

第五届数学中国数学建模网络挑战赛

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2012@tzmcm.cn

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第五届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#2522

参赛队员（签名）：

队员 1：沈花

队员 2：李皓

队员 3：张晓阳

参赛队教练员（签名）： 邓磊

参赛队伍组别：本科组

第五届“认证杯”数学中国

第五届数学中国数学建模网络挑战赛

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2012@tzmcm.cn

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：#2522

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第五届数学中国数学建模网络挑战赛

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2012@tzmcm.cn

2012 年第五届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 蜘蛛网的最优结构关 键 词 最优结构 对数螺旋 力学分析 线性最小二乘拟合算法

摘 要：

本文数学建模的目的是设计出适合不同蜘蛛的最优蛛网结构，要讨论蜘蛛网的结构需要考虑两个方面的主要因素——蜘蛛本身重量和猎物对蛛网的冲击，并根据相关数据，设计了合适的数学模型并做出了相应的解答和处理。

第一阶段，在考虑蜘蛛本身重量对蛛网结构影响时，我们基于线性回归的模型，针对蜘蛛本身重量对蛛网结构的影响进行了研究和分析，考虑到在确定蜘蛛体重与捕丝间距、半径丝条数、捕食面面积、蛛网上下半面捕丝长度之比的关系后，才能确定蛛网的结构，在收集相关数据后，分别得出蜘蛛体重与捕丝间距、半径丝条数、捕食面面积、蛛网上下半面捕丝长度之比的二维坐标图，利用线性最小二乘拟合的方法，根据Matlab编程结果求解出对应的函数。

第二阶段，利用对数螺旋模型确定出蛛丝捕丝的初始位置；在考虑猎物对蛛网的冲击对蜘蛛网结构的影响时，分析了猎物冲击蛛网时本身的大小和飞行速度对蛛网结构的影响。查阅相关资料，得到可行数据，再进行受力分析，建立出合适的数学模型，根据编程结果，得到相应的结论。

综合上述两方面的考虑和结论，从而得出蜘蛛网的最优结构，最后将此结果与实际情况相比较，验证模型的正确性。

参赛队号 #2522所选题目 A

参赛密码 _____ (由组委会填写)

第五届数学中国数学建模网络挑战赛

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2012@tzmcm.cn

Abstract

In this passage, the mathematical modeling of the purpose is to design optimal structures for different spider. Discussing the spider web structure needs to consider two main factors -- the spider's weight and prey on cobweb shock. And design a suitable mathematical model and make the corresponding solutions and processions by related data.

The first stage, when considering the spider's weight having the influence on the web structure, We base the model on the linear regression model, and the spider's weight on web structure was studied and analyses. Considered that only after determining the relation of spider's body weight and trapping wire spacing, radius of wire number, predation area, and with the lower half plane thread capturing length ratio relation that we can be determined with the structure. After the collection of relevant data, respectively, that spider weight the spacing of the wire, wire and capture radius, surface area, the number of prey cobweb upper and lower half face catch wire length than the two-dimensional coordinate chart, using the linear least squares fitting method, according to the Matlab programming for solving the corresponding function results.

The second stage, considering to prey on cobweb shock on the spider web structure influence, analysis of the prey size in itself and flight speed of the cobweb shock effect, thus affecting the web structure. Access to relevant information, to obtain the feasible data, then carries on the stress analysis, to establish a suitable mathematical model, according to the programming results, obtained the conclusion.

The above two aspects are considered and conclusions, thus obtains the optimal structure of spider web, finally the results with the actual compared to the situation, verify the correctness of the model.

参赛队号：# 2522

蜘蛛网的最优结构

一、问题重述

蜘蛛目共有105个科约37000种，世界各地均有分布。蜘蛛主要有结网、游猎穴居3种生态类型。虽然不是所有的蜘蛛都结网，但在几乎所有科中都有结网型蜘蛛；这很可能表明不结网的蜘蛛也是结网型蜘蛛的后裔。对于结网型蜘蛛而言，网不仅是捕食工具，有时也可作为防御天敌的工具和繁殖场所，其生活史各阶段与网都有着密切联系。而且，蛛网结构的确定对建筑物的抗灾性能以及其他各个方面均有重要作用。请建立合理的数学模型，说明蜘蛛网织成怎样的结构才是最合适的。

二、问题分析

针对蜘蛛网最优结构的问题，笔者首先考虑到蜘蛛本身重力对蛛网结构具有影响，为分析其本身重量对捕丝间距、半径丝条数、捕食面面积、蛛网上下半面捕丝长度之比的影响，查阅相关资料找到一定数据，利用数据图像建立线性拟合模型，用牛顿力学、统计学相关性分析、线性最小二乘拟合法、Matlab编程等方法来对模型求解。中枢区和捕丝最大长度的确定是根据蜘蛛捕食策略，为让蜘蛛最快达到猎物地点而确定。

其次，从受力角度分析猎物冲撞对蛛网结构产生的影响，查阅资料得到蛛网的断裂能量等数据，以能量守恒定律为基础列出承受猎物撞击的蛛丝数量的方程，以此算出捕丝密度与猎物质量、速度、接触面的关系。

三、模型假设

- 1、蜘蛛网的无风的条件下受力、温湿度恒定
- 2、猎物与蛛网垂直碰撞
- 3、蛛丝充足
- 4、蛛网的建立有足够的空间
- 5、不考虑猎物的挣扎
- 6、不考虑锚丝与支持带的影响
- 7、猎物撞击时蛛网形变对称
- 8、猎物撞击蛛网时间忽略不计

