

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

论文格式规范

- 论文（答卷）用白色 A4 纸，上下左右各留出 2.5 厘米的页边距。
- 论文第一页为承诺书，具体内容和格式见本规范第二页，该页由队员及教练员（如有）手写签字后生效（一定要注明参赛组别，挑战赛组委会将各组别分开评阅）。
- 论文第二页为编号专用页，用于评委团评阅前后对论文进行编号，具体内容和格式见本规范第三页。
- 论文题目和摘要写在论文第三页上，从第四页（若无英文摘要）开始是论文正文。
- 论文第一页为承诺书，论文第二页为编号专用页，用于评委团评阅前后对论文进行编号。论文题目、关键词（模型、算法名称）和摘要写在论文第三页上，第四页为英文摘要（选填），论文 1—4 页按组委会统一要求编排，具体内容见下文，从第五页开始是论文正文。论文从正文开始编写页码，页码必须位于每页页脚中部，用阿拉伯数字从“1”开始连续编号，注意，论文一律要求从左侧面装订。
- 论文必须有页眉，页眉标识参赛队号，例如队号为 1101 的队需标识：参赛队号 # 1101
- 论文中不能有任何可能显示答题人身份的标志。
- 论文题目用三号黑体字、一级标题用四号黑体字，并居中。论文中其它汉字一律采用小四号黑色宋体字，行距用单倍行距。
- 提请大家注意：摘要在整篇论文评阅中占有重要权重，请认真书写摘要（注意篇幅不能超过一页）。评委团评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选。
- 引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料）必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出。正文引用处用方括号标示参考文献的编号，如 [1][3] 等；引用书籍还必须指出页码。参考文献按正文中的引用次序列出，其中书籍的表述方式为：
[编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年。
参考文献中期刊杂志论文的表述方式为：
[编号] 作者，论文名，杂志名，卷期号：起止页码，出版年。
参考文献中网上资源的表述方式为：
[编号] 作者，资源标题，网址，访问时间（年月日）。
- 论文中使用到的程序源代码放在附录中给出。
- 本规范的最终解释权属于数学建模网络挑战赛组委会所有。

数学建模网络挑战赛组委会
2013 年 4 月

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承诺书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：王凤

队员 2：唐朝清

队员 3：朱秀秀

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

3072

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2013@tzmcm.cn

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段

题 目 最优效能四面六边框架群结构分析

关 键 词 重力式、可靠度、稳定性、扭王字、扭工字、验算点法

摘 要

“护岸防洪防冲四面六边透水框架”是水利部西北水利科学研究所拥有的实用新型专利，并得到广泛应用。在江河治理工程中应用四面六边透水框架，能够减小水流流速，起到防冲、护岸、促淤的作用。

随着国内外内河航运的迅速发展，传统的四面六边透水框架结构型式正暴露出越来越多的问题，因而内河航道护岸工程已开始积极探索一些新型的护岸结构型式，努力寻找既能保证功能要求同时又具备资源节约型、环境友好型特点的新型护岸型式，内河航道护岸结构型式的发展呈现出全新的形势。

为了找到能有效抵御水流冲击，且在水中能互相钩连，使稳定性最大化以达到预期减速促淤效果的框架结构。我们建立了压力模型、四面六边透水框架优化模型，框架群模型结构模型、影响框架群效能模型、验算模型五个模型。

其中压力模型采用有限元法确定作用在护岸结构上的土压力，用刚体极限平衡法进行整体结构的稳定性分析。四面六边透水框架优化模型采用面元法理论求出了任意形状

物体绕流的表面流速分布数学表达式 $V_k = V_{\infty,n} + V_n = V_{\infty} \cos \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{z,j}) ds_j$ 。通

过 SPSS 拟合，MATLAB 计算得出减速比和框架杆截面形状、长宽比 k ，框架群架空率、抛投长度之间的经验公式 $\eta_L = \tau^a \eta^* \eta_{\infty}$ 得出最优框架形状是截面为三角形，长宽比为 16.3，框架群架空率为 4.97，抛投长度为 10m 的四面六边透水框架，且减速比可达到 76%。框架群结构模型首次研究分析将四面六边优化形状制作成重力式挡土墙、扭王字异型块体、扭工字异型块体结构，建立抗倾覆稳定性和抗滑移稳定性的功能函数，采用验算点法（JC 法）得出两个相应的可靠度指标。影响框架群效能模型研究了框架群的摆放，位置的选择，边界，糙率四方面对效能的影响。

在改进中采用工字型加固、香根草模型增强框架群结构效能，最后通过验算模型使用各失效模式的线性化功能函数、两个极限状态面的等效方法验证模型的合理性。

参赛队号： 3072

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

Abstract

The Permeable Frames of Tetrahedron with Six Sides theory is a patent hold by NorthWest water conservancy department and it's widely used.

With the development of the river transportation, more and more problems are discovered with the traditional The Permeable Frames of Tetrahedron with Six Sides method. So, people are hunting for a more effective structure nowadays. They aim to find a structure which can works well, source saving and be friendly to the environment. This field is taking on a new feature.

In order to find a structure which can defend the water force effectively and can attach to each other firmly, we come up with five models including force model, Advanced Permeable Frames of Tetrahedron with Six Sides model (APFS), group frame model, group frame's influencing factors model and checking computations model. We use finite elements method in the force model to deduce the force of the soil gain on the protected dam and rigid body limit equilibrium method to analysis the stability of the general frame structure. In the APFS model, panel method is used to deduce the expression of the flow field for a shape uncertain

object: $V_k = V_{\infty,n} + V_n = V_{\infty} \cos \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial_n} (\ln r_{z,j}) ds_j$. We use SPSS and MTALAB to work

out the experience expression between the deceleration ratio and the shape of the frame's arm, length to width ratio(k), frame group OverheadRatio and the layout length: $\eta_L = \tau^a \eta^* \eta_{\infty}$. We draw a conclusion that the best shape of the frame's arm is triangle, and the best length to width ratio is 16.3, overheadRatio is 4.97 and the layout length is 10m. The deceleration ratio can reach up to 76% under this circumstance. In the APFS model, based on our analysis to the group frame, we come up with a plan which make the frame out to Computation model of gravity retaining walls or a shape similar to distorted Chinese character “王” or “工”. Building up the function of the resistance against slide and fall then use JC method to work out the stability index. The group frame influence factors model major in the frame group's influencing factors such as location, boundary, rough degree and so on.

Furthermore, we use the distorted Chinese character “王” or “工” model and the vetiver model to reinforce it in the further discussion. In the end, liner function of the invalid model, equivalent method of two limit state surface, both in the checking computations method are used to prove the rationality of our model.

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

目录

一、问题概述及分析	2
二、问题假设	2
三、符号说明和名词解释	3
3.1 符号说明	3
3.2 名词解释	4
四、数学模型一（压力模型）的建立与求解	4
4.1 概述	4
4.2 模型建立	4
4.3 模型小结	5
五、数学模型二（优化四面六边透水框架模型）的建立与求解	6
5.1 概述	6
5.2 截面形状优化	6
5.3 优化框架杆件	10
六、数学模型三（框架群结构影响因素分析）的建立与求解	12
6.1 概述	12
6.2 重力式挡土墙结构	12
6.3 扭工字异型块体	13
6.4 扭王式异型块体结构分析	15
七、数学模型四（结构群影响因素模型）的建立与求解	16
7.1 概述	16
7.2 边界条件	16
7.3 框架群的摆放	17
7.4 糙率条件	17
7.5 研究位置的选择	17
7.6 模型总结	20
八、模型验算	21
8.1 概述	21
8.2 各失效模式的线性化功能函数	21
8.3 两个极限状态面的等效方法	21
九、优缺点与误差分析	22
9.1 优点	22
9.2 缺点	22
9.3 误差	23
十、推广与改进	23
10.1 推广	23
10.2 改进	23
参考文献	27
附录	28

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

一、问题概述及分析

护岸固脚工程是河道整治工程的重要内容，也是堤防工程的重要部分。护岸固脚工程具有其特殊性和复杂性，涉及诸多因素，如：河势演变、水流要素、河床介质、水文气象等。我国建有大量的堤防，堤防的安全直接影响到社会经济的发展和人民生命财产安全，长期以来，为了治河护岸，采用过各种各样的技术和方法。

护岸工程按机理分类，可分为实体抗冲护岸和减速不冲护岸。

其中，四面六边透水框架群治河护岸防冲技术是水利部西北水利科学研究所于 20 世纪 90 年代初期针对多沙河流的河道整治研究开发的一种新型透水性治河护岸技术。

四面六边体透水框架群治河技术，其基本原理是利用框架群多个杆件的滞留减速作用，促使含沙水流在一定的区域内减速落淤，并营造新的水流边界条件，从而达到控导河势、保滩护岸的目的。该结构群具有透水和阻水消能的作用，将传统的护岸技术中的集中消能变为逐步分级消能，从而达到减速落淤的效果。

近 10 年来，四面六边体透水框架作为一种新型的护岸防冲方式，因其特殊的减速促淤效果，在河道整治、消力池、桥墩防冲等工程中，得多了广泛的应用。相比于实体护岸方式，该结构不仅节省工程材料，而且具有良好的减速促淤效果，在投放区域起到了防止冲刷，保护水工建筑的作用。

虽然四面六边透水框架相比传统工艺具有很好的减速促淤效果，但是四面六边透水框架在抛投时和在使用过程中，由于压力，相互间钩连不稳固，可能被水流冲击而翻滚移位，导致整个框架群的形状发生变化，产生的阻力发生变化，不能达到预期的减速促淤效果。为了使框架能够最大化地达到预期效果，使其在水中互相钩连，不被压力，水流冲击破坏框架群的形状，需要设计出新的能防滑抗倾覆稳定性好的形状。但是已有的多数设计方案中都普遍存在两大问题：

第一：单个框架自身结构强度不足，稳定性不够；

第二：虽然理论上单个框架之间能够互相钩连，但由于缺乏对客观条件，事实数据的恰当的分析，未验证由单个框架堆砌而成的最终形状是否合理。

由此，需要建立合理的数学模型，利用模型，结合数据分析，设计出将压力、水流冲击破坏力最小化，在水中互相钩连稳定性较高的，最大化地达到预期效果的框架极其框架群结构。

二、问题假设

1. 各大河流在一定时间内形成稳定的均匀流且河道底坡 $i=0$ 。
2. 河道同一网格点上纵向、横向的糙率相同，不考虑河道边壁的糙率。
3. 忽略水面风力，地转力因素，旁侧入流(降雨等)的影响。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2013@tzmcm.cn

