绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 函数 $f(x)=\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ 的可去间断点个数为（ ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解】：函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=0,\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\left|x^2-1\right|\sin(x+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}=\infty$，故 $x=0,-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点，答案 C。

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln[1+f(x)+e^{x^2}]}{2x^2}=1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（ ）.

（A）不可导点　　（B）可导点但不是驻点

（C）驻点且为极小值点　　（D）驻点且为极大值点

【解】：由题设可知 $x\to0$ 时

$f(x)+e^{x^2}=2x^2+o(x^2), f(x)=2x^2-e^{x^2}+o(x^2)=-1+x^2+o(x^2)$，因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点且为极小值点。答案为 C。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}=$（ ）。

（A）$\dfrac{1}{2}\ln2$　　（B）$\ln2$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　(D)$\dfrac{\pi}{8}$

【解】：因为 $\dfrac{n}{1+n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+n+i^2}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}$，而

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2+i^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln2$，故答案应该是 A。

(4) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界连续的奇函数,则 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）。

（A）必为有界的奇函数　　（B）必为有界的偶函数

（C）为奇函数但未必有界　　（D）为偶函数但未必有界

【解】：有题设知 $xe^{-x^2}f(x)$ 是偶函数，$F(x)$ 必为奇函数,又 $f(x)$ 有界,因而 $\exists M>0$,使得对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $\left|f(x)\right|\le M$ 相应的有

$\left|F(x)\right|=\left|\int_0^x te^{-t^2}f(t)\mathrm{d}t\right|\le\int_0^{|x|}\left|te^{-t^2}f(t)\right|\mathrm{d}t\le\dfrac{M}{2}(1-e^{-x^2})\le\dfrac{M}{2}$,因此 $F(x)$ 是有界的奇函数。设平面区域 D 由 $x=0,x=1,x-y=\dfrac{1}{2}$ 及 $x-y=1$ 围成，$I_1=\iint\limits_D\sin^3(x-y)\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D \ln^3(x-y)\,\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D (x-y)^3\,\mathrm{d}\sigma$，则 I_1, I_2, I_3 的大小关系是（　）。

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<I_3$　（D）$I_3<I_1<I_2$

【解】：因为 $(x,y)\in D$ 时有 $\ln(x-y)^3<\sin(x-y)^3<(x-y)^3$，答案为（C）。

(5) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 均存在,则（　）。

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续　(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0), \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 均存在

【解】：答案 D

(6) 累次积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$ 可写成　（　　　）

A　$I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　B　$I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

C　$I=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　D　$I=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

【答案】：D

（7）已知 5×4 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若 $\eta_1=(3\quad 1\quad -2\quad 1)^T$，$\eta_2=(0\quad 1\quad 0\quad 1)^T$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，那么下列命题

（1）α_1,α_3 线性无关；　（2）α_1 可由 α_2,α_3 线性表出；（3）α_3,α_4 线性无关；

（4）秩 $r(\alpha_1,\alpha_1,+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$ 中正确的是

（A）（1）（3）　（B）（2）（4）　（C）（2）（3）　（D）（1）（4）

【答案】：C

（8）对三阶矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 先交换第一行与第三行，然后将第二列的 -2 倍加到第三列得 $-E$，且 $|A|>0$，则 A 等于(　)

(A) $-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$　(B) $-\begin{pmatrix}&&1\\&1&-2\\1&&\end{pmatrix}$

(C) $-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}&&1\\-2&1&\\1&&\end{pmatrix}$

【解】由 $-E=E_{13}A^*E_{23}(-2)$ 得 $A^*=-E_{13}^{-1}E_{23}^{-1}(-2)$，因为 $|A^*|=|A|^2=1$ 且 $|A|>0$, 所以 $|A|=1$, 于是 $A^*=A^{-1}$, 故

$A=(A^*)^{-1}=-E_{23}^{-1}(2)E_{13}^{-1}=-E_{23}(-2)E_{13}=-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，选(A).

得分	评卷人

二、填空题: (9)～(14) 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{x^2}{2n}+\frac{x}{n^2})^n$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为__________.

【解】: $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}, f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}, f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}, f'(1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$,故所求切线方程为 $y=-\frac{1}{\sqrt{e}}x+\frac{2}{\sqrt{e}}$.

(10) 设 f,g 均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$________。

【解】: $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+(\frac{1}{x}+yg')f_2', \frac{\partial z}{\partial x}=xf_1'+xg'f_2', x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'$，应填 f_2'。

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调可导，$f(0)=1$，f^{-1} 为 f 的反函数，若 $\int_{x^2}^{x^2+f(x)} f^{-1}(t-x^2)\,\mathrm{d}t=x^2e^x$，则 $f(x)=$__________.

【解】: 原等式可化为 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}u=x^2e^x$，对 x 求导可得 $xf'(x)=(x^2+2x)e^2$，

所以 $f'(x)=(x+2)e^x$，$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=(x+1)e^x$，应填 $f(x)=(x+1)e^x$.

(12) 设 D=$\left\{(x,y)\middle|(x-2)^2+(y-2)^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D (e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\,\mathrm{d}\sigma=$_______.

