

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

**我们的参赛队号为：4097**

**参赛队员（签名）：**

队员 1：孙艺琪

队员 2：孙健超

队员 3：陈紫萱

**参赛队教练员（签名）： 赵景刚**

**参赛队伍组别：高中组**

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）： 4097

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 5G 时代引发的道路规划革命

关 键 词 车流量 红绿灯变化周期 加权比较各个因素

## 摘 要：

在这道题中，我们首先得知的是一个一条道路的两个车道遇到突发状况而封闭，于是我们首先对题目的内容进行了分析，题目的内容只有短短几行话，但是我们在理解题意和分析题干上花了很长时间，什么叫“有一条道路的两车道”，我们对此提出了几种不同的情况，是同向双车道，还是异向双车道？我们在考虑之初还被什么是“车道”所疑惑，后来都一一将条件确定下来。

其次就要考虑题目中的其它条件，题目有提到 5G 时代的来临。当时已经是 5G 时代，每秒传输速度可以达到 10G，这一点信息可以让我们忽略因为周边未知的状况而影响的因素。题目又说道是无人驾驶汽车，第一步就要是意识到无人驾驶是没有司机，没有司机的情况下就可以不用考虑人为的一些情绪问题，司机驾驶水平，汽车速度不一等方面。而从上面两点来看的话，又可以明显看出这不属于我们的时代，我们就不能全用我们时代的观念去解这道题，要用一些超前的观念，毕竟我们这个时代无人驾驶和 5G 还没有普及。

在进行模型分析的时候。首先先考虑理论模型。理论模型中，我们采用类比的方法，将汽车流量与水的流量相比较，马路就像水管一样，一条道路宽度缩短一半就像水管变细，流速会加快。

之后我们又开始了考虑实际模型，考虑实际模型时，先从最简单的模型上考虑，称之为基本模型，就是车辆直来直往的一个模型。然后逐层添加条件，在后面加入车辆轨迹，红绿灯控制情况等主要情况，并加入道路的宽度，汽车的速度，所需行走的路程等量化数据。在考虑行人，黄灯等一些干扰元素，精确结果。遗憾的是，一部分没有完成。

最后总结数据后，得出那些结论对总流量有影响，毕竟题目要求最快通过，变相理解就是加大流量。

参赛队号： # 4097

参赛密码  
(由组委会填写)

所选题目： D 题

## Abstract

In this question, we first learn that two lanes of a road are encountering unexpected conditions and closed. So we first analyze the content of the topic. The content of the topic is only a few jargons, but we spent a long time in understanding the meaning of the topic and analyzing the trunk of the topic. What is called "two lanes of a road". We put forward several different feelings about it. What's more, is it two-lane in the same direction or two-lane in the opposite direction? At the beginning of our consideration, we were puzzled by what is the "lane", and then we all decided on the conditions one by one.

Secondly, we should consider other conditions in the title, which refers to the coming of 5G era. At that time, it was 5G era, and the transmission speed could reach 10G per second. This information can make us ignore the factors affected by the unknown situation around us. The first step is to realize that driverless cars are driverless without drivers. Without drivers, we can ignore some artificial emotional problems, such as driver's driving level, vehicle speed and so on. From the above two points, we can clearly see that this is not our era, we can not use the concepts of our times to solve this problem, to use some advanced concepts, after all, our era of driverless and 5G has not been popular.

In the process of model analysis. Firstly, the theoretical model is considered. In the theoretical model, we use the analogy method to compare the vehicle flow with the water flow. The road is like a water pipe. The width of a road is shortened by half as the water pipe becomes thinner and the flow speed will be accelerated.

Then we began to consider the actual model. When considering the actual model, we first considered the simplest model, called the basic model, which is a model of direct traffic between vehicles. Then add the conditions layer by layer, add the main conditions such as vehicle trajectory, traffic light control, and add the quantitative data such as the width of the road, the speed of the car, the distance to be traveled and so on. In consideration of pedestrians, yellow lights and other interference elements, accurate results. Unfortunately, due to the failure of teamwork, some of them were not completed.

Finally, after summarizing the data, we can conclude that those conclusions have an impact on the total flow. After all, the topic requires the fastest passage, and the disguised understanding is to increase the flow.

目录

一、问题重述.....	7
二、问题分析、内容摘要.....	7
三、 模型假设.....	7
四、模型的建立与求解.....	16
五、 模型的分析.....	19
六、参考文献.....	22
七、模型的改进.....	23
附录.....	23

## 一、问题重述

- (一) 探究如何重新调整含有突发道路的十字路口的交通规划
- (二) 如何使得含有突发道路的十字路口车流总流量达到最大

## 二、问题分析、内容摘要

在这道题中，我们首先得知的是一个一条道路的两个车道遇到突发状况而封闭，于是我们首先对题目的内容进行了分析，题目的内容只有短短几行话，但是我们在理解题意和分析题干上花了很长时间，什么叫“有一条道路的两车道”，我们对此提出了几种不同的情况，是同向双车道，还是异向双车道？我们在考虑之初还被什么是“车道”所疑惑，后来都一一将条件确定下来。

其次就要考虑题目中的其它条件，题目有提到 5G 时代的来临。当时已经是 5G 时代，每秒传输速度可以达到 10G，这一点信息可以让我们忽略因为周边未知的状况而影响的因素。题目又说道是无人驾驶汽车，第一步就要是意识到无人驾驶是没有司机，没有司机的情况下就可以不用考虑人为的一些情绪问题，司机驾驶水平，汽车速度不一等方面。而从上面两点来看的话，又可以明显看出这不属于我们的时代，我们就不能全用我们时代的观念去解这道题，要用一些超前的观念，毕竟我们这个时代无人驾驶和 5G 还没有普及。

在进行模型分析的时候。首先先考虑理论模型。理论模型中，我们采用类比的方法，将汽车流量与水的流量相比较，马路就像水管一样，一条道路宽度缩短一半就像水管变细，流速会加快。

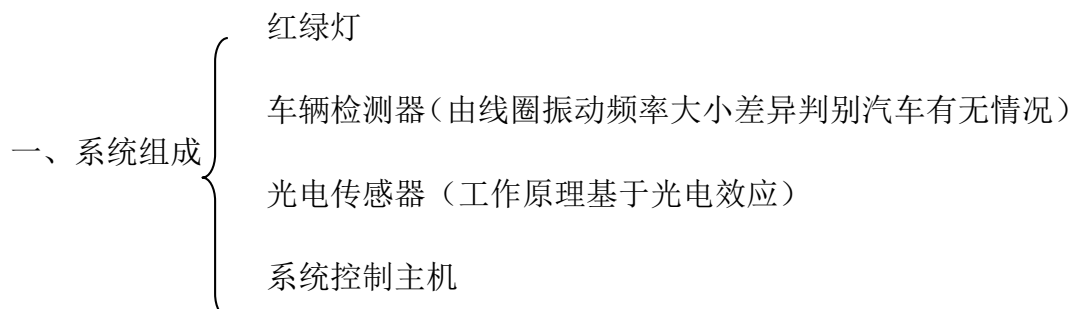
之后我们又开始了考虑实际模型，考虑实际模型时，先从最简单的模型上考虑，称之为基本模型，就是车辆直来直往的一个模型。然后逐层添加条件，在后面加入车辆轨迹，红绿灯控制情况等主要情况，并加入道路的宽度，汽车的速度，所需行走的路程等量化数据。在考虑行人，黄灯等一些干扰元素，精确结果。遗憾的是，由于团队配合的失误，一部分没有完成。

