

A 题：级联型 H 桥变换器的阶梯波特定消谐技术研究

摘要

我们的模型主要包括四部分：1) 基于经验公式与波形拟合相结合的初值设定模型，用于获取对不同单元级联个数 n 能使非线性消谐方程尽快收敛的初值；2) 等步长的检验搜索模型，用于确定 (1)、(2)、(3) 问中特定单元个数下使非线性消谐方程有解的调制比幅值 m 的取值范围；3) 基于步长搜索模型中开关角范围的包含关系分析模型，用以分析出 m 特定时随 n 增加所解得开关角的包含关系以及输出电压波形质量改善效果；4) 通过设定控制角改变单元输出正负的功率均衡求解模型使各 H 桥变换器单元在一定周期内实现功率均衡。

在问题一中，主要思路就是初值设定使阶梯波尽可能拟合正弦波；基于此想法建立了一种基于波形拟合的初值设定模型，在 n 和 m 为已知的情况下，把阶梯波的转折上边沿点和正弦曲线拟合，根据在正弦曲线上的阶梯拐点的纵坐标运用反三角函数确定初始的开关角；针对不能取反三角的 m 范围对最后一个初值点采用前点切线取角的方法，得到完整的开关角初值。解方程采用 matlab 中 `fsolve` 函数迭代求解。但是该模型对 m 的范围要求较高，超出范围便不适用；采用一种综合简便性和精确性考虑较优的经验公式，建立了改进的补充经验公式的初值设定模型，得到较为完整的初值设定方法。对 $n=3, 5, 15$ 时不同 m 值的情况设定初值后求解结果表明初值与结果差值很小，而且均能较快收敛。

针对问题二，对特定的模块数 n ， m 只有在一定范围内开关角求解方程才会有解；因为要直接解非线性超越方程中 m 的范围难以实现；所以建立了一种等步长的检验搜索模型，采用对 m 的值在一定精度下进行搜索使方程有解来确定其范围的方法，在给定步长下变化 m 的值，代入方程看是否有解，逐步搜索出 m 在该精度下的范围。在 $n=3, 5, 15$ 的情况下搜索得出 m 的范围，在 m 范围内根据公式计算 THD 的结果表明 THD 随着 m 变化波动范围很小，说明求出的范围较为合理。

在问题三求解上，沿用步长搜索方法建立了基于步长搜索模型中开关角范围的包含关系分析模型。基于问题二的 m 范围，在 $n=3, 5, 15$ 都适用的 m 范围内搜索，过程中对确定 m 值分别求解不同 n 的开关角来分析解的相互包含关系，并计算 THD 来反映波形质量；最终结合所有 m 值的分析结果来综合评估得到不同 n 的解的相互包含关系，以及 n 增加的波形质量总体改善特性。取 $m=0.85$ 的开关角解的相互包含关系结果表明了模型反映了解具有包含关系，波形质量的改善特性也反映了随 n 增加质量更优的结果。

对于问题四，为了实现功率均衡，对每一模块单元设定三个控制角，使单元的输出为先正后负再正，综合功率相等与谐波消除列出方程，增加一定数目功率相等约束方程，同时减少一定数目消谐波方程，解方程求解控制角。对应控制角的值，控制各模块开关 S_{1i} ， S_{2i} ， S_{3i} ， S_{4i} 。

综上所述，模型在初值设定下开关角的求解值较为精确；使开关角有解的 m 范围求解较为可靠；分析解的包含关系中 THD 随着 n 增大而减小，反映对谐波的消除效果较好；并且在单元功率均衡优化开关控制策略上能给出可行的方案。模型具有一般性，可推广到实际工程的消谐技术中。

关键词： 非线性消谐方程，初值设定，调制比幅值范围，功率平衡

I 问题重述与分析

1.1 问题背景

在电力系统中实现高电压、多电平输出的研究中,解决脉冲宽度调制(PWM)较广泛的方法主要是 SPWM(Sinusoidal PWM)法,其中运用三电平级联 H 桥变换器的特定谐波消除脉宽调制技术(Selected Harmonic Elimination Pulse Width Modulation, SHEPWM)是实现 SPWM 法的一种方案。关键是通过选择特定的开关时刻,在满足期望的输出基波电压 v_{ac} 的同时,来消除选定的低次谐波,进而改善输出电压的波形质量,根据题意分析和已有的研究成果,发现初值设定对于求解结果的准确性和收敛性有影响。

1.2 问题的分析与拆解

1.2.1 问题剖析

在 n 个单元串联的 H 桥变换器系统中,对于第 i 个 H 桥变换器单元,控制开关可得到的输出电压 v_{aci} 主要有 V_{dci} , 0 , $-V_{dci}$;当 H 桥变换器单元直流侧独立电压 V_{dci} 都为 V_{dc} 时,可输出 $(2n+1)$ 电平数的阶梯型电压 v_{ac} ,通过对该波形进行傅里叶级数分解,以导通角 θ_i 表示 n 个单元分别导通时序,那么 v_{ac} 的第 s 个奇数次谐波的幅值的傅里叶级数可以改为式(1):

$$V_s = \frac{4V_{dc}}{s\pi} \sum_{s=1,3,5,\dots}^{\infty} [\cos(s\theta_1) + \cos(s\theta_2) + \dots + \cos(s\theta_n)] \tag{1}$$

其中: $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ 。

因此消谐技术的关键就是试找出一组 θ_i ($i=1,\dots,n$),使输出电压的基波分量幅值为 V_{1m} ,且不含有低次谐波。具体方法如下:

定义调制比幅值 $m=V_{1m}/(nV_{dc})$,那么根据上述消除谐波的要求,令低频率的展开方程部分为0,便可写出消谐关于 θ_i ($i=1,\dots,n$) 的非线性代数方程组式(2)。

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \dots + \cos(\theta_n) = \frac{\pi V_{1m}}{4V_{dc}} = \frac{\pi n}{4} m \\ \cos(5\theta_1) + \cos(5\theta_2) + \dots + \cos(5\theta_n) = 0 \\ \cos(7\theta_1) + \cos(7\theta_2) + \dots + \cos(7\theta_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \tag{2}$$

另外,对于特定的级联模块数 n ,调制比 m 在一定范围内取值才能使非线性方程组有解。并且需要一组初值 θ_i^0 ($i=1,\dots,n$) 使方程组求解收敛。

如需校核阶梯波特定消谐技术的输出电压 v_{ac} 波形质量,可通过总电压谐波畸变率(Total Harmonics Distortion, THD)来描述,如式(3)。

$$THD = \sqrt{\frac{\sum_{i=6k+1, k=1,2,3,\dots}^{\infty} V_i^2}{V_1^2}} \times 100\% = \sqrt{\frac{V_5^2 + V_7^2 + V_{11}^2 + \dots + V_{43}^2 + \dots}{V_1^2}} \times 100\% \tag{3}$$

可见低次谐波若占有输出的部分越少,THD 的值就越小,消谐得到的波形

质量越高。

因此，综合分析，式（2）为模型求解约束条件（根据此约束条件进行求解），式（3）数值尽量小为约束求解下的目标函数。

1.2.2 问题拆解

综合题意指定及剖析，原问题的五问可拆解分为以下几个子问题模型的建立和求解：

（1）初值设定模型：如何建立合理的初值确定模型使式（2）的非线性超越方程求解尽快收敛，并满足一定精度要求；

（2）迭代求解模型：给定 n, m 时，如何对方程（2）中 $\theta_i (i=1, \dots, n)$ 进行快速求解：针对问题 1 至问题 3 中 θ_i 的角度求取；

（3）有解判定及搜索模型：给定 n 时如何迭代收搜使方程（2）有解的 m 范围：针对问题 1 至问题 3 中 m 范围的求取；

（4）解的延伸与判定模型：给定 m 情况下， n 从小变大时 $\theta_i (i=1, \dots, n)$ 解是如何拓展延伸的，具备何种规律，以及如何编程建立基于 THD 的波形质量判定程序：针对前三问中 THD 求取及第四问；

（5）功率均衡求解模型：如何对各单元的通断角度进行综合匹配设定，使得各模块单元功率相等：针对第五问。

1.3 总体建模求解思路

根据以上对问题的剖析和拆解，我们的总体建模求解思路如下：

- （1）初值设定模型：阶梯型波上拐角点与正弦曲线重合；
- （2）迭代求解模型：对不同的 n ，通过初值设定模型求取初值，通过牛顿迭代求解；
- （3）有解判定及搜索模型：取给定步长下变化 m 的值，求出对应初值，再进行迭代求解，确定 m 的取值范围；
- （4）解的延伸与判定模型：通过 m 范围选取合适的 m 值，求出不同模块数 n 所对应开关角进行讨论分析；
- （5）功率均衡求解模型：所有单元在 $1/4$ 周期内先正后负再正。

