超越考研数(一)·模一答案

一、选择题

1. D 解：由题意可知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 存在，而

$$\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{ax-(x-\frac12x^2+\frac13x^3)+o(x^3)}{x+b(x-\frac16x^3)+o(x^3)}=\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x+\frac12x^2-\frac13x^3+o(x^3)}{(1+b)x-\frac b6x^3+o(x^3)}$$

所以只有当 $b\neq-1$ 时，该极限存在，选(D)

2. D 解：$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}(x-1)^2+(y-1)^2=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}[f(x,y)-2x+2y]=\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}f(x,y)=0=f(1,1)$，故(A)正确

记 $x-1=\Delta x$，$y-1=\Delta y$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+2y}{(x-1)^2+(y-1)^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(1+\Delta x,1+\Delta y)-f(1,1)-2\Delta x+2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1$

从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta z-2\Delta x+2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$，故 $\Delta z=2\Delta x-2\Delta y+o(\rho)$，结合可微分的必要条件，所以(B)、(C)正确，(D)选项不正确，由(B)知 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处不取极值。

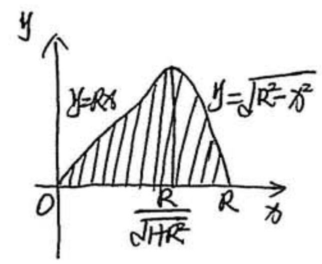
3. B 解：①不正确. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$ 收敛，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt n})^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac1n$ 发散

②正确. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，当 n 充分大时，有 $|b_n|\le1$，此时 $b_n^2\le|b_n|$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛.

③正确. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，数列 $\{a_n\}$ 必有界，存在 $M>0$，使得 $|a_n|\le M\ (n=1,2,\cdots)$，此时 $|a_nb_n|\le M|b_n|$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

④不正确. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt n}+\frac{(-1)^n}{n^2})$ 条件收敛.

4. B. 解：积分区域如图：



5. C 解：$A\neq0$，$r(A)\ge1$，$A\cdot A=0$，故 $r(A)+r(A)\le3$，$r(A)\le\frac32$，故 $r(A)=1$，$Ax=0$ 有两个无关的解向量，所以 $Ax=b$ 有三个线性无关的解.

6. D. 解：因为 $A\overset{r_2+3r_1}{\sim}B$，即 $E(2,1(3))A=B$，故 $B^{-1}=A^{-1}E^{-1}(2,1(3))=A^{-1}E(2,1(-3))$，

则 $A^{-1}\overset{c_1+(-3)c_2}{\sim}B^{-1}$，故选(D).

7. C. 解：原式 $=\frac{P((C-A)(A\cup BC))}{P(A\cup BC)}=\frac{P(C\bar AA\cup C\bar ABC)}{P(A\cup BC)}=\frac{P(\bar ABC)}{P(A\cup BC)}$

$$=\frac{P(\bar A)P(B)P(C)}{P(A)+P(BC)-P(ABC)}=\frac{0.5\times0.5\times0.4}{0.5+0.2-0.1}=\frac16$$

8. C. 解：由于$(X_1, X_2, \cdots X_n)$为来自总体X的简单随机样本，故$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立且与总体X同分布，故 $cov(X_i, X_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 4, & i=j.\end{cases}$

若$s<t$，则

$$Cov\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=\frac{1}{st}Cov\left(\sum_{i=1}^{s}X_i, \sum_{j=1}^{t}X_j\right)$$

$$=\frac{1}{st}\left[Cov\left(\sum_{i=1}^{s}X_i, \sum_{j=1}^{s}X_j\right)+Cov\left(\sum_{i=1}^{s}X_i+\sum_{j=s+1}^{t}X_j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{st}\cdot\sum_{i=1}^{s}Cov(X_i, X_i)=\frac{1}{t}DX_i=\frac{4}{t}.$$

同理，若$s\geq t$，

$$Cov\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=\frac{4}{s}.$$

因此，$Cov\left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}X_i, \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}X_j\right)=\frac{4}{\max(s,t)}$，故选(C)

二、填空题

9. $\frac{\pi}{8}$. 令$\arccos\frac{1}{x}=t \Rightarrow \frac{1}{x}=\cos t \Rightarrow x=\frac{1}{\cos t}=\sec t$，当$x=1\to+\infty$时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\arccos\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t\cdot t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin 2t\,dt$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,d\cos 2t=-\frac{1}{4}\left[t\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt\right]=\frac{\pi}{8}.$$

10. $\cos x-\sin x$. $y'+y=\sin x+\cos x$的通解为$y=Ce^{-x}+\sin x$，故对任意的C，$y=Ce^{-x}+\sin x$为 $y''+y'+ay=f(x)$的解，所以$y=e^{-x}$为$y''+y'+ay=0$，代入得$a=0$. $y=\sin x$为 $y''+y+ay=f(x)$，即$y''+y=f(x)$的特解，代入得$f(x)=\cos x-\sin x$.

11. $\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\leq 1\end{cases}+C$

$f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ e^{x}-1, & x\leq 0\end{cases}$. $f(\ln x)=\begin{cases}1-\frac{1}{x}, & x>1\\ x-1, & 0<x\leq 1\end{cases}$ $\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x+C, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+C_1, & 0<x\leq 1\end{cases}$.

