绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}$，则点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的（　　）．

（A）连续点　（B）跳跃间断点　（C）可去间断点　（D）无穷间断点

（2）设 $f(x)$ 是连续且单调增加的奇函数，$F(x)=\int_0^x(2u-x)f(x-u)du$，则 $F(x)$ 是（　　）．

（A）单调增加的奇函数　（B）单调减少的奇函数

（C）单调增加的偶函数　（D）单调减少的偶函数

（3）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在点 x_0 处条件收敛，则（　　）．

（A）x_0 必在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间的内部　（B）x_0 必在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的外部

（C）x_0 必是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域的端点　（D）以上三种情形均有可能

（4）将极坐标系下的二次积分 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(1+r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 转化成直角坐标系下的二次积分为（　　）．

（A）$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0}dx\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

（B）$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x,y)dy+\int_1^2dx\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（D）$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_{1-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

（5）设 A,B 均为三阶非零矩阵，满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{pmatrix}$，则（　　）．

（A）$a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　（B）$a\neq2$ 时，必有 $r(A)=2$

（C）$a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$　（D）$a\neq-1$ 时，必有 $r(A)=2$

（6）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的秩为2，则该二次型的正负惯性指数分别为（　　）．

（A）2，0　（B）0，2　（C）1，1　（D）依赖于 a 的取值

（7）设A,B为随机事件，且$0<P(A)<1$,下列说法正确的是（　　）.

（A）若$P(A)=P(AB)$，则$A\subset B$　　（B）若$P(A\cup B)=P(AB)$，则$A=B$

（C）若$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)$，则$A,B$互为对立事件　（D）若$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则$A,B$相互独立

（8）设随机变量$X\le Y$，$F_X(x)$和$F_Y(y)$分别为X和Y的分布函数，$F(x,y)$为(X,Y)的分布函数，则对任意的t，有（　　）.

（A）$F_X(t)\le F_Y(t),\ F(t,t)=F_X(t)$　　（B）$F_Y(t)\le F_X(t),\ F(t,t)=F_X(t)$

（C）$F_X(t)\le F_Y(t),\ F(t,t)=F_Y(t)$　　（D）$F_Y(t)\le F_X(t),\ F(t,t)=F_Y(t)$

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设$f(x)$为可导的偶函数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}=2$，则曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的法线方程为__________.

（10）$\displaystyle\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=$__________.

（11）设函数$z=z(x,y)$由方程$x-az=\varphi(y-bz)$确定，其中φ可导，a,b为常数，且$a-b\varphi'\ne 0$，则$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

（12）设正值函数φ连续，若$a>0,b>0,c>0$，则曲面$(z-a)\varphi(x)+(z-b)\varphi(y)=0$与柱面$x^2+y^2=c^2$及平面$z=0$所围成的空间立体的体积$V=$__________.

（13）设$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，对任意的正整数$n$，矩阵$(E+\alpha\beta^T)^n=$__________.

（14）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体$X\sim P(\lambda)$的一个简单随机样本，若$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a^{X_i}$为$e^{\lambda}$的无偏估计，则常数$a=$__________.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分10分**）设$0<x<1$，证明（Ⅰ）$\ln(1+x)<\dfrac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$；（Ⅱ）$(1+\dfrac{1}{x})^x(1+x)^{\frac{1}{x}}<4$.

（16）（**本题满分10分**）将yOz坐标面上的曲线段$y=f(z)$（$f(z)>0,0\le z\le 12$）绕z轴旋转一周所得旋转曲面与xOy坐标面围成一个无盖容器．已知它的底面积为$16\pi(\mathrm{m}^2)$，如果以$3(\mathrm{m}^3/\mathrm{s})$的速度把水注入容器内，在高度为$z$ (m)的位置，水的上表面积以$\dfrac{3}{z+1}$ $(\mathrm{m}^2/\mathrm{s})$的速度增大．(Ⅰ)试求曲线$y=f(z)$的方程；(Ⅱ)若将容器内水装满，问需要多少时间？

（17）（**本题满分 10 分**）求过第一卦限中点(a,b,c)的平面，使之与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小.

（18）（**本题满分10分**）设函数$y=y(x)$满足$\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且$y(1)=1$，计算$\int_1^2 y(x)dx$.

