**15.053　　　　2002 年 2 月 5 日**

- 最优化导论

  分发：讲稿

**概述**

- 课程描述
- 课程管理和安排
- 什么是管理科学？
- 线性规划实例
  —MSR 营销
  —GTC
- 分发的印刷品：
  教学大纲和常用信息
  讲稿
  作业 1

**第 3 页是麻省理工学院的特定信息**

**所需的材料**

- 课程相关资料
- 部分章节选自
  《应用数学规划》
  —Bradley,Hax&Magnati 著
- 课程网址：sloanspace.mit.edu
- 其他资源：
  —Winston 著 《运筹学》
  —Bertsimas&Tsitsiklis 著
  《线性最优化导论》
  —Ahuja,Magnati&Orlin 著
  《网络流论》

**成绩考核方式：**

- 课后作业（27%）
  —每周的作业（共 10 次）
  —非线性记分
- 期中考试（每次 25%）
  —期中考试 2 次
- 期末考试（25%）
  —学期期末
  —主题和模型的后面 1/3 的内容

  ■ 总计 102%

**授课方式：**

- 网页
  —包括
  ■ 课堂讲稿
  ■ 电子表格
  ■ 参考读物
  ■ 作业（作业 1 已经发放）
  ■ 其他

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

主动学习

- 有时，我将停止讲课，让大家自学或与自己的伙伴一起讨论。
- 现在请确定自己的伙伴。
- 在边缘座位的学生可三人一组。

什么是运筹学？
什么是管理科学？

- 第二次世界大战期间：英国军方要求科学家和工程师分析几个问题：
  —雷达的配置；
  —护航、轰炸、对抗潜艇以及敷设水雷等方面的安排处理。
- 研究结果称为军事运筹学，后来称为运筹学。
- MIT 是运筹学的诞生地之一
  —MIT 的.摩尔斯（Morse）教授是美国运筹学先驱;
  —建立了 MIT 运筹学中心，协助建立了 ORSA（美国运筹学学会）。

什么是管理科学（运筹学）？

- 今天：运筹学与管理科学是指在现有信息状态下，运用数学模型指导管理者进行有效的决策，或者在现有信息不足时，为决策者做出正确的决策寻求更多信息。
- 相关领域：决策科学，系统分析，运筹学，系统动力学，运营分析，工程系统学，系统工程等等。

历史的名句

- 不浪费时间和资金，使二者利用率最大。
  —*Benjamin Franklin*
- 显然，效率最高的类型在于最大化利用现有物资。
  —*Jawaharlal Nehru*
- 很有可能，一个普通人在不损害自身健康的情况下可以把效率提高50%。
  —*Walter Scott*

运筹学发展历史

- 1947 年
  —George Dantzig 等人的 Scoop 项目（最适宜的科学计算程序），建立了线性规划的单纯形法。
- 1950-1959
  —排队论、数学规划等数学理论得到发展，获得大量可喜的成果。
  相关领域：1960 年代航空业
- 1960-1969
  —更多成就，更大的发展，重大的规划
  相关领域：1980 年代航空业

运筹学发展历史

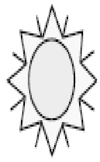
- 1970-1979
  —遭遇挫折，暂停发展。不完全 NP 问题。更多的实际要求。
- 1980-1989
  —PC 广泛应用。数据获取更加容易。决策者普遍愿意使用模型。
- 1990-1999
  —修正了运筹学的应用，运筹学技术的大量涌现，比如最优化和电子数据表格的加载仿真包，建模语言，大规模优化。运筹学与航空业更加密切地结合。

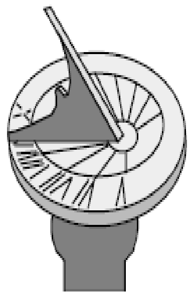
PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**2000 年以后运筹学的新发展**

- 运筹学应用作为独立领域
- 数据，数据，还是数据
  —电子交易数据（点击量，采购，
  其他交易数据，电子邮件等）
  —人类基因组工程及其派生影响。
- 需要更加自动化的决策
- 日益增长的协调资源的有效利用问题（供应链管理）

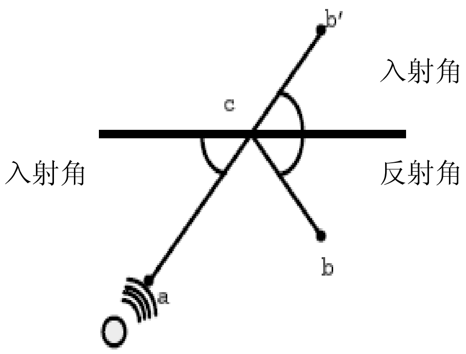
最 优 化





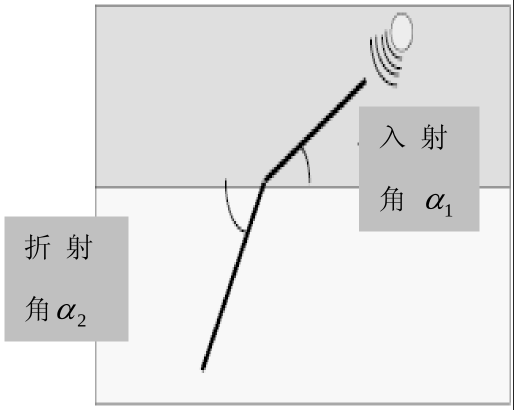
像 时 间 一
样永存。

自然科学中的最优化
亚历山大时期的 Heron(海伦)

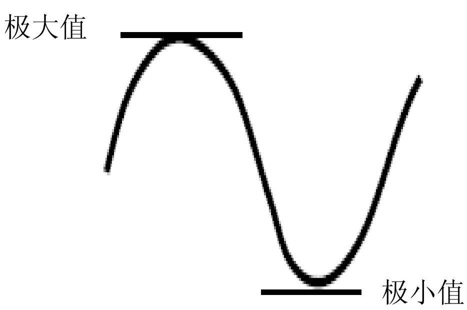



公元 1 世纪

费马 1628-29




**微积分**




费马，牛顿，欧拉，拉格朗日，高斯等。

**课程的一些主旨**

- 最优化无处不在
- 模型，模型，还是模型
- 建模的目的是洞察，而不是数字
  —Richard Hamming 注解
- 算法，算法，还是算法

## 最优化无处不在

- 对事物知道的越多，越能知道最优化的应用。
- 一些个人决策的示例
  — 确定最快回家（到校）路径；
  — 课后作业时间优化分配；
  — 预算最优化；
  — 选择专业方向。

## 最优化无处不在

- MIT 的一些决策示例
  — 确定考试次数使重复最小；
  — 在既定约束下给课程分配教室和时间；
  — 确定停车费用价格和公共交通补贴，以最大程度体现公平并提供足够的通道；
  — 最优化筹资。

## 最优化无处不在

- 练习：向你临近的同学自我介绍，之后讲一两个你比较熟悉的主题（暑期工作，专业，或者父母的职业或者其他的什么）。
- 然后和你的同伴一起讨论产生最优化的地方。
- 之后，选择 2 或 3 个你所喜欢的应用与大家分享。

## 本课程与最优化工具

- 最优化问题无处不在，但是最优化工具并没有得到广泛应用。
- 本课程目标：介绍一些最优化工具，以及在生产、理财、电子交易、市场营销等领域的应用。
- 当你在工作中发现最优化问题（一定会发现），就知道有一些工具可以帮助你解决。

## 确定管理问题：管理科学框架

1. 明确要解决的问题；
2. 观察系统并收集数据；
3. 建立解决该问题的数学模型以及其他重要子问题的数学模型；
4. 验证模型，并应用模型进行预测和分析；
5. 选择一个合适的解决方案；
6. 提交解决方案；
7. 执行和评估。

## 线性规划（第一个工具，也许是最重要的）

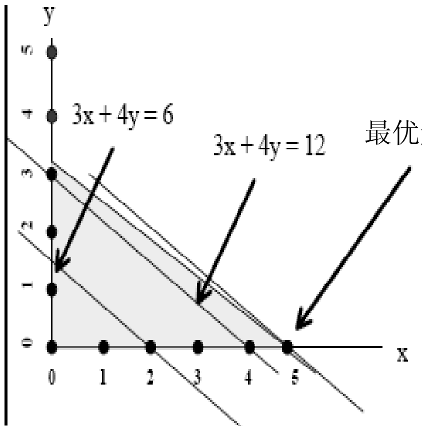
- 最大化或者最小化线性目标；
- 线性等式或不等式约束；

Max　3x+4y

S.t　　5x+8y≤24

　　　x, y≥0

## 这是可行解集




## 术语

- 决策变量：如 x 和 y
  - — 一般是指那些可以控制的，用来改善目标函数、完整描述决策方案集合的变量。
- 约束：如 5 x+8y≥24, x≥0, y≥0
  - — 决策变量取值的限制条件。
- 目标函数：如 3x+4y
  - — 衡量解优劣次序数量描述；
  - — 寻求目标的最大或者最小；
  - — 如净现值最大，成本最小。

## MSR 营销公司（摘自 Frontline System）

- 需要选择广告以达到 150 万人
  - 成本最低
  - 每种类型的广告数量上限

| | 电视 | 电台 | 邮件 | 报纸 |
|---|---|---|---|---|
| 受众规模 | 50000 | 25000 | 20000 | 15000 |
| 成本 | 500 | 200 | 250 | 125 |
| 最大广告量 | 20 | 45 | 10 | 15 |

## 与同伴一起建立数学模型

- 需要做哪些决定？这是决策变量。
- 目标是什么？用决策变量来表示目标。
- 约束是什么？用决策变量表示约束。
- 如果有时间，尝试寻找最优解。

## 雕琢工具公司（GTC）

- 私营企业
- 建筑工具的使用者和工业市场行情
- 总部设于西雅图
- 在美国、加拿大及墨西哥设有工厂；
- 为便于说明，做如下简化假设：
  - — 温尼伯湖生产厂，加拿大
  - — 有扳钳和老虎钳
  - — 用钢铁制造
  - — 注模成型设备
  - — 组装设备

## GTC 问题数据

| | 扳钳 | 老虎钳 | 拥有量 |
|---|---|---|---|
| 钢铁 | 1.5 | 1 | 15000 吨 |
| 成型设备 | 1 | 1 | 12000 小时 |
| 装配设备 | 0.4 | 0.5 | 5000 小时 |
| 需求限制 | 8000 | 10000 | |
| 盈利（美元/每单位） | 0.4 | 0.3 | |

我们需要确定在既定原材料，机器工时和需求限制下扳钳和老虎钳的生产量。

## 与你的伙伴一起做

- 与你的伙伴一起根据 GTC 问题建立一个线性规划模型。先不要看讲稿。
  - 设 p 是生产老虎钳的数量；
  - w 是生产扳钳的数量。

## 建立 GTC 问题的模型

第一步：设定决策变量

p 是生产老虎钳的数量(千)；

w 是生产扳钳的数量(千)。

第二步：写出目标函数

Max Profit=0.3p+0.4w

## 继续建立模型

第三步：确定约束条件

| | |
|---|---|
| 钢材： | p+1.5w≤15000 |
| 成型： | p+w≤12000 |
| 装配： | 0.5p+0.4w≤5000 |
| 钳子需求 | p≤10000 |
| 扳钳需求 | w≤8000 |

我们将在下一讲介绍如何解该问题。

## 模型的代数表达式

- J 代表产品的集合
  - —如 S={钳子，扳钳}；
  - —$p_j$ 代表每单位产品 j 的赢利；
  - —$d_j$ 代表产品 j 的需求量；
  - —$x_j$ 代表产品 j 的生产量。
- M 代表生产环节的集合
  - —如 M={成型，装配}；
  - —$b_i$ 代表生产环节 i 的资源量；
  - —$a_{ij}$ 代表生产单位产品 j 消耗的生产环节 i 的资源量。

## 模型的代数表达式

- **Max** $\sum_{j\in J} p_j x_j$
- **S.t.** $\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \le b_i$ **,** $i \in M$

$$x_j \le d_j, j \in J$$

$$x_j \ge 0, j \in J$$

即使**|J|=10000,|M|=100,**上述模型依然可用。

## 模型的另一种代数表示形式

- **Max** $\sum p_j x_j$

**s.t.** $\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \le b_i$ **, i=1,⋯,m**

$x_j \le d_j$ ,  **j=1,⋯,n**

$x_j \ge 0$ ,  **j=1,⋯, n**

Click to buy NOW! PDF-XChange Viewer www.docu-track.com

## 线性规划

- 线性函数有如下形式：

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{i=1\ldots n} c_ix_i$$

  例如，$3x_1+4x_2-3x_4$
- 如果一个数学规划的目标函数是线性函数，而且约束是线性等式或不等式，则称之为线性规划。

  如约束 $3x_1+4x_2-3x_4 \geqslant 7$

  $x_1-2x_5=7$
- 一般，线性规划问题有非负约束。

非线性规划允许有一个非线性目标函数和约束。如

- Max f(x,y)=xy
- S.t $x-y^2/2 \leqslant 10$

  $3x-4y \geqslant 2$

  $x \geqslant 0, y \geqslant 0$

整数规划是含有约束全部或者部分决策变量是整数的线性规划。

- **Max** $3x_2+4x_2-3x_3$

  $3x_1+2x_2-x_3 \geqslant 17$

  $3x_2-x_3=14$

  $x_1,x_2,x_3 \geqslant 0$ 并且为整数。

等式约束的线性规划的代数形式

- Max 或者 Min $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j$
- S.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=1\ldots m$

  $x_j \geq 0, j=1\ldots n$

线性规划假设前提：

Max 4w+3p

1.5w+p≤15

…..

比例性假定：w 对于目标函数的贡献与 w 成比例；

可加性假定：p 对于目标函数的贡献与 w 独立；

可分割假定：每个决策变量都可是分数；

确定性假定：目标函数和约束条件中的系数是已知的（不存在随机变量）。

一些成功的事例

- 最优化人员安排使美国航空公司每年节约 **2000** 万美元；
- 优化货运路线让 **Yellow Freight** 每年的节约超过 **1730** 万美元；
- **Reynolds Metal** 公司通过改进卡车调度，提高了即时交付率，每年节约货运成本 **700** 万美元；
- **GTE** 本地能力扩张每年节约 **3000** 万美元。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

一些成功的事例（续）

- Digital Equipment 通过优化全球供应链节约了 3 亿美元；
- Proctor & Gamble(保洁公司)通过北美运营重构，削减了 20%的厂房，每年节约 2 亿美元；
- 在日本大阪的 Hanshin Expressway，优化交通控制每年节省 1700 万司机小时；
- 优化水热生成器安排让南部公司每年节约 1.4 亿美元；

一些成功的事例（续）

- Sadia(巴西)的优化生产计划使连续三年节约 5000 万美元；
- Harris 公司的生产优化将按时交货率从 75%提高到 90%；
- Tala 钢铁公司（印度）优化了对电力短缺的反应，获得 7300 万美元效益；
- 巡逻警队的优化安排每年会节约 1100 万美元；
- Texaco 的配油每年节约 3000 万美元。

小结：

- 回答了什么是运筹学和管理科学，描述了一些相关的历史背景。
- 介绍了线性规划中的术语。
- 两个例子：
  1. MSR 营销公司
  2. Gemstone Tool 公司

  —小型（2 维）线性规划，没有明显的最优解。
- 下一讲我们将详细讨论这个问题。

**15.053　　　　　　2 月 7 日的课**

- 一些额外的线性规划模型（在课堂上没有涉及）
  - — 航空收入管理
  - — 放射治疗

**航空收入管理问题**

背景介绍：1978 年航空管制取消

取消管制前：

—运营商仅仅可以在某些航线运营，航空公司也仅限于西北航空、东方航空和西南航空公司等；

—收费标准由民航管理局根据里程和其他成本制定。（民航管理局已经不存在了。）

取消管制后：

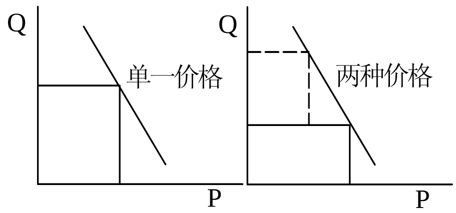
—任何运营商可以经营任何航线；

—运营商和市场共同确定收费标准。

**航空经济的特色**

- 巨大的沉没成本和固定成本
  —购买飞机；
  —机场设施；
  —燃料和工作人员费用。
- 每个乘客变动成本低
  —大多数飞行是$10 或更低。
- 激烈的经济竞争环境
  —信息是几乎完全的，成本可忽略；
  —信息对称。
- 没有产成品库存
  —空位将永远没有收益：库存极易贬值。

**多种费用标准：寡头视角**




该双价格模型假定顾客总是愿意支付较高的价格，即使有低价格存在。航空公司是如何做到的呢？

**收入管理的两种复杂性**

- 源于网络中心的复杂性
  —许多乘客从网络中心转机；
  —网络中心许可飞行更多航线。
- 源于不确定性的复杂性
  —具有代表性的是，便宜的座位先于贵座位卖出；
  —应该保留多少高价座位。
- 现在：我们将关注源于网络中心的复杂性，来看一个很简单的例子。

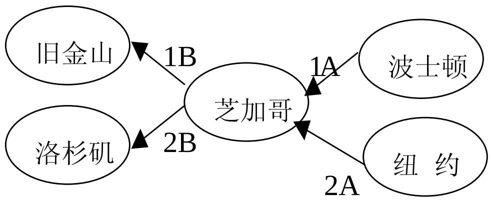
**东西航空公司的四次飞行**

| 飞行 | 出发地 | 目的地 | |
|---|---|---|---|
| 1A | 波士顿（B） | 芝加哥(C) | 两架飞机坐位都是200 个 |
| | 8 AM | 10:15 AM | |
| 1B | 芝加哥(C) | 旧金山(SF) | |
| | 10:45 AM | 12:15 PM | |
| 2A | 纽约(NY) | 芝加哥(C) | |
| | 7:45 AM | 10:15 AM | |
| 2B | 芝加哥(C) | 洛杉矶(LA) | |
| | 10:45 AM | 12:15 PM | |

一些乘客的航线可以从中确定，例如，乘客可以从芝加哥飞往波士顿，另一乘客可以从波士顿飞往芝加哥。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

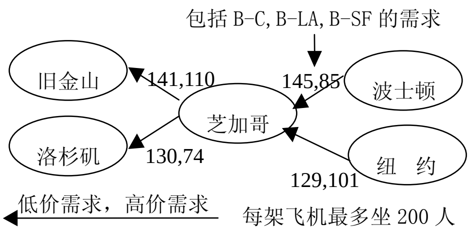
## 东西飞行示意图




## 航线的需求和费用表

| 航线 | 低价座位 | | 高价座位 | |
|---|---|---|---|---|
| | 费用$ | 需求 | 费用$ | 需求 |
| B-C | 200 | 25 | 230 | 20 |
| B-SF | 200 | 55 | 420 | 40 |
| B-LA | 400 | 65 | 490 | 25 |
| NY-C | 250 | 24 | 290 | 16 |
| NY-SF | 410 | 65 | 550 | 50 |
| NY-LA | 450 | 40 | 550 | 35 |
| C-SF | 200 | 21 | 230 | 20 |
| C-LA | 250 | 25 | 300 | 14 |

## 全部飞行时的坐位分配：




## 构建线性规划模型

- 哪些是决策变量?
- 目标函数是什么?
- 约束有哪些?

## 一个抽象的线性规划问题

- 令 F 代表飞行的集合
- 令 C 代表航线等级
  —如<纽约-旧金山 7:45-12:15>$\in C$
- $r_j$ 代表从 $j \in C$ 得到的收益
- $d_j$ 代表对 $j \in C$ 的需求
- 令 C(f)代表含 C 中含有飞行 f 的子集
- $c_f$ 代表飞行 f 的最大坐位数量

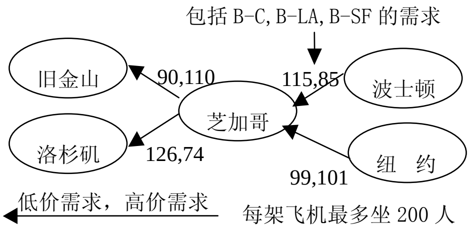
同你的伙伴一起建立线性规划模型

## 最优解

| 航线 | 低价座位 | | 高价座位 | |
|---|---|---|---|---|
| | 售座 | 需求 | 售座 | 需求 |
| B-C | 25 | 25 | 20 | 20 |
| B-SF | 25 | 55 | 40 | 40 |
| B-LA | 65 | 65 | 25 | 25 |
| NY-C | 19 | 24 | 16 | 16 |
| NY-SF | 44 | 65 | 50 | 50 |
| NY-LA | 36 | 40 | 35 | 35 |
| C-SF | 21 | 21 | 20 | 20 |
| C-LA | 25 | 25 | 14 | 14 |

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 最优解分配的座位




## Robert L. Crandall，AMR 公司主席、总裁和首席执行官

我认为，收益管理是我们自 1979 年管制取消后进入航空领域以来在运输管理上最重要的单项技术进步。

美国航空公司的收益管理系统由来已久，并且不时陷入困境，但是这项投资最终还是盈利的。我们估计，收益管理仅在过去的 3 年里就使收益增加 14 亿美元。这并非是仅仅一次性的收益。我们预期它将在不久的将来每年带来至少 5 亿美元。

## 数学规划与放射治疗

- 基于 Rob Freund 的笔记（Peng Sun 提供了很多帮助）
- 参阅课程 15.094

## 放射治疗概述

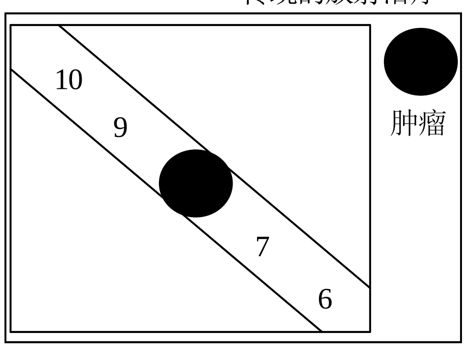
- 大剂量的放射治疗会杀死细胞或者阻碍其生长和分裂。
  —对于正常细胞和癌细胞都一样
- 由于癌细胞的修复机能低于正常细胞，放射治疗很有吸引力。

## 放射治疗概述

- 放射治疗的新进展：
  —能更详细地绘制癌变区域；
  —可以运用大量的更加特别的激光束。
- 产生了新的领域：放射 X 射线治疗
- 癌症患者放射治疗剂量投放优化，Shepard, Ferris, Oliver 和 Mackie, SIAM REVIEW, 第 41 卷，721-744，1999

## 放射治疗概述

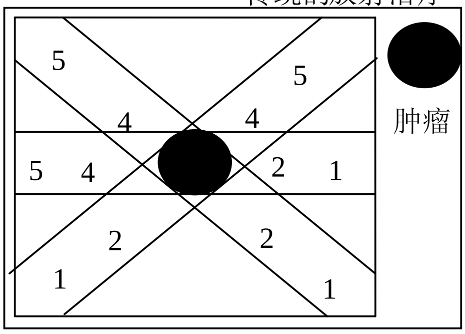
传统的放射治疗




投放剂量的相对强度

## 放射治疗概述

传统的放射治疗




投放剂量的相对强度

## 放射治疗概述

在传统的放射医疗中

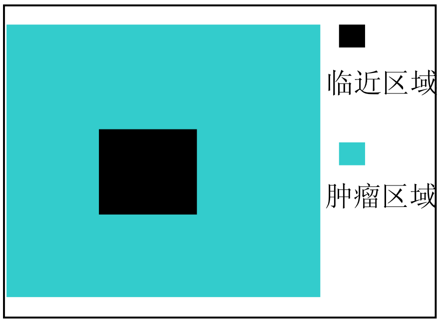
—用 3 — 7 束放射线；

—放射肿瘤专家和物理学家一起工作，决定一组光线角度和相对强度；

—由人工反复实验过程决定。

## 放射治疗概述：

传统的放射治疗




仅仅少量光束，要投放给肿瘤需要剂量的放射光而不影响临近的区域是很困难的

## 放射治疗概述：

放射治疗的最新进展

- 更加精确绘制肿瘤区域

  —CT　精确 X 射线截面摄影术

  —MRI　磁性共振图像

- 更加精确投放放射物

  —IMRT：强度调节放射治疗

  —X 射线截面摄影治疗

## 放射治疗概述：

放射治疗的最新进展

## 放射治疗概述：

对问题的标准陈述

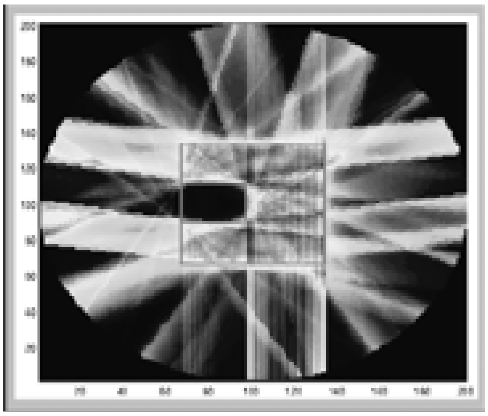
- 给定一个肿瘤及其附近区域；
- 给定一组可能的光源及角度；
- 确定每种光束的权重

  —使肿瘤区域的放射光线投放量最少为目标 $r_L$；

  —使肿瘤邻近区域的放射光线投放量最多为目标 $r_U$。

## 放射治疗概述：

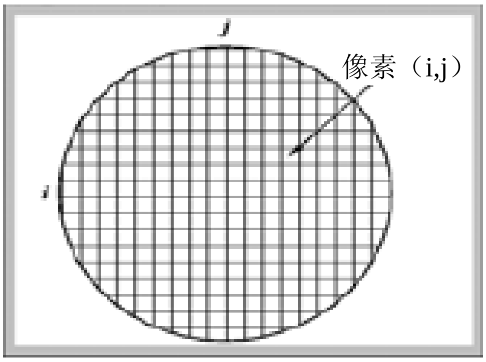
对问题的标准陈述



## 线性优化模型：

空间离散化

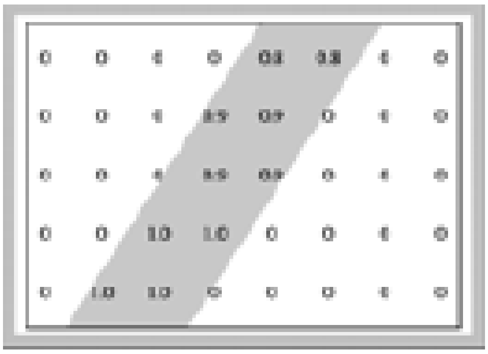
将区域划分成 2 维（或 3 维）像素栅格




## 线性优化模型：建立光束信息

建立可能的光束(p=1,2……n)信息。

$D^p$ 是光束 p 的投放剂量矩阵。



$D^p_{ij}$ 代表光束 p 在像素（i,j）上的剂量。

## 线性优化模型：

建立剂量方程

决策变量：w=($w_1$,…..$w_n$)

$w_p$ 代表光束 p 的强度权重，p=1,….n.

$$D_{ij} := \sum_{p=1}^{n} D_{ij}^{p} w_p$$

$$D := \sum_{p=1}^{n} D^{p} w_p$$ 是合成剂量矩阵。

## 线性优化模型：理想线性模型

$$\min \quad D := \sum_{p=1}^{n} D^{p} w_p$$

$$\text{s.t.} \quad D_{ij} = \sum_{p=1}^{n} D_{ij}^{p} w_p, (i,j) \in S$$

$$w \ge 0$$

$$D_{ij} \ge r_L, (i,j) \in T$$

$$D_{ij} \le r_U, (i,j) \in C$$

- 但是，该模型一般无可行解
- 不能够提供不伤害邻近区域而给肿瘤合适剂量的方案。

## 模型修正

- 使用惩罚项，如 $D_{ij} \ge r_L - y_{ij}$，然后把惩罚项放入目标函数
- 考虑使用非线性惩罚项（如二次项）
- 考虑伤害而非放射物的成本
- 使用确定的剂量目标，并对目标偏离进行惩罚

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

线性优化模型：工程方法

$$
\begin{aligned}
\underset{w,D}{\text{minimize}}\quad & \theta_T \sum_{(i,j)\in\mathcal{T}} D_{ij} + \theta_C \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}} D_{ij} + \theta_N \sum_{(i,j)\in\mathcal{N}} D_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & D_{ij} = \sum_{p=1}^{n} D_{ij}^{p} w_p \quad (i,j)\in\mathcal{S} \\
& w \ge 0 \\
& \gamma_{ij}^{L} \le D_{ij} \le \gamma_{ij}^{U} \quad (i,j)\in\mathcal{T} \\
& w_m \le \frac{\alpha}{n}\sum_{p=1}^{n} w_p \quad m=1,\ldots,p \\
& (\text{typically } \alpha = 5)
\end{aligned}
$$

模型计算：

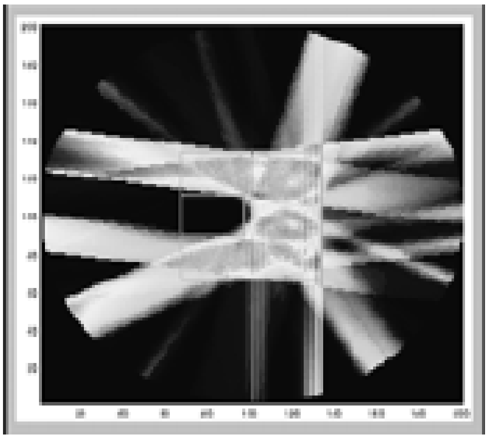
总结模型的规模

| 变量 | 约束 |
|---|---|
| 63358 | 94191 |

剔除变量的上下界。

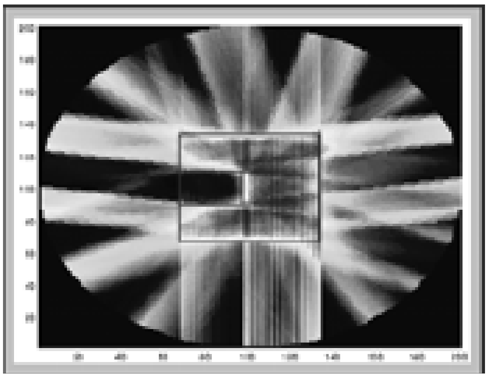
模型计算：

基本模型 最优解



模型计算：

扩展模型解



非线性模型解： $\theta_N = \theta_C = \theta_T = 1$

模型计算：

预处理 启发式算法

- 基本模型
- 使用预处理

| 代码 | 算法 | 迭代次数 | 运行时间 | |
|---|---|---|---|---|
| | | | CPU (秒) | WALL （分） |
| CPLEX | Simplex | 18428 | 4. 3 | 4 |
| CPLEX | Barrier | 16 | 130 | 133 |

小结

- 收益管理，X 射线截面摄影治疗
- 模型从不是完美的。要在模型本身特点和实际需要之间权衡。
- 应用的一些技术：惩罚项，模型修正。

Microsoft Excel 9.0 灵敏度分析报告
Worksheet:[02_FinancialEx.xls]optimal solution
报告形成时间：1/21/2002 4:11:48 下午

可变单元格

| 单元格 | 名称 | 最终值 | 检验数 | 目标函数系数 | 允许增量 | 允许减量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$10 | a | 0.1 | 0 | 0 | 0.036 | 0.141 |
| $c$10 | b | 0.5 | 0.02 | 0.8 | 1.00E+30 | 0.02 |
| $d$10 | c | 0.5 | 0.048 | 0 | 1.00E+30 | 0.048 |
| $e$10 | d | 0.5 | 0.036 | 1.5 | 1.00E+30 | 0.036 |
| $f$10 | e | 0.427 | 0 | 1.2 | 0.0295 | 0.15 |
| $g$10 | cd1 | 0 | -0.141 | 0 | 0.141 | 1.00E+30 |
| $h$10 | cd2 | 0.14 | 0 | 0 | 0.02 | 0.06 |
| $i$10 | cd3 | 0 | -0.15 | 1.05 | 0.15 | 1.00E+30 |

约束

| 单元格 | 名称 | 最终值 | 影子价格 | 约束右边项 | 允许增量 | 允许减量 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$14 | 2002 | -1.1 | -1.464 | -1.1 | 1.1 | 0.0598 |
| $a$15 | 2003 | 0 | -1.26 | 0 | 0.14 | 0.0695 |
| $a$16 | 2004 | 0 | -1.2 | 0 | 0.427 | 0.073 |

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　2002 年 2 月 7 日**

- 线性代数简要复习
- 线性规划模型

分发：讲稿

**线性代数复习**

- 向量与矩阵基本知识
- 线性方程组的高斯-约旦解法
- 基，基变量和旋转消元法

**向量与矩阵基本知识**

v=[$v_1$ $v_2$ $v_3$ $v_4$]称为行向量。

v的转置称为列向量。$v^t = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$

w=[$w_1$ $w_2$ $w_3$ $w_4$]是另一个行向量。
w与v 的内积定义如下：

$$v \circ w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4$$

**矩阵乘法**

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad C = (c_{ij}) = A \times B$$

假定 A 有 n 列，B 有 n 行。

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

**矩阵相乘**

令 $C = (c_{ij}) = AB$，则 $c_{ij}$ 为 A 的第 i 行与 B 的第 j 列的内积。例如，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

则 $c_{23}$=?

$$c_{23} = a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} + a_{23} b_{33}$$

**矩阵相乘**

令 $C = (c_{ij}) = A \times B$，则 C 的每列是由 A 的列相乘的累加得到。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix}$$

$$= 100 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

同样，C 的每行由 B 的行相乘的累加得到。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 解线性方程组的基本知识

解方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}1&2&4\\2&1&-1\end{bmatrix}}\quad \mathbf{x}=\underset{3\times1}{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}\quad \mathbf{b}=\underset{2\times1}{\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}}$$

$$x_1+2x_2+4x_3=0$$
$$2x_1+x_2-x_3=6$$

确定 A 的一种线性组合，使其等于 b。

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}x_3=\begin{bmatrix}0\\6\end{bmatrix}$$

## 解方程组

| x1 | x2 | x3 | x4 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 1 | = | 0 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | = | 6 |
| -1 | 1 | 2 | 2 | = | -3 |

应用高斯-约旦消去法，解方程组。

## 方程组

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 1 | = | 0 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | = | 6 |
| -1 | 1 | 2 | 2 | = | -3 |

## 基于第 1 行第 1 列元素的旋转变换

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 1 | = | 0 |
| 0 | -3 | -9 | -3 | = | 6 |
| 0 | 3 | 6 | 3 | = | -3 |

**把约束 2 减去 2 倍约束 1。约束 3 加约束 1。**

## 基于第 2 行第 2 列元素的旋转变换

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -2 | -1 | = | 4 |
| 0 | 1 | 3 | 1 | = | -2 |
| 0 | 0 | -3 | 0 | = | 3 |

把约束 2 除以-3，约束 1 和 3 分别减去约束 2 的倍数。

## 基于第 3 行第 3 列元素的旋转变换

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1 | = | 2 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | = | -1 |

把约束 3 除以-3，约束 1，2 分别加上约束 3 的倍数。

方程组的解是什么？

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

初等变换：旋转变换

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

基于 $a_{23}$ 旋转变换

基于 $a_{23}$ 旋转变换

$$\bar{a}_{11} = a_{11} - a_{13}(a_{21}/a_{23})$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21}/a_{23} & a_{22}/a_{23} & 1 & a_{24}/a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2/a_{23} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$b_1$ 的变换后系数是什么？$a_{23}$ 呢？对于 $i \neq 2$的$a_{ij}$呢？

$m \times n$ 矩阵的约旦标准型

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

有 **m** 列已被化为单位向量。这些列对应的变量称为基变量。

基解为 $x_1=2, x_2=1, x_3=-1, x_4=0$。

对于非基变量的任意取值，很容易确定方程的解。

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

余下的变量 $x_4$ 叫做非基变量。

如果 $x_4=2$，解将是什么？

如果 $x_4 = \Delta$，解又会是什么？

同一线性方程组的另一个约旦标准型

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

基变量是哪些？

基解是什么？

应用

- 一个理财模型
- 邮递员日程安排

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 一个理财问题模型

- Sarah 有 110 万美元可以作为公司 5 个不同项目的投资。
- 目标：在 2005 年年初使资金总量最大（下一页是各投资的回报率）。
- 任何一项投资不能超过 50 万美元
- 可以投资于 CDs,每年 5%。

## 投资回报率（不计资金时间价值）

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan. 2002 | -1 | - | -1 | -1 | - |
| Jan. 2003 | .4 | -1 | 1.2 | - | - |
| Jan. 2004 | .8 | .4 | - | - | -1 |
| Jan. 2005 | - | .8 | - | 1.5 | 1.2 |

## 根据 Sarah 的问题建立线性规划模型

- A 的回报：在 2002 年 1 月每投资 1 美元将在 2003 年 1 月收到 0.4 美元，2004 年 1 月 0.8 美元。
- 建立模型
  —第一步，选择决策变量
  —令 $x_A$ 代表投资于 A 的资金，类似定义 $x_B$, $x_C$, $x_D$, $x_E$。
  —令 $x_2$ 代表在 2002 年投资于 CD 的资金，类似定义 $x_3$,$x_4$。

## 建立模型

- 与你的同伴一起建立模型
- 第二步，确立目标函数
  —首先用语言描述目标函数，比如，我们要使成本最低或效用最大。
- 第三步：确立约束
  —先用语言描述约束

Excel 求解

## 常见问题：单位会不会影响？如何选择单位？

- 只要单位运用得当，一般是不会影响的，有可能 $x_A$ 的单位是百万美元，而 $x_B$ 单位是美元。
- 但是有些单位是较其他更自然，使用方便，互相交流也容易。

## 通用通用模型

- 假定在 m 个周期内有 n 种投资。
- 在第 i 周期投资 1 美元于 j 的回报是 $p_{ij}$，如果在第 i 周期开始投资于 j，则 $p_{ij}$=-1，指当期投资 1 美元。
- 资金连续投资。
- 在第 m 周期要求回报最大。
- 与你的同伴一起建立通用模型。

## 模型的扩展

- 融资：设想过我们将面临挑战么？是否可以建立一些更接近实际的模型？

## 邮递员日程安排

- 每个邮递员连续工作 5 天，接下来 2 天休息，每周重复。

| 周工作日 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 日 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 需要人数 | 17 | 13 | 15 | 19 | 14 | 16 | 11 |

- 要求使邮递员数量最少（现在，允许每天的人数是小数）

## 建立问题的线性规划模型

- 选择决策变量。
  —令 $x_1$ 代表从周日开始工作的人数，他们将工作到周四。
  —令 $x_2$ 代表从周一开始工作的人数
  —类似定义 $x_3, x_4 \ldots x_7$。
- 和你的同伴一起建立这个线性规划模型。

## 关于决策变量的选取

- 是否可以设 $y_j$ 为第 j 天工作的人数？
- 第 j 天要求工作的人数至少为 $d_j$，这样约束条件将更容易列出。但如何表示出每个邮递员连续工作 5 天，接下来 2 天休息的约束条件呢
- 结论：有时候选择决策变量要考虑能够描述问题的约束条件。

## 模型的扩展

- 假定工资有差别。从第 j 天开始工作的人员支出为每人 $c_j$。
- 假定可以雇用小时工（每次 1 天），且在第 j 天的成本为 $PT_j$。

## 另一种扩展

- 假定第 j 天要求的工人数量为 $d_j$，令 $y_j$ 为第 j 天工作的人数。
- 求最小费用的安排，其中在第 j 天工人数量太多时，成本函数 $f_j(y_j-d_j)$是非线性函数。

- 注意：这将使模型变成非线性规划，而不是线性规划模型。

**其他扩展**

- 你能想到其他扩展工作日程安排的模型么？
- 如果有，是否可以为它建立模型？

**总结**

- 方程组的高斯-约旦解法和线性代数的其他背景知识。
- 一个理财问题
- 邮递员日程安排问题
- 注意：实际问题建模是一种艺术。它要求模型简化而且符合既定实际情况。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

15.053　　　　2002 年 2 月 12 日

- **线性规划的图解法**

  —GTC 线性规划模型的图解法

  分发：讲稿

**首先来看猪皮革问题（来自：管理科学实践）**

- 猪皮革公司利用猪皮革制作足球
- 下面是单位为（千个）的足球数据
- 预测接下来 6 个月的需求
  —10,15,30,35,25,10.
- 足球当前库存：5
- 每月最大生产量：30
- 每月最大存货量：10
- 后 6 个月的单位生产成本：美元/个
  —12.5,12.55,12.7,12.8,12.85,12.95
- 库存成本：每个足球每月 0.6 美元
- 与你的同伴合作建立问题的线性规划模型。

**模型建立**

- 选择决策变量
  —令 $x_j$ 代表第 j 月生产的足球数量；
  —令 $y_j$ 代表第 j 月到第 j+1 月库存的足球数量；
  —$y_0=5$
- 写出约束条件和目标函数

猪皮革问题的电子表格

**GTC 问题数据**

| | 扳钳 | 老虎钳 | 资源限制 |
|---|---|---|---|
| 钢铁 | 1. 5 | 1 | 15000 吨 |
| 成型工时 | 1 | 1 | 12000 小时 |
| 装配工时 | 0. 4 | 0. 5 | 5000 小时 |
| 需求限制 | 8000 | 10000 | |
| 盈利（美元/个） | 0. 4 | 0. 3 | |

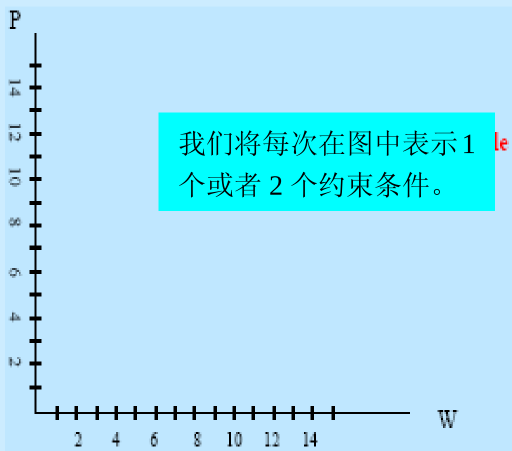
在既定需求量、机器工时和原料限制下确定扳钳和老虎钳的生产量。

**构建 GTC 问题模型**

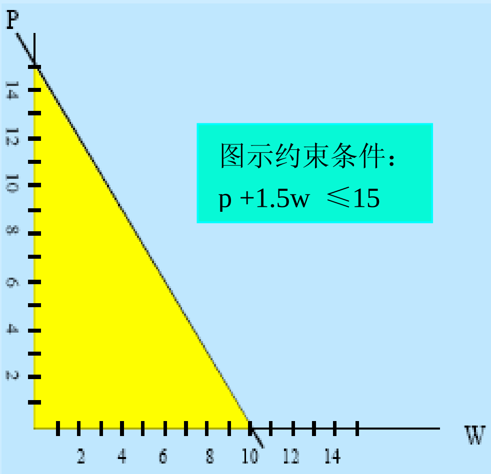
令 p 表示老虎钳的生产数量，
　w 表示扳钳的生产数量(千个)

| | |
|---|---|
| Max | profit = 300p+400w |
| 钢铁 | $p+1.5w \leqslant 15$ |
| 成型工时 | $p + w \leqslant 12$ |
| 装配工时 | $0.5p+0.4w \leqslant 5$ |
| 老虎钳需求 | $p \leqslant 10$ |
| 扳钳需求 | $w \leqslant 8$ |
| 非负要求 | $p, w \geqslant 0$ |

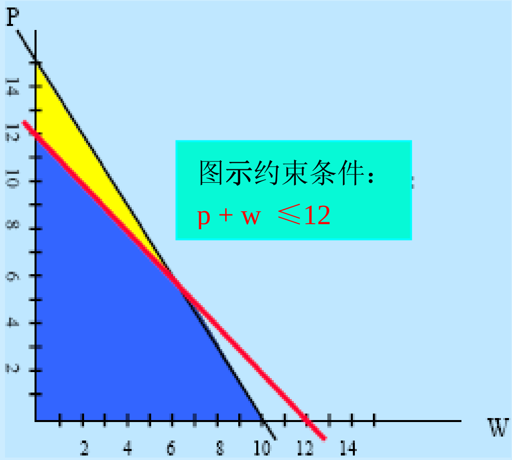
**可行域的图示**



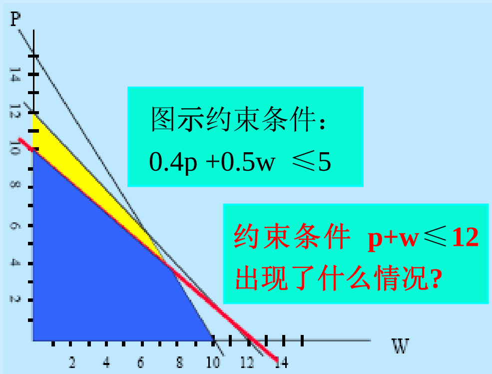
可行域的图示



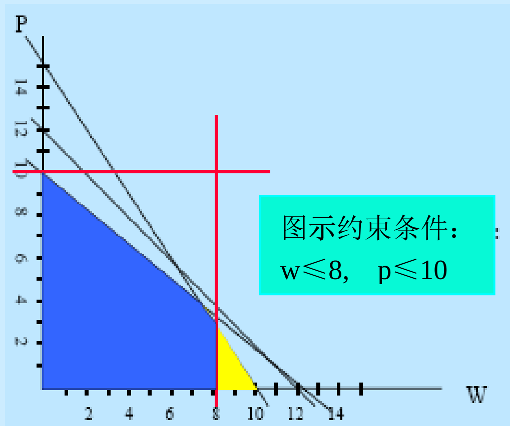

可行域的图示



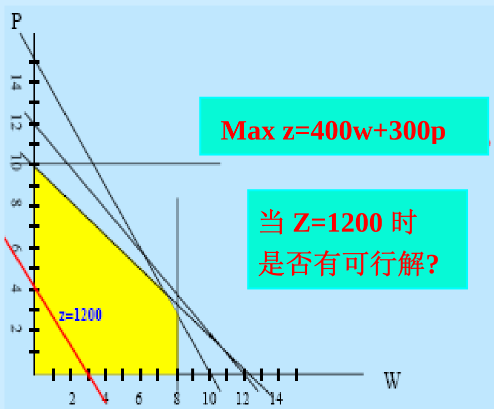

可行域的图示



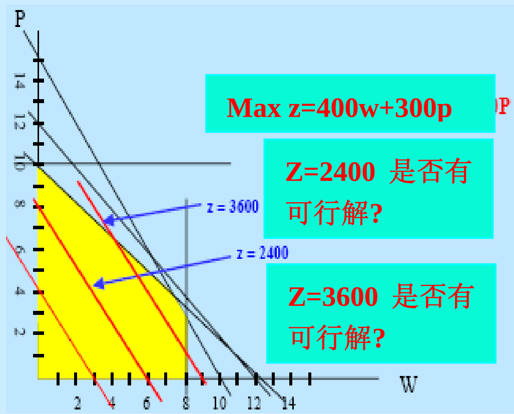

可行域的图示



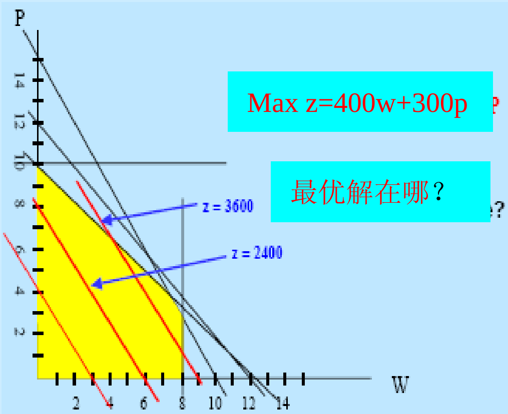

如何寻找最优解?



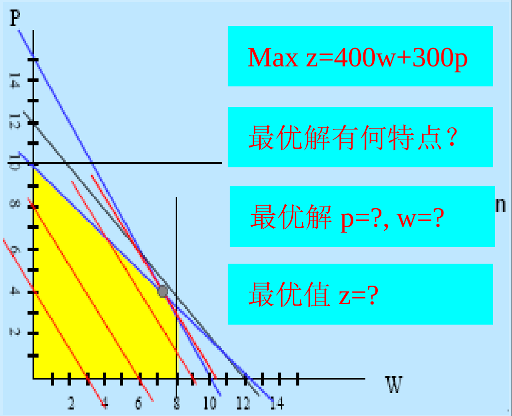

如何寻找最优解?



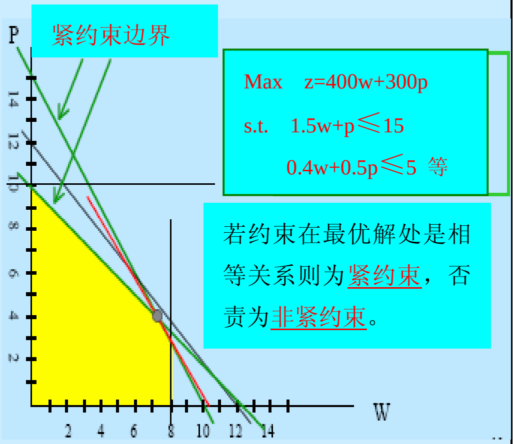
## 如何寻找最优解?



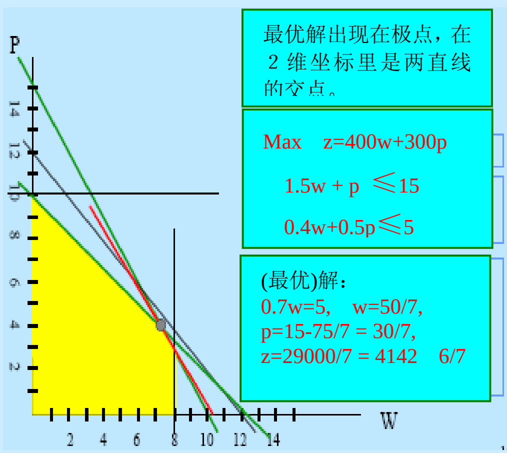

## 如何寻找最优解?




## 最优解的结构




## 如何寻找最优解?



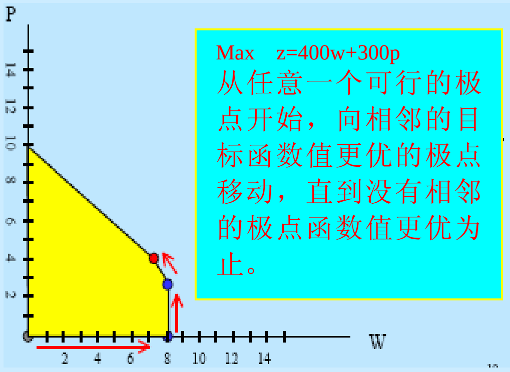

## 确定 2 维最优解的总结

- 最优解（若存在）出现在可行域的顶点。
- 在 2 维不等式约束下，顶点两个(或两个以上)约束直线的交点。
- 若存在一个可行解，必有一个顶点是最优解。
- 有时最优解不唯一。

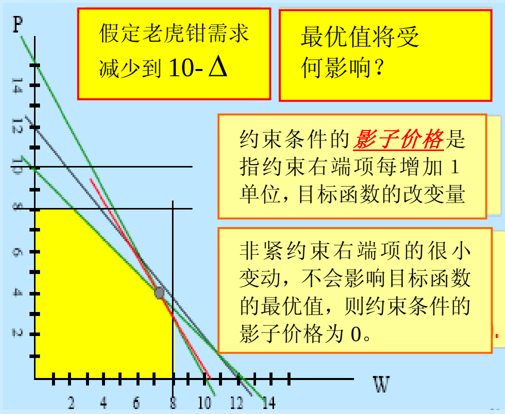
## 预习单纯形算法

- 在 n 维空间中，不可能有效地计算每个极点的目标函数值（极点太多）。
- 单纯形法是通过相邻寻优法寻找最优解。
- 若两个可行的顶点有一个共同的紧约束则称为相邻点。

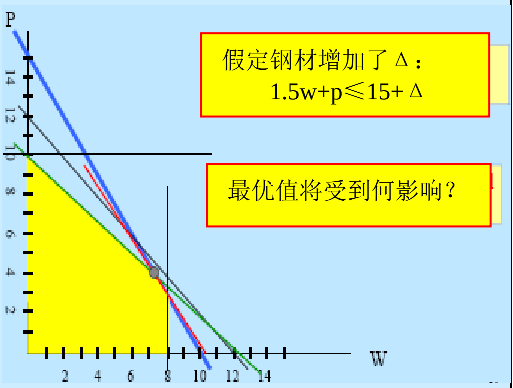
## 预习单纯形算法



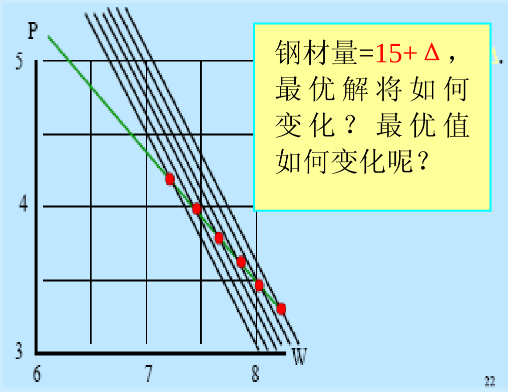

## 灵敏度分析预习



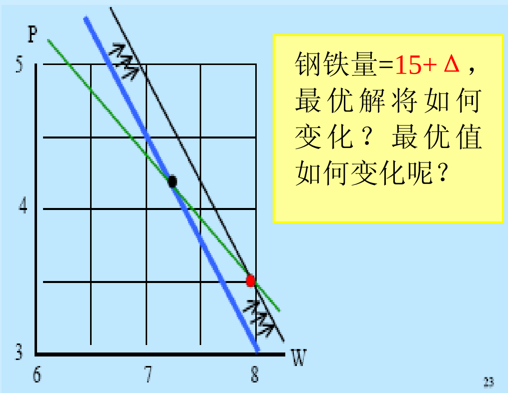

## 灵敏度分析预习




## 约束移动




## 约束移动




## 确定新的最优解

**Max** z=400w+300p

紧约束 1.5w+p=15+Δ

0.4w+0.5p=5

最优解： w=50/7+(10/7)Δ

p=30/7-8/7Δ

z=29000/7+(1600/7)Δ

结论：如果钢材量增加Δ（Δ足够小），那么最优值将增加**(1600/7)**Δ。

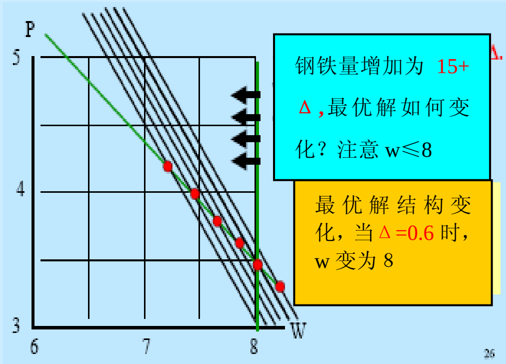
约束条件的*影子价格*是指约束右端项每增加 1 单位，目标函数的增加量。

这样钢材的影子价格是 **1600/7=228 4/7**

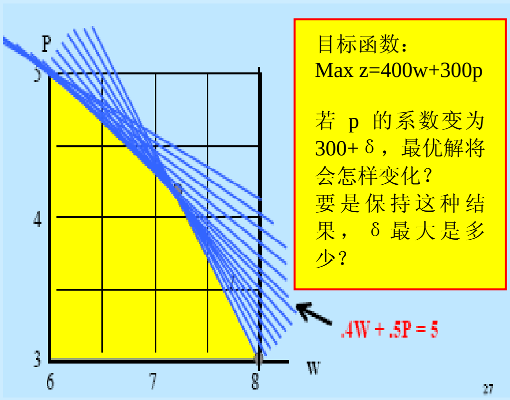
## 影子价格的一些问题

- 假定钢材量减少Δ，最优值将受何影响？
- 钢材量能增加多少时，影子价格依然是 **228 4/7**？
- 假定钢材价格$1200/吨。是否应该购买？
- 假定能以$450 购买一吨钢铁。是否应该购买？（这里假定这是钢铁的准确市场价格）

## 约束移动




## 价值系数的变动




## 总结： 2 维图形的直觉感知

- 可行域的几何表示
  ——图示约束条件
- 确定一个最优解
  ——图解法
  ——搜寻所有极点
  ——单纯型法
- 灵敏度分析
  ——变动右端项
  ——变动价值系数

猪皮问题

| 猪皮问题 | 原始数据 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 需求（1000s） | 10 | 15 | 30 | 35 | 25 | 10 |
| 生产成本：美元 | 12.5 | 12.55 | 12.7 | 12.8 | 12.85 | 12.95 |
| | 决策变量 | | | | | |
| 月份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 生产足球数量（千个） | 5 | 20 | 30 | 30 | 25 | 10 |
| 库存（千个） 5 | 0 | 5 | 5 | 0 | 0 | |
| 约束条件 | | | | 目标函数（总成本） | | |
| 值 | 要求 | | | $1,538,250 | | |
| 0 | = | 0 | 1 月份需求满足 | | | |
| 0 | = | 0 | 2 月份需求满足 | | | |
| 0 | = | 0 | 3 月份需求满足 | | | |
| 0 | = | 0 | 4 月份需求满足 | | | |
| 0 | = | 0 | 5 月份需求满足 | | | |
| 0 | = | 0 | 6 月份需求满足 | | | |
| 足球生产限制 | 30 | | 足球库存限制 | 10 | | |

