

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2010@tzmcm.cn

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1447 队

参赛队员（签名）：

队员 1： 邴雅婷

队员 2： 蔡杰明

队员 3： 张力元

参赛队教练员（签名）：

樊颖南

参赛队伍组别： 大学组

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2010@tzmcm.cn

---

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编号专用页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2010@tzmcm.cn

## 2010 年第三届 “ScienceWord 杯” 数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车

关 键 词 侧位停车，有效车位，动力学模型，理想路径

### 摘 要：

聪明的汽车不仅能识别有效车位，而且能以最理想的路径进行侧位停车，侧位停车是广大车主难以解决的问题。

根据汽车的长宽、轴距、最大偏向角等几何尺寸，由几何算法得出可以实现一次性侧位泊车的最小有效车位，从而判断本车是否能在该处停车。

路径规划方面，根据停车空间的几何形状，车辆的动力学模型，碰撞约束等，通过控制汽车转向角和相对停车位置，实现汽车泊车。满足动力学模型约束条件的汽车，其运动轨迹是若干相切圆弧的组合，其进入车位路径，分为车位外调整路径和汽车以最小半径倒车至最优位置路径两部分。

另外，运用假设情况定量分析来了解允许偏差。首先假定初始点都在同一条竖直直线上，并且它们一开始都做最小半径的圆周运动。显然在一定范围内对于每个不同的初始点的圆弧我们都可以找到唯一的一个半径轨迹与之相切，并且这个半径轨迹不是无限大的（是有界的）。在最小半径与边界半径之间有无数条不相交的路径，这就是允许的偏差路径。

参赛队号 1447

所选题目 A

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2010@tzmcm.cn

---

## SMART CAR

**Abstract:** Smart car can not only identify parking spaces effectively, but also find the best path to lateral parking. Solving the general side parking is a difficult problem for car owners.

According to vehicle length and width, wheelbase, maximum deviation angle geometry, obtained by geometric algorithms can achieve lateral minimum car parking spaces, which can help to determine whether the car can park in the area.

Path planning, according to the geometric shape of parking space, vehicle dynamics model, collision constraints, etc., by controlling the steering angle and the relative location of parking spaces, parking control vehicles to achieve. Meet the constraints of the vehicle dynamics model, its orbit is a combination of a number of tangential arcs, its path into the parking space is divided into spaces outside the adjustment path and the car parking to a minimum radius of the optimal location of the path of two parts.

In addition, we take advantage of the quantitative analysis of scenarios to understand tolerance. Paper firstly assumes that the initial points are in the same vertical straight line, and they all start doing the minimum radius of circular motion. Apparently within a certain range for each different initial point's arc can be found a unique tangent with the radius, and the radius in of course not infinite(they are limited). This is the path deviation that is allowed between the Minimum Radius and boundary radii.

Key Words: Lateral Parking, Effective Space, Dynamics Model, Best Path

报名号 # 1447

## 一、问题的提出

### 聪明的汽车

在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与信心的问题。有调查报告称：57% 的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这一方面影响人的驾驶体验，一方面也使停车空间不能得到充分利用。在此，请你协助驾驶员来解决停车的问题。具体要求如下：

(1) 对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入。请你建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。我们假设可以得到停车位置的平面图 1，包括停车空位的长度宽度等数据。考虑到实用性，模型所需的本车数据要能够容易测得，例如几何尺寸、转弯半径等。

(2) 我们假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上。请给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及允许的偏差显示在图上。

## 二、问题的分析

### (一)有效车位

对于侧位停车而言，其难点在于固定的车身大小进入有限的狭窄空间里，方式不能水平进入而是以一系列变动的角度缓慢调整进入。如果车位大小小于某个值(汽车侧位停车所需的最小有效车位大小)则会碰撞其他车的前脸或者尾箱，造成车体损坏甚至无法挤入。为了判断汽车能否侧位停车，求出有效车位是此提的关键点。

要得出有效车位，必须首先知道汽车的几何尺寸、两个前车轮相关系数和转弯半径等条件。

1. 汽车的几何尺寸可以直接测量，假设以某车型为定量标准；
2. 另外，一般在转向桥轮距已定的条件下，增大转向轮偏转角，可以减小转向半径，从而提高整机的机动性；但整机总体方案确定后车架宽度及轮胎规格已定，增大转向轮偏转角，可能会引起转向轮与车架相碰的问题，所以要根据实际了解到两个前轮各自的最大偏转角；
3. 由车体几何尺寸和最大偏转角可得出汽车最大转弯半径。

假设汽车在倒车过程中始终以最小转弯半径进行泊车，这种情况下，汽车所走过的路线为完成泊车的最短路线，所以由此确定的车位也就是最小车位。随着汽车变动角度缓慢调整进入，它所需要的移动范围也相应得出，由此算出相对平面图中汽车的最小有效车位。再根据比例放大平面图中车位进行对比，即可判断本车能否够顺利在该处侧位停车。

### (二)理想路线

无论是何种车型，如果不事先想好泊车的路线，在调整位置和角度时往往会陷入进退两难的困境，除非重新倒退再调整，否则别人或者自己的车体难免损伤。

## 报名号 # 1447

1 首先了解汽车低速移动的原理：所有汽车都是以前轮转向、后轮跟随前轮行进的，前轮的“横移”能力要大过后轮，因此泊车的大原则是先让后轮到位，再移正前轮。换言之，多数时候用倒车入库的方法泊车比较合适。如果试图直头泊车，则出现车头用尽了前方空间，车尾仍会在车库以外的情况，由于车子的后轮是没有转向能力的，即便你如何通过车头来调节，尾部始终很难挪进车库里。此外，前进入库的过程中右前轮会非常接近路肩，该距离无法通过后视镜观察得到，绝大多数前轮圈的受损都是这种情况下招致的。

## 2. 位置要适当：

- a) 如果前进太多，倒车时车头右侧很容易与前车尾部有相触的危险。此时如果回正方向盘直后让车头躲开前方车辆，尾部内侧又容易接近路肩；
- b) 如果前进太少，前进未到位就开始倒车进入车位，虽然前车距离很远，但可以用于倒车的距离却缩短了，往往当与后车非常接近时，大部分车头还在车位外面。此时就算右打方向前移试图将车头移入车位，整部车还是会跟着外移，无法完全进入车位；
- c) 如果与车位距离太远，这时倒车会出现车子横摆角度太大，就算后轮可以进入车位，剩余的距离也很难把车子摆直。当角度太“横”时，右侧后轮顶到路肩的机会也会大增，原本安全的车尾左侧也容易碰到后车；
- d) 距离太近，车身的角度往往很小，此时右前角会很接近前车，如果回正方向直后以躲开前车，车尾就很难进入车位。