（19）（**本题满分 10 分**）设曲面Σ是锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与球面$x^2+y^2+z^2=1,x^2+y^2+z^2=2$所围立体表面取外侧，$f(u)$为连续可微的奇函数，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x^3dydz+[y^3+f(yz)]dzdx+[z^3+f(yz)]dxdy.$$

（20）（**本题满分 11 分**）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为三个三维列向量，$A=\alpha_1\alpha_1^T+\alpha_2\alpha_2^T+\alpha_3\alpha_3^T$.（Ⅰ）证明存在矩阵$B$，使得$A=B^TB$；（Ⅱ）当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关时，证明$r(A)=3$；（Ⅲ）当$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$时，求$Ax=0$的通解.

（21）（**本题满分 11 分**）设A是二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵，$r(A)=1$．齐次线性方程组$(2E-A)x=0$的通解为$x=k\alpha_1$，其中$\alpha_1=(-1,1,1)^T$，k为任意实数.（Ⅰ）求解齐次线性方程组$Ax=0$；（Ⅱ）求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$.

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,0;1,4;\frac{1}{2})$．已知$\Phi(1)=0.8413$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，求$p=P\{Y<2X<Y+2 \mid 2X+Y=1\}$.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体X的密度函数为$f(x,\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中未知参数$\lambda>0$．$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体$X$的一个容量为$n$的简单随机样本.（Ⅰ）求$\lambda$的矩估计量$\hat{\lambda}_M$；（Ⅱ）求$\lambda$的最大似然估计量$\hat{\lambda}_L$；（Ⅲ）求$E(\hat{\lambda}_L)$.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（二）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-ax-b}{x^2}=c\neq 0$，则（　　）．

（A）$a=0,b=1,c=\frac{1}{2}f''(0)$　　（B）$a=1,b=1,c=\frac{1}{2}f''(0)$

（C）$a=1,b=0,c=f''(0)$　　（D）$a=1,b=1,c=f''(0)$

（2）设函数 $f(x)$ 连续，则下列结论不成立的是（　　）．

（A）$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$　　（B）$\int_0^{\pi} f(\sin^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx$

（C）$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$　　（D）$\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx$

（3）设 $f(u)$ 为可微函数，$f(0)=0,f'(0)=2$，记 D_t 为圆心在原点，半径为 t 的圆域，若 $t\to 0^+$ 时，$\iint\limits_{D_t} f(x^2+y^2)dxdy$ 与 at^k 是等价无穷小，则（　　）．

（A）$a=\frac{\pi}{2},\ k=2$　　（B）$a=\frac{\pi}{2},\ k=4$　　（C）$a=\pi,\ k=2$　　（D）$a=\pi,\ k=4$

（4）设平面点集 $D=\{(x,y)\,|\,0<y<x^2,-\infty<x<+\infty\}$，函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 则在点 $(0,0)$ 处（　　）．

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在　　（B）$f(x,y)$ 连续　　（C）$f(x,y)$ 偏导数存在　　（D）$f(x,y)$ 可微

（5）设 A 为 $n\times m$ 矩阵，B 为 $m\times n$ 矩阵，且 AB 可逆，则必有（　　）．

（A）A 的行向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

（B）A 的列向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（C）A 的行向量组线性无关，B 的列向量组也线性无关

（D）A 的列向量组线性无关，B 的行向量组也线性无关

（6）设 A 是三阶矩阵，A 的秩 $r(A)=1$，A 有特征值 $\lambda=0$，则 $\lambda=0$（　　）．

（A）必是 A 的二重特征值　　（B）至少是 A 的二重特征值

（C）最多是 A 的二重特征值　　（D）可能是 A 的一、二或三重特征值

（7）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim U[-1,1]$，且 X 和 Y 相互独立，则 $P\{Y\leq 0\,|\,X+Y\leq 2\}=$（　　）．

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（8）设随机变量 $X\sim U[-1,1]$，$Y=\begin{cases}1-4X, & X<0,\\ 1, & X\geq 0,\end{cases}$ 则下列结论正确的是（　　）.

（A）Y 为连续型随机变量　（B）Y 为离散型随机变量　（C）$EY=1$　（D）$EY=2$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$ 与平面 $2x-y+z=1$ 垂直的法线方程为__________.

（10）设二阶常系数非齐次线性方程 $y''+py'+qy=ae^x$（p,q,a 是常数）有两个特解 $y_1=xe^x$，$y_2=e^{2x}+xe^x$，则该方程的通解为__________.

