**绝密★启用前**

## 2019 年全国硕士研究生入学统一考试

# 数　学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 4）

## 考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

**绝密 * 启用前**

**一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.**

（1）【解】：当 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在但 $g(x)$ 为有界函数时，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 是存在的，故答案是 C

（2）【解】：因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$ 时，$1<\dfrac{\tan x}{x}<\dfrac{4}{\pi}$，因而有 $I_1<1$，又 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{\tan x}<1$，因而有

$I_2>1$，由此 $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}\dfrac{\tan x}{x}<1$，$I_1<\dfrac{\pi}{4}$;又 $1<\dfrac{4}{\pi}\dfrac{x}{\tan x}<\dfrac{4}{\pi},\dfrac{\pi}{4}<I_2<1$，所以 $I_1<\dfrac{\pi}{4}<I_2<1$，答案是 C.

（3）【解】：答案：应选(B).

由已知 $f_x'(1,1)=2, f_y'(1,1)=1$，$\boldsymbol{l}_0=\left\{\dfrac{1}{\sqrt5}\quad \dfrac{2}{\sqrt5}\right\}$，所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=\dfrac{2}{\sqrt5}+\dfrac{2}{\sqrt5}=\dfrac{4}{\sqrt5}$.

（4）【解】：答案：（D）.

记 $\Sigma_t$ 围成的立体为 $\Omega_t$．由高斯公式，

$$f(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[2(x+t)+2(y+t)+2(z+t)]\,dV=6t\cdot\frac{4}{3}\pi t^3+2\iiint\limits_{\Omega_t}(x+y+z)\,dV=8\pi t^4,$$

所以 $f'\ t\ =\ \ \pi t^3$.

（5）【解】：答案 B.

（6）【解】：答案：C.

（7）【解】：答案 C.

（8）【解】 题意可知概率 $P\{|\bar X-\mu|<0.5\}\ge 0.997$，由中心极限定理可知，n 很大时，

$P\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{n\sigma}\le x_0\}\approx\Phi(x_0)$，在由此 $P\{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right|<0.5n\}\ge 0.997,$

$P\{\dfrac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right|}{n\sigma}<\dfrac{0.5\sqrt n}{\sigma}\}\ge 0.997$，$2\Phi(\dfrac{0.5\sqrt n}{\sigma})-1\}\ge 0.997,\Phi(\dfrac{0.5\sqrt n}{\sigma})\ge 0.998,$

$\dfrac{0.5\sqrt n}{\sigma}\ge 2.97$，$\sqrt n\ge 11.88$,由此可知，抽取样本容量大致为 $n\ge 141.1$

**二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.**

(9)【解】：方法一，$f(x)=x^2\ln(1-x^2)=-x^2[x^2+\dfrac{x^4}{2}+\cdots+\dfrac{x^{2m}}{m}+\cdots]$，$n=2(m+1),m=\dfrac{n}{2}-1,$

所以 $x^n$ 对应系数 $-\dfrac{1}{\dfrac{n}{2}-1}=-\dfrac{2}{n-2}$，则 $f^{(n)}(0)=-\dfrac{2}{n-2}n!$.

方法二，$f^{(n)}(x)=[x^2\ln(1+x)+x^2\ln(1-x)]^{(n)}$

$$=x^2\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}+\cdots$$

$+x^2\dfrac{(-1)(n-1)!}{(1-x)^n}+2nx\dfrac{(-1)(n-2)!}{(1-x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}+\cdots$，所以

$$f^{(n)}(0)=-\frac{[1+(-1)^{n-2}]n!}{(n-2)}=-\frac{2}{(n-2)}n!.$$

（10）【解】：原式 $\xlongequal[x=\tan t]{}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan^2 t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc t\cot t\,\mathrm{d}t=-\csc t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-1$.

（11）【解】：等式两边同时求全微分，将 $x=1,y=0,z=1$ 代入可得 $dx+dy+dz=0, dz\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-dx-dy$.

（12）【解】：$I=0+\iint\limits_{\Sigma}zf(2)dS=f(2)\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\pi f(2)$.

