第三届数学中国数学建模网络挑战赛
地址：内蒙古数学会 网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4343756 邮编：010021 Email：2010@tzmcm.cn

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1010

参赛队员 (签名) ：

队员 1：何进

队员 2：黄元辰

队员 3：陈娟

参赛队教练员 (签名)： 黄元辰

参赛队伍组别：本科组

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会 网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4343756 邮编：010021 Email：2010@tzmcm.cn

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会 网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4343756 邮编：010021 Email：2010@tzmcm.cn

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛

题　　目　**基于博弈论的平行有向路中的 Braess 无效率检验**

关 键 词　Nash 均衡、有向路子博弈、集体理性、最优化方法

摘　　要：

Braess 悖论是有时交通网络中更多通路或更高局部运力情况下的 Nash 均衡的总体效用低于更少通路和更低局部运力情况下的 Nash 均衡的总体效用的结果，其原因是 Wardrop 均衡就是 Nash 均衡，而根据 Wardrop 的均衡解得出的所有博弈方的时间消耗的总和，有时前者会高于后者。

针对北京二环路交通网络，我们建立起了以从每个博弈方所固有的交通起始点和终止点为分类属性的 30 个网络静态子博弈 GameSE，并使用这些子博弈来构成主体模型同时也作为算法的核心思想。

通过直接求解无 GPS 导航系统时的网络博弈的 Nash 均衡，分别计算出路段 W(3,4)即 W(车公庙，东四十桥）存在与不存在时的所有车辆达到其目的地一次所需时间总和为：$C=9712642$（小时/300 万辆*次）和$C'=9687863$（小时/300 万辆*次），$C'<C$，故在完全利己和无 GPS 的前提下存在 Braess 悖论。

在有 GPS 导航系统时，我们主要探讨由于 GPS 降低了博弈方合作的成本，增加了合作的欲望，在所有人都追求集体利益最大化的集体理性的趋势下，均衡会出现什么样的变化。我们分别计算出路段 W(3,4)即 W(车公庙，东四十桥）存在与不存在时的所有车辆达到其目的地一次所需时间总和为：$C''=6758878$（小时/300 万辆*次）和$C'''=7863596$ $C'''>C''$，$C''<C'''<C'<C$，因此可得出结论使用 GPS 导航系统能够明显改善交通状况，并且集体理性可以抵消 Braess 悖论的作用，使原本会更糟糕的交通效率得到直接的提高。

我们算出 GPS 导航系统会使每辆车的通行时间消耗节约 30.41%。

参赛队号　1010

所选题目　B

参赛密码 ________
（由组委会填写）

第三届数学中国数学建模网络挑战赛
地址：内蒙古数学会 网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4343756 邮编：010021 Email：2010@tzmcm.cn

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

Braess paradox is the reality that the global utility of a Nash equilibrium in the system which owns more access or higher local capacity is less than the global utility of a Nash equilibrium which owns less access and local capacity. It’s due to the equilibrium of Wardrop is the Nash equilibrium ,and the sum of time cost for all players worked out by Wardrop equilibrium equations will be larger while the access or local capacity are more at time.

For researching on the traffic network of the Second Ring in Beijing, we have founded 30 static network subgames GameSE which distinguished by starting points and end point of all players, then used this subgames to form main the model and the core of algorithm.

According to the solution of network Nash equilibrium when the GPS does not exist, we have worked out the sum of time cost of all players from their starting to aim while the way W(3,4) viz W(Chegong Temple, Forty Bridge the eastern) exists or not is: $C = 9712642$ (hour / 3,000,000 * times) and $C' = 9687863$ (hour / 3,000,000 * times). $C' < C$. Therefore there exists Braess paradox while personal perfect rational and no GPS.

If there were GPS system navigation, we discussed what would happen to the equilibrium of system while The GPS cut down the cost of cooperation added the desire of cooperation and every player was collectivist and optimize the sum of time cost of all players. we have worked out the sum of time cost of all players from their starting to aim while the way W(3,4) viz W(Chegong Temple, Forty Bridge the eastern) exists or not is $C''=6758878$ (hour / 3,000,000 * times) and $C'''=7863596$ (hour / 3,000,000 * times). $C''' > C''$, $C''<C'''<C'<C$, It represent that the GPS system navigation can improve status of traffic network. What’s more the collectivism could counteract the effect of the Braess paradox increase the efficiency of the traffic that would be much worse.

We have also calculated that GPS navigation system will save the consumption of each vehicle by 30.41%.

1 问题重述

1968年，Dietrich Braess提出在一个交通网络上增加一条路段，或提高某个路段的局部通行能力，反而使所有出行者的出行时间都增加了，这种为了改善通行能力的投入不但没有减少交通延误，反而降低了整个交通网络的服务水平。

具体的问题是对于北京二环路这个交通网络：

首先，建立在没有 GPS 导航系统下的分析二环交通状况的模型，并对检验该交通系统是否存在 Braess 无效率，即一路段的使所有路段的通行总时间变得更多而不是更少。

然后，建立有 GPS 实时导航系统下的二环路交通模型，并判断此时是否存在 Braess 无效率，是否会使交通更加拥挤，并估计其拥挤或改进的效果值。

2 符号说明

i,j：用 i,j 标志的图中的点；

$W(i_1,i_2...,i_n)$：依次经过点 $i_1,i_2...,i_n$ 的路径；

$N(W(i_1,i_2...,i_n))$：选择从起点到终点的完整通路 $W(i_1,i_2...,i_n)$ 的车辆数；

n_{ii}：选择依次通过两个点 i、j 之间路段的车数量；

β_{ii}：相邻两个点 i、j 之间路段的延迟系数；

α_{ii}：相邻两个点 i、j 之间路段的自由流下的行车时间；

D_{se}：以从 S 点到 E 点的行为为目的的车辆数；

t_{ii}：经过相邻的两点 i 到 j 之间的路段所消耗的时间；

$T_{SE}(W)$：静态子博弈 $Game_{SE}$ 的博弈方走一条从起点 S 到终点 E 的通路 W 所要花费的时间；

C：二环以内所有车辆到达目的地一次所需的总时间，是模型二的目标函数；

$tpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$：每千辆车遍历有空点路径 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6 所消耗的总时间；

$numpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$：选择有空路径 i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6 的车辆数，i_1 是起点，i_6 是终点，单位是千辆；