（11）方程 $x^5+2x+\cos x=a$ 的实根个数为__________.

（12）设 L 为从点 $A(1,0)$ 到 $B(0,1)$ 再到 $C(-1,0)$ 的折线，则积分 $\int_L \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}=$__________.

（13）已知 A 为三阶矩阵，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&3&1\\2&0&0\end{pmatrix}$，若 $(A-E)^{-1}=B-E$，则 $|A|=$__________.

（14）设随机事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.5, P(B)=0.2$，令 $X=\begin{cases}1, & AB\text{发生},\\ 0, & AB\text{不发生},\end{cases}$

$Y=\begin{cases}1, & A\cup B\text{发生},\\ 0, & A\cup B\text{不发生},\end{cases}$ 则 X 和 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，$f(0)=0$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t dy\int_y^t f(x-y)dx}{(\sqrt[3]{\cos t}-1)\cdot\sin t}$.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，$f(0)=0, f(1)=1$．（Ⅰ）证明存在 $a\in(0,1)$ 使得 $f(a)=\dfrac{1}{3}$；（Ⅱ）证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,1)$，有 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{1}{f'(\xi_3)}=3$.

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 连续.（Ⅰ）证明：对于任意的实数 a,b，均有

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin x)dx；$$

（Ⅱ）计算 $I_n=\int_0^{2\pi}(3\cos x+4\sin x)^n dx$，其中 n 为正整数.

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且满足 $f(0)=1, f'(0)=0$.如果积分

$$\int_L y^2 f'(x)dx + 2y(f'(x)-x)dy$$

与路径无关，求 $f(x)$，并计算积分 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2 f'(x)dx + 2y(f'(x)-x)dy$.

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

（20）（**本题满分 11 分**）已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ 3x_1+x_2+4x_3+2x_4=0, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$ 有两个线性无关的解.

（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=3$；（Ⅱ）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}4\\3\\5\\-1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\\2\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}a\\1\\3\\b\end{pmatrix}$，证明 α_4 必可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表示法唯一，并求 a,b 的值.

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$ 的正惯性指数为 $p=1$，二次型的矩阵 A 满足 $A^2-A=6E$.（Ⅰ）求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形，并写出二次型的规范形；（Ⅱ）求行列式 $\left|\frac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵；（Ⅲ）记 $B=A^2-kA+6E$，问 k 满足何条件时，二次型 $g(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TBx$ 正定？

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=ae^{-x^2}, -\infty<x<+\infty$.（Ⅰ）求常数 a；（Ⅱ）求 $Y=\max\{X,X^2\}$ 的概率密度函数.

（23）（**本题满分 11 分**）设 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $Y_1=X_1+X_2$，$Y_2=X_3-X_4$.（Ⅰ）问 $\frac{Y_1^2}{Y_2^2}$ 和 $\frac{Y_1^2+Y_2^2}{2}$ 分别服从何分布？（Ⅱ）求 $P\{Y_1^2+Y_2^2\le 8\ln 2\}$.

20、21全程考研资料请加群712760929

绝密 * 启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（三）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）曲线 $y = x^2 \arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\arctan(x^2)$（　　）.

（A）有一条渐近线　（B）有两条渐近线　（C）有三条渐近线　（D）没有渐近线

（2）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x) > 0$． $F(x) = \int_0^{x^2} tf(x^2 - t)\,dt$，则（　　）.

（A） $F(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值　　（B） $F(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最大值

（C） $F'(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值　　（D） $F'(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最大值

（3）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x} = -1$，而 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $x \in (-\infty, +\infty)$，其中 $b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx, n = 1,2,3\cdots$，则函数值 $S(\frac{3}{2}) =$（　　）.

（A） 0　　（B）1　　（C） -1　　（D） $\frac{3}{2}$

（4）设 D 是由直线 $y = x, x = \frac{1}{2}$ 及 x 轴所围成的区域，则二重积分

$$I_1 = \iint\limits_D \sin(x+y)^2 d\sigma,\quad I_2 = \iint\limits_D \sin(x^2+y^2) d\sigma,\quad I_3 = \iint\limits_D \sin(4x^2) d\sigma$$

的大小关系为（　　）.

