

# 第十二届中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: [service@tzmcm.cn](mailto:service@tzmcm.cn)

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为： 5428

参赛队员（签名）：

队员 1: 葛志金

队员 2: 常子健

队员 3: 李旭

参赛队教练员（签名）: 毛睿

参赛队伍组别（例如本科组）： 本科组

# 第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: [service@tzmcm.cn](mailto:service@tzmcm.cn)

---

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

5428

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第十二届中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: [service@tzmcm.cn](mailto:service@tzmcm.cn)

## 2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 纸飞机在飞行状态下的运动模型

关 键 词 牛顿力学定律，理想状态下的斜抛运动模型，非理想状态下的斜抛运动模型，最佳投掷角度，最远飞行距离，阻力系数。

### 摘 要：

世界上有若干个具有一定影响力的纸飞机比赛，其中有一种叫 Suzanne 的折法的纸飞机创造了纸飞机飞行距离最远的世界纪录。本文通过对纸飞机在飞行状态下的受力分析，通过纸飞机的三视图与重心位置，计算出了纸飞机飞行最远距离时的最佳投掷角度，同时分析重力位置对纸飞机飞行状态的影响，简要概述了纸飞机稳定性较好时的重心位置，同时对模型进行了推广应用。

首先，对一些基本的斜抛运动做分析，通过运用牛顿力学定律，建立了理想状态下的斜抛运动模型，计算出了在不考虑纸飞机初始掷出高度与阻力的情况下的最佳的投射角度为  $45^\circ$ 。

接着，考虑了纸飞机掷出时存在初始高度的情况，改进了理想状态下的斜抛运动模型，通过运用实际的数据进行计算，得到了在不同初始高度与初始速度的情况下飞机的掷出的最佳角度与纸飞机的最远飞行距离，详细数据见附录。

然后，又加入了空气对纸飞机存在浮力与阻力的因素，改进了前面两个模型，建立了非理想状态下的斜抛运动模型，通过对不同阻力系数的研究，得到了阻力系数对纸飞机飞行最远距离的影响，同时也求出了不同阻力系数下的最佳掷出角度，详细数据见正文。

最后，又分析了飞机自身重心位置与空气对纸飞机作用力不在同一位置的情况，通过建立方程组，进一步优化了飞机在非理想状态下的斜抛运动模型。

本文的优点在于通过简单的运动模型，逐渐深化改进，完善模型，最终建立一个比较完整的纸飞机运动模型。同时考虑了实际的情况下纸飞机的不同受力情况，使得建立的模型真实有效。最后对模型进行了推广与应用，在生产生活的其他方面具有较大的参考意义。

参赛队号： 5428

所选题目： A 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第十二届中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: [service@tzmcm.cn](mailto:service@tzmcm.cn)

## 英文摘要

There are several influential paper airplane competitions in the world. Suzanne, a folding paper airplane, set the world record for the longest distance traveled by a paper airplane. This paper analyzes the force of paper airplane in flight, based on the three views and the position of the center of gravity of the paper airplane, the optimal throwing Angle of the paper airplane during the longest flight is calculated. At the same time, the influence of gravity position on the flight state of paper airplanes is analyzed. The position of the center of gravity of paper airplanes with good stability is briefly summarized. At the same time, the model is popularized and applied.

First of all, to some basic oblique movement for analysis, using Newton's laws of mechanics, established under the ideal state of oblique motion model, calculated the without considering throw paper airplanes initial height and the resistance of the best under the condition of the projection Angle  $45^\circ$ .

Then, considering the existence of the initial height when the paper plane is thrown, the inclined parabolic motion model under the ideal state is improved, and the actual data is used for calculation, and the aircraft is thrown at different initial heights and initial speeds. The best angle is the furthest flight distance of the paper plane. See the appendix for detailed data.

Then, we added the factors of buoyancy and resistance of air-to-paper airplanes, improved the first two models, and established a parabolic motion model under non-ideal conditions. Through the study of different drag coefficients, we obtained the drag coefficient paper. The farthest distance of the flight of the aircraft, but also the best throwing angle under different drag coefficients, the detailed data can be found in the text.

Finally, we analyze the situation that the center of gravity of the aircraft is not in the same position as the air-to-paper plane. By establishing the equations, the model of the oblique-slipping motion of the aircraft in non-ideal state is further optimized.

The advantage of this paper is that it gradually deepens and improves the model through a simple motion model, and finally establishes a relatively complete paper airplane motion model. At the same time, considering the different stress conditions of the paper plane under the actual situation, the established model is real and effective. Finally, the model is promoted and applied, which has great reference significance in other aspects of production and life.

# 目录

一. 问题重述.....	2
二. 问题分析.....	2
三. 模型的假设与符号说明.....	3
3.1. 模型的假设.....	3
3.2. 符号说明.....	3
四. 模型的建立与求解.....	3
4.1. 简单的斜抛运动模型.....	3
4.1.1. 模型一的建立.....	3
4.1.2. 模型一的求解.....	4
4.2. 有初始高度的斜抛运动模型.....	5
4.2.1. 模型二的建立.....	5
4.2.2. 模型二的求解.....	5
4.3. 非理想状态下的斜抛运动模型.....	7
4.3.1. 模型三的建立.....	7
4.3.2. 模型三的求解.....	8
五. 模型的评价.....	9
5.1. 模型的优点.....	9
5.2. 模型的缺点.....	10
六. 模型的优化与推广.....	10
6.1. 模型的优化.....	10
6.1.1. 模型四的建立.....	10
6.2. 模型的推广.....	12
七. 参考文献.....	13
八. 附录.....	14

