得分	评卷人

(19)（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，试证明 $\frac{dy}{dx}+ky=f(x)$ 有唯一的以 T 为周期的周期函数解，其中 k 为常数。

得分	评卷人

(20)（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

(Ⅰ) 求参数 a；(Ⅱ) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TA^2x$ 化为标准形。

得分	评卷人

(21)（本题满分 11 分）已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 0，1，1，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为 A 的两个互异特征向量，且 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=\vec{\alpha}_2$。

(Ⅰ) 证明：向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关；(Ⅱ) 求 $A\vec{x}=\vec{\alpha}_2$ 的通解。

得分	评卷人

(22)（本题满分 11 分）设 (X,Y) 在方形区域 $G=\{(x,y)/0<x<1,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试求：(Ⅰ) 概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}$；(Ⅱ) $Z=|X-Y|$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

(Ⅲ) $Z=|X-Y|$ 均值与方差。

得分	评卷人

(23)（本题满分 11 分）设某批产品的一等品率为 1/10，从这批产品中任取 n 件，求其中一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值不超过 0.02 的概率，(Ⅰ) $n=400$ 时用切比契夫不等式估计；(Ⅱ) 若要使得一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值的概率不小于 0.95 时，至少需要取多少件产品（利用中心极限定理计算）（$\Phi(1.96)=0.975$）

参考答案

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 1）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	A	B	D	C

(1)【解】$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-e^{\sin^3x}}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}(1-e^{\sin^3x-x^3})}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin^3x-x^3}}{x^m}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x-x^3}{x^m}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x-x^3}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2x)}{x^m}$

$=3\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^{m-2}}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}$，所以有 $m-3=2,m=5$。

(2)【略】

(3)【解】由题设有 $xf'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}},f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}},f(x)=4x^{\frac{1}{3}}+C,f(8)=1$，故 $C=-7$，

即 $f(x)=4x^{\frac{1}{3}}-7$

(4)【略】

(5)【解】由于 $E(1,2)AE(1,2)=C$，相似、合同且等价。

(6)【解】$A^3\alpha+2A^2\alpha-3A\alpha=(A-E)(A^2+3A)\alpha=0$

(7)【解】$\because F_Z(z)=F_1(z)F_2(z)$，$\therefore f_Z(z)=f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8)【解】$E(X+Y)(X-Y)=E(X+Y)E(X-Y)$

$\Rightarrow EX^2-EY^2=(EX)^2-(EY)^2\Rightarrow D(X)=D(Y)$

二、填空题:

【答案】(9) $\underline{-3}$,(10) $\underline{\frac{n}{2}(n+1)!}$,(11) $\underline{(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{25}(4\cos x+3\sin x)+\frac{3}{2}x^2e^{2x}}$,

(12) $\underline{\frac{1}{2}e}$,(13) $\underline{165}$,(14) $\underline{\frac{1}{2}}$.

(9)【解】由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3}f(x)\ln(1+x)}{\tan x(e^x-1)}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$,

因而有 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0,f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-3$.

(10)【解】$f(x)=x^{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}x^n+\cdots+n!,f^{(n)}(x)$

$=(n+1)!x+\frac{n(n+1)}{2}n!,f^{(n)}(0)=\frac{n}{2}(n+1)!$

(12)【解】令 $\ln x=t,x=e^t$，$f'(t)=1+e^t$，所以 $f(t)=t+e^t+C$

故 $\int_0^{1/2}f'(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}f'(2x)\,d2x=\frac{1}{2}f(2x)|_0^{1/2}=\frac{1}{2}(f(1)-f(0))=\frac{1}{2}e$

(13) A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=2$，所以 $|A|=6$，而矩阵 $A^*+2A^{-1}+E$ 的特征值为

$\frac{|A|}{\lambda}+\frac{2}{\lambda}+1$ 对应的特征值分别为：$9,\frac{11}{3},5$；则 $|A^*+2A^{-1}+E|=165$。

(14)【解】由于 X,Y 相互独立且均服从 $N(1,\sigma^2)$，所以

$P\{\min\{X^2,Y\}\le1\}=1-P\{X^2>1,Y>1\}=1-(1-P\{X^2\le1\})(1-P\{Y\le1\})$

$=1-(1-P\{|X|\le1\})(1-P\{Y\le1\})=1-2(1-\Phi(0))^2=\frac{1}{2}$

三、解答题:

(15)（本题满分 10 分）

【解】（Ⅰ）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\lambda\sin t}{1-\lambda\cos t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3},\dfrac{dy}{dx}=0,t=\pi,\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi}=\dfrac{-\lambda}{(1+\lambda)^2}<0$，

故 $t=\pi$ 时，函数 $y(x)$ 有极大值为 $y=1+\lambda$；

（Ⅱ）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda\cos t-\lambda^2}{(1-\lambda\cos t)^3}=0$，$\cos t=\lambda,t=\arccos\lambda$ 或者 $t=2\pi-\arccos\lambda$，由于

函数 $\cos t$ 在上述两个点的邻域内分别为单减和单增，因而 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\lambda(\cos t-\lambda)}{(1-\lambda\cos t)^3}$

在上述两个点的两侧异号，故点 $(\arccos\lambda-\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 与

$(2\pi-\arccos\lambda+\lambda\sqrt{1-\lambda^2},1-\lambda^2)$ 均为曲线 $y=y(x)$ 的拐点。

(16)（本题满分 10 分）

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)=(xy+1)e^{xy}$，记 $xy=t$，则有

$f'(t)+tf''(t)=(t+1)e^t$，即 $(tf'(t))'=(t+1)e^t$，积分得 $tf'(t)=te^t+C_1$，解得

$f'(t)=e^t+\dfrac{1}{t}C_1$，代入 $f'(1)=e+1$， $C_1=1$；再积分得；

$f(t)=\int(e^t+\dfrac{1}{t})dt=e^t+\ln|t|+C_2$，代入 $f(1)=e+1$，可得 $C_2=1$，即 $f(t)=e^t+\ln|t|+1$

所以 $f(xy)=e^{xy}+\ln|xy|+1$

(17)（本题满分 10 分）

【解】 由对称性 $I=\iint\limits_D\sqrt{\left|y-|x|\right|}dxdy=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{|y-x|}dxdy$

$$=2[\iint\limits_{D_{11}}\sqrt{x-y}dxdy+\iint\limits_{D_{12}}\sqrt{y-x}dxdy]=2[\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{x-y}dy+\int_0^1dx\int_x^2\sqrt{y-x}dy]$$

$$=2[\frac{4}{15}+(-\frac{4}{15}+\frac{16}{15}\sqrt{2})]=\frac{32}{15}\sqrt{2}$$

(18)（本题满分 10 分）

【证明】令 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，因而 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，

