

#参赛队号 1440

第七届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：姜帅琦

队员 2：邱强

队员 3：李星晨

参赛队教练员（签名）： 唐中良

参赛队伍组别(中学|专科|本科|研究生)：本科组

#参赛队号 1440

第七届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#1440

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

#参赛队号 1440

2014 年第七届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段论文

题 目 基于数学规划模型的轮胎花纹设计研究及三维造型

关 键 词 花纹 模糊数学矩阵 数学规划 三维建模 蒙特卡罗算法

摘 要：

本文根据车辆情况、路面情况以及使用需求的不同，对轮胎花纹性能最优化进行研究，根据结果进行花纹各要素的设计。首先在对汽车轮胎花纹形式固定，忽略天气等外界因素，对专业的参数信息进行检索收集。其次以物理知识为基础利用变量控制法和修正系数的思想求得各性能的近似表达公式，用模糊数学的思想建立各种性能指标的权值联系，然后将各性能构建为统一的性能指标，并以此作为规划模型的目标函数。在求解时，为避免各相关性能量纲之间的误差以及减少非花纹结构对性能的影响，引进性能量纲系数并定义为 1，性能参数的大小即为各性能的绝对大小。由于车辆、路面情况参数较为客观，将其计入目标函数，而使用需求柔性较大，故把它归入规划模型的限制条件中。从而建立轮胎花纹的设计模型。然后我们用以普通轿车为例对模型进行求解验证，利用蒙特卡罗算法对模型的最优解进行计算，并用 SOLIDWORKS 软件进行参数化三维建模，结果表明：

花纹设计要素	花纹沟深度	花纹沟宽度	横花纹集度	纵花纹集度	横花纹角度
大小	10	50	1	0	0.3026

对于过程中设计的计算公式与算法的误差研究，我们对模糊矩阵评价法得到的权重，我们将用模糊序列法得到相同的结论，在一定程度上来说，权重是可信的，对于性能参数的数值与相关论文研究中的定性描述做了对应，基本契合，但是性能的绝对量是本文模型的最大问题，但是在某种程度上能反应实际情况。

参赛队号： 1440

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

Performance of the tire tread and the best definition of the scope

Abstract

Based on the condition of the vehicles , road conditions and the use of the different needs of the tire tread performance optimization study carried out in accordance with the pattern of the elements of the design results . First, in the form of a fixed pattern for automobile tires , ignore weather and other external factors , the parameters for professional information retrieval collection . Second, the use of physical knowledge-based method and the Solidworks control variable correction coefficient obtained approximate expression for each performance formula to establish the value of the right to contact a variety of performance indicators with fuzzy thinking , and then build each performance into a unified performance indicators, and as the objective function programming model . When solving for the relative performance of each dimension to avoid errors and to reduce the impact between the performance of the non-structural pattern , and the introduction of performance is defined as a dimensionless factor , the performance parameter is the size of the absolute size of the property . Because vehicles, road conditions more objective parameters , which are included in the objective function , and use a larger demand for flexible , so leave it to the planning restrictions model. Thereby establishing tread design model . Then we used an ordinary car, for example to solve the model validation , using Monte Carlo algorithm to calculate the optimal solution model and parameterized using three-dimensional modeling software Solidworks results showed that:

Floral design elements	groove depth	Groove width	Degree horizontal pattern set	Degree vertical pattern set	Horizontal angle pattern
Size	10	50	1	0	0.3026

For the calculation process of design and error algorithm, the right of our fuzzy matrix evaluation method was heavy, we will get to the same conclusion using fuzzy sequence method, to a certain extent, the weight is credible, the performance parameters value associated with the thesis corresponding qualitative description made basic fit, but the absolute amount of the performance is the biggest problem of our model, capable of reacting in some way to the actual situation.

一、 问题重述

轮胎被广泛使用在多种陆地交通工具上。根据性能的需要，轮胎表面常会加工出不同形状的花纹。在设计轮胎时，往往要针对其使用环境，设计出相应的花纹形状。

第二阶段问题： 轮胎花纹的形状对轮胎的性能有着可观的影响。推出一款新的轮胎时，往往也要对花纹形状进行认真的设计和优化。请你建立合理的数学模型，当给定车辆情况、路面条件和使用需求时，设计出合适的轮胎花纹。

二、 问题分析

2.1 问题的总体分析

本文是一类设计参数确定问题，旨在通过研究花纹设计要素对汽车性能的影响，考虑不同的车辆情况、路面情况以及使用需求等，从而建立花纹设计模型。问题的特点在于题目描述简单、要求简明，缺乏正规数据的支持和相关背景知识的介绍，难点在于如何检索信息及整理并抓住性能指标的相关变量的表示，车辆情况路面情况以及使用需求的参数表达。

2.2 对问题的具体分析

轮胎的性能特性主要通过以下几个指标进行分析：牵引力性能、防侧滑性能、耐磨性能、排水性能、散热性能、低噪音性能、节能经济性等。

由于当下社会的各大汽车轮胎生产厂商如普利司通，米其林等对轮胎生产的主要指标有轮胎的所能提供的牵引力性能，轮胎的防侧滑性能，轮胎长久使用中的耐磨性能以及遇到有水路面的排水性能。所以我们根据这四种性能来具体分析轮胎的花纹及其具体相适应的路况范围。

本文问题解决主要分为四步进行：

第一步，寻求轮胎花纹的设计要素，由于目前市场上轮胎花纹的形式多种多样，为了避免给建模带来不必要的麻烦，我们仅考虑普通花纹的形式，从而我们从花纹沟的深度、宽度、横纵花纹集合程度等因素，这也将作为本规划模型的决策变量。

第二步，利用模糊矩阵评价法，计算出花纹各性能的权重比，即花纹整体性能的功能系数；然后将性能的参数表达式进行加权求和，将此作为规划模型的目标函数。

第三步，确定使用需求的数学表达，并将此作为规划模型的约束条件，考虑到性能表达式中一些参变量的数值可能会对结果产生极值影响，我们也会将一些设计要素的限制条件作为约束条件。

