(16)(本题满分 10 分)已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$,(Ⅰ)求收敛域;(Ⅱ)设幂级数的和函数为 $f(x)$,证明对 $\forall x\in(0,1)$,有 $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$.

(17)(本题满分 10 分)求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2$ 在区域 D 上的最大值与最小值,其中 D 为 $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 且 $y\ge\frac{1}{2}x-1$.

(18)(本题满分 10 分)设 $x>0$ 且 $x\ne 1$,证明 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

(19)(本题满分 10 分)计算曲线积分 $\int_L[f(y)e^x-y]dx+[f'(y)e^x-1]dy$,其中 f 具有连续导数,且 $f(0)=f(1)=0$,L 为过 $O(0,0)$, $A(1,1)$ 两点,且以 OA 为直径的右下半圆周线($y\le x$),取逆时针方向.

(20)(本题满分 11 分)设线性齐次方程组 $Ax=0$ 为 $\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$ 在此方程组基础上添加一个方程 $2x_1+ax_2-4x_3+bx_4=0$,得方程组 $Bx=0$.

(Ⅰ)求方程组 $Ax=0$ 的基础解系和通解;

(Ⅱ)问 a,b 满足什么条件时,$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

(21)(本题满分 11 分)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ $(A^T=A)$,满足 $tr(A)=1$,$AB=O$,其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}$,(Ⅰ)求正交变换 $x=Py$,化二次型 f 为标准形;(Ⅱ)问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面?(Ⅲ)求该二次型.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 $X\sim E(1)$,$[x]$ 表示取整函数.(Ⅰ)令 $U=\min\{2,[X]\}$,求 U 的概率分布;(Ⅱ)令 $Y=X-[X]$,求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$;(Ⅲ)求 $E[X]$.

(23)(本题满分 11 分)设 (X_1,X_2,X_3) 为来自总体 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 的一个简单随机样本.

(Ⅰ)求 $P\{X_1X_2=X_3+1\}$;(Ⅱ)求 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布律.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学(一)模拟(一)

(科目代码:301)

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 的可去间断点，则 a,b 的取值范围是（ ）.

（A）$a=1$，b 为任意实数　　（B）$a\neq 1$，b 为任意实数

（C）$b=-1$，a 为任意实数　　（D）$b\neq -1$，a 为任意实数

（2）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x+2y}{(x-1)^2+(y-1)^2}=1$，则下列说法不正确的是（ ）.

（A）$f(1,1)=0$　　（B）$f_x'(1,1)=2,\ f_y'(1,1)=-2$

（C）$f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微　　（D）$f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处取极值

（3）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则以下结论正确的有（ ）个.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛；　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛；　③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛；　④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）二次积分 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}dx\int_0^{Rx}f(\sqrt{x^2+y^2})dy+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 化为极坐标形式的二次积分为（ ）.

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R f(r)rdr$　　（B）$\int_0^{\arctan R}d\theta\int_0^R f(r)rdr$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R f(r)dr$　　（D）$\int_0^{\arctan R}d\theta\int_0^R f(r)dr$

（5）设 A 是三阶非零矩阵，满足 $A^2=O$．若线性非齐次方程组 $Ax=b$ 有解，则其线性无关解向量的个数是（ ）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（6）设 A 为三阶可逆矩阵，将 A 的第一行的 3 倍加到第二行得到 B，则下列命题正确的是（ ）.

（A）将 A^{-1} 的第一行的 3 倍加到第二行得到 B^{-1}

（B）将 A^{-1} 的第一行的 -3 倍加到第二行得到 B^{-1}

（C）将 A^{-1} 的第一列的 -3 倍加到第二列得到 B^{-1}

（D）将 A^{-1} 的第二列的 -3 倍加到第一列得到 B^{-1}

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

超 越 考 研

（7）设随机事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=0.5,P(C)=0.4$，则 $P(C-A|A\cup BC)=$（ ）.

