

2020 年第五届“数维杯”大学生 数学建模竞赛论文

题 目 基于 NSGA2 算法的多目标规划模型优化农业结构

摘 要

问题一需要不同地区的农产品产量及价格相关的时间序列数据，并分析讨论预期的人力成本和收入，问题建立在不同地区的前提下，这两点本身带来价格与产量的巨大波动，预期人力成本和收入的问题就是预测的相关问题，针对问题一，采用统计局、政府文件、前人调研等处搜集资料，拟合的方法解决预期问题。问题二为考虑土地资源充足的情况保障农民收入的前提下保证土地资源循环利用，针对问题二，建立多目标最优化模型求解。问题三为针对土地资源相对缺乏的农民提供小规模种植计划，同时尽量避免水资源的使用。这个问题中显然一大限制为水资源问题，另外仍应保证农民收入。针对问题三，我们采用多目标最优化的方法解决。针对问题四，要考虑种养结合问题，仍采用多目标最优化问题解决。问题五引入多人合作问题，我们针对问题五，考虑合作利益分配，采用多目标最优化方法解决。

对于问题 1，我们建立了拉格朗日拟合模型进行预测，利用清洗后的数据与 MATLAB 对应数据进行拟合估测，得到了需求的预测值。

对于问题 2，考虑土地可持续利用问题，引入土地可持续利用参数为第二目标函数体现循环利用思想，进行合理充足的约束后基于 NSGA2 算法进行编程，其中约束条件考虑了时间柔性约束相比一般模型有所提高，利用 MATLAB 对四川省资阳市凤凰村的实际情况进行仿真分析，得到种植结构优化结果。

对于问题 3，考虑水资源问题，将水资源使用量最少体现在第二目标函数，同时约束条件加入了水资源使用上限问题，约束体现时间柔性，基于 NSGA2 算法 MATLAB 编程对甘肃省武威市古浪县种植结构进行仿真，得到优化结果并与当地原计划对比分析。

对于问题 4，引入畜牧业与渔业，引入新目标函数体现生态农业，降低污染的同时降低农产品化肥等成本，合理增添更改原应对问题 2 的约束条件，约束体现时间柔性，由于时间、水平等问题未实例验证。

对于问题 5，引入多人合作，调整模型四约束条件，同时引入 Shapley 值法进行利益分配，由于时间、水平等问题未实例验证。

关键词 多目标最优化模型 NSGA2 算法 拉格朗日拟合 时间柔性约束 Shapley 值

一、问题的提出

1.1 背景分析

在全球化疫情蔓延和国民生活水平稳步提高大形势下，居民对于绿色农畜产品的需求可能会迎来新的爆发期。传统大规模种植或养殖模式因其较大的风险、产品质量的非保障性及难以解决大规模居民就业问题等方面的缺陷将逐步丧失竞争优势。另外，国家所提倡的乡村振兴策略及解决各地区发展不充分不协调的问题的迫切需求等均预示着以家庭为单位或小规模的个性化种植与养殖计划有望成为国家新一轮的经济增长点。这种模式较为适合我国这一具有庞大人口规模及城镇化比率较高的国家加以推广。未来农村牧区的经营模式将会逐步走向两个极端，一类是大规模的种植与养殖模式，而另一类是较小规模的精细化和绿色化的生产模式。

1.2 问题重述

问题一：通过网络平台搜集适合不同地区种植的农产品(包括粮食、蔬菜及水果等)产量及价格相关时间序列数据，并对不同农产品预期人力成本及收入做相关分析讨论；

问题二：为土地资源相对充足的农民群体规划种植结构，在保障收入的前提下尽可能的保证土地资源循环利用；

问题三：针对缺乏土地资源的农民们提供合理的小规模种植计划，在保障农民基本收入的前提下尽量减少水资源的过度使用；

问题四：在农业基础之上同时考虑牧业与渔业相关经营，提出更为合理的种植与养殖计划；

问题五：考虑多人合作的相关种植计划；

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

问题 1 属于数据分析与预测的数学问题，其总体研究方法是通过查询资料文献搜集到适合不同地区种植的农产品(粮食、蔬菜及水果)的产量及价格相关的时间序列数据。对现有数据进行统计规律分析，并对不同农产品预期的人力成本及

收入展开相关分析讨论。搜集不同地区农产品产量，农产品价格随时间变化的数据，同时得到不同农产品人力成本和相关收入。一般类似的人力成本预测采用拟合的方法求解，而对于此类拟合，二次趋势，一次趋势，插值，指数平滑等方法均可。

问题 1 的目的是问题一的目的是通过数据收集找出相应的农产品，对其预期的人力成本和收入进行分析后，为后面的农产品选择奠定好数据基础。得到不同农产品人力成本和收入的预测值。

由于以上原因，本文将首先借助中国统计局给出的数据进行分析并清洗数据，建立一个插值拟合的数学模型。

2.2 问题 2 的分析

对于具有相对大规模的土地的农民集体，农产品生产计划的研究焦点主要是为实现利润最大化对适合该区域的农产品在特定的生产周期、区域内进行合理、科学、可行的生产排序，如此可实现增加收益，同时保护环境，可持续发展。^[1-2]

问题 2 属于最优化的数学问题，对于解决此类问题一般数学方法有线性或非线性规划，贪心法，模拟退火算法等解决方法。事实上，贪心法相对不准确，而模拟退火算法不容易兼顾多目标，拟建立多目标规划模型，借助 NSGA2 算法求解。

问题 2 的目的是得到一个大体的农业用地规划，一个更加合理的种植结构，首先需要保障农民本身的收入，其次为实现土地可持续利用，土地可持续利用亦应体现在种植结构中。

由于以上原因，本文将首先建立一个多目标优化的数学模型，引入保护土地的目标函数，对结果分别进行预测，并对仿真结果进行分析。

2.3 问题 3 的分析

对于具有相对小规模的土地的农民集体，农产品生产计划的研究焦点主要是保障收入的前提下降低用水量。问题 3 属于最优化的数学问题，对于解决此类问题一般数学方法有线性或非线性规划、贪心法、模拟退火算法等方法。事实上，贪心法相对不准确，而模拟退火算法不容易兼顾多目标，拟建立多目标规划模型，借助 NSGA2 算法求解。

问题 3 的目的是尽可能的降低用水量，同时对农民收入有基本保障，在相对

干旱的西北地区应用具有重大意义。

由于以上原因, 本文将首先建立一个多目标优化的数学模型, 引入节约水资源的目标函数, 对结果分别进行预测, 并对仿真结果进行分析。

2.4 问题 4 的分析

在种植业基础之上同时考虑牧业与渔业相关经营。

问题 4 属于最优化的数学问题, 对于解决此类问题一般数学方法有线性或非线性规划, 贪心法, 模拟退火算法等解决方法。事实上, 贪心法相对不准确, 而模拟退火算法不容易兼顾多目标, 拟建立多目标规划模型, 借助 NSGA2 算法求解。

问题 4 的目的是尽可能的提高农户总体的收益, 同时绿色农业会降低相关污染, 也提高了农产品的质量。

由于以上原因, 本文将首先建立一个多目标优化的数学模型引入渔业畜牧业的防止污染降低成本等约束条件同时对人力成本约束进行修正, 尽可能得发展畜牧业与渔业, 对结果分别进行预测, 并对仿真结果进行分析。

