

2014 第七届“认证杯”数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了中国大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们参赛选择的题号是（从 A/B/C/D 中选择一项填写）： A

我们的参赛报名号为（如果赛区设置报名号的话）： 1090

所属学校（请填写完整的全名）： 西交利物浦大学

参赛队员（打印并签名）：1. 黄戴赟

2. 刘清嘉

3. 徐一方

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 无

日期： 2014 年 5 月 18 日

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

2014 第七届“认证杯”数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人									
评分									
备注									

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

最佳轮胎花纹模型

摘要

轮胎表面的花纹主要对轮胎的噪声，防滑性，侧偏，牵引性，散热，防滑等性能产生影响，由于车辆的自重和载荷不同，路面的粗糙、干湿不同，行驶时对速度和噪声的限制不同，车胎花纹的选择必然会有所不同。本文为解决轮胎设计这一棘手问题，建立最优化模型，针对不同需求情况设计出合理有效的轮胎花纹。

本文根据中档轿车、中型货车以及铲雪车的不同的车辆情况、使用需求以及常见的行驶路面对这三种常见交通工具的最优适用花纹进行了详细的分析。我们通过查找以上三种车辆的相关数据即法律规定，确定了它们常用行驶路面的路面状况。根据不同的路面状况，我们分析得到了各种轮胎在设计其花纹时分别需要满足的要求。之后，参考本队在第一阶段中摸索出的结论，我们在众多要求中选择出最重要的一条作为目标函数，其余的要求作为限制条件，建立最优化模型并用纯数学方法求解。

最后我们对所建立的模型得到的结果进行了客观有效的评价和改进。总体来说，本文中提出的模型与实际符合度较好，具有较强的实用价值。

关键词：轮胎花纹 最优化模型 中档轿车 中型货车 铲雪车

Abstract

The tires' patterns have huge influence on the different performance of tires such as noise, antiskid, skewing, heat dissipation and skid resistance. Because of the different weight, load, roughness and humidity, the speed and the noise could be differently limited by the cars. Thus, the patterns of the tires need to be selected carefully. This essay is aimed to solving the problem of pattern design by the optimizing model and designing reasonable and effective patterns of tires different situations.

According to the different conditions of middle-grade sedan, medium-sized trucks as well as the different vehicles of the snowplows, use requirements and common road, we analyzed optimal applicable pattern in detail on the three common traffic tools. We found the data of three kinds of vehicles in law, identifying their common road conditions. Based on different road conditions, we respectively analyzed the all three kinds of tires in its patterns and found the requirements of the design. After that, we utilized the conclusion in the first stage modeling and we selected one of the most important requirements as the objective function while making others as conditions of limited to establish optimizing models which we solved them by pure mathematics method.

Finally, we carried out on the results of the proposed model the objective and effective evaluation and improvement. In general, the model this article put forward has the good actual conformity degree and strong practical value.

一、问题背景与重述

轮胎是车辆唯一与地面接触的部件，因此轮胎的性能直接影响到车辆的性能。相关数据表明，46%的交通事故是由轮胎故障引起的，由此可见怎样设计轮胎使其具有耐磨性强，操控性强，稳定性强的特性是当今一个很棘手的课题。轮胎设计有四大要素，及花纹（表面形状）、轮廓（整体形状）、材料和结构，其中花纹设计是最复杂，需要考虑因素最多，也是对轮胎性能影响最大的一部分。根据第一阶段对建模结论的分析，我们已经得知纵向纹路可以显著减少噪音，交叉花纹的附着性能较好，顺向花纹较不容易发生侧偏且有助于轮胎有更大的负荷等。但考虑到实际设计轮胎问题中，胎面花纹对轮胎性能的影响是多方面的，有时甚至是相互影响，相互矛盾的，例如当设计的轮胎被要求有足够强的抓地性能时，其产生的噪音也会比较大。因此，从设计轮胎的角度来说，我们不可能面面俱到，但是我们可以做到根据轮胎最主要的用途追求最优的选择。第二阶段的问题要求我们根据不同车辆的使用需求，车辆的基本情况，以及其最常见的行驶路面，建立模型设计出最合理的轮胎花纹，并讨论模型的优点及局限性。

目标任务：为分析确定不同车辆使用需求、基本情况及常用行驶路面的条件下的最合理的轮胎花纹，建立三个最优化数学模型分别研究中档轿车，中型货车及铲雪车的最优适用花纹，并使其具有一定的可行性与推广性。

二、模型假设

1. 假设所有轮胎由相同材料制成，其中各组分比例相同；
2. 假设人为操控稳定性相同；
3. 假设起始状态下轮胎磨损程度相同；
4. 假设轮胎充气情况相同；
5. 假设轮胎花纹重复排列。

三、符号约定

符号	意义
θ	轮胎横向花纹与轮胎中线的夹角
γ	帘线的角度
a	车胎接地部分花纹沟的总面积
A	车胎接地部分总面积
β	车胎接地部分花纹沟的总面积与接地部分总面积之比
L	车胎接地部分的印痕长轴长度
B	车胎接地部分的印痕短轴长度
n_1	周向花纹沟的个数

n_2	横向花纹沟的个数
d_1	周向花纹沟的宽度
d_2	横向花纹沟的宽度
l_2	花纹块的周向长度
l_3	花纹块的横向长度
h	花纹沟的深度
α	轮胎花纹的安静系数
m	轮胎的承重
φ	轮胎周向花纹与轮胎中线的夹角

