19、20全程资料请加群690261900

（16）（本题满分 10 分）已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，（Ⅰ）求收敛域；（Ⅱ）设幂级数的和函数为 $f(x)$，证明对 $\forall x\in(0,1)$，有 $f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$.

（17）（本题满分 10 分）求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+xy+2$ 在区域 D 上的最大值与最小值，其中 D 为 $\frac{x^2}{4}+y^2\le 1$ 且 $y\ge\frac{1}{2}x-1$.

（18）（本题满分 10 分）设 $x>0$ 且 $x\neq 1$，证明 $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{\ln x}{x-1}$.

（19）（本题满分 10 分）求 $\iint\limits_D\frac{y+1}{(x^2+y^2)^2}d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 2x$ 且 $x\ge 1$ 的部分.

（20）（本题满分 11 分）设线性齐次方程组 $Ax=0$ 为 $\begin{cases}x_1+3x_3+5x_4=0,\\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0,\\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0.\end{cases}$ 在此方程组基础上添加一个方程 $2x_1+ax_2-4x_3+bx_4=0$，得方程组 $Bx=0$.

（Ⅰ）求方程组 $Ax=0$ 的基础解系和通解；

（Ⅱ）问 a,b 满足什么条件时，$Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

（21）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx\ (A^T=A)$，满足 $tr(A)=1$，$AB=O$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&3\\1&0&2\end{pmatrix}$，（Ⅰ）求正交变换 $x=Py$，化二次型 f 为标准形；（Ⅱ）求该二次型.

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 $X\sim E(1)$，$[x]$ 表示取整函数.（Ⅰ）令 $U=\min\{2,[X]\}$，求 U 的概率分布；（Ⅱ）令 $Y=X-[X]$，求 Y 的密度函数 $f_Y(y)$；（Ⅲ）求 $E[X]$.

（23）（本题满分 11 分）设 (X_1,X_2,X_3) 为来自总体 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ 的一个简单随机样本.

（Ⅰ）求 $P\{X_1X_2=X_3+1\}$；（Ⅱ）求 $Y=\max\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布律.

19、20全程资料请加群690261900

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（一）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 的可去间断点，则 a,b 的取值范围是（　　）．

（A）$a=1$，b 为任意实数　　（B）$a\neq 1$，b 为任意实数

（C）$b=-1$，a 为任意实数　　（D）$b\neq -1$，a 为任意实数

（2）设函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+2y}{(x-1)^2+(y-1)^2}=1$，则下列说法不正确的是（　　）．

（A）$f(1,1)=0$　　（B）$f_x'(1,1)=2,\ f_y'(1,1)=-2$

（C）$f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微　　（D）$f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处取极值

（3）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则以下结论正确的有（　）个．

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛；　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛；　③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛；　④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）二次积分 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}dx\int_0^{Rx}f(\sqrt{x^2+y^2})dy+\int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 化为极坐标形式的二次积分为（　　）．

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R f(r)rdr$　　（B）$\int_0^{\arctan R}d\theta\int_0^R f(r)rdr$

（C）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R f(r)dr$　　（D）$\int_0^{\arctan R}d\theta\int_0^R f(r)dr$

（5）设 A 是三阶非零矩阵，满足 $A^2=O$．若线性非齐次方程组 $Ax=b$ 有解，则其线性无关解向量的个数是（　　）．

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（6）设 A 为三阶可逆矩阵，将 A 的第一行的 3 倍加到第二行得到 B，则（　　）．

（A）将 A^{-1} 的第一行的 3 倍加到第二行得到 B^{-1}

（B）将 A^{-1} 的第一行的 -3 倍加到第二行得到 B^{-1}

（C）将 A^{-1} 的第一列的 -3 倍加到第二列得到 B^{-1}

（D）将 A^{-1} 的第二列的 -3 倍加到第一列得到 B^{-1}

19、20全程资料请加群690261900

超 越 考 研

（7）设随机事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=0.5, P(C)=0.4$，则 $P(C-A|A\cup BC)=$（　　）．

（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{1}{7}$　　（C）$\dfrac{1}{6}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，$DX=4$，正整数 $s\le n,t\le n$，则 $Cov\left(\dfrac{1}{s}\sum\limits_{i=1}^{s}X_i,\dfrac{1}{t}\sum\limits_{j=1}^{t}X_j\right)=$（　　）．

（A）$4\max(s,t)$　　（B）$4\min(s,t)$　　（C）$\dfrac{4}{\max(s,t)}$　　（D）$\dfrac{4}{\min(s,t)}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}\arccos\dfrac{1}{x}dx=$__________．

（10）已知方程 $y'+y=\sin x+\cos x$ 的解均为方程 $y''+y'+ay=f(x)$ 的解，其中 a 为常数，则 $f(x)=$__________．

（11）设 $f(x)=\int_0^x e^{-|t|}dt$，则 $\int f(\ln x)dx=$__________．

（12）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\dfrac{1}{x^2}\int_0^{x^2}f(t)dt]^{\frac{\cot x}{\ln(1+x)}}=$__________．

（13）已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,3$，$f(x)=x^3-6x^2+11x-5$，则 $f(A)=$________．

（14）已知 $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ $(n>1)$ 为来总体 X 的简单随机样本，X 的分布函数为 $F(x)$．记 $Y_1=X_1$，$Y_2=\min\{X_2,X_3,\cdots X_n\}$，则 (Y_1,Y_2) 的分布函数 $G(x,y)=$__________．

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)\neq 0$，（Ⅰ）证明当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)dt\sim f(0)x$；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{\int_0^x f(t)dt}-\dfrac{1}{xf(0)}]$；（Ⅲ）设 $f'(x)$ 连续，且 $f'(0)\neq 0$，如果当 $x\neq 0$ 时，$\int_0^x f(t)dt=xf(\xi)$，其中 ξ 介于 x 与 0 之间．求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}$．

19、20全程资料请加群690261900

 19、20全程资料请加群690261900

（16）（本题满分 10 分）设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，变换 $u=ax+y,v=x+by$，把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，试求 a,b 的值.

（17）（本题满分 10 分）设曲线 $y=x^{\frac{n-1}{n}},y=x^{\frac{n}{n+1}}$（$x>0,n\ge 1$ 为整数）围成图形的面积记为 a_n，试求级数的和 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，若存在 $x_1,x_2\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，使 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)x\sin x dx=f(x_1)+f(x_2)$，证明：在 $(0,\pi)$ 内存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

（19）（本题满分 10 分）计算 $\iint\limits_D \min\left\{\sqrt{3-2x^2-2y^2},x^2+y^2\right\}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le\frac{3}{2},y\ge 0$.

（20）（本题满分 11 分）已知三阶方阵 A,B 满足关系式 $A^2-2AB=E$.（Ⅰ）证明：$AB=BA$；（Ⅱ）若 $B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&a\\0&0&5\end{pmatrix}$，求秩 $r(AB-2BA+3A)$.

（21）（本题满分 11 分）设 A 是三阶实对称矩阵 $|A|=-12$，A 的三个特征值之和为 1，且 $\alpha=(1,0,-2)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $(A^*-4E)x=0$ 的一个解向量.（Ⅰ）求矩阵 A；（Ⅱ）求方程组 $(A^*+6E)x=0$ 的通解.

（22）（本题满分 11 分）设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ \frac{1}{2}(1-e^{-x}), & x\ge 0,0\le y<1,\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0,y\ge 1.\end{cases}$

（Ⅰ）分别求 X 和 Y 的概率分布；（Ⅱ）问 X 和 Y 是否相互独立？（Ⅲ）求 $P\{X+Y\le 2\}$.

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2}{3\theta^2}(2\theta-x), & 0<x\le\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，（Ⅰ）求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；（Ⅱ）求极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$.

