

1 问题重述

在第一阶段中，我们已经成功的解决了在狭窄的空间或短小的车位上小汽车侧位停车的问题，并建立了合理的模型，给出了理想路线。这阶段的具体要求如下：

- 1、大型车辆有时也会面临在狭窄空间中停车的问题，我们此阶段需要建立一个合理的模型，判断车头和拖挂的集装箱拖车之间有可活动的连接部的铰接式的集装箱货车，即整车转弯时不是刚性的车辆，是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。
- 2、由于人工驾驶时操作可能不准确，且由于客观条件，也可能影响驾驶员的判断，造成不能按照设计的路线行进。假设我们可以实时测定本车确切位置，请建立合理的模型，以根据本车的当前位置，随时提出建议的停车路线，并提出对驾驶员操作的建议，建议需要考虑实用性。为简化问题，在此问题中只需考虑小型汽车。

2 模型假设

1. 汽车泊车过程中无侧滑现象发生；
2. 计算汽车宽度时不考虑反光镜，转向灯，脚踏板等；
3. 假设模型一中牵引车头可做圆弧运动；
4. 在转向过程中，轮胎无侧向变形，即轮胎为刚性的；
5. 把后桥的几何中心作为拖挂的集装箱拖车的旋转点。

3 符号说明

符号	符号含义及说明
(a_0, b_0)	铰接点的初始坐标
(x_0, y_0)	初始时后桥的几何中心坐标
R	车头的转弯半径
L	铰接点到后桥几何中心的距离
θ	微小量
α	车与坐标轴的夹角
(a,b)	车头圆心
(x_n, y_n)	经过 n 次微小变化后后桥的几何中心坐标
(a_{n+1}, b_{n+1})	经过 n+1 次微小变化后铰接点的坐标
l_{n+1}	(x_n, y_n) 到 (a_{n+1}, b_{n+1}) 的距离
$A(a_n, b_n)$	铰接点
$B(x_n, y_n)$	后桥几何中心
w	车宽 EF
l	车长 DF
d_1	前悬
d_2	后悬

4 问题的分析、模型的建立及求解

4.1 问题分析

对于问题一，假设我们可以得到停车位置的平面图，包括停车空位的长度宽度等数据，需要建立合理的模型，以判断本半挂车能否在该处侧位停车。由第一阶段的研究，我们知道车头可以做圆弧运动，而集装箱拖车与车头只有唯一的连接点。那么我们就考虑铰接点的运动对集装箱拖车运动的影响。集装箱拖车的车轮不是主动转向，而是随着车箱的运动被动改变的，即它跟随着铰接点的运动被迫

运动^[1]。所以，可以找出链接点做圆周运动时，集装箱拖车每个质点的运动轨迹，由此可以做出运动过程中车头和集装箱拖车扫过空间的平面投影图，根据投影图，就可以确定最小停车位的长度和宽度，即可以判断汽车是否能安全的停入侧向车位。

对于问题二，我们根据一阶段的研究，在每一个位置都以第一阶段的方式，给司机在对应位置的最佳路径。

4.2 模型一

以东风 EQ4242G 型半挂牵引车和半挂车 CLW9280CXY 为例



东风 EQ4242G 型半挂牵引车

项目	参数 (mm)
轴距 (二桥)	3200+1300
车长	6650
前悬	1270
后悬	880
车宽	2485



半挂车 CLW9280CXY

项目	参数 (mm)
轴距 (三桥)	7000+1310+1310
车长	13000
前悬	1200
后悬	2180
车宽	2500

4.21 第一部分：

参考#1187 队建立的第一阶段模型，我们始终可以使大型半挂车的车头做圆弧运动（以最小半径行驶），所以，在考虑问题 1 时可先不考虑车头的运动。

同样可由第一阶段的研究可知，大型半挂汽车的铰接点也做圆周运动。接下来要考虑的是拖挂的集装拖车后桥（二桥或三桥）几何中心的运动方式与轨迹。半挂车后桥几何中心是随铰接点运动而运动的。我们考虑在车头转过微小角度 θ 时，半挂车后桥的几何中心近似的做直线运动如下图：

