

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2011@tzmcm.cn

邮编：010021

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：A 题组

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2011@tzmcm.cn

邮编：010021

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#1135

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn
邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 转动坐标系中最优水面迫降姿态的研究

关 键 词 迫降姿态 微分模型 连续离散化 转动坐标系

摘 要：

本文解决了大型客机在无动力的情况下在水面迫降的最佳姿态的问题。

通过建立起质心转动坐标系，研究关于客机机身瞬态压力分布的微分方程模型及其优化模型，根据机体实际承受限度求解相关影响参数范围，并采用控制变量法找到影响水面迫降安全系数的主要因素。借用对飞机的数学模型的网格算法推出机身压力关于飞行俯仰角和初始速度的微分方程，同时对连续的时间离散化，从飞机和水面的作用力 $F = F(v, r, \alpha, \theta, t)$ 得到非线性的冲击力的时变关系，以此模型利用 Matlab 求解，得出机身表面冲击力和飞机接水姿态即俯仰角、初速度的关系，进一步解决了水面迫降的姿态问题。

对于水面迫降的问题考虑的因素很多，本文的模型最大的创新点在于基于质心坐标

系作为简化模型，将复杂的运动用力矩 $M_{\text{总max}} = \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} \left(\frac{2v_{\text{初}} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{\text{初}} \sin \beta}{\sin \theta} \right) m_{\text{总质量}} r_F$

与合力表示出来，并合理拟合了瞬时作用力 F 使计算简便，但功能性突出，最终简洁地导出机身承受压力函数，以用于是否发生断裂的判定。

求解的结论中，首先讨论了飞机接水时的各种姿态，得出了尽量减少转滚角的结论，进而讨论飞机前后俯仰角 θ 和迫降之前的初速度 $v_{\text{初}}$ 对安全的影响。本文建立起来的模型经历了 airbusA320 实际参数模拟，得出机体所受压力受制于倾角和初速度的大小。

模拟显示，当速度为 150m/s 时建议俯仰角在 11° 左右为佳。结合实际，我们认为所得的结果也是比较合理的，因此可以比较好的描述了大型客机失去动力时水面迫降的最佳姿态问题。

参赛队号 #1135

所选题目 A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

Email: 2011@tzmcm.cn

英文摘要

This paper solves the problem of flying attitude which a large passenger aircraft faced in the case of force landing without power.

We set up center of mass coordinate system to study the transient pressure distribution on the aircraft fuselage, and to solve the range of the related parameter depended on the limit of stress of the aircraft, and then to find the main factors of safe force loading factor using control variables. Then we get the differential equation about aircraft fuselage pressure related to the initial pitch angle on the flight speed which is achieved by math model on aircraft. At the same time we discretize the continuous time, then we can get the non-linear relationship from aircraft and surface forces. Use the Matlab to solve the model and then to obtain the relationship about the force on the aircraft with pitch angle and initial velocity. Further then we can solve the force landing attitude problem.

There are many factors about force loading. And in this paper the innovation of the model is to use the center of coordinate mass to simplify the problem. And it can replace complex sport with simple torque and force. And it makes the instantaneous force F a reasonable fit. The model is simple but exactness to decide whether the aircraft will break.

When it comes to solving the conclusion, first we discuss a variety of aircraft attitude on the top of water to obtain that we should reduce the obliquity on one side. Then we discuss influence made from the tilt angle and speed of the aircraft. This model is built up through a simulation of the actual parameters about airbusA320. Then we get a conclusion that the body subject to pressure is depended on the size of angle and the initial velocity, and we suggest the pitch angle of about 11° when the speed is 150m/s . We believe that the results are reasonable, So you can better solve problem of aircraft's force loading without power.

转动坐标系中水面迫降最优姿态的研究

一. 问题分析：最佳飞机姿态

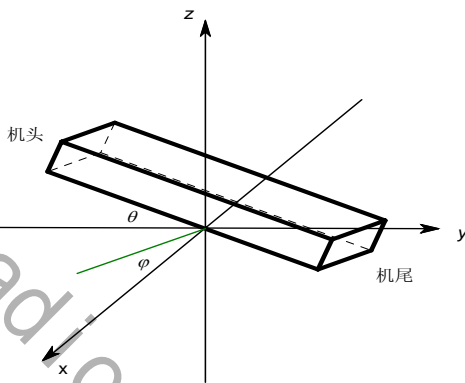
飞机在水面进行迫降，失去动力，落入水中这一过程受多种因素影响，具有各种不同的接水姿态，包括飞机的前后倾角（俯仰角），左右倾角（滚动角）等。在飞机和水面冲撞过程中，飞机受到巨大的反作用力，轻则致使飞机剧烈晃动重则导致机身断裂，而这都将对机上的乘客带来巨大的安全隐患。下面我们详细分析飞机的各种姿态。

为便于分析，以机身在水面的投影为 y 轴，机身中点在水中央的投影为原点，在水面上，以过原点的 y 轴的垂线为 x 轴，建立直角坐标系，并且假定飞机为一长方体（如图一所示）。