四、符号说明

mg：猎物重量
 θ ：捕丝与半径丝的夹角
 v ：猎物飞行速度
 n ：猎物撞击蜘蛛网的根数
 r ：向径

参赛队号：# 2522

 η ：极角 δ ：常数

S：网的面积

E：网的模量

T：昆虫的冲击力

t：撞击时震荡时间

 E_k ：冲击时的动能 E_0 ：断裂能量 α ：达到半径丝极限承受能力时，半径丝与碰撞方向所在的直线所成的锐角 β ：达到半径丝极限承受能力时，捕丝与碰撞方向所在的直线所成的锐角

五、模型建立与求解

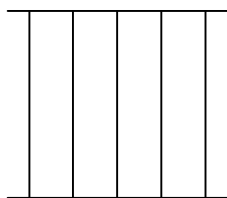
【一】第一阶段：蜘蛛本身重量对蛛网结构的影响

1、蛛网结构的初步分析

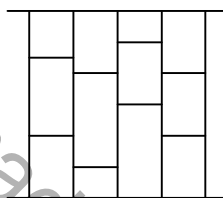
如果蜘蛛网形状如图一所示，则每根蛛丝的粗细一致并为保证其能承受风力或猎物冲击，则蛛丝要求韧性很高，且传达震动的效果差，不能达到设计要求。

如果蜘蛛网形状如图二所示，虽然减弱了对蛛丝的韧性要求，但是传达震动的效果依然不明显，且蜘蛛行动受阻，到达猎物处的时间增加。

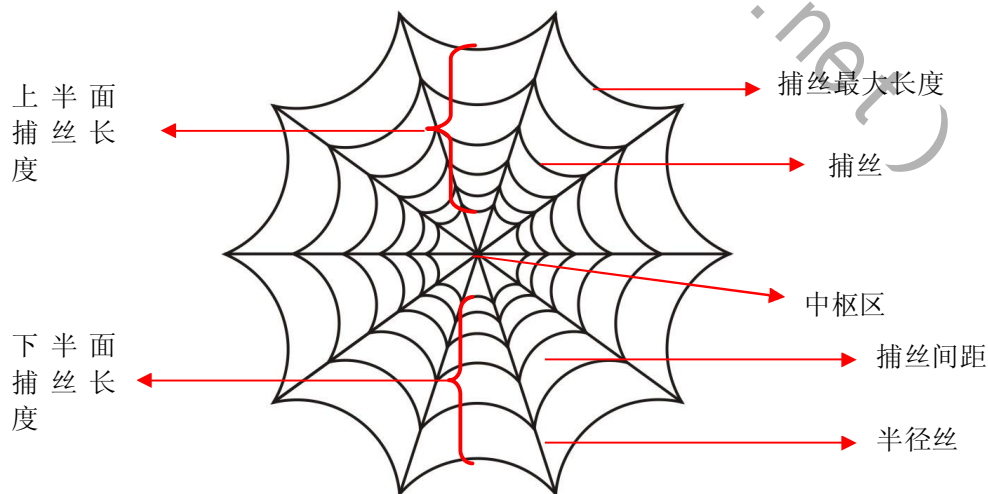
综合考虑韧性、震动传达性能、蜘蛛行动方便性等因素，蛛网由一个中心生出的若干放射装丝线和围绕这个中心的螺旋状丝线构成的网状结构保证了蜘蛛网经久耐用，能承受风力或猎物的冲击。如图三所示。



图一



图二



图三

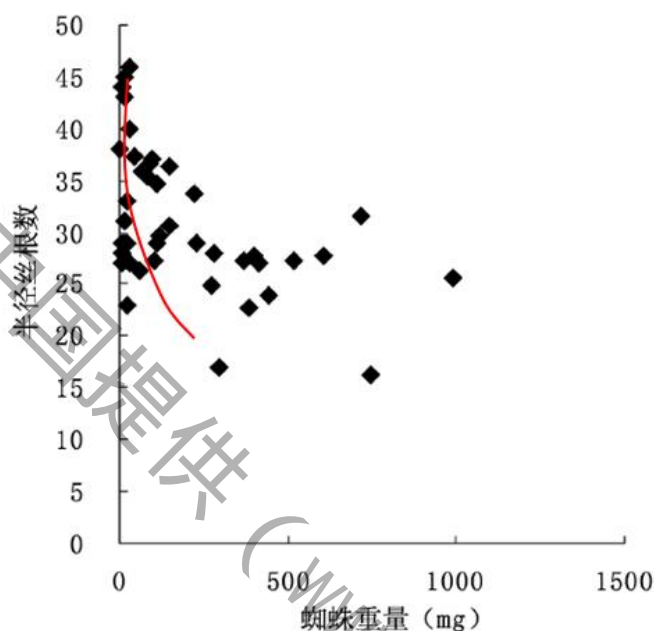
参赛队号：# 2522

2、中枢区与捕丝最大长度的确定

由蜘蛛的捕食策略得知，蜘蛛需要感受到猎物的震动且要用最快的速度到达猎物处，则中枢区的中点必然是所有半径丝的焦点，方便震动的传达，而中枢区的面积则是蜘蛛本身与网面的接触面积，中枢区与扑食区的距离和捕丝的最大长度则是蜘蛛脚能伸展的最大距离。

