

2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

论文格式规范

- 论文（答卷）用白色 A4 纸，上下左右各留出 2.5 厘米的页边距。
- 论文第一页为承诺书，具体内容和格式见本规范第二页，该页由队员及教练员（如有）手写签字后生效（一定要注明参赛组别，挑战赛组委会将各组别分开评阅）。
- 论文第二页为编号专用页，用于评委团评阅前后对论文进行编号，具体内容和格式见本规范第三页。
- 论文题目和摘要写在论文第三页上，从第四页（若无英文摘要）开始是论文正文。
- 论文第一页为承诺书，论文第二页为编号专用页，用于评委团评阅前后对论文进行编号。论文题目、关键词（模型、算法名称）和摘要写在论文第三页上，第 4 页为英文摘要（选填），论文 1—4 页按组委会统一要求编排，具体内容见下文，从第 5 页开始是论文正文。论文从正文开始编写页码，页码必须位于每页页脚中部，用阿拉伯数字从“1”开始连续编号，注意，论文一律要求从左侧面装订。
- 论文必须有页眉，页眉标识参赛队号，例如 1101 队需标识：报名号 # 1101
- 论文中不能有任何可能显示答题人身份的标志。
- 论文题目用三号黑体字、一级标题用四号黑体字，并居中。论文中其它汉字一律采用小四号黑色宋体字，行距用单倍行距。
- 提请大家注意：摘要在整篇论文评阅中占有重要权重，请认真书写摘要（注意篇幅不能超过一页）。评委团评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选。
- 引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料）必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出。正文引用处用方括号标示参考文献的编号，如[1][3]等；引用书籍还必须指出页码。参考文献按正文中的引用次序列出，其中书籍的表述方式为：
[编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年。
参考文献中期刊杂志论文的表述方式为：
[编号] 作者，论文名，杂志名，卷期号：起止页码，出版年。
参考文献中网上资源的表述方式为：
[编号] 作者，资源标题，网址，访问时间（年月日）。
- 论文中使用到的程序源代码放在附录中给出。
- 本规范的最终解释权属于数学建模网络挑战赛组委会。

数学建模网络挑战赛组委会

2010 年 4 月

2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：马蔚丽

队员 2：黄海容

队员 3：冷晓非

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：
1422

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

2010 年第三届 “ScienceWord 杯” 数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车

关 键 词 侧位停车 线路轨迹模拟 外切理论 碰壁约束

摘 要:

本文着重解决汽车侧位进停车位实际问题，为达到高效率，省时间地进入停车位，用平滑弧长连接而成的轨迹模拟汽车进入停车位的路线，由模型一，模型二，模型三确定汽车进入停车位的转弯角度，得出最短的停车车位长度。

一．先把汽车看成一条线段建立模型（一）：同半径外切模型，在此模型中讨论两圆心连线与竖直方向垂直的情况以及两圆连线与竖直方向有一定夹角的情况。找到最佳的停车位置。再建立模型（二）：异半径外切模型，再此模型中讨论两圆心连线与竖直方向垂直的情况以及两圆连线与竖直方向有一定夹角的情况。找到最佳的停车位置。

同半径外切模型中，情形一：两圆心连线在同一竖直直线时，当拐弯的圆心角度 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，可得所需最小车位长度为： $d_{\min} = L + x = L + r$ （即汽车的车长与拐弯圆弧的半径之和）；情形二：两圆心的连线与竖直方向成一定夹角 α 时，由 $\frac{\sin \alpha}{x} (v_0 t - \frac{a_0 t^2}{2}) = \alpha$ 可估计出 α 的值，此时所需最小车位长度为： $d_{\min} = x + L$ 。

异半径外切模型中，情形一：两圆心连线在同一竖直直线时，当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ， $r = \frac{v_t^2}{\pi a_0}$ ， $d_{\min} = r + L = \frac{v_t^2}{\pi a_0} + L$ 即为汽车所需要的最短停车位长度。情形二：两圆心的连线与竖直方向成一定夹角 α 时，由 $\frac{v_0^2 - (v_0 - a_0 t)^2}{2a_0} = \frac{x\alpha}{\sin \alpha}$ 可求出对应的 α 值，再由 $r = \frac{v_t^2}{2a_0\alpha} = \frac{(v_0 - at)^2}{2a_0\alpha}$ 与 $d_{\min} = r + L$ ，求出汽车所需最小车位长度为 $\frac{(v_0 - at)^2}{2a_0\alpha} + L$

