2014年 数(二)模(一)答案

数(二)模(一)答案

一、选择题

(1) C

① $F(-x)=\frac{1}{-x}\int_0^{-x}f(t)dt \xlongequal{t=-u}$

$-\frac{1}{x}\int_0^{x}f(-u)d(-u)=\frac{1}{x}\int_0^{x}f(-u)du$

因f(x)为奇函数

∴ $F(-x)=\frac{1}{x}\int_0^{x}-f(u)du=-F(x)$

故F(x)为奇函数　①正确

② 令 $f(x)=\cos x$

则 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x}\cos t\,dt=\frac{\sin x}{x}$

此时 $F(x)\neq F(x+T)$　②不正确

③ 根据有界函数的定义可得

若f(x)在(0,1)内有界，则存在M>0

使 $\forall x\in(0,1)$ 都有 $|f(x)|\le M$

故 $|F(x)|=\frac{|\int_0^x f(t)dt|}{|x|}\le\frac{\int_0^x|f(t)|dt}{x}$

$\le\frac{\int_0^x M\,dt}{x}=M$　即F(x)在(0,1)上有界　③正确

④ $F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}$

令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_0^x f(t)dt$

则 $\varphi'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)$

∵f(x)为单增 ∴ $f'(x)>0$

故当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $\varphi'(x)<0$　$\varphi(x)\downarrow$

当 $x\in[0,+\infty)$ 时 $\varphi'(x)>0$　$\varphi(x)\uparrow$

∴ $\varphi(x)>0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ $(x\neq0)$ 恒成立

∴ $F'(x)>0$　∴F(x)为单增函数　∴④正确

(2) B

$\Gamma(n+1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=-\int_0^{+\infty}x^n de^{-x}$

$=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx^n=n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$

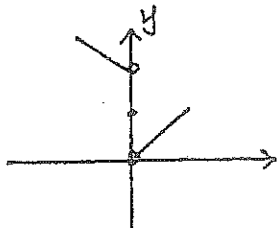
$=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)\cdots[n-(n-2)][n-(n-1)]\Gamma(1)$

$=n!$

(3) D

取 $f(x)=\begin{cases}x-2 & x<0\\ 1 & x=0\\ -x & x>0\end{cases}$

则|f(x)|图形如下



从该图形可知 A、B、C不正确

对于D项 证明如下

设 $\varphi(x)=\int_0^x tf(t)dt$ 则 $\varphi'(x)=xf(x)$ ∴ $\varphi'(0)=0$

又∵ $\varphi''(x)=f(x)+xf'(x)$ ∴ $\varphi''(0)=f(0)$ ∵ $f(0)f'(0)\neq0$

∴ $\varphi''(0)\neq0$　∴ $\int_0^x tf(t)dt$ 在点 x=0 处取极值

(4) A

$f(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$

$f(\frac{1}{2})=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos\frac{t}{2}}{t}dt\xlongequal{积化和差公式}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{3t}{2}+\sin\frac{t}{2}}{2t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{3t}{2}}{\frac{3t}{2}}d\frac{3t}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}d\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}$

$f(1)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos t}{t}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{2t}d2t=\frac{\pi}{4}$

$)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\cos 2t}{t}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3t-\sin t}{t}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3t}{3t}d3t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=0$

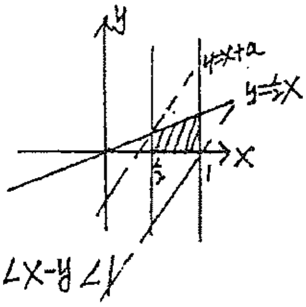
∴ 综上所述 $f(0)=f(\frac{1}{2})$

(5) B

详见多元冲刺串讲

(6) A

平面区域D如下所示



则可知 $\frac{1}{2}<x-y<1$

∴ $[\ln(x-y)]^3<0$ $(x-y)^3>0$ ∴ $I_2>I_1$

又∵ $e^{(x-y)^3}>(x-y)^3$ ∴ $I_3>I_2$

∴ $I_1<I_2<I_3$ 也可用赋值法

(7) C

$(\beta_1,\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&-1&1\\-2&0&-3&0&-6&6\\3&5&3&5&-1&1\\2&-2&3&-2&10&0\end{pmatrix}$$

经过初等变换可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&-1&1\\0&-1&0&5&2&-2\\0&0&-1&20&0&0\\0&0&1&-32&0&10\end{pmatrix}$$ 故 β_1,β_2,α_3 线性相关

∴ C正确

(8) A

①行变换后其特征值可能会发生变化

② 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

但若将A改为实对称矩阵，则该命题成立

③ 设 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}$

由 $AP=P\Lambda$ 可知 $A\xi_3=\lambda_3\xi_3$

若 $\xi_3\neq0$ 则 ξ_3 是对应于 λ_3 的特征向量 否则则不是

二、填空题

(9) 1

$\lim_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\arctan x}}=\lim_{x\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{\arctan x}}$

$=e^{\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\arctan x}}=e$

∴ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)=1$

(10) $9e^{2x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{tf'(t)+f(t)}{f(t)+(t-2)f(t)}=\frac{2t+1}{2t-3}$

整理得 $f'(t)=2f(t)$ 积分得 $\ln f(t)=2t+C$

即 $f(t)=e^{2t+C}$ 将 $f(-\ln 3)=1$ 代入可得 $e^C=9$

∴ $f(x)=9e^{2x}$

11. 0

$f(x)$ 可导 则有 $f(0+)=f(0-)=f(0)$

$f'(0+)=f'(0-)$

$\lim\limits_{x\to0^-} x^2\sin\frac{1}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} ax+b=b$ $\therefore b=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x\sin\frac{1}{x}=0=f'(0-)$

