

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1772

参赛队员（签名）：

队员 1：陈清斌

队员 2：江振勇

队员 3：杨庆平

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：大学组

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 “打水漂”在客机水面迫降的应用及仰角的确定

关 键 词 最佳姿态、打水漂、仰角、迫降

摘 要：

本文针对客机水上迫降研究，客机以何种姿态接触水面。通过分析，我们必须保证客机落水后，能够安全在水上滑翔，因此，我们考虑到客机所能承受的压强问题，即若客机能够安全降落水面，则在它与水相互碰撞时，所受到水对它的压强是在它所能承受的范围之内。

根据实际情况，我们建立了两个模型。模型一主要根据客机的重量、宽度等已知数据，将碰撞分成发生“打水漂”和不发生打水漂两种情况，判断客机与水面碰撞时，仰角 α 最好调节在什么范围内；模型二对这两种情况进一步分析，分别得到两种情况下的最佳仰角。最后，在保证客机可安全迫降的前提下，结合实际，最终确定最佳仰角为

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

为了更好的模型推广，本文还给出了无动力客机在一定高度的空中滑翔的整个过程中最佳迎角的确定，即使 $\frac{C(\gamma)}{\cos \beta}$ 的值始终最大将使客机在贴近水面时竖直方向的速度最小，飞行员在客机临近水面时就要参考所有可以知道的数据预测客机贴近水面时的速度大小及方向，从而可以最大程度的保证机身无损。

参赛队号 1772

所选题目 A

参赛密码 _____
(由组委会填写)

英文摘要

The article goes for a research on ditching ,. what kind of attitude to aircraft is the best contact with the water jet to?

By analyzing, We must ensure that after the aircraft fell into the water, aircraft glides on the water safely. Therefore, considering that whether aircraft can withstand the pressure problem, that if the aircraft can safely land surface, then when it collides with the water, the water by the pressure it can withstand in its range.

According to the actual situation, we created two mathematical models. THE one model :based on aircraft weight、the width of the all known data mainly,taking Collision into both cases including” Ducks and drakes” and no ” Ducks and drakes”.We determine the best elevation to what extent when Aircraft collision with the surface of the water;The another model:by further analysis of these two cases, Both cases were obtaining the best elevation to The two cases. Finally, ensure safe landing of aircraft under the premise of reality, ultimately determine the best angle of elevation .the best angle of elevation . is

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

In order to better promote the model, the article also gives a way of determining the best angle of attack when a high degree of non-powered air plane gliding in a certain whole process. Thus the value of

$$\frac{C(\gamma)}{\cos \beta}$$

Will always be the largest when the aircraft by the minimum speed is close to the water in the vertical direction. when the plane near the surface of the water, Pilots should be aware of all the data of the aircraft to predict the speed of the aircraft close to the surface, allowing the greatest degree of assurance body in good condition

一. 问题的重述

客机因为失去动力而进行迫降具有相当大的危险，为了能使大型客机在平静的水面上安全迫降，以何种姿势接触水面是最好的选择？保证机身能够漂浮一段时间，为乘员争取足够的撤离时间。需建立合理的数学模型解决下列问题：

(1) 客机与水接触后，瞬间产生极大作用的碰撞，根据客机的重量、宽度等已知数据，判断客机与水面碰撞时，仰角 α 在什么范围内，使得水对客机的压强在它所能承受的范围内。

(2) 如何确定最佳姿势的仰角，保证在碰撞瞬间，客机能够承受水面对其的压强，从而安全水上迫降。



二. 问题的分析

客机失去动力进行水上迫降时所受的危险是很多的，但最大的危险还是来自飞机自身在与水面发生碰撞时碰撞面所承受的压强及飞机发生“打水漂”时与水的接触面所承受的压强。如果飞机所要承受的压强过大导致机身受损，则在之后的过程中，飞机会面临很多危险，直接影响飞机安全迫降。

对于问题(1)，考虑到，客机在水上迫降时，它可能与水发生碰撞，客机也可能会发生“打水漂”现象。首先，通过参考文献知道，客机与水接触时不发生打水漂现象，水平方向最大的速度和客机与水面碰撞的时间；然后，将客机与水面碰撞分为打水漂和不打水漂的两种情况，分别分析在这两种情况下，客机所承受的压强。最后根据此两种情况下所得到的客机水平方向上的速度与仰角 α 的关系，压强跟 α 的关系，决定客机能承受水压时， α 的取值范围。

对于问题(2)，失去动力的客机在贴近水面时要以多大仰角进行迫降才能保证客机的安全，并进一步讨论客机入水前速度方向及大小知道的情况下，最优仰角要多大通过对这两种不同的情况的分析，只要客机所承受的压强在允许范围之内，飞行员就可以判断客机的贴近水面时的速度，从而确定一个最佳的仰角，使客机所受的压强最小。

