绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)$ 为奇函数，$f'(0)=1$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$，则（　　）.

（A） $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点　　（B） $x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点

（C） $x=0$ 是 $g(x)$ 的无穷间断点　　（D） $x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类但非无穷间断点

【解】：由题设有 $f(0)=0$，$g(0^+)=f'_+(0)=1, g(0^-)=-f'_-(0)=-1$，故答案 B。

(2) 设 $a_n=\cos n\pi\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ $(n=1,2,3,\cdots)$，则级数（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都收敛。　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散。

（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散。　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛。

【答】（C）

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+f(x)+e^{x^2}]}{2x^2}=1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）不可导点　　（B）可导点但不是驻点

（C）驻点且为极小值点　　（D）驻点且为极大值点

【解】：方法一：由题设可知 $x\to0$ 时

$f(x)+e^{x^2}=2x^2+o(x^2), f(x)=2x^2-e^{x^2}+o(x^2)=-1+x^2+o(x^2)$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点。答案为 C。

方法二：（特殊值法）取 $f(x)+e^{x^2}=2x^2$，即 $f(x)=2x^2-e^{x^2}, f'(x)=4x-2xe^{x^2}, f'(0)=0,$ $f''(0)=2$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点。

(4) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 可写成　（　　　）

（A） $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　（B）B $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（C） $I=\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy$　　（D） $I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

【答案】：选 D

(5) $\left|A_{n\times n}\right|=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-1\\-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于（　　）

(A) $-n$　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

【答案】：B

【解】：$A^*=\dfrac{A^{-1}}{|A|}$。由于 $|A|=(-1)^{\tau(n123\cdots(n-1))}(-1)^n=-1$，$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=1+1+\cdots+1=n$$

(6) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与矩阵 A 等价、合同但不相似的是（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

【答案】(C)

【分析】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，可知矩阵 A 的特征是 $3,-3,0$，故秩 $\gamma(A)=2$，二次型 x^TAx 的正、负惯性指数均为1。

（A）中矩阵的秩为1，不可能与矩阵 A 等阶；（C）中矩阵的特征值为3，-3,0.与矩阵 A 不仅等价、合同，而且也是相似的，不符合题意。对于（D）,记其矩阵为 D，由

$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$，可知 D 的特征值为 $1,-1,0$。x^TAx 与 x^TDx 的正、负惯性指数一样，所以它们合同但不相似（因为特征值不同），符合题意，故应选（D）.

注意，（B）中矩阵的特征值为 $1,4,0$，正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，与 A 即不合同也不相似，但等阶（因为秩相等）

（7） 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布为 $X\sim P\{X=i\}=\frac{1}{2},(i=0,1)$； X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P\{X+Y\le 1\}=$（　　）

（A） $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$ （B） $1-\frac{1}{2}e^{-1}$ （C） $1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$ （D） $1-e^{-1}$

【答案】:（A）

【解】 $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}(P\{Y\le 1\}+P\{Y\le 0\})=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

（8） 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，且对常数 $a>0$，且满足： $E(X^2e^{-aX})=P\{X>1\}$，则 $a=$（　　）

（A） $\sqrt[3]{2e}-1$ （B） $\frac{1}{2}\sqrt[3]{e}$ （C） $\sqrt{2e}-1$ （D） $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$

【解】 $E(X^2e^{-aX})=\int_0^{+\infty}x^2e^{-(a+1)x}dx=\frac{2}{(a+1)^3},P\{X>1\}=e^{-1}$, 所以 $\frac{2}{(a+1)^3}=e^{-1}$,

$(a+1)^3=2e,\ a=\sqrt[3]{2e}-1$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

（9）设曲线的方程为 $\begin{cases}x=\arctan 2t,\\ y-1+e^{y-1}=\ln(e+t),\end{cases}$ 则该曲线在 $x=0$ 处的切线方程是__________。

【解】: 由题设知 $x=0$ 是 $t=0$，因而 $y=1$， $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{(1+e^{y-1})(e+t)}}{\frac{2}{1+4t^2}}$， $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{4e}$，所求曲线方程为

$y=\frac{1}{4e}x+1$。.

(10) 已知 $f(x)$ 满足 $xf(x)=1+\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ ____________.

【答案】 $\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$

【解】: 两边对 x 求导得 $f(x)+xf'(x)=x^2f(x)$,整理得

$$f'(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)f(x)$$

分离变量后积分得 $\ln f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x+\ln c$,即 $f(x)=\frac{c}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, x\ne 0$;

又当 $x=1$ 时, $f(1)=1+\int_0^1 t^2\frac{c}{t}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=1+c(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1)$,即 $c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=1+c\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-c$ 故 $c=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ _

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$，且对任给的 $x\in(0,2)$ 以及 $x+\Delta x\in(0,2)$，均有 $f(x+\Delta x)-f(x)$ $=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=$______________。

【解】：由题设 $x\in(0,2)$ 时有 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，所以 $f(x)=f(0)+\int_0^x\dfrac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2x-x^2}$，

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

(12) 设 f,g 均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。

【解】：f_2'。

(13) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$，求 $\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$（　　）.

【答案】：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\cdots=48\Rightarrow\left(\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{48}$

(14) 设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}Axe^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，且 $X_1,\ldots,X_n$ 为简单随机样本，则参数 λ 的矩估计为____________

【解】 $\mu=\int_0^{+\infty}xAxe^{-\lambda x}dx=\dfrac{A}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\dfrac{A}{\lambda}(\dfrac{1}{\lambda^2}+(\dfrac{1}{\lambda})^2)=\dfrac{2A}{\lambda^3}=\dfrac{2}{\lambda}$（其中：$A=\lambda^2$）

令 $\mu=\overline{X}$，$\dfrac{2}{\lambda}=\overline{X}$，所以 $\dfrac{2}{\lambda}=\overline{X}$，$\lambda=\dfrac{2}{\overline{X}}$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=1,\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$，求 $f''(0)$ 的值。

【解】：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f[\ln(1+x)]}{\sin x}=1$ 可知 $f(0)=0,f'(0)=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，

且 $\lim\limits_{x\to0}\left((1+\dfrac{f(x)-e^x+1}{e^x-1})^{\frac{e^x-1}{f(x)-e^x+1}}\right)^{\frac{f(x)-e^x+1}{(e^x-1)f(x)}}=3$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-e^x+1}{(e^x-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-e^x+1}{x^2}\times\dfrac{x}{f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}-\dfrac{e^x-1}{2x}]=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，所以 $f''(0)=2$。

得分	评卷人

(16)(**本题满分 10 分**)已知曲面 $4x^2+4y^2-z^2=1$ 与平面 $x+y-z=0$ 的交线在 xoy 平面上的投影为一椭圆,求此椭圆的面积。

【解】:(方法 1)椭圆的方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$,椭圆的中心在原点,在椭圆上任取一点 (x,y),它到原点的距离 $d=\sqrt{x^2+y^2}$,令 $F=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2-2xy-1)$,则

$$\begin{cases} F'_x=2(1+3\lambda)x-2\lambda y=0 \\ F'_y=2(1+3\lambda)\,\mathrm{y}-2\lambda x=0 \\ F'_\lambda=3x^2+3y^2-2xy-1=0 \end{cases}$$

由上一、二两式得 $y=x$ 或 $y=-x$,故驻点为

$$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),P_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

因此 $d(P_1)=d(P_2)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},d(P_3)=d(P_4)=\dfrac{1}{2}$,分别为椭圆的长、短轴,于是椭圆的面积为 $S=\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}\bullet\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$。

(方法 2)椭圆的方程为 $3x^2+3y^2-2xy=1$,椭圆的中心在原点,作坐标系的旋转变换,令 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u-\dfrac{1}{\sqrt{2}}v \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u+\dfrac{1}{\sqrt{2}}v \end{cases}$,代入椭圆方程得 $2u^2+4v^2=1$,因此 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2},b=\dfrac{1}{2},$,分别为椭圆的长、短轴,于是椭圆的面积为 $S=\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}\bullet\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$。

得分	评卷人

(17)(**本题满分 10 分**)设 $f(x)$ 连续可导,$f(1)=1$,G 为不包含原点的单连通域,任取 $M,N\in G$,在 G 内曲线积分 $\int_M^N\dfrac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$ 与路径无关,

(I)求 $f(x)$; (II)求 $\int_\Gamma\dfrac{1}{2x^2+f(y)}(ydx-xdy)$,其中 $\Gamma:x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,取正向。

【解】:(I) 记 $P(x,y)=\dfrac{y}{2x^2+f(y)},Q(x,y)=\dfrac{-x}{2x^2+f(y)}$,因为在 G 内曲线积分 $\int_M^N Pdx+Qdy$ 与路径无关,所以 $\forall(x,y)\in G$,有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,即 $\dfrac{2x^2-f(y)}{(2x^2+f(y))^2}=\dfrac{2x^2-f(y)-yf'(y)}{(2x^2+f(y))^2}$,由此得出 $yf'(y)=2f(y)$,又 $f(1)=1$,解此方程得 $f(y)=y^2$,于是 $f(x)=x^2$。

