

参赛队号 # 1084

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第五届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1084

参赛队员（签名）：

队员 1：苗壮

队员 2：贾玉威

队员 3：王鑫鑫

参赛队教练员（签名）：教练组

参赛队伍组别：本科组

参赛队号 # 1084

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：1084

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号 # 1084

2012 年第五届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 小小蛛网，大千世界

关 键 词 蜘蛛网 辐射状 力学结构 螺旋线

摘 要：

人们都知道蜘蛛网具有良好的抗拉性，除了与蛛丝特有的性质有关，必定与它独特的结构有着千丝万缕的联系。下面我们将从蛛网的力学特性与形状特点两个方面，考虑蛛网结构的合理性。

针对蜘蛛网的力学特性，我们将蛛网上各节点、径向线段以及环绕中心的线段用矩阵进行编号，在受损与不受损两种情况下研究蛛网相邻层之间受力的数学关系，从而建立差分方程。于是，我们得到蜘蛛网结构的两个力学特性：

1. 蛛网的抗破坏能力基本不受蜘蛛网层数和径向蛛丝条数的影响；
2. 即使环绕中心的蛛丝受损，蜘蛛网的强度依然很大，与不受损时的强度基本相同。

针对蜘蛛网的形状特点，在不考虑蛛网上各部分蛛丝的差异性，蜘蛛在有限空间内，织网耗费蛛丝量是值得考究的。我们依次建立了多边形蛛网结构模型、圆形蛛网结构模型、对数螺旋线结构模型。在蛛网覆盖相同面积时，正多边形蛛网要长于圆形蛛网的蛛丝长度。在考虑蛛网覆盖面积与蛛丝长度比值时，通过模型求解得到，当蛛网层数大于 10 后，对数螺旋线形蛛网的比值比圆形蛛网的大。而在一般情况下，蛛网层数大于 10，表明对数螺旋线形蛛网比圆形蛛网更贴近实际。

本文从力学特性与形状特点两个方面来考虑蛛网的合理性，考虑问题完整，思路清晰明朗。

参赛队号 1084

所选题目 A

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 # 1084

1 问题的背景

在我们生活的世界里，蜘蛛是非常常见的。据统计，全世界共有 42000 余种蜘蛛，分散生活在各个角落。这其中大部分的蜘蛛依靠结网捕猎而生存。蜘蛛将奇妙的数学美编织到蛛网中，同时，这张网也是自己赖以生存的捕食工具。所以，合理的蛛网结构是蜘蛛生存的关键。2012 年 2 月 2 日《自然》杂志的封面故事上，来自美国麻省理工学院（MIT）和在意大利的都灵理工大学的研究人员展示了蜘蛛网的设计如何将应变和损坏局域化进而保护了整个蛛网。可见，对于蛛网的研究正吸引越来越多科学家们的关注，人们对蜘蛛网的认识正在一步步加深。



2 问题的重述

世界上生存着许多种类的蜘蛛，而其中的大部分种类都会通过结网来进行捕食。现在我们要建立合理的数学模型，说明蜘蛛网织成怎样的结构才是最合适的。

3 问题的分析

3.1 我们要解决的问题

1. 自然界中蜘蛛网的结构在力学特性方面具有什么优点？
2. 什么形状的蜘蛛网是最合适的？

3.2 我们解决问题的方法

我们将从蛛网的力学特性与形状特点两个方面进行分析。

力学特性：蜘蛛网一般具有两种蛛丝，一种是径向的起主体支撑作用的蛛丝，另一种是环绕蜘蛛网中心主要起捕虫作用的蛛丝，这两种蛛丝的强度有很大差异。首先用矩阵对蛛丝的交点进行编号，矩阵的两个维度分别指径向蛛丝的序号与环绕中心的蛛丝的序号。随后分析相邻层蛛丝受力的数学关系，用差分方程来表示这一关系，由于通常情况下环绕中心蛛丝最易断裂，则考虑环绕中心蛛丝断裂与蛛丝完好无损情况下蛛网的受力特点。

形状特点：所谓从蛛网整体考虑，就是单纯考虑蛛网整个结构，不考虑不同部位蛛丝的差异性。蛛网的结构，决定了在有限空间内，既能有效捕捉到大量猎物，又能节约蛛丝。我们将蛛网首先看做正多边形，在保持蛛网覆盖面积不变的条件下，探讨当边数变化时，蛛丝总长度的变化情况，之后探讨蛛网为圆形时的情况，对比蛛网覆盖面积相同时，正多边形蛛网与圆形蛛网的蛛丝长度，从而判断哪个较优，最后引入对数螺线形蛛网，通过比较对数螺线与圆形蛛网的覆盖面积与蛛丝长度比，来判断对数螺线形蛛网与圆形蛛网哪个更优。

4 基本假设

1. 假设不考虑蛛丝本身的特性，只考虑蛛网整体形状结构的优劣；
2. 假设自然界生物的行为，使生物本身的利益达到最优化。
3. 假设蛛网是建立在独立空间中的，不受到周围环境的限制。
4. 假设飞虫是否被蛛网捕获是随机的。
5. 假设蛛网的捕获能力只与蛛网的覆盖面积有关，飞虫只要沾到蛛网，就不会逃脱。
6. 假设蛛网受损时，只是环绕中心的蛛丝受损，而径向的蛛丝不受损伤。
7. 假设蛛网中的径向的蛛丝不计入织网蛛丝总量，并且蛛网覆盖的面积只与环绕中心的蛛丝有关。

5 符号说明

符号	符号名称
S	蛛网覆盖面积
L	蛛丝总长度
L_i	第 i 层蛛丝长度
m	蛛网总层数
d	相邻两层蛛丝之间的间距
C_{sp}	螺线覆盖面积与周长比
C_{ci}	圆形覆盖面积与周长比
S_{sp}	最外围螺线包围面积
L_{sp}	螺线总长度
k	同心圆个数
S_{ci}	最外层圆面积
$[x]$	不大于 x 的最大正整数
F_{\max}	最大径向拉力

