

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承诺书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：2269

参赛队员（签名）：

队员 1: 郭存慧

队员 2: 陈慧霞

队员 3: 李强

参赛队教练员（签名）：杨棋

参赛队伍组别（例如本科组）：专科组

参赛队号 # 2269

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）： 2269

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 D 题 5G 时代引发的道路规划革命

关 键 词 红绿灯控制 通行时间 程序图 动态规划

摘 要：

本文针对十字路口发生交通事故时，为尽快疏散堵塞车辆进行分析研究，以题目所给插图进行分析假设，假设故障发生在东西走向。

首先，对南北方向与东西方向的车流量和绿灯时间进行假设分析，列出南北方向与东西方向红绿灯调整系数与各方向上绿灯通行时间之间的关系；由于假设故障发生在东西方向，所以着重研究东西方向上直行车辆与左转车辆的数量，直行通行时间与左转通行时间，从而给出东西方向红绿灯左转与直行调整系数与直行车数量、左转车数量之间的关系^[1]。从而根据以上关系计算出南北方向、东西方向中直行与左转的红绿灯时间（绿灯时间规划）^[2]。

其次，随着科学技术的发展，网络技术的不断跟新换代，车辆已经可以做到自动接收无线信号，从而自动调整行驶路线与方向。因此，可以通过道路上的车流量情况动态规划红绿灯的开闭时间，从而完善红绿灯时间的规划^[3]，到达更快疏散堵塞路段的效果。

最后，着重分析十字路口严重堵车时，左转和直行车辆的多少对疏散交通所用时间造成的影响^[4]。列出绿灯时间与车身长、车距与速度之间的关系，确定直行绿灯时间与左转绿灯时间的最佳比例，从而在最短时间内使十字路口的离开率大于到达率，以达到最佳疏散效果。

问题二立足于所有车辆均可实现自动驾驶进行研究。首先对原始红绿灯使用过程中存在浪费绿灯时间进行数据统计与分析后可见传统红绿灯在某些时段会存在浪费绿灯时间的情况。取消红绿灯后将十字路口看作服务台，每辆车看作顾客，提出优先级服务公式，并且给出某辆车接受服务时，其它车道车辆是否允许通过十字路口做出规定。从而得到没有红绿灯车辆该如何安全高效地通过十字路口的模型^[4]。

在问题二中严格禁止可能会与接受服务车辆发生碰撞的车道内车辆的通行。问题三中研究当消防车以高于其它车辆速度的速度通过十字路口时，其它车道内车辆可能会与之发生碰撞的情况及相关车辆之间可能发生碰撞的情况，分析车辆加速度与减速通过距离之间的关系。为了避免发生碰撞，调度系统应做出相应调整来避开碰撞，因为消防车要与其他车辆错开通过十字路口，且其他车辆之间也可能发生交通事故，需要考虑的因素极多，所以我们通过计算消防车与其他车辆相撞点和其他车辆与其他车辆相撞点来减少需要考虑的因素，从而把复杂的模型简化。只要其他车辆在消防车或其他车辆到达相撞点时，通过变速不同时到达相撞点，就不会发生碰撞，从而既让消防车快速通过，其他车也不耽搁时间，又不发生交通事故。

参赛队号： 2269

参 赛 密 码

所选题目： D 题

Abstract

In this paper, in order to evacuate the blocked vehicles as soon as possible when the intersection traffic failure occurs the analysis and research. Based on the illustration given in the title , the analysis assumes that the fault occurs in the east-west direction.

Firstly, the traffic flow and green time in the north-south direction and the east-west direction are hypothesized and analysed, and the relationship between the traffic light adjustment coefficient in the north-south direction and the east-west direction and the green time in each direction is listed. Since it is assumed that the fault occurs in the east-west direction, the number of vehicles going straight and the time of turning left are emphatically studied , and the relationship between the left-turning and straight-going adjustment coefficients of east-west traffic lights and the vehicles going straight and left-turning is given. Thus, according to the above relations, the green time of going straight and turning left in north-south direction and east-west direction can be calculated(green time planning).

Secondly, with the development of science and technology and the continuous upgrading of network technology, vehicles can automatically receive unlimited signals, so as to automatically adjust the walking route and direction. Therefore, traffic flow on the road can be used to dynamically analyze the opening and closing time of traffic lights, so as to improve the planning of green time and achieve the effect of faster evacuation of blocked sections.

Finally, the paper focuses on the analysis of the impact of the number of left-turn and straight-line vehicles on the evacuation time when the intersection is seriously congested. The relationship between green time and vehicle length, vehicle distance and vehicle speed was listed, and the optimal ratio between the straight green time and the left green time was determined, so as to make the departure rate of the intersection greater than the arrival rate in the shortest time, so as to achieve the best evacuation effect.

The second question is based on the fact that all vehicles can achieve automatic driving. First of all, the data statistics and analysis of the waste of green time in the use of original traffic lights show that the traditional traffic lights will waste green time in some time periods. After the traffic light is cancelled, the priority service formula is obtained, and regulations are made on whether vehicles in other lanes are allowed to pass the intersection when a certain vehicle receives the service. The model of how to pass the intersection safely and efficiently is obtained.

In the second question, the traffic in the lane which may collide with the vehicles receiving service is strictly prohibited. In question 3, when the fire truck passes through the intersection at a higher speed than other vehicles, vehicles in other lanes may collide with it and other related vehicles may collide, and the relationship between acceleration and deceleration distance of vehicles is analyzed. In order to avoid collision, scheduling system should make corresponding adjustment to avoid collision, because fire trucks and other

vehicles stagger through the intersection, and other vehicles may also occur between traffic accident, need to consider the factors, we calculated the fire collision with other vehicles and other vehicle collision with other vehicles to reduce the need to consider the factors, so as to simplify the complex models. As long as other vehicles in the fire truck or other vehicles to reach the point of collision, through variable speed not at the same time to reach the point of collision, there will be no collision, so that both let the fire truck through quickly, other cars do not delay time, and no traffic accidents.

目录

一、问题重述.....	1
二、问题分析.....	1
三、模型假设.....	2
四、符号说明.....	2
五、模型的建立与求解.....	4
5.1、问题 1 模型的建立与求解.....	4
5.1.1 十字路口的交通模型.....	4
5.1.2、绿灯时间规划.....	4
5.1.3 动态规划控制算法.....	5
5.1.4 对东西拥堵车道左转与直行的进一步分析.....	6
5.2 问题 2 模型的建立与求解.....	8
5.2.1 传统红绿灯路口实际数据分析.....	8
5.2.2 自动调控下的优先级服务模型.....	10
5.2.2.1 优先级公式.....	10
5.2.2.2 优先级模型的算法.....	10
5.2.2.3 优先级模型结果的分析.....	12
5.3 问题 3 的模型建立与求解.....	12
5.3.1 避免其他车道中车辆与消防车碰撞的研究.....	12
5.3.1.1 消防车直行.....	12
5.3.1.2 消防车左转.....	14
5.3.1.3 消防车右转.....	15
5.3.2 其他车辆在不与消防车相撞前提下互相不撞的研究.....	16
5.3.2.1 在消防车通过时，可能与消防车相撞的车辆互相之间相撞的研究.....	16
5.3.2.2 不会与消防车相撞的车辆之间可能碰撞的研究.....	18
5.3.3 算法总结.....	19
5.3.4 对于上述算法的综合实际分析.....	19
5.3.5 对于问题三中算法的应用与推广.....	21
六、模型的优缺点与改进.....	21
6.1 模型的优点.....	21
6.2 模型的缺点.....	22
6.3 对于问题 1 借道行驶的进一步分析.....	22
七、参考文献.....	23

一、问题重述

忙着回家或上班的司机们都知道交通堵塞既浪费时间又浪费燃料，甚至有时候会带来情绪上的巨大影响，引发一些交通问题。据报道，每年交通堵塞使得美国市民在路上总共浪费了超过 55 亿小时，以及价值达到 1210 亿美元的 29 亿加仑燃料。虽然十字路口和州际公路的匝道处交通十分繁忙，但是大多数乡村公路却鲜有车流，道路占用率只有 5%。

