二
1题

$$\frac{\int_0^{x-\sin x} f(x)dx}{a\ln(1-x^b)}=1$$

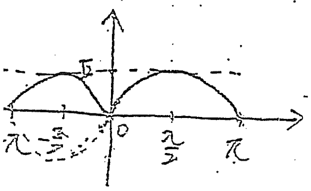
$$\frac{\int_0^{x-\sin x} f(x)dx}{-ax^b}=1$$

$$\frac{(1-\cos x)f(x-\sin x)}{-abx^{b-1}}=1$$

$$\frac{-6\cdot\frac{1}{2}x^2}{-abx^{b-1}}=1$$

$b-1=2$
$ab=3$ $\Rightarrow\begin{cases}b=3\\a=1\end{cases}$

$=\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2\sin^2 x}=\sqrt{2}|\sin x|$



$x=0$的点为尖点，所以在$x=0$的点不可导.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+0,0)-f(0,0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{|x|^{1+\alpha}-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{|x|}{x}|x|^{\alpha}$$ → 无穷小，有界
$$=0$$

同理 $f'_y(0,0)=0$

$f'_x(x,y)\overset{?}{=}f'_x(0,0)$ ← 证连续(在(0,0)处)

$$f'_x(x,y)=\frac{1+\alpha}{2}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot2x=(1+\alpha)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_x(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+\alpha)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}=0=f'_x(0,0)$$ ← 无穷小

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le1$$

~~同理 $f'_y(x,y)=f'_y(0,0)$~~

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_y(x,y)=f'_y(0,0)$$

√① 加括号后发散，则原级数发散. (反证法)

× ② $u_n=n$

× ③ 只有当 u_n, v_n 都为正项级数时，才能成立

$u_n=v_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

$u_nv_n=\frac{1}{n}$ 发散

√④ 收敛 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}$ 发散.

(5)

$$B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&1&-1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(6)

A：不同特征值对应的特征向量无关.

B：$|A|=(\lambda-1)\lambda 0=0\Rightarrow r(A)<3$ 有非零解.

C：实对称阵不同特征值对应的特征向量正交.

D：

(7) ~~$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$~~

$P(\bar{A}\bar{B})=p^2$

$\frac{p}{2}=P(B|\bar{A})=\frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{p+p^2}{2}$

$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{3p-p^2}{2}$

(8) $f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & 0\le\theta<2\pi\\0 & 其它\end{cases}$

A：X与Y独立 ⇒ X与Y不相关(C)

D：$X^2+Y^2=1$，即 $U+V=1$，即 X^2与Y^2相关.

C：$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$

∵ $EX=E\cos\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{1}{2\pi}=0$

$E(XY)=E(\cos\theta\sin\theta)=\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\cdot\frac{1}{2\pi}=0$

∴ $\mathrm{cov}(X,Y)=0\Rightarrow\rho_{XY}=0\Rightarrow$ X与Y不相关.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+f(x)}dx=\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos^2x}{1+f(x)}dx+\int_0^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+f(x)}dx$$

令 $x=-t$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{\cos^2t}{1+f(-t)}(-1)dt+\int_0^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+f(x)}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+f(-x)}dx+\int_0^{\pi}\frac{\cos^2x}{1+f(x)}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos^2x}{1+f(-x)}+\frac{\cos^2x}{1+f(x)}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{2+f(x)+f(-x)}{1+f(x)+f(-x)+f(x)f(-x)}\cos^2x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\cos^2x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

(12) $y''-y=x^2$ $\quad r^2-1=0\Rightarrow r=\pm1$

齐: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

设 $y^*=ax^2+bx+c$, 得 $y^*=-x^2-2$

非齐 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-2$

$$\lim_{x\to0}\frac{C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-2}{x^2}=0$$

$$\boxed{\Rightarrow\lim_{x\to0}C_1e^x+C_2e^{-x}-x^2-2=0\quad\Rightarrow C_1+C_2=2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{C_1e^x-C_2e^{-x}-2x}{2x}=0$$

$$\cancel{=\lim_{x\to0}\frac{C_1e^x+C_2e^{-x}-2}{2}}=0$$

$$\boxed{\Rightarrow\lim_{x\to0}C_1e^x-C_2e^{-x}-2x=0\quad\Rightarrow C_1-C_2=0}$$

$C_1-C_2=0$

$\therefore C_1=C_2=1$

$\therefore y=e^x+e^{-x}-x^2-2$

$f'_x=2ax+2ay$, $f'_y=2ax+2y$, $(0,0)$为驻点

$f''_{xx}=2a$, $B=f''_{xy}=2a$, $C=f''_{yy}=2$

$B^2-AC=4a(a-1)<0\Rightarrow 0<a<1$

当 $a=0$ 时, $B^2-AC=0$ 可能取, 也可能不取极值.

此: $f(x,y)=y^2$. $f(0,0)=0$

$f(x,0)=0$, $(0,0)$附近有很多点为0, 因此

$a=0$时, $(0,0)$不为极值点.

$a=1$时, $f(x,y)=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$, $f(0,0)=0$

$f(x,-x)=0$. $(0,0)$附近有很多点为0, 因此$(0,0)$不为极值

$$f(x)=\frac{\sin(x^2-x)}{|\ln(1+x)|(x+1)}\Rightarrow x=0,\ x=1\ \text{为间断点}$$

($x=-1$ 无意义) $\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-x}{-\ln(1+x)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2-x}{-x(x+1)}=-1$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{\ln(1+x)(x+1)}=1\quad x=0\ \text{跳跃}$$

$$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{\ln(1+x)(x+1)}=\frac{1}{\ln2},\quad x=1\ \text{为可去间断点}$$

(13) $A=E(1,4)$ 可逆.

$|C|\neq0\Rightarrow C$ 可逆.

B左乘可逆阵, 右乘可逆阵, 秩不变.

B若乘不可逆阵, 则秩会发生变化.

(14)

用X表示~~100个~~正常工作的电子元件个数.

