

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第八届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：4269

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别（例如本科组）：本科组

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

4269

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 探究影响绳结自动脱落的物理因素

关 键 词 压力感应器 曲线拟合 相关分析 Matlab Spss

摘 要

给绳索打结是人们日常生活中常用的技能。而单结作为最简单的绳结，在各种复杂绳结中是经常出现的基本元素。本文基于单结的两种打法，并且两种打法在三维空间中互为镜像，以此更加深入的进行探究：

针对问题一，首先，利用压力传感器，使得其示数为 6 个固定值，在某一值下，用放置在两个地方的测力计分别测量在 1-1、2-2、1-2、2-1 的打结方式下测力计的值；其次，运用所得数据，将数据进行拟合操作；最后，利用拟合得到的图像进行分析。可得 1-1、2-2 比 1-2、2-1 更容易松脱。

针对问题二，我们做了两种分析，分别是单一机械性能因素对松脱程度的影响以及哪一个因素对松脱程度影响最大。针对第一种分析法 探究某一因素的影响，先使得其他因素相同，后将感应器放置在第一、二结点处，使得值达到某一稳定值后，将两值作差，作为 y 值； 改变这一因素的值，按上述方法得出一组数据，将这一因素值作为 x 轴； 利用 Matlab 软件进行拟合，得到 4 幅不同因素影响下得图像，共 8 条曲线； 观察曲线的走势以及比较方法一、二的区别，得出每一因素对松脱程度的影响。结论是：直径越大越容易松脱；摩擦力越小越容易松脱；硬度越大越容易松脱；两结点间隙面积越大，越容易松脱；方法一比方法二更容易松脱。针对第二种分析法，首先，利用第一种分析法所测得的数据，利用 SPSS 软件，用简单相关关系中的 Person 相关，分别探究某一因素与方法一、二的相关度，分别得到 8 个 r 值；其次，比较相关度 r 值落于某一标准内，可得出相关度的高低，同时，比较 r 值的大小，可得到影响大小的排序；最后，得出不同打结方法下，绳索的机械性能与绳结是否容易脱落之间的关系。结论：直径、摩擦力、软硬、间隙面积均对松脱程度有影响；在方法一下，相关度大小为：软硬>两间隙面积>直径>摩擦力。在方法二下，相关度大小为：直径>软硬>两间隙面积>摩擦力

最后，综上运用拟合、相关分析、Matlab 软件、Spss 软件等，解决绳结松脱程度的影响因素以及某种打结方式更容易松脱的关系问题。同时，我们用实践和理论数值两种方法进行验证，得出方法一较方法二更容易松脱。我们可以更好的将简单的绳结（单结）应用于生产和生活中。

参赛队号： 4269

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

英文摘要（选填）

Hitch is commonly used in daily life skills. And as the simplest knot single, as is often the case in the complex knot of basic elements. Based on the single a two game, and two way mirror each other in a three dimensional space, to more in-depth inquiry:

For problem a, first, using pressure sensor, makes its shows number for 6 a fixed value, in a a value xi, with placed in two a place of Hygrometer respectively measurement in 1-1, and 2-2, and 1-2, and 2-1 of knotted way xi Ergo meter of value; second, using proceeds data, will data for intends collection operation; last, using intends collection get of image for analysis. 1-1, 2-2, and 2-1 can be more easily become loose.

For question two, we made two kinds of analysis, namely single mechanical factor influence on the degree of loosening and the factors which influence the extent of loose. For first species analysis method inquiry a a factors of effects, first makes other factors same, huh will induction device placed in first and second knot points at, makes value reached a a stable value huh, will two value made poor, as y value; II change this a factors of value, by above method obtained a group data, will this a factors value as x axis; using Matlab software for intends collection, get 4 site different factors effects xi have image, total 8 article curve; II observation curve of trend and compared method one or two of difference, The conclusion that the degree of each factor on the loose ... Conclusion is that the bigger diameter easy to loose; smaller more easily slip friction; bigger rigidity easy to loose; two point gap is larger, more easily slip; more easily than the second method to loose. For second species analysis method, first, using first species analysis method by measuring have of data, using SPSS software, with simple related relationship in the of Person related, respectively inquiry a a factors and method one or two of related degrees, respectively get 8 a r value; second, compared related degrees r value falls yú a a standard within, can obtained related degrees of level, while, compared r value of size, can get effects size of sort; last, obtained different knotted method xi, rope of mechanical performance and rope knot whether easy shedding Hz jinn of relationship. Conclusion: the diameter, friction, hard and soft, clearance area have had an effect on loose; methods, relevant size: hard and soft > two clearance area > diameter > friction. Under the second method, size: diameter > soft > two clearance area > friction.

