同在一片蓝天下，我们用心浇灌，你用心耕耘，同心协力，共创心底的那份辉煌……

2013 考研数学

成功数学模拟5套　数学三

合工大（共创）考研

www. hfutky.cn

- 名牌名校的超强辅导专家阵容
- 十八年考研辅导工作的结晶
- 五大顶尖数学名师亲临预测
- 每年最成功最负盛名模拟试卷
- 全国录取过线率最高的辅导团队

合肥共创（原合工大）考研辅导中心
Tel:　0551-2905018　18755102168

成就梦想　共创辉煌

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 1）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $x \to 0$ 时，$e^{x^3}-e^{\sin^3 x}$ 与 x^m 是同阶无穷小，则 $m=$（　　）.

(A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7

(2) 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)$ 均存在,则（　）.

（A）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0), \lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 均存在　（B）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

（C）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在　（D）$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

(3) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调可导函数，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，且 $f(x)$ 满足等式 $\int_1^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = x^{\frac{4}{3}}-16$，则 $f(x)=$（　　）.

（A）$x^{\frac{1}{3}}-1$　（B）$2x^{\frac{1}{3}}-3$　（C）$3x^{\frac{1}{3}}-5$　（D）$4x^{\frac{1}{3}}-7$

(4) 下列结论中正确的是（　）.

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必收敛

（B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 u_n 必为 $\dfrac{1}{n}$ 的高阶无穷小（$n\to\infty$）

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 必为绝对收敛

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 必收敛

(5) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经第一行与第二行对调得矩阵 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 再经第一列与第二列对调得矩阵 $\boldsymbol{C}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 为（　　）.

（A）相似、合同且等价　（B）相似但不合同　（C）合同但不相似　（D）等价但不相似

(6) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关，且 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{A\alpha}-2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}$，则矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是（　　）.

(7) 设 X 与 Y 相互独立，$f_1(x), f_2(y)$ 及 $F_1(x), F_2(y)$ 分别是概率密度与分布函数，则 $Z=\max(X,Y)$ 的概率密度函数为（　　）

(A) $f_1(x)f_2(x)$　(B) $f_1(x)F_1(x)+f_2(x)F_2(x)$

(C) $f_1(x)+f_2(x)$　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

(8) 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关的充要条件是（　　）.

（A）$E(X)=E(Y)$　（B）$E(X^2)=E(Y^2)$

（C）$D(X)=D(Y)$　（D）$E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1-f(x)\ln(1+x)}-1}{\tan x(e^x-1)}=1$，则 $f'(0)=$________.

(10) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)(x+n)$, n 为正整数,则 $f^{(n)}(0)=$________.

(11) 微分方程 $y''-4y'+4y=\sin x+3e^{2x}$ 的通解为________.

(12) 设 $f'(\ln x)=1+x$，且 $\int_0^{1/2}f'(2x)\,dx=$________.

(13) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$，则 $|A^*+2A^{-1}+E|=$________.

(14) 设 A,B 为相互对立的随机事件，$P(A)=0.6$, $0<P(B)<1$，则 $P(\overline{A}\mid\overline{B})=$____.

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（**本题满分 10 分**）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\lambda\sin t,\\ y=1-\lambda\cos t\end{cases}$ 确定，其中 $\lambda\in(0,1)$ 为常数，$t\in(0,2\pi)$.（Ⅰ）求函数 $y(x)$ 的极值;（Ⅱ）求曲线 $y=y(x)$ 的拐点.

得分	评卷人

(16)（**本题满分 10 分**）设 $u=f(xy)$ 满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=(xy+1)e^{xy}$，其中 $f(t)$，当 $t\neq0$ 时，二阶导数连续，且 $f'(1)=f(1)=e+1$, 求 $f(xy)$.