【解】: 由对称性可知 $\iint\limits_D (e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{y}{x}}+2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D (e^{\frac{y}{x}}-e^{\frac{x}{y}}+2)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint\limits_D 4\,\mathrm{d}\sigma=2\pi$

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{\ln^2 t}{t+1}\,\mathrm{d}t=$____________.

【解】:有积分中值定理可知 $\int_x^{x+1}\frac{\ln^2 t}{t+1}\,\mathrm{d}t=\frac{\ln^2\xi_x}{\xi_x+1},\xi_x\in(x,x+1)$,所以有

$\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+1}\frac{\ln^2 t}{t+1}\,\mathrm{d}t=\lim\limits_{\xi_x\to\infty}\frac{\ln^2\xi_x}{\xi_x+1}=0$。

(14) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量，$\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，则 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$______.

【解】: 由题设可知方程 $(A-\lambda E)x=0$ 有两个线性无关的解向量，因此必有 $R(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=1$. 答案为 1.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）1.设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，若 $x\to0$ 时 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\sim x^k-\sin x$，求常数 k 的值及 $f''(0)$。

【解】: 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 知 $f(0)=f'(0)=0$，由题设有

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^k-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{kx^{k-1}-\cos x}=1$，因此必有 $\lim\limits_{x\to0}(kx^{k-1}-\cos x)=0$，故 $k=1$，由此可得

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1$。

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）求函数 $z=x^2+y^2-xy$ 在区域 $D:|x|+|y|\le1$ 上的最大值与最小值。

【解】：$z_x' = 2x - y = 0, z_y' = 2y - x = 0$ 解得函数 z 在区域 D 的内部有唯一的驻点 $P_1(0,0)$。在边界 $x + y = 1(0 < x < 1)$ 上，令 $F = x^2 + y^2 - xy + \lambda(x + y - 1)$，由 $F_x' = 2x - y + \lambda = 0$，$F_y' = 2y - x + \lambda = 0$ 及 $x + y = 1$ 解得 Lagrange 函数 F 的驻点为 $P_2(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，同理在边界 $x - y = 1(0 < x < 1)$ 上可求得 Lagrange 函数的驻点为 $P_3(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，在边界 $-x - y = 1(-1 < x < 0)$ 与 $-x + y = 1(-1 < x < 0)$ 相应的 Lagrange 函数的驻点为分别为 $P_4(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 与 $P_5(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，又记 D 的边界四个顶点分别为 $P_6(1,0)$，$P_7(0,1)$，$P_8(-1,0)$ 及 $P_9(0,-1)$。函数 z 在上述 9 个点处的值分别为 $0,\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,1,1,1$。由此可得 $z_{\max} = 1, z_{\min} = 0$。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $x \in (0,\frac{\pi}{2}), a_n = \underbrace{\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots + \sqrt{\sin x}}}}_{n项}$。

（Ⅰ）证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a_n \cos x \,\mathrm{d}x$。

【证明】：（Ⅰ）有题设可知 $a_n = \sqrt{\sin x + a_{n-1}} > \underbrace{\sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \cdots + \sqrt{\sin x}}}}_{n-1项} = a_{n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 是单增数列，而 $a_1 < 1$，由归纳法不妨设 $a_n < 2$，那么有 $a_{n+1} = \sqrt{\sin x + a_n} < \sqrt{3} < 2$，由此可得数列 $\{a_n\}$ 有上界 2。由单调有界收敛原理知数列 $\{a_n\}$ 极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$，对等式 $a_{n+1} = \sqrt{\sin x + a_n}$ 两边同时去极限可得 $b = \sqrt{\sin x + b}$，解得 $b = \dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}$ 或者 $b = \dfrac{1-\sqrt{1+4\sin x}}{2}$（舍去），所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a_n \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}\cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{8}\mathrm{d}(1+4\sin x)$

$= \dfrac{1}{12}(1+4\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5(\sqrt{5}+1)}{12}$.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0) = 0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明：$\exists \xi \in (0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x = \xi f(\xi)$。

【证明】：令 $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 由于 $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$，因而 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由 Rolle 定理知 $\exists \xi \in (0,1)$ 使得

$$F'(\xi)=\frac{\xi f(\xi)-\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x}{\xi^2}=0，即\int_0^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)，故原命题得证。$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）半径为 R 的球沉入水中，球面顶部与水面相切，球的密度为 ρ 水的密度为 $\rho_0(\rho>\rho_0)$，要把球完全从水中取出，问至少要做多少功？

解：建立如图所示的坐标系，设 $y\in[-R,R]$，$\mathrm{d}\,y$ 为微小的正数，那么将位于 $[y,y+\mathrm{d}\,y]$ 取出所做的功为

$$\mathrm{d}\,w=\pi g[2\rho R-\rho_0(R-y)](R^2-y^2)\,\mathrm{d}\,y$$

$$w=\pi g\int_{-R}^{R}[2\rho R-\rho_0(R-y)](R^2-y^2)\,\mathrm{d}\,y=\frac{4\pi g(2\rho-\rho_0)}{3}R^4。$$

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设连续曲线 $y=y(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 内有定义且是凸的,其上任一点 $(x,y(x))$ 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$,且此曲线在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y=x+1$,求函数 $y=y(x)$ 的最大值.