注：表中没有列出的符号，文中使用时会给予说明。

6 模型的建立与求解

6.1 蛛网受力模型

由于自然界中的蜘蛛网大多为多层的中心辐射状结构，我们以多层辐射状正多边形的蜘蛛网为例，分析它的力学特性，这些力学特性对其它相似形状的蛛网同样适用。

我们通过考察蛛网受到固定大小的力时，蛛网上出现的最大拉力来评价蛛网结构的优劣。易知受到固定大小的力，蛛网上出现的最大拉力越大，蛛网被破坏的可能性越大。

6.1.1 蛛网上线段与节点位置的编号

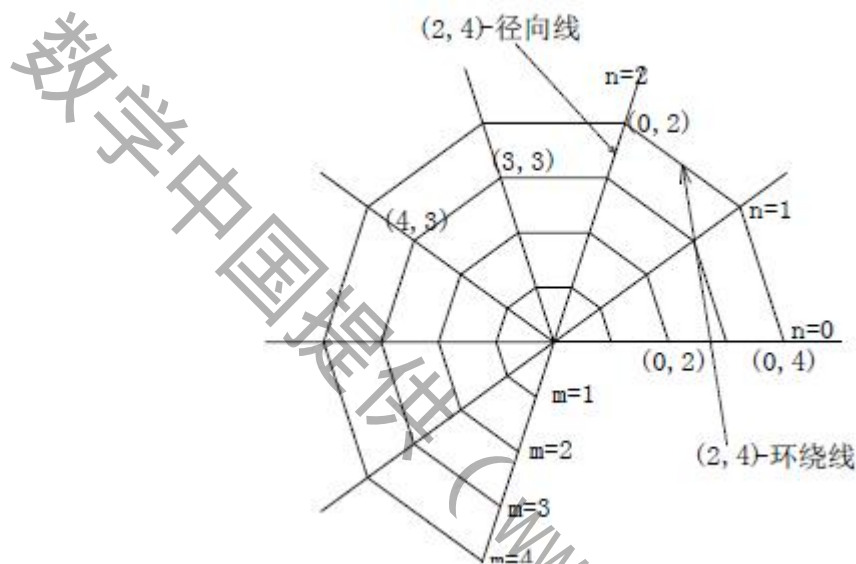


图 1 多层辐射状正多边形蛛网示意图

如图 1 所示，二维的蛛网由 N 条径向线与 M 个围绕中心的正多边形组成，蛛网上的节点可以用 $n \times m$ 的矩阵 $X_{n,m}$ 表示，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 且 $m = 1, 2, \dots, M$ ，即蛛网中第 n 条径向线与第 m 个正多边形的交点用 $X_{n,m} = (n, m)$ 表示，如上图中的节点 $(0, 2)$ 、 $(3, 3)$ 等，易知 $X_{n,0} = (0, 0)$ 。径向以及围绕中心方向连接两节点的线段也可以用 (n, m) 表示，即径向线上连接节点 $(n, m-1)$ 与节点 (n, m) 的线段标记为 $(n, m)_l$ ，围绕中心方向上连接节点 $(n-1, m)$ 与节点 (n, m) 的线段标记为 $(n, m)_c$ ，如上图中的 $(2, 4)_l$ （即图中的 $(2, 4)$ -径向线）与 $(2, 4)_c$ （即图中的 $(2, 4)$ -环绕线）

参赛队号 # 1084

6.1.2 蛛网无损坏情况下各节点与线段的受力模型

6.1.2.1 模型的建立

设所有的 $(n, m)_l$ 都相等，且等于 l_n ，蛛网中任意两条相邻的径向线的夹角均为 β ，

则 $(n, m)_c$ 的长度 l_m 为：

$$l_m = \beta m l_n = 2m l_n \sin(\pi / N) \quad (6-1)$$

并且节点的位置还可以用类似极坐标来表示：

$$X_{n,m} = (2n\pi / N, m l_n) \quad (6-2)$$

蛛网上径向线段的弹性常数表示为：

$$\bar{i} = i / l_n \quad (6-3)$$

可见 \bar{i} 与径向线段所在位置无关。

环绕中心的蛛网的弹性常数为：

$$\bar{i}_m = i_m / l_m \quad (6-4)$$

可见 \bar{i}_m 与 m 以及线段长度有关。

因为径向线段的强度要比环绕线段的强度大很多[4]，我们只讨论 $i_n > i_m$ 的情况，设 $F_{n,m}$ 与 $f_{n,m}$ 分别为作用在 $(n, m)_l$ 与 $(n, m)_c$ 上的力。

在蛛网完好无损的情况下（在下文中会讨论蛛网损坏时的情况），由于蛛网形状的对称性，可知 $F_{n,m}$ 与 $f_{n,m}$ 仅与 m 有关，与 n 无关，因此定义 F_m, f_m ，满足 $F_m = F_{n,m}$ ， $f_m = f_{n,m}$

结合以上各式得：

$$\frac{F_{m+1}}{\bar{i}_{m+1}} = \left(\frac{1}{\bar{i}_{m+1}} + \frac{1}{\bar{i}_m} + \frac{\beta^2}{i} \right) F_m - \frac{F_{m-1}}{\bar{i}_m} \quad (6-5)$$

$$F_{m+1} = F_m + \alpha f_m \quad (6-6)$$

初始条件为：

$$F_1 = \bar{i} \Delta l_n \quad f_1 = \alpha \bar{i}_1 \Delta l_n \quad (6-7)$$

其中 Δl_n 为连接 $X_{n,1}$ 的第一条径向线段的伸长量。(6-5)式中含有 F_{m-1} ， F_m ， F_{m+1} 三项，描述了三个相邻层之间力的相互关系。通过迭代，在计算机上计算可得到方程的结果。

