绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

超　越　考　研

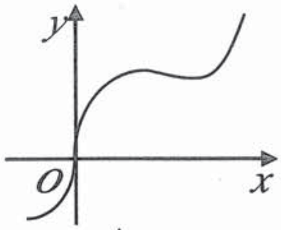
一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

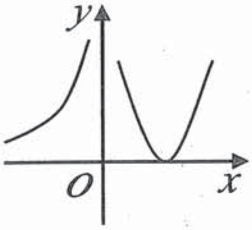
（1）设 $x>0$，则曲线 $y=\sqrt{\dfrac{(1+x)^3}{x}}$（　）.

（A）有一条铅直渐近线和一条斜渐近线　（B）有一条水平渐近线和一条铅直渐近线

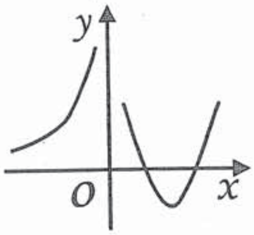
（C）有一条水平渐近线和一条斜渐近线　（D）只有一条铅直渐近线

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，曲线 $y=y(x)$ 的图像见右图，则其导函数 $y=y'(x)$ 的图像为（　）.

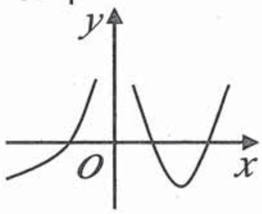




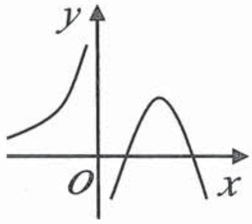
（A）



（B）



（C）



（D）

（3）设当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)-ax-bx^2\sim 2x^2$，则（　）.

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　（B）$a=0,b=-2$　（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　（D）$a=1,b=-2$

（4）设有下列命题：

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛；

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；　④ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

正确的是（　）.

（A）①②　（B）②③　（C）③④　（D）①④

（5）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，其中 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 为 n 维列向量，已知对任意不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，都有 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m\neq 0$，则必有（　）.

（A）$m>n$　（B）$m<n$

（C）存在 m 阶可逆阵 P，使得 $AP=\begin{pmatrix}E_m\\O\end{pmatrix}$　（D）存在 n 阶可逆阵 P，使得 $PA=\begin{pmatrix}E_m\\O\end{pmatrix}$

（6）设 A,B 均为 n 阶可逆矩阵，$C=\begin{pmatrix}A^T & O\\O & B^{-1}\end{pmatrix}$，则行列式 $|-2C|$ 的值为（　）.

（A）$(-2)^n|A||B|^{-1}$　（B）$-2|A^T||B|$　（C）$-2|A||B^{-1}|$　（D）$(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$

（7）设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{k}{x^3}, & x\geq 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$ 则 $DX=$（　）.

（A）$\dfrac{k}{4}$　　（B）$\dfrac{k}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）1

（8）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$，$X$ 与 Y 独立，记 $A_1=\{X=1\}$，$A_2=\{Y=1\}$，$A_3=\{XY=1\}$，$A_4=\{XY=-1\}$，则下列结论正确的是（　）.

（A）A_1,A_2,A_3 两两独立　　（B）A_1,A_2,A_3 相互独立

（C）A_1,A_3,A_4 两两独立　　（D）A_2,A_3,A_4 两两独立

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $\varphi(x)$ 及 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f'(x)>0$，又函数 $z(x,y)=f[x+\varphi(y)]$ 满足方程 $\varphi(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，则 $\varphi(y)=$____________.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x tf(x-t)dt=\dfrac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$，则 $f(x)=$____________.

（11）设 $I_1=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，$I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}(x^2+y^2+1)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} e^{x^2+y^2}d\sigma$，则它们的大小顺序为____________.

（12）已知 $\int_0^1 x(1-\dfrac{x^2}{1!}+\dfrac{x^4}{2!}-\dfrac{x^6}{3!}+\cdots)dx=a(1-e^{-1})$，则常数 $a=$____________.

（13）设 A,B 均为四阶方阵，$r(A)=3,r(B)=4$，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则 $r(A^*B^*)=$______.