三、符号说明和名词解释

3.1 符号说明

符号	意义
η	减速率
h_f	沿程损失
B	江河宽度
H	水的深度
[D]	弹性矩阵
S_t	抗压强度
ρ	水的密度,
e	水流速度
E	弹性模量
M_S	倾覆力矩
L_2	丁坝长度
M_R	抗倾覆力矩
$d\sigma$	为应力增量
$d\varepsilon$	为应变增量
$\bar{\eta}$	平均减速率
E_H	水平力合力
λ	杆件长宽比
ξ	沿程阻力系数
N_i	为位移插值函数
L_1	框架群作用长度
u	X 方向的水流速度
v	Y 方向的水流速度
$[D]_p$	为材料的塑性矩阵
ω	透水框架抛投密度
$[D]_{ep}$	为材料的弹塑性矩阵
C_D	框架群的等效阻力系数
ε	四面六边框架群架空率
i	为均匀流时的水槽坡度
v_i	为单元的结点Y方向的位移
A_i	框架群顺水流方向的投影面积
a	水流方向与河岸切线所成的夹角

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

3.2 名词解释

1. 塑性剪切屈服：当材料在剪切力的作用下，会发生形变。当它所受的剪切力达到其屈服力时候，那么它将发生剪切屈服。

2. 有限元法：用较简单的问题代替复杂问题后再求解。它将求解域看成是由许多称为有限元的小的互连子域组成，对每一单元假定一个合适的（较简单的）近似解，然后推导求解这个域总的满足条件（如结构的平衡条件），从而得到问题的近似解。

3. 面元法理论：又称板块法。是将物体表面或机翼中弧面等特征面进行离散，生成网格后对每个网格，用一个平面或曲面代替原来的物面称为面元，在该面元上布置流动的奇点如源、涡、偶极子及其组合，进行求解气动问题的方法。

4. 库仑土压力理论：此理论假设挡土墙是刚性的，墙后填土为无粘性土。挡墙受主动土压力或被动土压力时，墙后土体均处于整体极限平衡状态，按刚体极限平衡条件算出主动土压力及被动土压力值。

5. 胡克定律：在弹性限度内，物体的形变跟引起形变的外力成正比。

四、数学模型一（压力模型）的建立与求解

4.1 概述

要对护岸结构进行稳定性分析，首先要解决作用在结构上的土压力问题。为了满足结构设计需要，传统的朗肯公式和库仑公式^[1]由于使用简便，可以用它们来确定土压力。但作为稳定性研究，应当采用更精确合理的方法计算土体压力。有限元方法^[2]可以考虑土体和结构的变形及两者之间的相互作用，是一种较好的方法。

4.2 模型建立

平面模型采用四结点等参单元，单元的位移模式为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (2)$$

对于混凝土底板和挡板，一般采用线弹性模型。其材料的应力—应变关系服从胡克定律^[3]，

$$\{d\sigma\} = [D] \{d\varepsilon\} \quad (3)$$

对于平面应变问题为

$$[D] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

考虑到土体以及浆砌块石为低抗拉材料,在实际荷载作用下可能会发生破坏,因此有必要采用弹塑性模型,在各种弹塑性模型中,Mohr-Conlomb 模型^[4]由于参数少,易于应用。取以下复合型屈服准则

$$F_i = \sigma_i - \sigma_t \quad (i=1,2) \quad (5)$$

$$F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - c \cos \phi \quad (6)$$

式(5)为最大拉应力准则,其 σ_i 为主应力, σ_t 为材料的抗拉强度,式(6)为 Mohr-Coulomb 屈服准则,其中 σ_1 、 σ_2 为第一与第三主应力, c 、 ϕ 为材料的凝聚力和内摩擦角。

当 $F_i < 0$ 和 $F < 0$ 时,材料处于弹性状态,其应力、应变关系满足弹性物理方程(3)。

当 $F_i > 0$ 时,材料发生拉裂破坏,开裂后沿开裂面的法向丧失刚度,成为横观同性材料,设局部坐标 x' 、 y' 在开裂面内, z' 与开裂面法线一致,则局部坐标下的应力、应变关系为:

$$\{d\sigma'\} = [\overline{D}]\{d\varepsilon'\} \quad (7)$$

式中 $[\overline{D}]$ 为修正后的弹性矩阵。整体坐标下的应力、应变关系为:

$$\{d\sigma\} = [T]^T [\overline{D}] [T] \{d\varepsilon\} \quad (8)$$

其中 T 为坐标转换矩阵。

当 $F_i < 0$ 和 $F_i > 0$ 时,材料发生塑性剪切屈服,屈服后的材料的应力、应变关系为:

$$\{d\varepsilon\} = [D]_p \{d\varepsilon\} = ([D] - [D]_p) \{d\varepsilon\} \quad (9)$$

根据正交法则和流动理论,可以得出 $[D]_p$ 的表达式为:

$$[D] = \frac{[D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} + H} \quad (10)$$

其中 H 与材料的软硬化规律有关。

实际计算时,在结构和土体之间设很薄的接触单元,接触单元上的应力就可以认为是土体作用于结构上的表面力。经过坐标变换,得到土体作用于结构表面的法向和切向土压力。

4.3 模型小结

此模型用有限元法确定作用在挡板式护岸结构上的土压力,用刚体极限平衡法进行整体结构的稳定性分析。与用常规的朗肯土压力方法计算土压力得到的安全系数相比结果比较接近,这说明该方法是可行和合理的。由于该方法可以有效地考虑结构与土的相互作用,因此所得到的结果应该更接近于工程实际。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

五、数学模型二（优化四面六边透水框架模型）的建立与求解

5.1 概述

在不同的边界水流条件下,四面六边透水框架具有十分明显的减速落淤作用。框架重心较低,具有良好的稳定平衡性,即是在水流冲击下发生位移滚动,仍能保持其高度不变,继续发挥作用。框架布设密度越大,减速落淤效果越好,因此继续改进该形状。

5.2 截面形状优化

5.2.1 概述

水流流过不同形状的障碍物后,形成的绕流尾涡不同,引起的减速比也不同,我们首先在框架杆截面面积一定的情况利用下数值面元法的基本方法,即均匀流与点源流的叠加可以描述任意形状物体绕流的流场。研究截面形状对减速比的影响。

5.2.2 模型建立

用 s 表示沿源面边缘所得的曲线长度,定义 $\lambda(s)$ 为沿着 s 方向单位长度源面的源强度。则源面微元 ds 的源强度可以表示为 λds ,可以将其视为一小段源面的源强度。在流场中任取一点, $P(x, y)$,距离 ds 为 r ,则在 P 点强度 λds 的源面微元引起的速度势微元 $d\phi$ 为 r ,

$$d\phi = \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad (11)$$

对式(11)沿着 s 由起点 a 到终点 b 积分,可以得到点 P 关于此源面的全速度势方程,即

$$\phi(x, y) = \int_a^b \frac{\lambda ds}{2\pi} \ln r \quad (12)$$

假设流场中有一给定的任意形状物体,自由来流速度为 V_∞ 。沿物体表面布置源面(即面元),且源面的强度变化应能使物体的表面跟流场中均匀流和源面流所叠加合成的一条流线贴合。那么,问题就可以转化为如何寻找并定义合适的源面强度 $\lambda(s)$ 。如图1.1所示,我们用一系列直板面元来代替流场中物面上的曲线面元对同一直板面元来讲,单位长度源面的强度为常数,但各个面元之间的强度并不相等。现假设物面上有 n 个直板面元,且单位长度源面的强度分别记为: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ 。这些源面的强度是未知的,而面元法的主要问题就是求解这些源面的强度并使物面成为叠加流场中的一条流线。考虑到物面边界条件,将物面本身视为叠加流场中的一条流线,取面元的中点为控制点,那么每个控制点处的流场速度的面元法向分量均为零。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

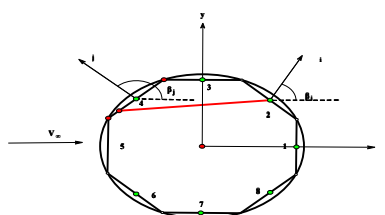


图 1.1 障碍物表面的面元分布

Fig1.1 The binning condition on the barrier

在图 1.1 所示流场中，令P点坐标为 (x, y) ， $r_{p,j}$ 为第j块面元上任一点到点P的距离，则在点P由第j块面元引起的速度势 ϕ 可由式（12）求出，即

$$\Delta\phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{p,j} ds_j \quad (18)$$

其中，第j块面元上的 λ_j 为常数，且积分仅在第j块面元上进行。根据叠加原理，所有面元在点P处引起的总速度势为

$$\phi(P) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{p,j} ds_j \quad (19)$$

$$r_{p,j} = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} \quad (20)$$

其中 (x_j, y_j) 为沿物面第j块面元上任意点的坐标。由于点P为流场中任意一点，不妨将其取在第i块面元的控制点 (x_i, y_i) 处。这样，式（19）和式（20）就可以化简为

$$\phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{i,j} ds_j \quad (21)$$

$$r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (22)$$

式（21）即为所有面元对第i块面元控制点处速度势的总和。考虑到在控制点处使用边界条件，则速度在控制点处的法向向量为零。为了计算这个法向速度分量，首先来讨论自由来流垂直于面元的速度分量。用 n_i 表示垂直于第i块面元的单位法向矢量，方向沿物面向外，如图 1.1 所示。另外，注意到在所用的直角坐标系中，第i块面元的斜率为 dy/dx ，并且在一般情况下，自由来流的速度 V_∞ 与x轴还有一个夹角 α 。假设自由来流速度与第i块面元的法向夹角为 β_i ，则从图 1.1 中可得，垂直于第i块面元的自由来流法向分量为

$$V_{\infty,n} = V_\infty \cdot n_i = V_\infty \cos \beta_i \quad (23)$$

$V_{\infty,n}$ 的方向规定：沿物面向外为正，沿物面向内为负。所有面元在点 (x_j, y_j) 处引起的法向速度分量可由式（21）求得，即

$$V_n = \frac{\partial}{\partial n_i} [\phi(x_i, y_i)] \quad (24)$$

该式是在单位外法线方向上进行求导的，从这里可以看出，速度分量 V_n 的正方向沿物面向外。在上式的求导过程中， $r_{i,j}$ 将出现在分母的位置上，在第i块面元上的控制点处， $r_{i,j}$ 为零说明该点奇异。因为 $i=j$ 时的导数值为 $\frac{\lambda_i}{2}$ 。由式（24）和式（21），可得

