

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2010@tzmcm.cn

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1447 队

参赛队员（签名）：

队员 1： 郭雅婷

队员 2： 蔡杰明

队员 3： 张力元

参赛队教练员（签名）：

樊颖南

参赛队伍组别： 大学组

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2010@tzmcm.cn

## 2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车 II

关 键 词 大型车辆，轨迹，建议路线，障碍物

### 摘 要：

大型车辆有时也会面临在狭窄空间中停车的问题，因此有必要考查能够安全停车的车库大小。我们简化汽车模型为六轮单轴驱动，据车辆在行驶过程中遵循的运动学规律以及事先给定的初末条件，用高次多项式对运动曲线进行模拟，并考察相应物理量的变化轨迹，最后依据轨迹与车位限制的临界条件，即可得出安全停车的车位大小值。

另外我们虽然已知较优的停车线路，但往往由于障碍物等客观条件迫使汽车临时改变线路绕道而行，这就要求在任何位置都可以随时得到建议路线。假设“绕道”时都以最小半径即最短路线摆正车位，我们可以建立多个相切圆的路线，将车逐渐调整到能与入库圆相切的轨道上去。另外，障碍物的位置是决定以何种圆弧调整的关键，我们分三种理论情况并结合示意图，分析本车的建议线路。

参赛队号 1447

所选题目 A

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)Email：2010@tzmcm.cn

---

## SMART CAR II

**Abstract:** The large vehicles are sometimes faced with the narrow issue of parking space, it is necessary to examine the size of a secure parking garage. We simplify the vehicle model for the six single-axis drive vehicles in the process, according to the kinematics following the law and the prior conditions given both the beginning and the end, we take advantage of higher polynomial curve to simulate exercise, and study the corresponding changes in physical path, the final track and parking restrictions according to the critical conditions for security parking spaces can be obtained by the size value.

In addition, we though have known optimum parking line, but often due to obstacles such as the objective conditions forcing the car to change the temporary detour, which can be requested at any location anytime. If "Bypass" have a minimum radius that is when the shortest route straightened parking spaces, we can create multiple line tangent to the circle, gradually adjust the car to the tangent with the circular orbit storage .Furthermore, the location of obstacles is to determine the key of arc adjustment, we divided three theories and combine with diagram, of the proposed route of the vehicle.

**Key Words:** large vehicles, track, proposed route, obstacles

## 一、问题的提出

### “聪明的汽车”第二阶段问题：

(1) 大型车辆有时也会面临在狭窄空间中停车的问题。例如铰接式的集装箱货车（见图2），车头和拖挂的集装箱拖车之间有可活动的连接部，所以整车在转弯时不是刚性的。对这样的车辆，请设计一个方法来判断本车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。

(2) 通过第一阶段的工作，我们已经能够设计出较优的停车线路。但人工驾驶时操作可能不准确，由于客观条件，也可能影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的线路行进。假设我们可以实时测定本车的确切位置，请建立合理的模型，以根据本车的当前位置，随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。建议需要考虑实用性。为简化问题，在此问题中只需考虑小型车辆。

## 二、问题的分析

### 一、铰接式的集装箱货车停车线路

关于大型车辆面临在狭窄空间中停车的问题，因为车头和拖挂的集装箱之间有可以活动的连接部位，所以整车在转弯时不是刚性的，其运动角度是渐变的，于是，轨迹不是准确的圆弧。根据其运动的初始状态及动力学约束，它必定是符号某种函数关系的光滑曲线。

#### 1) 车辆运动方程的建立

由题可知所需要研究的对象为Mercedes-Benz® Actros 铰接式集装箱卡车，我们假设模型里面的车辆为六轮驱动且为单轴连接型，从一般型落手，简化程序。运用几何知识与物理关系，联系数学方法建立车辆运动方程。

#### 2) 轨道的设计

经过研究，利用遗传算法和变分法等能够设计出拖拉机行驶的最佳行驶路径，但是在利用这些方法进行设计时计算时间较长，过程相对较为复杂。出于简单实用为目的，且已知机车的初始位置与终了位置，故我们考虑用高次多项式来对轨道进行模拟。联系各方面已知或者模拟的数据，经过多项式模拟套入，能求出相应参数，最终求得运动过程中各变量的方程式。

#### 3) 临界曲线的确定

题目要求设计一种方法来判断此种类型车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位，也就是根据几何形状，车辆的动力学模型和碰撞约束等条件，要汽车安全停入车库。根据第一阶段论文相关知识，我们易知只要卡车的前右方和后右方两点保障了安全状态，就可以避免与车库限制边缘相交碰撞。按照这些条件，从而可以判断车库的临界大小，最终以达到检验是否能安全停车的目的。

## 二、障碍物导致可变轨迹

首先我们先明确一点：无论车辆以什么角度在什么位置，都有一条较优的停车线路。当人工驾驶时操作因客观条件（假设障碍物为一个行人）导致车辆不能按照原来设计的较优的停车线路行驶，那么车辆必须绕另一个轨迹来完成停车。由于障

## 报名号 # 1447

碍物所在位置是不能预知的，也就是不确定的，所以在沿着原来设计线路停车的过程中，障碍物可能出现在其中的任何地方。依题，假设我们可以实时测定本车的确切位置，并依据本车的位置坐标进行线路判断。于是，在倒车时一旦遇到障碍，可以随时得出另一条可行的停车线路，指导驾驶员沿另一条建议停车线路实现停车。

我们可以采取以最小半径绕过障碍物的方法，进入另一条轨道停车。假设障碍物是个给定直径长度的圆，轨道必须与之相切，根据几何形状，车辆的动力模型，碰撞约束等，通过控制汽车转向角和相对停车位置，进入不同于原来轨道的另一条切线。

对于障碍物的具体位置，首先我们把基本原理抽象出来，在一个模型里面分析，再将其模拟到题目示意图的实际情况上。根据原理，我们分开三种情况讨论（如图），①障碍物在车入库的直线线路离库较远的地方；②障碍物在车入库的直线线路离库较近的地方；③障碍物在车转弯调整方向的曲线线路上。假设车在调整另一条路线时都是以其最小半径转弯（尽快摆正的原则），根据最小半径圆与障碍物表示圆相切（障碍物半径加车宽的二分之一的圆），便可得出最快摆正的最短路线。

联系示意图的情况，因车与车库距离十分短，于是排除上述所说的第②种情况（障碍物在车入库的直线线路离库较远的地方），而分两种情况讨论。其一是障碍物出现在第一阶段的正向开车调整位置上；其二上障碍物出现在第二阶段的倒车入库线路上。根据几何知识画图计算可得出障碍物导致的可变轨迹。

### 三、模型假设及说明

#### 基本假设：

- 1) 假设前后停置的汽车都在三维空间上沾满整个车位，车位边角线为汽车向碰的危险点；即汽车及汽车在地面的垂直投影，在整个倒车过程当中都不与车库垂直方向的两个边界相交；
- 2) 假设整个泊车过程车辆都以低速匀速行驶，并且汽车受到的侧向力很小；本文查得驾龄在 10 年的驾驶员经验，车速假定稳定在 3km/h.
- 3) 由于机车倒车的行驶速度较低，假定可不考虑侧滑和回转惯性力；
- 4) 两前轮的最大偏向角大小相等；
- 5) 汽车倒车结束后，汽车及汽车在地面的垂直投影离车库四边的最小距离都不能小于 100mm，以满足目前选用的超声传感器测量的最小距离不大于 100mm 的限制；
- 6) 假设此时交通压力不大，没有车辆在后面等候，有足够的时间调整车的位置，不需加快泊车速度；
- 7) 车位前面有足够大的空间供汽车调整位置；

#### 模型一：

- 8) 为简化模型起见，我们假设模型里面的车辆为六轮驱动且为单轴连接型；
- 9) 对于最初态的确定，为方便起见，不妨假设它与车位呈平行状态（水平方向），且在竖起方向上与最后的停车点也在一条竖直方向上；
- 10) 本文汽车侧位停车都时一次性调整入车位的；

#### 模型二：

- 11) 如理论模型开始时车辆以车轮以最大偏转角，即车辆以最小偏转半径缓慢行驶，

## 报名号 # 1447

后来以较小的角度稍微调整以达到预定轨道. 此时, 因车速很慢所以逐渐改变车轮角度而造成的离圆形轨道偏移影响程度很小, 偏移的位移相对于偏转半径十分小, 可以忽略, 也就是假设按照圆形轨道行驶;

- 12) 假设障碍物为一个人, 用直径为一米的圆代替;
- 13) 作为障碍物的人不可以进入车库的任何位置;
- 14) 因其能最快摆正车的方向, 我们把以最大偏向角方式绕过障碍物假定为最优方法。

#### 四、 文中用到模型数据及符号说明

a) 按照题目中提供的平面图, 测量出相关数据如下:

汽车长度	3.32cm
汽车宽度	1.43cm
车位长度	4.5cm
车位宽度	2.85cm

b) 由于题目中提供的平面图不能测量出如轴距、后轮到保险杠距离等数据, 为了建模需要和方便, 下面将按比例列出某款车的实际整车参数:

整车参数	数值
长	4908mm
宽	2114mm
轴距	2350mm
最小转弯半径	$\leq 5250\text{mm}$
后轮到保险杠距离	884mm
$\theta_{\max}$ 最大偏转角	$45^\circ$
边界安全最小距离	100mm
车库长度	6652mm
车库宽度	4213mm
方向盘右打死左前轮转角	$45^\circ$
方向盘右打死右前轮转角	$45^\circ$

相关符号及其说明:

$x, y$  —— 汽车后轮轴中心点的坐标;  $M$  —— 汽车的链接点到机车后轮中点距离

$\theta$  —— 机车的横摆角;  $\beta$  —— 拖车的方向角 (机身和拖车之间的夹角);