二．再把汽车看成一个长方体，建立模型（三）：碰壁约束模型，联立 $(R - y_0)^2 + x_0^2 = R^2$ 与 $\sin \theta = \frac{x_0}{R}$ ，得出相应的 θ ，最短停车位 $d_{\min} = x_0 + b$

参赛队号 1422

所选题目 a 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

Title:

The smart car

Key words : Lateral parking Line trajectory simulation Circumscribed theory Impingement constraint

Abstract:

This focus on solving the car into the parking lateral practical problems, to achieve high efficiency, save time access to parking spaces, with a smooth arc to connect the tracks made cars into parking spaces analog line, from the model one, model 2, model 3 determine the turning vehicle into the parking angle, draw the shortest length of parking spaces.

1. First car as a line modeling (1): radius of circumscribed with the model discussed in this model, the two vertical center of a circle to connect with the vertical as well as two circles connected with a certain vertical angle of the situation. Find the best place to park. Re-establishment of model (2): radius of circumscribed different model, then this model is discussed in connection with the vertical center of a circle of two vertical as well as two circles connected with a certain vertical angle of the situation. Find the best place to park.

Circumscribed model with the radius, the situation is one: two in the same vertical line connecting center of a circle. While $a = \frac{\pi}{2}$, the turning point of the center of a circle, the minimum required parking spaces available length: $d_{\min} = L + x = L + r$ (ie car drivers and turning radius of the arc and); case 2: The two center of the circle of connection and when the vertical direction at a certain angle α , the value $\frac{v_0^2 - (v_0 - a_0 t)^2}{2a_0} = \frac{x\alpha}{\sin \alpha}$ can be estimated α , then the minimum required length of

parking spaces: $r = \frac{v_t^2}{\pi a_0}$, $d_{\min} = r + L = \frac{v_t^2}{\pi a_0} + L$.

Different radius of circumscribed model, the situation is one: two in the same vertical line connecting center of a circle, and when, shall be the minimum required car parking spaces in length. Case 2: The two center of the circle with the vertical direction at a certain angle connection, by the corresponding value can be obtained,

and then, find the minimum required car parking spaces in length: $\frac{(v_0 - at)^2}{2a_0\alpha} + L$

2. Then car as a cuboid, the model (3): impingement constraint model, simultaneous $(R - y_0)^2 + x_0^2 = R^2$ with $\sin \theta = \frac{x_0}{R}$, draw the appropriate, minimum parking. $d_{\min} = x_0 + b$

§ 1、问题重述

一. 背景知识

随着的经济发展，汽车越来越普及，导致了汽车的停车位的需求急剧上升。为了更有效地利用空间，怎样在狭窄的空间里把车停放在合适的位置或在短小的停车位上侧位停车，这是驾驶员迫切要解决的问题。

二、相关知识

- 1、路边停车须先驶过停车位与前方车位内的车辆平行。
 - 2、根据欲入车位大小，决定与前格车辆之间的并行距离。
 - 3、目测估算完成后，一律先向右旋转方向盘一圈半以上，然后再开始倒车。
 - 4、待车右前灯掠近前方车左尾灯时，便开始回正并向左旋转方向盘。
 - 5、待到车体已头尾完整停进前后位车辆间，注意是否过度凸出，须反复修正。
 - 6、若车位面积刚够容纳车子，则倒车切入的角度必须较大一些。
 - 7、为防止前车左后保险杠尾端顶到自车右侧门，并排时的间隙应多预留些距离。
- 坡道停车技巧