三. 模型的假设与符号说明

3.1 模型假设

- (1) 把客机看成长方体，重量均匀分布
- (2) 客机在与水发生碰撞或者发生“打水漂”之后，如果客机无损伤，则认为客机在接下去的滑行过程都是安全的
- (3) 认为客机在接触水面到与水发生碰撞是有一个时间段的，且在这段时间内合速度大小、方向及客机姿态无任何改变
- (4) 客机与水面发生碰撞或者发生“打水漂”所受的力都将均匀分布在浸入水中的接触面上，其他地方不考虑此力

3.2 符号说明

符号	定义
M	客机的总质量
t	接触水面到与水发生碰撞的时间段
C_n	与客机形状有关的系数
β	客机合速度方向与水平面方向的夹角
F	碰撞时，客机承受的平均作用力
F_y	竖直方向的平均作用力
K	客机的宽度
P	客机所能承受的最大压强
P_2	客机与水发生直接碰撞时所承受压强
α	客机贴近水面时的仰角
v_x	水平方向的速度
v_y	竖直方向的速度
v	客机的合速度
h	客机在接触水面到与水发生碰撞的时间段内沿竖直向下的方向位移
S	客机浸入水里的面积
P_1	客机发生“打水漂”时所承受的压强

四. 模型的建立与求解

4.1 问题（1）的解决方案及模型

4.1.1 模型一 “打水漂”模型

客机贴近水面时姿势已调整好，以仰角 α 及 v 入水，与水碰撞的瞬间如图 1 所示。

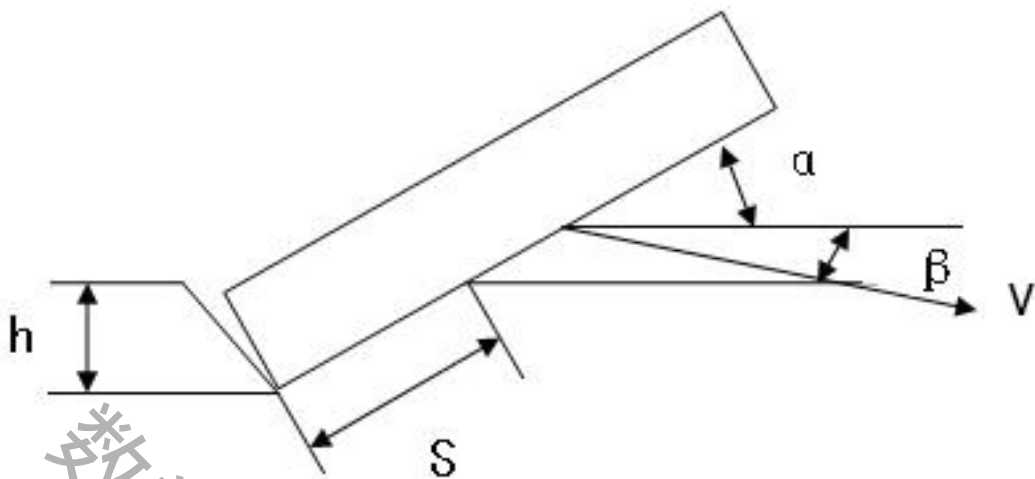


图 1 “打水漂”模型示意图

对于整个碰撞的过程，对过程进行简化定量分析，可以得到客机发生“打水漂”^[1]水平方向的速度所要满足的关系式以及客机碰撞过程的持续时间：

$$(v_x)_{\min} = \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n \sin \alpha}}} \dots\dots\dots (1)$$

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{2M \sin \alpha}{C_n \rho v_x^2 K}} \dots\dots\dots (2)$$

所以客机重心竖直下降的位移

$$h = 2v_y \pi \sqrt{\frac{2M \sin \alpha}{C_n \rho v_x^2 K}} \dots\dots\dots (3)$$

客机浸入水的部分的面积为

$$S = K \frac{h}{\sin \alpha}$$

(1) 客机发生“打水漂”现象的情况：

客机在这个过程所承受的压强为

$$P_1 = \frac{Mg}{S} = \frac{Mg \sin \alpha}{Kh}$$

由公式 (3) 得

#1772

$$P_1 = \frac{g}{2\pi \tan \beta} \sqrt{\frac{M \sin \alpha \cdot C_n \rho}{2K}} \dots\dots\dots (4)$$

要发生“打水漂”现象，水平方向上的速度必须满足(1)式，所以要有

$$v_x \geq \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n \sin \alpha}}} \dots\dots\dots (5)$$

所以，仰角 α 应满足：

$$\sin \alpha \geq \frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK} \dots\dots\dots (6)$$