3 模型的假设

模型一的假设：

1、所有司机都是完全理性并且掌握完全信息的。

2、延迟参数与路段长度和宽度成反比。

3、车辆在完全自由的情况下的行驶时间只与路况有关。

4、所有车辆的起始地和目的地都被归纳到本文所规定指定点上。

5、作为起始和目的的任意两个点之间的车流量是固定的，且在两个方向上的车流量都相等。

6、车辆通过一路段所需时间 t_{ij} 是选择走这条路段的车辆数决定，不考虑实时的车流量。

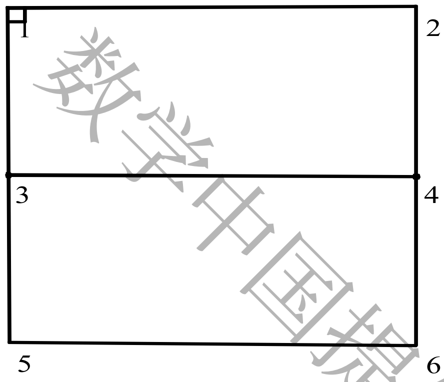
模型二的假设：

1、司机在拥有 GPS 完全信息的情况下是完美的集体主义者，追求交通系统的总时间消耗最小为目的。

4 模型一的分析、建立及求解

4.1 模型一的分析

为了简化问题，我们把包括二环在内的交通线路简化为，二环路以及二环以内的纵横五条主干道如下图所示：



该图中的每一条路段都是平行有向路，各有一正一反两个方向。最外面的这一环是北京市的二环路，中间的这一环是可以任意选定的。我们任意选定一条路段，如果在有这条路段的情况下的 Nash Equilibrium 比没有这条路段的情况下的 Nash Equilibrium 的总通行时间更长，我们就认为这条路段存在 Braess 无效率，并且这条路段的存在增加了二环路的 Braess 无效率。

由于这是一个考虑所有点都是起点同时又都是终点的平行有向路的 Nash Equilibrium 问题，因此必须先定义这个复杂博弈的一些概念。

平行有向路静态子博弈：有相同的起点 S 和终点 E 的车辆我们都将其归入集合 $Player_{SE}$，显然具有相同始终点的车辆有相同的完整路径选择的集合，设这个集合为 Way_{SE}。设笛卡尔积 $Game_{SE} = Player_{SE} \times Way_{SE}$。称 $Game_{SE}$ 为图的一个静态子博弈。该图中显然有 $A_6^2 = 30$ 个 $Game_{SE}$。即途中共有 30 个静态子博弈。当且仅当这 30 个 $Game_{SE}$ 同时实现 Nash Equilibrium 时，整个博弈的状态是均衡的。

4.2 模型一的建立

根据对整个博弈图的分析，30 个 $Game_{SE}$ 的 Nash Equilibrium 的并集就是整个模型的状态均衡，我们只要计算此时的时间总消耗就可以了，其中 30 个方程已经很不好列了。

任意 $Game_{SE}$ 的 Nash Equilibrium 的充要条件是：

$$\forall wi, wj \in Way_{SE} \quad , \quad T_{SE}(wi) = T_{SE}(wj);$$

需注意Way_{SE}只包括从起点 S 到终点 E 的完整的通路。

这个条件看似简单但展开是繁琐的，我们要给出所有$Game_{SE}$中的所有策略选择$\forall wi \in Way_{SE}$的时间消耗函数$T_{SE}(wi)$，令其相等从而得到基本的具体方程。

我们先给出所有的静态子博弈$Game_{SE}$：

$Game_{12}$，$Game_{13}$，$Game_{14}$，$Game_{15}$，$Game_{16}$；

$Game_{23}$，$Game_{24}$，$Game_{25}$，$Game_{26}$；

$Game_{34}$，$Game_{35}$，$Game_{36}$；

$Game_{45}$，$Game_{46}$；

$Game_{56}$

这里只有 15 个，另外 15 个静态子博弈的始终点是与这 15 个的对称的，并且其策略集合都是一样的，所以就不必列出了，但并不表示他们不影响模型的均衡。

文献研究表明，通过一个相邻两点 i, j 间的路段$W(i,j)$所消耗的时间

$t_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot n_{ij}$，各个符号的定义见符号说明。

我们要强调的是t_{ij}是由选择走这条线路的车辆数决定的，不是由这条线路上的实时车流量决定的。

这样可以表示$Game_{SE}$中每一条从起点到终点的通路的时间消耗：

$$T_{SE}(W(i_1,i_2,...,i_n)) = \sum_{j=1}^{n-1} t_{i_j,i_{j+1}} = \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{i_j,i_{j+1}} + \beta_{i_j,i_{j+1}} \cdot n_{i_j,i_{j+1}})$$

那么$Game_{SE}$的 Nash 均衡就描述为：

$$T_{SE}(W(i_1,i_2,...,i_n)) = T_{SE}(W(k_1,k_2,...,k_m)), \quad \forall W(i_1,i_2,...,i_n), W(k_1,k_2,...,k_m) \in Way_{SE}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-1} (\alpha_{i_j,i_{j+1}} + \beta_{i_j,i_{j+1}} \cdot n_{i_j,i_{j+1}}) = \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha_{k_j,k_{j+1}} + \beta_{k_j,k_{j+1}} \cdot n_{k_j,k_{j+1}})$$

这样我们就得到$Game_{SE}$的局部 Nash 均衡方程组：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_{i_j,i_{j+1}}+\beta_{i_j,i_{j+1}}\cdot n_{i_j,i_{j+1}})=\sum_{j=1}^{m-1}(\alpha_{k_j,k_{j+1}}+\beta_{k_j,k_{j+1}}\cdot n_{k_j,k_{j+1}}),\forall W(i_1,i_2,...,i_n),W(k_1,k_2,...,k_m)\in Way_{SE}(1)\\ \sum_{W(i_1,i_2...,i_n)\in Way_{SE}}N(W(i_1,i_2...,i_n))=D_{SE}(2)\end{cases}$$

方程组（1）即使 Nash 均衡的充要条件，方程（2）是恒等式它的意义是选择所有到达终点的完整通路的车辆的数量的总和等于 $Game_{SE}$ 中所有的车辆数，这是十分显然的。

但是仅凭图中所有这些 $Game_{SE}$ 的局部 Nash 均衡方程的联立还是解不出最终的 Nash 均衡，需注意一个条件，即 n_{ij} 不仅受此子博弈 $Game_{SE}$ 的影响，更要受到其他子博弈甚至包括方向与之对称的博弈 $Game_{ES}$ 的影响，所以必须讨论决定 n_{ij} 的一切因素。

n_{ij} 显然有每个 $Game_{ES}$ 中的选择包含路段 W(i, j)的路径 $W(i_1,i_2...,i,j,...,i_n)$ 的车辆数 $N(W(i_1,i_2...,i,j,...,i_n))$ 决定，彻底的表达出来就是：

$$n_{ij}=\sum_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}}N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)$$

