

# 2008 年 第一届“数学中国杯”

## 数学建模网络挑战赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了首届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：2092

参赛队员（签名）：

队员 1：林坤圣

队员 2：董莹

队员 3：邵子恒

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：大学组

# 2008 年 第一届“数学中国杯”

## 数学建模网络挑战赛

### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：  
2092

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2008 年 第一届“数学中国杯” 数学建模网络挑战赛

## 题 目 汽车销售预测模型

关 键 词 时间序列分析模型，排队论模型，定量分析，定性分析，预测销量

### 摘 要：

本文在对 4S 店的销售历史数据进行定量分析的基础上，根据市场上汽车供求情况的发展趋势，采用了时间序列分析预测模型，对本店在 2008 年的每个月每款车的销量作出了预计和估量。在此基础上，我们又对汽市场及 4S 店的销售情况进行了定性分析，总结出了一系列的汽车促销点子，供领导参考研究。最后，又运用排队论模型，得出对员工合理安排的方案。

针对问题一，根据各款车 2005—2007 年的销售特点和趋势，具体对 A 款车采用了时间序列分析模型中的时间反函数预测法进行分析求解，对 C1 和 D 这两款车采用了月平均比重法，对 C2 运用了时间预测季节法，对 B 款车则不予以考虑，预测结果如下表：

对问题 1 中各车款预测的汇总

月 数 值	08 . 1	08 . 2	08 . 3	08 . 4	08. 5	08. 6	08. 7	08. 8	08. 9	08. 10	08 . 11	08 . 12
$y_{a4t}$	1	1	2	3	1	1	1	1	2	1	1	1
$y_{c14}$	41	15	19	35	34	14	25	22	27	25	38	55
$y_{c24t}$	39	11	27	19	28	23	20	13	28	22	33	47
$y_{d4t}$	31	29	32	29	27	27	22	31	26	21	21	30

对问题二，在问题一的结论基础上，根据轿车市场及 4S 店的销售情况进行了定性分析，得出了节日送礼，变形降价，加强宣传，多开展针对性活动等一系列点子，并做出了一份有效的轿车销售策划报告书，欲了解详情，请看第二问的解答。

对于问题三，我们以运营管理学的原理为基础，运用排队论原理，通过构造顾客的等候时间与公司售后部的接待成本模型来找出顾客的等候时间与公司售后部的接待成本的数量关系，由此确定出 5 名接待员接待、4 名维修师傅的合理安排。

参赛队号 2092

所选题目 G 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 一、问题提出

问题 1：根据 4S 店前 3 年的每月每种车型每款车的销售数量,预测第四年全年每月每种车型每款车的销售数量。根据今年前 3 个月每月的实际销售数量,修正预测误差。

问题 2：由于每年的销售任务是汽车生产方指定的,为完成全年的销售目标,请结合问题 1 写一份销售策划报告书给公司 CEO,并指出完成该目标所采取的相关办法。

问题 3：由于车售出三个月后,所售车辆必须按照厂方规定回 4S 店定点保养(免费),但是由于种种原因,回店首次保养的客户比实际买车的客户少。

售后部总共有 8 名接待员,已知每人平均每天接车台次、产值及工资成本。已知售后部机修组每组师傅用于完成保养、一般维修、保修、及事故车维修的工时。

请设计一个接待、派工程序,使得每一位客户来店等待维修的时间最短,且公司成本最低。

工作流程：新车销售-3 月后客户返回 4S 店做首期免费保养-前台服务接待客户-服务接待开车进维修部-维修部派师傅维修-维修好交给接待,接待负责办好手续,轿车给客户。

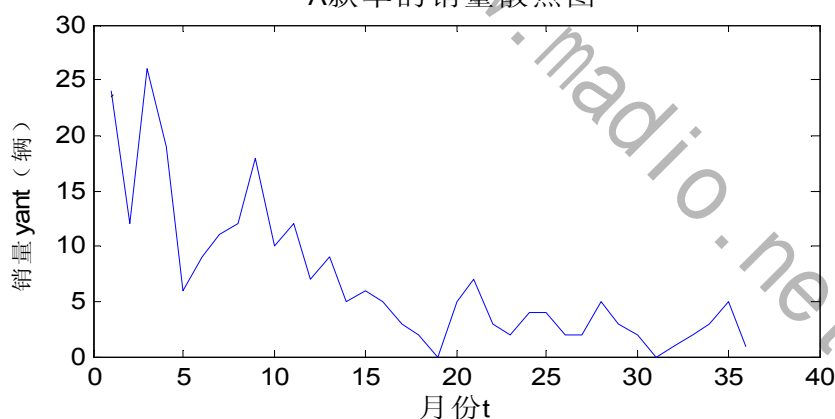
## 二、问题分析

(时间序列分析模型模型)

