绝密★启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学(三)

(科目代码:304)

(模拟试卷 1)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号.
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效.
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔.
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回.

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三 (模一)

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下面每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

(1).设 $x\to 0$ 时 $e^{x^2}-e^{\sin^2 x}$ 与 x^m 是同阶无穷小，则 $m=$(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

(2).设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，又 $f(x)=\ln(1+x^2)+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C)点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(3).若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^{-x}$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=e^{-x}\sin x$ 的特解形式为(　　)

(A) $y^*=x(A\cos x+B\sin x)e^{-x}$.　　(B) $y^*=(A\cos x+B\sin x)e^{-x}$.

(C) $y^*=Axe^{-x}\sin x$.　　(D) $y^*=Axe^{-x}\cos x$.

(4).设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶导数连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则下列结论正确的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{(-1)^n}{n})$ 条件收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{(-1)^n}{n})$ 绝对收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{(-1)^n}{n})$.发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{(-1)^n}{n})$ 敛散不定

(5) 已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\ \ 1\ \ -2\ \ 1)^T$，$\eta_2=(0\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题正确的个数为(　　)

(1) α_1,α_3 线性无关；　　(2) α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；

(3) α_3,α_4 线性无关；　　(4)秩 $r(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$ 中正确的是

(A)　(1)(3)　　(B)　(2)(4)　　(C)　(2)(3)　　(D)　(1)(4)

(6).设 A,B 都是 3 阶矩阵,将 A 中的第一行的 2 倍加至第 2 行的得到矩阵, A_1 ,将 B 中的第 3 列乘以 $-\dfrac{1}{3}$ 得到矩阵 B_1，如果 $A_1B_1=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&5&-2\\0&1&2\end{pmatrix}$,则 AB= (　　)

(A) $\begin{pmatrix}-3&2&-1\\-7&5&-2\\6&-3&-6\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&0\\0&1&-6\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\1&1&0\\0&1&6\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&2&3\\5&9&12\\0&1&6\end{pmatrix}$

(7).设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,且有 $P\{X \le \sigma\} > P\{X > \sigma\}$，则有比值 $\frac{\mu}{\sigma}$ (　　)

(A) 大于 1　　(B)　等于 1　　(C)　小于 1　　(D) 不能判别

(8).设随机变量 $X \sim B(3,p)$, 且矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -X & 1/4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值全为实数的概率为 7/8，则

$p=$______.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指点位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=$________.

(10) .已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$______________.

(11).设 $\varphi(u)$ 可导，且 $\varphi(0)=1$，二元函数 $z=\varphi(x+y)\mathrm{e}^{xy}$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$，则 $\varphi(u)=$____________

(12).交换二次积分次序：$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy=$ ______________________；

(13).设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(t,2,1,1)^T$ 线性相关，则 $t=$______.

(14) 设 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim P(\lambda)$,(Poisson 分布),Y 服从指数分布,对应概率密度函数为

$f(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$,则方差 $D(XY)=$____________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)　(本小题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\lambda\sin t, \\ y=1-\lambda\cos t \end{cases}$ 确定，其中 $\lambda\in(0,1), t\in(0,2\pi)$.

(1) 求函数 $y(x)$ 的极值；(2)求曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

(16)　(本小题满分 10 分)

设 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 具有二阶连续偏导数，且满足：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+u=x^2+y^2$ 试求函数 u 的表达式。

(17)　(本小题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

(18)　(本小题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且为严格单调递增的函数，证明：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x<(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(19) (本小题满分 10 分)

求 $\iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$， D 是由 $x^2+y^2\le 1$， $x\ge 0$ 及 $y\ge 0$ 围成的区域。

(20) (本小题满分 11 分)

设 A 是 3 阶实对称矩阵, $R(A)=1, \lambda_1=2$ 是 A 的一个特征值.对应的一个特征向量 $\xi_1=(-1\quad 1\quad 1)^T$,
(1)求 $Ax=0$ 通解,(2)求矩阵 A.

