

目 录

1 引言.....	3
2 第一问的解决.....	3
2.1 问题的分析和模型的准备.....	3
2.1.1 问题的分析.....	3
2.1.2 模型的准备.....	4
2.2 论证约翰贝丁顿的观点.....	4
2.2.1 人口数量预测模型.....	4
2.2.2 模型的结果.....	7
2.3 大系统多目标集成模型.....	7
2.3.1 模型的体系结构.....	7
2.3.2 多目标集成模型体系结构.....	7
2.4 大系统多目标集成模型的简化.....	8
2.4.1 经济发展与环境质量的“弱肉强食”生态模型.....	8
2.4.2 子系统的简化.....	10
2.4.3 影响因子的关系.....	10
2.5 三维耦合非线性微分方程动力学模型.....	12
2.6 PRE 评价体系的建立.....	15
2.7 “完美风暴”发生可能性的判断.....	17
3 未来人口、资源、环境与可持续发展的情景分析.....	17
3.1 可持续发展的影响因素分析.....	17
3.2 我国可持续发展的关键问题是人口问题.....	17
3.2.1 未来 20 年人口发展的情景分析.....	17
3.2.2 人口发展与粮食、淡水、能源等供求关系.....	18
3.3 人口、资源、环境的现实决定了未来国家发展的趋势.....	18
3.3.1 未来国家发展趋势的情景分析.....	18
3.3.2 “完美风暴”发生可能性的分析.....	19
3.3.3 可持续发展的有效措施.....	19
3.4 总结.....	19
4 模型的进一步讨论与改进.....	19
5 模型的评价与推广.....	19
5.1 模型的评价.....	19
5.1.1 模型的优点.....	19
5.1.2 模型的缺点.....	20
5.2 模型的推广.....	20
6 参考文献.....	20

插图索引

图 1 三层次模型体系结构.....	7
图 2 大系统多目标集成模型.....	8
图 3 捕食模型中的轨迹方向.....	9
图 4 经济发展和环境质量变化的关系.....	10
图 5 人口、资源、环境的关系.....	11
图 6 世界人口总量	18

附表索引

表 1 2030 年世界各指标值	7
表 2 影响因子权重表.....	12
表 3 PRE 系统发展的协调度分类和分级	17
表 4 世界总人口数	22
表 5 世界粮食总量	22
表 6 世界人均淡水总量	22
表 7 世界能源总量	22
表 8 世界平均温度	22

1 引言

英国科学家约翰·贝丁顿于 3 月 18 日在英国《卫报》发表文章警告称，气候变化和人口增长将导致食品、水和能源短缺，进而引发大规模移民、公共骚乱和国际冲突。如果未来数年内没有充分准备的话，到 2030 年，世界将面临“完美风暴”，出现大的动荡。

贝丁顿的观点充分显示了当前人类面临的危险，在此之前，已经有许多学者进行了广泛的研究。邓玉勇等[1]根据国内外对能源—经济—环境（3E）的研究成果，建立了一个更好地为经济和社会协调发展服务的模型，使 3E 系统模型更加综合化，同时深层次、地区性、应用性的研究成果将增多。刘小林[2]根据区域性和可操作性等原则，来设计区域可持续发展指标体系，认为可持续发展系统应包含人口系统（R）、资源系统（Z）、环境系统（H）和经济系统（J）四个子系统，在每一个系统中又包括若干指标。姜涛等[3]在进行定性分析的基础上，建立了基于动态投入产出原理的可持续发展多目标最优规划模型，以研究各种经济要素变动和经济结构转变、发展战略和目标之间的相互关系，分析模拟中国中长期可持续发展状况。Marandola 和 Hogan[4]研究了环境与人口之前的存在着一定得风险关系，并提出了解决人口与环境之间关系的方法。张阿玲等[5]为全面地描述中国社会经济发展，介绍了根据国内外模型、中国统计体系及数据现状开发的经济、能源、环境(3E)一体化模型。该模型采用了部门活动水平分析、计量经济分析和线性规划分析方法，可应用于温室气体减排技术选择和减排对经济影响分析。同时，引入可持续发展指标，适应了我国可持续发展的需要。

通过对题目的分析，我们做出在合理的假设下，并做了如下的工作：

1. 收集关于人口、食品、淡水、能源、环境等方面的数据，并作了相关的统计分析；
2. 根据以上各方面的数据，建立关于它们的预测模型，并以此来论证约翰·贝丁顿的观点是否正确；
3. 分析了食品、淡水、能源与人口和环境之间的关系，并建立危机预测模型，通过对模型的求解，根据时间的推移得出最坏的结果或判定“完美风暴”发生的可能性；
4. 针对“完美风暴”发生或不发生，写一篇可持续发展报告，向社会阐述我们的观点。

2 第一问的解决

2.1 问题的分析和模型的准备

2.1.1 问题的分析

为了检验是否发生“完美风暴”，我们必须首先建立危机预测模型。在建立危机预测模型之前我们可以先把问题进行细分。首先我们需要验证约翰·贝丁顿的观点，可以通过数据的分析，结合长期预测模型进行预测分析。接着我们引进经济系统结合题目中的五个系统对影响因子进行分析，在此基础上建立危机预测模型。最后我们可以建立一个评价体系，确定“完美风暴”发生的标准，再结合危机预测模型就可以判断在未来的时间里是否会发生“完美风暴”。根据以上的结果我

们就可以写一份关于可持续发展的新闻稿。

2.1.2 模型的准备

约翰贝丁顿的观点中包含了五个系统：人口、粮食、淡水、能源、环境的预测。所以我们必须针对这五个系统在未来 20 年的变化进行预测。

对于人口，我们可以用世界的人口总数进行预测，粮食用世界粮食的总量进行预测，淡水用人均淡水量进行预测。由于世界的主要能源主要来源于煤，于是我们可以用世界煤的总量来预测。至于环境的变化我们则可以利用世界的平均温度进行预测，一方面地球温度变化会引起海洋海平面的上升，另一方面地球温度的变化为对粮食的产量，淡水资源等造成直接的影响。

2.2 论证约翰贝丁顿的观点

为了能论证约翰·贝丁顿的观点，我们收集到了关于人口、粮食、淡水、能源、环境的数据见【附录 1】。首先建立了关于人口的预测模型，该模型[6]采用离散正交的动态组合优化，适合中长期预测，而且具有强大的泛化能力，可以应用到粮食、淡水、能源、环境的预测。

2.2.1 人口数量预测模型

根据问题的分析，我们首先通过上网搜索数据，得到 2004-2008 年人口数量，分别用灰色系统和 BP 神经网络预测出 2030 年世界人口的数量，为了提高预测精度，再通过离散正交的组合方法[6]将此 2 组预测值结合，得到一组新的预测值，将此作为 2030 年世界的人口数量。

2.2.1.1 人口数量的离散正交组合预测方法

人口数量的预测方法有两类，一类是时间序列预测方法[7]，它只依赖于被预测的历史观测数据及数据模式，通过序列分析找出变化规律，其代表性方法是 GM(1,1)灰色预测模型[8]；另一类是因果解释性预测方法，即假定人口数量与几个独立的影响因素之间的因果关系，从而建立起预测变量与影响因素之间的关系模型，其代表性方法是 BP 神经网络模型[9]。