解:由题设有知 $y''(x)\le 0$,因而有 $\frac{-y''}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$,即有 $y''=-[1+(y')^2]$,又它在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y=x+1$,因此有 $y(0)=1,y'(0)=1$,令 $p=y'$,则有 $p'=-[1+p^2]$,解得 $y'=\tan(C_1-x)$,由 $y'(0)=1$ 可取 $C_1=\frac{\pi}{4}$,即 $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=\tan(\frac{\pi}{4}-x),y=\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)+C_2,y(0)=1,C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2$,因 $y'(\frac{\pi}{4})=0$,曲线 $y=y(x)$ 是凸的,故 $y(\frac{\pi}{4})=1+\frac{1}{2}\ln 2$ 是函数 $y=y(x)$ 的极大值同时也是最大值.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x\le 2, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 5,-2\le y\le 10\}$，求二重积分 $\iint\limits_D f(x^2-y)f(x-1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$ 的值.

【解】：由题设知当 $D_1:0\le x\le 3,x^2-2\le y\le x^2+1$ 时 $f(x^2-y)f(x-1)=(x^2-y)(x-1)$，其它的点均有 $f(x^2-y)f(x-1)=0$ ，因此有 $\iint\limits_D f(x^2-y)f(x-1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=\iint\limits_{D_1}(x^2-y)(x-1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y$

$$=\int_0^3\mathrm{d}\,x\int_{x^2-2}^{x^2+1}(x^2-y)(x-1)\,\mathrm{d}\,y=\frac{3}{2}\int_0^3(x-1)\,\mathrm{d}\,x=\frac{9}{4}.$$

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是其导出组的基础解系，令

$$\gamma_1=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1,\gamma_2=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\gamma_t=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_t$$

试证：（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 线性无关；

（Ⅱ） 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 任一解可表示为 $\gamma=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\gamma_1+l_2\gamma_2+\cdots+l_t\gamma_t$，其中

$$l_0+l_1+\cdots+l_t=1.$$

【证明】：设 $x,x_1,\cdots,x_t$ 是一组数，使

$x\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\gamma}_1+x_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\gamma}_t=0$，代入整理得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{\alpha}+x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，　　（1）

用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘上式，由于 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解，$\boldsymbol{A\beta}_i=\mathbf{0}$，于是得

$(x+x_1+x_2+\cdots x_t)\boldsymbol{A\alpha}=(x_1+x_2+\cdots+x_t)\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，但 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，所以

$x+x_1+x_2+\cdots x_t=0$　　（2）

将（2）代入（1）得 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，故线性无关，得 $x_1=x_2=\cdots=x_t=0$，代入（2）得知 $x=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_t$ 线性无关。

（2）由非齐次方程组解得结构知若 γ 是 $Ax=b$ 的解，其解 γ 可表示为

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_t\boldsymbol{\beta}_t=\boldsymbol{\alpha}+k_1(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\alpha})+k_2(\boldsymbol{\gamma}_2-\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_t(\boldsymbol{\gamma}_t-\boldsymbol{\alpha})$，

$=(1-k_1-k_2-\cdots-k_t)\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\gamma}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\gamma}_t$

令 $l_0=1-k_1-k_2-\cdots-k_t,l_1=k_1,\cdots,l_t=k_t$，上式可表示为 $\boldsymbol{\gamma}=l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1\boldsymbol{\gamma}_1+l_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+l_t\boldsymbol{\gamma}_t$，

且 $l_0+l_1+\cdots+l_t=1$。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

（1） 求参数 a；(II) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形。

【解】 （I）$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&0\\-8&\lambda-2&0\\0&-a&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-6)^2(\lambda+2)$

$\lambda_1=\lambda_2=6$、$\lambda_3=-2$

由已知 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，故 $\lambda=6$ 必有 2 个线性无关的特征向量

又 $R(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=R\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&0\\0&-a&0\end{pmatrix}=1$，得 $a=0$

（II） 因此 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$

二次型矩阵 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&5&0\\5&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1|=\cdots=(\lambda-6)(\lambda-7)(\lambda+3)$

知二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}$ 特征值 $6,7,-3$

对 $\lambda=6$　　由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^T$

对 $\lambda=7$　　由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^T$

对 $\lambda=-3$　　由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$　　得 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,0)^T$

单位化　$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$　$\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

又 A_1 特征值为 $6,7,-3$， 经过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=6y_1^2+7y_2^2-3y_3^2$.

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 不可导点个数为（ ）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

【解】: $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ 1, & -1\le x\le 0,\\ -x, & x<-1,\end{cases}$ 所以 $x=0,x=-1$ 均为 $f(x)$ 的不可导点，答案 C。

(2) 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线有（ ）。

（A）1条　（B）2 条　（C）3 条　（D）4 条

【解】: $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to1^+}y=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x-1}}-1)-1]=0$，所以 $y=x$ 是它的斜渐近线，故共有 3 条，答案 C。

(3) 设 $f(x),f'(x)$ 为已知的连续函数,则方程 $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$ 的解是(　　)

（A） $y=f(x)-1+ce^{-f(x)}$；　（B） $y=f(x)+1+ce^{-f(x)}$；

（C） $y=f(x)-c+ce^{-f(x)}$；　（D） $y=f(x)+ce^{-f(x)}$

【答案】A

(4) 设 $f(0)=f'(0)=0,f''(0)=1,g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$h(x)=cx^k$，若 $x\to0$ 时 $g(x)\sim h(x)$，则（ ）.