$f'(0+)=a$ $\therefore a=0$

$\therefore a^2+b^2=0$

12) $(1-\frac{1}{x})\ln(1+x)+C$

$\int\frac{x+\ln(1+x)}{x^2}dx$

$=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

$=\ln x+[-\int\ln(1+x)d\frac{1}{x}]$

$=\ln x-\frac{1}{x}\ln(1+x)+\int\frac{1}{x}d\ln(1+x)$

$=\ln x-\frac{1}{x}\ln(1+x)-\int\frac{1}{x(1+x)}dx$

$=(1-\frac{1}{x})\ln(1+x)+C$

13) $\frac{2}{3}$

$\int_0^1|x^2-t|dx$

$=\int_0^{\sqrt{t}}(t-x^2)dx+\int_{\sqrt{t}}^1(x^2-t)dx$

$=(tx-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\sqrt{t}}+(\frac{1}{3}x^3-tx)\Big|_{\sqrt{t}}^1$

$=\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}$

令 $\varphi(t)=\frac{4}{3}t\sqrt{t}-t+\frac{1}{3}$

则 $\varphi'(t)=2\sqrt{t}-1$ 令 $\varphi'(t)=0$ 得 $t=\frac{1}{4}$

此时 $\varphi(\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，$\varphi(0)=\frac{1}{3}$，$\varphi(1)=\frac{2}{3}$

$\therefore \max\limits_{0\le t\le1}\int_0^1|x^2-t|dx=\frac{2}{3}$

(14) $(2,4,-1)^T$

设 $B=(\beta_1,\beta_2)$ 由 $AB=C$ 可推出方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=1\\x_2+3x_3=1\\x_1+x_2+5x_3=1\end{cases}$$ 解得 $(x_1,x_2,x_3)^T=(2,4,-1)^T$

即B的第一列 $\beta_1=(2,4,-1)^T$

三、解答题

(15)

解：由题可知 $g(x)$在$x=0$处连续

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^2}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-f(x)-xf'(x)}{2x}$

由此得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x+1}-f(x)-xf'(x)=0$ 解得 $f(0)=1$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-f(x)-xf'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}-f'(x)-f'(x)-xf''(x)}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}-\frac{1}{(x+1)^2}-2f'(x)-xf''(x)=1$ 解得 $f'(0)=-1$

$g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)-xf(x)}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+x)-2xf(x)-x^2}{2x^3}\overset{洛必达}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2f'(x)-xf''(x)}{6x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-2f'(x)-1}{6x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{6}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{2}{(1+x)^3}-2f''(x)}{6}-\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to0}f''(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}f''(0)-\frac{1}{6}f''(0)=1$

$\therefore f''(0)=-\frac{4}{3}$

16.

(I)

证明：

$$f'''(x_0+)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0+}\frac{f''(x)}{x-x_0}$$

$$f'''(x_0-)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)}{x-x_0}$$

因 $f'''(x_0)\neq 0$

$\therefore \lim_{x\to x_0+}\frac{f''(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0-}\frac{f''(x)}{x-x_0}=f'''(x_0)$

$\therefore f''(x)$ 在 $x=x_0$ 左右两侧异号

由拐点定义可知 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(II)

由 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=1$ 可知

$\lim_{x\to 0}f'(x)+f''(x)=0$ $\because f'(0)=0$ $\therefore f''(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+f''(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\ln(1+x)}+\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\frac{1}{x+1}}+\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=f'''(0)=1$$

由(I)可知 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

17.

解：

$$\frac{dz}{dx}=f_1'+(1+y')f_2'$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f_{11}''+(1+y')f_{12}''+y''f_2'+(1+y')[f_{21}''+(1+y')f_{22}'']$$

$$=f_{11}''+2(1+y')f_{12}''+(1+y')^2f_{22}''+y''f_2' \quad ①$$

方程 $x^2(y-1)+e^y=1$ 两边同时对 x 求导可得

$$2x(y-1)+x^2y'+e^yy'=0\Rightarrow y'=\frac{-2x(y-1)}{x^2+e^y} \quad ②$$

再对 x 求导可得

$$2(y-1)+2xy'+2xy'+x^2y''+e^yy'^2+e^yy''=0 \quad ③$$

当 $x=0$ 时 $y=0$ 代入②，③解得

$y'|_{x=0}=0$ $y''|_{x=0}=2$ 代入①得

$$\frac{d^2z}{dx^2}\Big|_{x=0}=f_{11}''+2f_{12}''+f_{22}''+2f_2'$$

18. 解：

$$\int_0^{\pi}\min\{x,y\}f(y)dy$$

$$=\int_0^x yf(y)dy+\int_x^{\pi}xf(y)dy=4f(x)$$

方程两边同时对 x 求导可得

$$xf(x)+\int_x^{\pi}f(y)dy-xf(x)=4f'(x)$$

即 $\int_x^{\pi}f(y)dy=4f'(x)$ 再对 x 求导可得

$-f(x)=4f''(x)$ 积分可 $y=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}$

当 $x=0$ 时 $f(0)=0$ 代入解得 $C_1=0$

$\therefore f(x)=C\sin\frac{x}{2}$ C 为任意常数

19、20考研资料群 690261900

19）

解：

方程 $x^2+2y^2+z^2-4yz+2z+3=0$ 微分

得 $2xdx+4ydy+2zdz-4(zdy+ydz)+2dz=0$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z-2y+1}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(z-y)}{z-2y+1}$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 解得

$x=0$ $y=z=3$ 或 $y=z=-1$

又∵ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(z-2y+1)+xz'_x}{(z-2y+1)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x(z'_y-2)}{(z-2y+1)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(z'_y-1)(z-2y+1)-2(z-y)(z'_y-2)}{(z-2y+1)^2}$

① 当 $x=0$ $y=z=3$ 时

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}$ $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1$