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053 2002 年 2 月 14 日**

- 把线性规划化为标准型
- 单纯形算法简介

- 注意：本讲稿被设计成带有动画的幻灯片。

## 线性规划的标准型

1. 决策变量非负
2. 全部为等式约束条件
3. 右端项非负

一个非标准化的线性规划模型

Max $3x_1+2x_2-x_3+x_4$

$x_1+2x_2+x_3-x_4 \leqslant 5$ 非等式约束

$-2x_1-4x_2+x_3+x_4 \leqslant -1$ 非等式约束

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$ $x_3$ 可能是负数

## 把不等式约束变为等式约束

加非负量

| 转换前 | 转换后 |
|---|---|
| $x_1+2x_2+x_3-x_4 \leqslant 5$ | $x_1+2x_2+x_3-x_4+s=5$ |
| | $s \geqslant 0$ |

s 叫做松弛变量，代表没有利用的资源。

注意：$s=5- x_1-2x_2-x_3+x_4$

把≤形式的不等式约束变为等式，加入松弛变量。

## 转换“≥”约束条件

- 考虑不等式 $-2x_1-4x_2+x_3+x_4 \leqslant -1$；
- 第一步，将右端项变成非负数。
  $2x_1+4x_2-x_3-x_4 \geqslant 1$
- 第二步，化为等式
  $2x_1+4x_2-x_3-x_4-s=1$
  $s \geqslant 0$
- 加入的变量称为剩余变量

把≥形式的不等式约束变为等式，减去松弛变量。

## 其他转换

如何把最大化问题变为最小化问题？

例如， Max $3w+2p$

s.t. 约束集

与下面的问题有同样的最优解

Min $-3w-2p$

s.t. 约束集

## 最后一步转换（本例）

转换可能取负值的变量。

Max $3x_1+4x_2+5x_3$

s.t. $2x_1-5x_2+2x_3=17$

其他约束

$x_1 \leqslant 0$, $x_2$ 无约束，$x_3 \geqslant 0$

转换 $x_1$：令 $y_1=-x_1$, $y_1 \geqslant 0$。

Max $-3y_1+4x_2+5x_3$

$-2y_1-5x_2+2x_3=17$

$y_1 \geqslant 0$, $x_2$ 无约束，$x_3 \geqslant 0$

可以由 $y_1$ 得到 $x_1$。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 转换可能取负值的变量

Max $-3y_1+4x_2+5x_3$

$-2y_1-5x_2+2x_3=17$

$y_1 \geqslant 0$, $x_2$ 无约束， $x_3 \geqslant 0$

转换 $x_2$：令 $x_2=y_3-y_2$； $y_3$， $y_2 \geqslant 0$

Max $-3y_1+4(y_3-y_2)+5x_3$

$-2y_1-5y_3+5y_2+2x_3=17$

所有变量非负。

可以由 $y_1$ 和 $y_2$ 得到 $x_2$。

## 另一个例子

- 练习：将下面的线性规划变为标准形式（最大化问题）

min $x_1+3x_2$

s.t. $2x_1+5x_2 \leqslant 12$

$x_1+x_2 \geqslant 1$

$x_1 \geqslant 0$

与同伴一起变换成标准形式。

## 预习单纯形算法

max $z=-3x_1+2x_2$

s.t. $-3x_1+3x_2+x_3 \quad =6$

$-4x_1+2x_2 \quad +x_4 \quad =2$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

## 线性规划的规范型= 线性规划的标准型 ＋ 约旦规范型

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

z 不是决策变量，基变量是 $x_3$ 和 $x_4$。非基变量是 $x_1$ 和 $x_2$。基本可行解是：$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=6$, $x_4=2$。

## 每个约束条件对应一个基变量

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | | |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | 约束 1 | 1 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 约束 2 | 2 |

约束 1：基变量是 $x_3$。

约束 2：基变量是 $x_4$。

基变量由 $x_3$ 和 $x_4$ 构成。

## 预习最优性条件

注意：

$z=-3x_1+2x_2$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

显然，如果当前的基本可行解可以改善，则它不是最优解。

思路：让非基变量微小变动，调整基变量。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 当前基本可行解并非最优解！

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

若 z 行有正的系数，则当前基不是最优基。

记住：$z=-3x_1+2x_2$

把 $x_2$ 增加 Δ>0。让 $x_1$ 保持为 0。

$x_3$，$x_4$，z 将怎么变化？

$x_3=6-3\Delta$

$x_4=2-2\Delta$

$z=2\Delta$

## 最优性条件（注意数据变动了！）

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -2 | -4 | 0 | 0 | = | -8 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

重要提示：若z行无正系数，即是最优解！

$z=-2x_1-4x_2+8$，因此，对于所有可行解，都有 $z\leq 8$。但是当前基本可行解对应 $z=8$，所以这是最优解。

此时：基本可行解即为最优解

令 $x_2=\Delta$， Δ 可以多大？

$x_2$ 改变后最优解将会如何变化？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$x_1=0$
$x_2=1$
$x_3=3$
$x_4=0$
$z=2$

要使 z 值最大，而且至少有一个可行解，Δ 应该多大？ Δ =1。

提示：结果是与另一个基对应的基本可行解。

## 旋转消元获得一个更优解

新解：基变量 $x_2$，$x_3$，非基变量 $x_1$，$x_4$。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | -1.5 | = | 3 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | .5 | = | 1 |

$x_1=0$
$x_2=1$
$x_3=3$
$x_4=0$
$z=2$

若按照第二个系数消元，将获得一个新的基本可行解。

## 单纯形算法总结

- 从规范化形式的基本可行解开始
  1. 检查是否满足最优性条件
  2. 如果不是最优，确定一个入基的非基变量。
  3. 增大入基变量的值，旋转消元得到新的基本可行解。
  4. 重复直到得到最优解（或无界）

最优化条件：若z行无正系数，即为最优解

## 好，重申一次 $z=x_1-x_2+2$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | -1.5 | = | 3 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | .5 | = | 1 |

$x_1=\Delta$
$x_2=1+2\Delta$
$x_3=3-3\Delta.$
$x_4=0$
$z=2+\Delta$

$x_1$ 的价值系数是正的。

令 $x_1=\Delta$， $x_4=0$。

Δ 可以多大？ $\Delta max=1$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 解的一种特例：若问题中Δ可以无限大，解将会怎样？

$z = x_1 - x_2 + 2$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| 0 | -3 | 0 | 1 | -1.5 | = | 3 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | .5 | = | 1 |

$x_1 = \Delta$
$x_2 = 1 + 2\Delta$
$x_3 = 3 + 3\Delta.$
$x_4 = 0$
$z = 2 + \Delta$

**假定把 3 变为-3。**

令 $x_1=\Delta$，$x_4=0$。

Δ可以多大？

> 若入基变量对应的约束系数≤0，
> 则模型的解无界。

## 言归正传：做下一个旋转消元

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | 1/2 | = | 3 |

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$z = 3$

Δ的最大值是多少？ Δ=1

变量 $x_1$ 成为基变量，$x_3$ 成为非基变量。

基于系数 3 进行旋转消元。

## 检查最优性条件

$z = -x_1/3 - x_2/2 + 3$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | 1/2 | = | 3 |

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$z = 3$

z 行没有正系数，当前基本可行解即最优。

## 单纯形算法再总结

- 从规范化形式的基本可行解开始
  1. 检查最优性条件
     - 检验数是否有正值？
  2. 如果不是最优，确定一个入基的非基变量。
     - 选择检验数为正的变量。
  3. 增大入基变量的值，旋转消元得到新的基本可行解。
     - 我们将重温该步骤，展示步骤的捷径。
  4. 重复直到得到最优解（或无界）

## 旋转消元：寻求捷径

$z = 2x_1 + 3$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | = | -3 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | = | 7 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | 0 | = | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | = | 5 |

练习：与你的伙伴一起做

$x_1 = \Delta$
$x_2 = 1 + 2\Delta$
$x_3 = 7 - 3\Delta.$
$x_4 = 5 - 2\Delta$
$z = 3 + \Delta$

1. 确定Δ可以多大
2. 确定下一个解
3. 确定怎样根据系数进行旋转消元；
4. 查看是否有查找该系数的捷径

## 旋转消元的进一步解释

- 选择检验数为正的变量为入基变量，所对应的列为旋转消元的列
- 按照最小比例系数法决定出基变量，所对应的行为旋转消元的行
- 像解方程组一样旋转消元。

下次课程内容

- 复习单纯形算法
- 单纯形算法的表示形式
- 如何确定初始可行解（如果存在）？
- 单纯形算法是有限步算法的证明（假定不发生退化）

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　2002 年 2 月 21 日**

- 单纯形法（续）

分发：讲稿

注意：本课程以幻灯片演示讲解

---

**本次课内容**

- 复习单纯形算法
- 方法的形式化表示
- 退化现象与多重最优解
- 单纯形算法是否是有限步算法？（是的，但是我们要仔细）

---

**线性规划的规范化形式：**

**线性规划的标准型+约旦规范化形式**

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

Z 不是决　策变量。

基变量是 $x_3,x_4$，非基变量是 $x_1,x_2$。基本可行解 $x_1=0,x_2=0,x_3=6,x_4=2$。

---

线性规划的规范形式：

基变量　　　　非基变量

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_r$ | $x_m$ | $x_{m+1}$ | $x_s$ | $x_n$ | | CV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $\boxed{0}$ | 0 | $\bar{c}_{m+1}$ | $\bar{c}_s$ | $\bar{c}_n$ | = | $-\bar{z}_0$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\bar{a}_{1,m+1}$ | $\bar{a}_{1,s}$ | $\bar{a}_{1,n}$ | = | $\bar{b}_1$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $\bar{a}_{2,m+1}$ | $\bar{a}_{2,s}$ | $\bar{a}_{2,n}$ | = | $\bar{b}_2$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | $\bar{a}_{r,m+1}$ | $\bar{a}_{r,s}$ | $\bar{a}_{r,n}$ | = | $\bar{b}_r$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\bar{a}_{m,m+1}$ | $\bar{a}_{m,s}$ | $\bar{a}_{m,n}$ | = | $\bar{b}_m$ |

m 个约束, n 个变量

$$[B|N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = b$$

$$z = C_B X_B + C_N X_N$$

---

**符号**

- n　　变量个数
- m　　约束条件个数
- s　　入基变量下标
- r　　主元行的下标
  --注意：第 r 行基变量出基.
- 初始数据 $c_{ij}, a_{ij}, b_i$
- 旋转消元后的系数表示为 $\overline{c_{ij}}, \overline{a_{ij}}, \overline{b_i}$

---

**基本可行解**

- 目前所有变量值都非负。
  ——这符合规范形式的要求。
- 每个约束条件对应一个基变量。
  ——本例中，约束 i 对应的基变量为 $x_i$
- 有 n-m 个非基变量。
  ——本例中，非基变量为 $x_{m+1},\ldots,x_n$
- 基本可行解如下：

$$x_1 = \overline{b_1}, \ldots, x_m = \overline{b_m} 。$$

其他变量值为 0 。

## 最优性条件（最大化问题）

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -2 | -4 | 0 | 0 | = | -8 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

这个基本可行解就是最优解。最优性条件是什么，如何用 $\bar{c}$ 表示？

## 旋转消元与最小比例原则

$\bar{c}_s>0$，故变量 $x_s$ 入基。

当 Δ=6/3 时，$x_3$=0。
当 Δ=2/2 时，$x_4$=0。

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| $x_3$ | 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_4$ | 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$x_1=0$
$x_2=\Delta$
$x_3=6-3\Delta$
$x_4=2-2\Delta$
$z=2\Delta$

Δ＝min( 6/3,2/2)=min($\bar{b}_1/\bar{a}_{1s},\bar{b}_2/\bar{a}_{2s}$)。含有要被替换基变量的约束是约束 r，因为 r=argmin($\bar{b}_1/\bar{a}_{1s},\bar{b}_2/\bar{a}_{2s}$)=2。最小比例原则

用系数表示最小比例原则

## 旋转得到一个更优解

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| $x_3$ | 0 | 3 | 0 | 1 | -3/2 | = | 3 |
| $x_4$ | 0 | -2 | 1 | 0 | 1/2 | = | 1 |

$x_1=0$
$x_2=1$
$x_3=3$
$x_4=0$
$z=2$

$\bar{c}_s>0$，变量 $x_s$ 入基，根据最小比例原则确定离基变量所在的约束条件 r。

## 多重最优解（最大化问题）

这是显然的

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -4 | 0 | 0 | = | -8 |
| 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -1 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

若所有检验数满足：$\bar{c}_i\le 0$，但非基变量 j 的检验数 $\bar{c}_j=0$，则存在多个最优解。

该基本可行解是最优解，还有没有其它最优解？

若 $x_1$ 入基，哪个变量将离基？

必定x4离基

## 多重最优解（最大化问题）

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -4 | 0 | 0 | = | -8 |
| 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | 0 | 5 | 1 | 1 | = | 8 |

令 $x_1$ 入基，令约束 1 中的基变量离基。

注意：最优解变了，但是目标函数值不变。

## 无界解

用代数符号表示无界解

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| 0 | -3 | 0 | 1 | -1.5 | = | 3 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | .5 | = | 1 |

$x_1=\Delta$
$x_2=1+2\Delta$
$x_3=3+3\Delta$
$x_4=0$
$z=2+\Delta$

变量 $x_1$ 入基，令 $x_1$=Δ，$x_4$=0。

若入基变量列的系数均非正，则该问题的解无界。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 符号表示回顾：

若所有检验数满足：$\bar{c}_i \le 0$，则该基本可行解是最优解。

假定 $x_s$ 入基（即 $\bar{c}_s > 0$）

第 r 行的基变量出基，其中

$$r = \mathrm{argmin}_i\{\bar{b}_i / \bar{a}_{is} : \bar{a}_{is} > 0\},$$

$$\text{因此 } \bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \min\{\bar{b}_i / \bar{a}_{is} : \bar{a}_{is} > 0\}.$$

若对于所有 i，有 $\bar{a}_{is} \le 0$，那么该问题的最优解无界。

## 单纯形法（最大化问题）

step 0. 问题已经规范化且 $\bar{b} \ge 0$。

Step 1. 若 $\bar{c} \le 0$ 则结束，当前解为最优解。否则，存在某些 $\bar{c}_j > 0$，则继续。

Step 2. 选择任意检验数 $\bar{c}_s > 0$ 的非基变量入基，例如 $\bar{c}_s = \max\{\bar{c}_j \mid \bar{c}_j > 0\}$。若对于所有 i，有 $\bar{a}_{is} \le 0$，则结束，该问题无界。否则，存在某些 $\bar{a}_{is} > 0$，则继续。

Step 3. 第 r 行对应的基变量出基，r 由最小比例原则确定，

$$r = \mathrm{argmin}_i\{\bar{b}_i / \bar{a}_{is} : \bar{a}_{is} > 0\}$$

Step 4. 用 $x_s$ 代替第 r 行的基变量重新确立规划的规范形式（即基于 $\bar{a}_{is}$ 的旋转）。

Step 5. 返回 Step 1。

## 下面的内容

- 退化问题和解的改进
- 非退化情形最优性和有限性的证明
- 处理退化问题
- 确定一个初始规范形式

## 退化问题

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | -2 |
| $x_3$ | 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_4$ | 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 0 |

$x_1 = 0$
$x_2 = \Delta$
$x_3 = 6 - 3\Delta$
$x_4 = 0 - 2\Delta$
$z = 2 + 2\Delta$

当出现某些 $\bar{b}_j = 0$，则对应的基本可行解为退化解，否则为非退化基本可行解。

假定 $x_2$ 入基，退化就意味着解不变，z 值不变。

## 退化问题的旋转消元

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| $x_3$ | 0 | 3 | 0 | 1 | -3/2 | = | 6 |
| $x_4$ | 0 | -2 | 1 | 0 | 1/2 | = | 0 |

$x_1 = 0$
$x_2 = \Delta$
$x_3 = 6$
$x_4 = 0$
$z = 2$

变量 $x_2$ 入基，约束 2 中的基变量离基。这样，解的构成形式发生了变化，而解并没有变化。

## 非退化问题的每次计算都能改善解

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | -2 |
| $x_3$ | 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_4$ | 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$x_1 = 0$
$x_2 = \Delta$
$x_3 = 6 - 3\Delta$
$x_4 = 2 - 2\Delta$
$z = 2 + 2\Delta$

若基本可行解非退化，则入基变量必定可以增加，使目标函数得到改善。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**定理**：若所有基可行解均非退化，则单纯形法经有限步计算即可达到最优。

1. 基可行解数目：最多为 n!/(n-m)!m!，这是从 n 个变量中选择 m 个基本变量组合方式的数量。
2. 每个基本可行解都是不同的。
   - 假定解非退化，则得到的每个基可行解比上一个都更优。

◆ 因此，单纯形法是有限步算法。

## 处理退化问题

- 以正确的方式轻微扰动右端项

——没有退化基

——扰动后问题的每个基本可行解仍然是原问题的基本可行解。

——扰动后问题的最优解仍然是原问题的最优解。

## 例子：扰动初始基本可行解

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| $x_3$ | 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6.00000000000013 |
| $x_4$ | 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2.00000000000041 |

在原可行解里，$x_3=6,x_4=2$.

若扰动足够小，那么扰动后问题的每个基本可行解与原问题基本可行解相同。

若谨慎选择扰动，单纯形法非退化，算法是有限步算法。

## 多重最优解与退化问题评述

- 似乎退化问题是比较少见的。毕竟，谁会期望某些变量的右端项是 0 呢？
- 事实上，退化问题是很常见的。
- 除非迭代时细心，单纯形法并不必然是有限步算法。事实上，几乎没有人特别细心，而单纯形法不但是有限步算法，而且非常有效。
- 多重最优解问题常常出现，在实际问题中有很重要的意义。

## 如何获得一个初始基可行解

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 4 | 1 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 2 | 5 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 1 | 3 | = | 2 |

提示：在理论上获得一个基可行解与获得最优解同样困难。

思路：使用单纯形法算法获得一个初始基可行解。

## 回到前面已经解决的问题

**Juan's Problem**

寻找一个可行解

$-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 6$

$-4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 = 2$

$x_j \geq 0$ for $j = 1, 2, 3, 4$

**Maria's Problem**

**Minimize** $x_5 + x_6$

**subject to:**

$-3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 6$

$-4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 3x_4 + x_6 = 2$

$x_j \geq 0$ for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## Juan 和 Maria 的问题是否等价？

- 若 **Juan** 问题有一个可行解，则该解同样可以解决 **Maria** 的问题。例如：（**1 3 0 0**）是 **Juan** 问题的可行解，（**1 3 0 0 0 0**）使 **Maria** 问题最优。
- 若 **Maria** 问题的最优值是 **0**，则最优解同样解决了 **Juan** 的问题。
- 对于最大化问题，**Maria** 问题变为：**Maximize** $w = -x_5 - x_6$

## Maria 问题的表格形式

| BV | -w | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -w | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | = | 0 |
| $x_5$ | 0 | -3 | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_6$ | 0 | -4 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | = | 2 |

该问题没有化为规范化形式，但是很接近。我们需要做些什么转换呢？

## Maria 问题的规范化形式

| BV | -w | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -w | 1 | -7 | 5 | 3 | 8 | 0 | 0 | = | 8 |
| $x_5$ | 0 | -3 | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_6$ | 0 | -4 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | = | 2 |

之后对 Maria 问题运行单纯形法算法。若 Juan 问题有可行解，则本问题可以找到一个可行解，且最终以一个基本可行解结束。

## Maria 问题的最优基

| BV | -w | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -w | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | = | 0 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 1/6 | 1/6 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 5/6 | 11/6 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

最后，通过去掉 $x_5$ 和 $x_6$，可以获得原问题的基本可行解。

## 获得原问题的基本可行解

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | -3 | 2 | 4 | 1 | | = | 0 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 1/6 | 1/6 | | = | 1 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 5/6 | 11/6 | | = | 3 |

最后，去掉人工变量 $x_5$ 和 $x_6$，重新采用原目标函数。

## 获得原问题的基本可行解

| BV | -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -z | 1 | 0 | 0 | 17/6 | -13/6 | | = | -3 |
| $x_5$ | 0 | 1 | 0 | 1/6 | 1/6 | | = | 1 |
| $x_6$ | 0 | 0 | 1 | 5/6 | 11/6 | | = | 3 |

最后，去掉人工变量 $x_5$ 和 $x_6$，重新采用原目标函数，然后确立规范化形式。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 小结

- Maria 的问题称为第一阶段，增加的变量称为人工变量。
- 可以不用解释，直接建立第一阶段问题。
- 解决第一阶段问题可以：
  1. 确定原问题无可行解或者
  2. 得到原问题的一个基本可行解

## 建立第一阶段问题

| BV | -w | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -w | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | = | 0 |
| $x_5$ | 0 | -3 | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_6$ | 0 | -4 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | = | 2 |

现在去掉目标函数，
加入人工变量，
求人工变量的和最小，
建立规范化形式。

## 建立第一阶段问题

| BV | -w | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -w | 1 | -7 | 5 | 3 | 8 | 0 | 0 | = | 8 |
| $x_5$ | 0 | -3 | 3 | 2 | 5 | 1 | 0 | = | 6 |
| $x_6$ | 0 | -4 | 2 | 1 | 3 | 0 | 1 | = | 2 |

现在去掉目标函数，
加入人工变量，
求人工变量的和最小，
建立规范化形式。

## 由第一阶段问题的解获得原问题的一个基本可行解

最后，若 w>0，则标志着没有可行解。若 w=0，去掉人工变量（或者保持原有列，但禁止人工变量换入），回到原目标函数，建立规范化形式。

## 潜在困难

- 若原问题出现退化，则可能是由于人工变量出现在第一阶段问题的最终基里面。
  ——解决办法：换人工变量出基
- 若原问题有一个多余的约束，则人工变量有可能出现在第一阶段问题的最优基里面，而不会被换出。
  ——解决办法：去掉（或者忽略）多余的约束。

## 小结

- 复习了单纯形算法
- 退化与多重最优解
- 单纯形法是否是有限步算法？（答案：是的，但是要细心）
- 如何得到一个初始基可行解？
  ——第一阶段法

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

| Microsoft Excel 9.0 灵敏度分析报告 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Worksheet:[Class,pg 110.xls] 最优解 | | | | | | |
| 报告形成时间: 7/18/01 5:58:51 下午 | | | | | | |
| 可变单元格 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 检验数 | 目标函数系数 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $I$6 | Juice | 6 3/7 | 0 | 5 | 2/5 | 4/11 |
| $I$7 | Cocktail | 4 2/7 | 0 | 4 1/2 | 2 | 1/3 |
| $I$8 | Champangne | 0 | – 4/7 | 6 | 4/7 | 1.00E+30 |
| 约束 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 影子价格 | 约束右端项 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $A$14 | Prod.Cap | 60 | 11/14 | 60 | 5 1/2 | 22 1/2 |
| $A$15 | w-House Cap | 150 | 1/35 | 150 | 90 | 22 |
| $A$16 | Juice Cap | 6 3/7 | 0 | 0 | 1.00E+30 | 1 4/7 |

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

15.053　　　　2002 年 2 月 26 日

- 灵敏度分析
- 常见问题
  ——玻璃杯生产实例解析。
  ——若时间允许，也将考虑第 2 讲中的理财实例。

玻璃生产实例

- $X_1$——6-oz 果汁玻璃杯的数量
- $X_2$——10-oz 鸡尾酒杯的数量
- $X_3$——香槟酒杯的数量

Max　$5x_1+4.5x_2+6x_3$

s.t.　$6x_1+5x_2+8x_3 \leq 60$　(产量限制)

$10x_1+20x_2+10x_3 \leq 150$　（仓库容量）

$x_1 \leq 8$　（6-oz 杯数量限制）

$x_1,x_2,x_3 \geq 0$

常见问题：

影子价格是什么？

- 假定是最大化问题。影子价格是指约束的右端项增加一单位，其他数据保持不变时，目标函数的增加量。
- 影子价格是在一些区间内有效的。

常见问题：

我明白，能够给个例子么？

- 好的，再看一下书中给出的玻璃杯问题。将生产时间从 60 开始改变，保持其他数据不变，看一下目标函数怎么变化。

| Production hours | Optimal obj. value | difference |
|---|---|---|
| 60 | 51 3/7 | |
| 61 | 52 3/14 | 11/14 |
| 62 | 53 | 11/14 |
| 63 | 53 11/14 | 11/14 |

影子价格是 11/14。

4

右端项更大变动

| Production hours | Optimal obj. value | difference |
|---|---|---|
| 64 | 54 4/7 | 11/14 |
| 65 | 55 5/14 | 11/14 |
| 66 | 56 1/11 | * |
| 67 | 56 17/22 | 15/22 |

影子价格是 11/14，直到生产限制为 65.5。

常见问题：

直觉上如何知道影子价格是常数，还是变化？

- 回忆单纯形法，其中会出现一个基本可行解。用语言可以很容易地描述该基。

玻璃杯问题

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 玻璃杯问题最优基的语言描述

1. 仅仅生产果汁杯和鸡尾酒杯
2. 充分利用生产和仓库容量限制

$$z = 5x_1 + 4.5x_2$$
$$6x_1 + 5x_2 = 60$$
$$10x_1 + 20x_2 = 150$$

$x_1 = 6\ 3/7$

$x_2 = 4\ 2/7$

$z = 51\ 3/7$

## 玻璃杯问题最优基的语言描述

1. 仅仅生产果汁杯和鸡尾酒杯
2. 充分利用生产和仓库容量限制

对于 Δ =5.5，$x_1$=8,且约束 $x_1 \leqslant 8$ 是紧约束。

$$z = 5x_1 + 4.5x_2$$
$$6x_1 + 5x_2 = 60 + \Delta$$
$$10x_1 + 20x_2 = 150$$

$x_1 = 6\ 3/7 + 2\Delta/7$

$x_2 = 4\ 2/7 - \Delta/7$

$z = 51\ 3/7 + 11/14\ \Delta$

## 常见问题：

管理上如何运用影子价格？

1. 用前面的例子解释
2. 你愿意用多少钱支付 1 小时额外的生产时间？

玻璃杯问题

## 常见问题：

影子价格是否总是有经济学意义？

- 答案是否定的，除非一定要理解为有经济学意义。
- 考虑比例约束

## 公寓建设

- $X_1$=单人间数量
- $X_2$=双人间数量
- $X_3$=三人间数量
- $X_1/(X_1+X_2\ X_3)<=0.5$ 即
  $X_1<=0.5\ X_1+0.5\ X_2+0.5\ X_3$
- 故 $0.5\ X_1-0.5\ X_2-0.5\ X_3<=0$
- 影子价格是指从 0 增加到 1 的影响。
- 这里没有明显的管理上的意义。

## 常见问题：

现在我对此还是生疏。但是随着经验的增长，影子价格的含义是否增势很明显？

不是的。

但是对于课程 15.053 中的问题而言，就是很明确的了。

常见问题：

教材中有时用对偶价格，而我们用影子价格，有什么区别么？

- 没有

常见问题：

**Excel** 给出了灵敏度分析报告,其中是否提供影子价格?

- 是的，还有更多。
- 特别的，给出了影子价格有效的范围。

玻璃杯问题

常见问题：

听说 **Excel** 有时会给出错误的影子价格，是么？

- 可能存在影子价格有效的区间不存在的情况。
- 在有些情况下，Excel 也可能给出了错误的影子价格，但是在课程 15.053 的电子表格中不存在这样的事情。

常见问题：您告诉我 **Excel** 有时会犯错。同时，我也可以多次解一个线性规划问题，利用变动数据进行灵敏度分析。那么，灵敏度分析报告的优点在哪里？

- 对于大规模的规划问题，灵敏度分析报告是更加有效率的，对于在实际中使用的线性规划模型，是准确的。
- 对于大规模的规划问题，可以用它来发现机会
- 可以发现数值变化最敏感的系数（他们的准确性是至关重要的）。

常见问题：

请归纳一下我们目前所学的内容。

- 当然。主要有：
  ——影子价格是约束右端项变动一单位引起的目标函数的变动。
  ——影子价格通常但决非总是有经济学意义，这对管理很有用。
  ——影子价格在一定区间上有效，Excel 的灵敏度报告中会给出。
  ——Excel 提供的影子价格对于线性规划问题是准确的，但在其他情况下有时会出错。

接下来的内容

- 通过管理情景的观察，探求影子价格的属性。
- 检验数与定价

玻璃杯问题解析：

Max $5x_1+4.5x_2+6x_3$

s.t. $6x_1+5x_2+8x_3<=60$ (产量限制)

$10x_1+20x_2++10x_3<=150$ (仓库容量)

$x_1<=8$ （6-oz 杯数量限制）

$x_1,x_2,x_3>=0$

影子价格是约束右端项增加一单位引起的目标函数最优值的增加。

若约束右端项增加引起目标函数最优值增加，则影子价格为正。

若约束右端项增加引起目标函数最优值变小，则影子价格为负。

玻璃杯问题解析：

Max $5x_1+4.5x_2+6x_3$

s.t. $6x_1+5x_2+8x_3<=60$ (产量限制)

$10x_1+20x_2++10x_3<=150$ (仓库容量)

$x_1<=8$ （6-oz 杯数量限制）

$x_1,x_2,x_3>=0$

断言：生产能力的影子价格不能为负

原因：原问题的可行解在生产能力增长以后同样是可行解。因此，生产能力的增长不会引起最优值的削减。

玻璃杯问题解析：

Max $5x_1+4.5x_2+6x_3$

s.t. $6x_1+5x_2+8x_3<=60$ (产量限制)

$10x_1+20x_2++10x_3<=150$ (仓库容量)

$x_1<=8$ （6-oz 杯数量限制）

$x_1,x_2,x_3>=0$

断言：约束 $x_1>=0$ 的影子价格不能为正。

原因：假定约束变为 $x_1>=1,x^*$ 为问题的解。那么 $x^*$ 也是原问题的可行解，因此原问题的最优函数值至少与 $x^*$ 的函数值一样大。

最大化问题影子价格的符号

- “<=约束”，影子价格非负。
- “>=约束”，影子价格非正。
- “=约束”，影子价格可能是 0 或正或负。

最小化问题影子价格的符号

- 最小化问题的影子价格是指约束右端项增加一单位引起的目标函数最优值的增加
- “<=约束”，影子价格………
- “>=约束”，影子价格………
- “=约束”，影子价格可能是 0 或正或负。
- 与同伴一起完成上述问题。

非紧约束的影子价格为 0，这就是“互补松弛条件”。

Max $5x_1+4.5x_2+6x_3$

s.t. $6x_1+5x_2+8x_3<=60$ (产量限制)

$10x_1+20x_2++10x_3<=150$ (仓库容量)

$x_1<=8$ （6-oz 杯数量限制）

$x_1,x_2,x_3>=0$

在最优解中，$x_1$=6 3/7。

断言：约束 $x_1<=8$ 的影子价格为 0。

直觉的原因：若最优解中 $x_1<8$，那么在 $x_1>8$ 时，就不可能得到一个更优的解。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

常见问题：

影子价格仅仅在右端只有一项变动时有效。若右端多项同时变动，将会如何？

- 右端多项同时变动时，影子价格依然有效，但是区间范围已不准确。

玻璃杯问题

常见问题：

非负约束是否有影子价格？

- 是的，但是很特别，称为检验数
- 看一下检验数：

——果汁杯　检验数=0

——鸡尾酒杯　检验数=0

——香槟酒杯　检验数= - 4/7

常见问题：

**Excel 提供检验数么？**

- 是的。它们是灵敏度报告的一部分。

玻璃杯问题

常见问题：

检验数在管理上的意义是什么？

- 有两种解释，这是其一。
- 现在不生产香槟酒杯。要生产香槟酒杯，要求其单位利润提高多少？
- 香槟酒杯的检验数是-4/7。如果将玻璃杯的收益增加 4/7(从 6 到 6 4/7)，那么将有一个新的最优解，其中将生产香槟酒杯。

常见问题：

为什么叫检验数？看上去没有什么被检验。

- 这是一个很机敏的问题。把影子价格看作实际成本，可以获得检验数。这称为定价。

## 定价

影子价格

$$
\begin{array}{llll}
\max & 5x_1 + 4.5x_2 + 6x_3 & & \\
\text{s.t} & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 60 & \ldots\ldots 11/14 \\
 & 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \le 150 & \ldots\ldots 1/35 \\
 & 1x_1 \le 8 & \ldots\ldots 0 \\
 & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 &
\end{array}
$$

将影子价格视为实际成本，结果就是检验数。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 为 $x_1$ 定价

影子价格

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 4.5x_2 + 6x_3\ (\$100s & \\ s.t & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 60 & \ldots\ldots 11/14 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \le 150 & \ldots\ldots 1/35 \\ & 1x_1 \le 8 & \ldots\ldots 0 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 & \end{array}$$

$X_1$ 的检验数= $5 - 6 \times 11/14 - 10 \times 1/35 - 1 \times 0 = 5 - 33/7 - 2/7 = 0$

## 为 $x_2$ 定价

影子价格

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 4.5x_2 + 6x_3\ (\$100s & \\ s.t & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 60 & \ldots\ldots 11/14 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \le 150 & \ldots\ldots 1/35 \\ & 1x_1 \le 8 & \ldots\ldots 0 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 & \end{array}$$

$X_2$ 的检验数= $4.5 - 5 \times 11/14 - 20 \times 1/35 - 0 \times 0 = 4.5 - 55/14 - 4/7 = 0$

## 为 $x_3$ 定价

影子价格

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 4.5x_2 + 6x_3\ (\$100s & \\ s.t & 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 \le 60 & \ldots\ldots 11/14 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 10x_3 \le 150 & \ldots\ldots 1/35 \\ & 1x_1 \le 8 & \ldots\ldots 0 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 & \end{array}$$

$X_1$ 的检验数= $6 - 8 \times 11/14 - 10 \times 1/35 - 0 \times 0 = 6 - 44/7 - 2/7 = -4/7$

## 常见问题：可否运用定价确定一种新的玻璃杯是否投产？

影子价格

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 4.5x_2 + 7x_4\ (\$100s & \\ s.t & 6x_1 + 5x_2 + 8x_4 \le 60 & \ldots\ldots 11/14 \\ & 10x_1 + 20x_2 + 20x_4 \le 150 & \ldots\ldots 1/35 \\ & 1x_1 \le 8 & \ldots\ldots 0 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0 & \end{array}$$

$X_4$ 的检验数= $7 - 8 \times 11/14 - 20 \times 1/35 - 0 \times 0 = 7 - 44/7 - 4/7 = 1/7$

## 为 $x_j$ 定价

影子价格

$$\begin{array}{llr} \max & 5x_1 + 4.5x_2 + c_j x_j\ (\$100s) & \\ s.t & 6x_1 + 5x_2 + a_{1j}x_j \le 60 & \ldots\ldots y_1 \\ & 10x_1 + 20x_2 + a_{2j}x_j \le 150 & \ldots\ldots y_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad + a_{mj}x_j = b_m & \ldots\ldots y_m \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 & \end{array}$$

$X_j$ 的检验数=?

请与伙伴一起完成。

## 检验数小结

- 非基变量 $x_j$ 的检验数是在 $x_j$>=1 时目标函数的增量。
- 基变量的检验数是 0 。
- 检验数可以通过将影子价格作为实际价格计算得到，该操作又称为定价。
- 定价可以决定一个新变量是否具有价值（并进入基变量）

## 请您总结一下本讲的主要内容

- 好的。我很乐意。

## 小结

- 影子价格是约束右端项变动一单位引起的最优值变化量。
- “>=0”约束的影子价格叫做检验数
- 影子价格通常但并不总是有利于管理的经济学意义
- 非紧约束的影子价格是 0 。
- 影子价格的符号常由其经济学含义确定。
- 影子价格在一定的区间内有效，该区间可由 Excel 的灵敏度报告给出。
- 检验数可以由定价得到。

## 来自第二讲的理财问题

- Sarah 有 110 万美元投资于公司 5 个不同的项目上。
- 目标：使 2005 年初资金总量最大——（投资回报见下页）
- 每项投资最多 50 万美元
- 可以投资于 CDs，每年 5%。

理财问题

## 投资回报（非折现美元）

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Jan. 2002 | -1 | - | -1 | -1 | - |
| Jan. 2003 | .4 | -1 | 1.2 | - | - |
| Jan. 2004 | .8 | .4 | - | - | -1 |
| Jan. 2005 | - | .8 | - | 1.5 | 1.2 |

## 线性规划形式

$$\text{Max} \quad .8\,x_B + 1.5\,x_D + 1.2\,x_E + 1.05\,x_{CD04}$$

$$\text{s.t.} \quad -x_A - x_C - x_D - x_{CD02} = -1.1$$

$$.4\,x_A - x_B + 1.2\,x_D + 1.05\,x_{CD02} - x_{CD03} = 0$$

$$.8\,x_A + .4\,x_B - x_E + 1.05\,x_{CD03} - x_{CD04} = 0$$

$$.8\,x_A + .4\,x_B - x_E + 1.05\,x_{CD03} - x_{CD04} = 0$$

$$0 \le x_j \le .5 \quad \text{for} \quad j = A, B, C, D, E, CD02 \; CD03, \text{and } CD04$$

理财问题

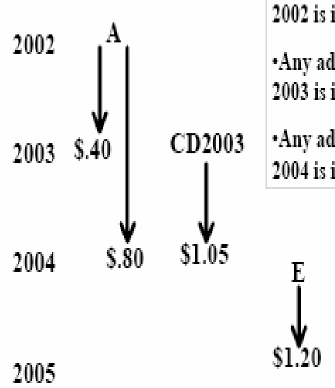
## 最优基的语言描述

1. 在 2002 年尽可能多投资于 C 和 D，剩余的投资于 A。
2. 2003 年收回投资，尽可能多投资于 B，剩余的投资于 CDs。
3. 2004 年收回所有投资，全部投资于 E。

注意：若在 2002, 2003, 2004 年资金有剩余，可以投资于 A 或 2003CDs 或 E.

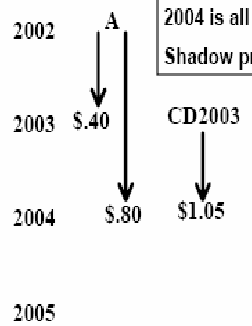
PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 理财问题决策图




- Any additional money in 2002 is invested in A.
- Any additional money in 2003 is invested in CD2003.
- Any additional money in 2004 is invested in E.

## 理解影子价格



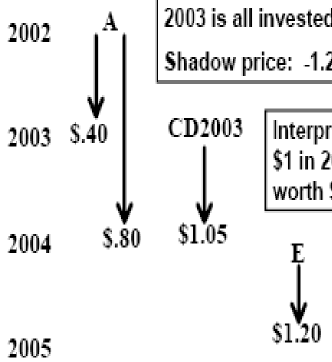

Constraint: cash flow into 2004 is all invested.

Shadow price: -1.2

Interpretation: an extra $1 in 2004 would be worth $1.20 in 2005.

$$.8\,x_A + .4\,x_B - x_E + 1.05\,x_{CD03} - x_{CD04} = 0$$

## 理解影子价格

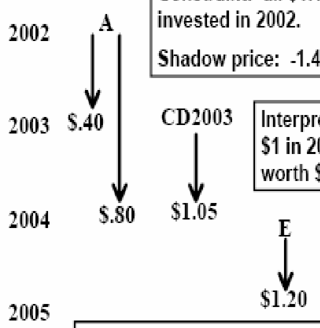



Constraint: cash flow into 2003 is all invested.

Shadow price: -1.26

Interpretation: an extra $1 in 2003 would be worth $1.26 in 2005.

## 理解影子价格




Constraint: all $1.1 million is invested in 2002.

Shadow price: -1.464

Interpretation: an extra $1 in 2002 would be worth $1.46 in 2005.

$$.4 \times 1.05 \times 1.2 + .8 \times 1.2 = 1.464$$

50

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053　　　　2 月 28 日，周 4**

- 灵敏度分析 2
  ——更多定价相关的内容
  ——对最终单纯形表的影响

分发：讲稿

## 上一讲内容复习

- 影子价格是约束右端项变动一单位引起的最优值变化量。
- “>=0”约束的影子价格叫做检验数
- 影子价格通常但并不总是有利于管理的经济学意义。
- 非紧约束的影子价格是 0 。
- 影子价格的符号常由其经济学含义确定。
- 影子价格在一定的区间内有效，该区间可由 Excel 的灵敏度报告给出。
- 影子价格可以由定价得到。

## 源自第 4 讲的例题

- Sarah 可以以$2 销售有 3 个配件和 2 个装饰品的袋子。
- 现在她有 6000 个配件，2000 个装饰品。
- 她可以以$3 购买有 3 个配件和 4 个装饰品的袋子。
- 根据 Sarah 的问题建立线性规划模型，并解决该问题。

## 检查初始和最终单纯形表可以找到影子价格！

$$
\begin{array}{llr}
\underline{\text{maximize}} & z = -3x_1 + 2x_2 & \\
\text{subject to} & -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 & \\
 & -4x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 & \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0 &
\end{array}
$$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

## 初始基本可行解

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

运用最小比例原则

Min (6/3,2/2)

基本可行解是　$x_1=0, x_2=0, x_3=6, x_4=2$

哪个是入基变量？　　$x_2$

哪个是出基变量？　　$x_4$

## 第二张表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | = | -2 |
| 0 | 3 | 0 | 1 | -3/2 | = | 3 |
| 0 | -2 | 1 | 0 | 1/2 | = | 1 |

基本可行解是　$x_1=0, x_2=1, x_3=3, x_4=0$

哪个是入基变量？　　$x_1$

哪个是出基变量？　　$x_3$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 第三张表

最优基本可行解是

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

$x_1=1, x_2=3, x_3=0, x_4=0$，z=3

## 影子价格

- 约束的影子价格是在其他数据不变的情况下，约束右端项增加一单位引起的目标函数最优值的增加量。
- 约束 1（可用配件）的影子价格是多少？
- 这是一单位额外配件的价值。

## 影子价格与松弛变量

$$\begin{array}{llrcl} \text{maximize} & z = & -3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{subject to} & & -3x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ & & -4x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = & 2 \\ & & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

要求：把右端项从 6 变到 7 在数学上等同于把“$x_3$>=0”换为“$x_3$>=-1”。这也是变量 $x_3$ 的检验数。

原因 1：假定 Sarah 有 7 千个配件与她有 6 千个配件而允许她免费多使用 1 千个配件是一样的。

## 影子价格与松弛变量

$$\begin{array}{llrcl} \text{maximize} & z = & -3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{subject to} & & -3x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 6 \\ & & -4x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = & 2 \\ & & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

要求：把右端项从 6 变到 7 在数学上等同于把“$x_3$>=0”换为“$x_3$>=-1”。这也是变量 $x_3$ 的检验数。

原因 2：原问题的任意解都可以通过把 $x_3$ 减少 1 转换成右端项为 7 的解。

$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0$

??

## 影子价格与松弛变量

看最终表中的松弛变量会提示影子价格。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

$x_1 = 1$
$x_2 = 3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$z = 3$

$x_1 = 4/3$
$x_2 = 11/3$
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
$z = 10/3$

$x_3$>=0 时，最优解是什么？$x_3$>=-1 呢？约束 1 的影子价格是多少？ 1/3

## 简要小结

- 影子价格与检验数的关系。若 $x_j$ 是约束的松弛变量，则其检验数的相反数是约束的影子价格。
- 一个变量的检验数是它在最终单纯形表中的技术系数。
- 与你的同伴一起做：第 2 个约束的影子价格是多少？（可用装饰品）

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

初始单纯形表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

最终单纯形表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

初始单纯形表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

最终表中的行通过在原行上加原约束的倍数得到。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 1 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | -1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | |
| 1 | -2 | 1 | -1/3 | 0 | | -2 | |

第 2 张表中的检验数是如何获得的？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

填入初始系数

减去约束 1 的 1/3

15

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 1 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | -1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | -1/2 |
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | | -3 | |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

下一步：从这里减去约束 2 的 1/2。

16

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 1 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | -1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | -1/2 |
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | | -3 | |

第 2 张表中的检验数是如何获得的？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

减去约束 1 的 1/3，约束 2 的 1/2。

## 检验数的含义

- 含义 1：非基变量技术系数增加 Δ 会使其检验数增加 Δ 。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | Δ | 0 | = | 0 | 1 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | -1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | -1/2 |

把 $x_3$ 系数增加Δ有何影响？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | Δ-1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

提示：初始单纯形表中系数增加Δ，在后面的表中同样的系数也会增加Δ。



| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2+Δ | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

把 $x_2$ 系数增加Δ有何影响？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0+Δ | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |



| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2+Δ | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

把第1行减去第3行的Δ倍，获得规范化形式。

Δ可多大？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3-2Δ/3 | -1/2 +Δ/2 | = | -3-3Δ |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

Δ <=1, 表格仍然最优。系数变动的界限。

## 检验数的含义

- 含义 2：若知道初始列和每个约束的影子价格，那么就可以计算变量的检验数。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | RHS | Prices |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | 3/2 | = | 0 | |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | 2 | = | 6 | 1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | 1 | = | 2 | 1/2 |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | | = | 3 |

假定加入新变量 $x_5$。应该生产 $x_5$ 么？$c_5$ 是多少呢？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | RHS | Prices |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | 3/2 | = | 0 | |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | 2 | = | 6 | 1/3 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | 1 | = | 2 | 1/2 |

$\bar{c}_5 = 3/2 - 2*1/3 - 1*1/2 = 1/3$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | 1/3 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | | = | 3 |

提示：可以计算新变量的检验数。若检验数为正，变量应该入基。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 更多关于定价的内容

- 每个表格都有一个价格，通常称为单纯形乘子。
- 最优表的价格称为影子价格

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | 3/2 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | 2 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | 1 | = | 2 |

单纯形乘子

$\pi_1=1/3$

$\pi_2=1/2$

提示：$x_2$是基变量，因此 $\bar{c}_2=0$。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | 1/3 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | 1/6 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | 5/6 | = | 3 |

$$\bar{c}_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}\pi_i a_{ij}$$

## 线性代数的一个有益性质

- 若初始表第 j 列可表示其他列的组合，则最优表中仍然如此。
- 例如，若 $A_{.3}=A_{.2}+2A_{.1}$，那么

$$\bar{A}_{.3}=\bar{A}_{.2}+2\,\bar{A}_{.1}$$

初始表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

最终表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$A_j$：第 j 列。

$A_2$：x 列。

$A_0$：z 列

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

$\bar{A}_j$：第 j 列

$\bar{A}_2$：第 2 列

$A_1=-3\,A_0-3\,A_3-4\,A_4$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$\bar{A}_1=-3\,\bar{A}_0-3\,\bar{A}_3-4\,\bar{A}_4$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

$A_2 = 2A_0 + 3A_3 + 2A_4$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 |

$\bar{A}_2 = 2\bar{A}_0 + 3\bar{A}_3 + 2\bar{A}_4$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | 7 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2 |

$b' = b + A_3$　　$\bar{b}'$ 是什么？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | 7 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2 |

$b' = b + A_3$　　$\bar{b}' = \bar{b} + \bar{A}_3$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | -3 - 1/3 |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | 1 1/3 |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | 3 2/3 |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | $6+\Delta$ |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2 |

$b' = b + \Delta A_3$　　$\bar{b}'$ 是什么？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | $6+\Delta$ |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2 |

$b' = b + \Delta A_3$　　$\bar{b}' = \bar{b} + \Delta\bar{A}_3$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | $-3-\Delta/3$ |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | $1+\Delta/3$ |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | $3+2\Delta/3$ |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | $6+\Delta$ |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2 |

$\Delta$ 的上下边界是多少？

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | $-3-\Delta/3$ |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | $1+\Delta/3$ |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | $3+2\Delta/3$ |

## 右端项变动

- 假定 $b_1$ 增加Δ。

  ——这等同于加上与第一个松弛变量对应列的Δ倍。

  ——可以计算影子价格和对 $\bar{b}$ 的影响。
- 这种变换也提供了影子价格有效存在区间的上下边界。

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | b | b' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -3 | 2 | 0 | 0 | = | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 3 | 1 | 0 | = | 6 | 6 |
| 0 | -4 | 2 | 0 | 1 | = | 2 | 2+Δ |

$\bar{b}$ 是什么，Δ的上下边界是什么

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | $\bar{b}$ | $\bar{b}'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | -1/3 | -1/2 | = | -3 | ? |
| 0 | 1 | 0 | 1/3 | -1/2 | = | 1 | ? |
| 0 | 0 | 1 | 2/3 | -1/2 | = | 3 | ? |



## 本讲小结

- 使用表格确定信息
- 影子价格与单纯形乘子
- 技术系数变动
- 最终单纯形表保持了初始单纯形表各列的线性关系
- 确定保持影子价格有效的Δ变化的上下边界

15.053　　　　2002 年 3 月 5 日

- **对偶问题**
  ——确定边界的艺术
  ——强弱对偶

- 分发：讲稿

## 边界条件

- 最优性原理（及数学规划）的一大贡献在于确定极大化问题的上限边界。
- 可以证明该解的最优性。
- 对于其他问题，可以确定距离最优性的误差范围。

## 一个 4 变量线性规划的例子

David 拥有不同的矿物，可以混合起来销售。所有的矿物都有一定的含金量。它需要保证混合物含金率为 3%，并且每包要 1kg 重。

矿物 1：含金 2%，利润$3 / kg

矿物 2：含金 3%，利润$4 / kg

矿物 3：含金 4%，利润$6 / kg

矿物 4：含金 5%，利润$8 / kg

则

$$\begin{array}{llr}\underline{\text{maximize}} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0\end{array}$$

## 一个 4 变量线性规划的例子

$$\begin{array}{llr}\underline{\text{maximize}} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 & \geq 0\end{array}$$

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | = | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 |

## 确定目标函数的一个上界

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -5 | -4 | -2 | 0 | = | -8 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 |

从目标函数中减去约束 1 的 8 倍。

$-Z-5X_1-4X_2-2X_3=-8$　$Z+5X_1+4X_2+2X_3=8$

是不是表明 $Z<=8$？　是的！

## 确定目标函数的另一个上界：定价运作

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | 定 价 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -2 | -2 | -1 | 0 | = | -6 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 | 3 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 | 1 |

从目标函数中减去约束 1 的 3 倍和约束 2

$-Z-2X_1-2X_2-X_3=-6$　$Z+2X_1+2X_2+X_3=6$

故 $z<=6$，那个边界更好，6 还是 8？

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

确定最优边界：将问题变为线性规划

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | 定价 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | C | D | = | $-y_1-3y_2$ | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 | $y_1$ |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 | $y_2$ |

A: $3-y_1-2y_2\le 0$ ➔ $y_1+2y_2\ge 3$

B: $4-y_1-3y_2\le 0$ ➔ $y_1+3y_2\ge 4$

C: $6-y_1-4y_2\le 0$ ➔ $y_1+4y_2\ge 6$

D: $8-y_1-5y_2\le 0$ ➔ $y_1+5y_2\ge 8$

minimize $y_1+3y_2$

7

我们建立的问题叫做对偶问题

minimize $\quad y_1+3y_2$

Subject to $\quad y_1+2y_2\ge 3$

$y_1+3y_2\ge 4$

$y_1+4y_2\ge 6$

$y_1+5y_2\ge 8$

$Y_1$、$Y_2$ 没有约束限制。

以上部分小结

- 若检验数非正，则最优值有上边界。
- 确定最小上界问题构成一个线性规划，被称为原线性规划问题的对偶问题。
- 下面将用通用符号描述对偶性
- 下面将说明影子价格可以解决对偶问题，边界则是原问题的最优解。

原问题

maximize $\quad z = 3x_1+4x_2+6x_3+8x_4$

subject to

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$

$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

对偶问题

minimize $\quad y_1+3y_2$

Subject to $\quad y_1+2y_2\ge 3$

$y_1+3y_2\ge 4$

$y_1+4y_2\ge 6$

$y_1+5y_2\ge 8$

观察 1：原问题约束矩阵是对偶问题矩阵的转置。

观察 2：原问题的约束右端项成为对偶问题目标函数系数。

原问题

maximize $\quad z = 3x_1+4x_2+6x_3+8x_4$

subject to

$x_1+x_2+x_3+x_4 = 1$

$2x_1+3x_2+4x_3+5x_4 = 3$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

DUAL PROBLEM:

minimize $\quad y_1+3y_2$

Subject to $\quad y_1+2y_2\ge 3$

$y_1+3y_2\ge 4$

$y_1+4y_2\ge 6$

$y_1+5y_2\ge 8$

观察 3：原问题价值系数是对偶问题的约束右端项。

观察 4：原问题（本例）是最大化问题，等式约束，变量非负。对偶问题是最小化问题，>=形式约束，变量无限制。

原问题（标准型式）

max $\quad z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\dots+c_nx_n$

s.t.

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n = b_2$

…

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\dots+a_{mn}x_n = b_m$

$x_j\ge 0$ for j = 1 to n.

对偶问题

min $\quad v =$ ???

s.t. $\quad$ ???

对偶问题用上述符号如何表示？ ve?

