

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：A 题组

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）

#1858

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降时的姿态
关 键 词 遗传算法 量纲法 四阶振动偏微分方程 神经网络

摘 要

本题要求我们分析在风浪条件下，飞机在海面迫降相对安全的姿态和航向。通过对问题的细致分析，本模型利用攻角 θ （触海瞬间速度方向和海平面的夹角）和仰角 φ （触海瞬间机身和海平面的夹角）来描述飞机迫降的姿态。

为了确定飞机迫降的最佳攻角 θ ，我们建立了宏观的运动学模型：

1. 我们假设飞机的迫降轨迹可以用多项式描述。
2. 通过受力分析，得到飞机入水后的运动学方程，并进一步定量求解出飞机最大入水深度和飞机迫降轨迹的关系。
3. 最后利用遗传算法，计算出最佳迫降轨迹的多项式参数，进而得到飞机迫降的最佳攻角。

为了求解飞机海面迫降的最佳仰角 φ ，我们建立了机壳的微观振动模型：

1. 为了简化海面风浪的波动情况，我们采用量纲法，证明在飞机和海面接触的过程中，海水对飞机的作用可以等效为一个弹簧，其弹性系数与飞机的仰角及风浪大小有关。
2. 我们利用弹性力学的知识，建立了机壳振动的四阶偏微分方程，并结合量纲法的结论，确定该定解问题的边界条件，进而求解出飞机迫降时不同仰角时，各个机舱的振幅情况。
3. 最后利用 Hopfield 神经网络的联想记忆功能，从 6 个可能的仰角中选出了飞机海面迫降的最佳仰角。

综上所述，我们确定了飞机在海上迫降的最佳姿态，其攻角 $\theta = 15.9^\circ$ ，仰角 $\varphi = 10^\circ$ 。

本模型在评价紧急迫降的安全性时，既考虑到宏观的运动，也考虑到微观的振动，评价全面，思维严密；在简化海面波动情况时，本模型利用量纲法，建立各物理量间的关系，避免过于复杂的推导，结果直观；在对四阶偏微分方程的求解中，本模型引入了广义最小二乘的方法求解系数，实现了算法创新；此外本文还采用人工智能进行优化求解，结果稳定可靠，实现方便。

参赛队号 #1858

所选题目 A 题

参赛密码

(由组委会填写)

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

Abstract

The problem under discussion requires us to analyze the relatively safe attitude and heading when the aircraft makes a forced landing at sea in the storm. After detailed analysis of the problem, the model uses the angle of attack θ (the angle between the speed direction and the sea level at the point of sea-touching) and the angle of elevation φ (the angle between the fuselage and the sea level at the point of sea-touching) to describe the attitude of the forced landing.

In order to determine the optimal angle of attack when the aircraft makes a forced landing, we have established a macro kinematic model:

1. We assume that the trajectory of the aircraft landing can be described by polynomial;
2. Through the force bearing analysis, we obtain the kinematical equation of the aircraft water-entry, and further, we quantitatively solve the relationship between the maximum depth of the aircraft water-entry and the trajectory of the aircraft landing;
3. Finally, genetic algorithm is employed to calculate the polynomial parameters of the optimal landing trajectory, and then, the best angle of attack of aircraft landing is obtained.

In order to solve the optimal angle of elevation when the aircraft makes a forced landing, we have established a micro vibration model for the frame:

1. To simplify the volatility of waves, we use dimensional method to prove that in the process of the aircraft contacting with the sea surface, the function of the seawater that acts on the airplane can be equivalent to a spring, and its elastic coefficient is in connection with the aircraft's elevation;
2. The knowledge of elastic mechanics is used to build a fourth-order partial differential equation for the frame vibration. Based on the conclusions of the dimensional method, we determine the boundary conditions of the definite solution, and then solve the vibration amplitude of every cabin when the aircraft makes a forced landing at a different angle of elevation;
3. Finally, on account of associative memory functions of the Hopfield neural network, we select the best angle of elevation from the 6 possible ones for the aircraft to make a forced landing at sea.

In summary, we identify the best attitude of a forced landing at sea, with its angle of attack being $\theta = 15.9^\circ$ and the angle of elevation being $\varphi = 10^\circ$.

In terms of evaluating the safety of emergency landing, both the macro movement and micro-vibration have been taken into consideration. The evaluation is comprehensive and the thinking is rigorous. When simplifying the volatility of waves, the model applies dimensional method to establish the relation between various physical quantities, for the sake of forming intuitive results and avoiding overly complex deduction. Besides, in solving the fourth-order partial differential equation,

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-5220129

网址：www.tzmcm.cn

邮编：010021

Email: 2011@tzmcm.cn

the model introduces the Generalized Least Squares method to solve the coefficient, and thus, the algorithm innovation is realized. Furthermore, the artificial intelligence is used for optimization. So, the result is reliable and easy to achieve.

数学中国提供 (www.madio.net)

客机水面迫降时的姿态

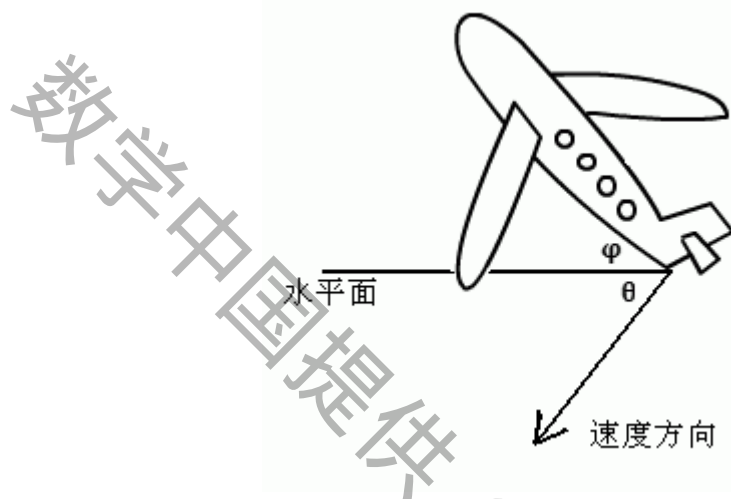
目录

1. 问题的重述.....	2
2. 问题的假设.....	2
3. 变量说明.....	2
4. 模型的求解.....	3
4.1 攻角的求解	3
4.1.1 飞机入水之前的轨迹的计算.....	3
4.1.2 飞机入水之后轨迹的计算.....	3
4.1.3 遗传算法求解.....	5
4.2 仰角的求解	11
4.2.1 量纲法求解.....	11
4.2.2 四阶振动.....	13
4.2.2.1 长圆柱体的四阶振动方程.....	13
4.2.2.2 方程的通解.....	15
4.2.2.3 定解的边界条件.....	15
4.2.2.4 利用初始条件求定解.....	17
4.2.2.5 机体振动对迫降安全性的评估.....	18
4.2.3 离散的 Hopfield 神经网络.....	19
4.2.3.1 离散的 Hopfield 神经网络简介.....	20
4.2.3.2 本题与 Hopfield 神经网络相结合.....	21
5. 模型的优缺点.....	24
6. 参考文献.....	25
7. 附录.....	26

1. 问题的重述

2009 年，空客 A320 在哈德逊河上成功迫降，挽救了机上 155 人的生命。面对现在跨海航空业的蓬勃发展，在失去动力时，如何更安全的实现水面迫降，最大限度的保护乘客的生命是一个具有重大意义的课题。

本题要求我们在第一阶段研究飞机在平静水面迫降的最佳姿态的基础上，考虑风浪对实际迫降的影响，深化和改进模型，重新确定飞机迫降相对安全的姿态。通过对题目的分析，我们将飞机迫降的姿态归纳为两个参数，如下图所示



仰角 φ ：飞机迫降的时候，飞机主体和水平面的夹角。

攻角 θ ：迫降接触水面的瞬间，飞机速度方向和水面的夹角。

建立合适的数学模型，计算在不同攻角和仰角的情况下，飞机的运动轨迹，受到的冲击力和机体振动的情况，以此来评价迫降的安全性，从而选择出最佳的迫降姿态。

2. 问题的假设

1. 海水冲击飞机机体之后速度减为零。
2. 不考虑海水的粘滞阻力。
3. 由海风引起的海面波动成正弦波动，且波速一定。
4. 海水密度、正弦波的角频率均为常数。
5. 在对机体进行振动分析时，将飞机的外形近似为长圆柱体，忽略机翼对于飞机主体振动的影响
6. 长圆柱体振动的四阶偏微分方程的通解为驻波形式，即可以将通解分解为一个时间因子和空间因子相乘的形式。
7. 遗传算法和离散 Hopfield 神经网络均能收敛，结果稳定。

3. 变量说明

θ	攻角（飞机速度与海平面的夹角）
Φ	仰角（飞机机身与海平面的夹角）
E	杨氏模量

参赛队号#1858

I	截面绕截面中垂直于棒轴转动的惯性矩,它取决于截面的形状和轴的位置
$Y(x)$	长圆柱体质点驻波振幅分布函数
$\Psi(x)$	迫降瞬间飞机主体质点振速的分布函数
v_0'	飞机入射到海面时的速度
w_{ij}	神经网络的权系数
E	神经网络的能量函数