得分	评卷人

(17)（**本题满分 10 分**）计算

$I=\iint\limits_D\sqrt{|y-|x||}\,dxdy$，$D=\{(x,y)\mid |x|\le1, 0\le y\le2\}$

得分	评卷人

(18)（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=0$，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.（Ⅰ）确定微分方程 $S'(x)+S(x)=f(x)$；（Ⅱ）求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.（III）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^{n-1}(2n-1)!}$ 的和.

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为 4 维列向量组，且 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 已知线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解为：

$\vec{\xi}_0+k\vec{\xi}_1=(-1,1,0,2)^T+k(1,-1,2,0)^T$，（I）考察 β 是否可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？可以时，写出表达式；不可以时，写出理由；（II）求向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 的一个极大无关组.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是其三个线性无关的特征向量,且 $A\alpha_1=\alpha_1+3\alpha_2, A\alpha_2=5\alpha_1-\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2+4\alpha_3$.

（Ⅰ）求矩阵 A 的特征值;（Ⅱ）求可逆 Q ,使得 $Q^{-1}AQ$ 为对角阵.

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}kx^2, & |x|<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

（I）确定常数 k；（II）求条件密度函数 $f_{Y/X}(y/x)$；（III）求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

得分	评卷人

（23）（**本题满分 11 分**）设 X 与 Y 相互独立，且对应的概率密度分别是：

$$X\ □\ f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad Y\ □\ f(y;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-\frac{2}{\theta}y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

其中参数 $\theta>0$，若 $Z=\min\{X,Y\}$，试求：（I）$Z=\min\{X,Y\}$ 的概率密度 $f(z,\theta)$；（II）$Z_1,\cdots,Z_n$ 为来自 Z 的样本，求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$，（III）求 $D(\hat{\theta}_L)$.

数学三（模拟 2）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题：（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

（1）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（ ）.

(A) $f(0)=0,f'(0)=0$　　(B) $f(0)=0$ 与 $f'(0)$ 的取值无关

(C) $f'(0)=0$ 与 $f(0)$ 的取值无关　　(D)与 $f(0)$ 及 $f'(0)$ 取值均无关

（2）若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,dx$，则 $a=$（ ）。

（A）-3　　（B）$-\dfrac{3}{2}$　　（C）$\dfrac{3}{2}$　　（D）0

（3）设 $F(x)=\int_{e^{-x^2}}^{1}dv\int_{-\ln v}^{x^2}f(v)du$，则 $xF''(x)-F'(x)=$（ ）

（A）$f(e^{-x^2})$　　（B）$-2x^2e^{-x^2}f(e^{-x^2})$　　（C）$-4x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})$　　（D）$4x^3e^{-x^2}f(e^{-x^2})$

(4) 设 $0\le a_n<\dfrac{1}{n},(n=1,2,\cdots)$,则下列级数中肯定收敛的是（ ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n{}^2$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$，则下列矩阵中与矩阵 A 等阶、合同但不相似的是

（A）$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

(6) 设 A、B 是 n 阶方阵，齐次方程式组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 有相同的基础解系 ξ_1,ξ_2,ξ_3，则在下列方程组中以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 为基础解系的方程组是(　　)

(A) $\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}X=0$　　(B) $ABX=0$　　(C) $BAX=0$　　(D) $(A+B)X=0$

(7) 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的简单随机样本，且 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是样本方差，则方差 $D(S^2)$ =（　　）

A. $\frac{\sigma^4}{n}$；　B. $\frac{2\sigma^4}{n}$；　C. $\frac{\sigma^4}{n-1}$　D. $\frac{2\sigma^4}{n-1}$

(8) 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y$，$V=X+Y$，则随机变量 U 与 V（　　）。

（A）不独立；　　（B）独立；

（C）相关系数为零　　（D）相关系数不为零；

得分	评卷人

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(9) 设函数 $y=y(x)$ 由方程式 $\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{y}|\sin t^2|\,dt+\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^3}\,dt=0$ 确定，那么曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程是________________.

