绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 三

(模拟一)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三 (模拟一)参考答案

(1) 【解】由题设有 $f'(e)e=2, f'(e)=\frac{2}{e}$，因而有 $\mathrm{d}\,f(u)\big|_{\substack{u=e\\ \Delta u=0.01}}=\frac{0.02}{e}$，答案 B .

(2) 【解】根据函数曲线的凹凸性及定积分的几何意义可得答案是 A.

(3)【解】 $\begin{cases} z'_x=-(1+e^y)\sin x=0 \\ z'_y=e^y(\cos x-1-y)=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(k\pi,\cos k\pi-1)$, $\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

又 $z''_{xx}=-(1+e^y)\cos x, z''_{xy}=-e^y\sin x, z''_{yy}=e^y(\cos x-2-y)$,

(1)当 $k=0,\pm2,\pm4,\cdots$ 时,驻点 $(k\pi,0)$,从而 $A=z''_{xx}(k\pi,0)=-2$, $B=z''_{xy}(k\pi,0)=0$, $C=z''_{yy}(k\pi,0)=-1$,于是 $AC-B^2>0$,又 $A=-2<0$,即驻点 $(k\pi,0)$ 均为极大值点,因此函数有无穷多个极大值;

(2) $k=\pm1,\pm3,\cdots$ 时,驻点 $(k\pi,-2)$,从而 $A=z''_{xx}(k\pi,-2)=1+e^{-2}$, $B=z''_{xy}(k\pi,-2)=0$, $C=z''_{yy}(k\pi,-2)=-e^{-2}$,于是 $AC-B^2<0$,,即驻点 $(k\pi,-2)$ 不是极值点.

(4) 【解】因为 $\ln(3+\sin 2x)\sin 2x$ 是周期为 π 的周期函数，故该积分与 a 无关，因而

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln(3+\sin 2x)\sin 2x\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{2}\cos 2x\ln(3+\sin 2x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}\mathrm{d}\,x$$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x}{3+\sin 2x}\mathrm{d}\,x>0$，**故选 B**.

(5) 【答案】(C)

(6) 【答案】(B)

(7) 【答案】(C)

(8) 【解】随机变量 X 不小于零，所以 $P\{X\ge 0\}=1$, 对 $y>0$ 时, $Y=X^2$ 的分布函数:

$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y})=F(\sqrt{y})$，其他均不一定成立，所以答案为(B).

(9)【解】 $g'(x)=f'(\frac{2x-1}{x+1})\frac{3}{(x+1)^2}, g'(0)=3f'(-1)=3\ln 2$

(10)【解】由题设 $\frac{1}{n(\ln a_n)^n}=2, \ln a_n=\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}}=e$.

(11)【答案】 $f(x,y)=\pi xy+2(x^2+y^2)$

(12)【解】易得微分方程 $y'=2x\ln\left(1+x^2\right)$,

直接积分得 $y=\int 2x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\int\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$,

利用分部积分法 $y=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2+C$，过点(0，-1)，代入可得 $C=-1$,

所以 $f(x)=(1+x^2)\ln\left(1+x^2\right)-x^2-1$.

(13)【答案】 $\underline{\quad 0\quad}$.

(14)【解】 $Cov(X+Y,X+Z)=Cov(X,X)+Cov(Y,X)+Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)=D(X)$

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)=2D(X)$， $D(X+Z)=D(X)+D(Z)=2D(X)$,

$$\rho=\frac{Cov(X+Y,X+Z)}{\sqrt{D(X+Y)}\cdot\sqrt{D(Y+Z)}}=\frac{D(X)}{\sqrt{2D(X)}\cdot\sqrt{2D(X)}}=\frac{1}{2}.$$

(15) 【解】(Ⅰ) 由题设可知 $a+b+c+1=0,12+4a+b=0,6+2a=0$，由此可得 $a=-3,b=0,c=2$；

(Ⅱ) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0,x=0,x=2$， $f''(x)=6x-6$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 与 $[2,+\infty)$ 上是单增的，在 $[0,2]$ 上单减， $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上是凸的，在 $[1,+\infty)$ 上是凹的；

(Ⅲ) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，且有 $f(0)=2$， $f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值，且有 $f(2)=-2$

(16)【证法一】原不等式等价于 $be^b(e^b-e^a)>ae^a(e^b-e^a)$，即证明当 $-1<a<b$ 时，有 $be^b>ae^a$，令 $f(x)=xe^x$， $f'(x)=(x+1)e^x$，当 $x>-1$ 时 $f'(x)>0$，即函数 $f(x)=xe^x$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上单增，因而当 $-1<a<b$ 时有 $f(b)>f(a)$，即 $be^b>ae^a$。

【证法二】令 $f(x)=xe^x$，则 $f''(x)=(x+2)e^x$，当 $x>-2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上是凹的，取 $x_1=2a,x_2=2b$，那么 $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$，则有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，从而有 $(a+b)e^{a+b}<ae^{2a}+be^{2b}$。

(17)【解】由 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$，有 $y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)]$，

在条件 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，即 $f_1'(x,x)+f_2'(x,x)=\sin(u+v)e^{u+v}$，中令 $u=x,v=x$ 得

$f_1'(x,x)+f_2'(x,x)=\sin(2x)e^{2x}$，于是 $y(x)$ 满足一阶线性微分方程 $y'(x)+2y(x)=\sin 2x$.

通解为 $y(x)=e^{-2x}[\int\sin 2x\cdot e^{2x}dx+c]$，

由分部积分公式，可得 $\int\sin 2x\cdot e^{2x}dx=\frac{1}{4}(\sin 2x-\cos 2x)e^{2x}$，

所以 $y(x)=\frac{1}{4}(\sin 2x-\cos 2x)+ce^{-2x}$.

注：也可由 $f(u,v)$ 满足的偏微分方程，直接得到 $y(x)$ 满足的常微分方程.

由 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=\sin(u+v)e^{u+v}$，

令 $u=x,v=x$，上式转化为常微分方程 $\frac{d}{dx}f(x,x)=\sin(2x)\cdot e^{2x}$，

所以 $\frac{d}{dx}(y(x)e^{2x})=\sin(2x)\cdot e^{2x}$，得 $y(x)$ 满足的微分方程 $y'(x)+2y(x)=\sin 2x$.

(18) 【解】 $f(y+1)=\begin{cases}y+2,0\le y\le 2\\0,其他\end{cases}$， $f(x+y^2)=\begin{cases}x+y^2+1,1\le x+y^2\le 3\\0, \quad 其它\end{cases}$

记 $f(y+1)f(x+y^2)$ 的非零值区域为 $D_1:\begin{cases}1\le x+y^2\le 3\\0\le y\le 2\end{cases}$，

$$I=\iint\limits_D f(y+1)f(x+y^2)dxdy=\iint\limits_{D_1}(y+2)(x+y^2+1)dxdy=\int_0^2 dy\int_{1-y^2}^{3-y^2}(y+2)(x+y^2+1)dx=36.$$

(19)【解】 $g(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$

20、21全程考研资料请加群712760929

$$g'(x)=\frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}=\frac{2}{2+2x^2}=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f(x)=xg(x)$$

$$g(x)-g(0)=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad g(0)=\arctan\frac{1+0}{1-0}=\frac{\pi}{4},$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

所以 $f(x)=xg(x)=\frac{\pi}{4}x+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}=\frac{\pi}{4}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n-1},\quad x\in[-1,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=f(1)-\frac{\pi}{4}\cdot 1=1\cdot\arctan(+\infty)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

(20)【解】令 $X=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 矩阵方程化为 $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, 即 $\begin{cases}A\xi_1=\beta_1\\A\xi_2=\beta_2\\A\xi_3=\beta_3\end{cases}$.

