绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试卷 （模拟一）

一、选择题

（1）答案：选（B）.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+e^{(n+1)x}}{1+e^{nx}}=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\\ e^x, & x>0,\end{cases}$ 点 $x=0$ 为其跳跃间断点，选（B）.

（2）答案：选（B）.

解 令 $x-u=t$， $F(x)=\int_x^0(x-2t)f(t)(-dt)=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$.

因为 $f(t)$ 为奇函数，$tf(t)$ 为偶函数，所以 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数， $\int_0^x tf(t)dt$ 为奇函数，故 $F(x)$ 为奇函数. 又因为 $F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=f(\xi)\cdot x-xf(x)\le 0$（$\xi$ 在 0 与 x 之间），故 $F(x)$ 单调减少.

（3）答案：选（A）.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1+xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+f(x)+xf'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+f(0)}{2x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f'(x)=3$，

故知 $f(0)=-1$，又

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+f(0)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{1}{2}f'(0),\ \frac{1}{2}\lim_{x\to0}f'(x)=\frac{1}{2}f'(0),$$

所以 $\dfrac{1}{2}+f'(0)=3$，得 $f'(0)=\dfrac{5}{2}$，故选（A）.

（4）答案：选（B）.

解 $I=\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos x^2dx\ \underline{\underline{令x^2=u}}\ \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos u\cdot\dfrac{1}{\sqrt{u}}du=\dfrac{1}{2}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos u}{\sqrt{u}}du+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\dfrac{\cos u}{\sqrt{u}}du]$

$$= \frac{1}{2}\cdot[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}du - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sqrt{\pi - t}}dt] > 0\text{；}\quad J \overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t e^{\cos^2 t}dt = 0\text{，}$$

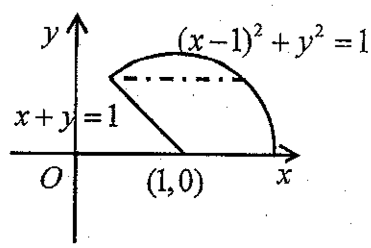
所以$I>0, J=0$，选（B）.

（5）答案：选（B）.

解　由于$\lim\limits_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$，故$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

又因为$f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$，知$f(x,y)$在$(0,0)$处两个偏导数均存在.

（6）答案：选（D）.



解　$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，引入$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$分割区域，得

$$D = D_1 + D_2.$$

其中$D_1: 0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 1-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2}$，

$D_2: \frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le 1,\quad 1-\sqrt{1-y^2}\le y\le 1+\sqrt{1-y^2}$.

（7）答案：选（A）.

解

$$B \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) \end{pmatrix}.$$

由$AB=O$知$r(A)+r(B)\le 3$．又由于A，B均为非零矩阵，则有$r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$.

当$a\neq 2$且$a\neq -1$时，$r(B)=3$，得$r(A)=0$.与$r(A)\ge 1$，$r(B)\ge 1$矛盾.

当$a=-1$时，$r(B)=1$，此时$1\le r(A)\le 2$，（B）和（C）错.

当$a=2$时，$r(B)=2$，必有$1\le r(A)\le 3-r(B)=1$，得$r(A)=1$．故（D）错，（A）正确.

（8）答案：选（C）.

解　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}$，知$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3=0, \end{cases}$取$\lambda_1=0$，则$\lambda_2\neq 0, \lambda_3\neq 0$，从而$\lambda_2=-\lambda_3$，故答案选（C）.

二、填空题

（9）答案：填“$y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$”.

解　由题意知 $f(1)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\cos x-1)-f(1)}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=f'(1)\cdot(-\frac{1}{2})=2,$$

得 $f'(1)=-4$.

又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，故 $f'(-1)=-f'(1)=4$，因此法线方程为

$$y-f(-1)=-\frac{1}{4}(x+1)，即\ y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}.$$

（10）答案：填“$\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln(1+\cos^2 x)+C$”.

解　原积分$=-\int\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}d(\cos x)\ \underline{\underline{\cos x=t}}\ \int\frac{t(t^2-1)}{1+t^2}dt$

$$=\int\frac{t(1+t^2)-2t}{1+t^2}dt=\int(t-\frac{2t}{1+t^2})dt=\frac{1}{2}t^2-\ln(1+t^2)+C$$

$$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\ln(1+\cos^2 x)+C.$$

（11）答案：填“$\frac{3}{4}$”.

解　原式$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[3]{n}}{n^{\frac{4}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt[3]{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}$.

（12）答案：填“$a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$”.

解　特征方程为 $r^2+4=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$.

将微分方程转化为　$y''+4y=1+\cos 2x$.

①对于 $f_1(x)=1$，可设 $y_1^*=a$；

②对于 $f_2(x)=\cos 2x$，可设 $y_2^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$，

由叠加原理可知特解形式为　$y^*=y_1^*+y_2^*=a+x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

（13）答案：填“1”.

解　方程两边对 x 求偏导，得 $1-a\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot(-b\frac{\partial z}{\partial x})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{a-b\varphi'}$. 方程两边对 y 求偏导，得 $-a\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi' g(1-b\frac{\partial z}{\partial y})$，所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi'}{a-b\varphi'}$，从而

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

（14）答案：填“$\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$”.

解　原式 $=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos x^2dx\int_0^{x^3}dy=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x^3\cos x^2dx\ \underline{\underline{x^2=t}}\ \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$.

三、解答题

（15）证　（Ⅰ）令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$，则 $g'(x)=\frac{x(x-1)}{(x+1)^3}<0$，故 $g(x)$ 单调减少. 当 $0<x<1$ 时，

$g(x)<g(0)=0$.

（Ⅱ）只需证 $x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln 4$.

令
$$f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)-\ln 4,$$

则 $f(1)=0$.

