一、选择题

1. D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 存在，

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{ax-(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x+b(x-\frac{1}{6}x^3)+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)-\frac{1}{3}x^3}{(1+b)x-\frac{b}{6}x^3+o(x^3)}$$

所以只有当 $b\neq-1$ 时，该极限存在。

2. D. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}(x-1)^2+(y-1)^2=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}[f(x,y)-2x+2y]=\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}f(x,y)=0=f(1,1)$，故A正确。

记 $x-1=\Delta x$，$y-1=\Delta y$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+2y}{(x-1)^2+(y-1)^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(1+\Delta x,1+\Delta y)-f(1,1)-2\Delta x+2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1$.

从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta z-2\Delta x+2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，故 $\Delta z=2\Delta x-2\Delta y+o(\rho)$，结合可微分的必要条件，所以B,C正确

3. B. ①不正确，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

②正确，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，当n充分大时，有 $|b_n|\le1$.

此时 $b_n^2\le|b_n|$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛。

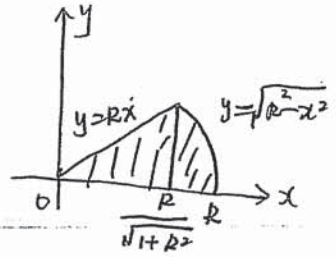
③正确，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故数列 $\{a_n\}$ 必有界，存在 $M>0$

使得 $|a_n|\le M\ (n=1,2,\cdots)$，此时 $|a_nb_n|\le M|b_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛。

④不正确，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ 条件收敛。

4. B.



面积分区域如图所示。

5. C. $A\neq0$，$r(A)\ge1$，$A\cdot A=0$，故 $r(A)+r(A)\le3$，$r(A)\le\frac{3}{2}$，故 $r(A)=1$.

$Ax=0$ 有两个无关的解向量，所以 $Ax=b$ 有三个线性无关的解。

6. D. 因为 $A\xrightarrow{r_2+3r_1}B$，即 $E(2,1(3))A=B$，故 $B^{-1}=A^{-1}E^{-1}(2,1(3))=A^{-1}E(2,1(-3))$，

则 $A^{-1}\xrightarrow{c_1+(-3)c_2}B^{-1}$.

7. C. 原式 $=\frac{P((C-A)(A\cup BC))}{P(A\cup BC)}=\frac{P(C\bar{A}A\cup C\bar{A}BC)}{P(A\cup BC)}=\frac{P(\bar{A}BC)}{P(A\cup BC)}$

$=\frac{P(\bar{A})\cdot P(B)\cdot P(C)}{P(A)+P(BC)-P(ABC)}=\frac{0.5\times0.5\times0.4}{0.5+0.2-0.1}=\frac{1}{6}.$

8. C. 由于 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体X的简单随机样本，故 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且与总体X同分布，故 $Cov(X_i,X_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\4, & i=j\end{cases}$

若 $s<t$，$Cov(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j)=\frac{1}{st}cov(\sum_{i=1}^{s}X_i, \sum_{j=1}^{t}X_j)$

$=\frac{1}{st}[cov(\sum_{i=1}^{s}X_j, \sum_{j=1}^{t}X_j)+cov(\sum_{i=1}^{s}X_i, \sum_{j=s+1}^{t}X_j)]$

$=\frac{1}{st}\cdot\sum_{i=1}^{s}cov(X_i, X_j)=\frac{1}{t}DX_i=\frac{4}{t}$.

同理 若 $s>t$，$Cov(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j)=\frac{4}{s}$.

因此，$Cov(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j)=\frac{4}{max(s,t)}$.

二. 填空题.

9. $\frac{\pi}{8}$. 令 $\arccos\frac{1}{x}=t \Rightarrow \frac{1}{x}=\cos t \Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}=\sec t$，当 $x=1\to+\infty$ 时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$.

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\arccos\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3t\cdot t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin 2t\,dt$

$=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\cos 2t=-\frac{1}{4}[t\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt]=\frac{\pi}{8}$.

10. $\cos x-\sin x$. $y'+y=\sin x+\cos x$ 的通解为 $y=Ce^{-x}+\sin x$，故对任意的 C，$y=ce^{-x}+\sin x$ 为 $y''+y'+ay=f(x)$ 的解，所以 $y=e^{-x}$ 为 $y''+y'+ay=0$，代入得 $a=0$. $y=\sin x$ 为 $y''+y+ay=f(x)$，即 $y''+y=f(x)$ 的特解，代入得 $f(x)=\cos x-\sin x$.

11. $\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\le 1\end{cases}+C$.

$f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ e^x-1, & x\le 0\end{cases}$，$f(\ln x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, & x>1\\ x-1, & 0<x\le 1\end{cases}$，$\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x+C, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+C_1, & 0<x\le 1\end{cases}$.

由 $1+C=-\frac{1}{2}+C_1$ 得 $C_1=\frac{3}{2}+C$，所以 $\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\le 1\end{cases}+C$.

12. $e^{\frac{1}{2}}$. 由设 $f(x)$ 连续，及 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$

原式 $=\lim_{x\to0}e^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\ln[1+\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt]}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt}=e^{\lim_{x\to0}\frac{\cot x\cdot\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\ln(1+x)}}$

$=e^{\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^4}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{4x^3}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot f'(0)}=e^{\frac{1}{2}}$.

13. E. $f(A)=A^3-6A^2+11A-5E$. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，(21)

$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)=\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(2)&0\\0&0&f(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E. \Rightarrow f(A)=E$.

14. $F(x)[1-(1-F(y))^{n-1}]$.

由 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为简单随机样本知 $X_1,X_2\cdots X_n$ 相互独立且 $X_i\sim F(x)$，$i=1,2,\cdots,n$.

故 $F_{Y_1}(x)=F(x)$，$F_{Y_2}(y)=1-(1-F(y))^{n-1}$. 因为 Y_1,Y_2 相互独立

$G(x,y)=P(Y_1\le x, Y_2\le y)=P\{Y_1\le x\}\cdot P\{Y_2\le y\}=F_{Y_1}(x)\cdot F_{Y_2}(y)=F(x)\cdot[1-(1-F(y))^{n-1}]$.

19、20全程资料请加群690261900

三、解答题.

15. ① 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1}=f(0)\neq0$，所以当 $x\to0$ 时，$\int_0^x f(t)dt\sim f(0)x$.

② $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\dfrac{1}{xf(0)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{xf(0)\int_0^x f(t)dt}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{x^2f^2(0)}$

$=\dfrac{1}{f^2(0)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0)-f(x)}{2x}=-\dfrac{f'(0)}{2f^2(0)}$.

③ $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\dfrac{1}{xf(0)}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(0)-xf(\xi)}{x^2f^2(0)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(0)-f(\xi)}{xf^2(0)}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(\eta)\xi}{xf^2(0)}$

其中 介于 ξ 与 0 之间，当 $x\to0$ 时，$\xi\to0$，$\eta\to0$，$f'(x)$ 连续，且 $f'(0)\neq0$，故

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\dfrac{1}{xf(0)}\right]=-\dfrac{f'(0)}{f^2(0)}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi}{x}=-\dfrac{f'(0)}{2f^2(0)}$.

16. ① $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{x^n}\right|=|x|<1$. 收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛，当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛 ⇒ 收敛域为 $[-1,1]$.

② 设 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)$. $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\dfrac{\ln x}{1-x}$,

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$，$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=\dfrac{1}{x}\left[\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt\right]=\dfrac{1}{x}\int_0^x\dfrac{1}{1-t}dt=-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

$f'(1-x)=-\dfrac{\ln x}{1-x}$，代入上式，可得 $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\dfrac{\ln x}{1-x}=0$.

故 $F(x)=C$，$x\in(0,1)$

17. ① 在 D 的内部，由 $\begin{cases}f_x'(x,y)=2x+y=0\\ f_y'(x,y)=8y+x=0\end{cases}$，可得 D 内的唯一驻点 $(0,0)$，$f(0,0)=2$.

② D 的边界由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\ (y>\frac{1}{2}x-1)$ 和 $y=\frac{1}{2}x-1\ (0\le x\le2)$ 组成.

在 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\ (y>\frac12x-1)$ 上，$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=xy+6$

令 $L(x,y)=xy+6+\lambda(x^2+4y^2-4)$，由 $\begin{cases}L_x'=y+2\lambda x=0\\ L_y'=x+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})$，$(-\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})$

$(-\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})$，$(\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})$（舍去）.

