20、21全程考研资料请加群712760929

数学三模拟试卷 1 参考答案

一、选择题：1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.

(1)【解】由题设知 $e^{x^2}-e^{\sin^2 x}=e^{\sin^2 x}(e^{x^2-\sin^2 x}-1)\sim x^2-\sin^2 x=(x-\sin x)(x+\sin x)\sim\frac{1}{3}x^4$,所以有 $m=4$，答案为B.

(2)【解】由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}+g(x)$，$f'(0)=0$，

$f''(0)=(\frac{2x}{1+x^2})'\Big|_{x=0}+g'(0)=2$，故点 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的极小值点，【答案】A.

(3)【答案】A

(4)【答案】B

(5)【答案】C

(6)【答案】 B

(7)【解】由于 $P\{X\le\sigma\}>P\{X>\sigma\}$，所以 $2P\{X\le\sigma\}>1$，$P\{X\le\sigma\}>\frac{1}{2}\Rightarrow\Phi(\frac{\sigma-\mu}{\sigma})>\Phi(0)$，

即 $1-\frac{\mu}{\sigma}>0$, 可知 $\frac{\mu}{\sigma}<1$,【答案】 (C).

(8)【解】求 A 的特征值，$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & -X-\lambda & 1/4\\ 1 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+X\lambda+\frac{1}{4})$，要使所以特征值为

实数，则概率 $P\{X^2-1\ge0\}=P\{(X-1)(X+1)\ge0\}=P\{X\le-1\}+P\{X\ge1\}=P\{X\ge1\}$，由此知

$\frac{7}{8}=P\{X\ge1\}=1-P\{X<1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-p)^3,(1-p)^3=\frac{1}{8}$，$p=\frac{1}{2}$，答案为 C.

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分.

(9)【解】原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)})^{\frac{\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}}\right]^{\frac{x-\ln(1+x)}{(e^x-1))\ln(1+x)}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{(e^x-1))\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$,所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

(10)【解】 $f^{(n)}(x)=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+2n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$,

所以 $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}2n!$.

(11)【答案】 $\varphi(u)=e^{-\frac{u^2}{4}}$.

(12)【答案】 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(13) 设 $\alpha_1=(1,2,0,2)^T,\alpha_2=(2,1,1,0)^T,\alpha_3=(t,2,1,1)^T$ 线性相关，则 $t=$______.

【解】 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&t\\2&1&2\\0&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\0&2&t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&t-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$，$t=\frac{5}{2}$ 时 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，

向量线性相关。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(14) 【答案】$\dfrac{2}{\lambda}+1$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.

(15) (本小题满分 10 分)

【解】(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\dfrac{dy}{dx}=0,t=\pi,\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi}=\dfrac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，

故 $t=\pi$ 时函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}=0,\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号，故点 $(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 与 $(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 均为曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

(16) (本小题满分 10 分)

【解】 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{du}{dr}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{du}{dr},\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{x^2}{r^3}\cdot\dfrac{du}{dr}$，同理

$\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{y^2}{r^3}\dfrac{du}{dr}$，代入原方程得 $\dfrac{d^2u}{dr^2}+u=r^2$ （*）

（*）所对应的齐次方程通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r$，（*）的特解为 $u^*(r)=ar^2+br+c$，代入（*）得 $a=1,b=0,c=-2$，所以（*）的通解为 $u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2$

即 $u=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)-2$

(17) (本小题满分 10 分)

【解】收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

$\int_0^x S(x)dx=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+2}=\dfrac{x}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\dfrac{x}{2}\sin x$，

所以，$S(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$.

(18) (本小题满分 10 分)

【证明】令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt\int_a^x g(t)dt-(x-a)\int_a^x f(t)g(t)dt,F(a)=0$，

$F'(x)=f(x)\int_a^x g(t)dt+g(x)\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f(t)g(t)dt-(x-a)f(x)g(x)$

$=-\int_a^x[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]dt$，由于 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增，因而当 $t<x$ 时有 $[f(x)-f(t)][g(x)-g(t)]>0$，即当 $x\in(a,b)$ 时有 $F'(x)<0$，因此函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减，由此可得 $F(b)<F(a)=0,\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx-(b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx<0$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

(19) (本小题满分 10 分)

【解】$I=\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}rdr$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=\frac{1}{2}\int_0^1 t^2(1-t^2)dt=\frac{1}{15}$

(20) (本小题满分 11 分)

【解】 (I) 因 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 1.故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值,设 A 属于 0 的特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$,由 $\xi\perp\xi_1$ 得,方程组 $-x_1+x_2+x_3=0$,

解得基础解系 $\xi_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$,故 ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 两个线性无关解.由 $R(A)=1$ 知,$\xi_2\ \xi_3$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系,故 $Ax=0$ 通解为 $x=k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T+k_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$;

(II) 由(1)知 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 线性无关,

令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$,则 P 是可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$,

故 $A=P\begin{pmatrix}2 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}P^{-1}=\cdots=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$

(21) (本小题满分 11 分)

【解】(1) $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$,由 $R(A)=1$ 得,$a=b$.

$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1-a^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow a=\pm1.$

又 $\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$,得 $\begin{cases}a-1=0\\ 1-b=\lambda\\ b-1=-\lambda\end{cases}\Rightarrow a=b=1,\lambda=0.$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值为 0,0,3.

$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$;$\lambda=3$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

令 $Q=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ 及 $X=QY$,则有 $f=3y_3^2$.

(22) (本小题满分 11 分)

【解】(1)由条件知 (X,Y) 密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{a^2}, & (x,y)\in G \\ 0, & (x,y)\notin G \end{cases}$,

又 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率 $P\{X^2-4Y\geq 0\}=P\{4Y\leq X^2\}$,讨论：由于 $a=4$时,$y=\frac{x^2}{4}$ 过点(4,4)

(ⅰ)　$a\leq 4,\ P\{X^2-4Y\geq 0\}=\int_0^a dx\int_0^{x^2/4}\frac{1}{a^2}dxdy=\frac{a}{12}$;

(ⅱ)　$a>4,\ P\{X^2-4Y\geq 0\}=\int_0^a dy\int_{2\sqrt{y}}^a\frac{1}{a^2}dx=1-\frac{4}{3\sqrt{a}}$

(2)由卷积公式，$Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$，所以

$f(x,2x-z)=1$,对应积分区域为 $\begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ 2x-1\leq z\leq 2x \end{cases}$，对不同区域讨论如下：

(I)　$-1\leq z<0,\ f_Z(z)=\int_0^{\frac{1+z}{2}}dx=\frac{1+z}{2}$,

(II)　$0\leq z<1,\ f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{\frac{1+z}{2}}dx=\frac{1}{2}$