(II) 取小椭圆 $\Gamma_\varepsilon:2x^2+y^2=\varepsilon^2$,取正向,$\varepsilon$ 为充分小的正数,使得 Γ_ε 位于 Γ 的内部。设 Γ 与 Γ_ε 所包围的区域为 D,在 D 上,P,Q 的一阶偏导数连续,$P'_y=Q'_x$,应用格林公式得

$$\int\limits_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon^-}Pdx+Qdy=\iint\limits_D(Q'_x-P'_y)dxdy=0$$

这里 Γ_ε^- 为反向(即顺时针方向),于是:

$$\text{原式}=\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy=-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-}Pdx+Qdy=\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}Pdx+Qdy=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{\varepsilon^2}\right)d\theta=-\sqrt{2}\pi\,.$$

得分	评卷人

(18)(**本题满分 10 分**)设 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$,证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

【证明】：原不等式等价于 $\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<0\ (0<x<\dfrac{\pi}{4})$，

令 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x, x\in(0,\dfrac{\pi}{4}]$，

$f'(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x\ln\sin x-\cos x\ln\cos x$，当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时

$0<\cos x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0<\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ln\cos x<0, \ln\sin x<0, f'(x)>0$，因而函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上单增，即 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时有 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<f(\dfrac{\pi}{4})=0$，即

$\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<0$ 。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $\iint\limits_D [\left|x^2+y^2-2\right|+e^{\sqrt{x^2+y^2}}\sin(xy)]dxdy$，其中 D 是以 $A(-3,0), B(3,0), C(0,3)$ 为顶点的三角形区域。

【解】： 由对称性，$\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}(\sin xy)dxdy=0$.记 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2 \text{且} y\ge 0\}$，$D_2$ 为 D 的右半部分，则有原式$=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2)dxdy+2$

$\iint\limits_{D_2}(2-x^2-y^2)dxdy$ $=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy-18+2(2\pi-\pi)=4\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$ $-18+2\pi$ $=9+2\pi.$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$ 和 (2) $\begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$ 同解，求 a,b,c 的值，并求满足 $x_1=x_2$ 的解。

【解】： 解方程组 (1) $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$.

$A=\begin{pmatrix}1&1&0&a\\3&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&a\\0&4&1&3a\end{pmatrix}$，得基础解系为

$\eta_1=(-1,1,-4\ \ 0)^{T}$ $\eta_2=-a\ \ 0\ \ -3a\ \ 1^{T}$

又对方程组（2），对 B 作初等行变换

$B=\begin{pmatrix}1&-3&b&4\\1&5&1&4a\\2&-2&-1&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&b&4\\0&4&-1-2b&c-8\\0&0&3+3b&2a-c+6\end{pmatrix}$

由于（1）与（2）同解，$r(A)=r(B)$,知 $\begin{cases}3+3b=0\\2a-c+6=0\end{cases}$.有 $b=-1$

由于（1）与（2）同解，η_1，η_2 也是（2）的基础解系，它应是

$\begin{cases} x_1-3x_2-x_3+4x_4=0 \\ 4x_2+x_3+(c-8)x_4=0 \end{cases}$ 的解，从而 $\begin{cases} -a+3a+4=0 \\ -3a+c-8=0 \end{cases}$ 得 $a=-2, c=2$

因此（1）与（2） 的通解为 $k_1(-1 \quad 1 \quad -4 \quad 0)^T+k_2(2 \quad 0 \quad 6 \quad 1)^T$

由 $x_1=x_2$ 即 $-k_1+2k_2=k_1$，知 $k_1=k_2$，所以满足 $x_1=x_2$ 的解为 $k(1 \quad 1 \quad 2 \quad 1)^T$，k 为任意常数。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维到向量。A 为 3 阶方阵。且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1 \neq 0$

（I）证明：$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$ 线性无关；（II）求 A 特征值 及 特征向量。

【解】(I) 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ①

$\because A\alpha_1=\alpha_1, \quad A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2, \quad A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，有

$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+k_3A\alpha_3=0 \qquad k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0$

$\Rightarrow (k_1+k_2)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3$ ②

② − ①：$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0$ ③

$\therefore k_2A\alpha_1+k_3A\alpha_2=0 \qquad k_2\alpha_1+k_3(\alpha_1+\alpha_2)=0$ ④

④ − ③：$k_3\alpha_1=0 \qquad \alpha_1 \neq 0 \qquad k_3=0$

代入③① 得 $k_2=0 \qquad k_1=0 \qquad \therefore \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3$ 线性无关。

(II) 由 $A(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)=\therefore(A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ A\alpha_3)=(\alpha_1 \ \ \alpha_1+\alpha_2 \ \ \alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

令 $P=(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)$ 则 $AP=P\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，即 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=B$ A 相似 B

又 B 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1 \qquad \therefore P^{-1}(E-A)P=E-B \qquad R(E-A)=R(E-B)=2$

因此属于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 线性无关特征向量个数 $3-R(E-A)=1$

所以属于 1 特征向量为 $k\alpha_1 \quad (k \neq 0)$

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0 \le y < x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$，试求：

（I）概率 $P\{X+Y>1\}$；（II）条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；（III）随机变量函数 $Z=2X-Y$ 的密度函数。

【解】（I） $P\{X+Y>1\}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}3xdx\int_{1-x}^{x}dy=3\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(2x-1)dx=\frac{5}{8}$；

（II） 先求 $0 \le x \le 1$ 时，$f_X(x)=\int_0^x 3xdy=3x^2$；

由此条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0\le y<x\le 1;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（III）$Z=2X-Y$，利用卷积公式：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)dx$，

讨论 $\begin{cases}0\le x\le 1\\ x<z<2x\end{cases}$，$f(x,2x-z)=3x$，

1）$0\le z<1$, $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}3xdx=\dfrac{9}{8}z^2$

2）$1\le z<2$, $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}3xdx=\dfrac{3}{8}(4-z^2)$

所以 $Z=2X-Y$ 的概率密度函数：$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{9}{8}z^2, & 0\le z<1\\ \dfrac{3}{8}(4-z^2), & 1\le z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

得分	评卷人

(23)(**本题满分 11 分**)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim E(\lambda),Y\sim E(2\lambda)$，且 $Z=X-Y$，试求：(I) Z 的概率密度函数 $f_Z(z,\lambda)$；(II)对 Z 的正样本 $Z_1,\ldots,Z_n$（$Z_i>0$），求参数 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}$；(III) 考察 $b=\dfrac{1}{\hat{\lambda}}$ 是否为 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。

【解】（I）由 X 与 Y 独立，则联合密度函数为

$$f(x,y;\lambda)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2\lambda^2e^{-\lambda(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由卷积公式可知，$Z=X-Y$ 的密度函数：$f_Z(z,\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$

$f(x,x-z)=2\lambda^2e^{-\lambda(x+2(x-z))}=2\lambda^2e^{2\lambda z}e^{-3\lambda x}$，$\begin{cases}x>0\\ z\le x\end{cases}$，

1）$z>0$，$f_Z(z,\lambda)=2\lambda^2e^{2\lambda z}\int_z^{+\infty}e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}\int_z^{+\infty}3\lambda e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z}$

2）$z\le 0$，$f_Z(z,\lambda)=2\lambda^2e^{2\lambda z}\int_0^{+\infty}e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}\int_0^{+\infty}3\lambda e^{-3\lambda x}dx=\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}$

所以：$f_Z(z,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\lambda e^{2\lambda z}, & z<0\\ \dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z}, & z\ge 0\end{cases}$

(II) 由于样本 $Z_i>0$，则 $L=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{2}{3}\lambda e^{-\lambda z_i}=(\dfrac{2}{3})^n\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}z_i}$；

$\ln L=n\ln(\dfrac{2}{3})+n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}z_i$，$\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}z_i=0$

所以 $\frac{n}{\lambda}=\sum_{i=1}^{n} z_i$，，则 λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i}=\frac{1}{\overline{Z}}$；

（III） 由于 $E(b)=E(\frac{1}{\hat{\lambda}})=E(\overline{Z})=E(Z)=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{3}\lambda z e^{2\lambda z}dz+\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{3}\lambda z e^{-\lambda z}dz$

$$=-\frac{1}{3}\int_{0}^{+\infty} t2\lambda e^{-2\lambda t}dt+\frac{2}{3}\int_{0}^{+\infty} z\lambda e^{-\lambda z}dz=-\frac{1}{3}\frac{1}{2\lambda}+\frac{2}{3}\frac{1}{\lambda}=\frac{5}{6\lambda},$$

所以 $b=\frac{1}{\hat{\lambda}}$ 不是 $\frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计。

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项符合要求, 将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x^2-1|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ 的可去间断点个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】: 函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln|x^2-1|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln|x^2-1|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln|x^2-1|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}$ 当 $|x-n\pi|<\dfrac{\pi}{4}$ 时　　（　　）

(A) 发散　　(B) 条件收敛　　(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不定

【解】: 当 $|x-n\pi|<\dfrac{\pi}{4}$ 时 $|\sin x|<\dfrac{1}{\sqrt2}$，因而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{2^n\sin^{2n}x}{n}\right|^{\frac1n}=2|\sin x|<1$，故该级数绝对收敛。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}=$（　　）。

（A）$\dfrac12\ln2$　　（B）$\ln2$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

【解】: 因为 $\dfrac{n}{1+n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\dfrac1n=\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac12\ln2$，故答案应该是 A。

