

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1434

参赛队员（签名）：

队员 1: 周日峰

队员 2: 史文欣

队员 3: 谢杰

参赛队教练员（签名）： 无

参赛队伍组别（例如本科组）： 研究生组

## 第十二届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：1434

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 改进的两种纸飞机模型飞行距离与留空时间的最优化问题

关 键 词 最优化问题、空气动力学、离散化、数值模拟

## 摘 要：

本文对于在现实生活中通过粘贴胶带确定最佳中心位置，进而得到最远投掷距离与最长留空时间有重要理论意义(以 Suzanne 为例)。我们使用割补法获得纸飞机机翼面积，采用积分法估算纸飞机的重心参数，并以它们为基础建立了四种纸飞机优化模型(模型 I、模型 II、模型 III、模型 IV)。模型 I、模型 II 与模型 III、模型 III 属于递进优化关系。由于纸飞机运动过程中不确定因素太多，我们巧妙地运用合理假设将纸飞机运动过程离散化，并使用 MATLAB R2016a 进行相关数据的数值模拟。最后获得模型 I 的最佳重心位置距机头  $5.98\text{cm}$ 、最远投掷距离  $78.78\text{m}$ ；模型 II 的最佳重心位置距机头  $5.88\text{cm}$ 、最长留空时间  $27\text{s}$ ；模型 III 的最佳距机头  $5.98\text{cm}$ 、最远投掷距离  $74.75\text{m}$ ；模型 IV 的最佳重心位置距机头  $5.88\text{cm}$ 、最长留空时间  $26.4\text{s}$ 。

为探究 Suzanne 纸飞机的最长留空时间与世界吉尼斯世界纪录的关系，我们在模型改进中使用与模型 II 相同的方法研究了 Sky King 的最长留空时间，数值模拟结果为  $29.4\text{s}$ ，便于在进一步的研究中对 Suzanne 纸飞机进行改进。

参赛队号： 1434

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

所选题目： A 题

## ABSTRACT

This paper has important theoretical significance for determining the best center position by sticking tape in real life, and then getting the farthest throwing distance and the longest blanking time (take Suzanne as an example). We use the cut-and-fit method to obtain the paper plane wing area. The integral method was used to estimate the center of gravity parameters of paper airplanes, and based on them, four paper airplane optimization models (Model I , Model II , Model III , Model IV) were established. Model I , Model II and Model III , Model IV belonged to the optimization relationship. Due to too many uncertain factors in the paper airplane movement process, we skillfully use the reasonable assumption to discretize the paper airplane motion process. And use *MATLAB R2016a* to carry out numerical simulation of the relevant data. Finally, obtain the best center of gravity position of the Model I . The nose of the machine is  $5.98\text{cm}$  and the maximum throwing distance is  $78.78\text{m}$  . The best center of gravity of the Model II is  $5.88\text{cm}$  away from the nose and the longest hang time is  $27\text{s}$  . The best distance of the Model III is  $5.98\text{cm}$  and the farthest throwing distance is  $74.75\text{m}$  . Model IV's best center of gravity is  $5.88\text{cm}$  from the nose and  $26.4\text{s}$  longest. To explore the relationship between the longest remaining time of the Suzanne paper plane and the world Guinness World Record, for the model improvement, Sky King's longest hang time was studied using the same method as Model II . The numerical simulation result was  $29.4\text{s}$  , which facilitated the improvement of Suzanne paper plane in further research.

# 目录

1 问题重述.....	2
1.1 问题背景.....	2
1.2 问题重述.....	2
2 问题分析.....	3
3 模型假设.....	3
4 符号说明.....	3
5 模型建立与求解.....	5
5.0 纸飞机机翼面积与重心参数.....	5
5.0.1 纸飞机机翼面积的确定.....	5
5.0.2 未加胶带时纸飞机的重心.....	7
5.0.3 添加胶带时纸飞机的重心.....	8
5.0.4 表征纸飞机升力的几个参数及阻力概念.....	9
5.1 基于 Suzanne 纸飞机机翼为“T”型（夹角为平角）的模型.....	10
5.1.1 基于纸飞机飞行距离最远的最佳重心位置的研究.....	11
5.1.2 基于纸飞机留空时间最长的最佳重心位置的研究.....	18
5.2 基于纸飞机机翼为“Y”型（夹角为钝角）的模型.....	21
5.2.1 基于纸飞机飞行距离最远的最佳重心位置的研究.....	21
5.2.2 基于纸飞机留空时间最长的最佳重心位置的研究.....	24
6 模型评价.....	27
7 模型改进.....	28
8 参考文献.....	30
附录.....	32
1. 纸飞机重心.....	32
2. 纸飞机机翼的面积.....	32
3. 模型 I 的程序.....	33
4. 模型 II 的程序.....	35
5. 模型 III 的程序.....	37
6. 模型 IV 的程序.....	39
7. 模型 V 的程序.....	41

## 1 问题重述

### 1.1 问题背景

纸飞机几乎承载了所有人童年的记忆，在教室里扔纸飞机过去一直是那些不遵守纪律的学生的“专利”，但纸飞机已经飞出教室，成为一种深受人们喜爱的全球性运动。纸飞机有许多种折法，世界上有若干具有一定影响力的纸飞机比赛。通常的参赛规定是使用一张特定规格的纸，例如 A4 大小的纸张，折成一架纸飞机。大多数比赛都不允许使用剪刀和胶水，有的比赛可以少量使用胶带以调整纸飞机的重心。世界上飞得最远的纸飞机“Suzanne 纸飞机”，飞行距离  $69.14m$ ，获得了吉尼斯世界纪录。2009 年日本折纸飞机协会主席田卓夫创造了纸飞机 (Sky King) 的飞行时间的新世界纪录  $27.9s$ 。

### 1.2 问题重述

如果纸飞机（以 Suzanne 为例）的翼面是精确的平面，假设我们可以用少量胶带粘贴在机身上，用以调整重心的前后位置。请建立合理的数学模型，计算出为了使飞行距离尽可能远，飞机重心的最佳位置以及投掷出手的角度。如果我们希望留空时间尽可能长，重心位置和出手角度又该如何取值呢？

## 2 问题分析

关于调整 Suzanne 纸飞机的重心位置来量化粘贴少量胶带，其难点在于如何通过改变重心位置计算出纸飞机重心左右两部分的质量差。在建模第一阶段我们已经求出了不粘贴胶带时 Suzanne 纸飞机的重心位置（初始重心）。这里我们假定调整重心后，重心在垂直于中轴线平面上的坐标值不改变，即  $y$ 、 $z$  值不变，只让重心在中轴线上左右移动。这里我们采用控制变量法，规定每次重心位置的改变量为  $1mm$ ，因此我们在初始重心位置的左右各取相邻间距为  $1mm$  的 4 个重心点。再使用积分法来求出相邻重心位置的纸张面积的改变量，通过比例方法求出纸张质量的改变量，进而确定每次改变重心位置后粘贴胶带的质量。

关于 Suzanne 纸飞机最佳重心位置与最佳投掷角度的确定，在本阶段主要分为两个部分：①求解 Suzanne 纸飞机飞行距离的最优化问题；②求解 Suzanne 纸飞机留空时间的最优化问题。本文考虑了两种 Suzanne 纸飞机模型：“T”型与“Y”型，因此关于纸飞机最佳重心位置与最佳投掷角度，我们建立了 4 个非线性动力方程组来求最优解。

另外，关于 Suzanne 纸飞机最长留空时间的研究。因为不同类型的纸飞机最长留空时间不同，故我们引入“Sky King”纸飞机模型（纸飞机留空时间最长的模型）与 Suzanne 纸飞机的最长留空时间进行对照，来简要分析纸飞机类型对留空时间的影响。

## 3 模型假设

- (1) 单张 70 g A4 纸的质量为  $4.3659g$ 。
- (2) 气动中心位于距机头  $\frac{1}{3}$  机身长度处。

- (3) 调整纸飞机重心位置时, 只改变中轴线上左右位置.
- (4) 投掷纸飞机人的身高为  $1.8m$ .
- (5) 纸飞机所受升力垂直于纸飞机机翼.

#### 4 符号说明

符号	说明
$p$	A4 纸的宽
$q$	A4 纸的长
$\alpha_0$	零升力迎角
$\alpha_{\text{临}}$	临界迎角
$\alpha$	迎角
$\beta$	纸飞机机头与飞机下表面中轴线的角度
$\theta$	纸飞机瞬时速度与水平方向的夹角
$\varphi$	纸飞机中轴线与水平面的夹角
$\gamma$	纸飞机机翼夹角
$S$	纸飞机机翼的表面积
$x$	纸飞机飞行距离
$g$	重力加速度
$\rho$	空气密度
$G$	总重力
$L$	升力
$L_{\text{升}}$	升力沿竖直方向的分力
$F_{\text{诱}}$	升力沿水平方向的分力
$F_{\text{直}}$	机翼受到的阻力与升力无关的部分
$F$	纸飞机受到的合阻力

$F_x$	$F_{\text{直}}$ 在水平方向的分力
$F_y$	$F_{\text{直}}$ 在竖直方向的分力
$C_{l\max}$	最大升力系数
$C_l^\alpha$	升力系数曲线斜率
$C_l$	升力系数
$C_{dd}$	直接阻力系数
$C_{di}$	诱导阻力系数
$I$	转动惯量
$M$	俯仰力矩
$v$	飞机的速度

## 5 模型建立与求解

### 5.0 纸飞机机翼面积与重心参数

#### 5.0.1 纸飞机机翼面积的确定

对于纸飞机而言，在飞行过程中会受到空气动力即升力和阻力。机翼可以让其中的一部分升力抵消重力，从而达到让纸飞机能够在一定时间内滞空的目的。另外，机翼对称性和重心位置同时用来平衡纸飞机。在飞行过程中需考虑机翼受力的两个方面：升力、阻力。



图 1：纸飞机的左视图

如图 1 所示，设 Suzanne 纸飞机机头与飞机下表面中轴线的夹角为  $\beta$ ，根据文献 [5]，我们知道当  $\beta$  的角度满足  $160^\circ \leq \beta \leq 165^\circ$  时，纸飞机会尽可能的飞得更远。为了求得纸飞机机翼的面积，我们得到纸飞机平面展开图，如图 5。



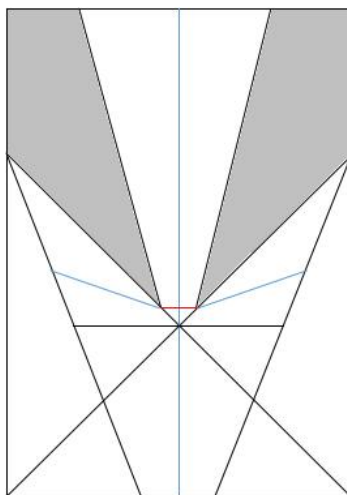


图 2: 纸飞机平面展开图

其中，灰色阴影部分是纸飞机机翼的面积。因为阴影部分为不规则图形，所以我们采用割补法，即用更易求得的图形面积作差间接得到不规则图形的面积。为了更清楚地描述面积计算过程，我们取上述平面图的左上部分进行运算，如图 3。由初等几何的知识很容易得到相关角度的度数以及相关线段的长度。