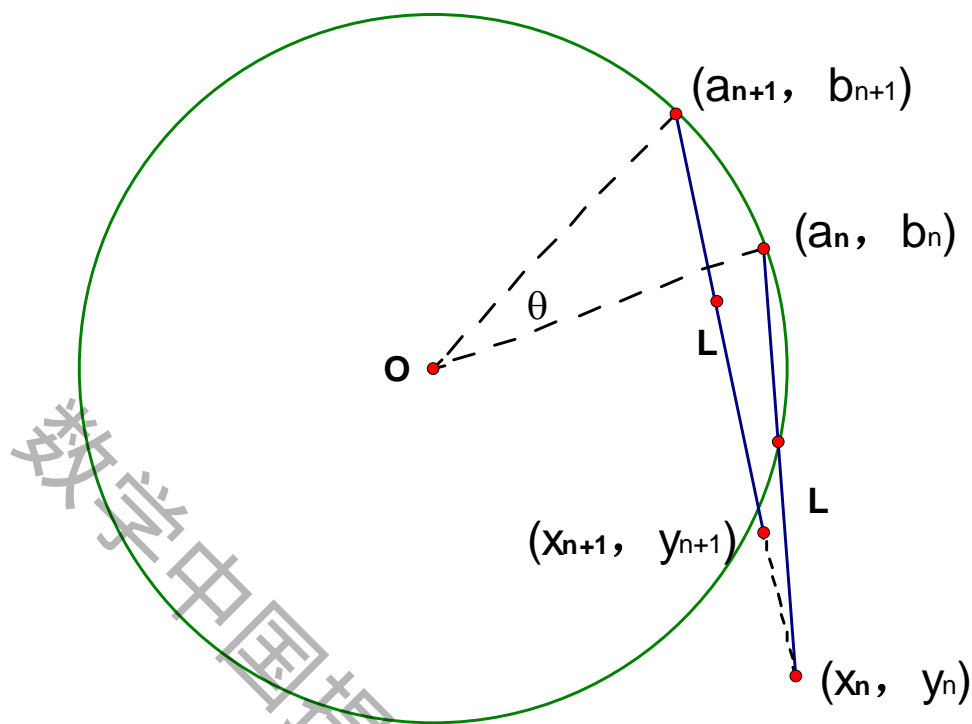


图 1

由以上分析可建立以下方程：

1) 经过 n 次微小运动 θ 后铰接点的横、纵坐标为下两方程

$$a_n = R \cos(\alpha + n\theta) + a$$

$$b_n = R \sin(\alpha + n\theta) + b$$

2) (x_n, y_n) 到 (a_{n+1}, b_{n+1}) 的距离为

$$l_{n+1} = \sqrt{(a_{n+1} - x_n)^2 + (b_{n+1} - y_n)^2}$$

3) 后桥几何中心的横、纵坐标为下两方程

$$x_{n+1} = a_{n+1} - \frac{L}{l_{n+1}}(a_{n+1} - x_n)$$

$$y_{n+1} = b_{n+1} - \frac{L}{l_{n+1}}(b_{n+1} - y_n)$$

化简 1)、2)、3) 方程得以下关系式：

$$l_{n+1} = \sqrt{\{R \cos[\alpha + (n+1)\theta] + a - x_n\}^2 + \{R \sin[\alpha + (n+1)\theta] + b - y_n\}^2}$$

$$x_{n+1} = R \cos[\alpha + (n+1)\theta] + a - \frac{L}{l_{n+1}} \{R \cos[\alpha + (n+1)\theta] + a - x_n\}$$

$$y_{n+1} = R \sin[\alpha + (n+1)\theta] + b - \frac{L}{l_{n+1}} \{R \sin[\alpha + (n+1)\theta] + b - y_n\}$$