且 $f(\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})=f(-\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})=7$，$f(-\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})=5$.

在 $y=\frac12x-1\ (0\le x\le2)$ 上，$f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=\frac52x^2-5x+6$，由 $\dfrac{df}{dx}=5(x-1)=0$ 得

$x=1$，$y=-\frac12$，且 $f(1,-\frac12)=\frac72$，$f(0,-1)=f(2,0)=6$.

综上所知，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 7，最小值为 2.

18. 令 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt x}-\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{x+1-2\sqrt x}{2x\sqrt x}>0$.

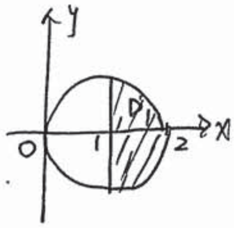
当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(1)=0$，即 $\dfrac{x-1}{\sqrt x}-\ln x<0$ 所以 $\dfrac{1}{\sqrt x}>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，即 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x>0$，所以 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

综上，设 $x>0$ 且 $x\neq 1$，有 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

19. 由对称性知 $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}d\sigma=0$，记 D_1 为 D 的上半部分，则

原式 $=\iint\limits_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma = 2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{1}{r^4}\cdot r\cdot dr$



$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{4\cos^2\theta}\right)d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta\, d\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{4}\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$.

20. ① $A=\begin{bmatrix}1&0&3&5\\1&-1&-2&2\\2&-1&1&3\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&-1&-5&-7\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&5\\0&1&5&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

基础解系为 $\xi=\begin{pmatrix}-3\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$，通解为 $x=k\xi$，任意 $k\in R$.

② 将 $Ax=0$ 的基础解系代入 $Bx=0$ 中，得 $-6-5a-4=0 \Rightarrow a=-2$. b 为任意实数时

$B\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&5&0\\0&0&0&1\\2&-2&-4&b\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&5&0\\0&0&0&1\\0&-2&-10&b\end{bmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

21. ① $AB=O$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}$，因为 $r(B)=2\Rightarrow r(A)=1$，则得 A 的三个特征值为 $1,0,0$

由 $AB=O$，$B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{bmatrix}$ 知 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

设 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_2=0\end{cases}$，即 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化

$\gamma_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$. $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{bmatrix}$ 即为

所求正交矩阵，在正交变换 $x=Py$ 下，二次型 f 的标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2$.

② 由 $P^{-1}AP=\Lambda$ 得 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac16&\frac16&-\frac13\\\frac16&\frac16&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}$

则该二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}\frac16&\frac16&-\frac13\\\frac16&\frac16&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac16x_1^2+\frac16x_2^2+\frac23x_3^2+\frac13x_1x_2-\frac23x_1x_3-\frac23x_2x_3$

22. ① 由于$[X]$为离散型随机变量，[illegible]离散型随机变量，且U的取值为0, 1, 2，其分布律为

$P\{U=0\} = P\{[X]=0\} = P\{0 \le X < 1\} = \int_0^1 e^{-x}dx = 1-e^{-1}$.

$P\{U=1\} = P\{[X]=1\} = P\{1 \le X < 2\} = \int_1^2 e^{-x}dx = e^{-1}-e^{-2}$.

$P\{U=2\} = 1 - P\{U=0\} - P\{U=1\} = e^{-2}$.

即 $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1-e^{-1} & e^{-1}-e^{-2} & e^{-2} \end{bmatrix}$

② $F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X-[X] \le y\}$　当$y<0$时，$F_Y(y)=0$，当$y \ge 1$时 $F_Y(y)=1$.

当$0 \le y < 1$时，$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X-[X] \le y\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{k \le X \le k+y\}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+y} e^{-x}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{-k} - e^{-(k+y)}) = \frac{1-e^{-y}}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}(1-e^{-y})$.

得 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{e}{e-1}(1-e^{-y}), & 0 \le y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$ $\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{e^{1-y}}{e-1}, & 0 \le y < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$.

③ 由于$EX=1$，$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \frac{e-2}{e-1}$，所以 $E[X] = EX - EY = \frac{1}{e-1}$.

23. ① $P\{X_1X_2 = X_3+1\} = P\{X_1=1, X_2=1, X_3=0\} + P\{X_1=1, X_2=2, X_3=1\} + P\{X_1=2, X_2=1, X_3=1\}$

$= P\{X_1=1\} \cdot P\{X_2=1\} \cdot P\{X_3=0\} + P\{X_1=1\} \cdot P\{X_2=2\} \cdot P\{X_3=1\} + P\{X_1=2\} \cdot P\{X_2=1\} P\{X_3=1\}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$.

② $P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} = 0\} = P\{X_1=0, X_2=0, X_3=0\} = P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}P\{X_3=0\} = \frac{1}{64}$.

$P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \le 1\} = P\{X_1 \le 1, X_2 \le 1, X_3 \le 1\} = P\{X_1 \le 1\}P\{X_2 \le 1\}P\{X_3 \le 1\} = \frac{27}{64}$.

$P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \le 2\} = P\{X_1 \le 2, X_2 \le 2, X_3 \le 2\} = P\{X_1 \le 2\}P\{X_2 \le 2\}P\{X_3 \le 2\} = 1$.

故 $P\{Y=0\} = P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} = 0\} = \frac{1}{64}$.

$P\{Y=1\} = P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \le 1\} - P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} = 0\} = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{13}{32}$

$P\{Y=2\} = P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \le 2\} - P\{\max\{X_1, X_2, X_3\} \le 1\} = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

即得　$Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{64} & \frac{13}{32} & \frac{37}{64} \end{bmatrix}$

超越考研数学(一)模二解答

一、选择题.

1. B. $x\in[0,1]$时，$f(x)=2$，$g(x)=x$，$f'(x)=0$，$g'(x)=1$，$2>x$，但$0>1$不成立，故①错误.
$f(x)=x^2$，$g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$，$f'(x)=2x$，$g'(x)=x$，当$1\le x\le 2$时，$f'(x)>g'(x)$，$1\le f(x)\le 4$，$\frac{5}{2}\le g(x)\le 4$，$f(x)\ge g(x)$不成立，故②错误. $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}>\int_0^1\frac{1}{3}dx$，在$[0,1]$上$x>\frac{1}{3}$不成立.
故④也不正确.

2. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}-x}=0$，水平渐近线$y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+\sin^2x}}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}+1=2.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}+x}=0$. 斜渐近线$y=2x$.

3. D. $z=x^2+y^2$当$(x,y)\ne(0,0)$时+分不为极值点，但满足条件.

4. D. $I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)f(x)(\sin x-\cos x)dx$

而$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(\cos x-\sin x)dx$. 故

$$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-f(x)\right](\cos x-\sin x)dx.$$

当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，$\frac{\pi}{2}-x>x>0$，由$f(x)$的单调性及$\cos x>\sin x$. 所以$I_1>I_2$

又当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\tan x>\sin x$，$f(x)>0$，故$I_3>I_1$.

5. D. ②正确. 若$r(A_{m\times n})=m$，则$r(A_{m\times n})=r(A_{m\times n},b)=m$，故$Ax=b$必有解.
③正确，见教材. ④正确. 因为$r(A^TA)\le r(A^TA,A^Tb)=r(A^T(A,b))\le r(A^T)=r(A)$.
由④知$r(A^TA)=r(A^TA,A^Tb)$，则$A^TAx=A^Tb$必有解.

6. C. A,B为实对称矩阵，其相似的充要条件为特征值相同，即$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

7. D. $P\{X>x,Y>y\}=P\{\overline{(X\le x)\cup(Y\le y)}\}=1-P\{(X\le x)\cup(Y\le y)\}$
$=1-P\{X\le x\}-P(Y\le y)+P\{X\le x,Y\le y\}$
$=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$.

8. C. $P_1=P\{X<1\}=P\{\frac{X}{\sigma}<\frac{1}{\sigma}\}=\Phi(\frac{1}{\sigma})$. $P_2=P\{X>-1\}=P\{\frac{X}{\sigma}>-\frac{1}{\sigma}\}=1-\Phi(-\frac{1}{\sigma})=\Phi(\frac{1}{\sigma})$
故$P_1=P_2$. 因为$Y\sim F(1,1)$，所以$\frac{1}{Y}\sim F(1,1)$，$P_4=P\{Y>1\}=P\{\frac{1}{Y}<1\}=P_3$.

