

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1423

参赛队员（签名）：

队员 1：王光华

队员 2：宋欣

队员 3：王文平

参赛队教练员（签名）： 沈亮

参赛队伍组别：本科组

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：
1423

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降时的姿态

关 键 词 水面迫降 机翼升力 粘滞阻力 波浪力

摘 要：

在讨论大型客机水面迫降的安全性问题中，主要研究客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。通过前面的讨论，我们已经知道飞机在平静水面迫降时飞机的受力情况和运动情况。飞机在接触水面之前我们通过近似主要考虑了空气对机翼的升力；飞机落水后我们把飞机简化为圆筒模型来对它的进行受力分析，主要考虑飞机受到的重力和水对它的粘滞阻力，进而确定它落水后的运动情况。从而确定客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。之前讨论的是在水面平静的理想情况下的飞机迫降，我们知道水面始终保持平静是不现实的。由于风对水的作用以及其他一些原因，水面上经常会产生波浪。所以，我们在讨论飞机在水面迫降时就必须考虑到波浪对飞机的作用。在前面的讨论中我们把飞机与轮船对比，同样的，在这里我们仍把飞机和轮船对比来研究波浪力对飞机的作用。参考轮船在水中受波浪力的作用来研究飞机在水中受波浪力的作用。利用参考文献计算得到波浪力对其进行无量纲化处理得到真实值与计算值之比 η ，又由可以较精确测量的数据得到计算值，从而求得波浪力。把求得的波浪力带入之前的公式中计算得到飞机落水时的方向与波浪的传播方向之间的夹角 θ_K 。

参赛队号 1423

参赛密码 _____
(由组委会填写)

所选题目 A

英文摘要

In discussing the security issues of large aircraft forced landing on the water, the most important question is that how the aircraft landing on the water can we get the best results. According to the previous discussion, we already know the conditions of forced and movement of the aircraft when it be made a forced landing in calm water. We have got the knowledge of the main consideration by the air lift of the wing before the plane in contact with water nearly; we simplified the aircraft as a cylinder model when it fell into the water. Then we make the force analysis of it, we main considerate the gravity and water by the aircraft's stick to it delay resistance, and to determine the movement when it fell into the water. To determine the security issues of large aircraft forced landing on the water, the most important question is that how the aircraft landing on the water can we get the best results. We have discussed the issue of aircraft landing on the calm water surface under the ideal conditions, we know that water is always calm is not realistic. The role of water due to wind and other reasons, the water often produce waves. Therefore, we discuss the question that when the aircraft made a forced landing in the water to be taken into account the role of waves on the aircraft. In the previous discussion, we compare aircraft and ships, here we are compared to aircraft and ships to study the effect of wave forces on the aircraft. Reference vessel in the water by wave force to study the role of aircraft in the water by wave loads. Calculated by reference to the dimensionless wave forces processing of its true value and estimated value by the ratio, but also by the more accurate measurement data can be calculated to obtain the wave forces. To obtain the wave forces calculated into the formula, we can get the angle between the propagation direction and the direction when the aircraft fell into the sea.

一、问题的提出

1.1 问题重述：

客机水面迫降时的姿态

2009年1月15日下午（美国东部时间），US Airways所属第1549航班（空中客车A320客机）在起飞后不久在纽约哈德逊河紧急迫降。经及时救助，机上155人（其中包括两名机师和三名乘务人员）在飞机沉没之前全部获救。该起事故造成78人受伤，无人死亡。这架客机从纽约长岛拉瓜迪亚机场起飞约90秒后遭飞鸟撞击，导致两个发动机损坏。机长萨伦伯格凭借着出色的驾驶技术和冷静的判断使飞机迫降在哈德逊河河面。而飞机上的乘客在乘务员的指挥下，有序地逃出紧急舱门并全部获救。

1 第一阶段问题：

问题：大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。请你建立合理的数学模型，对客机在平静水面上的迫降进行分析，指出客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。

2 第二阶段问题：

问题：在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机在海面的迫降具有更大的难度和危险性。请你建立合理的数学模型，对客机在海面的迫降进行分析，指出在有风浪的条件下，飞机以何种姿态和航向接触海面是相对安全的选择。

1.2 问题背景：

现在世界上的科技正以惊人的速度发展着，可是并不是所有的事情都是我们人类所能掌控的。所以，在我们无法改变的时候，我们能做的只有用我们的力量尽可能的去降低人类的损失和伤害。

由于极端天气、机械故障等原因，飞机的迫降不可避免。如大型客机在水域上方飞行，如果出现全部发动机同时停车或者燃油耗尽的情况，必须进行水上迫降。飞机迫降的过程中，飞机会受到很大的水体冲击力，发生不同程度的破坏，给乘客和机组成员的生命安全带来极大威胁。机身所受冲击力与降落速度、飞行速度和降落仰角密切相关，合适的降落参数，很可能避免机毁人亡。近些年来，有关机身所受冲击力与飞机水面降落参数关系的研究报道还不多见。因此，研究机身所受冲击力在不同降落速度、飞行速度和降落仰角条件下的变化规律，对于水上飞机的结构设计、飞机防撞性能标准的完善以及飞机水面迫降技术参数选择有重大意义。

1.3 实际现状：

近海/跨海使用的飞机必须考虑水上迫降性能，而目前飞机抗坠毁标准、设计方法和分析方法通常只考虑硬着陆情况，很少考虑水面迫降情况，这是由于水上迫降涉及多场耦合，问题十分复杂。但是在全世界每年飞机因各种原因不得不在海面上迫降的事件多只有多。在这种险情存在的情况下，以什么姿态迫降才能最大限度的保证乘客和机组人员的人身安全？这才是人们关心的，也是大家应该关注的！

二、问题分析

随着现代社会飞速发展，国际间的交流越来越频繁。飞机逐渐成为人们生活中的不可或缺的交通工具。同时，随着海域上空空间的开发，海域上空的航线在逐渐增加，如何在水上迫降成为航空领域中的重要问题。

大型客机在水域上方飞行，如果出现全部发动机同时停车或者燃油耗尽的情况，必须进行水上迫降。迫降过程中，飞机会受到很大的水体冲击力，发生不同程度的破坏，给乘客和机组成员的生命安全带来极大威胁。对于飞机在水面上迫降的问题，首先我们应保证机体不受过大损伤，主要是保证机舱里的人员安全，也就是说，水面对飞机的反冲力应当尽量小。因此，世界各国都把水上迫降内容编制进客机的适航规范，将其作为取得适航证的一个重要条件。飞机进行水上迫降，其表面压力分布、冲击力、运动速度和运动姿态以及水面形状等均随时间发生快速变化，是一类典型的物体高速冲击水面的问题。

数值模拟某型客机在平静水面上的迫降过程，研究俯仰角对着水冲击力学性能的影响规律。俯仰角增加，飞机水上迫降过程中的最大纵向力单调增加，最大法向力、最大低头力矩和表面最大冲击压力均先增加后减小，因此该飞机适宜以较大俯仰角进行水上迫降。在飞机从接触水面到飞机的动量被抵消的过程中，机翼受到空气对它的升力作用；同时，水对飞机的粘滞阻力对飞机的运动状态也起到举足轻重的作用。