19、20全程资料请加群690261900

绝密 ＊ 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（二）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设有命题

①函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，若 $f(x)\ge g(x)$，则 $f'(x)\ge g'(x)$

②函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，若 $f'(x)\ge g'(x)$，则 $f(x)\ge g(x)$

③函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $f(x)\ge g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$

④函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$，则 $f(x)\ge g(x)$

则以上 4 各结论中正确的个数是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设 $f(x)=\sqrt{x^2+\sin^2 x}+x$，则曲线 $y=f(x)$ 有（　　）.

（A）两条斜渐近线　　（B）一条水平渐近线一条斜渐近线

（C）两条水平渐近线　　（D）一条斜渐近线，没有水平渐近线

（3）设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有连续二阶偏导数，且满足 $B^2-AC<0$，其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0),B=f''_{xy}(x_0,y_0),C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则点 (x_0,y_0)（　　）.

（A）必为 $f(x,y)$ 的极大值点　　（B）必为 $f(x,y)$ 的极小值点

（C）必不为 $f(x,y)$ 的极值点　　（D）可能不是 $f(x,y)$ 的极值点

（4）设函数 $f(x)>0$ 且单调递增，则积分 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin xdx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos xdx$，$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\tan xdx$ 的大小顺序为（　　）.

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_1>I_3>I_2$　　（C）$I_2>I_3>I_1$　　（D）$I_3>I_1>I_2$

（5）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$m\ne n,b$ 为 m 维列向量，则下列结论

①若 $r(A)=n$，则 $Ax=b$ 必有解；　　②若 $r(A)=m$，则 $Ax=b$ 必有解；

③ $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 必同解；　　④ $A^TAx=A^Tb$ 必有解

中正确的个数是（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（6）A,B 同为 n 阶实对称矩阵，则 A,B 相似的充要条件为（　　）

（A）A,B 等价　（B）A,B 合同　（C）$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$　（D）A,B 的正负惯性指数相同

19、20全程资料请加群690261900

19、20全程资料请加群690261900

（7）设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，则 $P\{X>x,Y>y\}=$（　　）.

（A）$1-F_X(x)F_Y(y)$　　（B）$[1-F_X(x)][1-F_Y(y)]$

（C）$2-F_X(x)-F_Y(y)+F(x,y)$　　（D）$1-F_x(x)-F_y(y)+F(x,y)$

（8）设随机变量 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim F(1,1)$，记 $p_1=P\{X<1\}$，$p_2=P\{X>-1\}$，$p_3=P\{Y<1\}$，$p_4=P\{Y>1\}$ 则（　　）.

（A）$p_1<p_2$，$p_3<p_4$　　（B）$p_1=p_2$，$p_3<p_4$

（C）$p_1=p_2$，$p_3=p_4$　　（D）$p_1>p_2$，$p_3>p_4$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设连续函数 $y=y(x)$ 满足 $y(x)+1=\int_x^{\frac{1}{2}}\frac{y(t)}{y^3(t)-t}dt$，则 $y=$________.

（10）设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\int_0^{2x}t[\frac{1}{t}]dt}{e^{\sin x}-1}=$________.

（11）设 $F(x)=\int_{e^{-x^2}}^1 dv\int_{-\ln v}^{x^2}f(u)du$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^3}=$________.

（12）若 $\frac{1}{3+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n(|x-1|<4)$，则 $a_n=$________.

（13）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&k\\2&-1\end{pmatrix}$，若存在矩阵 C，使得 $AC=B$，则 $k=$________.

（14）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个简单随机样本，S^2 为样本方差，则根据切比雪夫不等式估计 $P\{0<S^2<2\sigma^2\}$________.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设 $0<x_1<1$，$x_n=\int_0^1\max\{x_{n-1},t\}dt,n=1,2,3,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限．

19、20全程资料请加群6902619008/15

（16）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0 & x^2+y^2=0.\end{cases}$（Ⅰ）证明 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 存在；（Ⅱ）证明在点 $(0,0)$ 处 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 不连续，但 $f(x,y)$ 可微分.

（17）（**本题满分 10 分**）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!+2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

（18）（**本题满分 10 分**）设 L 为过 $O(0,0),A(1,1)$ 的凸曲线段，过 L 上任意一点 $P(x,y)$ 作切线交 y 轴于 Q，若 ΔOPQ 的面积为 $\dfrac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$，求曲线 L 的方程.

（19）（**本题满分 10 分**）设 D：$0\le x\le 1,0\le y\le 1$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D [x+y]\ln\dfrac{y+1}{x+1}dxdy$，其中 $[\bullet]$ 为取整函数.

（20）（**本题满分 10 分**）设 $A=\begin{pmatrix}3&7&9\\1&7&11\\7&7&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&5&10\\-3&4&14\\6&7&2\end{pmatrix}$ 问是否存在 X，使得 $AX-A=BX$？若存在，求所有的 X；若不存在，说明理由.

（21）（**本题满分 11 分**）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是1，试计算 a 的值，并用正交变换将二次型化为标准型.

（22）（**本题满分 11 分**）设 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}axy+b\varphi(x,y), & 0\le x\le 2,0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

其中 $\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, (x-1)^2+(y-1)^2\le 1,\\ 0, \qquad \text{其它},\end{cases}$ $0\le a\le\dfrac{1}{4}$. 已知 X 和 Y 不相关.（Ⅰ）求常数 a,b；（Ⅱ）判别 X 和 Y 的独立性.

（23）（**本题满分 11 分**）设 (X_1,X_2) 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|X_1-X_2|$，

（Ⅰ）求 S 的概率密度 $f_S(s)$；（Ⅱ）求 ES .

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（三）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设 $f(x)$ 有一阶连续导数，则下列说法正确的是（　　）．

（A）若 $f(x)$ 是偶函数，且 $a\neq 0$，则 $\int_a^x f(t)dt$ 一定不是奇函数

（B）若 $f(x)$ 是周期函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是周期函数

（C）若 $f'(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是奇函数

（D）若 $f'(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 一定是偶函数

（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\lambda}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$（$\lambda$ 为常数）（　　）．

（A）当 $\lambda<0$ 时发散　　（B）当 $\lambda\leq\frac{1}{2}$ 时条件收敛

（C）当 $\lambda\geq\frac{1}{2}$ 时绝对收敛　　（D）当 $-\frac{1}{2}<\lambda\leq\frac{1}{2}$ 时条件收敛，$\lambda>\frac{1}{2}$ 时绝对收敛

（3）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$，若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(2x)}{\sin x}=1$，则（　　）．

（A）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　（B）$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(0,f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点　　（D）以上结论均不正确

（4）设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处二阶偏导存在，且 $f_x'(0,0)=0, f_y'(0,0)=0$，则必有（　　）．

（A）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[f_x'(x,y)-f_x'(0,0)]=0$　　（B）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

（C）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)$　　（D）$\lim\limits_{x\to 0}f(x,0)=\lim\limits_{y\to 0}f(0,y)$

（5）设 A 为三阶矩阵，λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的属于特征值 λ_1 的线性无关的特征向量，α_3 是 A 的属于特征值 λ_2 的特征向量，则向量组 $\alpha_1+A\alpha_3, A(\alpha_2-\alpha_3), A\alpha_1+\alpha_3$ 线性相关的必要条件是（　　）．

（A）$\lambda_1=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$　　（B）$\lambda_1\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$

（C）$\lambda_2=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$　　（D）$\lambda_2\neq 0$ 且 $\lambda_1\lambda_2\neq 1$

19、20全程资料请加群690261900

19、20全程资料请加群690261900

超　越　考　研

（6）A 为 n 阶实对称阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 A^2 为正定阵的充要条件是（　　）．

（A）A 正定　（B）A^* 正定　（C）$A^*x=0$ 有非零解　（D）$A^*x=0$ 仅有零解

（7）设随机变量 X 和 Y 相互独立，记 $p_1=P\{X^2+Y^2\leq 1\}$，$p_2=P\{X+Y\leq 2\}$，$p_3=P\{X\leq 1\}P\{Y\leq 1\}$，则（　　）．