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&-\frac{1}{2}(a-1)&b-2&1+\frac{c}{2}\end{pmatrix},$$

当 $a=1,b=2,c=-2$ 时，矩阵方程有解，

此时 $(A|B)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&4&0\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$

方程组 $A\xi_1=\beta_1$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k\\-k\\k\end{pmatrix}$，($k$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_2=\beta_2$ 的通解为 $l\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-l\\2-l\\l\end{pmatrix}$，($l$ 为任意常数);

方程组 $A\xi_3=\beta_3$ 的通解为 $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\-1-t\\t\end{pmatrix}$，($t$ 为任意常数);

于是 $X=\begin{pmatrix}1-k&2-l&1-t\\-k&2-l&-1-t\\k&l&t\end{pmatrix}$，(其中 k,l,t 为任意常数).

(21)【解】 (I)由 $AB=O$ 知，$\lambda=0$ 是矩阵 A 的特征值且矩阵 B 的列向量 $(1\quad 0\quad 1)^T$ 是矩阵 A 属于特

征值 $\lambda=0$ 的特征向量，故有

$\begin{pmatrix} a & 4 & b \\ 4 & 2 & c \\ b & c & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，于是 $\begin{cases} a+b=0 \\ 4+c=0 \\ b-1=0 \end{cases}$，得 $a=-1,b=1,c=-4$,有矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & -1 \\ -4 & \lambda-2 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)(\lambda+6)$$

知矩阵 A 的特征值为 6,0,-6

由 $(6E-A)x=0$ 得矩阵 A 属于特征值 6 的特征向量为 $(1\quad 2\quad -1)^T$

由 $(-6E-A)x=0$ 得矩阵 A 属于特征值-6 的特征向量为 $(-1\quad 1\quad 1)^T$

单位化，有 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1\quad 2\quad -1)^T,\frac{1}{\sqrt{2}}(1\quad 0\quad 1)^T,\frac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1)^T$，令

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，则有 $x^TAx=y^TAy=6y_1^2-6y_2^2$

(II) 不合同.因为 $x^TAx=6y_1^2-6y_2^2$，$x^TBx=(x_1+x_3)^2=y_1^2$,它们的正负惯性指数不一样，所以不合同.

(22)【解】(I)易知 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<1,-1<y<1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

由此得 $P\{X+2Y\geq 1\}=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}(1-x)}^1 dy=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$；

(II) $Z=X-Y$，由公式可知：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx$，分析可知：

$f(x,x-z)=\frac{1}{2},\begin{cases} 0<x<1 \\ x-1<z<x+1 \end{cases}$，分别讨论积分可得：

1) $-1<z<0,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^{z+1}dx=\frac{z+1}{2}$;

2) $0<z<1,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{1}{2}$,

3) $1<z<2,\ f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_{z-1}^1 dx=\frac{2-z}{2}$;

所以密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases} \frac{z+1}{2}, & -1<z<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\leq z<1 \\ \frac{2-z}{2}, & 1\leq z<2 \end{cases}$；

(III)由于 (X,Y) 在矩形区域上服从均匀分布，所以 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim U(0,1)$，$Y\sim U(-1,1)$，

则 $D(X+2Y)=D(X)+4D(Y)=\frac{1}{12}+4\cdot\frac{2^2}{12}=\frac{17}{12}$。

(23) 【解】设 X 表示 400 件产品中一等品的件数，则 $X \sim B(400, p_0), p_0 = 0.1$

所以 $E(X) = 40, D(X) = 36,$，试求概率 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 0.02 \times 400)$

(I)由切比契夫不等式 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 8) \geq 1 - \frac{D(X)}{8^2} = 1 - \frac{36}{64} = 0.4375$

（II）由中心极限定理 $P(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{10}\right| < 0.02) = P(|X - 40| < 0.02 \times 400) = P(\frac{|X - 40|}{6} < 1.334)$

$= 2\Phi(1.334) - 1 = 2 \times 0.9099 - 1 = 0.8198$.

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数　学　三

（模拟二）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

模拟三（模拟二）参考答案

（1）【解】：函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断。

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=-e^{-1},\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x|x+1|e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x|}=e^{-1},\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$，故 $x=0,1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 B.

（2）【解】：n 为偶数时 $f(x)$ 无界的奇函数，且 $\int_0^{2\pi}\sin^n t\,\mathrm{d}t>0$ 故 B，C，D 均不正确。答案 A。

（3）【答案】选（C）

（4）【答案】选 (A)

（5）【答案】选 (D)

（6）【答案】选（D）

（7）【解】 $E(X)=\dfrac{1}{2},X\sim E(2)$， $p_0=P\{X>\dfrac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}2e^{-2x}dx=\dfrac{1}{e}$，易知所以概率

$$\alpha=C_2^1p_0(1-p_0)p_0=2p_0^2(1-p_0)=\frac{2}{e^2}(1-\frac{1}{e})。$$

（8）【解】 $\sigma^2=E(Y)=kE\{\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-\mu-(X_i-\mu))^2\}$

$$=k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)(X_i-\mu)+\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i-\mu)^2]$$

$$=k[\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-\mu)^2+\sum_{i=1}^{n-1}E(X_i-\mu)^2]=k2(n-1)\sigma^2，所以 k=\frac{1}{2(n-1)}。$$

（9）【解】 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}},f'(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}},f'(1)=-\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$,故所求切线方程为

$$y=-\frac{1}{2\sqrt{e}}x+\frac{3}{2\sqrt{e}}.$$

（10）【解】 等式两边同时在区间 $[0,2]$ 积分可得

$$\int_0^2 [xf'(x)-f(x)]dx=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}dx \Rightarrow xf(x)\Big|_0^2-2\int_0^2 f(x)dx=\frac{\pi}{2},\ \int_0^2 f(x)dx=-\frac{\pi}{4}.$$

（11）【解】 等式可改写为 $x^2+y^2+z^2=\int_{x-2y}^{-y} f(u)du$ 两边对 x 同时求偏导可得

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=-f(x-2y)$，两边对 y 同时求偏导可得 $2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=2f(x-2y)-f(-y)$，由此可得

$z(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{1}{2}[f(x-2y)-f(-y)]-x-y$.

