绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（一）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-xf(x)}{\ln(1+x^2)}=0$，则（　　）．

（A）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导　　（B）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=0$

（C）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$　　（D）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1[\int_x^1[f(t)+f(x)]dt]dx=$（　　）．

（A）$\int_0^1 f(x)dx$　　（B）$\int_0^1 xf(x)dx$　　（C）$\int_0^1(1-x)f(x)dx$　　（D）$\int_0^1(1-xf(x))dx$

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos\frac{\pi}{2}x}{|x|(x^2+x-2)}$，则 $f(x)$ 的可去间断点、跳跃间断点、第二类间断点分别为（　　）．

（A）$x=-2,x=0,x=1$　　（B）$x=0,x=1,x=-2$

（C）$x=0,x=-2,x=1$　　（D）$x=1,x=0,x=-2$

（4）方程 $\int_{-1}^x te^{\cos t}dt=0$ 的实根个数为（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（5）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则下列说法正确的是（　　）．

（A）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，且偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均不存在

（B）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均存在

（C）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，但偏导数 $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 均存在

（D）$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微

（6）设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+2y^2+4x+cy$，且 $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$，则 $f(x,y)$ 在该点处取极值的一个充分条件为（　　）．

（A）$2b^2-a<0$ 且 $a>0$　　（B）$2b^2-a>0$ 且 $a<0$

（C）$2b^2-2a>0$ 且 $a>0$　　（D）$b^2-2a<0$ 且 $a>0$

（7）已知三阶矩阵 A 满足 $A^2=E$，但 $A\neq\pm E$，则下列关系式成立的是（ ）.

（A）$r(A+E)=1$ （B）$r(A+E)=2$

（C）$r(A-E)\cdot[r(A-E)-2]=0$ （D）$[r(A+E)-1]\cdot[r(A-E)-1]=0$

（8）设三阶矩阵 A 的特征值为 $0,1,-1$，则下列结论中正确的个数为（ ）.

①A 不可逆； ②A 的主对角线元素之和为 0；

③A 的特征值 $1,-1$ 所对应的特征向量正交； ④$Ax=0$ 的基础解系中含有两个解向量.

（A） 1 （B） 2 （C） 3 （D）4

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，其反函数为 $y=\varphi(x)$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x-1}{x^2}=1$，则 $\varphi''(1)=$__________.

（10）极坐标曲线 $r=\sqrt{\cos\theta}\ (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$ 与极轴所围成的曲边扇形绕极轴旋转一周所得旋转体的体积为__________.

（11）计算 $\int e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=$__________.

（12）设 $y=y(x)$ 是二阶常系数线性方程 $y''+py'+qy=e^{2x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{1-\cos x}=$__________.

（13）设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数均存在，且 $f_x'(x_0,y_0)=1$，$f_y'(x_0,y_0)=2$，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0-3h)}{h}=$__________.

（14）设 A 是三阶实对称矩阵，若存在正交阵 $Q=(q_1,q_2,q_3)$，使得 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$，则 $A-q_1q_1^T$ 的特征值是__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）（Ⅰ）当 $x>0$ 时，证明：$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结论，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n}{n^2})$.

(16)(**本题满分 10 分**)利用变换 $x=\ln t$ 化简微分方程 $y''-y'+e^{2x}y=e^{3x}$，并求此方程的通解.

(17)(**本题满分 10 分**)求函数 $z=f(x,y)=3xy-7x-3y$ 在由抛物线 $y=5-x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成的有界闭区域 D 上的最大值与最小值.

(18)(**本题满分 10 分**)设 $f(x,y)=\begin{cases} xy^2, & x^2+y^2\geq 2y, \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{其他}, \end{cases}$ $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 2, x\leq y\leq 1\}$，求 $I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

(19)(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a)(b-a)<f(b)-f(a)<2[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]$

(Ⅰ)记 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，证明存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F(x_0)=0$;

(Ⅱ)证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

(20)(**本题满分 11 分**)(Ⅰ)求 $\cos(\sin x)$ 的带有皮亚诺余项的四阶麦克劳林公式;

(Ⅱ)设函数 $f(x)=1-\cos(\sin x)+\alpha\ln(1+x^2)$，其中 α 是参数，试讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的多少阶无穷小？请说明理由.

