **作第Ⅲ种选择时,获胜概率为最大。**

十三、决　策　论

复习思考题之 14．(a)正确，(b)正确，(c)不正确，(d)不正确，(e)正确。

13.1　(a) 采用 maxmin 准则应选择方案 S_3，采用 maxmax 决策准则应选取方案 S_1，采用 Laplace 准则应选择方案 S_1，采用最小机会损失准则应选择方案 S_1。

(b) 0.1256。

(c) 方案 S_1 或 S_3。

13.2　(a) 损益矩阵如表 13A-1 所示。

表　13A-1

订购 \ 销售		E_1 50	E_2 100	E_3 150	E_4 200
S_1	50	100	100	100	100
S_2	100	0	200	200	200
S_3	150	-100	100	300	300
S_4	200	-200	0	200	400

(b) 悲观法：S_1　　乐观法：S_4　　等可能法：S_2 或 S_3。

(c) 后悔矩阵如表 13A-2 所示。

表　13A-2

	E_1	E_2	E_3	E_4	最大后悔值
S_1	0	100	200	300	300
S_2	100	0	100	200	200
S_3	200	100	0	100	200
S_4	300	200	100	0	300

故按后悔值法决策为：S_2 或 S_3

13.3 (a) 按期望值法和后悔值法决策，书店订购新书的数量都是 100 本。

(b) 如书店能知道确切销售数字，则可能获取的最大利润为 100×0.2 + 200×0.4 + 300×0.3 + 400×0.1 = 230 元，由于不确切知道每种新书销售数，期望可获取利润为 160 元，230 - 160 = 70 元就是该书店愿意付出的最大的调查费用。

13.4 (a) 损益矩阵如表 13A-3 所示。(表中数字单位：万元)

表 13A-3

方案 \ 事件	E_1	E_2	E_3
Ⅰ	5	50	90
Ⅱ	2	56	104
Ⅲ	- 4	59	115

(b) 悲观法：方案Ⅰ　　乐观法：方案Ⅲ　　等可能法：方案Ⅲ。

(c) 列出后悔矩阵，按后悔值法选方案Ⅲ。

13.5 (a) 悲观主义准则：S_3　　乐观主义准则：S_3　　Laplace 准则：S_3

Savage 准则：S_4　　折衷主义准则：S_3。

(b) 悲观主义准则：S_2　　乐观主义准则：S_1　　Lapalace 准则：S_1

Savage 准则：S_1　　折衷主义准则：S_1 或 S_2。

13.6 (a) 应生产 4 000 件；

(b) 生产 1 000，2 000 或 3 000 件商品时，各种需求量条件均不亏本，损失的概率为 0，均为最小；

(c) 应生产 3 000 件或 2 000 件。

13.7 因每个职工每天正常可处理 28 件，如加班最多可处理 48 件。根据包裹必须当天处理完的要求，邮局最少雇两名职工，最多雇四名职工，其工资支出见表 13A-4：

表 13A-4

包裹数	41～50	51～56	57～60	61～64	65～68	69～70	71～72	73～76	77～80	81～84	85～88	89～90
概　率	0.10	0.15		0.30			0.25			0.20		
雇两名	70	77	77.5	85	92.5	100	100	107.5	115	122.5	130	137.5
雇三名	105	105	105	105	105	105	105	105	105	105	112.5	120
雇四名	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140	140

计算得期望值雇两名时为 98.2 元/d；雇三名时为 106.2 元/d；雇四名时为140 元/d。所以雇两名职工为最合适。

13.8 (a) 先列出损益矩阵见表 13A-5:

表 13A-5

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EMV
$P(E)$	0.2	0.4	0.25	0.10	0.05	
S_1：零件修正	-300	-300	-300	-300	-300	-300
S_2：不修正	-100	-200	-300	-400	-500	-240

故按期望值法决策,零件不需修正。

再列出后悔矩阵见表 13A-6:

表 13A-6

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EOL
$P(E)$	0.2	0.4	0.25	0.10	0.05	
S_1：零件修正	200	100	0	0	0	80
S_2：不修正	0	0	0	100	200	20