（A）$p_1\leq p_2\leq p_3$　（B）$p_1\leq p_3\leq p_2$　（C）$p_2\leq p_3\leq p_1$　（D）$p_3\leq p_1\leq p_2$

（8）设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本，X 的分布函数为 $F(x)$．对于给定的实数 x，如果 $0<F(x)<1$，记 Y 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中小于或等于 x 的个数，则 Y 的概率分布为（　　）．

（A）$Y\sim U[0,n]$　（B）$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n}\end{pmatrix}$　（C）$Y\sim B(n,F(x))$　（D）$Y\sim P(F(x))$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）已知方程 $x^3-\lambda x+2=0$ 有三个不相等的实根，则实数 λ 的取值范围为________．

（10）$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x+y}$ 的通解为____________．

（11）将区域 $D=\{(x,y)|\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi, 0\leq y\leq\sin x\}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为_______．

（12）设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$，则二重积分 $\iint\limits_D(\cos^2 x+\sin^2 y)dxdy=$____________．

（13）设 A,B 为三阶矩阵，A 相似于 B，$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$ 为 A 的两个特征值，又 $\left|B^{-1}\right|=\frac{1}{3}$，则 $\begin{vmatrix}(A-3E)^{-1} & O\\ O & B^*+(-\frac{1}{4}B)^{-1}\end{vmatrix}=$__________．

（14）设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为 $P\{X=m,Y=n\}=\frac{1}{2^{m+1}}$，$m=1,2,\cdots$；$n=1,2,\cdots,m$，则 $P\{X=3|Y=2\}=$__________．

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）（Ⅰ）设 $x>0$，证明函数 $f(x)=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ 单调递增；（Ⅱ）设 $0<x<1$，证明不等式 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x+(\ln 2-1)x^2$．

19、20全程资料请加群6902619008/15

(17)（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$a<c<b$，$\int_a^c f(x)dx=\int_c^b f(x)dx=0$.

(Ⅰ)证明存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1} f(x)dx, f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2} f(x)dx$；

(Ⅱ)证明存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\eta)=\int_a^{\eta} f(x)dx$.

(18)（本题满分 10 分）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y=y(x)$ 满足

$$xy''+(1-x)y'-2y=0, y(0)=1, y'(0)=2,$$

（Ⅰ）证明：$(n+1)^2 a_{n+1}=(n+2)a_n \quad n=0,1,2\cdots$；（Ⅱ）求 $y(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 10 分）设 D 为 $y=-x(y\ge 0)$, $y=\sqrt{2-x^2}$, x 正轴所围部分，计算二重积分

$$I=\iint\limits_D \min\{x,y\}\left|x^2+y^2-1\right|dxdy.$$

(20)（本题满分 11 分）已知两个向量组 $\alpha_1=(1,2,3)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$ 与 $\beta_1=(-1,2,t)^T,\beta_2=(4,1,5)^T$.

（Ⅰ）问 t 为何值时，两个向量组等价？（Ⅱ）当两个向量组等价时，求出它们之间的线性表示式.

(21)（本题满分 11 分）设 4 阶实对称矩阵 A 的秩为 2，且满足 $A^2=2A$，（Ⅰ）求二次型 x^TAx 的标准型；（Ⅱ）计算 $\left|E+A+A^2+A^3\right|$.

(22)（本题满分 11 分）已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ae^{\frac{x(b-x)}{4}}$ $(-\infty<x<+\infty)$，$2EX=DX$．求（Ⅰ）常数 a,b；（Ⅱ）$E(X^2e^X)$.

(23)（本题满分 11 分）设某鱼池中有 n 条鱼，从中先捉到1200条鱼并分别做了红色记号后放回池中.（Ⅰ）令 X_n 表示再从池中任意捉出的1000条鱼中带有红色记号的鱼的数目，求 X_n 的分布律；（Ⅱ）如果发现此1000条鱼中有100条鱼做了红色记号．试求 n 的最大似然估计值 $\hat{n}$.

19、20全程资料请加群690261900

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（四）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

19、20全程资料请加群690261900

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)>0, f''(x)<0$，则下列函数中，在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒正、单调下降且为凹函数的是（　　）．

（A）$-f(x)$　　（B）$f(-x)$　　（C）$\dfrac{1}{f(-x)}$　　（D）$\dfrac{1}{f(x)}$

（2）已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$．如果 $\lim_{n\to\infty} n^{\lambda}|a_n|$（常数 $\lambda>0$）存在，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x-3)^n$ 的收敛域为（　）．

（A）$(2,4)$　　（B）$[2,4)$　　（C）$(2,4]$　　（D）$[2,4]$

（3）设 $f(x)=(x^2-1)^{2015}$，则下列结论不正确的是（　　）．

（A）$f^{(2015)}(0)=0$　　（B）$f^{(2015)}(1)+f^{(2015)}(-1)=0$

（C）$f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=0$　　（D）$f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=2015!\cdot 2^{2016}$

（4）设函数 $z=z(x,y)$ 由函数 $ze^z=f(x)f(y)$ 确定，其中 $f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(0)>0,\ f'(0)=0,\ f''(0)>0$，则 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点（　　）．

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）无法判断

（5）设 A,B 及 A^* 都是　阶非零矩阵，且 $A^TB=O$，则 $r(B)=$（　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（6）设 A,B 为三阶实对称矩阵，且 A 相似于 B，B 特征值为 $0,0,2$，则 $Ax=0$ 线性无关的解向量的个数为（　　）．

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（7）下列结论中，正确的是（　　）．

（A）设 A,B 为任意两个随机事件，则 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

（B）设 A,B 为两个随机事件，若对任意的随机事件 C，均有 $AC=BC$，则 $A=B$

（C）若随机变量 X 和 Y 同分布，则 $X=Y$

（D）设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，若 $F(x_1)=F(x_2)$，则 $x_1=x_2$

（8）设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，且期望方差均存在，现有四个结论：

①$X=Y$　　②$P\{X=Y\}=1$　　③$F_X(x)=F_Y(x)$　　④$EX=EY, DX=DY$．

“$P\Rightarrow Q$”表示 P 成立则 Q 一定成立，则下列说法正确的是（　　）．

（A）②⇒①⇒③　　（B）①⇒③⇒④　　（C）③⇒①⇒②　　（D）④⇒②⇒③

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}=$__________．

（10）曲线 $y=x^2\sqrt{1-x^2}$ 与 x 轴所围平面图形的面积为________．

（11）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\varphi(az-by,bx-cz,cy-ax)=0$ 确定，其中 φ 具有连续偏导数，则 $c\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________．

（12）设 $z=x^a f(\dfrac{y}{x^2})$，f 有一阶导数，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________．

（13）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&a&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}$ 只有 2 个线性无关的特征向量，则 $a=$________．

（14）设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}a-e^{-bx}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ 若 $EX=\dfrac{1}{2}$，则 $E(X^2)=$________．

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（本题满分 10 分）设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+2\int_0^x(1-e^{t-x})f(t)dt$．

（Ⅰ）验证 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$，且 $f(0)=0, f'(0)=1$；（Ⅱ）求 $f(x)$．

（16）（本题满分 10 分）设函数 $g(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}dt$，求 $g(x)$ 的最小值．

（16）（本题满分 10 分）某客运公司在长期运营中发现每辆汽车的总维修成本 y (单位：千元)对汽车大修时间间隔 $t(t\ge 1)$ (单位：年)的弹性为 $2-\dfrac{81}{yt}$，且当 $t=1$ 时，$y=27.5$．（Ⅰ）求每辆汽车的总维修成本 y 与汽车大修时间间隔 t 的函数关系 $y=y(t)$；（Ⅱ）问每辆汽车多少年大修一次，可使每辆汽车的总维修成本最低？并求最低总维修成本．

（17）（本题满分 10 分）讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ 的敛散性，其中 a 为非零实数．