解方程 $\frac{dX_{n,m}}{dt} = -\eta F_{n,m}$ ，寻找平衡点，在平衡点处 $F_{n,m}$ 为与节点 $X_{n,m}$ 连接的四条线作

参赛队号 # 1084

用在节点 $X_{n,m}$ 上的合力。

为解方程得到数值结果，取直径，弹性模量和初始径向蜘蛛丝上的拉力为 $1\mu\text{m}$ ， 1GPa 和 0.1 mN 。

6.1.2.2 模型的求解结果分析

设蜘蛛网上出现的最大径向拉力为 F_{\max} ，则最大径向拉力 F_{\max} 与径向丝与环绕丝弹性常数之比 $\frac{i}{i_m}$ 的关系图 $F_{\max} - \frac{i}{i_m}$ ， F_{\max} 与径向线的条数 N 的关系图 $F_{\max} - N$ ， F_{\max} 与环绕中心的正多边形个数 M 的关系图 $F_{\max} - M$ 如下所示：

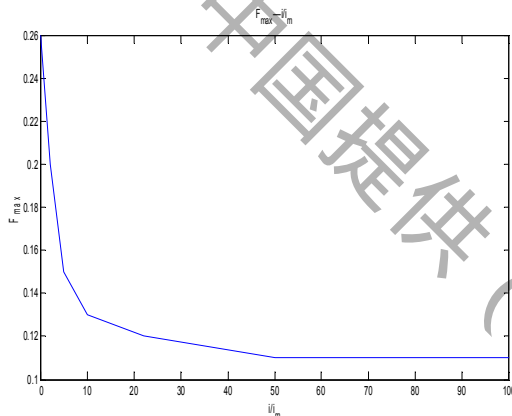


图 2 $F_{\max} - \frac{i}{i_m}$ 关系图

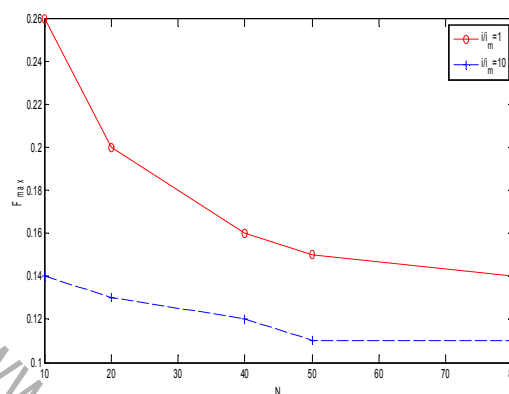


图 3 $F_{\max} - N$ 关系图

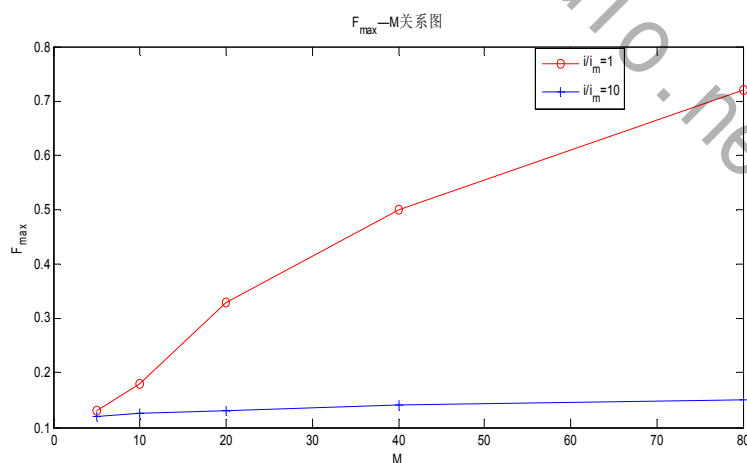


图 4 $F_{\max} - M$ 关系图

由图 2 可知， F_{\max} 随 $\frac{i}{i_m}$ 的增大而急剧减小，当 $\frac{i}{i_m} > 10$ 时， F_{\max} 基本稳定，无限趋近

参赛队号 # 1084

于 0.11，这说明只有当 $\frac{i}{i_m} > 10$ 时，蛛网的结构才达到较为优越的状态，这也符合现实世界中蛛网径向蛛丝比环绕中心的蛛丝强度大的实际情况。

由图 3，图 4 知，当 $\frac{i}{i_m} = 10$ 时， N 与 M 变化时， F_{\max} 基本稳定，这样的特性使蜘蛛能够根据所处环境较为随意的改变径向丝与环状丝的个数，同时对整个蜘蛛网的强度影响不大，这是蜘蛛网结构的一大力学优点。

