2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考答案和评分参考

数　学（一）

一．选择题（1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.)

（1）设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为　　（B）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（2）函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点（0，1）处的梯度等于　　（A）

（A）i　（B）$-i$　（C）j　（D）$-j$

（3）在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是　　（D）

（A）$y'''+y''-4y'-4y=0$.　（B）$y'''+y''+4y'+4y=0$

（C）$y'''-y''-4y'+4y=0$.　（D）$y'''-y''+4y'-4y=0$

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是　　（B）

（A）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

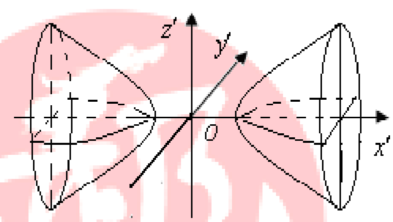
（5）设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $A^3=0$，则　　（C）

（A）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　（B）$E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

（C）$E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　（D）$E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆

（6）设 A 为 3 阶非零矩阵，如果二次曲面方程

$(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程



的图形如图，则 A 的正特征值个数为　　（B）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（7）随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 F(x)，则 Z=max{X, Y}分布函数为　（A）

（A）$F^2(x)$；（B）$F(x)F(y)$；（C）$1-[1-F(x)]^2$；（D）$[1-F(x)][1-F(y)]$

（8）随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则　　（D）

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$　（B）$P\{Y=2X-1\}=1$

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$　（D）$P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题：（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

(9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ <u>$1/x$</u>

(10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点（0，1）处的切线方程是 <u>$y = x + 1$</u>.

(11) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛，在 $x = -4$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为 <u>$(1,5]$</u>

(12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧，则 $\iint_{\Sigma} xydydz + xdzdx + x^2 dxdy =$ <u>4π</u>

(13) 设 A 为 2 阶矩阵，α_1, α_2 为线性无关的 2 维列向量，$A\alpha_1 = 0, A\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$ 则 A 的非零特征值为 <u>1</u>

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X = EX^2\} =$ <u>$\dfrac{1}{2e}$</u>

三、解答题（15 ～ 23 小题，共 94 分.）

(15)（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

解： $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$ ……2 分

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\sin x)\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2}$ ……6 分

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$ ……9 分

(16)（本题满分 9 分）

计算曲线积分 $\int_L \sin 2xdx + 2(x^2 - 1)ydy$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点（0，0）到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

解法 1： $\int_L \sin 2xdx + 2(x^2 - 1)ydy = \int_0^{\pi} \left[\sin 2x + 2(x^2 - 1)\sin x \cdot \cos x\right]dx$

$= \int_0^{\pi} x^2 \sin 2xdx$ ……4 分

$= -\dfrac{x^2}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos 2x\,dx$ ……6 分

$= -\dfrac{\pi^2}{2} + \dfrac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = -\dfrac{\pi^2}{2}$ ……9 分

解法 2： 取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域

$$\int_L \sin 2xdx + 2(x^2-1)ydy = \int_{L+L_1} \sin 2xdx + 2(x^2-1)ydy - \int_{L_1} \sin 2xdx + 2(x^2-1)ydy \quad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

$$= -\iint_D 4xydxdy - \int_\pi^0 \sin 2xdx \quad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$= -\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} 4xydy - \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi = -\int_0^\pi 2x\sin^2 xdx = -\int_0^\pi x(1-\cos 2x)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi + \frac{x}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2xdx = -\frac{\pi^2}{2} \quad \cdots\cdots 9\text{ 分}$$

(17)（本题满分 11 分）

已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$，求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解： 点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面最远点和最近点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点. ……3 分

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$ ……5 分

由 $\begin{cases} L_x' = 2\lambda x+\mu=0 \\ L_y' = 2\lambda y+\mu=0 \\ L_z' = 2z-4\lambda z+3\mu=0 \\ x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$ ……7 分

得 $x=y$，从而 $\begin{cases} 2x^2-2z^2=0 \\ 2x+3z=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ ……10 分

根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$ ……11 分

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是连续函数，

(I) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$；

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt - x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(I) 证： 对任意的 x，由于 $f(x)$ 是连续函数，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}$$ ……2 分

