绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）【解】: $f[f(x)]=\begin{cases} x+2, x\geq 0, \\ \dfrac{x}{1-2x}, x<0 \end{cases}$，故 $x=0$ 是 $f[f(x)]$ 的跳跃间断点。答案 C.

（2）【解】: 根据函数曲线的凹凸性可得答案是 B.

（3）【解】: 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin a}{n^3}+\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})]$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin a}{n^3}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 条件收敛，所以原级数条件收敛.

（4）【解】: 答案 B.

（5）【解】: 答案：D.

（6）【解】答案：D.

（7）【解】由于 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}=P\{X=-1,Y\le z+1\}+P\{X=1,Y\le z-1\}$$

$$=\frac{1}{2}[F_Y(z+1)+F_Y(z-$$，

对 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<z<0\\ \frac{1}{2}, & 1<z<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由此知 $P\{X+Y\le 1\}=\frac{3}{4}$，答案为（B）.

（8）【解】由于总体 X 不一定是正态分布，所以答案（D）

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

（9）【解】：有题设知 $y(1)=1$，对等式两边同时求微分可得 $e^{xy}(ydx+xdy)+2xdx+dy=0$，将 $x=1,y=1$ 代入可得 $dy\big|_{x=1}=-\frac{e+2}{e+1}dx$.

（10）【解】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}-1.$

（11）【解】：解法一：$x^2y=\frac{1}{2}\sin 2x+C$ 。

解法二：$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x^2}\cos 2xe^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{2x^2}\sin 2x+\frac{C}{x^2}$ 。

（12）【解】：$\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{I(a)}{\ln(1+a^2)}=\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{\frac{\pi a^2}{2}e^{\xi^2-\eta^2}}{a^2}=\frac{\pi}{2}$

（13）【解】：因为 $|B^{-1}|=\frac{1}{3}$,所以 $|B|=3$,又因为 $A\sim B$,所以 A,B 有相同的特征值,设 A 的另一个特征值为 λ_3，由 $|A|=|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,得 $\lambda_3=-3$,因为 $A-3E$ 的特征值为 $-4,-2,-6$,所以 $|A-3E|=-48$.

又因为 $B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}=|B|B^{-1}-4B^{-1}=-B^{-1}$,所以 $\left|B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\right|=(-1)^3B^{-1}=-\frac{1}{3}$，于是

$$\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=\left|(A-3E)^{-1}\right|\left|B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\right|=\frac{1}{144}.$$

（14）【解】：$\boldsymbol{E(X+2Y)(3X-Y)=3E(X^2)-2E(Y^2)+5E(XY)=-6}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）$(1+ax+bx^2)\sqrt{1+x}-c=(1+ax+bx^2)[1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)]-c$

$$=(1-c)+(a+\frac{1}{2})x+(b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8})x^2+(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a+\frac{1}{16})x^3,$$

$x\to 0$ 时 $\sin x\ln(1+x^2)\sim x^3$，因此有$1-c=0,(a+\frac{1}{2})=0,(b+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8})=0$，解得

$c=1,a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{8}$， $d=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a+\frac{1}{16})x^3}{x^3}=\frac{5}{16}$.

（16）【解】:（Ⅰ）曲面S在点$P\ x\ y\ z$ 处切平面的方程为$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,(X,Y,Z)$为切平面上动点．于是切平面与四个坐标面围成的体积为$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$．令$F(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$，求

解方程组$\begin{cases}F_x'=yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0,\\ F_x'=xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0,\\ F_x'=xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0,\end{cases}$ 解得$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$，即当$x=a,y=b,z=c$时函数$xyz$取得最大值，

相应的体积V取得最小值，且有最小值为$V=\frac{abc}{6}$.

（17）【解】:（I）$P=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)^n},\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{-(x^2+y^2)-2ny(x-y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$,

$Q=\dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^n},\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{x^2+y^2-2nx(x+y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}$，由与路径无关的充要条件，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\frac{-(x^2+y^2)-2ny(x-y)}{(x^2+y^2)^{n+1}}=\frac{x^2+y^2-2nx(x+y)}{(x^2+y^2)^{n+1}},n=1,$$

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{1}{x}dx+\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}dy=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2);$$

（II）$I=\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,2)}\frac{(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{(1.0)}^{(2,2)}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\ln 2$.

（18）【解】(1）令$a_1=a_0+d$，则$a_n=a_0+nd$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd}=1$，故$\mathrm{R}=1$

（2）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+d\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$，$f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,则$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$,

于是$f(x)=(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nd)x^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}x^n+d\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{a_0}{1-x}+d\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{a_0+(d-a_0)x}{(1-x)^2}=s(x),$$

所以$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=s(\frac{1}{2})=2(a_0+d)$.