6.1.3 蛛网损坏情况下的受力模型

蛛网最易受损的是环绕中心的蛛丝，因此下面仅讨论蛛网受损仅限于环绕中心的蛛丝断裂，这种情况下蛛网受损时的各节点受力特性基本变化不大，依然可以用上面的模型求解。

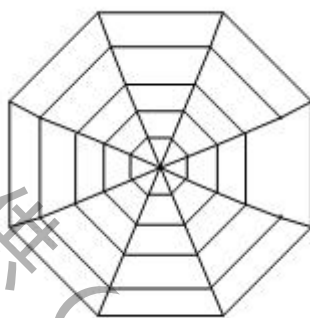


图 5 围绕中心蛛丝受损示意图

下图为蛛网受损与未受损时 $F_{\max} - \frac{i}{i_m}$ 关系图

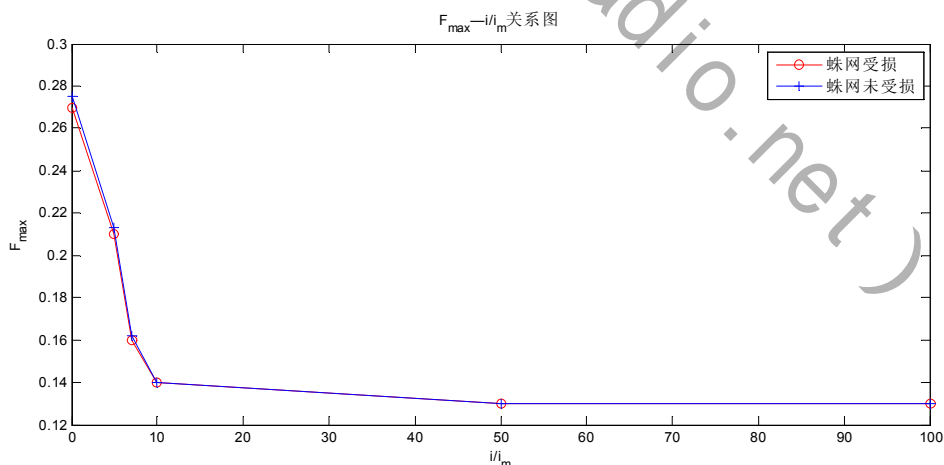


图 6 蛛网受损与未受损时 $F_{\max} - \frac{i}{i_m}$ 关系图

从图 6 可知蛛网受损与未受损两种情况下， $F_{\max} - \frac{i}{i_m}$ 变化图像基本一致，这说明蛛

参赛队号 # 1084

网受损与否对整个蛛网的力学性质影响不大。即使蛛网受损，蛛网依然有较大的强度，这是蜘蛛网结构的又一大力学优点。

由上文对辐射状蛛网力学结构的研究与分析，我们发现这种辐射状蛛网结构具有良好的性质。针对辐射状蛛网结构，我们又提出了以下几种更为具体的蛛网模型，分析它们对于蛛丝总量的要求，对比讨论模型的优劣。

6.2 多边形蛛网结构模型

首先我们知道，当多边形的边数 n 及面积 S 一定时，正 n 边形的周长最小。所以当建立多边形辐射状蛛网结构模型时，我们就可直接采用正多边形的结构。下面对该模型进行分析：构建正 n 边形的蛛网结构模型。

令蛛网的面积为 S ，从内到外共构建了 m 层蛛网，每两层之间的间距为 d （大致为昆虫的身体大小），总共使用蛛丝长度为 L ，每一层所用的蛛丝长度为 L_i ，如下图所示。

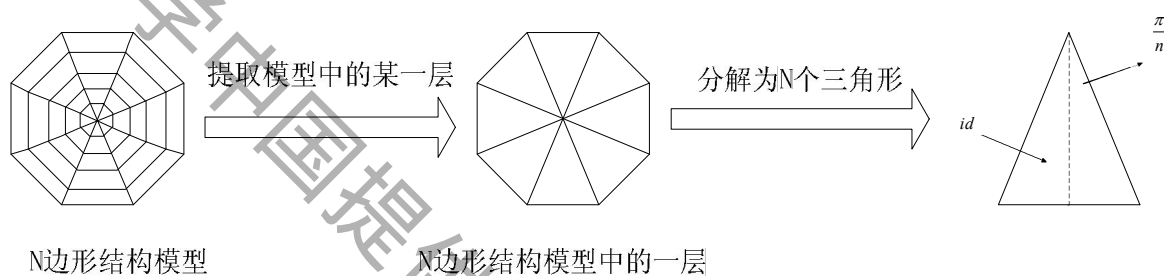


图7 多边形蛛网分解示意图

则对于每一层蛛网的一个小三角形分析，可得示意图：

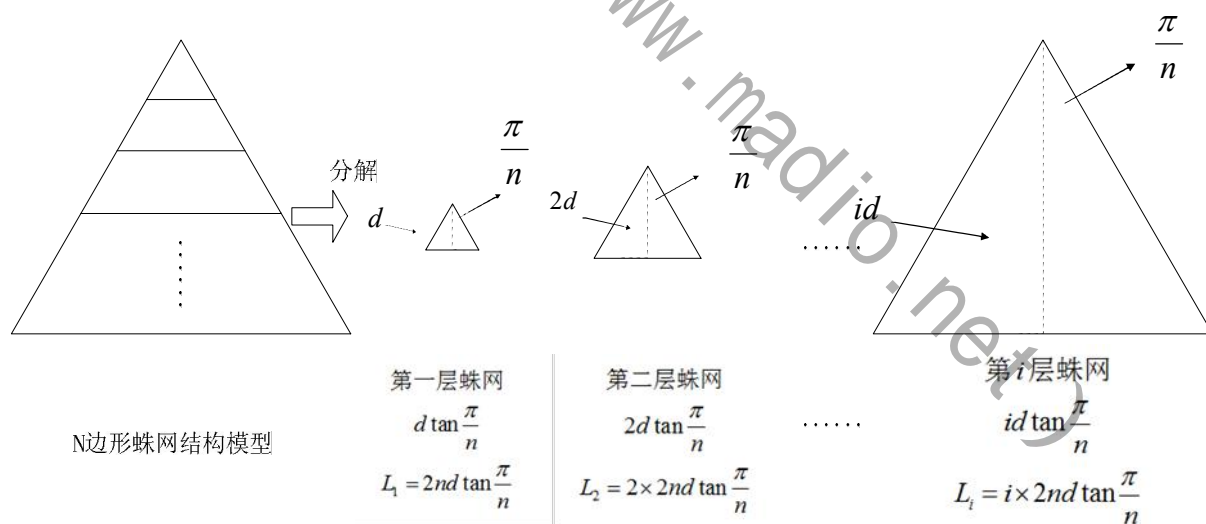


图8 蛛网周长计算示意图

此时最外层的蛛丝所围成的多边形面积就是整个蛛网所覆盖的面积，即：

$$S = n \times md \times md \tan \frac{\pi}{n} \quad (6-8)$$

参赛队号 # 1084

由此可以计算蜘蛛共筑建的蛛网层数：

$$m = \left[\sqrt{\frac{S}{nd^2 \tan \frac{\pi}{n}}} \right] \quad (6-9)$$

其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

由于此时 m 的值有可能不是整数，若直接将 m 不取整带入计算，误差并不会太大，是在我们允许的范围之内的。所以，接下来的处理中， m 就直接由 $\sqrt{\frac{S}{nd^2 \tan \frac{\pi}{n}}}$ 代替，并

