

目录

1. 问题重述	1
2. 问题分析	1
3. 模型假设	1
4. 符号说明	2
5. 模型准备	3
6. 模型建立与求解	5
6.1 问题一 截面形状对减速比的影响	5
6.2 问题二 框架杆长宽比和框架群架空率对减速比的影响	9
6.3 问题三 框架群顺水流方向铺设长度对减速比的影响	13
7. 模型评价	15
附录	18

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1048

参赛队员（签名）：

队员 1：刘丽媛

队员 2：葛菊祥

队员 3：安文

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1048

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 四面六边透水框架群减速效果的影响因素分析

关 键 词 四面六边透水框架，减速比，数值面元法，多元线性回归模型

摘 要：

本文针对四面六边透水框架对河流的减速消能效果的问题，分别研究了框架杆寸、框架群架空率和抛投长度对减速比的影响，且认为框架尺寸包含杆横截面形状和长宽比两方面，从而得出了减速比与框架杆截面尺寸，框架群架空率和抛投长度间的经验公式。

在研究框架杆截面形状对减速比的影响时，我们利用数值面元法，得到了任意截面形状的障碍物周围绕流的流速分布；之后选取三种典型的框架杆截面形状（圆形，正方形，等腰直角三角形），计算出它们的减速比修正系数分别为 0.71，1，1.11。

在研究框架杆长宽比和框架群架空率对减速比的影响时，我们通过对已有实验数据的处理和分析，得到框架群的架空率与框架杆的长宽比共同影响减速比。因此，我们建立多元线性回归模型，采用最小二乘法得到回归系数，并对模型的合理性进行检验。最后得出减速比 η 与框架杆长宽比 k 、框架群架空率 ξ 的经验公式为：

$$\eta(k, \xi) = 1.000f_1(k) + 1.000f_2(\xi) - 0.682$$

在研究框架群抛投长度对减速比的影响时，我们对数据进行归一化处理，并通过曲线拟合的方法，得到相对减速比函数与框架群长度之间的函数关系式。最后结合前两问的分析，得出减速比的最终经验公式为

$$\eta_L = \tau \eta^* \eta_\infty$$

其中

$$\eta^* = \begin{cases} 0.053L + 0.41 & (0 < L < 10) \\ 0.0032L + 0.90 & (10 \leq L < \infty) \end{cases}$$

$$\eta_\infty = 1.000f_1(k) + 1.000f_2(\xi) - 0.682$$

$$f_1(k) = -4.80 \times 10^{-5}k^3 + 6.85 \times 10^{-4}k^2 + 0.015k + 0.503$$

$$f_2(\xi) = -0.011\xi^2 + 0.110\xi - 0.330\xi + 0.900$$

参赛队号：1048

所选题目：A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

英文摘要（选填）

数学中国提供 (www.madio.net)

1. 问题重述

在江河中，堤岸、江心洲的迎水区域被水流长期冲刷侵蚀。在河道整治工程中，需要在受侵蚀严重的部位设置一些人工设施，以减弱水流的冲刷，促进该处泥沙的淤积，以保护河岸形态的稳定。

现在常用的设施包括四面六边透水框架等。这是一种由钢筋混凝土框架杆相互焊接而成的正四面体结构，常见的尺寸为边长约 $1m$ ，框杆截面约 $0.1 \times 0.1m$ 。将一定数量的框架投入水中，在水中形成框架群，可以使水流消能减速，达到减弱冲击，防冲促淤的效果。

对四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度都直接或间接地影响着其消能减速的效果。当前人们通过水槽实验等方法，已经积累了一些实验数据，也见诸各类文献当中。但由于数据量和数据精度仍有各种不足之处，还没有形成足够完善的经验公式。请你建立合理的数学模型，给出这三个参数与其减速效果之间的关系。

2. 问题分析

混凝土四面六边透水框架是一种透水护岸。透水框架由预制的6根长度相等的钢筋混凝土框杆相互连接组成，呈正三棱锥体，见下图，将透水框架群布设在需要防护的堤岸临河侧，当水流通过时，利用本身构件来逐渐消减水流的动能，减缓流速，促使水中泥沙落淤，达到淤滩护岸目的。

对四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度都直接或间接地影响着其消能减速的效果。框架的截面形状以及框架的长宽比均属于框架的几何尺寸。不同的截面形状以及对水流会有不同的减速效果。长宽比主要会影响框架的透水性能和阻水的能力。架空率主要反映框架群对空间的占有情况，进而影响框架群的透水性能。框架群长度主要影响水流的逐级减速的效果。这三个方面的因素最终均会影响到框架群的阻水性能。我们首先从微观上讨论单个框架的不同截面的形状和尺寸的减速效能。可以对比圆形截面、正方形截面，等腰直角三角形截面的减速率的大小。然后在宏观上，我们讨论框架群的减速性能。通过对以往的实验数据的分析，我们可以通过无量纲化，归一化等方法对实验数据进行处理，并可以利用曲线拟合和二元线性回归等方法得到四面六边透水框架群的框架尺寸，架空率和长度的经验公式。最后综合宏观和微观，得到与截面尺寸，架空率，长细比，框架群长度有关的经验公式。

(1) 水流流过不同形状、尺寸的障碍物后，形成的绕流尾涡不同，引起的减速比也不同，因此我们首先在框架杆截面面积一定的情况下研究截面形状对减速比的影响，得到不同截面下对应的减速比。同时得到减速比最大时对应的截面形状。

(2) 由框架群结构组成可以知道，框架群内框架体疏密程度将直接影响到框架群的减速效果，而框架杆的长宽比会影响到框架群的疏密程度，因此框架杆的长宽比与框架群的架空率共同影响减速比的大小。在(1)的基础上，我们着重讨论正方形截面框架杆的长宽比与框架群的架空率和减速比之间的函数关系。其它的截面形状可以在正方形截面的基础上通过修正因子进行修正。

(3) 在实际工程中，除了要考虑到减速护堤的效果，往往还必须兼顾到整个工程的投入，因此应该在保证防护效果的基础上同时尽量减小工程规模。我们研究了框架群长度对减速效果的影响，为实际框架群的铺设提出优化参考。

3. 模型假设

(1) 四面六边透水框架群中框架的规格一致；

- (2) 假设扰动前水流流场均匀且不受温度影响；
 (3) 在分析框架杆对水流的影响时，不考虑水流的边界；
 (4) 利用数值面元法计算流场分布时，假设每块板上的面元强度相当；
 (5) 假设所有试验数据真实有效。

4. 符号说明

V	水流速度
V_{∞}	自由来流速度
ρ	水流密度
d	流场中障碍物特征长度
μ_{∞}	流体的粘滞系数
Ma	流体的马赫数
Re	流体的雷诺数
a	当地声速
r	空间一点到点源的距离
θ	空间一点和点源的连线与横向坐标轴夹角
η	减速比
ξ	框架群的架空率
k	框架杆长宽比
l_0	框架杆长度
b_0	框架杆截面特征长度
λ	单位长度源面的源强度
ϕ	流体的速度势函数
Λ	源强度，即每秒单位长度点源内流出的体积流量。
R	速度计算点之间的间隔距离
L	框架群沿水流流速方向抛投长度
η_L	抛投长度为 L 时对应的减速比

η_{∞}	抛投长度为无穷时对应的减速比
η^*	相对减速比
τ	减速比修正系数

5. 模型准备

流速和流动的黏性直接影响到流体力学微分方程组的建立，因此有必要界定水流的速度和黏性。引入物理量马赫数 Ma ，雷诺数 Re 。

(1) 当马赫数 $Ma < 0.3$ 时，流体所受的压力不足以压缩流体，仅会造成流体的流动。在此状况下，流体密度不会随压力而改变，此种流场称为亚音速流，流场可视为不可压缩流场。一般的水流及大气中空气的流动，譬如湍急的河流、台风风场和汽车的运动等，皆属于不可压缩流场。

(2) 利用雷诺数可用来确定物体在流体中流动所受到的阻力。雷诺数越小意味着粘性力影响越显著；越大则意味着惯性力影响越显著。一般管道雷诺数 $Re < 2300$ 为黏性液体， $Re > 4000$ 为无黏液体， $2300 < Re < 4000$ 为过渡状态。

