绝密＊启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

超越考研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\begin{cases} |x|\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处

（A）极限不存在.　（B）极限存在但不连续.　（C）连续但不可导.　（D）可导.

（2）设 $f(ax+b)=xe^{\frac{x}{c}}$（$ac\neq 0$），则 $\int_b^{ac+b} f(x)\,dx=$

（A）ac.　（B）ac^2.　（C）a^2c.　（D）a^2c^2.

（3）将极坐标系下的二次积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr$$

化为直角坐标系下的二次积分，则 $I=$

（A）$\int_0^1 dx\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$.　（B）$\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)\,dy$.

（C）$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^1 f(x,y)\,dx$.　（D）$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^0 f(x,y)\,dx$.

（4）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在点 $x=4$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x+2)^n$ 在点 $x=0$ 处

（A）绝对收敛.　（B）条件收敛.　（C）发散.　（D）敛散性与 a_n 有关.

（5）已知 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，但其中任意 $m-1$ 个都线性无关，若存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则必有

（A）$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全为零.　（B）$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 全不为零.

（C）$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中恰有 $m-1$ 个为零.　（D）$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 要么全为零，要么全不为零.

（6）设 A 为 n 阶对称可逆阵，B 为 n 阶方阵，满足 $(A-B)^2=E$，E 为 n 阶单位矩阵，则可将 $(E+A^{-1}B^T)^T(E-BA^{-1})^{-1}$ 化简为

（A）A^2-B^2.　（B）B^2-A^2.　（C）$(A-B)(A+B)$.　（D）$(A+B)(A-B)$.

（7）设随机变量 X 的取值为非负整数，且 EX 存在. 则 $EX=$

（A）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X\geq k\}$.　（B）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X\leq k\}$.　（C）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X>k\}$.　（D）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X<k\}$.

（8）设二维随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$，则$U=X$，$V=X+Y$的联合密度函数为

（A）$f(u,v)$.　　（B）$f(u,u+v)$.　　（C）$f(u,u-v)$.　　（D）$f(u,v-u)$.

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\int e^x \arctan(e^x)\,dx=$__________.

（10）设函数$y=f(x)$二阶可导，且满足$\dfrac{dy}{dx}=(5-y)y^a$，其中常数$a>0$，且点$(x_0,3)$为曲线$y=f(x)$的拐点，则$a=$__________.

（11）设z为x,y的可微函数，$x=au+bv$，$y=cu+dv$（a,b,c,d均为常数），若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=m$，则$u\dfrac{\partial z}{\partial u}+v\dfrac{\partial z}{\partial v}=$__________.

（12）微分方程$y''-4y'+3y=e^x\cos x+xe^{3x}$的特解形式为__________.

（13）设$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$，$A_{ij}$为$|A|$的元素$a_{ij}$的代数余子式，则$\sum\limits_{i,j=1}^{4}A_{ij}=$__________.

（14）设随机变量X,Y相互独立，$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,2)$，记$Z=X+Y$，以$F_Z(z)$表示$Z$的分布函数，则$F_Z(1)=$__________.

三、解答题:15～23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分10分）设函数$f(x)$可导，$F(x,y)=\dfrac{1}{2y}\int_{-y}^{y}f(x+t)\,dt$，$-\infty<x<+\infty$，$y>0$.

（Ⅰ）求$\lim\limits_{y\to0^+}F(x,y)$；　（Ⅱ）对任意的$y>0$，求$\dfrac{\partial F}{\partial x}$；　（Ⅲ）求$\lim\limits_{y\to0^+}\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

（16）（本题满分10分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=-f(1)=1$，证明：存在点$\xi\in(0,1)$，使得$(1-\xi)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

（17）（本题满分10分）设$u=f(x^2,y-z)$，其中f具有二阶连续偏导数，而$z=z(x,y)$是由方程$e^{x+y}\sin(x+z)=\sqrt{2}$确定的隐函数，求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

（18）（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(xy^3+\sin x^3)d\sigma$，其中 D 是由曲线段 $y=x^2\ (-\frac{\pi}{2}\le x\le 0)$，$y=-x^2\ (0\le x\le\frac{\pi}{2})$ 及两条直线 $x=\frac{\pi}{2}, y=\cancel{\frac{\pi}{2}}$ $\frac{\pi^2}{4}$ 所围成的平面区域.