## 一. 问题重述

纸飞机有许多种折法。世界上有若干具有一定影响力的纸飞机比赛，通常的参赛规定是使用一张特定规格的纸，例如 A4 大小的纸张，折成一架纸飞机。大多数比赛都不允许使用剪刀和胶水，有的比赛中可以少量使用胶带以调整纸飞机的重心。折好后在无风的室内环境投掷，并测量其留空时间和飞行距离等成绩。在 2012 年，一种叫做 Suzanne 的折法曾创下飞行距离的吉尼斯世界纪录，飞行了超过 69 米。Suzanne 的折法参见：<https://v.qq.com/x/page/o0636km20dz.html>

第一阶段问题：如果纸飞机（以 Suzanne 为例）的翼面是精确的平面，不允许有弯曲，建立合理的数学模型，根据纸飞机的三视图和重心位置，计算投掷出手的合理角度，以使飞行距离尽可能远。

## 二. 问题分析

飞机一开始经过人对它的做功，使其产生一个初速度，接着在飞机飞行过程中，人对其不产生作用力，此时的作用力可以由中学物理知识得到，飞机在飞行状态中只受自身的重力与空气对它的阻力还有一部分升力。由于飞机是在无风的测试环境下进行飞行测试，所以在解题过程中不考虑复杂的阻力环境。

与真正的飞机相比，纸飞机是没有提供动力系统的装置，所以纸飞机在整个飞行状态下是呈滑翔式的飞行。纸飞机机翼与尾翼的形状在飞机的飞行状态下有着一定的重要作用，如果飞机的侧翼的面积很小，在飞行过程中纸飞机与空气的接触面积就会很小，所受的阻力同时也会减小，在下降的过程中下落的速度就会变快，落地时间减短，即使初速度比较大，但是飞机飞行的距离还是不会太远。所以飞机机翼的接触面积直接对飞机的飞行距离产生影响，纸飞机机翼面积越大，飞行时间可能会越长，飞行距离就会越远。

其次影响纸飞机飞行的因素还有飞机的重心点的位置。如果纸飞机的重心位置合适，在其飞机飞行的过程中，机翼就会受到比较均匀的空气阻力，保证了飞机飞行的稳定性，才能飞得更久。机翼在飞机的质量上具有很大的贡献值，所以机翼在机身上的位置就几乎可以决定纸飞机重心点的位置，如果重心太过靠前，空气阻力对与飞机的作用点为飞机的几何重心上，两个作用点就会有很大的差别，作用效果不会抵消，反而叠加，从而有可能加剧了飞机的下落速度，飞机在滑翔时间就会减短。如果能控制机翼的位置使重心点位置准确，就会增加纸飞机的稳定性。由于飞机在叠的过程中前后的纸张叠加，导致飞机的重心会在其几何中心之前，这必然会导致受力不均，由于飞机的对称性，飞机的重心点在中轴线上。

飞机在初始状态下的初始角度对飞机的飞行状态具有一定的影响。如果飞机的角度过大，可能倒是在竖直方向上的速度会变大，水平方向上的速度就小，虽然飞机飞行时间可能会增加，但是水平方向上的位移也不会很大。如果飞机初始角度很小，在竖直方向上的速度小，飞机在空中的飞行时间变短，即使速度很大，飞行的距离也不会太远。所以飞机的飞行角度一定在这个角度范围内会由最优的角度。

纸飞机的质量也与飞机飞行的时间有关系，在考虑阻力的情况下，如果飞机质量越

大，在飞行过程中，重力就可能是阻力的多倍，此时飞机向下加速度要比质量小时候的加速度大。飞机飞行时间就会变短，飞机也不会飞太远。

### 三. 模型的假设与符号说明

#### 3.1. 模型的假设

- (1). 假设纸飞机在飞行过程中，不受任何其他风力的影响，无不确定因素的影响。
- (2). 假设纸飞机飞行路线的投影为一条直线，不存在拐弯飞行的状况。
- (3). 假设纸飞机所受的空气对它的受力大小与速度成正比，比例系数不变。
- (4). 假设重力加速度  $g$  恒为  $9.8 m/s^2$ 。
- (5). 受力分析过程符合基本的牛顿定律。

#### 3.2. 符号说明

符号	含义
$v_0, v_x, v_y$	初始速度，水平与竖直分速度
$\theta_0, \theta$	初始角度，与水平线夹角
$x, y$	水平与竖直方向位移
$s$	水平方向上的距离
$h$	纸飞机脱手的初始高度
$k$	空气阻力系数
$F_{\text{浮}}, f_{\text{阻}}$	空气对飞机产生的浮力与阻力
$a_x, a_y$	水平与竖直方向上的加速度
$J_1, J_2$	飞机重力与飞机阻力的转动惯量
$\omega$	飞机转动角速度
$l$	重心点与空气作用点间距
$g$	重力加速度
$t$	时间

