数学一（模拟一）答案

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题, 每小题 4 分, 共 32 分.
在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项符合要求, 将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{\ln|x|}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(1+x)e^{-\frac{1}{x^2}}}{-(1+x)}=e^{-1},\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1$ 均为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

（2）【解】: 由题设有 $xf'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x},\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x)=\sqrt{x}+C,\ f(9)=2$，故 $C=-1$，即 $f(x)=\sqrt{x}-1$，答案 A．

（3）【解】: 答案：应选(B).

由已知 $f_x'(1,1)=-2,\ f_y'(1,1)=3$，$\boldsymbol{l}_0=\left\{\dfrac{2}{\sqrt5}\quad\dfrac{1}{\sqrt5}\right\}$，所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=\dfrac{-4}{\sqrt5}+\dfrac{3}{\sqrt5}=\dfrac{-1}{\sqrt5}$.

（4）【解】: 答案：（D）.

（5）【解】: 答案 D. 因为 A,B 为正定矩阵，则对应的特征值均为大于 0，但不一定保证 $A-B$ 特征值大于 0. 从而 $A-B$ 不是正定矩阵。

（6）【解】: 答案：（D）。

对于（1）因 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关，从而 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 线性表出;

对于（2）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，又 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关，则 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，与已知矛盾;

对于（3） 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 3 维非零向量，而 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，所以 $r(\alpha_4,\alpha_i)=2\quad(i=1,2,3)$,从而 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\ge2$，于是 $2\le r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ \alpha_4)\le3$;

对于（4）因初等变换不改变矩阵的秩，由 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\ \alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 得 $r(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，表明对应的方程组有解，故 α_4 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 线性表出。

因此，命题（a）（b）（c）（d）都是正确的。选（D）

（7）【解】: 答案：（A）

$$1=A\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=\frac{A}{2}\int_0^{+\infty}x2e^{-2x}dx=\frac{A}{4},\quad A=4;$$

$$E(X)=4\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=2\int_0^{+\infty}x^22e^{-2x}dx=2(\frac14+\frac14)=1$$

$$E(X^2)=4\int_0^{+\infty}x^3e^{-2x}dx=-2\int_0^{+\infty}x^3de^{-2x}=3\int_0^{+\infty}x^22e^{-2x}dx=\frac32$$

$$E(X^2-X)=E(X^2)-E(X)=\frac32-1=\frac12\ .$$

（8）【解】: 答案：（C）

由于 $P\{X<\sigma\}>P\{X\ge\sigma\}=1-P\{X<\sigma\},P\{X<\sigma\}>\dfrac12$，

即 $\Phi(0)<P\{X<\sigma\}=P\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}<1-\dfrac{\mu}{\sigma}\}=\Phi(1-\dfrac{\mu}{\sigma}),1-\dfrac{\mu}{\sigma}>0$，所以 $\dfrac{\mu}{\sigma}<1$。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+\dfrac{3\ln x}{x-2\ln x})^{\frac{x-2\ln x}{3\ln x}}\right]^{\frac{3x}{x-2\ln x}}=e^3$

（10）【解】: $g'(x)=f'(\dfrac{2x-1}{2x+1})\dfrac{4}{(2x+1)^2}, g'(0)=4f'(-1)=4\ln 2$

（11）【解】答案: $\dfrac{8}{15}\pi$

（12）【解】答案: $\dfrac{4}{3}\pi R^4$ ”.

由于 $\sum$ 具有轮换对称性，故 $\iint\limits_{\Sigma}x^2dS=\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=\iint\limits_{\Sigma}z^2dS.$

由此可得

$$\iint\limits_{\Sigma}z^2dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}R^2dS=\frac{1}{3}R^2\iint\limits_{\Sigma}dS=\frac{1}{3}R^2\cdot4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^4$$

（13）【解】 记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，$A$ 是秩为 3 的 3×4 的矩阵，由于 β_i 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均正交，故 β_i 是齐次方程组 $Ax=0$ 的非 0 解，由因 β_i 非 0，故 $1\le r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\le n-r(A)=1$，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=1$。

(14)【解】由 $\bar{X}$ 与 S^2 独立性，$E(\bar{X}S^2)^2=E(\bar{X}^2)E(S^2)^2$，由于 $E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+E(\bar{X})^2=\dfrac{\sigma^2}{n}$，

又 $E(S^2)=\sigma^2$，且 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, $D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$

所以 $E(S^2)^2=D(S^2)+(E(S^2))^2=(\dfrac{2}{n-1}+1)\sigma^4$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】:（Ⅰ）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2(1+t)^2}>0,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{(1+t)^4}<0$，所以 $y=y(x)$ 为单增函数，曲线 $y=y(x)$ 是凸的；（Ⅱ）$K\big|_{t=0}=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{t=0}=\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$

（16）【解】:因为两个积分都与路径无关，所以有

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(3xy^2+x^3)}{\partial y}=6xy\quad,\qquad（1）$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(3xy^2+x^3)}{\partial x}=3y^2+3x^2.\qquad（2）$$

（1）式两边对 x 积分，得 $P=3x^2y+\varphi(y)$.

上式对 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x^2+\varphi'(y)$.

比较（2）式，得 $\varphi'(y)=3y^2$，$\varphi(y)=y^3+C$，

因此 $P=3x^2y+y^3+C$.

又因为 $P(0,1)=1$，所以 $C=0$，进而得 $P=P(x,y)=3x^2y+y^3$

（17）【证明】：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\},m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知 $x\in(0,1)$ 时有 $1+mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le 1+Mx\ (\xi\in(0,x)$ 对不等式
$1+mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le 1+Mx$ 两边同时在区间 $[0,1]$ 上积分可得
$\frac{m}{2}\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-1\le\frac{M}{2}$ 即 $m\le 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-2$.

（18）【解】（1）令 $a_1=a_0+d$，则 $a_n=a_0+nd$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}=1$，故 $\mathrm{R}=1$

(I) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0+nd}{2^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nd}{2^n}=2a_0+d\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$，$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n}$,则

$$\int f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{x}{2-x},\ f(x)=\frac{2}{(2-x)^2},\ f(1)=2,\text{故}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0+nd}{2^n}=2(a_0+d)$$

(19) 【解】: 由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}2ax+2by=3,\\ 2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当 $8a^2-4b^2\ne 0$，即 $2a^2-b^2\ne 0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一驻点 $\left(\frac{3a-2b}{2a^2-b^2},\frac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$.

记 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$，$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b$，$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a$.

当 $AC-B^2=8a^2-4b^2>0$ 即 $2a^2-b^2>0$ 时，$f(x,y)$ 有极值．并且当 $A=-2a>0$，
即 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有极小值；当 $A=-2a<0$ 即 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有极大值.
综上所述，得,当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a<0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极小值；
当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a>0$ 时，$f(x,y)$ 有唯一极大值.