（A） $c=\dfrac{1}{2},k=2$　（B） $c=\dfrac{1}{3},k=2$　（C） $c=\dfrac{1}{3},k=3$　（D） $c=\dfrac{1}{6},k=3$

【解】: 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{cx^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{ck(k-1)x^{k-2}}=\dfrac{f''(0)}{ck(k-1)}$，故 $c=\dfrac{1}{6},k=3$，答案 D。

(5) 若 $f(x,x^2)=x^3,\ f_x'(x,x^2)=x^2-2x^4$，则 $f_y'(x,x^2)=$（　　）

A $x+x^3$　B $2x^2+2x^4$　C x^2+x^5　D $2x+2x^2$

【答案】: A

(6) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,I_2=\dfrac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（ ）.

（A） $I_1<1<I_2$　（B） $1<I_2<I_1$　（C） $I_2<I_1<1$　（D） $I_2<1<I_1$

【解】: 因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$，因而有 $I_1>1$，又 $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{\pi}{2}$，因而有 $I_2<1$，答案是 D.

(7) 设 A,B,C 是 n 阶矩阵，并满足 ABAC=E,则下列结论中不正确的是

（A） $A^TB^TA^TC^T=E.$ (B) $BAC=CAB$

(C) $BA^2C=E$ (D) $ACAB=CABA$

【答案】C

【解】这一类型题目要注意的是矩阵乘法没有交换律、有零因子、没有消去律等法则，由 $ABAC=E$ 知矩阵 A,B,C 均可逆，那么由

$ABAC=E\Rightarrow ABA=C^{-1}\Rightarrow CABA=E$。从而 $(CABA)^T=E$, 即 $A^TB^TA^TC^T=E$，故 （A）正确。

由 $ABAC=E$ 知 $A^{-1}=BAC$，由 $CABA=E$ 知 $A^{-1}=CBA$，从而 $BAC=CAB$，故（B）正确。由排除法可知，（C）不正确，故选（C）.

(8) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是( )

(A) 若 $AB=O$, 则 $B=O$ (B) 对任意矩阵 B, 有 $r(AB)=r(B)$

(C) 存在 B, 使得 $BA=E$ (E) 对任意矩阵 B, 有 $r(BA)=r(B)$

【解】因为 $r(A)=n$, 所以方程组 $AX=0$ 只有零解,而由 $AB=O$ 得 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解,故若 $AB=O$,则 $B=O$;

令 $BX=O, ABX=0$ 为两个方程组,显然若 $BX=O$, 则 $ABX=0$,反之,若 $ABX=0$,因为 $r(A)=n$, 所以方程组 $AX=0$ 只有零解,于是 $BX=O$,即方程组 $BX=O$ 与 $ABX=0$ 为同解方程组,故 $r(AB)=r(B)$;

因为 $r(A)=n$, 所以 A 经过有限初等行变换化为 $\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$,即存在可逆矩阵 P 使得 $PA=\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$, 令 $B=(E_n\quad O)P$, 则 $BA=E$;

令 $A=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}, r(A)=0$, 但 $r(BA)=0\neq r(B)=1$, 选(D).

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中的横线上.

（9） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n}{\ln n}}=$____________。

【解】: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-5\ln n}{n+3\ln n}\right)^{\frac{n+3\ln n}{-5\ln n}}\right]^{\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{-5\ln n}{n+3\ln n}}=e^{-5}$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}=$____________。

【解】: $1\le(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}})^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{n}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则可知原式 $=1$。

(11) 已知方程 $y''-y=0$ 的积分曲线在点 $O(0,0)$ 处与直线 $y=x$ 相切，则该积分曲线的方程为________________.

【答案】 $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=shx$

(12) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$,且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________.

【解】 由题设有 $\int_0^1 [xf'(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = xf(x)\big|_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

所以 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$.

(13) 累次积分 $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{3}y} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{\sqrt{3}y}{3}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x =$ __________ 。

【解】: 原式 $= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{12}(1-e^{-1})$.

(14) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,4,5)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,6,8)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(2,6,7,7)^T$ 的一个极大无关组为____________.

