

2005 年 B 题：公路收费亭的设置

诸如美国新泽西州的风景区干道，95 号州际公路等交通繁忙的收费公路都是多车道的交通干线，每隔一定距离设有过路费收费区。由于收取过路费一般是不得人心的，因此通过限制由于过路费收费区造成的交通混乱把驾车人的烦恼减到极小是很值得做的。通常，收费区内收费亭的数目远多于进入过路费收费区的车道数。进入过路费收费区时，车流扇形散开分流，分别在各个收费亭交费；离开收费区时，车流又会汇合到和进入收费区时一样多的车道离开。因此，在交通繁忙时，通行的车辆会在离开收费区时出现拥塞；更严重的时候，收费站的入口也会出现拥堵。

试构建一个模型，用来决定拦路过路费收费区内收费亭的最优数目的配置。明确考虑如下情景，即在进来的每个车道恰好只有一个收费亭。在什么情况下你制订的方案要比现有的方案效率多少要高一点？注意：“最优”的定义要由你自己来决定。

论文：收费亭为谁而收费

一、摘要

我们运用排队理论和元胞自动机的结合，对收费站附近的交通情况进行建模，从而决定收费亭的最优数量。我们假设到达收费站的汽车数量服从泊松分布，并且汽车离开收费站的概率是无记忆的。这使得我们能够把等待收费窗口开放的车辆作为 **MIMIn** 队列进行完整的分析和描述。然后我们使用改进的 **NS** 细胞自动机方案为等待进入收费站和离开收费站回到高速公路上的汽车构建模型。该模型得到了非常一致的结果，并对模拟的结论进行了验证。我们用 **NS** 模型测量了车辆在收费站等待的平均时间。并根据这个结果证实了一个通过选择收费亭数目使得等待时间最少的一般方法。对于 2 通道的高速公路来说，收费亭的最优数量是 4，对于 3 通道的高速公路来说，最优数量是 6，对于更多通道的高速公路，结果取决于车辆到达率。

我们的模型建立在大量的理论和实验基础上，其一致性表明它是准确和强大的。排队论得到的结果和 **NS** 模型得到的结果也具有高度的一致性。并且我们 **NS** 模型结果的一些特殊案例在一些文献中的经验数据中得到了证实。此外，改变收费站等待时间的分布和改变随机制动的概率，并不会有效的改变我们的方案建议。这为我们的模型和一般方法提供了一个令人信服的证明。

二、简介

收费站通过两种方式使车辆减速：

1. 如果没有足够多的收费亭，车辆就会形成排队的情况。

2. 如果收费站过多，车辆合并到窄的高速公路时又会造成拥堵。

我们用排队论来预测车辆在得到一个收费亭服务之前需要等待多长时间。通过用元胞自动机构建单个车辆模型，我们证实了对等待时间的预测。车辆-水平模型被用来预测车辆离开收费站后如何合流。

三、初始假设

1. 最佳系统使得平均等待时间最少。我们不考虑收费亭运作时的时间损耗。
2. 车辆到达收费站在时间上符合一致性。（并且时间间隔服从参数为 λ 的指数分布，交通高峰时间段我们可以变动参数 λ ）
3. 车辆在收费亭前的等待时间是无记忆性的（服从参数为 μ 的指数分布）。这个假设在海尔对收费站的研究中得到证实。
4. 汽车之间不加以区分。所有车辆具有相同的长度和最大速度。
5. 收费站附近没有斜坡或出口。我们不考虑额外车辆进入的可能性，只考虑已经在主道路上的车辆。双向公路等同于两条独立的公路，我们只考虑已经划分好的公路。

四、由于收费亭太少而造成的延迟

1.符合 $M|M|n$ 队列的收费亭

当一辆汽车到达收费站时，有 n 个收费亭可供选择为自己服务。车辆趋向于可到达的最短的队列。我们通过假设所有车辆形成一个单一的队列来简化排队行为。当 n 个收费亭中的一个可用时队列中的下一辆车马上就会到达。然而真实系统的效率是比较低的，因此我们要在一个更详细的仿真模拟中预测多次。我们假设车辆在一个均匀分布