即将到来的 5G（第五代移动通信网络）时代，将有可能解决这个问题，5G 的无线传输宽带的峰值理论传输速度可达每秒 10Gb 以上，这样我们就可以让汽车之间实时共享信息。未来，汽车之间可以交换诸如位置，速度和目的地之类的信息，进而核心控制系统可以基于这些信息，为司机生成个性化指令。通过告诉司机最佳行驶速度、最佳车道或最佳路线，不仅可以消除走走停停的现象，还可以提高交通安全性。

第一阶段问题：

1、假定十字路口，高峰时的流量可达到 500 辆车/小时。有一条道路的两车道由于出现突发故障需要临时封闭 30 分钟。我们假设绝大多数车辆都可以实行自动驾驶，主控中心可以通过网络给车辆发送行驶的调度指令。请建立合理的数学模型，给出一个比较合理的路口红绿灯自动控制方案，并对各车辆重新调整路线规划、以使道路通行时间降到最低。

第二阶段问题：

2、如果车辆之间的互联非常普及，所有车辆都可以自动驾驶，请建立数学模型探讨是否有可能取消路口的红绿灯？这样的通行效率相比有红绿灯时候是否会提高？

3、在一个平均通过速度为 15 公里每小时的路口，一辆执行任务的消防车想以 40 公里每小时的速度快速通过，控制系统应该如何进行调度？

二、问题分析

交通拥堵主要与十字路口行驶车辆的流量、红绿灯时间和交通故障等诸多因素有关。

针对问题 1：主要考虑发生交通事故时，通过调整车辆行驶方向和控制红绿灯时长来解决交通拥堵问题。在十字路口交通高峰期最高峰值是 500 辆/小时，而在此时发生交通事故，有一条路的两车道都停用 30 分钟，在道路恢复正常使用前，主控中心通过网络给车辆发送行驶的调度指令从而改变行驶车辆的行驶方向和自动控制红绿灯时间来将道路通行时间降到最低。因为车身长度和车距对通过红绿灯的时间有一定的影响，所以我们规定车身和车距为一个固定值，从而简化模型，降低车身和车距对交通拥堵的影响。通过计算红绿灯调整系数来确定红绿灯时间的调整方案，根据题中情况要使拥堵处在最短时间内疏散，再进行左转与直行的情况分析，从而得出最短时间疏散的方案。

针对问题 2：红绿灯是每个路口必备的交通指挥系统，也降低了交通事故发生概率，然而在很多各个方向上的车辆数量有较大差异，导致红绿灯时间分配不均匀。使得司机等待时间过长，大大降低了交通效率。对此为解决该问题我们在自动驾驶的前提下，根据不同车辆等待时间与通过路口所需时间长短，来确定各个车辆先后行驶顺序。达到各车辆等待时间大体相同，同时也提高十字路口的通行效率。

针对问题 3：若消防车要以稳定的速度 40km/h 安全通过路口，那么其他车辆必须针对本身位置与消防车位置的不同，来做出不同的速度改变，而速度因加速度改变，所以主要研究方向为其他车辆加速度改变情况。碰撞时要满足两辆车同时到达相撞点，故我们可以算出两辆车相撞时所需加速度，所需位置情况，所需时间，等因素的联系。要使车

辆不相撞则不满足该条件即可。

三、模型假设

第一阶段：

1. 每辆车通过故障路段所用时间与换道所用时间相同；
2. 各个车辆行驶速度相同；
3. 所有车辆车身长相等；
4. 所有车辆之间的车距都相等。

第二阶段：

1. 把车辆当做质点；
2. 把单方向中的两条车道看为一条，不考虑往固定行驶时，车辆在两条车道中变道产生的影响。

四、符号说明

第一阶段符号说明

A	南北走向车流量
A_0	南北道左转车辆
A_1	南北道直行车辆
B_0	东西道左转车辆
B_1	东西道直走车辆
T	南北方向与东西方向红绿灯总时间的和
T_A	南北方向绿灯时间总和
T_B	东西方向绿灯时间总和
T_1	一个周期内南北方向与东西方向绿灯时间之和
T_a	一个周期内南北方向绿灯时间
T_b	一个周期内东西方向绿灯时间
$L_{直}$	直行通过路口时通过距离
$L_{左}$	左转通过路口时通过距离

参赛队号 # 2269

D	车长
d	车距
v	车速
K_A	南北走向红绿灯调整系数
K_B	东西走向红绿灯调整系数
M	堵塞路段总车辆
$M_{直}$	堵塞路段左转车辆
$M_{左}$	堵塞路段直行车辆

第二阶段符号说明

R	车辆的优先级
T_w	车辆的等待时间
T_s	车辆接受服务时间
$L_{消}$	消防车到相撞点通过的路程
$L_{其}$	其它车道车辆到相撞点通过的路程
$V_{消}$	消防车的速度
V_0	其它车辆的初速度
$V_{其}$	其它车辆的末速度
a	其它车辆的加速度
t	其它车辆开始变速到碰撞点所用时间
X	整体研究时某一车辆到碰撞点的路程

五、模型的建立与求解

5.1、问题 1 模型的建立与求解

5.1.1 十字路口的交通模型

题中的十字路口可以抽象为如图一所示模型，其中有“X”符号的表示为事故路段

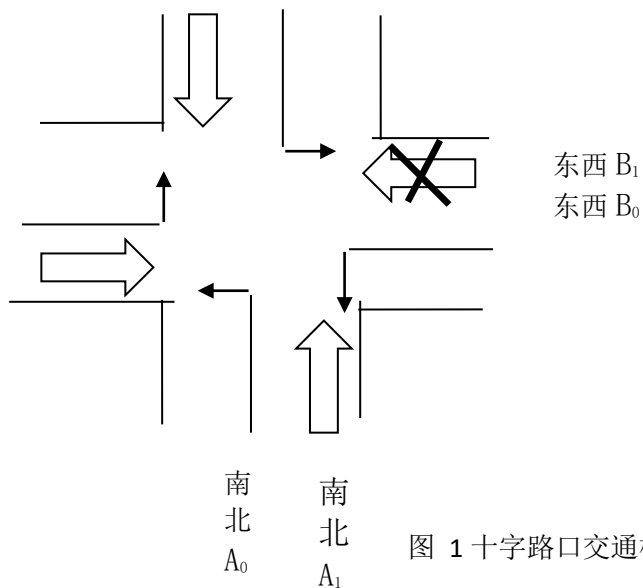


图 1 十字路口交通模型

南北方向总车辆 A

$$A=A_0+A_1$$

东西方向的总车辆 B

$$B=B_0+B_1$$

由题目数据可得：30 分钟内，最大的拥堵量为

$$A+B=250$$

5.1.2、绿灯时间规划

同时考虑南北东西两个方向车辆的等候时间及同一方向上直行、左转车辆的车数，我们将整个过程分为两步完成。第一步是同时对南北东西两个方向的车辆通行时间进行总体的规划，第二步是对同一方向上直行与左转的时间进行规划。假设现有固定东西和南北两个方向的通行时间都是 T，为了解决固定红绿灯时间而导致车流量分配不均匀的问题，需要动态调整南北和东西方向的红绿灯时间，具体方法如下：

第一步:

南北方向红绿灯调整系数:

$$KA = TA * \frac{1}{TA + TR}$$

东西方向红绿灯调整系数:

$$KB = TB * \frac{1}{TA + TR}$$

南北走向的一个红绿灯周期:

$$Ta = KA * T1$$

东西方向的一个红绿灯周期:

$$Tb = KB * T1$$

第二步:

东西方向红绿灯直行时间调整系数:

$$KB1 = \frac{B1}{B0 + B1}$$

东西方向红绿灯左转时间调整系数:

$$KB0 = \frac{B0}{B0 + B1}$$

东西方向直行绿灯时间:

$$Tb1 = Tb * Kb1 = Tb * \frac{B1}{B0 + B1}$$

东西方向左转绿灯时间:

$$Tb0 = Tb * Kb0 = Tb * \frac{B0}{B0 + B1}$$

5.1.3 动态规划控制算法

首先, 车辆来到十字路口时, 先判断前方路况 (是否堵塞), 决定是否加速, 进入堵塞路段后进行减速, 利用无线电信号获取路口车流情况, 后启动方向通行时间的规划,

在此基础上调节时间系数进而确定出红绿灯时间，再启动直行或左转的规划，根据红绿灯时间分配系数进而确定出直行与左转绿灯的时间，重复上述步骤直到十字路口车辆的离开率大于到达率。

随着 5G 时代的到来，红绿灯的开闭时间可以通过计算来动态规划，具体流程如图 2 所示。

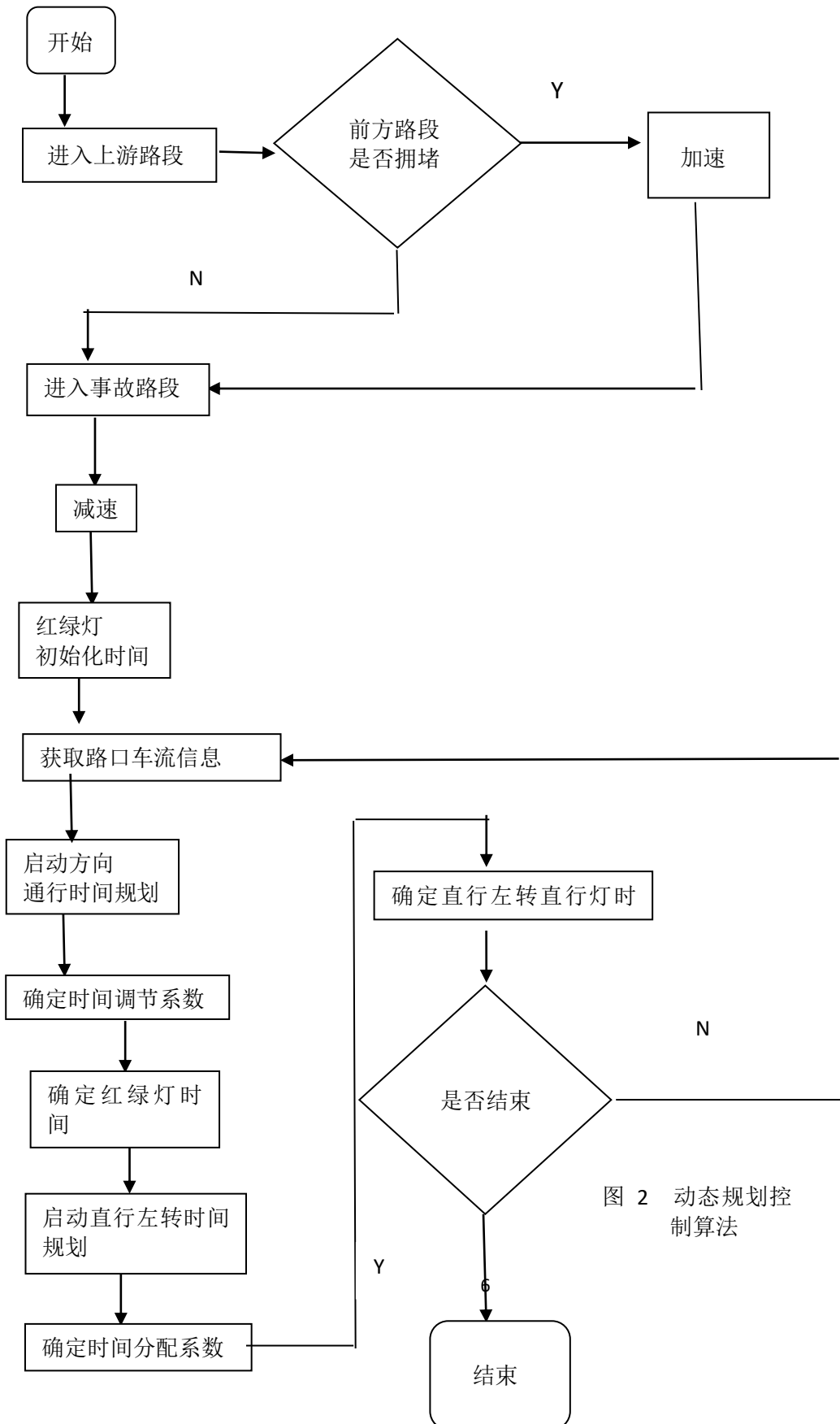
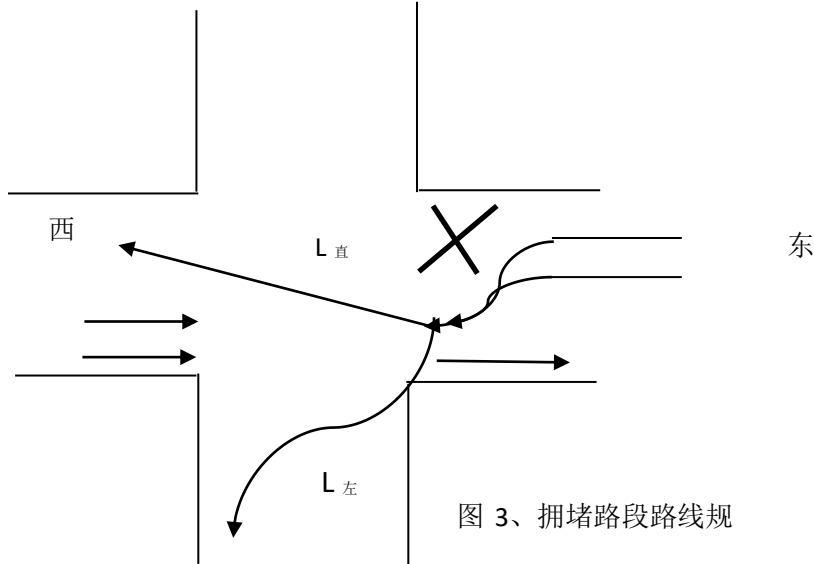


图 2 动态规划控制算法

5.1.4 对东西拥堵车道左转与直行的进一步分析

该十字路口由东向西车道因事故拥堵时，我们将西向东的两条道中，选择靠向事故路段的一条道改为由西向东，来疏散事故路段车辆，在该文章中我们仅仅考虑左转与直行两种疏通方式，如图 3 所示。



拥堵车辆中一车辆左转需要时间 T_L :

$$T_L = \frac{L_{左} + D}{V}$$

拥堵车辆中一辆车直走需要的时间 T_S :

$$T_S = \frac{L_{直} + D}{V}$$

拥堵路段左转调整系数 $k_{堵左}$:

$$K_{堵左} = \frac{T_S}{T_L + T_S}$$

拥堵路段直行调整系数 $k_{堵直}$

$$K_{堵直} = \frac{T_L}{T_L + T_S}$$

则可得需要左转车辆总数 $M_{左}$:

$$M_{左} = M * K_{堵左}$$

需要直行车辆总数 $M_{直}$:

$$M_{直} = M * K_{堵直}$$

且

$$0 \leq M_{\text{左}} + M_{\text{直}} \leq 250$$

拥堵车辆中所有左转车辆共需要时间 $T_{\text{左}}$:

$$T_{\text{左}} = \frac{L_{\text{左}} + D * M_{\text{左}} + (M_{\text{左}} - 1) * d}{V}$$

拥堵车辆中所有直走车辆共需要的时间 $T_{\text{直}}$:

$$T_{\text{直}} = \frac{L_{\text{直}} + D * M_{\text{直}} + (M_{\text{直}} - 1) * d}{V}$$

$$\text{则可得疏散所需时间} = \frac{L_{\text{左}} + D * M_{\text{左}} + (M_{\text{左}} - 1) * d}{V} + \frac{L_{\text{直}} + D * M_{\text{直}} + (M_{\text{直}} - 1) * d}{V}$$