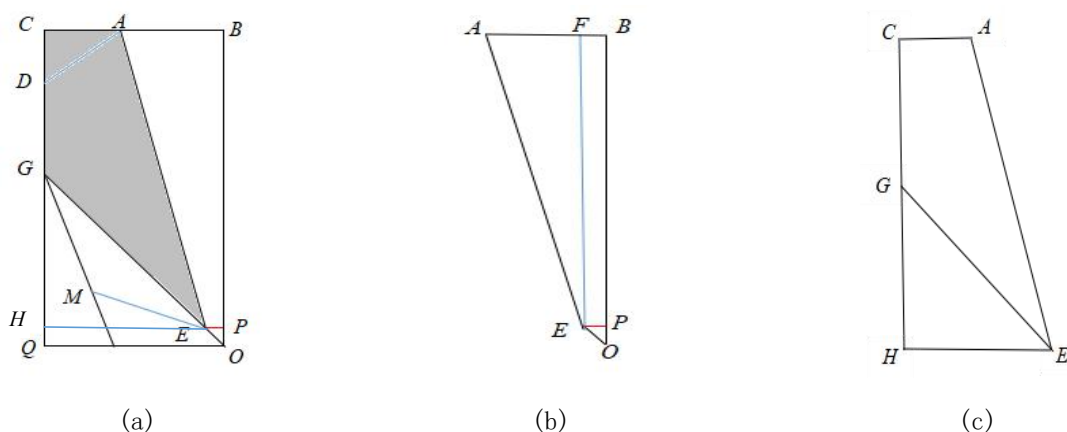


图 3: 纸飞机平面展子图

由纸飞机平面图形折叠时重合容易得到

$$\angle AEG = \angle GEM = 180^\circ - \beta. \quad (5.0.0)$$

由平角度数为  $180^\circ$ ，可得

$$\angle MEO = 180^\circ - \angle GEM \quad (5.0.1)$$

因为  $\triangle PEO$  为纸飞机机头展开图的一半，我们可以得到

$$\angle PEO = 45^\circ.$$

根据周角度数为  $360^\circ$ ，可得

$$\angle AEP = (\beta - 45)^\circ. \quad (5.0.2)$$

由图 3 可知

$$OP \perp EP \text{ 且 } OP \perp BC.$$

从而我们由四边形的内角和为  $360^\circ$ ，可得

$$\angle BAE = (225 - \beta)^\circ. \quad (5.0.3)$$

由翻折对应角相等，则

$$\angle DAE = \angle BAE = (225 - \beta)^\circ. \quad (5.0.4)$$

同时可以得到

$$\angle CAD = (2\beta - 270)^\circ, \angle ADC = (360 - 2\beta)^\circ \quad (5.0.5)$$

为了得到相关线段的长度，我们设  $EP = OP = t$ ， $AD = AB = x$ 。  
如图 3(a)，在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中，我们可以得到

$$\frac{\frac{p}{2} - x}{x} = \cos \angle CAD, CD = \sqrt{x^2 - (\frac{p}{2} - x)^2}. \quad (5.0.6)$$

如图 3(b)，可以得到

$$EF = q - \frac{p}{2} - t, AF = x - t. \quad (5.0.7)$$

在  $\text{Rt}\triangle AEF$  中，可以得到  $EF$  和  $AF$  之间的关系，即

$$\frac{EF}{AF} = \tan \angle BAE. \quad (5.0.8)$$

因为纸飞机为轴对称图形，所以我们只需求得左边机翼的面积便可得到整个纸飞机机翼的面积。由上面的分析，我们可以求得

$$\frac{S}{2} = S_{\text{梯形} CHEF} - S_{\triangle GHE} - S_{\triangle AEF}. \quad (5.0.9)$$

其中

$$S_{\text{梯形} CHEF} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{p}{2} - x + \frac{p}{2} - t) \cdot (q - \frac{p}{2} - t), \quad (5.0.10)$$

$$S_{\triangle GHE} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{p}{2} - t)^2, \quad (5.0.11)$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot (q - \frac{p}{2} - t) \cdot (x - t). \quad (5.0.12)$$

因此，我们联立式子 (5.0.0) ~ (5.0.12)，可以得到当  $\beta$  的角度为  $[160^\circ, 165^\circ]$  时。纸飞机机翼的表面积如表 1 所示

表 1: 纸飞机机翼表面积

$\beta$	160°	161°	162°	163°	164°	165°
$S$	75.0183	74.6785	74.2876	73.3177	73.3177	72.7182

从表 1 可以看出, 随着  $\beta$  的增大, 纸飞机机翼面积随之减小, 即角度  $\beta$  与纸飞机机翼面积  $S$  成反比.

### 5.0.2 未加胶带时纸飞机的重心

纸飞机的重心对纸飞机飞行距离有着不可忽略的影响. 由于纸飞机 (本文以 Suzanne 纸飞机为例) 没有动力装置, 因此在设计纸飞机的折法时需特别注意机头与机尾的平衡. 如果重心太靠前, 则纸飞机在到达最高点时可能会出现直坠现象, 从而大大减小纸飞机的飞行距离; 如果重心太靠后, 就容易造成机头上翘从而导致失速. 所以只有当飞机重心处于合适位置时, 才会使得飞机机翼会受到比较均匀的空气动力, 进而保证飞行的稳定性, 使纸飞机飞得更远. 因此, 确定未加胶带时纸飞机的重心成为我们首要解决的问题.

我们采用积分法来确定纸飞机的重心, 其主要步骤如下:

**Step 1:** 因为纸飞机纸张厚度不可忽略, 因此需建立  $Oxyz$  三维坐标系来确定纸飞机的重心, 又由于不同位置纸张折叠层数确定, 因此运算时可利用投影将其简化在二维平面;

**Step 2:** 根据 Suzanne 纸飞机折叠过程的倒数第二步, 得到三维立体图形, 将其向  $yOz$  面进行投影, 得到图 4. 当折叠部分面积的积分累积至总面积的  $1/2$  时, 即可求得重心在  $yOz$  面上的坐标;

**Step 3:** 将纸飞机立体图形向  $xOz$  投影, 得到图 6, 纸飞机投影在  $xOz$  平面为一线性图形, 我们可估算重心的大致位置.

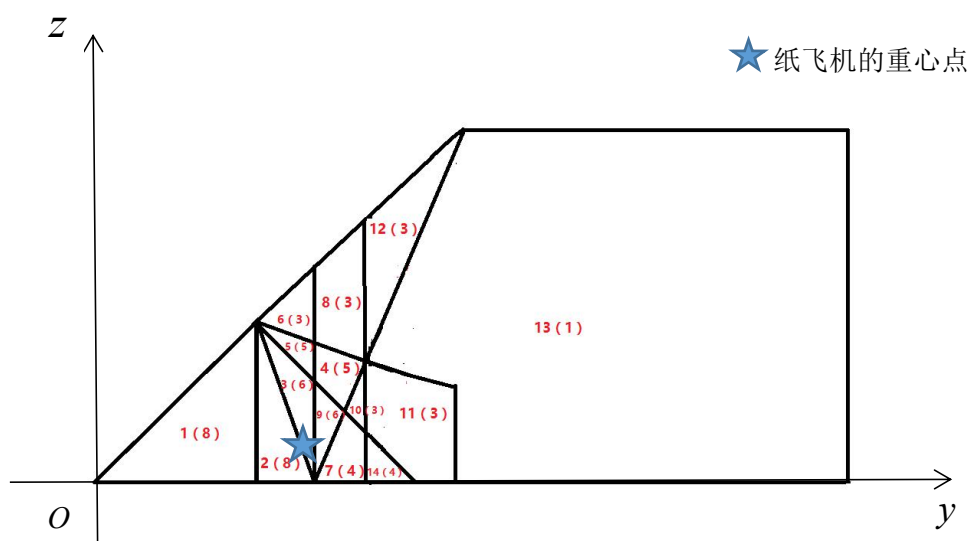


图 4: Step 1 在  $yOz$  面上的投影

通过利用 *MATLAB* R2016a 进行求解，可以得到纸飞机在  $yOz$  投影平面上的坐标，运行结果如下图所示，即坐标为(6.1821,1.532)。具体位置在图 4 已用 ★ 标明。

```
重心在6.15以外
-17.0158
6.1821
>>
```

图 5：纸飞机重心在  $yOz$  面上的坐标结果

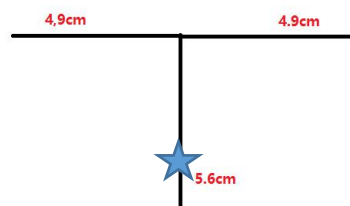


图 6：纸飞机在  $xOz$  面上的投影

$xOz$  投影面上的重心位于距焦点  $1/4$  处，具体位置在图 6 已用 ★ 标明。所以由上面方法可以确定未添加胶带时纸飞机重心的具体位置。

### 5.0.3 添加胶带时纸飞机的重心

为了使纸飞机飞行距离最远，调整纸飞机重心至最佳重心位置，这里我们使用胶带作为辅助工具。由于胶带质量不可忽略，故我们通过粘贴胶带改变纸飞机的质量，进而改变纸飞机的重心位置。因为纸飞机质量较小，因此最佳重心位置应接近 5.0.2 中求出的初始重心位置。因此我们将 5.0.2 中的重心位置分别向左(机头方向)或右(机尾方向)移动 1mm、2mm、3mm、4mm，共 9 个重心位置点。为了叙述方便，我们从左到右依次记重心位置点为 1-9，其中 5 号重心位置点为我们的初始重心点。同样使用积分法，我们考虑半张 A4 纸重心平移后左右面积关系。通过计算可以得到每个重心位置所对应的左右部分面积关系，具体见表 2。

表 2：改变重心位置后左右部分面积关系

重心位置点	重心坐标	重心左面积	重心右面积	左面积改变量	右面积改变量
1	(5.78,1.532)	150.279	161.481	-5.646	+5.646
2	(5.88,1.532)	151.530	160.320	-4.395	+4.395
3	(5.98,1.532)	152.906	158.944	-3.019	+3.019
4	(6.08,1.532)	154.388	157.462	-1.537	+1.537
5	(6.18,1.532)	155.925	155.925	0	0
6	(6.28,1.532)	157.797	154.053	+1.872	-1.872
7	(6.38,1.532)	159.692	155.902	+3.767	-3.767
8	(6.48,1.532)	161.628	157.756	+5.703	-5.703
9	(6.58,1.532)	163.582	159.674	+7.657	-7.657

注：表格中的重心坐标为投影在  $yoz$  上的坐标，且表中对于的所有面积单位均为  $cm^2$ ，长度单位均为  $cm$ 。

通过计算，我们可得到改变重心作用点时需要向左或向右粘贴胶带的质量，见表 3。

表 3：不同重心位置左(右)粘贴胶带的质量

重心位置点	左边粘胶带质量(g)	右边粘胶带质量(g)
1	0.0350	0
2	0.0385	0
3	0.0415	0
4	0.0430	0
5	0	0
6	0	0.0524
7	0	0.0531
8	0	0.0542
9	0	0.0547

#### 5.0.4 表征纸飞机升力的几个参数及阻力概念

**俯仰力矩**(见参考文献[12])

俯仰力矩是指作用于飞机的外力产生的绕机体  $oy$  轴的力矩。包括气动力和发动机推力向量因不通过飞机质心而产生的力矩，亦称纵向力矩。由于 Suzanne 纸飞机无动力装置，故俯仰力矩只需考虑气动力向量因不通过飞机质心而产生的力矩。

**气动中心**(见参考文献[3])

在一定的雷诺数下，不论迎角是多少，每次都将会力系合成到一个特殊的点，使得这一点的俯仰力矩都一样大，那么这个点就叫做气动中心点(称作焦点)。

**零升力迎角  $\alpha_0$** (见参考文献[6])

升力系数为 0 的夹角，记为  $\alpha_0$ 。不同翼型的零升力迎角大小不同，主要随翼型的相对弯度变化。相对弯度大， $\alpha_0$  的绝对值越大。其中，对称翼型的纸飞机  $\alpha_0 = 0$ 。

**临界迎角  $\alpha_{\text{临}}$ 、最大升力系数  $C_{l\text{max}}$** (见参考文献[6])

在机翼的  $C_l - \alpha$  曲线上，当升力系数从 0 增加时，出现第一个局部最大值，称为最大升力系数。

最大升力系数所对应的迎角，称为临界迎角。

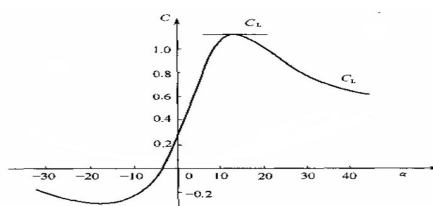


图 7：  $C_l - \alpha$  曲线图

**升力系数曲线斜率  $C_l^\alpha$**  (见参考文献[6])

表示改变单位迎角时, 升力系数  $C_{l_{\max}}$  的相应改变量. 在中小迎角范围内, 由于机翼上表面的气流分离不显著, 因此  $C_l^\alpha$  与  $\alpha$  成线性关系. 由于本文考虑的迎角  $\alpha \in [0^\circ, 20^\circ]$ , 因此假定本文中的升力曲线斜率  $C_l^\alpha$  为常数.