3、半径丝根数的确定

根据卓春晖等人的论述^[1]，得出蜘蛛体重与半径丝的根数有如图四的关系：



图四

由图可读出如下表一的数据：

表一

蜘蛛重量 (mg)	15	18	30	40	80	100	180
半径丝根数	45	44	40	37	36	35	30

图四给出了蛛网半径丝根数与蜘蛛体重的关系，从图中可以看出蛛网半径丝根数随蜘蛛体重的增加而减少，二者呈显著负相关。体重最轻的蜘蛛半径丝的根数达到了46根，体重最重的蜘蛛半径丝的根数仅有16根。当蜘蛛重量小于（或等于）200mg时与半径丝根数近似线性相关，则采用线性最小二乘拟合算法得：

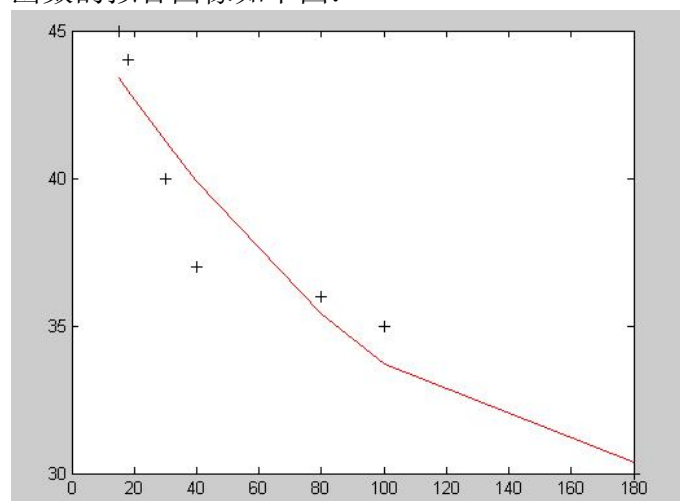
$$f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

设 $A=(a_1, a_2, a_3)$ ， x 为蜘蛛重量， y 为捕丝间距，利用附录一中Matlab编程计算结果为： $A=(0.0004, -0.1641, 45.7691)$ 。则方程为：

$$f(x) = 0.0004x^2 - 0.1641x + 45.7691$$

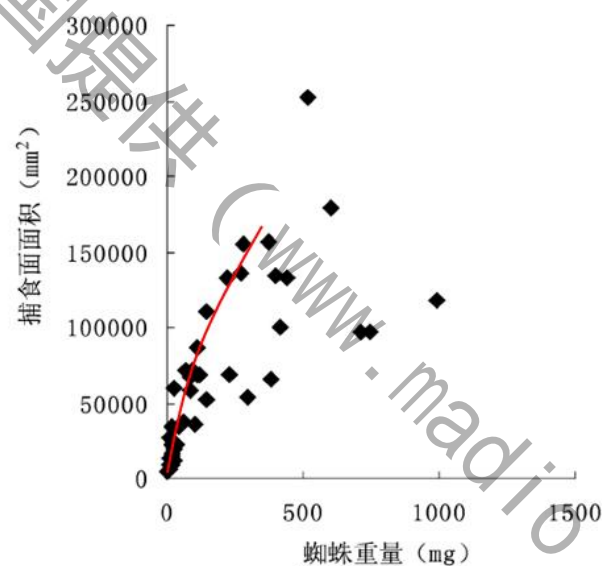
参赛队号：# 2522

函数的拟合图像如下图：



4、捕食面面积的确定

由卓春晖等人得出的数据^[1]，得出蜘蛛体重与捕食面面积如图五的所示



图五

由图可读出如下表二的数据：

表二

蜘蛛重量 (mg)	20	40	80	100	120	180
捕食面积 (mm²)	20000	25000	60000	80000	110000	140000

由图五可以看出，当蜘蛛重量小于（或等于）200mg时与捕食面积近似线性相关，则采用线性最小二乘拟合算法得：

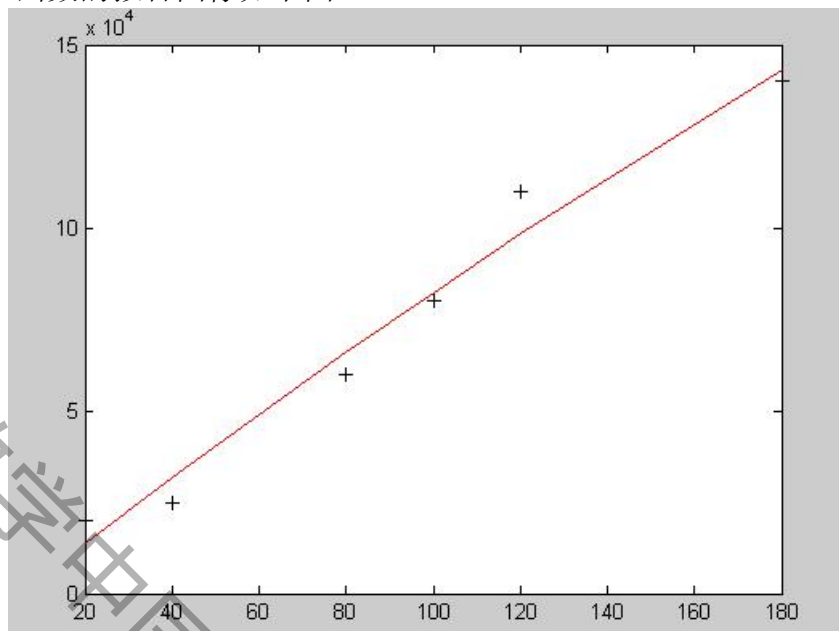
$$f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