假设车身长 $D=5$ 米, 车距 $d=1$ 米, 车速为 5 米/秒, $L_{\text{左}}=40$, $L_{\text{直}}=30$, 则 $K_{\text{直}}=\frac{9}{16}$,

$K_{\text{左}}=\frac{7}{16}$ 。实际分析如表 1:

总车辆/辆	左转车辆/辆	直行车辆/辆	总时间/秒
30	14	18	52.5
60	26	34	85.6
120	52	68	157.6
160	70	90	205.6
200	87	113	253.6

表 1 实际分析

因为在疏导交通时追求最短时间内完成疏导, 就需要车辆在最短时间内离开, 结合实际显然可知 $L_{\text{左}}$ 大于 $L_{\text{直}}$, 所以理想状态下应让车辆直走, 但实际情况下当一条道路中车辆过多时, 必然会使车速下降导致疏散效率降低, 所以上述算法计算出的拥堵路段直行与左转系数, 能够将车辆合理的分配到左转车道与直行车道中, 再结合 5.1 与 5.2 中计算出来的两个红绿灯系数, 将车辆合理分配其他道路上, 以达到最短时间内疏散完毕的目的。

5.2 问题 2 模型的建立与求解

5.2.1 传统红绿灯路口实际数据分析

通过对实地 (云岭路) 红绿灯时间周期的考察和网上数据查询, 得到如表 2、表 3

东西方向	左转红灯, 直行绿灯	左转绿灯, 直行红灯	左转红灯, 直行红灯
	30s	26s	56s
南北方向	左转红灯, 直行红灯	左转红灯, 直行绿灯	左转绿灯, 直行红灯
	56s	30s	26s

表 2 实地考察数据

时间段	方向	转向	绿灯时间 (秒)	实际车流量 (辆/30 秒)	饱和车流量 (辆/30 秒)	实际车流量所用绿灯时间 (秒)	损失绿灯时间 (秒)
8:00-9:00	东西	直行	30	35	40	26.25	3.75
		左转	26	3	35	2.23	23.77
	南北	直行	30	20	40	15.00	15.00
		左转	26	2	35	1.49	24.51
12:00-13:00	东西	直行	30	20	40	15.00	15.00
		左转	26	2	35	1.49	24.51
	南北	直行	30	15	40	11.25	18.75
		左转	26	1	35	0.74	25.26
17:00-18:00	东西	直行	30	30	40	22.50	7.50
		左转	26	4	35	2.97	23.03
	南北	直行	30	20	40	15.00	15.00
		左转	26	3	35	2.23	23.77

表 3 损失绿灯时间的计算

不同时间段，不同方向与转向损失的绿灯时间如图 4

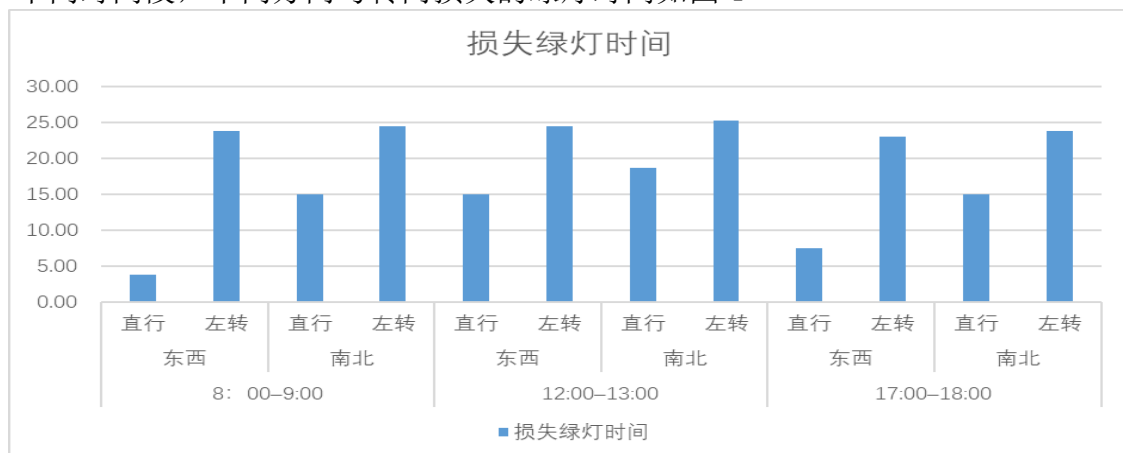


图 4 损失绿灯时间

由表中数据可得，无论什么方向、什么转向、什么时间都存在绿灯时间被损失的现

象，这样会耽搁司机通过十字路口的时间。

5.2.2 自动调控下的优先级服务模型

5.2.2.1 优先级公式

随着 5G 时代的到来，车辆能实时监测到十字路口路况信息，打破传统“红灯停，绿灯行”的传统观念，大大减少红灯时排队过十字路口所浪费的时间。对此提出如下方案：

将十字路口看作一个服务台，每辆车看作一个顾客。为了得到理想的服务顺序，我们引入优先级服务的概念。每辆车的优先级不仅取决于它的服务时间（通过十字路口所用时间），还取决于它花在等待服务上的时间，是 FCFS(先来先服务，Forst Come First Serve)和 SJF(短进程优先，Shortest Job First)的折中。优先级计算公式为：

$$\text{优先级} = \frac{\text{等待时间} + \text{服务时间}}{\text{服务时间}} \quad \text{即}$$

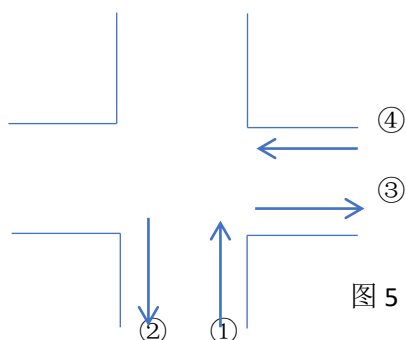
$$R = 1 + \frac{T_w}{T_s}$$

式中，R 为车辆的优先级，优先级越大的最先接受服务。 T_w 为车辆的等待服务时间， T_s 为车辆接受服务时间

由于服务时间做分母，所以较短的进程将被优先照顾；又由于等待时间在分子中出现，所以等待时间较长的进程也会得到合理的对待，从而防止了无限延期的情况出现。

5.2.2.2 优先级模型的算法

将十字路口的车道分为四个车道如图 5 所示



上文给出了优先级的公式，优先级越大的越先接受服务，红绿灯最大的作用在于减少

车辆互相碰撞，所以要取消红绿灯就必须解决碰撞问题。以①车道的某辆车为服务对象，规定其他车道的车辆是否能左转，右转，直行。（矩阵中的 0 表示可以通行，1 表示不能通行）当该车直行时其它车道车辆的形式情况如图 6 所示，该车左转时其它车道车辆的行驶情况如图 7 所示，该车右转时其它车道车辆的形式情况如图 8 所示。用该方法就能解决取消红绿灯时会发生膨胀的问题。

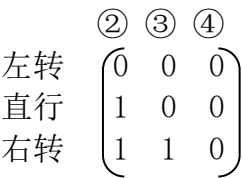


图 6

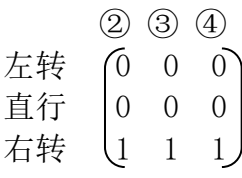


图 7

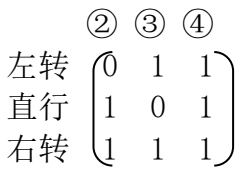


图 8

利用优先级模型对 8:00-9:00 时间段内汽车通过十字路口时浪费绿灯时间进行研究，得到如表 4

时间段	方向	转向	实际车流量 (辆/30 秒)	饱和车流量 (辆/30 秒)	实际车流量所用 时间 (秒)	损失时间 (秒)
8: 00-9:00	东西	直行	35	40	26.25	0.68
		左转	3	35	2.23	0.06
	南北	直行	20	40	15	0.38
		左转	2	35	1.49	0.04