$\alpha$  —— 机车的转向角;  $V$  —— 机车的行驶速度

$y_c$  —— 过渡阶段时  $y$  方向初值;  $x_s, y_s$  —— 开始倒车时后轴中点初值

$\theta$  —— 机车的横摆角;  $\theta_s$  —— 开始倒车时的横摆角

$d_1$ ——前轴中点到车前身垂直距离； $d_2$ ——拖车宽度的一半

$d_3$ ——汽车前身后轮到保险杠的距； $d_4$ ——拖车后轮到保险杠的距离

$d_5$ —— $l_1$ 为轴距 $a, b, c, d, e$ 为参数；其中所有角度逆时针为正

注：关于模型二的相关符号较为复杂，并且与图形相关密切，我们故不在此依依列名，在模型二时有相应概述。

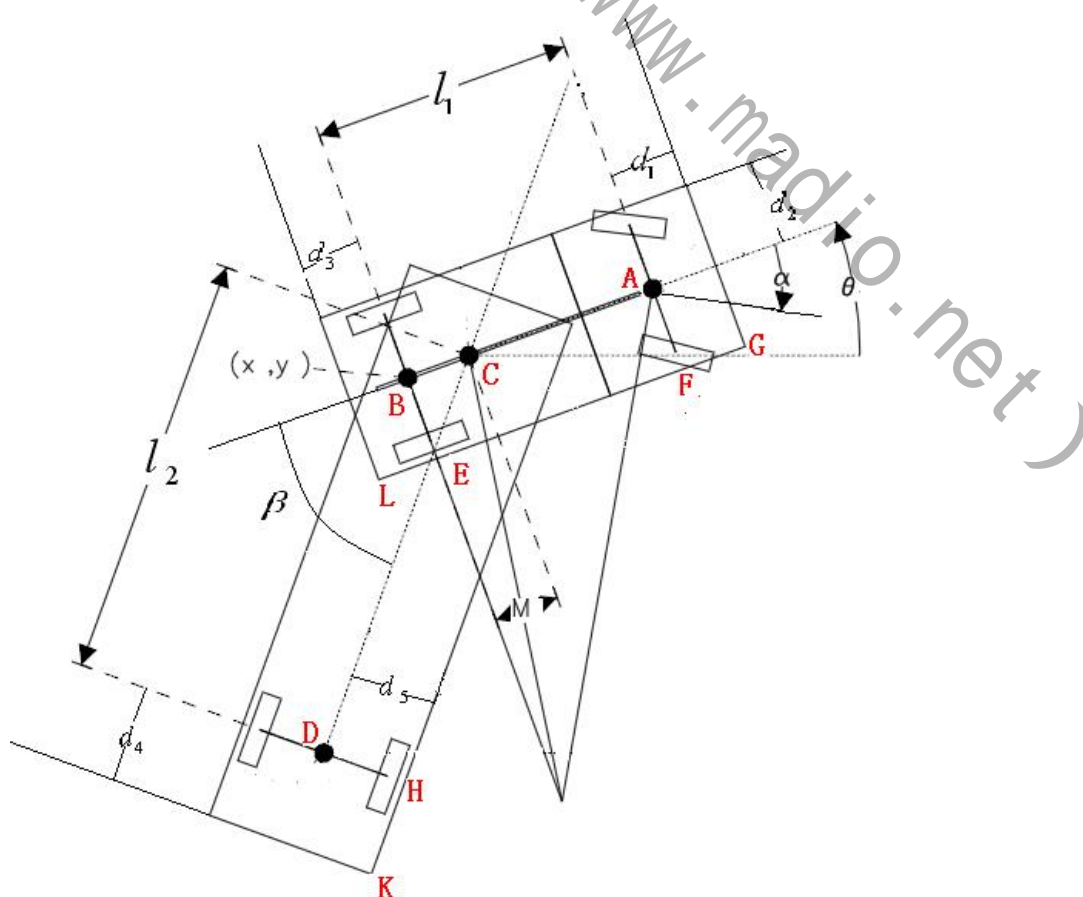
## 五、模型的建立、求解及验证

### 模型一：

问题提出：大型车辆有时也会面临在狭窄空间中停车的问题。例如铰接式的集装箱货车，车头和拖挂的集装箱拖车之间有可活动的连接部，所以整车在转弯时不是刚性的。对这样的车辆，请设计一个方法来判断本车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。

#### 1) 车辆运动方程的建立

由题可知所需要研究的对象为Mercedes-Benz® Actros 铰接式集装箱卡车，为简化模型起见，我们假设模型里面的车辆为六轮驱动且为单轴连接型。如图1所示





报名号 # 1447

图1

另外由于机车倒车的行驶速度较低，假定可不考虑侧滑和回转惯性力，即得到运动学模型，车辆运动方程式为：

$$\begin{cases} x' = -v \cos \theta \\ y' = -v \sin \theta \\ \theta' = -\frac{v}{l_1} \tan \alpha \\ \beta' = \frac{v}{l_1} \sin \beta + \frac{v}{l_1 l_2} (l_2 + M \cos \beta) \tan \alpha \end{cases} \quad (1)$$

(1) 式中  $x, y$  —— 汽车后轮轴中心点的坐标；

$M$  —— 汽车的链接点到机车后轮中点距离；

$\theta$  —— 机车的横摆角；  $\beta$  —— 拖车的方向角 (机身和拖车之间的夹角)；

$\alpha$  —— 机车的转向角；  $V$  —— 机车的行驶速度。其中所有角度逆时针为正。

注：以下若不特别说明， $x, y$  均表示汽车后轮轴中心的运动特征

## 2) 轨道的设计

利用遗传算法和变分法等能够设计出拖拉机行驶的最佳行驶路径，但是在利用这些方法进行设计时计算时间较长，过程相对较为复杂。出于简单实用为目的，且已知机车的初始位置与终了位置，故我们考虑用多项式来对轨道进行模拟。

首先建立平面直角坐标系，给定多项式为  $y = \frac{ax}{x_s} + \frac{bx^2}{x_s^2} + \frac{cx^3}{x_s^3} + \frac{dx^4}{x_s^4} + \frac{ex^5}{x_s^5}$

( $x_s$  为初值， $a, b, c, d, e$  为参数)。参照第一阶段的问题，我们首先还是假设汽车在初始时刻是同停车位平行的。另外再由 F. Gómez-Bravo\* 等人的《CAMIENTO PARALELO EN VEHÍCULOS NO HOLÓNOMOS CON Y SIN REMOLQUE》一文最后的模拟实验可以知道单轴形拖车总的倒车历程可以概括为两个阶段，并且在每个阶段都存在相对应的状态。为方便起见，我们依照顺序分别称为

### I 过渡阶段 II 倒车阶段

考虑到建系与计算的方便程度，我们以最末静止状态为坐标原点 0。并且先讨论倒车阶段，再讨论过渡阶段，我们将在后面看到这样做是有利于简化计算的。

#### (1) 倒车阶段：

假设始末二态有

$$\begin{aligned} (x, y, \theta, \alpha, \beta)|_s &= (x_s, y_s, \theta_s, 0, 0) \\ (x, y, \theta, \alpha, \beta)|_f &= (0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (s, f \text{ 分别为始末两态})$$

$$\text{于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x_s} + \frac{2bx}{x_s^2} + \frac{3cx^2}{x_s^3} + \frac{4dx^3}{x_s^4} + \frac{5ex^4}{x_s^5} \quad (2)$$

$$\text{另由 (1) 式易知 } \frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (3)$$



报名号 # 1447

再对(2)(3)式分别求导知，
$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{2b}{x_s^2} + \frac{6cx}{x_s^3} + \frac{12dx^2}{x_s^4} + \frac{20ex^3}{x_s^5} \quad (4)$$

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{d \tan \theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\tan \alpha}{l_1 \cos^3 \theta}$$

即  $\tan \alpha = l_1 \cos^3 \theta \left( \frac{2b}{x_s^2} + \frac{6cx}{x_s^3} + \frac{12dx^2}{x_s^4} + \frac{20ex^3}{x_s^5} \right) \quad (5)$

联立上面五式及初始条件，我们可以求出解如下：

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -4x_s \tan \theta_s + 10y_s \\ d = 7x_s \tan \theta_s - 15y_s \\ e = -3x_s \tan \theta_s + 6y_s \end{cases} \quad (6)$$

于是在给定的数据情况下我们可以依照(6)式确定的系数确定出相应倒车的理想路线. 即有行车路线；

$$y = \frac{(-4x_s \tan \theta_s + 10y_s)x^3}{x_s^3} + \frac{(7x_s \tan \theta_s - 15y_s)x^4}{x_s^4} + \frac{(-3x_s \tan \theta_s + 6y_s)x^5}{x_s^5} \quad (7)$$

显然以上各式我们也可以确定 $\alpha, \beta, \theta$ 的变动情况；

其中

$$\theta = \arctan \left[ \frac{3(-4x_s \tan \theta_s + 10y_s)x^2}{x_s^3} + \frac{4(7x_s \tan \theta_s - 15y_s)x^3}{x_s^4} + \frac{5(-3x_s \tan \theta_s + 6y_s)x^4}{x_s^5} \right]$$

$$\alpha = \arctan \left\{ l_1 \cos^3 \theta \left[ \frac{6(-4x_s \tan \theta_s + 10y_s)x}{x_s^3} + \frac{12(7x_s \tan \theta_s - 15y_s)x^2}{x_s^4} + \frac{20(-3x_s \tan \theta_s + 6y_s)x^3}{x_s^5} \right] \right\}$$

故由(7)式及初等函数性质可以知道 $y, \theta, \alpha$ 是连续且光滑的，下面我们也试说明 $\beta$ 也是连续且光滑的。

由 $\beta'_t = \beta_x \frac{dx}{dt}$ 及上面各式，可以知道

报名号 # 1447

$$\beta_x = -\left(\frac{\tan \theta}{l_1} + \frac{\tan \alpha}{\cos \theta l_1} + \frac{M \tan \alpha \cos \beta}{\cos \theta}\right)$$

$$= h(x) + t(x) \cos \beta$$

$$(\text{其中 } h(x) = -\left(\frac{\tan \theta}{l_1} + \frac{\tan \alpha}{\cos \theta l_1}\right), t(x) = \frac{M \tan \alpha}{\cos \theta})$$

$$\beta_x = -\left(\frac{\tan \theta}{l_1} + \frac{\tan \alpha}{\cos \theta l_1} + \frac{M \tan \alpha \cos \beta}{\cos \theta}\right)$$

$$= h(x) + t(x) \cos \beta$$

$$(\text{其中 } h(x) = -\left(\frac{\tan \theta}{l_1} + \frac{\tan \alpha}{\cos \theta l_1}\right), t(x) = \frac{M \tan \alpha}{\cos \theta})$$

$$\text{再令 } \cos \beta = u, \text{ 进而 } \beta_x = (\arccos u)_x = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\text{故我们有 } \frac{-1}{\sqrt{1-u(x)^2}} = h(x) + t(x)u(x)$$

求解上式可得  $u(x)$ , 进而求得  $\beta$

由上式函数性质也可以看出,  $\beta$  必然也是连续且光滑的 1

综上所述,  $y, \theta, \alpha, \beta$  均与  $x$  存在相应的函数关系, 且函数光滑. 从而这也就说明了用多项式来模拟最优曲线过程是可行的, 在不严格要求下可直接看作各参数运动轨迹, 并具有一定程度的准确性.