设 $A = (a_1, a_2, a_3)$ ， x 为蜘蛛重量， y 为捕食面积。利用附录二中Matlab编程计算结果为： $A = 1.0 \times 10^3 \times (-0.0006, 0.9368, -4.8422)$ ，则方程为：

$$f(x) = 10^3 \times (-0.0006x^2 + 0.9368x - 4.8422)$$

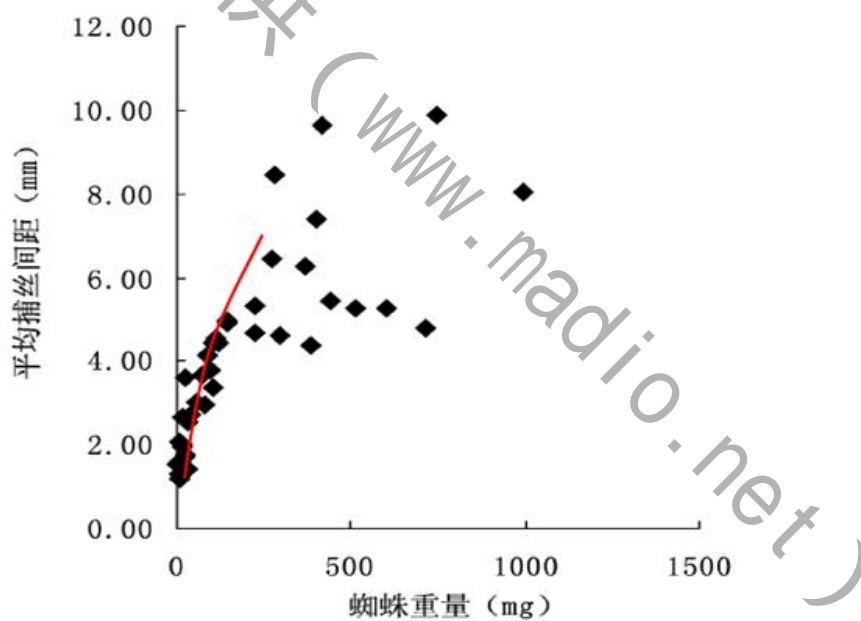
参赛队号：# 2522

函数的拟合图像如下图：



5、平均捕丝间距的确定

由卓春晖等人得出的数据^[1]，得出蜘蛛体重与半径丝的根数有如图六的关系



图六

由图可读出如下表三的数据：

表三

蜘蛛重量 (mg)	30	60	70	80	100	110	120	200
捕丝间距 (mm)	1	2	3	4	4.25	4.3	5	5.3

参赛队号：# 2522

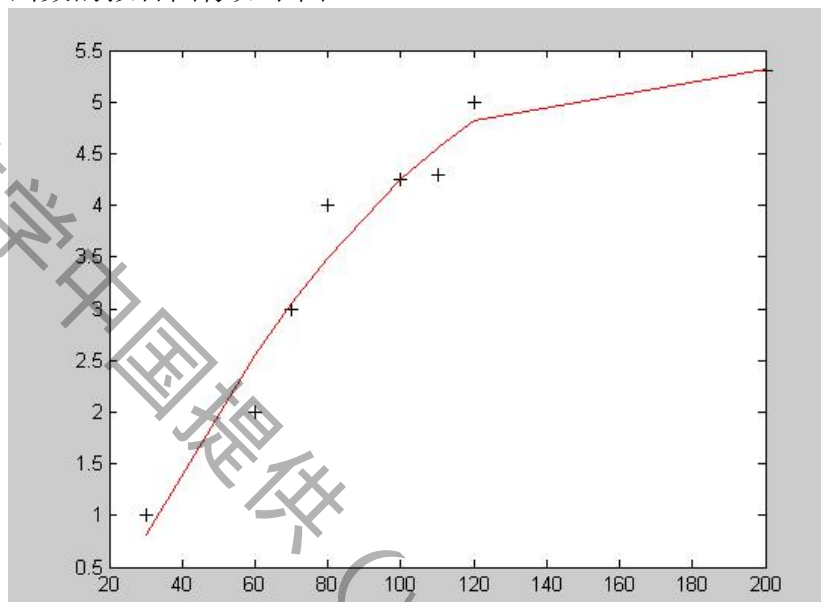
由图六可知，蜘蛛重量小于（或等于）200mg时与平均捕丝间距近似线性相关，则采用线性最小二乘拟合算法得：

$$f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$$

设 $A = (a_1, a_2, a_3)$ ， x 为蜘蛛重量， y 为捕丝间距。利用附录三Matlab编程计算结果为： $A = (-0.0002, 0.0781, -1.3204)$ 。则方程式为

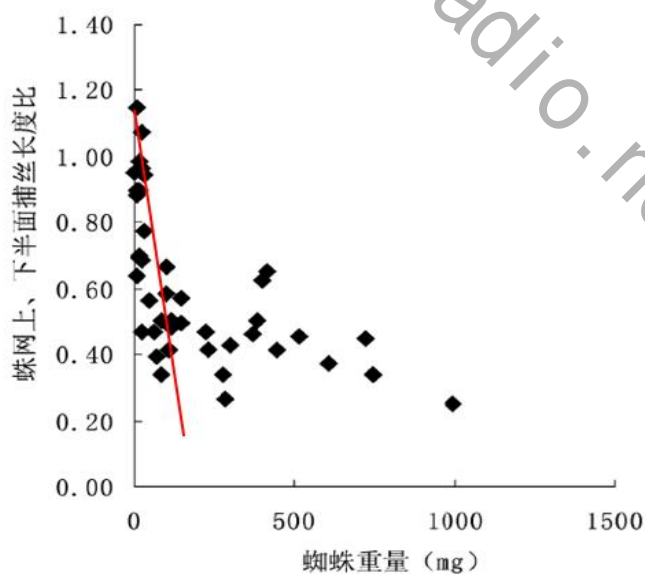
$$f(x) = -0.0002x^2 + 0.0781x - 1.3204$$