(4) 设平面区域 D 由 $x=0,x=1,x-y=\dfrac12$ 及 $x-y=1$ 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^3(x-y)\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x-y)\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_D(x-y)^3\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（　）。

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_1<I_3$　　（D）$I_3<I_1<I_2$

【解】: 因为 $(x,y)\in D$ 时有 $\ln(x-y)^3<\sin(x-y)^3<(x-y)^3$，答案为（C）。

(5) 已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\ \ 1\ \ -2\ \ 1)^T$，$\eta_2=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关；　（2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；　（3）α_3,α_4 线性无关；

（4）秩 $r\left(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4\right)=3$ 中正确的是

（A）（1）（3）　　（B）（2）（4）　　（C）（2）（3）　　（D）（1）（4）

答案：C

(6) 对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行，然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$，且 $|A|>0$，则 A 等于(　　)

(A) $-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　　(B) $-\begin{pmatrix}&&1\\&1&-2\\1&&\end{pmatrix}$

(C) $-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}&&1\\-2&1&\\1&&\end{pmatrix}$

【解】由 $-E=E_{13}A^*E_{23}(-2)$ 得 $A^*=-E_{13}^{-1}E_{23}^{-1}(-2)$，因为 $|A^*|=|A|^2=1$ 且 $|A|>0$, 所以 $|A|=1$, 于是 $A^*=A^{-1}$, 故

$A=(A^*)^{-1}=-E_{23}^{-1}(2)E_{13}^{-1}=-E_{23}(-2)E_{13}=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，选(A).

(7)、设 A与B 是两事件，且 $P(B)=0.6, P(A\,|\,B)=0.5$, 则 $P(A\cup\overline{B})=$（　　）

（A） 0.1　　（B）0.7　　（C） 0.3　　（D） 0.5

【答案】: B

【解】由于 $P(A|B)=0.5$, $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=0.5$, 所以 $P(AB)=0.3$，又

$P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A}B)=1-P(B)+P(AB)=0.7$。

(8)、设 X 与 Y 是两个随机变量，$f_1(x)$、$f_2(y)$ 与 $F_1(x)$、$F_2(y)$ 分别是对应的概率密度函数与分布函数，且 $f_1(x)$、$f_2(y)$ 连续，则以下函数中仍是概率密度函数的是（ ）.

（A） $f_1(x)+f_2(x)$　　（B） $f_1(x)F_2(x)-f_2(x)F_1(x)$

（C） $f_1(x)f_2(x)$　　（D） $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

答案：D

【解】检验两个基本条件是否满足即可，对（D）

1） $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)\ge 0$

2） $\int_{-\infty}^{+\infty}(f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x))dx=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)dF_2(x)=1$

所以是概率密度函数。

得分	评卷人

二、填空题: (9)～(14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{x^2}{2n}+\dfrac{x}{n^2})^n$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

【解】: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,故所求切线方程为 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}x+\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

(10) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2x+e^{2y}}$ 的通解是____________.

【解】：方程可变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2x+e^{2y}, x=e^{2y}(y+C)$，应填 $x=e^{2y}(y+C)$.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导，$f(0)=1$，f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{x^2}^{x^2+f(x)} f^{-1}(t-x^2)\mathrm{d}t=x^2e^x$，则 $f(x)$=__________.

【解】：原等式可化为 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}u=x^2e^x$，对 x 求导可得 $xf'(x)=(x^2+2x)e^2$，

所以 $f'(x)=(x+2)e^x$，$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=(x+1)e^x$，应填 $f(x)=(x+1)e^x$.

(12) 设 D=$\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\mathrm{d}\sigma=$______.

【解】：由对称性可知 $\iint\limits_D(e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D(e^{\frac{y}{x}}-e^{\frac{x}{y}}+2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D 4\mathrm{d}\sigma=2\pi$

(13) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$______.

【解】：由题设可知方程 $(A-\lambda E)x=0$ 有两个线性无关的解向量，因此必有 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=1$. 答案为 1.

(14) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}$ 与 S^2 分别是样本 $X_1,\ldots,X_n$ 的样本均值与样本方差，对统计量：$\theta=C\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，则常数 $C=$______________.

【解】：由题设有 $\bar{X}-X_{n+1}\sim N(0,\dfrac{n+1}{n}\sigma^2)$，$\sqrt{\dfrac{n}{(n+1)\sigma}}(\bar{X}-X_{n+1})\sim N(0,1)$，$\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$，

因此 $\dfrac{\dfrac{n}{(n+1)\sigma^2}(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\dfrac{S^2}{\sigma^2}}=\dfrac{n}{n+1}\dfrac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，因填 $\theta=\dfrac{n}{n+1}$.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，若 $x\to 0$ 时 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim x^k-\sin x$，求常数 k 的值及 $f''(0)$。

【解】：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=f'(0)=0$，由题设有

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{kx^{k-1}-\cos x}=1$，因此必有 $\lim\limits_{x\to 0}(kx^{k-1}-\cos x)=0$，故 $k=1$，由此可得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 $D:|x|+|y|\le 1$ 上的最大值与最小值。

【解】：$z_x'=2x-y=0, z_y'=2y-x=0$ 解得函数 z 在区域 D 的内部有唯一的驻点 $P_1(0,0)$。

在边界 $x+y=1(0<x<1)$ 上，令 $F=x^2+y^2-xy+\lambda(x+y-1)$，由 $F_x'=2x-y+\lambda=0$，

$F_y'=2y-x+\lambda=0$ 及 $x+y=1$ 解得 Lagrange 函数 F 的驻点为 $P_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，同理在边界

$x-y=1(0<x<1)$ 上可求得 Lagrange 函数的驻点为 $P_3(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，在边界 $-x-y=1(-1<x<0)$ 与

$-x+y=1(-1<x<0)$ 相应的 Lagrange 函数的驻点为分别为 $P_4(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 与 $P_5(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，又记 D 的边界四个顶点分别为 $P_6(1,0)$，$P_7(0,1)$，$P_8(-1,0)$ 及 $P_9(0,-1)$。函数 z 在上述 9 个点处的值分别为 $0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1$。由此可得 $z_{\max}=1, z_{\min}=0$。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设曲面 $\Sigma: x^2+y^2=5z(0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向成钝角，已知连续函数 $f(x,y,z)$ 满足

$$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $f(x,y,z)$ 的表达式.

【解】：$\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{5}} r^2\cos^2\theta\cdot r\,\mathrm{d}r=-\frac{25}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{25}{4}\pi$，

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 5\}$，记 $A=\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dydz$，则题设的等式成为

$f(x,y,z)=(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi$，于是又两边作积分，得 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dydz=\iint\limits_{\Sigma}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz$

即 $A=\iint\limits_{\Sigma}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz$

$$=\iint\limits_{\Sigma+S}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz-\iint\limits_{S}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz$$

其中 $S: z=1, x^2+y^2\le 5$, S 取上侧，由高斯公式有

$\iint\limits_{\Sigma+S}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]}{\partial x}dV$ 其中 Ω 是由外侧闭曲面 $\Sigma+S$ 围成的立体，而 $\iint\limits_{S}[(x+y+z)^2+A-\frac{25}{4}\pi]dydz=0$，因此有 $A=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)dV=\iiint\limits_{\Omega}2zdV=\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma\int_{\frac{1}{5}(x^2+y^2)}^{1}2zdz$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{5}}(1-\frac{1}{25}r^4)rdr=\frac{10}{3}\pi$，故 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2-\frac{35}{12}\pi$。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$。

【证明】：令 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，因而 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)-\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\xi^2}=0,\text{ 即}\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)\text{，故原命题得证。}$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}$ 的和.

【解】 $x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}=x\int_0^x\dfrac{1}{1+t^2}dt=x\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n},\quad |x|\le 1$$

$$\ln\sqrt{2+x^2}=\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n},\quad |x|<1$$

合并上面两级数，得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}-\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n}=-\frac{1}{2}\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n\cdot2^{n+1}}\right)x^{2n}$$

收敛域为 $[-1,1]$，令 $x=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}=f(1)+\frac{1}{2}\ln2=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是其导出组的基础解系，令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_t$$

试证：（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 线性无关；

（Ⅱ） 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的任一解可表示为 $\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，其中 $l_0+l_1+\cdots+l_t=1$.

