绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数　学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 1）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题：1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1） 设 $x^k \sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，$g(x)=a\int_0^{x^2}(\sqrt{1+t}-1)\,\mathrm{d}t$，若 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则（　　）.

(A) $a=20,k=4$　　(B) $a=30,k=4$　　(C) $a=20,k=3$　　(D) $a=30,k=3$

（2）设函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续， $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)\ln(1+x^2)}{(e^{|x|}-1)\sin^2 x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）.

（A） $g(0)=0, g'(0)$ 不存在　　（B） $g(0)=0, g'(0)=1$

（C） $g(0)=1, g'(0)$ 不存在　　（D） $g(0)=1, g'(0)=1$

（3）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶导数连续，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+f''(x)}{\sin x}=2$，则有（ ）。

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，但点 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，但点 $(0,f(0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（C） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，但点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，且点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（4）设 $f(x)$ $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=g(a)=1, f(b)=g(b)=3$，且 $f''(x)>0$，$g''(x)<0$，记 $S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, S_2=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，则（ ）。

（A） $S_1<2(b-a)<S_2$　　（B） $S_2<2(b-a)<S_1$

（C） $S_1<S_2<2(b-a)$　　（D） $2(b-a)<S_2<S_1$

（5）已知微分方程 $y''-4y'+ay=xe^{bx}$ 的通解形式是 $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+(Ax+B)e^{bx}$，则（　　）.

(A) $a=4,b=2$　　(B) $a=4,b\neq 2$　　(C) $a\neq 4,b=2$　　(D) $a\neq 4,b\neq 2$

（6）设累次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$， $a>0$，则 I 可写成（　　　）.

(A) $I=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $I=\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $I=2\int_{0}^{a}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{ax-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $I=\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{ay-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

（7）设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，$B=\begin{pmatrix} a_{12}+a_{13} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22}+a_{23} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32}+a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ 又 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　　$P_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $B^{-1}=$　（　　　）

(A) $P_2A^{-1}P_4$　　(B) $A^{-1}P_2P_3$　　(C) $P_1P_3A^{-1}$　　(D) $P_4P_1A^{-1}$

（**8**）设矩阵 A 是秩为 2 的 4 阶矩阵，又 a_1,a_2,a_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，且 $a_1+a_2-a_3=(2,0,-5,4)^T$，$a_2+2a_3=(3,12,3,3)^T$，$a_3-2a_1=(2,4,1-2)^T$ 则方程组 $Ax=b$ 的通解 $x=$______

（A）$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$,　　（B）$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$,

（C）$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,　　（D）$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}+k\begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{e^{x^2}-1}}=$__________.

（10）设 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\cos x}{\sqrt{1+2x}-1}=1$，那么曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处切线方程是_____________.

（11）设函数 $y(x)$ 由方程 $x=t^2, y=3t+t^3$ 确定,其中 $t>0$,则曲线 $y=y(x)$ 的拐点是__________.

（12）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=0$,且有 $xf'(x)-f(x)=xe^{x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x=$___________.

（13）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln(e+z)=(x^2-1)z+x(2+y)-1$ 确定，则 $dz|_{(1,0)}=$___________.

（14）设 A,B 为三阶矩阵，A 相似 B，$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 为矩阵 A 的两个特征值,又 $\left|B^{-1}\right|=\dfrac{1}{3}$,则

$$\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax+bx^2)\sqrt{1+x}-c}{\sin x\ln(1+x^2)}=d$，求常数 a,b,c,d 的值.

（16）（本题满分 10 分）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\\ \int_1^y e^{u^2}\,\mathrm{d}u+\int_t^0\dfrac{\sin u}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

（17）（本题满分 10 分）设 $f(u,v)$ 有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又

$g(x,y)=f(xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2))$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 是单调可导函数，$f(-\dfrac{\pi}{2})=0,\ f(\dfrac{\pi}{2})=1$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，且 $f(x)$ 满足 $\int_0^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\dfrac{\sin^2 t}{1+e^t}\mathrm{d}t$，求积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,\dfrac{1}{2})$，且对 $\forall t\in(0,+\infty)$，曲线 $y=f(x)$ 在区间 $[0,t]$ 上的一段弧的弧长等于它与 x 轴与 y 轴及直线 $x=t$ 围成图形面积的两倍.（Ⅰ）求函数 $y=f(x)$ 的表达式;（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴，y 轴及直线 $x=1$ 围成的平面图形绕 x 旋转一周所形成立体的表面积.

（20）（本题满分 11 分）计算二重积分

$I=\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,d\sigma$，　　其中 $D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi$.

（21）（本题满分 11 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$.

（Ⅰ）证明对 $\forall x\in(0,a]$，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

（22）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$,问 a,b,c 为何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解，

有解时求出全部解.

