

第十二届中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: service@tzmcm.cn

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

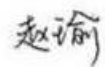
我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。


我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

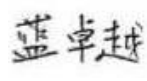
我们的参赛队号为：**1192**

参赛队员（签名）：

队员 1: 

队员 2: 

队员 3: 

参赛队教练员（签名）: 

参赛队伍组别（例如本科组）：研究生组

第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: service@tzmcm.cn

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1192

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: service@tzmcm.cn

2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 基于 MATLAB 的纸飞机助推-平衡滑翔仿真模型

关 键 词 无动力滑翔 图像重心法 单向搜索法 TATLAB SIMULINK

摘 要：

随着科学技术和国内外航模比赛的发展，纸飞机运动模型因其可运用到各类小型飞行器中而得到越来越多的关注，本题针对 Suzanne 折法的纸飞机，基于纸飞机的空气动力学，运用微分分析方法对无动力滑翔的运动轨迹模型进行了研究。

纸飞机的空气动力学中飞行分为三个阶段，第一阶段是一个爬升的过程，以牺牲飞行速度为条件，提高了纸飞机的重力势能；第二阶段是飞机达到最高点后俯冲阶段，该阶段重力势能转化为动能，为纸飞机提供飞行速度，当纸飞机在俯冲时的升力达到最大时，纸飞机会向上微微拉起的现象。第三阶段时飞机进行一个滑翔状态，最后落地。

根据纸飞机的三视图及质量分布，将其形状简化为两个平面，采用图像重心法求解出每个面的重心坐标，通过两个面的质量比求解加权平均位置得到纸飞机的重心。纸飞机整体飞行阶段为周期震荡衰减过程，在确定纸飞机重心的基础上分阶段进行受力分析，基于能量守恒定律和微分分析得到其不同阶段的运动路径分析公式，建立合适的模型，利用 MATLAB 进行模型编程。

基于纸飞机的重心和运动轨迹，通过单向搜索法不断改变其投掷角度运用 SIMULINK 仿真模型确定出使纸飞机飞行最远距离的最佳角度。

参赛队号： 1192

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第十二届中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: service@tzmcm.cn

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

With the development of science and technology and aviation model competition at home and abroad, more and more attention has been paid to the motion model of paper aircraft because it can be used in all kinds of small aircraft. this paper aims at the paper aircraft based on Suzanne folding method, based on the aerodynamics of paper aircraft. The trajectory model of non-dynamic gliding is studied by means of differential analysis.

The aerodynamics of paper aircraft is divided into three stages. the first stage is a climbing process, which improves the gravity potential energy of paper aircraft at the expense of flight speed. The second stage is the subduction stage after the aircraft reaches the highest point. in this stage, the gravity potential energy is converted into kinetic energy, which provides the flight speed for the paper aircraft. when the lift of the paper aircraft reaches the maximum during the dive, the paper aircraft will have a phenomenon of pulling up slightly. In the third stage, the plane glides in a state of gliding and finally lands.

According to the three views and mass distribution of the paper aircraft, its shape is simplified into two planes, the barycenter coordinates of each surface are solved by the image barycenter method, and the center of gravity of the paper aircraft is obtained by solving the weighted average position of the mass ratio of the two surfaces. The whole flight stage of paper aircraft is a periodic vibration attenuation process. on the basis of determining the center of gravity of paper aircraft, the force analysis is carried out in stages, and the motion path analysis formulas of different stages are obtained based on the law of conservation of energy and differential analysis. The appropriate model is established and the model is programmed with MATLAB.

Based on the center of gravity and trajectory of the paper aircraft, the throwing angle of the paper aircraft is constantly changed by one-way search method. the SIMULINK simulation model is used to determine the best angle to make the paper aircraft fly the longest distance.

目录

目录.....	1
1. 问题重述	2
1.1 问题背景.....	2
1.2 需解决的问题.....	2
2. 模型假设	2
3. 符号说明	3
4. 问题分析	4
4.1 题目分析.....	4
4.2 解题思路.....	4
5. 模型建立与求解.....	5
5.1 纸飞机助推-平衡滑翔弹道.....	5
5.2 参数设定.....	5
5.3 求纸飞机的重心	6
5.4 模型的运动分析	9
5.5 模型求解.....	10
6. 模型的评价.....	15
6.1 模型的优点.....	15
6.2 模型的缺点.....	15
7. 模型的改进与推广	16
7.1 模型的改进.....	16
7.2 模型的推广.....	16
8. 参考文献	17
9. 附录.....	18
附录一：质心法求重心.....	18
附录二：爬升轨迹模拟.....	18
附录三：俯冲运动轨迹模拟	18

1. 问题重述

1.1 问题背景

随着国内外各种航模比赛的发展，纸飞机越来越受到人们的关注，目前，被青少年爱好的纸飞机投掷已经从单纯的娱乐项目成为了一项相当普及且具有挑战性的运动，世界上有很多影响力较大的纸飞机比赛，并且有自己的竞赛规则。

规定使用一张特定的纸参加比赛，例如，使用 A4 大小的纸，这种纸的最大重量 $100\text{g}/\text{m}^2$ ，折成一架纸飞机，比赛允许使用胶带调整纸飞机的重心，但不允许使用剪刀和胶水。比赛时在无风干扰的室内进行，投掷时双脚着地，测量其留空时间和飞行距离作为比赛成绩。Suzanne 折法创造了 2012 年飞行距离的吉尼斯世界纪录，飞行距离超过 69 米。

1.2 需解决的问题

第一阶段问题：如果纸飞机（以 Suzanne 为例）的翼面是精确的平面，不允许有弯曲，请建立合理的数学模型，根据纸飞机的三视图和重心位置，计算投掷出手的合理角度，以使飞行距离尽可能远。

2. 模型假设

1. 假设题目中所给的数据真实可靠；
2. 假设比赛场地足够广阔，并且完全没有风的干扰；
3. 假设比赛用纸质量分布均匀；
4. 假设飞行环境空气密度分布均匀；
5. 假设纸飞机的翼面是精确的平面；
6. 假设飞机的运动过程侧滑角为 0° ；
7. 假设投掷纸飞机时的出手速度为 5m/s ；
8. 假设投掷纸飞机的高度为 1.8m 。