故按后悔值法决策,零件也不需要修正。

(b) 修正先验概率见表 13A-7:

表 13A-7

E	$P(E)$	$P(T\|E)$ *	$P(T,E)$	$P(E\|T)$
0.02	0.2	0.001	0.000 20	0.0 032
0.04	0.4	0.042	0.016 80	0.269 0
0.06	0.25	0.121	0.030 25	0.484 4
0.08	0.1	0.119	0.011 90	0.190 6
0.10	0.05	0.066	0.003 30	0.052 8
			$P(T) = 0.062\ 45$	1.000 0

* $P(T|E) = C_n^m P^m q^{n-m} = C_{130}^{9} P^9 q^{121}$

分别将 $P = 0.02$　　$q = 0.98$ 代入求得

0.04　　0.96

0.06　　0.94

0.08　　0.92

0.10　　0.90

根据修正后的概率再分别列出损益矩阵和后悔矩阵如表 13A-8 所示。

表 13A-8

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EMV
$P(E)$	0.0032	0.2690	0.4844	0.1906	0.0528	
S_1：修正	-300	-300	-300	-300	-300	-300
S_2：不修正	-100	-200	-300	-400	-500	-302.08

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EOL
$P(E)$	0.0032	0.2690	0.4844	0.1906	0.0528	
S_1：修正	200	100	0	0	0	27.54
S_2：不修正	0	0	0	100	200	29.62

故按期望值法或后悔值法决策时,均采用修正零件的方案。

13.9 (a) 0.36

(b) 0.92

13.10 签合同 B。

13.11 (a) $U(5) = 0.3U(-500) + 0.7U(1\,000) = 7.3$

(b) $U(200) = 0.7U(-10) + 0.3U(20\,000)$, $U(20\,000) = 1.433$

(c) $U(500) = 0.8U(1\,000) + 0.2U(-1\,000)$, $U(-1\,000) = -750$

13.12 $U(500) = pU(2\,000) + (1-p)U(-100)$, $\therefore p = 0.6$

13.13 (a) $U_A(10) = 0.4U_A(-1\,000) + 0.6U_A(3\,000) = 92$

(b) $U_B(10) = 0.8U_B(-1\,000) + 0.2U_B(3\,000)$, $\therefore U_B(3\,000) = 260$

(c) B 较之 A 更愿意冒风险。

13.14 画出这个问题的决策树(见图 13A-1):

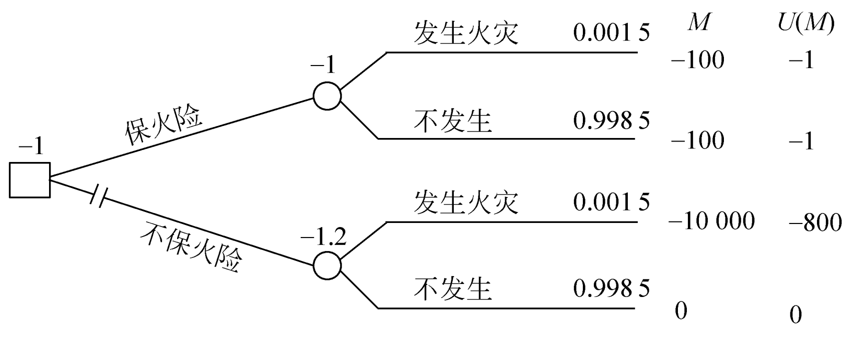


图 13A-1

结论:按效用值决策时应投保火险。

13.15 (a) $-10\,000p = (1-p)30\,000$, $p = 0.75$,即全部丧失掉的概率不超过 0.75 时该人投资仍有利。

(b) $U(-10\ 000) = 200$, $U(30\ 000) = 200\ \ 2$

$p \cdot U(-10\ 000) = (1-p)U(30\ 000)$, $p = 0.586$, **即全部丧失掉概率不超过** 0.586 **时该人投资仍有利。**

