绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-xf(x)}{\ln(1+x^2)}=0$，则（ ）．

（A） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导　　（B） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

（C） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D） $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1[\int_x^1[f(t)+f(x)]dt]dx=$（ ）．

（A） $\int_0^1 f(x)dx$　　（B） $\int_0^1 xf(x)dx$　　（C） $\int_0^1(1-x)f(x)dx$　　（D） $\int_0^1(1-xf(x))dx$

（3）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,n=1,2,\cdots$， θ 为常数，且 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\sin^n\theta$ （ ）．

（A）发散　　（B）条件收敛　　（C）绝对收敛　　（D）敛散性不定

（4）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则下列说法正确的是（ ）．

（A） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，且偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均不存在

（B） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均存在

（C） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均存在

（D） $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（5）已知三阶矩阵 A 满足 $A^2=E$，但 $A\neq\pm E$，则下列关系式成立的是（ ）．

（A） $r(A+E)=1$　　（B） $r(A+E)=2$

（C） $r(A-E)\cdot[r(A-E)-2]=0$　　（D） $[r(A+E)-1]\cdot[r(A-E)-1]=0$

（6）设三阶矩阵 A 的特征值为 $0,1,-1$，则下列结论中正确的个数为（ ）．

①A 不可逆；　　②A 的主对角线元素之和为 0；

③A 的特征值 $1,-1$ 所对应的特征向量正交；　　④$Ax=0$ 的基础解系中含有两个解向量．

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，则 $A\cup B-\overline{A\cup C}=$（ ）．

（A） $\overline{B}\cup C$　　（B） $\overline{A}(\overline{B}\cup C)$　　（C） $\overline{A}\overline{B}\cup C$　　（D） $A\cup\overline{B}\cup C$

（8）设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(1,2;1,4;\frac{1}{2})$，且 $P\{aX+bY<1\}=\frac{1}{2}$，$Cov(X,aX+bY)=0$，则（　　）.

（A）$a=-1,b=1$　　（B）$a=1,b=1$　　（C）$a=0,b=\frac{1}{2}$　　（D）$a=3,b=-1$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，其反函数为 $y=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+x-1}{x^2}=1$，则 $\varphi''(1)=$__________.

（10）设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ e^{-x^2}, & x>0,\end{cases}$ 则曲线 $y=\int_0^x f(t)dt$ 的拐点个数为__________.

（11）设方程 $f(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 确定了 u 为 x,y,z 的非零函数，其中 f 为可微函数，且 $f_1'+f_2'+f_3'\neq 0$，则当 $xyz\neq 0$ 时，$\frac{u}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{u}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=$__________.

（12）设函数 $f(x,y)$ 连续，则将极坐标下二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

化为直角坐标系下的二次积分为__________.

（13）设 A 是三阶实对称矩阵，若存在正交阵 $Q=(q_1,q_2,q_3)$，使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 4\end{pmatrix}$，则 $A-q_1q_1^T$ 的特征值是__________.

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，$g(x)$ 为单调递减函数，其反函数为 $g^{-1}(x)$，则 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）**（本题满分 10 分）**（Ⅰ）当 $x>0$ 时，证明：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结论，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$.

（16）**（本题满分 10 分）**（Ⅰ）如果 $y=xe^x$ 为微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，求常数 p,q；

（Ⅱ）求微分方程 $y''+py'+qy=xe^{\lambda x}$ 的通解，其中 λ 为常数.

(17)(**本题满分 10 分**)求函数 $z=f(x,y)=3xy-7x-3y$ 在由抛物线 $y=5-x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成的有界闭区域 D 上的最大值与最小值.