【证明】：设 $x,x_1,\cdots,x_t$ 是一组数，使

$x\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\gamma}_1+x_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\gamma}_t=0$，代入整理得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{0}$，　　（1）

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式，由于 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解，$\boldsymbol{A\beta}_i=\boldsymbol{0}$，于是得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{A\alpha}=(x_1+x_2+\cdots+x_t)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$x+x_1+x_2+\cdots x_t=0$　　（2）

将（2）代入（1）得 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，故线性无关，得 $x_1=x_2=\cdots=x_t=0$，代入（2）得知 $x=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 线性无关。

（2）由非齐次方程组解得结构知若 γ 是 $Ax=b$ 的解，其解 γ 可表示为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\alpha}+k_1(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\alpha})+k_2(\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_t(\boldsymbol{\gamma}_t-\boldsymbol{\alpha})$，

$=(1-k_1-k_2-\cdots-k_t)\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t$

令 $l_0=1-k_1-k_2-\cdots-k_t,l_1=k_1,\cdots,l_t=k_t$，上式可表示为 $\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，且 $l_0+l_1+\cdots+l_t=1$。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（1） 求参数 a； (2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形。

【解】① $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=6$　　$\lambda_3=-2$

由已知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，故 $\lambda=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量，由 $R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$

得 $a=0$　因此　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$，二次型矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$

知二次型　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}$ 特征值 $6,7,-3$，

对 $\lambda=6$　　由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得　$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^T$

对 $\lambda=7$　　由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得　$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$

对 $\lambda=-3$　　由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得　$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0)^T$

单位化　$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\end{pmatrix}$

又 A_1 特征值为 $6,7,-3$；经过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$　　有　$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U[0,1]$, Y 服从参数为 1 的指数分布，（I）求 $Z=2X+Y$ 的密度函数；（II）求 $\mathrm{Cov}(Y,Z)$ ；（III）判断 X与Z 是否独立。

【解】由于 $X\sim U[0,1]$, 即 $X\sim f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$Y$ 的密度函数为 $f_Y(x)=\begin{cases}e^{-y}, & y>o\\ 0, & 其他\end{cases}$

（I）$Z=2X+Y$，由卷积公式为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-2x)dx$，由 X 与 Y 相互独立，则

$f(x,z-2x)=e^{-z}e^{2x}$，对应区域为$\begin{cases}0<x<1\\ z>2x\end{cases}$，则分别积分为：

1）$0\le z<2$，$f_Z(z)=e^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}}e^{2x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$；

2）$z\ge 2$,，$f_Z(z)=e^{-z}\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1)$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\le z<2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1), & z\ge 2\\ 0, & 其他\end{cases}$；

（II）由于 X 与 Y 相互独立，则
$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,2X+Y)=2\mathrm{Cov}(Y,X)+D(Y)=D(Y)=1$

（III）又因为$\mathrm{Cov}(X,Z)=\mathrm{Cov}(X,2X+Y)=2D(X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{1}{6}$，所以 X 与 Z 相关，可知 X 与 Z 不独立。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$；（II）θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）$\hat{\theta}_L^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计.

【解】:（I）求 θ 的矩估计，

$$\mu=E(X)=\int_0^{+\infty}x\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=-\int_0^{+\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}})=-xe^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta,$$

令 $\mu=\bar{X}$, $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta=\bar{X}$ 所以 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{X}$；

（II）θ 的极大似然估计，

$$L=\prod_{i=1}^n\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2},\quad \ln L=\ln(x_1x_2\cdots x_n)-2n\ln\theta-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^n X_i^2=0$，$\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n X_i^2=2n$, 所以 θ 的极大似然估计为：$\hat{\theta}_L=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n X_i^2}$；

（III） $E(\hat{\theta}_L^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2}E(X^2)$，而 $E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx\xlongequal{t=\frac{x^2}{2\theta^2}}$

$=2\theta^2\int_0^{+\infty}te^{-t}\,\mathrm{d}t=2\theta^2$，因此 $E(\hat{\theta}_L^2)=\theta^2$，即 $\hat{\theta}_L^2$ 是 θ^2 的无偏估计.

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线有（　　）。

（A）1条　　（B）2 条　　（C）3 条　　（D）4 条

【解】: $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x-1}}-1)-1]=0$，所以 $y=x$ 是它的斜渐近线，故共有 3 条，答案 C。

(2) 设 $f(x), f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的解是(　　)

（A） $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}$；　　（B） $y=f(x)+1+ce^{-f(x)}$；

（C） $y=f(x)-c+ce^{-f(x)}$；　　（D） $y=f(x)+ce^{-f(x)}$

【答案】 A

(3) 设 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=1, g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$h(x)=cx^k$，若 $x\to0$ 时 $g(x)\sim h(x)$，则（　）.

（A） $c=\dfrac{1}{2},k=2$　　（B） $c=\dfrac{1}{3},k=2$　　（C） $c=\dfrac{1}{3},k=3$　　（D） $c=\dfrac{1}{6},k=3$

【解】:由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{cx^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{ck(k-1)x^{k-2}}=\dfrac{f''(0)}{ck(k-1)}$，故 $c=\dfrac{1}{6},k=3$，答案 D。

(4) 若 $f(x,x^2)=x^3, f_x'(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y'(x,x^2)=$ （　　　）

（A） $x+x^3$　　（B） $2x^2+2x^4$　　（C） x^2+x^5　　（D） $2x+2x^2$

【答案】: 选 A

(5) 设 A,B,C 是 n 阶矩阵，并满足 ABAC=E,则下列结论中不正确的是

（A） $A^TB^TA^TC^T=E.$　　(B) $BAC=CAB$

(C) $BA^2C=E$　　(D) $ACAB=CABA$

【答案】C

【分析】这一类型题目要注意的是矩阵乘法没有交换律、有零因子、没有消去律等法则，由 $ABAC=E$ 知矩阵 A,B,C 均可逆，那么由

$ABAC=E\Rightarrow ABA=C^{-1}\Rightarrow CABA=E$。从而 $(CABA)^T=E,$ 即 $A^TB^TA^TC^T=E$，故（A）正确。

由 $ABAC=E$ 知 $A^{-1}=BAC$，由 $CABA=E$ 知 $A^{-1}=CBA$，从而 $BAC=CAB$，故（B）正确。

由排除法可知，（C）不正确，故选（C）.

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是(　)

(A) 若 $AB=O$, 则 $B=O$　　(B) 对任意矩阵 B, 有 $r(AB)=r(B)$

(C) 存在 B, 使得 $BA=E$　　(E) 对任意矩阵 B, 有 $r(BA)=r(B)$

【解】 因为 $r(A)=n$, 所以方程组 $AX=0$ 只有零解,而由 $AB=O$ 得 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解,故若 $AB=O$,则 $B=O$;

令 $BX=O, ABX=0$ 为两个方程组,显然若 $BX=O$, 则 $ABX=0$,反之,若 $ABX=0$,因为 $r(A)=n$, 所以方程组 $AX=0$ 只有零解,于是 $BX=O$,即方程组 $BX=O$ 与 $ABX=0$ 为同解方程组,故 $r(AB)=r(B)$;

因为 $r(A)=n$, 所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$,即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$, 令 $B=(E_n\quad O)P$, 则 $BA=E$;

令 $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}, r(A)=0$, 但 $r(BA)=0\neq r(B)=1$, 选(D).

(7) 设随机变量 $X\sim E(1)$, 记 $Y=\max\{X,1\}$ ，则 $E(Y)=$（　　）.

（A） 1　　（B） $1+e^{-1}$　　（C） $1-e^{-1}$　　（D） e^{-1}

【解】: 应选（B）.

由于指数分布的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0. & x\le 0.\end{cases}$

$$E(Y)=E(\max\{x,1\})=\int_{+\infty}^{-\infty}\max\{x,1\}f(x)\mathrm{d}(-x)=\int_0^{+\infty}\max\{x,1\}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x=1+e^{-1}.$$

(8)、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，为使 $Y=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 成为总体方差的无偏估计，则应选 k 为（　　）. （A）　（B）　（C）　（D）

（A） $\dfrac{1}{n-1}$　　（B） $\dfrac{1}{n}$　　（C） $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　（D） $\dfrac{1}{2n}$

【解】: 应选(C).

$X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$ ，于是 $E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=2\sigma^2$ ，

$E(Y)=k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2(n-1)\sigma^2 k$ ，要使 Y 为总体方差 σ^2 的无偏估计，

即 $E(Y)=\sigma^2$ ，故 $k=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$__________。

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-5\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n+3\ln n}{-5\ln n}}\right]^{\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{-5\ln n}{n+3\ln n}}=e^{-5}$

(10) 已知方程 $y''-y=0$ 的积分曲线在点 $O(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切，则该积分曲线的方程为________________.

【答案】$y=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=shx$

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$,且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$__________.

【解】:由题设有 $\int_0^1[xf'(x)-f(x)]\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$,

所以 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$.

(12) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{3}y}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{1-y^2}}e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x=$__________。

【解】原式$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{12}(1-e^{-1})$.

(13) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为____________.