（20）【解】: (I) 由于 $A\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$,知特征值 λ_2=0，λ_3=-2，相应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_3=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

设特征值 λ_1=1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,则

$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\2x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$，解得特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

所有特征值 λ_1=1，λ_2=0，λ_3=-2，的特征向量依次为 $k_1\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$k_2\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，$k_3\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,，其中 k_1，k_2，k_3 全不为 0

（II）设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$,解出 $x_1=-1,x_2=1,x_3=1$, 即 β=-α_1+α_2+α_3，从而

$$A^n\beta=A^n(-\alpha_1)+A^n\alpha_2+A^n\alpha_3=-\alpha_1+(-2)^n\alpha_3$$

$$=(-1+(-1)^n2^{n+1},\quad -2+(-2)^n2^{n+1},\quad -2+(-2)^n2^n)^T$$

（21）【解】:（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$,有 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm T}B^{\mathrm T}=0$，所以 $B^{\mathrm T}$ 的列向量是方程组 $(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm T}x=0$ 的解。解此方程组的基础解系 $\begin{pmatrix}1&2&1&0\end{pmatrix}^{\mathrm T},\begin{pmatrix}-1&-1&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm T}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1&a_2&a_3&a_4\\a_1&4&a_2&a_3\\2&7&5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=0 \text{ 即 }\begin{cases}1-2a_2+3a_3-a_4=0\\a_2-2a_3+a_4=0\\a_1-8+3a_2-a_3=0\\4-2a_2+a_3=0\end{cases},$$

解出 $a_1=1,a_2=3,a_3=2,a_4=1$

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$，因为 $x_3=-x_4$，即 $3k_1-2k_2=k_1-k_2$，，即 $k_2=2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为 $(k\quad 0\quad -k\quad k)^{\mathrm T}$,k 为任意常数。

（22）【解】:（I） 由题知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$，　$f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}1, & x<y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

则 (X,Y) 的密度函数：$f(x,y)=f_X(x)f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

（II）边缘密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y), & 0<y<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$

（III）$P(X+Y<1/Y>\frac{1}{2})=\dfrac{P(0<X<\frac{1}{2},\frac{1}{2}<Y<1-X)}{P(Y>\frac{1}{2})}=\dfrac{\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx\int_0^{1-x}dy}{-\int_{1/2}^1\ln(1-y)dy}$

$$=\frac{1/2}{\frac{1}{2}(1+\ln 2)}=\frac{1}{1+\ln 2}\ .$$

（23）【解】:（I）由 $F(x)$ 连续性，$0=F(\theta+0)=\lim\limits_{x\to\theta^+}(1-\dfrac{a}{x^2})=1-\dfrac{a}{\theta^2}$，所以 $a=\theta^2$，则概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\theta^2}{x^3}, & x>\theta\\0, & x\le\theta\end{cases}$；

（II）θ 的似然函数为 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2\theta^2}{x_i^3}=\dfrac{2^n\theta^{2n}}{x_1x_2\cdots x_n}$，

$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)=\dfrac{2n}{\theta}>0$，所以$L$关于$\theta$单调增，且 $x_i>\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$

由极大似然估计的定义可知θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_L=\min\{x_i\}$或$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$

（III）由于$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$，对应的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}_L}(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-(\dfrac{\theta}{z})^{2n}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$

$(\theta>0)$，对应的概率密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\dfrac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_L)=\int_{\theta}^{+\infty}z\frac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}dz=2n\theta^2\int_{\theta}^{+\infty}\frac{1}{z^{2n}}dz=\frac{2n}{2n-1}\theta,$$

$E(\hat{\theta})=E(\dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L)=\dfrac{2n-1}{2n}E(\hat{\theta}_L)=\theta$，所以$\hat{\theta}=\dfrac{2n-1}{2n}\hat{\theta}_L$是$\theta$的无偏的。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟二）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】：令 $f(x)=\ln x-kx,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}-k$，当 $k=0$ 时方程显然有根 $x=1$；

$k>0$ 时 $f'(\dfrac{1}{k})=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 当，$f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{k}]$ 上单增，在 $[\dfrac{1}{k},+\infty)$ 上单减，

当 $f(\dfrac{1}{k})=-\ln k-1<0$ 即 $k>\dfrac{1}{e}$ 时原方程无实根，答案 A .

(2) 【解】：答案（A）．由于若 $f(x)$ 是偶函数，而 $F(x)=G(x)+C$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $F(x)=G(x)+C$ 不是奇函数。

（3）【解】：由二重积分的几何意义可知：(B).

（4）【解】答案：$\lambda=1$ 时，特征方程 $(r-1)^2=0$，特征根为 $r=1$ 为重根，齐通解才是 $Y=c_1e^x+c_2xe^x$；

若 $a=1$，则是重根，对应特解应为 $y^*=(A+Bx)x^2e^{ax}$。应该是(B)。

（5）【解】答案：C

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0，\ \lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$$

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 3-\lambda & 2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(\lambda^2-3)=0,\ \lambda_1=6,\lambda_2=\sqrt{3},\lambda_3=-\sqrt{3}$$

A 与 B 为实对称矩阵，有相同的特征值，所以相似;，且合同。

（6）【解】：$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1+a & 0\\ 0 & 0 & (a-2)(a+1)\end{pmatrix}$，$a=2$ 时，$r(B)=2$，由 $AB=0$ 知，$r(A)+r(B)\le 3,\ r(A)\le 1$，又 $A\ne o\,0,r(A)\ge 1$,所以 $r(A)=1$。答案：(C)

（7）【解】：答案：(D).

$$P(\max(X,Y)\ge 0)=1-P\{X<0,Y<0\}=1-P\{Y<0\}P\{X<0\,|\,Y<0\}$$
$$=1-(1-P\{Y\ge 0\})P\{X<0\,|\,Y<0\}=1-\frac{2}{5}\frac{1}{5}=\frac{23}{25}.$$

（8）【解】答案：（B）

由独立性知 $E(X^2Y)=E(X^2)E(Y)=1$；　概率 $P\{X+Y>E(X^2Y)\}=P\{X+Y>1\}$

$$=P\{X+Y>1,X=0\}+P\{X+Y>1,X=1\}=\frac{2}{3}P\{Y>1\}+\frac{1}{3}P\{Y>0\}=\frac{1}{3}(2e^{-\frac{1}{3}}+1)。$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】由题设知 $a=2$，左式 $=-e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sqrt{4-x^2}-2}-1}{x^2}=-e^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2}{x^2}=\dfrac{e^2}{4}$，所以 $b=\dfrac{e^2}{4}$.

(10) 【解】由于 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$, 即 $f'(x)g'(y)=1$，两边求导数，可得 $f''(x)g'(y)+f'(x)g''(y)y'=0,$

$f''(x)g'(y)+[f'(x)]^2g''(y)=0$ 又 $f(a)=2$，代入可得 $f''(a)g'(2)+[f'(a)]^2g''(2)=0$，

又 $f'(x)g'(y)=1$，$f'(a)g'(2)=1$，$3\times(-1)+g''(2)=0$，所以 $g''(2)=3$。

（11）【解】 画出二重积分区域 D，D_1 是 D 的第一象限部分，由对称性，得

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\,y \int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} (\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}\,x = \iint_D (\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)dxdy = 2\iint_{D_1} (\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (8\cos^3\theta - 2\sqrt{2})d\theta = \frac{20\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

(12)【解】答案：$-\sqrt{5}\,\pi$

抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(0,1,1)$ 处的法向量 $\vec{n} = \{2x, 2y, -1\}|_{(0,1,1)} = \{0, 2, -1\}$，对应切平面方程为 $2y - z - 1 = 0$．因为 Σ 关于 yOz 面对称，x^3yz^2 关于 x 为奇函数，有 $\iint\limits_\Sigma x^3yz^2 dS = 0$．又 Σ 在 xOy 平面的投影区域为 $D: x^2 + (y-1)^2 \le 1$，所以

$$\iint_\Sigma (x^3yz^2 + z)\,dS = \iint_\Sigma z\,dS = \iint_D (2y-1)\sqrt{2^2+(-1)^2}\,dxdy = -\sqrt{5}\pi\,.\ .$$

（13）【解】：显然 $\xi_1 = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 A 对应不同特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 2$ 的特征向量，因为 A 为实对称阵，所以 $\xi_1^T\xi_2 = k^2 - 2k + 1 = 0$, 解得 $k = 1$，于是 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

又因为 $|E + A| = 0$，所以 $\lambda_3 = -1$ 为 A 的特征值，令 $\lambda_3 = -1$ 对应的特征向量为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

由 $\begin{cases} \xi_1^T\xi_3 = 0 \\ \xi_2\xi_3 = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$，得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$，得 $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(14)【解】：$E(Y) = kE\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - \mu - (X_i - \mu))^2$

$$= kE[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\mu)^2 - 2(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu) + (X_i-\mu)^2]$$

$$= k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2 - 2E(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu) + E(X_i-\mu)^2]$$

$$= k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2 + E(X_i-\mu)^2] = 2k(n-1)\sigma^2,$$

由 $E(Y) = \sigma^2$, 所以 $k = \dfrac{1}{2(n-1)}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15)【解】：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+\sin\dfrac{f(x)}{x}]=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{f(x)}{x}=\sin\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，因此

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，又由于 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+\sin\dfrac{f(x)}{x}]}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=4$，且

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=4$.