且在进行蛛丝总长度计算的时候，从 1 到 m 求和依然用等差数列求和公式来近似计算。

由 L 的计算公式：

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m m \times 2nd \tan \frac{\pi}{n} \quad (6-10)$$

得：

$$L = \frac{(1+m)m}{2} \times 2nd \tan \frac{\pi}{n} \quad (6-11)$$

将 $m = \sqrt{\frac{S}{nd^2 \tan \frac{\pi}{n}}}$ 代入，得：

$$L = \frac{S}{d} + \sqrt{Sn \tan \frac{\pi}{n}} \quad (6-12)$$

在此式中，只有 n 是变量，所以 L 的大小仅由 n 决定。

令 $t = \frac{\pi}{n}$ ，其中 $0 < t \leq \frac{\pi}{3}$ ，则有：

$$L = \frac{S}{d} + \sqrt{\pi S \frac{\tan t}{t}} \quad (6-13)$$

令 $f(t) = \tan t - t$ ，则 $f'(t) = \tan^2 t - 1 + 1 = \tan^2 t \geq 0$ ， $f(t)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，而

$f(0) = \tan 0 - 0 = 0$ ，所以 $f(t) > 0$ ， $\frac{\tan t}{t} > 1$ 。

参赛队号 # 1084

而当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 即 $t \rightarrow 0$, 此时 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$, 故有:

$$L \geq \frac{S}{d} + \sqrt{\pi S} \quad (6-14)$$

此式说明当多边形边数无限大时, 即多边形无限趋近圆形时, L 的值会最小。

事实上, 若是蛛网是圆形结构的话, 我们会有下述模型。

6.3 圆形蛛网结构模型

如同多边形蛛网结构, 圆形的蛛网若要发挥自己的捕捉飞虫的能力, 就应该使相邻两层圆形蛛丝之间的间距为 d , 对于每一层圆形蛛网, 我们可得如下示意图:

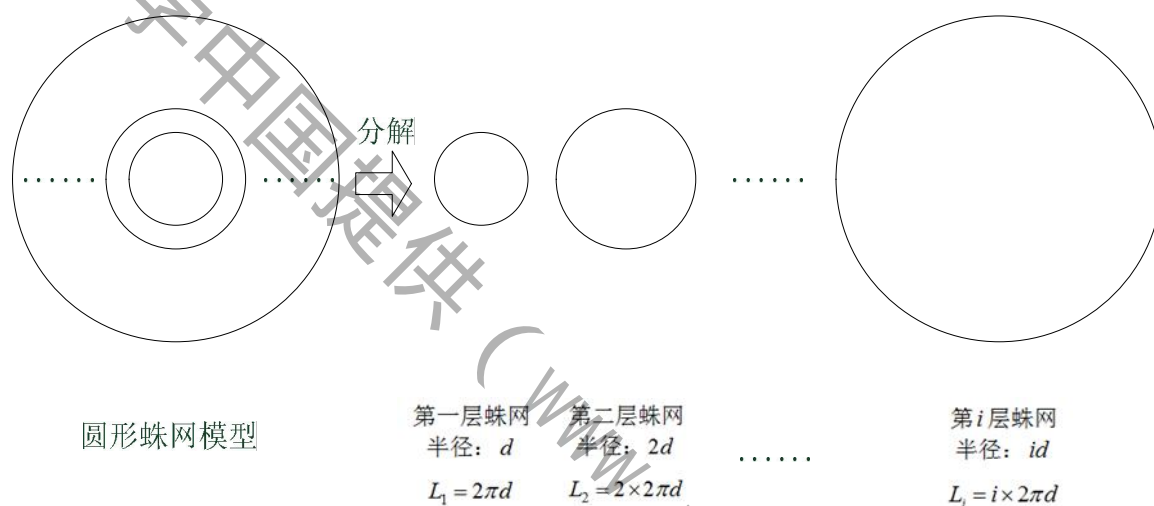


图9 圆形蛛网分解示意图

同理计算蛛网覆盖的面积:

$$S = \pi m^2 d^2 \quad (6-15)$$

得出:

$$m = \sqrt{\frac{S}{\pi d^2}} \quad (6-16)$$

下面在计算蛛丝的总长度, 采用与多边形蛛网结构模型中的相同的简化方法, 可得:

$$L = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m i \times 2\pi d \quad (6-17)$$

即:

$$L = \frac{(m+1)m}{2} \times 2\pi d \quad (6-18)$$

将 $m = \sqrt{\frac{S}{\pi d^2}}$ 代入, 得:

参赛队号 # 1084

$$L = \frac{S}{d} + \sqrt{\pi S} \quad (6-19)$$

可以看出，此结果与多边形蛛网结构模型中多边形边数 n 趋向于 $+\infty$ 时的结果一致，这正说明了圆形蛛网结构较多边形结构更节省蛛丝，更具合理性。

在完成对圆形蛛网结构的分析之后，我们引入一种新的对数螺旋线模型。

6.4 对数螺旋线模型

6.4.1 对数螺旋线方程

对数螺旋线方程又称等角螺旋线方程。若一条曲线在每个点 P 的切向量都与某定点 O 至此点 P 所成的向量 \overrightarrow{OP} 夹成一定角度，且定角不是直角，则此曲线称为一条等角螺旋线，点 O 称为它的极点，在坐标平面，若极坐标方程式 $r = f(\theta)$ 表示一等角螺旋线 ($f(\theta) > 0$)，其极点是原点 O ，定角为 α ($0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$)，则因在点 $(f(\theta), \theta)$ 的切向量为：

$$(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta) \quad (6-20)$$

所以，可得：

$$\cos\alpha = \frac{\cos\theta(f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta) + \sin\theta(f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta)}{\sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}} \quad (6-21)$$