3. 符号说明

符号	意义
v_0	纸飞机投掷的初速度
h_0	纸飞机投掷的出手高度
m	纸飞机的质量
g	重力加速度
D	纸飞机受到的阻力
L	纸飞机受到的升力
ρ	空气密度
θ	投掷的最佳角度
C_L	纸飞机的升力系数
C_D	纸飞机的阻力系数
E	纸飞机的升阻比
v_x	纸飞机在水平方向上的分速度
v_y	纸飞机在竖直方向上的分速度
S	纸飞机表面积
S_x	纸飞机上表面面积
S_y	纸飞机竖直面面积
h	纸飞机飞行高度
s	飞机飞行的距离
s_{\max}	飞机飞行的最远距离
θ_i	在 i 时刻飞机的飞行角度

4. 问题分析

4.1 题目分析

本题主要是针对 Suzanne 折法的纸飞机，计算投掷角度对其飞行距离的影响。该问题可以看作为一个纸飞机助推-平衡滑翔的问题^[1,2]，我们需要先求出纸飞机的重心，再在其重心的基础上进行分阶段受力分析，得到其不同阶段的运动公式，最后建立合适的模型，利用 matlab 进行模型编程求解，进行 SIMULINK 仿真模型编程求解，得出最佳投掷角度。

4.2 解题思路

首先是对 Suzanne 折法的纸飞机作三视图，并进行重心计算。飞机的质量分布特点为由有限个质量分布均匀但不相等的部分组成，可以把飞机简化为 2 个平面，采用质心法分别求解出每个面的重心坐标，在通过两个面的质量比求解加权平均位置，得出飞机整体的重心位置。虽然质心与重心的物理意义不相同，但在重力场环境中，重心与质心的坐标始终保持一致，其数学表达方式相同。

其次是对纸飞机投掷飞行的几个阶段进行受力分析，纸飞机在投掷出手后的飞行主要受重力和气动力的影响，气动力可分解为阻力和升力。其运动过程速度是变化的，而速度的变化会改变气动力的大小，飞机飞行的角度也会发生变化，所以纸飞机飞行的模式大致可分为三种：一、爬升；二、俯冲；三、滑行。

最后建立合适的模型，利用 matlab 对选择的模型进行编程求解，通过单向搜索法不断改变其投掷角度运用 SIMULINK 仿真模型确定出使纸飞机飞行最远距离的最佳角度。

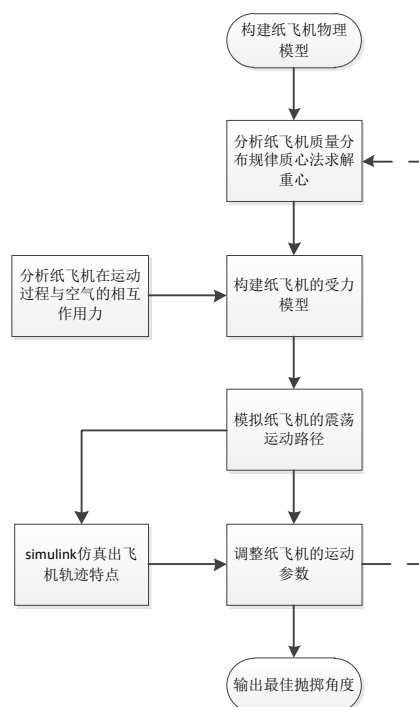


图 4.2.1 纸飞机抛掷角求解流程图

5. 模型建立与求解

5.1 纸飞机助推-平衡滑翔弹道

纸飞机在人的手臂助推出手后，会获得一个在一定高度下的初试速度，该速度与水平方向存在一个夹角。在出手后，纸飞机只受到重力和气动力的作用，气动力可分解为阻力和升力，阻力与纸飞机的飞行方向呈水平相反，会降低纸飞机的飞行速度；而升力是与机翼呈垂直角度的，升力会克服重力以延长飞机的下落时间。

这样纸飞机的飞行就分为了三个阶段（图 5.1.1 所示），第一阶段是一个爬升的过程，以牺牲飞行速度为条件，提高了纸飞机的重力势能，此时飞机升力分解在阻力方向和重力反方向；第二阶段是飞机达到最高点后俯冲阶段，该阶段重力势能转化为动能，为纸飞机提供飞行速度，气动力分解为克服阻力的力和克服重力的力；第三阶段当纸飞机在俯冲时的升力达到最大时，纸飞机会会有一个向上微微拉起的现象，接着纸飞机进行滑行^[3-6]。