## 3. 角度要适当：

- a) 如果角度过大，汽车的偏转半径过小，倒车入库时车头右侧很容易与前车尾部有相触的危险，并且这时倒车会出现车子横摆角度太大，就算后轮可以入库，剩余的距离也很难把车子摆直(与前进太多相似)；
- b) 如果角度过小，汽车的偏转半径过大，当车进入车位时，车尾很接近后车头，大部分车头还在车位外面。此时就算右打方向前移试图将车头移入车位，整部车还是会跟着外移，无法完全进入车位(与前进太少相似)。

总的来说，侧位停车的理想路线包括倒退泊车、特定位置、特定角度几个基本元素。具体的泊车路线要根据几何模型得出。满足动力学模型约束条件的小车，其运动轨迹是若干相切圆弧的组合。

从题目平面图上我们发现，车身在最初时刻与竖直方向成  $\theta$  角度，因此第一步首先是将车身开直，当达到某个最恰点时就可以开始倒车。而倒车路线要求最优，只需要相应行车路路径最短即可，因此让汽车以最大偏转角  $\theta_{\max}$  即最小半径行驶即是最优。作出半径圆，由切线等建立模型，求出最佳路线。

### (三)允许偏差

运用假设情况定量分析来了解允许偏差。我们首先假定初始点都在同一条竖直直线上，并且它们一开始都做以最小半径的圆周运动。显然在一定范围内对于每个不同的初始点的圆弧我们都可以找到唯一的一个半径轨迹与之相切，并且这个半径轨迹不是无限大的（是有界的）。在最小半径与边界半径之间有无无数条不相交的路径，这就是允许的偏差路径。

报名号 # 1447

### 三、 模型假设及说明

- 1) 假设此时交通压力不大，没有车辆在后面等候，有足够的时间调整车的位置，不需加快泊车速度；
- 2) 车位前面有足够大的空间供汽车调整位置；
- 3) 假设整个泊车过程车辆都以低速匀速行驶，并且汽车受到的侧向力很小；本文查得驾龄在 10 年的驾驶员经验，车速假定稳定在 3km/h.
- 4) 假设前后停置的汽车都在三维空间上沾满整个车位，车位边角线为汽车向碰的危险点；即汽车及汽车在地面的垂直投影，在整个倒车过程当中都不与车库垂直方向的两个边界相交；
- 5) 开始时车辆以车轮以最大偏转角，即车辆以最小偏转半径缓慢行驶，后来以较小的角度稍微调整以达到预定轨道. 此时，因车速很慢所以逐渐改变车轮角度而造成的离圆形轨道偏移影响程度很小，偏移的位移相对于偏转半径十分小，可以忽略，也就是假设按照圆形轨道行驶；
- 6) 汽车倒车结束后，汽车及汽车在地面的垂直投影离车库四边的最小距离都不能小于 100mm，以满足目前选用的超声传感器测量的最小距离不大于 100mm 的限制；
- 7) 两前轮的最大偏向角大小相等；
- 8) 假设车主开始调整入车位时都以最小半径倒车，再转向运动；
- 9) 本文汽车侧位停车都时一次性调整入车位的.

### 四、 文中用到模型数据及符号说明

(一)按照题目中提供的平面图，测量出相关数据如下：

汽车长度	3.32cm
汽车宽度	1.43cm
车位长度	4.5cm
车位宽度	2.85cm

(二)由于题目中提供的平面图不能测量出如轴距、后轮到保险杠距离等数据，为了建模需要和方便，下面将按比例列出某款车的实际整车参数：

整车参数	数值
长	4908mm
宽	2114mm
轴距	2350mm
最小转弯半径	$\leq 5250\text{mm}$
后轮到保险杠距离	884mm
$\theta_{\max}$ 最大偏转角	$45^\circ$
边界安全最小距离	100mm
车库长度	6652mm
车库宽度	4213mm

报名号 # 1447

方向盘右打死左前轮转角	$45^\circ$
方向盘右打死右前轮转角	$45^\circ$

## (三) 相关符号及其说明:

- |                           |                       |
|---------------------------|-----------------------|
| A 车位前面所停的车;               | C' 汽车转动时超过最终车位边距的最远距离 |
| B 车位后面所停的车;               | P 汽车左后轮的位置            |
| L 汽车的长度                   | r 圆心离汽车的距离            |
| W 汽车的宽度                   | R1 汽车右前轮围绕圆心转动时的半径    |
| a 后轮到保险杠的距离               | R2 汽车右后轮围绕圆心转动时的半径    |
| d 汽车前后两轮的轴距               | Rmin 最小偏向半径           |
| $\theta_{\max}$ 最大偏转角     | D 车位除去两个 m 的长度        |
| m 边界安全最小距离                | H 车位的有效长度             |
| O 汽车转弯所围绕的圆心              | h 车位除去一个 m 的宽度        |
| Q 最终停车时车体右前方的位置           | E 车位的有效宽度             |
| Q' 在汽车转入时与 A 相临界时车体右前方的位置 | G 两半径圆的相切点            |
| N 汽车最初的后轴中心               | Ns 汽车在标准点准备进车位时后轴中心点  |
| N' 汽车的前轴中心                |                       |
| C 最终停车时车体右后方的位置           | Nf 汽车最终停车时后轴中心点       |

## 五、模型的建立、求解及验证

车辆动力学模型:

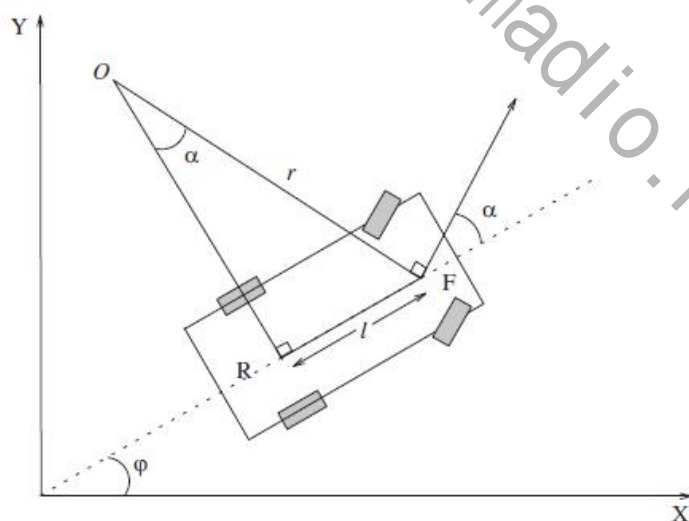


图0

图0中, 车辆前后车轴的距离为 $L$ , 车身与参考坐标 $X$ 轴夹角为 $\alpha$ . 因为要求车辆转向时, 车轮不打滑, 所以过车辆四个车轮中心点, 作车轮的垂直线, 相交于一点 $P$ . 从图1看出, 左、右前轮偏转角度是不相同的. 可以把两个前轮等效于在前车轴中点 $F$ 的一个车轮, 等效的偏转角度为 $\beta$ . 假设车辆前车轴中点 $F$ 的运行速度为 $v$ , 后车轴中点 $R$ 的坐标为