**压差阻力** (见参考文献[8])

相对气流流过机翼时, 机翼前缘的气流受阻, 流速减慢, 压力增大; 而机翼后缘气流分离, 形成涡流区, 压力减小. 这样, 机翼前后产生压力差形成阻力. 这个阻力称为压差阻力.

**摩擦阻力** (见参考文献[8])

在飞行中, 空气贴着飞机表面流过, 由于空气具有粘性, 与飞机表面发生摩擦, 产生了阻止飞机前进的摩擦阻力.

**诱导阻力** (见参考文献[8])

伴随升力的产生而产生的阻力称为诱导阻力.

## 5.1 基于 Suzanne 纸飞机机翼为“T”型（夹角为平角）的模型

因为此时竖直方向机翼的投影面积最大, 故产生的升力也可能最大. 接下来我们对此情况进行讨论.

### 5.1.1 基于纸飞机飞行距离最远的最佳重心位置的研究

在投掷纸飞机的过程中, 我们的推力做功转化为纸飞机的初动能, 使纸飞机获得初始攻角  $\alpha_0$ 、初始速度  $v_0$  及  $v_0$  与水平方向的初始夹角  $\theta_0$ . 由于纸飞机运动过程中不确定因素太多, 我们将其运动过程离散化. 假设飞机现在处于第  $i$  个位置点, 速度为  $v_i$ . 经过  $\Delta t$  时间做匀变速直线运动到第  $i+1$  位置点 (如图 8), 这时纸飞机速度为  $v_{i+1}$ . 因此满足

$$\begin{cases} v_{(i+1)x} = v_{ix} + a_{ix} \cdot \Delta t \\ v_{(i+1)y} = v_{iy} + a_{iy} \cdot \Delta t \end{cases} \quad (5.1.1)$$

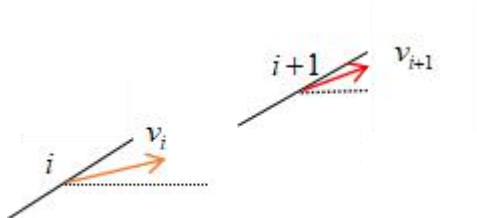


图 8: 纸飞机运动过程的分解图

其中  $v_{ix}$ 、 $v_{(i+1)x}$ 、 $a_{ix}$ 、 $v_{iy}$ 、 $v_{(i+1)y}$ 、 $a_{iy}$  分别是  $v_i$ 、 $v_{i+1}$ 、 $a_{iy}$  沿水平和竖直方向分解的分量. 初速度  $v_0$  大小固定, 速度与水平方向夹角记为  $\theta$ , 机身与水平方向的夹角记为  $\varphi$ . 根据文献[10], 我们可以得到  $\alpha$ 、 $\theta$  和  $\varphi$  之间的关系

$$\alpha = \varphi - \theta. \quad (5.1.2)$$

根据  $\theta$  的定义, 我们可以得到对于纸飞机的每个瞬时运动点,  $\theta$  满足

$$\theta = \arctg \frac{v_y}{v_x}. \quad (5.1.3)$$

其中  $v_x$  和  $v_y$  满足

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (5.1.4)$$

对纸飞机运动过程进行分析, 可知飞机飞行过程中  $L$  作用点不在重心处 (如图 9), 故产生俯仰力矩. 本文考虑的俯仰力矩主要是指升力作用于飞机产生的绕机体轴  $oy$  的力矩. 其中  $L$  作用点  $O'$  距重心点  $O$  的距离为力矩作用的径向矢量. 由于在本文中  $\alpha = \varphi - \theta$ ,  $\varphi$ 、 $\theta$  的大小不确定, 因此  $\alpha$  可能为正、可能为负. 具体见图 9.



图 9: 纸飞机运动过程受力分析图

图 9 中考虑的俯仰力矩如下

$$\begin{aligned} M &= \vec{O'O} \times \vec{L} = \left| \vec{O'O} \right| \cdot \left| \vec{L} \right| \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\ &= (l - r_o) \cdot L \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

其中  $r_o$  表示重心距机头的直线距离,  $l$  表示气动中心距机头的距离. 转动惯量  $I$  满足

$$I = mr^2 = \frac{1}{2} m_{\text{飞机}} \cdot (l - r_o)^2. \quad (5.1.6)$$

因此

$$\ddot{\varphi} = \frac{M}{I} = \frac{F_{\text{升}}}{\frac{1}{2}m_{\text{飞机}} \cdot (l - r_0)}. \quad (5.1.7)$$

其中  $\ddot{\varphi}$  为  $\varphi$  的角加速度.

尽管升力作用点和重力作用点不一样,但在计算水平与竖直方向纸飞机受到的合力时,可假定力的作用点相同,把正交分解的力矢量相加.受力分析如图 10 所示.

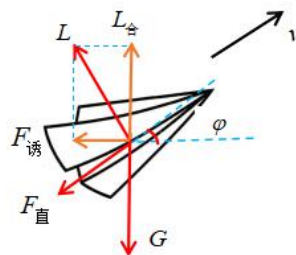


图 10: 纸飞机运动过程受力分析图

将  $L$  正交分解为  $F_{\text{诱}}$ 、 $L_{\text{升}}$ , 即

$$L_{\text{升}} = L \cos \varphi, \quad F_{\text{诱}} = L \sin \varphi. \quad (5.1.8)$$

其中,根据文献[6],我们可以得到

$$L = \frac{1}{2} \rho C_l \cdot S \cdot v^2. \quad (5.1.9)$$

根据 5.0.4 中的预备知识可知

$$C_l = C_l^\alpha \cdot (\alpha - \alpha_0) = C_l^\alpha \cdot \alpha. \quad (5.1.10)$$

图 10 中的  $F_{\text{直}}$  表示机翼受到的阻力与升力无关的部分,包括压差阻力和摩擦阻力.

其中  $F_{\text{直}}$  所对应的阻力系数记为  $Cdd$ ,  $F_{\text{诱}}$  所对应的阻力系数记为  $Cdi$ . 我们将飞机受到水平方向合阻力记为  $F$ , 有

$$F = F_{\text{诱}} + F_x, \quad (5.1.11)$$

其中

$$F_x = F_{\text{直}} \cdot \cos \varphi, \quad F_y = F_{\text{直}} \cdot \sin \varphi. \quad (5.1.12)$$

根据文献[9],可知

$$F = \frac{1}{2} \rho (Cdd + Cdi) \cdot S v^2, \quad (5.1.13)$$

在标准条件下,空气密度  $\rho$  的值为  $1.22 \text{ kg/m}^3$ .

则我们可以得到



$$F_x = \frac{1}{2} \rho \cdot Cdd \cdot S \cdot v^2, \quad (5.1.14)$$

$$F_{\text{诱}} = \frac{1}{2} \rho \cdot Cdi \cdot S \cdot v^2. \quad (5.1.15)$$

由图 10 可知, 纸飞机在水平方向受方向向右的  $F_x$  和  $F_{\text{诱}}$ , 水平合力方向向右; 在竖直方向受到方向向下的  $G$ 、 $F_y$  与方向向上  $L_{\text{升}}$ , 竖直合力方向向下.

$$F_{\text{水平}} = F_{\text{诱}} + F_x, \quad F_{\text{竖直}} = G + F_y - L_{\text{升}} \quad (5.1.16)$$

由牛顿第二定律可知

$$F_{\text{水平}} = ma_x, \quad F_{\text{竖直}} = ma_y. \quad (5.1.17)$$

其中  $a_x$ 、 $a_y$  表示的是纸飞机水平方向的加速度.

基于以上分析, 我们建立以纸飞机飞行距离最远为目标, 并且满足下列约束条件的非线性优化模型, 如下:

(模型 I)  $\max x$

$$s.t. \quad \begin{cases} \vec{M} = \vec{O} \times \vec{L} \\ I = \frac{1}{2} m_{\text{飞机}} \cdot (l - r_o)^2 \\ \ddot{\phi} = M/I \\ F_x = \frac{1}{2} \rho \cdot Cdd \cdot S \cdot v^2 \\ F_{\text{诱}} = \frac{1}{2} \rho \cdot Cdi \cdot S \cdot v^2 \\ (5.1.1) \sim (5.1.4) \\ (5.1.8) \sim (5.1.13) \\ (5.1.16) \sim (5.1.17) \end{cases}$$

基于模型 I, 将纸飞机飞行速度进行正交分解, 分别记为  $v_x$  和  $v_y$ . 根据受力分析, 可知纸飞机在上升飞行过程中, 水平方向做初速度为  $v_{0x}$ , 加速度为  $a_x$  (随夹角  $\phi$  变化) 的减速运动; 在竖直方向做初速度为  $v_{0y}$ , 加速度为  $a_y$  (随夹角  $\phi$  变化) 的减速运动. 所以纸飞机在飞行过程中可能会出现两种情况.

**Case 1**  $v_x$  先减为零. 那么纸飞机先做向上的抛体运动, 受力分析见图 10.

$v_x = 0$  时, 纸飞机接着做一个竖直向下的落体运动, 受力分析如图 11(a).

由于本文中的  $\theta \in [0^\circ, 20^\circ]$ , 因此在上升运动过程中,  $v_x > v_y$  恒成立. 故上述情

况不会发生.

**Case 2**  $v_y$  先减为零. 那么纸飞机先做向上的抛体运动, 受力分析见图 10. 当  $v_y = 0$  时, 此时纸飞机受力分析图见 11 (b). 紧接着做向下的抛体运动, 受力分析见图 11 (c). 且当  $v_y = 0$  时, 纸飞机距地面最高.

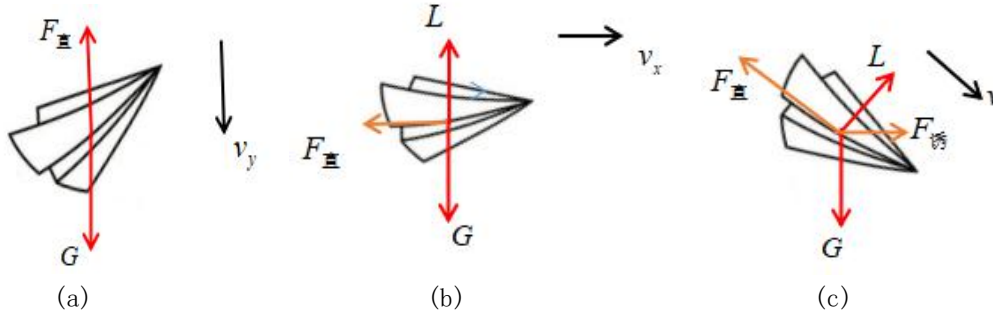


图 11: 纸飞机临界状态受力分析图

易知, 本文中只出现 Case 2 情况. 由前面的受力分析可知, 在纸飞机上升运动过程中

$$F_{\text{水平}} = F_{\text{诱}} + F_x.$$

据 (5.1.6) 和 (5.1.9) 可得

$$a_x = \frac{0.5\rho \cdot (C_l \sin \theta + Cdd) \cdot S \cdot v^2}{m}$$

纸飞机运动过程中, 每个状态点水平方向上的加速度  $a_x$  与此时的瞬时速度  $v$  有关、 $v$  与水平方向的夹角  $\theta$  有关, 又因为在每个状态点纸飞机的瞬时速度  $v$  与水平夹角  $\theta$  都是变化的. 所以在实际运动轨迹光滑的状态下, 我们很难求出每个状态点的瞬时加速度  $a_x$ , 因此为了控制变量求出  $a_x$ , 进而确定纸飞机的运动轨迹变化. 我们进行下面合理的假设: 将连续的运动状态离散化, 即对于给定的  $\Delta t$  内, 纸飞机所受到的升力与阻力保持不变, 即纸飞机在  $\Delta t$  内做匀变速直线运动. 给定初始速度  $v_0$ , 初始投掷角度  $\varphi_0$ , 初始迎角  $\alpha_0$  以及初始受力情况, 我们就可推出飞机运动  $\Delta t$  时间后的位置点, 可以分别求出此时的水平速度  $v_{1x}$  和竖直速度  $v_{1y}$ , 由  $v_{1y}$  与  $v_{1x}$  的比值确定此时的速度与水平方向的夹角  $\theta_1$ . 根据初始条件可以求出初始俯仰力矩  $M_0$ , 进而求出初始点处  $\varphi$  角的初始角加速度  $\ddot{\varphi}_0$ , 根据  $\varphi_1 = \varphi_0 + \ddot{\varphi}_0 \cdot \Delta t$  可求出  $\varphi_1$ , 根据式 (5.1.2) 可以求出  $\alpha_1$ , 进而得到此时纸飞机所受到的升力  $L_1$ , 在该点处据  $\varphi_1$  对  $L_1$  进行正交分解得到  $a_{1x}$ 、 $a_{1y}$ , 以此类推得到  $v_{2x}$ 、 $v_{2y}$ 、 $\theta_2$  以及  $M_1 \dots \dots$  因此我们可以得到飞机运动过程中若干个状态点. 进而解出纸飞机飞行的最远距离. 在下面的实验模拟中, 我们假设  $\Delta t = 0.5s$ .