用 vc6.0 解得后桥几何中心运动轨迹上的部分点，且 θ 越趋近于 0，得到的部分点散点图就越接近于后桥几何中心运动轨迹^[3]。如下图：

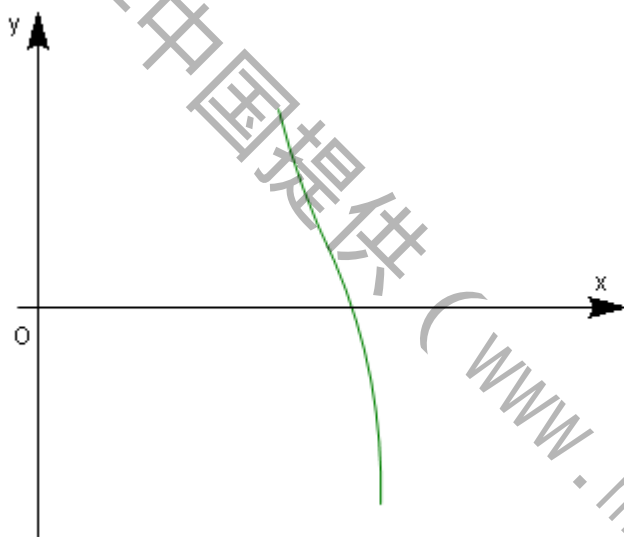


图 2

4.22 第二部分：

由第一部分，我们求出了后桥几何中心的运动轨迹和铰接点的运动轨迹，半挂车的各个部位的运动轨迹由后桥几何中心的运动轨迹和铰接点的运动轨迹唯一确定。做出简化的 半挂车示意图如下：

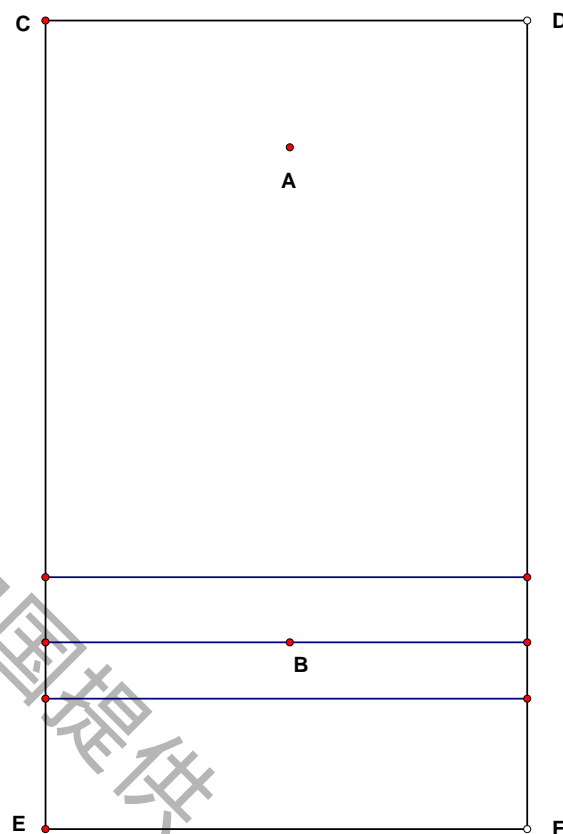


图 3. 半挂车示意图

经过计算可得 D 点的坐标

$$x_{Dn} = [a_n + \frac{w(b_n - y_n)}{2(l - d_1 - d_2)}](\frac{l - d_2}{l - d_1 - d_2}) - \frac{d_1}{l - d_1 - d_2} [x_n + \frac{w(y_n - b_n)}{2(l - d_1 - d_2)}]$$

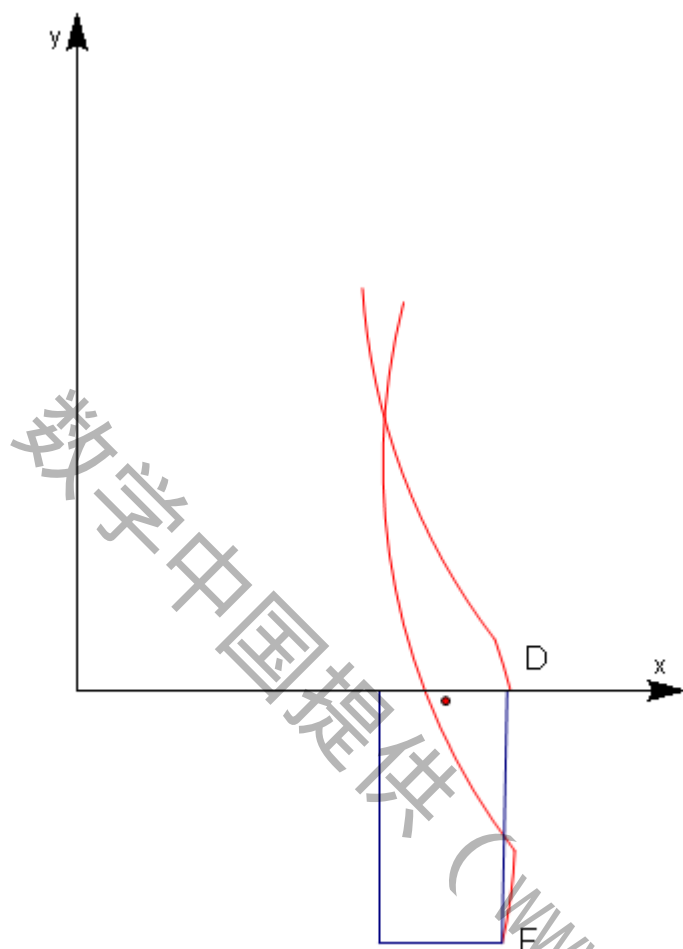
$$y_{Dn} = [b_n + \frac{w(x_n - a_n)}{2(l - d_1 - d_2)}](\frac{l - d_2}{l - d_1 - d_2}) - \frac{d_1}{l - d_1 - d_2} [y_n + \frac{w(a_n - x_n)}{2(l - d_1 - d_2)}]$$