报名号 # 1447

$(x, y)$ ，则可列出车辆的运动方程（如无特殊规定，下文所表示的轨迹均为R点的运动轨迹）：

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{y} = v \cos \varphi \sin \theta \\ \dot{\theta} = v \sin \varphi / L \end{cases}$$

### （一）模型一：有效车位

侧向停车的必要条件是车位尺寸不能小于车辆的大小，并且联系到可操作性，车位应该有足够的空间供汽车调整方向以一系列变动的角度缓慢调整进入。如果车位大小小于某个值（汽车侧位停车所需的最小有效车位大小）则会碰撞其他车的前脸或者尾箱，造成车体损坏甚至无法挤入。

首先假设已知汽车的几何尺寸，如图1所示：

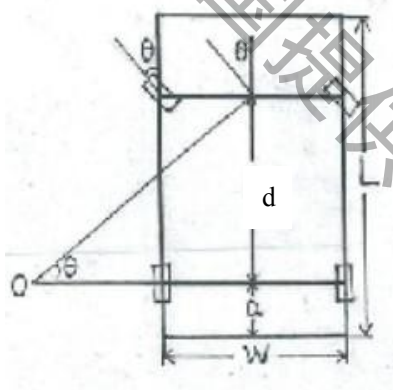


图1

图1:

L 汽车的长度

W 汽车的宽度

O 为车转弯时所绕的圆心

a 后轮到保险杠的距离

b 汽车前后两轮的轴距

$\theta$  ( $\theta_{\max}$ ) 最大偏转角

对于侧位停车的车位长度要求：

- 1) 由前面假设，汽车倒车结束后，汽车及汽车在地面的垂直投影离车库四边的最小距离都不能小于  $m$ ，以满足目前选用的超声传感器测量的最小距离不大于  $m$  的限制，可知道汽车的最终位置离车 B 的距离为  $m$ ，如图 2，为了不与车 A、B 相碰，车位的长度  $H$  必须满足以下式子：

$$H > D + 2m \quad (1)$$

- 2) 要保证车以最短距离，即移车占用最少位置的情况，汽车转向驶入车位到最终位置必调到最大偏转角（最小偏向半径）。
- 3) 依图1所示，汽车必须将前轮向左侧偏转到最大角度  $\theta_{\max}$ ，小车在转向时，可看作是

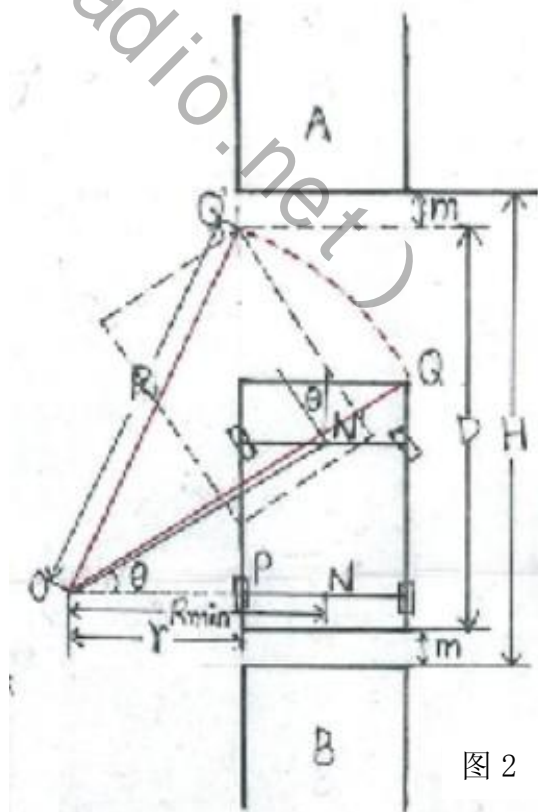


图 2

报名号 # 1447

围绕某一圆点作圆周运动. 如图2中, 点O是小车运动轨迹的圆点, 点N和N' 是小车后轮轴与前轮轴的中点.  $\angle NON'$  大小等于前轮的偏转角度  $\theta_{\max}$ , 线段ON的长度定义为最小转向半径  $R_{\min}$ , 设半径为  $R_1$ , OP的长度为  $r$ , 车位长度为  $H$ , 除去两个  $m$  的车位长度为  $D$ . 根据简单的几何关系, 可列出以下等式:

$$\begin{cases} R_{\min} \cdot \tan \theta = d \\ r = R_{\min} - W / 2 \\ R_1 = (R_{\min} + W / 2)^2 + (L - a)^2 \\ D = \sqrt{R_1^2 - r^2} + a \end{cases} \quad (2)$$

综合式子①②可得车位的最小长度  $H_{\min}$  为:

$$H_{\min} = \sqrt{2dW \cot \theta_{\max} + (L - a)^2} + 2m + a \quad (3)$$

对于侧位停车的车位宽度要求:

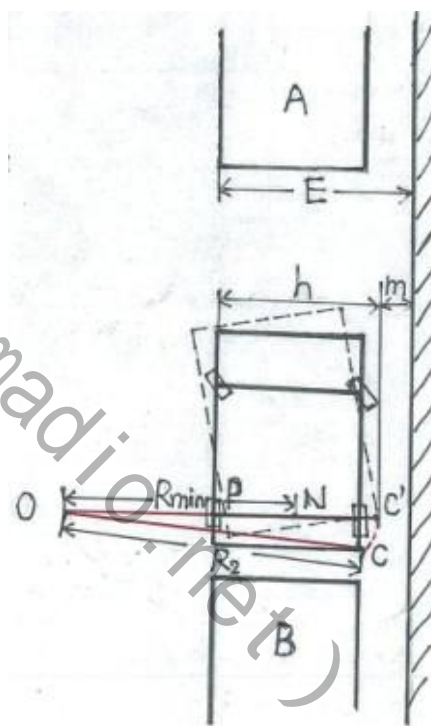
- 1) 由前面假设, 汽车倒车结束后, 汽车及汽车在地面的垂直投影离车库四边的最小距离都不能小于  $m$ , 以满足目前选用的超声传感器测量的最小距离不大于  $m$  的限制, 可知道汽车的最终位置离路肩边缘距离为  $m$ . 如图3, 为了不与车A、B相碰, 车位的长度  $H$  必须满足以下式子:

$$E > h + m \quad (4)$$

- 2) 当汽车以最大偏转角绕圆点O移动时, 汽车的C点相应地以O为圆心转动, 半径为OC. 因为O与后车轴在同一垂直线上, 以简单的几何关系得OP的延长线OC' 等于OC同为半径. 点C' 为汽车转动时超过最终车位边距的最远距离. 设半径为  $R_2$ , OP为  $r$ , PC' 为  $h$ , 则车位的宽度  $E$  要满足下列等式:

$$\begin{cases} h = R_2 - r \\ R_2^2 = a^2 + (r + W)^2 \end{cases} \quad (5)$$

图 3



综合式子④⑤所述, 有效车位的大小为:

$$E_{\min} = \sqrt{a^2 + (d \cot \theta_{\max} + W / 2)^2} - (d \cot \theta_{\max} - W / 2) + m \quad (6)$$