在本案例中，为方便探究问题，我们把飞机抽象成均匀的圆柱形缸体，机翼的重量先不予考虑。飞机迫降过程，可看作是刚体的平动与转动的结合。机身压强在入水的初始阶段达到最大值，随后迅速下降，最后保持稳定。同时，随着降落速度、飞行速度和降落仰角的增大，机身压强的最大值也随之增大。与降落速度和降落仰角相比，飞行速度对机身压强的影响程度较小。

飞机表面是个三维曲面，目前还没有直接能用于计算飞机摩擦阻力的可靠公式，而只是在“相当平板”假定的前提下，应用平板摩擦阻力公式来计算飞机的摩擦阻力。“相当平板”假定认为：飞机模型的摩擦阻力分别等于与其同速度、同长度、同湿面积的光滑平板摩擦阻力。这样，当已知船飞机模型的水线长，速度，及湿表面积就可以利用平板摩擦阻力公式来计算飞机摩擦阻力。

飞机在平静水面上迫降只是理想化的情况，水面上往往有波浪，所以要考虑波浪在飞机迫降时对飞机的影响。

2.1 条件分析：

(1) 保证乘客和机组人员的人身安全。作为飞机的设计者和飞行员来说，他们的职责就是要尽量的保证乘客的人身安全。这是我们首要考虑的问题。所以在所有的考虑因素内，保证乘客的人身安全才是最主要的。

(2) 保证飞机完整性。飞机的发明和制造都需要很大的一笔花销，在以保证乘客和机组人员安全的前提下，我们还要尽量的保证飞机的完整性，这样不仅避免了一些不必要的经济损失，也不会给环境造成不必要的污染。

2.2 问题分析：

对于飞机迫降的问题，我们可以将一些对飞机影响不大的因素抛弃，将飞机理想化成圆柱形刚体。机翼的重量先不予考虑。飞机迫降过程，可看作是刚体的平动与转动的结合。机身压强在入水的初始阶段达到最大值，随后迅速下降，最后保持稳定。同时，随着降落速度、飞行速度和降落仰角的增大，机身压强的最大值也随之增大。与降落速度和降落仰角相比，飞行速度对机身压强的影响程度较小。

三、模型的假设

- (1) 飞机迫降时水面平静。
- (2) 飞机接触水面时的竖直速度为 v_y 为已知。
- (3) 研究空气对机翼的升力时不考虑空气对机身的作用。
- (4) 研究水对飞机的粘滞阻力时不考虑水对机翼的作用，并且把飞机简化为圆筒形的刚体，以便于分析和计算。
- (5) 水对飞机的作用类比于水对船的作用，根据船在水中的受力情况分析飞机在水中的受力情况。

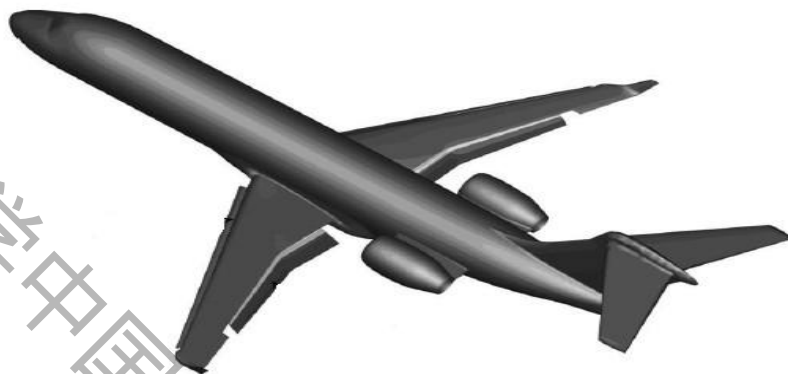
四、定义与符号的说明

1. F_m 飞机底部受到的总压力
2. F_n 飞机侧面受到的总压力
3. F_{mn} F_m 与 F_n 的矢量和
4. F_1 水对飞机底部的冲力
5. P 波浪力
6. F_2 粘滞阻力
7. H_0 波高
8. H 筒前波高度
9. K 波数
10. κ 粘滞力系数
11. d 水深
12. M_L 弯矩

-
13. v_y 飞机接触水面时的竖直速度为
14. M 机体的总质量
15. t 冲力抵消的时间
16. F_α 是水对飞机产生的浮力
17. F_β 是空气对机翼产生的上升力
18. g 当地的重力加速度
19. AB 机翼前缘到后缘的距离
20. α 翼弦与气流方向的夹角
21. u 未经扰动的气流速度
22. $v_{\text{环}}$ 机翼上下因环流而引起的速度的大小
23. ρ 空气密度
13. Oyz 在机翼选取坐标系
24. $K = K(z)$ 机翼 z 处的环流
25. ρ 为空气密度
26. v 为气流速度，即飞机与空气的相对速度
27. A 为机翼的面积
28. N 为机翼的升力系数
29. Re 雷诺数
30. δ 边界层厚度
31. x 距板前端点 o 的距离
32. θ 称为动量损失厚度
33. 平板的摩擦阻力
34. v 为边界层外的速度
35. u 为边界层内的速度
36. θ_L 平板末端的动量损失厚度
37. C_f 摩擦阻力系数
38. β 飞机的仰角
39. S 湿面积
40. dR_f' 在该处长度为 dL' 的微面积上的摩擦阻力
41. P 波浪力
42. θ_k 机身与波的传播方向的夹角

五、模型的建立与求解

对于我们要研究的问题来说，我们首先要明白的是，飞机迫降的前提是因飞机失去动力。让飞机在平静的水面上进行迫降，而且要是人员对人员和飞机的损害最小。这是我们将飞机理想化成一种圆柱缸体，在其即将接触水面的时候对机翼进行受力分析。



某型客机的集合外形

参考到第一阶段的问题，为研究的简便易懂，我们仍把飞机抽象为均匀的圆筒形刚体。机翼的质量先不予考虑，但其形状的影响不可忽略。

首先，在有风浪的情况下，根据飞机的初末状态，我们可对飞机作如下受力分析：

假设，飞机与水平面的夹角为 θ ，飞机机身与海浪的传播方向夹角为 θ_k 。飞机底部受到的总压力为 F_m ，飞机侧面受到水流的总压力为 F_n 。由于飞机受力是三维的受力分析，可得出以下公式：

$$F_m = F_1 + P \cos \theta_k \tan \theta \quad (1-1)$$

$$F_n = P \sin \theta_k + F_2(\kappa, \theta_k) \quad (1-2)$$

式中， F_1 是第一阶段中水对飞机底部的反冲力； P 为海浪波的波浪力，其方向假设与波的传播方向一致； $F_2(\kappa, \theta_k)$ 是侧面水流对飞机侧面的水压力，是粘滞阻力系数 κ 与 θ_k 的函数。