由$1+C=-\frac{1}{2}+C_1$得$C_1=\frac{3}{2}+C$，所以$\int f(\ln x)dx=\begin{cases}x-\ln x, & x>1\\ \frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}, & 0<x\leq 1\end{cases}+C$.

12. $e^{\frac{1}{2}}$. 由题$f(x)$连续，及$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$得$f(0)=0$, $f'(0)=1$

$$原式=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\ln[1+\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cot x\cdot\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2\ln(1+x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{4x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot f'(0)}=e^{\frac{1}{2}}.$$

13. E. $f(A)=A^3-6A^2+11A-5E$. $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,

$$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)=\begin{bmatrix}f(1)&0&0\\0&f(2)&0\\0&0&f(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=E.\Rightarrow f(A)=E.$$

14. $(9.720,10.280)$. 由 $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$ 知上侧分位点 $u_{0.05}=1.645$, $u_{0.025}=1.96$

再由 μ 的置信度为90%的置信区间为 $(9.765,10.235)$ 知 $\bar{x}=\frac{9.765+10.235}{2}=10$,

且 $u_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.235$, 解得 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{0.235}{1.645}=\frac{1}{7}$, 故 μ 的置信度为95%的置信区间为

$$\left(\bar{x}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(10-1.96\cdot\frac{1}{7},\ 10+1.96\cdot\frac{1}{7}\right)=(9.720,10.280)$$

三、解答题

15. ① 由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1}=f(0)\neq0$, 所以当 $x\to0$ 时, $\int_0^x f(t)dt\sim f(0)x$.

② $$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{xf(0)\int_0^x f(t)dt}=\lim_{x\to0}\frac{xf(0)-\int_0^x f(t)dt}{x^2f^2(0)}$$

$$=\frac{1}{f^2(0)}\lim_{x\to0}\frac{f(0)-f(x)}{2x}=-\frac{f'(0)}{2f^2(0)}.$$

③ $$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{xf(0)-xf(\xi)}{x^2f^2(0)}=\lim_{x\to0}\frac{f(0)-f(\xi)}{xf^2(0)}=-\lim_{x\to0}\frac{f'(\eta)\xi}{xf^2(0)}$$

其中 ξ 介于 ξ 与 0 之间, 当 $x\to0$ 时, $\xi\to0$, $\eta\to0$, $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)\neq0$, 故

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\frac{1}{xf(0)}\right]=-\frac{f'(0)}{f^2(0)}\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=-\frac{f'(0)}{2f^2(0)}.$$

16. ① $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|=|x|<1$ 收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 收敛. 当 $x=1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛 ∴ 收敛域为 $[-1,1]$

② 设 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)$. $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$,

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$, $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{x}\left[\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^{n-1}dt\right]=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\frac{\ln(1-x)}{x}$

$f'(1-x)=-\frac{\ln x}{1-x}$, 代入上式, 可得 $F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=0$

故 $F(x)=C$, $x\in(0,1)$

17. ① 在 D 的内部, 由 $\begin{cases}f_x'(x,y)=2x+y=0\\f_y'(x,y)=8y+x=0\end{cases}$, 可得 D 内的唯一驻点 $(0,0)$, $f(0,0)=2$.

② D 的边界由 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y>\frac{1}{2}x-1)$ 和 $y=\frac{1}{2}x-1$ $(0\le x\le2)$ 组成.

在 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y>\frac{1}{2}x-1)$ 上, $f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=xy+6$

令 $L(x,y)=xy+6+\lambda(x^2+4y^2-4)$, 由 $\begin{cases}L_x'=y+2\lambda x=0\\L_y'=x+8\lambda y=0\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})$, $(-\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})$

$(-\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})$, $(\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})$ (舍去).

且 $f(\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})=f(-\sqrt2,-\frac{\sqrt2}{2})=7$, $f(-\sqrt2,\frac{\sqrt2}{2})=5$.

在 $y=\frac{1}{2}x-1$ $(0\le x\le2)$ 上, $f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2=\frac{5}{2}x^2-5x+6$, 由 $\frac{df}{dx}=5(x-1)=0$ 得

$x=1$, $y=-\frac{1}{2}$, 且 $f(1,-\frac{1}{2})=\frac{7}{2}$, $f(0,-1)=f(2,0)=6$.

综上所知, $f(x,y)$ 在 D 上的最大值为 7, 最小值为 2.

20、21全程考研资料请加群712760929

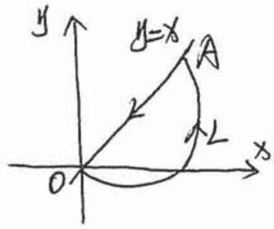
18. 令$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x$，则$f'(x)=\frac{[illegible]}{2x\sqrt{x}}>0$

当$0<x<1$时，$f(x)<f(1)=0$，即$\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x<0$，所以$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$；

当$x>1$时，$f(x)>f(1)=0$，即$\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x>0$，所以$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$；

综上，设$x>0$且$x\neq 1$，有$\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

19. 解：补充直线L_1：$y=x$，$x:1\to 0$，如图



L_1+L构成封闭曲线，则$\oint_{L+L_1}=\iint_D[f'(x)e^x-f'(x)e^x+1]dxdy=\frac{\pi}{4}$.