（14）设随机变量 $X\sim P(\lambda),Y\sim P(\lambda)$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$，则 $U=2X+Y$ 与 $V=X-2Y$ 的相关系数 $\rho_{UV}=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 **10** 分）过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，求由该切线、y 轴及曲线 $y=e^x$ 所围图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积．

（16）（本题满分 **10** 分）（Ⅰ）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$ 的收敛域及和函数 $s(x)$；（Ⅱ）将 $s(x)$ 展开成 $x+1$ 的幂级数．

（17）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx < -\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$．证明方程 $f(x)+x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个根．

（18）（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$，其中 D 是由圆弧 $x^2+y^2=1$ $(x\geq 0, y\geq 0)$，直线 $y=x$，$x+y=2$ 及 x 轴所围成的平面区域．

（19）（本题满分 10 分）设常数 $a>0$，且 $f(x)$ 为 $[-a,a]$ 上连续的偶函数，证明：对任意实数 λ，有 $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-\lambda x}}dx=\int_0^a f(x)dx$，并利用上式计算积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$．

（20）（本题满分 11 分）设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $AB=O$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\k&4&6\end{pmatrix}$，$PA=C$，其中 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&-2&0\\b&c&6\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$．（Ⅰ）求常数 k 的值；（Ⅱ）求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示．

（21）（本题满分 11 分）设 A 为三阶方阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的互不相等的特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是其对应的特征向量，令 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，（Ⅰ）证明 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关；（Ⅱ）若 $A^3\beta=2A\beta$，$P=(\beta,A\beta,A^2\beta)$，求 $P^{-1}AP$，并证明 $(A^2-2E)x=0$ 的通解为 $x=c_1A\beta+c_2A^2\beta$，其中 c_1,c_2 为任意常数．

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}|x||y|, & |x|\leq 1,|y|\leq 1,\\ 0, & \end{cases}$．

（Ⅰ）分别求 X 和 Y 边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，并判断 X 与 Y 的独立性；

（Ⅱ）设 $\varphi(x,y)=\begin{cases}xy, & x^2+y^2\leq 1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 二维随机变量 (U,V) 的密度函数为 $g(x,y)=f(x,y)+\varphi(x,y)$，分别求 U 和 V 的边缘密度函数 $g_U(x)$ 和 $g_V(y)$，并判断 U 与 V 的独立性．

（23）（本题满分 11 分）设某箱中有10个产品，其中正品的个数为 $r\ (1<r<10)$．从中任取两个产品，记 X 为两个产品中正品的个数，（Ⅰ）求 X 的分布律；（Ⅱ）对 X 独立观察三次，结果为1,2,2，求未知参数 r 的矩估计值 $\hat{r}_M$ 和极大似然估计值 $\hat{r}_L$．

19、20全程资料请加群690261900

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)=-f(-x), f(x)=f(x+1)$．若 $f'(1)>0$，则有（　）．

（A）$f''(-2)\le f'(-2)\le f(-2)$　　（B）$f(-2)=f''(-2)<f'(-2)$

（C）$f'(-2)\le f(-2)\le f''(-2)$　　（D）$f(-2)<f'(-2)=f''(-2)$

（2）设 $x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$，则 $(\frac{dy}{dx})^2-y\frac{d^2y}{dx^2}=$（　）．

（A）1　　（B）0　　（C）$\sqrt{1+4y^2}$　　（D）$4y$

（3）设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}\ (\alpha>0)$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）．

（A）连续，但不可偏导　　（B）可偏导，但不连续

（C）$f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续　　（D）以上均不正确

（4）下列命题中正确的个数是（　）．

①若 $u_1+(u_2+u_3)+(u_4+u_5+u_6)+\cdots$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；　②若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 收敛；

③若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛；　④若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $(u_n\ne 0)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（5）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=m<n$，则下列说法不正确的是（　）．

（A）A 一定可以只经过一系列的初等行变换化为 $(E_m, O), E_m$ 为 m 阶单位矩阵

（B）任意的 n 维列向量 b，$Ax=b$ 有无穷多解

（C）m 阶方阵 B 满足 $BA=O$，则一定有 $B=O$

（D）行列式 $|A^TA|=0$

（6）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶方阵，A 经过初等行变换化为 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&5&6&7\\0&0&0&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则下列说法不正确的是（　）．

（A）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 A 的列向量组的最大无关组

（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

（C）有一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

（D）α_4 必可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（7）设随机变量 $X\sim B(1,p)\ (0<p<1)$，Y 为连续型随机变量，且 X,Y 相互独立，则以下正确的是（　）.