(16)【解】：(I) 令 $D_1=D\cap\{(x,y)\mid xy\ge t\},D_2=D\cap\{(x,y)\mid xy\le t\}$，

则 $f(t)=\iint\limits_D|xy-t|dxdy=\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D_2}(xy-t)dxdy$

$$=2\iint\limits_{D_1}(xy-t)dxdy-\iint\limits_{D}(xy-t)dxdy=2\int_t^1dx\int_{\frac{t}{x}}^1(xy-t)dy-\iint\limits_D xydxdy+t\iint\limits_D dxdy$$

$$=\frac{1}{4}-t+t^2(\frac{3}{2}-\ln t)。$$

(II) $f'(t)=-1+2t(1-\ln t),\ f''(t)=-2\ln t\ge 0,t\in(0,1)$。

$f(0+0)=\dfrac{1}{4},\ f(1)=\dfrac{3}{4}$，$f'(0+0)=-1,\ f'(1)=1$。因为 $f''(t)=-2\ln t\ge 0,t\in(0,1)$，所以 $f'(t)$ 单调增加。又因为 $f'(0+0)=-1,\ f'(1)=1$，所以存在唯一的 $t_0\in(0,1)$，使得 $f'(t_0)=0$。

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$f'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时，$f'(t)>0$，所以 $t_0\in(0,1)$ 为 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上唯一的最小点。

(17)【证明】：(I) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$，即有 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；

(II) 由 (I) 可得 $\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}\times 2\theta=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$，对上述等式两边同时取极限 $x\to 0^+$ 可得：$2f'(0)\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}=f'(0)$，

$f'(0)\ne 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

(18)【解】：(I) 由于微分方程 $F_n'(x)-F_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-x}x^n$，由线性微分方程公式知：

$$F_n(x)=e^{\int dx}[\int\frac{(-1)^n}{n}e^xx^ne^{-\int dx}dx+C]=e^x[\frac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}+C]$$

代入 $F_n(0)=0$，$C=0$; 所以有 $F_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}e^x$

(II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}$，以下求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的和函数，令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1},\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n;\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=-\frac{1}{1+x},|x|<1$$

$$S'(x)=-\ln(1+x),\quad S(x)=-\int_0^x\ln(1+x)dx=-x\ln(1+x)+\int_0^x\frac{x}{1+x}dx=x-(1+x)\ln(1+x),$$

所以有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}=[x-(1+x)\ln(1+x)]e^x$；$|x|<1$；

（III）由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}x^{n+1}=x-(1+x)\ln(1+x)$，令$x=\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}n(n+1)}=2-6\ln\frac{3}{2}$。

（19）【解】：点(x,y,z)到xOy面的距离为$|z|$，故求C上距离xOy面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数$H=z^2$在条件$x^2+y^2-2z^2=0$与$x+y+3z=5$下的最大值点和最小值点.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$

所以
$$\begin{cases}L_x'=2\lambda x+\mu=0 & (1)\\ L_y'=2\lambda y+\mu=0 & (2)\\ L_z'=2z-4\lambda z+3\mu=0 & (3)\\ x^2+y^2-2z^2=0 & (4)\\ x+y+3z=5 & (5)\end{cases}$$

由(1)(2)得$x=y$，代入(4)(5)有 $\begin{cases}x^2-z^2=0\\ 2x+3z=5\end{cases}$，

解得$M_0(-5,-5,5),\ M_1(1,1,1)$ 。

（20）【解】
$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&-1&3\\4&-2&a&10\\2&b&-9&a+b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&-2&2&2\\0&-6&a+12&6\\0&b-2&-3&a+b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&1&-1&-1\\0&0&a+6&0\\0&0&b-5&a+2b-4\end{pmatrix}$$

1)当$a\neq-6,a+2b-4\neq0$时,因为$r(A)\neq r(\overline{A})$,所以β不可由α_1，α_2，α_3线性表示;

2)当$a\neq-6,a+2b-4=0$时,

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&b-5&a+2b-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$,β可由α_1，α_2，α_3唯一线性表示,表达式为

$\beta=2\alpha_1-\alpha_2+0\alpha_3$;

当$a=-6$时,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&-1&3\\4&-2&a&10\\2&b&-9&a+b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\0&1&-1&-1\\0&0&b-5&2b-10\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

当$a=-6,b\neq5$时,由$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,β可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$唯一线性表示,表达式为

$\beta=6\alpha_1+1\alpha_2+2\alpha_3$;

当$a=-6,b=5$时,由$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&2\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,$\beta$可由$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$线性表示,表达式为

$\beta=(2k+2)\alpha_1+(k-1)\alpha_2+k\alpha_3$;其中$k$为任意常数.

(21)【解】(Ⅰ) A 的特征值为 1,-1, 2. $|A|=-2$,

$$|A^*-2A^{-1}|=\big||A|A^{-1}-2A^{-1}\big|=|-4A^{-1}|=(-4)^3|A^{-1}|=32$$

(Ⅱ) 由题意 $p^TAp=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$, $A=P\Lambda P^T\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^T=P\begin{pmatrix}1^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}P^T$

$$A^3-2A^2-A+4E=P\left[\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1)^3&\\&&2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]P^T$$

$=P(2E)P^T=2E$。

(22)【解】 (1) $1=A\int_0^{+\infty}e^{-x}dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=A\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{A}{2}$; $A=2$

(II) $f_X(x)=2e^{-x}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=2e^{-2x},x>0,\ f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}&,x>0\\0,&x\le 0\end{cases}$,

$$f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-y}(1-e^{-y})&,y>0\\0,&y\le 0\end{cases}$$

所以 $f_{X/Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{1-e^{1-y}}, & 0<x<y(y>0)\\0, & 其他\end{cases}$

(III) 利用公式: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-2x)dx$ 对应的 $f(x,z-2x)$=2e$^{-z}e^x,\begin{cases}x>0\\z>3x\end{cases}$,

所以 $z>0,\ f_Z(z)=2e^{-z}\int_0^{\frac{z}{3}}e^zdz=2e^{-z}(e^{\frac{z}{3}}-1)$, 则 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数为: $f_Z(z)\begin{cases}2e^{-z}(e^{\frac{z}{3}}-1), & z>0\\0, & z\le 0\end{cases}$

(23)【解】 (I) 由于 $1=\frac{A}{\theta^4}\int_0^{\theta}x(\theta^2-x^2)dx=\frac{A}{4}$, 则 $A=4$;

$\mu=E(X)=\frac{4}{\theta^4}\int_0^{\theta}x^2(\theta^2-x^2)dx=\frac{8}{15}\theta$, 令 $\mu=\bar{X}$,

所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_0=\frac{15}{8}\bar{X}$;

(II) $\sigma^2=D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{4}{\theta^4}\int_0^{\theta}x^3(\theta^2-x^2)dx-(\frac{8\theta}{15})^2=\frac{\theta^2}{3}-\frac{64}{225}\theta^2=\frac{11}{225}\theta^2$

由此知 $D(\hat{\theta}_0)=\frac{225}{64}D(\bar{X})=\frac{225}{64}\frac{\sigma^2}{n}=\frac{11}{64n}\theta^2$;

(III) $E(\hat{\theta}_0{}^2)=E(\frac{15}{8}\bar{X})^2=\frac{15^2}{8^2}E(\bar{X}^2)=\frac{15^2}{8^2}\{D(\bar{X})+(E\bar{X})^2\}$

$=\frac{15^2}{8^2}\{\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\}=\frac{15^2}{8^2}(\frac{11}{15^2n}\theta^2+\frac{8^2}{15^2}\theta^2)=(\frac{11}{64n}+1)\theta^2$, 所以 $\hat{\theta}_0{}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

绝密★启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟三）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: 由题设有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)x^2}{|x|x^2}=1, g(0)=0$，

$g_{-}'(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-1, g_{+}'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=1$， $g'(0)$ 不存在。

答案是 A.