(21)(**本题满分 11 分**)(Ⅰ)设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

(Ⅱ)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，$\int_a^b f(x)dx=1$，证明 $[\int_a^b xf(x)dx]^2\leq\int_a^b x^2f(x)dx$.

(22)(**本题满分 11 分**)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \\ a & a \end{pmatrix}$，且 $a\neq b$. 讨论 a 与 b 取何值时，矩阵方程 $AX=B$ 有解？在 $AX=B$ 有解时，求其解.

(23)(**本题满分 11 分**)设 A,B,C 均为三阶矩阵，且 $AB=-B$，$CA^T=C$. 其中 $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.(Ⅰ)求 A;(Ⅱ)证明对任意的3维列向量 ξ，必有 $A^{100}\xi=\xi$.

绝密 * 启用前

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（二）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有曲线 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{|x|}{x-1}$，则下列结论不正确的是（　　）．

（A）曲线有水平渐近线 $y=\dfrac{\pi}{4}$　　（B）曲线有水平渐近线 $y=-\dfrac{\pi}{4}$

（C）曲线有铅直渐近线 $x=0$　　（D）曲线有铅直渐近线 $x=1$

（2）当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，方程 $ax^2=\ln x$ 的实根个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（3）设函数 $f(x)$ 单调连续，$f(0)=0$，$\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则对任意的 t，有（　　）．

（A）$\int_0^t\varphi(x)dx=\int_0^t f(x)dx$　　（B）$\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx=\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx$

（C）$\int_0^{\varphi(t)}f(x)dx+\int_0^t f(x)dx=t\varphi(t)$　　（D）$\int_0^{f(t)}\varphi(x)dx+\int_0^t f(x)dx=tf(t)$

（4）设反常积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\max\{\dfrac{1}{\sqrt{x}},\dfrac{1}{x^2}\}dx,\ I_2=\int_0^{+\infty}\min\{\dfrac{1}{\sqrt{x}},\dfrac{1}{x^2}\}dx$，则（　　）．

（A）I_1 和 I_2 都收敛　　（B）I_1 和 I_2 都发散　　（C）I_1 收敛，I_2 发散　　（D）I_1 发散，I_2 收敛

（5）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为可导函数，且 $f(x)\neq 0$，$g(x)$ 有不可导点，则下列函数中，必有不可导点的函数为（　　）．

（A）$g^2(x)$　　（B）$\dfrac{g(x)}{f(x)}$　　（C）$f(g(x))$　　（D）$g(f(x))$

（6）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）．

（A）可微且必取极值　　（B）可微但未必取极值

（C）不可微但必取极值　　（D）不可微但未必取极值

（7）设 A 为 n 阶方阵，将 A 的第二行加到第一行，再将第二列减去第一列得到矩阵 B，则 A,B（　　）．

（A）等价未必相似　　（B）等价且相似　　（C）行向量组等价　　（D）列向量组等价

（8）设 A 为四阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，$\lambda_4=3$，相应的特征向量依次为 p_1,p_2,p_3,p_4，且 p_1,p_2 线性无关，令 $P=(4p_4,5p_3,p_1+p_2,p_1-p_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　　）.

（A）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&2&\\&&&0\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}4&&&\\&5&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}3&&&\\&2&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}\int_0^x f(t)dt=1$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________.

（10）设函数 $\varphi(x)=\int_0^x \dfrac{\ln(1-t)}{t}dt$，则 $\varphi(x)+\varphi(-x)-\dfrac{1}{2}\varphi(x^2)=$__________.

（11）设函数 $f(x,y)$ 连续，则将极坐标下二次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{2\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

化为直角坐标系下的二次积分为__________.

