

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1504

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：大学组

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1504

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车

关 键 词 非线性规划 “S 型法” “多 S 法” 多目标规划

摘 要

本文研究的是车辆的侧位停车问题。侧位停车是国内驾照考试的一项基本要求，也是很多驾驶员比较缺乏自信的一项技术，因此，对侧位停车问题进行建模研究显得相当实用。

问题一研究的是当车辆能够以各种不同的路线顺利进入空位时，空位尺寸（空位长 L 和空位宽 M ）需满足的条件。为研究方便，迅速找到突破口，首先将目光转向现今已经写入驾照考试教材的“S”型侧位停车法（即“S 型法”），作出建模假设后，依靠几何尺寸关系构建约束条件，建立非线性目标规划模型求解。由于这种传统的方法适用于空位尺寸比较可观的情况，我们以“S 型法”模型的解作为临界值，空位尺寸大于该值时使用“S 型法”，而当空位尺寸小于这一临界值时，采用“改变夹角法”和“多 S 法”：在“S 型法”里，摆车头入空位的初始位置，车辆与路沿的夹角为 45° ，这只是一个经验数据，为严谨起见，我们对该夹角的一般情况进行分析求解，此即“改变夹角法”；此外“S 型法”里只存在一条“S”型轨迹，而当空位尺寸相当小时，可能驾驶员需要多次迂回才能顺利将车停靠，为此，我们对多次“S”型迂回的情况进行了建模求解，此即“多 S 法”，模型优化中，又提出“不规则多 S 法”，即“S”型轨迹不中心对称。求解完毕后，整体分析三大组数据，“多 S 法”所需的空位尺寸最小。模型总体优化中，将驾驶员的信心因素考虑进去，并依靠均衡因子 γ 为两者构建多目标规划。

问题二研究的是空位尺寸已知时，车辆侧位停车入位的最佳线路和所允许的偏差。这个问题求解是问题一的逆反过程，对问题的三种模型分别研究：“S 型法”模型中，依靠几何尺寸关系，求出理想线路，再通过车辆停靠前直线行驶时与路沿的距离 s 构造约束条件，得出所允许的偏差；“改变夹角法”是“S”型法的特殊情况，在问题二的讨论中无需重复；“多 S 法”模型中，对 1、2、3、4 条“S”型轨迹的情况分别研究，并嵌套讨论“不规则多 S 法”，得出全部数据，比较。最后将对应不同空位尺寸关系的最佳行进路线和允许的偏差反映在图中。

参赛队号 1504

参赛密码 _____
(由组委会填写)

所选题目 A

【Abstract】

This article talks about the parking of the lateral vehicle. Lateral parking is a basic requirement in the driving test. However, a lot of drivers lack the confidence of the lateral parking. Therefore, the modeling of lateral parking seems quite practical.

The first study is about the space dimension (space long and space wide) the vehicle needs to enter the room in a variety of ways. We first turn to the "S"-type lateral parking (the "S-type method") which has already been written into driving test books, then make modeling assumptions and construct relations relying on the geometry constraints in order to build a nonlinear goal model. Because this method is suitable for the more noticeable space situation, we can see the answer of the "S-type method" as a cutoff, that is, when the space dimension is bigger than this answer, we can use the "S-type method". Otherwise we move into "changing in angle method" and "multi-S Method". In the "S-type method", when the front of a vehicle goes into the space initially, the angle between the vehicle and the road is nearly 45° . However, it is only an empirical data. To be more precise, we analyze the more general situation that is named "changing in angle method". Besides, in the "S-type method", there is only one "S"-type track while the space dimension may require multiple bypasses for the driver to stop the car smoothly. Under this circumstance, we refer to "multi-S Method". In the model optimization, we put forward "Abnormity multi-S Method" which is not centrosymmetric in the "S" track. After solving the model, we analyze three sets of data overall just to find the space required in the "multi-S Method" is the smallest. In more general optimization model, the driver's confidence factors is also put into account and made into the multi-objective planning by an equilibrium factor " γ ".

Question 2 studies about the best line of the parking and the deviation it allowed under the condition that the space dimension is known. This problem is quite an antagonistic process of Question 1. We separately study the three models above. In the "S-type law" model, we find the ideal line depending on the geometry relationship, and then gain the deviation through the condition of the distance between driving straightly through the traffic stop and the road along with. "Changing in angle method" is another special condition of the "S-type method". So there is no need to repeat. In the "multi-S Method", we study on the 1, 2, 3, 4 "S"-type track nested with the discussion of "Irregular S Law Method". Finally, the best route of the corresponding size and the route deviation allowed are reflected in the diagram.

目录

1 问题重述	1
2 问题分析	2
3 模型假设	2
4 符号系统	3
5 侧位停车时空位条件求解模型（问题一）	3
5.0 经典“S型法”的具体求解	5
5.0.0 数据准备	6
5.0.1 模型要点	6
5.0.2 目标函数和约束条件的列写	6
5.0.3 模型求解	8
5.0.4 结果分析	8
5.0.5 模型的优缺点评价及优化	8
5.1 “改变夹角法”的单独讨论	8
5.1.0 目标函数和约束条件的列写	9
5.1.1 模型求解	9
5.1.2 结果分析	9
5.1.3 模型的优缺点评价及优化	10
5.2 “多S法”的具体建模求解	11
5.2.0 目标函数和约束条件的列写	11
5.2.1 模型求解	12
5.2.2 结果分析	12
5.2.3 模型的优缺点评价及优化	13
5.3 额外考虑驾驶者的心理和能力因素，对以上两种情况重新建模	16
6 侧位停车的入位位置和入位角度求解模型（问题二）	16
6.0 经典“S型法”的前段行驶轨迹求解模型	17
6.0.0 目标函数和约束条件的列写	18
6.0.1 模型编求解	18
6.0.2 模型的优缺点评价及优化	19
6.1 “多S法”的前段行驶轨迹求解模型	19
6.1.0 目标函数和约束条件的列写	19
6.1.1 模型编求解	20
6.1.2 模型的优缺点评价及优化	23
7 附录	24

1 问题重述

在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与信心的问题。有调查报告称：57% 的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这一方面影响人的驾驶体验，一方面也使停车空间不能得到充分利用。在此，请你协助驾驶员来解决停车的问题。具体要求如下：

1 第一阶段问题：

- (1) 对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入。请你建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。我们假设可以得到停车位置的平面图 1，包括停车空位的长度宽度等数据。考虑到实用性，模型所需的本车数据要能够容易测得，例如几何尺寸、转弯半径等。
- (2) 我们假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上。请给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及允许的偏差显示在图上。

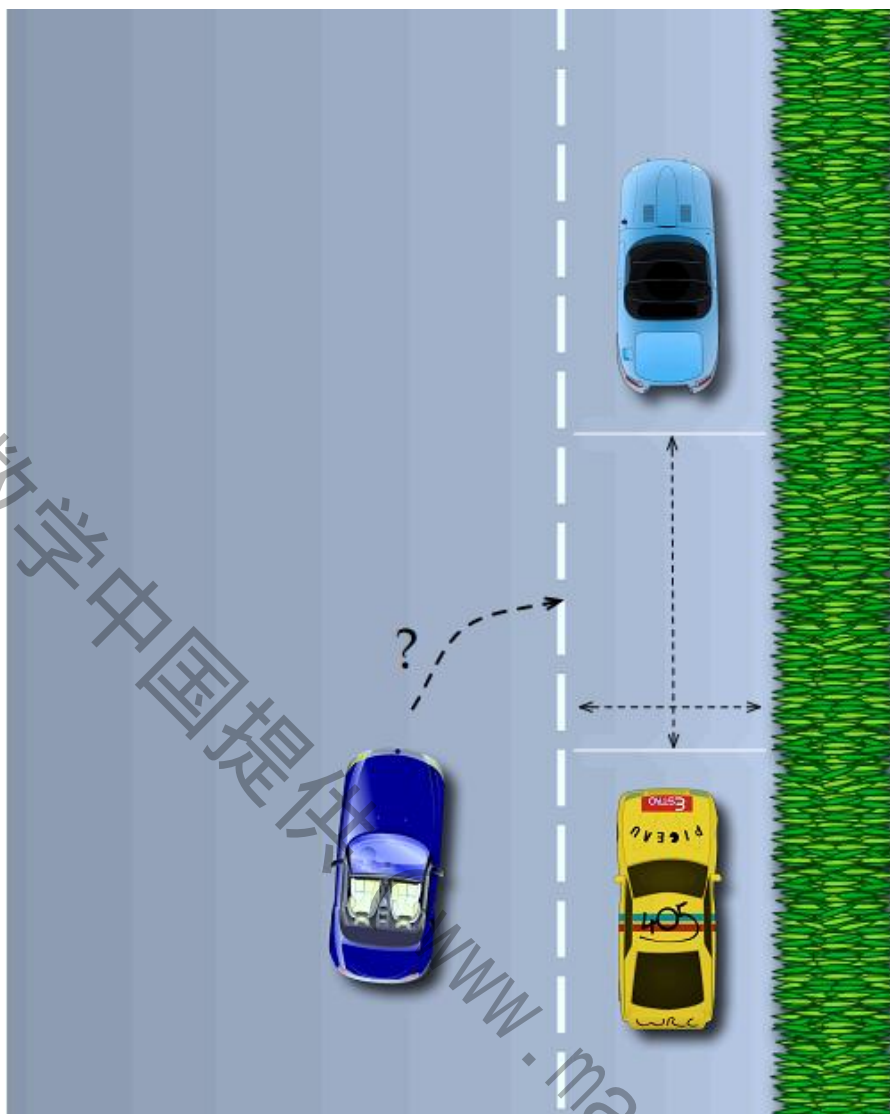


Figure 1: 侧位停车示意图

2 问题分析

对此侧位停车问题，有无数种可行的线路，为寻找突破口，我们先从传统的“S型法”作建模求解，得到此时的空位尺寸。当空位尺寸大于这一值时，我们认为采用“S型法”是可取的，而当空位尺寸小于这一值时，“S型法”失效，但通过改变摆车头时车辆与路沿所称的夹角或者增加几段迂回的“S”型线路，可能会降低对空位的尺寸要求。

对于问题二，已知空位尺寸反方向求空位尺寸和允许的偏差，由于思路和问题一是一个反方向的关系，所以问题一的三个模型仍然可用。对上述三个模型重新建模，将停车前的直线行驶过程也考虑在内，同样依靠几何尺寸关系，即可建模求解。

