

第二届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第二届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1072

参赛队员（签名）：

队员 1：尤作军

队员 2：尤加辉

队员 3：赵振宁

参赛队教练员（签名）：周厚春

参赛队伍组别：大学组

第二届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛

编号专用页

数学中国提供 (www.madio.net)

2009 年 第二届“数学中国杯” 数学建模网络挑战赛

题 目 基于概率和预测模型的流感疫苗投放问题

关 键 词 概率模型 贝叶斯预测模型 评估体系 投放

摘 要：

问题 1：我们设想将三联装疫苗改成双联装疫苗，并不是在所有的区域内实行，根据题目给与的数据，根据概率模型找出适合投放双联装疫苗的区域，而其他区域依旧投放三联装疫苗，从而达到降低成本的目的。

现行的投放方案是三联装疫苗的投放形式，我们通过基于因子分析定权评价模型来评判双联装疫苗的优越性。

问题 2：通过问题 1 中的数据统计，依照贝叶斯预测模型，对不同区域检测到的流感记录进行整合处理，筛选出次年爆发可能性最高的病毒类型，从而缩小病毒专家的研究范围，便于疫苗成分的确定和生产。

参赛队号 1072

所选题目 B

参赛密码 _____
(由组委会填写)

目 录

一、问题重述.....	2
二、模型假设.....	2
三、符号说明.....	2
四、问题的分析.....	2
五、模型的建立与求解.....	3
1. 划分小区域并建立概率模型.....	3
2. 关于投放疫苗的评估标准和效果.....	7
3. 利用评估体系，分析三联与两联的对比评价.....	8
4. 从检测的流感记录中取一部分样本.....	10
5. 建立贝叶斯预测模型.....	10
6. 筛选下一年的新病毒疫苗.....	11
六、模型的评价与改进.....	12
参考文献.....	13
附录：.....	14

一、 问题重述

流感是一种广泛流行于世界范围内的疾病，每次流感大流行都会造成多人死亡和巨大损失。世界卫生组织大力推荐将疫苗作为一种有效的预防措施来抗击这种潜在的致命性疾病。但是对于疫苗的投放又会出现一系列的问题：流感病毒分为 A, B, C (又称甲、乙、丙) 三型。其中 A 型病毒容易发生变异，依其两种主要抗原 (HA, NA) 的不同，区分为不同的亚型。B 型病毒的变异比较缓慢，C 型病毒甚少对人类造成威胁。现在的惯用方案是三联装疫苗，也就是每份疫苗中有三种经过灭活或裂解处理的毒株，分别为两个 A 型和一个 B 型。但是流感疫苗的制造成本较高。为了降低成本，可以将三联装疫苗改变成双联装疫苗。将北半球和南半球分别划分为稍小的区域，并使用不同的双联装疫苗针对不同区域来进行投放。问题二中还需要通过评估和预测对下一年威胁性最大的病毒是哪个品种，来解决投放某一特定病毒到某一特定区域的问题。

二、 模型假设

- 假设一：有 20% 的疫苗接种者不能够抵抗流感的侵袭；
假设二：各地域之间的人口流动问题不会对结果产生影响；
假设三：三联装与双联装的生产成本只差为 a 且 $1 < a < 1.5$ ，本题计算中取 $a = 1.25$ 。
假设四：两种病毒之间无相互影响，例如 A 型的 H1N1 亚型病毒与 B 型病毒不会在形成新病毒。
假设五：如果投放双联型疫苗后发病率低于 P 就可以视为疫苗有效。

三、 符号说明

P_1 ，一种疫苗的简称，这种疫苗中有两种经过灭活或裂解的毒株，分别是两个 A 型病毒的亚型 H1N1 和 H3N2。

P_2 ，一种疫苗的简称，这种疫苗中有两种经过灭活或裂解的毒株，分别是 A 型病毒的亚型 H1N1 和 B 型病毒。

P_3 ，一种疫苗的简称，这种疫苗中有两种经过灭活或裂解的毒株，分别是 A 型病毒的亚型 H3N2 和 B 型病毒。

P_{mn} 表示发病的概率；

$DLM\{1, 1, V, \delta\}$ 每一时刻 t 常均值折模型 δ 发病因子

MAPE 对预测结果的准确度采用平均绝对百分误差分析

四、 问题分析

问题 1 中只考虑病毒亚型，不考虑具体的毒株选择，应考虑以下四个问题：

- <1>. 建立相应的预测模型；
- <2>. 需要划分南北半球为小区域的问题；
- <3>. 关于二联用药后的评估标准和效果；
- <4>. 三联与两联的对比，利用因子分析定权的评估体系；

问题 2 中考虑选择具体的毒株，应考虑以下三个问题：

- <1>. 从检测的流感流行记录中取一部分样本数据；
- <2>. 由这些数据建立一个类似于贝叶斯预测模型；
- <3>. 利用模型筛选下一年威胁较大的病毒可能在哪里出现；

五、模型的建立与求解

1. 取划分后南北半球中几个小区域并进行建立概率模型

根据题目要求，我们可以从题目提供的数据中分离出流感病毒 A 型的两个亚型 H1N1 和 H3N2 以及 B 型毒株的分布区域，以及注射带有 A 型亚型 H1N1 和 H3N2 及 B 型灭活或裂解毒株疫苗对不同人群的效果情况，此效果是有注射疫苗后在一定时间内人体内抗原的减少情况来设定的。