## (2) 过渡阶段.

根据最初的讨论, 现在我们来讨论机车牵引的过渡阶段.

由前面的假设可知汽车最初与车库呈平行状态 (水平方向), 并且为方便起见我们不妨同时假设在竖起方向上汽车也与最后的停车点也在一条竖直方向上. 初始条件为

$$(x, y, \theta, \alpha, \beta)|_c = (x_c, y_c, 0, 0, 0), \quad (x, y, \theta, \alpha, \beta)|_s = (x_s, y_s, \theta_s, 0, 0).$$

现在我们作如下变化  $x' = x - x_c$ ,  $y' = y - y_c$ .

$$\text{并且设过渡曲线为 } y' = \frac{ax'}{x_s} + \frac{bx'^2}{x_s^2} + \frac{cx'^3}{x_s^3} + \frac{dx'^4}{x_s^4} + \frac{ex'^5}{x_s^5}$$

$$\text{从而在 } x' - y' \text{ 系中的初始条件变为: } (x', y', \theta, \alpha, \beta)|_c = (0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(x', y', \theta, \alpha, \beta)|_s = (x_s - x_c, y_s - y_c, 0, 0, 0)$$

故我们类比式 (6), 不难求得过渡状态中  $a, b, c, d, e$  各参数为:

报名号 # 1447

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=-4(x_s-x_c)\tan\theta_s+10(y_s-y_c) \\ d=7(x_s-x_c)\tan\theta_s-15(y_s-y_c) \\ e=-3(x_s-x_c)\tan\theta_s+6(y_s-y_c) \end{cases}$$

从而我们也可以确定在  $x-y$  坐标系中过渡曲线的方程为

$$\begin{aligned} y &= y_c + \frac{[-4(x_s-x_c)\tan\theta_s+10(y_s-y_c)]x^3}{x_s^3} \\ &+ \frac{[7(x_s-x_c)\tan\theta_s-15(y_s-y_c)]x^4}{x_s^4} \\ &+ \frac{[-3(x_s-x_c)\tan\theta_s+6(y_s-y_c)]x^5}{x_s^5} \\ &= y_c + \frac{[-4x_s\tan\theta_s+10(y_s-y_c)]x^3}{x_s^3} \\ &+ \frac{[7x_s\tan\theta_s-15(y_s-y_c)]x^4}{x_s^4} \quad (8) \\ &+ \frac{[-3x_s\tan\theta_s+6(y_s-y_c)]x^5}{x_s^5} \end{aligned}$$

(因为  $x_s = x_c$ )

综上便有如下图 (2) 所示的轨道曲线：

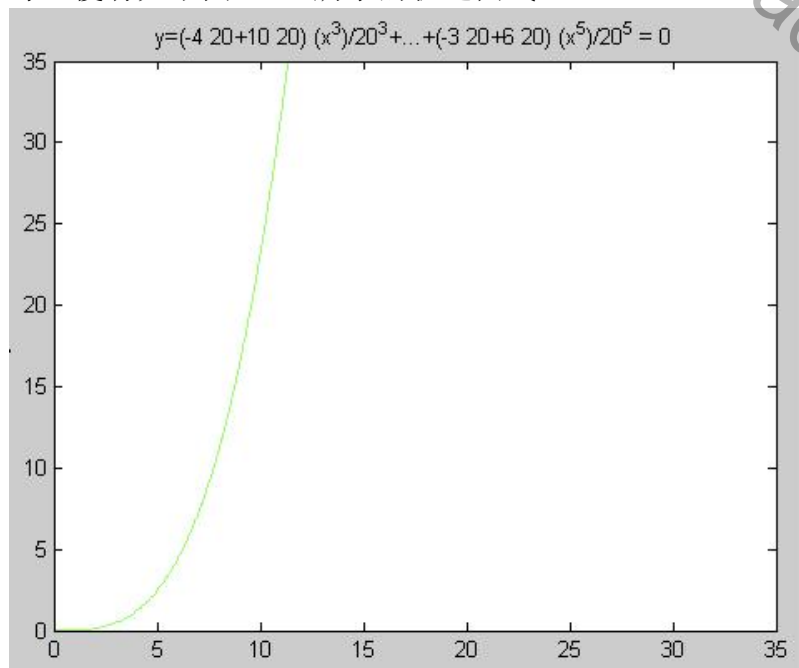


图 (2)

### 3) 临界曲线的确定

题目要求设计一种方法来判断此种类型车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位，易知要汽车安全停入车库，只需要图(1)中  $G, K$  两点保障安全状态即可。下面试分别讨论之；

(1) G点

如图(1)所示，设点  $B(m, n)$  显然我们知道  $(m, n)$  满足(7)式。

另外由几何关系不难得  $C(m + M \cos \theta, n + M \sin \theta) \quad A(m + l_1 \cos \theta, n + l_1 \sin \theta)$

又设F为  $(x, y)$  显然知有直线AF:  $y - y_A = \frac{-1}{\tan \theta} (x - x_A)$

又易知直线ABC:  $y - n = \tan \theta (x - m)$  F到ABC的距离为  $d_2$ 。由点到直线距离公式可

以知道  $\frac{|\tan \theta x - y - \tan \theta m + n|}{\sec \theta} = d_2$

于是经联立可解得  $F(d_2 \sin \theta + l_1 \cos \theta + m, l_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta + n)$

而对于点G我们知道  $k_{FG} = k_{ABC} = \tan \theta$ ，于是可推知  $d_{FG} = d_1$

$G(x_F + d_1 \cos \theta, y_F + d_1 \sin \theta) = (d_2 \sin \theta + d_1 \cos \theta + l_1 \cos \theta + m, l_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta + d_1 \sin \theta + n)$

现在我们反过来令  $G(x, y)$ 。从而可求得

$B(m, n) = (x - d_2 \sin \theta - d_1 \cos \theta - l_1 \cos \theta, y - l_1 \sin \theta + d_2 \cos \theta - d_1 \sin \theta)$

又  $(m, n)$  满足(7)式。将上式代入(7)式。即有点G轨迹

经过整理即有

$$\begin{aligned} y = & \frac{(-4x_s \tan \theta_s + 10y_s)(x - d_2 \sin \theta - d_1 \cos \theta - l_1 \cos \theta)^3}{x_s^3} \\ & + \frac{(7x_s \tan \theta_s - 15y_s)(x - d_2 \sin \theta - d_1 \cos \theta - l_1 \cos \theta)^4}{x_s^4} \\ & + \frac{(-3x_s \tan \theta_s + 6y_s)(x - d_2 \sin \theta - d_1 \cos \theta - l_1 \cos \theta)^5}{x_s^5} \\ & + l_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta + d_1 \sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

上式即为在理想倒车行驶路径下G点满足的方程式，其中  $(x, y)$  为G点轨迹，而

$x_s, \theta_s, d_1, d_2, l_1$  均为已知值。  $x_s, \theta_s$  为开始倒车时后轴中点初始坐标， $\theta$  是机车的横摆

角且它由(8)式确定,  $d_1$  为前轴中点到车前身垂直距离,  $d_2$  为车宽一半长,  $l_1$  为轴距)

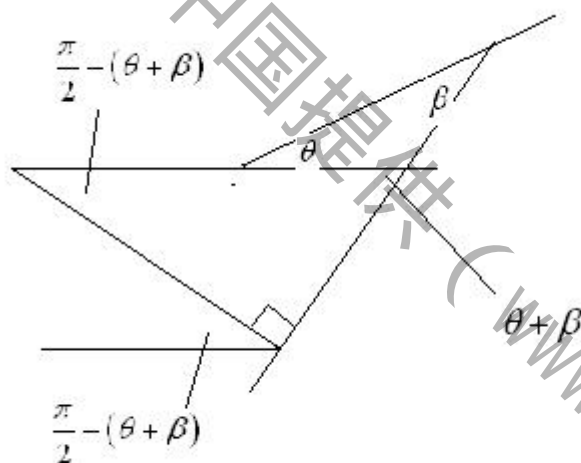
(2) K 点

如图(3)所示, 我们有如下关系式:

$$\begin{cases} x_C = x_D + l_2 \cos(\theta + \beta) \\ y_C = y_D + l_2 \sin(\theta + \beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = x_H - d_5 \cos(90 - (\theta + \beta)) \\ y_D = y_H + d_5 \sin(90 - (\theta + \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = x_K + d_4 \cos(\theta + \beta) \\ y_H = y_K + d_4 \sin(\theta + \beta) \end{cases}$$



图(3)

综合上面各式, 可以求得

$$\begin{aligned} & K \begin{bmatrix} x_C - l_2 \cos(\theta + \beta) + d_5 \sin(\theta + \beta) - d_4 \cos(\theta + \beta) \\ y_C - l_2 \sin(\theta + \beta) - d_5 \cos(\theta + \beta) - d_4 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix} \\ &= K \begin{bmatrix} m + M \cos \theta - l_2 \cos(\theta + \beta) + d_5 \sin(\theta + \beta) - d_4 \cos(\theta + \beta) \\ n + M \sin \theta - l_2 \sin(\theta + \beta) - d_5 \cos(\theta + \beta) - d_4 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

同理可设  $K(x, y)$ , 继而求得

$$B(m, n) = B \begin{bmatrix} x - M \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \beta) - d_5 \sin(\theta + \beta) + d_4 \cos(\theta + \beta) \\ y - M \sin \theta + l_2 \sin(\theta + \beta) + d_5 \cos(\theta + \beta) + d_4 \sin(\theta + \beta) \end{bmatrix}$$

