报名号 #1130

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：

参赛队员 (签名) ：

队员 1： **王光辉**

队员 2： **姚荔**

队员 3： **宋雷权**

参赛队教练员 (签名)： **张愿章**

参赛队伍组别： **大学组**

报名号 #1130

第三届“ScienceWord杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1130队

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

报名号 #1130

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛

题　　目　Braess 悖论的探讨与研究

关 键 词　Braess 悖论 路段重要度 层次分析法 博弈论 蚁群优化

摘　　要

对城市交通拥堵现象的 Braess 悖论进行研究，建立了层次分析模型、博弈论模型、蚁群优化模型，研究交通拥堵是否源于 Braess 悖论。

选取北京市二环路内及二环路作为一个交通系统，选取若干路口作为节点，用层次分析法算出路径的组合重要度，得出 Braess 悖论对城市交通影响非常重要。

从博弈论的角度进行出发，人们会根据 GPS 导航系统所提供的画面选择最优的路径，但是人们选择的路径仍是一样，继续造成交通堵塞。

运用蚁群优化模型对交通网络进行分析，通过 MATLAB 软件进行形象仿真，得出人们使用 GPS 导航系统并不能缓解交通拥堵，得出 Braess 悖论在复杂的道路中存在性。

最后对论文进行总结，并给出了一些解决城市交通 Braess 悖论的方案。

本文的特色在于运用层次分析法算出了不同路段的重要度，然后分别运用博弈论和蚁群优化算法两方法进行对比得出结论。

参赛队号　1130

所选题目　B 题

参赛密码 ________
（由组委会填写）

Braess 悖论的探讨与研究

一 问题重述

道路交通系统是一个很复杂的系统，它不仅表现在有交通线路、运输工具、客货流等物的融合的复杂性，关键是处于交通系统中的事物发生的状态和时刻都具有随机性。例如交通线路上机动车流数量、车速、行人群体数以及车辆与人群的行驶方向等都是随机性事件。

交通系统是一个一有限空间系统，在车辆与人群的增加方面要受到系统空间的影响，并且在这些数量变大过程中，系统性能会随着降低，发生了系统一拥挤或出现系统拥塞。同时系统中某个区域的异常也会影响到系统整体的性能，或者在没有及时处理异常的情况下，造成整个系统的异常，以致造成系统的崩溃。

因此，在交通系统中，处理交通区域异常的方法成为在交通工程中一个主要研究方向。在以往的处理交通异常的方法中，主要是通过分配交通流量，即将拥挤路段的车流分配到舒缓路段以增加区域通行速度，另外一种处理交通拥挤的方法是新建一条线路。然而在第二种方法中我们遇到了一个违背理论的情况，即在某个交通区域增加了一条线路后不仅没有降低交通压力，反而使得整体的通行能力下降，这个情形就是 1968 年意大利数学家 Dietrich Braess 发现交通网络中的 Braess 悖论。

本题通过分析实际城市的道路交通情况，找出引起 Braess 悖论的因素，在权威网站和大量书籍中查找数据和建立模型的方法，并以建立的模型为根据，分析北京二环路以内的路网出现的交通拥堵现象，以及如果司机广泛使用可以反映当前交通拥堵情况的 GPS 导航系统，分析是否会缓解交通堵塞，并估计其效果。

二 问题分析

本题涉及到交通系统和交通网络中的 Braess 悖论，没有给出固定的数据和交通影响数据，问题十分开放，对于 Braess 悖论，通过查阅书籍，我们决定考虑以下几方面的因素：

第一、人的出行情况：人驾车出行时从一个地方到另一个地方，则他需要选择路线。他要选他经常走的路线，还是某一天因为某件原因而选走另一条路，例如堵车而选择另一条路。

第二、路的重要的情况：有一些路是政府重点修建的路，道路状况会比较良好，这样的路可能会比较不会堵车，因而走的人会比较多。

第三、通行时间：一条路的平均通行时间会使人们对这一条路的认识产生一个统一看法，这样的一条被人们普遍认为经常堵车的路段，对于一些能绕过的人来说，他们是能避免就避免。

第四、在道路考虑中，道路是双向的，只选取其中的一个方向且车辆一旦选定所走的道路后车辆不可改变方向。

第五、由于交通系统的随机性很大，每个时间的交通状况并不能预测，我们对于这种比较随机性的事件要做研究。

图一为分别在北京于 2010 年 4 月 24 日下午 **7 点 42 分、8 点 07 分、8 点 32 分、9 点 45 分四个不同时刻的东四十桥道路交通路况截图（图像来源【1】)**：其中红色代表拥挤，黄色代表缓行，绿色代表畅通。）

① 7 点 42 分

② 8 点 07 分

③ 8 点 32 分

④ 9 点 45 分

图一 东四十桥道路交通路况截图

从图一可以看出，同一个路口在四个不同的时刻的交通情况有很大变化，可见交通情况的随机性是很大。

三 模型假设

(1) 假设现阶段不会出现突发事件(如:地震,政治事务等)影响交通
(2) 假设我们所查到的的数据都是真实可靠的
(3) 假设人们在出行时都按其以往的经验进行选择路线
(4) 假设堵车、拥挤的情况任何时候均可能发生

四 符号说明

符号	说明
IN_{ij}	节点i与j之间的路段重要度
I_i	节点i所属区域节点的重要度
I_j	节点j所属区域节点的重要度
L_k	节点i与j之间路段的路程，km
α	道路行政级别与功能修正参数
$E(i,y)$	局中人甲取纯策略时的赢得值
$E(x,j)$	局中人乙取纯策略时的赢得值
P_i	节点i的人口密度，人/平方公里
G_i	节点i的总产值，万元
$\overline{p}$	节点人口均值，人/平方公里
$\overline{G}$	节点总产值的平均值，万元
α_1、α_2	各种指标权重
C	n 个城市的坐标，$n\times 2$的矩阵
$NC_{\max}$	最大迭代次数
K	蚂蚁的个数
α	决定信息素的权
β	启发信息的权
d_{ij}	路经长度
η_{ij}	路径的启发信息
τ	信息素数量
ρ	信息素的挥发率
$\Delta\tau_{ij}$	信息素的增加量
Q	一个固定的正数
L_m	第 m 只蚂蚁行走的路线长度
$\tau_j^k(I_{P_i})$	一次循环中第 k 只蚂蚁在 I_{P_i} 的第 j 个元素上留下的信息素
I_{P_i}	集合
h	样本数量

五 模型准备

5.1北京二环路交通现状分析

5.1.1北京二环路现状

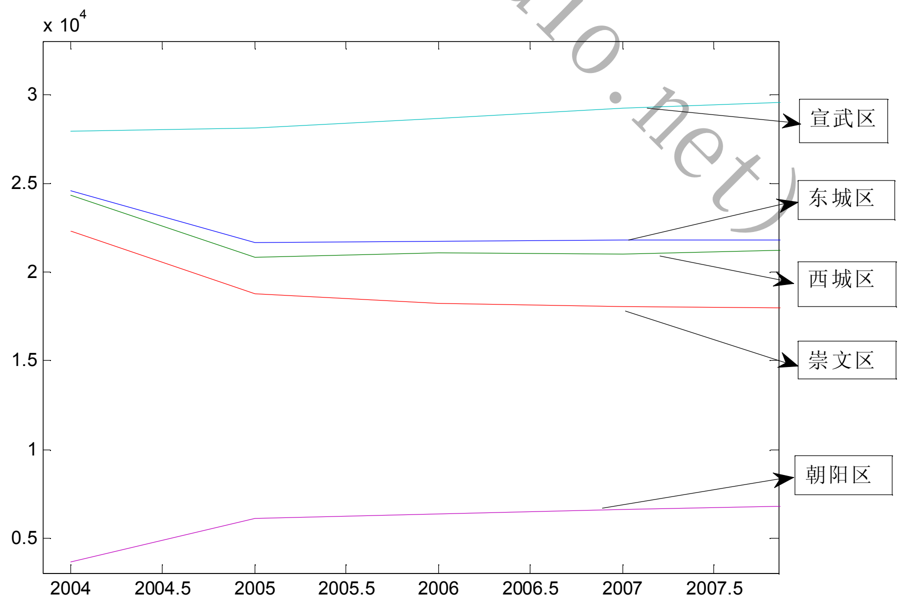
北京二环路于 1992 年 9 月建成通车，它是我国第一条全封闭、全立交、没有红绿灯的城市快速环路。二环路处于北京道路路网的核心位置，围绕旧城而建，全长 32.7 公里。沿线共建朝阳门桥、建国门桥、东便门桥、广渠门桥、光明桥、左安门桥、玉蜓桥、永定门桥、陶然桥、右安门桥、菜户营桥、广安门桥、天宁寺桥、复兴门桥、阜成门桥、官园桥、西直门桥、积水潭桥、安定门桥、雍和宫桥、东直门桥、东四十条桥等。二环路主路全线双向均以三条车道为主，南二环线大部分路段及西直门桥、官园桥等区间均为四条车道。

虽然经过交通管理部门以及广大交通民警的努力，不断加大整治秩序乱点、交通堵点和事故黑点的力度，道路畅通程度有所好转，但北京市的交通拥堵状况却并没有得到根本缓解，“开车没有骑车快，坐车没有走路快”，“乘车难，出行难”仍然是困扰北京的一大难题。