二、填空题.

9. $-(2x)^{\frac{1}{3}}$. 两边对x求导得$y'=-\dfrac{y}{y^2x}$，即得$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=-y^2$为一阶线性方程.
解得$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int -y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)=y\left(-\frac{1}{2}y^2+C\right)$. 由$y(\frac{1}{2})=-1$得$C=0$，故$x=-\frac{1}{2}y^3$.
即$y=-(2x)^{\frac{1}{3}}$.

10. 2. 当 $x>0$ 时，$\frac{1}{t}-1\le\left[\frac{1}{t}\right]\le\frac{1}{t}$，$1-t\le t\left[\frac{1}{t}\right]\le 1$ 得 $2x-2x^2\le\int_0^{2x}t\left[\frac{1}{t}\right]dt\le 2x$.

又 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{e^{\sin x}-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x}{\sin x}=2$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x-2x^2}{e^{\sin x}-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x-2x^2}{\sin x}=2$.

故由夹逼准则，原极限等于 2.

11. $2f(0)$. $F(x)=\int_0^{x^2}du\int_{e^{-u}}^1 f(u)dv=\int_0^{x^2}f(u)(1-e^{-u})du$. 所以 $F'(x)=f(x^2)(1-e^{-x^2})2x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x^2)(1-e^{-x^2})2x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2f(x^2)}{x^2}=2f(0).$$

12. $\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}$. $\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{4}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$.

13. -2.
$$(A\,|\,B)=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\-1&2&1&2&k\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&3&3&6&k-1\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{行}}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&k+2\end{array}\right]\Rightarrow k=-2.$$

14. $\ge\frac{7}{9}$. 由于 $\frac{9S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$，所以 $E\frac{9S^2}{\sigma^2}=9$，$D\frac{9S^2}{\sigma^2}=18$. 得 $E(S^2)=\sigma^2$，$D(S^2)=\frac{2}{9}\sigma^4$.

因此 $P\{0<S^2<2\sigma^2\}=P\{|S^2-\sigma^2|<\sigma^2\}\ge1-\frac{2\sigma^4/9}{\sigma^4}=\frac{7}{9}$.

三、解答题.

15. 证：因为 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt\ge\int_0^1x_{n-1}dt=x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调递增.

假设 $0<x_{n-1}<1$，则 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt=\int_0^{x_{n-1}}x_{n-1}dt+\int_{x_{n-1}}^1tdt$
$$=x_{n-1}^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_{n-1}^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}^2<1.$$

由数学归纳法知，对任意的 $n\in N$，有 $0<x_n<1$，数列 $\{x_n\}$ 单调有界一定存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 得到 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2$，解得 $a=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}=a\left(\frac{\partial^2z}{\partial u^2}\cdot a+\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}\right)+\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}\cdot a+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}$.
$$=a^2\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+2a\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2z}{\partial v^2}.$$

同理，$\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+2b\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2z}{\partial v^2}$. 由 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0$ 知
$$\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\frac{\partial^2z}{\partial u^2}+\left(2a-\frac{1}{2}b\right)\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v}+\left(1-\frac{1}{4}b^2\right)\frac{\partial^2z}{\partial v^2}=0.$$

由题设知，$a^2-\frac{1}{4}=0$，$1-\frac{1}{4}b^2=0$，$2a-\frac{1}{2}b\ne0$，故 $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$，$b=2$.

19、20全程资料请加群690261900

17. $a_n=\int_0^1 (x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n}{n+1}})dx=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right)-1\right]=-\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

考虑幂级数 $M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，收敛域为 $[-1,1]$.

当 $-1\le x\le 1$ 时，$M'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，故 $M(x)=\arctan x$，从而 $M(1)=\frac{\pi}{4}$.

因此 $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

18. 证：因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，故存在 m, M，使 $m<f(x)<M$，从而

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cdot x\cdot\sin x\,dx\le M\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=(-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$，所以 $m\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)x\sin x\,dx\le M$.

由闭区间上连续函数的性质知，存在 $\xi_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin x\,f(x)dx=f(\xi_1)$ ①

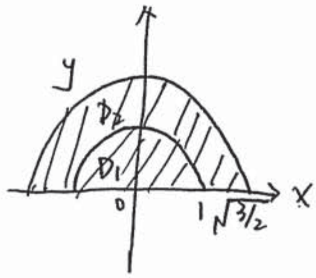
由于 $m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x_2)\le M$，所以 $m\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\le M$，故存在 $\xi_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

使 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=f(\xi_2)$ ②

由①.②知 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$，对 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上运用罗尔定理 可存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\pi)$

使得 $f'(\xi)=0$.

19. 令 $\sqrt{3-2x^2-2y^2}=x^2+y^2$，得 $x^2+y^2=1$，用半圆 $x^2+y^2=1\ (y\ge0)$ 把 D 分为两部分 D_1, D_2.



$$\text{原积分}=\iint_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint_{D_2}(\sqrt{3-2x^2-2y^2})d\sigma$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr+\int_0^{\pi}d\theta\int_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}\sqrt{3-2r^2}\cdot r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}+\pi\left(-\frac{1}{6}\right)(3-2r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{5}{12}\pi.$$

20. 证. ① 由 $A^2-2AB=E$ 得 $A(A-2B)=E$，故 $A^{-1}=A-2B$，从而 $(A-2B)A=E$，故 $AB=BA$.

② 由①知 $AB-2BA+3A=3A-AB=A(3E-B)$

由于 A 可逆，从而 $r(AB-2BA+3A)=r(A(3E-B))=r(3E-B)=2$.

21. ① 由 $A^*\alpha=4\alpha$ 得 $A\alpha=-3\alpha$，所以 $\alpha=(1,0,-2)^T$ 是 A 的对应特征值 $\lambda_3=-3$ 的特征向量；

设 A 的另外两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-12\end{cases}$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由正交性得 $x_1-2x_3=0$，基础解系为

$\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\alpha)$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$，所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

② $(A^*+6E)x=0$ 得 $(AA^*+6A)x=0$，则有 $(A-2E)x=0$，其通解为

$x=k_1(0,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

22. ① 由于 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$，为参数为1的指数分布的分布函数. $X\sim E(1)$.

由于 $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{2}, & 0\leq y<1\\ 1, & y\geq 1\end{cases}$ 所以 Y 为离散随机变量，其分布律为

$Y\sim\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 即 $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$

② 由于 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以 X 和 Y 相互独立.

③ $P\{X+Y\leq 2\}=P\{Y=0\}P\{X+Y\leq 2|Y=0\}+P\{Y=1\}P\{X+Y\leq 2|Y=1\}$

$=\frac{1}{2}P\{X\leq 2|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\leq 1|Y=1\}$.

又因为 X 和 Y 相互独立. 所以 $P\{X+Y\leq 2\}=\frac{1}{2}P\{X\leq 2\}+\frac{1}{2}P\{X\leq 1\}=\frac{1}{2}F_X(2)+\frac{1}{2}F_X(1)$

$=\frac{1}{2}(1-e^{-2})+\frac{1}{2}(1-e^{-1})=1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{-2})$.

23. ① $\bar{X}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{3\theta^2}(2\theta-x)dx=\frac{4}{9}\theta$，所以 $\hat{\theta}_M=\frac{9}{4}\bar{X}$.

② $L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$=(\frac{2}{3\theta^2})^n(2\theta-x_1)(2\theta-x_2)\cdots(2\theta-x_n)$，$\theta\geq\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$\ln L=n\ln(\frac{2}{3\theta^2})+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(2\theta-x_i)$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{2\theta-x_i}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\theta-x_i}-\frac{1}{\theta})<0$

所以 $\hat{\theta}_L=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

19、20全程资料请加群690261900

超越考研（三）试卷

一、选择题.

1. C. 因为$f(x)$是奇函数，所以$f'(x)$是偶函数，则$\int_0^x f'(t)dt$一定是奇函数.

2. D. 当$\lambda\le-\frac{1}{2}$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac12}}\ne0$. 故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$发散.

当$-\frac12<\lambda\le\frac12$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$为交错级数，且$\frac{1}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$单调减小趋向于0.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$收敛. $\left|\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}\right|=\frac{1}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}\sim\frac{1}{n^{\lambda+\frac12}}$.