即：

$$\frac{f'(\theta)}{\sqrt{(f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2}} \quad (6-22)$$

由此可得下述结果：

$$\begin{aligned} \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} &= \cot\alpha \\ \ln f(\theta) &= \theta \cot\alpha + \text{常数} \ln\alpha \\ f(\theta) &= ae^{\theta \cot\alpha} \end{aligned} \quad (6-23)$$

换言之，此等角螺旋线的极坐标方程式为：

$$r = ae^{\theta \cot\alpha} \quad (6-24)$$

由于在导出此方程的过程中引用了自然对数，故等角螺旋线也称为对数螺旋线。

6.4.2 螺旋线模型与圆形蛛网结构模型对比

下面将对数螺旋线形状与上个模型中的圆形蛛网结构模型作比较，从而具体说明对数螺旋线形状的优越性。

参赛队号 # 1084

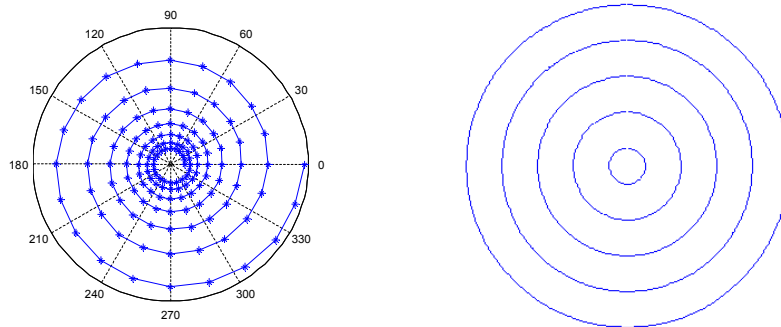


图 10 对数螺线形与圆形蛛网的示意图

现计算螺线的覆盖面积与周长比为 C_{sp} 与圆形的覆盖面积与周长比为 C_{ci} ，这一比值越大说明相对应的蛛网形状越省蛛丝。

6.4.2.1 对数螺线覆盖面积与周长比 C_{sp} 的计算

对数螺线方程为：

$$r = ae^{\theta\alpha} \quad (6-25)$$

式中 r 为极径， θ 为极角， a 、 α 为常数。

设 k 为对数螺线围绕中心旋转的圈数，当对数螺线的极角 θ 达到 $2(k+1)\pi$ 时，螺线终止，此时最外围螺线包围面积为 S_{sp} ，取微元 $d\theta$ ，则从 θ 到 $\theta+d\theta$ 的极角范围内有：

$$dS_{sp} = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (6-26)$$

将(6-25)式带入可得：

$$S_{sp} = \frac{1}{2} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (ae^{\theta\alpha})^2 d\theta \quad (6-27)$$

经计算得：

$$S_{sp} = \frac{a^2}{4\alpha} (e^{4(k+1)\pi\alpha} - e^{4k\pi\alpha}) \quad (6-28)$$

同理设螺线周长为 L_{sp} ，则：

$$dL_{sp} = r d\theta \quad (6-29)$$

将(6-25)式代入，得：

$$dL_{sp} = ae^{\theta\alpha} d\theta \quad (6-30)$$

所以：

$$L_{sp} = \int_0^{2(k+1)\pi} ae^{\theta\alpha} d\theta \quad (6-31)$$

参赛队号 # 1084

求此积分得：

$$L_{sp} = ae^{\alpha} [e^{2(k+1)\pi} - 1] \quad (3-32)$$

所以可得：

$$C_{sp} = \frac{S_{sp}}{L_{sp}} = \frac{ae^{4\pi k\alpha} (e^{4\pi\alpha} - 1)}{4ae^{\alpha} [e^{2(k+1)\pi} - 1]} \quad (3-33)$$

6.4.2.2 圆形覆盖面积与周长比 C_{ci} 的计算

设 k 为同心圆的个数，最内部初始圆的半径长度为 d ，且每次半径长度递增 d ，则从内到外同心圆的周长依次为 $2\pi d$ ， $4\pi d$ ， \dots ， $2(k+1)\pi d$ ，为一等差数列，则各圆的周长之和 L_{ci} 为：

$$L_{ci} = \pi d(k+1)(k+2) \quad (3-34)$$

最外层圆的面积即为圆形蛛网的覆盖面积 S_{ci} ：

$$S_{ci} = (k+1)\pi d^2 \quad (3-35)$$

则圆形覆盖面积与周长比 C_{ci} ：

$$C_{ci} = \frac{S_{ci}}{L_{ci}} = \frac{d}{k+2} \quad (3-36)$$

6.4.2.3 C_{sp} 与 C_{ci} 的比较

由上可知：

$$C_{sp} = \frac{S_{sp}}{L_{sp}} = \frac{ae^{4\pi k\alpha} (e^{4\pi\alpha} - 1)}{4ae^{\alpha} [e^{2(k+1)\pi} - 1]} \quad (3-37)$$