函数的拟合图像如下图：



6、蛛网上、下半面捕丝长度比的确定

由卓春晖等人得出的数据^[1]，得出蜘蛛体重与蛛网上、下半面捕丝长度比如图七的关系



图七

参赛队号：# 2522

由图可读出如下表四的数据：

表四

蜘蛛重量(mg)	20	40	50	60	70	90	100	110	120	130
蛛网上、下半面捕丝长度之比	1.15	1.10	1.00	0.98	0.95	0.79	0.64	0.60	0.50	0.42

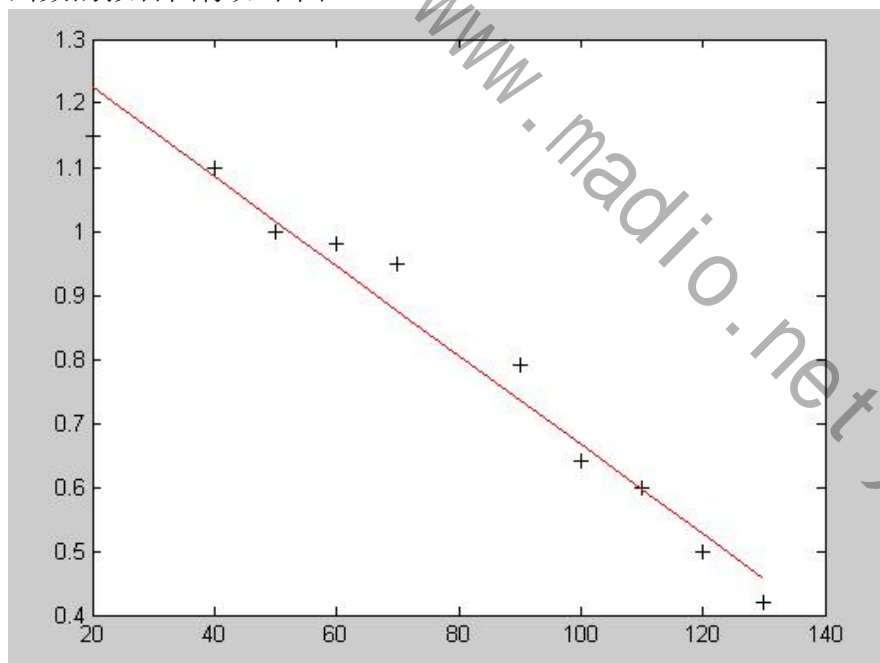
由图七可知，随着蜘蛛体重的增加，捕丝在蛛网上、下半面的分布不对称也会加强，我们利用捕丝在蛛网上、下半面的不对称性，即蛛网上、下半面捕丝长度的比值来反映这种布局变化。比较网上、下半面的捕丝长度，可以发现，在体重小于200 mg 的个体中，随着蜘蛛体重量与蛛网上、下半面捕丝长度比近似线性相关，则采用线性最小二乘拟合算法（由图可知， $n=1$ ），则：

$$f(x) = a_1x + a$$

设 $A(a_1 a)$ ， x 表示蜘蛛重量， y 表示蛛网上、下半面捕丝长度比，利用附录四Matlab 编程计算得： $A=(-0.0070, 1.3636)$ 。则方程式为：

$$f(x) = -0.007x + 1.3636$$

函数的拟合图像如下图：



参赛队号：# 2522

【二】第二阶段：猎物冲击对蛛网结构的影响

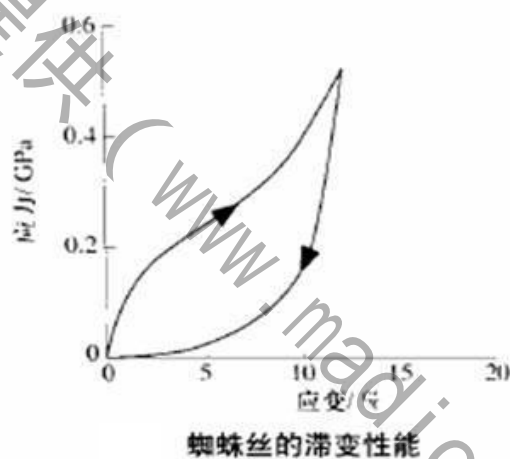
1、初始捕丝位置的确定：

由对数螺旋公式 $r = \delta e^{(0.858-0.84)\eta}$ 可知，当 $\eta=0$ 时， $r=\delta$ ，因此 δ 值大小决定对数螺旋线开始时的位置。

因为 δ 值大小也决定蜘蛛丝的强度和韧度。一般 δ 值愈大，蜘蛛丝的强度韧度也愈大。因此，蜘蛛网的结构中，尽量使 r 值大一点。

2、猎物撞击分析：

当昆虫撞击蜘蛛网时，会在丝拉索上形成直角的冲击负荷，由于半径丝、框丝、锚定丝均具有高韧度，两者的平衡阻滞(hysteresis) 约为70%，即昆虫飞行时所具有的动能约有70%被吸收转化成热量，因而不致于使昆虫通过反弹作用被弹出蜘蛛网。由于蜘蛛丝具有高韧性、高水平的内部分子摩擦和高平衡阻滞等特点，被认为是一种粘弹性的生物材料，其力学特性具有应变率依赖性。拖丝的硬度、强度、伸长率、韧度在应变率 $0.005S^{-1} \sim 0.024S^{-1}$ 的范围内不断提高，提高应变率可以提高拖丝的性能，在最高应变率 $0.024S^{-1}$ 时，使之断裂需要11s。