Finally, the conclusion using fit, correlation analysis, such as Matlab, Spss software to address factors influencing the degree of loosening the knot of a knotted way tend to loose relationship problems. Also, we use either of the practice and theory of numerical methods for authentication, obtained a second method easier to loose. We can better use a simple knot (single knot) should be used for the production and life

一．问题重述

给绳索打结是人们日常生活中常用的技能。对登山、航海、垂钓、野外生存等专门用途，绳结更是必不可少的技能之一。最简单的绳结，称为单结最为常用。这种绳结有两种打法如图一，在三维空间中分别为对方的镜像。在捆扎物体时，可以连打两次单结，可构成一个难以自动松开的结。针对单结的不同打法，具体要求如下：

（1）建立合理的数学模型，分析这两种打法中，哪种更容易自动脱落。

（2）建立合理的数学模型，探究绳索的机械性能与绳结是否容易自动脱落之间的关系。



打法 1



打法 2

图 1

二．问题分析

绳结是生活、生产中广泛应用的一门使用技艺，各行各业都有不同扣种，人们在生活中包装、提拿需要打结；许多工艺品应用绳结的形式进行装饰和编制；在户外活动，尤其是野外探险、森里穿越等高风险的活动时，经常需要打结来帮你捆绑东西或帮你穿越障碍地带。而绳结的自动脱落可能会导致一些事故的发生。此时，如何使打出的绳结更稳定，更不容易脱落很关键。

本文就是探究如何用最简单的单结打出的两次单结更不容易脱落，以及在这两种打法下，绳索的直径、软硬、表面摩擦力、两结点间间隙面积与是否容易松动的关系。

对于问题一，两种互为镜像的单结，考虑可能组成 4 种不同打结方式，即 1-1、2-2、1-2、2-1 四种，再分析这 4 种有没有内在的联系。

对于问题二，考虑影响松脱程度可能有直径、摩擦力、软硬、两间隙面积的

影响,考虑每个因素对其的影响,以及哪一因素影响最大等问题。做下面的研究、讨论。

三．模型假设与约定

- 1.假设压力感应器表面绝对光滑并且对松弛程度无影响；
- 2.假设测力计对结点的松弛度无影响；
- 3.假设轻质夹绝对光滑，不影响绳子的摩擦；
- 4.假设不同规格的感应器仪器完好；
- 5.约定：在 5.2 求解时，将 1-1 和 2-2 合并统称为方法一；将 1-2 和 2-1 合并统称为方法二；
- 6.约定；所有力的单位都是 10^{-3}N ，直径的单位为 mm，间隙面积的单位为 mm^2 ，硬度单位为 HBW。

四．符号说明及名词定义

1-1	两次打结均为打法 1
1-2	第一次打结为打法 1，第二次打结为打法 2
2-1	第一次打结为打法 2，第二次打结为打法 1
2-2	两次打结均为打法 2
N	压力感应器的示数
A1, B1, C1, D1	测力计 1 的示数
A2, B2, C2, D2	测力计 2 的示数
r11	直径与方法 1 的相关系数
r12	直径与方法 2 的相关系数
r21	摩擦力与方法 1 的相关系数
r22	摩擦力与方法 2 的相关系数
r31	软硬与方法 1 的相关系数
r32	软硬与方法 2 的相关系数
r41	间隙面积与方法 1 的相关系数
r42	间隙面积与方法 2 的相关系数

五．模型的建立与求解

5.1 对问题一的分析与求解

1.对问题一的分析：

问题一提供了两种打结方式，连打 2 次单结时，我们有 4 种方法如表一所示：

	1-1	2-2	1-2	2-1
第一道结	打法 1	打法 2	打法 1	打法 2
第二道结	打法 1	打法 2	打法 2	打法 1

表 1

使用压力感应器并将其放置在第一、二结点之间的间隙处。再利用两个测力计，分别放置第一个结点和第二个结点的交叉处。由测量数据的结果来比较 1-1 和 2-2 以及 1-2 和 2-1 之间的联系。数值详见表 2.

打结方式		1-2		2-1		1-1		2-2	
试验次数	N	A1	A2	B1	B2	C1	C2	D1	D2
1	0.15	0.23	0.31	0.21	0.30	0.32	0.40	0.33	0.41
2	0.20	0.21	0.49	0.23	0.47	0.33	0.58	0.32	0.58
3	0.25	0.22	0.65	0.22	0.64	0.34	0.72	0.33	0.71
4	0.30	0.22	0.74	0.22	0.73	0.32	0.81	0.34	0.82
5	0.35	0.23	0.80	0.21	0.80	0.33	0.88	0.33	0.89
6	0.40	0.21	0.83	0.23	0.82	0.33	0.90	0.32	0.89

表 2

2.对问题一的求解：

利用测出的数据，采用曲线拟合的方法。具体过程如下：（1）使用相同材料的绳子，在相同的条件下，打第二个结点时控制压力传感器的示数分别为 0.15、0.20、0.25、0.30、0.35、0.40，在某一压力传感器值下，同时松手，记录测力计的值。用此种方法当压力传感器的值增大时，测力计的示数，如表 2 所示；（2）将试验次数（或压力感应器示数）作为 x 轴，将测力计差值作为 y 轴，拟合出图像如图 2 所示。