（13）【解】：答案：$\boldsymbol{k(-1\ \ 1\ \ 1)^T, k\neq 0}$.

（14）【解】： 由于 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$， $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ 1-e^{-2y}, & y\ge 0\end{cases}$ 由独立性，

由此 $P\{\max\{X,Y\}>\frac{1}{2}\}=1-P\{\max\{X,Y\}\le\frac{1}{2}\}=1-P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}$

$$=1-P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{Y\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}(1+e^{-1}).$$

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ 可知 $f(0)=0, f'(0)=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{f(x)}}\lim\limits_{x\to 0}\left((1+\frac{f(x)-\sin x}{\sin x})^{\frac{\sin x}{f(x)-\sin x}}\right)^{\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}}=\sqrt{e}$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{\sin xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x^2}\times\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-\cos x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}-\frac{\cos x-1}{2x}]=\frac{f''(0)}{2}=\frac{1}{2},$$

所以 $f''(0)=1$.

（16）【解】：由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=3-2ax-2by=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=4-4ay-2bx=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}2ax+2by=3,\\ 2bx+4ay=4.\end{cases}$$

当 $8a^2-4b^2\neq 0$，即 $2a^2-b^2\neq 0$ 时， $f(x,y)$ 有唯一驻点 $\left(\frac{3a-2b}{2a^2-b^2},\frac{4a-3b}{2(2a^2-b^2)}\right)$.

记 $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2a$， $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2b$， $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4a$.

当 $AC-B^2=8a^2-4b^2>0$ 即 $2a^2-b^2>0$ 时， $f(x,y)$ 有极值．并且当 $A=-2a>0$，即 $a<0$ 时， $f(x,y)$ 有极小值；当 $A=-2a<0$ 即 $a>0$ 时， $f(x,y)$ 有极大值.

综上所述，得,当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a<0$ 时， $f(x,y)$ 有唯一极小值；

当 $2a^2-b^2>0$ 且 $a>0$ 时， $f(x,y)$ 有唯一极大值.

（17）【解】：设 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = A$ ，等式两边同时积分可得 $A^2\iint\limits_D xydxdy = A-1, A^2-4A+4=0, A=2.$

所以 $xy(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)^2 = f(x,y)-1$，$f(x,y)=4xy+1$，

$$\int_0^1 I(t)dt = \int_0^1 dt\int_t^1 f(x,t)dx = \int_0^1 dt\int_0^t (4xt+1)dx \quad = 4\int_0^1 tdx\int_0^t xdx + \frac{1}{2} = 1$$

（18）【解】：（I） $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x\cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n xd\sin x = \left.\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}}{n+1}$，

（II）令 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2+3n+3)}{n+1}x^{n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}[(n+2)x^{n+1} + \frac{x^{n+1}}{n+1}]$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 1 = (\frac{1}{1-x})' - 1 = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x),$$

$$f(x) = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2} - \ln(1-x), x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)I_n = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - \ln(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{(2-\sqrt{2})^2} - \ln(2-\sqrt{2}) + \ln 2.$$

（19）【证明】：（Ⅰ）由题设有 $f(a)(1-a) = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x$，令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ，对函数 $F(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上应用 Largrange 中值定理，由此可得 $\exists\xi\in(0,a)$ 使得 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(a)-F(0) = F'(\xi)a = f(\xi)a$，从而有 $f(\xi) = f(a)(1-a)$；

（Ⅱ）对函数 $f(x)$ 在区间 $[\xi,a]$ 上应用 Largrange 中值定理知 $\exists\eta\in(\xi,a)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)-f(a) = f'(\eta)(\xi-a)$，而 $f(\xi) = f(a)(1-a)$，因而有

$$(\xi-a)f'(\eta) = -af(a).$$

故原命题成立.