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{i,j}) ds_j \quad (25)$$

其中，等号右边第一项表示第*i*块面元在本身控制点处引起的法向速度分量。符号表示所有其他的面元在第*i*块面元控制点处引起的法向速度分量之和。第*i*个控制点处的流场速度法向分量由两部分组成：一部分是式(23)表示的自由来流引起的法向速度分量；另一部分是式(25)表示的所有面元引起的法向速度分量。根据流场边界条件可知，这两部分之和应该为零，即

$$V_{\infty,n} + V_n = 0 \quad (26)$$

将式(23)和式(25)代入式(26)中，得

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{i,j}) ds_j + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (27)$$

该式中的积分结果仅取决于面元的几何形状，与流场参数没有关系。用 $I_{i,j}$ 表示控制点在第*i*块面元上时在第*j*块面元上进行的积分，所以式(27)可以写为

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} I_{i,j} + V_{\infty} \cos \beta_i = 0 \quad (28)$$

式(28)是关于*n*个未知量 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n$ 的线性代数方程。它表示控制点在第*i*块面元上时的流场边界条件。令*i*=1, 2, ..., *n*，得到所有面元控制点处的流场边界条件，从而得到*n*个关于 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$ 的线性代数方程组。然后，利用数值方法来求得不同的源面强度近似值*i*。而且所取的面元数目越多，所求得的源强度的近似值越准确，同时所得的流线形状也越接近原流场中的物体表面形状。对于圆柱，一般情况下只需要取8个面元就可以达到工程实际所要求的精度。计算出各个源面的强度*i*之后，可以通过以下方法计算出各个研究点处的法向速度。因此，自由来流在研究点处的法向速度分量就可以用下面的式子来计算，即

$$V_{\infty,n} = V_{\infty} \cos \beta_i \quad (29)$$

对该式关于*n*求偏导数，得到所有面元在第*i*个研究点处引起的沿物体表面的法向速度分量，即

$$V_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{z,j}) ds_j \quad (30)$$

由于第*k*个研究点处的法向速度分量 V_z 等于自由来流引起的法向速度分量式(29)与所有面元引起的法向速度分量式(30)之和，即

$$V_k = V_{\infty,n} + V_n = V_{\infty} \cos \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{z,j}) ds_j \quad (31)$$

至此，我们使用面元法理论求出了任意形状物体绕流的表面流速分布数学表达式。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2013@tzmcm.cn

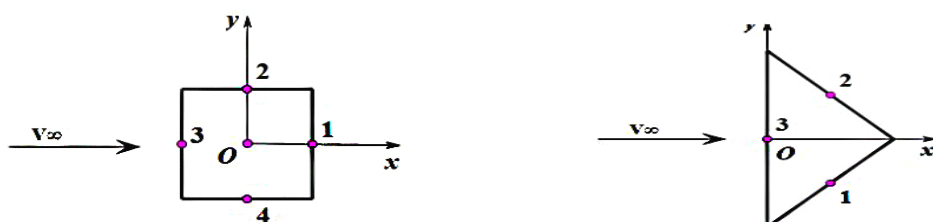


图 1.2a 对正方形截面用面元法分析 图 1.2b 对三角形截面用面元法分析

Fig1.2a Panel method for square section Fig1.2b Panel method for triangle section

我们选取了三种典型的框架杆截面形状（圆形，正方形，等腰直角三角形），分别研究它们对均匀水流流场的影响，即对水流的减速作用（用减速比衡量）。鉴于圆形截面的面元分析已在图1.1做出说明，这里我们仅给出对正方形截面、等腰直角三角形截面进行面元分析的面元划分图见图 1.2a, 1.2b, 将正方形截面划分成 1, 2, 3, 4 个面元；将三角形截面划分成 1, 2, 3 个面元。

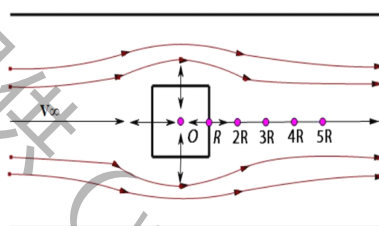


图 1.3 均匀流与点源叠加后的流场分布^[5]

Fig1.3 Flow field for a uniform flow mixed with point source

计算过程中，我们在障碍物后顺着水流方向距离截面中心距离为 R , $2R$, $3R$, $4R$, $5R$ 处均匀布了多个研究点（见图1.3；当截面为圆形时， R 表示圆的半径；当截面为正方形时， R 表示边长的一半；当截面为等腰直角三角形时， R 表示斜边的一半），分别计算研究点处的流速，并与自由来流速度作对比，得出减速效果最好，即减速比最大时对应的截面形状。在恒定流的条件下，对圆形、三角形、正方形三种截面面积相等、形状不同的杆件进行试验研究，试验分别对不同杆件布设的四面体下游5cm、15cm、25cm、35cm、65cm五点处的垂线流速分布进行测量，四面体几何比尺为10:1。减速结果如图 1.4 所示：

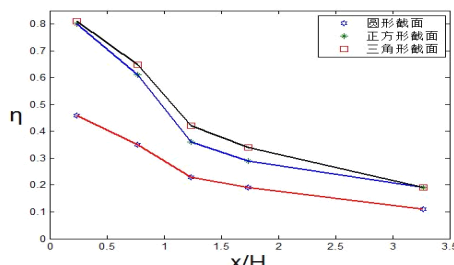


图 1.4 不同框架杆截面形状对减速比的影响

Fig1.4 Different section shape's influence on deceleration ratio

5.2.3 模型小结

1. 不同截面型式的四面体框架均有明显的减速效果，即使在框架体后3.2倍水深 ($x/H=3.3$) 处仍有一定的减速效果。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

2. 正方形截面、三角形截面型式的减速效果均明显优于圆形截面型式, 且三角形截面型式的减速效果略优于正方形截面型式。

3. 三种截面型式的减率效果虽大有差别, 但随着距离的增加减速率降低的趋势却是一致的。在 x/H 小于1.25时, 减速率随着距离的增加急速下降, 当 x/H 大于1.25时, 减速率的减小随着距离的增加渐趋平缓。由此推知, 当水流穿过透水框架时, 受到杆件的阻挡, 在一定距离内流速急速减小, 一定距离后, 流速经过重新调整、分布后又渐趋稳定。

5.3 优化框架杆件

5.3.1 概述

框架尺寸由框架的长宽和框架截面决定。若令框杆长为 l , 框杆断面特征尺寸(矩形截面为边长, 圆形为直径)为 d , 则框杆长宽比为 $\lambda=l/d$ 。

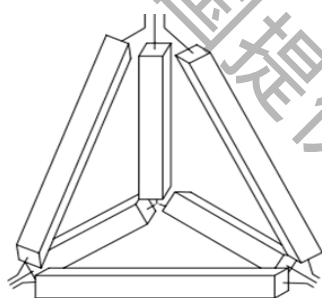


图 1.5 四边六面透水框架结构图

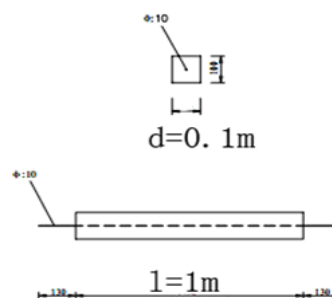


图 1.6 杆件结构图

Fig1.5 The Penetrating framework structure diagram

Fig1.6 Frame Structures

5.3.2 模型建立

由第一阶段所得结论将长宽比对减速率影响的相关数据, 导入 SPSS 中, 采用回归曲线分析, 得到表 1 和图 1.7, 如下所示:

表1 长宽比模型汇总和参数估计值(自变量为 λ , 因变量为 η_{ave})

Tab1 The estimate parameter value and the length-to-wide ratio collection

方程	模型汇总					参数估计值			
	R 方	F	df1	df2	Sig.	常数	b1	b2	b3
对数	.076	12.914	1	157	.000	.573	.051		
二次	.128	11.480	2	156	.000	.465	.034	-.001	
三次	.128	11.480	2	156	.000	.465	.034	-.001	.000
指数	.043	6.969	1	157	.009	.658	.005		

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

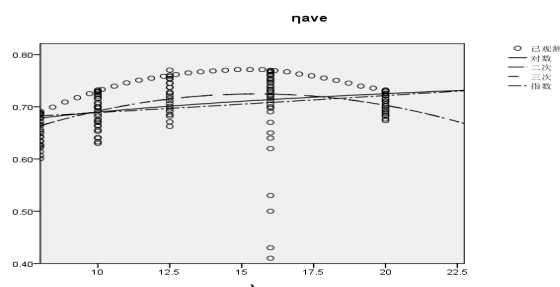
图1.7 长宽比模型汇总和参数估计值曲线图（自变量为 λ ，因变量： η_{ave} ）

Fig1.7 the graph of the estimate parameter value and the length-to-wide ratio collection
根据图表对比得出，当 η 与 λ 存在三次函数模型时，拟合程度 $R^2=0.128$ 最高， $Sig=0.000$ ，模型具有统计学意义。于是

$$\eta = 0.465 + 0.034\lambda - 0.001\lambda^2 \quad (32)$$

为检测杆件尺寸比对框架群减速效果的影响，固定框架群的架空率 $\varepsilon=4.8$ ，进行不同杆件长宽比的减速消能试验。常见的杆件长宽比 λ 为 10，观测杆件长宽比对减速率的影响，得到杆件长宽比与减速率关系曲线，见图 1.8。

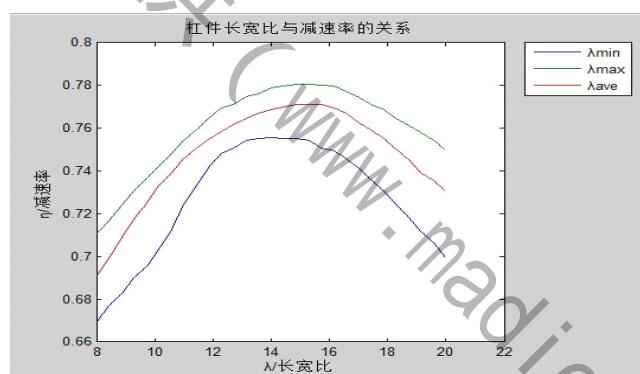


图1.8 近底杆件长宽比与减速率关系曲线

Fig1.8: The relationship between length-width ratio and the rate of deceleration

结合以上优化截面，可以得到减速比和框架杆截面形状、长宽比 k ，框架群架空率、抛投长度之间的经验公式

$$\eta_L = \tau^a \eta^* \eta_\infty \quad (33)$$

其中 τ^a 为截面形状不同引起的修正量（当截面形状为正方形时取 $\tau^a=1$ ，当截面形状为圆形时取 $\tau^a<1$ ，当截面形状为三角形时取 $\tau^a>1$ ），体现了框架群抛投长度对减速比的影响，体现了框架杆长宽比及框架群架空率对减速比的综合影响。具体影响关系式如下：

$$\eta^* = \begin{cases} 0.05L + 0.41 & (0 < L < 10) \\ 0.0032L + 0.90 & (10 \leq L < \infty) \end{cases} \quad (34)$$

$$\eta_\infty = 1.000f_1(k) + 1.000f_2(\xi) - 0.682 \quad (35)$$

$$f_1(k) = -4.80 \times 10^{-5} k^3 + 6.85 \times 10^{-4} k^2 + 0.015k + 0.503 \quad (36)$$