(21) (本小题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 1,且 $(0,1,-1)^T$ 为二次型的矩阵 A 的特征向量.(1)求常数 a,b；(2)用正交变换 $X=QY$,化二次型 X^TAX 为标准形.

(22) (本小题满分 11 分)

设 X 与 Y 相互独立，且服从 $[0,a]$ 上服从均匀分布(其中 $a>0$),试求：(1)方程 $t^2+Xt+Y=0$ 有实根的概率；(2) $a=1$ 时, $Z=2X-Y$ 的概率密度函数.

(23) (本小题满分 11 分)

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 分别是样本均值与样本方差,令 $Y_i=X_i-\bar{X}, i=1,2,\cdots, n$， 试求: (1) $\sum_{i=1}^{n}Cov(X_i,Y_i)$； (2)方差 $D(S^2)$；
(3)若 $\theta=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$,求均值 $E(\theta^2)$.

绝密★启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下面每小题给出的四个选项中, 只有一个选项符合要求, 将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)\ln\left|x^2-1\right|}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$ 的可去间断点个数为（ ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2). 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界连续的奇函数, 则 $F(x)=\int_0^x te^{-|t|}f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）.

（A）必为有界的奇函数　　（B）必为有界的偶函数

（C）为奇函数但未必有界　　（D）为偶函数但未必有界

（3）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛的（ ）.

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非必要也非充分条件

（4）若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$ 均存在,则（ ）。

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续　　(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 均存在

(5). 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵, $\xi_1=(1,2,-2)^T$, $\xi_2=(2,1,-1)^T$, $\xi_3=(1,1,t)^T$ 是线性非齐次方程组的 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解向量, 其中 $\boldsymbol{b}=(1,3,-2)^T$, 则(　　)

(A) $t=-1$, 必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　(B) $t=-1$, 必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(C) $t\neq-1$, 必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　(D) $t\neq-1$, 必有 $r(\boldsymbol{A})=2$

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的实对称矩阵，则二次型 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{AX}$ 与 $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ （　　）

（A）规范形与标准形都不一定相同　　（B）规范形相同但标准形不一定相同

（C）标准形相同但规范形不一定相同　　（D）规范形与标准形都相同

（7）设 A与B 为随机事件，且 $P(A)=0.3$，条件概率 $P(B|A)=0.5$，则概率 $P(\bar{A}\cup B)=($　　　$)$

(A) 1　　**(B)** 0.85　　**(C)** 0.8　　**(D)** 0.5

(8)　在 n 次独立试验中，每次试验成功的概率为 p，第 3 次试验时第 2 次成功的概率为（　　　　）

(A) $3p^2(1-p)$　　(B) $2p^2(1-p)$　　(C) $p^2(1-p)$　　(D) $2p(1-p)^2$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

（9）. 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{2x+y}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=0$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为_______________.

（10）. 已知 $f(1+\ln x)$ 有一个原函数为 $\dfrac{e}{2}x^2+x\ln x+5$，那么由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 以及两个坐标轴围成的图形面积为_______________.

（11）微分方程 $2yy'-xy^2=x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为___________.

（12）设 $D:0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，则 $\iint\limits_D (x-y)\operatorname{sgn}(x-y)d\sigma=$__________.

（13）设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

（14）设 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(-\mu,\sigma^2),Y\sim N(2\mu,\sigma^2)$， $X_1,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 分别是 X 与 Y 的简单随机样本， $\bar{X}$，$\bar{Y}$,分别是对应样本均值，而 $S_X^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$， $S_Y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$ 分别对应的样本方差，则统计量 $\theta=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}+\bar{Y}-\mu)}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}}$ 服从的分布为____________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）.（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1-\sin x}{e^x-1}=1, F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时， $F(x)$ 与 kx^m 是等价无穷小，求常数 m,k 的值.

