二叉堆、并查集和树状数组

刘汝佳

优先队列

- 优先队列(priority queue): 可以把元素加入到优先队列中, 也可以从队列中取出<u>优先级最高</u>的元素, 即以下ADT
  - **Insert(T, x):** 把x加入优先队列中
  - **DeleteMin(T, x):** 获取优先级最高的元素x, 并把它从优先队列中删除

堆的操作

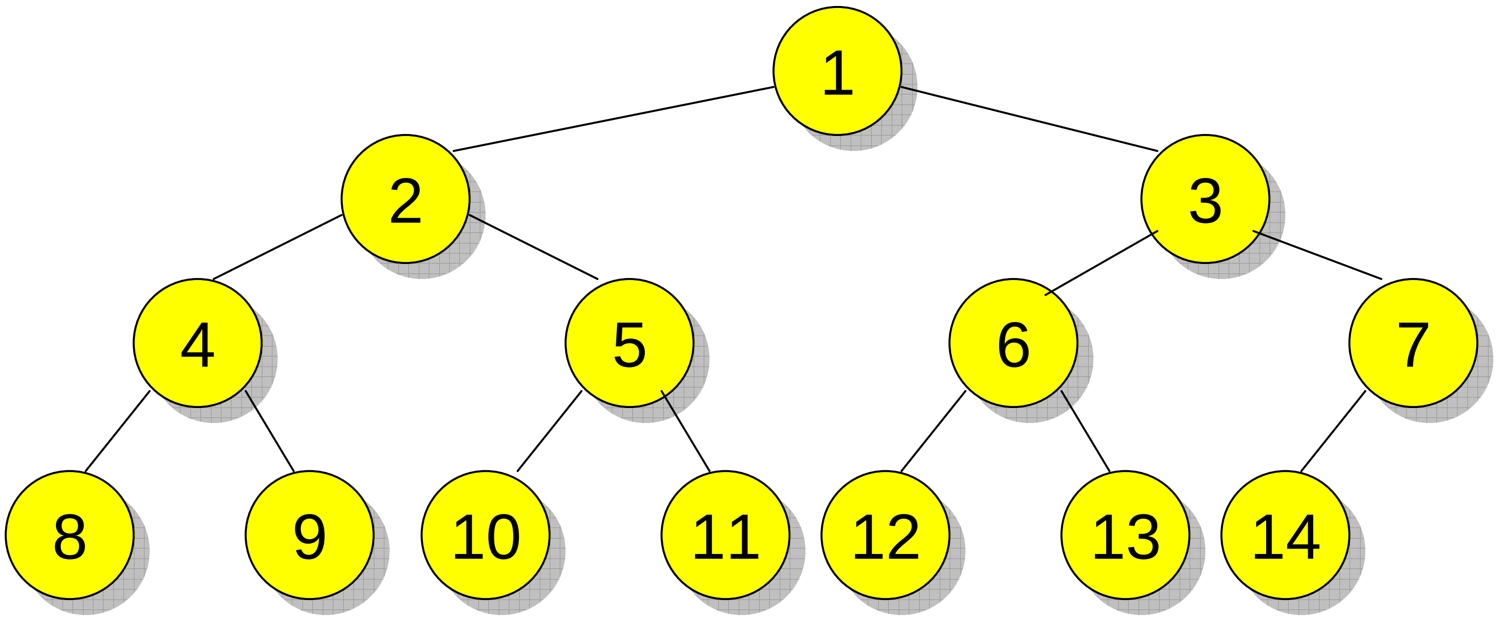
- 用二叉堆(binary heap)很容易实现优先队列
- 除了实现优先队列, 堆还有其他用途, 因此操作比优先队列多
  - **Getmin(T, x):** 获得最小值
  - **Delete(T, x):** 删除任意已知结点
  - **DecreaseKey(T, x, p):** 把x的优先级降为p
  - **Build(T, x):** 把数组x建立成最小堆

堆的定义

- 堆是一个完全二叉树
  - 所有叶子在同一层或者两个连续层
  - 最后一层的结点占据尽量左的位置
- 堆性质
  - 为空, 或者最小元素在根上
  - 两棵子树也是堆

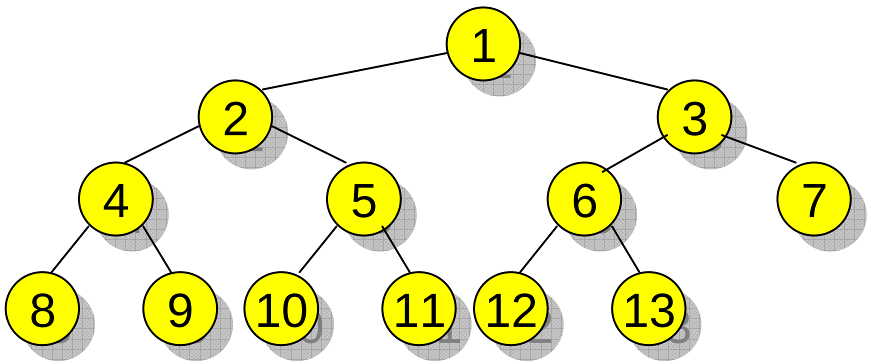
存储方式

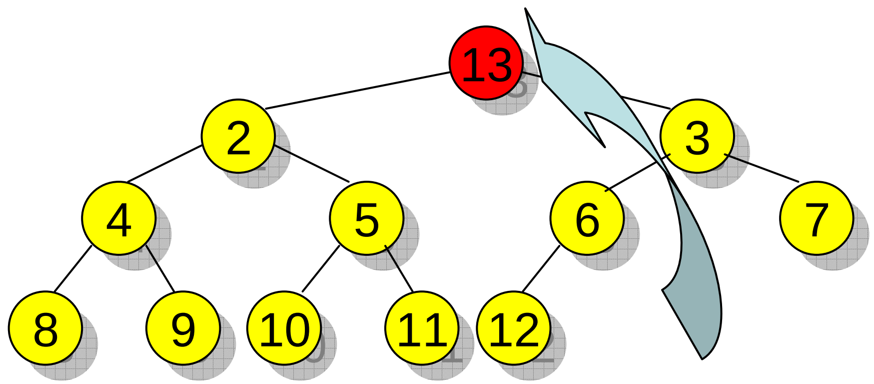
- 最小堆的元素保存在heap[1..hs]内
  - 根在heap[1]
  - K的左儿子是2k, K的右儿子是2k+1,
  - K的父亲是[k/2]



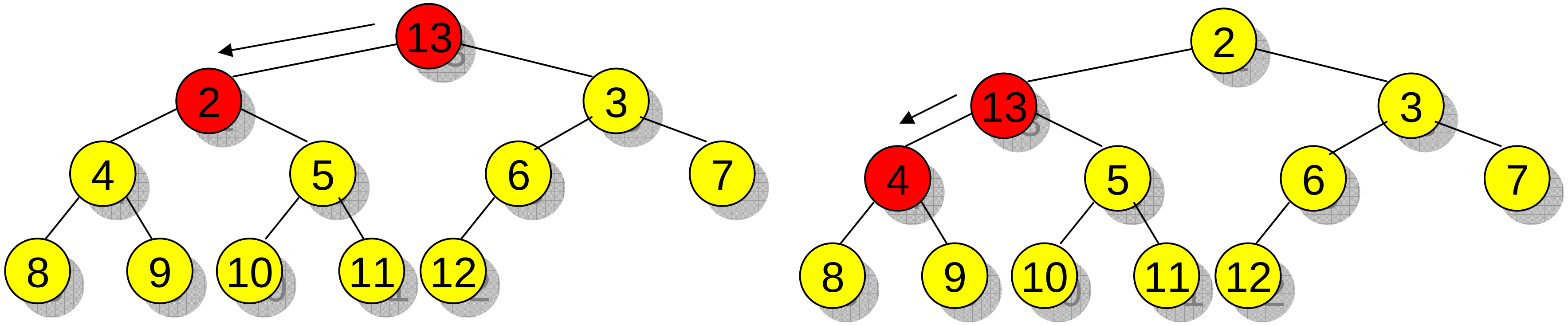
删除最小值元素

- 三步法
  - 直接删除根
  - 用最后一个元素代替根上元素
  - <u>向下调整</u>





- 首先选取当前结点p的较大儿子. 如果比p大, 调整停止, 否则交换p和儿子, 继续调整




```
void sink(int p){
    int q=p<<1, a = heap[p];
    while(q<=hs){
        if(q<hs&&heap[q+1]<heap[q])q++;
        if(heap[q]>=a) break;
        heap[p]=heap[q]; p=q; q=p<<1;
    }
    heap[p] = a;
}
```

插入元素和向上调整

- 插入元素是先添加到末尾, 再<u>向上调整</u>
- 向上调整: 比较当前结点p和父亲, 如果父亲比p小, 停止; 否则交换父亲和p, 继续调整

```
void swim(int p){
    int q = p>>1, a = heap[p];
    while(q && a<heap[q]){ heap[p]=heap[q]; p=q; q=p>>1; }
    heap[p] = a;
}
```

堆的建立

- 从下往上逐层向下调整. 所有的叶子无需调整, 因此从hs/2开始. 可用数学归纳法证明循环变量为i时, 第i+1, i+2, …n均为最小堆的根

```
void insert(int a)
{ heap[++hs]=a; swim(hs); }
int getmin()
{ int r=heap[1]; heap[1]=heap[hs--];
  sink(1); return r; }
int decreaseKey(int p, int a)
{ heap[p]=a; swim(p); }
void build()
{ for(int i=hs/2;i>0;i--) sink(i); }
```

时间复杂度分析

- 向上调整/向下调整
  - 每层是常数级别, 共logn层, 因此O(logn)
- 插入/删除
  - 只调用一次向上或向下调整, 因此都是O(logn)
- 建堆
  - 高度为h的结点有$n/2^{h+1}$个,总时间为

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \times O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right)$$

例1. k路归并问题

- 把k个有序表合并成一个有序表.
- 元素共有n个.