由图像可以得到以下结论：1-2 和 2-1 的测力计 1 示数（即 A1 和 B1）相似，测力计 2 的示数（即 A2 和 B2）相似，同样的，1-1 和 2-2 的测力计 1 和 2 示数（C1 和 D1 及 C2 和 D2）分别相似。所以 1-2 和 2-1 的自动脱落程度相似，1-1 和 2-2 的自动脱落程度相似。

在不同的压力感应器值下，A1、B1、C1、D1 基本没有发生变化，所以，打第二个结点时不影响第一个结点；而 A2、B2、C2、D2 有了显著的增长趋势，同时，比较 A2、B2 和 C2、D2，C2、D2 的值均大于 A2、B2 的值，说明 1-1、2-2 比 1-2、2-1 更容易脱落，由此得到，1-1、2-2 较 1-2、2-1 更容易自动脱落。

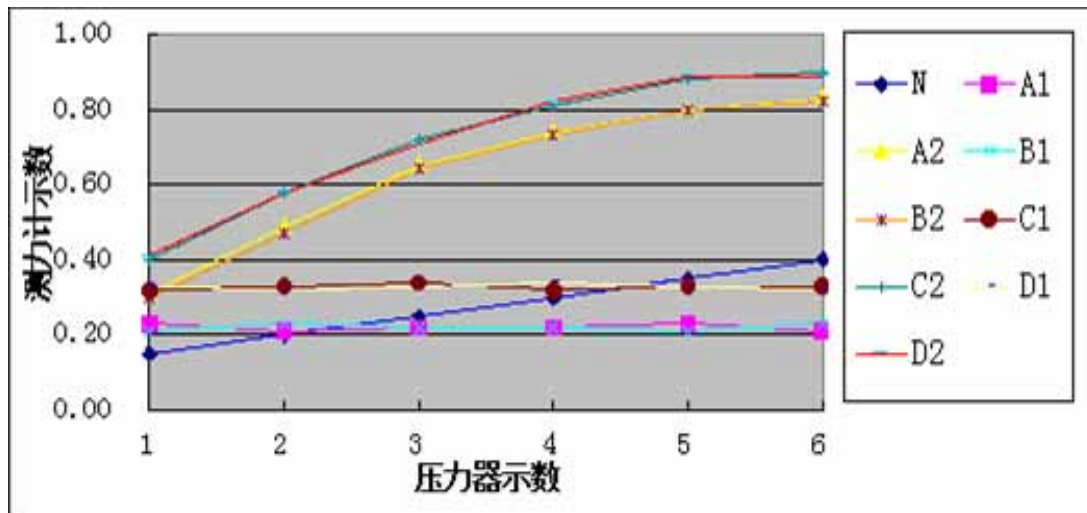


图 2

5.2 对问题二的分析与求解

1. 对问题二的分析

在时间相同的前提下，绳索的直径、软硬、表面摩擦力、两结点间隙面积与是否容易自动脱落之间的关系。我们用以下两种方式进行分析：

(1) 分别探究绳索的某一机械性能与绳结是否容易松脱以及两种不同的打结方式的异同：直径（或软硬或摩擦力）：应用控制变量法，首先用方法一和方法二分别进行两次打结操作，将方法一、二的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间）；其次，利用压力感应器均得到几组数据，通过曲线拟合；最后，得出直径的影响因素以及两种方法的异同。（注：摩擦力不是自变量时，可使用轻质夹控制绳子的相互作用力，从而控制摩擦力不变；摩擦力作为因变量时，可在绳子相互接触产生摩擦的地方放置一个压力传感器，然后根据 $\text{摩擦力} = \text{压力} \times \text{摩擦系数}$ 从而得到摩擦力的值。）

两间隙间面积：控制其他变量不变，首先，使用规格不同的传感器，使得第一、二结点之间的间隙面积不同，将方法一、二的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间）；其次，利用不同压力传感器得到几组数据，通过曲线拟合；最后，得出两间隙之间的面积的影响因素以及两种方法的异同。

(2) 探究直径、摩擦力、软硬、两结点间隙面积这四种影响因素的大小排序：

利用相关分析中的简单相关分析，用 Person 相关分析方法进行比较，利用 SPSS 软件，得到相关性 r 值，将这四种影响因素的 r 值进行比较，可得到结论。

2. 对问题二的求解

同样分为两种方式：

(1) 分别探究绳索的某一机械性能与绳结是否容易松脱以及两种不同的打结方式的异同：

a) 直径：首先，挑选几种直径不同的绳子，绳子的摩擦力系数、软硬等其他因素相同；在某一直径下，将方法一、二的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间），使得第一、二结点之间的压力感应器均达到某一值并且稳定后记录此值，分别作为法一、二的第一个值，之后同时松手，

