清華大學
Tsinghua University

第十八章
概率潜在语义分析

概率潜在语义分析

- 概率潜在语义分析（probabilistic latent semantic analysis, PLSA），是一种利用概率生成模 型对文本集合进行话题分析的无监督学习方法。
- 模型的最大特点是用隐变量表示话题；整个模型表示文本生成话题，话题生成单词，从而得到单词一文本共现数据的过程
- 假设每个文本由一个话题分布决定，每个话题由一个单词分布决定。
- 概率潜在语义分析受潜在语义分析的启发，前者基于概率模型，后者基于非概率模型

基本想法

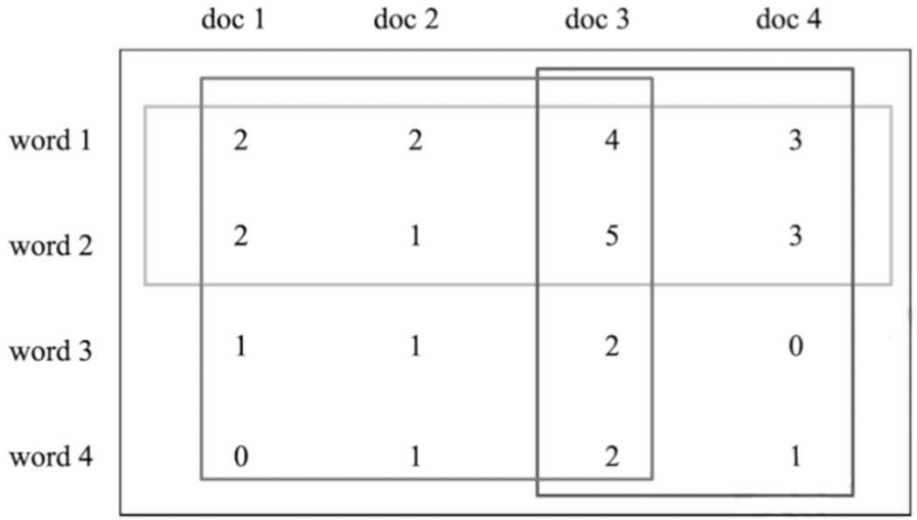
- 给定一个文本集合，每个文本讨论若干个话题，每个话题由若干个单词表示。
- 对文本集合进行概率潜在语义分析，就能够发现每个文本的话题，以及每个话题的单词。
- 话题是不能从数据中直接观察到的，是潜在的。

基本想法

- 文本集合转换为文本-单词共现数据，具体表现为单词-文本矩阵
- 文本数据基于如下的概率模型产生（共现模型）：
- 首先有话题的概率分布，然后有话题给定条件下文本的条件概率分布，以及话题给定条件下单词的条件概率分布。
- 概率潜在语义分析就是发现由隐变量表示的话题，即潜在语义。
- 直观上，语义相近的单词、语义相近的文本会被聚到相同的“软的类别”中，而话题所表示的就是这样的软的类别。

基本想法

- 假设有3个潜在的话题，图中三个框各自表示一个话题。



	doc 1	doc 2	doc 3	doc 4
word 1	2	2	4	3
word 2	2	1	5	3
word 3	1	1	2	0
word 4	0	1	2	1

生成模型

- 假设有单词集合 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_M\}$ ， 其中M是单词个数
- 文本（指标）集合 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_N\}$ ， 其中N是文本个数
- 话题集合 $Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_K\}$ ， 其中 K是预先设定的话题个数

- 随机变量w取值于单词集合
- 随机变量d取值于文本集合
- 随机变量z取值于话题集合

生成模型

- 概率分布P(d)、条件概率分布P(z|d)、条件概率分布P(w|z)皆属于多项分布

- P(d)：生成文本d的概率
- P(z|d)：文本d生成话题z的概率
- P(w|z)：话题z生成单词w的概率

- 一个文本的内容由其相关话题决定，一个话题的内容由其相关单词决定。

生成模型

- 生成模型通过以下步骤生成文本-单词共现数据：
- （1）依据概率分布P(d)，从文本（指标）集合中随机选取一个文本d，共生成N 个文本；针对每个文本，执行以下操作
- （2）在文本d给定条件下，依据条件概率分布P(z|d)，从话题集合随机选取一个话题z，共生成L个话题，这里L是文本长度
- （3）在话题z给定条件下，依据条件概率分布P(w|z)，从单词集合中随机选取一个单词w