报名号 # 1447

3) 由上述式子得出有效车位长和宽的最小值方程：

$$\begin{cases} H_{\min} = \sqrt{2dW \cot \theta_{\max} + (L-a)^2} + 2m + a \\ E_{\min} = \sqrt{a^2 + (d \cot \theta_{\max} + W/2)^2} - (d \cot \theta_{\max} - W/2) + m \end{cases}$$

由于题目中提供的平面图不能测量足够的的数据，下面将按比例取某款车的实际整车参数求出实例车位大小：

$L=4.908$  米， $W=2.114$  米， $d=2.350$  米， $a=0.884$  米， $\theta=45^\circ$ ， $m=0.1$  米；

则由上述式子可算出有效车位的最小长度为  $H_{\min} \approx 6.195$  米，大约为车长度的 1.3 倍；有效车位的最小宽度为  $E_{\min} \approx 2.215$  米，与车的宽度相似。

4) 检验结论：

根据题目提供的平面图中车位的长和宽按同一比例计算，得出实际车位大小为：

$H=6.652$  米； $E=4.213$  米；

由 3) 得

$H_{\min} \approx 6.195$  米； $E_{\min} \approx 2.215$  米；

对比可得

$H > H_{\min}$ ， $E > E_{\min}$ 。

于是可以判断，本车能够顺利在该处侧位停车。

## (二) 模型二:理想路径

我们首先假设车身在最初时刻与竖直方向成  $\theta$  角度，因此第一步首先是将车身开直，当达到某个最恰点时就可以开始倒车。而倒车路线要求最优，只需要相应行车路路径最短即可，因此让汽车以最大偏转角  $\theta_{\max}$  即最小半径行驶即是最优。

我们参照题目给出的停车位置平面图以及常识可以知道，最理想的停车位置是车体后身中心点与图上的点  $N_f$  重合，且此时车身呈竖起方向。为方便起见，我们用此时的汽车后轴中心点  $N$  作为坐标原点，建立笛尔卡直角坐标系。下面我们将以理想路线来进行模型建立与分析。

### 1) 模型建立

过程一，车位外调整：

由前面的假设可知，车速稳定在 3km/h，并且为保证平缓开行，不妨假设转动时的角速度恒定。于是由  $V=RW$  不难知汽车将做恒定速度下的圆周运动。当汽车呈竖起方向后，为保持车身方向，我们做匀速直线运动。在这个过程中，不妨以汽车后轴中心点  $N$  作为研究对象，并且设  $N$  的初始位置为  $A$ ，刚好达到与竖起方向平行时  $N$  的位置为  $B$ 。于是由简单的几何关系可以知道  $A$  到  $B$  的偏转角也为  $\theta$ ，并且在水平方向上车的位移为  $\Delta x = X_A - X_B = R - R \sin \theta$ （其中  $X_A$ 、 $X_B$  为  $A$ 、 $B$  的横坐标，如图 4）

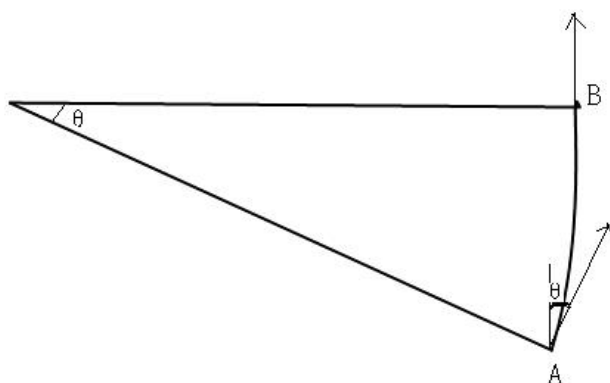


图 4 车位外调整

过程二，将汽车以最小半径倒车至最优位置（即点  $N_f$  此时与坐标原点重合）：

要使得汽车由竖起方向平稳地停止理想位置，如果只做单一地一个以最小半径为半径的圆周运动，这是难以达到要求的。因此我们以两个相切的最小半径圆来模拟最优路径。另由过程一可知，汽车在达到 B 位置后做匀速直线运动，因此它与 Y 方向上的垂直距离将保持不变，不妨记作  $d_x$ 。在倒车以前竖起方向上的任意点与初始点 A 的位置记为  $d_y$ 。易知  $d_x = X_A - x$ 。

现在我们假设在  $N_s$  点时可以经过两个相切的最小半径圆达到点  $N_f$ ，我们来考虑一下他们应该满足的关系式。首先给出运动的模拟图，如图 5：

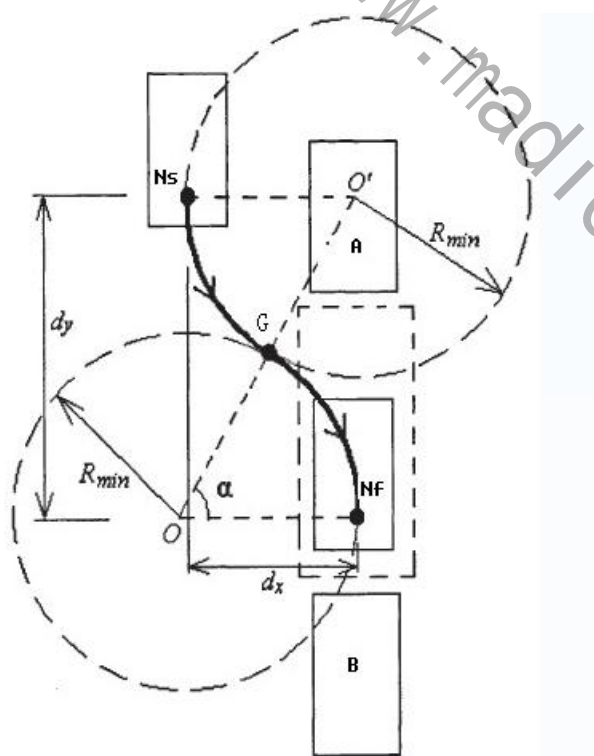


图 5

理想的两最小半径圆相切图

报名号 # 1447

由简单的几何关系式，我们不难列出下面的方程，其中  $\alpha$  转动的倾角：

$$\begin{cases} d_x = x_{N_f} - x_{N_s} = 2R_{\min}(1 - \cos \alpha) \\ d_y = y_{N_f} - y_{N_s} = 2R_{\min} \sin \alpha \end{cases}$$

消去  $\alpha$ ，可知

$$dy = \sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2}$$

由上式不难知当给一个具体的  $dx$  时，我们总可以确定一个相应的  $dy$  值，从而使得在坐标点  $(dx, dy)$  处可以做如图所示的运动. 这就是题目所要求的最理想路线.