F 点的坐标为

$$x_{Fn} = [x_n + \frac{w(y_n - b_n)}{2(l - d_1 - d_2)}](\frac{l - d_1}{l - d_1 - d_2}) - \frac{d_2}{l - d_1 - d_2} [a_n + \frac{w(b_n - y_n)}{2(l - d_1 - d_2)}]$$

$$y_{Fn} = [y_n + \frac{w(a_n - x_n)}{2(l - d_1 - d_2)}](\frac{l - d_1}{l - d_1 - d_2}) - \frac{d_2}{l - d_1 - d_2} [b_n + \frac{w(x_n - a_n)}{2(l - d_1 - d_2)}]$$

由 D、F 点的轨迹我们做出半挂车头向左转时，右侧最突出点的轨迹如下图：



轨迹方程式取 D、F 中纵坐标较大者，即 $y_{Dn} < y_{Fn}$ 时取 F 点的轨迹，反之取 D 点的轨迹，记为 $f_{out}(x, y)$ 。

对于半挂车的左侧轨迹方程取直线 CE 上中纵坐标较小者，记为 $f_{in}(x, y)$ 。

对于车向右转的过程时关于 $x = R + \frac{w}{2}$ 对称的，所要相应的外侧轨迹是 $f_{out}(2R + w - x, y)$ ，内侧轨迹是 $f_{in}(2R + w - x, y)$ 。

在#1187 的模型一边界（下图 4）中加入外侧轨迹 $f_{out}(x, y)$ 和 $f_{out}(2R + w - x, y)$ ，内侧轨迹 $f_{in}(x, y)$ 和 $f_{in}(2R + w - x, y)$ ，得到半挂车的运动轨迹如（下图 5）

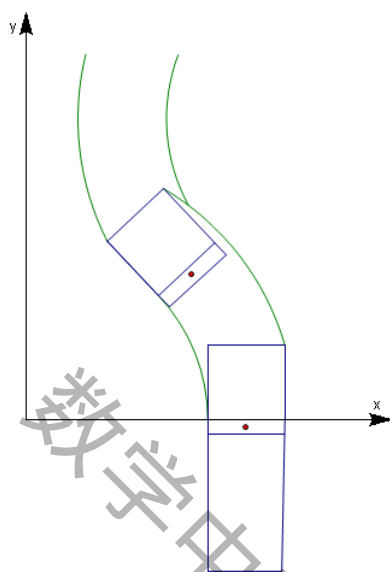


图 4

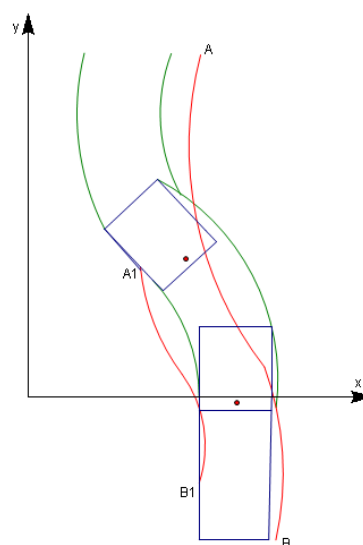


图 5

解出图 4 中横坐标为 $R - \frac{w}{2}$ 的点的纵坐标 y' 。此时算出车位的最小长度和最小宽度分别为：

$$l = y' - y_0$$

$$w = R_{\max} - R_{\min}$$

用东风 EQ4242G 型半挂牵引车和半挂车 CLW9280CXY 的数据计算得长度和宽度分别为：

$$l = 24.786m$$

$$w = 3.682m$$

当车位的长或宽小于以上数值时，东风 EQ4242G 型半挂牵引车和半挂车 CLW9280CXY 组成的列车不能停入泊车位。

$$\sqrt{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_2 - d^2 + 2d_0d \cot \theta} = \sqrt{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_0 - d^2 + 2d_0r \cot \theta}$$