生成模型

- 生成模型中，单词变量w与文本变量d是观测变量，话题变量z是隐变量
- 模型生成的是单词-话题-文本三元组(w, z, d)的集合，但观测到的是单词-文本二元组(w, d)的集合
- 观测数据表示为单词-文本矩阵T的形式
- 矩阵T的行表示单词，列表示文本，元素表示单词-文本对(w, d)的出现次数

生成模型

- 从数据的生成过程可以推出，文本-单词共现数据T的生成概率为所有单词-文本 对(w, d)的生成概率的乘积

$$P(T) = \prod_{(w,d)} P(w,d)^{n(w,d)}$$

- 这里n(w, d)表示（w, d)的出现次数，单词-文本对出现的总次数是 N x L

生成模型

- 每个单词-文本对(w, d)的生成概率由以下公式决定

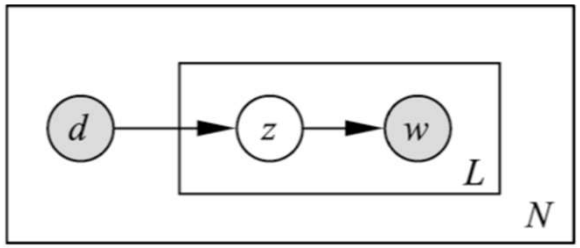
$$
\begin{aligned}
P(w,d) &= P(d)P(w|d) \\
&= P(d)\sum_z P(w,z|d) \\
&= P(d)\sum_z P(z|d)P(w|z)
\end{aligned}
$$

- 即生成模型的定义
- 生成模型假设在话题z给定条件下，单词w与文本d条件独立，即

$$P(w,z|d) = P(z|d)\,P(w|z)$$

生成模型

- 生成模型属于概率有向图模型，可以用有向图(directed graph)表示



- 图中实心圆表示观测变量，空心圆表示隐变量，箭头表示概率依存关系，方框表示多次重复，方框内数字表示重复次数。
- 文本变量d是一个观测变量，话题变量z是 一个隐变量，单词变量二是一个观测变量。