的时间里到达，另外，我们假设服务时间的分布服从指数分布，这类模型被称为无记忆到达，无记忆服务时间， n 个收费亭提供服务获或者称之为 $M|M|n$ 队列。

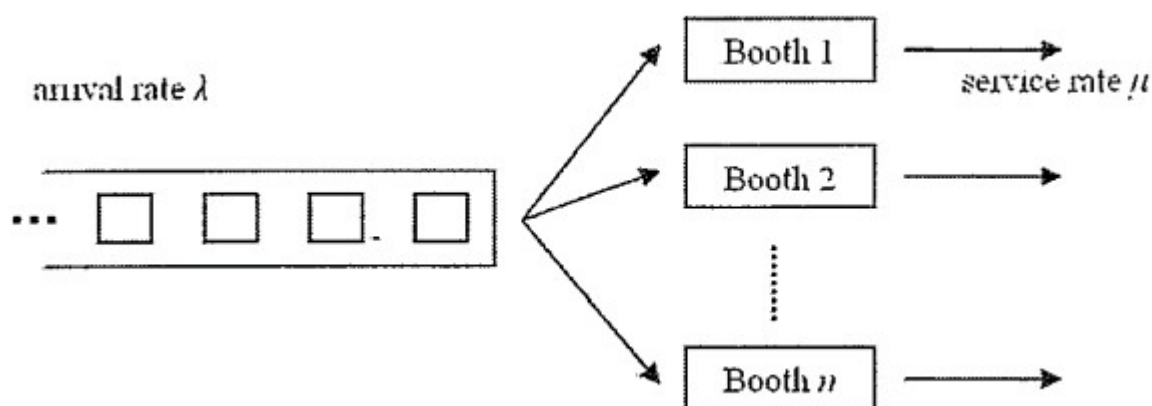


图 1: $M|M|n$ 队列。车辆到达率为 λ ，服务率为 μ 。

我们定义 $x(t)$ 为在时间 t 的时候正在队伍中等待或正在收费亭的汽车数目。我们还定义了固定的概率 p_k ，就是在固定的状态下，队伍具有长度 k 的概率为 p_k 。通过 $M|M|n$ 队列的输入输出关系，固定概率必须满足：

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1; \\ 0 &= \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu)p_k + (k+1)\mu p_{k+1}, & k = 1, \dots, n; \\ 0 &= \lambda p_{k-1} - (\lambda + n\mu)p_k + n\mu p_{k+1}, & k = n+1, n+2, \dots \end{aligned}$$

此系统的解决方法是：

$$p_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^n}{n!(1 - \frac{\rho}{n})} \right]^{-1}, \quad p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0, & k = 0, \dots, n; \\ \rho^{k-n} p_n, & k = n+1, n+2, \dots, \end{cases}$$

其中， $\rho = \lambda / \mu$

令随机变量 w 为一辆汽车在这个系统中花费的时间（排队时间+在收费亭停留的时间）。 w 的期望值分布如下：

$$P(W = w) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} p_0 \mu e^{-\mu w} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 \frac{n\mu^2}{(n-1)\mu - \lambda} \left(e^{-\mu w} - e^{-(1-\rho)n\mu w}\right),$$

$$E[W] = \frac{1}{\mu} + \frac{p_n}{n\mu(1-\rho)^2}.$$

这个结果描述了这个一般问题的第一部分：汽车如何排队取决于收费亭的数目 n 。为了建立通过收费亭后车辆合流的模型，描述汽车如何离开 $M|M|n$ 队列显得尤为重要。

此队列的输出时间服从以 λ 为参数的指数分布，并且输出过程和输入过程具有相同的分布。根据无记忆概率的性质，离开时间间隔是相互独立的。

我们定义 D 为在时间间隔 Δt 内离开收费厅的汽车数量。那么， d 辆汽车在这个时间段内离开的概率为：

$$P(D = d) = \frac{e^{-\lambda \Delta t} (\lambda \Delta t)^d}{d!},$$

其中 λ 是在 Δt 时间段内到达收费亭的汽车的平均数。

$M|M|n$ 队列提供了一个简单并且成熟的收费站模型。尤其是可以知道平均等待时间和输出过程，并且允许我们变动仿真结果。

2. $M|M|n$ 队列的局限性

虽然有用，但 $M|M|n$ 队列是不完整的，并且过分简化了问题。虽然队列可以让我们简单的找到车辆离开的时间分布，但它的假设条件导致它不会是一个完整的解决办法。通过使用单队列理论，我们假设任何车辆可以到达任何一个收费亭，这样就显得过分乐观啦，尤其是当交通流量比较大的时候。我们希望我们的预测对低密度车流是行之

有效的。或许，最重要的是，队列只是模拟了问题的一半---在收费亭前等待的时间。

五、用元胞自动机构建交通模型

1.概述

复杂的交通系统可以根据简单的自动机进行建模。我们在一个微观的层面上用元胞自动机构建交通流模型。在这个方案里，我们在离散的空间和时间里引进汽车依据一些细小的规则运作的情况。

元胞自动机在进行一些具体问题的仿真时很适合，因为在收费站有很多单独的车辆，他们之间都在相互作用。连续的或宏观的模型无法捕捉到它们之间的相互作用，并且也无法知道它们在到达收费亭之前和离开收费亭之后自发形成的交通堵塞所扮演的角色。