## 三、模型假设

### 理论模型：

在解决问题之前，我们首先对题目中提到的红绿灯自动控制系统发出了

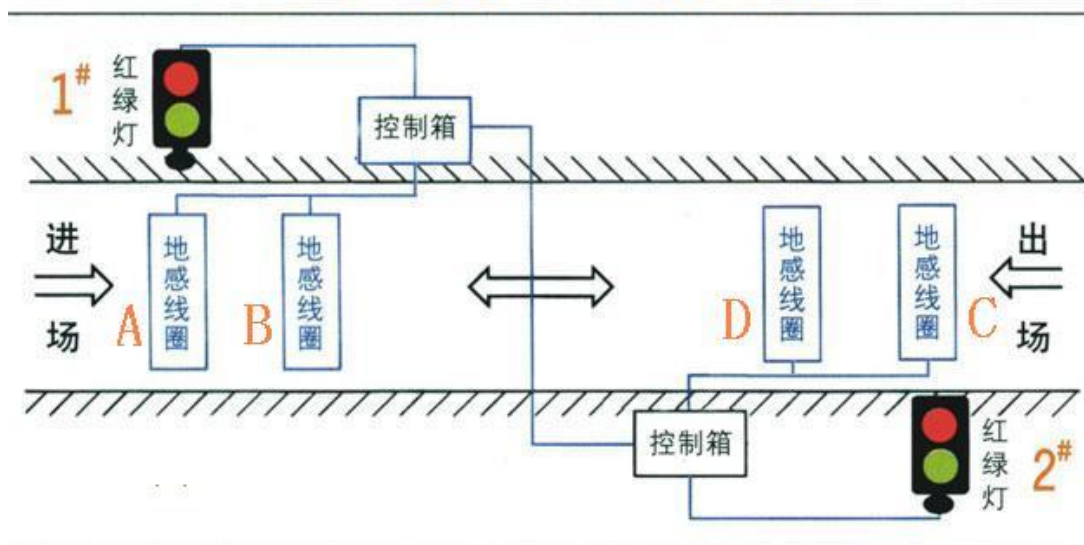
疑问。其工作原理以及其操作流程都是我们所陌生的。并且想要进行方案整改，就必须先对此系统有大概的了解。所以，在网上查阅了资料后，我们对这个系统有了初步概念。



并且这个系统适用于车到较窄，车辆双向通行的通道，正好符合题意。

二、系统原理：

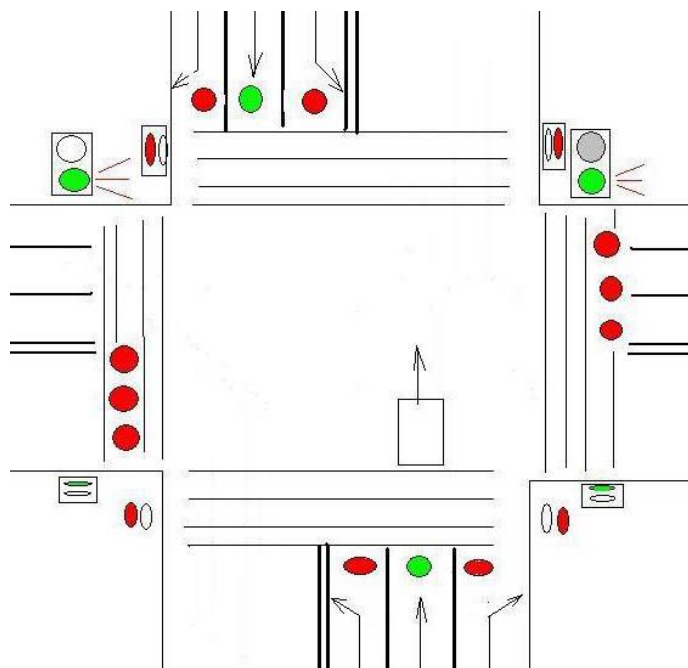
### 红绿灯自动控制系统



- (1) 我们首先以一个最普通的单行通道为例，当汽车从左入口进入时，先对 A 处的地感线圈产生压力，然后再对 B 处的地感线圈产生压力。所以这两处引起的振动频率大小差异使得车辆检测器判别出汽车是从 A 驶向 B。所以这个信号通过 CPU 传送信号给红绿灯 1 与红绿灯 2，那么就会使红绿灯 1 亮绿灯，红绿灯 2 亮红灯。
- (2) 只要车在通道内，红绿灯会一直处于红灯状态。
- (3) 同理可得右入口也是如此。
- (4) 并且我们还了解到，当红灯时间超过设定值后，系统自动将两端恢复为绿灯通行状态。
- (5) 如果车辆不按照红绿灯的指示行驶就会对整个系统造成紊乱，但是系统一分钟之内又会重新恢复正常。所以题目中的高峰期即使有汽车不遵守交通规则，红绿灯自动控制系统也会很快恢复正常，不会造成太大的交通问题。
- (6) 虽然是自动控制系统，也会增设人工按钮，人工按钮可重新强制性对系统进行调整，这更加有利于调节交通。

- (7) 研究题目的过程中，由于涉及到红绿灯的设置问题，我们特去了解了一番十字路口的红绿灯规则。具体如下：
- (8) 遇到红灯时车（包括自行车 摩托车 电动车）不能直行，也不能左转，但可以右转通行。

- (9) 二、遇到绿灯时车可以直行，也可以左转右转（特别注意红绿灯上面的指示方向箭头）三、方向灯为绿灯时是可以向红绿灯上面的指示方向箭头方向行驶。



- (10) 十字路口红绿灯交替变换一般顺序是：直行，右转，左转，二种：直行，同时左右转，不同的城市，不同的路口，稍有差别。遇红灯时道口有直行道，右转道，左转道，直行加右转，直行加左转，有的道口还有右转加调头。

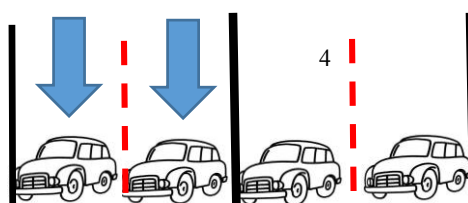
总之你是直行的必须在直行道或停在直行加左（右）转，左右转时必须在左右转道，在没有调头标记的道上决不能调头。