(10) 二元函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f(x,y+g(x))=xy+g(y)$ 确定，其中 $g(y)$ 可微，则

$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$__________

(11) 微分方程 $\sin^2 x\cdot y'+y=\cot x$ 的通解为________

(12) 累次积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\quad(a>0)$ 化为直角坐标先积 y 后积 x 的二次积分为________

(13) 设向量组

$a_1=(1,\ -1,\ 0)^T,a_2=(4,\ 2,\ a+2)^T,a_3=(2,\ 4,\ 3)^T,a_4=(1,\ a,\ 1)^T$，中任何两个向量都可由向量组中另外两个向量线性表出，则 $a=$________.

(14). 设两随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $0-1$ 分布

X	0	1
P	$1-p$	p

且方差 $D(X)=\frac{2}{9}$，$Z=\begin{vmatrix}X&Y\\Y&X\end{vmatrix}$，则 $E(Z^4)=$________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

得分	评卷人

(15)（本小题满分 10 分）选择常数 a,b,c 的值，使得当 $x\to 0$ 时函数 $a+bx-(1+c\sin x)e^x$ 是 x^3 的高阶无穷小。

得分	评卷人

(16)（本小题满分 10 分）设 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$，证明 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$。

得分	评卷人

(17)（本小题满分 10 分）设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 1\le x\le 3\\ 0 & 其他\end{cases}$，

求 $I=\iint\limits_D f(y+1)f(x+y^2)dxdy$，其中 D 为全平面区域。

得分	评卷人

(18)（本小题满分 10 分）设甲、乙、丙三种产品的产量分别为 x、y、z（吨）时，这三种产品总成本函数为 $C(x,y,z)=2x+y+2z+30$（万元），出售这三种产品的价格分别为 $p_1=18-x$（万元/吨）$p_2=25-2y$（万元/吨）$p_3=12-z$（万元/吨）

(1) 厂家各生产这三种产品多少吨利润最大？

(2) 若限制这三种产品总量为 16 吨时各生产这三种产品多少吨利润最大？

得分	评卷人

(19)（本小题满分 10 分）设 $f'''(x)$ 在某领域 $N(0,\delta)$ 内有界，且 $f(0)=f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$，问 α 取何值时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n^{\alpha})$ 必收敛。

得分	评卷人

(20)（本小题满分 11 分）．设 A 是 3 阶实对称矩阵 秩（A）=1 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个特征值。对应的一个特征向量 $\xi_1=(-1\ \ 1\ \ 1)^T$（I）求 $Ax=0$ 通解；（II）求矩阵 A。

得分	评卷人

(21)（本小题满分 11 分）已知二次型 $f(x_1\quad x_2\quad x_3)=x^TAx=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，（I）求参数 a 及 A 的特征值；（II）求 $A^3-13A^2+36A+2E$

得分	评卷人

(22)（本小题满分 11 分）设 X 与 Y 的分布律分别是

X	0	1	Y	-1	0	1
P	1/3	2/3	P	1/6	1/6	2/3

且 $P\{X-Y\neq 1\}=1$，试求：（I）(X,Y) 的联合分布律；(II) $Z=X^2+Y^2$ 的分布律；（III）$\mathrm{Cov}(X,2X-Y)$

得分	评卷人

(23)（本小题满分 11 分）设 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases} cxe^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

$X_1,\ldots,X_n$ 为 X 简单随机样本，试确定：（1）常数 c；（II）参数 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$；

（III）参数 $b=P\{X\leq 1\}$ 的极大似然估计

数学三（模拟 3）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{a+x^2}-1}{e^x-1-x-bx^2}$ 的可去间断点，则常数 a,b 的取值为(　　).

（A）$a=1,b$ 为任意实数　（B）a 为任意实数，$b=\dfrac{1}{2}$

（C）$a\neq 1,b=\dfrac{1}{2}$　（D）$a=1,b\neq\dfrac{1}{2}$

(2) 设有曲线 $y=\ln x$ 与 $y=kx^2$，当 $k>\dfrac{1}{2e}$ 时，它们之间(　　).