3 模型假设

- (1) 假设侧位停车前汽车直线行驶，且严格平行于路面；
- (2) 假设倒车入位和进车入位严格对称；
- (3) 假设车辆能否顺利入位只取决于平面几何尺寸，不考虑立体线条；

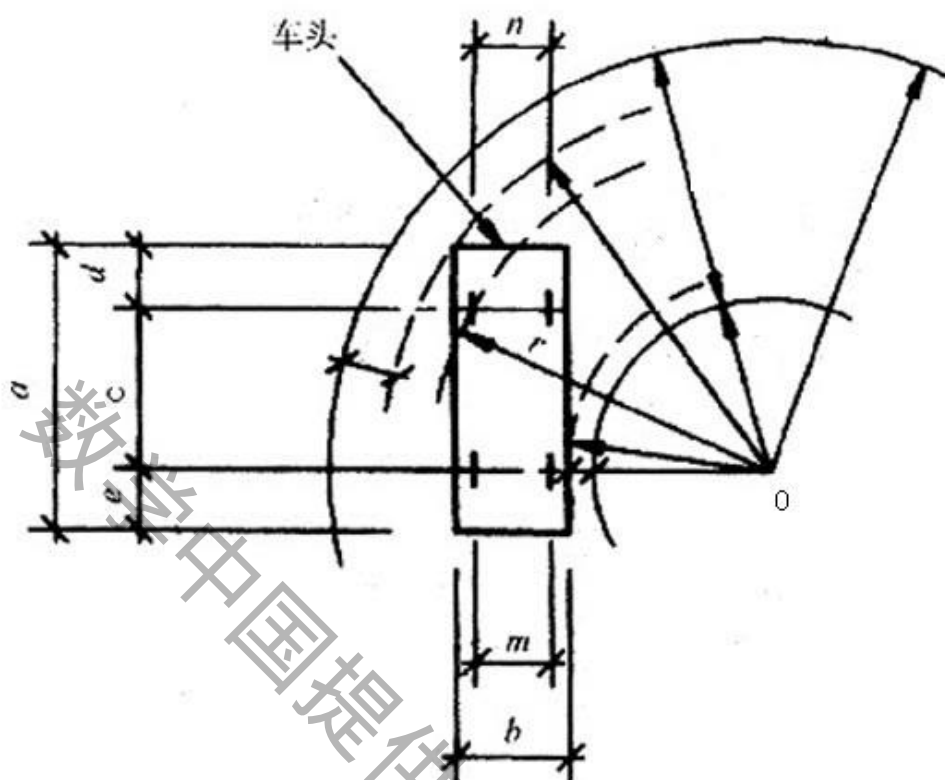
报名号 # 1504

- (4) 假设停车空位为严格矩形；
- (5) 假设车辆的平面模型为严格矩形；
- (6) 假设车辆在停车入位的过程中不熄火；
- (7) 假设车辆停靠时始终不超过除进入时触碰的另外三条边线；
- (8) 假设车辆停靠时，停靠在两边的车辆不发生移动。

4 符号系统

W	空位的宽度（单位：米）
L	空位的长度（单位：米）
S	空位的面积（单位：米 ² ）
s	车辆停靠前直线行驶时与路沿的距离（单位：米）
γ	均衡因子（无量纲）
a	车辆的长度（单位：米）
b	车辆的宽度（单位：米）
c	车辆轴距（单位：米）
r	车辆的转弯半径（单位：米）
r_{\min}	车辆行驶时的最小转弯半径（单位：米）
θ_{\min}	最小转弯角度（单位：°）
n	车辆前轮轮距（单位：米）
m	车辆后轮轮距（单位：米）

【注】车辆的其余各细节几何尺寸符号如下图所示：



图一：汽车各机械尺寸标注示意图

5 侧位停车时空位条件求解模型（问题一）

本节主要研究侧位停车时空位需满足的尺寸条件。对于侧位停车，有无数种停靠路线，当空位比较大时，很容易停车；但当空位很小时，便对驾驶水准提出了很高的要求。而理论上，只要空位比车辆尺寸稍大一点点，便能驶入，这一纪录的打破也为很多爱好者热衷。但这对于普通驾驶者，这是不现实的。为此，我们先不考虑驾驶者的能力要求，建立侧位停车的一般数学模型，得出尺寸要求。而模型的建立中，我们采取了一套特殊的解决方案：

由于行驶路线是可以多种多样的，所以这给建模带来了很大的麻烦。而当停车空位比较大时，我们可以尊重现今侧位停车的“S型法”^[注1]。即倒车进入时，先摆动方向盘，将车尾摆入空位，再反摆动方向盘，将车头摆入，这种方法出错率最低。（这只是经验方法，汽车与路沿所成的角度等数据都为数据所得，我们在问题二的解决中会摒弃之，并重新讨论一般情况）

而当空位不大时，使用上述方法会很有可能无法轻易将车侧位停入空位，为此，我们有两种解决方案：

一、改变汽车与路沿形成的夹角，再“S型”将车摆入空位，经验模型里将夹角经验化，不严谨，而改变夹角很有可能造成所需的空位小一些，所以我们单独对此进行讨论，并将此法称为“改变夹角法”；……①

二、多次倒车行车的方法，在这里我们命名为“多S法”^[注2]。通过此

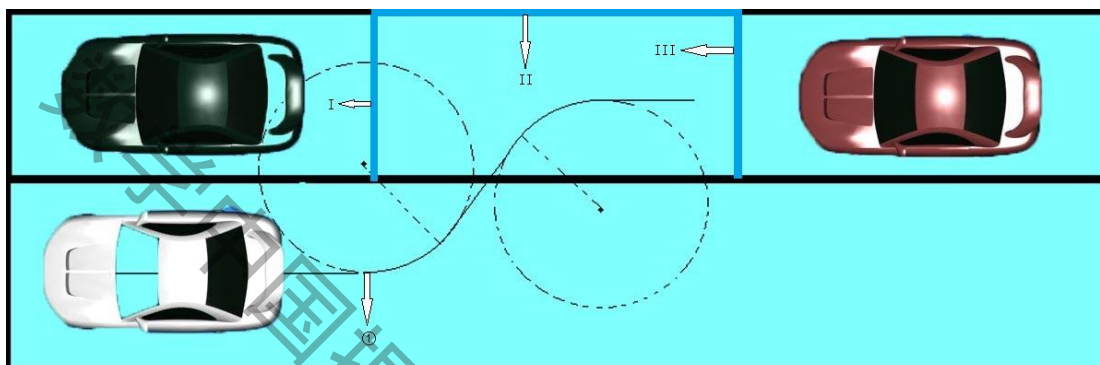
报名号 # 1504

方法，理论上只要空位比车尺寸大，就能驶入空位。……②
而在模型优化中，我们还额外考虑了驾驶者的心理和能力因素，对模型进行改进。

基于此，本部分共分如下四大节：

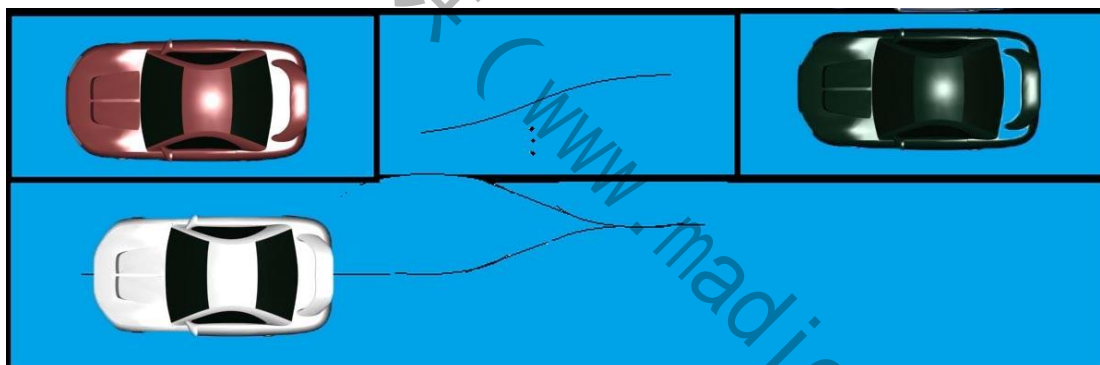
- 5.0：对于经典“S型法”的具体求解；
- 5.1：对于“改变夹角法”的单独讨论；
- 5.2：对于“多S法”的具体建模求解；
- 5.3：额外考虑驾驶者的心理和能力因素，对以上两种情况重新建模。

【注1】“S型法”的示意图如下：



图二：侧位停车“S型法”示意图(白色汽车按照细黑实线行进)

【注2】“多S法”的示意图如下：



图三：侧位停车“多S法”示意图（白色汽车按照细黑实线行进）

5.0 经典“S型法”的具体求解

经典“S型法”的具体步骤如下：

首先将汽车启动，并前行至停车位前，此时保持车位与桩杆（为方便阐述，假设空位四个角上各有一个桩杆）在一条直线上，误差越小越好，汽车靠路沿约50cm（这个数据和问题一所要求得的结论无关），然后挂入倒档，在汽车移动之后匀速打方向盘，使得汽车在最短时间内与路沿形成 45° 角。然后保持车辆直线向后移动，将车尾摆入车库之中。在车头进入桩杆所在的直线以内的范围后就可以再反方向打方向盘使得车头也进入车库之中。

而通过对经典“S型法”的具体求解，我们可以得到对驾驶员来说比较有自信的空位尺寸，此后，我们将这一尺寸作为一个分界，小于该尺寸的情况，我们就采用“改变夹角法”和“多S法”。

基于此，本大节共分如下六小节：

- 5.0.0：数据准备，列举模型所用数据及参数，为求解目标参数作准备；
- 5.0.1：模型要点，总结模型的要点，是模型思想更加明确；

报名号 # 1504

- 5.0.2：目标函数和约束条件的列写，由模型需满足的要求列写约束条件；
 5.0.3：针对模型进行求解，使用C语言编程、求解；
 5.0.4：结果分析，对所得结果进行研究，分析；
 5.0.5：模型的优缺点评价及优化。