- (11) 十字路口红绿灯间隔时间和路况以及车流量相关。一般来说是根据该地的流量，也包括人流量，要是国道的话一般是 30 秒。要是城市交通要道，则是 10 秒，要是分岔十字路则是两种情况：那边人多则是 15 秒，人少的则是 10 秒，而中间通过的车辆一般除了看灯之外，这时候应该看交通警察，因为这种路口一般事故比较的频繁。有时候临时有变。
- (12) 红绿灯是有相位的。一个十字路口的两个方向的直行和左转都完成后所用的时间和过程称之为相位。

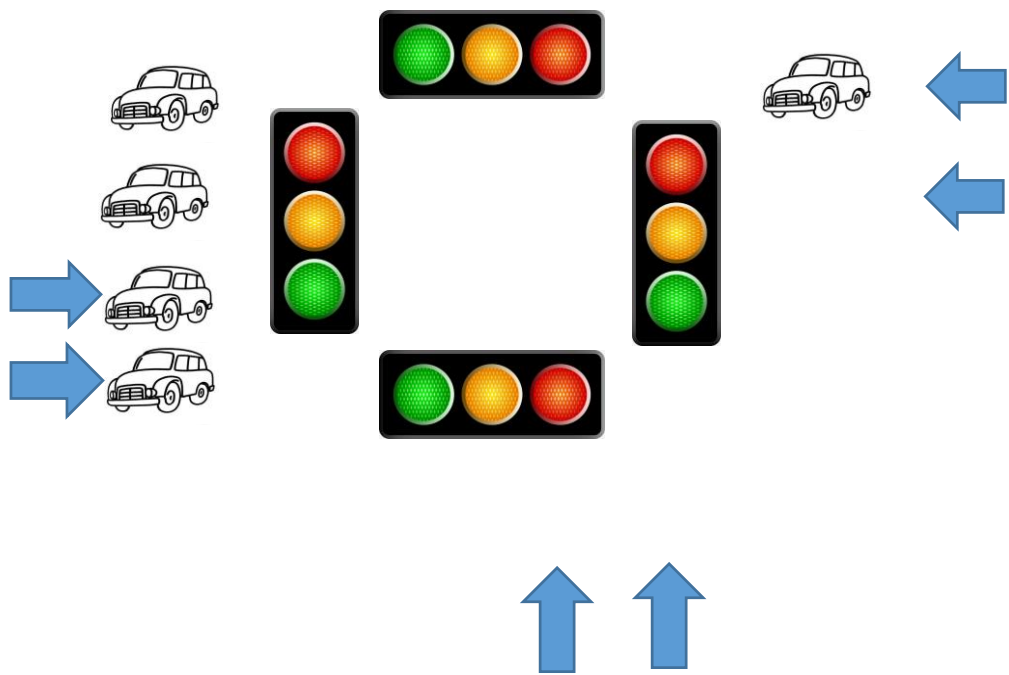
相位是根据各个路口的车流量经过计算后来定的。所以每个路口的相位不一样。

开始先是测算流量，测算一个时间段内各个方向的各种交通流量（行人、非机动车、机动车）的流量以及最高峰流量。然后根据交通流量的规律来计算它们运行所需要的时间，然后才确定每个路口红灯和绿灯的时间，进而确定相位。

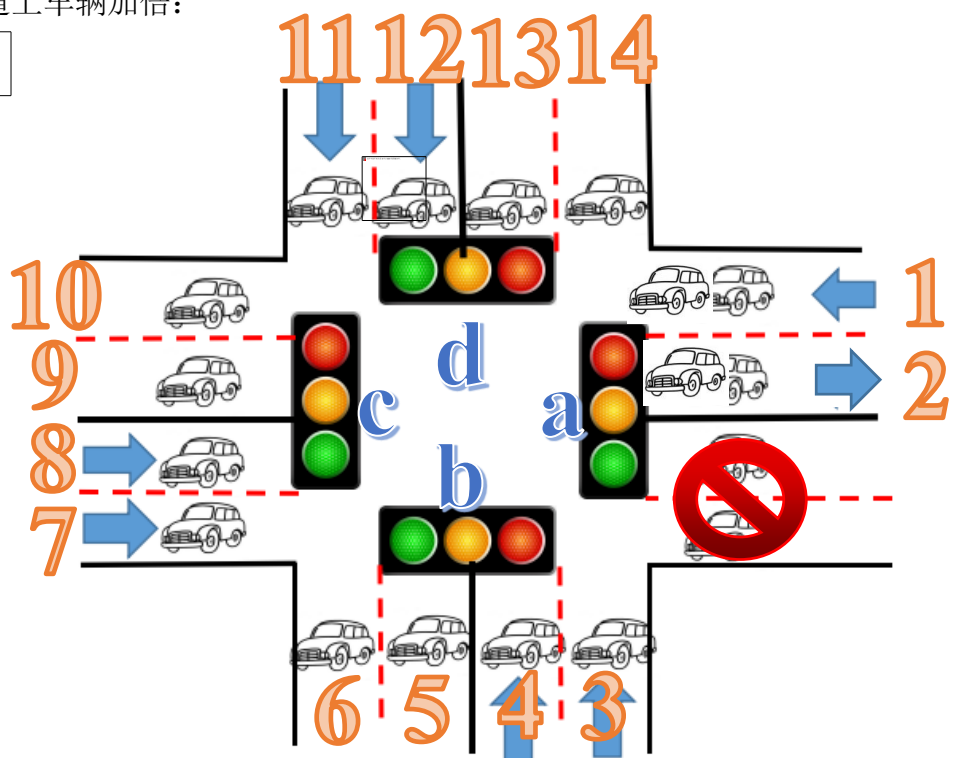
在了解完题目以后，我们分析了一下道路模型变化，一开始的道路如下图所示：







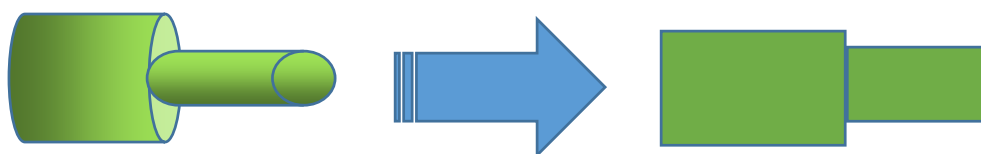
我们假设道路现在是如上图一样行驶的，现在根据题意，我们认为如下图所示的路口被封住了，那么另外一条道路的同向双车道就会变成异向单车道，且每条道上车辆加倍：