(A) 没有交点　(B) 仅有一个交点　(C) 有两个交点　(D) 有三个交点

(3) 积分 $I=\int_a^{a+\pi}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}x$ 的值(　　).

（A）是与 a 无关的负的常数　（B）是与 a 无关的正的常数

（C）恒为零　（D）不为常数

(4) 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数都存在，则(　　).

（A） $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处必连续　（B） $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处必可微

（C） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$　（D） $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

(5) n 阶实矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$，则下列命题正确的是(　　).

（A） $3E-A$ 可逆，$3E+A$ 也可逆　（B） $2E-A$ 可逆，$2E+A$ 也可逆

（C） $E-A$ 可逆，$E+A$ 也可逆　（D） $4E-A$ 可逆，$4E+A$ 也可逆

(6) 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$,对任意的 n 维向量 β,向量组 $\alpha_1+a\beta,\alpha_2+b\beta,\alpha_3$ 线性相关，则参数 a,b 应满足条件(　　).

(A) $a=-b$　(B) $a=b$　(C) $a=-2b$　(D) $a=2b$

(7) 某人打靶的命中率为 $\frac{1}{2}$，当他连射三次后检查目标，发现靶已命中，则他在第一次射击时就已命中目标的概率为(　　).

(A) $\frac{3}{7}$　(B) $\frac{4}{7}$　(C) $\frac{3}{8}$　(D) $\frac{1}{2}$

(8) 设随机变量 X,Y 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，$P(X>1)=e^{-2}$，则 $P\{\min(X,Y)\le 1\}=$(　　).

(A) e^{-2}　(B) $1-e^{-1}$　(C) $1-e^{-4}$　(D) e^{-4}

得分	评卷人

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.把答案填在题中横线上.

(9) 设 $y=y(x)$ 由 $\cos(x^2+2y)+e^y-x^2y^3=0$ 确定,则 $\mathrm{d}y=$________.

(10) 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}dy=$________

(11) 差分方程 $y_{t+1}-y_t=2^t-1$ 的通解为________.

(12) 设 $z=\int_1^{x^2y} f(t,e^t)dt$，其中 f 具有一阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________;

(13) 设 A 为三阶矩阵,其特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$,其对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,令 $P=(4\alpha_1,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+2\alpha_3)$,则 $P^{-1}(A^*+3E)P$ 为________________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)$，则随机变量 $(2X,Y+1)$ 的概率密度函数 $f_1(x,y)=$________________ .

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 为可导的偶函数，且在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(\cos x)-ef(\ln(e+x^2))=2x^2+o(x^2)$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程.。

(16)（本小题满分 10 分）

得分	评卷人

求函数 $z=f(x,y)=\cos x+\cos y+\cos(x-y)$ 在闭区域 $D:0\le x\le\dfrac{\pi}{2},0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ 上的最大值与最小值

得分	评卷人

(17)（本小题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$.证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

得分	评卷人

(18)（本小题满分 10 分）

求 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{2+x^2}$ 的麦克劳林级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n2^{n+1}-2n-1}{n(2n-1)2^{n+1}}$ 的和。

得分	评卷人

(19)（本小题满分 10 分）

计算积分 $I=\iint\limits_D x^2\max(x,|y|)d\sigma$，其中 $D:0\#x\ \ 1,-1\#y\ \ 1.$

得分	评卷人

(20)（本小题满分 11 分）已知齐次方程组（Ⅰ）$\begin{cases}x_1+x_2+x_4=0\\ ax_1+a^2x_3=0\\ ax_2+a^2x_4=0\end{cases}$ 的解全是 4 元方程（Ⅱ）$x_1+x_2+x_3=0$ 的解.（1）求 a.　（2）求齐次方程组（Ⅰ）的解.