由题意知，我们可以只考虑病毒亚型，而不考虑具体毒株的选择。
疫苗中可能含有的毒株成分：

三联装疫苗由 A 型的 H1N1 和 H3N2 亚型，以及一个 B 型灭活或裂解的毒株组成。
双联装疫苗有三种组成： 一是，A 型的 H1N1 亚型和 B 型灭活或裂解的毒株组成。
二是，A 型的 H3N2 亚型和 B 型灭活或裂解的毒株组成。
三是，由 A 型的 H1N1 和 H3N2 亚型的两个灭活或裂解的毒株组成。

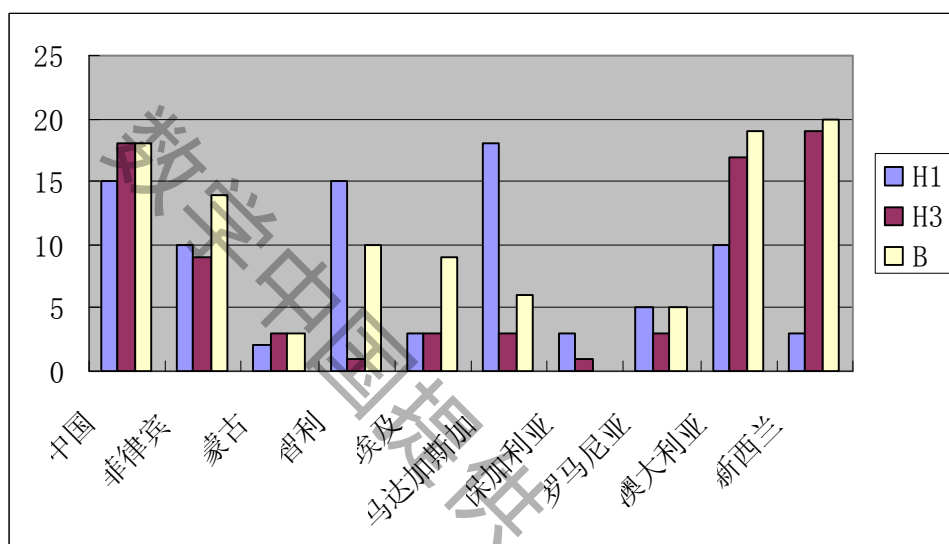
对 2007 年九月到 2009 年一月数据（见附录 1）分大洲选取 2-3 个国家按照发病次数以及发病范围分析得到下表：

	H1	H3	B	
中国		15	18	18
菲律宾		10	9	14
蒙古		2	3	3
智利		15	1	10
埃及		3	3	9
马达加斯加		18	3	6
保加利亚		3	1	0
罗马尼亚		5	3	5
澳大利亚		10	17	19
新西兰		3	19	20

