

一、问题重述

日趋加剧的水污染，已对人类的生存安全构成重大威胁，成为人类健康、经济和社会可持续发展的重大障碍。近年来，我国食品安全方面的恶性、突发性事件屡屡发生。生物性和化学性污染对纯净水安全的影响愈来愈严重。本题主要考虑纯净水的以下危害因素：（按照危害的严重性依次给出）

电导率：纯净水的特征性指标，反映纯净水的纯净程度，及生产工艺控制的好坏，“电导率”根本达不到国家卫生标准要求，不能算做纯净水。

菌落总数：是指纯净水检样经过处理，在一定条件下培养后所取 1ml (g) 检样中所含菌落的总数。它可以作为判定纯净水被污染程度的指标之一。

大肠菌群：反映纯净水加工过程中对大便污染程度的一个指标。数值越高证明污染越严重。

霉菌：食物霉变后产生，直接引起中毒，或产生致癌物质，毒害人体。

完整、有效的纯净水安全风险分析监测预控，为政府及有关部门实施控制措施提供决策依据和技术支持，可以有效提高纯净水安全监管效率和管理水平。某城区共有九家生产并销售纯净水的公司，其中 A 公司和 B 公司规模较大，其余均为小公司。针对该城区提供的近年关于各公司的纯净水检测报告（见附件），请你利用数学建模的方法回答以下问题：

1、结合本问题所给数据，给出纯净水安全风险分析的科学评价方法，确定评价的标准和评价的规则，对该城区所有批次的纯净水进行评判排序。

2、对该城区范围内的监控对象（各公司）按风险度进行排序评价，并对它们分类综合评价，指出各公司产品的主要可能的危害因素，并指出同类公司的实际特点。

3、对检测出的不合格样品成因分析：评价纯净水生产流通环节（归为仓库和销售网点两类）的危害因素以及各个危害指标的分布规律，并通过四类危害指标的分析，讨论 A、B、D 公司的管理状况。

4、国家相关部门每年要面对各种专项检验，对于纯净水专项检验的投入经费有限，已知该城区下一年度投在纯净水方面的检验总批次为 100 个批次，在现有历史数据的基础上，并考虑各公司的实际运行状况，如何设置各公司检验批次的分布，使得抽检方案的针对性最优（即检出的风险性为最大）。

5、结合你的工作，请你给该城区食品安全委员会写一篇短文，阐述你的观点，评价该城区的饮用水安全形势并给出监控对策。

二、符号说明与基本假设

2.1 符号说明

Y ：评价对象的综合评价指标量化值；

x_{ij} ：第 j 个评价对象的 i 项指标归一化处理后的值，其中当 $i=1, 2, 3, 4$ ，且分别表示

电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌， $j=1, 2, \dots, 35$ ；

w_i ：各项评价指标的权重， $i=1, 2, 3, 4$ ；

a_{ij} : 第 j 个评价对象的 i 项指标的实际测量值, 其中当 $i=1, 2, 3, 4$, 且分别表示电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌, $j=1, 2, \dots, 35$;

n_{pq} : 第 p 个厂第 q 个抽样批次的样品数 (依题目中所给数据的先后次序);

D_k : k 公司的饮用水风险度;

a : 将各批次电导率测量结果归一化处理后的值;

b : 将各批次菌落总数测量结果归一化处理后的值;

c : 将各批次大肠菌群测量结果归一化处理后的值;

d : 将各批次霉菌测量结果归一化处理后的值;

η_i : 第 i 批次样品数占公司样品总数的比例;

ξ_j : 某个公司纯净水的不合格率;

B_i : 第 i 项评价指标的标准值;

σ_k : 不同地点各项评价指标的不合格率;

μ_i : 不同时间各项评价指标的不合格率。

2.2 基本假设

(1) 本题仅考虑题目所给的四种纯净水评价指标, 且各评价指标是按照严重性依次增加给出的;

(2) 批次与批号不同, 假设第一问的批次等于 35;

(3) 假设销售网点包括成品库、店内、营业部和货架上;

(4) 批量与检测结果无决定性关系;

(5) 四项指标中只要有一项不符合标准, 即定为不合格。

三、 问题分析和基本思路

3.1 问题分析

仔细审读并分析题目后不难发现, 我们要解决的是饮用水安全隐患因素分析与综合评价的问题。

首先, 我们检索饮用水的评价指标及国家卫生标准, 分析了题目给出的四个纯净水危害因素对人体可能造成的危害, 并且定性分析了它们的相对重要性, 利用层次分析法定量地确定了电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌四种评价指标对纯净水安全影响的权重, 以此来确定评价过程中各指标的相对重要性。接着, 我们在阅读大量文献和小组讨论后认为四项指标的实测值与标准值间的差距可以精确地衡量纯净水的安全系数, 而不是简单的认为水质达不达标就决定了纯净水的安全与否, 因为标准值只是一个阈值, 但我们希望的是水质的各项指标值越小越好。与此同时, 还要考虑四项指标相互关系, 不能只看其一或者将四者独立起来分析。综合考虑各指标对水质的影响, 我们建立了饮用

水水质的综合评价数学模型，科学定量的对饮用水安全风险进行了分析，并根据确定的评价标准规则对该城区所有批次饮用水进行评判排序。然后，我们又从纯净水整体性质出发，认为可以用评价对象与理想最优对象和最差对象的距离来衡量我们所考察的对象所处的位置。定义理想最优对象和最差对象的指标值，仍然是以四个指标值为联系点，得到它们之间的距离，基于这个想法建立了 TOPSIS 模型对该问题求解。

对问题二，一个公司的风险度最直观的形式就是它产品的合格率。所以，我们最初认为可以分别统计各公司样品的合格率，然后对公司分类，可大致分为三类：高风险、中风险和低风险。但是，仔细考虑后就会发现，处在同一风险级别的公司在水质上仍然还有很大的差异，而水质的各项指标值很好地反映了该公司的整体水质水平。因此，在合格率的基础上还要结合各项指标，对公司进行评价排序。所以，我们定义公司的风险度时将这两个因素综合考虑，使其更合理、准确。之后，再对引起每个公司纯净水水质差的原因进行了分析，所用方法就是分别统计各因素在导致水质差的样本数量比例。在此基础上，与其同类公司的影响因素进行对比讨论，分析可能的原因和解决办法。