影响人口数量的指标和因素是繁多的，因而人口数量预测是一个复杂的系统，若采用单个预测模型或部分因素和指标，对该系统结构及输入和输出进行模拟、预测和调控，仅能包含或体现该系统的局部，如果采用灰色模型和神经网络组合模型并加以适当的有效组合，则可以充分地利用各种信息达到提高预测精度的目的。

2.2.1.1.1 预测精度的定义

设 $x_t (t=1,2,\dots,N)$ 为 t 时刻人口数量的实际观测值， $Y_{1t}, Y_{2t} (t=1,2,\dots,N)$ 分别为 GM(1,1) 灰色系统、BP 神经网络在 t 时刻人口数量的预测值， $A_{1t}, A_{2t} (t=1,2,\dots,N)$ 分别为 Y_{1t}, Y_{2t} 在 t 时刻的预测精度，即

$$A_{it} = 1 - \left| (x_t - Y_{it}) / x_t \right|. \quad (i=1,2, t=1,2,\dots,N) \quad (1)$$

2.2.1.1.2 组合预测模型的建立

设 k_{1t}, k_{2t} 为 t 时刻两种预测模型的加权系数，则 $Y_t = k_{1t}Y_{1t} + k_{2t}Y_{2t}$ 为组合模型在 t 时刻的预测值； A_t 为组合模型在 t 时刻的预测精度，则由式 (20) 得

$$A_t = 1 - \left| \frac{x_t - Y_t}{x_t} \right| = 1 - \left| \frac{x_t - k_{1t}Y_{1t} - k_{2t}Y_{2t}}{x_t} \right|. \quad (t=1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

由式 (21) 可知， A_t 越大，则该组合模型越有效。考虑到加权系数的规范性约束， A_t 的最大值为 $\max A_t = 1$ ，此时 $x_t = k_{1t}Y_{1t} + k_{2t}Y_{2t}$ 。

2.2.1.1.3 加权系数的确定

在只有 $GM(1,1)$ 灰色模型和 BP 神经网络组合模型的情况下，通过数学分析，

$$k_{1t} + k_{2t} = 1, k_{1t} \geq 0, k_{2t} \geq 0. \quad (t=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

令 $k_t = k_{1t}$ ，由式 (22) 则有 $k_{2t} = 1 - k_t$ ，于是得到 $GM(1,1)$ 灰色模型的加权系数列 $k_t (t=1, 2, \dots, N)$ ， BP 神经网络模型的加权系数列 $1 - k_t (t=1, 2, \dots, N)$ 。令 $z_t = t$ ， z 为其二维变量中的自变量 z_t 的组合，于是得到了实际观察数组 $(z_t, k_t) (t=1, 2, \dots, N)$ ，其中有 $\{P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z)\}$ 为点集 $\{z_t\}$ 上的离散正交多项式系数， Φ 为由其所有线性组合生成的多项式集合， $\Phi = \text{Span}\{P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z)\}$ 。用离散正交多项式进行最小二乘曲线拟合，亦

即求： $P(z) = \sum_{i=1}^n a_i P_i(z_t) \in \Phi$ ，使其满足

$$Q = \sum_{t=1}^N [P_n(z_t) - k_t]^2 = \sum_{t=1}^N \left[\sum_{m=1}^n a_m z_t^m - k_t \right]^2 = \min. \quad (4)$$

利用多项式系数 $\{P_1(z), P_2(z), \dots, P_n(z)\}$ 的离散正交性易知，(4) 式法方程组成为以下简单形式

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N P_1^2(z_t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{t=1}^N P_2^2(z_t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{t=1}^N P_n^2(z_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^N P_1(z_t)k_t \\ \sum_{t=1}^N P_2(z_t)k_t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^N P_n(z_t)k_t \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其解为

$$a_m = \frac{\sum_{t=1}^N P_m(z_t)k_t}{\sum_{t=1}^N P_m^2(z_t)} \quad (m=1, 2, \cdots, n). \quad (6)$$

得到拟合多项式

$$P(z) = \sum_{i=1}^n a_i P_i(z_t). \quad (7)$$

最后计算出系数 a_i , 并逐步把 $a_i P_i(x)$ 累加到 $P(x)$ 中去, 最后就可得到所求的拟合多项式

$$y = P(z) = a_1 P_1(z_1) + a_2 P_2(z_2) + \cdots + a_n P_n(z_n). \quad (8)$$

2.2.1.1.4 人口数量预测步骤

Step 1. 分别用 $GM(1,1)$ 灰色系统和 BP 神经网络进行预测, 得到预测序列

Y_{1t} 和 Y_{2t} ;

Step 2. 由式 (2) 和 (3) 计算出两种模型的加权系数列 $\{k_{1t}, k_{2t}\}$, 并令 $k_t = k_{1t}$ 。则

$$k_{2t} = 1 - k_{1t} (t=1, 2, \cdots, N);$$

Step 3. 由式 (4) - (8) 得到拟合多项式 y , 令 $k_t = y_t (t \geq N+1)$;

Step 4. 当 $k_t \notin [0, 1]$ 时, 应该对其进行修正。定义: 预测值 Y_{1t}, Y_{2t} 与实际值 x_t 的均

方差为 $\sigma(A_{it})$

$$\sigma(A_{it}) = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N A_{it}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N A_{it} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

σ_{1t}, σ_{2t} 为预测值 Y_{1t}, Y_{2t} 与实际值 x_t 的均方差, 则 $k_t = k_{\text{修正}} = \frac{\sigma_{2t}}{\sigma_{1t} + \sigma_{2t}}$;

Step 5. 将 k_{1t} 、 k_{2t} 分别乘以序列 Y_{1t} 和 Y_{2t} , 得到组合预测序列 Y_t , 结束计算。

2.2.2 模型的结果

我们利用 MATLAB 对模型进行了求解见【附录 2】，得到 2030 年世界人口、粮食、淡水、能源、环境的结果如表 1 所示

表 1 2030 年世界各指标值

指标	人口 (亿人)	粮食 (亿吨)	淡水 (立方米)	能源 (亿吨煤)	平均温度 (°C)
2030 年	83.893	35.243	9324.645	200.453	16.384

从表 1 可以看出到 2030 年世界的人口达到了 83.893 亿人，粮食的需求量增加 54.2%，淡水需求量增加 35.1%，能源需求增加 44.7%，与约翰贝丁顿的观点很接近，证明了约翰贝丁顿观点的正确性。

2.3 大系统多目标集成模型

人口、粮食、淡水、能源、环境、经济是可持续发展的六个关键的因素，它们的相互作用、相互制约构成了一个复杂的系统，简称大系统。为了描述这个大系统，我们建立了大系统多目标集成模型。

