绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟一）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}$ 的可去间断点个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

（2）设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_2^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$，则 $f(x)=$（　　）。

（A）$\sqrt{x}-1$　　（B）$\sqrt{x}+1$　　（C）$2\sqrt{x}-1$　　（D）$2\sqrt{x}+1$

（3）设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,\ 1)$ 可微，且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-f(1,1)+2x-3y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}=0$，则 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点沿 $\boldsymbol{l}=\{2,1\}$ 方向的方向导数为（　　）.

(A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$　　(B) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$　　(C) -1　　(D) 1

（4）设 $f(t)=\oiint\limits_{\Sigma_t}(x+t)^2dydz+(y+t)^2dzdx+(z+t)^2dxdy$, 其中积分曲面 $\Sigma_t: x^2+y^2+z^2=t^2$，$t>0$, 取外侧，则 $f'(t)=$（　　）

(A) 0.　　(B) $8\pi t^3$.　　(C) $16\pi t^3$.　　(D) $32\pi t^3$.

（5）设 A,B 为正定矩阵，C 是可逆矩阵，下列矩阵不是正定矩阵的是（　　）

(A). C^TAC　　(B). $A^{-1}+B^{-1}$　　(C). A^*+B^*　　(D). $A-B$

（6）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 3 维非零向量，则下述命题中，正确命题的个数为（　　）

(a) 如果 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 线性表出;

(b) 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关;

(c) 如果 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，则 $2\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\le3$;

(d) 如果 $r(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\ \alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 则 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 线性表出。

（A）1;　　（B） 2;　　（C） 3;　　（D）4

（7）设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}Axe^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le0,\end{cases}$ 则数学期望 $E(X^2-X)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 2　　(D) $\frac{1}{4}$

（8）设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,且有 $P\{X<\sigma\}>P\{X\ge\sigma\}$，则有比值 $\frac{\mu}{\sigma}$（　　）

（A） 等于1 （B） 大于1 （C） 小于1 （D） 不能判别。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\ln x}{x-2\ln x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}=$________.

（10）设 $f'(u)=\ln(1+u^2), g(x)=f(\dfrac{2x-1}{2x+1})$，则 $g'(0)=$________.

（11）设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz=$________

（12）若曲面 $\sum$ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=$________.

（13）已知 4 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，若 $\beta_i(i=1,2,3,4)$ 非 0 且与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，则秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$________.

(14) 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\bar{X}$ 是样本均值，S^2 为样本方差，则统计量的数学期望 $E(\bar{X}S^2)^2=$________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 **10** 分）已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t(t+2),\\ y=\ln(1+t),\end{cases}$ $(t>-1)$ 确定，（Ⅰ）函数 $y=y(x)$ 的单调性及曲线 $y=y(x)$ 的凹凸性；（Ⅱ）求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 点处的曲率.

（16）（本小题满分 **10** 分）求一个可微函数 $P=P(x,y)$ 满足 $P(0,1)=1$，并使曲线积分 $I_1=\int_L(3xy^2+x^3)\,dx+P(x,y)\,dy$ 及 $I_2=\int_L P(x,y)\,dx+(3xy^2+x^3)\,dy$ 都与积分路径无关.

（17）（本小题满分 **10** 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=1$，证明：$\exists\eta\in[0,1]$ 使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2$.

（18） （本小题满分 **10** 分）设 $a_0,a_1,\cdots,a_n\cdots,(a_0\ne 0)$ 为等差数列

（I）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径； （II）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的和。

(19)（本小题满分 **10** 分）设 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试问参数 a,b 分别满足什么条件时，$f(x,y)$ 有唯一极大值？ $f(x,y)$ 有唯一极小值？

（20）（本小题满分 **11** 分）
已知 1 是 3 阶实对称矩阵 A 的一个特征值，且

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 0 & 4\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

(I) 求矩阵 A 的特征值和特征向量；(II)如果 $\beta=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\end{pmatrix}^{T}$，求 $A^{n}\beta$

（**21**）（**本小题满分 11 分**）已知齐次方程组 $Ax=0$ 为

$$\begin{cases}x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0\\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0\\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0\end{cases}$$