在对模型二进行实际检验与误差分析前，我们有必要对一些数据再进行说明. 根据题目所给的平面图我们知道车身与车库的比例是固定的，因此在模型一中所给定的某型号汽车数据后，我们根据相应的比例尺关系可以得出有关图上车辆结构的各数据. 同样地各数据也可以按照相应比例对应图上一定的长度. 基于这样的事实，在图片所在的平面上我们有如下数据：

车长  $L=3.32\text{cm}$ ，车宽  $=1.43\text{cm}$ ，车库长  $=4.5\text{cm}$ ，车库宽  $W=2.85\text{cm}$ ，后轮到保险杠的  $a=0.598\text{cm}$ ，两车相距的安全距离  $m=0.0676\text{cm}$ ，图中汽车在初始位置的偏转角为  $\theta=14^\circ$ ，车的轴距为  $d=1.59\text{cm}$ . 模型一的②式可以知道  $R_{\min} \tan \theta = d$ ，从而可以知道  $R_{\min} = d = 1.59\text{cm}$ .

另外若不作特别声明，我们将以平面图作为参考对象，所给出的数据也是相应地平面图上的结果. 下面我们将以理想路线和允许偏差两部分来进行.

## 2) 模型计算

过程一，车位外调整.

我们首先根据建立的模型可以知道  $\Delta x = X_A - X_B = R - R \sin \theta = R(1 - \cos \theta) = 0.0097R$ ，在这里我们为方便起见，不妨以  $R_{\min}$  代替  $R$  的值进行计算，有结果如下：

$$\Delta x = 0.0297 \times 2.35 = 0.00611 = 0.07\text{m}，\text{对应平面图，} \Delta x = 0.047\text{cm}$$

$$\text{另根据弧长公式，} l_1 = r\theta = R_{\min} \theta = 1.59 \times 14/180 = 0.1237\text{cm}$$

过程二：倒车至理想点位置

我们经过实际平面图测量，当汽车开直以后，水平方向上的距离为  $dx=3.72\text{cm}$ . 根据做理想最小半径圆的路径，知道有如下条件：

$$dy = \sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2} = 3.1340\text{cm}$$

从而可知只要让汽车运动至点  $N_s(-3.72\text{cm}, 3.134\text{cm})$ ，即可走出两个相切的最小半径弧. 下面我们给出路程具体的表达式：

首先对于圆  $o$ ，我们知道它的圆心为原点  $(0, 0)$ ，半径为最小半径  $R_{\min}$ ，

报名号 # 1447

有方程式

$$x^2 + y^2 = R_{\min}^2$$

代入数据整理有  $y = \sqrt{-x^2 - 3.18x}$  (6.2.1)

同理对于圆  $o'$ ，据下面的图及几何关系可以知道，它的半径也为  $R_{\min}$ ，圆心为

$$(R_{\min} - dx, dy) . \text{从而有方程式 } (x - R_{\min} + dx)^2 + (y - dy)^2 = R_{\min}^2$$

代入数据整理有  $y = \sqrt{-x^2 - 4.26x - 2.9469}$  (6.2.2)

我们再联立 (6.2.1) 与 (6.2.2) 式就可以解得切点坐标 G，经计算为 G (-1.86, 1.5667)

综上可以知道倒车过程的曲线解析式为

$$y = \begin{cases} \sqrt{-x^2 - 3.18x} & (-1.86 \leq x \leq 0) \\ \sqrt{-x^2 - 4.26x - 2.9469} & (-3.72 \leq x < -1.86) \end{cases}$$

从而  $l_2 = l_{N_s G} + l_{GN_f} = 2l_{GN_f} = 2R_{\min} \alpha$

$$\alpha + 2\beta = \pi$$

$$\cos \beta = \frac{ON_f^2 + GN_f^2 - OG^2}{2ON_f \cdot GN_f} = \frac{OG}{2ON_f}$$

可求得  $l_2 = 5.5332 \text{ cm}$

综上所述，可知此车最优路径为：  $N \rightarrow N_s \rightarrow G \rightarrow N_f$ ，相应的路径长度为

$$L = l_1 + l_2 = 0.1237 \text{ cm} + 5.5332 \text{ cm} = 5.6569 \text{ cm}$$



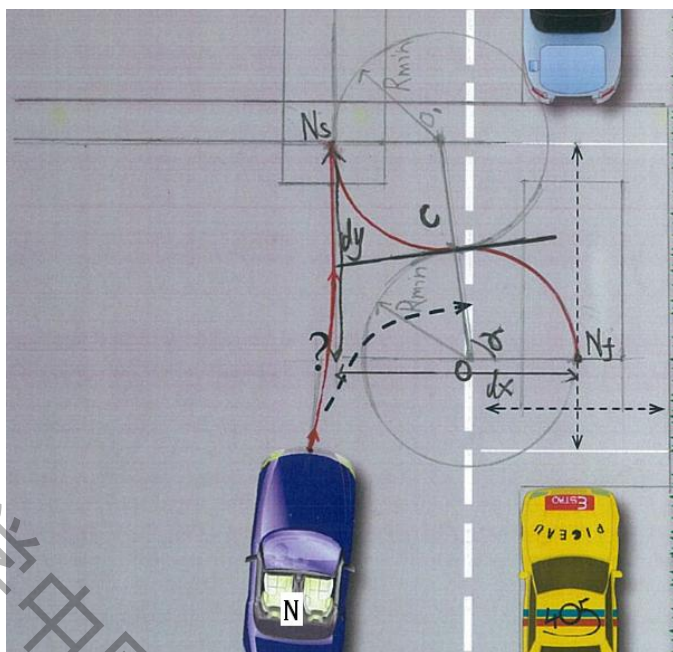


图 6

### 3) 模型检验

由于题目所要求的是以该辆车作为参考对象, 因此在由上面的计算可以知道车位外调整路径是一定可行的. 另外在以最小半径转移的过程中我们所有数据都是基于最小半径

$R_{\min}$ ,

故在对模型检验上我们只需知道是否在以该半径运动时是否会有车身的碰触现象发生. 而这只有如图所示的两种情形, 我们下面将就这两种情况分别加以验证:

情形一

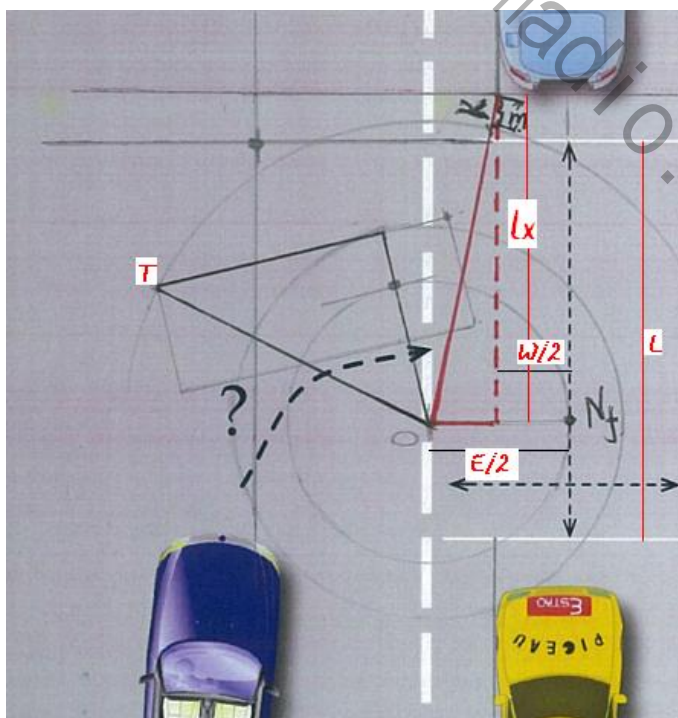


图 7





报名号 # 1447

(其中  $L_y$  是如图所示距离,  $m$  为两安全距离,  $E$  为车库有效宽度)

展开上式, 即  $\sqrt{(R_{\min} + W/2)^2 + a^2} - R + m \leq E/2$

代入数据, 我们有  $0.8913 < 2.85/2 = 1.425$

故该方案在情形二下也是成立的.