一 首先是对 F_1 的求解：

在竖直方向上的运动是一个变速运动，假设在飞机接触水面时的竖直速度为 v_y 。根据冲量定理：

$$F_1 t = M v_y - 0, \quad (1-3)$$

其中 M 为机体的总质量。

v_y 的变化则与浮力以及空气提供的上升力有关。其表达式为：

$$v_y = \frac{(Mg - F_\alpha - F_\beta)}{M} t \quad (1-4)$$

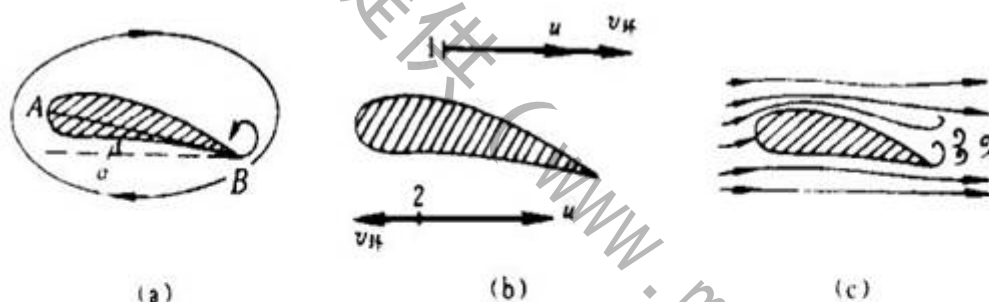
上式 F_α 是水对飞机产生的浮力， F_β 是空气对机翼产生的上升力。

根据 (3) (4) 式子，我们得到冲力：

$$F_1 = Mg - F_\alpha - F_\beta \quad (1-5)$$

在飞机刚接触水面的时候，我们知道 $F_\alpha = 0$ ，所以此时，只要求出 F_2 的最小值，就能得到冲力的最小值 F_{\min} 。

下面进行一般机翼的升力计算，



(a) 机翼冲角 α ，起动涡旋和环流；(b) 机翼上下的流速；
(c) 机翼周围流线。

图 (一)

图 (a) 表示机翼的横截面，机翼前缘到后缘的距离 AB 叫做翼弦，以机身为参考系，空气相对于飞机而流动，翼弦与气流方向的夹角 α 叫冲角。由于机翼特有的横截面形状以及微小的冲角，气流经过机翼上下两侧流动的情况不同。紧靠上侧绕过机翼的气流通过较长的距离，粘性力影响较大，仅靠机翼下侧气流通过路程较短，粘性力的影响小些。于是，两股气流在机翼尾部汇合时的流速不同，上侧流速较小而下侧流速较大，因此在机翼尾部形成如图 (b) 所示的涡旋，称启动涡旋。流体最初没有角动量又未受到外力矩的作用，其角动量应守恒。既然其中一部分受到涡旋，则流体的另一部分必然要沿反方向旋转，以保持总角动量守恒，这反方向的旋转便是围绕机翼的环流，如图 (a) 机翼尾端的涡旋不断产生又不断被气流带走，并因流体的黏性力而消失，其能量转换为热运动的能量，黏性较小时，只有物体表面附近很薄一层流体的黏性作用具有较大的速度梯度，附面层靠近物体一侧黏附于壁面上，附面层外侧的流速则与外层流

速相同，附面层内，应视为黏性流体，附面层以外可当作无黏性流体处理，这是讨论某些黏性流体问题的一种有效方法。现在把机翼附面层以外流体当作没有黏性，空气低速流动时，又可将空气看作是不可压缩的，即附面层以外的空气为理想流体。再假设气流为定常流动，可应用伯努利方程。

机翼附近的流线来自相当远处，大气各部分以相同速度作匀速直线运动，机翼上下的 $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p$ 相同。如不考虑机翼上下的高度差，对于图（b）中的点 1 和点 2 来说，

$$\frac{1}{2}\rho v_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2 + p_2.$$

用表 u 示未经扰动的气流速度，并粗略认为机翼上下因环流而引起的速度的大小相等并等于 $v_{\text{环}}$ ，且与气流 u 方向平行，由速度合成得

$$v_1 = u + v_{\text{环}},$$

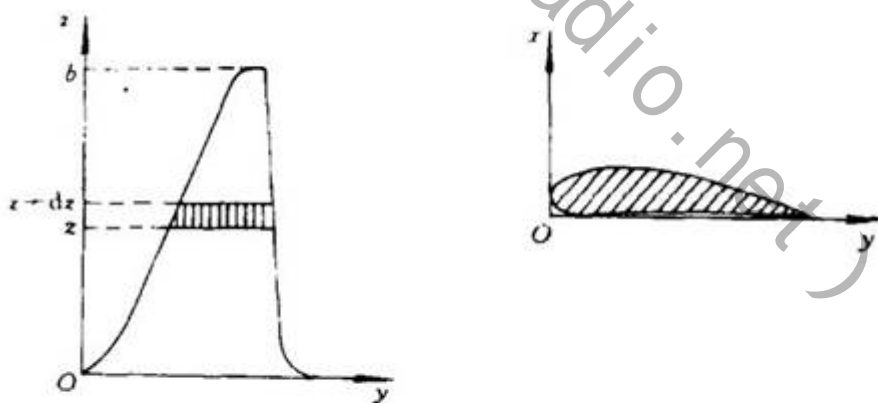
$$v_2 = u - v_{\text{环}}.$$

代入上式有

$$p_2 - p_1 = 2\rho uv_{\text{环}}.$$

式中的 $v_{\text{环}}$ 与机翼的形状有关。这一公式已表明机翼上下有压强差，足以说明升力的来源。

下面进一步求升力表达式。在机翼选取坐标系 Oyz ，曲线 y 为 z 的函数，其具体函数形式由机翼形状而定。自 z 至 $z+dz$ 机翼的面积等于 ydz ，作用于此面上的升力称为自 z 至 $z+dz$ 的元升力，现用 dF 表示，根据上式，