【答案】: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}$

(14) 设随机变量 X 服从 $[-1,2]$ 上的均匀分布，则随机变量的函数 $Y=X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)=$__________________。

【解】: 由于 X 的密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}$, $-1<x<2.$，则 $Y=X^2$ 的密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, & 1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$。(Ⅰ) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$。

【证明】:(Ⅰ)令 $f(x)=x-\arctan x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$，因而函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$

时有 $f(x)=x-\arctan x>f(0)=0$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的，又 $x_n>0$，由单调有界收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_n=\arctan x_{n-1}$ 两边同时取极限可得 $a=\arctan a$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

（II）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan x_{n-1}-x_{n-1}}{(\arctan x_{n-1})^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=-\frac{1}{3}。$$

得分	评卷人

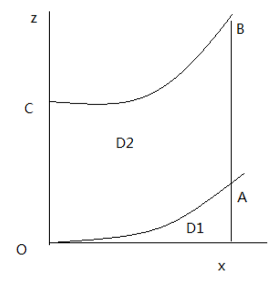
（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x,y,z)$ 连续，$\int_0^1dx\int_0^1dy\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)dz=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dV$，记 Ω 在 xOz 平面上的投影区域为 D_{xz}，求二重积分 $I=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}d\sigma$。

【解】 由所给的积分等式知 $\Omega=\{(x,y,z)|0\le z\le x^2+y^2,0\le y\le 1,0\le x\le 1\}$，即 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$，平面 $x=1,y=1$ 及三坐标平面围成立体，它在 xOz 平面上的投影区域为 D_{xz} 为图中曲边梯形 OABC，其中曲边 $\overset{\frown}{BC}:z=x^2+1$（它是曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\ y=1\end{cases}$ 在 xOz 平面的投影），其余三条为直线 $x=0,x=1$ 以及 $z=0$。

下面计算二重积分 $I=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}d\sigma$，为了去掉绝对值，如图将 D_{xz} 划分为 D_1 与 D_2 两部分，如图所示，其中

$D_1=\{(x,z)|0\le z\le x^2,0\le x\le 1\}$

$D_2=\{(x,z)|0\le z\le x^2+1,0\le x\le 1\}$



于是 $I=\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{|z-x^2|}d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-z}d\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{z-x^2}d\sigma$

$$=\int_0^1dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-z}dz+\int_0^1dx\int_{x^2}^{x^2+1}\sqrt{z-x^2}dz$$

$$=\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx+\int_0^1\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}yz(y-z)dydz+zx(z-x)dzdx+xy(x-y)dxdy$$

其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{4Rx-x^2-y^2}\,(R\ge 1)$ 在柱面 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1$ 之内部分的上侧。

【解】记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4Rx=0(z\ge 0)$，则曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=(x-2R,y,z)$，于是

$$\frac{dydz}{x-2R}=\frac{dzdx}{y}=\frac{dxdy}{z}$$

$$I=\iint_{\Sigma}[yz(y-z)\frac{1}{z}(x-2R)+zx(z-x)\frac{y}{z}+xy(x-y)]dxdy=2R\iint_{\Sigma}y(z-y)dxdy$$

记曲面Σ在xOy平面上的投影区域为$D:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2\le 1$，则

$$I=2R\iint_{\Sigma}y(\sqrt{4Rx-x^2-y^2}-y)dxdy$$
$$=2R\iint_{\Sigma}y\sqrt{4Rx-x^2-y^2})dxdy-2R\iint_{\Sigma}y^2dxdy$$
$$=0-2R\iint_{D}y^2dxdy$$

令$x=\frac{3}{2}+u,y=v$，记$D_1:u^2+v^2\le 1$，则$I=0-2R\iint_{D_1}v^2dudv=-2R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta d\rho=-\frac{1}{2}\pi R$

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=a$，且$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$内，使$\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在$(a,b)$内存在与（Ⅰ）中的$\xi$相异的点$\eta$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

【证明】：（Ⅰ）由$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$可知$\int_a^b[f(x)-x]\,dx=0$，记$F(x)=f(x)-x$，那么函数$F(x)$在$[a,b]$上连续，若$F(x)$在$(a,b)$无零点，那么$x\in(a,b)$时恒有$F(x)>0$（或者$F(x)<0$）相应的必有$\int_a^b F(x)\,dx>0$（或$<0$）与$\int_a^b[f(x)-x]\,dx=0$矛盾，故$F(x)$在$(a,b)$内必有零点，即$\exists\xi\in(a,b)$内，使$\xi=f(\xi)$；

（Ⅱ）令$G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有$G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知$\exists\eta\in(a,\xi)$使得$G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）已知函数$y=y(x)$满足等式$y'=x+y$，且$y(0)=1$，试讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right]$的收敛性。

【解】因为 $y'=x+y$，所以 $y''=1+y'$。由$y(0)=1$，得$y'(0)=1,\ y''(0)=2$。根据泰勒公式，得

$$y(\frac{1}{n})=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)(\frac{1}{n})^2+o(\frac{1}{n^2})$$
$$=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}),$$

所以$\left|y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right|$在$n\to\infty$时与$\frac{1}{n^2}$等价，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，因此级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right]$$

绝对收敛。

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）已知齐次方程组（I）$\begin{cases}x_1+x_2\quad+x_4=0\\ ax_1+\quad a^2x_3\quad=0\\ ax_2+\quad a^2x_4=0\end{cases}$的解全是

4 元方程（Ⅱ） $x_1+x_2+x_3=0$ 的解。(1) 求 a；　(2) 求齐次方程组（Ⅰ）的解。

【解】　(1) 因为方程组（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解，所以（Ⅰ）与方程组（Ⅲ）$\begin{cases} x_1+x_2 \quad +x_4=0 \\ ax_1+ \quad a^2x_3 \quad =0 \\ ax_2 \quad +a^2x_4 \quad =0 \\ x_1+x_2+x_3 \quad =0 \end{cases}$ 同解，那么（Ⅰ）与（Ⅲ）的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有相同的秩。

如 $a=0$　则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$，所以假设 $a\neq 0$

由于 $A\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$　　$\therefore\ r(A)=3$

又 $B\xrightarrow{\text{行}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$　当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$r(B)=3$　此时（Ⅰ）与（Ⅲ）同解，

（Ⅱ）由于 $A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 基础解系 $\eta=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,1\right)^T$，则通解为 $k\eta$。

得分	评卷人

(21)（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$，其中 b 为非零的实数（I）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；（II）求出该二次型正定的充要条件。

【解】:(I)　$f=x^T Ax$，其中：$A=\begin{pmatrix} 1 & b & b & b \\ b & 1 & b & b \\ b & b & 1 & b \\ b & b & b & 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda E\text{-}A|=(\lambda-(1+3b))[\lambda-(1-b)]^3$　$\lambda_1=1+3b$　$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1-b$

解方程 $(\lambda_1 E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(1,1,1,1)^T$

解方程 $(\lambda_2 E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$

正交化　$\xi_2=\alpha_1$　$\xi_3=(-1,-1,2,0)^T$　$\xi_4=(-1,-1,-1,3)^T$

单位化　得

$\eta_1=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)^T$　$\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^T$　$\eta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)^T$　$\eta_4=\dfrac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,-1,3)^T$

令 $U=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)$,则 U 为正交阵，且 $U^{-1}AU=U^TAU=\begin{pmatrix}1+3b&&&\\&1-b&&\\&&1-b&\\&&&1-b\end{pmatrix}$

校准形　$f=(1+3b)y_1^2+(1-b)y_2^2+(1-b)y_3^2+(1-b)y_4^2$

（II）$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow 1+3b>0$ 且 $1-b>0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}<b<1$

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数为

$f_X(x)=\begin{cases}Ae^{-ax+b}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中 b 是任意常数，若 $E(X)=2$，　且

$Y=\begin{cases}4, & X\le 1\\ 2X, & 1<X<2\\ 2, & X\ge 2\end{cases}$，试求：

（I）常数 A 与 a；（II）概率 $P\{Y>3\}$；（III）Y 的分布函数。

【解】　（I）由于 $1=\int_0^{+\infty}Ae^{-ax+b}dx=\dfrac{Ae^b}{a}\int_0^{+\infty}ae^{-ax}dx=\dfrac{Ae^b}{a}$，　$A=ae^{-b}$，

又 $E(X)=2$，所以 $2=\dfrac{1}{a}$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，所以有 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

（II）$P\{Y>3\}=1-P\{Y\le 3\}=1-(P\{Y=2\}+P\{2<Y\le 3\})$

$=1-(P\{X\ge 2\}+P\{2<2X\le 3\})=1-e^{-1}-P\{1<X\le\dfrac{3}{2}\}=1-e^{-1}-e^{-\frac{3}{4}}+e^{-\frac{1}{2}}$；

（III）由于 $2\le y\le 4$, Y 的分布函数为：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

1）　$y<2,\ F_Y(y)=0$

2）　$2\le y<4,\ F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=2\}+P\{2<Y\le y\}$

$=P\{X\ge 2\}+P\{2<2X\le y\}=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le\dfrac{y}{2}\}$

$=e^{-1}+\int_1^{\frac{y}{2}}\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx=e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{y}{4}}$

3）$y\ge 4,\ F_Y(y)=1$

所以 Y 的分布函数为：$F_Y(y)=\begin{cases}0\ , & y<2\\ e^{-1}+e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{y}{4}}, & 2\le y<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设随机变量 $X\sim U(\alpha,\alpha+\beta)$　$(\beta>0)$，$X_1,\ldots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 α、β 的矩估计；（II）α、β 的极大似然估计。

【解】:（I）由于 $E(X)=\alpha+\frac{\beta}{2}$, $D(X)=\frac{\beta^2}{12}$，令 $\mu=\overline{X},\sigma^2=S_n^2$; $\overline{X}=\alpha+\frac{\beta}{2}$, $S_n^2=\frac{\beta^2}{12}$,

可知 α、β 的矩估计分别是 $\hat{\alpha}=\overline{X}-\frac{\sqrt{3}}{2}S_n^2$、$\hat{\beta}=\sqrt{3}S_n$

（II）似然函数为 $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta^n}$ ，　　　$\alpha<x_i<\alpha+\beta$

$L=\frac{1}{\beta^n}$ 是参数 β 的减函数，由极大似然估计定义，在 $\alpha<x_i<\alpha+\beta$ 时，要使 L 达到最大，参数 α 要大，β 要小，由此可知：

α、β 的极大似然估计为：$\hat{\alpha}=\min\{X_i\}$、$\hat{\beta}=\max\{X_i\}-\alpha$ 。

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:(1)～(8)小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 不可导点个数为（ ）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

【解】：$f(x)=\begin{cases} e^x, & x>0, \\ 1, & -1\le x\le 0, \\ -x, & x<-1, \end{cases}$ 所以 $x=0, x=-1$ 均为 $f(x)$ 的不可导点，答案 C。

(2) 微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）$(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$　（B）$(Ax^2+Bx)\cos 2x$

（C）$A\cos 2x+B\sin 2x$　（D）$(Ax+B)\cos 2x$

【答案】：A

(3) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）．

（A）$I_1<1<I_2$　（B）$1<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<1$　（D）$I_2<1<I_1$

【解】：因为 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，因而有 $I_1>1$，又 $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{\pi}{2}$，因而有 $I_2<1$，答案是 D .