(2) 【解】: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin a}{n^3}$ 绝对收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ 条件收敛，该级数条件收敛．答案 A .

(3) 【解】: $F(x)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-2\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u, F'(x)=\int_0^x[f(u)-f(x)]\mathrm{d}u$， $f(x)$ 为奇函数，则 $F'(x)$ 为偶函数，且可以证明 $x\neq 0$ 时， $F'(x)<0$，因此 $F(x)$ 是单调减少的奇函数，答案 B .

(4) 【解】: 由对称性可得 $\iint\limits_D\dfrac{e^x}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\dfrac{e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\dfrac{e^x+e^y}{e^x+e^y}\mathrm{d}\sigma=1$．答案为 A .

(5) 【解】: $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{pmatrix},|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix}=6$，答案为(D).

(6) 【解】答案：B

由 $A^3\alpha=3A\alpha-2A^2\alpha$，得 $(A-E)(A^2\alpha+3A\alpha)=0, A(A^2\alpha+3A\alpha)=A^2\alpha+3A\alpha$，即 $A^2\alpha+3A\alpha$ 是矩阵 A 属于特征值 1 的特征向量.

(7) 【解】 成功的概率为 p，3 次中至少有一次成功的概率为 $1-(1-p)^3=\dfrac{37}{64}$，所以

$(1-p)^3=\dfrac{27}{64}=(\dfrac{3}{4})^3$，即 $p=\dfrac{1}{4}$，答案为 D.

（8）【解】：答案 D .

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）【解】：应填 e^3 .

由题设有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，所以

$\lim\limits_{x\to\infty}n\{1+\ln[1+f(\dfrac{1}{n})]\}=\lim\limits_{x\to\infty}nf(\dfrac{1}{n})=3$，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\left\{1+\ln[1+f(\frac{1}{n})]\right\}^{\frac{1}{\ln[1+f(\frac{1}{n})]}}\right)^{n\ln[1+f(\frac{1}{n})]}=e^3$$

(10)【解】：应填 $y=(x-2)e^x+x+2$.

由题设有 $a=-2,b=1$，方程特解应该为 $y^*=x+2$，该方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，由 $y(0)=0,y'(0)=0$ 可得所求解为 $y=(x-2)e^x+x+2$

(11).【解】：应填 $-\dfrac{\pi a^2\ln2}{2}$.

$$原式\overset{u=x-a}{=\!=\!=}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}[\ln(u+\sqrt{1+u^2})-\ln2]\mathrm{d}u=-\ln2\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{\pi a^2\ln2}{2}.$$

(12)【答案】：$\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$

令 $\begin{cases}x+y=u,\\ \dfrac{y}{x}=v,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v},\\ y=\dfrac{uv}{1+v},\end{cases}$，则 $f(u,v)=u\dfrac{1-v}{1+v}$，$f(x,y)=x\dfrac{1-y}{1+y}$.

$f_x'(x,y)=\dfrac{1-y}{1+y}$，$f_y'(x,y)=\dfrac{-2x}{(1+y)^2}$，故 $f_x'(1,0)=1$，$f_y'(1,0)=-2$，所以

$\mathrm{d}f(x,y)\big|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$.

(13)【解】：应填 -8 .

因为 A 的特征值为 3,-3,0,所以 $A-E$ 特征值为 2,-4,-1,从而 $A-E$ 可逆,由 $E+B=AB$ 得 $(A-E)B=E$，即 B 与 $A-E$ 互为逆阵，则 B 的特征值为 $\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{4},-1$，$B^{-1}$ 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$，于是 $|B^{-1}+2E|=-8$，故应填 -8

(14) 【解】：应填 $1-2e^{-1}$.

由泊松分布的可加性知，$X+Y$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布，于是 $E(X+Y)=\lambda_1+\lambda_2$，

$D(X+Y)=\lambda_1+\lambda_2$.由 $E(X+Y)^2-2E(X+Y)=0$ 得

$\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_1+\lambda_2)^2-2(\lambda_1+\lambda_2)=0$，解得 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 或 0 （舍去）

故 $P(X+Y\geq2)=1-P(X+Y=0)-P(X+Y=1)=1-2e^{-1}$.

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【解】: $x>0, \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0} e^{t}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x} t^{2}\,\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}x^{3}$，

$$\lim_{x\to0^+}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\tan x-\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\left[\left(1+\frac{x^3}{3}\right)^{\frac{3}{x^3}}\right]^{\frac{x^3}{3(\tan x-\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^3\cos x}{3\sin x(1-\cos x)}}=e^{\frac{2}{3}}$$

（16）【解】:（Ⅰ）曲面 S 在点 $P(x,y,z)$ 处切平面的方程为 $\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,(X,Y,Z)$ 为切平面上动点．于是切平面与四个坐标面围成的体积为 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$．令 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$，

求解方程组 $\begin{cases}F_x'=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F_x'=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F_x'=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\end{cases}$ 解得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$，即当 $x=a,y=b,z=c$ 时函数 xyz 取得最大值，相应的体积 V 取得最小值，且有最小值为 $V=\frac{abc}{6}$

（Ⅱ）$\overrightarrow{OP}$ 方向的单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\{a,b,c\}$，函数 $u=ax^2+by^2+cz^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的梯度为 $\operatorname{grad}u=\{2a,2b,2c\}$，它与 $\overrightarrow{OP}$ 方向相同，因此函数 $u=ax^2+by^2+cz^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿向量 $\overrightarrow{OP}$ 方向的方向导数就是函数在该点处的方向导数最大值，且这个最大值为 $\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad}u\cdot\overrightarrow{OP}^{0}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

（17）【解】: 引入极坐标 (r,θ) 满足 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，在极坐标 (r,θ) 中积分区域 D 可表示为 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2},2\cos\theta\le r\le2\}$，于是

$$\iint_D x(y+1)d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2} r\cos\theta(r\sin\theta+1)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^3dr+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}r^2dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^4}{4}\cos\theta\sin\theta[1-\cos^4\theta]d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^3}{3}\cos\theta[1-\cos^3\theta]d\theta=I+J,$$

由于 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^4}{4}\cos\theta\sin\theta[1-\cos^4\theta]d\theta=4\int_0^1 t(1-t^4)dt=4(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})=\frac{4}{3}$,

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2^3}{3}\cos\theta[1-\cos^3\theta]d\theta=\frac{8}{3}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta)=\frac{8}{3}(1-\frac{3\cdot1\cdot\pi}{4\cdot2\cdot2})=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}$$

故 $\iint_D x(y+1)d\sigma=I+J=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}=4-\frac{\pi}{2}$

（18）【证明】:（Ⅰ）由连续函数的零点定理知 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2}),\exists\eta\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$，则有 $F(\xi)=F(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)\subset(0,1)$ 使得 $F'(\zeta)=f'(\zeta)e^{\frac{\zeta^2}{2}}+f(\zeta)\zeta e^{\frac{\zeta^2}{2}}=0$，即有 $f'(\zeta)+\zeta f(\zeta)=0$．

（19）【解】 $F(x)=\dfrac{1}{x}(\int e^{x}\,\mathrm{d}\,x+C)=\dfrac{e^{x}+C}{x}, \lim\limits_{x\to 0} y(x)=1, C=-1$，

$$f(x)=\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n+1)!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^{n}}{(n+2)!},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=f(1)=\left.\frac{xe^{x}-e^{x}+1}{x^{2}}\right|_{x=1}=1.$$

（20）【解】令 $\boldsymbol{X}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3), B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，矩阵方程化为 $\boldsymbol{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，即 $\begin{cases}\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{\beta}_2\\ \boldsymbol{A}\xi_3=\boldsymbol{\beta}_3\end{cases}$.