2.5 问题 5 的分析

在农业基础之上同时考虑牧业与渔业相关经营, 再考虑多个家庭合作的问题。

问题五也属于一个最优化问题, 同时也带来了 n 人合作对策问题, 依照问题四, 问题五改变约束条件进入多目标最优化求解, 利益分配可使用传统的 Shapley 值解决。

在问题四中, 人力成了制约收益增加的一个重要因素, 因为原农户在种植面积不变的情况下增加了工作量, 导致工时限制阻碍畜牧业和渔业的发展, 问题五考虑多人合作, 可以使得某农户相对专心处理某块土地的问题, 大大的提升了效率, 增加了人力。

由于以上原因, 本文将首先建立一个多目标优化的数学模型进行求解, 本身比模型四的变化在于劳动力增加了, 劳动力相互之间又有一定的影响, 对约束条件进行一定的修正, 后建立 Shapley 值进行利益分配。

三、模型假设

1. 假设相关来源得到的数据真实可靠;

- 2.假设数据具有代表性;
- 3.假设近几年无重大国际关系改变, 及自然条件大幅度变化;
- 4.假设只考虑一年内可收获的农作物, 对三年内种植计划进行优化
- 5.假设市场趋于稳定, 同一农产品在一定时间内的不同时期的净收益均为均值计算;
- 6.假设进入模型测算的所有农产品均可接受当地气候等条件且为同品种中适合当地条件的情况下最优的品种, 农产品平均亩产量为常量;
- 7.假设在农村本身劳动力不足时, 不考虑继续雇工完成农业生产;

四、定义与符号假设

符号定义	符号说明
C_j	代表某种农产品
q_j	j 种农产品的最大种植面积, 单位: 亩
D	该地区耕地总面积, 单位: 亩
k	一年中某一时间段, 以月间隔
p_j	农产品 j 的每亩净收益
x_{ijkt}	i 时间开始种植, k 阶段停止种植, j 是农产品种类, t 是土地编号, 属于 $\{0,1\}$
r	代表某一时间点, 取值 0-11 时代表 1-12
y_n	第 n 种家畜的数量
plo_n	对应的第 n 种农畜每只造成排泄物需要

五、定义与符号假设

5.1 问题 1 的模型建立与求解

5.1.1 拉格朗日插值拟合模型的建立

本文需要解决的问题是对多种农产品的人力成本和收入进行预测, 剔除中国统计局给出的浮动极大的数据后进行插值拟合。相关数据搜集放入附录中。

(1) 假设已知数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 符合 $y = f(t)$

(2) 构造不超过 n 次的多项式 $y = P_n(t)$ 满足:

$$P_n(t_k) = y_k, k = 0, 1, 2, \dots, n (*)$$

其中*即为插值条件。

(3) 估测不属于输入值的 ξ 借助函数值 $P_n(\xi)$ 代替

根据全国农产品成本收益资料汇编数据,我们选取了适应性强的五种农作物,分别是:稻谷、花生、甘蔗、甜菜以及苹果,我们收集了2002-2018年该五种农作物的人力成本以及净利润,下面是绘制的折线图:

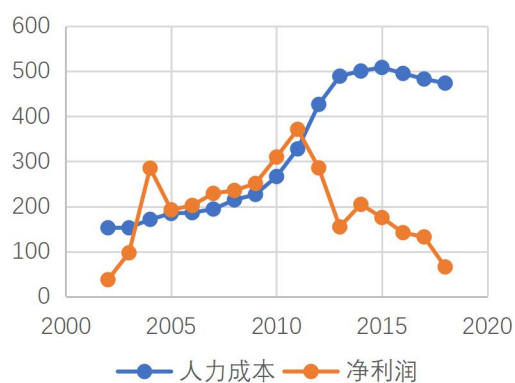


图5-1-1
稻谷所需人力成本及净利润

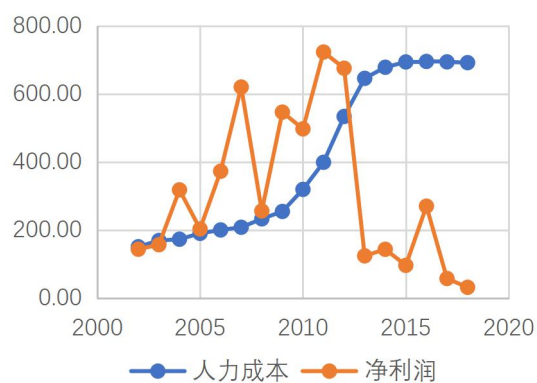


图5-1-2
花生所需人力成本及净利润

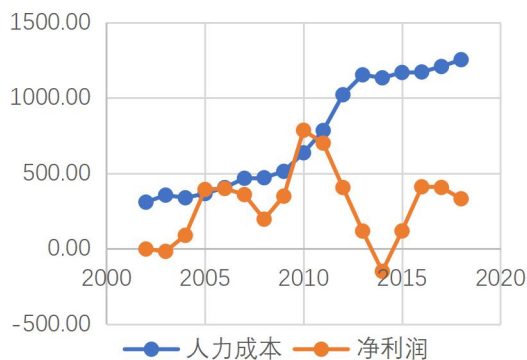


图5-1-3
甘蔗所需人力成本及净利润

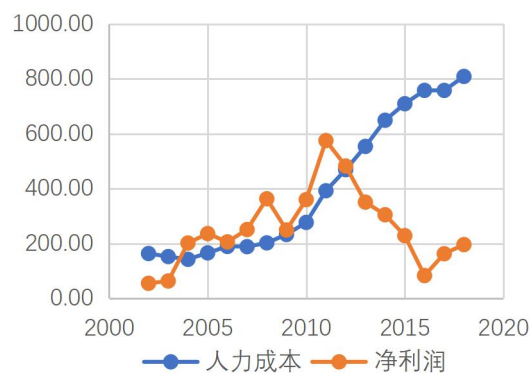


图5-1-4
甜菜所需人力成本及净利润

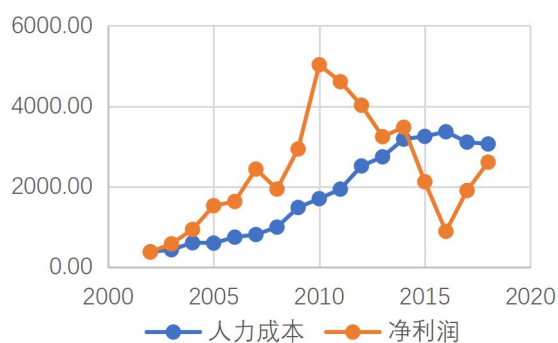


图5-1-5
苹果所需人力成本及净利润

5.1.2 拉格朗日插值拟合模型的求解

由以上折线图可以发现，人力成本与净利润分别和年限之间存在着不同的联系，我们发现人力成本在逐年上升，而净利润随年限的增加有着不同的图规律，所以我们选择了拉格朗日插值拟合模型，利用 MATLAB 来进一步预测人力成本与净利润：