说明：“*”代表小范围有感染，用1表示；“**”表示区域爆发，用2表示；

“***”代表较大规模爆发，用3表示；“****”大规模爆发，用4表示；表中数据为爆发强度加和。

根据数据得出柱状图如图所示：



根据图表中数据若这些地区使用双联装疫苗对发病率具体分析如下：

中国：

图表数据容易看出最合适的双联装为H3+B类的疫苗，则其中会出现一部分投放不合适的情况，此部分占

$$P_{11} = \frac{15}{15+18+18} \times 100\% = 29.412\%$$

此部分人群一定会发病，还有

$$P_{12} = \frac{18+18}{15+18+18} \times 20\% \times 100\% = 14.118\%$$

的人群可能会发病。则中国地区若投放双联型疫苗总的发病率为

$$P_1 = P_{11} + P_{12} = 43.530\%$$

菲律宾：

同样从图片中可以看出对菲律宾若使用双联装疫苗则H1+B类的比较合适，则投放不合适的情况

$$P_{21} = \frac{9}{10+9+14} \times 100\% = 27.273\%$$

投放合适的人群为

$$P_{22} = \frac{10+14}{10+9+14} \times 100\% \times 20\% = 69.697\%$$

总发病率为

$$P_2 = P_{21} + P_{22} = 96.970\%$$

蒙古：

从图表中可以看出最好的双联装为 H3+B 类疫苗

则投放不合适的情况为

$$P_{41} = \frac{1}{15+1+10} \times 100\% = 25.000\%$$

投放合适的人群为

$$P_4 = \frac{15+10}{15+1+10} \times 100\% \times 20\% = 15.000\%$$

总发病率为

$$P_3 = P_{31} + P_{32} = 40.000\%$$

智利：

从图表中可以看出最好的投放方案为 H1+B 型疫苗

则投放不合适的情况为

$$P_{41} = \frac{1}{15+1+10} \times 100\% = 3.846\%$$

投放合适的人群为

$$P_5 = \frac{15+10}{15+1+10} \times 100\% \times 20\% = 19.231\%$$

总发病率为

$$P_4 = P_{41} + P_{42} = 23.077\%$$

埃及：

从图表中可以看出最好的投放方案为 H1+B 或 H3+B 型疫苗

则投放不合适的情况为

$$P_6 = \frac{3}{3+3+9} \times 100\% = 20.000\%$$

投放合适的人群为

$$P_{52} = \frac{3+9}{3+3+9} \times 100\% \times 20\% = 16.000\%$$

总发病率为

$$P_5 = P_{51} + P_{52} = 26.000\%$$

马达加斯加：

从图表中可以看出最好的投放方案为 H1+B 型疫苗

则投放不合适的情况为

$$P_0 = \frac{19+20}{3+19+20} \times 100\% \times 20\% = 11.111\%$$

投放合适的人群为

$$P_{62} = \frac{18+6}{18+3+6} \times 100\% \times 20\% = 17.778\%$$

总发病率为

$$P_6 = P_{61} + P_{62} = 28.889\%$$

保加利亚

从图表可以看出最好的投放方案为 H1+H3 型疫苗

则投放不合适的人群为

$$P_{71} = \frac{0}{3+1+0} \times 100\% = 0.000\%$$

投放合适的人群为

$$P_{72} = \frac{1+3}{3+1+0} \times 100\% \times 20\% = 20.000\%$$

总发病率为

$$P_7 = P_{71} + P_{72} = 20.000\%$$

罗马尼亚：

从图表可以看出最好的投放方案为 H1+B 型疫苗

则投放不合适的人群为

$$P_{81} = \frac{3}{5+3+5} \times 100\% = 23.077\%$$

投放合适的人群为

$$P_{82} = \frac{5+5}{5+3+5} \times 100\% \times 20\% = 15.385\%$$

总发病率为

$$P_8 = P_{81} + P_{82} = 38.462\%$$

澳大利亚：

从图表可以看出最好的投放方案为 H3+B 型疫苗

则投放不合适的人群为

$$P_{91} = \frac{10}{10+17+19} \times 100\% = 21.739\%$$

投放合适的人群为

$$P_{92} = \frac{17+19}{10+17+19} \times 100\% \times 20\% = 15.652\%$$

总发病率为

$$P_9 = P_{91} + P_{92} = 37.391\%$$

新西兰：

从图表可以看出最好的投放方案为 H3+B 型疫苗

则投放不合适的人群为

$$P_{01} = \frac{3}{3+19+20} \times 100\% = 7.143\%$$

投放合适的人群为

$$P_{02} = \frac{19+20}{3+19+20} \times 100\% \times 20\% = 18.571\%$$

总发病率为

$$P_0 = P_{01} + P_{02} = 25.714\%$$

若对上述地区使用三联装的疫苗则发病率可以假设为定值 $P=20\%$

则可得出下表

	使用三联装 (P, %)	使用双联装 (P_x , %)	差值 ($P_x - P$, %)
中国	20	43.530	23.530
菲律宾	20	96.970	76.970
蒙古	20	40.000	20.000
智利	20	23.079	3.079
埃及	20	26.000	6.000
马达加斯加	20	28.889	8.889
保加利亚	20	20.000	0.000
罗马尼亚	20	38.462	18.462
澳大利亚	20	37.391	17.391
新西兰	20	25.714	5.714
平均	20	38.003	18.003

2. 关于用药的评估标准和效果

对这些国家的疫苗使用成本及发病率综合考虑

设有 n 个国家的数据，每个数据共有 P 个观测指标，这样就构成了一个 $n \times p$ 阶的矩阵 $X_{n \times p}$ ，则基于因子分析定权评价模型的步骤为：

步骤 1 数据的标准化

为了消除量纲的影响，首先要对该矩阵进行标准化处理，标准化方法为

$$Z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} \quad i=1, 2, \dots, n; \quad (1)$$

其中，

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

表示第 j 评价标准的均值，

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}$$

表示第 j 评价指标的标准差。

步骤 2 求解初始公共因子及因子荷载矩阵

经过降维处理，P 个指标可以由 m(m<p) 个公共因子 F1, F2, …, Fm 的线性组合来表示，即模型

$$Z = AF + \varepsilon \quad (2)$$

$$\text{其中, } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix} \quad (\text{因子荷载矩阵})$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_m)^T \quad (\text{公共因子矩阵})$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)^T \quad (\text{特殊因子矩阵})$$

上述模型(2)应用于实际评价时，用主成分分析法选定公共因子个数，从而略去线性表达式中的特殊因子，达到降维的目的。

步骤 3 因子旋转

建立因子分析模型的目的不仅在于要找公共，更重要的是知道每个公共因子的意义，以便实际问题进行分析。用上述方法求出的主因子各主因子的典型代表变量不是很突出，容易使的意义含糊不清，为了便于对实际问题进行分通过因子旋转使新的因子荷载系数要么尽可能近于零，要么尽可能地远离零，从而更清楚地公共因子的含义。因子旋转一般采用方差最大交旋转。

步骤 4 因子得分

因子模型建立后，可以用下式计算因子得分

$$F_j = \beta_{j1}X_1 + \beta_{j2}X_2 + \cdots + \beta_{jp}X_p \quad j=1, 2, \dots, m \quad (3)$$

通过样本的因子得分，根据实际情况，可以对样本进行分类或进行更深入一步的研究和评价。

步骤 5 求指标权重及综合指标值

为了对所研究的水质样本进行排序及分级，需要给出一个综合指标，该指标既要包含样本中各指标的信息，同时又要能够与相应的综合评价联系起来，以便于分级。本文基于前面因子分析的基础提出如下确定指标权重的方法：由因子得分系数的含义可知，因子得分系数是样本中各个指标对公因子的贡献，而方差贡献率是公因子对所有样本方差的代表，因此，因子得分系数与相应方差贡献率的乘积即为各指标在样本中的贡献，用各指标的贡献除以所有指标的贡献之和即得各指标的权重。用公式表示为

$$\omega_i = \frac{\sum_{j=1}^m \beta_{ji} e_j}{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \beta_{ji} e_j} \quad i=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, m; \quad (4)$$