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{1}{7}$　　（C）$\frac{1}{6}$　　（D）$\frac{1}{4}$

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$DX=4$，正整数 $s\le n,t\le n$，则 $Cov\left(\frac{1}{s}\sum\limits_{i=1}^{s}X_i,\frac{1}{t}\sum\limits_{j=1}^{t}X_j\right)=$（ ）.

（A）$4\max(s,t)$　　（B）$4\min(s,t)$　　（C）$\dfrac{4}{\max(s,t)}$　　（D）$\dfrac{4}{\min(s,t)}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\arccos\frac{1}{x}dx=$________.

（10）已知方程 $y'+y=\sin x+\cos x$ 的解均为方程 $y''+y'+ay=f(x)$ 的解，其中 a 为常数，则 $f(x)=$________.

（11）设 $f(x)=\int_0^x e^{-|t|}dt$，则 $\int f(\ln x)dx=$________.

（12）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}[1+\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}}=$________.

（13）已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$，则 $f(A)=$________.

（14）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，其中 σ^2 已知．如果 μ 的置信度为 90% 的置信区间为 $(9.765,10.235)$，且 $\Phi(1.645)=0.95,\Phi(1.96)=0.975$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 μ 的置信度为 95% 的置信区间为________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)\neq0$，（Ⅰ）证明当 $x\to0$ 时，$\int_0^x f(t)dt\sim f(0)x$；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\dfrac{1}{xf(0)}]$；（Ⅲ）设 $f'(x)$ 连续，且 $f'(0)\neq0$，如果当 $x\neq0$ 时，$\int_0^x f(t)dt=xf(\xi)$，其中 ξ 介于 x 与 0 之间．求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi}{x}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

20、21全程考研资料请加群712760929

（16）（本题满分 10 分）设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，变换 $u=ax+y, v=x+by$，把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0$，试求 a,b 的值.

（17）（本题满分 10 分）设曲线 $y=x^{\frac{n-1}{n}}, y=x^{\frac{n}{n+1}}$（$x>0, n\geq 1$ 为整数）围成图形的面积记为 a_n，试求级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，若存在 $x_1,x_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)x\sin x dx=f(x_1)+f(x_2)$，证明：在 $(0,\pi)$ 内存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

（19）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(1)=1, f'(1)=7$ 求 $f(x)$，使曲线积分 $I=\int_{l(AB)}[x^2 f'(x)-11xf(x)]dy-32f(x)ydx$ 与路径无关，并对点 $A(1,1),B(0,3)$ 计算曲线积分的值.

（20）（本题满分 11 分）已知三阶方阵 A,B 满足关系式 $A^2-2AB=E$.（Ⅰ）证明 $AB=BA$；（Ⅱ）若 $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&a\\0&0&5\end{pmatrix}$，求秩 $r(AB-2BA+3A)$.

（21）（本题满分 11 分）设 A 是三阶实对称矩阵，$|A|=-12$，A 的三个特征值之和为 1，且 $\alpha=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $(A^*-4E)x=0$ 的一个解向量.（Ⅰ）求矩阵 A；（Ⅱ）求方程组 $(A^*+6E)x=0$ 的通解.

（22）（本题满分 11 分）设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0或y<0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x\geq 0, 0\leq y<1,\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0, y\geq 1.\end{cases}$

（Ⅰ）分别求 X 和 Y 的概率分布；（Ⅱ）问 X 和 Y 是否相互独立？（Ⅲ）求 $P\{X+Y\leq 2\}$.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2}{3\theta^2}(2\theta-x), & 0<x\leq\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，（Ⅰ）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；（Ⅱ）求极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

①函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，若 $f(x)\ge g(x)$，则 $f'(x)\ge g'(x)$；

②函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，若 $f'(x)\ge g'(x)$，则 $f(x)\ge g(x)$；

③函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(x)\ge g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$；

④函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$，则 $f(x)\ge g(x)$；

则以上命题中正确的个数是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设 $f(x)=\sqrt{x^2+\sin^2 x}+x$，则曲线 $y=f(x)$ 有（　　）.