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&\frac{1-a}{2}&b-2&\frac{2+c}{2}\end{pmatrix},$$

因此当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_1=\boldsymbol{\beta}_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）；

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{\beta}_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$（$l$ 为任意常数）；

方程组 $\boldsymbol{A}\xi_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$（$t$ 为任意常数）；

于是矩阵的全部解是 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1-k&2-l&1-t\\-k&2-l&-1-t\\k&l&t\end{pmatrix}$（其中 k,l,t 为任意常数）.

(21)【解】:(I)据已知条件,有 $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,即 $\begin{cases} 2a_{12}-a_{13}=2, \\ a_{12}-a_{23}=4, \\ a_{13}+2a_{23}=-2, \end{cases}$

解出 $a_{12}=2,a_{13}=2,a_{23}=-2$,所以该二次型表达式为 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$;

(II)由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda & -2 & -2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+4)$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-4$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0,\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,得 $\lambda=2$ 的特征向量为

$\boldsymbol{\alpha}_{1=}(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)^T$; 由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,得 $\lambda=-4$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^T$, 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化,可得令 $\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\alpha}_3$ 则所求正交变换矩阵为 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,令

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y^TAy=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$.

(III)因为 $A+kE$ 的特征值为 $k+2,k+2,k-4,$ 所以当 $k>4$ 时,矩阵 $A+kE$ 正定.

（22）【解】:（I）由题可知(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}=1-2\int_0^{1/2}dx\int_0^{\frac{1}{2}-x}dy=\frac{3}{4}$；

（II）$Z=|X-Y|$的对应函数为$z=|x-y|$的取值范围是$0<z<1$，当$z<0$时$F_Z(z)=0$，当$z>1$时$F_Z(z)=1$，当$0\le z<1$时$F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=\iint\limits_{|x-y|\le z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-(1-z)^2$，因此$Z=|X-Y|$的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

（III）$E(Z)=E(|X-Y|)=\iint\limits_D|x-y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$，

$E(Z^2)=E(|X-Y|^2)=\iint\limits_D(x-y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x-y)^2\,\mathrm{d}(x-y)$

$=\frac{1}{3}\int_0^1[x^3-(x-1)^3]dx=\frac{1}{6}$，$D(Z)=D(|X-Y|)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$.

（23）【解】:（I） 矩估计 $\mu=\int_0^\theta x\frac{3x^2}{\theta^3}dx=\frac{3}{4}\theta$；令$\mu=\bar{X}$，即$\frac{3}{4}\theta=\bar{X}$，

所以θ的矩估计为$\hat{\theta}_J=\frac{4}{3}\bar{X}$；

$L=\prod_{i=1}^n\frac{3x_i^2}{\theta^3}=\frac{3^n(x_1x_2\cdots x_n)^2}{\theta^{3n}}$，$0<x_i<\theta$，$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}(n\ln3+2\sum_{i=1}^n\ln x_i-3n\ln\theta)=-\frac{3n}{\theta}<0$，因此$L$关于参数$\theta$单调递减，又$0<x_i<\theta$，由定义知$\theta$的极大似然估计为$\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$；

（II） X 的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$，因而$\hat{\theta}_L=\max\{X_i\}$的分布函数为

$F_{\hat{\theta}_L}(z)=[F(z)]^n=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{x^{3n}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta\\ 1, & z>\theta\end{cases}$，由此可得$\hat{\theta}_L$的密度函数为

$f_{\hat{\theta}_L}(z)=F'_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\frac{3nx^{3n-1}}{\theta^{3n}}, & 0\le z<\theta,\\ 0, & 其他；\end{cases}$

（III） 首先由于$E(\hat{\theta}_J)=E(\frac{4}{3}\bar{X})=\frac{4}{3}E(\bar{X})=\frac{4}{3}\mu=\theta$，$\hat{\theta}_J$是$\theta$的无偏估计性。

又由于$E(\hat{\theta}_L)=\int_0^\theta z\frac{3nz^{3n-1}}{\theta^{3n}}dz=\frac{3n}{3n+1}\theta$；$\hat{\theta}_L$不是$\theta$的无偏估计.

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时. 答案必须写在答题纸上，否则成绩无效

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: $f[f(x)]=\begin{cases} x+2, x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1-x}, +2, x<0 \end{cases}$，故 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的跳跃间断点。答案 C.

（2）【解】 $\dfrac{1}{1+e^t}-\dfrac{1}{2}$ 为奇函数，因而 $\int_{-x}^{x}(\dfrac{1}{1+e^t}-\dfrac{1}{2})\mathrm{d}t=0$，$e^{\cos\pi t}\sin\pi(t-[t])$ 是周期为1的周期函数，因而 $F(x)=\int_0^1 e^{\cos^2\pi t}\sin\pi t\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=\cos\pi t} -\dfrac{1}{\pi}\int_0^{-1}e^{u^2}\,\mathrm{d}u>0$，答案为 B .

（3）
【答案】:　D
（4）【解】答案:（B）.

因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.
综上有 $I_2>I_1>I_3$，选（B）.

（5）【解】 由 $A\alpha_1=\alpha_1$， $A\alpha_2=\alpha_2$， $A\alpha_3=0$，且 α_1,α_2 线性无关知，α_1,α_2 是特征值 1 的线性无关特征向量；α_3 是特征值 0 的线性无关特征向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关。因此 $(-\alpha_1,5\alpha_2,\alpha_3)$，$(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3)$，$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 是分别属于特征值 1，1，0 的线性无关特征向量，而 $\alpha_2+\alpha_3$ 不是特征向量。故选 D

（6）【解】: $P_1=E_{23}$，因为 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，所以 $E_{ij}^2=E$， $P_1^{100}=E.P_2=E_{13}(4)$，因为 $E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$，所以

$P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，于是 $A^{-1}P_1^{100}AP_2^{-1}=P_2^{-1}$，选（B）。

（7）【解】由于 $\frac{1}{2}=P\{XY<0\}=P\{X<0,Y>0\}+P\{X>0,Y<0\}=2p(1-p)$， $p(1-p)=\frac{1}{4}$，

所以 $p=\frac{1}{2}$。　　　　答案：(C)

（8）【解】分析：本题关键是考察概率密度函数的两个基本条件。

显然 $\frac{1}{2}f(x)F(x)\geq 0$；又有 $\int_{-\infty}^{+\infty}2f(x)F(x)dx=2\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)F'(x)dx=2\frac{1}{2}F^2(x)|_{-\infty}^{+\infty}=1$。

答案：(C)。

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】: $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^t-e^{\frac{t}{1+t}}}{t^p}=e^{\frac{t}{1+t}}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{e^{t-\frac{t}{1+t}}-1}{t^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\frac{t}{1+t}}{t^p}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t^2}{(1+t)t^p}$

$p=2$.

（10）【解】: 对等式两边同时取对数，再求微分可得

$\ln\cos x\,\mathrm{d}y-y\tan x\,\mathrm{d}x=\ln\sin y\,\mathrm{d}x+x\cot y\,\mathrm{d}y$，由此可得 $\mathrm{d}y=\frac{\ln\sin y+y\tan x}{\ln\cos x-x\cot y}\mathrm{d}x$.