综合指标值可由各指标的加权和求出，令综合指标为 Y，则

$$Y = \sum_{i=1}^p \omega_i z_i$$

3. 由公式(4)(5)即构成了基于因子分析定权质评价模型。综合指标值 y 越大，说明选取的投放方案最合适，利用综合指标值再结合相应质标准就可对所评价样本进行准确的排分级。

同时根据最新的研究性报告，可以设计如下的评估标准来评估结果：

进行接种，其中接种组分为儿童组(1~15岁)、青年组(16~39岁)、壮年组(40~59岁)和老年组(60岁以上)。接种对象于上臂三角肌肌肉注射流感疫苗，≤3周岁的儿童

首次注射 0.25ml，1个月后再注射 0.25ml，其余人群 1 次性注射 0.5ml。另外设对照组，年龄段同接种组，不接受疫苗注射。接种组与对照组的总人数、各年龄段人数及健康状况均无明显差异，具有可比性。

流感疫苗由安万特—巴斯德公司提供，0.5ml / 支，批号为 FluooAu02, 990C07; 0.25ml / 支，批号为 FluooAu06, 990C08。均在效期内使用，疫苗组份均根据世界卫生组织(WHO)2008至2009年的推荐。

观察内容与判定标准 观察期从注射疫苗后开始至半年。

其中效果的评估标准有：①接种疫苗后的局部和全身反应，对接种者进行连续 3 天的全身和局部反应观察，内容和判定标准均按“预防接种反应观察”进行；②类流感症状：采用 TCH—PPC—2—Defined 标准，如果流行季节急起高热(腋温≥38.5℃)，并伴有下列症状中的 4 项，诊断为类流感症状，如寒战、虚弱乏力、头痛、肌痛或关节痛、咳嗽、咽痛和鼻塞、鼻咽部的红肿；③上呼吸道感染：包括所有类流感和普通感冒症状，普通感冒症状以下列症状中的 1 项或多项判定：咳嗽、咽痛、鼻塞、头痛、乏力。

疫苗的安全性 共接种流感疫苗 2 349 人，出现接种部位疼痛的 18 例(0.78%)、红斑 1 例(0.04%)、发热 3 例(0.12%)，其局部和全身反应均在 3 天内消失，说明该疫苗是安全的，见表 1

表一：

流感疫苗接种后 3 天内反应观察

表 1 流感疫苗接种后 3 天内反应观察

组别	观察人数	局部反应					全身反应	
		疼痛	红斑	硬结	瘙痒	水肿	发热	过敏
儿童	2 102	5	0	0	0	0	3	0
青年	117	4	0	0	0	0	0	0
壮年	84	4	1	0	0	0	0	0
老年	46	5	0	0	0	0	0	0
合计	2 349	18	1	0	0	0	3	0

类流感症状发生情况及疫苗预防有效率 经过随访，对照组类流感症状的总发生率为 5.07%，老年组的发病率略高，达到 5.41%，而接种组中类流感症状的发生率

明显降低，两组预防类流感症状的有效率有显著性差异($P<0.01$)上呼吸道，见表二：

表 2 类流感症状发生情况及疫苗预防有效率

年龄组	接种组			对照组			预防有效率(%)
	观察人数	有症状例数	%	观察人数	有症状例数	%	
儿童	2 102	25	1.19	1 820	93	5.11	84.03
青年	117	2	1.71	97	5	5.15	66.80
壮年	84	1	1.19	76	3	3.95	69.87
老年	46	0	0	37	2	5.41	100.00
合计	2 349	28	1.19	2 030	103	5.07	76.53

注：预防有效率 = (对照组百分比 - 接种组百分比) / 对照组百分比 \times 100%

感染症状发生情况及疫苗预防有效率 上呼吸道感染症状为类流感症状、普通感冒症状以及其他非特异性上呼吸道症状的总称，对照组各年龄段发病率明显高于接种组，各组间上呼吸道感染症状有非常显著性差异 ($P<0.01$)，说明该流感疫苗能有效地减少上呼吸道感染

表 3 类上呼吸道感染症状发生情况比较

年龄组	接种组			对照组			预防有效率(%)
	观察人数	有症状例数	%	观察人数	有症状例数	%	
儿童	2 102	599	28.50	1 820	991	54.45	47.66
青年	117	30	25.64	97	59	60.82	57.84
壮年	84	25	29.76	76	48	63.15	52.87
老年	46	12	26.09	37	19	51.35	49.19
合计	2 349	666	28.35	2 030	1 117	55.02	48.47