分析

- 每个表的元素都是从左到右移入新表
- 把每个表的当前元素放入二叉堆中, 每次删除最小值并放入新表中, 然后加入此序列的下一个元素
- 每次操作需要logk时间, 因此总共需要nlogk的时间

例2. 序列和的前n小元素

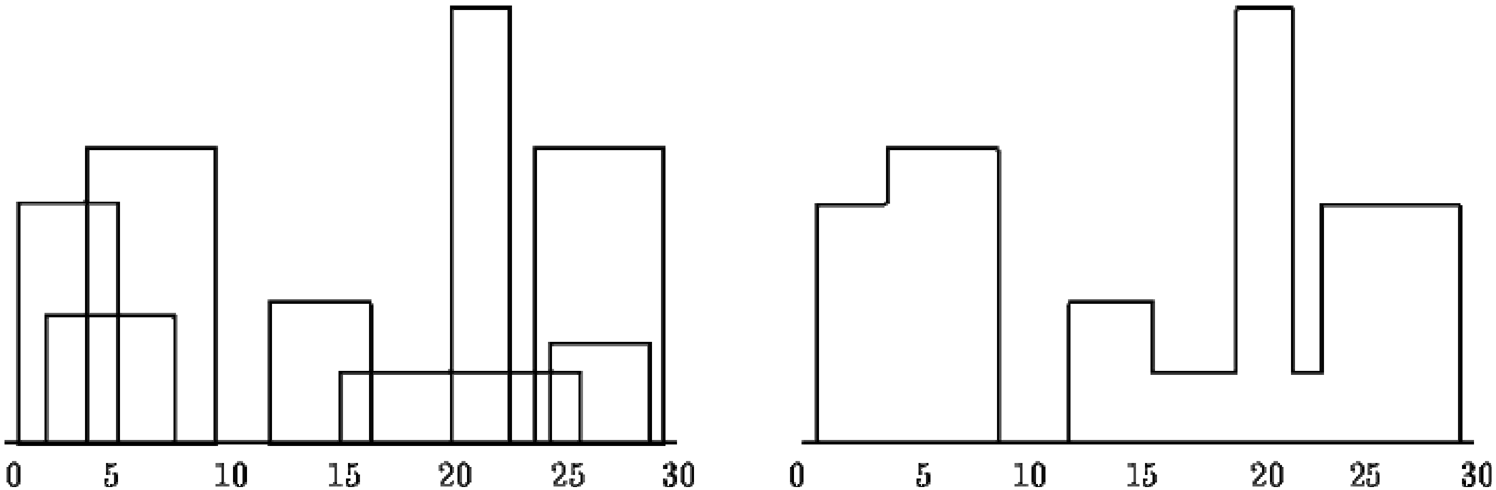
- 给出两个长度为n的有序表A和B, 在A和B中各任取一个, 可以得到n^2个和. 求这些和最小的n个

分析

- 可以把这些和看成n个有序表:
  - A[1]+B[1] <= A[1]+B[2] <= A[1]+B[3] <=…
  - A[2]+B[1] <= A[2]+B[2] <= A[2]+B[3] <=…
  - …
  - A[n]+B[1] <= A[n]+B[2] <= A[n]+B[3] <=…
- 类似刚才的算法, 每次O(logn), 共取n次最小元素,共O(nlogn)

例3. 轮廓线

- 每一个建筑物用一个三元组表示(L, H, R), 表示左边界, 高度和右边界
- 轮廓线用X, Y, X, Y…这样的交替式表示
- 右图的轮廓线为: (1, 11, 3, 13, 9, 0, 12, 7, 16, 3, 19, 18, 22, 3, 23, 13, 29, 0)
- 给N个建筑，求轮廓线



分析

- 算法一: 用数组记录每一个元线段的高度
  - 离散化, 有n个元线段
  - 每次插入可能影响n个元线段, O(n), 共O(n^2)
  - 从左到右扫描元线段高度, 得轮廓线
- 算法二：每个建筑的左右边界为事件点
  - 把事件点排序, 从左到右扫描
  - 维护建筑物集合, 事件点为线段的插入删除
  - 需要求最高建筑物, 用堆, 共O(nlogn)

例4. 丑数

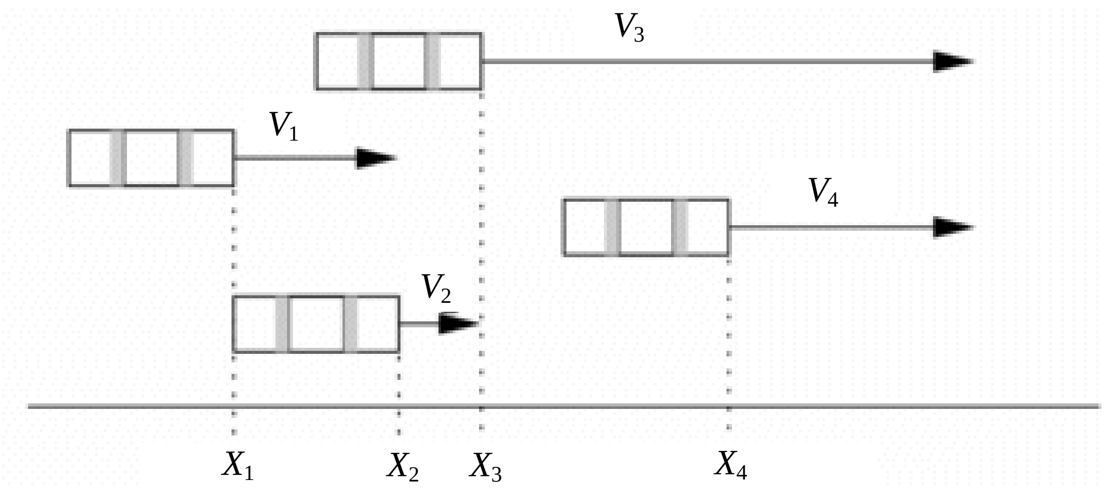
- 素因子都在集合{2, 3, 5, 7}的数称为ugly number
- 求第n大的丑数

分析

- 初始：把1放入优先队列中
- 每次从优先队列中取出一个元素k，把2k, 3k, 5k, 7k放入优先队列中
- 从2开始，取出的第n个元素就是第n大丑数
- 每取出一个数，插入4个数，因此任何堆里的元素是O(n)的，时间复杂度为O(nlogn)
- 思考: 如果集合元素个数m与n同阶, 时间复杂度将变为怎样? 如何优化?

例5. 赛车

- 有n辆赛车从各不相同的地方以各种的速度(速度 $0<v_i<100$)开始往右行驶，不断有超车现象发生。



- 给出n辆赛车的描述（位置x_i，速度v_i），赛车已按照位置排序（$x_1<x_2<\ldots<x_n$）
- 输出超车总数以及按时间顺序的前m个超车事件

分析

- 事件个数O(n^2), 因此只能一个一个求
- 给定两辆车，超越时刻预先可算出
- 第一次超车可能在哪些辆车之间？
  - 维护所有车的前方相邻车和追上时刻
    - 局部：此时刻不一定是该车下个超车时刻！
    - 全局：所有时刻的最小值就是下次真实超车时刻
- 维护：超车以后有什么变化？
  - 相对顺序变化…改变三个车的前方相邻车
  - 重新算追上时刻，调整三个权
  - 简单的处理方法：删除三个再插入三个

例6. 可怜的奶牛

- 农夫John有n（$n\leqslant 100\ 000$）头奶牛，可是由于它们产的奶太少，农夫对它们很不满意，决定每天把产奶最少的一头做成牛肉干吃掉。但还是有一点舍不得，John打算如果不止有一头奶牛产奶最少，当天就大发慈悲，放过所有的牛。
- 由于John的奶牛产奶是周期性的，John在一开始就能可以了解所有牛的最终命运，不过他的数学很差，所以请你帮帮忙，算算最后有多少头奶牛可以幸免于难。每头奶牛的产奶周期T_i 可能不同，但不会超过10。在每个周期中，奶牛每天产奶量不超过200。

分析

- 如果采用最笨的方法，每次先求出每头牛的产奶量，再求最小值，则每天的复杂度为O(n)，总复杂度为O(Tn)，其中T是模拟的总天数。由于周期不超过10，如果有的牛永远也不会被吃掉，那么我们需要多模拟2520天（1，2，3，…，10的最小公倍数）才能确定
- 周期同为t的奶牛在没有都被吃掉之前，每天的最小产奶量也是以t为周期的。因此如果把周期相同的奶牛合并起来，每天只需要比较10类奶牛中每类牛的 最小产奶量就可以了，每天的复杂度为O(k)，其中k为最长周期