5.1.2北京二环路交通拥堵分析

1、商业、办公等城市就业功能过度密集于二环路以内的中心区，上班的、办事的、开会的、观光的车流从四面八方涌向这一地区，加上这一地区交通辐射能力差，以及近来住宅郊区化的无序蔓延，使得大量的就业人口必须早晚拥挤在往返于城郊之间的交通中。

2、经过 50 多年的建设，北京市区建成面积为 490 平方公里，而市区人口已达到 610 万人，城市化地区人口密度高达每平方公里 14,700 人，已接近市区的环境容量。根据我们查找的北京市 2004 年到 2008 年二环以内及附近的几个城区的人口密度（人/平方公里）数据，（数据来源：【2】）运用 MATLAB 做出图二：



图二 二环内城区人口密度近年分布图

六 模型的建立与求解

6.1 模型一的建立及求解

6.1.1.模型一的分析

北京是我国的政治、教育、文化中心，人口密度较大，机动车辆较多。首都交通系统的运行性能不仅联系着城市的发展，更是代表了我国城市发展的水平。这里我们对北京二环以内交通线路与现状作预测性检验是否存在 Braess 悖论情形，即根据现状检验其交通性能，然后将某一线路屏蔽，再检验新的系统的性能，以此两个结果检验北京市二环内是否存在悖论情形。

我们将北京二环路以内（包括二环路）的区域作为一个独立的交通系统 A，二环路外的一辆车 S 从某个确定的路口进入系统 A，然后穿过系统 A 并且可以从另外的若干个路口走出系统 A 向目的地走去。在这里采用层次分析的方法，为车辆 S 选择一个出口，并且根据路线的选择计算 S 经过系统 A 花费的时间。

首先，我们把交通系统抽象成由若干点组成的网络图，图的节点为交通系统中的部分路口，图的边为直接或者间接连接我们所选的路口的路段。根据节点所处城市区域，调查节点周围居民居住密度，居民出行目的地，以及选择道路的方向，还要调查节点附近的旅游场所或者其它娱乐活动场所，通过了解这些场所的收入来判断此节点所在路段的繁华程度。根据以上两点要素计算节点的重要程度，也就是对交通影响的强弱，计算公式为

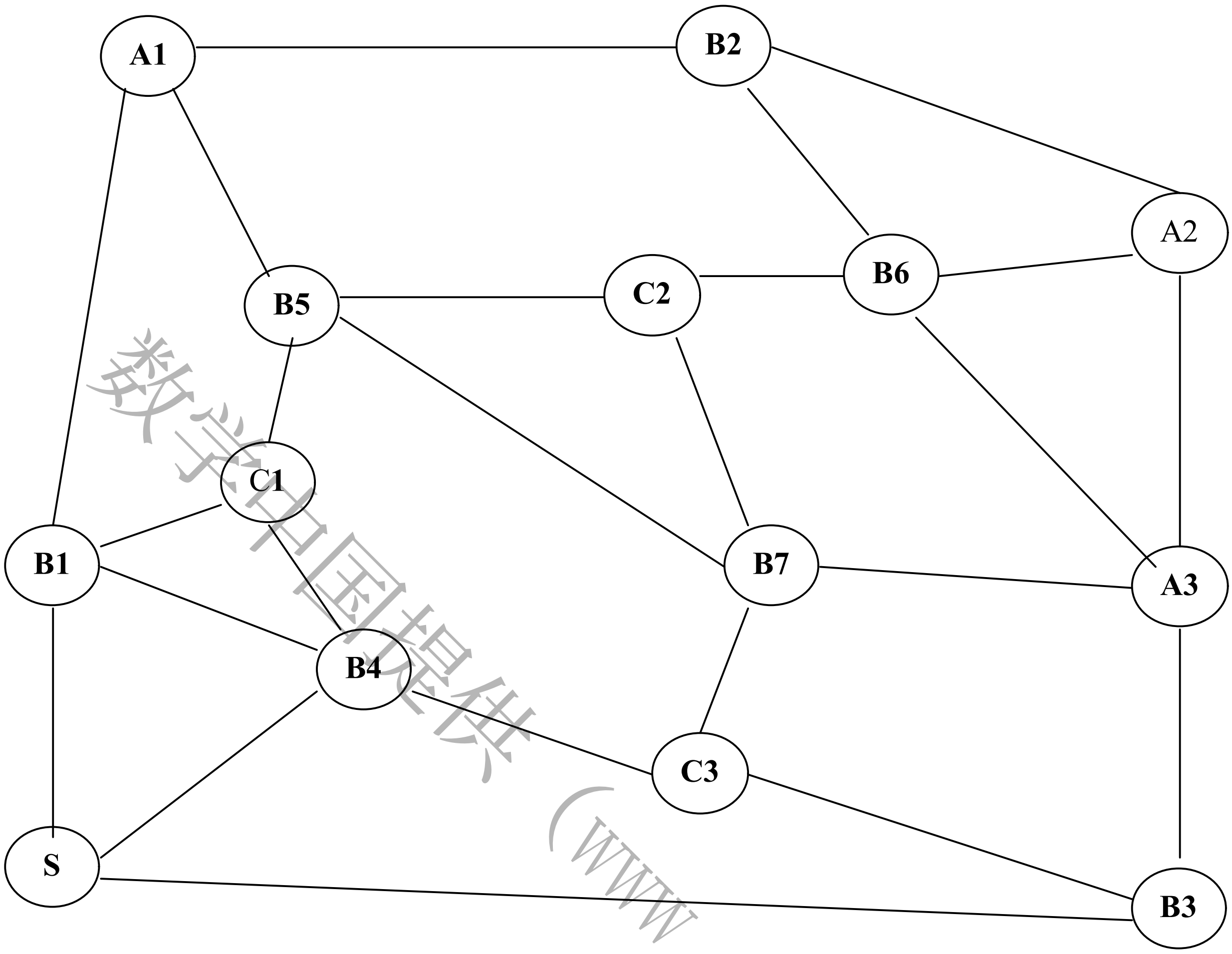
$$I_i = \alpha_1 \frac{P_i}{p} + \alpha_2 \frac{G_i}{G} \qquad (6.1.1)$$

依靠节点重要度只能反映区域特点，并不能表现交通系统的特点，也不能为处理交通事件提供直接的参考目标。但是区域特点是社会形式的主要元素，而交通系统也融合在社会体系里面，并且交通系统连接了各区域，所以区域为交通系统提供了接口。节点重要度反映了连接两相邻节点的路段的重要度，从而体现出交通系统的特点。联系相邻节点的重要度，计算路段的重要度。计算公式为

$$IN_{ij} = \frac{I_i \times I_j}{L_k} \times \alpha \qquad (6.1.2)$$

两节点的重要度的乘积越大说明连接的路段在交通系统中的作用越大，也就是说，如果两节点的重要度都比较高，那么这两节点所在区域在城市中的作用就较大，也就会有较多的人员流动，连接节点的路段车流量就会相对的大，对于交通系统，此路段将会处在重要的地位。

由于连接节点的路段比较多，而且有多条路段连接同一个节点。并且在选择路线时，也是在选择不同的节点。所以我们在做路段的重要度比较时，将连接同一节点的路段重要度求和并作平均化，这样将路段重要度归结到路段连接的节点上。我们选择系统边缘（二环路上）的三个节点为出口节点，且处在层次分析中的方案层，即为 A1、A2、、A3。同时，在模型中，假设连接四个路段以及处在系统边缘的节点为第三层因素，并分别标记为 B1-B7。连接三个路段的节点处在模型的第二层，并且标记为 C1-C3。车 S 从节点 S 进入，交通示意图如图三所示：

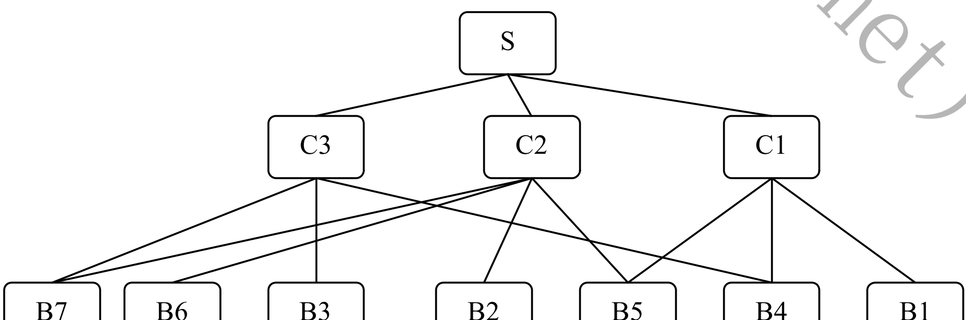


图三 北京市二环路交通抽象图

6.1.2. 模型建立

为了确定每条路上的节点影响程度，建立层次分析模型：

我们建立如下结构模型：



图四 各节点的层次结构

可以看到，从以上两个示意图来看，在没有连接的两个节点也在模型图中建立两者的关系，这是因为在这个交通系统中，任一个节点都对系统有一定的影响，所以不会因为没有相连就不考虑两节点的关联。