（A） $I_1 < I_2 < I_3$　（B） $I_3 < I_2 < I_1$　（C） $I_2 < I_1 < I_3$　（D） $I_2 < I_3 < I_1$

（5）设 A 为 n 阶方阵 $(n > 2)$， A^* 为 A 的伴随矩阵，则下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $Ax = 0$ 有 n 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 仅有零解

（B）若 $Ax = 0$ 仅有 $n-1$ 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 仅有一个线性无关的解

（C）若 $Ax = 0$ 仅有 1 个线性无关的解，则 $A^*x = 0$ 有 $n-1$ 个线性无关的解

（D）若 $Ax = 0$ 仅有零解，则 $A^*x = 0$ 有 n 个线性无关的解

（6）矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）.

（A） $a = 0, b = 2, c = 2$　　（B） $a = 0, b = 2, c$ 为任意常数

（C） $a = 0, b = 0, c = 0$　　（D） $a = 2, b = 2, c$ 为任意常数

20、21全程考研资料请加群712760929

（7）设有随机变量 X 和凹函数 $g(x)$，若 $g(x)$ 可导，EX 和 $Eg(X)$ 均存在，则（　　）.

（A）$Eg(X)=g(EX)$　　（B）$Eg(X)\geq g(EX)$

（C）$Eg(X)\leq g(EX)$　　（D）$Eg(X)$ 和 $g(EX)$ 的大小关系不确定

（8）设随机变量 $X\sim U(a,b)$，由切比雪夫不等式得 $P\{|X|\leq 1\}\geq\dfrac{2}{3}$，则 $(a,b)=$（　　）.

（A）$(-2,2)$　　（B）$(0,4)$　　（C）$(-1,1)$　　（D）$(0,2)$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）当 $x>-1$ 时，函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$，若 $F(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\sin\dfrac{x}{t^2}$，则 $\int_0^1 F(x)dx=$__________.

（10）已知凹曲线 $y=y(x)$ 在任一点 $P(x,y)$ 处的曲率 $K=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$，且 $y(0)=0,y'(0)=0$，则 $y(x)=$__________.

（11）由曲线 $y=x^2-1$，直线 $y=-1,x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为__________.

（12）设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y,z(x,0)=x,z(0,y)=y^2$，则 $z(x,y)=$__________.

（13）设向量 $\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1)^T$ 和 $\beta_1=(2,1)^T$，$\beta_2=(1,3)^T$，ξ 在 α_1,α_2 下的坐标为 $(-1,1)^T$，则 ξ 在 β_1,β_2 下的坐标为__________.

（14）设事件 A,B 相互独立，A,C 互斥，$P(A)=0.2,P(B)=0.3,P(C)=0.4$，则 $P(AB|\overline{C})=$______.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**（Ⅰ）证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）设 $I(x)=\int_0^1\dfrac{\ln(1+xt)}{t}\cos\dfrac{\pi}{2}tdt$，求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{I(x)}{x}$.

（16）**（本题满分 10 分）**设幂级数的系数满足 $a_0=5,na_n=a_{n-1}+3(n-1),n=1,2,3\cdots$.（Ⅰ）求幂级数的和函数 $S(x)$ 满足的一阶微分方程；（Ⅱ）求 $S(x)$.

(17)（**本题满分 10 分**）设函数 $z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$，f 具有二阶连续偏导数，φ 具有二阶导数，且 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均二阶可导，且 $g''(x)\neq 0$，证明：（Ⅰ）$g(b)-g(a)\neq g'(a)(b-a)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

(19)（**本题满分 10 分**）求半圆柱面 $x^2+y^2=1\,(y\geq 0)$ 被平面 $z=0$ 及椭圆抛物面 $z=2x^2+y^2$ 所截下的有限部分图形的面积.

(20)（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为4维列向量，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，已知非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数），试求 $By=\beta$ 的通解.

(21)（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+2ax_1x_3+4x_2x_3$.（Ⅰ）若 $a>2$，求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形；（Ⅱ）若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负惯性指数均为1，求该二次型在正交变换下的标准形.