【答案】: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

三、解答题: (15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)(**本题满分 10 分**)选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

解法一：由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=0$，所以有

$\lim\limits_{x\to 0}[a+bx-(1+c\sin x)e^x]$

$=a-1=0, a=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+bx-(1+c\sin x)e^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}, b-1-c=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{b-[1+c(\sin x+\cos x)]e^x}{3x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2c\cos x)e^x}{6x}=0, c=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ 。

解法二：$a+bx-(1+c\sin x)e^x = a+bx-[1+cx-\frac{cx^3}{6}+o(x)][1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]$

$=a-1+(b-c-1)x-(c+\frac{1}{2})x^2-(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c)x^3+o(x^3)$，所以有

$a=1, b-c-1=0, c+\frac{1}{2}=0, \frac{1}{6}+\frac{1}{2}c-\frac{1}{6}c=0$，即 $a=1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$ 。

得分	评卷人

(16)(**本题满分 10 分**)设 $x_0=25, x_n=\arctan x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 。(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求它的值；(Ⅱ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$ 。

证明：(Ⅰ)令 $f(x)=x-\arctan x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$，因而函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，当 $x>0$ 时有 $f(x)=x-\arctan x> f(0)=0$，由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的，又 $x_n>0$，由单调有界收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对等式 $x_n=\arctan x_{n-1}$ 两边同时取极限可得 $a=\arctan a$，解得

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = 0$；

（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{x^2}{1+x^2}}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 可得

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan x_{n-1} - x_{n-1}}{(\arctan x_{n-1})^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{3}$。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且满足

$$f(x) = \frac{x}{1+\cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x，$$ 求 $f(x)$ 的表达式.

【解】两边乘 $\sin x$，且积分

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{2}；$$

则 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \dfrac{\pi^2}{2}$

（其中：$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$ 也可作代换 $u = \pi - x,\ dx = -du$，

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-u)\sin u}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{4}\text{）}$$

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设函数 $z = xy + f(u),\ u = g(xy, x^2)$ 且函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$g(v,w)$ 具有二阶连续偏导数，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

【解】 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = g_1'y + 2xg_2'$， $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y + f'(u)(g_1'y + 2xg_2')$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = g_1'x;$ 由此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 1 + f''(u)\dfrac{\partial u}{\partial y} + f'(u)(y\dfrac{\partial}{\partial y}(g_1') + g_1' + 2x\dfrac{\partial}{\partial y}(g_2'))$；

$$= 1 + xf''(u)g_1' + f'(u)(xyg_{11}'' + g_1' + 2x^2(g_{21}''))$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\,d\sigma$，其中：积分区域

$D = \{(x,y) \mid y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0\text{围成}\}$

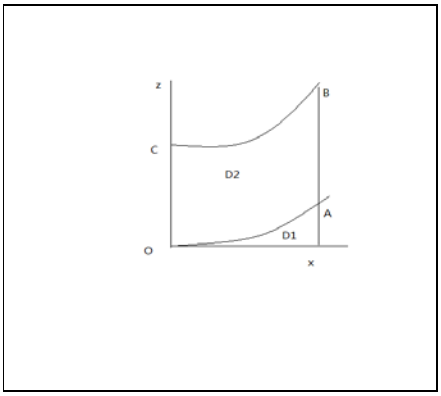
【解】 计算二重积分 $I = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{|y - x^2|}\,d\sigma$，为了去掉绝对值，如图将 D 划分为 D_1 与 D_2 两部分，如图所示，

其中：$D_1 = \left\{(x,y)\middle| 0 \le y \le x^2, 0 \le x \le 1\right\}$ $D_2 = \left\{(x,y)\middle| 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le x \le 1\right\}$

于是 $I=\iint\limits_{D}\sqrt{\left|y-x^2\right|}d\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}d\sigma+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}d\sigma=$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dz+\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x^2+1}\sqrt{y-x^2}dz$$

$$=\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx+\int_0^1\frac{2}{3}xdx=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$



得分	评卷人

(20)(**本题满分 11 分**)求椭圆 $x^2+2xy+5y^2-16y=0$ 与直线 $x+y=8$ 的最短距离。

解:设 $M(x,y)$ 是椭圆上一点,到直线 $x+y=8$ 距离的平方为 $d^2=\dfrac{(x+y-8)^2}{2}$,由拉格朗日乘数法可得:

$$L(x,y)=\frac{(x+y-8)^2}{2}+\lambda(x^2+2xy+5y^2-16y)$$

$$\begin{cases}L'_x=x+y-8-2\lambda(x+y)=0\\ L'_y=x+y-8-\lambda(2x+10y-16)=0\\ x^2+2xy+5y^2-16y=0\end{cases}$$

解得: $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6\\ y=2\end{cases}$;由此知对应距离 $d_1=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt{2}}\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt{2}$, $d_2=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt{2}}\Big|_{\substack{x=-6\\y=2}}=6\sqrt{2}$

最短距离为 $d_{\min}=\dfrac{|x+y-8|)}{\sqrt{2}}\Big|_{\substack{x=2\\y=2}}=2\sqrt{2}$。

得分	评卷人

(21)(**本题满分 11 分**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导, $f(a)=a$,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$。证明:(Ⅰ)$\exists\xi\in(a,b)$ 内,使 $\xi=f(\xi)$;(Ⅱ)在 (a,b) 内存在与(Ⅰ)中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

证明:(Ⅰ)由 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$,记 $F(x)=f(x)-x$,那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点,那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$(或者 $F(x)<0$)相应的必有 $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x>0$(或 <0)与 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾,故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点,即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内,使 $\xi=f(\xi)$;

(Ⅱ)令 $G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$,则有 $G(a)=G(\xi)=0$,由 Rolle 定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$,即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$。