表 4

用表 3 与表 4 中同一时间段内损失时间对比，得到图 9

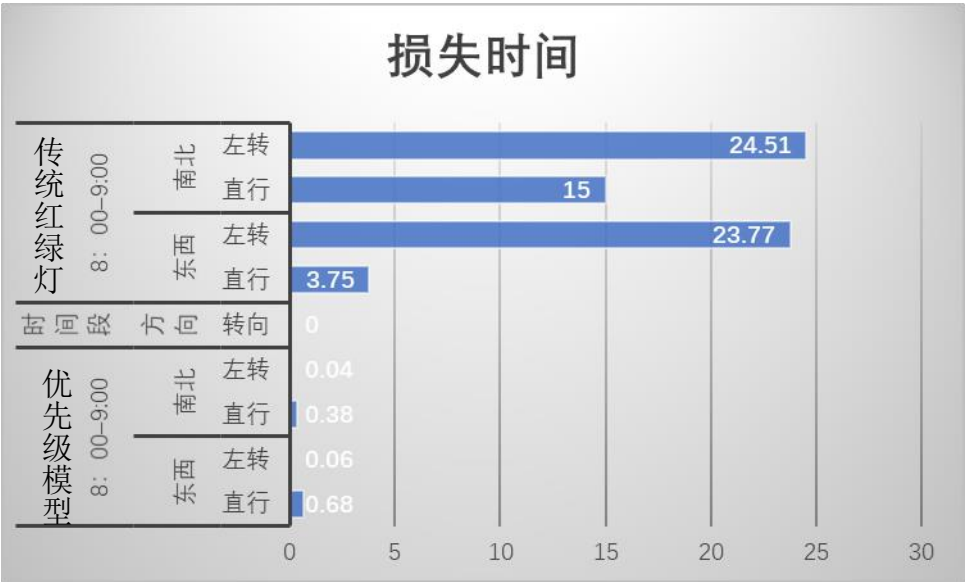


图 9

5.2.2.3 优先级模型结果的分析

由图 9 可清晰看出，取消红绿灯的模型大大的减少了通行损失时间。而图 6、7、8，又解决了取消红绿灯可能会造成碰撞的情况，所以说是可以取消红绿灯，并且这种方法通行效率也比有红绿灯时更高。

5.3 问题 3 的模型建立与求解

问题 2 中为了接受服务车辆的安全，严格限制了会与它有冲突的车道车辆的行驶，但实际上可以改变车辆的通过速度来避免发生碰撞，但直接研究不碰撞的情况较为复杂，所以我们以研究刚好碰撞的情况入手，然后计算出所需碰撞的各条件，如加速度、速度、位移、时间，让车辆的实际加速度等因素不等于碰撞时对应的因素。来达到避免碰撞的效果。针对该问题我们先研究了消防车与其他车道中车辆可能碰撞的情况，再深入研究其他车辆在避免与消防车相撞的前提下，可能发生相互碰撞的情况。

5.3.1 避免其他车道中车辆与消防车碰撞的研究

5.3.1.1 消防车直行

消防车直行时其他车道中车辆可能与其发生碰撞的情况如图 10 所示。图中红点表示可能的碰撞点，数字代表其他车辆不同的行驶情况，黑色矩形代表消防车，绿色线条为消防车行驶道路。

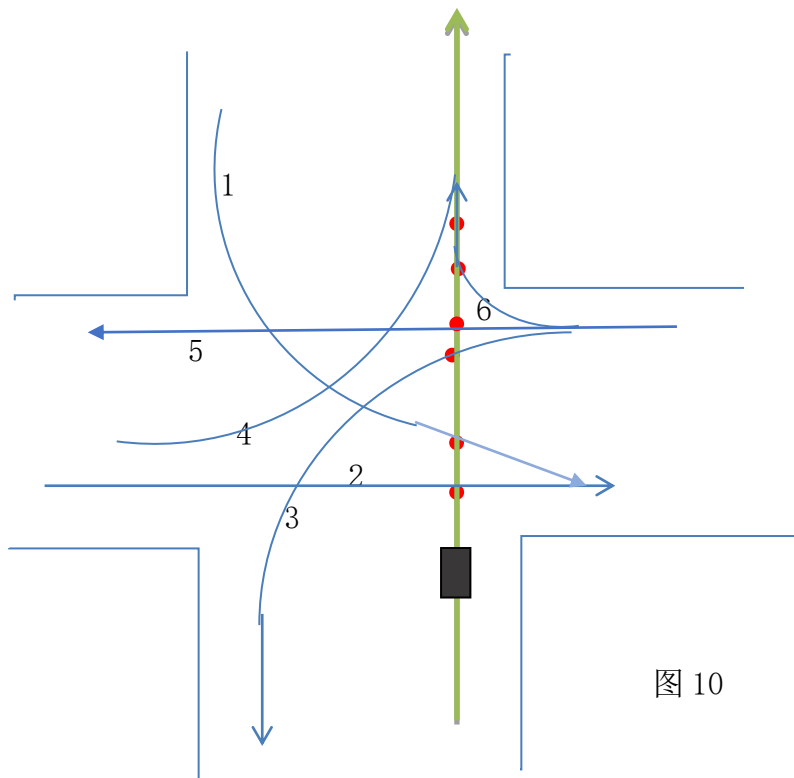


图 10

设消防车在一定时间内通过的路程为 $L_{\text{消}}$ ，同时其他车道的车在此时间段内通过的位移为 $L_{\text{其}}$ 。消防车的速度为 $V_{\text{消}}$ ，其他车道车辆的初速度为 V_0 ，其他车道车辆的末速度为 $V_{\text{其}}$ 。其它车道车辆调整速度时的加速度为 a 。该过程的时间为 t 。且由题意可知 $V_0=15\text{km/h}$, $V_{\text{消}}=40\text{km/h}$ 。

则：

消防车：

$$t = \frac{L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} \quad (1)$$

$$\text{其他车辆：} \quad L_{\text{其}} = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (2)$$

当刚好碰撞时就是在相同时间点，同时到达可能发生的事事故发生点，即联立①、②两个式子得式子③。

$$\text{刚好碰撞时：} \quad L_{\text{其}} = \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (3)$$

若要使两车不碰撞，则

$$L_{\text{其}} \neq \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (4)$$

确定消防车与碰撞点之间的距离时 $L_{\text{其}}$ 与 a 之间存在一定关系。且减速情况下，若速度变化量等于初速度 15km/h 时车速为零，即会造成拥堵，速度的变化量小于车辆的初速度，即

$$a t < V_0$$

$$a > -\frac{V_0 V_{\text{消}}}{L_{\text{消}}}$$

且上网查询资料后可知一般汽车的平均加速度约为 5.88m/s^2 ，即汽车的加速度不能大于 5.88m/s^2

则 a 的取值范围：

$$-\frac{V_{\text{消}} V_0}{L_{\text{消}}} < a < 5.88\text{m/s}^2 \quad (5)$$

由式子③可清晰看出，要使事故发生，消防车与事故点的距离不同，其他车辆跟事故点距离与加速度的比例系数就不同。在式子③的基础上，当消防车直行通过不同的距离时，得到其它车辆通过距离与其加速度之间的关系以及其它车辆加速度的取值范围如表 5，具体的函数图像关系如图 11 所示（因为该图表具有一定规律性，故仅仅做出了一个函数图像）。

车道序号	$L_{\text{消}}$	$L_{\text{其}}$ 与 a 的关系	a 的范围
1	50	$L_{\text{其}}=18+10.33a$	$-0.88<a<5.88$
2	40	$L_{\text{其}}=14.4+6.61a$	$-1.1<a<5.88$
3	80	$L_{\text{其}}=28.8+26.45a$	$-0.55<a<5.88$

4	120	$L_{\text{其}}=43.2+59.5a$	$-0.37 < a < 5.88$
5	66	$L_{\text{其}}=23.76+18a$	$-0.67 < a < 5.88$
6	99	$L_{\text{其}}=35.64+40.5a$	$-0.44 < a < 5.88$