考虑低层因子对上层因子的影响，建立低层因子对高层影响比例的成对比较关系，定义成对比较矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \frac{1}{p_{12}} & 1 & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{p_{1n}} & \frac{1}{p_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

p_{ij} 代表同一层的不同因子对上层因子影响程度之比。通常由于成对比较具有主观性因素，在比较准则上我们采用 Saaty 等人提出的 1-9 尺度，即 p_{ij} 的取值范围为 1、2、…、9 以及 1/2、…1/9，不同数值代表的意义如表一：

表一

比较尺度 p_{ij}	代表含义
1	P_i 与 P_j 的影响相同
5	P_i 比 P_j 的影响强
9	P_i 比 P_j 的影响绝对强
其它数值	P_i 与 P_j 影响之比处在以上之间或者去互反数

（一）计算权向量并做一致性检验

（1）计算权向量

用由成对比较矩阵求权向量的特征根法对正互反矩阵 T 求最大特征值（记作λ）和最大特征值λ所对应的特征向量（归一化后）w，即 w 满足

$$\mathrm{T}w=\lambda w \qquad (6.1.3)$$

（2）一致性检验

一致性指标为下式：

$$CI=\frac{\lambda-\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1} \qquad (6.1.4)$$

随机一致性指标 RI，其数值见下表。

表二

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

其中 $n=1,2$ 时 $RI=0$，是因为 1，2 阶正互反阵总是一致阵。

对于 $n\geq 3$ 的成对比较矩阵 T，将它的一致性指标 CI 与同阶（指 n 相同）的随机一致性指标 RI 之比称为一致性比率 CR，当

$$CR=\frac{CI}{RI}<0.1 \qquad (6.1.5)$$

时认为成对比较矩阵T的不一致程度在容许范围内，可用其特征向量作为权向量。

（二）计算组合权向量并做组合一致性检验

（1）计算组合权向量

得到第一层与第二层的目标权向量，记为 $w^{(2)}=\left(w_1^{(2)},w_2^{(2)},\cdots,w_n^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}$。用同样的方法构造第三层对第二层的每一个准则的成对比较矩阵，依次计算。要选择一个优等方案就要对各方案进行比较，比较其对目标的影响。根据准则对目标的权向量和方案对每一准则的权向量，计算各方案对目标的权向量，这个称为组合权向量，记作 $w^{(k)}$。

（2）组合一致性检验

组合一致性检验需要逐层进行。若第 p 层的一致性指标 $CI_1^{(p)},CI_2^{(p)},...,CI_n^{(p)}$（$n$ 是第 $p-1$ 层因素的数目），随机一致性指标为 $RI_1^{(p)},RI_2^{(p)},...,RI_n^{(p)}$，定义

$$CI^{(p)}=\left[CI_1^{(p)},CI_2^{(p)},...,CI_n^{(p)}\right]w^{(p-1)} \qquad (6.1.6)$$

$$RI^{(p)}=\left[RI_1^{(p)},RI_2^{(p)},...,RI_n^{(p)}\right]w^{(p-1)} \qquad (6.1.7)$$

则第 p 层的组合一致性比率

$$CR^{(p)}=\frac{CI^{(p)}}{RI^{(p)}}\quad,\quad p=3,4,...,s \qquad (6.1.8)$$

第 p 层通过一致性检验的条件为 $CR^{(p)}<0.1$。

定义最下层（第 s 层）对第 1 层的组合一致性比率为

$$CR^{*}=\sum_{p=2}^{s}CR^{(p)} \qquad (6.1.9)$$

6.1.3.数据处理

建立 C 层对 S 层的影响程度的成对比较矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1 & 6 & 2\\ 1/6 & 1 & 1/3\\ 1/2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

计算得 C 层对 S 层的权向量 $\omega^{(2)}=(0.6000\quad 0.3000\quad 0.1000)^T$，一致性检验指标 $CR^{(2)}=\dfrac{CI}{RI}=0.0<0.1$，由此看出成对比较矩阵具有严格一致性。

建立 B 层各因素对 C 层各因素影响程度的成对比较矩阵，影响 C1 的因素主要是 B1、B4、B5，建立成对比较矩阵 $B_1=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 1/2 & 1 & 5\\ 1/6 & 1/5 & 1\end{bmatrix}$；对 C2、C3 依次建立成对比较矩阵 $B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/5 & 1/7\\ 3 & 1 & 1/3 & 1/5\\ 5 & 3 & 1 & 1/3\\ 7 & 5 & 3 & 1\end{bmatrix}$，$B_3=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1/2\\ 1/3 & 1 & 1/5\\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}$，分别得到的权向量为

$\omega_1^{(3)}=\left(0.6871\quad 0.2437\quad 0.0692\right)^T$

$\omega_2^{(3)}=\left(0.0553\quad 0.1175\quad 0.2622\quad 0.5650\right)^T$

$\omega_3^{(3)} = \left(0.3090 \quad 0.1095 \quad 0.5815\right)^T$；

并且计算得一致检验性指标分别为

$CR_1^{(3)} = 0.0251 < 0.1$，$CR_2^{(3)} = 0.0433 < 0.1$，$CR_3^{(3)} = 0.0032 < 0.1$。

根据以上方法建立方案层对 B 层影响程度成对比较矩阵，并且计算得权向量分别为

$\omega_1^{(4)} = \omega_3^{(4)} = (1.0000)$

$\omega_2^{(4)} = (0.1172 \quad 0.6144 \quad 0.2684)^T$

$\omega_4^{(4)} = (0.7500 \quad 0.2500)^T$

$\omega_5^{(4)} = (0.8000 \quad 0.2000)^T$

$\omega_6^{(4)} = (0.3333 \quad 0.6667)^T$

$\omega_7^{(4)} = (0.0872 \quad 0.1618 \quad 0.7510)^T$；

因为一阶和二阶成对比较矩阵就是一致阵，所以对关于 B1、B3、B4、B5、B6 的影响程度的成对比较矩阵不再进行一致性检验。经过对关于 B2、B7 的影响程度的成对比较矩阵的一致性检验，得到分别的一致性指标 $CR_2^{(4)} = 0.0634 < 0.1$，$CR_7^{(4)} = 0.0047 < 0.1$。

为了为进入二环内的车辆选择出口，就要了解可能的交通情况。对交通情况的预测是建立在了解系统的运行和了解以往交通信息的基础上的，要考虑每一段对系统的影响，因此我们在为车辆选择出口时就要考虑的整体的性能。我们是在考虑路段的重要度，因此重要度高的路段拥挤的可能性最大。根据出口处到入口处各段路线的影响程度来判断整个行进过程的路段选择，选择一个综合重要度小的路线提供给驾驶员。我们已经得到各层次的因素对上层因素的影响程度，下面将根据这些权值计算出口选择依据。

首先，根据权向量 $\omega_i^{(3)}$ 构造矩阵

$$W^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.5769 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0553 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3090 \\ 0.3420 & 0 & 0.1095 \\ 0.0811 & 0.1175 & 0 \\ 0 & 0.2622 & 0 \\ 0 & 0.5650 & 0.5815 \end{bmatrix}$$

其中矩阵的列向量的元素为权向量的元素。计算 B 层对 S 的影响程度就是计算对应的组合权向量，第三层 B 层对 S 层的权向量为

$$\omega^{(3)} = W^{(3)} \times \omega^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.3461 \\ 0.0166 \\ 0.0309 \\ 0.2162 \\ 0.0839 \\ 0.0787 \\ 0.2277 \end{bmatrix} \qquad (6.1.10)$$

组合一致性比率$CR^{(3)}=\dfrac{CI^{(3)}}{RI^{(3)}}=\dfrac{0.020615}{0.676}=0.0305<0.1$，组合权向量可以通过一致性检验。

然后根据权向量$\omega_i^{(4)}$构造矩阵

$$W^{(4)}=\begin{bmatrix}1 & 0.1172 & 0 & 0.7500 & 0.8000 & 0 & 0.0872\\ 0 & 0.6144 & 0 & 0 & 0.2000 & 0.3333 & 0.1618\\ 0 & 0.2684 & 1 & 0.2500 & 0 & 0.6667 & 0.7510\end{bmatrix}$$

其构造方式与$W^{(3)}$相同。这样就可以计算 A 层对入口层的组合权向量

$$\omega^{(4)}=W^{(4)}\times\omega^{(3)}=\begin{bmatrix}0.5972\\0.0816\\0.3128\end{bmatrix}\quad(6.1.11)$$

其组合一致性指标

$$CR^{(4)}=\frac{CI^{(4)}}{RI^{(4)}}=\frac{0.0012}{0.1417}=0.0087<0.1$$

此一致性指标说明组合权向量通过一致性检验。我们已经求得相邻指标的影响度的权向量和各层指标对第一层指标的影响度的组合权向量，如果仅根据指标间的影响度关联路线的选取，不能准确地显示交通的实际状况。前面我们给出了路段的重要度的求法，下面我们就根据路段的重要度和彼此路段与节点的影响度得到选取路线的方法。

我们借鉴城市地理信息管理的方法，将北京市二环内分区的人口和人口收入作为参考指标，来判断路段在城市交通中的重要度。依据如表三数据【2】

表三

指标／分区	土地面积（平方公里）	常住人口密度（人/平方公里）	从业人员劳动报酬（万元）
东城区	25.34	21823	2323594
西城区	31.62	21284	3507689
宣武区	18.91	29614	1024219
朝阳区	455.08	6775	4788571
崇文区	16.52	17978	385012

