

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1863

参赛队员（签名）：

队员 1：蓝超

队员 2：侯金伶

队员 3：马良

参赛队教练员（签名）： 杨振华

参赛队伍组别：研究生组

报名号 # 1863

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

901363

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 年第三届 “ScienceWord 杯” 数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 ——聪明的汽车——

关 键 词 最小停车长度；双弧停车法；有效切入区

摘 要：

本文提出了一种 “双弧停车法” 模型用于模拟汽车侧位停放的过程, 其中, 双弧停车法是指汽车连续利用一次最小半径转弯, 一次直线行驶和一次反向的最小半径转弯来完成泊车的一种停车方式。首先, 我们通过考察汽车最小半径转弯时, 车尾划过的痕迹与停车位前后车辆的相交关系, 以及车头划过的痕迹与停车位内墙的相交关系, 来计算停车时所需的最小停车空间长度, 并以此作为汽车是否能停入该空位的判断依据。在此基础上, 我们根据驾驶员所需判断的因素最小化这一最优原则, 进一步从双弧停车法中提炼出一种最优的 “零直线距离” 停车情况, 使得驾驶员不再需要对直线行驶的部分进行判断。我们根据汽车当前的位置, 动力特征和停车空间的大小, 计算出一个 “有效切入区”, 即汽车在该区域内任意一点, 都可以利用双弧停车法顺利停车。我们也给出了汽车开始停车动作时, 所应该处的起始位置, 第一次所需

报名号 # 1863

转过的弧度和所需直线行驶的距离的计算模型，为驾驶员顺利停车提供了精确的数学依据。

数学中国提供 (www.madio.net)

参赛队号 1863所选题目 聪明的汽车

参赛密码 _____

(由组委会填写)

英文摘要

In this paper, we propose a double-curve parking approach (DCPA), which consists of three sections, namely, a minimal-radius turning, a straightforward moving and a counter-directional minimal-radius turning, to model the lateral parking procedure of a car. First, we compute the minimal length of the parking place required for a successful parking. Then, based on the optimal principle, which we call as “least consideration of the driver”, we point out an optimal parking strategy for the drivers based on DCPA, which no longer ask for the attention to the straightforward moving section. We also present a region in which the cars can use DCPA to perform parking at any position. Finally, we provide accurate solutions to the routine of the parking, including the start position, direction as well as other instructive information that drivers may directly follow to complete the parking.

报名号 # 1863

数学中国提供 (www.madio.net)

一、问题重述

在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与信心的问题。有调查报告称：57% 的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这一方面影响人的驾驶体验，一方面也使停车空间不能得到充分利用。在此，请你协助驾驶员来解决停车的问题。具体要求如下：

(1) 对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入。请你建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。我们假设可以得到停车位置的平面图，包括停车空位的长度宽度等数据。考虑到实用性，模型所需的本车数据要能够容易测得，例如几何尺寸、转弯半径等。

(2) 我们假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上。请给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及允许的偏差显示在图上。