（23）（**本题满分 11 分**）已知三元二次型 $x^T Ax$ 的平方项系数均为 0，设 $\alpha=(1,2,-1)^T$ 且满足 $A\alpha=2\alpha$.（1）求该二次型表达式；（2）求正交变换 $x=Qy$ 化二次形为标准型，并写出所用正交变换；（3）若 $A+kE$ 正定，求 k 的取值.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 2）

考生注意: 本试卷共二十三题, 满分 150 分, 考试时间为 3 小时.

一、选择题：1 ~ 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个符合要求, 把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln\left|x^2-1\right|}$ 的无穷间断点个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间（　　）.

(A) 没有交点　　(B) 仅有一个交点　　(C) 有两个交点　　(D) 有三个交点

（3）广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) π　　(B) $\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4}$　　(D) $\dfrac{\pi}{6}$

（4）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内可导，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$，又 $f'(x)=\sin x^2+\int_0^x g(x-t)\,\mathrm{d}t$，则（　　）.

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（5）设 $I_1=\dfrac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）$I_1<1<I_2$　　（B）$1<I_2<I_1$　　（C）$I_1<I_2<1$　　（D）$I_2<1<I_1$

（6）设函数 $f(u)$ 具有连续导数，函数 $z=z(x,y)$ 由方程式 $x-z=yf(z^2-x^2)$ 确定，则 $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　）.

(A) x　　(B) y　　(C) $-x$　　(D) $-y$

（7）设向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关，β_1 不可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，而 β_2 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，则

下列结论正确的是（　　　　）.

（A）α_1，α_2，β_2 线性相关　　　　（B）α_1，α_2，β_2 线性无关

（C）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性相关　　　　（D）α_1，α_2，α_3，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关

（8）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}$,则 A 与 B (　　).

（A）合同不相似　　(B)相似不合同　　（C）合同且相似　　(D)不相似也不合同

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}+x^2+y=e+2$ 确定，则 $\mathrm{d}\,y\big|_{x=1}=$ ________.

（10）曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线是________.

（11）曲线 $y=\ln\cos x, x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$ 的弧长是________.

（12）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n\sqrt{n^2+i^2}}=$ ________.

（13）方程 $xy'+2y=\dfrac{1}{x}\cos 2x$ 的通解是________.

（14）设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&a\\3&1&1\end{pmatrix}$（$a$ 为某常数），B 为 4×3 阶非零矩阵，且 $BA=0$，则 $\mathrm{R}(B)=$ ________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\begin{cases}-xe^x, & x\le 0,\\ 1-\cos x, & x>0.\end{cases}$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$.

（16）（**本题满分 10 分**）求 $\displaystyle\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\mathrm{d}\,x$.

（17）（**本题满分 10 分**）求函数 $z=(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$ 在集合 $D=\{(x,y)\,|\,x>-\dfrac{1}{2}, y>-\dfrac{1}{2}\}$ 上的极值.

（18）（**本题满分 10 分**）设曲线 $y=y(x)$ 与直线 $4x-4y=3$ 在点 $(1,\dfrac{1}{4})$ 处相切，且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$，求曲线 $y=y(x)$ 在相应于 $x\in[-1,1]$ 的点 (x,y) 处的曲率.

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)=\int_0^{2x}\sqrt{2xt-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^1|x-t|\,\mathrm{d}t\ (x\geq 0)$，(I) 求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最小值； (II) 问 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是否有最大值？为什么？

（20）（**本题满分 11 分**）求二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma$， 区域 $D:x^2+y^2\leq 1,y\geq 0$.

（21）（**本题满分 11 分**）设 $x>0$，证明不等式：（I）$x-\sqrt{1+x}\ln(1+x)>0$；（II）$\dfrac{1}{x(1+x)}>\ln^2(1+\dfrac{1}{x})$.

（22）（**本题满分 11 分**）已知齐次方程组 $Ax=0$ 为 $\begin{cases} x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0 \\ a_1x_1+4x_2+a_2x_3+a_3x_4=0 \\ 2x_1+7x_2+5x_3+3x_4=0 \end{cases}$，$B$ 是 2×4 矩阵，$Bx=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-2,1)^T$ （I）求矩阵 B；（II）若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，求 a_1,a_2,a_3,a_4 的值；（III）求方程组 $Ax=0$ 满足 $x_3=-x_4$ 所有解.

（23）（**本题满分 11 分**）已知二次型 $f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}=x^TAx$ 通过正交变换 $x=Uy$ 化为标准形：$2{y_1}^2+2{y_2}^2$，且线性方程组 $Ax=0$ 有解 $\xi_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$ （I）求所作的正交变换；（II）求该二次型.

绝密★启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学（二）

（科目代码:304）

（模拟试卷 3）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

绝密 * 启用前

2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个符合要求,把所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）下列命题中不正确的是（ ）

（A）若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右导数均存在但不相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续

（B）若 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

（C）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, A$ 为有限值，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在

（D）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

（2）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续导数，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(x)}{\sqrt{x+1}-1}=1$，则有（ ）.

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极小值 (D) 不能判别 $f(0)$ 是否为 $f(x)$ 的极值

（3）下列广义积分收敛的是（ ）.