（A）两条斜渐近线　　（B）一条水平渐近线一条斜渐近线

（C）两条水平渐近线　　（D）一条斜渐近线，没有水平渐近线

（3）设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续二阶偏导数，且满足 $B^2-AC<0$，其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则点 (x_0,y_0)（　　）.

（A）必为 $f(x,y)$ 的极大值点　　（B）必为 $f(x,y)$ 的极小值点

（C）必不为 $f(x,y)$ 的极值点　　（D）可能不是 $f(x,y)$ 的极值点

（4）设函数 $f(x)>0$ 且单调递增，则积分 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin xdx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\tan xdx$ 的大小顺序为（　　）.

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_1>I_3>I_2$　　（C）$I_2>I_3>I_1$　　（D）$I_3>I_1>I_2$

（5）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$m\ne n,b$ 为 m 维列向量，则下列结论

①若 $r(A)=n$，则 $Ax=b$ 必有解；　　②若 $r(A)=m$，则 $Ax=b$ 必有解；

③ $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 必同解；　　④ $A^TAx=A^Tb$ 必有解

中正确的个数是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（6）A,B 同为 n 阶实对称矩阵，则 A,B 相似的充要条件为（　　）.

（A）A,B 等价　（B）A,B 合同　（C）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$　（D）A,B 的正负惯性指数相同

20、21全程考研资料请加群712760929

超　越　考　研

（7）设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $P\{X>x,Y>y\}=$（　　）.

（A）$1-F_X(x)F_Y(y)$　　（B）$[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$

（C）$2-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$　　（D）$1-F_x(x)-F_y(y)+F(x,y)$

（8）设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim F(1,1)$，记 $p_1=P\{X<1\}$，$p_2=P\{X>-1\}$，$p_3=P\{Y<1\}$，$p_4=P\{Y>1\}$ 则（　　）.

（A）$p_1<p_2,\ p_3<p_4$　　（B）$p_1=p_2,\ p_3<p_4$

（C）$p_1=p_2,\ p_3=p_4$　　（D）$p_1>p_2,\ p_3>p_4$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设连续函数 $y=y(x)$ 满足 $y(x)+1=\int_x^{\frac12}\frac{y(t)}{y^3(t)-t}dt$，则 $y=$________.

（10）设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases}x=t^2+t,\\ e^y\sin t-y=0\end{cases}$ 所确定的函数，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$________.

（11）设曲线 L 的方程为 $x^{\frac23}+y^{\frac23}=a^{\frac23}$ $(a>0)$，则积分 $\oint_L(x^{\frac43}+y^{\frac43}+x^{\frac13}y^{\frac13})\,ds$________.

（12）设 $f(x)=x^2(0\le x\le\pi)$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$，$n=1,2,\cdots$，则 $S(-\frac{\pi}{3})=$________.

（13）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&k\\2&-1\end{pmatrix}$，若存在矩阵 C，使得 $AC=B$，则 $k=$________.

（14）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，S^2 为样本方差，则根据切比雪夫不等式估计 $P\{0<S^2<2\sigma^2\}$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设 $0<x_1<1$，$x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt, n=1,2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

20、21全程考研资料请加群712760929

 20、21全程考研资料请加群712760929

（16）（本题满分 10 分）设 L 是直线 $3x+4y=12$ 介于两坐标轴间的线段，证明：

$$5e^{-\frac{9}{2}} \le \int_L e^{-\sqrt{x^3 y}} ds \le 5 \cdot$$

（17）（本题满分 10 分）将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

（18）（本题满分 10 分）设位于第一象限且在原点与 x 轴相切的光滑曲线 $y=y(x)$，$P(x,y)$ 为曲线上任一点，该点与原点间的弧长为 s_1，记 P 点的切线与 y 轴交点为 A，且 P,A 两点的距离为 s_2，已知：$x(3s_1+2)=2(x+1)s_2$，求该曲线方程.

（19）（本题满分 10 分）设 $y^2\mathrm{d}x+(2xy+1)\mathrm{d}y$ 是函数 $f(x,y)$ 的全微分，其中 $f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$，并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} zf(x,y)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+(y-1)^2=1$ 所截下的有限部分.