二、基本假设

1、汽车模型被简化为长方形，其相关物理参数：车身长度、车身宽度、最小转弯半径等可以通过测量得到；

2、侧位停车时，除了侧位上有车辆停放之外，没有其它障碍物。因此待停汽车的移动仅受停车位前后汽车的约束，而不受其它因素的约束。

3、停车时驾驶员可以依靠后视镜观察车辆周围环境，视野不会受到非正常限制；

4、停车过程依赖于驾驶者的驾驶经验、驾驶技巧及反应灵敏程度，任一停车环节驾驶员均可快速准确地完成。

5、在驾驶员停车过程中，空位前后停放车辆不移动。

6、空位总是在待停汽车行驶的方向前方。比如，若汽车前行，则空位在汽车前方。

7、驾驶员在停车过程中，凡是转弯，总是将方向盘转到极限位置，即汽车划过的痕迹必是最小半径弧线。

8、待停汽车的初始状态，是平行于侧位停车位行驶。

三、主要变量说明与名词解释

L_p ……停车位长度：本车在侧位停车时，空位前后两部已停车辆之间的距离；

W_p ……停车位宽度：在路旁停车位标志界限内的宽度；

R_m ……最小转弯半径：转向盘转到极限位置的情况下汽车转弯时，汽车前轮外侧转过的圆弧半径；

L_c ……车身长度：沿汽车的前进方向最前端到最后端的距离；

D_w ……车身宽度：汽车最左端到最右端的距离；

D_l ……轴距：汽车前轴中心至后轴中心的距离；

D_h ……前悬：汽车最前端至前轴中心的距离（见图 1）。从可查阅的材料中得知，汽车的基本物理量不包括前悬这个参数，但可通过车长与轴距计算出前悬的长度；

D_b ……后悬：汽车最后端至前轴中心的距离（见图 1）。同理可通过车长与轴距计算出后悬的长度；

L_{pmin} ……最小停车位长度：本车完成进入空位所需占用的停车位长度的最小值。

四、问题分析

当给定停车位的空间和待停汽车车型，需要计算侧位停车的最佳轨迹和角度时，在整个侧位停车过程中，车位长度、车位宽度、车身长度、车身宽度、轴距及最小转弯半径为已知参数，而待停汽车行驶至何处、以何角度驶入空位为未知参数。侧位停车时，已知参数可根据实际情况设定为任意值。问题讨论的重点是如何建立合理的模型，根据已知参数判断本车是否能在某空位停车，并准确的计算未知参数的值，以描绘出理论上最优的停车轨迹。此处，“最优”可以理解为：需要驾驶员进行判断的因素越少越好。比如，当转向时，驾驶员将方向盘转到极限所需要进行的判断，比不断调整方向盘所需进行的判断要复杂得多。因此，我们假设驾驶员在泊车转弯时总是将方向盘转至极限。

4.1 问题 1 分析

(1) 侧位停车相关参数的描述

分析车辆侧位停车的全过程，有两个因素对停车质量影响较大，一个是环境因素，另一个是汽车动力学特性。环境因素主要是道路参数，包括停车位长度、停车位宽度、停车的初始位置。汽车的动力学特性即车辆自身参数，包括车身长度、车身宽度、前悬和最小转弯半径，如图 1 所示：

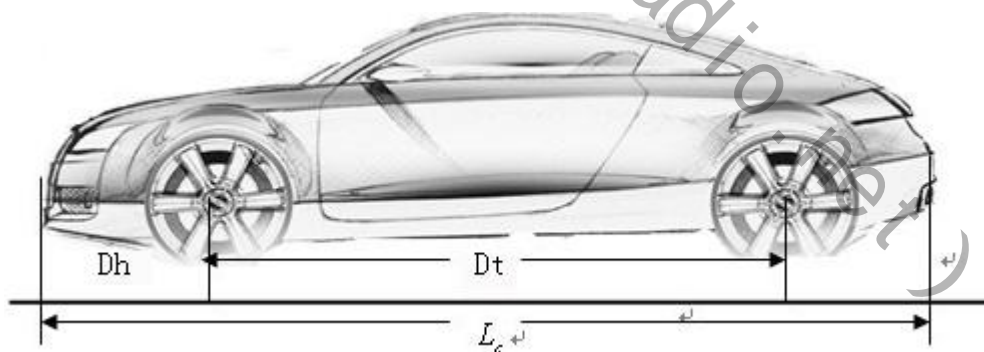


图 1

(2) 侧位停车的步骤及转弯轨迹分析

通过查阅相关资料，我们了解到侧位停车的过程大致可以分为三个阶段。首先，把车辆停放在合适的初始位置，停车初始位置一般为：车身与车位内车辆间水平距离约为 1 米，车身离车道实线距离约为 0.5 米，车尾与前一停车位实线相平行。然后，转动方向盘，逐渐增加车身方向角 θ （车身方向角的定义为：车身与空位平行的方向的夹角，

报名号 # 1863

顺时针为正，逆时针为负)。最后，将车行驶到适当位置后，逐渐减少车身方向角 θ ，直到其完全驶入停车位为止。整个过程如图 2 所示，其中 Block 1, 2, 3 表示已停车辆，Side Wall 表示侧位边墙。

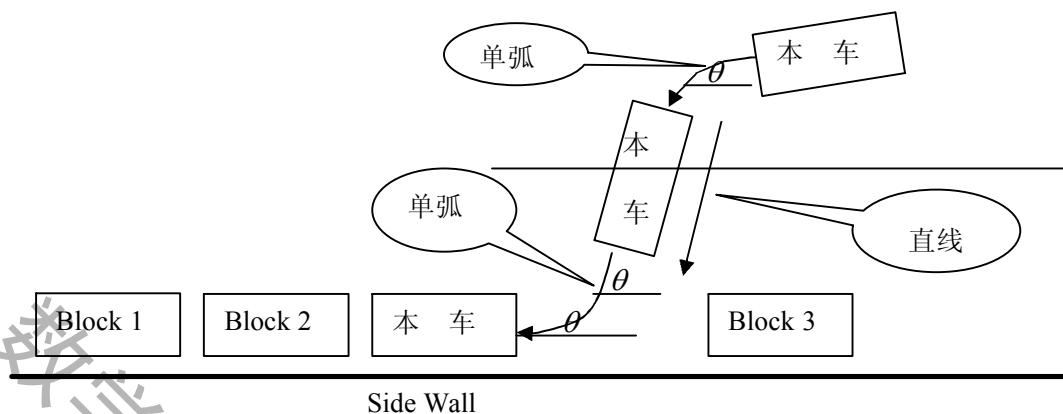


图 2

尽管一般车辆只提供最小转弯半径的信息，但在实际行驶过程中，最小转弯半径并不能真正覆盖汽车扫过的面积。设转弯时，汽车尾部外侧扫过的圆弧半径为 R_t ，汽车头部外侧扫过的圆弧半径为 R_h ，如图 3 所示。易证明， R_h, R_m 和 R_t 所扫过的圆为同心圆。