利用公式可以得到各节点数据（如表四）

表四

节点（标号）	P_i	G_i	$\overline{p}$	$\overline{G}$	α_1	α_2	I_i
S（1）	29614	1024219	9436	2405817	0.74	0.26	2.433109
A1（2）	21284	3507689					2.048237
A2（3）	6775	4788571					1.048824
A3（4）	6775	4788571					1.048824
B1（5）	29614	1024219					2.433109
B2（6）	6775	4788571					1.048824
B3（7）	17978	385012					1.451499
B4（8）	29614	1024219					2.433109
B5（9）	21284	3507689					2.048237

B6（10）	21823	2323594					1.96254
B7（11）	17978	385012					1.451499
C1（12）	21284	3507689					2.048237
C2（13）	21823	2323594					1.96254
C3（14）	29614	1024219					2.433109

表中最后一列数据就是节点在交通系统中的重要度。指标参数的选取是根据各因素在以往造成系统异常的比例来选取。

我们在绘画交通系统示意图时选取地图中的实例点，所以在测量路段长度时直接在地图中测量【3】利用公式　计算路段重要度，我们利用序偶（i，j）表示路段，其中 i，j 分别为节点的标号，数据统计如表五

表五

（i，j）	I_i	I_j	L_k	α	IN_{ij}
(1,5)	2.433109	2.433109	3.472		0.511522
(1,7)	2.433109	1.451499	8.008	0.3	0.132305
(1,8)	2.433109	2.433109	4.357		0.407621
(2,5)	2.048237	2.433109	5.105	0.3	0.292865
(2,6)	2.048237	1.048824	5.515		0.116858
(2,9)	2.048237	2.048237	3.116		0.40391
(3,4)	1.048824	1.048824	3.794	0.5	0.14497
(3,6)	1.048824	1.048824	3.673		0.149746
(3,10)	1.048824	1.96254	2.225	0.5	0.462553
(4,7)	1.048824	1.451499	3.594	0.7	0.29651
(4,10)	1.048824	1.96254	6.323		0.227875
(4,11)	1.048824	1.451499	3.42		0.311596
(5,8)	2.433109	2.433109	3.368	0.3	0.527318
(5,12)	2.433109	2.048237	3.241		0.461301
(6,10)	1.048824	1.96254	1.857	0.3	0.33253
(7,14)	1.451499	2.433109	5.71	0.3	0.185551
(8,12)	2.433109	2.048237	3.818	0.4	0.522115
(8,14)	2.433109	2.433109	3.948		0.599799
(9,11)	2.048237	1.451499	4.074	0.5	0.364877
(9,12)	2.048237	2.048237	2.763		0.759188
(9,13)	2.048237	1.96254	2.903		0.692344
(10,13)	1.96254	1.96254	2.343	0.5	0.82193
(11,13)	1.451499	1.96254	2.481	0.8	0.918541
(11,14)	1.451499	2.433109	3.014		0.9374

因为我们要根据节点判断路段的选择对车辆行驶的影响，所以根据我们的规定将路段的重要度划归到各节点，如表六

表六

	S	A1	A2	A3	B1	B2	B3
重要度 $I_i^{'}$	0.3505	0.2712	0.2524	0.2452	0.4483	0.1997	0.2048

	B4	B5	B6	B7	C1	C2	C3
重要度 $I_i^{'}$	0.5142	0.5551	0.4612	0.6331	0.5809	0.8109	0.5742

在得到节点的综合了路段的重要度之后，结合各层因素对上层因素的影响的权向量，求得复合重要度，即低层因素重要度组成的向量与对应因素的权向量作内积。选取上层因素重要度与复合重要度较小值作为因素的新的重要度。操作为

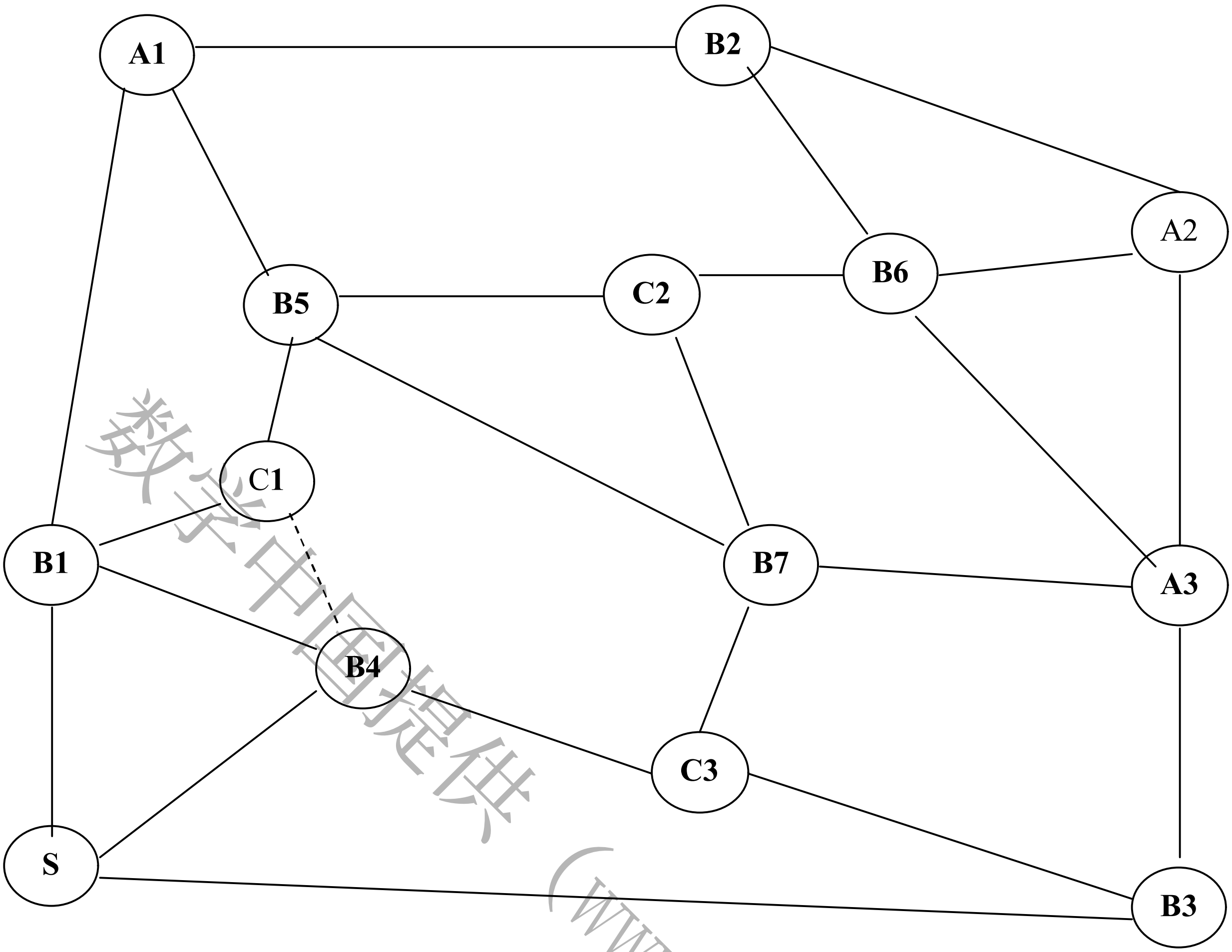
$$\begin{bmatrix} I_5^{''} \\ I_6^{''} \\ I_7^{''} \\ I_8^{''} \\ I_9^{''} \\ I_{10}^{''} \\ I_{11}^{''} \end{bmatrix} = (W^{(4)})^T \times \begin{bmatrix} I_2^{'} \\ I_3^{''} \\ I_4^{''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2712 \\ 0.2527 \\ 0.2452 \\ 0.2647 \\ 0.2422 \\ 0.2476 \\ 0.2487 \end{bmatrix} \quad (6.1.12)$$

然后与因素 B 本来的重要度求较小值，得 B 因素新的重要度为 $\begin{bmatrix} I_5^{'''} \\ I_6^{'''} \\ I_7^{'''} \\ I_8^{'''} \\ I_9^{'''} \\ I_{10}^{'''} \\ I_{11}^{'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2712 \\ 0.1997 \\ 0.2048 \\ 0.2647 \\ 0.2422 \\ 0.2476 \\ 0.2487 \end{bmatrix}$

