题　目　E 题 可乐杯大小的设计和定价

关 键 词　定价的合理性　经济利益　顾客满意度　可乐杯大小

摘　　要：

销售商的利润的多少来源于单位商品的价格与单位商品的生产价格的差额与出售的数量的乘积。所以如何增加这差额和出售的数量是销售商所要考虑的。而出售的数量在于销售商方案是否符合顾客的满意度。

这是一个关于麦当劳等大型快餐店中都提供可乐饮料杯子的大小和价格合理性的问题。我们要从销售商的角度出发在经济利益和顾客满意度之间找到一个平衡点，我们知道可乐的利润问题以及是否可以免费续杯一直是影响顾客满意度的重要方面。要求我们在商家的角度制定一个可以实现可乐免费续杯的可乐杯大小的设计和定价方案。可乐的密度和水的密度差不多，假设 1 升可乐的成本约为 3 元。从追求某个目标利润的角度建立两个协调意义的利润模型合并求得第二问。从手机的方案得到了关于可以实现可乐免费续杯的可乐杯大小的设计和定价方案——套餐方案。我们在提高经济的同时不应该不考虑我们的生存环境，这要求我们不能浪费自然资源，所以我们还应该再考虑怎样才能用最少的材料生产出体积最大的杯子。

参赛队号 # 1197

参赛密码 ________
（由组委会填写）

所选题目　E 题 可乐杯大小的设计和定价

问题分析

第一问的分析：从销售商的角度出发建立模型，我们可以从所获得利润来判断可乐杯大小设计和定价的合理性。我们先求出每盎司可乐的成本，即为 $3\times28.35\div1000=0.08505$ 。那么获得利润就等于定价减去不同每盎数的杯子乘以 0.08505 所得。在生活中我们知道顾客在购买商品时总会希望由于自己所要多，相对每个商品的价格要低才符合自己的满意度。所以每盎数越大越利润越高的话就说明题目中可乐杯大小设计和定价的合理性。

第二问的分析：顾客的满意度与能不能续杯有关是因为顾客认为每盎数相对太大了。如果要建立一个用可乐杯大小设计来表示价格的函数，它能满足顾客续杯又能获得销售商所要的最低目标利润的话，我们可以从全部出售的可乐数来求所获得的利润，也可以从出售每盎数来求所获得的利润，但是从出售每盎数来求所获得的利润来求会容易理解，因为不用考虑出售量的多少。如果最低目标利润与每盎数的成本是关于某个常数成正比，则可以从价格的差额和最低目标利润是成本的多少倍的不同角度来建立两条关于每盎数所获得的利润的方程合并来求得所要的表达式就是关于杯的大小和定价多少的函数了。

模型优化一的分析：对于不同的人群需求可乐的量会有所不同，如果对不同需求量的顾客续相同杯数的话，这显然是不合理的，它不能完全的满足顾客的满意度，而且它还很有可能造成可乐的浪费等问题。所以我们应该以套餐的形式来满足不同需求量的顾客。套餐不只是能满足可乐的需求，同时也带来其他的利润。

模型优化二的分析：模型优化二只是在模型优化一的基础上减去生产杯子所用的造价而已。

模型优化三的分析：我们与常用的形状来作比较看那个在体积相等性下表面积最小，就应用它作为杯子的模型。我们首先分别以相似形状的杯子做比较，然后在用分别中最小的个又作新的一次比较，最后就得的这些中最好的模型了。在生活中我们用来装液体有长方体和正方体，圆柱和圆台。

相关符号

符 号	含义	单位	备注
M(k)	利润	元	为了美观不把全部的相关符号放在表格中，但是在相应用到地方已经明确的说明了
Q(k)	每杯可乐的价格	元	
k	每杯可乐的盎司数	盎司	
X	免费续的杯数	杯	
W（k）	每盎司的价格	元/盎司	
Y(k)	套餐中除了可乐外的总价格	元	
L	出售量	盎司	
α	正方体的边长	cm	
β	长方体的长	cm	
δ	长方体的宽	cm	
α	长方体的高	cm	
V	杯子的容积	cm^2	
S	杯子的表面积	cm^2	
H	杯子的高度	cm	

模型假设

假设㈠：不考虑杯子的造价，不考虑价格所带来供求关系的改变，可乐量由机器严格的控制。

假设㈡：销售商的目标，每盎司可乐的利润是成本的 a（常数）倍。

假设㈢：顾客续的标准是喝到自己不想喝就停止，而没有半点浪费，X 有个可以接受的最大值。

模型建立与求解

第一问： 由上述分析我们可以建立一个所获得利润的模型为

$$W(k)=Q(k)-0.08505k$$

我们分别带入数据并且求解如下：

$$\begin{cases} M(22)=Q(22)-0.08505\times 22=5.5-1.8711=3.6289 \\ M(16)=Q(16)-0.08505\times 16=4.5-1.3608=3.1392 \\ M(12)=Q(12)-0.08505\times 12=3.5-1.0206=2.4794 \end{cases}$$

