

# 2011 年 第四届 互动出版杯 数学中国数学建模网络挑战赛

## D 题:保险产品的设计方案

(仅限中学组和专科组选做)

某保险公司拟设计一个新的产品。总体思路是:投保人从一出生开始,每月交纳固定费用  $a$  元,交满  $n$  年( $n$  是正整数)停止缴费,并从下一个月开始按月领取固定额度的工资  $b$  元,直到投保人死亡。

只考虑一种例外情况:投保人交费未满  $n$  年死亡,保险公司全额退还投保人所有交费(不付利息),并按交费月数进行赔付。

为简单起见,我们不需要考虑其他例外情况。假设银行的月利率为  $c$ ,一直不变。保险公司只将投保人的交费及时存入银行,不进行其他投资。

### 1 第一阶段问题:

**问题 1:** 假设投保人恰好满  $m$  岁死亡( $m > n, m$  为整数),保险公司不盈不亏,建立常数  $a, b, c, m, n$  的关系式,并尽量化简。

**问题 2:** 在问题 1 中,假设  $a = 1000$  元,  $n = 20$  年,  $c = 0.25\%$ ,  $m = 80$  岁,求  $b$  的具体值。并写出所用计算工具及操作步骤(建议使用 Excel)。

**问题 3:** 在问题 1 中,假设  $a = 1000$  元,  $b = 2000$  元,  $c = 0.25\%$ ,求  $m, n$  的关系式,并用图形或表格形象描述  $m, n$  的关系。

**问题 4:** 要完成本产品的最终设计,需要哪些数据? 并探讨获取和加工数据的有效方案。

## 2 第二阶段问题:

**问题 1:** 假设投保人都是恰好满  $m$  岁死亡 ( $m > n, m$  为整数)。已知投保人恰好  $k$  岁死亡的概率为  $p_k, (k = n + 1, n + 2, \dots, 200)$ , 且  $\sum_{k=n+1}^{200} p_k = 1$ 。建立数学模型, 求保险公司不盈不亏的概率。

**问题 2:** 假设投保人都是恰好满整数岁死亡。已知投保人恰好  $k$  岁死亡的概率为  $p_k, (k = 1, 2, \dots, 200)$ , 且  $\sum_{k=1}^{200} p_k = 1$ 。投保人  $m$  岁死亡 ( $m \leq n, m$  为整数) 时, 保险公司全额退还投保人所有交费 (不付利息), 并再按所有交费的  $d$  倍赔付。建立数学模型, 求保险公司不盈不亏的概率。

**问题 3:** 保险公司通过某种方法获知, 投保人大于  $k - 1$  岁, 小于等于  $k$  岁死亡的概率为  $p_k, (k = 1, 2, \dots, 200)$ , 且  $\sum_{k=1}^{200} p_k = 1$ 。因为交费和领取工资是按月进行的, 投保人不一定恰好满整数岁死亡, (2) 中退款和赔付也要按月计算。根据已知按岁死亡的概率, 如何估算按月死亡的概率? 并建立数学模型, 求保险公司不盈不亏的概率。

**问题 4:** 从直觉上知道,  $a, n$  越小,  $b, d$  越大, 投保者越多。但也可能使公司的风险增大。根据以上模型, 探讨如何确定合适的  $a, b, d, n$  (可以引入以上没有提及的影响因素)。