(18)(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)(b-a)<f(b)-f(a)<\ 2[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]$

(Ⅰ)记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，证明存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$；

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(19)(**本题满分 10 分**)设 $f(x,y)=\begin{cases} xy^2, & x^2+y^2\ge 2y, \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{其他}, \end{cases}$ $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, x\le y\le 2\}$，

求 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

(20)(**本题满分 11 分**)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \\ a & a \end{pmatrix}$，且 $a\ne b$. 讨论 a 与 b 取何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解？在 $AX=B$ 有解时，求其解.

(21)(**本题满分 11 分**)设 A,B,C 均为三阶矩阵，且 $AB=-B$，$CA^T=C$. 其中 $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，

$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.(Ⅰ)求 A；(Ⅱ)证明对任意的 3 维列向量 ξ，必有 $A^{100}\xi=\xi$.

(22)(**本题满分 11 分**)在区间 $[0,3]$ 上随机地取一个实数 X . 若 $0\le X\le 1$，则随机变量 Y 在 $[0,X]$ 上服从均匀分布，若 $1<X\le 3$，则 Y 在 $[X,3]$ 上服从均匀分布，(Ⅰ)求 (X,Y) 的概率密度函数 $f(x,y)$；(Ⅱ)求 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

(23)(**本题满分 11 分**)设总体 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases} 0, & x<0\text{或}y<0, \\ p(1-e^{-\lambda y^2}), & 0\le x<1, y\ge 0, \\ 1-e^{-\lambda y^2}, & x\ge 1, y\ge 0. \end{cases}$

其中 p,λ 为未知参数，且 $0<p<1, \lambda>0$.(Ⅰ)分别求 X 和 Y 的概率分布；

(Ⅱ)利用来自总体 X 的简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，求 p 的矩估计量 $\hat{p}_M$；

(Ⅲ)利用来自总体 Y 的简单随机样本 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$，求 λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}_L$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{|x|}{x-1}$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）曲线有水平渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$　　（B）曲线有水平渐近线 $y=-\frac{\pi}{4}$

（C）曲线有铅直渐近线 $x=0$　　（D）曲线有铅直渐近线 $x=1$

（2）当 $0<a<\frac{1}{2e}$ 时，方程 $ax^2=\ln x$ 的实根个数为（　　）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（3）设区域 D 是由直线 $x=\frac{\pi}{4}, y=-1$ 及曲线 $y=\tan x$ 所围成，D_1 是 D 位于第三象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+x\tan xy)dxdy=$（　　）.

（A）$2\iint\limits_{D_1} xydxdy$　（B）$2\iint\limits_{D_1} x\tan xydxdy$　（C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+x\tan xy)dxdy$　（D）0

（4）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.

（A）可微且必取极值　　（B）可微但未必取极值

（C）不可微但必取极值　　（D）不可微但未必取极值

（5）设 A 为 n 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行，再将第二列减去第一列得到矩阵 B，则 A,B（　　）.

（A）等价未必相似　（B）等价且相似　（C）行向量组等价　（D）列向量组等价

（6）设 A 为四阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，$\lambda_4=3$，相应的特征向量依次为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 p_1,p_2 线性无关，令 $P=(4p_4,5p_3,p_1+p_2,p_1-p_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&2&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}3&&&\\&2&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 X 和 Y 的概率分布分别为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0.7 & 0.3\end{pmatrix}$，且 X 与 Y 不相关，则随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{Y=-1\}$（　　）.

（A）互不相容　（B）相互对立　（C）相互独立　（D）不相互独立

（8）设随机变量 (X,Y) 在区域 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$ 上服从均匀分布，$Z=\begin{cases}1, & X+Y\le 1,\\ X+Y, & X+Y>1,\end{cases}$ 则 $EZ=$（　　）.

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）1　（D）$\frac{7}{6}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz+e^{yz}=e-1$ 所确定，则 $du|_{(-1,1,1)}=$______.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)+\frac{2x}{x^2+1}\int_0^x f(t)dt=1$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$______.

（11）设函数 $\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$，则 $\varphi(x)+\varphi(-x)-\frac{1}{2}\varphi(x^2)=$______.