13.16 (a) **效用值表见表** 13A-9

表 13A-9

M	$U(M)$
-200	0.894 4
-100	0.948 7
0	1.0
100	1.048 9
200	1.095 4
300	1.140 2
400	1.183 2

(b) **用期望值法决策时应订购** 100 **本。**

13.17 (a) **见表** 13A-10

表 13A-10

M	$U(M)$
-1	0
1	25
6	80
8	90
10	100

(b) **画出决策树见图** 13A-2, **图中括弧内数字为效用值**

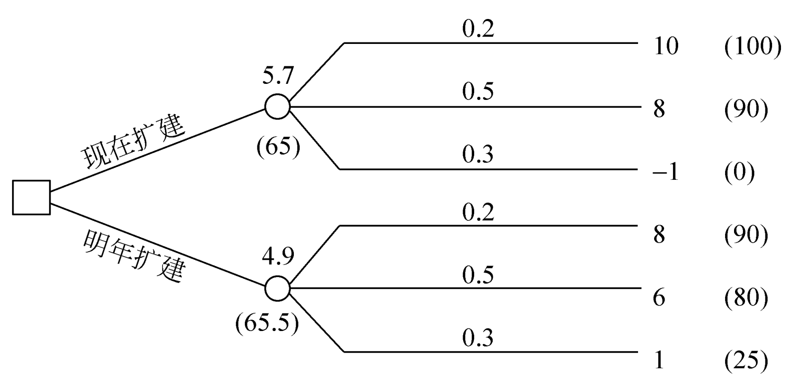


图 13A-2

结论:按实际盈利额选现在扩建的方案;如按效用值选明年扩建的方案。

13.18 先画出决策树图见图 13A-3:

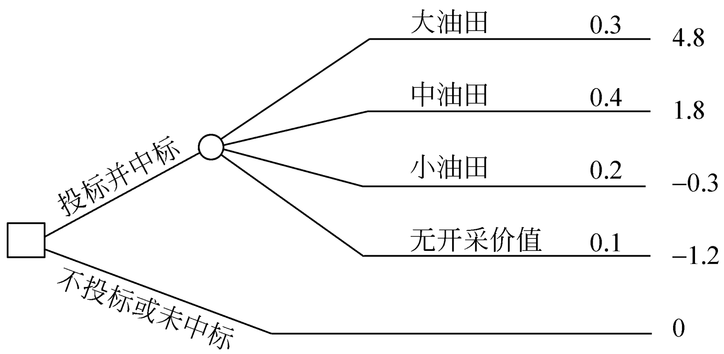


图 13A-3

计算效用期望值见表 13A-11。

表 13A-11

	大油田	中油田	小油田	无开采价值	EMV
	0.3	0.4	0.2	0.1	
A 公司	3.015 8	0.687 2	-1.090 5	-2	0.761 5
B 公司	2.193 0	0.408 9	-1.080 2	-2	0.405 4
C 公司	0.930 2	-0.066 8	-1.061 3	-2	-0.156 0

结论为 A 公司和 B 公司愿参加投标,C 公司不参加投标。

13.19 以不搬走施工机械并筑一护堤为最合算。

13.20 最优策略是应摸第一次,如摸到的是白球,继续摸第二次;如摸到的是红球,则不摸第二次。

13.21 多余资金用于开发事业成功时可获利 6 000 元,如存入银行可获利 3 000 元。设

T_1 ——咨询公司意见可以投资

T_2 ——咨询公司意见不宜投资

E_1 ——投资成功

E_2 ——投资失败

由题意知 $P(T_1)=0.78$, $P(T_2)=0.22$, $P(E_1)=0.96$, $P(E_2)=0.04$

因为 $P(E \mid T)=P(T, E)/P(T)$,又 $P(T_1, E_1)=0.77$, $P(T_1, E_2)=0.01$, $P(T_2, E_1)=0.19$, $P(T_2, E_2)=0.03$

故求得 $P(E_1 \mid T_1)=0.987$, $P(E_2 \mid T_1)=0.013$

$P(E_1 \mid T_2)=0.865$, $P(E_2 \mid T_2)=0.135$

决策树图见图 13A-4:

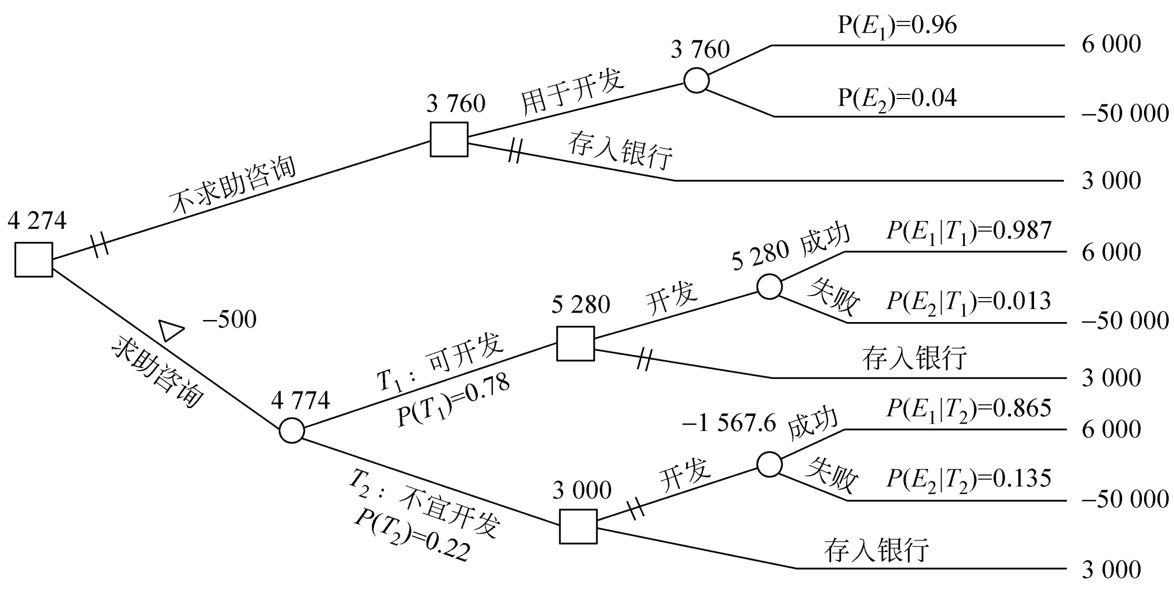


图　13A-4

结论：(a) 该公司应求助于咨询服务；

(b) 如咨询意见可投资开发，可投资于开发事业，如咨询意见不宜投资开发，应将多余资金存入银行。

13.22　(a) 按期望值法选方案Ⅲ；按后悔值法也应选方案Ⅲ；

(b) 该公司最多愿付的调查费为 1.35 万元；

(c) 当 E_1 概率不变时，不管 E_2，E_3 概率如何变化，最优决策仍为方案Ⅲ；当 E_2 概率不变时，不管 E_1，E_3 概率如何变化，最优决策也仍为方案Ⅲ；当 E_3 概率不变时有

$$5P(E_1) + 50(0.9 - P(E_1)) + 9 = 2P(E_1) + 56(0.9 - P(E_1)) + 10.4$$
$$= -4P(E_1) + 59(0.9 - P(E_1)) + 11.4$$

计算得当 $P(E_1) > 0.756$ 时，选方案Ⅰ；当 $0.411 < P(E_1) < 0.756$ 时，选方案Ⅱ；当 $P(E_1) < 0.411$ 时选方案Ⅲ。故 $P(E_1) = 0.756$ 为选择方案Ⅰ，Ⅱ的转折概率；$P(E_1) = 0.411$为选择方案Ⅱ或Ⅲ的转折概率。

13.23　由 $C = pC_1 + (1-p)C_2$，得

$p = \dfrac{C - C_2}{C_1 - C_2}$时，投资项目 A 或 B 收益相等；

$p < \dfrac{C - C_2}{C_1 - C_2}$时，投资项目 A，反之投资项目 B

13.24　若计不同损坏率时分别从 A 或 B 供应商进货时可能的盈利。如从 A 供应商处进货，当损坏率为 3%时有：

$$(4.40 \times 24\ 000) - (4.00 \times 24\ 000) - (24\ 000 \times 0.03 \times 4.00) = 6\ 720$$