首先，若飞机是侧身入水（即左右存在倾角），必然导致飞机失去平衡，造成巨大晃动，增加了飞机内部乘客的危险性，不宜采取。

其次，我们主要考虑飞机平身入水，主要分如下情况：

若速度方向向量不在平面 yoz 上，飞机有三种入水姿态：头部入水、中身入水、尾部入水。若是头部先入水则飞机有绕着机头旋转与刚刚入水时的速度方向前进的趋势，而且头部入水容易造成机身断裂，不宜采取；若是中身入水，飞机受到的阻力最小（流体阻力），且若速度过大，容易造成打水漂状（晃动较大），飞机不能及时地、平稳地停留在水面上，增加了飞机的危险性；尾部入水，头部类似。若速度方向与机身方向在平面 yoz 上，飞机有三种入水姿态：头部入水、中身入水、尾部入水，这三种情况都有使飞机平身入水至平身停入水中的可能，在下文中我们将主要以这三种情况进行讨论。



图一 飞机的假设模型

二. 模型的假设

- 1) 假设水面平静，不考虑其流速；水面足够宽，水足够深。
- 2) 假设机身可考虑为装了一定水的长方体、不考虑飞机的左右转动，将机翼质量等效在机身上。
- 3) 飞机易断裂处：假设(1)：易断裂处于固定的飞机上的几点，当这几个点受到了一定的力矩时便会导致飞机发生断裂。假设(2)：机身与机翼的每一处皆可发生断裂，这与其所受力矩成正比。
- 4) 假设飞机入水时机身平稳，转滚角接近于零，，仅讨论直线迫降的情形，其决定作用的角度为俯仰角。迫降时起落架收缩。
- 5) 假设迫降环境为一个大气压、空气温度为 20°C 。
- 6) 在飞机落水的瞬间，将飞机视为刚体，即飞机瞬间不发生形变。
- 7) 忽略水的粘滞性对飞机造成的影响。

参赛队号 # 1135

8) 关于题目中的“最好的选择”，我们假设：飞机落入水中至停止机身保持 $\varphi=0$ 且机翼不接触水面，以保证飞机在整个过程中不会太摇晃而导致事故；飞机自落入水中至停止于水面的时间最短；飞机在整个过程中不发生断裂。

三. 符号的说明

符号	说明	符号	说明
θ	飞机俯仰角	v	接水时飞机水平速度
φ	飞机左右倾斜角	s'	接水面积
F	水对飞机作用力	G	飞机重力
$M_{\text{总}}$	飞机与水作用的力矩	$d\bar{L}$	飞机相对之心角动量
α	水的性质参数	t	飞机与水面作用时间
r	作用点与飞机质心距离	$v_{\text{初}}$	飞机初始速度
M	飞机的等效质量	g	重力加速度
a_y	飞机竖直加速度	ρ	水的密度
f_n	飞机质元在法向受力	f_t	飞机质元切向受力
H	质心距水面垂直高度	$v(x,t)$	飞机质元水平速度
$p(x,t)$	飞机质元受到水的压力	l	飞机的纵向速度
r'	接触水的径向长度	β	飞机速度与下沉速度的夹角

四. 直线迫降的瞬间态模型的建立

4.1、飞机直线迫降前两种情况的分析

当 $\theta < 0$ ，即飞机俯冲式迫降，会造成机头先着水，动量急剧变化，而尾部继续高速下沉，此时飞机抬头受到浮力向水面运动，会发生强烈的弯折。

当 $\theta = 0$ ，会产生水平式迫降，为了防止机头由于力矩被拉入水中，起落架必须得收起，很可能造成跳跃，收起起落架后飞机引擎将会比机腹先接触水面，导致机毁人亡。

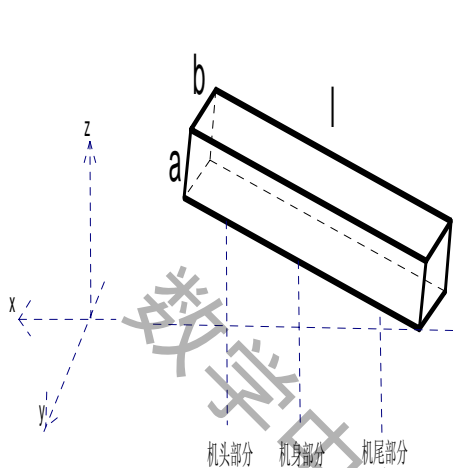
因此，我们集中讨论 $\theta > 0$ 的情况。

4.2、瞬间态建模

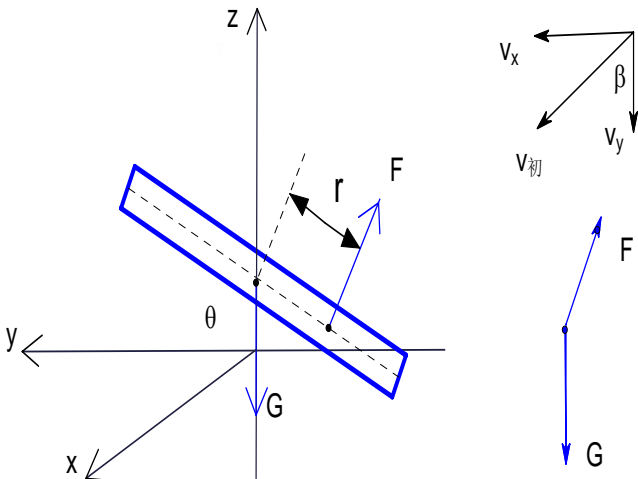
1、将飞机进行合理简化，由于不考虑滚转，故可将机翼转化成机身中的等效质量，将飞机看成一个长方体。长、宽和高为 $a \times b \times l$ ，横截面积为 S ，如图二：