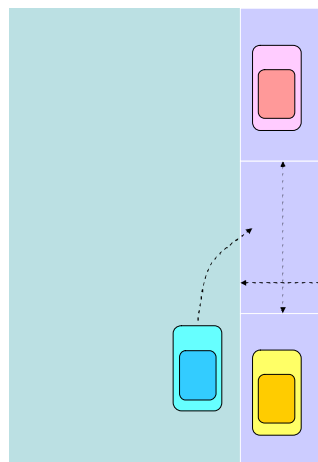
三、相关数据

1. 汽车车型尺寸（如表 1）

表 1 不同汽车车型长、宽、高

尺寸 项 目	外廓尺寸(m)		
	总长	总宽	总高
微型车	3.50	1.60	1.80
小型车	4.80	1.80	2.00
轻型车	7.00	2.10	2.60
中型车	9.00	2.50	3.20(4.00)
大型客车	12.00	2.50	3.20
铰接客车	18.00	2.50	3.20
大型货车	10.00	2.50	4.00
铰接货车	18.50	2.50	4.00

2. 侧位停车车位要求



2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

四、要解决的问题：

1. 对侧位停车，空位较短时，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入，建立汽车停位模型，在什么条件下，汽车能顺利地进入停车位。
2. 满足能进入停车位的条件后，我们将继续解决按照哪种方式进停车位才能更好地利用空间的问题。

§ 2、问题分析

汽车的停位效率受到众多方面因素的影响，比如驾驶员的停车技术，车辆的入位前一刻的行驶速度，还有车辆身长和宽度等性能以及车辆进入的方式。为了更好地解决问题，得出有效地结论，我们分析了题目及相关的信息，结合图形，相关物理知识，建立数学模型，得出结论。

一、先建立最基本的模型，同半径外切模型，将汽车看做一根实心且没有宽度的长棒，按两个同心圆外切（分别从两圆心连线在同一竖直直线，两圆心的连线与竖直方向成一定夹角 α ）的弧线轨迹进入停车位。

二、接着建立模型二，异半径外切模型，假设汽车还是如一中看做一根实心且没有宽度的长棒，按照如模型一得轨迹进入，找到最佳的停车位置。

三、最后建立模型三，碰壁约束模型，将它分解为三种情况，即将前方碰撞点，右方碰撞点，左方碰撞点，看做临界点，得出汽车进入停车位后得到的最优停车位长度。

§ 3、合理的假设

1. 驾驶员个人状况（灵巧，机警，视野）和制动系统灵敏性良好。
2. 汽车进入停车位前一刻的速度一定，进入时做匀减速运动，车速减速为零时，汽车正好到达指定的位置。
3. 相邻两个停车位都已有车停入，此车不能越过它们的停车线。
4. 对每一种模型，车转弯时所需要的向心力（由摩擦力提供）一定。

§ 4、名词解释与符号说明

一：名词解析

1. 几何尺寸：汽车的车身长和车身宽度。
2. 转弯半径：汽车回转时汽车的前轮外侧循圆曲线行走轨迹的半径。

二：符号说明

符号	意义
L	车身长度
v_0	汽车进入停车位前一刻速度
a_0	汽车进停车位过程中的加速度
t	汽车进入停车位的时间
d	汽车的宽度
α	汽车转弯的圆心角度

§ 5、模型的建立与求解

记 H 点是目标车位与下车位的接点处，若在 H 点的下方拐弯进入时，会碰到下车位的汽车，若从 H 点的上方进入时，会使所需要的车位长度较长，所以汽车只能压 H 点进入车位才能使所需车位的长度最小，故以下的每一种模型都假定是压着 H 点进入。

自主平行停车的轨迹规划问题可描述如下：从车辆停止的起始位置点开始，首先确定无碰撞区域，然后，在此区域内寻找 1 条光滑的路径，使车辆沿着规划轨迹运动时不会发生与周围物体碰撞，最终使车辆能够准确地抵达停车点并保持车身方向与设定方向一致。当泊车空间相对于车辆尺寸非常狭小时，需要车辆进行多次往返的后退与前进运动才能完成泊车操作，这种情况我们不做讨论。模型一，模型二都是建立在把汽车看做一条线段的基础上进行分析，并且只研究停车空间能够保障车辆一次性倒车入位的情况。模型三进一步延伸，结合实际，考虑车宽，把车当做长方体研究，得出相关结论。