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

原问题（标准型式）

$$
\begin{array}{llr}
\max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = b_2 \\
& \dots & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \\
& x_j \ge 0 \ \text{for } j = 1 \text{ to } n. &
\end{array}
$$

对偶问题

$$
\begin{array}{llr}
\min & v = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + \dots + b_my_m & \\
\text{s.t.} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \dots + a_{m1}y_m & \ge c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \dots + a_{m2}y_m & \ge c_2 \\
& \dots & \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \dots + a_{mn}y_m & \ge c_n
\end{array}
$$

## 弱对偶定理

定理：设 $\overline{X}$ 是原问题的基本可行解，$\overline{Y}$ 是对偶问题的基本可行解，那么

$\sum_j c_j \overline{x_j} \le \sum_{j=1..n} \overline{y_i} b_i$ （最大<最小）

证明

$$\Sigma_{j=1..n} c_j \overline{x}_j \le \Sigma_{j=1..n} \Sigma_{i=1..m} (\overline{y}_i a_{ij}) \overline{x}_j$$

$$\le \Sigma_{i=1..m} \Sigma_{j=1..n} \overline{y}_i (a_{ij} \overline{x}_j)$$

$$\le \Sigma_{i=1..m} \overline{y}_i b_i$$

## 无界的性质

定理：若原问题（对偶问题）解无界，则对偶问题(原问题)没有基本可行解。

证明：设 $\overline{Y}$ 是对偶问题的一个基本可行解，那么原问题任意解的目标函数值将大于 $\sum_{j=1..m} \overline{y_i} b_i$。

## 强对偶定理

定理：若原问题有一个.有限的最优解，那么对偶问题有一个对应的最优解。两者最优值相等。

## 强对偶性的举例说明

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | 定价 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 | = | -14/3 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 | -1/3 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 | 5/3 |

对偶问题最优解 $y_1 = -1/3,\ y_2 = 5/3,\ v = 14/3$

原问题最优解 $x_1 = 2/3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1/3 \quad z = 14/3$

## 强对偶性的举例说明：最终表

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 | = | -14/3 |
| 0 | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | = | 2/3 |
| 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | = | 1/3 |

观察：价值系数满足加入的互补松弛条件。

原问题最优解：$x_1=2/3$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=1/3$, $v=14/3$

## 小结

- 若可以构建线性规划问题的标准型（最大化），就可以建立对偶问题。
- 弱对偶性：对偶问题的每个解给原最大化问题提供一个最大目标值的上界。
- 强对偶性：若原问题和对偶问题都有基本可行解，那么两问题的最优值相同。

## 影子价格是对偶问题的解

- 定理：若原问题有一个有限的最优解，那么与之对应的影子价格构成对偶问题的最优解。（两者的目标函数值相等。）

David 的矿物问题

影子价格

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | = | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | = | 1 | -1/3 |
| 0 | 2 | 3 | 4 | 5 | = | 3 | 5/3 |

| -z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 | = | -14/3 |
| 0 | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | = | 2/3 |
| 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | = | 1/3 |

提示：
最优单纯型乘子就是影子价格。

## 小结

- 最大化线性规划问题的对偶问题为最优函数提供了上界。
- 原问题的最大值与对偶问题的最小值相等。
- 影子价格是线性规划对偶问题的最优解。
- 下面的内容：选择性最优解的条件

原问题

$\max\ \sum_{j=1..n} c_j x_j$

$\text{s.t.}\ \sum_{j=1..n} a_{ij} x_j = b_i \text{ for } i = 1 \text{ to } m$

$x_j \geq 0 \text{ for all } j = 1 \text{ to } n$

最优性条件 1：若 $x^*$是原问题的基可行解，且满足最优条件，则是最优解。

对偶问题

$\min\ \sum_{i=1..m} y_i b_i$

$\text{s.t.}\ \sum_{i=1..m} y_i a_{ij} \geq c_j \text{ for } j = 1 \text{ to } n$

最优性条件 2：$x^*$是原问题最优解，若对偶问题有基可行解 $y^*$满足：

$$\sum_{j=1..m} c_j x_j^* = \sum_{i=1..m} y_i^* b_i$$

原问题

$\max\ \sum_{j=1..n} c_j x_j$

$\text{s.t.}\ \sum_{j=1..n} a_{ij} x_j = b_i \text{ for } i = 1 \text{ to } m$

$x_j \geq 0 \text{ for all } j = 1 \text{ to } n$

对偶问题

$\min\ \sum_{i=1..m} y_i b_i$

$\text{s.t.}\ \sum_{i=1..m} y_i a_{ij} \geq c_j \text{ for } j = 1 \text{ to } n$

互补松弛条件：
设 $Y$ 是对偶问题基可行解，令

$$\bar{c} = c_j - \sum_{j=1..m} \bar{y}_i \cdot a_{ij}$$

设 $\bar{X}$ 是原问题基本可行解。

定理（互补松弛）：$X$，$Y$ 是原问题和对偶问题的最优解，当且仅当

$$\bar{c}_j \cdot \bar{x}_j = 0$$

对所有 j 成立。

## 互补松弛条件的举例说明

| $-z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | | 定 价 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 | = | -14/3 | |
| 0 | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | = | 2/3 | -1/3 |
| 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | = | 1/3 | 5/3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{c}=$ | 0 | -2/3 | -1/3 | 0 |
| $\bar{x}=$ | 2/3 | 0 | 0 | 1/3 |

$z=\Sigma_{i=1..n}\ \bar{c}_j\ \bar{x}_j\ +14/3$

Opt is $z=14/3$

## 下一讲有关对偶的内容

- 对偶线性规划的一般形式。
- 最优性条件的一般形式。
- 运用对偶性解决 2 人零和博弈。

## 第一次中期考核范围

- 数学模型
- 2 维图解法确定最优解
- 建立线性规划的标准型
- 开始于一个基本可行解的单纯形算法
- 单纯形算法的第 1 阶段
- 理解灵敏度分析，包括影子价格，变化区间范围以及检验数
- 定价
- 使用表格确定影子价格，检验数以及区间范围

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053　　　　3 月 7 日，周四**

- 对偶性 2
  ——对偶问题的一般形式
  ——运用 2 人零和博弈理解对偶性

分发：讲稿

---

原问题

$$\begin{array}{llcr} \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_1 + 3y_2 \\ \text{Subject to} & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 8 \end{array}$$

观察 1：原问题约束矩阵是对偶问题约束矩阵的转置。

观察 2：原问题的右端系数项成为对偶问题的价值系数。

---

原问题

$$\begin{array}{llcr} \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_1 + 3y_2 \\ \text{Subject to} & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 8 \end{array}$$

观察 3：原问题价值系数是对偶问题矩阵约束右端系数项。

观察 4：原问题（本例）是最大化问题，等式约束，变量非负。对偶问题是最小化问题，>=形式约束，变量无限制。

---

原问题

$$\begin{array}{llcr} \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_1 + 3y_2 \\ \text{Subject to} & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 8 \end{array}$$

问题：若存在不等式约束，对偶问题如何变化？

注意对偶问题的最优解是原问题的影子价格。

---

原问题

$$\begin{array}{llcrc} & & & & \text{定价} \\ \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & & & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \geq & 1+\Delta & y_1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \leq & 3+\Delta & y_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 & \end{array}$$

方法：注意对偶问题的最优解是原问题的影子价格。

假设将右端从 1 变为 1+Δ，目标函数最优值会变大还是变小？

结论：$y_1 \le 0$

假设将右端从 3 变为 3+Δ，目标函数最优值会变大还是变小？

结论：$y_2 \ge 0$

---

原问题

$$\begin{array}{llcr} \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 & & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 & = & 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

对偶问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & y_1 + 3y_2 \\ \text{subject to} & y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ & y_1 + 5y_2 \geq 8 \end{array}$$

假定原问题变量非正或者没有约束。

注意：检验数是“>=0”和“<=0”约束的影子价格。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

原问题

$$\begin{array}{llr} \text{maximize} & z = 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8x_4 & \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 & y_1 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 & y_2 \end{array}$$

定价

$x_1>=0, x_2>=0, x_3<=0, x_4$ 无约束

$\bar{c}_1 = 3 - y_1 - 2y_2$

若用“$x_1>=\Delta$”代替“$x_1>=0$”，目标函数最优值变大还是变小？

结论：$\bar{c}_1 \le 0$，故 $y_1+y_2>=3$。

与你的同伴合作：确定约束 $x_3<=0$ 影子价格的符号，以及如何处理 $x_4$？

## 构建极大化问题对偶问题小结

| 原问题 | | 对偶问题 |
| --- | --- | --- |
| MAX | | MIN |
| $\sum_j a_{ij}x_j = b_i$ | ➔ | $y_i$ 无约束 |
| $\sum_j a_{ij}x_j \ge b_i$ | ➔ | $y_i \le 0$ |
| $\sum_j a_{ij}x_j \le b_i$ | ➔ | $y_i \ge 0$ |
| $x_j \ge 0$ | ➔ | $\sum_i y_i a_{ij} \ge c_j$ |
| $x_j \le 0$ | ➔ | $\sum_i y_i a_{ij} \le c_j$ |
| $x_j$ 无约束 | ➔ | $\sum_i y_i a_{ij} = c_j$ |

## 互补松弛条件

| 原问题 | 对偶问题 | 互补松弛条件 |
| --- | --- | --- |
| $\sum_j a_{ij}x_j \ge b_i$ | $y_i \le 0$ | $y_i(\sum_j a_{ij}x_j - b_i) = 0$ |
| $\sum_j a_{ij}x_j \le b_i$ | $y_i \ge 0$ | $y_i(\sum_j a_{ij}x_j - b_i) = 0$ |
| $x_j \ge 0$ | $\sum_i y_i a_{ij} \ge c_j$ | $x_j(\sum_i y_i a_{ij} - c_j) = 0$ |
| $x_j \le 0$ | $\sum_i y_i a_{ij} \le c_j$ | $x_j(\sum_i y_i a_{ij} - c_j) = 0$ |

## 确定对偶问题

原 问 题

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & z = 3x_1 + c\,x_2 + 6x_3 & \\ \text{subject to} & x_1 + 2x_2 + x_3 & \ge 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = 3 \end{array}$$

$x_1>=0, x_2<=0, x_3$ 无约束

确定上述线性规划问题的对偶问题。然后把结果和你的同伴作比较。

## 最小化问题的对偶问题

- 最小化问题的对偶问题是一个最大化问题。
- 对偶线性规划问题的影子价格构成了原问题的最优解。
- 对偶问题的对偶问题是原问题。

## 二人零和博弈

决策者 R 选择一行，1,2 或 3
决策者 C 选择一列，1,2 或 3

| | | |
| --- | --- | --- |
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

这是博弈者 R 的支付矩阵。（博弈者 C 的与之相反。）

例如，R 选择第 3 行，C 选择第 1 列，则 R 获益 1，C 获益-1。（零和）

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**支付矩阵实例**

博弈者 R 选择 2，C 选择 3
则 R 获益 0，C 获益 0。（零和）

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

博弈者 R 选择 3，C 选择 3
则 R 获益－2，C 获益＋2。（零和）

**下面：请 2 个志愿者**

博弈者 R 伸出 1 个， 2 个或 3 个指头，
博弈者 C 同时伸出 1， 2 或 3 个指头。

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

我们将进行该实验 5 次。

博弈者 R 要使他（她）的总获益最大，C 要使 R 的总获益最小。

**下面：与你的同伴一起做实验（若你没有同伴，那么观看）**

博弈者 R 伸出 1 个， 2 个或 3 个指头，
博弈者 C 同时伸出 1， 2 或 3 个指头。

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

我们将进行该实验 5 次。

博弈者 R 要使他（她）的总获益最大，C 要使 R 的总获益最小。

**谁有优势：R 还是 C?**

假定 R 和 C 都是理性博弈者，且博弈时间足够长。

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

运用线性规划，可以获得 R 支付量的上下界限。

在长期的博弈中，R 的支付量是正的，负的还是趋向于 0？

**确定下限**

假定 R 要先于 C 宣布其决策。

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

若 R 必须首先宣布对策，那么 R 应该如何选择？

总是选择同一行的策略称为“纯策略”。
R 可保证最低的支付量是 -1。

**确定 R 支付量的下限**

假定 R 的对策是随机的。

| | | |
|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 |
| 2 | -1 | 0 |
| 1 | 0 | -2 |

假设 R 将掷硬币，正面朝上选 1，反面朝上选 3。

另一决策者在听到对策后决策，但是决策要在硬币掷出前作出。

## 博弈者 C 的最佳回应是什么？

| | | | | 概率 |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 1 | 2 | .5 |
| | 2 | -1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | -2 | .5 |
| 期望支付量 | -.5 | .5 | 0 | |

若 C 知道 R 的随机对策，就可以确定每对策的期望。

C 的最好选择是什么呢？
因此，在随机对策中 R 至少可获益-0.5

## 假定在第 1 行与第 2 行之间随机选择

| | | | | 概率 |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 1 | 2 | .5 |
| | 2 | -1 | 0 | .5 |
| | 1 | 0 | -2 | 0 |
| 期望支付量 | 0 | 0 | 1 | |

C 的最好选择是什么呢？
因此，在随机对策中 R 至少可获益 0。

## R 的最佳随机对策是什么呢？

| | | | | 概率 |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 1 | 2 | $x_1$ |
| | 2 | -1 | 0 | $x_2$ |
| | 1 | 0 | -2 | $x_3$ |
| 期望支付量 | A | B | C | |

$x_1+x_2+x_3=1$

C 将选择 A, B, C 中最小的一列。

A: $-2x_1+2x_2+x_3$

B: $x_1-x_2$

C: $2x_1-2x_3$

21

## 将两数中较小的为最优问题

令 z=min(x,y)
那么 z 是下面线性规划问题的最优值。

Maximize z
s.t. $z\leqslant x$
$z\leqslant y$

## R 的最佳对策（线性规划模型）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | -2 | 1 | 2 | $x_1$ |
| | 2 | -1 | 0 | $x_2$ |
| | 1 | 0 | -2 | $x_3$ |
| 期望支付量 | A | B | C | |

Maximize z (对 x 的支付量)

A: $z\leq -2x_1+2x_2+x_3$

B: $z\leq x_1-x_2$

C: $z\leq 2x_1-2x_3$

$x_1+x_2+x_3=1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2 人零和博弈

## 行博弈者线性规划一般形式

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | … | $a_{1m}$ | $x_1$ |
| | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | … | $a_{2m}$ | $x_2$ |
| | … | | | | | |
| | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | $a_{n3}$ | … | $a_{nm}$ | $x_n$ |
| 期望支付量 | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | … | $P_m$ | |

Maximize z (对 x 的支付量)

$P_j$: $z <= a_{1j}x_1+a_{2j}x_2+\ldots+a_{nj}x_n$ 对所有 j 成立

$x_1+x_2+\ldots x_n=1$

$x_j>=0$ 对于所有 j 成立。

**博弈者 R 的最佳对策**

| | | | 概率 |
|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 | 7/18 |
| 2 | -1 | 0 | 5/18 |
| 1 | 0 | -2 | 1/3 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 | 期望支付量 |

This strategy is a lower bound on what R can obtain if he or she takes into account what C is doing.

R 的最优支付量是 1/9。因此在随机决策时 R 可保证获益至少为 1/9。

**同样可以确定 C 的最小支付量（即 R 的最大支付量）**

| | | | 期望支付量 |
|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 | 1/3 |
| 2 | -1 | 0 | 1/3 |
| 1 | 0 | -2 | -1/3 |
| 1/3 | 1/3 | 1/3 | 概率 |

若 C 选定随机对策，则可确定 R 的最大获益。

若 C 宣布该随机对策，R 将选择 1 或 2。那么在该随机对策下，C 可保证最大获一是 1/3。

**C 的最佳随机对策是使期望的最大支付量最小。**

| | | | 期望支付量 |
|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 | 1/9 |
| 2 | -1 | 0 | 1/9 |
| 1 | 0 | -2 | 1/9 |
| 1/3 | 5/9 | 1/9 | 概率 |

列博弈者可以建立线性规划确定最佳随机对策

注意：C 可运用一种随机对策使 R 的平均最大收益为 1/5。

那么，在该随机对策下 R 仅获益 1/9。

**C 的最佳随机对策是使期望的最大支付量最小。**

| | | | 期望支付量 |
|---|---|---|---|
| -2 | 1 | 2 | 1/9 |
| 2 | -1 | 0 | 1/9 |
| 1 | 0 | -2 | 1/9 |
| 1/3 | 5/9 | 1/9 | 概率 |

故在两者采取最优博弈时，支付量为 1/9。

对于 2 人零和对策，通过选择一种随机对策 R 的最大支付量是 C 通过随机对策可保证的支付给 R 的最小量。

二人零和对策一般形式

- 令 x 代表 R 的随机对策，支付函数值为 z(x)，令 y 代表 C 的随机对策，支付函数值为 v(y)。
- 对于所有 x,y,有 z(x)<=v(y)
- 最优解 $x^*$，$y^*$都可通过解线性规划获得。
- $z(x^*)=v(y^*)$。
- 两个线性规划互为对偶。

二人零和对策的更多内容

- 在理论上，R 利用固定对策可以与随时间仔细选用随机对策取得相同的效果。
  - 对策论中的对偶问题是 Von Neumann 和 Morgenstern 发现的。（首先提出对偶线性规划）
  - 随机对策的思想正在战略对策中渗透。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Microsoft Excel 9.0 灵敏度分析报告 | | | | | | |
| Worksheet:[12_对策论实例.xls] 最优解 | | | | | | |
| 报告创建时间: 10/6/2001 5:59:51 下午 | | | | | | |
| 可变单元格 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 检验数 | 目标函数系数 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $I$4 | 概率 | 7/18 | 0 | 0 | 1 | 2/7 |
| $I$5 | 概率 | 5/18 | 0 | 0 | 1/2 | 2/5 |
| $I$6 | 概率 | 1/3 | 0 | 0 | 1 2/3 | 1/3 |
| $I$9 | z | 1/9 | 0 | 1 | 1E+30 | 1 |
| 约束 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 影子价格 | 约束右端项 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $A$14 | 约束 | 1/9 | 1/3 | 0 | 1 2/3 | 1/3 |
| $A$15 | 约束 | 1/9 | 5/9 | 0 | 1 | 0. 2 |
| $A$16 | 约束 | 1/9 | 1/9 | 0 | 1 1/4 | 1 |
| $A$17 | 约束 | 1 | 1/9 | 1 | 1E+30 | 1 |

**15.053　　　　3 月 14 日，周四**

- 网络流理论简介
- 分发：讲稿

## 网络模型

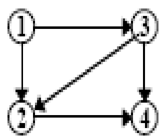
- 具有非常特殊结构的线性规划模型
- 应用该结构可极大降低计算复杂度
- 线性规划在企业物流问题中的首次广泛运用
- 选择大量不同的应用。

## 符号和术语

注意：网络术语并不（也永不会）标准。相同的概念有许多不同的表示方式。

右图被称为：

- 网络
- 定向图
- 有向图
- 图



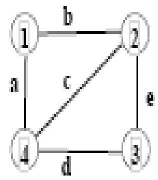

课堂印刷品（Ahuja, Maganti, Orlin）

网络 G=(N,A)　　或　图 G=(V, E)

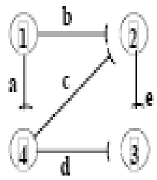
点集 N={1,2,3,4}　　顶点集 V={1,2,3,4}

弧集{(1,2), (1,3), (3,2), (3,4) , (2,4)}　　边集：A={1-2,1-3, 3-2, 3-4, 2-4}

## 有向与无向网络




无向网络



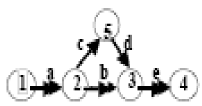

有向网络

- 网络可以用于表示运输商品
  - 实物商品（产品，流体）
  - 通讯
  - 电力等等
- 网络优化主要涉及关于网络的最优化问题。

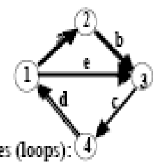
## 网络优化运用案例一览

| 应用 | 节点表示 | 弧表示 | 流 |
|---|---|---|---|
| 通讯系统 | 交换机,计算机,传输设备,卫星。 | 电缆，光缆，微波传递。 | 声音，数据，视频传输。 |
| 水力系统 | 抽水站，水库，湖泊。 | 管道 | 水,天然气,石油,流体。 |
| 计算机集成电路 | 开关，寄存器，处理器。 | 网线 | 电流 |
| 机械系统 | 铰接点 | 杆，柱，弹簧 | 热，能量 |
| 运输系统 | 交叉点，机场，列车站 | 高速路，航线，轨道 | 乘客，．货物，车 |

## 术语举例




Two paths a-b-e (or 1-2-3 and a-c-d-e (or 1-2-5-3-4)




Cycles (loops):
a-b-c-d (or 1-2-3-4-1)
b-a-d-c (or 3-2-1-4-3)
e-b-a (or 1-3-2-1)
c-d-e (or 3-4-1-3)

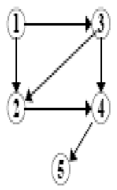
路：如 5,2,3,4.
(或 5,c,2,b,3,e,4)
注意忽略了方向。

有向路：如 1,2,3,4
(或 1,a,2,b,3,e)
方向是很重要的。

回路（环）
1,2,3,1.(1,a,2,b,3,e)
注意忽略了方向。

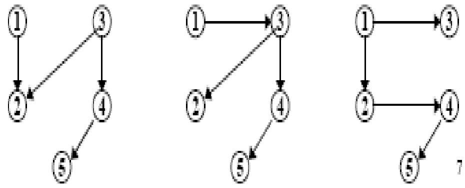
有向回路：(1,2,3,4,1)
或 1,a,2,b,3,c,4,d,1
方向是很重要的。

## 其他定义



若忽略方向从任意节点沿一系列弧可以到达其他节点，则称网络是连通的。

生成树是包含网络所有节点的无环连通子集。



7

## 最小费用流问题

网络 G=(N,A)

—节点集 N，弧集 A;

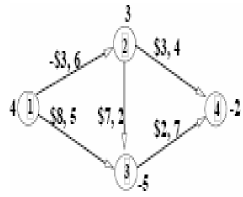
—弧(i,j)容量 $u_{ij}$

—弧(i,j)费用 $c_{ij}$

—节点 i 供/需量 $b_i$.

（正号表示供应）

带有费用，容量供需量的网络图



**目标：流的总费用最小**

**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**

**弧（i,j）上的流量≤$u_{ij}$.**

## 最小费用流问题

令 $x_{ij}$ 代表弧(i,j)上的流量。

**目标：流的总费用最小**

**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**

**$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$.**

$$MIN \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

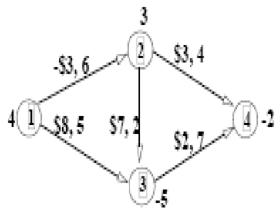
$$S.T. \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = b_i \text{对所有 } i \text{成立}$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \text{对所有 } i, j \text{成立}$$

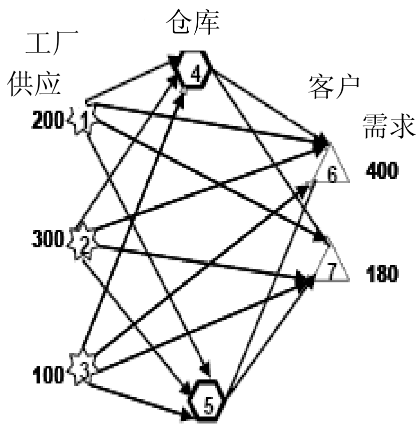
## 例题简述

$$\text{Min} \quad -3x_{12} + 8x_{13} + 7x_{23} + 3x_{24} + 2x_{34}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t} \quad & x_{12} + x_{13} = 4 \\
& x_{23} + x_{24} - x_{12} = 3 \\
& x_{34} - x_{13} - x_{23} = -5 \\
& -x_{24} - x_{34} = -2 \\
& 0 \le x_{12} \le 6 \\
& 0 \le x_{13} \le 5 \\
& 0 \le x_{23} \le 2 \\
& 0 \le x_{24} \le 4 \\
& 0 \le x_{34} \le 7
\end{aligned}$$



## 最小费用流问题的应用




从供应商运至顾客，可能通过仓库，以最小费用满足需求。

## 最小费用流问题的有益性质

- 假定约束矩阵 A（忽略变量的上下限约束）满足：
  （1） A 的元素是 1，0 或-1。
  （2） 每列最多有一个 1 和-1。
- 那么这是一个最小费用流问题。

## 有益的性质

**定理：**用单纯形法解容量和右端项为整数的最小费用流问题，那么算法迭代的每一步表中的系数（除价值系数和右端项外）都是 0,1 或者-1。

**推论：**上述线性规划的最优解是整数解。

## 最小费用流问题

网络 G=(N,A)

—节点集 N，弧集 A;

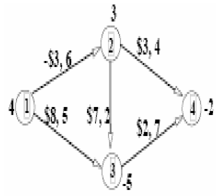
—弧(i,j)容量 $u_{ij}$

—弧(i,j)费用 $c_{ij}$

—节点 i 供/需量

（正号表示供应）

带有费用，容量供需量的网络图



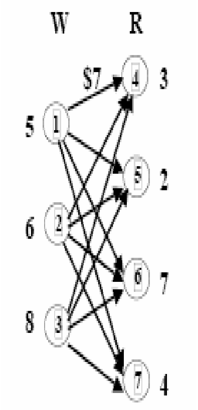
**目标：流的总费用最小**

**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**

**弧（i,j）上的流量≤$u_{ij}$.**

## 运输问题

假设将货物从仓库运往零售商。




本例中：

有 3 个仓库

4 个零售商

$a_i$ 仓库 i 的供应量

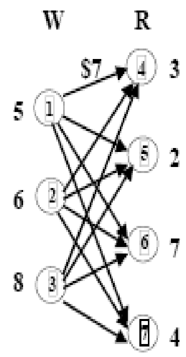
$b_j$ 零售商 j 的需求

$c_{ij}$ 从 i 到 j 的费用

没有弧容量限制。

令 $x_{ij}$ 为从仓库 i 到零售商 j 的运输量。如何建立线性规划？

## 运输问题是一个最小费用流问题




**目标：流总费用最小**

**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**

**$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$.**

从在供应节点流出，流入需求节点。无容量限制，$u_{ij}=\infty$。

## 运输问题

一般地，运输问题的线性规划为

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i = 1,\ldots,m \qquad \text{S：供应点}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j = 1,\ldots,n \qquad \text{D：需求点}$$

$$x_{ij} \ge 0, \forall ij$$

所有弧都从 S 中节点指向 D 中节点且容量冗余。

## 运输问题的有益性质

假定：

（1） 约束矩阵可分解为 $A_1x=b_1, A_2x=b_2$

（2） $A_1$ 和 $A_2$ 的所有元素都是 0 或 1

（3） $A_1$ 或 $A_2$ 的任一列中最多有 1 个 1

那么这是一个运输问题。

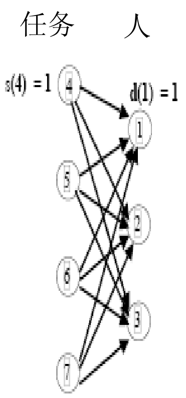
**定理：**如果用单纯形法解运输问题，那么算法迭代的每一步表中的系数（除价值系数和右端项外）都是 0 或 1 或者-1。价值系数和右端项均是整数。

**推论：**运输问题的最优解是整数解。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 指派问题

假定要给不同人指派任务




本例中：
有 3 个人
4 个任务
1 个人不得分配 2 项任务。
$c_{ij}$ 指派任务 i 给第 j 人的费用。

令 $x_{ij}=1$ 表示派任务 i 给 j，否则 $x_{ij}=0$。
如何建立线性规划？

## 指派问题

一般地，指派问题的线性规划为

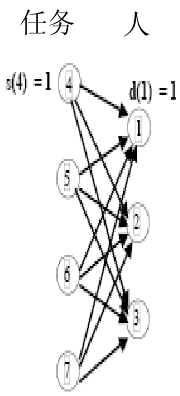
$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \forall i=1,\ldots,n \qquad \text{每个供应量 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \forall j=1,\ldots,n \qquad \text{每个需求量 1}$$

$$x_{ij}=0 \text{ or } 1, \forall ij$$

## 指派问题的更多内容

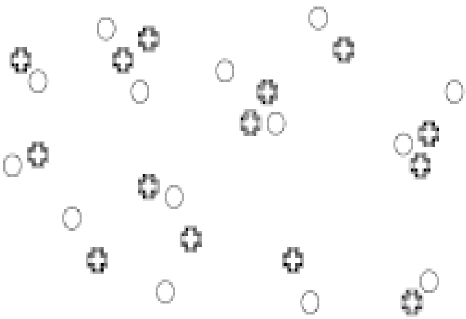



指派问题是运输问题的特例。

单纯形算法能够解决松弛的线性规划问题，并给出整数解，即可以解决指派问题。

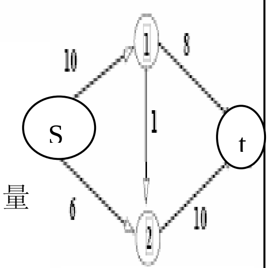
## 指派问题的应用

假定空中存在移动的目标。在雷达上每个目标可以显示为一个像素。考察 2 张连续照片，确定目标如何移动。



## 最大流问题

网络 G=(N,A).
—源 s,汇 t
—弧(i,j)容量 $u_{ij}$
—变量：弧(i,j)流量 $x_{ij}$




有容量的图

**最大化流出 s 的流量**
**约束：i 流出量- i 流入量=0,**
**i 点非源，汇点**
**$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$**

## 最大流问题

一般地，最大流问题的线性规划为

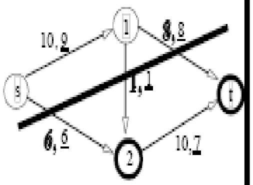
$$\text{Maximize} \quad v$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} v, & i=s \\ -v, & i=t \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad \forall i=1,\ldots,n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \ \forall ij$$

这不是构建最小费用流问题的特例。能否那样构建问题模型吗？

## 最大流问题的更多内容




带有容量、流量（下划线）的图。

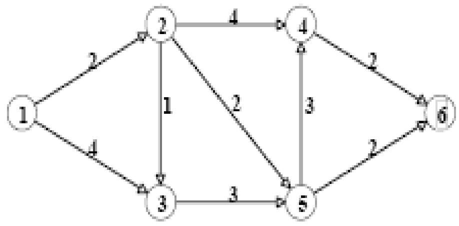
当前流最优么？

s-t 割集将图分为 2 部分，s 在 S 中,t 在 T 中。

割容量是指 S 到 T 的容量之和。

s 到 t 的最大流最大为 s-t 割的割容量。

## 最短路问题




从源或初始节点(s)到目的地或汇(t)的最短路是什么？从节点 1 到节点 6 的最短路是什么？

假定：

1. 从 s 有到所有其他节点的路径。
2. 所有弧的长度都非负。

## 直接应用

- 从.麻萨诸塞州的 77 号大街最短时间内赶到波士顿市政厅的路径是什么？
- 从 7 号楼到 E40 号楼的最快路径是什么？
- 从 i 到 j 最快的通讯路径是什么（阻塞视为节点）？

## 构建线性规划模型

一般地，线性规划问题为

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} 1, & i=s \\ -1, & i=t \quad \forall i=1,\dots,n \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$x \geq 0, \ \forall ij$$

## 最短路问题

- 事实：最短路问题是最小费用流问题的特例。
- 许多有趣的应用（后面介绍）。
- 非常快的算法（后面介绍）。
- 与动态规划相联系（从现在开始几讲之后）。

## 结论

- 运输问题与最小费用流问题的优点
  ——整数解
  ——快速求解方法
  ——通用模型
- 今天的内容：
  ——最小费用流问题
  ——运输问题
  ——指派问题
  ——最大流问题
  ——最短路问题

**15.053　　　3 月 19 日，周二**

- 解最小费用流的网络单纯形法

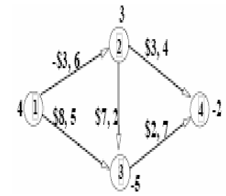
分发：讲稿

警示：有许多网络单纯形算法，有些甚至和单纯形算法是一样的。

## 最小费用流问题

网络 G=(N,A)
—节点集 N，弧集 A;
—弧(i,j)容量 $u_{ij}$
—弧(i,j)费用 $c_{ij}$
—节点 i 供/需量 $b_i$
（正号表示供应）

带有费用，容量供需量的网络图




**目标：流的总费用最小**
**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**
**弧（i,j）上的流量≤$u_{ij}$.**
**0≤$x_{ij}$≤$u_{ij}$**

## 建模

给出该问题的线性规划模型如下：

Minimize $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i, \forall i = 1,\ldots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

## 定价

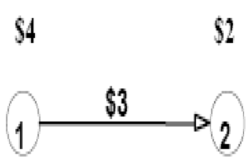
$x_{ij}$

$c_{ij}$　　$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$　　定价

行 i　　0 / 1 / 0　　$b_i$　　i 的供应量　　$y_i$

行 j　　-1　　$b_j$　　j 的供应量　　$y_j$

## 称 $y_i$ 为节点 i 的节点势




$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$

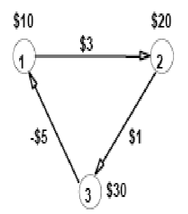
$\bar{c}_{12} = \$3 - \$4 + \$2 = \$1$

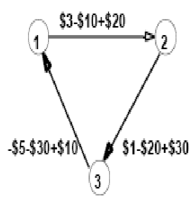
对每单位流量，定价如同出口奖励和进口关税。

网络单纯形算法的检验数是关键。

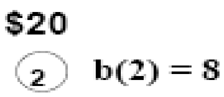
## 回路检验数

- 对任意弧 (i,j)，$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$
- 回路检验数就是回路的费用。
- 在节点 2 上将弧 (1,2) 的费用增加 $20，弧(2,3)的费用减少$20。



重要性质：关于费用 **c** 的最优化与检验数 $\bar{c}$ 的优化是一样的。



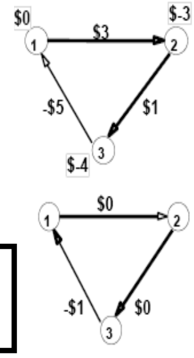

考虑节点 2 的节点势的影响。

- 每单位流出量费用减少$20。
- 每单位流入量费用增加$20。
- 流出比流入多 8。

对费用的净影响：8×$20=$160，不管流。

利用检验数

- 对任意弧 (i,j)，
  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - y_i + y_j$
- 假定弧（1,2）与(2,3)的检验数是 0。




**注意：下面，回路费用就是（3,1）的检验数。**

一些假设

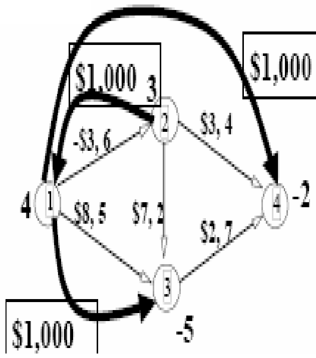
**1.** **网络是有向的。**

2. $\sum_{i=1...n} b(i) = 0$。（否则没有可行解）

3. 有一个可行解（见下页）。

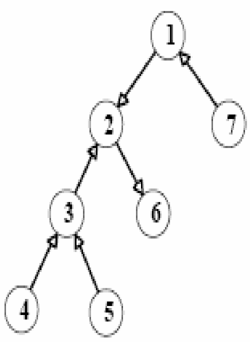
一个人工的初始基本可行解

- 对于每个 b(j)<0，增加弧（1,j）带有最高的费用。
- 对于每个 b(j)>0，增加弧（j,1）带有最高的费用。




从节点 1 到 4 发送 2 单位流，3 单位到节点 3，从节点 2 到 1 发送 3 单位流。

基变量是弧流量，这些弧形成一棵生成树




有一个节点叫做*根节点*。

从根节点到任意其他节点有一条唯一的路径（无方向）。

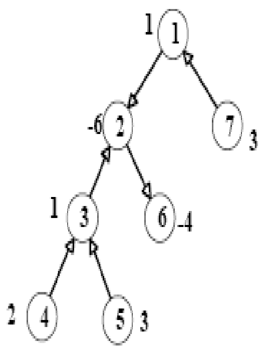
从节点 1 到 5 的路径是什么？

单纯形算法回顾

- 第一步 从一个基本可行解开始
- 在我们的算法中，从生成树开始，然后确定它的流量。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 计算生成树

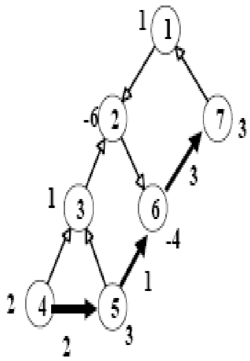


一棵有供应和需求的树。（假定其他弧流量是 0。）

弧 (4,3) 流量多大？
提示：节点 4 的供应为 2。

看动画演示

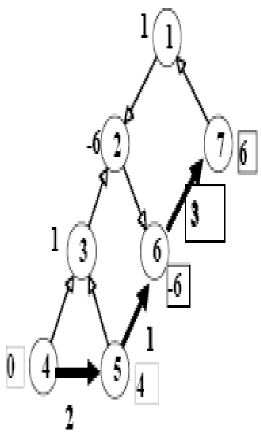
## 若非树弧流量非 0，将会怎样？



假设非树弧流量非 0。

这将会怎么影响计算？

## 若非树弧流量非 0，将会怎样？



考虑到流的上限，调整供应/需求量。

与前面的方法一样计算流。例如，弧 (4,3) 的流量是多少？

**弧(4,3)的流量是 0。**

## 上限

- 在单纯形法中，非基变量流量为 0。
- 在有上限的单纯形算法里，非基变量的流量是 0。

—或者是约束上限。

—非基变量流量上限改变了节点的净供应量。

## 单纯形算法

- 步骤 1A　从一个基本可行解开始。
- 步骤 1B　计算单纯形乘子，使检验数都为 0。（也就是说，确保费用系数也是规范形式。）

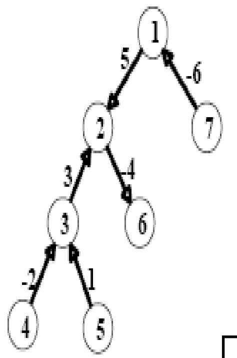
## 确定乘子

- 首先依据基变量的性质

$c_{ij}-y_i+y_j=0$，　$i=1,..n$,

来确定乘子 $y_i$。

## 计算生成树的单纯形乘子



这是带有弧费用的生成树。如何选择节点势，使树的每个弧的检验数是 0?

看动画演示

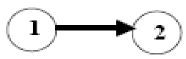
注意：弧(i,j)的检验数是 $c_{ij}-\pi_i+\pi_j$
假定 $\pi_1$=0。

## 最优性条件

- 确定乘子以后，检查每个非基本弧的最优性条件。

$$\bar{c}_{ij}=c_{ij}-y_i+y_j\begin{cases}\geq 0 & \text{if } x_{ij}=0\\ =0 & \text{if } 0<x_{ij}<u_{ij}\\ \leq 0 & \text{if } x_{ij}=u_{ij}\end{cases}$$

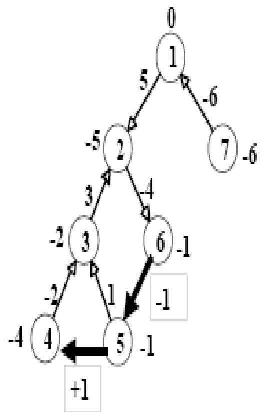
## 看一条弧的情况。



假定 $\bar{c}_{12}\leq 0$ 。那么，我们希望流量尽可能大。若 $x_{12}<u_{12}$，则弧(1,2)流量非最优。我们希望增加流量，若 $x_{12}=u_{12}$，则最优。

假定 $\bar{c}_{12}\geq 0$ 。那么，我们希望流量尽可能小。若 $x_{12}>0$，则弧(1,2)流量非最优。我们希望减少流量，若 $x_{12}=0$，则最优。

## 检查检验数



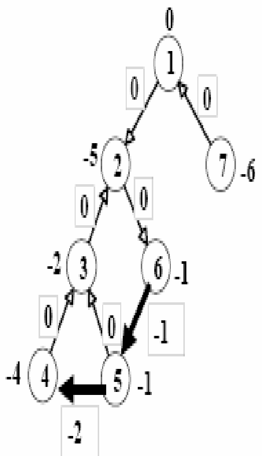
首先，确定节点势，这样所有树弧的检验数是 0 。

22

## 检查检验数

上限

下限



弧 (6,5) 正在最小值，这是一条不符合最优性条件的弧，可以进基。
弧 (5,4) 正在最大值。满足最优性条件。

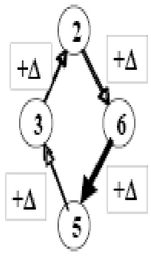
## 单纯形算法

- 步骤 1A 从一个基本可行解开始。
- 步骤 1B 计算单纯形乘子，使检验数都为 0。
- 第 2 步 选择不符合最优性条件的变量入基。
  在前面的例子中，可以选择弧(6,5)而不是(5,4)。

那条弧应当入基?

- 在有界变量的网络单纯形法中，非基变量是处于上界值或下界值。可以通过以下方法找到更优的解：
  —1. 将检验数为负，而处于下界值的变量增大。
  —2. 将检验数为正，而处于上界值的变量减小。

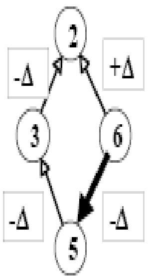
若入基弧正处于下界值，将其增加 Δ




为生成树增加一条非基弧，形成一个基本回路。

调整基本回路中的流量这样供应/需求约束仍然满足。

若入基弧正处于下界值，将其增加 Δ




假定弧(6,5)正处于上界流量。调整基本回路的流量使供应/需求约束仍然满足。

当 Δ 增加时，一些树弧将达到其流量下限或上限。（或者最优解无界）则该弧离基。

网络单纯形算法

begin
  确定初始可行树结构（T,L,U）
  令 x 为初始流
  令 y 为初始节点势
While 一些树弧违反最优性条件 do
    begin
      选择违反最优性条件的弧(k,l)，入基。将其加入树中，在基本回路中调整流量，以确定出基弧。
      重新计算节点势。
    end
end

基本要点

- 一个基对应于网络的一棵生成树
- 在基中加入一个新变量，在生成树中构成唯一回路，将限制回路流量的变量从基中去掉。
- 计算节点势有快速的计算方法，但这里不讨论它。

看动画演示

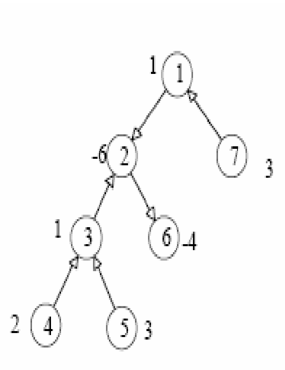
结论

- 网络单纯形法方法
  —是解最小费用流问题的技术
  —思想源于单纯形方法
  —基本解是生成树

**15.053**

# 网络单纯形法演示

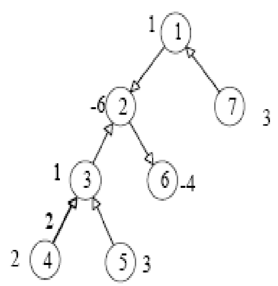
## 计算一棵生成树流



一棵有供应和需求的树。（假定其他弧流量是 0）。

弧 (4,3) 的流量多大？

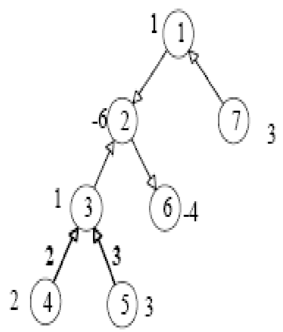
## 计算一棵生成树流



要计算流量，重复观察树，找出流量是唯一确定的弧。

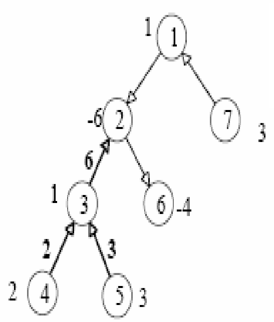
弧(5,3)流量多大？

## 计算一棵生成树流



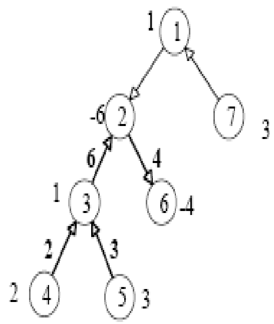
弧 (3,2) 的流量多大？

## 计算一棵生成树流



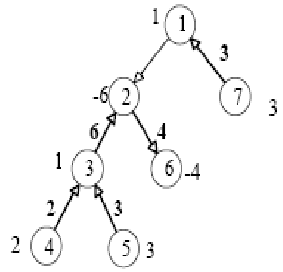
弧 (2,6) 流量多大？

## 计算一棵生成树流



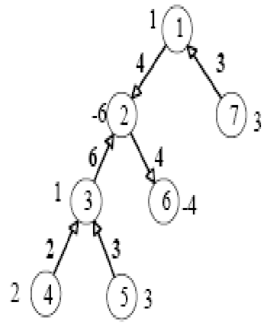
弧 (7,1) 的流量多大？

## 计算一棵生成树流



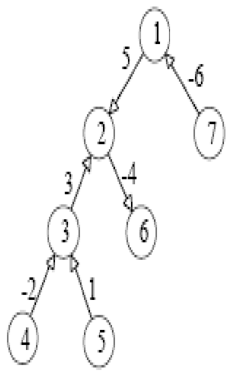
弧(1,2)流量多大？

## 计算一棵生成树流



注意：有两种方法计算弧(1,2)的流量，结果都是 4。这是不是巧合？

## 计算生成树的单纯形乘子

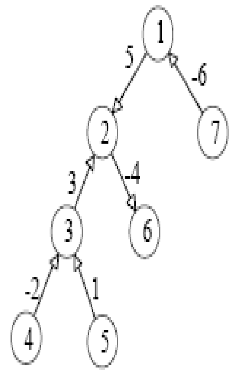


具有弧费用的生成树。如何选择节点势使树的检验数为 0？

注意：（i,j）的检验数是：

$c_{ij}-\pi_i+\pi_j$

## 计算生成树的单纯形乘子

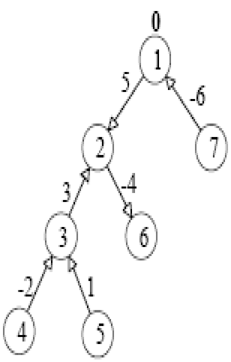


具有弧费用的生成树。如何选择节点势使树的检验数为 0？

注意：（i,j）的检验数是：

$c_{ij}-\pi_i+\pi_j$

## 计算生成树的单纯形乘子

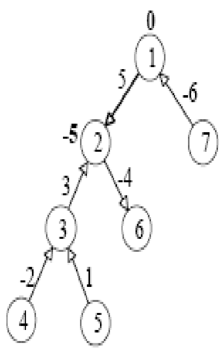


在最小费用流问题中有一个多余的约束。

可以自主确定 $\pi_1$，令 $\pi_1=0$ 。

节点 2 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子

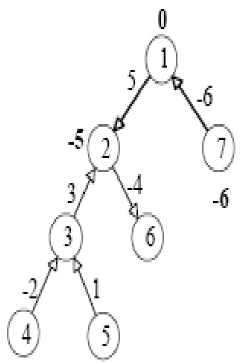


(1,2)的检验数是 $c_{12}-\pi_1+\pi_2=0$.

故 $5-0+\pi_2=0$.

节点 7 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子

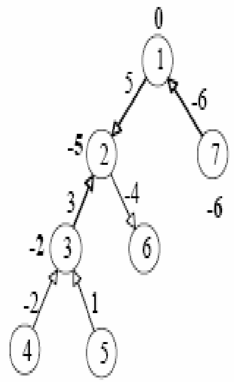



(1,2)的检验数是 $c_{71}-\pi_7+\pi_1=0$.

故 $-6-\pi_7+0=0$.

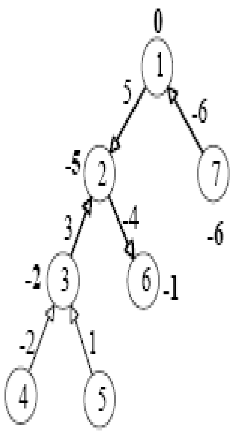
节点 3 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子



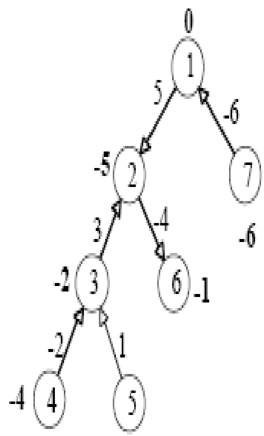

节点 6 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子



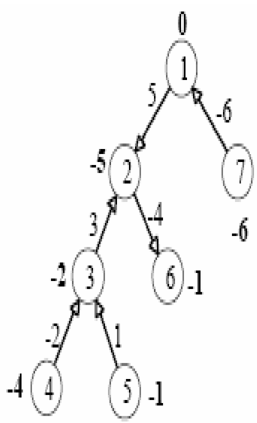

节点 4 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子



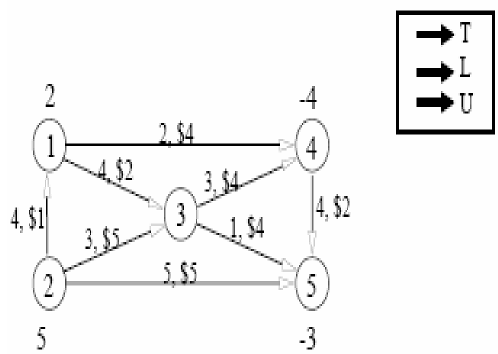

节点 5 的单纯形乘子是什么？

## 计算生成树的单纯形乘子




这是这棵树有关的单纯形乘子。他们不依靠弧流量，也不依靠非树弧费用。

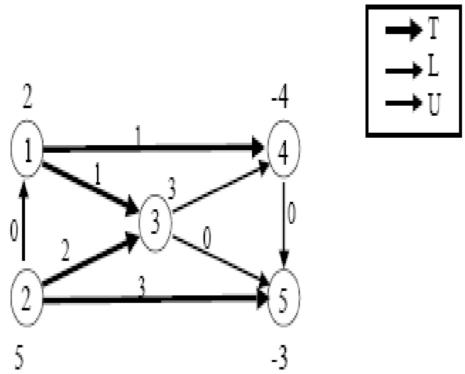
## 网络单纯形算法




最小费用流问题

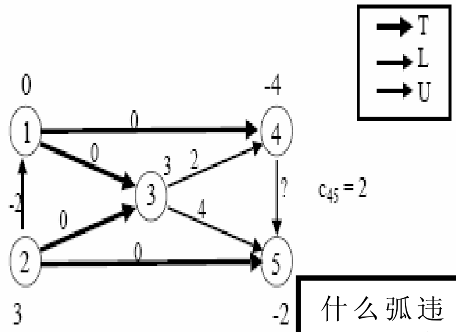
PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

生成树流量




一棵初始生成树解

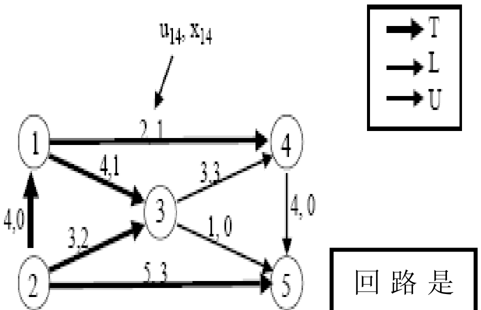
单纯形乘子与检验数




初始单纯形乘子与检验数。

什么弧违背最优条件？

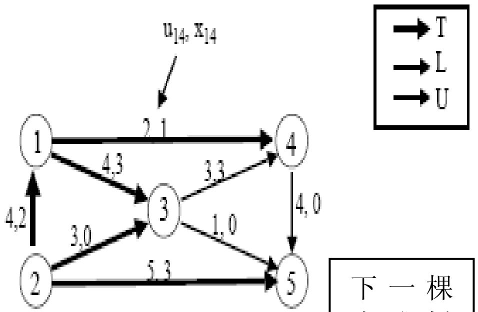
将一条违背弧加入到生成树中构成回路




将(2,1)加入树中。

回路是什么？可以发送多少流量？

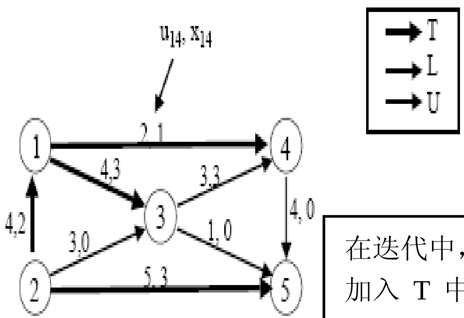
沿回路发送流量




沿回路发送 2 单位流量。

下一棵生成树是什么？

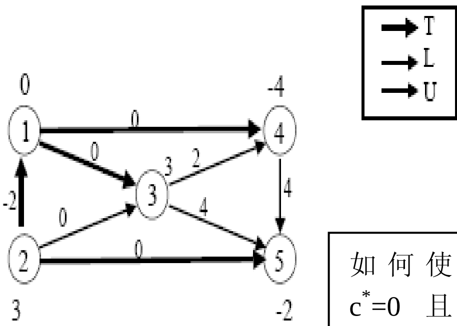
经过一轮迭代后




更新的生成树

在迭代中，加入 T 中一条弧，从 T 中去掉一条弧。

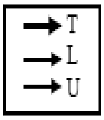
更新乘子

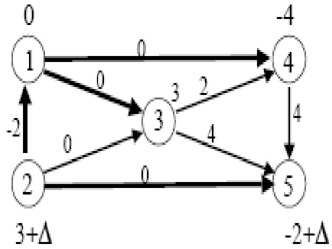



当前乘子与检验数

如何使 $c^*=0$ 且其他树弧检验数为 0？

去掉弧(2,1)，将 T 分成两部分

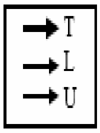


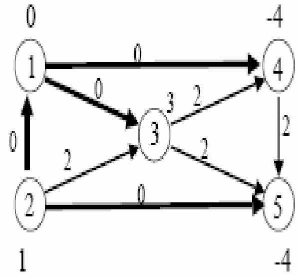



给树的一端节点增加 Δ 不会影响除(2,1)外树弧的检验数。为什么？

Δ 应多大才能使 (2,1)的检验数为 0？

更新的乘子与检验数

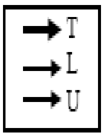


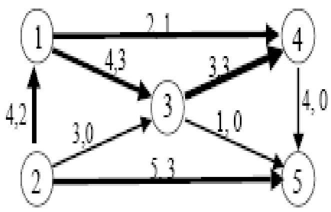



更新的乘子与检验数

这个树解是最优解么？

将一条违背弧加入到生成树中构成回路

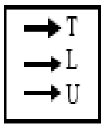


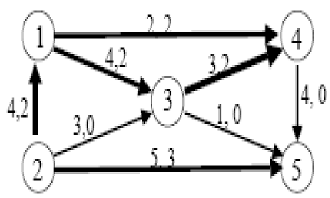



将弧(3,4)加入生成树中

回路是什么？可以发送多大流量？

沿回路发送流量

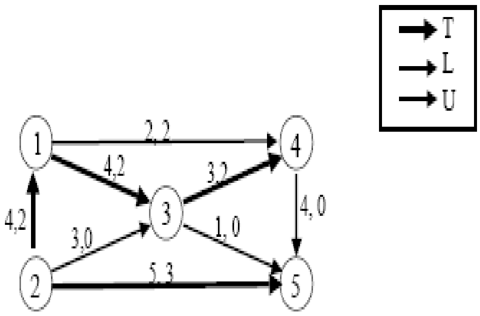


沿回路发送 1 单位流量。

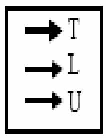
下一棵生成树是 什么？

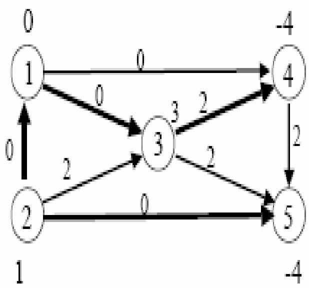
下一棵生成树解




更新的生成树

更新乘子



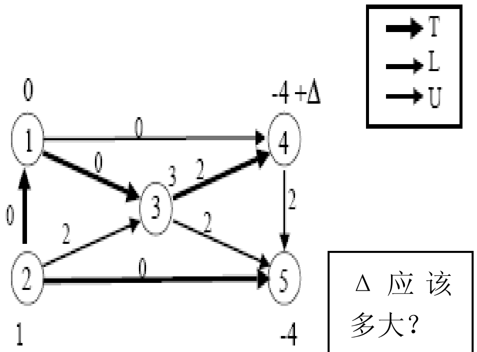



当前乘子

如何修改乘子呢？

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

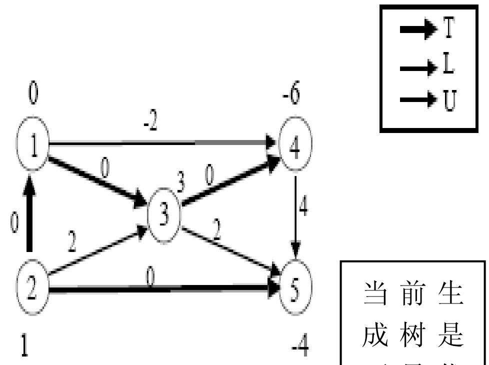
更新乘子




Δ 应该多大？

当前乘子

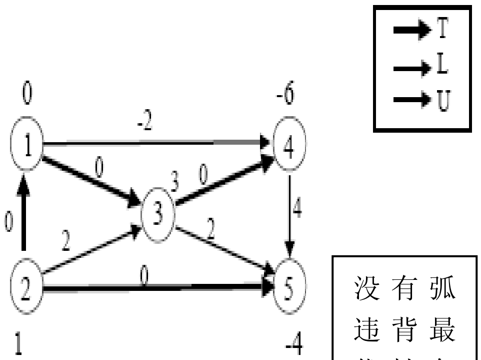
更新乘子




当前生成树是否最优解？

更新的乘子

最优解




没有弧违背最优性条件。

这是最优解

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　4 月 2 日，周二**

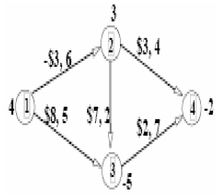
- **最短路问题**
- **解最短路问题的 Dijkstra's 算法**

分发：讲稿

## 最小费用流问题

网络 G=(N,A)
—节点集 N，弧集 A;
—弧(i,j)容量 $u_{ij}$
—弧(i,j)下限 0
—弧(i,j)费用 $c_{ij}$
—节点 i 供/需量
（正号表示供应）

带有费用、容量
供需量的网络图




**目标：输送流的总费用最小**
**约束：i 节点流入量-i 节点流出量=$b_i$**
**弧（i,j）上的流量<=$u_{ij}$.**
**$0<=x_{ij}<=u_{ij}$**

## 建模

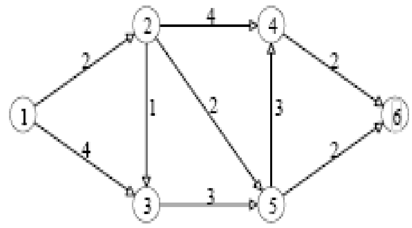
给出该问题的一般线性规划模型如下：

$$\text{Minimize}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i, \forall i = 1,\ldots,n$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij}$$

## 最短路问题




从源节点(S)到汇节点(T)的最短路是什么?从节点 1 到节点 6 的最短路是什么?
本节假设：
1． 从源点到所有其他节点都存在路
2． 所有弧长度都非负

## 构建线性规划

从源点 s 到汇点 t 的最短路的线性规划问题一般可表示为：

$$\text{Minimize}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} 1, & i = s \\ -1, & i = t \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

$$x \ge 0,\ \forall ij$$

## 另一种形式

从源点 s 到汇点 t 的最短路的线性规划问题可表示为：

$$\text{Minimize}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = \begin{cases} n-1, & i = s, \\ -1, & i \in N - \{s\} \end{cases}$$

$$x \ge 0,\ \forall ij$$

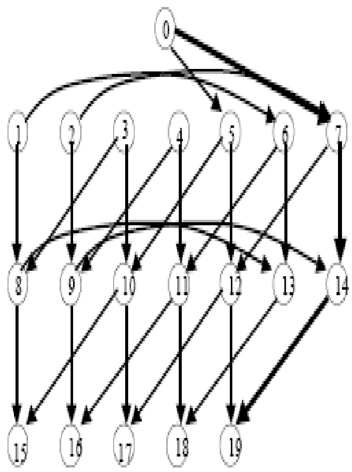
## 有关最短路的一些问题

- 现实中如何引起的？
  —直接应用
  —间接（通常很微小）应用
- 如何解最短路问题？
  —Dijkstra’s 算法
- 如何衡量算法的性能？
  —CPU 时间
  —性能保障
- 如何确定解是真的最短路？
  —和对偶线性规划联系

## 可能的运动得分

- Flumbaya 是一项非常规水上运动，运动过程中可以得 2 类分数。进一个 gymbol 得 7 分，进一个 quasher 得 5 分。电视播报显示最近的比赛比分是 19：18，这可能么？

## Flumbaya 的更多内容




从节点 0 到节点 18 没有通路。因此 18 分不可能。

## Flumbaya 的更多内容

数据：Gymbol 得 $n_1$ 分，Quasher 得 $n_2$ 分

确定得分是否可为 q

网络图：G=(N,A)，其中 N={0,…q}

对每个节点 j=0 到 q-$n_1$ ,(j,j+$n_1$)∈A，

对每个节点 j=0 到 q-$n_2$ , (j,j+$n_2$)∈A

问题：图 G 中有从节点 0 到 q 的路径么？

提示：若 $n_1$ 和 $n_2$ 除了 1 和-1 之外没有公共整数约数，则不可能的得分数是 $(n_1-1)(n_2-1)/2$。证明需要更多事实。（警示：证明是很困难的）

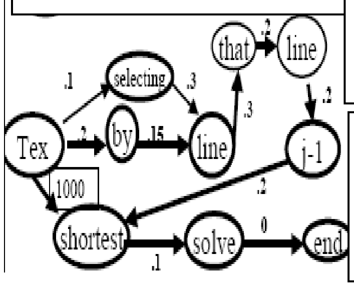
## 间接应用：寻找最优段落编排

通过最优选择每行间断点，T$_e$X 将段落最优分解。它有一个子程序可以计算从第 i 个单词到第 j-1 个单词的引力 F(i,j)。如何运用 F(i,j)，建立一个最短路解决段落分解问题？

## 间接应用：寻找最优段落设计

通过最优选择每行间断点，T$_e$X 将段落最优分解。它有一个子程序可以计算从第 i 个单词到第 j-1 个单词的引力 F(i,j)。如何运用 F(i,j)，建立一个最短路解决段落分解问题？

每个单词对应于一个节点，弧 (i,j) 表示行从第 i 个单词到第 j-1 个单词。从 Tex 到 end 对应一段落分解。



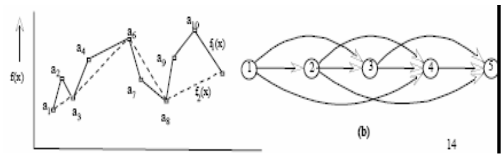

路径的值叫做路径的“**ugliness**”。

## 关于段落问题例子

- n 个不同的肯定否定决策
  决策 j:
  —肯定：从第 j 个单词开始形成一行
  —否定：不从第 j 个单词开始形成行
- 每个肯定决策的费用依靠下面的肯定决策
  —f(i,j)是假定第 j 个单词从下行开始时，从第 i 个单词开始行的费用。
- 运用节点 1,2……n+1 建立最短路问题，其中弧(i,j)的费用是 f(i,j)。从节点 1 到节点 n+1 的最短路是什么？

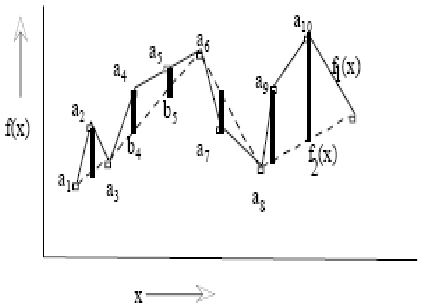
## 数据压缩中的应用：近似分段线性函数

- 输入：分段线性函数
  —n 个点,$a_1=(x_1,y_1)$,$a_2=(x_2,y_2)$,…，$a_n=(x_n,y_n)$
  —$x_1<=x_2<=\ldots<=x_n$
- 目标：用少量的点近似函数 f
  —$c^*$：加入每个点的费用
  —$c_{ij}$：近似函数从点 i 通过点 i,i+1,…j-1，到点 j 的费用。（误差和或者误差平方）



## 近似分段线性函数

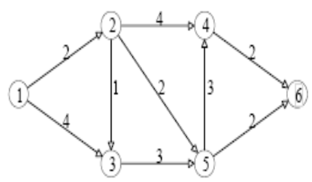
- 目标：用少量的点近似函数 f
  —$c^*$：加入每个点的费用
  —$c_{36}=|a_4-b_4|+|a_5-b_5|$=误差总和（其他都没有错误）



## 关于近似函数

- n 个不同的肯定否定决策
  决策 j:
  —肯定：选择第 j 个单词
  —否定：不选择第 j 个单词
- 每个肯定决策的费用依靠下面的肯定决策
  —$c_{ij}$ 是考虑选择第 i 个点，第 i+1 个点，…第 j-1 个点到第 j 个点的费用。
- 运用节点 1,...n 建立最短路问题，其中弧(i,j)的费用是 $c_{ij}$。从节点 1 到节点 n 的最短路是什么？

## 最短路问题的 Dijkstra 算法



与同伴一起观察，寻找最短路。

练习：寻找从节点 1 到其他节点的最短路，用标签 d(i)标记距离，以及每个节点直接的前节点 pred(i)。

d(1)=0, pred(1)=0

d(2)=2, pred(2)=1

按照递增顺序，确定到节点 1 的其他距离。

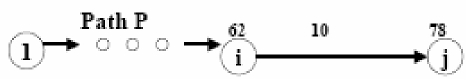
## 最短路算法的关键步骤

- 令 d( )代表暂时的标签距离向量
- d(j)是从起始节点到节点 j 某路径的距离。
- 刷新程序

**Procedure Update(i)**

for **each (i,j)**∈ **A(i)** do

if **d(j) > d(i) +** $c_{ij}$ then **d(j) : = d(i) +** $c_{ij}$ **and pred(j) : = i;**




至此，从节点 1 到 j 的最短路长 78。

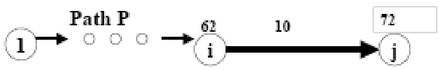
## 最短路算法的关键步骤

- 令 d( )代表暂时的标签距离向量
- d(j)是从起始节点到节点 j 的路径的距离。
- 刷新程序

**Procedure Update(i)**

For **each (i,j)∈A(i)** do

if **d(j) > d(i) +** $c_{ij}$ then **d(j) : = d(i) +** $c_{ij}$ **and pred(j) : = i;**




p(1,j)是从节点 1 到 j 的路径，长 72。

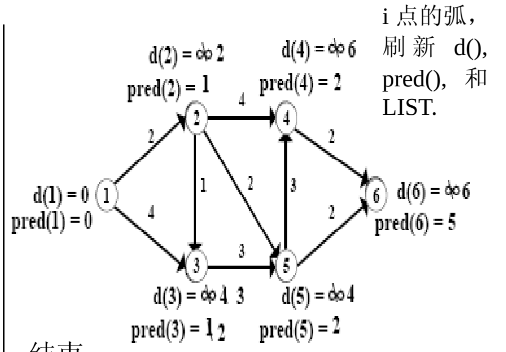
## Dijkstra 算法

```
begin
  d(s) : = 0 and pred(s) : = 0;
  d(j) : = ∞ for each j ∈ N - {s};
  LIST : = {s};
  while LIST ≠ ϕ do
  begin
     let d(i) := min {d(j) : j ∈ LIST};
     remove node i from LIST;
     update(i)
     if d(j) decreases, place j in LIST
  end
end
```

距离初始化 LIST= 暂时节点集。

从 LIST 中选择标签距离最小的节点 i，执行刷新程序 **Update(i)**。

## 一个例子



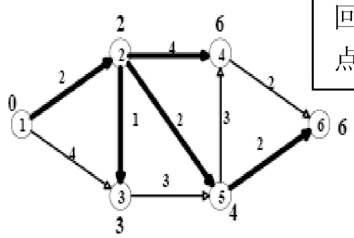

观察流出 i 点的弧，刷新 d(), pred(), 和 LIST.