易知 (3) 式中 $\theta_x \leq \theta$ ，现在假设车以最小转弯半径倒出，在此只用考虑 $\theta_x = \theta$ ，

为了使车能安全倒出，显然有： $y_1 - y_2 \geq 0$ ，即 $y_1 \geq y_2$ 。说明：

$$w_1 = 2R_{OD} - 2R_{OB} + d = 2\sqrt{(r \cos \theta)^2 + d_2^2} - 2r \cos \theta + d$$

应是最小宽度，

$$l_1 = y_2 + d_2 = \sqrt{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_0 - d^2 + 2d_0r \cot \theta} + d_2$$

为最小长度。以上理论说明了一次性倒车停车的最小宽度和最小长度。

由以上引用可先判断是否可以停入，若不能停入则和本问题无关，所以我们要考虑的就是有障碍物干扰但是可以停入的情况。

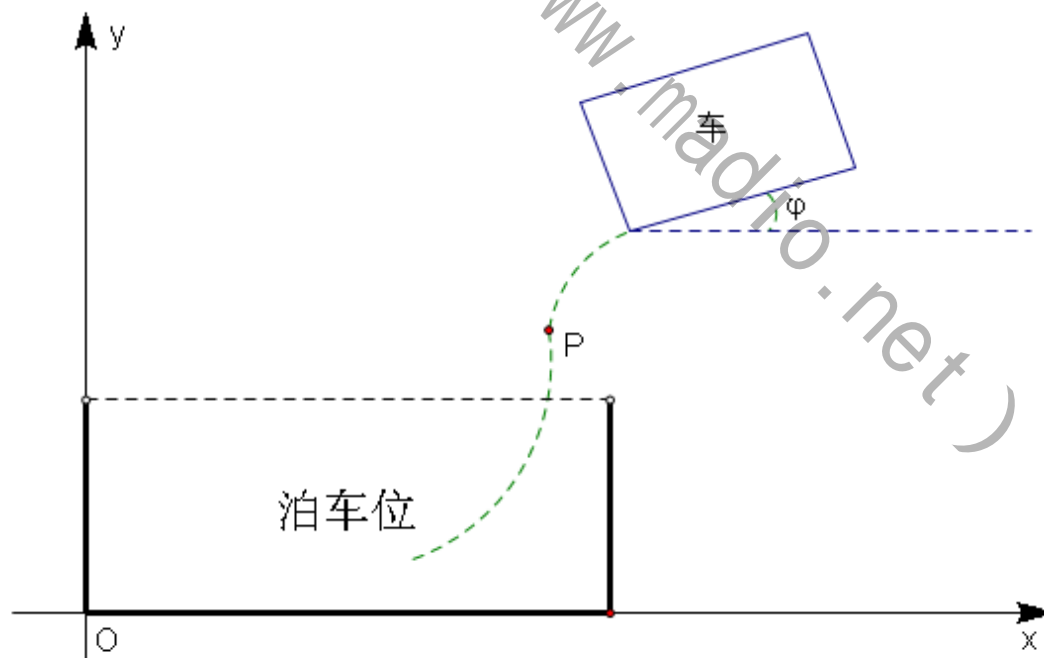


图 6

如上图所示建立坐标系。对任意位置 (x_c, y_c) 的车和任意位置 (x_p, y_p) 的障碍物 P，

我们由第一阶段的研究阶段可找出最优路径。所以 $(x', f(x'))$ 经过坐标旋转变换和坐标平移变换后得到在建立的坐标系 xoy 上的轨迹方程是 $(x, g(x, x_c, y_c, \varphi))$ 。简而言之， $(x, g(x, x_c, y_c, \varphi))$ 就是车的实时最优路径方程。其轨迹方程只与车的初始坐标和初始方向有关（其中 φ 为车中轴线和 x 轴的夹角）。在方案一中的轨迹方程为 $(x', f(x'))$ 。