$X\sim B(100,0.9)$

$P\{X\geq84\}$ 当n很大时, X 近似 $N(90,9)$

$EX=np=90$

$DX=np(1-p)=9$

$=1-P\{X<84\}$

$=1-\Phi\left(\frac{84-90}{3}\right)$

$=1-\Phi(-2)$

$=\Phi(2)$

$f'(x)=a\,x(x^2-1)$

$f''(x)=a(3x^2-1)$

$f''(0)=-a<0 \Rightarrow a>0$

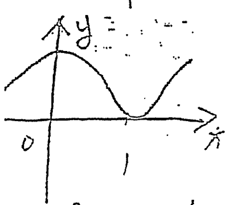
$f(x)=\int a(x^3-x)dx$

$=a(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})+C$

$f(1)=0 \Rightarrow -\frac{a}{4}+C=0$

$\Rightarrow C=\frac{a}{4}$

$f(x)=a(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4})$



$A=\frac{32}{15}=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

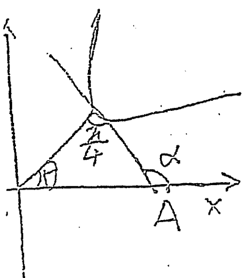
$=\int_{-1}^{1}a(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4})dx$

$=2\int_0^1 a(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4})dx$

$=\frac{4}{15}a.$

$\Rightarrow a=8$

$f(x)=2(x^2-1)^2$



$\tan\theta=\frac{y}{x}$

$=y'=\tan\alpha$

$\theta+\frac{\pi}{4}=\alpha.$

$\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\tan\alpha=y'$

$\frac{\tan\theta+1}{1-\tan\theta}=y'$

$1+\frac{y}{x}$

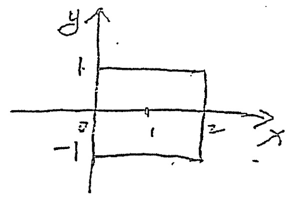
令 $\frac{y}{x}=u$，代入

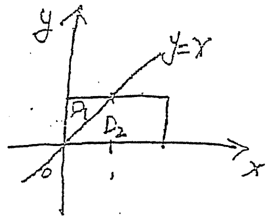
得 $\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+C$

$\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\ln(1+\frac{y^2}{x^2}))=\ln x+C.$

$y|_{x=1}=\sqrt{3} \Rightarrow C=\frac{\pi}{3}-\ln 2$

(18)





$\iint_D\sqrt{|x-y|}\,d\sigma = \cancel{2\iint_{D_右}\sqrt{|x-y|}\,d\sigma}$

$=2\iint_{D_1}\sqrt{y-x}\,d\sigma$

$=2\int_0^1dx\int_x^1\sqrt{y-x}\,dy+2\int_0^1dy\int_y^2\sqrt{x-y}\,dx$

$=\frac{32}{15}\sqrt{2}$

(19) $\frac{1}{1+a}=x$, $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=xS_1(x).$

$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$

$\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=xS_2(x).$

$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$\int_0^x S_2(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

$\Rightarrow S_2(x)=(\frac{x}{1-x})'=\frac{1}{(1-x)^2}$

$\Rightarrow S_1(x)=[\frac{x}{(1-x)^2}]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$

$S(x)=xS_1(x)=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

$S(\frac{1}{1+a})=\frac{(a+1)(a+2)}{a^3}$

19、20全程资料请加群690261900

例：A，B为三阶方阵 [illegible]

$\Rightarrow A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$\Rightarrow A\beta_i=2\beta_i$，　　A的特征值为2.

$r(B)=2 \Rightarrow$ 2有两个无关的向量

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \xrightarrow{列} (\beta_1,\beta_2,0)$.

例 $A_{3\times4}$，$r(A)=3$

A的列相关，A的行向量无关.

$A \xrightarrow{列} (X|0) \xrightarrow{列} (E|0)$

$AX=0$ 有非零解　$A^Ty=0$ 仅有零解

19、20全程资料请加群690261900

(22)

$AX=0$

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$

$\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\a\end{pmatrix}$ 代入上式

$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+a\alpha_4=0$

$a\neq 0$，则 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

α_2,α_3 无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相关

$\Rightarrow \alpha_1$ 能由 α_2,α_3 表示.

$\Rightarrow \alpha_4$ 能由 α_2,α_3 表示 $\Rightarrow \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 相关

$a=0$.

(II) $r(A)=3<4$，$A\vec{x}=0$ 基础解系中含1个解.

$\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\neq 0$.

$y=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ 为 $AX=\beta$ 的解.

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$

$A\vec{x}=\beta$ 的另一个解为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=y_1$,

$y-y_1=\begin{pmatrix}a-1\\b-1\\c-1\\d-1\end{pmatrix}$ 为 $AX=0$ 的解.

$\Rightarrow \eta$ 与 $y-y_1$ 相关.

$\frac{1}{a-1}=\frac{2}{b-1}=\frac{3}{c-1}=\frac{0}{d-1}$

$\Rightarrow b=3,\ c=4,\ d=1$

(23) $r(A)=2$，$|A|=0 \Rightarrow \lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3$

$A=\begin{pmatrix}2&b&1\\b&2&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$

$|A-\lambda E|=0$

$\begin{vmatrix}2-\lambda&b&1\\b&2-\lambda&-1\\1&-1&a-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2+b-\lambda&2+b-\lambda&0\\b&2-\lambda&-1\\1&-1&a-\lambda\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}2+b-\lambda&0&0\\b&2-b-\lambda&-1\\1&-2&a-\lambda\end{vmatrix}=(2+b-\lambda)[\lambda^2+(b-2-a)\lambda-ab+2a-2]$

$\lambda_1=2+b$，若 $\lambda_1=0$，则 $b=-2$.

则 $\lambda^2-(4+a)\lambda+4a-2=0$ 是它的……

因此 $b\neq -2$.

$\therefore \lambda_1=b+2\neq 0$

$\therefore \lambda=0$ 代入 $[\lambda^2+(b-2-a)\lambda-ab+2a-2]=0$

即. $-ab+2a-2=0$ …… ①

$\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=b+2$.

$0+2(b+2)=4+a$ …… ②

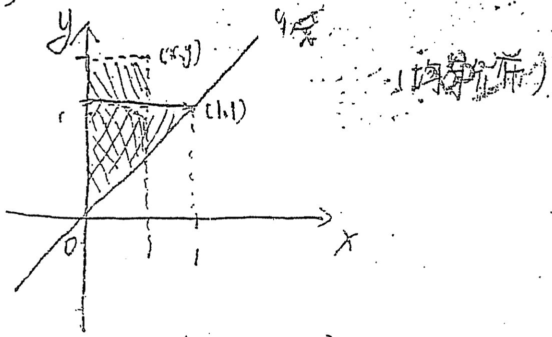
$\Rightarrow a=2,\ b=1.$

(II) $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\lambda_3=3$.

$\therefore$ 标准形 ~~$f=3(y_1)^2+3(y_2)^2$~~

$f=3(x')^2+3(y')^2$.