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)},$$

则 $f'(1)=0$.

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}[\ln(1+x)-\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}]<0,\quad f'(x)>f'(1)=0.$$

故 $f(x)$ 单调增加，所以 $f(x)<f(1)=0$，　故 $x\ln(1+\frac{1}{x})+\frac{1}{x}\ln(1+x)<\ln 4$.

（16）解　（Ⅰ）设在 t 时刻，水面高度为 $z=z(t)$，则水的体积和水的上表面积分别为

$$V(t)=\pi\int_0^z f^2(u)du,\quad S(t)=\pi f^2(z).$$

由题意知

$$\frac{dV(t)}{dt}=\pi f^2(z)\frac{dz}{dt}=3,\qquad \frac{dS(t)}{dt}=2\pi f(z)\frac{df(z)}{dt}=\frac{3}{z+1}.$$

综合上列两式，得

$$\frac{df(z)}{f(z)}=\frac{dz}{2(z+1)},$$

两边积分，得

$$\ln f(z)=\frac{1}{2}\ln(z+1)+\ln C,\text{ 即 } f(z)=C\sqrt{z+1}.$$

由于容器的底面积为16π，知$f(0)=4$，进而得$C=4$，故所求曲线方程为

$$y=4\sqrt{z+1},\quad 0\le z\le 12.$$

（Ⅱ）容器的体积为

$$V=\pi\int_0^{12}(4\sqrt{z+1})^2dz=16\pi\int_0^{12}(z+1)dz=8\pi(z+1)^2\Big|_0^{12}=1344\pi\ (m^3).$$

若将容器内水装满，需要时间为$\dfrac{1344\pi}{3}=448\pi\ (s)$.

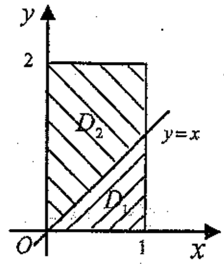
（17）解　过 A,B 两点的直线为 $x+y=10$．设 C 点坐标为 (x,y)，则 ΔABC 的面积为 $S=\sqrt{2}|x+y-10|$.

记$L=(x+y-10)^2+\lambda(\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}-1)$，令

$$\begin{cases}L_x'=2(x+y-10)+\dfrac{2x}{5}\lambda=0,\\ L_y'=2(x+y-10)+\dfrac{y}{10}\lambda=0,\\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}-1=0,\end{cases}$$

解得驻点$(1,4)$及$(-1,-4)$，$S(1,4)=5\sqrt{2}$，$S(-1,-4)=15\sqrt{2}$，所以$S_{\max}=15\sqrt{2},S_{\min}=5\sqrt{2}$.

（18）解 $\iint\limits_D |x-y|d\sigma=\iint\limits_{D_1}(x-y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}(y-x)d\sigma$



$$=\int_0^1 dx\int_0^x (x-y)dy+\int_0^1 dx\int_x^2 (y-x)dy$$

$$=\int_0^1 (xy-\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^x dx+\int_0^1 (\frac{1}{2}y^2-xy)\Big|_x^2 dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 (2-2x+\frac{1}{2}x^2)dx=\frac{4}{3}.$$

法 1 $\iint\limits_D (y-1)e^{x^2|y-1|}d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^2 (y-1)e^{x^2|y-1|}dy=\int_0^1 dx\int_{-1}^1 te^{x^2|t|}dt=0$.

法 2 D关于$y=1$对称，$(y-1)e^{x^2|y-1|}$关于$y-1$成奇函数，所以$\iint\limits_D (y-1)e^{x^2|y-1|}d\sigma=0$，故$I=\frac{4}{3}$.

（19）解 由$\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，知$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$.

令$\Delta x\to 0$，则有$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，故有

$$y(x)=\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\sqrt{2x-x^2}+C.$$

由$y(1)=1$知$C=0$，所以$y=\sqrt{2x-x^2}$，于是

$$\int_1^2 y(x)dx=\int_1^2\sqrt{2x-x^2}dx=\int_1^2\sqrt{1-(x-1)^2}dx\ \underline{\underline{x-1=\sin t}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{4}.$$

（20）解 （Ⅰ）因为$x'(t)=1-\cos t\ge 0$，且$1-\cos t=0$的点不构成区间，所以$x(t)$在$[0,2\pi]$上连续单增，因此$y=y(x)$的定义域就是$x(t)$的值域，即为$[x(0),x(2\pi)]=[0,2\pi]$.

（Ⅱ）$V_y=2\pi\int_0^{2\pi}xy(x)dx=2\pi\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2dt-2\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin t(1-\cos t)^2dt$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)dt=6\pi^3.$$

（Ⅲ）$\bar{y}=\dfrac{\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}=\dfrac{\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt}$

$$=\frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt}{\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt}=\frac{32/3}{8}=\frac{4}{3}.$$

（21）证　由 $f(\frac{1}{2})$ 分别在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的泰勒公式得

$$f(\frac{1}{2})=f(0)+f'(0)(\frac{1}{2}-0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(\frac{1}{2}-0)^2=f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{8},\quad \xi_1\in(0,\frac{1}{2});$$

$$f(\frac{1}{2})=f(1)+f'(1)(\frac{1}{2}-1)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(\frac{1}{2}-1)^2=f(1)+\frac{f''(\xi_2)}{8},\quad \xi_2\in(\frac{1}{2},1).$$

（Ⅰ）　两式相加，得

$$2f(\frac{1}{2})=f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}.$$

由于 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理知，存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}$，所以有

$$2f(\frac{1}{2})=f(0)+f(1)+\frac{f''(\xi)}{4}.$$

（Ⅱ）　两式相减．并取绝对值，得

$$|f(1)-f(0)|=\frac{1}{8}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\le\frac{1}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|].$$

记 $|f''(\eta)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$，则 $\eta=\xi_1$ 或 $\xi_2\in(0,1)$，且

$$|f(1)-f(0)|\le\frac{1}{8}[|f''(\eta)|+|f''(\eta)|]=\frac{1}{4}|f''(\eta)|.$$

（22）解　（Ⅰ）$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，令 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\end{pmatrix}$，则 $A=B^TB$．

（Ⅱ）$r(A)=r(B)=3$．

20、21全程考研资料请加群712760929

（Ⅲ） $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $Ax=0$ 通解为

$x=k\begin{pmatrix}2\\-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意实数.