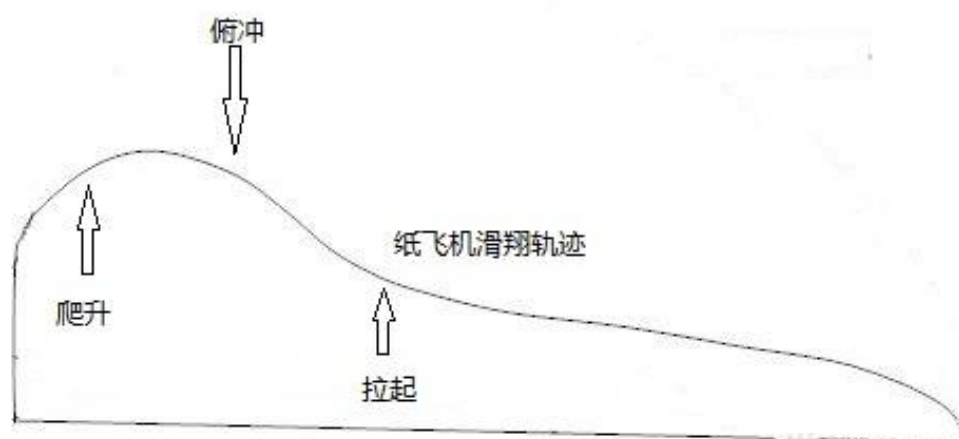


图 5.1.1 纸飞机的大致滑翔轨迹

对于该平衡滑翔弹道而言，射程和飞行时间与纸飞机升阻比成正比。平衡滑翔弹道倾角随速度降低而减小，升阻比越大，平衡滑翔弹道倾角变化越小。

5.2 参数设定

空气动力是空气相对于飞机运动时产生的，要学习和研究飞机的升力和阻力，首先要研究空气流动的基本规律。

1. 升阻比 E ：升阻比是升力和阻力之比，也就是升力系数和阻力系数之比。

$$E = L/D = C_L / C_D \quad 5-1$$

升阻比的最大值 (K_{max}) 并不是在升力系数等于最大值时达到，而是在迎角等于 4° 左右范围内达到。在升阻比达到最大值的状态下飞行是最有利的，因为，这时产生相同的升力，阻力最小，飞行效率最高。升阻比也叫做气动效率。

$$2. \text{升力 } L: L = C_L \times 1/2 \rho V^2 \times S \quad 5-2$$

C_L -----飞机的升力系数

$1/2\rho V^2$ -----飞机的飞行动压

S -----机翼的面积

升力垂直于飞行速度方向，它将飞机支托在空中，克服飞机受到的重力影响使其自由翱翔。升力的产生原理：前方来流被机翼分为了两部分，一部分从表面流过，一部分从下表面流过。由连续性定理分析可知，流过机翼上表面的气流，比流过下表面的气流的速度更快。上下表面出现的压力差，垂直于（远前方）相对气流方向的分量，就是升力。机翼升力的着力点，成为压力中心^[7]。

3.阻力 D : $D=C_D \times 1/2\rho v^2 \times S$ 5-3

C_D -----飞机的升力系数

$1/2\rho V^2$ -----飞机的飞行动压

S -----机翼的面积

阻力是与飞机运动轨迹平行，与飞机速度方向相反的力。阻力阻碍飞机的飞行，但没有阻力飞机又无法稳定飞行。

4.迎角：

迎角就是相对气流方向与翼弦之间的夹角，单位是度。平飞时，可以通过机头高低判断迎角的大小，其他飞行状态中，则不可以采用这种判断方法。

5.迎角与速度的关系：

飞机的升力主要随飞行速度和迎角变化，在大速度飞行时，只要求较小迎角，机翼就可以产生足够的升力维持飞行，在小速度飞行时，则要求较大迎角，机翼才能产生足够的升力来维持飞行。

6. 重力及重力加速度 g

纸飞机在飞行过程中，由于具有一定的质量，所以有一个向下的重力和向下的重力加速度。

7. 投掷角度 θ 和飞行距离 s

不同的投掷角度会使得纸飞机与相对气流间的迎角大小不同，阻力系数和升力系数也会有所不同，因此要想让飞机飞行距离更远需要一个合适的投掷角度。

8. 纸飞机的重心

纸飞机的重心是使其具有平衡的作用，它是一个保证纸飞机能平稳飞行的重要参数。

5.3 求纸飞机的重心

根据题目中给出的条件，制做纸飞机的材料为 A4 纸，为方便解题，可以把 A4 纸简化为质量为 4.366g 的矩形。不考虑纸张的体积。A4 纸的重心很明显就在其物理重心。经过折叠后 A4 纸的质量分布发生了变化，导致其重心的位置也发生了改变。

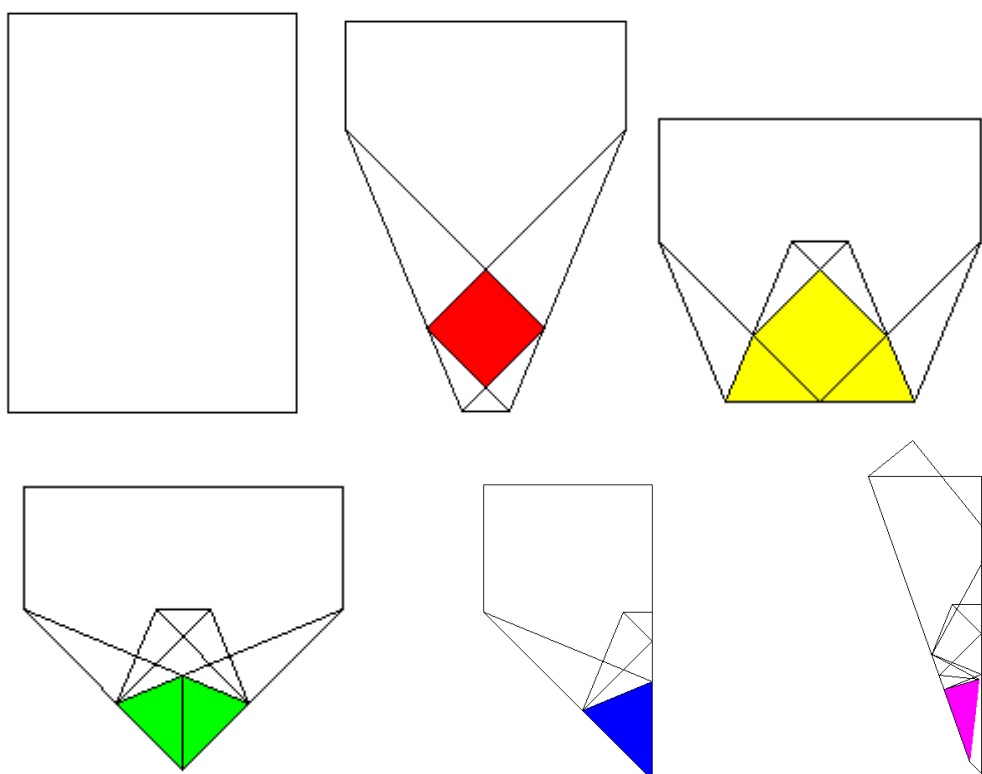


图 5.3.1 Suzanne 纸飞机折法示意图

图片中带颜色的区域为该状态重叠程度最大的部分，从 A4 纸的折叠步骤可以看出，重叠程度大的部分均在纸张的下半部分，可以大致判断纸飞机的重心位置在飞机的中部偏机头方向。