将这个方程组嵌入 $Game_{SE}$ 的局部Nash均衡方程组就得到完整的可以联立求解的方程组：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_{i_j,i_{j+1}}+\beta_{i_j,i_{j+1}}\cdot n_{i_j,i_{j+1}})=\sum_{j=1}^{m-1}(\alpha_{k_j,k_{j+1}}+\beta_{k_j,k_{j+1}}\cdot n_{k_j,k_{j+1}}),\forall W(i_1,i_2,...,i_n),W(k_1,k_2,...,k_m)\in Way_{SE}\\ \sum_{W(i_1,i_2...,i_n)\in Way_{SE}}N(W(i_1,i_2...,i_n))=D_{SE}\\ n_{ij}=\sum_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}}N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)\end{cases}$$

将所有的局部 Nash 均衡方程组联立求解就能得到我们的全局 Nash 均衡。

为了具体描述这个方程，立即给出 Way_{SE}

Way_{12}，Way_{13}，Way_{14}，Way_{15}，Way_{16}；

Way_{23}，Way_{24}，Way_{25}，Way_{26}；

Way_{34}，Way_{35}，Way_{36}；

Way_{45}，Way_{46}；

Way_{56}

然后我们把每一个集合Way_{SE}都具体的表示出来。

$Way_{12}=\{W(1,2),W(1,3,4,2),W(1,3,5,6,4,2)\}$（1）

$Way_{13}=\{W(1,3),W(1,2,4,3),W(1,2,4,6,5,3)\}$（2）

$Way_{14}=\{W(1,2,4),W(1,3,4),W(1,3,5,6,4)\}$

$Way_{15}=\{W(1,2,4,3,5),W(1,2,4,6,5),W(1,3,5),W(1,3,4,6,5)\}$

$Way_{16}=\{W(1,2,4,6),W(1,2,4,3,5,6),W(1,3,4,6),W(1,3,5,6)\}$

$Way_{23}=\{W(2,1,3),W(2,4,3),W(2,4,6,5,3)\}$

$Way_{24}=\{W(2,4),W(2,1,3,4),W(2,1,3,5,6,4)\}$

$Way_{25}=\{W(2,1,3,5),W(2,1,3,4,6,5),W(2,4,3,5),W(2,4,6,5)\}$

$Way_{26}=\{W(2,4,6),W(2,4,3,5,6),W(2,1,3,4,6),W(2,1,3,5,6)\}$

$Way_{34}=\{W(3,4),W(3,1,2,4),W(3,5,6,4)\}$

$Way_{35}=\{W(3,5),W(3,1,2,4,6,5),W(3,4,6,5)\}$

$Way_{36}=\{W(3,1,2,4,6),W(3,4,6),W(3,5,6)\}$（12）

$Way_{45}=\{W(4,2,1,3,5),W(4,3,5),W(4,6,5)\}$

$Way_{46}=\{W(4,6),W(4,2,1,3,5,6),W(4,3,5,6)\}$

$Way_{56}=\{W(5,6),W(5,3,4,6),W(5,3,1,2,4,6)\}$

这是十五个互异的子博弈（其余的总与这 15 个对称）的包含各自全部的策略的集合们。显然不同的子博弈$Game_{SE}$其策略集中没有任何相同的元素，这是因为，不同子博弈的通路的起点和终点不会完全一样，因此通路就不会一样。并且任何策略$W(i_1,i_2,...,i_n)$都不会有回路出现，因为对于一个子博弈$Game_{SE}$中的任何博弈方（车辆）都不会选择明显更劣的策略，这是博弈论的基本范式。

现在我们就把这十五个方程组给列出来：

$$\begin{cases} t_{12}=t_{13}+t_{34}+t_{42}=t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64}+t_{42} \\ D_{12}=N(W(1,2))+N(W(1,3,4,2))+N(W(1,3,5,6,4,2)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} t_{13}=t_{12}+t_{24}+t_{43}=t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}+t_{53} \\ D_{13}=N(W(1,3))+N(W(1,2,4,3)+N(W(1,2,4,6,5,3)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} t_{12}+t_{24}=t_{13}+t_{34}=t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64} \\ D_{14}=N(W(1,2,4))+N(W(1,3,4)+N(W(1,3,5,6,4)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} t_{12}+t_{24}+t_{43}+t_{35}=t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}=t_{13}+t_{35}=t_{13}+t_{34}+t_{46}+t_{65} \\ D_{15}=N(W(1,2,4,3,5))+N(W(1,2,4,6,5)+N(W(1,3,5))+N(W(1,3,4,6,5)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} t_{12}+t_{24}+t_{46}=t_{12}+t_{24}+t_{43}+t_{35}+t_{56}=t_{13}+t_{34}+t_{46}=t_{13}+t_{35}+t_{56} \\ D_{16}=N(W(1,2,4,6))+N(W(1,2,4,3,5,6)+N(W(1,3,4,6))+N(W(1,3,5,6)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} t_{21}+t_{13}=t_{24}+t_{43}=t_{24}+t_{46}+t_{65}+t_{53} \\ D_{23}=N(W(2,1,3)+N(W(2,4,3)+N(W(2,4,6,5,3)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} t_{24}=t_{21}+t_{13}+t_{34}=t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64} \\ D_{24}=N(W(2,4)+N(W(2,1,3,4)+N(W(2,1,3,5,6,4)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} t_{21}+t_{13}+t_{35}=t_{21}+t_{13}+t_{34}+t_{46}+t_{65}=t_{24}+t_{43}+t_{35}=t_{24}+t_{46}+t_{65} \\ D_{25}=N(W(2,1,3,5)+N(W(2,1,3,4,6,5)+N(W(2,4,3,5))+N(W(2,4,6,5)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} t_{24}+t_{46}=t_{24}+t_{43}+t_{35}+t_{56}=t_{21}+t_{13}+t_{34}+t_{46}=t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56} \\ D_{26}=N(W(2,4,6)+N(W(2,4,3,5,6)+N(W(2,1,3,4,6))+N(W(2,1,3,5,6)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} t_{34}=t_{31}+t_{12}+t_{24}=t_{35}+t_{56}+t_{64} \\ D_{34}=N(W(3,4))+N(W(3,1,2,4))+N(W(3,5,6,4)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} t_{35}=t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}=t_{34}+t_{46}+t_{65} \\ D_{35}=N(W(3,5))+N(W(3,1,2,4,6,5))+N(W(3,4,6,5)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46}=t_{34}+t_{46}=t_{35}+t_{56} \\ D_{36}=N(W(3,1,2,4,6))+N(W(3,4,6))+N(W(3,5,6)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} t_{42}+t_{21}+t_{13}+t_{35}=t_{43}+t_{35}=t_{46}+t_{65} \\ D_{45}=N(W(4,2,1,3,5))+N(W(4,3,5))+N(W(4,6,5)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} t_{46}=t_{42}+t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56}=t_{43}+t_{35}+t_{56} \\ D_{46}=N(W(4,6))+N(W(4,2,1,3,5,6))+N(W(4,3,5,6)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} t_{56}=t_{53}+t_{34}+t_{46}=t_{53}+t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46} \\ D_{56}=N(W(5,6))+N(W(5,3,4,6))+N(W(5,3,1,2,4,6)) \\ n_{ij}=\sum\limits_{SE\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)}\ \sum\limits_{W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk})\in Way_{SE}} N(W(i_{t1},i_{t2}...,i,j,...,i_{tk}));\forall i,j\in(1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) \end{cases} \tag{15}$$