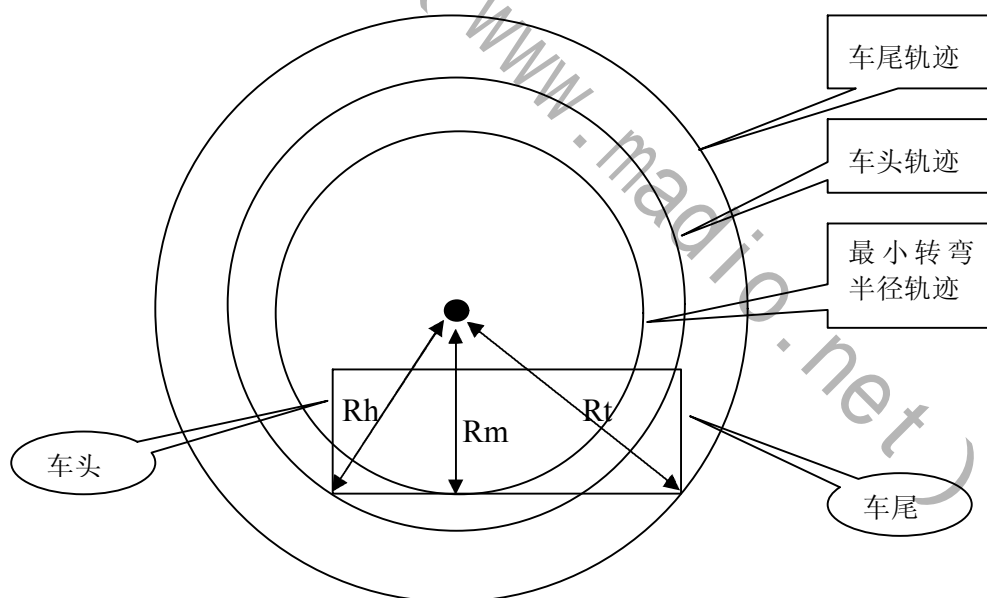


图 3

由图 3 中的几何关系，可知：

$$\begin{aligned} R_t^2 &= R_m^2 + D_b^2 \\ R_h^2 &= R_m^2 + D_h^2 \end{aligned} \quad (1)$$

一般情况下, $D_l > D_h > 0$, 因此有 $R_l > R_h > R_m$, 即车尾扫过的圆弧半径最大。因此, 在考察汽车转弯时是否会装上障碍物 (题中为已前后停放车辆) 时, 应优先考虑 R_l 。

(3) 最小停车位空间

首先, 我们对侧位停车“完成”的含义进行定义。

定义 1: 侧位停车“完成”, 是指待停车辆 (下文中简称“本车”) 已经完全停入指定停车位, 车轴与 Side Wall 方向平行, 且车头紧挨着前一辆已停汽车。

在实际驾驶中, 本车通常采用走二个“单弧”线路外加一段直线的方式来完成停车。其中, 本车走一个“单弧”线路的行为的定义如下。

定义 2: 本车完成一个“单弧”线路, 是指: 从初始状态起, 本车只转动一次方向盘 (打至极限), 行驶一段圆弧的方式 (如图 2 所示)。

定义 3: “双弧停车法”, 是指如图 2 所示, 本车通过一个单弧路线, 一段直线路线 (长度视实际情况而定) 和另一个反方向的单弧路线来完成泊车的方式。

一般来说, 当停车位空间较长时, 本车必定能停入空位; 而当停车位空间非常短小 (长度缩至 0 时), 本车必不能停入空位。因此, 停车空位的长度必然存在一个最小值, 使得本车恰好能通过“双弧停车法”停车。我们称这个最小值为最小停车位长度, 它由本车的动力学特征和停车位长宽共同决定。对于问题一, 我们要研究的问题是: 本车是否能停入当前空位, 等价于研究: 当前空位的停车位长度, 是否大于或等于本车在此处停放时所需要的最小停车位长度。

4.2 问题 2 分析

(1) 问题分析的前提假设

对于问题 2, 确定本车为了进入停车位, 应当从哪个位置和角度进入。我们以汽车从右往左行驶寻找空位, 并准备以“车头进, 车尾出”的方式停车为例进行分析和研究。其它情况, 比如从左往右行驶或“车尾进, 车头出”的分析方法与此类似。我们首先定义“有效切入区”:

定义 4: 有效切入区是这样一个区域: 在该区域内, 本车车头最多转过 90 度时就可以顺利进行停车; 并且, 本车在该区域内任意一点开始转弯, 都能利用“双弧停车法”完成停车。

由于在双弧停车法中, 直线的距离视实际情况而定, 我们可以对直线距离等于零的这种情况进行单独考察, 为此做如下定义:

定义 5: 在用双弧停车法停车时, “零直线距离”是指这样一种情况: 汽车可以连续经过两次转弯就完成停车, 而无需中间行驶一段直线距离作为过渡。

报名号 #1863

根据我们定义的最优原则，即需要驾驶员进行最少判断的原则，“零直线距离”的双弧停车法，比一般的双弧停车法更优（减少了驾驶员判断直线行驶距离的必要）。基于以上分析，我们为驾驶员提供一套最优的泊车策略：

步骤 1. 发现空位后，判断本车是否能顺利停放。

若是，则继续步骤 2；

若否，则离开。

步骤 2. 判断本车是否可以通过“零直线距离”的双弧法完成停车。

若是，则继续前行至可以运用“零直线距离”双弧停车法的位置完成停车；

若否，则继续步骤 3。

步骤 3. 判断汽车是否处于有效切入区。

若是，则就地开始利用双弧停车法停车；

若否，则待驶入有效切入区后，再开始用双弧停车法停车。

下一章中，我们将给出该策略中每个步骤的判断法则。

五、模型的建立与求解

5.1 问题 1 中判断空位是否能停车的模型与求解

我们通过“单弧”进入空位的方式，以“车头进入，车尾退出”的模式为例分析此问。其它情况，如“车尾进入，车头退出”，可采用类似方法分析。

若本车以“单弧”方式进入，车头、车尾的轨迹如图 4 所示，绿色箭头指明了本车驶入的方向。显然，若本车想要恰好顺利停入，则其必须满足两个条件：

- 1) 车尾轨迹恰好与 Block 3 相交；
- 2) 车头轨迹恰好与 Side Wall 相切（外切）。

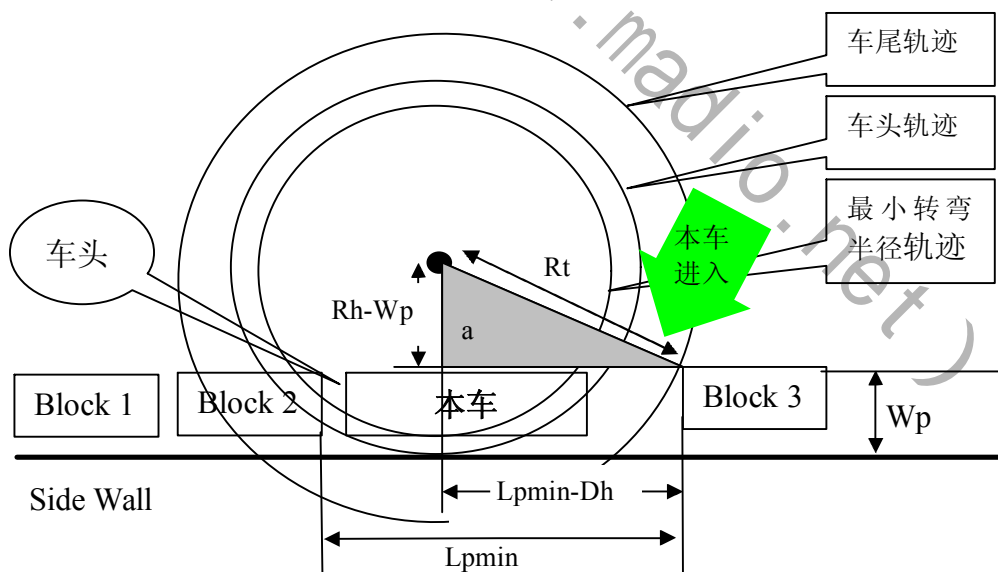


图 4

由定义可知，此时的停车位长度就是最小停车位长度 $L_{p\min}$ 。根据图中的灰色三角形，有如下几何关系：

$$R_t^2 = (R_h - W_p)^2 + (L_{p\min} - D_h)^2 \quad (2)$$

因此，若本车想要停入当前空位，则当前空位的停车位长度 L_p 必须满足：

$$L_p \geq L_{p\min} \quad (3)$$

5.2 问题 2 中判断是否可用“零直线距离”双弧停车法进行停车的模型与求解

Step1: 分析双弧停车法

图 4 给出了汽车“单弧”停车时，汽车外侧前轮扫过的圆弧痕迹（最小转弯半径轨迹）。采用双弧法停车时，若汽车想达到相同的停放状态，则其同一个轮胎（即外侧前轮）必须驶上同一条轨迹，即图 5 中所示的红色圆弧上（记为 C1）。其中，驶在同一条轨迹上是指：汽车的外侧前轮（Z 点）落在 C1 上，且此时汽车前进方向与 C1 在 Z 点相切。

