

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

参赛队号#1267
邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：1267

队员 1：金胜利

队员 2：郑松泉

队员 3：陈竞娴

参赛队教练员（签名）：吴卢荣

参赛队伍组别：大学组

第四届“互动出版杯”数学中国

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

参赛队号#1267
邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：1267

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

参赛队号#1267
邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2011@tzmcm.cn

2011年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降时的姿态研究

关 键 词 飞行曲线 水面迫降 冲击力 斯托克斯公式 上仰角度

摘 要：

有关数据统计表明，80%以上的坠毁事故发生在水面及松软的地面上，所以在飞机迫降的过程中，如何控制其迫降姿态，从而减小飞机接触水面时的冲击力及滑行距离，是研究这个问题的核心。本文对飞机迫降的迫降角度，姿态，滑行的距离，进行科学的计算，根据冲击力最小的情况下得出了最佳角度，以及最佳角度下的滑行距离。

首先，我们通过对降落速度、飞行速度 v 和降落仰角等因素进行分析，以及结合物理力学知识，建立了飞机迫降接触水面瞬时所受到的冲击力 F 的数学模型：

$$F(x) = mgx + 6\pi \eta r v \sqrt{1-x^2},$$

其中 η 为粘滞系数， r 为飞机机身截面的半径， x 为飞机迫降时与水面水平方向的夹角。接着我们利用 LINGO、EXCEL 软件和斯托克斯公式，求出当降落仰角为 $\theta=17.02523^\circ$ 时，飞机所受冲击力最小，换言之，飞机迫降以降落仰角 $\theta=17.02523^\circ$ 接触水面是相对最好的选择。除此之外，我们还利用动能定理，得到接触水面后的滑行距离， $s=542.17\text{ m}$ 。

此结论和相关研究的结果十分相似。为飞行员的迫降角度提出了确定的数值，提高了水面迫降成功率。研究表明该角度方案合理科学，具有较高的参考价值和实用价值。

此外，仅仅以飞机接触水面时受到的冲击力来判断飞机以什么样的姿态迫降最安全论证不够充分，还应该考虑到飞机与水面接触后的滑行距离，应将其两者综合起来，求其影响的最小值，来求得最安全的迫降姿态，这是在下一步建模要考虑到的。

参赛队号 1267

所选题目 A

参赛密码 _____
(由组委会填写)

Abstract

According to lots of statistics and analysis, Most pilots choose to land above water

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

参赛队号#1267
邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

before the engine stops working. However, the relevant statistics show that more than 80% of the crash of the accidents take place on the water and soft ground, it is a question that in the process of forced-landing it is a question that in the process of forced-landing, how to control the landing attitude, reducing the wallop when the airplane touch water and its distance of sliding.

First, we speed through the landing, the flight speed v , and analysis of factors such as land elevation, and the combination of physical and mechanical knowledge to build the aircraft down by contact with water by the impact of transient mathematical model F :

$$F(x) = mgx + 6\pi\eta rv\sqrt{1-x^2}$$

Where η is the viscosity coefficient, r is the radius of the aircraft fuselage cross section, x is the aircraft made a forced landing with the angle between the horizontal surface of the water. Then we use LINGO, EXCEL software and Stokes formula, obtained when the land elevation is $= 17.02523^\circ$, the aircraft suffered minimal impact, in other words, the aircraft made a forced landing to landing at the water surface elevation $= 17.02523^\circ$ relative to the best choice is . In addition, we also use kinetic energy theorem, the sliding distance after contact with the water, $s = 542.17\text{m}$.

This conclusion and the relevant research results are very similar. The angle of landing for the pilot to determine the value and improve the success rate of the water landing. Research shows that the point of reasonable scientific program, with a high reference value and practical value.

In addition, it is not enough only judging the wallop that the airplane forcing to land with what kind of attitude is the safest when it touches water. We should consider the distance of sliding when the airplane touches water as well. In the next process of setting up model, it should be considered both of them, seek their minimum of influence, and get the safest attitude of forced-landing.