由 Rolle 定理知 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=\dfrac{\xi f(\xi)-\int_0^\xi f(x)dx}{\xi^2}=0$，即 $\int_0^\xi f(x)dx=\xi f(\xi)$，

故原命题得证。

【另证】 令 $F(x)=x\int_0^x f(t)dt,x\in[0,1]$

(19)（本题满分 10 分）

【解】（Ⅰ)易求出收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

由于 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots+\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$

$$S'(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

所以 $S(x)+S'(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=e^x$

即 $S'(x)+S(x)=e^x$

(II) 解此一阶线性方程，得通解为 $S(x)=ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$

又 $S(0)=1$，代入上式得 $c=\frac{1}{2}$

故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\mathrm{ch}\,x$

(III) 两边求导数可得：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=\mathrm{sh}\,x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

令 $x=\frac{1}{2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}(2n-1)!}=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}$

(20)（**本题满分 11 分**）

【解】①设 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示，则 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\0\end{pmatrix}$$

从而 $\boldsymbol{\xi}=(k_1,k_2,k_3,0)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解，

故 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0=(k_1+1,\ k_2-1,\ k_3,-2)^T$ 是方程组 $A\boldsymbol{x}=0$ 的一个解。

由题设 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,2,0)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=0$ 的一个基础解系。而 $\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0$ 显然不能由 $\boldsymbol{\xi}_1$ 线性表示，矛盾！$\therefore\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示。

②由题设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多个解，秩（A）=秩$(A\mid\boldsymbol{\beta})=4-1=3$，

从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的秩=向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩=3，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 极大无关组由 3 个线性无关向量组成

$$0=A\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3\ \boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3\text{，故 }\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$$

由ξ_0是$Ax=\beta$，解得$\beta=A\xi_0=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix}=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4$

故$\beta=-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4$，从而$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \beta)\xrightarrow{列}(0\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ 0)$

$\therefore$秩$(0\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\quad 0)=$秩$(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \alpha_3\quad \alpha_4\quad \beta)=3$，

故$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\therefore\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$的一个极大无关组。

(21)（**本题满分 11 分**）

【解】(Ⅰ)令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$P$可逆，

因为$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+3\alpha_2,5\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2+4a_3)$

$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$,即$AP=P\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}$,

所以$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&5&1\\3&-1&-1\\0&0&4\end{pmatrix}=B$,于是有$A\sim B$

由$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&-1\\-3&\lambda+1&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-4)^2=0$

得A的特征值为$\lambda_1=-4$, $\lambda_2=\lambda_3=4$.

(Ⅱ) 因为$A\sim B$，所以B的特征值为$\lambda_1=-4$, $\lambda_2=\lambda_3=4$.

当$\lambda_1=-4$时,由$(B+4E)x=0$，得$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=4$时,由$(B-4E)x=0$,得$\xi_2=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$,

令$P_1=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)=\begin{pmatrix}-1&5&1\\1&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,则$P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

因为 $P^{-1}AP=B$，所以

$$P_1^{-1}P^{-1}APP_1=P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}，即 (PP_1)^{-1}A(PP_1)=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix},$$

取 $Q=PP_1=(-\alpha_1+\alpha_2,5\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-4&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 11 分）

【解】（I） $1=2k\int_0^1 x^2dx\int_x^1 dy=\frac{1}{6}k$， $k=6$；

（II） $f_X(x)=\begin{cases}6x^2(1+x), & -1<x<0\\ 6x^2(1-x), & 0\le x<1\end{cases}$，即 $f_X(x)=\begin{cases}6x^2(1-|x|), & |x|<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_{Y/X}(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{1-|x|}, & |x|<y<1,(-1<x<1)\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（III） $Z=X+Y$

由公式可知 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$f(x,z-x)=6x^2$，$\begin{cases}-1<x<0, & 0<z<1+x\\ 0<x<1, & 2x<z<1+x\end{cases}$ （作图）

$f_Z(z)=\int_{z-1}^{\frac{z}{2}}6x^2dx=\frac{1}{4}[z^3-8(z-1)^3]$， $0<z<2$，

即 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}[z^3-8(z-1)^3], & 0<z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$。

（23）（本题满分 11 分）

【解】（I） 由于 X 与 Y 独立性，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$F_Z(z;\theta)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))=\begin{cases}1-e^{-\frac{3}{\theta}z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$，所以对应概率密度为

$$f_Z(z;\theta)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}e^{-\frac{3}{\theta}z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases};$$

（II） θ 的似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(z_i;\theta)=\frac{3^n}{\theta^n}e^{-\frac{3}{\theta}\sum_{i=1}^n z_i}$，

$\ln L(\theta)=n\ln 3-n\ln\theta-\frac{3}{\theta}\sum_{i=1}^n z_i$， $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{3}{\theta^2}\sum_{i=1}^n z_i=0$，因此解得极大

似然估计为 $\hat{\theta}_L=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i=3\overline{Z}$ ；

（III）$D(\hat{\theta}_L)=9D(\overline{Z})=9\frac{D(Z)}{n}=\frac{9}{n}\left(\frac{\theta}{3}\right)^2=\frac{\theta^2}{n}$ 。

数学三（模拟 2）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	B	D	A	D	C

（1）【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(|x|)-f(0)}{x}=f'(0),\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(|x|)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{x}=-f'(0)$,所以必有 $f'(0)=0$ 与 $f(0)$ 的取值无关，答案为 C.

（2）【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=e^{\frac{a}{2}},\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx=-2xe^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-a}^{+\infty}+2\int_{-a}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$，

$=2(-a+2)e^{\frac{a}{2}}\ a=\frac{3}{2}$，答案 C.

（3）【解】先交换次序，再求导。答案：选(D)

（4）【略】答案：选(B)

（5）　【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$, 可知矩阵 A 的特征是 $3,-3,0$, 故秩 $\gamma(A)=2$, 二次型 x^TAx 的正、负惯性指数均为1。

（A）　中矩阵的秩为1，不可能与矩阵 A 等阶；（C）中矩阵的特征值为3，-3,0.与矩阵 A 不仅等价、合同，而且也是相似的，不符合题意。对于（D）,记其矩阵为 D，由

$$|\lambda E-D|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$，可知 D 的特征值为 $1,-1,0$ 。x^TAx 与 x^TDx 的正、负惯性指数一样，所以它们合同但不相似（因为特征值不同），符合题意，固应选（D）.