### 四. 模型的建立与求解

#### 4.1. 简单的斜抛运动模型

##### 4.1.1. 模型一的建立

如果不考虑飞机初始状态的高度，同时不考虑空气阻力的情况下，飞机此时的运动状态就是一个简单的斜抛运动问题，飞机此时的飞行运动状态如下图所示：

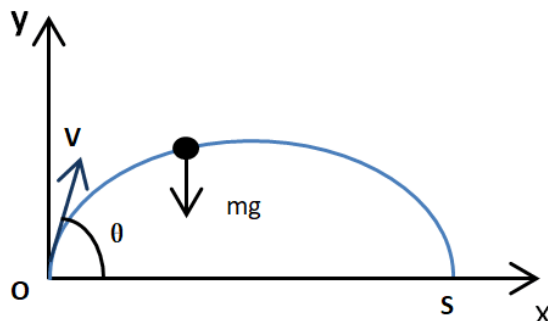


图 1. 简单斜抛运动轨迹

飞机在初始状态下，速度  $v_0$  的方向与  $x$  轴方向夹角为  $\theta$ 。 $v_0$  在  $x$  轴与  $y$  轴上的投影分别是  $v_x = v_0 \cos \theta, v_y = v_0 \sin \theta$ 。飞机在飞行过程中，忽略空气的阻力，飞机在水平方向上不受力，在竖直方向上只有重力作用，假设从原点出发，根据物理的基本规律，飞机在任意时刻的位置的坐标满足

$$x = v_0 t \cos \theta, y = v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

假设飞机的飞行距离为  $s$ ，飞机落地时  $y = 0$ 。(1) 式化简，此时飞机的轨迹坐标为

$$s = v_0 t \cos \theta, 0 = v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

消去时间  $t$  得到

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (3)$$

此时通过 (3) 式可以看出飞机的飞行距离是与初速度和初始角度有关系的，初速度越大，飞机的飞行距离越长。而角度在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的范围内，随着角度的增加，飞行距离先增加后减小。

#### 4.1.2. 模型一的求解

由 (3) 式可以得到，飞机在理想状态下的飞行距离与初始状态下的角度有关，求纸飞机在初始状态下的最佳角度，在初始速度一定的情况下， $s$  与  $\theta$  具有相应的关系，由于  $0 \leq \sin 2\theta \leq 1$ ，当  $\sin 2\theta = 1$ ，即  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时飞机的飞行距离最远，飞行距离为  $s = \frac{v_0^2}{g}$ 。

飞机在理想状态下，在其不受空气阻力还有初始高度的情况下，飞机的最佳初始角度为  $\frac{\pi}{4}$ ，且与飞机的初始速度无关。飞机所飞行的最长的距离为  $s = \frac{v_0^2}{g}$ 。



## 4.2. 有初始高度的斜抛运动模型

### 4.2.1. 模型二的建立

飞机在实际的飞行中，初始状态下具有一定的高度，这个高度取决于人的手臂与身高的长度，取决于飞机放手时候飞机离地面的高度。假设纸飞机出手时的高度为  $h$ ，则飞机此时的飞行状态如下图所示：

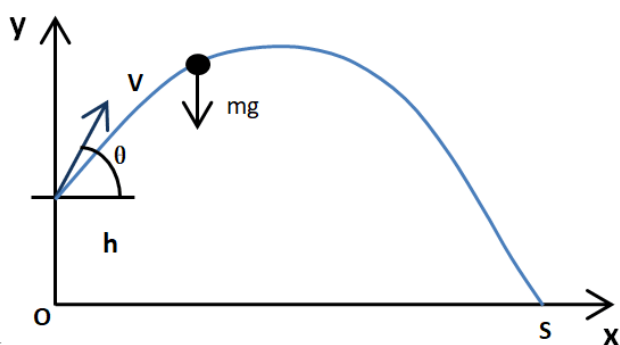


图 2. 飞机具有初始高度下的飞行状态

通过飞机飞行过程的分析，把（1）式进行优化，得到的飞机的坐标公式为

$$x = v_0 t \cos \theta, y = h + v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \quad (4)$$

将  $y=0, x=s$  代入（4）式得到

$$s = v_0 t \cos \theta, 0 = h + v_0 t \sin \theta - \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

把（5）式消去时间可以得到

$$h + s \cdot \tan \theta - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} = 0 \quad (6)$$

### 4.2.2. 模型二的求解

对（6）求导并让  $\frac{ds}{d\theta} = 0$  得

$$\frac{s}{\cos^2 \theta} - \frac{gs^2 \sin \theta}{v_0^2 \cos^3 \theta} = 0 \quad (7)$$

此时可以求出

$$s = \frac{v_0^2}{g \tan \theta} \quad (8)$$

将（8）式代入（6）式可以得到

$$h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \sin^2 \theta} = 0 \quad (9)$$

得到

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_0}{\sqrt{2(v_0^2 + gh)}}\right) \quad (10)$$

此时将 (10) 代入 (8) 式可以得到

$$s = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad (11)$$

由 (11) 式可以得到初步的结论, 若  $h=0$ , 得到的结果与模型一相同, 最佳的初始角度为 (10) 式所示, 它与初始速度和初始高度有关, 如果初始高度越高, 要使得飞机飞行的更远, 此时的初始角度要减少, 由于初速度的限制, 所以最佳的飞行初始角度应该为  $\theta \leq \frac{\pi}{4}$ 。在最佳角度的情况下, 最远距离为  $s = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ 。随着初始速度的增大, 距离也会增加, 同时初始高度的增加也会对最远距离增大, 但是由于  $s$  与初速度的平方成正比, 与  $h$  的二分之一次方成比例, 所以增大速度的效果要比增大初始高度的效果好得多。

一般来说, 在身高的限制下, 初始高度一般在 1.7 米-2.1 米之间, 初始速度也在 10m/s-20m/s 之间。把以上数据代入 (10) 和 (11) 式中, 可以定量地分析最远距离, 最优角度随初始高度与初始速度的变化关系。部分数据如下表, 详细数据见附表。