（A）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}dx$ （B）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}}dx$

（C）$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx$ （D）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\tan x}dx$

（4）设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则保证不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（ ）.

（A）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$. （B）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$.

（C）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$. （D）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$.

（5）设函数 $z=f(x,y)$ 满足条件 $f(0,y)=1, f'_x(x,0)=2x, f''_{xy}(x,y)=1$，则 $f(x,y)=$( ).

(A) $1-xy+y^2$ （B）$1+xy+x^2$ （C）$1-x^2y+y^2$ （D）$1+x^2y+x^2$

（6）设平面区域 $D: x^2+y^2\le 1$，记

$$I_1=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma,\quad I_2=\iint\limits_D \cos x^2\sin y^2 d\sigma,\quad I_3=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]d\sigma,$$

则有( ).

（A）$I_1>I_2>I_3$ （B）$I_2>I_1>I_3$ （C）$I_1>I_3>I_2$ （D）$I_2>I_3>I_1$

（7）设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 均为 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，若 $\eta_1=(-1,1,0,0,0)$，$\eta_2=(0,1,3,1,0)$，$\eta_3=(1,0,5,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，则向量组（Ⅰ）的一个极大无关组是（　　）.

(A) α_1,α_2　　(B) α_1,α_4　　(C) α_3,α_5　　(D) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

（8）设 A、B 为 3 阶非 0 矩阵，满足 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{pmatrix}$，则（　　）.

(A) $a=-1$ 时，必有 $r(A)=1$　　(B) $a\neq-1$ 时，必有 $r(A)=2$

(C) $a=2$ 时，必有 $r(A)=1$　　(D) $a\neq 2$ 时，必有 $r(A)=2$

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

（9）设 $f(x)=\int_0^x e^{-2x}\left|\ln\dfrac{t}{x}\right|dt$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

（10）设 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nf(n)+nf(n-2)\right)^{\frac{n}{2}}=$________.

（11）设 $y=y(x)$ 由参数方程决定 $\begin{cases}x=\arctan t-t,\\ y=\int_1^t \dfrac{e^{-t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$________.

（12）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{xe^{x+n(1-x)}+x^{2n}}{e^{n(1-x)}+x^{2n+1}}$，则积分 $\int_0^e f(x)dx=$________.

（13）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz^2+\sqrt{x^2+y^2}+z=2$ 确定，则 $dz\big|_{\substack{x=1\\y=0}}=$________.

（14）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 5 & a\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量是________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1,\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{f(x)}}=\sqrt{e}$，求 $f''(0)$ 的值.

（16）（本题满分 10 分）计算二次积分 $I=\int_{-1}^1 dx\int_{\sqrt{2-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+x^2\sin^3 x)dy$.

（17）（本题满分 10 分）设 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$，试问参数 a,b 分别满足什么条件时，

$f(x,y)$有唯一极大值？ $f(x,y)$有唯一极小值？

（18）（**本题满分 10 分**）多元设平面区域为$D:0\le x\le 1,0\le y\le 1$，若表达式为

$$xy(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2=f(x,y)-1，且 I(t)=\int_t^1 f(x,t)\mathrm{d}x，试求积分 \int_0^1 I(t)\mathrm{d}t.$$

（19）（**本题满分 10 分**）设 $f(t)=\iint\limits_D |xy-t|dxdy,t\in[0,1]$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。（I）求 $f(t)$的初等函数表达式；（II）证明：存在$t_0\in[0,1]$，使得 $f(t_0)$是 $f(t)$在$(0,1)$内唯一的最小点.

（20）（**本题满分 11 分**）设$y=f(x)$在$[0,1]$上非负连续，$a\in(0,1)$，且 $f(x)$在$[0,a]$上的平均值等于在$[a,1]$上以 $f(a)$为高的矩形面积．试证明：（Ⅰ）存在点$\xi\in(0,a)$内使得 $f(\xi)=f(a)(1-a)$；（Ⅱ）存在$\eta\in(0,1)$使得$(\xi-a)f'(\eta)=-af(a)$.

（21）（**本题满分 11 分**）设 $f(x)$是在$[0,\frac{\pi}{2}]$上满足$\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t-x)f(t)dt=1-\sin^4 x$的连续正值函数，试求 $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的平均值.

（22）（**本题满分 11 分**）设 n 阶矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\right)$的前$n-1$个列向量线性相关，后$n-1$个列向量线性无关，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，(I)证明：方程组$Ax=\beta$必有无穷多个解。(II)若$(k_1,\cdots,k_n)^T$是$Ax=\beta$的任意一个解，则必有$k_n=1$.

（23）（**本题满分 11 分**）已知 3 阶矩阵 A 的每行元素之和均为 3，且齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系为α_1＝ $(1,0,-2)^T,\alpha_2$＝ $(2,1,0)^T$，（I）证明:A 能与对角阵相似；　（II）求 A 及 A^{1000}.