(3) 求马赫数

$$Ma = \frac{V}{a} \quad (0.1)$$

其中， V 表示水流速度， a 表示当地水流介质中的声速。天然冲积河流的流速 V 一般不超过 $3m/s$ ，取当地水流介质中声速 a 为 $1440m/s$ ，马赫数为

$$Ma = \frac{V}{a} = \frac{3m/s}{1440m/s} \approx 0.0021 < 0.3 \quad (0.2)$$

那么可以认为水流是不可压缩流体，其密度 ρ 不会随压力的变化而变化，这也与资料情况相符。

(4) 求雷诺数

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu_{\infty}} \quad (0.3)$$

其中， ρ 表示水流密度， V 表示水流速度， d 表示特征长度， μ_{∞} 表示黏滞系数。

纯净水的密度为 $1000Kg/m^3$ ，考虑到实际水流具有一定的含沙量，使得水流密度变大，这里将水流密度 ρ 修正为 $1120Kg/m^3$ 。在建模过程中，我们主要讨论了圆形框架杆和正方形框架杆，它们对应的特征长度分别代表直径、边长，这里暂取 $d = 0.1m$ 。在常温条件 ($T = 25^{\circ}C$) 下，水的黏滞系数约为 $0.84 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ ，同样考虑河水的含沙情况，水的黏性会有相应的增加，将河水黏滞系数 μ_{∞} 修正为 $0.95 \times 10^{-3} Pa \cdot s$ 。

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu_{\infty}} = \frac{1120 \times 3 \times 0.1}{0.95 \times 10^{-3}} \approx 3.54 \times 10^5 \gg 4000 \quad (0.4)$$

因此，可以认为河水是无黏液体。

(5) 对于无黏不可压缩液体，我们可以采用势流理论[1]来分析障碍物对稳定流场的影响。

无旋不可压缩流体的控制方程为

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (0.5)$$

式 (0.5) 也称为 *Laplace* 方程, 其中, ∇ 表示梯度算子, ϕ 表示速度势函数。

对于无扰动流场, 其边界条件为

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_{\infty} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (0.6)$$

其中, u 表示流速的横向 (即沿着流速方向) 分量, v 表示流速的纵向 (即垂直于流速方向) 分量, x 表示横向坐标, y 表示纵向坐标, V_{∞} 表示自由来流速度。

对于有扰动流场, 扰动障碍物的边界条件为

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (0.7)$$

\mathbf{V} 表示来流速度矢量, \mathbf{n} 表示物面法向量。

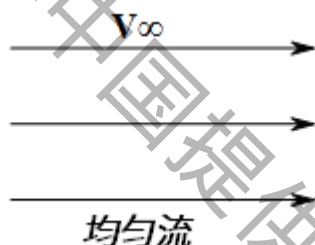


图 0.1 均匀流的流场分布

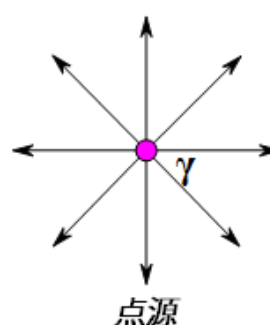


图 0.2 点源流的流场分布

我们使用两种满足 *Laplace* 方程的典型流动, 分别为均匀流 (如图 0.1) 和点源流 (如图 0.2)。

$$\phi = V_{\infty} x = V_{\infty} r \cos \theta \quad (0.8)$$

$$\phi = \frac{\Lambda}{2\pi} \ln r \quad (0.9)$$

其中, 式 (0.8) 为均匀流方程, r 表示空间一点到点源的距离, θ 表示空间一点与点源连线和横向坐标轴的夹角; 式 (0.9) 为点源流方程, Λ 表示源强度, 即每秒单位长度点源内流出的体积流量。

由于 *Laplace* 方程满足叠加定理, 因此可以通过均匀流和点源流的叠加, 利用数值面元法获得均匀流流过任意形状物体的流场, 从而得到水流流过障碍物后的速度分布。

(6) 减速比 η , 四面六边透水框架群消能效果是利用抛投前后测点流速的变化来体现的, 为方便起见采用减速比来表示。

$$\eta = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \quad (0.10)$$

其中, V_1 表示为投放四面六边透水框架群前的流速, V_2 为投放框架群后研究点的流速。

(7) 架空率 ξ , 由框架群结构组成可以知道, 框架群内的空隙率、框架体的数量将直接影响到框架群的透水和阻水性能, 制约着框架群的减速效果, 而且在工程实际运用中, 单个框架群单位体积所包含的框架体数量的多少, 直接影响到工程的投资。

因此, 本文引入单位体积架空率和杆件长宽比两个参数对框架群结构特征进行描述。

$$\xi = \frac{V_{\text{群}}}{V_{\text{单}} \cdot N} \quad (0.11)$$

其中， $V_{\text{群}}$ 表示框架群的总空间体积， $V_{\text{单}}$ 表示单个四面六边透水框架的空间体积， N 表示框架群中四面体的个数。

(8) 框架杆长宽比 k 。杆件长宽比表征了单个框架体的大小。

$$k = \frac{l_0}{b_0} \quad (0.12)$$

其中， l_0 表示单个四面六边透水框架体的边长， b_0 表示单个四面六边透水框架体边杆的截面特征长度（对于圆形，取其直径；对于正方形，取其边长；对于等腰直角三角形，取其斜边长）。

6. 模型建立与求解

6.1 问题一 截面形状对减速比的影响

水流流过不同形状的障碍物后，形成的绕流尾涡不同，引起的减速比也不同，我们首先在框架杆截面面积一定的情况利用下数值面元法的基本方法，即均匀流与点源流的叠加可以描述任意形状物体绕流的流场。研究截面形状对减速比的影响。

用 s 表示沿源面边缘所得的曲线长度，定义 $\lambda = \lambda(s)$ 为沿着 s 方向单位长度源面的源强度。则源面微元 ds 的源强度可以表示为 λds ，可以将其视为一小段源面的源强度。在流场中任取一点 $P(x, y)$ ，距离 ds 为 r ，则在 P 点强度为 λds 的面源微元引起的速度势微元 $d\phi$ 为

$$d\phi = \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad (1.1)$$

对式 (1.1) 沿着 s 由起点 a 到终点 b 积分，可以得到点 P 关于此源面的全速度势方程，即

$$\phi(x, y) = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad (1.2)$$

假设流场中有一给定的任意形状物体，自由来流速度为 V_∞ 。沿物体表面布置源面（即面元），且源面的强度变化应能使物体的表面跟流场中均匀流和源面流所叠加合成的一条流线贴合。那么，问题就可以转化为如何寻找并定义合适的源面强度 $\lambda(s)$ 。如图 1.1 所示，我们用一系列直板面元来代替流场中物面上的曲线面元。对同一直板面元来讲，单位长度源面的强度 λ 为常数，但各个面元之间的强度并不相等。现假设物面上有 n 个直板面元，且单位长度源面的强度分别记为： $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ 。这些源面的强度是未知的，而面元法的主要问题就是求解这些源面的强度并使物面成为叠加流场中的一条流线。考虑到物面边界条件，将物面本身视为叠加流场中的一条流线，取面元的中点为控制点，那么每个控制点处的流场速度的面元法向分量均为零。

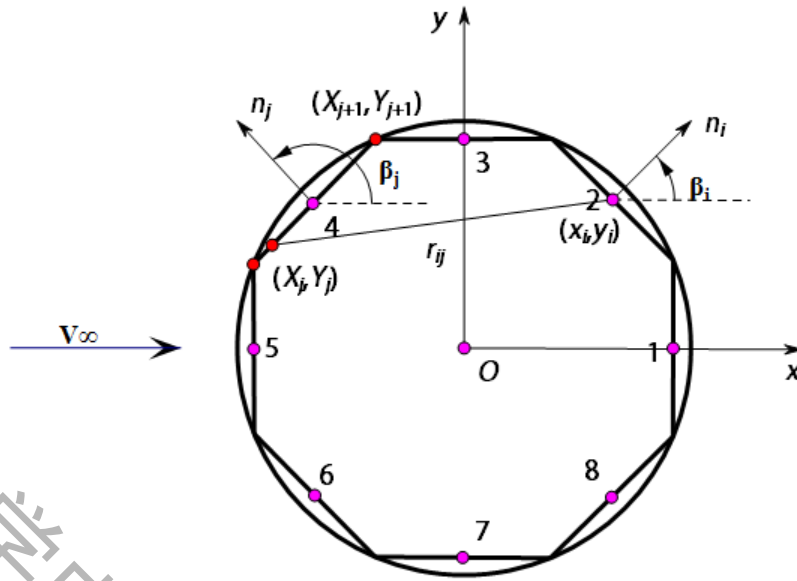


图 1.1 障碍物表面的面元分布

在图 1.1 所示流场中, 令 P 点坐标为 (x, y) , $r_{p,j}$ 为第 j 块面元上任一点到点 P 的距离, 则在点 P 由第 j 块面元引起的速度势 $\Delta\phi_j$ 可由式 (1.2) 求出, 即

$$\Delta\phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{p,j} ds_j \quad (1.3)$$