（19）（本题满分 10 分）已知曲线 $y=f(x)$ 在任一点 (x,y) 处切线的斜率 $k(x)$ 满足 $x\cdot k(x)-3y+6x^2=0$，$f(1)<0$ ~~且~~曲线 $y=f(x)$、直线 $x=1$ 与 x 轴围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小，求此曲线方程.

（20）（本题满分 11 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$，B 为 $n\times s$ 矩阵，$C=AB$.

（Ⅰ）证明：$Bx=0$ 与 $Cx=0$ 同解；（Ⅱ）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 线性无关，$\beta_1=a\alpha_1+\alpha_2+b\alpha_3$，$\beta_2=c\alpha_1+2\alpha_2+d\alpha_3+3\alpha_4$，$\beta_3=e\alpha_1+4\alpha_2+f\alpha_3+5\alpha_4+6\alpha_5$，求向量组 β_1,β_2,β_3 的秩.

（21）（本题满分 11 分）设 A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$，且满足 $A^2-A=0$，将 A 的第一行和第二行互换得到 B，再将 B 的第一列与第二列互换得到 C.（Ⅰ）求可逆矩阵 P_1,P_2，使得 $P_1AP_2=C$；（Ⅱ）求一个可逆线性变换 $x=Qy$ 将三元二次型 x^TAx 化为 y^TCy；（Ⅲ）求行列式 $|C^3-2C+3E|$.

（22）（本题满分 11 分）已知随机变量 (X,Y) 的密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-xy), & |x|\le 1,|y|\le 1\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 令 $U=\begin{cases}0, & X+Y<0,\\ 1, & X+Y\ge 0,\end{cases}$ $V=\begin{cases}0, & X-Y<0,\\ 1, & X-Y\ge 0.\end{cases}$（Ⅰ）问 X 与 Y 是否相互独立？U 与 V 是否相互独立？（Ⅱ）求 $P\{X+Y\le\frac{3}{2}\,|\,X=1\}$ 和 $P\{U+V\le\frac{3}{2}\,|\,U=1\}$.

（23）（本题满分 11 分）设 (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本.

（Ⅰ）求常数 a，使得 $Z=a\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 F 分布，并指出其自由度；

（Ⅱ）求常数 b，使得 $P\{\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_5^2}{X_1^2+X_2^2}>b\}=0.05$.

附表：设 $F\sim F(m,n)$，$P\{F>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$.

（$F_{0.05}(2,3)=9.55,\ F_{0.05}(3,2)=19.16,\ F_{0.025}(2,3)=16.04,\ F_{0.025}(3,2)=39.17$）

绝密 * 启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

超越考研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 已知 $f(x)$ 是连续函数，$f(0)=-6$，且当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x-\sin x} f(x)\,dx$ 与 $a\ln(1-x^b)$ 是等价无穷小，则 (a,b) 是

(A) $(1,3)$．　(B) $(2,1)$．　(C) $(3,4)$．　(D) $(4,2)$．

(2) 设 $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}$，则下列结论正确的是

(A) 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点．　(B) 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点．

(C) 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的驻点．　(D) 点 $(0,0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点．

(3) 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\ (\alpha>0)$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点

(A) 连续，但不可偏导．　(B) 可偏导，但不连续．

(C) 偏导函数均连续．　(D) 偏导函数均不连续．

(4) 下列命题中正确的个数是

①若 $u_1+(u_2+u_3)+(u_4+u_5+u_6)+\cdots$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；　②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛；

③若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛；　④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $(u_n\neq 0)$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散．