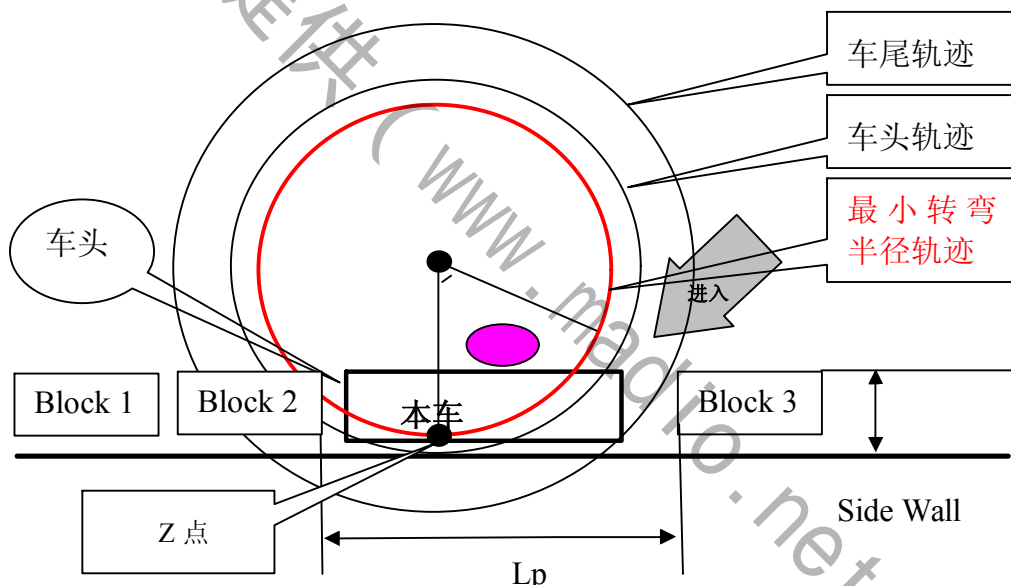


图 5

根据第一问的分析可知，C1 的大小和位置，是由汽车的性质（即最小转弯半径和车长、车宽）决定的，与汽车当前状态无关。

由于采取双弧法停车，考虑到直线不改变汽车方向，因此，汽车只能通过第一次最小半径左转，来完成角度调整，使其进入 C1 时，方向刚好是进入点的切线方向。

容易证明，汽车左转时，前轮内侧的轨迹同样是一个圆弧（记为 C2），且半径为 $R_m - D_w$ （如图 6 所示）。假设汽车打算在某点（称为“进入点”）驶上 C1 的轨迹，过该

报名号 #1863

点做 $C1$ 的切线（绿色线），那么汽车为了驶上 $C1$ ，必须直线行驶到这样一个位置，使得 $C2$ 与绿线也相切。

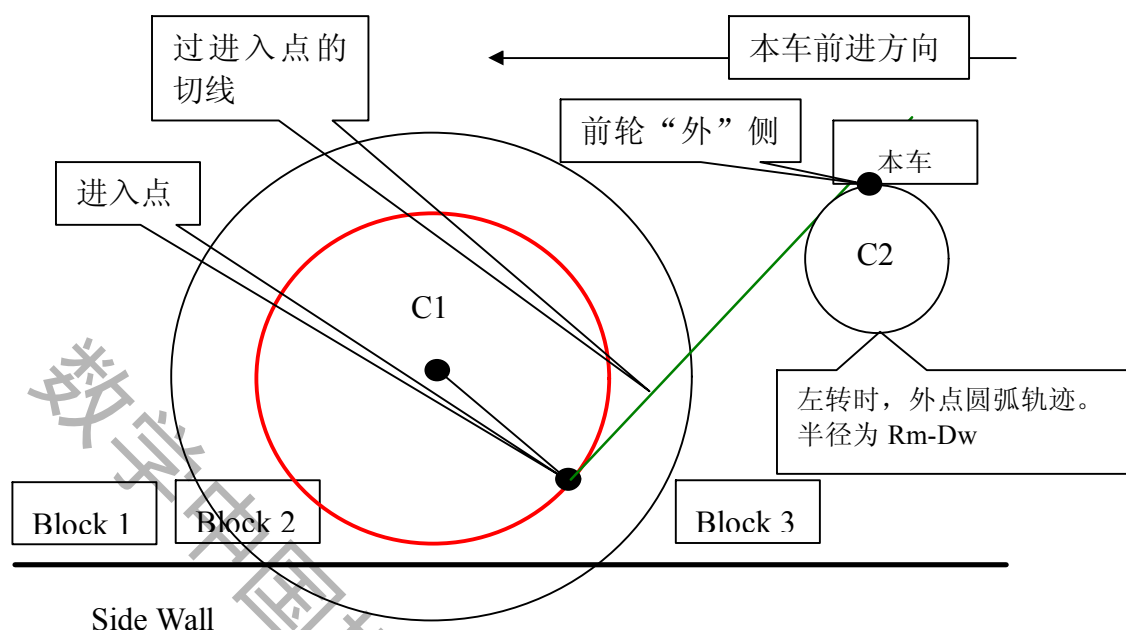


图 6

Step2: 判断是否可用“零直线距离”的双弧停车法停车

我们在本题中仅考察汽车转过角度不超过 90° 的情况，因此，相当于 $C1$ 只考察 $1/4$ 圆弧（阴影部分）， $C2$ 也只考察 $1/4$ 圆弧（橙色部分）。