2.3.1 模型的体系结构

根据大系统复杂的特点[10,11]我们提出了一种具有层次结构的模型结构体系——三层次模型体系结构，如图 1 所示

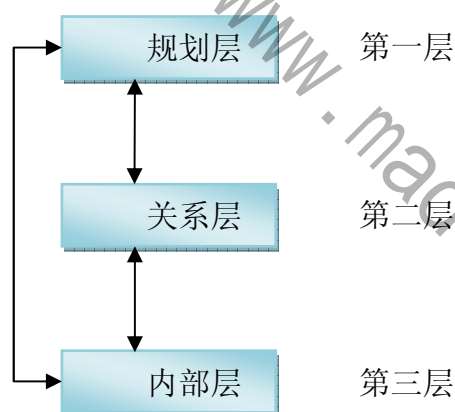


图 1 三层次模型体系结构

2.3.2 多目标集成模型体系结构

根据上述的三层次模型体系结构，设计如图 2 所示的研究大系统多目标集成模型的总体框架。

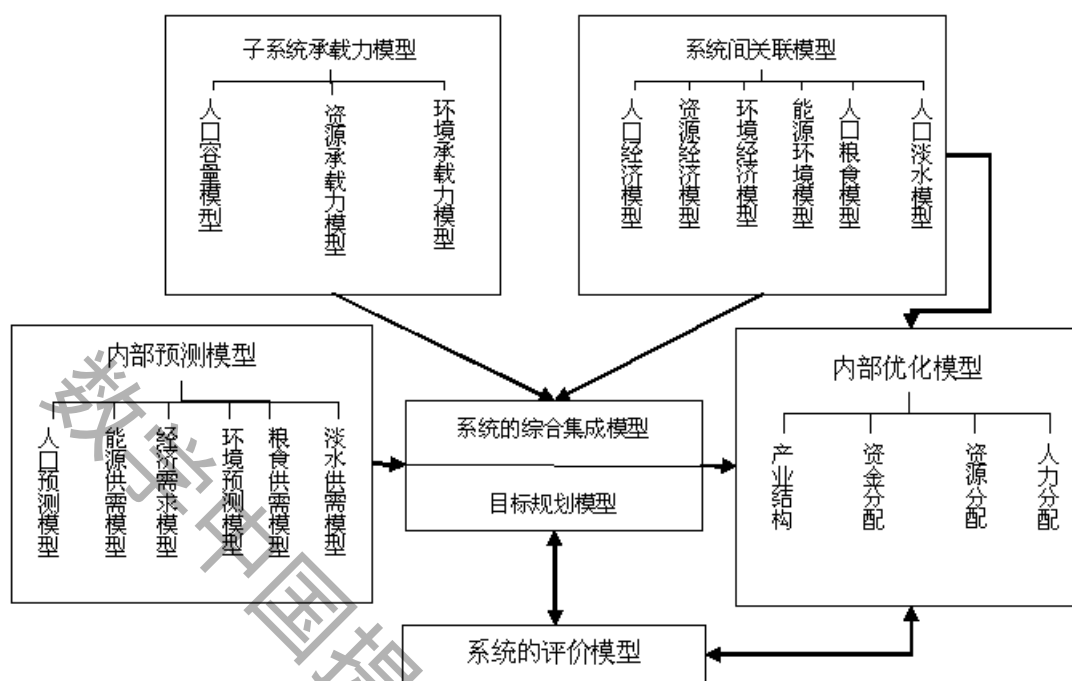


图 2 大系统多目标集成模型

在内部层模型中，主要包含两类模型：预测模型和优化模型。预测模型包括人口预测模型、能源供给和需求模型、经济需求模型等，它们一方面提供子系统内部要素间的数学描述；另一方面可以确定一些外生参数，为关联层和系统集成层提供服务。优化模型主要包括产业结构、资源分配、资金分配等模型，它可以根据综合集成模型得到的宏观结果进行微观层次的优化，得到更加具体的结果。在关联层中，有关人口经济、能源经济以及环境经济等模型主要用来描述子系统之间相互制约、相互促进的关系，它为上一层的综合集成模型提供决策变量相互关联的数学方程描述。此外，关联层中的能源承载力、环境承载力、人口容量等模型主要用来确定各子系统的阈值，为人口、能源与环境的限制条件提供科学的依据。在规划层中，运用目标规划模型构造系统的综合集成模型。之所以采用目标规划模型主要是考虑到集成模型的目标的多样性以及动态多变性。

2.4 大系统多目标集成模型的简化

从大系统多目标集成模型的建立可以看出如果用它来建立危机预测模型则非常的复杂并且非常的难解，所以我们有必要对它进行简化。

2.4.1 经济发展与环境质量的“弱肉强食”生态模型

假设 1: 一个地区的经济发展可看作是生物界中的一个种群, 假设用一个单一变量 y 来表示其每年的 GDP , 同时略去该地区内不同行业, 不同部门对 GDP 的贡献率。

假设 2: 该地区的环境质量是有限的, 类似于生物界中的食饵, 假定经济发展对

环境质量的影响是连续的,而且当人们不主动保护环境时,环境质量由于人们的经济活动而下降,并用单一变量 x 来表示环境质量。

假设 3:该生态学模型只考虑经济发展与环境质量的相互影响,不考虑其他因素的作用。

2.4.1.1 模型的建立

运用 *Volterra* 提出的“弱肉强食”生态模型,我们可以得到经济发展与环境质量的相互作用,既 y 与 x 的关系如下两个方程式所示,其中 y' 与 x' 分别为 y 与 x 对时间 t 的导数。其中:假设 r 为环境的自我修复能力, λ 表示经济发展对环境质量的影响, d 表示环境质量恶化时对经济发展速度的影响。 μ 表示环境质量对经济增长的促进能力(各系数大于 0)。

$$\begin{cases} x' = x(r - \lambda * y) \\ y' = y(r - d + \mu * x) \end{cases} \quad (10)$$

首先求平衡点,令 $x' = 0$, $y' = 0$, 得 $(0, 0)$ 和 $(d/\mu, r/\lambda)$ 。

在方程组 (10) 中,竖直线 $x = d/\mu$ 把平面分成两个半平面,在左半平面 $dy/dt < 0$,在右半平面 $dy/dt > 0$ 。类似的,水平线 $y = r/\lambda$ 也把平面分成两个半平面,在上半平面 $dx/dt < 0$,在下半平面 $dx/dt > 0$ 。如图 3 所示

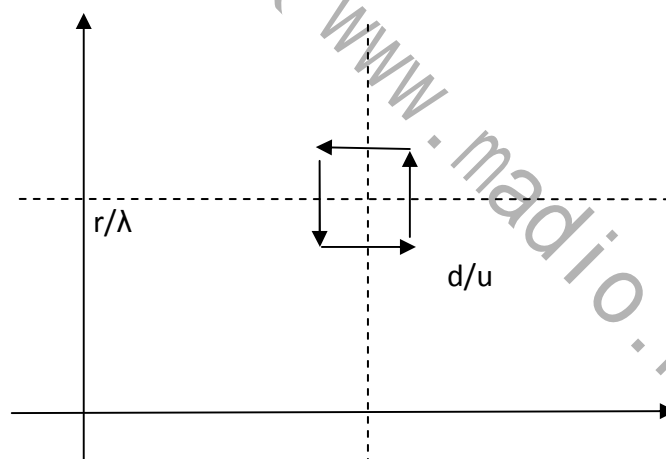


图 3 捕食模型中的轨迹方向

沿 y 轴的运动必竖直指向 $(0, 0)$ 点,而沿着 x 轴的运动必水平远离 $(0, 0)$ 点。要进入静止点就要沿着直线 $x = 0$, 这里的环境质量等于 0, 由于没有环境对经济的促进能力,经济发展也将减少到 0。既在实际中不会出现经济发展与环境质量都降为 0 的情况。

若只考虑 $(d/\mu, r/\lambda)$ 的稳定性,则

$$\begin{cases} x = d / \mu + \rho \\ y = r / \lambda + \phi \end{cases} \quad (11)$$