（12）设 $f(x)$ 是以 4 为周期的奇函数，且 $f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x^3)+f(x^2)}{x-2}=$__________.

（13）设 $u=x^2+y^2+z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由方程 $xz+e^{yz}=e-1$ 所确定，则 $du\big|_{(-1,1,1)}=$________.

（14）设 A 为四阶实对称阵，$r(A-4E)=1$，A 的各行元素之和为 0，则 $r(A)=$__________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设函数 $z=f(x-y,f(x,y))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，且 f 在点 $(1,1)$ 处取得极小值 $f(1,1)=0$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'''-3y''+3y'-y=0$ 的解，且曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 的曲率圆为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，求 $y(x)$.

(17)(**本题满分 10 分**)在抛物线 $y=1-x^2$ 上求一点 $P(x_0,y_0)$ $(0<x_0<1)$，使抛物线与它在 P 点处的切线及两个坐标轴所围图形的面积最小，并求最小面积.

(18)(**本题满分 10 分**)计算二重积分 $\iint\limits_D [xy+(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}]d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=1$ 及圆弧 $x^2+y^2=1$($x\ge 0, y\ge 0$)所围成的区域.

(19)(**本题满分10分**)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义.(Ⅰ)若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并取得最值，证明 $f'(x_0)=0$；(Ⅱ)若 $f(x)$ 为周期 $T(T>0)$ 的可导周期函数，证明存在 $\xi_1,\xi_2\in[0,T), \xi_1\ne\xi_2$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

(20)(**本题满分11分**)设炮弹以初速度 v_0 且与水平线成 α 角从炮口射出，如果空气的阻力与速度成正比，比例系数为 k，其中 $k>0$，炮弹质量为 m，求当 $k=mg$ 时，炮弹飞行过程中的最大速度.(其中 g 为重力加速度).

(21)(**本题满分 11 分**)设非负函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f''(x)\le 0$，且 $f(x)$ 在点 $x=x_0\in[a,b]$ 处取得最大值.(Ⅰ)对任意的 $x\in[a,b]$，证明 $f(x_0)\le f(x)+f'(x)(x_0-x)$；(Ⅱ)对任意的 $x\in[a,b]$，证明 $f(x)\le \dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(22)(**本题满分 11 分**)设 A 为三阶实方阵,三维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 满足 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$, $A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_3, \alpha_3\ne 0$,(Ⅰ)证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;(Ⅱ)证明 A 必不为实对称矩阵.

(23)(**本题满分 11 分**)设 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，其中 E 为三阶单位阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，求 B^T 的特征值与特征向量.

2017 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（二）模拟（三）

（科目代码：302）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处的增量 Δy 满足 $\Delta y=1-e^{2\Delta x}+\Delta x\sin\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 是 $dy|_{x=0}$ 的（　　）．

（A）等价无穷小　（B）同阶但不等价的无穷小　（C）高阶无穷小　（D）低阶无穷小

（2）关于定积分的如下结论

①$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=\frac{a}{2}$，其中 $f(x)$ 为正值连续函数，$a>0$；

②$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^5}dx=\int_0^1 \sqrt[5]{1-x^3}dx$，

则有（　　）．

（A）①②均正确　（B）①②均不正确　（C）①正确，②不正确　（D）①不正确，②正确

（3）设 $f(x)$ 为正值连续偶函数，$F(x)=\int_0^x t^2 f(x-t)dt$，则下列结论中正确的个数为（　　）．

①$F(x)$ 为单增的奇函数；　②点 $(0,0)$ 为 $y=F(x)$ 唯一的拐点；

③$F'(x)$ 为非负的凹函数；　④$F'(x)$ 只在点 $x=0$ 处取得最小值．

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（4）设 $I_1=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx, I_2=\int_0^{\pi}\sqrt{x}\cos xdx$，则以下结论正确的是（　　）．

（A）$I_1>0,I_2>0$　（B）$I_1>0,I_2<0$　（C）$I_1<0,I_2>0$　D）$I_1<0,I_2<0$

（5）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则下列结论正确的个数为（　　）．

①沿直线 $y=kx$，k 为任意实数，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)$ 存在；　②极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在；

③偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 存在且相等；　④$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续．

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

(6) 设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\le 0,\\ e^{-x^2}, & x>0,\end{cases}$ 则曲线 $y=\int_0^x f(t)dt$ 的拐点个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(7) 齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解都是 $Ax=0$ 的解的一个充分条件为（　　）.