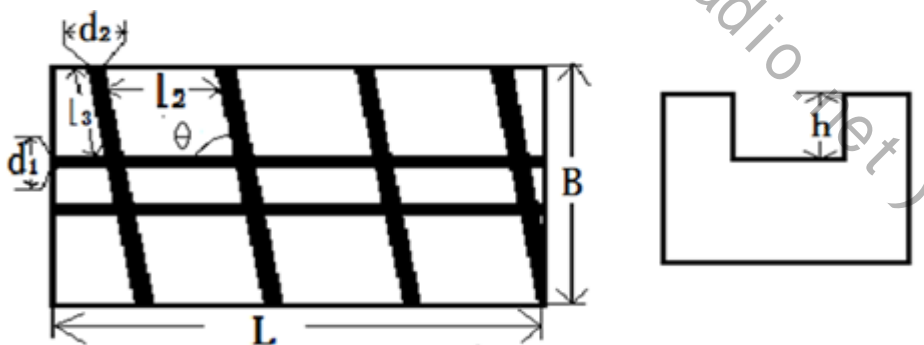
四、模型的建立与求解

1. 城区轿车的轮胎花纹设计模型

模型一建立：

随着科技的进步，城市里，轿车越来越广泛的参与到了人们的日常生活中。其中中档轿车是国内产销最大的一个车种，车型也最多，例如出租车，隶属各单位的公车等。它们常在城区中上下班高峰中起到运输人员的作用。下面，将基于城区轿车车胎的所需性能为其设计花纹。

城市公路条件较好，多为水泥沥青材料构成，适合普通的车胎花纹。对于城区行驶的轿车而言，在稳定性和防滑性都有了一定的保证后，控制噪声便是重要的了。首先控制稳定性和防滑性。因为纵向花纹可降低滚动阻力，减小噪音，所以纵向花纹在花纹设计中成为首选。为了保证稳定性，使车轮不易发生侧偏，顺向花纹是最佳的选择^[2]，于是基本的城区轿车轮胎花纹式样如图一所示：



图一：城区轿车车胎花纹大致式样及各参数意义

并且为了使轮胎的内部结构更为稳定且一定构成顺向，花纹角度最好与帘线角度 γ 差 3° 以上^[1]并小于帘线的余角，于是规定花纹的倾角满足：

$$3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 80^\circ - \gamma \quad (1)$$

对于普通花纹，为了保障车胎不易打滑，花纹块的饱和度（花纹块占行驶面积的百分比）应在70%-80%^[1]，所以花车胎接地部分花纹沟的总面积与接地部分总面积之比 β 应满足，

$$20\% \leq \beta = \frac{a}{A} = \frac{n_1 d_1 L + n_2 d_2 l_3 \cos \theta}{LB} \leq 30\% \quad (2)$$

为了满足车轮散热的需要，来保障轮胎的使用寿命，花纹块的深度不宜过大，但考虑到磨损和排水，也不宜过浅，所以深度 h 需满足：

$$0.0065 \leq h \leq 0.0070 \quad (3) \quad [1]$$

花纹块的宽度需要大于花纹深度的 2 倍^[1]，所以有：

$$l_3 \geq 2h \quad (4)$$

由于斜交胎的压地印记中部变窄，会导致该部位的花纹沟变窄^[1]，所以中部的花纹沟可设计较宽。用不等式表示为：

$$d_1 \geq d_2 \quad (5)$$

此外，为保证花纹位于轮胎接地面上，图一可得花纹的各参数在周向，横向需分别满足：

$$n_2(d_2 + l_2) = L \quad (6)$$

$$n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \quad (7)$$

联立（1）到（6）六个不等式，

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 80^\circ - \gamma \\ 20\% \leq \beta = \frac{a}{A} = \frac{n_1 d_1 L + n_2 d_2 l_3 \cos \theta}{LB} \leq 30\% \\ 0.0065 \leq h \leq 0.0070 \\ l_3 \geq 2h \\ d_1 \geq d_2 \\ n_2(d_2 + l_2) = L \\ n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \end{array} \right.$$

在它们共同保障轮胎的稳定性，防滑性的同时，使得安静系数 α 取得最大值^[2]。

$$\alpha = \lg \frac{l_2^2}{ml_3} \quad (8)$$

以此求出合适的 $n_1, n_2, d_1, d_2, l_2, l_3, h, \theta$ ，设计出合理的轮胎花纹。

模型一求解：

基于中档轿车的整备质量在 1000kg-1300kg 之间^[6]，即单个轮胎的负荷在 2500N-3250N。而依据交通法的规定城区限速，轿车的一般行驶速度在 60km/h 左右^[7]。因此，对于负荷为 3500N，帘角 $\gamma = 53^\circ$ 的斜交胎以 61.3km/h 的速度行驶时，接触地面的尺寸约为 $0.12\text{m} \times 0.08\text{m}$ ^[1]。

代入数据，于是原（1）到（6）不等式组成为：

$$\begin{cases} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 80^\circ - 53^\circ & (1^*) \\ 20\% \leq \beta = \frac{a}{A} = \frac{n_1 d_1 0.12 + n_2 d_2 l_3 \cos \theta}{0.12 \times 0.08} \leq 30\% & (2^*) \\ 0.0065 \leq h \leq 0.0070 & (3^*) \\ l_3 \geq 2h & (4^*) \\ d_1 \geq d_2 & (5^*) \\ n_2(d_2 + l_2) = 0.12 & (6^*) \\ n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = 0.08 & (7^*) \end{cases}$$