得分	评卷人

(22)(**本题满分 11 分**)已知齐次方程组(Ⅰ) $\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ ax_1+a^2x_3=0\\ ax_2+a^2x_4=0\end{cases}$ 的解全是 4 元方程(Ⅱ) $x_1+x_2+x_3=0$ 的解。

(1)求 a。 (2)求齐次方程组(Ⅰ)的解。

解:(1)因为方程组（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解，所以（Ⅰ）与（Ⅲ）$\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ ax_1+a^2x_3=0 \\ ax_2+a^2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \end{cases}$ 同解

那么（Ⅰ）与（Ⅲ）的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有相同的秩。

如 $a=0$ 　则 $r(A)=1$ 而 $r(B)=2$，所以假设 $a\neq 0$

由于 $A\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{pmatrix}$ 　　$\therefore\ r(A)=3$

又 $B\xrightarrow{行}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{pmatrix}$ 　当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$r(B)=3$ 　此时（Ⅰ）与（Ⅲ）同解，

（Ⅱ）由于 $A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 基础解系 $\eta=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,1\right)^T$，则通解为 $k\eta$。

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 4}2bx_ix_j$，其中 b 为非零的实数

（1）用正交变换，将该二次型化为标准形，并写出所用的正交变换和所得的标准形；

（2）求出该二次型正定的充要条件。

解：（1） $f=x^T Ax$ 　　　其中 　$A=\begin{pmatrix} 1 & b & b & b \\ b & 1 & b & b \\ b & b & 1 & b \\ b & b & b & 1 \end{pmatrix}$

$|\lambda E\text{-}A|=(\lambda-(1+3b))[\lambda-(1-b)]^3$

$\lambda_1=1+3b$ 　　　$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1-b$

解方程 $(\lambda_1E-A)x=0$ 得特征向量 $\xi_1=(1,1,1,1)^T$

解方程 $(\lambda_2E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0,0)^T$，$\alpha_2=(-1,0,1,0)^T$，$\alpha_3=(-1,0,0,1)^T$

正交化 　$\xi_2=\alpha_1$ 　$\xi_3=(-1,-1,2,0)^T$ 　　$\xi_4=(-1,-1,-1,3)^T$

单位化 　得

$\eta_1=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T$ 　　$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)^T$ 　　$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)^T$ 　　$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{12}}(-1,-1,-1,3)^T$

令 $U=\left(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4\right)$,则 U 为正交阵，且 $U^{-1}AU=U^TAU=\begin{pmatrix}1+3b & & & \\ & 1-b & & \\ & & 1-b & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}$

校准形 $(1+3b)y_1^2+(1-b)y_2^2+(1-b)y_3^2+(1-b)y_4^2$

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow 1+3b>0$ 且 $1-b>0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<b<1$

绝密★启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.
在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则下列结论正确的是（　）

(A) 若 $A>0$,则 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$　(B) 若 $A\ge 0$,则 $\exists M\ge 0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)\ge 0$

(C) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)>0$,则 $A>0$　(D) 若 $\exists M>0$,当 $x>M$ 时有 $f(x)<0$,则 $A<0$

【解】：由极限的保号性知答案应该是 A

(2) 设 $f(x)$ 为奇函数，$f'(0)=1, g(x)=\dfrac{f(x)}{|x|}$，则（　）。

（A）$x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点　（B）$x=0$ 是 $g(x)$ 的跳跃间断点

（C）$x=0$ 是 $g(x)$ 的无穷间断点　（D）$x=0$ 是 $g(x)$ 的第二类但非无穷间断点

【解】：由题设有 $f(0)=0$，$g(0^+)=f_+'(0)=1, g(0^-)=-f_-'(0)=-1$，故答案 B。

(3) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$.　（B）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$.

（C）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$.　（D）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$.

【答案】: A.

【解】：$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加，

当 $x_1>x_2$，$y_1<y_2$ 时，$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$.

(4) 设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，$f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，且满足 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则 $x=0$ 关于 $f(x)$（　）

（A）是极小值点　（B）是极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线的拐点　（D）不是极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线的拐点

【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$，$f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C。

(5) 设 $z=f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则下列判断不正确的是（　）

（A） $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$ （B） $f(0,0)=0$

（C） $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续 （D） $f(x,y)$ 在（0,0）处不可微

(6) $I=\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ 交换积分次序得（其中 $f(x,y)$ 连续）（ ）

（A） $I=\int_1^e dy\int_0^{\ln x} f(x,y)dx$ （B） $I=\int_{e^y}^e dy\int_0^1 f(x,y)dx$

（C） $I=\int_0^{\ln x} dy\int_1^e f(x,y)dx$ （D） $I=\int_0^1 dy\int_{e^y}^e f(x,y)dx$

【答案】：D

(7) 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的三个互不相等的解，则 $Ax=0$ 的基础解系为（）。

（A） $\xi_1-\xi_3$ (B) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3$

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$ (D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

【答案】 A

【解】 $Ax=0$ 三个数 $\begin{cases} r=r(A) \\ n \quad \text{未知量个数} \\ n-1 \end{cases}$

①$\because \xi_1,\xi_2,\xi_3$ 为 $Ax=b$ 的三个相异解，$\therefore Ax=b$ 有无穷多解，$\therefore r(A)=r(A,b)<n\ldots\ldots$ （i）