飞机的质量分布特点为由有限个质量分布均匀但不相等的部分组成，采用常规的几何方法很难求解出重心的确切位置，考虑到可以把飞机简化为 2 个平面，可以采用质心法分别求解出每个面的重心坐标，在通过两个面的质量比求解加权平均位置，得出飞机整体的重心位置。虽然质心与重心的物理意义不相同，但在重力场环境中，重心与质心的坐标始终保持一致，其数学表达方式相同^[9]。

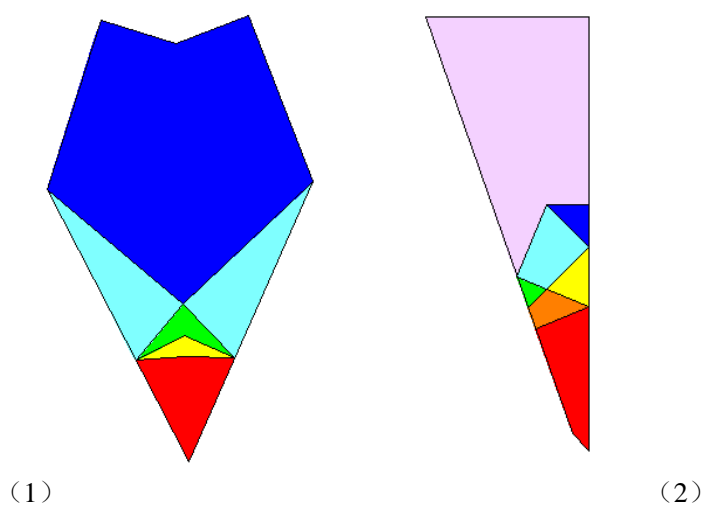


图 5.3.2 飞机质量分布色图

所谓质心，就是当密度作为像素点灰度值时的重心，例如其质心的 x 坐标为

$$x = \frac{\sum j * x_{i,j}}{\sum x_{i,j}}$$

表 5.3.1 质心法求解结果

上表面颜色区域	折叠次数	质量权重	侧面颜色区域	折叠次数	质量权重
蓝	1	1	灰	4	2
青	3	3	蓝	2	1
绿	2	2	青	2	2
黄	3	3	绿	3	1
红	6	6	黄	3	1.5
			褐	3	1.5
			红	6	6
质量权重和		15	质量权重和		15
质心坐标			质心坐标		

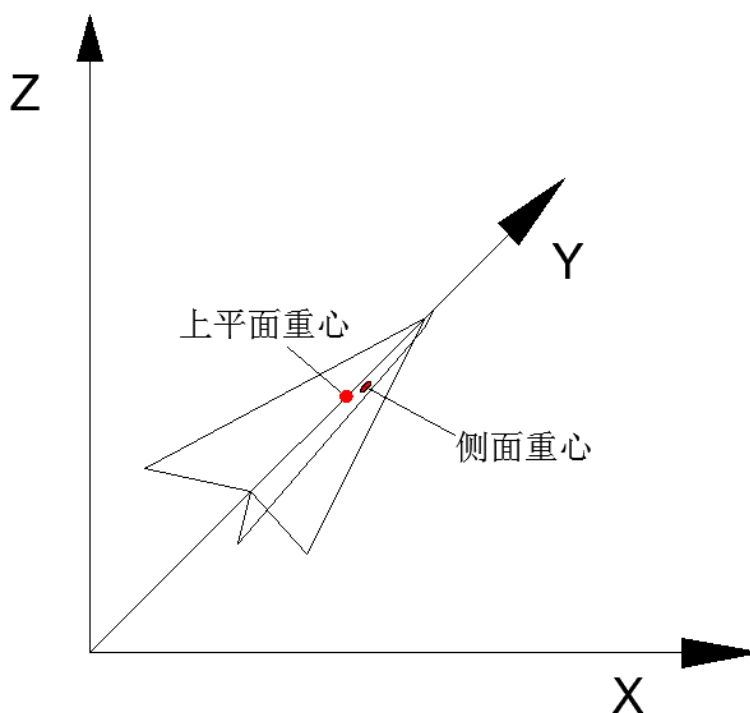


图 5.3.3 质心法求得飞机两面的重心

飞机上面在 XY 平面内，其重心坐标可表示为 (505, 780)，飞机侧面在 XZ 平面内其坐标可表示为 (560, 600)

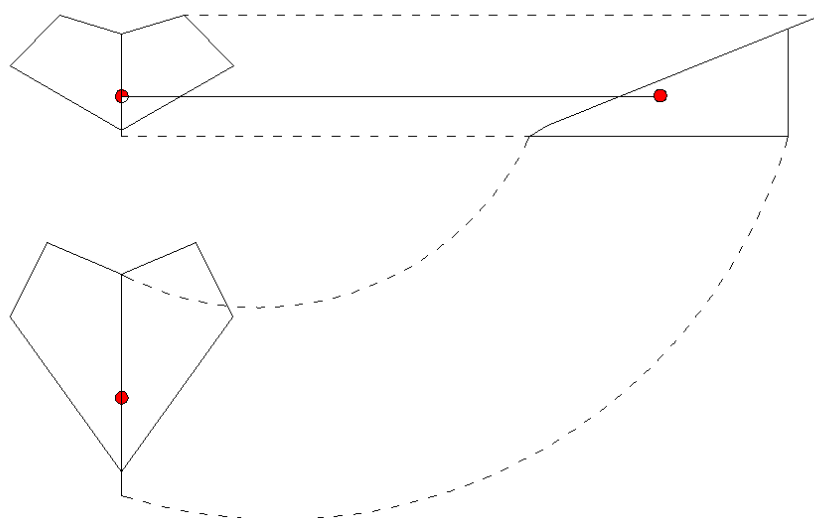


图 5.3.4 重心位置三视图位置示意图

5.4 模型的运动分析

5.4.1 纸飞机空气动力学分析

为了能够对纸飞机的滑翔运动进行模拟，我们首先需要对纸飞机的空气动力学进行分析，而所有的空气动力学理论都建立在运动定理之上。

5.4.2 纸飞机运动分析

平衡是事物普遍存在的一种状态，纸飞机如果没有外界的干扰，比如说以某种方式使其加速，那它会一直保持其平衡状态。要打破平衡，改变速度大小或运动方向，需要力的变化来引起相应的加速度变化。