我们给每条道路以及红绿灯编上了编号。因为 1、2 通道车的总量不变，但是道路宽度减到原来的 1/2，所以我们组类比了物理当中的流体问题，流体问题的公式为：

$$Q=Sv$$

（其中  $Q$  为流体流量， $S$  为管道的横截面积， $v$  为流体流速）



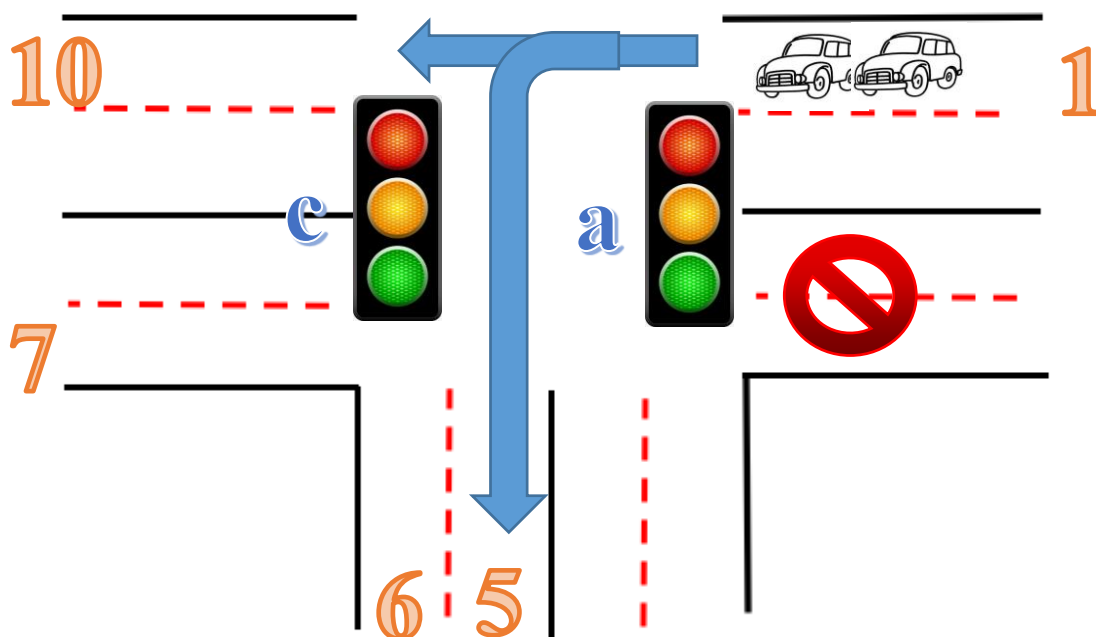
那么我们将汽车的速度类比为流体的流速，将其设为  $v$ ，应用降维思想，将二维的面积一维的长度，那么道路口可看作是一个管道，但是因为其运动过程可看作是在平面上进行（题目中不需要考虑体积），所以将管道的横截面积  $S$  类比为道路宽  $d$ ，则有：

$$Q_{\text{车}} = dv$$

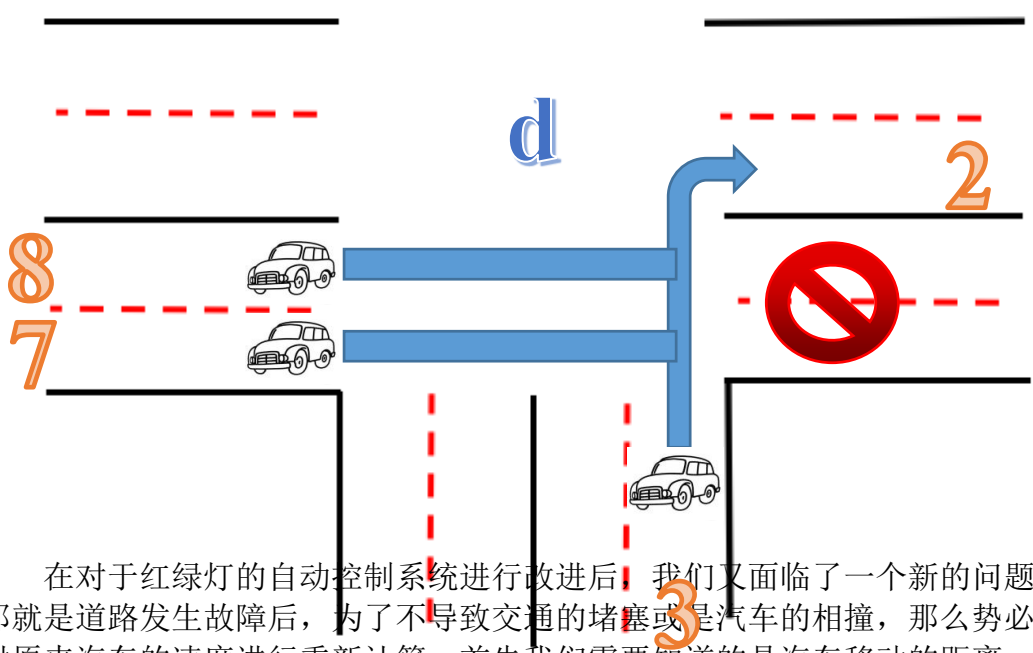
因为  $d$  变为原来的 1/2，所以为了保持  $Q_{\text{车}}$  不变（不然就会造成交通堵塞），则  $v$  需要变为原来的 2 倍。但是又考虑到城区内有限速，如果  $v$  变为原来的两倍，则非常容易超速。所以只能降低 1、2 通道的车流量，保证速度不会超过 60km/h（根据查阅资料，我国交通法规定城区内限速 60km/h）

考虑到速度的问题后，我们又开始考虑红绿灯的自动控制问题。因为原本的异向四车道变为了异向两车道，则势必会对其他车道产生影响，于是我们对 1、2 车道分别进行了分析。

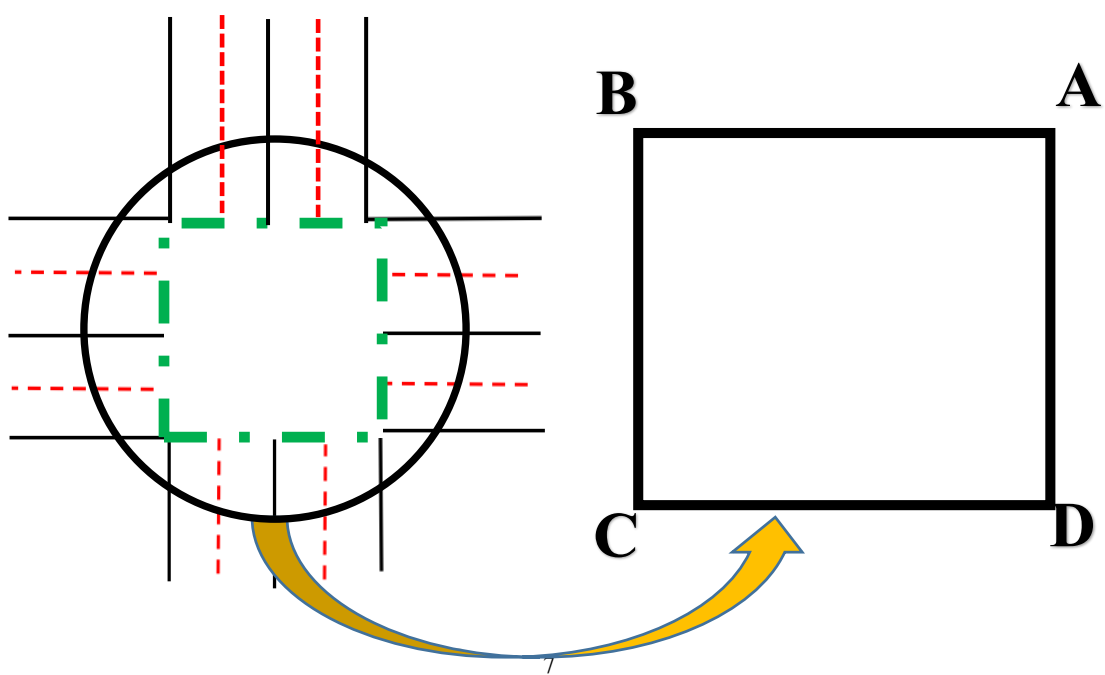
首先从 1 车道开始，1 车道只出不进，左拐、直行和右拐都在一条道上，所以对此情况 c 红绿灯就不能够将左拐和直行的指令分开，而应该放在一起。此时 a 红绿灯是不能够发出任何通行指令的，要不然就会和左拐来的 1 车道的车相撞。同时 1 车道的车在左拐时，也只能驶向 5 车道，不能够驶进 6 车道，要不然会与 7 车道右拐来的车相撞。