这只是一半的方程组，另一半的方程并不是不用去联立他们，而是他们的角标恰好与这的 15 个是对称的所以省略不写。将这总共三十个方程联立起来求解，就能得到所有的路段上的预期等待时间。

根据以上的分析，现在我们将总 Nash Equilibrium 的方程组直接给出：

为了表达和计算的需要，我们把方程表示成<A>,<A’>,<D>,<D’>,<N>五个部分的联立，分别如下所示：

$$\begin{cases}
t_{12}=t_{13}+t_{34}+t_{42}=t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64}+t_{42}(a01)\\
t_{13}=t_{12}+t_{24}+t_{43}=t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}+t_{53}(a02)\\
t_{12}+t_{24}=t_{13}+t_{34}=t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64}(a03)\\
t_{12}+t_{24}+t_{43}+t_{35}=t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}=t_{13}+t_{35}=t_{13}+t_{34}+t_{46}+t_{65}(a04)\\
t_{12}+t_{24}+t_{46}=t_{12}+t_{24}+t_{43}+t_{35}+t_{56}=t_{13}+t_{34}+t_{46}=t_{13}+t_{35}+t_{56}(a05)\\
t_{21}+t_{13}=t_{24}+t_{43}=t_{24}+t_{46}+t_{65}+t_{53}(a06)\\
t_{24}=t_{21}+t_{13}+t_{34}=t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56}+t_{64}(a07)\\
t_{21}+t_{13}+t_{35}=t_{21}+t_{13}+t_{34}+t_{46}+t_{65}=t_{24}+t_{43}+t_{35}=t_{24}+t_{46}+t_{65}(a08)<A>\\
t_{24}+t_{46}=t_{24}+t_{43}+t_{35}+t_{56}=t_{21}+t_{13}+t_{34}+t_{46}=t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56}(a09)\\
t_{34}=t_{31}+t_{12}+t_{24}=t_{35}+t_{56}+t_{64}(a10)\\
t_{35}=t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46}+t_{65}=t_{34}+t_{46}+t_{65}(a11)\\
t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46}=t_{34}+t_{46}=t_{35}+t_{56}(a12)\\
t_{42}+t_{21}+t_{13}+t_{35}=t_{43}+t_{35}=t_{46}+t_{65}(a13)\\
t_{46}=t_{42}+t_{21}+t_{13}+t_{35}+t_{56}=t_{43}+t_{35}+t_{56}(a14)\\
t_{56}=t_{53}+t_{34}+t_{46}=t_{53}+t_{31}+t_{12}+t_{24}+t_{46}(a15)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
t_{21}=t_{31}+t_{43}+t_{24}=t_{31}+t_{53}+t_{65}+t_{46}+t_{24}(a'01)\\
t_{13}=t_{21}+t_{42}+t_{34}=t_{21}+t_{42}+t_{64}+t_{56}+t_{35}(a'02)\\
t_{21}+t_{42}=t_{31}+t_{43}=t_{31}+t_{53}+t_{65}+t_{46}(a'03)\\
t_{21}+t_{42}+t_{34}+t_{53}=t_{21}+t_{42}+t_{64}+t_{56}=t_{31}+t_{53}=t_{31}+t_{43}+t_{64}+t_{56}(a'04)\\
t_{21}+t_{42}+t_{64}=t_{21}+t_{42}+t_{34}+t_{53}+t_{65}=t_{31}+t_{43}+t_{64}=t_{31}+t_{53}+t_{65}(a'05)\\
t_{12}+t_{31}=t_{42}+t_{34}=t_{42}+t_{64}+t_{56}+t_{35}(a'06)\\
t_{42}=t_{12}+t_{31}+t_{43}=t_{12}+t_{31}+t_{53}+t_{65}+t_{46}(a'07)\\
t_{12}+t_{31}+t_{53}=t_{12}+t_{31}+t_{43}+t_{64}+t_{56}=t_{42}+t_{34}+t_{53}=t_{42}+t_{64}+t_{56}(a'08)<A'>\\
t_{42}+t_{64}=t_{42}+t_{34}+t_{53}+t_{65}=t_{12}+t_{31}+t_{43}+t_{64}=t_{12}+t_{31}+t_{53}+t_{65}(a'09)\\
t_{43}=t_{13}+t_{21}+t_{42}=t_{53}+t_{65}+t_{46}(a'10)\\
t_{53}=t_{13}+t_{21}+t_{42}+t_{64}+t_{56}=t_{43}+t_{64}+t_{56}(a'11)\\
t_{13}+t_{21}+t_{42}+t_{64}=t_{43}+t_{64}=t_{53}+t_{65}(a'12)\\
t_{24}+t_{12}+t_{31}+t_{53}=t_{34}+t_{53}=t_{64}+t_{56}(a'13)\\
t_{64}=t_{24}+t_{12}+t_{31}+t_{53}+t_{65}=t_{34}+t_{53}+t_{65}(a'14)\\
t_{65}=t_{35}+t_{43}+t_{64}=t_{35}+t_{13}+t_{21}+t_{42}+t_{64}(a'15)
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
D_{12} = N(W(1,2)) + N(W(1,3,4,2)) + N(W(1,3,5,6,4,2))(d(01)) \\
D_{13} = N(W(1,3)) + N(W(1,2,4,3) + N(W(1,2,4,6,5,3))(d(02)) \\
D_{14} = N(W(1,2,4)) + N(W(1,3,4) + N(W(1,3,5,6,4))(d03) \\
D_{15} = N(W(1,2,4,3,5)) + N(W(1,2,4,6,5) + N(W(1,3,5)) + N(W(1,3,4,6,5))(d04) \\
D_{16} = N(W(1,2,4,6)) + N(W(1,2,4,3,5,6) + N(W(1,3,4,6)) + N(W(1,3,5,6))(d05) \\
D_{23} = N(W(2,1,3) + N(W(2,4,3) + N(W(2,4,6,5,3))(d06) \\
D_{24} = N(W(2,4) + N(W(2,1,3,4) + N(W(2,1,3,5,6,4))(d07) \\
D_{25} = N(W(2,1,3,5) + N(W(2,1,3,4,6,5) + N(W(2,4,3,5)) + N(W(2,4,6,5))(d08) < D > \\
D_{26} = N(W(2,4,6) + N(W(2,4,3,5,6) + N(W(2,1,3,4,6)) + N(W(2,1,3,5,6))(d09) \\
D_{34} = N(W(3,4) + N(W(3,1,2,4) + N(W(3,5,6,4))(d10) \\
D_{35} = N(W(3,5) + N(W(3,1,2,4,6,5) + N(W(3,4,6,5))(d11) \\
D_{36} = N(W(3,1,2,4,6) + N(W(3,4,6) + N(W(3,5,6))(d12) \\
D_{45} = N(W(4,2,1,3,5) + N(W(4,3,5) + N(W(4,6,5))(d13) \\
D_{46} = N(W(4,6) + N(W(4,2,1,3,5,6) + N(W(4,3,5,6))(d14) \\
D_{56} = N(W(5,6) + N(W(5,3,4,6) + N(W(5,3,1,2,4,6))(d15)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
D_{21} = N(W(2,1)) + N(W(2,4,3,1)) + N(W(2,4,6,5,3,1))(d'(01)) \\
D_{31} = N(W(3,1)) + N(W(3,4,2,1) + N(W(3,5,6,4,2,1))(d'(02)) \\
D_{41} = N(W(4,2,1)) + N(W(4,3,1) + N(W(4,6,5,3,1))(d'03) \\
D_{51} = N(W(5,3,4,2,1)) + N(W(5,6,4,2,1) + N(W(5,3,1)) + N(W(5,6,4,3,1))(d'04) \\
D_{61} = N(W(6,4,2,1)) + N(W(6,5,3,4,2,1) + N(W(6,4,3,1)) + N(W(6,5,3,1))(d'05) \\
D_{32} = N(W(3,1,2) + N(W(3,4,2) + N(W(3,5,6,4,2))(d'06) \\
D_{42} = N(W(4,2) + N(W(4,3,1,2) + N(W(4,6,5,3,1,2))(d'07) \\
D_{52} = N(W(5,3,1,2) + N(W(5,6,4,3,1,2) + N(W(5,3,4,2)) + N(W(5,6,4,2))(d'08) < D' > \\
D_{62} = N(W(6,4,2) + N(W(6,5,3,4,2) + N(W(6,4,3,1,2)) + N(W(6,5,3,1,2))(d'09) \\
D_{43} = N(W(4,3) + N(W(4,2,1,3) + N(W(4,6,5,3))(d'10) \\
D_{53} = N(W(5,3) + N(W(5,6,4,2,1,3) + N(W(5,6,4,3))(d'11) \\
D_{63} = N(W(6,4,2,1,3) + N(W(6,4,3) + N(W(6,5,3))(d'12) \\
D_{54} = N(W(5,3,1,2,4) + N(W(5,3,4) + N(W(5,6,4))(d'13) \\
D_{64} = N(W(6,4) + N(W(6,5,3,1,2,4) + N(W(6,5,3,4))(d'14) \\
D_{65} = N(W(6,5) + N(W(6,4,3,5) + N(W(6,4,2,1,3,5))(d'15)
\end{cases}
$$