$C2$ 的圆弧沿 Side Wall 的方向，向 $C1$ 移动。记本车外侧前轮到 Side Wall 的距离为 D_{sc} ，由图 7 可知，当且仅当满足以下条件时，两弧才能可能相交，本车才可以实现零直线距离的双弧法停车，即：

$$D_{sc} - (R_m - D_w) \leq R_h \quad (4)$$

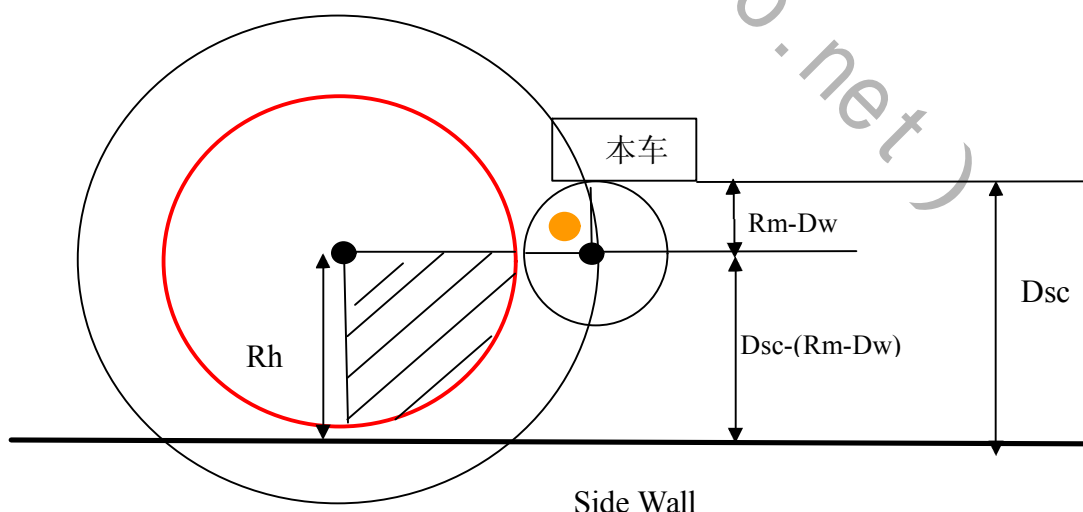


图 7

Step3: 计算“零直线距离”双弧停车法停车时，本车应该开始转弯的位置和需要

转过的角度。

图 8 给出了 C1 与 C2 恰好相切的情况。我们用两个量表述本车当前的位置：

- 1) 与 Side Wall 平行的方向上，车辆外侧前轮距 Block 2 尾区的距离 L_t ；
- 2) 车辆外侧前轮距 Side Wall 的距离 D_{sc} 。

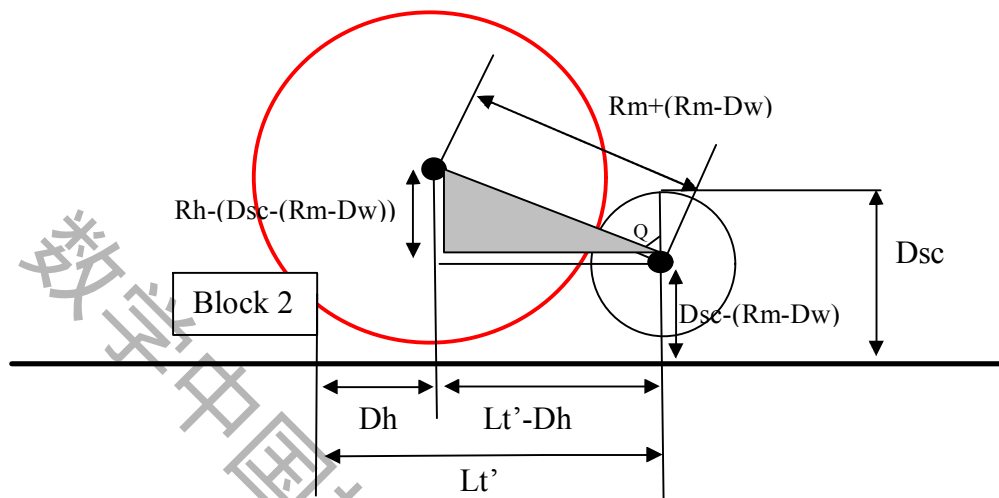


图 8

令 L_t' 表示汽车前行至应该转弯的位置（即两圆恰好相切的位置），那么，通过计算图中灰色三角形的三边关系，可以得到：

$$(L_t' - D_h)^2 + \{R_h - [D_{sc} - (R_m - D_w)]\}^2 = [R_m + (R_m - D_w)]^2 \quad (5)$$