经过同一时间段后，记录压力感应器上的数值，将这两个值进行作差，分别得到一个 y_1 和 y_2 的数值；之后，改变直径的大小，同②的方法分别得到一组数据；

最后，将直径作为 x 轴，将感应器差值作为 y 轴，分别将数据用 Matlab 进行拟合，得到曲线，如图 3。

由图 3 可得到结论：直径影响松脱程度，并且，方法二比方法一更容易脱落；

b) 摩擦力：首先，选取摩擦力系数不同的几种绳子，绳子的直径、软硬等其他因素相同；在某一摩擦力系数下，将方法一、二的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间），使得第一、二结点之间的压力感应器均达到某一值并且稳定后记录此值，分别作为法一、二的第一个值，之后同时松手，经过同一时间段后，记录压力感应器上的数值，将这两个值进行作差，分别得到一个 y_1 和 y_2 的数值；之后，改变摩擦力系数的大小，同②的方法分别得到一组数据；最后，将摩擦力系数作为 x 轴，感应器值的差值作为 y 轴，分别将数据用 Matlab 进行拟合，得到曲线，如图 4；

c) 软硬：首先，选取硬度不同的几种绳子，绳子的直径、摩擦力系数等其他因素相同；在某一硬度下，将方法一、二的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间），使得第一、二结点之间的压力感应器均达到某一值并且稳定后记录此值，分别作为法一、二的第一个值，之后同时松手，经过同一时间段后，记录压力感应器上的数值，将这两个值进行作差，分别得到一个 y_1 和 y_2 的数值；之后，改变硬度的大小，同②的方法分别得到一组数据；

最后，将硬度的测量值作为 x 轴，感应器值的差值作为 y 轴，分别将数据用 Matlab 进行拟合，得到曲线，如图 5；

d) 两间隙面积：首先，挑选几种不同规格的感应器，绳子的直径、摩擦力系数、软硬等其他因素相同；其次，在某一规格的感应器下，将法一、二的绳结上分别将此规格的压力感应器放在第一、二结点之间，使示数均达到某一值并且稳定后记录，同时松手，相同时间下，分别记录此时的感应器示数，将前后两值作差，分别得到一个 y_1 和 y_2 值；之后，选用另一规格的感应器，方法同第②步，此时，得到一组 y_1 和 y_2 值；最后，将面积作为 x 轴，感应器值的差值作为 y 轴，分别将数据用 Matlab 进行拟合，得到曲线，如图 6。