$\int_{L_1}[f(x)e^x-y]dx+[f'(x)e^x-1]dy=\int_1^0[f(x)e^x-x+f'(x)e^x-1]dx$

$=f(x)e^x\big|_1^0+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

从而$\int_L[f(x)e^x-y]dx+[f'(x)e^x-1]dy=(\oint_{L+L_1}-\int_{L_1})[f(x)e^x-y]dx+[f'(x)e^x-1]dy=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}$.

20. 解：(I) $A=\begin{pmatrix}1&0&3&5\\1&-1&-2&2\\2&-1&1&3\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&-1&-5&-3\\0&-1&-5&-7\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&5\\0&1&5&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

基础解系为$\xi=\begin{pmatrix}-3\\-5\\1\\0\end{pmatrix}$，通解为$x=k\xi$，任意$k\in R$

(II) $Ax=0$与$Bx=0$同解的充要条件为A,B的行向量组等价，从而$(2,a,-4,b)$可由$(1,0,3,5)$，$(1,-1,-2,2)$，$(2,-1,1,3)$线性表示，故転置后有

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&-1&-1&a\\3&-2&1&-4\\5&2&3&b\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&-1&-1&a\\0&-5&-5&-10\\0&-3&-7&b-10\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&1&1&-a\\0&0&0&-10-5a\\0&0&-4&b-3a-10\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&1&1&-a\\0&0&-4&b-3a-10\\0&0&0&-10-5a\end{array}\right)$

$-10-5a=0$，即$a=-2$，b为任意实数时，两方程组同解.

21. 解：(I) 由$AB=0$，$tr(A)=1$，$r(B)=2\Rightarrow r(A)=1$，则得A的三个特征值为$tr(A)$，0，0，即：$1,0,0$

由$A\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}=0$，知$\lambda_2=\lambda_3=0$对应的特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

设$\lambda_1=1$对应的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\-x_1+x_2=0\end{cases}$，取$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化得，$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{pmatrix}$

$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}$即为所求正交矩阵，在正交变换$x=Py$之下，二次型$f$化为标准形为$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2$.

(II) $f(x_1,x_2,x_3)=1$，即$y_1^2=1$得$y_1=\pm 1$，故$f(x_1,x_2,x_3)=1$表示两个平面

(III) 由$P^{-1}AP=\Lambda$，得

$A=P\Lambda P^{-1}=P\Lambda P^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac16&\frac16&-\frac13\\\frac16&\frac16&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{pmatrix}$

则该二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}x_1^2+\frac{1}{6}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2+\frac{1}{3}x_1x_2-\frac{2}{3}x_1x_3-\frac{2}{3}x_2x_3$$

22. ① 由于 $[X]$ 为离散型随机变量，所以 $U=\min\{2,[X]\}$ 仍为离散型随机变量，且 U 的取值为 0, 1, 2，其分布律为

$$P\{U=0\}=P\{[X]=0\}=P\{0\le X<1\}=\int_0^1 e^{-x}dx=1-e^{-1}.$$

$$P\{U=1\}=P\{[X]=1\}=P\{1\le X<2\}=\int_1^2 e^{-x}dx=e^{-1}-e^{-2}.$$

$$P\{U=2\}=1-P\{U=0\}-P\{U=1\}=e^{-2}.$$

即 $U=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1-e^{-1} & e^{-1}-e^{-2} & e^{-2}\end{bmatrix}$

② $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X-[X]\le y\}$ 当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$，当 $y\ge1$ 时，$F_Y(y)=1$.

当 $0\le y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X-[X]\le y\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{k\le X\le k+y\}$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+y}e^{-x}dx=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-k}-e^{-(k+y)})=\frac{1-e^{-y}}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}(1-e^{-y})$$

得 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{e}{e-1}(1-e^{-y}), & 0\le y<1\\ 1, & y\ge1\end{cases}$ $\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{e^{1-y}}{e-1}, & 0\le y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

③ 由于 $EX=1$，$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}y f_Y(y)dy=\frac{e-2}{e-1}$，所以 $E[X]=EX-EY=\frac{1}{e-1}$.

23. ① $P\{X_1X_2=X_3+1\}=P\{X_1=1,X_2=1,X_3=0\}+P\{X_1=1,X_2=2,X_3=1\}+P\{X_1=2,X_2=1,X_3=1\}$

$=P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=1\}\cdot P\{X_3=0\}+P\{X_1=1\}\cdot P\{X_2=2\}\cdot P\{X_3=1\}+P\{X_1=2\}\cdot P\{X_2=1\}P\{X_3=1\}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}.$

② $P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}=0\}=P\{X_1=0,X_2=0,X_3=0\}=P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}P\{X_3=0\}=\frac{1}{64}.$

$P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le1\}=P\{X_1\le1,X_2\le1,X_3\le1\}=P\{X_1\le1\}P\{X_2\le1\}P\{X_3\le1\}=\frac{27}{64}.$

$P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le2\}=P\{X_1\le2,X_2\le2,X_3\le2\}=P\{X_1\le2\}P\{X_2\le2\}P\{X_3\le2\}=1.$

故 $P\{Y=0\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}=0\}=\frac{1}{64}.$

$P\{Y=1\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le1\}-P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}=0\}=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{13}{32}$

$P\{Y=2\}=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le2\}-P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\le1\}=1-\frac{27}{64}=\frac{37}{64}.$

即得 $Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{64} & \frac{13}{32} & \frac{37}{64}\end{bmatrix}$

超越考研 数(一) 模一答案

一、选择题.