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

$$f_2(\xi) = -0.011\xi^3 + 0.110\xi^2 - 0.330\xi + 0.900 \quad (37)$$

5.3.3 模型的进一步分析

利用 matlab 画出该模型的图像，再与原图像做对比得出该模型具有科学性。

5.3.4 模型小结

通过对该经验公式求导，并综合上文的分析，我们发现当框架杆截面为三角形，且长宽比为 16.3，框架群架空率为 4.97，抛投长度为 10m 时，四面六边透水框架的减速效果最好，减速比可达到 76%。

六、数学模型三（框架群结构影响因素分析）的建立与求解

6.1 概述

结合大量实验数据表明，常见的单个护岸框架有透水桩坝、四角锥体扭王字异型块体、扭工字异型块体、重力式挡土墙等形状。但是从未尝试过将框架群的结构制作成重力式挡土墙、四角锥体扭王字异型块体、扭工字异型块体结构，接下来首次研究分析将四面六边改进形状制作成四角锥体重力式挡土墙、扭王字异型块体、扭工字异型块体结构减速促淤效能。

6.2 重力式挡土墙结构^[6]

6.2.1 概述

重力式挡土墙结构最主要的失稳模式是倾覆失稳和滑移失稳。为了计算重力式挡土墙稳定性的结构体系失效概率，首先分别建立重力式挡土墙结构抗倾覆稳定性和抗滑移稳定性的功能函数，然后引入结构可靠度分析一次二阶矩法中的验算点法（JC 法）分别对两种失效模式进行计算，得出两个相应的可靠度指标。将两种失稳模式视为串联系统，由逐步等效平面法计算结构体系可靠度指标，最后由结构体系可靠度指标计算出该挡土墙稳定性的结构体系失效概率。

6.2.2 模型建立

6.2.2.1 重力式挡土墙抗倾覆稳定性功能函数

重力式挡土墙抗倾覆稳定性要求墙身不产生绕墙趾的倾覆破坏，其数学表达式为

$$M_R \geq M_S \quad (38)$$

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

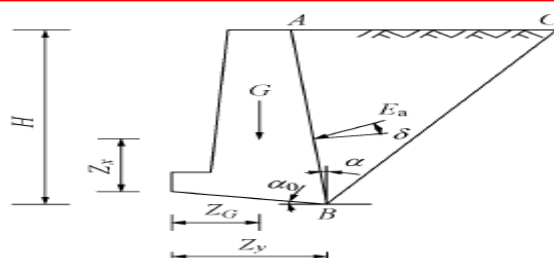


图 2.1 重力式挡土墙计算模型

Fig2.1 Computation model of gravity retaining walls

重力式挡土墙计算模型如图 2.1 所示，由库仑土压力理论^[7-8]知，当填土表面水平且不考虑填土表面超载时的主动土压力为

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_a H^2 K_a \quad (39)$$

其中，主动土压力系数为

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \alpha)}{\cos^2 \alpha \cos(\alpha + \delta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin \varphi}{\cos(\alpha + \delta) \cos \alpha}} \right]} \quad (40)$$

(γ_a 为墙后填土的重度；H 为挡土墙高度； φ 为墙后填土的内摩擦角； α 为挡土墙墙背倾角，当墙背俯斜时 α 值为正，仰斜时为负； δ 为土对挡土墙墙背的摩擦角。)

由此得绕墙趾转动的抗倾覆稳定的功能函数为

$$\begin{aligned} g_1(M_R, M_S) &= M_R - M_S = GZ_G + E_y Z_y - E_x Z_x \\ &= GZ_G + \frac{1}{2} \gamma_a H^2 K_a \times [Z_y \sin(\alpha + \delta) - Z_x \cos(\alpha + \delta)] \end{aligned} \quad (41)$$

(G 为挡土墙每延长米自重； E_x 、 E_y 分别为墙背主动土压力的水平和垂直分力； Z_G 、 Z_x 、 Z_y 分别为重力、土压力的水平分力、垂直分力到墙趾的力臂。)

6.2.2.2 重力式挡土墙抗滑移稳定性功能函数

重力式挡土墙抗滑稳定性要求墙身沿基底不产生滑动破坏^[9]，其数学表达式为

$$F_R \geq F_S \quad (42)$$

式中， F_R 和 F_S 分别为抗滑力和滑动力土压力同上，由此得抗滑移稳定的功能函数为

$$\begin{aligned} g_2(F_R, F_S) &= F_R - F_S = \mu_0 (G_n + E_{an}) - (E_{at} - G_t) \\ &= G(\mu_0 \cos \alpha_0 + \sin \alpha_0) + \frac{1}{2} \gamma_a H^2 K_a \cdot \\ &\quad [\mu_0 \sin(\alpha + \alpha_0 + \delta) - \cos(\alpha + \alpha_0 + \delta)] \end{aligned} \quad (43)$$

式中 μ_0 为土对挡土墙基底的摩擦系数； α_0 为挡土墙的基底倾角； G_n 、 G_t 分别为垂直于基底和平行于基底的重力分力； E_{an} 、 E_{at} 分别为垂直于基底和平行于基底的主动土压力分力。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

6.3 扭工字异型块体

6.3.1 概述

扭工字体又称杜洛斯特体, 是南非东伦敦港工程师发明的。该块体由三根细长杆件组成。最初, 块体各杆件的断面为八边形, 后来出现了断面为六边形的块体。我国在采用该种块体时, 将断面改为圆形。这样既制作方便, 又不改变块体原有的特性。我们将四面六边透水组装成扭工字体形。扭工字体的形状见图2.2.

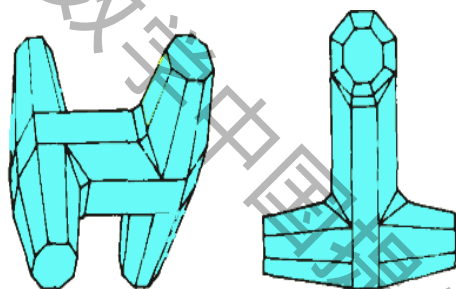


图2.2 扭工字体形状
Fig2.2 The shape of the object

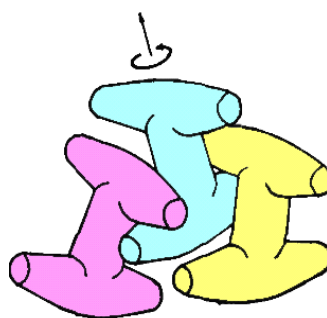


图2.3 力和力矩对扭工字体的作用
Fig2.3 The influence of force and torsion on the object

6.3.2 扭工字异型块体安放结构分析

6.3.2.1 扭工字异型块体群结构

把块体的规则安放分为两种类型：

1. 第一层块体腰杆平行于坡面, 垂直杆在坡面上方和下方交替排列, 第二层块体水平放置, 块体腰杆与第一层块体腰杆垂直, 试验结果是稳定性低于随意安放的情况。所有块体腰杆均平行于坡面, 垂直杆件在坡面下方, 结果稳定性也低。

2. 第一层块体腰杆平行于坡面, 一列块体垂直杆件在坡面下方, 另一列块体垂直杆件在上方相互交错, 第二层同样放置。结果稳定性有所提高。为了考虑坡度影响, 又在坡度分别为, 三种情况下做了试验, 结果值均在以上。得出规则安放比随机安放块体稳定性好的结论。

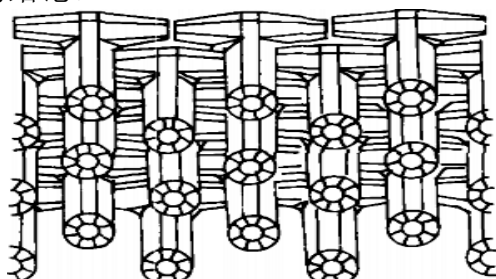


图2.4 扭工字体群形式a
Fig2.4 Group structure a

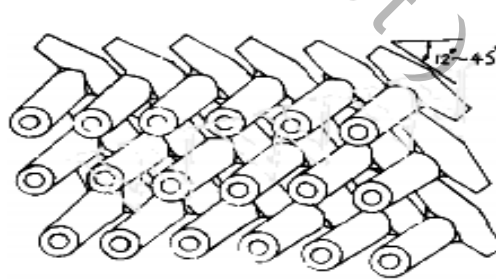


图2.5 扭工字体的形式b
Fig2.5 Group structure b

6.3.2.2 扭工字异型块体群结构小结

如图2.5,2.6所示的排列方式, 块体咬合程度高, 抗倾能力强, 稳定性大大增强。随

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email：2013@tzmcm.cn

着施工技术及监测手段的改进,扭王字体有规则安放为如图2.6的趋向。虽然规则安放会增加施工费用和周期,但块体稳定性好,安放密度可适当减少,因而块体数可减少,块体重量也可减轻,节省的材料费可以补偿规则安放而增加的施工费用。

6.4 扭王式异型块体结构分析

6.4.1 概述

在山区河流中,整治建筑物的坝头由于处在水流顶冲的关键部位,毁坏相当严重,特别是坝头水流流态较乱,采用铰链排等片状护面结构易于被水流冲翻,失去保护功能。研究分析采用扭王式异型块体结构。如下图2.6是扭王式异型块体结构。

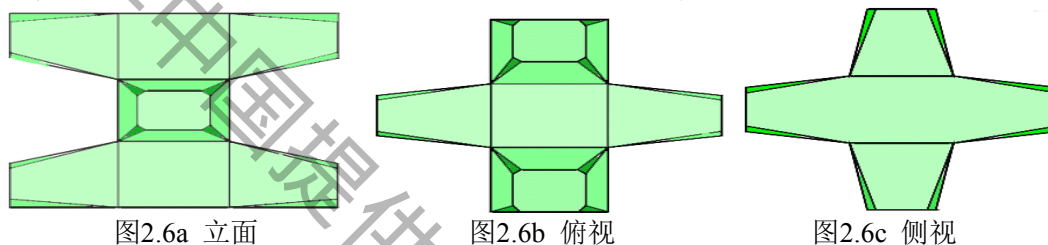


图2.6a 立面

图2.6b 俯视

图2.6c 侧视

图2.6 扭王字体块结构

Fig2.6 Frame structure of the object

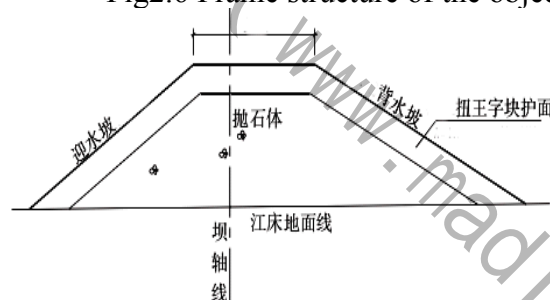


图2.6 扭王字块护面坝体截面

Fig2.6 The section of a dam protected by the object

6.4.2 以杨柳碛整治方案为例^[10]