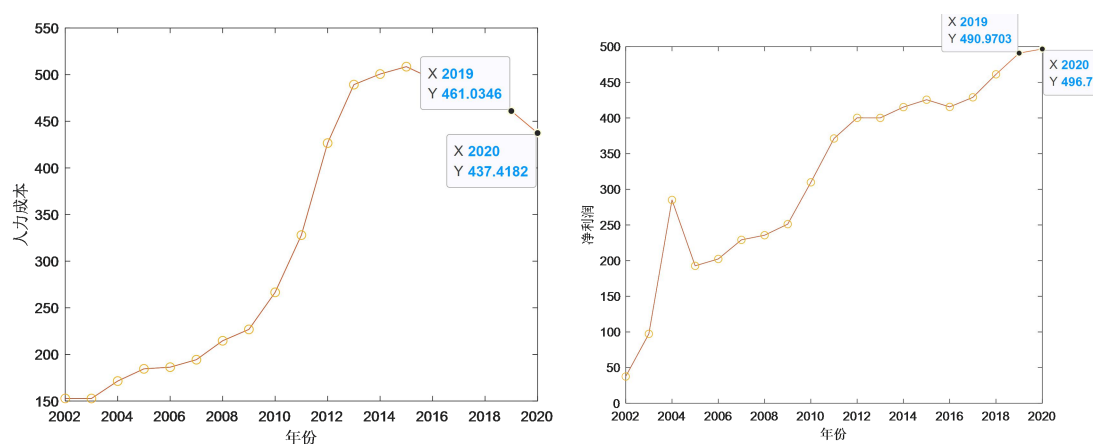


图 5-1-6 稻谷人力成本及净利润拟合曲线

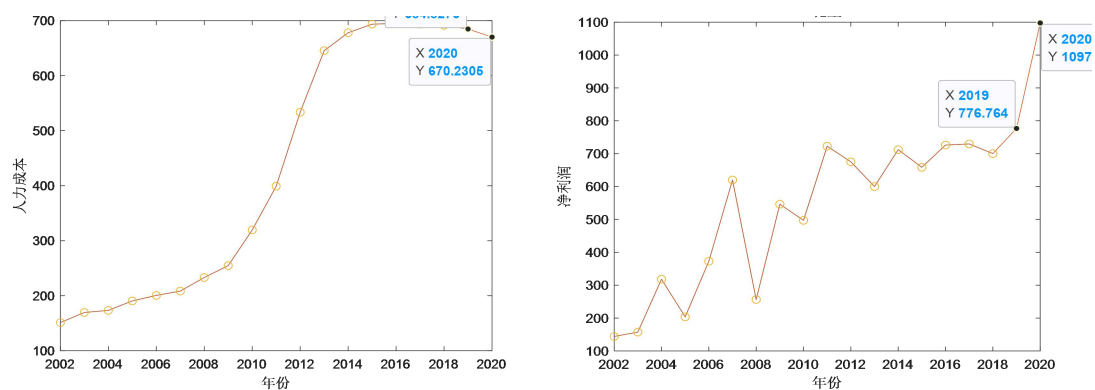


图 5-1-7 花生成本及净利润拟合曲线

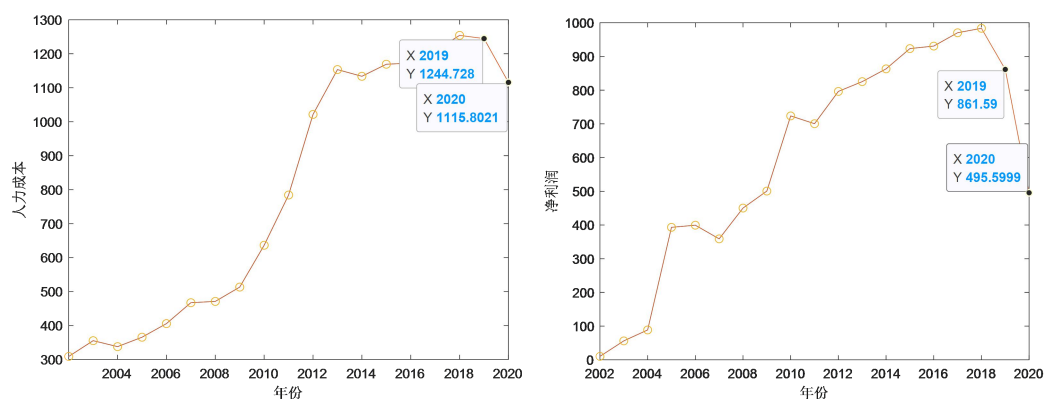


图 5-1-8 甘蔗成本及净利润拟合曲线

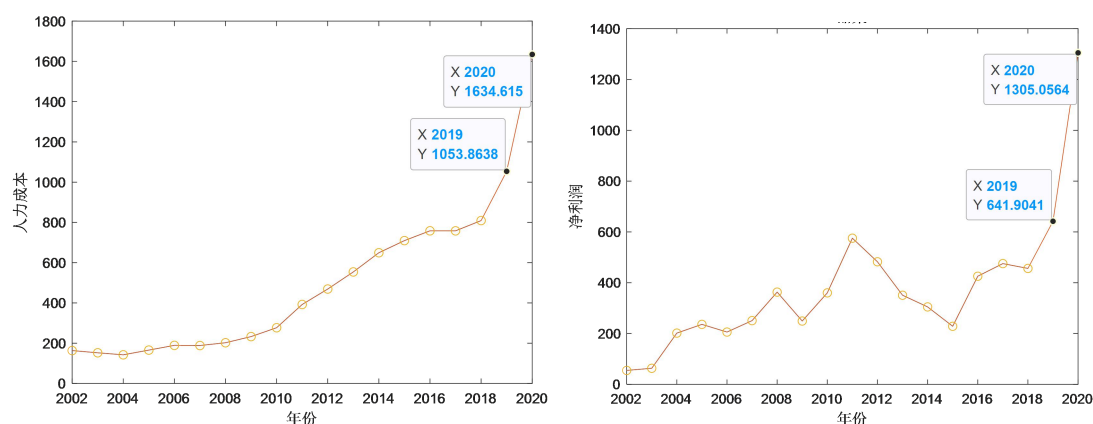


图 5-1-9 甜菜成本及净利润拟合曲线

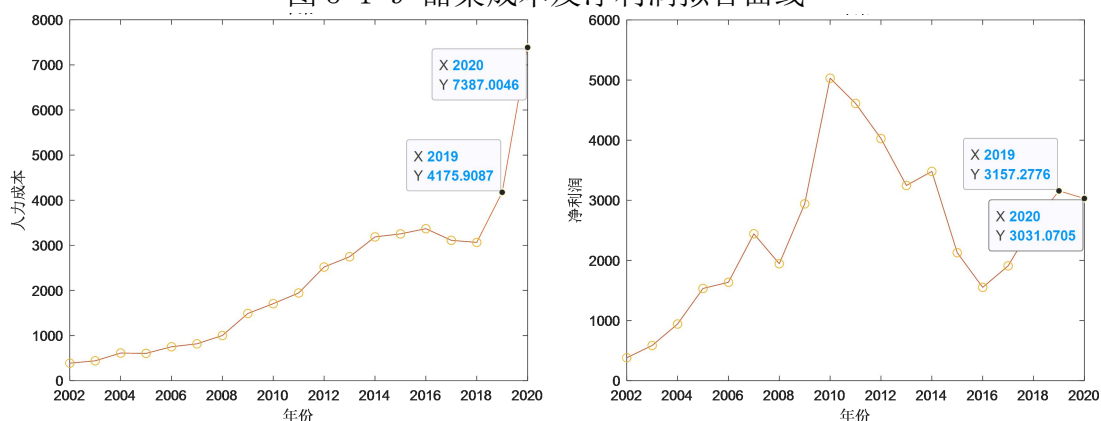


图 5-1-10 苹果成本及净利润拟合曲线

5.1.3 拉格朗日插值拟合模型的结论

最后通过分析拉格朗日插值拟合模型得到的拟合值可以看出各个农作物在 2020 年的人力成本和净利润的预测值，2020 年稻谷的人力成本将达到 437.7 元/亩地，净利润达 469.7 元/亩地；苹果的人力成本将达到 7387.0 元/亩地，净利润达 3031.0 元/亩地；甜菜的人力成本将达到 1634.6 元/亩地，净利润达 1305.0 元/亩地；甘蔗的人力成本将达到 1115.8 元/亩地，净利润达 495.60 元/亩地；花生的人力成本将达到 670.2 元/亩地，净利润达 1097.0 元/亩地；与过去整体的变化趋势具有一致性，代表结果相对可以接受。