我们首先构建了一个单通道高速公路模型，然后把支付通行费所造成的时间耽搁加进去。在单车道的仿真中，我们可以让没有通过的车辆在停止的车辆之后聚集并且排成队列。我们可以把这个模型扩展到多车道的系统模型，在道路进入或离开一个收费站的多车道系统中，车道的数量是不连续的。

2.单车道 NS 交通模型

大多数用来仿真交通的自动机是 NS 元胞自动机模型的一般化。NS 模型是用来仿真交通流的标准工具，并且也已经被证实和实际结果相吻合。

我们使用这种自动机创建一个数值模型来证明排队理论的预测。在 NS 模型中，一辆汽车被一个整数位置 x 和整数速度 v 代表，这些

汽车的移动情况由它们的速度 $x_n \dots x_n + v_n$ 来决定，该系统通过以下的程序发展。

3.NS 算法

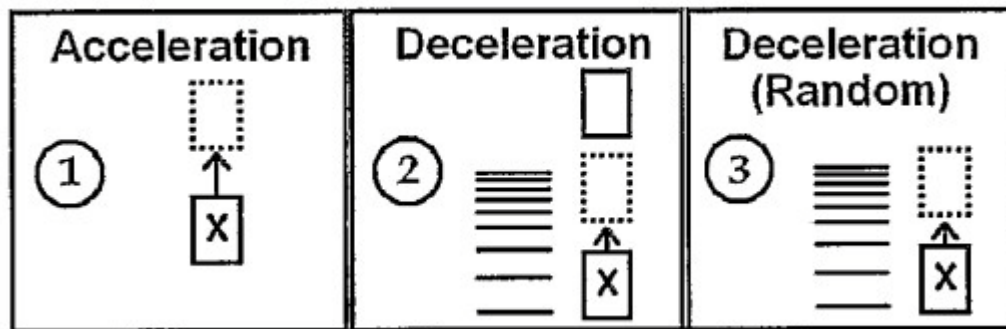


图 2：NS 算法的规律

(1) 加速。如果汽车能够在不超过最大速度 v_{\max} 的情况下加速，那么他的速度增加单位一， $v_n \leftarrow v_n + 1$ ，否则该汽车具有一个恒定的速 v_n 。

(2) 防止碰撞。如果前车和后车之间的距离 d_n 小于或等于 v_n ，那么第 n 辆车如果不减速的话将会发生碰撞，然后 $v_n \leftarrow d_n - 1$ 。

(3) 随机减速。汽车经常会因为一些非交通因素减速（如接电话，打翻了咖啡杯，甚至是笔记本电脑），这时候司机会做一些非理性的选择。我们假设这种情况发生的概率为 p_{brake} ，导致速度 $v_n \leftarrow v_n - 1$ ，假设 $v_n > 0$ 。

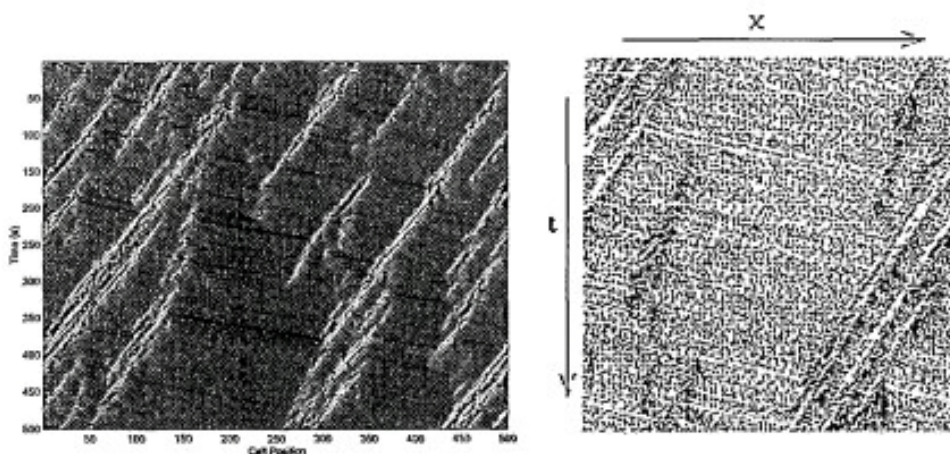
(4) 车辆尝试合并。如果它的正向路径受阻挡 ($dR = 0$)。车辆随机选择预定的方向，向左或者向右。如果该预定的方向上被阻止，这辆车在另一个方向上移动，除非两个方向都被阻止（汽车被包围）。这是符合边界限制的，也和李凯尔特等人所提出的规则是一致的[1996]。

我们选择的单元格大小为 7.5m，以匹配 NS 模型。因为一般汽

车所具有的最大速度位于 30-35m/s.简单起见,我们还使用了周期性的边界条件。我们选择 $V_{\max}=5 \text{ m/s}$, 以使得耽搁时间段接近于 1s。(然后我们放弃了这些边界条件,因为开放条件下的泊松发生器和接收器和 $M|M|n$ 队列相吻合)。此外,研究结果表明周期性边界可能过分简化了汽车的分布情况。