(23)解 （Ⅰ）由已知得 $A\alpha_1=2\alpha_1$，即 $\lambda_1=2$ 是 A 的特征值，而 $\alpha_1=(-1,1,1)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量，

又由 $A=A^T$，且 $r(A)=1$ 知，$\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的二重特征值，$Ax=0$ 的非零解向量即是 A 的属于特征值 0 的特征向量.

设 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 是 A 的属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=0$ 的特征向量，因为 A 是实对称矩阵，不同特征值对应的特征向量必正交，则有 $-x_1+x_2+x_3=0$. 可取 $\alpha_2=(1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$，故方程组 $Ax=0$ 的通解为

$$x=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,\ k_2,k_3\text{ 为任意常数.}$$

（Ⅱ）令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 P 为可逆阵，且

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}，得\quad A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-2&2&2\\-2&2&2\end{pmatrix},$$

则二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=\frac{2}{3}x_1^2+\frac{2}{3}x_2^2+\frac{2}{3}x_3^2-\frac{4}{3}x_1x_2-\frac{4}{3}x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3.$$

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试卷（模拟二）试题答案

一、选择题

（1）答案：选（A）.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0, f'(0)=0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-ax-b}{cx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)-ax-b}{cx^2}=1,$$

故 $a=0, b=1, c=\dfrac{1}{2}f''(0)$.

（2）答案：选（C）.

解　$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$，

而
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx \overset{t=\pi-x}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx,$$

所以 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$，（A）正确.

$\int_0^{\pi} f(\sin^2 x)dx \overset{\text{周期性}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx \overset{\text{奇偶性}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2 x)dx$，（B）正确.

$\int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx \overset{\text{周期性}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx \overset{\text{奇偶性}}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)dx$，（D）正确.

（C）不正确，反例，取 $f(x)=x$，$\int_0^{\pi}\cos xdx=0\neq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

（3）答案：选（D）.

解
$$f(x)=\begin{cases} x^4 & ,x<-1, \\ -x & ,-1\le x<0, \\ x & ,0\le x<1, \\ x^4, & x\ge 1. \end{cases}$$

由此知 $f(x)$ 在 $x=-1,0,1$ 处不可导，故选（D）.

（4）答案：选（C）.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=2$.由极限保号性定理可知存在$\delta>0$，在$(0,\delta)$内有$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,\delta)$内单调递增，所以选（C）.

取$f(x)=\begin{cases}2x, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$得$f'(x)=2\,(x\neq0)$，故$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=2$，但$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-1}{x}=\infty$，

即$f_+'(0)$不存在，故（A）不正确；

$\lim\limits_{x\to0}f(x)\neq f(0)$，故（B）不正确；且$f(x)$在$x=0$处取极大值，故（D）不正确.

（5）答案：选（D）.

解 假设$f(x)$在(a,b)内可取正的最大值$f(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$，则$f'(x_0)=0,f(x_0)>0$．但由已知条件得$f''(x_0)=-v(x_0)f(x_0)>0$，所以$f(x)$在点x_0处取极小值$f(x_0)$，矛盾，故$f(x)$在(a,b)不能取正的最大值，同理知$f(x)$在(a,b)内也不能取负的最小值，选（D）.

（6）答案：选（C）.

解 由于$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}}f(x,y)=0,\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=\frac{x^2}{2}}}f(x,y)=1$，所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$不存在，故（A）不正确，进而（B）和（D）也都不正确.

另外，可直接计算得，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故（C）正确.

（7）答案：选（C）.

解 AB为n阶方阵，则$r(AB)=n$．又因

$$n=r(AB)\leq r(A)\leq n,n=r(AB)\leq r(B)\leq n,$$

故$r(A)=r(B)=n$，从而答案选（C）.

（8）答案：选（B）.

解 1 因为$r(A)=1$，所以$Ax=0$有两个线性无关的解向量，即A对应$\lambda=0$有两个线性无关的特征向量。因为特征值的重根数≥对应的线性无关的特征向量的个数，故$\lambda=0$至少是A的二重特征值，也可能是A的三重特征值，例如：

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，r(A)=1，\lambda=0\text{是}A\text{的三重特征值}.$$

解 2 $r(A)=1$则$A=\alpha\beta^T$，故A的特征值为$0,0,\alpha^T\beta$（或$\beta^T\alpha$）．若$\alpha^T\beta=0$，则A的特征值为$0,0,0$，若$\alpha^T\beta\neq0$则A的特征值为$\alpha^T\beta,0,0$．

二、填空题:9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）答案：填“-1”.

解

$$x'(t)=e^t,\quad x''(t)=e^t \tag{1}$$

$$\cos t=e^{-y^2}\cdot y', \tag{2}$$

将（2）式两边同时对t求导，得$-\sin t = e^{-y^2}\cdot 2y\cdot (y')^2 + e^{-y^2}\cdot y''$．将$x=1, y=0, t=0$代入，得

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1,\quad \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=1,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=1,\quad \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''(t)\cdot x'(t)-y'(t)\cdot x''(t)}{(x'(t))^2}\cdot\frac{1}{x'(t)}.$$

将$x=1, t=0, y=0$带入得$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=1}=-1$．

（10）答案：填“$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$”.