第四步，利用前三步的结论建立花纹规划设计模型，并利用普通轿车的例

进行模型的求解。

三、 符号说明

符号	解释说明
δ	路面的硬度大小。
θ	汽车轮胎花纹与水平横向的夹角。
μ	地面的摩擦系数。
P_j	轮胎花纹的牵引力性能。
G_j	轮胎花纹的防滑性能。
W_j	轮胎花纹的排水性能。
R_j	轮胎花纹的耐磨性能。
f	轮胎花纹的总体特性指标。
F_{qf}	汽车轮胎和地面间在前进方向产生的摩擦力。
F_{qm}	汽车轮胎在理想状态不与地面在前进方向产生摩擦力的最大值。
F_{cf}	汽车轮胎和地面在侧滑方向产生的摩擦力。
F_{cm}	汽车轮胎在理想状态下与地面在侧滑方向产生摩擦力的最大值。
P_m	汽车轮胎的牵引性能纲系数。
G_m	汽车轮胎的防侧滑性能纲系数。
R_m	汽车轮胎的耐磨性能纲系数。
W_m	汽车轮胎的排水性能纲系数。

（注：其他未加说明的变量将在其出现之后，加以说明。）

四、 问题假设

- 1、假设所研究的轮胎花纹皆是属于普通花纹，仅是以横纵花纹的形式存在。
- 2、假设车辆的不同仅从汽车的重量、行驶速度以及行驶里程等因素加以区别，车辆的其他因素对结果的影响忽略不计。
- 3、假设所研究的汽车轮胎车轮的花纹不像现实中那么复杂，只考虑花纹的沟深、沟宽、横纵花纹集合度等要素。
- 4、假设轮胎的主要性能为牵引力性能、防侧滑性能、耐磨性能、排水性能等四个性能指标。
- 5、假设汽车的牵引性能量纲系数、防侧滑性能量纲系数、耐磨性能量纲系数、排水性能量纲系数大小为1。
- 6、假设路面上的各种因素都可以进行简化，路面接近平坦的状态。
- 7、假设轮胎的材料都为相同。

五、 模型建立

本文主要研究普通轮胎花纹形式下的设计要素对汽车性能的影响，以花纹沟的深度、宽度、角度及密集度等要素为规划模型的决策变量，花纹的总体性能参数为目标函数，以工艺设计限制以及使用需求为约束条件，从而建立数学规划模型，并用Solidworks软件进行三维建模。

本模型的大体的架构如同计算机程序般，设置模型的输入端、主体程序、输出端三部分，在输入端，我们考虑到将车辆的情况和路面的情况参数化，其值刚度大主观性小，我们将其建立在目标函数主体，而使用需求参数化，其值刚度小主观性大，故将此建立在规划模型的约束条件部分，为减少模型误差对结果带来的巨大影响，我们对设计要素进行工艺技术限制。我们将花纹的设计要素作为决策变量，并将规划模型的最优解作为模型的输出端，而规划模型即是主题的程序，程序化模型架构让花纹设计更加清晰方便，模型的输出端后我们与建立了程序与应用软件Solidworks的连接，依据结果进行轮胎花纹的三维建模，从而建立花纹设计优化的全过程。