将(11)代入(10)得线性方程组的通解为:

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 * \cos(\sqrt{r * d} * t) \\ \phi(t) = \phi_0 * \sin(\sqrt{r * d} * t) \end{cases} \quad (12)$$

由(12)可以得到图 4

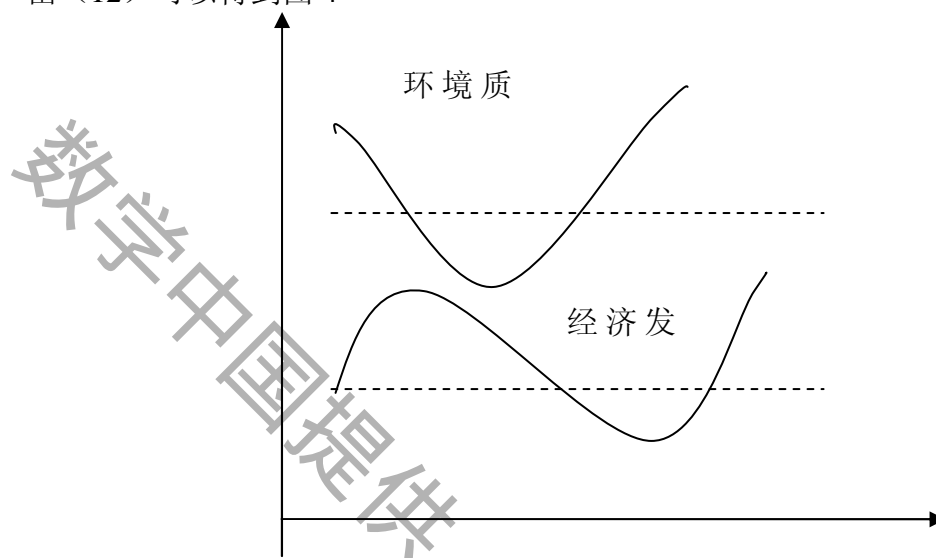


图 4 经济发展和环境质量变化的关系

2.4.1.2 分析结论

从图 4 可以看出,随着经济的起飞,工业化开始导致资源利用量的剧增,“三废”的产生量和排放量相应增加,环境污染开始出现,经济发展进入了“污染时代”,这一阶段的特点是经济的增长是以环境质量的下降为代价;之后,随着经济日渐成熟,工业技术水平的不断提高,增长方式逐步由外延扩大再生产转向以内涵扩大再生产的方式进行,物耗、能耗的增长逐缓,“三废”产生量相对减少。所以我们可以通

2.4.2 子系统的简化

因为能源系统、粮食系统、淡水资源都是属于投入资产,即资源系统,因此可以将这三个子系统回归为资源系统。

2.4.3 影响因子的关系

由以上分析建立如图 5 所示的关系。

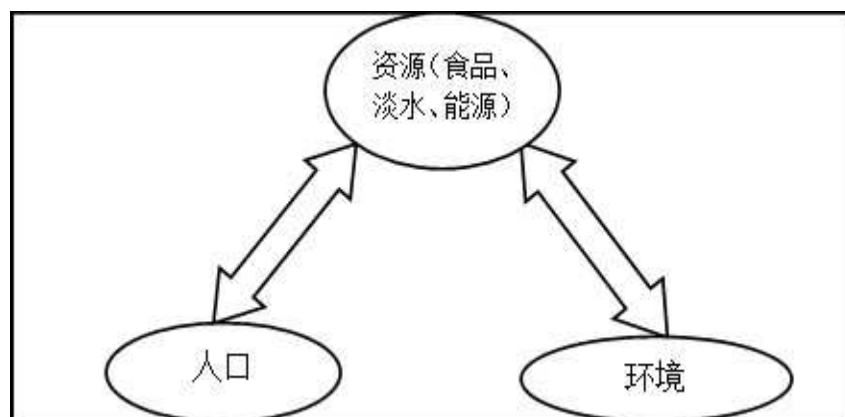


图 5 人口、资源、环境的关系

于是我们可以通过熵值法来确定食品、淡水、能源之间的权重对人口、环境构成的影响。

2.4.3.1 熵值法[12]的基本原理

在信息论中，熵是对不确定性的一种度量。信息量越大，不确定性就越小，熵也就越小；信息量越小，不确定性越大，熵也越大。根据熵的特性，我们可以通过计算熵值来判断一个事件的随机性及无序程度，也可以用熵值来判断某个指标的离散程度，指标的离散程度越大，该指标对综合评价的影响越大。

2.4.3.2 熵值法的步骤

Step 1. 选取 m 个影响因素， n 个年份的数据，则 $x_{ij}(i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ 为第 i 个影响因素的第 j 年的数值。

Step 2. 指标的标准化处理:异质指标同质化:

由于各项指标的计量单位并不统一,因此在使用它们计算综合指标前,我们先要对它们进行标准化处理,即把指标的绝对值转化为相对值,并令 $x'_{ij} = |x_{ij}|$, 从而解决各项不同指标值的同质化问题。而且,由于正向指标和负向指标数值代表的含义不同(正向指标数值越高越好,负向指标数值越低越好),因此,对于高低指标我们用不同的算法进行数据标准化处理。其具体方法如下:

$$\text{正向指标: } x'_{ij} = \left[\frac{x_{ij} - \min(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})}{\max(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) - \min(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})} \right] \times 100$$

$$\text{负向指标: } x'_{ij} = \left[\frac{\max(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) - x_{ij}}{\max(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}) - \min(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})} \right] \times 100$$

则 $x'_{ij}(i=1, \dots, m; j=1, \dots, n)$ 为第 i 个影响因素的第 j 年的数值。为了方便起见，仍记数值 $x'_{ij} = x_{ij}$ 。

Step 3. 计算第 j 项指标下第 i 个因素占该指标的比重：

$$p_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sum_{i=1}^m X_{ij}} \quad (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n) \quad (13)$$

Step 4. 计算第 j 年的熵值：

$$e_j = -k \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln(p_{ij}) \quad (14)$$

式(14)中, $k > 0, k = 1/\ln(m), e_j \geq 0$ 。

Step 5. 计算第 j 年的差异系数。对第 j 年, 指标值的差异越大, 对方案评价的左右就越大, 熵值就越小, 定义差异系数:

$$g_j = \frac{1-e_j}{n-E_e} \quad (15)$$

式(15)中 $E_e = \sum_{j=1}^n e_j, 0 \leq g_j \leq 1, \sum_{j=1}^n g_j = 1$ 。

Step 6. 求权系数值:

$$w_j = \frac{g_j}{\sum_{j=1}^n g_j} \quad (1 \leq j \leq n) \quad (16)$$

Step 7. 计算各个影响因素的综合得分:

$$s_i = \sum_{j=1}^n w_j \cdot p_{ij} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (17)$$

通过对已有数据的处理, 分析得到下表 2:

表 2 影响因子权重表

影响因子	人口数量	气候变化	平均
食品	0.353	0.351	0.352
淡水	0.342	0.338	0.340
能源	0.305	0.311	0.308

2.5 三维耦合非线性微分方程动力学模型

在本文中, 我们在陆启韶[13]下, 在李克强[14]的基础上, 通过适当的假设, 系统地建立了人口、资源(食品、淡水、能源)、环境之间的三维耦合非线性微分方程动力学模型, 并对其进行了模型平衡点的稳定性和极值分析。