（16）.（本小题满分 10 分）

设某厂生产甲、乙两种产品，当这两种产品的产量分别为 x 和 y （单位:）时的总收益函数为 $R(x,y)=27x+42y-x^2-2xy-4y^2$ 和总成本函数为 $C(x,y)=36+12x+8y$（单位：万元），除此以外生产甲种产品每吨还需支付排污费用 1 万元，生产乙种产品每吨还需支付排污费用 2 万元.

（Ⅰ）在不限制排污费用的前提下，两种产品的产量各为多少吨时总利润最大？最大利润是多少？

（Ⅱ）在限制排污费用支出总量为 6 万元的情况下，这两种产品的产量各为多少吨时总利润最大？最大利润是多少？

（17）（本小题满分 10 分）

（Ⅰ）求函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数展开式并指出展开式成立的范围;（Ⅱ）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n2^{n+1}-2n+1}{n(2n-1)2^{n+1}}$ 的和.

（18）（本小题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arcsin x\,\mathrm{d}x=1, f(1)=0$． 求证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $\sqrt{(1-\xi^2)}f'(\xi)\arcsin\xi=-1$.

（19）（本小题满分 10 分）

计算 $I=\iint\limits_D \sin x\sin y\min\{x,y\}dxdy$，其中区域 D: $0\le x\le\pi;0\le y\le\pi$.

（20）（本小题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 为 4 维列向量组，且 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$

已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为： $\xi_0+k\xi_1=(-1,1,0,2)^T+k(1,-1,2,0)^T$，（Ⅰ）考察 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；（Ⅱ）求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的一个极大无关组。

（21）（本小题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，j 列元素 $a_{ij}=i\cdot j$ （Ⅰ）求 $r(\boldsymbol{A})$；（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，特征向量，并问 $\boldsymbol{A}$ 能否相似于对角阵，若能，求出相似对角阵，若不能，则说明理由.

（22）（本小题满分 11 分）

设 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1\le x<0 \\ \dfrac{x+2}{4}, & 0\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

试求：（Ⅰ）概率 $P\{|X|>5X-2\}$；（Ⅱ） $E(2|X|-1)$；（Ⅲ） 函数 $Y=X^2$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

（23）（本小题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases} C\theta^x\ln\theta, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，其中 $\theta\,(0<\theta<1)$ 为未知参数，且 $X_1,\cdots,X_n$ 为 X 的简单随机样本。（Ⅰ）求常数 C；（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（Ⅲ）求 $E[\ln(\hat{\theta}_L)^{-1}]$.

绝密★启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下面每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}{1+x^n}\sin\pi x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）。

（A）处处可导　　（B）仅有一个点处不可导

（C）有两个点处不可导　　（D）至少有三个点处不可导

（2）. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\dfrac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（ ）.

（A）$I_1<1<I_2$　（B）$1<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<1$　（D）$I_2<1<I_1$

（3）下列结论中正确的是（ ）。

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 必收敛

（B）若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}=2017$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为条件收敛级数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 必为条件收敛级数

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散

(4) 设区域 D 由 $y\le 4-x^2, y\ge -3x, x\le 1$，则积分 $\iint\limits_D x[\ln(y+\sqrt{1+y^2})+1]dxdy=($　　$)$

$(A)\ \dfrac{2}{5}$　　$(B)\ 0$　　$(C)\ -\dfrac{2}{3}$　　$(D)\ -\dfrac{1}{2}$

（5）$|A_{n\times n}|=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-1\\-1&0&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&0\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$ 等于$($　　$)$

(A) –n　　(B) n　　(C) $-n^2$　　(D) n^2

（6） 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$，则三个平面 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$ 两两相交成三条平行直线的充分必要条件是（ ）

(A)秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=1$；秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$ ；

(B) 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$；秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$；

(C) α_1,α_2，α_3 中任两个向量均线性无关，且 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

(D) α_1,α_2，α_3 中任两个向量均线性无关，且 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

（7）设 X 与 Y 为随机变量且 $P\{X\le c\}=P\{Y\le c\}=0.4$，$P\{\max\{X,Y\}>c\}=0.5$，则概率 $P\{\min\{X,Y\}\le c\}=($　　$)$.