$$
n_{ij} = \sum_{SE \in (1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6)} \sum_{W(i_{t1}, i_{t2} ..., i, j, ..., i_{tk}) \in Way_{SE}} N(W(i_{t1}, i_{t2} ..., i, j, ..., i_{tk})); \forall i, j \in (1,2,3,4,5,6)\times(1,2,3,4,5,6) < N >
$$

其中 $t_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot n_{ij}$, 这是至关重要的，为了不使表达过于繁复，我们就没有将 t_{ij} 进行展开，这个表达在算法中得到实现。

根据我们的假设延迟参数 β_{ij} 与路段的长度和宽度都成反比， α_{ij} 相当于在车

辆一般 速度下通过该路段所需要的时间，因此：

$$t_{ij}=\frac{L_{ij}}{v}+\frac{k}{L_{ij}\cdot Wide_{ij}}\cdot n_{ij}$$

其中：L_{ij} 是路段的长度，$Wide_{ij}$ 是路段的宽度，v 是一般车辆的行驶速度在这里我们认为其等于二环路上的限制速度，k 是唯一的待估计参数。

而 n_{ij} 的具体展开的数学表达就更为复杂了，为了节约篇幅和时间，我们只在算法中实现这一等式约束，这一等式是模型中最重要的东西。

要强调的是模型中只有决策变量是待解的，即只有 $W(i_1,i_2...,i,j,...,i_n)$ 是待解的未知量，其他的量都是模型中所测定的参数。可以证明这个联立方程

$$\begin{cases}A\\A'\\D\\D'\\N\\t_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\cdot n_{ij}\end{cases}\quad(\theta*)$$

总是有且仅有唯一解。

模型中仅有的参数是 α_{ij} 和 β_{ij}，其他的量都是 α_{ij}，β_{ij} 和 $W(i_1,i_2...,i,j,...,i_n)$ 的线性函数。

这样我们就得到了一个可解的线性方程组。

4.3 模型一的求解

模型一得求解分两部分组成。

第一部分是求方程组（$\theta*$）即 $\begin{cases}A\\A'\\D\\D'\\N\\t_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\cdot n_{ij}\end{cases}$ 的未知量为 $W(i_1,i_2...,i,j,...,i_n)$ 不受方程（$\theta*$）以外任何限制时的解。这个解求解出来就直接代入求得 t_{ij}，进而求出所有子博弈 $Game_{SE}$ 中车辆的时间消耗 $T(Game_{SE})$，从而计算 $C=\sum_{SE}D_{SE}\cdot T(Game_{SE})$ 即这个模型中所有车辆消耗的时间。这一部分计算的就是我们要检验的有路 W（3,4）的交通系统的效率指标，这个指标是越小就表示系统约有效率。

第二部是求方程 $\theta*$）即 $\begin{cases}A\\A'\\D\\D'\\N\\t_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\cdot n_{ij}\end{cases}$ 的未知量满足 $W(i_1,i_2...,3,4,...,i_n)$ 和 $W(i_1,i_2...,4,3,...,i_n)$ 都等于零的时候的解。这个解代入求到的

$C'=\sum_{SE} D_{SE}\cdot T'(Game_{SE})$ 就是没有路 W（3,4）的交通系统的指标，是用来评价路段 W(3,4)是否存在 Braess 悖论的参考系。如果 $C'\le C$ 那么显然这条路段 W(3,4)就存在 Braess 悖论。由于计算量的巨大，我们就只选取了一些路段进行该种检验。