将上式代入(7)式, 即可求得K点所要满足的方程, 即有

报名号 # 1447

$$\begin{aligned}
y = & \frac{(-4x_s \tan \theta_s + 10y_s)[x - M \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \beta) - d_5 \sin(\theta + \beta) + d_4 \cos(\theta + \beta)]^3}{x_s^3} \\
& + \frac{(7x_s \tan \theta_s - 15y_s)[x - M \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \beta) - d_5 \sin(\theta + \beta) + d_4 \cos(\theta + \beta)]^4}{x_s^4} \\
& + \frac{(-3x_s \tan \theta_s + 6y_s)[x - M \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \beta) - d_5 \sin(\theta + \beta) + d_4 \cos(\theta + \beta)]^5}{x_s^5} \\
& + M \sin \theta - l_2 \sin(\theta + \beta) - d_5 \cos(\theta + \beta) - d_4 \sin(\theta + \beta)
\end{aligned} \quad (10)$$

( $x_s, \theta_s$  为开始倒车时后轴中点初始坐标,  $\theta$  是机车的横摆角且它由 (8) 式确定,  $\beta$  为拖车的方向角 (机身和拖车之间的夹角且它由 (1) 式方程确定,  $d_4$  为拖车轴中点到拖车尾部垂直距离,  $d_5$  为拖车宽的一半长度,

$l_2$  为链接转动点到拖车后轮距,  $M$  —— 汽车的链接点到机车后轮中点距离)

#### 4) 车库大小的确定

我们根据第一阶段的讨论可以知道, 要考察车库的临界情况, 只需知道 G 和 K 点的临界状态即可。从而由临界状态的约束条件, 最后可以得出判断汽车是否可以在此停车的约束条件。

(1) 对于 G 点, 临界状况如图 (4) 所示:

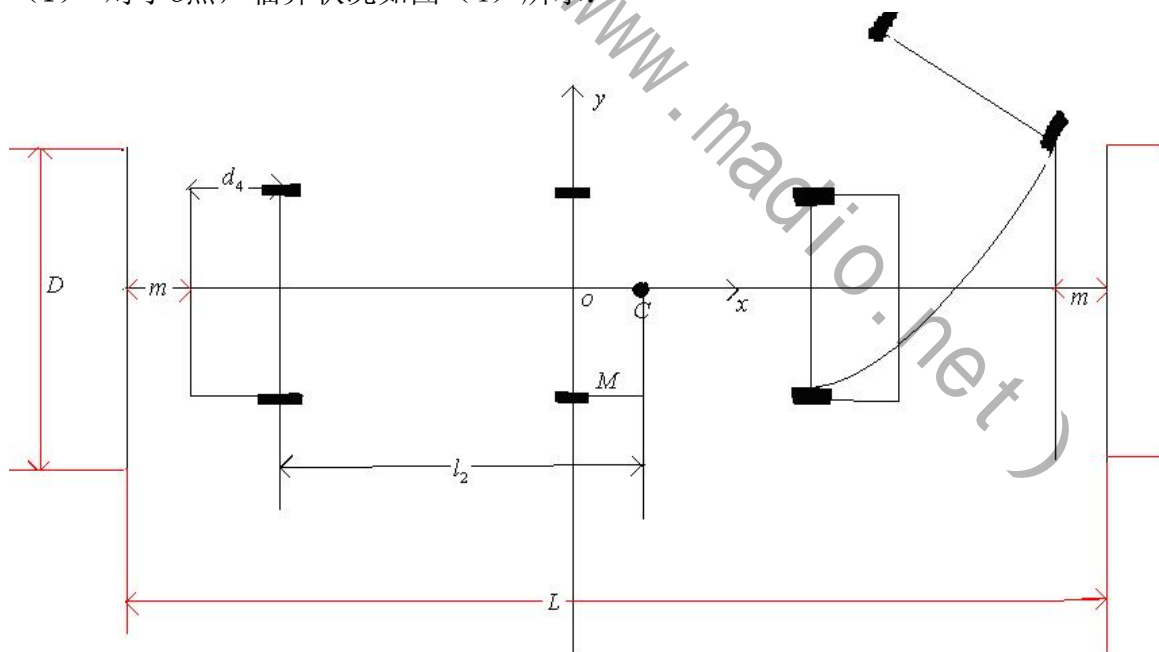


图 (4)

其中 O 点即是后轮轴中点最末状, 即此时  $x_f = y_f = 0$  成立.  $L$  与  $D$  是车库的长与宽,

其余  $m$  为安全距离,  $d_4$  为拖车后轮到保险杠的距离,  $l_2$  为拖车轮胎到转动铰链的距





报名号 # 1447

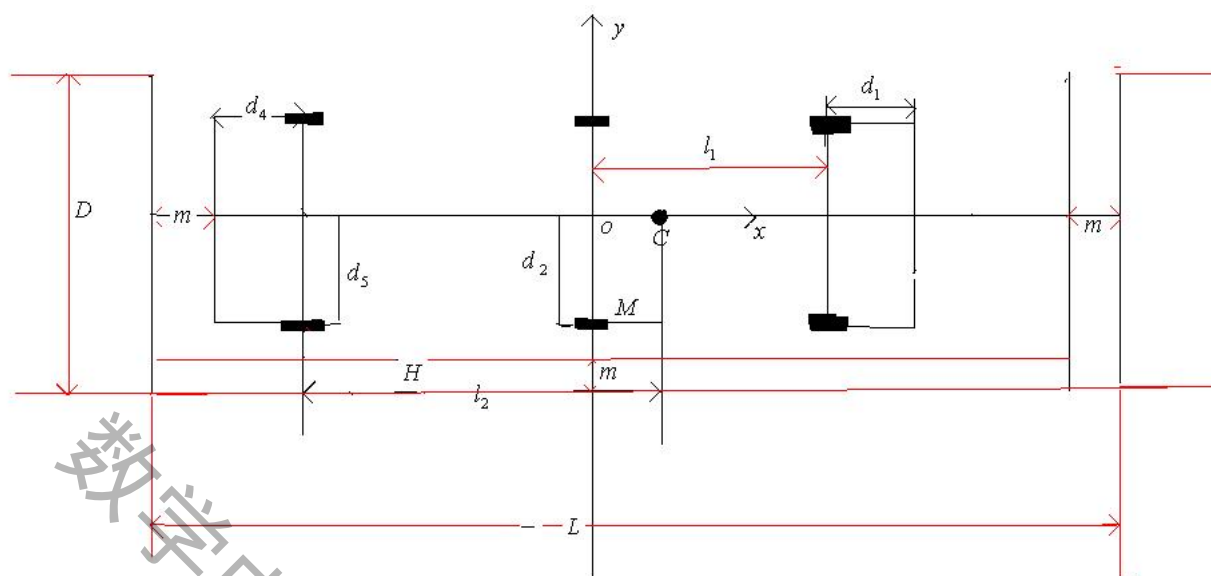


图 (6)

(其中  $d_5, d_2$  分别表示拖车与机车前身宽的一半)

联立 (11) (12) (13) 式可以得到模型如下:

$$\min L, D$$

$$f(L - l_2 - d_4 - 2m + M) \geq \frac{D}{2}$$

$$s.t \quad g'(g^{-1}(m - \frac{D}{2})) = 0 \quad (14)$$

$$L \geq 2m + d_4 + l_2 + l_1 + d_1 - M$$

$$D \geq m + 2 \max(d_2, d_5)$$

(14) 式即是我们给出的车库最小优化模型. 换言之, 我们在给定的初始末状态后我们都可以依据 (14) 求出相应符合题意的车库最小长 (L) 与宽 (D). 而对于驾驶员而言其具体操作应该为:

报名号 # 1447

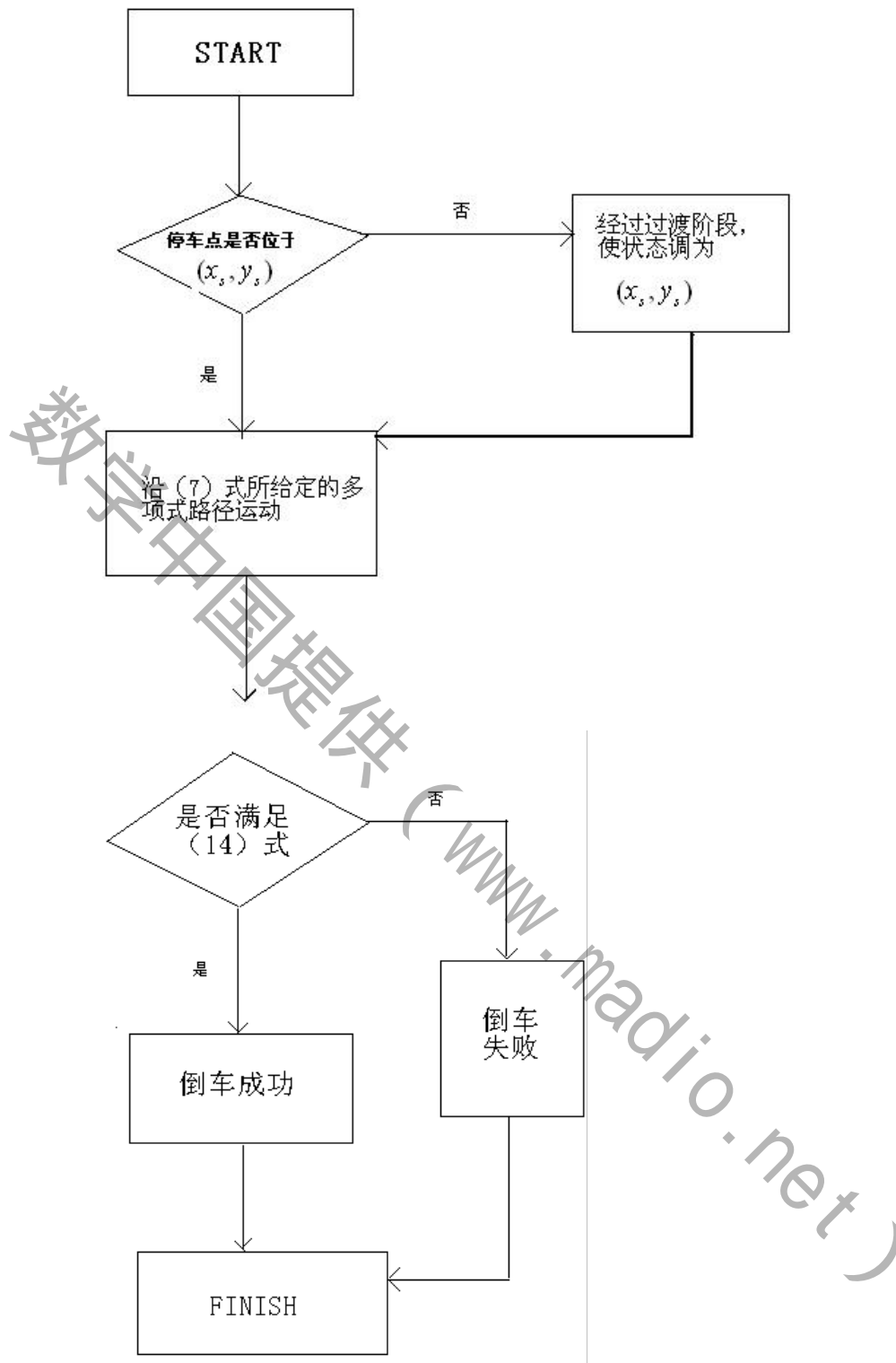


图 (7)