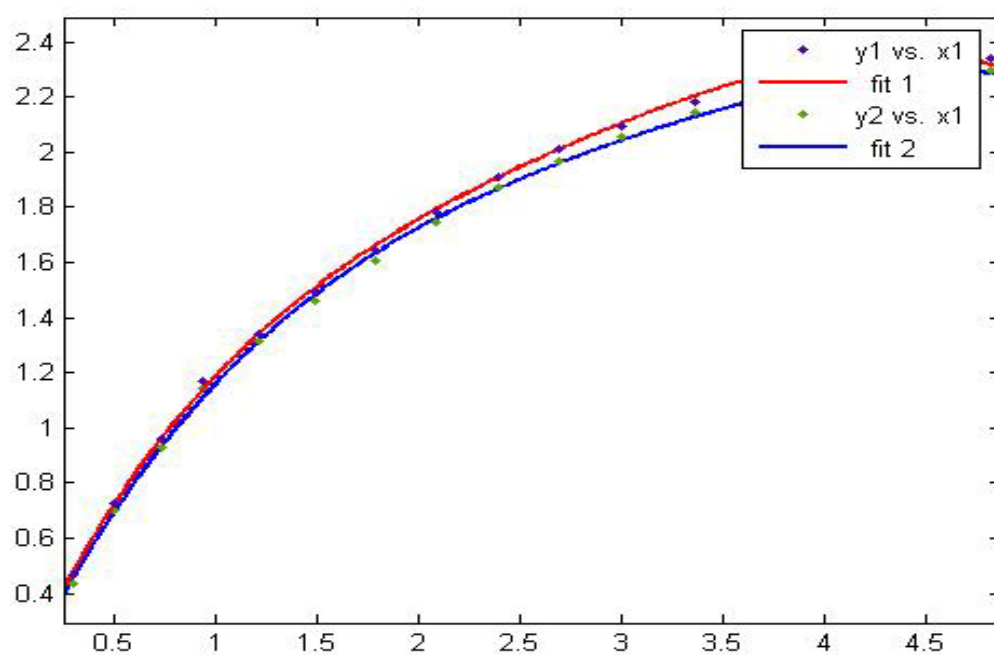


图 3 （注： y_1 -方法一； y_2 -方法二； x_1 -直径）

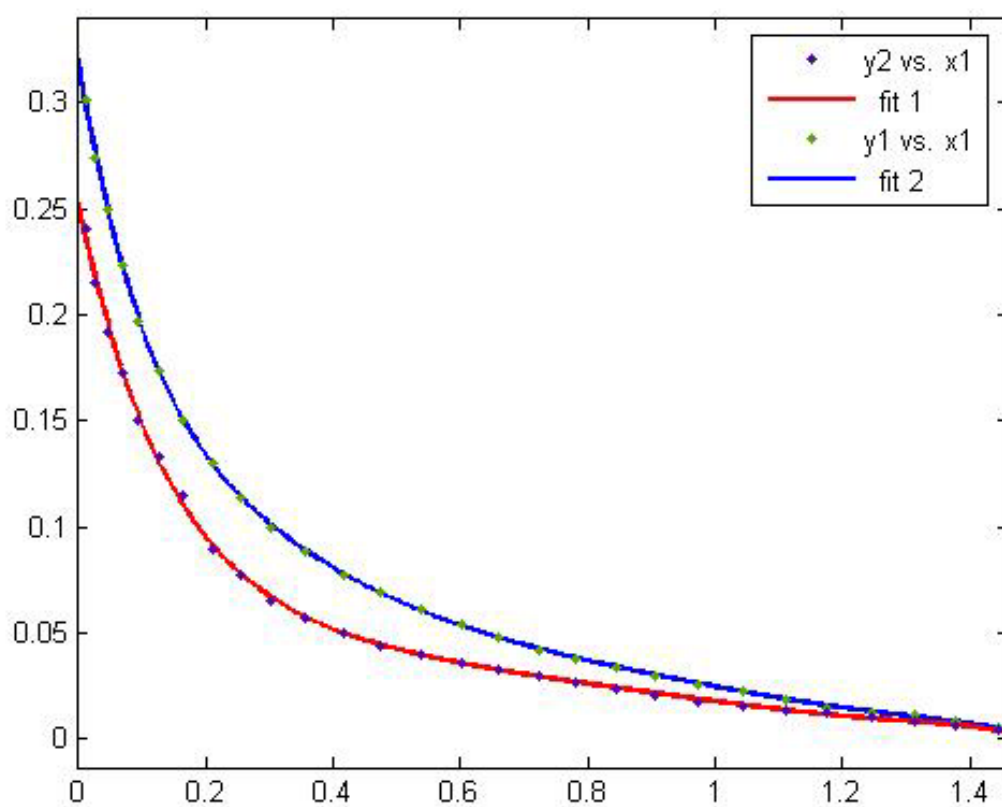


图 4 （注： y_1 -方法一； y_2 -方法二； x_1 -摩擦力）

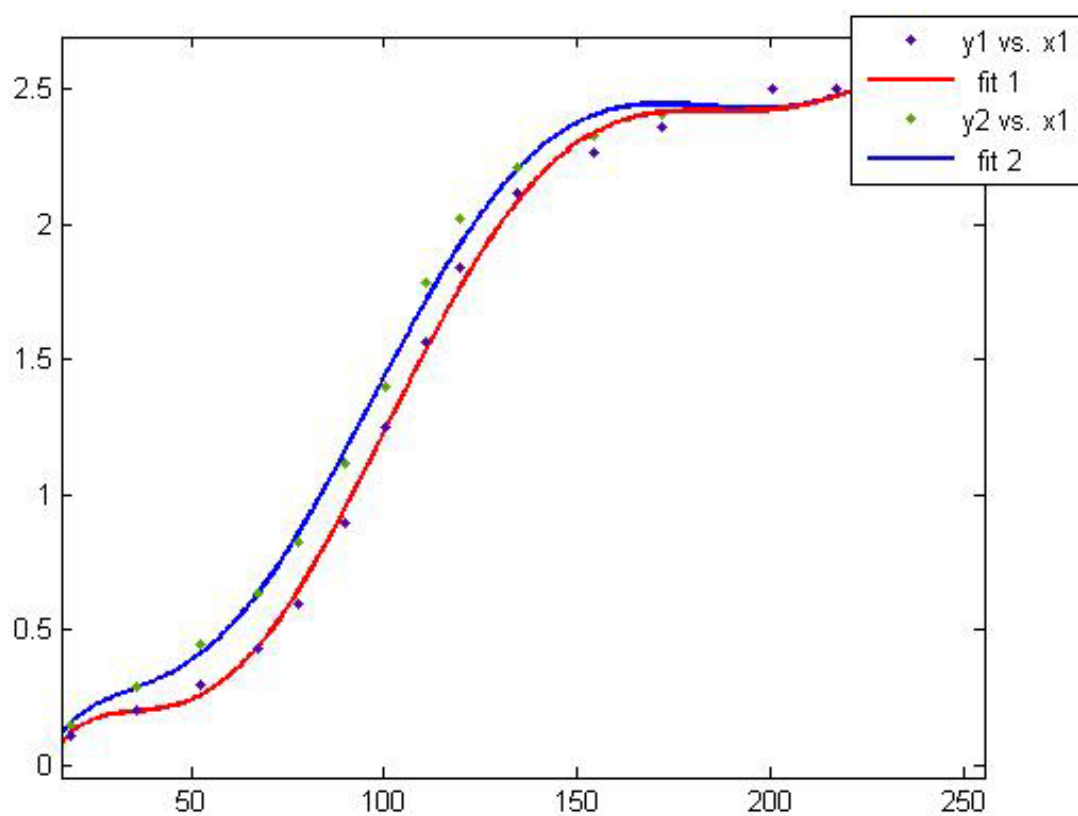


图 5 （注：y1-方法一；y2-方法二；x1-软硬）

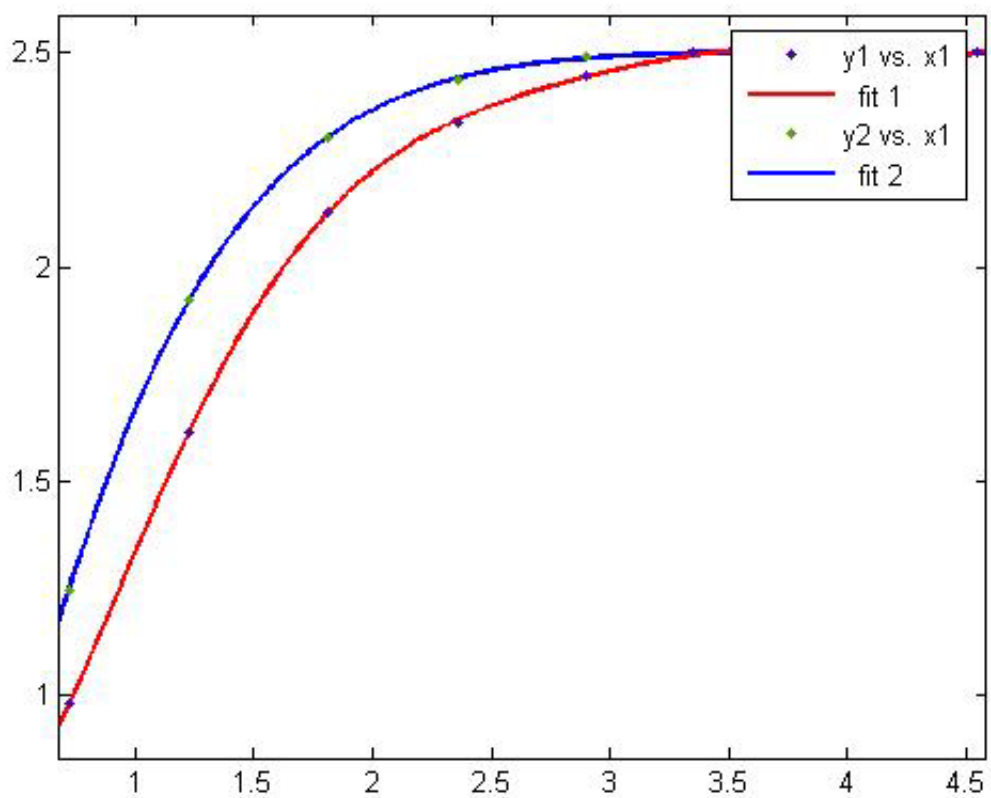


图 6 （注：y1-方法一；y2-方法二；x1-两间隙面积）

（2）探究直径、摩擦力、软硬、两结点间隙面积这四种影响因素的大小排序：

a) 将直径的值和方法一、二的值输入到 SPSS 中，进行相关性分析，得到的数值 r_{11} 、 r_{12} 见表 3；

b) 将摩擦力的值和方法一、二的值输入到 SPSS 中，进行相关性分析，得到的数值 r_{21} 、 r_{22} 见表 4；

c) 将软硬度的值和方法一、二的值输入到 SPSS 中，进行相关性分析，得到的数值 r_{31} 、 r_{32} 见表 5；

d) 将面积的值和方法一、二的值输入到 SPSS 中，进行相关性分析，得到的数值 r_{41} 、 r_{42} 见表 6。

相关性

		直径	方法一	方法二
直径	Pearson 相关性	1	.785 [*]	.726 [*]
	显著性 (双侧)		.012	.027