参赛队号 # 1135

- 1) 设接触水时初速度为 v , 飞机与水平面夹角即为之前的前后倾仰角 θ
 - 2) 触水面积为 s' (t 和 θ 的函数), 水对触水部分作用力 F (S 、 v 、 t 、水本身参数、 θ 的函数)
- 2、当飞机以 $\theta > 0$ 的俯仰角, 以机尾接触水面时 (如图三)



图二 飞机简化模型



图三 飞机接水瞬间态的模型

建立以质心为参考系的转动参考系, 飞机此时主要受两个力, 即自身重力 G 和水对它的作用力 F 。由角动量公式^[1]:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_{\text{总}} \quad (1)$$

对于质心参考系来说, 重力的合力矩为 0, 则合力矩由 F 提供, 因此我们可由该转动坐标系得到公式的简化。

等式的右边是飞机受到水的作用力 F 对质心系的力矩。经分析 F 主要由水的正常浮力和冲击时候的反冲力组成, 且由于此时是瞬时情况, 并且此时机尾后部的水将被排开, 如图三, 机尾近似于斜贴于水表面, 因此表面反冲力将远远大于浮力, 故可以合理化假设此时 F 的方向为垂直于机身并且同法线方向上, 并且与飞机初速度平行。再由影响 F 大小的主要变量是: 初速度大小 $v_{\text{初}}$ 、贴于水面的面积 (可用 r 根据机尾函数表示出)、水的粘滞性或其他关于水的性质的参数 α 、前后倾角 θ 的大小、以及时间 t 的变化。因此此时的合力矩 $\bar{M}_{\text{总}}$ 等于水对飞机的合力矩 $\bar{M}_{\text{水}}$ 可以由如下表示:

$$M_{\text{总}} = M_{\text{水}} = \int_r^{\frac{1}{2}l} F_{(v_{\text{初}}, r, \alpha, \theta, t)} dr \quad (2)$$

此时由于 F 方向已知, 即与 r 垂直, 故转化为标量表达式, 以简化计算, 并设逆时针为转动正方向。关于总力矩的计算我们在附录中解出, 现给出表达式 (r' 为接触水的径向长度, r_F 为设的积分变量):

$$M_{\text{总}} = M_{\text{水}} = \int_{\frac{1}{2}l - r'}^{\frac{1}{2}l} \frac{F_{\text{max}}}{r'} r_F dr_F$$

参赛队号 # 1135

$$= \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} \frac{(\frac{2v_{初} \cos \beta}{\Delta t \cos \theta} + \frac{2v_{初} \sin \beta}{\Delta t \sin \theta})m_{总}}{r'} r_F dr_F \quad (3)$$

从另一边来看由角动量定理, 我们得知 F 的力矩是角动量的变化率, 即是对每一个微元 $S\rho dr$ 的都有一个相同的角动量变化率。对距质心 r 的单个微元分析, 用 $S\rho$ 表示每个小微元的质量, v 表示该微元的法向速度, 如图三, 因此我们可由 (1) 得出标量表达式:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rS\rho v)}{dt} = \frac{d(r^2 S\rho \omega)}{dt} \quad (4)$$

将非时间变量独立, 得到变式:

$$\frac{dL}{dt} = r^2 S\rho \frac{d\omega}{dt} \quad (5)$$

可以发现, 由于我们将碰撞瞬间飞机看成刚体^[3], 因此角速度 ω 对时间的微商应守恒。故针对不同 r 处的微元, 可以利用这一性质建立等式:

$$\frac{M_{总}}{r_F^2 m_{总}} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_{微元}}{r^2 S\rho} \quad (6)$$

将 (3) 式代入 (6) 式中:

$$M_{微元} = r^2 S\rho \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} \frac{(\frac{2v_{初} \cos \beta}{\Delta t \cos \theta} + \frac{2v_{初} \sin \beta}{\Delta t \sin \theta})m_{总}}{r' r_F^2 m_{总}} r_F dr_F \quad (7)$$

积分解出后, 可得微元所受力 $f_{微元}$ ":

$$f_{微元}'' = \frac{M_{微元}}{r} = rS\rho \frac{(\frac{2v_{初} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{初} \sin \beta}{\sin \theta})}{r' \Delta t} \ln \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l-r'} \quad (8)$$