表 1. 不同高度与速度下的最佳初始角度

最佳角度/°	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20m/s
<b>h=1.70</b>	40.89	41.52	42.02	42.43	42.75	43.02	43.25	43.44	43.60	43.74	43.85
<b>h=1.75</b>	40.79	41.43	41.95	42.36	42.69	42.97	43.20	43.39	43.56	43.70	43.82
<b>h=1.80</b>	40.69	41.35	41.87	42.29	42.63	42.92	43.15	43.35	43.52	43.66	43.79
<b>h=1.85</b>	40.59	41.26	41.79	42.22	42.57	42.86	43.10	43.31	43.48	43.63	43.76
<b>h=1.90</b>	40.48	41.17	41.71	42.15	42.51	42.81	43.06	43.26	43.44	43.59	43.73
<b>h=1.95</b>	40.38	41.08	41.64	42.08	42.45	42.76	43.01	43.22	43.40	43.56	43.69
<b>h=2.00</b>	40.28	40.99	41.56	42.02	42.39	42.70	42.96	43.18	43.36	43.52	43.66
<b>h=2.05</b>	40.18	40.91	41.48	41.95	42.33	42.65	42.91	43.14	43.33	43.49	43.63
<b>h=2.10</b>	40.09	40.82	41.41	41.88	42.27	42.60	42.87	43.09	43.29	43.45	43.60

表 2. 不同高度与速度下的最远飞行距离

最远距离/m	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20m/s
<b>h=1.70</b>	11.78	13.94	16.31	18.87	21.63	24.60	27.77	31.14	34.72	38.50	42.48
<b>h=1.75</b>	11.83	13.99	16.35	18.91	21.68	24.65	27.82	31.19	34.77	38.55	42.53
<b>h=1.80</b>	11.87	14.03	16.40	18.96	21.73	24.69	27.86	31.24	34.81	38.59	42.58
<b>h=1.85</b>	11.91	14.08	16.44	19.01	21.77	24.74	27.91	31.29	34.86	38.64	42.63
<b>h=1.90</b>	11.95	14.12	16.48	19.05	21.82	24.79	27.96	31.33	34.91	38.69	42.67
<b>h=1.95</b>	12.00	14.16	16.53	19.10	21.86	24.83	28.00	31.38	34.96	38.74	42.72

<b>h=2.00</b>	12.04	14.21	16.57	19.14	21.91	24.88	28.05	31.43	35.00	38.79	42.77
<b>h=2.05</b>	12.08	14.25	16.62	19.19	21.95	24.93	28.10	31.47	35.05	38.83	42.82
<b>h=2.10</b>	12.12	14.29	16.66	19.23	22.00	24.97	28.14	31.52	35.10	38.88	42.86

#### 4.3. 非理想状态下的斜抛运动模型

##### 4.3.1. 模型三的建立

所谓非理想状态下的斜抛模型，就是在分析纸飞机在飞行的过程中，不仅受自身重力影响，而且还存在空气对它的阻力的影响。假设飞机在飞行过程中所受向上的浮力，在水平方向上受一定的阻力。此时纸飞机的受力情况如下图：

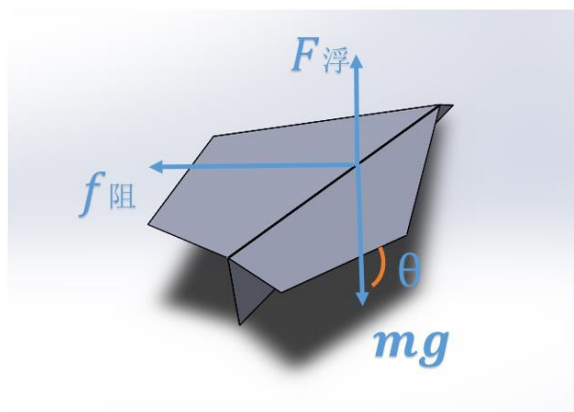


图 3. 飞机在非理想状态下的受力图

纸飞机在存在空气阻力的情况下要比理想状态下要复杂的多，飞机所受的阻力是动态变化的过程。对于低速飞行状态下的纸飞机，飞机所受空气阻力与纸飞机的速度成正比关系<sup>[11]</sup>。

$$f = kv \quad (12)$$

其中  $k$  为阻力在飞机空中飞行时的比例系数。  
此时通过纸飞机的受力分析关系列出方程组如下：

$$\begin{cases} mg - F_{\text{浮}} = ma_y \\ f_{\text{阻}} = ma_x \\ F_{\text{浮}} = kv_y \\ f_{\text{阻}} = kv_x \\ v_x = v_0 \cos \theta_0 - a_x t \\ v_y = v_0 \sin \theta_0 - a_y t \end{cases} \quad (13)$$

通过联立方程（4）（5）使用 Matlab 对（13）式求解得出：

$$x = \frac{mv_0 \cos \theta_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (14)$$

$$y = h + \left( \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \sin \theta_0}{k} \right) \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{mg}{k} t \quad (15)$$

#### 4.3.2. 模型三的求解

对 (14) (15) 式消去  $t$  得到  $y$  关于  $x$  的方程式为:

$$y = h + \left( \frac{m^2 g}{k^2} + \frac{mv_0 \sin \theta_0}{k} \right) \frac{kx}{mv_0 \cos \theta_0} + \frac{m^2 g \ln \left( 1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta_0} \right)}{k^2} \quad (16)$$