(III)　$1\leq z<2,\ f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx=1-\frac{z}{2}$

则 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases} (1+z)/2, & -1\leq z<0 \\ 1/2, & 0\leq z<1 \\ 1-z/2, & 1\leq z<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

(23) (本小题满分 11 分)

【解】(1)由样本的独立性知

$Cov(X_i,Y_i)=Cov(X_i,X_i-\bar{X})=DX_i-Cov(X_i,\bar{X})=\sigma^2-Cov(X_i,\frac{1}{n}X_i)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$,

所以 $\sum_{i=1}^{n}Cov(X_i,Y_i)=(n-1)\sigma^2$;

(2)由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)$,由此 $D(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4$;

(3)$\theta=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$,$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\theta=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=(n-1)S^2$,

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$E(\theta^2)=E[(n-1)S^2]^2=(n-1)^2E(S^2)^2=(n-1)^2[D(S^2)+(ES^2)^2]$$

$$=(n-1)^2[\frac{2}{n-1}\sigma^4+\sigma^4]=(n^2-1)\sigma^4.$$

共创考研

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三模拟试卷 2 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

(1)【解】函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)\ln|x^2-1|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

(2)【解】有题设知 $xe^{-|x|}f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必为奇函数，又 $f(x)$ 有界，因而 $\exists M>0$，使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $|f(x)|\le M$ 相应的有

$|F(x)|=\left|\int_0^x te^{-|t|}f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le M\int_0^{|x|}\left|te^{-|t|}f(t)\right|\mathrm{d}t\le M[2-(1+|x|e^{-|x|}]\le 2M$，因此 $F(x)$ 是有界的奇函数，答案为 A.

(3)【答案】D

(4)【解】 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在，函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续，，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续，因此答案应该为 D.

(5) 【解】$t\neq-1$ 时，ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，因此必有 $r(A)=1$。

(6)【解】答案为 B

(7)【解】 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.15,\ P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)$

$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-[P(B)-P(AB)]=P(\bar{A})+P(AB)=0.7+0.15=0.85$

(8)【解】对应概率为：第三次试验成功，概率为 p，而前 2 次恰有 1 次成功，由 Bernulli 概型的二项概率公式可知 $C_2^1p(1-p)p=2p^2(1-p)$。

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9)【解】对等式两边关于 x 同时求导可得：$1-e^{-(x+y)^2}(2+y')=0$，所以 $y'(0)=e-2$，故所求法线方程为 $y=-\dfrac{1}{e-2}x+1$。

(10)【解】由题设知 $f(1+\ln x)=ex+\ln x+1$，令 $u=1+\ln x,x=e^{u-1},f(u)=e^u+u$，因而相应的图形面积为 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(e^x+x)\,\mathrm{d}x=e-\dfrac{1}{2}$.

(11)【解】 令 $u=y^2$ 方程可变为 $u'-xu=x$，解得

$u=e^{\frac{x^2}{2}}(\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx+C)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1,y(0)=0,C=1$，由此可得所求方程通解为 $y^2=e^{\frac{1}{2}x^2}-1$

(12)【解】设 D_1: $0\le y\le x,0\le x\le1$，则

$$\iint\limits_D(x-y)\operatorname{sgn}(x-y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}(x-y)d\sigma=\int_0^1dx\int_0^x(x-y)dy=\int_0^1\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{6}.$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（13）【解】 $|B|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2, B^{-1}=B^{*}A+A$ 两边左乘 B 得 $E=2A+BA$, 即 $(B+2E)A=E$, 则

$$A=(B+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}3&3&0\\1&3&2\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

（14）【解】 $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_X^2+\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_Y^2\sim\chi^2(2n-2), \bar{X}+\bar{Y}\sim N(\mu,\frac{2\sigma^2}{n}), \frac{\bar{X}+\bar{Y}-\mu}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}\sim N(0,1)$,

所以 $\theta=\dfrac{\dfrac{\bar{X}+\bar{Y}-\mu}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_X^2+\frac{(n-1)}{\sigma^2}S_Y^2}{2n-2}}}=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}+\bar{Y}-\mu)}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}\sim t(2n-2)$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.

（15）.（本小题满分 10 分）

【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1-\sin x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}[\frac{f(x)+1}{x}-\frac{\sin x}{x}]=1, \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=2$，

$f(0)=-1$， $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)}{mx^{m-1}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{mx^{m-2}}$ 存在且 $f(0)=-$ ，因此必有 $m=2$. 此时有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2}=-\frac{\ }{2}$，从而有 $k=-\frac{1}{2}$.

（16）（本小题满分 10 分）

【解】总利润函数为 $L(x,y)=R(x,y)-C(x,y)-x-2y=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36$

令 $\begin{cases}L'_x=14-2x-2y=0\\L'_y=32-2x-8y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

$L(x,y)$ 在点 $(4,3)$ 处取得极大值同时也是最大值，且有 $L_{\max}=L(4,3)=40$（万元）

（Ⅱ）所求即为 $L(x,y)$ 满足条件 $x+2y=6$ 的条件极值问题，设 $F(x,y)=L(x,y)+\lambda(x+2y-6)$

令 $\begin{cases}F'_x=14-2x-2y+\lambda=0\\F'_y=32-2x-8y+2\lambda=0\\x+2y-6=0\end{cases}$ 解得 $x=2,y=2$，因实际问题有解，而驻点唯一，所以该点即为所求极值点，此时有 $L_{\max}=L(2,2)=8$。

（17）（本小题满分 10 分）

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【解】（Ⅰ）$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n})dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},|x|\le 1$，

$(\ln\sqrt{2+x^2})'=\frac{x}{2+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{n+1}},|x|\le\sqrt{2}$，所以有

$\ln\sqrt{2+x^2}=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2^{n+1}})dt+\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n+1)2^{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n2^{n+1}}+\frac{1}{2}\ln 2$，

所以 $f(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n2^{n+1}}-\frac{1}{2}\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n2^{n+1}})x^{2n}-\frac{1}{2}\ln 2,|x|\le 1$。

（Ⅱ）令 $x=1$ 则有 $f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n2^{n+1}})-\frac{1}{2}\ln 2$，所以有

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n2^{n+1}-2n+1}{n(2n-1)2^{n+1}}=f(1)+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

（18）（本小题满分 10 分）

【证明】 令 $F(x)=e^{f(x)}\arcsin x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，有积分中值定理知道 $\exists x_0\in[0,\frac{2}{\pi}]$ 上使得 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arcsin x\,dx=\int_0^{\frac{2}{\pi}}F(x)\,dx=F(x_0)\frac{2}{\pi}=1,F(x_0)=\frac{\pi}{2}$，而 $F(1)=\frac{\pi}{2}$，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(x_0,1)\subset(0,1)$ 使得