其中, 第 j 块面元上的 λ_j 为常数, 且积分仅在第 j 块面元上进行。根据叠加原理, 所有面元在点 P 处引起的总速度势为

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{p,j} ds_j \quad (1.4)$$

式中

$$r_{p,j} = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (1.5)$$

其中 (x_j, y_j) 为沿物面第 j 块面元上任意点的坐标。

由于点 P 为流场中任意一点, 不妨将其取在第 i 块面元的控制点 (x_i, y_i) 处。这样, 式 (1.4) 和式 (1.5) 就可以化简为

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{i,j} ds_j \quad (1.6)$$

$$r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (1.7)$$

式 (1.6) 即为所有面元对第 i 块面元控制点处速度势的总和。

考虑到在控制点处使用边界条件, 则速度在控制点处的法向向量为零。为了计算这个法向速度分量, 首先来讨论自由来流垂直于面元的速度分量。用 n_i 表示垂直于第 i 块面元的单位法向矢量, 方向沿物面向外, 如图 1.1 所示。另外, 注意到在所用的直角坐标系中, 第 i 块面元的斜率为 (dy/dx) , 并且在一般情况下, 自由来流的速度 V_∞ 与 x 轴还有一个夹角 α 。假设自由来流速度与第 i 块面元的法向夹角为 β_i , 则从图 1.1 中可得, 垂直于第 i 块面元的自由来流法向分量为

$$V_{\infty,n} = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n}_i = V_\infty \cos \beta_i \quad (1.8)$$

$V_{\infty,n}$ 的方向规定：沿物面向外为正，沿物面向内为负。所有面元在点 (x_i, y_i) 处引起的法向速度分量可由式 (1.6) 求得，即

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n_i} [\phi(x_i, y_i)] \quad (1.9)$$

该式是在单位外法线方向上进行求导的，从这里可以看出，速度分量 V_n 的正方向沿物面向外。在上式的求导过程中， $r_{i,j}$ 将出现在分母的位置上，在第 i 块面元上的控制点处， $r_{i,j}$ 为零说明该点奇异。因为 $j=i$ 时的导数值为 $\lambda_i/2$ 。由式 (1.9) 和式 (1.6)，可得

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{i,j}) ds_j \quad (1.10)$$

其中，等号右边第一项表示第 i 块面元在本身控制点处引起的法向速度分量。 Σ 符号表示所有其他的面元在第 i 块面元控制点处引起的法向速度分量之和。

第 i 个控制点处的流场速度法向分量由两部分组成：一部分是式 (1.8) 表示的自由来流引起的法向速度分量；另一部分是式 (1.10) 表示的所有面元引起的法向速度分量。根据流场边界条件可知，这两部分之和应该为零，即

$$V_{\infty,n} + V_n = 0 \quad (1.11)$$

将式 (1.8) 和式 (1.10) 代入式 (1.11) 中，得

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{i,j}) ds_j + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (1.12)$$

该式中的积分结果仅取决于面元的几何形状，与流场参数没有关系。用 $I_{i,j}$ 表示控制点在第 i 块面元上时在第 j 块面元上进行的积分，所以式 (1.12) 可以写为

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} I_{i,j} + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (1.13)$$

式 (1.13) 是关于 n 个未知量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的线性代数方程。它表示控制点在第 i 块面元上时的流场边界条件。令 $i=1, 2, \dots, n$ ，得到所有面元控制点处的流场边界条件，从而得到 n 个关于 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的线性代数方程组。然后，利用数值方法来求得不同的源面强度近似值 λ_i 。而且所取的面元数目越多，所求得的源强度的近似值越准确，同时所得的流线形状也越接近原流场中的物体表面形状。对于圆柱，一般情况下只需要取 8 个面元就可以达到工程实际所要求的精度。

计算出各个源面的强度 λ_i 之后，可以通过以下方法计算出各个研究点处的法向速度。因此，自由来流在研究点处的法向速度分量就可以用下面的式子来计算，即

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \cos \beta_i \quad (1.14)$$

对该式关于 n 求偏导数，得到所有面元在第 i 个研究点处引起的沿物体表面的法向速度分量，即

$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{z,j}) ds_j \quad (1.15)$$

由于第 k 个研究点处的法向速度分量 V_z 等于自由来流引起的法向速度分量式 (1.14) 与所有面元引起的法向速度分量式 (1.15) 之和，即

$$V_k = V_{\infty, n} + V_n = V_{\infty} \cos \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{z,j}) ds_j \quad (1.16)$$

至此，我们使用面元法理论求出了任意形状物体绕流的表面流速分布数学表达式。

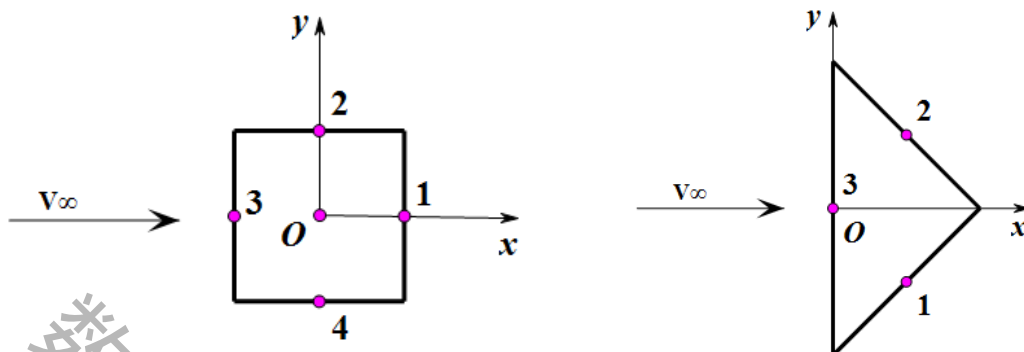


图 1.2a 对正方形截面用面元法分析 图 1.2b 对三角形截面用面元法分析

我们选取了三种典型的框架杆截面形状（圆形，正方形，等腰直角三角形），分别研究它们对均匀水流流场的影响，即对水流的减速作用（用减速比 η 衡量）。鉴于圆形截面的面元分析已在图 1.1 做出说明，这里我们仅给出对正方形截面、等腰直角三角形截面进行面元分析的面元划分图见图 1.2a, 1.2b，将正方形截面划分成 1,2,3,4 个面元；将三角形截面划分成 1,2,3 个面元。

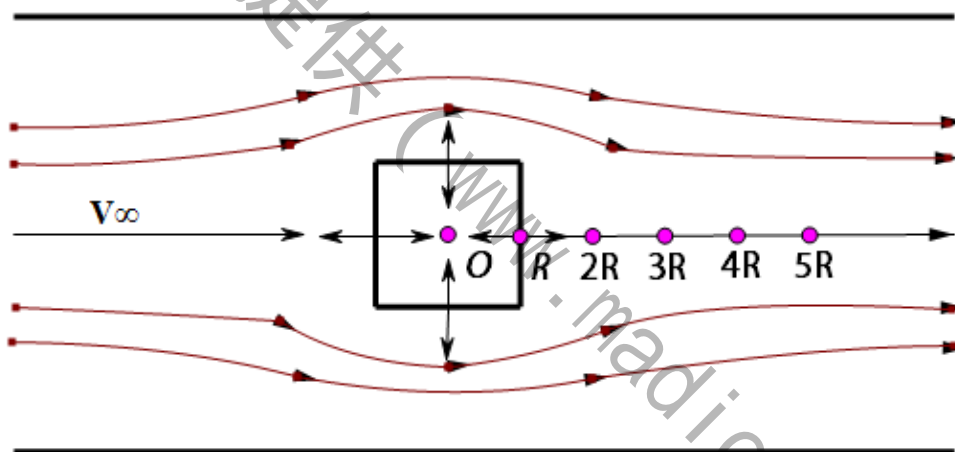


图 1.3 均匀流与点源叠加后的流场分布

计算过程中，我们在障碍物后顺着水流方向距离截面中心距离为 R , $2R$, $3R$, $4R$, $5R$ 处均匀布了多个研究点（见图 1.3；当截面为圆形时， R 表示圆的半径；当截面为正方形时， R 表示边长的一半；当截面为等腰直角三角形时， R 表示斜边的一半），分别计算研究点处的流速，并与自由来流速度作对比，得出减速效果最好，即减速比最大时对应的截面形状。