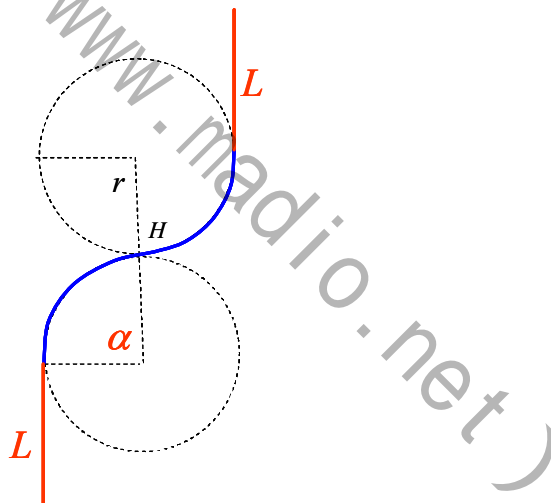
模型一：同半径外切模型

(1) 两圆心连线在同一竖直直线：

如图一所示，汽车进停车位的轨迹是沿着两个正对外切的同等大的圆的弧线（图中蓝线部分），而 H 就是两圆的切点。

因为 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $x=r$

可得所需最小车位长度为： $d_{\min} = L + x = L + r$



(2) 两圆心的连线与竖直方向成一定夹角 α ，汽车沿图中蓝线进入。

汽车距 H 点的竖直距离为 x （ x 为已知量），记开始转弯的时刻为 0，此时它的速度为 v_0 ，则汽车在 t 时刻的速度为：

$$v_t = v_0 - at$$

可得出下面条件：

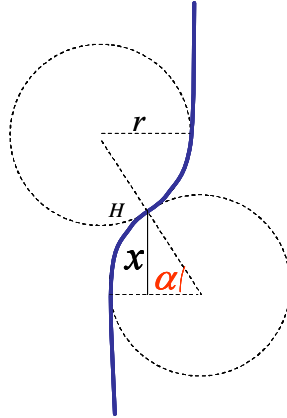
$$\begin{cases} \alpha = \int_0^t \frac{v_0 - a_0 t}{r} dt \\ \sin \alpha = \frac{x}{r} \end{cases}$$

2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

由上方程组可得：

$$\frac{\sin \alpha}{x} \left(v_0 t - \frac{a_0 t^2}{2} \right) = \alpha$$

由上等式，可推出相应的转弯角度 α 值，最小停车位等于： $d_{\min} = x + l$ 

模型二：异半径外切模型

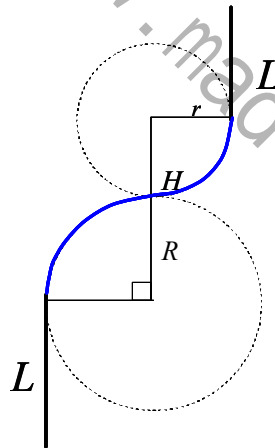
(1) 两圆心连线在同一竖直直线：

汽车沿图中蓝线进入

设汽车到 H 点的时刻为 t ，S 为 H 点到汽车速度为 0 间的弧长。

则

$$v_t = v_0 - a_0 t$$



又由

$$v_t^2 = 2a_0 S$$

$$S = \frac{2\pi r}{4}$$

得出：

$$r = \frac{v_t^2}{\pi a_0}$$

所以最小车位

$$d_{\min} = r + L = \frac{v_t^2}{\pi a_0} + L$$

(2) 两圆心连线于竖直方向有一定夹角：

汽车沿图中蓝线进入

记开始拐弯时刻为零时刻，汽车到H点的时刻为 t ，

则到H点的速度为：
$$v_t = v_0 - a_0 t$$

在大圆中，从零时刻到 t 时刻的路程为 S_0 ：

$$S_0 = \frac{v_0^2 - v_t^2}{2a_0}$$

又

$$S_0 = R\alpha$$

可得：

$$\frac{v_0^2 - v_t^2}{2a_0} = R\alpha \quad (1)$$

又

$$\sin \alpha = \frac{x}{R} \quad (2)$$

由 (1) (2) 两式联立，
$$\frac{v_0^2 - (v_0 - a_0 t)^2}{2a_0} = \frac{x\alpha}{\sin \alpha}$$