$F'(\xi)=e^{f(\xi)}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{f(\xi)}f'(\xi)\arcsin\xi=0$，即有 $\sqrt{(1-\xi^2)}f'(\xi)\arcsin\xi=-1$。

（19）（本小题满分 10 分）

【解】 设 $D_1:\ 0\le x\le\pi,x\le y\le\pi$；$D_2:\ 0\le x\le\pi;0\le y\le x$

则原式 $I=\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,dxdy+\iint_{D_2}y\sin x\sin y\,dxdy$

$=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx\int_x^{\pi}\sin y\,dy+\int_0^{\pi}y\sin y\,dy\int_y^{\pi}\sin x\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin x(1+\cos x)dx$

$=2x(-\cos x)|_0^{\pi}+2\sin x|_0^{\pi}-\frac{1}{2}x\cos 2x|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\sin 2x|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi$.

（20）（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 表示，则 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$

从而 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+0\alpha_4=A\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$，由此可得 $\xi=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$ 是方程 $Ax=\beta$ 的解，因此

$\xi-\xi_0=(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的解，由题设知 $\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个解。由题设 $\xi_1=(1\quad -1\quad 2\quad 0)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。而 $\xi-\xi_0$ 显然不能由 ξ_1 线性表示。矛盾！所以 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（Ⅱ）由题设知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 与矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,$ 的秩都是 3，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$\xi_1=(1,-1,2,0)^T$ 是方程 $Ax=0$ 的一个基础解系，因此必有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，因此可取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 作为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的极大无关组，同时它也是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大无关组.

(21)（本小题满分 11 分）

【解】(Ⅰ)由题设条件知

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\cdots&\cdots&&\\n&2n&\cdots&n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}(1\quad 2\quad\cdots\quad n)=\alpha\alpha^T\qquad 故\ r(A)=1;$$

(Ⅱ)因 $A^2=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)=\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)A,\ |A|=0$，所以 $\lambda=0$ 是 A 特征值。

对应特征向量满足 $Ax=\alpha\alpha^Tx=0$　　因 $\alpha^T\alpha=\sum_{i=1}^n i^2\neq 0$

故方程组　$\alpha\alpha^Tx=0$ 与 $\alpha^Tx=0$ 是同解方程组，

只需解方程组 $\alpha^Tx=0$　即满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$，有线性无关特征向量为

$\xi_1=(-2\quad 1\quad 0\quad\cdots\quad 0)^T$，　$\xi_2=(-3\quad 0\quad 1\quad\cdots\quad 0)^T,\cdots,\xi_{n-1}=(-n\quad 0\quad\cdots\quad 1)^T$

由此可知　$\lambda=0$ 至少是 $n-1$ 重根

又　$trA=\sum_{i=1}^n i^2=\sum_{i=1}^n\lambda^2\neq 0$。故 A 有一个非零特征值 $\lambda_n=\sum_{i=1}^n i^2\neq 0$

当 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2=\alpha^T\alpha$ 时　由 $(\lambda E-A)x=(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$

由观察可知 $x=\alpha$ 时

$(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$。故 $\alpha=(1\quad 2\quad\cdots\quad n)^T=\xi_n$ 是对应 $\lambda=\sum_{i=1}^n i^2$ 特征向量。

A 有 n 个线性无关特征向量，A 能相似对角化。

取 $P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_{n-1}\quad\xi_n)=\begin{pmatrix}-2&-3&\cdots&-n&1\\1&&&&2\\&\ddots&&&\vdots\\&&\ddots&&\vdots\\&&&1&n\end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&&&\\&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&0&\\&&&&\sum_{i=1}^n i^2\end{pmatrix}=\Lambda$

(22)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）由于 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0\\ \frac{1}{4}, & 0\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，则

概率 $P\{|X|>5X-2\}=P\{X\le -5X+2,X\le 0\}+P\{X>5X-2,X>0\}$

$=P\{X\le 0\}+P\{0\le X<\frac{1}{2}\}=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}dx=\frac{5}{8}$；

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（Ⅱ） $E(2|X|-1)=2E(|X|)-1=2\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx-1=2[-\int_{-1}^{0}x(x+1)dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}dx]-1=\frac{1}{3}$

（Ⅲ）$Y=X^2$，讨论分布函数 $F_Y(y)$ 则

（1）由于 $y=x^2$，有效区间为 $0<y<4$，$y=1$ $(x=-1)$ 是分界点，

（2） 讨论 $y<0$，$F_Y(y)=0$

$0\le y<1$，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{0}(x+1)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt{y}}dx$

$1\le y<4$，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{\sqrt{y}}dx$

$y\ge 4$，$F_Y(y)=1$

（3） $Y=X^2$ 的概率密度函数：

$$f_Y(x)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}+\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\le y<4\ .\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(23)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）$1=C\int_{0}^{+\infty}\theta^x\ln\theta dx=C\ln\theta\int_{0}^{+\infty}\theta^x dx=-C$，所以 $C=-1$

（Ⅱ）$L=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(-\ln\theta)^n$，$x_i>0$，

取对数：$\ln L=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\theta+n\ln(-\ln\theta)$，求导数 $\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\ln\theta}\frac{1}{\theta}=0$，解得：$\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n}{\ln\theta}=0$

$\ln\theta=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=-\frac{1}{\overline{X}}$，所以最大似然估计 $\hat{\theta}_L=e^{-\frac{1}{\overline{X}}}$；

（Ⅲ）$E\ \ln(\hat{\theta}_L)^{-1})=-E\overline{X}=-EX$，

又 $EX=-\int_{0}^{+\infty}x\theta^x\ln\theta dx=-\ln\theta\int_{0}^{+\infty}x\theta^x dx=-\int_{0}^{+\infty}xd\theta^x=-x\theta^x\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\theta^x dx=-\frac{1}{\ln\theta}=-(\ln\theta)^{-1}$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三模拟试卷 3 参考答案

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】 当 $|x|>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^n}\sin\pi x=0$，当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\sin\pi x$，

当 $f(1)=0$，$f(-1)$ 无定义，所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \sin\pi x, & -1<x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$ $f(-1)$ 无定义，因此 $f'(-1)$ 不存在，

$f'_-(1)=\pi\cos\pi x\big|_{x=1}=-\pi, f'_+(1)=0$，因此 $f'(1)$ 也不存在，答案为 C .