减速结果如图 1.4 所示：

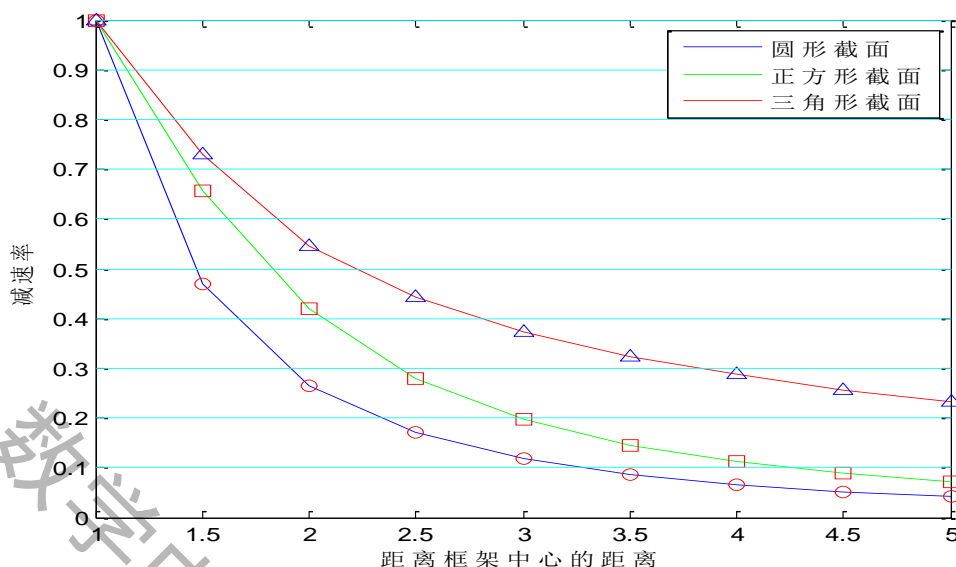


图 1.4 不同框架杆截面形状对减速比的影响

其中横轴表示研究点到框架杆中心的距离与 R 的比值，从图中可以看出框架杆截面为三角形时，减速效果最明显，在距离框架中心为 $1.5R$ 的研究点，减速比可以接近 0.7；相比之下，框架杆截面为正方形、圆形时，减速效果就没有那么理想，减速比仅约为 0.65、0.48。从图中也可以看出，距离框架中心越远，速度减少量越小，同时流速呈现逐渐增大的趋势。这也是与实际情况相符的，水流刚刚经过四面六边透水框架时，速度减小最明显，随着河水逐渐流远，流动速度也会逐渐回升。

在工程实际中，往往选取截面为正方形的四面六边透水框架，因为截面为正方形的四面六边透水框架比截面为三角形的四面六边透水框架制造起来容易；而且正方形截面的四面六边透水框架的减速比较圆形截面的四面六边透水框架大。

因为在后续问题的分析中，我们都选取正方形截面的框架，这使得经验公式产生一定的误差，这里我们引入修正系数 τ ，表示了截面为其他形状时的减速比与正方形截面的减速比之比。

6.2 问题二 框架杆长宽比和框架群架空率对减速比的影响

四面六边透水框架群在利用杆件对水流进行阻挡减速的同时，也让流水通过。这样既达到了减速促淤的效果，又减少了水流对河岸的冲刷作用，可以说，它是通过“阻水”与“透水”的折中组合[2]，逐步分级消能，达到减速促淤的效果。框架群通过内部单个框架自身和框架体之间的空隙透水，并通过框架体的杆件实现阻水消能。那么，当框架群内部的空隙过大时，杆件所占体积比就很小，框架群的架空率就很大，其“透水”作用就强，阻水消能作用就弱，减速的效果也就相对较弱；反之，则框架群的架空率小，其“阻水”作用强，透水性就弱，但这使得通过框架群内部的水流减少，杆件的阻水效果得不到充分的利用和体现，而且会导致框架群外部附近和框架群后局部流速增大，框架群对水流的消能作用会相对减弱。

我们知道，四面六边透水框架的长度表征了单个框架的大小。当框架保持边长不变时，若宽度发生变化，将会直接影响到框架群的布置，从而影响到框架群架空率。我们这里采用多元线性回归模型[3]，建立减速比 η 与框架群架空率 ξ 、框架杆长宽比 k 的函数；再最小二乘法估计回归系数；最后对模型的合理性进行检验。

6.2.1 建立多元线性回归模型

我们采用控制变量的思想，先在框架群的架空率一定的条件下，研究框架杆长宽比对减速比的影响；再保持框架杆长宽比不变，研究架空率对减速比的影响。设在框架群架空率 ξ 一定时，减速比 η 与框架杆长宽比 k 的函数为 $f_1(k)$ ；在框架杆长宽比 k 一定时，减速比 η 与框架群架空率 ξ 的函数为 $f_2(\xi)$ 。

我们现将一些已有的研究数据[4]摘录如下：

表 2.1 框架杆长宽比 k 和框架群架空率 ξ 对减速比 η 的关系

η ξ	k	8	10	12	16	20
3.0		0.6	0.625	0.64	0.67	0.65
4.0		0.65	0.69	0.72	0.73	0.7
4.8		0.68	0.72	0.75	0.77	0.72
6.0		0.63	0.65	0.67	0.7	0.68

根据这些数据，我们分别绘出减速比随框架杆长宽比、框架群架空率变化的曲线并做了多次拟合，最后发现用三次函数做拟合，效果最好，结果如图 2.1：

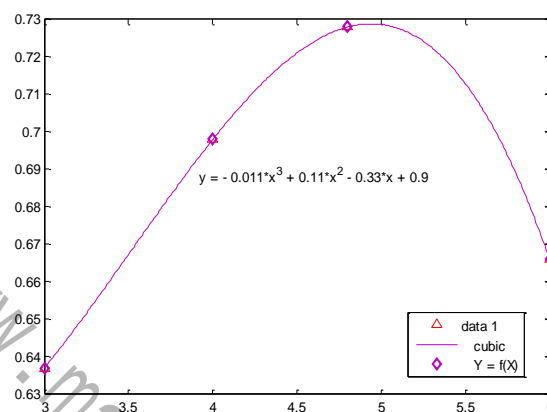
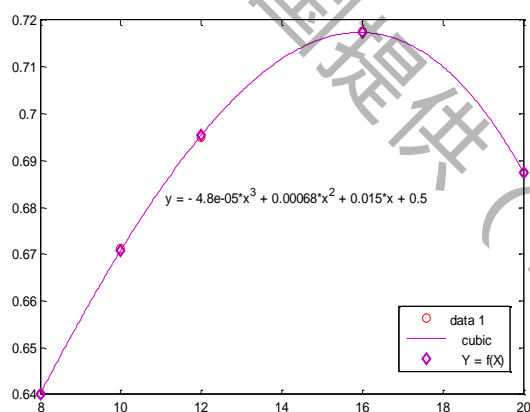


图 2.1a 减速比随框架杆长宽比变化的曲线 图 2.1b 减速比随框架群架空率变化的曲线
 $f_1(k)$ 与 $f_2(\xi)$ 的拟合函数分别为

$$f_1(k) = -4.8 \times 10^{-5} k^3 + 6.85 \times 10^{-4} k^2 + 0.015k + 0.503 \quad (2.1)$$

$$f_2(\xi) = -0.011\xi^2 + 0.110\xi^2 - 0.330\xi + 0.900 \quad (2.2)$$

用式 (2.1) 做拟合，残差为 0.00065；用式做拟合，残差为 0.011906。

由资料数据可知， $f_1(k)$ 与 $f_2(\xi)$ 的趋势相似，因此我们设多元线性回归模型为

$$\eta(k, \xi) = \beta_1 f_1(k) + \beta_2 f_2(\xi) + \beta_3 + \varepsilon \quad (2.3)$$