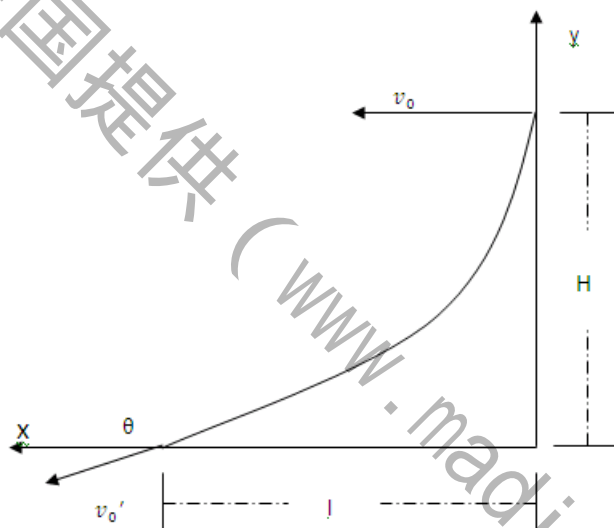
4. 模型的求解

4.1 攻角的求解

4.1.1 飞机入水之前的轨迹的计算

首先我们假定飞机遭遇事故之前只具有水平速度,出现故障之后,机长试图对飞机减速,我们假定其具有三次方程的形式

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



为了求解出方程,我们作如下边界方程的设定

$$\begin{cases} x = 0, & y = H \\ x = 0, & y' = 0 \end{cases}$$

此时飞机入水时的角度为 θ ,与曲线参数有如下关系

$$\begin{aligned} y' &= \tan\theta \\ y' &= 3ax^2 + 2bx + c \end{aligned}$$

我们假定水平方向速度不变,则最终入水速度为

$$v_0' = \frac{v_0}{\sin\theta} = \frac{v_0}{3ax^2 + 2bx + c} \sqrt{(3ax^2 + 2bx + c)^2 + 1}$$

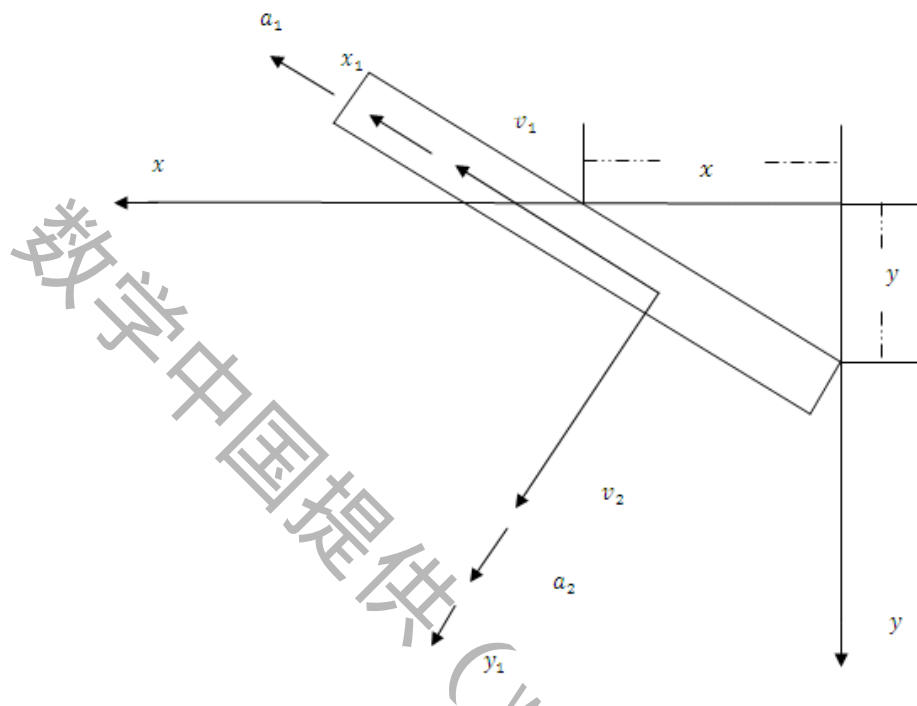
$$\theta = \arctan(3ax^2 + 2bx + c)$$

这样我们便得到了入水速度和角度与曲线参数之间的关系,为下文入水之后轨迹的求解奠定了基础。

4.1.2 飞机入水之后轨迹的计算

为了简化模型,我们首先假定飞机的仰角为零(具体求解在下文中给出),

而飞机入水之后具有如下姿态，机身仰角为 θ ，延机身方向和垂直机身方向上的坐标、速度、加速度分别如图所示，此时飞机和水面的接触点与坐标原点的距离为 x ，飞机尾部与坐标原点的距离为 y ，飞机横截面积为 s_1 ，横向宽度为 l ，我们分别可得到延机身方向和垂直机身方向的动力学方程。



一、延机身方向上：

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{(\rho g y s_1 - m g \sin \theta)}{m}$$

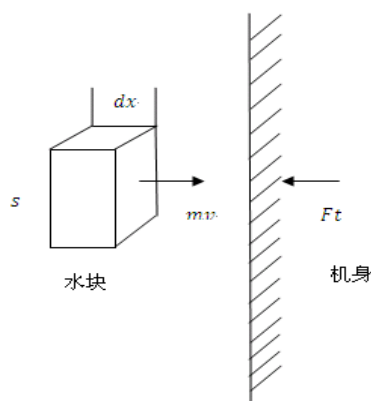
二、垂直机身方向上：

在此方向上受到两个力：一是水的静水压强，二是水的冲击压强，两者均不可忽略。

(1) 静水压强：

$$p_1 = \frac{\rho g y_1}{2 \cos \theta}$$

(2) 冲击压强：假定水冲击飞机之后速度变为零，由动量定理可知



$$Fdt = mv = \rho s dx v_2$$

$$p_2 = \frac{F}{s} = \rho v_2^2$$

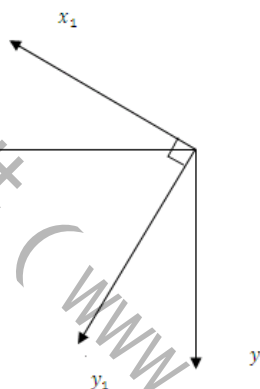
根据上式写出垂直方向上的动力学方程

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{mg \cos \theta - (\rho v_2^2 + \frac{\rho g y_1}{2 \cos \theta}) \frac{x}{\cos \theta} l}{m}$$

综合以上分析过程我们可以得到以下动力学方程：

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{(\rho g y s_1 - m g \sin \theta)}{m} \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{m g \cos \theta - (\rho v_2^2 + \frac{\rho g y_1}{2 \cos \theta}) \frac{x}{\cos \theta} l}{m} \\ \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \end{cases}$$

根据坐标变化得到地面坐标系



$$\begin{cases} x = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$$

将上式代入即可得到最终要求解的方程，求解以上方程的初始值由飞机入水之前的轨迹得到，这样在知道轨迹的前提下，我们便能求解出飞机入水之后的方程，进一步知道飞机的最大吃水深度，为下文遗传算法的求解提供了条件。

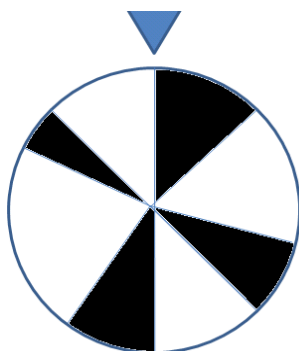
4.1.3 遗传算法求解

以上两步均在知道飞机入水之前轨迹的基础上进行求解，若不知道轨迹，一切将成为空谈。因此我们采用遗传算法寻找最优曲线。做法如下：我们假定曲线方程具有如下形式 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，其中的参数未知，于是我们在可行的范围之内随机选择大量的可行参数 a, b, c, d ，（我们将其称为初始种群，具有大量、随机的特点），每一组参数对应一个曲线方程，我们计算出每个方程对应的最大吃水深度，仿照大自然“优胜劣汰”的生物进化规律，吃水深度小的个体被选择，吃水深度大的个体被淘汰，再通过交叉、变异、重组等操作得到新的个体，重复迭代直至整个种群演化成最优群体，其绝大部分的个体具有最小吃水深度，这就是我们要找的最优解。这就是遗传算法的基本实现过程，具体算法如下：

(1) 选择

选择即从一群个体当中选择具有优秀品质的个体，其目的是把优化的个体(或解)直接遗传到下一代或通过配对交叉产生新的个体再遗传到下一代，个体选

择的评价标准是基于适应度函数的基础上的，适应度函数的大小决定了被选择的概率。我们采用的时轮盘赌的方法，在此方法当中，各个个体被选择的概率与适应度值大小成正比，就像转轮盘一样，面积越大，转到的概率就越大。如下图所示



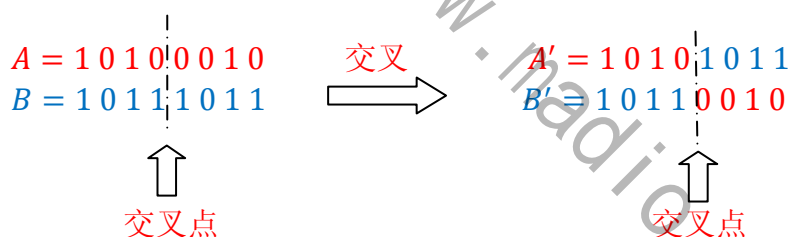
被选择的概率为

$$f_i = \frac{k}{F_i} \quad P_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_i}$$

(2) 交叉

交叉是把两个父代个体的部分结构加以替换重组而生成新的个体的操作。在自然界生物进化过程中起核心作用的是生物遗传基因的重组和变异，与其类似通过交叉，遗传算法的搜索能力得以大大的提高。

最常用的交叉的方式就是单点交叉，本文在实现算法上也采用单点交叉。具体操作在个体串中随机设定一个交叉点，实行交叉时，该点前或后的两个个体的部分结构进行互换，并生成两个新个体，如下图所示：



交叉操作方法采用的是实数交叉法，第 k 个染色体 a_k 和第 l 个染色体 a_l 在 j 位的交叉操作方法

$$\begin{aligned} a_{kj} &= a_{kj}(1-b) + a_{lj}b \\ a_{lj} &= a_{lj}(1-b) + a_{kj}b \end{aligned}$$