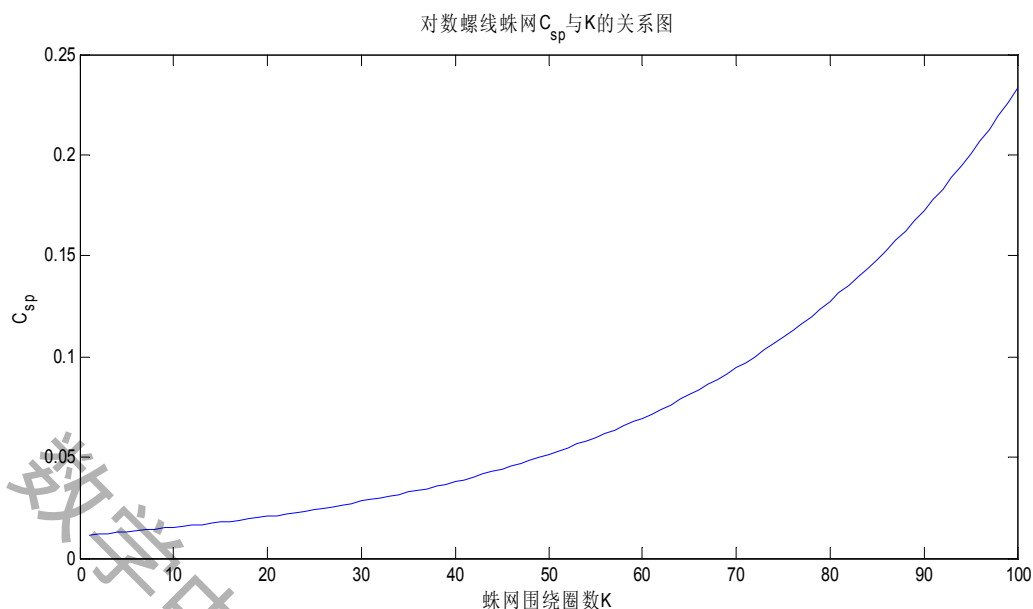
$$C_{ci} = \frac{S_{ci}}{L_{ci}} = \frac{d}{k+2}$$

通过查找蜘蛛网的文献资料，两层蛛网之间的间距 d 为 0.1cm， $a = 0.05$ ， $\alpha = 0.5025$ ，并令：

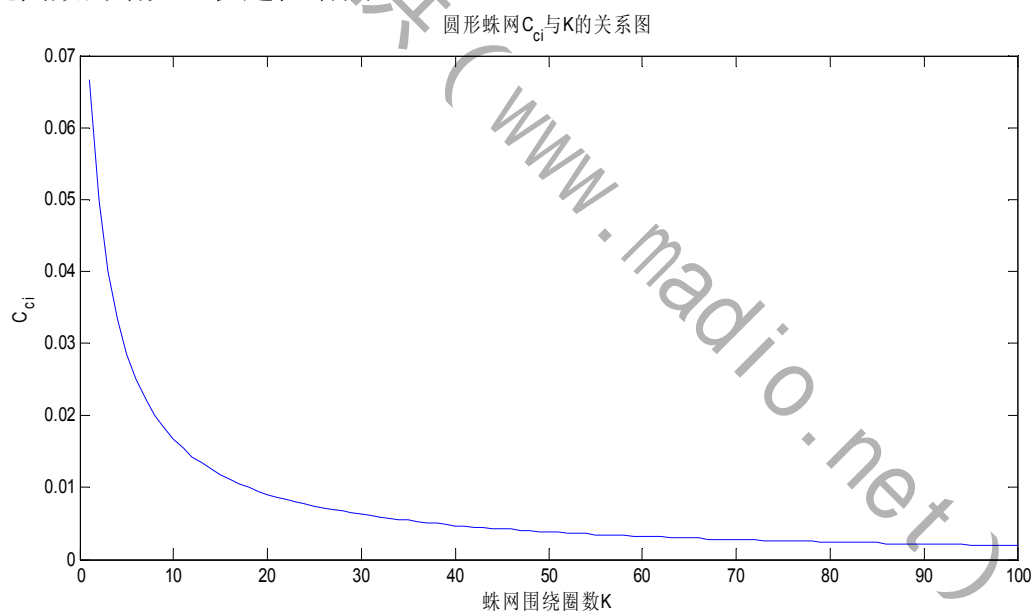
$$C = C_{sp} - C_{ci} \quad (3-38)$$

用 MATLAB 画出 C_{sp} ， C_{ci} ， C 随 k 变化的图像分别为：

参赛队号 # 1084

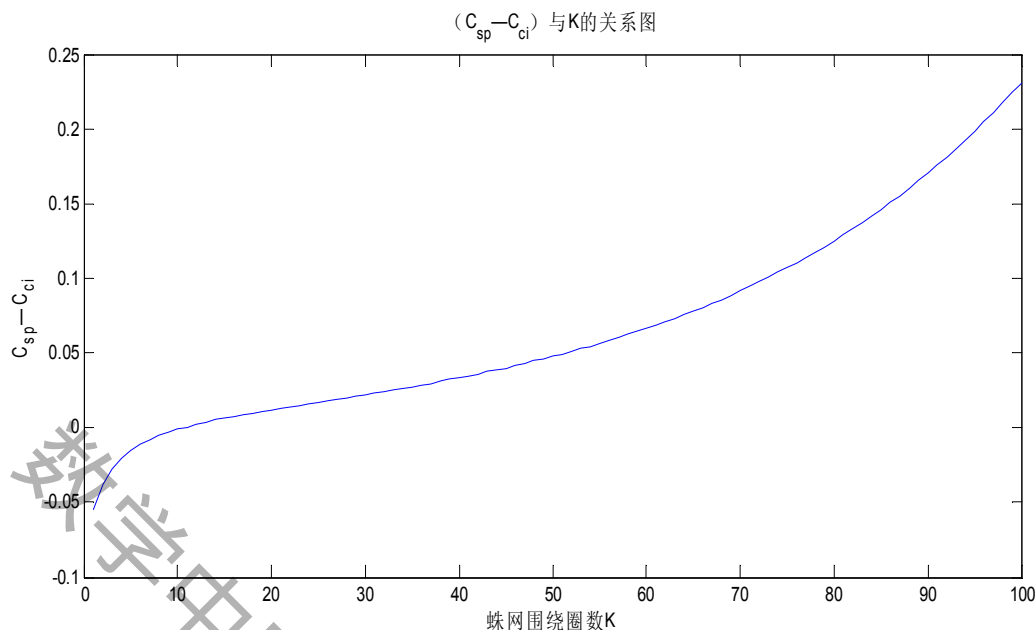
图 11 对数螺线蛛网 C_{sp} 与 k 的关系图

从图 11 中可以看出 C_{sp} 随 k 的增大而不断增大，说明若为对数螺线型蛛网，随着蛛丝围绕圈数的增大，优越性增强。

图 12 圆形蛛网 C_{ci} 与 k 的关系图

从图 12 中可以看出， C_{ci} 随 k 的增大而不断减小，并最后稳定在一个值附近，说明与对数螺线恰好相反，若为圆形蛛网，随着蛛丝围绕圈数的增大，优越性减弱。