	N	16	9	9
方法一	Pearson 相关性	.785 [*]	1	.991 ^{**}
	显著性 (双侧)	.012		.000
	N	9	9	9
方法二	Pearson 相关性	.726 [*]	.991 ^{**}	1
	显著性 (双侧)	.027	.000	
	N	9	9	9

*. 在 0.05 水平 (双侧) 上显著相关。

**. 在 .01 水平 (双侧) 上显著相关。

表 3

相关性

		摩擦力	方法一	方法二
摩擦力	Pearson 相关性	1	.723*	.661
	显著性 (双侧)		.028	.053
	N	28	9	9
方法一	Pearson 相关性	.723*	1	.991**
	显著性 (双侧)	.028		.000
	N	9	9	9
方法二	Pearson 相关性	.661	.991**	1
	显著性 (双侧)	.053	.000	
	N	9	9	9

*. 在 0.05 水平 (双侧) 上显著相关。

**. 在 .01 水平 (双侧) 上显著相关。

表 4

相关性

		软硬	方法一	方法二
软硬	Pearson 相关性	1	.882**	.832**
	显著性（双侧）		.002	.005
	N	16	9	9
方法一	Pearson 相关性	.882**	1	.991**
	显著性（双侧）	.002		.000
	N	9	9	9
方法二	Pearson 相关性	.832**	.991**	1
	显著性（双侧）	.005	.000	
	N	9	9	9