分析

- 假设周期为6的牛有4头，每次只需要比较k组牛的“代表”就可以了，每天模拟的时间复杂度为$O(k)$。

项　目	第6n+1天	第6n+2天	第6n+3天	第6n+4天	第6n+5天	第6n+6天
牛1	2	5	3	5	7	4
牛2	3	1	6	7	5	4
牛3	5	3	3	5	3	9
牛4	4	4	3	8	8	2
合并结果	2（牛1）	1（牛2）	3（多）	5（多）	3（牛3）	2（牛4）

分析

- 只要周期为6的牛都不被吃掉，这个表一直是有效的。但是在吃掉一头奶牛后，我们需要修改这个表，使它仍然记录着每天的最小产奶量
  - 方法一: 重新计算，时间O(h)，其中h是该组的牛数
  - 方法二: 把一个周期中每天的最小产奶量组织成堆，每次删除操作的复杂度是O(klogh)
- 由于每头奶牛最多被吃掉一次，因此用在维护“最小产奶量结构”的总复杂度不超过O(nklogn)。每天复杂度为O(k)，总复杂度为O(Tk+nklogn)

例7. 黑匣子

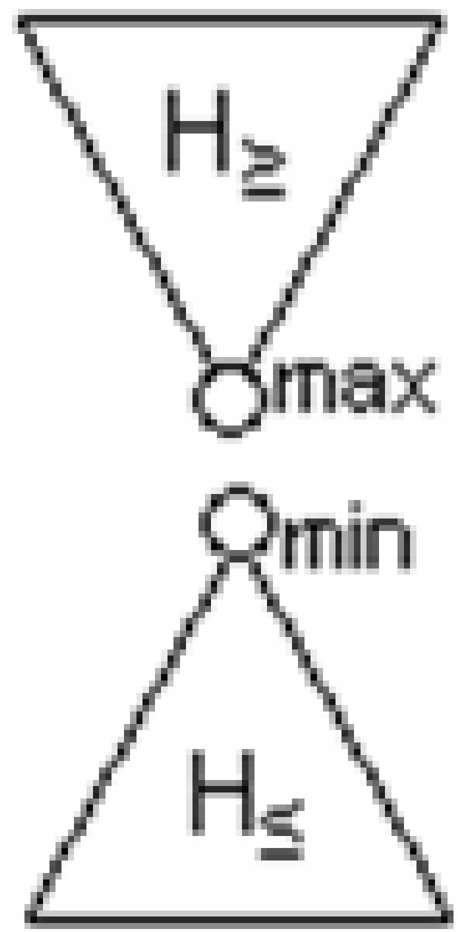
- 我们使用黑匣子的一个简单模型。它能存放一个整数序列和一个特别的变量*i*。在初始时刻，黑匣子为空且*i*等于0。这个黑匣子执行一序列的命令。有两类命令：
- ADD(*x*)：把元素*x*放入黑匣子；
- GET：*i*增1的同时，输出黑匣子内所有整数中第*i*小的数。牢记第*i*小的数是当黑匣子中的元素以非降序排序后位于第*i*位的元素

例7. 黑匣子

编号	命令	i	黑匣子内容	输出
1	ADD(3)	0	3	
2	GET	1	**3**	3
3	ADD(1)	1	1, 3	
4	GET	2	1, **3**	3
5	ADD(-4)	2	-4, 1, 3	
6	ADD(2)	2	-4, 1, 2, 3	
7	ADD(8)	2	-4, 1, 2, 3, 8	
8	ADD(-1000)	2	-1000, -4, 1, 2, 3, 8	
9	GET	3	-1000, -4, **1**, 2, 3, 8	1
10	GET	4	-1000, -4, 1, **2**, 3, 8	2
11	ADD(2)	4	-1000, -4, 1, 2, 2, 3, 8	

分析

- 降序堆$H_{\geq}$和升序堆$H_{\leq}$如图放置
- $H_{\geq}$根节点的值$H_{\geq}[1]$在堆$H_{\geq}$中最大，$H_{\leq}$根节点的值$H_{\leq}[1]$在堆$H_{\leq}$中最小，并满足
  – $H_{\geq}[1] \leq H_{\leq}[1]$
  – $size[H_{\geq}]=i$
- ADD(x): 比较x与$H_{\geq}[1]$，若$x \geq H_{\geq}[1]$，则将x插入$H_{\leq}$，否则从$H_{\geq}$中取出$H_{\geq}[1]$插入$H_{\leq}$，再将x插入$H_{\geq}$
- GET: $H_{\leq}[1]$就是待获取的对象。输出$H_{\leq}[1]$，同时从$H_{\leq}$中取出$H_{\leq}[1]$插入$H_{\geq}$，以维护条件(2)

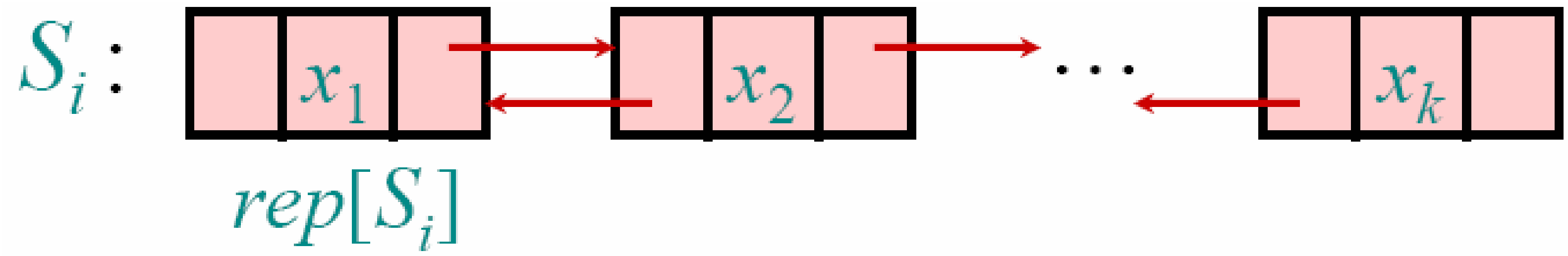


并查集

- 并查集维护一些不相交集合S={S_1, S_2, …, S_r}, 每个集合S_r都有一个特殊元素rep[S_i], 称为集合代表. 并查集支持三种操作
  - – **Make-Set(x):** 加入一个集合{x}到S, 且rep[{x}] = x. 注意, x不能被包含在任何一个S_i中, 因为S里任何两个集合应是不相交的
  - – **Union(x, y):** 把x和y所在的两个不同集合合并. 相当于从S中删除S_x和S_y并加入S_xUS_y
  - – **Find-Set(x):** 返回x所在集合S_x的代表rep[S_x]

链结构

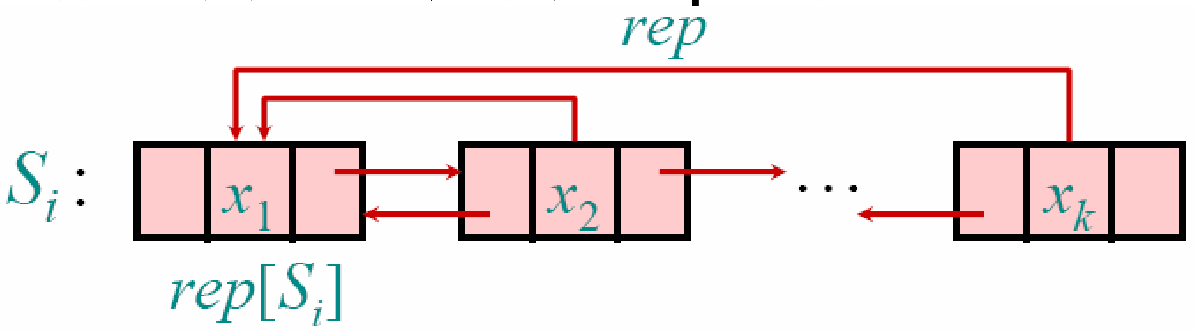
- 每个集合用双向链表表示, rep[S_i]在链表首部



- **Make-Set(x):** 显然是O(1)的
- **Find-Set(x):** 需要不断往左移, 直到移动到首部. 最坏情况下是O(n)的
- **Union(x, y):** 把S_y接在S_x的尾部, 代表仍是rep[S_x]. 为了查找链表尾部, 需要O(n)