在对模型 I 求解过程中，本文采用微积分思想、利用迭代方法进行计算，具体计算步骤如下：

**Step 1** 规定初速度大小、初始方向夹角、初始高度、定义加速度、时间、积分区间总距离等变量。将迎角  $\alpha$ 、投掷角  $\theta_0$ 、重心位置  $r_0$  作为变量进行三层嵌套循环，将变量微分为为一个区间，在  $\Delta t$  内近似的认为速度的方向不变，做匀变速直线运动，根据力与加速度的公式对  $\Delta t$  内的速度曲线进行积分，即可得到  $\Delta t$  内纸飞机的运动距离，对  $\Delta t$  进行求和，可得滞空时间  $t$ ；

**Step 2** 根据 Case 2，求解分析纸飞机上升区间运动：通过构建一个固定次数的三层 for 循环语句对投掷角  $\theta_0$ ，迎角  $\alpha$  和重心位置  $r_0$  对于速度  $v$ ，加速度  $a$  等迭代过程变量进行控制，当循环完成，且其中嵌套的 if 函数达到条件，即竖直速度方向先减为 0 时跳出循环；

**Step 3** 求解分析纸飞机俯冲运动：通过构建 while 循环函数对向下抛体运动进行迭代分析，因为水平方向与竖直方向上运动时间相同，通过前半段末尾的最大  $y$  值运算得到俯冲过程的运动时间，进而控制  $x$  轴方向上的运动时间，求解运动轨迹与水平距离；

**Step 4** 将速度  $v$ 、加速度  $a$ 、循环变量  $i$ 、时间区间  $\Delta t$  的累加值、距离累加值和速度角度  $\theta$ 、投掷角  $\theta_0$ 、重心位置  $r_0$  等迭代变量进行更新，循环内对  $x(i)$  进行累加求和得到变加速度运动下的水平运动距离  $x$  及滞空时间  $t$ ，并用更新后的数据循环 step 2-4 步直至完成固定的循环迭代次数；

**Step 5** 通过比较可得题目要求特定投掷角下的最远距离或最长滞空时间，并使用 cftool 工具箱分别对  $\theta-x$ 、 $\theta-T$  以及  $x-y$  三个点集中的离散点进行回归分析模拟，并拟合出残差与标准差最小的回归方程以及图像。

基于模型 I，我们利用 *MATLAB* 2016a 进行求解。可以得到重心点与最远距离  $x$  之间的关系，如表 4

表 4：重心点与最远距离  $x$  的关系

重心点位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x/m$	77.37	78.23	78.78	78.65	77.29	75.67	73.78	70.17	67.58

进一步对重心点距机头的距离  $r_0$  和纸飞机最远飞行距离  $x$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 12) 和拟合回归曲线 (如图 13)

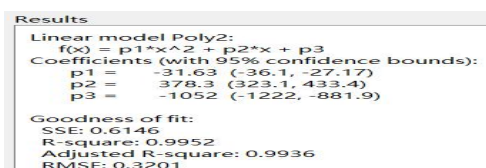


图 12：  $r_0 - x$  拟合回归方程

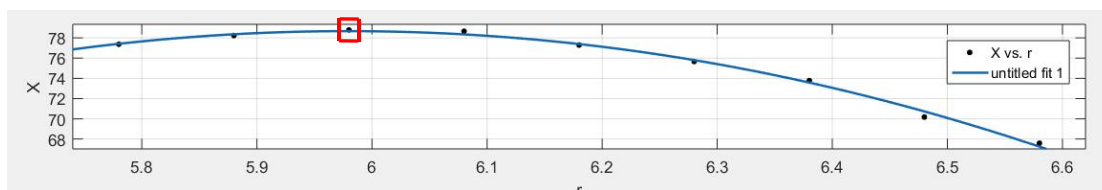


图 13:  $r_o - x$  拟合回归方程

因此，在模型 I 的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最远距离  $x$  为  $78.78m$ ，最佳重心点位置为 3，即重心点离机头的距离  $r_o$  为  $5.98cm$ 。

下面我们针对最佳重心位置点讨论其最佳投掷角度  $\theta_0$ 。查阅相关资料发现，当  $\theta \in [0^\circ, 20^\circ]$  时，纸飞机的飞行距离较远，因此通过 *MATLAB* 2016a 计算，我们可以得到投掷角  $\theta_0$  和纸飞机飞行距离之间的关系，具体见表 5。

表 5: 飞行距离  $x$  与投掷角  $\theta_0$  的关系

$\theta_0$	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
$x/m$	68.14	71.30	73.67	75.87	77.36	78.28	78.73	78.78	78.17	77.09
$\theta_0$	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
$x/m$	75.50	73.40	71.37	68.06	67.65	62.46	57.07	56.44	54.23	51.88

进一步对距离  $x$  和投掷角  $\theta$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 14) 和拟合回归曲线 (如图 15)。

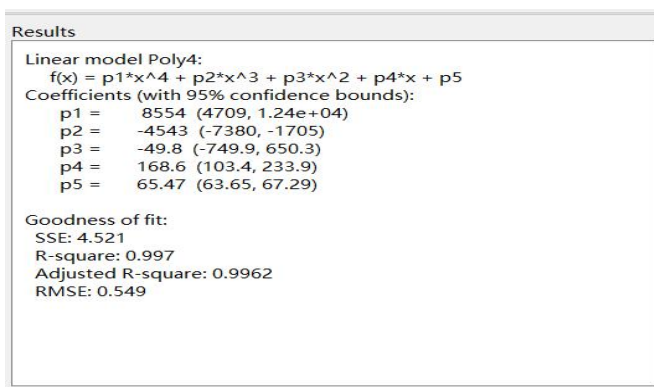


图 14:  $\theta_0 - x$  拟合回归方程

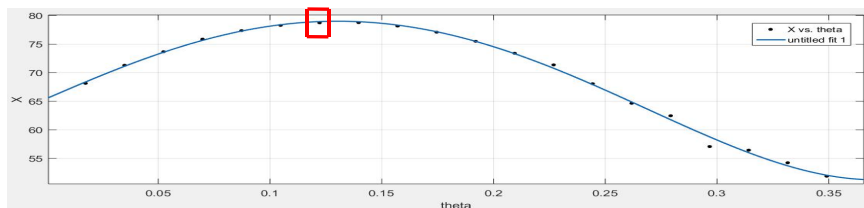


图 15:  $\theta_0 - x$  拟合回归曲线

因此，在模型 I 的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最远距离  $x$  为  $78.78m$ ，最佳投掷角  $\theta_0$  为  $8^\circ$ 。

最佳运动轨迹拟合回归方程与拟合图如下：

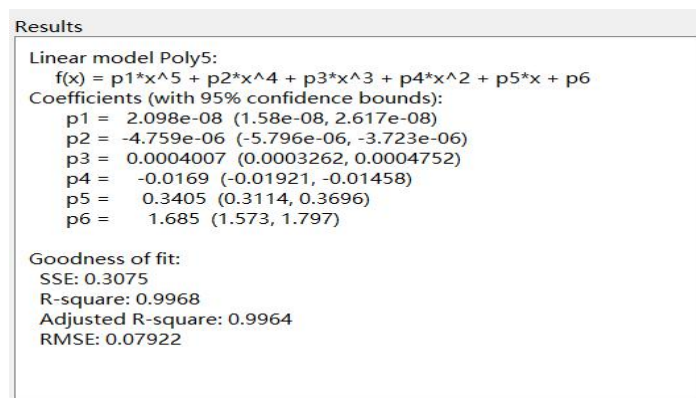


图 16: 最佳运动轨迹拟合回归方程

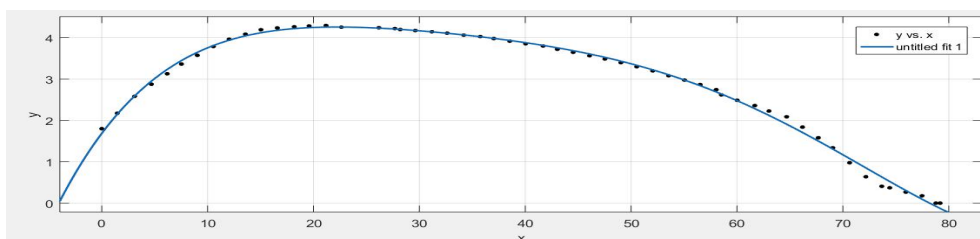


图 17: 最佳运动轨迹拟合回归曲线

**注：**针对模型 I，我们也可以使用 Simulink 仿真模型来确定出使纸飞机飞行距离最远的最佳重心位置以及最佳投掷角度。由于所得结果与上述方法一样，因此我们在这儿不再重复叙述。具体仿真见图 18。

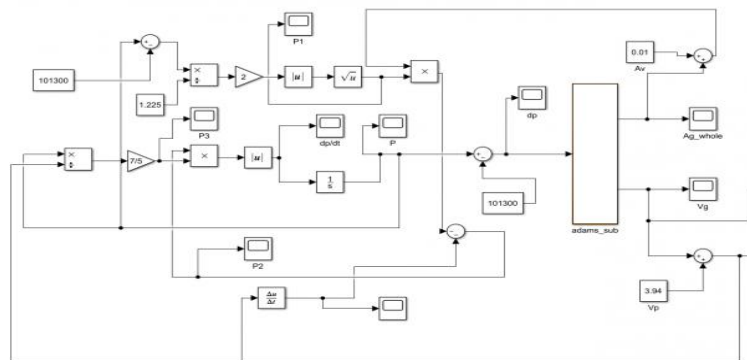


图 18: Simulink 仿真运动求解过程图

### 5.1.2 基于纸飞机留空时间最长的最佳重心位置的研究

查阅相关资料我们可以知道，想要让纸飞机在空中停留更长的时间，一方面在于使纸飞机飞得尽可能高，另一方面是希望纸飞机具有良好的滑翔性能。由于我们这篇文章考虑的是 Suzanne 纸飞机，因此纸飞机的滑翔性能已经固定，故影响纸飞机的留空时间取决于投掷角度  $\theta_0$ 。查阅相关文献可知，当投掷角  $\theta_0 \in [30^\circ, 59^\circ]$  时，纸飞机的留空时间较长。

基于以上分析，我们建立以纸飞机留空时间  $t$  最长为目标，并且满足下列约束条件的非线性优化模型，如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{(模型 II)} \quad \max \sum \Delta t \\
 & s.t. \quad \begin{cases} v_{(i+1)x} = v_{ix} + a_{ix} \cdot \Delta t \\ v_{(i+1)y} = v_{iy} + a_{iy} \cdot \Delta t \\ \theta = \arctg \frac{v_y}{v_x} \\ \alpha = \varphi - \theta \\ M = (l - r_o) \cdot L \\ I = \frac{1}{2} m_{\text{飞机}} \cdot (l - r)^2 \\ \ddot{\phi} = M / I \\ (5.1.8) \sim (5.1.17) \end{cases}
 \end{aligned}$$

基于模型 II，我们利用 MATLAB 2016a 进行求解。可以得到重心点与最长留空时间  $t$  之间的关系，如表 6

表 6：重心点位置与最长留空时间  $t$  的关系

重心点位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t/s$	26.48	27.00	26.53	25.61	24.04	22.18	19.74	16.64	13.28

进一步对重心点距机头的距离  $r_o$  和纸飞机最长留空时间  $t$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 19) 和拟合回归曲线 (如图 20)