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)$$ （其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间）

由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x)$，可知函数 $F(x)$ 在 x 处可导，且 $F'(x)=f(x)$ ……5 分

(II) 证法 1： 要证明 $G(x)$ 以 2 为周期，即要证明对任意的 x，都有 $G(x+2)=G(x)$，记 $H(x)=G(x+2)-G(x)$，则

$$H'(x)=\left(2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt\right)'-\left(2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt\right)'$$

$$=2f(x+2)-\int_0^2 f(t)dt-2f(x)+\int_0^2 f(t)dt=0$$ ……8 分

又因为 $H(0)=G(2)-G(0)=\left(2\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt\right)-0=0$

所以 $H(x)=0$，即 $G(x+2)=G(x)$ ……10 分

证法 2： 由于 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数，所以对任意的 x，有

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)dt-(x+2)\int_0^2 f(t)dt-2\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(t)dt$$

$$=2\left[\int_0^2 f(t)dt+\int_2^{x+2}f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]=2\left[\int_0^x f(u+2)du-\int_0^x f(t)dt\right]$$ ……8 分

$$=2\int_0^x\left[f(t+2)-f(t)\right]dt=0$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数. ……10 分

(19)（本题满分 11 分）

将函数 $f(x)=1-x^2$，$(0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

解： 由于 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)dx=2-\frac{2\pi^2}{3}$ ……2 分

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nxdx=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1},n=1,2,\cdots$$ ……5 分

所以 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$，$0\le x\le\pi$， ……7 分

令 $x=0$，有 $f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$，

又 $f(0)=1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$ ……11 分

(20)（本题满分 10 分）

设α,β为3维列向量，矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,其中$\alpha^T$，$\beta^T$为$\alpha$，$\beta$的转置. 证明：

(I) 秩$r(A)\le 2$；

(II) 若α,β线性相关，则秩$r(A)<2$.

证：(I) $r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)$

$\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)$ ……3 分

$\le r(\alpha)+r(\beta)\le 2$ ……6 分

(II) 由于α,β线性相关，不妨设$\alpha=k\beta$，

于是$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r((1+k^2)\beta\beta^T)\le r(\beta)\le 1<2$ ……10 分

(21)（本题满分 12 分）

设n元线性方程$Ax=b$，其中$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(I) 证明行列式$|A|=(n+1)a^n$；

(II) 当a为何值时，该方程组有唯一解，并求x_1；

(Ⅲ) 当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

（I）**证法 1：** 记$D_n=|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_n$

当$n=1$时，$D_1=2a$，结论成立，

当$n=2$时，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$，结论成立 ……2 分

假设结论对小于n的情况成立，将D_n按第1行展开得

$D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2ana^{n-1}-a^2(n-1)a^{n-2}=(n+1)a^n$，即$|A|=(n+1)a^n$ ……6 分

证法 2:
$$|A|=\begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n \underline{\underline{r_2-\frac{1}{2}ar_1}} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n$$ ……2 分

$$\underline{\underline{r_3-\frac{2}{3}ar_2}} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & & \\ & & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n = \cdots$$ ……4 分

$$\underline{\underline{r_n-\frac{n-1}{n}ar_{n-1}}} \begin{vmatrix}2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & 0 & \frac{n+1}{n}a\end{vmatrix}_n = (n+1)a^n$$ ……6 分

(Ⅱ) 解： 当 $a\neq 0$ 时，方程组系数行列式 $D_n\neq 0$，故方程组有唯一解.
由克莱姆法则，将 D_n 第 1 列换成 b，得行列式为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix}2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a\end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1} = na^{n-1}$$

所以，$x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$ ……9 分

(Ⅲ) 解： 当 $a=0$ 时，方程组为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $x=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T+k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$,其中 k 为任意常数 ……12 分

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$， 记 $Z=X+Y$

(I) 求 $P\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\}$； **(II)** 求 Z 的概率密度 $f_z(z)$.

