#1194

2013年第六届“认证杯”数学中国
数学建模网络挑战赛

题　　目　　杨阿姨的困惑

关 键 词　　微分方程　概率统计　最优化决策　需求量

摘　　要：

本文以微分方程、概率统计为理论基础，针对杨阿姨平均每天应该做多少包子的问题分别建立了微分方程模型、概率统计模型。

模型一：针对杨阿姨每天应该做多少包子而需要了解哪些情况的问题。

首先，根据需求者各个不同需求量对应的概率分布得出杨阿姨每天的平均收获的利润；

其次，建立微分方程对杨阿姨每天获得的平均利润进行求导并化简求导后的方程式；

最后，利用最优化决策得出杨阿姨在卖包子过程中获得利润的多少与她在按促销价时平均每天出售包子的个数和平均每天免费送人的个数有关。

从而解决问题一需要了解杨阿姨的包子在按促销价时平均每天出售的个数和平均每天免费送人的个数。

模型二：关于给定杨阿姨每天该做的包子数量这个问题。

首先，由模型一画出一种需求者对包子的概率密度函数图；

其次，假设需求者对包子的需求量服从正态分布，设$a=0.5$，$b=0.2$，$c=\frac{1}{3}$，$E(r)=100$，$\sigma(r)=50$，$x1=60$，$x2=140$，根据这些随机数据得出：杨阿姨做480个包子时，利润最大为129.2798元。

再次，随机输入一串离散型数据，假设这些数据为200天内以a元出售的市场需求量，得出杨阿姨做236个包子时利润为55.7862元。

最后，用正态分布得出的结果与离散分布得出的结果进行相互论证可知：每个包子赚的钱与赔钱之间的比例越大，则做的包子数就越多的结论。

参赛队号：　1194

所选题目：　D　题

参赛密码 ________

（由组委会填写）

#1194

1 问题重述

1．1 问题背景

杨阿姨每天上午在家中做好包子，下午在所住小区的大门外贩卖，晚上需要到一个小区陪孙子。杨阿姨每天为了一件事纠结：那就是不知道该做多少包子。包子成本是 2 角钱，一般买 5 角钱一个，如果包子做多了，到了距离晚上还有半个小时的时候包子还没有卖完，杨阿姨就必须减价处理，按 3 个包子 1 元钱销售；到了晚上如果仍有剩余的包子，就只能以免费送人处理掉。但是如果包子做少了，不够卖，又会造成一定的利润损失。

1．2 提出问题

问题一：为了解决杨阿姨每天应该做多少包子，需要了解哪些情况；（情况需要尽量保证杨阿姨可以回答）。

问题二：假定需要了解的情况都已经了解到，建立模型，给出每天应该做的包子数量，并进行适当论证。

2　模型假设与符号说明

2．1 模型假设

1．每天没有其他事情耽误。
2．包子各时刻的需求量的变化不因降价处理而出现大的波动。
3．包子大小基本上是一致的。
4．每天出售的价格不变。
5. 杨阿姨提供的数据符合当地的实情。

2．2 符号说明

a：出售的价格	b：所需的成本
c：促销的价格	z：所赚的利润
$f(r)$：概率密度	$Q(m)$：每天平均收入
m：每天做的包子个数	$q2$：包子处理的价格
$p(r)$：每天需求量为 r 的概率	r：以 a 元出售的市场需求量
$x1$：平均每天出售的个数	
$x2$：平均每天免费送人的个数	