参赛队号 # 1267

一、问题的重述

由于极端天气、机械故障等原因，飞机不可避免要实施迫降，在降落过程中瞬时较大的冲击力可能破坏机体结构甚至造成人员伤亡。有关统计表明，军用及民用飞机在迫降过程中 80% 的坠毁事故发生在水面及松软的地面上。

近些年来，对于飞机防撞性能设计标准以及分析方法的研究主要集中在飞机对刚性面的撞击方面，有关飞机入水冲击的研究报道还不多见。在飞机迫降的过程中，机身所受冲击力与降落速度、飞行速度和降落仰角密切相关，建立合适的降落参数，很可能避免机毁人亡。

大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。因此，请你建立合理的数学模型，对客机在平静水面上的迫降进行分析，指出客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。



图（1） 1549 航班迫降过程的照片

二、问题分析

对于飞机在极端条件下不可避免要实施迫降，一旦迫降，势必会有巨大的机毁人亡的风险，通过相关了解，减少飞机水上迫降事故的发生概率问题研究有几点可以入手 1：提升飞机的材料防撞击性，使其在同等冲击力的情况下，将飞机机体结构损伤程度降到最低。2：通过一系列的研究，使飞机在安全迫降的情况下，但对机体的密封性有一定损伤，加强飞机中抗压封闭性能，减少由于水淹没机舱造成的伤亡。3：研究飞机的机身所受冲击力及与水面接触后的滑行距离与降落速度、飞行速度和降落仰角之间的关系。

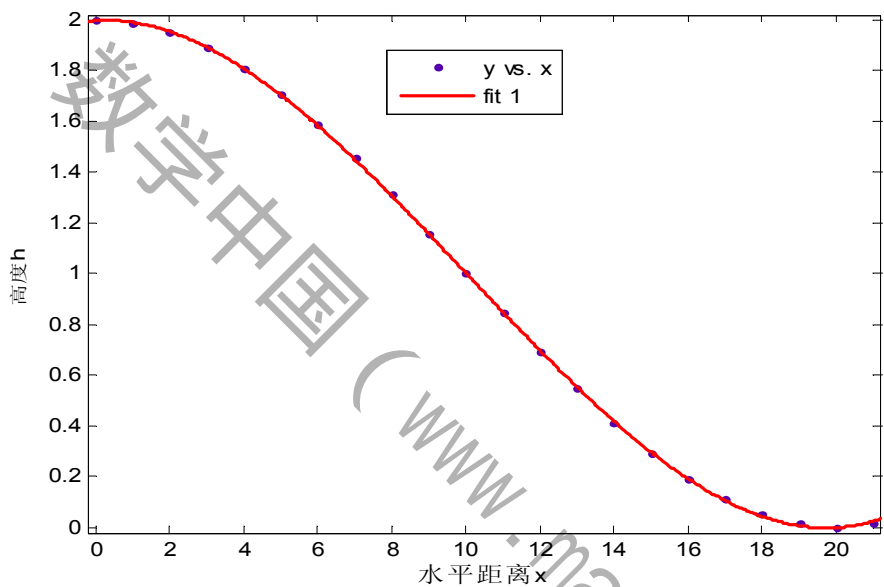
而在我们所建立的模型当中，我们着重研究飞机降落仰角与飞机与水面接触的瞬间所受的冲击力的关系，求出最小冲击力时飞机的仰角，利用数学，物理等相关知识求出客机在河面上迫降的最佳姿态，进而再求出飞机在这种姿态下与水面接触的滑行距离。

三、模型的假设

1：我们不考虑在空气中所受摩擦力等因素，即飞机在与水面接触前，飞机水平方

参赛队号 # 1267

- 向的速度不会发生改变；
- 2：在飞机与水面接触的过程中，除了所受到的浮力、水的冲击力、及重力之外无其它干扰里作用。
- 3：从飞机无动力飞行时到与水面接触之前无大风大雨等自然天气影响
- 4：飞机在迫降过程中机身完整，飞机的受力不因机身的破损而发生变化，从而影响飞行轨迹。
- 5：假设飞机是一质点，飞机做相应的轨迹运动，特别是在研究飞机所受飞行方向冲击力的问题时，将飞机拟作圆形小球，其飞机轴长的 1/2 作为量 r ，即小球的半径。
- 6：假设飞机无动力后且在飞行员的控制下的运动轨迹如下图（2）所示



图(2) 飞机迫降运动轨迹模拟图

四、 符号说明

符号	含义
v	测出飞机在流体中速率
r	飞机机身截面的半径
η	粘滞系数
θ	飞机刚接触水面时的角度
F	飞机下降到水面时所受到的冲击力
F_v	飞机所受降落方向冲击力
F_H	飞机所受飞行方向冲击力
M	飞机质量