图（二）

$$dF_1 = (p_2 - p_1) y dz = 2\rho uv_{\text{环}} y dz. \quad (1-6)$$

式中 $2v_{\text{环}}y$ 是 z 的函数，叫做机翼 z 处的环流，现用 $K = K(z)$ 表示，

$$K = K(z) = 2v_{\text{环}}y. \quad (1-7)$$

至于图上整个机翼收到的升力则等于

$$F_1 = \int_0^b \rho u K(z) dz. \quad (1-8)$$

b 表示机翼长度。将上式中常数 ρu 提出，得

$$F_1 = \rho u \int_0^b K(z) dz. \quad (1-9)$$

这就是著名的茹科夫斯基公式，是俄国物理学家茹科夫斯基（1847——1921）提出的。如机翼是长为 b 宽为 a 的长方形，则上式为

$$F_1 = \rho u b K, \quad (1-10)$$

而

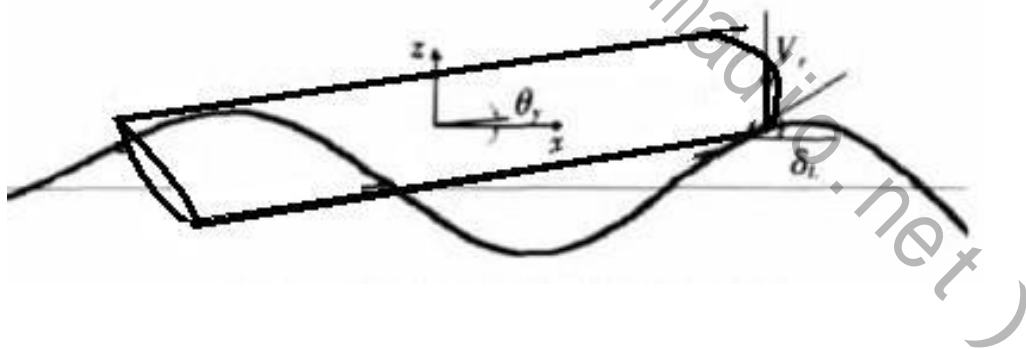
$$K = 2v_{\text{环}}a. \quad (1-11)$$

现在假设客机的机翼是平板机翼，则其升力公式为：

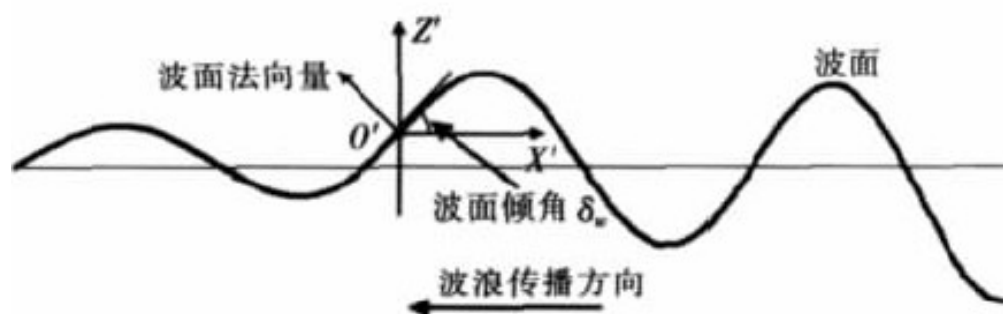
$$F_\beta = 1/2 \rho v^2 S N \quad (1-12)$$

式中 ρ 为空气密度， v 为气流速度，即飞机与空气的相对速度， S 为机翼的面积， N 为机翼的升力系数。

二 对 P 的求解过程：



图（三）飞机入水的简易模型横向剖面图样



图（四）波面的具体分析图样

作用在大直径薄壳圆筒上的波浪场比较复杂, 主要由入射波、反射波、绕射波甚至破碎波等各种变形后叠加而成。关于大尺度结构物上的波浪荷载, 现有的理论及计算方法一般计算入射波、反射波叠加或入射波、绕射波两种势波叠加而成的波浪场, 所以按照现有的理论及计算方法计算作用在大直径薄壳圆筒上的波浪场与实际并不吻合。多元线性回归分析可以研究多个变量之间的线性相关关系, 而且通过相应的数学变换多元线性回归分析也可以研究多个变量之间的非线性相关关系。作用在大直径薄壳圆筒上的波浪荷载显然与波浪要素及结构尺寸相关。只要有大量的现场观测数据或者实验数据, 我们就可以通过多元线性回归的方法对波浪荷载进行研究, 而不需要考虑结构物周围的波浪形态。回归分析已经被广泛应用于生产、生活及科研中, 本文作者在实验的基础上, 将多元线性回归分析引入波浪研究中, 对作用在大直径薄壳上的波浪荷载进行了研究。

多元线性回归模型

2.1 多元回归模型的建立

作用于大直径薄壳圆筒上的波浪荷载的大小与多个因素有关。波浪与结构相互作用时, 由于结构尺寸较大, 可以肯定在结构附近, 波浪场是由入射波、反射波、散射波及破碎波等叠加而成, 要考虑上述所有因素通过波浪理论来求解非常困难。为此拟通过模型实验对于作用在结构物上的波浪力及其力矩的大量实测数据, 采用多元线性回归分析方法来得到相应的简单可行的表达式, 并且可以用此来验证圆柱壳结构在波浪力作用下的自身稳定性。显然模型实验的组数及所得到的数据的多少直接影响[1]到回归分析的精度。由于波浪力 P 及其弯矩 M 的大小与波浪要素波高 H_0 、筒前波高 H 、波数 k 、水深 d 及结构尺寸筒径 a (半径)等多个因素有关, 因此建立如下的多元线性回归模型:

$$\eta_P = \alpha_{P0} + \alpha_{P1}kd + \alpha_{P2}ka + \alpha_{P3}kh_0 + \alpha_{P4}h_0/h \quad (2-1)$$

$$\eta_M = \alpha_{M0} + \alpha_{M1}kd + \alpha_{M2}ka + \alpha_{M3}kh_0 + \alpha_{M4}h_0/h \quad (2-2)$$

模型的多元指自变量有多个, 即 kd 、 ka 、 kh_0 、 h_0/h , 而因变量 η_P 或 η_M 是随机变量。实验测得各变量的值 η_{Pi} 、 η_{Mi} 、 k_id_i 、 k_ia_i 、 k_ih_{0i} 、 h_{0i}/h_i 则为变量 η_P 、 η_M 、 kd 、 ka 、 kh_0 、 h_0/h 的观察值。

由于回归模型右端项为一无量纲数，因此本文选用了参考文献计算得到的波浪力 p_L

$$\text{及其弯矩 } M_L \text{ 对其进行无量 } \eta_P = \frac{p}{p_L} \eta_M = \frac{M}{M_L}。$$

方程(2-1)、(2-2) 是五维空间的平面，称为 η_P 、 η_M 对 kd 、 ka 、 kh_0 、

h_0/h 的回归平面， $\alpha_{pj} (j=0,1,2,-3,4)$ 为偏回归系数，其中 α_{p0} 是线性回归时设定的常数项。

2.2 多元线性回归方程的求解

以方程(2-1) 为例，通过最小二乘法原理来确定回归平面的残差平方和(为了便于书写，以下将 α_{pj} 变为 α_j)。

$$Q(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \sum_{i=1}^n (\eta_{Fi} - \alpha_0 - \alpha_1 k_i d_i - \alpha_2 k_i a_i - \alpha_3 k_i h_{0i} - \alpha_4 h_{0i} / h_i)^2 \quad (2-3)$$