（A） 0.1　　（B） 0.3　　（C） 0.5　　(D) 0.9

（8）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,0;\ 1,1;\ 0)$，则方差 $D(XY-X)=($　　$)$

（A） 1　　（B） 0　　（C） 2　　(D) 3

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

（9）. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{e}+\cos\dfrac{2}{e^2}+\cdots+\cos\dfrac{n}{e^n}\right)^{\frac{1}{n}}=$______ .

（10）. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 有定义，且对任给的 $x\in(0,2)$ 以及 $x+\Delta x\in(0,2)$，均有 $f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$_____ .

（11）、差分方程 $y_{t+1}-y_t=2^t-1$ 的通解为________.

（13）.设 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^2+A-2E=0$ 且 R(A-E)=1,则 $|A-E|=$_________.

（14）设 $X_1,\ldots,X_n$ 来自 Pisson 分布 $P(\lambda)$ 的独立同分布样本，由大数定律可知，$Y_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于_________________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本小题满分 10 分）

选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小.

（16）（本小题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x(y-1)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 3, y-x\ge 0\}$ 上的最大值与最小值。

（17）（本小题满分 10 分）

设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4n-3}{n(2n-1)}x^{2n}$，试求：（I）收敛半径与收敛域；（II）和函数 $S(x)$.

（18）（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$

（19）（本小题满分 10 分）

计算积分 $I=\iint\limits_D x^2(x^2+y^2)d\sigma$，其中 D 是由圆弧 $x^2+y^2=1\ (x,y\ge 0)$ 与直线 $x=1$ 和 $y=1$ 所围成的闭区域.

（20）（本小题满分 11 分）

设 A 是三阶矩阵，$b=(9,18,-18)^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1(-2,1,0)^T+k_2(2,0,1)^T+(1,2,-2)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数.（1）求 A。 （2）求 A^{100}.

（21）（本小题满分 11 分）

已知三元二次型 x^TAx 的平方项系数均为 0，设 $a=(1,2,-1)^T$ 且满足 $Aa=2a$.

（I）求该二次型表达式；（II）求正交变换 $x=Qy$ 化二次形为标准型，并写出所用坐标变换；

（III）若 $A+kE$ 正定，求 k 的取值.

（22）（本小题满分 11 分）

设口袋中有红球 2 个白球 1 个黑球 2 个，连续取 2 个球，令 X、Y、Z 分别表示其中红球、白球与黑球的个数，试求：1）概率 $P\{Y=1/X=0\}$； 2）(X,Y) 的联合分布律； 3）$Z=\max\{X,2Y\}$ 分布律；4) 协方差 $COV(2X+Y,X)$.

（23）（本小题满分 11 分）

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，且 $Y=\ln X$，而 Y 的概率密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\lambda ye^{-\lambda y}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}, \quad （参数 \lambda>1）$$

试求：（I）均值 $E(X)$；（II）λ 的最大似然估计；（III）$b=E(X)$ 的最大似然估计.

绝密★启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下面每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）设 $f(u)$ 为可导函数，曲线 $y=f(1+x^2)$ 过点 $(1,4)$，且它在点 $(1,4)$ 处的切线过点 $(0,0)$，那么函数 $f(u)$ 在 $u=2$ 处当 u 取得增量 $\Delta u=0.01$ 时相应的函数值增量的线性主部是（ ）.

（A）-0.02　　(B) 0.02　　(C) -0.04　　(D) 0.04

（2）. 设积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^a)\ln(1+x^b)}dx$，其中 $a>0,b>0$，若该积分收敛，则必有（）.