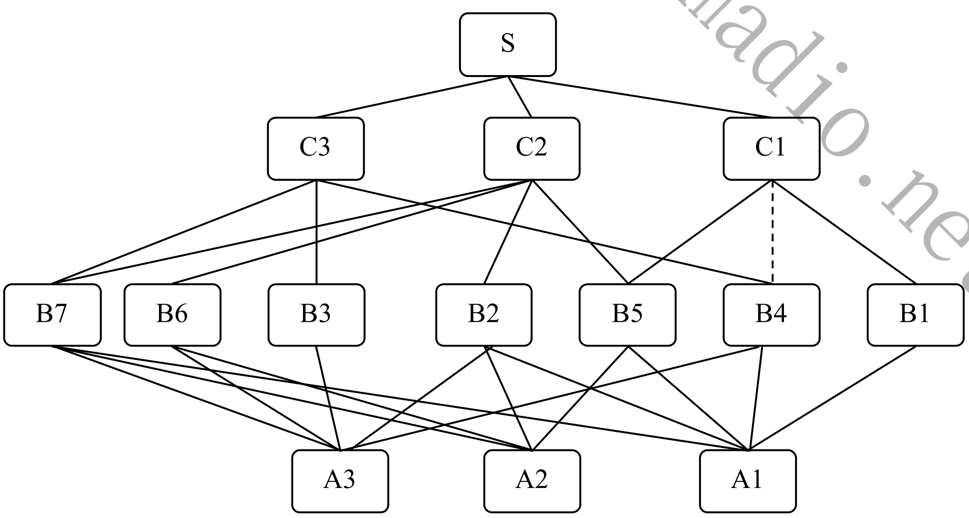
同理经过计算 C 层因素的新的重要度为 $\begin{bmatrix} I_{12}^{'''} \\ I_{13}^{'''} \\ I_{14}^{'''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2666 \\ 0.2449 \\ 0.2369 \end{bmatrix}$

则可以得到 S 的新的重要度为 0.2572。从这些数据可以看到，经过权向量处理后能够体现在复杂的交通系统中不同的区域的节点都是近似平等的，但是差异就是不同的地点有的经常发生交通拥塞，而有些地点却是经常畅通无阻的。

针对市区内的路线的设置，我们把交通示意图中的一条线路去掉，用以检查线路设置是否存在矛盾或者赘余，也就是可能的 Braess 悖论情形。如图七我们把图中的虚线去掉



图五 改造的交通图



图六 改造层次结构图

建立 C 层对 S 层的影响程度的成对比较矩阵

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3/2\\1/3 & 1 & 1/4\\2/3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

计算得 C 层对 S 层的权向量 $\omega^{(2)}=(0.4752\quad 0.1257\quad 0.3991)^T$，一致性检验指标 $CR^{(2)}=\dfrac{CI}{RI}=0.025<0.1$，由此看出成对比较矩阵具有严格一致性。

建立 B 层各因素对 C 层各因素影响程度的成对比较矩阵，影响 C1 的因素主要是 B1、B5，建立成对比较矩阵 $B_1=\begin{bmatrix}1 & 3\\1/3 & 1\end{bmatrix}$ 对 C2、C3 依次建立成对比较矩阵 $B_2=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/5 & 1/6\\3 & 1 & 1/3 & 1/4\\5 & 3 & 1 & 1/2\\6 & 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$B_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1/2\\1/2 & 1 & 1/5\\2 & 5 & 1\end{bmatrix}$，分别得到的权向量为

$\omega_1^{(3)}=\left(0.7500\quad 0.2500\right)^T$

$\omega_2^{(3)}=\left(0.0614\quad 0.1336\quad 0.3103\quad 0.4947\right)^T$

$\omega_3^{(3)}=\left(0.2764\quad 0.1282\quad 0.5954\right)^T$；

并且计算得一致检验性指标分别为

$CR_1^{(3)}=0.0251<0.1$，$CR_2^{(3)}=0.0262<0.1$，$CR_3^{(3)}=0.0028<0.1$

根据以上方法建立方案层对 B 层影响程度成对比较矩阵，并且计算得权向量分别为

$\omega_1^{(4)}=\omega_3^{(4)}=(1.0000)$

$\omega_2^{(4)}=(0.1172\quad 0.6144\quad 0.2684)^T$

$\omega_4^{(4)}=(0.7500\quad 0.2500)^T$

$\omega_5^{(4)}=(0.8000\quad 0.2000)^T$

$\omega_6^{(4)}=(0.3333\quad 0.6667)^T$

$\omega_7^{(4)}=(0.0872\quad 0.1618\quad 0.7510)^T$

首先，根据权向量 $\omega_i^{(3)}$ 构造矩阵

$$W^{(3)}=\begin{bmatrix}0.7500 & 0 & 0\\0 & 0.0614 & 0\\0 & 0 & 0.2764\\0 & 0 & 0.1282\\0.2500 & 0.1336 & 0\\0 & 0.3103 & 0\\0 & 0.4947 & 0.5954\end{bmatrix}$$

其中矩阵的列向量的元素为权向量的元素。计算 B 层对 S 的影响程度就是计算对应的组合权向量，第三层 B 层对 S 层的权向量为

$$\omega^{(3)}=W^{(3)}\times\omega^{(2)}=\begin{bmatrix}0.3564\\0.0077\\0.1103\\0.0512\\0.1356\\0.0390\\0.2998\end{bmatrix}$$

组合一致性比率$CR^{(3)}=\dfrac{CI^{(3)}}{RI^{(3)}}=0.0264<0.1$，组合权向量可以通过一致性检验。

然后根据权向量$\omega_i^{(4)}$构造矩阵

$$W^{(4)}=\begin{bmatrix}1&0.1172&0&0.7500&0.8000&0&0.0872\\0&0.6144&0&0&0.2000&0.3333&0.1618\\0&0.2684&1&0.2500&0&0.6667&0.7510\end{bmatrix}$$

其构造方式与$W^{(3)}$相同。这样就可以计算 A 层对入口层的组合权向量

$$\omega^{(4)}=W^{(4)}\times\omega^{(3)}=\begin{bmatrix}0.5303\\0.0934\\0.3763\end{bmatrix}$$

其组合一致性指标

$$CR^{(4)}=\frac{CI^{(4)}}{RI^{(4)}}=0.0061<0.1$$

改造后的交通图同样复合我们对其成对比较，所以与没有改造交通图时相比较，再次求出各层因素的新的重要度。由于我们只是对交通图做小的改动所以 A 对 B 的权重没有变化，则 B 层各因素新的重要度没有改变，仍为$\begin{bmatrix}I_5'''\\I_6'''\\I_7'''\\I_8'''\\I_9'''\\I_{10}'''\\I_{11}'''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2712\\0.1997\\0.2048\\0.2647\\0.2422\\0.2476\\0.2487\end{bmatrix}$

而 B 层对 C 层将发生变化，C 层新的重要度变为$\begin{bmatrix}I_{12}'''\\I_{13}'''\\I_{14}'''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2640\\0.2445\\0.2386\end{bmatrix}$

则 S 的新的重要度将变为 0.2514。

可以看出复合重要度发生了明显的变化，即去掉一条路线后，使得交通的负担变轻，道路的重要度变缓，说明交通状况得到改善。所以我们可以得出结论，北京市二环路内交通系统存在 Braess 现象。

6.1.4.模型讨论：

在实际生活中，对于已经修建的路且发生 Braess 悖论中所描述的现象，我们可以进行车速的限制，从而增加要行驶的时间使司机花费的时间增加，最终可以缓解交通拥堵。对于计划中要修建的路，可以进行车流的预测，看其是否会产生 Braess 悖论所描述的，要是有则重新进行考虑修路的计划。然而，即使最终修建的路不会产生拥堵，有可能由于其经济代价太高或其他原因还不如修建花费代价较小且不会经常发生堵车的路，从而更加经济化，这是要给予考虑的。不能只因为了避免堵车，而不考虑其经济代价。

6.2 模型二的建立及求解

6.2.1.模型二的分析

当借助于GPS导航系统来选择路径时，对于处于道路系统中的每一个司机来说信息都是完全的、对称的。此时他们知道每一条道路的情况，这时就产生一种多人博弈，他们在选择道路就不得不考虑别人可能选择的路径，从而使自己选择一个合理的路径。如果每个人不进行考虑，都去选择理论上所需要行驶时间最短的路径，则可能使原本理想的路径反而变得不理想，增加了自己的行驶时间。因此，人们在选择路径需要考虑别人可能选择的道路，进行相互的协作。

当人们在选择路径进行考虑时，最终可以形成每个司机选择路径的一种Nash均衡，形成最优纯策略。为了求得每个人在选择路径的最优纯策略，我们选择建立了两人博弈，进行简单的分析：

局中人：从原来选择路径的车中只考虑两辆，进行博弈，局中人甲及局中人乙，且甲比局中人更有优势，即可以更快的到达自己所要选择的路径。

策略:甲和乙由可选择的路中根GPS提供的画面来判断选择路径，局中人i的策略集记为S_i 。

赢得函数：局中人甲选择的一种路径比局中人乙选择的一种路径所节约的时间作为赢得函数

设s_i为是第i的一种策略，则甲乙两个局中人的策略形成的策略组

$$s=(s_1,s_2)$$

s就是一个局势。若S为全部局势的集合，则

$$S=S_1\times S_2$$

最终可以得出局中人甲的赢得矩阵A。

在进行博弈时每个局中人都会考虑对方的可能选择路径，从而使自己取得最有效路径，最终形成纯策略。

设有矩阵对策$G=\{S_1,S_2;A\}$，其中

$$S_1=\{\alpha_1\cdots\alpha_m\}\quad S_2=\{\beta_1\cdots\beta_n\}\quad \mathrm{A}=(\mathrm{a}_{ij})_{m\times n}$$