注意，（B）中矩阵的特征值为 $1,4,0$, 正惯性指数 $p=2$，负惯性指数 $q=1$，与 A 即不合同也不相似，但等阶（因为秩相等）。

【答案】(D)

(6) 【略】答案(A)

(7) 【解】利用 $\chi^2\sim\chi^2(n)$, $E(\chi^2)=n$、 $D(\chi^2)=2n$、

【答案】(D)

(8) 【略】答案：(C)

(9)【解】由题设可知 $x=0$ 时 $y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,方程式两边对 x 同时求导可得

$y'\left|\sin y^2\right|+\cos x\sqrt{1+\sin^3 x}=0$, 将 $x=0$, $y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 代入可得 $y'|_{x=0}=-\sqrt{2}$,因而相应的法线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(10)【解】记 $u=x,v=y+g(x)$， $\begin{cases}x=u\\ y=v-g(u)\end{cases}$ $\therefore f(u,v)=u(v-g(u))+g(v-g(u)$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial u}=v-g(u)-ug'(u)+g'(v-g(u)(-g'(u))$， $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=1-g''(v-g(u))g'(u)$

(11) $\underline{y=\cot x+1+ce^{\cot x}}$ ；

(12)【答案】 $\int_0^a dx\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} f(x,y)dy$

(13)【答案】 $a=1$

(14)【解】

$Z=X^2-Y^2$， $p=\frac{1}{3}$ 不难得到 由此 $E(Z^4)=\frac{4}{9}$。

Z	-1	0	1
P	2/9	5/9	2/9

(15)【解】 解法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$
$=a-1=0,a=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2},b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0,c=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$。

解法二： $a+bx-(1+c\sin x)e^x=a+bx-[1+cx-\frac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\frac{1}{2})x^2-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1,b-c-1=0,c+\frac{1}{2}=0,\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c=0$， 即 $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{1}{2}$。

(16)【解】令 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x,x\in(0,\frac{\pi}{4}]$，

$f'(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}+\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\sin x\ln\sin x-\cos x\ln\cos x$， 当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时

$0<\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2},0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\cos x<0,\ln\sin x<0,f'(x)>0$，因而函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{4}]$ 上单增， 即 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时有 $f(x)=\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<f(\frac{\pi}{4})=0$ ， 即

$\cos x\ln\sin x-\sin x\ln\cos x<0$ 。

(17) 【解】

$$f(y+1)=\begin{cases}y+2 & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}，\quad f(x+y^2)=\begin{cases}x+y^2+1 & 1\le x+y^2\le 3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

记 D_1 为 $f(y+1)f(x+y^2)$ 的非零值区域为 $D_1:\begin{cases}1\le x+y^2\le 3\\ 0\le y\le 2\end{cases}$

$$I=\iint_D f(y+1)f(x+y^2)dxdy=\iint_{D_1}(y+2)(x+y^2+1)dxdy=\int_0^2 dy\int_{1-y^2}^{3-y^2}(y+2)(x+y^2+1)dx$$

$=36$

(18) 【解】(1) 利润函数为 $L(x,y,z)=p_1x+p_2y+p_3z-C(x,y,z)$ 唯一驻点 $(8,6,5)$ 为最大值点。

(2) $L(x,y,z)$ 在约束条件 $x+y+z=16$ 下的最大值点是唯一驻点 $(6.8,5.4,3.8)$

(19) 【解】由题设，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f''(0)=0$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 处展为二阶泰勒公式，则有

$$f(x)=\frac{1}{3!}f'''(\theta x)x^3\quad(0<\theta<1)$$

令 $x=n^\alpha$ ，则

$$f(n^\alpha)=\frac{1}{3!}f'''(\theta n^\alpha)n^{3\alpha}$$

由 $f'''(x)$ 在某内有界，则当 $\alpha<0,n\to\infty$ ，时， $f'''(\theta n^\alpha)$ 有界，即 $\exists N$ 与 $M>0$ ，使当 $n>M$ 时， $\left|f'''(\theta n^\alpha)\right|\le M$ 。于是

$$\left|f(n^\alpha)\right|\le\frac{1}{3!}Mn^{3\alpha}=\frac{M}{3!}\frac{1}{n^{-3\alpha}}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{3\alpha}$ 只当 $-3\alpha>1$ 即 $\alpha<-\dfrac{1}{3}$ 时收敛，由比较法， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n^\alpha)$ 在 $\alpha<-\dfrac{1}{3}$ 时必收敛且绝对收敛。

(20) 【解】

（I）因 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 1。故 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值。设 A 属于 0 特征向量为 $\xi=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^T$ 由 $\xi\perp\xi_1$ 得方程组 $-x_1+x_2+x_3=0$

得基础解系 $\xi_2=(1\ \ 1\ \ 0)^T$ $\quad\xi_3=(1\ \ 0\ \ 1)^T$ 故 ξ_2,ξ_3 是 $Ax=0$ 两个线性无关解。由秩（A）=1 知 $\xi_2\ \xi_3$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系。

故 $Ax=0$ 通解为 $k_1\xi_2+k_2\xi_3=k_1(1\ \ 1\ \ 0)^T+k_2(1\ \ 0\ \ 1)^T$

（II）由（2）知 $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ 线性无关

令 $P=(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3)$，则 P 是可逆矩阵，且

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}$. 故

$$A=P\begin{pmatrix}2&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\ldots=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$$

(21) 【解】(1) 由已知 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}$

$\therefore R(A)=2$　　$\therefore |A|=0$　　$\Rightarrow a=3$

由 $|\lambda E-A|=0$　　解得 $\lambda_1=0$　$\lambda_2=4$　$\lambda_3=9$

(II) 由 (1) 知 A 与矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&4&\\&&9\end{pmatrix}$ 相似

即存在正交变换 $x=Py$ 使 $P^{-1}AP=\Lambda$,从而使 $f(A)=A^3-13A^2+36A+2E$ 与 $f(\Lambda)=\Lambda^3-13\Lambda^2+36\Lambda+2E$ 也相似，所以 $f(A)=Pf(\Lambda)P^{-1}=P2EP^{-1}=2E$

(22) 【解】

(I) 由于 $P\{X-Y=1\}=0$，所以

X \ Y	-1	0	1	P
0	0	1/6	1/6	1/3
1	1/6	0	1/2	2/3
P	1/6	1/6	2/3	

(II) $Z=X^2+Y^2$ 的分布律为

Z	0	1	2
P	1/6	1/6	2/3

(III) $\mathrm{Cov}(X,2X-Y)=2D(X)-\mathrm{Cov}(X,Y)=2\times\frac{2}{9}-(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{2})=\frac{4}{9}$

(23) 【解】(I) $1=\int_0^{+\infty}cxe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=c\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=-\frac{c}{2}\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(-\frac{x^2}{\theta})=\frac{c}{2}\theta$，所以 $c=\frac{2}{\theta}$；

概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(II) $L=$ $L=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\theta)=\frac{2^n}{\theta^n}(x_1x_2\cdots x_n)e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$　　$x_i>0$

$\ln L=n\ln 2-n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$

$\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

(III) 由于 $b=P\{X\le 1\}=\int_0^1\frac{2}{\theta}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=1-e^{-\frac{1}{\theta}}$　关于 θ 的减函数，由极大似然估计的

性质

可知 b 的极大似然估计为 $\hat{b}=1-e^{\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$。

数学三（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	C	D	C	B	C

(1)【解】由题设知

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{a+x^2}-1)=0,a=1,\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x-1-x-bx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1-2bx}$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^x-2b}$ 存在，故 $b\neq\dfrac{1}{2}$

(2)【解】两曲线交点横坐标满足方程 $kx^2-\ln x=0$,令

$$f(x)=kx^2-\ln x,f'(x)=2kx-\frac{1}{x}=0,x=\pm\frac{1}{\sqrt{2k}},f(\frac{1}{\sqrt{2k}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2k),$$

当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，有 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2k}})>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$,因此方程 $kx^2-\ln x=0$ 无实根,即两个曲线无交点.