(4) 设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列判断不正确的是（　　）

（A）$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$　（B）$f(0,0)=0$

（C）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续　（D）$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微

【答案】：D

(5) $a=-5$ 是齐次方程组 $\begin{cases} 3x_1+(a+2)x_2+4x_3=0 \\ 5x_1+ax_2+(a+5)x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$ 有非零解的（　　）

(A)充分必要条件　(B) 充分而非必要条件

(C)必要而非充分条件　(D) 既非充分又非必要条件

【答案】：B

(6) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则必有（　　）.

（A）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　（B）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

（C）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关　（D）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

【答案】：C

（7）设随机变量 X 与 Y 具有相同分布：$P\{X=k\}=\dfrac{e^{-1}}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，且 $D(X-Y)=2$，则 $E(XY)=$（　　）

（A） 0　　（B）1　　（C） 2　　（D） 3

【答案】：B

【解】由于 $D(X-Y)=2$，即 $2=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2(E(XY)-E(X)E(Y))$

$=2\lambda-2(E(XY)-\lambda^2)=2\{1+1-E(XY)\}$，所以 $E(XY)=1$

（8）设随机变量 X 服从标准正态分布，且 $Y=X^2$，则 X 与 Y（　　）

（A）相互独立且相关　　（B）相互独立且不相关

（C）不独立且相关　　（D）不独立但不相关

【答案】：D

【解】 由于 $E(XY)=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\varphi(x)dx=0$；又 $E(X)=0$，可知 $E(XY)=E(X)E(Y)$；所以 $Cov(X,Y)=0$，即不相关；

概率 $P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1,X^2\le 1\}=P\{|X|\le 1\}=2\Phi(1)-1$，

$P\{X\le 1\}=\Phi(1)$，$P\{Y\le 1\}=P\{X^2\le 1\}=2\Phi(1)-1$，$P\{X\le 1,Y\le 1\}\ne P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$，

所以 X 与 Y 不相互独立。

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 所 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$______________。

【解】：由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，对方程式两边关于 x 同时求导可得 $1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0$，对上述方程关于 x 再求导可得 $2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0$，把 $x=0,y=1$ 代人到上述两个方程式中可解得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2e^2$。

(10) 微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解为______________.

【答案】 $x=y(c-e^y)$

(11) 由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}},y=2-x$ 及 y 轴围成的平面图形边界曲线周长是________________。

【解】：$s=2+\int_0^1\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{1+\dfrac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x=2+\sqrt{2}+\dfrac{8}{27}\left.(1+\dfrac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=2+\sqrt{2}+\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}$

(12) 设 g 二阶可导，f 具有二阶连续偏导数，$z=g(xf(x+y,2y))$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____________

【答案】：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f+xf_1)(f_1'+2f_2')g''+[f_1'+2f_2'+x(f_{11}''+2f_{12}'')]g'$.

(13) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{X}=$_________.

【答案】：解：$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^T\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{X}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]^T=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{E}$

$$\because \left|(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T\right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0，\quad \therefore \boldsymbol{X} = [(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^T]^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(14) 设总体 $X \sim N(\mu, 0.5)$， $X_1, X_2, \dots, X_n$, 是 X 的简单随机样本，且 $\overline{X}$ 是样本 $X_1, \dots, X_n$ 的样本均值，若要至少使得 99.7%的概率保证 $\left|\overline{X}-\mu\right| < 0.1$，则样本容量 $n =$ ________.

【答案】：利用中心极限定理，$n =$ 1513 .

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x \to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

【解】 方法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3} = 0$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x] = a-1 = 0, a = 1$ ，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}, b-1-c=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{(1+2c\cos x)e^x}{6x} = 0, c = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}。$$

方法二：$a+bx-(1+c\sin x)e^x = a+bx-[1+cx-\dfrac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$= a-1+(b-c-1)x-(c+\dfrac{1}{2})x^2-(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1, b-c-1=0, c+\dfrac{1}{2}=0, \dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{6}c=0$，即 $a=1, b=\dfrac{1}{2}, c=-\dfrac{1}{2}$。

得分	评卷人

（16）(**本题满分 10 分**)设抛物面 $\sum_1: z = 1+x^2+y^2$，圆柱面 $\sum_2: (x-1)^2+y^2=1$。在 $\sum_1$ 上求一点（x_0, y_0）使得过（x_0, y_0）的 $\sum_1$ 的切平面与 $\sum_1$ 和 $\sum_2$ 围成的体积最小。

【解】：曲面 $x^2+y^2-z+1=0$ 上点(x_0,y_0)处有法向量 $(2x_0,2y_0,-1)$，因而过此点的切平面方程为

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，化简得 $z = 2x_0x+2y_0y-x_0{}^2-y_0{}^2+1$，此切平面与 Σ_1和Σ_2 所围空间区域体积 v 为

$$\iint_D\left[(1+x^2+y^2)-(2x_0x+2y_0y-x_0{}^2-y_0{}^2+1)\right]dxdy$$

$$= \iint_D(x^2+y^2)dxdy + \iint_D(x_0{}^2+y_0{}^2)dxdy - 2x_0\iint_D xdxdy - 2y_0\iint_D ydxdy$$

其中 D 为 XY 平面上区域 $\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\le 1\}$.

由于 $\iint_D(x^2+y^2)dxdy$ 是与 x_0, y_0 无关的常数，$\iint_D(x_0{}^2+y_0{}^2)dxdy = \pi\,(x_0{}^2+y_0{}^2)$，而由对称性知

$$\iint_D x dxdy = \iint_D (x-1)dxdy + \iint_D dxdy = 0+\pi = \pi,\ \iint_D y dxdy = 0$$

故 v= $\iint_D (x^2+y^2)dxdy + \pi(x_0{}^2 - 2x_0 + y_0{}^2)$，易知，当 $x_0 = 1, y_0 = 0$ 时 v 最小。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1(z\ge 0)$ 的外侧，连续函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y) = 2(x-y)^2 + \iint_\Sigma x(z^2+e^z)dydz + y(z^2+e^z)dzdx + (zf(x,y)-2e^z)dxdy$$

求 $f(x,y)$。

【解】：设 $\iint_\Sigma x(z^2+e^z)dydz + y(z^2+e^z)dzdx + (zf(x,y)-2e^z)dxdy = \alpha$，则 $f(x,y) = 2(x-y)^2+\alpha$。设 D 为 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2\le 1$，Σ_1 为 D 的下侧，Ω 为 Σ 与 Σ_1 包围的区域，应用高斯公式，有

$$\alpha = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x(z^2+e^z)dydz + y(z^2+e^z)dzdx + (zf(x,y)-2e^z)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1} x(z^2+e^z)dydz + y(z^2+e^z)dzdx + (zf(x,y)-2e^z)dxdy$$

$$= \iiint_\Omega [2z^2 + 2(x-y)^2 + \alpha]dV + \iint_D (-2)dxdy$$

$$= \iiint_\Omega [2(x^2+y^2+z^2) - 4xy + \alpha]dV - 2\pi$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr - 0 + \frac{2}{3}\pi\alpha - 2\pi$$

$$= -\frac{6}{5}\pi + \frac{2}{3}\pi\alpha$$

故 $\alpha = \dfrac{18\pi}{5(2\pi-3)}$，于是 $f(x,y) = 2(x-y)^2 + \dfrac{18\pi}{5(2\pi-3)}$。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\ne 0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

【证明】：（反证法）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个或更多的零点，则 $\exists x_1\in(a,b), x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2, f(x_1)=f(x_2)=0$。令 $F(x)=e^x f(x)$，则有 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists \xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，因而有 $f(\xi)+f'(\xi)=0$，与 $f(x)+f'(x)\ne 0$ 矛盾。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$ 的和函数。

【解】：$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n n!}x^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n n!}x^n\right)' = x\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^n\right)'\right]'$$

$$=x\left[x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'\right]'=x\left[x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\right]'=\frac{1}{4}x(x+2)e^{\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=e^{\frac{x}{2}}$$
.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数。

（I）求 A。　（II）求 A^{100}。

【解】: (I) 由题设知 $\xi_1=(-2,1,0)^T$　$\xi_2=(2,0,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关特征向量。 又 $\eta=(1\quad 2\quad -2)^T$ 是 $Ax=b$ 的特解

$A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=b=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，知 $\xi_3=(1\quad 2\quad -2)^T=\eta$ 是 A 对应于 $\lambda=9$ 特征向量。

取可逆阵 $P=(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)$　则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，　$A=P\Lambda P^{-1}=\cdots=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}$

（II）$A^{100}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=9^{99}A$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+ax_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的矩阵合同于 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. (Ⅰ)求常数 a；(Ⅱ)用正交变换法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形.