（11）【解】 y_1,y_2 线性无关，该方程通解为 $y=C_1e^x+C_2x$，由初始条件得 $C_1=C_2=1$，故 $y=e^x+x$

(12) 【解】答案: $\frac{36}{1-4\pi}$

记 $\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=A$，则 $f(x,y)=(x-1)^2+(y+2)^2+A$. 两边在曲线 L 上积分，有

$$A=\oint_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\oint_L[(x-1)^2+(y+2)^2+A]\,\mathrm{d}s=\oint_L(x^2+y^2-2x+4y+A+5)\,\mathrm{d}s$$

在 L 上 $x^2+y^2=4$，且由对称性知 $\oint_L x\,\mathrm{d}s=\oint_L y\,\mathrm{d}s=0$，解得 $A=\frac{36}{1-4\pi}$.

（13）【答案】: $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

（14）【解】: 由二维正态分布知: $E(X)=E(U-bV)=2(1-b)$， $E(Y)=E(V)=2$；

$E(XY)=E((U-bV)V)=E(UV)-bE(V^2)=Cov(U,V)+E(U)E(V)-b[D(V)+(E(V))^2]$

$=(\frac{1}{2}\times2\times1+4)-b(1+4)=5(1-b)$；

由独立一定不相关: $E(XY)=E(X)E(Y)$，所以 $b=1$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）【解】: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{e^t}{\cos y^2\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{e^t}{\cos y^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e^t}{\cos y^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}=\dfrac{e^t\sqrt{1+t^2}}{\cos y^2}+\dfrac{2ye^{2t}\sin y^2}{(\cos y^2)^3}$.

（16）【解】: $I=\dfrac{1}{4}\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 补$\Sigma_1$： $z=0\,(x^2+y^2\le 4)$，并取上侧.

$$I=\frac{1}{4}\left[\ \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right].$$

设Σ与Σ_1围成空间立体为Ω，由高斯公式，

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2\cdot 2\cdot 1=-\frac{16}{3}\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi\cdot 2^2=-8\pi,$$

所以 $I=\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{16}{3}\pi+8\pi\right)=\dfrac{2}{3}\pi$.

（17）【证法一】: 原不等式等价于$(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\ge 0$，令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，则

$f(1)=0,\ f'(x)=2x\ln x+2-x-\dfrac{1}{x},\ f'(1)=0,\ f''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2},\ f''(1)=2$，

$f'''(x)=\dfrac{2(x^3-1)}{x^3}$，当$x>1$时， $f'''(x)>0,\ f''(x)>f''(1)=2,\ f'(x)>f'(1)=0$，即函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递增，因此当$x>1$时， $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\ge f(1)=0$；

当$0<x<1$时 $f'''(x)<0,\ f''(x)>f''(1)=2,\ f'(x)<f'(1)=0$，即函数$f(x)$在区间$(0,1]$上单调递减，因此当$0<x<1$时， $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\ge f(1)=0$.

【证法二】: 当$x=1$时显然有$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$；

当$x>1$时，不等式等价于$\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\ge 0$， 令 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$，则有

$f(1)=0,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}=\dfrac{1+x^2}{x(x+1)^2}>0$， 即函数$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递增，因此当$x>1$时，有 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\ge f(1)=0$；

当$0<x<1$时，不等式等价于$\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\le 0$，由前面的讨论可知函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}$在区间$(0,1]$上单调递减，因此当$0<x<1$时，有 $f(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x+1}\le f(1)=0$.

（18） 【解】 （I）由 $y=nx^2+\dfrac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$ 得 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，又两条抛物线所围成的图形关于$y$轴对称，故 $S_n=2\int_0^{a_n}[nx^2+\dfrac{1}{n}-(n+1)x^2-\dfrac{1}{n+1}]dx$

$$=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]dx=\frac{4}{3n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}$$

（II）由（1）的结果，$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{4}{3n(n+1)}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4}{3}\lim\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{4}{3}。$$

(19) 【解】:（I）由定积分的几何意义知 $\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}x^2$，当 $x\in(0,1)$ 时

$$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\,\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\,\mathrm{d}t=x^2-x+\frac{1}{2}$$，当 $x\geq 1$ 时有

$$\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t=x-\frac{1}{2}$$，从而 $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi+2}{2}x^2-x+\frac{1}{2}, x\in[0,1],\\ \frac{\pi}{2}x^2+x-\frac{1}{2}, \quad x>1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}(2+\pi)x-1, x\in(0,1],\\ \pi x+1, \quad x>1,\end{cases}$ 由 $f'(x)$ 的表达式可知 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2+\pi}]$ 上单减，在 $[\frac{1}{2+\pi},+\infty)$ 上单增，因而 $f(\frac{1}{2+\pi})=\frac{1+\pi}{2(2+\pi)}$ 是函数的极小值，同时也是最小值；

(II) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内没有最大值

（20）【解】:(1)由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$ $\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量。又 $\eta=(1\quad 2\quad -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$，知 $\xi_3=(1\quad 2\quad -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\xi_3)$ 则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（2）$A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

（21）【解】（I）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$，$\lambda_1=\lambda_2=6$ $\qquad\lambda_3=-2$

由已知 A 可对角化，故 $\lambda=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量

由 $R(6E-A)=R\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$，$\qquad$ 得 $a=0$.

（II）由（1）得 $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$，$\quad$ 二次型矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$，知二次型：$x^TAx=x^TA_1x$ 特征值 6，7，-3

对 $\lambda=6$ $\qquad$ 由 $(6E-A_1)x=0$ $\qquad$ 得 $\alpha_1=(0.0.1)^T$

对 $\lambda=7$ $\qquad$ 由 $(7E-A_1)x=0$ $\qquad$ 得 $\alpha_2=(1.1.0)^T$

对 $\lambda=-3$ $\qquad$ 由 $(-3E-A_1)x=0$ $\qquad$ 得 $\alpha_3=(1.-1.0)^T$

经单位化 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad\beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\quad$ 令 $P=(\beta_1\quad\beta_2\quad\beta_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$

又 A^2 特征值为 6^2，7^2，3^2 $\qquad$ 经过 $x=Py$ $\quad$ 有 $x^TA^2x=36y_1^2+49y_2^2+9y_3^2$。

（22）【解】(I)由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，所以$1=\int_0^1 xdx+\int_1^2(a-x)dx=\frac{1}{2}+a-\frac{3}{2}=a-1,\ a=2$

(II) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x tdt\ , & 0\le x<1\\ \int_0^1 tdt+\int_0^x(2-t)dt, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}(1+4x-x^2), & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

(III) 对应$Y=F(X)$的函数为分布函数$y=F(x)$，单调非降的连续函数，且$0\le y\le 1$，因此

$y<0,G(y)=0;\quad y\ge 0,G(y)=1;$

$0\le y<1,\ G(y)=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F(F^{-1}(y))=y;$

所以有$Y=F(X)$的分布函数 $G(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y>0\end{cases}$ 　　4）$P\{2Y^2\le E(Y)\}=P\{2Y^2\le\frac{1}{2}\}=P\{|Y|\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$

（23）【解】　（I）　由于 $\mu=\frac{a+b}{2}=\theta_0+\frac{\theta}{2}$，　令 $\mu=\bar{X}$，所以 $\theta_0+\frac{\theta}{2}=\bar{X}$，则 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=2(\bar{X}-\theta_0)$；

（II）　似然函数为$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}=\frac{1}{\theta^n}$，　$\theta_0<x_i<\theta_0+\theta$；又因为$\ln L=-n\ln\theta$，$\frac{d}{d\theta}\ln L=-\frac{n}{\theta}<0$，

所以满足$\theta_0<x_i<\theta_0+\theta$时，有$L$关于$\theta$单调减；即$\theta_0+\theta=\max\{x_i\}$，所以$\theta$的极大似然估计 $\hat{\theta}_L=\max\{x_i\}-\theta_0$；