由 (16) 式就可以分析不同的阻力系数对纸飞机运动轨迹的影响。假设纸飞机的质量大小为  $m=100g$ , 初始斜抛速度为  $v_0=20m/s$ , 初始斜抛角度为  $\theta_0=40^\circ$ , 初始高度  $h=2.1m$ , 取  $g=9.8m/s^2$ 。分别考虑阻力系数在  $0.01kg/s, 0.1kg/s, 0.5kg/s, 1kg/s, 1.5kg/s$  的几种情况<sup>[1]</sup>。代入 (16) 式, 通过使用 Matlab 得到关系图, 下图为截取的某一小部分:

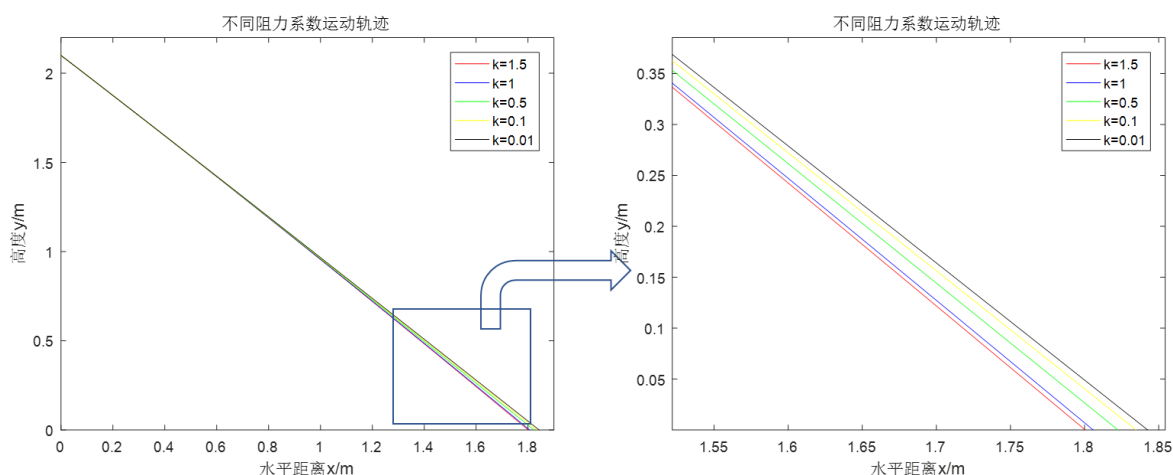


图 4: 不同阻力系数运动轨迹图

图四表明, 当纸飞机在初始角度一定的情况下, 如果阻力系数  $k$  越大, 飞机的飞行距离就越小, 这显然是与事实相符的。

在无空气阻力的情况下, 飞机成  $45^\circ$  角飞行的距离是最长的, 但是考虑到飞机初始的高度和阻力的作用, 满足飞机飞行水平距离最大, 飞机的初始的飞行角度就必须小于  $45^\circ$ 。

运用 Matlab 对 (14) (15) 消去  $t$ , 进行变换, 得到  $x = x(y)$  的函数关系式, 令  $y=h$ , 通过假设上述状态下的飞机重量, 飞机初始速度来研究不同的阻力系数对飞机初始飞行角度的影响。代入数据得到一下结果:

表 3：阻力系数与最大距离角度的关系

阻力系数	最佳角度
0.00	45.00
0.01	44.98
0.10	44.43
0.50	40.36
1.00	36.94
1.50	34.13
2.00	32.04

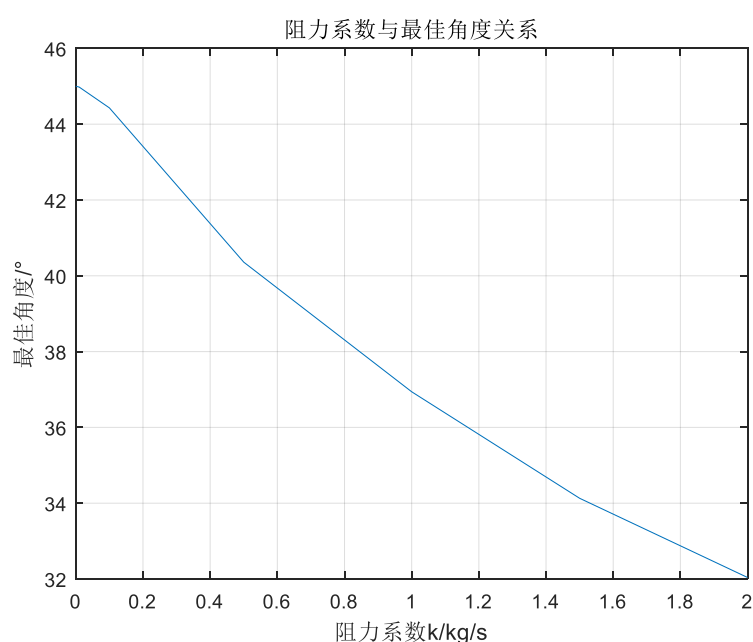


图 5：阻力系数与最佳角度关系

当阻力系数  $k=0$  时,飞机飞行最远时的角度为  $45^\circ$ ,这已经被前面的内容证实了,但随着阻力系数  $k$  的增加,要使得纸飞机飞行的距离最远,飞机飞行初始状态下的角度会减小,并且在整个过程中,两者为非线性关系。

## 五. 模型的评价

### 5.1. 模型的优点

(1). 本文通过简单的理想状态下的模型开始,然后又考虑了在实际情况下的初始状态的高度,速度,阻力等条件,更加符合纸飞机实际飞行的情况,同时也使文章结构层次有序,结构分明。