记

$$S_1^*=\{x\in E^*\mid x_i\ge 0,i=1,\cdots m;\sum_{i=1}^{m}x_i=1\}$$

$$S_2^*=\{y\in E^*\mid y_j\ge 0,i=1,\cdots n;\sum_{j=1}^{n}y_j=1\}$$

分别称S_1^*和S_2^*为局中人甲和乙的混合策略集；对$x\in S_1^*$和$y\in S_2^*$，称x和y为混合策略，(x,y)为混合局势，局中人甲的赢得函数为

$$E(x,y)=\sum_i\sum_j a_{ij}x_iy_j \quad (6.2.1)$$

称$G=\{S_1^*,S_2^*;E\}$为对策G的混合补充。

$$E(i,y)=\sum_j a_{ij}y_j \quad (6.2.2)$$

$$E(x,j)=\sum_i a_{ij}x_i \quad (6.2.3)$$

其中$E(i,y)$为局中人甲取纯策略时的赢得值，$E(x,j)$为局中人乙取纯策略时的赢得值。则有

$$E(x,y)=\sum_i E(i,y)x_i \quad (6.2.4)$$

和

$$E(x,y)=\sum_j E(x,j)y_j \quad (6.2.5)$$

最后在这里运用了线性规划法进行对所得的赢得矩阵进行求解，求出每个人的混合策略，将求解矩阵对策等价地转化为求解互为对偶的线性规划问题（P）和（D）。在问题（P）中，令

$$x_i'=\frac{x_i}{w} \quad i=1,\cdots,m$$

则问题（P）的约束条件变为：

$$\begin{cases}\sum_i a_{ij}x_i'\ge 1 & j=1,\cdots,n\\ \sum_i x_{ij}'=\frac{1}{w} & \\ x_i'\ge 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \quad (6.2.6)$$

故问题（P）等价于线性规划问题(P')：

$$(P')\quad\begin{cases}\min\sum_i x_i' & \\ \sum_i a_{ij}x_i'\ge 1 & j=1,\cdots,n\\ x_i'\ge 0 & i=1,\cdots,m\end{cases} \quad (6.2.7)$$

同理，令

$$y_j'=\frac{y_j}{v} \quad j=1,\cdots,n$$

问题（D）等价于线性规划问题（D’）：

$$(D^{'})\quad \begin{cases} \max\sum_j y_j^{'} \\ \sum_j a_{ij} y_j^{'} \le 1 \quad i=1,\cdots,m \\ y_j^{'} \ge 0 \quad j=1,\cdots,n \end{cases} \quad (6.2.8)$$

显然，问题（P’）和（D’）是互为对偶的线性规划。

假设现在 A1 至 B2，A3 至 B3 堵塞，分析得 A1 到 S 选三条较理想路径：路径 1:A1、B1、S;；路径 2:A1、B5、C1、B4、S；路径 3:A1、B5、B7、C3、B3、S。这时设局中人甲的赢得矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

上述线性规划的解为：

$$x^{'}=(\frac{1}{20} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20})^T \quad w=\frac{1}{5}$$

$$y^{'}=(\frac{1}{20} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20})^T \quad v=\frac{1}{5}$$

故对策问题的解为：

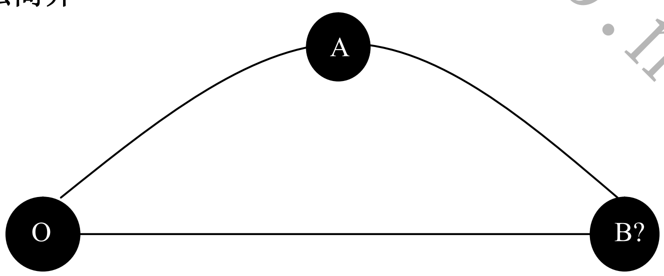
$$V_G=\frac{1}{w}=\frac{1}{v}=5$$

$$x=V_G x^{'}=(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4})^T \quad (6.2.9)$$

$$y=V_G y^{'}=(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4})^T$$

从得出的数据中我们可以得知每个司机将会选择路径2行驶，仍然会造成拥堵。因而根据博弈论的观点可以得知GPS提供的画面并不能缓解交通拥堵。

6.3.1 蚁群算法简介



图七 蚂蚁觅食试验示意图

Goss 等通过著名的双桥实验 2 对阿根廷蚂蚁的觅食行为进行了研究。如图七所示，建立从巢穴到食物的两条路径：OAB 和 OB。两条路径均是双向连通的，且从点 O 到 B 只有这两条路径。一段时间后，蚁群中大部分蚂蚁都选择了较短路径 OB。在初始状态，蚂蚁随机地选择一条道路。由于相同时间内，较短的路径上会积聚较多的信息素，因而后面出发的蚂蚁倾向于选择路径 OB，这样又进一步增加了 OB 上的信息素。一段时间

后，大部分蚂蚁都选择了道路 OB。

AS 算法首先初始化图结构，定义 TSP 问题的城市数量、连通情况、路径长度和信息素的初始值；terminate---condition---not satisfied：算法的结束条件未能满足(结束条件包括：循环次数达到最大值、解在一定次数循环内没有改进、算法已经取得最优解等)；select-next-city：使用算法定义的路径选择规则(1)选择蚂蚁下一步的走法；Calculate-tour-length：计算蚂蚁走过的路线的长度；Update-pheromone-of-graph：更新信息素，使用信息素的更新规则(2)。

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha}\times[\eta_{ij}(t)]^{\beta}}{\sum\limits_{k\in\ allowed\ \ nodes}[\tau_{ik}(t)]^{\alpha}\times[\eta_{ik}(t)]^{\beta}} & \text{如果}\quad j\in\ \ allowed\ \ \ nodes\\ 0 & \text{否则}\end{cases}\qquad (6.3.1)$$

其中，$\eta_{ij}=\dfrac{1}{d_{ij}}$表示路径的启发信息；$\alpha$和$\beta$是决定信息素和启发信息的权，需要通过手工调节；$\tau$是信息素数量。

$$\tau_{ij}(t+1)=(1-\rho)\cdot\tau_{ij}(t)+\Delta\tau_{ij}(t)\quad(6.3.2)$$

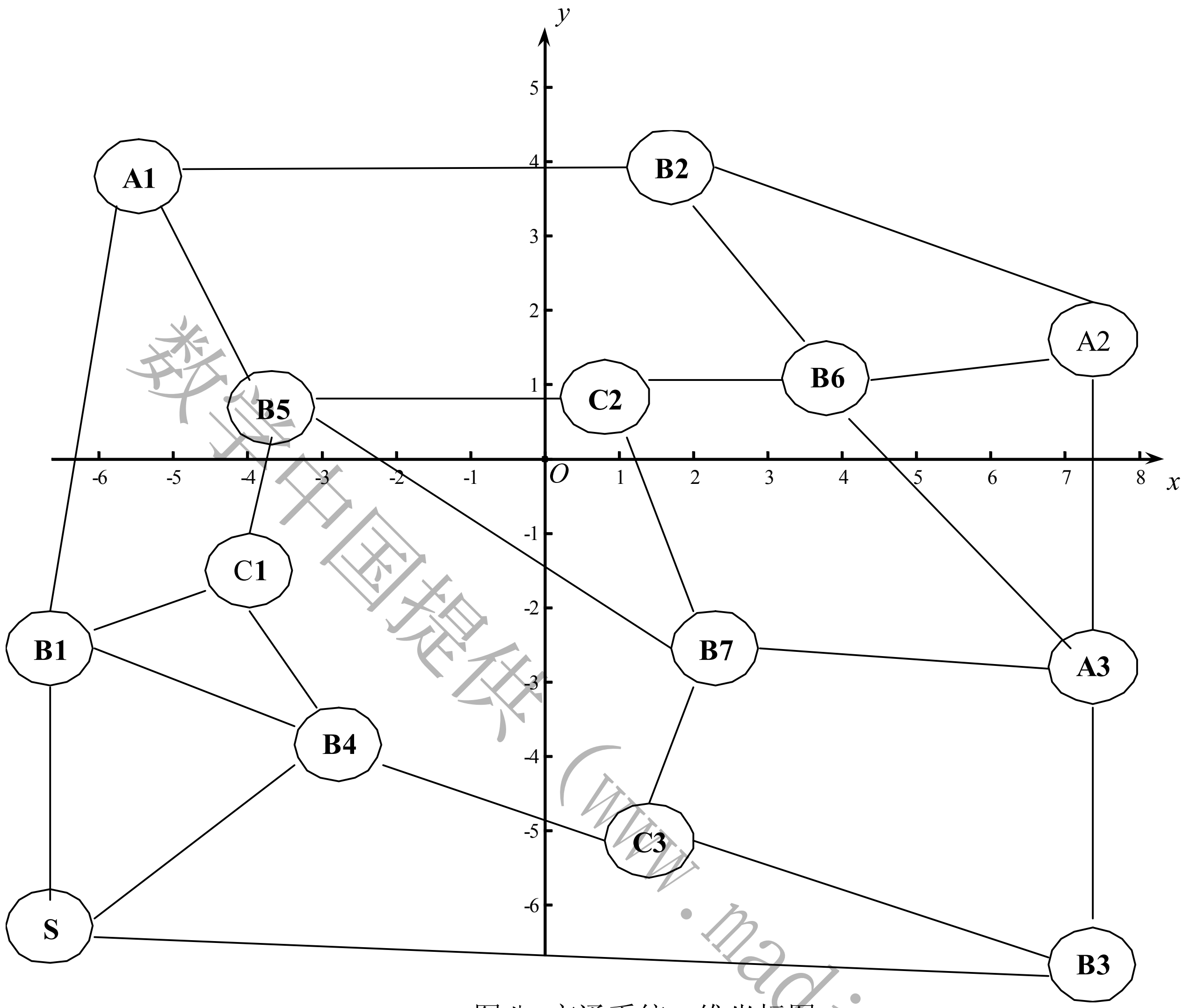
其中，ρ是信息素的挥发率，$\Delta\tau_{ij}$ 是信息素的增加，计算方法是：

$$\Delta\tau_{ij}(t)=\sum\nolimits_{m=1}^{Number-of-Ants}\frac{Q}{L_m}\quad if\quad arc(i,j)\in\quad Tour-of-Ant_m\quad(6.3.3)$$