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}3&7&9\\1&7&11\\7&7&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&5&10\\-3&4&14\\6&7&2\end{pmatrix}$ 问是否存在 X，使得 $AX-A=BX$？若存在，求所有的 X；若不存在，说明理由.

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是1，试计算 a 的值，并用正交变换将二次型化为标准型.

（22）（本题满分 11 分）设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}axy+b\varphi(x,y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

其中 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, (x-1)^2+(y-1)^2\le 1, \\ 0, \quad\text{其它},\end{cases}$ $0\le a\le\dfrac{1}{4}$. 已知 X 和 Y 不相关.（Ⅰ）求常数 a,b；（Ⅱ）判别 X 和 Y 的独立性.

（23）（本题满分 11 分）设 (X_1,X_2) 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|X_1-X_2|$，（Ⅰ）求 S 的概率密度 $f_S(s)$；（Ⅱ）问 S 是否为 σ 的无偏估计?

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 有一阶连续导数，则下列说法正确的是（　）.

（A）若 $f(x)$ 是偶函数，且 $a\neq 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 一定不是奇函数

（B）若 $f(x)$ 是周期函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是周期函数

（C）若 $f'(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是奇函数

（D）若 $f'(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是偶函数

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\lambda}}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$（$\lambda$ 为常数）（　）.

（A）当 $\lambda<0$ 时发散　　（B）当 $\lambda\le\frac{1}{2}$ 时条件收敛

（C）当 $\lambda\ge\frac{1}{2}$ 时绝对收敛　　（D）当 $-\frac{1}{2}<\lambda\le\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$\lambda>\frac{1}{2}$ 时绝对收敛

（3）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(2x)}{\sin x}=1$，则（　）.

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(0,f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点　　（D）以上结论均不正确

（4）设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域 D 上具有一阶连续偏导数，$Pdx+Qdy$ 为某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，则下列各式中仅为 x 的函数是（　）.

（A）$Q-\frac{\partial}{\partial x}\int Pdy$　（B）$Q-\frac{\partial}{\partial y}\int Pdx$　（C）$P-\frac{\partial}{\partial x}\int Qdy$　（D）$P-\frac{\partial}{\partial y}\int Qdx$

（5）设 A 为三阶矩阵，λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量，α_3 是 A 的属于特征值 λ_2 的特征向量，则向量组 $\alpha_1+A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的必要条件是（　）.

（A）$\lambda_1=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$　　（B）$\lambda_1\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$

（C）$\lambda_2=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$　　（D）$\lambda_2\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$

（6）设 A 为 n 阶实对称阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 A^2 为正定阵的充要条件是（　）.

（A）A 正定　（B）A^* 正定　（C）$A^*x=0$ 有非零解　（D）$A^*x=0$ 仅有零解

（7）设随机变量 X 和 Y 相互独立，记 $p_1=P\{X^2+Y^2\le 1\}$，$p_2=P\{X+Y\le 2\}$，$p_3=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$，则（　）.

（A）$p_1\le p_2\le p_3$　（B）$p_1\le p_3\le p_2$　（C）$p_2\le p_3\le p_1$　（D）$p_3\le p_1\le p_2$

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，X 的分布函数为 $F(x)$．对于给定的实数 x，记 Y 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中小于或等于 x 的个数，若 $0<F(x)<1$，则 Y 的概率分布为（　）.

（A）$Y\sim U[0,n]$　（B）$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$　（C）$Y\sim B(n,F(x))$　（D）$Y\sim P(F(x))$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）已知方程 $x^3-\lambda x+2=0$ 有三个不相等的实根，则实数 λ 的取值范围为__________.

（10）$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x+y}$ 的通解为__________.

（11）曲线 $r=\sin\theta$ 所围成的图形绕直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 旋转一周的形成的旋转体体积为__________.

（12）设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)^2dv=$__________.

（13）设 A,B 为三阶矩阵，A 相似于 B，$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 为 A 的两个特征值，又 $|B^{-1}|=\frac{1}{3}$，则 $\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=$__________.