(A) 1．　(B) 2．　(C) 3．　(D) 4．

(5) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 4 维列向量组，矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经初等行变换化为矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}，则$$

(A) α_1 不能由其余向量线性表示．　(B) α_2 不能由其余向量线性表示．

(C) α_3 不能由其余向量线性表示．　(D) α_4 不能由其余向量线性表示．

(6) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1$ 和 0，则下列结论中不正确的是

(A) A 的属于特征值 $1,0$ 的特征向量线性无关．　(B) 线性方程组 $Ax=0$ 有非零解．

(C) A 的属于特征值 $1,-1$ 的特征向量必正交．　(D) A 的主对角线元素之和等于 0．

19、20全程资料请加群690928113

（7）设事件 A 发生的概率为 p，事件 A 发生时 B 发生的概率为 p，事件 A 不发生时 B 发生的概率为 $\frac{p}{2}$，则 A,B 至少有一个发生的概率为

（A）$\frac{3p-p^2}{2}$.　（B）$\frac{3p}{2}$.　（C）$p-\frac{p^2}{2}$.　（D）$\frac{p(1-p)}{2}$.

（8）设随机变量 $\Theta\sim U[0,2\pi]$，$X=\cos\Theta$，$Y=\sin\Theta$，则

（A）X 与 Y 相互独立.　（B）X^2 与 Y^2 相互独立.

（C）X 与 Y 不相关.　（D）X^2 与 Y^2 不相关.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续、恒正，且 $f(x)f(-x)=1$，则 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+f(x)}dx=$______.

（10）当常数 a 在区间______内取值时，函数 $f(x,y)=ax^2+2axy+y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.

（11）函数 $f(x)=\frac{\sin(x^2-x)}{|\ln(1+x)|(x-1)}$ 的跳跃间断点为 $x=$______.

（12）设微分方程 $y''-y=x^2$ 的解 $y=y(x)$ 是 $x\to 0$ 时关于 x^2 的高阶无穷小，则 $y(x)=$______.

（13）设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，则秩 $r(ABC)=$______.

（14）某复杂系统由100个独立工作的同型号电子元件组成，在系统运行期间，每个电子元件损坏的概率均为0.10．若使得系统正常运行，至少需要有84个电子元件正常工作，则利用中心极限定理计算系统正常运行的概率为______.（计算结果用标准正态分布的分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）证明：$2\sin x+e^x-e^{-x}>4x$（$x>0$）.

（16）（本题满分 10 分）已知四次多项式 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 取得极大值，在点 $x=1$ 和 $x=-1$ 处均取得极小值0，且它与 x 轴围成的封闭图形的面积为 $\frac{32}{15}$，求 $f(x)$.

(17)(本题满分 10 分)已知曲线 $y=y(x)$ 位于 xOy 平面的第一象限，其上任一点 $P(x,y)$ 处的切线与 x 正半轴有交点 A，$\angle OPA=\frac{\pi}{4}$，且曲线过点 $(1,\sqrt{3})$，求此曲线方程.

(18)(本题满分 10 分)计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{\left|x-|y|\right|}\,d\sigma$，其中 $D:0\le x\le 2,|y|\le 1$.

(19)(本题满分 10 分)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+a)^n}\ (a>0)$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)设四阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.(Ⅰ)若 $\xi=(1,2,3,a)^T$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，求常数 a 的值;(Ⅱ)若 $\eta=(2,b,c,d)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的解，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求常数 b,c,d 的值.

(21)(本题满分 11 分)已知二次型 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+az^2+2bxy-2yz+2xz$ 的秩为 2，且该二次型矩阵有一个非零二重特征值.(Ⅰ)求常数 a,b;(Ⅱ)求在正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 下该二次型的标准形.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 (X,Y) 的密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 其分布函数为 $F(x,y)$.(Ⅰ)证明当 $0<x\le 1$ 且 $y>1$ 时，$F(x,y)=F(x,1)$；当 $0<y\le 1$ 且 $y<x$ 时，$F(x,y)=F(y,y)$;(Ⅱ)求 $F(x,y)$;(Ⅲ)分别求 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘分布函数，并问 X 与 Y 是否独立?

