

参赛队号#1493

第七届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1493

参赛队员（签名）：周小伟、李哲、陈莹

队员 1：周小伟

队员 2：李哲

队员 3：陈莹

参赛队教练员（签名）：杨桂元

参赛队伍组别：本科组

参赛队号#1493

第七届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1493

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号#1493

2014 年第七届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 位图矢量化算法分析

关 键 词 位图；矢量图；二值化；MATLAB；EXCEL

摘 要：

本文针对所给图形的位图矢量化转化算法，对图形进行逆栅格化，即一定分辨率下位图的矢量化过程，定量分析了位图矢量化的过程以及不同的因素对位图矢量化过程的影响。运用“二元素”特征提取方法，布尔公式，固定阈值法，类判别分析法，傅里叶级数，最小二乘法，建立了对用像素表示的位图的外围轮廓提取并且矢量化模型；运用 *MATLAB*, *EXCEL* 等软件对图形数据的提取、处理以及分析。最后对整个模型存在的不足进行讨论，提出对原模型更加严谨完善的想法和建议。

针对问题 1，首先运用 *MATLAB* 数学软件对原始图形进行灰值化处理，并且提取图像的灰值轮廓，将轮廓点化后，运用 *EXCEL* 软件对图像的定量分析，探究位图矢量化过程。其结果是将轮廓点化，建立关于图像的坐标系，得出图像像素的对应点。

针对问题 2，对问题 1 中得到的数据运用 *EXCEL* 办公软件进行处理和分析，并且运用“二元素特征提取法”对相对密集的轮廓点进行特征点的提取，然后运用布尔公式对代表性明显的特征点进行跟踪。结果是实现了原始图形轮廓点的第一次特征提取简化以及对得到的特征点的二次简化。

针对问题 3，对问题 3 的求解就是对图像的筛选过程，运用固定阈值法、类判别分析法以及 *S. Watanabe* 方法对原图像的阈值进行计算，并且通过阈值对点的进一步筛选用此来实现对图像轮廓的分割以及对噪声等干扰因素的尽可能最小化。其结果是得到了图形的二值表，使得连接点光滑，并且得到最终模型建立的灰值轮廓特征点。

针对问题 4，根据问题 1、2、3 所得出的结果，对所得的特征点进行最后的拟合，建立偏微分方程，并运用三角函数逼近的办法，求得傅里叶级数，并得出特征点矢量化的数学模型。其结果是实现图像的矢量化，将提取的轮廓提取并且建立了傅里叶模型实现对外围轮廓的边界线条的提取已经方程的建立。

最后，通过对文章进行优点与缺点的评价，并在横向和纵向进行了广度和深度的推广，分析了在其他领域的应用。

参赛队号#1493

参赛队号： 1493

所选题目： B 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

目录

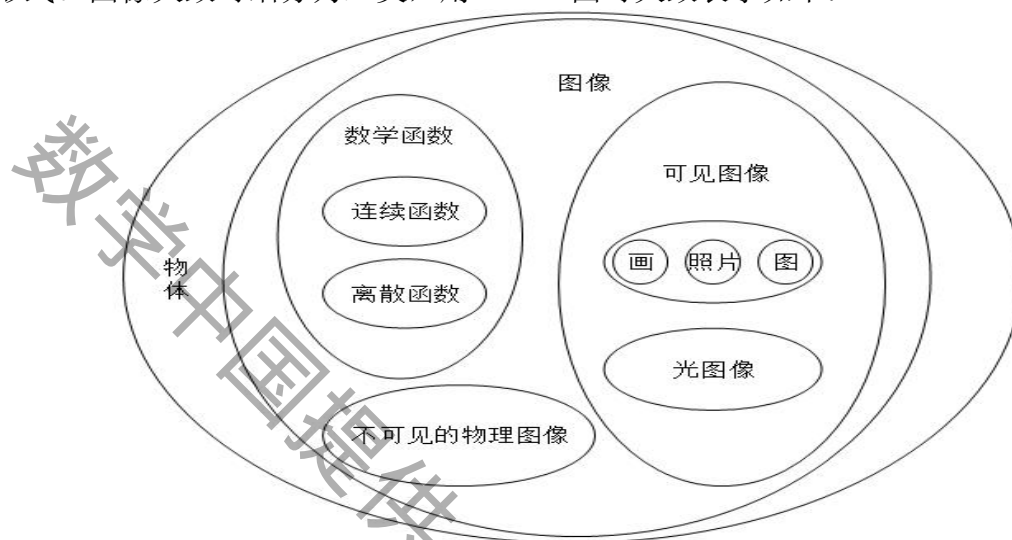
目录§1 问题的提出.....	5
§1 问题的提出.....	6
1.1 背景知识.....	6
1.2 相关资料.....	7
1.3 问题提出.....	7
1.4 具体问题.....	7
§2 问题的分析.....	7
2.1 对问题的总体分析.....	7
2.2 具体问题的分析.....	7
§3 模型的假设.....	8
§4 名词解释与符号说明.....	8
4.1 名词解释.....	8
4.2 符号说明.....	9
§5 模型的建立与求解.....	9
5.1 对问题 1 的分析与求解.....	9
5.2 对问题 2 的分析与求解.....	13
5.3 对问题 3 的分析与求解.....	15
5.4 对问题 4 的分析与求解.....	16
§6 模型的分析与改进.....	21
§7 模型的评价与推广.....	21
7.1 模型的评价.....	21
7.2 模型的推广.....	21
参考文献.....	22
附件.....	22
附表 1.....	22
附表 2.....	23
附程序.....	27

§1 问题的提出

1.1 背景知识

1. 图像与图像的处理

在社会生活和科研生产活动中，人们每时每刻都会接触图像。图像是自然生物或人造物理的观测系统对世界的记录，是以物理能量为载体，以物质为记录介质的信息的一种形式。图像大致可细分为三类，用 VENN 图可大致表示如下：



2. 位图

位图，也叫做点阵图，栅格图像，像素图，是最小单位由像素构成的图，缩放会失真。构成位图的最小单位是像素阵列的排列来实现其显示效果，每个像素有自己的颜色信息，在对位图图像进行编辑操作的时候，可操作的对象是每个像素，我们可以改变图像的色相、饱和度、明度，从而改变图像的显示效果。

3. 矢量图

矢量图，也叫向量图，是缩放不失真的图像格式。矢量图是通过多个对象的组合生成的，对其中的每一个对象的记录方式，都是以数学函数来实现的，也就是说，矢量图实际上并不是像位图那样记录画面上的每一点信息，而是记录了元素形状及颜色的算法，当你打开一幅矢量图的时候，软件对图形相对应的函数进行运算，将运算结果的形状和颜色显示给你看。无论显示画面是大还是小，画面上的对象对应的算法是不变的，所以即使对画面进行倍数相当大的缩放，其显示效果仍然相同。举例来说，矢量图就好比画在质量非常好的橡胶膜上的图，不管对橡胶模怎么样的长宽等比成倍拉伸，画面依然清晰，不管你离得多近去看也不会看到图形的最小单位。

4. 位图和矢量图的区别

图形（或图像）在计算机里主要有两种存储和表示方法。矢量图是使用点、直线或多边形等基于数学方程的几何对象来描述图形，位图则使用像素来描述图像。一般来说，照片等相对杂乱的图像使用位图格式较为合适，矢量图则多用于工程制图、标志、字体等场合。矢量图可以任意放缩，图形不会有任何改变。而位图一旦放大后会产生较为明显的模糊，线条也会出现锯齿边缘等现象。这两种图形都被广泛运用到出版，印刷，互联网等各个方面，他们各有优缺点，两者的好处几乎是无法替代的，所以，长久以来，矢量图和位图在应用中一直是平分秋色的。