II 基本假设

- 1、假设每个模块单元只有三个控制角度。
- 2、假设每个模块单元完全相同。

III 符号说明

M	调制比幅值
N	串联的电平数
θ_{i0}	开关角的初值
θ_i	开关角的解
V_{dc}	H桥变换器单元直流侧独立电压
V_{1m}	电压的基波分量幅值
δ	搜索 m 时的步长
THD	总电压谐波畸变率
ε	开关角初值与求解结果误差
V_s	第 s 个奇数次谐波幅值
V_{ci}	单元 i 的输出电压基波幅值
S	各模块单元的变换功率方差

IV 初值设定模型及迭代求解模型

4.1 迭代求解模型

方程组式（2）为非线性超越方程组，解决该类方程组比较常用的一种数值方法是牛顿迭代法，Matlab 内置的基于最小二乘的 fsolve 函数，可采用高斯-牛顿迭代法搜索，加快对求解的收敛速度，因次我们考虑使用 fsolve 函数进行求解。

4.2 初值设定模型

采用迭代求解模型的缺点是对初值的选取有一定的要求，初值选取对方程组求解收敛性和结果的精度有直接影响^[1]。所以解决问题一的建模关键在于建立一个能给出可靠初值的模型方法。

方程组式（2）为非线性超越方程组，解决该类方程组比较常用的一种数值方法是迭代法，我们考虑使用 Matlab 软件内置的 fsolve 函数进行求解，但是该方法对于初值的选取有一定的要求，初值选取对方程组求解收敛性和结果的精度有直接影响。所以解决问题一的建模便转换为建立一个能给出可靠初值的模型方法。

4.2.1 模型建立的准备

给出 $n=3,m=0.8$;在运用模型给出初值 θ_{10} 、 θ_{20} 、 θ_{30} 的情况下采用 Matlab 中 fsolve 函数迭代求解方程对应的变量值为 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 。

4.2.2 模型建立——基于波形拟合的初值设定模型

对于 n 已知的情况，H 桥变换器单元输出电压叠加消谐得出的阶梯形电压如图 1 所示。

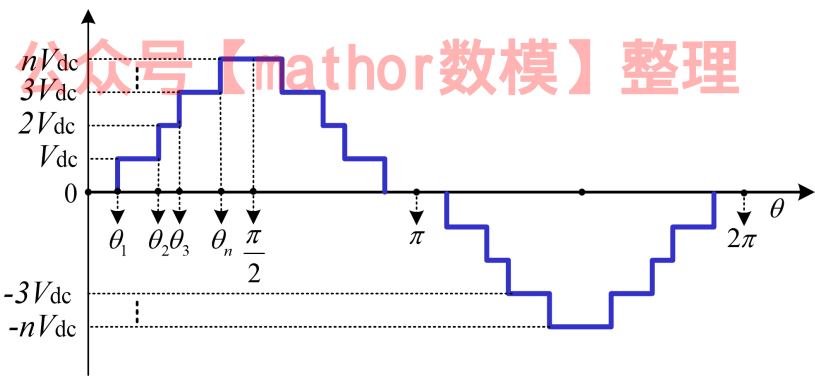


图 1 叠加消谐得出的阶梯形电压

实际采用交流波形叠加通过开关角消谐得到阶梯波，使其更接近正弦波。基于此原理，当阶梯波的阶梯高度 V_{dc} 和 n 已知时，采用阶梯曲线与正弦曲线拟合的方法，视纵坐标为 kV_{dc} ($k=1, 2 \dots n$) 的阶梯拐角点 (θ_k, kV_{dc}) 刚好都在正弦线上时为较好拟合；则可以得到较可靠的初值 θ_{i0} 便为 θ_k 的值。

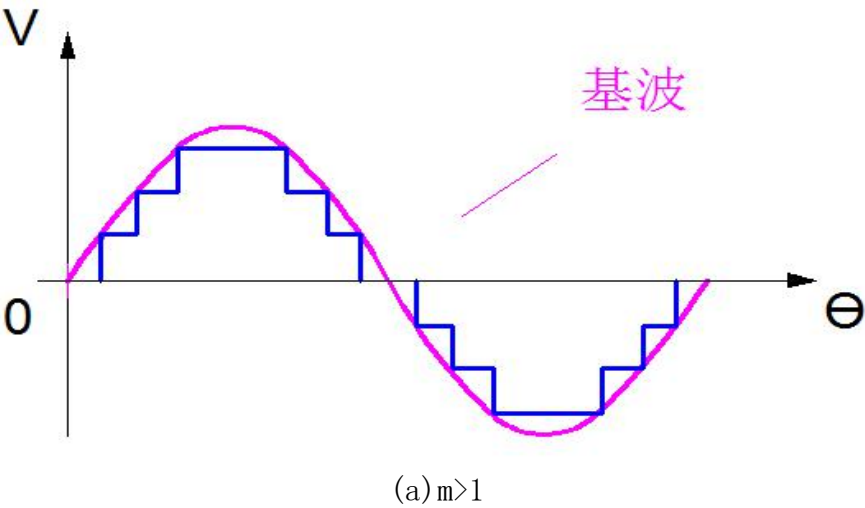
由调制比公式 $m=V_{1m}/(nV_{dc})$ 可得，

$$V_{dc} = \frac{V_{1m}}{m \cdot n} \tag{4}$$

取 $V_{1m}=1$ ，可以得到初值，

$$\theta_{i0} = \sin^{-1}\left(\frac{k}{m \cdot n}\right) \quad (k=1, 2 \dots n-1) \tag{5}$$

由于可能 m 值不同可能出现如下图出现的两种拟合情况



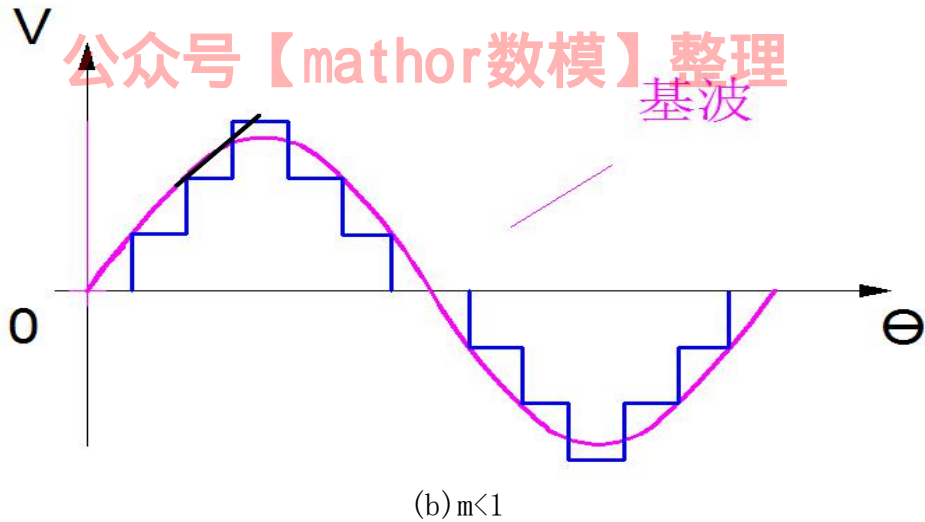


图2 阶梯曲线与正弦曲线拟合情况

因此当 $k=n$ 时，需根据 m 的值来进行 θ_{n0} 的确定：

(1) $m > 1$ ：

正弦曲线能包括阶梯波形，所以

$$\theta_{n0} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)$$

(6)

(2) $m \leq 1$ ：

$V_{1m} > nV_{dc}$ ，对第 n 个初值只能采用近似取值的方法，采用 $(n-1)$ 点出的导数作为斜率，取 $\theta_{(n-1)0}$ 至 $\pi/2$ 终点为区间的斜直线的中点，其纵坐标对应的 θ 值作为第 n 个初值为

$$\theta_{n0} = 1/2 \times [\cos \theta_{(n-1)0} \times (\pi/2 - \theta_{(n-1)0})] + \theta_{(n-1)0} \quad (7)$$