（III）$E(\hat{\theta}_L)=E(\max\{X_i\})-\theta_0$，

其中：X 的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta_0\\ \frac{x-\theta_0}{\theta}, & \theta_0\le x<\theta_0+\theta\\ 1, & x\ge\theta_0+\theta\end{cases}$，

$\hat{\theta}_L$ $U=\max\{X_i\}$的分布函数为$F_U(z)=(F(z))^n=\begin{cases}0, & z<\theta_0\\ \frac{(z-\theta_0)^n}{\theta^n}, & \theta_0\le z<\theta_0+\theta\\ 1, & z\ge\theta_0+\theta\end{cases}$，

对应概率密度为$f_U(z)=\begin{cases}\frac{n(z-\theta_0)^{n-1}}{\theta^n}, & \theta_0\le z<\theta_0+\theta\\ 0\ , & 其他\end{cases}$　，由此可知：

$E(\max\{X_i\})=\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} z\frac{n(z-\theta_0)^{n-1}}{\theta^n}dz=\frac{n}{\theta^n}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\theta} z(z-\theta_0)^{n-1}dz$，作代换$z-\theta_0=t, dz=dt$，

所以$E(\max\{X_i\})==\frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta}(\theta_0+t)t^{n-1}dt=\theta_0+\frac{n}{n+1}\theta$，则$E(\hat{\theta}_L)=E(\max\{X_i\})-\theta_0=\frac{n}{n+1}\theta$，即

$\hat{\theta}_L=\max\{x_i\}-\theta_0$不是$\theta$的无偏估计。

绝密★启用前

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学一（模拟五）答案

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）【解】: $f(x)=nx^{n-1}\sin x+x^n\cos x\sim(n+1)x^n$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{2x(\sqrt{1+x^4}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n(n+1)x^{n-1}}{x^5}$，故 $n=6$，答案 D.

（2）【解】: $f'(a)f'(b)<0$，不妨设 $f'(a)>0,f'(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 必在在 (a,b) 内取得最大值，即 $\exists x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，此时必有 $f'(x_0)=0$.

(3).【解】答案: A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加，

当 $x_1>x_2$，$y_1<y_2$ 时，$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

（4）【解】答案:（C）.

由对称性知 $\oint_\Gamma xy\,ds=\oint_\Gamma xz\,ds=\oint_\Gamma yz\,ds$, $\oint_\Gamma x^2ds=\oint_\Gamma y^2ds=\oint_\Gamma z^2ds$. 又由 $\oint_\Gamma(x+y+z)^2ds=\oint_\Gamma 0\,ds=0$，知 $\oint_\Gamma(-2xy)\,ds=\oint_\Gamma z^2ds$，所以

$\oint_\Gamma(x-y)^2ds=\oint_\Gamma(x^2-2xy+y^2)\,ds=\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,ds=\int_\Gamma ds=\Gamma$ 的弧长 $=2\pi$.

（5）【解】答案（D）

由于 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$, 则 λ 为 1 或 2 或 3，所以 $E-A$、$2E-A$、$3E-A$ 可能不可逆，选(D)

（6）【答案】:（B）

（7）【解】【答案】:（D）

$EXY > EXEY$,即 $EXY-EXEY>0$，所以

$D(X-Y)=DX+DY-2(E(XY)-E(X)E(Y))<DX+DY$。

（8）【解】: 应选(C).

因为 A 和 B 互不相容，于是 $P(X=1,Y=1)=P(AB)=0$，

$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)$，

$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)$，

$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)$.

因此 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-P(A)P(B)$，

$D(X)=P(A)(1-P(A))$，$D(Y)=P(B)(1-P(B))$，$\rho=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}<0$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

（9）【解】: 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}<0\,(x>e)$，那么函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(x)>0$，由此可得

$$n^{\frac{1}{n}}\ge\left(\cos\frac{\ln 3}{3}+\sin\frac{\ln 4}{4}+\cdots+\cos\frac{\ln(n+2)}{n+2}\right)^{\frac{1}{n}}\ge\left(n\cos\frac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cos\dfrac{\ln 3}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼原理知原式 $=1$.

（10）【解】: 有题设可知 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]=0$, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，

左式 $=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{\cos x-1}{x}]=f'(0)=1$，所以 $f'(0)=1$，所以所求切线方程为 $y=x+1$.

(11)【解】答案: 4

$$原式=\int_0^{2\pi}[\int_0^y\frac{|\sin y|}{y}dx]\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{|\sin y|}{y}\cdot y\,dx=\int_0^{2\pi}|\sin y|\,dy=4.$$

（12）【解】答案: πa

$$I=\oint_L\frac{x^2+y^2\sin x}{a^2}ds=\frac{1}{a^2}\oint_L(x^2+y^2\sin x)\,ds\,.$$

因为 L 关于 y 轴对称，而 $y^2\sin x$ 是关于 x 轴的奇函数，所以

$$\oint_L y^2\sin x\,ds=0,$$

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L x^2ds=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}a^2\sin^2\theta\cdot a\,d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=4a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi a\,.$$

或由轮换对称性

$$I=\frac{1}{a^2}\oint_L x^2ds=\frac{1}{2a^2}\oint_L(x^2+y^2)\,ds=\frac{1}{2a^2}\oint_L a^2ds=\frac{1}{2a^2}\times a^2\times 2\pi a=\pi a\,.$$

（13）【答案】：-10

（14）【解】：由于 $n\overline{X}=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim B(n,p)$，

所以 $P\{n\overline{X}>2\}=1-P\{n\overline{X}\le 1\}=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

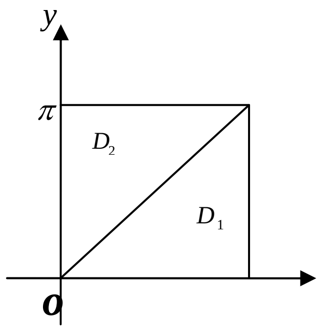
（15）【解】：（Ⅰ）由定积分的几何意义知 $\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{2}x^2$，当 $x\in(0,1)$ 时

$\int_0^1|x-t|\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1(t-x)\mathrm{d}t=x^2-x+\dfrac{1}{2}$，当 $x\ge 1$ 时有

$\int_0^1|x-t|\mathrm{d}t=x-\dfrac{1}{2}$，从而 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi+2}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}, x\in[0,1],\\ \dfrac{\pi}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2},\quad x>1,\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}(2+\pi)x-1, x\in(0,1],\\ \pi x+1,\quad x>1,\end{cases}$ 由 $f'(x)$ 的表达式可知 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{2+\pi}]$ 上单减，在 $[\dfrac{1}{2+\pi},+\infty)$ 上单增，因而 $f(\dfrac{1}{2+\pi})=\dfrac{1+\pi}{2(2+\pi)}$ 是函数的极小值，同时也是最小值；

（Ⅱ）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因而 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内没有最大值



（16）.【解】如图所示，将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2，所以

$$I=\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}y\sin x\sin y\,d\sigma$$

在利用积分得轮换对称性知

$$\begin{aligned}I&=2\iint\limits_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma\\&=2\int_0^\pi\left[\int_0^x x\sin x\sin y\,dy\right]dx\\&=2\int_0^\pi\left[x\sin x\cdot(1-\cos x)\right]dx\\&=2\int_0^\pi x\,d\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)\\&=2x\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin^2x\right)dx=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi\,.\end{aligned}$$

（17）【证明】：（Ⅰ）令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，对函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上应用 Rolle 定理知 $\exists c\in(a,b)$ 使得 $F'(c)=f(c)=0$，令 $G(x)=e^{-x}f(x)$，则 $G(a)=G(c)=G(b)=0$，对函数 $G(x)$ 分别在区间 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上应用 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(a,c),\eta\in(c,b)$ 使得 $G'(\xi)=G'(\eta)=0$，即有

$f'(\xi)-f(\xi)=f'(\eta)-f(\eta)=0$；

（Ⅱ）令 $H(x)=e^x[f'(x)-f(x)]$，则有 $H(\xi)=H(\eta)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\zeta\in(\xi,\eta)$ 使得 $H'(\zeta)=e^\zeta[f''(\zeta)-f'(\zeta)]+e^\zeta[f'(\zeta)-f(\zeta)]=e^\zeta[f''(\zeta)-f(\zeta)]=0$，即有 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

（18）【解】 （I） $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xd\sin x=\left.\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}$

$I=\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$，令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x),x\in[-1,1)$

$I=f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2})$

（II） $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$， $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

令 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n$，易求收敛区间为 $(-1,1)$。

$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n=x^2(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2})=x^2(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1})'$

$=x^2[(\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n x^n)']'=\frac{2x^2}{(1+x)^3}$，

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}=f(\frac{1}{2})=\frac{4}{27}$

因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$.