(23)(本题满分 11 分)设袋中有编号为 $1\sim N$ 的 N 张卡片，其中 N 未知，现从中有放回地任取 n 张，所得号码为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$.(Ⅰ)求 N 的矩估计量 $\widehat{N}_M$，并计算概率 $P\{\widehat{N}_M=1\}$;(Ⅱ)求极大估计量 $\widehat{N}_L$；并求 $\widehat{N}_L$ 的分布律.

绝密 * 启用前

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1-x}{x}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则

（A）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续．　（B）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点．

（C）当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小．　（D）直线 $x=0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的渐近线．

（2）设函数 $f(x)$ 可导，则图 1 中三条曲线依次是函数 $f(x)$，$f'(x)$，$\int_0^x f(t)dt$ 图形的为

（A）①②③．　（B）②①③．

（C）③②①．　（D）①③②．

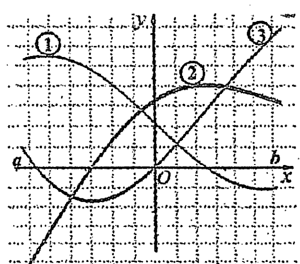
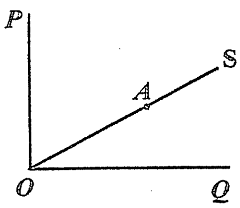
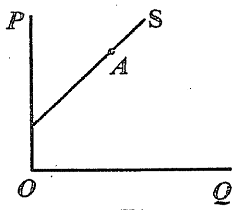


图 1

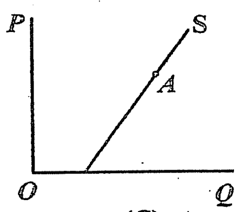
（3）已知某商品的供给函数为线性函数，且该供给曲线上某点 A 的价格弹性 $e_A=3.14$，则该供给曲线的图形是



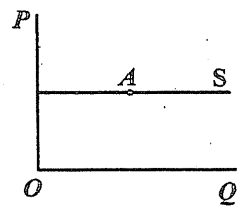
(A)



(B)



(C)



(D)

（4）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2 2^n}(x-1)^n$ 的收敛域为

（A）$[-2,2]$．　（B）$[-2,2)$．　（C）$[-1,3]$．　（D）$[-1,3)$．

（5）A 为 $m\times n$ 矩阵，若对任意 m 维列向量 β，线性方程组 $Ax=\beta$ 都有解，则必有

（A）A 的列向量组线性无关．　（B）A 的行向量组线性无关．

（C）A 的列向量组线性相关．　（D）A 的行向量组线性相关．

（6）设 A,B 均为 n 阶方阵，$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量，则 $(AB)x=0$ 至少有（　）个线性无关的解向量．

（A）m．　（B）l．　（C）$\max\{m,l\}$．　（D）$\min\{m,l\}$．

（7）设随机变量 (X,Y) 服从区域 $D:|x|\le 1,|y|\le 1$ 上的均匀分布，$A_1=\{X\ge 0\}$，$A_2=\{Y\ge 0\}$，$A_3=\{XY\ge 0\}$，$A_4=\{|X|+|Y|\le 1\}$，则下列各组事件中两两独立，但不相互独立的是

（A）A_1,A_2,A_3．　（B）A_1,A_2,A_4．　（C）A_1,A_3,A_4．　（D）A_2,A_3,A_4．

（8）设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$，(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数分别为$F_X(x),F_Y(y)$，则$\max\{X,Y\}$的分布函数为

（A）$F(x,x)$．　（B）$F_X(x)F_Y(x)$．　（C）$F_X(x)F_Y(y)$．　（D）$F(x,y)$．

二、填空题:9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}=$____________．

（10）设$I_1=\int_{-1}^{1}(\ln\dfrac{2-x}{2+x}-\cos^2 x)dx$，$I_2=\int_{-2}^{2}(2^x-2^{-x})\cos x\,dx$，$I_3=\int_{-3}^{3}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$，