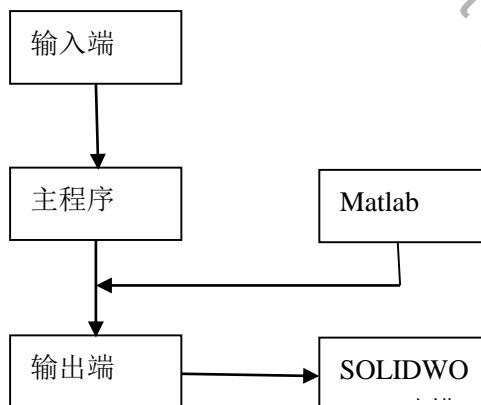


图 1

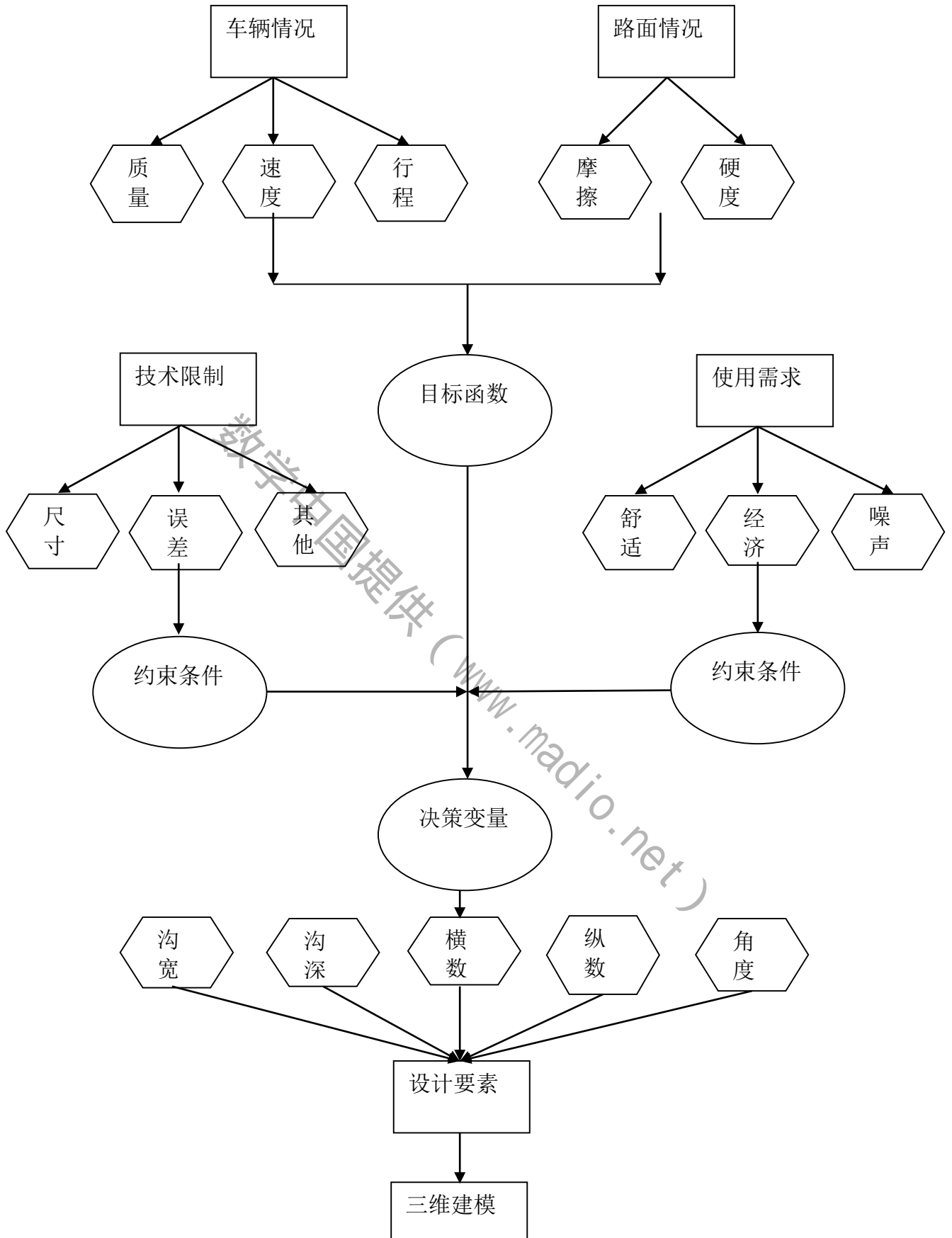


图 2

5.1 花纹的性能参数构建

一. 定性分析花纹参数，车辆情况参数，路面条件参数对轮胎性能的影响

1.1 花纹参数定性分析

1.1.1 花纹沟深度（a）

花纹沟深度（a）是轮胎花纹设计的重要参数，增大轮胎花纹的深度可以提高轮胎的行驶效率^[1]。但轮胎随着深度不断变大，使得轮胎表面的摩擦阻力不断增大，轮胎表面的磨损变得严重，所以不但浪费了更多的橡胶，而且也会降低使用寿命。在车轮旋转时，由于花纹块的回正迟滞时间会加大，随之而来的便是滚动阻力的加大。而且随着花纹深度的不断增大，会影响轮胎的正常散热，当胎温很快上升到极限时，花纹根部有可能因受力和高温的折磨而撕裂，脱落。如果把排水槽设计的过潜，排水不畅又会导致水膜的形成。

1.1.2 花纹沟宽度定性分析（b）

花纹沟宽度定性分析（b）是轮胎花纹设计的重要参数，如果花纹沟取得很窄，轮胎的耐磨性好，但花纹沟易夹石子并且沟底易产生裂口。反之花纹沟的宽度取得很宽，轮胎的抓着性好，花纹的自洁行好，沟底不易产生裂口，但胎面花纹不耐磨，易产生崩花掉块。

1.1.3 花纹块与水平线夹角（ θ ）

花纹块与水平线夹角（ θ ）是轮胎花纹设计的重要参数，随着 θ 得增大，轮胎的纵向刚度增大横向刚度减小，散热性逐渐变差，自洁行也变差，容易夹杂石子和土块儿等杂物，牵引力性能逐渐减弱，防侧滑能力逐渐加强。

1.1.4 横向花纹块面积占行驶面积的比（c）

横向花纹沟槽面积占行驶面积的比（c）横向花纹的多少影响着轮胎的性能。横向花纹接地面积大，胎冠较平坦，所以耐磨耐刺扎，花纹自洁性好，纵向附着力和防纵滑性能好，但散热差，噪声大，易磨损，排水性能差，操纵性差^[2]。横向花纹适合于中慢速行车，适用于一般及较差路面，行驶里程寿命高。

1.1.5 纵向花纹沟槽面积占行驶面积的比（d）

纵向花纹块面积占行驶面积的比（d）纵向花纹的多少同样影响着轮胎的性能，纵向花纹滚动阻力小，有良好的车头指向性，节约燃油，散热快，噪声低，排水性能优异，在湿滑路面不易打滑。操作稳定性和防侧滑性能好，但不耐扎，不耐磨。适于高速行驶。

1.2 车辆情况定性分析

1.2.1 车辆的质量级数 (m)

车辆的质量级数 (m) 影响着轮胎的各项性能, 随着车辆的质量逐渐增大, 轮胎与地面间的接触压力就越大, 地面提供给轮胎的各项力学性能就越好, 如牵引性能和防侧滑性能就越好, 但随着车辆质量逐渐增大, 轮胎的磨损量也逐渐增大, 轮胎的发热量逐渐变大, 温升增大, 轮胎的使用寿命就会减少。

1.2.2 车辆的速度级数 (v)

车辆的速度级数 (v) 是轮胎花纹设计时的重要参数, 速度越高轮胎单位时间里的摩擦发热量就越大, 轮胎的温度也就越高, 轮胎的温度过高会增大轮胎的机械-化学磨损。随着速度的提高, 轮胎与地面间的切向力也逐渐增大, 在转弯时的切向力增加由为明显, 随着切向力的增大轮胎的磨损也逐渐增大。随着车速的提高, 排水性能会变差。

1.2.3 行驶里程级数 (s)

行驶里程级数 (s) 行驶里程的级数也是影响轮胎设计的重要因素, 随着里程级数的增加, 轮胎的磨损量也会随着增加。

1.3 路面情况的定性分析

1.3.1 路面的摩擦系数 (μ)

路面的摩擦系数 (μ) 对于轮胎的设计很重要, 路面粗糙度取决于路面的摩擦系数, 路面的摩擦系数对轮胎的磨损, 牵引性能和防侧滑性能都有重要的影响。随着路面的摩擦系数增大, 轮胎的牵引性能和防侧滑性能也会随之提高, 但轮胎的磨损会随之增大^[3]。

1.3.2 路面的硬度级数 (δ)

路面的硬度级数 (δ) 也是影响轮胎设计的重要参数, 随着路面的硬度级数增加, 轮胎的牵引性能和防侧滑性能也随之增加, 使汽车有更好的操纵感, 但轮胎的磨损率也会随之变大^[4]。

二. 定量分析轮胎花纹参数, 车辆情况参数, 路面条件参数对轮胎性能的影响

2.1 花纹参数定量分析

2.1.1 花纹深度的定量分析

花纹沟的深度可根据标准行驶里程要求和轮胎保证的单耗量公里数来预计^[5], 按如下公式:

$$t_f = \text{标准行驶里程(km)/单耗量} \left(\frac{\text{km}}{\text{mm}} \right)$$

式中单耗量是指 1mm 花纹深度所行驶公里数， t_f 为花纹深度，mm.