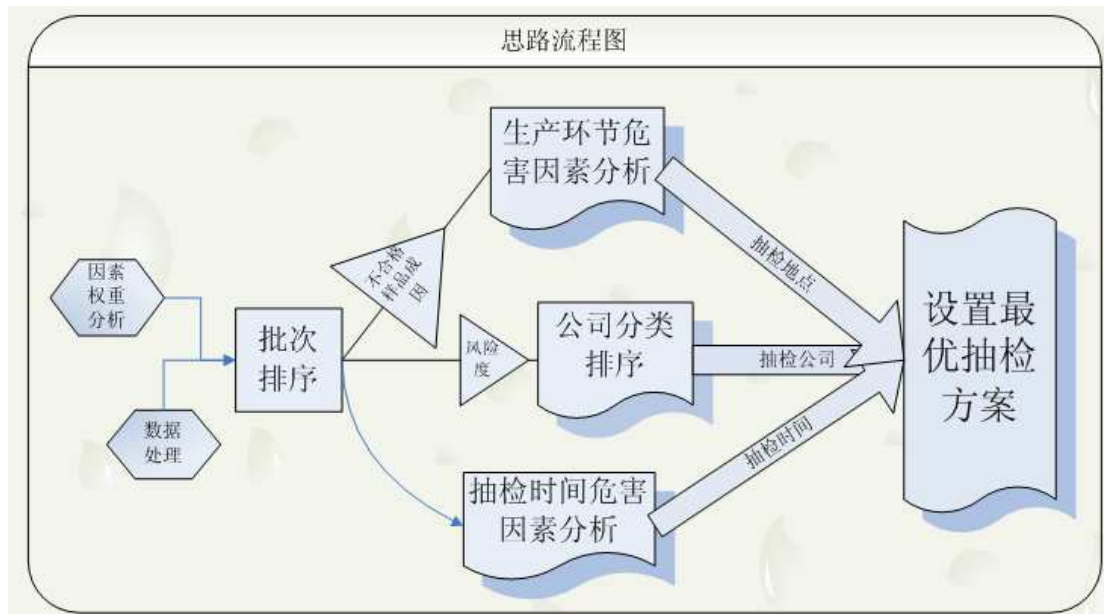
问题三是要求对纯净水流通环节中的危害因素进行讨论，首先就是要将样本抽查地点进行归类。为了避免在字面上存在很大的误解，我们也是查阅了相关资料并讨论，最后给出相应的假设。依然用统计学的方法，考察分别在仓库和销售网点四项指标对纯净水安全的影响规律，最后结合 A、B、D 三家公司的实际情况深入分析了在管理方面导致这些危害的原因。

我们认为问题四最重要的两点，就是构造备选批次和定义筛选标准。在分析了题目所给的数据后，我们发现要确定一次抽查就需要确定抽查的对象（公司）、抽查的时间、抽查的地点。受这点的启发，我们定义了抽查公司、抽查时间、抽查地点三个集合，然后将三者做笛卡尔积就可以构造一个相对完善的备选批次，它由公司、抽查时间、抽查地点三者共同决定。然后定义筛选的指标，由上面批次的构造理论再结合概率论中条件事件发生的概率计算方法，就定义了批次被抽检到有不合格产品的概率，根据题目的要求就是要选出这个概率相对较大的一些批次作为抽检方案。其中有一个难点，就是分别计算批次的三个决定因素的概率。在这个地方，我们首选了样品的不合格率，而对于不合格率的项我们认为小样本在一定程度上不能很好的反映总体的规律，因此我们再次用四个实测指标值补充定义了不合格率。这样，这个问题就可以很好的解决了，按照批次被抽检到有不合格产品的概率从大到小选出前一百个作为我们最优的抽检方案建议。

最后，我们把自己的分析和结论用通俗的语言表达出来，给该城市饮用水的监管部门给出警示和建议。

3.2 思路流程图

我们整篇文章的建模思路如下流程图所示：



图（1）建模思路流程图

四、模型的准备

4.1 权重值的确定

在饮用水的安全评价中，各个指标对其卫生质量的影响程度是不同的，在评价过程中需要确定指标的相对重要性，其相对重要性的度量值即为权重或权系数。指标权重的确定在评价问题的求解过程中具有举足轻重的地位，科学合理地确定指标的权重，直接关系到评价结果的可靠性与正确性。目标权重的确定方法很多，如层次分析法、熵值法、对于本题我们采用了层次分析法来给各指标赋予权重。

层次分析法的核心问题是排序，包括递阶层次结构原理、测度原理和排序原理。下面分别予以介绍：

(1) 递阶层次结构原理

一个复杂的结构问题可分解为它的组成部分或因素，及目标、准则、方案等，每一个因素称为元素。按照属性的不通可以把这些元素分组形成互不相交的层次，上一层次的元素对相邻的下一层次的全部或部分元素起支配作用，形成按层次自上而下的逐层支配关系，具有这种性质的层次称为递阶层次。

(2) 测度原理

决策就是要从一组已知方案中选择理想的方案，而理想方案一般是在一定的准则下通过使用效用函数极大化而产生的。然而对于社会、经济系统的决策模型来说，常常难以定量测度。因此，层次分析法的核心是决策模型中各因素的测度化。

层次分析法提供了测度决策因素的基本方式，这种方式充分利用人的经验和判断，采用相对标度进行两两比较，从而能够统一对有形与无形，可定量与不可定量的因素进行测度。在某种程度上，层次分析解决了社会、经济系统某些现象的测度和建模问题，提出了决策思维的一种新方法。

(3) 排序原理

层次分析法的排序问题，实质是一组元素两两比较其重要性，计算元素相对重要性的测度问题。这里不妨假设由元素两两比较的道德重要性测度表示为判断矩阵：

$$A = (r_{ij})_{n \times n} \quad (4-1)$$

显然，判断矩阵具有性质：① $r_{ij} > 0$ ；② $r_{ij} = (r_{ji})^{-1}$ 。称满足性质①和性质②的方阵为正的互反阵。若一个 n 阶正的互反阵 A 满足：

$$r_{ij} \times r_{ji} = r_{ik}, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n \quad (4-2)$$

则称 A 为一致性矩阵。在排序原理中，通常不能保证判断矩阵为一致性矩阵，但有一个正的互反阵是一致性矩阵的充要条件。

在判断矩阵 A 为一致性矩阵时，通常由

$$A\omega = \lambda_{\max} \omega \quad (4-3)$$

来确定权系数 $\omega(A) = (\omega_1(A), \dots, \omega_n(A))^T$ ，其中 λ_{\max} 为 A 的最大特征值，通常称为主特征值，而 ω 是相应的特征向量，通常称为特征向量，其分量满足 $\sum_{i=1}^n \omega_i(A) = 1$ ，它们可用 Matlab 命令计算得到（程序见附录）。

特征根方法的合理性是基于正矩阵的 Perron 定理。由此定理知，正的互反矩阵存在唯一的正实数的最大特征根，它所对应的特征根向量可以由全为正的向量组成，经归一化后，上述特征向量是唯一的。

层次分析法的具体步骤：

将各个因素两两比较确定其相对重要性构造判断矩阵。常用的是 Saaty 比较尺度，取值可以是 1, 2, ..., 9 及其 1, 1/2, ..., 1/9，这是因为人们在进行定性成对比较时常见有 5 种明显的等级（根据心理学的研究成果）（见下表）

表（4.1） 尺度 a_{ij} 的含义

Y_i/Y_j	同等重要	略为重要	明显重要	尤为为重要	异常重要	等级之间
r_{ij}	1	3	5	7	9	2, 4, 6, 8

由于电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌四项指标按照危害的严重性依次增大，综合考虑这些因素，我们得到如下判断表及判断矩阵。