(22)



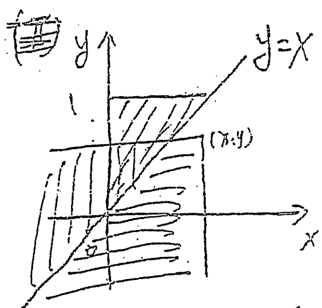
(I) $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x, Y\le 1\}+\underbrace{P\{X\le x, 1<Y\le y\}}_{=0}$

$=P\{X\le x, Y\le 1\}+0$

$=F(x,1)$

(II)

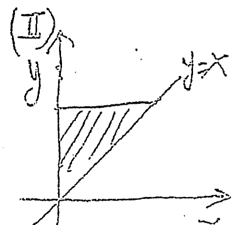


$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

$=P\{X\le y, Y\le y\}+\underbrace{P\{y\le X\le x, Y\le y\}}_{=0}$.

$=F(y,y)$

(III)



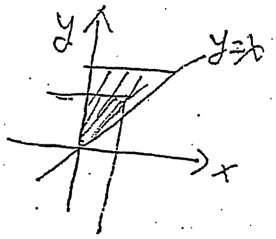
$F(x,y)=P\{$

1.(II)(节五种收集)

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

① $x\le 0$或$y\le 0$ $\quad 0$

②



$F(x,y)$ $\quad 0<x\le y\le 1$ $\quad \int_0^x dx\int_x^y 2dy$

$=\int_0^x 2(y-x)dx$

$=2xy-x^2$

③ $0<x\le 1$, $y>1$ $\quad F(x,1)=2x-x^2$

$0<y\le 1, y<x$ $\quad F(y,y)=y^2$

$x>1$且$y>1$ $\quad F(x,y)=1$

$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x-x^2, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$ ← ⑤

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y^2, & 0<y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$

$F_X(x)\cdot F_Y(y)\ne F(x,y)$

不独立.

设X为任取一张卡片的号码.

X	1	2	...	N
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	...	$\frac{1}{N}$

$\bar{X}=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$

$X=1\cdot\frac{1}{N}+2\cdot\frac{1}{N}+\cdots+N\cdot\frac{1}{N}=\frac{N+1}{2}$

$\hat{N}_1=2\bar{X}-1$

$P\{\hat{N}_1=1\}=P\{2\bar{X}-1=1\}=P\{\bar{X}=1\}=P(X_1+\cdots+X_n=n)$

$(X_1=1, X_2=1, \ldots, X_n=1)$

$P(X_1=1)P(X_2=1)\ldots P(X_n=1)$

19、20全程资料请加群690261900

似然函数

$L=\prod_{1\le i\le n}\frac{1}{N}=\frac{1}{N^n}\ (1\le X_i\le N)$

要L最大, 只要N最小.

N的取值范围$\max(X_i), \max(X_i+1), \ldots,$

~~当$N=\max X_i$~~

当$N=\max(X_i)$时, L最大.

$\therefore \hat{N}_2=\max(X_i)$

$P(\hat{N}_2=k)=P(\max(X_i)=k)$

$=P\{\max(X_i)\le k\}-P\{\max(X_i)\le k-1\}$

$=P\{X_1\le k, X_2\le k, \ldots, X_n\le k\}-P\{X_1\le k-1, X_2\le k-1, \ldots, X_n\le k-1\}$

$=P\{X_1\le k\}\cdots P\{X_n\le k\}-P\{X_1\le k-1\}\cdots P\{X_n\le k-1\}$

X	1	2	...	N
P	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	...	$\frac{1}{N}$

$P\{X_1\le k\}=\frac{k}{N}$

$=\left(\frac{k}{N}\right)^n-\left(\frac{k-1}{N}\right)^n$

(二)

选择题

(1) (D)

$\lim e^{u}=+\infty$, $\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$

$f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}xe^{\frac{1}{x}-1}=0$, $(0,0)$

$f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}xe^{\frac{1}{x}-1}\underset{\text{令}\frac{1}{x}=t}{\overset{0\cdot\infty}{=}}\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^{t-1}}{t}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{t-1}=+\infty$

选(B)

(2) 设 $\int_0^x f(t)dt$，$\Phi(0)=0$

$\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$

$\Rightarrow f(x)$ 在(3)作用下

$\Rightarrow f'(x)$

(3) $Q=a+bP$，应为单增函数，所以 $b>0$。

排除(D)。

需求弹性 $e=\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{bP}{Q}=1-\frac{a}{Q}$

(A)中 $a=0\Rightarrow e\equiv 1$ (排除)

(B)中 $Q=0$，$P=-\frac{a}{b}>0$，而 $b>0\Rightarrow a<0$

$\Rightarrow e>1$

(C)中 $a>0$，此时 $e<1$ (排除)

选(B)

(4) 选(D)

当 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x-1|}{2}<1$ 时，即 $-1<x<3$ 时，

级数绝对收敛

$x=3$ 时，$\sum\frac{n+1}{n^2}$ 发散。

$x=-1$ 时，$\sum(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$ 收敛

∴收敛域为 $[-1,3)$

(5) (B)

方程组

$\Rightarrow$ 向量组

法一：$AX=\beta$ 有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A,\beta)$

(A)：$\Rightarrow r(A)=n$ (即 A 列满秩) $\overset{?}{\not\Rightarrow} r(A)=r(A,\beta)=n$

例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$r(A,\beta)=3$

(B)：$r(A)=m$ (A 行满秩) $\Rightarrow r(A)=r(A,\beta)=m$

$\because r(A)=m\Rightarrow m=r(A)\le r(A,\beta)_{m\times(n+1)}\le m$

选(B)。

(C)：$r(A)<n\overset{?}{\not\Rightarrow} r(A)=r(A,\beta)<n$

例 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$r(A)=2\ne r(A,\beta)=3$

(D) $r(A)<m\not\Rightarrow r(A)=r(A,\beta)<m$，例同(C)

法(二)：取 β 为 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，…，$e_m=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$

即 $e_1,e_2,\dots,e_m$ 可由 A 的列向量组线性表示

反之，A 的列向量组也可由 $e_1,\dots,e_m$ 表示。

故 A 的列向量组与 $e_1,e_2,\dots,e_m$ 等价，故 $r(A)=r(e_1,e_2,\dots,e_m)$

$=r(E_m)=m$；$r(A)=m\xrightarrow{\text{此时}} r(A)=r(A,\beta)=m$

即 A 的行向量组线性无关，选(B)。

(6) 选(C)