2.2 车辆情况定量分析

2.2.1 车辆质量级数的定量分析

(1) 质量级数对车辆牵引力的定量分析^[6]

$$P_t - (F_z + R_x) = 0$$

$$Q - R_y = 0$$

$$M_q - (P_t - P_x)r_d - R_y d = 0$$

式中 Q——轮胎承受的垂直载荷；

R_x ——轮子的滚动助力；

F_z ——牵引阻力；

M_q ——发动机传递到轮子上的驱动力矩；

P_t ——土壤推进力。

由参考文献[7]知轮子滚动前进的条件为

$$(P_f - R_x)r_d + R_y d > M_{qmax} > (P_t - R_x)r_d + R_y d$$

$$P_f = P_{max} > F_z + R_x$$

其中， P_f 是轮子与土壤间的附着力，即推进力的极限值。

式的左项表示土壤反力所提供的力矩，右项表示阻力矩。中项为轮子能从发动机获得的最大驱动力矩，满足上两式轮子即能转动前进。

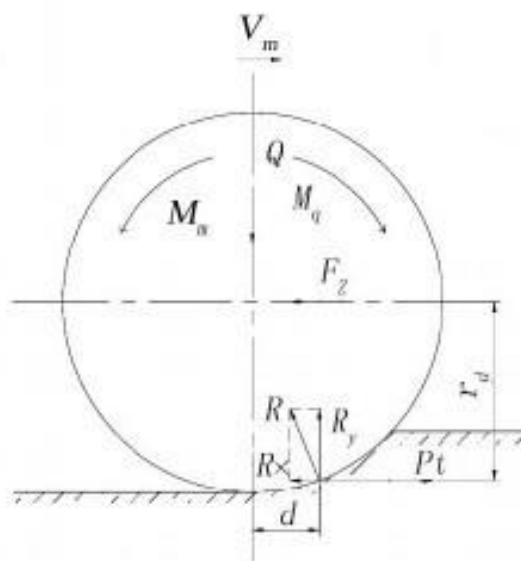


图 3

(2) 质量级数对车辆轮胎磨损的定量分析

车辆的质量正比于轮胎所受的载荷，所以根据阿查德磨损定律，当其它参数不变时，磨损量与载荷成正比，载荷越大，轮胎与路面间的接触压力就越大，轮胎的磨损就越严重^[8]。但载荷对轮胎磨损的影响主要还不在于它使轮胎与路面间的接触压力增大，而在于它使轮胎在驱动、制动及转向时的切向力显著增加，切向力是引起轮胎磨损的最主要因素。研究表明，切向力 F 和轮胎磨损率 R_w 之间的关系可用下式表示：

$$R_w = K * F^n$$

式中 K -比例系数，与轮胎的刚度成反比；

n -指数，当 F 为横向力转向时 $n = 2.3$ ；

当 F 为纵向力驱动或制动时， $n = 2$ 。

由于轮胎的横向刚度比纵向刚度小，当载荷大小一样时，横向力产生的轮胎磨损约为纵向力的三倍，故减小转向时的横向力对减小轮胎磨损非常重要。因此，车辆应按规定的装载质量进行装载。（图 4）为轮胎寿命与载荷的关系图。

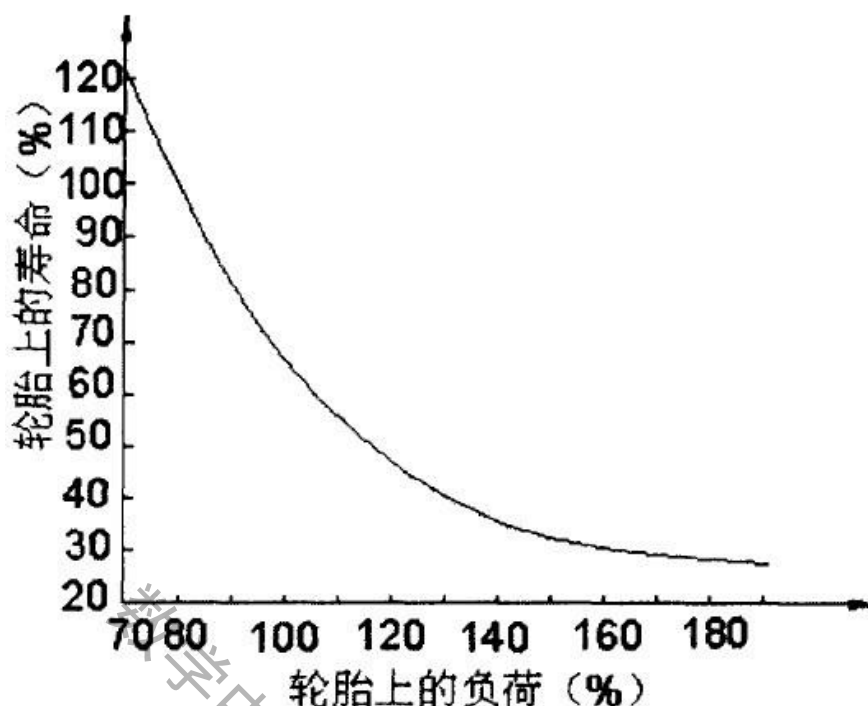


图 4

2.2.2 车辆速度级数的定量分析

(1) 车辆速度级数对排水性能的影响

当轮胎在有积水的路面上滚动时，会挤压积水层，与轮胎接触的前部的积水会产生一定的压力冲向轮胎，水对轮胎产生的动压力与汽车行驶速度的平方成正比，如果再次提高轮胎的转速，当速度达到一定值时，动压力与轮胎的载荷相平衡，这时候轮胎就完全是失去了与路面的接触，漂浮在水膜上，失去与地面的摩擦力。所以排水欠佳的轮胎会使汽车失去控制能力，产生滑水现象，从而对行车安全构成严重威胁。如果从固定于轮胎轴的坐标来看，路面和水膜以高速 V 向右方向前进。而且水膜变成楔子状，进入胎面内，设胎面为平板状，并且倾角非常小，那么从前方进入的水被路面和胎面的后端相挤压。这时水从胎面的两侧流出。在停滞点，水的动压 P_{fd} 根据伯努利定理为

$$P_{fd} = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (2-1)$$

式中 V ——速度 (m/s)；

P ——水的密度 (1000kg/m³)。

(2) 车辆速度级数对轮胎耐磨性能的影响

速度对轮胎的直接影响并不大，它主要通过下述两个方面来影响轮胎的磨损：轮胎的温度。速度越高，轮胎在单位时间里的摩擦发热量越大，轮胎的温度也就越高。轮胎的温度增高将加快轮胎的机械—化学腐蚀磨损。