表（4.2） 准则层对目标层判断表

Z	电导率	菌落总数	大肠菌群	霉菌
电导率	1	1/3	1/5	1/7
菌落总数	3	1	3/5	3/7
大肠菌群	5	5/3	1	5/7
霉菌	7	7/3	7/5	1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ 3 & 1 & 3/5 & 3/7 \\ 5 & 5/3 & 1 & 5/7 \\ 7 & 7/3 & 7/5 & 1 \end{bmatrix}$$

这样构造出来的判断矩阵，其中的数据是依据实际情况自行设计的，衡量判断矩阵的合格标准时它是否具有有一致性。由于客观事物的复杂性和人的认识的多样性，完全一致的判断往往是不现实的，一般只需近似地满足一致性即可。在给出判断矩阵后应进行一致性检验，其方法如下。

a. 计算一致性指标 CI 。公式为

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (4-4)$$

式中， n 为判断矩阵 A 的阶数， λ_{\max} 为 A 的最大特征值。

b. 查询平均随机一致性指标 RI (见表 2)

表 (4.3) Saaty 的一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

c. 计算一致性比例 CR 。公式为

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (4-5)$$

理论说明：当 $CR < 0.1$ 时，一般认为判断矩阵 A 的一致性可以接受；否则就需要重新进行比较，对 A 加以调整，使之具有满意的一致性。

用 MATLAB 求得 $\lambda_{\max} = 4$ ， $CI = 0$ ， $RI = 0$ ，所以认为满足一致性指标，判断矩阵是可行的。

最大特征值对应的权向量为 $W = (0.0625, 0.1875, 0.3125, 0.4375)$

4.2 各项指标的归一化处理

评价饮用水水质好坏的四项指标有电导率、菌落总数、大肠菌群和霉菌。本题采用归一化处理方法，综合考虑这四项指标，完整系统的评价各批次或公司的饮用水卫生安全状况现。以综合评价 A 公司饮用水状况为例，来介绍四项指标的归一化处理方法。将 A 公司各批次样品的指标实测值带入下述公式：

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} - \min_j \{a_{ij}\}}{\max_j \{a_{ij}\} - \min_j \{a_{ij}\}} \quad (4-6)$$

处理后得到的结果如下表所示：

表（4.4）A 厂四项指标实测值及归一化处理后的数据

电导率		菌落总数		大肠菌群		霉菌和酵母菌	
a_{ij}	x_{ij}	a_{ij}	x_{ij}	a_{ij}	x_{ij}	a_{ij}	x_{ij}
7.23	0.0747	35	0.1944	1	0.5	0	0
5.35	0.0522	160	0.8889	0	0	0	0
4.23	0.0387	2	0.0111	0	0	0	0
5.23	0.0507	2	0.0111	1	0.5	0	0
3.97	0.0356	0	0	0	0	0	0
3.37	0.0284	0	0	0	0	0	0
11.19	0.1222	20	0.1111	0	0	1	0.3333
18.32	0.2077	24	0.1333	1	0.5	0	0
25.2	0.2902	0	0	0	0	0	0
27.8	0.3213	0	0	0	0	0	0

五、 模型的建立

5.1 问题一

对于本问题，可以有多种方法对饮用水的安全卫生进行综合评价，我们采用了两种方法分别建立两个数学模型对其进行分析。

5.1.1 模型一 层次分析法

我们重点在于确定饮用水的各评价指标权重大小，然后对各指标的相应数据统计分析，建立饮用水水质的综合评价数学模型，进而给出纯净水安全风险分析的科学评价方法，确定评价的标准和评价的规则，并对该城区所有批次的纯净水进行评判排序。

关于各评价指标权重大小的确定，我们采用了层次分析法，并得出电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌四种指标的权重 w_i 分别为：0.0625、0.1875、0.3125 和 0.4375。将饮用水各项评价指标归一化处理后，得到对 j 评价对象的评价数学模型为：

$$Y_j = \sum_{i=1}^4 (w_i \times x_{ij}) \quad (5-1)$$

注：从原始数据表中我们可以看出，B 公司纯净水的各项指标都较好，但批次 6 的菌落总数为 $800cfu/ml$ ，远远超过最大允许值 $20cfu/ml$ ；考虑到该厂其它抽检批次的水质均较好，我们认为出现这种情况只是偶然，因此我们以菌落总数中的次大者的值记之，即该批次的菌落总数为 $180cfu/ml$ 。

Y_j 的值越小表示饮用水的水质越好，越符合安全卫生标准。

5.1.2 模型二 TOPSIS 法（逼近理想解排序法）

TOPSIS 法是系统工程中有限方案多目标决策分析的一种常用方法。是基于归一化

后的原始数据矩阵，找出有限方案中的最优方案和最劣方案（分别用最优向量和最劣向量表示），然后分别计算诸评价对象与最优方案和最劣方案的距离，获得各评价对象与最优方案的相对接近程度，以此作为评价优劣的依据

(1) 基本原理

TOPSIS 法是 Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution 的缩写，即逼近于理想解的技术，它是一种多目标决策方法。方法的基本思路是定义决策问题的理想解和负理想解，然后在可行方案中找到一个方案，使其距理想解的距离最近，而距负理想解的距离最远。

理想解一般是设想最好的方案，它所对应的各个属性至少达到各个方案中的最好值；负理想解是假定最坏的方案，其对应的各个属性至少不优于各个方案中的最劣值。方案排队的决策规则，是把实际可行解和理想解与负理想解作比较，若某个可行解最靠近理想解，同时又最远离负理想解，则此解是方案集的满意解。

(2) 距离的测度

采用相对接近测度。设决策问题有 m 个目标， n 个可行解；并设该问题的规范化加权目标的理想解是 Z_i^+ ，其中

$$Z_i^+ = (Z_1^+, Z_2^+, Z_3^+, Z_4^+) = \{\max_j Z_{ij} \mid j=1, 2, \dots, 35\} \quad (5-2)$$

那么用欧几里得范数作为距离的测度，则从任意可行解 Z_{ij} 到 Z_i^+ 的距离为：

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^+)^2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5-3)$$

式中， Z_{ij} 为第 j 个目标对第 i 个方案（解）的规范化加权值。

同理，设 $Z_i^- = (Z_1^-, Z_2^-, Z_3^-, Z_4^-) = \{\min_j Z_{ij} \mid j=1, 2, \dots, 35\}$ 为问题的规范化加权目标的负理想解，则任意可行解 Z_{ij} 到负理想解 Z_i^- 之间的距离为：

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^-)^2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5-4)$$

那么，某一可行解对于理想解的相对接近度定义为：

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \quad 0 \leq C_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n \quad (5-5)$$

于是，若是理想解，则相应的 $C_i = 1$ ；若是负理想解，则相应的 $C_i = 0$ 。愈靠近理想解， C_i 愈接近于 1；反之，愈接近负理想解， C_i 愈接近于 0。那么，可以对 C_i 进行排队，以求出满意解。