,又矩阵 B 是 2×4 矩阵，$Bx=0$ 的基础解系为

$a_1=(1\quad -2\quad 3\quad -1)^{T}$，$a_2=(0\quad 1\quad -2\quad 1)^{T}$；(I)求矩阵 B；(II)若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；(III)求方程组 $Ax=0$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解。

（**22**）（**本小题满分 11 分**）设 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x$（$0<x<1$）的条件下，Y 在 $(x,1)$ 上服从均匀分布，试求：（I）(X,Y) 的密度函数；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$；（III）条件概率 $P(X+Y<1/Y>\frac{1}{2})$

（**23**）（**本小题满分 11 分**）设连续型总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{a}{x^2}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

$(\theta>0)$，且 $X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，试求：（I）常数 a；（II）参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）$\hat{\theta}=\dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L$ 关于 θ 的无偏性.

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟二）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设$k\ge 0$，若方程$\ln x = kx$无实根，则必有（　　）。

（A）$k>\dfrac{1}{e}$　　（B）$0<k<\dfrac{1}{e}$　　（C）$k=\dfrac{1}{e}$　　（D）$k=0$

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为可导函数，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则下列说法正确的是（　）.

（A）若 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为偶函数

（B）若 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 与 $f'(x)$ 均为奇函数

（C）若 $f'(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数

（D）若 $f'(x)$ 是奇函数，则 $F(x)$ 也奇函数

（3）设平面区域 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-x\le y\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 1-\sqrt{2x-x^2}\le y\le 1\}$，二重积分 $I_1=\iint\limits_{D_1}\ln(x+y)\,d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{D_2}\ln(x+y)\,d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{D_2}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，则 I_1，I_2，I_3 的大小关系为(　　　)

（A）$I_1<I_2<I_3$.　　（B）$I_3<I_2<I_1$.　　（C）$I_2<I_3<I_1$.　　（D）$I_1<I_3<I_2$.

（4）已知微分方程 $y''-2y'+\lambda y=xe^{ax}$ 的通解形式是 $y=c_1e^x+c_2xe^x+(Ax+B)e^{ax}$，则（　　　）

（A）$\lambda=1, a=1$ ；　　(B)　$\lambda=1, a\ne 1$;

(C)　$\lambda\ne 1, a=1$;　　(D)　$\lambda\ne 1, a\ne 1$

（5）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$,则 A 与 B（　　）

(A)合同不相似　　(B)相似不合同　　(C)合同且相似　　(D)不相似也不合同

（6）设 A 与 B 为 3 阶非 0 矩阵，满足 $AB=0$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{pmatrix}$，则

(A)　$a=-1$时，必有 $r(A)=1$　　(B)　$a\ne -1$时，必有 $r(A)=2$

(C)　$a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　　(D)　$a\ne 2$ 时，必有 $r(A)=2$

（7）设 X,Y 是两个随机变量，$P(Y\ge 0)=\dfrac{3}{5}, P(X<0\,|\,Y<0)=\dfrac{1}{5}$, 则 $P(\max(X,Y)\ge 0)=$

$(A)\ \dfrac{2}{25}$　　$(B)\dfrac{1}{25}$　　$(C)\dfrac{4}{25}$　　$(D)\dfrac{23}{25}$

（8）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\2/3&1/3\end{pmatrix}, Y\sim e(\lambda)$（$\lambda=\dfrac{1}{3}$的指数分布），则概率 $P\{X+Y>E(X^2Y)\}=$（　　　）

(A) $\frac{1}{3}(e^{-\frac{1}{3}}+2)$ (B) $\frac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+1)$ (C) $\frac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+e^{-1})$ (D) $\frac{1}{3}(3-e^{-\frac{1}{3}})$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a}-e^{\sqrt{4-x^2}}}{x\ln(1+x)}=b$，则 $a=$______，$b=$________.

(10) 设函数 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$，且 $f(a)=2, f'(a)=-1, f''(a)=3$，则 $g''(2)=$____________。

（11）积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x=$__________.

（12）设曲面 Σ 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切平面被柱面 $x^2+(y-1)^2=1$ 所截下的部分，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3yz^2+z)\,dS=$___________.