（12）【解】由题设有 $a=-2,b=1,$ 方程 $y''+ay'+by=$ 的特价为 $y^*=x+2$，因此方程 $y''+ay'+by=x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x+x+2$，带人初始条件可得试求特解为：

$y=(x-2)e^x+x+2$.

（13）【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$

$=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$，所以答案 $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$。

(14)【解】 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3, P(AB)=P(A)P(B)=0.3, P(A)=0.5$，

. $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=0.5+0.6-0.3=0.8$.

（15）【解】(I) 设切点的横坐标为 x_0，则相应的切线方程为

$\frac{y-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}$，即为 $y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$

相应的平面图形面积为 $A(x_0)=\int_0^2[e^x-(e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0})]\mathrm{d}x=2(x_0-2)e^{x_0}+e^2-1$

$A'(x_0)=2(x_0-1)e^{x_0}, A''(x_0)=2x_0e^{x_0}, A'(1)=0, A''(1)=2e>0$，所以 $x_0=1$ 是相应的图形面积最小，故所求的切线方程为： $y=ex$；

(II) $V=2\pi\int_0^2 x(e^x-ex)\mathrm{d}x=2\pi[(x-1)e^x-\frac{1}{3}ex^3]\Big|_0^2=2\pi(e^2-\frac{8}{3}e+1)$.

（16）【证明】 （Ⅰ）由题设有 $x_0f(x_0)=\frac{1}{1-x_0}\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x$，令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，对函数 $F(x)$ 在区间 $[x_0,1]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(x_0,1)$ 使得

$\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(x_0)=F'(\xi)(1-x_0)=f(\xi)(1-x_0)$，从而有 $f(\xi)=x_0f(x_0)$；

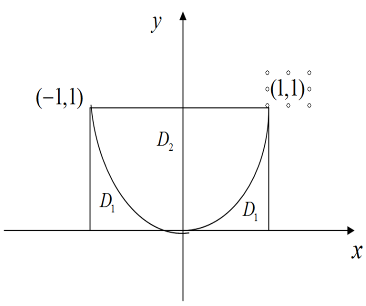
（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\xi]$ 上应用 Largrange 中值定理知 $\exists\eta\in(x_0,\xi)\subset(0,1)$ 使得

$f(\xi)-f(x_0)=f'(\eta)(\xi-x_0)$， 而 $f(\xi)=x_0f(x_0)$， 因而有

$(\xi-x_0)f'(\eta)=(x_0-1)f(x_0)$。故原命题成立.

（17） 【解】 用抛物线 $y=x^2$ 把

区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分



（如图），则 $I=-\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D_2}x(x+ye^{x^2})d\sigma$

$$=-2\iint\limits_{D_1}x(x+ye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D}x(x+ye^{x^2})d\sigma$$

$$=-2\iint\limits_{D_1}(x^2+xye^{x^2})d\sigma+\iint\limits_{D}(x^2+xye^{x^2})d\sigma$$

由于 D_1 和 D 均关于 y 轴对称，xye^{x^2} 关于 x 是奇函数，所以

故 $I=-2\iint\limits_{D_1}x^2d\sigma+\iint\limits_{D}x^2d\sigma\ =-2\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}x^2dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1}x^2dy\quad=-\dfrac{2}{15}$.

(18)【解】(Ⅰ)利润函数为 $L(x,y)=R(x,y)-C(x,y)-x-2y=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36$，

$\begin{cases}L_x'=14-2x-2y=0,\\ L_y'=32-2x-8y=0.\end{cases}$ 解得驻点为 $x=4,y=3$，$A=L_{xx}''=-4,B=-2,C=-8,AC-B^2=28>0$，

$A<0$，因此在不限制排污费用的前提下当甲、乙两种产品产量分别为 3 吨与 4 吨时利润最大，且最大利润为 $L(3,4)=37$(万元)；

（Ⅱ）问题可归结为求函数 $L(x,y)=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36$ 满足约束条件 $\varphi(x,y)=x+2y-6=0$ 的条件极值问题，设

$F(x,y)=14x+32y-x^2-2xy-4y^2-36+\lambda(x+2y-6)$，解方程

$$\begin{cases}F_x'(x,y)=14-2x-2y+\lambda=0,\\ F_y'(x,y)=32-2x-8y+2\lambda=0,\\ \quad x+2y-6=0.\end{cases}$$

解得 $x=y=2$，因实际问题有解，驻点唯一，因此两种产品产量均为 2 吨时，相应的利润最大.

(19)【解】（Ⅰ）$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x dx=-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\dfrac{(-1)^n e^{-n\pi}}{2}[e^{-\pi}+1]$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n ne^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)e^{-(n+1)\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)}{\dfrac{(-1)^n ne^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)}\right|=e^{-\pi}<1$，因此级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n$ 是绝对收敛的.

（Ⅱ）由于 $|x|<1$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n ne^{-n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)=-\frac{e^{-\pi}(e^{-\pi}+1)}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-e^{-\pi})^n=-\frac{1}{2(1+e^{\pi})}.$$

(20)【解】(I) $\overline{A}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4\ \ \beta)=\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\1&a+4&6&3&1\\1&2a+5&8&2a+3&3\\2&a+7&10&5&b\end{pmatrix}\xrightarrow{行}$

$$\begin{pmatrix}1&3&4&2&0\\0&a+1&2&1&1\\0&0&0&2a-1&1\\0&0&0&0&b-1\end{pmatrix}\qquad (*)$$

据（*）知 $a\neq\frac{1}{2}$ 时，$R(A)=3$,此时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=R(A)=3$,此时 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$ 是一个极大线性无关组。据（*）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$R(A)=2$，故此时 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(A)=2$，此时 α_1,α_3 线性无关，所以 α_1,α_3 是一个极大线性无关组（不唯一）。

(II）任意四维向量 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_5\end{pmatrix}=\gamma$ 均有解 $\Leftrightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma)$

$\because R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])\le 4$，若 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)=4$，则必有:

$r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta,\gamma])=4=r([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])$

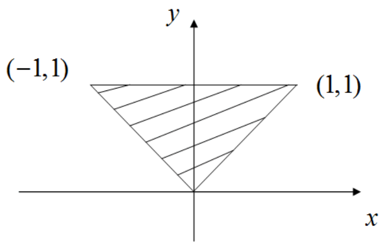
据（*）知，当 $a\neq\frac{1}{2}$，有 $b\neq1$ 时，$R([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta])=4$，故当 $a\neq\frac{1}{2}$，$b\neq1$ 时，任意的 4 维列向量 γ 均可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 线性表示.

(21)【解】：（I）记 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3), AP=A(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，因此有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&3&2\end{pmatrix}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 相似，且所用的相似变换矩阵为 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因此有 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{vmatrix}=10$.