则I_1,I_2,I_3从小到大的次序为____________．

（11）设$I=\int_0^a e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx$，其中$a>0$，则$\lim\limits_{a\to0^+}\dfrac{I}{a^2}=$__________．

（12）设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解y_1,y_2，若线性组合$k_1y_1+k_2y_2$也是方程的解，则$k_1^2+k_2^2$的最小值是____________．

（13）已知$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$，$A^{-1}$与$B=\begin{pmatrix}b&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$相似，则$a=$____________．

（14）已知随机变量X,Y的相关系数$\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$，则协方差$Cov(\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}},\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}})=$________．

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设函数$f(x)$在$[0,b]$上连续且单调增加，$0<a<b$，证明：

$$\int_a^b xf(x)\,dx\ge\frac{1}{2}[b\int_0^b f(x)\,dx-a\int_0^a f(x)\,dx].$$

（16）（本题满分 10 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，证明：

（Ⅰ）存在点$\xi\in(0,1)$，使得$2\xi\int_0^1 f(x)\,dx-f(\xi)=0$；（Ⅱ）存在异于$\xi$的点$\eta\in(0,1)$，使得

$$f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

（17）（本题满分 10 分）求函数$f(x,y)=(x-1)y$在闭区域$D:x^2+y^2\le3$，$x-y\ge0$上的最大值和最小值.

（18）（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & x+y\ge 1, \\ 1, & x+y<1, \end{cases}$ 计算二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le 1\ (x\ge 0,y\ge 0)$．

（19）（本题满分 10 分）（Ⅰ）设 $f(x)$ 可导，且满足 $\int_0^x f(t)dt=f^2(x)-xf(x)+\dfrac{x^2}{2}$，求 $f(x)$；

（Ⅱ）设 $y=y(x)$ 二阶可导，参照（Ⅰ）中方程的形式，求微分方程 $y=y'^2-xy'+\dfrac{x^2}{2}$ 的通解．

（20）（本题满分 11 分）设四阶方阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，且 A,B,C 满足 $(E-C^{-1}B)^TC^TA=E$，求：（Ⅰ）A；（Ⅱ）$|A^3|$；（Ⅲ）$(A^*)^{-1}$．

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 n 阶实对称矩阵，α,β 为 n 维列向量且满足 $\alpha^TA\alpha=1$，$\beta^TA\beta=-1$，$\alpha^TA\beta=1$．（Ⅰ）证明 α,β 线性无关；（Ⅱ）计算 $[t\alpha+(1-t)\beta]^TA[t\alpha+(1-t)\beta]$，$t$ 为一实数；（Ⅲ）证明必有非零向量 ξ，使得 $\xi^TA\xi=0$．

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 独立同分布，其密度函数均为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, & x>1000, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$ $F(x)$ 为其分布函数，令 $U=F(X),V=F(Y)$．求（Ⅰ）(U,V) 的联合概率密度函数；（Ⅱ）$Z=U+2V$ 的概率密度函数．

（23）（本题满分 11 分）设连续型随机变量 X,Y 相互独立．X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{a}{x^3}, & x\ge 1, \\ 0, & x<1. \end{cases}$ Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} y, & 0\le y\le 1; \\ 2-y, & 1<y\le 2; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$（Ⅰ）求常数 a；（Ⅱ）求常数 k，使得 $P\{Y\ge k\}=\dfrac{1}{8}$；（Ⅲ）求 $D(XY)$．

绝密 * 启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

超越考研

数学（三）模拟（四）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$，又 $F(x)=\int_0^x (x^2-t)f(t)dt$，当 $x\to 0$ 时 $F'(x)$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$