（13）设 A 为三阶实对称矩阵，$\xi_1=\begin{pmatrix}k\\-k\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $AX=0$ 的解，$\xi_2=\begin{pmatrix}k\\2\\1\end{pmatrix}$ 为方程组 $(2E-A)X=0$ 的一个解，$|E+A|=0$，则 $A=$__________.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，为使 $Y=k\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 成为总体方差的无偏估计，则常数 $k=$_____________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\sin\frac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=2$，求 $f''(0)$ 的值.

（16）（本小题满分 **10** 分）

设 $f(t)=\iint\limits_{D}|xy-t|dxdy, t\in[0,1]$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 1\}$。(I) 求 $f(t)$ 的初等函数表达式；(II) 证明：存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $f(t_0)$ 是 $f(t)$ 在 $(0,1)$ 内唯一的最小点。

（17）（本小题满分 **10** 分） 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\ne 0$.（Ⅰ）证明对 $\forall x\in(0,a], \theta\in(0,1)$ 使得

$$\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]；$$（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

（18） （本小题满分 **10** 分）设函数满足方程 $F_n'(x)=F_n(x)+\dfrac{(-1)^n}{n}e^x x^n$（$n$ 为整数）且 $F_n(0)=0$，试求：(I) 函数 $F_n(x)$ 的表达式；(II) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$ 的和函数；(III) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}$ 的值.

（19）（本题满分 10 分）已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

（20）（本小题满分 11 分）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\\2\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\b\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}-3\\-1\\a\\-9\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\10\\a+b\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 当 a,b 为何值时，β 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示；(Ⅱ) 当 a,b 为何值时，β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示,写出表达式.

（21）（本小题满分 11 分）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.　（Ⅰ）求行列式 $\left|A^*-2A^{-1}\right|$;　（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E。

（22）（本小题满分 11 分）　联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+y)}, & 0<x<y\\0, & 其他\end{cases}$，试求：(I) 常数 A；(II) 条件密度函数 $f_{X/Y}(x|y)$；(III) $Z=2X+Y$ 的概率密度函数

（23）（本小题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{\theta^4}(\theta^2-x^2), & 0<x<\theta\\0, & 其他\end{cases},$$

$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，试求：(I) 确定常数 A，且 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_0$；(II) $D(\hat{\theta}_0)$；(III) $\hat{\theta}_0{}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计。

绝密★启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟三）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续， $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)\ln(1+x^2)}{(e^{|x|}-1)\sin^2 x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）.

（A） $g(0)=0, g'(0)$ 不存在　　（B） $g(0)=0, g'(0)=1$

（C） $g(0)=1, g'(0)$ 不存在　　（D） $g(0)=1, g'(0)=1$

(2) 设有无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\dfrac{\sin a}{n^3}+\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})]$ 收敛，其中 a 为常数，则此级数（　　）.

（A）条件收敛　（B）绝对收敛　（C）发散　（D）敛散性与 a 的取值有关

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，$F(x)=\int_0^x(2t-x)f(x-t)\,\mathrm{d}t$，若 $f(x)$ 是单调增加的奇函数，则 $F(x)$ 是（ ）.

（A）单调增加的奇函数　　（B）单调减少的奇函数

（C）偶函数　　（D）奇偶性不确定

(4) 设 $D:|x|+|y|\le 1$，则 $\iint\limits_D \dfrac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=$（　　）.

（A）1　（B）2　（C）$\dfrac{1}{2}$　（D）$\dfrac{1}{3}$

(5) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3)$，已知 $|\boldsymbol{A}|=-1$，则 $|\boldsymbol{B}|=$（　　）.

(A) 3　(B) -3　(C) 6　(D) -6

(6) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{A\alpha}-3\boldsymbol{\alpha}$　(B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{A\alpha}$　(C) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$　(D) $\boldsymbol{\alpha}$

(7) 在 3 次的独立试验中，每次试验成功的概率为 p，且至少成功一次的概率为 $\dfrac{37}{64}$，则概率 $p=$（　　）.

（A）$\dfrac{27}{64}$　(B) $\dfrac{37}{64}$　(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{1}{4}$

（8）设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\overline{X}$ 是样本均值，S^2 为样本方差，则统计量（　　　）$\sim\chi^2(n)$。

(A) $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ (B) $\frac{X_i^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (D) $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）设曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$，且当 x 在 $x=0$ 处取得增量 Δx 是相应的函数值增量 $\Delta y=3\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\ln[1+f(\frac{1}{n})]\right\}^n=$__________。

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的解为 $y=$________；

(11) 设 $a>0$，则 $\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\ln\frac{x-a+\sqrt{1+(x-a)^2}}{2}=$__________.