（II）矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 有三个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，因此矩阵 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，且相应的相似变换矩阵为 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$,

因此把矩阵 A 变成 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 的相似变换矩阵可取为

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3).$$



（22）【解】

（I）

$$f_X(x)=\begin{cases}(1+x)^2, & -1<x<0\\ 1-x^2, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（II）
$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & -x<y<1\ (-1<x<0)\\ \dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\quad (0\le x<1)\\ 0, & 其他\end{cases}，f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|x|}, & |x|<y<1\quad (|x|<1)\\ 0, & 其他\end{cases};$$

（III）$\mathrm{COV}(X,2Y+1)=2\mathrm{COV}(X,Y)=2[E(XY)-E(X)E(Y)]$

$$=2[\frac{2}{15}-\frac{1}{12}\bullet\frac{2}{3}]=\frac{7}{45}$$

其中：$E(XY)=\int_{-1}^{1}x(1+x)dx\int_{|x|}^{1}ydx=\int_{-1}^{1}x(1+x)(1-x^2)dx=\dfrac{2}{15}$，

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(1+x)^2dx+\int_0^1 x(1-x^2)dx=-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\qquad E(Y)=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}.$$

（23）【解】（I）由于$1=\int_{-1}^{0}\alpha dx+\int_0^1 bxdx=\alpha+\dfrac{b}{2}$，所以$b=2(1-\alpha)$，则密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & -1<x<0\\ 2(1-\alpha)x, & 0\le x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

由于 $\mu=E(X)=\int_{-1}^{0}\alpha xdx+\int_0^1 2(1-\alpha)x^2dx=\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{6}\alpha,$，令 $\mu=\bar{X}$

所以 $\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{6}\alpha=\bar{X}$，即$\hat{\alpha}=\dfrac{6}{7}(\dfrac{2}{3}-\bar{X})$，而$\bar{x}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=\dfrac{1}{8}\times(-0.2)=-0.025$，$\alpha$ 的矩估计为

$\hat{\alpha}=\dfrac{6}{7}(\dfrac{2}{3}+0.025)=0.593$；

（II）似然函数为$L=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\alpha^5(2(1-\alpha))^3(0.5\times0.7\times0.8)=0.224\alpha^5(1-\alpha)^3$

$\dfrac{d\ln L}{d\alpha}=\dfrac{d}{d\alpha}(\ln 0.224+5\ln\alpha+3\ln(1-\alpha))=\dfrac{5}{\alpha}-\dfrac{3}{1-\alpha}=0$，解得$\hat{\alpha}=\dfrac{5}{8}$=0.625.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 三

（模拟 三）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三 (模拟三)参考答案

（1）【解】由 $x_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)+(x_n-y_n)], y_n=\frac{1}{2}[(x_n+y_n)-(x_n-y_n)]$，知是答案 D.

（2）【解】由题设有 $f(0)=0, f'(0)=1$，再利用 Taylor 公式可得 $x\neq 0$ 时恒有 $f(x)<x$，答案 B。

（3）【解】由条件知： $f(0)=0, f'(0)=2\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 2x=2$；

对二重积分作代换 $t-u=v, du=-dv$ 交换积分次序可知

$\int_0^x[\int_0^t f(t-u)du]dt=\int_0^x[\int_0^t f(v)dv]dt$，则

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x[\int_0^t f(v)dv]dt}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(v)dv}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{12x}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{12}f'(0)=\frac{1}{6},$$

故答案为 B .

（4）【解】: 设级数的前 n 项和 $\sigma_n=\sum\limits_{i=1}^{n}n(a_n-a_{n-1})=(a_1-a_0)+2(a_2-a_1)+\cdots n(a_n-a_{n-1})$

$=-a_0-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+na_n$；由此设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的对应前 $n-1$ 项和可表达为：

$$S_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=-\sigma_n-a_0+na_n$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$，及 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，由此可知：

$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=-\lim_{n\to\infty}(\sigma_n-a_0+na_n)=\sigma-a_0$，　则命题（A）正确。

（5）【答案】:（C）

（6）【答案】:（B）

(7)【解】由于 $x=1$ 为 $f(x)$ 驻点，显然 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}}$，又 $f(1)=1$，所以 $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$，由此

$X\sim N(1,\frac{1}{2\pi})$；又由于 $P\{X\geq 0\}=1-P\{X\leq 0\}=\Phi(\sqrt{2\pi})$，答案（D）

(8)【解】设 $P(A)=p,P(B)=q$，由于 A 和 B 互不相容，则 $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=0$，不难得到联合分布律为(右表)，所以

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-pq$

即 $\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}<0$

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i.}$
0	$1-p-q$	q	$1-p$
1	p	0	p
$p_{.j}$	$1-q$	q	

（9）【解】: 原式 $\lim_{x\to 0}\left[(1+\frac{e^x-1-x}{x})^{\frac{x}{e^x-1-x}}\right]^{\frac{e^x-1-x}{x\sin x}}=e^{\frac{1}{2}}$。

（10）【解】: 设 $u(x)=(x-2)^n,v(x)=(x-1)^n\sin\frac{\pi x^2}{8}$，则 $f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}(x)v^{(n-i)}(x)$，

$u^{(i)}(2)=0\,(i=0,1,\cdots,n-1),u^{(n)}(2)=n!,v(2)=(2-1)^n\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以有 $f^{(n)}(1)=n!$

（11）【解】方程两边求微分可得：$F_1'(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)+F_2'2zdz=y^2dx+2xydy-e^{-z}dz$，

解得 $(2zF_2'+e^{-z})dz=(y^2-\frac{1}{y}F_1')dx+(2xy+\frac{x}{y^2}F_1')dy$，由此全微分为：

$$dz=\frac{1}{(2zF_2'+e^{-z})}[(y^2-\frac{1}{y}F_1')dx+(2xy+\frac{x}{y^2}F_1')dy]\ .$$

（12）【解】$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf'(x)dx-\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx=\int_0^1 xdf(x)-\int_0^1(\sqrt{1-(x-1)^2}dx$

$=xf(x)|_0^1-\int_0^1 f(x)dx-\frac{\pi}{4}=-\int_0^1 f(x)dx-\frac{\pi}{4}$，所以原式 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\pi}{8}$。

（13）【答案】. $\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(14)【解】: 由于 X 与 Y 相互独立由独立性，及 X 与 Y 分布可知：

$$P(\max\{X,Y\}>\frac{1}{2})=1-P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})=1-P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{Y\le\frac{1}{2}\}=1-\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

（15）【解】 由题设有 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}+f(x)}{x}=3$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{\sin x}{x}+f(x)]=0$， $f(0)=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=-1$

由此可得 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x})=\lim\limits_{x\to0}[(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}]=\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})+f'(0)$，

而 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}=0$，所以有 $f'(0)=3$。

（16）【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，由连续函数的最大值及最小值定理知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 可以去到最大值及最小值。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\},m=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f'(x)\}$，由 Largrange 中值定理知

$x\in(0,1)$ 时有 $\dfrac{m}{2}x\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le\dfrac{M}{2}x\ (\xi\in(0,x)$ 对不等式

$mx\le f(x)=f(0)+f'(\xi)x\le Mx$ 两边同时在区间 $[0,1$ 上积分可得： $\dfrac{m}{2}\le\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le\dfrac{M}{2}$ 即

$m\le2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\le M$，由连续函数介值定理知 $\exists\eta\in[0,1]$ 上使得 $f'(\eta)=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