∵ $B^2-AC=-\frac{1}{2}<0$ 且 $A>0$

则 $z=z(x,y)$ 在 $(0,3)$ 处取极小值

且 $z_{min}=3$

② 当 $x=0$，$y=z=-1$ 时

$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}$ $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-1$

∵ $B^2-AC=-\frac{1}{2}<0$ 且 $A<0$

∴ $z=z(x,y)$ 在 $(0,-1)$ 处取得极大值

极大值为 -1

(20)

(I) 证明：

设 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(\frac{a+x}{2})$

则 $\varphi'(x)=f(x)-f(\frac{a+x}{2})-(x-a)f'(\frac{a+x}{2})\cdot\frac{1}{2}$

由拉格朗日中值定理可得 存在 $\eta\in(\frac{a+x}{2},x)$

满足 $f(x)-f(\frac{a+x}{2})=f'(\eta)(\frac{x-a}{2})$

∴ $\varphi'(x)=\frac{1}{2}(x-a)[f'(\eta)-f'(\frac{a+x}{2})]$

又∵ $f'(x)$ 单调不减 ∴ $f''(x)\geq0$ $f'(\eta)\geq f'(\frac{a+x}{2})$

∴ $\varphi'(x)\geq0$ ∴ $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调不减

又∵ $\varphi(a)=0$ ∴ $\varphi(x)\geq0$ ∴ $\varphi(b)\geq0$

即 $\int_a^b f(t)dt\geq(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

(II) 证明：

设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f(\frac{a+x}{2})$

则 $F(b)=0$ 又∵ $F(a)=0$ ∴ 由罗尔中值定理

可得 存在一点 $\eta\in(a,b)$ 满足 $F'(\eta)=0$

即 $F'(\eta)=f(\eta)-f(\frac{a+\eta}{2})-\frac{(\eta-a)}{2}f'(\frac{a+\eta}{2})=0$

由拉格朗日中值定理可得 存在一点 $x_0\in(\frac{a+\eta}{2},\eta)$

满足 $f(\eta)-f(\frac{a+\eta}{2})=\frac{\eta-a}{2}f'(x_0)$

∴ $F'(\eta)=\frac{\eta-a}{2}f'(x_0)-\frac{(\eta-a)}{2}f'(\frac{a+\eta}{2})$

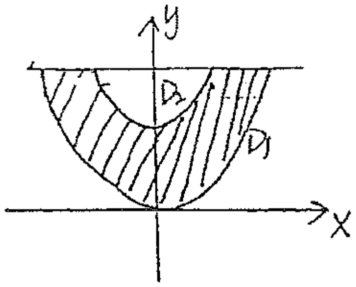
$=\frac{\eta-a}{2}[f'(x_0)-f'(\frac{a+\eta}{2})]=0$

∴ $f'(x_0)=f'(\frac{a+\eta}{2})$

由罗尔中值定理可得 至少存在一点 $\xi\in(\frac{a+\eta}{2},x_0)\subset(a,b)$

满足 $f''(\xi)=0$ 得证

4. 解：其积分区域D如下



$\iint\limits_D ([y-x^2]+1)^2 d\sigma$

$=\iint\limits_{D_1} d\sigma+\iint\limits_{D_2} 4 d\sigma$

$=\iint\limits_D d\sigma-\iint\limits_{D_2} d\sigma+4\iint\limits_{D_2} d\sigma$

$=\iint\limits_D d\sigma+3\iint\limits_{D_2} d\sigma$

$=\int_0^2 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx+3\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dx$

$=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2+4(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2$

$=\frac{8}{3}\sqrt{2}+4$

22,

(I)

证明：由题可知

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性相关

即存在不全为0的常数 $k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2$

满足

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$

即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2$

设 $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

若ξ为零向量 则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=0$

$-\lambda_1\beta_1-\lambda_2\beta_2=0$

又∵α_1,α_2线性无关，β_1,β_2线性无关

∴则有 $k_1=k_2=0$ $\lambda_1=\lambda_2=0$

与题设不符 故ξ为非零向量，且可由α_1,α_2线性表出，

又可由β_1,β_2线性表出

(II)

解：由(I)可得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=0$

故 $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=0$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&4\\2&3&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-2&4\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&-2\\0&-3&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&-2\\0&0&-5&10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\div 2}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-1&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

解得 $(k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2)^T=\mu(-2,0,2,1)^T$ μ为任意常数

又∵ $\xi=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ ∴ $\xi=-2\mu\alpha_1=k(1,2,2)^T$

k为任意常数

(23)

解：由题可知 A^*的特征值为 $1,-2,-2$， ∴$|A^*|=4$

∴$|A|=2$或-2 又∵$|A|>0$ ∴$|A|=2$

∴A的特征值为 $2,-1,-1$

又∵P的第一列为 $(1,1,-1)^T$ ∴ $\lambda_1=2$所对应的特征向量

为 $(1,1,-1)^T$ 设 $\lambda_2=-1$所对应的特征向量$\xi=(x_1,x_2,x_3)$

则有 $x_1+x_2-x_3=0$

解得 $\xi_1=(1,0,1)^T$ $\xi_2=(-1,1,0)^T$

其正交化得 $\alpha_1=(1,0,1)^T$ $\alpha_2=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$

$$\because P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$又\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2014年数二 模二 答案

一、选择题

(1) A

① 设 $f(x)=\tan x \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$g(x)=\cot x \quad x\in(0,\frac{\pi}{2})$

则 $f(x)g(x)=1$ 命题①不成立

② 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & x\geq 0\end{cases}$

则 $f(x)g(x)$ 在 $x=0$ 处连续

故命题②不成立

③ ②的例子可说明③不成立

④ 设 $f(x)=x^2 \quad g(x)=x^2-1$

则 $f(x)g(x)=x^2(x^2-1)$

其在 $x=0$ 处取极大值

故命题④不成立

综上所述，命题①②③④不正确

故选 A

(2) B

方法一：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)^{f(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[1+(g(x)^{f(x)}-1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\ln g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^3\ln x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}x\ln x^2=0$$ 高阶无穷小