解：(I) $P\left\{Z\le\frac{1}{2}|X=0\right\}=P\left\{X+Y\le\frac{1}{2}|X=0\right\}=P\left\{Y\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ ……4 分

(II) $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$$=P\{X+Y\le z,X=-1\}+P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1,X=-1\}+P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}$$

$$=P\{Y\le z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\le z\}P\{X=0\}+P\{Y\le z-1\}P\{X=1\}$$

$$=\tfrac{1}{3}\left[P\{Y\le z+1\}+P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-1\}\right]$$

$$=\tfrac{1}{3}\left[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)\right]$$ ……7 分

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\tfrac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]$$ ……9 分

$$=\begin{cases}\tfrac{1}{3},-1\le z<2\\ 0,其他\end{cases}$$ ……11 分

(23)（本题满分 11 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i，\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2，\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量； **(II)** 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

(I) 证： 因 $ET=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}ES^2=(E\overline{X})^2+D\overline{X}-\frac{1}{n}ES^2$ ……4 分

$$=\mu^2+\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}=\mu^2$$

所以T是μ^2的无偏估计量 ……7 分

(II) 解： 当$\mu=0$，$\sigma=1$时，由于$\overline{X}$与S^2独立，有

$$DT=D(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=D\overline{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2$$ ……9 分

$$=\frac{1}{n^2}D(\sqrt{n}\,\overline{X})^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n(n-1)}$$ ……11 分

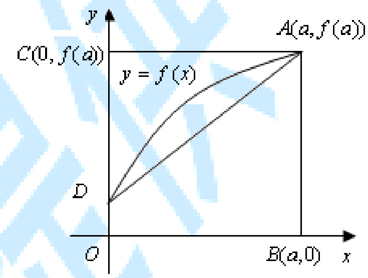
数 学（二）

一．选择题（1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.)

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为　（D）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

(2) 如图，曲线段的方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 等于　（C）



（A）曲边梯形 ABCD 面积.　（B）梯形 ABCD 面积.

（C）曲边三角形 ACD 面积.　（D）三角形 ACD 面积.

(3)【 同数学一（3）题 **】**

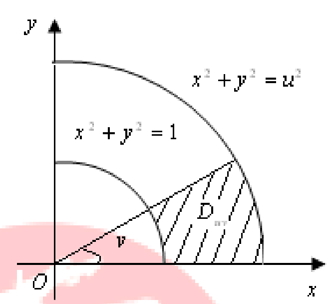
(4) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有　（A）

（A）1 个可去间断点，1 个跳跃间断点；　（B）1 个跳跃间断点，1 个无穷间断点.

（C）2 个跳跃间断点；　（D）2 个无穷间断点

(5)【 同数学一（4）题 **】**

(6) 设函数 f 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$　（A）



（A）$vf(u^2)$　（B）$\dfrac{v}{u}f(u^2)$　（C）$vf(u)$　（D）$\dfrac{v}{u}f(u)$

(7)【 同数学一（5）题 **】**

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为　（D）

（A）$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

二、填空题：（9～14小题，每小题4分，共24分.）

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ <u>2</u>.

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ <u>$x(C-e^{-x})$</u>.

(11) 【 同数学一（10）题 】

(12) 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 <u>$(-1,-6)$</u>.

(13) 已知 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ <u>$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln 2-1)$</u>.

(14) 设3阶矩阵A的特征值是 $2,3,\lambda$，若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$ <u>-1</u>.

三、解答题（15 ～ 23小题，共94分.）

(15)（本题满分9分） 【 同数学一（15）题 】

(16)（本题满分10分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du \end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 由 $\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0$ 得 $e^x dx=2tdt$，积分并由条件 $x|_{t=0}=0$，得 $e^x=1+t^2$，

即 $x=\ln(1+t^2)$ ……4分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\ln(1+t^2)\cdot 2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\ln(1+t^2)$$ ……7分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left[(1+t^2)\ln(1+t^2)\right]}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t\ln(1+t^2)+2t}{\frac{2t}{1+t^2}}=(1+t^2)\left[\ln(1+t^2)+1\right]$$ ……10分

(17)（本题满分 9 分）

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解： 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，故 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 是反常积分

令 $\arcsin x = t$，有 $x=\sin t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2})$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin^2 tdt \qquad \cdots\cdots 3\text{ 分}$$