且当$-\frac12<\lambda\le\frac12$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac12}}$发散，所以当$-\frac12<\lambda\le\frac12$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$条件收敛. 当$\lambda>\frac12$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac12}}$收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt n}$绝对收敛.

3. B. $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f'(2x)]=f(0)+f'(0)=0$，由于$f(0)=0\Rightarrow f'(0)=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(2x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(2x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(2x)-f'(0)}{x}=f'(0)+2f''(0)=1$$

解得$f''(0)=\frac12>0$. 所以$f(0)$是$f(x)$的极小值.

4. D. 因为$f(x,y)$在点$(0,0)$处一阶偏导存在，故$f(x,y)$在点$(0,0)$处关于x连续，同时关于y也连续，即$\lim\limits_{x\to0}f(x,0)=\lim\limits_{y\to0}f(0,y)=f(0,0)$.

5. A. $(\alpha_1+4\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1+\lambda_2\alpha_3,\ \lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_3,\ \lambda_1\alpha_1+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{pmatrix}$$

令$\begin{vmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{vmatrix}=\lambda_1-\lambda_2\lambda_1^2=\lambda_1(1-\lambda_1\lambda_2)=0\Rightarrow\lambda_1=0$或$\lambda_1\lambda_2=1$.

6. D. 若$A^*x=0$仅有零解，故$|A^*|\ne0$，从而$|A|\ne0$，所以A的特征值不等于0，从而A^2的特征值全大于0，即A^2正定.

7. B. 因为X与Y相互独立，所以$P_3=P\{X\le1,Y\le1\}$，又$\{X^2+Y^2\le1\}\subset\{X\le1,Y\le1\}\subset\{X+Y\le2\}$，

故$P_1\le P_3\le P_2$.

8. C. 显然Y为离散型随机变量，故排除A.

而n次是考察事件$\{X_i\le x\}$是否发生，每个X_i是否满足$X_i\le x$相当于作了一次随机试验，由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，且X_i与X同分布，因此Y表示在n重独立试验中，事件$A=\{X\le x\}$发生的次数，又$P(A)=P\{X\le x\}=F(x)$.

二、填空题.

9. $\lambda>3$. 显然 $x=0$ 不是 $x^3-\lambda x+2=0$ 的解. 当 $x\neq0$ 时, $\lambda=x^2+\frac{2}{x}$.

令 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$, 则 $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$, 由 $f'(x)=0$ 时得 $x=1$, 并且当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$.

当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$. 所以在点 $x=1$ 处, $f(x)$ 取得极小值 $f(1)=3$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-\infty$. 故当 $\lambda>3$ 时, $y=\lambda$ 与 $y=f(x)$ 有三个交点,

即方程 $x^3-\lambda x+2=0$ 有三个不相等的实根.

10. $(2x+y)(y-x)^2=C$. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+\frac{y}{x}}$. 令 $u=\frac{y}{x}$, 因此 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2}{1+u}$,

所以 $x\frac{du}{dx}=\frac{2-u-u^2}{1+u}$ $\Rightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{u-1}\right)du=\frac{dx}{x}$ 两边积分得

$-\frac{1}{3}(\ln|2+u|+2\ln|u-1|)=\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|C|$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入化简得 求通解即可.

11. $2\pi(2\pi-1)$. $V=2\pi\int_a^b xf(x)dx=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\sin x\,dx=2\pi(\pi-1)$

12. π. 原式 $=\frac{1}{2}\iint\limits_D[(\cos^2x+\sin^2y)+(\cos^2y+\sin^2x)]dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D 2dxdy=\pi$

13. $\frac{1}{144}$. $|A|=|B|=3$, 从而 $\lambda_3=-3$ 为 A 的特征值, 故 $A-3E$ 的特征值为 $-4,-2,-6$.

$|A-3E|=-48$, $|(A-3E)^{-1}|=-\frac{1}{48}$.

$B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}=B^*-4B^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1}$, $|-B^{-1}|=-\frac{1}{3}$.

原行列式 $=-\frac{1}{48}\times(-\frac{1}{3})=\frac{1}{144}$.

14. $\frac{1}{4}$. $P\{X=1,Y=2\}=0$, 所以 $P\{Y=2\}=\sum\limits_{m=2}^{\infty}P\{X=m,Y=2\}=\sum\limits_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{4}$.

故 $P\{X=3|Y=2\}=\frac{P\{X=3,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{1}{4}$.

三、解答题.

15. ① $f'(x)=\frac{1}{x^4}\left[\left(\frac{1}{1+x}-1\right)x^2-2x\ln(1+x)+2x^2\right]=\frac{2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^3}$.

令 $g(x)=2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)$, 则 $g(0)=0$, 而

$g'(x)=2+2x-2\ln(1+x)-2=2[x-\ln(1+x)]>0$

故 $g(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增, $g(x)>g(0)=0$, 故 $f'(x)>0$. 从而 $f(x)$ 单调递增.

② 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\ln2-1$

由①知 $-\frac{1}{2}<\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}<\ln2-1$ 整理即得所证不等式

16. ① $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

当 $x^2+y^2\neq0$ 时，$f'_x(x,y)=2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\cdot\dfrac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$=2x\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

由对称性得 $f'_y(x,y)=2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

② 沿直线 $y=x$ 有 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 该极限不存在

所以 $f'_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，同理 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

因为 $|f(x,y)-f(0,0)|=\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|=0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!+2n+1}{n!}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n+1)}{n!}x^{2n}$ 收敛域为 $(-\infty,+\infty)$，故原级数的收敛域为 $(-1,1)$

设 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n}$，则 $S_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2x^{2n-1}=\dfrac{2x}{1-x^2}$，所以 $S_1(x)=\int_0^x\dfrac{2x}{1-x^2}dx=-\ln(1-x^2)$.

设 $S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$，则 $\int_0^x S_2(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n!}=x(e^{x^2}-1)$，$S_2(x)=(2x^2+1)e^{x^2}-1$

故原级数的和函数为 $S(x)=-\ln(1-x^2)+(2x^2+1)e^{x^2}-1$，$x\in(-1,1)$

18. 曲线 L 过点 $P(x,y)$ 切线方程 $Y-y=y'(X-x)$，其中 (X,Y) 为切线上的流动坐标，令 $X=0$，得 $Y=y-xy'$，$\triangle OPQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}x(y-xy')$，故 $\frac{1}{2}x(y-xy')=\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$，所以 $y-xy'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

$y'-\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，且有 $y|_{x=1}=1$ 解此方程得

$y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left(-\frac{1}{2}\int e^{-\int\frac{dx}{x}}x^{-\frac{1}{2}}dx+C\right)=\sqrt{x}+Cx$，$y|_{x=1}=1\Rightarrow C=0\Rightarrow y=\sqrt{x}$

故曲线 L 的方程为 $y=\sqrt{x}$，$0\le x\le1$.

19. D 由 $x+y=1$ 分成两部分. $D_1: 0\le x+y<1$，$D_2: 1\le x+y<2$.

在 D_1 上，$[x+y]=0$；在 D_2 上，$[x+y]=1$. 所以 $I=\iint\limits_{D_2}\ln\dfrac{y+1}{x+1}dxdy$

因为 D_2 关于 $y=x$ 对称，由轮换对称性得：$I=\iint\limits_{D_2}\ln\dfrac{x+1}{y+1}dxdy$，所以

$$2I=\iint\limits_{D_2}\left(\ln\frac{y+1}{x+1}+\ln\frac{x+1}{y+1}\right)dxdy=\iint\limits_{D_2}0\,dxdy=0.$$

故 $I=0$.

20. $(A-B)X=A$，$A-B=\begin{bmatrix}3&2&-1\\4&3&-3\\1&0&3\end{bmatrix}$，$|A-B|=0$，故 $A-B$ 不可逆

$$(A-B\,\vdots\,A)=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & \vdots & [illegible] & [illegible] & [illegible]\\ 4 & 3 & -3 & \vdots & 1 & 7 & 11\\ 1 & 0 & 3 & \vdots & 7 & 7 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}[illegible] & & & \vdots & & & \\ 0 & 1 & -5 & \vdots & -9 & -7 & -3\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得 $r(A,B)=r(A-B\,\vdots\,A)$，故存在X，使得 $(A-B)X=A$，且

$$X=\begin{bmatrix}7-3k_1 & 7-3k_2 & 5-3k_3\\ -9+5k_1 & -7+5k_2 & -3+5k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}，其中 k_1,k_2,k_3 是任意常数.$$

21. 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{bmatrix}$.