我们在一个给定车辆密度的初始状态下应用了这个算法。这个系统是在给定每个单元格被占用的概率为 c 的条件下创建的,也就是汽车密度参数。这和格林和格里菲斯的方法相吻合。

NS 模型所得到的结果和哈利所援引的典型案例比较相似。在图 3 中,系统在时间段 i 的状态被画在第 i 列,白色像素处表示有汽车,黑色像素处是开放的空间。这两幅图都显示了被拥堵的车辆打断的一般的连续汽车流。



a. NS 模型的结果 $c=0.2, p=0.25$

b. 乔杜里的结果

图 3: 两个模型的典型结果

4. NS 模型的性能及支持

单车道 NS 模型是前后一致, 灵活的, 并符合已知的经验数据。

NS 模型的一些属性是可以预测分析的[内格尔赫尔曼 1993 年]。我们使用这些信息以及实验结果来测试我们的模型。在极限情况下的随机制动概率为零，这对车辆巡航是可能的，在这种状态下车辆总是以最大速度运动，相应的流量为 $J = cv_{\max}$ 。只有空间足够时这才是有可能的。一旦“孔的密度”或者给剩余空间赋予 $1-c$ 值，小于这个流量的时候，自由空间的缺乏就会限制车辆的速度。流量和密度之间的关系式为：

$$J(c) = \min\{cv_{\max}, 1-c\} \quad (1)$$

其中 J 是汽车的流量，即单位时间内通过一个单元格的汽车数量， c 是汽车的密度。我们在 $p_{\text{brake}}=0$ 的条件下让 NS 自动机运行 20 次，在平均值和理论值之间达到良好的一致性，如图 4。

这个图虽然美观，但它只是表明该模型是一致的并且可以近似得到，并不表明它能代表一个真实的系统。我们查阅了车流量的经验数据（如图 5b）。显然，NS 模型是已知数据的准确近似。

另外，也可以使用平均场理论来描述 NS 模型。即使 $p_{\text{brake}} \neq 0$ ， $v_{\max}=1$ 的情况用这项技术也可以得到解决。对于我们的系统， $v_{\max}=5$ ，这使得计算上比较困难。

5. 添加延迟

延迟防止周期性边界条件的使用

为了模拟与收费站的遭遇，我们必须增加一个延迟的通畅系统。西蒙和内格尔针对堵塞情况构建了 NS 模型，但只有一个固定的延迟时间概率。我们假设服务时间服从指数分布，概率为 $1 - \exp(-\mu\Delta t)$ 。

任何一个收费站在 Δt 时间内能够完成服务，所以我们也使用这个假设在我们的 NS 模型中描述延迟的情况。

引进这种延迟时创建了一个不对称的问题：屏障右侧的车辆必须绕一圈才能够到达"收费亭"，而左边的车辆将会立即影响它。因此，我们在车道的四分之一和四分之三行车线上测量汽车流量（如图 6）。

图 6 中的基本关系图，证实了我们关于汽车流量和瓶颈（收费亭）的相互关系的直觉。因为相对较低的车流密度，和四分之三行车线处相比较四分之一行车线处的车流量出现下滑，这超越了瓶颈。因此，繁忙的交通流入，使得车辆比在通过收费亭后更快的聚集成队列。