由此计算出 L_t' ，并可得知：

当 $L_t < L_t'$ 时，汽车已经不能利用“零直线距离”双弧法停车。

当 $L_t \geq L_t'$ 时，汽车再前行 $L_t - L_t'$ 的距离，即可开始转弯，利用“零直线距离”双弧法停车。

同时，设汽车左转过角度 Q 时，开始右转。根据相似三角形，有

$$\cos(Q) = \frac{R_h - [D_{sc} - (R_m - D_w)]}{R_m + (R_m - D_w)} \quad (6)$$

由此求出 Q ，并得到汽车左转应该转过的弧长度为：

$$Q \cdot (R_m - D_w) \quad (7)$$

5.3 问题 2 中判断本车是否处于有效切入区的模型与求解

Step1: 计算有效区的模型

由于本题仅考察本车最大转过角度为 90° 的情况，因此根据图 9 可知，本车不能直线行驶距离过长，其当前位置必须满足：

$$L_t \geq (D_h + R_m) + (R_m - D_w) \quad (8)$$

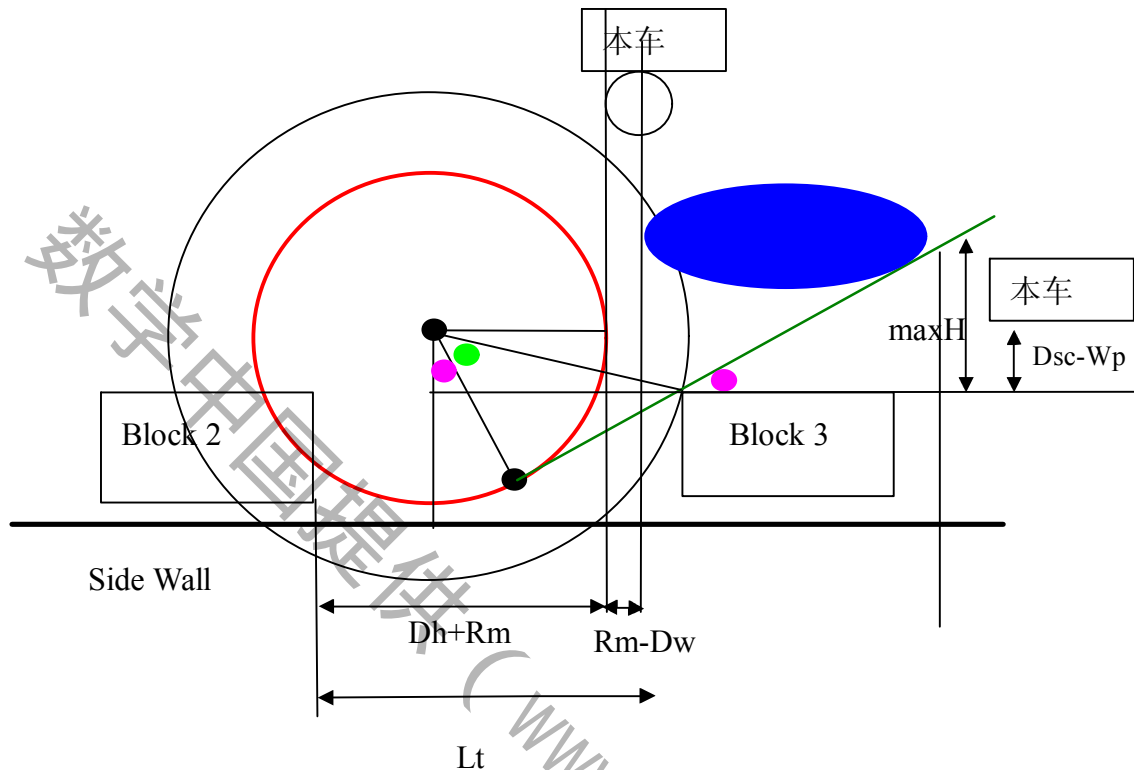


图 9

其次，本车至少需要转 ∂_1 角度（图 9 中粉红色角），且转弯时必须处于蓝色区域，否则会 and Block 3 相撞。由图中几何关系，我们有：

1) 设定绿色角为 ∂_2 ，则：

$$\partial_2 = \arccos \frac{R_m}{\sqrt{(L_p - D_h)^2 + (R_h - W_p)^2}} \quad (9)$$

2) 设定绿色加粉色的角为 ∂_3 ，则：

$$\partial_3 = \arctan \frac{L_p - D_h}{R_h - W_p} \quad (10)$$

3) 最终，

$$\partial_1 = \partial_3 - \partial_2 \quad (11)$$

因此，图中蓝色的梯形区域则为有效区。在该区域内，本车可以随时利用双弧停车法进行停车。

Step2: 判断本车是否已经驶入有效切入区的模型

此处，我们认为对本车的位置而言， D_{sc} 是固定不变的（初始状态下，本车一直沿直线前行），只有 L_i 在变化。因此通过 L_i 可计算得图 9 中的 $\max H$ ：

$$\max H = (L_i - L_p) \cdot \tan \partial_1 \quad (12)$$

而本车此时的位置为 $D_{sc} - W_p$ ，显然，当：

$$D_{sc} - W_p \geq \max H \quad (13)$$

时，汽车进入有效切入区；否则就没有。

此时根据几何关系，我们给出车辆还需继续前行的一个近似的距离：

$$(\max H - (D_{sc} - W_p)) / \tan \partial_1 \quad (14)$$

Step3: 计算本车进入有效切入区后，且不能用“零直线距离”双弧线法停车时的行驶路线

从分析中可以得到，当本车处于有效切入区内任意一个位置时，必然存在 C1 的一条切线（图 10 中绿色直线），与 C2 相切。因此，本车可以就地开始左转弯，然后直线行驶一段距离 L_d ，最后在点 P 处驶上 C1 的轨迹。