设人口数量 $N(t)$ 是时间 t 的函数; $D, C > 0$ 分别为资源、环境对资源的削弱;

$\gamma > 0$ 为人口的死亡率。

假设:

(1) $N(t)$ 的时间变化率与资源成正的线性相关, 而与环境对资源的影响成负的线性相关;

(2) 如果人数较多(或者较少), 那么资源标准就应调低(或者调高);

(3) 如果资源标准较高(或者较低), 那么就需要充分考虑人口数的承受能力, 通过加大(或者减少)环境的影响来进行合理地调控。

在给定一个人口基数 N_m , 且近期的有一个标准 D_m 时, 根据前面的假设, 我们得到如下关于人口、资源(食品、淡水、能源)、环境之间的三维耦合非线性微分方程动力学模型:

$$\begin{cases} dN/dt = (D - C)N - \gamma N^2 \\ dD/dt = \delta(N_m - N) \\ dC/dt = k(D - D_m) \end{cases} \quad (18)$$

其中: $\delta, k > 0$ 为比例系数。

通过对模型(18)应用 Routh-Hurwitz 判别准则、稳定性判别法文献[13], 以及极值分析, 我们有:

定理 1: 当 $N_m > k/\gamma$ 时, 三维耦合微分方程动力学模型(18)有稳定的平衡点:

$$(N^*, D^*, C^*) = (N_m, D_m, C - D_m + \gamma N_m) \quad (19)$$

进一步, 给定人口基数是近期的一个标准, 并且增长的人口数量可估计为:

$$N_m < N(t) < \frac{D_m - C}{\gamma}, \quad (t > t_m) \quad (20)$$

其中 $D_m > D^*$ 是时刻 t_m 的资源标准。

证: 由(1)的右端为零, 易得(18)的平衡点为:

$$\begin{pmatrix} -\gamma N_m & N_m & N_m \\ -\delta & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

它的特征方程为:

$$\gamma^3 + 2N_m\gamma^2 + \delta k N_m = 0 \quad (21)$$

由于 $\gamma N_m > 0, \delta k N_m > 0$ 故当 $N_m > k/\gamma$ 时, 有方程(21)的系数满足:

$$N_m \cdot \delta N_m - \delta k N_m = \delta N_m (\gamma N_m - k) > 0$$

于是, 根据 Routh-Hurwitz 判别准则[13], 方程(21)的所有特征根均具有负实部; 再根据微分方程平衡点的稳定性判别定理[13], 知平衡点(19)是稳定的。

为证明第二个结论, 我们利用函数的极值判别法。设模型(18)在时刻 t_m 达到人

口基数 N_m , 则有 $\frac{dD}{dt} = 0$, 而此时人口数量增长的条件是 $\frac{dN}{dt}\big|_{t=t_m} > 0$, 从而有

$\frac{d^2D}{dt^2} < 0$, 从而给定的人口基数 N_m 是资源标准达到极大值 D_M 时的人口数量。最后, 再由模型(18)的第一个方程得知:

$$N_m < N(t) < \frac{D(t) - C}{\gamma}, \quad (t > t_m) \quad (22)$$

又由 $D(t) \leq D_M$ 知 $\frac{dD}{dt} \leq 0$, 故 $D(t)$ 是单调减少的函数, 于是我们有 $D(t) \leq D(t_m) = D_m$ (当 $t > t_m$ 时), 将它代入式(22)后便得到人口增长量估计, 即(20)式。

最后, 再由稳定性结果, 对 $D(t) \leq D(t_m) = D_m$, 取 $t \rightarrow \infty$ 时的极限, 就得到 $D_m > D^*$ 。

根据定理 1, 第三个方程改为:

$$\frac{dC}{dt} = k(D_M - D)$$

那么, 我们得到相应的三维方程组动力学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (D - C)N - \gamma N^2 \\ \frac{dD}{dt} = \delta(N_m - N) \\ \frac{dC}{dt} = k(D_M - D) \end{cases} \quad (23)$$

根据文献[13]所给出的代数方程的所有根均具有负实部的必要条件, 为了避免模型(23)平衡点的不稳定性, 把模型(18)中的第二和第三个方程中的绝对变化率 $\frac{dD}{dt}$ 与 $\frac{dC}{dt}$ 分别改为相对变化率 $\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dt}$ 和 $\frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dt}$, 那么, 我们就得到改进的关于人口、资源(食品、淡水、能源)、环境之间的三维耦合非线性微分方程动力学模型如下:

$$\begin{cases} dN/dt = (D - C)N - \gamma N^2 \\ dD/dt = \delta(N_m - N)D \\ dC/dt = kC(D - D_m) \end{cases} \quad (24)$$

其中: $\delta, k > 0$ 为比例系数。

根据 Routh-Hurwitz 判别准则和稳定性判别法[13], 以及极值分析, 我们有:

定理 2: 三维耦合微分方程动力学模型(21)有平衡点:

$$(N^*, D^*, C^*) = (N_m, D_M, C - D_M + \gamma N_m) \quad (25)$$

平衡点(8)式稳定的必要条件是：

$$C^* > D_M; \max \left\{ D_M \frac{k}{2\gamma + \delta}, D_M \left(\frac{k}{\delta} + \frac{k-1}{2\gamma} \right) \right\} < N_m < \frac{C^* - D_M}{2\gamma} \quad (26)$$

进一步,我们有人数增长量估计为：

$$N_m < N(t) < \frac{D(t) - C}{\gamma} \quad (t > t_m) \quad (27)$$

证：由(24)式的右端为零,易得(24)式的平衡点为(25)式。模型(25)在(26)式处的线性化系统的矩阵为：

$$\begin{aligned} & \gamma^3 + [(2\gamma + \delta) N_m - k D_M] \gamma^2 + [2\gamma \delta N_m^2 - D_M N_m (2\gamma k + k\delta - \delta)] \gamma + \\ & \delta k D_M N_m (C^* - D_M - 2\gamma N_m) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

根据文献[13]所给出的代数方程的所有根均具有负实部的一个必要条件,我们有代数方程(28)的所有根均具有负实部的必要条件是方程(28)的所有系数均为正,即：

$$\begin{aligned} (2\gamma + \delta) N_m - k D_M &> 0; \\ 2\gamma \delta N_m^2 - D_M N_m (2\gamma k + k\delta - \delta) &> 0; \\ C^* - D_M - 2\gamma N_m &> 0. \end{aligned}$$

由此可得条件(26)式。再根据平衡点的稳定性判别法[13],我们得到平衡点(24)式稳定的必要条件是(25)式成立。

对模型(24)利用函数极值分析,我们可以得到人口增长量的估计为式(27)。证毕。

三维动力学模型的结论：

在本模型中,主要得到了如下的结果：

- (1)建立了关于人口、资源（食品、淡水、能源）、环境之间的三维耦合非线性微分方程动力学模型；
- (2)给出了每个模型平衡点的稳定性条件；
- (3)确定人口基数的原则和人口增长量的估计；
- (4)利用这些结论进行了有关调控的分析,可为相关部门提供决策参考。