（12）利用变换 $u=x,v=\frac{y}{x}$，可把方程 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ 化为______.

（13）设 A 为四阶实对称阵，$r(A-4E)=1$，A 的各行元素之和为 0，则 $r(A)=$______.

（14）设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从参数为 1 的指数分布，则 $P\{XY-X-Y<-1\}=$______.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**设函数 $z=f(x-y,f(x,y))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，且 f 在点 $(1,1)$ 处取得极小值 $f(1,1)=0$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（16）**（本题满分10分）**设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义.（Ⅰ）若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并取得最值，证明 $f'(x_0)=0$；（Ⅱ）若 $f(x)$ 为周期 $T(T>0)$ 的可导周期函数，证明存在 $\xi_1,\xi_2\in[0,T),\xi_1\ne\xi_2$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

（17）（**本题满分10分**）在抛物线 $y=1-x^2$ 上求一点 $P(x_0,y_0)$ $(0<x_0<1)$，使抛物线与它在 P 点处的切线及两个坐标轴所围图形的面积最小，并求最小面积.

（18）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $\iint\limits_D [xy+(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}]d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 及圆弧 $x^2+y^2=1$（$x\geq 0,y\geq 0$）所围成的区域.

（19）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 2^n}(x-1)^n$ 的收敛域及和函数.

（20）（**本题满分 11 分**）设 A 为三阶实方阵，三维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_3,\alpha_3\neq 0$，（Ⅰ）证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；（Ⅱ）证明 A 必不为实对称矩阵.

（21）（**本题满分 11 分**）设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，其中 E 为三阶单位阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，求 B^T 的特征值与特征向量.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X 和 Y 相互独立且同分布，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

（Ⅰ）求已知 $X+Y=n\ (n\geq 2)$ 条件下，X 的分布律；（Ⅱ）求 $P\{X+Y\geq n\}\ (n\geq 2)$.

（23）（**本题满分 11 分**）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_9)$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.（Ⅰ）判断统计量 $\dfrac{9\bar{X}^2}{S^2}$ 服从什么分布，并说明理由.（Ⅱ）求 $E[(\bar{X}S^2)^2]$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的增量 Δy 满足 $\Delta y=1-e^{2\Delta x}+\Delta x\sin\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 是 $dy|_{x=0}$ 的（　　）.

（A）等价无穷小　（B）同阶但不等价的无穷小　（C）高阶无穷小　（D）低阶无穷小

（2）关于定积分的如下结论

① $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$，其中 $f(x)$ 为正值连续函数，$a>0$；

② $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^5}\,dx=\int_0^1 \sqrt[5]{1-x^3}\,dx$，

则有（　　）.

（A）①②均正确　（B）①②均不正确　（C）①正确，②不正确　（D）①不正确，②正确

（3）设有无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一个收敛

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 中至少有一个发散

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散

（4）设 $I_1=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos^2 y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(\sin x^2+\cos y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D(\sin^2 x+\cos y^2)d\sigma$，其中 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$，则 I_1,I_2,I_3 三者的大小关系为（　　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_1<I_3<I_2$　（D）$I_2<I_3<I_1$

（5）齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解都是 $Ax=0$ 的解的一个充分条件为（　　）.

（A）B 的列向量都由 A 的列向量线性表示　（B）A 的列向量都由 B 的列向量线性表示

（C）B 的行向量都由 A 的行向量线性表示　（D）A 的行向量都由 B 的行向量线性表示

（6）设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，α,β线性无关，则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$$

的规范型为（　　）.

（A）y_1^2　（B）$y_1^2+y_2^2$　（C）$y_1^2-y_2^2$　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$

（7）设$n\,(n>3)$个乒乓球中有3只黄球，$n-3$只白球，将其随机放入编号为$1,2,\cdots,n$的n个盒子中，一个盒子放入一个球．现从第1号盒子开始逐个打开，直到出现两个黄球为止．记X为所打开的盒子数，则$EX=$（　　）.