5. 栅格化

栅格化是可以用于任何将矢量图形转换成位图的过程，在通常的应用中，这个术

语用来表示在计算机上显示三维形状的流行算法。目前，栅格化是生成位图的最流行的算法。

1.2 相关资料

1. 运用 *MATLAB* 灰度提取的图形坐标汇总表（附表 1）
2. 图形二值化数据（附表 2）
3. 基于 *MATLAB* 的图形外部轮廓提取程序（附程序）

1.3 问题提出

矢量图和位图是现代计算机里两种主要的储存和表现方式。位图在经过放缩或者其他变化后图形会有所改变，产生模糊状态，并且线条会出现错位等模糊现象，相比之下，矢量图是点与点间的有向线段，可以任意放缩，图形不会有任何的改变。在这些基础上，矢量图是使用曲线方程对图形进行的精确的描述，在现在的打印机以及显像技术上是没办法显现出来的，所以常常将矢量图转换为位图才能加以显示或打印，但另一方面，在现代图像处理技术中，矢量图在图像编辑中不但应用非常方便，而且由于矢量图的存储容量远少于位图，因此也可以作为一种准数据压缩的方法，以节约存储资源和网络资源，这个过程称为栅格化逆过程，栅格化的逆过程相对比较复杂。

1.4 具体问题

- 问题 1：图形的轮廓灰度提取与跟踪
问题 2：轮廓特征点抽取
问题 3：阈值分割
问题 4：轮廓矢量化

§ 2 问题的分析

2.1 对问题的总体分析

在现代图像处理技术中，栅格化过程相对简单较易实现，但是矢量图在图像编辑中扮演着这样的角色，它不但应用非常方便，而且矢量图的存储容量远少于位图，用以来进行数据的压缩，可以大大节约存储资源和网络资源，栅格化的逆过程相对比较复杂。总的来说，我们将位图矢量化问题分成 4 个步骤分别求解。首先先对图形的外围轮廓进行提取，并对图形的线条轮廓进行跟踪，运用阈值分割技术，使用阈值规则对图形线条进行分割，用封闭并且联通的区域定义不交叠的区域。用阈值规则进行分割的时候取其灰度值，当灰度值大于阈值的像素被判断为图像的背景。之后，对线条分割后的点进行特征点的抽取，排除误差点，并对所得特征点拟合建立数学模型，使轮廓矢量化。经过这些步骤能够准确的提取出图形的边界线条。

2.2 具体问题的分析

1. 对问题 1 的分析

问题 1 的解决需要对图形轮廓进行提取，在图像的视觉特征研究领域里，形状特征更接近人的视觉特征，而形状的边缘又能很好的反映形状的信息，所以提取图形的边缘轮廓对下文的深入分析有重要意义。但是在此我们必须阐明两个概念，即图形与轮廓。我们这里所说的图形指的是有明显的形状和线条特征，但没有太复杂的颜色或纹理特征的简单图像。

另外，因为我们需要研究的对象是形状而并非内部结构细节，所以本文所涉及的轮廓是指图形的外轮廓，不包括图形内部的空洞所围成的内部边界。

2. 对问题 2 的分析

问题 2 在位图矢量化后序过程中，该过程中提取特征点是重要的一步，即怎样从轮廓跟踪后得到的紧密排列的有序轮廓点中，提取出表示图像轮廓关键特征的特征点。用以“径向增量同向段”和“径向增量异向段”为基础元素构成位图轮廓边界的轮廓特征点提取算法，并对特征点插值，可以得到最终的图像轮廓特征点。分析位图的边缘轮廓构成，可把它细分成由径向增量同向段和由一组或多组径向增量异向段顺序组成的曲折线段构成。径向增量同向段主要代表了轮廓的突变特征，有些径向增量异向段中，包含了由径向增量异向点组成的线段，这些线段也表示了轮廓的主要特征，而由多组径向增量异向段顺序组成的规则的曲折线段不能够代表轮廓的主要突变特征，我们暂时不做考虑。所以，我们的特征点提取算法可以认为是从有序的轮廓点中提取径向增量同向点和径向增量异向段中的长直线的端点。

3. 对问题 3 的分析

问题 3 阈值分割算法比较简单，并且分割的效果好。通用的图像分割法是很难实现的，因为阈值分割好坏很大程度取决于图像本身的质量，如果图像的质量差的话如遇到噪声的干扰，除了这个之外，还有很多因素的干扰，比如曝光等等。所以我们利用所有灰度值大于或者等于阈值的像素都被判断为背景。因此边界就成为这样一些内部的集合。利用灰度图像直方图实现图像的二值化。

4. 对问题 4 的分析

问题 4 将图像轮廓矢量化，将图像边界光滑处理后，下一步的操作就是对图案边界进行矢量化，以方便图案的重构。用偏微分方程将图像看做一张曲面，首先将采样的一排排像素点进行 B 样条曲线的拟合，将生成图像的过程看做偏微分方程在有界边界条件下的解析解的形式。最终采用逆向采样的方法进行处理，这样才是曲线满足闭合的条件，然后进行傅里叶系数的计算。这种方法拟合曲面计算简单，便于实现，能够较好保持原图像的特征，采样点越多，即曲面片越多，矢量化的效果越好。

§ 3 模型的假设

1. 假设相同区域内像素点都相同，不同区域的像素点都不同；
2. 图像连接点处的像素点可取；
3. 假设轮廓的特征点都是紧密排列并且有序的，也就是说，在原有的数据上为了建模的方便，可以合理的增加特征点，使图形外围轮廓更明显；
4. 原图像受噪声的干扰较小，且未被污染。

§ 4 名词解释与符号说明

4.1 名词解释

1. 位图：位图图像亦称点阵图像，扩大图像尺寸时增大单个像素，使线条和形状显得参差不齐。从稍远的位置看，位图图像的颜色和形状又显得是连续的。
2. 矢量图：矢量图只能靠软件生成，文件占用内在空间较小，图像可以自由无限制的重新组合。它的特点是放大后图像不会失真，和分辨率无关。
3. 栅格化：栅格化是可以用于任何将矢量图形转换成位图的过程，在通常的应用中，这个术语用来表示在计算机上显示三维形状的流行算法。
4. 灰度值：指黑白图像中点的颜色深度，范围一般从 0 到 255，白色为 255，黑色为 0，故黑白图片也称灰度图像，在医学、图像识别领域有很广泛的用途。
5. 阈值：在自动控制系统中能产生一个校正动作的最小输入值，刺激引起应激组织反应的最低值。

6. 径向增量：多用于回转体或类似回转体，与其相对应的还有轴向增量，设坐标系 z 轴为中心轴，则 xy 轴的相对于原点的增加量为经向增量（经向增量也可以为负值）。

7. 二值化：图像的二值化，就是将图像上的像素点的灰度值设置为 0 或 255，也就是将整个图像呈现出明显的只有黑和白的视觉效果。

4.2 符号说明

序号	符号	符号说明
1	RGB	是工业界的一种颜色标准
2	DIR	扫描方向变量
3	p_i	一组有序离散点
4	$f(i, j) = 1$	表示图像
5	$f(i, j) = 0$	表示背景
6	t	阈值
7	z_l, z_k	灰度级范围
8	Z	灰度级集合
9	$PHS(i)$	灰度级的概率函数
10	Ave	计算灰度均值
11	$Aver(k)$	计算灰度类均值
12	$W(k)$	类直方图和
13	$Q(k)$	计算类分离指标
14	T	最佳阈值
15	P_i	三次均匀样条曲线段的矩阵
16	V_i	特征多边形的顶点
17	$B_{i,j}$	三次样条基函数