最终可以得到 n 个基本的初值，并代入方程求得开关角的解。

4.2.3 模型的结果和分析

$n=3$ ， $m=0.8$ 的初值分别为：

$$\theta_{10}=0.4298 \quad \theta_{20}=0.9851 \quad \theta_{30}=1.1470$$

代入方程运用fsolve函数求解结果为：

$$\theta_1=0.5103 \quad \theta_2=0.9501 \quad \theta_3=1.1255$$

回代到原方程组得：

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) = 1.8849 = 0.9999 * \frac{\pi * 3}{4} * 0.8 \\ \cos(5\theta_1) + \cos(5\theta_2) + \cos(5\theta_3) = -1.5705 * 10^{-4} \\ \cos(7\theta_1) + \cos(7\theta_2) + \cos(7\theta_3) = -4.6854 * 10^{-5} \end{cases} \quad (8)$$

从结果可知,此时求出的开关角的值非常精确,对于此情况得出结果的迭代收敛,该初值选取的模型比较可靠。

4.3 初值设定模型的改进和求解

4.3.1 初始模型的局限性

对n取某一特定值,通过分析可知当 $(n-1)/(n*m)>1$ 时, $\sin^{-1}(k/m \cdot n)$ 没有实数解,模型计算初值不再适用;即m的范围为: $m > \frac{(n-1)}{n}$,在此范围内改变m对应不同的n的解的情况如表(1)。

表1 不同m和n情况下开关角的求解

	m=0.9			m=1.04		
	θ_0 初值	θ_i 结果	误差 ε	θ_0 初值	θ_i 结果	误差 ε
n=5 (m>0.8)	0.2241	0.2401	-0.0364	0.1935	0.1766	-0.0607
	0.4606	0.4703	-0.0253	0.3948	0.2277	-0.0337
	0.7297	0.7596	-0.0012	0.6150	0.4779	-0.0043
	1.0949	0.9933	-0.1467	0.8766	0.7161	0.3300
	1.2039	1.1587	-0.1441	1.2925	1.0666	0.6476
	m=0.94			m=1.05		
	θ_0 初值	θ_i 结果	误差 ε	θ_0 初值	θ_i 结果	误差 ε
n=15 (m>0.93)	0.0710	0.0378	-0.3612	0.0606	0.0321	-0.4269
	0.1423	0.1230	-0.0336	0.1215	0.0973	-0.0567
	0.2144	0.2215	-0.0021	0.1828	0.1928	0.0309
	0.2876	0.2222	-0.0452	0.2449	0.1889	0.0121
	0.3625	0.3319	0.0660	0.3079	0.2759	-0.0051
	0.4395	0.4707	0.0276	0.3722	0.3190	0.0052
	0.5195	0.4801	0.0075	0.4381	0.3820	-0.0008
	0.6033	0.6203	0.0120	0.5062	0.4424	-0.0086
	0.6923	0.6826	-0.0502	0.5769	0.5098	0.0055
	0.7884	0.7462	-0.0202	0.6511	0.5845	0.0081
	0.8949	0.9021	-0.0117	0.7297	0.6702	0.0009
	1.0180	1.0064	0.0092	0.8143	0.7759	-0.0025
	1.1732	1.1384	0.0238	0.9074	0.9105	0.0009
	1.4516	1.4063	0.0196	1.0131	1.0067	-0.0135
	1.4587	1.5858	0.0342	1.1411	1.1316	-0.0220

在m的范围满足约束时初值选取较为可靠,但是经过验证可以发现在m小于该约束时模型不适用,但取适当的初值方程仍然有解,模型具有局限性。

4.3.2 模型的改进——补充经验公式的初值设定模型

在拟合曲线的初值确定模型的基础上,为扩大模型的适用范围,使得模型在 $m < \frac{(n-1)}{n}$ 时仍然能得出可靠的初始值,通过查阅相关文献选取了一种经验公式来改进模型;从文献^[2]的初值确定思路来看,该经验公式在实际工程应用广泛,该公式是以给定适当 $m \approx 0$ 的初值得到的解为基准,不断给 m 一个很小的增量,逐步迭代得到所求的 m 的初值,经验表明用牛顿迭代法可以很快收敛于新的解,所以采用经验公式改进原模型。

当 $m < \frac{(n-1)}{n}$ 时,据经验公式可以得到 $m \approx 0$ 时,初值 θ_{i0} 计算方法(i 为奇数且 $3 \leq i \leq N-3$):

$$\begin{cases} \theta_{10} = 0 \\ \theta_{20} = \frac{120}{n+1} \\ \cdot \\ \theta_{i0} = \frac{60(i+1)}{n+1} \\ \theta_{(i+1)0} = \frac{60(i+1)}{n+1} \\ \cdot \\ \theta_{(n-2)0} = \frac{60(n-1)}{n+1} \\ \theta_{(n-1)0} = 60 \\ \theta_{n0} = \frac{60(n+3)}{n+1} \end{cases} \quad (9)$$

给迭代初值时,不能让任意两个开关角相等,否则在解线性方程组时会发生奇异,故采取以下修正方法:

$$\begin{cases} \theta_{i0} = \frac{60(i+1)}{n+1} - 0.01 \\ \theta_{(i+1)0} = \frac{60(i+1)}{n+1} + 0.01 \end{cases} \quad (10)$$

将此计算方法添入基于波形拟合的初值确定模型,得到改进后补充经验公式的初值确定模型。

4.3.3 改进模型的结果和分析

对于 $n=3$ 的情况,取 $m=0.5$,此时 m 超出原模型范围 ($m > 2/3$),此时采用改进模型赋值得:

$$\theta_{10} = 0.5236 \quad \theta_{20} = 0.7854 \quad \theta_{30} = 1.0472$$

代入求解得到开关角的结果为:

$$\theta_1 = 0.7116 \quad \theta_2 = 1.1489 \quad \theta_3 = 1.5595$$

此时

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_3) = 1.1781 = 1 * \frac{\pi * 3}{4} * 0.5 \\ \cos(5\theta_1) + \cos(5\theta_2) + \cos(5\theta_3) = 2.8749 * 10^{-4} \\ \cos(7\theta_1) + \cos(7\theta_2) + \cos(7\theta_3) = -6.1382 * 10^{-4} \end{cases} \quad (11)$$

从结果可知，此时求出的开关角的值非常精确，初值的结果迭代收敛，非常可靠。

所以改进后的初值确定模型适用范围大，迭代收敛的效果较好；对初值确定体现了优化效果。

V 有解判定及搜索模型

5.1 模型建立的准备

首先对给定 n 的值，分别取 n 为 3, 5, 15 来对 m 的范围进行研究；当 m 的值确定时，采用问题一的初值设定模型给出初值，求解开关角沿用 fsolve 函数的迭代方法。

5.2 模型的建立——等步长检验搜索的有解判定模型

对于仅给出了 n 的情况， m 此时是变量，我们先考虑 m 最大可能取到的范围。由公式

$$\begin{cases} V_{1m} = \frac{4V_{dc}}{\pi} [\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \dots + \cos(\theta_n)] \\ \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \dots + \cos(\theta_n) = \frac{\pi V_{1m}}{4V_{dc}} = \frac{\pi n}{4} m \\ m = V_{1m} / (nV_{dc}) \\ \cos(\theta_n) < \cos(\theta_{n-1}) < \dots < \cos(\theta_1) \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

知 $m < 4/\pi$ 。由 m 的定义知 $m > 0$ 。所以 $0 < m < 4/\pi$ 。由于方程组 (2) 中的各项均任意次可微，说明此方程组的可解范围也应连续。当 m 在 $(0, 4/\pi)$ 时，采用逐个 m 值点的搜索思路，选取等步长依次增加 m 的值进行搜索，用求解方法找出使方程有解的 m 值，若设步长规定为 δ ，则有

$$m_i = m_{i-1} + \delta \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

其中 $m_0=0$ ， $m_n=(4/\pi - \delta)$ ；把确定的 n ， m_i 代入方程(2)求解即可确定 m_i 是否符合有解的条件。最后把 m_i 对应的 θ_i 通过图像描绘就可以得到使得方程有解的 m 的范围。具体方法如下：