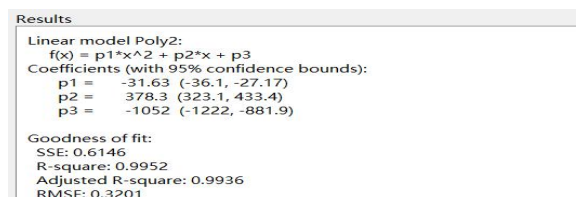


图 19:  $r_o - t$  拟合回归方程

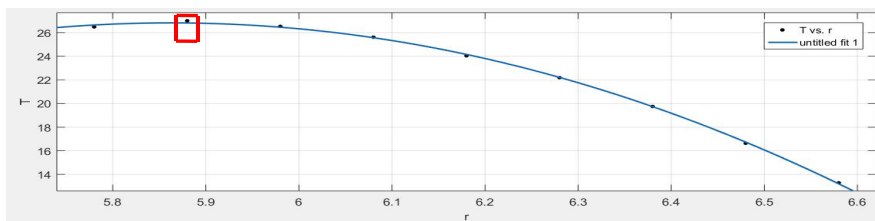


图 20:  $r_0 - t$  拟合回归方程

因此，在模型 II 的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最长留空时间  $t$  为  $27s$ ，最佳重心点位置为 2，即重心点离机头的距离  $r_0$  为  $5.88cm$ 。

下面我们针对最佳重心位置点讨论其最佳投掷角度  $\theta_0$ 。查阅相关资料发现，当  $\theta_0 \in [30^\circ, 59^\circ]$  时，纸飞机的飞行时间较长，因此通过 *MATLAB* 2016a 计算，我们可以得到投掷角  $\theta$  和纸飞机留空时间之间的关系，具体见表 7。

表 7: 留空时间  $x$  与投掷角  $\theta_0$  的关系

$\theta_0$	$30^\circ$	$31^\circ$	$32^\circ$	$33^\circ$	$34^\circ$	$35^\circ$	$36^\circ$	$37^\circ$	$38^\circ$	$39^\circ$
$t/s$	7.20	7.55	7.70	7.84	8.99	9.03	10.07	11.10	12.13	12.96
$\theta_0$	$40^\circ$	$41^\circ$	$42^\circ$	$43^\circ$	$44^\circ$	$45^\circ$	$46^\circ$	$47^\circ$	$48^\circ$	$49^\circ$
$t/s$	16.07	18.77	21.17	23.05	24.63	25.81	26.62	27	26.64	25.81
$\theta_0$	$50^\circ$	$51^\circ$	$52^\circ$	$53^\circ$	$54^\circ$	$55^\circ$	$56^\circ$	$57^\circ$	$58^\circ$	$59^\circ$
$t/s$	24.68	23.06	20.93	18.50	15.87	12.64	11.81	10.77	9.74	8.70

进一步对留空时间  $t$  和投掷角  $\theta_0$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 21) 和拟合回归曲线 (如图 22)。

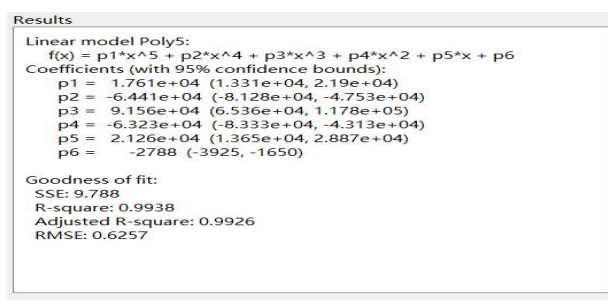


图 21:  $\theta_0 - t$  拟合回归方程

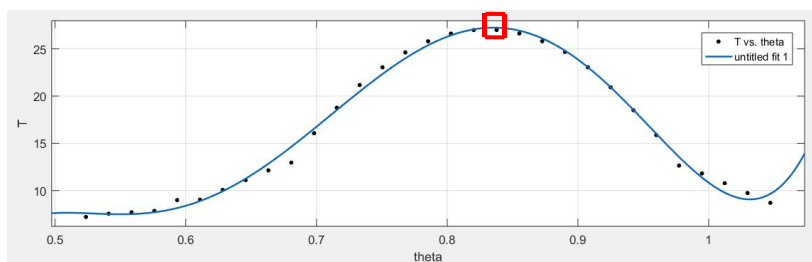


图 22:  $\theta_0 - t$  拟合回归曲线

因此，在模型 II 的假设下我们可以得到此时纸飞机留空最长时间  $t$  为  $27s$ ，最佳投掷角  $\theta_0$  为  $47^\circ$ 。

最佳运动轨迹拟合回归方程与拟合图如下：

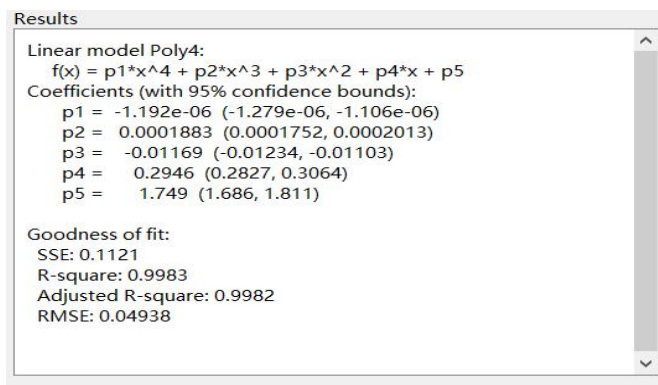


图 23: 最佳运动轨迹拟合回归方程

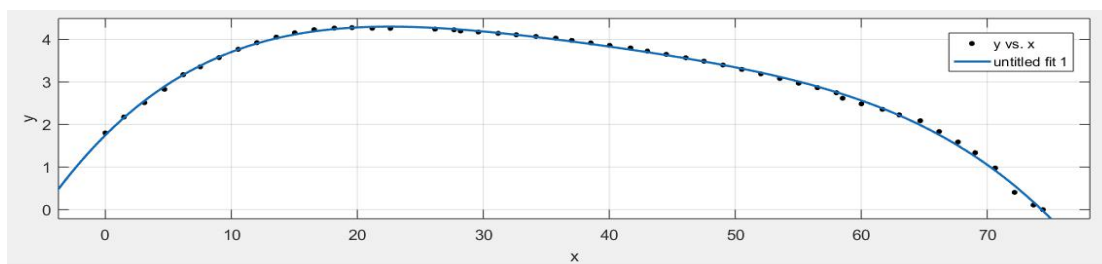


图 24: 最佳运动轨迹拟合回归曲线

## 5.2 基于纸飞机机翼为“Y”型（夹角为钝角）的模型

由于在 Suzanne 模型里面，机翼的夹角不是  $180^\circ$ ，故我们进行下面的优化假设。

### 5.2.1 基于纸飞机飞行距离最远的最佳重心位置的研究

假设纸飞机机翼的夹角为  $\gamma$ 。将此纸飞机模型向  $xOz$  平面做投影，并进行受力分析得到图 25。



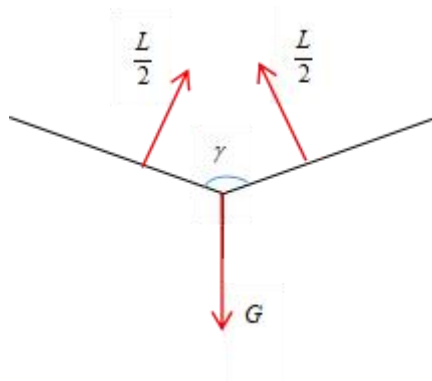


图 25: 飞机受力分析图

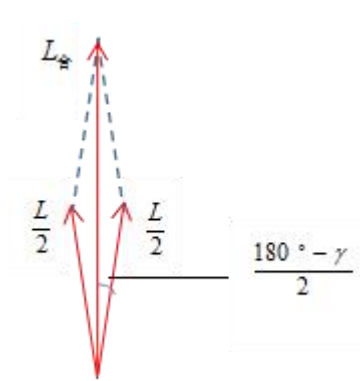


图 26: 升力合成图

假设两种飞机模型的外界因素相同. 易知此时纸飞机两翼所受到的升力均为  $\frac{L}{2}$ , 但 Y 型纸飞机中飞机所受的合升力为两翼升力的矢量和, 力的合成如图 26. 由图 26 可知, Y 型纸飞机所受到的合升力为  $L_{\text{合}}$ , 即

$$L_{\text{合}} = L \cdot \cos \frac{180^\circ - \gamma}{2} \quad (5.2.1)$$

经多次计算机模拟实验得到  $\gamma$  的最佳取值为  $169^\circ$ .

为避免重复论述, 可知两种飞机模型的运动过程中只有竖直向上的升力不同, 其他受力情况均相同. 故我们只需要将 (5.1.1)~(5.1.17) 中的  $L$  全部换成  $L_{\text{合}}$ , 记作 (5.2.2)~(5.2.18)

由上述讨论, 我们建立以纸飞机飞行距离  $x$  最远为目标, 并且满足下列约束条件的非线性优化模型, 如下:

(模型 III)  $\max x$

$$s.t. \begin{cases} L_{\text{合}} = L \cdot \cos \frac{180^\circ - \gamma}{2} \\ (5.2.2) \sim (5.2.18) \end{cases}$$

基于模型 III, 我们利用 *MATLAB* 2016a 进行求解. 可以得到重心点位置与最远距离  $x$  之间的关系, 如表 7

表 7: 重心点与最远距离  $x$  的关系

重心点位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x/m$	73.37	74.30	74.75	74.67	74.22	73.68	72.71	69.17	65.58

进一步对重心点距机头的距离  $r_0$  和纸飞机最远飞行距离  $x$  的散点图进行拟合, 得到拟合回归方程 (如图 27) 和拟合回归曲线 (如图 28)

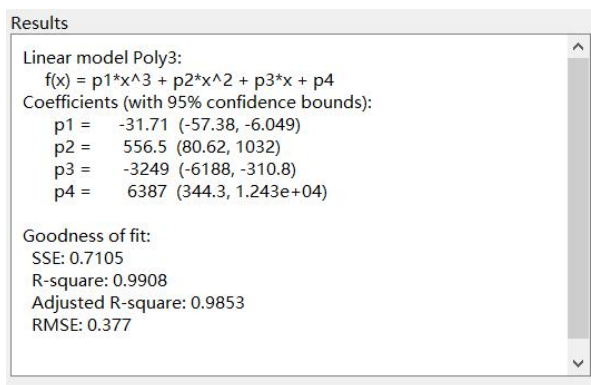


图 27:  $r_o - x$  拟合回归方程

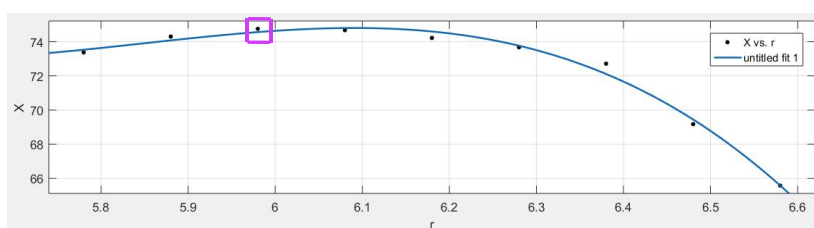


图 28:  $r_o - x$  拟合回归方程

因此，在模型Ⅲ的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最远距离  $x$  为  $74.75m$ ，最佳重心点位置为 3，即重心点离机头的距离  $r_o$  为  $5.98cm$ 。

下面我们针对最佳重心位置点讨论其最佳投掷角度  $\theta_0$ 。由本文 5.1 中的模型 I 可知，当  $\theta_0 \in [0^\circ, 20^\circ]$  时，纸飞机的飞行距离较远，因此通过 *MATLAB* 2016a 计算，我们可以得到投掷角  $\theta_0$  和纸飞机飞行距离之间的关系，具体见表 8。

表 8: 飞行距离  $x$  与投掷角  $\theta_0$  的关系

$\theta_0$	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
$x/m$	65.14	69.27	71.63	73.83	73.36	74.24	74.75	74.57	74.09	73.05
$\theta_0$	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°
$x/m$	71.49	69.48	67.34	64.10	60.63	59.40	58.07	57.49	56.23	55.90

进一步对距离  $x$  和投掷角  $\theta_0$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 29)