5.2 问题二

本题涉及到风险度的问题，我们认为风险度与饮用水各项指标的不达标率有着必要

联系，各项指标的超标率越多说明该饮用水对人体带来的危害越大，所以卫生安全的风险度越大。首先，根据第一问的综合评价数学模型求出公司某一批次的未达标状况，然后按照该批次样品数占总样品数的比例进行归一化处理，所得数据即为风险度，我们定义风险度的数学模型为：

$$D_k = \sum_{i=1}^t Y_{ik} \eta_{ik} \quad (5-6)$$

其中

$$Y_{ik} = a_i w_1 + b_i w_2 + c_i w_3 + d_i w_4 \quad (5-7)$$

注：从原始数据表中我们可以看出，B 公司纯净水的各项指标都较好，但批次 6 的菌落总数为 $800cfu/ml$ ，远远超过最大允许值 $20cfu/ml$ ；考虑到该厂其它抽检批次的水质均较好，我们认为出现这种情况只是偶然，因此我们不考虑它对 B 厂的影响。

5.3 问题三

对于检测出的不合格样品，我们将采样地点分为仓库和销售网点两类，其中仓库类包括仓库、货架和厂成品库，销售网点类包括成品库、营业部、店内和货架上。我们将仓库类和销售网点类的原始数据分别提取出来，见下表格所示：

表（5.1）销售网点类的原始数据

受检方	采样点	样品数	电导率 (≤ 10)		菌落总数 (≤ 20)		大肠菌群 (≤ 3)		霉菌和酵母菌 (不得检出)	
			结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单判定
H	成品库	3	8.02	1	140	0	0	1	未检出	1
A	成品库	3	5.35	1	160	0	0	1	未检出	1
D	成品库	3	5.21	1	180	0	1	1	3	0
H	店内	1	27.2	0	1	1	0	1	未检出	1

表（5.2）库类的原始数据

受检方	采样地点	样品数量	电导率 (<=10)		菌落总数 (<=20)		大肠菌群 (<=3)		霉菌和酵母菌 (不得检出)	
			结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单项判定
B	厂成品库	3	3.14	1	800	0	1	1	未检出	1
A	厂成品库	3	7.23	1	35	0	1	1	未检出	1
A	仓库	1	11.19	0	20	1	0	1	1	0
A	仓库	1	18.32	0	24	0	1	1	未检出	1
I	仓库	2	21.3	0	45	0	0	1	未检出	1
D	仓库	1	3.75	1	34	0	0	1	未检出	1
D	仓库	1	84.4	0	0	1	0	1	未检出	1
H	仓库	1	32.7	0	28	0	1	1	未检出	1
I	仓库	1	20.1	0	2	1	1	1	未检出	1
A	仓库	3	25.2	0	0	1	0	1	未检出	1
A	仓库	5	27.8	0	0	1	0	1	未检出	1
D	仓库	1	5.02	1	15	1	0	1	2	0

仔细分析数据，仓库类样品总数为 23，其中电导率不达标的样品数是 15，菌落总数不达标的数目是 11，大肠菌群全部符合要求，霉菌的不达标样品数是 2；销售网点类样品总数为 10，其中电导率不达标的样品数是 1，菌落总数不达标的数目是 9，同样也是大肠菌群全部符合要求，霉菌的不达标样品数是 3。由各指标样品数占总样品数的比例来解决本题，即根据如下所示公式求解危害指标的分部规律：

$$\eta_i = \frac{n_i}{m} \quad (5-8)$$

式中 n_i —第 i 受检方的样品数目

m —某一类受检饮用水的样品总数目

对于 A、B、D 公司的管理状况的讨论，我们首先提取出不合格产品检测原始数据，如表（5.3）所示。然后我们按照上述方法求出电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌分别造成 A、B、D 公司纯净水不合格的可能性，而后分析深入三个公司的管理状况。

表（5.3）A、B、D 公司的不合格产品分析原始数据

			电导率 (≤ 10)		菌落总数(≤ 20)		大肠菌群(≤ 3)		霉菌和酵母菌(不得检出)	
受检方	采样地点	样品数量	结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单项判定	结果	单项判定
B	厂成品库	3	3.1	1	800	0	1	1	未检出	1
D	成品库	3	5.2	1	180	0	1	1	3	0
D	仓库	1	3.8	1	34	0	0	1	未检出	1
D	仓库	1	84	0	0	1	0	1	未检出	1
D	仓库	1	5	1	15	1	0	1	2	0
A	厂成品库	3	7.2	1	35	0	1	1	未检出	1
A	成品库	3	5.4	1	160	0	0	1	未检出	1
A	仓库	1	11	0	20	1	0	1	1	0
A	仓库	1	18	0	24	0	1	1	未检出	1
A	仓库	3	25	0	0	1	0	1	未检出	1
A	仓库	5	28	0	0	1	0	1	未检出	1

5.4 问题四

第四问要求我们在分析了各种影响纯净水安全的因素后确定下一年 100 个检验批次的分布情况，目的是使抽检有很强的针对性，即对存在高风险的批次进行检验。我们在前三问的基础上加入了抽检时间对纯净水安全的影响，也就是说，综合公司、抽检时间、抽检地点三个因素来确定纯净水的安全风险。

（1）确定备选批次

在这里我们选取了 A 到 I 九个公司，夏季检测（7、8、9 月）和冬季检测（12、1 月）两个抽检时间，仓库、厂成品库、成品库、营业部内、店内、货架和货架上七个抽检地点。

定义三个集合：公司集合 Q ，抽检时间集合 R ，抽检地点集合 T ，即

$$Q = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\} = \{q_j, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$R = \{\text{夏季}, \text{冬季}\} = \{r_i, i = 1, 2\}$$

$$T = \{\text{仓库}, \text{厂成品库}, \text{成品库}, \text{营业部内}, \text{店内}, \text{货架}, \text{货架上}\} \\ = \{t_k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

将这三个集合做笛卡尔积就得到了备选批次集 W ，即

$$W = Q \otimes R \otimes T$$

$$= \{(q_j, r_i, t_k) | q_j \in Q, r_i \in R, t_k \in T, j = 1, 2, \dots, 9, i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 7\} \quad (5-9)$$

这里由公司、抽检时间、抽检地点构成的三维向量共有 $9 \times 2 \times 7 = 126$ 个，即代表我们确定的备选抽检批次共 126 个。

(2) 确定风险性指标

既然一个批次由公司、抽检时间和抽检地点三个因素确定，那么，批次的风险性就取决于这三个因素的共同作用。下面，我们先分析三个因素分别对纯净水安全造成的影响。

A、公司因素

在第二问中，我们详细的讨论了各公司所生产的纯净水的质量。对所抽检的样本中各公司的纯净水的不合格率进行统计可以有下表，此过程在第二问中已做。

表（5.4）各公司的不合格率

公司	A	B	C	D	E	F	G	H	I
不合格率 ξ_j	0.8	0.19	0	1	0	0	0	1	1

但是，我们考虑到样本数据有可能不准确，特别是不合格率为 0 的公司，需要 we 结合该公司纯净水的各项指标值进行讨论。在这个地方，我们对不合格率为 0 的公司补充定义其纯净水的不合格率（不合格的可能性）。

由于合格纯净水的各项指标的实测值都小于标准值，而且实测值越大纯净水的风险越大，我们用下面的式子来表示某个公司纯净水的不合格率

$$\xi_j = 1 - \sum_{i=1}^4 \frac{B_i - a_{ij}}{B_i} \times w_i \quad (5-10)$$

其中 $j = C, E, F, G$ ，表示公司 C, E, F, G， a_{ij} 和 w_i 的含义同前面的定义， B_i 表示第 i 项指标的标准值，见下表：