综上所述, 该理想路线经检验是可以成功的.

### (三) 模型三: 路径允许偏差

在模型三里我们主要讨论理想路径所允许达到的变动范围. 首先我们假设在两圆相切的运动过程中, 第二个圆的半径是可变的, 且为方便起见我们可以将第一个圆的半径恒定为  $R_{\min}$ , 这样就可以使得初始点  $N_s$  是在同一条直线上. (如图)

我们在模型二的检测里已经发现  $R$  是有一个有界的值. 其临界条件即是  $L_x = H - a$ .

展开有  $(R - W/2)^2 + (H - a)^2 = (\sqrt{(R + W/2)^2 + (L - a)^2} + m)^2$

从而可以解得  $R = 2.4382$  与  $3.0123$

根据判断得知,  $R$  一定是单调且连续的变化, 因此当  $R$  由  $R_{\min}$  增至  $2.4382$  即达到临

界, 于是应该将  $3.0132$  舍之. 故  $R_{\max} = 2.43826$

根据图关系, 我们有

$$(x + d_y)^2 + (-d_x - 2R_{\min})^2 = (R_{\max} + R_{\min})^2$$

(其中  $x$  为  $N_s$  与  $N_s'$  之间的距离,  $dx$  与  $dy$  是  $N_s$  的横纵坐标,  $R_{\max}$ 、 $R_{\min}$  为最大、最小半径)

代入数据可求得  $x = 0.8576\text{cm}$

从而  $N_s'$  坐标为  $(-3.72\text{cm}, 3.9913\text{cm})$ , 与最大半径圆相切的圆  $W$  坐标圆心坐标为  $(-2.13, 3.9913)$ , 因而可以写出圆  $W$  的方程:

$$(x + 2.13)^2 + (y - 3.9913)^2 = 2.5281$$

又易知圆  $W'$  的方程为:  $x^2 + y^2 = 5.9449$

联立上面的二式, 可以解得切点  $G'$  坐标为  $(-1.9183, 1.50)$

综上所述我们可以写出  $N_s' \rightarrow G' \rightarrow N_f'$  路径的解析式:

$$y = \begin{cases} \sqrt{2.5281 - (x + 2.13)^2} + 3.9913 & (-3.72 \leq x \leq -1.9183) \\ \sqrt{5.9449 - x^2} & (-1.9183 < x \leq 0) \end{cases}$$

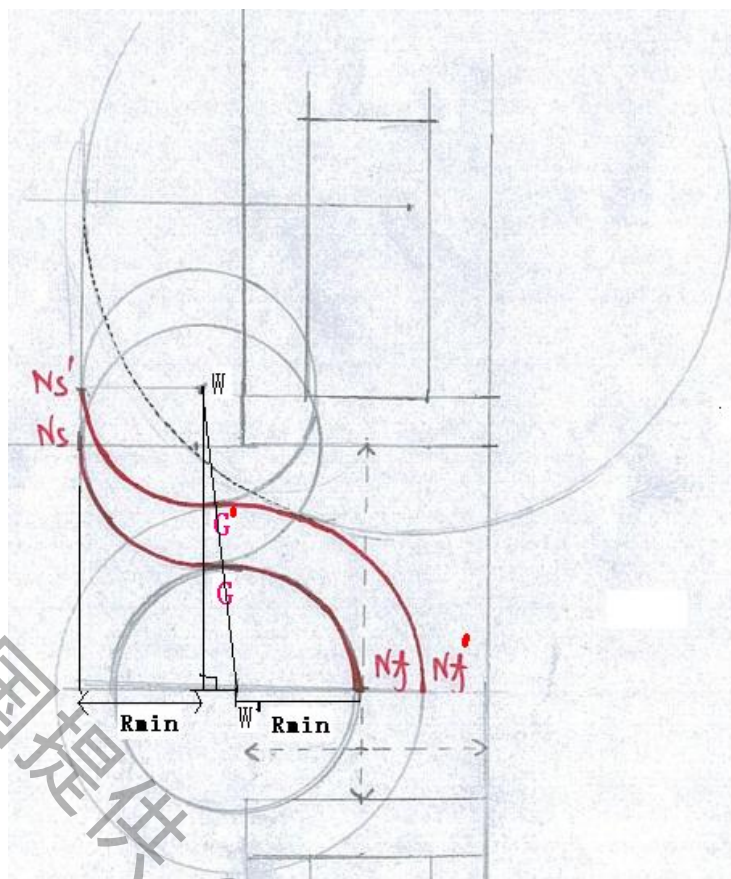


图 9

从而我们可以知道理想路径允许的变动范围即是在  $N \rightarrow N_s \rightarrow G \rightarrow N_f$  与

$N \rightarrow N'_s \rightarrow G' \rightarrow N'_f$  之间变动. (其中点 N 即是初状态时后轮中心, 图未显示)

同理我们可以给出在更一般情况下轨迹的方程形式，如下所示：

$$y = \begin{cases} \sqrt{2.5281 - (x + 2.13)^2} + \sqrt{R^2 + 3.18R - 45.0819} & (-3.72 \leq x \leq \frac{-3.72R}{1.59 + R}) \\ \sqrt{R^2 - x^2} & (-\frac{3.72R}{1.59 + R} < x \leq 0) \end{cases} \quad (*)$$

其中  $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$

也就是说理想路径是由一些满足(\*)式的曲线束组成, 其中介于最大最小半径的  $R$  即为约束条件.

## 六、 模型误差分析

### (一) 系统误差:

- 1) 题目示意图没有给出汽车的轴距、汽车后轴到后保险杠的距离和汽车前轮最大偏转角, 因此我们无法直接根据示意图判读小车是否能以理想路径停进规定车位. 因此我们找了某一车型其长/宽为 4908mm/2114mm 的车来模拟示意图小车, 从而得到相关的数据参数来, 并通过实例车长度比上示意图车长度得出一个比例尺(即 4908:32.3). 从而得出实例车位的长为 6.652mm, 宽为 4.213mm. 这些数据是模型判断的先决条件, 但实例汽车的长宽比不能完全吻合示意图汽车的长宽比, 它是我们所建立的模型产生了不可避免的误差.
- 2) 我们的模型进行理想路径的构建时, 是建立在其沿着最小转弯半径作圆周运动进行的. 但实际进行转动时, 轮胎不是一直以最大偏转角在进行转动, 而是以下图的变化进行偏转的, 因此汽车是在做半径不断增大的圆周运动. 但是考虑到汽车的倒车速度为 3km/h, 通过路径积分发现这个偏差很小可以忽略.