图八^[4]

3、猎物对蛛网冲击的受力分析

整体上对蜘蛛网受力分析如下：

A、在整体上，由于蜘蛛网能将所受的冲击力平均到整个网上，设网的面积为 S ，网的模量为 E 、昆虫的冲击力为 T 、撞击时震荡时间为 t 、冲击时的动能为 E_k 、断裂能量为 E_0 ，有：

$$E = \frac{T}{S}, mv = Tt$$

转换得：

$$mv = ESt$$

要保证网能逮到蜘蛛需要的食物，则 ESt 大于昆虫撞击网的动量 mv ，即：

$$mv \leq ESt$$

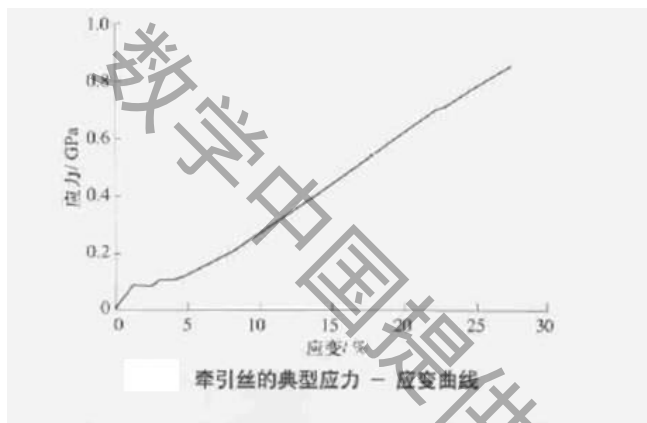
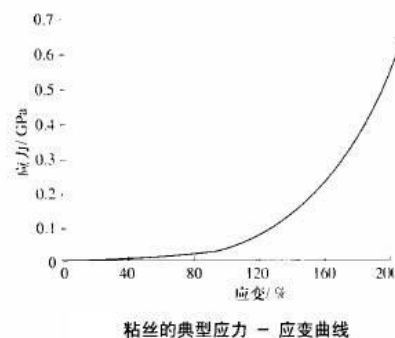
参赛队号：# 2522

B、蛛网能将昆虫飞行时所具有的动能约有70 %被吸收转化成热量, 则

$$70\% E_k \leq E_0$$

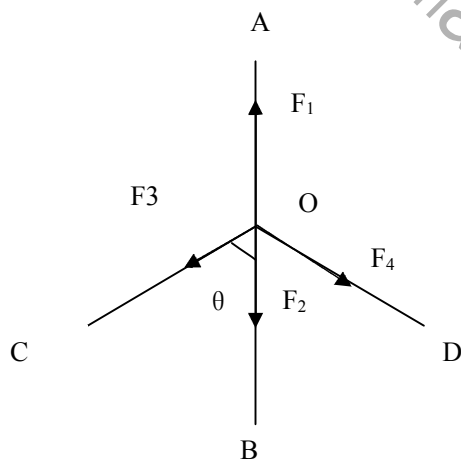
对于蜘蛛网局部受力分析如下：

由于功能不同，不同的蜘蛛丝具有不同的力学性能。图九^[4]、图十^[4]分别是牵引丝（即半径丝）和捕丝典型的应力——应变曲线^[4]。

图九^[4]图十^[4]

A. 对半径丝和捕丝节点处的受力分析如下：

设捕丝与半径丝没撞击时的夹角为 θ ，如下图所示，其中线AB表示半径丝、OC、OD表示捕丝、O点表示半径丝与捕丝的交点。



设OA方向的力为 F_1 、OB方向的力为 F_2 、OC方向的力为 F_3 、OD方向的力为 F_4 ，当有力F作用于O时，有：

$$F_3 \cos \theta + F_4 \cos \theta + F_2 = F_1 \quad (1)$$

$$F_3 \sin \theta = F_1 \quad (2)$$

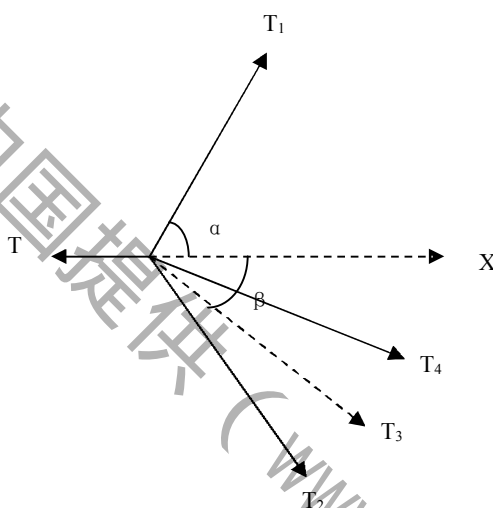
参赛队号：# 2522

$$F_3 \sin \theta \leq \frac{1}{4} F \quad (3)$$

联立 (1) (2) (3) 式得：

$$\sin \theta \leq \frac{1}{4} FF_3 \quad (4)$$

而对于昆虫撞击网时，半径丝和捕丝都有一定的拉伸变量。由于半径丝的拉伸变量范围比较小，设达到半径丝极限承受能力时，半径丝与碰撞方向所在的直线所成的锐角为 α ，捕丝与碰撞方向所在的直线所成的锐角为 β ，如下图所示：