结束

**LIST = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**

找到 LIST 中距离最小的节点 i.

## Dijkstra 算法的计算结果



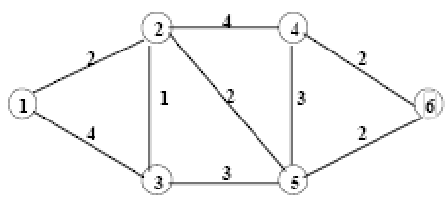
要从节点 j 寻找最短路，从节点回塑到源点。

Dijkstra 算法提供了从节点 1 到其他节点的最短路。它提供了一颗最短路树。

## 运算时间评价

- Dijkstra 算法当前形式是有效的，运算时间以 n 的平方方式增长。
- 算法可以改造得更加有效
- 实际运算中，运算时间与弧的数量呈线性关系（或者几乎是）。

## 线绳解与对偶线性规划



令 d(j)代表起始点到节点 j 的距离。

d(1) = 0

d(2) <= d(1) + 2;

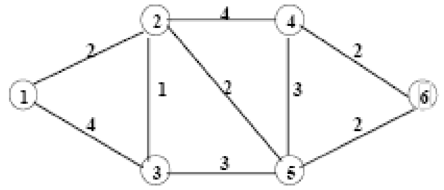
d(5) <= d(2) + 2; d(2) <= d(5) + 2

d(5) <= d(3) + 3; d(3) <= d(5) + 3

etc.

对偶规划：
Max d(t)-d(s)
s.t. d(s)=0
d(j)<=d(i)+$c_{ij}$

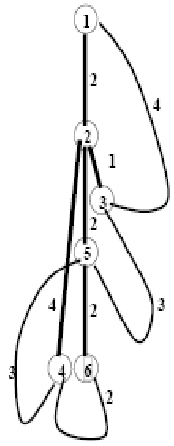
## 线绳解




想象用相同长度的线替代弧，那么弧(1,3)将被连接节点 1 和 3 的长为 4 英尺的线段代替。

现在一手抓住节点 1，一手抓住节点 6，拉紧线。

## 线绳解



是否得到从节点 1 到节点 6 的最短路？若是，为什么？

注意：在某种意义上是最小化节点 1 到 6 物理上的距离。

## 总结

- 最短路问题的直接和间接应用。
- Dijkstra 算法可以按照到源点距离递增顺序，计算节点 1 到其他节点的最短路径。
- 瓶颈步骤在于确定最短距离的标签。通过加速本步，可以获得极有效率的算法。
- 线绳解是对偶线性规划的最优解，也是最短路问题的最优解。

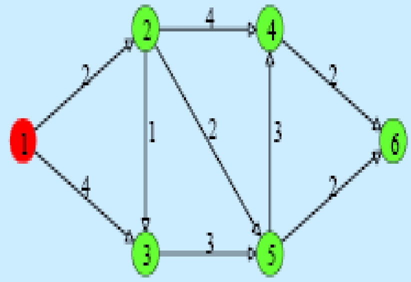
## 一些最终注解

- 最短路问题多次在网络优化中出现
- 与动态规划有很有趣的联系
- 还有其他求解技术，后面将介绍一种。

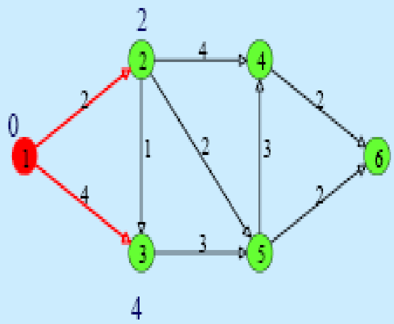
**15.053**

- 最短路问题的 **Dijkstra’s** 算法

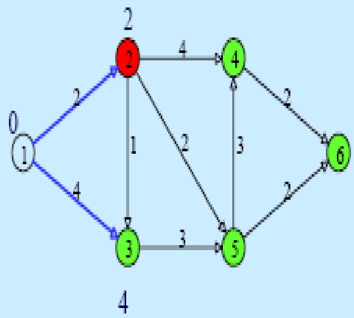
## 一个例子



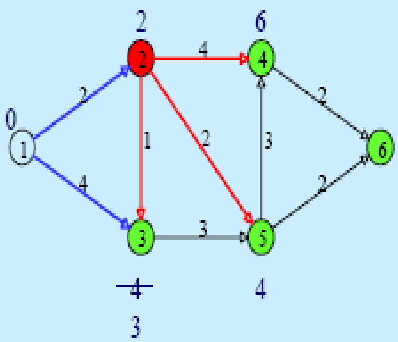
## 刷新步骤



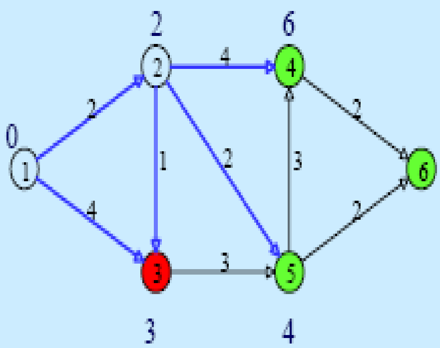
## 选择最小临时标签



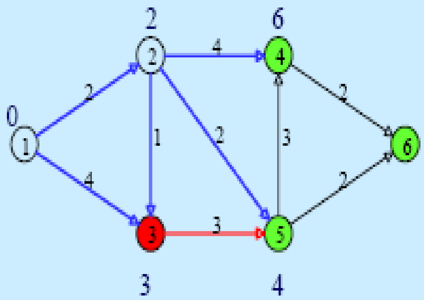
## 刷新步骤



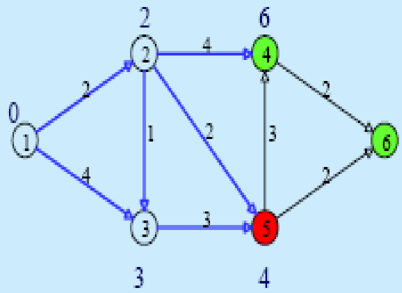
## 选择最小临时标签



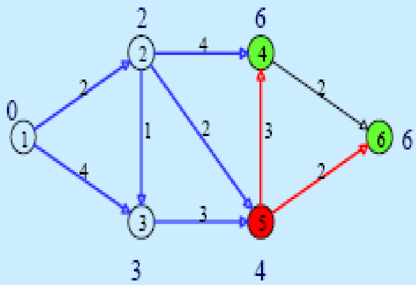
刷新步骤



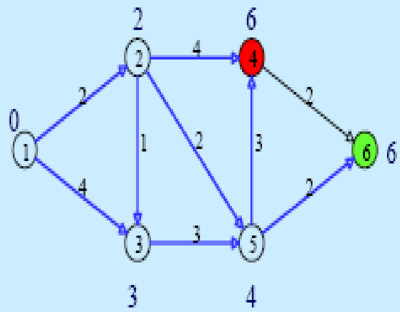
选择当前最小标签



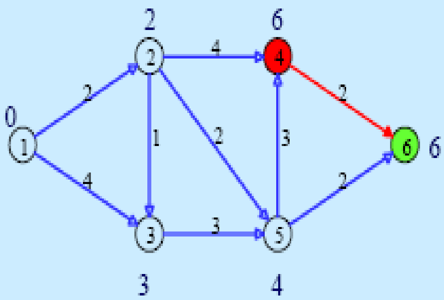
刷新步骤



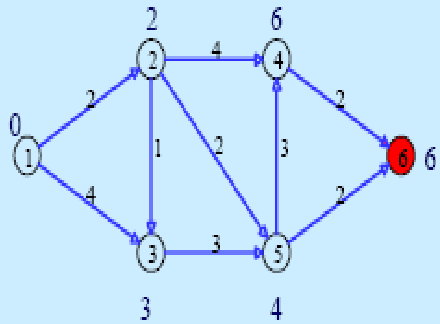
选择最小临时标签



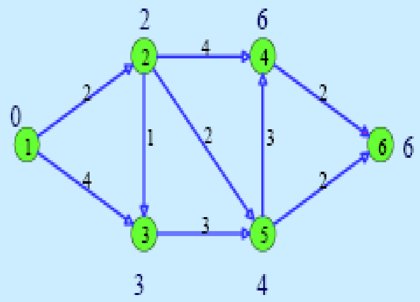
刷新步骤



选择最小临时标签



算法结果



PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

| Microsoft Excel 9.0 灵敏度分析报告 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Worksheet:[12_Game_Theory_Example.xls] 最优解 | | | | | | |
| 报告创建时间: 10/6/2001 5:59:51 下午 | | | | | | |
| 可变单元格 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 检验数 | 目标函数系数 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $I$4 | 概率 | 7/18 | 0 | 0 | 1 | 2/7 |
| $I$5 | 概率 | 5/18 | 0 | 0 | 1/2 | 2/5 |
| $I$6 | 概率 | 1/3 | 0 | 0 | 1 2/3 | 1/3 |
| $I$9 | | 1/9 | 0 | 1 | 1E+30 | 1 |
| 约束 | | | | | | |
| 单元格 | 名称 | 最终值 | 影子价格 | 约束右端项 | 允许增加量 | 允许减少量 |
| $A$14 | 约束 | 1/9 | 1/3 | 0 | 1 2/3 | 1/3 |
| $A$15 | 约束 | 1/9 | 5/9 | 0 | 1 | 0.2 |
| $A$16 | 约束 | 1/9 | 1/9 | 0 | 1 1/4 | 1 |
| $A$17 | 约束 | 1 | 1/9 | 1 | 1E+30 | 1 |

**15.053　　　　4 月 4 日，周四**

- 整数规划简介
  整数规划模型

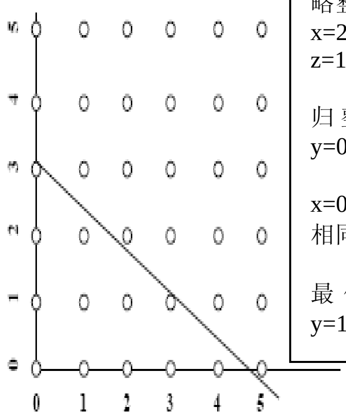
分发：讲稿

**一个两变量的整数规划**

Max　$3x+4y$
s.t.　$5x+8y\leqslant 24$
　　$x, y\geqslant 0$ 且为整数

- 最优解是什么？

**可行域**




解线性规划（忽略整数约束）得 x=24/5,　y=0, z=14 2/5.

归整，得 x=5, y=0, z=12.

x=0,y=3 也会有相同的目标值。

最优解：x=3, y=1, z=13

**什么是整数规划？**

- 约束变量取整数的优点
  —更加符合实际
  —适应性更强
- 不利之处：
  —建模更加困难
  —极大增加了求解难度

**关于 0-1 变量**

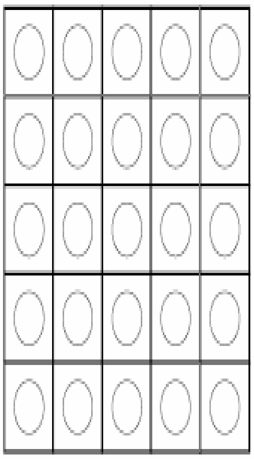
- 整数规划：线性等式与不等式加上表明变量必须取整数的约束。
- 允许“$x_j\in\{0,1\}$”,这等价于：$0\leqslant x_j\leqslant 1$，并且 $x_j$ 是整数。

**整数规划的特性**

- 一些整数规划比较容易（可以解决成千上万变量的问题）
- 一些整数规划比较困难（即使只有 100 变量也很有挑战性）
- 需要专门的技术和经验确定到底是什么情况。
- 这是 MIT 等研究比较活跃的领域。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

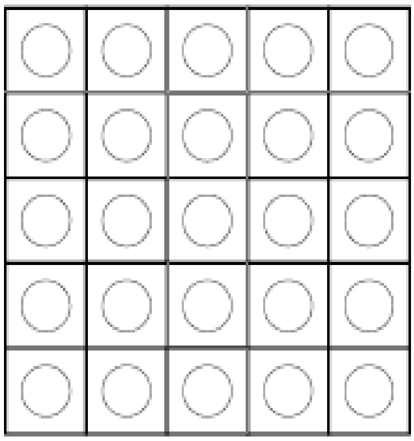
## 五元游戏



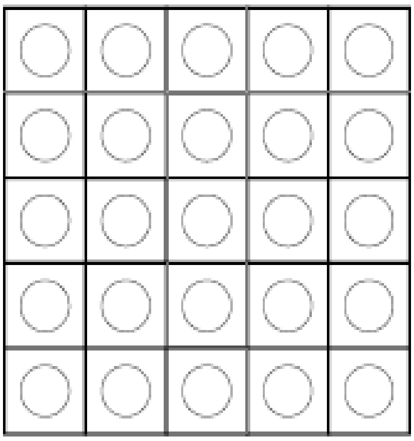
选择其中一个圆，变换它的颜色以及相邻的颜色。

可以使所有圆的颜色都是红色吗？

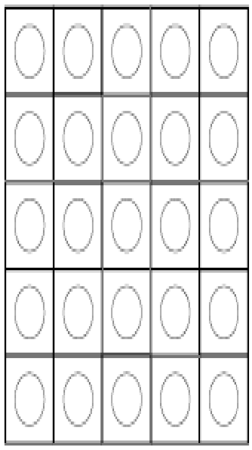
## 五元游戏



## 五元游戏

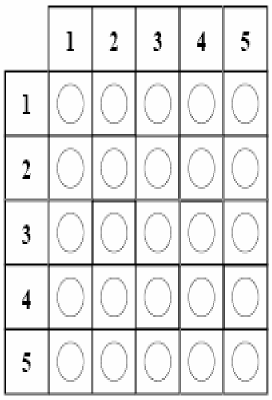


## 五元游戏



建立一个最优化问题模型，使它的解可以用最少步解决该问题。

## 五元游戏最优化模型




若选择了第 i 行第 j 列的圆，则令 x(i,j)=1，否则 x(i,j)=0。

注意第 3 行第 2 列的元素，要使它变红，必须：x(2,2)+ x(3,1)+ x(3,2)+ x(3,3)+ x(4,2) 是奇数。

## 五元游戏最优化模型

- 对于 i=1...5,j=1…5，(i,j)要为红色。
- 目标是要使步骤最少

$$\text{Min} \ \sum_{i,j=1\dots5} x(i,j)$$

s.t. 对于所有 i,j 有：
x(i,j)+ x(i,j-1)+ x(i-1,j)+ x(i+1,j)
是奇数，并且
x(i,j)=0 或 1。

- 这个模型（要稍加修订）就是整数规划。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 五元游戏最优化模型

- 对于 I=1...5,j=1…5，(i,j)要为红色。
- 目标是要使步骤最少

Min $\sum_{i,j=1...5} x(i,j)$

s.t. 对于所有 i,j 有：

x(i,j)+ x(i,j-1)+ x(i-1,j)

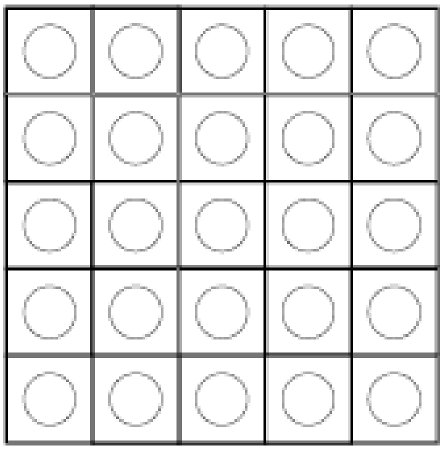
+ x(i+1,j)-2y(i,j)=1

y(i,j) 是整数,

x(i,j)=0 或 1。

- 这个就是整数规划模型。

## 要放弃解吗？



## 整数规划分类

- 所有整数规划都有线性等式和不等式约束，并且要求部分或全部变量为整数
  —若要求所有变量为整数，则通常称为纯整数规划。
  —若要求所有变量为 0-1 变量，叫做二元整数规划或 0-1 整数规划。
  —若仅要求一部分变量为整数，则叫做混合整数规划。

## Stockco 实例

**Stockco** 正考虑 6 项投资。每项投资要求的现金以及投资净现值见下表。现在可以投资的现金总量是$14000。**Stockco** 希望使净现值最大。什么是最优策略呢？

一项投资可以选择，或不选择。但是不可选择某项投资的部分。

## Stockco 实例数据

投资预算总量：$14000

| 投资 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 现金要求 (1000s) | $5 | $7 | $4 | $3 | $4 | $6 |
| NPV 增加 (1000s) | $16 | $22 | $12 | $8 | $11 | $19 |

## 整数规划模型表述

- 什么是决策变量？

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{若投资于 } 1 \,..\, 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- 约束和目标函数呢？

$$Max\ 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14$$

$$x_j \in \{0,1\} \text{ for each } j = 1 \text{ to } 6$$

### 整数规划中可能的约束

- 前面的约束代表“经济上不能分割”，项目或被选择或不选择。不能够选择项目的部分。
- 同样，正数变量可以表示逻辑要求（例如，若选择了股票 2，则必选择股票 1 。）

### 如何表示逻辑性约束

- 仅仅选择 3 支股票。
- 若选择股票 2，则必选择股票 1 。
- 若选择股票 1，则不能选择股票 3 。
- 股票 4 和股票 5 只能选择 1 个。

### 约束条件的表示

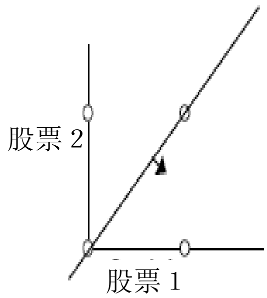
- 仅仅选择 3 支股票

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6= 3$$

### 若选择股票 2， 则必选择股票 1

2 维表示

整数规划约束条件：



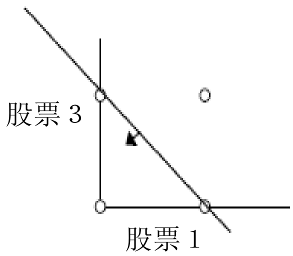

$$x_1 \geq x_2$$

与同伴一起用 5 分钟时间表示其他约束

### 若选择股票 1， 则不能选择股票 3

2 维表示

整数规划约束条件：

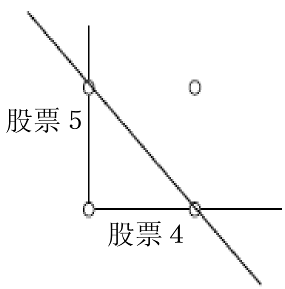



$$x_1 + x_3 \leq 1$$

### 股票 4 和股票 5 只能选择 1 个

2 维表示

整数规划约束条件：




$$x_4 + x_5 = 1$$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 非线性函数的表示

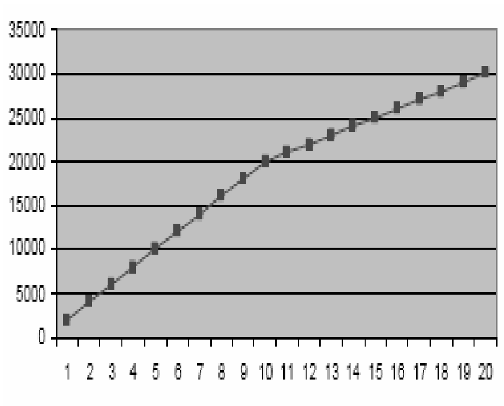
- 假定计算机成本如下：
  - —若购买 1-10 台，则每台$2000
  - —多于 10 台的部分，每台$1000
  - —假定最多购买 30 台

  —设购买的计算机数量为 x+y

  —当 0 ≤x≤10 时，y=0,当切仅当 x=10 时，y≥0.

  —成本为$2000x+$1000y

## 计算机成本




## 用整数规划表示

增加 0 - 1 变量，当 x=10 时，w=1。

成本是： 2000x+1000y

约束： 0≤x≤10

0≤y

w≤x/10

y≤20w

w= 0 或 1 ，

x, y≥0 且为整数

## 仓库选址问题

- n 个仓库
  - —开放仓库的费用是 $f_i$
- m 个顾客
  - —顾客 j 需求为 $d_j$
  - —仓库 j 到顾客 i 的单位运费 $c_{ij}$
- 变量：
  - —若仓 j 开放，则 $y_j$=1
  - —从仓库 j 到顾客 i 的运量 $x_{ij}$

## 设知道仓库开放情况。
## S 是开放仓库集合。

- $x_{ij}$ 仓库 j 对顾客 i 的满足量
- $y_j$=1,若 j∈S

  $y_j$=0,若 j∉S

$$\text{minimize} \quad \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in S} f_j$$

约束于：

- 满足顾客需求 $\quad \sum_i x_{ij} = d_j$
- 空仓库不运输 $\quad x_{ij} \le d_j \text{ if } y_j = 1$, $x_{ij} = 0 \text{ if } y_j = 0$

$\text{and } x \ge 0$

## 更多关于仓库选址的内容

- $y_i$=1,仓库 i 开放，否则 $y_i$= 0
- $x_{ij}$ 从 i 到 j 的流量

$$\text{minimize} \quad \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} + \sum_i f_i y_i$$

约束于：

- 顾客需求得以满足 $\quad \sum_i x_{ij} = d_j$
- 仓库开放或不开放（不能部分开放） $\quad 0 \le y_i \le 1$, $y_i$ 是整数 for all i.
- 空仓库不运输 $\quad x_{ij} \le d_j y_i$ for all i, j

$\text{and } x \ge 0$

**整数模型的 2 个关键方面**

- 费用：仅仅包含开放仓库的成本 $\sum_i f_i y_i$
- 约束：若仓库没有开放则不允许从库内运输，即对于所有 i,j,有：
  $x_{ij} \leqslant d_j y_j$ 成立

**更多仓库选址的内容**

- 上面的是出现在供应链管理中的一个核心子问题，可以扩展
  —更加复杂的分销系统
  —容量限制
  —非线性运输成本
  —交货次数
  —多品种产品
  —交易规则
  —其他

**使用 Excel 规划求解解整数规划问题**

- 增加整数约束（或者加入二元变量）
- 设定求解精度（精度是指求解整数规划允许的与最优解的偏差程度。）
  —默认值 5%
  —默认值太高
  —通常可以找到小规模问题的最优解。

**整数规划模型注解**

- 同样的整数规划通常有很多建模方法
- 整数规划的求解对于形式是十分敏感的（线性规划并非如此）。

**例子**

- 约束 A：$2x_1+2x_2+\ldots+2x_{50} \leqslant 51$
- 约束 B：$x_1+x_2+\ldots+x_{50} \leqslant 25$
  —假定 x 是二元变量

- 约束 C：$x_1<y, x_2<y, \ldots x_{50}<y$
  y 是二元变量
- 约束 D：$x_1+x_2+\ldots+x_{50} \leqslant 50y$

B 支配 A，C 支配 D。原因并不明显，直到你看过算法。

**整数规划总结**

- 极大改进了模型的能力
  —经济上不可分割
  —逻辑约束
  —构建非线性模型
  —资金预算和供应链管理中的经典问题
- 建立模型并不容易
- 解决问题并不容易

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**选择股票数量并不是 3 个**

或 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqslant 4$ (1)
或 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leqslant 2$ (2)

增加一个辅助变量 $w \in \{0,1\}$，它有以下性质：若 w=1,满足第一个约束条件（A）
若 w=0,满足第二个约束条件（**B**）
由于 w 是 0-1 变量，故必然满足约束其中之一。

**选择股票数量并不是 3 个**

增加约束：$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqslant 4w$ (A)
那么若 w=1,则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqslant 4$ (1)
注意：若 w=0,第一个约束自动满足。

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leqslant 2+4w$ (B)
若 w=0,则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \leqslant 2$ (2)
注意：若 w=1,第二个约束自动满足。
（若写为“≤2+3w”,将错误地排除了所有有分量是 1 的解。）

**除非投资组合的净现值大于$42000,就必须选择股票 1**

若 NPV<42, 则 $x_1=1$.
增加约束：$x_1 \geqslant (42-NPV)/42$
更大的分母也可以。

注意：
$NPV=16x_1+22x_2+12x_3+8x_4+11x_5+19x_6$

$$42x_1 \geq 42 - (16x_1+22x_2+12x_3+8x_4+11x_5+19x_6)$$

**15.053　　　4 月 9 日，周二**

- 分支定界法

　分发：讲稿

## 整数规划问题求解方法概述

- 枚举方法
  - —完全枚举
    - ■ 列举所有解，选择最优解
  - —分支定界法
    - ■ 隐含地搜索所有解，但巧妙地的将大多数解在搜索前排除掉。
  - —隐枚举法
    - ■ 分支定界法用于二元变量的求解
- 切平面法
  - —增加约束删除非整数解，利用线性规划求解整数规划。

## 资金预算实例

**投资预算总额为$14000。**

| 投资 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 现金需求量 (1000s) | \$5 | \$7 | \$4 | \$3 | \$4 | \$6 |
| 新增 NPV (1000s) | \$16 | \$22 | \$12 | \$8 | \$11 | \$19 |

$$\text{maximize}\quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$

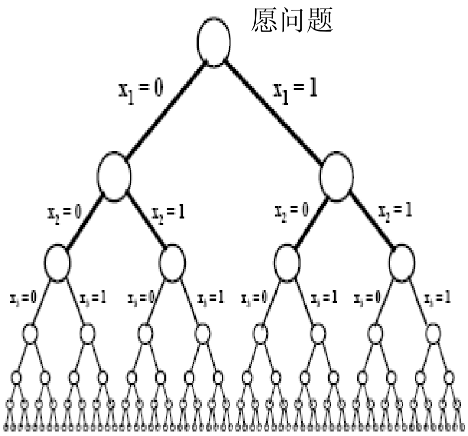
$$\text{subject to}\quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14$$

对于 **j=1..6,$x_j$** 均是二元变量。

## 完全枚举法

- 系统考虑决策变量的所有可能取值
  - —若有 n 个二元变量，将有 $2^n$ 种不同方法。
- 通常的想法：将问题不断分成 2 部分。在第一轮迭代时，考虑 $x_1=1, x_1=0$ 两种情形。

## 枚举树




## 关于完全枚举法

- 假定每秒钟可以求出 10 亿个解。
- 令 n 为二元变量数量
- 解的时间
  - —n=30,　　1 秒
  - —n=40,　　17 分
  - —n=50　　11.6 天
  - —n=60　　31 年

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 关于完全枚举法

- 假定每秒钟可以求出 1 万亿个解，并可立即删除不须考虑的 99.9999999%解。
- 令 n 为二元变量数量
- 解的时间

—n=70, 1 秒
—n=80, 17 分
—n=90 11.6 天
—n=100 31 年

## 分支定界法

基本思想：搜索枚举树，但在每个节点

1. 在节点处求解线性规划
2. 删除子树（彻底理解），如果
   (1) 是整数解（没必要更深入）或者
   (2) 子树最优解比已得到的最优解差
   (3) 没有可行解

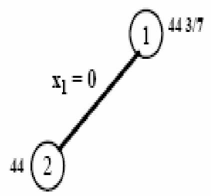
## 分支定界法


节点 1 是原线性规划的松弛问题

$$\text{maximize} \quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$
$$\text{subject to} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14$$
$$0 \le x_j \le 1 \ \text{for } j = 1 \text{ to } 6$$

节点 1 的解：
$x_1=1, x_2=3/7, x_3=x_4=x_5=0, x_6=1, z=44\ 3/7$
该整数规划值不会高于 44 3/7。

## 分支定界法

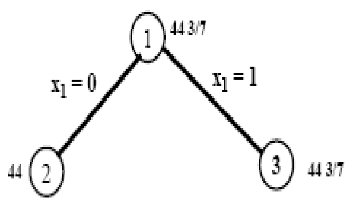



节点 2 是原线性规划松弛问题加上约束：$x_1=0$

$$\text{maximize} \quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$
$$\text{subject to} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14$$
$$0 \le x_j \le 1 \ \text{for } j = 1 \text{ to } 6, \ x_1 = 0$$

节点 2 的解：
$x_1=0, x_2=1, x_3=1/4, x_4=x_5=0, x_6=1, z=44$

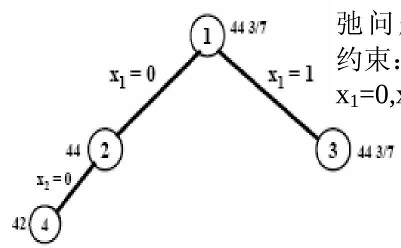
## 分支定界法




节点3是原线性规划松弛问题加上约束：$x_1=1$

节点 1 的解：
$x_1=1, x_2=3/7, x_3=x_4=x_5=0, x_6=1, z=44\ 3/7$
注意：在 $x_1$ 没有约束时，这是最优解。因此这也是节点 3 的解。（若增加一个约束，旧的最优解可行，那么依然是最优）

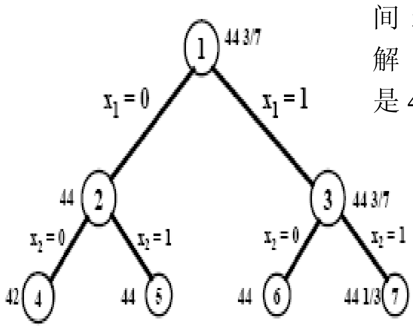
## 分支定界法




节点 4 是原线性规划松弛问题加上约束：
$x_1=0, x_2=0$

节点 4 的解：0 0 1 0 1 1 z=42
第一个中间最优解。
从节点 4 不需要再搜索，因为不可能有更好的整数解。

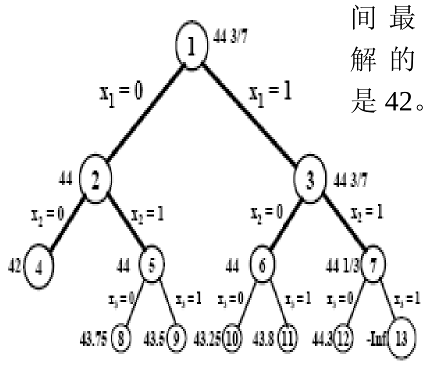
## 分支定界法




这个中间最优解的值是 42。

下面我们将解关于节点 5,6,7 的线性规划问题。没有新的整数解。

## 分支定界法




这个中间最优解的值是 42。

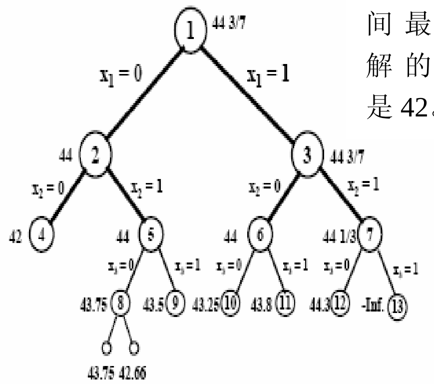
下面将求解与节点 8-13 相关的线性规划问题。

## 小结

- 目前我们已经解了 13 个不同的线性规划问题
  - —找到一个整数解
  - —剪除一个子树，因为解是整数（节点 4）
  - —剪除一个子树，因为解不可行（节点 13）
  - —没有因为范围剪除子树

## 分支定界法

这个中间最优解的值是 42。

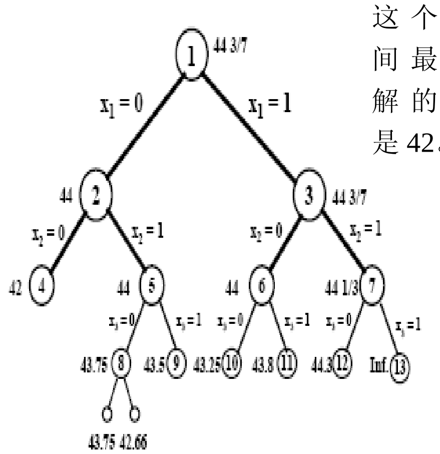



下面将求解下面节点的线性规划问题。可依据 z=42.66 剪除节点。为什么？

## 得到一个更好的边界

- 通过解线性规划得到每节点的边界
- 但是最优解应该有整数目标值。
- 若一节点整数规划的最优值最大为 42.66，那么最优边界最大为 42。
- 其他边界也可以取整。

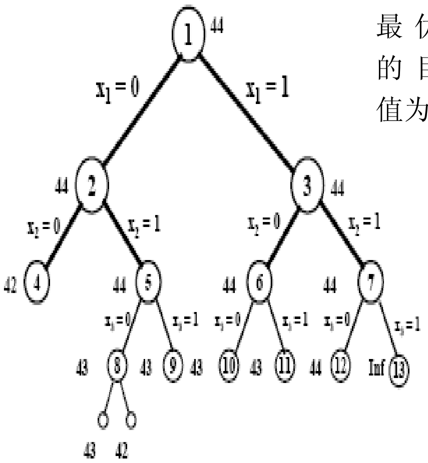
## 分支定界法




这个中间最优解的值是 42。

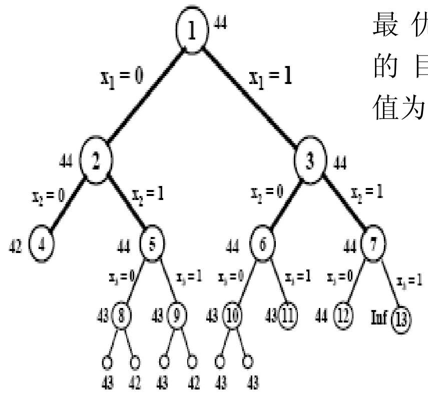
## 分支定界法

该中间最优解的目标值为 42。



## 分支定界法

该中间最优解的目标值为 42。

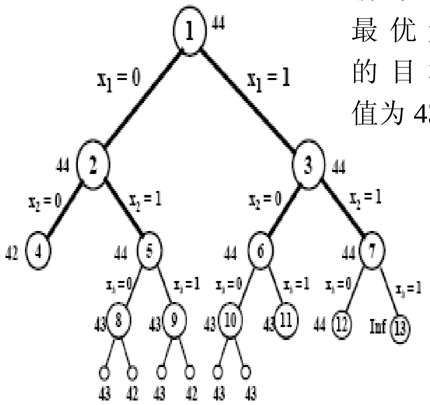


找到了一个新的中间最优解。

**$x_1=1, x_2=x_3=0, x_4=1, x_5=0, x_6=1 \quad z=43$**

## 分支定界法

新中间最优解的目标值为 43。

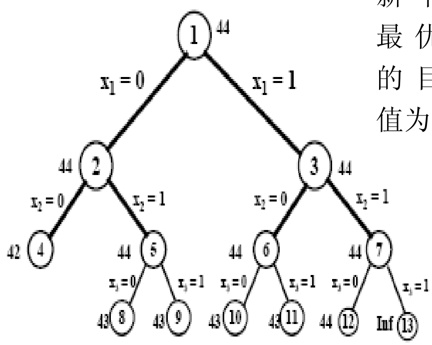


找到一个新的中间最优解。

**$x_1=1, x_2=x_3=0, x_4=1, x_5=0, x_6=1 \quad z=43$**

## 分支定界法

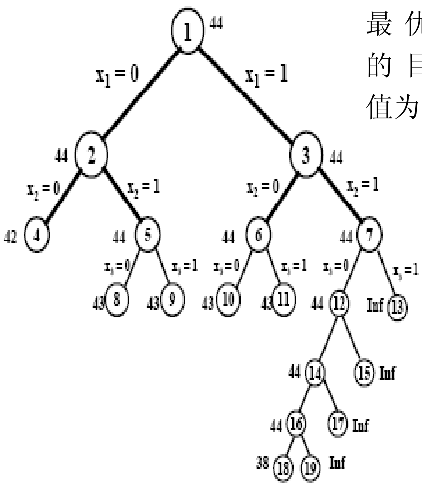
新中间最优解的目标值为 43。



若早些找到这个新中间最优解，可节省搜索工作。

## 结束

新中间最优解的目标值为 43。



23

## 学到的经验

- 分支定界法可以加速搜索
  —仅求 25 个节点（线性规划）的值
  —剪除其他节点
- 尽早得到一个好的中间最优解是有价值的
  —仅仅计算 19 个节点的值
- 解线性规划更快，因为可以从一个有化解或者最优解开始
  —运用对偶单纯性方法
- 得到一个更好的边界是有价值的
  —有时利用显而易见的性质，比如整数解有整数目标值。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

分支定界法

注意：

—$z^*$：最优整数值

—子部分：分支定界树的节点

—中间最优解：当前最优解

—$z^I$：中间最优解的值

—$z^{LP}$：当前节点线性规划松弛问题的目标值

—LIST：活跃（未剪除）节点集合

—节点的子项：为节点建立的 2 个问题，比如，令 $x_j=1$ 或 $x_j=0$。

初始化：LIST={原问题}

中间最优解：=∅

$z^T=-\infty$

分支定界法算法

初始化

选择：

若 LIST=∅，则当前存在的中间最优解最优，若不存在中间最优解则问题无可行解。

否则，令 S 是 LIST 的子部。令 $x^{LP}$ 为 S 的最优解，$z^{Lp}$ 为最优值。

选项 1：$z^{LP}=-\infty$(线性规划问题无解)

从 LIST 中删除 S(剪除)

返回到选择

分支定界法算法

初始化

选择：

若 LIST=∅，则当前存在的中间最优解最优，若不存在中间最优解则问题无可行解。

否则，令 S 是 LIST 的子部。令 $x^{LP}$ 为 S 的最优解，$z^{Lp}$ 为最优值。

选项 2：$-\infty<z^{LP}<z^I$。即线性规划问题受控于中间最优解，则从 LIST 中删除 S(剪支)，返回到选择

分支定界法算法

初始化

选择：

若 LIST=∅，则当前存在的中间最优解最优，若不存在中间最优解则问题无可行解。

否则，令 S 是 LIST 的子部。令 $x^{LP}$ 为 S 的最优解，$z^{Lp}$ 为最优值。

选项 2：$-\infty<z^{LP}<z^I$。即线性规划问题受控于中间最优解，则从 LIST 中删除 S(剪支)，返回到选择

分支定界法算法

初始化

选择：

若 LIST=∅，则当前存在的中间最优解最优，若不存在中间最优解则问题无可行解。

否则，令 S 是 LIST 的子部。令 $x^{LP}$ 为 S 的最优解，$z^{Lp}$ 为最优值。

选项 3：$z^I<z^{LP}$，$x^{LP}$ 是整数。

即线性规划问题的解是整数，并且控制中间最优解。

则　中间最优解为 $x^{LP}$ （$z^I=z^{LP}$）

从 LIST 中删除 S(剪除)，返回到选择

分支定界法算法

初始化

选择：

若 LIST=∅，则当前存在的中间最优解最优，若不存在中间最优解则问题无可行解。

否则，令 S 是 LIST 的子部。令 $x^{LP}$ 为 S 的最优解，$z^{Lp}$ 为最优值。

选项 4：$z^I<z^{LP}$，$x^{LP}$ 不是整数。没有足够的信息删除 S。

从 LIST 中删除 S，将 S 的子项加入到 LIST 中。返回选择

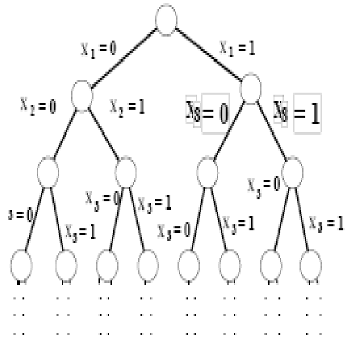
PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 可能的不同选择规则

- 拇指规则 1：不要让 LIST 太大（解一定要保存）。因此偏好树中更低层的节点。
- 拇指规则 2：选择 LIST 中可以改善中间最优解的节点。有时可以利用专门的启发式算法得到一个好的中间最优解。

## 分支

分支定界树不必一定对称，也不必按照变量顺序选择子树。



选择如何分支以减少运行次数要基于经验，是一种艺术

## 可能的不同分支规则

- 分支：确定一个节点的子项。可以有很多选择。
- 拇指规则 1：若最优解中有 $x_j=1$，通常在 $x_j=0$ 和 $x_j=1$ 之间分支。
- 拇指规则 2：在重要变量上分支是有价值的

  —例如，在选址问题里，首先在位置变量上分支。

## 可能的不同定界技术

- 使用消除整数约束（线性规划松弛问题）得到的边界，还有其他选择。
- 边界的主要权衡：得到边界的时间和边界的质量。
- 若能很快找到边界，有时愿意得到一个比较差的边界。
- 只要时间不要太长（见下一讲），得到一个更优的边界是有价值的。

## 若变量是一般整数变量会怎么样？

- 可以选择下面的子项：

  —子项 1： $x_1 \leq 3$ (或 $x_j \leq k$)

  —子项 2： $x_1 \geq 4$(或 $x_j \geq k$)
- 如何选择变量 j 和目标值 k。

  —通常是选择 $x^{LP}$ 的小数部分，例如若 $x_7=5.62$，那么可以用 $x_7 \leq 5$ 和 $x_7 \geq 6$ 分支。

  —其他选择也是可能的。

## 总结

- 分支定界法是解决整数规划最优问题的标准方法。
- 实践中有些艺术可以使其更加有效
- 求解的一些艺术已经建立在规划求解的艺术陈述之中，如 CPLEX。

隐枚举的一个不良例子

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_{100} \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ldots + 2x_{100} \le 101 \\ & x_i \in \{0,1\} \text{ for } i = 1 \text{ to } 100. \end{aligned}$$

为什么这是不良例子？若如前所述，使用分支定解法，将会怎样？

# 消防站问题

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 4 | 6 | 6 | 7 | 5 | 8 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 4 | 5 | 3 | |

## 邻接矩阵

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 4 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 2.00E-12 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 8.00E-12 | 0.5 | 7.00E-11 | 0.5 | 0 | |

6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | <= | 1 | 约束 | 1,2 |
| 1 | <= | 1 | 约束 | 1,4 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 1,5 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 2,3 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 2,5 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 2,6 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 3,6 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 3,7 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 4,6 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 4,8 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 4,10 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 4,11 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 5,6 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 5,8 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 6,7 |
| 0.5 | <= | 1 | 区域 | 6,8 |

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 6,9 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 7,9 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 7,13 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 8,9 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 8,10 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 8,11 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 8,12 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 9,12 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 9,13 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 10,11 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 10,14 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 11,12 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 11,14 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 12,13 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 12,15 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 13,15 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 13,16 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 14,15 |
| 0. 5 | <= | 1 | 区域 | 15,16 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 1,4,5 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 2,3,6 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 10,11,14 |
| 1 | <= | 1 | 区域 | 13,15,16 |

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053　　　4 月 11 日**

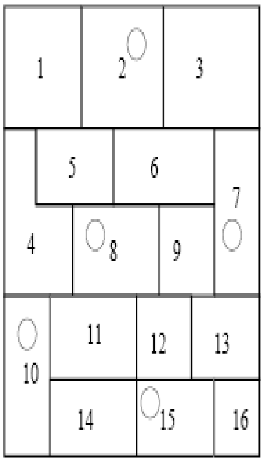
- 整数规划的更多应用
- 获得更优边界的切平面法

分发：讲稿

**例子：消防队选址**

- 考虑在不同地区为消防队选址
- 目标：安排消防队的位置，让每个区域或其临近区域有一个消防队，使成本最小。

**消防站问题例子**




若在地区 j 设置消防站则令 $x_j=1$，否则 $x_j=0$。
令 $c_j$ 为在区域 j 设置消防站的费用。
和同伴一起建立消防站问题模型。

**设置覆盖问题**

- 令 S={1,…,m}为要覆盖的项目
  —需要有消防站或者临近消防站的区域。
- S 的 n 个子集合
  —对于每个可能的区域 j，子集是区域 j 和与 j 临近的区域。
  —若区域 i,j 相邻或者 i=j，则 $a_{ij}=1$

Minimize　　$\sum_j c_j x_j$

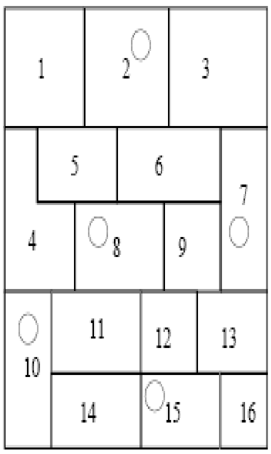
subject to　　$\sum_j a_{ij} x_j \ge 1$　for each i

对于任意 j, $x_j$ 是二元变量

**覆盖约束是很平常的**

- 航班的飞行路线问题
  —为飞机分配班机舷梯
  —必须包含每一个航班
- 为航班指派机组人员
  —每架飞机要安排一组人员
- 仓库选址
  —每个零售商有几个仓库为之服务

**独立放置（设定包装）**




没有共同边界的区域数量最多是多少？

与同伴一起，建立独立集合问题模型。列示所有含有 $x_{10}$ 的约束。

## 设定包装固定源于生产和物流

- 金属片的裁剪切割问题
- 资源共享，同时加工多项内容（每次可以平行做多少工作？）

## 上一讲的回顾

投资预算：$14000

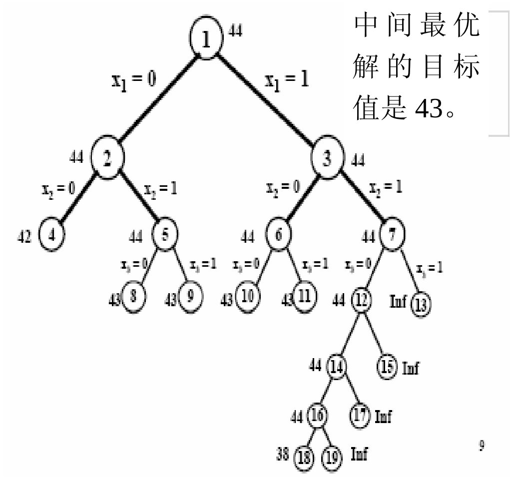
| 投资 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 现金需求量 (1000s) | \$5 | \$7 | \$4 | \$3 | \$4 | \$6 |
| NPV 增加 (1000s) | \$16 | \$22 | \$12 | \$8 | \$11 | \$19 |

$$\text{maximize} \quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$

$$\text{subject to} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14$$

对于 j=1…6, $x_j$ 是二元变量

## 分支定界法




中间最优解的目标值是 43。

## 关于线性规划的边界

已经得到一个中间最优解，目标值是 43。

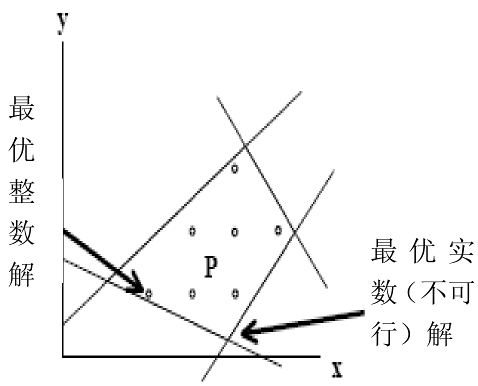
线性规划的最优值在 44 和 45 之间。

是否有办法直接确立在 43 和 44 之间的一个上界？或许可以构建一个更优的线性规划。

整数规划越接近线性规划越好。

注意：不是所有的线性规划都在接近性上相同。

## 使用切平面

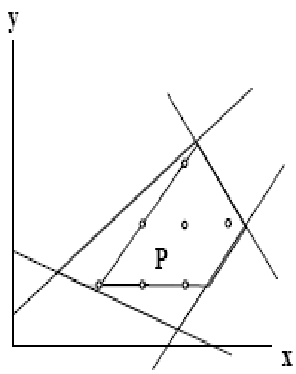



例子：Min　x+10y

S.t.　x,y 在区域 P 内。

x,y 都是整数。

## 使用切平面




思想：加入约束，删除线性规划的小数解，不删除整数解

加“y≥1”

加“y<=x-1”

例子：Min　x+10y

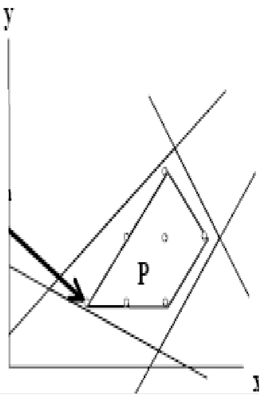
S.t.　x,y 在区域 P 内。

x,y 都是整数。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 使用切平面

最优整数解




若加入右端不等式，则线性规划的拐角点均是整数，解线性规划即可解整数规划。

我们将其叫做最小线性规划，整数规划解的凸壳。

例子：Min x+10y

S.t. x, y 在区域 P 内。

x, y 都是整数。

对于大的规划问题，这些约束很难找到。

## 关于加入约束的更多内容

- 可能的最紧的约束是有用的，叫做刻面。
- 假定可以最大化，且 $z_{LP}$ 是线性规划松弛问题的最优解，$z_{IP}$ 是整数规划的最优解，那么 $z_{IP} \leq z_{LP}$。
- 理想上，我们希望 $z_{IP}$ 和 $z_{LP}$ 尽可能接近。这是分支定界法最重要的。
- 加上许多无用的不等式是有利的
  —对 $z_{IP}$ 没有影响
  —可以显著地减少 $z_{LP}$。

## 纯切平面技术

- 纯切平面技术仅仅使用一个线性规划，而不将可行域分离。
- 在线性规划上反复加入切平面约束（有效线性规划不等式）。
- 每步迭代，可行区域不断减小，直到解线性规划得到整数解。
- 事实上，也可以用分支定界法。这些基本的思想是找到有效的切面或不等式。

## 切面如何而来？

- 两种方法
  —具体问题
  - ■ 由旅行销售员问题和背包问题解释

  —基于线性规划的方法，对于解整数规划有效。
  - ■ 几何切平面

## 具体问题

- 资金预算（背包）问题

$$\text{maximize} \quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$

$$\text{subject to} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \leq 14$$

对 $j=1\ldots6$, $x_j$ 为二元变量

## 线性规划的松弛问题

- 资金预算（背包）问题

$$\text{maximize} \quad 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6$$

$$\text{subject to} \quad 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \leq 14$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6$$

最优解：$x_1=1, x_2=3/7, x_3=0, x_4=0, x_5=0, x_6=1$

能找到一个有效不等式（切面）消除该解？

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 线性规划的松弛问题

- 资金预算（背包）问题

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{subject to}\quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14 \\
& 0 \le x_j \le 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

最优解：$x_1=1, x_2=3/7, x_3=0,$
$x_4=0, x_5=0, x_6=1, z=44\ 3/7$

$5x_1+7x_2+6x_6 \leqslant 14 \rightarrow x_1+x_2+x_6 \leqslant 2$

Excel

## 加入一个切面之后

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{subject to}\quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14 \\
& x_1 + x_2 + x_6 \le 2 \\
& 0 \le x_j \le 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

最优解：$x_1=0, x_2=1, x_3=1/4,$
$x_4=0, x_5=0, x_6=1, \quad z=44$

$7x_2+4x_3+6x_6 \leqslant 14 \rightarrow$ ？？

Excel

## 加入两个切面之后

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{subject to}\quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14 \\
& x_1 + x_2 + x_6 \le 2 \\
& x_2 + x_3 + x_6 \le 2 \\
& 0 \le x_j \le 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

最优解：$x_1=1/3, x_2=1, x_3=1/3,$
$x_4=0, x_5=0, x_6=1, \quad z=44$

$5x_1+7x_2+4x_3+6x_6 \leqslant 14 \rightarrow$ ？？

Excel

## 得到一个有效切面

很容易最大化：$x_1+x_2+x_3+x_4$

s.t. $5x_1+7x_2+4x_3+6x_6 \leqslant 14$

对于 $j=1,2,3,6$，$x_j$ 是二元变量

尽可能多的将预算较小的物件放入背包，直到不能继续放为止。

这种情形下，放入物件 1 和 3， 物件 2 和 6 没有空间。

因此：$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \leqslant 2$

## 加入三个切面之后

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{subject to}\quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14 \\
& x_1 + x_2 + x_6 \le 2 \\
& x_2 + x_3 + x_6 \le 2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \le 2 \\
& 0 \le x_j \le 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

注意：新切面支配其他切面

Excel

## 删除冗余约束

$$\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 11x_5 + 19x_6 \\
\text{subject to}\quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \le 14 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \le 2 \\
& 0 \le x_j \le 1 \text{ for } j = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

最优解：$x_1=0, x_2=1, x_3=0,$
$x_4=0, \quad x_5=1/4, \quad x_6=1, \quad z=44\ 3/4$

Excel

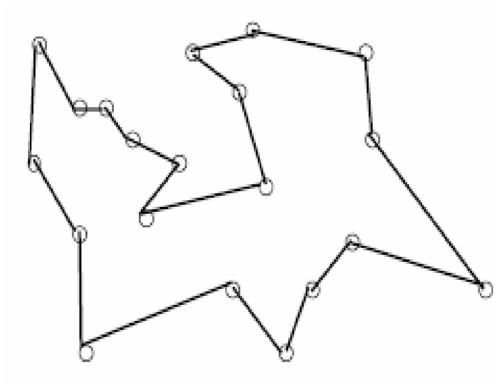
因此 $z^* \leqslant 43$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 背包问题小结