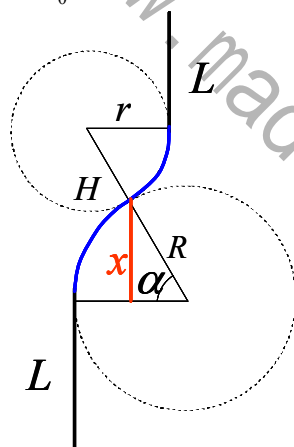
可求出 α

在小圆中，记从 t 时刻到车速为零的时刻所走的路程为 S ，

$$\text{则} \quad S = \frac{v_t^2}{2a_0} \quad (3)$$

$$\text{又} \quad S = r\alpha \quad (4)$$

由 (3) (4) 可得出 $r = \frac{v_t^2}{2a_0\alpha} = \frac{(v_0 - at)^2}{2a_0\alpha}$ ，所以最短车位 $d_{\min} = r + L = \frac{(v_0 - at)^2}{2a_0\alpha} + L$



2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

模型三：碰壁约束模型

进一步讨论，增加车宽的约束条件，平行泊车示意图如下：

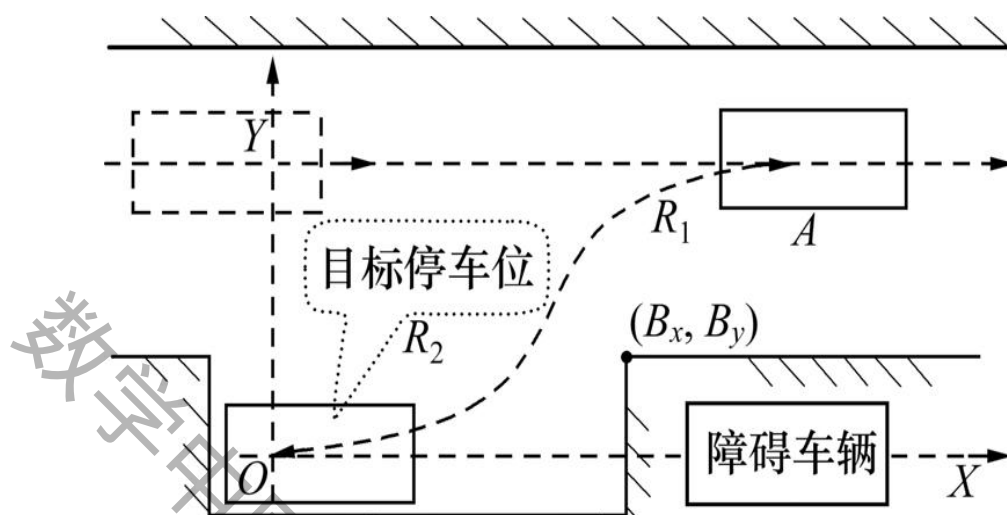
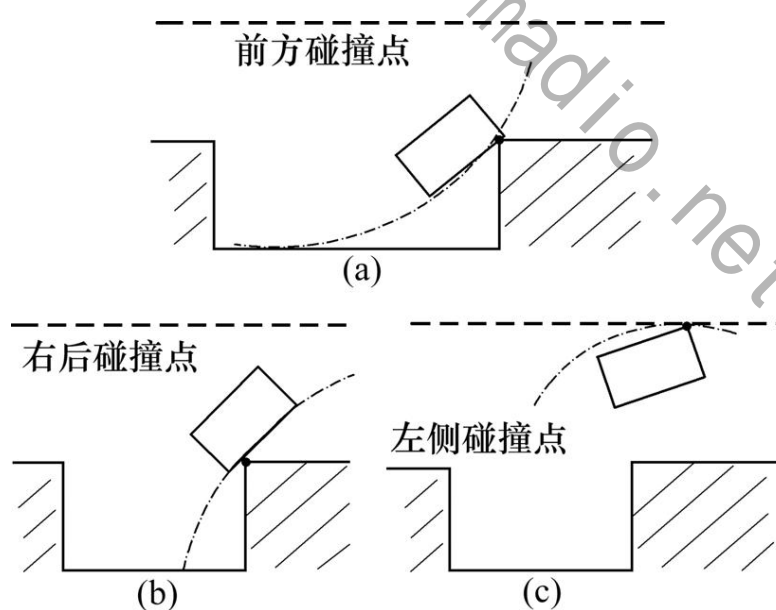