5.0.0 数据准备

本题中所需的数据十分明确，即待停车辆的各种参数尺寸，如下图所示：
 而国内驾照考试中最常见的便是大众桑塔纳，所以我们使用其参数进行计算，再对结果进行分析。

其中，待停汽车各数据尺寸如下（单位：m）

a	b	c	d	e	m	n	r_{\min}
4.5	1.7	2.5	1	1	1.4	1.4	5

表一：大众桑塔纳各细节机械尺寸

5.0.1 模型要点

整个模型可以看做是一个小矩形从大矩形移动到中矩形的过程。按照倒车入空位的时间顺序，本模型有如下要点：

- （1）初始位置，平行于路沿，并维持一定距离，允许有误差；
- （2）开始倒车，在车尾开始经过图二示①位置时，迅速打方向盘，是汽车与路沿成 45° 夹角；
- （3）保持汽车直线向后移动，将车尾摆入空位；
- （4）在车头进入桩杆所在的直线以内范围时反方向打方向盘，使得车头也进入空位之中。

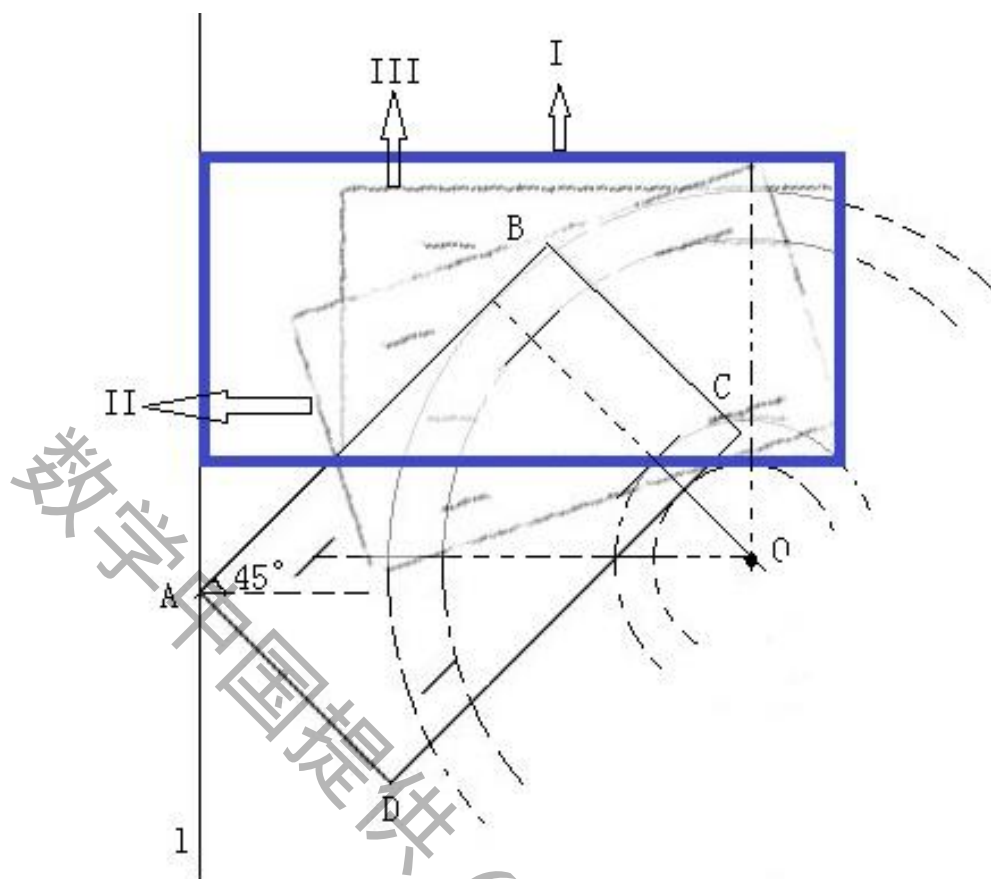
5.0.2：目标函数和约束条件的列写

目标很明确，即空位的面积：

$$S = L \cdot W$$

而约束条件有五。首先，对此模型，认为车辆长度要大于 $\sqrt{2}$ 倍的空位宽度。

（不然空位宽度过大，没有研究意义）其次，车辆在入空位过程中（而不是末位置）的任何一点不超过空位三条边，构成三个约束条件，最后一个约束条件是：车辆转动时，其转弯半径必须大于等于车辆的最小转弯半径。（为简化模型，暂时不考虑将车尾摆入时转弯半径的情况）为了更方便的列些几何尺寸关系，转弯细图（含各种辅助线）如下：



图四：“S型法”摆车头入空位转完细图

【注】I：最小空位示意矩形；

II：OB // l 时汽车所处的位置；

III：汽车停靠的末位置。

(1) 车辆长度要大于 $\sqrt{2}$ 倍的空位宽度，即：

$$a \geq W/\sin 45^\circ \dots\dots\dots ①$$

(2) 在车头摆入空位的过程中，车辆不超过空位的 I 边，如图所示。而由基本几何知识，转弯圆的圆点 O 只能处在如图所示所示，所以最容易碰到 I 边的 A 点在旋转过程中很显然不会碰到 I 边，所以这一约束条件没有约束作用；

(3) 在车头摆入空位的过程中，车辆不超过空位的 II 边，如图所示。摆车头入空位的过程中，B 点会超过末位置时车辆的上水平线，所以有：

$$W \geq \sqrt{\left(c + \frac{b-m}{2}\right)^2 + e^2} - c + b \dots\dots\dots ②$$

(4) 在车头摆入空位的过程中，车辆不超过空位的 III 边，如图所示。这对空位长度 L 提出了要求：

$$L \geq \sqrt{2}\left(c + \frac{b-m}{2}\right) + e \dots\dots\dots ③$$

(5) 摆车头入空位时，转弯半径必须大于等于车辆的最小转弯半径：

$$r = \sqrt{2}c \geq r_{\min} \dots\dots\dots$$

…④①式、②式、③式、④式构成本模型的约束条件。

5.0.3 模型求解

使用 C 语言，通过上述约束条件对目标函数求解得，空位尺寸 L 和 W （单位 m）需满足：

空位长 L	空位宽 W
≥ 4.747666	$2.032402 \sim 3.181980$

表二：“S 型法”模型解

5.0.4 结果分析

对 L 和 W 两组数据分析，发现，空位长 L 和空位宽 W 都只比车辆本身的尺寸稍大一点点，这就表明传统的“S 型法”还是相当好的，经验总结也是解决各种问题的一种好方法。

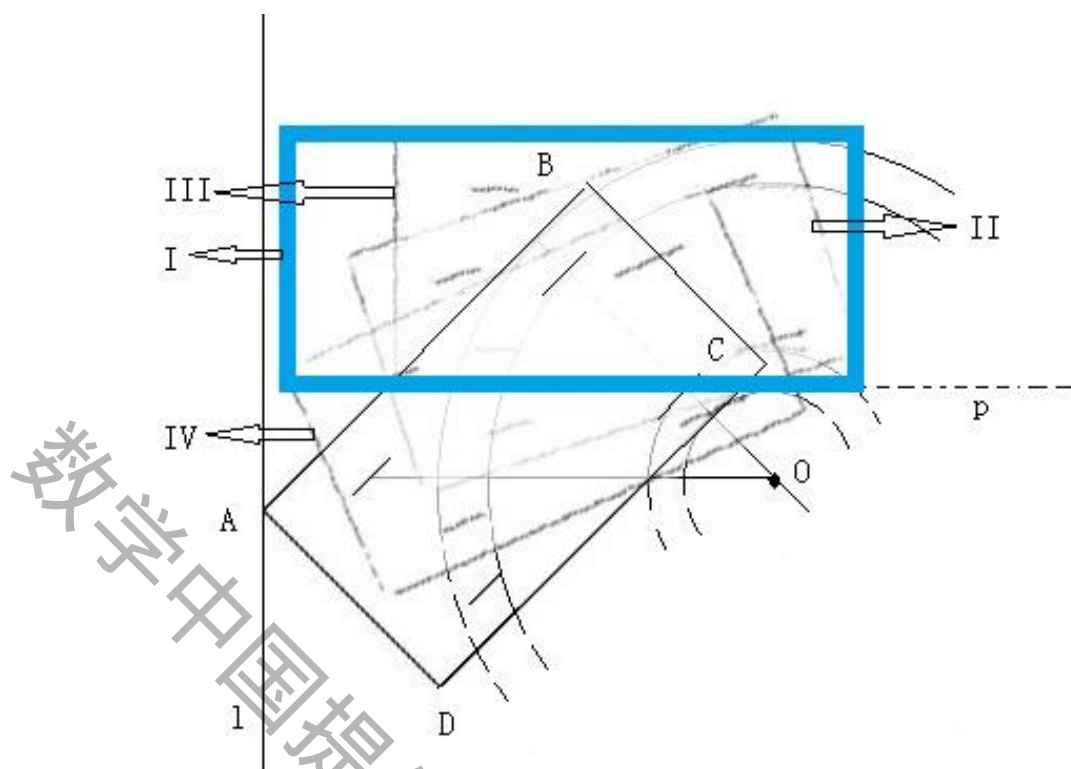
而对于下面的“增大夹角法”和“多 S 法”，便是建立在空位长 $L < 4.747666$ ，空位宽 $W < 2.032402$ 的基础上进行了。（ $W > 3.181980$ 时认为没有建模讨论意义）

5.0.5 模型的优缺点评价及优化

“S 型法”是现今广泛应用于侧位停车的一种方法，也是驾照考试中的一项基本要求。模型中的四个要点都是经验总结，经过我们的建模验证，表明这一套经验方法是相当可靠的，这四个要点是我们模型的优点，把汽车的运动轨迹清晰化，方便我们列式求解。同时，这也是我们模型的缺点，因为这样我们便失去了很多种可行的运动轨迹，而且，上述讨论中并没有对转弯半径多做说明。为此，为了优化模型，下面我们分别对“改变夹角法”和“多 S 法”进行建模求解。

5.1 “改变夹角法”的单独讨论

“改变夹角法”最后将车头倒入空位的过程图如下图所示。我们发现，在转动过程中，夹角还是会慢慢减小，所以，“改变夹角法”的“夹角”是个不可确定的值。而此模型和“S 型法”的区别就是，略去了“S”路线中间的直线衔接部分，使得所需空位的尺寸减小。但夹角过大，车转弯弧度过大，对我们的模型假设带来了很大的威胁，模型假设不可靠，整个模型便没有意义，为此，夹角也不能过大。而当夹角取作当 A 刚好进入空位时的情况，即为此模型下的最小夹角，如下图 IV 位置所示。为了考虑全面，我们对这一模型就行了求解，最后再和其他模型一起讨论、改进。