②$\because A^*$ 为非零。$r(A^*)\geq 1$ 从而 $r(A)=n-1,n\ldots\ldots$ （ii）

由（i），(ii)可得 $r(A)=n-1$ $\therefore n-r(A)=1$

(8) 二次型 $x^TAx=(x_1+2x_2+a_3x_3)(x_1+5x_2+b_3x_3)$ 的正惯性指数 p 与负惯性指数 q 分别是

(A) $p=2,q=1$ (B) $p=2,q=0$

(C) $p=1,q=1$ (D) 与 a_3,b_3 有关，不能确定。

【答案】：C

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14)小题，每小题4分，共24分．把答案填在题中的横线上．

（9）已知 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，当 n 为大于 2 的正整数时，则 $f^{(n)}(0)=$______________。

【解】：$f^{(n)}(x)=x^2\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$，所以

$f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-3}n!}{(n-2)}$。

(10) 以 $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{2x}$ 为特解的二阶常系数线性齐次微分方程为______________.

【答案】 $y''-4y'+4y=0$

【解】：特征方程有二重特征值 2，故特征方程为 $r^2-4r+4=0$ 从而原方程为 $y''-4y'+4y=0$。

(11) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{(x-1)^3\sqrt{x^2-2x}}\mathrm{d}x=$____________________。

【解】：原式 $\xlongequal[x=1+\sec t]{}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{4}$。

(12) 设 g 二阶可导， f 具有二阶连续偏导数， $z=g(xf(x+y,2y))$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________

【答案】: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x(f+xf_1')(f_1'+2f_2')g''+[f_1'+2f_2'+x(f_{11}''+2f_{12}'')]g'$.

(13) 已知曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin 2x$ 在原点相切，，则极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^0[\int_0^t f(t-u)du]dt}{x\sin 2x^2}=$ ________

【解】: 由条件知: $f(0)=0,\ f'(0)=(\sin 2x)'|_{x=0}=2$；对积分作代换: $t-u=v,\ du=-dv$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0[\int_0^t f(t-u)du]dt}{x\sin 2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0[\int_0^t f(v)dv]dt}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^x f(v)dv}{6x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{12x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{12}=-\frac{1}{6}。$$

(14) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $t=$ ________.

【答案】: $t=\underline{1}$;

【解】将向量看成列向量，则有 $(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&-1&t\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+t\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充要条件是 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&-1&t\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow t=1.$

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=3$，求 $f'(0)$。

【解】: 由题设有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\tan x}{x}+f(x)}{x}=3$，所以有 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{\tan x}{x}+f(x)]=0$， $f(0)=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=-1$

由此可得 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to 0}[(\dfrac{\tan x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+f'(0)$，

而 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\tan x}{x^2}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=3$。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）过点 $(1,5)$ 作曲线 $C:y=x^3$ 的切线，设切线为 l。（Ⅰ）求 l 的方程；（Ⅱ）求 l 与曲线 C 所围成的图形 D 的面积；（Ⅲ）求图形 D 位于 y 轴右侧部分绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

【解】:（Ⅰ）设切点为 (x_0,x_0^3)，则有 $\dfrac{5-x_0^3}{1-x_0}=3x_0^2$，解得 $x_0=-1$，相应的切线 l 的方程为

$y=3x+2$；

（Ⅱ） l 与 C 的交点满足方程 $\begin{cases}y=x^3\\y=3x+2\end{cases}$，解得 $x=-1$ 与 $x=2$，因而 D 的面积为

$$A=\int_{-1}^{2}(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=[\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{4}x^4]\Big|_{-1}^{2}=\frac{51}{4};$$

（III）所求体积 $V=2\pi\int_0^2 x(3x+2-x^3)\,\mathrm{d}\,x=2\pi[x^3+x^2-\frac{1}{5}x^5]\Big|_0^2=\frac{56\pi}{5}$。

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(x^2y^2-2)e^{xy}$，其中 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时，具有二阶连续导数，求 $f(xy)$.

【解】$\frac{\partial u}{\partial x}=\int(x^2y^2-2)e^{xy}dy=\frac{1}{x}\int(x^2y^2-2)de^{xy}=\frac{1}{x}[(x^2y^2-2)e^{xy}-2\int xye^{xy}d(xy)]$

$$=\frac{1}{x}[(x^2y^2-2xy)e^{xy}]+C_1(x)$$

$$u=\int\frac{1}{x}[(x^2y^2-2xy)e^{xy}]dx+\int C_1(x)dx$$

$$=\int\frac{1}{xy}[(x^2y^2-2xy)e^{xy}]dxy+\int C_1(x)dx=\int(xy-2)de^{xy}+\int C_1(x)dx$$

$$=(xy-2)e^{xy}-\int e^{xy}d(xy)+\int C_1(x)dx=(xy-3)e^{xy}+\int C_1(x)dx+C_2$$。

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）计算二重积分 $I=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|1\le x+y\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$

【解】利用极坐标可得：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}d(\cos\theta+\sin\theta)^2r^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{(\cos\theta+\sin)^2r^2}d(\cos\theta+\sin\theta)^2r^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}(e^{16}-e^{1})d\theta=\frac{e(e^{15}-1)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\tan\theta)^2}d(1+\tan\theta)$$

$$=\frac{e(e^{15}-1)}{2}$$

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）设 $M_0(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=\ln x$ 上曲率最大的点，且设由 $y=0$、$x=0$、直线 $x=x_0$ 及曲线 $y=\ln x$ 围成的面积为 S_1，而 $y=0$、直线 $x=x_0$ 及曲线 $y=\ln x$ 围成的面积为 S_2，求（I）点 $M_0(x_0,y_0)$；（II）面积比 S_2/S_1 .