达到最小的一组 $\alpha_j (j=0,1,2,-3,4)$ ，即使的偏回归系数满足方程组：

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_j} = 0 (j=0,1,2,-3,4) \quad (2-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_1 k_i d_i + \sum_{i=1}^n \alpha_2 k_i a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_3 k_i h_{0i} + \sum_{i=1}^n \alpha_4 h_{0i} / h_i = \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_0 k_i d_i + \sum_{i=1}^n \alpha_1 (k_i d_i)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_2 k_i^2 a_i d_i + \sum_{i=1}^n \alpha_3 k_i^2 h_{0i} d_i + \sum_{i=1}^n \alpha_4 k_i d_i (h_{0i} / h_i) = \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} k_i d_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_0 k_i a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_1 k_i^2 d_i a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_2 (k_i a_i)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_3 k_i^2 h_{0i} a_i + \sum_{i=1}^n \alpha_4 k_i a_i (h_{0i} / h_i) = \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} k_i a_i \\ \sum_{i=1}^n \alpha_0 k_i h_{0i} + \sum_{i=1}^n \alpha_1 k_i^2 d_i h_{0i} + \sum_{i=1}^n \alpha_2 k_i^2 a_i h_{0i} + \sum_{i=1}^n \alpha_3 (k_i h_{0i})^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_4 k_i h_{0i} (h_{0i} / h_i) = \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} k_i h_{0i} \\ \sum_{i=1}^n \alpha_0 (h_{0i} / h_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_1 k_i d_i (h_{0i} / h_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_2 k_i a_i (h_{0i} / h_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_3 k_i h_{0i} (h_{0i} / h_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_4 (h_{0i} / h_i)^2 \\ = \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} (h_{0i} / h_i) \end{array} \right. \quad (2-5)$$

式(2-5)为正规方程组,其解称为 $\alpha_j(j=0,1,2,3,4)$ 的最小二乘估计 $\hat{\alpha}_j(j=0,1,2,3,4)$ 现设:

$$X = \begin{Bmatrix} 1 & k_1 d_1 & k_1 a_1 & k_1 h_{01} & h_{01}/h_1 \\ 1 & k_2 d_2 & k_2 a_2 & k_2 h_{02} & h_{02}/h_2 \\ 1 & k_3 d_3 & k_3 a_3 & k_3 h_{03} & h_{03}/h_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_n d_n & k_n a_n & k_n h_{0n} & h_{0n}/h_n \end{Bmatrix}, Y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}, \alpha = \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix},$$

则式(2-5)的右端项矩阵可写为:

$$B = X^T Y = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 d_1 & k_2 d_2 & \cdots & k_n d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{01}/h_1 & h_{02}/h_2 & \cdots & h_{0n}/h_n \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} \\ \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} k_i d_i \\ \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} k_i a_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \eta_{Fi} (h_{0i}/h_i) \end{Bmatrix}$$

系数矩阵为:

$$A = X^T X = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 d_1 & k_2 d_2 & \cdots & k_n d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{01}/h_1 & h_{02}/h_2 & \cdots & h_{0n}/h_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & k_1 d_1 & \cdots & h_{01}/h_1 \\ 1 & k_2 d_2 & \cdots & h_{02}/h_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & k_n d_n & \cdots & h_{0n}/h_n \end{Bmatrix}$$

因此(2-5)可用矩阵形式表示即为:

$$A\alpha = X^T X\alpha = X^T Y \quad (2-6)$$

最小二乘估计 $\hat{\alpha}$ 即为:

$$\hat{\alpha} (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2-7)$$

根据最小二乘估计 $\hat{\alpha}$ 可建立回归方程:

$$\hat{\eta}_P = \hat{\alpha}_0 P_0 + \hat{\alpha}_1 P_1 kd + \hat{\alpha}_2 P_2 ka + \hat{\alpha}_3 P_3 h_0 + \hat{\alpha}_4 P_4 h_0/h \quad (2-8)$$

上式即为作用于大圆柱壳结构无量纲波浪力的多元线性回归表达式，同理可求得无量纲波浪力力矩表达式：

$$\hat{\eta}_M = \alpha \hat{M}_0 + \alpha \hat{M}_1 kd + \alpha \hat{M}_2 ka + \alpha \hat{M}_3 h_0 + \alpha \hat{M}_4 h_0 / h \quad (2-9)$$

2.3 多元线性回归相关显著性检验

对于 η_P 、 η_M 、 kd 、 ka 、 kh_0 、 h_0/h 线性相关显著性检验可以通过两个统计指标来实施，即样本复相关系数 R 和服从自由度为 $(k, n-k-1)$ 的 F 分布。其中 k 表示参变量个数， n 表示样本总数。仍然以波浪力为例：现分别记 $S_T = \sum_{i=1}^n (\eta_{Pi} - \eta_p)^2$ ，

$$S_R = \sum_{i=1}^n (\hat{\eta}_{Pi} - \eta_p)^2, S_E = \sum_{i=1}^n (\eta_{Pi} - \hat{\eta}_{Pi})^2 \text{ 为总偏差平方和、回归偏差平方和、剩余平方和}$$

或残差平方和（与前文 Q 意义相同），且 $S_T = S_R + S_E$ 。

由 S_T ， S_R ， S_E 来构造回归方程的显著性检验统计量。其中样本复相关系数 R ：

$$R = \frac{\overline{S_R}}{S_T} \quad (2-10)$$

当 R 接近于 1 时，表示线性关系显著。

另外服从自由度为 $(k, n-k-1)$ 的 F 的分布值：

$$F = \frac{S_R/k}{S_E/(n-k-1)} \quad (2-11)$$

对于给定的相关水平 α ，可以求得与自由度 $(k, n-k-1)$ 相关的临界值 $\lambda^{[4]}$ ，然后与计算统计量 F 值比较，如果 $F > \lambda$ ，则在 α 的水平下该回归方程线性相关性显著。否则，在该水平下，回归方程线性相关性不显著。我们利用参考文献（邱大洪，《波浪理论及其在工程上的应用》）一书中计算得到的波浪力对其进行无量纲化处理：

$$\eta_p = \frac{P_E}{P_L}$$

$$\eta_M = \frac{M_E}{M_L}$$

得到波浪力的理论近似值 P 。

三 对 $F_2(\kappa, \theta_k)$ 的计算：

下面我们讨论飞机在进入水面的过程所受的作用力的变化。处在水面以下的飞机部分此时所受的力为水的黏性阻力，自身的重力，水面的反冲力。

当飞机接触水面并进入水里的过程中，由于水的粘性，在飞机周围形成“边界层”，从而使飞机运动过程中受到粘性切应力作用，亦即飞机表面产生了摩擦力，它在运动方向的合力便是飞机摩擦阻力。另外由于水具有粘性，旋涡处的水压力下降，从而改变了沿飞机表面的压力分布情况，这种由粘性引起飞机前后压力不平衡而产生粘压阻力。因此，粘性阻力由摩擦阻力和粘压阻力两部分组成，它与飞机的形状和雷诺数密切相关。

由于飞机形状比较复杂，目前用理论精确计算飞机的摩擦阻力尚不能付诸工程实用，为此船舶工程中仍不得不沿用傅汝德提出的相当平板假定，即飞机的摩擦阻力与同速度、同长度、同湿面积的平板摩擦阻力相等。这一假定是计算飞机摩擦阻力的基础。由于飞机在水中的运动与船类似，可以利用这一假设来计算飞机在水里运动时受到的摩擦阻力。