由此可计算得到表 13A-12。

表 13A-12

	A 供应商		B 供应商	
损坏率/ %	概率	盈利	概率	盈利
3	0.1	6 720	0.05	5 280
4	0.2	5 760	0.1	5 040
5	0.4	4 800	0.6	4 800
6	0.3	3 840	0.25	4 560

进一步计算得从 A 供应商进货 EMV = 4 896, 从 B 供应商进货, EMV = 4 788, 故应从 A 供应商进货。

13.25 先计算得掷两颗骰子时出现各种点数和的概率为

点数和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
概率	1/ 36	2/ 36	3/ 36	4/ 36	5/ 36	6/ 36	5/ 36	4/ 36	3/ 36	2/ 36	1/ 36

由 $\frac{6}{36}+\frac{2}{36}x \geq \frac{1}{36}\times 10+\frac{27}{36}\times 1=\frac{37}{36}$, 即 $x>4.625$ 时对游戏者有利。

13.26 分别计算 B 厂商不同定价时的 EMV 值。例如当定价为 6 元时, 期望盈利值为

$$2\times\{0.25[1\ 000+250(6-6)]+0.5[1\ 000+250(8-6)]+0.25[1\ 000-250(10-6)]\}=3\ 000。$$

继续算出定价为 7, 8, 9 元时, 其期望盈利值分别为 3 750, 4 000 和 3 750。故定价 8 元时, 期望的盈利值为最大。

13.27 先根据贝叶斯公式算出当试销成功时, 大量销售时成功与失败概率分别为 0.7 与 0.3; 试销失败情况下, 大量销售成功与失败的概率分别为 0.2 与 0.8。由此可画出本题的决策树如图 13A-5。

根据 EMV 准则对决策树计算, 建议天龙服装厂应采取的策略为大量销售前先进行试销。在试销成功条件下进行大量销售; 当试销失败时, 应取消销售计划。

13.28 (a) 当 $p=0.25$ 时, 应投资 A

(b) 为保持 A 方案为最优应满足①或②

$$① \begin{cases} 105p-5\geq 22p-2 \\ 22p-2\geq 2 \\ 0\leq p\leq 0.5 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 105p-5\geq 2 \\ 22p-2\leq 2 \\ 0\leq p\leq 0.5 \end{cases}$$

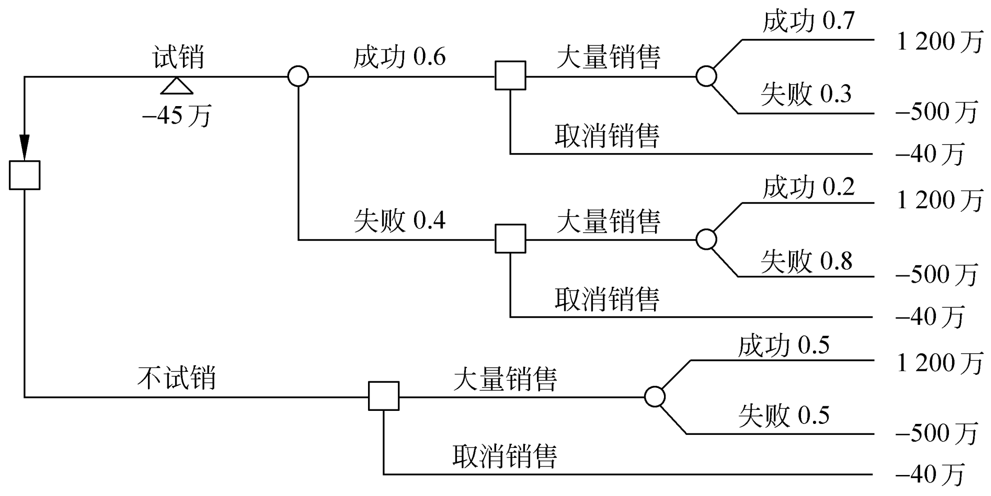


图 13A-5

由① $0.182 \leq p \leq 0.5$

由② $0.067 \leq p \leq 0.182$

由此 $0.067 \leq p \leq 0.5$

13 29 **对方案** A, **期望效用值为** $5p + 6(1 - p) = 6 - p$, **对方案** B, **期望效用值为** $10p$, **对方案** C, **期望效用值为** $7 - 7p$。