经过用 lindo 直接求解发现该模型没有可行解（附录），这是由于模型过于复杂。为了求解该问题的近似 Nash 均衡，用改进过后的方法来进行求解，由于方法主要是由 lingo 软件实现的，并且改变了模型中的大量符号和方程的表达形式，这对于实现 lingo 算法是绝对必须的，我们只将改进过后的模型及其算法，在问题二的模型重建和求解过程中给出。

现在直接给出模型一的求解，结果如下：

C即有通路W(3,4)情况下的我们估算出的北京市总的车辆运行时间为；C=9712642(小时/300万辆*次)，按二环内总的车流量需求300万辆次每天计算的，因此按次计算，平均每次3.24小时；

C’ = 9687863<C,所以在问题一中存在Braess悖论，但是并不是很显著。这是由于W(3,4)本身也存在车流量的需求，所以W(3,4)的存在产生了一个局部的帕累托改进，但是在总体上产生了更大的负效应，这就是我们在第一问中得到的结论。

5 模型二的分析、建立及求解

5.1 模型二的分析

似乎在问题一中的情况会同样的发生在问题二之中，因为如果人们是完全理性的那么无论如何精确、准时的 GPS 都不可能改变囚徒困境的均衡。但是我们从另一个角度想，如果 GPS 的使用使车辆之间合作的成本降低了，从而使得所有的司机成为了具有集体理性的人，从而使其目标函数不再是个人利益最大化，而是总的车辆通行时间最小的话，Braess 悖论就有可能不复存在。但是这样一来我们就不能再使用 wardope 用户均衡理论，来求解用博弈方的策略，从而直接衡量交通系统的效率。因此我们根据新的假设，建立新的模型，并使用集合循环函数来表达模型及求解模型。

5.2 模型二的建立

根据完全动态信息和完美集体主义者的假设，模型的目标函数是

$$C=\sum_{S,E}\sum_{i_2,i_3,i_4,i_5} tpath(S,i_2,i_3,i_4,i_5,E)\cdot numpath(S,i_2,i_3,i_4,i_5,E)$$

与模型一中关于基本路段通行时间的分析一样，问题二中我们仍然承认

$t_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\cdot n_{ij}$ 由于 lindo 无法求解该问题，我们要对方程组进行基于集合的概括和描述，在模型二中仍然使用静态子博弈 $Game_{SE}$ 和此子博弈的路径策略集合 Way_{SE} 的概念，基于这两个集合，来归纳所有的方程组换句话说就是约束。

（1）$\forall Way_{SE}, t_{SE} = \alpha_{SE} + \beta_{SE} \cdot n_{SE}(1)$；这条约束就是 $t_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \cdot n_{ij}$；

（2）$\forall path_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}, \forall Way_{ij}, tpath_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = \sum_{i,j\in\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\}} t_{ij}(2)$；

这个约束的更具体的表达是直接通过附录中的代码实现的，用这个循环表达的方程，我们将问题一中表示 Nash 均衡条件的所有决策条件

$$\sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_{i_j,i_{j+1}} + \beta_{i_j,i_{j+1}} \cdot n_{i_j,i_{j+1}}) = \sum_{j=1}^{m-1}(\alpha_{k_j,k_{j+1}} + \beta_{k_j,k_{j+1}} \cdot n_{k_j,k_{j+1}}), \forall W(i_1,i_2,...,i_n), W(k_1,k_2,...,k_m) \in Way_{SE}$$

中的每一项：

$T_{SE}(W(i_1,...,i_n)) = \sum_{j=1}^{n-1}(\alpha_{i_j,i_{j+1}} + \beta_{i_j,i_{j+1}} \cdot n_{i_j,i_{j+1}})$ 直接写成 $tpath_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)} = \sum_{i,j\in\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\}} t_{ij}$，这表示路径 $tpath_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}$ 的通行时间就是它所包含的每一条基本路段 t_{ij} 之和，而 t_{ij} 的确定就交给了约束（1）这样就实现了算法的分解和与 lingo 语言的匹配。在其他方程组的表达中我们几乎都用了这种分解的方法，其效果是算法更易修改和测试，最重要的是我们不用关心具体的方程组的形式和录入，程序也不会因为输入的错误而造成灾难性的后果。

（3）

$$\forall Game_{SE}, \forall path(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6), D_{SE} = \sum_{i_1=S\wedge i_6=E\wedge\forall i_2,i_3,i_4,i_5\in point^4} numpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)(3)$$

约束（3）的意义就是 $Game_{SE}$ 中选择各个完整路径的车辆数的总和恰好是 D_{SE} 即要从 S 点行车到 E 点的车辆的总数。

（4）$\forall Way_{SE}, \forall path(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6), n_{ij} = \sum_{i=i_k\wedge j=i_{k+1}} numpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)(4)$；

选择要通过任意路段的的车辆数等于恰好选择包含这条路段的路径的博弈方的数量，约束（4）的就是对整个约束完成循环定义。做完这一步方程就已经有非零解了，做到这一步除了 Nash 均衡方程组以外的方程组就都被翻译完毕了，但其算法复杂度和描述复杂度却降低了很多，并且使我们能够随意调试。

问题二中没有基于完全理性的方程组，取而代之的是以集体利益最大化为目标的目标函数。

5.3 模型二的求解

我们将以上结果完整的体现在一个规划模型当中：

$$\min C=\sum_{S,E}\sum_{i_2,i_3,i_4,i_5} tpath(S,i_2,i_3,i_4,i_5,E)\cdot numpath(S,i_2,i_3,i_4,i_5,E)$$

$$\begin{cases}\forall Way_{SE}, t_{SE}=\alpha_{SE}+\beta_{SE}\cdot n_{SE}(1)\\ \forall path_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}, \forall Way_{ij}, tpath_{(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)}=\sum\limits_{i,j\in\{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6\}} t_{ij}(2)\\ \forall Game_{SE}, \forall path(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6), D_{SE}=\sum\limits_{i_1=S\wedge i_6=E\wedge\forall i_2,i_3,i_4,i_5\in po\operatorname{int}^4} numpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)(3)\\ \forall Way_{SE}, \forall path(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6), n_{ij}=\sum\limits_{i=i_k\wedge j=i_{k+1}} numpath(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)(4)\end{cases}$$

解出这个规划模型的技巧和算法思想及具体代码全在附录及附录的英文注释当中。

以下是我们求解的结果：

在完全集体主义的假设下，当存在中间路径时的总交通时间消耗

$C''=6758878$

不存在中间路径时的总交通时间消耗 $C'''=7863596$。

根据我们的检验标准，因为 $C'''>C''$ 即有路的时候会比没路的时候花的总时间更少，而且效果极其明显，所以 Braess 悖论此时显然是不成立的。

并且即使是最差的一种情况 C''' 也要比问题一条件下最好的一种情况 C' 即完全理性的情况下没有路的情况好，所以在完全集体主义的假设下，所有车辆配备实时 GPS 系统是一个帕累托改进，是有效率的，并且有助于解决 Braess 无效率。