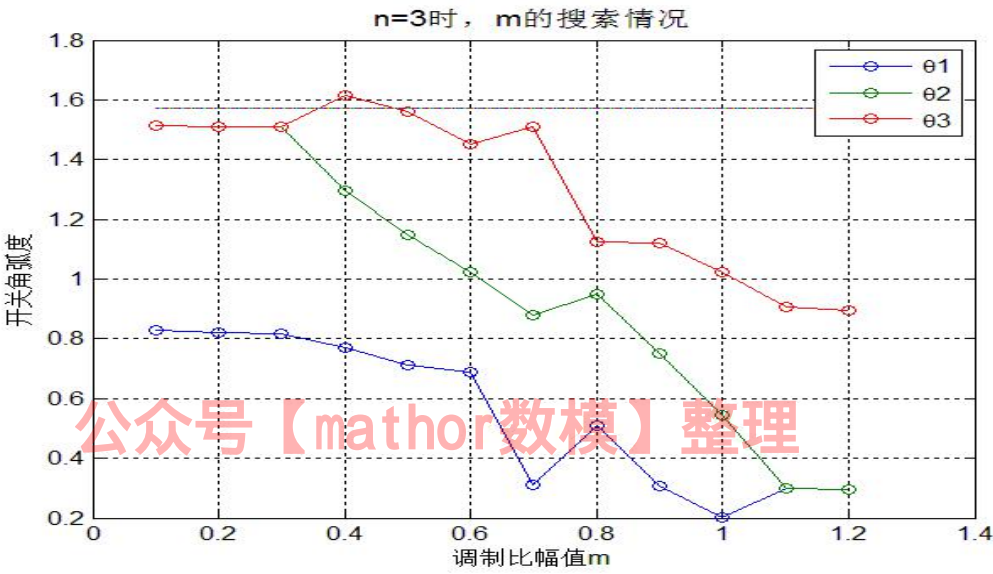
m 从 0 开始，设置 $\delta=0.01$ ， m_i 的取值依次为 0, 0.01, 0.02...1.27。对于每一个 m 值，根据补充经验公式的初值设定模型，分别求取相应的初值，然后通过 fsolve 函数进行开关角 θ 的求解，如果能够求解出符合要求的 θ 值，则认为 m

符合要求。根据此时求解出的 θ 值，计算相应的 V_s ，求出对应的 THD。

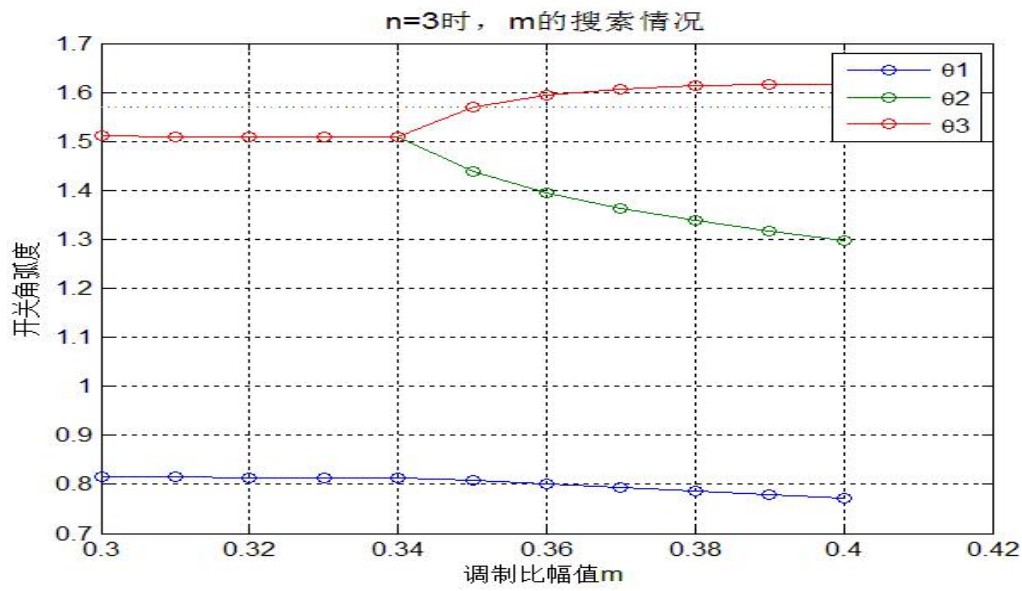
5.3 模型的结果与分析

绘制 m 值与求解出的开关角关系图，在图上，若对应一个 m 的取值满足关系 $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ ，即开关角之间大小不能相等；实际上两个开关角大小相差大于 $0.05/n$ 时我们认为不相等，且最大的开关角小于 1.57 ，最小的开关角大于 0 。则认为该 m 值满足要求。

当 $n=3$ ， m 与开关角 θ 的关系如图：



(a) 全局情况

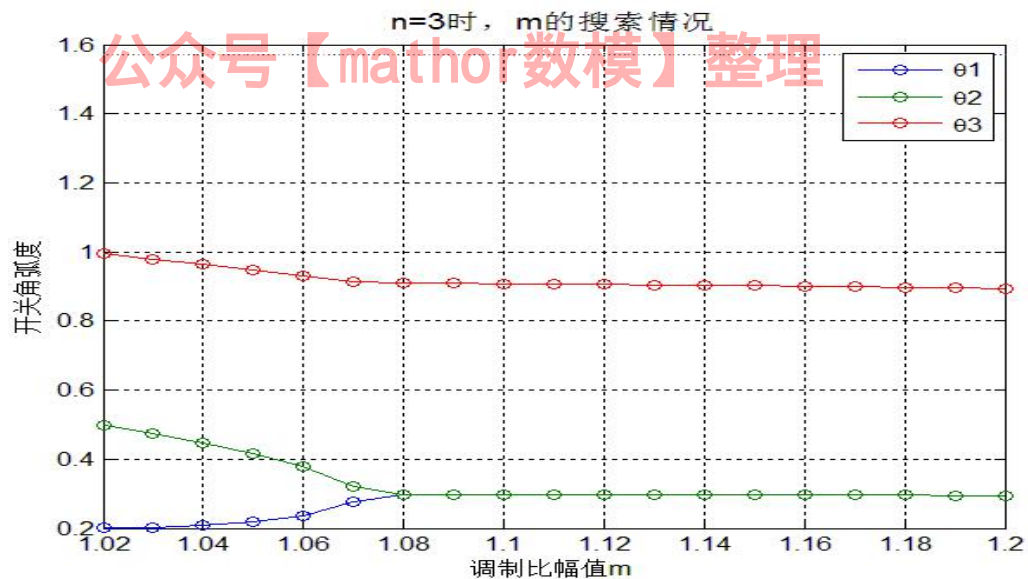


(b)m 值左极限放大情况

整理

公众号【mathor数模】整理

公众号



(c)m 值右极限放大情况

图 3 n=3，m 与开关角 θ 的关系图

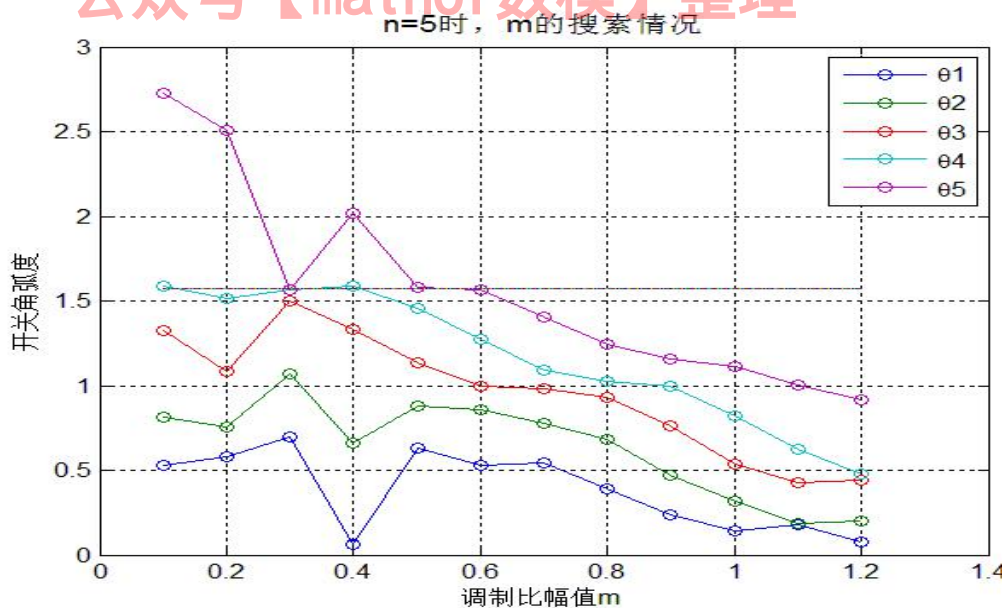
从图中可以得出使开关角 θ 有解的 m 范围为 $0.35 \leq m \leq 1.07$ 。