(19)【解】：先求 $z(x,y)$ 的驻点，分别在方程的两边同时对 x 求偏导及同时对 y 求偏导，

$$6x^2-6y+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_x'=0,$$

$$-6x+6y+\frac{1}{e}(\ln z+1)z_y'=0.$$

令 $z_x'=0,z_y'=0$，得 $\begin{cases}y=x^2,\\y=x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 故 $z(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$．代入原方程，得 $z(0,0)=1$， $z(1,1)=e$． 再求二阶偏导，

$$12x+\frac{1}{e}\frac{1}{z}(z_x')^2+\frac{1}{e}(\ln z+1)z''_{xx}=0,$$

$$6+\frac{1}{e}\frac{1}{z}(z_y')^2+\frac{1}{e}(\ln z+1)z''_{yy}=0,$$

$$-6+\frac{1}{e}\frac{1}{z}z_x'z_y'+\frac{1}{e}(\ln z+1)z''_{xy}=0\ .$$

将 $(0,0)$ 代入上式，得 $A_1=z''_{xx}(0,0)=0$， $B_1=z''_{xy}(0,0)=6e$， $C_1=z''_{yy}(0,0)=-6e$．

由 $A_1C_1-B_1^2=-36e^2<0$ 知函数在点 $(0,0)$ 处不取极值． 将 $(1,1)$ 代入上式得

$A_2=z''_{xx}(1,1)=-6e$， $B_2=z''_{xy}(1,1)=3e$， $C_2=z''_{yy}(1,1)=-3e$．

由于 $A_2C_2-B_2^2=9e^2>0$，且 $A_2<0$，可知 $z(1,1)=e$ 为 $z(x,y)$ 的极大值．

（20）【解】:（I）由题设 $\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3$ 均为 $Bx=0$ 的解　$B\neq 0$

知 $\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3$ 线性相关（否则由 $Bx=0$ 基础解系所含向量个数≥3　$\Rightarrow B=0$　矛盾！）于是

$$0=\left|\beta_1\quad \beta_2\quad \beta_3\right|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a$$　故 $a=3b$　$\because AX=\beta_3$ 有解　　$\therefore r(A)=r(A\quad \beta_3)$

$$(A\quad \beta_3)\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix}1&3&9&6\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\frac{5-b}{3}\end{pmatrix}$$　由 $r(A)=r(A\quad \beta_3)\Rightarrow \frac{5-b}{3}=0\quad b=5$

(II) 由 $\beta_1\quad \beta_2$ 秩为 2　知 β_1,β_2 线性无关

故 $Bx=0$ 至少有两个线性无关解 $\beta_1,\beta_2\ \because B\neq 0$　　$r(B)\geq 1$　　因而基础解系由 $3-r(B)\leq 2$ 个线性无关解向量组成　于是 $\beta_1\quad \beta_2$ 可作为 $Bx=0$ 基础解系。故通解为 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_1(0\quad 1\quad -1)^T+k_2(15\quad 2\quad 1)^T$ 。

（21）【解】:（1）　$f=x^T\mathrm{A}x$　　其中　$A=\begin{pmatrix}1&b&b&b\\b&1&b&b\\b&b&1&b\\b&b&b&1\end{pmatrix}$

$|\lambda\mathrm{E}\text{-}\mathrm{A}|=(\lambda-(1+3b))[\lambda-(1-b)]^3$ ，　$\lambda_1=1+3b$　　$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1-b$

解方程 $(\lambda_1\mathrm{E}-\mathrm{A})x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$

解方程 $(\lambda_2\mathrm{E}-\mathrm{A})x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$

正交化　　$\xi_2=\alpha_1$　　$\xi_3=(-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$　　$\xi_4=(-1,-1,-1,3)^{\mathrm{T}}$

单位化　得

$\eta_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$　　$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$　　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$　　$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,-1,3)^{\mathrm{T}}$

令 $U=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)$,则 U 为正交阵，且 $\mathrm{U}^{-1}\mathrm{AU}=U^TAU=\begin{pmatrix}1+3b&&&\\&1-b&&\\&&1-b&\\&&&1-b\end{pmatrix}$

标准形　$(1+3b)y_1^2+(1-b)y_2^2+(1-b)y_3^2+(1-b)y_4^2$ 。

（22）【解】 （I） X与Y 的取值分别是：i, j 分别取 -1,0,1，

1） $i<j, P\{X=i,Y=j\}=P\{\max\{U,V\}=i,\min\{U,V\}=j\}=0$

2） $i>j, P\{X=i,Y=j\}=P\{\max\{U,V\}=i,\min\{U,V\}=j\}$

$$=P\{U=i,V=j\}+P\{U=j,V=i\}=\frac{2}{9}\ ;$$

3） $i=j, P\{X=i,Y=j\}=P\{\max\{U,V\}=i,\min\{U,V\}=i\}$

$$=P\{X=i,Y=i\}=\frac{1}{9}$$

所以(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
-1	1/9	0	0
0	2/9	1/9	0
1	2/9	2/9	1/9

（II） $P\{|XY|=1\}$

$$=P(X=-1,Y=1)+P(X=1,Y=-1)+P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=1)=\frac{4}{9}$$

（III） X与Y 的边缘分布律分别为

X	-1	0	1
p	1/9	3/9	5/9

Y	-1	0	1
P	5/9	3/9	1/9

所以 $E(X)=\frac{4}{9}$ ， $E(Y)=-\frac{4}{9}$

方差为$D(X)=D(Y)=\frac{20}{81}$， 且

$E(XY)=\frac{2}{9}$ ，

$Cov\{X,Y\}=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{34}{81}$， 则相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{34/81}{20/81}=\frac{17}{10}\ 。$$

（23）【解】:（I）似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$ ，取对数可知：

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$\frac{d\ln L}{d\mu}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu)=0\ ,\quad \hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{X}\ ;$$

对应极大似然值为$\hat{\mu}=\overline{x}=10.84$；

（II）产品的平均寿命μ的 95%的置信区间：（ $\overline{X}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ ）经计算：

样本均值 $\overline{x}=10.84,$ 样本标准差 $s=0.856$，带入可得：$10.84\pm 2.776\times\frac{0.856}{\sqrt{5}}$=$10.84\pm 1.063$，

则μ的 95%的置信区间（9.777，11.903）

（III）方差未知σ^2， 单侧检验问题

$H_0:\mu\le 10.0,\ H_1:\mu>10.0$ 利用 t 检验得单侧上侧分位点：$t_{\alpha}(4)=2.132,$ 可知H_0的拒绝域为：$I_c=\{t/\ |t|\ge 2.132\}$，计算知：$t=\frac{\overline{x}-10.0}{s/\sqrt{n}}=2.194\in I_c$，拒绝$H_0$，认为这批产品平均寿命不低于 10 千小时。