6 模型的综合评价

6.1 模型的优点

模型一验证了现在的交通系统中存在 Braess 悖论。模型二中证明了如果人们变得更加的集体主义那么在 GPS 信息完全的情况下，Braess 悖论不存在且存在帕累托改进。

该模型的特点在于考虑了由 30 个方向的交通需求所构成的平行有向路上的所有博弈方的 Braess 均衡，并求解除了这个均衡。我们的计算方法是单向有向路的简单图中的 Braess 均衡计算方法的扩展。并且编写了便于修改的 lingo 代码，但是关于问题一中求解 Nash 均衡的部分的代码，并未附入文中，只将解第二问的合作博弈前提下的最优化算法附入文中。

我们使用的Braess悖论的检验方法可以针对二环路内的任意路段和路段组，但是算法复杂度会剧增，但是使用 lingo 的集成算法都是能够有效解决的介于时间关系我们只讨论了较简单的情况。

在问题二中我们着重表达了集体理性的存在对于 Braess 解决悖论的作用，和其显著的社会改进。

6.2 模型的缺点

该模型的缺点是大多数数据尤其是统计推断的数据，其估计都有些粗糙。算法的效率还很低，有很大的改进空间。没有从纯数学的角度证明 Braess 悖论的存在性，而是靠数值算法和经验数据来进行检验。

7 模型的推广

该模型还可以对北京的二环及三环、四环路中其它路径是否存在 Braess 无效率进行检验。可以根据我们在附录中给出的算法思想考虑更复杂的网络形式中的 Braess 悖论问题。模型中还可以使用嵌套式的计量方法，用以高效的估计参数，甚至可以将完整的，从统计到优化的全部算法封装起来，做成交通测评系统。

8 参考文献

【1】 谢金星，薛毅.优化建模与 LINDO/LINGO 软件.北京：清华大学出版社，2005.7
【2】 谢识予.经济博弈论.第三版.上海：复旦大学出版社，2002.7
【3】 薛薇.统计分析与 SPSS 的应用.北京：中国人民大学出版社，2007
【4】 张维迎.博弈论与信息经济学.上海：上海人民出版社，2005.3
【5】 董菁，张佐. 非合作交通网络中的 Braess 悖论及其避免[J]. 公路交通科技，2004，21(5)：92—95.
【6】 张国强，晏克非. 车辆动态导航中 Braess 悖论的解决方法及其算法设计. 西安公路交通大学学报，2001，21(4)：29-32.
【7】 鲁丛林，蔡宁. Braess’S Paradox 的博弈论分析[J]. 长沙交通学院学报，2003，19(3)：69—72.
【8】 陈彦光，刘继生. Braess 模型与城市网络的空间复杂化探讨[J]. 地理科学，2006，26(6)：658—663.

附录 1:

以下是求解模型二的 lingo 程序及算法描述：

```
sets:
    p/1..7/;!The seventh point means the invisible point used to describe that there is no interupt point betweet the tow point we focus on;
    game(p,p)|&1#NE#&2 #AND# (&1#NE#7) #AND# (&2#NE#7) :d,At,timecost;!At is the equilibrium time of driving of the game(p1,p2).The Num of them is 30;
    way(p,p)/1,2, 2,1, 1,3 ,3,1, 2,4, 4,2, 3,4, 4,3, 3,5, 5,3, 4,6, 6,4, 5,6, 6,5/:t,n,a,b;
    path(p,p,p,p,p,p)/1,7,7,7,7,2,
             1,3,4,7,7,2,
             1,3,5,6,4,2,
             2,7,7,7,7,1,
             2,4,3,7,7,1,
             2,4,6,5,3,1,
             1,7,7,7,7,3,
             1,2,4,7,7,3,
             1,2,4,6,5,3,
             3,7,7,7,7,1,
             3,4,2,7,7,1,
             3,5,6,4,2,1,
             1,2,7,7,7,4,
             1,3,7,7,7,4,
             1,3,5,6,7,4,
             4,2,7,7,7,1,
             4,3,7,7,7,1,
             4,6,5,3,7,1,
             1,3,7,7,7,5,
             1,3,4,6,7,5,
             1,2,4,3,7,5,
             1,2,4,6,7,5,
             5,3,7,7,7,1,
             5,6,4,3,7,1,
             5,3,4,2,7,1,
             5,6,4,2,7,1,
             1,2,4,7,7,6,
             1,2,4,3,5,6,
             1,3,4,7,7,6,
             1,3,5,7,7,6,
             6,4,2,7,7,1,
             6,5,3,4,2,1,
             6,4,3,7,7,1,
             6,5,3,7,7,1,
             2,1,7,7,7,3,
```