由二次型正负惯性指数都是1，可知 $r(A)=2$，$|A|=-(a+2)(a-1)^2=0$，所以 $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=1$，不合题意，故 $a=-2$. 此时 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$，所以$A$的特征值是 $3,-3,0$.

$\lambda=3$ 时，$(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$；

$\lambda=-3$ 时，$(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$ 时 $(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，得 $\gamma_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$，$\gamma_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$ 取 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

故所求正交变换 $x=Py$，即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，$f=3y_1^2-3y_2^2$.

22. (I) 由密度函数的性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=a\int_0^2\int_0^2 xy\,dxdy+b\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le1}\frac{1}{\pi}dxdy=1$.

可得 $4a+b=1$，故 $b=1-4a$，所以 $f(x,y)=\begin{cases}axy+(1-4a)\varphi(x,y), & 0\le x\le2,\ 0\le y\le2\\ 0, & 其它\end{cases}$.

$EX=a\int_0^2\int_0^2 x\cdot xy\,dxdy+(1-4a)\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{16}{3}a+1-4a=\frac{4}{3}a+1\xlongequal{对称性}EY$.

19、20全程资料请加群690261900

$E(XY)=a\int_0^2\int_0^2 xy\cdot xy\,dxdy+(1-4a)\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1} xy\,\frac{1}{\pi}\,dxdy=\frac{64}{9}a+1-4a=1+\frac{28}{9}a.$

由 $E(XY)=EXEY$，得 $(1+\frac{4}{3}a)^2=1+\frac{28}{9}a$，解得 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{4}$，因此 $a=0, b=1$ 或 $a=\frac{1}{4}, b=0$.

② 当 $a=0$ 时，$b=1$，且 $f(x,y)=\varphi(x,y)$，其边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-(y-1)^2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以此时 X 和 Y 不相互独立.

当 $a=\frac{1}{4}$ 时，$b=0$，且 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}xy, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$. 其边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以此时 X 和 Y 相互独立.

23. ① 由于 (X_1,X_2) 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，故由正态分布的性质知 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，因此 S 的分布函数为 $F_S(s)=P\{S\le s\}=P\{\frac{1}{\sqrt{2}}|X_1-X_2|\le s\}$

当 $s<0$ 时，$F_S(s)=0$，当 $s\ge 0$ 时

$$F_S(s)=P\{-s\le\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\le s\}=P\{-\frac{s}{\sigma}\le\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\le\frac{s}{\sigma}\}=\Phi(\frac{s}{\sigma})-\Phi(-\frac{s}{\sigma})=2\Phi(\frac{s}{\sigma})-1$$

从而 S 的概率密度为 $f_S(s)=F_S'(s)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma}\varphi(\frac{s}{\sigma}), & s\ge 0\\ 0, & s<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}, & s\ge 0\\ 0, & s<0.\end{cases}$

② $ES=\int_{-\infty}^{+\infty}s f_S(s)\,ds=\int_0^{+\infty}s\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}ds=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{s^2}{2\sigma^2})$

$$=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

2015年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）**答案**：选（D）．

解：$-f(x)<0$，排除（A）．

$[f(-x)]''=f''(-x)<0$，排除（B）．

$[\frac{1}{f(-x)}]'=\frac{f'(-x)}{f^2(-x)}>0$，排除（C）．

而 $\frac{1}{f(x)}>0,[\frac{1}{f(x)}]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0,[\frac{1}{f(x)}]''=-\frac{f(x)f''(x)-2f'^2(x)}{f^3(x)}>0$，所以 $\frac{1}{f(x)}$ 恒正、单调下降且为凹函数，选（D）．

（2）**答案**：选（D）．

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛区间相同．

记 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\lambda}|a_n|=a$，则当 n 充分大时，$n^{\lambda}|a_n|<a+1$，$\frac{|a_n|}{n+1}<\frac{a+1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1}$ 收敛，即当 $x=\pm1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 收敛．又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-3)^n$ 的收敛域为 $[2,4]$．

（3）**答案**：选（C）．

解：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f^{(2015)}(x)$ 为奇函数，所以（A）、（B）均正确．

又 $f(x)=(x^2-1)^{2015}=(x+1)^{2015}(x-1)^{2015}$，故由莱布尼兹公式

$f^{(2015)}(x)=2015!(x-1)^{2015}+2015^2\cdot2015!(x+1)(x-1)^{2014}+\cdots+2015!(x+1)^{2015}$，

得 $f^{(2015)}(1)=2015!\cdot2^{2015},f^{(2015)}(-1)=-2015!\cdot2^{2015}$，故 $f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=2015!\cdot2^{2016}$，（D）正确．

（4）**答案**：选（B）．

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(x)f(y)}{(1+z)e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x)f'(y)}{(1+z)e^z}$，代入条件有 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{f''(x)f(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{f(x)f''(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f(x)f'(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{f'(x)f'(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

由于 $z(0,0)e^{z(0,0)}=f^2(0)>0$，所以 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=\frac{f''(0)f(0)}{(1+z(0,0))e^{z(0,0)}}>0$，$B=0$，

$$AC-B^2=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}-[\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}]^2=\frac{[f''(0)]^2[f(0)]^2}{(1+z)^2e^{2z}}>0,$$

故 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值．

（5）**答案**：选（B）．

解：由题意知 $r(A^T)<n$，从而 $r(A)<n$ ，所以 $r(A^*)=0$ 或 $r(A^*)=1$，由 $A^*\neq0$，得 $r(A^*)=1$．

从而 $r(A)=n-1$，由 $A^TB=O$ 知 $r(A^T)+r(B)\le n$，得 $r(B)\le1$，又 $B\neq O,r(B)\ge1$，所以 $r(B)=1$．

（6）**答案**：选（C）．

解：因为 A 相似于 B，B 特征值为 $0,0,2$，则 A 特征值为 $0,0,2$．又 A 为三阶实对称矩阵，则 A 与 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似，所以 $r(A)=1$，故选（C）．

（7）**答案**：选（B）．

解：（A）不正确，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$．

（B）正确，取 $C=\Omega$，即得 $A=B$．

（C）不正确，X 和 Y 同分布与 X 和 Y 的取值相同不是一回事．

（D）不正确，事实上 $F(x)$ 单调不减．

（8）**答案**：选（B）．

解：（A）不正确，因为 $P(A)=1 \nRightarrow A=\Omega$ 知② $\nRightarrow$ ①.

（B）正确，若 $X=Y$ 则 $F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{Y\le x\}=F_Y(x)$.

（C）不正确，假设 X 和 Y 均服从 $[0,1]$ 上均匀分布且相互独立，则 $F_X(x)=F_Y(x)$ 但 $P\{X=Y\}=0$.

（D）不正确，例如 $X\sim N(1,1), Y\sim P(1)$，则 $EX=EY=1, DX=DY=1$，但 $F_X(x)\ne F_Y(x)$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填“-2”.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{x-1}-1)}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\ln x}{\ln x-x+1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+x-1}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1+1}{-1}=-2.$$

（10）答案：填“$\dfrac{\pi}{8}$”.

解：$y=x^2\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以所求面积为

$$S=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin t}{\underset{0\le t\le\frac{\pi}{2}}{=}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\cos^4t)dt=2\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

（11）答案：填“b”.

解：$a\varphi_1'\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\varphi_2'-c\varphi_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\varphi_3'=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{a\varphi_3'-b\varphi_2'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，同理得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{b\varphi_1'-c\varphi_3'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，故

$$c\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=b.$$

（12）答案：填“az”或者“$ax^af(\dfrac{y}{x^2})$”.

解：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}=ax^af(\dfrac{y}{x^2})-\dfrac{2y}{x^2}x^af'(\dfrac{y}{x^2})$，$2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2}x^af'(\dfrac{y}{x^2})$，所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax^af(\dfrac{y}{x^2})=az$.

（13）答案：填“0 或 4”.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-a&1\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\0&\lambda-a&1\\\lambda&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda-a&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-a)(\lambda-4)$.

故 a 只能为 0 或 4.

当 $a=0$ 时，$\lambda=4,0,0$，$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，故 $\lambda=0$ 只有一个无关的特征向量，符合题意.