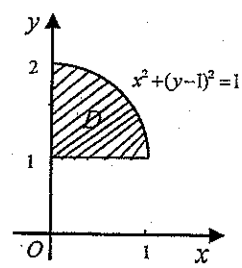
解　由$y_2-y_1=e^{2x}$知特征方程有一根为$r_1=2$．

①若$r_1=2$是二重根，则该方程的通解形式为$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+Ae^x$（$A$为常数）与条件$y_1=xe^x$为方程特解矛盾，故$r_1=2$不是二重根．

②若另一个特征根$r_2\neq 1$且$r_2\neq 2$，则该方程通解形式为$y=c_1e^{2x}+c_2e^{r_2x}+Ae^x$，也与条件$y_1=xe^x$为方程特解矛盾．故由特解$y_1=xe^x$和自由项$ae^x$知，特征方程有一根为$r_2=1$，

综上，方程的通解$y=C_1e^{2x}+C_2e^x+xe^x$．

（11）答案：填“$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{2\sin\theta}f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$”.



（12）答案：填“1”.

解　设$f(x)=x^5+2x+\cos x-a$，因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内至少有一个零点．

又因为$f'(x)=5x^4+2-\sin x>0$，所以$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，故$f(x)$最多有一个零点，因此$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$内仅有一个根．

（13）答案：填“2”.

解　$\int_0^1(\ln x)^2dx=x\ln^2x\Big|_0^1-2\int_0^1\ln xdx=-2\int_0^1\ln xdx=-2(x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1dx)=2$．

（14）答案：填“$\dfrac{1}{2}$”.

解　由$A-E=(B-E)^{-1}$，$A=(B-E)^{-1}+E=(B-E)^{-1}(E+B-E)=(B-E)^{-1}\cdot B$，所以

$$|A|=\frac{|B|}{|B-E|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题

（15）解 原式$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t dx\int_0^x f(x-y)dy}{(\sqrt[3]{1+(\cos t-1)}-1)\cdot\sin t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t[\int_0^x f(x-y)dy]dx}{-\frac{1}{6}t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(t-y)dy}{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\overset{令u=t-y}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(u)du}{-\frac{1}{2}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{-t}=-f'(0).$$

又因为$f(x)$为偶函数，所以$f'(x)$为奇函数，故$f'(0)=0$.

（16）解 曲线$y=y(x)$在点$P(x,y)$处的切线方程为$Y-y=y'(X-x)$，令$X=0$，得切线在y轴上的截距为$y-xy'$，故由题意知

$$\int_1^x\sqrt{1+y'^2(t)}dt=|y-xy'|.$$

在上式中令$x=1$，并由$y(1)=1$，得$y'(1)=1$．记$f(x)=y-xy'$，则$f(1)=0$．当$x\ge 1$时，$f'(x)=-xy''<0$，所以$f(x)\le f(1)=0$，即$y-xy'\le 0$．因此$\int_1^x\sqrt{1+y'^2(t)}dt=xy'-y$．

两边对x求导，得

$$\sqrt{1+y'^2}=xy''.$$

令$p=y'$，则$y''=\dfrac{dp}{dx}$，所以$\sqrt{1+p^2}=x\dfrac{dp}{dx}$，解得$p+\sqrt{1+p^2}=C_1x$．由$p(1)=y'(1)=1$，解得$C_1=1+\sqrt{2}$，故$p+\sqrt{1+p^2}=(1+\sqrt{2})x$．变形为

$$\sqrt{1+p^2}-p=\frac{1}{(1+\sqrt{2})x},$$

进而相减得

$$p=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})x-\frac{1}{(1+\sqrt{2})x}].$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}[(1+\sqrt{2})x-\frac{1}{(1+\sqrt{2})x}].$$

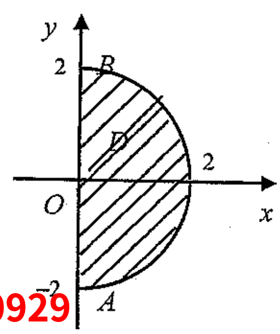
故$y=\dfrac{1}{4}(1+\sqrt{2})x^2-\dfrac{1}{2(1+\sqrt{2})}\ln x+C_2$．由$y(1)=1$，解得$C_2=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{2}$，所以所求曲线为

$$y=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})x^2-\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}\ln x+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{2},\quad x\ge 1.$$

（17）解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-2,\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y+2$，由此得$f(x,y)$在$D$内的驻点$(1,-1)$．

在直线段$\overline{AB}:x=0\ (-2\le y\le 2)$上，将$x=0$代入函数，得

$$z=y^2+2y\quad(-2\le y\le 2).$$



由 $\dfrac{dz}{dy}=2y+2=0$ 得 $y_0=-1$，所以驻点为 $(0,-1)$．

在半圆 $\overset{\frown}{AB}: x^2+y^2=4\ (x\ge 0)$ 上，记

$F(x,y)=x^2+y^2-2x+2y+\lambda(x^2+y^2-4)$，

令

$$\begin{cases} F'_x=2x-2+2\lambda x=0, & (1)\\ F'_y=2y+2+2\lambda y=0, & (2)\\ x^2+y^2-4=0. & (3)\end{cases}$$

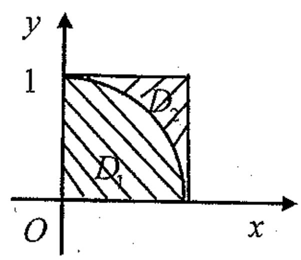
显然 $\lambda=-1$ 不是上述方程组的解．由（1），（2）两式解得 $x=\dfrac{1}{\lambda+1}, y=-\dfrac{1}{\lambda+1}$，代入（3）式，得 $\dfrac{1}{\lambda+1}=\pm\sqrt{2}$．注意到在 $\overset{\frown}{AB}$ 上有 $x\ge 0$，所以由（1），（2），（3）可解得驻点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$．