表 5

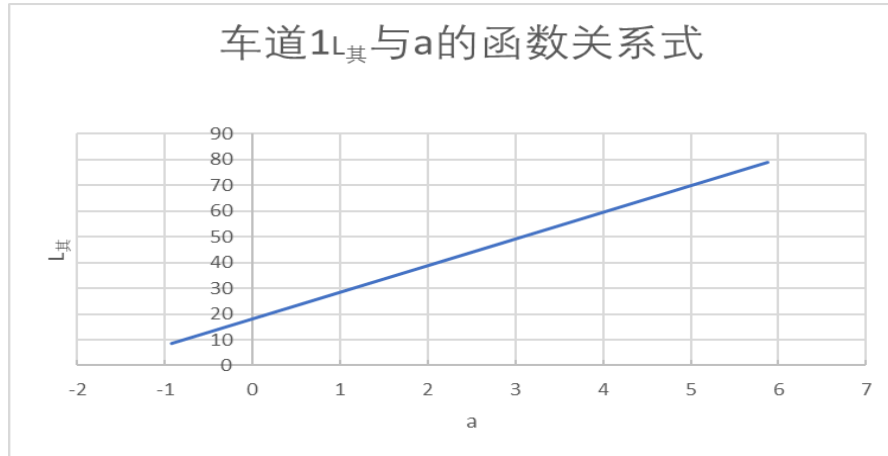


图 11

即 $L_{\text{其}}$ 与 a 之间存在一次函数式关系，在消防车直行距离如表所示情况时，其它车道的车辆若想不与消防车发生碰撞则通过的距离与加速度要满足表中的关系式（ $L_{\text{其}}$ 与 a 的关系），且 a 应该在表中对应范围内。如若表示为函数图像则如图 9，即不可取图中函数图像所有的点。

5.3.1.2 消防车左转

消防车左转时，其他车道中车辆可能与其发生碰撞的情况如图 10 所示。图中红点表示可能的碰撞点，数字代表其他车辆不同的行驶情况，黑色矩形代表消防车，绿色线条为消防车行驶道路。

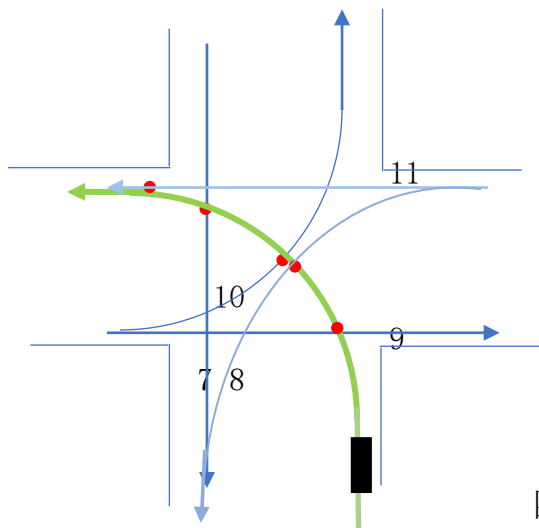


图 12

在解决左转问题时，因不考虑消防车转弯时减速的情况，只是消防车与其他车辆到达事故点的距离不一样。所以我们仍然利用了计算直行时所用的公式。即，以下的三个核心公式

刚好碰撞时：

$$L_{\text{其}} = \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (3)$$

若要使两车不碰撞，则

$$L_{\text{其}} \neq \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (4)$$

加速度范围：

$$-\frac{V_{\text{消}} V_0}{L_{\text{消}}} < a < 5.88 \text{m/s}^2 \quad (5)$$

对此情况我们也举出了几个实际数据的例子，如表 6 所示。

车道序号	$L_{\text{消}}$	$L_{\text{其}}$ 与 a 的关系	a 的范围
7	92	$L_{\text{其}}=33.12+34.98a$	$-0.48 < a < 5.88$
8	60	$L_{\text{其}}=21.6+14.88a$	$-0.73 < a < 5.88$
9	40	$L_{\text{其}}=14.4+6.61a$	$-1.1 < a < 5.88$
10	65	$L_{\text{其}}=23.4+17.46a$	$-0.68 < a < 5.88$
11	108	$L_{\text{其}}=38.88+48.2a$	$-0.41 < a < 5.88$

表 6

5.3.1.3 消防车右转

消防车右转时，其他车道中车辆可能与其发生碰撞的情况如图 11 所示。图中红点表示可能的碰撞点，数字代表其他车辆不同的行驶情况，黑色矩形代表消防车，蓝色线条为消防车行驶道路。

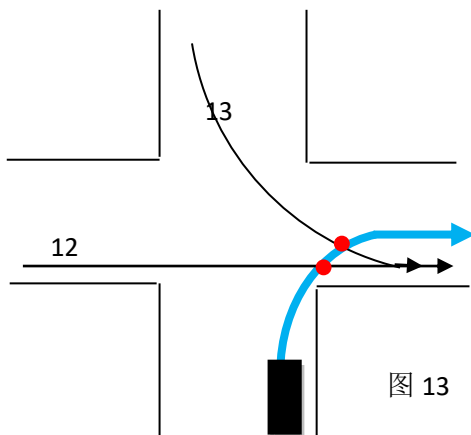


图 13

在解决右转时，与左转相比较只是消防车的走过的路程改变了，但是我们在左转与直行中所用公式中，是把消防车走过路程看为自变量，故该情况也可以用上述的公式：

刚好碰撞时：

$$L_{\text{其}} = \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (3)$$

若要使两车不碰撞，则

$$L_{\text{其}} \neq \frac{V_0 L_{\text{消}}}{V_{\text{消}}} + \frac{a L_{\text{消}}^2}{2 V_{\text{消}}^2} \quad (4)$$

加速度范围：

$$-\frac{V_{\text{消}} V_0}{L_{\text{消}}} < a < 5.88 \text{m/s}^2 \quad (5)$$

对此情况我们也举出了几个实际数据的例子，如表 7 所示。

车道序号	$L_{\text{消}}$	$L_{\text{其}}$ 与 a 的关系	a 的范围
12	50	$L_{\text{其}}=18+10.33a$	$-0.88 < a < 5.88$
13	66	$L_{\text{其}}=23.76+18a$	$-0.67 < a < 5.88$

表 7

5.3.2 其他车辆在不与消防车相撞前提下互相不撞的研究

5.3.2.1 在消防车通过时，可能与消防车相撞的车辆互相之间相撞的研究

消防车直行时可能的相撞的情况如图 14 所示，消防车左转时可能的相撞的情况如图 15 所示，消防车右转时可能的相撞的情况如图 16 所示。针对改模型我们将不同车道上的车令为车 1，车 2 等，车 1 对应 1 道中的车辆，以此类推。