（A）$P\{XY=0\}=0$　　（B）$P\{XY=1\}=0$

（C）XY 是连续型随机变量　　（D）XY 是离散型随机变量

（8）两人约定在某地会面，设两人到达的时刻 X 与 Y（单位：分钟）相互独立，且均服从 $[0,60]$ 上的均匀分布，则先到者的平均等待时间为（　）.

（A）10　　（B）20　　（C）30　　（D）40

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^2 e^{-x^2t^2}dt-1}{x^2}=$__________.

（10）已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx=$__________.

（11）设 z 为 x,y 的可微函数，$x=au+bv$，$y=cu+dv$（a,b,c,d 均为常数），若 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=m$，则 $u\dfrac{\partial z}{\partial u}+v\dfrac{\partial z}{\partial v}=$__________.

（12）二次积分 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{2y-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} e^{\frac{xy}{x^2+y^2}}dx$ 的值为________.

（13）设 A 为三阶方阵，其特征值为 $1,2,0$，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得到 C，则 $|C+E|=$________.

（14）在独立重复试验中，已知第四次试验恰好第二次成功的概率为 $\dfrac{3}{16}$，以 X 表示首次成功所需试验的次数，则 X 取偶数的概率为__________.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分10分）试证明方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 仅在 $(-1,1)$ 内有两个异号实根．

(16)（本题满分10分）设曲线 $y=y(x)\ (x\geq 0)$ 过点 $(0,1)$，且 $y'(x)>0$．如果曲线上任一点 P 的法线段 PQ（其中 Q 是过 P 点所作曲线法线与 x 轴的交点）的中点位于直线 $y=\frac{1}{3}x$ 上，求此曲线方程．

(17)（本题满分10分）已知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-2x+3y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,-2x)}{3x}$．

(18)（本题满分10分）设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leq x\leq 2,\\ 0, & \quad ,\end{cases}$ 求二重积分 $\iint\limits_{xOy} f(x)f(x^2-y)\,d\sigma$．

(19)（本题满分10分）设 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 内可导，且 $f'(x)$ 有界．证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})]$ 绝对收敛；（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{n})$ 存在．

(20)（本题满分11分）设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，（Ⅰ）求解齐次线性方程组 $(A^TA)x=0$；

（Ⅱ）问 a,b 分别取何值时，向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b\\a\end{pmatrix}$ 可由 A 的列向量组线性表示？并求出一般表示式．

(21)（本题满分11分）设 A 为三阶实对称矩阵，且满足

$$(A-E)\alpha_1=0,(\frac{1}{2}A+E)\alpha_2=0,\ \alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\a\\2a\end{pmatrix},$$

A^2 为非正定矩阵，求（Ⅰ）常数 a 的值；（Ⅱ）一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵．

(22)（本题满分11分）设随机变量 $X\sim E(1)$，$Y=X^2$，（Ⅰ）计算概率 $P\{0<X+2Y<1\}$；（Ⅱ）求 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$．

(23)（本题满分11分）设随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0;1,4;0)$，（Ⅰ）已知 $X+Y$ 与 $X+aY(a\neq 1)$ 相互独立，求 a 的值，并求 $Z=X+aY$ 的密度 $f_Z(z)$；（Ⅱ）计算 $D(X^2-2Y^2)$．

绝密 * 启用前

2013年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x[(x-1)^n-1]}$，则（　）．

（A）点 $x=0,x=2$ 均为 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）点 $x=0,x=2$ 均为 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，点 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点

（D）点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点，点 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点

（2）如果函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的某邻域 U 内有定义，那么下列命题正确的是（　）．

（A）若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导

（B）若 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（C）若 $f(x)$ 在 U 内可导，且 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 处可导

（D）若 $|f(x)|$ 在 U 内可导，且 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导

（3）设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<y<x^2,-\infty<x<+\infty\}$，函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$ 则在点 $(0,0)$ 处（　）．