(3) 变异

与染色体中基因变异类似，变异操作是对群体中个体的某些基因值作变动，就目前的算法而言，就是把基因值取反。

变异算法的目的有二：一是使遗传算法具有局部的随机搜索能力。当遗传算法通过交叉算子已接近最优解邻域时，利用变异算子的这种局部随机搜索能力可以加速向最优解收敛。显然，此种情况下的变异概率应取较小值，否则接近最优解的积木块会因变异而遭到破坏。二是使遗传算法可维持群体多样性，以防止出现未成熟收敛现象。此时收敛概率应取较大值。具体操作如图所示：

$A = 1010\mathbf{0}010$

↑
突变点

如上述算法描述采用实数变异法

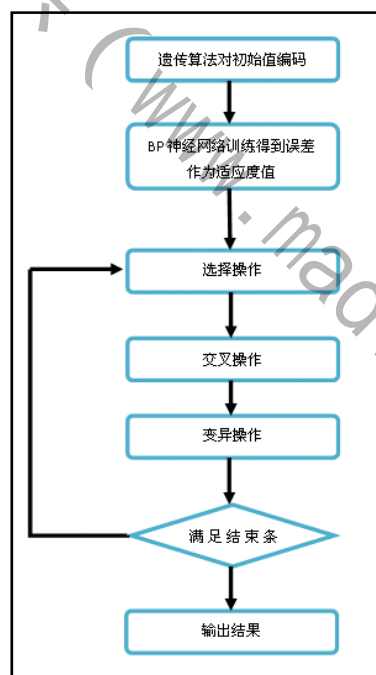
$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + (a_{ij} - \max(a)) \times f(g) & r > 0.5 \\ a_{ij} + (\max(a) - a_{ij}) \times f(g) & r < 0.5 \end{cases}$$

$$f(g) = r_2(1 - \frac{g}{G_{max}})^2$$

(4) 循环

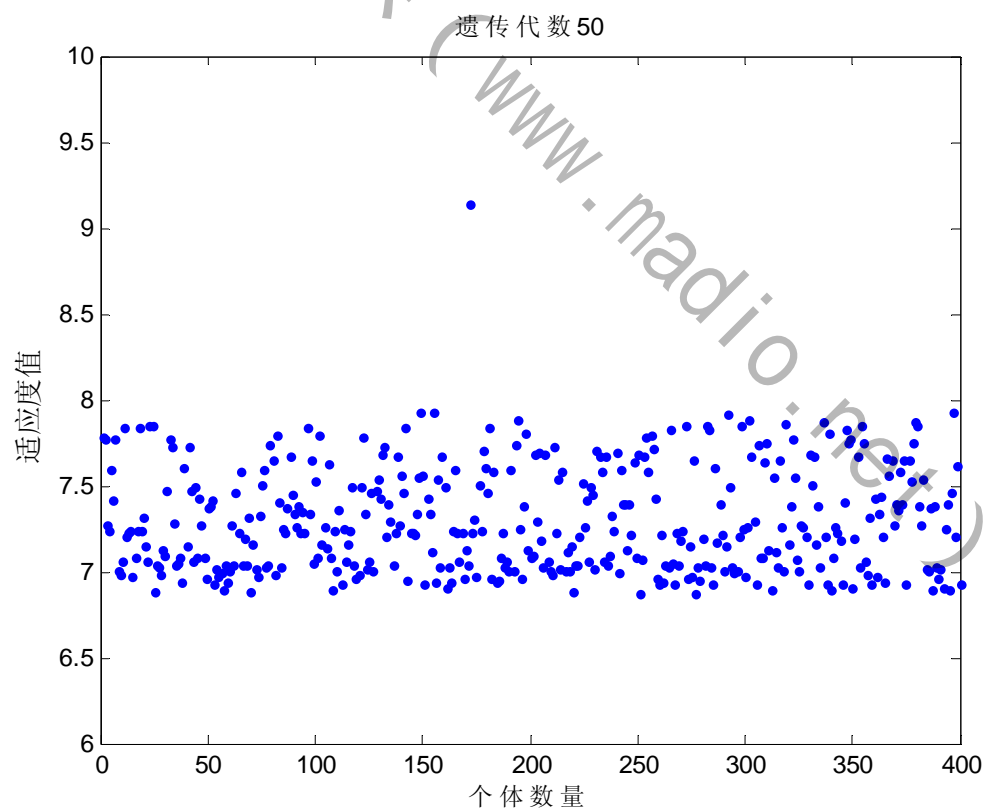
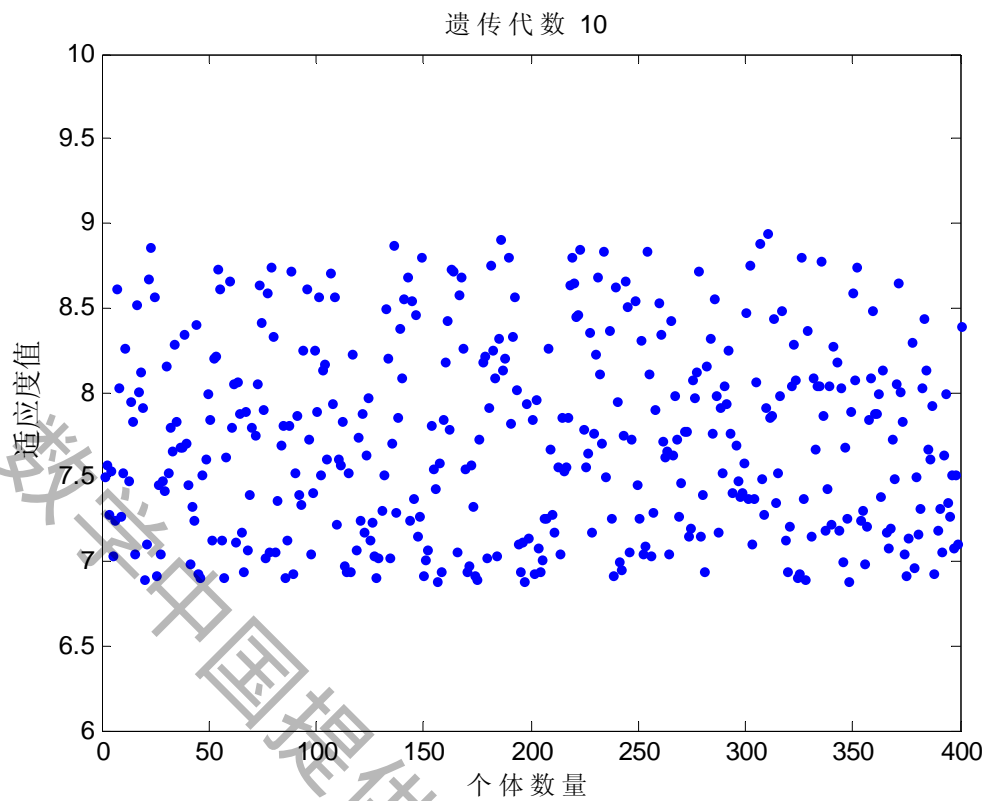
遗传算法是一个不断重复迭代,不断寻优的一个过程,但经过上面几步之后,将会再次计算适应度值,当最优个体的适应度值达到给定阈值时,或者最优个体的适应度和群体适应度不再上升时或是迭代次数达到与设定值时,循环终止并输出结果。

具体流程图为:

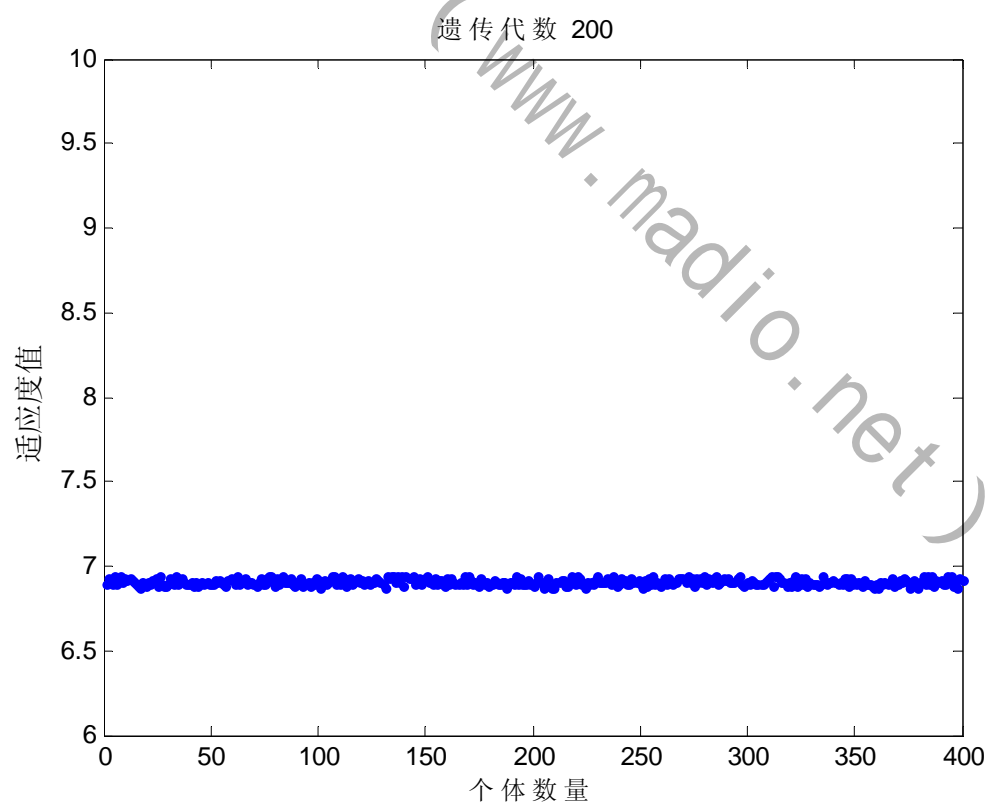
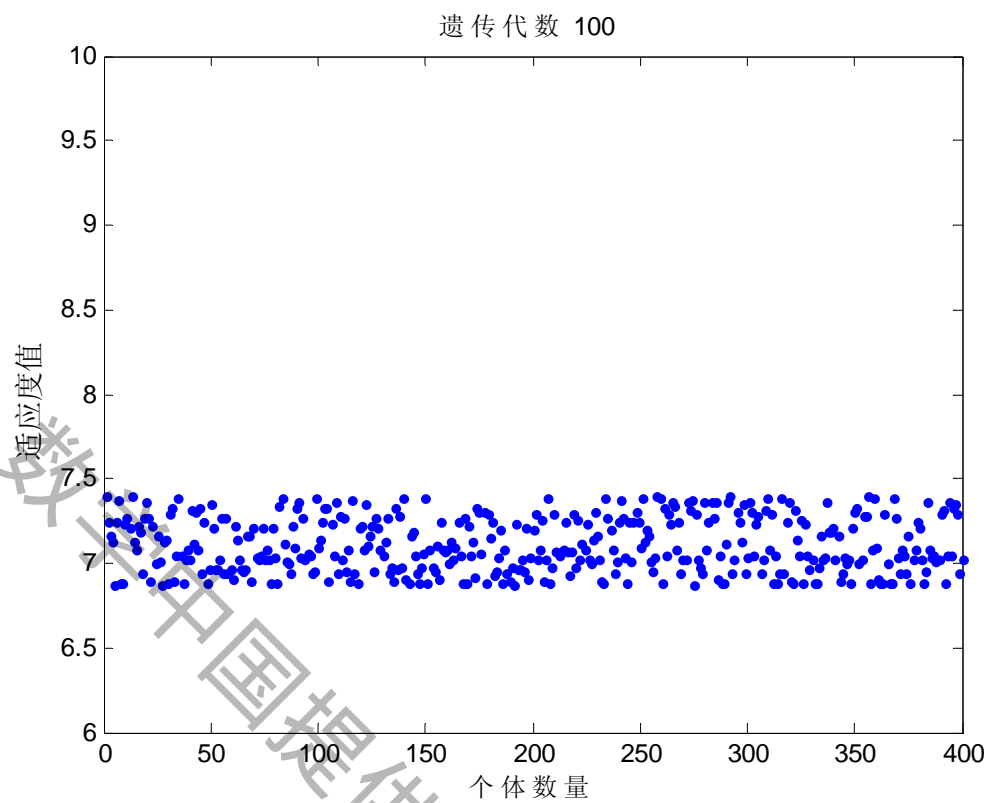


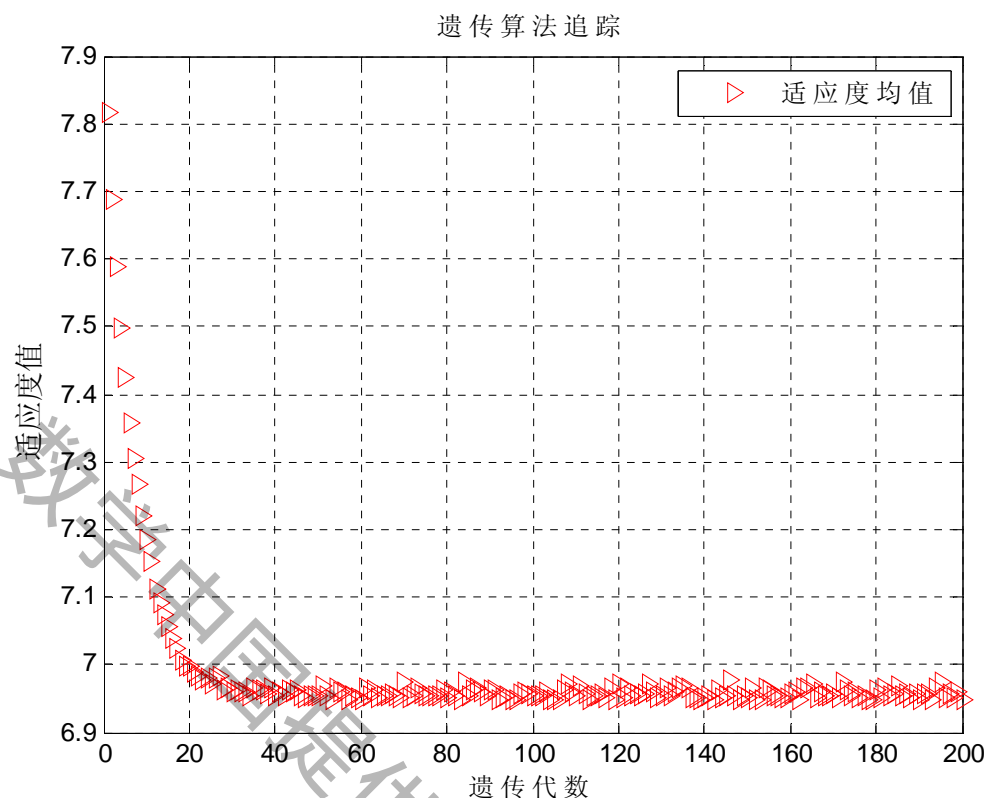
根据以上思想,我们编写了程序,由计算机仿真的到以下进化结果

参赛队号#1858



参赛队号#1858





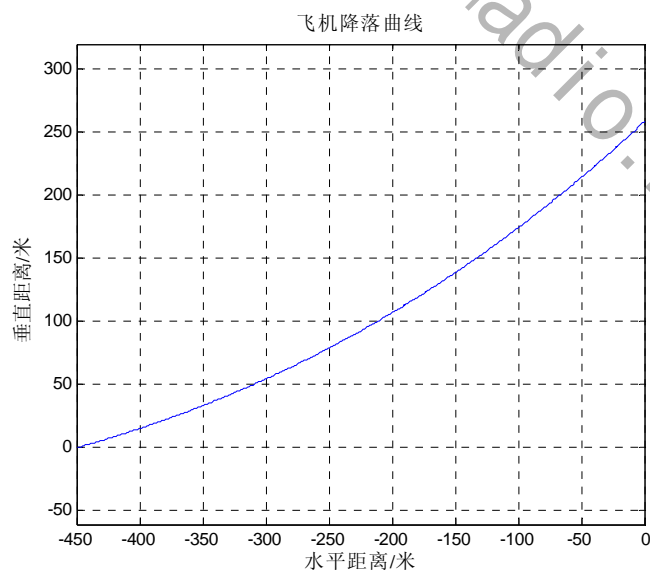
由上曲线和仿真结果可得到最大吃水深度、飞机攻角的最佳值和曲线方程

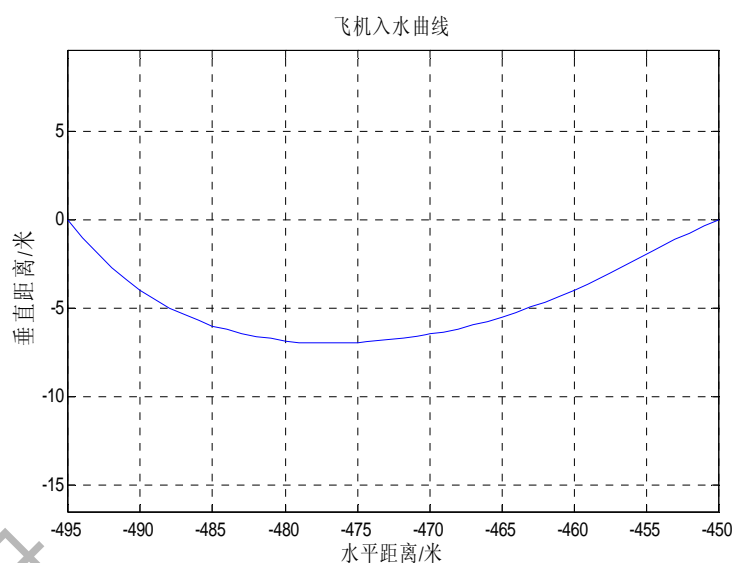
$$H_{max} = 6.951 \text{ 米}$$

$$\theta = 15.9^\circ$$

$$y = 3 \times 10^{-7}x^3 + 9.291 \times 10^{-4}x^2 + 0.9329 \times x + 300$$

最终得到飞机的降落曲线和入水曲线

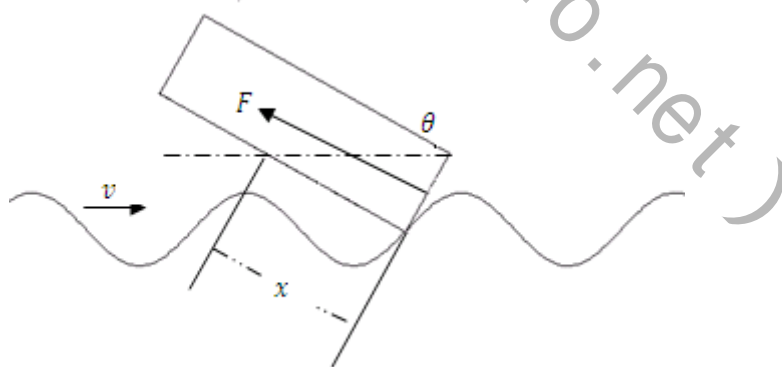




4.2 仰角的求解

4.2.1 量纲法求解

带波浪的海面，情况复杂，较难描述其具体波动情况，再加上要研究飞机撞击海面的具体过程，更是难上加难。为了简化问题，我们假设海面呈现正弦波动情况，并且由于海风的影响具有水平速度，在这个假设的前提下，正弦波让我们联想到弹簧的简谐振动，为了将其等效，我们试图找出两者之间的联系。首先我们应该先确定参变量之间的关系，飞机尾部的入水深度 x ，尾部受力 F ，飞机入射角 θ ，海面波动角频率 ω ，海水密度 ρ ，风浪引起的波速 v 。