比较下列函数值的大小：

$$z\big|_{(1,-1)}=-2,\ \ z\big|_{(0,-1)}=-1,\ \ z\big|_{(0,-2)}=0,\ \ z\big|_{(0,2)}=8,\ \ z\big|_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})}=4(1-\sqrt{2}),$$

得函数在 D 上的最大值为 8，最小值为 -2．

（18）解 1　把 D 分成 D_1, D_2 两部分如图所示．



$$I=\iint\limits_{D_1}x\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\,d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,dr\right]d\theta+\int_0^1\left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1(x^2+y^2)\,dy\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos\theta\,d\theta+\int_0^1(x^2y+\frac{1}{3}y^3)\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{1}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\int_0^1[(x^2+\frac{1}{3})-(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}]dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\int_0^1[(x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}]dx=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin^2t\cos^2t+\frac{1}{3}\cos^4t)\,dt$$

$$=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2t-\frac{2}{3}\cos^4t)\,dt=1-(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{8}.$$

解 2　把 D 分成 D_1, D_2 两部分如图所示.

$$I=\iint_{D_1} x d\sigma+\iint_{D_2}(x^2+y^2)d\sigma=\iint_{D_1} x d\sigma+\iint_{D}(x^2+y^2)d\sigma-\iint_{D_1}(x^2+y^2)d\sigma$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r\cos\theta \cdot r dr\right]d\theta+\int_0^1\left[\int_0^1(x^2+y^2)dy\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1 r^2\cdot r dr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}+\int_0^1(x^2+\frac{1}{3})dx-\frac{\pi}{8}=1-\frac{\pi}{8}.$$

(19) 证　(Ⅰ) $\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)dx=\int_0^{2\pi} f[\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)]dx$

$$=\int_0^{2\pi} f[\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta_0)]dx \qquad (\text{其中}\cos\theta_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta_0=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

$$\overset{u=x+\theta_0}{=}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du\overset{\text{周期性}}{=}\int_{-\pi}^{\pi} f(\sqrt{a^2+b^2}\sin u)du.$$

(Ⅱ) 利用(Ⅰ)中的结论，得　$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}(5\sin x)^n dx=5^n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx$.

当 n 为正奇数时，由积分的奇偶性知，$I_n=0$.

当 n 为正偶数时，

$$I_n=2\times 5^n\int_0^{\pi}\sin^n x dx\overset{t=x-\frac{\pi}{2}}{=}2\times 5^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt=4\times 5^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt.$$

$$=4\times 5^n\times\frac{(n-1)!!}{n!!}\times\frac{\pi}{2}=2\pi\times 5^n\times\frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

(20) 证　(Ⅰ) 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}$，则 $F(0)=-\frac{1}{3}, F(1)=\frac{2}{3}$，由零点定理知存在 $a\in(0,1)$，使得 $F(a)=0$，即得 $f(a)=\frac{1}{3}$.

(Ⅱ) 令 $G(x)=f(x)-\frac{2}{3}$，则 $G(a)=-\frac{1}{3}, G(1)=\frac{1}{3}$，由零点定理知，存在 $b\in(a,1)$，使得 $G(b)=0$，即得 $f(b)=\frac{2}{3}$. 由拉格朗日中值定理得

$$\frac{f(a)-f(0)}{a}=f'(\xi_1),\quad \xi_1\in(0,a),$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_2),\quad \xi_2\in(a,b),$$

$$\frac{f(1)-f(b)}{1-b}=f'(\xi_3),\quad \xi_3\in(b,1),$$

所以
$$\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\frac{1}{f'(\xi_3)}=\frac{a+b-a+1-b}{\frac{1}{3}}=3.$$

（21）解 1 令 $F(x)=f(x)-g(x)$．当 $x>0$ 时，若 $a\geq\frac{1}{3}$，则

$$F'(x)=-\frac{x^2}{1+x^2}+3ax^2\geq\frac{x^4}{1+x^2}>0,$$

所以 $F(x)$ 为单增函数，故 $F(x)\geq F(0)$，即 $f(x)\geq g(x)$；

若 $0<a<\frac{1}{3}$，令 $F'(x)=0$，解得驻点 $x_0=\sqrt{\frac{1}{3a}-1}$，当 $0<x<x_0$ 时，$F'(x)<0$，有 $F(x)<F(0)=0$，得 $f(x)<g(x)$，不合题意；

若 $a\leq 0$，则 $F'(x)<0$，故 $F(x)$ 为单减函数，有 $F(x)<F(0)=0$，得 $f(x)<g(x)$，不合题意；

综上，当 $a\geq\frac{1}{3}$ 时 $f(x)\geq g(x)$，故 a 的最小值为 $\frac{1}{3}$．

解 2 对 $\forall x>0$，由 $f(x)\geq g(x)$ 知，$\arctan x\geq x-ax^3$，即 $a\geq\frac{x-\arctan x}{x^3}$．

令 $\varphi(x)=\frac{x-\arctan x}{x^3}\ (x>0)$，则

$$\varphi'(x)=\frac{(1-\frac{1}{1+x^2})x^3-3x^2(x-\arctan x)}{x^6}=\frac{3(1+x^2)\arctan x-3x-2x^3}{(1+x^2)x^4}.$$

再令 $\psi(x)=3(1+x^2)\arctan x-3x-2x^3$，则 $\psi'(x)=6x\arctan x-6x^2=6x(\arctan x-x)$．

当 $x>0$ 时，$\arctan x<x$，故 $\psi'(x)<0$，$\psi(x)$ 单调递减．又 $\psi(0)=0$，所以 $\psi(x)<0$．从而当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，由于

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\frac{1}{3},$$

所以$\varphi(x)\le\frac{1}{3}$，故a的最小值为$\frac{1}{3}$.