（A）$a>1,b>1$　（B）$a<1,b>1$　（C）$a>1,b<1$　（D）$a<1,b<1$

（3）设函数 $f(x)>0$，区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le x+y\}$，则积分 $\iint\limits_D\frac{af(x)+bf(y)}{f(x)+f(y)}dxdy=$ ________

（A）$\frac{a+b}{2}$　（B）$\frac{\pi}{8}(a+b)$　（C）$\frac{\pi}{2}(a+b)$　（D）$\frac{\pi}{4}(a+b)$

(4) 设 $f(x,y)=g(x,y)|x-y|$, $g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续,则 $g(0,0)=0$ 是 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在的（　）条件。

(A) 充分必要　(B) 必要非充分　(C) 充分非必要　(D) 非充分且非必要

（5）设三阶矩阵 A 的特征值为 $0,\ 2,-2$，则下列结论中正确的个数为（　　）.

① A 不可逆；　② A 的主对角线元素之和为 0；

③ A 的特征值 $2,-2$ 所对应的特征向量正交；　④ $Ax=0$ 的基础解系中含有一个解向量.

（A） 1　（B） 2　（C） 3　（D）4

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$, 则下列矩阵中与矩阵 A 等阶、合同但不相似的是

（A）$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

（7）设随机事件 A,B 相互独立，且已知概率 $P(A)=0.4$, 又 $P(A-B)=P(B-A)$，则条件概率 $P(AB|A\cup B)=(\qquad)$

（A）0.25　（B） 0.44　（C） 0.50　(D) 0.16

（8）设 $X_1,\ldots,X_n$ 为相互独立同分布随机变量序列,且 $f(x),F(x)$ 是概率密度函数与分布函数，且 $f(x)$ 连续，则随机变量 $Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的密度函数 $f_Z(z)=$（　　）

（A）$n[1-F(z)]^{n-1}f(z)$　（B）$n[1-F(z)]^n f(z)$

(C) $n[1-f(z)]^{n-1}F(z)$　(D) $n[1-f(z)]^{n-1}f(z)$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

（9）. 设 $y=y(x)$ 由 $(\cos y)^x=(\sin x)^y$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$ ____________。

（10）. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为连续函数, 且对于 $x>0$ 满足等式

$$\int_0^{x^2+2x} f(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{t\to x}\frac{e^{-t^2}\ln(1+t-x)}{\sin(x-t)},$$

则 $f(3)=$______________ .

（11）设方程 $F(t^2-x^2,t^2-y^2,t^2-z^2)=0$ 确定了 t 为 x,y,z 的非零函数，其中 F 为可微函数，且 $F_1'+F_2'+F_3'\neq 0$，则当 $xyz\neq 0$ 时，$\frac{t}{x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{t}{y}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{t}{z}\frac{\partial t}{\partial z}=$________.

（12）微分方程 $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ 的通解为______________.

（13）已知 A、B 为三阶相似矩阵，$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$ 为 A 的两个特征值，$|B|=2$，则 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & 0\\ 0 & (2B)^*\end{vmatrix}=$ ___________________.

（14）设 $X_1,\dots,X_n$ 为相互独立同分布随机变量序列，且均值 $E(X_i)=2,D(X_i)=16\ (i=1,2,\cdots,n)$，若已知概率 $P\{\sum_{i=1}^{n}X_i>64\}\geq 0.023$，由中心极限定理可知，随机变量的个数 n 至少是_______________.（其中已知 $0.977=\Phi(2)$）

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）.（本小题满分 10 分）

过点 $(1,5)$ 作曲线 $C:y=x^3$ 的切线，设切线为 l .（Ⅰ）求 l 的方程;（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积;（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

（16）.（本小题满分 10 分）

已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，而 $F(x)$ 是微分方程 $xy'+y=e^x$ 满足初始条件 $\lim_{x\to 0}y(x)=1$ 的解，试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=1}^{n}\frac{n}{(n+1)!}$ 和。