3.1 平板边界层

假

设顺着流动方向放置一薄平板

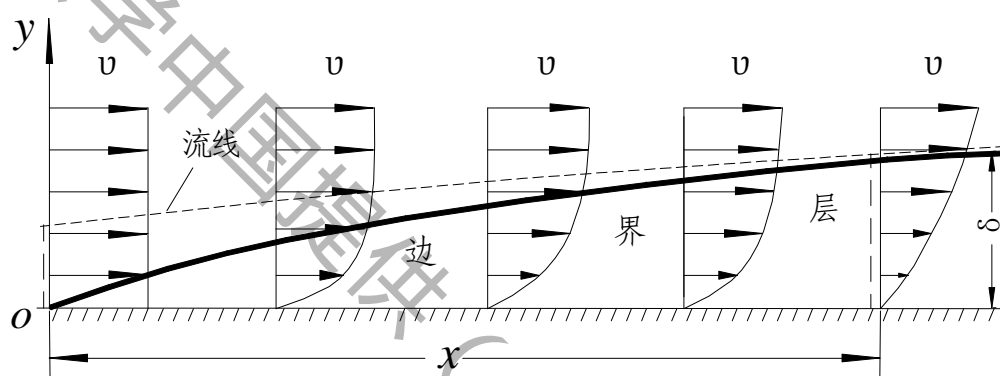


图5 平板边界层

板，水流以均匀速度 U 流经平板，如图 2-1 所示。当水流过平板时，由于水具有粘性，故平板表面处的水质点均被吸附在平板上，平板表面上流速为零。随着与平板表面距离 y 的增加，流速逐渐增加，当 y 增至某一距离 δ 时，其处流速达到来流的速度值。我们称存在粘性作用的这一薄层水流为边界层， δ 是纵向位置 x 的函数，称为边界层厚度。在相应平板各处距离为 δ 的点，可连成一界面，此界面称为边界层边界。

应当指出，一般定义边界层厚度常以边界内流速达到 99% 来流速度作为边界层的边缘，该处与板面的距离作为边界层厚度值。根据实验测定，影响边界层厚度的主要因素是流速 U 、距板前端点 O 的距离 x 和流体的粘性，即运动粘性系数 ν 。进一步的实验指出 δ 取决于由这三个物理量所组成的无量纲数 $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ ，即局部雷诺数。如果 U ， x 一定，当

Re_x 很大时，则表示流体的粘性作用很小， δ 就很小。理想流体可视为运动粘性系数 $\nu = 0$ 的实际流体，其雷诺数 $Re = \infty$ ，边界层厚度 $\delta = 0$ 。

对边界层内的流动状态进行观察研究，发现边界层内存在两种流动状态：在平板前端部分，水质点表现有稳定的分层流动，边界层沿板长方向增长较慢，这种流动状态称为层流。而在平板后部，水质点互相碰撞，运动方向极不规则，但其平均速度还是沿平板方向前进，边界层厚度沿板长方向的增长较层流情况为快，这种流动称为紊流（又称湍流）。实际上在层流和紊流之间还有一段过渡状态称为过渡流或变流，如图 2-2 所示。进一步的试验观察发现界

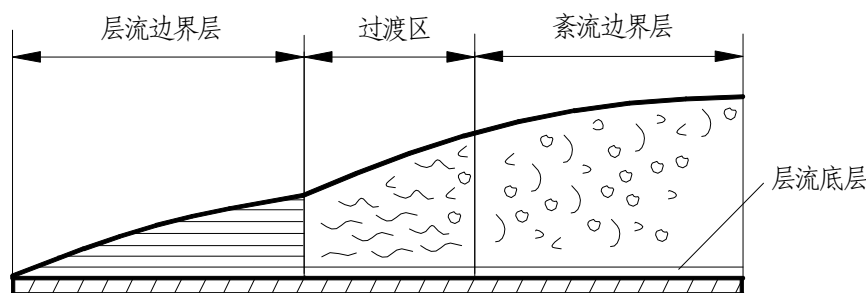


图 6 边界层内不同的流动状

层内的流动状态完全取决于平板的局部雷诺数 Re_x ：

层流状态： $Re_x < (3.5 \sim 5.0) \times 10^5$

过渡流： $(3.5 \sim 5.0) \times 10^5 < Re_x < 3.0 \times 10^6$

湍流状态： $Re_x > 3.0 \times 10^6$

由边界层理论求得的界层厚度为：

层流边界层：

$$\delta = 5.2 Re_x^{-\frac{1}{2}} \cdot x \quad (3-1)$$

紊流边界层：

$$\delta = \frac{0.0598}{\lg Re_x - 3.107} \cdot x \quad (3-2)$$

边界层理论的重要意义在于它将流体划分为截然不同的两部分，并加以分别处理。界层外面视为理想流体，可用势流理论求解；界层内部则为真实流体，须用边界层理论来研究。

需要说明的是在紊流边界层的底部，有一极薄层水流仍为层流，称为层流底层。这是因为在紧靠物体表面处的水质点的运动速度极低，雷诺数很小，所以呈层流状态。

3.1.1 飞机边界层

飞机表面是个三维曲面，水流经过时，也会产生边界层。由于飞机表面纵向和横向曲率的影响，飞机周围的三维边界层与平板的二维边界层有明显的不同。其主要差别在于：

(1) 边界层外缘势流不同：对于平板，边界层外缘势流的速度和压力均保持不变。但对于飞机这两者沿飞机表面均发生变化。首先，飞机表面各处的流速是不同的，船中部大于而首尾两端却小于飞机的绝对速度。根据观察，其数值与由理想流体理论计算所得沿飞机周围的速度基本相等。

(2) 界层内纵向压力分布不同：根据边界层理论中界层内部压力等于其外缘压力的假定，机翼边界以内纵向压力处处相等，而飞机边界层内则存在纵向压力梯度。即首部压力高，中部较低而尾部又相应有所升高。由于流体的粘性作用，在这种纵向压力分布情况下，不管尾部是否出现界层分离，均使尾部的压力较首部压力有所下降。因而飞机不但受到摩擦阻力，而且还将受到粘压阻力。

此外，飞机边界层在界层相对厚度以及横向绕流对边界层的影响等方面与平板边界层相比亦存在差异。但是飞机摩擦阻力的成因、特性与平板情况基本相同，因此飞机摩擦阻力可以应用平板摩擦阻力相同的方法进行处理。

飞机摩擦阻力亦可用能量观点作解释：就某一封闭区而言，当船在静水中航行时，

由于粘性作用，必带动一部分水一起运动，这就是边界层。为了携带这部分水一起前进，在运动过程中飞机将不断供给这部分水质点以能量，因而产生摩擦阻力。

摩擦阻力系数计算公式

虽然计算机应用和数值计算均有很大的发展，但要求解像飞机这样形状极为复杂的物体的边界层问题仍然是十分困难的。因此，目前计算飞机摩擦阻力均不得不以光滑平板摩擦阻力系数公式为基础。先介绍一下光滑平板摩擦阻力系数计算公式，然后说明飞机摩擦阻力计算的处理方法。