经讨论我们发现, 对于我们划分的每一个微元, 除了自身受到一份来自水反作用力的扭力 (或叫切应力), 还将提供之后微元的扭力。因此可将 $f_{微元}''$ 进行优化:

$$f_{微元}' = \int_{-\frac{1}{2}l}^r rS\rho \frac{(\frac{2v_{初} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{初} \sin \beta}{\sin \theta})}{r' \Delta t} \ln \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l-r'} dr \quad (9)$$

在考虑到重力的作用, 由于类似的原因, 微元除受自身重力外, 还要提供之前的微元支持力。因此, 此次讨论的微元受到重力叠加的、在切应力方向上的分力^[4]为:

参赛队号 # 1135

$$G'_{\text{微元}} = \int_{-\frac{1}{2}l}^r S \rho \cos \theta dr \quad (10)$$

因此，综合（9）、（10）和之前取的正方向，我们得出 r 处微元切应力方向所实际受力为：

$$f_{\text{微元}} = \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{l^2}{4} \right) \cdot S \rho \frac{\left(\frac{2v_{\text{初}} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{\text{初}} \sin \beta}{\sin \theta} \right)}{r' \Delta t} \ln \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}l - r'} - S \rho \cos \theta \left(r + \frac{1}{2}l \right) \quad (11)$$

因此，我们得到了微元关于参数 θ 、 $v_{\text{初}}$ ，在不同 r 处的切应力方向受力的模型。

五. 碰撞瞬时的断裂条件分析与求解

（一）分析

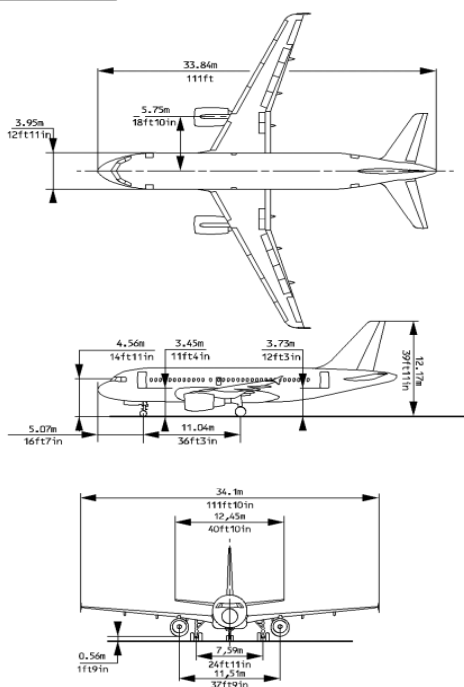
我们求出各微元所受力的情况，是为了研究此时飞机上各点是否能承受而不发生断裂，进而危害到乘客安全。因此，我们可以通过收集到的飞机数据，得到了飞机各点能承受最大压力的参数。将不同的初始 θ 和 $v_{\text{初}}$ ，带入我们建立的碰撞瞬间模型中去，通过模型反应的各点所受压力与实际能承受的压力进行对比，则可由此推断出在碰撞瞬间飞机是否会有折断的危险。

以airbusA320 的相关数据^[5]，进行实际模拟。(airbusA320 的机身抗压数据见附录。)