表（5.5）各项评价指标的标准值

指标	电导率	菌落总数	大肠菌群	霉菌和酵母菌
B_i	10	20	3	0

B、抽检时间因素

仔细分析题目所给的数据后，我们发现检测时间都是在夏季或者冬季，而且据文献资料反映，在这两个季节纯净水的水质会有所不同，因此，我们按夏季和冬季两个时间统计纯净水的不合格率，统计结果如下：

表（5.6）不同时间各项评价指标的不合格率

	夏季（7、8、9）	冬季（12、1）
电导率不合格率	4/47	12/23
菌落总数不合格率	19/47	1/23
大肠菌群不合格率	0/47	0/23
霉菌不合格率	4/47	1/23

以夏季电导率不合格率为例，题目所给的数据中在夏天检测的总样本是 47 个，而在这 47 各种电导率不合格的有 4 个。

考虑到判断一个纯净水样本是否合格时依据的标准，即一项指标不合格就认为这个样本不合格，在把四项指标合成为夏季纯净水的合格率是对四项指标值取大，即夏季纯净水的不合格率计算方法为

$$\mu_1 = \frac{4}{47} \vee \frac{19}{47} \vee \frac{0}{47} \vee \frac{4}{47} = \frac{19}{47} \quad (5-11)$$

冬季纯净水的不合格率计算方法为

$$\mu_2 = \frac{12}{23} \vee \frac{1}{23} \vee \frac{0}{23} \vee \frac{1}{23} = \frac{12}{23} \quad (5-12)$$

C、抽检地点因素

同抽检时间一样分别对七个抽检地点的纯净水的不合格率进行统计，得到下表：

表（5.7）不同地点各项评价指标的不合格率

	仓库	厂成品库	成品库	营业部内	店内	货架	货架上
电导率	15/27	0/6	0/9	0/1	1/6	0/18	0/3
菌落总数	5/27	6/6	9/9	0/1	0	0/18	0/3
大肠菌群	0/27	0/6	0/9	0/1	0	0/18	0/3
霉菌	2/27	0/6	3/9	0/1	0	0/18	0/3
不合格率 σ_k	15/27	1	1	0	1/6	0	0

对于上面 $\sigma_k = 0$ 的项我们采用同公司因素一样的处理方法补充定义其不合格率，其计算公式为

$$\sigma_k = 1 - \sum_{i=1}^4 \frac{B_i - a_{ik}}{B_i} \times w_i \quad (5-13)$$

其中 $K =$ 营业部内、货架、货架上。

我们定义批次 (q_j, r_i, t_k) 被检测出并不合格纯净水的可能性为

$$P_{jik} = \xi_j \times \mu_i \times \sigma_k \quad (5-14)$$

依据此定义就可以计算我们在上面够造的 126 个备选批次被检测出有不合格产品的概率，然后依此概率排序，从大到小选出风险相对较大的钱一百个批次作为建议的抽验方案。

六、模型的求解

6.1 问题一的求解

本题依据 GB17324-2003《瓶（桶）装饮用纯净水的卫生标准》和《定型包装饮用水企业生产卫生规范》进行检测和评价，检测项目有电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌四种指标，规定电导率不得大于 10，菌落总数不得多于 20，大肠菌群数目不得大于 3，霉菌和酵母应该满足不得检出；其中一项不符合即定为该饮用水卫生质量不合格。

6.1.1 模型一的求解

由于需要对该城区所有批次的纯净水进行评判排序，所以还要将不同批次纯净水的安全状况进行量化比较。我们根据题目附录所给数据分为 35 个批次，分别带入模型

$$Y_j = \sum_{i=1}^4 (w_i \times x_{ij})$$

求解各个评价对象的 Y_j ，结果见下表：

表（6.1）各种批次饮用水评价排序情况

批次	33	23	18	15	1	2	25	5	20	16	13	17
Y_j	0.00061	0.00064	0.0018	0.0022	0.0022	0.0022	0.0027	0.0031	0.0035	0.0044	0.0045	0.0064
批次	32	34	19	26	28	27	29	8	21	3	11	12
Y_j	0.01814	0.0201	0.0207	0.0213	0.0375	0.0621	0.0625	0.1511	0.1567	0.1584	0.1586	0.1595
批次	14	9	31	22	24	7	30	35	4	6	10	
Y_j	0.1615	0.1699	0.1726	0.1743	0.1942	0.1974	0.2092	0.3103	0.3182	0.3454	0.7844	

6.1.2 模型二的求解

在原始数据指标中，电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌四项指标的数值越低越好，这三个指标称为低优指标。低优指标可转化为高优指标，其方法为是绝对数低优指标可使用倒数法，是相对数低优指标，可使用差值法。

首先，低优指标可转化为高优指标， $f_{ij} = 1 - x_{ij}$ ，利用公式 $Z_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_{ij}^2}}$ ，进行归一

化处理。

由 $Z_i^+ = (Z_1^+, Z_2^+, Z_3^+, Z_4^+) = \{\max_i Z_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, 35\}$ 和

$$Z_i^- = (Z_1^-, Z_2^-, Z_3^-, Z_4^-) = \{\min_i Z_{ij} \mid j = 1, 2, \dots, 35\}$$

得最优方案和最劣方案，进而计算

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^+)^2}, \quad S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (Z_{ij} - Z_j^-)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{最后由 } C_i = \frac{S_i^-}{S_i^- + S_i^+} \text{ 得 } C_i$$

表（6.2）TOPSIS 法求得的所有批次纯净水的评判排序表

批次	33	23	5	1	2	18	15	20	13	17	25	16
C_j	0.0049	0.0051	0.0083	0.01	0.01	0.0141	0.0177	0.0199	0.02	0.0207	0.0211	0.027
批次	26	28	32	19	34	27	22	21	3	11	12	14
C_j	0.0543	0.0921	0.1343	0.1446	0.1473	0.1649	0.168	0.2292	0.2311	0.2313	0.2314	0.2331
批次	7	31	24	35	30	8	9	29	4	6	10	
Y_j	0.2578	0.2581	0.2676	0.2689	0.3079	0.3159	0.3436	0.3661	0.38627	0.4382	0.5753	

结果分析（具体排序见附录表一）：

由上述计算可以看出，由TOPSIS法与层次分析法求得的计算结果比较相近，部分批次排序存在微小差距，但29批次存在的差距较大。查源数据表知该批次的电导率很大，为 $84.4\mu m/cm$ 。由于有层次分析法确定的权重存在较大的主观因素，在层次分析法中电导率的权重较小，虽然电导率实测值较大，但对综合评价指标的影响较小，因此排序较靠前。