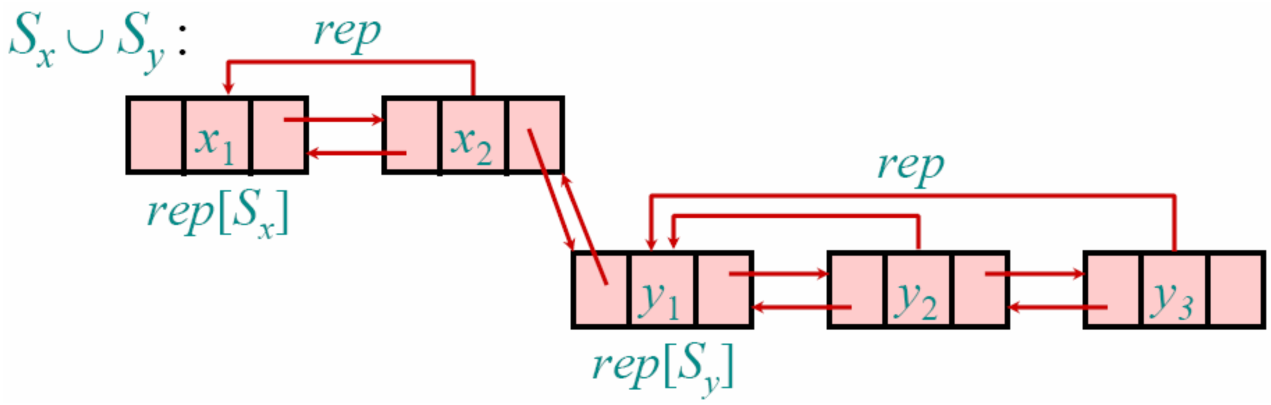
增强型链结构

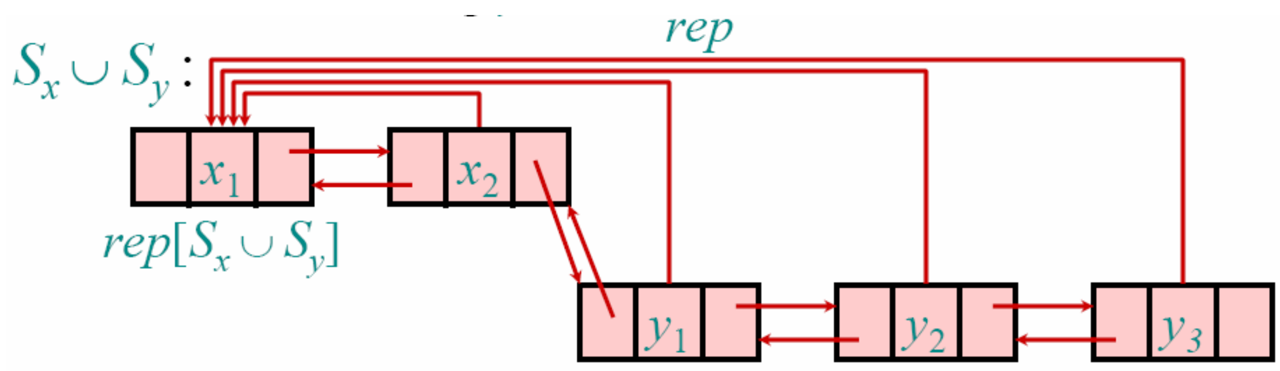
- 给每个结点增加一个指回rep的指针



- **Make-Set(x):** 仍为常数
- **Find-Set(x):** 降为常数(直接读rep)
- **Union(x, y):** 变得复杂: 需要把S_y里所有元素的rep指针设为rep[Sx]!

增强型链结构的合并





- 可以把x合并到y中，也可以把y合并在x中

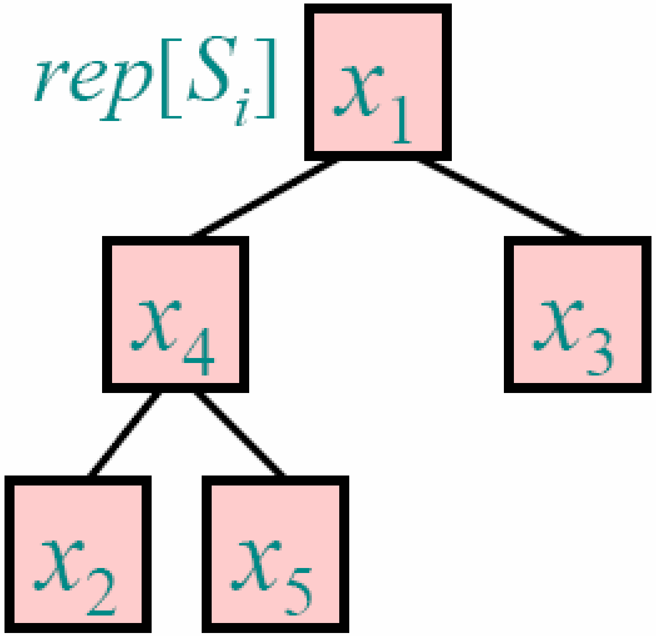
技巧1: 小的合并到大的中

- 显然, 把小的合并到大的中, 这一次Union操作会比较节省时间, 更精确的分析?
- 用n, m, f分别表示Make-Set的次数, 总操作次数和Find-Set的次数, 则有
- 定理: 所有Union的总时间为O(nlogn)
- 推论: 所有时间为O(m + nlogn)
- 证明: 单独考虑每个元素x, 设所在集合为S_x, 则修改rep[x]时, S_x至少加倍. 由于S_x不超过n, 因此修改次数不超过$\log_2 n$, 总nlogn