若采用普通物理方法求解实现难度较大，于是我们采用量纲分析的方法来求解他们之间的关系，因为无论物理量之间的关系多么复杂，他们的量纲必须是一致的，再通过适当的简化模型得到最终的理想结果，以下是量纲分析法的具体过程：

首先我们选用了以下参变量，飞机尾部的入水深度 x ，尾部受力 F ，飞机入

参赛队号#1858

射角 θ , 海面波动角频率 ω , 海水密度 ρ , 风浪引起的波速 v , 并试图找到他们之间的关系。我们选取了四个量纲: 长度 L , 时间 T , 质量 M , 弧度 R , 我们可以得到以下表达式。(其中弧度本来没有量纲, 但飞机入射角度一定和结果有关, 为了找寻他们之间的关系, 加上了弧度)

$$[v] = L^{-1}T \quad [\rho] = ML^{-3} \quad [\omega] = RT^{-1} \quad [\theta] = R \quad [F] = MLT^{-2} \quad [x] = L$$

这些参量的任何乘积一定具有如下形式

$$v^a \rho^b \omega^c \theta^d F^e x^f$$

而且一定具有量纲

$$(L^{-1}T)^a (ML^{-3})^b (RT^{-1})^c (R)^d (MLT^{-2})^e (L)^f$$

而且它们的乘积是无量纲的, 我们可以得到以下方程组

$$\begin{cases} L: a - 3b + e + f = 0 \\ T: -a - c - 2e = 0 \\ M: b + e = 0 \\ R: c + d = 0 \end{cases}$$

我们可以得到其矩阵表达式

$$A_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将其化成矩阵的最简形式

$$A_{4 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的秩为 4, 因此方程必有 $6 - 4 = 2$ 个解

$$Ay = 0, \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T$$

我们令 $y_5 = 0, y_6 = 1$ 得到一个基础解 $y = (-1, 0, 1, -1, 0, 1)^T$; 我们再令 $y_5 = 1, y_6 = 0$, 得到另一个基础解 $y = (-4, -1, 2, -2, 1, 0)^T$, 这些解给出了无量纲乘积

$$\prod_1 = \frac{\omega x}{v}$$

$$\prod_2 = \frac{F \omega^2}{v^4 \rho \theta^2}$$

由 *Buckingham* 定理, 我们可知一定存在一个方程使下式成立

$$\psi\left(\frac{\omega x}{v}, \frac{F \omega^2}{v^4 \rho \theta^2}\right) = 0$$

为了简化计算和寻找各物理量资金案的关系, 我们作如下假设

$$\Phi\left(\frac{\omega x}{v}\right) \times \vartheta\left(\frac{F \omega^2}{v^4 \rho \theta^2}\right) = c$$

其中 c 为无量纲参量, 再次以线性处理简化模型

$$\frac{\omega x}{v} = c \times \frac{F \omega^2}{v^4 \rho \theta^2}$$

将上式化简可得

$$F = \frac{cv^3 \theta \rho}{\omega} x$$

在海面上许多因素不确定，在有大量统计规律的前提下，这些参数定为常量，我们令 $\frac{cv^3 \theta \rho}{\omega} = k$ 将上式化简得

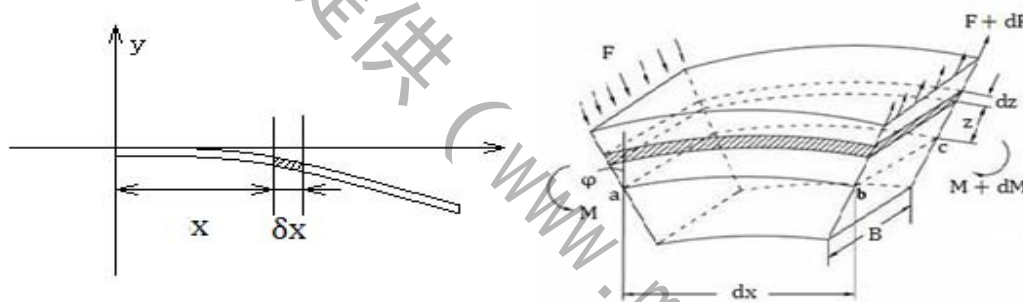
$$F = kx$$

由上式可得出飞机尾部的压力与飞机尾部进入水面的深度成正比，就冲撞瞬间而言，我们可以将这个系统等效为弹簧系统进行研究。

4.2.2 四阶振动

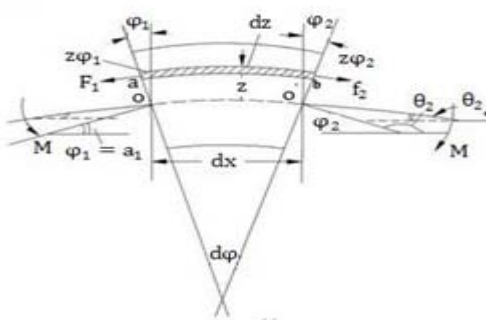
4.2.2.1 长圆柱体的四阶振动方程

当棒体发生如下的弯曲的瞬间，建立如下坐标系，取长度微元 δx 。该微元两端的弯曲形变不等，所以受到的力矩也不相等，设为 M 和 $M + \delta M$ 。两端截面的切应力为 F 和 $F + \delta F$ ，如图所示：



在静止的时候， $abcd$ 面在平面 xoz 上，并且和 y 轴垂直。我们这样假设，在中间某层 $abcd$ 面只发生了形状的变化，但是面积的大小没有变，我们称这个面为中和面。而与中和面平行的面除了发生弯曲外，还发生了形变。如图所示，在中和面 $abcd$ 以上的介质伸长，而其下的介质被压缩。又假设微元的形变是均匀的，整个截面围绕 y 轴转动，但是截面的形状没有变化。

首先看任意一个平行于中和面的薄层。假设它的中和面为 z ，厚度为 δz ，宽度为 B （不变），则作用的面积 $ds = Bdz$ 的截面的长度的应变力如下图所示



$$f_z = E \frac{z \Delta \phi}{\Delta x}$$

E ：杨氏模量。

$z \Delta \phi$ ：长条 ab 伸长的数值。

可以计算出作用在 ds 的力为

$$f_z ds = E \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \cdot z ds$$

这个力对于以 O 点的中心线为轴的力矩为

$$dM = f_z ds \cdot z = E \frac{\Delta \phi}{\Delta x} I$$

I ：截面绕截面中垂直于棒轴转动的惯性矩。它取决于截面的形状和轴的位置。

对于我们求解的长圆柱体的截面 $I = \frac{\pi a^4}{4}$ 。

从上图可知，截面旋转偏角 ϕ_1 取决于倾角 θ_1 。由于振动的位移很小，所以偏角也非常小，于是可以得到这样的近似

$$\phi_1 = \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x$$

同理可得

$$\phi_2 = \pi - \theta_2 \approx -\tan \theta_2 = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

于是微元的弯曲形变的角

$$\Delta \phi = \phi_1 + \phi_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \Delta x = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \Delta x$$

所以 $\frac{\Delta \phi}{\Delta x} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ ，然后将此式代入上面的式子，可以得到圆柱体任意截面上的力矩

$$M = -EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

如果截面很小，则绕 oy 轴的转动可以忽略，一是作用于小段 δx 的合力矩为零，即切应力的力矩和弯曲力矩平衡

$$(M + \delta M) - M = [(F + \delta F) + F] \frac{\delta x}{2}$$

忽略高阶小量， $\delta M = F \delta x$

$$F = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

η 上的净力为

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x = -EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \delta x$$

我们可以利用牛顿第二定律得到运动方程

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -a^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}$$

a 是长圆柱体本身的参量

$$a = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

4.2.2.2 方程的通解

假设方程的解为驻波解，即解中的时间因子和空间因子可以分开，并且时间因子为简谐振动，则通解可以写为下式

$$\eta(x, t) = Y(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

$Y(x)$:长圆柱体质点驻波振幅分布函数。

将通解表达式带入四阶振动方程，可以得到

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 Y = 0$$

常系数线性微分方程式的普通解具有形式 $Ce^{\delta x}$ ，可以得到特征方程

$$\delta^4 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 = 0$$

所以

$$\delta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a}}, \quad \pm j \sqrt{\frac{\omega}{a}}$$

可以求出一般的通解为

$$Y(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{a}}x} + C_3 e^{j\sqrt{\frac{\omega}{a}}x} + C_4 e^{j\sqrt{\frac{\omega}{a}}x}$$

根据三角函数和双曲函数的关系，可以将通解化简为

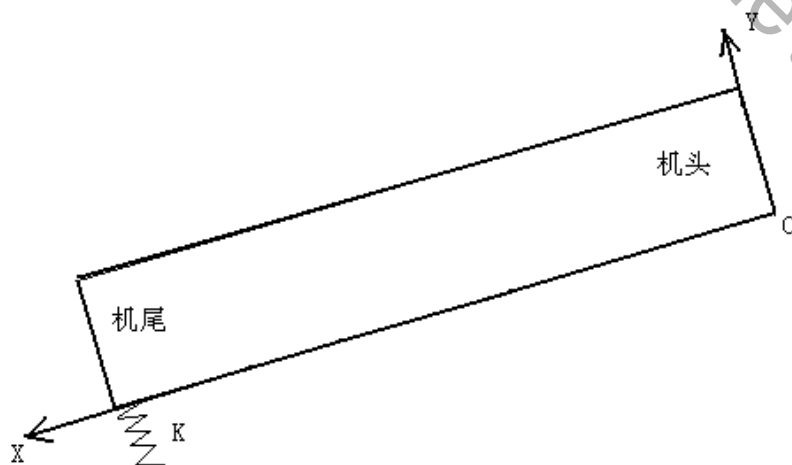
$$Y(x) = A \cosh \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + B \sinh \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + C \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + D \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}}x$$