切向力。车辆行驶高速时，轮胎在制动和转向过程中的切向力将显著提高。以转向为例，设分配在轮胎上的惯性质量为 M ，道路的转弯半径为 R ，轮胎的速度为 V ，则轮胎转向时作用在其上的离心力为 F ：

$$F = MV^2/R \quad (2-2)$$

将 (2-2) 式代入 (2-1) 式，并取 $n=2.3$ 可得：

$$R_w = KM^{2.3}R^{-2.3}V^{4.6} \quad (2-3)$$

即轮胎在转向时，磨损率大约与速度的 5 次方成正比。因此，为了减少轮胎的磨损，汽车转向时一定要降低车速。

2.3. 路面情况定量分析

混合摩擦模型的建立

考虑各向同性粗糙表面，为便于同国外实验数据进行比较，假定轮胎为刚体，熔化液体为等温不可压缩的流体，流体膜厚沿整个界面均匀分布，总膜厚值 h_t 为 [9]

$$h_T = h + \delta_t + \delta_i \quad (2-4)$$

三. 对各种性能建立理想的模型公式

3.1 轮胎花纹牵引力性能理想模型公式建立

轮胎花纹对汽车的牵引力性能的影响较为复杂，因素众多，所以我们从轮胎花纹的主要影响因素出发，从上述的轮胎花纹参数，车辆情况，路面情况对轮胎性能影响的定量和定性分析^[10]，得出车辆重量级数（ m ），摩擦系数

（ μ ），花纹沟深度（ a ），花纹沟宽度（ b ），路面硬度情况（ δ ），横花纹与水平夹角（ θ ），横向花纹块面积占行驶面积的比（ c ），速度级数（ v ），行驶里程级数（ s ）等系数有关，为了建立理想模型，对各参数对牵引性能 P_j 的关系进行简化后建立理想模型：

$$P_j \propto F_0$$

所以可得：

$$P_j = k_1 \times F_0 \quad (3-1)$$

其中 k_1 为汽车轮胎花纹牵引力性能与 F_0 的一个修正系数，与路面硬度（ δ ），横花纹块面积占行驶面积的比（ c ），速度级数（ v ），行驶里程级数（ s ）经理想简化后成简单的正比和反比关系：

$$k_1 = \frac{\delta \times c}{v \times s} \quad (3-2)$$

F_0 为对路面和轮胎在前进方向产生的各种复杂力简化后所得的路面对汽车轮胎在前进方向作用力的合力。

$$F_0 = F_{qj} + F_{tj} \quad (3-3)$$

其中， F_{qf} 是地面对轮胎在前进方向一个摩擦力， F_t 为轮胎花纹沟内的土壤土块对轮胎花纹沟壁面作用在前进方向的推力。

因此我们可以通过研究各项影响因素对地面作用于轮胎的摩擦力和轮胎花纹沟内土壤土块作用于轮胎花纹沟壁面的反作用力的影响来得出各项影响因素与牵引力的关系。 F_{qj} 在理想情况下的地面给轮胎在前进方向的摩擦力的最大值为 F_{qm} ， F_{qj} 的值可认为是在理想情况下的最大值的基础上乘上修正系数得到，

$$F_{qj}=k_2 \times F_{qm} \quad (3-4)$$

其中 k_2 为地面对轮胎摩擦力的修正系数，下面对修正系数 k_2 进行分析。

F_{qj} 由上文的定量及定性分析，并对各量与 F_{qj} 的关系进行简化成正比关系可

$$k_2=m \times \mu \quad (3-5)$$

其中（ m ）为车辆质量级数，（ μ ）摩擦系数。

F_{tj} 在理想情况下的地面给轮胎在前进方向的摩擦力的最大值为 F_{tm} ， F_{tj} 的值可认为是在理想情况下的最大值的基础上乘上修正系数得到：

$$F_{tj}=k_3 \times F_{tm} \quad (3-6)$$

下面对修正系数 k_3 进行分析。 F_{tj} 由上文的定量及定性分析，并对各量与 F_{tj} 的关系进行简化成正比关系可得：

$$k_3=a \times b \times \cos \theta \quad (3-7)$$

其中 a 为花纹沟深度， b 为花纹沟宽度， θ 为横花纹与水平线的夹角。

$$\text{总的理想公式: } P_j = (m \times \mu + a \times b \times \cos \theta) \times \frac{\delta \times c}{v \times s} \quad (3-8)$$

3. 2轮胎花纹防侧滑性能理想模型公式建立

防侧滑性能也是评价轮胎性能好坏的重要指标，良好的防侧滑性能可以提高汽车驾驶操纵的安全性和稳定性。而轮胎花纹对汽车的防侧滑性能的影响是非常大的，但因为轮胎花纹对防侧滑性能的影响因素众多，通过以上对轮胎性能的定性及定量分析^[11]，归纳出车辆重量级数（ m ），摩擦系数（ μ ），花纹沟深度（ a ），花纹沟宽度（ b ），路面硬度情况（ δ ），横花纹与水平夹角（ θ ），纵向花纹块面积占行驶面积的比（ d ），速度级数（ v ），行驶里程级数（ s ），为了建立理想模型，对各参数对牵引性能 G_j 的关系进行简化后建立理想模型：

$$G_j \propto F_n$$

所以可得：

$$G_j = k_4 \times F_n$$

其中 k_4 为轮胎防侧滑性能的一个相关修正系数，与路面硬度（ δ ），纵花纹块面积占行驶面积的比（ d ），速度级数（ v ），行驶里程级数（ s ）经理想简化后成简单的正比和反比关系：

$$k_4 = \frac{\delta \times d}{v \times s} \quad (3-9)$$

F_n 为对路面与轮胎间产生的各种侧向的复杂的力简化后的侧向合力。

$$F_n = F_{cj} + F_{uj}$$

其中 F_{cj} 是地表面对于轮胎在侧向产生的摩擦力， F_{uj} 为轮胎花纹沟内的土壤土块对轮胎花纹沟内壁在侧向产生的一个作用力。

因此我们通过研究地表面和轮胎在侧向产生的摩擦力及轮胎花纹沟内土壤土块对轮胎花纹沟内壁在侧向产生的作用力的影响因素来研究各项影响因素与防侧滑性能的关系^[12]。 F_{cj} 在理想情况下产生的最大值为 F_{cm} ， F_{cj} 的值可认为是在理想情况下的最大值 F_{cm} 的基础上乘上一个修正系数即：

$$F_{cj} = k_5 \times F_{cm}$$

其中 k_5 为地表面对于轮胎产生的摩擦力的修正系数，下面对修正系数 k_2 进行分析。

F_{cj} 由上文的定量及定性分析，并对各量与 F_{cj} 的关系进行简化成正比关系可得：

$$k_5 = m \times \mu$$

其中（ m ）为车辆质量级数，（ μ ）摩擦系数。

F_{uj} 在理想情况下的地面给轮胎在前进方向的摩擦力的最大值为 F_{um} ， F_{uj} 的值可认为是在理想情况下的最大值的基础上乘上修正系数得到：

$$F_{uj} = k_6 \times F_{um}$$

下面对修正系数 k_2 进行分析。 F_{uj} 由上文的定量及定性分析，并对各量与 F_{uj} 的关系进行简化成正比关系可得：

$$k_6 = a \times b \times \sin \theta \quad (3-10)$$

其中 a 为花纹沟深度， b 为花纹沟宽度， θ 为横花纹与水平线的夹角。

$$\text{总的理想公式：} P_j = (m \times \mu + a \times b \times \cos \theta) \times \frac{\delta \times c}{v \times s} \quad (3-11)$$