整理

当 n=5 时，m 与开关角 θ 的关系如图：

公众号【mathor数模】整理

公众号

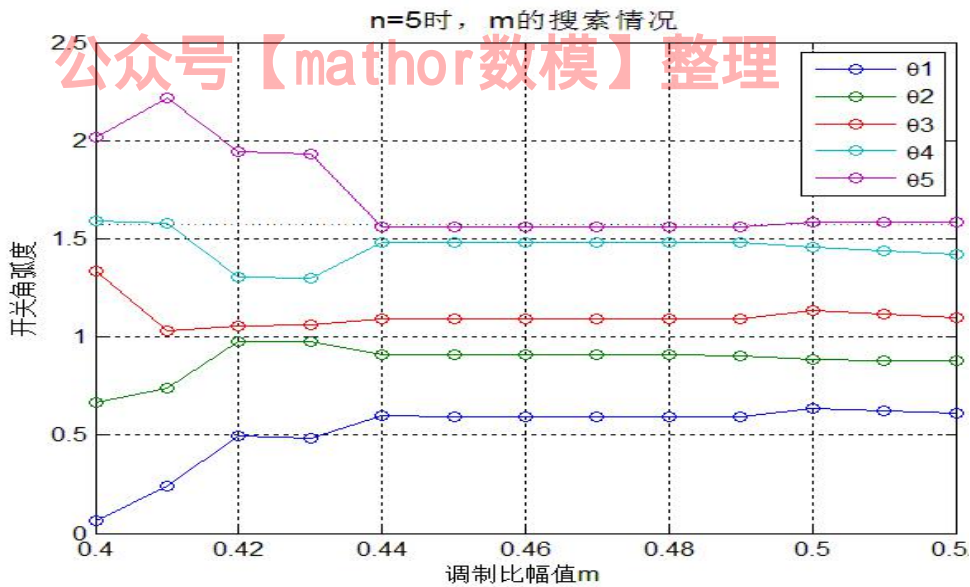


(a)全局情况

整理

公众号【mathor数模】整理

公众号

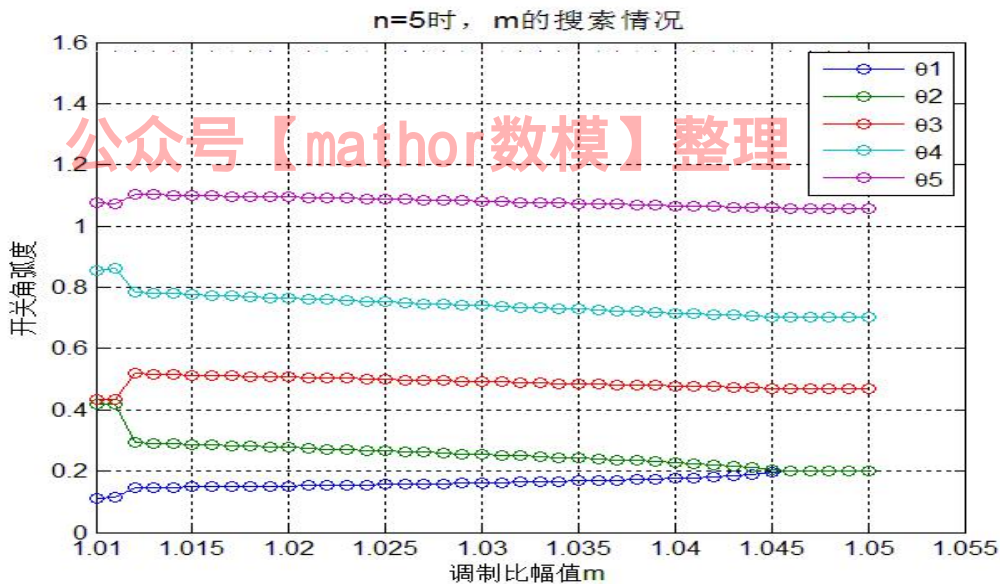


(b)m 值左极限放大情况

整理

公众号【mathor数模】整理

公众号

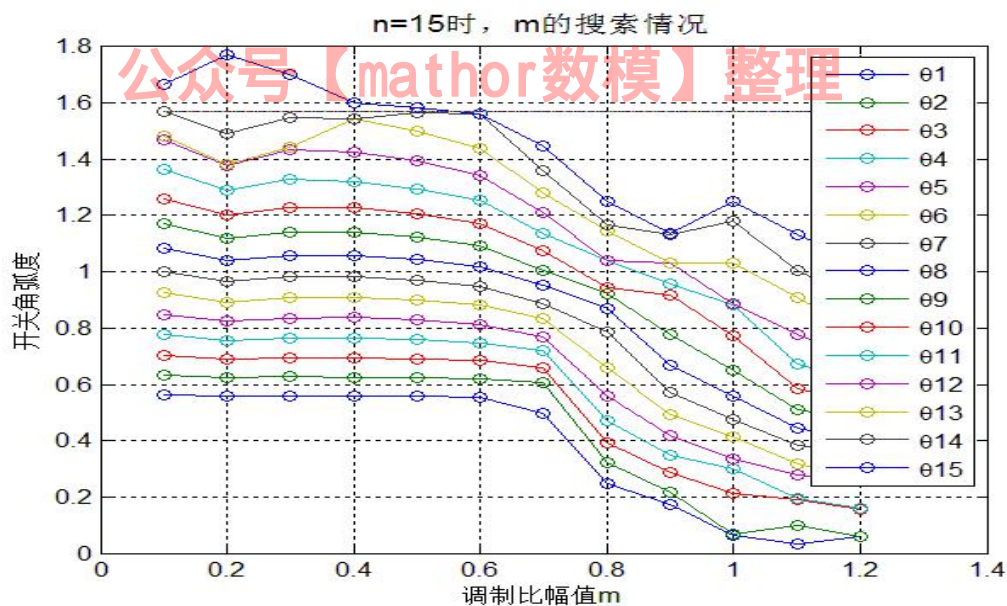


(b)m 值右极限放大情况

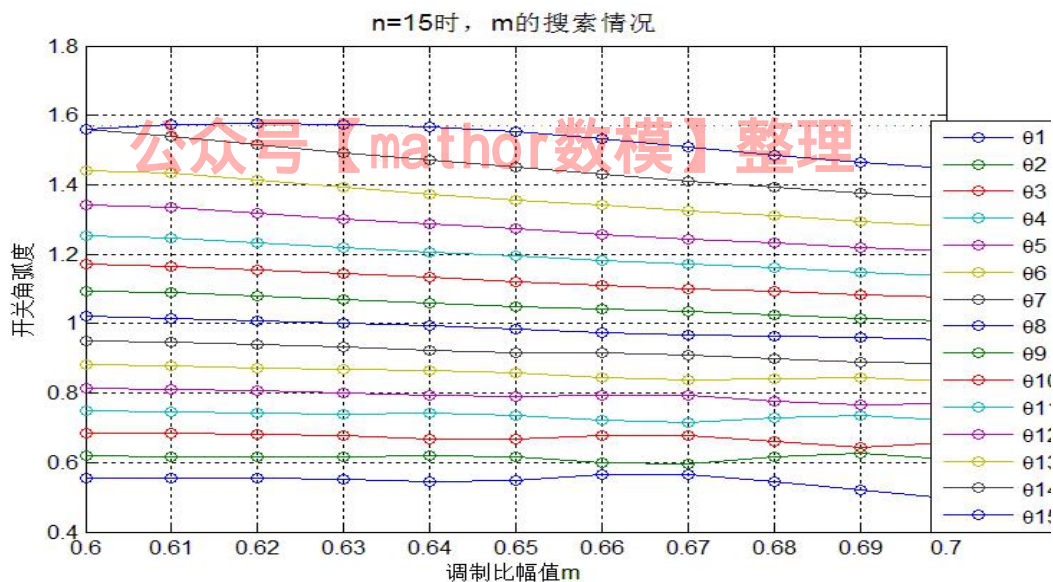
图4 n=5，m 与开关角 θ 的关系图

从图中可以得出使开关角 θ 有解的 m 范围为 $0.44 \leq m \leq 1.05$ 。

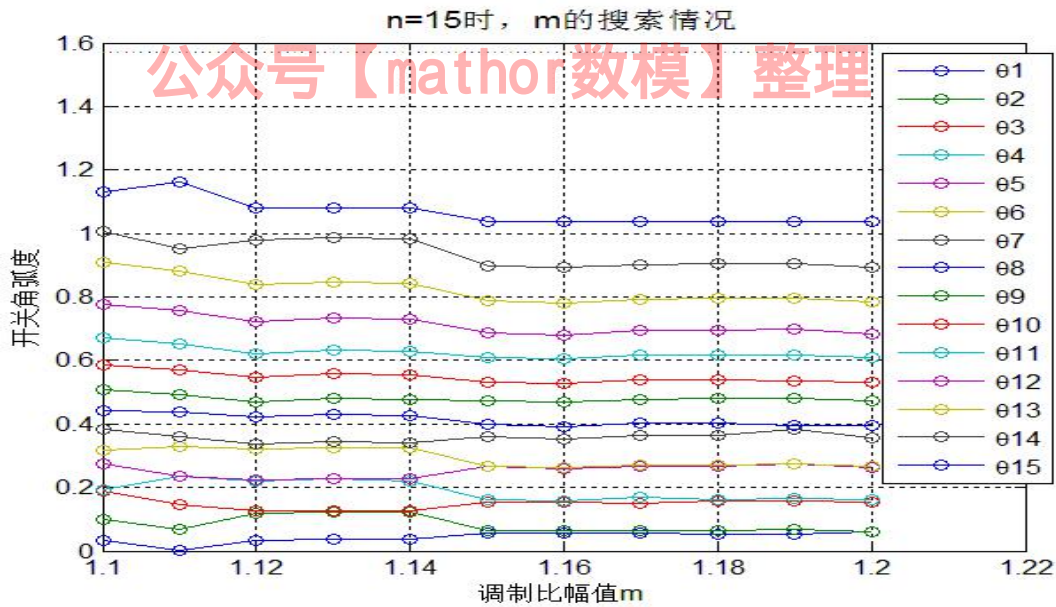
当 n=15 时，m 与开关角 θ 的关系如图：



(a)全局情况



(b)m 值左极限放大情况



(c)m 值右极限放大情况
图 5 n=15, m 与开关角 θ 的关系图

从图中可以得出使开关角 θ 有解的 m 范围为 $0.64 \leq m \leq 1.19$ 。

综合以上结果可知随着 n 增大, m 的下限值提高。但是由于两个两个开关角大小相差大于 $0.05/n$ 时我们认为它们不相等, 此时 m 有解, 随着 n 增大, 对开关角差值的要求降低了, 所以导致 m 取值范围扩大, 所以 m 的上限值先减小后增大。总的来说, m 的取值区间长度减小。

计算出 $n=3, n=5, n=15$ 的时候取不同 m 值的 THD 结果如下表:

表 2 $n=3, n=5, n=15$ 时不同 m 值对应 THD 结果

m THD	0.7	0.74	0.78	0.82	0.86	0.9	0.94	0.98	1.02
$n=3$	17.14%	17.91%	11.74%	10.73%	10.55%	12.83%	9.91%	7.76%	8.83%
$n=5$	4.40%	7.98%	5.98%	8.01%	4.92%	4.81%	6.47%	4.71%	4.03%
$n=15$	2.46%	2.57%	2.17%	2.03%	2.01%	1.69%	2.55%	1.49%	2.07%

由表可知随着 n 增大, THD 会逐渐降低, 可见在模块增加时输出电压的波形质量越高, 消谐效果越好。对于相同的 n , THD 随着 m 变化而变化, 但是只在很小的范围内波动。

VI 解的延伸与判定模型

6.1 模型的建立——基于步长搜索模型的开关角范围分析模型