（20）【解】：（I）证明：由题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，可推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关，又据题设 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 的一个极大线性无关组，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的秩为 n-1，所以 r(A)=n-1

又由 $\beta = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 知 $\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表示

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n,\beta$ 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 等价从而秩相同。

据此增广矩阵 $\overline{A} = (A\beta)$ 的秩 $= r(A) = n-1 < n$　因此方程组 $Ax=\beta$ 必有无穷多解。

（II）$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关，故存在不全为 0，数 $l_1,l_2,\cdots,l_{n-1}$ 使 $l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_{n-1}\alpha_{n-1}=0$

故 $A\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\alpha_n)\begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

又∵ $r(A)=n-1$ ∴ $(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T$ 是 $Ax=0$ 一个基础解系，由 $A\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}x=\alpha_1+\cdots\alpha_n=\beta$ 知 $\left(1,1,\cdots,1\right)^T$ 是

$Ax=\beta$ 特解。于是 $Ax=\beta$ 通解是 $(1,1,\cdots,1)^T+k(l_1,\cdots,l_{n-1},0)^T=(1+kl_1,\cdots 1+kl^{n-1},1)^T$

因此若 $(k_1,\cdots,k_n)^T$ 是 $Ax=\beta$ 解时,必有 $k_n=1$.

（21）【解】:（I）∵ $A\alpha_1=0$  $A\alpha_2=0$  表明 $\alpha_1$，$\alpha_2$ 是特征向量且无关，

设 $A=(a_{ij})_3$， ∵ $\begin{cases}a_{11}+a_{12}+a_{13}=3\\a_{21}+a_{22}+a_{23}=3\\a_{31}+a_{32}+a_{33}=3\end{cases}\Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 因此，A 有另一特征值 3 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为其对应的特征向量. ∵ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha$ 线性无关 ∴A 可对角化

（II）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$， $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}$

$$A^{1000}=\left(P\Lambda P^{-1}\right)^{1000}=P\Lambda^{1000}P^{-1}=3^{999}\begin{pmatrix}-6&12&-3\\-6&12&-3\\-6&12&-3\end{pmatrix}.$$

（22）【解】:（I）边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x^4, & 0<x<1\\2x(2-x)^3, & 1\le x<2\\0, & 其他\end{cases}，\quad f_X(x)=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0<y<1\\0, & 其他\end{cases}$$

(II) $X$ 与 $Y$ 的独立性： 由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，$X$ 与 $Y$ 不独立;

$X$ 与 $Y$ 相关性： $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

而 $E(XY)=6\int_0^1 y^3dy\int_y^{2-y}x^2dx=2\int_0^1 y^3(8-12y+6y^2)dy=\dfrac{6}{5}$

$$E(X)=\int_0^1 2x^5dx+\int_1^2 2x^2(2-x)^3dx=\frac{16}{15},\quad E(Y)=\int_0^1 12y^3(1-y)dy=\int_0^1=\frac{3}{5}$$

所以 $Cov(X,Y)=\dfrac{6}{5}-\dfrac{16}{15}\dfrac{3}{5}=\dfrac{14}{25}$，可知 $X$ 与 $Y$ 相关.

（III） $Z=X+Y$ 是密度函数 $f_Z(z)$，可以利用公式法，由于有效区域图形知利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$，由此 $f(z-y,y)=6(z-y)y^2, 0<y<1, 2y<z<2.$，

所以在 $0\le z<2$ 时， $f_Z(z)=6\int_0^{\frac{z}{2}}(z-y)y^2dy=\dfrac{5}{32}z^4$，

由此知 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{5}{32}z^4, & 0\le z<2\\0, & 其他\end{cases}$

（23）【解】:（I）求最大似然估计

（1）似然函数 $L=\prod_{i=1}^{n} a\theta x_i^{a-1}e^{-\theta x_i^a} = a^n\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{a-1}e^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}$ ，知

（2）$\ln L = n\ln a + n\ln\theta + (a-1)\ln(x_1x_2\cdots x_n) - \theta\sum_{i=1}^{n}x_i^a$ ，$\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}x_i^a=0,$

（3）解得 $\theta$ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}$ .

（II）若 $a=1$ 时，$\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$ ，$E(\hat{\theta}^{-1})=E(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=E(\bar{X})=\mu=\int_0^{+\infty}x\theta e^{-\theta x}dx=\dfrac{1}{\theta}=\theta^{-1}$

所以 $\dfrac{1}{\hat{\theta}}$ 是 $\dfrac{1}{\theta}$ 的无偏估计.