- 可以找到一些有效的不等式使 $z^*$<=43。这是最优目标值。
- 加入了 3 个切面
- 有简单的方法寻求切平面。
- 注意，分支定解法计算了 25 个节点。
- 事实上，研究者发现切平面技术对于解大整数规划很有用（通常是得到更优边界的方法）。

## 销售员差旅问题



能够到达图中每个点的最短差旅路径是什么？

## 销售员差旅问题评价

- 被非常好地研究过的问题
- 通常被用于检测新的算法思想。
- 完全 NP 问题（从技术上说，本质上比较困难）。
- 可以最优地解决大规模的例子（5000 个甚至更多城市）
- 可以近似解决大规模的例子（1000 万城市，在一定范围内最优）
- 加入类似切面的约束，表述模型

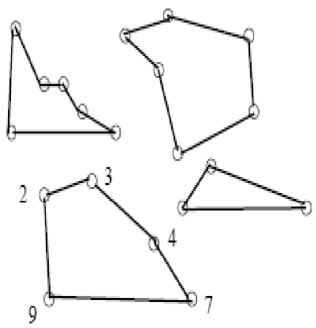
## 销售员差旅问题基本上是整数规划

- **若弧在路径中，则 $x_e$=1,否则 $x_e$=0**
- **令 A(i)为与节点 i 相关联的弧集**
- **Min** $\sum_e c_e x_e$
- 约束于：$\sum_{e \in A(i)} x_e = 2$

**$x_e$ 是二元变量。**

这些约束足够么？

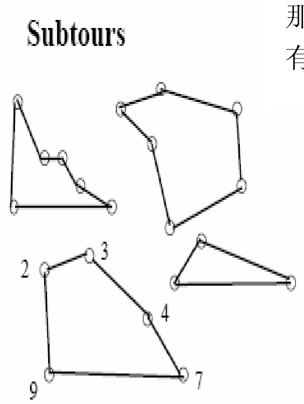
## 子路




有与每个节点相关的两点的整数解是这些差旅的联合。为什么？

目标：加入约束删除这些子路，而不删除任何销售员差旅问题路径。

## 子路




令 S={2,3,4,7,9}那么任何弧最多有 S 中 4 个节点。

对城市集合的任意子集 S，约束集合中的弧最大数量为|S|-1。

这将保证集合 S 有连通所有 5 个节点的子路径

## 将销售员差旅问题表述为整数规划

- Min $\sum_e c_e x_e$
- **S.t.** $\sum_{e\text{与}i\text{有关}} x_e = 2$
- $\sum_{e \in S} x_e \leq |S| - 1$

子路断点约束

$x_e$ 是二元变量

这些约束足够么？

是的！不幸的是有指数级的数量。但是效果良好，根据需要来生成。

## 销售员差旅问题的更多内容

- 对于实际问题，线性规划边界通常距离销售员差旅问题最优解只差1%到 2%。从这个意义上，子路径删除约束是很有意义的。
- 可以加入更复杂的约束，人们也是这样做的（很有帮助）

## 几何切平面：应用线性规划表生成切面的方法

- 考虑下面的整数规划

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 3/5 | 4 1/5 | 3 | 2/5 | = | 9 4/5 |

注意小数部分

➔ $3/5\, x_1 + 1/5\, x_2 + 2/5\, x_4 =$ 整数 $+ 4/5$

➔ $3/5\, x_1 + 1/5\, x_2 + 2/5\, x_4 \geq 4/5$

➔ $3 x_1 + x_2 + 2 x_4 \geq 4.$

## 几何切平面

依据什么来获得几何切平面？

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 3/5 | 4 1/5 | 3 | 2/5 | = | 9 4/5 |

右端是小数的一个约束。

所有约束系数都是正数。

所有变量都是整数。

## 如果系数是负数该怎么办？

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 3/5 | -4 3/5 | -3 | -2/5 | = | -1 1/5 |

重新写系数使得小数部分是正数

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 3/5 | -5 +2/5 | -3 | -1 +3/5 | = | -2 +4/5 |

➔ $3/5\, x_1 + 2/5\, x_2 + 3/5\, x_4 =$ 整数 $r + 4/5.$

➔ $3/5\, x_1 + 2/5\, x_2 + 3/5\, x_4 \geq 4/5.$

➔ $3 x_1 + 2 x_2 + 3 x_4 \geq 4.$

## 一般形式

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 3/5 | -4 3/5 | -3 | -2/5 | = | -1 1/5 |
| 3/5 | 2/5 | 0 | +3/5 | $\geq$ | +4/5 |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{a}_{i1}$ | $\bar{a}_{i2}$ | $\bar{a}_{i3}$ | $\bar{a}_{i4}$ | = | $\bar{b}_i$ |
| $fr(\bar{a}_{i1})$ | $fr(\bar{a}_{i2})$ | $fr(\bar{a}_{i3})$ | $fr(\bar{a}_{i4})$ | $\geq$ | $fr(\bar{b}_i)$ |

令 fr(a)为 a 的小数部分。

fr(a)=a-[a]

fr(2 3/5)=

2 3/5-2=3/5

fr(-2 3/5)=

-2 3/5-(-3)

=2/5

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

如何生成切平面

- 一般形式
  —迭代之后，找出一个解为小数的基变量
  —写出几何切平面。（为不等式约束，导致一个新的松弛变量）
  —注意：小数系数变量仅仅与非基变量对应。（为什么）
  —几何切平面使得先前的的基可行解不可行了。（为什么）
  —重新解有新约束的线性规划，重复迭代。

整数规划小结

- 极大地改善了模型能力
  —经济上不可分割
  —逻辑约束
  —建立非线性模型
- 不易建模
- 不易求解

整数规划求解方法总结

- 分支定界法
  —普通，很适应
  —实际应用（举例，Excel 求解）
- 隐枚举法
  —对二元变量整数规划的分支定界法
- 切平面法
  —改进边界的巧妙方法
  —理论和应用研究的活跃领域

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053 4 月 18 日，周四**

- 非线性规划
  ——建模实例
  ——凸性
  ——局部与全局最优解

分发：讲稿

## 线性规划模型

$$\text{Maximize } c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$
subject to
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$$

假设前提：
- 比例性假设
  —目标函数
  —约束
- 可加性假设
  —目标函数
  —约束

## 什么是非线性规划？

- Max $3\sin x + xy + y^3 - 3z + \log z$
  s.t. $x^2 + y^2 = 1$
  $x + 4z \geqslant 2$
- 非线性规划中允许存在非线性约束或者目标函数
- 线性规划是非线性规划的特例

## 非线性规划

令 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$Max \quad f(x)$

$g_i(x) \le b_i$ ,对于任意 i=1,2,..m 成立

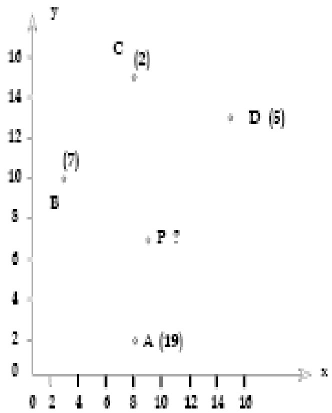
非线性目标函数 $f(x)$和/或者非线性约束 $g_i(x)$。

要加入约束 $x_i \geqslant 0$，可以通过约束 $x_i = y_i^2$，$i=1,2,\dots,n$ 实现。

## 无约束设施选址

下面是仓库选址问题。仓库可以在平面的任意一点。采用欧氏距离。

| Loc. | Dem. |
|---|---|
| A: (8,2) | 19 |
| B: (3,10) | 7 |
| C: (8,15) | 2 |
| D: (14,13) | 5 |
| P: ? | |




## 一个非线性规划问题

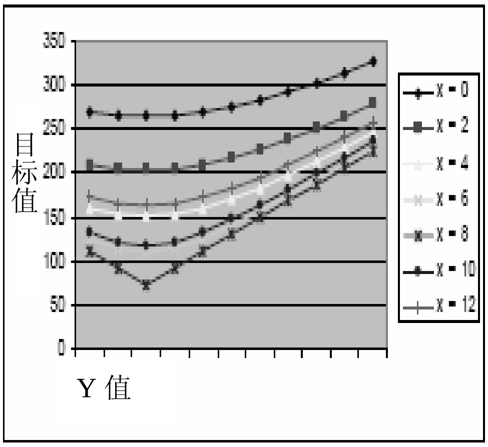
- 费用与距离成比例
  已知日需求

$$d(P,A) = \sqrt{(x-8)^2 + (y-2)^2}$$
…
$$d(P,D) = \sqrt{(x-14)^2 + (y-13)^2}$$

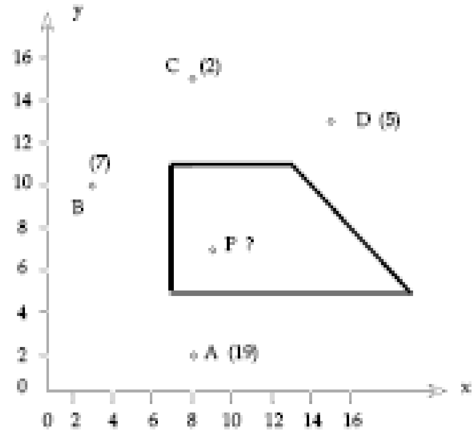
min 19d(P,A)+…+5d(P,D)

s.t. P 无约束

这是 55 个不同地点的目标值




设施选址。若 **P** 必须局限在一定区域内将会如何？




模型

Minimize $\quad 19\sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2} + \ldots +$

$$5\sqrt{(x-14)^2+(y-13)^2}$$

Subject to
$x \geq 7$
$5 \leq y \leq 11$
$x + y \leq 24$

将 **0-1** 整数规划视为非线性规划

minimize $\quad \Sigma_j c_j x_j$

subject to $\quad \Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$ 对任意 i 成立

对于任意 j，$x_j$ 是二元变量

近似等价于

minimize $\quad \Sigma_j c_j x_j + 10^6 \Sigma_j x_j (1-x_j).$

subject to $\quad \Sigma_j a_{ij} x_j = b_i$ 对任意 i 成立

$0 \leq x_j \leq 1$ 对任意 j 成立

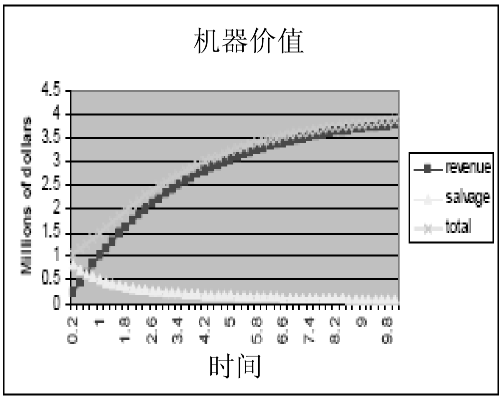
非线性规划注解

- 非线性规划模型建模范围很广也可能是一个不良的预兆
  —若解整数规划很困难，如何解非线性规划？
  —注意，在解整数规划时，我们利用了源于完整性的技术
- 事实：有些非线性规划是可解的，有些则求解十分困难，后者占绝大多数。

**Bertsima** 与 **Freund** 的变量训练

- 购买一台机器，使用 t 年，然后卖掉（0≤t≤10）
  —所有价值单位都是：百万美元
  —机器成本：1.5
  —收益：$4(1-0.75^t)$
  —残值：1(1+t)

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com




**机器应该使用多长时间呢？**

- 与同伴一起确定机器应该保留多长时间，为什么？

**源于时间的非线性**

- 折现率
- 设备价值随时间递减
  —磨损与技术进步
- 赋税（折旧）
- 残值

前面模型的另一个焦点：找到正确的模型是很渺茫的。

**价格的非线性**

- 物品的价格要依靠销售的数量
  ——对小规模用户的数量折扣
  ——垄断者的价格弹性
- 由于替代品引起的复杂交互影响
  ——通用汽车降价将会导致竞争对手的需求量降低

**由于堵塞引起的非线性**

- 从 MIT 乘车到 Harvard 的时间取决于堵塞引起的非线性
- 当堵塞增加到极限时，交通有时会停下来

**投资组合最优化**

- 下面将看到如何建立投资组合问题的非线性规划模型。
- 问题的关键是，风险可以运用非线性方程建模
- 由于这是非线性规划的非常著名的应用，我们将详细介绍。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 风险与回报

- 在理财里面，要权衡风险与回报。对于给定的回报率，决策者希望风险最小。
- 对于给定的风险，决策者希望回报最大。
- 回报可以用期望值表示。风险可以用方差表示（或者标准差）。

## 投资组合选择：多样化的价值

假设下面的投资每年都有 10%的期望回报，方差相同。可以选择 3 对中的任何一对。

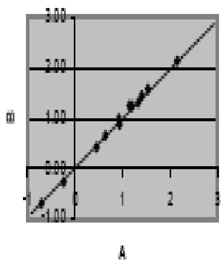
Penguin 伞业，
Bay Watch 太阳镜（负相关）

Cogwell 齿轮，
Gilligan 旅游公司（正相关）

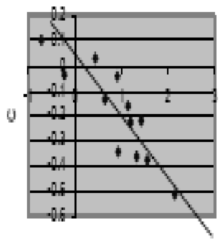
CSX 铁路，
Burlington Northern 公路（正相关）

## 相关性

相关系数 0.998



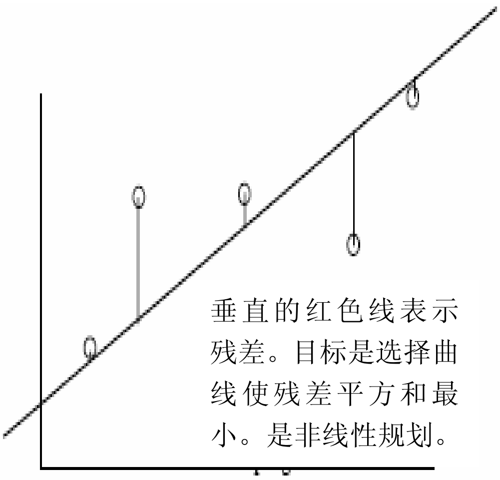
相关系数-0.866



## 更多关于相关性的内容

- 发现线性拟和最好的是自身的非线性规划模型。
- 作回归分析时，自动使用最小二乘法拟和

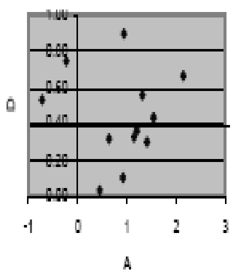
## 最佳拟和回归直线将使残差平方和最小



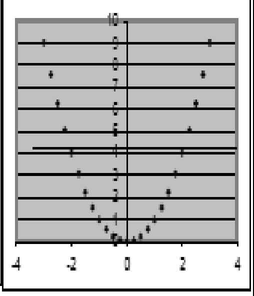
垂直的红色线表示残差。目标是选择曲线使残差平方和最小。是非线性规划。

## 相关系数为 0（或者接近 0）
## 相关性与最佳线性拟和相关

相关系数：
-0.26



变量有关系，但相关系数是 0。



## 期望值的关键公式

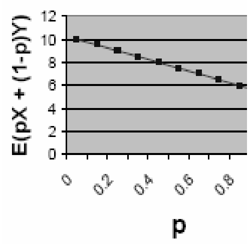
- 令 x 和 y 是随机变量，E( )表示期望值
- 期望值是线性方式的表现
- 对于任意整数阿 a,b

  E(ax+by)=aE(x)+bE(y)

  如　E(0.3x+0.7y)=0.3E(x)+0.7E(y)

## 混合分布

期望值




假定 E(x)=5，E(y)=10。当 p 变化时，px+(1-p)y 的期望值怎么变化？

## 方差的关键公式

- 令 x 和 y 是随机变量，Var(x)和 Var(y)表示他们的方差。（风险----方差）
- ax+by 的方差取决于 x 和 y 的协方差，它取决于随机变量 x 和 y 的相关性。
- 对于任意实数 a，b，有

  $Var(ax+by)=a^2\ Var(x)+b^2\ Var(y)$

  $+2abCov(x,y)$

如 Var(0.3x+0.7y)=0.09Var(x)+0.49Var(y)

$+0.42Cov(x,y)$

## 若 x 和 y 独立，方差减少

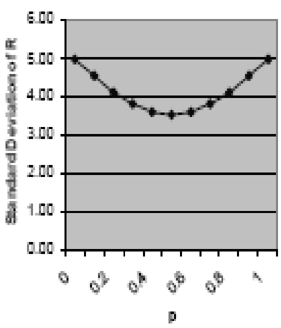
- 若 x 和 y 独立，则协方差为 0
- Var(px+(1-p)y)=

  $p^2Var(x) + (1-p)^2Var(y)$

  $\leqslant$ pVar(x) + (1-p)Var(y)

## 混合不相关分布

R 的标准差




这里，x 与 y 的标准差是 5，相关系数为 0。

令

W=pX+(1-p)Y，

p 从 0 到 1 变动。

## 当 x 和 y 负相关时，方差减少

- 当 x 和 y 负相关，那么协方差为负数。

**Var**(px+(1-p)y)**=**

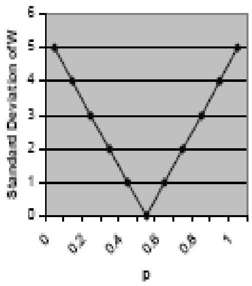
$p^2Var(x) + (1-p)^2Var(y)+2p(1-p)Cov(x,y)$

<p Var(x) + (1-p) Var(y)

极端例子是相关系数为-1。

## 混合负相关分布

W 的标准差




这里，x 与 y 的标准差是 5，相关系数为-1。

令 W=pX+(1-p)Y，p 从 0 到 1 变动。

## 当 x 和 y 正相关时，可减少方差

- 当 x 和 y 正相关，那么协方差为正数。

若 $0<p<1$,且正相关系数小于 1，那么

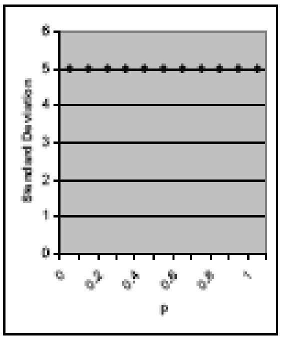
**Var**(px+(1-p)y)=

$p^2Var(x) + (1-p)^2Var(y)+2p(1-p)Cov(x,y)$

$<p\ Var(x) + (1-p)\ Var(y)$

若相关系数是 1，上面为等式。

## 混合正相关分布




这里，x 与 y 的标准差是 5，相关系数为 1。

令 W=pX+(1-p)Y，p 从 0 到 1 变

结论：方差是很重要的。

## 小结：降低风险

- 多样化是降低风险的一种方法，即使投资之间是正相关关系（通常的确如此）。
- 若仅投资 2 项，那么风险减少量取决于协方差。
- 负相关的投资多样化组合对风险降低有着巨大的影响。

## 投资组合选择问题

- 设计投资组合时，投资者希望最小化风险同时最大化回报。
- 风险通常用总回报的方差衡量，这是一个非线性函数。
- 事实：

$$var(x_1+x_2+\ldots+x_n)=$$
$$var(x_1)+\ldots+var(x_n)+\sum_{i\neq j}cov(x_i,x_j)$$

## 投资组合选择问题

- 常用的 2 种方法：

—min 风险

约束：期望回报>边界

—max 期望回报-θ(风险)

其中，θ 反映风险和回报的权衡。

## 投资组合选择问题例

- 有 3 种备选的投资，x,y,z。期望的回报分别为 30%,20%,8%（若可能，可以让回报率最小为 12%）。假定协方差矩阵为：

| | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| $X$ | 3 | 1 | –0.5 |
| $Y$ | 1 | 2 | –0.4 |
| $Z$ | –0.5 | –0.4 | 1 |

- 变量是什么？
  令 x,y,z 为组合中每种投资的比例。

## 投资组合选择问题例

**Min** $3X^2+2Y^2+Z^2+2XY-XZ-0.8YZ$

**st** $1.3X+1.2Y+1.08Z\ge 1.12$

$X+Y+Z=1$

$X\ge 0,\ Y\ge 0,\ Z\ge 0$

**Max** $1.3X+1.2Y+1.08Z$

$-\theta(3X^2+2Y^2+Z^2+2XY-XZ-0.8YZ)$

**st** $X+Y+Z=1$

$X\ge 0,\ Y\ge 0,\ Z\ge 0$

## 投资组合选择的更多问题

- 也许有制度上的约束，尤其是对于共有基金而言。
- 能源版块不能超过 15%。
- 在 20%到 25%之间的高增长率
- 在任意企业，最多 3%
- 等等
- 最后我们得到一个非线性规划
- 无约束问题变成理财的“CapM 模型”

## 确定最佳的线性拟和

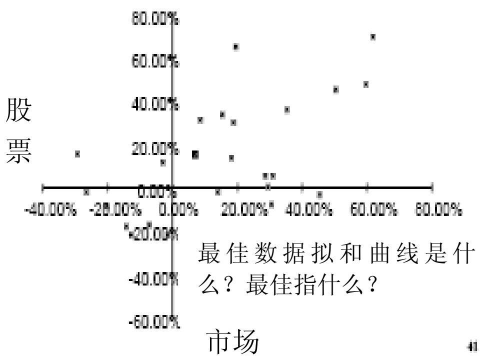
- 确定最佳线性拟和在理财问题中的一个著名的应用是确定股票的 $\beta$ 值
- CAPM 假设股票 S 在给定时间段的回报为：$r_s=a+\beta r_m+\varepsilon$

  $r_s$：给定时间段的股票回报
  $r_m$：给定时间段的市场回报

  $\beta$：股票市场每增加 1%将使 S 的回报增加 $\beta$%。（平均效果）

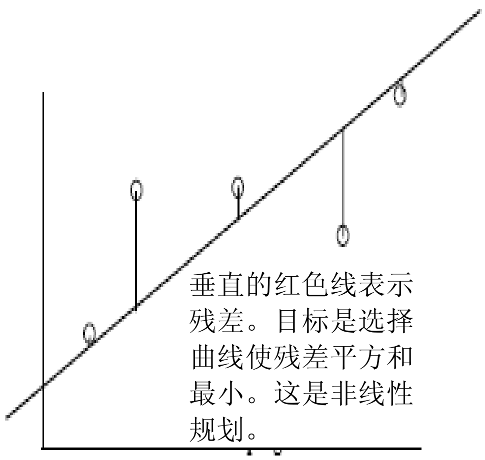
## 回归，预测 $\beta$ 值

股票 A 的回报与市场回报




最佳数据拟和曲线是什么？最佳指什么？

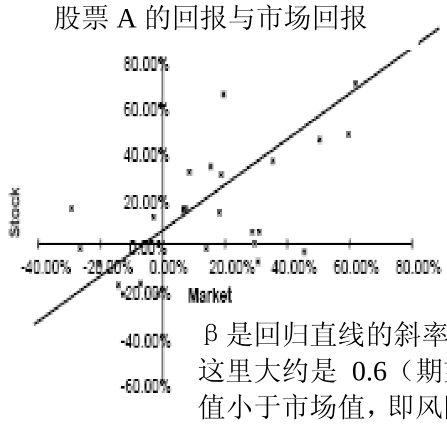
## 回归



垂直的红色线表示残差。目标是选择曲线使残差平方和最小。这是非线性规划。

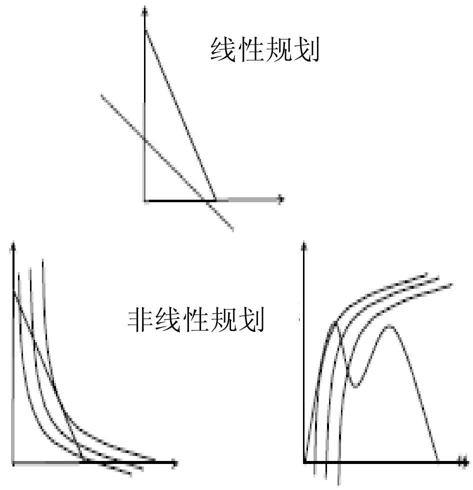
## 回归，预测 $\beta$ 值

股票 A 的回报与市场回报




β 是回归直线的斜率，这里大约是 0.6（期望值小于市场值，即风险低于市场风险）

## 非线性规划模型的难点

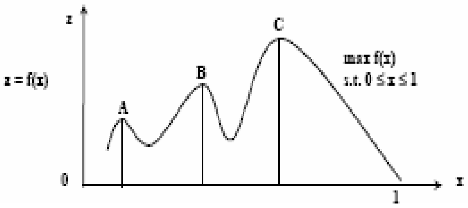



## 非线性规划模型的难点

定义：设 x 是一个可行解，那么

——x 叫做全局最优解，若对于任意可行解 y，f(x)≥f(y)

——x 叫做局部最优解，若对于任意与 x 足够接近的可行解 y（如对任意 j 和足够小的 $\varepsilon$，$x_j-\varepsilon \leq y_j \leq x_j+\varepsilon$），有 f(x)≥f(y)



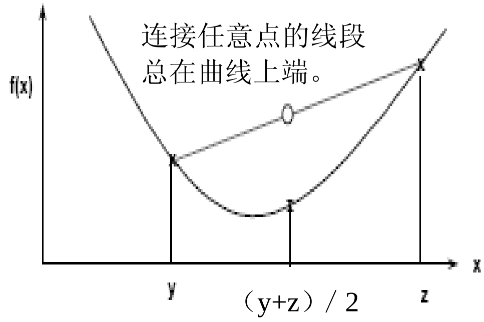

可能有多个局部最优解。

## 凸函数

凸函数：若对于任意 y,z,0≤λ≤1，有 f(λy+(1-λ)z)≤λf(y)+(1-λ)f(z))

例如：f((y+z)/2)≤f(y)/2+f(z)/2

若上式为 0＜λ＜1，则称为严格凸函数。

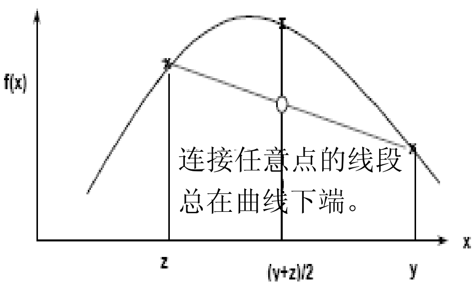



## 凹函数

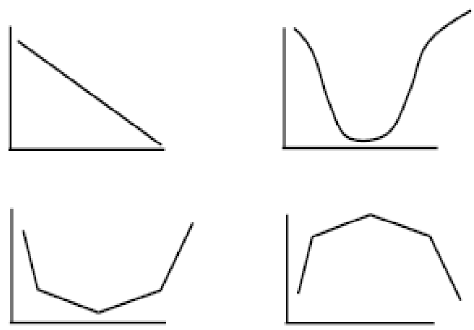
凹函数：若对于任意 y,z,0≤λ≤1，有 f(λy+(1-λ)z)≥λf(y)+(1-λ)f(z))

例如：f((y+z)/2)≥f(y)/2+f(z)/2

若上式为 0＜λ＜1，则称为严格凹函数。




## 分类：凸函数、凹函数、既凸又凹或非凸非凹



### 识别凸函数

- 对于一元函数，若二阶倒数恒大于零，那么函数是凸函数。
- 凸函数的和是凸函数。

  例如：$f(x,y)=x^2+e^x+3(y-7)^4-\log_2 y$

### 识别凸可行域

- 若所有约束均是线性的，则可行域是凸集
- 凸集的交集是凸集
- 若对于任意可行解 x,y，他们的中点是可行解，那么该区域是凸的。（除了非现实的例子）

### 局部最大（最小）的性质

- 凸集上的凹函数的局部最大值也是全局最大值。
- 凸集上的凸函数的局部最小值也是全局最小值。
- 严格凹性或凸性意味着全局最优解唯一。
- 考虑到这些，可以准确地解：

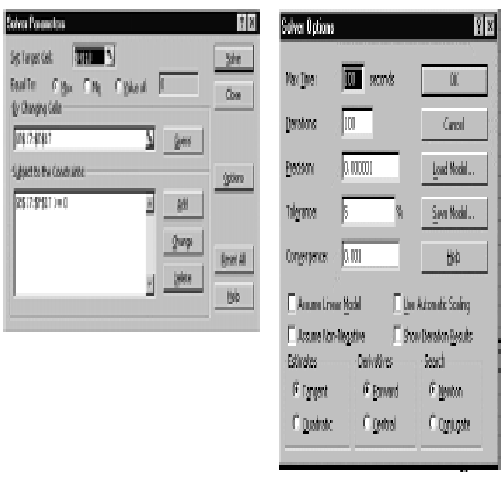
  —具有线性约束和目标函数是凹函数的最大化问题。

  —具有线性约束和目标函数是凸函数的最小化问题。

### 局部最优性的更多内容

- 求解非线性规划最小问题通常会找到局部最优解。
- 当局部最优解是全局最优解时，这将会很有用。
- 在很多时候并不是如此。
- 结论：若求解非线性规划问题，试着看看局部最优解如何。

### 用 Excel 规划求解解非线性规划问题



### 总结

- 应用非线性规划解决选址问题，投资组合管理，回归分析问题。
- 非线性规划问题很普通，很难求解
- 特例如最小化凸非线性规划比较容易求解，因为局部最小就是全局最小。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　4 月 30 日，周二**

- 动态规划
  —递归表达式
  —最优性原理

分发：讲稿

## 动态规划

- 将一个复杂的优化问题转换成为一系列简单的优化问题。
- 通常从尾部入手，逆序递推
- 可以解决很多领域的问题。
- 依靠递归，以及最优性原理。
- 由 Richard Bellman 提出。

## 递归实例

- 房间里有 11 人。从其中选出 6 个人有多少种方法？
- 令 f(n,k)表示从 n 个人中选出容量为 k 个的子组的数量。我们要求出 f(11,6)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

包含“1”的子组数目是 f(10,5)。
不包含“1”的子组数目是 f(10,6)。

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1, k)$$
$$f(n,n)=f(n,0)=1$$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 1 | 1 | | | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |

## 动态规划实例

- 设桌子上有 30 根火柴，捡起最后一根的人获胜。每轮中，我或者对手可以捡起 1，2，3 根火柴。假如我先捡，怎样才能使我赢得游戏？
- （与同伴商议）

## 动态规划实例

- 若只有 1,2,3 根火柴，我赢得游戏。
- 回到上一轮，若有 4 根火柴我就在游戏中输了。
- 再上一轮，若有 5,6,7 根火柴那么我就赢得游戏。
- 再上一轮，若有 8 根火柴那么我就输掉游戏。
- 结论：若有 4k 根火柴，那么我输掉游戏，否则我赢得游戏。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

### 利用动态规划确定对策

- n：剩余火柴数量（状态/阶段变量）。
- f(n)=1 如果你可以在 n 根火柴时赢得游戏；否则 f(n)=0。f(n)是最优值函数。

在每个状态/阶段，可以采取 3 种中的任何一种决策：捡 1,2,3 根火柴。

- f(1)=f(2)=f(3)=1 (边界条件)

递归表达式

- f(n)=1 如果 f(n-1)=0 或 f(n-2)=0 或 f(n-3)=0；否则 f(n)=0。
- 等价表达式，f(n)=1-min(f(n-1), f(n-2), f(n-3))。

### 递归计算

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

### 相似，但是难度更大点的例子

- 假设桌子上有 30 根火柴，捡起最后一根的人获胜。每轮中，我或者对手可以捡起 1，2，6 根火柴。假如我先捡，怎样才能使我赢得游戏？

### 利用动态规划确定对策

- n：剩余火柴数量（状态/阶段变量）。
- g(n)=1 若可以在 n 根火柴时赢得游戏，否则 g(n)=0。g(n)是最优值函数。

在每个状态/阶段下，可以采取 3 种中的任何一种决策：捡 1,2 或 6 根火柴。

- g(1)=g(2)=g(6)=1 (边界条件)
- g(3)=0；g(4)=g(5)=1。(为什么？)

递归表达式

- g(n)=1 若 g(n-1)=0 或 g(n-2)=0 或 g(n-6)=0；否则 g(n)=0。
- 等价表达式，f(n)=1-min(g(n-1),gf(n-2),gf(n-6))。

### 递归计算

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

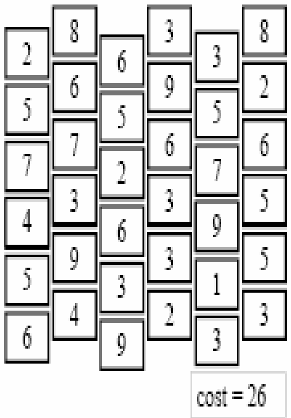
谁看出了确定输掉游戏的模式？

### 同样的表格

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

### (来自 BH&M 第 453 页的)例子




一条路径由从左到右相互临近的方格组成。

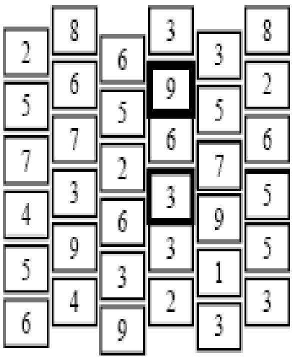
路径的费用就是路上面数值的总和。

最小费用路径是什么？

### 利用递归解决最短路问题

- 对于每个方格 j，令 f(j)为从 j 开始到右端尾节点的最短路。
- 若 j 是最右端的节点，那么 f(j)的费用就是节点 j 的费用。
- j 是状态/阶段变量
- f(j)是最优值函数

### (来自 BH&M 第 453 页的)例子



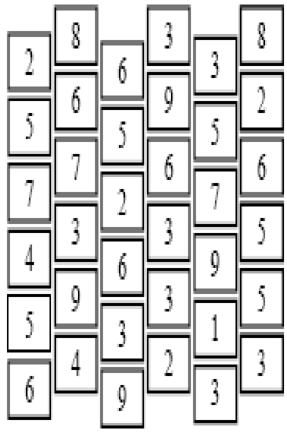
考虑费用为 3 的节点，把它称为节点 j。（它是状态/阶段变量）

从该节点开始的最短路费用为 15。

故 f(j)=15。

节点 9 的费用是多少？

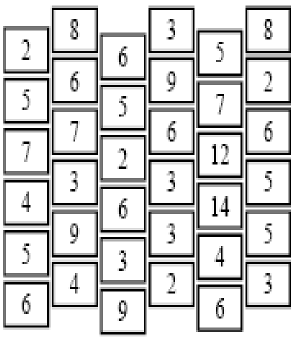
### 简易计算



最右端节点的 f(j)很容易计算。

对于其他节点，有两种决策：向右上方，或者向右下方。

### 第二阶段

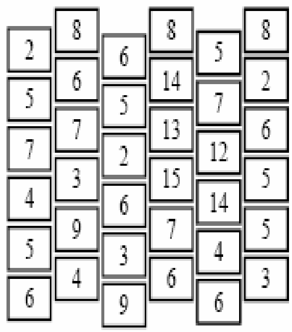


计算右端第 2 列节点的 f(j)值。

令 c(j)为矩形 j 的费用。

令 $R_1(j)$为节点 j 右上方节点。令 $R_2(j)$为节点 j 右下方节点。那么 $f(j)=c(j)+\min[f(R_1(j)),f(R_2(j))]$。为什么？

### 第三阶段



计算右端第 3 列节点的 f(j)值。

与你的同伴一起，计算出剩余矩形的 f(j)值。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 动态规划的基本概念

- 将复杂的决策问题化为一系列比较小的子问题。
- 阶段：一次解决一个阶段的决策问题。通常阶段可以理解为时间。
  —不是每个动态规划问题都有阶段
  —前面的最短路问题有 6 个阶段
  —火柴问题没有阶段

## 动态规划的基本概念

- 状态：较小的子问题通常用紧密联系的方式表述出来。子问题的描述通常涉及到状态。
  — 火柴问题：状态是剩余火柴量
- 在每个状态/阶段，有 1 个或多个决策。动态规划的递归确定了最优决策。
  —火柴问题：拿走多少火柴
  —最短路问题：向右上或右下

## 最优性原理

- 任何一项最优策略具有性质：无论当前状态如何和如何决策，接下来的决策一定构成由当前决策引起的状态的最优策略。（Richard Bellman 的表述。）
- 不论选择何节点 j，剩余的从 j 到最后的路径一定是从节点 j 出发的最短路。

## 最优能力扩充：什么是建造工厂的最小成本方式？

| 年 | 累积需求 | 每个工厂建设成本（百万美元） |
|---|---|---|
| 2002 | 1 | 54 |
| 2003 | 2 | 56 |
| 2004 | 4 | 58 |
| 2005 | 6 | 57 |
| 2006 | 7 | 55 |
| 2007 | 8 | 52 |

建造工厂的年度费用是$1500 万美元。每年最多建 3 个工厂。

## 前向递归

- 从第一阶段开始，利用递归确定更大阶段的值
- 在火柴问题中，由 f(k)确定 f(n)，k<n。

## 后向递归

- 边界条件：最后阶段的最优状态值。
- 利用后向递归确定其他阶段的最优值。

**确定状态和阶段**

- 阶段：年份 Y
- 状态：工厂数量
- f(j,Y)：在 Y 年末从 j 个工厂开始能力扩充的最优费用。
- 我们希望计算 f(0,2002).
- 对于不同的 j，f(j,2007)是多少？

**确定状态和阶段**

- 与同伴一起确定每个 j 的 f(j,2006)值。你可以利用 f(j,2007)的值。
- 若完成了上一步，计算每个 j 的 f(j,2005)值。
- 然后计算每个 j 的 f(j,2004)值。

**动态规划总结**

- 递归
- 最优性原理
- 状态，阶段与决策
- 应用领域广泛

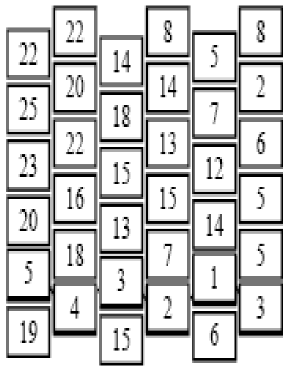
  —博弈

  —最短路

  —能力扩充

  —下一讲中有更多应用

**最后阶段**




计算右端剩余列中节点的 f(j)值。

追踪最优路径的下一节点直到最右端。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　5 月 2 日，周四**

- 动态规划
  —复习
  —更多的例子

分发：讲稿

**火柴游戏**

- 假设桌子上有 50 根火柴，捡起最后一根的人获胜。每轮中，我或者对手可以捡起 1，2，6 根火柴。假如我先捡，怎样才能使我赢得游戏？

**利用动态规划确定对策**

- n：剩余火柴数量（状态/阶段变量）。
- g(n)=1 若可以在 n 根火柴时赢得游戏，否则 g(n)=0。g(n)是最优值函数。

在每阶段下，可以采取 3 种中的任何一种决策：捡 1,2 或 6 根火柴。

- g(1)=g(2)=g(6)=1 (边界条件)
- g(3)=0；g(4)=g(5)=1。(为什么？)

递归表达式

- g(n)=1 若 g(n-1)=0 或 g(n-2)=0 或 g(n-6)=0；否则 g(n)=0。
- 等价表达式，
  f(n)=1-min(g(n-1),gf(n-2),gf(n-6))。

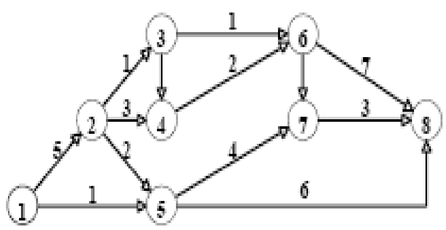
**同样的表格**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | |
| 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | |
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | |
| 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |

**最优性原理**

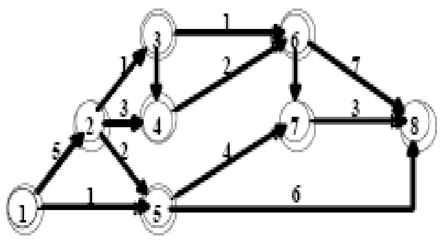
- 任何一项最优策略具有性质：无论当前状态如何和如何决策，接下来的决策一定构成由当前决策引起的状态的最优策略。
- 不论选择何节点 j，剩余的从 j 到最后的路径一定是从节点 j 出发的最短路。

**确定不含有向回路的网络图最短路**



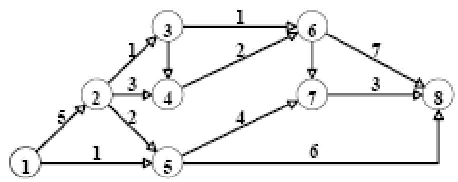
若网络图没有有向回路，那么可对节点做标记，使得对任意弧（i,j），有 i<j。这种节点标记称为拓扑顺序。

## 确定拓扑顺序

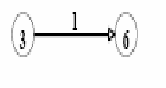


找到一个没有弧指向它的节点，记作节点 1。对于 i=2 到 n，找到一个没有被没有标记节点的弧指向的节点，标记为 i。

## 更多拓扑顺序的内容



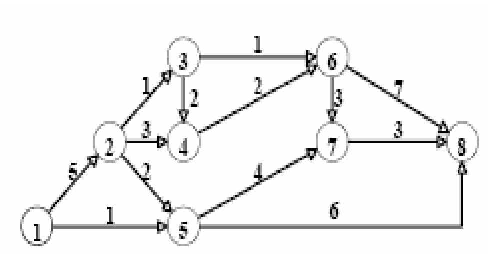
拓扑顺序对于动态规划十分重要，其他计算同样如此，比如 Excel 计算工作表中值的方式。




解释：单元格 6 的计算要依靠单元格 3。

拓扑顺序给出了单元个计算的顺序。

## 无环图最短路问题



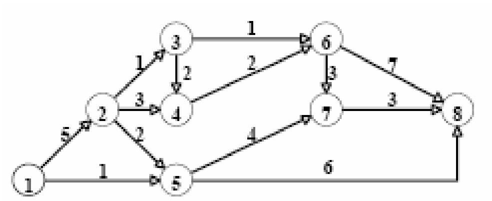
令 d(j)表示从节点 1 到节点 j 的最短路的长度。

令 $c_{ij}$ 为弧(i,j)的长度。

d(l)是多少？

## 利用递归确定 d(j)

d(j)表示从节点 1 到节点 j 的最短路的长度。令 $c_{ij}$ 为弧(i,j)的长度。



如何用 d(1),…d(j-1)计算 d(j)?

计算 f(2),…,f(8)

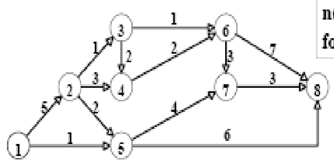
例子：d(4)=min{3+d(2),2+d(3)}

## 枚举问题的动态规划

n(j)：从节点 1 到节点 8 的不同路径数。

$n(1) = 1$

$n(j) = \sum_{(i,j)\in A} n(i)$ for $j > 1$.



$n(1) = 1,\ n(2) = 1, n(3) = 1$

$n(4) = n(2) + n(3) = 2; \quad n(5) = n(1) + n(2) = 2$

$n(6) = n(3) + n(4) = 3; \quad n(7) = n(5) + n(6) = 5$

$n(8) = n(5) + n(6) + n(7) = 10$

11

## 确定最优段落设计

通过最优地选择每行的断点，Tex将段落最优分解。有个子程序计算从第i个单词到第j-1个单词的行的ugliness F(i,j)。如何把F(i,j)作为动态规划的一部分，其解将解决段落问题。

通过最优地选择每行的断点，Tex 将段落最优分解。有个子程序计算从第 i 个单词到第 j-1 个单词的行的 ugliness F(i,j)。如何把 F(i,j)作为动态规划的一部分，其解将解决段落问题。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 解段落问题

- 注意：F(i,j)是从第 i 个单词到第 j-1 个单词的行的 ugliness。
- 令 g(j)为包含第 1,2,…,j-1 个单词的最优段落设计的 ugliness。
- 令 n 为段落中的单词数量。
- 初始条件：g(n)=0。
- 最优段落设计的 ugliness 多大？是 g(n)么？
- 正确的递归表达式是什么？

## 资金预算

投资预算=$14000

| 投 资 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 资金需求 (1000s) | $5 | $7 | $4 | $3 | $4 | $6 |
| NPV 增加量 (1000s) | $16 | $22 | $12 | $8 | $11 | $19 |

## 求解股票问题

- 在阶段 j，对从 0 到$14000 的预算，计算限于股票 1 到 j 的最佳净现值。
- 令 f(j,k)为预算为 k，仅限于股票 1,2,…,j 的最优净现值。
- f(1,k)很容易计算。
- 原问题的最优解为 f(6,14)。

## 资金预算：第一阶段

考虑股票 1：成本$5，净现值：$16

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

f(0,0)=0，对于 k>0，没有定义 f(0,k)。

f(l,k)=max(f(0,k),f(0,k-5)+$16)。

## 资金预算：第二阶段

考虑股票 2：成本$7，净现值：$22

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |

f(2,k)=max(f(1,k)，f(1,k-7)+$22)

## 资金预算：第三阶段

考虑股票 3：成本$4，净现值：$12

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | - | 28 | - | - | 38 | - | - |

f(3,k)=max(f(2,k)，f(2,k-4)+$12)

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 资金预算：第四阶段

考虑股票 4：成本$3，净现值：$8

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | - | 28 | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 30 | - | 38 | - | - |

## 资金预算：第五阶段

考虑股票 5：成本$4，净现值：$11

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | - | 28 | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 30 | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 30 | 33 | 38 | 39 | 41 |

## 资金预算：第六阶段

考虑股票 6：成本$6，净现值：$19

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | - | 28 | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 30 | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 30 | 33 | 38 | 39 | 41 |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 41 | 43 |

## 通用资金预算问题

$$\text{Max} \quad \textstyle\sum_{j=1..n} c_j x_j$$

$$\text{s.t} \quad \textstyle\sum_{j=1..n} a_j x_j \le b$$

x 是二元变量

$$\text{Let } f(k, v) = \text{Max} \quad \textstyle\sum_{j=1..k} c_j x_j$$

$$\text{s.t} \quad \textstyle\sum_{j=1..k} a_j x_j = v$$

x 是二元变量

## 递归

- f(0,0)=0；对于 v>0，f(0,v)未定义。
- $f(k,v)=\min(f(k-1,v)，f(k-1,v-a_k)+c_k)$
  包含第 k 项，或者不包含第 k 项。

  原问题的最优解是
  max{f(n,k)：0≤v≤b}。

  注意：我们解决所有右端项小于 b 的资金预算问题。

## 背包问题

31x+35y+37z=422 是否有可行解？
其中 x,y,z 是非负整数。

若 31x=j 有解，x 是是非负整数，
则令 f(1,j)=1。

若 31x+35y=j 有解，x,y 是是非负整数，
则令 f(2,j)=1。

## 背包问题

31x+35y+37z=422 是否有可行解？
其中 x,y,z 是非负整数。

若 31x+35y+37z =j，x,y,z 是非负整数，有解，则令 f(3,j)=1。

注意：本问题有 3 个阶段。

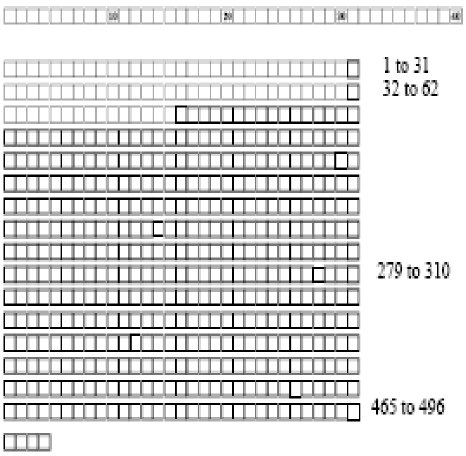
## 背包问题的递归表达式

31x+35y+37z=422 是否有可行解？
其中 x,y,z 是非负整数。

f(0,0)=1,对于 k>0，f(0,k)=0

f(1,k) = 1　　if f(0,k) = 1
　　or　f(0, k-31) = 1
　　or　f(1, k-31) = 1

f(1,k) = max { f(0,k), f(0, k-31), f(1, k-31) }

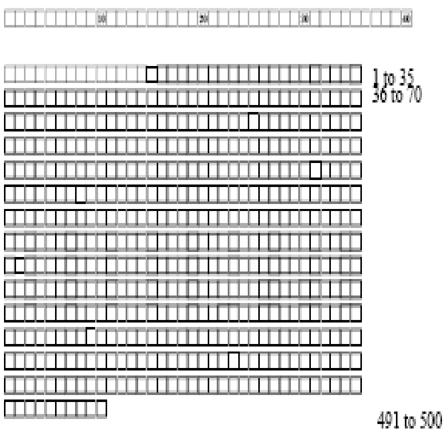



## 背包问题的递归表达式

31x+35y+37z=422 是否有可行解？
其中 x,y,z 是非负整数。

f(2,k) = 1　　if f(1,k) = 1
　　or　f(1, k-35) = 1
　　or　f(2, k-35) = 1

f(2,k) = max { f(1,k), f(1, k-35), f(2, k-35) }




## 背包问题的递归表达式

31x+35y+37z=422 是否有可行解？
其中 x,y,z 是非负整数。

f(3,k) = 1　　if f(2,k) = 1
　　or　f(2, k-37) = 1
　　or　f(3, k-37) = 1

f(2,k) = max { f(2,k), f(2, k-37), f(3, k-37) }

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

1 to 35

491 to 500

## 动态规划复习

- 递归
- 最优性原理
- 状态，阶段与决策
- 应用领域广泛

  —最短路

  —能力扩充

  —背包问题

  —更多其他应用

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

**15.053　　　　5 月 7 日，周二**

- 整数规划表述

分发：讲稿

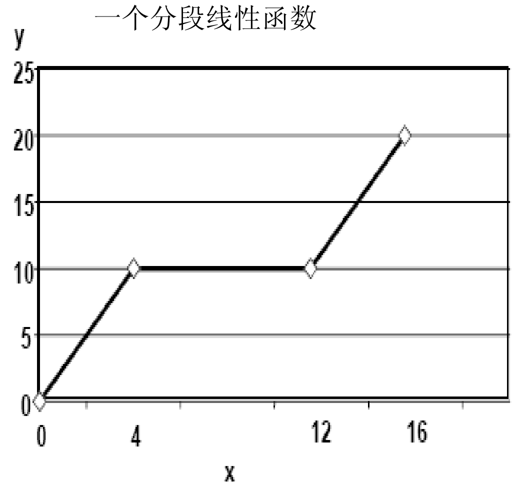
## 动态规划快速总结

- 动态规划问题对于随时间进行的决策问题通常很有效。
- 前面两讲的目标
  —介绍动态规划的递归表达式
  —学生应该学到
  - 给定最优值函数，如何完成动规划的递归表达式
  - 当看到态规划问题的递归表达式时，能它们。
- 注意：有一个专门为研究生水平设计的课程 6.231。

## 整数规划

- 表示分段线性函数
- 一个产品设计与市场营销问题
- 一个结构问题
- 一个交通工具线路问题
- 注意：期末考试的 50%是线性规划和整数规划的问题。

一个分段线性函数




## λ 法（与非线性规划一讲中相同）

$$x = 0\lambda_1 + 4\lambda_2 + 12\lambda_3 + 16\lambda_4$$

$$y = 0\lambda_1 + 10\lambda_2 + 10\lambda_3 + 20\lambda_4$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1,\ \lambda >= 0$$

约束于临接条件

- 什么是临接条件？如何利用 0-1 变量表达临接条件？

## 临接条件

- 最多有两个 λ 变量为 0。（如何表示这个？）
  —定义一个新变量 $\gamma_i$，如果 $\gamma_i>0$，则 $\gamma_i=1$。
  —对 j=1 到 4，$\gamma_i \leq \gamma_j$，并且 $\gamma_j \in \{0,1\}$
- 如果 i 和 j 邻接，则就不是 $\lambda_i>0$ 和 $\lambda_j>0$ 的情形。
  —如果 i 和 j 不邻接，则 $\gamma_i+\gamma_j \leq 1$

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**说明：x=8 且 y=10**

- X=0λ$_1$+4λ$_2$+12λ$_3$+16λ$_4$
  —因此，λ$_1$=0，λ$_2$=1/2，λ$_3$=1/2，λ$_4$=0
  —并且γ$_1$=0，γ$_2$=1，γ$_3$=1，γ$_4$=0
- y=0λ$_1$+10λ$_2$+10λ$_3$+20λ$_4$=10

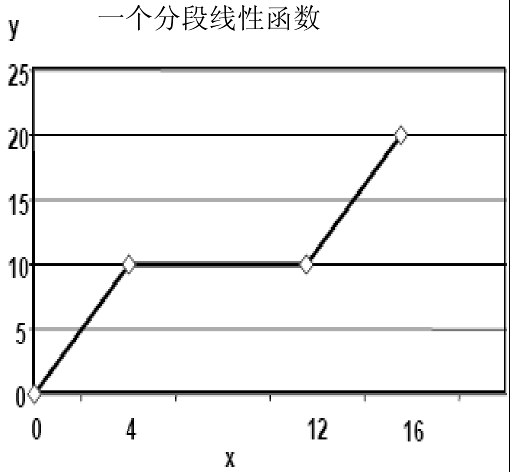
满足约束

**用λ法表述非线性规划**

- 把 x 表示为断点的一个凸组合。
- 把 y 表示为函数值的一个凸组合。
- 邻接条件
  —强迫使用整数变量工具

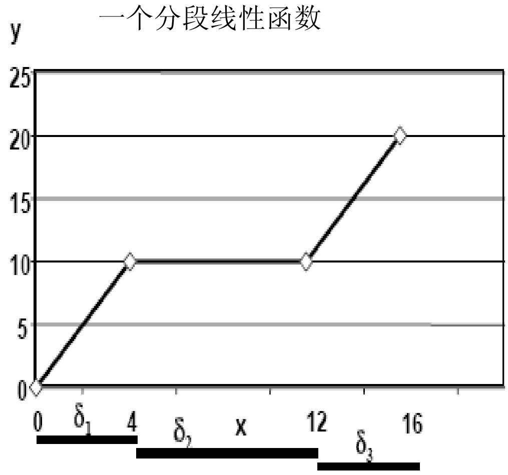
**表示非线性函数：δ法**

一个分段线性函数




**表示非线性函数：δ法**

一个分段线性函数




**δ法的更多内容**

x=δ$_1$+δ$_2$+δ$_3$
给δ准确的边界。

$0 \le \delta_1 \le 4;\quad 0 \le \delta_2 \le 8;\quad 0 \le \delta_3 \le 4;$

确定斜率，以正确的定义 y

y=2.5δ$_1$+0δ$_2$+2.5δ$_3$

规则：δ$_j$=0，直到δ$_{j-1}$处于其上界，j>1。
（见下页）

**规则：δ$_j$=0，直到δ$_{j-1}$处于其上界，j>1。**

如果δ$_{j-1}$不是位于上界，则 $w_j$=0。

$w_2 \le \delta_1/4;\quad w_3 \le \delta_2/8;\quad w_2, w_3 \in \{0,1\}$

如果 $w_j$=0，令δ$_j$=0
$0 \le \delta_1 \le 4;\quad 0 \le \delta_2 \le 8\, w_2;\quad 0 \le \delta_3 \le 4\, w_3$
（这个替代了其它上界）

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

说明：**x=8 且 y=10**

$$x = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$0 \le \delta_1 \le 4;\quad 0 \le \delta_2 \le 8\, w_2;\quad 0 \le \delta_3 \le 4\, w_3$$

So, $\delta_1 = 4$; $\delta_2 = 4$; $\delta_3 = 0$.

and $w_2 = 1$; $w_3 = 0$

$$y = 2.5\,\delta_1 + 0\,\delta_2 + 2.5\,\delta_3$$

and so $y = 10$

满足约束条件

用 δ 法表述整数规划

把 x 表示为区间的和

$x=\delta_1+\ldots+\delta_k$，$0\leqslant\delta_j\leqslant u_j$，对于任意 j

用区间的斜率表示 y，$y=a_1\delta_1+\ldots+a_k\delta_k$

在前面的区间没有用完之前不用另外一个区间（λ 位于上界）

如果 $\delta_j<u_j$，则 $\delta_{j+1}=0$。强迫使用整数变量工具。

最优地选择现有产品

当购买计算机时，计算机制造商可提供 8 个性能可变的产品（内存大小，硬盘大小，速度，外围设备等）。考虑到所有的可能，有超过 10000 种不同的组合。

每个消费者可定制一台计算机，或者购买现货。消费者可能更愿意购买现货，因为这样买到一台计算机更方便、快捷。

应存储多少计算机？（至少应存储 25 种不同配置的计算机。）

本模型假设

- 计算机生产商有 1000 个随机顾客的详细资料。

  —对每个顾客 i 和每种可能的配置 j，u(i,j)表示顾客选择现货 j 的效用。

  —$u^*$（i）=第 i 人特殊订购的效用

  —如果 j 是从库存中购得，p(j)是购买 j 的利润。（比订购要高，因为可以一次生产更多）

  —v(i)：第 i 个人选择订购的利润。

更多假设

- 对于存储物品 j，有固定费用 f(j)
- 公司目标：来自计算机现货的最大利润；考虑非特殊定购和固定费用。

整数规划模型

- 如果顾客 **i** 选择产品 **j**，则 **x(i,j)=1**。
- 如果顾客 **i** 是特殊订购，则 **w(i)=1**。
- 如果存储产品 **j**，则 **y(j)=1**。
- 与同伴一起做：

  目标函数是什么。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

### 约束是什么？

- 每个人最多选择一种产品
- 生产厂商最多储存 25 种不同的配置
- 在不存储产品 j 时，不能选择 j
- 变量是二元变量

### 如何让每个人选择产品使效用最大

- 如果存储了 j 产品，并且如果 u(i,j)>u(i,k)，则第 i 个人不选择 k。
- 如果存储了项目 j，而且如果 u(i,j)>u*(i)，则第 i 个人并不定购。

### 不要向前面看

卡　片

### 模型

$$\max \ \sum_{i,j} p(j)\, x(i,j) + \sum_i v(i)\, w(i) - \sum_j f(j)\, y(j)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & w(i) + \sum_j x(i,j) = 1 \\
& \sum_j y(j) \le 25 \\
& x(i,j) \le y(j) \ \text{ for all } i, j \\
& x(i,j) \le (1 - y(k)) \ \text{ if } u(i,j) < u(i,k) \\
& w(i) \le (1 - y(k)) \ \text{ if } u^*(i) < u(i,k) \\
& w(i),\ x(i,j),\ y(j) \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