注：$A_{m\times n}X=0$ 的基础解系中有 $n-r(A)$ 个向量 (恰有)

如：$A_{m\times n}X=0$ 的 …… 有 2 个向量 $\Rightarrow n-r(A)=2$

$A_{m\times n}X=0$ 有 2 个线性无关的解 $\Rightarrow n-r(A)\ge 2$ (至少有)

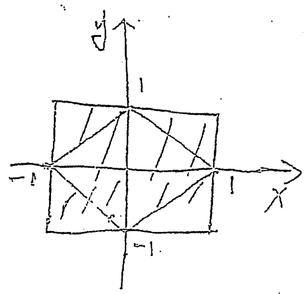
$n-r(A)\ge l$，$n-r(B)\ge m$

$n-r(AB)\ge n-r(A)\ge l$，同理 $n-r(AB)\ge n-r(B)\ge m$

$\boxed{r(AB)\le r(A),\ r(AB)\le r(B)}$

$\therefore n-r(AB)\ge\max\{l,m\}$，选(C)

(7) 选(A)



$P(A_1)=\frac{1}{2}=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)$

$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2)$

$P(A_1A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3)$

$P(A_2A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3)$

$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\ne P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

19、20全程资料请加群690261900

)选(A)

$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

$F_X(x)=P\{X\le x\}=F(x,+\infty)$

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=F(+\infty,y)$

$=\max\{X,Y\}$为一维随机变量

Z的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}$

$P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z, Y\le z\}$

$F(z,z)$ (函数用自变量用什么表示)

$F(x,x)$. 选(A).

注:若加上X,Y独立,选(B)

若加上X,Y独立同分布,填 $F_X^2(x)$

填空题

$e^{-\frac{1}{2}}$

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+\frac{1}{n})^n]^n}{e^n}=1$

$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 米 $[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n]^n=1^n=1$

$\therefore$ 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})}}{e^n}$

$=\lim_{n\to\infty}e^{n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n}$

$\lim_{x\to+\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0^+}\left[\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right]$

$\frac{0}{0}$ $\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$

原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

$\because \ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$

$n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n=-\frac{1}{2}+n^2\cdot o(\frac{1}{n^2})$

$\lim_{n\to\infty}[n^2\ln(1+\frac{1}{n})-n]=-\frac{1}{2}$

原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$

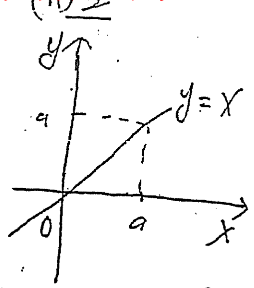
$I_1<I_2<I_3$

$\frac{x}{x}$, 2^x-2^{-x}, $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 均为奇函数,

$\int_{-1}^{1}(-\cos x)dx<0$, $I_2=0$

$\int_{-3}^{3}1dx>0$

(11) $\frac{1}{2}$



$\lim_{a\to0^+}\frac{\int_0^a e^{-y^2}dy\int_0^y e^{-x^2}dx}{a^2}=\lim_{a\to0^+}\frac{\int_0^a[e^{-y^2}\int_0^y e^{-x^2}dx]dy}{a^2}$

$\xlongequal{洛}\lim_{a\to0^+}\frac{e^{-a^2}\int_0^a e^{-x^2}dx}{2a}=\lim_{a\to0^+}e^{-a^2}\cdot\lim_{a\to0^+}\frac{\int_0^a e^{-x^2}dx}{2a}$

$=1\cdot\lim_{a\to0^+}\frac{e^{-a^2}}{2}=\frac{1}{2}$

(12) $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k_1+k_2=1 \Rightarrow k_2=1-k_1$

$k_1^2+k_2^2=k_1^2+(1-k_1)^2=2k_1^2-2k_1+1=2(k_1-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2}$

(13) 5

$P^{-1}A^{-1}P=B=\begin{pmatrix}b&&\\&b&\\&&c\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$P^{-1}AP=B^{-1}=\begin{pmatrix}b^{-1}&&\\&b^{-1}&\\&&c^{-1}\end{pmatrix}$

$\therefore$ A的特征值为 $\frac{1}{b},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$, 且A可对角化

$\therefore r(A-\frac{1}{b}E)=1$ ($\Rightarrow$ 隔行成比例,隔列成比例)

$A-\frac{1}{b}E=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{b}&-1&1\\2&4-\frac{1}{b}&-2\\-3&-3&a-\frac{1}{b}\end{pmatrix}$

$\therefore \frac{1-\frac{1}{b}}{2}=\frac{-1}{4-\frac{1}{b}}=\frac{1}{-2}$

$\frac{2}{-3}=\frac{4-\frac{1}{b}}{-3}=\frac{-2}{a-\frac{1}{b}}$

$\Rightarrow a=5$

(14) $\frac{1}{2}$

$\mathrm{cov}(aX,aY)=a^2\mathrm{cov}(X,Y)$

原 $\mathrm{cov}(\ )=\frac{\mathrm{cov}(X-\underbrace{EX}_{常数},Y-\underbrace{EY}_{常数})}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho=\frac{1}{2}$

19、20全程资料请加群690261900

$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$=\begin{cases}0, & x<1000\\ \int_{1000}^{x}\frac{1000}{t^2}dt =1-\frac{1000}{x}, & x\ge 1000\end{cases}$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<1000\\ 1-\frac{1000}{x}, & x\ge 1000\end{cases}$

的分布函数为 $F_U(u)=P\{U\le u\}$

$\{F(X)\le u\}$

$u<0$, $F_U(u)=0$.