由于碰撞时间极短，不考虑碰撞过程中昆虫运动方向的改变，则 $\alpha = \beta$ 。对昆虫所在点进行受力分析，设昆虫运动的反方向为 x 方向，半径丝所受的力分别为 T_1 、 T_2 ，捕丝所受力为 T_3 、 T_4 ，昆虫的撞击力为 T ，则：

$$T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha + T_3 \cos \alpha + T_4 \cos \alpha = T \quad (5)$$

$$T_1 \sin \alpha = T_2 \sin \alpha + T_3 \sin \beta \cos \theta + T_4 \sin \beta \cos \theta \quad (6)$$

$$T_3 = T_4 \quad (7)$$

$$\alpha = \beta \quad (8)$$

联立 (5) (6) (7) (8)，参考下面的蜘蛛丝的力学性能表 B 中的数值，结合图九、图十，当捕丝伸长为原长的 300% 时达到了蜘蛛网最大承受能力。得出蜘蛛网能承受的冲击力 T 的范围：

$$T = 4T_3 \sin \theta$$

由此得出：

参赛队号：# 2522

$$\theta \geq \arcsin \frac{1}{4} TT_3$$

B. 当昆虫只飞撞到一根捕丝上时，有：

$$F \leq \frac{1}{2} F_3$$

其余的情况（如下图所示）时，更多的蜘蛛丝承受昆虫的冲击力，就不容易对网造成破坏了。



各种参考数据如下：

蜘蛛丝的力学性能表A：

材料	伸长率 (%)	初始模量N/m ²	强度 (N/m ²)	断裂能量(J/Kg)
半径丝	9.8-32.1	$(1-30) \times 10^9$	1×10^5	1×10^5

蜘蛛丝的力学性能表B：

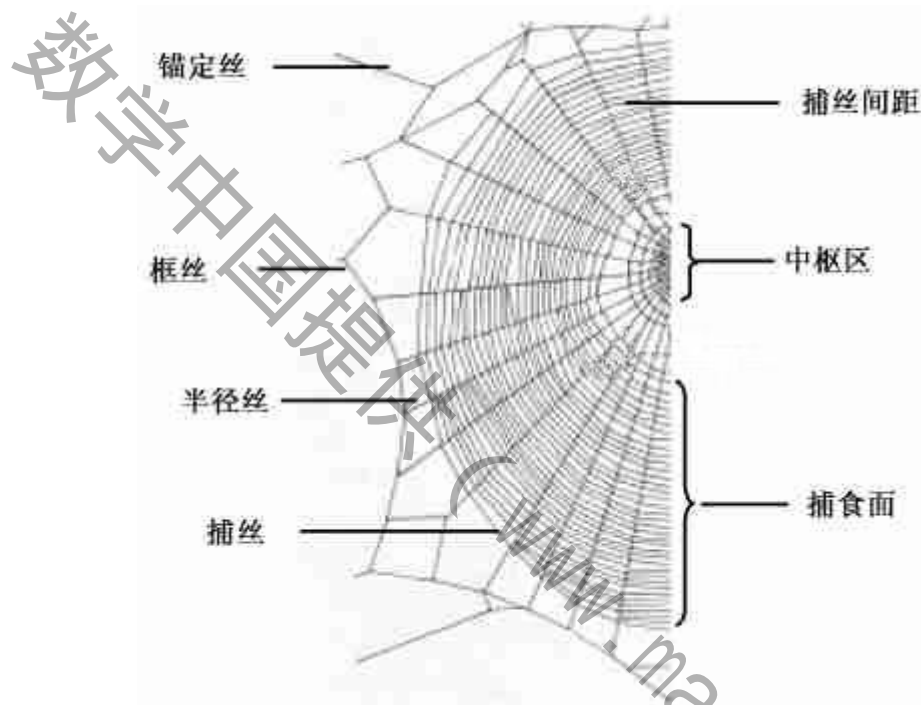
项目	强度 (GPa)	延伸率 (%)	刚性 (GPa)
蜘蛛丝 (半径丝)	0.7-2.3	36-50	9.5-30
蜘蛛丝 (捕丝)	0.1-0.5	不超过300	不超过1

根据蛛丝的力学性能表中的参数，可以得出蛛网相关数据：其放射丝条数在20到46的范围，捕丝间距1 mm到7 mm的范围，捕丝与放射丝之间的夹角 θ 为81° 到86° 的范围时，蜘蛛网结构最为合理。

参赛队号：# 2522

【三】模型结论：最佳蛛网的结构图

由于蜘蛛的体重对于蛛网各个方面有巨大影响，对于体重不同的蜘蛛，其最佳的蛛网结构是不一样的，在这里，我们以体重为100mg的蜘蛛为例，将 $x=100\text{mg}$ 带入得出的方程式计算得其半径根数为33.3591根，捕食面积为 82837.8 mm^2 ，捕丝间距为4.4896 mm，蛛网上下半面捕丝长度之比为0.6636，再由第二阶段的力学分析得出的结果范围，绘制出其最佳结构的蛛网如下图所示（为便于标注，这里仅截取一半的结构图）：