1. B. $x\in[0,1]$时, $f(x)=2$, $g(x)=x$, $f'(x)=0$, $g'(x)=1$, $2>x$, 但 $0>1$ 不成立, 故①错误.
$f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2$, $f'(x)=2x$, $g'(x)=x$, 当 $1\le x\le 2$时, $f'(x)>g'(x)$, $1\le f(x)\le 4$.
$\frac{5}{2}\le g(x)\le 4$, $f(x)\ge g(x)$ 不成立, 故②错误. $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}>\int_0^1\frac{1}{3}dx$, 在$[0,1]$上 $x>\frac{1}{3}$ 不成立.
故④也不正确.

2. B. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}-x}=0$, 水平渐近线 $y=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt{x^2+\sin^2x}}{x}+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+(\frac{\sin x}{x})^2}+1=2$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+\sin^2x}-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin^2x}{\sqrt{x^2+\sin^2x}+x}=0$. 斜渐近线 $y=2x$.

3. D. $z=x^2+y^2$ 当$(x,y)\ne(0,0)$时均不为极值点, 但满足条件.

4. D. $I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=(\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}})f(x)(\sin x-\cos x)dx$
而 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)(\sin x-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\frac{\pi}{2}-x)(\cos x-\sin x)dx$. 故
$$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(\tfrac{\pi}{2}-x)-f(x)](\cos x-\sin x)dx.$$
当 $0<x<\frac{\pi}{4}$时, $\frac{\pi}{2}-x>x>0$, 由$f(x)$的单调性及$\cos x>\sin x$. 所以 $I_1>I_2$
又当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时, $\tan x>\sin x$, $f(x)>0$. 故 $I_3>I_1$.

5. D. ②正确. 若 $r(A_{m\times n})=m$, 则 $r(A_{m\times n})=r(A_{m\times n},b)=m$, 故$Ax=b$必有解.
③正确, 见教材. ④正确. 因为 $r(A^TA)\le r(A^TA,A^Tb)=r(A^T(A,b))\le r(A^T)=r(A)$.
由③知 $r(A^TA)=r(A^TA,A^Tb)$, 则 $A^TAx=A^Tb$必有解.

6. C. A、B为实对称矩阵, 其相似的充要条件为特征值相同, 即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

7. D. $P\{X>x,Y>y\}=P\{\overline{(X\le x)\cup(Y\le y)}\}=1-P\{(X\le x)\cup(Y\le y)\}$
$=1-P\{X\le x\}-P\{Y\le y\}+P\{X\le x,Y\le y\}$
$=1-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$.

8. C. $p_1=P\{X<1\}=P\{\frac{X}{\sigma}<\frac{1}{\sigma}\}=\Phi(\frac{1}{\sigma})$, $p_2=P\{X>-1\}=P\{\frac{X}{\sigma}>-\frac{1}{\sigma}\}=1-\Phi(-\frac{1}{\sigma})=\Phi(\frac{1}{\sigma})$
故 $p_1=p_2$. 因为 $Y\sim F(1,1)$, 所以 $\frac{1}{Y}\sim F(1,1)$, $p_4=P\{Y>1\}=P\{\frac{1}{Y}<1\}=p_3$.

二、填空题.

9. $\underline{-(2x)^{\frac{1}{3}}}$. 两边对$x$求导得 $y'=-\frac{y}{y^2-x}$, 则得 $\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-y$为一阶线性方程
则解得 $x=e^{\int\frac{1}{y}dy}(\int -y^2e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C)=y(-\frac{1}{2}y^2+C)$. 由 $y(\frac{1}{2})=-1$ 得 $C=0$, 故 $x=-\frac{1}{2}y^3$.
即 $y=-(2x)^{\frac{1}{3}}$.

10. $\underline{1}$. 解：在 $e^y\sin t-y=0$ 两边对 t 求导，得 $e^y\sin t\frac{dy}{dt}+e^y\cos t-\frac{dy}{dt}=0$，

所以 $\frac{dy}{dt}=-\frac{e^y\cos t}{e^y\sin t-1}$

由 $x=t^2-1$ 知 $\frac{dx}{dt}=2t+1$，故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y\cos t}{(2t+1)(e^y\sin t-1)}$，当 $t=0$ 时，$x=y=0$，故 $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=1$.