（2）【解】 因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，因而有 $I_1>1$，又 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\pi}{2}$，因而有

$I_2<1$，答案是 D 。

（3）【答案】D

(4)【解】由区域 D 的图形及函数的奇偶性，根据对称性知：

$$\iint\limits_D x[\ln(y+\sqrt{1+y^2})+1]dxdy=2\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\frac{2}{3}$$

（5）【答案】B

【提示】 $A^*=\dfrac{A^{-1}}{|A|}$。由于 $|A|=(-1)^{\tau(n123\cdots(n-1))}(-1)^n=-1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，故

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n A_{ij}=1+1+\cdots+1=n$$

（6）【答案】C

（7）【解】$0.5=P\{\max\{X,Y\}>c\}=P\{(X>c)\cup(Y>c)\}=P(X>c)+P(Y>c)-P\{X>c,Y>c\}$
$=1.2-P\{X>c,Y>c\}$，$\therefore P\{X>c,Y>c\}=0.7$　则 $P\{\min\{X,Y\}\le c\}=1-P\{X>c,X>c\}=0.3$

（8）【解】由于相关系数 $\rho=0$，所以 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$ 所以 $Y\text{-}1\sim N(-1,1)$，

$D(XY-X)=D[X(Y-1)]=E[X^2(Y-1)^2]-[EXE(Y-1)]^2$
$=E(X^2)E(Y-1)^2-(EX)^2[E(Y-1)]^2=3$，答案为 D

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）【解】令 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，那么函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，因此有

$0<\dfrac{n}{e^n}\le\dfrac{1}{e}$，由此可得

$$\left(\cos\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{n}}\le\left(\cos\frac{1}{e}+\cos\frac{2}{e^2}+\cdots+\cos\frac{n}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}}\ge n^{\frac{1}{n}},$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

而 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$，由夹逼原理知原式 $=1$.

（10）【解】由题设 $x\in(0,2)$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x \dfrac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}dt=\sqrt{2x-x^2}$，

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$.

（11）【解】应填 $y_t^*=2^t-t$. 设特解 $y_t=A2^t+Bt$，代入方程得 $A2^t+B=2^t-1$，解得 $A=1,B=-1$，所以 $y_t^*=2^t-t$ （12）设 $f(x)=5\arctan\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{x}{1+x^2}$，则 $f^{(5)}(0)=$ __-80__

（13）【答案】-4

（14）【解】 由条件已知 $X_1^2,\dots,X_n^2$ 独立同分布，由大数定律可知 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于：

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda(1+\lambda)$$

三、解答题：15～23小题，共94分。

（15）．（本小题满分10分）

【解】解法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$

$=a-1=0,a=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}$，$b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0$，$\lim\limits_{x\to0}(1+2c\cos x)=0$，由此可得

$a=1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

解法二：$a+bx-(1+c\sin x)e^x=a+bx-[1+cx-\dfrac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\dfrac{1}{2})x^2-(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1,b-c-1=0,c+\dfrac{1}{2}=0,\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c=0$，即 $a=1,b=\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$.

（16）．（本小题满分10分）

【解】1）区域 D 内：$f_x'(x,y)=y-1=0, f_y'(x,y)=x=0,\Rightarrow(0,1)$ 函数值为 $f(0,1)=0$;

2）直线 L_1 $y=x$，，代入：$f=x(x-1)$　　$x\in[-\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3}]$

$f'=2x-1=0,\ x=\dfrac{1}{2}$，所以：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$f(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{4}$;

端点上：$f(-\dfrac{\sqrt6}{3},-\dfrac{\sqrt6}{3})=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt6}{3}$；$f(\dfrac{\sqrt6}{3},\dfrac{\sqrt6}{3})=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt6}{3}$；

3）园 L_2：$x^2+y^2=3$，

作 Lagrange 函数 $L=x(y-1)+\lambda(x^2+y^2=3)$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$$\begin{cases} L_x'=y-1+2x\lambda=0 \\ L_y'=x+2y\lambda=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-y-x^2=0 \\ x^2+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow 2y^2-y-3=0,$$

所以解得 $(2y-3)(y+1)=0$, 得点

$$(-\sqrt{2},-1),\ f(-\sqrt{2},-1)=2\sqrt{2};\quad (-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}),\ f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{4};\quad (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}),\ f(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

即知：

$$f_{\min}=f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{4},\ f_{\max}=f(-\sqrt{2},-1)=2\sqrt{2}。$$

(17)（本小题满分 10 分）

【解】（I）缺项幂级数　(1)　$\because \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{4n+1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{4n-3}{n(2n-1)}}x^2=x^2$

$\therefore$ 由比值法知：当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数发散，故幂级数收敛半径 $R=1$。

(2) 当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n-3}{n(2n-1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{2n-1})$ 收敛，故原幂级数收敛域为 $[-1,1]$。

（II）$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n-3}{n(2n-1)}x^{2n}=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}x^{2n}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}x^{2n}$，而其中

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2)^n}{n}=\ln(1+x^2),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=xs(x),$$

这里，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，$s(0)=0$，逐项求导可得

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},|x|<1,$$

积分可得：$s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$。

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n-3}{n(2n-1)}x^{2n}=3\ln(1+x^2)-2x\arctan x, x\in[-1,1]$.

(18)（本小题满分 10 分）

【证明】（I）由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=0$，记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$）相应的必有 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，即

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（II）令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

(19)（本小题满分 10 分）

【解】补区域 $D_1:x^2+y^2\le 1\ (x,y\ge 0)$

$$I=\iint_D x^2(x^2+y^2)d\sigma=\iint_{D+D_1} x^2(x^2+y^2)d\sigma-\iint_{D_1} x^2(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=\int_0^1[\int_0^1(x^4+x^2y^2)dy]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r^2 rdr]d\theta$$

$$=\int_0^1(x^4+\frac{1}{3}x^2)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}\cos^2\theta d$$

$$=\frac{14}{45}-\frac{\pi}{24}.$$

(20)（本小题满分 11 分）

【解】(1)由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$　$\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量。又 $\eta=(1\ \ 2\ \ -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$，知 $\xi_3=(1\ \ 2\ \ -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)$　则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（2）$A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

(21)（本小题满分 11 分）

【解】(I) 据已知条件，有 $\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&0&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}$，即

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$，所以　$x^TAx=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$。

（II）由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$，得矩阵 A 的特征值为 2,2,−4.