(22)（**本题满分 11 分**）设随机变量 (X,Y) 服从平面区域 $D:x^2+y^2\leq 1$ 上的均匀分布，(R,Θ) 为 (X,Y) 的极坐标表示，其中 $0\leq R\leq 1,0\leq\Theta\leq 2\pi$.（Ⅰ）求 $P\{R\leq\dfrac{1}{2},\Theta\leq\dfrac{\pi}{2}\}$；（Ⅱ）求 (R,Θ) 的密度函数 $f_{R,\Theta}(r,\theta)$，以及 R 和 Θ 的边缘密度函数 $f_R(r)$ 和 $f_\Theta(\theta)$，并问 R 和 Θ 是否相互独立？

(23)（**本题满分 11 分**）为估计某盒子中球的个数 N（$N>10$），先从盒子中任取10个球，涂上颜色后放回盒子中并搅拌均匀，然后再从盒子中有放回地任取6个球，发现其中有4个的球涂有颜色，（Ⅰ）求 N 的矩估计值；（Ⅱ）求 N 的极大似然估计值；（Ⅲ）若继续从盒子中有放回地取球，求第4次取球恰好第2次取到涂有颜色球的概率 p 的极大似然估计值.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（四）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e^x-1}{x^2}+\frac{f(x)}{x}]=3$，则（　　）.

（A）$f(0)=-1, f'(0)=\frac{5}{2}$　　（B）$f(0)=-1, f'(0)=-\frac{5}{2}$

（C）$f(0)=1, f'(0)=\frac{5}{2}$　　（D）$f(0)=1, f'(0)=-\frac{5}{2}$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且对任意的 $x\in(a,b)$，有 $f''(x)+u(x)f'(x)+v(x)f(x)=0$，其中 $v(x)<0$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值，但不可取负的最小值

（B）$f(x)$ 在 (a,b) 内可取负的最小值，但不可取正的最大值

（C）$f(x)$ 在 (a,b) 内可取正的最大值，也可取正的最小值

（D）$f(x)$ 在 (a,b) 内不能取正的最大值，也不能取负最小值

（3）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）连续，但偏导数不存在　　（B）不连续，但偏导数存在

（C）连续且偏导数存在　　（D）不连续且偏导数不存在

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, x\le 0,\\ 0, \quad x>0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$，则在点 $x=0$ 处（　　）.

（A）$F(x)$ 不可导；$G(x)$ 不可导　　（B）$F(x)$ 不可导；$G(x)$ 可导

（C）$F(x)$ 可导；$G(x)$ 不可导　　（D）$F(x)$ 可导；$G(x)$ 可导

（5）设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}, \alpha_1=(a_{11},a_{12},a_{13})^T, \alpha_2=(a_{21},a_{22},a_{23})^T$，$\xi$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，则有（　　）.

（A）α_1,α_2 线性无关，α_1,α_2,ξ 线性相关　　（B）α_1,α_2,ξ 线性无关

（C）α_1,α_2,ξ 两两线性相关　　（D）α_1,α_2,ξ 两两正交

20、21全程考研资料请加群712760929

（6）设A为n阶实对称阵，将A的第一行的2倍加到第三行，再将第三列的(-2)倍，加到第一列，得到矩阵B，则B（　　）.

（A）必对称　（B）必可相似对角化　（C）必不可对角化　（D）必可逆

（7）下列函数中，为某随机变量X的分布函数的是（　　）.

（A）$F(x)=\frac{1+\text{sgn}(x)}{2}$　（B）$F(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$　（C）$F(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$　（D）$F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

（8）下列命题正确的是（　　）.

（A）设随机变量$X\sim B(1,p),Y\sim B(1,p)$，如果$X$与$Y$不相关，则$X$与$Y$相互独立

（B）设随机变量$X\sim P(1),Y\sim P(1)$，如果X与Y不相关，则X与Y相互独立

（C）设随机变量$X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$，如果$X$与$Y$不相关，则$X$与$Y$相互独立

（D）设随机变量$X\sim U[-1,1],Y\sim U[-1,1]$，如果$X$与$Y$不相关，则$X$与$Y$相互独立

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$f(x)=x^2\sin 2x$，则当$n\geq 1$时，$f^{(2n+1)}(0)=$__________.

（10）$\int_0^1(\ln x)^2dx=$__________.

（11）函数$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$(1,-1,\sqrt{2})$处沿各方向的方向导数的最大值为__________.

（12）设空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t,\quad 0\leq t\leq 2\\ z=e^t,\end{cases}$，则$\Gamma$的弧长$s=$__________.

（13）设A为三阶非零矩阵，且$A^2=O$，则$Ax=0$的基础解系中所含向量的个数为__________.