5.2 问题 2 的模型建立与求解

5.2.1 多目标优化模型的建立

本文需要解决的问题是对较大规模的农田种植结构进行优化，保障收益的同时保证土地可持续利用，题目要求是得到合理的种植计划，剔除明显不合理的数据后选用多目标优化类型的模型进行分析。

(1) 设总利润保障总利润 g_1 最大[预定 1]

$$\max g_1 = \sum \sum \sum x_{ijk} \cdot p_j \quad (2.1)$$

(2) 设土地可持续利用参数 g_2 最小[预定 2]

$$\min g_2 = \alpha \sum \sum Z_{jk} + \beta \sum Z_n \quad (2.2)$$

其中

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & x_{ij(k+1)} = x_{ijk} \\ 0 & x_{ij(k+1)} \neq x_{ijk} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$Z_n = \begin{cases} 1 & x_{iA(k+1)} = x_{iBk} \\ 0 & x_{iA(k+1)} \neq x_{iBk} \end{cases} \quad (2.4)$$

α 与 β 为相关系数，即 Z_{jk} 与 Z_n 相对影响土地可持续利用的权值。

根据土地可持续利用的定义：满足当前的需要的前提下，保证对环境的利用不超过它本身的恢复力，生态系统可以重复提供原有的资源。以及土地可持续利用的方法尽量避免相同的农作物在多个的种植周期中于同一片土地的上连续种植(即“连作”)^[3]，用 Z_{jk} 表达，某些农作物不可以接茬种植比如玉米不适合在刚刚收获谷物的地区种植，保障土地肥力^[3]，用 Z_n 表达，式中 A 、 B 代表先后种植导致冲突的农产品。

(3) [制约 1] 人力成本，设该地区人力成本具有上限 $T_{\max}(i, k)$ ，农产品 C_j 在 k 时间段内每亩需要 t_j 工时，假设每人可提供 250 工时每月则对任意 k 时间段内有

$$\sum \sum t_j x_{ijkt} < T_{\max}(i, t) \quad (2.5)$$

(4) [制约 2] 每种农产品一定时间内种植面积上限，设 k 时间内 j 农产品种植面积上限为 $S_{\max}(k, j)$ ，下限 $S_{\min}(k, j)$ ，此时有

$$S_{\min}(j) \leq \sum_k \sum_i x_{ijkt} \leq S_{\max}(j) \quad (2.6)$$

(5) [制约 3] 土地流量约束：用以表示判断，农产品 C_i 在某阶段 r 是否开始生产，当 $as_{ijk} = 1$ ，表示农产品 C_j 在时间点 $r+1$ 时进行生产；当 $as_{ijk} = 0$ ，则表示农产品 C_j 在时间点 $r+1$ 月并不生产。 ae_{ijk} 表示判断农产品 C_i 在某时间点 r 是否

结束收获，当 $ae_{ijk}=1$ 表示农产品 C_j 在时间点 r 结束生产；当 $ae_{ijk}=0$ 时表示农产品 C_j 在时间点 r 尚未结束生产。时间点 r 表示第 r 月的结束和第 $r+1$ 月的开始，所以，我们需要比较 $r+1$ 与某农产品 C_j 的生产开始时间 i ，将其赋值于 as_{ijk} ；比较 r 与 C_j 收获的结束时间 k ，并将其赋值于 ae_{ijk} 。

对于关系进行分类讨论：

① $i < k$ 说明作物在同一年即可收获

$$as_{ijk} = \begin{cases} 1 & r+1=i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$ae_{ijk} = \begin{cases} 1 & r=k \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.8)$$

② $i \geq k$ 说明农作物跨年收获

$$as_{ijk} = \begin{cases} 1 & r+1=i \\ 1 & r=0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$ae_{ijk} = \begin{cases} 1 & r=k \\ 1 & r=12 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.10)$$

土地流量平衡：准备开始种植时有

$$\sum_{j=1}^n \sum_k as_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \quad (2.11)$$

其中 x_i 代表时间点 i 也就是第 i 个月内不种植土地的面积。

2月初的土地流量平衡：记 $r=1$ ，即1月生产结束的农产品释放的土地量与1月闲置土地量总和等于2月开始生产的农产品分配的土地量和2月闲置土地量总和，等式为

$$\sum_{j=1}^n \sum_k as_{2jk} x_{2jk} + x_2 = x_1 + \sum_{j=1}^n \sum_i ae_{ij1} x_{ij1} \quad (2.12)$$

将式(2.11)和式(2.12)相加，整理得：

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^n \sum_k as_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^1 \sum_{j=1}^n \sum_i ae_{ijk} x_{ijk} + x_2 = D \quad (2.13)$$

③3月初的土地流量平衡：记 $r=2$ ，即2月生产结束的农产品释放的土地量

与2月闲置土地量总和等于3月开始生产的农产品分配的土地量和3月闲置土地量总和，等式为

$$\sum_{j=1}^n \sum_k a s_{3jk} x_{3jk} + x_3 = x_2 + \sum_{j=1}^n \sum_i a e_{ij2} x_{ij2} \quad (2.14)$$

将式(2.13)和式(2.14)相加，整理得：

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Kij} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ijk} x_{ijk} + x_3 = D \quad (2.15)$$

④4到12月初的土地流量平衡：记 $r=3, 4, 5 \cdots 11$ ，即 r 月生产结束的农产品释放的土地量与 i 月闲置土地量总和等于 $r+1$ 月开始生产的农产品分配的土地量和 $r+1$ 月闲置土地量总和，经整理得：

$$\sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Kij} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad (2.16)$$

⑤年末的土地流量平衡： $r=12$ ，即表示12月的结束，农产品释放的土地量和闲置土地量总和等于土地总面值，等式为

$$x_{12} + \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ij12} x_{ij12} = D \quad (2.17)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ijkt} t_j < T_{\max} \\ S_{\min} \leq \sum_t x_{ijkt} \leq S_{\max} \\ t = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Kij} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r = 1, 2, \cdots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K1j} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ x_{ijkt} \in \{0, 1\}, x_i \geq 0 \\ i, k = 1, 2, \cdots, 12 \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array} \right. \quad ($$

2.18)