3 问题的分析

3.1 价格问题的说明

本题的包子价格分为以下两种情况：

1．以正常的价格 a 元出售；

2．以处理的价格出售时，有如下两种情况：

（1）以促销价 c 元出售；

（2）以亏损成本的方式免费送人。

3.2 问题一的分析

首先，该优化问题的目标函数应是长期日平均收入等于每天收入的期望值。需求量为一个随机变量，需求量 r 可以大于等于 m，也可以小于 m，所以分两种情况：

#1194

1 当杨阿姨的包子供不应求时，将以a元全部卖出，可求出利润的表达式；

2 当杨阿姨的包子供过于求时，将以a元卖出r个包子，多余的包子可看做为处理的包子，此时以处理价$q2$元卖出，再求出利润的表达式；

其次，假定杨阿姨已经通过自己的经验掌握了需求量的统计规律性，即杨阿姨在自己销售范围内每天的需求量为r个的概率为：

$$p(r) \quad (r=0,1,2,\cdots)$$

再结合需求量r的分布规律$p(r)$求出每天平均收入的表达式；

最后表达式中需要知道的数据就是要向杨阿姨了解的情况。

3.3 问题二的分析

首先，由模型一中的（1）式推出每天所赚的钱与所做的包子数的关系；

其次，假设需求者对包子的需求量r服从参数为μ和σ^2的正态分布，代入已知的物理量，用$matlab$求出如果其服从正态分布的情况下杨阿姨每天应该做的包子个数；

再次随机带入一串符合该分布的数值继续用$matlab$得出获得最大利润时所需做的包子数；

最后，对杨阿姨每天应该做多少包子的问题进行离散型随机变量检验，通过对模型的求解从而进行相互论证。

4 模型的建立及求解

4.1 模型一：根据问题一的分析，建立相应的模型。

由题意可知：杨阿姨每天做m个包子时的收入为一个平均值$p(r)$，每天所做的包子数量与市场需求量存在以下两种情况，如下图,并分别求出利润收入的表达式。

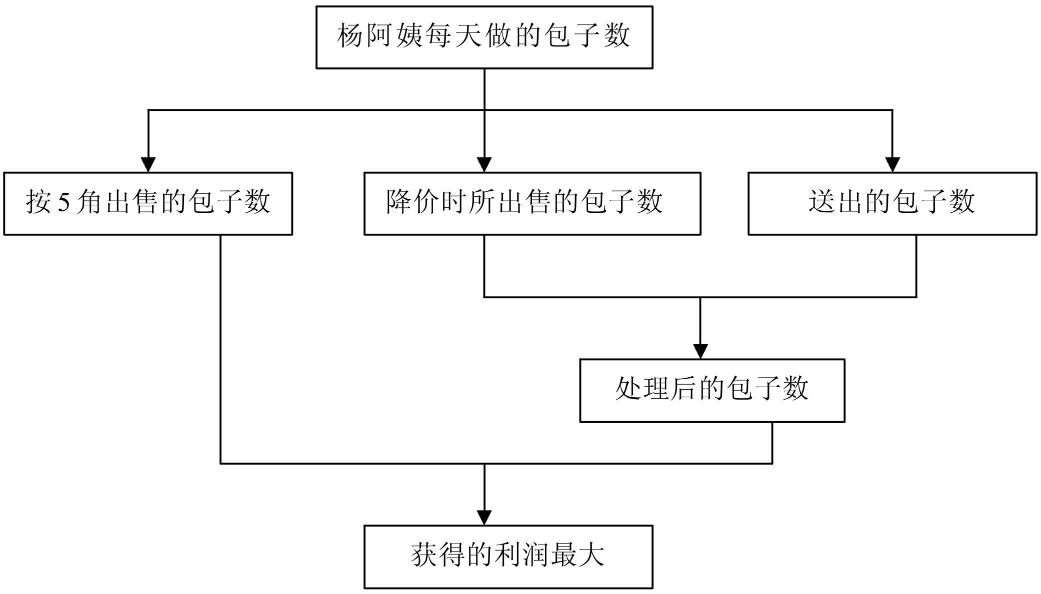

图 1：结构示意图

1. 当这天的需求量$r \geq m$时，获得的利润为如下表达式：

$$z=(a-b)\times m$$

2. 如果这天的需求量$r<m$时，获得的利润为如下表达式：

$$z=(a-b)r\text{-}(b-q2)\times(m-r)$$

#1194

故可得利润随机变量：

$$z=\begin{cases}(a-b)m & r\geq m\\(a-b)r+(b-q2)\times(m-r) & r<m\end{cases}$$

根据已知需求量r的分布规律$p(r)$如下表：

表 4.1：需求量r的分布规律$p(r)$

r	0	1	2	3	$\cdots$
$p(r)$	$p(0)$	$p(1)$	$p(2)$	$p(3)$	$p(\cdots)$

则可知每天平均收入的表达式为：

$$Q(m)=\sum_{r=0}^{m}\left[(a-b)r-(b-q2)\times(m-r)\right]p(r)+\sum_{r=m+1}^{\infty}(a-b)mp(r)$$

由于需求量r和每天做的包子个数都比较大，故可以将r视为连续型随机变量，以便分析和计算，此时需求量r的分布规律$p(r)$转化为概率密度$f(r)$来处理，则$Q(m)$变为

$$Q(m)=\int_0^{\mathrm{m}}\left[(a-b)r-(b-q2)(m-r)\right]f(r)dr+\int_{\mathrm{m}}^{\infty}(a-b)mf(r)dr$$