令

$$y = \beta_1 f_1(k) + \beta_2 f_2(\xi) + \beta_3 + \varepsilon \quad (2.4)$$

其中， $\eta(k, \xi)$ 表示减速比 η 与框架杆长宽比 k 、框架群架空率 ξ 的综合函数， β_1 ， β_2 ， β_3 表示回归系数， ε 表示随机误差，且服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。

选取了 20 组数据，可得

$$\begin{cases} \eta_i(k, \xi) = \beta_1 f_1(k_i) + \beta_2 f_2(\xi_i) + \beta_3 + \varepsilon_i \\ i = 1, 2, \dots, 20, \end{cases}$$

其中， ε_i 为第 i 次试验时的随机误差，且相互独立同服从 $N(0, \sigma^2)$ 。

为了方便起见，引入矩阵记号：

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1(k, \xi) \\ \eta_2(k, \xi) \\ \vdots \\ \eta_{20}(k, \xi) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k_1 & \xi_1 & 1 \\ k_2 & \xi_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{20} & \xi_{20} & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{20} \end{bmatrix}$$

其中 X 称为模型设计矩阵, 是常数矩阵, Y 与 ε 为随机向量, 且有 $Y \sim N_{20}(X\beta, \sigma^2 I)$, $\varepsilon \sim N_{20}(0, \sigma^2 I)$, I 为 20 阶单位阵。 ε 是不可观测的随机误差向量, β 为回归系数构成的向量, 是未知待定的常数向量。

6.2.2 回归系数的最小二乘估计

选取 β 的一个估计值, 记为 $\hat{\beta}$, 使得随机误差 ε 的平方和达到最小, 即

$$\min_{\beta} \varepsilon^T \varepsilon = \min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) = (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) = Q(\hat{\beta}) \quad (2.5)$$

写成分量形式

$$Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{i=1}^{20} [\eta_i(k, \xi) - \beta_1 f_1(k_i) - \beta_2 f_2(\xi_i) - \beta_3]^2 \quad (2.6)$$

则

$$Q(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \min_{\beta_i} Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \quad (2.7)$$

注意到 $Q(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 是非负二次式, 是可微的, 则由多元函数取得极值的必要条件可得

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_j} = 0 \quad (j=1,2,3) \quad (2.8)$$

即 $X^T X \hat{\beta} = X^T Y$, 对于任意给定的 X , Y , 该方程组总是有解。当 X 不满秩时, 其解不唯一, 但对任意一组解 $\hat{\beta}$ 都能使残差平方和最小, 即 $Q(\hat{\beta}) = \min_{\beta} Q(\beta)$ 。当 X 满秩时,

正规方程组 $X^T X \hat{\beta} = X^T Y$ 的解为 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, 即为回归系数的估计值。

因为 $Y \sim N_{20}(X\beta, \sigma^2 I)$, 则 $\hat{\beta}$ 也是一个随机向量, 且期望为

$$E(\hat{\beta}) = E[(X^T X)^{-1} X^T Y] = (X^T X)^{-1} X^T E(Y) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta \quad (2.9)$$

同理, 方差为 $D(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$, 即 $\hat{\beta}$ 是 β 的一个无偏估计。

将 $\hat{\beta}$ 代入模型 $\eta(k, \xi)$ 中得到模型的估计: $\hat{Y} = x^T \hat{\beta}$, 它是模型的无偏估计。

经过线性回归后, 得到 $\beta_1 = 1.000$, $\beta_2 = 1.000$, $\beta_3 = -0.682$, 即

$$\eta(k, \xi) = 1.000 f_1(k) + 1.000 f_2(\xi) - 0.682 \quad (2.10)$$

我们把拟合的函数值与实验值做比较, 相对误差分布如图 2.2

在该图中, 横坐标表示误差的一百倍, 纵轴表示处在某段误差范围内的点占总点个数的百分比。从图中可以看出, 大多数拟合点的误差处于 2% 与 6% 之间, 平均误差为 3.88% 并且最大误差不超过 10%。因此, 我们可以直观地看出拟合结果较为成功。接下来, 我们分别对回归模型做显著性检验和拟合性检验以得出科学的结论。

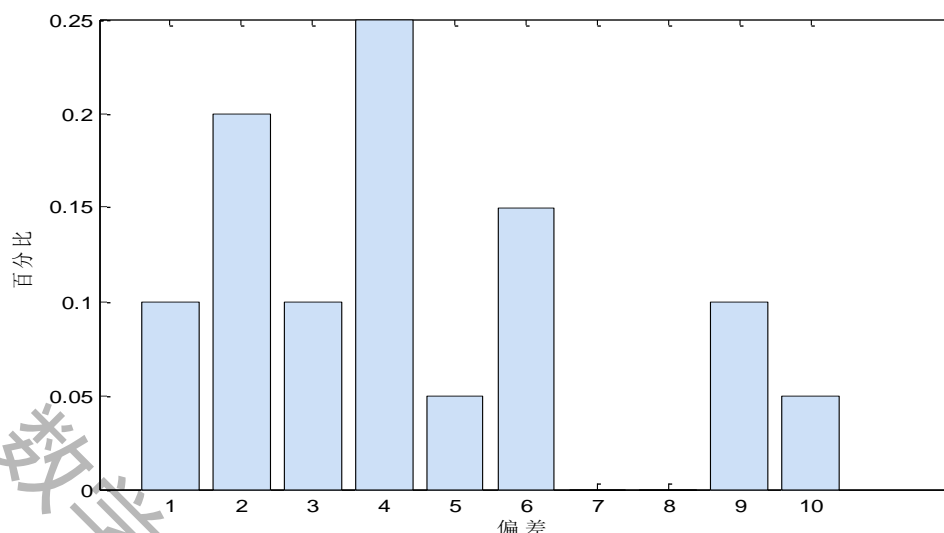


图 2.2 相对误差分布

6.2.3 回归模型的显著性检验

设 η 不依赖于 (k, ξ) , 即 $\eta = \beta_0$ 为常数, 记实验值的均值为 $\bar{y} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} y_i$, 其总偏差平方和为 SS_T , 即

$$SS_T = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{20} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (2.11)$$

定义残差平方和 $SS_E = \sum_{i=1}^{20} (y_i - \hat{y}_i)^2$, 回归平方和 $SS_R = \sum_{i=1}^{20} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$, 复相关系数为 $R = SS_R / SS_T$ ($0 \leq R \leq 1$), 用 R 衡量模型的有效性, R 越大, 回归变量与响应间的关系越密切。

可以求出总偏差平方和自由度为 $f_T = 20 - 1 = 19$, 回归平方和自由度为 $f_R = 3 - 1 = 2$, 残差平方和自由度为 $f_E = f_T - f_R = 19 - 2 = 17$ 。因此, 相应的均方值为

$$MS_R = \frac{1}{2} SS_R, \quad MS_E = \frac{1}{17} SS_E$$

在假设 $\eta = \beta_0$ 时, 由于 $y_i \sim N(0, \sigma^2)$, 则 $E(MS_R) = \sigma^2$, $E(MS_E) = \sigma^2$ 。这说明 MS_E 为 σ^2 的无偏估计, 即 $\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(17)$, $\frac{SS_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$, 且 SS_R 与 SS_E 相互独立。构造 F 统计量

$$F = \frac{MS_R}{MS_E} \sim F(f_R, f_E) = F(2, 17) \quad (2.12)$$

取一个显著水平 $\alpha(0.01)$, 可查表得 $F_\alpha(2, 17)$, 计算 $F(2, 17)$ 与 $F_\alpha(2, 17)$ 比较:

当 $F(2, 17) > F_\alpha(2, 17)$ 时, 认为模型是显著的, 则拒绝假设 $\eta = \beta_0$, 即 η 与 (k, ξ) 存在明显的函数关系;

当 $F(2, 17) < F_\alpha(2, 17)$ 时, 认为模型是显著的, 则认可假设 $\eta = \beta_0$, 即 η 与 (k, ξ) 不存在明显的函数关系;