(A) B 的列向量都由 A 的列向量线性表示　　(B) A 的列向量都由 B 的列向量线性表示

(C) B 的行向量都由 A 的行向量线性表示　　(D) A 的行向量都由 B 的行向量线性表示

(8) 设 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\beta=(b_1,b_2,b_3)^T$，α,β 线性无关，则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)$$

的规范型为（　　）.

(A) y_1^2　　(B) $y_1^2+y_2^2$　　(C) $y_1^2-y_2^2$　　(D) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(100)}(0)=$____________.

(10) $\int_{-1}^{1} x(1+x^{2017})(e^x-e^{-x})dx=$____________.

(11) 曲线 $y=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{\lambda x}}$ 及直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 及 $x=1$ 围成平面图形的面积为____________.

(12) 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数均存在，且 $f_x'(x_0,y_0)=1$，$f_y'(x_0,y_0)=2$，则极限

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h,y_0)-f(x_0,y_0-3h)}{h}=$____________.

(13) 设函数 $p(x)=\max\{x,1\}$，则微分方程 $y'+p(x)y=x$ 的通解为____________.

(14) 若 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵，则 $(E+A+A^2)^{-1}=$____________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设 $x\ge a\ge 1$，证明：（Ⅰ）$\ln a\ge \dfrac{2(a-1)}{a+1}$；（Ⅱ）$a(x+1)\ln a\ge (a+x)(a-1)$.

（16）（**本题满分 10 分**）已知 $df(x,y)=-(1+e^y)\sin x dx+(\cos x-1-y)e^y dy$，$f(0,0)=2$，求函数 $f(x,y)$ 的极值.

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且满足条件 $f'(x)=\dfrac{1}{2}g(x)$，$g'(x)=\dfrac{1}{2}f(x)$，$f(0)=0$，$g(x)\ne 0$.（Ⅰ）求 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的表达式；（Ⅱ）求曲线 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}(x\ge 0)$ 绕直线 $y=1$ 旋转一周所生成立体的体积.

（18）（**本题满分 10 分**）计算积分 $I=\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(1+e^{x-\frac{1}{x}})(1+x^2)}$.

（19）（**本题满分 10 分**）计算 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{3}{16}}\min\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\}dxdy$.

（20）（**本题满分 11 分**）数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\sqrt{x_n^2+\dfrac{1}{n^2}})$，$n=1,2,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

（21）（**本题满分 11 分**）设当 $0\le x<1$ 时，函数 $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$. 当 $k\le x<k+1$ 时，$f(x)=a_k f(x-k)$，$k=1,2,\cdots$.（Ⅰ）求常数 $a_k\ (k=1,2,\cdots)$，使得 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导；（Ⅱ）求曲线 $y=f(x)\ (x\ge 0)$ 与 x 轴所围平面图形的面积 A.

（22）（**本题满分 11 分**）已知三阶方阵 A 的第一行元素为 $a,b,c\ (a\ne 0)$，且 $AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&4&6&2\\3&6&10&4\end{pmatrix}$. 记 $\xi_1=\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}$. 证明（Ⅰ）$\xi_1,\xi_2$ 都为线性方程组 $Ax=0$ 的解；（Ⅱ）B 的列向量组与 ξ_1,ξ_2 等价.

（23）（**本题满分 11 分**）已知 A 为三阶实对称矩阵，$r(A)=2$，$AB=2B$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求正交阵 Q，使得 Q^TAQ 为对角阵；（Ⅱ）求 A^n.