接下来对$Q(m)$进行求导

计算

$$\frac{dQ}{dm}=(a-b)mf(m)-\int_0^m(b-q2)f(r)dr-(a-b)mf(m)+(a-b)\int_m^{\infty}f(r)dr$$

化简得：

$$\frac{dQ}{dm}=-(b-q2)\int_0^m f(r)dr+(a-b)\int_m^{\infty}f(r)dr$$

当令$\frac{dQ}{d\mathrm{m}}=0$时，可得到：

$$\frac{\int_0^m f(r)dr}{\int_m^{\infty}f(r)dr}=\frac{a-b}{b-q2} \quad (1)$$

对于杨阿姨而言，要使平均收入达到最大，即卖出包子的最大量m应满足（1）表达式，由于需求量r为以随机变量，即有：

$$\int_0^{\infty}f\left(r\right)dr=1 \quad (2)$$

将（2）带入（1）中表达式可表示为：

$$\int_0^m f\left(r\right)dr=\frac{a-b}{b-q2}$$

则合并求解：

$$(a-b)=[(a-b)+(b-q2)]\int_0^m f(r)dr$$

$$\int_0^m f\left(r\right)dr=\frac{a-b}{a-q2} \quad (3)$$

根据价格问题的说明可知：

$$q2=\frac{c\times x1+0\times x2}{x1+x2} \quad (4)$$

将表达式（3）带入表达式（2）得：

$$\int_0^m f(r)dr = \frac{(a-b)(x1+x2)}{b(x1+x2)-cx1} \quad （5）$$

上式当中 a,b,c 都为已知，只有 $x1,x2$ 是未知的。所以，为了能解决杨阿姨每天应该做的包子数目，即需要问杨阿姨平均每天出售的个数和平均每天免费送人的个数。

4．2 模型二：根据问题二的分析，建立相应的模型。

根据市场需求量 r 的概率密度函数 $f(r)$ 的图形可确定一天所做的包子数目 m 如下图所示；

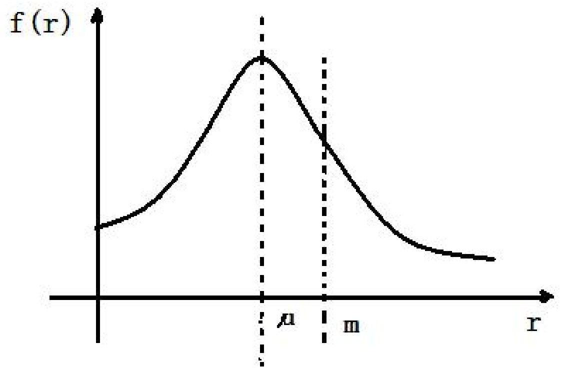

图 2：需求量的概率密度函数图

由该图再结合模型一的叙述可知，若杨阿姨做的包子数目为 m 时，$\int_m^\infty f(r)dr$ 为市场需求量 r 超过做的包子数目的概率，即以 a 元全部卖出的概率，此种情况包子将全部以 a 元，而 $\int_0^m f(r)dr$ 表示市场需求量 r 不超过做的包子数目的概率，即以 a 元不能全部卖出的概率，此种情况下包子除了以价格 a 元卖出，还将以低于 a 元的价格出售包子，由表达式（1）可知，当每个包子赚的钱与赔钱之间的比例越大，则做的包子数就越多。

设随机变量 r 服从参数为 μ 和 σ^2 的正态分布，即 $r \sim N(\mu,\sigma^2)$，则有

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad （6）$$

将（6）式代入（3）式得：

$$\int_0^m f(r)dr = \Phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{0-\mu}{\sigma}) = \frac{a-b}{a-q2} \quad （7）$$

化解表达式（1）得：

$$\Phi(\frac{m-\mu}{\sigma}) = 1-\Phi(\frac{\mu}{\sigma}) + \frac{a-b}{a-q2} \quad （8）$$

$\Phi(\frac{\mu}{\sigma})$ 只需要查标准正态分布表就可得知，而 μ 、σ 已知，$q2 = \frac{c \times x1}{x1+x2}$ 中的 $x1$ 、$x2$ 可以通过询问杨阿姨得知。则可求出每天做的包子数目 m 。

1．包子成本是 2 角钱，一般卖 5 角钱一个，减价处理时，按 3 个包子 1 元钱出售，市场需求量服从均值 450 个，方差 45 个的正态分布，降价出售的平均个数