（14）设随机变量$X\sim E(\lambda)$，$Y=(X-EX)^2$，则$P\{Y<EY\}=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）已知m为实常数，讨论方程$x^2-me^x-3=0$实根的个数.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数$F(u,v)$具有二阶连续偏导数，证明由方程$F(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0})=0$所确定的隐函数$z=z(x,y)$满足下列两个等式

（Ⅰ）$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0$；　（Ⅱ）$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y})^2$.

（17）（**本题满分 10 分**）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}[\sin n\cdot\int_0^1(1-x)x^{n-1}\ln(1+x)dx]$的敛散性，如果该级数收敛，问它是条件收敛还是绝对收敛？

（18）（**本题满分 10 分**）设函数$y(x)\ (x\geq 1)$二阶可导，且$y'(x)>0, y''(x)>0$，$y(1)=1$．如果曲线$y=y(x)$从点$P_0(1,1)$到其上任一点$P(x,y)$的弧长等于曲线$y=y(x)$在点$P(x,y)$处的切线在y轴截距的绝对值，求此曲线方程.

（19）（**本题满分 10 分**）设S是由xOz平面内的一段曲线$z=x^2-1(1\leq x\leq 2)$绕z轴旋转一周所得的有向曲面，其中各点处的法向量与z轴正向成钝角，计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2(x-1)dydz-(3x^2y-y^2)dzdx+(4xz-x^2)dxdy.$$

（20）（**本题满分 11 分**）设B是秩为2的5×4矩阵，$\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T$，$\alpha_3=(a,b,6,2)^T$是齐次线性方程组$Bx=0$的解向量.（Ⅰ）求$a,b$的值；（Ⅱ）求$Bx=0$的正交的基础解系.

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)^2, A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）写出二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵；（Ⅱ）证明二次型$f(x_1,x_2,x_3)$正定的充要条件为$|A|\neq 0$.

（22）（**本题满分 11 分**）连续做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果．已知第一次试验成功和失败的概率均为$\frac{1}{2}$，且当第n次成功时，第$n+1$次成功的概率为$\frac{1}{2}$；当第n次失败时，第$n+1$次成功的概率为$\frac{3}{4}$.（Ⅰ）求第n次试验成功的概率P_n；（Ⅱ）用X表示首次获得成功的试验次数，求数学期望EX.

（23）（**本题满分 11 分**）设总体X服从对数正态分布，即$\ln X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中$\mu$已知，$\sigma^2$未知.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是总体$X$的一个容量为$n$的简单随机样本.（Ⅰ）求$X$的概率密度函数；（Ⅱ）求$\sigma^2$的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；（Ⅲ）判断$\hat{\sigma}^2$是否是$\sigma^2$的无偏估计.

绝密 * 启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（一）模拟（五）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处右连续，则（　　）.

（A）$f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续，$f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

（B）$f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续，$f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

（C）$f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处右连续，$f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处左连续

（D）$f(-x)$ 在点 $x=-1$ 处左连续，$f(-\frac{1}{x})$ 在点 $x=-1$ 处右连续

（2）下列说法不正确的是（　　）.

（A）若数列 $\{b_n\}$ 有界，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛

（B）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛

（C）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

（D）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_n + a_2 a_n + \cdots + a_n^2)$ 绝对收敛

（3）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某去心邻域内可导，且 $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2$，则（　　）.

（A）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续，但右导数不一定存在

（B）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处右导数存在且 $f'_+(0)=2$

（C）存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调递增

（D）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处一定不取极值

（4）设 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos x^2 dx, J=\int_0^{\pi} \cos x e^{\sin^2 x} dx$，则（　　）.

（A）$I>0, J<0$　　（B）$I>0, J=0$　　（C）$I<0, J>0$　　（D）$I<0, J=0$

（5）已知 A_1, A_2 为 n 阶方阵，非齐次线性方程组 $A_1 x=\beta_1$ 与 $A_2 x=\beta_2$ 同解，则下列命题

（Ⅰ）A_1 与 A_2 必等价；　（Ⅱ）A_1 与 A_2 的列向量组必等价；　（Ⅲ）A_1 与 A_2 的行向量组必等价；

（Ⅳ）β_2 必可由 A_1 的列向量组线性表示；　　（Ⅴ）$A_2 x=\beta_1$ 必有解

中，正确的个数为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

(6) 设 A 为 n 阶方阵，α,β 为 n 维列向量，a,b,c 为常数，已知 $|A|=a$，$\begin{vmatrix} b & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix}=0$，则 $\begin{vmatrix} c & \alpha^T \\ \beta & A \end{vmatrix}=$ (　　).