据文献报道，接种流感疫苗安全、副作用少，且一旦出现消退迅速。本次观察副反应发生率为 0.94，说明该流感疫苗是安全的。国外的研究资料表明，在健康人群中接种流感疫苗，如果流行的毒株和疫苗毒株相匹配，预防有效率可达 70% ~ 90%。该疫苗在不同年龄的人群中，其预防类流感症状发生的有效率为 76.53%，和国外的研究结果基本一致，证实该疫苗在我国健康人群中的预防效果是肯定的。本观察结果还显示，老年组和儿童组接种流感疫苗后防止类流感症状发生的有效率分别为 100.00%、84.03%，高于青年组和壮年组，提示该疫苗对老人和儿童的预防作用更明显。另外，该流感疫苗对预防上呼吸道感染症状的有效率达 48.47%，这与该疫苗生产厂家所作的观察结果 (对上呼吸道感染有效率 50%左右) 基本一致。

4. 从检测的流感记录中取一部分样本 (参阅附录 3)

5. 建立贝叶斯预测模型

常均值折扣模型

对每一时刻 t 常均值折模型记为 $DLM\{1, 1, V, \delta\}$ ，折扣因子 δ ， $0 < \delta < 1$ 定义如下：

观测方程： $\mu_t = \mu_{t-1} + \omega_t$ ， $\omega_t \sim N[0, W_t]$

状态方程： $y_t = \mu_t + v_t$ ， $v_t \sim N[0, V]$

初始信息： $\mu_0 | D_0 \sim N[m_0, C_0]$

其中 μ 是 t 时刻序列的水平， V_t 是观测误差项或噪声项， ω_t 是状态误差项。

定理：对于每一时刻 t ，假设 μ_{t-1} 的后验分布 $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N [m_{t-1}, C_{t-1}]$ ，则 μ_t 的先验分布 $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N [m_{t-1}, R_t]$ ，其中 $R_t = C_{t-1} + W_t$ 。

推论 1: $(y_t | D_{t-1}) \sim N [f_t, Q_t]$ ，其中 $f_t = m_{t-1}$, $Q_t = R_t + V$ 。

推论 2: μ_t 的后验分布 $(\mu_t | D_t) \sim N [m_t, C_t]$ ，其中 $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$, $C_t = A_t V_t$, $A_t = R_t / Q_t$, $e_t = y_t - f_t$

由于 $R_t = C_{t-1} + W_t = C_{t-1} / \delta$ ，故有 $W_t = C_{t-1}(\delta - 1)$

其计算步骤为：

- (1) $R_t = C_{t-1} / \delta$ ； (2) $Q_t = R_t + V$ ；
- (3) $A_t = R_t / Q_t$ ； (4) $f_t = m_{t-1}$ ；
- (5) $e_t = y_t - f_t$ ； (6) $C_t = A_t V$ ；
- (7) $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$

贝叶斯预测模型是运用贝叶斯统计进行的一种预测。贝叶斯统计不同于一般的统计方法，其不仅利用模型信息和数据信息，而且充分利用先验信息。

托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)的统计预测方法是一种以动态模型为研究对象的时间序列预测方法。在做统计推断时，一般模式是：

先验信息+总体分布信息+样本信息→后验分布信息

可以看出贝叶斯模型不仅利用了前期的数据信息，还加入了决策者的经验和判断等信息，并将客观因素和主观因素结合起来，对异常情况的发生具有较多的灵活性。

6. Bayes 预测模型及其计算步骤

此处使用常均值折扣模型，这种模型应用广泛而且简单，它体现了动态现行模型的许多基本概念和分析特性。

常均值发病模型

对每一时刻 t 常均值折模型记为 $DLM\{1, 1, V, \delta\}$ ，发病因子 δ ， $0 < \delta < 1$ 定义如下：

观测方程： $\mu_t = \mu_{t-1} + \omega_t$ ， $\omega_t \sim N [0, W_t]$

状态方程： $y_t = \mu_t + v_t$ ， $v_t \sim N [0, V]$

初始信息： $\mu_0 | D_0 \sim N [m_0, C_0]$

其中 μ 是 t 时刻序列的水平， V_t 发病情况， ω_t 是 H1N1 疫苗免疫失误。

定理：对于每一时刻 t ，假设 μ_{t-1} 的后验分布 $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N [m_{t-1}, C_{t-1}]$ ，则 μ_t 的先验分布 $(\mu_t | D_{t-1}) \sim N [m_{t-1}, R_t]$ ，其中 $R_t = C_{t-1} + W_t$ 。

推论 1: $(y_t | D_{t-1}) \sim N [f_t, Q_t]$ ，其中 $f_t = m_{t-1}$, $Q_t = R_t + V$ 。

推论 2: μ_t 的后验分布 $(\mu_t | D_t) \sim N [m_t, C_t]$ ，其中 $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$, $C_t = A_t V_t$, $A_t = R_t / Q_t$, $e_t = y_t - f_t$

由于 $R_t = C_{t-1} + W_t = C_{t-1} / \delta$ ，故有 $W_t = C_{t-1}(\delta - 1)$

其计算步骤为：

- (1) $R_t = C_{t-1} / \delta$ ； (2) $Q_t = R_t + V$ ；
- (3) $A_t = R_t / Q_t$ ； (4) $f_t = m_{t-1}$ ；
- (5) $e_t = y_t - f_t$ ； (6) $C_t = A_t V$ ；
- (7) $m_t = m_{t-1} + A_t e_t$