11. $\underline{4a^{\frac{7}{3}}}$. 解：L的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

原积分 $=\int_0^{2\pi}a^{\frac{4}{3}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cdot 3a|\cos t\sin t|dt+0=12a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)\cos t\sin t\,dt$

$=12a^{\frac{7}{3}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\sin t dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\cos t dt)=12a^{\frac{7}{3}}(-\frac{1}{6}\cos^6 t+\frac{1}{6}\sin^6 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^{\frac{7}{3}}$

12. $\underline{-\frac{\pi^2}{9}}$. 解：将 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 奇延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$，再将 $F(x)$ 以周期延拓后展开成傅立叶级数，即可将 $f(x)$ 展开成正弦级数，由狄利克雷定理知：

$$S(-\frac{\pi}{3})=F(-\frac{\pi}{3})=-F(\frac{\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{3})=-\frac{\pi^2}{9}$$

13. $\underline{-2}$. $(A\vdots B)=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\-1&2&1&2&k\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\overset{行}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&3&3&6&k-1\\0&1&1&2&-1\end{array}\right]\overset{行}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|cc}1&1&2&4&-1\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&k+2\end{array}\right]\Rightarrow k=-2$.

14. $\underline{\geq\frac{7}{9}}$. 由于 $\frac{9S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$，所以 $E\frac{9S^2}{\sigma^2}=9$，$D\frac{9S^2}{\sigma^2}=18$. 得 $E(S^2)=\sigma^2$, $D(S^2)=\frac{2}{9}\sigma^4$.

因此 $P\{0<S^2<2\sigma^2\}=P\{|S^2-\sigma^2|<\sigma^2\}\geq 1-\frac{2\sigma^4/9}{\sigma^4}=\frac{7}{9}$.

三. 解答题.

15. 证：因为 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt\geq\int_0^1 x_{n-1}dt=x_{n-1}$，$\{x_n\}$ 单调递增.

假设 $0<x_{n-1}<1$，则 $x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt=\int_0^{x_{n-1}}x_{n-1}dt+\int_{x_{n-1}}^1 t\,dt$

$=x_{n-1}^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_{n-1}^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}^2<1$.

由数学归纳法知，对任意的 $n\in N$，有 $0<x_n<1$，故得 $\{x_n\}$ 单调有界一定存在极限.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 得到 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2$，解得 $a=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=a\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v})+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$

$=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

同理 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2b\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$(a^2-\frac{1}{4})\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2a-\frac{1}{2}b)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(1-\frac{1}{4}b^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

由题设知 $a^2-\frac{1}{4}=0$，$1-\frac{1}{4}b^2=0$，$2a-\frac{1}{2}b\neq 0$. 故 $a=\frac{1}{2}, b=-2$ 或 $a=-\frac{1}{2}, b=2$.

20、21全程考研资料请加群712760929

17. $a_n=\int_0^1 (x^{\frac{n-1}{n}}-x^{\frac{n}{n+1}})dx=\frac{}{(2n-1)(2n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)+(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots)-1\right]=-\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)$

考虑幂级数 $M(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$，收敛域为 $[-1,1]$.

当 $-1\le x\le 1$ 时，$M'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，故 $M(x)=\arctan x$，从而 $M(1)=\frac{\pi}{4}$.

因此 $S_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

18. 证：因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，故存在 m, M，使 $m<f(x)<M$. 从而

$$m\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cdot x\cdot\sin x\,dx\le M\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=(-x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$，所以 $m\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)x\sin x\,dx\le M$.

由闭区间上连续函数的性质知，存在 $\xi_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin x\,f(x)dx=f(\xi_1)$ ①

由于 $m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x_2)\le M$，所以 $m\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\le M$. 故存在 $\xi_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$

使 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=f(\xi_2)$ ②

由①、②知 $f(\xi_1)=f(\xi_2)$. 对 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上运用罗尔定理可存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,\pi)$

使得 $f'(\xi)=0$.

19. 解：令 $P(x,y)=-32f(x)y$，$Q(x,y)=x^2f'(x)-11xf(x)$，由题设知 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，即

$-32f(x)=2xf'(x)+x^2f''(x)-11f(x)-11xf'(x)$，得 $x^2f''(x)-9xf'(x)+21f(x)=0$.

解此欧拉方程得 $f(x)=C_1x^3+C_2x^7$，由 $f(1)=1$，$f'(1)=7$ 知 $C_1=0$，$C_2=1$，所以 $f(x)=x^7$

故 $I=\int_{L(AB)}(-4x^8)dy-32x^7y\,dx=\int_{L(AB)}d(-4x^8y)$

$=-4x^8y\Big|_{(1,1)}^{(0,3)}=4.$

20. 证. ① 由 $A^2-2AB=E$ 得 $A(A-2B)=E$，故 $A^{-1}=A-2B$，从而 $(A-2B)A=E$，故 $AB=BA$.

② 由①知 $AB-2BA+3A=3A-AB=A(3E-B)$

由于 A 可逆，从而 $r(AB-2BA+3A)=r(A(3E-B))=r(3E-B)=2$.

21. ① 由 $A^*\alpha=4\alpha$ 得 $A\alpha=-3\alpha$，所以 $\alpha=(1,0,-2)^T$ 是 A 的对应于特征值 $\lambda_3=-3$ 的特征向量；

设 A 的另外两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-12\end{cases}$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，由正交性得 $x_1-2x_3=0$，基础解系为

$\xi_1=(0,1,0)^T$，$\xi_2=(2,0,1)^T$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\alpha)$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\ \frac{2}{5}&0&\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&-3\end{bmatrix}$，所以

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{bmatrix}$$

② $(A^*+6E)x=0$ 得 $(AA^*+6A)x=0$，则有 $(A-2E)x=0$，其通解为

$x=k_1(0,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

22. ① 由于 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$，为参数为1的指数分布的分布函数. $X\sim E(1)$.