树结构

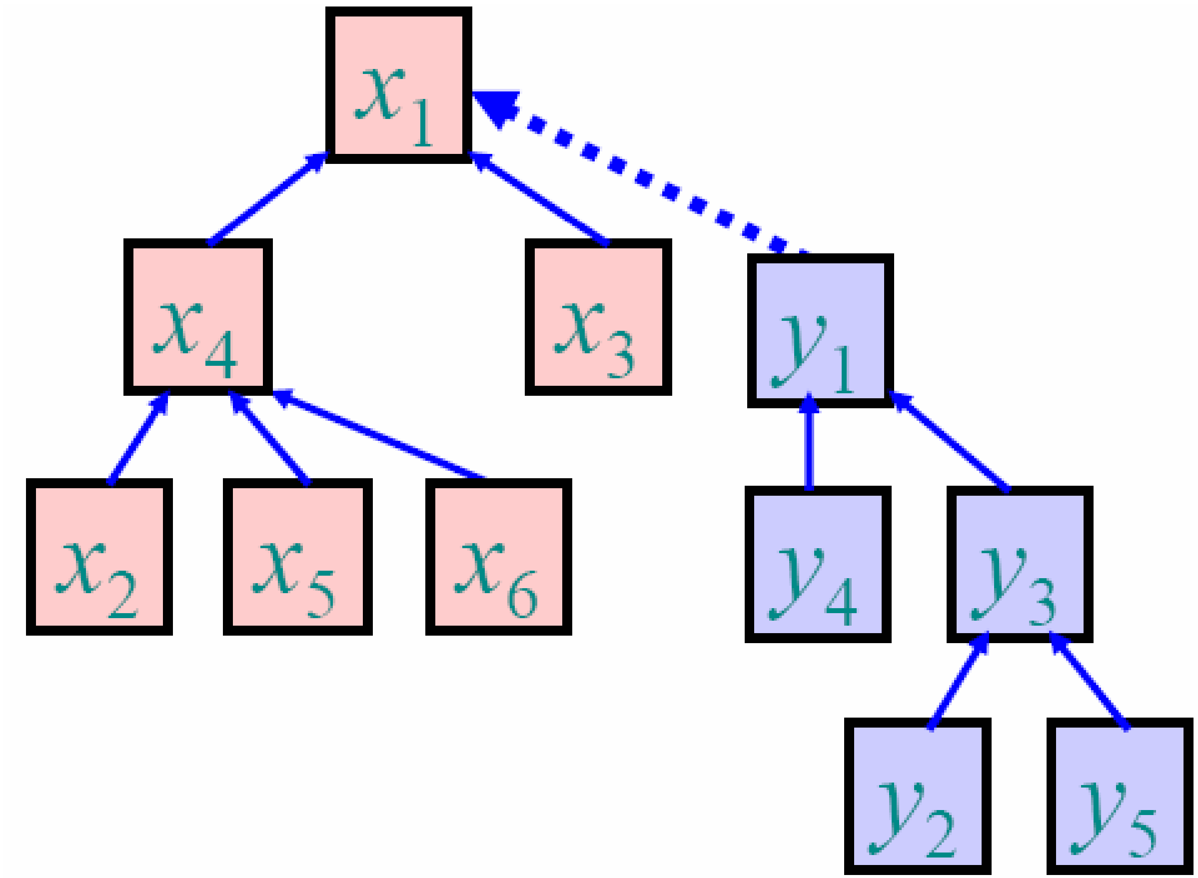
- 每个集合用一棵树表示, 根为集合代表

$$S_i = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$



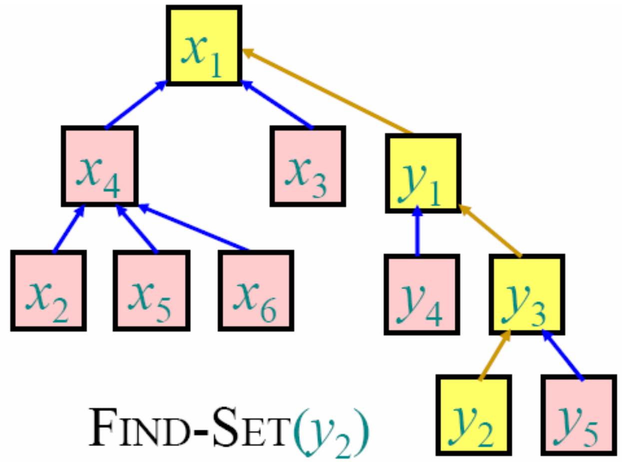
树结构的合并

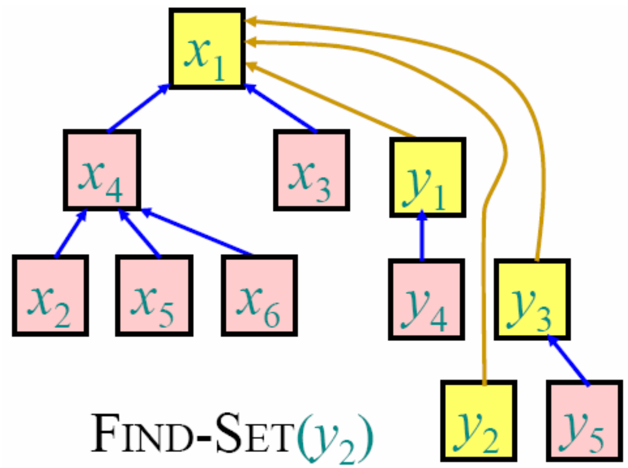
- 和链结构类似, 小的合并到大的中

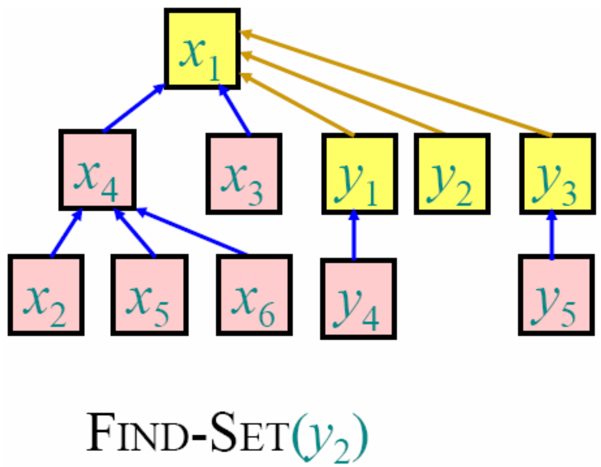


技巧2: 路径压缩

- 查找结束后顺便把父亲设置为根, 相当于有选择的设置rep指针而不像链结构中强制更新所有rep







路径压缩的分析

- 设w[x]为x的子树的结点数, 定义势能函数

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_i \lg weight[x_i]$$

- **Union(x_i, x_j)增加势能.** 最多会让w[rep[xi]] 增加w[rep[xj]]<=n, 因此势能增加不超过logn
- **Find-Set(x)减少势能.** 把路径压缩看作是从根到结点x的向下走过程, 则除了第一次外的其他向下走的步骤p→c会让c的子树从p的子树中移出, 即w[p]减少w[c], 而其他点的w值保持不变

路径压缩的分析

- Find-Set除了第一次外的其他向下走的步骤p→c会让c的子树从p的子树中移出
  - 情况一: w[c]>=w[p]/2, 则势能将至少减少1
  - 情况二: w[c]<w[p]/2, 这种情况最多出现logn次, 因为w[p]最多进行logn次除2操作就会得到1
- Union操作积累起来的mlogn的势能将被Find-Set消耗, 情况一最多消耗mlogn次, 情况二本身不超过mlogn次, 因此
- 定理: Find-Set的总时间为O(mlogn)

路径压缩的分析

- 定理: 如果所有Union发生在Find-Set之前, 则所有操作的时间复杂度为O(m)
- 证明: 每次Find-Set将会让路径上除了根的所有结点为根的儿子. 所有结点只会有一次改变，因此总时间复杂度为O(m)
- 也就是说
  - 只使用技巧1(启发式合并): O(m+nlogn)
  - 只使用技巧2(路径压缩): O(mlogn)
- 同时使用呢?

Ackermann函数及其反函数

Define $A_k(j) = \begin{cases} j+1 & \text{if } k=0, \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{if } k \geq 1. \end{cases}$ – iterate $j+1$ times

$A_0(j) = j+1$ $\qquad$ $A_0(1) = 2$

$A_1(j) \sim 2j$ $\qquad$ $A_1(1) = 3$

$A_2(j) \sim 2j\,2^j > 2^j$ $\qquad$ $A_2(1) = 7$

$A_3(1) = 2047$

$A_3(j) > \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^j}}}}}}}_{j}$

$A_4(j)$ is a lot bigger. $\qquad$ $A_4(1) > \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2047}}}}}}}}_{2048}$

Define $\alpha(n) = \min\ \{k : A_k(1) \geq n\} \leq 4$ for practical n.

树结构的完整结论

- 定理: m个操作的总时间复杂度为 $O(m\alpha(n))$

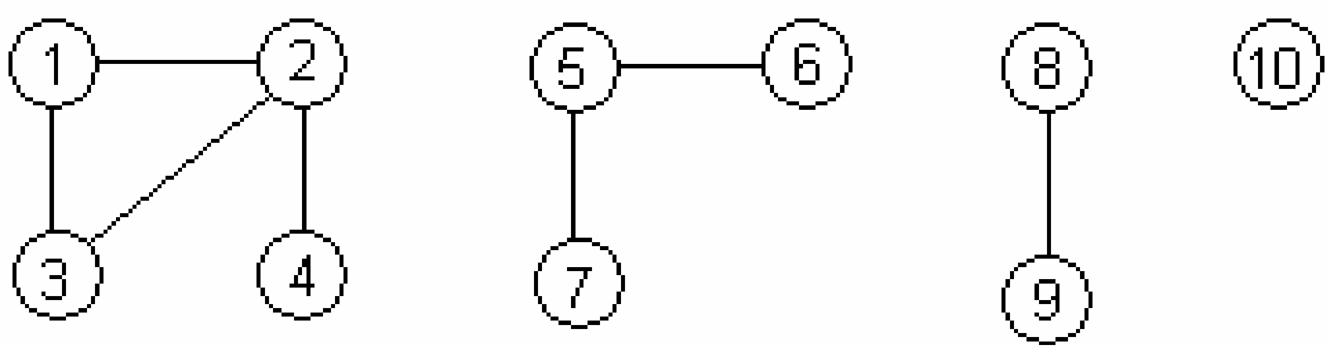
```
void makeset(int x){ rank[x] = 0; p[x]=x; }
int findset(int x){
    int i, px = x;
    while (px != p[px]) px = p[px];
    while (x != px) { i = p[x]; p[x] = px; x = i; }
    return px;
}
void unionset (int x , int y){
    x = findset(x); y = findset(y);
    if(rank[x] > rank[y]) p[y] = x;
    else { p[x] = y; if(rank[x] == rank[y]) rank[y]++; }
}
```

例1. 亲戚

- 或许你并不知道，你的某个朋友是你的亲戚。他可能是你的曾祖父的外公的女婿的外甥女的表姐的孙子。如果能得到完整的家谱，判断两个人是否亲戚应该是可行的，但如果两个人的最近公共祖先与他们像个好几代，使得家谱十分庞大，那么检验亲戚关系实非人力所能及。在这种情况下，最好的帮手就是计算机。
- 为了将问题简化，你将得到一些亲戚关系的信息，如同Marry和Tom是亲戚，Tom和Ben是亲戚，等等。从这些信息中，你可以推出Marry和Ben是亲戚。请写一个程序，对于我们的关于亲戚关系的提问，以最快的速度给出答案。