5.2.2 多目标优化模型的求解

对多目标优化模型,一般可将多目标转化为比较容易求解的单目标。实际上,常用的遗传算法、动态规划算法、蚁群算法等,对农业大数据而言,存在一些问题如计算量大、速度慢“维数灾难”等问题。下面是该模型的求解步骤。第一步,基于线性加权的方法把我们的双目标函数转化为熟悉的单目标函数模型。第二步,利用多目标优化模型内的 NSGA-II 算法,即带有精英保留策略的快速非支配多目标优化算法,是一种基于 Pareto 最优解的多目标优化算法来实现对不确定的权重即农产品所需人力成本和收入的保护程度和整个农产品生产系统的风险水平的调控。第三步,将我们已经优化的非线性的保护函数转化成为线性形式。经过以上三个步骤,将包含不确定性的我们定好的权重参数的多目标规划问题转化为便于计算的线性的单目标形式。

第一步,将多目标优化模型转化。

$$\max (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) \quad (2.19)$$

式中: λ_1 和 λ_2 分别为两个目标函数的权重。 λ_1 和 λ_2 均为正数,两者是相互独立的,且和为 1。由于同时处理两个权重的不确定性会导致两个权重参数产生相互影响。所以,需要对权重系数进一步转化。将两个权重系数同时除以 λ_1 ,得到修正后的权重 λ'_1 和 λ'_2 。其中, λ'_1 为 1 并且始终一直都保持不变, $\lambda'_2 = \lambda_2 \lambda_1$ 。在之后的模型中,仅考虑 λ'_2 的不确定性。不论 λ'_2 如何变化,原始的权重系数之和始终为 1。

第二步,利用多目标优化模型内的 NSGA-II 算法来计算农产品相应的种植周期。

将前一次种植的农作物与当代农作物合并,进行快速非支配排序,同时对每个非支配层中的农产品进行拥挤度计算,根据非支配关系以及个体的拥挤度选取合适的农产品组成新的父代农作物;最后,通过遗传算法的基本操作产生新的农产品子代。

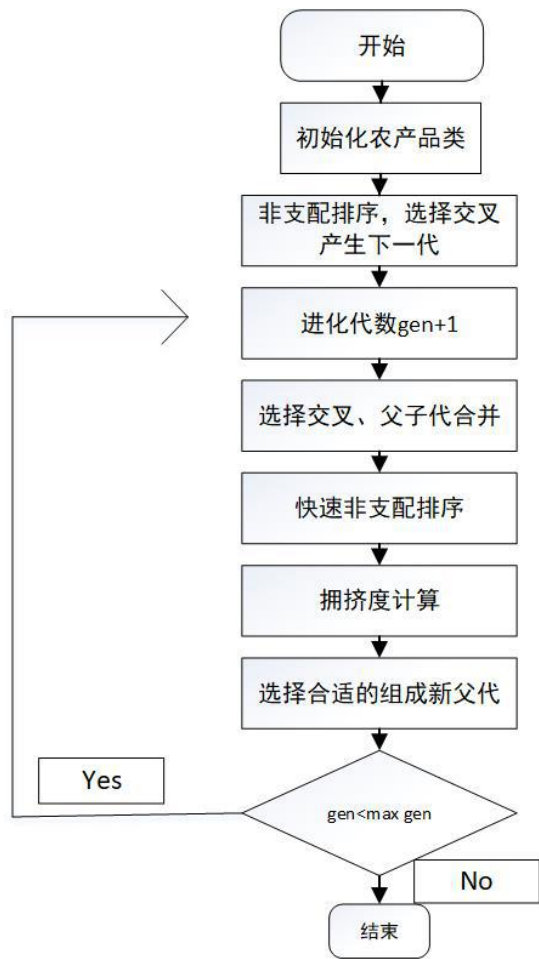


图 5-2-1 NSGA-II算法流程图

根据题目条件：要求土地资源相对充足，考虑发展土地可持续利用，选用四川省资阳市凤凰村为样本根据国家统计局的数据进行建模规划。

表 5-2-1 主要农产品生产时间以及净利润

农产品名称	农产品 编号	农产品生产 时间段 1	亩净利润 1 (元/亩)	农产品生产 时间段 2	亩净利润 2 (元/亩)
小麦	1	11—5 月	117. 92		
玉米	2	3—7 月	263. 09		
大豆	3	4—8 月	121. 95		
花生	4	5—9 月	722. 79		
油菜	5	10—5 月	21. 27		
棉花	6	3—10 月	202. 49		
露地番茄	7	2—7 月	3357. 43	3—8 月	3021. 69
露地黄瓜	8	2—5 月	3321. 83	3—6 月	2989. 65
露地茄子	9	1—7 月	3288. 5	2—8 月	2959. 65
露地菜椒	10	2—6 月	2118. 44	3—7 月	1906. 60
露地圆白菜	11	7—1 月	1513. 19	8—2 月	1361. 89
露地大白菜	12	9—12 月	1228. 42	8—11 月	1105. 58
露地马铃薯	13	12—3 月	1513. 49	1—5 月	1362. 15
露地菜花	14	7—12 月	1131. 23	8—1 月	1018. 11
露地萝卜	15	10—1 月	1696. 72	9—12 月	1527. 05
露地豆角	16	3—6 月	2656. 64	4—7 月	2391. 00

由于粮油类农产品容易储存，故种植面积不设置限制，而蔬菜水果受到市场

影响较大，按原当地设置的最大种植面积带入模型，控制土地可持续发展的系数带入 1 与 2，带入模型进行进行编程规划，得到如下结果：

表 5-2-2 凤凰村种植结构规划结果

农产品 编号	农产品 名称	月份												面积 (亩)
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
C ₄	花生													10
C ₇	露地番茄													270
C ₈	露地黄瓜													230
C ₉	露地茄子													160
C ₁₁	露地圆白菜													200
C ₁₂	露地大白菜													140
														40
C ₁₃	露地马铃薯													210
C ₁₄	露地菜花													160
														50
C ₁₅	露地萝卜													240
C ₁₆	露地豆角													200

为了简便观察，该结果未引入本模型的特色：土地编号，实际上由于引入了土地编号，出现了相比该地方原计划更多的闲置土地，并减少了一些种植上的冲突，同时也保护了土地肥力的回复。经过规划，得到了如下的每月限制土地（140，0，0，10，0，230，540，400，170，170，0），同时得到收益最大值约为为 4433300 元。

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 多目标优化模型的建立

本文需要解决的问题是对较大规模的农田种植结构进行优化，保障收益的同时保证土地可持续利用，题目要求是得到合理的种植计划，剔除明显不合理的数据后选用多目标优化类型的模型进行分析。

(1) 设总利润保障总利润 g_1 最大[预定 1]

$$\max g_1 = \sum \sum \sum x_{ijk} \cdot p_j \tag{3.1}$$

(2) 设 C_j 农产品对应的每亩每个月的平均用水量为 w_j ，水资源利用总量 g_2 最小，[预定 2]

$$\min g_2 = \sum \omega_j x_{ijk} \tag{3.2}$$

(3) [制约 1]人力成本，设该地区人力成本具有上限 $T_{\max}(i, k)$ ，农产品 C_j 在 k 时间段内每亩需要 t_j 工时，假设每人可提供 250 工时每月则对任意 k 时间段内