≥ 1, $F_U(u)=1$

$0\le u<1$, $F_U(u)=P\{1-\frac{1000}{X}\le u\}$

$P\{X\le \frac{1000}{1-u}\}=F(\frac{1000}{1-u})$

$1-\frac{1000}{\frac{1000}{1-u}}=1-(1-u)=u$

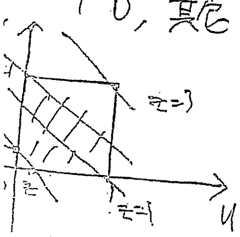
$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ u, & 0\le u<1\\ 1, & 1\le u\end{cases}$, $U\sim U(0,1)$

$f_U(u)=\begin{cases}1, & 0<u<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$\boxed{\text{与}X\text{的分布函数}F(x)\text{连续, 则 } Y\sim F(X)\sim U(0,1)}$

意: ∵X,Y独立, 且F(x)为连续 (∵X为连续型), 故U与V独立

$f(u,v)=\begin{cases}1, & 0<u<1,\ 0<v<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$



$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+2V\le z\}$

$\iint_{u+2v\le z} f(u,v)dudv$

$z<0$, $F_Z(z)=0$

$0\le z<1$, $F_Z(z)=\frac{1}{4}z^2$

③ $1\le z<2$, $F_Z(z)=\frac{2z-1}{4}$ (梯形)

④ $2\le z<3$, $F_Z(z)=1-\frac{(3-z)^2}{4}$, (三角形)

⑤ $z\ge 3$, $F_Z(z)=1$

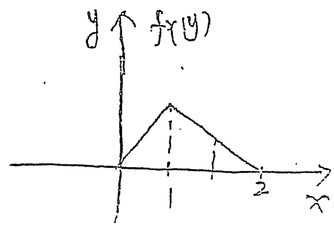
$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{2}, & 0<z<1\\ \frac{1}{2}, & 1<z<2\\ \frac{3-z}{2}, & 2<z<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(23)

(I) 由题意, $F_Y(y)$连续

$F(1+0)=F(1)=F(1-0)$

$\therefore 1-a=0 \Rightarrow a=1$



(II) $P\{Y\ge k\}=\int_k^{+\infty} f_Y(y)dy$

由题意 $1<k<2$

$\therefore P\{Y\ge k\}=\int_k^2(2-y)dy=\frac{1}{8} \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

(III) $D(XY)\ne D(X)D(Y)$, X,Y为独立.

$D(XY)=E(XY)^2-\cancel{[E(XY)]^2}$ $E(X^2Y^2)-(EXEY)^2$

$=EX^2EY^2-\cancel{(EX)^2(EY)^2}$, 其中 $EX=\frac{3}{2}$, $EX^2=3$, $EY=1$, $EY^2=\frac{7}{6}$

(21)

$\alpha^TA\beta=1 \Rightarrow (\alpha^TA\beta)^T=\beta^TA\alpha=1$

(I) 法一: 设 $k\alpha+l\beta=0$, 变形方法: ①乘 ②重新组合

左乘A: $kA\alpha+lA\beta=0$ ···(*)

(*)式左乘α^T, 得 $k\alpha^TA\alpha+l\alpha^TA\beta=0$ ···③

(*)式左乘β^T, 得 $k\beta^TA\alpha+l\beta^TA\beta=0$ ···④

③④相减, 即 $\begin{cases}k+l=0\\ k-l=0\end{cases} \Rightarrow k=l=0$.

法二: (反证) 若α,β相关, 则

$\beta=k\alpha$, $\beta^TA\beta=k^2\alpha^TA\alpha$, 即 $-1=k^2$, 矛盾. ∴α,β无关.

(II) $g(t)=t^2\alpha^TA\alpha+2t(1-t)A\beta+(1-t)^2\beta^TA\beta$

$=t^2+2t(1-t)-(1-t)^2=-2t^2+4t-1$

(III)

$g(0)=-1$, $g(1)=1$, $\exists t_0\in(0,1)$, 使得 $g(t_0)=0$

$\exists \xi=t_0\alpha+(1-t_0)\beta\ne 0$, α,β无关;

$\xi^TA\xi=g(t_0)=0$

$-C^{-1}B)^T C^T A = E \Rightarrow [C(E-C^{-1}B)]^T A = E$

$\Rightarrow (C-B)^T A = E \Rightarrow A = [(C-B)^T]^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&5&7\\0&0&6&8\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2&\frac32&0&0\\1&-\frac12&0&0\\0&0&-4&\frac72\\0&0&3&-\frac52\end{pmatrix}$$

$|A^3| = |A\cdot A\cdot A| = |A||A||A| = |A|^3 = (\frac14)^3$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{A}{|A|} = 4A = \begin{pmatrix}-8&6&0&0\\4&-2&0&0\\0&0&-16&14\\0&0&12&-10\end{pmatrix}$

$A\cdot A^* = A^*A = |A|E$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* \Rightarrow A^* = |A|A^{-1}$, $|A^*| = |A|^{n-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases}(kA)^* = |kA|(kA)^{-1}\\ (A^*)^{-1} = (|A|A^{-1})^{-1} = \frac{A}{|A|}\\ (AB)^* = |AB|(AB)^{-1} = B^*A^*\\ (A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = \end{cases}$$

令 $a=x$ 或 $b=x$ 都行

$F(x) = \int_a^x tf(t)dt - \frac12[x\int_0^x f(t)dt - a\int_0^a f(t)dt]$

$F(a)=0$

$F'(x) = xf(x) - \frac12[\int_0^x f(t)dt + xf(x)]$

$= \frac12[xf(x) - \int_0^x f(t)dt]$

积分中值定理，$\exists \xi \in [0,x]$，使得 $\int_0^x f(t)dt = xf(\xi)$

$= \frac12[xf(x) - xf(\xi)]$

$= \frac12 x[f(x) - f(\xi)] \ge 0$

$\because f(x)\uparrow \quad \therefore F(x)\uparrow$

$\therefore F(x) \ge F(a) = 0$，$x \ge a$ 时，得证.

$F(x) = x^2\int_0^1 f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$

在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.

$F(0) = F(1) = 0$.

罗尔定理，存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$F'(\xi)=0$ 即 $2\xi\int_0^1 f(t)dt - f(\xi) = 0$

也可 $\frac{f(\xi)}{2\xi} = \frac{\int_0^1 f(x)dx - \int_0^0 f(x)dx}{1^2-0^2}$

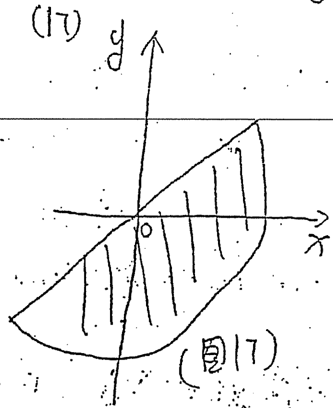
(II) 令 $G(x) = 2x\int_0^1 f(t)dt - f(x)$.