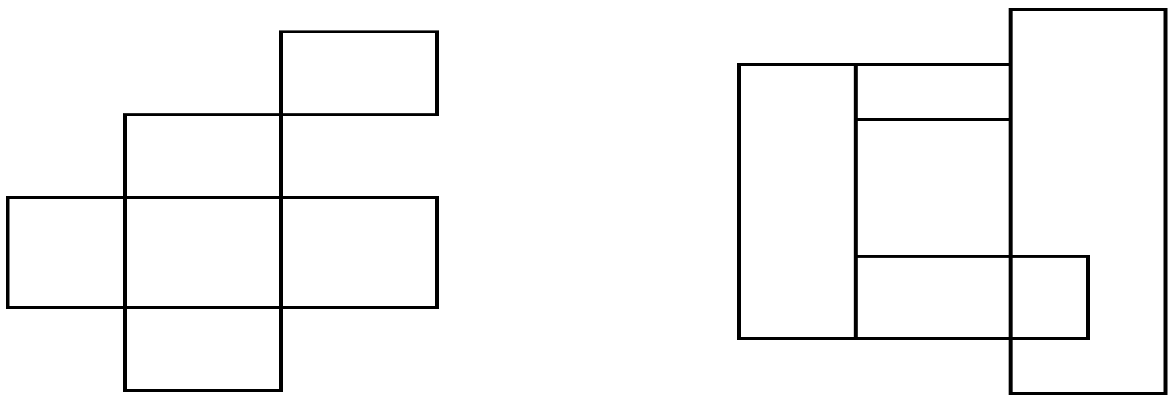
分析

- 本质: 是否在图的同一个连通块
- 问题: 图太庞大, 每次还需要遍历
- 解决: 用并查集



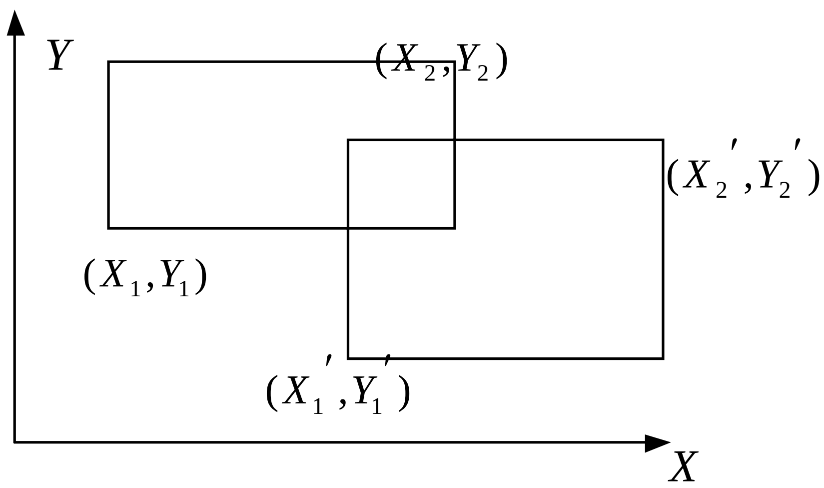
例2. 矩形

- 在平面上画了N个长方形，每个长方形的边平行于坐标轴并且顶点坐标为整数。我们用以下方式定义印版：
  - 每个长方形是一个印版；
  - 如果两个印版有公共的边或内部，那么它们组成新的印版，否则这些印版是分离的
- 数出印版的个数. 左图有两个，右图只有一个



分析

- 把矩形看作点，有公共边的矩形连边，问题转化为求连通分量的个数
- 判断方法：



例3. 代码等式

- 由元素0和1组成的非空的序列称为一个二进制代码。一个代码等式就是形如$x_1x_2..x_l=y_1y_2..y_r$,这里x_i和y_j是二进制的数字（0或1）或者是一个变量（如英语中的小写字母）
- 每一个变量都是一个有固定长度的二进制代码，它可以在代码等式中取代变量的位置。我们称这个长度为变量的长度
- 对于每一个给出的等式，计算一共有多少组解。
- 例: a,b,c,d,e的长度分别是4,2,4,4,2, 则1bad1 = acbe 有16组解

分析

- 长度为**k**的变量拆成**k**个长度为**1**的变量
- 每位得到一个等式
  - 1=1或者0=0：冗余等式
  - 1=0或者0=1：无解
  - a=b：a和b相等（a为变量b可以为常数）
- 相等关系用并查集处理，最后统计集合数为n，答案为2^n。

例4. 围墙

- 按顺序给出M个整点组成的线段，找到最小的k，使得前k条线段构成了封闭图形。（任意两条线段只可能在端点相交）

分析

- 将所有出现过的坐标用整数表示，初始时候每个独立成树。读入连接A和B的线段后，将A、B所在的树和并。如果A、B在同一棵树，那么就出现了封闭图形（因为x个点x条边的图必定出现圈）
- 把坐标转换成编号的步骤，可以通过对坐标进行排序，再删除重复。
- 时间: O(MlogM)

例5. 可爱的猴子

- 树上挂着n只可爱的猴子（$n \leqslant 2*10^5$）。
- 猴子1的尾巴挂在树上
- 每只猴子有两只手，每只手可以抓住最多一只猴子的尾巴，也可以不抓。猴子想抓谁一定抓得到
- 所有猴子都是悬空的，因此如果一旦脱离了树，猴子会立刻掉到地上。
- 第0，1，…，m（$1 \leqslant m \leqslant 400\ 000$）秒中每一秒都有某个猴子把他的某只手松开，因此常有猴子掉在地上
- 请计算出每个猴子掉到地上的时间

分析

- 并查集？
- “时光倒流”
- 如何标记每只猴子的时间？
  - 枚举并查集的元素
  - 需要访问兄弟/儿子？
  - 链表即可
  - 不用指针

例6. 奇数偶数

- 你的朋友写下一个由0和1组成的字符串， 并告诉你一些信息，即某个连续的子串中1的个数是奇数还是偶数。你的目标是找到尽量小的i，使得前i+1条不可能同时满足
  - 例如，序列长度为10，信息条数为5
  - 5条信息分别为1 2 even，3 4 odd，5 6 even，1 6 even，7 10 odd
- 正确答案是3，因为存在序列(0,0,1,0,1,1)满足前3条信息，但是不存在满足前4条的序列

分析

- 可以从前缀和s的奇偶性恢复整个序列
  - a b even等价于s[b], s[a-1]同奇偶
  - a b odd等价于s[b], s[a-1]不同奇偶
- 集合
  - same[i]: 已知与i在同一个等价类中的元素集合
  - opp[i]: 已知与i不在同一个等价类中的元素集合
- 初始same[i]={i}，opp[i]={}

分析

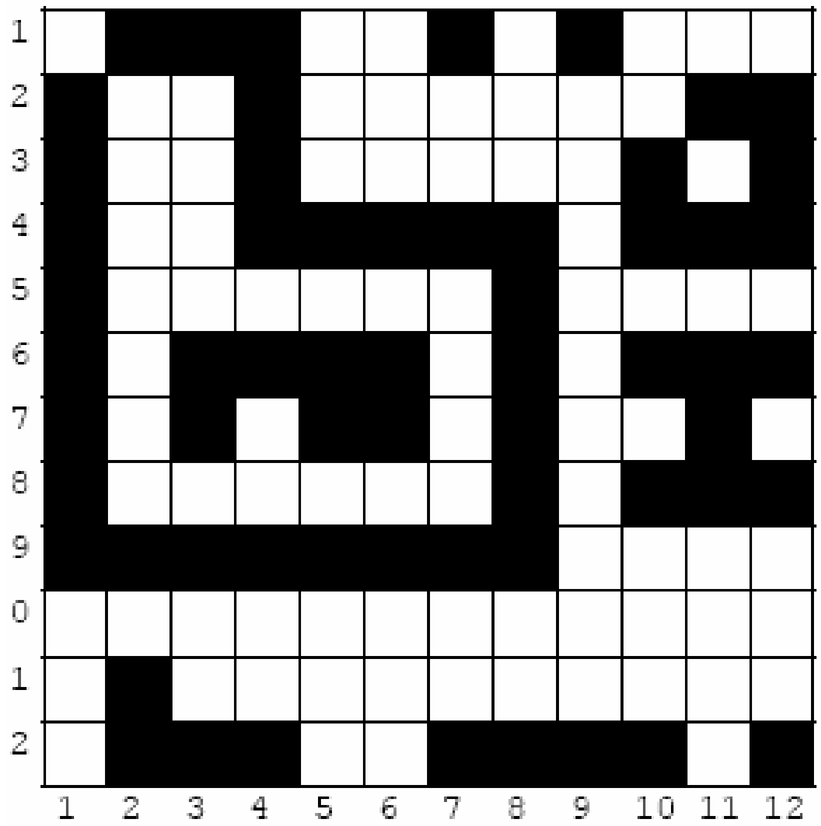
- 则两种条件意味着集合合并
- s[i]和s[j]同奇偶
  - 合并same[i]和same[j]
  - 合并opp[i]和opp[j]
- s[i]和s[j]不同奇偶
  - 合并same[i]和opp[j]
  - 合并same[j]和opp[i]

例7. 团伙

- 如果两个认识, 那么他们要么是朋友要么是敌人, 规则如下
  - 朋友的朋友是朋友
  - 敌人的敌人是敌人
- 给出一些人的关系(朋友、敌人), 判断一共最多可能有多少个团伙

例8. 船

- 给一个01矩阵, 黑色代表船. 右图有一个29吨的, 3个7吨的, 两个4吨的和三个一吨的.
- 输入行数N(<30000)和每行的黑色格子(区间数和每个区间)
- 输出每种重量的个数
- 一共不超过1000个船, 每个的重量不超过1000



例9. 离线最大值

- 设计一个集合, 初始为空，每次可以插入一个1~n的数(1~n各恰好被插入一次),也可以删除最大值, 要求m次操作的总时间尽量小.

分析

- 在最后加入n-m次虚拟的MAX操作, 并记第i个MAX操作为M_i,记M_1之前的插入序列为S_1, M_{i-1}(1<i<=m) 和M_i之间的插入序列为S_i
- 如果n在S_j中被插入，则M_j的输出一定是n. 然后删除M_j，即**把S_j合并到S_{j+1}中**，然后再查找n-1所在的序列S_k，则M_k的输出为n-1…如此下去，从n到1依次查找每个数所在序列，就可以得到它后面的MAX操作的结果, 并把它和紧随其后的序列合并

例10. 合并队列

- 初始时n个数1~n各在单独的一列中, 需要执行两个操作
  - Move(i, j): 把i所在列接到j所在列的尾部
  - Check(i, j): 询问i和j是否在同一列, 如果是, 输出二者之间的元素个数

分析

- 每个数i的p[i]表示i和p[i]在同一队列, 且p[i]是i之前的第d[i]个元素
- 对于队首x, 有p[x]=x, 附加变量tot[x]表示以x为首的队列一共有多少个元素
  - Move需要进行两次查找和一次合并
  - Check需要两次查找
- FIND: 修改p[i]时要修改d[i]
- MERGE: 可以启发式合并么???