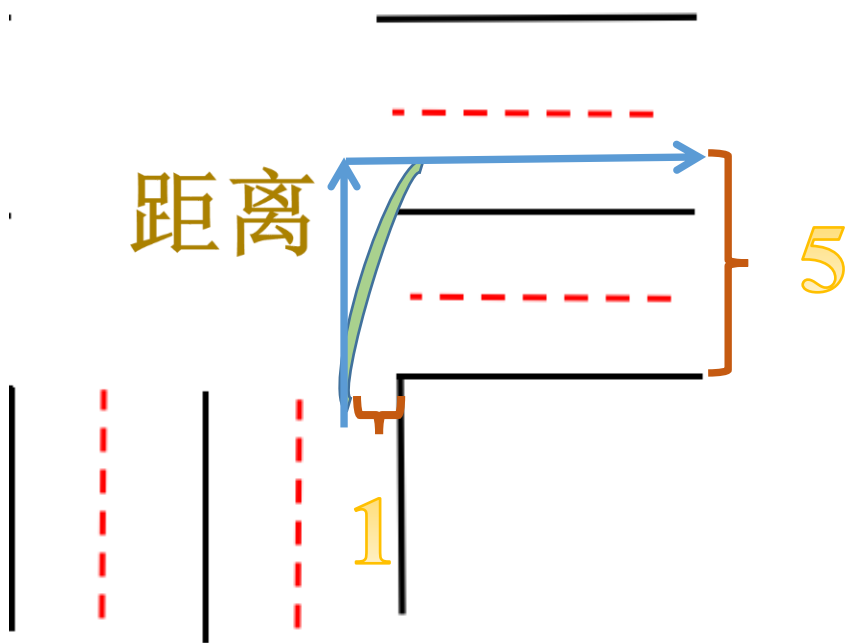
接下来我们解决的是 2 车道，2 车道只进不出，并且驶向 2 车道的有 3 种车，分别是直行、左拐和右拐。那么驶向 2 车道的车则很容易相撞为了避免 7、8 车道直行的车与 3 车道右拐的相撞，所以我们组决定在 d 红绿灯处增设一个右拐灯，对 3 车道右拐的车进行右拐限制，这样就可以避免两车相撞事件发生。



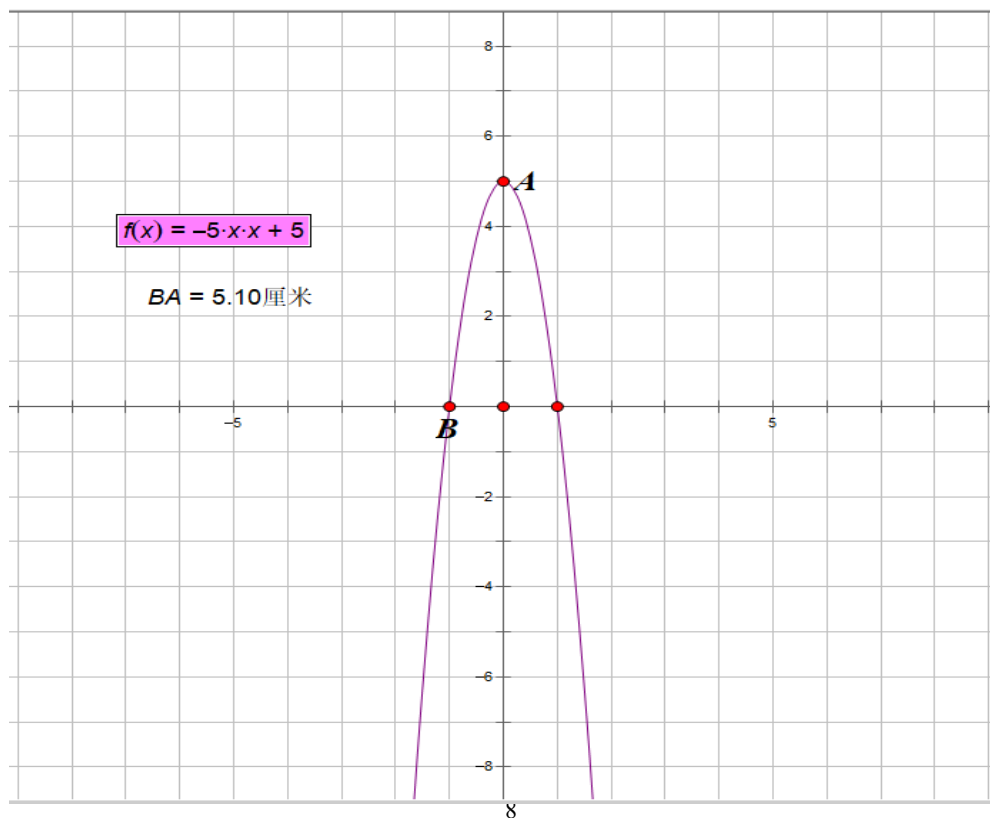
在对于红绿灯的自动控制系统进行改进后，我们又面临了一个新的问题，那就是道路发生故障后，为了不导致交通的堵塞或是汽车的相撞，那么势必要对原来汽车的速度进行重新计算，首先我们需要知道的是汽车移动的距离。这个路口我们可以看作是组成了一个正方形 ABCD，则接下来的计算汽车移动的距离可以以这个正方形为切入点。



我们发现最难计算的距离实际上是 3 车道右拐到 2 车道的距离。于是我们进行了如下的假设，设每个单车道的宽度为 2，则 3 车道右拐 2 车道的距离可表示为如下图所示的弧长：