§ 5 模型的建立与求解

5.1 对问题 1 的分析与求解

1. 对问题 1 的分析

问题 1 要求对图形的轮廓进行提取并且跟踪，首先我们需要对图形的轮廓进行提取，这一个步骤我们通过数学软件 $MATLAB$ 来实现。 $MATLAB$ 主要是对图形的轮廓进行灰度提取，在此基础上，我们能够得到图形的灰度轮廓图。利用其灰度图，搜索其像素点，主要有两种方法：一种是就近搜索，即以前一个像素点为基准，从上到下、从左到又进行搜索。该方法会使一些像素点搜索不到，产生图形的不完整性。另外一种是从上向下、从左到右的搜索方法，该方法能使所有的像素点被搜索到，保证了图形的完整性，但是这种方法的不好处在于增加了像素点的搜索次数。在这里，我们综合两种方法，取其优点，避其糟粕。即搜索下一个图形始点时，由前一个图形的始点开始，由上到下、由左到右搜索像素为 1 的点。此处我们减少了迭代的次数，并且可以较好的保存图形的完整性。

2. 对问题 1 的求解

(1) 理论准备

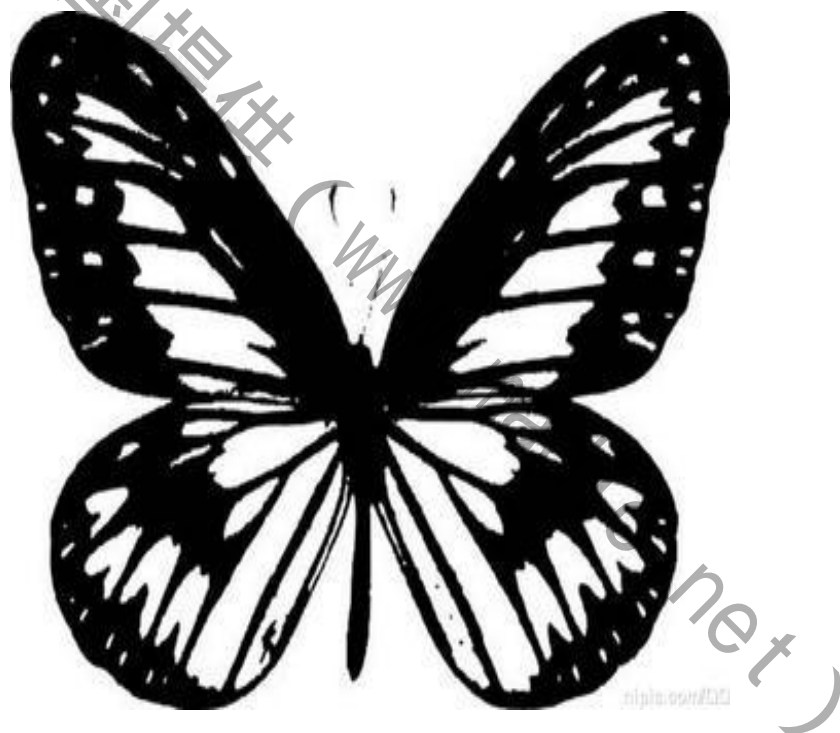
灰度的通常表示方法是百分比，范围从 0% 到 100%。此百分比是以纯黑为基准的百分比，与 RGB 正好相反，百分比越高的颜色越偏黑，百分比越低的颜色越偏白。灰度与像素一般来说，像素值量化后用一个字节（8b）来表示。如把由黑-灰-白连续变化的灰度值量化为 256 个灰度级，灰度值的范围在 0 ~ 255，表示亮度从深到浅，对应图像中的颜色为从黑到白。像我们以前所用的黑白照片包含了黑白之间的所有的灰度色调，每个像素值都是介于黑色和白色之间的 256 种灰度的一种。

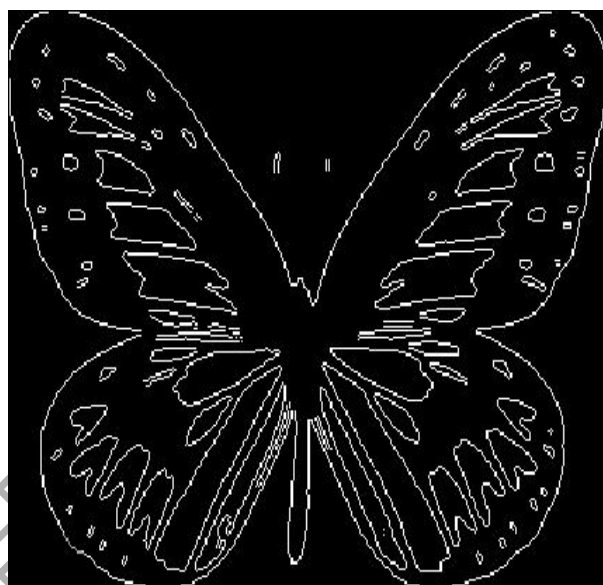
灰度使用黑色色调表示物体，即用黑色为基准色，不同的饱和度的黑色来显示图像。每个灰度对象都具有从 0%（白色）到 100%（黑色）的亮度值。使用黑白或灰度扫描仪生成的图像通常以灰度显示。使用灰度还可将彩色图稿转换为高质量黑白图稿。在这种情况下，自然界中的大部分物体平均灰度为 18%。在物体的边缘呈现灰度的不连续性，图像分割就是基于这个原理。