【解】（Ⅰ)令 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&a&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$，　$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，　则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$.

因为 A 与 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 合同，所以 $r(A)=2<3$，　故 $|A|=0$.

由 $|A|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&a&-3\\3&-3&3\end{vmatrix}=3(2a-10)=0$，得 $a=5$，$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&-3\end{pmatrix}$.

(Ⅱ) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ 得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$　$\lambda_3=9$.

由 $(0E-A)X=O$. 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$. 又由 $(4E-A)X=O$. 得 $\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. 由 $(9E-A)X=O$. 得：

$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.，单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{2}{\sqrt6} & 0 & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$, $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 4 & \\ & & 9\end{pmatrix}$,

则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX\ \overset{X=QY}{=\!=}\ Y^T(Q^TAQ)Y=4y_2^2+9y_3^2$.

得分	评卷人

（22）（**本题满分** 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ay, & x^2\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：（I）常数 A；（II）边缘密度函数 $f_Y(y)$；（III）条件密度函数 $f_{X/Y}(x/y)$；

（IV）概率 $P\{Y\le X\}$; 概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})$

【解】:（I）由于 $1=2A\int_0^1dx\int_{x^2}^1ydy=A\int_0^1(1-x^4)dx=\frac{4A}{5}$， 所以 $A=\frac{5}{4}$；

（II）$f_Y(y)=2\int_0^{\sqrt y}\frac{5}{4}ydx=\frac{5}{2}y^{\frac{3}{2}}\quad 0\le y\le 1$

（III）对 $0<y\le 1$，$f_{X/Y}(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt y}, & |x|\le\sqrt y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

（IV）$P\{Y\le X\}=\frac{5}{4}\int_0^1dx\int_{x^2}^1ydy=\frac{5}{8}\int_0^1(1-x^4)dx=\frac{1}{2}$;

$Y=\frac{1}{4}$，$f_{X/Y=\frac{1}{4}}(x)=\begin{cases}1, & |x|\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则条件概率 $P(X>0/Y=\frac{1}{4})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx=0.5$

得分	评卷人

（23）（**本题满分** 11 分）设总体 X 的均值与方差分别是 $E(X)=\mu$、$D(X)=\sigma^2$，从 X 中分别抽取二组相互独立且容量为 n_1、n_2 的简单随机样本，样本均值分别 $\bar X_1$、$\bar X_2$，若常数 λ_1、λ_2 满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 时，（I）求证：$T=\lambda_1\bar X_1+\lambda_2\bar X_2$ 是 μ 的无偏估计；（II）且确定 λ_1、λ_2 多少时，方差 $D(T)$ 达到最小；（III）λ_1、λ_2 多少时，$T=\lambda_1\bar X_1+\lambda_2\bar X_2$ 依

概率收敛 μ，即对任意 $\varepsilon > 0$, 满足 $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|T-\mu| < \varepsilon\} = 1$

【解】:（I）$E(T) = \lambda_1 E(\overline{X}_1) + \lambda_2 E(\overline{X}_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\mu = \mu$，所以对任何满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 的 λ_1、λ_2，T 均为 μ 的无偏估计；

（II）由于 $D(T) = \lambda_1^2 D(\overline{X}_1) + \lambda_2^2 D(\overline{X}_2) = \lambda_1^2 \dfrac{\sigma^2}{n_1} + \lambda_2^2 \dfrac{\sigma^2}{n_2} = (\lambda_1^2 \dfrac{1}{n_1} + \lambda_2^2 \dfrac{1}{n_2})\sigma^2$，在条件 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

下求 $D(T)$ 的最小值，由拉格朗日乘数法，作函数

$$L = (\lambda_1^2 \frac{1}{n_1} + \lambda_2^2 \frac{1}{n_2}) + \mu(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)$$

$L'_{\lambda_1} = 2\lambda_1 \dfrac{1}{n_1} + \mu = 0$, $L'_{\lambda_2} = 2\lambda_2 \dfrac{1}{n_2} + \mu = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，解得：

$$\lambda_1 \frac{1}{n_1} = \lambda_2 \frac{1}{n_2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_1}, \lambda_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_1}$$

（III）由于 $n = n_1 + n_2, \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}\overline{X}_1 + \dfrac{n_1}{n_1 + n_2}\overline{X}_2$，由辛钦大数定理可知，

$\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\overline{X} - \mu| < \varepsilon\} = 1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|T-\mu| < \varepsilon\} = 1$，所以在

$\lambda_1 = \dfrac{n_1}{n_1 + n_1}, \lambda_2 = \dfrac{n_2}{n_1 + n_1}$ 时，$T = \lambda_1 \overline{X}_1 + \lambda_2 \overline{X}_2$ 依概率收敛与 μ。

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一（模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$

(B) 若 $A\ge 0$,则 $\exists M\ge 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\ge 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$

(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

【解】：由极限的保号性知答案应该是 A

(2) 设 $f(x,y)$ 在（0,0）的某一邻域内有定义，$f_x'(0,0)=3,\ f_y'(0.0)=-1,$ 则下列结论正确的是（　　）

（A）$dz|_{(0,0)}=3dx-dy;$

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0.0.f(0,0))$ 处有一法向量 $(3,-1,1)$；

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 有一切向量 $(1,0,3)$；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处有一切向量 $(3,0,1)$

【答案】 C

(3) 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且满足 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得（　　）

（A）极小值　　（B）极大值

（C）$(0,f(0))$ 是曲线的拐点　　（D）不是极值，且点 $(0,f(0))$ 也不是曲线的拐点

【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$，$f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C。

(4) $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序得（其中 $f(x,y)$ 连续）（　　）

（A）$I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$　　（B）$I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

（C）$I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$　　（D）$I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

【答案】：选 D

(5) 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*\ne 0$, 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相等的解, 则 $Ax=0$ 的

基础解系为（　　　）。

（A） $\xi_1-\xi_3$　　　　(B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$　　　　(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

【答案】（A）

【解】: $Ax=0$ 三个数 $\begin{cases} r=r(A) \\ n \quad \text{未知量个数} \\ n-1 \end{cases}$

①$\because \xi_1,\xi_2,\xi_3$ 为 $Ax=b$ 的三个相异解，$\therefore Ax=b$ 有无穷多解，$\therefore r(A)=r(A,b)<n\ldots\ldots$（i）

②$\because A^*$ 为非零。$r(A^*)\geq 1$ 从而 $r(A)=n-1,n\ldots\ldots$（ii）

由（i），(ii)可得 $r(A)=n-1$　　$\therefore n-r(A)=1$

(6) 二次型 $x^TAx=(x_1+2x_2+a_3x_3)(x_1+5x_2+b_3x_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是

(A) $p=2,q=1$　　　　(B) $p=2,q=0$

(C) $p=1,q=1$　　　　(D) 与 a_3,b_3 有关，不能确定。

【答案】: C.

【解】: 令$y_1=x_1+2x_2+a_3x_3,y_2=x_1+5x_2+b_3x_3,y_3=x_3$，易见变换矩阵可逆，二次型变为 y_1y_2 再

令 $y_1=z_1+z_2,y_2=z_1-z_2,y_3=z_3$，变换矩阵仍然可逆，二次型接着变为 $z_1^2-z_2^2$.

(7) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 $|X|$ 的概率密度函数为（　　　）.

(A) $f_1(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$　　　　(B) $f_1(x)=f(x)+f(-x)$

(C) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0\end{cases}$　　　　(D) $f_1(x)=\begin{cases} f(x)+f(-x), & x>0, \\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

【解】: 应选(D).

设 $|X|$ 的分布密度函数为 $F_1(x)$，

则当 $x\leq 0$ 时，$F_1(x)=P(|X|\leq x)=0$，即 $f_1(x)=0$；

则当 $x>0$ 时，$F_1(x)=P(|X|\leq x)=P(-x\leq X\leq x)=\int_{-x}^{+x}f(x)dx=F(x)-F(-x)$，

即 $f_1(x)=f(x)+f(-x)$.

此题也可采用排除法.

（8）设随机事件 A 和 B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，令

$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}, \\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}$　　$Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}, \\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$

X 与 Y 的相关系数为 ρ，则（　　　）.

(A) $\rho=0$　　(B) $\rho=1$　　(C) $\rho<0$　　(D) $\rho>0$

【解】: 应选(C).

因为 A 和 B 互不相容，于是 $P(X=1,Y=1)=P(AB)=0$，

$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)$，

$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)$，

$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(B)$.

因此 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-P(A)P(B)$，

$$D(X)=P(A)(1-P(A)),\quad D(Y)=P(B)(1-P(B)),\quad \rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}<0.$$

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

（9）已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$________。

【解】: $f^{(n)}(x)=x^2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$，所以

$f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-3}n!}{(n-2)}$。

(10) 以 $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为________.

【答案】 $y''-4y'+4y=0$

【解】: 对应特征方程的有二重特征根 2，故特征方程 $r^2-4r+4=0$ 为从而原方程为 $y''-4y'+4y=0$。

(11) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\,\mathrm{d}x=$________.