所以长圆柱体各个质点的振动可以写为

$$\eta(x, t) = \left[A \cosh \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + B \sinh \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + C \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}}x + D \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}}x \right] \cos(\omega t - \varphi)$$

4.2.2.3 定解的边界条件

前面已经证明了，在飞机迫降水面的过程，水面对飞机作用力可以等效为弹性力。可以抽象出下图的物理模型：



如图所示，机头的一端在迫降时朝上，没有受到力的作用，所以可以视为自由端，

数学表示为：

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \left. \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \right|_{x=0} = 0$$

之前已经证明机尾可以等效固定在弹簧上，所以其边界方程为

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0; EI \left. \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \right|_{x=l} = kY(l)$$

我们将边界方程带入之前求出的振幅分布的通解，首先带入机头一端的边界

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= \frac{\omega}{a} \left[Ach \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) + Bsh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) - C \cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) - D \sin \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) \right] = 0 \\ \left. \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \right|_{x=0} &= \left(\frac{\omega}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left[Ach \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) + Bsh \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) + C \cos \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) - D \sin \left(\sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

可以得到结论

$$A = B, C = D$$

可以将式子简化为

$$Y(x) = A \left(ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right) + B \left(sh \sqrt{\frac{\omega}{a}} x + \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} x \right)$$

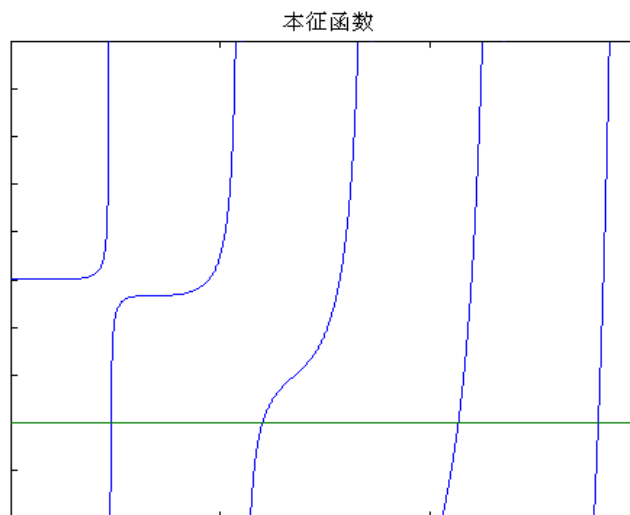
将化简后的式子代入机尾一端的边界条件

$$\begin{aligned} A \left(ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) + B \left(sh \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) &= 0 \\ \left[EI \left(\frac{\omega}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left(sh \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) - k \left(ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) \right] A \\ + \left[EI \left(\frac{\omega}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \left(ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} l - \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) - k \left(sh \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \right) \right] B &= 0 \end{aligned}$$

化简上两式，可以得到该定解问题的本征方程

$$-\frac{k}{EI} = \left(\frac{\omega}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1 - ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l}{ch \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \sin \sqrt{\frac{\omega}{a}} l + sh \sqrt{\frac{\omega}{a}} l \cos \sqrt{\frac{\omega}{a}} l}$$

下图为本征方程的图像，其中两条函数的交点为该定解问题本征值



令 $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{a}}$ ，通过本征方程可以得到一组特征值，用符号 β_n 表示第 n 个特征值。

长圆柱体的横向振幅分布函数可以写成一系列函数求和的形式

$$Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(ch\beta_n x + \cos\beta_n x) + B_n(sh\beta_n x + \sin\beta_n x)$$

4.2.2.4 利用初始条件求定解

给定在飞机迫降接触的水面的瞬间，各点位移分布函数为 $\Phi(x)$ ，质点振速的分布函数为 $\Psi(x)$ ，其数学表达式为

$$\Phi(x) = \cos(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(ch\beta_n x + \cos\beta_n x) + B_n(sh\beta_n x + \sin\beta_n x)$$

$$\Psi(x) = \sin(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [A_n(ch\beta_n x + \cos\beta_n x) + B_n(sh\beta_n x + \sin\beta_n x)]$$

$$0 \leq x \leq l$$

从实际出发，在飞机迫降撞击水面的瞬间，飞机各点受到冲量，产生了质点振速分布，但由于时间太短，速度并没有位移的累积，位移分布为零，所以可以确定 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。上面两个式子可以简化为一个式子

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [A_n(ch\beta_n x + \cos\beta_n x) + B_n(sh\beta_n x + \sin\beta_n x)]$$

$$0 \leq x \leq l$$

由于双曲函数不存在正交性，所以这里不能利用特征函数的正交性来求解系数。在实际中，低阶的本征函数有较大的能量，而高阶的本征函数在能量的贡献比较小，反应在解的形式上，低阶的系数 A 和 B 比较大，而高阶的系数很小。

本模型基于这个特点，利用广义的最小二乘的方法，求解各个本征函数的系数。在 $0 \leq x \leq l$ 上，我们取 M 个点。并且取 N 个谐波。我们可以分别算出各个点的值：

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \beta_n [A_n (ch\beta_n x_1 + \cos\beta_n x_1) + B_n (sh\beta_n x_1 + \sin\beta_n x_1)] &= \varphi(x_1) \\ \sum_{n=1}^N \beta_n [A_n (ch\beta_n x_2 + \cos\beta_n x_2) + B_n (sh\beta_n x_2 + \sin\beta_n x_2)] &= \varphi(x_2) \\ &\vdots \\ \sum_{n=1}^N \beta_n [A_n (ch\beta_n x_M + \cos\beta_n x_M) + B_n (sh\beta_n x_M + \sin\beta_n x_M)] &= \varphi(x_M) \end{aligned}$$

我们定义偏差 Q

$$Q = \sum_{m=1}^M |\Psi(x_m) - \varphi(x_m)|^2$$

我们需要使求得的 $\varphi(x)$ 和给定的初始振速分布 $\Psi(x)$ 最接近，所以要求偏差 Q 最小，利用高等数学的知识可知，就是各个偏分导数为零的地方，即

$$\frac{\partial Q}{\partial A_n} = 0; \frac{\partial Q}{\partial B_n} = 0$$

其中

$$\frac{\partial Q}{\partial A_k} = \sum_{m=1}^M 2 \sum_{n=1}^N [(ch\beta_n x_1 + \cos\beta_n x_1) - \Psi(x_m)] (ch\beta_n x_m + \cos\beta_n x_m) = 0$$

令

$$a_{ij} = \beta_i (ch\beta_i x_j + \cos\beta_i x_j); b_{ij} = \beta_i (sh\beta_i x_j + \sin\beta_i x_j)$$

为了表述方便，我们将上式表达为矩阵形式：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & \dots & a_{1N} & b_{1N} \\ a_{21} & b_{21} & \dots & a_{2N} & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & b_{M1} & \dots & a_{MN} & b_{MN} \end{bmatrix}$$

$$X = (A_1 \ B_1 \ \dots \ A_N \ B_N)^T; b = (\Psi(x_1) \ \dots \ \Psi(x_M))^T$$

方程组可以表示为

$$AX = B$$

可以得到该超定方程的法方程组：

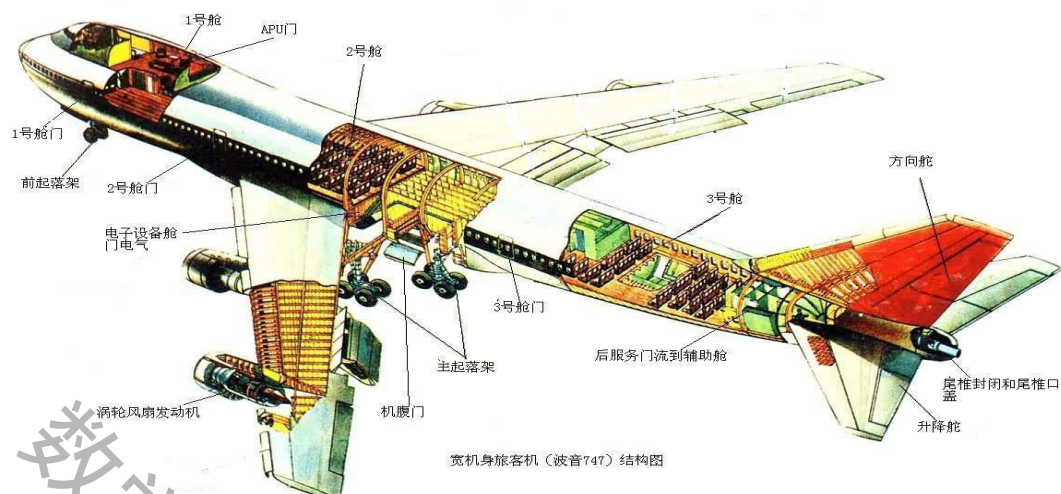
$$A^T AX = A^T b$$

求解该方程组就可以得到各阶本征函数的系数。

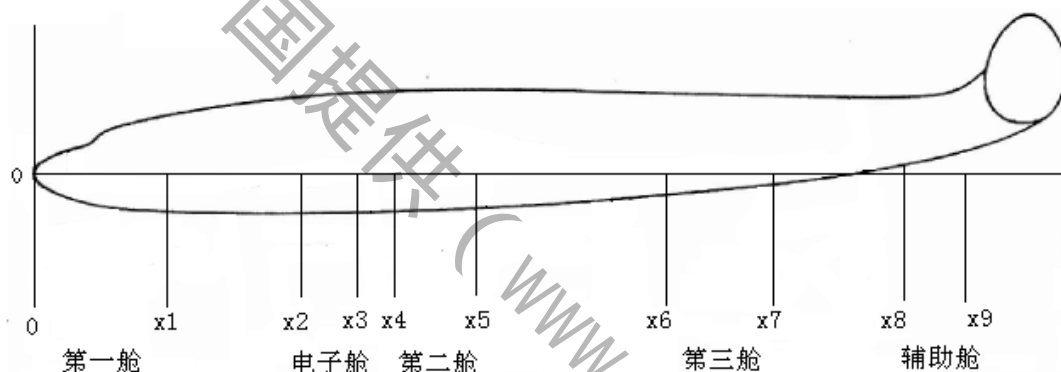
4.2.2.5 机体振动对迫降安全性的评估

当机体的振动幅度超过材料的承受范围的时候，飞机的外壳会发生断裂。在断裂处，会产生剧烈的振动，对人的生命产生巨大的威胁。另外在水上迫降中，机壳的断裂还会造成海水的渗透，加快飞机的沉没。