（18）（本题满分 10 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ $(b>a)$ 上连续，若

$$f(x)=f(a+b-x),\ g(x)+g(a+b-x)=m\ （常数），$$

（Ⅰ）证明：$\int_a^b f(x)g(x)dx=\dfrac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$；（Ⅱ）由（Ⅰ）计算 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x\sin x}{(e^x+1)(\cos^2 x+1)}dx$．

（19）（本题满分 10 分）设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f_x{}'(x,1)=f_y{}'(1,y)=0$，$f_x{}'(x,0)=-f_y{}'(0,x)$，求二重积分 $I=\iint\limits_D[xy+f''_{xy}(x,y)]dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$．

（20）（本题满分 11 分）已知 5×4 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 5 维列向量，其中 α_1,α_4 线性无关，且 $\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4=0$，若 $\beta=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解．

（21）（本题满分 11 分）设 A 为 3 阶实对称阵，其主对角元素之和为 2，且齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解 $\xi_1=(1,1,0)^T$，非齐次方程组 $Ax=\beta$ 有不同解 $\eta_1=(1,1,2)^T$，$\eta_2=(2,2,3)^T$，其中 $\beta=(0,0,1)^T$，（Ⅰ）证明 $2\eta_1-\eta_2$ 为 A 的特征向量．（Ⅱ）求 A^n．

（22）（本题满分 11 分）设盒中有一个红球和两个白球，现依次不放回地将其逐个取出．记 X 为首次取得红球时的取球次数，Y 为首次取得白球时的取球次数．(Ⅰ)求 X 和 Y 的联合概率分布；(Ⅱ)求 X 和 Y 的相关系数 ρ；(Ⅲ)记 $U=XY,V=\max\{X,Y\}$，求 $P\{U=V\}$．

（23）（本题满分 11 分）（本题满分 11 分）设随机变量 $U\sim N(0,1),\chi^2\sim\chi^2(n)$，$0<\alpha<1$，数 U_α 和 $\chi^2_\alpha(n)$ 分别满足 $P\{U>U_\alpha\}=\alpha$ 和 $P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\alpha$．当 n 充分大时，利用中心极限定理证明

$$\chi^2_\alpha(n)\approx n+\sqrt{2n}U_\alpha，\ \chi^2_{1-\alpha}(n)\approx n-\sqrt{2n}U_\alpha．$$

绝密 * 启用前

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

超 越 考 研

数学（三）模拟（五）

（科目代码：303）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。
3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）当 $x \to 0$ 时，下列无穷小中与 x^2 同阶的无穷小是（　）．

（A）$\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$　（B）$\int_0^{1-\cos x}\frac{e^t-1}{t}\,dt$　（C）$\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\,dt$　（D）$\int_0^{x-\sin x}\sqrt{\cos t}\,dt$

（2）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（　）．

（A）连续，偏导数存在　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　　（D）不连续，偏导数不存在

（3）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}$，$x\in[0,1]$，则下列结论不正确的是（　）．

（A）$f(x)$ 连续　（B）$f(x)$ 可导　（C）$f(x)$ 有极值点　（D）曲线 $y=f(x)$ 有拐点

（4）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$I_1=\iint\limits_D |xy|\,dxdy$，$I_2=\iint\limits_D (e^{x^2+y^2}-1)\,dxdy$，$I_3=\iint\limits_D \ln(1+|xy|)\,dxdy$，则三者大小依次为（　）．

（A）$I_1\le I_2\le I_3$　（B）$I_1\le I_3\le I_2$　（C）$I_3\le I_1\le I_2$　（D）$I_3\le I_2\le I_1$

（5）设 A 为 n 阶方阵，且秩 $r(A)=s$，β 为 n 维列向量，已知方程组 $Ax=0$ 与方程组 $\beta^T x=1$ 没有公共解，则（　）．

（A）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s$　（B）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}>s+1$　（C）$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=s+1$　（D）无法判断

（6）设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 为正定阵，则必有（　）．

（A）$a_{11}+a_{22}>2a_{12}$　（B）$a_{11}+a_{22}<2a_{12}$　（C）$a_{11}+a_{22}\le 2a_{12}$　（D）$a_{11}+a_{22}\ge 2a_{12}$

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 $0<P(C)<1$，下列命题正确的是（　）．

（A）若 A,B 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$

（B）若 A,C 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A)P(B|C)$

（C）若 A,B,C 两两独立，则 $P(AB|C)=P(AB)$

（D）若 A,B,C 相互独立，则 $P(AB|C)=P(A)P(B)$

19、20全程资料请加群690261900

（8）下列函数中，能作为某二维随机变量 (X,Y) 分布函数的是（　）．

（A）$F(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$　（B）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{x-y}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（C）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-(x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$　（D）$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-(x+y)}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2-2x=2e^y$ 确定，则 $y=y(x)$ 的拐点为________．

（10）已知 $y=C_1+C_2\sin x+e^x$（其中 C_1,C_2 为任意常数）是某二阶线性方程的通解，则该微分方程为__________．

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=$________．

（12）已知 $f(x^2+y^2,x^2-y^2)=\frac{9}{4}-2[(x^2+\frac{1}{4})^2+(y^2-\frac{1}{4})^2]$，$D:x^2+(y+\frac{1}{2})^2\le\frac{9}{4}$，则 $\iint\limits_D \sqrt{f(x,y)}\,d\sigma=$________．

（13）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & a & 4-3a\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，则 $A^*x=0$ 的通解为________．

（14）设随机变量 X_1,X_2 独立，且同服从 $N(0,1)$．$(Y_1,Y_2)=(X_1,X_2)A$，其中 A 为二阶正交矩阵，则下列结论中，正确的个数为________．

①$EY_1=EY_2=0$　　②$DY_1=DY_2=1$　　③$Cov(Y_1,Y_2)=0$　　④Y_1 与 Y_2 相互独立

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（**本题满分 10 分**）设 $z=xf(x-y,\varphi(xy^2))$，f 具有二阶连续偏导数，φ 具有二阶导数，且 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$．

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（D）．

解：$-f(x)<0$，排除（A）．

$[f(-x)]''=f''(-x)<0$，排除（B）．

$[\frac{1}{f(-x)}]'=\frac{f'(-x)}{f^2(-x)}>0$，排除（C）．

而 $\frac{1}{f(x)}>0,[\frac{1}{f(x)}]'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}<0,[\frac{1}{f(x)}]''=-\frac{f(x)f''(x)-2f'^2(x)}{f^3(x)}>0$，所以 $\frac{1}{f(x)}$ 恒正、单调下降且为凹函数，选（D）．

（2）答案：选（D）．

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛区间相同．

记 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\lambda}|a_n|=a$，则当 n 充分大时，$n^{\lambda}|a_n|<a+1$，$\frac{|a_n|}{n+1}<\frac{a+1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a+1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{n+1}$ 收敛，即当 $x=\pm1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 收敛．又因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-3)^n$ 的收敛域为 $[2,4]$．

（3）答案：选（C）．

解：由于 $f(x)$ 为偶函数，故 $f^{(2015)}(x)$ 为奇函数，所以（A）、（B）均正确．

又 $f(x)=(x^2-1)^{2015}=(x+1)^{2015}(x-1)^{2015}$，故由莱布尼兹公式

$f^{(2015)}(x)=2015!(x-1)^{2015}+2015^2\cdot2015!(x+1)(x-1)^{2014}+\cdots+2015!(x+1)^{2015}$，

得 $f^{(2015)}(1)=2015!\cdot2^{2015},f^{(2015)}(-1)=-2015!\cdot2^{2015}$，故 $f^{(2015)}(1)-f^{(2015)}(-1)=2015!\cdot2^{2016}$，（D）正确．