（17）【解】 由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(u)+\dfrac{x}{y}f'(u)+(g_1'y+2xg_2')$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}f'(u)+(xg_1'-g_2')$;

又由此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{2x}{y^2}f'(u)-\dfrac{x^2}{y^3}f''(u)+(y\dfrac{\partial}{\partial y}(g_1')+g_1'+2x\dfrac{\partial}{\partial y}(g_2'))$；

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+y(xg_{11}''-g_{12}'')+g_1'+2x(xg_{21}''-g_{22}'')$$

$$=-\frac{2x}{y^2}f'(u)-\frac{x^2}{y^3}f''(u)+xyg_{11}''+(2x^2-y)g_{12}''+g_1'-2xg_{22}''$$

（18）【解】 （I） 设汽车在 x 周时的总利润为：$L(x)=Ce^{-\frac{x}{10}}+\dfrac{C}{2}\int_0^x e^{-\frac{t}{5}}dt$, 求最大利润值：

$L'(x)=-\dfrac{C}{10}e^{-\frac{x}{10}}+\dfrac{C}{2}e^{-\frac{x}{5}}=0$，所以 $\dfrac{C}{10}e^{-\frac{x}{10}}+\dfrac{C}{2}e^{-\frac{x}{5}}\Rightarrow e^{-\frac{x}{10}}=5e^{-\frac{x}{5}}$, 由此解得 $x=10\ln5$，

这是唯一驻点，就是使利润达到最大的点，最大利润为

$$L_{\max}=L(10\ln5)=Ce^{-\ln5}+\frac{C}{2}\int_0^{10\ln5}e^{-\frac{t}{5}}dt=C(\frac{1}{5}-\frac{5}{2}\int_0^{10\ln5}de^{-\frac{t}{5}})=C(\frac{1}{5}+\frac{5}{2}-\frac{1}{10})=\frac{13}{5}C。$$

（II）车的价格为 $P_0=P(10\ln5)=Ce^{-\ln5}=\dfrac{C}{5}$（元），即经过 $10\ln5$ 周，此时车价仅是原价的 $\dfrac{1}{5}$.

（19）【解】（I） 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-1+2}{n+1}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^{n-2}$，$\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x}{1-x}$，$|x|<1$，则 $S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，$S_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，$|x|<1$，则 $S_2(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n+1}x^n=\begin{cases}\frac{x^2}{(1-x)^2}-\frac{2}{x}\ln(1-x), & -1<x<1,x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

（II）又由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x),|x|<1$ 代入 $x=-\frac{1}{3}$，则 $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{3^n}=-\ln(\frac{4}{3})$，

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}=3(\ln 4-\ln 3)$.

（20）【解】:（I）f 与标准型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$. 因为用正交变换化 f 为标准型，所以 f 与其标准型对应的矩阵相似，而相似矩阵的行列式相同，即由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 有 $\begin{vmatrix}a&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}$，或由 $a+0+0=-2+1+1$ 得 $a=0$.

（II）（方法一）这时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. 对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. 将 ξ_1 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，　将 ξ_2,ξ_3 正交化 $\boldsymbol{\eta}_2=\xi_2$，

$\boldsymbol{\eta}_3=\xi_3-\frac{[\boldsymbol{\eta}_2,\xi_3]}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|^2}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，再将 $\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

由 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 构成正交矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$，满足 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$。

（方法二）对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，解得特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，

$\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 将$\xi_1$单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\xi_2,\xi_3$已正交，单位化，得 $p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 由 p_1,p_2,p_3 即可构成所求正交矩阵.

（21）【证】　（I）因为$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{O}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$. 设存在一组数$k_1,k_2,k_3$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘(*)两次，得$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_3=0$. 再用$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$左乘(*)一次，得$k_2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_2=0$. 此时（*）为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，所以$k_1=0$. 故向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，于是$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3)$列满秩，因此齐次线性方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解.

（II）对任何非零 3 维列向量$\boldsymbol{x}$，因为方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$仅有零解，所以恒有$\boldsymbol{Bx}\neq\boldsymbol{0}$. 又因为$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Bx})=\|\boldsymbol{Bx}\|^2>0$，所以$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$是正定矩阵.

（22）【解】:（I）由$1=\int_{-2}^{0}Adx+\int_0^1 Bxdx=2A+\frac{B}{2}$，

$E(X^2)=\int_{-2}^{0}Ax^2dx+\int_0^1 Bx^3dx=\frac{8}{3}A+\frac{B}{4}=\frac{11}{12}$，解得$A=\frac{1}{4},B=1$；

（II）$Y=|X|$对应函数$y=|x|$，可知$0<y<2$，$y=1$是分界点

分段讨论：　$y<0,F_Y(y)=0$；$y\geq 2,F_Y(y)=$

$$0\leq y<1,F_Y(y)=P\{|X|\leq y\}=P\{-y\leq X\leq y\}=\int_{-y}^{0}\frac{1}{4}dx+\int_0^y xdx$$

$$1\leq y<2,F_Y(y)=P\{-y\leq X\leq y\}=\int_{-y}^{0}\frac{1}{4}dx+\int_0^1 xdx,$$

$$Y=|X|\text{的密度函数为}\ f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}+y, & 0\leq y<1\\ \frac{1}{4}, & 1\leq y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases};$$

（III）　由于$D(Y)=E(X^2)-(E|X|)^2=\frac{3}{4}-(\frac{5}{6})^2=\frac{1}{18}$

其中：$E(|X|)=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}xdx+\int_0^1 x^2=\frac{5}{6}$　(或　$EY=\int_0^1 y(\frac{1}{4}+y)dy+\int_1^2\frac{1}{4}ydy=\frac{5}{6}$).

（23）【解】:（I）由$F(x)$连续性，$0=F(\theta+0)=\lim\limits_{x\to\theta^+}(1-\frac{a}{x^2})=1-\frac{a}{\theta^2}$，所以$a=\theta^2$，则概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2\theta^2}{x^3}, & x>\theta\\ 0, & x\leq\theta\end{cases};$$

（II）θ的似然函数为$L=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{2\theta^2}{x_i^3}=\frac{2^n\theta^{2n}}{x_1x_2\cdots x_n}$，

$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}(n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)=\dfrac{2n}{\theta}>0$，所以 L 关于 θ 单调增，且 $x_i>\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$

由极大似然估计的定义可知 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}_L=\min\{x_i\}$ 或 $\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$

（III）由于 $\hat{\theta}_L=\min\{X_i\}$，对应的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}_L}(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-(\dfrac{\theta}{z})^{2n}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$ $(\theta>0)$，对应的概率密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_L}(z)=\begin{cases}\dfrac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}, & z>\theta\\ 0, & z\le\theta\end{cases}$$

$$E(\hat{\theta}_L)=\int_\theta^{+\infty}z\frac{2n\theta^2}{z^{2n+1}}dz=2n\theta^2\int_\theta^{+\infty}\frac{1}{z^{2n}}dz=\frac{2n}{2n-1}\theta,$$

$$E((2n-1)\hat{\theta})=(2n-1)E(\hat{\theta}_L)=2n\theta.$$

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 三

（模拟四）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

20、21全程考研资料请加群712760929

数学三（模拟四）参考答案

（1）【解】 由题设知 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=1,\ f(0)=0,\ f'(0)=2$，答案 D。

（2）【解】 $\lim\limits_{x\to0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}=e^{\frac{a}{2}},\int_{-a}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=-2xe^{-\frac{1}{2}x}\Big|_{-a}^{+\infty}+2\int_{-a}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x=2(a+2)e^{\frac{a}{2}}$，

$a=-\dfrac{3}{2}$，答案（C）.