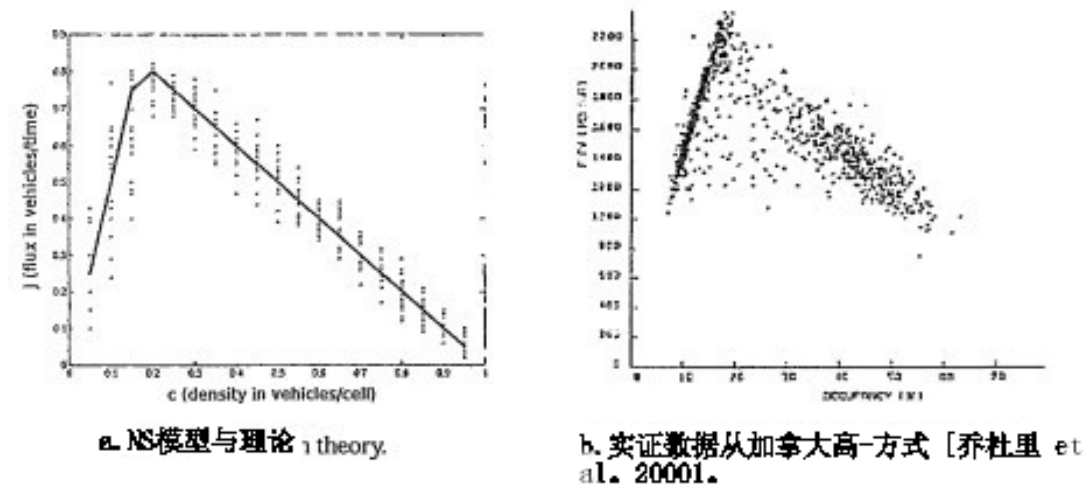
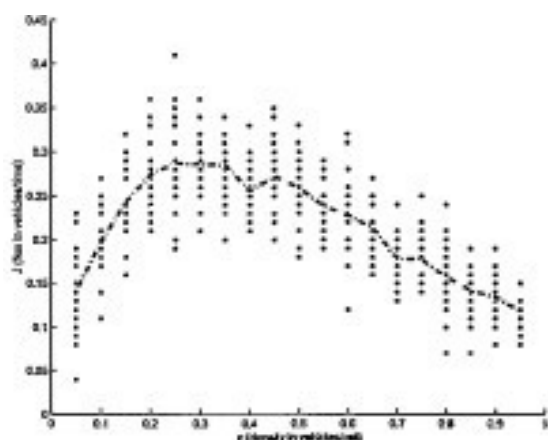
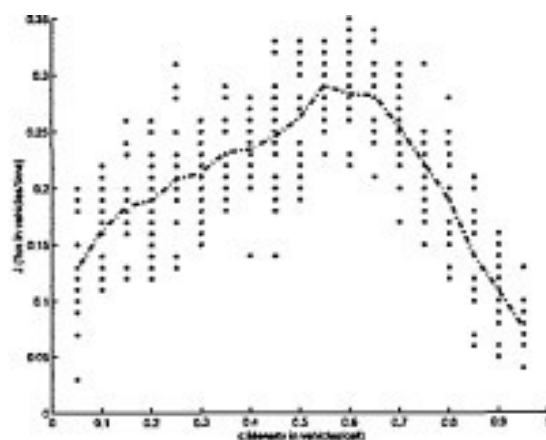


图 5. 数据模型的比较。

这些基本的关系图显示周期边界条件并不适合这种计算；在周期边界的情况下，队列的输入速率受限制于环绕在其右侧的车辆（较小）流量。这并不代表真实的交通堵塞；在没有周期边界的条件下，堵塞无法影响他们上游的车辆流量。



a. 基本关系图在四分之一点, $p = 0$.



b. 基本图在四分之三点, $p = 0$.

图 6. 基本的关系图。

六、模拟完整系统

1. 多车道情况

通过对单车道自动机添加一个新的规则，我们可以建立多车道公路模型。我们使用单车道模型以确保我们的自动机是现实世界的一个合适代表，但实际问题是多车道的。双车道模型的研究比单车道模型要少，多车道模型更加罕见 [乔杜里 2000 年；纳格尔 1998 年凯尔特 1996 年]。我们通过扩展自动机的规则设置来描述车道的变化情况，使用增加了一个规则的单车道 NS 模型来研究多车道模型。

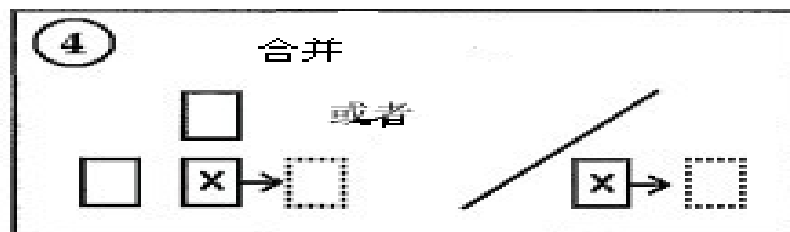


图 7. 多车道自动机规则。

2.改变公路形状

通过使用多车道自动机，我们可以建立具有现实中车道变换行为的多车道公路模型。然而，这仍然不能实现公路与收费亭的数量之间的过渡。

若要建立收费站，我们引入多个边界强制自动机来改变车道，以避免触及边界。边界勾勒出从高速公路延伸出往返于一个更大的收费站的斜坡边缘的轮廓（图 8）。这是这种模式不一般的惟一方面；通过引入不同的边界，我们可以轻松地模拟不同的问题。为了模拟在收费亭的等待情况，就像在单车道情况中那样，我们还在中心位置添加了一个延迟。

以前的模型假设路面的宽度是固定的—也就是说车道数量不会改变。通过限制道路的几何形状来表示收费站（请注意图 8 中的"钻石"形状）并引入从收费站离开合流的行为，我们在没有做额外假设的前提下增加了模型的灵活性。



图 8. 我们引入该系统以缩小和扩大交通假想边界。

七、MIMIn 队列和 NS 模型的一致性

MIMIn 队列是一种理想化的系统。它预测的时间比实际收费站的等待时间短，因为它没有考虑队列（图 9）中效率低下的问题。但是 MIMIn 队列能够预测正确的分配。此外，MIMIn 队列的稳定性和