（4）答案：选（B）．

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'(x)f(y)}{(1+z)e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x)f'(y)}{(1+z)e^z}$，代入条件有 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{f''(x)f(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{f(x)f''(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f(x)f'(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{f'(x)f'(y)}{(1+z)e^z}-\frac{f'(x)f(y)(2+z)}{(1+z)^2e^z}\frac{\partial z}{\partial y}$，

由于 $z(0,0)e^{z(0,0)}=f^2(0)>0$，所以 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=\frac{f''(0)f(0)}{(1+z(0,0))e^{z(0,0)}}>0$，$B=0$，

$$AC-B^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}-[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}]^2=\frac{[f''(0)]^2[f(0)]^2}{(1+z)^2e^{2z}}>0,$$

故 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点取极小值．

（5）答案：选（B）．

解：由题意知 $r(A^T)<n$，从而 $r(A)<n$，所以 $r(A^*)=0$ 或 $r(A^*)=1$，由 $A^*\neq0$，得 $r(A^*)=1$．

从而 $r(A)=n-1$，由 $A^TB=O$ 知 $r(A^T)+r(B)\le n$，得 $r(B)\le1$，又 $B\neq O,r(B)\ge1$，所以 $r(B)=1$．

（6）答案：选（C）．

解：因为 A 相似于 B，B 特征值为 $0,0,2$，则 A 特征值为 $0,0,2$．又 A 为三阶实对称矩阵，则 A 与

$\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$ 相似，所以 $r(A)=1$，故选（C）．

（7）答案：选（B）．

解：（A）不正确，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$．

（B）正确，取 $C=\Omega$，即得 $A=B$．

（C）不正确，X 和 Y 同分布与 X 和 Y 的取值相同不是一回事．

（D）不正确，事实上 $F(x)$ 单调不减．

（8）答案：选（B）．

解：（A）不正确，因为 $P(A)=1 \not\Rightarrow A=\Omega$ 知② $\not\Rightarrow$ ①.

（B）正确，若 $X=Y$ 则 $F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{Y\le x\}=F_Y(x)$.

（C）不正确，假设 X 和 Y 均服从 $[0,1]$ 上均匀分布且相互独立，则 $F_X(x)=F_Y(x)$ 但 $P\{X=Y\}=0$.

（D）不正确，例如 $X\sim N(1,1),Y\sim P(1)$，则 $EX=EY=1,DX=DY=1$，但 $F_X(x)\ne F_Y(x)$.

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填"-2".

解：原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x^{x-1}-1)}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\ln x}{\ln x-x+1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x+x-1}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1+1}{-1}=-2.$$

（10）答案：填"$\dfrac{\pi}{8}$".

解：$y=x^2\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，所以所求面积为

$$S=\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\,dx\ \overset{x=\sin t}{\underset{0\le t\le\frac{\pi}{2}}{=}}\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2t-\cos^4t)dt=2\left(\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

（11）答案：填"b".

解：$a\varphi_1'\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\varphi_2'-c\varphi_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\varphi_3'=0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{a\varphi_3'-b\varphi_2'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，同理得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{b\varphi_1'-c\varphi_3'}{a\varphi_1'-c\varphi_2'}$，故

$$c\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}=b.$$

（12）答案：填"az"或者"$ax^af(\dfrac{y}{x^2})$".

解：$x\dfrac{\partial z}{\partial x}=ax^af(\dfrac{y}{x^2})-\dfrac{2y}{x^2}x^af'(\dfrac{y}{x^2})$，$2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2}x^af'(\dfrac{y}{x^2})$，所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=ax^af(\dfrac{y}{x^2})=az$.

（13）答案：填"0或4".

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\-1&\lambda-a&1\\3&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\0&\lambda-a&1\\\lambda&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&\lambda-a&1\\0&0&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-a)(\lambda-4)$.

故 a 只能为 0 或 4.

当 $a=0$ 时，$\lambda=4,0,0$，$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&-1\\-3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=2$，故 $\lambda=0$ 只有一个无关的特征向量，符合题意.

当 $a=4$ 时，$\lambda=4,4,0$，$4E-A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$，$r(4E-A)=2$，故 $\lambda=4$ 只有一个无关的特征向量，也符合题意.

（14）答案：填"$\dfrac{1}{2}$".

解：由 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$ 知 $a=1$．由于 $F(x)$ 单调不减，故 $b\ge0$．若 $b=0$，则 $F(x)=0$ 不是分布函数，故 $b>0$，故 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-bx}, & x>0,\\ 0, & x\le0,\end{cases}$ 所以 $X\sim E(b)$.

由 $E(X)=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$ 得 $b=2$，知 $X\sim E(2)$，故 $DX=\dfrac{1}{4}$，因此 $E(X^2)=DX+(EX)^2=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（15）（Ⅰ）**证 1**：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且

$$f'(x)=1+2f(x)+2[e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt-e^{-x}\cdot e^xf(x)]=1+2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt,$$ ……2 分

由①知 $2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt=x+2\int_0^xf(t)dt-f(x)$，代入上式得

$$f'(x)=1+x+2\int_0^xf(t)dt-f(x),$$ ②

由②知 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)=1+2f(x)-f'(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$． ……4 分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$． ……5 分

证 2：由于 $f(x)=x+2\int_0^xf(t)dt-2e^{-x}\int_0^xe^tf(t)dt$， ①

可知 $f(x)$ 可导，且 $e^x f(x)=xe^x+2e^x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x e^t f(t)dt$，两边求导得

$$e^x[f(x)+f'(x)]=(1+x)e^x+2e^x\int_0^x f(t)dt+2e^x f(x)-2e^x f(x),$$ ……2分

化简得 $$f(x)+f'(x)=1+x+2\int_0^x f(t)dt ,$$ ②

再两边求导得 $f'(x)+f''(x)=1+2f(x)$，即 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$. ……4分

又由①得 $f(0)=0$，由②得 $f'(0)=1$. ……5分

(Ⅱ)解：由 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 知对应齐次方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，故可设 $y^*=a$，将其代入上式即得 $y^*=-\frac{1}{2}$. 因此 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=1$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{2}$. ……8分

由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{2}{3},C_2=-\frac{1}{6}$，所以 $f(x)=\frac{2}{3}e^x-\frac{1}{6}e^{-2x}-\frac{1}{2}$. ……10分

(16) 解：当 $x>1$ 时，$g(x)=2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>0$，故当 $x\ge 1$ 时，$g(x)$ 单调增加.

当 $x<-1$ 时，$g(x)=-2x\int_0^1 e^{t^2}dt$，$g'(x)=-2\int_0^1 e^{t^2}dt<0$ 故当 $x\le 1$ 时 $g(x)$ 单调减少；…… 3分

当 $-1<x<1$ 时，

$$g(x)=\int_{-1}^x (x-t)e^{t^2}dt+\int_x^1 (t-x)e^{t^2}dt=x\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_{-1}^x te^{t^2}dt+\int_x^1 te^{t^2}dt-x\int_x^1 e^{t^2}dt,$$

$$g'(x)=\int_{-1}^x e^{t^2}dt-\int_x^1 e^{t^2}dt=\int_{-x}^x e^{t^2}dt.$$ …… 7分

由 $g'(x)=0$ 得 $x=0$. 当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极小值点，又 $g(1)=g(-1)=2\int_0^1 e^{t^2}dt>2\int_0^1 dt=2$， …… 9分

$g(0)=2\int_0^1 te^{t^2}dt=e^{t^2}|_0^1=e-1$，故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=e-1$. ……10分

(17) 证 (Ⅰ) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt,x\in[a,b]$，则

$$F(a)=F(c)=0,F(b)=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=0,$$

且 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$. …… 2分

令 $\varphi(x)=F(x)e^{-x},x\in[a,b]$，则 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$，得 $F'(\xi_1)-F(\xi_1)=0,F'(\xi_2)-F(\xi_2)=0$，即得