（A）$\dfrac{n-2}{2}$　（B）$\dfrac{n-1}{2}$　（C）$\dfrac{n}{2}$　（D）$\dfrac{n+1}{2}$

（8）设$(X_1,X_2,\cdots,X_4)$是来自总体$X\sim N(0,1)$的简单随机样本，$Y=\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2}$．对于给定的$\alpha\,(0<\alpha<1)$，数$y_\alpha$满足$P\{|Y|<y_\alpha\}=\alpha$，则有（　　）.

（A）$y_\alpha y_{1-\alpha}=1$　（B）$y_\alpha+y_{1-\alpha}=1$　（C）$y_{\frac{\alpha}{2}}y_{1-\alpha}=1$　（D）$y_{\frac{\alpha}{2}}y_{1-\frac{\alpha}{2}}=1$

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则$f^{(100)}(0)=$__________.

（10）$\int_{-1}^{1}x(1+x^{2017})(e^x-e^{-x})dx=$__________.

（11）曲线$y=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{\lambda x}}$及直线$y=\dfrac{1}{2}x$及$x=1$围成平面图形的面积为__________.

（12）设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数均存在，且$f_x'(x_0,y_0)=1$，$f_y'(x_0,y_0)=2$，则极限$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0-3h)}{h}=$__________.

（13）若$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵，则$(E+A+A^2)^{-1}=$__________.

（14）设随机变量X的密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}g(x), & |x|\le1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y的密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}g(-y), & |y|\le1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

其中$g(x)$在$[-1,1]$上连续，若$DX=1,\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，则由切比雪夫不等式得$P\{|X+Y|<2\}\ge$______.

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设 $x \ge a \ge 1$，证明：（Ⅰ）$\ln a \ge \dfrac{2(a-1)}{a+1}$；（Ⅱ）$a(x+1)\ln a \ge (a+x)(a-1)$.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且满足条件 $f'(x)=\dfrac{1}{2}g(x)$，$g'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)$，$f(0)=0$，$g(x)\neq 0$.（Ⅰ）求 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的表达式；（Ⅱ）求曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}(x\ge 0)$ 绕直线 $y=1$ 旋转一周所生成立体的体积.

（17）（**本题满分 10 分**）已知 $df(x,y)=-(1+e^y)\sin x dx+(\cos x-1-y)e^y dy$，$f(0,0)=2$，求函数 $f(x,y)$ 的极值.

（18）（**本题满分 10 分**）计算积分 $I=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+e^{x-\frac{1}{x}})(1+x^2)}$.

（19）（**本题满分 10 分**）计算 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{3}{16}}\min\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\}dxdy$.

（20）（**本题满分 11 分**）已知三阶方阵 A 的第一行元素为 $a,b,c\ (a\neq 0)$，且 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&6&2\\3&6&10&4\end{pmatrix}$. 记 $\xi_1=\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}$. 证明：（Ⅰ）$\xi_1,\xi_2$ 都为线性方程组 $Ax=0$ 的解；（Ⅱ）B 的列向量组与 ξ_1,ξ_2 等价.

（21）（**本题满分 11 分**）已知 A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$，$AB=2B$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求正交阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵；（Ⅱ）求 A^n.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 X 和 Y 均服从 $N(0,1)$，Z 的分布律为 $P\{Z=0\}=P\{Z=1\}=\dfrac{1}{2}$，$T=(X^2+Y^2)Z$，（Ⅰ）求 T 的分布函数 $F_T(t)$；（Ⅱ）求 ET.

（23）（**本题满分 11 分**）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，（Ⅰ）问常数 k_1 取何值时，$E(k_1\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|)=\sigma$？（Ⅱ）问常数 k_2 取何值时，$E(k_2(\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|)^2)=\sigma^2$？

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（四）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\dfrac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+x-2)}$，则 $f(x)$ 的可去间断点、跳跃间断点、第二类间断点分别为(　　).