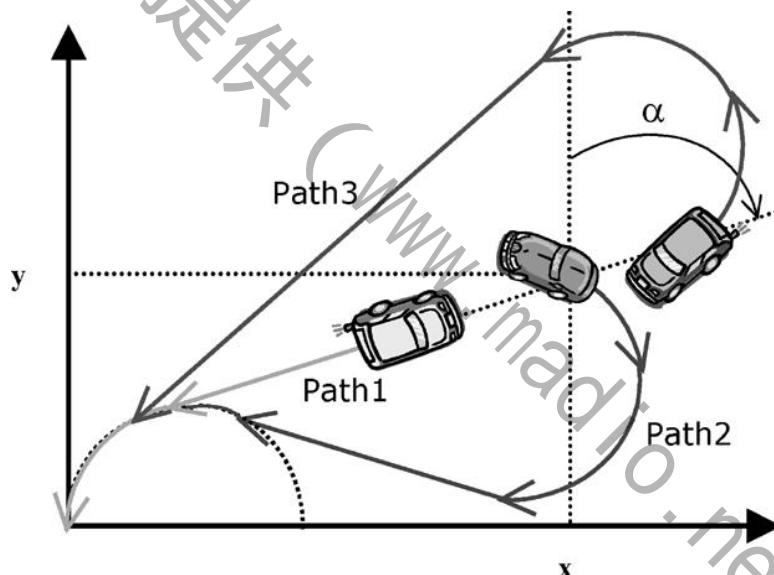
## 模型二：建议线路

首先我们先明确一点：无论车辆以什么角度在什么位置，都有一条较优的停车线路。当人工驾驶时操作因客观条件（假设障碍物为一个行人）导致车辆不能按照原来设计的较优的停车线路行驶，那么车辆必须绕另一个轨迹来完成停车。由于障碍物所在位置是不能预知的，也就是不确定的，所以在沿着原来设计线路停车的过程中，障碍物可能出现在其中的任何地方。依题，假设我们可以实时测定本车的确切位置，并依据本车的位置坐标进行线路判断。于是，在倒车时一旦遇到障碍，可以随时得出另一条可行的停车线路，指导驾驶员沿另一条建议停车线路实现停车。

### 1) 最小半径法绕过障碍物：

我们采取以最小半径绕过障碍物的方法，进入另一条轨道停车。假设障碍物是个给定直径长度的圆，轨道必须与之相切，根据几何形状，车辆的动力模型，碰撞约束等，通过控制汽车转向角和相对停车位置，进入不同于原来轨道的另一条切线。如题要求，假设我们可以实时测定本车的确切位置，随时给出车的建议线路。也就是满足车在任何方向任何角度时都有一条较优的线路进入停车轨道。

如下图所示，以特例来综合概况车在各种方向上的停车路线。其中，path2与path3是同一性质的路线，于是，我们只讨论其中一种。综合来说，我们只讨论path1与path2的情况。



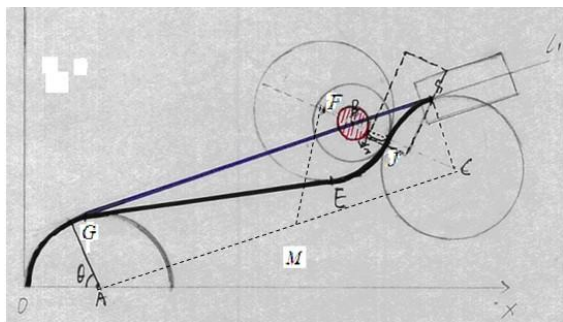
对于障碍物的具体位置，首先我们把基本原理抽象出来，在一个模型里面分析，再将其模拟到题目示意图的实际情况上。根据原理，我们分开三种情况讨论（path1里面包括两种，path2一种）如图所示：

- 图中红色圆为障碍物；
- 蓝色实线为原来设计的轨道；
- 黑色实线为建议线路；
- 图中多个大圆都是以最小半径为标准的圆；
- 围绕障碍物的小圆是车的轨迹允许路径，其与障碍物相隔的宽度为车宽的一半，也就是车与障碍物相切的临界路线；

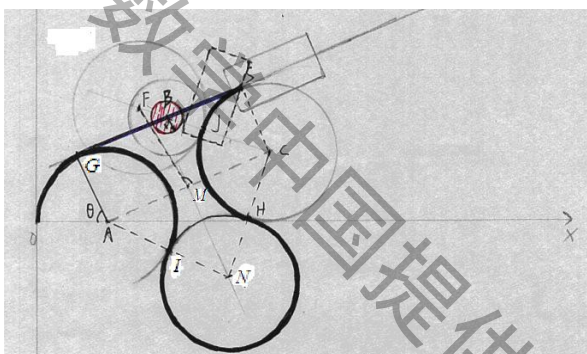
报名号 # 1447

## 2) 三种情况的图形概示:

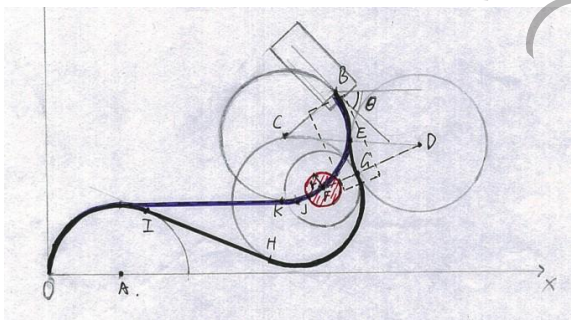
①障碍物在车入库的直线线路离库较远的地方;



②障碍物在车入库的直线线路离库较近的地方。



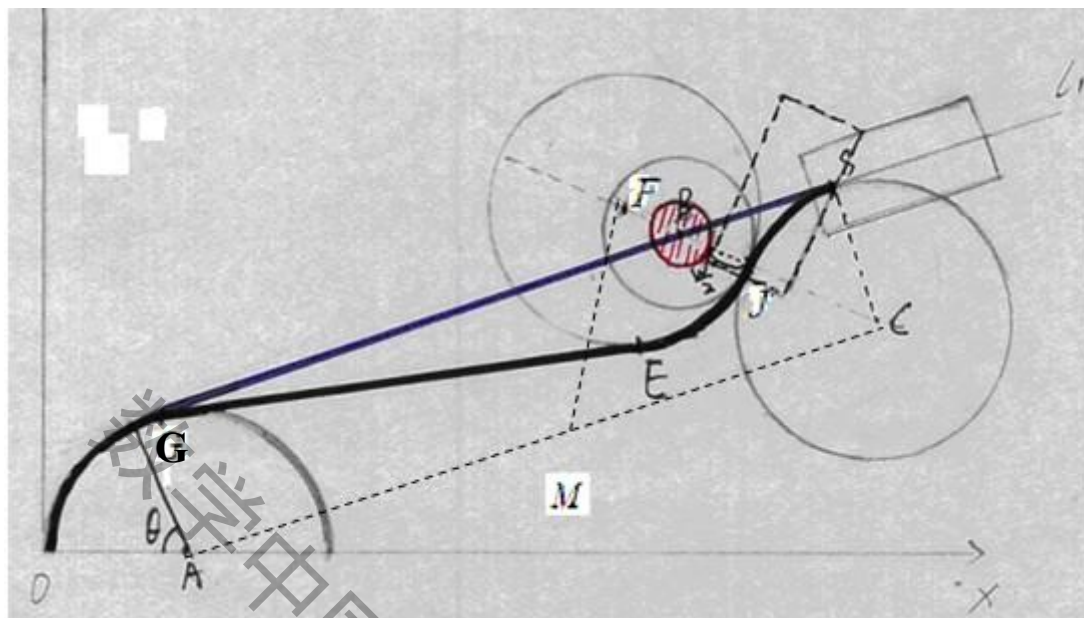
③障碍物在车转弯调整方向的曲线线路上;



## 3) 三种情况分别讨论:

对于 path1 的路径, 当小车在直线  $l_1$  上行驶时出现障碍物 (如图红色标注的圆) 时, 我们采取以下方式进行调整:

情况一：



由图可知，当汽车倒车以直线进入车库遇到障碍物时，必须至少沿着与障碍物相切的临界路线转弯回避，假设车都是以最小半径转弯，在 S 点开始向右转到刚好与障碍物相切于 J 点后，打转轮胎以最小半径向左转，转到与入库圆轨道相切的直线上 E 点开始摆正轮胎按新线路倒车入库。路线轨迹为：S—J—E—G—O；

①其轨道方程如下：

设 s 点的坐标为  $(x_s, y_s)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} y - y_2 = -(x - x_2) \tan \theta \\ y = (x - x_1) \cot \theta + y_1 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_s = \frac{y_2 + x_2 \tan \theta - y_1 + x_1 \cot \theta}{\cot \theta + \tan \theta} \\ y_s = (x_s - x_1) \cot \theta + y_1 \end{cases};$$