坐标旋转变换和坐标平移变换公式：

同一点（如 A）的坐标：就坐标 (x_0, y_0) ，新坐标系 (x_1, y_1) ：

旧坐标的 x' 轴到新坐标的 x 轴的角为 α （ x' 轴旋转 α 后与 x 轴平行，逆时针取正，反之取负，则称 α 为 x' 轴到新坐标的 x 轴的角）。

平移、旋转变换公式为：

$$x = x_1 + (x' - x_0) \cos \alpha - (y' - y_0) \sin \alpha$$

$$y = y_1 + (x' - x_0) \sin \alpha + (y' - y_0) \cos \alpha$$

所以轨迹 $(x', f(x'))$ 经过平移、旋转变换后的轨迹是 $(x, g(x, x_c, y_c, \varphi))$ ，为书写的简单起见 $(x, g(x, x_c, y_c, \varphi))$ 的表达式就不完全代入。 $g(x, x_c, y_c, \varphi)$ 对 x 求微分 $\frac{\partial(g(x, x_c, y_c, \varphi))}{\partial x}$ ，所以其切线到车的中轴的角是：

$$\beta = \arctan\left(\frac{\partial(g(x, x_c, y_c, \varphi))}{\partial x}\bigg|_{x=x_c}\right)$$

假设车轮偏转角和方向盘转过的圈数位 $1/k$ 。若 β 为正，就提示司机向右转动方向盘 $k\beta$ 圈；若 β 为负，就提示司机向左转动方向盘 $k\beta$ 圈。在导航仪的设计中为体现人性化，我们可使导航仪间隔 t 秒按上述方法提示一次。导航的预想结果如图：

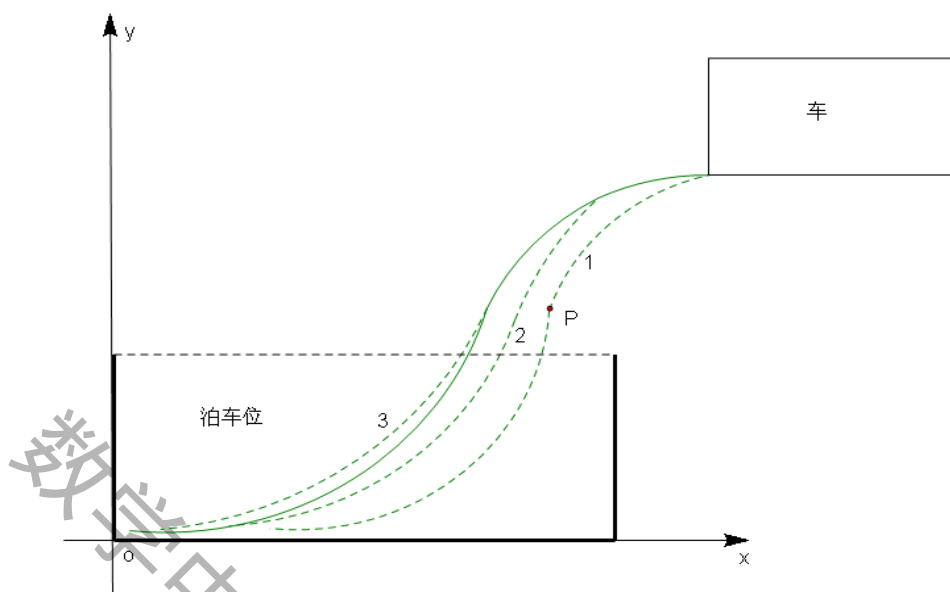


图 7

注：修正了三次最优路径，上图中虚线为最优路径图。虚线 1, 2, 3 分别是第 1, 2, 3 次的修正路径，实线为车的实际运行路线。

5 模型的评价和改进

模型一：

半挂车后面三桥的运动情况是做半径渐小的圆周运动，且圆心是运动的。所以只能考虑轨迹本身的运动规律，而不能以圆周运动理论来解决。我们建立的模型充分应用微分的理论，用间隔微小的点列取代连续的轨迹。在数学分析理论中证明了这样的去代是合理的。而且这种模型对解决类似的实际生活问题很有效。在实际生活问题中一般不易找出其严格的数学规律，而我们利用离散代替连续的方法是值得推广应用的。我们控制相邻离散点的接近程度，就可以使离散点和连续轨迹的误差很小。即有微元的细度来控制误差。