参赛队号 # 1267

五、模型的建立及求解

5.1 飞机飞行轨迹模拟：

关于模型的建立，我们不考虑在空气中所受的浮力，摩擦力，等因素；抛开一切自然因素，建立理想模型。在理想状态下，飞机有三种姿势，如图（3）、（4）、（5），具体分析如下：

由于发生空中发动机停车事故，进行无动力航行，则飞机做水平速度恒定的自由落体运动，飞机若如图（3）所示与竖直向下方向成 θ 角迫降于水中，则机头则事先进入水中，根据水上安全迫降标准来看，飞机与水面的接触面积小，造成冲击力加大，很可能由于水的强劲粘滞力，未被吸收的能量很可能造成机体结构的损坏，由此水上迫降有可能导致比地面撞击更严重的伤害。如果机身下部蒙皮破裂，那么水将流入机舱，乘员很难有充足的时间逃离。因此需要对飞行器水上迫降时的力学特性进行分析。

另一方面由于接触面积小，在压力一定的情况下，压强增大，在降落方向上，飞机尾部撞击水面后，产生低头力矩，使飞机头部沿降落方向的速度增大。当飞机头部撞击到水面后，该速度在短时间内迅速沿降落的反方向增大。随着飞机降落速度降低，飞机所受阻力也在逐渐下降，该速度沿降落反方向增大逐渐平缓。飞机尾部撞击水面后，受到瞬时的冲击力较大，尾部速度在短时间内迅速沿降落反方向增大整个飞机潜入水中深度增加，会加大飞机的救援难度甚至造成机翼断裂等情况，致使飞机潜入水中，造成无可救援的局面。

所以根据分析：飞机入水时应当保持水平状或飞机向上成一定的仰角，如下图（4）、图（5）所示的两种状态



图（3）飞机不采取任何措施以平抛曲线下降



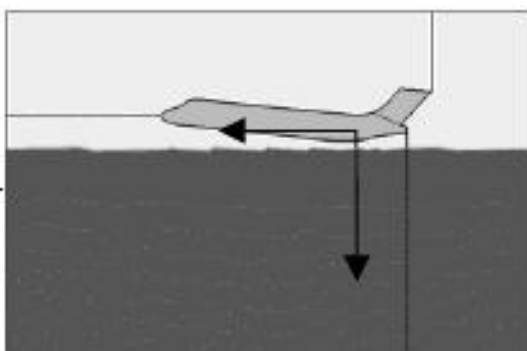
图（4）机头水平状态迫降



图（5）机头上仰状态迫降

参赛队号 # 1267

将所给的图抽象为飞机仰角在一定范围内波动的几何图如下图（6）



图（6）飞机水面降落的分析模型

可知，飞机沿类似于正态曲线图（2）的轨迹运动时最安全，现在我们来仔细研究飞机在正态曲线最低点与水面接触时的机身载荷问题。

5.2 降落速度、飞行速度和降落仰角对机体载荷不同影响数学模拟

查找资料可知，机身采用铝合金材料参数，材料密度 2700kg/m^3 。空气压强为一个标准大气压，水体压强通过静水压表示，环境温度为 300K 。飞行高度为 1 万米。

参考贺谦等人研究发表的《飞机水面降落的机身载荷研究》[3]，可得：

降落速度、飞行速度和降落仰角对机体载荷有不同影响。文中分析了不同降落速度、飞行速度和降落仰角条件对飞机撞击水面后机身压强随时间变化的规律，具体参数设定如表1所示。降落速度改变时，飞行速度和降落仰角分别为 70m/s 、 6° ；飞行速度改变时，降落速度和降落仰角分别为 5m/s 、 6° ；降落仰角改变时，降落速度和飞行速度分别为 5m/s 、 70m/s 。

表1 降落速度，飞行速度和降落仰角参数变化表

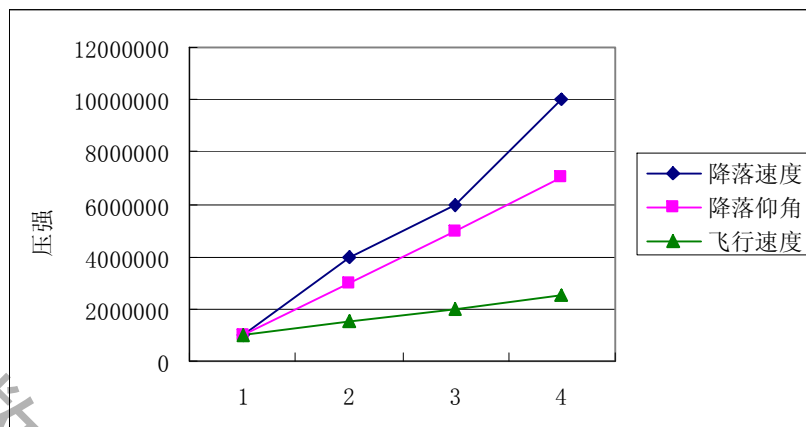
降落速度 (m/s)	5	10	15	20
飞行速度 (m/s)	30	60	90	120
降落仰角 ($^\circ$)	3	6	9	12