设点 f 的坐标为  $(x_j, y_j)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x - x_2} = r_1 - r \\ \frac{y_1 - y}{y - y_2} = r_1 - r \end{cases}, \text{得} \begin{cases} x_j = \frac{x_1 r + r_1 x_2}{r + r_1} \\ y_j = \frac{y_1 r + r_1 y_2}{r + r_1} \end{cases};$$

$$\text{令 E, G 为圆 F 和圆 A 的公切线的两个切点, 其中点坐标为 } (x_{10}, y_{10}), \begin{cases} x_{10} = \frac{x_3 + r}{2} \\ y_{10} = \frac{y_3}{2} \end{cases};$$

设 E 点坐标为  $(x_9, y_9)$ ，

报名号 # 1447

$$\text{由} \begin{cases} (x_{10} - x_3)(x_9 - x_3) + (y - y_3)(y_5 - y_3) = r^2 \\ (x_9 - x_3)^2 + (y_9 - y_3)^2 = r^2 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} x_9 = x_3 - \frac{2a_1b_1 + \sqrt{4a_1^2b_1^2 - 4(a^2+1)(b_1^2 - r^2)}}{2(a_1^2+1)} \\ y_9 = b_1 - a_1 \frac{2a_1b_1 + \sqrt{4a_1^2b_1^2 - 4(a^2+1)(b_1^2 - r^2)}}{2(a_1^2+1)} \end{cases} \quad \left( \text{其中} \begin{cases} a_1 = -\frac{x_{10} - x_3}{y_{10} - y_3} \\ b_1 = \frac{r_2}{y_{10} - y_3} \end{cases} \right);$$

G 点坐标为  $(x_8, y_8)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} (x_{10} - r)(x_8 - r) + y_{10} - y_8 = r^2 \\ (x_8 - r)^2 + y_8^2 = r^2 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} y_8 = \frac{a_2b_2 + \sqrt{a_2^2b_2^2 - (a_2^2+1)(b_2^2 - r^2)}}{a_2^2+1} \\ x_8 = r + a_2y_8 + b_2 \end{cases} \quad \left( \text{其中} \begin{cases} a_2 = \frac{1}{x_{10} - r} \\ b_2 = \frac{r^2 - y_{10}}{x_{10} - r} \end{cases} \right);$$

得出路径函数为:

$$F(x) = \begin{cases} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 & (S \rightarrow J) \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2 & (J \rightarrow E) \\ \frac{y - y_8}{x - x_8} = \frac{y_9 - y_8}{x_9 - x_8} & (E \rightarrow G) \\ (x - r)^2 + y^2 = r^2 & (G \rightarrow O) \end{cases}$$

**②与情况二相联系（情况一与情况二的适用条件）:**

通过计算，我们解决汽车在直线倒车入库时遇到障碍物的“远”与“近”的界限。因为我们以汽车后轴中点来描述汽车的运行轨迹，所以我们设  $r_1$  为障碍物半径与车宽度一半的和，并以  $r_1$  为半径的圆区域为障碍物有效阻碍区域，即车与障碍物相切的临界路线。进而我们令此临界路线的方程为

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \quad \text{①}$$

而  $r$  为小车的最小转弯半径。障碍物中心点坐标为  $(x_1, y_1)$  已知，小车所行驶的直线  $l_1$  的垂直线与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ 。

由此我们知道  $l_1$  的方程为:

$$y = (x - x_1) \cot \theta + y_1 \quad (2)$$

对于在  $l_1$  上的障碍物，我们从 S 点出发沿以 C ( $x_2, y_2$ ) 点为圆心，r 为半径的圆运行。该圆与临界路线于 F 点相切，有方程组如下：

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (r_1 + r)^2 \\ (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1) \cot \theta - \frac{r}{\sin \theta} \end{cases}$$

转化得：

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{r_1(2r + r_1)} \sin \theta + r \cos \theta + x_1 \\ y_2 = \sqrt{r_1(2r + r_1)} \cos \theta + r \sin \theta + y_1 \end{cases}$$

又因 F 点坐标为 ( $x_3, y_3$ ),

由  $\frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{r - r_1}{r + r_1}$  得  $y_3 = \frac{r - r_1}{r + r_1}(y_1 - y_2) + y_1$ ;

由  $\frac{x_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{r - r_1}{r + r_1}$  得  $x_3 = \frac{2rx_1 - (r - r_1)x_2}{r + r_1}$ ;

设 A 点和 C 点的中点 M 坐标为 ( $x_4, y_4$ )，其值为

$$\begin{cases} x_4 = \frac{x_2 + r}{2} \\ y_4 = \frac{y_2}{2} \end{cases};$$

设  $K_1$ ,  $K_2$  分别为 FM, AC 的斜率，于是：

$$K_1 = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}, \quad K_2 = \frac{y_2}{x_2 - r};$$

综上所述求出的坐标，

① 当  $\frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2} \geq 0$  时，线段 FM 与线段 CM 的夹角小于等于  $90^\circ$ ，即圆 F 与圆 A

没有相交，可以按照情况一的路线行驶顺利到达圆 A 入库；

② 当  $\frac{K_1 - K_2}{1 + K_1 K_2} < 0$  时，线段 FM 与线段 CM 的夹角大于  $90^\circ$ ，即圆 F 与圆 A 相交，

必须按照情况二的路线“绕道”行驶才能到达圆 A 入库；





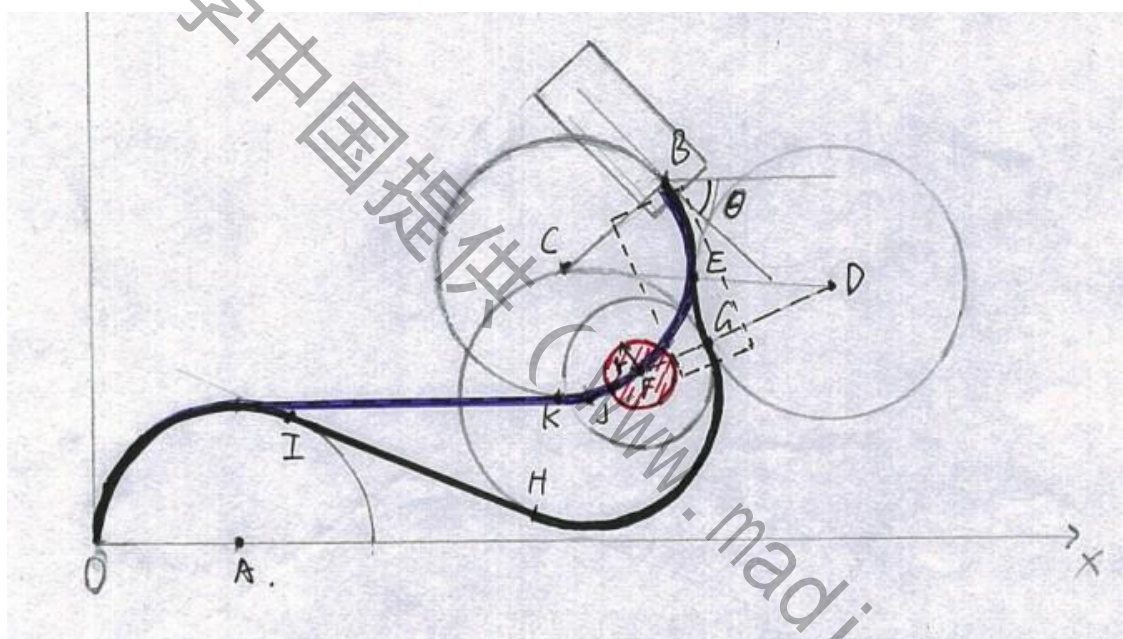
报名号 # 1447

圆 C 与原 N 的切点坐标  $H(x_6, y_6)$ ，可得 
$$\begin{cases} x_6 = \frac{x_2 + x_5}{2} \\ y_6 = \frac{y_2 + y_5}{2} \end{cases};$$

由此得出路径方程：

$$F(x) = F(x) = \begin{cases} (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2 & (S \rightarrow J \rightarrow H) \\ (x - x_5)^2 + (y - y_5)^2 = r^2 & (H \rightarrow I) \\ (x - r)^2 + y^2 = r^2 & (I \rightarrow G \rightarrow O) \end{cases}$$

情况三（注：图中的符号独立于情况一、二）：



由图可知，当汽车倒车在圆弧调整方向的时候遇到障碍物，必须沿着与障碍物相切的临界路转弯回避，在 B 点开始向左转经过 E 点到与圆 D 相切后，打转轮胎以最小半径向右转，运动到与临界轨道相切与 G 点时打轮胎向左转，转到与入库圆轨道相切的 H 点按新线路倒车入库。路线轨迹为：B—E—G—H—I—O；

其轨道方程如下：

对于汽车如果沿 path2 路径行驶，

$$\text{圆心 } C \text{ 点坐标 } (x_0, y_0), \begin{cases} y_0 - y = (x_0 - x) \cot \theta \\ (y_0 - y)^2 + (x_0 - x)^2 = r^2 \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} x_0 = r \sin \theta + x \\ y_0 = r \cos \theta + y \end{cases}$$



对我们第一阶段得出的较优路径设置障碍物，应用模型二进行障碍物绕行。

引用数据 (cm):

最小转弯半径  $r=1.86$

设障碍圆心为  $(x_1, y_1) = (-3.1, 0.4)$ ，为使绕行障碍物时使车前部不触碰到障碍物的

边缘，我们令障碍物的阻碍半径  $r_1$  为 2.3。

有图可知 A 点为  $(-3.1, -3.4)$

圆  $O_4$  的坐标  $(x_2, y_2)$  为  $(-4.96, -3.5)$

设 B 点坐标为  $(x_6, y_6)$ ，由  $\frac{y_1 - y_6}{y_6 - y_2} = \frac{r_1}{r}$ ，得  $y_6 = \frac{y_1 r + r_1 y_2}{r_1 + r}$ ，

代入数据得  $y_6 = -1.70$ ；

同理可得  $x_6 = -4.13$

圆  $O_3$  的坐标为  $(x_3, y_3)$ ，由  $\frac{y_3 - y_6}{y_6 - y_2} = 1$ ，得  $y_3 = 2y_6 - y_2$ ，代入数据的  $y_3 = -0.04$ ；