2,4,7,7,7,3,
2,4,6,5,7,3,
3,1,7,7,7,2,
3,2,7,7,7,4,
3,5,6,4,7,2,
2,7,7,7,7,4,
2,1,3,7,7,4,
2,1,3,5,6,4,
4,7,7,7,7,2,
4,3,1,7,7,2,
4,6,5,3,1,2,
2,1,3,7,7,5,
2,1,3,4,6,5,
2,4,3,7,7,5,
2,4,6,7,7,5
5,3,1,7,7,2,
5,6,4,3,1,2,
5,3,4,7,7,2,
5,6,4,7,7,2,
2,4,7,7,7,6,
2,4,3,5,7,6,
2,1,3,4,7,6,
2,1,3,5,7,6,
6,4,7,7,7,2,
6,5,3,4,7,2,
6,4,3,1,7,2,
6,5,3,1,7,2,
3,7,7,7,7,4,
3,1,2,7,7,4,
3,5,6,7,7,4,
4,7,7,7,7,3,
4,2,1,7,7,3,
4,6,5,7,7,3,
3,7,7,7,7,5,
3,4,6,7,7,5,
3,1,2,4,6,5,
5,7,7,7,7,3,
5,6,4,7,7,3,
5,6,4,2,1,3,
3,4,7,7,7,6,
3,1,2,4,7,6,
3,5,7,7,7,6,
6,4,7,7,7,3,
6,4,2,1,7,3,

```
                6,5,7,7,7,3,
                4,3,7,7,7,5,
                4,6,7,7,7,5,
                4,2,1,3,7,5,
                5,3,7,7,7,4,
                5,6,7,7,7,4,
                5,3,1,2,7,4,
                4,7,7,7,7,6,
                4,3,5,7,7,6,
                4,2,1,3,5,6,
                6,7,7,7,7,4,
                6,5,3,7,7,4,
                6,5,3,1,2,4,
                5,7,7,7,7,6,
                5,3,4,7,7,6,
                5,3,1,2,4,6,
                6,7,7,7,7,5,
                6,4,3,7,7,5,
                6,4,2,1,3,5
                /:numpath,tpath;
!Beause all elements of path must have same deg,we define point 7 to stand the
deg of NULL ways;
!The defining way of elements of path is beside the last point put the other point
in the original order,and then put "7"
between last point and the last point in order until the number of points in path(..)
meets 6.It's very important;
endsets
data:
    a=    0.121,  0.165,
      0.121,            0.0151,
      0.165,       0.122,  0.131,
          0.0151, 0.122,             0.137,
               0.131,              0.015,
                     0.137,  0.015;

    b=    0.54,  4,
      0.54,             4.33,
      4,       0.5,  0.5,
          4.33, 0.5,              0.477,
               0.5,             4.33
                     0.477,  4.33;

    !Beacause of the beta we estimated is very small,for husband code writing we
use large value,then lessen it in constrains;
```

```
    d=       176.37811 24.167758 198.46271 215.26256 318.18878
      176.37811          200.54587 22.084601 312.1364  209.21018
      24.167758  200.54587          177.93782 191.0948  271.50061
      198.46271  22.084601 177.93782          290.0518  187.12557
      215.26256  312.1364  191.0948  290.0518          205.85244
      318.18878  209.21018 271.50061 187.12557 205.85244        ;
enddata

!c=@sum(game(s,e):timecost(s,e))/7;!The final aim of question 1 we focus on;

min=@sum(game(s,e):timecost(s,e));!The final aim of question 2 we focus on;

@for(game(s,e):timecost(s,e)=@sum(path(i1,i2,i3,i4,i5,i6)|i1#eq#s #and#
i2#eq#e:tpath*numpath));
!Calculate the total time cost of every game(s,e) what form the aim of our test<1>!;
@for(way(i,j):t=a+b*n);!The primary expression of every way<2>!;
@for(path(i1,i2,i3,i4,i5,i6):tpath(i1,i2,i3,i4,i5,i6)=@sum(way(i,j)| (i#eq#i1
#and# j#eq#i2) #or# (i#eq#i2 #and# j#eq#i3) #or# (i#eq#i3 #and# j#eq#i4) #or#
(i#eq#i4 #and# j#eq#i5) #or# (i#eq#i5 #and# j#eq#i6)   :t));!If way(i,j) is on
the path(i1..in), add the time cost of way(i,j) on the time cost of path(i1..i6)!;
!Calculat the time cost of every path.It's very important;! <3>;
@for(game(s,e)|s#LE#6 #AND# e#LE#6:
d(s,e)=@sum(path(i1,i2,i3,i4,i5,i6)|i1#EQ#s #AND# i6#EQ#e:numpath));
!The players' number in Game(s,e) "d(s,e)" should be equal to sumary of numpath
of all path start with s and end with e<4>;
@for(way(i,j):n(i,j)=@sum(path(i1,i2,i3,i4,i5,i6)|((i#EQ#i1)#and#(j#EQ#i2))#
OR#((i#EQ#i2)#and#(j#EQ#i3))#OR#((i#EQ#i3)#and#(j#EQ#i4))#OR#((i#EQ#i4)#and#
(j#EQ#i5))#OR#((i#EQ#i5)#and#(j#EQ#i6)) #OR# ((j#EQ#i6)#AND#(i#EQ#i1 #OR#
i#EQ#i2 #OR# i#EQ#i3 #OR# i#EQ#i4 #OR# i#EQ#i5))    :numpath));!If way(i,j) is
on the path(i1..i6),add the num of players choosed path(i1..i6) on the num of
players choosed the way(i,j)"((j#EQ#i6)#AND#(i#EQ#i1 #OR# i#EQ#i2 #OR# i#EQ#i3
#OR# i#EQ#i4 #OR# i#EQ#i5))"is very important logical condition ,because
according to our define the ways which is continue and the total number less than
6 on the path will be ignored by the condition sentence before the "...",for perfect
complement to it ,we define  sentence"..." which is property provable.Accoding
to the way we define the path(..) the terminal point must be i6,the condition
of ignoring will just happen when the way(i,j) j=i6 i=last point in original order;
!Calculate the num of every n(i,j) of way(i,j) which depends on numpath of path
across the way(i,j) <5>;

!@for(path(i1,i2,i3,i4,i5,i6)|  ((i1#eq#3 #and# i2#eq#4) #or#  (i2#eq#3 #and#
i3#eq#4) #or#  (i3#eq#3 #and# i4#eq#4) #or#  (i4#eq#3 #and# i5#eq#4) #or#
(i5#eq#3 #and# i6#eq#4)) #or#  ((i1#eq#4 #and# i2#eq#3) #or#  (i2#eq#4 #and#
```

```
i3#eq#3) #or#  (i3#eq#4 #and# i4#eq#3) #or#  (i4#eq#4 #and# i5#eq#3) #or#
(i5#eq#4 #and# i6#eq#3))   :numpath=0);!reserve of test of existence of Braess
paradox<7>;
```

附录 2：

该表为收集的数据和估计出的参数，数据来源是《北京统计年鉴 2008》、百度知道、google maps.

路线	距离（km）	路线	宽度（m）	距离（km）	车流量（千辆）	aij(小时)	bij（小时/千辆）
1->2	6.63125	1->2	60	6.63125	198.9822909	0.120568182	0.005424763
1->3	0.90863	1->3	60	0.90863	27.26503736	0.016520545	0.03959033
2->4	0.83031	1->4	60	0.83031	24.91490835	0.015096545	0.043324736
3->4	6.68989	1->5	60	6.68989	200.741887	0.121634364	0.005377213
3->5	7.18455	1->6	60	7.18455	215.5850282	0.130628182	0.005006989
4->6	7.03532	2->3	60	7.53988	226.2473283	0.137088727	0.004771026
5->6	7.73939	2->4	60	0.83031	24.91490835	0.015096545	0.043324736
1->4	7.46156	2->5	60	11.73533	352.1390165	0.213369545	0.003065357
1->5	8.09318	2->6	60	7.86563	236.0220286	0.143011455	0.004573437
1->6	11.96288	3->4	40	6.68989	200.741887	0.121634364	0.008065819
2->3	7.53988	3->5	60	7.18455	215.5850282	0.130628182	0.005006989
2->5	11.73533	3->6	60	10.20755	306.2954471	0.185591818	0.003524152
2->6	7.86563	4->5	60	10.90502	327.2241081	0.198273	0.003298754
3->6	10.20755	4->6	60	7.03532	211.1071202	0.127914909	0.005113195
4->5	10.90502	5->6	60	7.73939	232.2339759	0.140716182	0.004648036