【注】本题也可以用取特除值法，令 $k=1$，则讨论起来更方便.

(3)【解】因为 $\ln(3+\sin 2x)\sin 2x$ 是周期为 π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x\ln(3+\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}\mathrm{d}x$$

$=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}\mathrm{d}x>0$，故选 B.

(4)【解】(A) 反例 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在.对于 C ：$f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，$f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续（因为两个偏导数存在）.

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$

(5)【解】由于 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$, 则 λ 为 1 或 2 或 3，所以 $E-A$、$2E-A$、$3E-A$ 可能不可逆，选(D)

(6)【解】由已知条件 $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$ 知

$$(\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\alpha_3)=(\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\frac{1}{3}(2\alpha_2-\alpha_1))=(\alpha_1,\alpha_2,\beta)\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\a&b&0\end{pmatrix}$$

对任意的 n 维向量 β，当向量 α_1,α_2,β 线性无关时,向量组 $\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\alpha_3$ 线性相关

对应的行列式 $\begin{vmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&1&\frac{2}{3}\\a&b&0\end{vmatrix}=0$，从而有 $a=-2b$.

(7)【解】设 A 表示事件"至少有一次命中"，B 表示事件"第一次命中"，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{1-P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$$

(8)【解】 $P(X>1)=1-P(X\le 1)=e^{-\lambda}=e^{-2}$，故 $\lambda=2$

$P\{\min(X,Y)\le 1\}=1-P\{\min(X,Y)>1\}=1-P(X>1)P(Y>1)=1-e^{-4}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在题中横线上.

(9) $\underline{\dfrac{2xy^3+2x\sin(x^2+2y)}{e^y-2\sin(x^2+2y)-3x^2y^2}dx}$，(10) $\underline{\dfrac{1}{2}(e^4-e)}$，(11) $\underline{y=2^t-t+c}$，

(12) $\underline{2xf(x^2y,e^{x^2y})+2x^3y[f_1'+e^{x^2}f_2']}$，(13) $\underline{\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}}$，(14) $\underline{\dfrac{1}{2}f(\dfrac{x}{2},y-1)}$.

(9)【解】对等式两边同时求微分可得

$-\sin(x^2+2y)(2x\,dx+2\,dy)+e^y\,dy-2xy^3\,dx-3x^2y^2\,dy=0$，

解得 $dy=\dfrac{2xy^3+2x\sin(x^2+2y)}{e^y-2\sin(x^2+2y)-3x^2y^2}dx$

(10)【解】用极坐标

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2(\cos\theta+\sin\theta)^2}(e^4-e)d\theta=\frac{1}{2}(e^4-e)$$

(11)【解】由 $y_{t+1}-y_t=0$ 得齐次通解为 $y_t=c$，又设非齐次特解 $y_t^*=A2^t+Bt$，代入方程得 $A2^t+B=2^t-1$，解得 $A=1,B=-1$，所以 $y_t^*=2^t-t$，故其通解为 $y=2^t-t+c$.

(12)【解】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(x^2y,e^{x^2y})\cdot 2xy$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x^2y,e^{x^2y})\cdot x^2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf(x^2y,e^{x^2y})+2xy[f_1'\cdot x^2+f_2'\cdot e^{x^2y}\cdot x^2]=2xf(x^2y,e^{x^2y})+2x^3y[f_1'+e^{x^2y}f_2'].$$

(13)【解】因为 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，所以为 A^* 的特征值为 $\mu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=-2$，

A^*+3E 的特征值为 4,1,1,又因为 $4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3$ 也为 A 的线性无关的特征向量,所以

$4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3$ 也是 A^*+3E 的线性无关的特征向量,所以

$$P^{-1}(A^*+3E)P=\begin{pmatrix}4 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$

(14)【解】随机变量 $(2X,Y+1)$ 的分布函数为

$$F_1(x,y)=P(2X\le x,Y+1\le y)=P(X\le\frac{x}{2},Y\le y-1)=\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}}\int_{-\infty}^{y-1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此 $f_1(x,y)=\frac{1}{2}f(\frac{x}{2},y-1)$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)【解】令 $x\to0$ 可得 $f(1)-ef(1)=0,f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\cos x)-ef(\ln(e+x^2))}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{x^2}-e\frac{f[1+\ln(1+\frac{x^2}{e})]-f(1)}{x^2}\right)=-\frac{3}{2}f'(1)=2,\text{所以}$$

$f'(1)=-\frac{3}{4}$，$f(x)$ 为偶函数，$f'(x)$ 为奇函数，从而有 $f(-1)=0$，$f'(-1)=\frac{3}{4}$，故所求的切线方程为 $y=\frac{3}{4}(x+1)$.

(16)（**本小题满分 10 分**）

【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin x-\sin(x-y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos x-\cos(x-y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(x-y)$

$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y+\sin(x-y)$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\cos y-\cos(x-y)$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow\sin x+\sin y=0$

故在区域内部无零点，即内部无极值点，最值点只能在边界上达到.

$f(0,0)=3,f(0,\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2},0)=f(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=1$

故最大值为 3，最小值为 1.

(17)（**本小题满分 10 分**）

【证明】（Ⅰ）由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$，记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$）相应的必有 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（Ⅱ）令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

(18)（本小题满分 10 分）

【解】 $x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}=x\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=x\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}dt$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n},\quad |x|\le 1$$

$$\ln\sqrt{2+x^2}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{x^2}{2})=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n},\quad |x|\le\sqrt{2}$$

合并上面两级数，得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1}{2^n}x^{2n}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}\right)x^{2n}$$

收敛域为 $[-1,1]$，令 $x=1$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}=f(1)+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$$

(19)（本小题满分 10 分）

【解】令 $x=|y|$ 得两条直线 $y=x$ 及 $y=-x$，以这两条直线把 D 分成三个区域 D_1,D_2,D_3，其中 $D_1:0\le x\le 1,x\le y\le 1$；$D_2:0\le x\le 1,-x\le y\le x$；$D_3:0\le x\le 1,-1\le y\le -x$.则

$$I=\iint_{D_1}x^2yd\sigma+\iint_{D_2}x^2xd\sigma+\iint_{D_3}x^2(-y)d\sigma=\int_0^1[\int_x^1 x^2ydy]dx+\int_0^1[\int_{-x}^{x}x^3dy]dx-\int_0^1[\int_{-1}^{-x}x^2ydy]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)dx+2\int_0^1 x^4dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x^2)dx=\frac{8}{15}$$

【另解】由奇偶对称性得 $I=2\iint_D x^2\max(x,y)d\sigma=2[\iint_{D_1}x^2xd\sigma+\iint_{D_2}x^2yd\sigma]=\frac{8}{15}$.