3.3 轮胎花纹耐磨性能理想模型公式建立

轮胎的耐磨性能作为轮胎的主要的使用性能主要影响着轮胎的使用寿命。轮胎花纹又在很大程度上影响着轮胎的耐磨性能^[13]。利用对轮胎花纹的定性和定量分析来对力学模型进行简化,通过建立经验公式的思想来建立耐磨性能的模型。 R_j 在理想情况下有一个量纲系数 R_m , R_j 的值可认为是在量纲系数 R_m 的基础上乘上一个修正系数即:

$$R_j = k_7 \times R_m$$

通过阅读大量的文献资料可知轮胎花纹对耐磨性的主要影响因素有花纹块的面积与轮胎总面积的比率, 轮胎花纹的角度和花纹沟的沟深 (a), 花纹沟的沟宽 (a), 横, 纵花纹块面积占行驶面积的比 (c), (d), 车辆的速度级数v, 车辆行驶里程级数 (s)。当轮胎的花纹沟宽度增加, 深度减小时, 耐磨性能增加。耐磨性能与这两个参数有以下关系:

$$R_j \propto a$$

$$R_j \propto \frac{1}{b}$$

其中a为轮胎花纹沟的宽度, b为轮胎花纹沟的深度。

由实验数据和文献资料知轮胎的耐磨性能与横, 纵花纹块面积占行驶面积的比 (c), (d) 有着一定的关系, 并且随着横花纹块面积占行驶面积的比 (c) 越大, 轮胎的耐磨性能越好, 因此可得以下关系:

$$R_j \propto c$$

由实验数据和文献资料可知轮胎的耐磨性能与轮胎花纹的角度也有一定的关系, 轮胎的耐磨性能随着轮胎花纹的角度的增大而减小, 当花纹角度达到最大时, 轮胎的耐磨性能最好, 因此可得出以下关系:

$$R_j \propto \cos \theta$$

通过上述对轮胎的定性分析和定量分析, 随着车辆质量级数 (m), 速度级数 (v), 行驶里程级数 (s), 摩擦系数 (μ), 路面硬度 (δ) 的增大耐磨性能逐渐减小, 所以可得以下理想关系:

$$R_j \propto \frac{1}{m}$$

有以上的定量分析, 速度级数 (v) 影响轮胎的耐磨性, 速度级数 (v) 越大, 耐磨性能越差。所以有以下关系式:

$$R_j \propto \frac{1}{v}$$

行驶里程级数 (s) 越大, 对轮胎的磨损就越大, 轮胎的耐磨性能就越差, 所以有以下关系式:

$$R_j \propto \frac{1}{s}$$

路面硬度情况(δ)，摩擦系数(μ)也影响着轮胎的耐磨性能，并由以上分析的定性定量公式可得以下近似关系式：

$$R_j \propto \frac{1}{\mu}$$

$$R_j \propto \frac{1}{\delta}$$

$$\text{综上可得} k_7 \text{得: } k_7 = a \times \frac{1}{b} \times c \times \cos \theta \times \frac{1}{m} \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{\mu} \times \frac{1}{\delta} \quad (3-12)$$

$$\text{总的理想模型: } G_j = (m \times \mu + a \times b \times \cos \theta) \times \frac{\delta \times c}{v \times s} \quad (3-13)$$

3.4 轮胎花纹排水性能理想模型公式建立

当汽车在雨天行驶时，轮胎排水性能的好坏对汽车行驶的安全性和操纵性都有着极大的影响，而汽车排水性能的实现主要靠轮胎的花纹^[14]。通过 W_j 在理想情况下产生的量纲系数为 W_m ， W_j 的值可认为是在量纲系数 W_m 的基础上乘上一个修正系数即：

$$W_j = k_8 \times W_m \quad (3-14)$$

下面我们来对修正系数进行讨论：

轮胎需要排水性能主要是因为当汽车行驶在有积水的路面上时，轮胎与路面之间会形成一层水膜，这层水膜会阻隔轮胎与地面的接触，使汽车的安全性能与操纵性能降低。轮胎通过排水性能可将这层水膜除去，提高汽车在积水路面上的安全性和操纵性。由大量的文献资料和试验数据表明，轮胎花纹的排水性能与花纹沟槽的沟深(a)，花纹沟槽的沟宽(b)，横花纹块面积占行驶面积的比(d)，速度级数(v)，行驶里程级数(s)，横花纹与水平夹角(θ)所以有以下关系：

$$W_j \propto a$$

其中(a)花纹沟槽的沟深。

排水性能随着轮胎花纹排水沟的沟深的增加而提高，所以有以下关系：

$$W_j \propto b$$

其中(b)花纹沟槽的沟宽。

排水性能随着纵花纹块面积占行驶面积的比(d)的增加而提高，所以有以下关系式：

$$W_j \propto d$$

排水性能随着横花纹与水平夹角(θ)的增大而提高，所以有以下关系式：

$$W_j \propto \sin \theta$$

随着速度级数的增加，轮胎与车轮间的水膜难以迅速消除，所以随着速度级

数(v)的增加,排水性能逐渐变差,所以有以下关系式:

$$W_j \propto \frac{1}{v}$$

车辆的行驶里程级数s越多,轮胎的磨损越严重,所以排水率越低,多有以下关系式:

$$W_j \propto \frac{1}{s}$$

$$\text{综合上述可得: } k_8 = a \times b \times d \times \sin \theta \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{s} \quad (3-15)$$

$$\text{总的理想公式: } R_j = a \times \frac{1}{b} \times c \times \sin \theta \times \frac{1}{m} \times \frac{1}{v} \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{\mu} \times \frac{1}{\delta} \quad (3-16)$$

5.2 模糊数学的权比模型构建

5.2.1 模糊矩阵评价法计算花纹性能比重

现在用模糊矩阵评价法评估轮胎花纹对汽车轮胎各个性能的影响程度。

轮胎的花纹主要影响汽车牵引性能、防侧滑性能、耐磨性能和排水性能。花纹的影响汽车性能集为 $U = \{\text{牵引性能、防侧滑性能、耐磨性能、排水性能}\}$, 依次对应可记为 $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ 。