（14）设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=m,Y=n\}=\frac{1}{2^{m+1}}$，$m=1,2,\cdots$；$n=1,2,\cdots,m$，则 $P\{X=3|Y=2\}=$__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）（Ⅰ）设 $x>0$，证明函数 $f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ 单调递增；（Ⅱ）设 $0<x<1$，证明不等式 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x+(\ln 2-1)x^2$.

（18）（本题满分 10 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y=y(x)$ 满足

$$xy''+(1-x)y'-2y=0, y(0)=1, y'(0)=2,$$

（Ⅰ）证明：$(n+1)^2 a_{n+1}=(n+2)a_n \quad n=0,1,2\cdots$；（Ⅱ）求 $y(x)$ 的表达式.

（19）（本题满分 10 分）计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 zdydz+y^2 dzdx+(z^2-x)dxdy$，其中 Σ 是由 yOz 平面上的曲线 $z=e^y\ (0\le y\le 1)$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面，取下侧.

（20）（本题满分 11 分）已知两个向量组 $\alpha_1=(1,2,3)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$ 与 $\beta_1=(-1,2,t)^T,\beta_2=(4,1,5)^T$.（Ⅰ）问 t 为何值时，两个向量组等价？（Ⅱ）当两个向量组等价时，求出它们之间的线性表示式.

（21）（本题满分 11 分）设 4 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，且满足 $A^2=2A$.（Ⅰ）求二次型 x^TAx 的标准型；（Ⅱ）计算 $\left|E+A+A^2+A^3\right|$.

（22）（本题满分 11 分）已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{\frac{x(b-x)}{4}}\ (-\infty<x<+\infty)$，$2EX=DX$. 求（Ⅰ）常数 a,b；（Ⅱ）$E(X^2e^X)$.

（23）（本题满分 11 分）设某鱼池中有 n 条鱼，从中先捉到1200条鱼并分别做了红色记号后放回池中.（Ⅰ）令 X_n 表示再从池中任意捉出的1000条鱼中带有红色记号的鱼的数目，求 X_n 的分布律；（Ⅱ）如果发现此1000条鱼中有100条鱼做了红色记号. 试求 n 的最大似然估计值 $\hat{n}$.

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（四）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$，则下列函数中，在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒正、单调下降且为凹函数的是（　　）.

（A）$-f(x)$　　（B）$f(-x)$　　（C）$\dfrac{1}{f(-x)}$　　（D）$\dfrac{1}{f(x)}$

（2）已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$.如果 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\lambda}|a_n|$（常数 $\lambda>0$）存在，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x-3)^n$ 的收敛域为（　　）.

（A）$(2,4)$　　（B）$[2,4)$　　（C）$(2,4]$　　（D）$[2,4]$

（3）设 $f(x)=(x^2-1)^{2015}$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）$f^{(2015)}(0)=0$　　（B）$f^{(2015)}(1)+f^{(2015)}(-1)=0$

（C）$f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=0$　　（D）$f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=2015!\cdot 2^{2016}$

（4）设函数 $z=z(x,y)$ 由函数 $ze^z=f(x)f(y)$ 确定，其中 $f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(0)>0, f'(0)=0, f''(0)>0$，则 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点（　　）.

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）无法判断

（5）设 A,B 及 A^* 都是 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵，且 $A^TB=O$，则 $r(B)=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（6）设 A,B 为三阶实对称矩阵，且 A 相似于 B，B 特征值为 $0,0,2$，则 $Ax=0$ 线性无关的解向量的个数为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，且期望方差均存在，现有四个结论：

①$X=Y$　　②$P\{X=Y\}=1$　　③$F_X(x)=F_Y(x)$　　④$EX=EY, DX=DY$.

“$P\Rightarrow Q$”表示 P 成立则 Q 一定成立，则下列说法正确的是（　　）.

（A）②⇒①⇒③　　（B）①⇒③⇒④　　（C）③⇒①⇒②　　（D）④⇒②⇒③

（8）已知在检验假设 $H_0:\mu=\mu_0, H_1:\mu<\mu_0$ 时出现了第一类错误，则表明（　　）.