2.6 PRE 评价体系的建立

随着时间的推移,人口、资源（食品、淡水、能源）、气候之间必然会发生变化,我们通过建立的PRE评价体系（Population、Resources、Environment）来样判断“完美风暴”发生的可能性。冯玉广和王华东[15]阐述了人口、资源、环境、经济（PREE）系统协调发展的含义,定量描述PREE系统发展的协调公式,我们根据他们提出的PREE系统模型,建立了适合本题的PRE（人口、资源、气候）评价体系。

在下文中, M_i 为第 i 种不可再生资源的当年开采量; M_{i0} 为第 i 种不可再生资源的当年的储存量; m_j 为种非再生能源的当年消耗量; ρ_k 为水或大

气中第种污染物的当年的浓度； ρ_{k0} 为水或大气中第种污染物的允许浓度(国家标准)； λ_k 为第 k 种污染的权重系数 ($\sum_k \lambda_k = 1$)； a 、 b 为比例系数 (a 为自然型发展模式所占比例， b 为技术型发展模式所占比例，)； k 为系数。

为了给出协调度的简洁的表达式，令

$$a = \sum_{i=1}^n \cos \frac{M_i}{2 M_{i0}} \quad (29)$$

称为不可再生资源开采度；

$$I = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\rho_k}{\rho_{k0}} \quad (30)$$

称为环境状况指数。

为明确式所表示的协调度的含义，我们讨论以下几点：

(1). 由 (29) 式可见， $H = H(\alpha, \gamma, I)$ 即 PRE 系统发展的协调程度决定于——

反映不可再生资源开采程度的 α ，反映能源利用效益的 γ ，反映环境状况的 I 四个参量，这四个参量表征人口、资源、环境三个要素的特征，统称为特征量。

(2). α 反映了不可再生资源对发展的制约作用，由 (30) 式可见，在其它因素不变得条件下，当 $M_i = 0$ 或 $M_i \ll M_{i0}$ 时， $\alpha \approx n$ ， H 取最大值；随着 M_i 的增大， α 将逐步减小， H 也将逐步减小；当 $M_i = M_{i0}$ 时， $\alpha = 0, H = 0$ 自然资源型发展模式不复存在。

(3). γ 反映能源的利用效益。在其它因素不变得条件下， γ 越大，能源的利用率越高； γ 越小，能源的利用率越低。 γ 越大，发展的协调程度好， γ 越小，发展的协调程度差。

(4). I 反映的环境状况。 I 越大，环境状况越差，发展协调程度越差； I 越小，环境状况越好，发展的协调程度越好。由 (29) 式，有

$$\frac{\partial H}{\partial I} = -K(a\alpha + b)e^I \quad (31)$$

(5). 由 (31) 式可见，在 α 不变时， $-\frac{\partial H}{\partial I}$ 随 I 的增大指数地增大，这表明，随 I 的增大协调度急剧减小。 I 是影响协调度的又一主要因素。

(6). 根据上述讨论，可将 PRE 评价体系发展状况按协调度的不同取值分级(表 3)。

表 3 PRE 系统发展的协调度分类和分级

$H < -100$	$-100 < H < 0$	$H = 0$	$0 < H < 100$	$H > 100$
极不协调	不协调	临界状态	弱协调	高度协调

2.7 “完美风暴”发生可能性的判断

我们通过对现有数据的处理,采用龙格—库塔(Runge-Kutta)公式[16]求解三维动力学模型,其编写代码见【附录3】,求解结果为: $H = -67.38$,可知PRE评价体系是不协调的,所以“完美风暴”发生的可能性为67.38%。

3 未来人口、资源、环境与可持续发展的情景分析

核心内容:英国科学家约翰·贝丁顿警告称,气候变化和人口增长将导致食品、淡水和能源等资源短缺,如果未来数年内没有充分准备的话,到2030年,世界将会较大可能面临“完美风暴”,出现大的动荡。本文针对未来人口、资源、环境变化进行预测,联系各国采取的相关政策进行可持续发展的讨论与分析。

3.1 可持续发展的影响因素分析

在经济全球化趋势使世界关系更加密切、竞争更加激烈的同时,可持续发展问题也更加突出地摆在了各国面前。人口压力、资源短缺和环境恶化困扰着世界各国未来的发展。目前人类是生存在地球上的,与我们人类及与人类生活、生产和其它活动关系最密切的自然界,即和人类最直接有关系的那部分地球环境,钱学森教授称为地球表层系统。可持续发展要研究的物质系统就是地球表层系统。可持续发展研究的理论基础是地球表层系统理论和地理科学,研究的对象是地球表层系统与人类社会系统结合在一起的一个复杂系统,因此我们不能就人口论人口,就环境论环境,就资源论资源,而应从系统学的观点出发,把人口、经济、资源、环境系统作为一个整体,采用“定性定量综合集成”的方法进行研究,建立“人口、经济、资源、环境系统模型[17]”。通过不同人口方案与经济发

3.2 我国可持续发展的关键问题是人口问题

过去10多年,世界上许多国家实行计划生育使人口增长明显下降。但是从可持续发展的观点来看,由于总人口基数大,人口增长速度的下降,并没有消除人口对粮食、淡水、能源等资源的需求压力,从而才导致动乱等现象的出现,这无疑是可持续发展进程中面临的最大难题;以中国为例,人口正在向人口总数高峰、劳动力人口总数高峰及老年人口总数高峰迈进,同时,人口年龄结构中老年人口比例越来越高。一方面,人口增长的惯性使人口数量将会在很长时间内保持在较大规模上,另一方面,老龄化程度不断提高带来一系列社会问题。因此,21世纪各国将面临人口数量和人口结构双重压力。

3.2.1 未来20年人口发展的情景分析

虽然“计划生育”策略的实施很明显地减缓了人口增长的趋势,但人口基数

过于庞大，且人们普遍人均寿命将增长，对于总数都将有很大的影响；通过我们搜集全世界近 15 年来的人口数据（如下图 6 所示），我们对 20 年后的人口总数进行预测，得到 2030 年人口总数将达到 83.893 亿，相比较 2006 年增长率达 28.71%，人口形势依旧十分严峻。

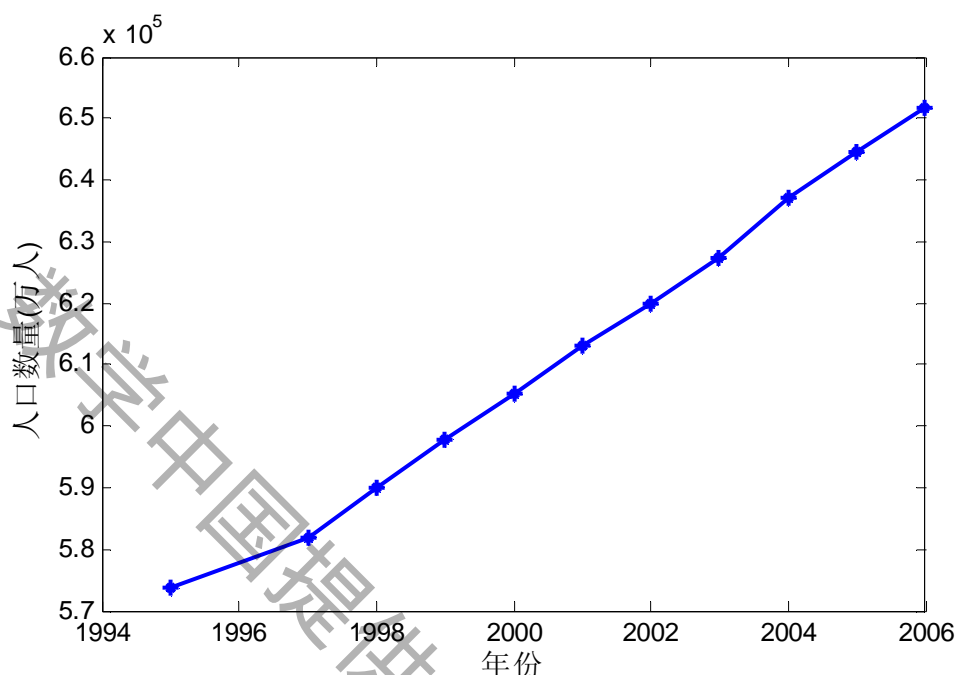


图 6 世界人口总量(万人)