(2). 通过使用软件编程,算出了飞机在某些因素下不同高度与速度下的最佳初始角度与不同高度与速度下的最远飞行距离,并通过表格给出结果,使结论更加有效。

(3). 对飞机所受的浮力与阻力大小做出合理的假设,把力的变化通过正比关系得

出有效的方程，并对阻力系数进行分析，分析其对最远距离与最佳角度的影响。

## 5.2. 模型的缺点

(1). 未考虑飞机自身的重心位置对飞机飞行状态的影响，飞机重心太靠前，飞机机头下降的就越快，导致飞机飞行时间短。

(2). 在世界纪录的视频中可以看到，飞机的大致轨迹如下图：



图 6：世界纪录飞机实际飞行轨迹概图

纸飞机在飞行过程中，几乎水平抛出，在经过短暂攀升之后，逐渐下降，接着二次攀升，最后落地。这种曲线与所建立的模型不太相符，原因可能使由于建模的过程中某些因素理想化。

(3). 模型未考虑飞机重心与阻力浮力的作用点不在同一个点上，一个在飞机的重心上，一在飞机的几何作用点上，两者不在同一个作用点，就有可能对飞机飞行状态产生影响。

# 六. 模型的优化与推广

## 6.1. 模型的优化

### 6.1.1. 模型四的建立

如果考虑飞机重心点位置对飞机飞行产生的影响，首先对一张 A4 纸大小的纸张进行折叠。具体飞机折法过程如下图所示：

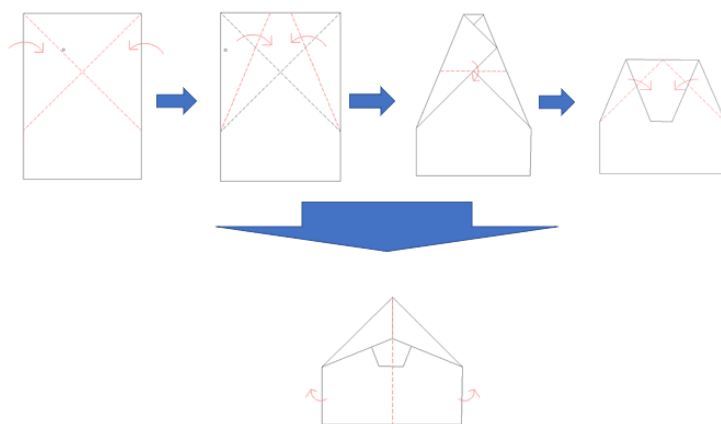


图 7：飞机折法示意图

假设单位面积纸张密度相同，则由于纸飞机的对称性，可以得到飞机的重心点在中轴线上，由于头部飞机纸张的叠加，纸飞机成头重尾轻的情况，侧面质量分布大致如下图所示：



图 8：纸飞机质量分布侧视图

由图八可知，纸飞机的重心不可能在中点，而是在纸飞机偏向机头的那一个方向。同时对于空气对飞机的阻力来说，风直接作用在飞机的表面上，作用点与飞机的自身重心点无关，只与飞机的表面积有关，并且在飞机与空气的接触面的几何重心上。此时对飞机受力分析如下图所示：

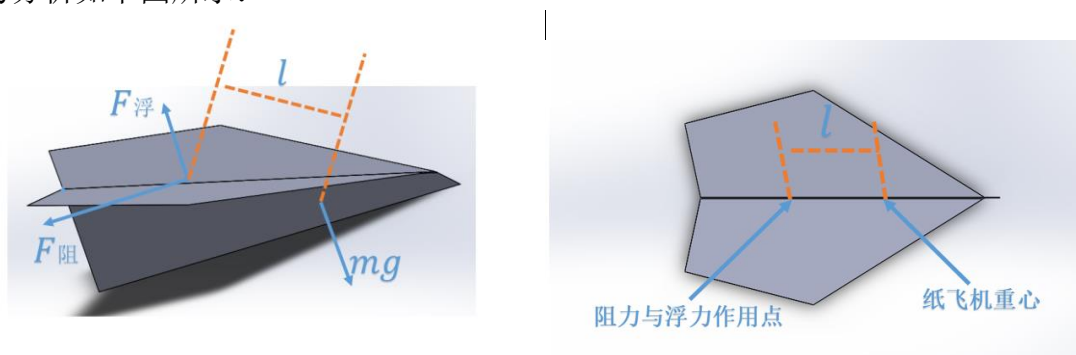


图 9：纸飞机的自身重心与几何重心视图

由图九可知，飞机的重力与阻力，浮力的作用点不在同一位置，这将会导致飞机可能在飞行状态下旋转，使飞机落地更快。飞机在旋转的过程中，由于飞机形状几乎不变，这个过程中可以看作刚体转动。

假设转动点距离飞机重心长度为  $r$ ，则根据角动量守恒可以得到：

$$J_1 \omega = J_2 \omega \quad (17)$$

$$\begin{cases} J_1 = mgr^2 \\ J_2 = (l-r)^2 \sqrt{F_{\text{浮}}^2 + f_{\text{阻}}^2} \end{cases} \quad (18)$$