又由公式(4)可推知，客机所承受的压强随着 α 增大而增大，而我们知道客机所能承受的最大压强是 P ，要使客机安全迫降， α 还需满足：

$$\sin \alpha \leq \frac{8\pi^2 P^2 K \cdot \tan^2 \beta}{g^2 C_n \rho M} \dots\dots\dots (7)$$

这样才能保证客机在发生“打水漂”现象时安全迫降。所以客机在飞行速度 v 给定的情况下，客机会发生打水漂且能安全迫降的 α 所要满足的条件为

$$\arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right) \leq \alpha \leq \arcsin\left(\frac{8\pi^2 v_y^2 P^2 K}{g^2 C_n \rho v_x^2 M}\right)$$

(2) 客机不发生“打水漂”现象的情况：

因为水平方向的速度在整个过程不变

由动量守恒，可得：
$$F = \frac{Mv_y}{t}$$

所以此时，客机受到的压强为 $P_2 = \frac{Mv_y \sin \alpha}{tKh}$ ，将公式(2)、(3)代入上式得：

$$P_2 = \frac{C_n \rho v_x^2}{8\pi^2} \dots\dots\dots (8)$$

由①可知，此时，仰角 α 应该满足

$$\sin \alpha < \frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK} \dots\dots\dots (9)$$

而且发生碰撞时客机所承受的压强要在客机所能承受的最大压强范围内，所以又要

$$\text{满足} \quad v_x \leq \pi \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}} \dots\dots\dots (10)$$

因此，在速度给定的情况下，客机不会发生“打水漂”且能安全迫降的 α 与 v 所要满足的条件为

$$v \leq \frac{\pi}{\cos\beta} \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}} \text{ 且}$$

$$0 \leq \alpha < \arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

4.1.2 模型二 最佳仰角模型

在模型一的基础上，考虑到，在有无打水漂的两种情况下，仰角 α 都跟客机下落的速度有关，而且都有一个范围能保证客机承受的压强不会超过其所能承受的压强。

(1) “打水漂”的情况：

由以上推导公式 (5) 可解得

$$\text{当 } v \geq \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\cos\beta \sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n \sin \alpha}}} > \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\cos\beta \sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n}}} \dots\dots\dots (11)$$

时，要使客机安全迫降， α 可以调整的范围为

$$\arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right) \leq \alpha \leq \arcsin\left(\frac{8\pi^2 v_y^2 P^2 K}{g^2 C_n \rho v_x^2 M}\right)$$

由上面推导出的公式 (4) 可知， α 越小，则 P_1 越小，所以这种情况最佳的 α 为

$$\arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

(2) 不发生“打水漂”的情况：

由以上推导公式 (10) 可解得

当 $v > \frac{\pi}{\cos\beta} \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}}$ 时，客机以任何 α 不可能以无“打水漂”的情况安全迫降。

此时

$$\text{若 } \frac{\pi}{\cos\beta} \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}} > \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\cos\beta \sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n}}}, \text{ 则可能出现第一种情况，即客机发生“打水漂”情况而且可能安全迫降；}$$

漂”情况而且可能安全迫降；

$$\text{若 } \frac{\pi}{\cos\beta} \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}} \leq \frac{\sqrt{\frac{4Mg}{\rho K^2 C_n}}}{\cos\beta \sqrt{1 - \frac{2M \tan^2 \beta}{\rho K^3 C_n}}}, \text{ 则客机无法进行安全迫降, 需要改变速度来}$$

使安全迫降成为可能。

$$\text{当 } v \leq \frac{\pi}{\cos\beta} \sqrt{\frac{8P}{C_n \rho}} \text{ 时, 客机要安全迫降, 则 } \alpha \text{ 可以调整的范围为}$$

$$0 \leq \alpha < \arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

由上面推导的公式 $P_2 = \frac{C_n \rho v_x^2}{8\pi^2}$ 可知, 客机此时所受的压强与 α 无关, 所以 α 可以任意选取, 但为避免客机在滑翔过程中发生头朝下等危险, 所以最佳的 α 是

$$\arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

综合以上的讨论, 在保证存在一个使客机能够安全迫降的仰角前提下, 客机的最佳仰角为

$$\arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

五. 模型的优缺点及改进方向

5.1 模型的优点:

(1) 本模型的优点在于最佳仰角与飞行速度大小及方向的关系直接用公式

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2Mv^2 \sin^2 \beta}{\rho K^3 C_n v^2 \cos^2 \beta - 4MgK}\right)$$

给出, 从而在速度大小及方向给定的情况下, 可通过公式来确定最佳仰角。

(2) 模型所做的假设少, 所做的假设也较合理, 从而使导出的公式可信度较高。根据公式还可以预先判定出飞机能否在水上进行安全迫降。

5.2 模型的缺点:

本模型推导出的公式里的参数系数难以给定, 由于缺少相关数据来求出一些常数, 导致在应用时, 只能通过少量研究所提供的数据来做主观猜测, 这在很大程度上影响了公式代入数据后的准确度。