有

$$\sum x_{ijk} t_j < T_{\max}(i, t) \quad (3.3)$$

(4) [制约 2] 每种农产品一定时间内种植面积上限, 设 k 时间内 j 农产品种植面积上限为 $S_{\max}(j)$, 下限 $S_{\min}(j)$, 此时有

$$\sum_k \sum_i x_{ijkt} \leq S_{\max}(j) \quad (3.4)$$

(5) [制约 3] 水资源制约, 当地允许的每个月最大灌溉用水总量 W_{\max} , C_j 农产品对应的每亩每个月的平均用水量为 w_j , 此时有

$$\sum \omega_j x_{ijkt} \leq W_{\max} \quad (3.5)$$

(6) [制约 4] 土地流量约束:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Kij} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r = 1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K1j} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in Ij} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k, m = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.6)$$

)

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ijk} t_j < T_{\max}(i, t) \\ S_{\min} \leq \sum_t x_{ijkt} \leq S_{\max} \\ t = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{ij}} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r = 1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{1j}} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad ($$

3.7)

5.3.2 多目标优化模型的求解

考虑到模型的适用性：相对缺水、耕地面积相对较少，选用西北地区甘肃省的古浪县作为优化地区。数据选取当地及附近地区的统计年鉴、规划文件、政府工作报告等资料^[3-6]。



图 5-3-1 问题三研究地区

将相关预处理的数据带入上述模型，通过 MATLAB 软件得到结果，进行整理后得到如下结果：

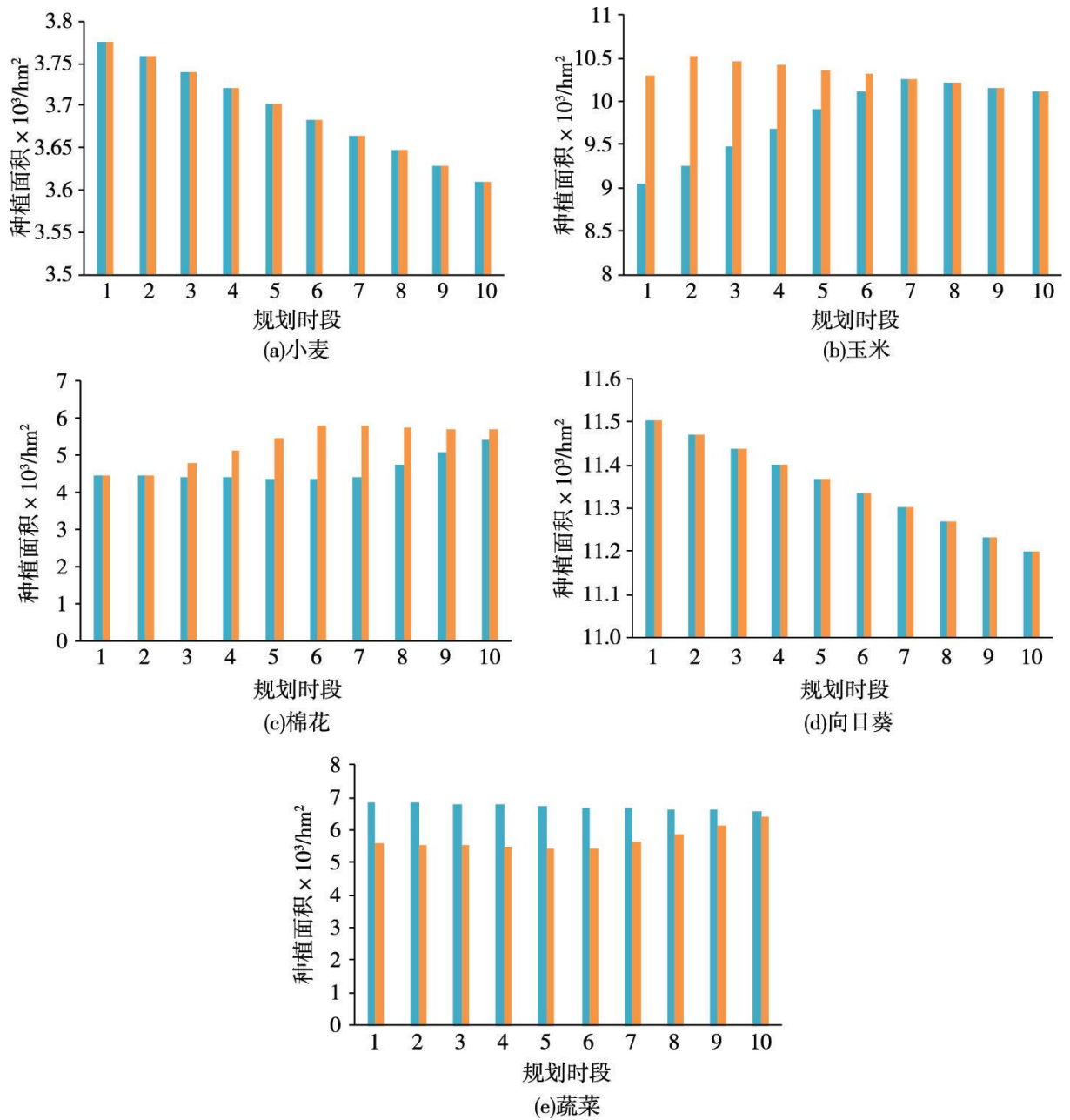


图 a 优化结果

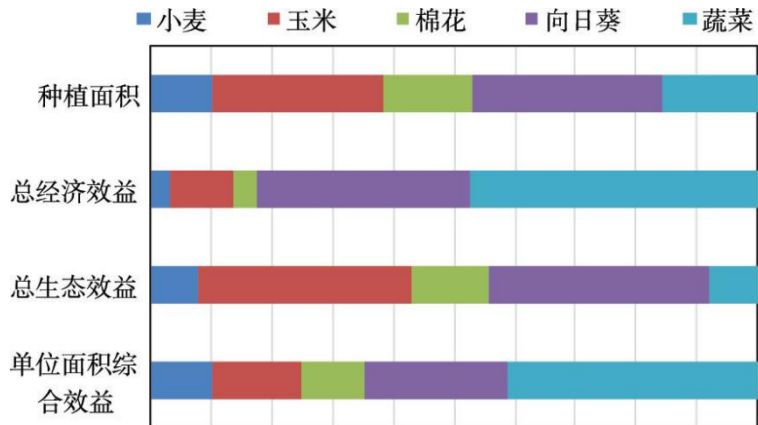


图 5-3-2 各种农作物对经济效益和生态效益贡献

图 a 中，蓝色部分为原实际情况，黄色部分为多目标优化模型得到结果。

将优化结果与 2017 年该地区的实际情况进行了比较。2017 年作物总种植面积大约为 3.6 万公顷，灌溉用水 2.15 亿立方米，经济效益达到 1.27 亿元。相比而言，该模型的优化结果中，研究区的经济方面的效益和综合后的效益分别降低了大约 9% 和 2%，生态效益提高了将近 2%。

优化后发现蔬菜等高经济效益但是同样产量相对较低的作物的种植面积逐渐降低，多种植玉米，这个结果在保证粮食稳定供给的前提下，提高了生态效益。图 z 可以明显体现出在生态效益上玉米和棉花相对蔬菜带来的优势。当前古浪地区过多地种植了蔬菜而忽视了诸如玉米和棉花等作物。作物种植结构的调整，可促进该地区均衡发展并生态环境的修复。就总体而言，总种植面积和农业用水量均降低了大约 2%。