计算实例（参见附录 1）

关于发病率的预测，预测模型的初始信息为 $m_0=304$ ， $Co=72$ ， $V=0.01$ ， $\delta=0.8$ 得到的预测结果。

通过 The SAS System for Windows 9.0 软件回归分析得到抛物线预测方程：

$$f_t = 1752456 - 1786.85019x_1 + 0.45548x_t^2$$

x_t 表示年份

见表 3 给出了预测信息。

计算结果分析

对预测结果的准确度采用平均绝对百分误差(MAPE)分析。公式如下：

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (f_t - f'_t) / f_t * 100\%$$

根据表 1 和表 2 投放预测结果可知，常均值折扣模型所得结果的平均绝对百分误差 $MAPE=8.1745\%$ ，而由抛物线回归模型所得结果的平均绝对百分误差为 9.5077% 。由此可见这组数据中，使用贝叶斯模型预测的结果更为精确。

用常均值折扣模型预测是比较精确。这里研究的贝叶斯统计预测方法，在许多领域都可能适用。在解决这类相关问题时，贝叶斯统计预测方法与传统的预测方法相比有明显优势。

六、模型的评价与改进

在解决关于全球的流感疫苗投放方案时，采用了基于概率模型的方法，虽然在这个模型只是较简单的一个，但却较好的顺利解决了，同时在划分区域时，采用在各大洲抽取几个重点的有重要参考价值国家作为研究方向，从而较好的规避了很多不必要的计算与分析。在关于两联装与三联装的问题时，采用基于因子分析定权的评估方案，虽然取样时未经行过细的数据分析，但却从而顺利的较好的解决了关于两种病毒疫苗可行性的研究。在解决分析和筛选下一年的在某些区域威胁程度最大的病毒时，采用贝叶斯决策模型加以分析与总结，顺利的解决了这个问题。同时也成功的引入这一模型来解决关于疫苗投放这一类问题。

参考文献

- [1]韩中庚，数学建模方法及其应用，北京：高等教育出版社，2005；
- [2]姜启源，数学模型（第二版），高等教育出版社，2001；
- [3]李志林 欧宜柜，数学建模及典型案例分析，化学工业出版社，2007；
- [4]刘承平，数学建模方法，数学教育出版社，2004；
- [5]王文波，数学建模及其基础知识详解，武汉大学出版社，2006；
- [6]戚凤春 盛军，流感疫苗的研究进展，中国生物制品学杂志，2004 年第 3 期；
- [7]冯杰 黄力伟 王勤 尹成义，数学建模原理与案例，科学出版社，2007；
- [8]李大潜，中国大学生数学建模竞赛，高等教育出版社，2002；
- [9]国家流感中心 <http://www.cnic.org.cn/ch/>
- [10]世界卫生组织流感检测中心：<http://www.who.int/csr/disease/influenza/en/index.html>
- [11]世界流感中心：<http://www.nimr.mrc.ac.uk/ss>

附录一：

Table 1: Extent and type of seasonal influenza activity worldwide, February - September 2008

Country, area or territory	February	March	April	May	June	July	August	September
Africa								
Cameroon	*H1	*H1	*H1	*H1		*B		*H1
Côte d'Ivoire	*H1		*B, *H1	B, *H1				
Egypt	*A, ***B	*A	*A					
Ghana				*H1	*H1	*H1, *H3		
Kenya	*A, *B, *H3	*A, *B, *H1	*B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	
Madagascar	*H1, *B	*H1	*H1	*H1, *B	*H1	*H1, *B	*H1	
Mauritius					*B	*H1, *B, *H3		
Morocco	*H1, *B	*B	*B					
Senegal			*B	*B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	**H1, *B	

Paraguay				*H1				
Peru	*A, *B, *H3	*B, *H1, *H3	*H1, *B, *H3	*B, *H1, *H3	*A, *B, *H1	*A, *B, *H1		
Suriname	*H1							
Trinidad and Tobago			*H3					
United Kingdom, Montserrat	*H1							
United States	***H1, ****H3, ***B	***H1, ****H3, ***B	**H1, **H3, **B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*A, *B	
Uruguay			*H1	*H1, *B	****H1, ****B	*H1, *B	*A, *B	
Venezuela	*B							
Asia								
Bangladesh				*B, *H1	*B, *H1, *H3			
China	*H1, **H3	*H1, **H3, *B	*H1, **H3, *B	**H1, *H3, *B	**H1, *H3, *B	**H1, *H3, *B	**H1, *H3, *B	
China (Province of Taiwan)		*B, *H1	*B, *H1, *H3	*B, *H1	*B, *H3			
China, Hong Kong SAR	**H1, *H3, **B	***H1, *H3, ***B	**H1, *H3, **B	*H1, *H3, *B	**H1, **H3, **B	**H1, **H3, **B	**H1, **H3, **B	**H1, **H3, *B
India	*H1, *H3, *B	*H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*B			
Iran (Islamic Republic of)	*H1		*H3		*B	*H3, *B		
Japan	****H1, **H3, **B	***H1, **H3, ***B	*H1, **H3, **B	**H3, *B	*H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3	

	3, **B	*B						
Ukraine	***H1, ** B	***H1, **B	*H1, *B					
United Kingdom	**H1, *H3, **B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B				
Oceania								
Australia	*H1, *H3, *B	*H1, *H3, *B	*H3, *B	*H3, *B	*H1, **H3, **B	*H1, ***H3, ***B	*H1, **H3, **B	**H3, **B
France, New Caledonia							**H1	
New Zealand				**H3, *B	***H3, ***B	***H3, ***B	*H1, ***H3, ***B	**H3, ***B
Data in Table 1 were provided by the Global Influenza Surveillance Network								
* = Sporadic activity				A= Influenza A (Not subtyped)				
**= Local outbreaks				B= Influenza B				
***= Regional outbreaks				H1= Influenza A(H1N1)				
****=Widespread outbreaks				H3= Influenza A(H3N2)				