（3）【答案】选（D）

（4）【答案】 （C）

（5）【解】$B=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2a&1-a&2a\\a&-a&a^2-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1+a&0\\0&0&(a-2)(a+1)\end{bmatrix}$，且 $AB=O$，所以 $r(A)+r(B)\le3$；又由于

A 为三阶非零矩阵，$r(A)\ge 1$；

由此若 $a=-1$, 则 $r(B)=1$，则 $r(A)$ 可以为 1 或 2；若 $a=2$, 则 $r(B)=2$，则 $r(A)\le 3-2=1$，所以 $r(A)=1$.　答案：（C）

（6）【答案】　（C）

(7) 【解】 设随机变量 $Y=|X|$ 的分布函数为

$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=F_X(y)-F_X(-y)$，

所以对应的密度函数为 $f_Y(y)=f(y)+f(-y)$，即 $f_1(x)=f(x)+f(-x)$，选择(B)

(8) 【解】已知 X 的分布律为 $P\{X=1\}=\frac{2}{3}, P\{X=2\}=\frac{1}{3}$，且 Y 服从 $\lambda=1$ 的指数分布，

则 $P\{XY>1\}=P\{Y>1, X=1\}+P\{Y>\frac{1}{2}, X=2\}=\frac{2}{3}P\{Y>1\}+\frac{1}{3}P\{Y>\frac{1}{2}\}=\frac{2}{3}e^{-1}+\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}}$，由此答案为(C).

（9）【解】 对原方程式两边同时求微分可得 $\sec^2(x^2+y)(2x\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-e^x\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x=0$，又方程式可知 $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{4}$，所以有 $\mathrm{d}y|_{x=0}=\frac{4-\pi}{8}\mathrm{d}x$.

（10）【解】由于 $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x+1+1}{x^2-1}=\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$，因此可知：

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{2}[3\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}]$$

（11）【解】由于需求价格弹性为 $\eta=-\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$, 所以有 $-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP}=\frac{1}{50-P}$，$\frac{dQ}{Q}=-\frac{1}{50-P}dP$,

解得：$Q=C(50-P)$, 代入 $Q(0)=10$，则 $C=\frac{1}{5}$，则需求函数为 $Q=10-\frac{P}{5}$.

（12）【答案】$\underline{2xf(x^2y,e^{x^2y})+2x^3y[f_1'+e^{x^2y}f_2']}$

（13）【答案】 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1\quad 1\quad 1\quad 0)^T, \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{51}}(5\quad 4\quad 1\quad 3)^T$.

（14）【解】由于 $\sigma=2$, $\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{2}\sim\chi^2(3)$，且 $\frac{Y}{2}\sim N(0,1)$ 且与 Z 相互独立，由 t-分布定义，知

$$\frac{Y/2}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i-\bar{X})^2}{2}/3}}\sim t(3)$$，所以 $C\frac{Y}{Z}\sim t(3)$, 其中常数 $C=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

（15）【解】 $\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t+\int_{0}^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t=1+\int_{0}^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t$

$$原式=\lim_{x\to 0}\left(1+\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}}\right]^{\frac{\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t}{x^4}},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin tdt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x^2}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$，所以原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

（16）【证明】 由题设知 $\exists x_0\in(0,a)$ 使得 $f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,a]}\{f(x)\}$，由极值的必要条件可知必有 $f'(x_0)=0$，由 Lagrange 中值定理知 $\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使得 $f'(0)=f'(x_0)-f''(\xi_1)x_0\Rightarrow|f'(0)|=|f''(\xi_1)|x_0\le Mx_0$，同理可证 $|f'(a)|\le M(a-x_0)$，由此可得 $|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

（17）【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yf'(xy),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(xy)+xyf''(xy)=(xy+1)e^{xy}$，记 $xy=t$，则有

$f'(t)+tf''(t)=(t+1)e^t$，即 $(tf'(t))'=(t+1)e^t$，积分得 $tf'(t)=te^t+C_1$，解得

$f'(t)=e^t+\dfrac{1}{t}C_1$，代入 $f'(1)=e+1$，$C_1=1$；再积分得 $f(t)=\int(e^t+\dfrac{1}{t})dt=e^t+\ln|t|+C_2$，代入 $f(1)=e+1$，可得 $C_2=1$，即 $f(t)=e^t+\ln|t|+1$ 所以 $f(xy)=e^{xy}+\ln|xy|+1$.

（18）【解】：(I)设切点的横坐标为 x_0，则相应的切线方程为

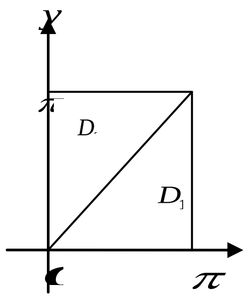
$$\frac{y-e^{x_0}}{x-x_0}=e^{x_0}，即为\ y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$$

相应的平面图形面积为 $A(x_0)=\int_0^2[e^x-(e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0})]\mathrm{d}x=2(x_0-2)e^{x_0}+e^2-1$

$A'(x_0)=2(x_0-1)e^{x_0},A''(x_0)=2x_0e^{x_0},A'(1)=0,A''(1)=2e>0$，所以 $x_0=1$ 是相应的图形面积最小，故所求的切线方程为：$y=ex$；

$$\text{(II)}V=2\pi\int_0^2x(e^x-ex)\mathrm{d}x=2\pi[(x-1)e^x-\frac{1}{3}ex^3]\Big|_0^2=2\pi(e^2-\frac{8}{3}e+1).$$

（19）【解】如图所示，将积分区域 D 分为 D_1 和 D_2，所以



$$I=\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma+\iint_{D_2}y\sin x\sin y\,d\sigma$$

在利用积分得轮换对称性知

$$I=2\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma=2\int_0^{\pi}\left[\int_0^x x\sin x\sin y\,dy\right]dx$$

$$=2\int_0^{\pi}[x\sin x\cdot(1-\cos x)]\,dx=2\int_0^{\pi}x\,d\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)$$

$$=2x\left(-\cos x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{2}\sin^2x\right)dx=2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi.$$

（20）【解】　（I）①若 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{ABB}^{-1}=\boldsymbol{O}$ 即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，矛盾！故 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