图五：“改变夹角法”几何尺寸关系示意图

【注】I：最小空位示意矩形；

II：OB // l 时汽车所处的位置；

III：汽车停靠的末位置；

IV：OA // p 时汽车所处的位置。

基于此，本大节共分如下四小节：

5.1.0：目标函数和约束条件的列写，由模型需满足的要求列写约束条件；

5.1.1：针对模型进行求解，使用C语言编程、求解；

5.1.2：结果分析，对所得结果进行研究，分析；

5.1.3：模型的优缺点评价及优化。

5.1.0 目标函数和约束条件的列写

目标函数仍为空位所占的面积：

$$S = L \cdot W$$

最小夹角（IV 位置时）满足：

$$\theta_{\min} = \arcsin \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 - c^2} - m - \frac{b-m}{2}}{(\sqrt{r^2 - c^2} + \frac{b-m}{2})^2 + (a-e)^2}}$$

而约束条件有三：

(1) 在车头摆入空位的过程中，车辆不超过空位的 I 边：

$$L \geq \sqrt{(\sqrt{r^2 - c^2} + \frac{b-m}{2})^2 + (a-e)^2 - (\sqrt{r^2 - c^2} - m - \frac{b-m}{2})^2}$$

报名号 # 1504

.....①

(2) 在车头摆入空位的过程中, 车辆不超过空位的 II 边, 如图所示。摆车头入空位的过程中, D 点会超过末位置时车辆的上水平线, 所以有:

$$W \geq \sqrt{(\sqrt{r^2 - c^2} + \frac{b-m}{2})^2 + e^2} - \sqrt{r^2 - c^2} + b \quad \text{.....②}$$

(3) 摆车头入空位时, 转弯半径必须大于等于车辆的最小转弯半径:

$$r \geq r_{\min} \quad \text{.....③}$$

①式、②式、③式构成本模型的约束条件, 此模型为非线性规划。

5.1.1 模型求解

使用 C 语言, 通过上述约束条件对目标函数求解得, 空位尺寸 L 和 W 以及转弯半径 r (单位 m) 需满足:

空位长 L	≥ 4.959076
空位宽 W	≥ 1.960247
转弯半径 r	5
最小转弯角度 θ_{\min}	4.934376°

表三: “改变夹角法”模型解

5.1.2 结果分析

将这一组数据和“S 型法”所得数据进行对比, 发现此时空位长度要比“S 型法”还要大些, 但空位宽要小一些, 转弯半径取最小转弯半径 r_{\min} , 而最小转弯角度为 4.934376° , 远小于 45° 。但是如何倒车成 IV 的位置却很很难把握的, 而且空位尺寸和“S 型法”大体一致。

5.1.3 模型的优缺点评价及优化

上述结果分析表明, “改变夹角法”对比于“S 型法”并没有优势, 而且对驾驶员的技术要求更高了, 这是模型的缺点。而且, 根本不可能直接达到 θ 取最小值的 IV 位置, 汽车转过太大角度对轮胎也是不利的。但是, 模型省略了前面繁琐的倒车头行驶过程, 大大简化了模型, 还是为模型求解带了的便利, 这是行之有效的。

至于模型缺点的优化措施, 我们可以将模型缺点的核心 θ 值放入目标函数内, 并冠以均衡因子 γ , 重新求解, 可以得到更加合理的方案:

目标函数, 均衡空位面积 $S' = L \cdot W \cdot \theta^\gamma$;

约束条件仍不变;

C 语言编程求解得 (暂取 $\gamma=1$):

空位长 L	≥ 4.976125
---------	-----------------

报名号 # 1504

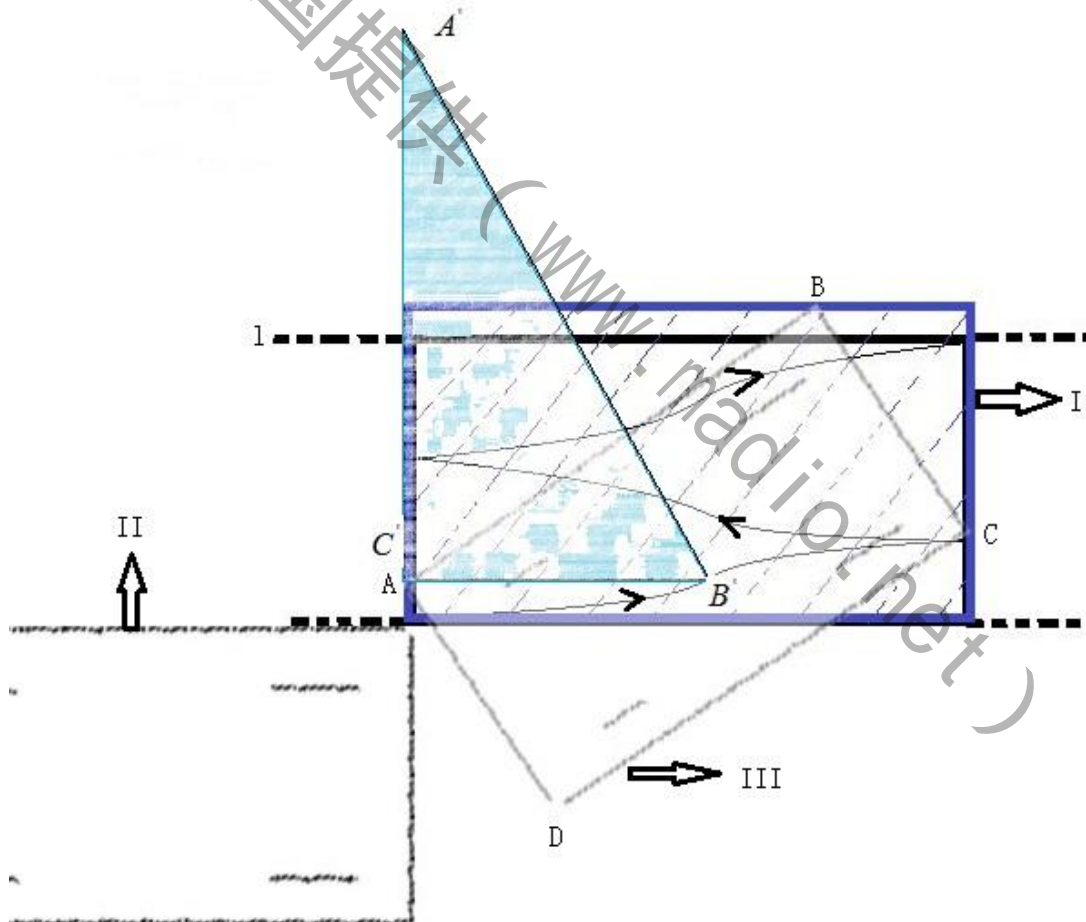
空位宽 W	≥ 1.950235
转弯半径 r	5
最小转弯角度 θ_{\min}	5.65189°

表四：“改变夹角法”优化模型解

这组数据虽然和优化前的变化不大，但由于考虑的因素更加合理，所以这一组数据更为可信。

5.2 “多S法”的具体建模求解

当空位空间很小时，我们便无法使用普通“S型法”和“改变夹角法”一次“S”就完成侧位停车，为此，我们选用“多S法”。“多S法”的基本思想是：走过的路线是 n 个“S”，每一段小“S”都可以使得车辆在纵向上进入空位一点点，所以理论上只要空位长度、宽度稍大于车辆的长度、宽度，车辆便能驶入空位。显然，空位的尺寸越小，汽车转弯时需要的转弯半径就越大，为了研究方便，我们不考虑I位置之前的汽车行进轨迹，并假设汽车严格按照下图轨迹运动。



图六：“多S法”模型车辆线路示意图

【注】(1) I位置为理想空位位置，但为了简化模型起见，我们只将上边划到下面的黑线l上；

(2) II位置为模型中汽车转弯起始位置；

报名号 # 1504

(3) III位置为B点超越I线最远的位置；

(4) 约束条件(1) 建立勾股定理所使用的直角三角形为直角 $\triangle A'B'C'$ 。

基于此，本大节共分如下四小节：

5.2.0：目标函数和约束条件的列写，由模型需满足的要求列写约束条件；

5.2.1：针对模型进行求解，使用C语言编程、求解；

5.2.2：结果分析，对所得结果进行研究，分析；

5.2.3：模型的优缺点评价及优化。

5.2.0 目标函数和约束条件的列写

目标函数为空位所占的面积：

$$S = L \cdot W$$

约束条件有四：

(1) 尺寸间的基本勾股关系，见上图直角 $\triangle A'B'C'$ （认为 B' 点严格为“S”型的中点）

$$\left(r - \frac{W}{2n}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = r^2 \dots\dots\dots ①$$

【注】 n 为“S”型轨迹的条数，实际中， n 不可能过大，为此，我们限定 $n=1$ 、2、3、4来求解。

(2) 转弯半径 r 大于等于最小转弯半径 r_{\min}

$$r \geq r_{\min} \dots\dots\dots ②$$

(3) 空位的长度大于车辆的长度

$$L > a \dots\dots\dots ③$$

(4) 空位的宽度大于车辆的宽度

$$W > b \dots\dots\dots ④$$

①式、②式、③式、④式构成本模型的约束条件，此模型为非线性规划。

5.2.1 模型求解

使用C语言，通过上述约束条件对目标函数求解得，空位尺寸 S （单位 m^2 ）、

L 、 W 和转弯半径 r （单位 m ）需满足：

尺寸关系 n 取值	空位长度 L	空位宽度 W	空位面积 S	转弯半径 r
$n = 1$	5.577634	1.700000	9.481978	5.000000
$n = 2$	4.500000	1.700000	7.650000	6.168382
$n = 3$	4.500000	1.700000	7.650000	9.075490