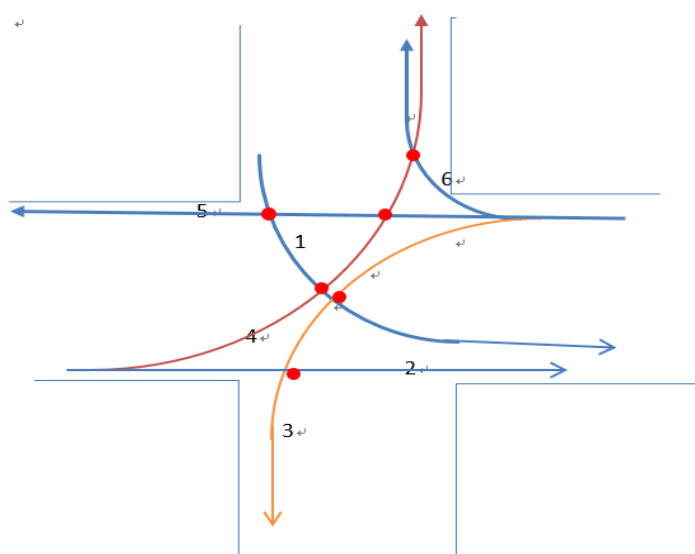


图 14 消防车直行时

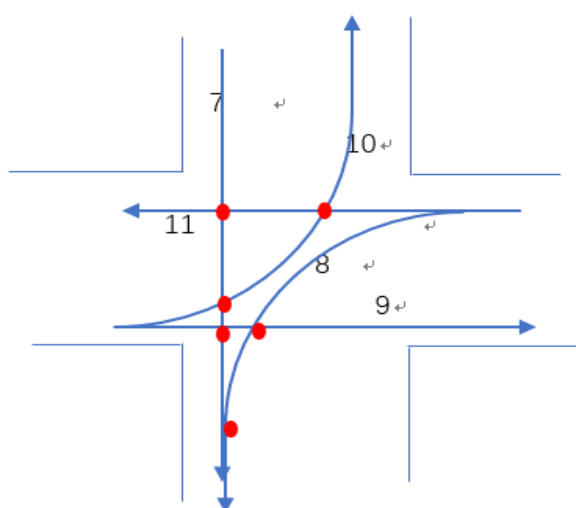


图 15 消防车左转时

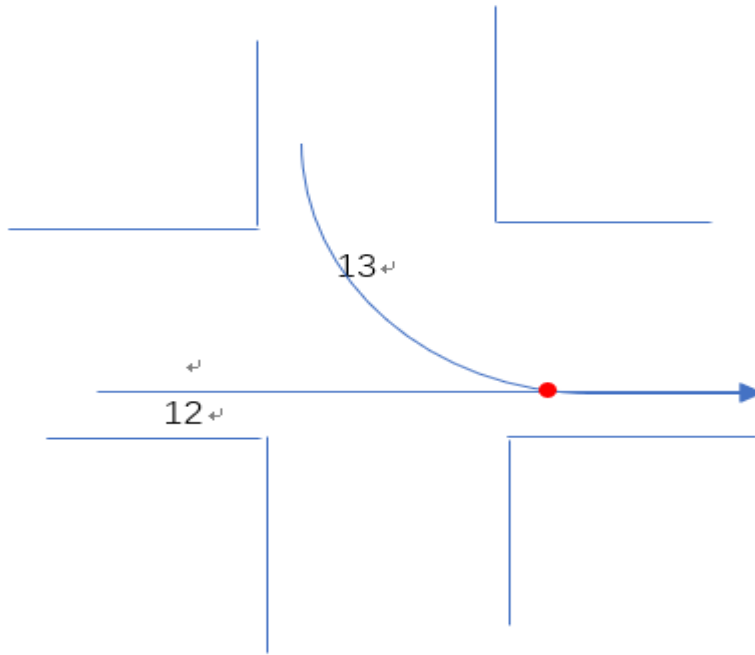


图 16 消防车右转时

假设两车到碰撞点的时间相等均为 t ，到碰撞点的路程分别为 X_1, X_2 ；两车的加速度分别为 a_1, a_2 当两车相撞时满足：

$$X_1 + X_2 = 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_2) \quad (6)$$

即避免两车相撞则应满足：

$$X_1 + X_2 \neq 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_2) \quad (7)$$

推广到一辆车避免与 n 辆车发生碰撞时则应满足：

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 \neq 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_2) \\ X_1 + X_3 \neq 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_3) \\ X_1 + X_4 \neq 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_4) \\ \vdots \\ X_1 + X_n \neq 2V_0t + \frac{1}{2}t^2(a_1 + a_n) \end{array} \right. \quad (8)$$

5.3.2.2 不会与消防车相撞的车辆之间可能碰撞的研究

十字路口中除了与消防车相撞的车辆会互相碰撞外，其它无关车辆也可能会互相碰撞，具体情况如图 17 所示。

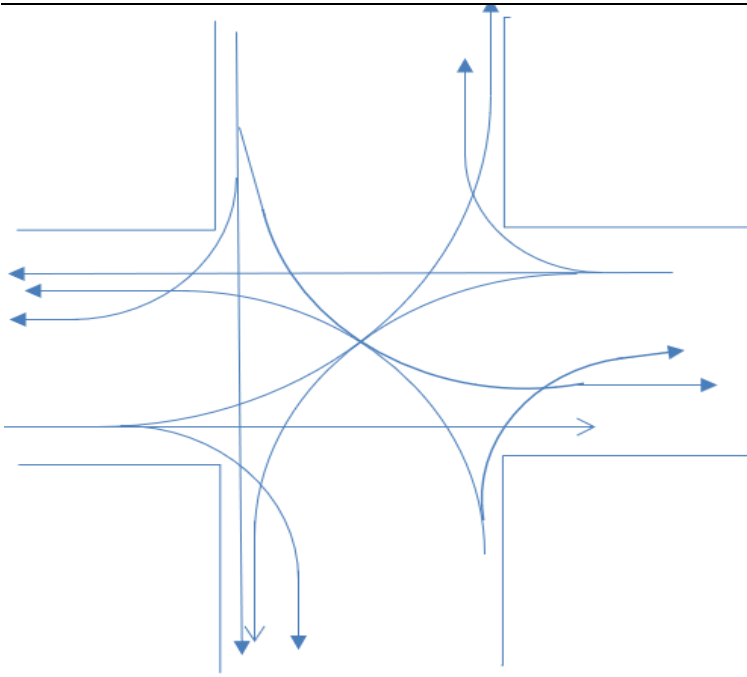


图 17

计算此情况的算法用式子⑧，上面我们已经做出解答，所以在此不再做二次解释。

5.3.3 算法总结

算法总结：若要让全部车辆均安全通过，则对应车辆应满足⑧、⑤、④三个式子。但式子中可变量较多，所以计算时必须规定部分值，来求其他值之间的关系。

5.3.4 对于上述算法的综合实际分析

现在我们对图 14（消防车直行）中车道 1 展开分析：同时考虑各种相撞情况十分复杂，所以该算法我们也使用优先服务的思想，对于车道 1 分析时优先考虑安全通过等级为：

消防车 > 车 1 > 车 5

车 1 > 车 4

车 1 > 车 3

来实现车 1 在不与消防车相撞的前提下不与车 5，车 4，车 3 相撞。黑色矩形为消防车，棕红矩形为车 1，各点间距等情况如图 18 所示：

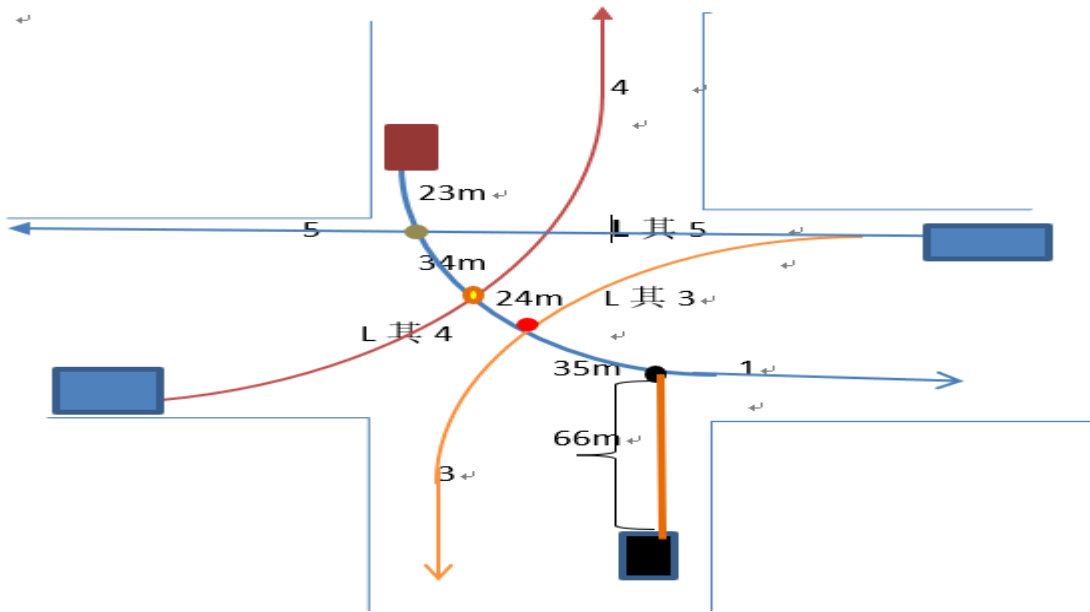


图 18

若车 1 与消防车相撞，则两车应该同时到达图中黑点，即满足式子

$$L_{其} = \frac{V_0 L_{消}}{V_{消}} + \frac{a L_{消}^2}{2 V_{消}^2} \quad (3)$$
 由图 17 中固定的值可求出车 1 加速度 a_1 ：