(20)（本小题满分 11 分）

【解】 (1)因为方程组（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解，所以（Ⅰ）与（Ⅲ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ax_1+a^2x_3=0\\ax_2+a^2x_4=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 同

解，那么（Ⅰ）与（Ⅲ）的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\a&0&a^2&0\\0&a&0&a^2\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ 有相同的秩，如 $a=0$　则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$,所以假设 $a\neq 0$

由于 $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\end{pmatrix},\therefore r(A)=3$

又 $B\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&a&-1\\0&0&a&a-1\\0&0&0&2a-1\end{pmatrix}$,当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，$r(B)=3$　此时（Ⅰ）与（Ⅲ）同解，

（Ⅱ）由于 $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-2&1&-2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0&0&1/2\\0&1&0&1/2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$

基础解系 $\eta=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,1\right)^T$，则通解为 $k\eta$.

(21)（本小题满分 11 分）

【解】（Ⅰ）由题设条件知

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\2&4&\cdots&2n\\\cdots&\cdots&\vdots&\vdots\\n&2n&\cdots&n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=\alpha\alpha^T，故 R(A)=1$$

（Ⅱ）因 $A^2=\left(\alpha\alpha^T\right)\left(\alpha\alpha^T\right)=(\alpha^T\alpha)A=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}i^2\right)A,|A|=0,\lambda=0$ 是 A 特征值.

对应特征向量满足 $Ax=\alpha\alpha^Tx=0$，因 $\alpha^T\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2\neq 0$，

故方程组 $\alpha\alpha^Tx=0$ 与 $\alpha^Tx=0$ 是同解方程组，

只需解方程组 $\alpha^Tx=0$，即满足 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$ 的线性无关特征向量为

$\xi_1=\begin{pmatrix}-2&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}^T,\xi_2=\begin{pmatrix}-3&0&1&\cdots&0\end{pmatrix}^T,\cdots,\xi_{n-1}=\begin{pmatrix}-n&0&\cdots&1\end{pmatrix}^T$

由此可知 $\lambda=0$ 至少是 $n-1$ 重根，又 $trA=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda^2\neq 0$.故 A 有一个非零特征值

$\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}i^2\neq 0$，当 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}i^2=\alpha^T\alpha$ 时，由 $(\lambda E-A)x=(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)x=0$，由观察可知 $x=\alpha$ 时，$(\alpha^T\alpha E-\alpha\alpha^T)\alpha=0$，故 $\alpha=(1\quad 2\quad\cdots\quad n)^T=\xi_n$，是对应 $\lambda=\sum_{i=1}^{n}i^2$ 特征向量.

A 有 n 个线性无关特征向量， A 能相似对角化.取

$$P=(\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_{n-1}\quad\xi_n)=\begin{pmatrix}-2 & -3 & \cdots & -n & 1\\ 1 & & & & 2\\ & \ddots & & & \vdots\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & n\end{pmatrix}，则$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \sum_{i=1}^{n}i^2\end{pmatrix}=\Lambda.$$

(22)（本小题满分 11 分）

【解】 X与Y 的可能取值分别-1，0，1；　-1，0，1；

（I） 由于 $X\le Y$，所以 $P(X=i,Y=j)=0\ ,i>j$，

$P(X=-1,Y=-1)=P(\xi=-1,\eta=-1)=0.1$，

$P(X=0,Y=-1)=P(\xi=-1,\eta=0)=0.2$，

$P(X=0,Y=0)=0$，

$P(X=1,Y=-1)$

$=P(\xi=-1,\eta=1)+P(\xi=1,\eta=-1)=0.5$

同理，$P(X=1,Y=0)=0.1$，$P(X=1,Y=1)=0.1$

X \ Y	-1	0	1	p_{ig}
-1	0.1	0	0	0.1
0	0.2	0	0	0.2
1	0.5	0.1	0.1	0.7
p_{gj}	0.8	0.1	0.1	1

（II） $E(X)=0.6,\ E(Y)=-0.7,D(X)=0.44$，

$Cov(X,X+2Y)=D(X)-2Cov(X,Y)$

$=0.44-2\times 0.12=0.2$

(III) $Y=-1$ 时，X 的条件分布律

$X=x_i/Y=-1$	-1	0	1
p_i	1/8	1/4	5/8

(23)（本小题满分 11 分）

【解】（I）由于 $E(X_1Q^2)=E(X_2Q^2)=\cdots=E(X_nQ^2)$，

且 $\bar{X}$与S^2 的独立性，所以

$$E(X_1Q^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_iQ^2)=\frac{1}{n}E(n\bar{X}Q^2)=(n-1)E(\bar{X}S^2)$$

$$=(n-1)E(\bar{X})E(S^2)=(n-1)\mu\sigma^2$$

（Ⅱ）由于 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ □ $\chi^2(n-1)$，及 $\overline{X}$ 与 S^2 的独立性可知：

数学一（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	A	C	A	C	B	C

(1)【解】 $f(x)=\begin{cases}0,|x|>1,\\ \sin\pi x,|x|<1,f'_-(1)=-\pi,f'_+(1)=0\\ 0,x=1\end{cases}$，$f(-1)$ 无定义，答案 C。

(2)【解】 当 $|x-k\pi|\le\arcsin\dfrac{1}{3}$ 时有 $|\sin x|<\dfrac{1}{3}$，故该级数绝对收敛,答案 C

(3)【解】 由题设知 $\varphi(0)=0$，$\varphi'(0)=1$，$f'(0)=0,f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)+\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x}=1$，

故 $x=0$ 是函数 $y=f(x)$ 极小值点。答案 A。

(4)【解】 因为 (x,y)Î D 内部时，$\ln^3(x+y)<\sin^2(x+y)<x+y$，故答案为 C。

(5)【解】答案 A

(6)【略】答案 C

(7)【解】条件概率 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{5}{3}P(AB)$，只要取 $P(AB)$ 的最小值即可。

由于 $1\ge P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，所以

$$P(AB)\ge P(A)+P(B)-1=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}-1=\frac{1}{5}$$

即 $P(A\cup B)=1$ 时，$P(AB)$ 达到最小值 $\dfrac{1}{5}$，所以 $P(A/B)=\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{3}$

（8）【解】设 M_1,M_2 线段的某一端点的距离分别为 X,Y，则线段 M_1M_2 的长度为 $|X-Y|$，那么二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2},0\le x\le a,0\le y\le a,\\ 0\quad,\quad\text{其它}\end{cases}$$

因而所求数学期望为 $E|X-Y|=\dfrac{1}{a^2}\iint\limits_{\substack{0\le x\le a\\0\le y\le a}}|x-y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{a^2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y=\dfrac{a}{3}$

（9）【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x})^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right]^{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以原式

$=e^{\frac{1}{2}}$.