### 模型注解

- 可以用关联分析估计效用。
- 问题是普遍适用的
  —问题从何而来？
- 有要考虑的变化的建议么？

### 关于整数规划模型的更多内容

- 整数规划可以用在寻求 n 元最优函数的解，其中解可以表述为二元解。
- 但是，有时候需要技巧将问题化为整数规划问题。

## 整数规划应用的其他领域

- 项目管理
- 产品配置
- 车辆路线、包装行程和时间安排
- 生产
- 财务

## 产品配置问题

- Kaya 要买一辆宝时捷汽车。有很多性能是可以改变的：
  —有 14 种颜色
  —可以选择双门或者四门
  —可以变换装饰
  —有四种不同的立体音响系统
  —Kaya 可以确定每种性能的效用
  —她对汽车的资金预算是 B

## 配置问题的符号表示

- 性能 $A_1,\ldots,A_k$
- 每种性能都有多种选择。
  —如果 j 是 $A_i$ 的备选项，写为 $j\in A_i$。
- u(j)=选项 j 的效用。
- 一个性能必须只能选择一个选项，
  ——偶尔选项是空的。
- 有一成对集合 P，如果(i,j) ∈P，这意味着如果选择了 i,则必须选择 j。
- 设 E 是删除的集合。如果(i,j) ∈E，则不能选择 i 和 j。
- 配置的资金预算为 B。

## 配置问题的表述

如果选择 j 则 x(j)=1，如果不选 j，则 x(j)= 0 。

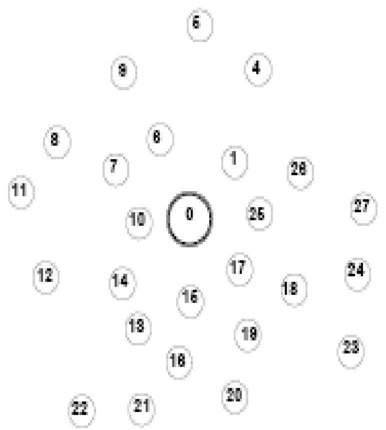
Max 效用
约束：从每个性能中选择一个备选项
遵守优先约束
遵守删除约束
花费不能超过 B

## 舰队路线问题

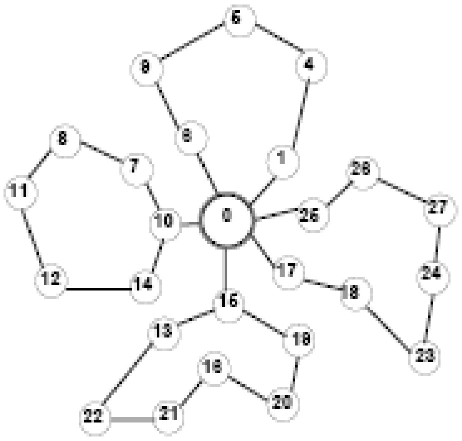
- 交通工具 1 ,2,…,m
- $q_k$=交通工具 k 的能力
- 地点 1 ,2,…n
- d(i,j)=从地点 i 到地点 j 的距离。
- 公共汽车站 D
- 每辆车都从公共汽车站 D 出发，每次行程最大为 T。
- 每个地点必须有车经过。
- 最小化总距离。

## 车辆路线问题

假定有 4 辆车



## 车辆路线问题



## 模型

- 令 x 为车辆的标号
- 如果车辆从 i 到 j，则 $x_{ij}^{k}=1$，

  否则 $x_{ij}^{k}=0$
- 如何表述车辆路线问题？

## 小结

- 整数规划问题很普遍
- 可以建立分段线性费用模型
- 可以建立大多数解为整数的模型。
- 应用

  —市场营销

  —产品配置

  —车辆路线

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　5 月 9 日，周四**

- 启发式搜索：解决很难最优化问题的模型

分发：讲稿

看一下很大规模邻域搜索简介讲稿。

**两种复杂性**

◆ 1.问题具有多个约束，而且目标之间复杂冲突。
——许多实际问题

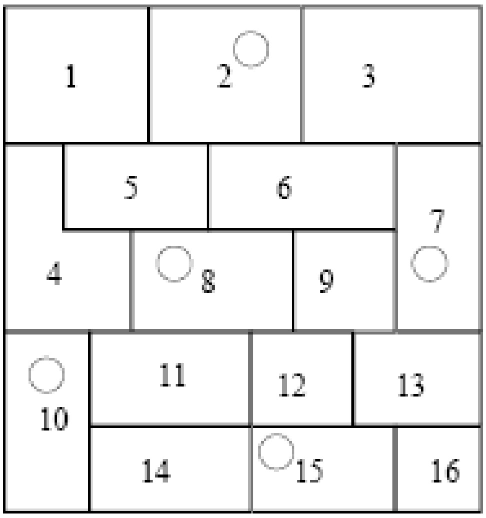
◆ 2.问题很容易理解但是有很多可行解，不可能找到最优的一个。
- 游戏（国际象棋）
- 整数规划问题，比如旅行销售员问题。

**例子：消防队选址问题**

◆ 考虑在不同地区为消防队选址。

◆ 目标：用尽可能少的消防队使每个区域或者邻接区域内有一个消防队。

**消防队选址问题例子**




**启发式的原因**

◆ 启发式算法通常比最优化算法更快，比如分支定界法

◆ 若很好地开发，启发式算法可以为很多实际问题获得好解。

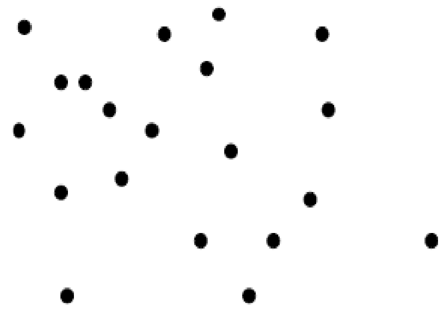
◆ 启发式算法的一些特殊例子
- 构建方法
- 改进方法

**旅行销售员问题启发式算法构建**

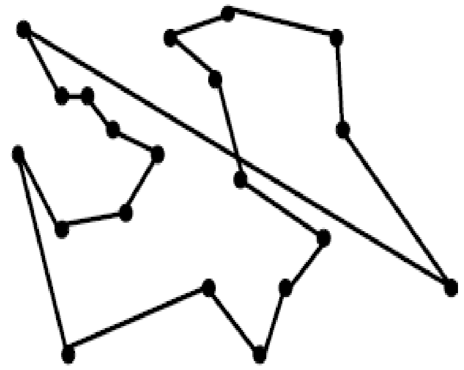
开始
　　选择旅行的初始城市；
　　当还有未到过的城市时，那么下一个要访问的城市是距离已经到过城市最近的。
结束

构建启发式算法：执行一个结构化的迭代顺序，其结果是一个可行解。可以将其看作是一次旅行，但是中间步骤决不会总是路径。

旅行销售员问题图解



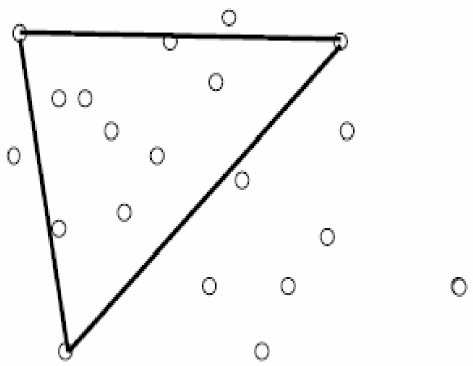
旅行销售员问题图解



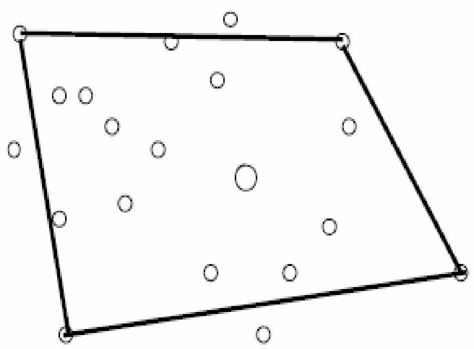
一个更有效但是更慢的启发式算法

- 前面的启发式算法总是在当前路的末尾加入下一个城市。
- 思路：在当前路径的任意点加入启发式算法。
- 更好的点子：在每步都保持一个回路，在回路中最优地加入下一个城市。
- 这是一个插入启发式算法。

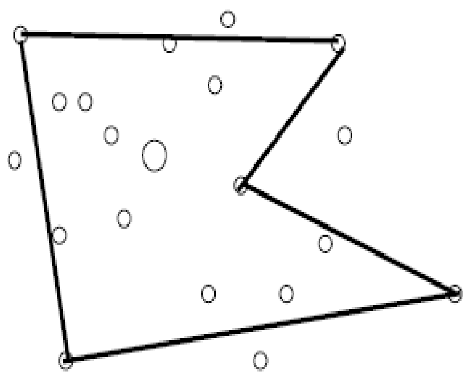
从 **3** 个城市开始



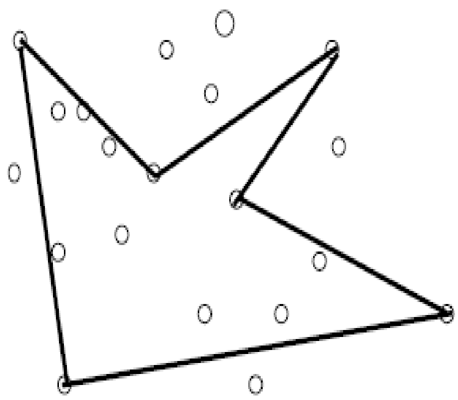
插入第四个城市



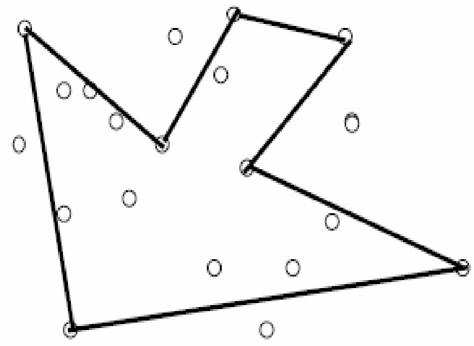
插入第五个城市



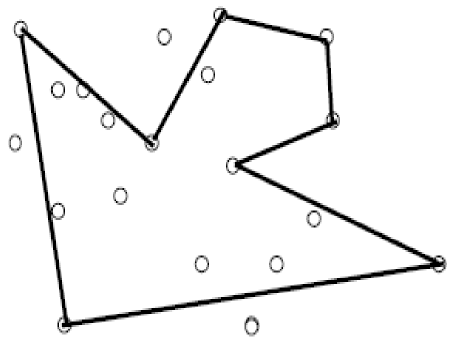
插入第六个城市



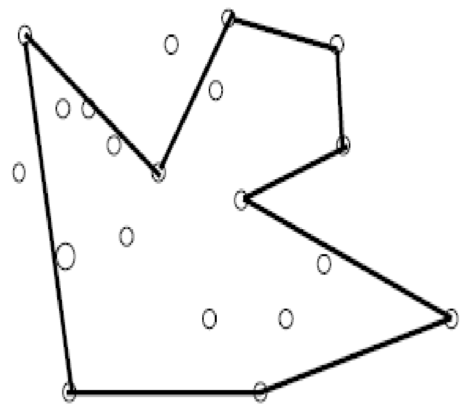
插入第七个城市



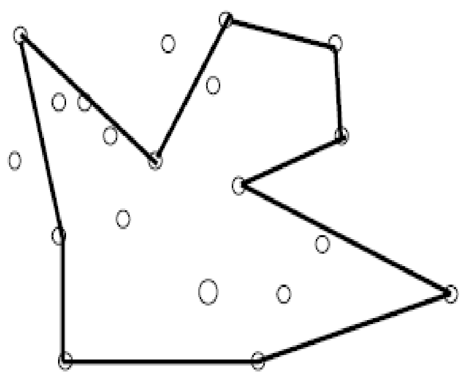
插入第八个城市



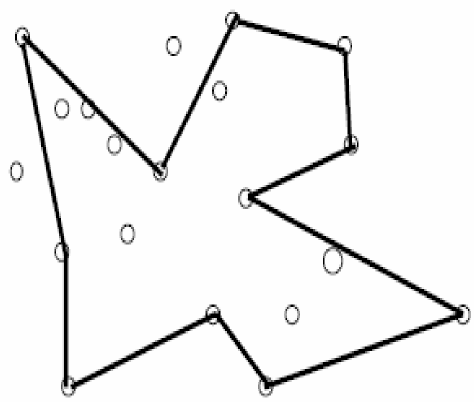
插入第九个城市



插入第十个城市

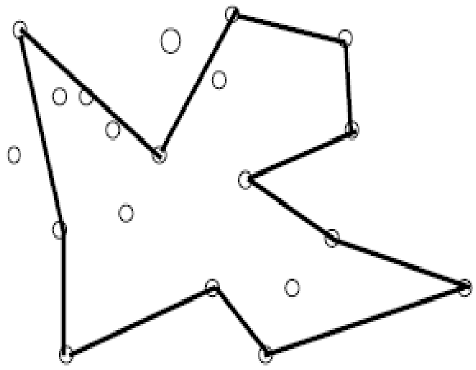


插入第十一个城市

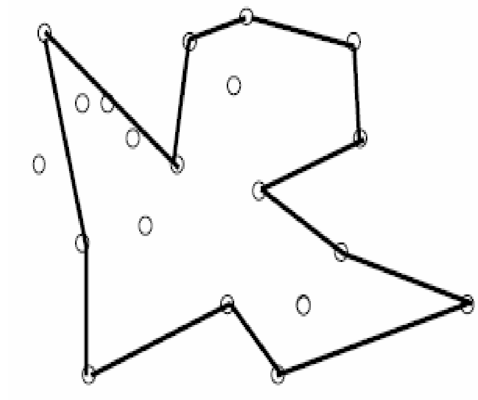


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

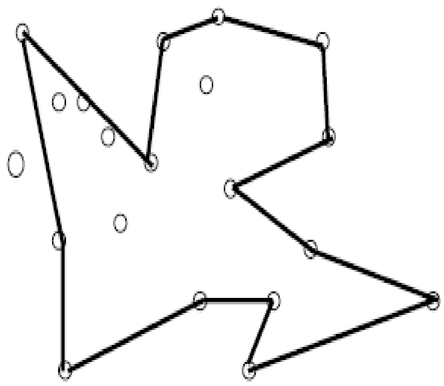
插入第十二个城市



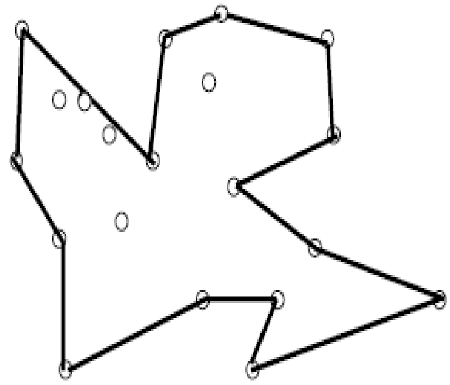
插入第十三个城市



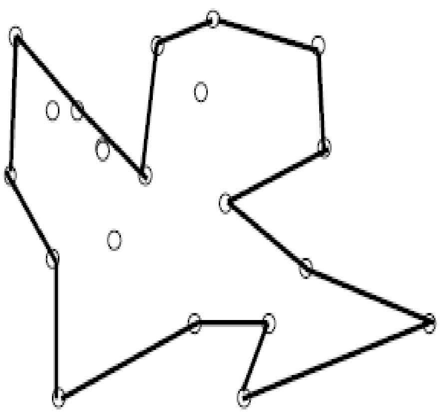
插入第十四个城市



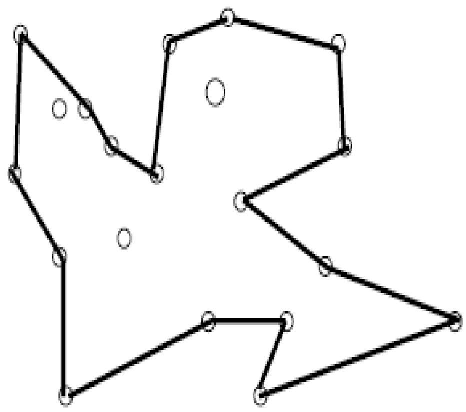
插入第十五个城市



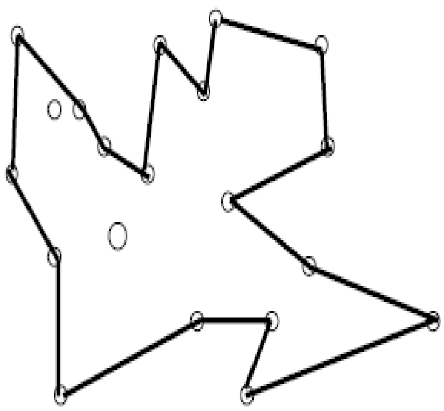
插入第十六个城市



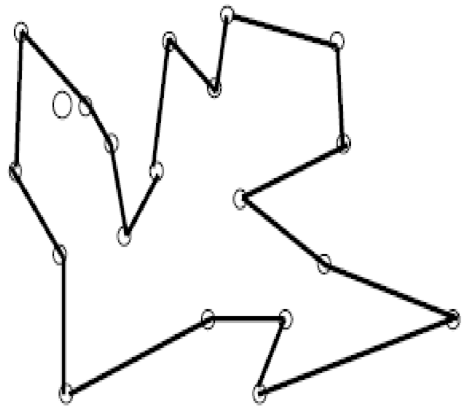
插入第十七个城市



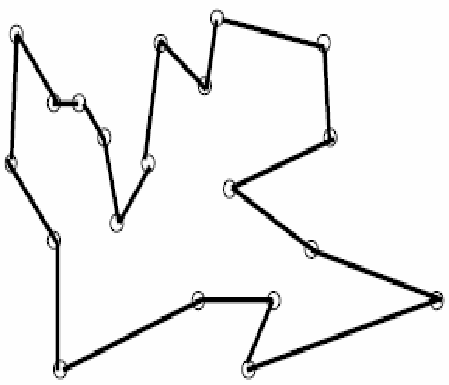
插入第十八个城市



插入第十九个城市



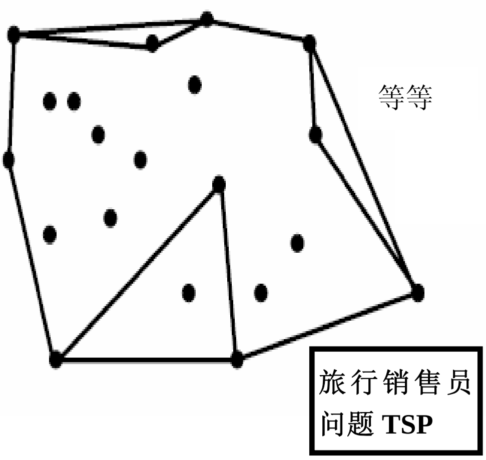
插入最后一个城市



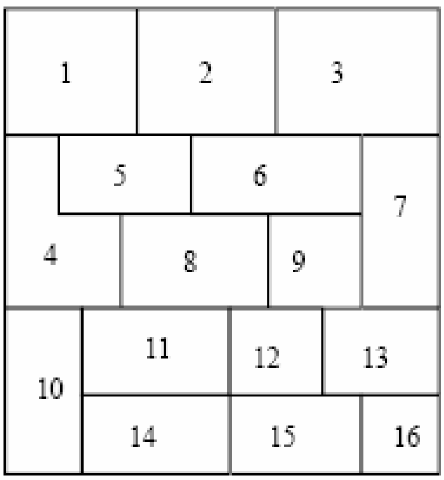
插入启发式算法注解

- 比最近的邻域算法更慢
- 比最近的邻域算法更有效
- 插入城市的决策有所不同
  - ◆ 加入距离当前旅游路径最远的城市是很有效的。

凸外壳＋插入启发式算法




如何构建消防队问题的启发式算法



PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

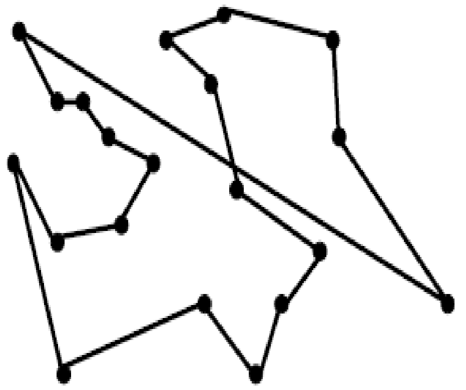
### 启发式算法注解

- 很容易写出满意的构建式启发算法
- 很难写出优秀的构建式启发算法
- 有时简单点会更好

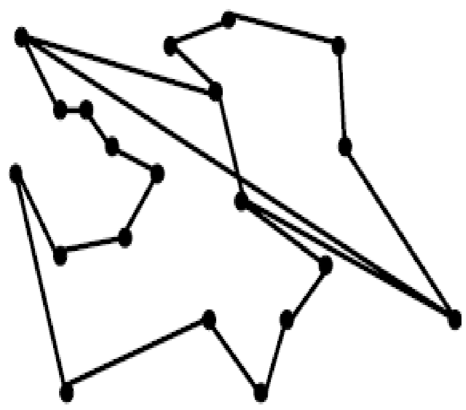
### 改善方法

- 这种技术从一个解开始，找出一个改善解的简单方法。
- 例子：令 T 为一个旅行路径
- 找到一个改善的旅行路径 T’，使得 |T-T’|=2。

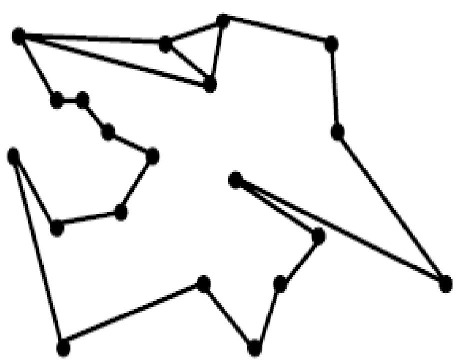
### 2 步最优化启发式算法图解



### 去掉 2 条边，加入 2 条边



### 去掉 2 条边，加入 2 条边



### 局部改进的启发式算法

- 对于任一旅游路径 T，若 T 通过加入 2 条边，删除 2 条边得到 T’,那么 T’是 T 的双邻边旅游路径。
- 若 T 的长度小于或者等于他的每个双邻边旅游路径的长度，则称 T 为 2 步最优化算法。

2 步最优化算法

从一个可行的旅游路径 T 开始

当 T 不是 2 步最优时，用长度更小的 T 的双邻边旅游路径代替 T。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

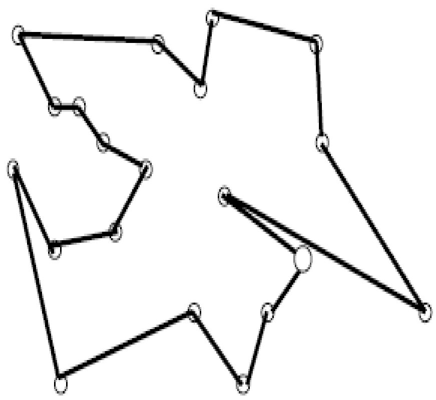
**2 步最优搜索注解**

- 2 步最优一般可以得到很好的解，但是不能保证。
- 通常去掉交叉边。
- 典型的，解在距离最优解的 7%之内。

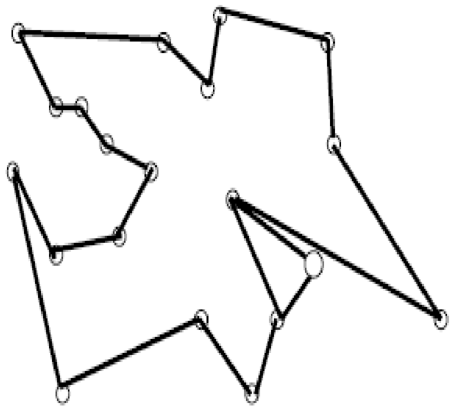
局部搜索的更多内容

- 基本原理：定义每个可行解的一个邻居。
- 给定解 x，若存在成本更低的 x 的邻居，那么替换 x。
- 邻域通常符合手头问题的类型。通常也会有很多可能的选择。
- 旅行销售员问题的其他可能邻域。
    - 3 步最优
    - 插入

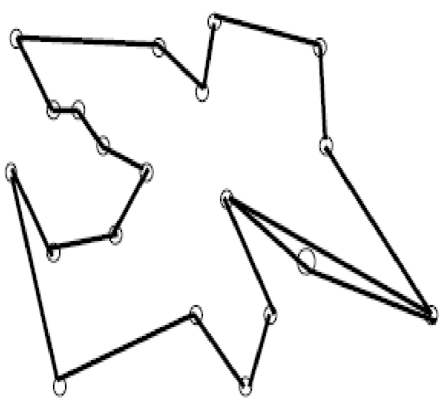
邻域插入：删除一个节点然后在其他地方插入一个节点



邻域插入：删除一个节点然后在其他地方插入一个节点



邻域插入：删除一个节点然后在其他地方插入一个节点



局部最优解

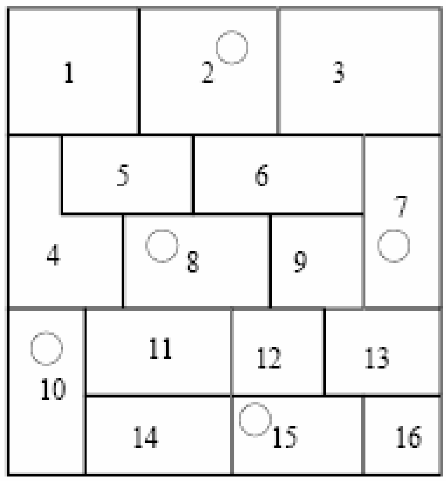
- 一个解 y 叫做局部最优（在一个给定邻域里），若没有 y 的邻居目标值优于 y。
- 例子：2 步最优法找到一个局部最优解。

### 改善方法常得到一个局部最优解

- 一个解叫做最优解，若没有目标值更优的解。
- 备注：局部最优性取决于邻域，也就是说，解的修正是允许的。
  - ◆ 2 步相互交换
  - ◆ 3 步相互交换

旅行销售员问题

### 消防队问题的邻域是什么？




### 启发式算法很少能有效果的保证

◆ 他们可能是不可预测的。

- 旅行销售员问题的 2 步最优常常距离最优解很小的百分比；但是，也可能距离最优解 100% 或者更多。
- 偶而，一个很愚蠢的启发式算法比一个好算法更有效率（即使一个随机选择的旅行路径可能是最优的）。
- 不能够预测改善式启发算法需要迭代多少次。
- 要开发一种好的启发式算法，通常需要“算法工程”。

### 实现启发式算法

- 真正领悟算法的设计和实现是很有帮助。
- 可以盲目快速地实现旅行销售员问题的 2 轮相互交换和 3 轮相互交换。
  - ◆ 已经解决过有数以百万计的城市旅游路线问题，假定是欧氏距离。

### 随机选择

◆ 启发式算法和运算法则中最有力的想法之一就是随机选择。

◆ 在启发式算法中：允许我们本质上运行很多次相同的启发式算法，得到很多不同的答案（之后可以选择一个最优的）。

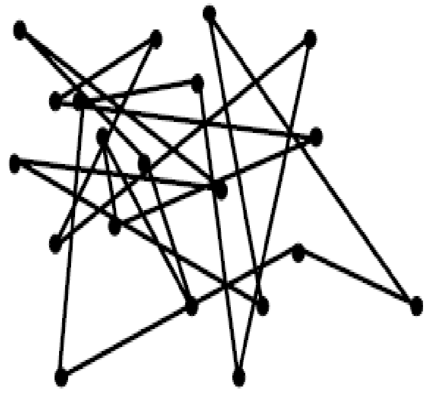
### 随机的插入式启发算法

随机选择 3 个城市，得到一个旅游城市路线 T。

对于 k=4 到 n，选择不在 T 中的一个城市，最优的插入 T。

◆ 注意：可以运行 1000 次，得到很多不同的答案。这增加了得到一个好解的可能性。

**随机选择的观察方法：随机选择边，每次一条**



**即使观察的方法都可能有价值**

- 2 步最优的随机路径
  - ◆ 以随机的顺序访问城市构成一条路径，然后运行 2 步最优算法。重复运行 1000 次。
- 这个在实际中比运行一次 2 步最优算法效果更好。(在实践中：从随机选择的路径开始要比从一个好的路径开始要慢，因此这个技术并不常用。)

**模拟退火：使用随机选择的好方法**

- ◆ 局部改善启发式算法能得到局部最优解。
- ◆ 问题：有办法扩展更大的空间吗？若局部最优解是局部不良最优将会怎样？
- ◆ 模拟退火是用随机选择不时在错误方向上移动的方法。
  - 基于物理的类似过程
  - 在正确的条件下收敛于最优解。

**模拟退火：使用随机选择的好方法**

- 基于退火，将某些材料降温至一种基本状态，即能量最小状态。
- 想象材料很热，要慢慢的降温这样会使材料处于最低能量状态。
- 注意：若冷却过快，材料将会形成某种不适宜的构造。

**邻域搜索技术的一种类似退火转化**

1. T 代表温度
2. x 代表当前的一个解
3. 找到 x 的一个相邻解 y

   若 y 优于 x，那么令 y 为当前的新解。

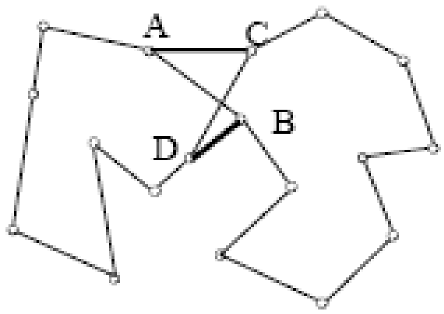
   若 y 劣于 x 的量为 Δ，然后以概率 $e^{-\Delta/T}$ 用 y 代替 x。

**模拟退火收敛到最优**

- ◆ 向错误方上移动一步概率是 $e^{-\Delta/T}$。
- ◆ 当 T→∞时，概率（错误方向）→1
- ◆ 当 T→0 时，概率（错误方向）→0
- ◆ 模拟退火一般将 T 从∞降到 0。
- ◆ 在理论上，收敛于最优解。

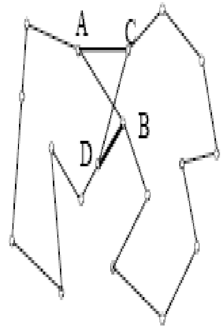
PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

## 图解模拟退火




模拟退火会通过随机选择离开路径的 2 条边选择 T 的邻域

## 图解模拟退火

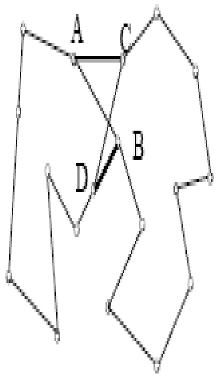



设邻居的长度大 7。

接受移动的概率是 $e^{-\Delta/T}$ 。

模拟退火会通过随机选择离开路径的 2 条边选择 T 的邻域。

## 图解模拟退火




设邻居的长度大 7。

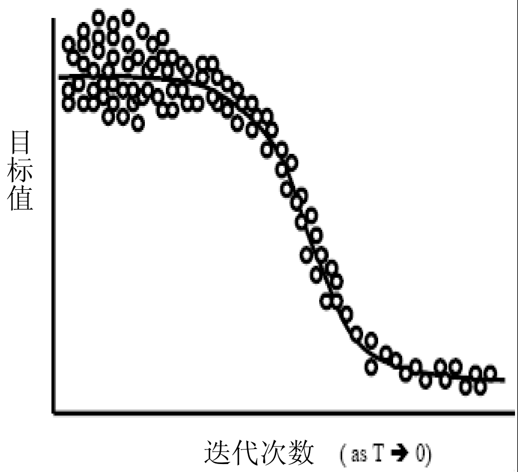
接受移动的概率是 $e^{-\Delta/T}$ 。

若 T 接近 0，那么移动将会被拒绝
若 T 很大，那么可以接受移动。

## 模拟退火的实际应用

- 若温度足够低，算法将以高概率收敛于最优解（但是需要非常慢地降低温度）。
- 实际上，要逐渐降低温度。
- 对于很多问题，模拟退火算法是很有效的。

## 把 SA 的平均目标值与迭代次数的关系




## 总结

- 构建方法
- 改善方法
- 随机选择方法
- 模拟退火方法

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

**15.053　　　　5 月 14 日，周二**

- 遗传算法

分发：讲稿

问题：什么时候该有次复习课？

**基本遗传算法**

- 1975 年由 John Holland 提出
- 模拟进化过程
- 基本原理：进化可以视为一种优化过程。

**关于物理类似的更多内容**

- **物理相似作为最优化问题的一个导向原理。**

**——遗传算法**

■ **1975 John Holland**

**——模拟退化**

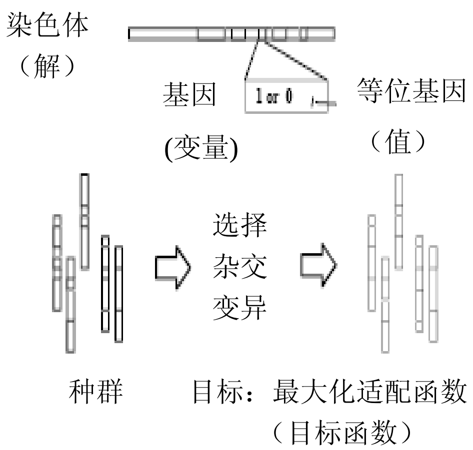
■ **Kirkpatrick**

**——蚁群系统**

**基本遗传算法**

- 分子生物学的自然选择松散建模。
- 选择个体（选择算子）。
- 每个子代的染色体由父代的染色体混合而成（杂交算子）。
- 变异增加了物种的多样性，扩大了改善的范围（变异算子）。
- 染色体将相关信息编码。

**遗传算法术语**




**选择算子**
从种群中选择两个用于杂交的父代个体。选择偏向胜任的个体。

**杂交算子**
通过使用杂交算子随机混合父代个体基因，构成子代。

**变异算子**
种群中的个体要不时地经历随机变异。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

一个简单的例子：最大化 1 的数目

| | |
|---|---|
| 初始种群 | 适应度 |
| 1 1 1 0 1 | 4 |
| 0 1 1 0 1 | 3 |
| 0 0 1 1 0 | 2 |
| 1 0 0 1 1 | 3 |

- 平均适应度 3

  通常种群数目是更大的，如 50 到 100，或者更多。

**杂交算子：利用 2 个解形成 1 个后代（或者更多），他们的基因是其父代基因的混合物。**

父代 1 父代 2

01101 10011

从种群中选择 2 个父代。

这是选择步骤，以后将有更多操作。

**杂交算子：利用 2 个解形成 1 个后代（或者更多），他们的基因是其父代基因的混合物。**

1 点杂交：在某点 k 把每个父代分成 2 部分（随机选择）

父代 1 父代 2

011|01 100|11

子代 1 由父代 1 的基因 1 到 k-1 和父代 2 的基因 k 到 n。子代 2 正好相反。

子代 1 子代 2

01111 10001

选择算子

- 考虑交叉交配
- 选择偏向适合的，这样比较符合的父代更有可能交配

  例如，令选择 j 的概率=j 的符合程度/总符合程度

例子：

| | | |
|---|---|---|
| 1. 1 1 1 0 1 | 4 | |
| 2. 0 1 1 0 1 | 3 | 概率(1)=4/12=1/3 |
| 3. 0 0 1 1 0 | 2 | 概率(3)=2/12=1/6 |
| 4. 1 0 0 1 1 | 3 | |
| 总符合程度 | 12 | |

选择和杂交的例子

| 初始种群 | 5 代以后 | 10 代以后 |
|---|---|---|
| 1 0 0 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 0 1 0 0 0 | 1 0 1 1 1 | 1 0 0 1 1 |
| 0 0 0 0 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 1 1 1 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| ….. | | |
| 0 0 1 0 0 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 2.8000 | 3.7000 | 3.9000 |

变异

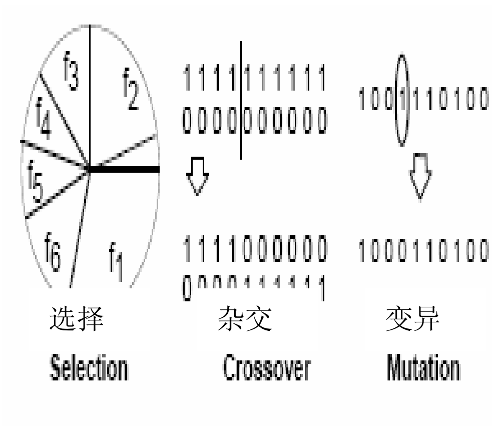
- 前面的困难：种群中的重要遗传可变性丢失了。
- 想法：通过变异将遗传可变性介绍到种群中。
- 简单的变异操作：从种群中随机翻转 q%的等位基因。

## 有 1%变异率的上面的例子

| 初始种群 | 5 代以后 | 10 代以后 |
|---|---|---|
| 10011 | 11011 | 11111 |
| 01000 | 11111 | 11111 |
| 00001 | 11111 | 11111 |
| 11111 | 11111 | 11111 |
| ... | | |
| 10001 | 01111 | 11111 |
| 00100 | 11111 | 11111 |
| 11011 | 11111 | 11111 |
| 2.8000 | 4.8000 | 4.9000 |

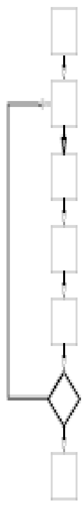
## 算子的表述

基于位表述的图解




## 基本遗传算法

- 定义表述
  —解如何表示
- 定义适应度函数
  —目标函数
- 定义算子
  —初始化，杂交，变异。



初始种群

选择 2 个父代，产生 1 个或 2 个后代。

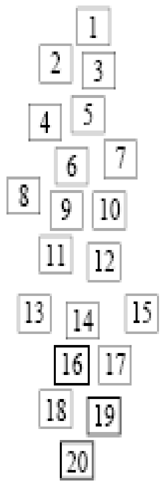
变异种群

修订种群

要继续还是停止？

结束

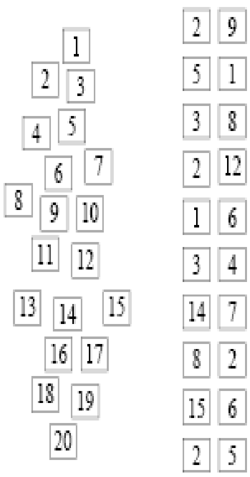
## 基于代的遗传算法



在基于代的遗传算法中，我们一次形成一个子代。

取种群的所有 n 个个体，运用选择形成 n/2 个父代集合。

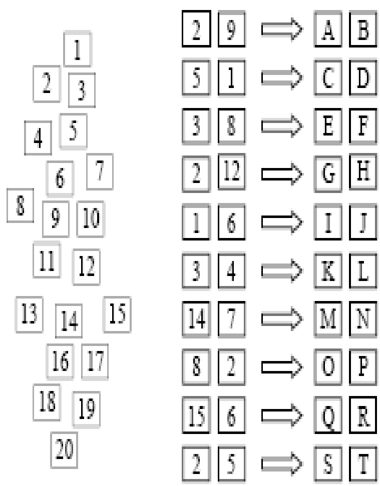
## 基于代的遗传算法



每对双亲产生 2 个后代。



## 基于代的遗传算法

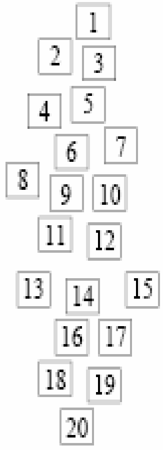


用子代替换原来种群。

## 基于代的遗传算法

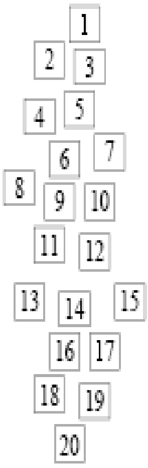

这样产生下一代。然后迭代。

## 稳态遗传算法



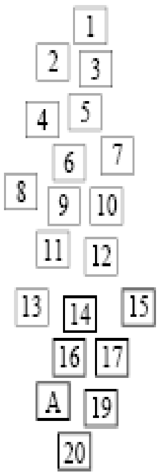

在稳态遗传算法中，我们一次产生一个后代，然后用新的后代替种群中的一员。

## 稳态遗传算法

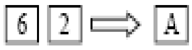



选择父代 2 个个体，产生 1 个后代。

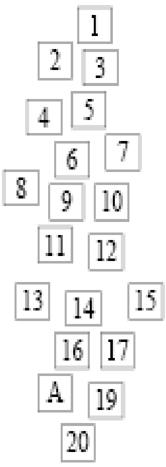

## 稳态遗传算法




用新的后代替代原来的种群中的成员。




## 稳态遗传算法




重复这个步骤，偶尔进行变异。

## 稳态遗传算法

开始
- 获得初始种群
- 重复
  - 选择两个个体 $I_1$ 和 $I_2$。
  - 对个体进行杂交运算，产生子代 $I_3$。
  - 用个体 $I_3$ 代替种群中的一些，或者放弃 $I_3$；（通常替代一个父代）
  - 偶尔进行一次变异或者一次移植
- 直到种群收敛

结束

## 编码方案（对于组合问题要有点技巧）

- 如何给 n 个城市的旅游路径编码？
- 表述 1：有顺序的城市

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5 | 1 | 4 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 |

- 表述 2：下一个城市列表

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 8 | 9 | 7 | 1 | 3 | 6 | 5 | 2 |

## 如何进行杂交

- 这种情况下是很难的。如何混合两条旅游路径并不清楚。
- 研究遗传算法的人们常常依靠特别的方法，并不那么成功。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5 | 1 | 4 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 |
| 6 | 4 | 7 | 9 | 8 | 1 | 3 | 5 | 2 |

不能用一条路经的一半和另一条路经的一半来构成新的路径。

## 如何进行杂交

- 标准规则：找到可行的东西。

  —例子：按照第一个路径的顺序访问前 k 个城市，然后按照第二个路径的顺序访问剩余的城市。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 5 | 1 | 4 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 |
| 6 | 4 | 7 | 9 | 8 | 1 | 3 | 5 | 2 |
| 8 | 5 | 1 | 4 | 7 | 9 | 3 | 2 | 6 |

## 随机键表述

- 一个染色体由从 0 到 k 的 n 个整数组成。

  —在例子中，k=100
- 通过排列整数，可以得到一种顺序。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 32 | 17 | 9 | 88 | 23 | 6 | 55 | 72 |

这是第 1 到 9 个城市的随机键

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 | 8 | 9 | 5 |

这是按照随机键的大小参观城市的顺序。

## 用随机键进行杂交

父代 1

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 32 | 17 | 9 | 88 | 23 | 6 | 55 | 72 |

父代 2

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 21 | 49 | 87 | 39 | 77 | 17 | 9 | 69 | 92 |

从两个父代个体中选择一个键（随机）

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 32 | 87 | 9 | 77 | 17 | 9 | 55 | 92 |

父代 1

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 32 | 17 | 9 | 88 | 23 | 6 | 55 | 72 |
| 7 | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 | 8 | 9 | 5 |

父代 2

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 21 | 49 | 87 | 39 | 77 | 17 | 9 | 69 | 92 |
| 7 | 6 | 1 | 4 | 2 | 8 | 5 | 3 | 9 |

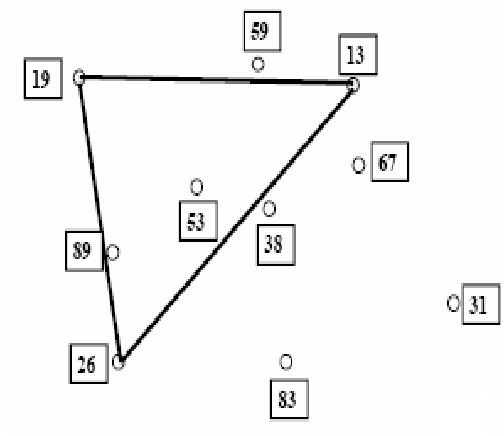
后代

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 32 | 87 | 9 | 77 | 17 | 9 | 55 | 92 |
| 7 | 4 | 6 | 2 | 1 | 8 | 5 | 3 | 9 |

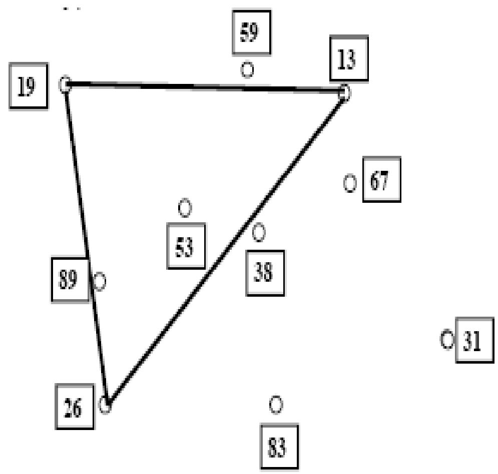
另一个依靠随机算法的杂交

- 随机插入算法
  随机选择 3 个城市，得到一个城市的旅游路径 T。
  对于 k=4 到 n,选择不在路径 T 中的一个城市最优插入到路径 T 中。
- 表述：利用随机键。换言之，按照城市随机键的顺序选择城市插入的顺序。

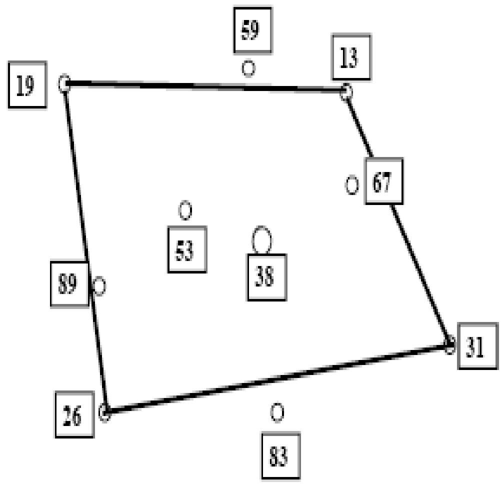
选择键最小的 3 个城市，形成一个城市旅游路径



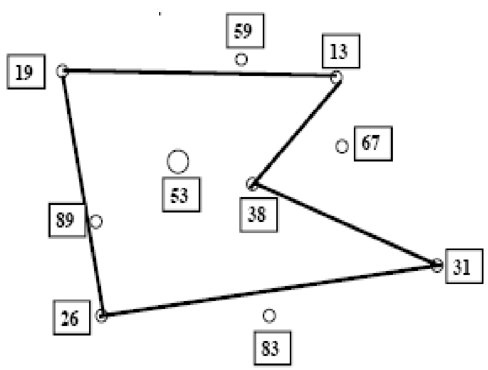

找到下一个最小键的城市，插入路径。



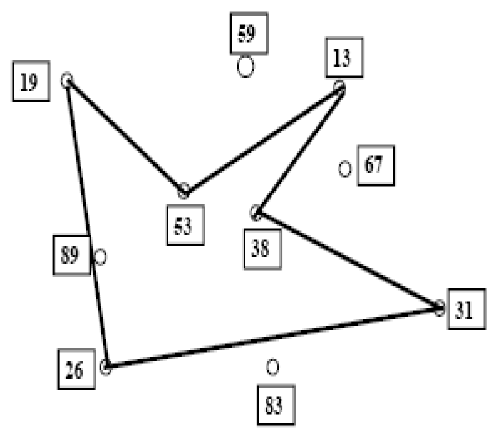

找到下一个最小键的城市，插入路径




找到下一个最小键的城市，插入路径

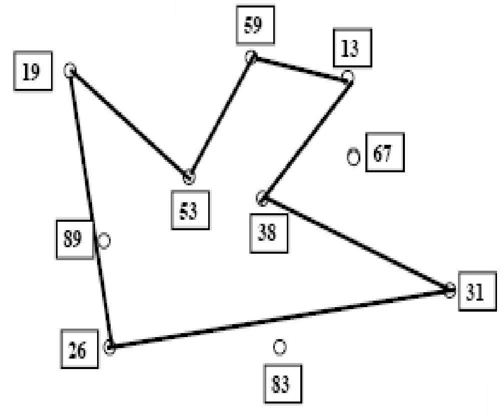



找到下一个最小键的城市，插入路径

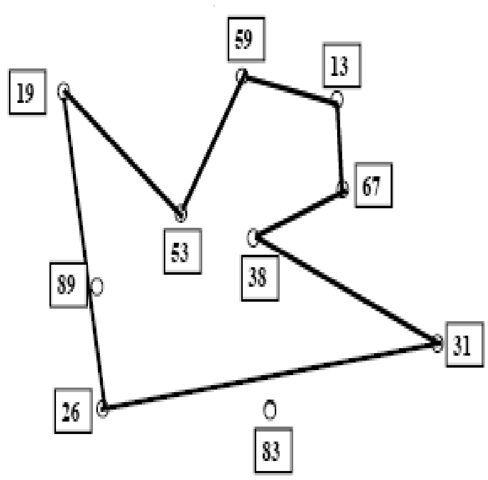


PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

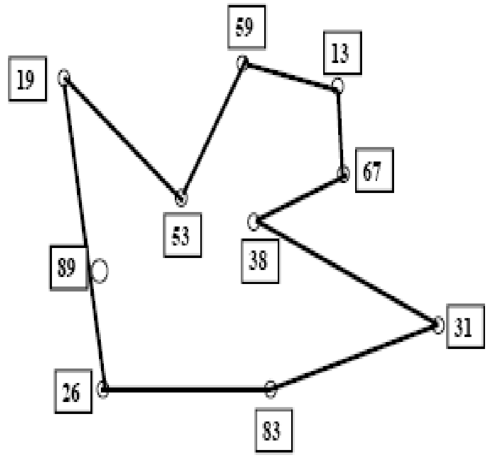
找到下一个最小键的城市，插入路径



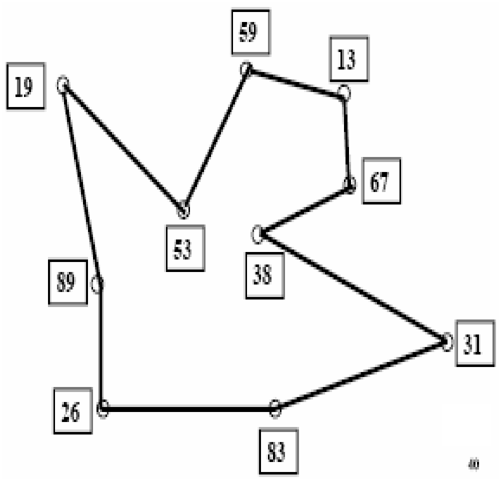

插入第 **8** 个城市




插入最后 **1** 个城市




依随机键插入的连接路径




遗传算法

- 种群
- 适应度函数
- 变异算子(单解算子)
- 杂交算子（用 2 个父代个体生成 1 个后代）
- 选择算子(偏向更适应的个体)
- 随机选择的重要应用

邻域搜索算法

- 每次一解
- 目标函数
- 邻域算子
- 局部搜索：总是寻求改进
- 通常不依靠随机选择

自 **1975** 的遗传算法

- 遗传算法开始于 1 点杂交，位的变异，和代的方案。
- 从那时起遗传算法已经进展了许多
  —包括很多方法的表述，变异，杂交，结合多种启发式算法…
  —遗传算法与非遗传算法界限已经不太明显。

遗传算法的特点

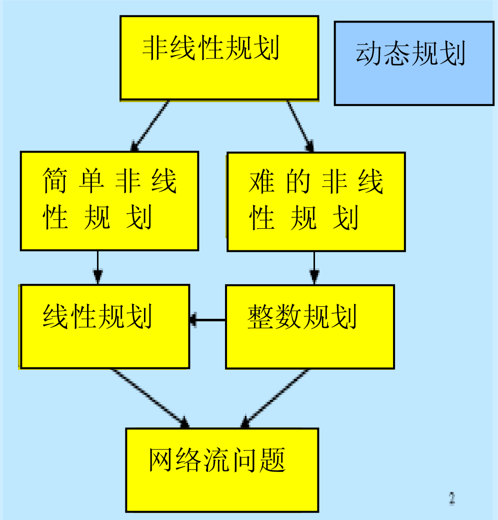
- 遗传算法在复杂函数，以及简易可行的情况下，很有效率。
- 遗传算法的实施仍然是一种艺术。通常需要很多调节，然后有时可进行各种可能的调整，得到的仍然是同样的结果。
- 很容易平行作业
- 很容易开始，并且能够得到有效的方法。
- 通常需要很多努力让算法高效。

**15.053　　　　5 月 16 日，周四**

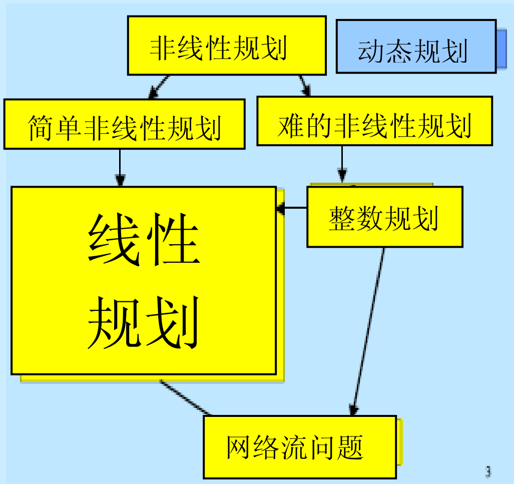
- **15.053 复习**

分发：讲稿

## 问题类型概述




## 问题类型概述




## 为什么关注线性规划？

- 线性规划解释了建模的重要性所在
- 线性规划是最优化很有用的工具
- 可以很有效地解决线性规划问题
- 整数规划技术的艺术依靠线性规划
- 线性规划是教“绩效保证和对偶性”的最佳方法。
- 线性规划对于理解其他最优化方法很有帮助。

## 中期考核 2 的内容

- 线性规划
  —公式表述
  —几何表述
  —单纯形法
  —灵敏度分析
  —对偶性理论
- 网络最优化
- 整数规划
  —公式表述
  —分支定界法
  —切平面法

## 期末考试的内容

- 线性规划公式表述
- 整数规划公式表述
- 非线性规划
- 动态规划
- 启发式算法

## 剩余的讲义

- 简要回顾第二次中期考核以后的内容。
- 讲稿中的幻灯片。
- 若对于包含的内容有问题，直接提问我。
- 在最后我要留点时间做斯隆课程评估。

## 什么是非线性规划

- Maximize　$3\sin x+xy+y^3-3z+\log z$

  s.t.　$x^2+y^2=1$

  $x+4z\geqslant 2$

  $z\geqslant 0$
- 非线性规划允许有非线性约束或者目标函数。
- 线性规划是非线性规划的特例。

## 投资组合选择例题

- 当要设计一个财务组合时，投资者希望寻求最小风险和最大回报。
- 风险可以用总回报的方差来衡量，即一个非线性函数。
- 事实：

$$\mathrm{var}(x_1+x_2+K+x_n)=$$
$$\mathrm{var}(x_1)+K+\mathrm{var}(x_n)+\sum_{i\neq j}\mathrm{cov}(x_i,x_j)$$

## 投资组合选择例题

- 通常有两种方法可以用

  —Min　风险

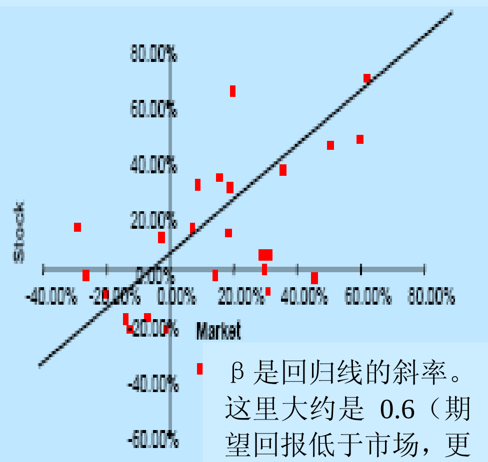
  　s.t.　期望回报≥边界

  —Max 期望回报- θ (风险)

  　其中 θ 反映了回报和风险之间的权衡。

## 回归，以及估计 β

**股票 A 的回报和市场回报**



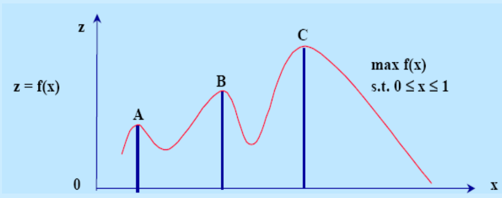

- β 是回归线的斜率。这里大约是 0.6（期望回报低于市场，更低的风险。）

## 局部与全局最优解

定义：假设 x 是可行解，那么

—x 是全局最大，若对于任意可行解 y，有 f(x)≥f(y)。

—x 是局部最大，若对于任意距离 x 足够小（即对于所有 j 和小的 ε，$x_j-\varepsilon\leqslant y_j\leqslant x_j+\varepsilon$）的可行解 y，有 f(x)≥f(y)。



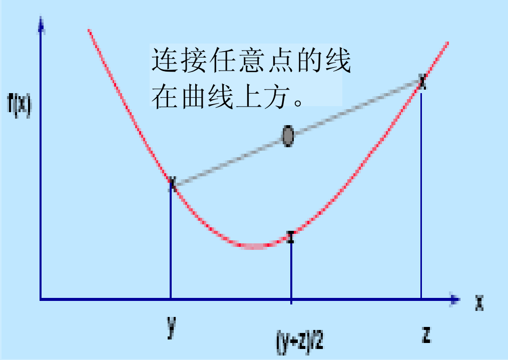

可以有多个不同的局部最优解。

## 凸函数

凸函数：对于任意 y 和 z，以及 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，$f(\lambda y+(1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(y)+(1-\lambda)f(z)$。