② $$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{AB}=0\Rightarrow R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le 4\\ \boldsymbol{B}\ne 0\Rightarrow R(\boldsymbol{B})\ge 1\end{array}\right\}\Rightarrow R(\boldsymbol{A})\le 3\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0\left.\begin{array}{l}\\ |\boldsymbol{A}|=2(a-1)(a-2)(a-3)\end{array}\right\}\Rightarrow a=1,2,3$$

（II） $$|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}\big|=|1\cdot 2\cdot(-3)\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{E}|$$
$$=|2\boldsymbol{E}-6\boldsymbol{A}^{-1}|=\left(2-\frac{6}{1}\right)\left(2-\frac{6}{2}\right)\left(2-\frac{6}{-3}\right)=16.$$

（21）【解】 （I）矩阵 A 的各行元素之和均为 0，即 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，知 0 是 A 的特征值，

$\alpha_1=(1\quad 1\quad 1)^T$ 是矩阵 A 属于特征值 0 的特征向量。又 $A(\alpha+\beta)=3(\alpha+\beta), A(\alpha-\beta)=-3(\alpha-\beta)$, 且由 α，β 是线性无关，知 $\alpha+\beta$，α-β 均不是 0 向量，从而，3 和-3 都是矩阵 A 的特征值，$\alpha+\beta$，α-β 分别是特征值，3 和-3 对应的特征向量，那么矩阵 A 有三个不同的特征值，从而矩阵 A 和对角矩阵相似。

（II）当 $\alpha=(0\quad -1\quad 1)^T$，$\beta=(1\quad 0\quad -1)^T$ 时，按已知有

$$A\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&-3\\0&-3&3\end{pmatrix},\text{所以 }A=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&-3\\0&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}。$$

（III） $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=x_1^2+x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=(x_1+2x_2-x_3)^2-3(x_2-x_3)^2$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2-x_3\\y_2=x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1=y_1-2y_2-y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，有 $x^TAx=y_1^2-3y_2^2$.

(22) 【解】:（I） X 与 Y 的可能取值分别 0，1； 0，1。

$P(X=0,Y=0)=P(T\le 0,T\le 1)=P(T\le 0)$

$P(X=0,Y=1)=P(T\le 0,T>1)=$

$P(X=1,Y=0)=P(0<T\le 1)=$

$P(X=1,Y=1)=P(T>0,T>1)=P(T>1)$

Y \ X	0	1	$p_{i.}$
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/2	3/4
$p_{.j}$	1/2	1/2	

（II）$Z=X+Y$ 的分布律

$Z=X+Y$	0	1	2
p_i	1/4	1/4	1/2

（III） $D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$
$$=\frac{3}{16}+\frac{1}{4}-2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}.$$

(23) 【解】：由于样本的独立同分布，考察 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2}\cdots,X_n+X_{2n}$，

（I） $X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，可知

样本均值：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=2\bar{X}$，样本方差：$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2=\frac{1}{n-1}Y=S^2$

由于 $E(S^2)=2\sigma^2$，所以 $E(\frac{1}{n-1}Y)=2\sigma^2$，即 $E(Y)=2(n-1)\sigma^2$；

（II）在 $\mu=0$时，$X_i+X_{n+i}\sim N(0,2\sigma^2),(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$2\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})\sim N(0,\frac{2\sigma^2}{n})$$

则 $\dfrac{2\bar{X}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma}\sim N(0,1)$，由此可知$(\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2\sim\chi^2(1)$，

又可得 $D(\dfrac{\sqrt{2n}\bar{X}}{\sigma})^2=2\times1=2,\qquad \therefore D(\bar{X}^2)=\dfrac{\sigma^4}{2n^2}$.

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数 学 三

（模拟五）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

数学三（模拟五）参考答案

（1）【解】：由题设有 $f'(1)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{e^{x^2}} f(t)\,\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}f(e^{x^2})}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{x^2}=\frac{1}{2}$$，故答案是 D

（2）【解】本题可用排除法举反例说明 A,B,D 选项均为错误的，因而正确的结论必为 C。进一步的 $f'(a)f'(b)<0$，若 $f'(a)<0,\ f'(b)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值必在区间 (a,b) 的内部取得，反之则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值必在区间 (a,b) 的内部取得。

（3）【解】 由已知 $f_x'(1,1)=-2,\ f_y'(1,1)=3$，原式$=\lim\limits_{t\to 0}[\frac{f(1+t,1)-f(1,1)}{t}-\frac{f(1,1-2t)-f(1,1)}{t}]$

$$=f_x'(1,1)+\lim_{t\to 0}2\frac{f(1,1-2t)-f(1,1)}{-2t}=f_x'(1,1)+2f_y'(1,1)=4$$，所以选(D).

（4）【解】 因为 D 关于 x 轴和 y 轴都对称，而 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 中 x^3 和 $3xy^2$ 是关于 x 的奇函数，$3x^2y$ 和 y^3 是关于 y 的奇函数，它们在 D 上的二重积分全为零，所以 $I_1=0$.

在 D 上，有 $\cos x^2\sin y^2>0$，所以 $I_2>0$；又有 $e^{-(x^2+y^2)}-1<0$，所以 $I_3<0$.

综上有 $I_2>I_1>I_3$，选（B）.

（5）【答案】（D）.

（6）【解】 $\boldsymbol{B}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-1\\0&0&t+1\end{pmatrix}$， 当 $t\neq 1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=3$， ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关，故 $\xi_1-\xi_2,\xi_1-\xi_3$ 线性无关且是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，但 $\boldsymbol{A}\neq 0$，否则非齐次方程组无解，矛盾. 所以 $r(\boldsymbol{A})=1$，选 C.

（7） 【答案】（A）.

（8） 【答案】（C）

（9）【解】 原式$=\int_0^1 x\sin(\pi x^2)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{\pi}$.

（10）【解】由题设知 $x=0$ 时 $y=1$，对方程式两边关于 x 同时求导可得 $1-e^{-(x+y)^2}(1+y')=0$，对上述方程关于 x 再求导可得 $2(x+y)e^{-(x+y)^2}(1+y')^2-e^{-(x+y)^2}y''=0$，把 $x=0,y=1$ 代人到上述两个方程式

中可解得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}\right|_{x=0} = 2e^2$ 。

（11）【解】 $f(1,0)=0$， $f_x'(1,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\Delta x}{1+\Delta x}-0}{\Delta x}=1$

$$f_y'(1,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,\Delta y)-f(1,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{-\Delta y\cos\sqrt{2}}{1+\sin\Delta y}-0}{\Delta y}=-\cos\sqrt{2},$$

$\therefore \left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0)}=f_x'(1,0)\mathrm{d}x+f_y'(1,0)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\cos\sqrt{2}\mathrm{d}y$ 。

（12）【解】 将 x 看作 y 的函数，即对 $x=x(y)$ 进行求解，可将原方程化为未知函数为 $x=x(y)$ 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cdot\frac{1-2y}{y^2}=1,$$

于是， $P(y)=\dfrac{1-2y}{y^2}$ $Q(y)=1$.