(10)【解】方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，方程 $y''-4y'+4y=1$ 的特解为 $y_1^*=\frac{1}{4}$，方程 $y''-4y'+4y=xe^{2x}$ 的特解可设为 $y_2^*=Q(x)e^{2x}$ 代入可得 $Q''(x)=x$，$Q(x)=\frac{x^3}{6}$，故方程通解为 $y=(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6})e^{2x}+\frac{1}{4}$

(11) 【解】由题设有 $\int_0^1[xf'(x)-f(x)]\,dx=xf(x)\big|_0^1-2\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{3}$，所以 $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

(12) 【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+x^2}f_1'+yf_2',\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{1+x^2}f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$。

(13) 【解】 $|B|=\begin{vmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{vmatrix}=2,B^{-1}=B^*A+A$ 两边左乘 B 得 $E=2A+BA$, 即

$$(B+2E)A=E,\text{则 }A=(B+2E)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(14) 【解】 $P(X+Y\ge 1)=P(X=-1,Y\ge 2)+P(X=0,Y\ge 1)+P(X=1,Y\ge 0)$

$=\frac{1}{3}(1+e^{-1}+e^{-2})$。

(15)【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}]\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-(1+bt)e^{-2t}}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+at^2}-1}{t^2}-\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+bt)e^{-2t}-1}{t^2}=\frac{a}{2}-\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(b-2-2bt)e^{-2t}}{2t}=1$，因此必有 $b=2,\frac{a}{2}+b=1,a=-2$。

(16)【解】(Ⅰ) 切平面的法向量为

$\vec{n}=\{2(x-y),2(y-x),-2z\}\big|_{(1,0,0)}=\{2,-2,0\},\pi:x-y-1=0$；

(Ⅱ) 原点到 S 上点的最短距离平方可以归结为求函数 $u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 满足条件 $(x-y)^2-z^2=1$，令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1]$，由 $\begin{cases}F_x'=2x+2\lambda(x-y)=0\\F_y'=2y-2\lambda(x-y)=0\end{cases}$ 解得 $x=-y$ 带入到 $(x-y)^2-z^2=1$ 中可得 $4x^2-z^2=1$，相应的有 $u=f(x,y,z)=6x^2-1$，因 $(x,y,z)\in S,x=-y$ 时有 $4x^2=z^2+1\ge 1$，因此函数 $u=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 满足条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 的最小值为 $u=6x^2-1\big|_{x^2=\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，即

原点到S的距离为$\frac{1}{\sqrt{2}}$，而原点到π的距离为$d=\frac{1}{\sqrt{2}}$，因而该结论成立。

（17）【解】区域D关于直线$y=x$对称，令$D_1: x\le x^2+y^2\le 2y, y\le x$，则有

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy}=2\iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy}$$

$$=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta}^{2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}r}{r\sin\theta\cos\theta}=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(2\tan\theta)\mathrm{d}(\tan\theta)}{\tan\theta}$$

$$=\ln^2(2\tan\theta)\Big|_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}}=\ln^2 2。$$

（18）【证明】（Ⅰ）由$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$可知$\exists x_0\in(a,b)$使得$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<0$从而有$f(x_0)<0$,对函数$f(x)$在$[x_0,b]$上应用连续函数的零点定理知可知$\exists\xi\in(a,b)$内，使$f(\xi)=0$；

（Ⅱ）对函数$f(x)$分别在区间$[a,x_0]$及$[x_0,b]$上应用 Lagrange 中值定理知$\exists x_1\in(a,x_0)$及$x_2\in(x_0,b)$, 使得$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<0, f'(x_2)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$，再对函数$f'(x)$在区间$[x_1,x_2]$应用 Lagrange 中值定理知$\exists\eta\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$使得$f''(\eta)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}>0$，命题得证。

（19）【解】由已知条件可得微分方程

$$f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x$$

据一阶微分方程解的公式得到

$$f_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c)$$

由已知$f_n(1)=\frac{e}{n}$，得$c=0$，故$f_n(1)=\frac{x^ne^x}{n}$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，记$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$，当$x\in(-1,1)$时，有$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$，当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(-1)=-e^{-1}\ln 2$，因此，当$-1\le x<1$时，所求级数和为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-e^x\ln(1-x)$。

（20）【解】（Ⅰ）由题设β_1,β_2,β_3均为$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，$\boldsymbol{B}\ne\boldsymbol{0}$，知向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性相关，否则$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$基础解系所含向量个数大于等于 3，因而必有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，矛盾，于是有$0=|(\beta_1,\beta_2,\beta_3)|=\begin{vmatrix}0&a&b\\1&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=3b-a$，故$a=3b$，因为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\beta_3$有解，所以

$r(A)=r(A\ \beta_3)$，$(A\ \beta_3)\to\begin{pmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&\dfrac{5-b}{3}\end{pmatrix}$，由 $r(A)=r(A,\beta_3)$ 可得

$\dfrac{5-b}{3}=0, b=5, a=15$；

(II) 由 β_1,β_2 的秩为 2 知 β_1,β_2 线性无关，故 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 至少有两个线性无关解 β_1,β_2，又 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}, r(\boldsymbol{B})\geq 1$，　因而方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 基础解系由 $3-r(\boldsymbol{B})\leq 2$ 个线性无关解向量组成，于是 β_1,β_2 可作为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 基础解系。故通解为 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=k_1(0,1,-1)^T+k_2(15,2,1)^T$.

(21)【解】(I) 二次型 f 矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&a+4&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$，　$\Lambda=\begin{pmatrix}b&&\\&5&\\&&-1\end{pmatrix}$，

因 A 与 Λ 相似，所以 $\begin{cases}\mathrm{tr}\,A=\mathrm{tr}\,\Lambda,\\|A|=|\Lambda|\end{cases}$，$\begin{cases}1+a+4+3=b+5-1\\3a-4=-5b\end{cases}$，由此可得 $\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}$

A 特征值 $2,5,-1$，依次解方程组 $(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(5E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},(-E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 可得对应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$，规范化后可得

$\eta_1=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\eta_2=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\eta_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$，所求的正交变换矩阵为 $\boldsymbol{U}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，相应的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Uy}$；

(II) $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 的顺序主子式 $\Delta_1=1>0,\Delta_2=a>0,\Delta_3=|A|=3a-4>0$，由此可得 $a>\dfrac{4}{3}$.