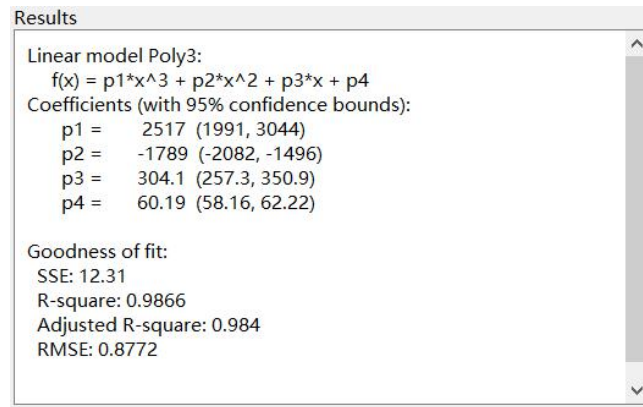


图 29:  $\theta_0 - x$  拟合回归方程

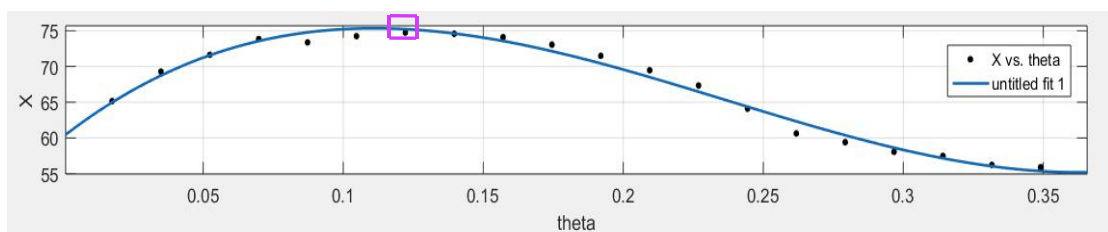


图 30:  $\theta_0 - x$  拟合回归曲线

因此，在模型III的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最远距离  $x$  为  $74.75m$ ，最佳投掷角  $\theta_0$  为  $7^\circ$ 。

最佳运动轨迹拟合回归方程与拟合图如下：

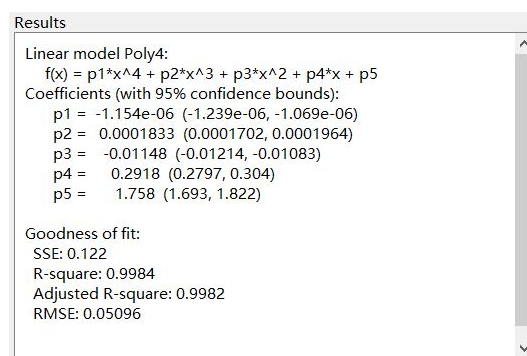


图 31: 最佳运动轨迹拟合回归方程

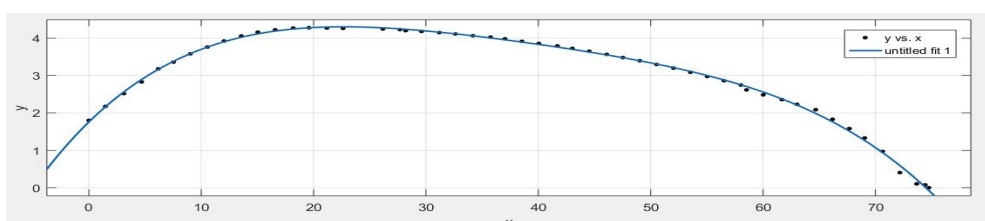


图 32: 最佳运动轨迹拟合回归曲线

### 5.2.2 基于纸飞机留空时间最长的最佳重心位置的研究

基于以上分析，我们建立以纸飞机留空时间 $t$ 最长为目标，并且满足下列约束条件的非线性优化模型，如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{(模型IV)} \quad \max \sum \Delta t \\
 & s.t. \quad \begin{cases} L_{\text{合}} = L \cdot \cos \frac{180^\circ - \gamma}{2} \\ (5.2.2) \sim (5.2.18) \end{cases}
 \end{aligned}$$

基于模型IV，我们利用 *MATLAB* 2016a 进行求解. 可以得到重心点与最长留空时间 $t$ 之间的关系, 如表 9

表 9: 重心点位置与最长留空时间 $t$ 的关系

重心点位置	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t/s$	26.08	26.40	25.90	25.23	24.38	22.06	19.77	15.03	10.28

进一步对重心点距机头的距离 $r_o$ 和纸飞机最长留空时间 $t$ 的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 33) 和拟合回归曲线 (如图 34)

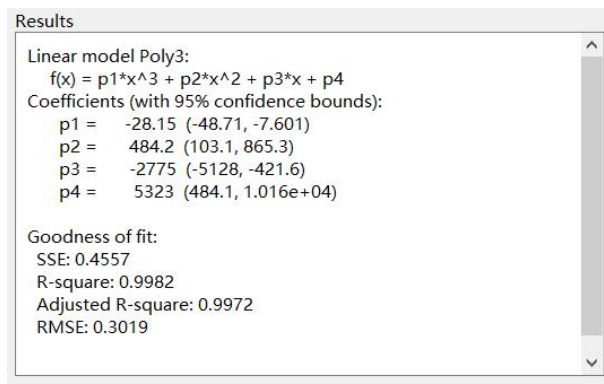


图 33:  $r_o - t$  拟合回归方程

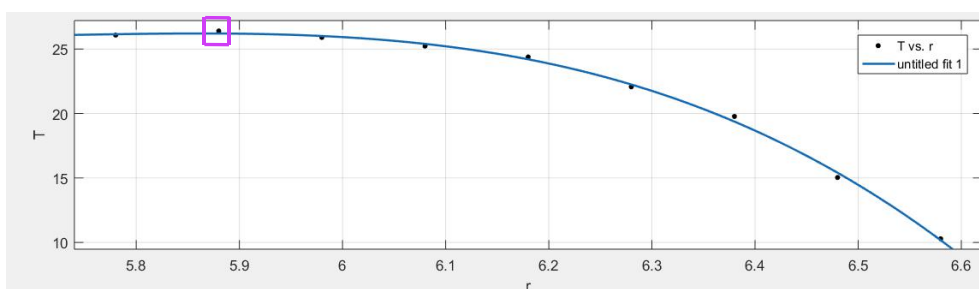


图 34:  $r_o - t$  拟合回归曲线

因此，在模型IV的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的最长留空时间 $t$ 为 $26.40s$ ，最佳重心点位置为2，即重心点离机头的距离 $r_0$ 为 $5.88cm$ 。

下面我们针对最佳重心位置点讨论其最佳投掷角度 $\theta_0$ 。由本文 5.1 中的模型 II 可知，当 $\theta_0 \in [30^\circ, 59^\circ]$ 时，纸飞机的飞行时间较长，因此通过 *MATLAB* 2016a 计算，我们可以得到投掷角 $\theta_0$ 和纸飞机留空时间之间的关系，具体见表 10。

表 10：留空时间 $t$ 与投掷角 $\theta_0$ 的关系

$\theta_0$	$30^\circ$	$31^\circ$	$32^\circ$	$33^\circ$	$34^\circ$	$35^\circ$	$36^\circ$	$37^\circ$	$38^\circ$	$39^\circ$
$t/s$	7.25	7.52	7.68	7.85	8.94	9.03	10.67	13.00	15.23	17.36
$\theta_0$	$40^\circ$	$41^\circ$	$42^\circ$	$43^\circ$	$44^\circ$	$45^\circ$	$46^\circ$	$47^\circ$	$48^\circ$	$49^\circ$
$t/s$	19.27	20.97	22.47	22.75	23.82	24.71	25.42	25.90	26.25	26.40
$\theta_0$	$50^\circ$	$51^\circ$	$52^\circ$	$53^\circ$	$54^\circ$	$55^\circ$	$56^\circ$	$57^\circ$	$58^\circ$	$59^\circ$
$t/s$	26.18	25.76	25.18	24.28	23.59	22.75	21.94	19.88	18.08	16.87

进一步对留空时间 $t$ 和投掷角 $\theta_0$ 的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 35) 和拟合回归曲线 (如图 36)。

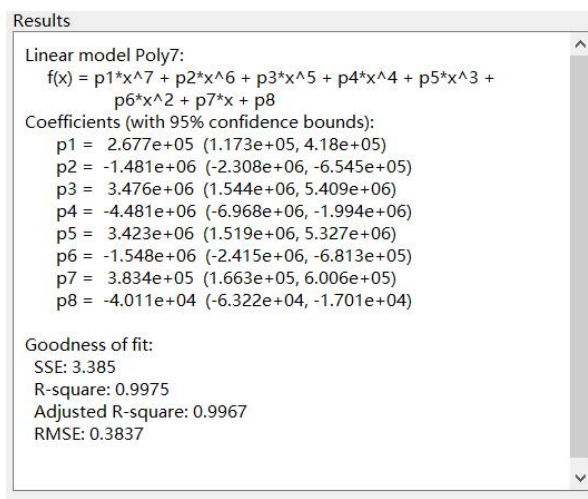


图 35： $\theta_0 - t$  拟合回归方程

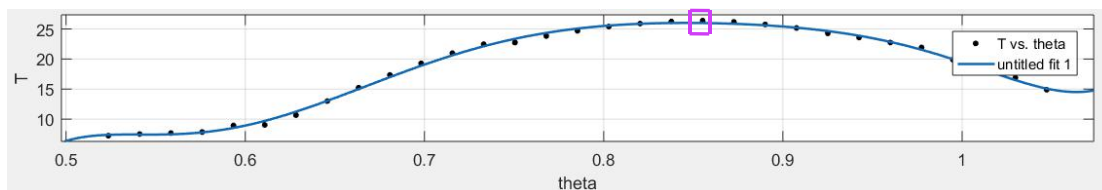


图 36:  $\theta_0 - t$  拟合回归曲线

因此，在模型IV的假设下我们可以得到此时纸飞机留空最长时间 $t$ 为 $26.4s$ ，最佳投掷角 $\theta_0$ 为 $48^\circ$ 。

最佳运动轨迹拟合回归方程与拟合图如下：

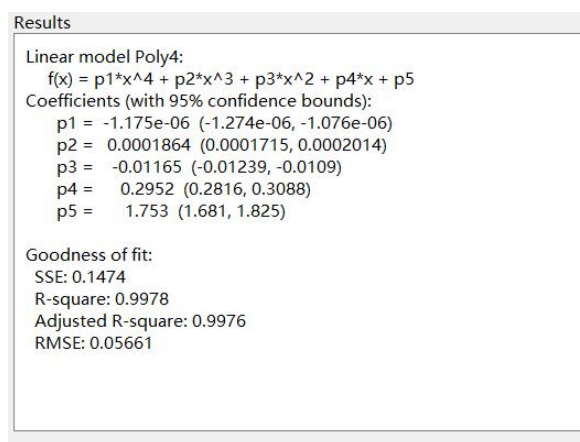


图 37: 最佳运动轨迹拟合回归方程

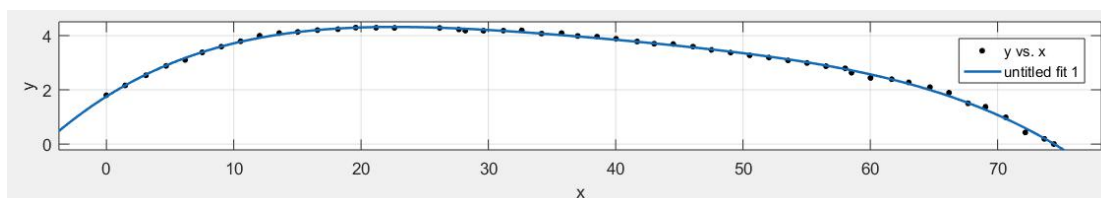


图 38: 最佳运动轨迹拟合回归曲线

## 6 模型评价

为解决本次建模问题，我们需要在求解非线性动力方程的最优解之前计算一些准备数据，如纸飞机机翼面积与重心参数。在求解纸飞机机翼面积中，为了更加清楚地得到一些角度和线段之间的关系，我们先将纸飞机的展开图给出，接着根据三角函数以及线段和角度的等量代换得到相关数据，再采用割补法求得纸飞机的机翼面积，其结果具有叫高精度，克服了直接测量计算面积的不足；在求解重心参数中，本文的目的在于通过粘贴胶带确定最佳重心位置，由于重心过于靠前或靠后都会使纸飞机非正常飞行，因此，我们合理的在初始重心位置左右分别选取4个点，共9个点进行数值模拟寻找最佳重心位置。这里我们巧妙地使用控制变量法，固定调整后的重心位置，通过积分法逆向求出为调整重心位置，需要粘贴胶带的质量(见表3)。