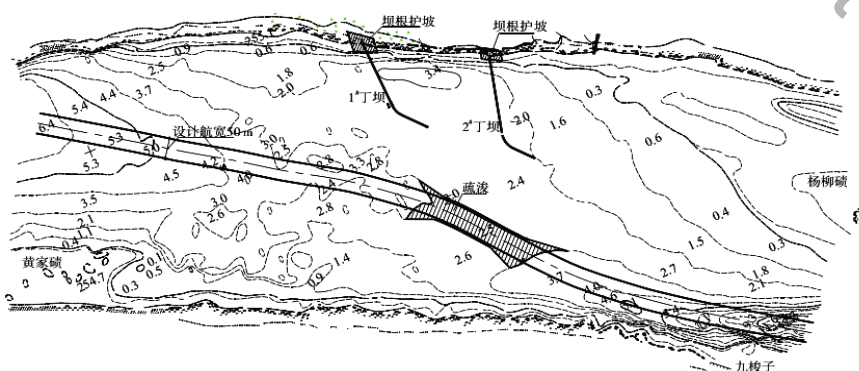


图2.7 杨柳碛整治方案平面布置

Fig2.7 Arrange plan based on YangNiuQi

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

$$d = 0.04V_f^2 \quad (44)$$

总体上来看，经过3个水文年后坝体总体稳定，但局部存在一定变形，主要表现在上、下丁坝的背水坡脚局部位置被水流淘蚀，坝体块石被水流带走，形成空隙，范围较小。在杨柳碛滩成功应用后，在叙泸段的金鱼碛丁顺坝的拐角处、风簸碛滩倒置丁顺坝的丁坝段、铜鼓滩顺坝坝头等均得以成功应用。

七、数学模型四（结构群影响因素模型）的建立与求解

7.1 概述

结构群的效能会受不同条件影响，接下来分别从边界条件、框架群的摆放、糙率条件、摆放位置等方面研究分析，为研究的方便，概化矩形河道，河道宽B为50m，长L为500m，水深H为3m，河道概化模型见图3.1所示。

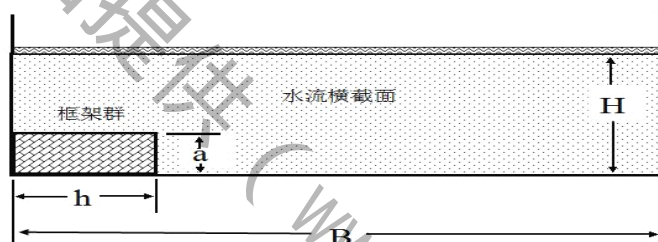


图3.1 河道概化模型
Fig3.1 Riverway model

7.2 边界条件

7.2.1 固壁边界

对于固壁边界，严格讲，应满足无滑动边界条件，即流速、紊动动能为零，紊动耗散率为有限值。在实际应用过程中该条件往往难以应用，这是因为固壁附近粘性层中，速度梯度极为陡峻，为了能够准确模拟实际情况，必须布置极为细密的网格，这样的计算费用非常昂贵。所以实用上一般采用不穿透条件。 $V \cdot n = 0$ ，其中n为固体边界的法向矢量，切向流速由曼宁—谢才公式^[7]确定。

7.2.2 自由边界

自由边界一般为上、下边界，有如下一些类型的边界条件：

- 上边界： $Z_{\text{上}}$ 为已知
- 或： u 为已知
- 或： Q 为已知及假定水位无横比降 (4—28)
- 下边界： $Z_{\text{下}}$ 为已知
- 或： u 为已知

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

或 Q 为已知及假定水位无横比降。

此模型采用上边界 Q 为已知及假定水位无横比降，下边界采用 Z 下为已知。

对于流量边界条件根据地形变化情况按下式分段给定断面上各段的流量：

$$Q_i = \frac{B_i H_i^{3/2}}{\sum_{j=1}^N B_j H_j^{3/2}} Q \quad (45)$$

式中 Q_i 为某段的流量， B_i 为该段的宽度， H_i 为该段平均水深， Q 为断面总流量。

7.2.3 时间步长的确定

$$C_f = 2\Delta t \sqrt{gH \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right)} < 4\sqrt{2} \quad (46)$$

式 Δx 、 Δy 分别表示纵向、横向网格的最小长度。

7.3 框架群的摆放

此试验主要针对单个框架群进行研究，从离上游边界200m处开始抛投，只抛在河道的左侧，右侧不抛，抛投位置见图3.2。

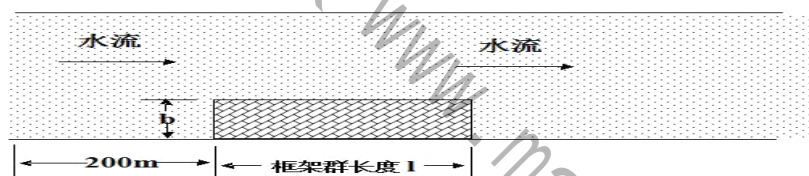


图3.2 框架群的摆放位置

Fig3.2 The location of the frame group

7.4 糙率条件

如图3.2所示，在河道的一侧按照工况铺空心四面体框架群，在数模中根据式子计算出框架群的等效曼宁糙率系数 n ，并将框架群所在的网格点上的横向和纵向的糙率设定为 n 。无四面体框架群的网格点上设定糙率才为0.025。

7.5 研究位置的选择

本模型主要研究框架群的形态对框架群后水流的减速特性，故将研究位置设在框架群后的各点上，研究点坐标示意图如图3.3所示。

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

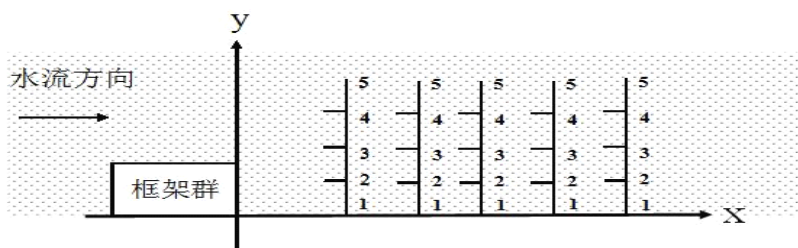


图3.3研究点位置

Fig3.3 Observation point

注： x 表示框架群后研究点的距离， y 表示研究点到左岸的距离，在模型中，采用 x/H 、 y/H 表示研究点在框架群后的位置。

7.5.1 水流流过框架群时的流态

固定 $H=3\text{m}$, $b/H=3.3$, $a/H=0.57$, $l/H=16.7$ 进行计算,水流流过框架群时的流场如图 3.4 所示。

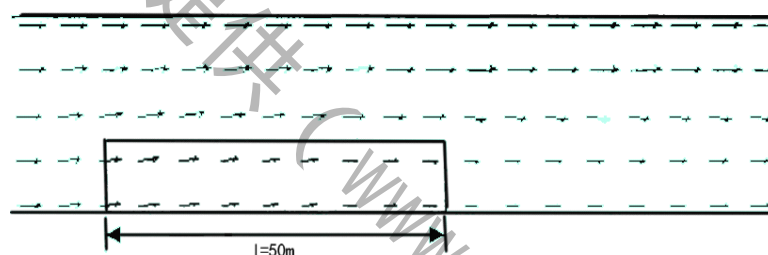
图3.4 水流流过框架群的流场 ($l/H=16.7$)

Fig3.4 The flow field when the water flowing through the frame group

由图 3.4 可以看出:水流流过空心四面体框架群时,由于受到框架群的阻滞作用,水流流速减小,并向右汇集,框架群右边的水体受到挤压,流速加大;在框架群后,被挤压的水体向左岸扩散,框架群后的流速又逐渐的增大,但在一定的距离内,流速仍然较小,由此可知,框架群后有一定的保护范围,在一定范围内,框架群仍对岸坡有一定的保护作用,所以在实际工程中,采用间隔抛投四面体框架群是合理的。定义框架群后减速率大于 0.2 的区域为框架群的保护区,下面就 l/H 、 b/H 、 a/H 对框架群后保护区的影响逐一进行研究。

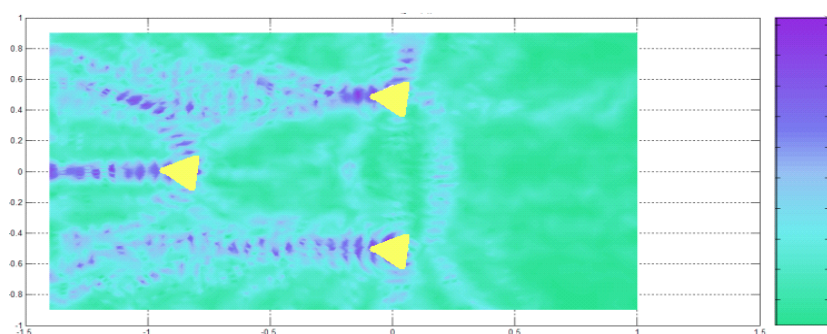


图3.5 四面体底部三点的流场模拟图a

Fig3.5 The flow field simulation diagram a of three point at the bottom of a tetrahedron

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2013@tzmcm.cn

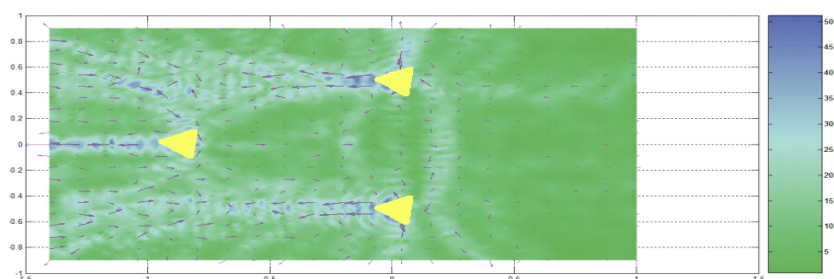


图3.6 四面体底部三点的流场模拟图b

Fig3.6 The flow field simulation diagram b of three point at the bottom of a tetrahedron