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 存在　（B）$f(x,y)$ 连续　（C）$f(x,y)$ 偏导数存在　（D）$f(x,y)$ 可微

（4）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le1\}$，

$$I_1=\iint\limits_D\ln(1+x^2+y^2)\,dxdy,\quad I_2=\iint\limits_D(e^{x^2+y^2}-1)\,dxdy,\quad I_3=\iint\limits_D\arctan(x^2+y^2)\,dxdy,$$

则下列关系式正确的是（　）．

（A）$I_1>I_2>I_3$　（B）$I_3>I_1>I_2$　（C）$I_2>I_3>I_1$　（D）$I_2>I_1>I_3$

（5）设 A,B,C 均为 n 阶方阵，且满足 $ABAC=E$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则（　）．

（A）$A^TB^TA^TC^T=E$　（B）$A^2B^2A^2C^2=E$　（C）$BA^2C=E$　（D）$CA^2B=E$

（6）设向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T,\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$ 线性无关，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$ 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(\alpha\beta^T)x$，则下列结论中不正确的是（　）．

（A）f 的秩为1　（B）f 的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2$　（C）f 必不正定　（D）$|\alpha\beta^T+\beta\alpha^T|=0$

（7）设某人赴外地出差参加开会时，有乘坐汽车、火车、飞机和动车四种交通方式，其概率分别为 $0.1, 0.2, 0.4, 0.3$，且采用此四种交通方式时，出席会议迟到的概率依次为 $0.030, 0.015, 0.010, 0.010$．若已知此人出席会议时已经迟到，则此人最有可能乘坐的交通工具为（　　）.

（A）汽车　　（B）火车　　（C）飞机　　（D）动车

（8）设总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ $(n>1)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为其样本均值和样本方差，则 $\overline{X}^2 + (1-\frac{1}{n})S^2$ 的方差为（　　）.

（A）$\frac{2}{n^2}$　　（B）$\frac{1}{n^2}$　　（C）$\frac{2}{n}$　　（D）$\frac{1}{n}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2n-1^2}}{n^2}+\frac{\sqrt{4n-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n^2-n^2}}{n^2}\right)=$________.

（10）$\int \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=$________.

（11）设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}(x^n+x)$，则 $f^{(100)}(0)=$________.

（12）设函数 $f(x,y,z)=e^z yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f_y'(0,1,-1)=$________.

（13）设 A 为三阶方阵，其主对角线元素之和为零，且满足 $A^2-A-2E=O$，则 $|A|=$________.

（14）设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}e^{-\sqrt{x^2+y^2}}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 令 $\begin{cases}U=\sqrt{X^2+Y^2},\\ V=\arctan\frac{Y}{X},\end{cases}$ 记 $F(u,v)$ 为 (U,V) 的分布函数，则 $F(1,\frac{\pi}{4})=$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 **10** 分）设函数 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求 $f(\ln x)$．

（16）（本题满分 **10** 分）证明 $\int_0^a dx\int_0^a e^{-(x^2+y^2)}dy-\int_0^1 dv\int_{-\infty}^a 2ue^{-u^2(1+v^2)}du=\frac{\pi}{4}$，其中 $a\ge 0$．

(17)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且满足 $f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)f(x-y)$，

（Ⅰ）求 $f(0)$；（Ⅱ）证明 $f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$；（Ⅲ）若已知 $f''(1)=f(1)=1$，求 $f(x)$.

(18)（本题满分 10 分）设连续函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.（Ⅰ）判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\int_0^n f(x)dx}{n}$ 的敛散性. 若收敛，指出是绝对收敛，还是条件收敛；（Ⅱ）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\int_0^n f(t)dt}{n}x^n$ 的收敛域.

(19)（本题满分 10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D y\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=x^4-2x^3$ 的凸弧段部分与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的平面区域.

(20)（本题满分 11 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta,\gamma$ 均为 n 维单位列向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ 两两正交，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma$ 线性相关.（Ⅰ）证明 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示；（Ⅱ）记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^T$，证明 β 为 A 的属于特征值 0 的特征向量，γ 为 A 的属于特征值 1 的特征向量.