得分	评卷人

(21)（本小题满分 11 分）

设 A 是 n 阶矩阵，A 的第 i 行，j 列元素 $a_{ij}=i\cdot j\ \ (i,j=1,\cdots,n)$

（1）求 $r(A)$；（2）求 A 的特征值与特征向量，并问 A 能否相似于对角阵，若能，求出相似对角阵，若不能，则说明理由.

得分	评卷人

(22)（本小题满分 11 分）

设随机变量 (ξ,η) 的联合分布律如表所示，

ξ \ η	-1	0	1
-1	0.1	0.2	0.1
1	0.4	0.1	0.1

令 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min\{\xi,\eta\}$

试求：(Ⅰ) (X,Y) 联合分布律；(Ⅱ) 协方差 $Cov(X,X+2Y)$；(Ⅲ) $Y=-1$ 时，X 的条件分布律.

得分	评卷人

(23)（本小题满分 11 分）

设总体 $X\square N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为 X 简单随机样本，且 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，试求：(Ⅰ) $E(X_1Q^2)$　(Ⅱ) 方差 $D(\bar{X}-Q^2)$

数学三（模拟 4）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}{1+x^n}\sin\pi x$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）.

（A）处处可导　　（B）仅有一个点处不可导

（C）有两个点处不可导　　（D）至少有三个点处不可导

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n\sin^n x}{n^2}$，　$(|x-k\pi|\le\arcsin\dfrac{1}{3}$,$(k=0$,$\pm1,\pm2,\cdots))$　(C)

（A）发散　　(B)　条件收敛

(C)　绝对收敛　　(D)　敛散性不定

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续的导数，$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=1$，又 $f'(x)=\varphi(x)+\int_0^x(e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t$，则（ ）.

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

（C）点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(4) 设 $0<a<1$，平面区域 D 由 $x+y=a,x+y=1$ 及 x 轴和 y 围成，

$I_1=\iint\limits_D\sin^2(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，

$I_2=\iint\limits_D\ln^3(x+y)\,\mathrm{d}\sigma,I_3=\iint\limits_D(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，则 I_1,I_2,I_3 的大小关系是（ ）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_2<I_1<I_3$　（D）$I_3<I_1<I_2$

(5) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是它的伴随矩阵，则行列式 $\left|-2\begin{pmatrix}A^* & 0\\ A+A^* & A\end{pmatrix}\right|$ 的值为（ ）.

(A) $4^n|A|^n$　(B) $2^n|A|^n$　(C) $(-1)^n4^n|A|^n$　(D) $(-1)^n2^n|A|^n$

(6) 设向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 和(II): $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为两个 n 维列向量组,且它们的秩都等于 r,则下述结论成立的是（ ）.

(A)矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 与矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 等价

(B)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩等于 r

(C)当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示时,则(I)与(II)等价

(D) 当 $s=t$ 时(I)与(II)等价

(7) 设概率 $P(A)=P(B)=\dfrac{3}{5}$,则条件概率 $P(A|B)$ 最小可能取值是（ ）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{1}{3}$　(C) $\dfrac{1}{5}$　(D) $\dfrac{1}{6}$

（8）在长为 a 的线段上任意取两点 M_1,M_2 长度的数学期望为( ).

(A) a　(B) $\dfrac{a}{2}$　(C) $\dfrac{a}{3}$　(D) 0

得分	评卷人

二、填空题:(9)～(14)小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$________.

(10) 微分方程 $y''-4y'+4y=1+xe^{2x}$ 的通解为________________.

(11) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, $f(1)=1$,且有 $xf'(x)-f(x)=x\sqrt{1-x^2}$,则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

(12)设 $z=f(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x,xy)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________。

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&0\\1&1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=$________.