**． 在 .01 水平（双侧）上显著相关。

表 5

相关性

		两间隙面积	方法一	方法二
两间隙面积	Pearson 相关性	1	.861**	.805**
	显著性 (双侧)		.003	.009
	N	9	9	9
方法一	Pearson 相关性	.861**	1	.991**
	显著性 (双侧)	.003		.000
	N	9	9	9
方法二	Pearson 相关性	.805**	.991**	1
	显著性 (双侧)	.009	.000	
	N	9	9	9

** . 在 .01 水平 (双侧) 上显著相关。

表 6

通过表 3、4、5、6 可得到的结论：

在第一种打结方法下， r_{31} 、 r_{41} 均大于 0.8，为高度相关； r_{11} 、 r_{21} 介于 0.5 和 0.8 之间，为中度相关。又 $r_{31} > r_{41} > r_{11} > r_{21}$ ，所以，方法一的影响因素大小为：软硬>两间隙面积>直径>摩擦力。

在第二种打结方法下， r_{12} 、 r_{32} 、 r_{42} 均大于 0.8，为高度相关； r_{22} 介于 0.5 和 0.8 之间，为中度相关。又 $r_{12} > r_{32} > r_{42} > r_{22}$ ，所以，方法二的影响因素大小为：直径>软硬>两间隙面积>摩擦力。

六．模型检验

单结的应用十分广泛，其稳定性固然重要。所以，检验上述求解所得出的结果不可或缺。我们用两种方法进行检验：第一种：实践是检验真理的唯一标准，我们采用实践检验法，第二种：仪器、数值检验法

第一种：

对于问题一中四种打结方式的绳结自动松脱情况的检验，首先，我们挑选四个班级，每个班级人数相同，让不同班级的同学以相应的打结方式系自己的鞋带。

如表 7：

班级	一班	二班	三班	四班
打结方式	1-1	1-2	2-1	2-2

表 7

让所有同学去运动场，活动相同的时间，然后记录各个班级同学鞋带自动松脱的个数。从而证明方法一的打结方式更容易松动；

对于问题二在问题一的基础上测定两种不同打结方式下绳子直径、软硬、摩擦力以及绳结间间隙面积对绳结自动松动的影响。班级 A 到 F 人数和活动量均相同。如表 8 和 9，表 8 对应方法一，表 9 对应方法二：

班级 影响因素	A 班	B 班	C 班
直径	较细	正常	较粗
软硬	较软	正常	较粗
摩擦力	光滑鞋带	正常	粗糙鞋带
间隙面积	较小	正常	较大

表 8

班级 影响因素	D 班	E 班	F 班
直径	较细	正常	较粗
软硬	较软	正常	较粗
摩擦力	光滑鞋带	正常	粗糙鞋带
间隙面积	较小	正常	较大

表 9

在直径同为较细时，比较 A 班和 D 班鞋带松脱的情况，同理，改变直径大小和其他影响时，比较对应班级的鞋带松脱情况。将统计之后的结果作为检验标准。

第二种：

对问题二进行检验，操作如下，如表 10：

	摩擦力	直径	硬度	间隙面积	比例系数
第一次测量	0.025	0.300	20.0	0.50	1/4
1-1	0.273	0.474	0.115	0.690	
1-2	0.214	0.444	0.156	0.960	
第二次测量	0.100	1.200	80.0	2.00	
1-1	0.190	1.333	0.653	2.198	
1-2	0.143	1.307	0.900	2.355	
第三次测量	0.500	2.500	150.0	2.50	5/7
1-1	0.066	1.965	2.235	2.363	
1-2	0.042	1.910	2.305	2.451	
第四次测量	0.700	3.500	210.0	3.50	
1-1	0.044	2.225	2.500	2.500	
1-2	0.031	2.165	2.500	2.500	

表 10

依次进行四次测量，其中第一次与第二次测量比例系数为 1/4，第三次与第四次比例系数为 5/7。测量在不同取值下，绳结的松弛程度，并比较不同变量下的绳结松弛程度。根据数据分析得出各变量对绳结松弛程度的影响程度。

七．模型评价

(1) 优点：

- 分别考虑各变量对绳子松弛程度的影响，大大减少了实验的复杂程度，使得模型的控制变量建立更具有条理性。
- 对数据进行回归分析，能够看出各变量对绳结松弛的影响程度。
- 准确测量了实验数据，并且对数据进行了较透彻的分析，抓住了分析的重点，剔除了一些对目标函数影响不大的数据，很好的完成了数据的提取与应用。

(2) 缺点：

- 模型有些过于理想化，数据采集比较困难；
- 数据随机性太大，造成数据分析时的困难和一些数据分析的粗糙；
- 仅仅是对于塑形绳的考虑不具有普遍性，对于其他质地较硬或是较软的绳子，不具有相同的说明性；
- 模型中各变量数据之间没有关联性，很难对数据进行综合分析反映到一个多元函数上，对于多因素同时变化时，不能较好的反应绳子松弛程度的变化；
- 应用简单相关分析得到的相关程度与模型检验得到的结果存在部分不同，实验过程变量的控制还有待改进。