(2) 模型建立

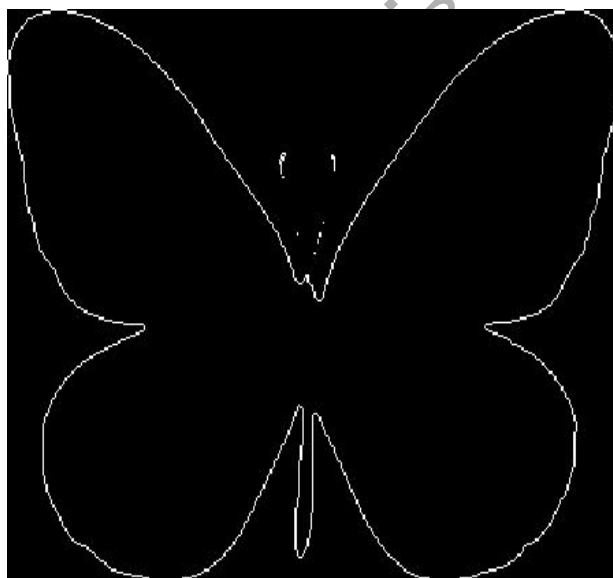
第一步，轮廓提取

运用 MATLAB 数学软件进行图形的灰度提取，为此我们进行了两组图形的灰度提取和轮廓点的提取罗列如下；所用的 MATLAB 指令见附程序 1：

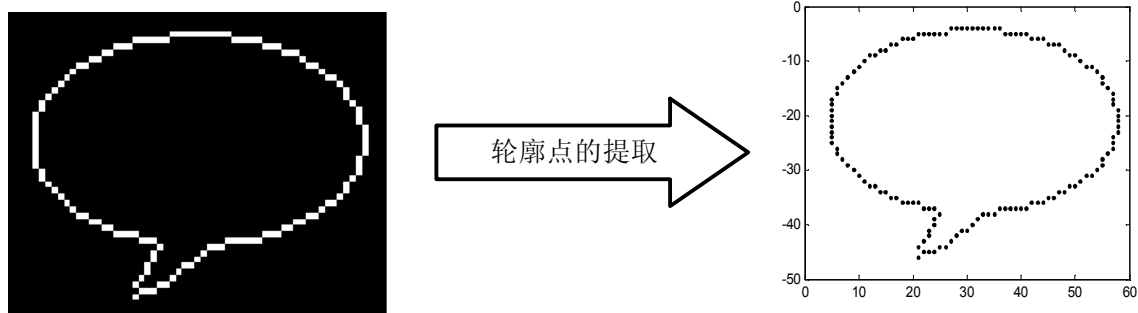




轮廓点提取



当图形仅为简单的外部边框图形时我们还可以用附程序 2 所示的程序：



用此方法，将提取出的轮廓点坐标化。

第二步，轮廓跟踪

将区域的边界识别出来后，往往需要对目标的边缘作跟踪处理，也叫轮廓跟踪。顾名思义，轮廓跟踪就是通过顺序找出边缘点来跟踪边界的。若图像是二值图像或者图像中不同区域具有不同的像素值，但每个相同区域内的像素值都是相同的，则以下算法可以完成基于4连通或者8连通区域的轮廓跟踪。为了叙述问题的方便，假设待处理图像为二值轮廓的图像，即背景点是白点，轮廓点是黑点。对于不同区域具有不同像素值的图像，其处理方法类似，或者可先将其处理为灰值图形并且用以下的算法进行处理。按从上到下，从左到右的顺序扫描位图图像像素矩阵，寻找没有标记跟踪结束记号的第一个界起始点 $A0$ ， $A0$ 是具有最小行和列值的边界点。此时的边界点是图像的最左下角的边界点。定义一个扫描方向变量 DIR ，该变量用于记录上一步中沿着前一个边界点到当前边界点的移动方向，进行初始化取值：对4连通区域取 $DIR=0$ ，如图（2）所示；对8连通区域取 $DIR=7$ ，如图（1）所示。按逆时针方向搜索当前像素的 3×3 领域，如果搜索到黑点时，则该边界点作为新的当前像素点，且更改搜索方向，其方法为：对4连通区域取 $(DIR-2) \bmod 4$ ，对8连通区域取 $(DIR-2) \bmod 8$ ；否则以原当前像素点为中心逆时针继续搜索，由当前搜索方向求下一个搜索方向的方法为：对4连接区域取 $(DIR+1) \bmod 4$ ，对8连通区域取 $(DIR+1) \bmod 8$ 。

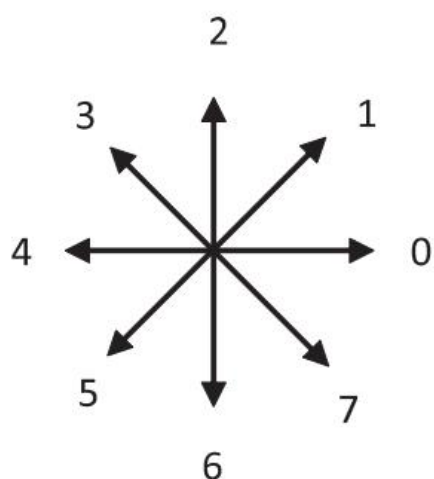


图 1. 八连通区域方向

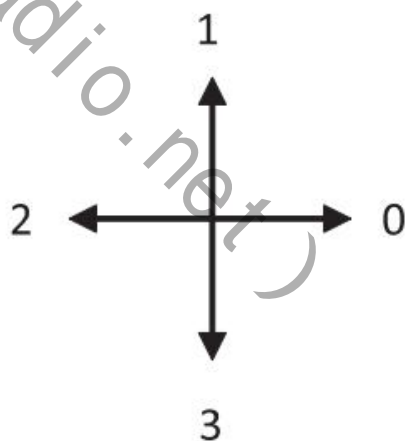


图 2. 四连通区域方向

搜索的下一个像素点等于第一个边界点 $A0$ 或者越界，就停止，否者重复上一步骤继续搜索。由起始边界点沿着跟踪的路线再到起始边界点构成的边界就是跟踪所得边界。

(3)模型结果

综上所述，用 *MATLAB* 对图形进行外围轮廓的提取以及对轮廓进行跟踪，得出原图形的轮廓点坐标，为下面问题的解决提供了一个面板基础，将图形罗列在 61×29 的点坐

标轴上,如图(3)提取其中 (X,Y) 坐标利用 EXCEL 汇总各点坐标,如下图。相应的 MATLAB 程序编写见附表。

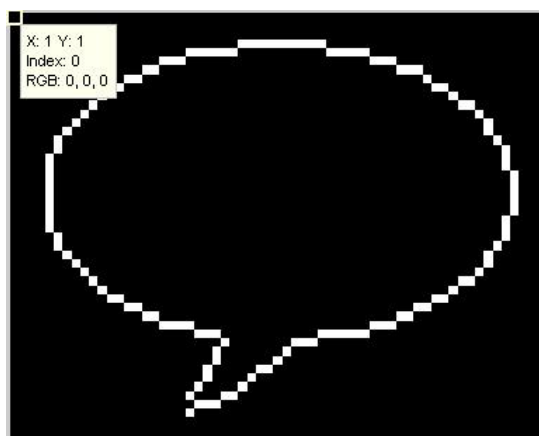


图 3. 灰度坐标图

5.2 对问题 2 的分析与求解

1. 对问题 2 的分析

轮廓特征点的提取在位图的矢量化的后序过程中,提取特征点是非常重要的一个步骤,即怎样从以上的紧密排列的有序轮廓灰度坐标中提取出可以表示轮廓关键特征的特征点。首先我们先定义:假设给定的一组有序离散点 $p_0 \cdots p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3} \cdots p_n (n > 4)$, 如果可以满足 p_i 在以 p_{i+1} 为圆心的某圆周上, p_{i+3} 在以 p_{i+2} 为圆心的某圆周上, 并且 p_i, p_{i+3} 相对各自所在的圆心增量在 x 方向或 y 方向同号; 则可以称 p_{i+1}, p_{i+2} 为“径向增量同向点” $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}$ 构成的曲线为“径向增量同向段”如图(4)虚线的线段。否则称 p_{i+1}, p_{i+2} 为“径向增量异向点”, $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}$ 构成的曲线段为“径向增量异向段”如图(4)中实线线段部分。特征点代表图像边缘轮廓的几何形态,在已有的提取方法中,利用遗传算法提取曲线特征点,对于离散点求曲率,并没有十分有效的方法,而常常会得到“伪特征点”,或丢失真正的特征点使得轮廓不能够保持原来的形状。所以为了防止这个情况,我们利用“径向增量同向段”和“径向增量异向段”二元素的特征点提取方法,简称“二元素”特征提取方法。

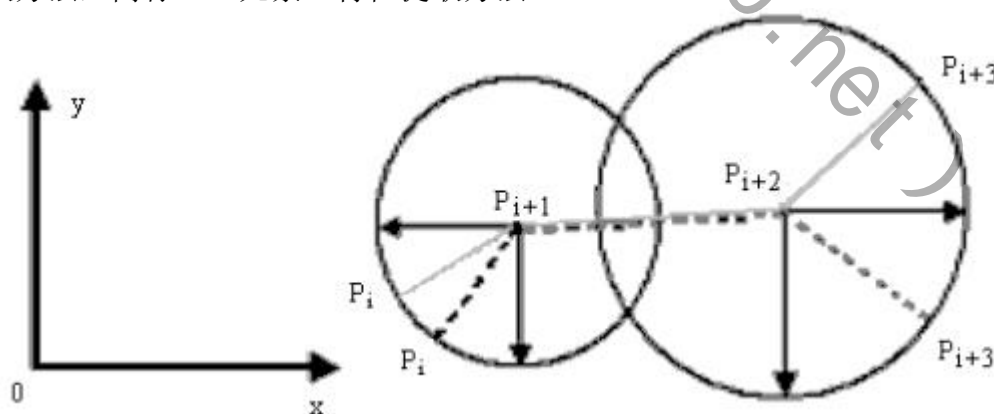


图 4. “径向增量同向段”和“径向增量异向段”