现在来确定两两影响程度的比较 $fu_j(u_i)$ 。由前面的评价方法可知轮胎花纹对汽车牵引性能、防侧滑性能、耐磨性能、排水性能影响程度, 我们记为:

$$fu_2(u_1) = 7, fu_1(u_2) = 1;$$

$$fu_3(u_1) = 5, fu_1(u_3) = 1;$$

$$fu_4(u_1) = 6, fu_1(u_4) = 1;$$

$$fu_2(u_3) = 1, fu_3(u_2) = 4;$$

$$fu_2(u_4) = 1, fu_4(u_2) = 5;$$

$$fu_3(u_4) = 1, fu_4(u_3) = 3;$$

把上面的判断值 $fu_j(u_i)$ 分别代入公式

$$b_{ij} = \frac{fu_j(u_i)}{fu_i(u_j)} \quad i, j=1, 2, 3, 4$$

例如 $b_{12} = \frac{fu_2(u_1)}{fu_1(u_2)} = \frac{2}{1} = 2;$

解得判断矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 1/7 & 1 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/4 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

确定影响性能重要程度系数 a_i

计算判断矩阵 B 的最大特征根 λ_{\max} ，即所求 λ 满足下式的最大值。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 7 & 5 & 6 \\ \frac{1}{7} & 1-\lambda & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 1-\lambda & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda_{\max}=4.50$ ，再把 $\lambda_{\max}=4.50$ 代入其所对应的其次方程，

$$\begin{cases} (1-4.50)x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ \frac{1}{7}x_1 + (1-4.50)x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + (1-4.50)x_3 + 3x_4 = 0 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + (1-4.50)x_4 = 0 \end{cases}$$

求解得到：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{307}{327} \\ x_2 = \frac{428}{1401} \\ x_3 = \frac{169}{1208} \\ x_4 = \frac{185}{2454} \end{cases}$$

进一步归一化可得：

$$A = (0.643, 0.209, 0.096, 0.052)$$

由此可知，花纹对轮胎各个性能的影响程度可以近似计算得到，牵引性能

$a_0 = 64.3\%$ 、防侧滑性能 $a_1 = 20.9\%$ 、耐磨性能 $a_2 = 9.6\%$ 、排水性能 $a_3 = 5.2\%$ 。

所占比的饼状图如下。

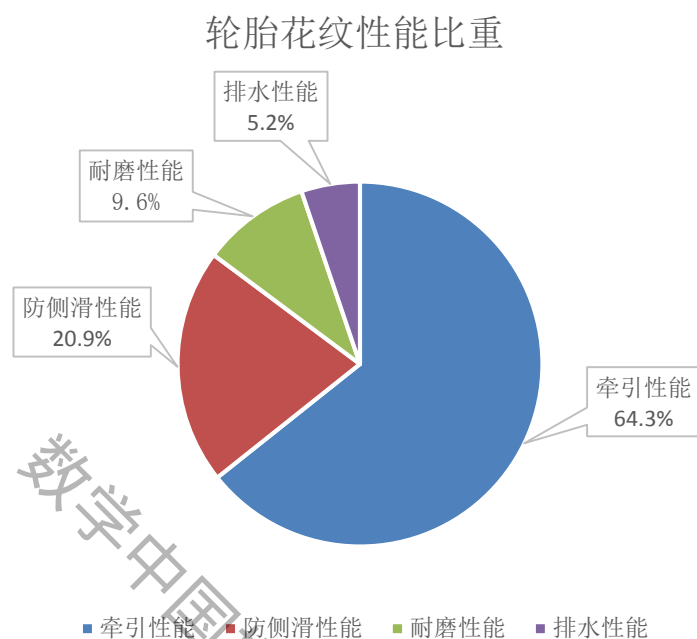


图 5

5.3 目标函数花纹总体性能的确定

$$\text{Max } f = P_j \times a_0 + R_j \times a_1 + R_j \times a_2 + W_j \times a_3$$

5.4 约束条件确定

5.4.1 使用需求

噪声需求

噪声的影响因素主要是与沟深有关，研究表明当沟深在一定的范围内噪音较小，并且其值大小能反应噪声减小的效果，故可用其值来近似描述用户在噪声方面的需求。

舒适需求

汽车的舒适度主要体现在汽车的防侧滑性能，其值的大小能说明轮胎花纹对舒适性的需求。

5.4.2 技术限制

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$3 \leq a \leq 20$$

$$10 \leq b \leq 100$$

$$0 \leq c \leq 1$$

$$0 \leq d \leq 1$$

六、模型求解

6.1 参变量列表

6.1.1 普通汽车的参数列表

重量	速度	行程
2	3	3

表 1

6.1.2 路面情况参数列表

摩擦	硬度
0.8	0.7

表 2

6.1.3 使用需求参数列表

舒适	噪声
$10 \leq b \leq 50$	$0 \leq a \leq 10$

6.2 最优化求解

表 3

普通轿车轮胎花纹设计规划模型：

决策变量：花纹沟深度 a ，花纹沟宽度 b 、横花纹与水平夹角 θ 、横向花纹块面积占行驶面积的比 c 、纵向花纹块面积占形式面积的比 d

约束条件： $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ $3 \leq a \leq 10$ $10 \leq b \leq 50$ $0 \leq c \leq 1$ $0 \leq d \leq 1$

目标函数： $Max f = P_j \times a_0 + R_j \times a_1 + R_j \times a_2 + W_j \times a_3$ (6-1)

沟深	沟宽	角度	横数	纵数
10mm	50mm	0.3206	1	0

表 4

6.2 三维建模



图 6

七、 模型评价

7.1 优点

①本文所用模型通过对轮胎的牵引力性能、防滑性能、耐磨性能、排水性能四个性能进行分析研究，较为全面和具有代表性。

②采用修正系数的思想，将四个性能的标准定义为一个理想最大值的修正值，可以避免其值的多因素研究，为研究带来便利，但是又不失其正确性。

③本文将复杂的轮胎花纹进行抽象简化，突出主要的影响要素，利用简单的力学和几何学数量关系，从而减少研究的无用功。

④本文采用模糊数学分析的方法，将本来影响因素众多的几种性能指标，建立较为明确的比重关系，将原本独立的量构建成一个较为成熟的变量来描述轮胎整体的特性，并通过公路对性能的需求参数建立个种类轮胎和各类公路间的契合度，从而得出轮胎适用范围的结论。