（A）1．　　（B）2．　　（C）3．　　（D）4．

（2）下列命题中不正确的个数是

①若函数 $f(x)$ 是单调增加函数，数列 $x_{n+1}=f(x_n)$，$x_1>0$，则 x_n 必是单调增加数列．

②若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$．

③若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，则 $f(x_0)$ 必定不是 $f(x)$ 的极值．

④若定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，则函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必存在原函数．

（A）1．　　（B）2．　　（C）3．　　（D）4．

（3）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 则

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续．　　（B）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处关于 x 的偏导数存在．

（C）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处关于 y 的偏导数存在．（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微．

（4）设 λ 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n-\lambda)^2\tan\dfrac{\pi}{2^n}$

（A）发散．　　（B）条件收敛．　　（C）绝对收敛．　　（D）敛散性与 λ 有关．

（5）下列说法正确的是

（A）若存在全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关．

（B）若存在全不为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关．

（C）在一个线性相关的向量组中任何一个向量均可以由其余向量线性表示．

（D）线性相关的向量组增加分量仍然线性相关．

（6）设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，且具有相同的特征多项式，则 A,B

（A）等价、合同，但不相似．　　（B）相似、合同，但不等价．

（C）等价、相似，但不合同．　　（D）等价、合同且相似．

19、20全程资料请加群690928113

(7) 设随机变量 $X \sim U(0,1)$，$Y = kX^a\ (a>0)$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, 0<y<1,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$ 则有

(A) $k=1, a=\frac{1}{2}$.　(B) $k=1, a=2$.　(C) $k=2, a=\frac{1}{2}$.　(D) $k=2, a=2$.

(8) 已知随机变量 X,Y 同分布 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$，且 $D(X-Y)=\frac{1}{4}$，则 $P\{X+Y\le 1\}$ 等于

(A) $\frac{1}{8}$.　(B) $\frac{1}{4}$.　(C) $\frac{3}{8}$.　(D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x)=(1+2x)\ln(1+2x)$，则 $f^{(2012)}(0)=$__________.

(10) 已知某产品的固定成本为 8（万元），当销售量为 x（件）时，边际收益为 $50-4x$，边际成本为 $3x^2-8x+18$，则该产品的最大销售利润是________.

(11) 设 D 是由直线 $y=x$ 与 x 轴在第一象限所围成的区域，则二重积分 $\iint\limits_D (x-1)e^{-y^2-x+y}d\sigma=$______.

(12) 设二阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=e^x$，$y_2=e^x+e^{\frac{x}{2}}$，$y_3=e^x+e^{-x}$，则该方程为__________.

(13) 四元二次型 $f=x^TAx$ 的负惯性指数为 2，且二次型的矩阵 A 满足 $A^2+A=E$，则其规范型 $f=$______________.

(14) 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，已知由切比雪夫不等式估计概率 $P\{8<X<16\}\ge\frac{1}{2}$，则 $n=$______.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{2n-1}\le a\le x_{2n}$（$n=1,2,3,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(16)（本题满分 10 分）就常数 k 的取值，讨论方程 $(x-1)^2=ke^{-x}$ 的根的个数.

(17)（本题满分 10 分）设函数 $z=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，试求函数 f 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)设 D 是由圆弧 $x^2+y^2=2\ (x\ge 1, y\ge 0)$,直线 $x=1$ 及 x 轴围成的区域,计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}d\sigma$.

(19)(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导,且导函数 $f'(x)$ 有界. 证明:

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})]$ 绝对收敛;(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})$ 存在.

(20)(本题满分 11 分)已知线性方程组(Ⅰ)$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3=a; \end{cases}$ 与(Ⅱ)$\begin{cases} 2x_1+3x_2+bx_3=4, \\ 2x_1+4x_2+(b-1)x_3=c, \end{cases}$ 同解,求常数 a,b,c 的值,并求其通解.

(21)(本题满分 11 分)设 A 为三阶实对称矩阵,满足 $A^2=E$,E 为三阶单位矩阵,$r(A+E)=2$,$A+E$ 的各行元素之和为零,(Ⅰ)求 A 的全部特征值;(Ⅱ)求 A.