(22) 证 (Ⅰ) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\3&1&4&2\\a&1&3&b\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $Ax=\beta$有两个无关的解η_1,η_2，从而$Ax=0$有一个线性无关的解$\xi=\eta_1-\eta_2$，故$4-r(A)\ge1$，因此$r(A)\le3$，又因为

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\4&3&5\\3&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\4&-1&1\\3&-2&1\end{vmatrix}\ne0,$$

故$r(A)\ge3$，从而$r(A)=3$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，所以$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，且表示法唯一．有题意知$r(A)=r(A\vdots\beta)=3$.

$$r(A\vdots\beta)=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\3&1&4&2&0\\a&1&3&b&1\end{array}\right)\overset{行}{\sim}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&-1&9&-3\\0&0&0&b-14a+31&4a-8\end{array}\right),$$

得$\begin{cases}b-14a+31=0,\\4a-8=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=-3.\end{cases}$

(23) 解 (Ⅰ) 由$p=1$且$A^2-A=6E$知A的特征值为λ_A：3，−2，−2，−2，则$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$在正交变换$x=Qy$下的标准形为$3y_1^2-2y_2^2-2y_3^2-2y_4^2$，规范形为$z_1^2-z_2^2-z_3^2-z_4^2$；

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知$|A|=-24$，而$A^*=|A|A^{-1}=-24A^{-1}$，从而

$$\left|\frac{1}{6}A^*+2A^{-1}\right|=\left|-2A^{-1}\right|=(-2)^4\frac{1}{|A|}=-\frac{2}{3};$$

(Ⅲ) 因为$B=A^2-kA+6E$，则λ_B: $15-3k,10+2k,10+2k,10+2k$，从而当$-5<k<5$时$g(x_1,x_2,x_3,x_4)$正定.

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二（模拟三）试题答案和评分参考

一、选择题

（1）答案：选（A）.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]=0+0=0$，故 $x=0$ 不是垂直渐近线.

又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}[x\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\arctan(x^2)]=1+0=1=k,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[x^2\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)-x]=\lim_{x\to\infty}[\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\arctan(x^2)]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\arctan(x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{3}(\frac{1}{x})^3}{\frac{1}{x^2}}+0=-\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0=b,$$

所以 $y=x$ 为斜渐近线.

（2）答案：选（A）.

解　$F(x)\overset{u=x^2-t}{=}\int_0^{x^2}(x^2-u)f(u)du=x^2\int_0^{x^2}f(u)du-\int_0^{x^2}uf(u)du$，故 $F'(x)=2x\int_0^{x^2}f(u)du$.

当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处取最小值，选（A）.

或　取 $f(x)=1$，则 $F(x)=\frac{1}{2}x^4$，同样选（A）.

（3）答案：选（D）.

解　由题意知 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，故

$$\lim_{x\to -1^-}f(-x)\overset{t=-x}{=}\lim_{t\to 1^+}f(t)=f(1),\quad \lim_{x\to -1^+}f(-\frac{1}{x})\overset{t=-\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to 1^+}f(t)=f(1).$$

（4）答案：选（C）.

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以$F'(0)=1$．由于

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{G(x)}{x}\overset{\text{罗比达法则}}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{G'(x)}{1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

所以$G'_-(0)=1$；又

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{0-0}{x}=0,$$

所以$G'_+(0)=0$，故$G(x)$在点$x=0$处不可导.

（5）答案：选（C）.

解 因为在D上$xy\ge 0,(x+y)^2<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin(x^2+y^2)\le\sin(x+y)^2$，且等于号仅在原点处成立，从而$\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)d\sigma<\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma$.

又因为在D上$0\le y\le x\le\frac{1}{2}$，$\sin(x+y)^2\le\sin(4x^2)$，且等于号仅在直线段$y=x\,(0\le x\le\frac{1}{2})$上成立，从而$\iint\limits_D\sin(x+y)^2d\sigma<\iint\limits_D\sin(4x^2)d\sigma$，故选（C）.

（6）答案：选（D）.

解 令$y=f^{-1}(x)$，则$x=f(y)$，两边同时对x求导得$1=f'(y)\frac{dy}{dx}$，故

$$(f^{-1}(x))'=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

（7）答案：选（C）.

解 若$Ax=0$仅有1个线性无关的解，则$r(A)=n-1$，故$r(A^*)=1$，从而（C）正确.

（8）答案：选（B）.

解 设$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$|\lambda E-A|=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，$B$ 的特征值为$2,2,0$.

一方面，如果A与B相似，则A的特征值也为$2,2,0$，故$a=0,b=2$，此时

$$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&c\\0&0&0\end{pmatrix},$$

B 能对角化的条件为

$$r(2E-B)=r\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&-c\\0&0&2\end{pmatrix}=1,$$

故c为任意常数．另一方面，如果$a=0,b=2,c$为任意常数时，可直接验证A与B相似，故选（B）.

二、填空题

（9）答案：填“$\frac{1}{2}-\ln 2$”.

解　因为$f(x)=[\ln(x+1)]'=\frac{1}{x+1}$，所以

$$F(x)=\lim_{t\to\infty}t^3[f(x+\frac{1}{t})-f(x)]\cdot\frac{x}{t^2}=x\lim_{t\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{t})-f(x)}{\frac{1}{t}}=xf'(x)=x(\frac{1}{x+1})'=-\frac{x}{(x+1)^2},$$

故
$$\int_0^1F(x)dx=-\int_0^1\frac{x+1-1}{(1+x)^2}dx=-\int_0^1[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}]dx=-[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}]\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

或
$$\int_0^1F(x)dx=\int_0^1xd\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}-\ln(x+1)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\ln 2.$$

（10）答案：填“$\frac{1}{2}x^2$”.