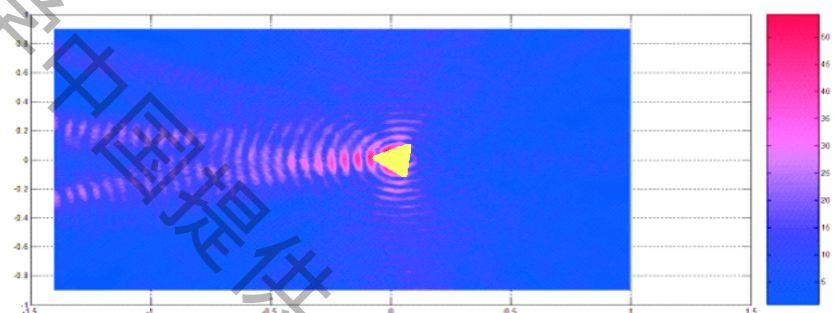


图3.7 四面体顶部点的流场模拟图a

Fig3.7 The flow field simulation diagram a of three point at the top of a tetrahedron

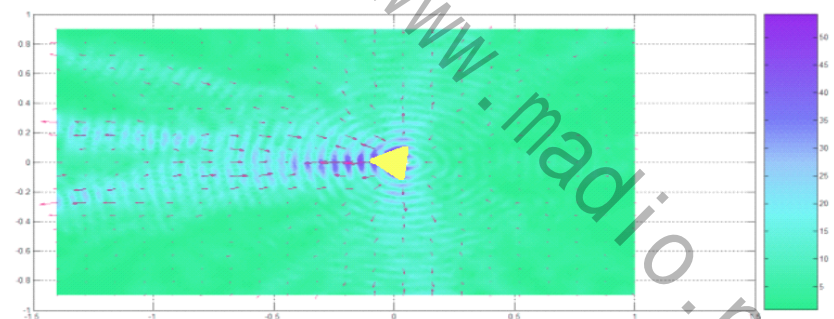


图3.8 四面体顶部点的流场模拟图b

Fig3.8 The flow field simulation diagram b of three point at the top of a tetrahedron

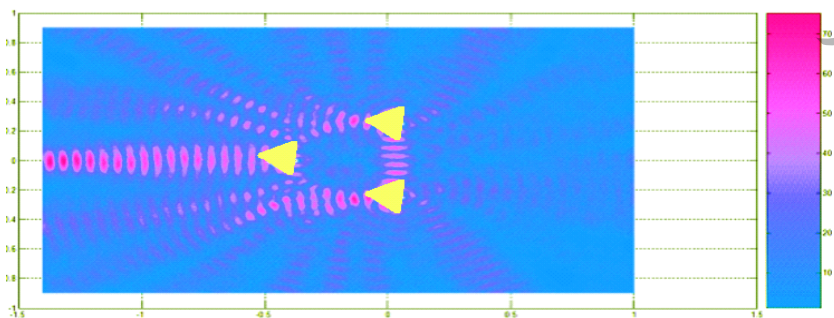


图3.9 四面体中间三点的流场模拟图a

Fig3.9 The flow field simulation diagram a of three point at the center of a tetrahedron

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

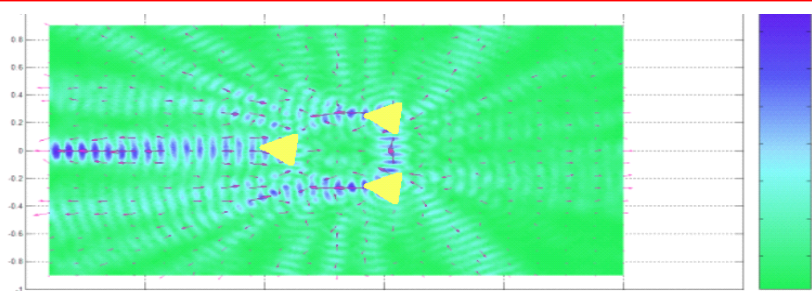
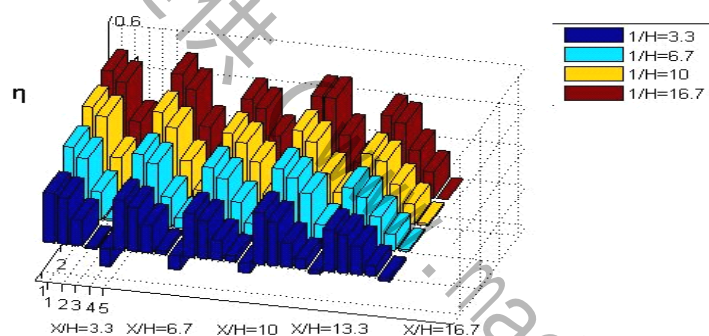


图3.10 四面体中间三点的流场模拟图b

Fig3.10 The flow field simulation diagram b of three point at the center of a tetrahedron

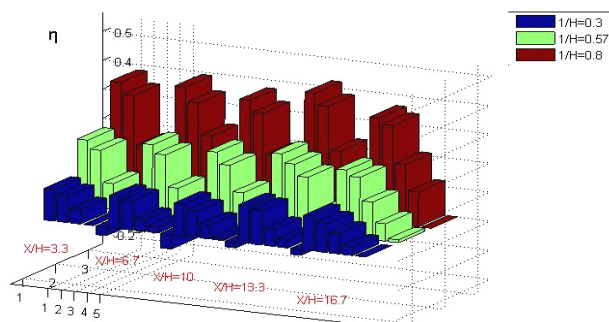
7.5.2 l/H 对框架群后保护区的影响

为比较不同的 l/H 下保护区范围的变化,在不同的 l/H 下进行计算,并将各研究断面的减速率点绘成图。投放框架群前河道各断面点的垂向平均流速为 1m/s (下同)。各研究断面的减速率分布如图 3.11 所示。

图3.11 不同 l/H 下不同 X/H 的减速率分布Fig3.11 The deceleration condition under different l/H and X/H

7.5.3 b/H 对框架群后保护区的影响

固定 $H=3\text{m}$, $a/H=0.57$, $l/H=6.7$, 在不同的 b/H 下进行计算, 得到不同的 b/H 下框架群后各断面的减速率, 不同 b/H 下框架群后各断面的减速率分布见图 3.12 所示。

图3.12 不同 b/H 下不同 X/H 的减速率分布Fig3.12 The deceleration condition under different b/H and X/H

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

7.6 模型总结

本模型通过计算主要研究了框架边界，糙率，框架群的摆放，位置的选择水流流过框架群时的流态， l/H 、 b/B 、 a/H 对框架群后垂线平均流速的减速率以及保护区长度、宽度的影响。

1. 用ADV对投放框架群前后同一断面的垂向流速分布测量表明，水槽投放四面体后，不但可以降低了近底区的时均流速、紊动强度，而且均化了紊动强度的垂线分布，从而为四面体框架群护岸机理提供了一个合理的解释。

2. 通过因此分析，探讨了四面体框架群减速率的影响因素，并在水槽试验的基础上，得出，近底流速的减速率随 l/H 的增加而增加，随 b/B 的增加而减小，框架群高度对近底流速的减速率影响不大，框架群高度的增加主要表现为减速区的增高。

3. 框架群在其下游一定距离内有一定的减速作用，随着 l/H 、 b/B 、 a/H 的增加，框架群后对应点的减速率也逐渐增加，保护区长度、宽度也不断增加，故在施工设计时，应根据不同的水深和减速率要求抛投相应长度、宽度、高度、间距的框架群。

八、模型验算

8.1 概述

体系可靠度研究的是多个功能函数的结构可靠度问题。一个结构总可以看成由若干失效模式组成，当任一失效模式的发生都将导致结构的整体破坏时，结构体系可看成由失效模式组成的串联系统；当全部失效模式都发生时才导致结构的整体破坏时，结构体系可看成由失效模式组成的并联系统。结构体系可靠度的计算问题也就成为并联系统或串联系统的可靠度计算。而并联系统失效概率的计算就是失效事件交集概率的计算，串联系统失效概率的计算就是失效事件并集概率的计算。重力式挡土墙的倾覆失稳或滑移失稳任一情况发生时都将导致结构破坏，因此，结构体系为串联系统。下面介绍多失效模式结构可靠度分析方法中的逐步等效平面法。

8.2 各失效模式的线性化功能函数

利用验算点法可得到线性化功能函数，为进一步利用可靠指标的几何意义，按式(46)将随机变量 $X_i (i=1,2,3,4)$ 变换为标准正态随机变量 $Y_i (i=1,2,3,4)$ ：

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, (i=1,2,3,4) \quad (47)$$

则挡土墙抗倾覆稳定性和抗滑移稳定性的线性功能函数分别可由 $Y_i (i=1,2,3,4)$ 表示为

$$Z_{L1} = g_{1F}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{1i} Y_i + \beta_1 \quad (48)$$

$$Z_{L2} = g_{2F}(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \sum_{i=1}^4 \alpha_{2i} Y_i + \beta_2 \quad (49)$$

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email：2013@tzmcm.cn

式中，系数 α_{1i} 、 α_{2i} 可以求得，可靠指标 β 、 β_2 可以求得，二者都是迭代结果。

8.3 两个极限状态面的等效方法

线性功能函数 Z_{L1} 和 Z_{L2} 的相关系数

$$\rho_{12} = \sum_{i=1}^4 \alpha_{1i} \alpha_{2i} \quad (50)$$

等效可靠度指标为

$$\beta^e = -\Phi^{-1} [\Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12})] \quad (51)$$

式 (51) 中，

$$\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho_{12}) \approx \Phi \left[\frac{-\beta_2 + A_1 \rho_{12}}{\sqrt{1 + B_1 \rho_{12}^2}} \right] \Phi(-\beta_1) \quad (52)$$

式 (52) 中，

$$A_1 = \frac{\varphi(\beta_1)}{\Phi(-\beta_1)}, B_1 = -A_1(-\beta_1 + A_1) \quad (53)$$

敏感系数为

$$\alpha_i^e = \frac{1}{\varphi(\beta^e)} \left[\alpha_{1i} \varphi(\beta_1) \Phi \left[\frac{\beta_2 - \beta_1 \rho_{12}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right] + \alpha_{2i} \varphi(\beta_2) \Phi \left[\frac{\beta_1 - \beta_2 \rho_{12}}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right] \right] \quad (54)$$

将 α_i^e 归一化为

$$\alpha_i'^e = \frac{\alpha_i^e}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (\alpha_i^e)^2}} \quad (55)$$