(22)(本题满分 11 分)设袋中有编号为 $1,2,3$ 的三张卡片,现从中依次任取两次,每次取一张,且第 i 次取卡片后换入另外编号为 i 的卡片,$i=1,2$,再从袋中任取第三张卡片.(Ⅰ)求三张卡片编号之和为 4 的概率;(Ⅱ)求所取第二张卡片编号 X 的分布函数.

(23)(本题满分 11 分)设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$,$-\infty<x<+\infty$,其中 $\theta>0$ 为未知参数.$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本.

(Ⅰ)利用原点矩求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$;(Ⅱ)求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$,并求 $E\hat{\theta}_L$.

19、20全程资料请加群690928113

绝密 * 启用前

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690928113

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(u)$ 是单调增加的连续函数，常数 $a>0$，则下列函数一定单调增加的是

（A）$F_1(x)=\int_0^x f(a+y)dy$．　　（B）$F_2(x)=\int_0^x f(a-y)dy$．

（C）$F_3(x)=\int_0^a f(x+y)dy$．　　（D）$F_4(x)=\int_0^a f(y-x)dy$．

（2）下列命题中不正确的是

①设 $f(a)=0$，则“极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)}{e^h-1}$ 存在”是“函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导”的充要条件；

②若函数 $f(x)$ 二阶可导，且在 $x=a$ 处取极小值，则 $f''(a)>0$；

③若 $f(x)$ 可导且在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内单调递增 $(\delta>0)$，则在 $(a-\delta,a+\delta)$ 内 $f'(x)>0$；

④设 $f'(a)=0$，$f''(a)=1$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时，$f(x)>f(a)$．

（A）①③．　　（B）②③．　　（C）①④．　　（D）②④．

（3）设 $I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2+1)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，则

（A）$I_1<I_2<I_3$．　　（B）$I_3<I_2<I_1$．　　（C）$I_1<I_3<I_2$．　　（D）$I_2<I_1<I_3$．

（4）设有微分方程 $y''+(1+\frac{2}{x})y'+\frac{1}{x}y=0\ (x>0)$，则

（A）$\left(x(e^x y)'\right)'=0$，$y=C_1\frac{1}{x}e^{-x}+C_2\frac{1}{x}$．　　（B）$\left(x(e^x y)'\right)'=0$，$y=C_1e^{-x}\ln x+C_2e^{-x}$．

（C）$\left(e^x(xy)'\right)'=0$，$y=C_1\frac{1}{x}e^{-x}+C_2\frac{1}{x}$．　　（D）$\left(e^x(xy)'\right)'=0$，$y=C_1e^{-x}\ln x+C_2e^{-x}$．

（5）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为 n 维列向量，已知对任意不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，都有 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\ne 0$，则必有

（A）$m>n$．　　（B）存在 m 阶可逆阵 P，使得 $AP=\begin{pmatrix}E\\O\end{pmatrix}$．

（C）AA^T 为正定矩阵．　　（D）A^TA 为正定矩阵．

（6）A,B 为 n 阶方阵，且有相同的特征值 $\lambda=0$，当 $\lambda=0$ 时 A,B 的线性无关的特征向量个数分别为 l,m，若使得 $\lambda=0$ 必为 $A+B$ 的特征值，只需要

（A）$l+m\le n$．　　（B）$l+m<n$．　　（C）$l+m\ge n$．　　（D）$l+m>n$．

（7）下列结论不正确的是

（A）若 $X \sim P(\lambda)$，则 $2X \sim P(2\lambda)$．（B）若 $X \sim U[a,b]$，则 $2X \sim U[2a,2b]$．

（C）若 $X \sim E(\lambda)$，则 $2X \sim E(\frac{\lambda}{2})$．（D）若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $2X \sim N(2\mu,4\sigma^2)$．

（8）设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)$，边缘密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$，条件密度分别为 $f_{Y|X}(y|x),f_{X|Y}(x|y)$，则下列说法不正确的是

（A）由 $f(x,y)$ 可确定 $f_X(x),f_Y(y)$．（B）由 $f_X(x),f_Y(y)$ 可确定 $f(x,y)$．

（C）由 $f(x,y)$ 可确定 $f_X(x),f_{Y|X}(y|x)$．（D）由 $f_X(x),f_{Y|X}(y|x)$ 可确定 $f(x,y)$．

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 绕其渐近线旋转一周所得旋转体体积 $V=$________.