(22)【解】(I) $Y=X^2-1$ 的分布函数为 $F_Y(y)=P\{X^2-1\leq y\}$，那么有

1) $y\leq -1$ 时 $F_Y(y)=0$，$y\geq 3$ 时 $F_Y(y)=1$

2) $-1<y<0$, $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y+1}\leq X\leq\sqrt{y+1}\}=2\int_0^{\sqrt{y+1}}\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y+1}}x\,\mathrm{d}x$

3) $0\leq y<3$, $F_Y(y)=P\{-\sqrt{y+1}\leq X\leq\sqrt{y+1}\}=\int_{-1}^{1}\dfrac{|x|}{2}dx+\int_1^{\sqrt{y+1}}\dfrac{1}{2}dx$

所以对应的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1\leq y<0,\\ \dfrac{1}{4\sqrt{y+1}}, & 0\leq y<3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2-1)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)E(X^2)$,

$$E(X)=\int_{-1}^{2}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\frac{|x|}{2}dx+\int_{1}^{2}\frac{x}{2}dx=\frac{3}{4},$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2\frac{|x|}{2}dx+\int_{1}^{2}\frac{x^2}{2}dx=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{2}\frac{x^2}{2}dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}=\frac{17}{12},$$

$$E(X^3)=\int_{-1}^{1}x^3\frac{|x|}{2}dx+\int_{1}^{2}\frac{x^3}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x^3dx=\frac{15}{8},$$

则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(X^3)-E(X)E(X^2)=\frac{15}{8}-\frac{3}{4}\times\frac{17}{12}=\frac{13}{16}$.

（23）【解】（Ⅰ）X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}ae^{-a(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本的一组观察值，则似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}ae^{-(x_i-\theta)}=a^ne^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)},x_i>\theta$, $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta))=n>0$，$L$ 关于 θ 单调增，$x_i>\theta\,(i=1,2\mathrm{L}\ ,n)$，要使 L 最大，可取 $\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$ 为 θ 的最大似然估计；

（Ⅱ）$\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$ 的分布函数为 $F_{\hat{\theta}_L}(z)=1-(1-F(z))^n=\begin{cases}1-e^{-na(z-\theta)}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$，所以它的概率密度函数为 $f_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}ane^{-na(z-\theta))}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$；

（Ⅲ）$E(\hat{\theta}_L)=an\int_{\theta}^{+\infty}ze^{-na(z-\theta)}dz=\theta+\frac{1}{na}$，所以 $\hat{\theta}$ 不是 θ 的无偏估计。

数学三（模拟 5）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	A	D	A	D

(1)【解】由题设知函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，又 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时有 $f(x)-f(a)\ge0$；因此有

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\frac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\le0。$$

【答案】(D)

(2)【略】(C)

(3)【解】

$$原式\xlongequal{t=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x}}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,\mathrm{d}(\tan^2t)=t\tan^2t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2}-1$$

【答案】(B)

(4)【答案】(C)

(5)【答案】(A)

(6) 【解】因为 $r(A)=n$,所以方程组 $AX=0$ 只有零解,而由 $AB=O$ 得 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解,故若 $AB=O$,则 $B=O$;

令 $BX=O, ABX=0$ 为两个方程组,显然若 $BX=O$,则 $ABX=0$,反之,若 $ABX=0$,因为 $r(A)=n$,所以方程组 $AX=0$ 只有零解,于是 $BX=O$,即方程组 $BX=O$ 与 $ABX=0$ 为同解方程组,故 $r(AB)=r(B)$;

因为 $r(A)=n$,所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$,即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$,

令 $B=(E_n\quad O)P$,则 $BA=E$;

令 $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, B=(1\quad 1\quad 1), r(A)=0$,但 $r(BA)=0\neq r(B)=1$,【答案】(D).

(7) 【答案】(A)

(8) 【答案】(D)

(9)【答案】 $-\dfrac{2\varphi''(2x+1)}{(1+\varphi')^3}$。

(10) 【答案】 $x=y(c-e^y)$

(11)【答案】 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\frac{1}{y}}^{2}f(x,y)dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}dy\int_{y^2}^{2}f(x,y)dx$

(12) 【解】 $y'=\dfrac{3(1+t^2)}{2t}, y''=\dfrac{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{t^2})}{2t}=\dfrac{3(t^2-1)}{4t^3}$, $y''|_{t=1}=0$, y'' 在 $t=1$ 的两侧异号,故 $t=1$ 为曲线的拐点.即拐点为 $(1,4)$.

(13) 【答案】 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1\quad 0)^T, \gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{51}}(5\quad 4\quad 1\quad 3)^T$

(14) 【解】 由于 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-2y}, & y\ge 0\end{cases}$ 由独立性，所以 $Z=\max\{X,Y\}$

的分布函数是 $F_{\max}(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ z(1-e^{-2z}), & 0\le z<1\\ 1-e^{-2z}, & z\ge 1\end{cases}$，则概率

$P(\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$。

（15） 【解】在椭圆上任取一点 $P(x,y)$，椭圆中心为 $O(0,0)$，O 点到 P 点距离最大值是半长轴 $d_{\max}$，O 点到 P 点距离最小值是半短轴 $d_{\min}$，椭圆面积等于 $\pi\, d_{\max}\, d_{\min}$，问题化为求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在约束条件 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 下的最值点，计算后得 $d_{\max}=3$，

$d_{\min}=1$，面积等于3π。

（16）【解】$\because f_0(x)$在$[0,a]$上连续，因而在$[0,a]$上有最值，从而$|f_0(x)|$在$[0,a]$上也有最大值，设

$M=\max\limits_{0\le x\le a}\{|f_0(x)|\}$

则 $$|f_1(x)|=\left|\int_0^x f_0(t)dt\right|\le\int_0^x|f_0(t)|dt\le Mx$$

同理 $$|f_2(x)|=\left|\int_0^x f_1(t)dt\right|\le\int_0^x|f_1(t)|dt\le\frac{1}{2!}Mx^2$$

$$|f_3(x)|=\left|\int_0^x f_2(t)dt\right|\le\int_0^x|f_2(t)|dt\le\frac{1}{3!}Mx^3$$

可得：$|f_n(x)|\le\dfrac{1}{n!}Mx^n$

因为级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{n!}x^n$在 $[0,a]$ 上收敛，从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|f_n(x)|$收敛

所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$绝对收敛。

（17）【解】$f(x)=\int_0^x(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}(t-x)\varphi(t)\mathrm{d}t$

$=x\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_x^{2x}t\varphi(t)\mathrm{d}t$，

$f'(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t+2x\varphi(x)$，

所以$f'(T)=\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_T^{2T}\varphi(t)\mathrm{d}t+2T\varphi(T)$，

因$\varphi(x)$周期为T的周期函数，故有$\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_T^{2T}\varphi(t)\mathrm{d}t$，