不难看出，实际上这是一个二次函数，所以我们运用了几何画板对此进行了求解。我们首先设出发点 B (-1,0) A (0,5)，求出了经过 A 和 B 的函数关系式，则可以计算出 AB 的距离。



因为直行车距为 8，所以我们不难看出右拐的车距实际上是比较直行车距要小的，因此我们在设计 3 车道的时长时可以设计的比直行的要短。其余非弧形轨迹可以以此类推。

在此基础之上，我们不妨进行一个理想化的假设。每个车道有三种车，分别是左拐，直行和右拐。我们可以设左拐车为  $a_i$ ，直行车为  $a_j$ ，右拐车为  $a_k$ ，则一条车道上的车辆总数  $A$  为：

$$A = a_i + a_j + a_k$$

设左拐车的车速为  $v_i$ ，直行车的车速为  $v_j$ ，右拐车的车速为  $v_k$ ，现在假设三种车的数量是相等的，则可以求出一条车道上的车辆平均速度  $v$  为：

$$v = \frac{v_i + v_j + v_k}{3}$$

代入我们一开始的车流量公式，得：

$$Q_{\text{车}} = d \left( \frac{v_i + v_j + v_k}{3} \right)$$

其中由于有限速 60km/h，并且车道宽一般控制在 3~3.5 之间，所以则有：

$$\begin{cases} 3 \leq d \leq 3.5 \\ 0 < \frac{v_i + v_j + v_k}{3} \leq 60 \end{cases}$$

代入以上数值则有单车道的车流量大概控制在 200 辆左右。

因为考虑到左拐车，直行车，右拐车的数量会不一样，所以我们组引入了权重这个概念来算出单车道的平均速度，则左拐车在车辆总数  $A$  中的权重为

$$f_i = \frac{a_i}{a_i + a_j + a_k}, \quad \text{直行车的权重为 } f_j = \frac{a_j}{a_i + a_j + a_k}, \quad \text{右拐车的权重为}$$

$$f_k = \frac{a_k}{a_i + a_j + a_k}, \quad \text{所以代入以上数值，车流量可以表示为：}$$

$$Q_{\text{车}} = \frac{d}{3} \left( \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_k v_k}{a_i + a_j + a_k} \right)$$

在 abcd 四个红绿灯的运行周期中，我们不妨假设 abcd 四个红绿灯各工作一次为一个周期 T，经过前期讨论，我们在 c 红绿灯处直行和左拐的时间会与其它处不同，并且 d 红绿灯处也要增设右拐灯。所以我们设 c 红绿灯给予 1 车道的时间为  $t_1$ （其中上面已证明直行和左拐应该同时进行），d 红绿灯给予 3 车道的右拐时间为  $t_2$ ，其余每条车道的左拐时间为  $t_3$ ，直行时间为  $t_4$ ，所以一个周期 T 可表示为：

$$T = t_1 + t_2 + 3t_3 + 3t_4$$

那么车总量 N 可表示为：

$$N = \frac{d}{3} \left( \frac{a_i v_i + a_j v_j + a_k v_k}{a_i + a_j + a_k} \right) (t_1 + t_2 + 3t_3 + 3t_4)$$

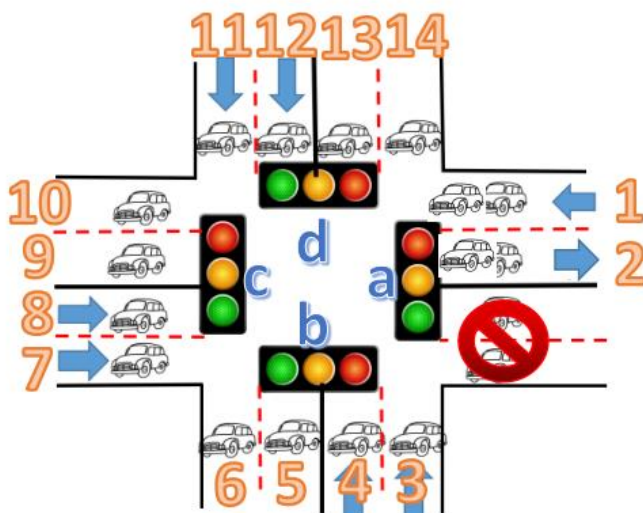
我们认为这个公式的优点是：将这个车流总量公式输入进 5G 网络，那么 5G 可以快速计算出实时的车总量或者是单车道上的车总量，这对于接下来的计算最佳路线或者是最佳时间都是非常有帮助的。并且这个公式的数据比较容易测量，数据易获。

四、

## 四、模型的建立与求解

**实际模型:**首先我们从最基础的模型开始考虑。

**基础模型：**在这个模型中，我们不考虑任何条件，包括红绿灯，拐弯。于是形成了一种情况——车辆直来直往，不会拐弯，红绿灯仅控制道路的关闭和开启。则 a、c 绿灯时，两方车辆来往。d\b 绿灯时，同理。如图 1-1



1-1

**二级模型：**在最基础的模型上，我们又开始添加条件，不断扩展模型。第一步是添加“方向、转弯、防止互相撞到”的条件，通过控制红绿灯的变换，把路况分为五种连续的情况使之成为一个周期。其中，由于 d 处单独各添加一个控制右转弯的红绿灯。（正常情况下假设可以直接右转弯且红绿灯是在道路对过，如 c 灯控制 1）由于题干要求通行时间要降到最低，故要尽量要让单位时间内的车流总流量变大，通过的车才会变多，时间则会花的最少。在这个模型中，我们不妨设几个量。

两车之间的距离  $\Delta S_{\text{车}}$

车长  $S_{\text{车}}$

红绿灯变化周期第一阶段时间设为  $t(-)$ ，其余同理

行车路程（一辆车完整走完全程的距离） $S_{(\text{车道序号})-(\text{车道序号})}$

一辆车在某车道通过需要的时间  $a_{(\text{车道序号})-(\text{车道序号})}$

某车道  $t$  (红绿灯某一阶段时间) 秒内通过车的数量  $m_{(i)-(j) t(i)}$

$$m_{(i)-(j) t(i)} = \frac{S_{(i)-(j) t(i)}}{2(\Delta S_{\text{车}} + S_{\text{车}})(a_{(i)-(j)})}$$

通过计算得

继而得:

$$Q_{(i)} = \frac{S_{(i)-(j) t(i)} + \dots + \frac{2(\Delta S_{\text{车}} + S_{\text{车}})a_{(i)-(j)}}{t(i)}}{t(i)} \quad (\text{各方向车流数量相加})$$