(A) $x=-2,x=0,x=1$　　(B) $x=0,x=1,x=-2$

(C) $x=0,x=-2,x=1$　　(D) $x=1,x=0,x=-2$

(2) 方程 $\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt=0$ 的实根个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(3) 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则下列结论正确的个数为（　　）.

①沿直线 $y=kx$，k 为任意实数，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)$ 存在；　②极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 存在；

③偏导数 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在且相等；　④ $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(4) 设函数 $f(x)$ 单调连续，$f(0)=0$，$\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则对任意的 t，有（　　）.

(A) $\int_0^t\varphi(x)dx=\int_0^t f(x)dx$　　(B) $\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx=\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx$

(C) $\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx+\int_0^t f(x)dx=t\varphi(t)$　　(D) $\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx+\int_0^t f(x)dx=tf(t)$

(5) 设 A 合同于 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，则（　　）.

(A) $|A|=|B|$　(B) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值　(C) A 为对称阵　(D) A 必合同于单位矩阵

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵 $(n>m)$，$r(A)=m$，B 是 $n\times(n-m)$ 矩阵，$r(B)=n-m$ 且 $AB=O$，若 η 是 $Ax=0$ 的解，则线性方程组 $By=\eta$（　　）.

(A) 无解　　(B) 有无穷多解　　(C) 有唯一解　　(D) 解的情况不能确定

(7) 设 A,B 为两个随机事件，$0<P(A)<1$，则必有 $1-P(B|\overline{A})$（　　）.

(A) $=P(B|A)$　　(B) $\le\dfrac{1-P(B)}{P(\overline{A})}$　　(C) $\le1-\dfrac{P(B)}{P(\overline{A})}$　　(D) $\le1-\dfrac{P(\overline{A}|B)}{P(\overline{A})}$

（8）设随机变量 $X \sim U[0,\frac{3}{2}]$，$Y=[X]$，其中$[\cdot]$表示取整函数，则 X 和 Y 的相关系数为（　　）.

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{\sqrt{6}}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $f(x)$ 是以 4 为周期的奇函数，且 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x^3)+f(x^2)}{x-2}=$___________.

（10）$\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$___________.

（11）设 $u=xye^{x+y}$，若 m,n 为自然数，则有 $\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=$___________.

（12）设 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2, y\le -x\}$，求 $\iint\limits_D\frac{x}{(1+x^2)y^2}d\sigma=$ ___________.

（13）设 A 是 3 阶矩阵，若线性方程组 $Ax=(3,3,3)^T$ 的通解为 $k_1(-1,2,-1)^T+k_2(0,-1,1)^T+(1,1,1)^T$，其中 k_1,k_2 是任意常数，则 A 的特征值为___________.

（14）设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，均服从$[0,1]$上的均匀分布，$X=\min\{\max\{X_1,X_2\},X_3\}$，则当 $0\le x\le 1$ 时，X 的密度函数为 $f_X(x)=$___________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)\le 0$，且 $f(x)$ 在点 $x=x_0\in[a,b]$ 处取得最大值.（Ⅰ）对任意的 $x\in[a,b]$，证明 $f(x_0)\le f(x)+f'(x)(x_0-x)$；（Ⅱ）对任意的 $x\in[a,b]$，证明 $f(x)\le\frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

（16）**（本题满分 10 分）**设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数，求 $dz\big|_{(0,0)}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}$.

（17）（**本题满分 10 分**）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$的和.

（18）（**本题满分 10 分**）某公司第t年有净资产$W=W(t)$（万元），且资产以每年0.05的速度连续增长．同时，公司每年支付职工工资 300 万元.

（Ⅰ）建立净资产$W(t)$所满足的一阶微分方程；

（Ⅱ）如果净资产的初始值为W_0，求出$W(t)$的表达式；

（Ⅲ）讨论当W_0分别为5000万元，6000万元，7000万元时，净资产$W(t)$的变化特征.