当 $a=4$ 时，$\lambda=4,4,0$，$4E-A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(4E-A)=2$，故 $\lambda=4$ 只有一个无关的特征向量，也符合题意.

（14）答案：填“$\dfrac{1}{2}$”.

解：由 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$ 知 $a=1$．由于 $F(x)$ 单调不减，故 $b\ge0$．若 $b=0$，则 $F(x)=0$ 不是分布函数，故 $b>0$，故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-bx}, & x>0,\\ 0, & x\le0,\end{cases}$ 所以 $X\sim E(b)$.

由 $E(X)=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$ 得 $b=2$，知 $X\sim E(2)$，故 $DX=\dfrac{1}{4}$，因此 $E(X^2)=DX+(EX)^2=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（Ⅰ）证 1：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x)=1+2f(x)+2[e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt-e^{-x}\cdot e^xf(x)]=1+2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt, \quad \cdots\cdots2\text{ 分}$$

由①知 $2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt=x+2\int_0^xf(t)dt-f(x)$，代入上式得

$$f'(x)=1+x+2\int_0^xf(t)dt-f(x), \quad ②$$

由②知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)=1+2f(x)-f'(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$． ……4 分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$． ……5 分

证 2：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且 $e^x f(x)=xe^x+2e^x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x e^t f(t)dt$，两边求导得

$$e^x[f(x)+f'(x)]=(1+x)e^x+2e^x\int_0^x f(t)dt+2e^x f(x)-2e^x f(x),\qquad \cdots\cdots 2\text{分}$$

化简得 $$f(x)+f'(x)=1+x+2\int_0^x f(t)dt\ ,\qquad ②$$

再两边求导得 $f'(x)+f''(x)=1+2f(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$．……4 分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$．……5 分

（Ⅱ）解：由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 知对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，故可设 $y^*=a$，将其代入上式即得 $y^*=-\dfrac{1}{2}$．因此 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 的通解为

$$f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{2}.\qquad \cdots\cdots 8\text{分}$$

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=\dfrac{2}{3},C_2=-\dfrac{1}{6}$，所以 $f(x)=\dfrac{2}{3}e^x-\dfrac{1}{6}e^{-2x}-\dfrac{1}{2}$．……10 分

（16）解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>0$，故当 $x\ge 1$ 时，$g(x)$ 单调增加．

当 $x<-1$ 时，$g(x)=-2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=-2\int_0^1 e^{t^2}dt<0$ 故当 $x\le 1$ 时 $g(x)$ 单调减少；…… 3 分

当 $-1<x<1$ 时，

$$g(x)=\int_{-1}^x(x-t)e^{t^2}dt+\int_x^1(t-x)e^{t^2}dt=x\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_{-1}^x te^{t^2}dt+\int_x^1 te^{t^2}dt-x\int_x^1 e^{t^2}dt,$$

$$g'(x)=\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_x^1 e^{t^2}dt=\int_{-x}^x e^{t^2}dt.\qquad \cdots\cdots 7\text{分}$$

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$．当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>2\int_0^1 dt=2$，…… 9 分

$g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}dt=e^{t^2}\big|_0^1=e-1$，故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=e-1$ ．……10 分

（17）证（Ⅰ）令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，则

$$F(a)=F(c)=0,F(b)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=0,$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$．…… 2 分

令 $\varphi(x)=F(x)e^{-x},x\in[a,b]$，则 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$，得 $F'(\xi_1)-F(\xi_1)=0,F'(\xi_2)-F(\xi_2)=0$，即得

$$f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1}f(x)dx,f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2}f(x)dx.\qquad \cdots\cdots 6\text{分}$$

（Ⅱ）令 $\psi(x)=[F'(x)-F(x)]e^x,x\in[a,b]$，则 $\psi(\xi_1)=\psi(\xi_2)=0$，…… 8 分

再由罗尔中值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\psi'(\eta)=0$，得 $F''(\eta)-F(\eta)=0$，即有

$$f'(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx.\qquad \cdots\cdots 10\text{分}$$

（18）（Ⅰ）证：由 $y=\sum\limits_{n=0}^\infty a_nx^n$ 知 $y'=\sum\limits_{n=1}^\infty na_nx^{n-1},y''=\sum\limits_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}$，故由

$xy''+(1-x)y'-2y=0$ 知 $\sum\limits_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum\limits_{n=1}^\infty na_nx^n+\sum\limits_{n=1}^\infty na_nx^{n-1}-2\sum\limits_{n=0}^\infty a_nx^n=0$，…… 2 分

所以 $n(n+1)a_{n+1}-na_n+(n+1)a_{n+1}-2a_n=0$，即有 $(n+1)^2a_{n+1}=(n+2)a_n$．…… 4 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知 $n^2a_n=(n+1)a_{n-1}$，所以

$$a_n=\frac{n+1}{n^2}a_{n-1}=\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{n}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n-1}{(n-2)^2}a_{n-3}$$

$$=\frac{n+1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)^2}a_{n-3}=\cdots=\frac{n+1}{n!},\quad n=1,2,\cdots,\qquad \cdots\cdots 7\text{分}$$

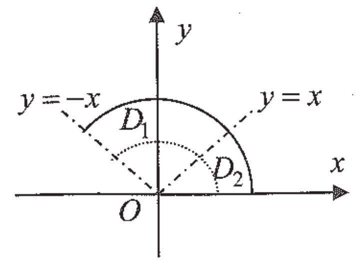
故 $\sum\limits_{n=0}^\infty a_nx^n=1+\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{n+1}{n!}x^n=1+x\sum\limits_{n=0}^\infty\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^\infty\dfrac{x^n}{n!}=xe^x+e^x$，所以

$$y(x)=(x+1)e^x,x\in(-\infty,+\infty).\qquad \cdots\cdots 10\text{分}$$

（19）解：引入直线 $y=x$ 分割区域 $D=D_1\bigcup D_2$（如图），则

$$I=\iint_{D_1}x\left|x^2+y^2-1\right|dxdy+\iint_{D_2}y\left|x^2+y^2-1\right|dxdy.\qquad \cdots\cdots 3\text{分}$$

由于区域 D_1 关于 y 轴对称，函数 $x\left|x^2+y^2-1\right|$ 关于 x 为奇函数，所以 $\iint_{D_1}x\left|x^2+y^2-1\right|dxdy=0$．…… 5 分



利用曲线 $x^2+y^2=1$，分割区域 $D_2=D_2'+D_2''$，其中

$D_2'=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,0\le y\le x\}$，$D_2''=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2,0\le y\le x\}$

$$I=\iint_{D_2}y\left|x^2+y^2-1\right|dxdy=\iint_{D_2'}y(1-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2''}y(x^2+y^2-1)dxdy\qquad \cdots\cdots 7\text{分}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r\sin\theta\cdot(1-r^2)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^{\sqrt{2}}r\sin\theta\cdot(r^2-1)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{15}\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{15}-\frac{2}{15}\right)\sin\theta d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{15}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=\frac{2}{15}(\sqrt{2}-1).$$ ……10 分

（20）解：（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&0&2&1\\3&1&t&5\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&-2&t+3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&t-1&0\end{pmatrix}.$

……4 分

当 $t=1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=2$，故两个向量组等价． ……6 分

（Ⅱ）当两个向量组等价时，$A\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&\frac{7}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， ……8 分

故 $\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta_2=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{7}{2}\alpha_2$，$\alpha_1=\frac{7}{9}\beta_1+\frac{4}{9}\beta_2$，$\alpha_2=\frac{1}{9}\beta_1+\frac{2}{9}\beta_2$． ……11 分

（21）解：（Ⅰ）由 $A^2=2A$ 得 A 的特征值只能为 0 或 2，由于 $r(A)=2$，故 A 的特征值为 $2,2,0,0$，

……4 分

从而 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}=\Lambda$，二次型 x^TAx 的标准型为 $2{y_1}^2+2{y_2}^2$． ……6 分

（Ⅱ）$P^{-1}(E+A+A^2+A^3)P=\begin{pmatrix}15&0&0&0\\0&15&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 ……9 分

$$|E+A+A^2+A^3|=15^2=225.$$ ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由于 $f(x)=ae^{\frac{x(b-x)}{4}}=ae^{\frac{b^2}{16}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac{b}{2})^2}{4}}$，故 $X\sim N(\frac{b}{2},2)$． …… 3 分