（2）求解

将入射角 θ 从 0 到 20 度进行取值，飞机的初速度 $v_{\text{初}}$ 适当赋值。

PRINCIPAL DIMENSIONS



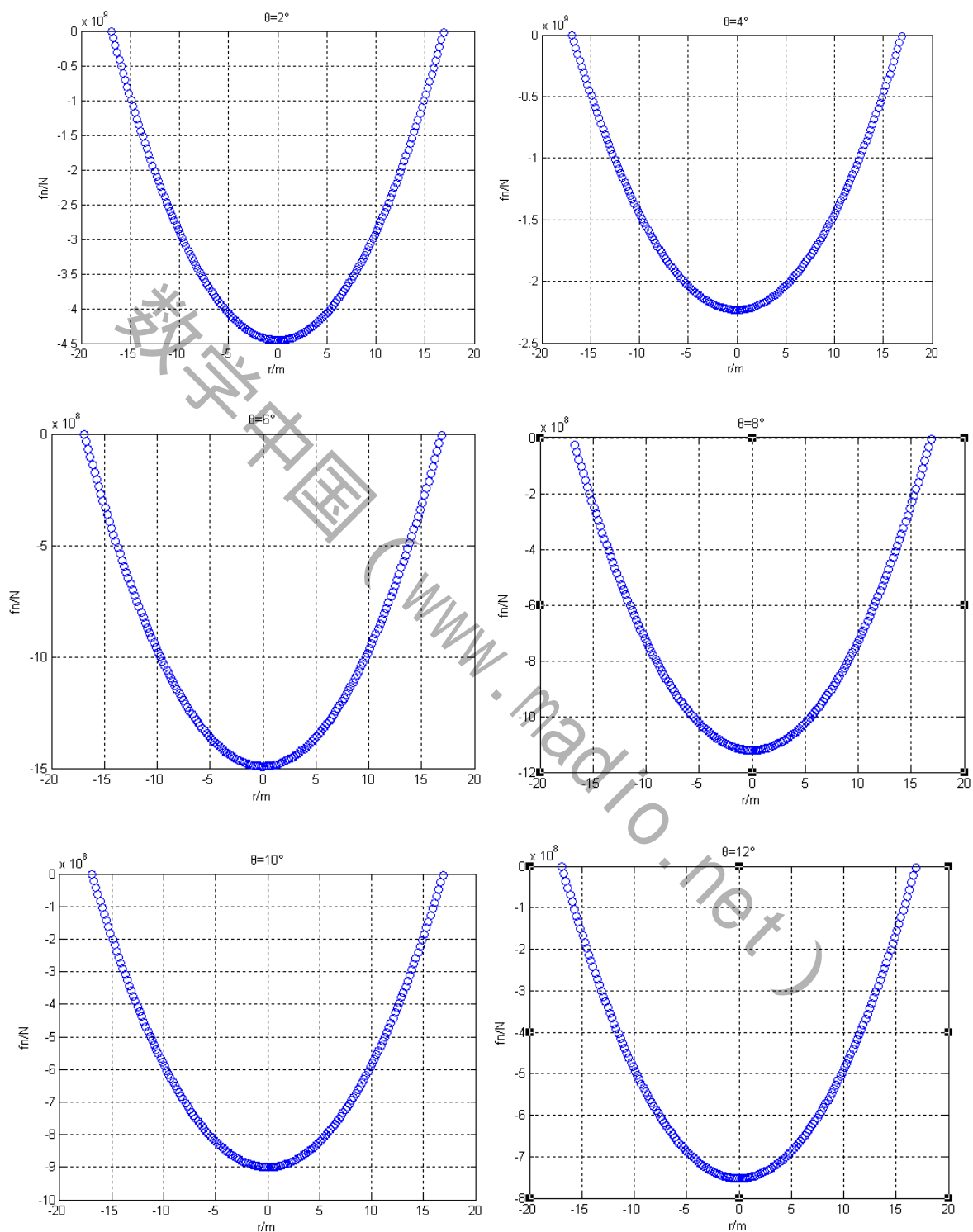
l	33.84m	$S\rho$	$2.0686 \times 10^3 \text{ kg/m}$
r'	8.865m	β	88°
Δt	0.05s	g	9.8m/s
第一步			
为了控制变量暂定 $v_{\text{初}} = 156.7 \text{ m/s}$			
此时 θ 取 5° 、 10° 、 15°			
第二步			
为了控制变量暂定 $\theta = 11^\circ$			
此时 $v_{\text{初}}$ 取 50m/s、100m/s、150m/s			

图四 飞机表面抗压图^[6]