对于 (1*) 式有：

$$3^\circ \leq |53^\circ - \theta| \leq 27^\circ$$

取绝对值号，得： $3^\circ \leq 53^\circ - \theta \leq 27^\circ$ 或 $3^\circ \leq \theta - 53^\circ \leq 27^\circ$

$$\text{即 } 26^\circ \leq \theta \leq 50^\circ \text{ 或 } 56^\circ \leq \theta \leq 80^\circ$$

$\because \theta$ 是轮胎横向花纹与轮胎中线的夹角，它的范围满足

$$45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$\therefore \text{取 } 56^\circ \leq \theta \leq 80^\circ \quad (1^{**})$$

将 (2*) 式的分母分别乘到不等式的两端，可得

$$1.92 \times 10^{-3} \leq 0.12 n_1 d_1 + n_2 d_2 l_3 \cos \theta \leq 2.88 \times 10^{-3} \quad (2^{**})$$

$2 \times (3^*)$ 式，可得

$$0.013 \leq 2h \leq 0.014 \quad (3^{**})$$

由 (6*) 移向可得，

$$n_2 d_2 = 0.12 - n_2 l_2 \quad (6^{**})$$

对于 (8) 移向，有

$$l_2 = \sqrt{\alpha l_3} \quad (8^*)$$

把 (6**), (8*) 带入 (2**), 可得

$$\begin{aligned} 1.92 \times 10^{-3} &\leq 0.12(0.08 - n_2 l_3 \sin \theta) + (0.12 - n_2 l_2) l_3 \cos \theta \\ &= 9.6 \times 10^{-3} - 0.12 n_2 l_3 \sin \theta + 0.12 l_3 \cos \theta - n_2 \sqrt{\alpha l_3}^{\frac{3}{2}} \cos \theta \\ &\leq 2.88 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

因为希望 α 尽量大，为限定其最小值，看不等式左边，有：

$$\begin{aligned}\sqrt{a} &\geq \frac{6.72 \times 10^{-3} - 0.24n_2h \sin \theta + 0.24h \cos \theta}{n_2 \sqrt{2}^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} \cos \theta} \\ &= \frac{6.72 \times 10^{-3}}{n_2 \sqrt{2}^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}} \cos \theta} - \frac{0.24 \sin \theta}{\sqrt{2}^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} \cos \theta} + \frac{0.24}{h^{\frac{1}{2}}} \quad (2^{***})\end{aligned}$$

为了使 \sqrt{a} 的值最大， n_2 ， θ 和 h 应取最小值。所以因此取：

$$h = 0.0065, \theta = 80^\circ$$

根据 $a' = \frac{l_2^2}{l_3}$ ，可知欲使 a' 最大， l_3 需最小，因此令 $l_3 = 2h$ （ $0.0065 \leq h \leq 0.0070$ ）

又由于 $\sqrt{a'} > 0$ ，对（2***）变形有：

$$\frac{6.72 \cdot 10^{-3}}{n_2 \sqrt{2}^{\frac{3}{2}} \times 0.0065 \times \cos 80^\circ} \geq \frac{0.24 \sin 80^\circ}{\sqrt{2}^{\frac{3}{2}} \cos 80^\circ} - 0.24$$

可解得：

$$n_2 \leq 8.72$$

n_2 是正整数，对 n_2 的值从1开始进行试验，由于当 n_2 取值1、2、3、4时，得出 d_2 的值是负数，不合理，舍去。当 $n_2 = 5$ 时，得出结论满足条件。

将 $n_2 = 5$ 代入（6*），得到：

$$d_2 + l_2 = 0.024$$

代入（7*）得到：

$$n_1 d_1 + 0.013 \sin 80^\circ = 0.08 \Rightarrow n_1 d_1 = 0.067$$

代入（2*）得到：

$$\frac{1.92 \times 10^{-3} - 0.12 n_1 d_1}{n_2 \times 0.013 \cos 80^\circ} \leq d_2 \leq \frac{2.88 \times 10^{-3} - 0.12 n_1 d_1}{n_2 \times 0.013 \cos 80^\circ}$$

$$\text{所以，我们得到当 } n_2 = 5 \text{ 时 } \begin{cases} 0 < d_2 < 0.085 \\ 0 < l_2 = 0.024 - d_2 < 0.024 \\ n_1 d_1 = 0.016 \\ d_1 > d_2 \end{cases}$$

$$\text{又} \because n_{1\min} = 1$$

$$\therefore d_{1\max} = 0.016$$

$$\text{又} \because d_1 > d_2$$

$$\therefore 0 < d_2 < 0.016$$

$$0.008 < l_2 = 0.024 - d_2 < 0.024$$

综上，关于城区轿车的轮胎花纹，其各参数满足：

$$\begin{cases} n_1 d_1 = 0.016(m) \\ 0 < d_2 < \frac{0.016}{n_1}(m) \\ n_2 = 5 \\ 0.008m < l_2 < 0.024(m) \\ l_3 = 0.013(m) \\ h = 0.0065(m) \\ \theta = 80^\circ \end{cases}$$