不同降落速度、飞行速度和降落仰角下，机身压强随时间的变化规律如图（7）所示。从图中可以看到，不同降落速度、飞行速度和降落仰角下，机身压强随时间的变化规律基本相同。在飞机撞击水面的瞬间，压强达到最大值，随后压强值迅速下降，这个过程非常短暂（从表1中可以看到，这个过程在 0.6s 之前已经结束），随后压强值趋于平缓。另外，随着降落速度的增大，压强的最大值也不断增大。

降落速度、飞行速度和降落仰角对机体载荷影响程度的对比分析降落速度、飞行速度和降落仰角对机体结构响应影响程度的对比如图 5 所示，拟和不同降落速度、飞行

参赛队号 # 1267

速度和降落仰角下，机身压强的最大值进行对比。采用三种降落条件初始值（5m/s、30m/s、3°）的倍数关系描述降落参数的变化，如下图（7）所示：



图（7）不同降落速度、飞行速度、降落仰角对机身压强影响程度对比

降落速度、飞行速度和降落仰角对机体结构响应影响程度的对比如图 5 所示，拟和不同降落速度、飞行速度和降落仰角下，机身压强的最大值进行对比。采用三种降落条件初始值（5m/s、30m/s、3°）的倍数关系描述降落参数的变化（如图 5 中横坐标所示）。

从图中可以看到，随着降落速度的增大，机体结构响应的变化最为明显，降落仰角次之，飞行速度的影响最小。

5.3 飞机迫降最佳降落仰角物理模拟

由飞机降落的机身载荷研究[3]，飞机下降所受到的冲击力 F 为：

$$F = F_V \cos \theta + F_H \sin \theta \quad (1)$$

由于只受到重力的作用，所以 F_V 为飞机所受降落方向冲击力为：

$$F_V = mg \quad (2)$$

由斯托克斯公式可知，当小球在粘滞流体中以浮力速度 v 匀速运动时，小球受到的阻力为：

$$F_H = 6\pi \eta r v \quad (3)$$

在此飞机模型中，我们将机身主轴长度的 1/2 设为 r ， v 作为飞机与水面的相对速度（考虑到水面中水流的速度在内），

根据假定设置，对于飞机刚接触水面时与水平方向的角度 θ ： $\theta \geq 0$ ，则

$$x = \cos \theta \geq 0 \quad (4)$$

由式（1）、（2）、（3）、（4）可得飞机接触水面瞬间所受冲击力的数学模型：

参赛队号 # 1267

$$F(x) = mgx + 6\pi \eta rv\sqrt{1-x^2} \quad (5)$$

查阅客 A320 的技术参数[2]，以及大学物理新教程[4]，可知：

$$\eta = 1.005 \times 10^{-3}$$

$$v = 900 \text{ Km/h}$$

$$m = 77000 \text{ kg}$$

$$\pi r^2 = 12.915 \text{ m}^2$$

然后利用LINGO：

$$\min = 77000 \times 9.8 + 6 \times 3.14 \times 0.001 \times 2 \times (1-x^2)^{(1/2)};$$

$$x \geq 0;$$

$$x \leq 1;$$

可求得当冲击力最小时， $x = 0.95617592$ 。

在此基础上，再用Excel软件计算得，降落仰角 $\theta = 17.02523^\circ$ 。

我们求出了飞机迫降时与水面所成的仰角，但我们着重研究的是飞机接触水面瞬间所受到的冲击力，对于其滑行距离没有太多研究，但是缩短水面滑行距离。可以避免发生跳跃和俯冲现象，且能够保证飞机主要结构的完整。

5.4 飞行距离的求解

由斯托克斯公式可知：

$$F = am = 6\pi \eta rv;$$

$$a = 6\pi \eta rv/m;$$

再根据动能定理，有

$$v^2 t - v^2 = 2as;$$

化简，可得

$$250m/(6\pi \eta rv) = s;$$

将数据代入计算，可得在水面上的滑行距离为 $s = 542.17 \text{ m}$ 。

此意义在于根据得到 $s = 542.17 \text{ m}$ ，可以让驾驶员选择合适的迫降水面接触点，然后选择迫降后水平面内的飞行方向，避免由于水面过窄导致飞机撞击岸边，引发事故。