查表得 $F_{\alpha}(2,17)=99.4$ ，计算得 $F(2,17)=343.275$ 。显然 $F(2,17)>F_{\alpha}(2,17)$ ，所以拒绝假设 $\eta=\beta_0$ ，即 η 与 (k,ξ) 存在明显的函数关系。

6.2.4 回归模型的拟合性检验

将回归变量 (k,ξ) 的 20 对资料数据按相同或相近的值分成 g 组，每组个数记为 m_1, m_2, \dots, m_g ；相应地 y_1, y_2, \dots, y_{20} 也可以分为 g 组，记 $T_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}$

($i=1,2,\dots,g; j=1,2,\dots,m_i$)，则第 i 组的平均值为 $\bar{y}_i = \frac{T_i}{m_i}$ 。正规方程组第 i 组的实验随机误差的平方和为

$$SS_e = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{m_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^g \frac{T_i^2}{m_i} \quad (2.13)$$

记模型 (2.1) 中误差平方和 SS_{Me} ，它表示其他因素对模型的影响误差，则

$$SS_{Me} = SS_E - SS_e = \sum_{i=1}^g \frac{T_i^2}{m_i} - Y^T X \hat{\beta} \quad (2.14)$$

其自由度分别为 $f_e = 20 - g$ ， $f_{Me} = g - 3$ 。

在模型 (2.1) 为真的条件下，可得 $E(MS_e) = \sigma^2$ ， $E(MS_{Me}) = \sigma^2$ ，且 SS_e 与 SS_{Me} 相互独立，由 χ^2 分布的性质得

$$\frac{SS_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(20-g) \quad \frac{SS_{Me}}{\sigma^2} \sim \chi^2(g-m)$$

因此

$$F = \frac{MS_{Me}}{MS_e} \sim F(f_{Me}, f_e) = F(g-m, 20-g) \quad (2.15)$$

即为拟合检验的统计量。

取一个显著水平 $\alpha(0.01)$ ，可查表得 $F_{\alpha}(g-m, 20-g)$ ，计算 $F(g-m, 20-g)$ 与 $F_{\alpha}(g-m, 20-g)$ 比较：

当 $F(g-m, 20-g) > F_{\alpha}(g-m, 20-g)$ 时，认为模型拟合是好的，是不显著的，即模型的省略项造成的误差影响不大。

当 $F(g-m, 20-g) < F_{\alpha}(g-m, 20-g)$ 时，认为模型拟合是不好的，是显著的，即模型的省略项造成的误差影响不可忽略。

6.3 问题三 框架群顺水流方向铺设长度对减速比的影响

为方便后面对问题的讨论，我们采用了归一化模型，首先定义相对减速比 η^* ： $\eta^* = \eta_L / \eta_{\infty}$ 。其中， η_L 为框架群抛投长度为 L 时的减速比， η_{∞} 为框架群抛投长度为无穷大时的减速比。

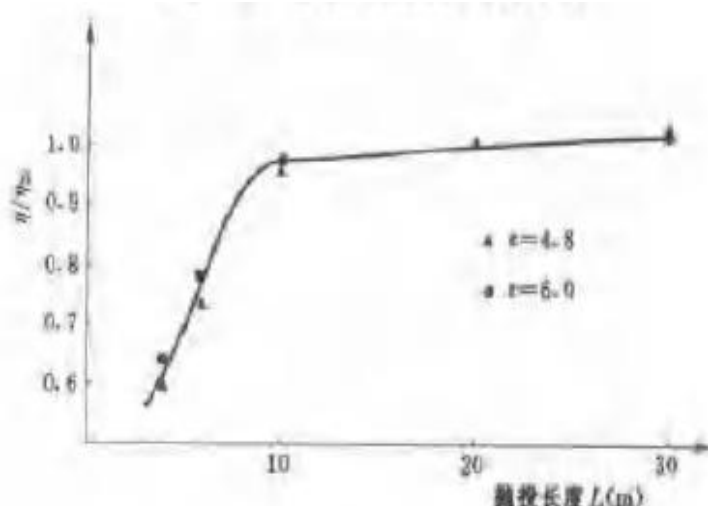


图 3.1 框架群投射长度对相对减速比的关系曲线

从减速率比与框架群抛投长度的关系曲线中，我们不难看出，不同架空率所对应的相对减速比与框架群长度的关系曲线具有很强的相似性。因此，我们有理由推测，相对减速比和架空率以及框架杆长宽比之间是相互独立的，即在不同的长宽比和架空率的条件下，相对减速比与抛投长度的函数关系曲线是一样的。为了证明我们推测的正确性。我们对实验中的数据进行相关性检验，通过 SPSS 软件，求得不同框架杆长宽比和不同抛投长度下的几组实验数据的相关性系数为 0.9999，满足相关性系数的检验。这也就证明了我们前面的推测：相对减速比与框架杆长宽比，框架群架空率之间是相互独立的。

通过上面的分析与论证，我们可以得到以下求解减速率的表达式：

$$\eta_L = \frac{\eta_L}{\eta_\infty} \eta_\infty \quad (3.1)$$

由于在上一问中我们已经求得在长度为无穷大的时候，减速率和架空率和长细比之间的函数表达式，见式 (2.10)。那么将此公式乘以式 (3.1) 就得到抛投长度为 L 时的减速比。

现在我们要解决的问题就是求出相对减速比 η^* 和抛投长度 L 的函数关系式。利用《江河护岸新技术》中的实验数据，通过拟合得到函数表达式如下：

$$\eta^* = \begin{cases} 0.053L + 0.41 & (0 < L < 10) \\ 0.0032L + 0.9 & (10 \leq L < \infty) \end{cases}$$

对应的 $\eta^* \sim L$ 曲线如图 3.2，我们可以从中得出框架群长度与减速率的关系：当抛投长度 $L \geq 10m$ 时，增加抛投长度对减速比的影响并不明显。而且经过过计算，当抛投长度 $L \geq 10m$ 时，相对减速比的变化仅为 1~2 个百分点。因此在工程实践中，我们大多选取框架群的抛投长度为 10 米左右。

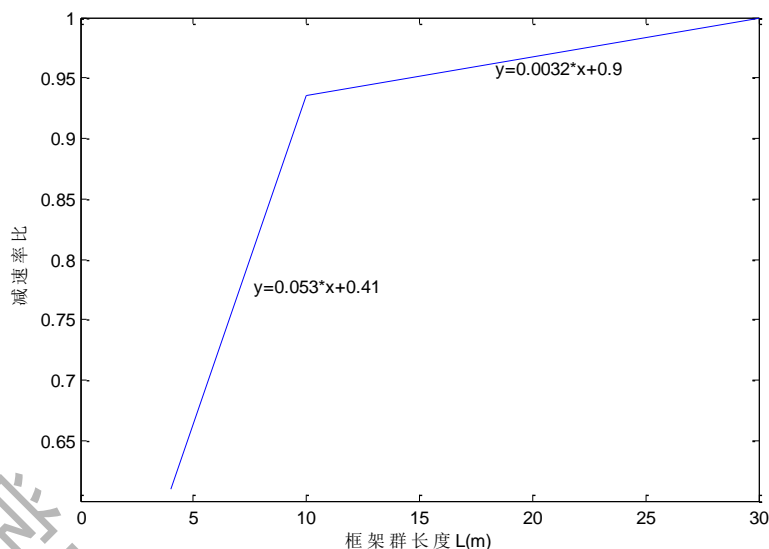


图 3.2 相对减速比 η^* 与框架群抛投长度间的函数关系

至此，我们可以得到减速比 η 和框架杆截面形状、长宽比 k ，框架群架空率 ξ 、抛投长度之间的经验公式：

$$\eta_L = \tau \eta^* \eta_\infty$$

其中， τ 为截面形状不同引起的修正量（当截面形状为正方形时取 $\tau=1$ ，当截面形状为圆形时取 $\tau<1$ ，当截面形状为三角形时取 $\tau>1$ ）， η^* 体现了框架群抛投长度对减速比的影响， η_∞ 体现了框架杆长宽比及框架群架空率对减速比的综合影响。具体影响关系式如下：

$$\eta^* = \begin{cases} 0.053L + 0.41 & (0 < L < 10) \\ 0.0032L + 0.90 & (10 \leq L < \infty) \end{cases}$$

$$\eta_\infty = 1.000f_1(k) + 1.000f_2(\xi) - 0.682$$

$$f_1(k) = -4.80 \times 10^{-5}k^3 + 6.85 \times 10^{-4}k^2 + 0.015k + 0.503$$

$$f_2(\xi) = -0.011\xi^2 + 0.110\xi - 0.330\xi + 0.900$$

通过对该经验公式求导，并综合上文的分析，我们发现当框架杆截面为正方形，且长宽比为 15.97，框架群架空率为 4.67，抛投长度为 10m 时，四面六边透水框架的减速效果最好，减速比可达到 70% 以上，这也与工程实践得的结论一致，进而表明了模型求解的正确性。