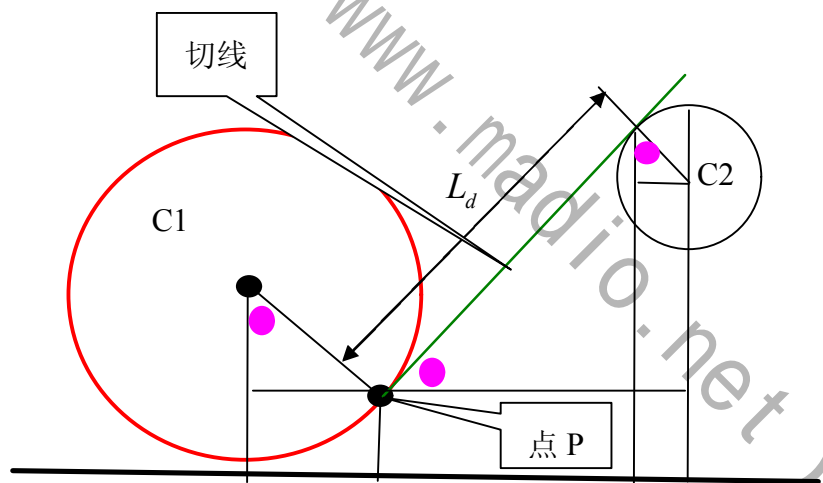


图 10

此时，问题便转化为：寻找一条与 C1 和 C2 同时相切的切线，并寻找两个切点之间的直线距离 L_d ，以及切线和 Side Wall 的夹角 β （图中粉红色角）。

通过分析图中的几何关系，可得到如下关系：

$$\begin{cases} R_m \cdot \sin \beta + L_d \cdot \cos \beta + R_i \cdot \sin \beta = L_i - D_h \\ (R_h - R_m \cdot \cos \beta) + (R_i - R_i \cdot \cos \beta) + L_d \cdot \sin \beta = D_{sc} \end{cases} \quad (15)$$

其中, $R_i = R_m - D_w$ 为 C2 的半径。

整理方程式可以得到:

$$\begin{cases} (R_m + R_i) \cdot \sin \beta + L_d \cdot \cos \beta = L_t - D_h \\ (R_m + R_i) \cdot \cos \beta - L_d \cdot \sin \beta = R_h + R_i - D_{sc} \\ (\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 1 \end{cases} \quad (16)$$

解方程组, 即可得到 β 和 L_d 的值。

则第一次需要转过的弧度为:

$$\beta(R_m - D_w) \quad (17)$$

5.4 停车问题的最终解决策略

综上所述, 我们为驾驶员提供如下最优泊车策略。值得注意的是, 在实际操作中, 我们可以通过适当的放大停车位空间的大小 (即 L_p 和 W_p), 以便为驾驶员 (尤其是新手) 提供更宽松的停车环境。

最优泊车策略

- 步骤 1. 根据 (2) (3) 式判断, 前方空位是否可以停放得下车。
若是, 则继续步骤 2;
若否, 则离开, 搜索下一个空位。
- 步骤 2. 根据 (4) 式判断, 是否可以通过“零直线距离”双弧法完成停车。
若是, 则根据 (5) 式计算还需要前行的距离, 根据 (7) 式计算“零直线距离”双弧法泊车时, 第一次转弯需要走过的弧度; 完成泊车。
若否, 则继续步骤 3。
- 步骤 3. 根据 (13) 式判断, 本车是否已处于有效切入区。
若是, 则原地开始转弯, 利用双弧法泊车。根据 (16) (17) 式, 计第一次转过的弧度和直线行驶的距离, 完成泊车。
若否, 则根据 (14) 式计算为进入有效切入区仍需前行的距离, 进入该区后利用双弧停车法泊车。

六、参考文献

报名号 # 1863

[1]朱道元等,数学建模案例精选,北京：科学出版社，2003.

[2]吴翊，吴孟达，成礼智,数学建模的理论与实践,长沙：国防科技大学出版社，1999.

[3]廖华奎，王宝富,解析几何教程(第二版)，北京：科学出版社，2007

[4]公安部 / 建设部，停车场规划设计规则（试行），
<http://www.law110.com/law/jianshe/2218.htm>，2010年4月23日

[5]爱卡汽车网，临时停车及停车入位图解，

<http://www.xcar.com.cn/bbs/viewthread.php?tid=4423851>，2010年4月23日

数学中国提供 (www.madio.net)