19、20全程资料请加群690261900

19、20全程资料请加群690261900

超 越 考 研

$$f(\xi_1)=\int_a^{\xi_1} f(x)dx, f(\xi_2)=\int_a^{\xi_2} f(x)dx.$$ …… 6分

(Ⅱ) 令 $\psi(x)=[F'(x)-F(x)]e^x,x\in[a,b]$，则 $\psi(\xi_1)=\psi(\xi_2)=0$， …… 8分

再由罗尔中值定理，存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\psi'(\eta)=0$，得 $F''(\eta)-F(\eta)=0$，即有

$$f'(\eta)=\int_a^\eta f(x)dx.$$ ……10分

(18)(Ⅰ) 证：由 $y=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ 知 $y'=\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1},y''=\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-2}$，故由

$xy''+(1-x)y'-2y=0$ 知 $\sum_{n=2}^\infty n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^\infty na_nx^n+\sum_{n=1}^\infty na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=0$， …… 2分

所以 $n(n+1)a_{n+1}-na_n+(n+1)a_{n+1}-2a_n=0$，即有 $(n+1)^2a_{n+1}=(n+2)a_n$. …… 4分

(Ⅱ) 解：由(Ⅰ)知 $n^2a_n=(n+1)a_{n-1}$，所以

$$a_n=\frac{n+1}{n^2}a_{n-1}=\frac{n+1}{n^2}\cdot\frac{n}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}a_{n-2}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot\frac{n-1}{(n-2)^2}a_{n-3}$$

$$=\frac{n+1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{(n-2)^2}a_{n-3}=\cdots=\frac{n+1}{n!},\quad n=1,2,\cdots,$$ ……7分

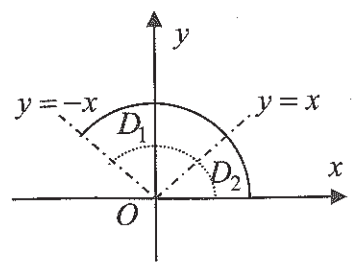
故 $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{n+1}{n!}x^n=1+x\sum_{n=0}^\infty\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n!}=xe^x+e^x$，所以

$$y(x)=(x+1)e^x,x\in(-\infty,+\infty).$$ ……10分

(19) 解：引入直线 $y=x$ 分割区域 $D=D_1\cup D_2$（如图），则

$$I=\iint_{D_1}x|x^2+y^2-1|dxdy+\iint_{D_2}y|x^2+y^2-1|dxdy.$$ …… 3分

由于区域 D_1 关于 y 轴对称，函数 $x|x^2+y^2-1|$ 关于 x 为奇函数，所以 $\iint_{D_1}x|x^2+y^2-1|dxdy=0$. …… 5分



利用曲线 $x^2+y^2=1$，分割区域 $D_2=D_2'+D_2''$，其中

$D_2'=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,0\le y\le x\}$，$D_2''=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2,0\le y\le x\}$

$$I=\iint_{D_2}y|x^2+y^2-1|dxdy=\iint_{D_2'}y(1-x^2-y^2)dxdy+\iint_{D_2''}y(x^2+y^2-1)dxdy$$ …… 7分

19、20全程资料请加群6902619008/15

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 r\sin\theta\cdot(1-r^2)rdr+\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^{\sqrt2} r\sin\theta\cdot(r^2-1)rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{15}\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2\sqrt2}{15}-\frac{2}{15}\right)\sin\theta d\theta=\frac{2\sqrt2}{15}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=\frac{2}{15}(\sqrt2-1).$$ ……10 分

（20）解：（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&0&2&1\\3&1&t&5\end{pmatrix}\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&-2&t+3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&t-1&0\end{pmatrix}$.

……4 分

当$t=1$时，$r(\alpha_1,\alpha_2)=r(\beta_1,\beta_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=2$，故两个向量组等价． ……6 分

（Ⅱ）当两个向量组等价时，$A\overset{行}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1&\frac12\\0&1&-2&\frac72\\0&0&0&0\end{pmatrix}$， ……8 分

故$\beta_1=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta_2=\frac12\alpha_1+\frac72\alpha_2$，$\alpha_1=\frac79\beta_1+\frac49\beta_2$，$\alpha_2=\frac19\beta_1+\frac29\beta_2$． ……11 分

（21）解：（Ⅰ）由$A^2=2A$得A的特征值只能为0或2，由于$r(A)=2$，故A的特征值为$2,2,0,0$，

……4 分

从而$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&&\\&2&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}=\Lambda$，二次型$x^TAx$的标准型为$2{y_1}^2+2{y_2}^2$． ……6 分

（Ⅱ）$P^{-1}(E+A+A^2+A^3)P=\begin{pmatrix}15&0&0&0\\0&15&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，故 ……9 分

$$|E+A+A^2+A^3|=15^2=225.$$ ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由于$f(x)=ae^{\frac{x(b-x)}{4}}=ae^{\frac{b^2}{16}}\cdot e^{-\frac{(x-\frac b2)^2}{4}}$，故$X\sim N(\frac b2,2)$． …… 3 分

因为$EX=\frac b2$，$DX=2$，且$2EX=DX$，知$b=2$．又由$ae^{\frac{b^2}{16}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt2}=\frac{1}{2\sqrt\pi}$，解得

$a=\frac{1}{2\sqrt\pi}e^{-\frac14}$，因此$f(x)=\frac{1}{2\sqrt\pi}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}\quad(-\infty<x<+\infty)$． …… 5 分

（Ⅱ）$E(X^2e^X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^x\frac{1}{2\sqrt\pi}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt2}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$． …… 7 分

其中$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt2}e^{-\frac{(x-3)^2}{4}}dx$可看作随机变量$Y^2$的期望，其中$Y\sim N(3,2)$，而 …… 9 分

$$E(Y^2)=DY+(EY)^2=2+3^2=11,$$

故$E(X^2e^X)=11e^2$． ……11 分

（23）解：（Ⅰ）X_n的分布律为

$$P\{X_n=k\}=\frac{C_{1200}^kC_{n-1200}^{1000-k}}{C_n^{1000}},\quad k=0,1,2,\cdots,1000.$$ ……3 分

（Ⅱ）由题意知，现从总体X_n中取了一个容量为1的样本，并得观测值$k_1=100$，因此似然函数为

$$L(n)=P\{X_n=100\}=\frac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}.$$ ……5 分

现在的问题是：求$\hat n$，使得$L(\hat n)$为最大值．由于

$$\frac{L(n)}{L(n-1)}=\frac{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1200}^{900}}{C_n^{1000}}}{\dfrac{C_{1200}^{100}C_{n-1-1200}^{900}}{C_{n-1}^{1000}}}=\frac{(n-1200)(n-1000)}{(n-2100)n}=\frac{(n-2200)n+1200000}{(n-2200)n+100n}.$$ ……7 分

当$100n\le1200000$，即$n\le12000$时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\ge1$，表明$L(n)$随着n增大而不减少．

当$100n\ge1200000$，即$n\ge12000$时，$\frac{L(n)}{L(n-1)}\le1$，表明$L(n)$随着n增大而不增加．……9 分

因此当$n=12000$时，$L(n)$取最大值，所以n的最大似然估计值为$\hat n=12000$． ……11 分

2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）答案：选（B）.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\frac{e^t-1}{t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{2x}=\dfrac12$，选（B）.

同理可得，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2}=\dfrac13$；

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}(e^{t^2}-1)\,dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{\sin^2x}-1)\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x\cos x}{3x^2}=\frac13;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x-\sin x}\sqrt{\cos t}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos(x-\sin x)}\cdot(1-\cos x)}{3x^2}=\frac16.$$

（2）答案：选（C）.

解：由偏导数的定义易知 $f'_x(0,0)=0,\ f'_y(0,0)=0$.

以下证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在．当 x,y 沿曲线 $x=ky^2$ 趋向于点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0^+\\x=ky^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{ky^4}{(1+k^2)y^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

与 k 有关．所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续．故选(C).

（3）答案：选（B）.