(21)（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&t\\3&1&-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\neq 0$，$\xi_1,\xi_2$ 均为非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解.（Ⅰ）求线性方程组 $Ax=b$ 的通解；（Ⅱ）问 A 是否可以相似对角化？

(22)（本题满分 11 分）某射手每次击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击独立进行到第二次击中目标为止，设 X_i 表示第 i 次击中目标时所射击的次数 $(i=1,2)$，（Ⅰ）求 (X_1,X_2) 的分布律.（Ⅱ）求 (X_1,X_2) 的边缘分布律，并问 X_1 与 X_2 是否相互独立？（Ⅲ）求已知 $X_1=m$ 的条件下，X_2 的条件分布律.

(23)（本题满分 11 分）设某产品的次品率为 $p\,(0<p<1)$，并且每10个产品装成一箱，从一大批产品中任取 40 箱，记 X_i 为第 i 箱产品中次品的个数，$i=1,2,\cdots,40$.（Ⅰ）求 p 的矩估计量 $\hat{p}$；（Ⅱ）试利用中心极限定理，近似计算 $P\{|\hat{p}-p|<\frac{1}{20}\sqrt{p(1-p)}\}$，其中 $\Phi(1)=0.8413$.

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（四）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷 （模拟四）

考生注意:本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 a,b 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b)=$（　）.

（A）a　　（B）b　　（C）$\min\{a,b\}$　　（D）$\max\{a,b\}$

（2）设函数 $f(x)$ 满足 $f'''(x)+f'(x)=(x-1)^2$，且 $f'(1)=f''(1)=0$，则（　）.

（A）点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　（B）点 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(1,f(1))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

（D）点 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(1,f(1))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

（3）设函数 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 可微分，则 $dz=$（　）.

（A）$f'_x(x^2+y^2)dx+f'_y(x^2+y^2)dy$　　（B）$2xf'(x^2+y^2)dx+2yf'(x^2+y^2)dy$

（C）$f'(x^2+y^2)dx+f'(x^2+y^2)dy$　　（D）$2xf'_x(x^2+y^2)dx+2yf'_y(x^2+y^2)dy$

（4）微分方程 $y''-2y'+y=3xe^x+\sin x$ 的特解形式为（　）.

（A）$(ax+b)x^2e^x+A\cos x+B\sin x$　　（B）$(ax+b)e^x+A\cos x+B\sin x$

（C）$(ax+b)x^2e^x+A\sin x$　　（D）$(ax+b)xe^x+A\sin x$

（5）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是三维非零向量，则下列命题正确的是（　）.

（A）如果 α_1,α_2 线性相关，α_3,α_4 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_4$ 线性相关

（B）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_2+\alpha_4$，$\alpha_3+\alpha_4$ 线性无关

（C）如果 α_4 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 一定线性相关

（D）如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 中任意 3 个向量均线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

（6）设 A, B 均为 n 阶矩阵，且 A 与 B 等价，则下列命题不正确的是（　　）.

（A）存在可逆矩阵 P 与 Q，使得 $PAQ=B$

（B）如果 $|A|\neq 0$，则存在可逆矩阵 P，使得 $PB=E$

（C）如果 A 相似于 E，则 B 可逆

（D）如果 $|A|>0$，则 $|B|>0$

（7）设甲抛 2 次硬币，乙抛 1 次硬币，A 表示甲所抛正面数多于乙所抛正面数，B 表示甲所抛反面数多于乙所抛反面数，则必有（　　）.

（A）$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$ （B）$P(A)>\frac{1}{2}, P(B)<\frac{1}{2}$ （C）$P(A)<\frac{1}{2}, P(B)>\frac{1}{2}$ （D）$P(A)+P(B)<1$

（8）设 $(X, X_1, X_2, \cdots, X_9)$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$Y^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i^2$，则（　　）.

（A）$Y^2\sim\chi^2(1)$　　（B）$Y^2\sim\chi^2(9)$　　（C）$\frac{X}{3Y}\sim t(9)$　　（D）$\frac{X^2}{Y^2}\sim F(1,9)$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设 n 为正整数，则 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|dx=$__________.

（10）设函数 $z=\frac{y^3}{x^2}+(x-1)y\ln x$，则 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$__________.

（11）设 $y_t^*=2^{t+1}$ 为差分方程 $y_{t+1}-\lambda y_t=0$ 的一个特解，则 $y_{t+1}-\lambda y_t=2^t$ 的通解为__________.