暂时设速度平均不变 (因为此时不考虑速度) 则同一阶段一起运行的车道越多, 放行的车辆越多,

同一阶段开辟的车道要最多。如图示 2-1、2-2、2-3、2-4、2-5

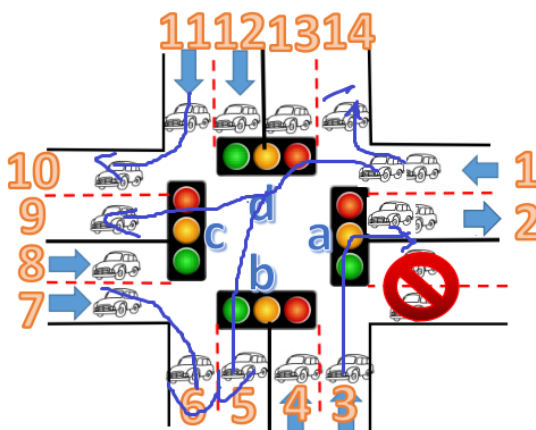
第一阶段:

c 灯: 直行, 左转弯绿灯亮 (其向灯为红灯, 下同)。

d 灯: 左转弯绿灯亮。

a、b 灯: 全为红灯。

余方



2-1

7



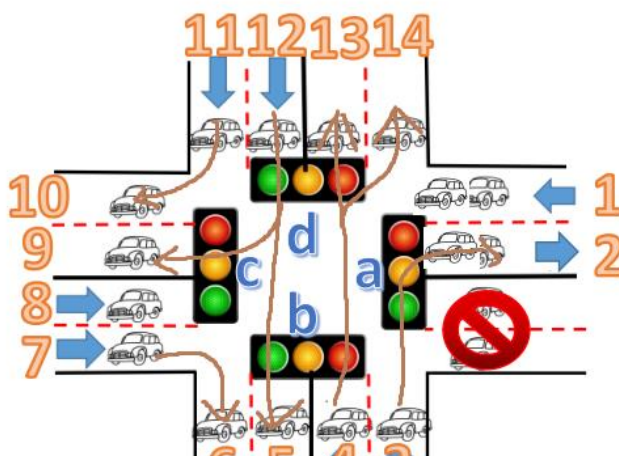
第二阶段:

a、c 灯: 全为红灯。

b 灯: 直行绿灯亮。

d 灯: 直行右转弯绿灯亮。

2-2



第三阶段:

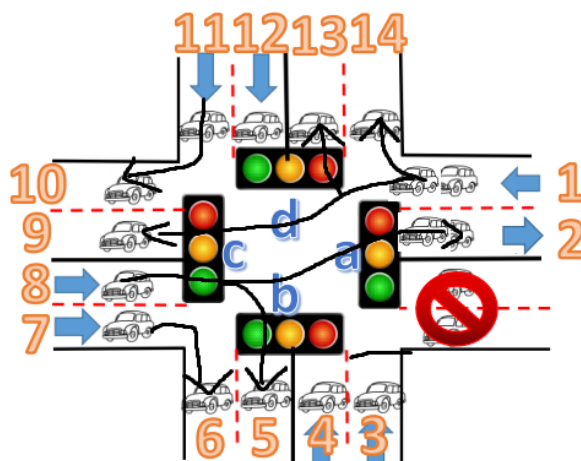
a 灯: 直行绿灯亮

c 灯: 直行绿灯亮

d 灯: 全为红灯

B: 全为红灯

2-3



第四阶段:

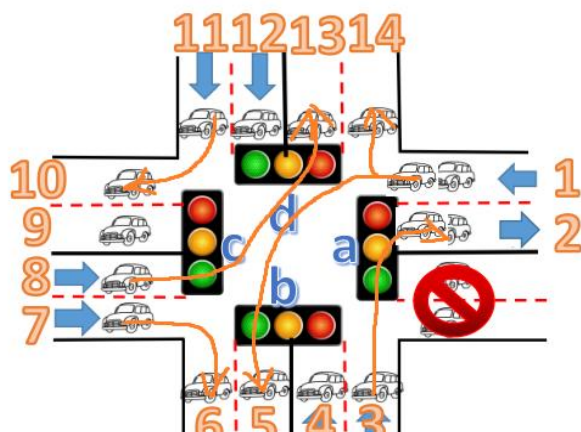
a 灯: 左转弯绿灯亮

b 灯: 全为红灯

c 灯: 左转弯绿灯亮

d 灯: 右转弯绿灯亮

2-4



第五阶段：

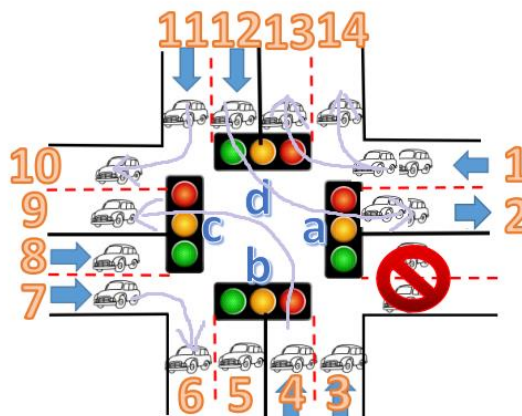
a 灯：全为红灯

b 灯：左转弯绿灯亮

c 灯：全为红灯

d 灯：左转弯绿灯亮

2-5



小结：之所以定为五种阶段，是因为考虑到 1、2 道比较特殊，需单独放行。其余根据红绿灯对称原则，采取对应的两道相互交错的行驶方向，同时尽量放行不干扰其他道的右拐，形成另外四种红绿灯变换状态。已达到总线路变多，使得总流量变大。