为了便于分析在相同 m 值下, 不同模块数 n 所对应 θ_i 解的相互包含关系。我们在问题二等步长的检验搜索模型对 m 取值研究的基础上, 对于级联模块数

$n=3, n=5, n=15$, 取一定范围的 m 值, 使其均能求解出对应的开关角。

$n=3$ 时, $0.35 \leq m \leq 1.07$; $n=5$ 时, $0.44 \leq m \leq 1.05$; $n=15$ 时, $0.64 \leq m \leq 1.19$ 。所以我们取 m 范围为 $0.64 \leq m \leq 1.05$ 。

设置步长 $\delta=0.01$, m 的取值依次为 $0.64, 0.65, 0.66 \cdots 1.05$ 。对于每一 m 取值, 对 $n=3, n=5, n=15$ 分别使用补充经验公式的初值设定模型得到初值 $\theta_{10}, \theta_{20} \cdots \theta_{n0}$, 通过 `fsolve` 函数求解出对应的开关角 $\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_n$ 。接着对每一 m 取值, 分析得到的三组开关角的联系, 找到开关角的相互包含关系。

由于对于定值 n , 当 m 不同时, 取的开关角不同, 设置精度为 0.1 , m 的取值依次为 $0.4, 0.5, 0.6 \cdots 1.2$ 。对于 $n=3, n=5, n=15$, 分别计算取不同 m 值时的开关角 θ 的值, 计算相应的 V_s , 求解相应的 THD, 在同一坐标系中绘制不同 n 时候的 THD 与 m 的关系图, 由图得出结论。

6.2 模型的结果与分析

设置步长为 0.01 , m 的取值依次为 $0.64, 0.65, 0.66 \cdots 1.05$ 。对每一 m 取值, 我们发现当 $n=3$ 时得到的开关角与 $n=5$ 时的 $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ 差别不大, 当 $n=5$ 时的开关角与 $n=15$ 时的 $\theta_2, \theta_3 \cdots \theta_{14}$ 中的某三个非常接近。所以可以认为当 $n_1 < n_2$ 时, n_1 的开关角将包含在 n_2 的开关角中。以 m 为 0.85 时的对应开关角为例, 如图:

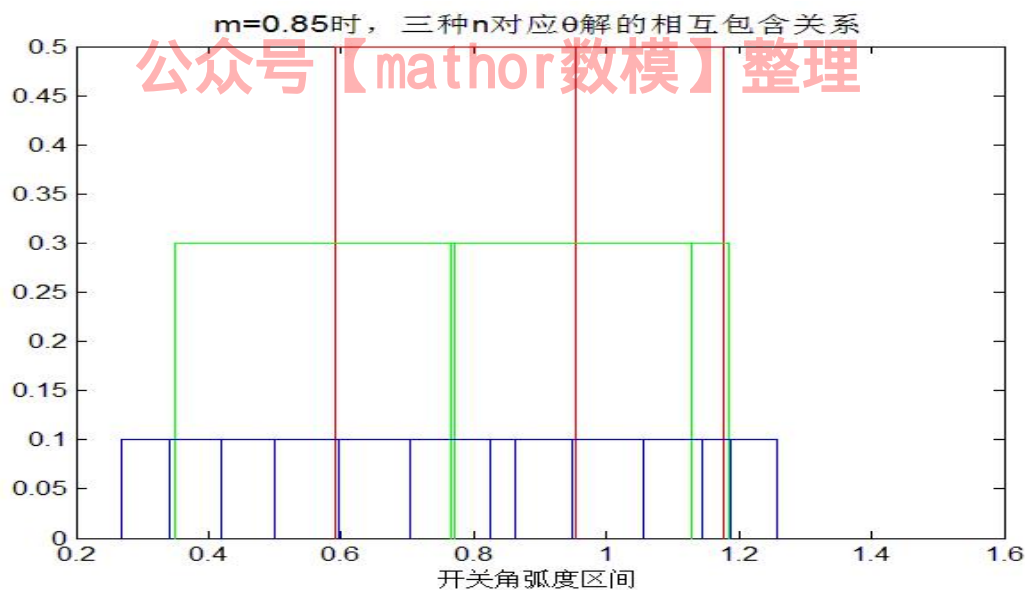


图6 $n=3, 5, 15$ 时开关角相互包含关系

从图上可以很好的看出 $n=3$ 时开关角基本包含在 $n=5$ 时的开关角中, $n=5$ 时开关角基本包含在 $n=15$ 时的开关角中。当 $n_1 < n_2$ 时, n_1 的开关角将包含在 n_2 的开关角中。