5.4.3 纸飞机受力分析

滑翔中的纸飞机受到许多施加在它每个部分的力的影响，但是所有的这些力都可以按作用和反作用分成 4 个力，模型爬升、俯冲和滑行的作用力^[8]分析如图 5.4.3 (a)。

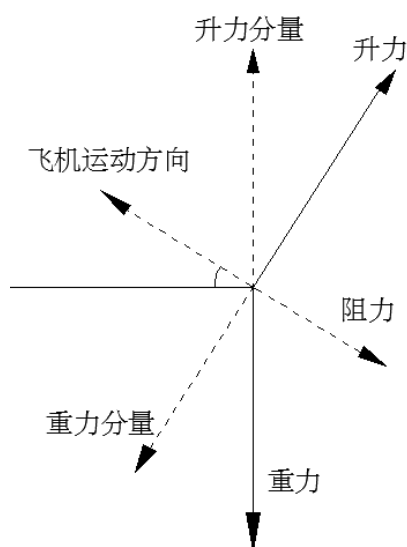


图 5.4.3 (a) 纸飞机爬升过程的受力分析

在图 5.4.3 (a) 中显示的是一个爬升的受力模型。在该状态下，模型总的支持力是机翼的升力和重力的合力。重力可以分解为两个分量，一个与升力反向，另一个与推力反向也就是与阻力同向。于是，结果就是四力平衡状态下被旋转了一个爬升角。极限的情况就是垂直爬升，这时重力和阻力的方向与推力相反。如果有足够的推力，模型也是能够作这种垂直爬升动作的。

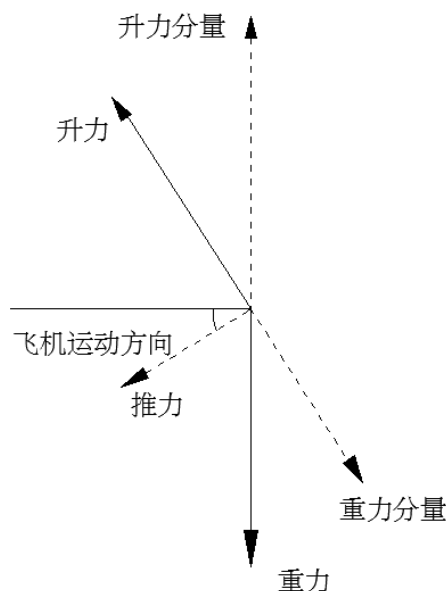


图 5.4.3 (b) 纸飞机俯冲过程的受力分析

在图 5.4.3 (b) 中显示的是滑行状态下受力模型在俯冲状态中，四力图旋转的角度更加大了，并且在极限状况下，飞行轨迹完全垂直向下，重力拉着纸飞机向下运动，这时唯一的反作用力就是阻力了。当阻力变得足够大以至于能够平衡重力加上推力时，速度通常是极高的，当速度的增加式升力接近重力时，飞机的下降会变得缓慢，在运动过程中会表现为一个拉升的过程，当升力大于重力时，纸飞机甚至会产生一个微小的向上爬行轨迹。

5.5 模型求解

5.5.1 路径分析

根据纸飞机的飞行特点，可以把飞行的运动特点归类为助推-平衡滑翔的飞行特点，在飞机掷出后至飞行至最高点这一范围内可以认为是助推作用阶段，飞机飞行至最高点时，其水平速度与竖直速度均为零，在最高点处的飞机只受重力和气动力作用，之后的运动全由重力和气动力引起。

1. 爬升阶段路径分析

设爬升段曲线为 $y=Y(x)$ ， θ 为抛射角度，即：

$$y' = \tan \theta, \text{ 则 } |\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad 5-4$$

$$\because y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d \tan \theta}{d \theta} \cdot \frac{d \theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d \theta}{dx} = (1 + y'^2) \cdot \frac{d \theta}{dx} \quad 5-5$$

分析物体受力，可知重力沿曲线的法线分力提供物体沿曲线运动的向心力，即：

$$mg |\cos(\pi - \theta)| = \frac{mv^2}{\rho} \quad 5-6$$

$$5-4、5-5 \text{ 代入 } 5-6 \text{ 求导的 } v = \sqrt{-g \frac{1 + y'^2}{y''}} \quad 5-7$$

式两边对 x 求导：

$$v' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g \frac{1 + y'^2}{y''}}} [-g \cdot \frac{2y' \cdot y'' - y''' \cdot (1 + y'^2)}{y''^2}] \quad 5-8$$

由能量守恒定律得：

$$\int_0^x kv \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx = mg(h - y) + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 \quad 5-9$$