共现模型

- 可以定义与以上的生成模型等价的共现模型。

- 文本-单词共现数据T的生成概率为所有单词-文本对(w, d)的生成概率的乘积：

$$P(T) = \prod_{(w,d)} P(w,d)^{n(w,d)}$$

- 每个单词-文本对(w, d)的概率由以下公式决定：

$$P(w,d) = \sum_{z \in Z} P(z)P(w|z)P(d|z)$$

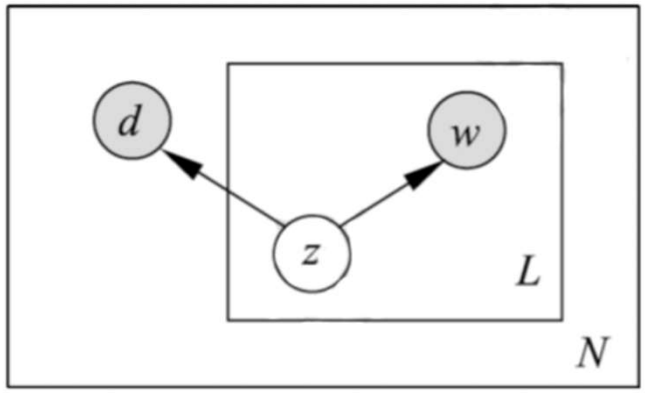
- 即共现模型的定义

共现模型

- 共现模型假设在话题z给定条件下，单词w与文本d是条件独立的，即

$$P(w,d|z) = P(w|z)P(d|z)$$

- 图中所示是共现模型。图中文本变量d是一个观测变量，单词变量w是一个观测变量，话题变量z是一个隐变量



共现模型

- 虽然生成模型与共现模型在概率公式意义上是等价的，但是拥有不同的性质。

- 生成模型
  - 刻画文本-单词共现数据生成的过程
  - 单词变量w与文本变量d是非对称的
  - 非对称模型

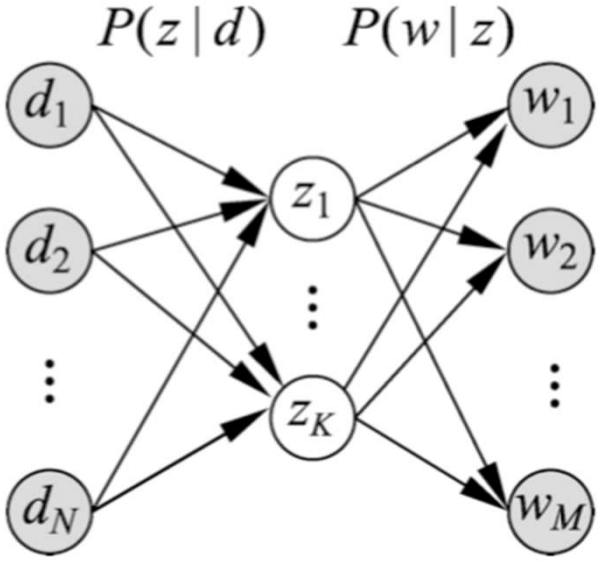
- 共现模型
  - 描述文本-单词共现数据拥有的模式
  - 单词变量w与文本变量d是对称的
  - 对称模型

模型参数

- 如果直接定义单词与文本的共现概率P(w,d)，模型参数的个数是O(M・N)，其中M是单词数，N是文本数
- 概率潜在语义分析的生成模型和共现模型的参数个数是O(M・K + N・K)，其中K是话题数
- 现实中K<<M，所以概率潜在语义分析 通过话题对数据进行了更简洁地表示，减少了学习过程中过拟合的可能性

模型参数

- 图中显示模型中文本、话题、单词之间的关系。



模型的几何解释

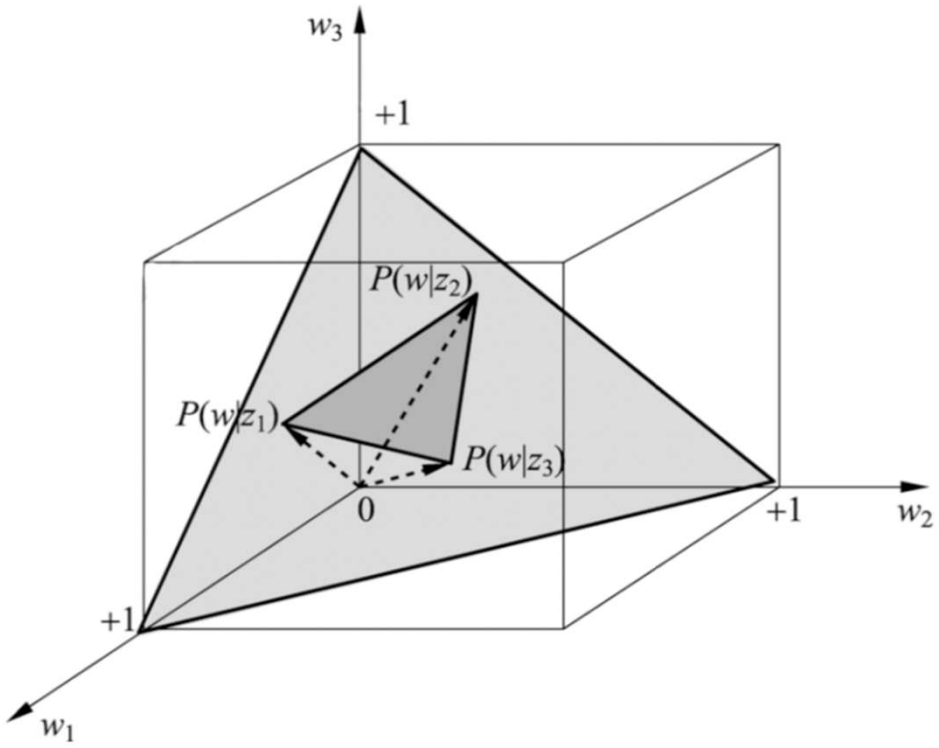
- 概率分布P(w|d)表示文本d生成单词w的概率，

$$\sum_{i=1}^{M} P(w_i|d) = 1, \quad 0 \leqslant P(w_i|d) \leqslant 1, \quad i = 1, \cdots, M$$