3.2.2 人口发展与粮食、淡水、能源等供求关系

粮食、淡水、能源等资源是关系到国计民生的大问题。未来世界人口的发展将影响未来粮食等自然资源的供求关系。测算结果表明，进入 21 世纪后，我国粮食、淡水、能源等资源问题的总趋势是总需求大于总供给。我们分别对于各项资源数据进行预测，可以看出到 2030 年随着世界人口的增长对于粮食的需求量增加 54.2%，淡水需求量增加 35.1%，能源需求增加 44.7%，与约翰·贝丁顿的观点很接近，证明了约翰·贝丁顿观点的正确性，即气候的变化和人口增长将导致食品、水源和能源短缺等问题的出现，甚至有可能导致“完美风暴”的出现。

3.3 人口、资源、环境的现实决定了未来国家发展的趋势

3.3.1 未来国家发展趋势的情景分析

随着人口总数的继续快速增加，人类对食物的需求远远超过了食物的产量，一场世界性的食品危机可能会到来。与此同时，人类还将应对水资源、能源短缺和气候变化。人口、资源、环境等因素相互影响的关系对于可持续发展具有很重要的意义。不仅如此，气候变化的影响也在逐步推进。如在中国，气候变化无论是对水、食品、海岸线、健康等都有重要影响。比如海洋酸化。海洋是二氧化碳重要的水库，化石能源的燃烧、土地使用的变化中产生的二氧化碳约有 30% 最终被海洋吸收，海洋面临变暖、酸化、降低多样性、过度开发等形势，而这些对海洋食物链、生态系统和生物地球化学循环的影响也将非常严峻。

3.3.2 “完美风暴”发生可能性的分析

“完美风暴”是一场基于人口无法得到资源满足时发生动乱情况下的自然灾害，根据我们针对人口、粮食、淡水、能源等因素指标的预测，我们验证了科学家约翰·贝丁顿的观点的正确性，如果世界各国在未来数年内没有针对资源短缺问题采取相应的解决措施，随着人口的暴增和气候环境的进一步恶化，很有可能会发生大规模的战争或动乱，人类必将面临一场前所未有的“完美风暴”。

3.3.3 可持续发展的有效措施

全球人口持续地增加导致人类对食物、淡水、能源以及其他一些资源和服务的需求不断增强。准确的气候信息可以使农业生产和水资源利用更为高效，使自然资源的利用更具有可持续性，推动可更新能源的发展。如果能够对某个地区季节尺度的气候进行准确预报，那将对农民、水资源管理者、卫生工作者以及很多产业具有极大的意义。

除了准确、及时预报天气外，还可以在世界范围内定期召开“可持续发展论坛”，相互交流发展经验，推行“节约资源”策略，针对粮食、淡水、能源等不同资源探讨不同的节能方案。

当然，控制人口的增加趋势才是解决问题最为重要的措施，我们可以继续提倡“计划生育、优生优育”等政策。

3.4 总结

总之，人口规模大、日趋老龄化、劳动力剩余引起失业压力增大、经济结构不合理造成供求关系失调、经济增长方式粗放型效益低，以及生态环境恶化等一系列问题，困扰和制约着可持续发展。因此，21 世纪全球还必须坚持计划生育，严格控制人口增长的基本国策，同时，要关注人口素质问题、低生育水平下出现的老年人口及性别比例失调等问题；在经济建设上，要通过投资结构的合理调整，加大科技进步的作用，促进经济结构的转变和升级，为经济长期发展带来新的动力；在经济发展的同时，要对生态环境实施保护政策，对环境污染进行治理，不走先发展、先污染后治理的道路；另外还必须大力提高资源利用效率，在这种情况下，相信世界各国都将找到自己的可持续发展之路。

4 模型的进一步讨论与改进

由于大系统多目标集成模型的复杂性和难实现性，我们可以利用 MATLAB 中的 Simulink 仿真系统对其进行仿真，再结合 PRE 评价体系对“完美风暴”的发生进行预测。或则建立多维耦合非线性微分方程动力学模型对其进行求解，但求解模型的结果可能比较困难。

5 模型的评价与推广

5.1 模型的评价

5.1.1 模型的优点

- 本文利用经济发展与环境质量的“弱肉强食”生态模型和建立熵值法模

型确定影响因子之间的关系对模型进行简化,使得危机预测模型的求解变得简单。

- 建立 PRE 评价体系来作为衡量“完美风暴”是否发生,更具有说服力。
- 建立的离散正交组合预测模型是一种长期预测模型,得到的结果相当精确

5.1.2 模型的缺点

- 本文考虑的是世界总系统的情况,由于数据不好找的缘故没有具体考虑各个国家的总系统情况

5.2 模型的推广

本文所建的所有模型都可以推广到另一个复杂的系统,比如一个生态系统,海洋系统。另一方面本文的离散正交组合预测方法是一种长期预测,具有强大的泛化能力,可以推广到其他预测领域。

6 参考文献

- [1] 邓玉勇,杜铭华,雷仲敏.基于能源—经济—环境(3E)系统的模型方法研究综述[J].甘肃社会科学·经济管理.2006. (3):209-212.
- [2] 刘小林.区域人口、资源、环境与经济系统协调发展的定量评价[J].工作视点.2007. (1): 64-65.
- [3] 姜涛,袁建华,何林,许屹.人口—资源—环境—经济系统分析模型体系[J].系统工程理论与实践.2002. (12): 67-72.
- [4] E. Marandola and D. J. Hogan. Vulnerabilities and risks in population and environment studies[J]. Popul Environ. 2006 (28):83-112.
- [5] 张阿玲,郑淮,何建坤.适合中国国情的经济、能源、环境(3E)模型[J].清华大(自然科学版).2002 (42):1616-1620.
- [6] D. Ma, Q. Bai. Combinatorial Forecast Model of Urban Water Consumption [J].1st International Conference on Modeling and Simulation.Vol.1: Modeling and Simulation in Science and Technology. Aug 2008, pp. 352-256.
- [7] J. Shu, E.O. Lindell. Short-term water demand forecast modeling techniques methods versus AI [J]. Journal AWWA.2002, 97.(7):64-72.
- [8] 邓聚龙.灰理论基础[M].华中科技大学出版社.2002年.
- [9] 王爽,张鹰,吕瑞霞. BP 神经网络的算法改进及应用[J].电脑知识与技术. 2009. 5. (4).933-935.
- [10] 关晓涵,顾培亮.系统理论在可持续发展中的应用研究[J].科学管理研究.1999,17(3):41- 45.
- [11] 汪应洛,蒋正华.人口与经济协调发展规划模型[A].中国经济的发展与模型[C].北京:中国财政经济出版社.1990: 140- 146.
- [12] 王平心,杨冬花,基于熵值法的我国上市公司财务预警系统研究,商业研究, 2005 (15): 86-88.
- [13] 陆启韶,常微分方程的定性方法和分叉[M],北京:北京航空航天大学出版社,1989.
- [14] 李克强,论“人口、资源与环境经济学”的理论基础[J].中央财经大学学报.经

济管理. 2007(4):53-58.