由被积函数与原函数的关系可知：

$$(\int_0^x kv \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx)' = kv \cdot \sqrt{1 + y'^2} \quad 5-10$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导得 } kv \cdot \sqrt{1 + y'^2} = -mgy' - mv \cdot v' \quad 5-11$$

$$\text{将 } 5-6、5-7 \text{ 两式代入 } 5-11 \text{ 式化简后得： } y^{''11} = \frac{dy''}{dx} = -\frac{2k}{m\sqrt{g}}(-y'')^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{分离变量后积分： } \int \frac{d(-y'')}{(-y'')^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2k}{m\sqrt{g}} dx + C_1 \quad 5-12$$

$$\text{解得： } (-y'')^{-\frac{1}{2}} = \frac{-k}{m\sqrt{g}}x + C_2$$

$$\text{考虑初始条件：当 } x=0 \text{ 时，由式 } 5-8 \text{ 得 } \sqrt{-y''_0} = \frac{\sqrt{g}}{\cos \theta_0 \cdot v_0} \quad 5-13$$

$$\text{将 } 5-13 \text{ 式代入 } 5-12 \text{ 式中得： } C_2 = \frac{\cos \theta_0 \cdot v_0}{\sqrt{g}}$$

$$\text{将 } C_2 \text{ 的值代回 } 5-12 \text{ 式，化简后得： } \sqrt{-y''} = \frac{m\sqrt{g}}{-kx + mv_0 \cos \theta_0}$$

$$\therefore y'' = -\frac{m^2 g}{(-kx + mv_0 \cos \theta_0)^2} \quad 5-14$$

同理可再分离变量积分后代初值，得：

$$y' = \frac{m^2 g}{k(kx - mv_0 \cos \theta_0)} + \tan \theta_0 + \frac{mg}{kv_0 \cos \theta_0} \quad 5-15$$

$$y = \frac{m^2 g}{k^2} \ln\left(\frac{-kx}{mv_0 \cos \theta_0} + 1\right) + \tan \theta_0 \cdot x + \frac{mg}{kv_0 \cos \theta_0} x + h \quad 5-16$$

5.5.2 路径模拟

使用 MATLAB 绘制出公式 5-16，如图 5.5.1 所示，从路径图上来看，在爬升阶段与飞行轨迹函数的斜率是逐渐增大，飞机飞抵最高点后随即进入向下滑翔阶段，这两段路径在处理过程中可以分成 2 段函数处理。

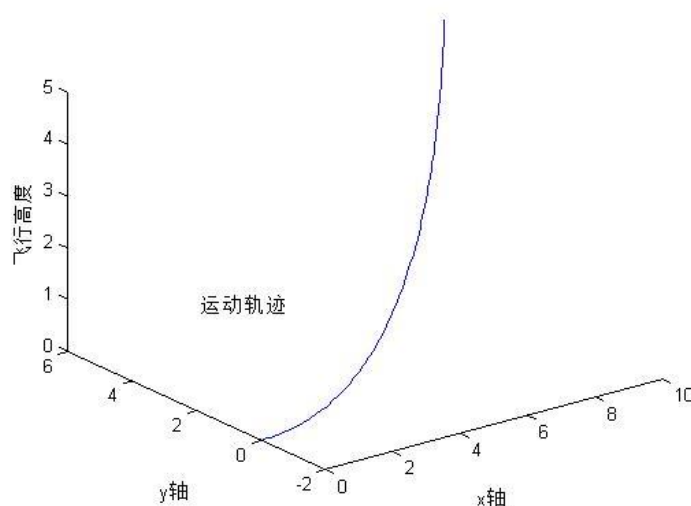


图 5.5.1 纸飞机爬升阶段路线图

图中给出的运动轨迹路线是在绘制在三维空间中，很明显的可以观察到轨迹线在一个面内，当纸飞机满足假设中的要求时，运动轨迹稳定的在一个面内。

3. 俯冲阶段

俯冲阶段飞机的速度主要由重力势能提供根据动量方程： $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$

根据俯冲阶段的受力分析可以推导出飞机重心的受力情况为：

$$\begin{cases} F_m - mg - F_d \sin \theta = ma_y \\ -F_m \sin \theta - F_d \cos \theta = ma_x \\ \begin{cases} ma_x = m \frac{dx}{dt} \\ ma_y = m \frac{dy}{dt} \end{cases} \end{cases}$$

$$F_M = \rho h v \Gamma$$

$$\text{升力: } L = \frac{1}{2} \rho V^2 * S * a$$

$$\text{阻力: } D = \frac{1}{2} \rho V^2 * S * C_0$$

$$\text{联立方程 得: } \frac{1}{2} \rho v^2 S * a * \cos \theta - mg - 0.2 \rho v^2 * s * a = \frac{dv}{dt}$$

利用 MATLAB 求解方程 () 的二元积分得出运动时间与位移距离的关系如下图。

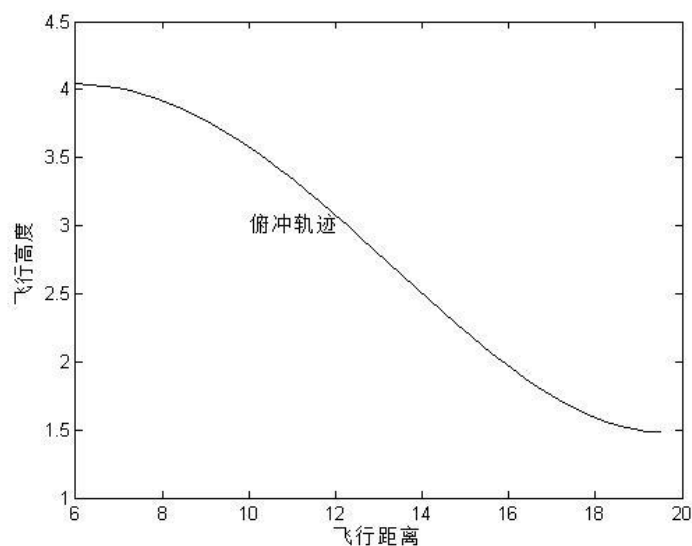
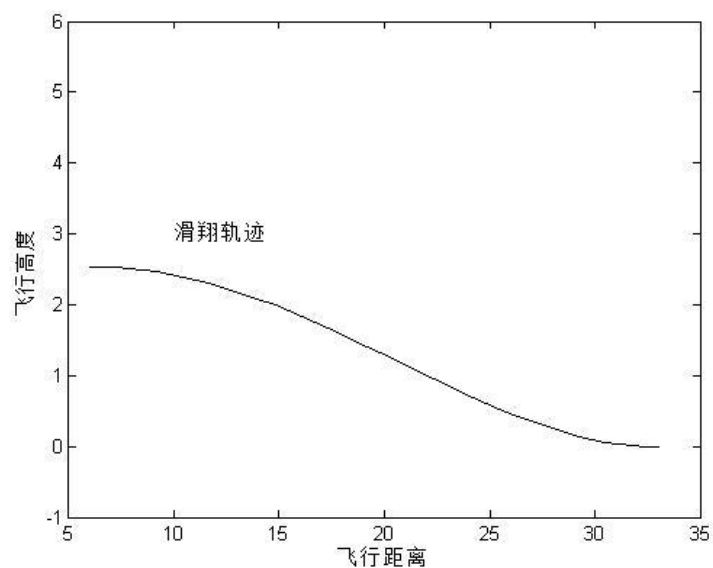