图 平行泊车示意图

自主平行停车的轨迹问题可描述如下：从车辆停止的起始位置点开始，首先确定无碰撞区域，然后，在此区域内寻找1条光滑的路径，使车辆沿着规划轨迹运动时不会发生与周围物体碰撞，最终使车辆能够准确地抵达停车点并保持车身方向与设定方向一致。在汽车从停车点自主倒车最终停于泊车位的过程中，汽车与周围障碍可能会发生碰撞的情形如下图所示：



2010 数学中国数学建模网络挑战赛

1422

首先分析图 (a) 如下：

记 $A(x_0, y_0)$ ($d < y_0$)，则

$$(R - y_0)^2 + x_0^2 = R^2 \quad (1)$$

$$\sin \theta = \frac{x_0}{R} \quad (2)$$

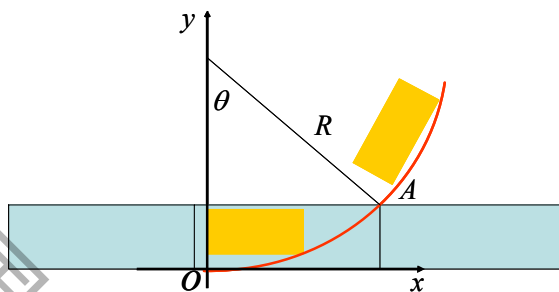
联立 (1) (2)，可求出 θ 一般情况下，停好车时汽车尾部距临界线的距离为 $b \in (0.3, 0.5)$ ，(单位为：米)故最短停车位 $d_{\min} = x_0 + b$ 

图 1

分析图 (b)，汽车也可以如下图方式进入，可以简单地推断，此种形式可以得出如上的结论

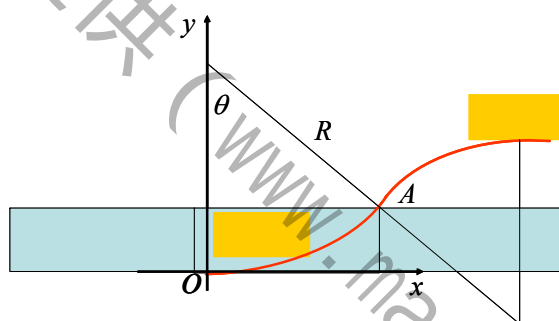


图 2

分析图 (c)，略

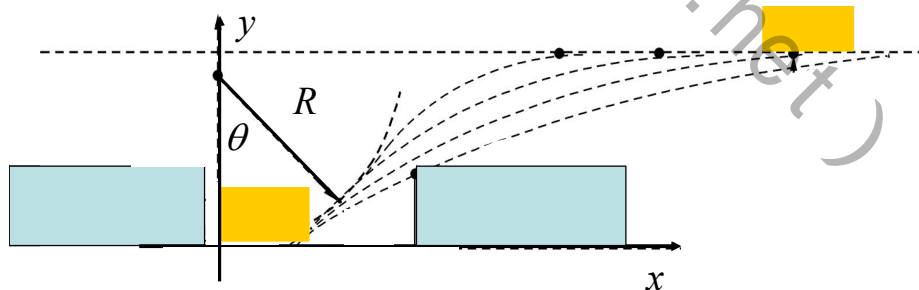


图 3

§ 6 模型的评价

（一）模型的优点：

1. 先把汽车当成一个线段来建模，使得模型简单易懂。
2. 再把汽车当成一个长方体来考虑，比较贴近于实际。
3. 模型采取逐渐深入的步骤来建立，使得层次分明。

（二）模型的缺点：

1. 没考虑汽车可以反复前进、后退来调整方位进入停车位，使得所求最短停车位的长度偏大。
2. 模型中把汽车当成线段、长方体，导致对其旋转半径的确定过于模糊，同时降低其对障碍物的影响，也即与实际的吻合度。
3. 把模型中涉及到得容易求得的未知量都当成了已知量，对模型用于实际的有效性不利。

参考文献

- [1]中南大学学报（自然科学版） [M]. 40 卷增刊 1. 2009 年 9 月
[2]姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京:. 2003 年 8 月第三版;
[3]谢兆鸿, 范正森, 王艮远. 数学建模技术[M]. 中国水利水电出版社