所以$f'(T)=2T$。

（18）【证明】（反证法）若$f(x)$在(a,b)内有两个或更多的零点，则$\exists x_1\in(a,b),x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2,f(x_1)=f(x_2)=0$。令$F(x)=e^xf(x)$，则有$F(x_1)=F(x_2)=0$，由 Rolle 定理知$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$使得$F'(\xi)=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)]=0$，因而有$f(\xi)+f'(\xi)=0$，与$f(x)+f'(x)\ne0$矛盾。

（19）【解】首先解出方程的一般解，得：$y(x)=e^{-kx}\left[\int_0^x f(t)e^{-kt}dt+c\right]$

如果有周期为T的周期函数解，则其解必满足周期条件：

$\forall x\, y(x+T)\equiv y(x)$，今

$$y(x+T)=e^{-(k+T)}\left[\int_0^{x+T}f(t)e^{kt}dt+c\right]$$

$$=e^{-kx}\left[\int_0^{x+T}f(t)e^{k(t-T)}dt+ce^{kt}\right]$$

做变换$u=t-T$，并利用 $f(u+T)=f(u)$，得

$$y(x+T)=e^{-kx}\left[\int_{-T}^{x}f(u)e^{ku}du+ce^{-kT}\right]$$

$$y(x+T)-y(x)=e^{-kx}\left[\int_{-T}^{x}f(u)e^{ku}du-\int_{0}^{x}f(t)e^{kt}dt+c(e^{-kT}-1)\right]$$

$$=e^{-kx}\left[\int_{-T}^{0}f(t)e^{kt}dt+c(e^{-kT}-1)\right]$$

由于 $y(x+T)\equiv y(x)$ 得　$\int_{-T}^{0}f(t)e^{kt}dt+c(e^{-kT}-1)=0$

即　$c=\dfrac{1}{1-e^{kt}}\int_{-T}^{0}f(t)e^{kt}dt$

由于用周期条件，确能确定唯一的常数c，因而其解就是所求之唯一的周期解，证毕

（20）【解】（I）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 0\\ -8 & \lambda-2 & 0\\ 0 & -a & \lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=6$　　$\lambda_3=-2$ 为特征值，由已知 A 可对角化，故$\lambda=6$必有 2 个线性无关的特征向量，由　$R(6E-A)=R\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & -a & 0\end{pmatrix}=1$，及$a=0$

（II）因此 $x^TAx=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$，对应二次型矩阵 $A_1=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

由$|\lambda E-A_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$，知二次型　$x^TAx=x^TA_1x$特征值 6，7，-3

对$\lambda=6$　　由$(6E-A_1)x=0$　　得　$\alpha_1=(0.0.1)^T$

对$\lambda=7$　　由$(7E-A_1)x=0$　　得　$\alpha_2=(1.1.0)^T$

对$\lambda=-3$　　由$(-3E-A_1)x=0$　　得　$\alpha_3=(1.-1.0)^T$

单位化　$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　$\beta_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

令 $P=(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

又 A^2 特征值为 6^2，7^2， 3^2

经过 $x=Py$ 有 $x^TA^2x=36y_1^2+49y_2^2+9y_3^2$ 。

（21）【解】(I)若 $\alpha_1\ \alpha_2$ 均为 A 属于 0 的特征向量 则

$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=0$

由题设 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2\neq 0$ 矛盾！

类似 若 α_1,α_2 均为 A 属于 1 特征向量。则

$A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2\neq\alpha_2$ 也与题设矛盾

故 $\alpha_1\ \alpha_2$ 是 A 的属于不同特征值的特征向量

又 $A(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_2$ 知 α_1 是 A 属于 0 的特征向量，α_2 是 A 属于 1 的特征向量。因 A 是实对称矩阵 故 $\alpha_1\ \alpha_2$ 线性无关。

(II) 因 A 是实对称矩阵。故 A 与对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 相似。从而秩（A）=秩$(\Lambda)=2$。表明齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系所含向量个数 $3-$秩$(A)=1$

现在：$A\alpha_1=0$ $A\alpha_2=\alpha_2$ 故 α_1 是 $Ax=0$ 基础解系，α_2 是 $Ax=\alpha_2$ 的一个特解。

$\therefore Ax=\alpha_2$ 通解 $\alpha_2+k\alpha_1$。

（22）【解】: 由题可知 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，

(I) 概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}=1-2\int_0^{1/2}dx\int_0^{\frac{1}{2}-x}dy=\frac{3}{4}$；

(II) $Z=|X-Y|$ 的对应函数为 $z=|x-y|$ 的范围 $0<z<1$

分段讨论 $z<0,F_Z(z)=0$; $z\ge 0,F_Z(z)=1$

$0\le z<1,F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=\iint\limits_{|x-y|\le z}dxdy=1-(1-z)^2$

则 $Z=|X-Y|$ 的密度函数为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0\le z<1\\ 0, & 其他\end{cases}$；

(III) $E(Z)=E(|X-Y|)=\iint\limits_D|x-y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x-y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x-y)dxdy$

$=2\int_0^1dx\int_0^x(x-y)dy=\frac{1}{3}$,

$E(Z^2)=E(|X-Y|^2)=\iint\limits_D(x-y)^2dxdy=\int_0^1dx\int_0^1(x-y)^2dy=-\int_0^1dx\int_0^1(x-y)^2d(x-y)$

$=\frac{1}{3}\int_0^1(x^3-(x-1)^3)dx=\frac{1}{6}$

$$D(Z)=D(|X-Y|)=\frac{1}{6}-(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{18}$$

注：也可直接用 $f_Z(z)$ 求 $Z=|X-Y|$ 的均值与方差。

（23）【解】 设 X 表示 400 件产品中一等品的件数，则 $X\sim B(400,p_0)$，$p_0=0.1$

所以 $E(X)=40$, $D(X)=36$,，试求概率

$$P(\left|\frac{X}{400}-\frac{1}{10}\right|<0.02)=P(|X-40|<0.02\times 400)$$

（I） 由切比契夫不等式

$$P(\left|\frac{X}{400}-\frac{1}{10}\right|<0.02)=P(|X-40|<8)\geq 1-\frac{D(X)}{8^2}=1-\frac{36}{64}=0.4375$$

（II） 由中心极限定理

$$P(\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{10}\right|<0.02)=P(\frac{|X-0.1n|}{\sqrt{0.09n}}<\frac{0.02}{\sqrt{0.09n}}n)\approx 2\Phi(\frac{0.02}{0.3}\sqrt{n})-1\geq 0.95,$$

$\Phi(\frac{0.02}{0.3}\sqrt{n})\geq 0.975=\Phi(1.96)$ 由于 $\Phi(x)$ 单调增，则 $\frac{0.02}{0.3}\sqrt{n}\geq 1.96$, $\sqrt{n}\geq 29.4$

n 不小于 864.36，即至少要取 865 次。