（19）（**本题满分 10 分**）设$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=1$，$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,0)}=2x$，$f(0,y)=y^2$，计算$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中$D$是由圆$x^2+y^2=4$和$(x+1)^2+y^2=1$所围成的平面区域.

（20）（**本题满分 11 分**）已知齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\7\end{pmatrix}$，$Bx=0$的基础解系为$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，求$Ax=0$与$Bx=0$的非零公共解.

（21）（**本题满分 11 分**）已知三阶矩阵A满足$|A-E|=|A-2E|=|A+E|=a$.

（Ⅰ）当$a=0$时，求$|A+3E|$；　　（Ⅱ）当$a=2$时，求$|A+3E|$.

（22）（**本题满分 11 分**）设随机变量$X_i\sim U[0,1]$，$i=1,2,3,4$，$N\sim\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0.1&0.2&0.3&0.4\end{pmatrix}$，且$X_1,X_2,\cdots,X_4,N$相互独立，$Y=X_1+\cdots+X_N$，求$EY$.

（23）（**本题满分 11 分**）某电子元件的寿命服从参数为λ的指数分布（单位：小时），λ未知，从中任取n只进行检测，结果有$m\ (m<n)$只电子元件寿命不超过k小时.

（Ⅰ）求λ的矩估计值$\hat{\lambda}_M$；　　（Ⅱ）求λ的极大似然估计值$\hat{\lambda}_L$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 为正值连续偶函数，$F(x)=\int_0^x t^2 f(x-t)dt$，则下列结论中正确的个数为（　　）．

①$F(x)$ 为单增的奇函数；　　②点 $(0,0)$ 为 $y=F(x)$ 唯一的拐点；

③$F'(x)$ 为非负的凹函数；　　④$F'(x)$ 只在点 $x=0$ 处取得最小值．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）下列级数中绝对收敛的是（　　）．

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\sqrt{n^2+1}}{n}$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n^3}+\frac{\cos n\pi}{n})$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

（3）设 $I_1=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx, I_2=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx$，则以下结论正确的是（　　）．

（A）$I_1>0,I_2>0$　　（B）$I_1>0,I_2<0$　　（C）$I_1<0,I_2>0$　　（D）$I_1<0,I_2<0$

（4）设 $I_1=\int_0^{+\infty}\max\{\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{x^2}\}dx$，$I_2=\int_0^{+\infty}\min\{\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{x^2}\}dx$，则（　　）．

（A）I_1 和 I_2 都收敛　　（B）I_1 和 I_2 都发散　　（C）I_1 收敛，I_2 发散　　（D）I_1 发散，I_2 收敛

（5）设 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+3B$，则必有（　　）．

（A）$A-3E$ 可逆，$B-2E$ 不可逆　　（B）$A-3E$ 不可逆，$B-2E$ 可逆

（C）$A-3E$，$B-2E$ 都不可逆　　（D）$A-3E$，$B-2E$ 都可逆

（6）设 A 为三阶反对称非零矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则有（　　）．

（A）$r(A^*)=3$　　（B）$r(A^*)=2$　　（C）$r(A^*)=1$　　（D）$r(A^*)=0$

（7）设随机事件 A,B,C 两两独立，其概率均为 $p\ (0<p<1)$，若 $A\cup B\cup C=\Omega$，且 $AB\subset C$，则（　　）．

（A）$p=\frac{1}{2}$　　（B）$p=\frac{1}{3}$　　（C）$p=\frac{1}{4}$　　（D）p 的取值不确定

（8）设随机变量 X 的方差存在，则下列结论中，正确的个数为（　　）.