在模型二求解的基础上, 在同一坐标系中绘制 $n=3, 5, 15$ 时候的 THD 与 m 的关系图, 如图。

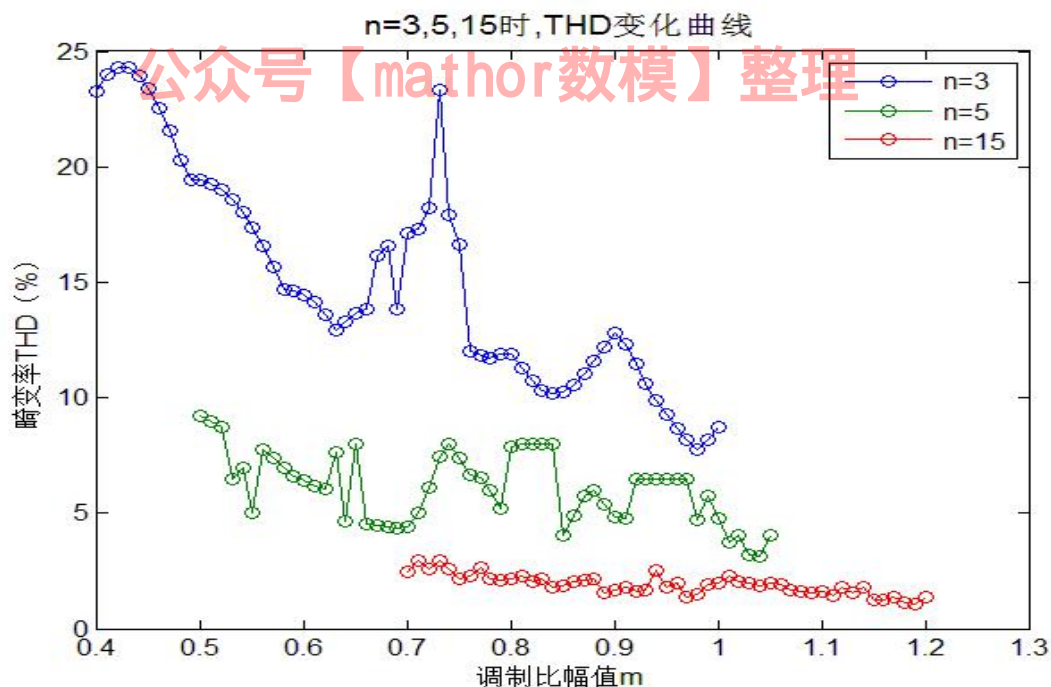


图7 $n=3,5,15$ 时 THD 与 m 的关系图

由图可见随着 n 的增加, THD 的值会减小。对于相同的 n , THD 值随着 m 变化略有变化且 n 越大这种变化越小。随着 n 的增加, 输出电压 V_{ac} 波形的质量会变好, 更加接近正弦曲线。

VII 功率均衡求解模型

7.1 模型建立的准备

对于第 i 个 H 桥变换器单元, 当 (S_{1i}, S_{3i}) 或 (S_{2i}, S_{4i}) 开通时输出 0 电平, 即输出电压 v_{aci} 为 0; 当 (S_{1i}, S_{4i}) 开通时输出 1 电平, 即输出电压 v_{aci} 为 V_{dci} ; 当 (S_{2i}, S_{3i}) 开通时输出 -1 电平, 即输出电压 v_{aci} 为 $-V_{dci}$ 。脉冲上升沿取 “+”, 下降沿取 “-”。为了实现功率均衡, 将每一变换单元 i 划分出三个控制角, 控制角设为 θ_{ij} ($j=1,2,3$)。当级联单元的个数为 n 时, 共划分出 $3n$ 个控制角。当调制比幅值 m 发生变化时, 控制角 θ_{ij} 应作相应调整。对于 $n=3$ 时的控制角划分如图 8。

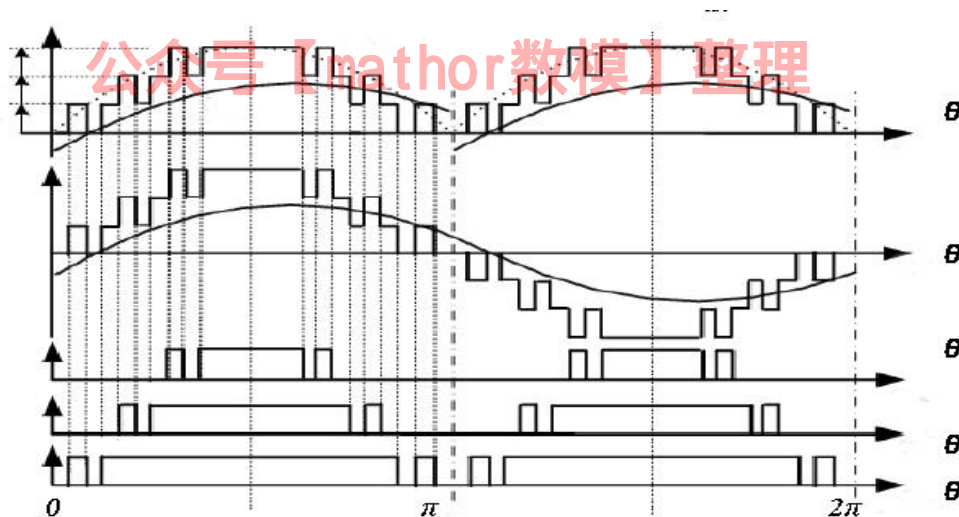


图 8 $n=3$ 时的控制角划分

7.2 模型的建立

第 i 个单元模块的基波幅值 V_{ci} 为

$$V_{ci} = \frac{4V_{dc}}{\pi} (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) \quad (14)$$

单元 C1 输出功率^[3]

$$\begin{aligned} P_{ci} &= V_{ci} i_{an} \\ &= \frac{4V_{dc}}{\pi} (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) * \sin(\omega t) * I_m \sin(\omega t - \phi) \\ &= \frac{2}{\pi} V_{dc} I_m (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) [\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)] \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $i_{an} = I_m \sin(\omega t - \phi)$, ϕ 是功率因数角, 本题可不考虑其变化的影响。

P_{ci} 的有功功率为:

$$P_{ci} = \frac{2}{\pi} V_{dc} I_m (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) \cos \phi \quad (16)$$

由上式可知, i 单元输出功率 P_{ci} 的大小与其基波幅值成正比。为了快速实现各单元输出功率及其功率器件开关负荷均衡, 我们提出了一种基于 SHEPWM 的新型功率均衡控制策略。该策略利用 SHEPWM 控制角可灵活调整的特点, 在保证输出相电压波形呈 1/4 周期对称的前提下, 根据调制度的大小, 在 1/4 周期内通过灵活控制变换单元控制角 θ_{ij} 的位置, 使 $P_{c1} = P_{c2} = \dots = P_{cn}$ 。由于各单元功率器件动作次数也相同, 从而在 1/4 个周期内实现各单元输出功率及其功率器件负荷均衡。新策略控制原理如图 9 所示。

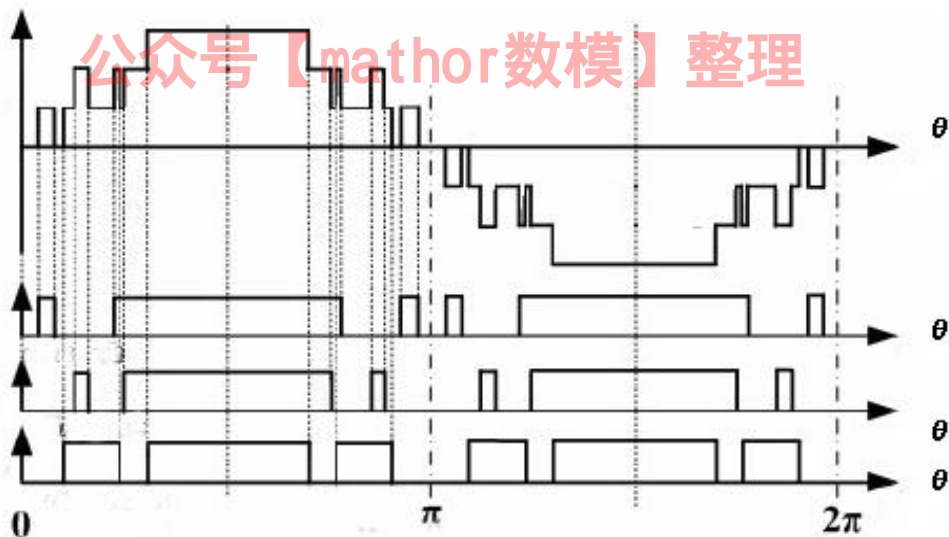


图 9 新策略控制原理

上图中变换单元 i 的输出电压基波幅值 $V_{ci} = \frac{4V_{dc}}{\pi}(\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3})$ 。要使直流侧各单元输出功率相等，要满足^[4]:

$$V_{c1} = V_{c2} = \dots V_{cn} \quad (17)$$

同时由几何形状，功率表现为矩形波的面积，功率相同则有面积相同故有：

$$\theta_{i2} - \theta_{i1} + \frac{\pi}{2} - \theta_{i3} = \theta_{i+12} - \theta_{i+11} + \frac{\pi}{2} - \theta_{i+13} \quad (18)$$