参赛队号 # 1135

使用 MATLAB 进行计算（相关代码见附录三），得出如下受力分布：

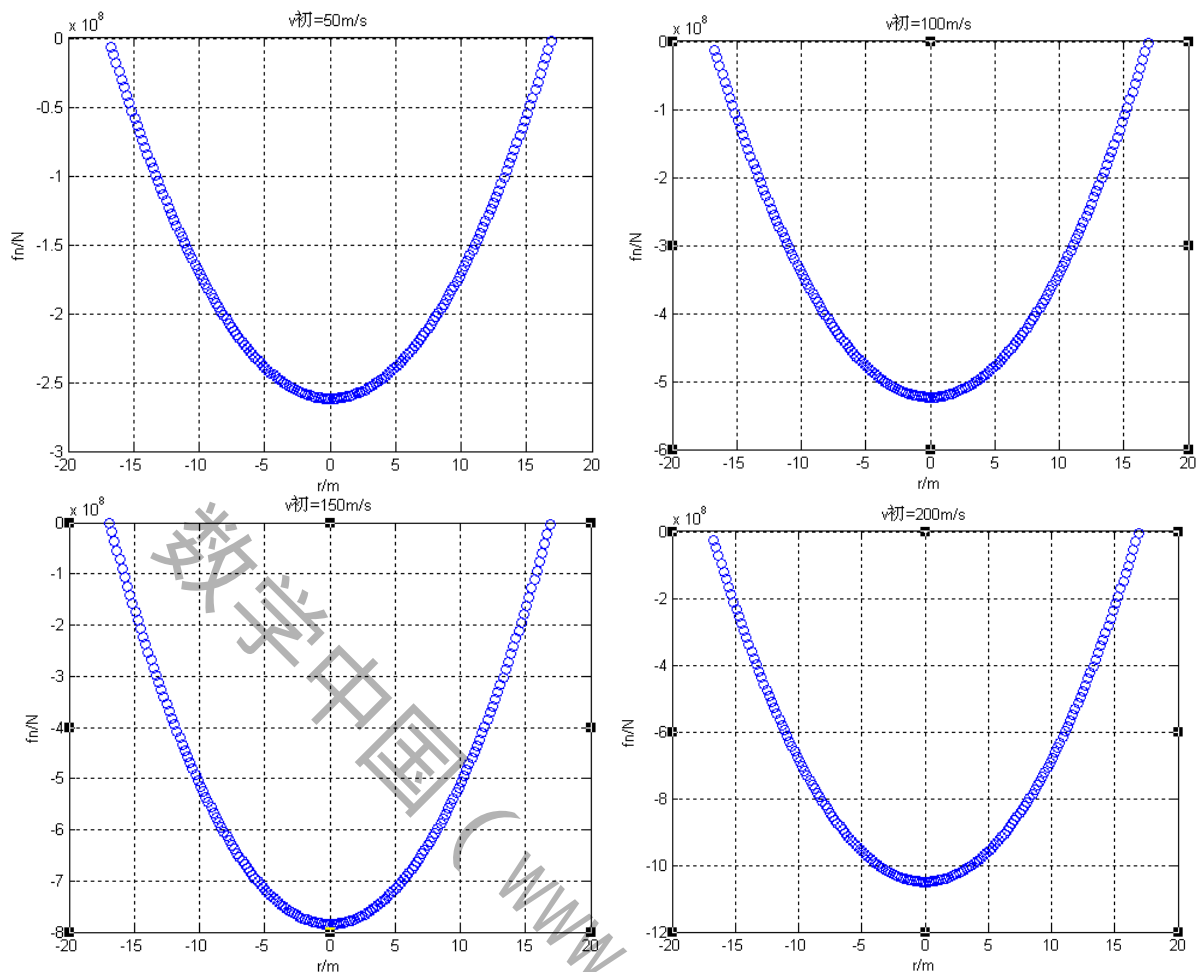
第一步：

 $\theta=2^\circ$ 、 4° 、 6° 、 8° 、 10° 、 12° 时：

第二步：

 $v_{初}$ 取 50m/s、100m/s、150m/s、200m/s

参赛队号 # 1135



六. 模型的求解和结果分析

考虑到影响飞机水面迫降的安全性，从姿态上看主要有姿态角（飞机的俯仰角）、初始速度等，将这两者统一在建立起来的数学模型当中，赋予同样的权重，利用 Matlab 进行解析，分别取 $\theta=2^\circ$ 、 4° 、 6° 、 8° 、 10° 、 12° 和 $v_{初}=200\text{m/s}$ 、 150m/s 、 100m/s 、 50m/s 几种情况进行模型的求解。

从模型求解的结果可以看出， θ 从 2° 到 12° 的变化中，机身所受各处压力减小，因此适当有一定俯仰角比较好，大概在 10 到 12、13 度为宜，太大了的话，回事驾驶员难于操作飞机，从而带来潜在困难。

在初速度 50m/s 到 150m/s 的变化下，机身所受各处压力增大，但我们认为并不是速度越小越好，因为速度越小驾驶员也越难控制，或者说明迫降开始的高度较小，这样也会让驾驶员来不及反应，造成飞机失事的严重后果。

因此我们采取折中的想法，由于此时的 θ 我们取的是 11° ，是比较合理的，所以推荐这种情况下，初速度最好能是 150m/s 左右。

七. 总结与讨论

通过建立数学模型，并且进行合理简化，利用数学工具 Matlab 进行求解，得出以下结论：

参赛队号 # 1135

1) 飞机水面迫降应该收起起落架，否则由于水的阻力使得飞机俯仰角为负而头部接水。

2) 飞机应该以较小的俯仰角接水，产生低头的力矩，碰撞后飞机头部抬起，后部重力作用下在水面滑行。

3) 飞机应该以一个合适的速度接水，速度过小飞机容易沉水，速度过大会产生颠簸跳跃。

本文在参数变量的解析上进行了优化，使得相关的精确度得到了提升。

建立的模型值得探讨的地方：飞机机身表面受力的质元分布影响的网格效应，以及用此模型求解冲击力时需要对变量进行大量的优化，优化的方法还可以进一步精简。

参考文献：

- [1] 胡大勇, 杨嘉陵等.《某型飞机水上迫降数值化模型》.北京航空航天大学学报, 2008-12, (34-12).
- [2] 李 书, 赵金强, 等.《民用飞机水上迫降分析模型和数值仿真》.南京航空航天大学学报, 2010-06. (42 卷-3).
- [3] 郭保东, 程 丽.《某型客机水上迫降的着水冲击力学性能数值研究》.民用飞机设计与研究.
- [4] 陈占辉, 卢永锦.《高速运动物体抨击水面后的动力学特性研究》.船舶工程. 2009 年第三期, 总第 31 卷.
- [5] 贺 谦, 岳珠峰.《飞机水面降落的机身载荷研究》.强度与环境. 2009 年 8 月, 第 36 卷第 4 期.
- [6] 李 斌, 杨智春.《大型运输机水上迫降研究进展》.中国航空协会 2007 年学术协会.
- [7] 李元生, 李磊.《基于 ALE 方法的飞机水面降落过程》.爆炸与冲击. 2010-03, (33-2).
- [8] Peter D. Hicks and Frank T. Smith.《Skimming impacts and rebounds on shallow liquid layers》. 2010-10.
- [9] 童明波.《民机机身机构稳定性和水上迫降分析与研究应用》.南京航空航天大学学报. 2009.
- [10] 李 磊, 贺 谦.《基于 Lagrange 算法的飞机水面降落过程研究》.机械强度. 2010, 32(4): 556-560.