解　由题意知$\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3}=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$．令$y'=p$，由$\int\frac{1}{(\sqrt{1+p^2})^3}dp=\int\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}dx$解得

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C_1.$$

又由 $y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，故 $y'=x$，积分得 $y=\frac{1}{2}x^2+C_2$，又 $y(0)=0$ 得 $C_2=0$，所以 $y(x)=\frac{1}{2}x^2$.

（11）答案："8π".

解法 1　$V=4\times4\pi-\pi\int_{-1}^{3}(1+y)dy=8\pi$.

解法 2　$V=2\pi\int_{1}^{2}x(x^2-1)dx+2\pi\int_{0}^{1}x(1-x^2)dx+(4\pi-\pi)\times1=8\pi$.

解法 3　$V=2\pi\int_{1}^{2}x(x^2-1)dx+\pi\int_{-1}^{0}[2^2-(1+y)]dy=8\pi$.

解法 4　将曲边梯形上移一个单位，即为曲线 $y=x^2$，直线 $y=0,x=2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V=2\pi\int_{0}^{2}x\cdot x^2dy=8\pi$.

错误解法 1　$V=2\pi\int_{0}^{2}x(x^2-1)dx$.

错误解法 2　$V=2\pi\int_{0}^{2}x\left|x^2-1\right|dx$.

（12）答案：填 "$\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2$".

解　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 为 x 的可微函数，于是

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=\varphi(x), \tag{1}$$

由 $z(x,0)=x$ 得

$$\frac{\partial z(x,0)}{\partial x}=1. \tag{2}$$

故由（1），（2）知 $\varphi(x)=1$，所以 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+1$，从而 $z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+\psi(y)$，其中 $\psi(y)$ 为 y 的可微函数．由 $z(0,y)=y^2$ 得 $\psi(y)=y^2$，因此

$$z=z(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2.$$

（13）答案：填“$(-1)^{n-1}2n(2n+1)\cdot 2^{2n-1}$”.

解　$f^{(2n+1)}(x)=C_{2n+1}^{0}\cdot x^2(\sin 2x)^{(2n+1)}+C_{2n+1}^{1}\cdot 2x(\sin 2x)^{(2n)}+C_{2n+1}^{2}\cdot 2(\sin 2x)^{(2n-1)}$，

$$f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)\cdot 2n\cdot 2^{2n-1}\cdot\sin(n\pi-\frac{\pi}{2})=(-1)^{n-1}\cdot(2n)(2n+1)\cdot 2^{2n-1}.$$

（14）答案：填“$-\frac{3}{5}\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2$”.

解　设$\xi=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，故$-\alpha_1+\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，即$(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}\end{pmatrix},$$

所以$\xi=-\frac{3}{5}\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2$.

三、解答题

（15）证　由题意知$f(1)>f(3)>f(5)>\cdots>f(2)$，故数列$\{f(2n-1)\}$单调下降且有下界，从而数列$\{f(2n-1)\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n-1)=a$.

同理，$f(1)>\cdots>f(6)>f(4)>f(2)$，故数列$\{f(2n)\}$单调上升且有上界，从而数列$\{f(2n)\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n)=b$.　　……4 分

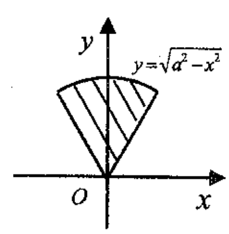
又由拉格朗日中值定理得

$$f(2n)-f(2n-1)=f'(\xi_n),\qquad (1)$$

其中$2n-1<\xi_n<2n$.　　……6 分

当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$. 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$知$\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$. 在(1)式两边令$n\to\infty$，得$b-a=0$，故有$a=b$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}f(2n)$，所以数列$\{f(n)\}$收敛.　　……10 分

（16）解　（Ⅰ）由对称性知$\iint\limits_{D(a)}2xyd\sigma=0$，所以　　……2 分



$$\iint\limits_{D(a)}(x+y)^2d\sigma=\iint\limits_{D(a)}(x^2+y^2)d\sigma=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_0^a r^2rdr=\frac{\pi}{12}a^4;$$　　……4 分

又$\iint\limits_{D(a)}\frac{\pi}{3}yd\sigma=\frac{\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}d\theta\int_0^a r\sin\theta\cdot rdr=\frac{\pi}{9}a^3$；$\iint\limits_{D(a)}6d\sigma=6\cdot\frac{1}{6}\pi a^2=\pi a^2$，　　……6 分

所以 $$I(a)=\pi a^2(\frac{a^2}{12}-\frac{a}{9}-1).$$ ……7 分

（Ⅱ）$I'(a)=\frac{\pi}{3}a^3-\frac{\pi}{3}a^2-2\pi a=\frac{\pi}{3}a(a^2-a-6)\overset{令}{=}0$，又因为 $a>0$，所以 $a=3$.

$$I''(a)=\pi a^2-\frac{2\pi}{3}a-2\pi,I''(3)=5\pi>0$$．从而当 $a=3$ 时，$I(a)$ 最小. ……10 分

（17）解　$m=e^{-x}(x^2-3)$，令 $\varphi(x)=e^{-x}(x^2-3)$，则

$\varphi'(x)=-e^{-x}(x^2-3)+e^{-x}\cdot 2x=-e^{-x}(x+1)(x-3)$，解 $\varphi'(x)=0$，得 $x_1=-1,x_2=3$， ……3 分

由此可得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	单调递减	$-2e$	单调递增	$6e^{-3}$	单调递减

故 $\varphi(x)$ 当 $x=-1$ 时取极小值 $-2e$；当 $x=3$ 时取极大值 $6e^{-3}$，又当 $x\to-\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to 0$，因此 ……6 分