Q是一个固定的正数；L_m是第m只蚂蚁行走的路线长度。

6.3.2 基于蚁群算法的路径选

上图为北京市二环路交通抽象图，各个点表示路口，线段表示路段，线段的长度表示路段的长度。将这个图建立在一个二维坐标系上得到图八：



图八 交通系统二维坐标图

从上图我们就可以得到各个点（路口）的坐标如下表七：

表七

点（路口）	X	Y
S	-6	-6
A1	-5	4
A2	8	2
A3	8	-2.5
B1	-6	-2.5
B2	2	4
B3	8	-6.5
B4	-2	-3.5
B5	-3.5	1
B6	4	1.5
B7	2.5	-2
C1	-3.5	-1

C2	1	1
C3	2	-5

蚁群ACO优化算法的主要步骤如下：

第一步：初始条件。令时间t=0和迭代次数NC=0，设置最大迭代次数$NC_{\max}$，蚂蚁的数目为K，令集合$L_{P_i}(1\le i\le M)$中的元素j的信息素τ_j，$(L_{P_i})(0)=0$且$\Delta\tau_j(L_{P_i})=0(1\le j\le N)$，将所有蚂蚁置于蚁巢。

第二步：启动所有蚂蚁，每只蚂蚁$k(k=1,\cdots,K)$从集合L_{P_i}开始，按照下述轮盘转法的概率规则，依次在每个集合L_{P_i}中选择第j个元素，直至蚂蚁全部到达食物源。路径选择规则为

$$P(\tau_j^k(L_{P_i}))=\frac{\tau(L_{P_i})}{\sum_{j=1}^{N}\tau_j(L_{P_i})} \quad (6.3.4)$$

第三步：置$t=t+n,NC=NC+1$。当所有蚂蚁在每个集合中都选择了1个元素后，计算用各蚂蚁所选权值作为神经网络参数时训练样本的输出误差，记录当前所选参数中的最优解。并对所有集合$L_{P_i}(1\le i\le M)$中各元素的信息素按下式进行调节(设上述蚂蚁觅食过程经历了n 个 时间单位)。

$$\begin{aligned}\tau_j(I_{P_i})(t+n)&=\rho\tau_j(I_{P_i})(t)+\Delta\tau_j(I_{P_i})\\ \Delta\tau_j(I_{P_i})&=\sum_{k=1}^{K}\Delta\tau_j^k(I_{P_i})\end{aligned} \quad (6.3.5)$$

其中：$\rho(0\le\rho\le1)$为信息素的持久性，$1-\rho$为信息素的消逝程度，$\tau_j^k(I_{P_i})$为本次循环中第k只蚂蚁在集合I_{P_i}的第j个元素上留下的信息素。可用下式计算：

$$\Delta\tau_j^k(I)=Q/e^k \quad (6.3.6)$$

(若第k只蚂蚁在循环中选择了中第j个元素，否则为0)

式中：Q用于调节信息素的调整速度，为常数；e^k以蚂蚁k选择的元素作为神经网络的权值时各训练样本的最大输出误差，可定义为

$$e^k=\max_{n-1}^{h}\left|O_n-O_q\right| \quad (6.3.7)$$

其中：$\rho(0\le\rho\le1)$为信息素的持久性，$1-\rho$为信息素的消逝程度，$\tau_j^k(I_{P_i})$为本次循环中第k只蚂蚁在集合I_{P_i}的第j个元素上留下的信息素。可用下式计算：

$$\Delta\tau_j^k(I)=Q/e^k \quad (6.3.8)$$

(若第k只蚂蚁在循环中选择了中第j个元素，否则为 0)

式中：Q用于调节信息素的调整速度，为常数；e^k以蚂蚁k选择的元素作为神经网络的权值时各训练样本的最大输出误差，可定义为

$$e^k=\max_{n-1}^{h}\left|O_n-O_q\right| \quad (6.3.9)$$

其中：h 为样本数量，O_n, O_q 为 FNN 的实际输出和期望输出。可见，误差越小，信息素增加的就越多。

重复第二步和第三步，直到所有蚂蚁全部收敛到 1 条路径或达到最大迭代次数 $NC_{\max}$，输出最优解算法结束。

我们用信息素代表人们的出行路线的出行经验，即可将人们的出行情况，交通拥堵情况 ，路线选择情况，等都考虑到了蚁群优化里面。

取 C 为上述坐标，我们设 α 为我们选择路线时的思想决定系数，β 为我们到路口时启发我们想哪个方向走的启发权，需要通过手工调节，ρ 为我们经常走某条路，下次不要走某条路的概率。

表八

数项	第一次作图	第二次作图	第三次作图	第四次作图	第五次作图	第六次作图
$NC_{\max}$	100	100	100	1000	300	300
K	300	300	600	600	600	600
α	0.6	0.9	1	0.9	0.8	0.6
β	0.2	0.3	0	0.3	0.1	0.3
ρ	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Q	50	50	50	50	50	50

我们运用 MATLAB 编程：$function \quad ACOTraffic(C, NC_{\max}, K, \alpha, \beta, \rho, Q)$，得到的图像 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ如下：

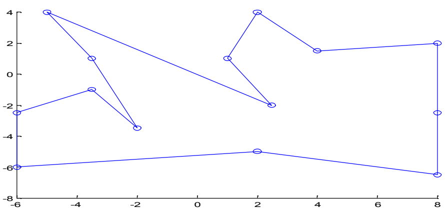


图 Ⅰ

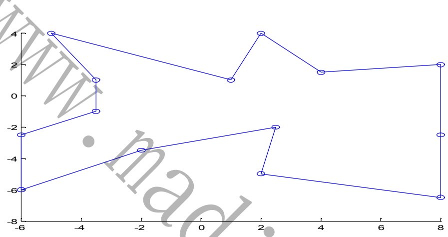


图 Ⅱ

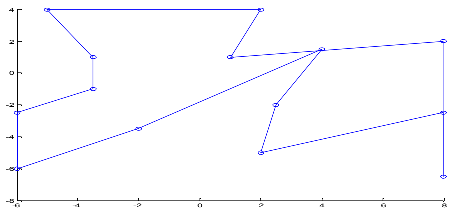


图 Ⅲ

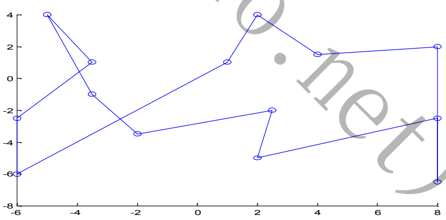
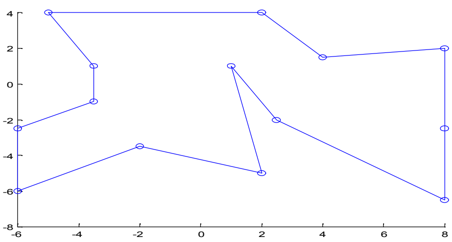


图 Ⅳ



图Ⅴ

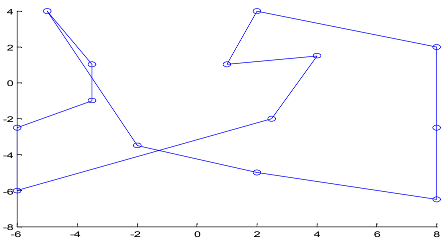


图 Ⅵ

图九

经过我们的作图我们发现，几乎每一次做的图像都不一样，而且几乎所有算出来的最优路径都是不能用的，因为不符合实际。因此我们断定，不存在最好的路径，只存在更好的路径。根据以上图像我们分析出来比较优的路径是：

S,B1,C1,B5,A1,B2,A2,B6,C2,B7,A3,B3,C3,B4。在所建立的坐标下路长是 63.6114，转算成具体的数据约为 44.62798 公里。

6.3.3 考虑 GPS 导航系统的蚁群算优化路径选择

在考虑司机广泛使用可以反映当前交通拥堵情况的 GPS 导航系统，经我们研究查证，当我们都使用 GPS 导航系统，我们的道路经验就会被导航系统所代替，所以在上述的蚁群优化算法中的信息素的作用就会降低，出行车辆的选择路线就会由于导航系统发生变化，但是，我们在出行的时候，我们的道路经验不会完全失去作用，这个因素所起的作用变小了。对于人工蚂蚁而言，相对与它们去寻找食物而言。它们的选择因素发生变化，我们将其加上系数后，即可得到模型。