例如：$f((y+z)/2) \leqslant f(y)/2+f(z)/2$。

若上式是 $0<\lambda<1$，则叫严格凸性。

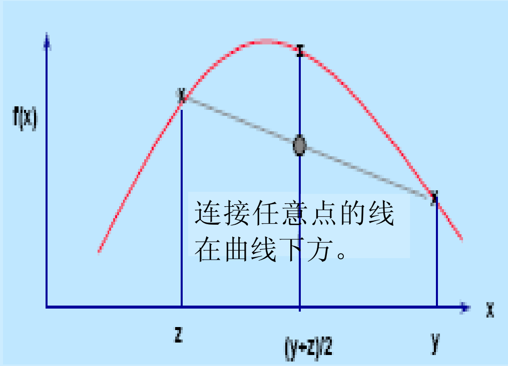



## 凹函数

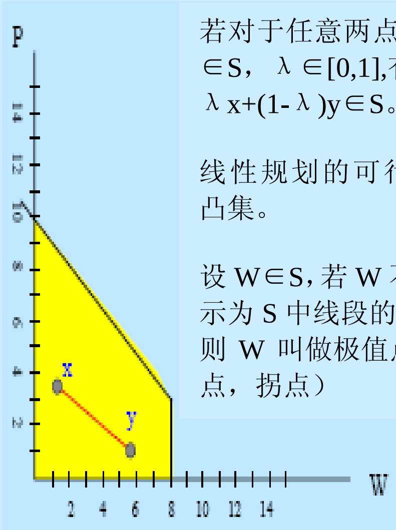
凹函数：对于任意 y 和 z,以及 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，$f(\lambda y+(1-\lambda)z) \geqslant \lambda f(y)+(1-\lambda)f(z)$。

例如：$f((y+z)/2) \geqslant f(y)/2+f(z)/2$。

若上式是 $0<\lambda<1$，则叫严格凹性。




## 凸性以及极端点




若对于任意两点 x、y $\in S$，$\lambda \in [0,1]$,有 $\lambda x+(1-\lambda)y \in S$。

线性规划的可行域是凸集。

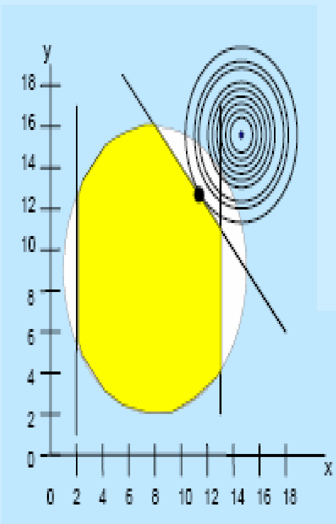
设 $W \in S$，若 W 不能表示为 S 中线段的中点，则 W 叫做极值点（顶点，拐点）



## 局部最大（最小）性质

- 一个凸可行区域上的凹函数的局部最大是全局最大。
- 一个凸可行区域上的凸函数的局部最小是全局最小。
- 严格凸性或凹性意味着全局最优是唯一的。
- 考虑到这些，我们可以有效地解：
  - —目标函数是凹函数、线性约束的极大化问题
  - —目标函数是凸函数、线性约束的极小化问题

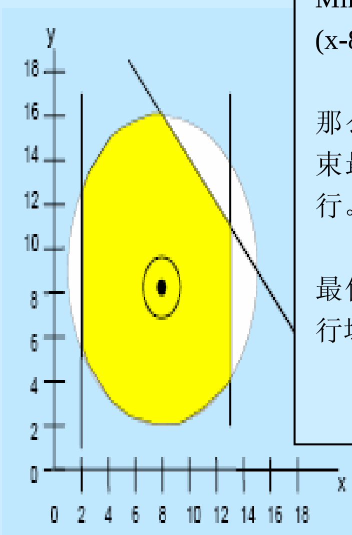
## 最优解在哪里？




注意：最优解不是拐点，而是等值线第一次与可行区域相交的地方。



## 另一个例子



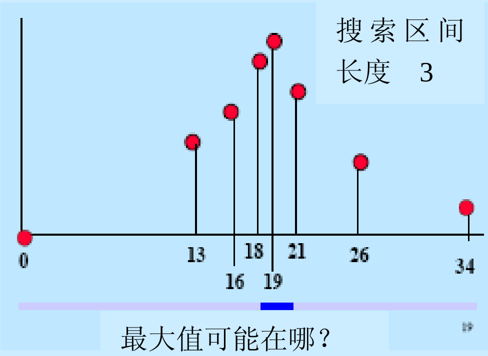

Min $(x-8)^2+(y-9)^2$

那么全局无约束最小仍然可行。

最优解不是可行域的边界。

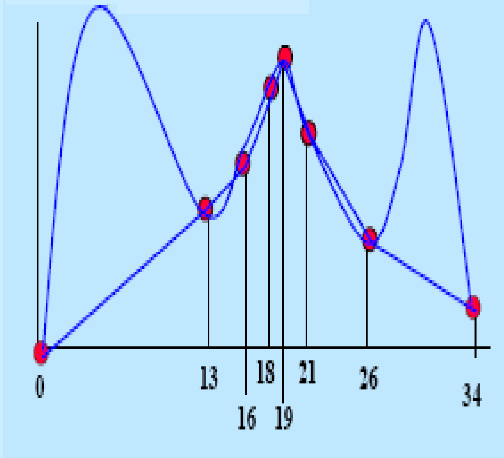
PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

用 **Fibonacci** 搜索寻找局部最大解

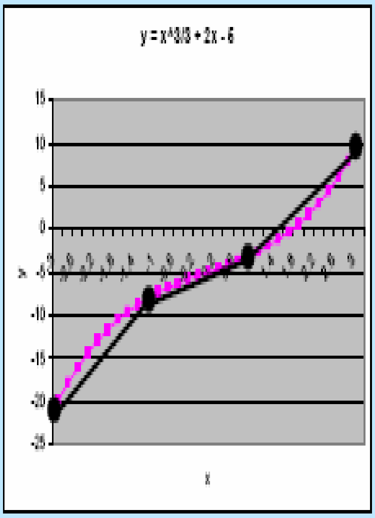



19

能够找到一个局部最大解，但不一定是全局最大解




估计一个非线性一元函数： λ 法




选择不同的 x 值接近 x 轴。

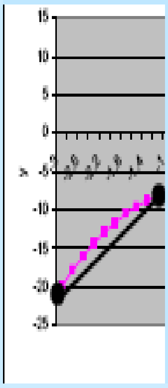
用分段线性函数近似

21

关于 λ 法的更多内容

$a_1 = -3,\ f(a_1) = -20$

$a_2 = -1\ \ f(a_2) = -7\ 1/3$



假定-3≤x≤-1，将 x 表示为 $\lambda_1(-3)+\lambda_2(-1)$ ，$\lambda_1,\ \lambda_2\geq 0$
且 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 。

然后估计
$f(x)=\lambda_1(-20)+\lambda_2(-7\ 1/3)$

22

估计一个非线性目标函数的最小化非线性规划问题

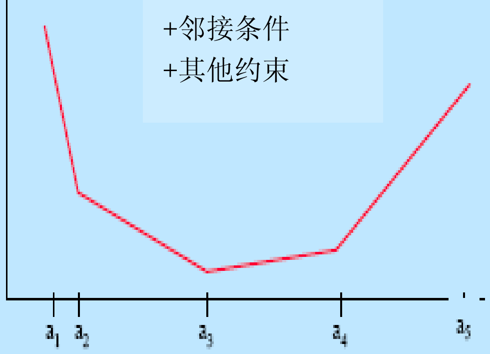
原问题：**Min {f(y):y∈P}**
假定 $y=\sum_j \lambda_j a_j$
其中 $\sum_j \lambda_j=1$，且 $\lambda\geq 0$
近似 f (y)。
min $\{\sum_j \lambda_j f(a_j):\ \sum_j \lambda_j a_j\in p\}$

- 注意：当考虑应用另一种方式表示 y 时，线性规划将选择目标函数近似值是最小的那种。

对于凸函数极小化问题， λ 法自动满足附加的邻接条件

$$\min z=\lambda_1 f(a_1)+\lambda_2 f(a_2)+\lambda_3 f(a_3)+\lambda_4 f(a_4)+\lambda_5 f(a_5)$$
$$\text{s.t.}\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1;\quad \lambda\geq 0$$

+邻接条件
+其他约束



## 动态规划

● 假设桌子上有 50 根火柴，捡起最后一根的人获胜。每轮中，我或者对手可以捡起 1，2，6 根火柴。假如我先捡，怎样才能使我赢得游戏？

## 利用动态规划确定策略

- n=剩余火柴数量（n 是状态/阶段）。
- g(n)=1 若可以在 n 根火柴时赢得游戏，否则 g(n)=0。g(n)是最优值函数。
- 在每个状态/阶段下，可以从 3 种决策中任选一种：捡 1,2 或 6 根火柴。
- g(1)=g(2)=g(6)=1 (边界条件)
- g(3)=0；g(4)=g(5)=1。(为什么？)

递归表达式

- g(n)=1 若 g(n-1)=0 或 g(n-2)=0 或 g(n-6)=0；否则 g(n)=0。
- 等价公式，
  f(n)=1-min(g(n-1),gf(n-2),gf(n-6))。

## 动态规划的一般形式

● 将复杂的决策问题化为一系列比较小的子问题。

● 阶段：一次解决一个阶段下的决策问题。通常阶段可以理解为时间。
—不是每个动态规划问题都有阶段
—前面的最短路问题有 6 个阶段
—火柴问题没有阶段

## 动态规划的一般形式

● 状态：较小的子问题通常用紧密联系的方式表述出来。子问题的描述通常涉及到状态。
—火柴问题：状态是剩余火柴量

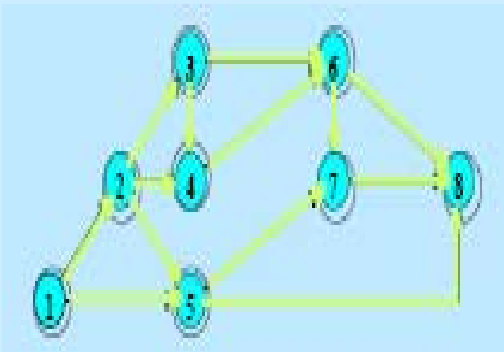
● 在每个状态/阶段，有 1 个或多个决策。动态规划的递归确定了最优决策。
—火柴问题：拿走多少火柴
—最短路问题：向右上或右下

## 最优能力扩充：什么是建造工厂的最小成本方式？

| 年 | 累积需求 | 每个工厂费用（百万美元） |
|---|---|---|
| 2002 | 1 | 54 |
| 2003 | 2 | 56 |
| 2004 | 4 | 58 |
| 2005 | 6 | 57 |
| 2006 | 7 | 55 |
| 2007 | 8 | 52 |

建造工厂的年度费用是$1500 万美元。每年最多建 3 个工厂。

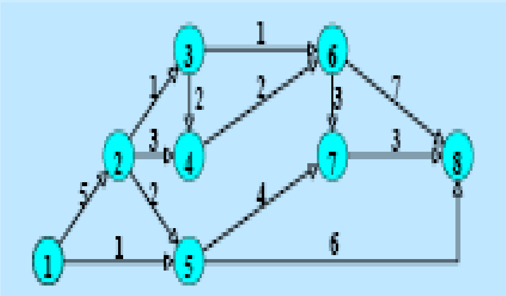
## 确定一个拓扑顺序




找到一个没有弧指向它的节点，记作节点 1。对于 i=2 到 n，找到一个没有被没有标记节点的弧指向的节点，标记为 i。

## 利用递归确定 d(j)

d(j)表示从节点 1 到节点 j 的最短路的长度。令 $c_{ij}$ 为弧(i,j)的长度。



如何用 d(1),…d(j-1)计算 d(j)?

计算 f(2),…,f(8)

例子：d(4)=min{3+d(2),2+d(3)}

## 确定最优段落设计

通过最优地选择每行的断点，Tex 将段落最优分解。有个子程序计算从第 i 个单词到第 j-1 个单词的行的 ugliness F(i,j)。如何把 F(i,j)作为动态规划的一部分，其解将解决段落问题。

通过最优地选择每行的断点，Tex 将段落最优分解。有个子程序计算从第 i 个单词到第 j-1 个单词的行的 ugliness F(i,j)。如何把 F(i,j)作为动态规划的一部分，其解将解决段落问题。

## 资金预算

投资预算=$14000

| 投 资 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 资金需求 (1000s) | $5 | $7 | $4 | $3 | $4 | $6 |
| NPV 增加量 (1000s) | $16 | $22 | $12 | $8 | $11 | $19 |

## 资金预算：第三阶段

考虑股票 3：成本$4，净现值：$12

使用的预算

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

目前的最佳净现值

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 0 | - | - | - | - | 16 | - | 22 | - | - | - | - | 38 | - | - |
| 0 | - | - | - | 12 | 16 | - | 22 | - | 28 | - | 34 | 38 | - | - |

f(3,k)=max(f(2,k)，f(2,k-4)+$12)

## 递归

- f(0,0)=0；对于 k>0，f(0,k)未定义。
- f(k,v)=min(f(k-1,v)，f(k-1,v-$a_k$)+$c_k$)
  包含第 k 项，或者不包含第 k 项。

  原问题的最优解是
  max{f(n,k)：0≤v≤b}。

注意：我们解决所有右端项小于 b 的资金预算问题。

## 启发式算法：处理组合难题的方法。

构建启发式算法：构建一个解

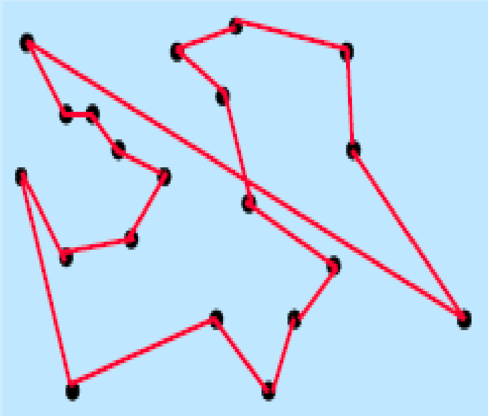
例子：邻域搜索启发式算法

- 开始
  - 选择初始城市路径，
  - 当有未访问过的城市，
  - 下一个进入路径的城市是最近的未访问的城市。
- 结束

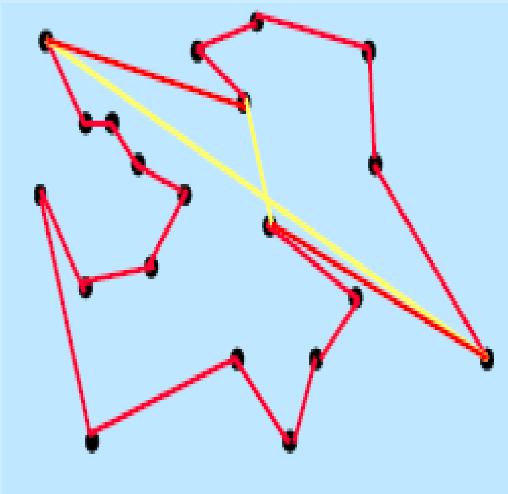
## 改善方法

- ◆ 这种技术从一个解开始，找出一个改善解的简单方法。
- ◆ 例子：令 T 为一个旅行路径
- ◆ 找到一个改善的旅行路径 T’，使得 |T-T’|=2。

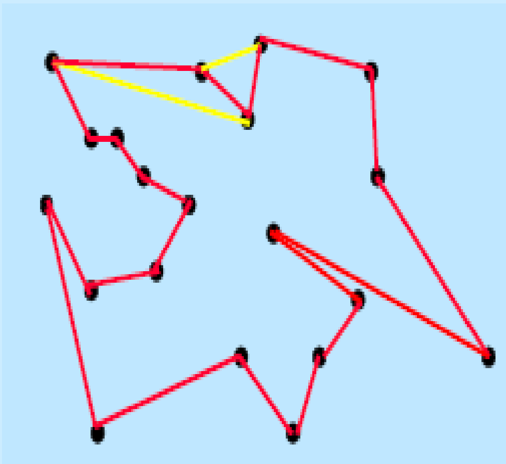
## 2 步最优化启发式算法图解



## 去掉 2 条边，加入 2 条边



## 去掉 2 条边，加入 2 条边



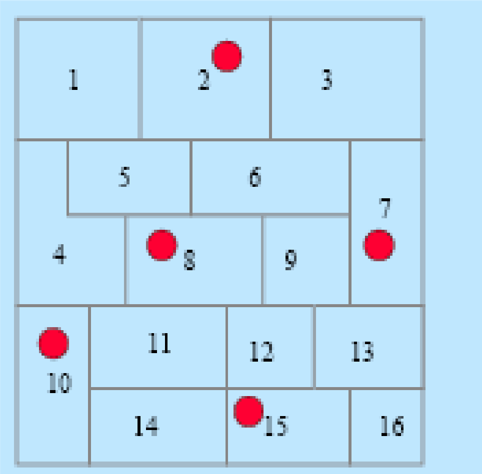
## 局部最优解

- ● 一个解 y 叫做局部最优（在一个给定邻域里），若没有 y 的邻居目标值优于 y。
- ● 例子：2 步最优法找到一个局部最优解。

## 改善方法常得到一个局部最优解

- ● 一个解叫做最优解，若没有目标值更优的解。
- ● 备注：局部最优性取决于邻域，也就是说，解的修正是允许的。
    - ◆ 例如，2 轮相互交换
    - ◆ 例如，3 轮相互交换

## 消防站问题的邻域是什么？

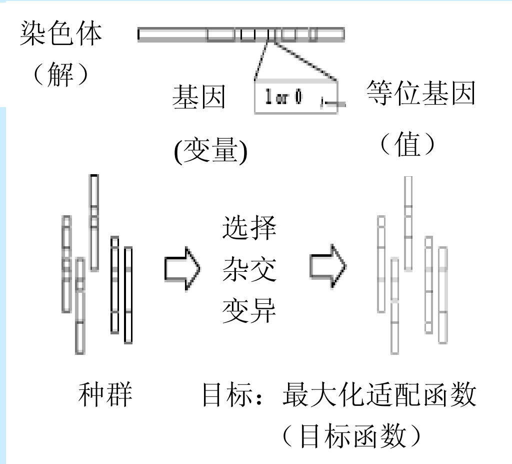



## 随机的插入式启发算法

随机选择 3 个城市，得到一个旅游城市路线 T。
对于 k=4 到 n，选择不在 T 中的一个城市，最优的插入 T。

- 注意：可以运行 1000 次，得到很多不同的答案。这增加了得到一个好解的可能性。
- 备注：模拟退火法将不出现在期末考试中。

## 遗传算法术语




## 一个简单的例子：最大化 1 的数目

| | 初始种群 | 适应度 |
|---|---|---|
| ● | 1 1 1 0 1 | 4 |
| ● | 0 1 1 0 1 | 3 |
| ● | 0 0 1 1 0 | 2 |
| ● | 1 0 0 1 1 | 3 |

- 平均适应度 3
  通常种群数目是更大的，如 50 到 100，或者更多。

## 杂交算子：利用 2 个解形成 1 个后代（或者更多），他们的基因是其父代基因的混合物。

父代 1 01101

父代 2 10011

从种群中选择 2 个父代个体。

这是选择步骤，以后将有更多操作。

## 杂交算子：利用 2 个解形成 1 个后代（或者更多），他们的基因是其父代基因的混合物。

1 点杂交：在某点 k 把每个父代分成 2 部分（随机选择）

父代 1 011|01

父代 2 100|11

子代 1 由父代 1 的基因 1 到 k-1 和父代 2 的基因 k 到 n。子代 2 正好相反。

子代 1 01111

子代 2 10001

## 选择算子

- 考虑交叉交配
- 选择偏向适合的，这样比较符合的父代更有可能交配

例如，令选择 j 的概率=j 的符合程度/总符合程度

例子：

| | | |
|---|---|---|
| 1. 1 1 1 0 1 | 4 | |
| 2. 0 1 1 0 1 | 3 | 概率(1)=4/12=1/3 |
| 3. 0 0 1 1 0 | 2 | 概率(3)=2/12=1/6 |
| 4. 1 0 0 1 1 | 3 | |
| 总符合程度 | 12 | |

## 选择和杂交的例子

| 初始种群 | 5 代以后 | 10 代以后 |
|---|---|---|
| 1 0 0 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 0 1 0 0 0 | 1 0 1 1 1 | 1 0 0 1 1 |
| 0 0 0 0 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 1 1 1 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| ….. | | |
| 0 0 1 0 0 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 | 1 1 0 1 1 |
| 2.8000 | 3.7000 | 3.9000 |

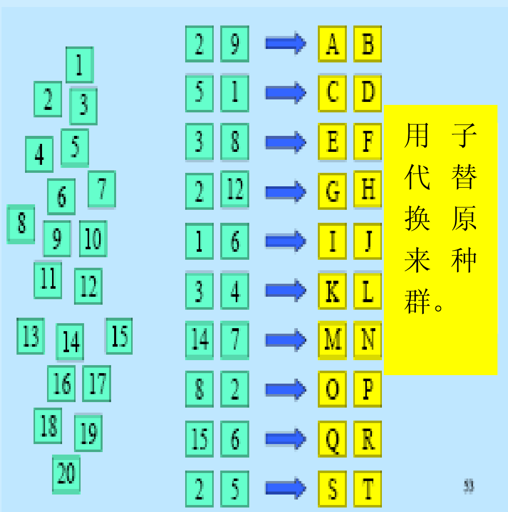
## 变异

- 前面的困难：种群中的重要遗传可变性丢失了。
- 想法：通过变异将遗传可变性介绍到种群中。
- 简单变异操作：从种群中随机翻转q%的等位基因。

## 有 1%的变异率的上一个例子

| 初始种群 | 5 代以后 | 10 代以后 |
|---|---|---|
| 10011 | 11011 | 11111 |
| 01000 | 11111 | 11111 |
| 00001 | 11111 | 11111 |
| 11111 | 11111 | 11111 |
| ... | | |
| 10001 | 01111 | 11111 |
| 00100 | 11111 | 11111 |
| 11011 | 11111 | 11111 |
| 2.8000 | 4.8000 | 4.9000 |

## 基于代的遗传算法




## 基于代的遗传算法

期末考试中将包含遗传算法的基本术语

- 不包括：稳态，随机键
- 包括前面幻灯片里出现的术语。

在要求填写对课程 **15.053** 的反馈意见前还有什么问题？

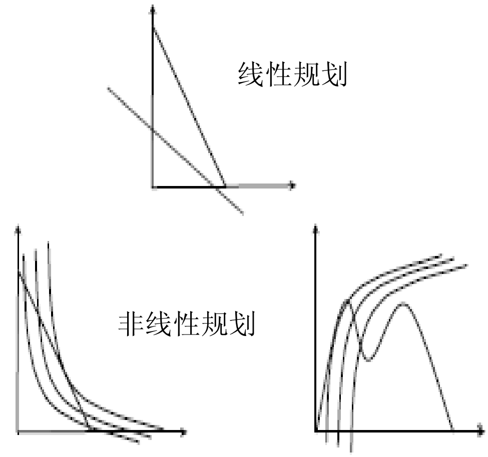
**15.053　　　　5 月 25 日**

- 非线性规划理论
- 可分离规划

分发：讲稿

---

非线性规划难点



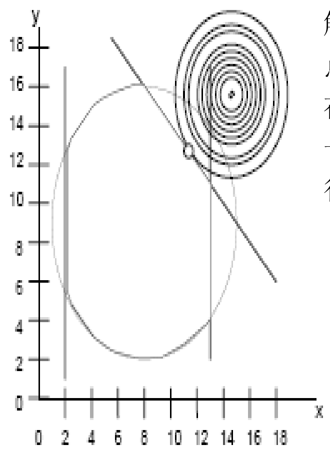

---

二维非线性规划几何分析：实例

- Min $\sqrt{(x-14)^2+(y-15)^2}$
- S.t. $(x-8)^2+(y-9)^2 \leqslant 49$
  $x \geqslant 2$
  $x \leqslant 13$
  $x+y \leqslant 24$

---

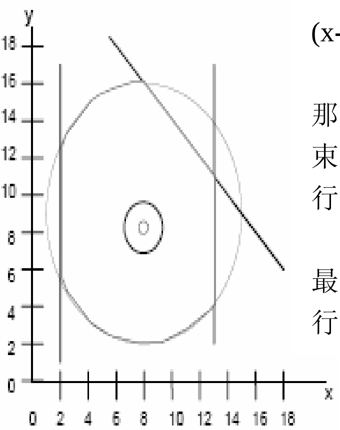
哪里是最优解？




注意：最优解不在拐角点上，而是在等值线第一次交于可行域之处。

---

另一个例子




Min $(x-8)^2+(y-9)^2$

那么全局无约束最小仍然可行。

最优解不是可行域的边界。

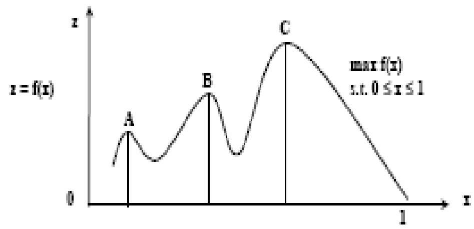
---

局部最优和全局最优

定义：设 x 是一个可行解，那么

——x 叫做全局最优解，若对于任意可行解 y，$f(x) \geqslant f(y)$

——x 叫做局部最优解，若对于任意与 x 足够接近的可行解 y（如对任意 j 和足够小的 $\varepsilon$，$x_j-\varepsilon \leqslant y_j \leqslant x_j+\varepsilon$），有 $f(x) \geqslant f(y)$



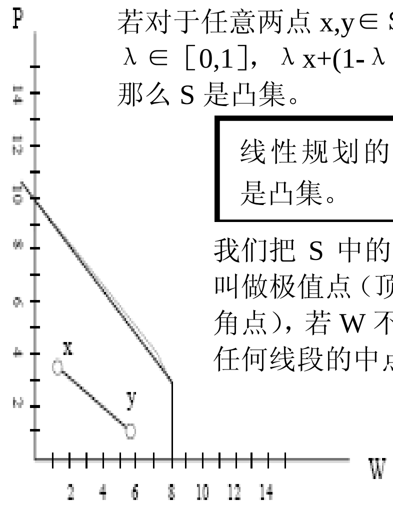

可能有多个局部最优解。

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 什么条件下局部最优也是全局最优？

- 最小化问题。目标函数是凸函数，可行域是凸集。

## 凸性与极值点




若对于任意两点 $x,y\in S$，实数 $\lambda\in[0,1]$，$\lambda x+(1-\lambda)y\in S$，那么 S 是凸集。

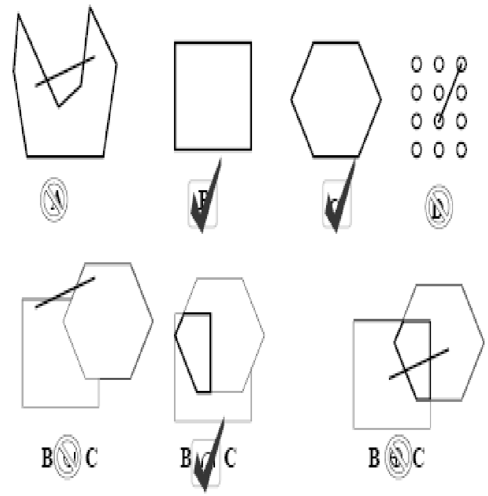
线性规划的可行域是凸集。

我们把 S 中的元素 W 叫做极值点（顶点或拐角点），若 W 不是 S 中任何线段的中点。

## 识别凸可行域

- 若所有约束均是线性的，则可行域是凸集
- 凸集的交集是凸集
- 若对于任意可行解 x,y，他们的中点是可行解，那么该区域是凸的。（除了非现实的例子）

## 哪个是凸的？

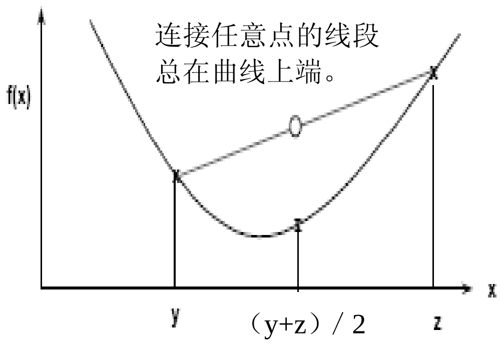



## 凸函数

凸函数：若对于任意 $y,z$，$0\leq\lambda\leq1$，有 $f(\lambda y+(1-\lambda)z)\leq\lambda f(y)+(1-\lambda)f(z)$

例如：$f((y+z)/2)\leq f(y)/2+f(z)/2$

若上式为 $0<\lambda<1$，则称为严格凸函数。

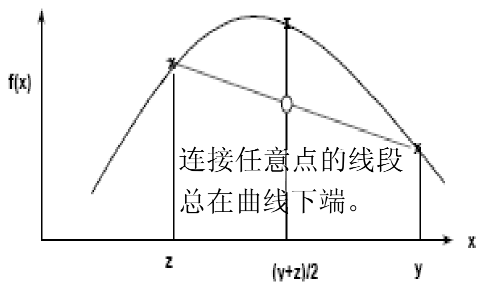



## 凹函数

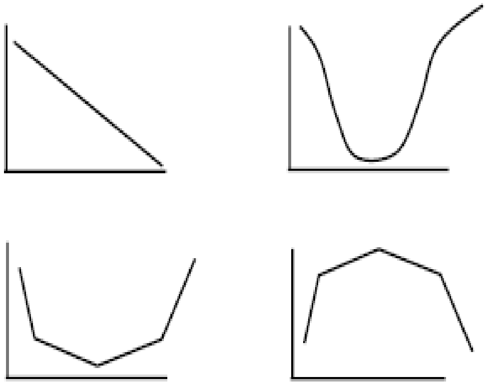
凹函数：若对于任意 $y,z$，$0\leq\lambda\leq1$，有 $f(\lambda y+(1-\lambda)z)\geq\lambda f(y)+(1-\lambda)f(z)$

例如：$f((y+z)/2)\geq f(y)/2+f(z)/2$

若上式为 $0<\lambda<1$，则称为严格凹函数。



## 分类：凸函数、凹函数、既凸又凹或非凸非凹



## 什么函数是凸函数？

- $f(x)=4x+7$　　　所有线性函数
- $f(x)=4x^2-13$　　部分二次函数
- $f(x)=e^x$
- $f(x)=1/x$　　$x>0$
- $f(x)=|x|$
- $f(x)=-\ln(x)$　$x>0$

充分条件：对于所有 x, $f''(x)>0$

## 什么函数是凸函数？

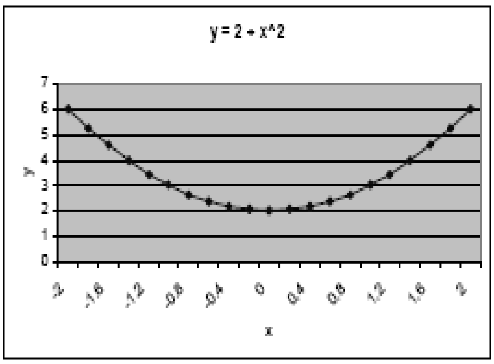
- 若 f(x)是凸函数，g(x)也是凸函数，那么对于 a>0,b>0, h(x)=a f(x)+b g(x) 也是凸函数。
- 若 y=f(x)是凸函数，那么 {(x,y)：f(x)≤y} 是凸集。

## 局部最大（最小）的性质

- 凸集上的凹函数的局部最大值也是全局最大值。
- 凸集上的凸函数的局部最小值也是全局最小值。
- 严格凹性或凸性意味着全局最优解唯一。
- 考虑到这些，可以准确地解：
  —具有线性约束和目标函数是凹函数的最大化问题。
  —具有线性约束和目标函数是凸函数的最小化问题。

## 哪个是凸可行域？

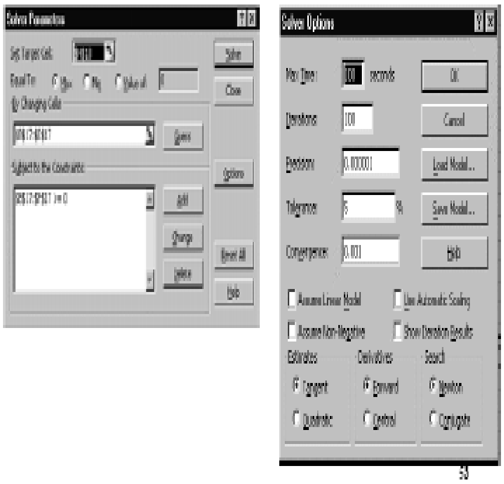
(x,y)：$y\leq x^2+2$
(x,y)：$y\geq x^2+2$
(x,y)：$y=x^2+2$




## 局部最优性的更多内容

- 求解非线性规划最小问题通常会找到局部最优解。
- 当局部最优解是全局最优解时，这将会很有用。
- 在很多时候并不是如此。
- 结论：若求解非线性规划问题，试着看看局部最优解如何。

## 用 Excel 规划求解解非线性规划问题



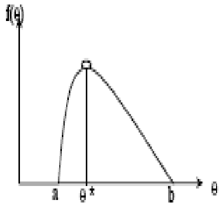
## 求一元非线性规划问题的局部最优解

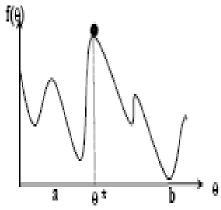
解一元非线性规划：

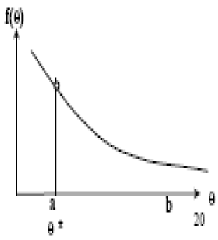
Max　f( θ )

s.t. a≤ θ ≤b

最优解是边界点或者满足 $f'(\theta^*)=0$ 并且 $f''(\theta^*)<0$。




## 求一元非线性规划问题的局部最优解

若 f( θ )是凹函数（或单峰函数），且可微。

Max　f( θ )

s.t. a≤ θ ≤b

对半搜索/减半搜索

- 步骤 1.从不确定区域 θ ∈[a,b]开始，计算中点 $\theta_M=(a+b)/2$ 的导数。
- 步骤 2.若 $f'(\theta_M)>0$，将区间[a, $\theta_M$]去掉。若 $f'(\theta_M)<0$，去掉区间[$\theta_M$,b]
- 步骤 3. 计算新区间中点的一阶导数，返回步骤 2，直到不确定区间足够小。

## 单峰函数

- 一元函数是单峰函数，若函数最多有一个局部极大值（或者最多有一个局部极小值）

## 其他搜索技术

- 不计算导数（可以精确计算），用 2 个函数估值决定最新的区间
- Fibonacci 搜索
- 步骤 1. 从不确定区域 θ ∈[a,b]开始。估计区间中 2 个镜面对称点 $\theta_1<\theta_2$ 的函数值 $f(\theta_1)$和 $f(\theta_2)$。
- 步骤 2. 若 $f(\theta_1)\leq f(\theta_2)$，将区间[a, $\theta_1$]去掉。若 $f(\theta_1)>f(\theta_2)$，去掉区间[$\theta_2$,b]。
- 步骤 3. 在新区间选择点的镜面对称点，重新记作 $\theta_1$ 和 $\theta_2$，且 $\theta_1<\theta_2$，计算函数值 $f(\theta_1)$和 $f(\theta_2)$。返回步骤 2 直到区间足够小为止。

## Fibonacci 搜索

1,1,2,3,5,8,13,21, 34

迭代步骤 1，搜索区间的长度为第 k 个 **Fibonacci** 数。

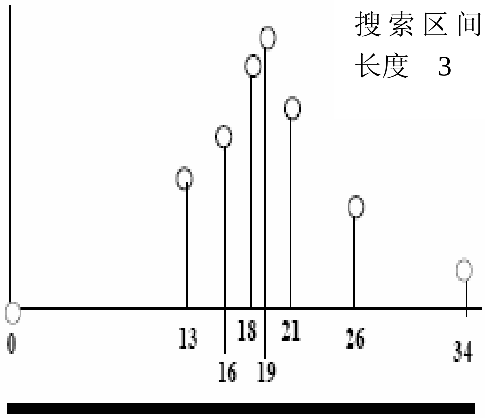
迭代步骤 j. 搜索区间的长度为第 k-j+1 个 **Fibonacci** 数。

单峰函数时，该技术收敛于最优解

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

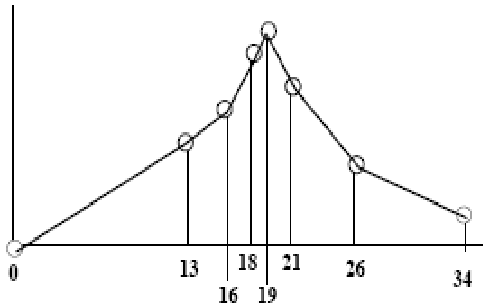
## 用 Fibonacci 搜索寻找局部最大解

搜索区间长度　3

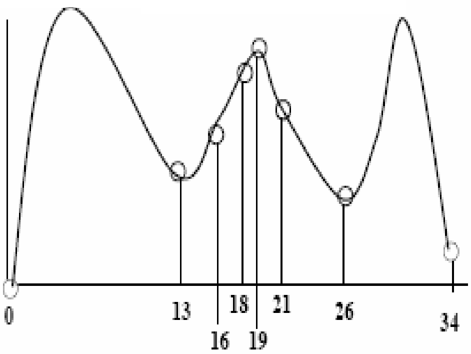



最大值可能在哪？

## 能够找到一个局部最大解，但不一定是全局最大解




## 能够找到一个局部最大解，但不一定是全局最大解




## Fibonacci 搜索中函数估计的个数

- 当对称选取新点时，连续搜索区间长度为：$l_k=l_{k+1}+l_{k+2}$。
- 给定 Fibonacci 数列 1,2,3,5,8,13,21, 34…，要求最后区间长度为 1，即 $l_n=1$，求解区间长度。
- 因此，若初始区间长度为 34，大约需要 8 个函数值将区间长度减到 1。
- 评价：若函数是凸函数或者单峰函数，那么 Fibonacci 搜索收敛于全局最优解。

## 可分离规划

- 可分离规划具有形式：

  Max　$\Sigma\ f_j(x_j)$

  s.t.　$\Sigma\ g_{ij}(x_j)\leqslant 0$, i=1,..,m

  每个变量 $x_j$ 看上去是分离的，一个存在于函数 $g_{ij}$ 中，一个存在于目标函数 $f_j$ 中。

每个非线性函数都仅仅有一个变量。

## 可分离规划例子

$$f(x_1,x_2)=x_1(30-x_1)+x_2(35-x_2)-2x_1^2-3x_2^2$$

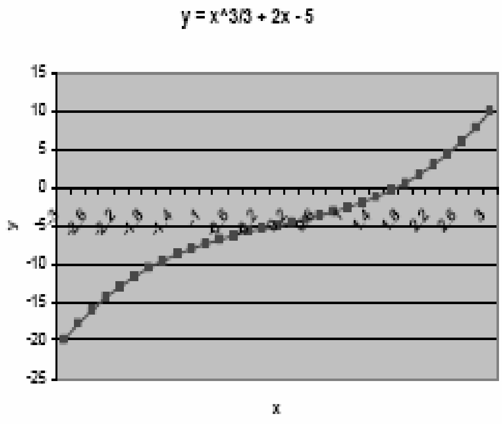
$$f(x_1,x_2)=x_1^5+\frac{3}{x_1}-18e^{-x_2}+4x_2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\ln x_1^5-\sin x_2-x_3e^{-x_3}+7x_1^{-4}$$

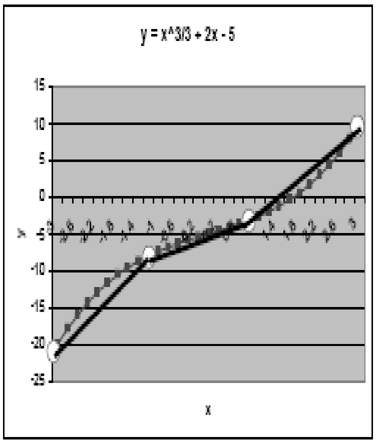
## 用分段函数估计非线性函数

- 第一方面，选择估计函数
- 第二方面，什么时候分段估计函数是线性规划的变形？

## 估计一个非线性一元函数




## 估计一个非线性一元函数：λ法



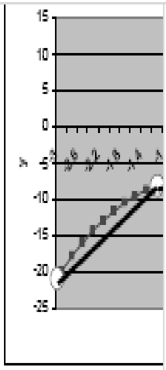

选择不同的x值描述x轴。

用分线段性规划近似。

## 更多关于λ法的内容

$a_1 = -3,\ f(a_1) = -20$

$a_2 = -1\quad f(a_2) = -7\ 1/3$



假定$-3 \leq x \leq -1$，将x表示为$\lambda_1(-3) + \lambda_2(-1)$，$\lambda_1$，$\lambda_2 \geq 0$且$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$。

然后估计$f(x) = \lambda_1(-20) + \lambda_2(-7\ 1/3)$

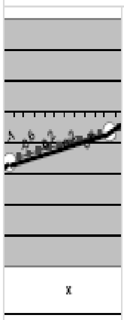
34

## 更多关于λ法的内容

$a_2 = -1\quad f(a_2) = -7\ 1/3$

$a_3 = 1\quad f(a_3) = -2\ 2/3$

设$-1 \leq x \leq 1$,令 $x= \lambda_2(-3) + {}_3(-1)$，$\lambda_1$，$\lambda_2 \geq 0$且$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$



如何估计区间中的f()?

若$-3 \leq x \leq 1$会怎样？

## 近似λ法

原问题：min　$x^3/3+2x-5$　+其他线性项

s.t.　$-3 \leq x \leq 3$　+更多约束

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1 = -3$; | $a_2 = -1$; | $a_3 = 1$; | $a_4 = 3$ |
| $f(a_1) = -20$; | $f(a_2) = -7\ 1/3$; | $f(a_3) = -2\ 2/3$; | $f(a_4) = 4$ |

近似问题：

min　$\lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) + \lambda_3 f(a_3) + \lambda_4 f(a_4)$

更多线性项

s.t.　$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$;　$\lambda \geq 0$

+更多其他约束

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

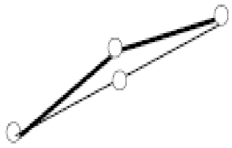
## 为什么近似是错误的？

近似问题：min $\lambda_1 f(a_1)+\lambda_2 f(a_2)+\lambda_3 f(a_3)+\lambda_4 f(a_4)$+其他线性项

s.t. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$；$\lambda\geqslant 0$

考虑 $\lambda_1=\lambda_3=1/2$，

$\lambda_2=\lambda_4=0$



当只有两个 λ 为正时，该方法给出的近似是正确的。

## 临接条件

1. 最多有 2 个权重是正数
2. 若正好有 2 个权重是正数，那么是 $\lambda_j$ 和 $\lambda_{j+1}$
3. 对于其他近似函数该条件仍然适用

## 近似极小非线性规划问题的目标函数

原问题： min {f(y): y∈p}

设　$y=\sum_j \lambda_j a_j$

其中　$\sum_j \lambda_j=1$，且 $\lambda\geqslant 0$

近似 f(y)。

min $\{\sum_j \lambda_j f(a_j): \sum_j \lambda_j a_j \in p\}$

- 注意：当考虑应用另一种方式表示 y 时，线性规划将选择目标函数近似值是最小的那种。

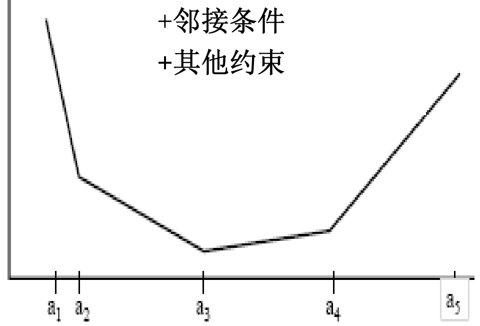
## 对于凸函数极小化问题，λ 法自动满足附加的邻接条件

$\min z=\lambda_1 f(a_1)+\lambda_2 f(a_2)+\lambda_3 f(a_3)+\lambda_4 f(a_4)+\lambda_5 f(a_5)$

s.t. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1$；$\lambda\geq 0$

+邻接条件

+其他约束

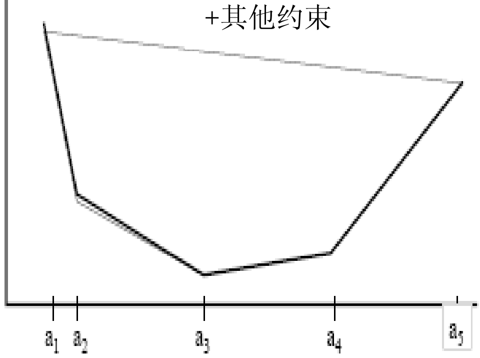



## 忽略邻接条件的可行近似目标函数

$\min z=\lambda_1 f(a_1)+\lambda_2 f(a_2)+\lambda_3 f(a_3)+\lambda_4 f(a_4)+\lambda_5 f(a_5)$

s.t. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1$；$\lambda\geq 0$

+其他约束

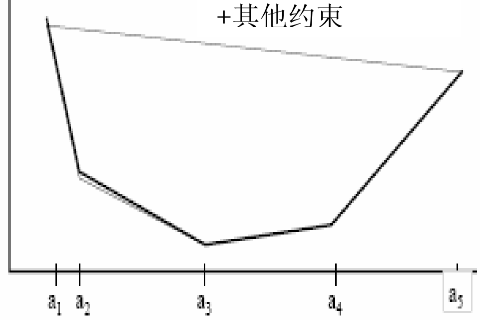



## 但是同样情况下极小化总是发生在分段线性曲线上

$\min z=\lambda_1 f(a_1)+\lambda_2 f(a_2)+\lambda_3 f(a_3)+\lambda_4 f(a_4)+\lambda_5 f(a_5)$

s.t. $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=1$；$\lambda\geq 0$

+其他约束



PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

## 可分离规划（线性约束情况）

- 从一个非线性规划开始：$Max\ f(x)$ $s.t.\ Dx = d$ $x \ge 0$
- 变为可分离：

$$Max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \quad s.t.\ Dx = d;\ x \ge 0$$

- 利用 λ 法近似

## 近似

- 用变量 λ 重新表示

$$Max \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{k_j} f_j(a_{jk})\lambda_{jk}\right)$$

$$s.t.\ \ Dx = d;\ x \ge 0;$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} \lambda_{jk} = 1, \forall j = 1,\dots,n$$

$\lambda_{jk} \ge 0$ 对任意 j,k 成立

和邻接条件约束

若原问题是凹性的，那么可以不用管邻接条件（邻接条件自动满足）。

## 如何建立可分离函数？

| 原项 | 替代项 | 约束 | 限制 |
|---|---|---|---|
| $(x_i+x_j)^n$ | $x_i + x_j = y$ | $x_i + x_j = y$ | *None* |
| $x_i x_j$ | $x_i x_j = y_1^2 - y_2^2$ | $y_1 = 0.5(x_i + x_j)$<br>$y_2 = 0.5(x_i - x_j)$ | *None* |
| $x_i x_j$ | $x_i x_j = y$ | $\log y = \log x_i + \log x_j$ | $x_i, x_j > 0$ |
| $x_i^{x_j}$ | $x_i^{x_j} = y$ | $y = 10^{z x_j}$<br>$x_i = 10^z$ | $x_i > 0$ |
| $2^{x_i + x_j^2}$ | $2^{x_i + x_j^2} = y$ | $\log y = (\log 2)(x_i + x_j^2)$ | *None* |

## 转化实例

$$Ex: (x_1 + x_2 + x_3)^6$$

代替 $y^6$，并令 $y = x_1 + x_2 + x_3$

$$Ex: \frac{x_1 x_2^2}{1 + x_3}$$

Let $y_1 = \dfrac{1}{1+x_3}$ and $y_2 = x_1 x_2^2 y_1$

加入约束

$$\log y_2 = \log x_1 + \log x_2^2 + \log y_1$$

## 非线性规划总结

- 凸函数，凹函数和凸集都是重要的特性
- Bolzano 搜索与 Fibonacci 搜索技术
  —用来解一元单峰函数问题
- 可分离规划
  —非线性目标与非线性约束是可分离的
  —通用近似技术

PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

# 大规模邻域搜索技术调查

Ravindra K. Ahuja

工业与系统工程系

佛罗里达大学

Gainesville，佛罗里达　32611，美国

ahuja@ufl.edu

Özlem Ergun

运筹学研究中心

麻省理工学院

剑桥，马萨诸塞州　02139，美国

ozie@mit.edu

James B. Orlin

斯隆管理学院

麻省理工学院

剑桥，马萨诸塞州　02139，美国

jorlin@mit.edu

Abraham P. Punnen

数学，统计与计算机科学系

新不伦瑞克大学

圣约翰，新不伦瑞克，加拿大 E2L 4L5

punnen@unbsj.ca

（1999年7月22日）

（2000年10月11日修订）

# 大规模邻域搜索技术调查

Ravindra K. Ahuja， Özlem Ergun， James B. Orlin， Abraham P. Punnen

摘要

很多实际的最优化问题是计算复杂的。因此，解决这样问题的实际方法是运用启发式算法（近似值），这样可以在合理的计算时间内找到一个近似最优解。改进型算法通常是一个启发式算法，它通常是从一个可行解开始，并重复寻找更好的解。邻域搜索算法（又叫局部搜索算法）是一类改进型算法，算法的每一步迭代是通过搜索当前解的邻域得到一个改进的解。设计邻域搜索算法的一个关键是邻域结构的选择，即邻域的定义方式。根据经验，邻域越大，局部最优解的质量越好，最后得到的解越精确。同时，邻域越大，每一步迭代的时间越长。因此，除非可以用很有效的方法搜索很大的邻域，大规模邻域搜索技术不一定能产生一个有效的启发式算法。本文关注于输入数据和有效搜索邻域很大的大规模邻域的搜索技术。我们调查了 3 大类大规模邻域搜索技术：（1）深度变量法：应用启发式算法搜索大规模邻域；（2）大规模邻域搜索：应用网络流技术或动态规划搜索邻域；(3)通过限制在多项式时间解决原问题引入大规模邻域。

## 1 .简介

很多实际的最优化问题是计算复杂的。因此，解决这样问题的实际方法是运用启发式算法（近似值），这样可以在合理的计算时间内找到一个近似最优解。研究启发式算法的文献可以分成两大类：构造型算法与改进型算法。构造型算法是通过给一个或多个决策变量赋值试凑构建一个解。改进型算法通常是从一个可行解开始，并重复寻找更好的解。邻域搜索算法（又叫局部搜索算法）是一类改进型算法，算法的每一步迭代是通过搜索当前解的邻域得到一个改进的解。本文关注于相对输入数据的邻域很大的大规模邻域的搜索技术。对于大规模邻域问题的例子，精确搜索邻域是不现实的，只能搜索邻域的一小部分或开发有效的模糊邻域搜索算法。

邻域搜索算法设计中的一个关键问题是邻域结构的选择，即邻域是如何确定的。选择方式大体上就确定了这个邻域搜索算法是否能得到高精度的解，还是仅仅得到比较差的局部最优解。据粗略的计算，邻域越大，得到的局部最优解越好，而得到的最终解的精确度越高。同时，邻域越大，每步迭代的时间越长。由于人们常常从不同的起始点多次运行邻域搜索算法，较长的执行时间将使单位时间的运行次数降低。因此除非可以以一种更加有效的方法进行搜索，一个较大的邻域不一定能够产生一个更有效的启发式算法。

运筹学领域中的很多成功和被广泛应用的方法可以被看作是很大规模的邻域搜索技术。例如，若将解线性规划问题的单纯型法视为一种邻域搜索算法，则列变换就是一种很大规模邻域的搜索方法。同样的，用于解决网络流问题的增量技术也可以归于很大规模邻域的搜索方法。解决最小费用流问题取消负费用回路的算法，以及解决指派问题的增广路径技术就是两例。

在本调查中我们将很大规模邻域搜索算法分成互相重叠的3种。我们研究的第一种邻域搜索算法是深度变量方法。该方法邻域成指数级增大，并利用启发式算法局部搜索这些邻域。第二类包括基于改进算法的网络流理论。该邻域搜索算法使用网络流技术确定改善的相邻解。最后，在第三类中我们将要讨论由子类或者在多项式时间内可解问题的约束引起的NP难题。尽管我们通过解线性规划问题的单纯型法，以及解决网络流问题的增量技术介绍了大

规模邻域搜索算法的概念，我们将不再论述线性规划问题。我们的问卷调查是将重点放在应用很大规模邻域搜索算法解决NP难题的优化问题上。

本文结构如下。在第2部分，简要介绍局部搜索。第3部分讨论深度变量方法。第4部分讨论基于网络流技术的很大规模邻域搜索算法。第5部分，给出一些可有效解决的NP难题的组合优化问题特例，以及基于这些特例的很大规模邻域搜索算法。第6部分，将描述对给定邻域进行局部搜索算法可能有所帮助的邻域指标。最后第7部分，介绍前面部分中一些算法的计算性能。

## 2.局部搜索：简述

首先，我们介绍一个组合优化问题以及邻域的概念。组合优化问题有不同的表述方式，这都依靠可行解集的表示方法。这里，我们将可行解集表示为一个有限集的子集。形式化表述如下：

令E={1，2，…，m}表示一个有限集合。一般地，对于集合S，令|S|表示集S的势。令$F\subseteq 2^E$，其中$2^E$表示集合E的全部子集的集合。F的元素叫做可行解。令f: $F\to R$。函数 $f$ 叫做目标函数。那么一个组合优化问题(COP)的例子可以表示为：

$$\text{Minimize }\{f(S):\ S\in F\}$$

假定F族没有将其元素完全列举出来，而是通过m次多项式的形式表示的。一个组合优化问题的例子可用(F，$f$)表示。对于我们考虑的大多数问题，费用函数为线性，即有一个向量$f_1$，$f_2$，…$f_m$使所有可行集S，$f(S)=\sum_{i\in S} f_i$。

假定是(F，$f$)表示一个组合优化问题。邻域函数是建立映射N: $F\to 2^E$ 的点。在该函数下，每个$S\in F$都有对应的E的子集N(S)。不失一般性，假定$S\in N(S)$，那么集合N（S）叫做解S的邻域。解$S^*\in F$叫做对于邻域函数N的局部最优解，若对于所有$S\in N(S^*)$都有$f(S^*)\le f(S)$。若| N(S)|随着m的增加呈指数增长，邻域N(S)为指数邻域。在本文中，我们将把重点放在指数邻域上，同时我们也讨论由于太大实际中不能精确搜索的邻域。例如，随着m的增加（如大于100万），实际上并不能搜索有$m^3$个元素的全部邻域。我们将应用很大规模邻域搜索算法等邻域搜索技术。

对于两个解集 S 和 T，令 S-T 表示在 S 而不在 T 中的元素的集合。定义距离 d(S，T)=|S-T|+|T-S|，即 E 中仅仅属于 S 或者 T 中的元素个数。有时，我们允许邻域含有不可行解。例如，对于旅行销售员问题，可以允许邻域中含有删除一条边的路径。为了强调邻域中比实际路径数量更多，我们常常在搜索中给出不可行解的一个组合描述。我们将这些不可行组合结构叫做参考结构。例如，一条 Hamiltonian 路径可能就是一个参考结构。

邻域搜索算法（最小费用问题）可以用下面的3部分概念组成：

1) 根据具体问题定义的一个邻域图NG，NG为有向图，其每个节点对应于一个可行解（并且/或者是非可行参考结构的例子），图的一条弧(S，T)满足T∈N(S)。
2) 每步迭代搜索邻域图的方法。
3) 确定在步骤2中选择邻域图中下一个节点的方法。我们称该节点为基解。

当S为给定邻域内的一个局部最优解，结束算法。（详情参见文献[1]）

接下来，根据距离定义两个邻域。第一个邻域为$N_k(S)=\{T\in F:d(S，T)\leqslant k\}$。我们称该邻域为k距离邻域。

对于某些问题，任意两个可行解都有相同的势。旅行销售员问题就是如此，其中每个可行解S代表了n个城市完全图的一条路径和n条弧（关于TSP详情见文献[48]）。一般的，若|S-T|=|T-S|=1，可以通过一次交换得到T；若S-T|=|T-S|=k，可以通过k步交换得到T。定义S的k步交换邻域为{T: |S-T|=|T-S|≤k}。若任意两个基本可行解都有相同的势，那么S的k步交换邻域等于$N_{2k}(S)$。旅行销售员问题的一个标准k步交换邻域为2步交换邻域，又称作2步最优邻域。该问题2步最优邻域图中的任意节点为一个路径，若一个路径可以通过2步交换从另一个路径获得，则可称两者相邻。搜索邻域的方法是很详尽的（或者有捷径），下一个基本解将是一个改善了的解。

由于$N_m(S)=F$，则当k增大时，搜索k距离邻域将会十分困难。通常，当k不固定时，邻域呈指数增长，当原问题为NP难题时，在邻域获得最优解（或者一个改善解）也是NP难题。

### 3.深度变量方法

对于k=1或2，k步交换邻域（或者k距离邻域）的搜索通常十分有效，但是平均而言，结果的局部最优比较差。当k比较大时，k步交换邻域将获得更好的局部最优解，但是花费的搜索精力会太大。深度变量搜索方法是局部搜索k步交换邻域的技术。该局部搜索的目标是在大量减少搜索时间的情况下寻找目标函数与全局最优解接近的解。通常，他们并不能保证是局部最优。在很大规模邻域搜索算法中，我们对搜索部分k步交换邻域的几种算法很感兴趣。在该部分中，我们将介绍解旅行销售员问题的Lin-Kernighan算法[50]，以及解决不同组合优化问题的k步交换邻域的其他启发式深度变量算法。在下一个部分，我们将介绍当k不确定时，在多项式时间内隐搜索指数性k步交换邻域的子集的其他方法。

在介绍Lin-Kernighan算法前，先介绍一些符号。接下来，我们要介绍如何将Lin-Kernighan算法推广到解决组合最优化问题的启发式深度变量方法（和喷出链）。假定T与T’为E的子集，但是并不一定可行。从T到T’的一条路径为序列$T=T_1$，…，$T_k=T'$使对于j=1到 k-1，$d(T_j，T_{j+1})=1$。