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)^{g(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln[1+(f(x)^{g(x)}-1)]}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)\ln f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\ln x^3}{x^2}=\infty$$ 低阶无穷小

方法二：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)^{f(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln g(x)^{f(x)}}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)\ln g(x)}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)^{g(x)}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\ln f(x)^{g(x)}}-1}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)\ln f(x)}{x^2}=\infty$$

故选 B

(3) B

令 $t=\sin x$

则 $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^1 f(t)\,d\arcsin t$

$$=\int_0^1\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

令 $t=\tan x$

则 $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(\tan x)dx=\int_0^1 f(t)\,d\arctan t$

$$=\int_0^1\frac{f(t)}{t^2+1}dt$$

当积分区间相同时，比较被积函数.

在 $[0,1]$ 区间内 $\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}>f(t)>\frac{f(t)}{t^2+1}$ $\therefore I_2>I_1>I_3$

(4)

方法一：

赋值法：令 $f(x)=x^2$ 选 A

方法二：

由于 $f''(x)>0$ $\therefore f(x)$ 为凹函数 根据函数定义可知

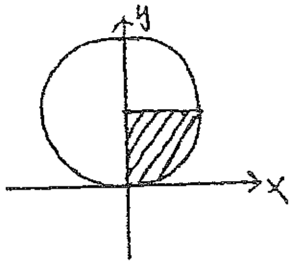
$f(0)+f(1)>2f(\frac{1}{2})$ $\because f(0)=0$ $\therefore f(1)>2f(\frac{1}{2})$

5) A

详见多元串讲

6) A

其积分区域如图



(7) D

∵ $Ax=0$ 通解为 $x=k(1,-2,1,0)^T$

∴ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$

∴ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

由齐次线性方程组解的结构可知 $r(A)=3$

∴ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 任意两个向量都与 α_4 线性无关

选D

(8) A

$A^2+2A-3E=(A+3E)(A-E)=0\Rightarrow$

$A+3E=0$ 或 $A-E=0$

∴ A的特征值为 -3 或 1

∵ $r(A-E)=1$ 且 A为4阶实对称矩阵

∴ $\lambda=1$ 为 A 的三重特征值

∴ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$　$\lambda_4=-3$

故选A

二、填空题

(9) $2e$

方程 $x^2-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 两边同时对 x 求导有

$2x-(1+y')e^{-(x+y)^2}=0$　①

再对 x 求导可得

$2-y''e^{-(x+y)^2}+(1+y')e^{-(x+y)^2}\cdot 2(x+y)(1+y')=0$　②

当 $x=0$ 时　$y=1$

由①可得 $y'(0)=-1$　∴由②可得 $y''(0)=2e$

(10) $1-\frac{4}{\pi^2}$

分段函数在分段点求导时应利用定义求导

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[illegible]}{x-\frac{\pi}{2}}$　洛必达法则

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[illegible]}{1}=1-\frac{4}{\pi^2}=f'(\frac{\pi}{2})$

(11) 1

方程 $f(x-\frac{z}{a})=y-\frac{z}{b}$ 两边同时对 x, y 分别求导

$f'(1-\frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial x})=-\frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'ab}{bf'-a}$

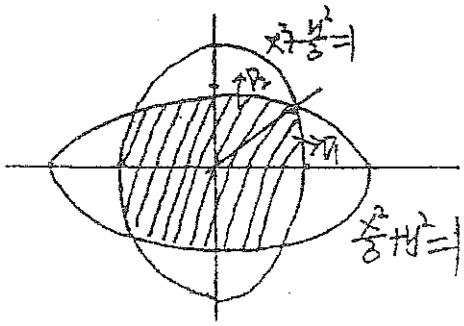
$f'(-\frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial y})=1-\frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ab}{a-bf'}$

∴ $\frac{1}{a}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{a}\cdot\frac{f'ab}{bf'-a}+\frac{1}{b}\cdot\frac{ab}{a-bf'}=1$

注：填空题答案一定很简单

(12) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

其图形如右



$S_{\text{阴}} = \iint_D dxdy = 4\iint_{D_1} dxdy$

$= 8\iint_{D_2} dxdy$

$= 8\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}} dy$

$= 8\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\, dx - 3 \xrightarrow{\text{令} x=\sqrt{3}\sin t}$

$= 8\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt - 3 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

(13) $e^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}} = C\sqrt{x^2+y^2}$

$(x\frac{dy}{dx} - y)\arctan\frac{y}{x} = x \Rightarrow$

$(\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x})\arctan\frac{y}{x} = 1$

令 $u=\frac{y}{x}$ 则 $y' = u + xu'$

代入原方程 即 $xu'\arctan u = 1$

解得 $e^{u\arctan u} = Cx\sqrt{u^2+1}$

即 $e^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}} = C\sqrt{x^2+y^2}$

(14) 100

$|B| = 2^4|(2A)^{-1} - (2A)^*||A|$

$= 2^4|\frac{1}{2}E - 2|A|^2|$

$= 16\times|\frac{5}{2}E| = 16\times(\frac{5}{2})^2 = 100$

三、解答题

(15) 解:

$y = e^{\int dx}(\int |x| e^{-\int dx} dx + C)$

$= e^x(\int |x| e^{-x} dx + C)$

① 当 $x>0$ 时

$y = e^x(\int x e^{-x} dx + C_1)$

$= Ce^x - x - 1$

② 当 $x\le 0$ 时

$y = e^x(\int -xe^{-x}dx + C_2) = C_2e^x + x + 1$

容易忽略
- 题中暗含条件 y 连续且可导 即 $y(0^+) = y(0^-)$
- $y'(0^+) = y'(0^-)$
- $\therefore$ 有 $C_1 - 1 = C_2 + 1$ $\therefore C_2 = C_1 - 2$
- $\therefore y = \begin{cases} Ce^x - x - 1 \\ (C-2)e^x + x + 1 \end{cases}$

(16)

证明 略

(17)

解: 方程组 $\begin{cases} x = 4t^2+5t-7y \\ e^{y+1} - \cos t + ty = 0 \end{cases}$ 两边同时对t求导 可得

$\begin{cases} x' = 8t + 5 - 7y' & ③ \\ e^{y+1}y' + \sin t + ty' + y = 0 & ④ \end{cases}$

当 $t=0$ 时 $x=7$ $y=-1$ 代入③④可得 $x'|_{t=0} = -2$

$y'|_{t=0} = 1$

$\therefore \frac{dy}{dx}|_{t=0} = -2$

对③④两边同时对t再次求导, 可得

$\begin{cases} x'' = 8 - 7y'' & ⑤ \\ e^{y+1}y'^2 + e^{y+1}y'' + \cos t + 2y' + ty'' = 0 & ⑥ \end{cases}$

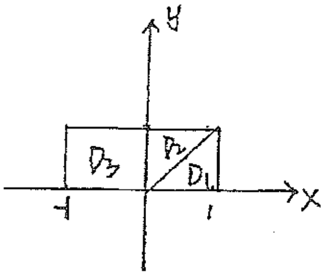
故解得 $x''|_{t=0} = 36$ $y''|_{t=0} = -4$

由参数方程求导公式可得

$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0} = \frac{y''(0)x'(0) - y'(0)x''(0)}{[x'(0)]^3} = \frac{7}{2}$

(18)

解：积分区域如下图



所以 $I=\iint_D \min\{xy,x^2\}d\sigma$

$=\iint_{D_1} xy\,d\sigma+\iint_{D_2}x^2 d\sigma+\iint_{D_3} xy\,d\sigma$

$=\int_0^1dx\int_0^x xy\,dy+\int_0^1 dx\int_x^1 x^2dy$
$+\int_{-1}^0 dx\int_0^1 xy\,dy$

$=\int_0^1 \frac12 x^3dx+\int_0^1 x^2-x^3dx+\frac12\int_{-1}^0 x\,dx$

$=-\frac{1}{24}$

(19)

解：$V(x)=\pi\int_0^x f^2(t)dt$

$S(x)=\int_0^x f(t)dt$

$\therefore \frac{V(x)}{S(x)}=\frac{\pi\int_0^x f^2(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}=\frac23\pi y(x)$

即 $\pi\int_0^x f^2(t)dt=\frac23\pi y\int_0^x f(t)dt$

两边同时对x求导可得

$\pi f^2(x)=\frac23\pi y'\int_0^x f(t)dt+\frac23\pi y f(x)$

整理得

$2y^2=3y'\int_0^x f(t)dt$

即 $\int_0^x f(t)dt=\frac{2y^2}{3y'}$ 两边同时对x求导

$y=\frac{4yy'\cdot 3y'-2y^2\cdot 3y''}{9y'^2}$

整理得 $y'^2=2yy''$ 即 $\frac12\frac{y'}{y}=\frac{y''}{y'}$

积分可得 $\ln C_1\sqrt{y}=\ln y'$ $\therefore C_1\sqrt{y}=y'$

再积分得 $C_1x+C_2=2\sqrt{y}$

当 $x=0$ 时 $y=0$ $\therefore C_2=0$ $\therefore C_1x=2\sqrt{y}$

又∵ $y=y(x)$ 过点 $(1,1)$ $\therefore C_1=2$ $\therefore y=x^2$ 即为所求曲线

(20)

(I) 解：$\varphi(x)=\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{令u=x-t} \int_x^0(x-u)f(u)d(x-u)$

$=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$

$\therefore\varphi'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$

$\therefore \varphi''(x)=f(x)\quad \varphi'''(x)=f'(x)$

(II) 证明：由(I)可得 $\varphi(0)=0$ $\varphi'(0)=0$ $\varphi''(0)=0$

$\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处由泰勒公式展开可得

$\varphi(x)=\varphi(0)+\varphi'(0)x+\frac{\varphi''(0)}{2!}x^2+\frac{\varphi'''(\xi)}{3!}x^3$

$=\frac{\varphi'''(\xi)}{6}x^3 \qquad \xi\in(0,1)$

令 $x=1$ 则 $\varphi(1)=\int_0^1 tf(1-t)dt=\frac{\varphi'''(\xi)}{6}=\frac16 f'(\xi)$

(21)

(I) 证明：∵ $\max_{a\le x\le b} f(x)\cdot\min_{a\le x\le b} f(x)<0$ ∴由零点定理可得

至少存在一点 $x_0\in[a,b]$ 满足 $f(x_0)=0$ 令 $F(x)=f(x)e^{-x}$

又∵ $f(a)=f(b)=0$ ∴由拉格朗日中值定理可得

至少存在点 $\xi_1\in(a,x_0)$ $\xi_2\in(x_0,b)$ 分别满足 $F'(\xi_1)=0$

$F'(\xi_2)=0$

再由拉格朗日中值定理可得 至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 满足

$F'(\xi)=0$

19、20考研资料群 690261900

$F'(\xi)=[f''(\xi)-f'(\xi)]e^{-\xi}-[f'(\xi)-f(\xi)]e^{-\xi}=0$

即 $f''(\xi)-f'(\xi)=f'(\xi)-f(\xi)$

即 $f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$

(II) 证明：

假设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点，设该点为 x_0

即 $f(x_0)=0$

其反推过程与(I)类似（略）

最后可推出至少有一点 ξ 满足 $f''(\xi)+f(\xi)=2f'(\xi)$

与题设矛盾，故假设不成立

$\therefore f(x)$ 在 (a,b) 内没有零点

22)