本模型结合飞机实际的舱位分布，考虑乘客比较集中的位置的振动幅度状况。下图是飞机的结构图



我们根据结构, 将其归纳为乘客密度比较高的三个舱位和具有重要设备和作用两个舱位



以第一舱为例, 我们计算出它的平均位移, 并将其除以机体的最大位移, 进行归一化

$$D_1 = \frac{\int_0^{x_1} Y(x) dx}{x_1 \cdot \max(Y(x))}$$

同理, 我们可以分别计算出另外两个舱位的平均位移

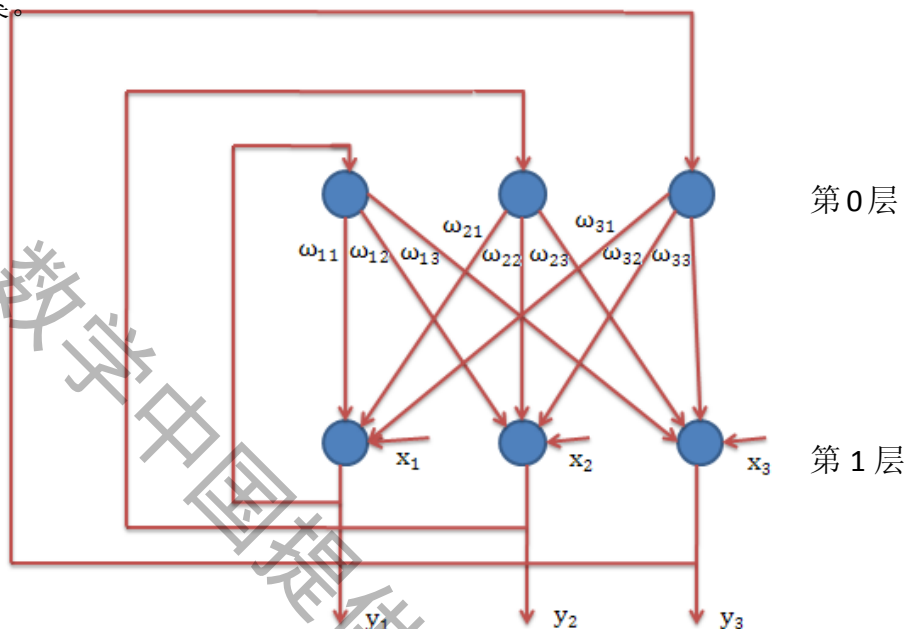
由之前的推理可知, 位移分布函数和 θ 有关。这里, 我们计算出不同仰角的情况下, 不同机舱的归一化平均位移如下表

	第一舱	电子舱	第二舱	第三舱	辅助舱
4	0.568	0.673	0.986	0.423	0.324
7	0.239	0.418	0.561	0.781	0.615
10	0.287	0.183	0.045	0.416	0.300
13	0.897	0.662	0.871	0.347	0.459
16	0.234	0.519	0.138	0.345	0.631
19	0.864	0.783	0.965	0.793	0.624

4.2.3 离散的 Hopfield 神经网络

4.2.3.1 离散的 Hopfield 神经网络简介

由上表格可知在不同的飞机仰角下，各个仓位的受损程度各不相同，而且很难评价那个仓位更重要，也就是说各个仰角各有利弊，这就给方案的选择增加了难度。于是我们利用了离散的 Hopfield 神经网络对方案进行分类，进而得到最优方案。



如上图所示为离散的 Hopfield 神经网络，是一个反馈型的神经网络，他所实现的功能是根据输入参数，不断调整网络参数，以使网络的能量函数达到最小值，就像一个稳定平衡系统一样，当物体稍微离开平衡点时便会向平衡点收敛，也就是说当我们输入一组较为接近输入参数的预测值时，便会向能量最低点收敛，以达到联想记忆的功能。

网络的稳定性

在用离散的 Hopfield 神经网络的联想记忆功能时，我们最关心的就是网络的稳定性了，也就是他能否收敛到最小值点

我们定义：若网络从某一时刻起，以后的状态不翻身变化，则称网络处于稳态。

充分条件：若 Hopfield 神经网络的权系数阵 W 是一个对称矩阵，并且对角线元素为 0，则这个网络是稳定的即

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ w_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

证明：引入 Lyapunov 函数，即所谓的能量函数

$$\begin{aligned} E &= \sum_{j=1}^n \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i y_j \right] - \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n \theta_j y_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i y_j \right\} - x_j y_j + \theta_j y_j \end{aligned}$$

对神经元 j , 其能量函数表示为

$$E_j = (-\frac{1}{2}) \sum_{i=1}^n w_{ij} y_i y_j - x_j y_j + \theta_j y_j$$

神经元的能量变化为

$$\Delta E_j = \frac{\partial E}{\partial y_i} \Delta y_i = [(-\frac{1}{2}) \sum_{i=1}^n \left(w_{ij} y_i \frac{\partial y_j}{\partial y_i} + w_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \right) - x_j \frac{\partial y_j}{\partial y_j} + \theta_j \frac{\partial y_j}{\partial y_j}] \Delta y_j$$

如果存在条件:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ w_{ij}, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

则有

$$\Delta E_j = \left[- \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij} y_j - x_j + \theta_j \right] \Delta y_j$$

令 $u_j = \sum_i w_{ij} y_i + x_j$, 则有

当 $u_j \geq \theta_j$ 时, y_j 的值保持为 1, 或者从 0 变到 1, 即 $\Delta y_i \geq 0$, 所以 $\Delta E_j \leq 0$

当 $u_j \leq \theta_j$ 时, y_j 的值保持为 0, 或者从 1 变到 0, 即 $\Delta y_i \leq 0$, 所以 $\Delta E_j \leq 0$

权系数矩阵的设计方法

Step1: 输入 N 个需要记忆的参数模式 $t = \{t^1, t^2, \dots, t^{N-1}, t^N\}$ 其中包括参数。

Step2: 计算 $A = \{t^1 - t^N, t^2 - t^N, \dots, t^{N-1} - t^N\}$;

Srep 对 A 做奇异值分解 $A = USV^t$, 并计算 A 的秩 $K = \text{rank}(A)$;

Step4: 分别由 $U^p = \{u^1, u^2, \dots, u^K\}$ 和 $U^p = \{u^{K+1}, u^{K+2}, \dots, u^N\}$ 计算 $T^p = \sum_{i=1}^K u^i (u^i)^T$, $T^m = \sum_{i=K+1}^N u^i (u^i)^T$;

Step5: 计算 $W^t = T^p - \tau \times T^m$, $b^t = t^N - W^t \times t^N$;

Step6: 计算 $W = e^{(h \times W^t)}$;

Step7: 计算 $b = U \times \begin{pmatrix} C_1 \times I(K) & 0(K, N-K) \\ 0(N-K, K) & C_2 \times I(N-K) \end{pmatrix} \times U^T \times b^t$, $C_1 = e^h - 1$, $C_2 = -(e^{(-\tau \times h)} - 1)/\tau$

4.2.3.2 本题与 Hopfield 神经网络相结合

由上表可知我们应该有一个典型的分类等级, 及所有舱位的振动最小为最优,

参赛队号#1858

振动最大为最差，我们将这些典型的分类等级所对应的评奖指标设计为离散 Hopfield 神经网络的平衡点，Hopfield 神经网络学习过程即为典型的分类等级的评价指标逐渐趋近于 Hopfield 神经网络平衡的过程，学习完成之后，Hopfield 神经网络存储的平衡点为若干个典型的分类等级所对应的指标。当具有不同角度的仰角输入之后，网络便利用自身的联想记忆功能，逐渐趋近某个存储的平衡点，此时所对应的平衡点就是分类得到的等级了。根据分类等级我们便能得到最佳方案了。我们采用了以下步骤

Step1: 首先为了将表格得到的结果表示成离散 Hopfield 神经网络能处理的形式，我们作如下处理，首先按每个仓位受损程度对几种可行的方案进行排序，并分为三个等级，1 表示受损最轻，3 表示受损最为严重得到如下表格

	第一舱	电子舱	第二舱	第三舱	辅助舱
4	2	3	3	2	2
7	1	2	2	3	3
10	1	1	1	2	1
13	3	3	3	3	3
16	1	2	1	2	3
19	3	3	3	3	3