在求解纸飞机最佳重心位置与最远投掷距离、最佳重心位置与最长留空时间两个最优化问题时，我们对纸飞机的翼间夹角分类，分别考虑夹角为平角和钝角的情况，巧妙地利用物理空气动力学理论，建立 4 个最优化模型。在求解模型时，将纸飞机运动过程离散化，使问题简化便于求解，同时使得到结果合理可靠。

虽然我们得到的结果”T”型纸飞机的最远投掷距离与最长留空时间优于”Y”型纸飞机的结果，但容易看出，”T”型纸飞机的假设偏理想化，我们忽略了”T”型纸飞机的机翼水平方向不稳定，容易产生摆动与偏移，但默认”T”型纸飞机的升力不存在偏移损耗，故获得的结果存在一定的误差。而”Y”型纸飞机的假设更接近现实条件，由于”Y”型纸飞机的机翼为钝角，故”Y”型纸飞机中的飞机在运动过程中机翼两侧的气流会增强，形成一道“气流墙”，进而增加了飞机的稳定性，使纸飞机在飞行过程中左右摆动有效减小，故在”Y”型纸飞机中忽略偏移损耗更加合理，获得的结果也更准确。因此，本文的结果与在实际条件下机翼有一定角度飞行距离更远的事实并不矛盾，建模合理。

由于本文不考虑气流以及飞机左右摆动或者偏移现象对纸飞机的平衡以及受力有细微的影响，因此求解结果存在一定的误差。但是文本将运动状态的离散化，在一定程度上减小了误差，所以其结果具有一定的理论意义和参考价值。

## 7 模型改进

因为不同类型的纸飞机留空时间不同，故我们引入 Sky King 纸飞机模型(纸飞机留空时间最长的模型)。

### Sky King 纸飞机模型机翼面积的确定

同样我们采用积分法来确定纸飞机的重心，其主要步骤如下：

**Step 1:** 因为纸飞机纸张厚度不可忽略，因此需建立  $Oxyz$  三维坐标系来确定纸飞机的重心，又由于不同位置纸张折叠层数确定，因此运算时可利用投影将其简化在二维平面；

**Step 2:** 根据 Sky King 纸飞机折叠过程的倒数第二步，得到三维立体图形，将其向  $yOz$  面进行投影，得到图 39。当折叠部分面积的积分累积至总面积的  $1/2$  时，即可求得重心在  $yOz$  面上的坐标  $(5.96, 1.354)$ ；

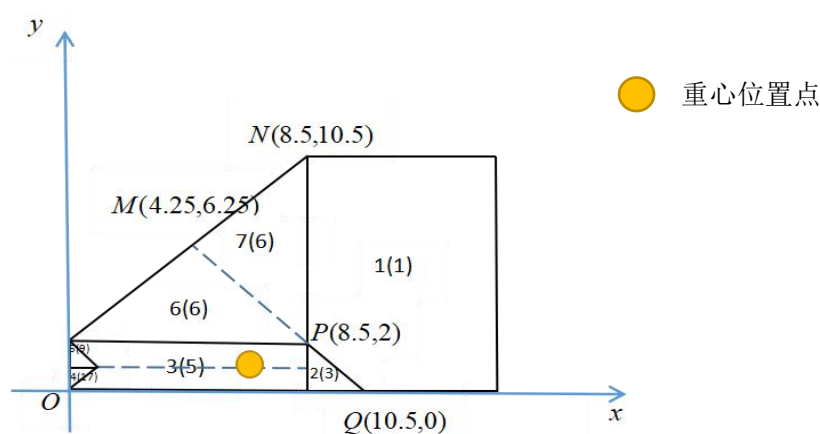


图 39: Sky King 在  $yOz$  的投影图(单位为  $cm$ )



我们建立以 Sky King 纸飞机留空时间最长为目标，并且满足下列约束条件的非线性优化模型，如下：

$$\begin{aligned}
 & \text{(模型 V)} \quad \max \sum \Delta t \\
 & s.t. \quad \begin{cases} v_{(i+1)x} = v_{ix} + a_{ix} \cdot \Delta t \\ v_{(i+1)y} = v_{iy} + a_{iy} \cdot \Delta t \\ \theta = \arctg \frac{v_y}{v_x} \\ \alpha = \varphi - \theta \\ M = (l - r_o) \cdot L \\ I = \frac{1}{2} m_{\text{飞机}} \cdot (l - r)^2 \\ \ddot{\varphi} = M / I \\ (5.1.8) \sim (5.1.17) \end{cases}
 \end{aligned}$$

我们利用 *MATLAB* 2016a 进行求解. 可以得到留空时间  $t$  与投掷角  $\theta_0$  关系如表 11

表 11: 留空时间  $t$  与投掷角  $\theta_0$  的关系

$\theta_0$	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	55°
$t/s$	12.29	14.92	16.80	18.08	19.66	25.96	27.15	28.02	28.64	29.01
$\theta_0$	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	65°
$t/s$	28.89	28.10	26.98	23.40	21.08	18.19	15.28	12.06	9.56	9.04

进一步对留空时间  $t$  与投掷角  $\theta_0$  的散点图进行拟合，得到拟合回归方程 (如图 40) 和拟合回归曲线 (如图 41)

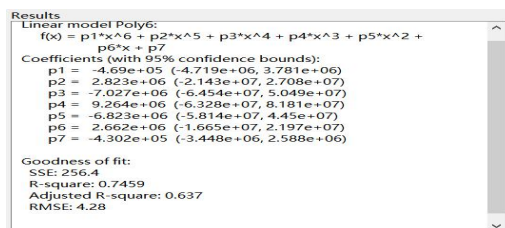


图 40:  $\theta_0 - t$  拟合回归方程



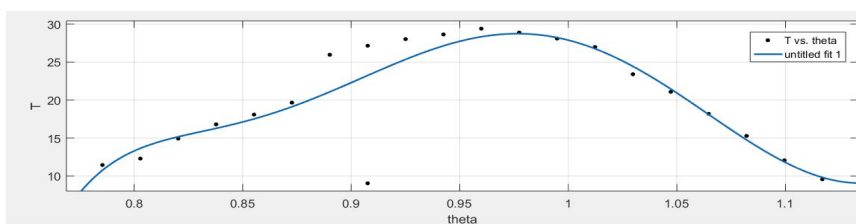


图 41:  $\theta_0 - t$  拟合回归曲线

因此，在模型 V 的假设下我们可以得到此时纸飞机飞行的留空时间  $t$  为  $29.01s$ ，最佳投掷角  $\theta_0$  为  $55^\circ$ 。

最佳运动轨迹拟合回归方程与拟合图如下：

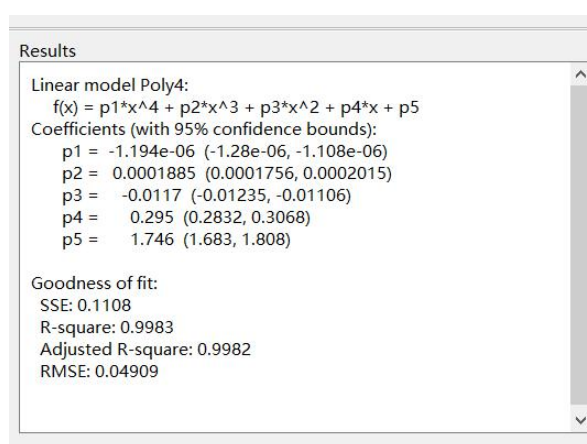


图 42: 最佳运动轨迹拟合回归方程

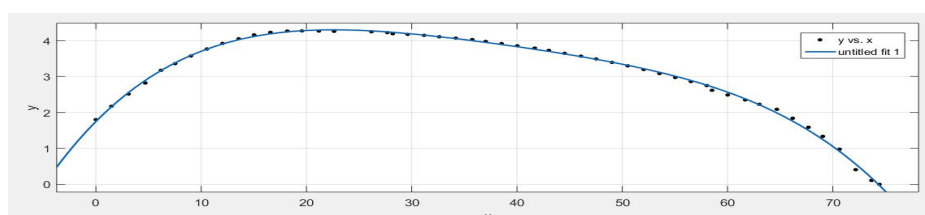


图 43: 最佳运动轨迹拟合回归曲线

## 8 参考文献

- [1] 赵静, 严上安. 数学建模与数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [2] 余胜威, MATLAB 优化算法案例分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [3] (英)R. P. G. COLLINSON 著; 史彦斌, 高宪军, 王远达译, 航空电子系统导论(第 3 版)[M], 国防工业出版社, 2013. 10.
- [4] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [5] [纸飞机苏珊]折法-吉尼斯世界纪录 69.14 米,

- <http://www.zhiqq.com/zhezhi/644.html>, 2019 年 5 月 18 日.
- [6] 熊纯, 升力系数曲线,  
[https://www.docin.com/touch\\_new/preview\\_new.do?id=590281772&html=1](https://www.docin.com/touch_new/preview_new.do?id=590281772&html=1),  
2019 年 5 月 18 日.
- [7] 北漂老 A, 无人机问题: 什么是升阻比?  
<https://blog.csdn.net/accelit/article/details/55101154>,  
2019 年 5 月 18 日.
- [8] 搜狗百科, 压差阻力.  
<https://baike.sogou.com/m/fullLemma?lid=61918357&fromTitle=%E5%8E%8B%E5%B7%AE%E9%98%BB%E5%8A%9B>, 2019 年 5 月 18 日.
- [9] 有容乃大展翅翱翔, 飞行器诱导阻力是正比于(还是反比于)速度平方?  
[http://blog.sina.cn/dpool/blog/s/blog\\_776ce1db0102x5un.html](http://blog.sina.cn/dpool/blog/s/blog_776ce1db0102x5un.html), 2019 年 5 月 18 日.
- [10] 王肇明. 标枪动力学的优化计算[J]. 力学与实践, 5(4):42-44+56, 1983.
- [11] 周继和. 关于男子低重心标枪出手条件的分析[J]. 体育科学(2):78-82, 1992.
- [12] 搜狗百科, 压差阻力.  
<https://baike.baidu.com/item/%E4%BF%AF%E4%BB%B0%E5%8A%9B%E7%9F%A9/5294191?fr=aladdin>, 2019 年 5 月 19 日.
- [13] 留空时间纸飞机.  
<https://max.book118.com/html/2018/1012/5310322231001321.shtm>,  
2019 年 5 月 19 日.
- [14] 许维进. 飞机最小配平阻力和最佳升力分配, 最佳重心位置[J]. 飞机设计 4:8-15, 1993.