(A) 0　　(B) $\alpha^T\beta$　　(C) $(c-b)a$　　(D) a

(7) 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上服从均匀分布，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $EU-EV=$ (　　).

(A) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\pi}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi}$　　(C) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(8) 在产品检验时，原假设 H_0 为产品合格. 若在检验过程中发现将一些不合格品误以为合格品，则当样本容量 n 固定时，(　　).

(A) 犯弃真错误的概率 α 和犯存伪错误的概率 β 都会变大

(B) 犯弃真错误的概率 α 和犯存伪错误的概率 β 都会变小

(C) 犯弃真错误的概率 α 会变小，犯存伪错误的概率 β 会变大

(D) 犯弃真错误的概率 α 会变大，犯存伪错误的概率 β 会变小

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\dfrac{1}{n})^{\frac{4}{3}}(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n})=$__________.

(10) 微分方程 $y''+4y=2\cos^2 x$ 的特解形式为__________.

(11) 设 $z=\int_0^{x^2y} f(t,e^t)dt$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

(12) 设 L 为从点 $(2,0)$ 沿心形线 $r=1+\cos\theta$ 的上半曲线到点 $(0,0)$ 的有向曲线，则

$\int_L (e^x+1)\cos y dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy=$__________.

(13) 设 A 为三阶不可逆矩阵，α,β 是线性无关的三维列向量，且满足 $A\alpha=\beta,A\beta=\alpha$，则与 A 相似的对角阵 $\Lambda=$__________.

(14) 设总体 $X\sim P(1)$，(X_1,X_2,X_3,X_4) 是来自总体 X 的简单随机样本，则 $P\{\overline{X}>\dfrac{1}{4}\}=$_______.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（**本题满分 10 分**）设 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{x_n^3}, n=1,2,\cdots$.（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值；（Ⅱ）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x_n-x_{n+1})$ 收敛.

(16)（**本题满分 10 分**）求函数 $z=f(x,y)=x^2+y^2-2x+2y$ 在闭区域 $D:x^2+y^2\le 4, x\ge 0$ 上的最大值与最小值.

20、21全程考研资料请加群712760929

(17)(**本题满分 10 分**)设曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$.(Ⅰ)求L的参数方程确定的函数$y=y(x)$的定义域;(Ⅱ)求曲线L与x轴围成的平面图形绕y轴旋转一周而形成的旋转体体积V_y;(Ⅲ)设曲线L的形心坐标为$(\overline{x},\overline{y})$,求$\overline{y}$.

(18)(**本题满分 10 分**)设函数$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数,且$f'(0)=f'(1)=0$.

(Ⅰ)证明至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使得$2f(\frac{1}{2})=f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi)}{4}$;

(Ⅱ)证明至少存在一点$\eta\in(0,1)$,使得$|f(1)-f(0)|\le\frac{|f''(\eta)|}{4}$.

(19)(**本题满分 10 分**)计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2dydz+y^2dzdx+(z^2+1)dxdy}{2x^2+2y^2+z^2}$,其中$\Sigma$是上半球面$x^2+y^2+z^2=1\,(z\ge 0)$,取上侧.

(20)(**本题满分 11 分**)设$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$,$X_n(n=0,1,\cdots)$均为3阶方阵,且满足$X_{n+1}=AX_n+E$,$n=0,1,\cdots$,其中$X_0=O$,求$X_n$.

(21)(**本题满分 11 分**)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$与$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$合同.(Ⅰ)求常数$a$;(Ⅱ)求正交变换$x=Qy$,化二次型$f=x^TAx$为标准形.

(22)(**本题满分 11 分**)设随机变量$X\sim U[-1,3]$.(Ⅰ)求$Y=\begin{cases}0, & X<0, \\ 1, & X\ge 0\end{cases}$的分布律和条件概率$P\{X\le\frac{1}{2}\Big|Y=1\}$;(Ⅱ)求$Z=XY$的分布函数$F_Z(z)$.

(23)(**本题满分 11 分**)设随机变量$\chi^2\sim\chi^2(1)$,$F\sim F(1,1)$,$T\sim t(1)$.(Ⅰ)求$P\{\chi^2\le 1\}$;(Ⅱ)求$P\{F\le 1\}$;(Ⅲ)求$P\{-1<T<1\}$,其中$\Phi(1)=0.8413$.