同理  $x_3 = -3.3$

圆  $O_2$  的坐标  $(x_0, y_0) = (-1.24, 3.4)$

设圆  $O_2$  和  $O_3$  的公切线为  $l_1$ ，方程为：  $y = kx + b$ ；

$$\text{由 } \frac{kx_0 + b - y_0}{\sqrt{1+k^2}} = r, \text{ 得 } \begin{cases} k = \frac{y_0 - y_3}{x_0 - x_3} \\ b = y_0 - kx_0 + r\sqrt{1+k^2} \end{cases}, \text{ 代入数据得: } \begin{cases} k = 1.67 \\ b = 9.09 \end{cases}$$

则  $l_1$  方程为：  $y = 1.67x + 9.09$

$l_1$  与  $O_2, O_3$  的切点分别为  $C(x_5, y_5), D(x_6, y_6)$ ，由  $\begin{cases} y = 1.67x + 9.09 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r^2 \end{cases}$ ，得

$$\begin{cases} x_5 = \frac{x_3 / k + y_3 - b}{k + 1/k} \\ y_5 = 1.67x_5 + 9.09 \end{cases}, \text{ 代入数据得 } \begin{cases} x_5 = -4.90 \\ y_5 = 0.91 \end{cases};$$

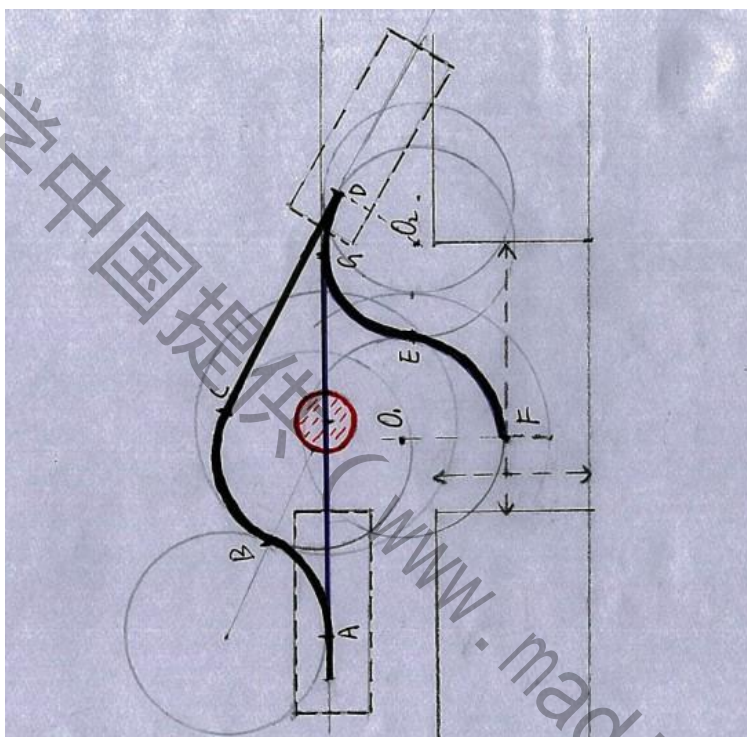
$$\text{同理的 } \begin{cases} x_6 = -2.84 \\ y_6 = 4.34 \end{cases}$$



由此得出绕过障碍物的路径方程：

$$F(x) = \begin{cases} (x+4.96)^2 + (y+3.4)^2 = 1.86^2 & (A \rightarrow B) \\ (x+3.3)^2 + (y+0.04)^2 = 1.86^2 & (B \rightarrow C) \\ 1.67x + 9.09 & (C \rightarrow D) \\ (x+1.24)^2 + (y+3.4)^2 = 1.86^2 & (D \rightarrow E) \\ (x+1.86)^2 + y^2 = 1.86^2 & (E \rightarrow F) \end{cases}$$

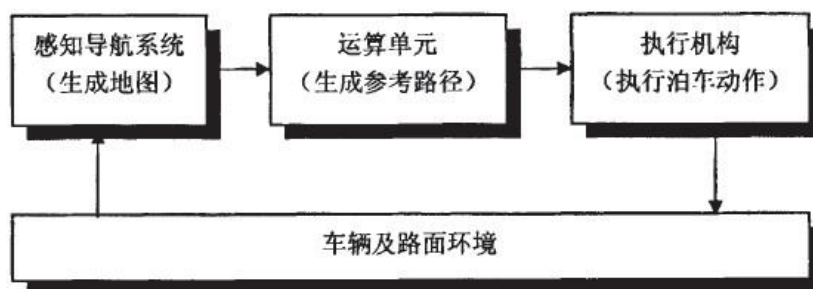
图示如下：



### 5) 汽车泊车控制系统的引入：

按照题目要求，要根据本车的当前位置，随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。这就无疑要使用汽车泊车控制系统来提供我们建立的模拟线路。

要实现无这个要求，就必须设计一套具备环境感知，决策运算以及执行泊车动作这三个功能的系统。因此，辅助泊车系统是由感知导航系统，运算单元和执行机构这三个系统组成，如下图所示：



报名号 # 1447

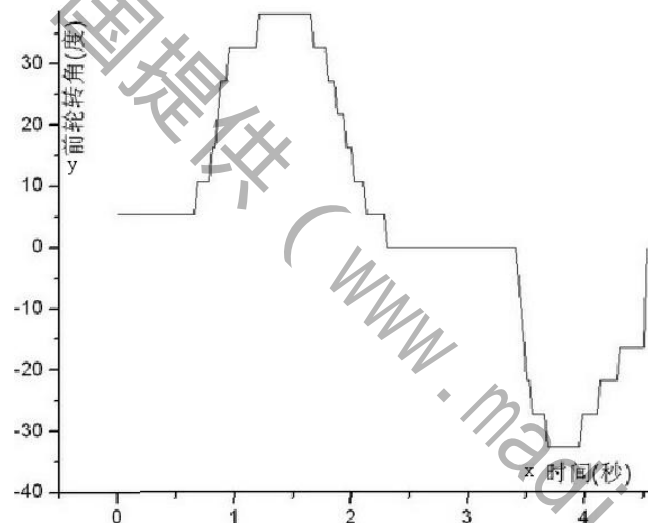
(图片出自于参考文献[3])

感知导航系统所要实现的环境感知功能是指车辆必须通过各种传感器获得停车位的位置信息，停车位的大小信息，障碍物信息以及车辆自身位置信息等一系列与泊车相关的信息，这些信息就是整个辅助泊车系统的输入。运算单元的决策运算功能则是指根据这些输入信息，决定该车是否能够泊入车位，采取哪种方式泊入，泊车的参考路径是怎样的以及如何避障等等问题。最后将决策结果形成传给底盘控制系统的信号文件。执行机构执行泊车动作的功能则是指根据决策单元传过来的信号文件，对车的转角，车速等进行控制。使车能够按照预想的轨迹行驶泊入车位。

## 六、 模型误差分析

### 1) 系统误差:

我们的模型进行理想路径的构建时，是建立在其沿着最小转弯半径作圆周运动进行的。但实际进行转动时，轮胎不是一直以最大偏转角在进行转动，而是以下图的变化进行偏转的，因此汽车是在做半径不断增大的圆周运动。但是考虑到汽车的倒车速度为 3km/h，通过路径积分发现这个偏差很小可以忽略。



### 2) 测量误差

#### (1) 轮胎产生的误差:

我们的示例汽车的轮胎默认假设是无偏角并且左前轮和右前轮的最大偏转角相等，进而可以将两轮胎的转动等价位前轴中点的一个等效轮胎在做转动。实际轮胎的前后轮的偏转角是不一样的，下面是实际轮胎参数及其测量范围（它们可作为我们示例模型的轮胎参数补充）：

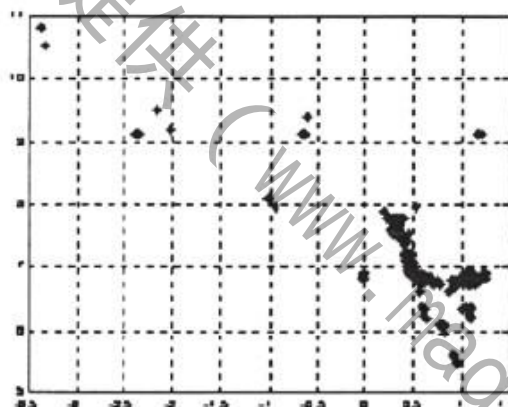
项目	精度(度)	测量范围(度)	总测量范围(度)
外倾角	$\pm 0.02$	$\pm 8$	$\pm 8$
后倾角	$\pm 0.05$	$\pm 19$	$\pm 19$
前轮内倾角	$\pm 0.02$	$\pm 19$	$\pm 19$
总前束	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 8$
后轮推进角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$

报名号 # 1447

转向差角	$\pm 0.08$	$\pm 2$	$\pm 45$
后轮轴偏摆	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
轮距差	$\pm 0.03$	$\pm 2$	$\pm 8$
前退缩角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
后退缩角	$\pm 0.02$	$\pm 2$	$\pm 4$
轮距	$\pm 0.64\text{cm}(\pm 0.25\text{cm})$	$<265\text{cm}(<105\text{in})$	$<265\text{cm}(<105\text{in})$
轴距	$\pm 0.64\text{cm}(\pm 0.25\text{cm})$	$<533\text{cm}(<210\text{in})$	$<533\text{cm}(<210\text{in})$

## (2) 汽车泊车系统传感功能的误差

题目要求要随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议，也就是考虑到汽车控制系统的精确性。因为本模型求解时基于题目假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上，但现实的汽车的辅助停车系统很少能将整幅停车平面图显示给车主，所以车主是不能完全根据本文的模型产生理想停车路线；如图为摄像机坐标下区域地图。未经处理的二维障碍信息有较大误差，由于工作场景的复杂度，以及天气光线等原因，使传感器的测量精度高的区域比理论计算出的可视区域小。



(图片出自于参考文献[3])

## 七、 模型的评价及推广

### 模型一：

#### (一) 模型评价

模型一采用高次多项式与运动学方程相结合的方式拟合出一条全国的可行曲线，并经过验证这条曲线及相关变量均是连续且光滑的变化，因此在不严格要求的情况下，模型一有着广泛的实用性，方法简单易行，且计算过程相对同类方法大为简炼，这也使得多项式的模拟法具有一定的优势。