2. 对问题 2 的求解

(1) 理论准备

二元素特征点的提取原理,首先分析位图的边缘轮廓的构成,可把它分为由径向增

量同向段和由一组或者多组径向增量异向段顺序组成的曲折线段构成，如图 2 所示。径向增量同向段主要代表了轮廓的突变特征，有些径向增量异向段中，包括了由径向增量异向点组成的较长线段（这些线段也表示了轮廓的主要的特征），和多组径向增量异向段顺序组成的规则的曲折线段，但是这类曲折线段往往不能代表轮廓的主要突变特征，所以我们在这里暂时不作考虑。因此，特征点的提取算法可以认为是从有序轮廓点中提取径向增量同向点和径向增量异向点中的长直线段的端点。

因为轮廓跟踪后得到的是连续排列的轮廓点，所以我们应提出所需要的特征点，还要消除初始轮廓点列中多余的点，也就是所谓的冗余点。通过合并所有的相邻斜率相等的线段我们可以用来消除直线中的中间节点，并且合并斜率变化同向的点可以消除弧线中的冗余点。

(2)模型建立

首先我们消除冗余点，提取我们所需要的径向增量同向点（SDRIC）和长直线段端点。这里我们用布尔表达式表示：

$$\frac{(p_i \cdot x - p_{i+1} \cdot x)}{\|p_i - p_{i+1}\|} * \frac{(p_{i+3} \cdot x - p_{i+2} \cdot x)}{\|p_{i+3} - p_{i+2}\|} > 0 \left\| \frac{(p_i \cdot y - p_{i+1} \cdot y)}{\|p_i - p_{i+1}\|} * \frac{(p_{i+3} \cdot y - p_{i+2} \cdot y)}{\|p_{i+3} - p_{i+2}\|} > 0 \right.$$

用这个公式我们可以判断轮廓有序点列中每四点 $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}$ ，如果为真，则 p_{i+1}, p_{i+2} 为“SDRIC”点；否则以 p_i, p_{i+1} 为对象判断是否为长直线段。可以用阈值 σ （为题三中将具体建模讨论）来调整筛选，其范围为：（0-5）判断两点距离的 $D_0 = \|p_i - p_{i+1}\|$ 是否满足表达式。

接下来我们进行轮廓的精确，为了轮廓的精确我们需要适当的提取一些长度小于阈值 σ ，但在其轮廓序列点中，其前面相邻线段长度 $D_{-1} = \|p_{i-1} - p_i\|$ 和后面相邻的两条线段长度 $D_1 = \|p_{i+1} - p_{i+2}\|, D_2 = \|p_{i+2} - p_{i+3}\|$ 都远小于它的直线段，可用 D_0 分别与 D_{-1}, D_1, D_2 的比值是否大于权值 $\lambda = \sum_{i=0}^n \|p_i - p_{i+1}\|$ 量化，我们称之为“相对长直线段”，用二元素特征点提取算法实现。我们先令 $k = \theta$ ，之后我们进行冗余点的清除，对于有序的轮廓点列 $p_0, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_n$ ，令 $sp = p_0, mp = p_1, fp = p_2$ ，循环变量 $i=2$ 重复执行上述步骤直接到 $i > n$ 时终止。

相邻的两段线段的斜率我们如下表示：

$$k_1 = (mp.y - sp.y) / (mp.x - sp.x), k_2 = (fp.y - mp.y) / (fp.x - mp.x)$$

判断是否满足下列条件：

合并斜率相等的线段：如果 $k_1 = k_2$ ，把 mp 作为冗余点从轮廓点去除；合并斜率变化率同向的线段：如果 $(k_1 * k_2) > 0$ 把 mp 作为冗余点从轮廓点中去除；但是我们得到其中仅有一段竖直线段 $k_1 = \theta$ 和 $k_2 = \theta$ ，所以我们需要保留 mp 。

对有序的轮廓点列 $p_0, p_i, p_{i+1}, p_{i+2}, p_{i+3}, p_n (n > 4)$ 计算 σ, λ ，将 EXCEL 表中的左边点分别对应上去，用上式流程我们依次计算出的 $\lambda = 0.5678, \theta = 30.5564$ ，赋变量初始值 $sp = p_0, mp = p_1, D_{-1} = 0, flag = 0$ ，循环变量 $i=2$ 。

重复多次执行，直到 $i+1 > n$ 结束：

计算条件变量 $tp = p_i, fp = p_{i+1}$ ，相邻的直线段长度：

$$D_0 = \|sp - mp\|, D_1 = \|tp - mp\|, D_2 = \|fp - tp\|,$$

$$\delta = \frac{(sp.x - mp.x)}{D_0} * \frac{(fp.x - tp.x)}{D_2} > 0 \left\| \frac{(sp.y - mp.y)}{D_0} * \frac{(fp.y - tp.y)}{D_2} > 0 \right.$$

判断条件变量是否满足下列约束条件。

提取 *SDRIC* 点：如果 δ 为真， mp, tp 特征点， $flag=0$ ，条件变量代换： $D_{-1} = D_1$
 $sp=tp$ ， $mp=fp$ $i=i+2$ 。

提取某些相对长直线：如果布尔表达式 $(D_0 > \lambda D_1)$ 且 $(D_0 > \lambda D_3)$ 且真， sp ， mp 对应的为特征点。

图像的去噪可以通过收缩，膨胀和平滑的方法。收缩就是把给定的图像边界点全部转变为背景点从而缩小一层的处理。膨胀和收缩反复组合使用可以把二值图像中的小成分或小孔消除，比如孤立点和空穴，此时对图像进行平滑处理消除空穴和孤立点。图像经过预处理后，主要噪声被除去图像质量大大改善，为后续处理作准备。

图像会由于以下原因存在噪声：

- ①由于时间原因导致纸质表面不洁或者存在皱褶。
- ②图像本身线条存在粗细不一致。
- ③扫描仪光照系统照明不够。
- ④扫描仪扫描时阈值选择误差太大等等。

5.3 对问题 3 的分析与求解

1. 对问题 3 的分析

阈值分割算法比较简单，并且分割的效果好。通用的图像分割法是很难实现的，因为阈值分割好坏很大程度取决于图像本身的质量，如果图像的质量差的话如遇到噪声的干扰，除了这个之外，还有很多因素的干扰，比如曝光等等。所以我们利用所有灰度值大于或者等于阈值的像素都被判断为背景。因此边界就成为这样一些内部的集合。利用灰度图像直方图阈值实现图像的二值化。

2. 对问题 3 的求解

(1)理论准备

利用灰度值图像直方图阈值可以实现灰度值图像的二值化。一般而言，图像的二值化的阈值处理方式如下：

$$\begin{aligned} f(i, j) &= 1, & f(i, j) &\geq t \\ f(i, j) &= 0, & f(i, j) &< t \end{aligned}$$

通常，用 $f(i, j) = 1$ 的部分表示图像，用 $f(i, j) = 0$ 部分表示背景，确定 t 的方法称为阈值选择。到目前为止，提出了很多阈值计算的方法，常用的固定阈值法、类判别分析法和 *S.Watanabe* 方法。