解：$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-x^2)^n+x^{2n}}=\max\{1-x^2,x^2\}=\begin{cases}1-x^2, & 0\le x\le\frac{1}{\sqrt2},\\ x^2, & \frac{1}{\sqrt2}<x\le1.\end{cases}$ 经验证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处不可导，在点 $x=\frac{1}{\sqrt2}$ 处取极小值，点 $(\frac{1}{\sqrt2},\frac12)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（4）答案：选（C）.

解：$\ln(1+|xy|)\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}\le x^2+y^2\le e^{x^2+y^2}-1$，故 $I_3\le I_1\le I_2$，故选（C）.

（5）答案：选（A）.

解：由题意知 $r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}+1=r\begin{pmatrix}A&0\\ \beta^T&1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}=r(A)+1$，$r\begin{pmatrix}A\\ \beta^T\end{pmatrix}=r(A)$.

（6）答案：选（A）.

解：$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$，$f(1,-1,0)=a_{11}+a_{22}-2a_{12}>0$，故 $a_{11}+a_{22}>2a_{12}$.

（7）答案：选（D）.

解：（A），（B），（C）均不正确．反例：设 $\Omega=\{1,2,3,4\}$，且 1,2,3,4 等概率出现，可验证 $A=\{1,2\},B=\{1,3\},C=\{1,4\}$ 两两独立，但不相互独立．此时（A），（B），（C）的条件均满足，经计算 $P(AB|C)=\frac12$，$P(A|C)P(B|C)=P(A)P(B|C)=P(AB)=\frac14$.

（D）正确．$P(AB|C)=\dfrac{P(ABC)}{P(C)}=\dfrac{P(A)P(B)P(C)}{P(C)}=P(A)P(B)$.

（8）答案：选（A）.

解：（B）当 $y\ge0$ 时，$F(x,y)$ 关于 x 为单调不增，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=-\infty$，排除（B）.

（C）当 $y=1$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}F(x,1)=1-e^{-1}\ne F(0,1)=0$，所以 $F(x,1)$ 在点 $x=0$ 处不右连续，排除（C）.

（D）$P\{0<X\le1,0<Y\le1\}=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=-(1-e^{-1})^2<0$，排除（D）.

（A）正确，若 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(0,0)\\1\end{pmatrix}$，则 (X,Y) 的分布函数是 $F(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge0,y\ge0,\\0, & \text{其它}.\end{cases}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填“$(-1,0)$”.

解 1：$2yy'-2=2e^yy'$，即 $yy'-1=e^yy'$； ①

$y'^2+yy''=e^yy'^2+e^yy''$； ②

$3y'y''+yy'''=e^yy'^3+3e^yy'y''+e^yy'''$. ③

令 $y''=0$，由②得 $y'^2=e^yy'^2$．再由①知 $y'\ne0$，所以 $e^y=1$，得 $y=0$．代入原方程得 $x=-1$；代入①得 $y'(-1)=-1$．将 $x=-1,y(-1)=0,y'(-1)=-1,y''(-1)=0$ 代入③ $y'''(-1)=1\ne0$，故 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$.

解 2：将原方程转化为 $x=\frac12y^2-e^y$，则 $\dfrac{dx}{dy}=y-e^y,\dfrac{d^2x}{dy^2}=1-e^y,\dfrac{d^3x}{dy^3}=-e^y$.

令 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=0$，得 $y=0$，进而有 $x(0)=-1$ 及 $\left.\dfrac{d^3x}{dy^3}\right|_{y=0}=-1\neq 0$，所以 $x=\dfrac{1}{2}y^2-e^y$ 的拐点为 $(0,-1)$.

再利用反函数的性质知 $y=y(x)$ 的拐点为 $(-1,0)$.

（10）答案：填 “ $y''+\tan x\cdot y'=e^x(1+\tan x)$ ”.

解：设该方程为 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$，根据二阶线性的方程解的性质与解的结构可知，$y_1=1,y_2=\sin x$ 是方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ 的解，代入后解得 $P(x)=\tan x,Q(x)=0$，又 $y^*=e^x$ 是该方程的特解，解得 $f(x)=e^x(1+\tan x)$，所以该方程为 $y''+\tan x\cdot y'=e^x(1+\tan x)$.

（11）答案：填 “ $\dfrac{1}{16}\pi$ ”.

解 1： $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{2i-1}{2n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\xi_i^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{4}\arctan x\Big|_0^1=\frac{1}{16}\pi .\ \text{其中}\ \xi_i=\frac{\frac{i}{n}+\frac{i-1}{n}}{2}\in[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ i=1,2\cdots n .$$

解 2：由于 $\dfrac{n}{4n^2+4i^2}\le\dfrac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\dfrac{n}{4n^2+4(i-1)^2}$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4i^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+(2i-1)^2}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2} .$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{4n^2+4i^2}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{4}\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{16}$，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{4n^2+4(i-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i-1}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{16},$$

所以由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{4n^2+(2i-1)^2}=\dfrac{1}{16}\pi$.

（12）答案：填 “ $\dfrac{9}{4}\pi$ ”.

解：令 $x^2+y^2=u,x^2-y^2=v$，则 $x^2=\dfrac{1}{2}(u+v),\ y^2=\dfrac{1}{2}(u-v)$.代入原式，有

$$f(u,v)=\frac{9}{4}-u^2-(v+\frac{1}{2})^2,$$

所以 $f(x,y)=\dfrac{9}{4}-x^2-(y+\dfrac{1}{2})^2$.

原积分 $=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{9}{4}-x^2-(y+\dfrac{1}{2})^2}\,d\sigma$.令 $x=r\cos\theta,\ y=-\dfrac{1}{2}+r\sin\theta$，则

原积分 $=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{9}{4}-r^2}\,rdr=2\pi\cdot\dfrac{-1}{3}(\dfrac{9}{4}-r^2)^{3/2}\Big|_0^{\frac{3}{2}}=\dfrac{9}{4}\pi$.

（13）答案：填 “ $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数”.

解：由 $r(A)=2\Rightarrow r(A^*)=1\Rightarrow n-r(A^*)=3-1=2$，则 $A^*x=0$ 的基础解系中含两个无关的解向量，又由 $r(A)=2\Rightarrow|A|=0\Rightarrow A^*A=|A|E=0\Rightarrow A$ 的列向量均是方程 $A^*x=0$ 的解向量，即

$A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}5\\2\\4-3a\end{pmatrix}=0\Rightarrow A^*\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0,\ A^*\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}=0$，且 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$ 线性无关，

则 $A^*x=0$ 的通解为 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}11\\5\\4\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

（14）答案：填 “ 4 ”.

解：设正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，则 $Y_1=a_{11}X_1+a_{21}X_2,Y_2=a_{12}X_1+a_{22}X_2$.

$EY_1=a_{11}EX_1+a_{21}EX_2=0$，同理 $EY_2=0$，①正确.

$DY_1=a_{11}^2DX_1+a_{21}^2DX_2=a_{11}^2+a_{21}^2=1$，同理 $DY_2=1$，②正确.

$Cov(Y_1,Y_2)=Cov(a_{11}X_1+a_{21}X_2,a_{12}X_1+a_{22}X_2)=a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$，③正确.

