**绝密★启用前**

# 2019 年全国硕士研究生入学统一考试

# 数 学（一）

（科目代码:304）

（模拟试卷 2）

## 考生注意事项

1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。

2. 答案必须书写在答题纸指定的位置上，写在其他地方无效。

3. 填（书）写必须使用蓝（黑）色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。

4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。

【参考答案】

一、选择题：1～8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分.

（1）函数 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处无定义，因而间断.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln|x^2-1|}=0,\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{\ln|x^2-1|}=\infty,\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\pm\sqrt{2}}f(x)=\infty$，故 $x=0,-1,\pm\sqrt{2}$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，答案 D.

（2）【解】：由题设知 $g(0)=g'(0)=0$， $f'(0)=0$， $f''(x)=2x\cos x^2+g(x)$， $f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to0}[2\cos x^2+\dfrac{g(x)}{x}]=2$，故点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。答案 C.

（3）【解】：答案（A）.

（4）　【解】　$u_n^2+v_n^2\ge2|u_nv_n|$ 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n{}^2$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，即则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，答案（C）.

（5）【解】：因为 $\beta_1$ 不可由 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 线性表示，而 $\beta_2$ 可由 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 线性表示，所以 $\beta_1+\beta_2$ 不可由 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ 线性表示，从而 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\beta_1+\beta_2$ 线性无关，故选（D）.

（6）【解】答案：C.

（7）【解】由于 $P(C)=0$，所以对任何事件 $A$，均有 $P(AC)=0,P(A\cup C)=P(A),P(A\bar{C})=P(A)$，又由 $P((A\cup C)(B\cup\bar{C}))=1-P(\overline{(A\cup C)}\cup\overline{(B\cup\bar{C})})=1-P((\bar{A}\bar{C})\cup(\bar{B}C))=1-P(\bar{A}\bar{C})=1-P(\bar{A})=P(A)$；而 $P(A\cup C)=P(A),P(B\cup\bar{C}))=P(B)+P(\bar{C})-P(B\bar{C})=1$，所以 $A\cup C$ 与 $B\cup\bar{C}$ 独立，答案（C）.

（8）【解】 $E(\dfrac{1}{X^2})=\int_0^2\dfrac{1}{x^2}\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{3}{4}$；　答案（C）.

二、填空题:9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) 【解】：有题设有 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，所以 $[f(\dfrac{1-x}{1+x})]'\Big|_{x=0}=f'(\dfrac{1-x}{1+x})\times\dfrac{-2}{(1+x)^2}\Big|_{x=0}=-1$，

因此曲线 $y=f(\dfrac{1-x}{1+x})$ 在 $x=0$ 处的法线方程是 $\dfrac{y-2}{x-1}=1$，即为 $y=x+1$.

（10）【解】由题设 $y'(0)=0,y''(0)=-k$ , $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y'(x)}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y''(x)}{4}=-\dfrac{k}{4}$.

（11）【解】　$s=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec xdx=\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln(2+\sqrt{3})$.

（12）【解】：$\oint\limits_{\Gamma}x^2\,\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oint\limits_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$.

（13）【解】答案：1.

（14）【解】由于 $\bar{X}-X_{n+1}\sim N(0,\frac{1+n}{n}\sigma^2)$，$\frac{\bar{X}-X_{n+1}}{\sqrt{\frac{1+n}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，$\therefore \frac{n}{n+1}\frac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，又由于

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，由 $\chi^2$ 分布定义与 $\bar{X}$，$S^2$ 的独立性知，$\frac{\frac{n}{n+1}\frac{(\bar{X}-X_{n+1})^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}\sim F(1,n-1)$

$\Rightarrow \frac{\frac{n}{n+1}(\bar{X}-X_{n+1})^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，常数 $C=\frac{n}{n+1}$.

三、解答题:15～23 小题，共 94 分.