- 可以由M维空间的(M-1)单纯形(simplex)中的点表示

模型的几何解释

- 图中为三维空间的情况
- 单纯形上的每个点表示一个分布P(wld)（分布的参数向量）
- 所有的分布 P(wld)（分布的参数向量）都在单纯形上，称这个(M-1)单纯形为单词单纯形。



模型的几何解释

- 概率潜在分析模型（生成模型）中的文本概率分布P(w|d)有下 面的关系成立：

$$P(w|d) = \sum_{z} P(z|d)P(w|z)$$

- 概率分布P(w|z)也存在于M维空间中的(M-1)单纯形之中

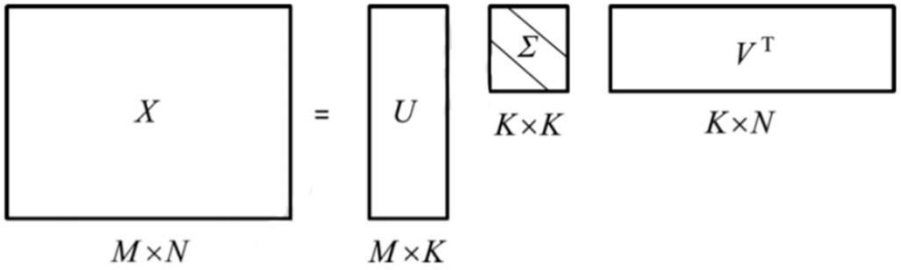
- 如果有K个话题，那么就有K个概率分布P(w|z_k), k=1,2,…,K，由(M-1)单纯形上的K个点表示
- 以这K个点为顶点，构成一个(K-1)单纯形，称为话题单纯形。
- 话题单纯形是单词单纯形的子单纯形。

模型的几何解释

- 生成模型中文本的分布P(w|d)可以由K个话题的分布 $P(w|z_k)$, k = 1,... ,K, 的线性组合表示
- 文本对应的点就在K个话题的点构成的(K-1)话题单纯形中
- 注意通常K<<M, 概率潜在语义模型存在于一个相对很小的参数空间中

与潜在语义分析的关系

- 概率潜在语义分析模型（共现模型）可以在潜在语义分析模型的框架下描述



- 图中显示潜在语义分析，对单词-文本矩阵进行奇异值分解得到

$$X = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$$

与潜在语义分析的关系

- 共现模型也可以表示为三个矩阵乘积的形式

$$X' = U'\Sigma' V'^{\mathrm{T}}$$

$$X' = [P(w,d)]_{M\times N}$$

$$U' = [P(w|z)]_{M\times K}$$

$$\Sigma' = [P(z)]_{K\times K}$$

$$V' = [P(d|z)]_{N\times K}$$

- 概率潜在语义分析模型中的矩阵U',和V'是非负的、规范化的，表示条件概率分布，
- 潜在语义分析模型中的矩阵U和V是正交的，未必非负，并不表示概率分布。

概率潜在语义分析的算法

- EM算法是一种迭代算法，每次迭代包括交替的两步:
- E步，求期望
- M步，求极大

- E步是计算Q函数，即完全数据的对数似然函数对不完全数据的条件分布的期 望
- M步是对Q函数极大化，更新模型参数。

概率潜在语义分析的算法

- 设单词集合为 $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_M\}$，文本集合为 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_N\}$，话题集合为 $Z = \{z_1, z_2, \cdots, z_K\}$
- 给定单词-文本共现数据 $T = \{n(w_i, d_j)\}, i = 1, 2, \cdots, M, \ j = 1, 2, \cdots, N$
- 目标是估计概率潜在语义分析模型（生成模型）的参数
- 如果使用极大似然估计，对数似然函数是

$$L = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) \log P(w_i, d_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) \log \Big[\sum_{k=1}^{K} P(w_i|z_k) P(z_k|d_j) \Big]$$

- 但是模型含有隐变量，对数似然函数的优化无法用解析方法求解

概率潜在语义分析的算法

- 这时使用EM算法。E步：计算Q函数
- Q函数为完全数据的对数似然函数对不完全数据的条件分布的期望。针对概率潜 在语义分析的生成模型，Q函数是

$$Q=\sum_{k=1}^{K}\left\{\sum_{j=1}^{N}n(d_j)\left[\log P(d_j)+\sum_{i=1}^{M}\frac{n(w_i,d_j)}{n(d_j)}\log P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)\right]\right\}P(z_k|w_i,d_j)$$