由于 $|A|\neq 0$，所以 (Y_1,Y_2) 服从二维正态分布，由③正确知 Y_1 与 Y_2 不相关，从而 Y_1 与 Y_2 相互独立，④正确.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi'f_2'$； ……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$$

$$+xy^2\varphi'[(f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\varphi'2xy)]+xy^2f_2'\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi'f_2'$$

$=-f_1'+4xy\varphi'f_2'-xf_{11}''+2x^2y^3\varphi''f_2'+2x^2y^3\varphi'^2f_{22}''+(2x^2y-xy^2)\varphi'f_{12}''$， ……6 分

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2$， ……8 分

从而 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f_1'(0,1)-f_{11}''(0,1)+4f_2'(0,1)$. ……10 分

（16）解：（Ⅰ）由题意知，每辆汽车的总维修成本 y 对汽车大修时间间隔 t 的弹性为

$$\frac{Ey}{Et}=\frac{t}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=2-\frac{81}{yt}，得 \frac{dy}{dt}-\frac{2}{t}y=-\frac{81}{t^2}，$$ ……2 分

所以

$$y=e^{-\int(-\frac{2}{t})dt}\left[\int(-\frac{81}{t^2})e^{\int(-\frac{2}{t})dt}dt+C\right]=t^2(\frac{27}{t^3}+C)=\frac{27}{t}+Ct^2 .$$ ……5 分

又当 $t=1$ 时，$y=27.5$，解得 $C=\frac{1}{2}$，故每辆汽车的总维修成本 y 与汽车大修时间间隔 t 的函数关系为 $y=\frac{27}{t}+\frac{1}{2}t^2$，$t\ge1$. ……7 分

（Ⅱ）$\frac{dy}{dt}=-\frac{27}{t^2}+t=\frac{t^3-27}{t^2}$，令 $\frac{dy}{dt}=0$，解得驻点 $t=3$.

当 $1\le t<3$ 时，$\frac{dy}{dt}<0$；当 $t>3$ 时，$\frac{dy}{dt}>0$，所以当 $t=3$ 时，y 取得最小值 $y(3)=\frac{27}{2}$，因此每辆汽车每隔 3 年大修一次可使每辆汽车的总维修成本最低，最低总维修成本为 $\frac{27}{2}$ 千元. ……10 分

（17）解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}}{1+a^{2n+2}}\cdot\frac{1+a^{2n}}{a^n}\right|=|a|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a^{2n}}{1+a^{2n+2}}$， ……2 分

① 当 $0<|a|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|a|<1$，级数绝对收敛，所以原级数收敛； ……4 分

② 当 $|a|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{a^2}\right|=\frac{1}{|a|}<1$，级数绝对收敛，所以原级数收敛； ……6 分

③ 当 $a=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}$ 发散； ……8 分

④ 当 $a=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2}$ 发散. ……10 分

（18）解：（Ⅰ）令 $x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(a+b-t)g(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)g(a+b-x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)[m-g(x)]dx=m\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(x)g(x)dx，$$ ……3 分

即有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{m}{2}\int_a^b f(x)dx$. ……4 分

（Ⅱ）取 $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}$，$g(x)=\frac{1}{e^x+1}$，则 $f(-x)=f(x)$，$g(x)+g(-x)=1$. 由（Ⅰ），

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx .$$ ……7 分

再取 $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x+1}$，$g(x)=x$，则 $f(\pi-x)=f(x)$，$g(x)+g(\pi-x)=\pi$，再由（Ⅰ），

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{\cos^2 x+1}=-\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4} .$$ ……10 分

（19）解：$I=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy$，其中

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_0^1dx\int_0^1 xydy=\frac{1}{4} .$$ ……2 分

$$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1 f''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1[f'_x(x,1)-f'_x(x,0)]dx=-\int_0^1 f'_x(x,0)dx，$$ ……4 分

因为 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，所以 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$，并交换积分次序，

$$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\iint\limits_D f''_{yx}(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_0^1 f''_{yx}(x,y)dx$$

$$=\int_0^1[f'_y(1,y)-f'_y(0,y)]dy=-\int_0^1 f'_y(0,y)dy=-\int_0^1 f'_y(0,x)dx .$$ ……7 分

因为 $f'_x(x,0)=-f'_y(0,x)$，所以 $\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=-\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=0$，从而

$$I=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4} .$$ ……10 分

（20）解：由题设 $\beta=3\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4$ 知：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(3,-2,-1,1)^T=\beta$，所以 $Ax=\beta$ 有一个特解为 $\eta=(3,-2,-1,1)^T$. …… 2 分

由题设 α_1,α_4 线性无关，$\alpha_2=-\alpha_1+\alpha_4$，$\alpha_3=3\alpha_1+(-\alpha_1+\alpha_4)+4\alpha_4=2\alpha_1+5\alpha_4$，从而 α_1,α_4 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组，故 $r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，则方程 $Ax=0$ 的基础解系中含 $4-2=2$ 个无关的解向量. …… 6 分

由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}=0$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$，即知 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的

解且线性无关，所以 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 的一个基础解系， ……9 分

故方程组 $Ax=\beta$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=k_1\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\1\end{pmatrix},$$ 其中 k_1,k_2 为任意常数. ……11 分

（21）解：（Ⅰ）因为 $A\xi_1=0$，故 $\lambda_1=0$ 为 A 的特征值，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. …… 2 分

又 $A\eta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, A\eta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $A(2\eta_1-\eta_2)=A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，从而 $\lambda_2=1$ 为 A 的特征值，对应的特征向量 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，故 $2\eta_1-\eta_2$ 为对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量. …… 5 分

（Ⅱ）A 主对角元素之和为 2，即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2$，所以 $\lambda_3=1$ 为 A 的另一特征值. …… 7 分

设 λ_3 对应的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由 $[\xi_3,\xi_1]=0,[\xi_3,\xi_2]=0$ 得 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_3=0,\end{cases}$ 取 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. …… 9 分

因为 A 为对称阵，故取 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}, Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

则 $A=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Q^{-1}$，$A^n=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由题意知，X 的取值为 1,2,3，Y 的取值为 1,2，且 $\{X=1,Y=1\},\{X=2,Y=2\}$ 和 $\{X=3,Y=2\}$ 均为不可能事件. …… 2 分

由乘法公式得 $P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$，同理 $P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{3}$，$P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{3}$，故 X 和 Y 的联合概率律为

$$(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$ ……4 分

19、20全程资料请加群690261900

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 X 和 Y 的边缘分布律分别为 $X\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}1&2\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。进而计算得

$$EX=2,DX=\frac{2}{3},\quad EY=\frac{4}{3},DY=\frac{2}{9},$$ ……7 分

又 $E(XY)=\frac{7}{3}$，故 $Cov(X,Y)=\frac{7}{3}-2\cdot\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$，所以 $\rho=\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……9 分

（Ⅲ）由 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix}(1,2)&(2,1)&(3,1)\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 得 $(U,V)\sim\begin{pmatrix}(2,2)&(3,3)\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，所以

$$P\{U=V\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$ ……11 分

或由于 (X,Y) 只取值 $(1,2),(2,1),(3,1)$，故 (U,V) 只取值 $(2,2),(3,3)$，因此有 $U=V$，从而

$$P\{U=V\}=1.$$ ……11 分

（23）证：由 $\chi^2\sim\chi^2(n)$ 知，χ^2 可表示为 $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，其中 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且均服从 $N(0,1)$. 进而知 $X_i^2\sim\chi^2(1)$，$E(X_i^2)=1$，$D(X_i^2)=2$，$i=1,2,\cdots,n$. ……3 分

因此当 n 充分大时，由中心极限定理知 $\chi^2\overset{近似}{\sim}N(n,2n)$，故 $\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$， ……5 分

由 $P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\frac{\chi_\alpha^2(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=\alpha$，可得 $\frac{\chi_\alpha^2(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_\alpha$，所以

$$\chi_\alpha^2(n)\approx n+\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……8 分

由 $P\{\chi^2>\chi_{1-\alpha}^2(n)\}=P\{\frac{\chi^2-n}{\sqrt{2n}}>\frac{\chi_{1-\alpha}^2(n)-n}{\sqrt{2n}}\}=1-\alpha$，可得 $\frac{\chi_{1-\alpha}^2(n)-n}{\sqrt{2n}}\approx U_{1-\alpha}=-U_\alpha$，所以

$$\chi_{1-\alpha}^2(n)\approx n-\sqrt{2n}U_\alpha.$$ ……11 分

19、20全程资料请加群6902619008/15