- [15]冯玉广,王华东. PREE系统协调发展的定量描述[J].中国人口·资源与环境.1996 (2): 42-45。
- [16]钟益林, 彭乐群, 刘炳文.常微分方程及其Maple, MATLAB求解[M].清华大学出版社.2007年。
- [17]何林, 袁建华, 许屹, 姜洁. 未来我国人口、经济、资源、环境与可持续发展的情景分析[J]. 系统工程理论与实践.2002.(7):131-133.

数学中国提供 (www.madio.net)

1090

附录

附录 1

表 4 世界总人口数

时间(年)	1995	1997	1998	1999	2000	2001
人口(万人)	573692	581871	589857	597897	605412	613010
时间(年)	2002	2003	2004	2005	2006	
人口(万人)	619973	627252	636969	644598	651776	

表 5 世界粮食总量

时间(年)	1990	1995	1999	2000	2002	2004	2005	2006
粮食(万吨)	195344	190331	206418	207152	207683	225202	223940	222112

表 6 世界人均淡水总量

时间(年)	1996	1997	1998	1999	2000	2003	2004	2005
人均淡水总量(立方米)	9210	9056.5	8903	8799.5	8696	6895	6872	6794

表 7 世界能源总量

时间(年)	1994	1995	1996	1997	2000
能源(标准煤万吨)	1191233	1230561	1261264	1275473	1313977
时间(年)	2001	2002	2003	2004	
能源(标准煤万吨)	1262910	1271253	1324338	1384878	

表 8 世界平均温度

时间(年)	2002	2003	2004	2005	2006
平均温度(℃)	14.1625	14.175	14.2625	14.325	14.40

附录 2

%灰色预测代码的主要部分

```
clear all;
```

```
clc;
```

```
x=[573692 581871 589857 597897 605412 613010 619973 627252 636969  
644598 651776]; %初始数据序列
```

```
[m,n]=size(x);
```

```
x1=[]; %累加序列
```

```
x1(1)=x(1);
```

```
for i=1:1:n-1
```

```
    x1(i+1)=x1(i)+x(i+1); %累加值
```

1090

```

end;                                %以上，作一阶累加 1-AGO 得 x1

z=[];
z(1)=x(1);
for i=1:1:n-1

    z(i+1)=1/2*(x1(i)+x1(i+1));

end;

B=[-z(2:n),ones(n-1,1)]; Y=x(2:n); Y=Y';           %以上，构造矩阵 B 和 Y

b=B'*B;

d=B';d1=d*B;d2=d*Y;
c=d1\d2;
a=c(1);
u=c(2);                                %以上，利用最小二乘法解参数 a 和 u

x0=[];x0(1)=x(1);

for i=1:1:n-1

    x0(i+1)=(1-exp(a))*(x(1)-u/a)*exp(-a*i);

end;                                %累减还原得到灰色预测模型 x0
s01=abs(sum(x-x(1))-1/2*(x(n)-x(1)));    %灰色关联度
s02=abs(sum(x0-x0(1))-1/2*(x0(n)-x0(1)));
s03=abs(s01-s02);
s04=(s01+s02+1)/(1+s01+s02+s03);

xq=x0(1:n);
d1=x-xq;                                %残差序列
d11=abs((x-xq)./x);                    %分析误差；相对误差(%)：(实际值-预测值)
/实际值*100
d12=sum(d11)/n;                        %平均相对误差
d13=d11(n);                            %模拟误差
x3=sum(x)/n;                            %均方差比值
for i=1:1:n
    t(i)=(x0(i)-x3).^2;
end;

```

1090

```

s0=sum(t)/n;
d14=sum(d1)/n;
for i=1:1:n
    p(i)=(d1(i)-d14).^2;
end;
s2=sum(p)/n;
d=sqrt(s2/s0);

s1=sqrt(s0);           %小误差概率
s1=0.6745*s1;
s11=abs(d1-d14);

%bpann.m
%BP 人工神经网络算法程序主要部分
clc
%原始数据
b=[x1,x2,x3]; %输入数据矩阵
c=[y];        %输出数据矩阵

%bp 神经模拟
[pn,minp,maxp,tn,mint,maxt]=premnmx(b,c); % 对于输入矩阵 b 和输出矩阵
c 进行归一化处理
dx=[-1,1;-1,1;-1,1]; %归一化处理后最小值为-1，最大值为 1

net=newff(dx,[3,7,2],{'tansig','tansig','purelin'},'traingd'); %建立模型，并采用
基本梯度下降法训练.
net.trainParam.show=100;           %100 轮回显示一次结果
net.trainParam.Lr=0.05;            %学习速度为 0.05
net.trainParam.epochs=100000;      %最大训练轮回为 100000 次
net.trainParam.goal=1e-4;          %均方误差为 0.0001
net=train(net,pn,tn); %开始训练，其中 pn,tn 分别为输入输出样本
                                % 训练时应该用归一化之后的数据

an=sim(net,pn); %用训练好的模型进行仿真
a=postmnmx(an,mint,maxt); % 训练结束后还应对网络的输出 an=sim(net, pn)
作如下处理

%绘图，对比模拟结果
x=1980:2004;
newk=a(1,:);
newh=a(2,:);
subplot(2,1,1);plot(x,newk,'b--+',x,glkyl,'r-o')
subplot(2,1,2);plot(x,newh,'b--+',x,glhyl,'r-o')

```



```
% 当用训练好的网络对新数据 pnew 进行预测时，也应作相应的处理：
% pnewn=tramnmx(pnew, minp, maxp);
% anewn=sim(net, pnewn);
% anew=postmnmx(anew, mint, maxt);
pnew=[x1;x2;x3];
pnewn=tramnmx(pnew,minp,maxp);
anewn=sim(net,pnewn);
anew=postmnmx(anewn,mint,maxt);
```

附录3 龙格—库塔算法MATLAB代码：

```
function yy=weifen_lgkt(A,B,x0,y0,fx)
% yy=weifen_lgkt(A,B,x0,y0,fx)
% 三维动力学方程
% x0,y0 状态变量初始值

%注：x0,y0可以为列向量,求解微分方程组
N=1000; %计算步数
h=0.002; %计算步长
x=x0;
y=y0;
%-----
for k=1:N
%求解微分方程
%fx(:,k)=x0+(k-1)*h; %例子1，在此选f(x)=x
k0=A*y+B*fx(:,k); %四阶龙格-库塔法则求解微分方程
k1=A*(y+h*k0/2)+B*fx(:,k);
k2=A*(y+h*k1/2)+B*fx(:,k);
k3=A*(y+h*k2)+B*fx(:,k);
y=y+(k0+2*k1+2*k2+k3)*h/6;
%-----%
yy(k)=y; %输出
xx(k)=x0+k*h;

end
plot([x0 xx],[y0 yy])
```