由 $(2E-A)x=0$，$\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\lambda=2$ 的特征向量 $a_1=(1,1,0)^T,a_2=(1,0,1)^T$；

由 $(-4E-A)x=0$，$\begin{bmatrix}-4&-2&-2\\-2&-4&2\\-2&2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $a_3=(-1,1,1)^T$，将 a_1a_2 正交

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

化，令 $\beta_1=\alpha_1$，则

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\beta_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$，再对 β_1,β_2,β_3 单位化，有

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\gamma_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$，那么令 $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$，有

$x^TAx=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

（III）因为 $A+kE$ 的特征值为 $k+2,k+2,k-4$，所以当 $k>4$ 时矩阵 $A+kE$ 正定.

（22）（本小题满分 11 分）

【解】1）$P\{Y=1/X=0\}=\dfrac{P\{Y=1,X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{Y=1,Z=1\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{2}{3}$

2）(X,Y) 的联合分布律：

Y \ X	0	1
0	1/10	1/5
1	2/5	1/5
2	1/10	0

3）$Z=\max\{X,2Y\}$ 分布律

$Z=\max(X,2Y)$	0	1	2
p_i	1/10	2/5	1/2

4）由于 X 的分布律为（右表）

X	0	1	2
p_i	3/10	3/5	1/10

$COV(2X+Y,X)$

$=2D(X)+COV(X,Y)=2\times\dfrac{9}{25}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{23}{25}$

其中：$E(X)=4/5$，$D(X)=1-(\dfrac{4}{5})^2=\dfrac{9}{25}$

（23）（本小题满分 11 分）

【解】（I）由于 $X=e^Y$，$E(X)=\int_0^{\infty}e^y\lambda ye^{-\lambda y}dy=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\int_0^{\infty}y(\lambda-1)e^{-(\lambda-1)y}dy=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$；

（II）$X_1,\dots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，对应 $Y=\ln X$ 的样本为 $Y_i=\ln X_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

则似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}\lambda y_ie^{-\lambda y_i}=\lambda^n(y_1y_2\cdots y_n)e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i}$　$(y_i>0)$，

取对数可知 $\ln L=n\ln\lambda+\ln(y_1\cdots y_n)-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i$，$\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

由此 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}$，或 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$；

（III） $b=E(X)=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$ 可以证明在 $\lambda>1$ 时，为单调减连续函数，由最大似然估计性质 $b=\dfrac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$ 的最大似然估计 $\hat{b}=\dfrac{\hat{\lambda}}{(\hat{\lambda}-1)^2}=\dfrac{1}{\hat{\lambda}}\dfrac{1}{(1-\frac{1}{\hat{\lambda}})^2}=\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}{(1-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i)^2}$。

共创考研

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三模拟试卷 4 参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

（1）【解】由题设有 $2f'(2)=4, f'(2)=2$，因而有 $\mathrm{d}f(u)\big|_{\substack{u=2\\ \Delta u=0.01}}=0.02$，答案 B．

（2）【解】 $I=\int_0^1\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$，$I$ 收敛的充分必要条件是积分 $\int_0^1\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$ 都收敛，前者收敛则必有 $b<1$，后者收敛则必有 $a>1$，因此答案为 C．

（3）【解】 由轮换对称性：

$$I=\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=\iint\limits_D\frac{af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)+af(y)+bf(x)}{f(y)+f(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{2}(a+b)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(a+b).$$ 选（D）

（4）【答案】 A

（5）【答案】 C

（6）【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$ 可知矩阵 A 的特征是 $3,-3,0$, 故秩 $\gamma(A)=2$. 二次型 x^TAx 的正、负惯性指数均为1.

（A）中矩阵的秩为1，不可能与矩阵 A 等阶；（C）中矩阵的特征值为 3，-3,0.与矩阵 A 不仅等价、合同，而且也是相似的，不符合题意．对于（D）,记其矩阵为 D，由

$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，可知 D 的特征值为 $1,-1,0$。x^TAx 与 x^TDx 的正、负惯性指数一样，所以它们合同但不相似（因为特征值不同），符合题意，

固应选（D）

注意，（B）中矩阵的特征值为 $1,4,0$, 正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，与 A 即不合同也不相似，但等阶（因为秩相等.

（7）【解】 $P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{1-P(\bar{A}\bar{B})}=\frac{P(A)P(B)}{1-P(\bar{A})P(\bar{B})}=0.25$,其中由

$P(A-B)=P(B-A)$

即 $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})\Rightarrow P(A)(1-P(B))=P(B)(1-P(A))$, 可知 $P(A)=P(B)$=0.3.

（8）【解】 $Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为 $F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n$，则概率密度函数为

$f_Z(z)=n[1-F(z)]^{n-1}F'(z)=n[1-F(z)]^{n-1}f(z)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9）【解】对等式两边同时取对数，再求微分可得

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$\ln\cos y\,dx - x\tan y\,dy = y\cot x\,dx + \ln\sin x\,dy$，由此可得 $dy=\dfrac{\ln\cos y - y\cot x}{x\tan y+\ln\sin x}dx$。

（10）【解】由题设有 $\int_0^{x^2+2x} f(u)\,du=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{e^{-t^2}\ln(1+t-x)}{\sin(x-t)}=-e^{-x^2}$，对等式两边同时关于 x 同时求导可得 $2(x+1)f(x^2+2x)=2xe^{-x^2}$，令 $x^2+2x=3$ 解得 $x=1$ 或者 $x=-3$（舍去），所以有 $f(3)=\dfrac{1}{2e}$.

（11）【答案】1

（12）【答案】$\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$

（13）【解】设矩阵 A 与 B 有相同特征值，由于 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|B|, 2\lambda_3=2, \Rightarrow \lambda_3=1$，所以 A 与 B 的特征值均为：

$1,1,2$；$A+E$ 的特征值分别为 $2,2,3$；则 $(A+E)^{-1}$ 特征值分别为 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$

另一方面 $(2B)^*=2^{n-1}B^*=4B^*$，此时可得：

$$\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & 0\\ 0 & (2B)^*\end{vmatrix}=\left|(A+E)^{-1}\right|\left|(2B)^*\right|=\left|(A+E)^{-1}\right|\left|4B^*\right|=\frac{1}{12}4^3|B|^2=\frac{64}{3}$$

（14）【解】由题可知 $P\{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\le 64\}\le 0.977=\Phi(2)$，根据中心极限定理知：

$$P\{\sum_{i=1}^{n}X_i\le 64\}=\Phi\left(\frac{64-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{64-2n}{4\sqrt{n}}\right)，则 \Phi\left(\frac{64-2n}{4\sqrt{n}}\right)<\Phi(2)\Rightarrow\frac{64-2n}{4\sqrt{n}}<2$$

即 $n+4\sqrt{n}-32>0$，可知 $n>16$。

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。

（15）（本小题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）设切点为 (x_0,x_0^3)，则有 $\dfrac{5-x_0^3}{1-x_0}=3x_0^2$，解得 $x_0=-1$，相应的切线 l 的方程为 $y=3x+2$；