(12) 设 $f(x,y)$ 可微分，且满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x-y$，则 $\mathrm{d}f(x,y)|_{(1,0)}=$________.

(13) 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系式 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $3,-3,0$ 则 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=$__________.

(14) **设**随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1,λ_2 的泊松分布，若 $E(X+Y)^2-2E(X+Y)=0$，则概率 $P(X+Y\ge 2)=$____________ .

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}e^x, x\le 0,\\ x^2,\quad x>0\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x-\sin x}}$.

（16）（**本题满分 10 分**）设曲面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,(a,b,c>0)$.（Ⅰ）在该曲面的第一卦象部分求一点 $P(x,y,z)$，使在该点处的切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，并求这个最小值;（Ⅱ）求函数 $u=ax^2+by^2+cz^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿向量 $\overrightarrow{OP}$ 方向的方向导数，并说明它是否是该函数在该点处的方向导数最大值.

（17）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $\iint\limits_D x(y+1)d\sigma$，其中积分区域 D 由 y 轴与曲线 $y=\sqrt{4-x^2}, y=\sqrt{2x-x^2}$ 围成.

（18）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0, f(0)f(\frac{1}{2})<0$，证明：（Ⅰ）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；（Ⅱ）$\exists\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$.

（19）（**本题满分 10 分**）已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(x)$ 是微分方程 $xy'+y=e^x$ 满足初始条

件$\lim\limits_{x\to 0} y(x)=1$的特解。将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$的和.

.

（20）（**本题满分 11 分**）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$，（I）问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解？（II）有解时求出全部解.

（21）（**本题满分 11 分**）（I）已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 的平方项系数均为 0，设$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,-1)^T$，且满足 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$．（I）求该二次型表达式；（II）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次形为标准型，并写出所用坐标变换；（III）若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定，求 k 的取值范围.

（22）（**本题满分 11 分**）设(X,Y)在方形区域$G=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$上服从均匀分布，试求：（I）概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}$；（II）$Z=|X-Y|$的密度函数 $f_Z(z)$；（III）$Z=|X-Y|$均值与方差。

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,\dots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，（I）求参数θ矩估计$\hat{\theta}_J$与极大似然估计$\hat{\theta}_L$；（II）求$\hat{\theta}_L$的分布密度函数 $f_{\hat{\theta}}(z)$；（III）考查统计量$\hat{\theta}_J$与$\hat{\theta}_L$关于θ的无偏估计性。

.

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x+1, x\geq 0, \\ \dfrac{1}{1-x},+1, x<0 \end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的（ ）。

(A)连续点　(B)可去间断点　(C)跳跃间断点　(D)无穷间断点

（2）设 $F(x)=\int_{-x}^{x}(\frac{1}{1+e^t}-\frac{1}{2})\mathrm{d}t+\int_{x}^{x+1}e^{\cos^2\pi t}\sin\pi(t-[t])\mathrm{d}t$，其中 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数，则 $F(x)$（　　）.

（A）恒为零　（B）为正的常数　（C）为负的常数　（D）不为常数

（3）设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　）

（A）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　（B）若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（C）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.　（D）若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（4）设平面区域 $D:x^2+y^2\leq 1$，记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2 d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma,$$

则有（　　）

（A）$I_1>I_2>I_3$　（B）$I_2>I_1>I_3$　（C）$I_1>I_3>I_2$　（D）$I_2>I_3>I_1$

（5）设 A 是 3 阶矩阵，P 是 3 阶可逆阵，且满足 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，若 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=0$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维非向量，且 α_1,α_2 线性无关，则矩阵 P 不能是（　　）。

(A) $(-\alpha_1,5\alpha_2,\alpha_3)$　(B) $(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$　(C) $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$　(D) $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3)$

（6）设 A 为可逆矩阵，令 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, P_2=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}P_1^{100}AP_2^{-1}$ 等于(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 X 与 Y 独立同分布，$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$，$0<p<1$,，若 $P\{XY<0\}=\frac{1}{2}$，则 $p=$(　　　)

(A)1/4　(B)1/3　(C)1/2　(D)3/4

（8）设 $f(x)$ $F(x)$ 分别是随机变量 X 的密度函数及分布函数，且 $f(x)$ 为连续函数，则以下（　　）为概率密度函数。

(A) $f^2(x)$　　(B) $f(x)F(x)$　　(C) $2f(x)F(x)$，　　(D) $\frac{1}{2}f(x)F(x)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）设 p 是满足一定条件的常数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})=1$，则 $p=$______________.