6.2 问题二的求解

对于风险度数学模型的求解，我们首先将公司各批次的评价指标检测值带入公式：

$$Y_{ik} = a_i w_1 + b_i w_2 + c_i w_3 + d_i w_4$$

得到该批次样品的评价指标量化值，然后结合该批次样品在本公司总样品数所占比例，综合分析后得到本公司的饮用水风险度，即将 Y_{ik} 带入数学模型：

$$D_k = \sum_{i=1}^t Y_{ik} \eta_{ik}$$

求得各公司的风险度后，按照由大到小的顺序排列如下表所示：

表（6.3）各公司风险度及水质状况

水质	0.00224	0.003125	0.1584	0.3167	0.0397	0.09	0.099	0.137	0.461
不合格率	0	0	0	0	0.1875	0.8	1	1	1
风险度	0	0	0	0	0.0074	0.072	0.099	0.137	0.461
公司名称	E	G	F	C	B	A	I	H	D

根据各公司的饮用水风险度及合格率情况，我们将该城区范围内的监控对象分为三类：达标率为百分百的有C、E、F、G；达标率居中等的有A、B；达标率为零的有D、H、I。对于A公司，分析数据可知电导率和菌落总数未达标率较高，需改进加工工艺；B公司的菌落总数远远超出国家标准，而其他指标都符合要求；C公司达标，但是大肠

菌群的数量稍多一些；D公司饮用水未达标准，除大肠菌群外其余指标都超过国家标准，其中霉菌也比别的公司多；E、F、G公司虽然规模小但各项指标都满足饮用水的安全卫生要求，其中F公司电导率相对高一些，G公司菌落总数相对多一些；H公司电导率和菌落总数远超过标准；I公司饮用水的电导率和菌落总数未达标。综合分析可知，第一类公司产品的各项指标都符合标准，且都是小规模公司；第二类公司都是大规模公司，并且都是菌落总数未达标；第三类公司也是小规模公司，除大肠菌群符合标准外其余几项标准都远远超过卫生安全要求，需要改进加工工艺。

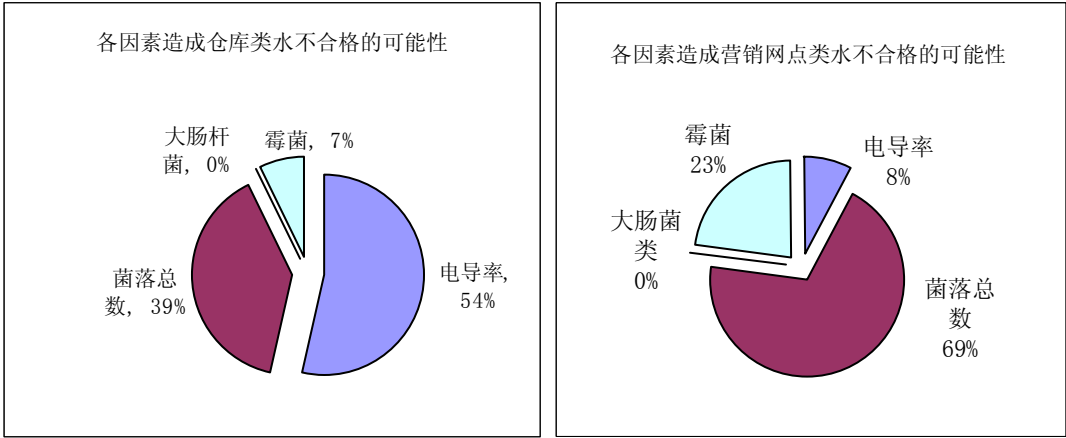
6.2 问题三的求解

根据模型的建立中分析，我们可以得到电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌分别造成仓库类和营销网点类纯净水不合格的可能性如下表所示：

表（6.4）各评价指标造成饮用水不合格的可能性

	电导率	菌落总数	大肠菌群	霉菌
仓库类	15/23	11/23	0/23	2/23
销售网点类	1/10	9/10	0/10	3/10

由于不合格饮用水中的各评价指标可能会同时出现不达标的情况，而我们规定只要有一项指标不达标即规定该样品不合格，所以各评价指标造成饮用水不合格的可能性之间存在重叠关系，最终我们以上表数值的比值作为危害指标的分布规律。因此，仓库类样品的危害指标电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌的分布规律为 15：11：0：2，销售网点类危害指标的分布规律为 1：9：0：3。如下图所示：



图（2）各因素造成饮用水不合格的可能

同样，得出电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌分别造成 A、B、D 公司纯净水不合格的可能性如下表所示：

表（6.5）各评价指标造成饮用水不合格的可能性

	电导率	菌落总数	大肠菌群	霉菌
A 公司	10/16	7/16	0/16	1/16
B 公司	0/3	3/3	0/3	0/3
D 公司	1/6	4/6	0/6	4/6

有上述分析可知，A 公司不合格样品成因中电导率、菌落总数、大肠菌群、霉菌所占程度为 10：7：0：1，即电导率影响最大，其次是菌落总数，最后是霉菌。电导率是

瓶装饮用纯净水标准的特有指标，水中含盐量越大,电导率越大；水越纯净,含盐量越少,电导率越小。菌落总数指纯净水中所含菌落的总数，反映了纯净水被污染程度。霉菌直接引起中毒，或产生致癌物质，毒害人体，对人体健康有很大影响，只要被检测出含有，纯净水就不符合标准。所以，A 公司应该改善生产工艺条件，提高产品质量。B 公司只有菌落总数未达标，所以该公司应注意生产环节中控制各种因素的污染，对制水车间、灌装车间等按净化室标准进行改造减少污染。D 公司各评价指标影响程度为 1: 4: 0: 4，菌落总数和霉菌影响较大，电导率也有涉及，该公司应规范操作规程，改进加工工艺，注意防治装纯净水使用的桶的污染。

6.4 问题四的求解

根据模型建立过程中的方法及公式计算得到如下表中所示：

表（6.6）各公司的不合格率

公司	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ξ_j	0.8	0.19	0.6	1	0.46	0.57	0.46	1	1

表（6.7）各抽检地点的不合格率

抽检地点	仓库	厂成品库	成品库	营业部内	店内	货架	货架上
σ_k	0.56	1	1	0.36	0.17	0.55	0.46

表（6.8）夏季和冬季抽检时间的不合格率

抽检时间	夏季	冬季
μ_i	0.4	0.52

利用公式 $P_{jik} = \xi_j \times \mu_i \times \sigma_k$ 和上述数据就可以计算出 126 个备检批次的抽检到不合格纯净水的概率（见附录表二），按此概率从大到小取前 100 个批次即为我们给出的下一年度最优的抽检方案，表达如下。

表（6.9）各评价指标造成饮用水不合格的可能性

公司	抽检地点和时间
A	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、货架和货架上
B	厂成品库、成品库（冬季）
C	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、货架和货架上
D	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、店内（冬季）、货架和货架上
E	仓库、厂成品库、成品库、营业部内（冬季）、货架和货架上
F	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、货架和货架上
G	仓库、厂成品库、成品库、营业部内（冬季）、货架和货架上
H	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、店内（冬季）、货架和货架上
I	仓库、厂成品库、成品库、营业部内、店内（冬季）、货架和货架上

说明：上表中每一公司对应的地点和时间，没有出现的地点在夏冬两季都不抽检，出现的且后面没有注明时间的在夏冬两季均要抽检，出现的且后面注明时间的表示只在注明时间抽检，另一时间不用抽检。