## 附录

### I 主要程序

#### 1. 纸飞机重心

```
function f1=f1(x)
f1=8*x;
end
function f2=f2(x)
f2= 3*x+5*(6.95+0.56*x)+(6*x)+8*(19.88+2.42*x);
End
function f3=f3(x)
f3= 3*x+5*(6.95+0.56*x)+(6*x)+4*(1.88+9.42*x);
end
S=0;
s=[];
s(1)=quad('f1 ',0,4.35,0);
S=S+s(1);
if S<(21*29.7)/4
s(2)=quad('f2 ',4.35,6.15,0);
S=S+s(2);
if S<(21*29.7)/4
f3= 3*x+5*(6.95+0.56*x)+(6*x)+4*(1.88+9.42*x);
syms x t
f3= 3*x+5*(6.95+0.56*x)+(6*x)+4*(1.88+9.42*x);
x=x+1.61;
solve(int(f3,x,6.15,t)+s(1)+s(2)==21*29.7/4)
double (ans)
else
disp('重心在 6.15 以外')
disp(ans)
end
End
```

#### 2. 纸飞机机翼的面积

```
S=[];
i=1
for a=(8/9*pi):(1/180*pi):(11/12*pi)
angle1=2*a-1.5*pi;
angle2=1.25*pi-angle1;
x=29.7/2/(1+cos(angle1));
t=((21-29.7/2)-x*tan(angle2))/(1-tan(angle2));
S(i)=-(29.7-x-t)*(21-29.7/2-t)+(29.7/2-t)^2;
```

```
i=i+1;
end
```

```
polyfit(a,S,2)
```

### 3. 模型 I 的程序

```
v0=22.22;
vx=0;
vy=0;
ax=0;
ay=0;
alpha=-15/180*pi;
v=0;
t=0;
i=1;
X=0;
Y=0;
cl=0.01;
theta=0;
phi=alpha+theta;
l=6.4;
v=v0;
o=1;
M=0;
l=0;
m0=0.00437;
format long
for r=5.78:0.1:6.58
    u=[0.035,0.0385,0.0416,0.043,0,0.0524,0.0531,0.0542,0.0547];
    m=m0+u(o);
    for alpha=-15/180*pi:1/180*pi:5/180*pi
        for theta =0:1/180*pi:1/9*pi
            if vy>=0
                x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
                y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
                M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2);
                l=0.5*m*(l-r)^2;
                X=X+x(i)-32.513;
                Y=Y+y(i);
                Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi) +0.1)*0.007502*(v^2)*cl;
                Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl;
                F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
                ax=-Fx/m;
                ay=-Fy/m;
```

```

v=v+ax*0.5;
vx=v*cos(alpha+i*theta);
vy= v*sin(alpha+i*theta);
theta=atan(vy/vx);
v0=v;
t=t+0.5;
i=i+1;
r=r-0.1;
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
else
break
end
end
end
l=i;
while 1
x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2);
l=0.5*m*(l-r)^2;
X=X+x(i);
Y=Y-y(i);
if Y>=0
Fx=-1/2*1.22*(cl*alpha*sin(phi)-0.1)*0.007502*(v^2)*cl;
Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*(tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl);
F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
ax=-Fx/m;
ay=-Fy/m;
v=v+ax*0.5;
vx=v*cos(alpha+i*theta);
vy= v*sin(alpha+i*theta);
theta=atan(vy/vx);
v0=v;
t=t+0.5;
i=i+1;
o=o+1;
else
break
end
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
break
end
end

```

```

r=r-0.6;
k=l-i;
alpha=alpha-1/25*pi;
theta=alpha+1/18*pi;
end
vpa(X);
fprintf('X=%3.15f\n',X)
fprintf('alpha=%3.4f\n',alpha)
fprintf('theta=%3.4f\n',theta)
fprintf('r=%3.4f\n',r)

```

#### 4. 模型 II 的程序

```

v0=22.22;
v0=22.22;
vx=0;
vy=0;
ax=0;
ay=0;
alpha=-15/180*pi;
v=0;
t=0;
i=1;
X=0;
Y=0;
cl=0.01;
theta=0;
phi=alpha+theta;
l=6.4;
v=v0;
o=1;
M=0;
l=0;
T=0;
m0=0.00437;
format long
for r=5.78:0.1:6.58
    u=[0.035,0.0385,0.0416,0.043,0,0.0524,0.0531,0.0542,0.0547];
    m=m0+u(o);
    for alpha=-10/180*pi:1/180*pi:10/180*pi
        for theta=1/6*pi:1/180*pi:1/3*pi
            if vy>=0
                x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
                y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
                M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2);
            end
        end
    end
end

```

```

l=0.5*m*(l-r)^2;
X=X+x(i)-32.513;
Y=Y+y(i);
Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi) +0.1)*0.007502*(v^2)*cl;
Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl;
F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
ax=-Fx/m;
ay=-Fy/m;
v=v+ax*0.5;
vx=v*cos(alpha+i*theta);
vy= v*sin(alpha+i*theta);
theta=atan(vy/vx);
v0=v;
t=t+0.5;
i=i+1;
T=T+1.2*t;
r=r-0.1;
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
else
break
end
end
end
end
l=i;
while 1
x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2);
l=0.5*m*(l-r)^2;
X=X+x(i);
Y=Y-y(i);
if Y>=0
Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi)-0.1)*0.007502*(v^2)*cl;
Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*(tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl);
F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
ax=-Fx/m;
ay=-Fy/m;
v=v+ax*0.5;
vx=v*cos(alpha+i*theta);
vy= v*sin(alpha+i*theta);
theta=atan(vy/vx);
v0=v;
t=t+0.5;

```

```

i=i+1;
o=o+1;
T=T+1.2*t;
else
break
end
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
break
end
r=r-0.7;
k=l-i;
alpha=alpha-1/25*pi;
theta=alpha+1/4*pi;
end
vpa(X);
fprintf('T=%3.5f\n',T)
fprintf('alpha=%3.4f\n',alpha)
fprintf('theta=%3.4f\n',theta)
fprintf('r=%3.4f\n',r)

```

#### 5. 模型III的程序

```

v0=22.22;
vx=0;
vy=0;
ax=0;
ay=0;
alpha=-15/180*pi;
v=0;
t=0;
i=1;
X=0;
Y=0;
cl=0.1;
theta=0;
phi=alpha+theta;
l=6.4;
v=v0;
o=1;
M=0;
l=0;
m0=0.00437;
format long
for r=5.78:0.1:6.58

```



```

    u=[0.035,0.0385,0.0416,0.043,0,0.0524,0.0531,0.0542,0.0547];
    m=m0+u(o);
    for alpha=-15/180*pi:1/180*pi:5/180*pi
        for theta =0:1/180*pi:1/9*pi
            if vy>=0
                x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
                y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
                M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2)*0.9954;
                l=0.5*m*(l-r)^2;
                X=X+x(i)-38.406;
                Y=Y+y(i);
                Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi) +0.1)*0.007502*(v^2)*cl*0.9954;
                Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl*0.9954;
                F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
                ax=-Fx/m;
                ay=-Fy/m;
                v=v+ax*0.5;
                vx=v*cos(alpha+i*theta);
                vy= v*sin(alpha+i*theta);
                theta=atan(vy/vx);
                v0=v;
                t=t+0.5;
                i=i+1;
                r=r-0.1;
                phi2=M/l;
                phi=phi+phi2*0.5;
            else
                break
            end
        end
    end
    l=i;

    while 1
        x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
        y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
        M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2)*0.9954;
        l=0.5*m*(l-r)^2;
        X=X+x(i);
        Y=Y-y(i);
        if Y>=0
            Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi)-0.1)*0.007502*(v^2)*cl*0.9954;
            Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*(tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl)*0.9954;
            F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);

```

```

ax=-Fx/m;
ay=-Fy/m;
v=v+ax*0.5;
vx=v*cos(alpha+i*theta);
vy=v*sin(alpha+i*theta);
theta=atan(vy/vx);
v0=v;
t=t+0.5;
i=i+1;
o=o+1;
else
break
end
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
break
end
r=r-0.6;
k=l-i;
alpha=alpha-1/23*pi;
theta=alpha+1/18*pi;
end
vpa(X);
fprintf('X=%3.15f\n',X)
fprintf('alpha=%3.4f\n',alpha)
fprintf('theta=%3.4f\n',theta)
fprintf('r=%3.4f\n',r)

```

#### 6. 模型IV的程序

```

v0=22.22;
v0=22.22;
vx=0;
vy=0;
ax=0;
ay=0;
alpha=-15/180*pi;
v=0;
t=0;
i=1;
X=0;
Y=0;
cl=0.01;
theta=0;
phi=alpha+theta;

```

```

l=6.4;
v=v0;
o=1;
M=0;
l=0;
T=0;
m0=0.00437;
format long
for r=5.78:0.1:6.58
    u=[0.035,0.0385,0.0416,0.043,0,0.0524,0.0531,0.0542,0.0547];
    m=m0+u(o);
    for alpha=-10/180*pi:1/180*pi:10/180*pi
        for theta =1/6*pi:1/180*pi:1/3*pi
            if vy>=0
                x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
                y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
                M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2)*0.9954;
                l=0.5*m*(l-r)^2;
                X=X+x(i)-32.513;
                Y=Y+y(i);
                Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi) +0.1)*0.007502*(v^2)*cl*0.9954;
                Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl*0.9954;
                F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
                ax=-Fx/m;
                ay=-Fy/m;
                v=v+ax*0.5;
                vx=v*cos(alpha+i*theta);
                vy= v*sin(alpha+i*theta);
                theta=atan(vy/vx);
                v0=v;
                t=t+0.5;
                i=i+1;
                T=T+0.8*t;
                r=r-0.1;
                phi2=M/l;
                phi=phi+phi2*0.5;
            else
                break
            end
        end
    end
    l=i;

while 1

```

```

x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.007502*(v^2)*0.9954;
l=0.5*m*(l-r)^2;
X=X+x(i);
Y=Y-y(i);
if Y>=0
    Fx=-1/2*1.22*(cl*alpha*sin(phi)-0.1)*0.007502*(v^2)*cl*0.9954;
    Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.007502*(v^2)*(tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl)*0.9954;
    F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
    ax=-Fx/m;
    ay=-Fy/m;
    v=v+ax*0.5;
    vx=v*cos(alpha+i*theta);
    vy=v*sin(alpha+i*theta);
    theta=atan(vy/vx);
    v0=v;
    t=t+0.5;
    i=i+1;
    o=o+1;
    T=T+0.8*t;
else
    break
end
phi2=M/l;
phi=phi+phi2*0.5;
break
end
r=r-0.7;
k=l-i;
alpha=alpha-1/30*pi;
theta=alpha+1/4*pi;
end
vpa(X);
fprintf('T=%3.5f\n',T)
fprintf('alpha=%3.4f\n',alpha)
fprintf('theta=%3.4f\n',theta)
fprintf('r=%3.4f\n',r)

```

## 7. 模型 V 的程序

```

v0=22.22;
v0=22.22;
vx=0;
vy=0;

```

```

ax=0;
ay=0;
alpha=-15/180*pi;
v=0;
t=0;
i=1;
X=0;
Y=0;
cl=0.01;
theta=0;
phi=alpha+theta;
l=5.0667;
r=9.2425
v=v0;
o=1;
M=0;
l=0;
T=0;
m=0.00437;
format long
for alpha=30/180*pi:1/180*pi:70/180*pi
    for theta =45/180*pi:1/180*pi:65/180*pi
        if vy>=0
            x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
            y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
            M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.01048*(v^2);
            l=0.5*m*(l-r)^2;
            X=X+x(i)-32.513;
            Y=Y+y(i);
            Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi) +0.1)*0.01048*(v^2)*cl;
            Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.01048*(v^2)*tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl;
            F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
            ax=-Fx/m;
            ay=-Fy/m;
            v=v+ax*0.5;
            vx=v*cos(alpha+i*theta);
            vy= v*sin(alpha+i*theta);
            theta=atan(vy/vx);
            v0=v;
            t=t+0.5;
            i=i+1;
            T=T+2.1*t;
            r=r-0.1;
            phi2=M/l;

```

```

    phi=phi+phi2*0.5;
    else
    break
    end
    end
    end
    l=i;

    while 1
    x(i)=v*0.5+1/2*ax*(0.5)^2;
    y(i)=v*0.5+1/2*ay*(0.5)^2;
    M=(l-r)*0.5*1.22*cl*alpha*0.01048*(v^2);
    l=0.5*m*(l-r)^2;
    X=X+x(i);
    Y=Y-y(i);
    if Y>=0
    Fx=-1/2*1.22*(cl* alpha*sin(phi)-0.1)*0.01048*(v^2)*cl;
    Fy=-0.00437*(9.8+1/2*1.22*0.01048*(v^2)*(tan(phi)*0.1-cl*cos(phi))*cl);
    F=sqrt((Fx)^2+(Fy)^2);
    ax=-Fx/m;
    ay=-Fy/m;
    v=v+ax*0.5;
    vx=v*cos(alpha+i*theta);
    vy= v*sin(alpha+i*theta);
    theta=atan(vy/vx);
    v0=v;
    t=t+0.5;
    i=i+1;
    T=T+2.1*t;
    else
    break
    end
    phi2=M/l;
    phi=phi+phi2*0.5;
    break
    end
    k=l-i;
    alpha=alpha-1/3*pi;
    theta=alpha+1/4*pi;
    end
    vpa(X);
    fprintf('T=%3.5f\n',T)
    fprintf('alpha=%3.4f\n',alpha)
    fprintf('theta=%3.4f\n',theta)

```