（17）（本小题满分 10 分）

某厂生产的产品总成本 C 为月产量 x 的函数，$C=C(x)=\frac{1}{5}x^2+4x+20$，产品销售价格为 p，$x=x(p)=160-5p$，（I）求月产量 x 为多少时，才能使得平均单位成本 $\overline{C}$ 最低？最低平均单位成本为多少？（II）求销售价格 p 为多少时，才能使得每月产品全部销售后获得的总收益 R 最高？最高收益值为多少？

（18）（本小题满分 10 分）

设 $0<a<b<2$，证明：$be^{-b}-ae^{-a}>\frac{1}{e^2}(a-b)$.

（19）**（本题满分 10 分）**设 $f(x,y)=\begin{cases} xy^2, & x^2+y^2\geq 2y,\\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{其他,}\end{cases}$ $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2,x\leq y\leq 2\}$,

求 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

（20）（本小题满分 11 分）

已知线性方程组

（I）$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-6x_4=0 \end{cases}$ 与 （II）$\begin{cases} 3x_1+ax_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_2-5x_3+(a-1)x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$

有非零公共解，（1）求常数 a。（2）求所有非 0 公共解。

（21）（本小题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{pmatrix}$ 与对角矩阵相似.（I）求坐标变换 $X=CY$，化二次型 $f=X^TAX$ 为标准形; （II）指出 $X^TAX=0$ 表示什么曲面。

（22）（本小题满分 11 分）

设随机变量 $X\sim e(\lambda)$（λ=1的指数分布），且 $Y=\begin{cases} X, & |X|\le 1 \\ -X, & |X|>1 \end{cases}$，试求:（I）概率 $P\{Y\le \frac{1}{2}\}$（II）Y 的分布函数 $F_Y(y)$；（III）数学期望 $E(XY)$

（23）（本小题满分 11 分）

设正态总体 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，其中 μ_0 为已知常数，$X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，而 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，试求(I) 参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$；(II) $\theta=P\{X-\mu_0\le 1\}$ 最大似然估计；（III）方差 $D(\hat{\sigma}^2)$

绝密★启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（三）

（科目代码:304）

（模拟试卷 5）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 5）L

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下面每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在答题纸指点位置上.

（1）. 设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（ ）.

(A) 没有交点　(B) 仅有一个交点　(C) 有两个交点　(D) 有三个交点

（2）. 积分 $I=\int_a^{a+2\pi}\ln(1+e^{\cos x})\cos x\,\mathrm{d}\,x$ 的值（ ）。

（A）是与 a 无关的正常数　（B）是与 a 无关的负常数

（C）恒为零　（D）不为常数

（3）设正项数列 $\{a_n\}$ 单增有界，则下列结论正确的是(　　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 收敛　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 发散.

（4）设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，则（　　）.

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　(B) $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续，$f(x_0,y)$ 在 y_0 连续

(C) 全微分 $df(x,y)|_{(x_0,y_0)}=0$　(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 一定存在极值.

（5）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维列向量，$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3)$，且 $|A|=-1$

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3\quad \alpha_1+4\alpha_2+16\alpha_3)$，则 $|B|=$（　　）

(A) 3　(B) -3　(C) 6　(D) -6

（6）.设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ 为其三个特征值，对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 令 $P=(3\alpha_2,2\alpha_3,-\alpha_1)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=$（ ）

(A) $\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&3\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}-2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$

（7）设口袋中有 10 个球，其中有 3 个红球其它均为白球，先任取一个球后，在剩下的球中任取两个均为白球，则先取的为红球的概率为（　　）.

（A）$\dfrac{7}{10}$　（B）$\dfrac{7}{12}$　（C）$\dfrac{3}{10}$　(D) $\dfrac{5}{12}$

（8）已知随机变量 X 与 Y 独立，其分布函数分别是

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}\qquad F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\quad -\infty<y<+\infty,$$

则 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(x)=($　　$)$

（A）$F_1(x)+F_2(x)$,　　（B）$\frac{1}{2}F_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x)$,

（C）$\frac{1}{2}F_1(x)+\frac{1}{2}F_2(x-1)$,　　（D）$\frac{1}{2}F_2(x)+\frac{1}{2}F_1(x-1)$,

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指点位置上.