①$|EX|\le E|X|\le\sqrt{E(X^2)}$；　　②$|EX|\le\sqrt{E(X^2)}\le E|X|$；

③$E|X-EX|\le\sqrt{DX}\le\sqrt{E(X^2)}$；　　④$\sqrt{DX}\le\sqrt{E(X^2)}\le E|X-EX|$.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

二、填空题:9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由函数 $xz+e^{yz}=3$ 所确定，则 $du|_{(2,0,1)}=$________.

（10）设函数 $p(x)=\max\{x,1\}$，则微分方程 $y'+p(x)y=x$ 的通解为________.

（11）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz=\varphi(yz)$ 确定，$x-y\varphi'\ne0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

（12）$\int_{-1}^{1}dy\int_{\sqrt{2-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+y^3)dx=$________.

（13）设三阶方阵 A 与 B 相似，$A^2-3A+2E=O$，且 $|B|=2$，则 $\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & O\\ O & 2B^*\end{vmatrix}=$________.

（14）设随机变量 $X\sim P(100)$，则用中心极限定理计算 $P\{80<X<110\}=$________.

（$\Phi(1)=0.841,\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数.）

三、解答题:15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分10分）**（Ⅰ）求 $\cos(\sin x)$ 的带有皮亚诺余项的四阶麦克劳林公式；

（Ⅱ）设函数 $f(x)=1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$，其中 α 是参数，试讨论当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 x 的多少阶无穷小？请说明理由.

（16）**（本题满分10分）**设函数 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，若 $u(0,y)=\ln(1+y),u(x,0)=\sin x$，$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$，求 $u(x,y)$.

（17）**（本题满分10分）**数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\sqrt{x_n^2+\dfrac{1}{n^2}})$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

19、20全程资料请加群690261900

（18）**（本题满分 10 分）** 设当$0\le x<1$时，函数$f(x)=(1-x)\ln(1+x)$．当$k\le x<k+1$时，$f(x)=a_k f(x-k)$，$k=1,2,\cdots$．（Ⅰ）求常数$a_k\ (k=1,2,\cdots)$，使得$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导；（Ⅱ）求曲线$y=f(x)\ (x\ge 0)$与x轴所围平面图形的面积A．

（19）**（本题满分 10 分）** 设函数$z=z(x,y)$由方程$xy=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1+e^{2t}}}$确定，证明：

（Ⅰ）$(\frac{\partial z}{\partial x})^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot(\frac{\partial z}{\partial y})^2$；　　（Ⅱ）$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$．

（20）**（本题满分 11 分）** 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$X$是二阶方阵，$E$是二阶单位阵，问方程$AX-XA=E$是否有解？若有解，求满足方程$AX-XA=E$的所有$X$，若无解，说明理由．

（21）**（本题满分 11 分）** 设A为三阶实对称阵，$r(A)=1$，$\lambda_1=9$是A的一个特征值，对应的一个特征向量为$\xi_1=(1,-2,2)^T$．（Ⅰ）问$\eta=(-1,2,0)^T$是否为线性方程组$Ax=0$的解？说明理由；（Ⅱ）求线性方程组$Ax=0$的通解；（Ⅲ）求矩阵A．

（22）**（本题满分 11 分）** 设随机变量X的概率密度为$f(x)=k\mathrm{e}^{-\lambda|x|},-\infty<x<+\infty,\lambda>0$．令$Y=|X|$，（Ⅰ）求常数$k$；（Ⅱ）求$D(XY)$；（Ⅲ）求$(X,Y)$的分布函数．

（23）**（本题满分 11 分）** 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是来自总体$X\sim B(1,0.2)$的简单随机样本．

（Ⅰ）问$\sum_{i=1}^{10}X_i$和$\sum_{i=1}^{10}X_i^2$分别服从何分布？

（Ⅱ）计算$P\{\overline{X}\le\frac{1}{10}\}$和$P\{S^2=\frac{5}{18}\}$，其中$\overline{X}$为样本均值，$S^2$为样本方差．

19、20全程资料请加群690261900