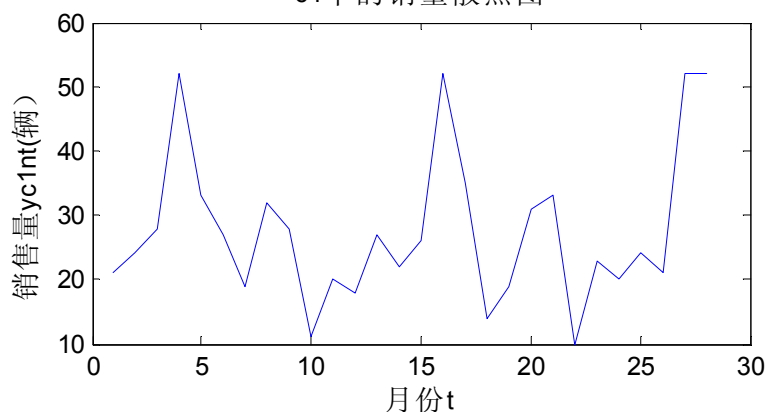
对于问题 1:

本文对 4S 店 2005-2007 年的每月每种车型每款车的销售数量进行了整理,以  $t$  作为自变量(对 A, D 车款  $t$  从 2005 年 1 月开始编号 1, 2, ..., 对车款 C1, C2, 则从销量稳定后那个月开始编号),以各个车款的销售量作为因变量,利用 Matlab 进行散点图分析,

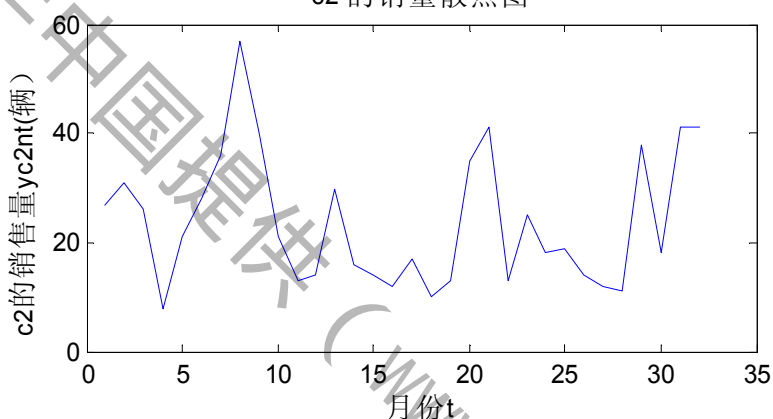
A 款车的销量散点图



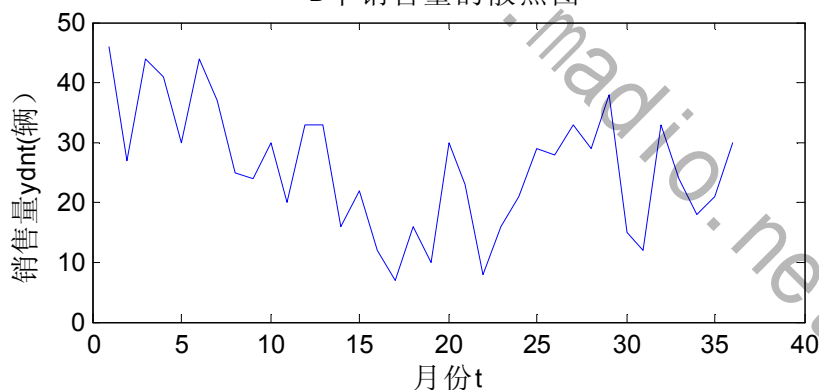
c1车的销量散点图



c2 的销量散点图



D车销售量的散点图



我们发现：A 为老款车，它的销量，整体上成反函数式变化，且在边快速减小边波动，最后在小范围内波动；B 由于在 2007 年 1 月已停产，因此销量为 0；C1 从上市后经过 4 个月，即到 2005 年 9 月才开始摆脱了新车 C2 对它的竞争，销量得到正常化，且呈现出一个比较规则的周期性；对 C2 我们发现，刚上市时销量较大，后来受到 C1 的竞争，销量有所下降；而 D 型车的销量在同月中没有发生太大的变化，且 2007 年的销售量与 2005，2006 的平均销量一致。所以据此对 A 建立了时间反函数预测模型模型，对 C1 和 D 建立了月平均比重法模型，对 C2 直接建立了时间预测季节模型，如下：

A:

$$y_{ant} = (a + b/t)S_j + \varepsilon;$$

C1:

$$x_{c1j} = \frac{\sum y_{c1nt}}{\sum m_n} \times 100 \% , \text{ 则有预测函数 } y_{c1nt} = m_n x_{c1j} + \varepsilon$$

C2:

$$y_{c2nt} = (c + dt)S_j + \varepsilon ;$$

D:

$$x_{dj} = \frac{\sum y_{dnt}}{\sum m_n} \times 100 \% , \text{ 则有预测函数 } y_{dnt} = m_n x_{dj} + \varepsilon$$