①当 $m<-2e$ 时方程无实根；

②当 $-2e<m\le 0$ 及 $m=6e^{-3}$ 时，方程有两个实根；

③当 $0<m<6e^{-3}$ 时方程为三个实根；

④当 $m>6e^{-3}$ 时，方程有一个实根. ……10 分

（18）证　（Ⅰ）由于

$$I_n\overset{x=-t}{=}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nt}{(1+2^{-t})\sin t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^t\sin nt}{(1+2^t)\sin t}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2^x\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx-I_n,$$

所以 $I_n=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx\overset{奇偶性}{=}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$. ……5 分

（Ⅱ）当 $n\ge 2$ 时，$I_n-I_{n-2}=\int_0^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\pi}\cos(n-1)xdx=\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi}=0$，

得 $I_n=I_{n-2}$．又 $I_0=0,I_1=\pi$，所以 $I_n=\begin{cases}I_0, & n为偶数,\\ I_1, & n为奇数\end{cases}=\begin{cases}0, & n为偶数,\\ \pi, & n为奇数.\end{cases}$ ……10 分

（19）解　$\frac{\partial z}{\partial x}=f+xf_1'+xy^2\varphi' f_2'$； ……2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'\cdot(-1)+f_2'\varphi'2xy+x[(f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\varphi'2xy)]$$

$$+xy^2\varphi'[(f''_{21}\cdot(-1)+f''_{22}\varphi'2xy)]+xy^2f'_2\varphi''\cdot 2xy+2xy\varphi'f'_2$$

$$=-f'_1+4xy\varphi'f'_2+2x^2y^3\varphi''f'_2-xf''_{11}+(2x^2y-xy^2)\varphi'f''_{12}+2x^2y^3\varphi'^2f''_{22},$$ ……6 分

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2}=1$，故

$$\varphi(1)=1,\varphi'(1)=0,\varphi''(1)=2,$$ ……8 分

从而

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=-f'_1(0,1)+4f'_2(0,1)-f''_{11}(0,1).$$ ……10 分

(20)证　(Ⅰ)由于 $\ln(1+x)-\ln1=\dfrac{x}{1+\xi}$，其中 $0<\xi<x$，所以 $1<1+\xi<1+x$，得 $\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$，

故 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{x}{1+\xi}<x$，即得 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.　……4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $\dfrac{xt}{1+xt}<\ln(1+xt)<xt$，其中 $x>0,0<t<1$，$\dfrac{x}{1+xt}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$.

由于 $0<t<1$，故 $\dfrac{x}{1+xt}>\dfrac{x}{1+x}$，得 $\dfrac{x}{1+x}<\dfrac{\ln(1+xt)}{t}<x$，进而

$$\frac{x}{1+x}\cos\frac{\pi}{2}t<\frac{\ln(1+xt)}{x}\cos\frac{\pi}{2}t<x\cos\frac{\pi}{2}t,$$ ……8 分

在 $(0,1)$ 内对 t 积分得 $\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{x}{1+x}<I(x)<\dfrac{2}{\pi}x$，故 $\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}<\dfrac{I(x)}{x}<\dfrac{2}{\pi}$. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{2}{\pi}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.　……10 分

(21)证　(Ⅰ)用反证法. 假设 $g(b)-g(a)=g'(a)(b-a)$，由 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使 $g(b)-g(a)=g'(\xi_1)(b-a)$，从而由假设知 $g'(\xi_1)=g'(a)$，再由 Rolle 中值定理知，存在 $\xi_2\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$，使 $g''(\xi_2)=0$，这与 $g''(x)\neq0$ 矛盾，因此 $g(b)-g(a)\neq g'(a)(b-a)$.　……4 分

(Ⅱ)令 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a),G(x)=g(x)-g(a)-g'(a)(x-a)$，则

$$F(a)=G(a)=0,\quad F'(a)=G'(a)=0,\ 且 F''(x)=f''(x),G''(x)=g''(x),$$ ……7 分

故对 $F(x),G(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次运用 Cauchy 中值定理得，

$$\frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}=\frac{F(b)}{G(b)}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi_3)}{G'(\xi_3)}=\frac{F'(\xi_3)-F'(a)}{G'(\xi_3)-G'(a)}=\frac{F''(\xi)}{G''(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)},$$

其中$\xi_3\in(a,b)$，$\xi\in(a,\xi_3)\subset(a,b)$． ……11 分

（22）解 由题意可知$r(A)=2$，且有

$$\begin{cases}\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_1+2\alpha_2+0\cdot\alpha_3+\alpha_4=0,\\ -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+0\cdot\alpha_4=0,\end{cases}\quad 得\quad \begin{cases}\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\\ \alpha_4=-\alpha_1-2\alpha_2,\\ \beta=2\alpha_1-5\alpha_2+0\cdot\alpha_3,\end{cases}$$

可知α_1,α_2线性无关，故$r(B)=2$，并由此知$By=0$的基础解系中只含一个向量，且$(2,-5,0)^T$为$By=\beta$的一个特解.

……6 分

又由$-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$知$(-1,1,1)^T$为$By=0$的非零解，可作为基础解系，故$By=\beta$的通解为

$$y=\begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R.$$ ……11 分

（23）解 （Ⅰ）二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&-1&2\\a&2&0\end{pmatrix}$，$|A|=a^2-4$． ……2 分

设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+(-1)+0=0$．若$a>2$，则$|A|>0$，故$\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0$．由此知$A$的特征值为正负负，故$A$的规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$． ……7 分

（Ⅱ）由题意知$|A|=0$，从而$a^2=4$，从而$|\lambda E-A|=\lambda^3-(5+a^2)\lambda-a^2+4=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$，所以在正交变换下的标准形为$3y_1^2-3y_2^2$． ……11 分