在 $[0,\xi]$ 上连续，$(0,\xi)$ 上可导，$G(0) = G(\xi) = 0$

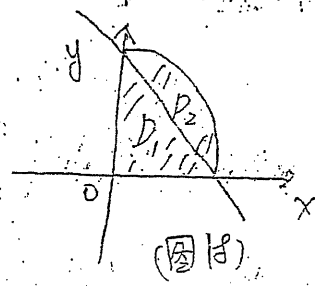
由罗尔定理知，$\exists \eta \in (0,\xi) \subset (0,1)$ 使得

$G'(\eta) = 0$. 即 $f'(\eta) = 2\int_0^1 f(x)dx$

(17)



(图17)



(图18)

① 无条件极值驻点，即D内驻点

令 $\begin{cases}f'_x = y = 0\\ f'_y = x-1 = 0\end{cases} \Rightarrow$ 驻点 $(1,0)$

② 条件极值的驻点，即边界驻点

i) L_1: $y=x$ 代入 $f(x,y) = (x-1)y$

$= (x-1)x = x^2 - x$, $-\frac{\sqrt6}{2} \le x \le \frac{\sqrt6}{2}$

$\frac{df(x,y)}{dx} = 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac12$

ii) L_2: $x^2+y^2=3$ 上.

令 $F = (x-1)y + \lambda(x^2+y^2-3)$

$$\begin{cases}F'_x = y+2\lambda x\\ F'_y = x-1+2\lambda y\\ F'_\lambda = x^2+y^2-3 = 0\end{cases}$$

$\Rightarrow (-1,-\sqrt2)$, $(-1,\sqrt2)$ 舍

$(\frac32,-\frac{\sqrt3}{2})$, $(\frac32,\frac{\sqrt3}{2})$

比较 $f(1,0)=0$, $f(\frac12,\frac12) = -\frac14$

$f(-\frac{\sqrt6}{2},-\frac{\sqrt6}{2}) = \frac{3+\sqrt6}{2}$, $f(\frac{\sqrt6}{2},\frac{\sqrt6}{2}) = \frac{3-\sqrt6}{2}$

$f(-1,-\sqrt2) = 2\sqrt2$, $f(\frac32,-\frac{\sqrt3}{2}) = -\frac{\sqrt3}{4}$,

$f(\frac32,\frac{\sqrt3}{2}) = \frac{\sqrt3}{4}$

得 $f_{max} = 2\sqrt2$, $f_{min} = -\frac{\sqrt3}{4}$

(18) $I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$

$= \underbrace{\iint_{D_1} dxdy}_{面积} + \underbrace{\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy}_{体积}$

$= \frac12 + [\iint_D (x^2+y^2)dxdy - \iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy]$

$= \frac12 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 r dr - \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)dy$

$= \frac12 + \frac{\pi}{8} - \frac16$

$= \frac13 + \frac{\pi}{8}$

三 6

令 $\int_0^x f(t)dt = f^2(x) - xf(x) + \frac{x^2}{2}$ 两边对 x 求导

$f(x) = 2f(x)f'(x) - f(x) - xf'(x) + x$

$\Rightarrow [2f(x) - x][f'(x) - 1] = 0$

$\therefore f(x) = \frac{x}{2}$ 或 $f'(x) = 1$

$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x + C$

由 $f(0) = 0$，得 $f(x) = x$.

$f(x) = \frac{x}{2}$ 及 $f(x) = x$ 代入原式均满足等式

令 $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$ 两边对 x 求导

$y' = 2y' \cdot y'' - y' - xy'' + x$

整理得：

$(y''-1)(2y'-x) = 0$

$y'' = 1$ 或 $y' = \frac{x}{2}$

$y'' = 1 \Rightarrow y' = x + C$ 代入原式

$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$ 得

$y = (x+C)^2 - x(x+C) + \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$ …… 一个常数

（因为一阶方程）

$y' = \frac{x}{2}$ 代入 $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$

$y = (\frac{x}{2})^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ 不是通解

舍去.

绝密 * 启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟四）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）（B）　（2）（C）　（3）（C）　（4）（C）　（5）（B）　（6）（D）　（7）（A）　（8）（C）

二、填空题

（9）$2^{2012}\cdot 2010!$　　（10）88（万元）　　（11）$\frac{1}{2}$

（12）$y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=e^x$　　（13）$y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2$　　（14）36

三、解答题

（15）证明：$\because x_{2n-1}\le a\le x_{2n}$（$n=1,2,3,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，

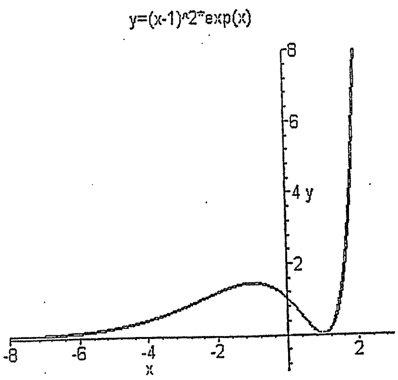
$\therefore 0\le x_{2n}-a\le x_{2n}-x_{2n-1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-x_{2n-1})=0$，

从而，由夹挤准则可得：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$．　　……5分

同理，由 $0\le a-x_{2n-1}\le x_{2n}-x_{2n-1}$ 可得：$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$．　　……7分

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$．　　……10分

（16）解：设 $f(x)=(x-1)^2e^x$，显然 $f(x)\ge 0$，$f(1)=0$．



$$\because f'(x)=(x-1)(x+1)e^x\begin{cases}>0, & x<-1,\\ =0, & x=-1,\\ <0, & -1<x<1,\\ =0, & x=1,\\ >0 & x>1,\end{cases}$$

$\therefore f(x)\in\uparrow(-\infty,-1)$，$f(x)\in\downarrow[-1,1]$，$f(x)\in\uparrow(1,+\infty)$，且

$$f_{极大值}=f(-1)=4e^{-1}，\quad f_{极小值}=f(1)=0．$$　　……4分

$$\because \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2}{e^{-x}}\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=}-2\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)}{e^{-x}}\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=}2\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0，$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^x=+\infty．$$　　……6分

由上可知：

①当 $k<0$ 时，方程无根；　　②当 $k=0$ 或 $k>4e^{-1}$ 时，方程有一个根；

③当 $k=4e^{-1}$ 时，方程有两个根；　　④当 $0<k<4e^{-1}$ 时，方程有三个根.　　……10 分

（17）解：设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow x^2+y^2=e^{2u}$，　　……2 分

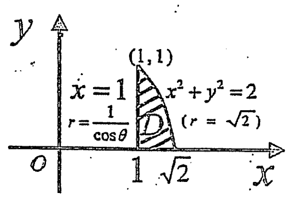
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(u)\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}+f'(u)\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\frac{1}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow f''(u)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=e^{3u},$$　　……8 分