NS 模型的稳定性也有很大的不同。如果 $\lambda/\mu < n$ ，MIMIn 队列可以达到稳定状态， λ 为到达率， μ 为服务率， n 为收费亭的数量。我们注意到在对 NS 模型进行仿真模拟的时候，收费站前的车辆会积累的越来越多，甚至相应的 MIMIn 队列处于稳定状态时也是如此。

尽管存在这些明显的不一致，但是在排队论预测和观测的结果之间存在着非常强有力的一致性。从排队论分析，我们知道离开收费站的汽车数量的概率分布为：

$$P(D = d) = \frac{e^{-\lambda\Delta t}}{d!} (\lambda\Delta t)^d$$

这个方程提供了关于队列的大量信息，并且这个概率在元胞自动机模型中可以很容易的被测量出来。我们比较图 10 中的模拟和理论概率的分布，这两个分布是非常相似的，他们的差异会变得越来越小，在经过 10^4 次的迭代后要比 NS 模型的小 2%。

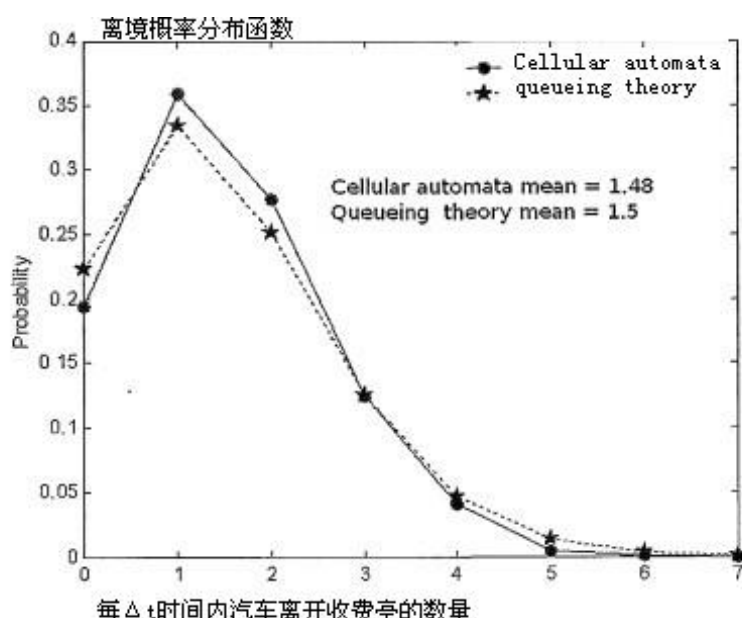


图 10。离开车辆的模拟的分布非常接近，预测是由排队理论。

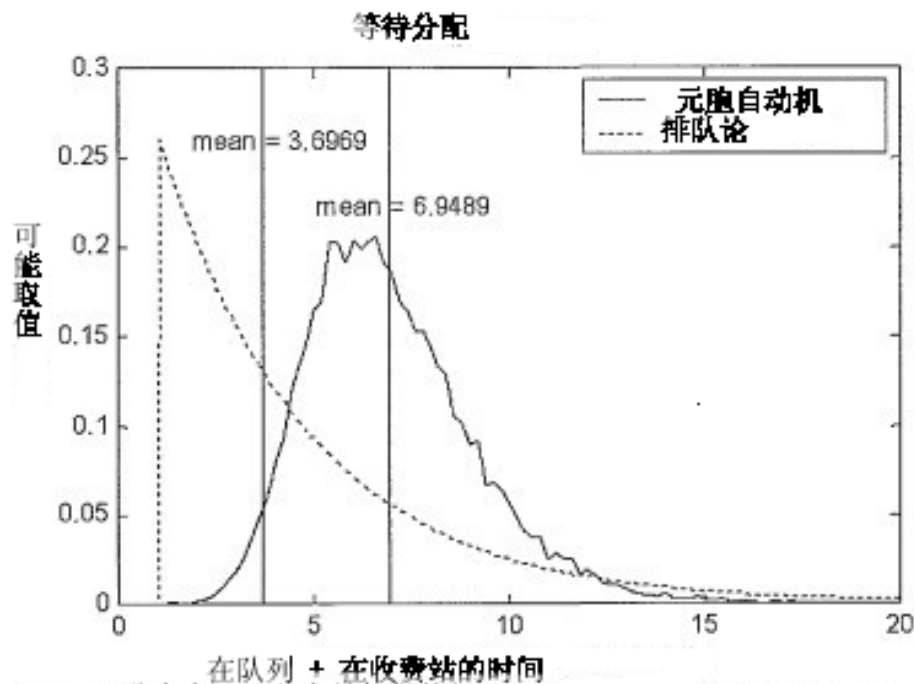


图 9. MIMIn 分布和 NS 分布是相似的但 MIMIn 等待时间由于其乐观的假设更小的意思。

八、时间自动机模型预测

1. 收费亭的最优数量

收费亭的最优配置能最大限度地减少等待时间；所以为了确定正确的收费亭数量，我们需要测量车辆进入收费站排队等候然后离开收费站重新回到告诉公路上的平均时间。我们通过跟踪自动机来确定从进入到离开该系统的平均时间。