(I)

证明：

假设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 同时是一个三元非齐次线性方程组的解

则有 $A\xi_1=b$，$A\xi_2=b$，$A\xi_3=b$

当 $t=-1$ 时

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\-2&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-1\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 由于行变换不会改变线性关系

$\therefore \xi_3=\frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2)$ $\therefore A\xi_3=\frac{1}{3}A(\xi_1+\xi_2)=\frac{2}{3}b$

与假设矛盾，故假设不成立，即 ξ_1,ξ_2,ξ_3 不可能同时是一个三元非齐次线性方程组的解

(II) 证明：若 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是一个三元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解，则 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

$A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=b$ $\therefore r(A)=r(b)=1$

23)

(I) 解：$\because r(A)=2$ $\therefore \lambda_3=0$

设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$

则有 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+ax_2+2ax_3=0\\2+3a-2a=0\end{cases}$

解得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $k\in R$

$\therefore AX=0$ 的解为 $k(-2,1,-1)^T$ $k\in R$

(II)

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化可得 正交变换 P

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

其标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+2y_2^2$

19、20考研资料群 690261900

绝密 ★ 启用前

2014年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟三）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（A）．

解：$\lim\limits_{x\to\infty} y=0$（注：$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$）；$\lim\limits_{x\to1} y=\infty,\lim\limits_{x\to-1} y=\infty$；$\lim\limits_{x\to0^-} y=-1,\lim\limits_{x\to0^+} y=1$．

所以渐近线为 $y=0,x=1,x=-1$，第一类间断点为 $x=0$．选（A）．

（2）答案：选（C）．

解：$x(1-\cos x)$，$x^2\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 上的奇函数，积分值为0．

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(1-\sin x)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\,dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\sin x\,dx=0-2\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin x\,dx<0,$$

$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$ 上的偶函数，$I=2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\frac{1+x}{1-x}dx>0$．

（3）答案：选（D）．

解：令 $x=\sqrt{\ln t}$，则 $e^{x^2}=t$，$dx=\dfrac{dt}{2t\sqrt{\ln t}}$，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{\ln t}}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$．

而 $\displaystyle\int_1^2\sqrt{\ln x}\,dx=(x\sqrt{\ln x})\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}=2\sqrt{\ln 2}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{\ln x}}$，故

$$\int_1^2\sqrt{\ln x}\,dx+\int_0^{\sqrt{\ln 2}} e^{x^2}\,dx=2\sqrt{\ln 2}.$$

（4）答案：选（C）．

解：（A）$\sin 2x$ 与 $\cos 2x$ 都是周期为 π 的方程的解；

（B）分离变量得方程的解为 $y=\sin(\pm 2x+C)$，周期为 π；

（D）非齐次方程特解形式为 $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$；

（C）非齐次方程特解形式为 $y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)$ $(a^2+b^2\neq 0)$，是非周期函数．

（5）答案：选（D）．

解：$\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln\sqrt{x})^2}dx=-\frac{4}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{4}{\ln 2}$，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx\overset{t=\sqrt{x}}{=}\int_0^{+\infty}2te^{-t}dt=2$．

而 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ 中第二个反常积分发散；

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\int_0^1\frac{1}{x(1+x)}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$ 中第一个反常积分发散，

所以 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ 和 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$ 均发散.

（6）答案：选（B）.

解：由题设可知，一元函数 $f(x,y_0)$ 点 $x=x_0$ 处取极小值，$f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 处取极小值，故 $f''_{xx}(x_0,y_0)\geq 0$，$f''_{yy}(x_0,y_0)\geq 0$，因而应选（B）.

（7）答案：选（C）.

解：ξ_1,ξ_2,ξ_3 可能相关，故①④都不正确，②显然正确，下证③也正确.

设 η 为 $Ax=0$ 的任一解，由题意知 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)x=\eta$ 有唯一解，故

$$r(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=r(\xi_1,\xi_2,\xi_3\vdots\eta)=3.$$

所以 ξ_1、ξ_2、ξ_3 线性无关，从而 ξ_1、ξ_2、ξ_3 为 $Ax=0$ 的一个基础解系.

（8）答案：选（B）.

解：$Ax=0$ 的解都是 $Bx=0$ 的解，则 $Ax=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 同解，而 $\begin{pmatrix}A-B\\A+B\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 与 $\begin{pmatrix}A-B\\A+B\end{pmatrix}x=0$ 同解，故（B）正确.

二、填空题

（9）答案：填“4”.

解：原式 $\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin\ln(1+at)-\sin\ln(1+t)}{t}$

$$=\lim_{t\to 0}[\cos\ln(1+at)\cdot\frac{a}{1+at}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}]=a-1=3.$$

所以 $a=4$.

（10）答案：填“e^x”.

解：$\int_x^{+\infty}\frac{1}{y(t)}dt=\frac{1}{\int_{-\infty}^x y(t)dt}$，两边求导得 $-\frac{1}{y(x)}=-\frac{y(x)}{(\int_{-\infty}^x y(t)dt)^2}$，得 $\int_{-\infty}^x y(t)dt=y(x)$，进而有 $y'(x)=y(x)$，解得 $y(x)=Ce^x$. 由 $y(0)=1$ 知，$C=1$，所以 $y(x)=e^x$.

（11）答案：填“$e^{x-1}+2$”.