但在模型一中没有考虑牵引车头和半挂车之间的夹角。但是牵引车头和半挂车之间的夹角是大于一个定值 δ 而小于 π 的（其中 δ 是车辆的基本参数）。所以要对模型一进行改进。改进方法是利用点 (x_n, y_n) 、点 (a_{n+1}, b_{n+1}) 及定圆心 (a, b) 计算出牵引车头和半挂车之间的夹角，从夹角等于 δ 时起，半挂车和牵引车头保持相对位置并和牵引车头一起做同心圆运动。这样改进后的模型就更完善、精确。

模型二：

沿用了第一阶段的思想，在它的基础上改进提炼出寻找最优停车路径的方法。对问题二的解决我们采用的是把最优路径的方法应用到每一位位置，即车在运动的每个时刻都应用一次最优路径的方法。实现了路径的实时更新，更正了由于司机操作和机械反映等对最优路径的影响。所以是较好的停车导航方法。

模型二的不足之处在于，它本身计算量大，对硬件设备要求比较高。在考虑成本情况下，在车上推广使用不现实。

6 参考文献

- 【1】 胡宁, 半挂车列车转向运动学分析[J], 汽车研究与开发, 23-26, 1992 (2)
- 【2】 傅鹏, 何中市等, 数学实验, 北京: 科学出版社, 2000. 8
- 【3】 唐多名, 半挂汽车列车轨迹跟踪研究, 9-13, 2006. 05-2007. 05

7 附录

Matlab 程序

程序 1

```
a=input('请输入 a:');
b=input('请输入 b:');
h=input('请输入 h:');
k=input('请输入 k:');
R=input('请输入 R:');
L=input('请输入 L:');
x=input('请输入 x0:');
y=input('请输入 y0:');
n=0;
while n<250
    L0=sqrt((R*cos(h+(n+1)*k)+a-x)^2+(R*sin(h+(n+1)*k)+b-y)^2);
    x=R*cos(h+(n+1)*k)+a-(R*cos(h+(n+1)*k)+a-x)*L/L0;
    fprintf('x%d=%f\t', n+1, x);
    y=R*sin(h+(n+1)*k)+b-(R*sin(h+(n+1)*k)+b-y)*L/L0;
    fprintf('y%d=%f\n', n+1, y);
    n=n+1;
end
```

程序 2

```
a=input('请输入 a:');
b=input('请输入 b:');
h=input('请输入 h:');
k=input('请输入 k:');
R=input('请输入 R:');
L=input('请输入 L:');
l=input('请输入 l:');
```

报名号#1192

```

w=input(' 请输入 w:');
d1=input(' 请输入 d1:');
d2=input(' 请输入 d2:');
x=input(' 请输入 x0:');
y=input(' 请输入 y0:');
n=0;
while n<250
an=R*cos(h+n*k)+a;
bn=R*sin(h+n*k)+b;
L0=sqrt((R*cos(h+(n+1)*k)+a-x)^2+(R*sin(h+(n+1)*k)+b-y)^2);
x=R*cos(h+(n+1)*k)+a-(R*cos(h+(n+1)*k)+a-x)*L/L0;
y=R*sin(h+(n+1)*k)+b-(R*sin(h+(n+1)*k)+b-y)*L/L0;
XDn=(an+w*(bn-y)/(2*(1-d1-d2)))*(1-d2)/(1-d1-d2)-(x+w*(y-bn)/(2*(1-d1-d2)))*d1/(1-d1-d2);
YDn=(bn+w*(x-an)/(2*(1-d1-d2)))*(1-d2)/(1-d1-d2)-(y+w*(an-x)/(2*(1-d1-d2)))*d1/(1-d1-d2);
XFn=(x+w*(y-bn)/(2*(1-d1-d2)))*(1-d1)/(1-d1-d2)-(an+w*(bn-y)/(2*(1-d1-d2)))*d2/(1-d1-d2);
YFn=(y+w*(an-x)/(2*(1-d1-d2)))*(1-d1)/(1-d1-d2)-(bn+w*(x-an)/(2*(1-d1-d2)))*d2/(1-d1-d2);
fprintf(' XD%d=%f\t\t', n+1, XDn);
fprintf(' XF%d=%f\t\t', n+1, XFn);
if(YDn>YFn)
    fprintf(' YD%d=%f\n', n+1, YDn);
else
    fprintf(' YF%d=%f\n', n+1, YFn);
end
n=n+1;
end

```