但是我们也不难看出虽然出于简化可操作性为目的出发，虽然也拟合出了一条较优的曲线，可它的精确度仍然与理想情况存在一定误差。并且在曲线拟合程度的检验上我们仅着眼于光滑及连续性质，并未考虑更多因素，如时间，空间利用率等因素。即使是我们自己给定的模型，我们最后也很难对所得到的曲线拟合优度加以定量化的计算与评测，更多层次上只是一种主观优劣的判断。

#### (二) 模型的推广



## 报名号 # 1447

基于模型一中对拟合优度难以验证，误差与理想情况存在一定差距为前提，我们采用经典的二分法加以评测与拟合。虽然在计算上由于专业知识及时间的限制，我们未能给出推广后的模型的最后结果及实测检验。但模型的思路与分析方法仍然散发着最优曲线的魅力。

我们仍首先给出运动学公式：

$$\begin{cases} x' = -v \cos \theta \\ y' = -v \sin \theta \\ \theta' = -\frac{v}{l_1} \tan \alpha \\ \beta' = \frac{v}{l_1} \sin \beta + \frac{v}{l_1 l_2} (l_2 + M \cos \beta) \tan \alpha \\ \alpha' = u \end{cases}$$

其中增加了变量  $u$ ，它是前轮方向角的角加速度所有的角度逆时针为正。

下面我们给出参考轨道的概念，它是指不考虑场所限制时，当给定的初始状态参数  $(x(0), y(0), \theta(0), \beta(0), \alpha(0))$  和终端状态参数  $(x(T_f), y(T_f), \theta(T_f), \beta(T_f), \alpha(T_f))$  时，要求车辆系从初始状态经过时间  $T_f$  行驶后达到终端状态的一条可能的最佳轨道。+ 初始状态的数据值与模型一一致，在此我们就不在多累赘，考虑到拖拉机的最大转向角  $\alpha_m$  和拖车的最大方向角  $\beta_m$  的限制，通过含有罚函数的内点法可得到如下式所示的目标函数。

$$Z_{\min} = x^2(T_f) + y^2(T_f) + \theta^2(T_f) + \beta^2(T_f) + \alpha^2(T_f) + \int_0^{T_f} \left( \frac{r_1}{\alpha_m^2 - \alpha^2} + \frac{r_2}{\beta_m^2 - \beta^2} \right) dt$$

其中  $T_f$  为理论行驶时间， $\alpha_m$ 、 $\beta_m$  为机车和拖车的最大转向角与方向角。 $r_1$ 、 $r_2$  为罚函数系数。

下面我们通过控制时间变量  $T_f$ ，则其变为两点边值问题，利用二次变分法即可求解该问题。下面是具体做法与过程：

$$\min Z^* = x^2(T_f) + y^2(T_f) + \theta^2(T_f) + \beta^2(T_f) + \alpha^2(T_f)$$

$$+ \int_0^{T_f} \left( \frac{r_1}{\alpha_m^2 - \alpha^2} + \frac{r_2}{\beta_m^2 - \beta^2} + \lambda_1(-v \cos \theta - x') + \lambda_2(-v \sin \theta - y') + \lambda_3\left(-\frac{v}{l_1} \tan \alpha - \theta'\right) + \lambda_4\left(\frac{v}{l_1} \sin \beta + \frac{v}{l_1 l_2} (l_2 + M \cos \beta) \tan \alpha - \beta'\right) + \lambda_5(u - \alpha') \right) dt$$

报名号 # 1447

$$\begin{cases} = (-v \cos \theta - x') \\ -y' = (-v \sin \theta - y') \\ -\theta' = (-\frac{v}{l_1} \tan \alpha - \theta') \\ -\beta' = (\frac{v}{l_1} \sin \beta + \frac{v}{l_1 l_2} (l_2 + M \cos \beta) \tan \alpha - \beta') \\ = (u - \alpha') \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\min Z^* = x^2(T_f) + y^2(T_f) + \theta^2(T_f) + \beta^2(T_f) + \alpha^2(T_f)$$

$$+ \int_0^{T_f} \left( \frac{r_1}{\alpha_m^2 - \alpha^2} + \frac{r_2}{\beta_m^2 - \beta^2} + \lambda_1(-v \cos \theta - x') + \lambda_2(-v \sin \theta - y') + \lambda_3(-\frac{v}{l_1} \tan \alpha - \theta') \right. \\ \left. + \lambda_4(\frac{v}{l_1} \sin \beta + \frac{v}{l_1 l_2} (l_2 + M \cos \beta) \tan \alpha - \beta') + \lambda_5(u - \alpha') \right) dt$$

根据Euler方程我们有

$$\lambda_{1T_f} = 2x, \lambda_{2T_f} = 2y, \lambda_{3T_f} = 2\theta, \lambda_{4T_f} = 2\beta, \lambda_{5T_f} = 2\alpha$$

又由协态方程可知

$$\lambda_1' = 0$$

$$\lambda_2' = 0$$

$$\lambda_3' + \lambda_1 v \sin \theta - \lambda_2 v \cos \theta = 0$$

$$\lambda_4' + \frac{2r_2\beta}{(\beta_m^2 - \beta^2)^2} + \lambda_4(\frac{v}{l_1} \cos \beta - \tan \alpha \frac{vh}{l_1 l_2} \sin \beta) = 0$$

$$\lambda_5' + \frac{2r_1\alpha}{(\alpha_m^2 - \alpha^2)^2} - \lambda_3 \frac{v}{l_1} \sec^2 \alpha + \frac{\lambda_4 v}{l_1 l_2} (l_2 + h \cos \beta) \sec^2 \alpha = 0$$

由上面十个方程所确定的曲线即是在二分法下的最优曲线，通过求解我们可以得出  $x, y, \theta, \beta, u$ ，并且它们关于时间  $t$  的函数。

## 模型二：

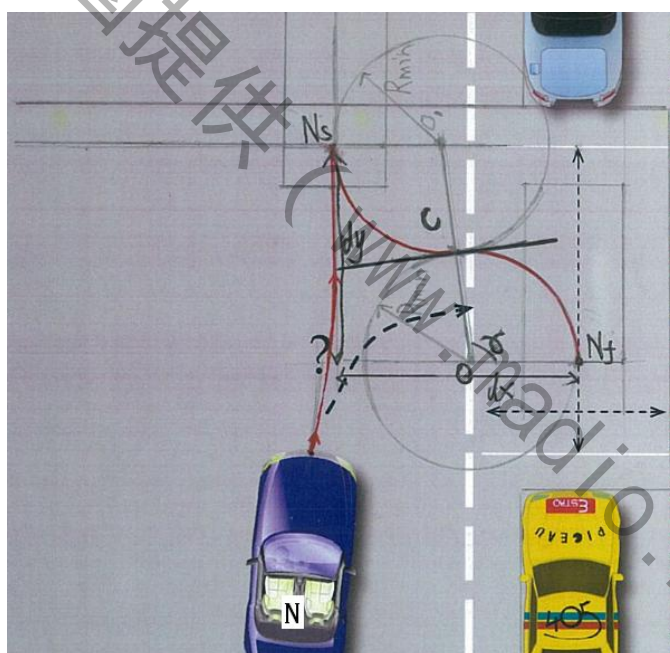
(一) 模型评价、

## 报名号 # 1447

模型二中，我们假设“绕道”时都以最小半径即最短路线摆正车位，以致能够以最快的方式调整还车的方向。另外，建立多个相切圆的路线来将车逐渐调整到能与入库圆相切的轨道上去，来得十分直观。最后，障碍物的位置是决定以何种圆弧调整的关键，我们分三种理论情况并结合示意图，分析本车的建议线路，从普遍到特殊，进而解决实际问题，具有深刻的实用性。

但是，模型二仍存在这样那样的缺陷：

- 1) 模型都是用了绝对的简单几何做运动，也就是圆弧或者直线。但在实际运用中往往可以随时调整不同的角度，多次微调以致找到最适合的线路，这些线路可能会比我们模型中的线路要短的多；
- 2) 障碍物其实存在很多盲点。以本示例图来说，假设汽车在调整过程中顺利通过（无障碍），在第二阶段的倒车圆弧轨迹  $N_s$  到  $C$  点上按照理论模型③也可能出现障碍物。由于我们假设的障碍物直径为 1m，而对于此示意图我们按比例计算验证后得知该处是难以允许一个障碍物的存在，否则车是不能进入的。难以允许是指要不在车调整的过程中右边车体会与障碍物相碰，要不在回避障碍物绕圆轨道后倒退回归圆  $O$  线路入库时，车的右后角又与障碍物相碰。经过测量，在  $N_s$  到  $C$  点以内的范围是不能放置障碍物的，以相对称原理，车库后方的这个范围也不能放置障碍物，可以知道障碍物存在很多盲点；



- 3) 题目要求要随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议，也就是考虑到汽车控制系统的精确性。因为本模型求解时基于题目假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上，但现实的汽车的辅助停车系统很少能将整幅停车平面图显示给车主，所以车主是不能完全根据本文的模型产生理想停车路线；
- 4) 汽车泊车控制系统可能会受到外界如电磁波干扰等情况，造成数据误差。

报名号 # 1447

## 八、 参考文献

### 外文文献：

- [1] Dieter Zobel , Christian Weyand. On the Maneuverability of Heavy Goods Vehicles . Man and Cybernetics, 2008, 2303~2308
- [2] F. Gómez-Bravo, F. Cuesta, A. Ollero. APARCAMIENTO PARALELO EN VEHÍCULOS NO HOLÓNOMOSCON Y SIN REMOLQUE . Sistemas Informáticos y Automática.

### 中文文献：

- [1] 陈军, 鸟巢谅, 武田纯一. 带单轴拖车拖拉机自动倒车行驶的研究, 农业工程学报. 第21卷, 第10期, 2005 年10 月, 82~85页
- [2] 韩冰, 陈军. 拖拉机行驶路径的多项式设计, 农机化研究. 第10期, 2006 年10 月, 98~100页
- [3] 蒋志文, 辅助平行泊车系统的路径规划研究, 同济大学中德学院硕士学位论文, 2008. 06. 01
- [4] 吴受章. 应用最优控制[M ]. 西安: 西安交通大学出版社, 1987: 78- 94.