参赛队号 # 1084

图 13 $(C_{sp} - C_{ci})$ 与 k 的关系图

从图 13 中可以看出，当 k 小于 10 时， C 为负值，当 k 大于 10 时， C 为正值，且随 k 的增大而增大，这说明当围绕圈数小于 10 时，圆形蛛网比对数螺线形蛛网优越，但当围绕圈数大于 10 时，对数螺线形蛛网好于圆形蛛网，且圈数越多，对数螺线形蛛网的优越性越明显。

需要说明的是由于空间大小的限制，蛛网围绕圈数不可能太多，以保持合理的面积，另外对于螺线形蛛网，随着围绕圈数的增加，蛛网边缘处网线之间的空隙会增加很快，若这一空隙比一般虫子体型直径大很多，则无法起到捕虫的功能，这也制约着蛛网围绕圈数的增加。

由于一般情况下蛛网围绕圈数均大于 10，说明螺线形蛛网比圆形蛛网优越。

7 模型的评价

7.1 模型的优点

1. 对数螺旋线模型能够准确地描述蛛网的形状；
2. 对数螺旋线模型能够在单位面积上最省蛛网，而且强度最大；
3. 对数螺旋线模型能够反映某些生物的形态，如蜗牛的壳，牛羊的角等；
4. 对数螺旋线模型能够反应现实生活中常见的构造，如螺丝杆，螺丝帽，电机涡轮等。

7.2 模型的缺点

1. 没有考虑到湿度，温度，风等环境因素对蛛网结构的影响。
2. 对数螺线形蛛网在外围层间距增加速度越来越快，在文中没有详细讨论。

8 模型的推广

对数螺旋线在工业生产中起着十分重要的作用，比如抽水机涡轮叶片的曲面做成对数螺旋线的形状，抽水就十分的均匀。机械上的螺杆、螺帽、螺钉、螺丝扣，就连枪膛中的膛线也是螺旋线的。由于借鉴了对数螺旋线的优良特性，建筑师创造了许多匪夷所思的建筑。

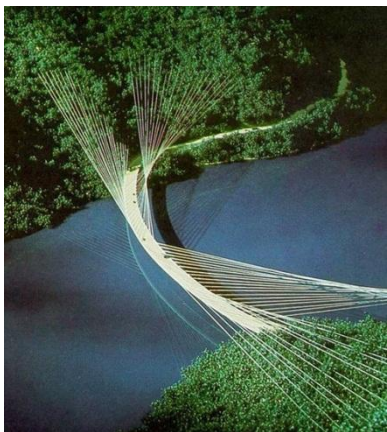
8.1 高层建筑的采光



瑞典马尔默市有一座奇特的建筑物。这座 190 米高的奇异建筑共有 54 层，由西班牙著名设计师圣地亚哥-卡拉特拉瓦设计的，外观就像一个立着的陀螺，优雅地向上盘旋。

螺旋大楼内拥有三十三种不同形式、共一百四十七间公寓，由于大楼从一楼到屋顶共扭转了九十度，所以每间公寓都拥有充足的自然光，这栋大楼的杰出设计，在法国坎城举行的“世界房地产市场”颁奖典礼中，获得最佳住宅类大奖。

8.2 曲线斜拉桥



曲线斜拉桥如众多的“蜘蛛丝”拉着一片细长的树叶一样，构思巧妙、工程之巧妙、造型之优美受到全世界工程技术人员的好评。美籍华人林同炎设计的曲线斜拉桥位于美国加利福尼亚的一条峡谷河流上，两岸山高陡峭，谷深急流，若是采用一般的直线型桥，则两岸引桥要挖去大量山崖，假如抬高桥面，虽然避免开挖山崖，但引桥很长，两者都会使工程造价昂贵。而林同炎设计的曲线形桥，很自然地与两岸线路联接，达到桥与路的有机结合。

9 参考文献

- [1] Krink T, Vollrath F. 2000. Optimal area use in orb webs of the spider *Araneus diadematus* [J]. *Naturwissenschaften*, 87:90-93
- [2] Astrid M. HEILING, Effect of spider position on prey capture success and orb-web design. *Acta Zoologica*, 50(4):559-565
- [3] Yuko Aoyanagi, Ko Okumura, Simple Model for the Mechanics of Spider Webs, *Physical Review Letters*, 104, 038102(2010)
- [4] M. S. Alam, M. A. Wahab, and C. H. Jenkins, *Mech. Mater.* 39, 145(2007)
- [5] 姜启源, 谢金星, 叶俊, 数学模型, 高等教育出版社, 2003 年 8 月第三版

参赛队号 # 1084

- [6] 杨新宇, 王鹏, 曾明, MPLS 自制系统中基于人工蜘蛛的重路由研究, 自然科学进展, 第 14 卷, 第 7 期, 2004 年 7 月
- [7] 不同体重肩斑银鳞蛛和大腹园蛛圆网的结构特征, 四川动物, 第 30 卷, 第 3 期, 2011 年
- [8] 桌春晖, 蒋平, 吴灵芝, 彭茂郭聪, 不同体重悦目金蛛的蛛网结构, 动物杂志, 2007 年, 42 (2): 134-139
- [9] 蒋平, 沈丽, 杨孔, 冉丹, 王劫, 郭聪, 三种类型蜘蛛丝的结构及生物学功能, 2003 年, 38 (5)
- [10] 宋大祥, 蜘蛛的网和它的捕食策略, 生物学通报, 第 35 卷, 第 4 期, 2000 年
- [11] 刘庆生, 段亚峰, 蜘蛛丝的结构性能与研究现状, 四川丝绸, 第 2 期, 2005 年

数学中国提供 (www.madio.net)