7. 模型评价

7.1 模型优点

- (1) 借助势流理论，通过计算机模拟，求得均匀流流过不同截面物体时的流场分布。求解方法简单，将求解结果与实验结果进行对比，发现吻合的非常好。
- (2) 根据对以往实验数据和以往经验公式的分析，通过曲线拟合和二元线性回归得到减速比和框架杆长宽比，框架群架空率以及框架群抛投长度之间综合的经验公式。方便以后对实际问题的求解。

7.2 模型缺点与改进

- (1) 利用势流理论分析不同形状截面对均匀流场的影响时，假设流体处于层流状态，对模型进行求解。而实际生活中，水流在雷诺数大于 4000 时，已经处于紊流状态。然而紊流的流动状态十分复杂，一般不好求解。模型下一步可以通过求解紊流状态下的 N-S 方程，并通过 Fluent 模拟计算真实的流场分布。
- (2) 利用多元线性回归模型求解减速比与框架杆长宽比，框架群架空率、抛投长度的经验公式时，虽然模型的平均误差在 5% 以内，但误差还是偏大。这可能与实验数据不精确或者回归变量之间存在耦合有关系。模型下一步可以进行更加精确的非线性拟合，以期得到更加精确的经验公式。

数学中国提供 (www.madio.net)

参考文献

- [1] 安德森, 空气动力学基础, 北京: 航空工业出版社, 2010.
- [2] 王南海, 张文捷, 王玢, 新型护岸技术----四面六边透水框架群在长江护岸工程中的应用, 长江科学院院报[J], Vol.16, No.2, P11-16, 1999.
- [3] 韩中庚, 数学建模方法及其应用, 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [4] 吴龙华, 周春天, 严忠民, 王南海, 架空率、杆件长宽比对四面六边透水框架群减速促淤效果的影响, 水利水运工程学报[J], No.3, Sep.2003, P74-77.

数学中国提供 (www.madio.net)

附录

程序：

(1) 绘制不同截面形状对减速比的影响曲线

```
function []=bj() %%不同截面形状对减速比的影响曲线
figure;
[M1 V1]=jsb1;
[M2 V2]=jsb2;
[M3 V3]=jsb3;

plot(M1,V1,'ro');
plot(M2,V2,'rs');
plot(M3,V3,'b^');
legend('圆形截面','正方形截面','三角形截面');
xlabel('距离框架中心的距离');
ylabel('减速率');
t=1:0.5:5;
nn=length(t);
for i=0.1:0.1:1
    for j=1:nn
        y(j)=i;
    end
    plot(t,y,'c','linewidth',0.5);
end
hold off
End
```

(2) 圆形截面对应流场分布

```
function [M V]=jsb1()
R=1;
Vinf=1/(2*pi);
M=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(M);
V=qdIry1;
M=[R M];
V=-[-1/(2*pi) V]/Vinf;
%figure;
%plot(M,V,'ro');
plot(M,V);
hold on

%hold off;
end
%%
function [A B Phi Beta]=qdA1()
b=2*pi/16;
R=1;
```

```

for i=1:8
    a=(2*i-1)*b;
    A(i,1)=R*cos(a);
    A(i,2)=R*sin(a);
end
for i=1:8
    if i==1
        B(i,1)=(A(i,1)+A(8,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(8,2))/2;
    else
        B(i,1)=(A(i,1)+A(i-1,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(i-1,2))/2;
    end
end
for i=1:8
    Phi(i)=3*pi/2+2*b*(i-1);
end
Beta=Phi+pi/2;
end
%%
function I=qdI1()
n=8;
[P M Phi Beta]=qdA1;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=pi;
        else
            A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
            B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
            C=sin(Phi(i)-Phi(j));

            D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
            if j==8
                k=1;
            else
                k=j+1;
            end
            S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
            E=sqrt(B-A^2);

            I(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A
            *C)/E;
        end
    end
end
end
end
%%
function V=qdIry1()
R=1;

```



```

n=8;
K=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(K);
NN=zeros(1,m);
N=[K;NN]';
[P M Phi Beta]=qdA1;
Lamda=qdLmd1;
for i=1:m
    Iry=zeros(1,n);
    for j=1:n
        %if i==j
        %    I(i,j)=pi;
        %else
        A=-(N(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(N(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
        B=(N(i,1)-P(j,1))^2+(N(i,2)-P(j,2))^2;
        C=sin(pi*3/2-Phi(j));

        D=-(N(i,1)-P(j,1))*sin(pi*3/2)+(N(i,1)-P(j,2))*cos(pi*3/2);
        if j==n
            k=1;
        else
            k=j+1;
        end
        S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
        E=sqrt(B-A^2);

        Iry(j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A*C)/E;
    end
    V(i)=Iry*Lamda/(2*pi);
end
end
function Lamda=qdLmd1()
I=qdI1;
[P M Phi Beta]=qdA1;
n=8;
Vinf=1/(2*pi);
b=zeros(8,1);
for i=1:n
    b(i)=-2*pi*Vinf*cos(Beta(i));
    %b(i)=-2*pi*Vinf*0.7071;
    %b(i)=-0.7071;
end
Lamda=inv(I)*b;
end
%%
function Is=qdVs1()
n=8;
Lamda=qdLmd1;
Vinf=1/(2*pi);

```

```

[P M Phi Beta]=qdA1;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=0;
        else

A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
        B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
        C=sin(Phi(i)-Phi(j));

D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
        if j==8
            k=1;
        else
            k=j+1;
        end
        S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
        E=sqrt(B-A^2);

Is(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*(D-A*C)/(2*E)-(atan((S+A)/E)-atan
(A/E))*C;
        end
    end
end
s=0;
%%
for i=1:n
    s=(Is(i,:)*Lamda)/(2*pi);
    Vs(i)=Vinf*sin(Beta(i))+s;
    Cp(i)=1-(Vs(i)/Vinf)^2;
end
b=2*pi/16;
t(1)=0;
for i=2:n
    t(i)=t(i-1)+2*b;
end
figure;
plot(t,Cp,'r^');
hold on;
x=0:0.01*pi:2*pi;
y=1-4*(sin(x)).^2;
plot(x,y);
set(gca,'xtick',0:pi/2:2*pi,'xticklabel',{'0','pi/2','pi','3pi
/4','2pi'});
legend('Numerical result','Analytic result');
hold off;
end
(3) 正方形截面对应流场分布
function [M V]=jsb2() %%1/20ÃæÎªÖý·1/20Î
R=1;

```

```

vinf=1/(2*pi);
M=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(M);
V=qdIry2;
M=[R M];
V=-[-1/(2*pi) V]/Vinf;
%figure;
%plot(M,V,'rs');
plot(M,V,'g');
%hold on

%hold off;
end
%%
function I=qdI2()
n=4;
[P M Phi Beta]=qdP2;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=pi;
        else
            A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
            B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
            C=sin(Phi(i)-Phi(j));
            D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
            if j==n
                k=1;
            else
                k=j+1;
            end
            S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
            E=sqrt(B-A^2);
            I(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A*C)/E;
        end
    end
end
end
end
%%
function V=qdIry2()
R=1;
n=4;
K=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(K);
NN=zeros(1,m);
N=[K;NN]';
[P M Phi Beta]=qdP2;