报名号 # 1504

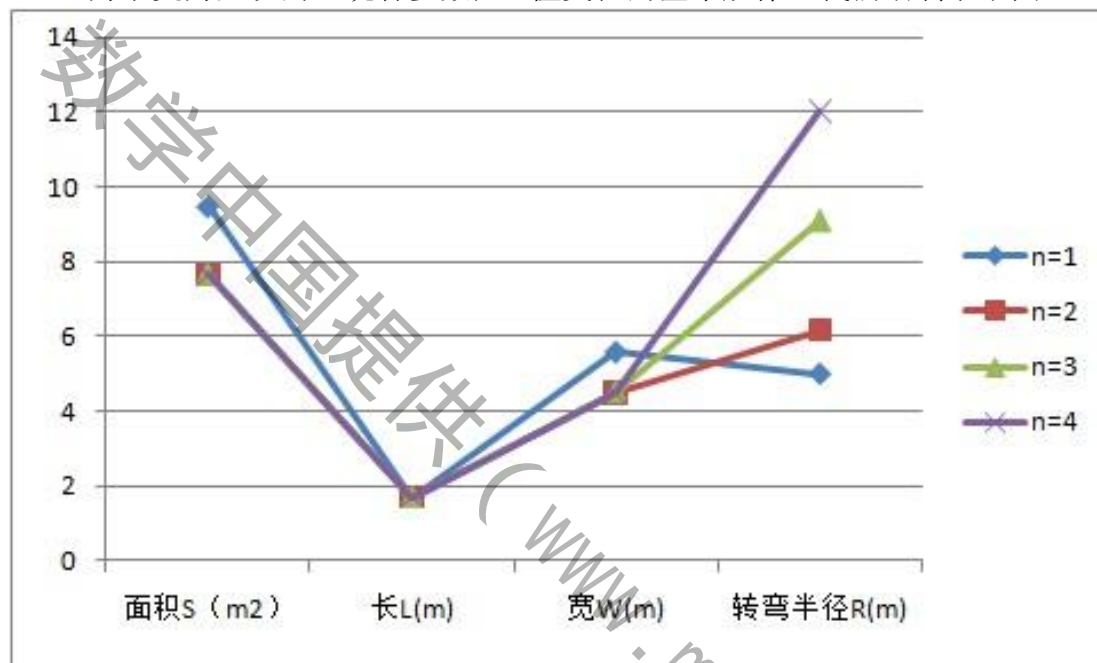
$n = 4$	4.500000	1.700000	7.650000	12.018015
---------	----------	----------	----------	-----------

表五：“多 S 法”模型解

5.2.2 结果分析

对比以上 $n=1,2,3,4$ 时的数据发现，除 $n=1$ 外，其余三组数据的空位宽度 W 和空位长度 L 值为车辆的宽和长值，这是由于模型中，没有考虑到最后的位置时，B 点会跑出区域的情况，但也间接说明了，使用“多 S 法”可以使得侧位停车所需的空位尺寸更小。

为了更为直观的显现各参数随 n 值变化的基本规律，我们绘制了下图：



图七：“多 S 法”模型解折线图

由上图，纵向比较，我们很容易发现 n 值越大，即侧位停车时迂回的次数越多，所需的空位尺寸就越小；而 n 值对转弯半径 r 的影响最大，而汽车转弯时转弯半径不能过小，更不能接近最小转弯半径 r_{\min} ，而对于 $r_{\min} = 5m$ 的汽车而言， $6 \sim 8m$ 的转弯半径是相当合理的（ $n=2$ ），为此，我们认为 $n=2$ 时的解是最佳解。

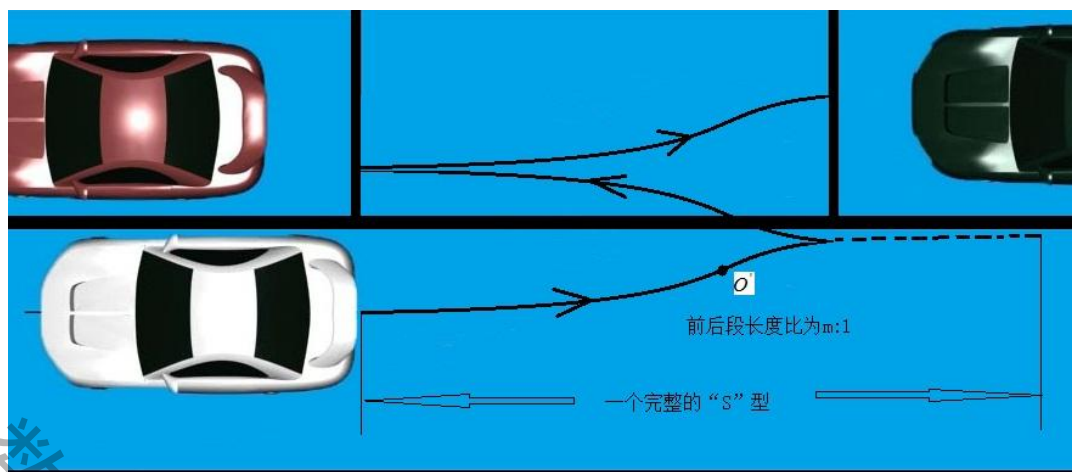
5.2.3 模型的优缺点评价及优化

(1) 模型的优点

本模型为了研究“多 S 法”迂回停车的情况，迂回停车是现实生活中当停车空位过小时，司机常会使用的方法，如果严格的按照一般情况去研究运动轨迹，模型会变得相当复杂，而我们将运动轨迹简化为图所示的情况，大大的简化了模型，简化了目标函数和约束条件的列写，而且根据对结果的分析，这样的方法又有相当的准确度，所以这样建模是成功的。

(2) 模型的缺点

我们在具体列写约束条件时，直接认为每一条“S”型都是完整的，但是实际操作中，如若停车空位长度不太可观时，“S”型轨迹可能无法完成就戛然而止，正如下图所示的情形。这样，以上的模型就显得不够严谨。



图八：“不规则多 S 法”车辆线路示意图

(3) 模型的改进

实际停车过程中，前半段与后半段的（以 O' 为分界）的长度之比可能达不到 1:1，所以上述的模型可能不够准确，为此，我们讨论一般情况，即长度比为 $m:1$ 的情况。

目标函数和约束条件基本不变，只需对原约束条件（1）略加修改即可：

尺寸间的基本勾股关系修改为：

$$\left(r - \frac{W}{2n}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+1}L\right)^2 = r^2$$

在程序中多加一个循环的嵌套，我们没有必要研究 m 的每一个连续值时的情况，为此 m 取为以 0.1 为步长，从 0 增加至 2。再次求解得：

m	面积 $S (m^2)$	宽 $W(m)$	长 $L(m)$	转弯半径 $r(m)$	“S”型轨迹条数
0.1	89.968348	19.992966	4.5	5	$n=1$
0.2	56.891866	1.7	33.465803	5	
0.3	37.927911	1.7	22.310536	5	
0.4	28.445933	1.7	16.732902	5	
0.5	22.756746	1.7	13.386321	5	
0.6	18.963955	1.7	11.155268	5	
0.7	16.254819	1.7	9.561658	5	
0.8	14.222966	1.7	8.366451	5	
0.9	12.642637	1.7	7.436845	5	
1	11.378373	1.7	6.693161	5	
1.1	10.343976	1.7	6.084692	5	
1.2	9.481978	1.7	5.577634	5	
1.3	8.752595	1.7	5.148585	5	
1.4	8.127409	1.7	4.780829	5	
1.5	7.65	1.7	4.5	5.078033	
1.6	7.65	1.7	4.5	5.719118	

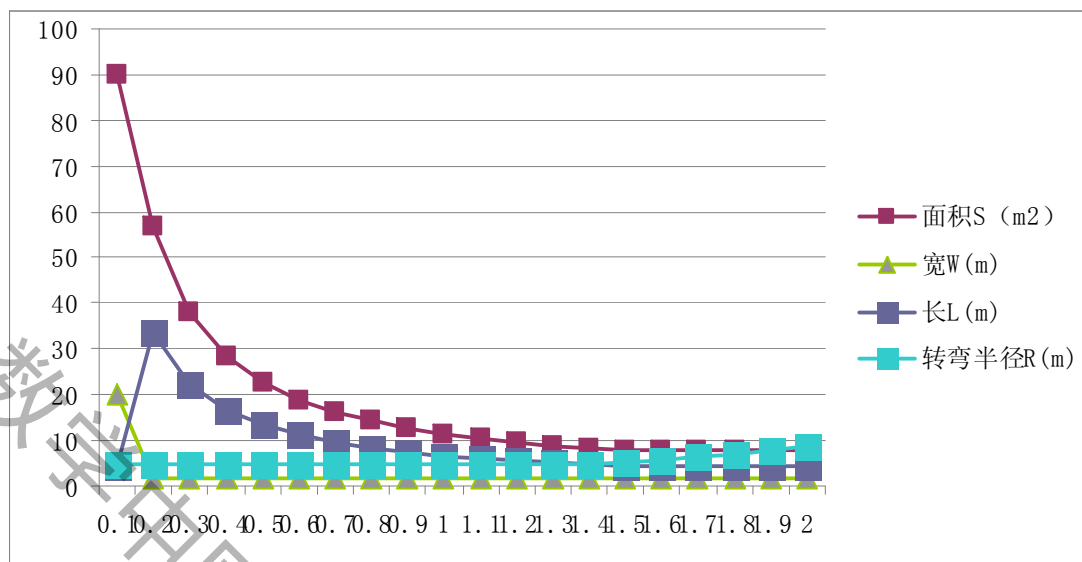
报名号 # 1504

1.7	7.65	1.7	4.5	6.401563	$n = 2$
1.8	7.65	1.7	4.5	7.125368	
1.9	7.65	1.7	4.5	7.890533	
2	7.65	1.7	4.5	8.697059	
0.1	82.304583	1.7	48.414461	5	
0.2	41.152292	1.7	24.20723	5	
0.3	27.434861	1.7	16.138154	5	
0.4	20.576146	1.7	12.103615	5	
0.5	16.460917	1.7	9.682892	5	
0.6	13.717431	1.7	8.069077	5	
0.7	11.757798	1.7	6.916352	5	
0.8	10.288073	1.7	6.051808	5	
0.9	9.144954	1.7	5.379385	5	
1	8.230458	1.7	4.841446	5	
1.1	7.65	1.7	4.5	5.217096	
1.2	7.65	1.7	4.5	6.168382	
1.3	7.65	1.7	4.5	7.20239	
1.4	7.65	1.7	4.5	8.319118	
1.5	7.65	1.7	4.5	9.518566	
1.6	7.65	1.7	4.5	10.800735	
1.7	7.65	1.7	4.5	12.165625	
1.8	7.65	1.7	4.5	13.613235	
1.9	7.65	1.7	4.5	15.143566	
2	7.65	1.7	4.5	16.756618	
0.1	67.696724	1.7	39.821602	5	$n = 3$
0.2	33.848362	1.7	19.910801	5	
0.3	22.565575	1.7	13.273867	5	
0.4	16.924181	1.7	9.955401	5	
0.5	13.539345	1.7	7.96432	5	
0.6	11.282787	1.7	6.636934	5	
0.7	9.670961	1.7	5.6888	5	
0.8	8.46209	1.7	4.9777	5	
0.9	7.65	1.7	4.5	5.166942	
1	7.65	1.7	4.5	6.345711	
1.1	7.65	1.7	4.5	7.64856	
1.2	7.65	1.7	4.5	9.07549	
1.3	7.65	1.7	4.5	10.626501	
1.4	7.65	1.7	4.5	12.301593	
1.5	7.65	1.7	4.5	14.100766	
1.6	7.65	1.7	4.5	16.02402	
1.7	7.65	1.7	4.5	18.071354	
1.8	7.65	1.7	4.5	20.24277	
1.9	7.65	1.7	4.5	22.538266	
2	7.65	1.7	4.5	24.957843	