八．模型应用

单结，作为最简单的绳结，作为基础被广泛的应用，以单结的基础，人们巧妙地运用于生产、生活中。如图 7，在单结的打法编出了用于固定某物体的成品；如图 8，我们常见的红领巾；图 9 所示的礼品包装盒，可以让整体更具有美感；如图 10 的蝴蝶结；以及图 11 的最简单的围巾的系法。

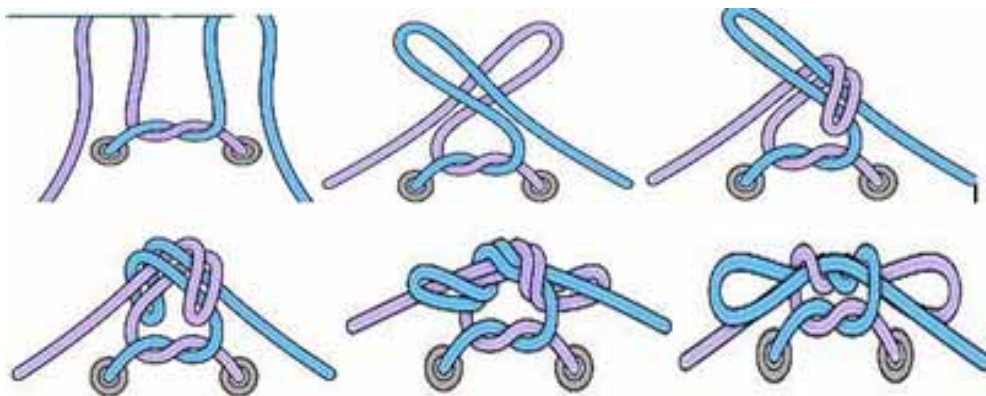


图 7



图 8



图 9



图 10



图 11

九．参考文献

- [1]王永富， 不确定机械问题建模与控制补偿， 机械工业出版社，2013.
- [2]杨丹， SPSS 宝典，北京：电子工业出版社，2013.
- [3]姜文锋 张书杰，浅谈绳结检验方法，中国刑警学院学报，2012.
- [4]王正林 刘明 陈连贯，精通 MATLAB，电子工业出版社，2013.
- [5]邱明 钱亚明，摩擦学原理与设计，国防工业出版社，2013.

十. 附录

在 5.2 解法中，使用 Matlab 编写的程序：
摩擦力

```
>>x1=[0.011,0.024,0.047,0.070,0.093,0.126,0.164,0.211,0.255,0.303,0.357,0.415,0.474,0.537,0.601,0.660,0.723,0.782,0.846,0.905,0.974,1.043,1.112,1.176,1.245,1.313,1.377,1.446];
>>y1=[0.301,0.274,0.250,0.223,0.197,0.174,0.150,0.130,0.114,0.100,0.089,0.077,0.069,0.061,0.054,0.048,0.042,0.038,0.034,0.030,0.026,0.023,0.019,0.015,0.013,0.011,0.008,0.005];
>>y2=[0.241,0.215,0.192,0.173,0.150,0.133,0.115,0.090,0.077,0.065,0.057,0.050,0.044,0.040,0.036,0.033,0.030,0.027,0.024,0.021,0.018,0.016,0.014,0.012,0.010,0.008,0.006,0.004];
>> cf tool
```

直径

```
>>x1=[0.295,0.503,0.729,0.937,1.215,1.493,1.788,2.083,2.396,2.691,3.003,3.368,3.715,4.063,4.444,4.826];
>>y1=[0.468,0.724,0.958,1.172,1.343,1.493,1.644,1.783,1.912,2.009,2.096,2.184,2.389,2.283,2.318,2.341];
>>y2=[0.438,0.700,0.932,1.145,1.317,1.460,1.609,1.748,1.870,1.968,2.054,2.143,2.197,2.240,2.273,2.299];
>>cf tool
```

软硬

```
>>x1=[18.7,35.9,52.4,67.4,77.8,89.8,100.3,110.8,119.8,134.7,154.2,172.1,200.6,217.1,235.0,253.0];
>>y1=[0.109,0.199,0.299,0.435,0.598,0.897,1.250,1.567,1.839,2.119,2.264,2.364,2.500,2.500,2.500,2.500];
>>y2=[0.145,0.290,0.444,0.634,0.824,1.114,1.404,1.784,2.020,2.210,2.328,2.409,2.500,2.500,2.500,2.500];
>>cf tool
```

间隙面积

```
>>x1=[0.72,1.23,1.81,2.36,2.90,3.35,3.76,4.14,4.55];
>> y1=[0.977,1.615,2.130,2.335,2.448,2.500,2.500,2.500,2.500];
>> y2=[1.245,1.924,2.304,2.438,2.490,2.500,2.500,2.500,2.500];
>> cf tool
```