（Ⅱ）l 与 C 的交点满足方程 $\begin{cases}y=x^3\\ y=3x+2\end{cases}$，解得 $x=-1$ 与 $x=2$，因而 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4\right]\Big|_{-1}^{2}=\frac{51}{4}；$$

（Ⅲ）所求体积 $V=2\pi\int_0^2 x(3x+2-x^3)\,dx=2\pi\left[x^3+x^2-\dfrac{1}{5}x^5\right]\Big|_0^2=\dfrac{56\pi}{5}$。

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（16）（本小题满分 10 分）

【解】$xy'+y=e^x \quad \Rightarrow \quad (xy)'=e^x \quad xy=e^x+c \quad y=\dfrac{e^x+c}{x}$

$\because \lim\limits_{x\to 0} y(x)=1$ 有 $c=-1$ 故 $F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，于是 $f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})$

而 $\dfrac{e^x-1}{x}=\dfrac{1}{x}(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}-1)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$

故 $f(x)=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})=\dfrac{d}{dx}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!})=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(n-1)x^{n-2}}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!} \quad (x\neq 0)$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=[\dfrac{d}{dx}(\dfrac{e^x-1}{x})]|_{x=1}=1$

（17）（本小题满分 10 分）

【解】（I）平均单位成本即为目标函数 $\overline{C}=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{x}{5}+4+\dfrac{20}{x}(x>0)$，$\overline{C}'(x)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{20}{x^2}=0\Rightarrow$ $x=10$，计算二阶导数 $\overline{C}''(x)=\dfrac{40}{x^3}>0$，于是唯一驻点 $x=10$ 为极小值点也是最小值点，最低平均单位成本为 $\overline{C}(10)=8$。

（II）$R=R(p)=px(p)=p(160-5p)=160p-5p^2>0\Rightarrow 0<p<32$，计算一阶导得，$R'(p)=160-10p\to R'(p)=0\Rightarrow p=16,\to R''(p)=-10<0$，于是唯一的驻点 $p=16$ 为唯一的极大值点，也是最大值点，此时最大值为 $R_{MAX}=R(16)=1280$，所以当销售价格 $p=16$ 时，才能使得每月产品全部销售后获得的总收益 R 最高，最高收益值为 1280.

（18）（本小题满分 10 分）

【证明】证法一　原不等式可改写为 $be^{-b}+\dfrac{b}{e^2}>ae^{-a}+\dfrac{a}{e^2}$，令 $f(x)=xe^{-x}+\dfrac{x}{e^2}, x\in[0,2]$，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}+\dfrac{1}{e^2}$，$f''(x)=(x-2)e^{-x}$，$x\in(0,2)$ 时，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上单减，$f'(2)=0$，所以 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>f'(2)=0$，即函数 $f(x)=xe^{-x}+\dfrac{x}{e^2}$ 在 $[0,2]$ 上单增，所以当 $0<a<b<2$ 时，有不等式 $be^{-b}-ae^{-a}>\dfrac{1}{e^2}(a-b)$ 成立.

证法二　令 $f(x)=xe^{-x}, x\in[0,2]$，则 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $f'(x)=(1-x)e^{-x}$，对函数 $f(x)=xe^{-x}$ 在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理得 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=be^{-b}-ae^{-a}=f'(\xi)(b-a)=(1-\xi)e^{-\xi}(b-a),$$

又 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$，$x\in(0,2)$ 时，$f''(x)=(x-2)e^{-x}<0$，所以 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$ 在 $[0,2]$ 上单减，所以有 $f'(\xi)=(1-\xi)e^{-\xi}>f'(2)=\dfrac{1}{e^2}$，由此可得

$be^{-b}-ae^{-a}=(1-\xi)e^{-\xi}(b-a)>\dfrac{1}{e^2}(b-a)$.

（19）（本题满分 10 分）

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

【解】$I=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} xy^2 d\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$

$=\int_1^2 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{y} xy^2dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cdot rdr=\int_1^2(y^4-y^3)dy+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\sin^3\theta d\theta$

$=\frac{49}{20}+\frac{10\sqrt{2}}{9}$.

（20）（本小题满分 11 分）

【解】（1）设（Ⅰ）（Ⅱ）的系数矩阵分别为 A、B，则

$$C=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&1&-1&-6\\3&a&1&-2\\0&2&-5&a-1\\1&-1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{解}}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&1&-2&-2\\0&0&-1&2\\0&0&0&a+1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

方程组有非零公共解$\Rightarrow a=-1$

（2）求解 $Cx=0$ 得基础解系 $\eta=(2,6,2,1)^T$，$\therefore$ 非 0 公共解为 $k\eta\quad(k\neq0)$

（21）（本小题满分 11 分）

【解】 (1) $|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$，得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$，由 A 与对角阵相似知 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的有两个线性无关的特征向量，即 $(6E-A)x=0$ 得基础解系有两个解向量 $3-r(6E-A)=2$，故 $r(6E-A)=1$，$6E-A=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&a&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&a&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $a=0$。此时二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$

$=2(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-\frac{21}{2}x_2^2+6x_3^2$，令 $\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{5}{2}y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，则有

$f=X^TAX=Y^TC^TACY=2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2$

(II) $X^TAX=0$ 即 $2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2=0$ 表示锥面。

（22）（本小题满分 11 分）

【解】(I) X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$

$P\{Y\leq\frac{1}{2}\}=P\{X\leq\frac{1}{2},|X|\leq1\}+P\{X\geq-1,|X|>1\}$

$=P\{-1\leq X\leq\frac{1}{2}\}+P\{X>1\}=\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx+e=1-e^{-1}+\text{e}.$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（II）由于 $y=\begin{cases} x, & |x|\le 1 \\ -x, & |x|>1 \end{cases}$，$x\ge 0$，$Y$ 的有效区域为 $y<1$，$y=-1$，$y=0$，$y=1$ 均为分界点，Y 分布函数：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le y,|X|\le 1\}+P\{X\ge -y,|X|>1\}$，

讨论：

1) $y<-1$，$F_Y(y)=P\{X\ge -y,X>1\}=P\{X\ge -y\}=1-P\{X\le -y\}=e^{y}$；

2) $-1\le y<0$，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\ge -y,X>1\}=P\{X\ge 1\}=e^{-1}$；

3) $0\le y<1$，$F_Y(y)=P\{0\le X\le y\}+P\{X>1\}=1-e^{-y}+e^{-1}$

4) $y\ge 1$，$F_Y(y)=1$

由此分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases} e^{y}, & y<-1 \\ e^{-1}, & -1\le y<0 \\ 1-e^{-y}+e^{-1}, & 0\le y<0 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$；