6.5 问题五的求解

生活饮用水是人们赖以生存的基本必需品，关系到人们的切身利益，必须不断更新、

完善饮用水水质标准，并严格执行；突出“以水质为中心”的指导思想，改进工艺和技术，逐步建立和完善水质检验和监督体系，优化管理、提高效率，保障人们的饮用水安全。

通过对九家生产并销售纯净水的公司抽检报告可以看出，该城区饮用水水质达标率为52.86%。其中就各个评价指标而言，在抽取的饮用水样品中，电导率不达标率为22.86%，由其导致不合格的概率为48%；菌落总数不达标率为28.57%，由其导致不合格的概率为61%；霉菌不达标率为7.14%，导致不合格的概率为15%；而大肠菌群基本都达标。另外，由于抽样检验的时间和地点不同也会导致饮用水不合格率出现变动。有上述可知本市纯净水合格率很低，仅为52.86%。纯净水污染受诸多因素的影响：一是生产设备自身消毒能力的大小；二是设备在生产工艺流程中有多个环节能截留微生物并在其中生长繁殖；三是外界因素的影响，生产环境的洁净度，工作人员的卫生意识，装水桶的消毒处理，以及水源被微生物污染的程度。以上3条都可以影响产品的质量，特别是温度的影响，温度越高微生物繁殖越快，因此夏、秋季合格率明显低于春、冬季。该区除A公司和B公司规模较大，其余均为小公司。小公司设备处理能力差，缺乏卫生知识，因此总体来看合格率也稍低一些。

为了提高饮用水的合格率，我们建议：一是严把卫生许可准入关，对场所环境、生产车间、生产设备、工艺流程、产品质量达不到发证标准的坚决不能发放卫生许可证；二是加强监督检查，通过借鉴本题分析对抽检不合格的公司认真查找原因，使其重点改进该环节的加工处理工艺技术，限期整改，对整改不到位的或连续二次抽检不合格的生产单位要停业整顿，对严重违反《食品卫生法》的要加大执法力度，坚决予以取缔；三是加强从业人员卫生知识与卫生法律常识培训，使从业人员严格按程序操作，使企业法人真正把产品质量放在首位；四是加强舆论引导，每月在新闻媒体上对检测结果进行公告，引导市民健康消费。其实就人体健康而言，仅测饮用水电导率不合理，由于电导率是一项物理指标，其测定值是综合反映水中离子的多少，并无法明确表明所测值代表的是什么离子。由于水体中各种离子的导电度不同，因此电导率也不能替代水中溶解性固体的量。虽然两者之间有一定的内在联系，但绝非数学上的比例关系。再者，若水中含有中性离子，由于其不导电，无论多少，电导率都是测不到的。

七、模型的科学性分析

在本文中，我们的思路、方法及数学模型的合理性主要体现在以下几个方面：

（1）假设的合理性

在基本假设中我们认为纯净水的四项评价指标是按照严重性依次增加给出的，题目中的意思较模糊，我们做这样的假设也是合乎实际情况；此外假设四项指标中只要有一项不符合标准，则定为不合格也是科学合理的。

（2）思维的合理性

本文我们按先后顺序及由浅入深的逻辑关系展开了对问题求解的思路，我们首先分析题目，在完全理解题意之后，给出本题的准确定位，是一个典型的综合评价问题。这一点从我们的思路图中也可以很明显的看出来。问题已经解决后，我们还建立了面向多因素影响的数学模型，以便在今后的实际中应用。

（3）方法的科学性

正确的理解题意和准确的定位保证了我们方法的科学性，我们从多角度思考同一个问题，建立不同的数学模型求解。其中我们所用的层次分析法以及TOPSIS法都是很典型的预测方案，能够很好的解决问题。

(4) 参数设置的合理性与现实性

模型中涉及了许多参数，这些参数数值的选取一方面取决于现实生活中的实际情况，一方面是用计算机分析而得到的，所以参数的设置也是科学的。

(5) 求解方法的可靠性

求解时对于不同的模型，结果一致，说明了我们方法的可靠性。

八、模型的优缺点评价

8.1 优点

- (1) 通过引入权重系数，将各项指标完整综合考虑，对饮用水的评价进行量化，使其更易分析比较；
- (2) 建立的 TOPSIS 模型对原始数据的信息利用最充分，数据计算简单易行，可以得出良好的可比性评价排序结果；
- (3) 从不同角度建立多种模型,并且相互印证；
- (4) 用合理的方式处理不同类型的数据，使其尽量符合实际情况。

8.2 缺点

- (1) 模型的建立具有一定主观因素；
- (2) 外界条件影响忽略太多，不能很好的反映真实情况。

参考文献

- [1] 李志林、欧宜贵，数学建模及典型案例分析，北京，化学工业出版社，2007 年
- [2] 盛骤，谢式千等，概率论与数理统计，北京：高等教育出版社，2007 年。
- [3] 刘国香，水安全评价模型及保障对策研究，第 10 卷第 5 期：21-22，2005 年
- [4] 鄂学礼，使用《瓶装饮用纯净水标准》中的几点建议，第 16 卷第 3 期：255-255，2000 年
- [5] 耿福明，薛联青等，饮用水源水质健康危害的风险度评价，第 37 卷第 10 期：1242-1245，2006 年。

附录

附表1：该城区所有批次的纯净水评判排序

批次	受检方	时间	批号	采样点	综合评价指标	是否合格	原因
33	B	20090120	20090109	仓库	0.0006145	1	
23	B	20080910	20080827	仓库	0.000637	1	
18	A	20071220	20071220	货架	0.0017761	1	
15	A	20071219	20071218	店内	0.0022257	1	
1	C	20070711	20070425	货架	0.0022407	1	
2	E	20070711	20070425	货架上	0.0022407	1	
25	B	20080910	20080826	仓库	0.0026679	1	
5	G	20070711	20070512	货架	0.003125	1	
20	B	20071220	20071218	店内	0.0035222	1	
16	B	20071219	20071216	店内	0.0044365	1	
13	A	20070816	20070810	仓库	0.0045039	1	
17	B	20071219	20071216	店内	0.0063699	1	
32	A	20090120	20090112	仓库	0.0181355	0	
34	A	20090120	20090110	仓库	0.0200839	0	
19	H	20071220	20071219	店内	0.020676	0	
26	B	20080910	20080827	营业部内	0.021298	1	菌落总数 20 个
28	D	20080910	20080901	仓库	0.0374775	0	
27	I	20080910	20080902	仓库	0.0620878	0	
29	D	20090120	20090111	仓库	0.0625	0	
8	H	20070719	20070704	成品库	0.1510941	0	
21	B	20071229	20071216	店内	0.1567146	1	大肠杆菌 1 个
3	F	20070711	20070415	货架	0.1584308	1	大肠杆菌 2 个
11	B	20070816	20070809	仓库	0.1585881	1	大肠杆菌 3 个
12	B	20070816	20070809	仓库	0.1594574	1	大肠杆菌 4 个
14	A	20070816	20070810	仓库	0.1615033	1	大肠杆菌 5 个
9	A	20070719	20070704	成品库	0.1699266	0	
31	I	20090120	20090112	仓库	0.1726469	0	
22	A	20080910	20080827	仓库	0.1743031	0	
24	A	20080910	20080827	仓库	0.1942296	0	
7	A	20070719	20070703	厂成品库	0.1973771	0	
30	H	20090120	20090112	仓库	0.2091727	0	
35	D	20090120	20090111	仓库	0.3103043	0	
4	C	20070711	20070609	货架	0.3182479	1	大肠杆菌 2 个
6	B	20070718	20070704	厂成品库	0.3453537	0	
10	D	20070719	20070704	成品库	0.784405	0	