（A）$\mu=\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu<\mu_0$　　（B）$\mu<\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu=\mu_0$

（C）$\mu\geq\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu<\mu_0$　　（D）$\mu<\mu_0$ 为真，但接受了 $\mu\geq\mu_0$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}=$__________.

（10）曲线 $y=x^2\sqrt{1-x^2}$ 与 x 轴所围平面图形的面积为__________.

（11）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\varphi(az-by,bx-cz,cy-ax)=0$ 确定，其中 φ 具有连续偏导数，则 $c\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

（12）设平面 π 为曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2$ 在 $(1,1,2)$ 处的切平面，则原点到平面 π 的距离 $d=$___.

（13）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&a&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}$ 只有 2 个线性无关的特征向量，则 $a=$________.

（14）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}a-e^{-bx}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$ 若 $EX=\dfrac{1}{2}$，则 $E(X^2)=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+2\int_0^x(1-e^{t-x})f(t)dt$.

（Ⅰ）验证 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$，且 $f(0)=0, f'(0)=1$；（Ⅱ）求 $f(x)$.

（16）（本题满分 10 分）设函数 $g(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}dt$，求 $g(x)$ 的最小值.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$a<c<b$，$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx=0$.

（Ⅰ）证明存在 $\xi_1\in(a,c), \xi_2\in(c,b)$，使得 $f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1}f(x)dx, f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2}f(x)dx$；

（Ⅱ）证明存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=\int_a^{\eta}f(x)dx$.

（17）（本题满分 10 分）求 $f(x)=x+x^2$ 在 $-\pi<x<\pi$ 上的傅立叶级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若

$$f(x)=f(a+b-x),\ g(x)+g(a+b-x)=m\ （常数），$$

（Ⅰ）证明 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$；（Ⅱ）由（Ⅰ）计算 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{(e^x+1)(\cos^2 x+1)}dx$.

（19）（本题满分 10 分）计算曲线积分

$$I=\int_L(\frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}-y)\mathrm{d}x+(\frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})\mathrm{d}y,$$

其中 L 是从点 $A(1,1)$ 到点 $B(-1,-1)$ 的左上半圆 $x^2+y^2=2\ (y\geq x)$.

（20）（本题满分 11 分）已知 5×4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 5 维列向量，其中 α_1,α_4 线性无关，且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4=0$，若 $\beta=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶实对称阵，其主对角元素之和为 2，且齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\xi_1=(1,1,0)^T$，非齐次方程组 $Ax=\beta$ 有不同解 $\eta_1=(1,1,2)^T$，$\eta_2=(2,2,3)^T$，其中 $\beta=(0,0,1)^T$，（Ⅰ）证明 $2\eta_1-\eta_2$ 为 A 的特征向量.（Ⅱ）求 A^n .

（22）（本题满分 11 分）设盒中有一个红球和两个白球，现依次不放回地将其逐个取出. 记 X 为首次取得红球时的取球次数，Y 为首次取得白球时的取球次数.（Ⅰ）求 X 和 Y 的联合概率分布；（Ⅱ）求 X 和 Y 的相关系数 ρ；(Ⅲ) 记 $U=XY,V=\max\{X,Y\}$，求 $P\{U=V\}$.

（23）（本题满分 11 分）设随机变量 $U\sim N(0,1),\chi^2\sim\chi^2(n)$，$0<\alpha<1$，数 U_α 和 $\chi^2_\alpha(n)$ 分别满足 $P\{U>U_\alpha\}=\alpha$ 和 $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$. 当 n 充分大时，利用中心极限定理证明

$$\chi^2_\alpha(n)\approx n+\sqrt{2n}U_\alpha,\quad \chi^2_{1-\alpha}(n)\approx n-\sqrt{2n}U_\alpha .$$

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（五）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x),g(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有二阶连续导数，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有相同的凸凹性，且在点 (x_0,y_0) 处相切，有相同的曲率（曲率不为 0），则当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-g(x)$ 是 $(x-x_0)^2$ 的（　　）．