首先求出 $\int P\mathrm{d}y=-\dfrac{1}{y}-2\ln y$，然后代入通解公式，可得所求通解为

$$x=e^{\frac{1}{y}+2\ln y}\left(\int 1\cdot e^{-\frac{1}{y}-2\ln y}\mathrm{d}y+C\right)=y^2e^{\frac{1}{y}}\left(\int\frac{1}{y^2}\cdot e^{-\frac{1}{y}}\mathrm{d}y+C\right)=Cy^2e^{\frac{1}{y}}+y^2.$$

(13)【解】 因为 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&2&4&1\\1&5&7&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&2&2&2\\0&5&5&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&2&2&2\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，所以

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为所求最大无关组． $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

（14）【解】由于 $\rho=0$，即 X 与 Y^2 独立，所以 $D(2X-Y^2)=4D(X)+D(Y^2)=2\sigma^2(2+\sigma^2)$ 。

其中：由于 $Y\sim N(0,\sigma^2)$，所以 $\dfrac{Y}{\sigma}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{Y^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1),\dfrac{1}{\sigma^4}D(Y^2)=2,$ 可知 $D(Y^2)=2\sigma^4$ 。

（15）【解】由题设有 $a=1$，

$$\text{左式}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+bx^2)[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)]-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(b-\frac{1}{2})x^2+(\frac{1}{24}-\frac{b}{2})x^4+o(x^4)}{x^4}=c$$

由此可得 $b=\dfrac{1}{2},c=\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{5}{24}$ 。

（16）【证明】 令 $F(x)=3\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t-x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(x\in[0,+\infty))$，则 $F(0)=0$，且

$F'(x)=2x^2f(x)-2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2x\int_0^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$， f 单减，当 $x>0$ 且 $t\in[0,x)$ 时有 $f(x)-f(t)<0$，因而有 $F'(x)<0$，即函数 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单减，因而当 $a>0$ 时有 $F(a)=3\int_0^a x^2f(x)\mathrm{d}x-a^2\int_0^a f(x)\mathrm{d}t<F(0)=0$ 即 $3\int_0^a x^2f(x)\mathrm{d}x<a^2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

（17）【解】： ① 由于 $f_x'(x,y)=-ye^{-xy}$， $f_y'(x,y)=-xe^{-xy}$，所以在 D 的内部， $f(x,y)$ 有唯一的

驻点$(0,0)$，且$f(0,0)=1$，在D的边界$x^2+4y^2=1$上，作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1),\qquad \begin{cases} L_x'(x,y,\lambda)=-ye^{-xy}+2\lambda x=0,\\ L_y'(x,y,\lambda)=-xe^{-xy}+8\lambda y=0,\\ L_\lambda'(x,y,\lambda)=x^2+4y^2-1=0,\end{cases}$$

解得驻点$(x,y)=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right),\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)$，且

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac14},\quad f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac14}.$$

比较函数值可得$f(x,y)$在D上的最大值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{\frac14},$$

最小值为

$$f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=f\left(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{4}\right)=e^{-\frac14}.$$

（18）【解】将D分成第 1，2, 3, 4 象限，分别记为D_1,D_2,D_3,D_4，用极坐标.

$$\iint_{D_1}e^{\frac{x}{x+y}}\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\left(\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^2\mathrm{d}\theta=-\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)=-\frac12e^{\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac12(e-1),$$

由对称性可得$I=4\iint_{D_1}e^{\frac{|x|}{|x|+|y|}}\mathrm{d}\sigma=2(e-1)$.

（19）【证明】（1） $f'(x)$有界，则存在常数$M>0$, 使得$|f'(x)|\le M$, 由拉格朗日中值定理有

$$\left|f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})\right|=\left|f'(\varepsilon)\right|\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right|\le M\frac{1}{2^{n+1}}$$

由比较法知 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{2^n})-f(\frac{1}{2^{n+1}})]$绝对收敛。

（2）证 $s_n=\sum_{i=1}^{n}[f(\frac{1}{2^i})-f(\frac{1}{2^{i+1}})]=f(\frac12)-f(\frac{1}{2^{n+1}})$

$\because\lim\limits_{n\to0}s_n\exists$ 而 $f(\frac12)$为常数。故$\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{2^n})\exists$

(20) 【解】 二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}$. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,2)^T$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量，则

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

于是 $\begin{cases} a+4+4=\lambda, \\ -2-8-8=-2\lambda, \\ 2+8+2b=2\lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=4, \\ \lambda=9. \end{cases}$ 从而 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. 由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-9)^2,$$

可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^T,\boldsymbol{\xi}_2=(-2,0,1)^T$；$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，即 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=(2,1,0)^T,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{5}(-2,4,5)^T$.

当 $\lambda_3=9$ 时，由 $(9\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,2)^T$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化，得 $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{5}(2,1,0)^T,\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(-2,4,5)^T,\boldsymbol{p}_3=\dfrac{1}{3}(1,-3,2)^T$.

正交变换 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，正交矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 9 \end{pmatrix}$，二次型化为标准形 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=9y_3^2$.

(21)【证明】在 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T$ 两边右乘 $\boldsymbol{\xi}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$.

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T\cdot\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T=\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{\xi}^T\cdot\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\xi}^T=\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T=\boldsymbol{A}.$$

（2）由于 $1\le R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}^T)\le R(\boldsymbol{\xi})=$，所以 $R(\boldsymbol{A})=1$. 又 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le r$，而

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n,$$

从而 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$，$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-1$.

（3）解：因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征根只能取 $0,1$. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}$ 知 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根；由 $R(\boldsymbol{A})=1<n$ 知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根. 又 $R(\boldsymbol{A})=1$，所以 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单根，$\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 重特征根. 所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征根为 $2,1$（其中 1 是 $n-1$ 重根），$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=2$.

（22）【解】：由于 $1=A\int_0^{+\infty}x^2dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=A\int_0^{+\infty}x^2(e^{-x})dx=2A$， $A=\frac{1}{2}$；

（I）考察 X 与 Y 的独立性 ，可知边缘密度函数分别为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y^3}{6}e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

对满足 $0<x<y$ 的 (x,y)，$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2e^{-y}$； $f_X(x)f_Y(y)=\frac{x^2}{2}e^{-x}\bullet\frac{y^3}{6}e^{-y}\ne f(x,y)$

所以 X 与 Y 的不独立；

（II）对如何 $y>0$， $f_{X/Y}(x/y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y\\ 0, & 其他\end{cases}$

（III） 对 $Y=2$，$f_{X/Y=2}(x)=\begin{cases}\frac{3x^2}{2^3}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，

由此可知条件概率： $P\{X<1/Y=2\}=\frac{3}{8}\int_0^1x^2dx=\frac{1}{8}$。

（23）【解】：（I）求参数 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$

1） $L=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x_i^2}{\theta^2}}=(\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}})^ne^{-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

2) $\ln L=n(\ln 2-\ln\theta-\frac{1}{2}\ln\pi)-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$， $\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0$

3） 解得 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$

（II）

由于 $E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2}{\theta\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}dx=\frac{\theta^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\theta^2}{2}$

所以 $E(\hat{\theta}^2)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\theta^2$

.