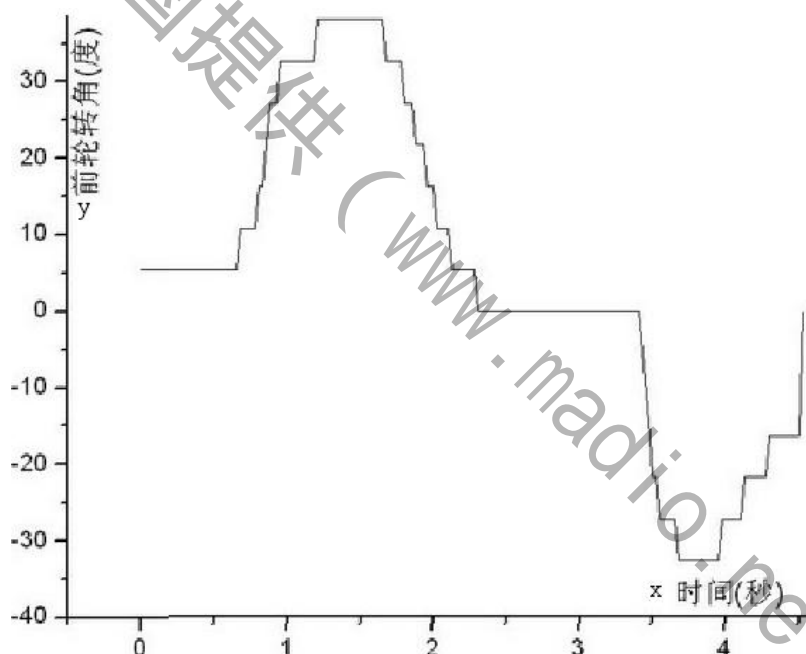


图 10

### (二) 测量误差:

- 1) 我们在测量实例图车位的长宽, 汽车的长宽都是用精确度为 1mm 的测量工具测量的. 而实例与示例图的放大比例达约到 152: 1, 因此侧量的每偏差 1mm, 实例就产生 15.2cm 的偏差. 这在实际应用来说是不忽略的.
- 2) 轮胎产生的误差:  
我们的示例汽车的轮胎默认假设为无偏角并且左前轮和右前轮的最大偏转角相等, 进而可以将两轮胎的转动等价位前轴中点的一个等效轮胎在做转动. 实际轮胎的前后轮的偏转角是不一样的, 下面是实际轮胎参数及其测量范围(它们可作为我们示例模型的轮胎参数补充):

报名号 # 1447

项目	精度(度)	测量范围(度)	总测量范围(度)
外倾角	$\pm 0.02$	$\pm 8$	$\pm 8$
后倾角	$\pm 0.05$	$\pm 19$	$\pm 19$
前轮内倾角	$\pm 0.02$	$\pm 19$	$\pm 19$
总前束	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 8$
后轮推进角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
转向差角	$\pm 0.08$	$\pm 2$	$\pm 45$
后轮轴偏摆	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
轮距差	$\pm 0.03$	$\pm 2$	$\pm 8$
前退缩角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
后退缩角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
轮距	$\pm 0.64\text{cm}(\pm 0.25\text{cm})$	$<265\text{cm}(<105\text{in})$	$<265\text{cm}(<105\text{in})$
轴距	$\pm 0.64\text{cm}(\pm 0.25\text{cm})$	$<533\text{cm}(<210\text{in})$	$<533\text{cm}(<210\text{in})$

## 七、 模型的评价及推广

### (一) 模型评价：

模型一根据汽车的长宽、轴距、最大偏向角等几何尺寸，通过几何算法得出汽车可以实现一次性侧位泊车的最小有效车位，从而判断本车是否能在该处停车. 经过数据的比较，能客观地检验图中汽车能否顺利停车.

模型二路径规划方面，根据停车空间的几何形状，车辆的动力学模型，碰撞约束等，通过控制汽车转向角和相对停车位的位置，控制汽车实现泊车. 此模型假设汽车能一次性调整进入车位，并且求出此情况下的最优路线. 由于汽车能以各种不同的路线行驶，我们用其中一种优化条件来求优化结果，以此便于操作之余不失实际意义.

在允许偏差方面，运用假设情况定量分析来了解允许偏差. 文中假设车主在调整路径后都以离车位相同距离开始转车，并且都以最小偏转角开始转至两圆相切点，从而就出现限制开始转车允许的范围. 从允许偏差上，我们把一些其他情况的路径涵盖进去，更全面地讨论理想路径.

但是，模型还存在局限性：

- 1) 因为本模型求解时基于题目假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上，但现实的汽车的辅助停车系统很少能将整幅停车平面图显示给车主，所以车主是不能完全根据本文的模型产生理想停车路线；
- 2) 对于停车位空间大小的要求过大，一般情况下，大部分的停车位的大小无法满足这种“一步到位”的要求；即使车辆能够一次泊入车位，但无法保证最后车身姿态保持

报名号 # 1447

与车位大致平行这一要求.

**(二) 模型的实际扩展与应用:**

1) 由本题模型推广到实际应用, 我们先搜集了关于一些车位长宽和各种类型的轿车的长宽和轴距的数据:

不同停车场车位的尺寸:

地点	库长 (mm)	库宽 (mm)
学院	4920	2322
校区	5922	2530
学校	5903	3235
银行	5450	2721
饭店	5268	2415
车站	5000	2506

主流轿车长, 宽和轴距参数:

车型	长度 (mm)	宽度 (mm)	后轴到后保险杠距离 (mm)	轴距 (mm)
东风本田 CR-V	4630	1785	1000	2660
哈飞路宝	3588	1563	878	2335
福美来	4363	1705	982	2610
普利马	4295	1705	1038	2760
飓风	4075	1705	955	2540
新中华家用版	4880	1800	1049	2790
奇瑞瑞虎	4285	1715	944	2510
三菱格蓝迪	4765	1795	1064	2830
东风日产蓝鸟	4664	1695	1015	2700

通过上表我们可以算出一下数据 ( $\theta$  默认为  $45^\circ$ ):