解得 $f(u)=\frac{1}{9}e^{3u}+C_1u+C_2$.（其中 C_1,C_2 为任意常数）　　……10 分

（18）解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+r^2)^{3/2}}r\,dr]d\theta$　　……3 分



$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[-\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}]\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}-\frac{1}{\sqrt{3}})d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2-\sin^2\theta}}d(\sin\theta)-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$　　……7 分

$$=\arcsin\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{12}\pi.$$　　……10 分

（19）解：（Ⅰ）由题意知 $\exists M>0$，$|f'(x)|\le M,x\in(0,1)$. 因此

$$\left|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})\right|=\left|f'(\xi)(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right|\le M\frac{1}{n(n+1)}\le\frac{M}{n^2}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})]$ 绝对收敛.　　……6 分

（Ⅱ）由于 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})]$ 收敛，则部分和 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，而

$$S_n=[f(1)-f(\frac{1}{2})]+[f(\frac{1}{2})-f(\frac{1}{3})]+\cdots+[f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{n+1})]=f(1)-f(\frac{1}{n+1}).$$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n+1})$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ 存在. ……10 分

（20）解：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & a \\ 2 & 3 & b & 4 \\ 2 & 4 & b-1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & a-3 \\ 2 & 1 & b-2 & 2 \\ 2 & 2 & b-3 & c-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{列} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & b-1 & \frac{7-a}{2} \\ 2 & 2 & b-1 & 1+c-a \end{pmatrix}$， ……4 分

由于（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，其秩为 2，故有 $b-1=\frac{7-a}{2}=1+c-a=0$，得 $a=7, b=1, c=6$.

……7 分

以下求解 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7. \end{cases}$ 由于

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{行} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right),$$

（Ⅰ）与（Ⅱ）的通解均为 $x=k(-2,1,1)^T+(-1,2,0)^T$，其中 k 为任意常数. ……11 分

（21）解：（Ⅰ）由 $A^2=E$ 知 A 的特征值只能为 1 或 -1，又 $r(A+E)=2$，故特征值 -1 为 A 的一重特征值，从而 A 的全部特征值为 $-1,1,1$； ……4 分

（Ⅱ）由于 $A+E$ 的各行元素之和为零，故有 $(A+E)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，可知特征值 -1 对应的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

由正交性可求得特征值 1 对应的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， ……7 分

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$，解得 $P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，

$$A=P\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$ ……11 分

（22）解：设 A_{ij} 表示第 i 次取 j 号卡片，$i,j=1,2,3$．

（Ⅰ）设 B 表示三张卡片编号之和为 4，则

$$P(B)=P(A_{11}A_{21}A_{32})+P(A_{11}A_{22}A_{31})+P(A_{12}A_{21}A_{31})$$

$$=P(A_{11})P(A_{21}|A_{11})P(A_{32}|A_{11}A_{21})+P(A_{11})P(A_{22}|A_{11})P(A_{31}|A_{11}A_{22})$$

$$+P(A_{12})P(A_{21}|A_{12})P(A_{31}|A_{12}A_{21})$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{27}.$$ ……5 分

（Ⅱ）X 的可能取值为 $1,2,3$．由全概率公式得

$$P\{X=1\}=P(A_{11})P\{X=1|A_{11}\}+P(A_{12})P\{X=1|A_{12}\}+P(A_{13})P\{X=1|A_{13}\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9},$$

同理求得 $P\{X=2\}=\frac{2}{9},P\{X=3\}=\frac{2}{9}$，所以 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$．

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{5}{9}, & 1\le x<2,\\ \frac{7}{9}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$ ……11 分

（23）解：（Ⅰ）由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=0$，故不能利用一阶原点矩进行矩估计，而采用二阶原点矩进行矩估计，由 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$，解得

$$\hat{\theta}_M=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}.$$ ……5 分

（Ⅱ）①似然函数为 $L=\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x_i|}{\theta}})=\frac{1}{2^n\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$，$\ln L=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$，令

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0,$$

解得 $\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$. ……8 分

② $E\hat{\theta}_L=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X|=E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$. ……11 分

19、20全程资料请加群690261900

绝密 * 启用前

2012年全国硕士研究生入学统一考试

数学三（模拟五）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）（C） （2）（B） （3）（D） （4）（C） （5）（D） （6）（D） （7）（A） （8）（B）

二、填空题

（9）$\dfrac{\pi^2}{2}$ （10）$\sqrt{2}-1$ （11）$z=x^2y+\dfrac{1}{2}x^2+y^2$

（12）$y_{t+1}-y_t=3^t-2$ （13）0 （14）$\dfrac{2}{3}$

三、解答题

（15）证明：（Ⅰ）$\varphi'(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x}]$，当$x>0$时，由于$\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$，所以$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减. ……4分

（Ⅱ）$f'(x)=a^2x^{a-1}(1-x)+ax^a(-1)=ax^{a-1}(a-ax-x)$．当$0<x<1$时，令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{a}{1+a}$为$f(x)$在$(0,1)$内的唯一驻点.（Ⅰ）

又$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{a}{1+a})=(\frac{a}{1+a})^{a+1}>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为：

$$F(a)=\max_{0\le x\le 1}f(x)=(\frac{a}{1+a})^{a+1}=\frac{1}{(1+\frac{1}{a})^{a+1}}.$$ ……7分

$$\lim_{a\to\infty}F(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{(\frac{1}{1+a})^{a+1}}=\frac{1}{e}.$$

由（Ⅰ）知$a>0$时，$(1+\frac{1}{a})^{a+1}$单调递减，从而$\dfrac{1}{(1+\frac{1}{a})^{a+1}}$单调递增，所以

$$f(x)\le F(a)<\lim_{a\to+\infty}F(a)=\frac{1}{e}.$$ ……10分

（16）解：设$\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt=m$，则$f'(x)=\int_0^1 e^{x-t}f(t)\,dt+1=me^x+1$．两边对$x$从0到$x$积分，得$f(x)=m(e^x-1)+x$． ……4分

在上式两边同乘以e^{-x}后，再对x从0到1积分，得

$$m=m-m\int_0^1 e^{-x}\,dx+\int_0^1 xe^{-x}\,dx\,,$$ ……7 分

故 $m=\dfrac{\int_0^1 xe^{-x}\,dx}{\int_0^1 e^{-x}\,dx}=\dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}\dfrac{e-2}{e-1}$，所以 $f(x)=\dfrac{e-2}{e-1}(e^x-1)+x$. ……10 分