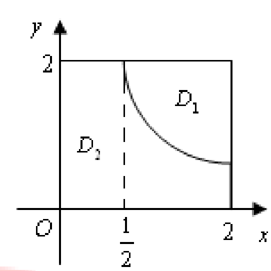
$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{t\sin 2t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4} \qquad \cdots\cdots 9\text{ 分}$$

(18)（本题满分 11 分）

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

解： 曲线 $xy=1$ 将区域 D 分成如图所示的两个区域 D_1 和 D_2 ……3 分



$$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy=\iint\limits_{D_1} xydxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy \qquad \cdots\cdots 5\text{ 分}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^2 xydy+\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^2 dy+\int_{\frac{1}{2}}^2 dx\int_0^{\frac{1}{x}}dy \qquad \cdots\cdots 8\text{ 分}$$

$$=\frac{15}{4}-\ln 2+1+2\ln 2=\frac{19}{4}+\ln 2 \qquad \cdots\cdots 11\text{ 分}$$

(19)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$，对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0, x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解： 旋转体的体积 $V=\pi\int_0^t f^2(x)dx$，侧面积 $S=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$，

由题设条件知 $\int_0^t f^2(x)dx=\int_0^t f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ ……4 分

上式两端对 t 求导得：$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+f'^2(t)}$， 即 $y'=\sqrt{y^2-1}$ ……6 分

由分离变量法解得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=t+C_1$，即 $y+\sqrt{y^2-1}=Ce^t$ ……9 分

将 $y(0)=1$ 代入知 $C=1$，故 $y+\sqrt{y^2-1}=e^t$，$y=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$

于是所求函数为 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ……11 分

(20)（本题满分 11 分）

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$

证：(I) 设 M 与 m 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，即

$$m\le f(x)\le M,\quad x\in[a,b]$$

由积分性质，有 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$，即 $m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$ ……2 分

由连续函数介值定理，至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，

即 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$ ……4 分

(II) 由 (I) 知至少存在一点 $\eta\in[2,3]$，使 $\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)$ ……6 分

又由 $\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\eta)$ 知，$2<\eta\le 3$，对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\varphi(\eta)$，得

$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,1<\xi_1<2$，$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,2<\xi_2<\eta\le 3$ ……9 分

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$ ……11 分

(21)（本题满分 11 分）

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

解： 作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$ ……3 分

令$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F_\mu' = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ ……6 分

解方程组得$(x_1, y_1, z_1) = (1,1,2)$，$(x_2, y_2, z_2) = (-2,-2,8)$ ……9 分

故所求的最大值为 72，最小值为 6. ……11 分

(22)（本题满分 12 分） 【 同数学一（21）题 】

(23)（本题满分 10 分）

设 A 为 3 阶矩阵，α_1, α_2为 A 的分别属于特征值-1，1 的特征向量，向量α_3满足$A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$，

（I）证明$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关；

（Ⅱ）令$P = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，求$P^{-1}AP$.

证明:（I）设存在数k_1, k_2, k_3，使得$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ①

用 A 左乘①的两边，并由$A\alpha_1 = -\alpha_1$，$A\alpha_2 = \alpha_2$，得：

$-k_1\alpha_1 + (k_2 + k_3)\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$ ② ……3 分

①－②得：$2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0$ ③

因为α_1, α_2是 A 的属于不同特征值的特征向量，所以α_1, α_2线性无关，从而$k_1 = k_3 = 0$

代入①得，$k_2\alpha_2 = 0$，又由于$\alpha_2 \neq 0$，所以$k_2 = 0$，故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关. ……7 分

（Ⅱ）由题设，可得$AP = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由(I)知，P为可逆矩阵，从而$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ……10 分

数 学（三）

一．选择题（1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.）

（1）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 x=0 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的　　（B）

（A）跳跃间断点.　（B）可去间断点.　（C）无穷间断点.　（D）振荡间断点.