将 (12)，(13)，(17)，(18) 式联立得方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} mg - F_{\text{浮}} = ma_y \\ f_{\text{阻}} = ma_x \\ F_{\text{浮}} = kv_y \\ f_{\text{阻}} = kv_x \\ v_x = v_0 \cos \theta_0 - a_x t \\ v_y = v_0 \sin \theta_0 - a_y t \\ \varpi = \frac{d\theta}{dt} \\ \theta = \theta_0 - \varpi t \\ J_1 \varpi = J_2 \varpi \\ J_1 = mg \cos \theta r^2 \\ J_2 = (l-r)^2 (F_{\text{浮}} \cos \theta + f_{\text{阻}} \sin \theta) \\ \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dy}{dt} = v_y \end{array} \right. \quad (19)$$

求解 (19) 式, 即可得到关于  $x = f(\theta, t)$ ,  $y = g(\theta, t)$  的方程, 消去  $t$  就可以得到关于  $y = h(x, \theta)$  的方程, 进而通过代入具体的数值, 可以分析不同情况下纸飞机飞行的最佳角度。这在理论上是可行的。

## 6.2. 模型的推广

本模型可以运用到许多方面, 其中最直接的应用就是研制飞机机翼的形状, 飞机的重心, 飞机起飞角度使得飞机在风力的作用下更加省油省力, 设置飞机动力装置, 使飞机在重心点出受力均衡, 以防飞机出现旋转情况, 设计飞机机身机翼, 以保证重心设计规范, 增加载人飞机的稳定性。

其次还可以运用到其他的空气流体力学的物理中, 如风口测速, 风力测量等情况。



## 七. 参考文献

- [1] 李武钢.阻力系数和物体质量对斜抛运动影响的数值分析[J].广西师范学院学报(自然科学版),2006(02):112-114.
- [2] 肖梦楠. 纸飞机的“重量”[N]. 中国体育报,2018-10-16(006).
- [3] 唐伟跃,陈铁生,陈香才,李云涛.斜抛运动方程的分析[J].河南教育学院学报(自然科学版),2005(02):22-23.
- [4] 解润滢.空气动力学在折叠纸飞机性能优化中的应用[J].科技经济导刊,2018,26(04):81.
- [5] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京:高等教育出版社, 2011.
- [6] 罗建军. 精讲多练 Matlab[M]. 西安:西安交通大学出版社, 2002.
- [7] 张健. 考虑空气阻力和风速影响的斜抛运动的数值分析[J]. 科技风,2017(14):251+254.
- [8] 尚月强,杨一都.Matlab 及其在数学建模中的应用[J].贵州师范大学学报(自然科学版),2005(01):77-81.
- [9] 武晶.大学生数学建模竞赛中 MATLAB 的应用研究[J].电脑迷,2017(08):35.
- [10] 季岩辉.建模思想在数学教学中的应用探讨[J].成才之路,2019(08):91.
- [11] 周衍柏 .理论力学教程[ M ].北京:高等教育出版社, 1986.34-35 .

## 八. 附录

一. 附表:

1. 不同高度与速度下的最佳初始角度

最佳角度/°	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19m/s
h=1.70	40.89	41.52	42.02	42.43	42.75	43.02	43.25	43.44	43.60	43.74
h=1.75	40.79	41.43	41.95	42.36	42.69	42.97	43.20	43.39	43.56	43.70
h=1.80	40.69	41.35	41.87	42.29	42.63	42.92	43.15	43.35	43.52	43.66
h=1.85	40.59	41.26	41.79	42.22	42.57	42.86	43.10	43.31	43.48	43.63
h=1.90	40.48	41.17	41.71	42.15	42.51	42.81	43.06	43.26	43.44	43.59
h=1.95	40.38	41.08	41.64	42.08	42.45	42.76	43.01	43.22	43.40	43.56
h=2.00	40.28	40.99	41.56	42.02	42.39	42.70	42.96	43.18	43.36	43.52
h=2.05	40.18	40.91	41.48	41.95	42.33	42.65	42.91	43.14	43.33	43.49
h=2.10	40.09	40.82	41.41	41.88	42.27	42.60	42.87	43.09	43.29	43.45

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30m/s
h=43.85	43.96	44.05	44.13	44.19	44.26	44.31	44.36	44.40	44.44	44.48
h=43.82	43.93	44.02	44.10	44.17	44.23	44.29	44.34	44.39	44.43	44.46
h=43.79	43.90	43.99	44.08	44.15	44.21	44.27	44.32	44.37	44.41	44.45
h=43.76	43.87	43.97	44.05	44.13	44.19	44.25	44.30	44.35	44.40	44.43
h=43.73	43.84	43.94	44.03	44.10	44.17	44.23	44.29	44.34	44.38	44.42
h=43.69	43.81	43.91	44.00	44.08	44.15	44.21	44.27	44.32	44.36	44.40
h=43.66	43.78	43.88	43.98	44.06	44.13	44.19	44.25	44.30	44.35	44.39
h=43.63	43.75	43.86	43.95	44.03	44.11	44.17	44.23	44.28	44.33	44.37
h=43.60	43.72	43.83	43.93	44.01	44.09	44.15	44.21	44.27	44.32	44.36

2. 不同高度与速度下的最远飞行距离

最远距离/m	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19m/s
1.70	11.78	13.94	16.31	18.87	21.63	24.60	27.77	31.14	34.72	38.50
1.75	11.83	13.99	16.35	18.91	21.68	24.65	27.82	31.19	34.77	38.55
1.80	11.87	14.03	16.40	18.96	21.73	24.69	27.86	31.24	34.81	38.59
1.85	11.91	14.08	16.44	19.01	21.77	24.74	27.91	31.29	34.86	38.64
1.90	11.95	14.12	16.48	19.05	21.82	24.79	27.96	31.33	34.91	38.69
1.95	12.00	14.16	16.53	19.10	21.86	24.83	28.00	31.38	34.96	38.74
2.00	12.04	14.21	16.57	19.14	21.91	24.88	28.05	31.43	35.00	38.79
2.05	12.08	14.25	16.62	19.19	21.95	24.93	28.10	31.47	35.05	38.83
2.10	12.12	14.29	16.66	19.23	22.00	24.97	28.14	31.52	35.10	38.88