#1194

为 60、免费送人的包子平均个数为 20，杨阿姨每天应做多少个包子才能使平均收入最高。

设 $a=0.5$， $b=0.2$， $c=\frac{1}{3}$， $E(r)=100$， $\sigma(r)=50$， $x1=60$， $x2=140$，并且所做的包子数服从正态分布，则可以将以上数值带入表达式（8）中

其中 $q2=\frac{c\times x1}{x1+x2}=0.1$

利用 $matlab$ 解得； $m\approx 480$（程序见附录 A）

再利用软件，求收入的最大值（程序见附录 B）

$$Q(m)=\sum_{r=0}^{m}\left[(a-b)r-(b-q2)\times(m-r)\right]p(r)+\sum_{r=m}^{\infty}(a-b)mp(r)\approx 20$$

所以，杨阿姨做 480 个包子时利润为 129.2798 元。

2、假设已得到 200 天的以 a 元出售的市场需求量的情况如下表：

表 4.2：以 a 元出售的市场需求量的数据

需求量	100-120	121-141	142-162	163-183	184-204
天数	6	10	22	30	31
需求量	205-225	226-246	247-267	268-288	289-309
天数	35	25	21	11	9

已知 $a=0.5$， $b=0.2$， $c=\frac{1}{3}$，为了求出最佳决策则采用以下方法，由表 4.2 可求出需求量的均值，其分布如下表所示：

表 4.3：以 a 元出售的市场需求量的均值

需求量	110	131	152	173	194
天数	6/200	10/200	22/200	30/200	31/200
需求量	215	236	257	278	299
天数	35/200	25/200	21/200	11/200	9/200

求出此样本的均值、方差及标准差：(程序见附录 C)

均值：

$$E(r)=\frac{6}{200}\times 110+\frac{10}{200}\times 131+\frac{22}{200}\times 152+\frac{30}{200}\times 173+\frac{31}{200}\times 194$$
$$+\frac{35}{200}\times 215+\frac{25}{200}\times 236+\frac{21}{200}\times 257+\frac{11}{200}\times 278+\frac{9}{200}\times 299=\ 205.4450$$

方差：

$$D(r)=E(r^2)-E^2(r)=\ 2.1380\mathrm{e}{+}003$$

标准差：

$$S=\sqrt{Dr}=46.2380,$$

所以有， $a=0.5$， $b=0.2$， $c=\frac{1}{3}$,， $E(r)=205.4450$， $\sigma(r)=46.2380$

令 $\frac{dQ}{d_n}=0$，将数据带入下列方程组利用 $matlab$ 求解（程序见附录 D 和附录 E），

#1194

$$\begin{cases} Q(m)=\int_0^{m}\left[(a-b)r-(b-q2)(m-r)\right]p(r)dr+\int_{m}^{+\infty}(a-b)mp(r)dr \\ f(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \end{cases}$$

可得：

$m=$ 236.0265，$Q(m)=55.7862$

所以，杨阿姨做 236 个包子时利润为 55.7862 元。

故由正态分布得出的结果与离散分布得出的结果进行相互论证可知：每个包子赚的钱与赔钱之间的比例越大，则做的包子数就越多的结论。

5 误差分析

在建立模型之前，为了方便解决杨阿姨每天需准备做多少包子这个问题，我们做了很多理想化的处理，比如：杨阿姨知道她每天各个不同价位的包子在相应的时间段内所卖出的数目分别对应的概率。而在实际生活中这个问题受很多因素的影响，不是很稳定，在不通过刻意的去了解、去注意这方面的事情很难得出准确的数据，所以根据我们对该问题的分析与卖包子职业的认识，列出影响杨阿姨每天卖多少包子的问题上主要有哪些因素。关系图如下：