(2)模型建立

①固定阈值法

最简单的方法是设定固定单阈值，一般扫描仪所配软件均提供这种方法。设给定目标 f 灰度集集合 Z ， $Z = [z1, zk]$ ， t 是灰度级范围 $z1$ 和 zk 之间的一个值，则设定阈值 t

的结果是： $f_t(x, y) = \begin{cases} 1, & f(x, y) \geq t \\ 0, & f(x, y) < t \end{cases}$ ；固定阈值法没有考虑工程样图的图面性质，对于图

面质量不好的扫描图，阈值 t 太大会丢失图像信息，太小又会引入大量噪声，一般不能彻底分离污迹和有用的线条，难以获得高质量的二值图像。

②类判别分析法

该方法根据 *Otsu* 提出的类判别分析法寻找阈值，计算阈值的步骤具体如下：

- 计算输入图像的灰度级直方图[用灰度级的概率函数 $PHS(i)$ 来表示]
- 计算灰度均值 (*Ave*)

$$Ave = \sum_{i=0}^{255} (i-1)Phs(i)$$

- 计算灰度类均值 $Aver(k)$ 以及类直方图和 $W(k)$

$$Aver(k) = \sum_{i=0}^k (i+1)Phs(i)$$

$$W(k) = \sum_{i=1}^k Phs(i)$$

- 计算类分离指标：

$$Q(k) = \{[Ave * W(k) - Aver(k)]^2\} / [W(k) * (1 - W(k))]$$

- 求使 Q 最大的 k 值，要计算的最佳阈值为： $T=k-1$ 用该阈值法得到的二值图像，有较好的分离特性，能够尽可能多的将图像的有效特征提取出来。

③ *S.Watanabe* 方法

阈值计算的第三种方法是根据 *S.Watanabe* 提出的方法已恢复直方图为依据，为图像二值化选择阈值。具体方法如下：

设 $X(i, j)$ 为输入图像中点 (i, j) 的灰度级，为 $Y(i+k_1, j+k_2)$ 点 (i, j) 的 8 邻域像素的灰度级。 $X(i, j)$ 同 $Y(i+k_1, j+k_2)$ 的关系如图所示。

$Y(i-1, j-1)$	$Y(i-1, j)$	$Y(i-1, j+1)$
$Y(i, j-1)$	$Y(i, j)$	$Y(i, j+1)$
$Y(i+1, j-1)$	$Y(i+1, j)$	$Y(i+1, j+1)$

S.Watanabe 方法像素 8 邻域关系

则灰度级 X 的差定义为：

$$S(i, j, x) = \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 (D(i+k_1, j+k_2))$$

其中：

当 $X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2) > 0$ 时， $D(i, j) = X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2)$

当 $X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2) < 0$ 时， $D(i, j) = 0$

将图像中每个灰度级的所有 $S(i, j)$ 分别叠加，可得到灰度差的直方图，即：

$$C(x) = \sum S(i, j, x)$$

\sum 表示所有灰度为 X 的像素的 S 取和；对应于最大的 $C(x)$ 的灰度级即为输出的阈值 Y ；若 $D(i, j)$ 得定义变为：

当 $X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2) > 0$ 时， $D(i, j) = X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2)$

当 $X(i, j) - Y(i+k_1, j+k_2) < 0$ 时， $D(i, j) = 0$

那么输出的阈值将变为： $Y = (Y(+) - Y(-)) / 2$ ；其中 $Y(+)$ 表示 $D(i, j)$ 的第一种定义，而 $Y(-)$ 表示 $D(i, j)$ 的第二种定义。

5.4 对问题 4 的分析与求解

1. 对问题 4 的分析

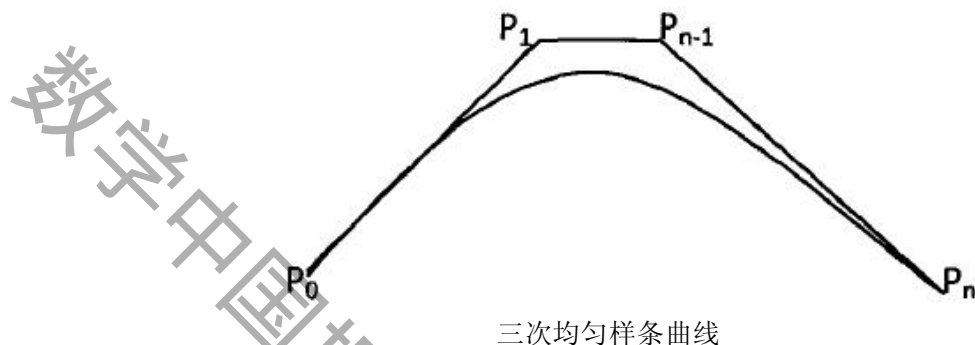
将图像轮廓矢量化，将图像边界光滑处理后，下一步的操作就是对图案边界进行矢量化，以方便图案的重构。用偏微分方程将图像看做一张曲面，首先将采样的一排排像素点进行 B 样条曲线的拟合，将生成图像的过程看做偏微分方程在有界边界条件下的解

析解的形式。最终采用逆向采样的方法进行处理，这样才是曲线满足闭合的条件，然后进行傅里叶系数的计算。这种方法拟合曲面计算简单，便于实现，能够较好保持原图像的特征，采样点越多，即曲面片越多，矢量化的效果越好。

2. 对问题 4 的求解

(1) 模型求解

给定一幅黑白输入图像，首先是对整幅图像进行采样，采样得到的图像上少量像素点，既包括像素点的位置信息，也包括像素点的颜色信息（RGB 值），然后利用样条曲线对这些像素点进行拟合，将拟合好的曲线作为偏微分方程的边界条件。本文第一种方法采用三次均匀样条拟合边界曲线，如图所示



三次均匀样条曲线段的矩阵表示为：

$$P_i(u) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

写成和式为：

$$P_i(u) = \sum_{j=0}^3 B_{j,3}(u) V_{i+j}, u \in [0,1]$$

其中 $V_i, V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}$ 为特征多边形的顶点； $B_{j,3}, j=0,1,2,3$ 为三次样条基函数，其表达式分别为：

$$\begin{cases} B_{0,3}(u) = \frac{1}{6}(1-u)^3 \\ B_{1,3}(u) = \frac{1}{6}(3u^3 - 6u^2 + 4) \\ B_{2,3}(u) = \frac{1}{6}(-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1) \\ B_{3,3}(u) = \frac{1}{6}u^3 \end{cases}$$

将采样好的像素点信息作为样条曲线上的点，就需要通过反算来求得样条曲线的控制顶点。

$$P_i(u) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(u) & B_{1,3}(u) & B_{2,3}(u) & B_{3,3}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

假定我们给定型点 $Q_i (i=1,2,\dots,n-1)$, 三次 B 样条曲线要尽可能逼近这些, 我们可以求出这条曲线的控制顶点 $P_i (i=0,1,\dots,n)$;

由曲线的端点性质可得下列线性方程组: $P_{i-1} + 4P_i + 6P_{i+1} = 6Q_i, (i=1,2,\dots,n-1)$ 再补充两个边界条件就可得到唯一解。例如: 已知 Q_1 和 Q_{n-1} 处的切矢, 则有:

$$\begin{aligned} P_2 - P_0 &= 2Q'_1, \\ P_n - P_{n-2} &= 2Q'_{n-1} \end{aligned}$$