由于 $F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$ 所以Y为离散随机变量，其分布律为

$$Y\sim\begin{bmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ 即 $Y\sim B(1,\frac{1}{2})$

② 由于 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，所以X和Y相互独立.

③ $P\{X+Y\le 2\}=P\{Y=0\}P\{X+Y\le 2\mid Y=0\}+P\{Y=1\}P\{X+Y\le 2\mid Y=1\}$

$=\frac{1}{2}P\{X\le 2\mid Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\le 1\mid Y=1\}$.

又因为X和Y相互独立. 所以 $P\{X+Y\le 2\}=\frac{1}{2}P\{X\le 2\}+\frac{1}{2}P\{X\le 1\}=\frac{1}{2}F_X(2)+\frac{1}{2}F_X(1)$

$=\frac{1}{2}(1-e^{-2})+\frac{1}{2}(1-e^{-1})=1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{-2})$.

23. ① $\bar{X}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{3\theta^2}(2\theta-x)dx=\frac{4}{9}\theta$. 所以 $\hat{\theta}_M=\frac{9}{4}\bar{X}$.

② $L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$

$=(\frac{2}{3\theta^2})^n(2\theta-x_1)(2\theta-x_2)\cdots(2\theta-x_n)$，$\theta\ge\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$

$\ln L=n\ln(\frac{2}{3\theta^2})+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(2\theta-x_i)$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{2\theta-x_i}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\theta-x_i}-\frac{1}{\theta})<0$

所以 $\hat{\theta}_L=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

超越考研 数(一) 模二答案

一、选择题.

1. C. 因为$f(x)$是奇函数，所以$f'(x)$是偶函数，则$\int_0^x f(t)dt$一定是奇函数.

2. D. 当$\lambda\le-\frac{1}{2}$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}\ne0$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$发散.

当$-\frac{1}{2}<\alpha\le\frac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$为交错级数，且$\frac{1}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$单调减小趋向于0.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛. $\left|\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{n^\alpha}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}$.

且当$-\frac{1}{2}<\alpha\le\frac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}$发散，所以当$-\frac{1}{2}<\lambda\le\frac{1}{2}$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛. 当$\lambda>\frac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+\frac{1}{2}}}$收敛$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$绝对收敛.

3. B. $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f'(2x)]=f(0)+f'(0)=0$，由于$f(0)=0\Rightarrow f'(0)=0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f'(2x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(2x)}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f'(2x)-f'(0)}{x}=f'(0)+2f''(0)=1$$

可得$f''(0)=\frac{1}{2}>0$. 所以$f(0)$是$f(x)$的极小值.

4. C. 由于$Q(x,y)$有连续偏导数，则$\int Q dy$有二阶连续偏导数，故$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int Qdy=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int Qdy=\frac{\partial Q}{\partial x}$

从而 $\frac{\partial}{\partial y}\left(P-\frac{\partial}{\partial x}\int Qdy\right)=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int Qdy=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，故选(C)

5. A. $(\alpha_1+4\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3)=(\alpha_1+\lambda_2\alpha_3, \lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_3, \lambda_1\alpha_1+\alpha_3)$

$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{pmatrix}$$

令$\begin{vmatrix}1&0&\lambda_1\\0&\lambda_1&0\\\lambda_2&-\lambda_2&1\end{vmatrix}=\lambda_1-\lambda_2\lambda_1^2=\lambda_1(1-\lambda_1\lambda_2)=0\Rightarrow\lambda_1=0$或$\lambda_1\lambda_2=1$.

6. D. 若$A^*x=0$仅有零解，故$|A^*|\ne0$，从而$|A|\ne0$，所以A的特征值不等于0，从而A^2的特征值全大于0，即A^2正定.

7. B. 因为X与Y相互独立，所以$p_3=P\{X\le1,Y\le1\}$，又$\{X^2+Y^2\le1\}\subset\{X\le1,Y\le1\}\subset\{X+Y\le2\}$，

故$p_1\le p_3\le p_2$.

8. C. 显然Y为离散型随机变量，故排除A. 而Y就是考察事件$\{X_i\le x\}$是否

每个X_i是否满足$X_i\le x$相当于作了一次随机试验，而Y就是考察事件$\{X_i\le x\}$是否发生$(i=1,2,\cdots,n)$. 由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，且X_i与X同分布，因此Y表示在n重伯努利试验中，事件$A=\{X\le x\}$发生的次数. 又$P(A)=P\{X\le x\}=F(x)$.

二、填空题

9. $\lambda>3$. 显然 $x=0$ 不是 $x^3-\lambda x+2=0$ 的解，当 $x\neq 0$ 时，$\lambda = x^2+\frac{2}{x}$.