（15）【解】：令 $y=\left(\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{(x-\tan x)^2}}$, $\ln y=\frac{\ln\int_{-\infty}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t]}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(1-\cos t)\,\mathrm{d}t}{(x-\tan x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x(1-\cos x^2)}{2(x-\tan x)(1-\sec^2 x)}$$

$=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5}{(x-\tan x)\tan^2 x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x}=-\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{1-\sec^2 x}=3$，所以原式 $=e^3$.

（16）【解】：$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}$，

解方程组 $\begin{cases}-2x(x^2-y^2-1)e^{-x^2-y^2}=0,\\-2y(x^2-y^2+1)e^{-x^2-y^2}=0.\end{cases}$ 得函数 $z$ 在集合 $D$ 内有三个驻点 $(0,0),(0,1),(1,0)$.

（1）在点 $(0,0)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=2, B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=0, C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=-2$，

$AC-B^2=-4<0$，因此 $(0,0)$ 不是函数 $z$ 的极值点；

（2）在点 $(0,1)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,1)}=\frac{4}{e}, B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=0, C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,1)}=\frac{4}{e}$，

$AC-B^2=\frac{16}{e^2}>0, A>0$，因此 $(0,1)$ 是函数 $z$ 的极小值点，且 $z$ 在 $(0,1)$ 处取得的极小值为 $z(0,1)=-\frac{1}{e}$；

（3）在点 $(1,0)$ 处 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,0)}=-\frac{4}{e}, B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,0)}=0, C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(1,0)}=-\frac{4}{e}$，

$AC-B^2=\frac{16}{e}>0, A<0$，因此 $(1,0)$ 是函数 $z$ 的极大值点，且 $z$ 在 $(0,1)$ 处取得的极大值为 $z(1,0)=\frac{1}{e}$.

（17）【解】设 $D_1: x^2+y^2\le1, x\ge0, y\ge0$，由对称性：

$$I=\iint_D\frac{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}d\sigma=2\iint_{D_1}\frac{x^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}(1-\frac{1}{1+x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}(1-\ln2).$$

（18）【解】:（I）$\int_0^x f(t)dt = 2\int_0^x [f(x)-f(t)]dt,\ f(x)=2xf'(x),\ f(x)=C\sqrt{x},\ f(1)=2, C=2$；

（II）$V = 4\pi\int_0^1 xf(x)dx = 4\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \dfrac{8\pi}{5}$.

（19）【证明】:（I）则原不等式等价于$t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>0,(t>0)$.

令 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t), t\in[0,+\infty)$，则 $f(0)=0$，

$$f'(t)=1-\frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{1+t}}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2}{2\sqrt{1+t}},$$

令 $g(t)=2\sqrt{1+t}-\ln(1+t)-2$，则 $g(0)=$（，$g'(t)=\dfrac{\sqrt{1+t}-1}{1+t}$，当 $t>0$ 时 $g'(t)>0$，因而有 $f'(t)>0$，即函数 $f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)$ 在区间$[0,+\infty)$ 上单增，因而当$t>0$时有

$$f(t)=t-\sqrt{1+t}\ln(1+t)>f(0)=0.$$

原不等式得证；

（II）作变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，原不等式等价于 $\dfrac{t^2}{1+t}>\ln^2(1+t)$，令 $F(t)=\dfrac{t^2}{1+t}-\ln^2(1+t)$，

由于 $F'(t)=\dfrac{t^2+2\mathrm{t}}{(1+t)^2}-2\dfrac{\ln(1+t)}{1+t}=\dfrac{t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t)}{(1+t)^2}$,

再令 $\varphi(t)=t^2+2t-2(1+t)\ln(1+t),\ \varphi'(t)=2(t-\ln(1+t))>0\quad(t>0)$

所以 $\varphi(t)\nearrow$，又 $\varphi(0)=0$，即 $\varphi(t)>0\quad(t>0)$，代入上式知 $F'(t)>0\Rightarrow F(x)\nearrow$, 又 $F(0)=0$，则 $F(t)>0\ (t>0)$，不等式成立。