生态修复或森林种植可使用借助该模型节约得到的水资源，这将辅助作用于该地区的生态可持续发展，若作用于其他行业，也可以一定程度上弥补造成的经济损失。

5.3.3 多目标优化模型的结果

借助考虑节水为次要目标的多目标规划模型以及 NSGA2 算法的求解，本文得到了一个相对合理的规划种植结构的方法，带入古浪县实例验证后得到的结果符合客观发展规律，也在生态保护等方面具有实际价值。

5.4 问题 4 的模型建立与求解

5.4.1 多目标优化模型的建立

本文需要解决的问题是对较大规模的农田种植结构进行优化，保障收益的同时保证土地可持续利用，题目要求是得到合理的种植计划，剔除明显不合理的数据后选用多目标优化类型的模型进行分析。

(1) 设总利润保障总利润 g_1 最大， y_n 代表第 n 种家畜的数量， p_n 代表对应家畜每只带来的净收入[预定 1]

$$\max g_1 = \sum \sum \sum x_{ijk} \cdot p_j + \sum y_n p_n \quad (4.1)$$

(2) 剩余容纳排泄废物的量最小：根据中国目前的实际情况，国内种养结合

较好的地区仍很难使得禽畜排泄废物完全利用，故使得相关排泄废物的浪费最少，这样也可以降低实际上因为处理排泄物造成的成本，其中渔业和畜牧业造成的排泄废物不同，有些农作物更方便处理渔业的排泄废物，比如水稻，故需要分开处理， plo_n 为对应的第 n 种农畜每只造成排泄物需要的农作物的面积（实际上不同农作物之间对同种的排泄废物存在不同的容纳量，但实际农民一般不考虑这一点，故忽略偏差），其中 α 与 β 剩余容纳畜牧业和渔业排泄废物相应的权值，由于不同地区畜牧业与渔业情况不同，应咨询当地专家决定取值。[预定 2]

$$\min g_2 = \alpha \left(\sum x_{ijk} - \sum y_n plo_n \right) + \beta \left(\sum x_{ijk} - \sum y_n plo_n \right) \quad (4.2)$$

(3) [制约 1] 人力成本，设该地区人力成本具有上限 $T_{\max}(i, k)$ ，农产品 C_j 在 k 时间段内每亩需要 t_j 工时，假设每人可提供 250 工时每月则对任意 k 时间段内有

$$\sum x_{ijk} t_j < T_{\max}(i, k) \quad (4.3)$$

(4) [制约 2] 每种农产品一定时间内种植面积上限，设 k 时间内 j 农产品种植面积上限为 $S_{\max}(k, j)$ ，下限 $S_{\min}(k, j)$ ，此时有

$$S_{\min}(j) \leq \sum_t \sum_k \sum_i x_{ijkt} \leq S_{\max}(j) \quad (4.4)$$

(5) [制约 3] 水资源制约，当地允许的每个月最大农业用水总量 W_{\max} ， C_j 农产品对应的每亩每个月的平均用水量为 w_j ，农畜 y_n 对应的每亩每个月的平均用水量为 ω_n 此时有

$$\sum \omega_j x_{ijk} + \sum \omega_n y_n \leq W_{\max} \quad (4.5)$$

(6) [制约 4] 土地流量约束：用以表示判断，农产品 C_i 在某阶段 r 是否开始生产，当 $as_{ijk} = 1$ ，表示农产品 C_j 在时间点 $r+1$ 时进行生产；当 $as_{ijk} = 0$ ，则表示农产品 C_j 在时间点 $r+1$ 月并不生产。 ae_{ijk} 表示判断农产品 C_i 在某时间点 r 是否结束收获，当 $ae_{ijk}=1$ 表示农产品 C_j 在时间点 r 结束生产；当 $ae_{ijk}=0$ 时表示农产品 C_j 在时间点 r 尚未结束生产。时间点 r 表示第 r 月的结束和第 $r+1$ 月的开始，所以，我们需要比较 $r+1$ 与某农产品 C_j 的生产开始时间 i ，将其赋值于 as_{ijk} ；比较 r 与 C_j 收获的结束时间 k ，并将其赋值于 ae_{ijk} 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{ij}} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r=1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{1j}} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k, m = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (4.6)$$

(7) [制约 5] 养殖农畜的上限, 假设第 n 种农畜农畜 y_n , 每只占用面积为 S_n , 每种农畜允许的上限养殖面积为 $S_{n \max}$

$$y_n S_n \leq S_{n \max} \quad (4.7)$$

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ijk} t_j < T_{\max}(i, t) \\ S_{\min}(j) \leq \sum_t \sum_k \sum_i x_{ijk} \leq S_{\max}(j) \\ t = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{ij}} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r=1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{1j}} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ \sum \omega_j x_{ijk} + \sum \omega_n y_n \leq W_{\max} \\ y_n S_n \leq S_{n \max} \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (4.8)$$

5.5 问题 5 的模型建立

5.5.1 多目标优化模型的建立

本文需要解决的问题是对较大规模的农田种植结构进行优化,保障收益的同时保证土地可持续利用,题目要求是得到合理的种植计划,剔除明显不合理的数据后选用多目标优化类型的模型进行分析。

(1) 设总利润保障总利润 g_1 最大, y_n 代表第 n 种家畜的数量, p_n 代表对应家畜每只带来的净收入[预定 1]

$$\max g_1 = \sum \sum \sum x_{ijk} \cdot p_j + \sum y_n p_n \quad (5.1)$$

(2) 剩余容纳排泄废物的量最小[预定 2]

$$\min g_2 = \alpha \left(\sum x_{ijk} - \sum y_n pol_n \right) + \beta \left(\sum x_{ijk} - \sum y_n pol_n \right) \quad (5.2)$$

(3) [制约 1] 人力成本, 相比模型四, 考虑多人合作时某人可专一管理某一部分, 流水线化管理, 节约人力成本, 对于每种农畜的相对节约工时的情况, 应就当地情况咨询专家, 得到对于农畜 y_n 有节约 T_n 工时, $T_n(ppl)$, 其中 ppl 为人数, 节约工时数为与人数相关的函数, 假设为线性关系, 则 $T_n = a_n \times ppl + b_n$, a_n, b_n 反应二者关系, 具体值应就当地情况确定

$$\sum x_{ijk} t_j + \sum y_n t_n - \sum y_n T_n < T_{\max}(i, k) \quad (5.3)$$

(4) [制约 2] 每种农产品一定时间内种植面积上限, 设 k 时间内 j 农产品种植面积上限为 $S_{\max}(k, j)$, 下限 $S_{\min}(k, j)$, 此时有

$$S_{\min}(j) \leq \sum_t \sum_k \sum_i x_{ijk} \leq S_{\max}(j) \quad (5.4)$$

(5) [制约 3] 水资源制约, 当地允许的每个月最大农业用水总量 W_{\max} , C_j 农产品对应的每亩每个月的平均用水量为 w_j , 农畜 y_n 对应的每亩每个月的平均用水量为 w_n 此时有

$$\sum \omega_j x_{ijk} + \sum \omega_n y_n \leq W_{\max} \quad (5.5)$$

(6) [制约 4] 土地流量约束:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{ij}} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r=1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{1j}} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k, m = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (5.6)$$