（10）设 $y=y(x)$ 由 $(\cos x)^y=(\sin y)^x$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$______________.

（11）已知方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ 的两个特解 $y_1=e^x, y_2=x$，则该方程满足初值 $y(0)=1, y'(0)=2$ 的解为______________；

（12）设平面曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，且 $f(x,y)=(x-1)^2+(y+2)^2+\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$，则积分 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 的值等于______________.

（13）R^4 中基 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}^T, \varepsilon_2=\begin{pmatrix}1 & - & 1 & 1\end{pmatrix}^T, \varepsilon_3=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$，$\varepsilon_4=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ 到基 $\eta_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T, \eta_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}^T, \eta_3=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$，$\eta_4=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T$ 的过渡矩阵为______________.

（14）设二维随机变量 $(U,V)\sim(2,2;4,1;\frac{1}{2})$，且 $X=U-bV, Y=V$，若 X,Y 独立，则常数 $b=$_____.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本小题满分 10 分**）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}), \\ \int_0^y \cos u^2\,\mathrm{d}u+\int_t^1 \frac{e^u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=0 \end{cases}$ 确定，　求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

.

（16）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+4z^2}$，　其中曲面 Σ 是上半椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$，$(z\ge 0)$ 且取下侧.

（17）（**本小题满分 10 分**）证明：当 $x>0$ 时，有 $(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

（18）　（**本小题满分 10 分**）设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$，$y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，它们交点横坐标的绝对值记为 a_n。（I）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n。（II）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和。

(19)（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)=\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t\ (x\ge 0)$。

（I）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值；(II) 问 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是否有最大值？为什么？

（20）（**本小题满分 11 分**）　设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，　方程组 $\mathrm{A}x=b$ 有通解：

$k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$， 其中 k_1,k_2 是任意常数。 （1）求 A； （2）求 A^{100} 。

（21）（**本小题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，试求：

（I） 求参数 a； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TA^2x$ 化为标准形。

（22）（**本小题满分 11 分**） 设 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1\\ a-x, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(I) 确定 a； (II) 分布函数 $F(x)$；(III) $Y=F(X)$ 求 Y 的分布函数 $G(X)$ 4）概率 $P\{2Y^2\le E(Y)\}$.

（23）（**本小题满分 11 分**）设总体 X 服从 $U(\theta_0,\theta_0+\theta)$（均匀分布，$\theta_0$ 为已知常数），$X_1,\dots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$，（III）$\hat{\theta}_L$ 是否为 θ 的无偏估计。

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密★启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟五）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $x^n\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小，则 $n=$（　）.

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'(a)f'(b)<0$，那么下列说法正确的是（　）.

（A）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>0$

（B）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)<0$

（C）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=0$

（D）至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f'(x_0)=0$

(3). 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$.　　（B）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$.

（C）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$.　　（D）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$.

（4）设有空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ 则 $\oint_\Gamma (x-y)^2ds=$（　　）

(A) $\dfrac{2}{3}\pi$.　　(B) $\dfrac{4}{3}\pi$.　　(C) 2π.　　(D) 4π.

（5）n 阶实矩阵 A 满足　$A^3-6A^2+11A-6E=0,$ 则下列命题正确的是（），

（A）$3E-A$ 可逆，$3E+A$ 也可逆　　（B）$2E-A$ 可逆，$2E+A$ 也可逆

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 也可逆　　（D）$4E-A$ 可逆，$4E+A$ 也可逆

（6）设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)^T$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)^T$，$\eta_3=(1,0,5,1,1)^T$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组（Ⅰ）的一个极大无关组是（　　）。

(A) α_1,α_2　　(B) α_1,α_4　　(C) α_3,α_5　　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

（7）已知随机变量 X 与 Y 满足 $EXY>EXEY$,并且 $DX>0,DY>0$，则

（A）$D(X+Y)\ge DX+DY$;　　（B）$D(X+Y)<DX+DY$;

（C）$D(X-Y)\ge DX+DY$;　　（D）$D(X-Y)<DX+DY$;

20、21全程考研资料请加群712760929

（8）设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & \bar{A}\text{发生},\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & \bar{B}\text{发生},\end{cases}$ X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　）.