（17）解：（Ⅰ）令 $x=y=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{f(0)+f(0)}{1-f(0)f(0)}\Rightarrow f(0)=0$. ……2 分

对任意的 $x,x+\Delta x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)\right]\Big/\Delta x$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[1+f^2(x)]f(\Delta x)}{[1-f(x)f(\Delta x)]\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\cdot\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=[1+f^2(x)]\cdot f'(0)=1+f^2(x)\,.$$

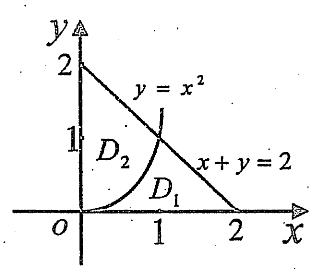
所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内可导，并且 $f'(x)=1+f^2(x)$. ……7 分

（Ⅱ）由 $f'(x)=1+f^2(x)$，得 $\int\dfrac{df(x)}{1+f^2(x)}=\int dx$， $\arctan f(x)=x+C$.

取 $x=0\Rightarrow C=0$，$\therefore \arctan f(x)=x\Rightarrow f(x)=\tan x$， $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. ……10 分

（18）解：用抛物线 $x^2-y=0$ 把 D 分成两部分 D_1 和 D_2，如图所示.

$$I=\iint_{D_1}xy\,d\sigma-\iint_{D_2}xy\,d\sigma$$ ……3 分



$$=\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^{2-y}xy\,dx\right]dy-\int_0^1\left[\int_{x^2}^{2-x}xy\,dy\right]dx$$ ……6 分

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 y[(2-y)^2-y]\,dy-\frac{1}{2}\int_0^1 x[(2-x)^2-x^4]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(y^3-5y^2+4y)\,dy+\frac{1}{2}\int_0^1(x^5-x^3+4x^2-4x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{3}+2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-2\right)=-\frac{1}{12}.$$ ……10 分

（19）证：$a_n=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)x^n(1-x)^n\,dx\overset{令\frac{1}{2}-x=u}{=}\int_0^{\frac{1}{2}}u(\frac{1}{2}-u)^n(\frac{1}{2}+u)^n\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}-u^2)^n\,d(u^2)$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^n d\left(\frac{1}{4}-u^2\right)=\frac{1}{2(n+1)4^{n+1}}<\frac{1}{4^{n+1}}\,.$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. ……5 分

为求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)4^{n+1}}$ 的和，作 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}$，$x\in[-1,1)$，

$$S'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{2(1-x)},\quad S(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=\frac{1}{2}(-x-\ln(1-x)),\quad x\in[-1,1).$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S(\frac{1}{4})=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$. ……10 分

(20) 解：(Ⅰ) $r(B)=2$，由 $AB=0$ 得 $r(A)+r(B)\le 3$，故 $r(A)\le 1$，又 $r(A)\ge 1$，所以 $r(A)=1$，进一步得矩阵 A 的各行（或各列元素成比例），即可求得 $a=1,b=-1,c=2$. ……4 分

$Ax=0$ 同解于 $-x_1-x_2+x_3=0$，其通解为 $x=C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. ……7 分

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知 ξ_1,ξ_2 为 $Ax=0$ 的基础解系. 又因为 $AB=A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=O$，知 β_1,β_2 也为 $Ax=0$ 的基础解系，所以 ξ_1,ξ_2 与 β_1,β_2 等价，而 β_1,β_2 与 β_1,β_2,β_3 等价，因此 ξ_1,ξ_2 与 β_1,β_2,β_3 等价. ……10 分

(21) 证：(Ⅰ) 因为 P 为正交阵，故 $P^{-1}=P^T$，从而 $P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，故 A 的特征值为 $1,1,2$，且 $A\alpha_1=\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，$A\alpha_3=2\alpha_3$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为两两正交的单位向量，从而有

$$\alpha_i^TA\alpha_i=\begin{cases}1, & i=1,2,\\ 2, & i=3,\end{cases}\text{ 得 }\alpha_i^TA\alpha_i>0,$$

$$\alpha_i^TA\alpha_j=\alpha_i^T\lambda_j\alpha_j=\lambda_j\alpha_i^T\alpha_j=0\ (i,j=1,2,3,i\ne j).$$ ……4 分

(Ⅱ) 令 $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=PC$，故

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

19、20全程资料请加群690261900

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$ ……6 分

$$Q^{-1}AQ=C^{-1}(P^{-1}AP)C=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$ ……8 分

而 $|\lambda E-Q^TAQ|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+1)=0$，得

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\ \lambda_3=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}>0.$$

Q^TAQ 有三个正特征值，从而 Q^TAQ 与 $Q^{-1}AQ$ 合同，但 $Q^{-1}AQ$ 的特征值为 $1,1,2$，Q^TAQ 与 $Q^{-1}AQ$ 不相似. ……11 分

（22）解：（Ⅰ）由于

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}\quad F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

故 $f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ ……4 分

（Ⅱ）$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{F(X,Y)\le z\}$.

由于 $0\le F(x,y)\le 1$，故当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=1$；当 $0\le z<1$ 时，

$$F_Z(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=P\{X\le z\cup Y\le z\}=P\{X\le z\}+P\{Y\le z\}-P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)=z+z-z=z,$$

所以 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}1, & 0\le z<1\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ ……11 分

（23）解：（Ⅰ）

$[X]$	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

19、20全程资料请加群690261900

进而计算得 $E[X]=1$，$E([X]^2)=\frac{3}{2}$，故 $D[X]=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$． ……4 分

（Ⅱ）$E(X[X])=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}x[x]\cdot\frac{1}{2}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}0\,dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{2}x\,dx+\int_{2}^{\frac{5}{2}}x\,dx$

$$=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^2+\frac{1}{2}x^2\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\frac{25}{4}-4)=\frac{15}{8},$$

且 $EX=\frac{3}{2}$，$DX=\frac{2^2}{12}=\frac{1}{3}$，$Cov(X,[X])=E(X[X])-EXE[X]=\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{8}$，所以

$$D(X-[X])=DX+D[X]-2Cov(X,[X])=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\times\frac{3}{8}=\frac{1}{12}.$$ ……9 分

（Ⅲ）$\rho=\frac{Cov(X,[X])}{\sqrt{DX}\sqrt{D[X]}}=\frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{3\sqrt{6}}{8}$． ……11 分

19、20全程资料请加群690261900

19、20全程资料请加群690261900