解：（I）$y=\ln x$ 的曲率由曲率公式可得：$K(x)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$，且

$K'(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\dfrac{3x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$，令 $K'(x)=0$，由此可得：

$\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\dfrac{3x^2}{(1+x^2)^{5/2}},1+x^2=3x^2\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 所以点 $M_0(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\ln 2)$ 处，曲率最大；

（II） $S_1=-\int_0^{1/\sqrt{2}}\ln xdx=-x\ln x|_0^{1/\sqrt{2}}+\int_0^{1/\sqrt{2}}dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{1}{2}\ln 2)$

$$S_2=-\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\ln xdx=-\int_0^1\ln xdx-S_1=1-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{1}{2}\ln 2),$$

面积比为 $S_2/S_1=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{1}{2}\ln 2)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\dfrac{1}{2}\ln 2)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2+\ln 2}-1$。

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）设 $a>1,b>0$，讨论方程 $\log_a^x=x^b$ 有实根时，a,b 所满足的条件。

解：方程可等价变形为 $\dfrac{\ln x}{x^b}=\ln a$，令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a$，$f'(x)=\dfrac{1-b\ln x}{x^{b+1}}$，

$f'(x)=0$，解得 $x=e^{\frac{1}{b}}$，$f(x$ 在 $(0,e^{\frac{1}{b}}]$ 上单增，在 $[e^{\frac{1}{b}},+\infty)$ 上单减，又

$\lim\limits_{x\to0^+}(\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\ln x}{x^b}-\ln a)=-\ln a<0$，$f(e^{\frac{1}{b}})=\dfrac{1}{be}-\ln a$，因而当 $\dfrac{1}{be}-\ln a\ge0$，即

a,b 满足条件 $b\ln a\le\dfrac{1}{e}$ 时，该方程有实根。

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**） 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，$f(0)=f(2)=1$，且 $x\in[0,2]$ 时 $|f'(x)|\le1$，证明：$1\le\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\le3$。

证明：设 $x\in(0,2)$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,x)$ 使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x$，即有 $f(x)=1+f'(\xi_1)x$，由题设有 $1-x\le f(x\le1+x$，同理对函数 $f(x)$ 在 $[x,2]$ 上应用 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_2\in(x,2)$ 使 $f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2)$，因而有 $1+x-2\le f(x\le1+2-x$，由此可得

$\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(1-2+x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(1+2-x)\,\mathrm{d}x$，而

$\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(1-2+x)\,\mathrm{d}x=1$，$\int_0^1(1+x)\,\mathrm{d}x+\int_1^2(1+2-x)\,\mathrm{d}x=3$，从而有

$1\le\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\le3$。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）已知三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 经过正交变换 $x=Py$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$. （Ⅰ）求行列式 $|A^*-2A^{-1}|$;

（Ⅱ）求 A^3-2A^2-A+4E。

【解】（Ⅰ）A 的特征值为 1，-1,2. $|A|=-2$，

$$\left|A^*-2A^{-1}\right|=\left\||A|A^{-1}-2A^{-1}\right|=\left|-4A^{-1}\right|=(-4)^3\left|A^{-1}\right|=32$$

（Ⅱ）由题意 $p^TAp=\wedge=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

$$A=P\wedge P^T\Rightarrow A^n=P\wedge^n P^T=P\begin{pmatrix}1^n&&\\&(-1)^n&\\&&2^n\end{pmatrix}P^T$$

$$A^3-2A^2-A+4E=P\left[\begin{pmatrix}1^3&&\\&(-1^3)&\\&&2^3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1^2&&\\&(-1)^2&\\&&2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\right]P^T$$

$$=P(2E)P^T=2E$$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)$ 的前 n-1 个列向量线性相关，后 n-1 个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

（1）证明：方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多个解。

（2）若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 的任意一个解，则必有 $k_n=1$。

【解】:（1）由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关，可推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 β＝$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 等价从而秩相同。

据此增广矩阵 $\overline{A}=(A\beta)$ 的秩＝$r(A)=n-1<n$　因此方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多解。

（2）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-1}\alpha_{n-1}=0$

故 $A\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}=0$，　又 $\because r(A)=n-1$，$\therefore(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系

由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}x=\alpha_1+\cdots\alpha_n=\beta$ 知 $\left(1,1,\cdots,1\right)^T$ 是 $Ax=\beta$ 特解。

于是 $Ax=\beta$ 通解是 $(1,1,\cdots,1)^T+k(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T=(1+kl_1,\cdots 1+kl^{n-1},1)^T$

因此若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 解时,必有 $k_n=1$。