（12）积分 $\int_1^{\frac{\pi}{2}}dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x-1}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dy\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x-1}dx=$__________.

（13）设 A 为三阶方阵，$|\lambda E-A|=\lambda^3+3\lambda+2$，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 A 的特征值，则 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_3 & \lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1\end{vmatrix}=$______.

（14）设 X 为三个同类产品中次品的个数，且 $EX=\frac{3}{2}$，现从中任取一个产品，则该产品是次品的概率为________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设函数 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-e^x-x}{x}, & x<0,\\ ax+b, & x\geq 0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=1$．（Ⅰ）问 a,b 分别为何值时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？（Ⅱ）又问 a,b 分别为何值时，$g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导？

(16)(本题满分 10 分)设当 $x\geq 1$ 时,函数 $f(x)$ 满足 $(x^2+f^2(x))f'(x)=1$,并且 $f(1)=1$,

(Ⅰ)证明当 $x>1$ 时,$1<f(x)<1+\dfrac{\pi}{4}$; (Ⅱ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在.

(17)(本题满分 10 分)将函数 $f(x)=x\arctan\dfrac{1+x}{1-x}-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(2n-1)}$ 的和.

(18)(本题满分 10 分)设 $u=u(x,y)$ 有二阶连续偏导数且满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$ 及 $u(x,2x)=x$,$u'_x(x,2x)=x^2$,求 $u''_{xx}(x,2x)$,$u''_{xy}(x,2x)$,$u''_{yy}(x,2x)$.

(19)(本题满分 10 分)设函数 $f(x,y)=\max\{x,y\}$,闭区域 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,y)\left|y-x^2\right|dxdy$.

(20)(本题满分 11 分)设三阶矩阵 B 满足 $[(\frac{1}{2}A)^*]^{-1}BA^{-1}=2AB+4E$,其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 B.

(21)(本题满分 11 分)已知二次型 $f(x,y,z)=2x^2+2y^2+az^2+2bxy-2yz+2xz$ 的秩为 2,且该二次型矩阵有一个非零二重特征值.(Ⅰ)求常数 a,b;(Ⅱ)求在正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 下该二次型的标准形.

(22)(本题满分 11 分)设随机变量 $X\sim U[-1,1]$,记 $Y=\begin{cases}0, & -1\leq X\leq 0.5,\\1, & 0.5<X\leq 1,\end{cases}$ $Z=|X-0.5|$.

(Ⅰ)求 Y 的分布律;(Ⅱ)求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$;(Ⅲ)求 $U=YZ$ 的分布函数 $F_U(u)$.

(23)(本题满分 11 分)设总体 $X\sim U[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]$,$\theta$ 是未知参数,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\ (n\geq 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 $T_1=\max\limits_{1\leq i\leq n}X_i$,$T_2=\min\limits_{1\leq i\leq n}X_i$.(Ⅰ)求总体 X 的分布函数;(Ⅱ)求 T_1,T_2 的概率密度;(Ⅲ)记 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}(T_1+T_2)$,求 $E\hat{\theta}$.

绝密 * 启用前

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)(e^{\frac{1}{3}x^2}-1)}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\sin|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 为连续函数，若 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则有（　）.

（A）$f(0)=0$，$f'(0)$ 不存在　　（B）$f(0)=1$，$f'(0)$ 不存在

（C）$f(0)=0$，$f'(0)=1$　　（D）$f(0)=1$，$f'(0)=1$

（2）设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)=\int_{-1}^{1}|x-\sin t|f(t)\,dt$，则下列命题

①若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 也为奇函数　　②若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数

③若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也为偶函数　　④若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数

正确的是（　）.

（A）①②　　（B）③④　　（C）①③　　（D）②④

（3）下列命题正确的是（　）.

（A）若可导函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有界，则其导函数 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内也有界

（B）若可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有界，则函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内也有界

（C）若可导函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内无界，则其导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也必无界

（D）若可导函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在有限区间 (a,b) 内无界，则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内也无界

（4）若函数 f,g 均可微，$z=f[xy,\ln x+g(xy)]$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　）.

（A）f_1'　　（B）f_2'　　（C）0　　（D）1

（5）设 A 为反对称矩阵，且 A,B 均为同阶可逆矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $[A^TA^*(B^{-1})^T]^{-1}=$（　）.