【解】: 原式 $\xlongequal[x=1+\sec t]{}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$。

(12) 若 Γ 是以 $A(0,1),B(-1,0),C(0,-1),D(1,0)$ 为顶点的四边形的边，则 $\displaystyle\oint_\Gamma\frac{x^2}{|x|+|y|}ds=$________.

【解】: 由对称性可知：原式 $=4\displaystyle\int_{L_1}\frac{x^2}{|x|+|y|}ds=4\sqrt{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{4}{3}\sqrt{2}$.　其中：$L_1:y=x\ (0\le x\le 1)$。

(13) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$________.

【答案】: $t=1$

【解】将向量看成列向量，则有 $(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&-1&t\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充要条件是 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&-1&t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow t=1.$

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则 $E[(\overline{X}+S^2)^2]=$________ .

【答案】 $\dfrac{n^2+2n+1}{n(n-1)}$.

【解】: $E[(\overline{X}+S^2)^2]=D(\overline{X}+S^2)+[E(\overline{X}+S^2)]^2$.

由 $\overline{X}$ 与 S^2 的性质知，$\overline{X}$ 与 S^2 独立，这里有 $E(\overline{X})=0$，$D(\overline{X})=\dfrac{1}{n}$，$E(S^2)=1$，

$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，$D[(n-1)S^2]=2(n-1)$，从而 $D(S^2)=\dfrac{1}{(n-1)^2}D[(n-1)S^2]=\dfrac{2(n-1)}{(n-1)^2}=\dfrac{2}{n-1}$，

$$E[(\overline{X}+S^2)^2]=D(\overline{X}+S^2)+[E(\overline{X}+S^2)]^2=D(\overline{X})+D(S^2)+[E(\overline{X})+E(S^2)]^2$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{2}{n-1}+(0+1)^2=\frac{n^2+2n+1}{n(n-1)}.$$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）过点 $(1,5)$ 作曲线 $C:y=x^3$ 的切线，设切线为 l。（Ⅰ）求 l 的方程；（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积；（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

【解】：（Ⅰ）设切点为 (x_0,x_0^3)，则有 $\dfrac{5-x_0^3}{1-x_0}=3x_0^2$，解得 $x_0=-1$，相应的切线 l 的方程为

$y=3x+2$；

（Ⅱ）l 与 C 的交点满足方程 $\begin{cases}y=x^3\\ y=3x+2\end{cases}$，解得 $x=-1$ 与 $x=2$，因而 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=\left[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4\right]\Big|_{-1}^{2}=\frac{51}{4};$$

（Ⅲ）所求体积 $V=2\pi\displaystyle\int_0^2 x(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=2\pi\left[x^3+x^2-\frac{1}{5}x^5\right]\Big|_0^2=\frac{56\pi}{5}$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求函数 u 在点 M（1,1,1）处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_M$.

【解】：曲面 $2z-x^2-y^2=0$ 上任意点 (x,y,z) 处外法线方向向量在 z 轴方向的分量（即投影）为负数，

故此曲面在任意点 (x,y,z) 处外法线有方向向量 $(x,y,-1)$，故在 $(1,1,1)$ 点处外法线有方向向量 $(1,1,-1)$

其方向余弦为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在 $(1,1,1)$ 处的三个偏导数皆为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故所求方向导

数为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$.

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $I=\displaystyle\int_L(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中 L 为从原点 $O(0,0)$ 经圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 至点 $B(2,0)$ 的路径.

【解】记从(0,0)到(2,0)的有向线段为L_1,则由格林公式得：

$$-I=\oint_{L_1-L}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy-\int_{L_1}(x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$$

$$=\iint_D 2(x-y)dxdy-\int_0^2 x^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}2r^2(\cos\theta-\sin\theta)dr-\frac{8}{3}=\pi-\frac{4}{3}-\frac{8}{3}=\pi-4.$$

故$I=4-\pi.$ （其中：计算中可以利用公式$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$）。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设$a>1,b>0$，讨论方程$\log_a^x=x^b$有实根时，a,b所满足的条件。

【解】：方程可等价变形为$\frac{\ln x}{x^b}=\ln a$，令$f(x)=\frac{\ln x}{x^b}-\ln a$，$f'(x)=\frac{1-b\ln x}{x^{b+1}}$，

$f'(x)=0$，解得$x=e^{\frac{1}{b}}$，$f(x$在$(0,e^{\frac{1}{b}}]$上单增，在$[e^{\frac{1}{b}},+\infty)$上单减，又

$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\ln a<0$，$f(e^{\frac{1}{b}})=\frac{1}{be}-\ln a$，因而当$\frac{1}{be}-\ln a\ge0$，即

a,b满足条件$b\ln a\le\frac{1}{e}$时，该方程有实根。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (x\in R)$，满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}+a_n\right]x^n=e^x，求 f(x) 及 a_n$$

【解】 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$，代入方程得

$$f'(x)+f(x)=e^x\quad\Rightarrow\quad f(x)=Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$$

由$f(0)=0$，得$C=-\frac{1}{2}$，故$f(x)=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$

$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2(n!)}x^n$，$a_n=\frac{1+(-1)^n}{2(n!)}$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知三元二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$经过正交变换$x=Py$化为标准形$y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.（Ⅰ）求行列式$\left|A^*-2A^{-1}\right|$;（Ⅱ）求A^3-2A^2-A+4E。

【解】（Ⅰ） A的特征值为 1，-1,2. $|A|=-2$，

$$\left|A^*-2A^{-1}\right|=\left||A|A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=32$$

（Ⅱ）由题意$p^TAp=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^T\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^T=P\begin{pmatrix}1^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}P^T$

$$A^3-2A^2-A+4E=P\left[\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1^3)&\\&&2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]P^T$$

$$=P(2E)P^T=2E$$

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$ 的前 n-1 个列向量线性相关，后 n-1 个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（I）证明：方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多个解。（II）若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n=1$。

【解】:（I）由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，可推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示，故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 等价从而秩相同。据此增广矩阵 $\overline{A}=(A\beta)$ 的秩$=r(A)=n-1<n$ 因此方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多解。

（II）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-1}\alpha_{n-1}=0$

故 $A\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=0$ 又$\because$ $r(A)=n-1$ $\therefore$ $(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}x=\alpha_1+\cdots\alpha_n=\beta$ 知 $(1,1,\cdots,1)^T$ 是 $Ax=\beta$ 特解。

于是 $Ax=\beta$ 通解是：$(1,1,\cdots,1)^T+k(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T=(1+kl_1,\cdots1+kl^{n-1},1)^T$

因此若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 解时,必有 $k_n=1$。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设口袋中有红球 2 个白球 1 个黑球 2 个，连续取 2 个球(每次取一个不返回)，令 X、Y、Z 分别表示其中红球、白球与黑球的个数，试求：（I）概率 $P\{Y=1/X=0\}$；（II）(X,Y) 的联合分布律；（III）$Z=X+2Y$ 分布律；（IV）协方差 $Cov(X+2Y,X)$。

【解】（I）$P\{Y=1/X=0\}=\dfrac{P\{Y=1,X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{Y=1,Z=1\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{2}{3}$

（II）(X,Y) 的联合分布律；

X \ Y	0	1
0	1/10	1/5
1	2/5	1/5
2	1/10	0

（III）$Z=X+2Y$ 的分布律

$Z=X+2Y$	0	1	2	3
p_i	1/10	2/5	3/10	1/5

（IV）由于 X 的分布律为

X	0	1	2
p_i	$3/10$	$3/5$	$1/10$

协方差：$Cov(X+2Y,X)$

$$=D(X)+2Cov(X,Y)=\frac{9}{25}+2\times\frac{1}{5}=\frac{19}{25}\text{。}$$

（其中： $E(X)=4/5\quad D(X)=1-(\frac{4}{5})^2=\frac{9}{25}$）

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\dots,X_{2n}(n\ge 2)$ 是 X 的简单随机样本，且 $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$ 及统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$，（I）考察统计量 Y 关于 σ^2 的无偏性；（II）$\mu=0$ 时，求 $D(\bar{X}^2)$。

【解】：由于样本的独立同分布，考察 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2}\dots,X_n+X_{2n}$，

（I）$X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，可知

样本均值：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$，样本方差：$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Y=S^2$

由于 $E(S^2)=2\sigma^2$，所以 $E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$，即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$，Y 不是 σ^2 的无偏估计；

（II）在 $\mu=0$时，$X_i+X_{n+i}\sim N(0,2\sigma^2),(i=1,2,\cdots,n)$，所以 $2\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})\sim N(0,\frac{2\sigma^2}{n})$

则 $\frac{2\bar{X}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，由此可知 $(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$，

又可得 $D(\frac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2=2\times 1=2,\qquad \therefore D(\bar{X}^2)=\frac{\sigma^4}{2n^2}$.

合 肥 工 业 大 学　考 研 辅 导 中 心

试卷密号：	试卷密号：

2015 年全国硕士　研究生入学同一考试试卷

考试科目　数学（一）（模拟 5）

题号	分数	阅卷人
1—8		
9—14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
总分		

注意：此半页考生不得填写

准 考 证 编 号______________

考　试　科 目______________

报考学科、专业______________

报考研究方向______________

报　考　单　位______________

注意事项

1、以上各项除试卷密号之外必须填写清楚；

2、答案必须写在试卷上；

3、字迹要清楚，卷面要整洁；

4、草稿纸另发，考试结束，同一收回。