附表 2：备检批次的抽检到不合格纯净水的概率

批次	公司	抽检时间	抽检地点	抽检到不合格产品的概率
1	D	冬季	厂成品库	0.52
2	D	冬季	成品库	0.52
3	H	冬季	厂成品库	0.52
4	H	冬季	成品库	0.52
5	I	冬季	厂成品库	0.52
6	I	冬季	成品库	0.52
7	A	冬季	厂成品库	0.416
8	A	冬季	成品库	0.416
9	D	夏季	厂成品库	0.4
10	D	夏季	成品库	0.4
11	H	夏季	厂成品库	0.4
12	H	夏季	成品库	0.4
13	I	夏季	厂成品库	0.4
14	I	夏季	成品库	0.4
15	A	夏季	厂成品库	0.32
16	A	夏季	成品库	0.32
17	C	冬季	厂成品库	0.312
18	C	冬季	成品库	0.312
19	F	冬季	厂成品库	0.2964
20	F	冬季	成品库	0.2964
21	D	冬季	仓库	0.2912
22	H	冬季	仓库	0.2912
23	I	冬季	仓库	0.2912
24	D	冬季	货架	0.286
25	H	冬季	货架	0.286
26	I	冬季	货架	0.286
27	C	夏季	厂成品库	0.24
28	C	夏季	成品库	0.24
29	D	冬季	货架上	0.2392
30	E	冬季	厂成品库	0.2392
31	E	冬季	成品库	0.2392
32	G	冬季	厂成品库	0.2392
33	G	冬季	成品库	0.2392
34	H	冬季	货架上	0.2392
35	I	冬季	货架上	0.2392
36	A	冬季	仓库	0.23296
37	A	冬季	货架	0.2288

38	F	夏季	厂成品库	0.228
39	F	夏季	成品库	0.228
40	D	夏季	仓库	0.224
41	H	夏季	仓库	0.224
42	I	夏季	仓库	0.224
43	D	夏季	货架	0.22
44	H	夏季	货架	0.22
45	I	夏季	货架	0.22
46	A	冬季	货架上	0.19136
47	D	冬季	营业部内	0.1872
48	H	冬季	营业部内	0.1872
49	I	冬季	营业部内	0.1872
50	D	夏季	货架上	0.184
51	E	夏季	厂成品库	0.184
52	E	夏季	成品库	0.184
53	G	夏季	厂成品库	0.184
54	G	夏季	成品库	0.184
55	H	夏季	货架上	0.184
56	I	夏季	货架上	0.184
57	A	夏季	仓库	0.1792
58	A	夏季	货架	0.176
59	C	冬季	仓库	0.17472
60	C	冬季	货架	0.1716
61	F	冬季	仓库	0.165984
62	F	冬季	货架	0.16302
63	A	冬季	营业部内	0.14976
64	A	夏季	货架上	0.1472
65	D	夏季	营业部内	0.144
66	H	夏季	营业部内	0.144
67	I	夏季	营业部内	0.144
68	C	冬季	货架上	0.14352
69	F	冬季	货架上	0.136344
70	C	夏季	仓库	0.1344
71	E	冬季	仓库	0.133952
72	G	冬季	仓库	0.133952
73	C	夏季	货架	0.132
74	E	冬季	货架	0.13156
75	G	冬季	货架	0.13156
76	F	夏季	仓库	0.12768
77	F	夏季	货架	0.1254
78	A	夏季	营业部内	0.1152
79	C	冬季	营业部内	0.11232

80	C	夏季	货架上	0.1104
81	E	冬季	货架上	0.110032
82	G	冬季	货架上	0.110032
83	F	冬季	营业部内	0.106704
84	F	夏季	货架上	0.10488
85	E	夏季	仓库	0.10304
86	G	夏季	仓库	0.10304
87	E	夏季	货架	0.1012
88	G	夏季	货架	0.1012
89	B	冬季	厂成品库	0.0988
90	B	冬季	成品库	0.0988
91	D	冬季	店内	0.0884
92	H	冬季	店内	0.0884
93	I	冬季	店内	0.0884
94	C	夏季	营业部内	0.0864
95	E	冬季	营业部内	0.086112
96	G	冬季	营业部内	0.086112
97	E	夏季	货架上	0.08464
98	G	夏季	货架上	0.08464
99	F	夏季	营业部内	0.08208
100	B	夏季	厂成品库	0.076
101	B	夏季	成品库	0.076
102	A	冬季	店内	0.07072
103	D	夏季	店内	0.068
104	H	夏季	店内	0.068
105	I	夏季	店内	0.068
106	E	夏季	营业部内	0.06624
107	G	夏季	营业部内	0.06624
108	B	冬季	仓库	0.055328
109	A	夏季	店内	0.0544
110	B	冬季	货架	0.05434
111	C	冬季	店内	0.05304
112	F	冬季	店内	0.050388
113	B	冬季	货架上	0.045448
114	B	夏季	仓库	0.04256
115	B	夏季	货架	0.0418
116	C	夏季	店内	0.0408
117	E	冬季	店内	0.040664
118	G	冬季	店内	0.040664
119	F	夏季	店内	0.03876
120	B	冬季	营业部内	0.035568
121	B	夏季	货架上	0.03496

122	E	夏季	店内	0.03128
123	G	夏季	店内	0.03128
124	B	夏季	营业部内	0.02736
125	B	冬季	店内	0.016796
126	B	夏季	店内	0.01292

层次分析法的 matlab 程序

```

disp('请输入判断矩阵 A(n 阶)');
A=input('A=');
[n,n]=size(A);
x=ones(n,100);
y=ones(n,100);
m=zeros(1,100);
m(1)=max(x(:,1));
y(:,1)=x(:,1);
x(:,2)=A*y(:,1);
m(2)=max(x(:,2));
y(:,2)=x(:,2)/m(2);
p=0.0001;i=2;k=abs(m(2)-m(1));
while k>p
    i=i+1;
    x(:,i)=A*y(:,i-1);
    m(i)=max(x(:,i));
    y(:,i)=x(:,i)/m(i);
    k=abs(m(i)-m(i-1));
end
a=sum(y(:,i));
w=y(:,i)/a;
t=m(i);
disp(w);disp(t);
    %以下是一致性检验
CI=(t-n)/(n-1);RI=[0 0 0.52 0.89 1.12 1.26 1.36 1.41 1.46 1.49 1.52 1.54 1.56 1.58 1.59];
CR=CI/RI(n);
if CR<0.10
    disp('此矩阵的一致性可以接受!');
    disp('CI=');disp(CI);
    disp('CR=');disp(CR);
end

```