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30m/s
42.48	46.67	51.06	55.65	60.45	65.45	70.66	76.07	81.68	87.50	93.52
42.53	46.72	51.11	55.70	60.50	65.50	70.71	76.12	81.73	87.55	93.57
42.58	46.77	51.16	55.75	60.55	65.55	70.76	76.17	81.78	87.60	93.62
42.63	46.81	51.20	55.80	60.60	65.60	70.81	76.22	81.83	87.65	93.67

<b>42.67</b>	46.86	51.25	55.85	60.65	65.65	70.85	76.26	81.88	87.70	93.72
<b>42.72</b>	46.91	51.30	55.90	60.69	65.70	70.90	76.31	81.93	87.74	93.77
<b>42.77</b>	46.96	51.35	55.94	60.74	65.75	70.95	76.36	81.98	87.79	93.82
<b>42.82</b>	47.01	51.40	55.99	60.79	65.79	71.00	76.41	82.02	87.84	93.86
<b>42.86</b>	47.05	51.44	56.04	60.84	65.84	71.05	76.46	82.07	87.89	93.91

## 二. Matlab 代码:

%最佳角度

h=1.7:0.05:2.1;

h'

v=10:1:30;

a=asind(v(1))./sqrt((2\*(v(1)\*v(1)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(2))./sqrt((2\*(v(2)\*v(2)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(3))./sqrt((2\*(v(3)\*v(3)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(4))./sqrt((2\*(v(4)\*v(4)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(5))./sqrt((2\*(v(5)\*v(5)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(6))./sqrt((2\*(v(6)\*v(6)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(7))./sqrt((2\*(v(7)\*v(7)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(8))./sqrt((2\*(v(8)\*v(8)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(9))./sqrt((2\*(v(9)\*v(9)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(10))./sqrt((2\*(v(10)\*v(10)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(11))./sqrt((2\*(v(11)\*v(11)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(12))./sqrt((2\*(v(12)\*v(12)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(13))./sqrt((2\*(v(13)\*v(13)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(14))./sqrt((2\*(v(14)\*v(14)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(15))./sqrt((2\*(v(15)\*v(15)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(16))./sqrt((2\*(v(16)\*v(16)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(17))./sqrt((2\*(v(17)\*v(17)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(18))./sqrt((2\*(v(18)\*v(18)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(19))./sqrt((2\*(v(19)\*v(19)+9.8\*h)))

a'

a=asind(v(20))./sqrt((2\*(v(20)\*v(20)+9.8\*h)))

```

a'
a=asind(v(21)./sqrt((2*(v(21)*v(21)+9.8*h))))
a'

% 最远距离
s=v/9.8;
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(1))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(2))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(3))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(4))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(5))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(6))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(7))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(8))
s1=s.*sqrt(v.*v+2*9.8*h(9))

% 不同阻力系数运动轨迹
h=2.1;
m=0.1;
g=9.8;
v=20;
th=40;
k=[0.01,0.1,0.5,1,1.5];
x=0:0.01:2;
y=h+((m*m*g)/(k(1)*k(1))+(m*v*sin(th))/k(1))*(k(1)*x)/(m*v*cos(th))+(m*m*g*log(1-(k(1)*x)/(m*v*cos(th))))/(k(1)*k(1));
plot(x,y,'r');
hold on;
y2=h+((m*m*g)/(k(2)*k(2))+(m*v*sin(th))/k(2))*(k(2)*x)/(m*v*cos(th))+(m*m*g*log(1-(k(2)*x)/(m*v*cos(th))))/(k(2)*k(2));
plot(x,y2,'b');
hold on;
y3=h+((m*m*g)/(k(3)*k(3))+(m*v*sin(th))/k(3))*(k(3)*x)/(m*v*cos(th))+(m*m*g*log(1-(k(3)*x)/(m*v*cos(th))))/(k(3)*k(3));
plot(x,y3,'g');
hold on;
y4=h+((m*m*g)/(k(4)*k(4))+(m*v*sin(th))/k(4))*(k(4)*x)/(m*v*cos(th))+(m*m*g*log(1-(k(4)*x)/(m*v*cos(th))))/(k(4)*k(4));
plot(x,y4,'y');
hold on;
y5=h+((m*m*g)/(k(5)*k(5))+(m*v*sin(th))/k(5))*(k(5)*x)/(m*v*cos(th))+(m*m*g*log(1-(k(5)*x)/(m*v*cos(th))))/(k(5)*k(5));
plot(x,y5,'k')
title('不同阻力系数运动轨迹');
xlabel('水平距离 x/m');
ylabel('高度 y/m');
legend({'k=1.5','k=1','k=0.5','k=0.1','k=0.01'})
axis([0,1.9,0,2.2])

% 阻力系数与最佳角度关系
x=[0 0.01 0.1 0.5 1 1.5 2];
th=[45 44.98 44.43 40.36 36.94 34.13 32.04];

```

```
plot(x,th);  
xlabel('阻力系数 k/kg/s');  
ylabel('最佳角度/° ');  
title('阻力系数与最佳角度关系');  
grid on
```