（III）$E(XY)=\int_0^1 x^2e^{-x}dx-\int_1^{\infty}x^2e^{-x}dx=2\int_0^1 x^2e^{-x}dx-1=2-5e^{-1}$。

（23）（本小题满分 11 分）

【解】（I）X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$，似然函数为：

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$，取对数有：

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2,\quad \frac{d\ln L}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2=0$$

解得：最大似然估计为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ 或 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$；

(II) 由于 $X-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，$\theta=P\{X-\mu_0\le 1\}=P\{\dfrac{X-\mu_0}{\sigma}\le\dfrac{1}{\sigma}\}=\Phi(\dfrac{1}{\sigma})$，

由最大似然估计的性质知，σ 的最大似然估计为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}$，又 $\Phi(x)$ 为单调连续函数，所以

$\theta=P\{X-\mu_0\le 1\}$ 的最大似然估计为 θ $\hat{\theta}=\Phi(\dfrac{1}{\hat{\sigma}})=\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}}\right)$；

(III) $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$，因为 $X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，$\dfrac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，由样本独立性，及 χ^2 分布的定义可知 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，所以 $\dfrac{D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)}{\sigma^4}=2n$，$D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)=2n\sigma^4$

即 $D(\hat{\sigma}^2)=\dfrac{1}{n^2}D(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2)=\dfrac{2}{n}\sigma^4$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三模拟试卷 5 参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下面每小题给出的四个选项中，只有一个选项符合要求，将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）【解】 解法一：两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$，令

$f(x)=kx^2-\ln x, f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}}, f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k)$,

当 $k>\frac{1}{2e}$ 时有 $f(\frac{1}{\sqrt{2k}})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{2k}})$ 上单减，在 $(\frac{1}{\sqrt{2k}},+\infty)$ 上单增，因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 有无实根，即两个曲线有没有交点，答案 A.

解法二：（取特殊值法）取 $k=\frac{1}{2}>\frac{1}{2e}$，则两曲线交点横坐标满足方程 $\frac{1}{2}x^2-\ln x=0$

令 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x, f'(x)=x-\frac{1}{x}=0, x=\pm1, f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ 因此函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹的，即 $f(1)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值，由于 $f(1)=\frac{1}{2}>0$ 因此函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点，因此两曲线无交点，答案为 A.

（2）【解】 因为 $\ln(1+e^{\cos x})\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1+e^{\cos x})\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\ln(1+e^{\cos x})\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{\cos x}\sin^2 x}{1+e^{\cos x}}\mathrm{d}x>0$$，故选 A.

（3）【解】 对（A）$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{a_k}{a_{k+1}})=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}})\le\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{a_{k+1}-a_k}{a_1})$

$=\frac{1}{a_1}[(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)]=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1}\le M$，（$\{a_n\}$ 单增有界）；所以收敛.其他都不正确.

（4）【答案】(B)

（5）【解】由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix}, |B|=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=-6$.

（6）【答案】A

（7）【解】Bayes 公式问题，设事件 $A=\{$先取的球为红球$\}$，$B=\{$后取的两个球均为白球$\}$，由全概率公式知

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{3}{10}\frac{C_7^2}{C_9^2}+\frac{7}{10}\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{7}{12};$$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

则先取球为红球的概率为 $P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{3}{10}$

(8)【解】已知 X 为两点分布 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 与 Y 独立，可知 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(x)=P\{X+Y\le x\}=P\{Y\le x,X=0\}+P\{Y\le x-1,X=1\}$$
$$=\frac{1}{2}[P\{Y\le x\}+P\{Y\le x-1\}]=\frac{1}{2}[F_2(x)+F_2(x-1)]$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

(9)【解】:原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos xe^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)}{x(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$

(10)【解】: 令 $u=e^x$ ，$x\in(-\infty,0]$ 时 $u\in(0,1]$ ，$x\in(0,+\infty)$ 时 $u\in(1,+\infty)$，因而有

$$f'(u)=\begin{cases}\ln u+1, u\in(0,1],\\ 1,\quad u\in(1,+\infty),\end{cases}\quad f(x)=\int_1^x f'(u)\,\mathrm{d}u+f(1)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

【答案】$f(x)=\begin{cases}x\ln x, x\in(0,1],\\ x-1, x\in(1,+\infty)\end{cases}$

(11)【解】方程两边积分，$\int_0^1 xdf(x)-\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$, $xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{4}$，代入条件 $f(1)=0$，可知 $\int_0^1 f(x)dx=-\dfrac{\pi}{8}$

(12)【答案】$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$.

(13)【解】 因为 A 的特征值为 3，-3，0，所以 $A-E$ 特征值为 2，-4，-1,从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$，即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1$，$B^{-1}$ 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 4，-2，1，于是 $|B^{-1}+2E|=-8$

(14)【答案】 $C=\dfrac{1}{4},n=10$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)（本小题满分 10 分）

【解】$f(x)=\begin{cases}ax+x^c\sin\dfrac{1}{x}, x>0\\ e^{3x}+b,\quad x\le0,\end{cases}$ 可导一定连续因此有 $\lim\limits_{x\to0^+}(ax+x^c\sin\dfrac{1}{x})=f(0)=b+1$，必有

$b=-1$，且 $c>0$，又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=3$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{ax+x^c\sin\frac{1}{x}}{x}$

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$=a+\lim\limits_{x\to 0^+} x^{c-1}\sin\dfrac{1}{x}=3$，所以有 $a=3,c>1$.

（16）（本小题满分 10 分）

【解】（I）求全微分 $dz-[f_1'(2xdx+2ydy)+f_2'dz]=ydx+xdy$，令 $u=x^2+y^2$ 可得

$$dz=\frac{y+2xf_u'}{1-f_z'}dx+\frac{x+2yf_u'}{1-f_z'}dy$$

（II）由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y+2xf_u'}{1-f_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+2yf_u'}{1-f_z'}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{[1+2x(f_{uu}''2y+f_{uz}''\frac{\partial z}{\partial y})](1-f_z')+(y+2xf_u')(f_{zu}''2y+f_{zz}''\frac{\partial z}{\partial y})}{(1-f_z')^2}$$

代入点 $(1,1)$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=0$；$1+2f_u'=0$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{(1+4f_{uu}'')(1-f_z')+2y(1+2f_u')f_{zu}''}{(1-f_z')^2}=\frac{1+4f_{uu}''}{1-f_z'}$$

（17）（本小题满分 10 分）

【解】对 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(x-t)dt$，令 $x-t=u,dt=-du$ 则积分为：