由 $6 - p \geq 10p$ **得** $p \leq 0.5455$

由 $6 - p \geq 7 - 7p$ **得** $p \geq 0.1666$

$\therefore 0.1666 \leq p \leq 0.5455$

十四、多目标决策

14 1　(a) **共有** 6 **种组织生产方案,见表** 14A -1:

表　14A-1

方　　案	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
选择生产的产品	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,4

例如方案Ⅰ的模型为

$$
\begin{aligned}
\max\ z_1 &= 8x_1 + 6x_2 = f_1 \\
\max\ z_2 &= 5x_1 + 5x_2 = f_2 \\
4x_1 + 3x_2 &\leq 45 \\
2x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(b) **各方案的解分别为如表** 14A -2 **所示**:

表　14A-2

方　　案		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
解	f_1	90	90	108	75	108	108
	f_2	58.93	56.25	56.25	45	38.44	45

(c) **其中方案Ⅰ,Ⅲ的解为非劣解,方案Ⅱ,Ⅳ,Ⅴ,Ⅵ的解为劣解,无最优解。**

14 2　(a) $f_1^{(0)} = f_1(x=1)$, $f_2^{(0)} = f_2(x=1)$, **故** $x^* = 1$ **为多目标问题最优解**;

(b) $f_1(x)$**的解为** $\left(\frac{15}{8}, \frac{15}{8}\right)$, $f_2(x)$**的解为**$(0,3)$,**因无法比较,上述两个解均为非劣解,其两点连线上的解也为非劣解**;

(c) 在[0,1]区间 β为非劣解,在[1,3]区间 α和 β均为非劣解。

14 3 因有 $f_1^0 = \min f_1(x) = 0$, $f_2^0 = \max f_2(x) = 13$, $f_2^* = f_2(x^{(1)}) = 0$, $f_1^* = f_1(x^{(2)}) = 24$

故
$$\alpha = \frac{13}{37},\quad \alpha_2 = \frac{24}{37}$$

$$U(x) = -\frac{13}{37} f_1(x) + \frac{24}{37} f_2(x) = \frac{1}{37}(20x_1 - 6x_2)$$

最后求得 $\max U(x) = U(4, 0) = \frac{80}{37}$

14 .4 $f_1^0 = f_1(x^{(1)}) = f_1(2, 3) = 20$, $f_2^0 = f_2(x^{(2)}) = f(0, 11/3) = 22$,故理想点为 $F^0 = (f_1^0, f_2^0) = (20, 22)$

取 $p = 2$,有

$$\min_{x \in R} L_2(x) = \{[f_1(x) - f_1^0]^2 + [f_2(x) - f_2^0]^2\}^{1/2}$$
$$= [(4x_1 + 4x_2 - 20)^2 + (x_1 + 6x_2 - 22)^2]^{1/2}$$

解得

$$x_1 = 1.45,\quad x_2 = 3.18$$

对应的目标为

$$f_1 = 18.52,\quad f_2 = 20.53$$

14 5 将 $\min z_2 = 2x_1 + x_2$ 改写为 $\max w_2 = -2x_1 - x_2$,得有关数据见表 14A-3:

表 14A-3

	$x^{(1)} = (2, 4)$	$x^{(2)} = (0, 2)$	M_j	m_j
z_1	14	6	14	6
w_2	-8	-2	-2	-8

$$\alpha = \frac{14-6}{14} \cdot \frac{1}{1^2 + 3^2} = 0.1807,\quad \alpha = \frac{-6}{-2} \cdot \frac{1}{2^2 + 1} = 1.3416$$