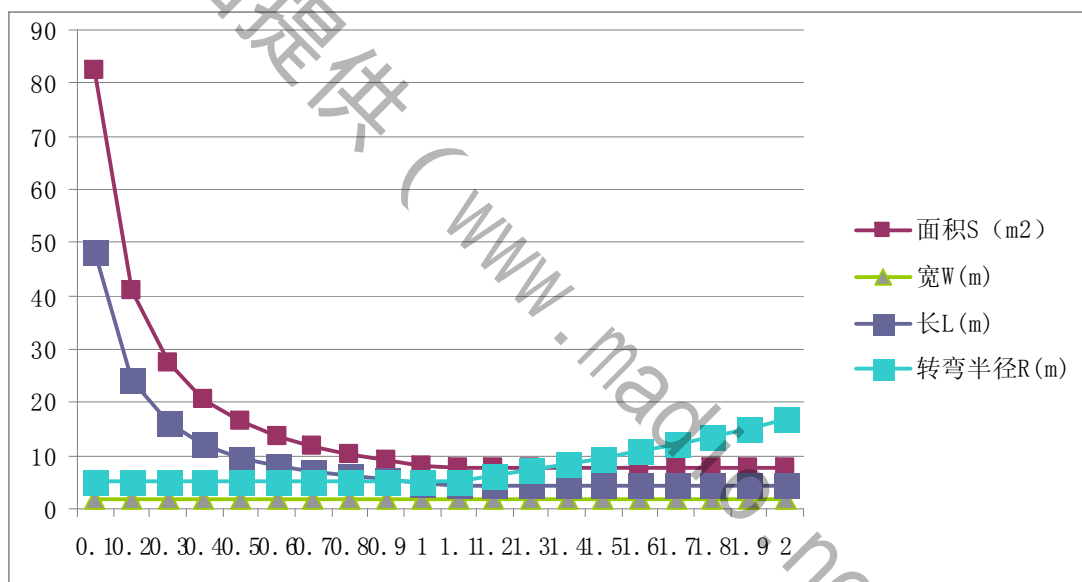
报名号 # 1504

表六：“多S法”优化模型解

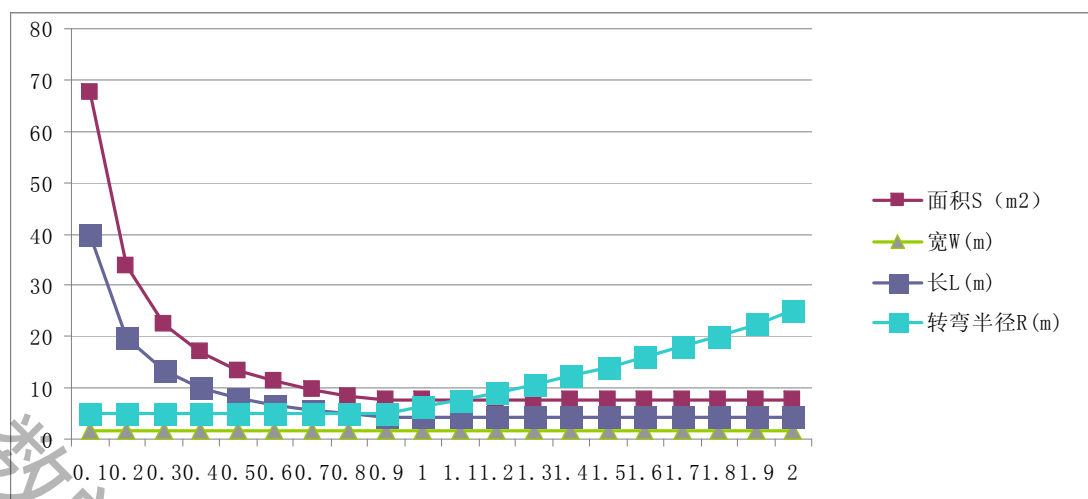
以上数据相当庞大，不易分析，为此我们再次做出其现状图如下：



图九：n=1 时线状图



图十：n=2 时线状图



图十一：n=3 时线状图

观察这三幅线状图，发现三幅图的四条曲线都大致为迅速下降最后收敛。 $m = 0.5$ 之后，曲线趋于平缓。 $m \leq 0.5$ 时，各尺寸要求过大，予以摒弃；而 $m = 1.0 \sim 1.2$ 时，三幅图四组曲线都降为最小值，这也说明直接取 $m = 1$ 的模型也是相当可信的。

再纵向比较三幅图，我们发现 n 大了，对空位尺寸的影响不大，但是却对转弯半径产生了影响，而转弯半径大了，对轮胎的保养是有好处的（经济性），而且也增大了安全性，但是 n 过大，迂回的次数过多，这也是难以为司机所接受的。所以，综合考虑两方面因素，我们认为 $n = 2$ 时，是同时具备安全性，经济性，和可接受性的最佳情况。

至此，问题一基本讨论完毕。

5. 3 额外考虑驾驶者的心理和能力因素，对以上两种情况重新建模

上述三种模型是在只考虑几何关系下的理论研究，完全没有考虑驾驶员能否接受的问题，而实际中，如若我们的软件只判断能否进入，而忽略了难易程度，这样我们的模型和软件都是不合理的，下面我们提出一种创想。

通过对一批来自各行各业的驾驶员进行侧位停车测试，并分别记录他们对不同尺寸空位的敏感情况，绘制出驾驶员信心值和尺寸大小的关系图。再对所得曲线拟合，将驾驶员的信心值和尺寸大小为两个目标作多目标规划，并将这一方法加至上述三种模型中，重新求解，得到一个既能节约停车资源，又能让驾驶员满意的空位尺寸值。

6 侧位停车的入位位置和入位角度求解模型（问题二）

问题一是研究了侧位停车的空位尺寸问题，我们在建模时虽然采用了三种大为不同的方法，但是研究重点都是最后摆车头入位的过程，而问题二却要求研究对前段行驶过程，也就是摆车尾入位的过程。

问题一的研究已经系统化，而本身前端行驶过程本来就建立在空位能够停入的前提之下，而后段摆入过程清晰后，再明确前端驶入方案，就会变得很简单。为此，我们延续问题一的三种模型，进行讨论。需要特别说明的是，“改变夹角法”可以看做是“S型法”的特殊情况，这两种方法都是只有一条“S”型轨迹，而且，我们在本问题的建模中，会选取问题一种的一般解来建模，所以这已经包含了“改变夹角法”的情况，为此，我们无需在讨论“改变夹角法”的前端行驶

轨迹模型。

“S 型法”是当空位比较大的时候使用的方法，此时所需的汽车与路沿的间隔也较大，具体行驶轨迹的允许偏差也较大，而多“S 法”则恰恰相反。所以，我们先对“S 型法”的前端行驶轨迹作出研究，再以此为分界，研究“多 S 法”的前段行驶轨迹，这样便可大大的简化模型。而在结果中，我们再取大众桑塔纳的数据，并结合问题一求得数据为例，画出此时的最佳行进线路和允许的偏差值。

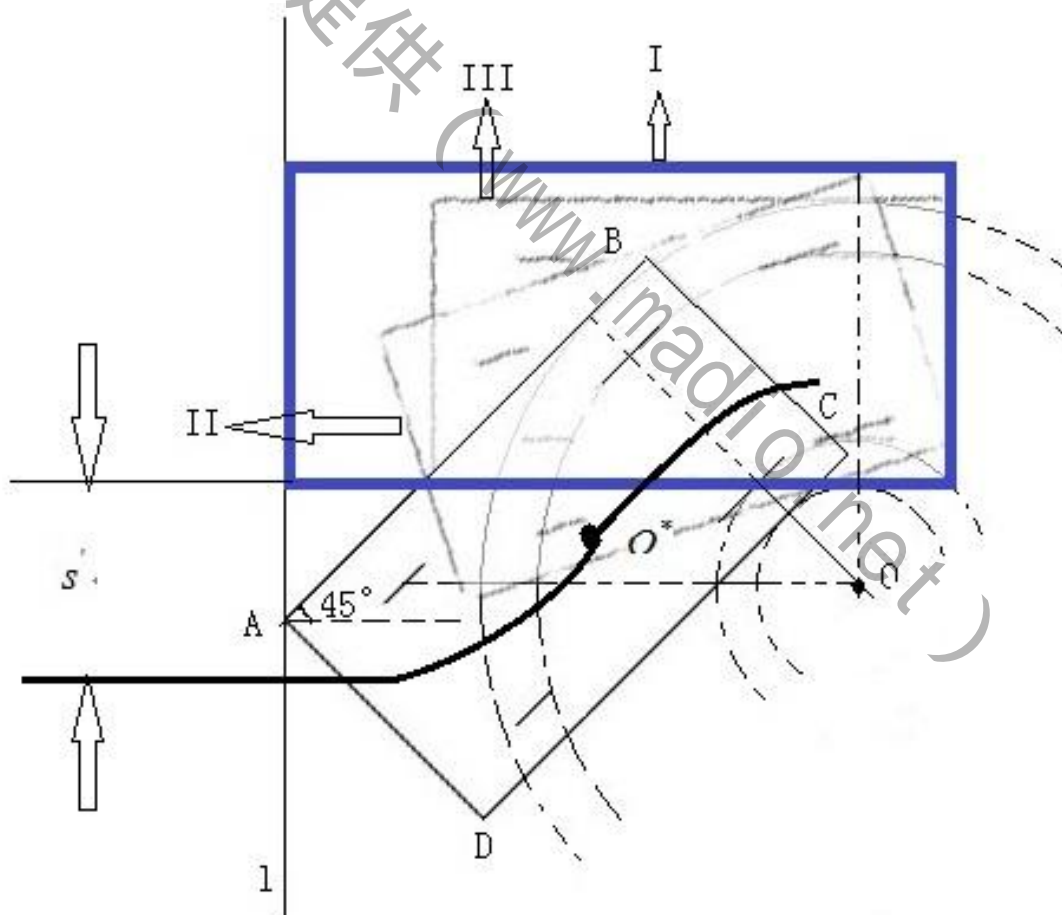
基于此，本部分共分如下两大节：

6.0：经典“S型法”的前段行驶轨迹求解模型；

6.1：“多S法”的前段行驶轨迹求解模型。

6.0 经典“S 型法”的前段行驶轨迹求解模型

经典“S 型法”的行进轨迹重点是最后一段汽车车头摆入的过程，而前段如何摆入的过程，就是“S”型轨迹的前半段，为了方便的说明汽车驶入位置，我们以停车空位左下角的点为坐标原点。当起初，汽车距路沿距离过大时，须首先将汽车靠近路沿到一定距离，如下图所示，再使用“S 型法”停车入位。而真正做“S”型运动的是汽车的机械中心（图示 O^* ），为此，我们研究机械中心的运动轨迹。