（20）【解】:（I）由 $B(\alpha_1,\ \alpha_2)=0$,有$(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=0$，所以 $B^{\mathrm{T}}$ 的列向量是方程组$(\alpha_1,\ \alpha_2)^{\mathrm{T}}x=0$ 的解。解此方程组的基础解系$\left(1\quad 2\quad 1\quad 0\right)^{\mathrm{T}},\left(-1\quad -1\quad 0\quad 1\right)^{\mathrm{T}}$，故矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(II) 由于两个方程组同解，那么 $\alpha_1,\ \alpha_2$ 必是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，解此方程组

$$\begin{pmatrix}1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_1 & 4 & a_2 & a_3\\ 2 & 7 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0 \text{ 即}\begin{cases}1\text{-}2a_2+3a_3-a_4=0\\ a_2-2a_3+a_4=0\\ a_1-8+3a_2-a_3=0\\ 4-2a_2+a_3=0\end{cases}$$，解出 $a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_4=1$；

(III) 由于 $Ax=0$ 的通解是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1\quad -2k_1+k_2\quad 3k_1-2k_2\quad -k_1+k_2)^T$,因为 $x_3=-x_4$,即 $3k_1-2k_2$=$k_1$-$k_2$,，即 $k_2$=$2k_1$，所以 $Ax=0$ 满足条件 $x_3=-x_4$ 所有解为（$k\quad 0\quad -k\quad k$）$^{\mathrm{T}}$,k 为任意常数.

（21）【解】: （I）$|\lambda E-A|=(\lambda-6)^2(\lambda+2)=0$，得 $A$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=-2$，由 $A$ 与对角阵相似知 $\lambda_1=\lambda_2=6$ 的有两个线性无关的特征向量，即 $(6E-A)x=0$ 得基础解系有两个解向量 $3-r(6E-A)=2$，故 $r(6E-A)=1$，$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -8 & 4 & 0\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，得 $a=0$。此时二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+10x_1x_2$$

$=2(x_1+\frac{5}{2}x_2)^2-\frac{21}{2}x_2^2+6x_3^2$，令$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{5}{2}x_2\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，$\begin{cases}x_1=y_1-\frac{5}{2}y_2\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$ 即 $X=\begin{pmatrix}1&-\frac{5}{2}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}Y$，则有

$$f=X^TAX=Y^TC^TACY=2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2$$

（II） $X^TAX=0$ 即 $2y_1^2-\frac{21}{2}y_2^2+6y_3^2=0$ 表示锥面.

（22）【解】 由二维均匀分布定义可知，概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\0, & 其他\end{cases}$ 其中 $D$ 的面积为：$S_D=2$

（I） $X$ 边缘密度函数 $f_X(x)=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2x},\quad 1<x<e^2$；

条件密度函数为 $f_{Y/X}(y/x)=\begin{cases}x, & 0<y<\frac{1}{x}\ (1<x<e^2)\\0 & 其他\end{cases}$

（II）由（I）的条件概率密度函数知，当 $X=\frac{3}{2}$，$f_{Y/X=\frac{3}{2}}(y)=\begin{cases}\frac{3}{2}, & 0<y<\frac{2}{3}\\0, & 其他\end{cases}$，

由此 $P(Y<\frac{1}{2}\mid X=\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}dy=\frac{3}{4}$ .

（III） $E(XY)=\frac{1}{2}\int_1^{e^2}xdx\int_0^{\frac{1}{x}}ydy=\frac{1}{4}\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}$.

（23）【解】（I）由于 $\mu=E(X)=\int_c^{+\infty}x\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}dx=\theta c^\theta\int_c^{+\infty}x^{-\theta}dx=\frac{c\theta}{\theta-1}$；令 $\mu=\bar{X}$，

所以 $\frac{c\theta}{\theta-1}=\bar{X}\quad\Rightarrow c\theta=\bar{X}(\theta-1)$，可知 $\theta$ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$；

（II）求最大似然估计，

1） $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta c^\theta x^{-(\theta+1)}=\theta^n c^{n\theta}(x_1x_2\cdots x_n)^{-(\theta+1)}$；

2） $\ln L=n\ln\theta+n\theta\ln c-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$，$\frac{dL}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+n\ln c-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

3）由此解得 $\theta$ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln c}$.