（2）【 同数学二（2）题 】

（3）已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则　　（B）

（A） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都存在　　（B） $f_x'(0,0)$ 不存在， $f_y'(0,0)$ 存在

（C） $f_x'(0,0)$ 存在， $f_y'(0,0)$ 不存在　　（D） $f_x'(0,0)$　$f_y'(0,0)$ 都不存在

（4）【 同数学二（6）题 】

（5）【 同数学一（5）题 】

（6）【 同数学二（8）题 】

（7）【 同数学一（7）题 】

（8）【 同数学一（8）题 】

二、填空题：（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.）

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ __1__.

(10) 函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$，求积分 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)dx=$ __$\dfrac{1}{2}\ln 3$__.

(11) 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D (x^2-y)dxdy=$ __$\pi/4$__.

(12) 【 同数学一（9）题 】

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值是 1, 2, 2，E 为 3 阶单位矩阵，则 $|4A^{-1}-E|=$ __3__.

(14) 【 同数学一（14）题 】

三、解答题（15 ～ 23 小题，共 94 分.）

(15)（本题满分 9 分）

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$ ……4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{6x^2}$ ……7 分

$=-\dfrac{1}{6}$ ……9 分

(16)（本题满分 10 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq -1$，

(I) 求 dz； **(II)** 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解法 1：(I) 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z-\varphi(x+y+z)$

则 $F_x=2x-\varphi'$，$F_y'=2y-\varphi'$，$F_z'=-1-\varphi'$ ……3 分

由公式 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$

所以 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=\dfrac{1}{1+\varphi'}\left[(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dy\right]$ ……7 分

(II) 由于 $u(x,y)=\dfrac{2}{1+\varphi'}$， 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2}{(1+\varphi')^2}\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\varphi''=-\dfrac{2(2x+1)\varphi'}{(1+\varphi')^3}$ ……10 分

解法 2：(I) 对等式 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两端求微分,得

$2xdx+2ydy-dz=\varphi'\cdot(dx+dy+dz)$ ……5 分

解出 dz 得 $dz=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}dx+\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}dy$ ……7 分

(II) 同解法 1 ……10 分

(17)（本题满分 11 分） 【 同数学二（18）题 】

(18)（本题满分 10 分） $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数，

(I) 证明对任意实数 t，有 $\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$；

(II) 证明 $G(x)=\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)ds\right]dt$ 是周期为 2 的周期函数.

证法 1：(I) 由积分的性质知对任意的实数 t，

$$\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_t^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{t+2} f(x)dx$$ ……2 分

令 $s = x-2$，则有 $\int_2^{t+2} f(x)dx = \int_0^t f(s+2)ds = \int_0^t f(s)ds = -\int_t^0 f(x)dx$

所以 $\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_t^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx - \int_t^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$ ……5 分

(II) 由 (I) 知对任意的 t 有 $\int_t^{t+2} f(s)ds = \int_0^2 f(s)ds$

记 $\int_0^2 f(s)ds = a$，则 $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - ax$

因为对任意的 x，$G(x+2) - G(x) = 2\int_0^{x+2} f(t)dt - a(x+2) - 2\int_0^x f(t)dt + ax$

$$= 2\int_x^{x+2} f(t)dt - 2a$$ ……8 分

$$= 2\int_0^2 f(t)dt - 2a = 0$$

所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数. ……10 分

证法 2：(I) 设 $F(t) = \int_t^{t+2} f(x)dx$，由于 $F'(t) = f(t+2) - f(t) = 0$， ……2 分

所以 $F(t)$ 为常数，从而有 $F(t) = F(0)$

而 $F(0) = \int_0^2 f(x)dx$，所以 $F(t) = \int_0^2 f(x)dx$，即 $\int_t^{t+2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$ ……5 分

(II) 由 (I) 知对任意的 t 有 $\int_t^{t+2} f(s)ds = \int_0^2 f(s)ds$

记 $\int_0^2 f(s)ds = a$，则 $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - ax$，$G(x+2) = 2\int_0^{x+2} f(t)dt - a(x+2)$ ……7 分

由于对任意 x，$(G(x+2))' = 2f(x+2) - a = 2f(x) - a$，$(G(x))' = 2f(x) - a$

所以 $(G(x+2) - G(x))' = 0$，从而 $G(x+2) - G(x)$ 是常数，

即有 $G(x+2) - G(x) = G(2) - G(0) = 0$，所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数. ……10 分