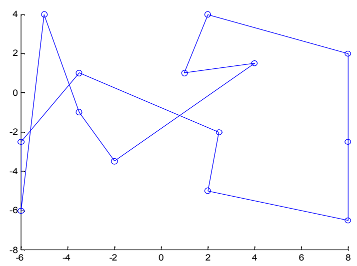
设导航系统所起的因素系数为：λ。

则数据变化情况为：们设 $\lambda\cdot\alpha$ 为我们选择路线时的思想决定系数，$\lambda\cdot\beta$ 为我们到路口时启发我们想哪个方向走的启发权。取 $\lambda=0.2$ 得：

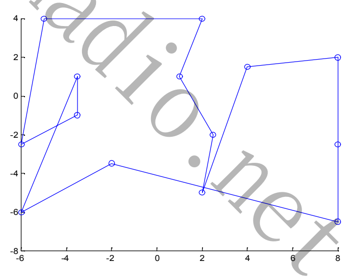
表九

数项	第一次作图	第二次作图	第三次作图	第四次作图	第五次作图	第六次作图
$NC_{\max}$	100	100	100	1000	300	300
K	300	300	600	600	600	600
$\lambda\cdot\alpha$	0.12	0.18	0.2	0.18	0.16	0.12
$\lambda\cdot\beta$	0.04	0.06	0	0.06	0.02	0.06
ρ	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Q	50	50	50	50	50	50

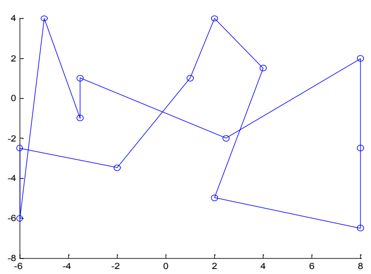
我们运用MATLAB编程：$function\quad ACOTraffic(C,NC_{\max},K,\alpha,\beta,\rho,Q)$，得到的图像（1），（2），（3），（4），（5）如下：



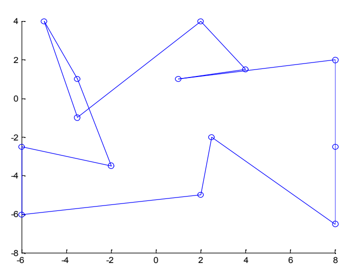
图（1）



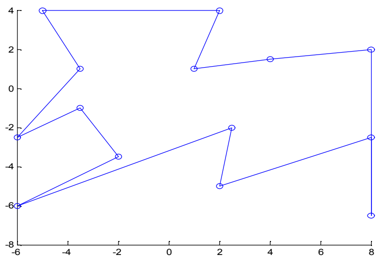
图（2）



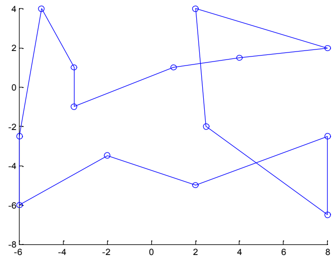
图（3）



图（4）



图（5）



图（6）

图十

由我们做的图所知，基本上和没有使用导航仪一样，几乎所有的图形都不符合实际，这很正常，因为模型总有一定的误差。但是我们可以得出一个结论，我们使用导航系统并不是都会使我们的出行带来方便，对于一个出行者而言，他使用导航系统也许会比平时更方便，但是我们如果考虑整个城市的交通，考虑一个人的平均出行时间，那么我们会发现拥有导航系统步不能是我们的出行变快，是整个交通系统变好。

我们选取以上的一个较好的路线，得出它的路线在坐标系的总长度为 69.4602，转换成实际距离为 48.62214 公里。可以看出这比没有拥有导航系统的距离还要远。相对花费时间也就较多。

由此可见，导航系统对于缓解交通没有根本性的作用．也许会暂时缓解交通，但是对整个交通系统而言，它没有积极意思．

七 模型总结

7.1 层次分析法

运用层次分析法对北京市的二环路交通系统进行分析，对每个节点和每条道路进行权重分析，得出了二环路的交通拥堵源于Braess悖论中所描述的情况。

7.2 博弈论

对于运用GPS导航系统是否可以缓解交通拥堵，我们运用博弈论对选择每一条的路径进行分析，得出司机选择路径的概率，最终得出其选择的道路。

7.3 蚁群优化

为了验证博弈论得出的路径是否是最优路径，建立了蚁群优化模型，对于所给的交通系统网络，运用Matlab进行编程，得出最优路径，判断GPS导航系统对缓解交通拥堵现象的影响。

八 解决方案

根据我们的研究，对于交通拥堵中的Braess悖论，先给出以下方案：

第一：对于已经出现Braess悖论的交通系统，我们建议进行车速的限制，从而增加要行驶的时间使司机花费的时间增加，最终可以缓解交通拥堵。

第二：对于Braess悖论非常严重的交通系统，我们建议道路重修，修路之前一定要论证一下所修的道路是否会出现Braess悖论。

第三：对于将要进行城市道路建设的城市，我们建议在城市道路规划的时候一定要考虑到Braess悖论，不要盲目的求道路的密集，可以进行车流的预测，考虑修路的计划和方案。

第四：鉴于 Braess 悖论的理论存在性，我们建议决策者在规划交通系统的时候一定要多进行具体实验，避免道路修好以后才发现 Braess 悖论。

九 参考文献

【1】 http://sslk.bjjtgl.gov.cn/roadpublish/Map/trafficOutNew1.jsp（北京市公安局公安交通管理局）
【2】 北京统计信息网 http://www.bjstats.gov.cn/
【3】 http://www.meet99.com/emap-beijing.html#ll=EJWJTVSSUTWEEnVHUHH（久久网）
【4】 姜启源，谢金星，叶俊 《数学模型》 高等教育出版社 第三版
【5】 Marco Dorigo，Thomas Stutzle 《蚁群优化》 清华大学出版社 2007年
【6】 田智慧 《区域公路交通网络的GIS研究》 黄河水利出版社 2008年
【7】 胡运权 郭耀煌 《运筹学教程》 清华大学出版社 第二版
【8】 宁宣熙 《阻塞流理论及其运用》 科学出版社 第二版
【9】 付梦印 邓志红 刘彤 《智能车辆导航技术》 科学出版社2009年
【10】姚婷，刘亮 Braess悖论及其对偶形式的博弈论分析 长沙交通学院学报 2007.9
【11】胡娟，王常青，韩伟，全智 蚁群算法及其实现方法研究 计算机仿真 第21卷第7期 2004.7
【12】孙 宝 程琳 高速公路入口匝道模糊神经网络ACO控制 交通信息与安全 2009年 第5期 第27卷 总 151期
【13】张敖木翰 钟仰晋 何世伟 基于蚁群算法的公交线网规划研究 交通与安全 2008年第12期上(总第186期)

十 附录

1MATLAB的ACO程序

```
function
[R_best,L_best,L_ave,Shortext_Route,Shortext_Length]=ACOTSP(C,NC_Max,m,Alpha,Bet
a,Rho,Q)
n=length(C');
D=zeros(n,n); for i=1:n
for j=i:n
if   i~=j
D(i,j)=((C(i,1)-C(j,1))^2+(C(i,2)-C(j,2))^2)^(1/2);
else
D(i,j)=eps;
end
D(j,i)=D(i,j);
end
end
Eta=1./D;
  Tau=ones(n,n);
  Tabu=zeros(m,n);
NC=1;
R_best=zeros(NC_Max,n);
L_best=inf.*ones(NC_Max,1);
  L_ave=zeros(NC_Max,1);
while NC<=NC_Max
Randpos=[];
for i=1:(ceil(m/n))
Randpos=[Randpos,randperm(n)];
end
Tabu(:,1)=Randpos(1,1:m)';
for j=2:n
for i=1:m
visited=Tabu(i,1:(j-1));
J=zeros(1,(n-j+1));
for k=1:n
if length(find(visited==k))==0
J(Jc)=k;
Jc=Jc+1;
end
end
for k=1:length(J)
P(k)=(Tau(visited(end),J(k))^Alpha)*(Eta(visited(end),J(k))^Beta);
end
P=P./(sum(P));
Pcum=cumsum(P);
Select=find(Pcum>=rand);
to_visit=J(Select(1));
Tabu(i,j)=to_visit;
end
```

```
end
if NC>=2
Tabu(1,:)=R_best(NC-1,:);
end
L=zeros(m,1);
for i=1:m
R=Tabu(i,:);
for j=1:(n-1)
L(i)=L(i)+D(R(j),R(j+1));
end
L(i)=L(i)+D(R(1),R(n));
end
L_best(NC)=min(L);
pos=find(L==L_best(NC));
R_best(NC,:)=Tabu(pos(1),:);
L_ave(NC)=mean(L);
NC=NC+1;
Delta_Tau=zeros(n,n);
for i=1:m
for j=1:(n-1)
Delta_Tau(Tabu(i,j),Tabu(i,j+1))=Delta_Tau(Tabu(i,j),Tabu(i,j+1))+Q/L(i);
end
Delta_Tau(Tabu(i,n),Tabu(i,1))=Delta_Tau(Tabu(i,n),Tabu(i,1))+Q/L(i);
end
Tau=(1-Rho).*Tau+Delta_Tau;
Tabu=zeros(m,n);
end
Pos=find(L_best==min(L_best));
Shortext_Route=R_best(Pos(1),:);
Shortext_Length=L_best(Pos(1));
DrawRoute(C,Shortext_Route)
```