由上我们可以知道销售商设计可乐杯大小和定价所获得利润是按盎司数的而增加的，所以可乐杯大小设计和定价的是合理性。

第二问： 由假设㈡我们可以建立每盎司获得利润为

$$M(k)=0.08505a \qquad ①$$

那么同样的我们也可以建立每盎司可乐的价格为

$$W(k)=Q(k)\div k \qquad ②$$

由于除了第一杯外其他的都是免费的，所以相对的每盎司的成本为

$$0.08505(X+1)k \qquad ③$$

如果我们按照单位商品的价格与单位商品的生产价格的差额来建立利润模型，则如下

$$M(k)=W(k)-0.08505(X+1)k \qquad ④$$

联立①②③④并且整理得

$$Q(k)=0.08505(X+1)k^2+0.08505ak \qquad ⑤$$

那么如果我们要制定一个可以实现可乐免费续杯的可乐杯大小的设计和定价方案，则要满足模型⑤才可行。

模型扩展与优化

在生活中人们总会同时消费多种商品，麦当劳的可乐也是如此，所以消费者就希望通过在一次性购买多个或多种商品来得到相对每个商品的低价格，这样就出现了套餐。也许每件商品的价格会相对的减少，但是相对应消费者会增加，消费者会增加将带来商品出售的增加。我们知道利润是价格差与商品的出售量的乘积。上模型的除第一杯外完全免费，可能会带来商品的浪费问题，杯子的生产总需要成本吧，而成本的多少和所用纸的面积、单位纸张的价格有关所以模型需要扩展与优化。

模型的假设扩展

假假设㈣：消费者人数与每杯的价格成反比，比例系数为 C（C＞0）。

假设㈤：每个杯子的造价为常数 D，不同形状每个杯子的高度都相等。

因为除了第一杯外其他都是免费的，所以出售花钱的杯数等于消费者人数，即花钱的杯数等于 L，总出售的盎司数为 k（X+1）L，那么相对的总的成本为 0.08505k（X+1）L。

优化⑴：由上述分析我们可以建立新的利润的套餐模型为

$$M(k)=Q(k)L+Y(k)-0.08505k(X+1)L \qquad ⑥$$

由假设㈣和上述可知花钱的杯数 L 为

$$L=C\div Q(k) \qquad ⑦$$

联立①⑥⑦并且整理得

$$Q(k)=0.08505(X+1)kC/(C+Y(k)-0.08505a) \qquad ⑧$$

所以当我们考虑价格带来的市场需求量的话第二问要满足模型⑧才成立。

优化二：在优化一的基础上考虑假设㈤，那么需要减去造价总和，我们建立的模型为

$$Q(k)=(0.08505+D)(X+1)Ck/(C+Y(k)-0.08505a) \qquad ⑨$$

这个模型只是以上模型的扩展，在生产纸杯时，所用的造价与所用纸的面积是成正比的，我们应该对杯子的形状分析得到一个在相同体积下所用的纸的面积最小来减纸杯的造价。

优化三：首先对长方体和正方体作比较，分别列出它们的体积和面积。然后对圆柱和圆台分析，最后取它们中大的比较得的我们常见图形中最好的一个，做为杯子的模型。

V 正=a^3

S 正=6a^2

V 方=αβδ

S 方=2（αβ+βδ+αδ）

由长方体的表面积分析有

S 方=2(αβ+βδ+αδ)

=2（α^3/α+α^3/β+α^3/δ）

=2α^3(1/α+1/β+1/δ)

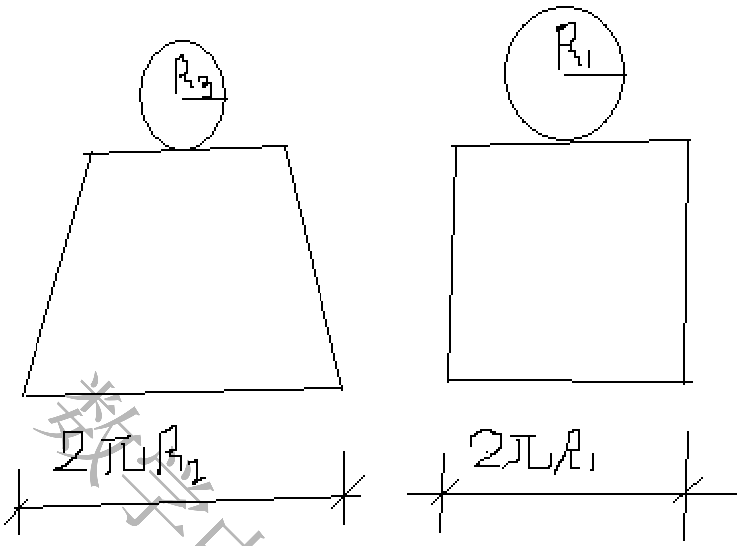
≥6α^3√1/αβδ

=6α^2

=s 正

由于高和体积都相等，所以容易知道 βδ=α 的平方，即下底的面积相等。因此同时减去一个相等的上部面积结论不变

设圆柱的底面半径为 R1，圆台的上底面半径（大的为上）为 R2，圆台的下底面半径为 R3。我们假设它们的表面积相等，则如下图；



我们容易知道 R2<R1<R3,我们对圆台表面积分析和与圆柱比较如下；

$S_{台}=\pi R3^2+(R2+R3)a\pi$

同上当 R2=R3 时有最小值，因此在相同的体积下，圆柱的表面积最小。

最后比较圆柱和正方体，由高和体积相等容易知道底面积是等的，所以我们只需要比较侧面积。

$R1=\alpha/\sqrt{\pi}$

$$S_{圆侧}-S_{正侧}=2\pi R/\alpha-4\alpha^2$$
$$=(2\sqrt{\pi}-4)\alpha^2<0$$

所以我们应该性质圆柱形的杯子