$f(x)=\sin x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$，所以 $f'(x)=\cos x+\int_0^x f(u)du$，

又可得 $f(0)=0,f'(0)=1$，则在 $x=0$ 的邻域内有 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 为增函数，所以 $x>0,f(x)>0$，对于 $a_n=f(\dfrac{1}{n})$，$a_n\ge a_{n+1}$ 又 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(\dfrac{1}{n})=f(0)=0$，所以交错级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^n f(\dfrac{1}{n})$ 收敛；

另一方面，$1=f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$，所以 $f(\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{n}$ $(n\to\infty)$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 发散。

（18）（本小题满分 10 分）

【证明】：（I）由题设知 $f(0)$ 与 $f(1)$ 取值同为正数或同为负数，$f(0)f(\dfrac{1}{2})<0$，则必有 $f(\dfrac{1}{2})f(1)<0$，根据连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\dfrac{1}{2}),\exists\eta\in(\dfrac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

（II）令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1$ 使得

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

$F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0$，即有 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

(19)（本小题满分 10 分）

【解】（I）由弹性公式可知：$\eta=\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}$，所以 $\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=-\frac{2p^2}{b-p^2}$，所以可得微分方程：

$\frac{dQ}{Q}=-\frac{2p}{b-p^2}dp=\frac{1}{b-p^2}d(b-p^2)$，可知 $\ln Q=\ln(b-p^2)+\ln C$，即 $Q=C(b-p^2)$

代入 $\lim\limits_{p\to 0}Q=a$，所以 $C=\frac{a}{b}$，可知关系式为：$Q=\frac{a}{b}(b-p^2)$。

（II）商品市场总价值 $f(p)=\frac{a}{b}p(b-p^2)$，$f'(p)=\frac{a}{b}(b-3p^2)=0$，解得 $p=\sqrt{\frac{b}{3}}$，

即价格为 $p=\sqrt{\frac{b}{3}}$ 时，总价值达到最大，对应的最大值为 $f_{\max}=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{3}}(b-\frac{b}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}a\sqrt{b}$.

(20)（本小题满分 11 分）

【解】(1) 由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$，有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm T}B^{\mathrm T}=0$，所以 $B^{\mathrm T}$ 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm T}x=0$ 的解。

解此方程组的基础解系 $(1\ \ 2\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm T}$，$(-1\ \ -1\ \ 0\ \ 1)^{\mathrm T}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1&a_2&a_3&a_4\\a_1&4&a_2&a_3\\2&7&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=0\ 即\begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\a_2-2a_3+a_4=0\\a_1-8+3a_2-a_3=0\\4-2a_2+a_3=0\end{cases}$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$，因为 $x_3=-x_4$，即 $3k_1-2k_2=k_1-k_2$，即 $k_2=2k_1$，

所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k\quad 0\quad -k\quad k)^{\mathrm T}$，k 为任意常数。

(21)（本小题满分 11 分）

【解】（I）由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量。设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由不同特征值对应特征向量正交，则 $x_1+x_3=0$，对应基础解析：

$\xi_1=(1,0,-1)^T$，$\xi_2=(0,1,0)^T$ 即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量，单位化：

$\eta_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,\ 0,-1)^T$，$\eta_2=(0,1,0)^T$　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt2}(1,0\,1)^T$，令 $U=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 可知：

$$U^TAU=\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix};$$

（II）由以上得知 $A=U\Lambda U^T$ 为二次型矩阵，对应二次型为 $f=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

(22)（本小题满分 11 分）

【解】 (I) 由于$1=C\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} ydy=\frac{2}{5}C$，则$C=\frac{5}{2}$，

又$f_X(x)=\frac{5}{2}\int_{x^2}^{x} ydy=\frac{5}{4}x^2(1-x^2), 0<x<1$；

(II) $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2(1-x^2)}, & x^2<y<x(0<x<1)\\ 0, & others\end{cases}$

(III) $Z=X-Y$，代入公式

$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x$ ，$f(x,x-z)=\frac{5}{2}(x-z)$ $D_Z:\begin{cases}0<x<1\\ 0<z<x-x^2\end{cases}$

由$0<z<x-x^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$，讨论：

$0\le z<\frac{1}{4}$，$f_z(z)=\frac{5}{2}\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-z}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-z}}(x-z)dx=\frac{5}{2}[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-z}-2z\sqrt{\frac{1}{4}-z}]=\frac{5}{4}(1-4z)\sqrt{\frac{1}{4}-z}$

所以知　$f_z(z)=\begin{cases}\frac{5}{4}(1-4z)\sqrt{\frac{1}{4}-z}, & 0<z<\frac{1}{4}\\ 0, & others\end{cases}$

(23)（本小题满分 11 分）

【解】 (I) 求矩估计：

由于$\mu=\int_{\theta}^{+\infty} x2e^{-2(x-\theta)}dx=\int_0^{+\infty}(\theta+t)2e^{-2t}dt=\theta+\frac{1}{2}$

令$\mu=\overline{X}$，$\therefore \overline{X}=\theta+\frac{1}{2}$，所以$\theta$的矩估计为$\hat{\theta}=\overline{X}-\frac{1}{2}$；

(II) 求矩估计：

1) $L=\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)}=2^n e^{2n\theta-2\sum_{i=1}^{n}x_i}$　$x_i\ge\theta$

2) $\ln L=n\ln 2+2n\theta-2\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\frac{d\ln L}{d\theta}=2n>0$，所以$L$为$\theta$的单调增函数，要使$L$大，只须$\theta$大即可；

3) 在$x_i\ge\theta$下，由最大似然估计的定义知：θ的最大似然估计为

$\hat{\theta}_L=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$

(III) 由于X的分布函数为$F(x;\ \theta)=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，由公式知

$\hat{\theta}_L=\min\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$的分布函数为$F_{\hat{\theta}_L}(z;\ \theta)=1-(1-F(x;\ \theta)^n=\begin{cases}1-e^{-2n(z-\theta)}, & z\ge\theta\\ 0, & z<\theta\end{cases}$，

因此可知$\hat{\theta}_L$的概率密度函数为$f_{\hat{\theta}_L}(z;\ \theta)=\begin{cases}2ne^{-2n(z-\theta)}, & z\ge\theta\\ 0, & z<\theta\end{cases}$，对应概率：

$P\{\hat{\theta}_L\le 2\theta\}=\int_{\theta}^{2\theta}2ne^{-2n(z-\theta)}dz=\int_0^{\theta}2ne^{-2nt}dt=1-e^{-2n\theta}$.

20、21全程考研资料请加群712760929