Step2: 我们将每个仓位都处于同一等级（也就是典型的分类等级）作为学习样本，以此作为网络的平衡点以等级一为例

	1	2	3
第一舱	√	×	×
电子舱	√	×	×
第二舱	√	×	×
第三舱	√	×	×
辅助舱	√	×	×

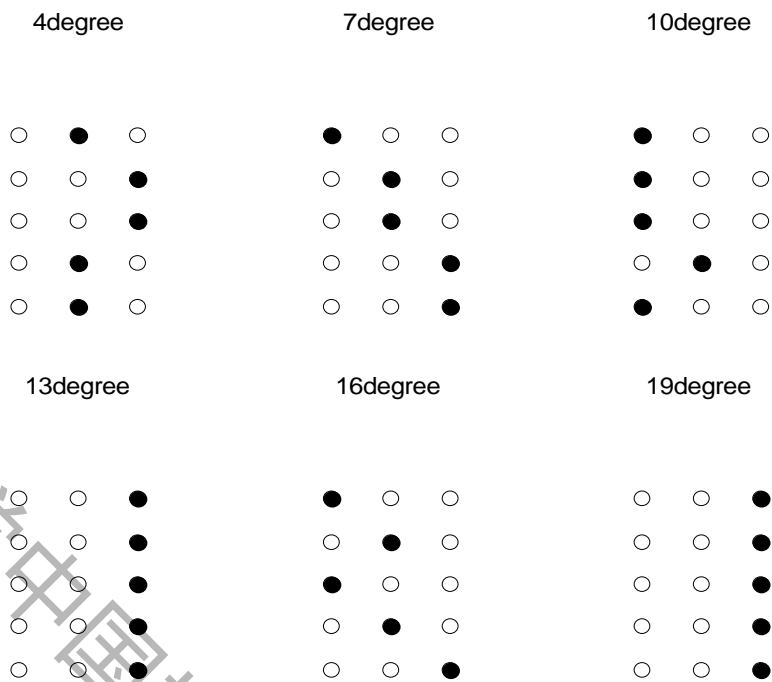
将其转换为计算机能识别的形式，我们将其转换成矩阵形式用 1 来代替√，用-1 代替×

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

为了使结果更为生动形象，我们用黑白点表示，其中黑点表示 1，白点表示-1

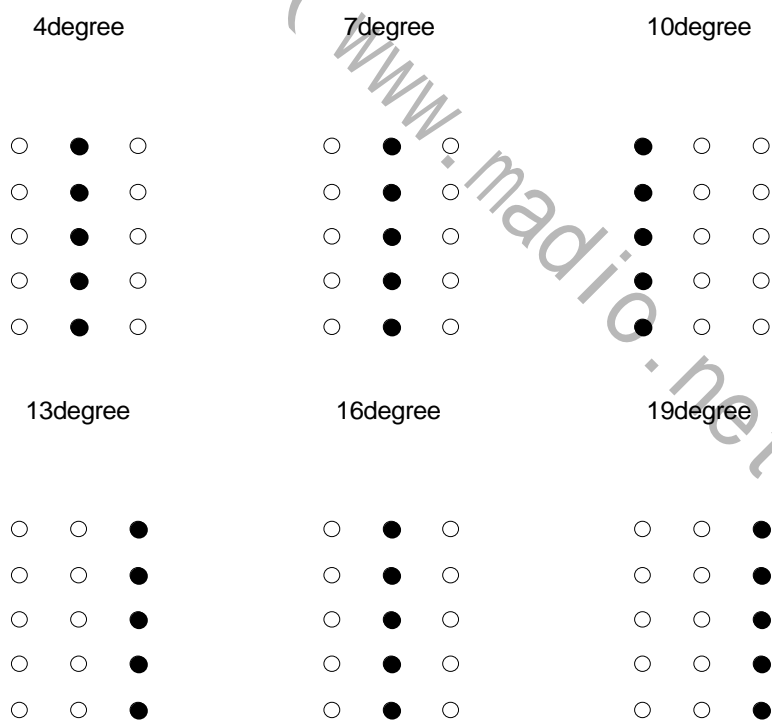
Step3: 我们将数据输入来训练网络，使其具有最小能量函数，并且使其具有 3 个稳定平衡点

Step4: 将我们得到 6 个仰角所对应的 6 组方案转换成矩阵形式，并用黑白点图表示



将其输入网络后便会被分为三个等级。

Step5: 我们利用 MATLAB 对上述过程进行仿真测试，得到如下结果



由上图可以清楚看出，只有 10° 仰角的方案被分到了第一类，其他的则被分到了2、3类，由此可看出 10° 仰角为最佳角度。

结合两部分模型，我们认为飞机沿着如下曲线进行着陆

$$y = 3 \times 10^{-7}x^3 + 9.291 \times 10^{-4}x^2 + 0.9329 \times x + 300$$

最安全，并且以 15.9 度攻角和 10 度仰角接触水面，对飞机造成的振动和损伤是最小的。

5. 模型的优缺点

优点：

1. 在求解曲线方程时，利用遗传算法，收敛速度快，结果简单明了。
2. 在简化海面波动模型时，用量纲法寻找物理量之间的关系，避免复杂的物理推导，减小工作量，结果很直观。
3. 模型利用弹性体四阶的振动方程，计算了飞机主体在迫降时，各个位置的振动幅度，分析了飞机主要舱位的发生断裂的可能性，算法科学可靠，得到的是解析解，相对精确可信。
4. 利用广义的最小二乘法，计算本征函数的系数，克服了由于解系不正交带来的计算系数的困难，实现了算法创新。
5. 在确定最终方案的选择时，使用神经网络的联想记忆功能，避免了多个参量之间的冲突，实现了方案的优化，结果清晰。

缺点

1. 在求解飞机主体振动的时候，计算非常复杂。由于本征函数是超越函数，没有相应的解析解，在数值求根的过程中，误差难以避免。
2. 本模型没有具体考虑具体人员伤亡，以及飞机具体渗水情况，有待改进。
3. 用量纲法进行方程的选择时，没有通过具体论证，而是采用了经验公式，具体过程有待进一步论证。

6. 参考文献

- 【1】肖筱南《现代数值计算》北京大学出版社 2008 年 7 月
- 【2】方同《振动理论及应用》西北工业大学出版社 2004 年 2 月
- 【3】何祚镛《声学理论基础》国防工业出版社 1981 年 8 月
- 【4】姜启源《数学建模》机械工业出版社 2007 年 11 月
- 【5】曹奇英《人工智能能》东华大学出版社 2005 年 2 月
- 【6】闻新《MATLAB 神经网络仿真与应用》科学出版社 2003 年 7 月
- 【7】徐丽娜《神经网络控制》电子工业出版社 2009 年 7 月
- 【8】史峰《MATLAB 神经网络智能算法三十案例》www.matlabsky.com

数学中国提供 (www.madio.net)

7. 附录

1. 遗传算法程序

```

clear ;
NIND=400; %个体数目
MAXGEN=200; %最大遗传代数
NVAR=4; %变量数目
PRECI=25; %变量的二进制位数
GGAP=0.01; %代沟
%建立区域描述器
FieldD=[rep([PRECI],[1,NVAR]);[0.143];[3];rep([1;0;1;1],[1,NVAR])];
Chrom=crtbp(NIND, NVAR*PRECI); %创建初始种群
gen=0;
trace=zeros(MAXGEN, 2); %遗传算法性能跟踪初始值
x=bs2rv(Chrom, FieldD); %初始种群十进制转换
ObjV=chishuishendu(x(:,1)); %计算初始种群的目标函数值
while gen<MAXGEN
    FitnV=ranking(ObjV); %分配适应度值
    SelCh=select('sus',Chrom,FitnV,GGAP); %选择
    SelCh=recombin('xovsp',SelCh,0.1); %重组
    SelCh=mut(SelCh); %变异
    x=bs2rv(SelCh,FieldD); %子代十进制转换
    ObjVSel=chishuishendu(x(:,1));
    [Chrom ObjV]=reins(Chrom,SelCh,1,1,ObjV,ObjVSel); %重插入
    gen=gen+1;
    trace(gen,1)=min(ObjV); %遗传算法性能跟踪
    trace(gen,2)=sum(ObjV)/length(ObjV);
end
figure(1);
plot(a,'.');
ylim([6,10]);
title('遗传代数 10 ');
xlabel('个体数量');
ylabel('适应度值');
figure(2);
plot(trace(:,2),'>r');grid
xlabel('遗传代数');
ylabel('适应度值');
legend('适应度均值');

```

2. 神经网络程序

参赛队号#1858

```
%% 清空环境变量
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
%% 导入数据
```

```
load class.mat
```

```
%% 目标向量
```

```
T = [class_1 class_2 class_3];
```

```
%% 创建网络
```

```
net = newhop(T);
```

```
%% 导入待分类样本
```

```
load sim.mat
```

```
A = {[sim_1 sim_2 sim_3 sim_4 sim_5 sim_6]};
```

```
%% 网络仿真
```

```
Y = sim(net,{18 20},{},A);
```

```
%% 结果显示
```

```
Y1 = Y{20}{:,1:3}
```

```
Y2 = Y{20}{:,4:6}
```

```
Y3 = Y{20}{:,7:9}
```

```
Y4 = Y{20}{:,10:12}
```

```
Y5 = Y{20}{:,13:15}
```

```
Y6 = Y{20}{:,16:18}
```

```
%% 绘图
```

```
A(1,:,:) = Y1;
```

```
A(2,:,:) = Y2;
```

```
A(3,:,:) = Y3;
```

```
A(4,:,:) = Y4;
```

```
A(5,:,:) = Y5;
```

```
A(6,:,:) = Y6;
```

```
for i=1:6
```

```
for n=1:5
```

```
for m=1:3
```

```
if A(i,n,m) > 0
```

```
subplot(2,3,i);
```

```
plot(m,5-n,'ko','MarkerFaceColor','k'),title([num2str(4+(i-1)*3)
```

```
'degree'])
```

```
else
```

```
subplot(2,3,i);
```



```
        plot(m,5-n,'ko'),title([num2str(4+(i-1)*3) 'degree'])
    end
    hold on
    axis([0 4 0 6])
    axis off
end
end
```

数学中国提供 (www.madio.net)