维护前缀和

- 包含n个元素的整数数组A，每次可以
  - C(i, j): 修改一个元素A[i] = j
  - Q(i): 询问前缀$S_i=A_1+A_2+\ldots+A_i$的值
- 如何设计算法，使得修改和询问操作的时间复杂度尽量低？

LOWBIT

- 设**C[i]=a[i-2^k+1]+…+a[i],**其中k为i在二进制下末尾0的个数, 令LOWBIT(i)=2^k
  - 例如, i=10010101100**10000**, 则k=4
- 不难得到LOWBIT公式
  - LOWBIT(x) =x and (x xor (x-1))

```
inline int lowbit(int x)
{
        return x & (x ^ ( x - 1 ) );
}
```

修改A[x]的后果

- 修改A[x], 可能有很多C随之修改
- 例如x=76=$(1001010)_2$，可以得到：

p_1= 1001010
p_2= 1001100
p_3= 1010000
p_4= 1100000
p_5= 10000000

$$P_1 = x$$
$$P_{i+1} = P_i + \mathrm{LOWBIT}(P_i)$$

如何证明P_i和P_{i+1}之间的C值都不改变?

- 则需要依次修改$C[p_1]$,$C[p_2]$,…

前缀和A[1]+…+A[x]的计算

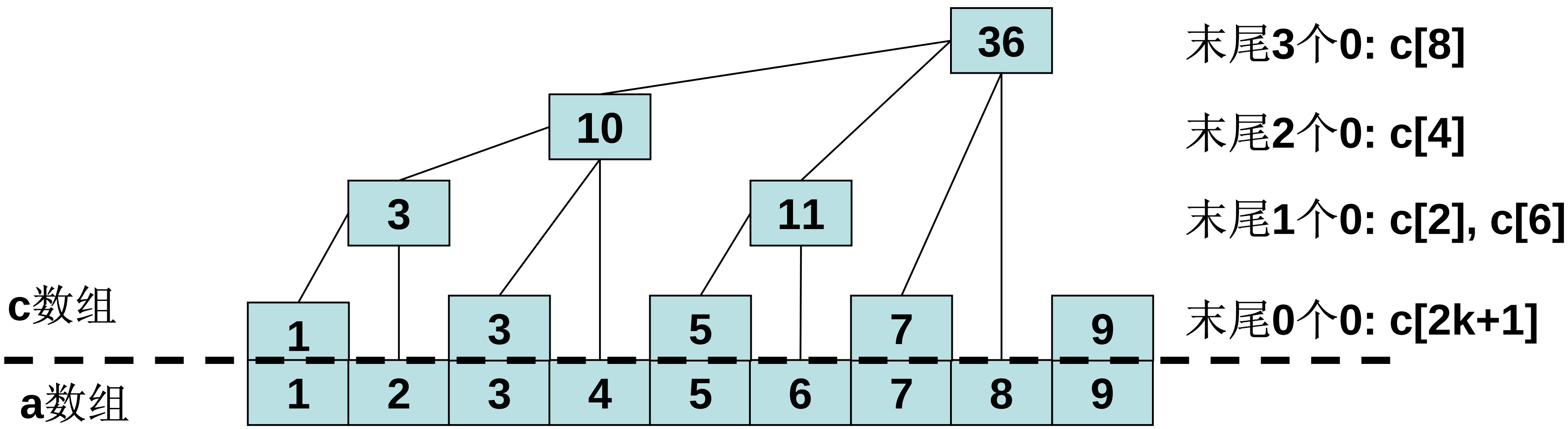
- 首先累加C[x], 因为它的定义是以x结尾的连续和. 它的连加起点是C[i-LOWBIT(i)+1], 因此问题转化为了求A[1]+…+A[i-LOWBIT(i)]
- 由此, 我们得到递推式

$$P_1=x$$
$$P_{i+1}=P_i-\mathrm{LOWBIT}(P_i)$$

- 则只需要累加$C[p_1]$, $C[p_2]$, …

C的分层树状结构

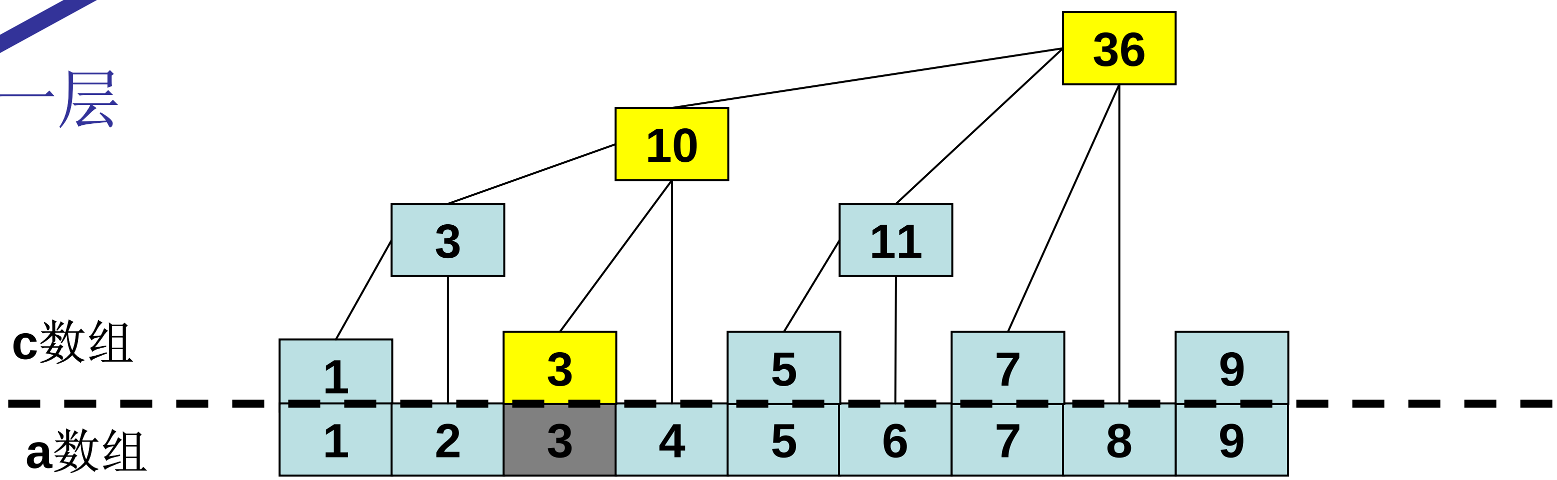
- 数组c[i] = a[i-2^k+1]+a[i-2^k+2]+…+a[i]
  - k为i在二进制形式下末尾0的个数
  - 起点是把i的**最后一个1**变为0再加1
- c数组的分层表示和递推关系如下图



第**i**层末尾有**i**个零，度数为**i+1**，定义式**2^i**项

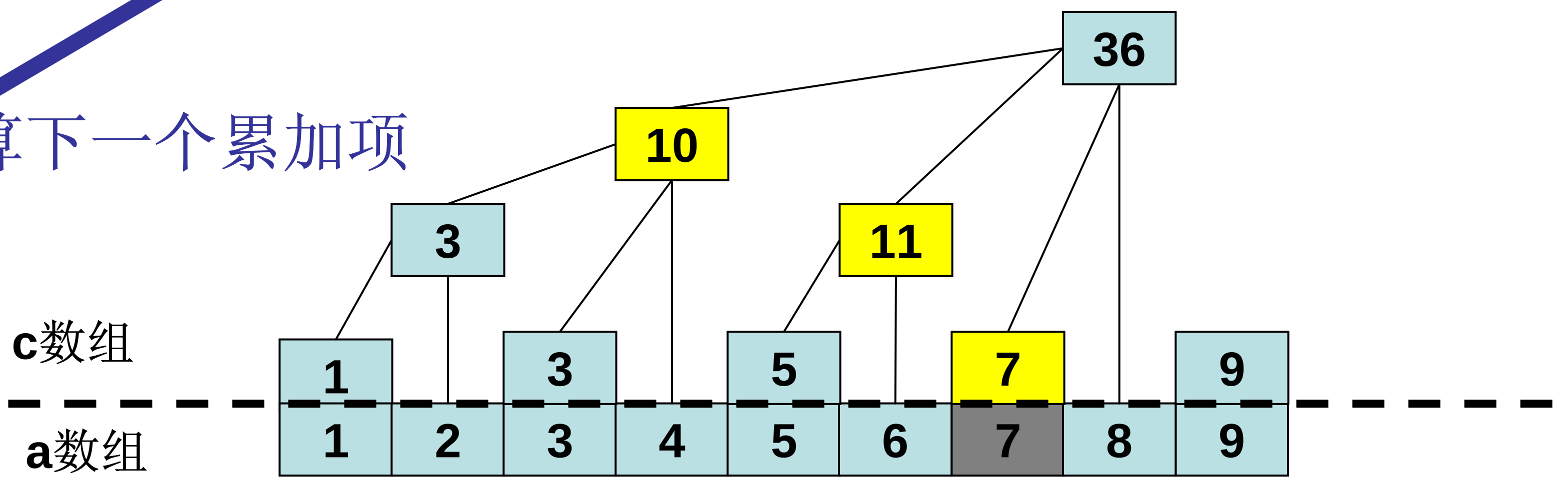
```
void Add(int p , int d){
        while(p <= n){
                C[p] += d;
                p += lowbit(p);
        }
}
```