5.3 模型的推广:

无动力客机在足够高的空中调整姿态的过程 (如图 2):

我们假定无动力客机的水平方向的初速度足够大而不致客机发生坠落, 而且也不会使客机发生“打水漂”现象。客机的飞行的迎角 γ (客机飞行方向与机身轴线的角度) 在临界迎角之内。客机处于足够高的高度, 且整个滑翔过程无风, 所受的水平方向上的

合力为 0，即水平方向的速度不变。

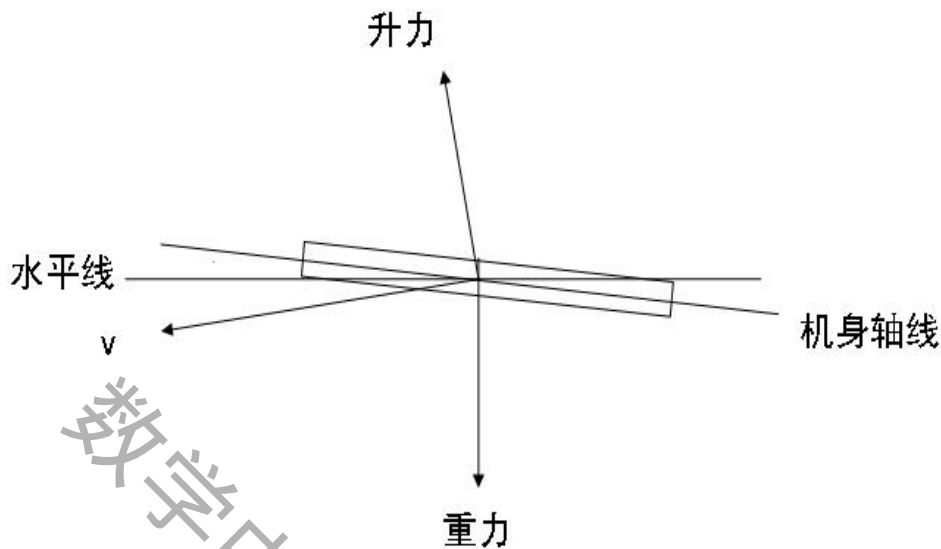


图 2 升力分解示意图

无动力客机在空中滑翔，受力情况如上图，为了使客机能够更加安全的迫降，由水平方向的速度不变可推知，竖直下落的速度要越小越好，由空气动力学的升力公式

$F = \frac{1}{2} \rho_1 C(\gamma) S_1 v^2$ ，其中 $C(\gamma)$ 为升力系数，为了使竖直下落的速度越小，则竖直向上的

力要尽量大，所以 F 竖直方向的分力 $F_3 = F \cos \beta = \frac{1}{2} \rho_1 C(\gamma) S_1 v^2 \cos \beta$ ，即

$$F_3 = \frac{\rho_1 S_1 v_x^2}{2} \frac{C(\gamma)}{\cos \beta}$$

为了尽量降低竖直方向上的速度，只要 F_3 尽量大，即 $\frac{C(\gamma)}{\cos \beta}$ 尽量大，又因为迎角 γ 在临

界迎角之内时，迎角越大，则机翼所能提供的升力越大^[8]，这也直接使 β 的变化量会越小，这样就可以保证客机竖直向下的速度最小，从而使客机与水发生碰撞时所承受的压强最小。接下去为了使客机可以安全的在水面迫降，由上面我们的讨论知道，飞行员在客机临近水面（假定为离水面 100 米）时就要参考所有可以知道的数据，预测飞机贴近水面时的速度大小及方向，根据以上结论，从而判断以多大的仰角迫降才是最佳的选择。

参考文献

- [1]戴岩伟. 打水漂与物理学规律[J]. 大学物理, 2009, 28(12), 16~18
- [2]姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 8
- [3]王亚锋, 牟让科. 基于 SPH 法的民用客机水上迫降载荷计算方法研究. 结构强度研究. 2009(2)
- [4]屈秋林, 刘沛清等. 某型客机水上迫降的着水冲击力学性能数值研究[J]. 民用客机设计与研究. 2003
- [5]张韬, 李书等. 民用客机水上迫降分析模型和数值仿真[J]. 南京航空航天大学学报. 2010, 42(3), 392~394
- [6]贺谦, 陈效鹏, 李磊等. 客机水面降落的机身载荷研究[J]. 强度与环境, 2009, 39(4)
- [7] 王晓辉. MA60 客机水上漂浮特性研究[J]. 西安航空技术高等专科学校学报, 科学出版社. 2008, 26(5)
- [8] 陈永丽. 机翼升力的物理原理分析[J]. 现代物理知识, 北京陆军航空兵学院基础部. 2010(2). 20-21