经归一处理得 $\pi = 0.1187$, $\pi_2 = 0.8813$

由此建立新的规划模型

$$\min \lambda$$
$$\lambda \geq 0.1187(14 - (x_1 + 3x_2))$$
$$\lambda \geq 0.8813(2x_1 + x_2 - 2)$$
$$x \in R\ \lambda \geq 0$$

求得近似解 $x_1 = 0$, $x_2 = 2.768$,其相应目标值为 $z_1 = 8.304$, $w_2 = -2.768$

14 .6 对目标 1 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $z_1^* = 38$

对目标 2 有 $x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$z_2^* = 36$

若取 $w_1 = w_2 = 0.5$，则有超目标函数

$$z = 0.5[4x_1 + 6x_2] + 0.5[7.2x_1 + 3.6x_2] = 5.6x_1 + 4.8x_2$$

妥协约束为

$$0.5[4x_1 + 6x_2 - 38] - 0.5[7.2x_1 + 3.6x_2 - 36] = 0$$

化简后为

$$-1.6x_1 + 1.2x_2 = 1, \quad x \in R$$

求得妥协解为 $x_1 = \dfrac{43}{17}$，$x_2 = \dfrac{143}{34}$

相应的目标函数值为 $z_1^* = 35.35$，$z_2^* = 33.35$

14.7 $b_{21} = 1/2$ $b_{23} = 6$ $b_{24} = 5/2$

$b_{31} = 3$ $b_{32} = 1/6$ $b_{34} = 15$

$b_{41} = 1/5$ $b_{42} = 2/5$ $b_{43} = 1/15$

14.8 $w_1 = 0.0601$ $w_2 = 0.4901$ $w_3 = 0.1619$ $w_4 = 0.2879$

$\lambda_{max} = 4.0193$ $RI = 0.96$ $CR = 0.007$

14.9 $w_1 = 0.0708$ $w_2 = 0.1069$ $w_3 = 0.4132$ $w_4 = 0.4091$

主要参考文献

[1] iller S . Frederick, Gerald J . Leberman . Introduction to Operations Research, sixth ed ., McGraw-Hill, 1995

[2] inston L . Wayne, Christian S . Albright . Practical Management Science, Wadsworth Publishing Company, 1997

[3] nderson R . David, Dennis J . Sweeney, Thomas A Williams . An Introduction to Management Science, eighth ed ., West Publishing Company, 1997

[4] alker C . Russell . Introduction to Mathematical Programming . Prentice Hall, 1997

[5] inston L . Wayne, OR—Applications and Algorithm, third ed ., Duxburg Press, 1994

[6] anderbei J . Robert, Linear Programming—Foundation and Extensions . Kluwer Academic Publishers, 1996

[7] wen Guillermo . Discrete Mathematics and Game . Kluwer Academic Publishers, 1999

[8] aha A . Hamdy, Operations Research—An Introduction . fourth ed ., Maemillan Publishing Company, 1987

[9] Ravindran, Don T . Phillips, Operations Research . second ed ., John Wiley & Sons, 1987

[10] ross Donald, Fundamentals of Queueing Theory . second ed ., John Wiley & Sons, 1985

[11] illiams H P, Model Building in Mathematical Programming . second ed ., John Wiley & Sons, 1985

[12] azaraa S . Mokhtar, Linear Programming and Network Flows . John Wiley & Sons, 1977

[13] ones A . J . Game Theory: Mathematical Model of Conflict . Ellis Horwand Limited, 1980

[14] sborna J . Martin, A Course in Game Theory . MIT Press, 1994

[15] 弗雷德里克 · S .希利尔等著,任建标译,数据 · 模型与决策 北京:中国财政经济出版社,2001

[16] 运筹学教材编写组 . 运筹学(修订版) 北京: 清华大学出版社, 1990

[17] 胡运权主编 . 运筹学教程 .北京:清华大学出版社, 1998

[18] 田丰,马仲蕃 . 图与网络流理论 . 北京:科学出版社, 1987

[19] 徐光辉 . 随机服务系统 . 北京:科学出版社, 1980

[20] 陈珽 . 决策分析 . 北京:科学出版社, 1990