（10）$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+n^4}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2+n^4}}+\frac{3}{\sqrt{9n^2+n^4}}+\mathrm{L}+\frac{n}{\sqrt{n^4+n^4}})=$__________.

（11）设函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，且 $z\big|_{(0,y)}=y^2$，$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x,0)}=x$，则 $z(x,y)=$__________.

（12）若某一阶常系数线性差分方程的通解为 $y_t=C+\frac{1}{2}\cdot 3^t-2t$，则该差分方程为__________.

（13）A 为三阶方阵，$|\lambda E-A|=\lambda^3+3\lambda+2$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 的特征值，则有 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1\end{vmatrix}=$_____.

（14）独立重复进行某随机试验，设事件 A 在第 i 次试验中发生的概率为 $\frac{1}{2^i},i=1,2,\cdots$，记 X_n 为前 n 次试验中事件 A 发生的次数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}DX_n=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）（Ⅰ）证明：函数 $\varphi(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少；

（Ⅱ）设 $f(x)=ax^a(1-x)$ $(a>0,0\le x\le 1)$，$F(a)=\max\limits_{0\le x\le 1}f(x)$，求 $\lim\limits_{a\to+\infty}F(x)$，并证明 $f(x)<\frac{1}{e}$.

（16）（本题满分 10 分）若函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\int_0^1 e^{x-t}f(t)dt+1$，且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

（17）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内有定义，并对任意的 $x,y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 满足 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，$f'(0)=1$．（Ⅰ）证明 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内可导，并求 $f'(x)$；（Ⅱ）求 $f(x)$．

（18）（本题满分 10 分）设 D 是由直线 $x+y=2$ 与两坐标轴所围成的平面区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy\,\mathrm{sgn}(x^2-y)d\sigma$，其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 为符号函数．

（19）（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)x^n(1-x)^n dx$，$n=1,2,\cdots$．证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求其和．

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\a&1&b\\2&c&-2\end{pmatrix}$，三阶方阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$\beta_1,\beta_2$ 线性无关，$\beta_3=\beta_1+\beta_2$，且 $AB=O$，（Ⅰ）求 a,b,c 及 $Ax=0$ 的通解；（Ⅱ）若令 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，证明向量组 ξ_1,ξ_2 与 β_1,β_2,β_3 等价．

（21）（本题满分 11 分）A 为三阶实对称阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶正交阵，且 $P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$．

（Ⅰ）证明 $\alpha_i^TA\alpha_i>0$，$\alpha_i^TA\alpha_j=0\ (i,j=1,2,3,i\neq j)$；

（Ⅱ）若 $Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，计算 $Q^{-1}AQ$，Q^TAQ，并证明 Q^TAQ 与 $Q^{-1}AQ$ 合同但不相似．

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}0, & \min(x,y)<0,\\ \min(x,y), & 0\le\min(x,y)<1,\\ 1, & \min(x,y)\ge 1.\end{cases}$

（Ⅰ）求 X 与 Y 的密度函数；（Ⅱ）求 $Z=F(X,Y)$ 的密度函数．

（23）（本题满分 11 分）设 $X\sim U[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$，（Ⅰ）求 $D[X]$；（Ⅱ）求 $D(X-[X])$；（Ⅲ）求 X 与 $[X]$ 的相关系数 ρ，其中 $[x]$ 表示取整不超过 x 的最大整数．

19、20全程资料请加群690928113