图十二：“S型法”汽车完整线路示意图

基于此，略去数据准备等重复的工作，本大节共分如下三小节：

6.0.0目标函数和约束条件的列写，由模型需满足的要求列写约束条件；

报名号 # 1504

6.0.1 针对模型编程进行求解，并对结果进行分析；

6.0.2 模型的优缺点评价及优化。

6.0.0 目标函数和约束条件的列写

由于对于问题一的求解，我们已经得到了可行的运动轨迹，但是并没有对入空位前直线行驶时汽车和路沿之间的距离 s 作出约束，所以，在这里我们建模求解之。

由问题一的“S型法”模型，已经得到如下的关系：

$$a \geq W/\sin 45^\circ \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$W \geq \sqrt{\left(c + \frac{b-m}{2}\right)^2 + e^2} - c + b \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$L \geq \sqrt{2}\left(c + \frac{b-m}{2}\right) + e \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$r = \sqrt{2}c \geq r_{\min} \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①式、②式、③式、④式表示 r 由 W 和 L 惟一确定。

由基本几何关系，当空位尺寸一定，行驶路线确定时， s 应满足

$$r - \frac{b-n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(r - \frac{b-n}{2} - \frac{a}{2} + d\right) \leq s + \frac{b}{2} \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$$

由上式，很显然有 $s \propto r$ 。

所以 s 由 W 和 L 惟一确定，而在问题一中已经得出 $L \geq 4.747666 \cdots \cdots \cdots \textcircled{6}$

而 W 应处于 $2.032402 \sim 3.181980$ 之间，即

$$2.032402 \leq W \leq 3.181980 \cdots \cdots \cdots \textcircled{7}$$

①式、②式、③式、④式、⑤式、⑥式、⑦式构成本模型的约束条件。目标对象即 s 值的取值范围。

6.0.1 模型求解和结果分析

由①式、②式、③式、④式、⑤式、⑥式、⑦式的约束关系，使用 C 语言求解得：

$$s_{\max} = 0.586954 \text{ m}, \quad s_{\min} = 0.551689 \text{ m}。$$

而为了在示意图中表征允许的路线偏差，我们引入了另一参量 s' ，见图标

识。很显然， $s' = s + \frac{b}{2}$ ，可得 $1.436954\text{m} \leq s' \leq 1.401689\text{m}$ ，由 s' 的取值范围（也就是侧位停车所允许的误差范围），我们可以画出可行行驶路线和误差图，如下图所示。

$$\left(r - \frac{W}{2n}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = r^2 \dots\dots\dots ①$$

$$r \geq r_{\min} \dots\dots\dots ②$$

$$L > a \dots\dots\dots ③$$

$$W > b \dots\dots\dots ④$$

$$r - \frac{b-n}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(r - \frac{b-n}{2} - \frac{a}{2} + d\right) \leq s + \frac{b}{2} \dots\dots\dots ⑤$$

以上五个式子，前面已作出说明，在此不再赘述。

另外一个最重要的约束条件就是对于转弯半径 r ，在问题一的“多S法”的求解中，我们得到了很多组 r 值，对于不同的 m 值和 n 值， r 值都不同。为了讨论严谨起见，我们仍然对所有可能的取值作出讨论，最后列表并作图分析。

所以第六个约束条件就是问题一“多S法”求得的 r 的解。

6.1.1 模型求解和结果分析

将问题一“多S法”求得的 r 的解一一代入，得到一系列的 s 和 s' 值，记录如下：

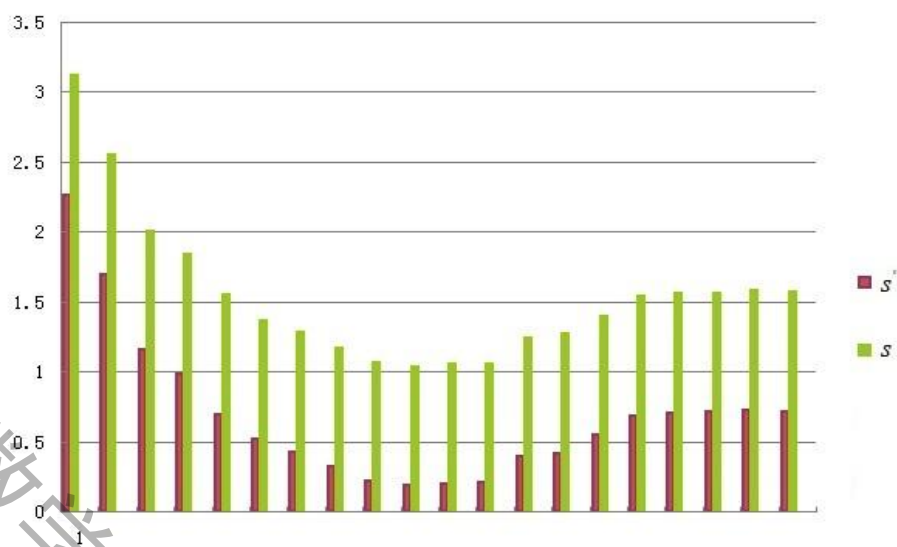
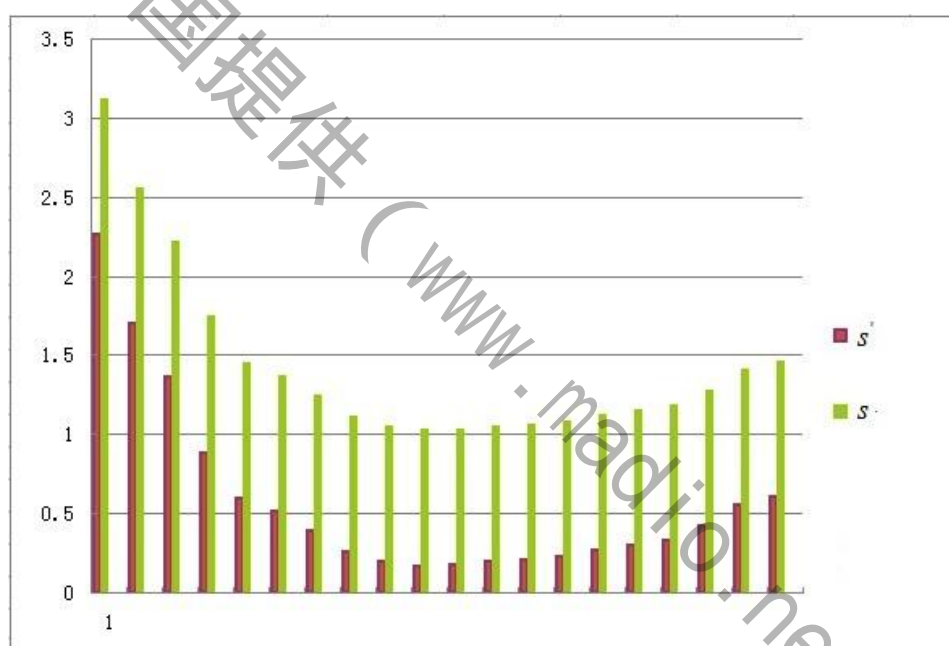
m	转弯半径 $r(m)$	间隔 s (m)	$s' = s + \frac{b}{2}$	“S”型轨迹条 数
0.1	5	2.264159	3.114159	$n = 1$
0.2	5	1.697581	2.547581	
0.3	5	1.156955	2.006955	
0.4	5	0.984482	1.834482	
0.5	5	0.696525	1.546525	
0.6	5	0.512654	1.362654	
0.7	5	0.425615	1.275615	
0.8	5	0.321545	1.171545	
0.9	5	0.215662	1.065662	
1	5	0.185499	1.035499	
1.1	5	0.198951	1.048951	
1.2	5	0.201565	1.051565	
1.3	5	0.389565	1.239565	
1.4	5	0.415874	1.265874	
1.5	5.078033	0.548895	1.398895	$n = 2$
1.6	5.719118	0.685777	1.535777	
1.7	6.401563	0.705522	1.555522	
1.8	7.125368	0.712511	1.562511	
1.9	7.890533	0.726551	1.576551	
2	8.697059	0.715688	1.565688	
0.1	5	2.264159	3.114159	