因为 $EX=\frac{b}{2}$，$DX=2$，且 $2EX=DX$，知 $b=2$．又由 $ae^{\frac{b^2}{16}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$，解得

$a=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$，因此 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$ $(-\infty<x<+\infty)$． …… 5 分

（Ⅱ）$E(X^2e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^x\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$． …… 7 分

其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$ 可看作随机变量 Y^2 的期望，其中 $Y\sim N(3,2)$，而 …… 9 分

$$E(Y^2)=DY+(EY)^2=2+3^2=11,$$

故 $E(X^2e^X)=11e^2$． ……11 分

（23）解：（Ⅰ）X_n 的分布律为

$$P\{X_n=k\}=\frac{C_{1200}^kC_{n-1200}^{1000-k}}{C_n^{1000}},\quad k=0,1,2,\cdots,1000.$$ ……3 分

（Ⅱ）由题意知，现从总体 X_n 中取了一个容量为 1 的样本，并得观测值 $k_1=100$，因此似然函数为

$$L(n)=P\{X_n=100\}=\frac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}.$$ ……5 分

现在的问题是：求 $\hat{n}$，使得 $L(\hat{n})$ 为最大值．由于

$$\frac{L(n)}{L(n-1)}=\frac{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}}{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1-1200}^{900}}{C_{n-1}^{1000}}}=\frac{(n-1200)(n-1000)}{(n-2100)n}=\frac{(n-2200)n+1200000}{(n-2200)n+100n}.$$ ……7 分

当 $100n\le1200000$，即 $n\le12000$ 时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\ge1$，表明 $L(n)$ 随着 n 增大而不减少．

当 $100n\ge1200000$，即 $n\ge12000$ 时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\le1$，表明 $L(n)$ 随着 n 增大而不增加．……9 分

因此当 $n=12000$ 时，$L(n)$ 取最大值，所以 n 的最大似然估计值为 $\hat{n}=12000$． ……11 分

19、20全程资料请加群690261900

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（B）．

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\frac{e^t-1}{t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，选（B）．

同理可得，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$；

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\sin^2x}-1)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x-\sin x}\sqrt{\cos t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos(x-\sin x)}\cdot(1-\cos x)}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

（2）答案：选（C）．

解：由偏导数的定义易知 $f_x'(0,0)=0,\ f_y'(0,0)=0$．

以下证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在．当 x,y 沿曲线 $x=ky^2$ 趋向于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0^+\\x=ky^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{ky^4}{(1+k^2)y^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

与 k 有关．所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续．故选(C)．

（3）答案：选（B）．

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}=\max\{1-x^2,x^2\}=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le\frac{1}{\sqrt2},\\ x^2, & \frac{1}{\sqrt2}<x\le1.\end{cases}$ 经验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处不可导，在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处取极小值，点 $(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{2})$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

（4）答案：选（C）．

解：$\ln(1+|xy|)\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}\le x^2+y^2\le e^{x^2+y^2}-1$，故 $I_3\le I_1\le I_2$，故选（C）．

（5）答案：选（A）．

解：由题意知 $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}+1=r\begin{pmatrix}A&0\\ \beta^T&1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}=r(A)+1$，$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=r(A)$．

（6）答案：选（A）．

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，$f(1,-1,0)=a_{11}+a_{22}-2a_{12}>0$，故 $a_{11}+a_{22}>2a_{12}$．

（7）答案：选（D）．

解：（A），（B），（C）均不正确．反例：设 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，且 1,2,3,4 等概率出现，可验证 $A=\{1,2\},B=\{1,3\},C=\{1,4\}$ 两两独立，但不相互独立．此时（A），（B），（C）的条件均满足，经计算 $P(AB|C)=\dfrac{1}{2}$，$P(A|C)P(B|C)=P(A)P(B|C)=P(AB)=\dfrac{1}{4}$．

（D）正确．$P(AB|C)=\dfrac{P(ABC)}{P(C)}=\dfrac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)}=P(A)P(B)$．

（8） 答案：选（A）．

解：（B）当 $y\ge0$ 时，$F(x,y)$ 关于 x 为单调不增，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=-\infty$，排除（B）．

（C）当 $y=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x,1)=1-e^{-1}\ne F(0,1)=0$，所以 $F(x,1)$ 在点 $x=0$ 处不右连续，排除（C）．

（D）$P\{0<X\le1,0<Y\le1\}=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=-(1-e^{-1})^2<0$，排除（D）．

（A）正确，若 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)\\1\end{pmatrix}$，则 (X,Y) 的分布函数是 $F(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge0,y\ge0,\\0, & \text{其它}.\end{cases}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填“$(-1,0)$”．

解 1：$2yy'-2=2e^yy'$，即 $yy'-1=e^yy'$； ①

$y'^2+yy''=e^yy'^2+e^yy''$； ②

$3y'y''+yy'''=e^yy'^3+3e^yy'y''+e^yy'''$． ③

令 $y''=0$，由②得 $y'^2=e^yy'^2$．再由①知 $y'\ne0$，所以 $e^y=1$，得 $y=0$．代入原方程得 $x=-1$；代入①得 $y'(-1)=-1$．将 $x=-1,y(-1)=0,y'(-1)=-1,y''(-1)=0$ 代入③ $y'''(-1)=1\ne0$，故 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$．

解 2：将原方程转化为 $x=\dfrac{1}{2}y^2-e^y$，则 $\dfrac{dx}{dy}=y-e^y,\dfrac{d^2x}{dy^2}=1-e^y,\dfrac{d^3x}{dy^3}=-e^y$．

令 $\frac{d^2x}{dy^2}=0$，得 $y=0$，进而有 $x(0)=-1$ 及 $\left.\frac{d^3x}{dy^3}\right|_{y=0}=-1\neq 0$，所以 $x=\frac{1}{2}y^2-e^y$ 的拐点为 $(0,-1)$．

再利用反函数的性质知 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$．

（10）答案：填“ $y''+\tan x\cdot y'=e^x(1+\tan x)$ ”．

解：设该方程为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，根据二阶线性的方程解的性质与解的结构可知，$y_1=1,y_2=\sin x$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解，代入后解得 $P(x)=\tan x,Q(x)=0$，又 $y^*=e^x$ 是该方程的特解，解得 $f(x)=e^x(1+\tan x)$，所以该方程为 $y''+\tan x\cdot y'=e^x(1+\tan x)$．

（11）答案：填“ $\frac{1}{16}\pi$ ”．

解 1：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{2i-1}{2n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{4}\arctan x\Big|_0^1=\frac{1}{16}\pi．\text{ 其中 }\xi_i=\frac{\frac{i}{n}+\frac{i-1}{n}}{2}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ i=1,2\cdots n．$$

解 2：由于 $\frac{n}{4n^2+4i^2}\le\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4i^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}．$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4i^2}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{16}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i-1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{16}，$$

所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\frac{1}{16}\pi$．

（12）答案：填“ $\frac{9}{4}\pi$ ”．

解：令 $x^2+y^2=u,x^2-y^2=v$，则 $x^2=\frac{1}{2}(u+v),\ y^2=\frac{1}{2}(u-v)$．代入原式，有

$$f(u,v)=\frac{9}{4}-u^2-(v+\frac{1}{2})^2，$$

所以 $f(x,y)=\frac{9}{4}-x^2-(y+\frac{1}{2})^2$．

原积分 $=\iint\limits_D\sqrt{\frac{9}{4}-x^2-(y+\frac{1}{2})^2}\,d\sigma$．令 $x=r\cos\theta,\ y=-\frac{1}{2}+r\sin\theta$，则

原积分 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{9}{4}-r^2}\,rdr=2\pi\cdot\frac{-1}{3}(\frac{9}{4}-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}\pi$．

（13）答案：填“ $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数”．

解：由 $r(A)=2\Rightarrow r(A^*)=1\Rightarrow n-r(A^*)=3-1=2$，则 $A^*x=0$ 的基础解系中含两个无关的解向量，又由 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow A^*A=|A|E=0\Rightarrow A$ 的列向量均是方程 $A^*x=0$ 的解向量，即

$A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}5\\2\\4-3a\end{pmatrix}=0\Rightarrow A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}=0$，且 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$ 线性无关，