写成矩阵形式如式:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Q'_1 \\ 6Q_1 \\ 6Q_2 \\ \vdots \\ 6Q_{n-1} \\ 2Q'_{n-1} \end{bmatrix}$$

根据上面矩阵形式, 可以通过反算方法求出样条曲线的控制顶点 $P_i (i=1,2,\dots,n)$, 下一步进行偏微分方程的建立:

如下图所示, 图 (a) 为初始输入彩色图像, 图像上提取的像素点拟合成样条曲线之后, 一共得到了 21 条曲线, 每条曲线都表示为 3 次有理均匀样条的形式。如图 (b) 所示, 然后每 4 条轮廓曲线作为偏微分方程的 4 个边界条件, 拟合成一个曲面。曲线的方程必须用 4 个用傅里叶级数形式的函数表示, 这里我们采用三角函数逼近的方法, 将拟合得到的样条转化为傅里叶的形式。



(a)



(b)

下面我们介绍三角函数逼近的曲线的原理。和式:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

能够得到最小二乘和：

$$E(a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - S_n(x_j))^2$$

$$\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j, k = 0, 1, 2, \dots, n, b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j, k = 1, 2, \dots, n-1$$

我们所拟合曲线的傅里叶形式的函数，特别值得注意的是利用曲面是光给定边界条件是不够的，还要求边界曲线是一种闭合起来的。我们采样一幅彩色图片的时候，一排排扫描的过程中可只用一次，这样就满足了曲线的闭合条件。下面的步骤就是进行曲面分析，我们了解了如何通过4条边界曲线来用偏微分方程的解析曲面由21条曲线，每4条生成一个小曲面，则一共包含的曲面数，其中每个生成一个曲面片，如下图所示为整张图像的生成



这整张图像当做是一个曲面来处理的，也可以对图像进行实现矢量化。如图(a)所示为原始的边界条件图像，其中X为图像上的一点，括号中的数值分别为该像素点的坐标还有原始图像采样来确定边界条件，由(b)可以知道边界条件需要拟合成傅里叶图像采样来确定边界条件，由(b)可知需要边界条件需要拟合成傅里叶特征点按特定的要求，求其离散最小二乘法逼近，来拟合出一条傅里叶曲线，即：

$$E_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos nx + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$



边界条件(a)

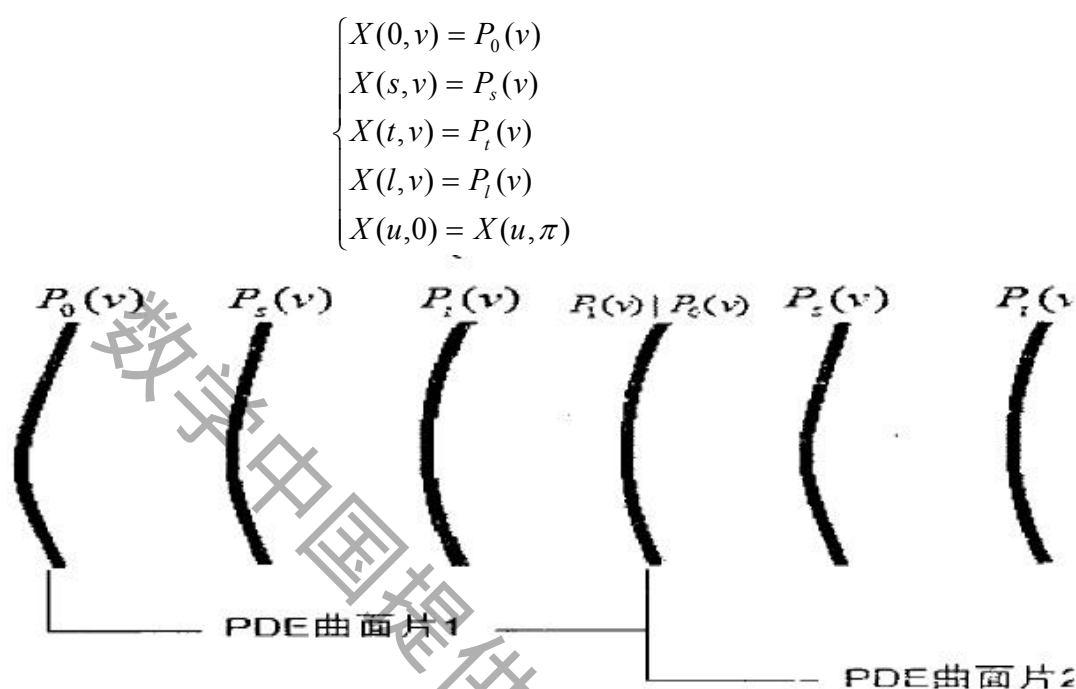


输出图像(b)

为了达到一定的拟合效果，我们取 $n=20$ ，比如下面所示：

(303.000, 0.000), (-10.512, 0.636), (0.000, 0.000), (-10145, 0.210), (0, 0.123),
(0.000, 0.000), (-0.190, 0.085), (-0.000, -0.000), (-0.105, 0.0649), (-0.000, 0.000),
(-0.038, 0.038), (0.000, -0.000), (-0.024, 0.023), (-0.000, 0.000), (-0.008, 0.017)

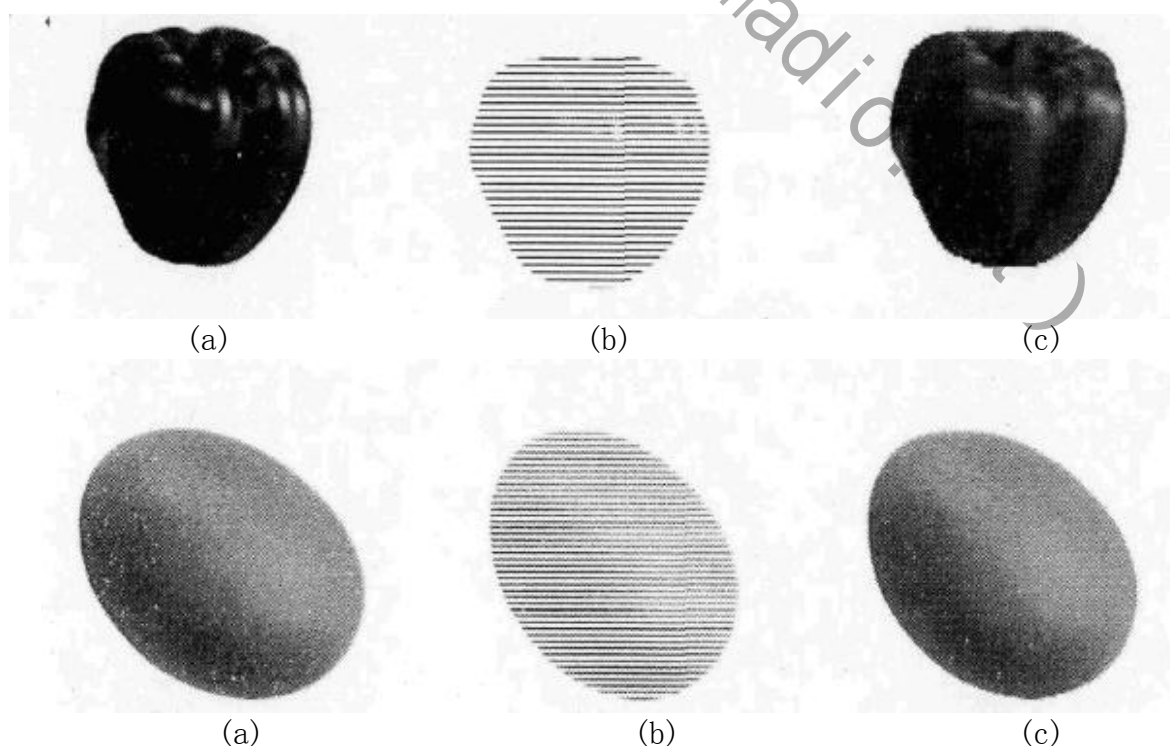
所有曲线按照 y 轴从小到大拟合出来了。对于拟合出来的数据方程，我们的任务是用偏微分方程将它重新绘制出来。首先根据 y 的变化找不几条曲线，如下图所示，每 4 条曲线作为偏微分方程的边界曲线。