(A) $\rho=0$　　**(B)** $\rho=1$　　# **(C)** $\rho<0$　　**(D)** $\rho>0$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\ln 2}{2}+\cos\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\cos\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=$________________.

（10）设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+\cos x}{\sqrt{1+2x}-1}=1$，那么曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程是________________.

（11）二次积分 $\int_0^{2\pi}dx\int_x^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}dy=$________________.

（12）设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$，则积分 $I=\oint_L\frac{x^2+y^2\sin x}{x^2+y^2}ds=$________________.

（13）设 A 是正负惯性指数均为 1 的三阶实对称矩阵，且满足 $|\mathrm{E}+\mathrm{A}|=|\mathrm{E}-\mathrm{A}|=0$，则 $|2\mathrm{E}+3\mathrm{A}|=$________________。

(14) 设总体 X 服从0-1分布，即 $P\{X=0\}=1-p, P\{X=1\}=p$，$X_1,\ldots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\bar{X}$ 是样本均值，则 $P\{n\bar{X}>2\}=$________________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（**本小题满分 10 分**）（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x^2)}{x}-\sin x, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \frac{\arcsin x}{x}+e^{\frac{1}{2x}}+b, & -1\le x<0,\end{cases}$ （Ⅰ）求常数 A,B 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；（Ⅱ）就所求的 A,B 值，判别 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导，若可导则求 $f'(0)$。

（16）（**本小题满分 10 分**）计算二重积分

$$I=\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,d\sigma\text{，其中 }D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\text{ .}$$

（17）（**本小题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$．证明：（Ⅰ）在 (a,b) 内存在两个不同的点 ξ,η，使得 $f'(\xi)-f(\xi)=f'(\eta)-f(\eta)=0$ 成立；（Ⅱ）$\exists\zeta\in(a,b)$ 使得等式 $f''(\zeta)=f(\zeta)$ 成立.

（18）（本小题满分 10 分）.（I）设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx, n=0,1,2\cdots$，求 $\sum_{n=1}^{\infty}I_n$。

（II）求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和。

(19)（本小题满分 10 分）设方程 $2x^3-6xy+3y^2+\frac{1}{e}z\ln z=0$ 确定了 $z=z(x,y)$，求 $z(x,y)$ 的极值.

（20）（本小题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零阵，向量

$\beta_1=(0,1,-1)^T$, $\beta_2=(a,2,1)^T$, $\beta_3=(b,1,0)^T$ 是齐次方程组 $Bx=0$ 的 3 个解向量,且方程组 $Ax=\beta_3$ 有解，试求（1）a,b；(2) $Bx=0$ 通解

（21）（本小题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$,其中 b 为非零的实数（1）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（2）求出该二次型正定的充要条件。

（22）（本小题满分 11 分）设 U与V 相互独立同分布，且对应的分布律为 $P\{U=i\}=\frac{1}{3}$ $(i=-1,0,1)$，而随机变量函数 $X=\max\{U,V\}$,$Y=\min\{U,V\}$，试求：（I）(X,Y) 的联合分布律；（II）概率 $P\{|XY|=1\}$；(III) $Cov\{X,Y\}$.

（23）（本小题满分 11 分）已知某工厂生产的电子产品的寿命（单位：kh）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，产品出厂标准寿命不得低于 10.0（kh），对一批即将出厂的产品任取了 5 件做寿命检测实验，得到结果为：

9.9、 11.2、 10.1、 12.0、 11.0

试求：（I）参数 μ 的极大似然估计，且对以上数据写出估计值；（II）这批产品的平均寿命的 95%的置信区间；（III）在 α =0.05 时检验这批产品是否可以出厂。

（α =0.05，$u_\alpha=1.64$, $u_{\alpha/2}=1.96$; $t_\alpha(4)=2.132$, $t_{\alpha/2}(4)=2.776$）