(14) 设 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布律为 $P(X=i)=\dfrac{1}{3},i=-1,0,1$， Y 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，则概率 $P(X+Y\geq1)=$________。

三、解答题: (15)～(23)小题，共 94 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

（15）（**本题满分 10 分**）设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^4+ax^2}-(x^2+bx)e^{-\frac{2}{x}}]=1$ 试确定常数 a,b 的值。

得分	评卷人

（16）（**本题满分 10 分**）设某种商品的需求价格弹性为 $\eta=\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{Q}e^{-p+\frac{1}{p}}(\eta>0)$,其中 p 为价格, Q 为商品需求量.（Ⅰ）试在 $\lim\limits_{p\to+\infty}Q(p)=0$ 条件下求商品的需求量 Q 与价格 p 之间的函数关系;

(Ⅱ)若企业生产该商品的成本函数为 $C(Q)=2+\dfrac{1}{2}Q$,试求该商品价格 p 为多少时获得的利润最大?

得分	评卷人

（17）（**本题满分 10 分**）计算 $\iint\limits_{D}\max\{\cos(x+y),\sin(x+y)\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\frac{\pi}{2}\}$.

得分	评卷人

（18）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=0$，$f(b)>0$，又它在 $x=a$ 处的右导数且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$。证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $f(\xi)=0$；（Ⅱ）$\exists\eta\in(a,b)$ 内使得 $f''(\eta)>0$。

得分	评卷人

（19）（**本题满分 10 分**）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

得分	评卷人

（20）（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&9\\2&0&6\\-3&1&-7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，向量 $\boldsymbol{\beta}_1=(0,1,-1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(a,2,1)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(b,1,0)^T$ 是齐次次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的 3 个解向量,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解.（Ⅰ）求 a,b 的值；（Ⅱ）求方程 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

得分	评卷人

（21）（**本题满分 11 分**）（I）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(a+4)x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}$ 化为标准形 $by_1^2+5y_2^2-y_3^2$ 求 a,b 的值以及所用的正交交换；（II）若（I）中的二次型是正定的，求 a 的值。

得分	评卷人

（22）（**本题满分 11 分**）设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{2}, & |x|<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，且 $Y=X^2-1$，试求：（I）随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$；（II）$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

得分	评卷人

（23）（本题满分 11 分）设总体的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-a(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

，其中 a 为已知正的常数，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。（I）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$；（II）求 $\hat{\theta}_L$ 的概率密度函数 $\varphi(x)$；（III）求 $E(\hat{\theta}_L)$ 的值.

数学三（模拟 5）

考生注意:本试卷共二十三题,满分 150 分,考试时间为 3 小时.

得分	评卷人

一、选择题:（1）～（8）小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合要求,将所选项前的字母填在题后的括号里.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)$ 是 $f(x)$ 的极小值，则 $\exists\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时必有（ ）。

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)]\geq 0$ （B）$(x-a)[f(x)-f(a)]\leq 0$

（C）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geq 0$ （D）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leq 0$

(2) 设常系数微分方程 $y''+by'+cy=0$ 的通解形式是 $y=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x$，则（ ）

(A) $b=2,c=5$； (B) $b=-2,c=5$；

(C) $b=-3,c=2$； (D) $b=3,c=2$

(3) $\int_0^1 \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=$（ ）。

（A）π （B）$\dfrac{\pi}{2}-1$ （C）$\dfrac{\pi}{4}$ （D）1

(4) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则下列各选项中正确的是(C)

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散； （B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$ 条件收敛;

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 绝对收敛; （D）$\lim\limits_{x\to\infty}na_n=\lambda(\neq 0)$

(5) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+2A-3E=0$.若 $r(A-E)=1$,，则二次型 x^TAx 在正交变换下的标准形是

$(A)\ y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$. $(B)\ y_1^2-3y_2^2-y_3^2-3y_4^2$.

$(C)\ y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$. $(D)\ y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.