（A）高阶无穷小　（B）低阶无穷小　（C）等价无穷小　（D）同阶但不等价无穷小

（2）已知 $f_x'(0,0)=a, f_y'(0,0)=b$，则（　　）．

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续　（B）$df(x,y)\big|_{(0,0)}=adx+bdy$

（C）$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=a\cos\alpha+b\cos\beta$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是任一向量 $\vec{l}$ 的方向余弦

（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为 $-a$

（3）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}$，$x\in[0,1]$，则下列结论不正确的是（　　）．

（A）$f(x)$ 连续　（B）$f(x)$ 可导　（C）$f(x)$ 有极值点　（D）曲线 $y=f(x)$ 有拐点

（4）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$I_1=\iint\limits_D |xy|dxdy$，$I_2=\iint\limits_D (e^{x^2+y^2}-1)dxdy$，$I_3=\iint\limits_D \ln(1+|xy|)dxdy$，则三者大小依次为（　　）

（A）$I_1\le I_2\le I_3$　（B）$I_1\le I_3\le I_2$　（C）$I_3\le I_1\le I_2$　（D）$I_3\le I_2\le I_1$

（5）设 A 为 n 阶方阵，且秩 $r(A)=s$，β 为 n 维列向量，已知方程组 $Ax=0$ 与方程组 $\beta^Tx=1$ 没有公共解，则（　　）．

（A）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s$　（B）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}>s+1$　（C）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s+1$　（D）无法判断

（6）设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 为正定阵，则必有（　　）．

（A）$a_{11}+a_{22}>2a_{12}$　（B）$a_{11}+a_{22}<2a_{12}$　（C）$a_{11}+a_{22}\le 2a_{12}$　（D）$a_{11}+a_{22}\ge 2a_{12}$

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $0<P(C)<1$，下列命题正确的是（　　）．

（A）若 A,B 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$

（B）若 A,C 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A)P(B|C)$

（C）若 A,B,C 两两独立，则 $P(AB|C)=P(AB)$

20、21全程考研资料请加群712760929

（D）若 A,B,C 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A)P(B)$

（8）下列函数中，能作为某二维随机变量 (X,Y) 分布函数的是（　　）．

（A）$F(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge0,y\ge0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　（B）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{x-y}, & x\ge0,y\ge0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（C）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　（D）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-(x+y)}, & x\ge0,y\ge0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2-2x=2e^y$ 确定，则 $y=y(x)$ 的拐点为________．

（10）设 $e^x\sin x$ 与 x 为某常系数线性齐次微分方程的两个特解，则阶数最低的微分方程为________．

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=$________．

（12）已知 $f(x^2+y^2,x^2-y^2)=\dfrac{9}{4}-2[(x^2+\dfrac14)^2+(y^2-\dfrac14)^2]$，$D:x^2+(y+\dfrac12)^2\le\dfrac94$，则 $\iint\limits_D\sqrt{f(x,y)}\,d\sigma=$________．

（13）设 $A=\begin{pmatrix}-1&2&5\\0&1&2\\1&a&4-3a\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，则 $A^*x=0$ 的通解为________．

（14）设随机变量 X_1,X_2 独立，且同服从 $N(0,1)$．$(Y_1,Y_2)=(X_1,X_2)A$，其中 A 为二阶正交矩阵，则下列结论中，正确的个数为________．

① $EY_1=EY_2=0$　② $DY_1=DY_2=1$　③ $Cov(Y_1,Y_2)=0$　④ Y_1 与 Y_2 相互独立

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设 $z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$，f 具有二阶连续偏导数，φ 具有二阶导数，且 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$．

（16）（本题满分 10 分）在 x 轴上有一动点 P 从点 $(0,0)$ 开始以 $1\,m/s$ 的速度向 x 轴正向移动，在 xOy 面上另一动点 M 同时从点 $(0,1)$ 开始以 $2\,m/s$ 的速度移动，且点 M 运动方向总是对着点 P．（Ⅰ）求动点 M 运动轨迹方程；（Ⅱ）求点 M 追赶到点 P 时，点 P 所走过的路程．