一、光滑平板层流摩擦阻力系数公式

当平板界层内全为层流状态时，勃拉齐(Blasius)早在 1908 年根据层流界层微分方程式给出了理论上的精确解为：

$$C_f = \frac{R_f}{\frac{1}{2}\rho v^2 S} = 1.328 Re^{-\frac{1}{2}} \quad (3-3)$$

此式称勃拉齐公式，与实验结果完全相符。

必须说明的是，理论上得到的层流平板摩擦阻力系数的精确计算式，并不适用于造船工程实际，因其对应的雷诺数范围为： $Re < (3.5 \sim 5.0) \times 10^5$ 。一般船舶的雷诺数在 $4 \times 10^6 < Re < 3 \times 10^9$ ，其对应的流动状态应为紊流边界层。

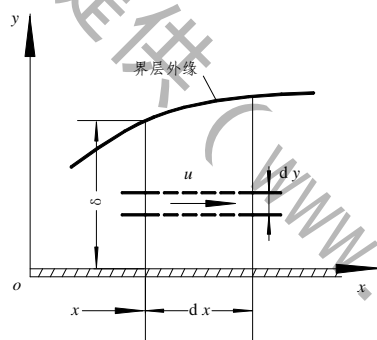


图 7 边界层动量方程

3.1.2、光滑平板紊流摩擦阻力系数计算公式

当界层内全为紊流时，即使对于平板，尚无理论上的精确解，而一般的近似计算方法的基础是卡门界层动量积分方程式。

设 δ 为距平板前端 x 处的界层厚度，根据牛顿第二定律，作用在平板上的摩擦阻力等于单位时间内的动量损失。而动量损失率等于单位时间内在 x 处流出的质量 $\rho u dy$ 与速度损失 $(v - u)$ 的乘积。所以由平板前端至 x 处一段内单位宽度平板的摩擦阻力为：

$$R_f = \int_0^\delta \rho u dy (v - u) \quad (3-4)$$

这里 v 为边界层外的速度， u 为边界层内的速度，又因为：

$$R_f = \int_0^x \tau dx \quad (3-5)$$

$$\tau = \rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(v-u) dy \quad (3-6)$$

$$\text{即} \quad \tau = \rho v^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \frac{u}{v} (1 - \frac{u}{v}) dy$$

$$\text{或} \quad \tau = \rho v^2 \frac{d\theta}{dx} \quad (3-7)$$

式中 $\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{v} (1 - \frac{u}{v}) dy$ 称为动量损失厚度。

式(18)为光滑平板的动量积分方程,对层流和紊流均适用。将(3-7)式代入(3-5)式,沿整个平板长度 L 积分,并注意到 $x = 0$ 时, $\theta = 0$; $x = L$ 时, $\theta = \theta_L$,即为平板末端的动量损失厚度,这样可得到仅考虑一侧表面的平板摩擦阻力为:

$$R_f = \int_0^L \rho v^2 \frac{d\theta}{dx} dx = \rho v^2 \int_0^{\theta_L} d\theta = \rho v^2 \theta_L$$

$$C_f = \frac{R_f}{\frac{1}{2} \rho v^2 L \times 1} = \frac{2\theta_L}{L} \quad (3-8)$$

由此可见,如能确定边界层内的速度分布,则平板紊流摩擦阻力公式即可导出。通常在运用动量积分方程解决层流问题时,层流内的速度分布情况是假定的。由于所假定的速度分布形式不同,导出的光滑平板紊流阻力系数计算公式也不相同,由于飞机在从

接触水面到动量减少为零的时间很短,而飞机在接触水面时的速度相当大,因此,可以把这个过程的速度分布看成指数分布。速度为指数分布的计算方法如下:

设平板紊流边界层内的速度分布形式为:

$$\frac{u}{v} = (\frac{y}{\delta})^n \quad (3-9)$$

根据边界层的实验结果,对于不同的雷诺数, n 值是不同的。当 $Re < 2 \times 10^7$ 时, $n = 7$,代入平板边界层的动量积分方程(3-7),最后得:

$$C_f = 0.072 / Re^{1/5} \quad (3-10)$$

经过实验结果修正,光滑平板紊流摩擦阻力系数取为:

$$C_f = \frac{0.074}{Re^{1/5}} \quad (3-11)$$

飞机表面是个三维曲面,目前还没有直接能用于计算飞机摩擦阻力的可靠公式,而只是在“相当平板”假定的前提下,应用平板摩擦阻力公式来计算飞机的摩擦阻力。

“相当平板”假定认为:飞机的摩擦阻力分别等于与其同速度、同长度、同湿面积的光滑平板摩擦阻力。这样,当已知飞机筒体在水中的的水线长 L_{w1} ,速度 V_s ,及湿表面积 S 就可以利用平板摩擦阻力公式来计算飞机摩擦阻力。

由于飞机表面是三维曲面,其周围的流动情况与平板有着明显的不同,因而飞机摩擦阻力与平板摩擦阻力亦有所差别。

实践证明,飞机表面粗糙度对摩擦阻力的影响是很显著的。对飞机阻力来说,由于表面粗糙度而增加的阻力占有相当的百分比,因此研究粗糙度问题在整个阻力问题中占有相当重要的地位。

飞机摩擦阻力的计算步骤

根据前述飞机摩擦阻力的处理方法知,飞机摩擦阻力可以由计算相当平板的摩擦阻力与粗糙度增加的摩擦阻力之和来表示,即如下式所示:

$$R_f = (C_f + \Delta C_f) \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (3-12)$$

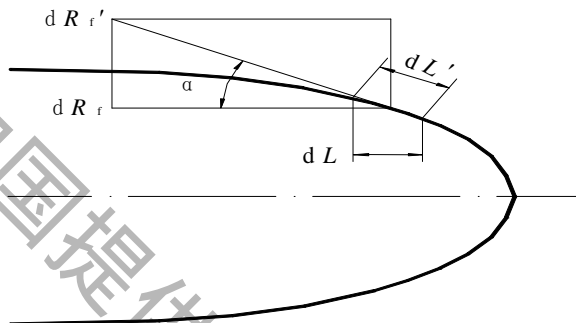
具体计算步骤如下:

(1) 计算飞机的湿表面积。较精确的计算方法可按线型图量出每站横剖面型线的半围长 l , 并沿船长方向积分即得:

$$S = \int_0^{L_{\text{wet}}} 2l \, dL \quad (3-13)$$

上式应用近似积分法进行计算,这样计算所得的湿面积可直接用于摩擦阻力计算,而不必进行纵向斜度的修正。其理由如下:

如图所示



某点处的局部摩擦阻力系数为 C_τ , 在该处长为 dL' 的微面积上的摩擦阻力 dR_f'

部摩擦阻力系数为 C_τ , 在该处长为 dL' 的微面积上的摩擦阻力 dR_f'

图8 飞机湿表面面积的计算

$$dR_f' = C_\tau \times \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot 2l \, dL' \quad (3-14)$$