令 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$，则 $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$，由 $f'(x)=0$ 解得 $x=1$，并且当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 所以在点 $x=1$ 处，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=3$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$，故当 $\lambda>3$ 时，$y=\lambda$ 与 $y=f(x)$ 有三个交点，

即方程 $x^3-\lambda x+2=0$ 有三个不相等的实根.

10. $(2x+y)(y-x)^2=C$. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{1+\frac{y}{x}}$. 令 $u=\frac{y}{x}$，因此 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{2}{1+u}$，

所以 $x\frac{du}{dx}=\frac{2-u-u^2}{1+u}$ $\Rightarrow -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{u-1}\right)du=\frac{dx}{x}$ 两边积分得

$-\frac{1}{3}\left(\ln|2+u|+2\ln|u-1|\right)=\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|C|$. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代入化简得 求通解即可.

11. $\frac{\pi}{6}$. 曲线直角坐标方程为 $\begin{cases}x=\sin\theta\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$，故 $V=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, 2\sin\theta\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta d\theta=\frac{\pi}{6}$

12. $\frac{8}{5}\pi$. $\iiint\limits_{\Omega}(x+1)^2dV=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2x+1)dV$，由对称性及几何意义知，$\iiint\limits_{\Omega}2x\,dV=0$，$\iiint\limits_{\Omega}1\,dV=\frac{4}{3}\pi$，由轮换对称性，

$\iiint\limits_{\Omega}x^2dV=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2dr=\frac{4}{15}\pi$，所以原积分 $=\frac{8}{5}\pi$

13. $\frac{1}{144}$. $|A|=|B|=3$，从而 $\lambda_3=-3$ 为 A 的特征值，故 $A-3E$ 的特征值为 $-4,-2,-6$.

$|A-3E|=-48$，$|(A-3E)^{-1}|=-\frac{1}{48}$.

$B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}=B^*-4B^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1}$，$|-B^{-1}|=-\frac{1}{3}$.

原行列式 $=-\frac{1}{48}\times(-\frac{1}{3})=\frac{1}{144}$

14. $\frac{1}{4}$. $P\{X=1,Y=2\}=0$，所以 $P\{Y=2\}=\sum\limits_{m=2}^{\infty}P\{X=m,Y=2\}=\sum\limits_{m=2}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{4}$.

故 $P\{X=3|Y=2\}=\frac{P\{X=3,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{1}{4}$.

三、解答题.

15. ① $f'(x)=\frac{1}{x^4}\left[\left(\frac{1}{1+x}-1\right)x^2-2x\ln(1+x)+2x^2\right]=\frac{2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^3}$.

令 $g(x)=2x+x^2-2(1+x)\ln(1+x)$，则 $g(0)=0$，而

$g'(x)=2+2x-2\ln(1+x)-2=2[x-\ln(1+x)]>0$

故 $g(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，$g(x)>g(0)=0$，故 $f'(x)>0$. 从而 $f(x)$ 单调递增.

② 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\ln 2-1$

由 ① 知 $-\frac{1}{2}<\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}<\ln 2-1$ 整理即得所证不等式

16、证明：在 L 上，作 $F(x,y,\lambda)=$ [illegible] $\begin{cases} F_x'=3x^2y+3\lambda=0 \\ F_y'=x^3+4\lambda=0 \\ F_\lambda'=3x+4y-12=0 \end{cases}$

解得 $(x,y)=(3,\frac{3}{4})$

又 L 的端点为 $(4,0),(0,3)$，$x^3y|_{(3,\frac{3}{4})}=\frac{81}{4}$，$x^3y|_{(4,0)}=x^3y|_{(0,3)}=0$，所以 x^3y 在 L 上的最大值为 $\frac{81}{4}$，最小值为 0，进而 $e^{-\frac{9}{2}}\le e^{-\sqrt{x^3y}}\le 1$，有 $e^{-\frac{9}{2}}l\le\int_L e^{-\sqrt{x^3y}}ds\le l$。

其中 $l=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以 $5e^{-\frac{9}{2}}\le\int_L e^{-\sqrt{x^3y}}ds\le 5$.

17、解：$f'(x)=\frac{-8x}{16+x^4}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^4}=-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{2})^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{4n+1}}x^{4n+1}$，$-2<x<2$

上式两边积分，得 $f(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{4n+1}}x^{4n+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)2^{4n+2}}x^{4n+2}+C$

由 $f(0)=\frac{\pi}{4}$ 知 $C=\frac{\pi}{4}$，所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)2^{4n+2}}x^{4n+2},\quad -2\le x\le 2.$$

在上式中取 $x=2$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

18、解：由题设有 $y(0)=0$，$y'(0)=0$，$S_1=\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$

P 点的切线为 $Y-y=y'(X-x)\Rightarrow A(0,y-xy')\Rightarrow S_2=\sqrt{x^2+(xy')^2}=x\sqrt{1+y'^2}$

由 $x(3S_1+2)=2(x+1)S_2\Rightarrow x(3\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx+2)=2(x+1)\cdot x\sqrt{1+y'^2}\Rightarrow 2(x+1)y'y''=1+y'^2$

令 $y'=p$，$y''=\frac{dp}{dx}$，$\int\frac{2p}{1+p^2}dp=\int\frac{dx}{1+x}\Rightarrow\ln(1+p^2)=\ln(1+x)+\ln C_1\Rightarrow 1+y'^2=C_1(1+x)$，

代入初始条件得 $C_1=1\Rightarrow y'^2=x\Rightarrow y'=\sqrt{x}\Rightarrow y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2\Rightarrow C_2=0$，

所以曲线方程为 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

19、解：$P(x,y)=y^2$，$Q(x,y)=2xy+1$，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$f(x,y)=\int_0^xP(x,0)dx+\int_0^yQ(x,y)dy=\int_0^x0dx+\int_0^y(2xy+1)dy=xy^2+y+C$

由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$，所以 $f(x,y)=xy^2+y$

Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D：$x^2+(y-1)^2\le1$.