(19)（本题满分 10 分）

设银行存款的年利率为 $r = 0.05$，并依年复利计算，某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，…，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

解： 设 A_n 为用于第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值，则 $A_n = (1+r)^{-n}(10+9n)$

故 $A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+9n}{(1+r)^n}$ ……3 分

$=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{(1+r)^n}=200+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}$ ……6 分

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，$x\in(-1,1)$

因为 $S(x)=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$ ……9 分

所以 $S\left(\frac{1}{1+r}\right)=S\left(\frac{1}{1.05}\right)=420$（万元）

故 $A=200+9\times420=3980$（万元），即至少应存入 3980 万元. ……10 分

(20)(本题满分 12 分)【同数学一（21）题】

(21)(本题满分 10 分)【同数学二（23）题】

(22)(本题满分 11 分)【同数学一（22）题】

(23)(本题满分 11 分)【同数学一（23）题】

数 学（四）

一．选择题（1 ～ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.)

（1）设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ （B）

（A）a.　（B）a^{-1}.　（C）b.　（D）b^{-1}.

（2）【 同数学三（1）题 】

（3）设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$g(x)$ 是连续的偶函数，区域

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\}$$

则以下结论正确的是 （A）

（A）$\iint\limits_D f(y)g(x)dxdy=0.$　（B）$\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=0.$

（C）$\iint\limits_D [f(x)+g(y)]dxdy=0.$　（D）$\iint\limits_D [f(y)+g(x)]dxdy=0$

（4）【 同数学二（2）题 】

（5）【 同数学一（5）题 】

（6）【 同数学二（8）题 】

（7）【 同数学一（7）题 】

（8）【 同数学一（8）题 】

二、填空题：(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.)

(9) 【 同数学三（9）题 】

(10) 已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处切线方程是 $\underline{\quad y=2x\quad}$.

(11) $\int_1^2 dx\int_0^1 x^y\ln x dy=$ $\underline{\quad 1/2\quad}$.

(12) 【 同数学二（10）题 】

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，且行列式 $|A|=0$，则 A 的秩为$\underline{\quad 2\quad}$.

(14) 【 同数学一（14）题 】

三、解答题（15 ～ 23 小题，共 94 分.）

(15)（本题满分 9 分） 【 同数学三（15）题 】

(16)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|dt\ (0<x<1)$，求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

解： $f(x)=\int_0^x t(x-t)dt+\int_x^1 t(t-x)dt=\frac{1}{3}x^3-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$ ……4 分

令 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2},x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）

因 $f''(x)=2x>0$（$0<x<1$） ……5 分

故 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{3}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是凹的. ……8 分

由 $f'(x)=x^2-\frac{1}{2}$ 知，$f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 内单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 内单调递增. ……10 分

(17)（本题满分 11 分） 【 同数学二（21）题 】

(18)（本题满分 10 分） 【 同数学三（16）题 】

(19)（本题满分 10 分） 【 同数学三（18）题 】

(20)（本题满分 12 分） 【 同数学一（21）题 】

(21)（本题满分 10 分） 【 同数学二（23）题 】

(22)（本题满分 11 分） 【 同数学一（22）题 】

(23)（本题满分 11 分）

设某企业生产线上产品合格率为 0.96，不合格产品中只有 $\frac{3}{4}$ 产品可进行再加工，且再加工合格率为 0.8，其余均为废品，每件合格品获利 80 元，每件废品亏损 20 元，为保证该企业每天平均利润不低于 2 万元，问企业每天至少应生产多少件产品？

解： 进行再加工后，产品的合格率 $p=0.96+0.04\times0.75\times0.8=0.984$ ……4 分

记 X 为 n 件产品中的合格产品数，$T(n)$ 为 n 件产品的利润，则

$X\sim B(n,p),EX=np=0.984n$ ……8 分

$T(n)=80X-20(n-X)$，$ET(n)=100EX-20n=78.4n$ ……10 分

要 $ET(n)\geq 20000$，则 $n\geq 256$，即该企业每天至少应生产 256 件产品. ……11 分