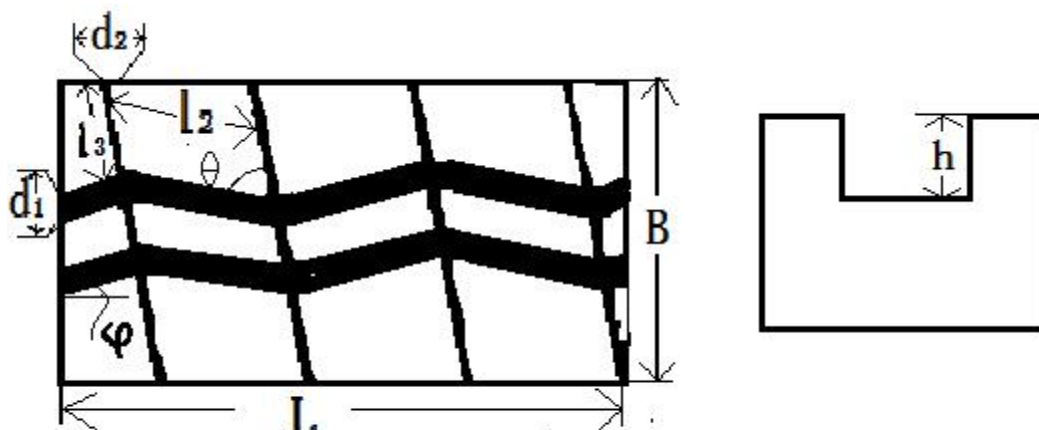
此时， β 的值为 22%，符合先前对于花纹饱和度的要求。

2. 山区中型货车的轮胎花纹设计模型

模型二建立：

为了提高总体经济的发展水平，山区的经济也需要得到发展，物资的交流成为一个重要的因素。对于需要爬坡的货车而言，拥有合适花纹的轮胎是必要的。下面，将基于山区天气多变，公路起伏不断的情况，为常在山区的中型货车设计合适的花纹。

山区公路虽也为多为水泥沥青材料构成，由于施工保养难度大，条件不如城市，适合混合式样的车胎花纹。对于山区行驶的货车而言，在噪声得到了大致的控制，稳定性有了保证后，牵引力和防滑便是重要的了。首先控制稳定性和噪音的范围。为了保证稳定性，使车轮不易发生侧偏，顺向花纹是最佳的选择，因为交叉花纹可降低混动阻力，减小噪音兼顾抓地力，所以交叉向花纹在花纹设计中成为首选^[2]。于是基本的城区轿车轮胎花纹式样如图二所示：



图二：山区货车车胎花纹大致式样及各参数意义

并且为了使轮胎的内部结构更为稳定且一定构成明显的顺向花纹，花纹角度最好与帘线角度 γ 差 3° 以上^[1]并明显小于帘线的余角，于是规定花纹的倾角满足：

$$3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - \gamma \quad (9)$$

同时为了让噪声在司机可以承受的范围，因为通常轿车的噪声是在 80dB，而在大货车或卡车里是在 90dB 左右^[3]，因此把山区货车的花纹模型与城区轿车的花纹模型相比较，把货车的噪音控制在 80dB 到 100dB 之间可以得到：

$$\lg \frac{l_{2\text{轿车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{轿车}}} \leq \lg \frac{l_{2\text{货车}}^2}{m_{\text{货车}} l_{3\text{或车}}} \leq \frac{100}{80} \lg \frac{l_{2\text{轿车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{轿车}}} \quad (10)$$

为了满足车轮散热的需要，防止因散热不当导致车胎材料的理化性质发生变软易磨损，从而来保障轮胎的使用寿命，花纹块的深度不宜过大，但考虑到磨损和排水，也不宜过浅；又由于载重货车负荷较大，压力使花纹的形变量较轿车大，对于轮胎的磨损也较为严重，为了延长寿命，深度 h 可以适当加深^[4]。所以深度 h 需满足：

$$0.0075 \leq h \leq 0.0120 \quad (11)$$

因为公路对上货车行驶的路程较多，速度较快，车轮的磨损较大，所以会适当的增加花纹沟的深度，因此，对于花纹块的宽度需要大于花纹深度的 2 倍^[1]的要求，有：

$$l_3 \approx 2h \quad (12)$$

这里选用子午胎，因为子午胎适合高速的行驶，对于它而言，不存在轮胎的不同位置形变不同^[1]，因此只需，周围花纹适合用较细的刀槽横纹使得牵引力增大^[5]。用不等式表示为：

$$d_2 \leq 0.001 \quad (13)$$

此外，为保证花纹位于轮胎接地面上，由图二可得花纹的各参数在周向，横向需分别满足：

$$n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = L \quad (14)$$

$$n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \quad (15)$$

联立不等式 (9) 到 (15),

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - \gamma \\ \lg \frac{l_2 \text{ 轿车}^2}{m_{\text{轿车}} l_3 \text{ 轿车}} \leq \lg \frac{l_2 \text{ 货车}^2}{m_{\text{货车}} l_3 \text{ 或车}} \leq \frac{100}{80} \lg \frac{l_2 \text{ 轿车}^2}{m_{\text{轿车}} l_3 \text{ 轿车}} \\ 0.075 \leq h \leq 0.120 \\ l_3 \approx 2h \\ d_2 \leq 0.001 \\ n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = L \\ n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \end{array} \right.$$

对于混合花纹, 为了保障车胎不易打滑, 花纹块的饱和度 (花纹块占行驶面积的百分比) 应在 50%-60%^[11], 所以花车胎接地部分花纹沟的总面积与接地部分总面积之比 β 应满足,

$$40\% \leq \beta = \frac{a}{A} = \frac{n_1 d_1 L + n_2 d_2 l_3 \cos \theta}{LB} \leq 50\% \quad (16)$$

以此求出合适的 $n_1, n_2, d_1, d_2, l_2, l_3, h$, 使 β 尽可能的接近 50%, 从而设计出合理的轮胎花纹。

模型二求解:

高速公路上的货车一般需要以较快的速度, 行驶较长的路程, 因此常常使用耐磨的子午线轮胎。基于中型货车的整备质量在 4000kg 左右^[8], 即单个轮胎的负荷在 1000kg。此时, 对于负荷为 1007kg, 帘角 $\gamma = 24^\circ$ 的子午线轮胎, 接触地面的尺寸约为 $0.307\text{m} \times 0.191\text{m}$ ^[9]。将这些数据带入不等式 (9) 到 (15), 可获得:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - 24^\circ \quad (9^*) \\ \lg \frac{l_2 \text{ 轿车}^2}{350 l_3 \text{ 轿车}} \leq \lg \frac{l_2 \text{ 货车}^2}{1007 l_3 \text{ 或车}} \leq \frac{100}{80} \lg \frac{l_2 \text{ 轿车}^2}{350 l_3 \text{ 轿车}} \quad (10^*) \\ 0.075 \leq h \leq 0.120 \quad (11^*) \\ l_3 \approx 2h \quad (12^*) \\ d_2 \leq 0.001 \quad (13^*) \\ n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{0.307}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = 0.307 \quad (14^*) \\ n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = 0.191 \quad (15^*) \end{array} \right.$$

对于 (9*) 式有:

$$\because 3^\circ \leq |24^\circ - \theta| \leq 36^\circ \therefore -12^\circ \leq \theta \leq 21^\circ (\text{舍}) \text{ 或 } 27^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad (1^{**})$$

又 $\because \theta$ 为横纹角度, $\therefore 45^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

2 × (11*) 式, 可得

$$0.015 < 2h < 0.02 \quad (11^{**})$$

∵ 80dB 为平均轿车噪音

∴ 取前面 l_2 轿车取值范围的中间值 $l_{2\text{轿车}} = 0.016$ ，并设此时轿车的噪声约为 80dB，对于 (10*) 式，有

$$\therefore -5.31 \leq \lg \frac{l_2^2}{1007l_3} \leq -4.25$$

$$\text{即 } 4.93 \cdot 10^{-3} \leq \frac{l_2^2}{l_3} \leq 0.057 \quad (10^{**})$$

将 (16*) 式的分母分别乘到不等式的两端，可得：

$$0.023 \leq 0.307n_1d_1 + n_2d_2l_3 \cos \theta \leq 0.029$$

令 $\beta' = 0.307n_1d_1 + n_2d_2l_3 \cos \theta$ ，得：

$$\begin{aligned} \beta' &= 0.307n_1d_1 + n_2d_2l_3 \cos \theta = 0.307(0.191 - n_2l_3 \sin \theta) + n_2d_2l_3 \cos \theta \\ &= 0.058637 - n_2l_3 \sqrt{(0.307)^2 + d_2^2} \sin(\theta - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \tan \varepsilon = \frac{d_2}{0.307}$$

欲使 β' 尽可能的大，则 $\sin(\theta - \varepsilon)$ 应该小，所以 θ 应取小，因此取 $\theta = 45^\circ$ 。

在这种情况下存在合适的 d_2, n_2, l_3 ，使得：

$$0.029637 \leq n_2l_3 \sqrt{(0.307)^2 + d_2^2} \sin(\theta - \varepsilon) \leq 0.035637$$

由于 $d_2 \leq 0.001$ ，因此 ε 极小可以忽略。

$$\text{即 } n_2l_3 \sqrt{(0.307)^2 + d_2^2} \sin 45^\circ \in [0.029637, 0.035637]$$

又由于 $0^\circ \leq \varphi \leq 45^\circ$

$$\therefore \sqrt{0.307^2 + d_2^2} n_2l_3 \sin 45^\circ \in [0.029637, 0.035637]$$

$$\therefore n_2l_3 \in [0.137, 0.164]$$

需要指出的是由于 d_2 相对很小，在 $d_2 \in [0, 0.001]$ 对此处区间的端点值无影响。

由于我们希望得到 β' 的最大值，因此取：

$$n_2l_3 = 0.164 \quad (16^{**})$$

将 (16**) 代入 (15*)，得到：

$$n_1d_1 = 0.075$$

$\because d_2 \in [0, 0.001]$ 极小，可忽略

$\therefore (14^*)$ 可以化为：

$$n_2 l_2 = \sqrt{2} \times 0.307 = 0.434 \quad (14^{**})$$

$$\therefore \sin \varphi = \frac{0.307}{n_2 l_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

将 (14^{**}) 与 (16^{**}) 联立，得到：

$$\frac{l_2}{l_3} = \frac{217}{82} \quad (16^{***})$$

将 (16^{***}) 代入 (10^{**}) 中得到：

$$1.86 \times 10^{-3} \leq l_2 \leq 0.022$$

由 (11^{**}) 和 (12^*) 中对 h 和 l_3 的限定，可知

$$l_{2\min} \approx 0.040$$

因此，取 $l_2 = 0.022$

此时 $n_2 = 20, l_3 = 8.2 \times 10^{-3}$

综上，关于山区高速公路货车，其各参数满足：

$$\begin{cases} n_1 d_1 = 0.075(m) \\ d_2 \leq 0.001(m) \\ n_2 = 20 \\ l_2 = 0.022(m) \\ l_3 = 8.2 \times 10^{-3}(m) \\ h = 0.0075(m) \\ \theta = \varphi = 45^\circ \end{cases}$$