(7) [制约 5] 养殖农畜的上限, 假设第 n 种农畜农畜 y_n , 每只占用面积为 S_n , 每种农畜允许的上限养殖面积为 $S_{n \max}$

$$y_n S_n \leq S_{n \max} \quad (5.7)$$

综上有:

$$s.t. \left\{ \begin{array}{l} \sum x_{ijk} t_j + \sum y_n t_n - \sum y_n T_n < T_{\max}(i, k) \\ S_{\min}(j) \leq \sum_t \sum_k \sum_i x_{ijk} \leq S_{\max}(j) \\ t = 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{ij}} a s_{ijk} x_{ijk} - \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ijk} x_{ijk} + x_{r+1} = D \quad r=1, 2, \dots, 11 \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k \in K_{1j}} a s_{1jk} x_{1jk} + x_1 = D \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i \in I_j} a e_{ij12} x_{ij12} + x_{12} = D \\ \sum \omega_j x_{ijk} + \sum \omega_n y_n \leq W_{\max} \\ y_n S_n \leq S_{n \max} \\ x_{ijk} \geq 0, x_i \geq 0 \\ i, k = 1, 2, \dots, 12 \\ j = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (5.8)$$

5.5.2 基于 Shapley 值法的利益分配

定义集合 I 为 n 人集合, s 为 I 的子集, s 表示 n 人集合中任意一种合作, $v(s)$

为合作 s 的效益, 由 5.5.1 得必有 $v(s_1 \cup s_2) \geq v(s_1) + v(s_2)$, $s_1 \cap s_2 = \emptyset$ 。

$[I, v]$ 为 n 人合作对策, v 为对策的特征函数。在上述多人合作种养结合的效益分配中, 用 x_i 表示 I 的成员 i 从合作中的最大效益 $v(I)$ 中应得到的收入,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 叫做合作对策的分配, 满足有

$$s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i = v(I) \\ x_i \geq v(i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (5.9)$$

Shapley 值 $\Phi(v) = (\psi_1(v), \psi_2(v), \dots, \psi_n(v))$, 对任意 s 记作 $x(s) = \sum x_i$, 这就是 s 中各个成员的分配。对于一切 s 有分配不小于 s 的效益, 故 Shapley 值作为一种特定的分配, 即 $\psi_i(v) = x_i$, 根据 Shapley 公理, 有 Shapley 值

$$\begin{aligned} \psi_i(v) &= \sum_{s \in S_i} w(|s|) [v(s) - v(s/i)], i = 1, 2, 3, \dots, n \\ w(|s|) &= (n - |s|)! (|s| - 1)! \div (n!) \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中 S_i 为 I 含有 i 的所有子集, $|S|$ 代表人数, $w(|s|)$ 是加权因子, s/i 表示去掉 i 后的集合, 在合作种植问题中, 对原来每个家庭和组合计算对应的参数, 进而带入计算可得到对应的 $\psi_i(v)$, 即为收益。

六、模型的评价及优化

6.1 误差分析

- (1) 某些参数需要主观确定, 造成误差
- (2) 实际情况中, 如果收益足够大, 农民可能雇工, 或种植生长周期大于一年的农作物, 本文建立在不考虑这些情况的条件下。
- (3) 大量种植某种农产品可能引起市场大幅度波动, 导致净收益大幅下降
- (4) 带入模型计算的数据不够准确

6.2 模型的评价

6.2.1 模型的优点

1. 拉格朗日插值法的公式结构整齐紧凑, 在理论分析中十分方便。

2. 四个对应的多目标规划模型解决了对应的问题:

(1) 模型二中借助土地编号以及特色的土地利用参数体现出土地可持续利用,

(2) 模型三规划最大收益的同时兼顾了用水问题, 对相对缺水地区具有重要意义

(3) 模型四引入了畜牧业与渔业实现了种养结合的最优规划, 考虑了解决污染和肥料的问题, 降低了养殖成本的同时提高了种植业农产品的质量。

(4) 模型五对人力成本的约束条件加以修正, 体现出多人合作的优越性, 另引入 n 人合作决策的经典方法 Shapley 值法进行利益分配, 解决合作中收益问题。

(5) 四个模型均考虑了农产品种植周期不同, 可能出现跨年情况的问题, 即土地流量约束, 解决了实际的需要, 而实际上大量规划模型是忽略这一点的

3. 四个规划模型均采用 NSGA2 算法, 其摆脱了一般遗传算法的缺陷, 运算相对较快, 收敛性好。

6.2.2 模型的缺点

1. 拉格朗日插值法在计算中, 当插值点增加或减少一个时, 所对应的基本多项式就需要全部重新计算, 导致整体公式变化, 相对繁琐. 这时可以用重心拉格朗日插值法或牛顿插值法来代替。此外, 当插值点比较多时, 拉格朗日插值多项式的次数可能会很高, 因此具有数值不稳定的特点, 也就是说尽管在已知的几个点取到给定的数值, 但在附近却会与实际值之间有很大的偏差。

2. 用于拟合的数据很少, 偶然性比较大, 还有待更进一步的搜集数据进行拟合。

3. 模型二中, 出现了四维变量, 增大了运算量

4. 模型二三四五中均出现了需要主观确定的常数, 主观性过强可能导致误差较大

6.3 模型的推广

(1) 为了使模型更加的丰富和完善, 选取尽可能多的影响指标, 而不是局限于题

目中所指定的指标，使整个评价体系更加全面，更加具有信服力，防止因某些指标的影响带来不同的结果。

(2) 每个指标数据运用上存在差异，会使得一些熟知的比较存在一定的误差，尽量保证数据的真实有效，需要对更多的数据进行修正完善。

(3) 通过对实际地方的调研或多年的经验，可以对特定地区确定模型中一些系数。

(4) 后四个规划模型均建立在农民不雇工，不考虑种植周期大于一年的条件之下，进一步的研究应该考虑这些问题。

(5) 大量种植经济作物时势必影响市场价格，本文建立在市场无大幅度波动的情况下，进一步的研究应联系市场，应从市场盈利性以及生产稳定性角度分析不同品种的相关特性，以选择出最适宜当地情况的品种^[7]，同时对应规划时可以考虑出产对应月份农产品的相应价格与收益。

(6) 模型四五未带入实例求解验证，应当在求解后与实际情况进行比对修改验证准确性，分析灵敏度

参考文献

- [1] Hildreth C, Reiter S. On the choice of a crop rotation plan [M]/Koopmans TC. Activity analysis of production and allocation. New York: John Willey and Sons, 1951.
- [2] Nordin HM, Fatimah S. A mathematical programming approach to crop mix problem [J]. African Journal of Agricultural Research, 2011, 6(1): 191 — 197.
- [3] She W, Wu Y, Huang H, et al. Integrative analysis of carbon structure and carbon sink function for major crop production in China's typical agriculture regions[J]. Journal of Cleaner Production, 2017, 162(sep.20):702-708.
- [4] 方精云,郭兆迪,朴世龙,等. 1981~2000 年中国陆地植被碳汇的估算[J].中国科学:地球科学,2007, 037(006):804-812.
- [5] 陈罗焯, 薛领, 雪燕. Spatial-temporal Characteristics of China's Agricultural Net Carbon Sink%中国农业净碳汇时空演化特征分析[J]. 自然资源学报, 2016, 031(004):596-607.
- [6] 田云, 张俊飏. 中国农业生产净碳效应分异研究[J]. 自然资源学报, 2013, 028(008):1298-1309.
- [7] 魏良民, 刘文杰. 在生产上如何选择适宜的农作物品种[J]. 农业与技术, 2009, 29(001):14-15.