参赛队号 # 1135

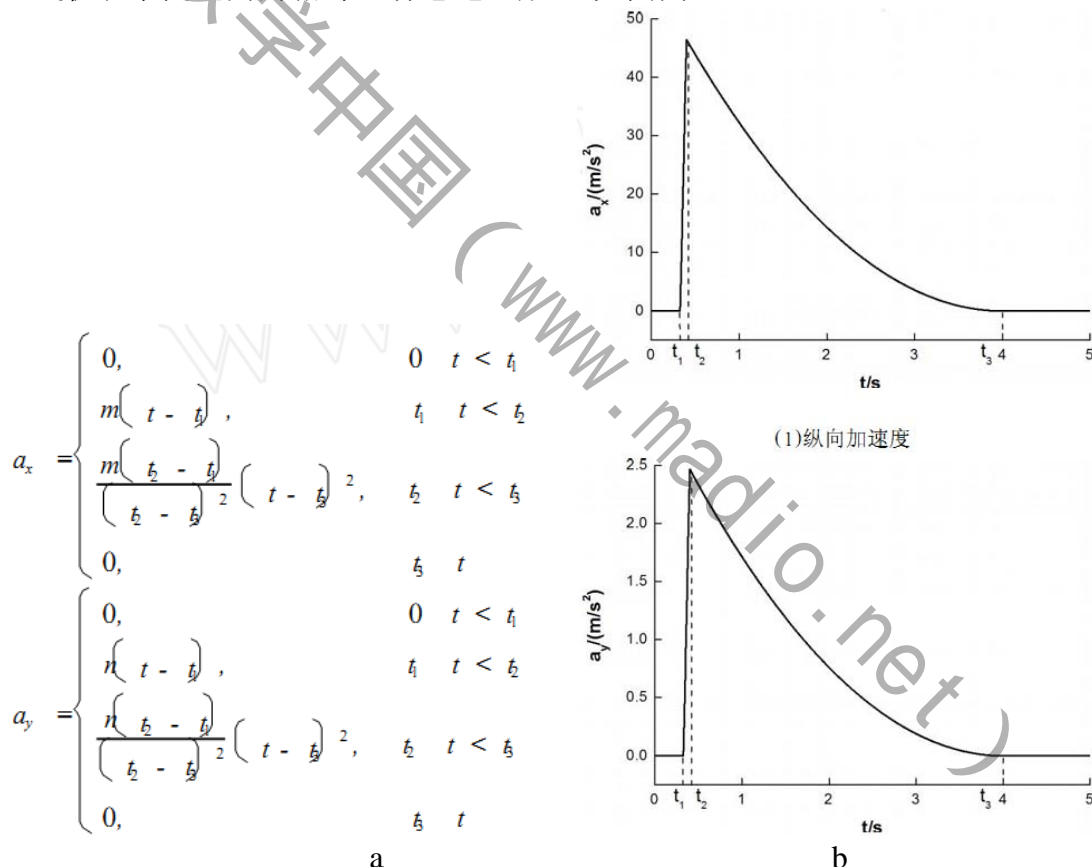
附录一：

对 F 的讨论，将会显得很重要，由于 F 与多种参量有关，且会随时间进行变化。因此研究好 F 的变化情况，对于整个建模比较重要。对于飞机落水过程，可分解为竖直方向上和水平方向上，因此原入水运动可理想的看成这两种高速轰击水面运动的叠加。因此，从某一个分量方向开始分析，显得有利于简化复杂的思路。

首先，经查阅文献得知以下规律规律【2】

- 1) 水平高速运动的物体碰击水面后并不像常规想象那样直接进入水中很快停止下来，而是沿 Y 方向会被水面多次弹起，而且弹起的高度还较大；
- 2) 水平方向高速运动的物体第一次与水面接触碰撞时，将损失掉绝大部分动能，并且沿 X 方向的动量也将损失掉绝大部分；
- 3) 高速运动的物体第一次与水面碰撞时，其沿 Y 方向的瞬时加速度较大，且要承受非常大的瞬时碰击压力。

根据 Winn and Kohlman 的研究成果，使用 VOF 方法捕捉自由水面，利用动网格技术处理飞机和水面之间的相对运动【3】可知（见图四）：



a 图是得出的水上迫降过程中可取飞机加速度随时间变化的表达式：

b 图是在某种条件下横、纵向加速的变化情况，可以看出加速度在撞击的那一瞬间，即在 t_1 到 t_2 的 Δt 内，水对飞机的作用力产生突变，然后作用力以近似抛物线的曲线快速下降至某一稳定值与重力平衡，使加速度为 0。

前面我们也说过，可用 r 根据构造的机尾函数表示出贴于水面的面积，并且此面积也应是时间 t 的函数。从理论上说，在瞬间的时候，如右图 Δt 时间内，飞机触水面迅速增加，同时加速度也急速增加，那么我们就可以这样假设当触水面积达到机尾横截面面积最大