提升一层



```
int Sum(int p){
        int ret = 0;
        while( p ){
                ret += C[p];
                p -= lowbit(p);
        }
        return ret;
}
```

计算下一个累加项

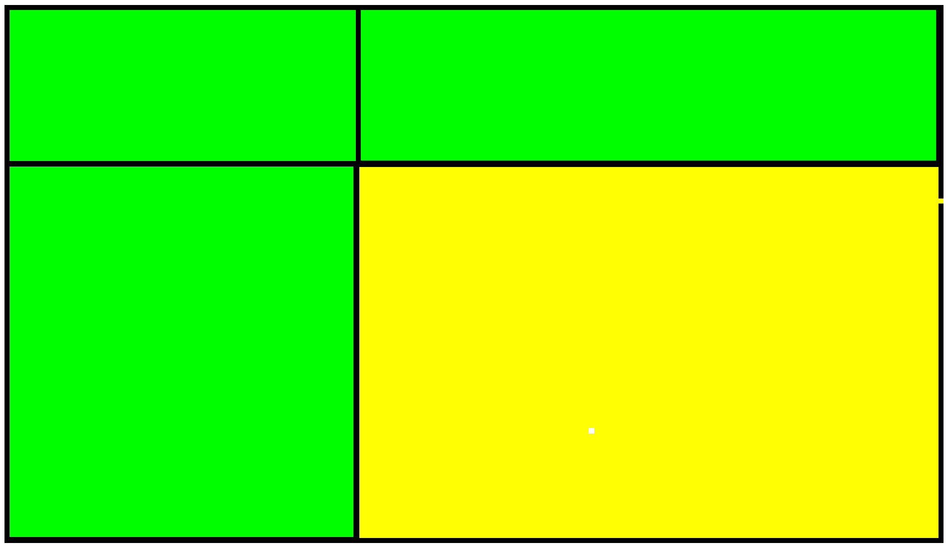


例1. 手机

- Tampere地区被划分成N*N个单元，形成一个N*N的表格，行列坐标均为0到N-1，每个单元中有一个移动电话信号发射基地
  – C(X,Y,A): 基地(X,Y)移动电话数的变化值为A
  – Q(L,T,R,B): 询问矩形区域内移动电话总数
- 注意C操作中A可正可负

分析

- 任意矩形转化为四个前缀矩形
- 转化为二维前缀和
- 二维独立, 分别处理, 每次操作$\log^2 n$



例2. 01矩阵

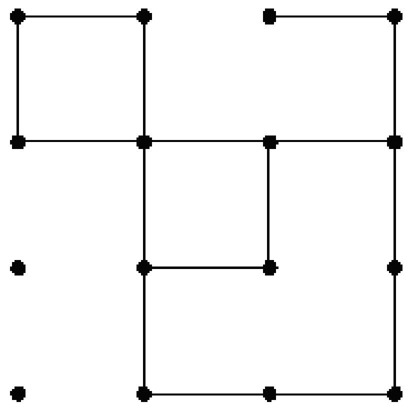
- 给n*n的01矩阵,支持
  - C(x_0,y_0,x_1,y_1)：改变矩形（每个元素取反）
  - Q(x,y)：查询(x,y)的值

分析

- 构造辅助01矩阵C’，初始为0
- 矩形分解: $C(x_0,y_0,x_1,y_1)$等价为改变以下4点的值
  - $C'(x_0,y_0)$, $C'(x_0,y_1)$, $C'(x_1,y_0)$, $C'(x_1,y_1)$
- 元素(x,y)的最终值完全取决于在C’中(x,y)的右下方的元素和的奇偶性
- 维护二维前缀和→二维数状数组

例3. 方格问题

- 在一个N*N格点方阵的给了一些长度为1的线段, 每条线段的格式为(X , Y , D), 其中D可以是H（往右）或者V（往下）



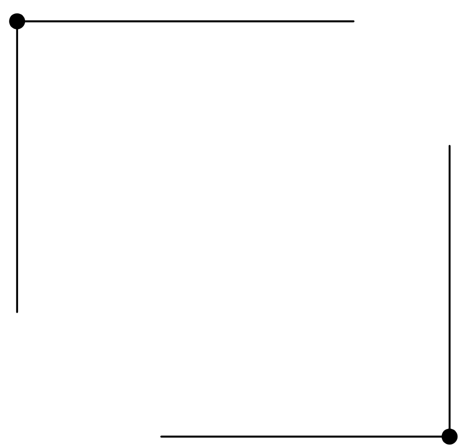
- 计算出一共有多少个正方形。上图共有3个正方形，两个边长为1，一个边长为2

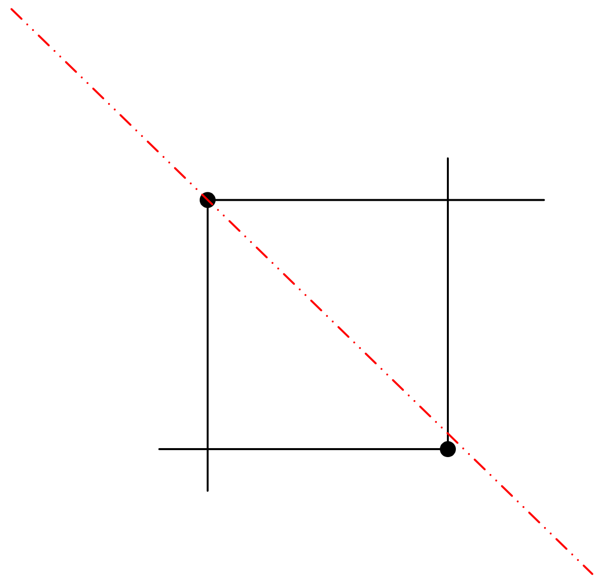
分析

- 用一个01矩阵表示每条元线段是否存在
- 算法一: 然后枚举左上角顶点和边长，检查每条元线段是否都存在。时间复杂度$O(n^4)$
- 算法二: 预处理计算出每个点往下，往右可以延伸多长，判断整条边降为$O(1)$，总时间降为$O(n^3)$
- 设左上角为(x, y), 若存在边长为K的正方形
  - 不一定存在K-1的正方形
  - 但是我们至少可以确定，K-1正方形的其中两条边是必然存在的

充要条件

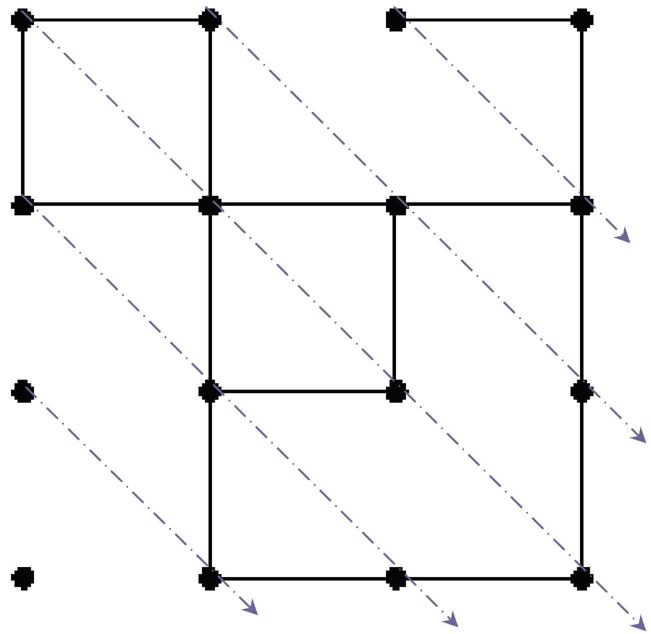
- 把一个正方形拆成左上和右下两部分, 则两个部分可以构成一个正方形的充要条件是
  - 两个顶点在同一条倾斜135度的直线上
  - 右下部分的两条边与左上部分两条边有交点





算法

- 依次处理各条斜线, 每条线自左上到右下依次考虑各个点
  - 累加新点往左上方向“作用范围”内的点数
  - 删除往右下方向已经延伸不到当前位置的点
- 用树状数组维护连续和， $O(n^2 logn)$



例4. 队伍选择

- IOI要来了，BP队要选择最好的选手去参加。为了选出的选手是最好的，教练组织了三次竞赛并给出每次竞赛排名。所有N名选手都参加了每次竞赛并且每次竞赛都没有并列的。当A在所有竞赛中名次都比B前，我们就说A是比B更好。如果没有人比A 更好，我们就说A是优秀的。
- 求：优秀选手的个数

分析

- 朴素算法：依次判断每个选手i是否优秀。判断的方法是枚举所有其他选手j，看是否j比i更好。时间复杂度为$O(n^2)$
- 三次比赛很容易降低为两次：按第一次比赛的排名重新给选手编号（第一名为1号…），则i比j好当且仅当i<j且a[i]<a[j]且b[i]<b[j]，其中a和b分别是第二次和第三次的比赛名次

分析

- 在平面中依次插入各个(a[i], b[i])，每次计算x<a[i]的点中y的最小值min，则i是优秀的当且仅当min比b[i]大
- 需要维护前缀最小值min(x[1…i]). 由于点只插入不删除，所以所有前缀最小值都不会变大，树状数组的框架仍然适用!
- 时间复杂度：O(nlogn)