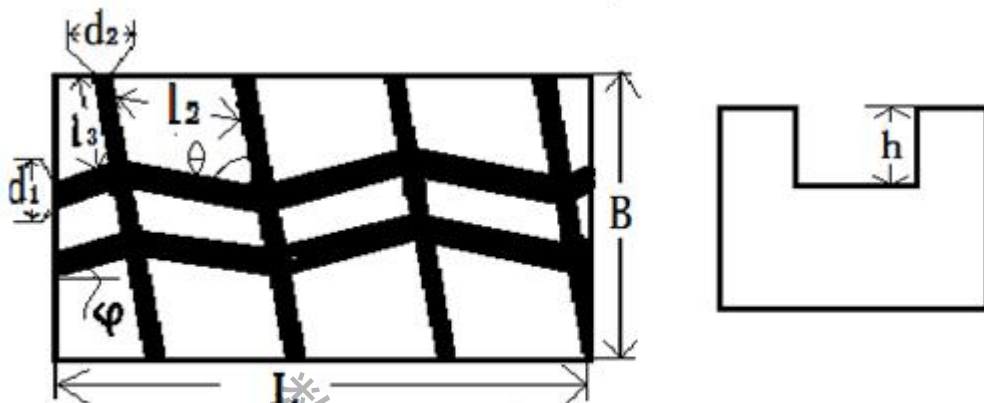
3. 铲雪车的轮胎花纹设计模型

模型三建立：

冬天马路上的积雪对人们的出行造成了不便，铲雪车这是便可发挥作用，使交通通畅。对于铲雪车而言，合适的轮胎是必备的，这才可以让它在雪地里发挥作用。防滑的轮胎成为了重要之处。下面，将基于雪地马路湿滑的特点为铲雪车设计合适的花纹。

雪天的公路湿滑，混合式样的花纹较为好用；而且铲雪车的自重较大，需要结合部分载重货车的轮胎花纹特点；此外由于处于城区，需要对噪声有所控制。对于铲雪车而言，

在噪声得到了较货车严格，但比轿车宽松的控制，稳定性有了保证后，防滑便是重要的了。首先控制噪音的范围和稳定性。因为交叉花纹可降低滚动阻力，减小噪音同时兼顾抓地力，所以纵向分量较大的交叉向花纹在花纹设计中成为首选。为了保证稳定性，使车轮不易发生侧偏，顺向花纹是最佳的选择^[2]，于是基本的城区轿车轮胎花纹式样如图三所示：



图三：铲雪车车胎花纹的大致式样及各参数的意义

并且为了使轮胎的内部结构更为稳定且一定构成明显的顺向花纹，花纹角度最好与帘线角度 γ 差 3° 以上^[1]并明显小于帘线的余角，于是规定花纹的倾角满足：

$$3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - \gamma \quad (17)$$

同时为了让噪声在司机可以承受的范围，因为通常轿车的噪声是在 80dB，而在大货车或卡车里是在 90dB 左右^[3]，因此把山区货车的花纹模型与城区轿车的花纹模型相比较，把货车的噪音控制在 80dB 到 90dB 之间可以得到：

$$\lg \frac{l_{2\text{铲雪车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{轿车}}} \leq \lg \frac{l_{2\text{铲雪车}}^2}{m_{\text{铲雪车}} l_{3\text{铲雪车}}} \leq \frac{90}{80} \lg \frac{l_{2\text{轿车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{轿车}}} \quad (18)$$

由于铲雪车负荷较大，压力使花纹的形变量较轿车大，雪天积水积雪较多，为了易于车胎上的雪、水排除，深度 h 可以适当加深^[4]。所以深度 h 需满足：

$$0.0065 \leq h \leq 0.0100 \quad (19)$$

由于铲雪车不需要以较快的速度行驶，气温较低，轮胎不会产生过多的热量，同时雪天路面积雪碎冰较多，为了保持铲雪车的自洁性，往往轮胎的花纹沟较深，所以这里不对花纹块的宽度和花纹深度的关系做限定。

对于子午胎，不存在轮胎的不同位置形变不同^[1]，过细的花纹沟不利于积雪碎冰的掉落，为了保持自洁性：

$$d_1 = d_2 \geq 0.01 \quad (20)$$

此外，为保证花纹位于轮胎接地面上，由图二可得花纹的各参数在周向，横向需分别满足：

$$n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = L \quad (21)$$

$$n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \quad (22)$$

联立不等式 (17) 到 (22),

$$\begin{cases} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - \gamma \\ \lg \frac{l_{2\text{ 轿车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{ 轿车}}} \leq \lg \frac{l_{2\text{ 铲雪车}}^2}{m_{\text{铲雪车}} l_{3\text{ 铲雪车}}} \leq \frac{100}{80} \lg \frac{l_{2\text{ 轿车}}^2}{m_{\text{轿车}} l_{3\text{ 轿车}}} \\ 0.075 \leq h \leq 0.100 \\ d_1 = d_2 \geq 0.01 \\ n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = L \\ n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = B \end{cases}$$

对于铲雪车, 因为其所行驶的道路雪块, 冰块较多, 为了保障车胎不易打滑和一定的自洁性, 参考越野车的花纹块饱和度, 它应在 40%-50%^[1], 所以花车胎接地部分花纹沟的总面积与接地部分总面积之比 β 应满足,

$$50\% \leq \beta = \frac{a}{A} = \frac{n_1 d_1 L + n_2 d_2 l_3 \cos \theta}{LB} \leq 60\% \quad (23)$$

以此求出合适的 $n_1, n_2, d_1, d_2, l_2, l_3, h$, 使 β 尽可能的接近 60%, 从而设计出合理的轮胎花纹。

基于对三种轮胎接触地面部分的分析, 将它们单位面积的花纹分别推广到整个轮胎, 这样我们就得到了被重复排列的单位花纹所完整覆盖的轮胎表面, 此时三种轮胎的花纹即为所求。

模型三求解:

铲雪车一般自重较大, 行驶于有积雪与碎冰的路面, 因此常常使用耐磨的子午线轮胎。基于铲雪车的整备质量在 2500kg 左右^[10], 即单个轮胎的负荷在 625kg。此时, 对于总负荷为 2337.5kg, 帘角 $\gamma = 24^\circ$ 的子午线轮胎, 接触地面的尺寸约为 $0.304\text{m} \times 0.134\text{m}$ ^[9]。将这些数据带入不等式 (17) 到 (22), 可获得:

$$\begin{cases} 3^\circ \leq |\gamma - \theta| \leq 60^\circ - \gamma \end{cases} \quad (17^*)$$

$$\begin{cases} \lg \frac{l_{2\text{ 轿车}}^2}{350 l_{3\text{ 轿车}}} \leq \lg \frac{l_{2\text{ 铲雪车}}^2}{625 l_{3\text{ 铲雪车}}} \leq \frac{100}{80} \lg \frac{l_{2\text{ 轿车}}^2}{350 l_{3\text{ 轿车}}} \end{cases} \quad (18^*)$$

$$\begin{cases} 0.075 \leq h \leq 0.100 \end{cases} \quad (19^*)$$

$$\begin{cases} d_1 = d_2 \geq 0.01 \end{cases} \quad (20^*)$$

$$\begin{cases} n_2(d_2 + l_2 \cos \varphi) = n_2 \left(d_2 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{0.304}{n_2 l_2} \right)^2} \right) = 0.304 \end{cases} \quad (21^*)$$

$$\begin{cases} n_1 d_1 + n_2 l_3 \sin \theta = 0.134 \end{cases} \quad (22^*)$$

对于 (17*) 式去绝对值号，有：

$$3^\circ \leq 24^\circ - \theta \leq 36^\circ \text{ 或 } 3^\circ \leq \theta - 24^\circ \leq 36^\circ$$

$$-12^\circ \leq \theta \leq 21^\circ \text{ (舍) 或 } 27^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$

因为 θ 为横纹角度，

$$\text{所以 } 45^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$$

$\therefore 80\text{dB}$ 为平均轿车噪音

\therefore 取前面 $l_{2\text{轿车}}$ 取值范围的中间值 $l_{2\text{轿车}}=0.016$ ，并设此时轿车的噪声约为 80dB ，对于 (18*) 式，有：

$$\therefore -4.78 \leq \lg \frac{l_2^2}{584l_3} \leq -4.25$$

$$9.69 \times 10^{-3} \leq \frac{l_2^2}{l_3} \leq 0.032 \quad (18^{**})$$

(22*) 移向可得：

$$n_1 d_1 = 0.160 - n_2 l_3 \sin \theta \quad (22^{**})$$

将 (23*) 式的分母分别乘到不等式的两端，可得：

$$0.02 \leq 0.304 n_1 d_1 + n_2 d_2 l_3 \cos \theta \leq 0.024$$

$$\text{令 } \beta' = 0.304 n_1 d_1 + n_2 d_2 l_3 \cos \theta,$$

由 (22**) 得：

$$\begin{aligned} \therefore \beta' &= 0.304 \times (0.160 - n_2 l_3 \sin \theta) + n_2 d_2 l_3 \cos \theta \\ &= 0.04864 - n_2 l_3 (0.304 \sin \theta - d_2 \cos \theta) \\ &= 0.04864 - n_2 l_3 \sqrt{(0.304)^2 + d_2^2} \sin(\theta - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \tan \varepsilon = \frac{d_2}{0.304}$$

欲使 β' 尽可能的大，则 $\sin(\theta - \varepsilon)$ 应该小，所以 θ 应取小，因此取 $\theta = 45^\circ$ 。

在这种情况下存在合适的 d_2, n_2, l_3 ，使得：

$$0.02464 \leq n_2 l_3 \sqrt{(0.307)^2 + d_2^2} \sin(\theta - \varepsilon) \leq 0.0286$$

考虑到 d_1, d_2 的数量级，为便于冰块或雪块从花纹沟中掉出

令

$$d_1 = d_2 = 0.01$$

即可得：

$$0.02464 \leq n_2 l_3 \left(0.215 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 \right) \leq 0.02864 \quad (23^{**})$$

由 (22**) 知：

$$n_2 l_3 = (0.134 - n_1 d_1) \sqrt{2} \quad (22^{***})$$

将 (22***) 代入 (23**), 可得：

$$0.0174 \leq (0.134 - n_1 d_1) \left(0.215 - \frac{\sqrt{2}}{2} d_1 \right) \leq 0.0203$$

由 (18**), α' 增大, 希望 l_3 小, l_2 大。

在 (22**) 中 l_3 减小, 则 n_1 增大, n_2 减小。

$$0.01141 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} d_1^2 - 0.215 d_1 \right) n_1 - 0.095 d_1 \leq -8.51 \times 10^{-3} \quad (23^{****})$$

因为希望 n_1 增大, 所以只取不等式 (23****) 的右端, 得最大值, 有：

$$\because n_1 \uparrow, \therefore \left(\frac{\sqrt{2}}{2} d_1^2 - 0.215 d_1 \right) n_1 - 0.095 d_1 = -8.51 \times 10^{-3}$$

$$n_1 = \frac{0.095 d_1 - 8.51 \times 10^{-3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} d_1^2 - 0.215 d_1},$$

$\because n_1$ 随 d_1 的减小而增大

$$\therefore d_1 = d_2 = 0.01$$

\because 希望花纹的竖直分量较大, 从而尽量减小噪声, 并利于冰雪排出 (自洁性)