参赛队号 # 1135

值时， F 也会达到最大值。由于这是在 0.1 到 0.3s 的极短时间的瞬态，而我们要探讨的也只是这种瞬态，故可以这样假设。

由此，我们可以依照上式的形式建立我们 F 力的理想函数模型，进而便于我们进一步求解。得 F 的最大值表达式：

$$F_{\max} = F_{y_{\max}} \cos \theta + F_{x_{\max}} \sin \theta = \left(\frac{2v_{\text{初}} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{\text{初}} \sin \beta}{\sin \theta} \right) m_{\text{总质量}}$$

进而求出此时总力矩：

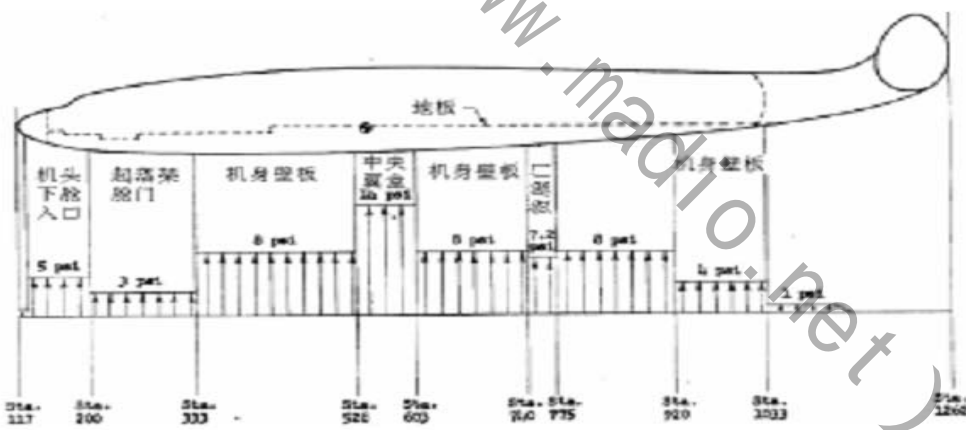
$$\begin{aligned} M_{\text{总max}} &= \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} F_{(v_{\text{初}}, r, \alpha, \theta, t)_{\max}} dr = \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} \frac{F_{\max}}{r'} r_F dr_F \\ &= \int_{\frac{1}{2}l-r'}^{\frac{1}{2}l} \frac{\left(\frac{2v_{\text{初}} \cos \beta}{\cos \theta} + \frac{2v_{\text{初}} \sin \beta}{\sin \theta} \right) m_{\text{总质量}}}{r'} r_F dr_F \end{aligned}$$

因为我们原来考虑到与 F 有关的参量有： $v_{\text{初}}$ 、 r 、 θ 、 t 以及水的各种参数 α ，但由于合理地借用了模型，水的参数已被考虑在模型中，只需 $v_{\text{初}}$ 和 θ 给出的初值即可。

以上，是关于 F 的论证部分。

附录二：

飞机底部强度估计示意图：



飞机材料的极限负荷：

材料牌号	E /MPa	μ	σ_{cy} /MPa	σ_b /MPa
进口 2024-T3	73780	0.33	276	453
进口 7075-T62	72400	0.33	468	
国产 2024-T4	73780	0.33	320	448
国产 7075-T62	72400	0.33	468	531
国产 7075-T6	72400	0.33	468	531

参赛队号 # 1135

附录三：

Matlab 代码

第一步：

 $\theta=2^\circ、4^\circ、6^\circ、8^\circ、10^\circ、12^\circ$ 时，下中“o”表示 θ

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=2*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=156.7;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*((2*v*cos(b))/cos(o)+(2*v*sin(b))/sin(o))/(R*t))*log
(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+1/2)*cos(o);
plot(r,f,'o')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

第二步：

 $v_{初}=50\text{m/s}、100\text{m/s}、150\text{m/s}$

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=11*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=50;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*((2*v*cos(b))/cos(o)+(2*v*sin(b))/sin(o))/(R*t))*log
(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+1/2)*cos(o);
plot(r,f,'o')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

 $\theta=5^\circ$ 时

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=5*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=156.7;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+1/2)*co
s(o);
plot(r,f,'o')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

 $\theta=10^\circ$ 时

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=10*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=156.7;

```

参赛队号 # 1135

```

f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'o')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')
 $\theta=15^\circ$  时
m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=15*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=156.7;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'o')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

第二步：

 $v_{初}=50\text{m/s}$

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=11*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=50;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'+')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

 $v_{初}=100\text{m/s}$

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=11*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=100;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'+')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')

```

 $v_{初}=150\text{m/s}$

```

m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=11*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=150;

```


参赛队号 # 1135

```
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'+')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')
v初=200m/s
m=70000;
t=0.05;
l=33.84;R=8.865;
r=-1/2:0.2:1/2;
o=11*pi/180;b=88*pi/180;
sp=m/l;
g=9.8;
v=200;
f=1/2*(r.^2-l^2/4)*sp*(2*v*cos(b)/(R*t))*log(1/(2*(1/2-R)))-sp*g*(r+l/2)*cos(o);
plot(r,f,'+')
xlabel('r/m')
ylabel('fn/N')
```