图 5.5.2 俯冲阶段纸飞机-运动轨迹

4. 滑翔阶段

滑翔阶段纸飞机的受力情况与俯冲阶段大致一样，在俯冲结束后，纸飞机的速度进一步被消减，飞机轨迹的震动情况越来越平和，飞机最后的飞行阶段基本上不会再上升，趋于稳定的落地运动。



5.5.3 滑翔阶段纸飞机-运动轨迹

5.5.3 simulink 仿真求解

运用 simulink 进行空气动力仿真，假定空气为理想气体，飞机做无动力飞行，飞机与空气相对速度较小不会引起空气紊流，飞机仅在二维平面内运动，不考虑飞机的翻滚，可建立起滑翔机飞行的无量纲数学模型^[10]。

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= U \\ \frac{dY}{dt} &= V \\ \frac{dT}{dt} &= -AW(BU + V) \\ \frac{dU}{dt} &= -AW(U - BV) - 1\end{aligned}$$

其中 U、V、X、Y、T 为无量纲量， $U = \sqrt{U^2 + V^2}$ 其中 A 为升重比 B 为升阻比。积分的初始条件为 $W_0=0$, $U=U_0=W_0\cos\theta$, $V=V_0=W_0\sin\theta$, $X=X_0=0$, $Y=Y_0=0$ 。

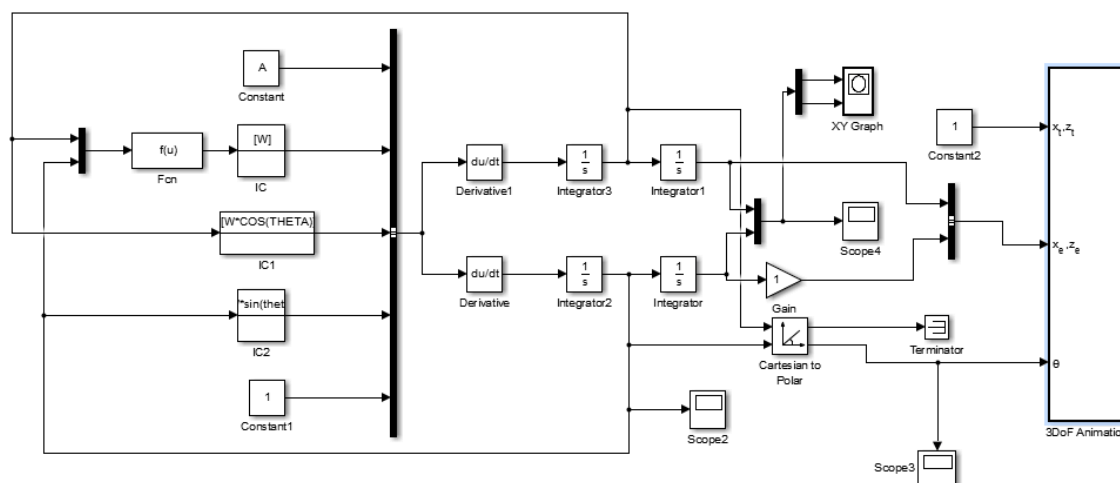


图 5.5.4 仿真运动求解过程图

表 5.5.5 仿真结果

抛掷角 (θ)	最大飞行高度 (H/米)	最远飞行距离 (S/米)
5	4.18	12.73
10	5.56	24.79
15	8.12	40.37
20	10.32	48.73
25	10.37	45.28
30	11.28	42.19
35	10.79	37.35
40	9.85	33.42

根据表 5.5.5 仿真计算结果可以看出最远的飞行距离为 48.73m，最佳的抛掷角度为 20 度，与吉尼斯世界纪录存在一定的差距。本题目的结果实在抛掷速度为 5m/s 时的最佳速度，并非是飞机最大抛掷距离的条件。

6. 模型的评价

6.1 模型的优点

本文所建立的纸飞机运动仿真模型具有以下优点：

1.根据 Suzanne 纸飞机折法，画出其三视图，由于纸飞机质量分布不均匀，我们采用图像重心法，通过 Matlab 编程程序来寻找重心。找到重心后，我们通过单向搜索法确定纸飞机飞行最远距离的最佳角度，单向搜索法是通过不断改变投掷角度来确定，并且可以得到纸飞机在不同角度下的运动轨迹，利于观察其运动规律。

2.本文所建立的纸飞机运动仿真模型有合理的理论支持，建立的模型方法构造简洁，因而扩展性较强，且便于计算机进行计算，可以运用于现实生活中，实用价值高。

3.随着国民生活质量的提高，各式各样的小型飞行器越来越多出现在我们的生活中，提高我们的生活质量，本文所建立的纸飞机运动仿真模型可以对无动力飞行器的设计提供一定的借鉴作用。

6.2 模型的缺点

本文所建立的纸飞机运动仿真模型具有以下缺点：

1.我们主要基于理想化来建立模型，所以在研究纸飞机的重心、最佳抛掷角及运动轨迹时，忽略了其他次要因素，得到的结果有一些误差。本文所建立的纸飞机运动仿真模型是在理想化的设定下建立的，但在现实生活中，风速和风向都难以控制，所以最终的飞行轨迹及飞行最远距离都会受到影响，为达到最远距离，抛掷角度也需要做相应的调整；