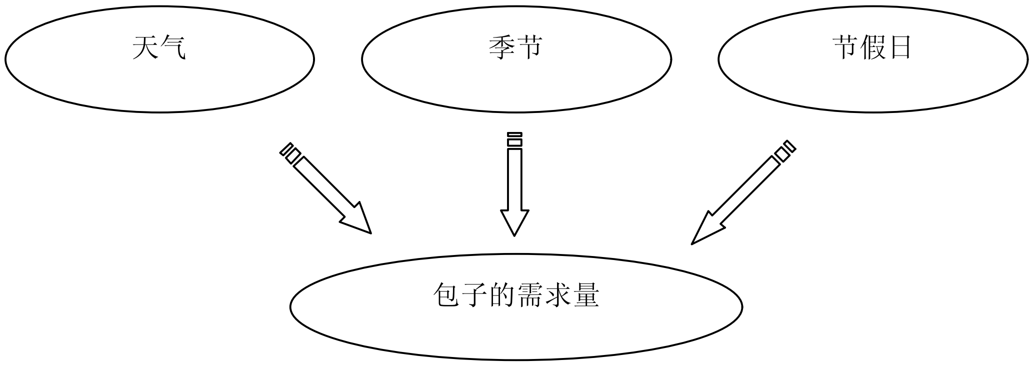

图 3：影响需求者对包子需求量的主要因素

以下为对上图的综合论述：

1. 考虑到天气的影响

卖包子的情况中，天气会影响在杨阿姨所设包子铺周围的人流量，也会影响需求者对包子的选择（对包子的选择：不买包子而换其它可以替代的东西，或者直接不买），上面的模型只考虑常态，使得计算结果有误差。

比如当天下午天气不好而下雨或下雪：1. 会阻挡人们出行；

2. 在距离杨阿姨包子铺比较远而想要买杨阿姨包子或离不远而想要买杨阿姨包子的需求者在这种情况下会权衡买包子是否可取，而且在权衡过程中这个因素所占权重比较大，往往会因为这个因素放弃到杨阿姨那买包子，故杨阿姨在当天卖出的包子数量下降的幅度比较大。

2．考虑到季节的影响

同理，季节的不同也会影响人们对包子的需求，而模型中直接按平均值，没有分开讨论，使得误差很明显。

比如在夏天，由于温度高，空气干燥炎热，生理上的稳态就容易失调而导致肠胃对事物的不消化，从而使得人们在食物的选择上偏向对小分量，包子就是其中重要的一员，

销量明显比其他季节要高。

3.考虑到节假日的影响

同理，在节假中，人们的时间充裕，对食物选择的范围上比平时更加广泛，从而在计算中存在不可避免的误差。

6 模型的分析和推广

当杨阿姨所做包子赚钱与赔钱之比越大时，所做的包子数就应该越多。这个问题属于随机存储模型，由于需求量是随机变量，在知道其概率分布的前提下，构造利润函数（它是随机变量的函数）也是随机变量，根据期望利润最大，确定最佳的货品数量。

在当今社会，科学的管理方法和手段运用的越来越多，管理层也需要考虑，怎样改进粗放的管理模式，才能提高企业的管理水平，从而提高企业的效益。在管理实践中，我们会发现，与该问题类似的问题非常多，这样我们就可以将杨阿姨的困惑问题的研究方法运用到实践中，通过科学的调查、计算，把过去经验的管理方法，上升到科学的管理方法。从而提高社会生产力，提高效率及物品的利用率。

7 参考文献

【1】 吴建国 主编《数学建模案例精编》中国水利水电出版社 2005.5

【2】 姜启源 谢金星 叶俊 编著《数学模型》(第三版)，高等教育出版社 2003.8

【3】 孙祥等编著《 *matlab* 7.0 基础教程》，北京：清华大学出版社，2005.5

8 附录

附录A

```
function qiu
a=0.5;b=0.2;q2=0.1;p=450;p1=45;
m=norminv((a-b)/(a-q2),p,p1)
```

附录B

```
syms  r
a=0.5;b=0.2;c=1/3;p1=450;p2=45;m=480;x1=60;x2=140;
q2=c*x1/(x1+x2);
P=1/(sqrt(2*pi)*p2)*exp(-(r-p1)^2/(2*p2^2));
Gn=int(((a-b)*r-(b-q2)*(m-r))*P,0,m)+int((a-b)*m*P,m,inf);
double(Gn)
```

附录C

```
function w
w=[110  131 152 173 194 215 236 257 278 299];
w1=[6/200   10/200   22/200   30/200   31/200 35/200   25/200   21/200   11/200   9/200];
W=sum(w.*w1)
Dr=sum(w.^2.*w1)-W.^2
S=sqrt(Dr)
```

附录D

```
function qiu1
a=0.5;b=0.2;q2=0.1;p=205;p1=46;
m=norminv((a-b)/(a-q2),p,p1)
```

附录E

```
syms r
x1=60;x2=140;c=1/3;a=0.5;b=0.2;m=236.0265;p=205.445;p1=46;
q2=(c*x1)/(x1+x2);
pi=1/(sqrt(2*pi)*p1)*exp(-(r-p)^2/(2*p1^2));
Gm=int(((a-b)*r-(b-q2)*(m-r))*pi,0,m)+int((a-b)*m*pi,m,inf);
double(Gm)
```