附录二

Compilation		Haemagglutination Inhibition Assay - WHO influenza Centre, Melbourne													
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	Human		
	ANTISERANO.	F861	F862	F830	F837	F869	F895	F894	F892	F914	CDC	NIID	Pool	Passage	Sample
	REF. Ag	NC/20	SING/14	NC/9	BRI/193	SHE/141	VIC/500	MAL/100	PHIL/673	SOL/3	HK/2562	FUK/141	2006	History	Date
A	A/NEW CALEDONIA/20/99	640	160	80	80	320	320	320	40	80	80	320	160	E5	
B	A/SINGAPORE/14/2004	640	640	320	320	640	640	1280	320	160	160	80	320	E3	
C	A/NEW CALEDONIA/9/2004	1280	640	320	320	640	640	1280	320	160	160	320	320	E3	
D	A/BRISBANE/193/2004	1280	1280	320	640	640	640	1280	320	160	160	80	320	E3	
E	A/SHENZHEN/141/2005	1280	1280	640	1280	>2560	1280	1280	640	160	160	160	640	E6	
F	A/VICTORIA/500/2006	320	320	160	160	320	640	640	160	160	160	160	160	3	
G	A/MALAYSIA/100/2006	640	640	320	160	640	640	640	160	160	160	80	320	E4	
H	A/PHILIPPINES/673/2006	160	160	80	<20	40	40	80	320	160	640	1280	80	MDCKX, MDCK3	
I	A/SOLOMON ISLANDS/3/2006	160	320	80	40	80	160	320	640	320	320	640	160	E3	
J	A/HONG KONG/2652/2006	160	80	40	<20	<20	20	40	40	80	640	1280	40	E4	
K	A/FUKUSHIMA/141/2006	320	160	80	20	20	40	80	80	160	640	>2560	160	E5	
TEST ANTIGENS															
1	A/THAILAND/655/2006	640	320	160	80	320	320	320	80	80	160	160	160	MDCK3	13/09/06
2	A/THAILAND/657/2006	640	320	160	160	320	320	320	160	80	80	80	160	MDCK3	
3	A/THAILAND/600/2006	640	640	320	320	640	640	640	160	80	80	80	160	MDCK4	15/09/06
4	A/THAILAND/617/2006	640	640	320	640	640	1280	1280	320	160	160	160	320	MDCK3	14/09/06
5	A/PHILIPPINES/768/2006	640	640	160	160	320	320	640	1280	320	640	640	320	MDCK3	20/07/06
6	A/PHILIPPINES/681/2006	640	640	320	320	40	640	1280	320	160	320	80	160	MDCK4	10/07/06
7	A/TAIWAN/772/2006	320	160	80	80	40	80	320	20	40	80	80	80	MDCK4	17/09/06
8	A/MALAYSIA/419/2006	320	160	80	<20	40	40	80	160	160	640	>2560	160	X, MDCK1	11/10/06
9	A/THAILAND/632/2006	320	320	80	80	80	160	320	640	160	320	320	80	MDCK3	7/09/06
10	A/THAILAND/645/2006	320	160	80	40	80	80	160	320	160	320	320	80	MDCK3	7/09/06
11	A/THAILAND/654/2006	320	320	80	80	160	160	320	640	160	320	320	80	MDCK3	9/08/06
12	A/SINGAPORE/62/2006	320	320	80	<20	40	80	160	320	160	640	640	160	MDCKx, mdck1	12/07/06
13	A/PHILIPPINES/769/2006	320	320	80	20	40	80	160	640	320	1280	>2560	160	MDCK3	20/07/06
14	A/PHILIPPINES/731/2006	320	160	80	40	80	80	160	320	160	640	640	160	MDCK3	17/07/06
15	A/PHILIPPINES/746/2006	320	160	160	40	40	80	160	160	320	640	1280	160	MDCK3	18/07/06
16	A/MALAYSIA/416/2006	160	80	40	<20	20	20	40	80	80	320	1280	80	X, MDCK1	11/09/06
17	A/THAILAND/664/2006	160	160	40	<20	40	80	80	160	160	320	640	80	MDCK4	12/09/06
18	A/THAILAND/651/2006	160	80	40	20	20	40	80	80	160	640	1280	80	MDCK3	11/09/06
19	A/THAILAND/652/2006	160	160	40	40	40	80	160	320	160	160	160	80	MDCK4	11/09/06
20	A/THAILAND/658/2006	160	160	40	<20	40	40	80	160	160	320	320	80	MDCK3	18/09/06
21	A/SINGAPORE/69/2006	160	160	40	<20	20	40	80	160	160	640	1280	160	MDCK2	17/07/06
22	A/SINGAPORE/61/2006	160	80	40	<20	20	40	40	80	160	320	1280	160	MDCK2	5/07/06
23	A/SINGAPORE/72/2006	160	160	80	<20	40	80	160	320	160	320	640	160	MDCKX, MDCK1	21/08/06
24	A/SINGAPORE/73/2006	160	160	80	20	40	80	80	160	160	320	640	160	MDCKX, MDCK1	23/08/06
25	A/SYDNEY/72/2006	160	160	80	80	80	160	160	320	160	320	160	80	MDCK1	20/08/06
26	A/PHILIPPINES/659/2006	160	80	80	20	20	40	40	80	160	320	>2560	160	MDCK3	6/07/06
27	A/PHILIPPINES/660/2006	160	80	80	20	20	40	80	80	80	320	1280	80	MDCK3	6/07/06
28	A/HONG KONG/2652/2006	80	80	40	<20	<20	20	40	80	80	640	640	40	MDCKX, MDCK1	