则 $A^*x=0$ 的通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数．

（14）答案：填“4”．

解：设正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，则 $Y_1=a_{11}X_1+a_{21}X_2,Y_2=a_{12}X_1+a_{22}X_2$．

$EY_1=a_{11}EX_1+a_{21}EX_2=0$，同理 $EY_2=0$，①正确．

$DY_1=a_{11}^2DX_1+a_{21}^2DX_2=a_{11}^2+a_{21}^2=1$，同理 $DY_2=1$，②正确．

$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(a_{11}X_1+a_{21}X_2,a_{12}X_1+a_{22}X_2)=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$，③正确．

由于 $|A|\neq 0$，所以 (Y_1,Y_2) 服从二维正态分布，由③正确知 Y_1 与 Y_2 不相关，从而 Y_1 与 Y_2 相互独立，④正确．

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi'f_2'$；　……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$$

$$+xy^2\varphi'[(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\varphi'2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi'f_2'$$

$$=-f_1'+4xy\varphi'f_2'-xf_{11}''+2x^2y^3\varphi''f_2'+2x^2y^3\varphi'^2f_{22}''+(2x^2y-xy^2)\varphi'f_{12}''，$$　……6 分

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$， ……8 分

从而 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)-f_{11}''(0,1)+4f_2'(0,1)$． ……10 分

（16）解：（Ⅰ）由题意知，每辆汽车的总维修成本 y 对汽车大修时间间隔 t 的弹性为

$$\frac{Ey}{Et}=\frac{t}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=2-\frac{81}{yt}，得 \frac{dy}{dt}-\frac{2}{t}y=-\frac{81}{t^2}，$$ ……2 分

所以

$$y=e^{-\int(-\frac{2}{t})dt}[\int(-\frac{81}{t^2})e^{\int(-\frac{2}{t})dt}dt+C]=t^2(\frac{27}{t^3}+C)=\frac{27}{t}+Ct^2.$$ ……5 分

又当 $t=1$ 时，$y=27.5$，解得 $C=\dfrac{1}{2}$，故每辆汽车的总维修成本 y 与汽车大修时间间隔 t 的函数关系为 $y=\dfrac{27}{t}+\dfrac{1}{2}t^2$，$t\ge 1$． ……7 分

（Ⅱ）$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{27}{t^2}+t=\dfrac{t^3-27}{t^2}$，令 $\dfrac{dy}{dt}=0$，解得驻点 $t=3$．

当 $1\le t<3$ 时，$\dfrac{dy}{dt}<0$；当 $t>3$ 时，$\dfrac{dy}{dt}>0$，所以当 $t=3$ 时，y 取得最小值 $y(3)=\dfrac{27}{2}$，因此每辆汽车每隔 3 年大修一次可使每辆汽车的总维修成本最低，最低总维修成本为 $\dfrac{27}{2}$ 千元． ……10 分

（17）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^{n+1}}{1+a^{2n+2}}\cdot\dfrac{1+a^{2n}}{a^n}\right|=|a|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a^{2n}}{1+a^{2n+2}}$， ……2 分

① 当 $0<|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|a|<1$，级数绝对收敛，所以原级数收敛； ……4 分

② 当 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|a\cdot\dfrac{1}{a^2}\right|=\dfrac{1}{|a|}<1$，级数绝对收敛，所以原级数收敛； ……6 分

③ 当 $a=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}$ 发散； ……8 分

④ 当 $a=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2}$ 发散. ……10 分

（18）解：（Ⅰ）令 $x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)[m-g(x)]dx=m\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx，$$ ……3 分

即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\dfrac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$． ……4 分

（Ⅱ）取 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{\cos^2 x+1}$，$g(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$，则 $f(-x)=f(x)$，$g(x)+g(-x)=1$．由（Ⅰ），

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx.$$ ……7 分

再取 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x+1}$，$g(x)=x$，则 $f(\pi-x)=f(x)$，$g(x)+g(\pi-x)=\pi$，再由（Ⅰ），

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{\cos^2 x+1}=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}.$$ ……10 分

（19）解：$I=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy$，其中

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 xydy=\frac{1}{4}.$$ ……2 分

$$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 f''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1[f'_x(x,1)-f'_x(x,0)]dx=-\int_0^1 f'_x(x,0)dx，$$ ……4 分

因为 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，所以 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，并交换积分次序，

$$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\iint\limits_D f''_{yx}(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^1 f''_{yx}(x,y)dx$$

$$=\int_0^1[f'_y(1,y)-f'_y(0,y)]dy=-\int_0^1 f'_y(0,y)dy=-\int_0^1 f'_y(0,x)dx.$$ ……7 分

因为 $f_x'(x,0)=-f_y'(0,x)$，所以 $\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=-\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=0$，从而

$$I=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$$ ……10 分

（20）解：由题设 $\beta=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$ 知：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(3,-2,-1,1)^T=\beta$，所以 $Ax=\beta$ 有一个特解为 $\eta=(3,-2,-1,1)^T$． …… 2 分

由题设 α_1,α_4 线性无关，$\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+(-\alpha_1+\alpha_4)+4\alpha_4=2\alpha_1+5\alpha_4$，从而 α_1,α_4 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，则方程 $Ax=0$ 的基础解系中含 $4-2=2$ 个无关的解向量． …… 6 分

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}=0$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$，即知 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的

19、20全程资料请加群690261900

解且线性无关，所以 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的一个基础解系， ……9分

故方程组 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\1\end{pmatrix},\text{其中 } k_1,k_2 \text{ 为任意常数.}$$ ……11分

(21)解：(Ⅰ)因为 $A\xi_1=0$，故 $\lambda_1=0$ 为 A 的特征值，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. ……2分

又 $A\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, A\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $A(2\eta_1-\eta_2)=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，从而 $\lambda_2=1$ 为 A 的特征值，对应的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $2\eta_1-\eta_2$ 为对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量. ……5分

(Ⅱ) A 主对角元素之和为2，即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$，所以 $\lambda_3=1$ 为 A 的另一特征值. ……7分

设 λ_3 对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由 $[\xi_3,\xi_1]=0,[\xi_3,\xi_2]=0$ 得 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 取 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. ……9分

因为 A 为对称阵，故取 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则 $A=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Q^{-1}$，$A^n=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ……11分

(22)解：(Ⅰ)由题意知，X 的取值为1,2,3，Y 的取值为1,2，且 $\{X=1,Y=1\},\{X=2,Y=2\}$ 和 $\{X=3,Y=2\}$ 均为不可能事件. ……2分

由乘法公式得 $P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$，同理 $P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{3}$，$P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{3}$，故 X 和 Y 的联合概率律为

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$ ……4分

超 越 考 研

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 X 和 Y 的边缘分布律分别为 $X\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $Y\sim\begin{pmatrix}1&2\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。进而计算得

$$EX=2,DX=\frac{2}{3},\quad EY=\frac{4}{3},DY=\frac{2}{9},$$ ……7分

又 $E(XY)=\frac{7}{3}$，故 $Cov(X,Y)=\frac{7}{3}-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$，所以 $\rho=\dfrac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……9分

(Ⅲ)由 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 得 $(U,V)\sim\begin{pmatrix}(2,2)&(3,3)\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，所以

$$P\{U=V\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$ ……11分

或由于 (X,Y) 只取值 $(1,2),(2,1),(3,1)$，故 (U,V) 只取值 $(2,2),(3,3)$，因此有 $U=V$，从而

$$P\{U=V\}=1.$$ ……11分

(23)证：由 $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 知，χ^2 可表示为 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$. 进而知 $X_i^2\sim\chi^2(1)$，$E(X_i^2)=1$，$D(X_i^2)=2$，$i=1,2,\cdots,n$. ……3分

因此当 n 充分大时，由中心极限定理知 $\chi^2\overset{\text{近似}}{\sim}N(n,2n)$，故 $\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$， ……5分

由 $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\frac{\chi^2_\alpha(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=\alpha$，可得 $\frac{\chi^2_\alpha(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_\alpha$，所以

$$\chi^2_\alpha(n)\approx n+\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……8分

由 $P\{\chi^2>\chi^2_{1-\alpha}(n)\}=P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\frac{\chi^2_{1-\alpha}(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=1-\alpha$，可得 $\frac{\chi^2_{1-\alpha}(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_{1-\alpha}=-U_\alpha$，所以

$$\chi^2_{1-\alpha}(n)\approx n-\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……11分

19、20全程资料请加群690261900