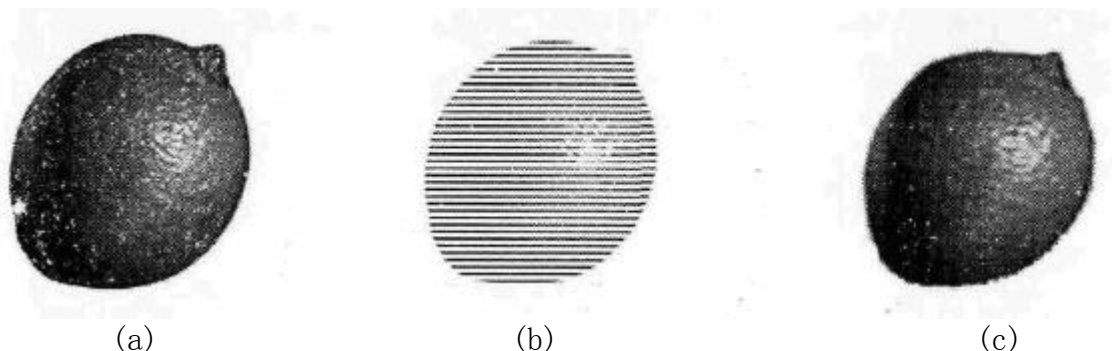


每一个曲面是一张 PDE 曲面，曲面满足：

$$X(u, v) = A_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n(u) \cos nv + B_n(u, v))$$

根据曲面的生成原理，我们将图像可以用已知的边界曲线来表示。





如上图所示为基于偏微分方程解析图像矢量化效果图，从左到右 (a) 为原始输入图像，(b) 为椭圆型偏微分方程的边界曲线，(c) 为最终的矢量化输出图形。其中苹果图中有 32 条边界曲线，蛋黄图片中有 28 条边界曲线，柠檬中有 39 条边界曲线。边界条件越多，拟合的曲面片的数量就越多，最后得到的矢量化效果越好。

§ 6 模型的分析与改进

1. 图像会由于以下原因存在噪声：

- ① 由于时间原因导致纸质表面不洁或者存在皱着。
- ② 图像本身线条存在粗细不一致。
- ③ 扫描仪光照系统照明不够。
- ④ 扫描仪扫描时阈值选择误差太大等等。

2. 我们对整幅图像进行偏微分方程数值解的图像矢量化，矢量化的效果并不理想，如果能够针对图像区域进行矢量化，先将图像分割，对具体的图形子对象来实现矢量化的过程，这样得到的矢量化的结果更为精确。

§ 7 模型的评价与推广

7.1 模型的评价

1. 优点

- (1) 运用多种数学软件（如 *Matlab*、*Excel*，取长补短，使计算结果更加准确、明晰；
- (2) 利用 *Excel* 软件对数据进行处理并，简便、直观地表示出原图形的坐标点；
- (3) 将图像数字化，实现定量分析，灵活度较高；
- (4) 引入阈值分析，能够很好的筛选轮廓特征点；

2. 缺点：

- (1) 人工统计数据使得数据不精确，存在一定误差；
- (2) 模型建立过程中，为使计算简便，使所得结果更理想化，忽略了一些次要的影响因素。

(3) 模型只能局限于对灰度图形的矢量化，不适用于彩色图形；

7.2 模型的推广

(1) 模型的横向推广

根据前面的模型所建立的矢量化方程可以很好的解决实际中灰度图像的位图矢量化，并且这个方程使用于大多数灰度图像。然而，在建模过程中，简化了许多因素，比如在图像连接点上本来不存在的点我们为了图像轮廓更好的表达，加设了虚拟像素点上去，因而与实际问题有偏差。同时，模型还可以运用导入 *RGB* 方程使方程能适用于彩色图形，这样就能实现黑白图形到彩色图形的矢量化。

(2)模型的纵向推广

由以上说法进而推之，我们可以将平面推向空间，将二维的推向三维，实现的方法只要在 x,y 轴之上增加 z 轴，并且从 x,y 平面上层层扫描，这样就能实现二维矢量化到三维的矢量化，不过运算的过程较复杂，数据较多。

参考文献

- [1]张元科，曹宝香，光栅图像矢量化的研究[J]，曲阜师范大学硕士学位论文，2004
 [2]敬照亮，MATLAB 教程与应用[M]，北京：北京交通大学出版社，2011
 [3]彭荣杰，图像矢量化方法研究与应用[J]，华中科技大学硕士学位论文，2006
 [4]朱婧，图像矢量化方法研究[J]，杭州电子科技大学硕士学位论文，2011
 [5]宋晓宇，王永会，工程图自动矢量化算法的设计与实现[J]，中国图像图形学报，2000（1）
 [6]严素蓉，朱桂林，徐从富，一种位图矢量化新方法 [J]，浙江大学计算机科学与技术学院
 [7]杨桂元，黄已立，数学建模[m]，合肥，中国科学技术大学出版社，2008 年 8 月

附件

附表 1

x	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
y	17	18	19	20	21	22	23	24	25	15	16	26
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12
y	27	14	28	13	29	12	30	11	31	10	32	9
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	12	13	13	14	14	15	15	16	16	17	17	18
y	33	9	33	8	34	8	34	7	35	7	35	6
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	18	19	19	20	20	21	21	21	21	22	22	22
y	36	6	36	6	36	5	36	44	46	5	37	43
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	22	23	23	23	23	23	24	24	24	24	24	25
y	45	5	37	41	42	45	5	37	39	40	45	5
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	25	25	26	26	27	27	28	28	29	29	30	30
y	38	44	5	44	4	43	4	42	4	41	4	41
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	31	31	32	32	33	33	34	34	35	35	36	36
y	4	40	4	39	4	38	4	38	4	38	4	37
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	37	37	38	38	39	39	40	40	41	41	42	42
y	5	37	5	37	5	37	5	37	5	37	6	36

index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	43	43	44	44	45	45	46	46	47	47	48	48
y	6	36	6	36	7	35	7	35	7	34	8	34
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	49	49	50	50	51	51	52	52	53	53	54	54
y	9	33	9	33	10	32	11	31	11	31	12	30
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	55	55	55	55	56	56	57	57	57	57	57	57
y	13	14	28	29	15	27	16	17	18	24	25	26
index	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1
x	58	58	58	58	58							
y	19	20	21	22	23							
index	1	1	1	1	1							
RGB	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1							

附表 2

 $j =$

Columns 1 through 27

[illegible]

参赛队号#1493

	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

参赛队号#1493

[illegible]

Columns 28 through 54

[illegible]

参赛队号#1493

[illegible]

Columns 55 through 61

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$


```
F4=bwperim(F2);  
figure,imshow(F4);  
imwrite(F4,'butterfly2.jpg');
```

程序 2:

```
a=imread('picture.bmp');  
b=rgb2gray(a);  
c=edge(b);  
imshow(double(c));  
c  
[x,y]=find(c)  
plot(y,x,'k.')
```

数学中国提供 (www.madio.net)