(6) 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=n$,则下列结论不正确的是( )

(A)若 $AB=O$,则 $B=O$ (B)对任意矩阵 B,有 $r(AB)=r(B)$

(C)存在 B,使得 $BA=E$ (D)对任意矩阵 B,有 $r(BA)=r(B)$

(7) $X\sim E(\lambda)$(指数分布)，且概率 $P(X>D(X))=e^{-2}$，则参数 $\lambda=$（ ）

A. $\dfrac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. 2

(8) 独立的抛 n 次硬币，用 Y 表示正面出现的次数，X 表示反面出现的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（ ）

A. 2 B. 1 C. 0 D. −1

得分	评卷人

二、填空题：(9)～(14) 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) 设 $z=(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有二阶导数，

且 $\varphi'\neq-1$，$u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y})$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$________。

。

(10) 微分方程 $xdy-ydx=y^2e^ydy$ 的通解为________。

(11) 交换积分次序：$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy=$________。

(12) 设函数 $y(x)$ 由方程 $x=t^2, y=3t+t^3$ 确定，其中 $t>0$，则曲线 $y=y(x)$ 的拐点是________.。

(13) 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\1&-1&2&-1\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$，则方程组 $Ax=0$ 解空间的一组规范正交基为________。

(14) 设 X与Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1)$, $Y\sim E(\lambda)$ 且 Y 的数学期望为 1/2，则概率 $P(\max\{X,Y\}\leq\dfrac{1}{2})=$________。

三、解答题：(15)～(23) 小题，共 94 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)（本题满分 9 分）求椭圆 $5x^2+8xy+5y^2=9$ 所围平面区域面积。

得分	评卷人

(16)（本题满分 11 分）设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续 $(a>0)$，且 $f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt, x\in[0,a]$，试证：无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上绝对收敛.

得分	评卷人

(17)（本题满分 10 分）已知函数 $\varphi(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的连续函数，且 $\varphi(0)=1$，$f(x)=\int_0^{2x}|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t$，求 $f'(T)$ 的值。

得分	评卷人

(18)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)+f'(x)\neq0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内最多只有一个零点。

得分	评卷人

(19)（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的周期函数，试证明 $\frac{dy}{dx}+ky=f(x)$ 有唯一的以 T 为周期的周期函数解，其中 k 为常数。

得分	评卷人

(20)（**本题满分 11 分**）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&a&6\end{pmatrix}$ 能相似对角化，

(I) 求参数 a；(II) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 $f(x)=x^TA^2x$ 化为标准形。

得分	评卷人

(21)（**本题满分 11 分**）已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 0，1，1，$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 为 A 的两个互异特征向量，且 $A(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)=\vec{\alpha}_2$。
(I) 证明：向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$ 线性无关；(II) 求 $A\vec{x}=\vec{\alpha}_2$ 的通解。

得分	评卷人

(22)（本题满分 11 分）设 (X,Y) 在方形区域 $G=\{(x,y)/0<x<1,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，试求：(I) 概率 $P\{\frac{1}{2}\le X+Y\le\frac{3}{2}\}$；(II) $Z=|X-Y|$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

(III) $Z=|X-Y|$ 均值与方差。

得分	评卷人

(23)（本题满分 11 分）设某批产品的一等品率为 1/10，从这批产品中任取 n 件，求其中一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值不超过 0.02 的概率，(I) $n=400$ 时用切比契夫不等式估计；(II) 若要使得一等品所占比例与 1/10 之差的绝对值的概率不小于 0.95 时，至少需要取多少件产品（利用中心极限定理计算）（$\Phi(1.96)=0.975$）

参考答案

2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟 1）

考生注意：本试卷共二十三题，满分 150 分，考试时间为 3 小时.

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	A	B	D	C

(1)【解】$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-e^{\sin^3x}}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}(1-e^{\sin^3x-x^3})}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin^3x-x^3}}{x^m}$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x-x^3}{x^m}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^3x-x^3}{x^m}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(x-\sin x)(x^2+x\sin x+\sin^2x)}{x^m}$

$=3\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^{m-2}}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{(m-2)x^{m-3}}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(m-2)x^{m-3}}$，所以有 $m-3=2,m=5$。

(2)【略】