解：已知等式两边对 x 求导数 $\varphi[f(\ln x+1)]\cdot f'(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，即

$$(\ln x+1)\cdot f'(\ln x+1)\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\ln x+1\in[1,+\infty)$，于是 $f'(\ln x+1)=x$．令 $\ln x+1=t$，则 $x=e^{t-1}$， $f'(t)=e^{t-1}$，

$f(t)=e^{t-1}+C$，由 $f(1)=3$ 知 $C=2$，故 $f(t)=e^{t-1}+2$，所以 $f(x)=e^{x-1}+2$．

（12）答案：填“$a<-1$”.

解：方程变形为 $(x^2-x-1)e^{-x}=a$，即曲线 $f(x)=(x^2-x-1)e^{-x}$ 与直线 $y=a$ 无交点.

$f'(x)=x(3-x)e^{-x}\Rightarrow x=0$，$x=3$．并列表如下

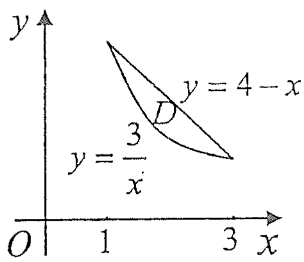
x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值 $f(0)=-1$	↗	极大值 $f(3)=5e^{-3}$	↘

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以 $f(x)$ 的值域为 $f(x)\in[-1,+\infty)$，则当 $a<-1$ 时，曲线

$y=f(x)$ 与直线 $y=a$ 无交点，即方程 $x^2-x-1=ae^x$ 无实根.

（13）答案：填“$\left(\frac{4}{3(4-3\ln 3)},\frac{4}{3(4-3\ln 3)}\right)$”.

解：由 $\begin{cases}y=\dfrac{3}{x},\\ x+y=4\end{cases}$ 解得两曲线的交点为 $(1,3),(3,1)$．



$$\iint_D d\sigma=\int_1^3\left[\int_{\frac{3}{x}}^{4-x}dy\right]dx$$

$$=\int_1^3\left(4-x-\frac{3}{x}\right)dx=4-3\ln 3$$

$$\iint_D x\,d\sigma=\int_1^3\left[\int_{\frac{3}{x}}^{4-x}x\,dy\right]dx=\int_1^3(4x-x^2-3)\,dx=\frac{4}{3}.$$

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}=\frac{4}{3(4-3\ln 3)}，\text{由对称性，}\bar{y}=\frac{4}{3(4-3\ln 3)}.$$

形心坐标为 $(\frac{4}{3(4-3\ln 3)},\frac{4}{3(4-3\ln 3)})$．

（14）答案：填 "-4".

解：$A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2$，$A\alpha_3=-\alpha_1+\alpha_3$，故

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}，\ |A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-4.$$

三、解答题

（15）解：（Ⅰ）令 $f'(x)=1-\frac{1}{2-x}=\frac{2-x-1}{2-x}=\frac{1-x}{2-x}=0$，解得 $x=1$．

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$，故当 $x=1$ 时 $f(x)$ 取得最大值，最大值为 $f(1)=1$． ……4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $x<2$ 时，$f(x)\le 1$．又 $x_1=\ln 2<1$，故当 $n\ge 1$ 时，$x_{n+1}\le 1$，所以，进而数列 $\{x_n\}$ 有上界．

又当 $x\le 1$ 时，$\ln(2-x)\ge 0$，所以 $f(x)\ge x$，从而 $x_{n+1}=f(x_n)\ge x_n$，因此数列 $\{x_n\}$ 单调递增． ……8 分

由于单调有界数列必有极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，在 $x_{n+1}=f(x_n)$ 中令 $n\to\infty$，则 $a=a+\ln(2-a)$，解得 $2-a=1$，$a=1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$． ……10 分

（16）解：（Ⅰ）已知方程两边对 x 求导数，得

$$e^{-y}(-y')+e^{-x^2}-y'+1=0，\ y'=\frac{e^{-x^2}+1}{e^{-y}+1}>0，$$

故 $y(x)$ 单调增加． ……4 分

（Ⅱ）由于 $y=y(x)$ 单调增加，所以 e^{-y} 单调下降，且大于零，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-y}$ 存在．又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 存在，于是由 $e^{-y}+\int_0^x e^{-t^2}dt-y+x=1$ 知，当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}y'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}+1}{e^{-y}+1}=1$．

……10 分

（17）解：因为 $\int_0^1 f(t)|xy-t|dt=\int_0^{xy} f(t)|xy-t|dt+\int_{xy}^1 f(t)|xy-t|dt$，所以

$$u(x,y)=xy\int_0^{xy} f(t)\,dt-\int_0^{xy} tf(t)\,dt+xy\int_1^{xy} f(t)\,dt-\int_1^{xy} tf(t)\,dt,$$ ……3 分

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=y\int_0^{xy} f(t)\,dt+xy^2f(xy)-xy^2f(xy)+y\int_1^{xy} f(t)\,dt+xy^2f(xy)-xy^2f(xy)$

$$=y\int_0^{xy} f(t)\,dt+y\int_1^{xy} f(t)\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2y^2f(xy),$$ ……8 分

同理知 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2f(xy)$； ……10 分

（18）解：$x=e^t$，即 $t=\ln x$，则 $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt}$，

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dt})'_x=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2},$$

代入方程得 $t(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})-(\frac{dy}{dt}-y)=0$. ……5 分

又 $z=\frac{dy}{dt}-y$，则方程化为 $t\frac{dz}{dt}-z=0$，用分离变量法解得 $z=C_1t$，从而有 $\frac{dy}{dt}-y=C_1t$，解此一阶线性微分方程得 $y=e^{\int dt}[\int C_1te^{\int -dt}dt+C_2]=-C_1(t+1)+C_2e^t=-C_1(\ln x+1)+C_2x$. ……10 分

（19）证法 1：令 $f(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{1}{x}$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $f'(x)=\frac{1-x\sin x-\cos x}{x^2}$. ……4 分