车长度期望  $L=(4630+3588+4363+4295+4075+4880+4285+4765+4664)/9=4339\text{mm}$

车宽度期望  $W=(1785+1563+1705+1705+1705+1800+1715+1795+1695)/9=1718\text{mm}$

车轴距期望  $d=(2660+2335+2610+2760+2540+2790+2510+2830+2700)/9=2637\text{mm}$

车后轴到后保险杠  $a=(1000+878+982+1038+955+1049+944+1064+1015)/9=997\text{mm}$

车位长度期望  $L_2=(4920+5922+5903+5450+5268+5000)/6=5411\text{mm}$

车位宽度期望  $W_2=(2322+2530+3235+2721+2415+2506)/6=2622\text{mm}$

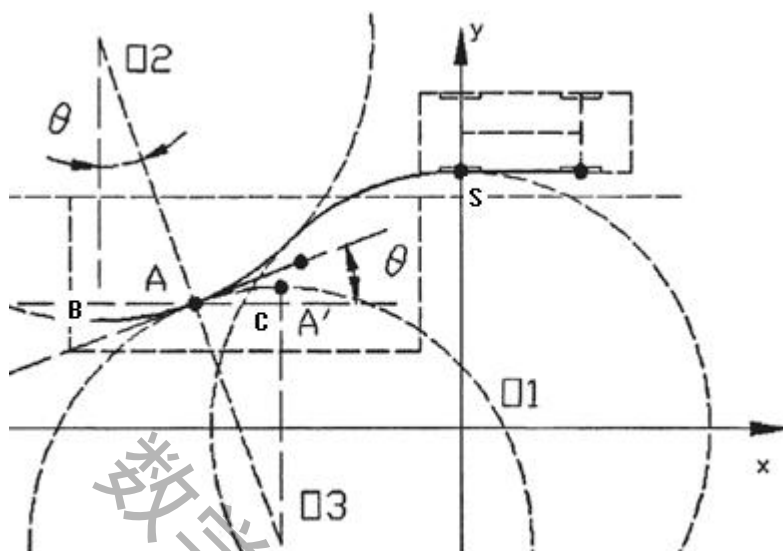
通过上文得出的最小库长和库宽公式我们得出:

$$\text{最小车位长度 } H_{\min} = \sqrt{2dW \cot \theta_{\max} + (L-a)^2} + 2m + a = 5695\text{mm} > 5411\text{mm}$$

$$\text{最小车位宽度 } E_{\min} = \sqrt{a^2 + (d \cot \theta_{\max} + W/2)^2} - (d \cot \theta_{\max} - W/2) + m = 1957\text{mm} < 2622\text{mm}$$

由上数据可以看出车位的宽度一般都满足一次倒车到位的条件, 而车位的长度不满足一次倒车到位条件, 因车实际倒车时, 至少出现 2 次或两次以上的调整才能使汽车停好.

下面我们将对此种多次调整泊车情况进行分析:



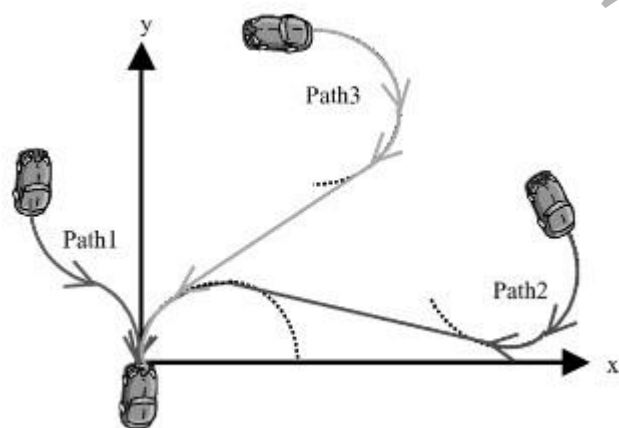
假设车开入车位达到 A 点时, 未能处于最佳状态. 即不是水平放置, 而其余水平线的夹角为  $\theta$ , 在 A 点车开始以  $O_3$  为圆心,  $R_{\min}$  为半径做圆周调整. 到达  $A'$  为调整完毕.

由  $BA = H_{\min} - L_2$ , 得  $BA = 284\text{mm}$ .

又  $AC = BA = 284\text{mm}$ ; 结合  $L + AC + BA + 2 * m = 5107\text{mm} < 5411\text{mm} = L_2$ ;

所以可以经过两次调整使车与水平线平行.

- 2) 联系现实, 汽车进入车位时会存在各种不同的初始位置、角度, 如图, 如果能找出自己较为理想的半径, 就能调整方向, 转向最佳路径.



## 八、 参考文献

外文文献:

- [1] Zhao, Y, Collins, EG Jr. Robust automatic parallel parking in tight spaces via fuzzy logic .Rob Auton Syst, 2005, 51 (2-3) :111~127
- [2] Gómez-Bravo, F., Cuesta, F., Ollero, A. Parallel and diagonal parking in non holonomic autonomous vehicles .Eng. Appl. Artif. Intel, 2001, 14 (4) :419~4

报名号 # 1447

34 .

- [3] Thomas D Gillespie. Fundamentals of Vehicle Dynamics .Society of Automotive Engineers, Inc, 1992,
- [4] Chian-Song Chiu,Kuang-Yow Lian,Peter Liu. Fuzzy Gain Scheduling for Parallel Parking a Car-Like Robot .IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2005, :1084-1092
- [5] Nguyen D, Widrow B. The truck backer-upper: an example of selflearning in neural networks .IEEE Const Syst Mag, 1990, 10 (3) :18-23 .
- [6] Lee Kooktae,Kim Dalhyung,Chung Woojin,et al. Car parking control using a trajectory tracking con-troller[C] .SICE-ICASE International Joint Conference. 2006, :18-21 .
- [7] Riid E Rüstern. Fuzzy logic in control:truck back-er-upper problem revisited .IEEE InternationalConference on Fuzzy Systems. 2001, 1 :513-516 .
- [8] Ryu Young-woo,Oh Se-young,Kim Sam-yong. Ro-bust automatic parking without odometry using en-hanced fuzzy logic controller .IEEE InternationalConference on Fuzzy Systems. 2006, :521-527 .

中文文献:

- [1]郭孔辉;姜辉;张建伟;丁海涛,基于模糊逻辑的自动平行泊车转向控制器,吉林大学学报,第39卷 增刊2,2009年9月,237~240页
- [2]何峰,自动泊车系统的研究及实现,广东工业大学硕士学位论文,2009.04.01
- [3]蒋志文,辅助平行泊车系统的路径规划研究,同济大学中德学院硕士学位论文,2008.06.01
- [4]庄晔,轮胎动摩擦特性研究及其对车辆操纵稳定性的影响,吉林大学博士学位论文
- [5]张辉,轿车自动倒库转向控制几何推导算法和模糊逻辑算法研究,吉林大学硕士学位论文
- [6]秦绪情,自动平行泊车系统定车速模糊控制算法研究,吉林大学硕士学位论文
- [7]雷兆明,孙鹤旭,刘作军,林涛,杨鹏,非完整性约束下移动机器人带虚拟障碍物的路径规划,河北工业大学自动化研究所,July 26-31, 2007, 207~211页

参考网站:

关于安全距离数值: <http://www.ultronix.cn/cn/advantages.asp?currentid=3>