整个飞机的摩擦阻力为:

$$R_f = \int_0^L dR_f' \cos \alpha = \int_0^L C_\tau \times \frac{1}{2} \rho v^2 \times 2l \, dL' \cos \alpha = \frac{1}{2} \rho v^2 \int_0^L C_\tau 2l \, dL = \frac{1}{2} \rho v^2 C_f S \quad (3-15)$$

其中,湿面积 S 系按(24)式积分所得。

飞机壳体所受最大应力是有材料的构成有关,假设我们已知其应力最大值为 f , 我们在这里计算出的飞机在水里部分的应力:

$$F_2 = R_f \sin \theta \quad (3-16)$$

式中 R_f 是上式的飞机在水中的摩擦力, θ 为飞机的仰角。

四 求解 F_{mn}

我们从上面(1-1), (2-2)两式可知有 θ 、 θ_k 为待求的未知量。为了我们先初的目标,即飞机外壁所受压力最小。换句话说,就是飞机所受总的压力的一次求导为零,由于粘滞力对于飞机总的作用力来说相对较小,且是一隐函数,不易求解其方程式,在这里我们暂时先将此项的影响忽略不计,其中:

$$F_{mn} = \sqrt{F_m^2 + F_n^2} \quad (4-1)$$

我们先把函数看作是 θ_k 的函数， F 对 θ_k 的求导如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{mn}}{\partial \theta_k} &= 0 \\ \frac{\partial \sqrt{F_m^2 + F_n^2}}{\partial \theta_k} &= 0\end{aligned}\quad (4-2)$$

先将 $\sqrt{\quad}$ 式下展开化简，

$$\begin{aligned}F_{mn} &= \sqrt{F_1^2 + P^2 \tan^2 \theta \cos^2 \theta_k + 2PF_1 \tan \theta \cos \theta_k + P^2 \sin^2 \theta_k} \\ &= \sqrt{P^2 (\tan^2 \theta - 1) \cos^2 \theta_k + 2PF_1 \tan \theta \cos \theta_k + F_1^2 + P^2}\end{aligned}\quad (4-3)$$

根据以上 F 的值 $\sqrt{\quad}$ 式下可看为 $\cos \theta_k$ 的一元二次方程，在第一段问题中，我们知道 θ 定是小于 45° ，所以 $P^2 (\tan^2 \theta - 1) < 0$ ， F_{mn} 有最大值。假设，飞机舱受压最大值为 F' ，则：

$$F_{mn} \leq F',$$

且，一元二次方程中：

$$\Delta \geq 0 \quad (4-4)$$

所以，我们求出的 $\cos \theta_k$ 即是：

$$\cos \theta_k = -\frac{F_1 \tan \theta}{P(\tan^2 \theta - 1)} \quad (4-5)$$

$$\theta_k = \arccos\left(-\frac{F_1 \tan \theta}{P(\tan^2 \theta - 1)}\right) \quad (4-6)$$

根据 (4-4) 式，当 $\Delta = 0$ 时，取 θ 的临界值：

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac &= 4P^2 F_1^2 \tan^2 \theta - 4P^4 (\tan^2 \theta - 1)^2 (F_1^2 + P^2) \\ &= -4P^4 (F_1^2 + P^2) \tan^4 \theta + 4P^2 (F_1^2 + 2P^2) \tan^2 \theta - 4P^4 (F_1^2 + P^2)\end{aligned}$$

设 $\tan^2 \theta = x$ ，一定是正值，则求解得：

$$x = \frac{(F_1^2 + 2P^2) + \sqrt{(F_1^2 + 2P^2)^2 - P^2((F_1^2 + P^2))^2}}{2P^2(F_1^2 + P^2)} \quad (4-7)$$

所以：

$$\theta = \arctan \sqrt{x} \quad (4-8)$$

将 (4-7) 式代入 (4-8) 式可得 θ 值。

六、结论分析

通过 F_1 与 P 的严格求解，且过程中进行了必要的近似，我们将 θ 与 θ_k 转换为 F_1 与 P 的函数，较精确地确定了飞机的最佳入水姿势及其方向。其中，也有些常量是实验获得的，我们认定是已知量。

七、模型评价

本文对于飞机迫降问题进行了严格的物理分析及其求解问题。分为三个模块：飞机底部压力的求解、飞机侧面压力的求解、水的粘滞阻力的求解。由于飞机受力情况是三维的，我们采用比较简单的数学模型，使其通俗易懂。图文并茂，使本文更贴近实际，让人们了解到飞机迫降成功的必备条件。由于飞机形状比较复杂，目前用理论精确计算飞机的摩擦阻力尚不能付诸工程实用，为此船舶工程中仍不得不沿用傅汝德提出的相当平板假定，即飞机的摩擦阻力与同速度、同长度、同湿面积的平板摩擦阻力相等。这一假定是计算飞机摩擦阻力的基础。首先介绍平板边界层，然后介绍平板摩擦阻力的成因、特性，最后指出飞机边界层与平板边界层的主要区别。此外，飞机边界层在边界层相对厚度以及横向绕流对边界层的影响等方面与平板边界层相比亦存在差异。但是飞机摩擦阻力的成因、特性与平板情况基本相同，因此飞机摩擦阻力可以应用平板摩擦阻力相同的方法进行处理。

显然应用相当平板假定计算飞机摩擦阻力时，必须注意到飞机实体与简化模型之间的尺度效应问题。因为与飞机实体相比，简化模型的形状、尺度比较简单，因而飞机与飞机模型的雷诺数是不同的，两者的摩擦阻力系数的差别称为摩擦阻力尺度效应。在飞机实体与飞机模型阻力换算过程中，要考虑到这种差别。相当平板假定忽略了实际飞机与“光滑平板”间的重要差别，其中最主要的是飞机表面弯曲度和粗糙度的影响。这些因素对摩擦阻力的影响作用以及处理方法必须予以研究。由于现缺一些精密测量工具，对于一些要求比较精确的数据很难掌握。本文也有诸多缺点，为解题的方便性，我们略去了部分项。飞机迫降过程牵扯到的物理过程很复杂，为此我们未考虑其他因素的影响，对于求解的结果有一定的影响。比如：气泡动力学，结构力学方面的知识。

参考文献

1. 屈秋林, 刘沛清, 郭保东, 程丽. (北京航空航天大学航空科学与工程学院)《某型客机水上迫降的着水冲击力学性能数值研究》(J). 民用飞机设计与研究. 2009 年增刊.
2. 盛振邦等.《船舶原理》(M) 上海交大出版社 2003.9 第二章《粘性阻力》.
3. 漆安慎, 杜婵英.《力学》(普通物理学教程)(M). 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2005. 6. 381——413
4. 王献孚, 熊鳌魁.《高等流体力学》(M). 武汉: 华中科技大学出版社, 2003. 2.
5. 邱大洪. 波浪理论及其在工程上的应用. 北京: 高等教育出版社, 1985

数学中国提供 (www.madio.net)