$$116m = \frac{15m/s * 66m}{11m/s} + \frac{a * 66m^2}{2 * 11m/s^2}$$

可得 $a_1=2$

现，假设车 1 在原位置到相撞处加速度均为 a_1 ，则车 1 到于车 5 相撞点满足式子：

$$L_{其} = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{结合图 17 数据可得：}$$

$$23m = 15m/s * t_1 + \frac{2m/s^2 * t_1^2}{2}$$

又因为 t 大于等于零所以 $t_1=1.4s$

若要使车 5 不与车 1 相撞，则车 5 在车 1 开始启动时，计时的 1.4/s 不能到达相撞点或者在 1.4s 时车 5 通过了该碰撞点。即：

$$L_{其5} \neq V_0 * t_1 + \frac{a * t_1^2}{2}$$

带入数据得

$$L_{其5} \neq 15m/s * 1.4s + \frac{a * 1.4s^2}{2}$$

为了防止车 5 因避让车 1，减速为零的情况，与当时代汽车的平均加速度来得出 a 的值

范围： $-\frac{V_0}{t_{其5}} < a < 5.88m/s^2$ (注： $t_{其5}$ 为车 5 到与车 1 相撞点所需时间)。

就可得出车 5 为避免与车 1 相撞的条件，再与为避免车 5 与消防车相撞的条件联立就可以得到车 5 若要不与车 1 与消防车相撞的条件。即：联立

$$\begin{cases} L_{其5} \neq 23.76 + 18a \\ -0.67 < a < 5.88 \\ L_{其5} \neq 15m/s * 1.4s + \frac{a * 1.4s^2}{2} \\ -\frac{v_0}{t_{其5}} < a < 5.88m/s^2 \end{cases}$$

⑨

解出车 5 不同位置时的加速度不可取的值。假若将方程组⑨做出图像，就是把不等号改为等号，做出两条线，在一定范围内 a 不可取两条线上的点。车 1 与车 3、车 4 的相撞情况就是套用解决车 1 与车 5 相撞的计算方法，所以我们就不进行一一计算。

5.3.5 对于问题三中算法的应用与推广

若要将该方法实际应用，则应将其余的所有汽车在十字路口中可能相撞的点标出如图 19 所示，并解决转弯时车辆相撞角度不同的情况，还要考虑车辆长度不同造成的影响。然后再将⑧、④、⑤。各式联立按优先考虑的方案，解出各车辆不碰撞所需条件。

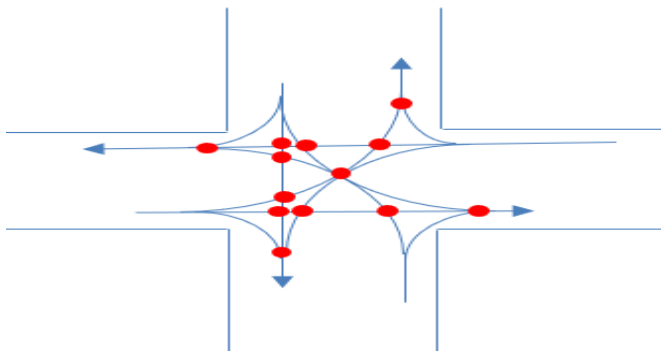


图 19

六、模型的优缺点与改进

6.1 模型的优点

第一阶段模型的优点

(1) 把交通疏散的实际问题转换为数学模型，将实际概念转换为数学符号，对变量之间的关系进行研究，列出变量间的数学关系式。

(2) 利用无线网络信号，设计出动态规划控制算法，调整自动驾驶车辆的行驶方向，计算出红绿灯的开闭时间。

第二阶段模型的优点：

(1) 利用自动驾驶与智能获取路况，打破传统红绿灯交通方式，让司机通过十字路口排队等待时间有一定的规律，使每个司机通过十字路口时等待时间大概相等达到均衡分配的效果，也减少了绿灯的浪费，大大提高了通行效率。

(2) 通过分析消防车与其它车辆发生碰撞时其它车辆通过路程与加速度的关系，为使消防车与其它车辆错开通过，则其它车辆应不满足于发生碰撞时通过路程与加速度的关

系。车辆可以通过改变加速度来提高通行效率。

6.2 模型的缺点

第一阶段模型的缺点：

- (1) 未充分考虑车身大小的差异和车距的不确定性对通过十字路口时间造成的影响。
- (2) 未考虑前方路段堵塞而需换道时所消耗的时间。
- (3) 由于我国规定右转车辆在确保安全的情况下不受红绿灯控制，该模型未充分考虑右转车辆的多少对疏散交通时产生的影响
- (4) 该模型中未考虑行人在过马路时，对模型产生影响。

第二阶段模型的缺点：

- (1) 将车辆看做质点，忽略了其长度与宽度对建立模型造成的影响。
- (2) 由于交通路况与可能发生碰撞情况错综复杂，该模型未能计算出所有可能发生碰撞的情况。

6.3 对于问题 1 借道行驶的进一步分析

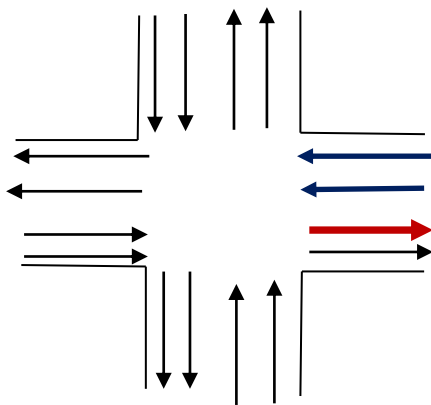


图 20 不堵塞时通行情况

当东边的东向西车道堵塞时，为疏通该出车辆，故将图 20 中标红车道改为与蓝色标识的车道同向，形成图 21 中的虚线车道，让蓝色车道的车辆行驶。且从其他方向来东边时统一走棕色车道。具体的车辆转向分布按 5.4 中所提方案实施。

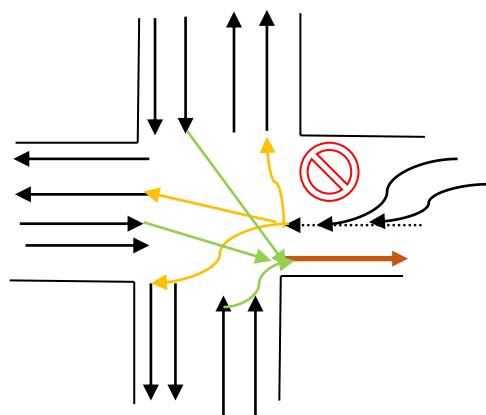


图 21 当道路堵塞时借道行驶情况

七、参考文献

- [1] 左宇航.一种基于动态规划的红绿灯优化控制算法[J].计算机与网络,2019,45(02):69-71.
- [2] 朱晓航,胡佳琳. 交通路口红绿灯智能模糊控制方法研究 [J]. 科技传播, 2014, 6 (21) :216-217.
- [3] 段宣翡,唐泽杭. 基于车流量的红绿灯实时配时算法[J]. 硅谷, 2013, 6 (13) :52-53.
- [4] 周晨阳 周登岳 孔垂烨 车道被占用对城市道路通行能力的影响[J] 2013
- [5] Bando M,Hasebe K,Nakayama A,Etal Dynamical model of traffic gestion and numerical simulation[J].Phys. Rev. E, 1995, 51:1035 - 1042