SS

Compilation: 3 & 6 Nov, 4 & 5 Dec 06		Haemagglutination Inhibition Assay - WHO influenza Centre, Melbourne											
HA1 Sequenced		A	B	C	D	E	F	G	H	I	Human		
ANTISERA NO.		F861	F862	F830	F837	F869	F895	F894	F892	F914	Pool	Passage	Sample
REF. Ag		NC/20	SING/14	NC/9	BRIS/193	SHEN/141	VIC/500	MAL/100	PHIL/673	SOL/3	2006	History	Date
A	A/NEW CALEDONIA/20/99	640	320	160	80	320	320	160	20	80	160	E6	
B	A/SINGAPORE/14/2004	640	640	320	640	1280	1280	1280	320	160	320	E4	
C	A/NEW CALEDONIA/9/2004	1280	640	320	320	640	640	640	160	160	160	E3	
D	A/BRISBANE/193/2004	640	640	320	320	640	640	640	160	80	160	E3	
E	A/SHENZHEN/141/2005	1280	1280	640	1280	1280	1280	>2560	640	320	320	E6	
F	A/VICTORIA/500/2006	320	640	320	320	640	640	640	320	160	320	E4	
G	A/MALAYSIA/100/2006	640	640	320	320	640	640	640	160	80	160	E4	
H	A/PHILIPPINES/673/2006	80	80	40	<20	<20	20	20	320	160	40	MDCKX, MDCK3	
I	A/SOLOMON ISLANDS/3/2006	80	160	80	40	80	160	320	640	320	160	E6	
TEST ANTIGENS													
1	A/CHRISTCHURCH/63/2006	1280	640	320	640	1280	1280	1280	320	160	320	MDCKX, MDCK1	3/09/2006
2	A/OTAGO/26/2006	640	640	320	640	1280	1280	1280	320	160	320	MDCKX, MDCK1	21/09/2006
3	A/OTAGO/23/2006	640	640	160	320	640	640	640	160	80	160	MDCKX, MDCK1	5/09/2006
4	A/OTAGO/24/2006	640	320	160	320	640	320	320	160	80	160	MDCKX, MDCK1	3/09/2006
5	A/CHRISTCHURCH/78/2006	640	640	320	640	1280	640	640	320	160	320	MDCKX, MDCK1	28/09/2006
6	A/SRI LANKA/11/2006	320	1280	640	640	1280	1280	1280	320	160	320	MDCK1	
7	A/OTAGO/20/2006	320	1280	320	640	1280	1280	1280	320	160	320	MDCKX, MDCK1	30/08/2006
8	A/OTAGO/21/2006	320	640	320	320	640	640	640	160	80	160	MDCKX, MDCK1	30/08/2006
9	A/Wellington/84/2006	320	1280	640	1280	1280	1280	1280	640	160	320	MDCKX, MDCK1	11/09/2006
10	A/CHRISTCHURCH/66/2006	320	320	160	320	640	320	320	160	80	160	MDCKX, MDCK1	13/09/2006
11	A/CHRISTCHURCH/100/2006	160	320	160	320	320	320	320	160	80	320	MDCKX, MDCK1	30/09/2006
12	A/BRISBANE/213/2006	160	640	320	320	640	640	640	320	80	160	MDCKX, MDCK1	30/08/2006
13	A/MALAYSIA/366/2006	160	320	160	160	320	320	640	80	80	80	X, MDCK1	
14	A/SRI LANKA/16/2006	160	640	320	320	640	1280	640	320	160	320	X, MDCK1	
15	A/SRI LANKA/17/2006	160	640	320	320	1280	1280	1280	320	160	320	X, MDCK1	
16	A/Wellington/81/2006	160	640	320	640	1280	1280	1280	320	160	320	MDCKX, MDCK1	1/09/2006
17	A/Wellington/82/2006	160	640	320	640	640	640	1280	320	160	320	MDCKX, MDCK1	5/09/2006
18	A/OTAGO/25/2006	160	640	320	320	640	640	640	320	160	320	MDCKX, MDCK1	18/09/2006
19	A/MALAYSIA/369/2006	80	320	160	80	160	320	320	1280	320	160	X, MDCK1	
20	A/MALAYSIA/392/2006	80	40	40	<20	20	20	40	80	160	80	X, MDCK1	20/09/2006
21	A/CHRISTCHURCH/65/2006	80	160	80	80	160	160	160	20	40	80	MDCKX, MDCK1	12/09/2006
22	A/MALAYSIA/365/2006	40	20	20	<20	<20	20	20	80	160	80	X, MDCK1	
23	A/MALAYSIA/362/2006	40	20	20	<20	<20	20	20	40	80	40	X, MDCK1	8/08/2006