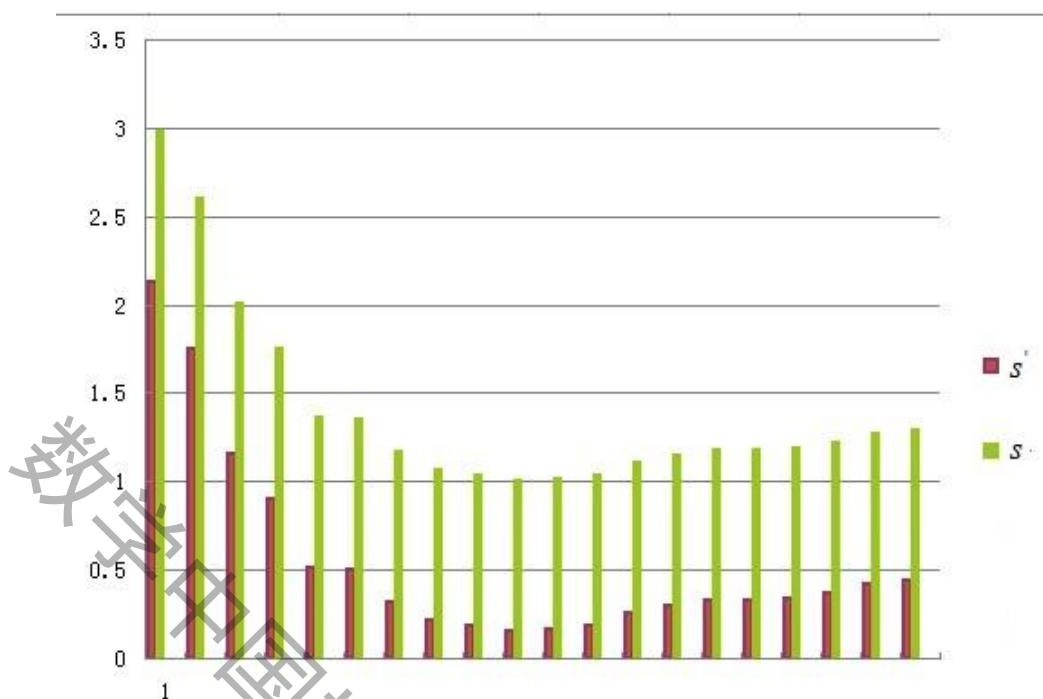
报名号 # 1504

0.2	5	1.697481	2.547481
0.3	5	1.356965	2.206965
0.4	5	0.884782	1.734782
0.5	5	0.596225	1.446225
0.6	5	0.512454	1.362454
0.7	5	0.385245	1.235245
0.8	5	0.256955	1.106955
0.9	5	0.198541	1.048541
1	5	0.168441	1.018441
1.1	5.217096	0.169585	1.019585
1.2	6.168382	0.189654	1.039654
1.3	7.20239	0.203695	1.053695
1.4	8.319118	0.225952	1.075952
1.5	9.518566	0.269562	1.119562
1.6	10.800735	0.298544	1.148544
1.7	12.165625	0.325552	1.175552
1.8	13.613235	0.415854	1.265854
1.9	15.143566	0.554552	1.404552
2	16.756618	0.599565	1.449565
0.1	5	2.124645	2.974645
0.2	5	1.745454	2.595454
0.3	5	1.156456	2.006456
0.4	5	0.898654	1.748654
0.5	5	0.512155	1.362155
0.6	5	0.503154	1.353154
0.7	5	0.312441	1.162441
0.8	5	0.212854	1.062854
0.9	5.166942	0.187451	1.037451
1	6.345711	0.154513	1.004513
1.1	7.64856	0.163545	1.013545
1.2	9.07549	0.182135	1.032135
1.3	10.626501	0.255535	1.105535
1.4	12.301593	0.294552	1.144552
1.5	14.100766	0.325656	1.175656
1.6	16.02402	0.329865	1.179865
1.7	18.071354	0.334656	1.184656
1.8	20.24277	0.368956	1.218956
1.9	22.538266	0.421154	1.271154
2	24.957843	0.436544	1.286544

表七：“多S法”完整线路模型解

以上数值过多，为了直观的看出规律，我们分别绘制了 $n=1$ ， $n=2$ ， $n=3$ 时的条状图。如下：

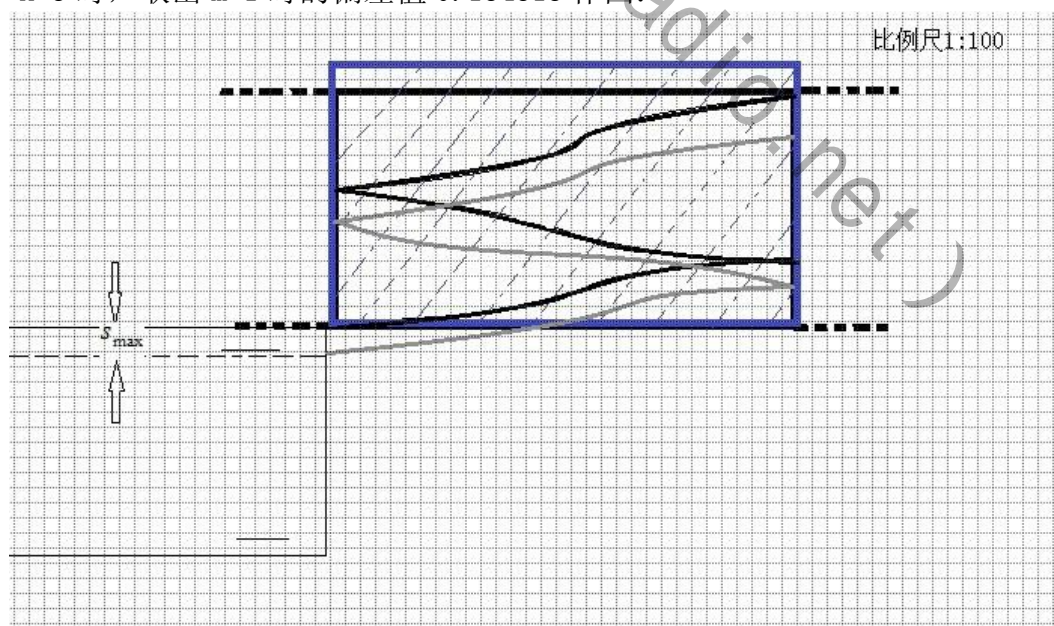
图十四：n=1 时 s 及 s' 随 m 变化关系图图十五：n=2 时 s 及 s' 随 m 变化关系图

图十六：n=3 时 s 及 s' 随 m 变化关系图

三幅图有个共同点，当 m 值增大时，对应 s 值先急剧减小再缓慢增加，接近收敛，规律与空位尺寸随 m 值变化规律。这是合理的，因为空位比较小时，显然允许的偏差范围就比较小，这也间接说明了本模型的合理性。

再纵向比较，发现 n 值越大对应的 s 稳定值微微减小，下面，我们将三种情况的行驶线路和偏差图绘制如下（ $n=1$ 时和“S”型法一致，在这里省略，我们绘出最繁琐的 $n=3$ 时的路线图）：

$n=3$ 时，取出 $m=1$ 时的偏差值 0.154513 作图：



图十七：n=3 时“多 S 法”车辆路线及偏差范围图

6.1.2 模型的优缺点评价及优化

(1) 模型优点

问题一“多S法”中对于不规则“S”的讨论是一大改进，而在本模型中，继续沿用这一方法，并同样将模型结果用图标表示，更为直观。

(2) 模型缺点

模型缺点仍然表现在最终路线图的制作上，在第二阶段的建模中会予以重视。

【参考文献】

- [1] 陈婷 一种新型计算机驾驶员桩考系统的设计[期刊论文]-科技信息 2009(10)
- [2] 姜启源. 数学模型(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003
- [3] 袁震东主编. 数学建模方法[M]. 上海华东师范大学, 2003. 1
- [4] 肖华勇编著, 实用数学建模与软件应用, 西安: 西北工业大学出版社, 2008, 11
- [5] 基于MATLAB7.x/Simulink/Stateflow 系统仿真、分析及设计、贾秋玲, 袁冬莉, 栾云凤编著, 西安: 西北工业大学出版社, 2006, 6
- [6] 微型计算机. 极客 2010 第三月中(下部)

7 附录

(1) 5.0 节的 C 语言程序:

```
#include<math.h>
void main()
{
    double a=4.5;
    double b=1.7;
    double c=2.5;
    double d=1;
    double e=1;
    double m=1.4;
    double n=1.4;
    double r=5;

    double wmin,wmax,lmin;

    wmax=a*sin(3.1415926/4);
    wmin=sqrt((c+((b-m)/2))*(c+((b-m)/2))+e*e)-(b-m)/2-c;
    lmin=sqrt(2)*(c+((b-m)/2))+e;

    printf(" W 最大值 = %f \n W 最小值 = %f \n L 最小值 = %f \n",wmax,wmin,lmin);
}
```

(2) 5.1 节的 C 语言程序:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
```



```

void main()
{
double a=4.5;
double b=1.7;
double c=2.5;
double d=1;
double e=1;
double m=1.4;
double n=1.4;
double rmin=5;
double r;

double w_min, l_min, RRCC_a, bm2_a;
double r_smax=100, r_step=0.1;
double s_l_min=10000, s_l_minr=10000, w_min_s;

for(r=rmin; r<r_smax; r=r+r_step)
{
bm2_a=(b-m)/2;
RRCC_a=sqrt(r*r-c*c);
l_min=sqrt((RRCC_a+bm2_a)*(RRCC_a+bm2_a)+(a-e)*(a-e)-(RRCC_a-m-bm
2_a)*(RRCC_a-m-bm2_a));
w_min=sqrt((RRCC_a+bm2_a)*(RRCC_a+bm2_a)+e*e)-RRCC_a+b;
if(l_min<s_l_min){s_l_min=l_min;s_l_minr=r;w_min_s=w_min;;;}
}

printf("%f    %f    %f\n", s_l_min, s_l_minr, w_min_s);
}

```

(3) 5.2 节的 C 语言程序:

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>

```

```

void main()
{
double a=4.5;
double b=1.7;
double c=2.5;
double d=1;
double e=1;
double m=1.4;
double n=1.4;
double rmincon=5;
double rmin=5;

```

报名号 # 1504

```
double r;

double wmin, lmin, RRCC, bm2;
double rsmax=100, rstep=0.1;
double slmin=10000, slminr=10000, wmins;
int nn;

for (nn=0; nn<10; nn++)
{
    for (r=rmin; r<rsmax; r=r+rstep)
    {
        bm2=(b-m)/2;
        RRCC=sqrt(r*r-c*c);
        lmin=sqrt((RRCC+bm2)*(RRCC+bm2)+(a-e)*(a-e)-(RRCC-m-bm2)*(RRCC-m-
bm2));
        wmin=sqrt((RRCC+bm2)*(RRCC+bm2)+e*e)-RRCC+b;
        if(lmin<slmin){slmin=lmin;slminr=r;wmins=wmin;;;}
    }
    rmin=slminr-rsmax*rstep;
    rsmax=slminr+rsmax*rstep;
    if(rmin<rmincon){rmin=rmincon;}
    rstep=rstep/10;
}
printf("%f    %f    %f\n", slmin, slminr, wmins);
}
```