2.本文所建立的纸飞机运动仿真模型，没有考虑厚度及厚度不均匀的问题，因为纸飞机厚度较薄，在计算中忽略了厚度对结果的影响。但是对于现实生活中的抛掷物实体，它们的厚度会影响自身飞行运动过程中受到的空气阻力等因素，因此该模型的适用范围有限。

3.本文所建立的纸飞机运动仿真模型，只考虑了纸飞机在一个平面内的运动，在现实生活中，需要考虑到纸飞机飞行过程中的转向运动。

7. 模型的改进与推广

7.1 模型的改进

由于我们时基于理想化条件对纸飞机的飞行建立模型，所以在研究纸飞机的重心、最佳抛掷角及运动轨迹时，忽略了其他次要因素。所以风速和风向都会对纸飞机的飞行轨迹与飞行距离产生影响，该模型的改进可以通过加入风速和风向等参数去解决实际飞行器的模型求解。

因为纸飞机厚度较薄，所以在我们的模型建立中，忽略了厚度对结果的影响。但是对于现实生活中的实际空中滑翔模型，折纸厚度和折纸厚度不均匀等问题都会影响它们在飞行运动过程中受到的空气阻力，因此该模型的改进可以加入折纸厚度及折纸的密度分布等参数。

在该模型的建立中，我们假设飞机的侧滑角为 0° ，所以纸飞机的模拟运动轨迹只在一个平面内，在实际问题中，飞机的飞行过程会有侧滑角这一变量，加入侧滑角的变量分析，可以更好地解决实际问题中滑翔模型的运动轨迹预测。

7.2 模型的推广

本文所建立的纸飞机运动仿真模型的方法和思想可以推广到大气层能的助推-平衡滑翔飞行器的设计方向，依据伯努利效应，分析飞行器在行进过程中的受力情况，包括重力、升力及空气阻力，选取最佳的投掷角度，实现其飞行轨迹的仿真模拟，从而预测其到达的距离。该模型在大气层内的助推-平衡滑翔器领域的推广，可以给我们日常的生产生活带来很大的便利。

8. 参考文献

- [1]解润滢.空气动力学在折叠纸飞机性能优化中的应用[J].科技经济导刊,2018,26(04):81.
- [2]董雨轩.运用简单的空气动力学知识对纸飞机性能调试的初探[J].民营科技,2017(10):98.
- [3]郭飞帅,张高瑜,刘冬.助推滑翔导弹滑翔段优化研究[J].四川兵工学报,2011,32(08):27-30+39.
- [4]蒋明明,袁庆航,赵长见,卜奎晨.助推-滑翔式导弹总体参数设计方法初探[J].导弹与航天运载技术,2016(04):5-7+21.
- [5]黄国强,南英,陈芳,王延涛.无动力滑翔弹最优抛射初始条件研究[J].飞行力学,2009,27(01):93-96.
- [6]王路,邢清华,毛艺帆.助推-滑翔无动力跳跃飞行器轨迹预测[J].空军工程大学学报(自然科学版),2015,16(01):24-27.
- [7]模型飞机空气动力学[英]马丁·西蒙斯著(肖治垣 马东立 译),航空工业出版社 2002年.
- [8]单上求,侯中喜,王鹏,郭正.飞行器动态滑翔的受力平衡状态[J].国防科技大学学报,2017,39(04):15-20.
- [9]原玉磊,郑勇,杜兰.星点中心高精度质心定位算法[J].测绘科学技术学报,2012,29(02):122-126.
- [10]孙淑光,程鹏.基于航迹约束的三维飞行轨迹仿真生成器[J].系统仿真学报,2019,31(02):275-282+293.

9. 附录

附录一：质心法求重心

```
%%通过质心算法找到 img 的质心位置
% function [x,y] = oCenter(img)
% img = double(img);
% [m,n] = size(img);
% x = 0;y = 0;sum=0;
% for i = 1:m
%     for j = 1:n
%         y = y + img(i,j)*i;
%         x = x + img(i,j)*j;
%         sum = sum+img(i,j);
%     end
% end
% x = x/sum;
% y = y/sum;
% x = img(i,:)*(1:n)'/sum(img(i,:));
% x = img*(1:n)'/sum(img,2);%每一行的质心
% y = (1:m)*img./sum(img);%每一列的质心
% sumImg = sum(img(:));
% x = sum(img)*(1:n)'/sumImg;
% y = (1:m)*sum(img,2)/sumImg;
```

附录二：爬升轨迹模拟

```
a=0:0.01:2*pi
k=0:0.01:1;
x=10*k;
m=4.366;
g=9.8
v=5
y=m^2*g/k^2*log(-k*x/m/v/cos(a))+tan(a)*x+m*g/k/v/cos(a)+h
z=5*t.^2;
plot3(x,y,z,xlabel('x/Öá'),ylabel('yÖá'),zlabel('zÖá'));
zlabel('ÉÐÐ,ß¶È')
text(0.12,2,2,'ÖÊ¶ ì¼£');
```

附录三：俯冲运动轨迹模拟

```
% x=(0:pi/100:pi/2.3);
% y1=(sin(x)+(cos(x).*cos(x)).*log(1+sin(x))./cos(x))*100/9.8;
%
% y2=cos(x).*(1-sin(x).*log((1+sin(x))./cos(x)))*20/9.8+2;
```

```
%
% m=(sin(pi/6)+(cos(pi/6)*cos(pi/6))*log(1+sin(pi/6))/cos(pi/6))*100/9.8;
%
% n=cos(pi/3)*(1-sin(pi/3)*log((1+sin(pi/3))/cos(pi/3)))*200/9.8;
% subplot(1,2,1)
% plot(x,y1,'b:');
% hold on;
% plot(x*10+6,y2,'k');
% xlabel('ÉÐÐ³⁄₄ÀË');
% ylabel('ÉÐÐ,β¶Ë')
% text(10,3,'©³â¹¹⁄₄£');
% hold off;
% text(pi/6,m,'y1');
% text(pi/3,n,'y2');
% grid on;
```