六、 模型的评价

6.1 模型的缺点：

此模型对飞机空中运动轨迹没有进行数学模型模拟求出准确数值，只做一般常识性的推测，模型存在一定的误差。

(1) 斯托克斯公式是针对的模型是圆形小球，而这里忽略飞机的实际形状，以飞机长度的 $1/2$ 作为半径 r ，造成一定的实验误差

(2) 飞机在无动力后，假设的是水平方向的速度一定，忽略了空气阻力

(3) 我们没有考虑到一些不可抗力因素，如遇到大雨或大风之类，同样会影响其运行轨迹。

(4) 一些参数，如飞行速度，机身长度都是唯一定值，缺乏说服力

6.2 模型的优点：

此模型对飞机撞击水面的机身载荷进行了细致的物理受力模拟，求出了最佳 θ 值。比模型全面，适用性广

(1) 此模型直接运用物理知识和高等数学，直接节省了繁琐的实验验证。

(2) 此模型运用了数学软件，加强了计算的精确度

(3) 对飞机入水时的所受的冲击力研究比较透彻，而且 $\theta = 17.02523^\circ$ 与其他论证结果相似。

参赛队号 # 1267

七、模型的改进与推广

本次建立模型的过程中简化了飞机运行轨迹模型的考虑，忽略其他环境条件各方面因素，并且在考虑运行轨迹时将飞机简化为质点作物理分析。如果能加进这几个因素多方面考虑，就能建立更加实际完善的模型

我们在最初考虑飞机的与水接触的角度时，认为飞机有可能以平抛运动轨迹运动，通过一定的查阅资料发现，如果以平抛运动与水接触，则会导致飞机潜入水中，查阅相关文献得知不同降落速度、飞行速度、降落仰角对机身压强影响程度；进一步确定降落仰角对冲击力的作用最大。

然后通过改进为水平运动或者上仰运动，又无法得到飞机在与水面接触时所受到的摩擦力的大小的判断依据。于是又通过反复查找，找到大学物理上的斯托克斯公式比较适合此模型，但是公式的前提是小球作为假设实验对象，形状不相符，后来通过进一步了解，知道作者所用的方法是曲面积分法得到的公式，与物体的形状没有太大关系，就进一步建立模型。

反观整个模型建立其间，忽略了很多因素，如摩擦力因，风力等因素，而且我们将很多飞机运动的状态设置为理想状态例如我们将飞机入水的睡眠设置为无限大的水面，这些因素对结果的影响很大；此外，仅仅以飞机接触水面时受到的冲击力来判断飞机以什么样的姿态迫降最安全论证不够充分，还应该考虑到飞机与水面接触后的滑行距离，应将其两者综合起来，求其影响的最小值，来求得最安全的迫降姿态，这是在下一步建模要考虑到的。

八、参考文献

- [1] 姜启源、谢金星、叶俊编，数学模型，北京：高等教育出版社，2003.8。
- [2] 维基百科空中客车 A320，网址：
<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A9%BA%E4%B8%AD%E5%AE%A2%E8%BD%A6A320>
- [3] 飞机水面降落的机身载荷研究.贺谦，陈效鹏，李磊，岳珠峰（西北工业大学工程力学系，西安）。
- [4] 大学物理新教程第二版 刘春银主编。

九、附录

8.1 相关程序源代码：

在lingo中求最小值

```
min=77000*9.8+6*3.14*0.001*2*(1-x^2)^(1/2);  
x>=0;  
x<=1;
```

Local optimal solution found.

Objective value:	33.91200
Extended solver steps:	5
Total solver iterations:	20

Variable	Value	Reduced Cost
X	0.000000	754600.0

参赛队号 # 1267

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	33.91200	-1.000000
2	0.000000	0.000000
3	1.000000	0.000000

在matlab拟合飞行曲线

$x=0:2:21;$

$y=1+\cos(\pi/20*x)$

8.2 做题过程:

```
>> x=0:2:21;
y=1+cos(pi/20*x)

y =

Columns 1 through 7

    2.0000    1.9511    1.8090    1.5878    1.3090    1.0000    0.6910

Columns 8 through 11

    0.4122    0.1910    0.0489    0

>>
```