（19）【证明】:（Ⅰ）方法一 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内恒不为零，则必有 $f(x)$ 恒为正（或者恒为负）由此可得 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>0$（或者 <0）与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故必 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$；

方法二 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，对 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上应用拉格朗日中值定理即可；

（Ⅱ）令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则有 $F(0)=F(1)=0$，

$\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}[F(x)]=g(x)F(x)\big|_0^1-\int_0^1 F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=0$，由（Ⅰ）的结论知 $\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)g'(x_0)=0$，$g'(x_0)\neq 0$，从而有 $F(x_0)=0$，对函数分别在区间 $[0,x_0]$ 及 $[x_0,1]$ 上应用 Rolle 定理知，$\exists\xi_1\in(0,x_0),\exists\xi_2\in(x_0,1)$ 使得 $F'(\xi_1)=f(\xi_1)=F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0$，再对函数 $f(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ 使得 $f'(\eta)=0$ 成立.

（20）【证明】(I) 若 $\alpha_1\ \alpha_2$ 均为 A 属于 0 的特征向量 则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=0$
由题设 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2\neq 0$ 矛盾；类似 若 α_1,α_2 均为 A 属于 1 特征向量。则 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2\neq\alpha_2$ 也与题设矛盾,故 $\alpha_1\ \alpha_2$ 是 A 的属于不同特征值的特征向量

又 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$ 知 α_1 是 A 属于 0 的特征向量，α_2 是 A 属于 1 的特征向量。因 A 是实对称矩阵 故 $\alpha_1\ \alpha_2$ 线性无关；

(II) 因 A 是实对称矩阵。故 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$ 相似。从而秩（A）=秩 $(\Lambda)=2$。表明齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数 $3-$秩$(A)=1$，由此 $A\alpha_1=0$，$A\alpha_2=\alpha_2$ 故 α_1 是 $Ax=0$ 基础解系，α_2 是 $Ax=\alpha_2$ 的一个特解，$\therefore Ax=\alpha_2$ 通解 $\alpha_2+k\alpha_1$.

（21）【解】:(I) 由已知题设知 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。ξ_3 是 A 属于特征值 $\lambda_3=0$ 特征向量。设 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应特征向量为 $x=(\ _1x\quad _2x\quad)^T$ 则由 $<x,\xi_3>=0$ 可得 $x_1+x_3=0$ 及基础解系 $\xi_1=(1\quad 0\quad -1)^T$ $\xi_2=(0\quad 1\quad 0)^T$。
即为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应线性无关特征向量，

单位化 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $U=(\eta_1\quad\eta_2\quad\eta_3)$ 即为所求；

(II) 由题得知 $A=U\Lambda U^T$,所以矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$，由此原二次型为

$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_3$.

（22）【解】:(I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，可得 $1=A\int_0^1 xdx\int_0^x dy=\frac{A}{3}$, 由此 $A=3$；

(II) 边缘概率密度 $f_Y(y)=3\int_y^1 xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$，$0<y<1$; ；

且条件概率密度函数 $f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1(0<y<1)\\ 0, & other\end{cases}$；

（III）由于 $Z=XY$，由此根据分布函数知，$F_Z(z)=P\{XY\le z\}$

对 $z<0$，$F_Z(z)=0,\ z\ge 1$，$F_Z(z)=1$

对 $0\le z<1,\ F_Z(z)=P\{XY\le z\}=\iint\limits_{xy\le z} f(x,y)dxdy=1-3\int_{\sqrt{z}}^1 xdx\int_{\frac{z}{x}}^x dy=3z-2z^{\frac{3}{2}}$；

由此可知，对分布函数求导可得，$Z=XY$ 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}3(1-\sqrt{z}), & 0<z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

（23）【解】:（I）X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$，$X$ 的均值为 $\mu=E(X)=\dfrac{3\theta}{2}$，令 $\mu=\bar{X}$

可得θ的矩估计为$\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{3}\bar{X}$，$E(\hat{\theta}_1)=\dfrac{2}{3}E(\bar{X})=\dfrac{2}{3}\mu=\theta$；

（II）求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_2$，

1）似然函数 $L=\prod_{i=1}^n\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{1}{\theta^n}$，$\theta<x_i<2\theta$，由于$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}<0,$ 所以 L 关于 θ 的减函数，

2）在 $\theta<x_i<2\theta$ 条件下，要使 L 大，只需 θ 小即可，由最大似然估计的定义知，θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2}\max\{x_i\}$，或 $\hat{\theta}_2=\dfrac{1}{2}\max\{X_i\}$.