（A）$-\dfrac{B}{|A|}$　　（B）$\dfrac{B}{|A|}$　　（C）$-\dfrac{B^T}{|A|}$　　（D）$\dfrac{B^T}{|A|}$

（6）设 A,B 为 n 阶实对称可逆阵，则下列结论不正确的是（　）.

（A）存在可逆阵 P,Q，使 $PAQ=B$　　（B）存在可逆阵 P，使 $P^{-1}ABP=BA$

（C）存在可逆阵 P，使 $P^TA^2P=B^2$　　（D）存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=Q^TAQ=B$

（7）设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，且 $P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1,Y=-1\}$，则 X 与 Y（　）.

（A）必独立　　（B）必不相关　　（C）必不独立　　（D）必非不相关

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，其经验分布函数为

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/5, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

则样本观察值可能为（　）.

（A）$(0,1,1,1,1)$　　（B）$(0,0,1,1,1)$　　（C）$(0,0,0,1,1)$　　（D）$(0,0,0,0,1)$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设 $f(x)$ 是二次可微函数，若在点 $(a,f(a))$ 处的切线倾角是 $\frac{\pi}{3}$，在点 $(b,f(b))$ 处的法线与直线 $x+y=2$ 平行，则积分 $\int_a^b e^{f'(x)}f''(x)\,dx=$________.

（10）设函数 $y=u(x)e^{ax}$ 是微分方程 $y''-2ay'+a^2y=(1+x)e^{ax}$ 的一个解，则 $u''(x)=$________.

（11）设函数 $z=z(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，且 $z\big|_{(0,y)}=y^2$，$z'_x\big|_{(x,0)}=x$，求 $z(x,y)=$________.

（12）设 $I=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx+\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}e^{-x^2}dx$，则 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{I}{a^2}=$________.

（13）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵，则常数 $a=$________.

（14）设事件 A,B,C 两两独立，其概率均为 0.6，若已知 A 发生的条件下 B,C 至少一个发生的概率为 0.2，则 A,B,C 最多发生两个的概率为________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 **10** 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}[1+x+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3$.

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.

(16)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)>0, x\in(0,1)$.

（Ⅰ）证明对于任意的正整数 n，有 $f(\dfrac{1}{n+1})+f'(\dfrac{1}{n+1})(x-\dfrac{1}{n+1})\le f(x)\le f(0)+[f(1)-f(0)]x$，$x\in[0,1]$；（Ⅱ）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)\,dx$.

(17)（本题满分 10 分）求函数 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

(18)（本题满分 10 分）设生产某种产品的边际成本为 a，固定成本为 b，需求函数为 $Q=(d-P)/c$，其中 Q 为需求量，P 为产品价格，a,b,c,d 为正常数，且 $d>a$.（Ⅰ）求利润最大时的产量；（Ⅱ）求利润最大时需求对价格的弹性 η；（Ⅲ）证明当利润最大时，$P=\dfrac{a}{1-1/\eta}$.

(19)（本题满分 10 分）设 $a_n=\int_0^{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{2}-x)x^n(1-x)^n\,dx, n=1,2,\cdots$. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，并求其和.

(20)（本题满分 11 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，已知非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数），令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，试求 $By=\beta$ 的通解.

(21)（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶实对称矩阵，若存在正交矩阵 Q，使 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$，且 $A^*\alpha=\alpha$，其中 $\alpha=(-1,-1,1)^T$.（Ⅰ）求正交矩阵 Q；（Ⅱ）求矩阵 A.

(22)（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}axye^{-(x^2+y^2)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 求（Ⅰ）常数 a 的值；（Ⅱ）$P\{Y>1|X>1\}$；（Ⅲ）EX.

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x;a)=\begin{cases}2x/a^2, & 0\le x\le a,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 其中未知常数 $a>1$，从总体 X 中取得样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，（Ⅰ）求 a 的矩估计量 $\hat{a}_M$ 和极大似然估计量 $\hat{a}_L$，（Ⅱ）求 $p=P\{0<X<\sqrt{a}\}$ 的矩估计 $\hat{p}_M$ 和极大似然估计 $\hat{p}_M$.