六、模型检验

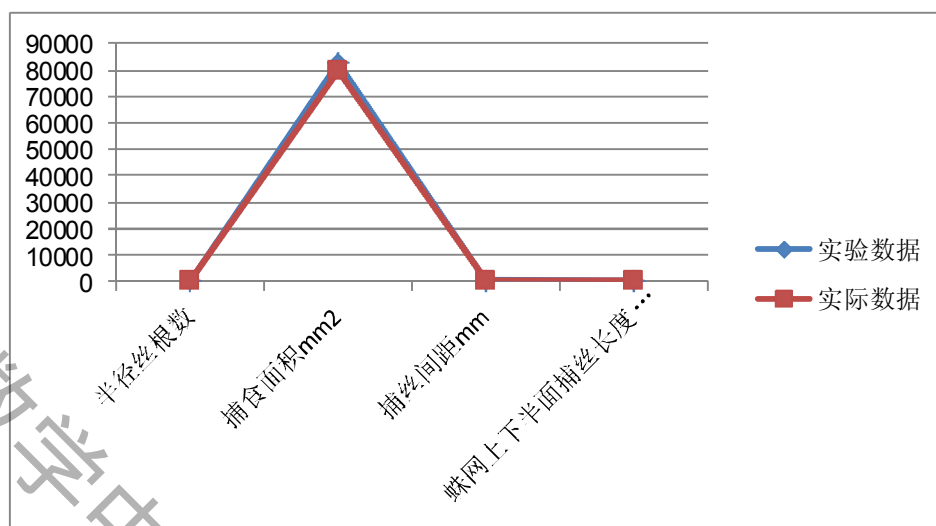
综合蜘蛛体重和猎物冲击这两方面因素，得出的 100mg 蜘蛛的最佳蛛网结构的数据与现实生活中 100mg 的蜘蛛所结的网进行比较，下表为蛛网半径丝根数，捕食面积，捕丝间距，蛛网上、下半面捕丝长度之比的实验数据和实际数据：

误差分析表

蛛网结构 数据	半径丝根数	捕食面积 (mm^2)	捕丝间距(mm)	蛛网上下半面 捕丝长度之比
实验数据	33.3591	82837.8	4.4896	0.6636
实际数据	35	80000	4.25	0.64
误差绝对值	0.046883	0.0354725	0.056376	0.036875

参赛队号：# 2522

根据表中的数据，得到如下的关系图：



由上图及表可以明显看出，实验数据与实际数据基本吻合，误差绝对值小于等于 5%，说明模型符合实际情况。

七、模型评价与推广

本文建立了适当的数学模型，将复杂的问题简单化。

优点：

1) 从蜘蛛本身重量的角度考虑，定量的分析了蛛网的捕丝间距、半径丝条数、捕食面面积、蛛网上下半面捕丝长度之比，并建立了适当的数学模型，在给出相关因素的具体数值的时候能够给出足够精确的解，具有一定的普遍性。

2) 利用Matlab软件对数据进行处理并作出各种平面图，直观、快捷。

缺点：

1) 考虑因素不全面，忽略了一些外界因素的影响，实际运用时可能存在误差

2) 主要考虑体重在200 mg以下的蜘蛛，欠缺一定普遍性

推广：

在现实生活中，利用蜘蛛网结构包层布拉格空芯光纤和有损耗的材料，可获得保持圆偏振态低损耗单模光纤，蛛网结构的应用对于建筑物结构和抗灾性能也有重要意义。

八、参考文献

【1】卓春晖，蒋平，吴灵芝，彭茂，郭聪，《不同体重悦目金蛛的蛛网结构》，出版地：生物资源与生态环境教育部重点实验室 四川大学生命科学学院 成都，42（2），动物学杂志，2007 年。

【2】卓春晖，蒋平，王昌河，郭聪，《蛛网结构性能及其适应性》，生物资源与生态环境教育部重点实验室 四川大学生命科学学院 成都，第 25 卷第四期，四川动物，2006 年。

参赛队号：# 2522

【3】 赵静，但琦，《数学建模与数学实验（第三版）》，高等教育出版社，2008年一月。

【4】 黄献聪，施楣梧，《蜘蛛丝的力学性能及其应用取向》，纺织导报，解放军总后勤装备研究所，1003-3025（2004）03-0032-04

九、附录

附录一：

确定半径丝根数与蜘蛛重量的函数时的程序及运行结果：

```
>> x=[15 18 30 40 80 100 180];
y=[45 44 40 37 36 35 30];
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r')
```

A =

```
0.0004    -0.1641    45.7691
```

半径丝根数与蜘蛛重量的函数关系为： $f(x)=0.0004x^2-0.1641x+45.7691$

附录二：

确定捕食面面积与蜘蛛重量的函数时的程序及运行结果：

```
>> x=[20 40 80 100 120 180];
y=[20000 25000 60000 80000 110000 140000];
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r')
```

A =

```
1.0e+003 *
```

```
-0.0006    0.9368   -4.8422
```

捕食面面积与蜘蛛重量的函数为：

$f(x)=1.0e+003*(-0.0006x^2+0.9368x-4.8422)$

附录三：

确定平均捕丝间距和蜘蛛重量函数时的程序与运行结果：

```
>> x=[30 60 70 80 100 110 120 200];
y=[1 2 3 4 4.25 4.3 5 5.3];
A=polyfit(x,y,2)
z=polyval(A,x);
plot(x,y,'k+',x,z,'r')
```

A =

```
-0.0002    0.0781   -1.3204
```

平均捕丝间距和蜘蛛重量的函数为： $f(x)=-0.0002x^2+0.0781x-1.3204$

参赛队号：# 2522

附录四：

确定蛛网上、下半面捕丝长度与蜘蛛重量函数时的程序与运行结果：

```
>> x=[20 40 50 60 70 90 100 110 120 130];  
y=[1.15 1.10 1.00 0.98 0.95 0.79 0.64 0.60 0.50 0.42];  
A=polyfit(x,y,1)  
z=polyval(A,x);  
plot(x,y,'k+',x,z,'r')
```

A =

```
-0.0070    1.3636
```

蛛网上、下半面捕丝长度与蜘蛛重量的函数为： $f(x) = -0.0070x + 1.3636$