即 $\sin \varphi = \frac{0.304}{n_2 l_2}$ 尽可能的小, 所以 $\varphi = 10^\circ$

$\therefore n_2 l_2$ 也需要尽可能大

(22****) 变形可得：

$$l_3 = \frac{0.134 - n_1 d_1}{n_2 \frac{\sqrt{2}}{2}} (IV^{(1)}) \quad (22^{*****})$$

(21*) 变形, 得：

$$n_2 d_2 + \sqrt{n_2^2 l_2^2 - (0.304)^2} = 0.304$$

$$l_2^2 = \frac{(0.304 - n_2 d_2)^2 + (0.304)^2}{n_2^2}$$

$$\therefore \frac{l_2^2}{l_3} = \frac{\left[(0.304 - n_2 d_2)^2 + (0.304)^2 \right] \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{(0.304 - n_1 d_1) n_2} = 0.032$$

解得：

$$n_2 = 11$$

\therefore 由 (22****) 得：

$$l_3 = 0.012$$

$$l_2 = \frac{0.304}{n_2 \sin \theta} \Rightarrow l_2 = 0.159$$

综上，关于铲雪车的轮胎花纹，其各参数满足：

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = 0.01(m) \\ n_1 = 4 \\ n_2 = 11 \\ l_2 = 0.159(m) \\ l_3 = 0.012(m) \\ h = 0.010(m) \\ \theta = 45^\circ \\ \varphi = 10^\circ \end{cases}$$

五、模型评价及改进

模型优点

- 1、三种模型，将物理知识推广到了方程组，通过求解不等式和方程组，通过最优化模型得出了最优可行域。
- 2、模型通过分析轮胎接触地面部分的花纹，先计算有限区域花纹的形状，深度，角度，数量，从而推广到整个轮胎，精细而准确。
- 3、模型选择了中档轿车，中型货车，铲雪车三种车辆，细致分析了其不同的性能和路面情况，涉及范围广。
- 4、模型通过大量搜集网络上的资料，采集经验数据，定量计算出了各个数据的结果可行域，且符合网路上的资料，可行性较强。

5、利用大量真实现有轮胎资料，检验了模型，证明模型的可行性且推广性较强。

模型缺点

- 1、模型在计算中部分数据为网络上获取的经验数据，虽然准确但不能代表所有车胎，有一定局限性。
- 2、车辆的用处很多，在考虑花纹影响的性能时，只能选取特定情况，且分析的主要性能为该情况下最重要的性能。但实际情况下，轮胎的功用多种多样，对于不同性能的考虑权重不同，所以我们设计的轮胎花纹更适用于极端情况。
- 3、本次建模数据来源为网络的经验公式，未实际找到轮胎来做实体测量。

模型改进

- 1、根据现实的轮胎使用情况，做实体测量，用大量真实数据来修正模型。
- 2、模型分析性能，因为考虑最优情况，而缺乏一些综合考虑不同性能参数的情况，收集实际路面情况，道路环境的数据来补正。
- 3、基于轮胎花纹所影响的性能众多，我们只挑选了其中主要的性能进行分析，模型在实际推广中，应当加入其余特性一并考虑。

参考文献

1. 刘锦春,《轮胎设计与工艺学》[OL].
http://wenku.baidu.com/link?url=G3UV21XOhrGQFPBdBR_7Inb8rOm4uyuBQle8zhhwNu7qdHOtBv2bRYSmdOxRJahx_H0og_AWfl9PwTpBXHRjKtmtXT8sqQD-kSse_djwyly&qq-pf-to=pcqq.discussion [2014 年 5 月 17 日]
2. 黄戴赞, 刘清嘉, 徐一方,《基于层次分析法理论的轮胎花纹问题的求解》[C]
3. Dougals C. Giancoli, Physics for Science and engineers, [M]. London: Pearson Education, Inc. p428.
4. J.R.Cho, HW.Lee, W.B.Jeong, K.M.Jeong, K.W.Kim, 肖大玲.《三维周期花纹轮胎滚动阻力和温度分布的数值估算》[J].《轮胎工业》 2014, 50 (1): 619-624
5. BonHomme, P. Tread comprising dual orientation incisions, CN101547799 A [P], 2009-9-30.
6. 张富汉. 轿车种类怎样划分[N]. 华商报, 2006, 12 (14): 汽车公园.
7. 北京市公安局公安交通管理局. 道路限速有哪些法律规定[OL].:
<http://www.bjjtgl.gov.cn/publish/portal4/tab1070/info46108.htm>, 2013-03-15
8. 百度文库.《货车分类》[OL].:
http://wenku.baidu.com/link?url=uqyxB9FzaSUmNXz-d07zdf6PXQFcDCr5xRqVJTfyZ4bBpdeDmfivqjSJmFxiPygTINGMcucoP0IGWMAjyIaQX3IIs_09B21ovSZSzIqXA7S, [2014 年 5 月 17 日]
9. 梁晨, 王国林, 伍建军, 高千.《载重子午线轮胎接地几何特征研究》[J].《拖拉机与农用运输车》, 2010,37 (1) :56.
10. 百度文库,《铲雪车》[OL]:
http://wenku.baidu.com/link?url=Iuow-Bpb7sI5VMgabYAX_Kpn4F4dZ8clgcLRHh6C-gtnxhRCCFqktkIrQpxVhIv8tYTGuevQuRITQ6dElCxEYj0mWokSf7XOYIhdqQ6QtTe&qq-pf-to=

pcqq.discussion [2014 年 5 月 17 日]

数学中国提供 (www.madio.net)