结合公式（2）（14）和（17）知各单元输出均衡的 SHEPWM 控制角求解方程组为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) = \frac{\pi n}{4} m \\ \cos \theta_{11} - \cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} = \cos \theta_{21} - \cos \theta_{22} + \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{21} - \cos \theta_{22} + \cos \theta_{23} = \cos \theta_{31} - \cos \theta_{32} + \cos \theta_{33} \\ \cdot \\ \cos \theta_{n-11} - \cos \theta_{n-12} + \cos \theta_{n-13} = \cos \theta_{n1} - \cos \theta_{n2} + \cos \theta_{n3} \\ \theta_{12} - \theta_{11} + \frac{\pi}{2} - \theta_{13} = \theta_{22} - \theta_{21} + \frac{\pi}{2} - \theta_{23} \\ \theta_{22} - \theta_{21} + \frac{\pi}{2} - \theta_{23} = \theta_{32} - \theta_{31} + \frac{\pi}{2} - \theta_{33} \\ \cdot \\ \theta_{n-12} - \theta_{n-11} + \frac{\pi}{2} - \theta_{n-13} = \theta_{n2} - \theta_{n1} + \frac{\pi}{2} - \theta_{n3} \\ \sum_{i=1}^n (k \cos \theta_{i1} - k \cos \theta_{i2} + k \cos \theta_{i3}) = 0 (k = 5, 7, 11 \dots) \end{array} \right. \quad (19)$$

n 为偶数时，需要增加 $(n/2-1)$ 个约束方程,同时减少 $(n/2-1)$ 个消谐波方程。

n 为奇数时，需增加(n+1/2-1)个约束方程,同时减少(n+1/2-1)个消谐波方程 [5]。

在调制比幅值 m 给定的情况下，可计算出对应的控制角。根据解出的控制角，计算出每一输出电压基波幅值以及相应的 THD。

7.2 模型的结果与分析

对于 n=20 的情况，具体取 m=0.8 时。所有的单元在 1/4 周期内先正后负再正。此时的求解方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2} + \cos \theta_{i3}) = \frac{16\pi}{4} \\ \cos \theta_{11} - \cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} = \cos \theta_{21} - \cos \theta_{22} + \cos \theta_{23} \\ \cos \theta_{21} - \cos \theta_{22} + \cos \theta_{23} = \cos \theta_{31} - \cos \theta_{32} + \cos \theta_{33} \\ \cdot \\ \cos \theta_{191} - \cos \theta_{192} + \cos \theta_{193} = \cos \theta_{201} - \cos \theta_{202} + \cos \theta_{203} \\ \cos \theta_{201} - \cos \theta_{202} + \cos \theta_{203} = \cos \theta_{11} - \cos \theta_{12} + \cos \theta_{13} \\ \theta_{12} - \theta_{11} + \frac{\pi}{2} - \theta_{13} = \theta_{22} - \theta_{21} + \frac{\pi}{2} - \theta_{23} \\ \theta_{22} - \theta_{21} + \frac{\pi}{2} - \theta_{23} = \theta_{32} - \theta_{31} + \frac{\pi}{2} - \theta_{33} \\ \cdot \\ \theta_{192} - \theta_{191} + \frac{\pi}{2} - \theta_{193} = \theta_{202} - \theta_{201} + \frac{\pi}{2} - \theta_{203} \\ \theta_{202} - \theta_{201} + \frac{\pi}{2} - \theta_{203} = \theta_{12} - \theta_{11} + \frac{\pi}{2} - \theta_{13} \\ \sum_{i=1}^n (k \cos \theta_{i1} - k \cos \theta_{i2} + k \cos \theta_{i3}) = 0 (k = 5, 7, 11 \dots) \end{array} \right. \quad (20)$$

求得的解为：

表 3 n=20 时开关角的求解值

开关角 模块单元	θ_1	θ_2	θ_3
1	0.07	0.10	0.10
2	0.10	0.13	0.14
3	0.15	0.19	0.21
4	0.19	0.25	0.27
5	0.25	0.30	0.33
6	0.28	0.36	0.37
7	0.35	0.50	0.52
8	0.35	0.35	0.36
9	0.42	0.48	0.49
10	0.49	0.59	0.59

11	0.54	0.56	0.56
12	0.59	0.68	0.68
13	0.63	0.65	0.66
14	0.56	0.58	0.69
15	0.65	0.67	0.75
16	0.58	0.59	0.81
17	0.77	0.79	0.87
18	0.86	0.87	0.95
19	0.93	0.95	1.03
20	0.99	1.03	1.07

将开关角带回,设 $\frac{2}{\pi}V_{dc}I_m \cos \phi$ 为单位1,计算对应的 P_{ci} ,求出方差为:S=0.04。
可见很好的均衡了各模块单元的变换功率。模型有较强的实用性。

VIII模型的验证与推广

8.1 模型验证

- 1、波形拟合的初值设定模型验证：
对于fsolve函数，初始值与精确值越接近，求解的值就越准确，故采用初值与解的二范数作为验证模型有效的参数。经验证，当取n=3时，可以求解出对于0.7<m<1.05的模型范围内，均有初值与解的二范数<0.2310，由此可以验证模型一的求取的初值效果较好。
- 2、有解判定及搜索模型：
通过对一些不可解点选取不同初值，发现一个良好的初值可能使该条件下不能求解的问题找到解，运用第一问提出的波形拟合法确定初值设定的模型，可以得到保守的m取值范围，结合工程实际中的数据曲线，可以证明我们给出的m范围是方程组有解的充分不必要条件。
- 3、功率均衡求解模型：
由于每个模块存在先正后负再正三个状态，故把求解空间急剧扩大，在已有算法法基础上，对于一般的m,只能通过设置迭代步数来完成一次求解，经验证，上述结果中给出的解回代得到功率差值分布在0~2%，效果显著，模型有效。

8.2 模型推广

经过验证发现模型的消谐效果较好，能分析各因素间的相互关系并能给出均衡功率条件下有效的开关控制策略；因此应用于实际工程中的低次谐波消除技术较为可靠，具有可推广性。

9.1 模型的优点

1、初值设定模型：

模型的初值迭代收敛性好，速度较快；且在原模型范围内初值能与代入方程得到的迭代结果较好的拟合，且改进后模型的适用范围较广。

2、有解判定及搜索模型：

过程简单切得出的范围由于经过代入验证可靠性较好，得出的范围较为合理。

3、解的延伸与判定模型：

分析包含关系较为简便，从图像反映的结果更为直观。

4、功率均衡求解模型：

开关控制策略具体，而且比较容易实现。

9.2 模型的缺点

1、初值设定模型：

只能在一定范围内保证较高精确度，其他 m 的范围内精确度有待提高。

2、有解判定及搜索模型：

m 的范围不够精确，只能取到接近精确解内的保守范围。

3、解的延伸与判定模型：

该求解方法理论上可以求得任意精度的 m ，然而随着精度提高，模块数加多时，需要的迭代次数也会增加，会耗费大量的时间，工程上不可行。

4、功率均衡求解模型：

模型的建立是基于每个模块有三个控制角的相对简单的情况，未考虑更多控制角的情况。

9.3 模型整体分析总结

结合模型优缺点总体来看，建立的相关模型在开关角的初值求解方面较为精确，求解开关角有解的 m 范围也较为可靠；THD随 n 的增加而减小反映对谐波的消除效果较好，并且可以分析不同模块单元数下开关角解的包含关系。但是在初值和调制比的精确范围上还有待提高；改进模型主要是要提高求解的精确度，以及

在均衡功率的开关控制策略上还可以改进使得可以控制更多电平。

公众号【mathor数模】整理

公众号

参考文献

- [1] 邱明伦. 求解非线性方程组的方法研究[D]. 西南石油大学, 2012
- [2] 佟为明. PWM 逆变器特定消谐式谐波抑制技术的研究[D]. 哈尔滨工业大学, 1999
- [3] 陈金平. 基于 SHEPWM 的多电平直流环节逆变器均衡控制策略 [J]. 长安大学
- [4] 苏毅. 半周期对称 SHEPWM 技术的开关角求解方法[D]. 武汉大学, 2012.
- [5] 孙宜峰, 阮新波. 级联型多电平逆变器的功率均衡控制策略[J]. 中国电机工程学报, 2006, 04:126-133.

公众号【mathor数模】整理

公众号