(1) 计算平均时间

通过我们系统所需的平均时间取决于到达率（控制拥堵），车道数量，以及收费亭数量。我们认为平均服务速率是固定的，为 5 秒；海尔使用 9 秒[1963]。不过，虽然改变服务率确实改变平均时间的长短，但这种变化并不影响 n 的最佳值。

我们把进入车道数固定为 k ，并且搜索到收费亭的数量 n ，车辆到达率为 λ 。对于不同的 n 和 λ 值我们运用元胞自动机模型计算平均等

待时间，并且我们是在一个比较长的时间段内计算平均等待时间，以消除瞬态效应

不过，这些范围应该是什么？我们假定 n 不大于车道数的三或四倍。我们之所以增加这个限制，是因为我们注意到当 n 远大于 1 的时候等待时间会剧烈增加。 λ 的范围应该由常识性的限制来决定。如果 λ 是在一个时间段内到达的汽车的平均数，则 λ 不应超过交通流入的车道数量，因为这是道路的物理容量。

(2) 2 车道的最优结果

我们允许 n 的范围从 2 到 8 变化， λ 的范围从 0 到 2 变化。我们在图 11 中根据 n 和 λ 的值绘制了平均时间图。在该图中，最小值很明确地落在 $n = 4$ 这条线上，即使对于不同的 λ 值也是如此。这表明，即使对于不同的到达率，最优的收费亭数量也是 4。这是一个非常稳定的解决方案，不需要改变车辆流量率，至少对典型值来说是这样的。虽然 4 是收费亭的最佳数目，2 也非常接近最优，但 3 这个结果非常差。 $n = 3$ 时，额外的增加的这个车道造成了更严重的交通堵塞。对于小的 n 值，收费亭数量比车道数多 1 时，等待时间是局部的最大值。

(3) 3 车道的最优结果

通过改变 λ 从 0.6 至 2.7 和 n 从 3~9，我们发现，当最小值出现时，对再次独立的 λ ， $n=6$ （图 12）。

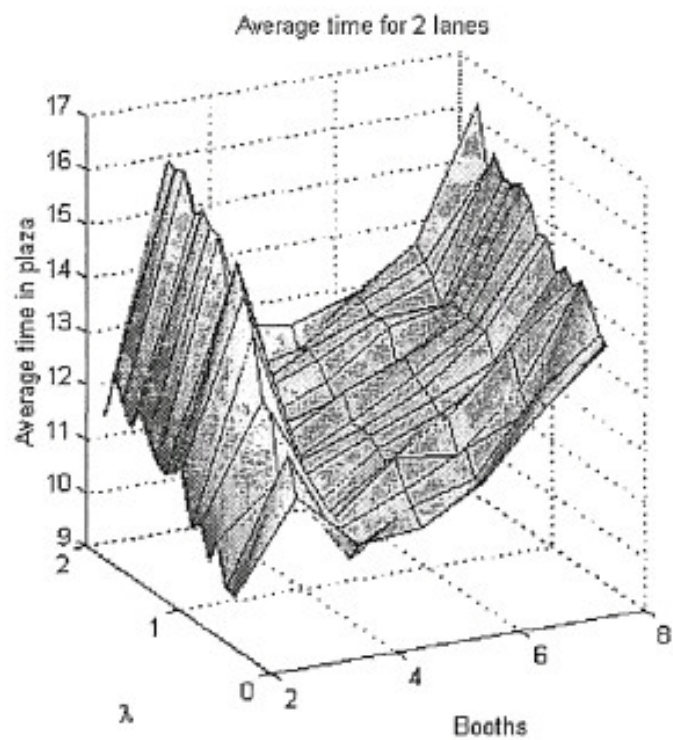
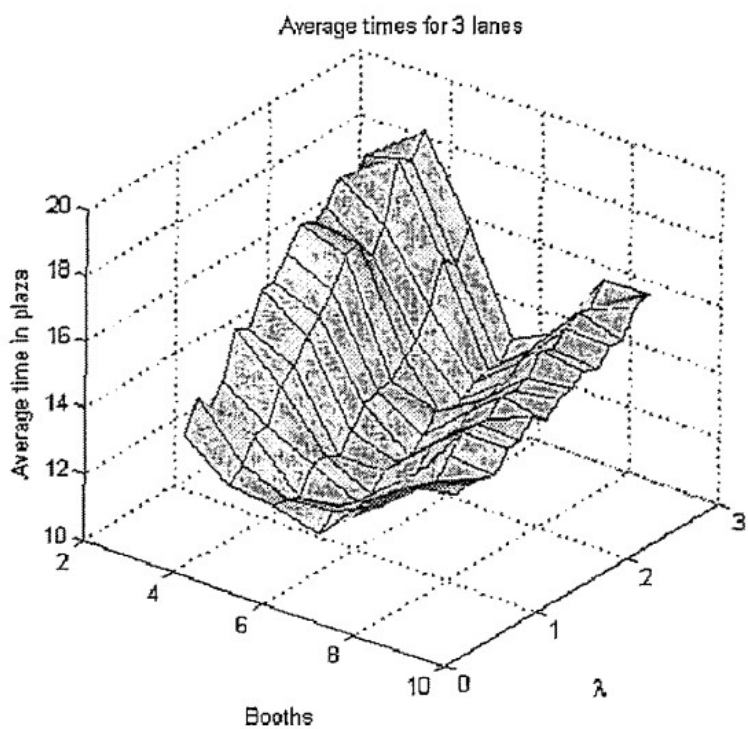