$I=\iint_\Sigma zf(x,y)dS=\iint_\Sigma z(xy^2+y)dS=\iint_\Sigma yz\,dS=\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$

$=\sqrt{2}\iint_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\int_0^\pi[\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot r\cdot r\,dr]d\theta$

20、解：$(A-B)X=A$，$A-B=\begin{bmatrix}3&2&-1\\4&3&-3\\1&0&3\end{bmatrix}$，$|A-B|=0$

故 $A-B$ 不可逆.

$$(A-B \vdots A)=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 2 & -1 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \\ 4 & 3 & -3 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & 7 & 5 \end{array}\right] \overset{行}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 7 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -9 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得 $r(A-B)=r(A-B \vdots A)$，故存在 X，使得 $(A-B)X=A$. 且

$$X=\begin{bmatrix} 7-3k_1 & 7-3k_2 & 5-3k_3 \\ -9+5k_1 & -7+5k_2 & -3+5k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$$，其中 k_1, k_2, k_3 是任意常数.

21. 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

由二次型正负惯性指数都是1，可知 $r(A)=2$，$|A|=-(a+2)(a-1)^2=0$，所以 $a=-2$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=1$，不合题意，故 $a=-2$. 此时 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$，所以 A 的特征值是 $3, -3, 0$.

$\lambda=3$ 时，$(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得 $\xi_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$\lambda=-3$ 时，$(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 得 $\xi_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda=0$ 时 $(\lambda E-A)\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得 $\xi_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

将 ξ_1, ξ_2, ξ_3 单位化，得 $\gamma_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}$，$\gamma_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt6} \end{bmatrix}$，$\gamma_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} \\ -\frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$ 取 $P=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

故所求正交变换 $x=Py$，即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，$f=3y_1^2-3y_2^2$.

22. (1) 由密度函数的性质知 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=a\int_0^2\int_0^2 xy\,dxdy+b\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le1}\frac{1}{\pi}dxdy=1$.

可得 $4a+b=1$，故 $b=1-4a$，所以 $f(x,y)=\begin{cases} axy+(1-4a)\varphi(x,y), & 0\le x\le2,\ 0\le y\le2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

$EX=a\int_0^2\int_0^2 x\cdot xy\,dxdy+(1-4a)\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{16}{3}a+1-4a=\frac{4}{3}a+1\ \overset{对称性}{=\!=}\ EY$.

20、21全程考研资料请加群712760929

$E(XY)=a\int_0^2\int_0^2 xy\cdot xy\,dxdy+(1-4a)\iint\limits_{(x-1)^2+(y-1)^2\le 1} xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{64}{9}a+1-4a=1+\frac{28}{9}a.$

由 $E(XY)=EXEY$，得 $(1+\frac{4}{3}a)^2=1+\frac{28}{9}a$，given $a=0$ 及 $a=\frac{1}{4}$，因此 $a=0,b=1$ 或 $a=\frac{1}{4},b=0$。

② 当 $a=0$ 时，$b=1$，且 $f(x,y)=\varphi(x,y)$，其边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-(y-1)^2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以此时 X 和 Y 不相互独立。

当 $a=\frac{1}{4}$ 时，$b=0$，且 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}xy, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$ 其边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以此时 X 和 Y 相互独立。

23. ① 由于 (X_1,X_2) 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，故由正态分布的性质知 $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，因此 S 的分布函数为 $F_S(s)=P\{S\le s\}=P\{\frac{1}{\sqrt2}|X_1-X_2|\le s\}$

当 $s<0$ 时，$F_S(s)=0$，当 $s\ge 0$ 时

$$F_S(s)=P\{-s\le\frac{X_1-X_2}{\sqrt2}\le s\}=P\{-\frac{s}{\sigma}\le\frac{X_1-X_2}{\sqrt2\sigma}\le\frac{s}{\sigma}\}=\Phi(\frac{s}{\sigma})-\Phi(-\frac{s}{\sigma})=2\Phi(\frac{s}{\sigma})-1$$

从而 S 的概率密度为

$$f_S(s)=F_S'(s)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma}\varphi(\frac{s}{\sigma}), & s\ge 0\\ 0, & s<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}, & s\ge 0\\ 0, & s<0.\end{cases}$$

② $$ES=\int_{-\infty}^{+\infty}sf_S(s)ds=\int_0^{+\infty}s\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}ds=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}d(-\frac{s^2}{2\sigma^2})$$

$$=-\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

由于 $ES\ne\sigma$，所以 S 不是 σ 的无偏估计。