深度变量方法依靠有下面特点的移动子程序：

1. 在每步迭代中，子程序Move创建了一个子集$T_j$，以及根据某些搜索准则从（$S_{j-1}$，$T_{j-1}$）得到了一个可能的可行子集$S_j$。子集$T_j$可能可行或者不可行。这个操作用Move（$S_{j-1}$，$T_{j-1}$）=（$S_j$，$T_j$）来表示。
2. 对于j=1到k-1，$d(T_j，T_{j+1})=1$。
3. 根据深度变量方法，$T_j$通常满足其他的性质。

令T代表当前旅行销售员问题的路径，不失一般性，假定T按照顺序1，2，3…n访问各个城市。T的一个2步交换邻域可以定义为用两条边(i，k)(j，*l*)或(j，*l*)(j，k)代替(i，j)(k，*l*)构成另一种路径T’。注意d(T，T’)=4。2步交换邻域可以用4步操作规范描述，其中第一步从T中删除边(i，j)，第二步操作插入边(i，k)，第三步删除边(k，*l*)，最后加入边(j，*l*)。

令G=(N，A)代表有n个节点的无向图。令$P=v_1$，…，$v_n$代表G的一条n个节点的Hamiltonian路。径与环（术语参见文献Glover[30]）是指可以通过向Hamiltonian路加入弧(i，j)得到的含有n条弧的生成子图，其中i是路径的末端节点。注意若i是路径的末端节点，j是路径的另一末端节点，则径与环结构为Hamiltonian回路，也等价于一条路径。若T为路径或者径与环结

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

构，我们用f(T)代表其总长度。

在从路径S到T路径的转移中，Lin-Kernighan启发式算法允许更换n条边，即武断地说d(S，T)等价于k=2n。算法开始时，从原路径$T_1$删除一边得到一条Hamiltonian回路$T_2$。此后，$T_2$的一个末节点保持不变，直到迭代结束。选择另一个末节点开始进行搜索。偶数次操作插入一边进入Hamiltonian回路$T_{2j}$，该回路与不固定的径与环$T_{2j+1}$的末端节点相近。迭代的奇数次操作从当前径与环$T_{2j-1}$删除一边得到一条Hamiltonian回路$T_{2j}$。从任意Hamiltonian回路$T_{2j}$，通过加入2个末节点可以暗中得到一个可行路$S_{2j}$。在Lin-Kernighan算法结束时，得到了一个新的基本路径$S_i$，使对于所有j都有$f(S_i)=f(S_{2j})$。

下面我们将更加详细地描述Lin-Kernighan算法的步骤。在偶数次操作中加入的边是接近不固定末端节点的最短边，当且仅当$f(S)-f(S_{2j+1})>0$时加入Hamiltonian回路$T_{2j}$。Lin-Kernighan [50]也给出了一种边的优化选择方法。加入Hamiltonian回路$T_{2j}$的边通过最大化$f(T_{2j})-f(T_{2j+2})$进行选择。另一方面，在奇数次操作中删除的边由前面操作得到的径与环$T_{2j-1}$唯一决定，这样将会得到的$T_{2j}$是一条Hamiltonian回路。当选择要加入的边时，要考虑其他的约束。研究者考虑了不同的约束组合如先前删除的边不能够再次加入或者前面加入的边在后面的操作中不能够删除等等。最后，当考虑了所有初始固定节点的可能依然没有改善的路径时，Lin-Kernighan算法以局部最优解结束。

下面我们用一个数字例子解释Lin-Kernighan算法。考虑图 1 (a)中10节点的旅行路径。算法首先删除弧(1，2)得到图 1 (b)所示的Hamiltonian路。然后加入弧(2，6)，给出如图 1 (c)所示的径与环。

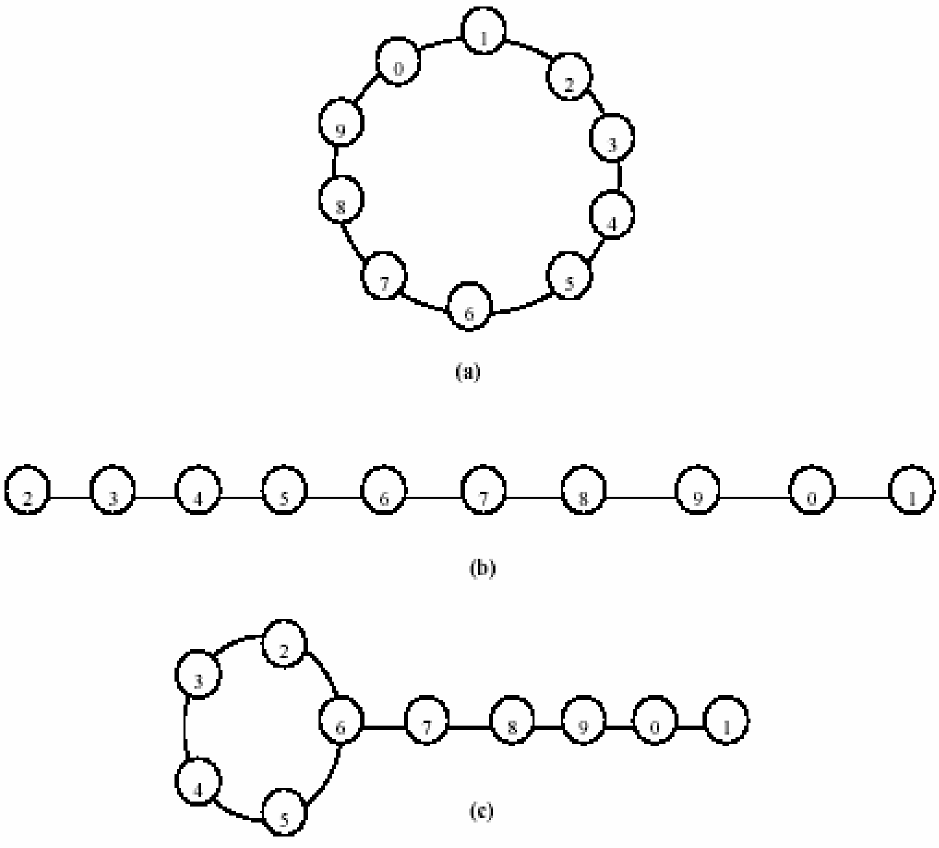



图 1　Lin-Kernighan 算法说明

(a)10 节点路径　(b)Hamiltonian 路　(c)径与环

从本结构中删除边(6，5)得到一条Hamiltonian路，加入边(5，8)，得到另一个径与环。在Lin-Kernighan启发式算法中的插入边的迁移要根据累计受益的费用标准，并且删除边的迁移唯一地生成了该路结构。当考虑了所有起始节点的可能而不能形成改善解，Lin-Kernighan算法得到了一个局部最优解。

Lin-Kernighan启发式算法有几种变形可以得到质量更好的启发式解。这些算法应用一些改进如2步最优，3步最优，以及特别的4步最优操作（文献[29][41][42][50][51][52][64]）以得到基本Lin-Kernighan操作不能得到的路径。同样，运用有效的数据结构刷新路径以确保计算效率和解的质量([24][42])。Papadimitriou[54]指出根据Lin-Kernighan算法计算确定的局部最优是完全的局部搜索问题。

现在我们根据以下Lin-Kernighan启发式算法的通用过程定义旅行销售员问题的深度变量法。该过程先取一个可行路径S作为输入，之后运用前面定义的Move函数。在每步迭代中，Move函数创建一对($T_j$，$S_j$)，其中子集$T_j$是可行集或者一参考结构的不可行例子。子集$S_j$是可行集。Move函数被调用执行r次迭代，其中r根据合适的参考规则决定。最后，深度变量搜索过程返回含有当前的最优目标函数值的可行子集$S_k$。

**procedure** Variable-Depth-Search（S）;
begin

$S_1$:=$T_1$:= S;

For j:=2 to r do ($T_j$，$S_j$)=Move($S_{j-1}$，$T_{j-1}$);

选择集合$S_k$使Minimize($f(S_j)$:$1\leqslant j\leqslant r$);

end;

这种特殊的深度变量搜索依靠一种做Move的启发式算法，它从初始解开始系统地形成解的路径。该框架具有相当的柔性，有很多不同的设计程序Move的方法。如何设计Move程序的细节是一个成功的启发式算法与不太成功算法的不同之处。

在上面提到的程序中，我们假定Move每步创建了一个单一可行解。事实上，每步创建多个可行解([31][61])是可能的，或者每步均无可行解（[30][58]）。

许多深度变量法要求中间解$T_j$满足特定的拓扑（或结构）性质。例如，在Lin-Kernighan算法中，我们要求对于任意奇数j，$T_j$是一个径与环。我们同时要求对于任意偶数j，$T_j$是一个Hamiltonian路。我们将在下面的章节中看到$T_j$满足额外的非结构性的性质的例子。例如，额外性质可能要依靠指标的顺序。

Glover[30]扩展与推广了Lin-Kernighan的思想，考虑了基于经典变换路径方法的一种结构化的深度变量方法，叫做喷出链。Glover写道“粗略地看，喷出链由选择一组元素进行状态变化引起（例如，占据新位置并且或接受新的值）。变化的结果会辩识出另一个集合，他们具有以下性质，即至少有1个元素要从当前状态中被删除。状态变化步骤与删除步骤交替进行，并且每一次选择是依据前面步骤的累积效果(通常受最近的前面步骤影响，但非必然)。在有些情况下，一连串的操作可能表现出多米诺骨牌效应。*喷出链的术语一般是建议性的而不是限制性的，这提供了一种统一的思路，连接了一系列探索过程，而不是建立一个排斥其他分类形式的狭隘的成员资格。（这里用斜体字。）*

本文中，我们将使用下面的更严格的喷出链定义。我们将深度变量法叫做喷出链，若

I. $|T_1|=|T_3|=|T_5|=\ldots=n$，并且

II. $|T_2|=|T_4|=|T_6|=\ldots=n+1$（或n-1）

对于任意偶数j，若$|T_j|=|S|-1$，那么$T_j$可以通过从$T_{j-1}$删除一个元素得到。否则，若$|T_j|=|S|+1$，那么$T_{j+1}$可以通过从$T_j$删除一个元素得到。本文中的许多深度变量法可以视作喷出链。特别是这些方法包括不同参考结构的构建和一个规则集，以从中得到一些不同的可行解。根据我们的认识，本文中考虑的解决旅行销售员问题的所有深度变量法都可看作喷出链。

我们可以想象基于Lin-Kernighan邻域的邻域图的节点构成的路和径-环。(注意路径也是径-环的例子。)邻域图每条边的末端点将连接一个径-环。搜索技术将会是由Lin和Kernighan提出的算法[44]，选择程序将会选择已发现的最佳路径。因此喷出链的参考结构应该是在喷出链技术中邻域图的节点。若下一轮基本解比当前基本解距离更远，则该技术可以叫做深度变量法。喷出链是一种深度变量法，该方法的一个邻域是另一邻域子集（因此在从大到小的变化中，删除出一个元素）。

在上面叙述的方法中，深度变量法依靠Move函数。也可以创建使用网络流搜索的$N_k$的指数性子集。在这些邻域中，任何邻域都可以通过一系列适当定义的邻域图的移动得到。注意对于Lin-Kernighan算法，邻域规模为多项式级大小，正是通过搜索求得与基本解不同的解。我们将在下面的章节中介绍这些基于网络流的技术。若在喷出链（添加与删除的交互系列）与邻域元素之间有任何的天然联系，那么可以将这些技术视为喷出链技术[30][31][58][21]。

深度变量算法与基于喷出链的算法的应用已经成功的给出了一些组合最优化问题的优良解。Glover[30]、Rego[61]、Zachariasen&Dum[83]、Johnson&McGeoch[42]、Mak&Morton[51]、Pesch& Glover考虑了旅行销售员问题的这些算法。Rego& Roucairol[63]和Rego[62]研究了交通工具路径问题。Dondorf&Pesch[13]提出了使用喷出链的聚类算法。Yagiura等考虑了解决一般分配问题的深度变量法[80]和修订喷出链[79]。此外，Laguna[47]等将短喷出链算法应用于多层次一般分配问题。这些技术也应用于统一图的分割问题[16][20][44][53]，分类分配问题[3]，渠道分配问题[17]，以及护理日程[14]。Sourd[70]应用了一个很普通的大邻域改善程序，其中两个邻域的距离根据不相关机器的日程任务而变化。根据当前解和启发式搜索，产生局部但是较大的枚举树可以得到这些邻域。

## 4. 基于网络流的改进型算法

在本部分中，我们在基于网络流的算法搜索的邻域内研究局部改进型算法。用于改善邻域的网络流技术可以分为3部分：（1）寻找最低费用回路的方法；（2）最短路或者基于动态规划的方法；以及（3）基于寻求最低费用分配和匹配的方法。根据回路定义的邻域可以看作2步交换邻域的一般形式。基于分配的邻域可以看作插入式邻域的一般形式。在下面的3小节中，我们给出指数性邻域的一般定义以及应用于寻找改善邻域的网络流算法。对于很多问题，可以在一个相关图上应用网络流算法确定一个改善邻域，我们将其叫做改善图。

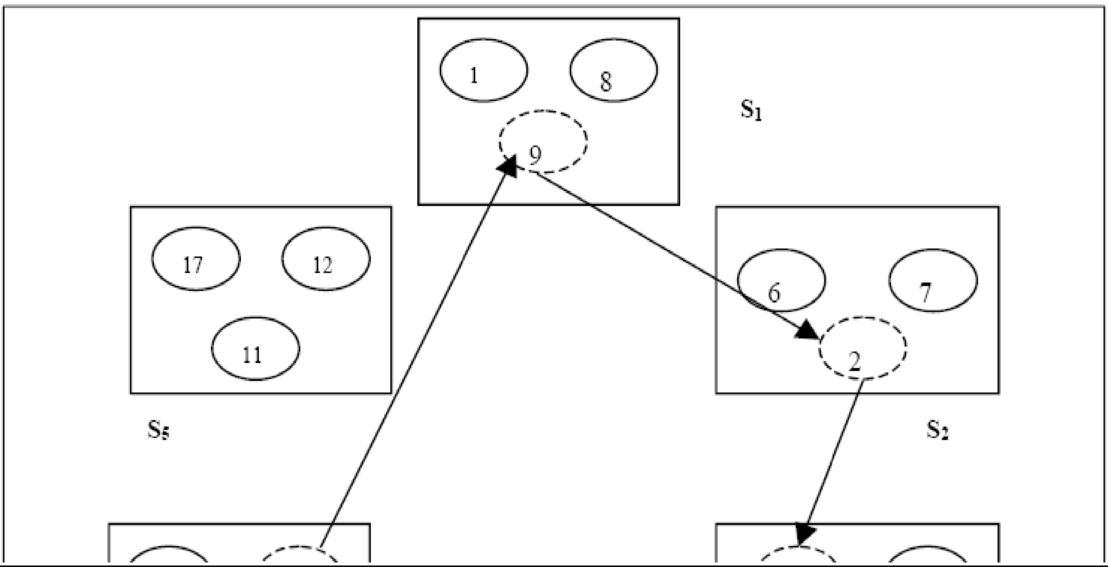
### 4.1基于回路定义的邻域

在本部分中，我们将首先定义一个一般的分割问题。然后定义2步交换邻域和循环交换邻域。

令$A=\{a_1，a_2，a_3，\ldots a_n\}$表示有n个元素的集合。若每个集合$S_j$非空，集合之间互不相交，他们的并为A，那么$\{S_1，S_2，S_3，\ldots S_n\}$定义了A的一个分割。对于A的任意子集S，令d[S]

表示S的费用。那么集合分割问题就是要找到A的一个最多有K个子集的集合使$\sum_k d[S_k]$最小。

设{$S_1$，$S_2$，$S_3$，…$S_k$}为任意可行分割。若可以在不同子集交换2个元素得到{$T_1$，$T_2$，$T_3$，…$T_k$}，那么可以称{$T_1$，$T_2$，$T_3$，…$T_k$}为{$S_1$，$S_2$，$S_3$，…$S_k$}的2步交换邻接点。{$S_1$，$S_2$，$S_3$，…$S_k$}的2步交换邻域包含了所有2步交换邻接点。若按照一定次序在S的k≤K个子集中交换单个元素可得到{$T_1$，$T_2$，$T_3$，…$T_k$}，那么可以称{$T_1$，$T_2$，$T_3$，…$T_k$}为{$S_1$，$S_2$，$S_3$，…$S_k$}的一个循环交换邻接点。令($S_h^1$，$S_m^2$，$S_n^3$，…$S_p^k$)表示k个子集的这样一种次序，要求h=p，即最后的子集要与$S_h^1$相同。我们把元素的这种交换叫做循环交换。我们用表2解释循环交换。在本例中，节点9从子集$S_1$传递到子集$S_4$。节点2从子集$S_4$传递到子集$S_5$。节点3从子集$S_5$传到$S_3$。最后，节点14从子集$S_3$传递到$S_1$，循环交换结束。也可以以任意相似的方式定义一个邻接点路径。从数学上看，通过加入合适的虚节点把一个路径交换变为循环交换是很容易的。




一般的，循环邻接点的数目远大于2步邻接点的数量。当有$O(n^2)$个2步邻接点时，固定K不变，有$O(n^K)$个循环邻接点。若K可以随n变化，则可能有指数个循环邻接点。

Thompson[75]，Thompson与Orlin[76]， Thompson与Psaraftis[77]介绍了如何通过在一个改善图中找到一个负成本互不相交子集回路，确定循环交换邻域中的改善接点。下面我们将叙述一下如何构建一个改善图。令A={$a_1$，$a_2$，…$a_n$}表示原集分割问题中元素集合，令S[i]表示含有元素$a_i$的子集。图G=(V，E)，若V={1，2，…n}节点集合与原问题中A的元素次序相对应，则称为改善图。令E={(i，j)：S[i]≠S[j]}，其中弧(i，j)对应于节点i从S[i]传到S[j]，并把j从S[j]中删除。对于任意弧(i，j)∈E，令c[i，j]=d[{i}∪S[j]\{j}]-d[S[j]]，即当加入i删除j时S[j]的成本增加。若对于W的任意节点对i和j，S[i]≠S[j]，即对应于W中节点的A的元素都在不同的子集中，我们可以将G中的回路W叫做互不相交子集。分割问题的循环交换与改善图的互不相交子集回路有成本保留上的一一对应的关系。特别的，对于任意负成本循环交换，改善图中有一条负成本互不相交子集回路。不幸的是，确定改善图中是否存在互不相交子集回路是NP完全问题，确定一条负成本互不相交回路是NP难题。(参考，例如，Thompson[75]，Thompson与Orlin[76]， Thompson与Psaraftis[77])

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

尽管确定一条负成本互不相交回路是NP难题，存在有效的启发式算法对图进行搜索。（参考，例如，Thompson与Psaraftis[77]与Ahuja等[2]）

循环交换邻域搜索已成功应用于一些特定分割问题的组合优化问题上。Thompson与Psaraftis[77]，Gendreau等[25]和Fahrion与Wrede[19]应用循环交换邻域搜索解决了交通工具路径问题。Frangioni等[23]应用循环交换解决了最小化机器生产间隔的日程安排问题。Ahuja等[2]用循环交换得到了一种解决最小能力生成树的最佳的方法，被作为基准广泛应用。

通过确定改善图中的负成本回路确定改善解的思想也见诸其他的一些文献中。Talluri[74]通过确定相关网络中的负成本回路，确定了日常飞行分配问题中飞行支架设备类型成本节约的变化。飞行分配问题可以用多日用品流整数规划模型表示，其中约束为每种日用品表示一次飞行。Talluri考虑了仅有2种飞行班次约束下的解，并探索了可以通过交换2种航班的一些飞行次数得到改善解。他发展了一个相关联的改善图，并且证明了改善的邻接点对应于改善图中的负成本回路。Schneur与Orlin[68]及Rockafellar[65]运用重复检测和沿负成本回路发送流的方法解决线性多日用品流问题。他们的技术已经延展到基于回路的多日用品流整数规划模型的启发式优化算法。Wayne在文献[81]中给出了解决一般的最小费用流问题的回路消去算法。Firla等[22]介绍了任意2个整数规划交集的改善图。该网络中路径与回路与优化的可行解相对应。此外，该网络形成了赋权的b匹配问题的算法。Glover&Punnen[28]与Yeo[78]讨论的算法构建了优于指数性路径的旅行销售员路径。这些算法也可以看作计算隐性特别层网络的最小费用回路。我们将在5部分更加详细的讨论启发式算法。

4.2路径定义邻域（或者动态规划定义）

我们将讨论3中不同的基于最短路或者动态规划的邻域搜索算法。关于这些方法的讨论将在旅行销售员问题中进行。当应用旅行销售员问题时，可以将这些邻域搜索方法看作：（1）顺序添加和删除边，（2）当通过互换路径中2城市的当前顺序定义交换时，允许类似的多步交换，（3）在当前路径中进行循环移动。我们将详细讨论这些邻域。

4.2.1 通过顺序添加和删除弧建立新的邻接点

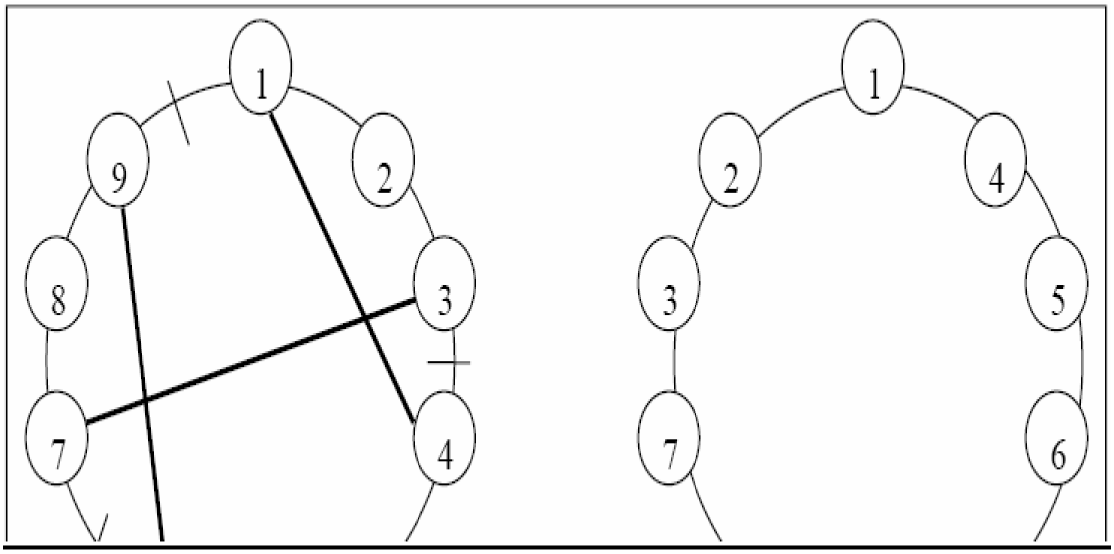
我们首先讨论一类通过从当前路径交替添加和删除边得到邻域的最短路算法。这些方法完全的搜索3部分中有附加约束边的喷出链邻域的子集。为了简单，我们假定路径S要按照顺序1，2，3….，n，1通过城市。利用3部分中介绍的术语，令T表示S的一个k步交换邻接点，且从S到T的顺序为$S=T_1$，…，$T_k=T$。这些邻域对应于Punnen&Glover[58]在其他几个邻域中描述的奇数和偶数步路创建的试验解以及从不同路径结构构建的试验解。由奇数路径生成试验解是Firal等[21]独立提出的。下面解释，由奇数或偶数步路径产生试验解通常要考虑下面的算法：

（1） 删除边（n，1）得到Hamiltonian路$T_2$，从节点1加入边（1，i）到节点i（其中i>2）得到径与环$T_3$。

（2） 当前路的末节点为节点i。删除边（i，i-1），对于i<j<n，加入边(i-1，j)，首先建立Hamiltonian路，然后建立径与环结构。

（3） 检查终止标准是否符合。若是，进入步骤（4），否则，令i=j返回步骤（2）。

（4） 删除边（j，j-1）加入最后边（j-1，n）完成路径。




(a) (b)

图3. 解释交替路径变换

图3解释了9节点路S=(1，2，…，9，1)的处理过程。该路径交换步骤首先删除边(n，1)，并加入边(1，4)。然后删除边(3，4)，加入边(3，7)。最后删除边(6，7)，加入边(6，9)得到新的路径T。在图3(a)中，我们用粗线表示加入的边，要删除的边在边上加入破折号。图3(b)解释了路径交换后的得到的新路径。

Firla等[21]，Glover[30]与Punnen&Glover[58]指出，通过在改善图中寻找一条奇数或者偶数长度的最短路径，该邻域中的一个改善解可以在$O(n^2)$次操作中得到。这里，我们描述一个通过确定奇数或偶数个节点的最短路而确定路径的最佳邻接点的改善图。注意S=(1，2，3，...，n，1)是当前有n个节点的旅行销售员路径。改善图为图G=(V，E)，其中V={1，2，…，n}对应于原问题的n个节点，E={(i:j): 1=i<j-1<n}为一个有向弧集合。弧(1, j)∊ E（这样2<j=n）对应于删除边（n，1）和添加边（1，j），弧(i，j)∈E（这样1<i<j-1<n）对应于在原路径S上删除边（i-1，i）和添加边（i-1，j）。若d[i，j]表示从城市i到城市j的费用，那么对于任意弧(1，j) ∈E（这样2<j=n），我们有相关费用c[1，j]=-d[n，1]+d[1，j]，对于任意弧(i，j)∈E（这样1<i<j-1<n），我们有相关费用c[i，j]=-d[i-1，i]+d[i-1，j]。最后，从G中节点1到节点n确定一条负成本回路，使其k步交换的结果为盈利。

此外，由奇数和偶数路径产生的试验解，新路径结构如断路和产生不同试验解与参考结构的逆向路可参见文献[58]。奇数和偶数路径单独产生的邻域数目为Ω$(n2^n)$。即使是非指数性邻域，搜索邻域的加速技术也是很重要的。例如，在一个有向非循环改善图中使用最短路算法，Glover [31]在$O(n^2)$次操作中得到了一类4步最优解。

4.2.2复合交换构建新邻域

由路径交换定义的第二类局部搜索算法是交换邻域的推广。考虑n个节点履行销售员路径T=(1，2，3，…，n，1)，通过交换节点i与j的位置(1≤i≤j≤n)得到交换邻域。例如令i=3，j=6，T’=(1，2，6，4，5，3，7，…，n，1)为交换操作下的邻域。2个交换操作交换了节点i与节点j，若max{i，j}<min{k，l}，或min{i，j}>max{k，l}，那么称节点k与l独立。那么路径T的一个大规模邻域可以通过混合（联合）任意的一些独立交换操作来定义。

Congram等[9]，Potts&Van de Velde[57]把该混合交换邻域分别应用在独立机器总负重缓慢日程安排问题和旅行销售员问题上。他们把这种方法叫做动态搜索。在他们的文献中，Congram等[9]证明了邻域的大小为$O(2^{n-1})$，并且给出了在$O(n^3)$时间内确定出最优邻接点的动态规划递归表达式。Hurink[40]在单机器批量问题上应用合成交换邻域的一个特殊例子，其中只有相邻的对才可以交换，并且指出通过在合适的改善图中确定一条最短路，可以在$O(n^2)$时间内得到一个改善邻接点。

下面我们描述一个改善图，协助搜索混合交换邻域。令T=(1，2，3，…n，1)表示n个节点的旅行销售员路径。改善图为图G=(V，E)，其中（(i)）V={1，2，…，n，1’，2’，…n’}是对应于原问题节点及其复制节点的节点集，(2）E为有向弧（i，j’）∪（j’，k）的集合，其中弧（i，j’）对应于节点i和j交换，弧（j’，k）表明节点k将会是下一步交换的第一个节点。例如，G中一条有3个弧(i，j’)，(j’，k)， (k，l’)的路径表示互换节点i与j，节点k与l的2步交换操作。要构建弧集合E，要考虑V中任意对（i，j’）和(j’，k)的节点，当且仅当j>i>1时，弧（i，j’）加入E中。当且仅当j=1而且k>j时，或j>1而且k>j+1时，弧（j’，k）加入E中。对于任意弧(i，j’)∈E，我们有等于删除边(i-1，i)，(i，i+1)，(j-1，j)， (j，j+1)，加入边(i-1，j)，(j，i+1)，(j-1，i)， (i，j+1)后，旅行销售员问题最优费用净增加的相关成本c[i，j’]。换言之，若d[i，j]为原问题中从节点i到j的费用，且d[n，n+1]=d[n，1]，那么

对于j’=i+1，c[i，j’]=(-d[i-1，i]-d[i，j]-d[j，j+1]+(d[i-1，j]+d[j，i]+d[i，j+1])并且

对于j’>i+1，c[i，j’]=(-d[i-1，i]-d[i，i+1]-d[j-1，j]-d[j，j+1])+(d[i-1，j]+d[j，I+1]+d[j-1，i]+d[i，j+1])。

所有边（j’，k）的费用为0。

现在确定混合交换邻域路径的最佳旅行销售员邻接点等价于在该改善图上确定最短路，因此需要时间为$O(n^2)$。注意由于旅行销售员问题是循环问题，其中的一个节点要在变动过程保持不变。在上面的改善图构建中，不失一般性，我们假定节点1不能够移动，因此可以通过确定从节点1’到节点n或n’的最短路搜索邻域。当应用于旅行销售员问题时，Congram等[9]给出的搜索邻域的动态规划递归式也会花费$O(n^2)$时间。上面给出的最短路算法应用于总负重缓慢日程安排问题时要花费$O(n^3)$时间因为要花费$O(n^3)$时间计算弧费用。

4.2.3用循环移动方式创建一个新邻接点

本部分中最后一类局部搜索算法建立在一种循环移动金字塔路径（Carlier& Villon[8]）上。若路径从城市1开始，然后按照递增顺序一直到城市n，最后按照递减顺序通过剩余城市回到城市1，那么该路径叫做金字塔式路径。令T(i) 表示路径T中第i个位置的城市。路径T’叫做路径T的金字塔式邻接点，若存在整数 p使：

（1） $0<p<n$，

（2） $T'(1)=T(i_1)$，$T'(2)=T(i_2)$，…， $T'(p)=T(i_p)$ 其中，$i_1<i_2<\ldots<i_p$并且

（3） $T'(p+1)=T(j_1)$，$T'(p+2)=T(j_2)$，…， $T'(n)=T(j_{n-p})$ 其中，$j_1>j_2>\ldots>j_{n-p}$

例如，若路径T=(1，2，3，4，5，1)那么T’=(1，3，5，4，2，1)为金字塔式邻接点。注意该邻接点的一个缺点是边(1，2)与边(1，n)属于所有路径。为了避免如此，Carlier & Villon[8]考虑了给定路径的n次旋转。该邻域的大小为$\theta(n2^{n-1})$，并且在改善图中运用n次最短路算法，在$O(n^3)$时间内可以搜索完毕。

下面我们将要描述一个对于旅行销售员问题中可以通过解最短路得到最佳金字塔邻域的改善图。令T=(1，2，3，…，n，1)为n个节点的旅行销售原路径。改善图为图G=(V，E)，其中（i）

V={1，2，…n，1’，2’，…n’}对应于原问题的节点及其复制节点。（2）E为有向弧（i，j’）∪（j’，k）的集合，其中弧（i，j’）对应于节点i到j成连续顺序，弧（j’，k）指跳过节点j+1到节点k-1并把它们按照相反的顺序添加在路径的末尾。要构建弧集合E，要考虑V中任意对（i，j’）和(j’，k)的节点。当且仅当i≤j时，弧（i，j’）加入E中。当且仅当j<k+1时，弧（j’，k）加入E中。对于任意弧(i，j’)∈E，我们有等于当路径逆向穿过前面跳过的城市，加入边(j+1，i-1)后，旅行销售员问题金字塔式邻接点费用净增加的相关成本c[i，j’]。对于任意弧弧（j’，k）∈E，我们有等于删除边(j，j+1)与(k-1，k)，加入边(j，k)后，旅行销售员问题最优费用净增加的相关成本c[i，j’]。换言之，若d[i，j]为原问题中从城市i到城市j的费用，那么对于i<j而且j<n-1

c[i，j’]= d[j+1，i-1]，
c[j’，k]=-d[j，j+1])-d[k-1，k]+d[j，k].

注意在计算有末节点1，1’，n，n’的边的费用时，要特别小心。现在邻域可以通过确定从节点1到节点n或n’的最短路搜索，Carlier& Villon [8]也指出若一条路为上述邻域的局部最优，那么它是2步交换邻域的局部最优。

除了这3类邻域，对于一些特殊的旅行销售员问题也可以应用动态规划确定最优解。Simonetti和Balas[69]运用动态规划的方法在特定程序约束下的时间窗口内解决了旅行销售员问题。Burkard等[6]证明了可以用PQ树表示的特殊结构路径集中运用动态规划方法，可以在多项式时间内解决旅行销售员问题。他们也指出，金字塔路径集合可以用PQ树表示，同时存在一种$O(n^2)$算法可以计算最短金字塔路径。这些结果将在第5部分中详细讨论。

4.3 由分配和匹配定义的邻域

在该部分中，我们要讨论通过确定改善图中的最小费用分配定义的指数性邻域结构。我们将在旅行销售员问题中解释邻域。同样，我们也指出分配邻域可以用确定非双向改善图中最小费用匹配进行广义定义。我们在集和分割问题上已经证明了这种广义性。

旅行销售员问题的分配邻域可以看作由路径中删除一个节点并将其重新最优化的插入定义的简单邻域的推广。考虑n个节点的路径T=(1，2，3，…n，1)，若从城市i到城市j的成本为d[i，j]，那么搜索分配邻域的第一步是建立一个双向改善图，步骤如下：

（1） 对于某些k=[n/2]，选择并从当前路径T删除k个节点。令删除的节点为V={$v_1$，$v_2$，…$v_k$}并且剩余的节点为U={$u_1$，$u_2$，…，$u_{n-k}$}。
（2） 构建一个子路T’=($u_1$，$u_2$…，$u_{n-k}$，$u_1$)。令$q_i$表示对于i=1到n-k-1每个($u_i$，$u_{i+1}$)的边，令$q_{n-k}$表示边($u_{n-k}$，$u_1$)。
（3） 现在构建一个完全双向图G=(N，N’，E)使N={$q_i$:i=1到n-k}，N’=V，每条边($q_i$，$v_j$)的权为c[$q_i$，$v_j$]=d[$u_i$，$v_j$]+d[$v_j$，$u_{i+1}$]-d[$u_j$，$u_{i+1}$]。

T的一个邻接点对应于通过将V中的节点插入子路T’得到的一条路径T*，最多有一个节点插入T’的邻接节点。K个弧的最低费用分配对应于T的最小费用邻域。

用图4，我们将解释9节点路径T=(1，2，3，4，5，6，7，8，9，1)的分配邻域。令V={2，3，5，8}，然后我们构建U中节点的子路如T’=(1，4，6，7，9，1)。图4解释了只有简单匹配边的双向图G。得到的新路径是T’’=(1，3，4，8，6，5，7，9，2，1)。注意当k=[n/2]时，分配邻域的大小等于Ω([n/2]!)。

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

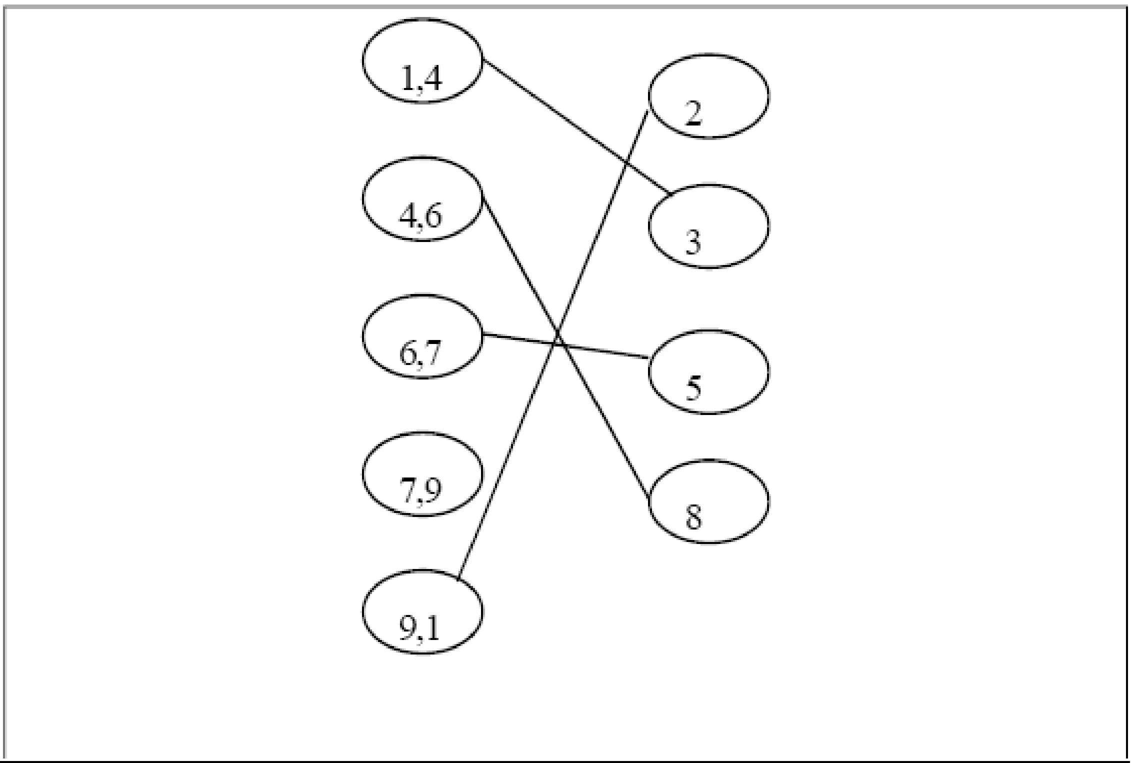



图4 解释匹配邻域

分配邻域是由Sarvanov与Doroshko[66]针对k=n/2且n为偶数的旅行销售员问题首先提出的。Gutin[33]针对k=n/2给出了一个有局部最速下降算法的分配邻域搜索算法的理论比较。Punnen[60]考虑了k与n的一般分配邻域。删除路径而不是节点并按照解决最小权重匹配问题重新最优插入的邻域的拓展同样在[60]中给出了。Gutin[34]指出对于某些k值，邻域的大小可以随一些复杂性比较低的搜索邻域算法达到最大。Gutin与Yeo[37]构建了一个基于分配邻域的邻域，并指出运用该方法从任意路径T变动到另一路径T'最多要4步。Deineko与Woeginger[12]研究了旅行销售员问题的几种指数性邻域以及基于双向图的分配和匹配的二次分配问题和基于偏序，树以及其他组合结构的邻域。基于匹配的邻域启发式算法同样被Dror和Levy[15]应用于存货安排问题。

另一类基于匹配的邻域可以通过包装子路得到，子路通常由解决一个双向最小权重匹配问题[43][59]产生。找到这种最优路径通常是NP难题。可以用有效的启发式算法搜索该邻域[27][43][59]。应用该邻域的邻域搜索算法可以通过运用成本修订或者其他方式进一步研究以控制匹配产生。

我们下面要考虑一个基于非双向匹配的邻域结构。我们将在第三部分的一般集合分割问题的内容中讨论该邻域。令$S=\{S_1，S_2，S_3，…，S_k\}$表示集合$A=\{a_1，a_2，a_3，…a_n\}$的一个分割。然后构建一个完全图G=(N，E)使对于1≤i≤K的任意节点i表示S中的子集$S_i$。现在G中边(i，j)的权重c[i，j]可以根据多种规则分别给出。一种可能的规则如下：

（1） 令子集$S_i$对分割问题的成本贡献为$d[S_i]$。

（2） 对于E中任意边(i，j)，连接$S_i$与$S_j$中的元素，重新最优地分成两部分。令新的子集为$S_i'$与$S_j'$。

（3） 然后$c[i，j]=(d[S_i']+d[S_j'])-(d[S_i]+d[S_j])$。

注意若含有非负权的边从G中被删除，那么该图中任意负成本匹配将会定义S的一个成本改善邻接点。Tailard将这种思想应用在一类普通的聚集问题[71]和交通工具路径问题[72]上。

## 5. 可解的特殊例子与相关邻域

有很多文献研究了NP难题的组合优化问题的有效解的特例。对研究者而言特别重要的是通过约束问题的拓扑结构，或者给原问题增加约束，或者两者的组合，从原NP难题中得到的特例。通过在这些有效解特例的基础上建立邻域，研究者可以形成在多项式时间内被搜索的指数数目的邻域。我们指出这其中有很多技术并没有经过验证，形成的结果也可能是比较差的局部最优解。注意在第4部分中讨论的循环移动邻域建立在寻找最低费用金字塔路径的一个$O(n^2)$算法上。

下面的解释是关于Halin图的。Halin图是指通过在平面内嵌入所有节点的度不等于2的树并用回路连接所有叶节点，得到的图。Cornuejols等[10]给出了一个在Halin图上解决旅行销售员问题的O(n)算法。注意Halin图可能有指数数量的旅行销售员路径，如图3所示（参见[10]）。

下面我们将介绍如何应用Halin图建立旅行销售员问题的很大规模邻域。假定T为一个路径。若H为Halin图且T为H的子图，那么我们称H为T的一个Halin拓展。图5解释了路径T=(0，1， 2，…， 9， 0)的一个Halin拓展。假定有一个有效的程序HalinExtend(T)，它可以创建T的Halin拓展。为了创建邻域N(T)，可以令H(T)= HalinExtend(T)，然后令N(T)={T’:T’为H(T)中的路径}。要在该邻域中寻找最佳路径，可以寻找H(T)中的最佳路径。在理论上，可以定义一个更大的邻域：N(T)={T’: 在T’中存在T的Halin拓展}。不过，由于该邻域要同时最优化T的Halin扩展，因此进行有效搜索非常困难。类似的基于Halin图系统的瓶颈旅行销售员问题和斯坦树问题可以通过分别运用Philips等[56]和Winter[82]给出的线性时间算法建立。

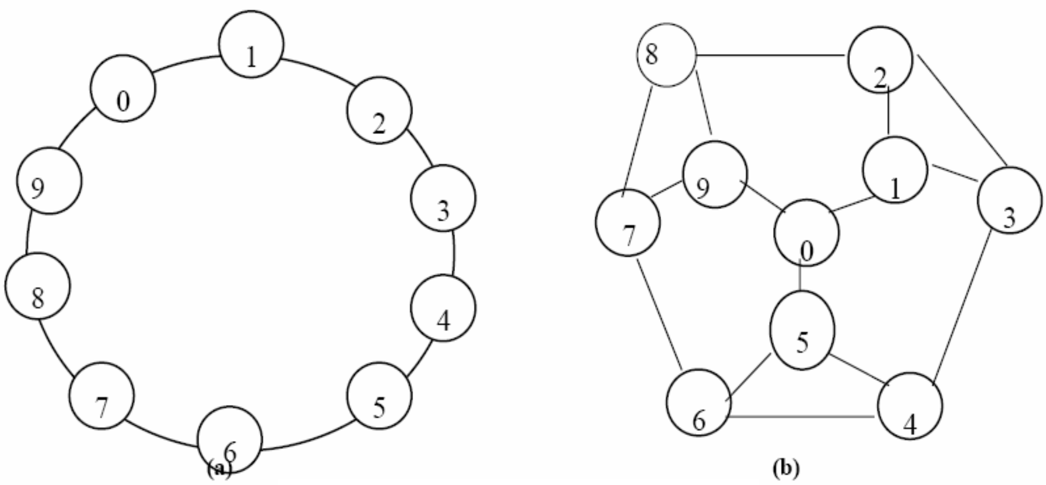



图 5. Halin 图
(a)10 节点路径 （b）Halin 拓展

在前面的例子中，我们考虑了金字塔路径，它可以看作附加约束的旅行销售员问题。我们也考虑了约束于Halin图的旅行销售员问题。在下面的例子中，我们将要考虑[28]同时依靠图的严格约束和额外边界约束的邻域。Glover与Punnen[28]确定了下面的路径种类，其中最佳的可以在线性时间内找到。令$C_1$，$C_2$，…，$C_k$为至少有3个节点的顶点不相交的k个回路，这样每个节点在一个回路中。一条单边删除路径是指具有如下性质的路径T:

1. 对于i=1到k，$|T\cap C_i|=|C_i|-1$，即T与$C_i$有$|C_i|$-1条共同弧。
2. 对于i=1到k-1，T中有一条有向弧从$C_i$到$C_{i+1}$，从$C_k$到$C_1$。

从回路中删除弧的方法最少为$\prod_i |C_i|$，这可能意味着指数数目的大小，因此单边删除

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

路径的数目为指数大小。要确定最优单边删除路径，研究者可以解改善图上的一个相关最短路问题。运行时间为弧数目的线性函数。给定一条路径，可以删除路径上的k+1条弧，创建k条路径，然后将这k条路径变成前面叙述的k条回路。原则上，上面的邻域搜索方法很容易执行；不过搜索技术的质量很可能对执行的细节很敏感。Glover与Punnen[28]也考虑了更宽的邻域，包括他们所谓的“双删除路径”。他们也提供了最优化该类路径的有效算法。

Yeo[78]考虑了非对称旅行销售员问题的另一种邻域。他研究的邻域与Glover和Punnen[28]的研究有一定的关联，但是规模却非常大。他指出，该邻域的搜索时间为$O(n^3)$。Burkard与Deineko[7]确定了另一类指数性邻域，这样其最佳解可以在二次项时间内确定。这些方法都可以用来建立很大规模邻域搜索算法。不过，根据我们的了解，尚未有此种算法。

我们用一个一般性的方法总结本部分的结果，该方法将约束问题的求解方法移植到很大规模邻域搜索技术上。令X代表一类NP难题的组和优化问题。假定X’为在多项式时间内可解的X的约束。进一步假定对于X的实例(F，f)，对于F中的任意可行子集S，存在能够建立X’的实例（F’，f）的良好结构的子程序“CreateNeighborhood(S)”，满足：

1. S是F’的元素
2. F’为F的子集
3. （F’，f）为X’的例子

我们把F’叫做S的*X’诱发邻域*。邻域搜索方法包含在每步迭代中调用“CreateNeighborhood(S)”，然后运用多项式时间算法优化（F’，f）。然后用（F’，f）代替S，算法进行下一步迭代。特别要关注的是，当子程序CreateNeighborhood在多项式实践中运行，而且F’为指数性的情况。邻域就不能够明确的建立起来。当我们相信该方法在邻域搜索上有足够的潜力时，这种潜力就很大程度上没有实现。此外，许多情况下并不清楚如何发挥这种潜力。例如，当约束于混联图时，许多NP难的组合优化问题在多项式时间内是可解的。例如包含网络可靠性问题[67]，最优连通生成树问题[18]，定点覆盖问题[5][73]，反馈顶点几何问题[5][73]等等。有特定程序约束的工作日程安排问题[46]也有类似的结果。在邻域搜索中如何针对混联图最好地利用有效算法是一个有趣的开放性问题。

## 6.邻域指标

在该部分中我们将描述可能有助于改善给定邻域局部搜索算法性能的邻域指标。前面提到，邻域搜索启发式算法的设计中一个关键问题是邻域的大小与搜索邻域所用时间之间的平衡。因此一个重要的邻域指标是邻域大小。根据邻域图，给定一个解S的邻域，其大小可以视为从S离开的有向弧的数量，或者说等于S的输出度数。对于深度变量法，邻域大小不一定是指数性的，是搜索使得得到的解大大不同于基本解。另一方面，对基于网络的方法和可解特例诱发的手段，邻域大小是指数性的。

下面的表格总结了前面讨论的旅行销售员问题的邻域大小（本表基本上来源于[6]）：

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

| 邻域 | 大小 | Log(大小) | 搜索时间 | 参考文献 |
|---|---|---|---|---|
| 2步最优 | $\Omega(n^2)$ | $\theta(\log n)$ | $O(n^2)$ | Croes[11] |
| k步最优 | $\Omega(n^k)$ | $\theta(\log n)$ | $O(n^k)$ | Lin[49] |
| 金字塔式 | $\Omega(2^n)$ | $\theta(n)$ | $O(n^2)$ | Klyaus [45] |
| 循环移动式 | $\Omega(n2^n)$ | $\theta(n)$ | $O(n^3)$ | Carlier & Villion [8] |
| 边缘删除 | $\Omega((12^n)^{1/3})$ | $\theta(n)$ | $O(n)$ | Glover & Punnen [28] |
| 基于最短路的边缘删除 | $\Omega(n2^n)$ | $\Omega(n)$ | $O(n^2)$ | Punnen and Glover [58], Glover [30] |
| 循环交换（固定k子集） | $\theta(n^k)$ | $\theta(\log n)$ | $O(n^2)$ | Ahuja et al. [2] |
| 混合交换 | $\theta(2^{n-1})$ | $\theta(n)$ | $O(n^2)$ | Potts &van de Velde [57] |
| 基于匹配[1] | $\theta(n!/2)$ | $\theta(n \log n)$ | $O(n^3)$ | Sarvanov & Doroshko [66] |
| Halin图 | $\Omega(2^n)$ | $\theta(n)$ | $O(n)$ | Cornuejols et al. [10] |
| PQ树 | $2^{\theta(n \log\log n)}$ | $\theta(n \log\log n)$ | $O(n^3)$ | Burkard et al. [6] |

文献研究的另一个邻域指标是邻域图的直径。邻域图中节点S到节点T的距离为从S到T的最短路长度。邻域图NG的直径为对于NG中的节点S，T，满足d(S，T)=d的最小正整数。Gutin与Yeo[37]建立了对应邻域图直径为4的旅行销售员问题的指数极大小的多项式可搜索邻域；即，对于任意路径对$T_1$和$T_5$，存在路径$T_2$，$T_3$和$T_4$，满足$T_i \in N(T_{i-1})$，i=2，3，4，5。Carlier and Villon [8]考虑的基于循环移动的邻域直径为$\theta(\log n)$。

对于给定的邻域图，若对于j=2到k，目标函数$f(i_j)<f(i_{j-1})$，那么称$P=i_1，i_2，\ldots，i_k$是单调的。令$d_m(S)$表示从S到局部最优解的最短单调路径的长度。若对于任意S，$d_m^P(S)$是指数性的，这保证从S开始的一个邻域搜索算法将会是指数性的。反方向上，令$d_m(S，T)$表示从S到T的最长单调路径的长度。若$d_m^P(S，T)$一定是多项式性的，那么任意以该邻域为基础的邻域搜索算法都会有多项式轮迭代。

最后我们考虑邻域搜索算法的控制分析。启发式算法的控制分析分析了受其支配的该算法产生的解的数量。令$\alpha$表示产生F中一个解S*的组合优化问题的一个启发式算法。$\alpha$的控制数目，用$dom(\alpha)$表示，是集合F(S*)的势，其中$F(S^*)=\{S \in F: f(S)>=f(S^*)\}$。若$dom(\alpha)=|F|$，那么S*为一个最优解。旅行销售员问题不同搜索算法的支配分析可参阅文献[27]，[28]，[35]，[36]，[38]，[59]和[60]。

## 7.很大规模邻域搜索算法的计算性能

在本部分中，我们将简要讨论前面提到的很大规模邻域搜索算法的计算性能。首先我们考虑旅行销售员问题。Lin-Kernightan算法及其变形被广泛认为是解决旅行销售员问题的最佳启发式算法。在一项大量的计算研究中，Johnson与McGeoch[42]通过提供一个详细的性能对比分析证明了这一点。Rego[61]对旅行销售员问题运用了一类结果甚好的删除链算法，这也表明了他的算法优于原Lin-Kernightan算法。Punnen与Glover[58]运用了一种给予最短路的删除链算法。Rego[61]与Punnen和Glover[58]直接相关，并运用了简单的结构。

---

[1]. 这里假定 k=[n/2]，节点已删除。若删除更少的节点，邻域的大小相应的减少，那么时间限制将会更好。

最近，Helsgaun[39]报告了根据一个复杂的Lin-Kernightan算法得到的给人印象深刻的计算结果。尽管该算法运用核心的Lin-Kernightan深度变量搜索算法，它在几个关键方面不同于前面的算法。更优的计算结果原于有效的数据处理，特殊的5次最优操作，新的非顺序操作，有效候选列表，成本计算，元素成本上界的有效运用，Held与Karp 1次树的信息，以及灵敏度分析，等等。Helsgaun报告说他的算法给出了最优解已知的所有测试问题的最优解，包括Applegate等[4]考虑的7397城市问题与13509个城市问题。Helsgaun估计他的算法的平均运行时间为$O(n^{22})$。按照这种观点，注意到Applegate等[4]运用分枝定界法确定13509个城市问题的最优解要求一组3位$\alpha$服务器4100（有12个处理器）和一组32奔腾II个人计算机花费3个月的计算时间。另一方面，Helsgaun运用了一个300MHz的Power Macintosh G3。对于85900个城市的问题，TSPLIB的pla85900，Helsgaun用了2周的CPU时间得到了一个改善解。（我们也注意到Applegate等[4]花费的大量时间是为了证明最优解的确是最优的。）

在表1中，我们总结了针对旅行销售员问题小例子的Rego算法[61](REGO)，Helsgaun-Lin-Kernightan [39]算法(HLK)，Mak与Morton[511]的修订Helsgaun-Lin-Kernightan算法和Punnen与Glover[58](SPG)的最短路算法的性能。在表中，我们运用了这些算法的最佳情形。

表1 旅行销售员问题的小例子：最佳解偏离最优解百分比

| Problem | REGO | HLK | MLK | SPG |
|---|---|---|---|---|
| bier127 | 0.12 | 0.00 | 0.42 | 0.10 |
| u159 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | ----- |
| ch130 | ----- | 0.00 | ----- | 0.23 |
| ch150 | ----- | 0.00 | ----- | 0.40 |
| d198 | 0.30 | 0.00 | 0.53 | 0.33 |
| d493 | 0.97 | 0.00 | ----- | 2.65 |
| eil101 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.79 |
| fl417 | 0.78 | 0.00 | ----- | 0.41 |
| gil262 | 0.13 | 0.00 | 1.30 | 1.81 |
| kroA150 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| kroA200 | 0.27 | 0.00 | 0.41 | 0.68 |
| kroB150 | 0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.07 |
| kroB200 | 0.11 | 0.00 | 0.87 | 0.42 |
| kroC100 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| kroD100 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| kroE100 | 0.00 | 0.00 | 0.21 | 0.02 |
| lin105 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| lin318 | 0.00 | 0.00 | 0.57 | 1.03 |
| pcb442 | 0.22 | 0.00 | 1.06 | 2.41 |
| pr107 | 0.05 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| pr124 | 0.10 | 0.00 | 0.08 | 0.00 |
| pr136 | 0.15 | 0.00 | 0.15 | 0.00 |
| pr144 | 0.00 | 0.00 | 0.39 | 0.00 |
| pr152 | 0.90 | 0.00 | 4.73 | 0.00 |
| pr226 | 0.22 | 0.00 | 0.09 | 0.11 |
| pr264 | 0.00 | 0.00 | 0.59 | 0.20 |
| pr299 | 0.22 | 0.00 | 0.44 | 1.30 |
| pr439 | 0.55 | 0.00 | 0.54 | 1.29 |
| rd100 | 0.00 | 0.00 | ----- | 0.00 |
| rd400 | 0.29 | 0.00 | ----- | 2.45 |
| ts225 | 0.25 | 0.00 | ----- | 0.00 |
| gr137 | 0.20 | 0.00 | 0.00 | ----- |
| gr202 | 1.02 | 0.00 | 0.81 | ----- |

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| gr229 | 0.23 | 0.00 | 0.20 | ----- |
| gr431 | 0.91 | 0.00 | 1.14 | ----- |

在表2中，我们总结了针对旅行销售员问题大例子的Rego的算法(REGO)[611]，Helsgaun-Lin-Kernighan算法(HLK) [39]，以及Johnson等Lin-Kernighan算法(JM-LK)[42]（错误，参考文献没有找到）的性能。在表中我们运用了这些算法的平均偏离百分比。

表2 旅行销售员问题的大例子：一些运行时间内的平均偏离百分比

| Problem | Rego | JM-LK | HLK |
|---|---|---|---|
| dsj1000 | 1.10 | 3.08 | 0.035 |
| pr1002 | 0.86 | 2.61 | 0.00 |
| pr2392 | 0.79 | 2.85 | 0.00 |
| pcb3038 | 0.97 | 2.04 | 0.00 |
| fl3795 | 7.16 | 8.41 | ----- |
| fl4461 | 1.06 | 1.66 | 0.001 |
| pla7397 | 1.57 | 2.19 | 0.001 |

下面我们考虑赋能的最小生成树问题。这是第4部分讨论的分割问题的特例。Ahuja等[21]运用该问题结构，构建了基于循环交换邻域的很大规模邻域搜索算法。该算法非常有效，对于许多基准问题能够得到改善解。当前，该算法能够获得基准集合中列示的任意例子的最佳可得解，基准集合可以参阅http://www.ms.ic.ac.uk/info.html。

我们最后考虑解决一般分配问题(GAP)的大规模邻域搜索算法。Yagiura等[80]建立了基于删除链解决GAP的禁忌搜索算法。他们指出在合理的计算时间内，得到的解优于或者与现行解法的解可比。根据计算试验与对比，可以知道他们的算法解决基准问题的例子与最优解的偏离百分比小于16%。

本文中引用的许多文献同时也给出了根据算法计算的结果。详情请参阅这些文献。文中涉及的几种大规模邻域并没有在搜索框架内进行实验证明。该种和相关的邻域的有效执行是要深入研究的课题。

致谢：

第一作者的研究得到NSF DMI-9900087的支持。第二作者和第三作者部分由NSF DMI-9810359和DMI-9820998支持。第四作者由NSERC OPG0170381支持。

参考文献

Click to buy NOW! PDF-XChange Viewer www.docu-track.com