（9）. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{x(\sec x-\cos x)}=$__________ .

（10）. 设 $f'(e^x)=\begin{cases}x+1, & x\in(-\infty,0],\\ 1, & x\in(0,+\infty),\end{cases}$ 又 $f(1)=0$，则 $f(x)=$__________ .

（11）已知 $f(x)$ 是微分方程 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 满足初始条件 $f(1)=0$ 的特解，则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________.

（12）将直角坐标系下的二次积分 $I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_1^{+\infty}dy\int_{-y}^{y}f(x,y)dx$ 化为极坐标系下的二次积分为__________；

（13）已知三阶方阵 A, B 满足关系式 $E+B=AB$, A 的三个特征值分别为 3，-3，0，则 $\left|B^{-1}+2E\right|=$__________.

（14）设 $X_1,\cdots,X_{10}$ 为正态总体 $X\sim N(1,4)$ 的简单随机样本，则统计量 $Y=C\sum\limits_{i=1}^{10}(X_i-1)^2\sim\chi^2(n)$，则常数 C 与 n 分别为__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）.（本小题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}ax+x^c\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2x}{n-x}\right)^n+b, & x\le 0,\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，试确定常数 a,b,c 的取值情况.

（16）.（本小题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z-f(x^2+y^2,z)=xy$ 决定，且 $f_v'(u,v)\ne 1$时，(I) 求全微分 dz；(II) 若函数 $z=z(x,y)$ 在（1,1）处取得极值，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（17）（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，且满足 $f(x)=\sin x+\int_0^x tf(x-t)dt$.求证（I）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 收敛；（II）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散。

（18）（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)f(1)>0,\ f(0)f(\frac{1}{2})<0$，证明：（I）在 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η 使得 $f(\xi)=f(\eta)=0$；（II）$\exists\zeta\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$.

（19）（本小题满分 10 分）

某商品的需求量 Q 对价格 p 的弹性为 $\eta=-\dfrac{2p^2}{b-p^2}(0<p<b)$，又已知该商品的最大需求量为 $a(a>0)$，（I）求需求量 Q 的价格 p 的函数关系；（II）在需求量为 Q 时，价格多少时，此种商品市场总价值 $f(p)=pQ$ 达到最大, 求此最大总值.

（20）（本小题满分 11 分）

已知齐次方程组 $Ax=0$ 为 $\begin{cases} x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0 \end{cases}$ ，有矩阵 B 是 2×4 矩阵，$Bx=0$ 的基础解系为 $a_1=(1\quad -2\quad 3\quad -1)^T$，$a_2=(0\quad 1\quad -2\quad 1)^T$，（I）求矩阵 B；（II）若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；III）求方程组 $Ax=0$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解。

（21）（本小题满分 11 分）

已知二次型 $f\left(x_1\quad x_2\quad x_3\right)=x^TAx$ 通过正交变换 $x=Uy$ 化为标准形：$2y_1^{\ 2}+2y_2^{\ 2}$，且线性方程组 $Ax=0$ 有解 $\xi_3=\left(1\quad 0\quad 1\right)^T$（I）求所作的正交变换；（II）求该二次型

（22）（本小题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} Cy, & x^2<y<x \\ 0, & others \end{cases}$ ，试求：（I）边缘密度函数 $f_X(x)$；(II)条件密度函数 $f_{Y/X}(y/x)$；（III）$Z=X-Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（23）（本小题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\ \theta)=\begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$ ，且 $X_1,\dots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，试求：（I）参数 θ 的矩估计；（II）θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_L$；（III）概率 $P\{\hat{\theta}_L\le 2\theta\}$.