则 Z_{L1} 和 Z_{L2} 的等效线性功能函数为

$$Z_L^e = \sum_{i=1}^4 \alpha_i'^e Y_i + \beta^e \quad (56)$$

结构体系失效概率为

$$P_f = \Phi(-\beta^e) \quad (57)$$

对于具有多个极限状态面的串联系统，通过两两极限状态面的依次等效，直到只剩下一个极限状态面时，对应的可靠度指标即为串联系统的可靠度指标。

九、优缺点与误差分析

9.1 优点

由上一阶段分析可知四面六边透水框架减速促淤效果较好，在此基础之上，通过机理分析与优化计算改进四面六边透水框架，随后根据不同客观条件分析3种框架群形状，

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

以及讨论研究影响框架群效能的因素已经其影响程度。科学的分析了影响框架群效能的因素并提出了改进建议，并经过验算证明模型可行。

9.2 缺点

1. 经过模型分析计算，由于时间关系，没有得出确切的具有创造性的新形状。而是在原有的四面六边透水框架上进行了杆件长度、长度比、横截面形状的改进，提出并分析了三种框架群形状。

2. 单个框架之间的加固性考虑不够充分。

9.3 误差

我们也有引用其他人的实验成果，采用计算机模拟数据，是实验就必然有误差，这也必然会把误差带入到我们的研究中。另外，对一些数据的统计难免产生些许误差，降低了结果的精确度，对此，我们会继续改进。

十、推广与改进

10.1 推广

1. 模型 1 还适合研究不同条件下的压力情况。
2. 模型 2 可以推出其他行业抗压力产品，比如房屋的结构，受力物的结构。
3. 模型 3 适合研究不同条件适合的框架群形状。
4. 模型 4 可以有效的提高框架群效能。该模型从摆放，位置，糙率，边界等方面考虑得到更优的框架结构。

10.2 改进

10.2.1 加固形式

块体的加固形式有两种,即单束式,双式和和式,见图 4.1 , 将此三种形式绑扎的钢轨设置在扭工字体内,以增强块体强度。跌落试验的结果表明,单束式尽管可以延缓块体断裂的时间,但不能明显增加块体强度,双式和和式可使块体强度增加一倍。由于双式比和式钢轨用量多,因此建议采用 X 式钢轨加固方式。

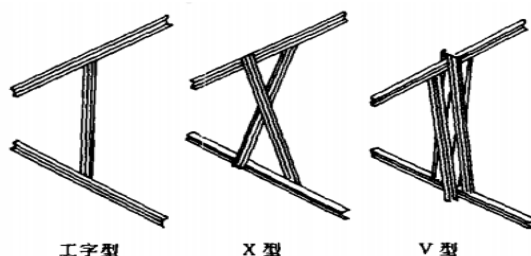


图4.1 三种不同的加固形式^[13]

Fig4.1 Three kinds of different reinforce model

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

10.2.2 框架群结构

以上讨论的群形状都是用四面六边透水框架组装成的相对单一的结构，可以根据不同客观条件，将四面六边透水框架组装成以上群结构的混合样式。

10.2.3 香根草模型

10.2.3.1 香根草根系—基土抗剪强度力学模型^[14]

香根草根系在土中分布的密度自地表向下逐渐减小，逐渐细弱。在根系盘结范围内，边坡土体可看作由土和根系组成的根—土复合材料，香根草的根系如同纤维的作用，因而可按加筋土的原理分析边坡土体的应力状态，即把土中草根的分布视为加筋纤维的分布，且为三维加筋。这种加筋为土层提供了附加“粘聚力” Δc ，它一方面使土体的抗剪强度向上推移了距离 Δc ，另一方面又因限制了土体的侧向膨胀而使 σ_3 增大到 σ_3' ，在 σ_1 不变的情况下使最大剪应力减小，这两种作用使坡岸基土的承载能力提高。

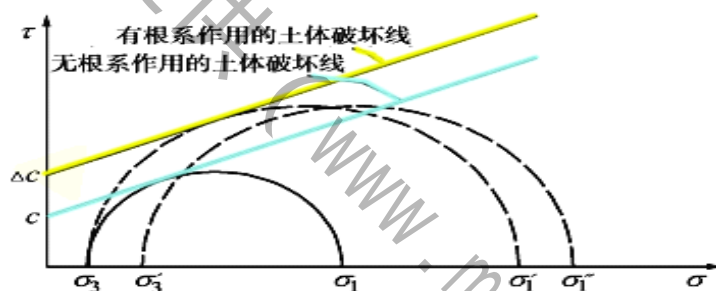


图4.2 根系对土体的加筋作用

Fig4.2 Reinforcement of roots in soil

容易导出，在剪切面，由于根的加筋作用所增加的土体的抗剪强度 τ_r 为

$$\tau_r = T(\sin \beta + \cos \beta \tan \phi) \quad (58)$$

式中 τ_r 为单位面积上由于根的加筋作用所增加的土体的抗剪强度； T 为单位面积上根系的抗拉力，取根系的抗拉强度与根系锚固力中的较小值； β 为剪切变形角，与根系本身的属性有关； ϕ 为土体内摩擦角。

10.2.3.2 香根草与基土锚固力力学模型

香根草根系的主根可扎入土体的深层，通过主根和侧根与周边土体的摩擦作用把根系与周边土体联系起来，结合其根系分布特点，可以把根系简化为以主根为轴侧根为分支的全长粘结型锚干来分析其对周边土体的力学作用。其锚固力的大小可通过计算各根系与周边土体的摩擦力和根系与土体之间的咬合力累加而获得，即

$$T_s = T_m + T_y \quad (59)$$

（ T_s 为单位面积上根系在基土剪切面上的锚固力； T_m 为单位面积上基土剪切面法向上根系与土之间的摩擦力； T_y 为单位面积上根系与土体之间的咬合力。）

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

对于坡面 h 深度处的根径大于 1 mm 的任意根段 dl ，根段表面每单位面积上所受到的正压力为 $\gamma_e(h+h_0)$ ；其中， γ_e 为土的自然容重； h_0 为单位面积内护坡块在铅垂方向化为土容重的等效厚度。令根—土间的静摩擦系数为 μ ，故相应的最大静摩擦力为 $\mu\gamma_e(h+h_0)$ 。则根段 dl 所受静摩擦力为

$$df = A \cdot \mu \gamma_e (h + h_0) = 2\pi r \cdot \mu \gamma_e (h + h_0) \cdot dl \quad (60)$$

式中 r 为根段半径； $A = 2\pi r \cdot dl$ 根段的表面积 df 在剪切面法向上的投影分量可近似表示为(设根段与剪切面法向夹角为 θ ，基土剪切面与水平面之间的夹角为 α)

$$df_n \approx 2\pi r \cdot \mu \gamma_e (h + h_0) \cdot dh / \cos \alpha \quad (61)$$

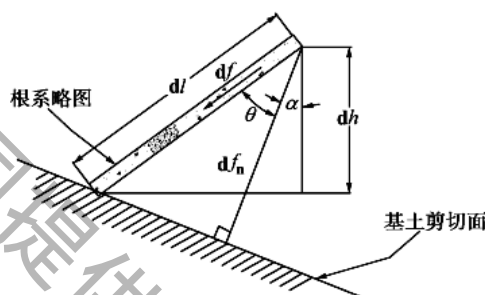


图 4.3 剪切面根系的力学分析示意图

Fig4.3 Mechanical sketch map of roots on cut-side

任意根段所受的最大静摩擦力在剪切面法线方向的分量与根伸展的倾斜状态(θ)无关，只与基土剪切面与水平面之间的夹角 α 有关。对于整个根系，若令根的平均半径沿深度 h 方向的分布函数为 $\bar{\gamma} = P(h)$ ，根数目沿深度 h 方向的分布函数为 $N = Q(h)$ ，则在地下 $h \sim h + dh$ 范围内，根系的静摩擦力在剪切面法向的分量为

$$\sum df_m = \frac{2\pi\mu\gamma}{\cos \alpha} \cdot P(h) \cdot Q(h) \cdot (h + h_0) dh \quad (62)$$

单位面积上 h 深度根系总的最大静摩擦在剪切面法向上的分量为

$$T_m = \frac{2\pi\mu\gamma}{\cos \alpha} \cdot \int_h^{h_e} P(h) \cdot Q(h) \cdot (h + h_0) dh \quad (63)$$

式中 h_e 为根系铅垂方向最大埋深。由于根系在地下不断分岔，受力机理类似于三维网状加筋。根系分岔处，当其受拉时，每根根系的前沿将支撑土体，将产生咬合力 T_y 。根系前缘的咬合力使土体中产生剪应力和拉应力，会引起土体剪胀效应。令分岔数目沿深度 h 方向 $h \sim h + dh$ 范围内的分布函数为

$$\sigma_y(h) = C(h)N_c + K_0\sigma(h)N_g \quad (64)$$

($C(h)$ 为沿铅垂方向 h 深度位置土的粘聚力； $\sigma(h)$ 为沿铅垂方向 h 深度位置土受到的法向应力；)

$$K_0 = 1 - \sin \phi \quad (65)$$

可以认为根系—土作用区土体处于静止土压力状态； N_c 、 N_g 为承载力系数，可按下列式计算：

$$N_g = \exp[\pi \tan \phi] \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad (66)$$

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

$$N_c = \cot \phi (N_g - 1) \quad (67)$$

($dA_y(h)$ 为沿深度 h 方向 dh 深度内根系前侧面抗拔受力面积)

$$dA_y(h) = [2 \sum_{i=1}^{I(h)} \sum_{k=1}^{M(i)} P(h) / \cos(\theta_{(k,i)})] dh / \cos \alpha \quad (68)$$

($\theta_{(k,i)}$ 为深度 h 方向 $h \sim h+dh$ 范围内第 i 个分岔处第 k 条相对于基土剪切面法向的夹角)

$$T_y = \frac{2}{\cos \alpha} \cdot \int_h^{h_e} [\sigma_y(h) \sum_{i=1}^{I(h)} \sum_{k=1}^{M(i)} P(h) / \cos(\theta_{(k,i)})] dh \quad (69)$$

以上各参数根据可以试验测定，统计分析得到。

10.2.3.3 基于条分法的香根草对铰链式混凝土块护岸系

条分法是边坡稳定分析中古老而简单却又常用的方法；以瑞典圆弧法为例，设满足瑞典圆弧法的一切假定。护岸系统（如图4.4所示）整个滑裂面AB上的平均安全系数 F_s 定义为沿整个滑裂面的抗剪强度 τ_f 与实际产生的剪应力 τ 之比，即

$$F_s = \frac{\tau_f}{\tau} \quad (70)$$

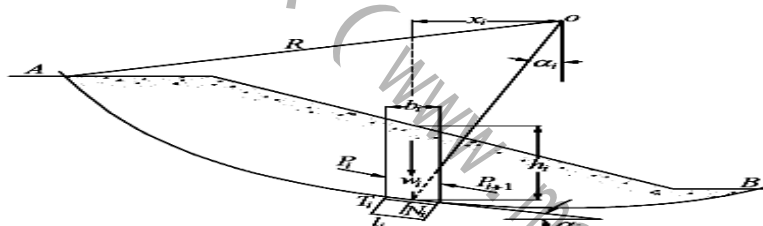


图4.4 铰链式混凝土护岸系统瑞典法示意图

Fig4.4 Slice method of bank protection system reinforced by Vetiveria zizanioides roots