- $n(d_j)=\sum_{i=1}^{M}n(w_i,d_j)$：文本$d_j$中的单词个数
- $n(w_i,d_j)$：单词w_i在文本d_j中出现的次数
- 条件分布概率 $P(z_k|w_i,d_j)$ 代表不完全数据，是已知变量
- 条件概率分布 $P(w_i|z_k)$ 和 $P(z_k|d_j)$ 的乘积代表完全数据，是未知变量

概率潜在语义分析的算法

- 由于可以从数据中直接统计得出P(d_j)的估计，这里只考虑 $P(w_i|z_k)$，$P(z_k|d_j)$ 的估计，可将Q函数简化为函数Q’

$$Q' = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) \sum_{k=1}^{K} P(z_k|w_i, d_j) \log[P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)]$$

- Q’函数中的 $P(z_k|w_i, d_j)$ 可以根据贝叶斯公式计算

$$P(z_k|w_i, d_j) = \frac{P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)}{\sum_{k=1}^{K} P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)}$$

- 其中$P(w_i|z_k)$ 和 $P(z_k|d_j)$ 由上一步迭代得到

概率潜在语义分析的算法

- M步：极大化Q函数
- 通过约束最优化求解Q函数的极大值，这时 $P(z_k|d_j)$和 $P(w_i|z_k)$ 是变量
- 因为 $P(z_k|d_j)$ 和 $P(w_i|z_k)$ 形成概率分布，满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{M} P(w_i|z_k) = 1, \quad k = 1, 2, \cdots, K$$

$$\sum_{k=1}^{K} P(z_k|d_j) = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, N$$

概率潜在语义分析的算法

- 应用拉格朗日法，引入拉格朗日乘子 τ_k 和 ρ_j ，定义拉格朗日函数 Λ

$$\Lambda = Q' + \sum_{k=1}^{K} \tau_k \left(1 - \sum_{i=1}^{M} P(w_i|z_k)\right) + \sum_{j=1}^{N} \rho_j \left(1 - \sum_{k=1}^{K} P(z_k|d_j)\right)$$

- 将拉格朗日函数 Λ 分别对 $P(z_k|d_j)$ 和 $P(w_i|z_k)$ 求偏导数，并令其等于0，得到下面的方程组

$$\sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j) - \tau_k P(w_i|z_k) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, M; \quad k = 1, 2, \cdots, K$$

$$\sum_{i=1}^{M} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j) - \rho_j P(z_k|d_j) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, N; \quad k = 1, 2, \cdots, K$$

概率潜在语义分析的算法

- 解方程组得到M步的参数估计公式:

$$P(w_i|z_k) = \frac{\sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j)}{\sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} n(w_m, d_j) P(z_k|w_m, d_j)}$$

$$P(z_k|d_j) = \frac{\sum_{i=1}^{M} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j)}{n(d_j)}$$

概率潜在语义模型参数估计的EM算法

输入：设单词集合为 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_M\}$，文本集合为 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_N\}$，话题集合为 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_K\}$，共现数据 $\{n(w_i,d_j)\},i=1,2,\cdots,M,j=1,2,\cdots,N$；

输出：$P(w_i|z_k)$ 和 $P(z_k|d_j)$。

（1）设置参数 $P(w_i|z_k)$ 和 $P(z_k|d_j)$ 的初始值。

（2）迭代执行以下 E 步，M 步，直到收敛为止。

E 步：

$$P(z_k|w_i,d_j)=\frac{P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)}{\sum_{k=1}^{K}P(w_i|z_k)P(z_k|d_j)}$$

概率潜在语义模型参数估计的EM算法

M 步：

$$P(w_i|z_k) = \frac{\sum_{j=1}^{N} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j)}{\sum_{m=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} n(w_m, d_j) P(z_k|w_m, d_j)}$$

$$P(z_k|d_j) = \frac{\sum_{i=1}^{M} n(w_i, d_j) P(z_k|w_i, d_j)}{n(d_j)}$$