### 三级模型：

在三级模型的基础上，我们考虑到一些干扰因素，比如行人、车速、黄灯等

首先从行人考虑，此时行人的干扰因素可以总结为使得红绿灯切换时间产生了间隔，此时不妨从整体去考虑流量了，设整个题目所包含的过程的总时间为  $t_{总}$ ，行人

需要的红绿灯的时间为  $t_{人}$ ，则红绿灯的周期

$$T = t_{(一)} + t_{(二)} + t_{(三)} + t_{(四)} + t_{(五)} + t_{(人)}$$

若考虑黄灯，同上

$$T = t_{(一)} + t_{(二)} + t_{(三)} + t_{(四)} + t_{(五)} + t_{(人)} + t_{(黄)},$$

车速由于是网络控制，我们既考虑最大速度，因为同一时段内车总量不变，车速快了，时间变短，总流量就会变大。而红绿灯就需要根据车总量来控制了

## 计算

知道各个公式后，我们就可以将数据带进去进行计算。

已知总车流量是不变的，加快速度即可，速度是由总控台控制的，所以不必考虑速度过大会导致的一些事故，当速度达到最大时，并按如上图所示路径行驶，则可以达到

时间缩短。

## 五、模型的分析

由于题目中存在较多变量，为方便处理，我们决定给予各个变量相应的权重。

引入权重的概念：

在数学上，为了显示若干量数在总量中所具有的重要程度，分别给予不同的比例系数，这就是加权。

加权的指派系数就是权数，又称权重、权值。

权重系数是表示某一指标项在指标项系统中的重要程度，它表示在其它指标项不变的情况下，这一指标项的变化，对结果的影响。

权重系数的大小与目标的重要程度有关。对于不同学科，不同年龄阶段，每个指标项的重要程度是不同的，所以各指标项的权重系数必须根据实际情况作出合理的规定。

由题意，我们认为主要存在以下变量：

**车速  $v$ 、不同方向目的的车辆数  $n$ 、总车辆数  $n_{\text{总}}$ 、绿灯时长  $t$ 、道路宽窄  $x$**

四个变量仍略嫌麻烦，难以处理关系，为使模型更加简单化、易于理解，我们可以忽略某些变量。因此，我们假定不同方向目的的车辆数相同。

接下来，我们尝试确定剩余几个自变量的权重：

在现实生活中，光靠观察难以确认权重。所以，我们决定使用熵值法，借助 Excel 表格软件进行计算。

在计算之前，我们首先通过查阅资料了解了熵值法：

熵值法原理：熵的概念源于热力学，是对系统状态不确定性的一种度量。在信息论中，信息是系统有序程度的一种度量。而熵是系统无序程度的一种度量，两者绝对值相等，但符号相反。根据此性质，可以利用评价中各方案的固有信息，通过熵值法得到各个指标的信息熵，信息熵越小，信息的无序度越低，其信息的效用值越大，指标的权重越大。

熵是不确定的度量，如果用  $P_j$  表示的  $j$  个信息的不确定度（即出现的概率）则整个信息（ $n$  个）的不确定度量也可以用下式表示

$$s = -k \sum_{j=1}^n p_j \ln(p_j)$$

这就是熵。其中  $k$  为正常数，当各个信息发生的概率相等时，即  $P_j=1/n$ ,  $s$  取值最大，此时熵最大。

可利用熵信息的概念确定权重，假设多属性决策矩阵如下：

$$M = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{matrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

用

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$$

表示第 j 个属性下第 i 个方案  $A_i$  的贡献度。

可以用  $E_j$  来表示所有方案对属性  $X_j$  的贡献总量

其中，常数  $K=1/\ln(m)$ ，这样，就能保证  $0 \leq E_j \leq 1$ ，即  $E_j$  最大为 1。

由式中可以看出，当某个属性下各方案的贡献度趋于一致时， $E$  趋于 1；特别是当全相等时，也就可以不考虑该目标的属性在决策中的作用，也即此时属性的权重为 0。

这样，可看出属性值由所有方案差异大小来决定权系数的大小。为此可定义  $d_j$  为第 j 属性下各方案贡献度的一致性程度。

$$d_j = 1 - E_j$$

则各属性权重  $W$  如下：

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^n d_j}$$

当  $d_j=0$  时，第 j 属性可以剔除，其权重等于 0。

如果决策者事先已有一些经验的主观估计权重  $\lambda_j$ ，则借助上述的  $w_j$  来对  $\lambda_j$  进行修正。熵值法最大的特点是直接利用决策矩阵所给出的信息计算权重，而没有引入决策者的主观判断。

接下来利用 Excel 进行熵值法计算求解。

$$P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$$

求第 j 个属性下第 i 个方案  $A_i$  的贡献度，公式为  $P_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$ ，在 excel 中，先求出各列的和，然后用每行的数值比上列和，形成新的矩阵。

车速v	不同方向目的的车辆数n	总车辆数n总	绿灯时长t	道路宽窄x
50	25	350	15	30
55	30	480	16	25
60	45	690	20	35
40	25	300	18	20

车速v	不同方向目的的车辆数n	总车辆数n总	绿灯时长t	道路宽窄x
50	25	350	15	30
55	30	480	16	25
60	45	690	20	35
40	25	300	18	20
205	125	1820	69	110
0.243902	0.2	0.192307692	0.217391304	0.272727
0.268293	0.24	0.263736264	0.231884058	0.227273
0.292683	0.36	0.379120879	0.289855072	0.318182
0.195122	0.2	0.164835165	0.260869565	0.181818

求出所有方案对属性  $X_j$  的贡献总量，用上文所示的算法。在 excel 操作中，将刚才生成的矩阵每个元素变成每个元素与该  $\ln$ （元素）的积，如图所示。

车速v	不同方向目的的车辆数n	总车辆数n总	绿灯时长t	道路宽窄x
50	25	350	15	30
55	30	480	16	25
60	45	690	20	35
40	25	300	18	20
205	125	1820	69	110
0.243902	0.2	0.192307692	0.217391304	0.272727
0.268293	0.24	0.263736264	0.231884058	0.227273
0.292683	0.36	0.379120879	0.289855072	0.318182
0.195122	0.2	0.164835165	0.260869565	0.181818
-0.14946	-0.139794001	-0.13769295	-0.14407779	-0.15389
-0.1533	-0.148749302	-0.1526585	-0.14718356	-0.14624
-0.15618	-0.1597311	-0.15969417	-0.15588959	-0.15824
-0.13848	-0.139794001	-0.12905771	-0.15223737	-0.13461

求出常数  $k$ ， $k$  为  $1/\ln(\text{方案数})$ ，本例中有 4 个情况，所以求得  $k$  为 1.660964047，再求  $k$  与新矩阵每一列和的乘积，这样获得的 5 个积为所有方案对属性  $x_j$  的贡献度。至此所有的  $E_j$  就求出来了。

-0.149459477	-0.139794001	-0.13769295	-0.14407779	-0.15389
-0.15330007	-0.148749302	-0.1526585	-0.14718356	-0.14624
-0.156176374	-0.1597311	-0.15969417	-0.15588959	-0.15824
-0.138476853	-0.139794001	-0.12905771	-0.15223737	-0.13461
1.660964047				
-0.992281139	-0.976760476	-0.96186982	-0.99556244	-0.98492

$d_j$  为第  $j$  属性下各方案贡献度的一致性程度。 $d_j=1-E_j$ ，利用上面求得的  $E_j$ ，可以得到  $d_j$ 。

各属性权重为对应的  $d_j$  与所有  $d_j$  和的商。 $d_j$  的和为 9.911397，求得各属性的权重为均约为 0.2。

1.660964047					
-0.992281139	-0.976760476	-0.96186982	-0.99556244	-0.98492	
1.992281139	1.976760476	1.961869817	1.99556244	1.984923	9.911397
0.201009125	0.199443184	0.197940807	0.201340188	0.200267	
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	

即各因素影响约相同。所以我们不进行过多的因素之间比较。

## 六、参考文献

- 1、熵值法 Excel 算例——百度经验  
<https://jingyan.baidu.com/article/e75aca85728d7b142edac6b8.html?qq-pf-to=pcqq.group>
- 2、红绿灯操作系统介绍——网上

## 七、模型的改进

对于这个模型，还有更多的因素可以加入。首先是无人汽车，无人汽车有着相对应的一套驾驶机制，如果针对这一点，无人汽车是如何感应障碍，如何定位，如何驾驶的，都可能影响到交通的微小变化。其次，这里研究的还只是到路口，如果将范围扩展到更远的地方，如汽车往这边行进的距离，速度等，也可以探究很多。

## 附录