图中 P_{i+1} 为作用于土条两侧的条间力合力，其方向和土条底部平行； N_i 和 T_i 分别为作用于土条底部的总法向反力和切向阻力；土条底部的角度为 α_i ，长为 l_i ， R 则为滑裂面圆弧的半径。根据莫尔库仑准则，滑裂面AB上的土体平均抗剪强度为

$$\tau_f = c' + (\sigma - g_0) \tan \phi' \quad (71)$$

(σ 为法向总应力； g_0 为孔隙应力； c' 、 ϕ' 为有效抗剪强度指标。)

按照式 (71) 的定义，该土条底部的切向阻力 T_i 为

$$T_i = \tau l_i = \frac{(\tau_f + \tau_{Ri})}{F_s} l_i = \frac{(c'_i + \tau_{Ri}) l_i}{F_s} + (N_i - u_i l_i) \frac{\tan \phi'_i}{F_s} \quad (72)$$

当香根草根没有深入到该土条时滑弧面时

$$\tau_{Ri} = 0 \quad (73)$$

现取土条底部法线方向力的平衡，可得

$$N_i = w_i \cos \alpha_i \quad (74)$$

同时，各土条对圆心的力矩和应当为零，即：

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email：2013@tzmcm.cn

$$\sum w_i x_i - \sum T_i R = 0 \quad (75)$$

而 $x_i = R \sin \alpha_i$ 可得

$$F_s = \frac{\sum [(c'_i + \tau_{Ri}) I_i + (w_i \cos \alpha_i - u_i I_i) \tan \varphi'_i]}{\sum w_i \sin \alpha_i} \quad (76)$$

显而易见，在根系较粗、纵横交错密度较大、分岔较多的基土层，香根草对护岸系统的稳定性作用非常突出，将会加大护岸系统的整体安全系数。

参考文献

- [1] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 19961
- [2] [英] O. C 凯维奇. 有限元法[M]. 北京: 科学出版社, 19851
- [3] 长江重庆航运工程勘察设计院. 长江干线宜宾合江门至泸州至纳溪航道建设二期工程工程可行性研究报告[R]
- [4] 段文忠, 河道治理与防洪工程, 湖北科学技术出版社, 2000. 5
- [5] Hisiang Wang and Steren.J.P.1990. A Probabilistic Mound of Rubble Mound Armor Stability."Coastal Engineering".Vol.14.pp:307 331.
- [6] 夏汉平. 关于香根草及其资源和利用研究[J]. 国内外畜牧学, 1998, 81(2): 1 - 4.
- [7] JTJ 312-2003 《航道整治工程技术规范》
- [8] 唐寅德, 张勇. 连云港扩建工程后的回淤现状及其模拟预测[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 1991(4): 74-82.
- [9] 百度百科网: <http://www.baidu.com/>
- [10] 中华人民共和国国家统计局: <http://www.stats.gov.cn/>
- [11] 中国科技论文在线: <http://www.paper.edu.cn>
- [12] 钱家欢. 土力学. 南京: 河海大学出版社, 1991(收稿日期: 1996-05-27 编辑: 张志琴)
- [13] 夏爱平. 二维水流泥沙数学模型在沙坡头水利枢纽中的应用研究. 河海大学硕士论文. 2003. 4
- [14] 李义天, 赵明登, 曹志芳. 河道平面二维水沙数学模型. 中国水利出版社2001. 12

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

附录

1、matlab部分程序代码：

不同 $1/H$ 下不同 x/H 的减速率分布

```

y=[1 2 3 4 5];
y1=[6 7 8 9 10];
y2=[11 12 13 14 15];
y3=[16 17 18 19 20];
y4=[21 22 23 24 25];
Z1=[0.25 0.23 0.13 -0.01 -0.09 ;
     0.35 0.30 0.14 0.01 -0.09 ;
     0.42 0.38 0.18 0.04 -0.06 ;
     0.47 0.42 0.23 0.08 -0.05;]';
Z2=[0.25 0.22 0.14 0.02 -0.07 ;
     0.35 0.31 0.15 0.05 -0.07 ;
     0.43 0.36 0.20 0.06 -0.07 ;
     0.49 0.42 0.24 0.11 -0.05;]';
Z3=[0.22 0.19 0.10 0.03 -0.05 ;
     0.32 0.27 0.16 0.06 -0.05 ;
     0.36 0.32 0.23 0.08 -0.05 ;
     0.40 0.36 0.23 0.11 -0.02;]';
Z4=[0.26 0.22 0.12 0.05 -0.02 ;
     0.35 0.31 0.24 0.09 -0.02 ;
     0.41 0.36 0.21 0.12 0.00 ;
     0.45 0.45 0.27 0.14 -0.02;]';
Z5=[0.21 0.19 0.14 0.05 -0.02;%5*4
     0.29 0.25 0.16 0.08 0.01 ;
     0.33 0.30 0.19 0.10 0.01 ;
     0.39 0.36 0.23 0.13 0.00;]';
bar3(y,Z1,'detached');
hold on;
bar3(y1,Z2,'detached');
hold on;
bar3(y2,Z3,'detached');
hold on;
bar3(y3,Z4,'detached');
hold on;
bar3(y4,Z5,'detached');
legend('1/H=3.3','1/H=6.7','1/H=10','1/H=16.7')

```

不同截面形状下的减速率

```

x=[0.24 0.77 1.24 1.74 3.27];
y1=[0.46 0.35 0.23 0.19 0.11];
y2=[0.80 0.61 0.36 0.29 0.19];
y3=[0.81 0.65 0.42 0.34 0.19];
plot(x,y1,'h',x,y2,'*',x,y3,'s');
hold on;
plot(x,y1,'r',x,y2,'b',x,y3,'k','LineWidth',2);
axis([0,3.5,0,0.85]);
legend('圆形截面','正方形截面','三角形截面');

```

参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

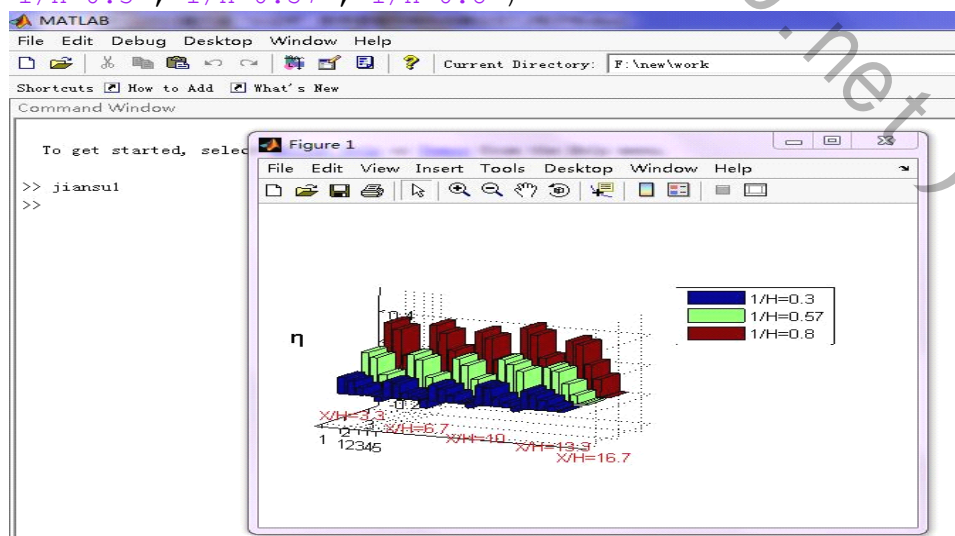
网址：www.tzmcm.cn

Email: 2013@tzmcm.cn

```

xlabel('x/H','FontSize',20);
ylabel('η','FontSize',20);
不同a/H下不同x/H的减速率分布
y=[1 2 3 4 5];
y1=[6 7 8 9 10];
y2=[11 12 13 14 15];
y3=[16 17 18 19 20];
y4=[21 22 23 24 25];
Z1=[0.11 0.09 0.05 0.00 -0.03 ;
     0.23 0.20 0.09 0.00 -0.07 ;
     0.38 0.34 0.17 0.02 -0.09 ;]';
Z2=[0.11 0.10 0.04 0.02 -0.05 ;
     0.24 0.21 0.10 0.03 -0.04 ;
     0.39 0.34 0.23 0.06 -0.03 ;]';
Z3=[0.11 0.09 0.05 0.01 -0.02 ;
     0.24 0.20 0.11 0.04 -0.02 ;
     0.37 0.33 0.19 0.08 -0.06 ;]';
Z4=[0.13 0.12 0.06 0.03 -0.02 ;
     0.26 0.23 0.19 0.07 0.00 ;
     0.42 0.38 0.23 0.12 -0.05 ;]';
Z5=[0.12 0.10 0.07 0.03 0.00 ;
     0.23 0.21 0.13 0.06 0.01 ;
     0.36 0.34 0.21 0.12 0.00 ;]';
bar3(y,Z1,'detached');
hold on;
bar3(y1,Z2,'detached');
hold on;
bar3(y2,Z3,'detached');
hold on;
bar3(y3,Z4,'detached');
hold on;
bar3(y4,Z5,'detached');
%view([90,0]);
legend('1/H=0.3','1/H=0.57','1/H=0.8')

```



参赛队号 #3072

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4969085

邮编：010021

Email: 2013@tzmcm.cn

表 2 材料物理力学参数表

Tab 2 The physical mechanics parameter of some materials

材料种类	变形模量 kPa	泊松比	容重 kN/ m ³	内摩擦角 (°)	凝聚力 kPa	抗拉强度 kPa
混凝土	2.6×10^7	0.167	24	45.0	1 300.0	1 300.0
浆砌块石	1.0×10^7	0.18	21	38.7	500.0	500.0
素填土	715	0.4	18.9	30.0	19.6	0.0
回填土	715	0.4	8.4~18.2	30.0	19.6	0.0
粉质粘土	1 735	0.45	9.3	31.0	9.8	0.0
淤质粘土	617	0.45	8.2	31.5	5.9	0.0