7.2 缺点

①性能参数的计算不是太具体的绝对值，而仅仅是利用1的相对修正。

②模糊数学方法得出的比重有一定的主观性，不能较客观的反应真正的问题。

八、参考文献

[1]文学红，轮胎花纹反求与数字化设计研究，广州工业大学硕士论文，2005, 5;

[2]杨忠敏，轮胎胎面花纹及其特点，现代橡胶技术，第39 卷 3-4页 2013年;

[3] 彭旭东，轮胎磨损的影响因素，中国知网，第50卷 2003年;

[4]张彦辉等，潮湿路面上胎面花纹对轮胎附着性能的影响，农业工程学报，第23卷 2007. 6;

[5]俞淇，子午线轮胎结构设计与制造技术，化学工业出版社，北京，2006, 1;

[6]申屠流芳，水稻直播机放沦陷轮胎的设计，农机化研究，第9期, 91-93页，2009年9月;

[7]江苏工学院，农业机械学[M]，北京，中国农业机械出版社，1981年;

[8]刘志强，轮胎安全性能影响因素的分析、评价与建模，汕头硕士论文，2003. 6;

[9] 彭旭东，表面粗糙度对冰路面上滑动轮胎摩擦牵引力影响的研究，汽车工程，第22卷，第4期，240-243页，2000年;

[10]赵文杰，轮胎花纹变形特性数值模拟分析，西华大学硕士论文，2012年5月;

[11]王野平，论轮胎的磨损，汽车技术，第六期，19-22页，1999年;

[12]鲁军，基于自定义特征的轮胎花纹参数化设计的研究，硕士论文，2013年4月;

[13]杨忠敏，轮胎花纹解密，交通与运输，71-72页，2014年1月;

[14]朱林培，基于Ls-dyna的轮胎花纹滑水特性研究，广州，华南理工大

学，第38卷，第11期，2009年6月；

九、 附录

附录一知识背景

1. 轮胎花纹的基本功能

胎面花纹可以完成汽车对轮胎的许多性能要求，所以轮胎花纹的性能应满足汽车的性能需求。通过文献总结轮胎花纹功能有以下三项：

1. 传递牵引力，制动力和车辆转弯所需的转向力。
2. 可以保证汽车的安全行驶，提供可靠操作性能，包括提供可靠的耐湿滑行，防侧滑行和足够的地面附着力。
3. 保证轮胎的里程寿命。

2. 轮胎胎面花纹的要求

轮胎胎面的花纹对轮胎的行驶性能和使用寿命有直接影响，总结出归纳出轮胎花纹有以下几点要求：

1. 轮胎花纹有良好的附着性能，使纵向和横向滑移小，有良好的抗湿滑性能和防侧滑性能。
2. 耐磨性能好且磨损均匀，不易掉块儿，耐扎性能好。
3. 滚动阻力小，生热量小，散热性好。
4. 在高速行驶时噪音小。
5. 振动小，花纹块要保持连续性。
6. 花纹的自洁性好，不易夹石子，泥沙易清除。
7. 花纹新颖美观，并且便于模型的加工。

附录二、模糊矩阵评价法

模糊矩阵评价法

模糊矩阵评价法，是把 M 个评价因数排成一个 M 阶的判断举证，通过对因素的两两比较，定性得算各种因数的重要程度来确定矩阵中元素值的大小。然后，计算模糊矩阵的最大特征根及其对应的特征向量。这个特征向量就是所要求的因素重要程度 a_i 值。

1、 确定两两因素相比的判断值 $f_{uj}(u_i)$

设着眼因素集 $U=\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ，在 U 中任意取出一对因素 u_i, u_j ，对 u_i, u_j 的重要程度进行比较，设 $f_{uj}(u_i)$ 表示因素 u_i 相对因素 u_j 而言的“重要程度”的判断值， $f_{ui}(u_j)$ 表示因素 u_j 相对因素 u_i 而言的“重要程度”的判断值，判断值 $f_{uj}(u_i), f_{ui}(u_j)$ 的确定。

方法。例如，我们断定因数 u_i 比 u_j 明显重要，则 $f_{uj}(u_i)=5, f_{ui}(u_j)=1$ 。

表 4-1 因素重要程度的判断值表

因素 u_i, u_j 相对比较的重要程度等级	$f_{uj}(u_i)$	$f_{ui}(u_j)$	备注
---------------------------	---------------	---------------	----

$\xi = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ 归一化

$$\left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^m x_i}, \frac{x_2}{\sum_{i=1}^m x_i}, \dots, \frac{x_m}{\sum_{i=1}^m x_i} \right)$$

作为因素重要程度模糊子集，有

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

附录三、规划模型求解 Matlab 程序

```
clc;
clear all;
N=20;
x10=[];
x20=[];
x30=[];
x40=[];
x50=[];
x1=unifrnd(3,10,N,1);
x2=unifrnd(10,50,N,1);
x3=unifrnd(0,pi/2,N,1);
x4=unifrnd(0,1,N,1);
x5=unifrnd(0,1,N,1);
vmax=0;
for a=1:N
    for b=1:N
        for c=1:N
            for d=1:N
                for e=1:N
                    if x4(d)+x5(e)<=1

v=0.106.*x4(d)+0.05.*x1(a).*x2(b).*x4(d).*cos(x3(c))+0.016.*x4(d).*x1
(a).*x2(b).*sin(x3(c))+0.006.*x1(a).*x2(b).*x5(e).*sin(x3(c))+0.01.*x
1(a)./x2(b).*cos(x3(c)).*x4(d);
                    if v>=vmax
                        vmax=v;
                        x10=x1(a);
                        x20=x2(b);
                        x30=x3(c);
                        x40=x4(d);
```

```

x50=x5(e);
end
end
end
end
end
end
end
end
x=[x10,x20,x30,x40,x50]
vmax

```

附录四、重量、速度、行驶里程级数表

速度大小	速度级数
40km/h-50km/h	1
50km/h-60km/h	2
60km/h-70km/h	3
70km/h-80km/h	4
80km/h-90km/h	5
90km/h-100km/h	6
>100km/h	7

表 6 汽车行驶速度级数表

重量大小	重量级数
1000kg-1500kg	1
1500kg-2000kg	2
2000kg-2500kg	3
2500kg-3000kg	4
3000kg-3500kg	5

#参赛队号 1440

3500kg-4000kg	6
>4000kg	7

表 7 汽车重量级数表

行驶里程大小	形式里程级数
5 万公里—10 万公里	1
10 万公里—15 万公里	2
15 万公里—20 万公里	3
20 万公里—25 万公里	4
25 万公里—30 万公里	5
>30 万公里	6

表 8 汽车行驶里程级数表