再令 $\varphi(x)=1-x\sin x-\cos x$，则 $\varphi'(x)=-x\cos x<0$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$，从而 $\varphi(x)$ 单调递减，又 $\varphi(0)=0$，故当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)<0$，由此知 $f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}<0$，$f(x)$ 单调递减. ……8 分

由 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 知 $f(\beta)<f(\alpha)$，即要证的不等式成立. ……10 分

证法 2：在 $[\alpha,\beta]$ 上对 $f(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{1}{x}$ 运用 Lagrange 中值定理有

$$\frac{\cos\beta}{\beta}-\frac{1}{\beta}-(\frac{\cos\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha})=(\beta-\alpha)\frac{1-\xi\sin\xi-\cos\xi}{\xi^2},$$

其中 $0<\alpha<\xi<\beta<\frac{\pi}{2}$. ……4 分

由证法 1 知 $0<\xi<\frac{\pi}{2}$ 时，$1-\xi\sin\xi-\cos\xi<0$， ……8 分

所以 $\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}$. ……10 分

证法 3：对 $\dfrac{\cos x}{x},\dfrac{1}{x}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上运用 Cauchy 中值定理

$$\frac{\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}=\frac{\dfrac{-\xi\sin\xi-\cos\xi}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=\xi\sin\xi+\cos\xi，其中 0<\alpha<\xi<\beta<\frac{\pi}{2}.$$ ……4 分

由证法 1 知 $0<\xi<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$1-\xi\sin\xi-\cos\xi<0$，即 $\xi\sin\xi+\cos\xi>1$. ……8 分

因此 $\dfrac{\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}>1$，故 $\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}<\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}$，即 $\dfrac{\cos\beta}{\beta}-\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{\cos\alpha}{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}$. ……10 分

（20）解：以细棒 L 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，并使 L 占有 x 轴上区间 $[-l,l]$，L 上各点处的线密度为 $\rho=|x|,x\in[-l,l]$，质点 M 位于 y 轴上的点 $(0,a)$ 处. ……2 分

由于 $\rho=|x|,x\in[-l,l]$ 为偶函数，由对称性知 L 对 M 的引力 $\overline{F}$ 在 x 轴方向的分力 $F_x=0$.

……4 分

在 $[-l,l]$ 上任取小区间 $[x,x+dx]$，对应小段细棒对 M 的引力在 y 轴方向的分力元素为

$$dF_y=-\frac{km|x|dx}{x^2+a^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{kam|x|}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx,$$

其中 k 为引力常数，因此 L 对 M 的引力在 y 轴方向的分力为

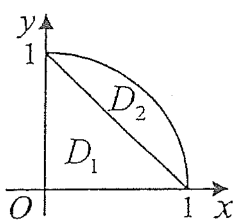
$$F_y=-\int_{-l}^{l}\frac{kam|x|}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx=-2\int_0^l\frac{kamx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}dx=\frac{2kam}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_0^l=2kam\left(\frac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}-\frac{1}{a}\right),$$ ……9 分

所以 L 对 M 的引力 $\overline{F}=\{0,2kam(\dfrac{1}{\sqrt{l^2+a^2}}-\dfrac{1}{a})\}$. ……11 分

（21）解：以直线 $x+y-1=0$ 把 D 分成两部分 D_1,D_2（如图所示）. ……2 分

$$I=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+y^2)d\sigma$$ ……5 分



$$= -2\int_0^1[\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy]dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\int_0^1 r^2\cdot r\,dr]d\theta$$

$$= -2\int_0^1[x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3]dx+\frac{\pi}{8} = -\frac{1}{3}+\frac{\pi}{8}.$$ ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由题意得 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1$ 得 $\lambda_1=0$；$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$ 得 $\lambda_2=1$；$A\xi_3=\lambda_3\xi_3$ 得 $\lambda_3=-3$．故 A 的特征值为 $0,1,-3$，A 可以相似对角化，从而 $r(A)=2$． ……6 分

（Ⅱ）$Ax=\xi_3$，$A\xi_3=-3\xi_3$，$A(-\frac{1}{3}\xi_3)=\xi_3$，$-\frac{1}{3}\xi_3$ 为 $Ax=\xi_3$ 的一个特解，故须求出 $Ax=0$ 的基础解系即可，由于 $r(A)=2$，$3-r(A)=1$，故 $Ax=0$ 的基础解系含有一个解向量．由于 $A\xi_1=\lambda_1\xi_1=0$，故 ξ_1 为 $Ax=0$ 的基础解系，从而 $Ax=\xi_3$ 的通解为 $x=k\xi_1-\frac{1}{3}\xi_3$，$\forall\ k\in R$．

……11 分

注：若求出 a_{ij} 也可以但很烦．

(23)解:（Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&0&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&0\end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，由 $A\alpha=2\alpha$ 得 $\begin{cases}2a_{12}-a_{13}=2,\\a_{12}-a_{23}=4,\\a_{13}+2a_{23}=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_{12}=-a_{23},\\a_{12}=2,\\a_{23}=-2,\\a_{13}=2.\end{cases}$

故 $A=\begin{pmatrix}0&2&2\\2&0&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}$，$f=4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$． ……5 分

（Ⅱ）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&-2\\-2&\lambda&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2&0\\-2&\lambda&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda&2\\-2&2&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda+2&2\\-2&4&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-8)=(\lambda-2)^2(\lambda+4).$$

A 的特征值为 $2,2,-4$，则在正交变换下的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-4y_3^2$． ……9 分

（Ⅲ）$A^3+2A^2-4A+kE$ 的特征值为 $8+k,8+k,k-16$，则 $A^3+2A^2-4A+kE$ 正定的充要条件为 $k>16$． ……11 分