```

```

Lamda=qdLmd2;
for i=1:m
    Iry=zeros(1,n);
    for j=1:n

A=-(N(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(N(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
        B=(N(i,1)-P(j,1))^2+(N(i,2)-P(j,2))^2;
        C=sin(pi*3/2-Phi(j));

D=-(N(i,1)-P(j,1))*sin(pi*3/2)+(N(i,1)-P(j,2))*cos(pi*3/2);
        if j==n
            k=1;
        else
            k=j+1;
        end
        S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
        E=sqrt(B-A^2);

Iry(j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A
*C)/E;
        end
        V(i)=Iry*Lamda/(2*pi);
    end
end
%%
function Lamda=qdLmd2()
I=qdI2;
[P M Phi Beta]=qdP2;
n=4;
Vinf=1/(2*pi);
b=zeros(4,1);
for i=1:n
    b(i)=-2*pi*Vinf*cos(Beta(i));
    %b(i)=-2*pi*Vinf*0.7071;
    %b(i)=-0.7071;
end
Lamda=inv(I)*b;
end
%%
function [A B Phi Beta]=qdP2()
n=4;
A=[1 1;-1 1;-1 -1;1 -1];
for i=1:n
    if i==1
        B(i,1)=(A(i,1)+A(n,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(n,2))/2;
    else
        B(i,1)=(A(i,1)+A(i-1,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(i-1,2))/2;
    end
end
end

```

```

Phi=[3*pi/2 0 pi/2 pi];
Beta=Phi+pi/2;
end
%%
function [Is Vs Cp]=qdVs2()
n=4;
Lamda=qdLmd2;
Vinf=1/(2*pi);
[P M Phi Beta]=qdP2;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=0;
        else
            A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
            B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
            C=sin(Phi(i)-Phi(j));

            D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
            if j==n
                k=1;
            else
                k=j+1;
            end
            S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
            E=sqrt(B-A^2);

            Is(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*(D-A*C)/(2*E)-(atan((S+A)/E)-atan
            (A/E))*C;
        end
    end
end
s=0;
%%
for i=1:n
    s=(Is(i,:)*Lamda)/(2*pi);
    Vs(i)=Vinf*sin(Beta(i))+s;
    Cp(i)=1-(Vs(i)/Vinf)^2;
end
%b=2*pi/16;
%t(1)=0;
%for i=2:n
    % t(i)=t(i-1)+2*b;
%end
%figure;
%plot(t,Cp,'r^');
%hold on;
%x=0:0.01*pi:2*pi;
%y=1-4*(sin(x)).^2;
%plot(x,y);

```

```

%set(gca,'xtick',0:pi/2:2*pi,'xticklabel',{'0','pi/2','pi','3pi/4','2pi'});
%legend('Numerical result','Analytic result');
%hold off;
end
(4) 三角形截面对应流场分布
function [M V]=jsb2()
R=1;
Vinf=1/(2*pi);
M=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(M);
V=qdIry2;
M=[R M];
V=-[-1/(2*pi) V]/Vinf;
%figure;
%plot(M,V,'rs');
plot(M,V,'g');
%hold on

%hold off;
end
%%
function I=qdI2()
n=4;
[P M Phi Beta]=qdP2;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=pi;
        else
            A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
            B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
            C=sin(Phi(i)-Phi(j));

            D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
            if j==n
                k=1;
            else
                k=j+1;
            end
            S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
            E=sqrt(B-A^2);

            I(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A*C)/E;
        end
    end
end
end
%%

```

```

function V=qdIry2()
R=1;
n=4;
K=(1.5:0.5:5)*R;
m=length(K);
NN=zeros(1,m);
N=[K;NN]';
[P M Phi Beta]=qdP2;
Lamda=qdLmd2;
for i=1:m
    Iry=zeros(1,n);
    for j=1:n
        A=-(N(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(N(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
        B=(N(i,1)-P(j,1))^2+(N(i,2)-P(j,2))^2;
        C=sin(pi*3/2-Phi(j));
        D=-(N(i,1)-P(j,1))*sin(pi*3/2)+(N(i,2)-P(j,2))*cos(pi*3/2);
        if j==n
            k=1;
        else
            k=j+1;
        end
        S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
        E=sqrt(B-A^2);
        Iry(j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*C/2+(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*(D-A*C)/E;
    end
    V(i)=Iry*Lamda/(2*pi);
end
end
%%
function Lamda=qdLmd2()
I=qdI2;
[P M Phi Beta]=qdP2;
n=4;
Vinf=1/(2*pi);
b=zeros(4,1);
for i=1:n
    b(i)=-2*pi*Vinf*cos(Beta(i));
    %b(i)=-2*pi*Vinf*0.7071;
    %b(i)=-0.7071;
end
Lamda=inv(I)*b;
end
%%
function [A B Phi Beta]=qdP2()
n=4;
A=[1 1;-1 1;-1 -1;1 -1];
for i=1:n

```

```

    if i==1
        B(i,1)=(A(i,1)+A(n,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(n,2))/2;
    else
        B(i,1)=(A(i,1)+A(i-1,1))/2;
        B(i,2)=(A(i,2)+A(i-1,2))/2;
    end
end
Phi=[3*pi/2 0 pi/2 pi];
Beta=Phi+pi/2;
end
%%
function [Is Vs Cp]=qdVs2()
n=4;
Lamda=qdLmd2;
Vinf=1/(2*pi);
[P M Phi Beta]=qdP2;
for i=1:n
    for j=1:n
        if i==j
            I(i,j)=0;
        else
            A=-(M(i,1)-P(j,1))*cos(Phi(j))-(M(i,2)-P(j,2))*sin(Phi(j));
            B=(M(i,1)-P(j,1))^2+(M(i,2)-P(j,2))^2;
            C=sin(Phi(i)-Phi(j));
            D=-(M(i,1)-P(j,1))*sin(Phi(i))+(M(i,2)-P(j,2))*cos(Phi(i));
            if j==n
                k=1;
            else
                k=j+1;
            end
            S=sqrt((P(k,1)-P(j,1))^2+(P(k,2)-P(j,2))^2);
            E=sqrt(B-A^2);
            Is(i,j)=log((S^2+2*A*S+B)/B)*(D-A*C)/(2*E)-(atan((S+A)/E)-atan(A/E))*C;
        end
    end
end
end
s=0;
%%
for i=1:n
    s=(Is(i,:)*Lamda)/(2*pi);
    Vs(i)=Vinf*sin(Beta(i))+s;
    Cp(i)=1-(Vs(i)/Vinf)^2;
end
%b=2*pi/16;
%t(1)=0;
%for i=2:n

```



```

% t(i)=t(i-1)+2*b;
%end
%figure;
%plot(t,Cp,'r^');
%hold on;
%x=0:0.01*pi:2*pi;
%y=1-4*(sin(x)).^2;
%plot(x,y);
%set(gca,'xtick',0:pi/2:2*pi,'xticklabel',{'0','pi/2','pi','3pi/4','2pi'});
%legend('Numerical result','Analytic result');
%hold off;
end

```

(2) 计算多元线性回归函数的误差百分比

```

function [n aa]=hanshu() %误差百分比
a=[3 4 4.8 6];
b=[8 10 12 16 20];
k=1;
for i=1:4
    for j=1:5
        x(k,1)=a(i);
        x(k,2)=b(j);
        k=k+1;
    end
end
for i=1:20
    y(i)=-0.03*(x(i,1))^2+0.28*x(i,1)+0.054-4.8*10^(-5)*(x(i,2))^3
    +0.00068*(x(i,2))^2+0.015*x(i,2)+0.5-0.68;
    %y(i)=-0.011*(x(i,1))^3+0.11*(x(i,1))^2-0.33*x(i,1)+0.9-4.8
    *10^(-5)*(x(i,2))^3+0.00068*(x(i,2))^2+0.015*x(i,2)+0.5-0.68;
end
y=y';
t=load('t.txt');
aa=abs(t-y);
bb=round(aa*1000);
n=zeros(10,1);
for i=1:20
    j=ceil(bb(i)/10);
    n(j)=n(j)+1;
end
m=n/(sum(n));
t=1:10;
bar(t,m,'c');
xlabel('偏差');
ylabel('百分比');
end

```

(3) 求解经验公式极值

```

function y=qiufc() %%求方程极值
syms x

```

```
f1=-0.03*x^2+0.28*x+0.054;  
y(1)=solve(diff(f1));  
f2=-4.8*10^(-5)*x^3+0.00068*x^2+0.015*x+0.5;  
y(2)=solve(diff(f2));  
end
```

数学中国提供 (www.madio.net)