图 11: 对于一个两车道系统, 设置 4 个收费站时, 时间最短。



图

图 12: 对于三车道系统, 设置 6 个收费站时, 时间最短。

2.多车道情况

迄今为止的结果表明最优的收费亭数量总是两倍于进入车道的数量。不幸的是，四条车道的情况推翻了这种猜测。对于不同的到达率 λ ，最优收费亭数量会发生改变，对一个小的 λ 来说 n 从 6 开始变化。收费亭的拥有者可以测量交通流量，然后根据需要开启或关闭收费亭。

归纳这些结果

为了确定这些结果的稳定性，我们还对随机制动概率为 0.1 而不仅仅是 0 的情况做了计算。对于每个 λ 值，即使等待时间发生变化，收费亭的最优数量也不会变化。对于任何必要的设置变化，这个过程都可以进行重复。至此，我们已经说明了确定收费亭最优数量的一般方法。

3.每条车道一个收费站

如果汽车不允许变更车道，每条车道一个收费亭的情况将会简化为 k 个相互独立的单车道模型，这将相当于我们的单车道高速公路。但是我们知道，事实并非如此。汽车会倾向于进入队列最短的车道。

我们的结果中， $n = k$ 的情况是典型的非最佳。唯一的例外是双车道公路，在这里， $n = 2$ 时的时间只不过是勉强长于 $n = 4$ 时。然而，这并不是因为 $n = k$ 时总是“坏的”，而是因为通常能找到一个更好的结果。随着车道数目的增加，收费亭的数量也会显着增加。如果我们考虑到成本，在 $n = k$ 的情况可能就显得非常重要了，因为对于小的 k 值 ($k < 5$)， $n = k + 1$ 时是一个局部最大值， $n = k$ 时是一个局部最小值。

4.重新审视假设

虽然我们的计算中假设服务速率服从指数分布，但是采用服从高斯分布的服务速率并不会显著改变模型的结果。

九、结论

我们使用从单车道 NS 自动机模型改进的元胞自动机模型建立了一个收费站附近的交通流量模型。

- 1.我们的模型预测到的数据和车辆分布的经验数据相匹配，并且得到了排队论分析的证实。
- 2.更改收费亭的服务速率和服务分布并不显著改变最佳数量收费亭的建议。
- 3.我们创建了在高速公路设置最佳数量收费亭的一般方法。
- 4.虽然一般来说最佳收费亭数目的结果是复杂的，并取决于到达率。但也有简单的情况：2 车道的高速公路应该有 5 个收费亭，3 车道的高速公路应该有 6 个收费亭。
- 5.一般而言，收费站数量跟车道数量一样多的情况是第二优的。

十、优点和缺点

1.优点

(1) 一致性。我们的排队论模型和元胞自动机模型对于车辆离开收费亭后的分布具有一致性。这两种模型的结果和理论结果以及以往的经验数据相匹配。此外，在一些比较小的变化下，例如改变随机制动概率，模型的结果不会有显著改变。

(2) 需要的假设最少。通过使用自动机，我们减少了参数和假设。

对于我们的排队论，我们假定离开收费亭的汽车数量服从指数分布，但改变这个概率分布并不影响结果。

(3) 灵活性。我们的模型适用于具有不同几何形状的收费站,例如车道数量不同甚至边界不同。

(4) 易于实施。使用非常简单，一个复杂的问题在简单的规则下就可以进行仿真模拟。

2.缺点

(1) 没有封闭形式的解决方案。对于完整的模型，我们必须进行仿真计算。

(2) 计算时间。为了得到一个准确的车辆往来的平均时间，我们需要输入 10,000 次命令来求平均值。随着车道数量的增加，计算速度将会减慢。