其中,  $\varepsilon$  是相互独立的 (对于不同的月份  $t$ )、期望为 0、方差为常数、正态分布的随机变量, 称为随机误差。

通过预测, 我们得到了 2008 年各个月各车款的预测值, 并用前 3 个月的预测值与已知值进行了比较和校核, 得到了一份比较合理的预测数据。

对于问题 2, 我们从问题 1 预测到 2008 年的销售量会在 1000 辆左右, 与厂家给定的 1200 辆目标相差较大, 为此我们经过对市场因素的调查, 得到了一系列提高销售量的策施, 并以销售策划报告书的形式进行解答。

对问题一、二:

### 三、符号约定

符号	说明	单位	备注
$y_{ant}$	A 款车第 $n$ 年第 $t$ 个月的销售量	辆	最后取整数, 负数表示滞销, 其它车款把下标 $a$ 改为对应的字母即可
$j$	月份		$j=1, 2, 3, \dots, 12$
$t$	月变量		
$n$	年份变量		2005 年 $n=1$ , 依次类推
$S_j$	同月平均因子		
$a, b, c, d$	多项式的系数		
$\varepsilon$	随机变量		
$m_n$	第 $n$ 年的总销售量		
$x_{aj}$	A 款车 $j$ 月的平均值		
$T_t$	多项式代号		

## 四、模型假设

- 1、所给历史统计数据都是真实、可信的；
- 2、在模型的预测时间内自然和社会环境相对稳定（即不发生战争、重大传染性疾病、地区核污染和自然灾害等使经济巨大变化的事故）；
- 3、假设汽车供应足量，不会缺货；

## 五、模型的建立与求解分析

### 1. 模型的建立与预测

A 的预测：时间反函数预测模型模型

$$y_{ant} = (a + b/t)S_j + \varepsilon$$

用 matlab 拟合，得到

$$a = 3.8683$$

$$b = 25.8091$$

再令

$$Tt = a + b/t$$

代入  $y_{ant}$  和对应的月份  $t$ ，然后进行同月平均，即可得到 12 个月同月因子  $S_j$ ，

结果得：

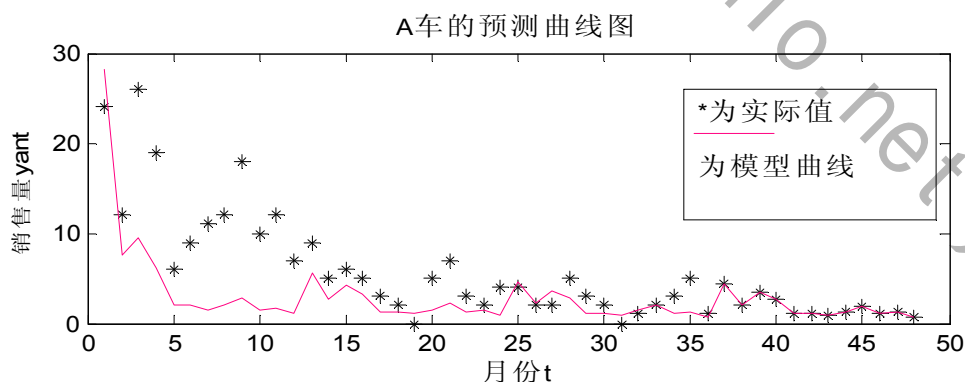
$$S_j = \bar{y}_{ant} / \bar{T}_t = [0.9487, 0.4524, 0.7556, 0.6042, 0.2353, 0.2407, 0.1930, 0.3, 0.4286, 0.2424, 0.2754, 0.1667]$$

返回模型，求得：

$$y_{ant} = [4.3317, 2.0572, 3.4227, 2.7269, 1.0583, 1.0792, 0.8623, 1.3365, 1.9036, 1.0738, 1.2164, 0.7343]$$

取整得：

$$y_{ant} = [4, 2, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1];$$



C1 的预测：月平均比重法

$$x_t = \frac{\sum y_{c1nt}}{\sum m_n} \times 100 \quad \%$$

$$y_{c14t} = m_4 x_t$$

模型求解：

由以问题分析知，C1 在各年中同月的数值变化不大，刚上市时有较大波动外，其他月份都比较稳定，即周期性很强，由于 c1 在 2005 年的数据较少，且刚上市时数据失真严重，因此经过分析后给 1-8 个月进行了虚拟插值后，我们只要对 2008 年 C1 的销售总量  $m_4$  进行预测，再乘上月平均比重即可得到 2008 年各月的预测值，从图象的周期性

及幅度分析， $m_4$ 不妨取前三年年销量的平均值  $m_4 = 320.1667$ ，用 matlab 软件求解得

$$\sum y_{c2nt} = [102, 61, 57, 94.5, 91.5, 31.5, 64.5, 57, 72, 67, 106, 156]$$

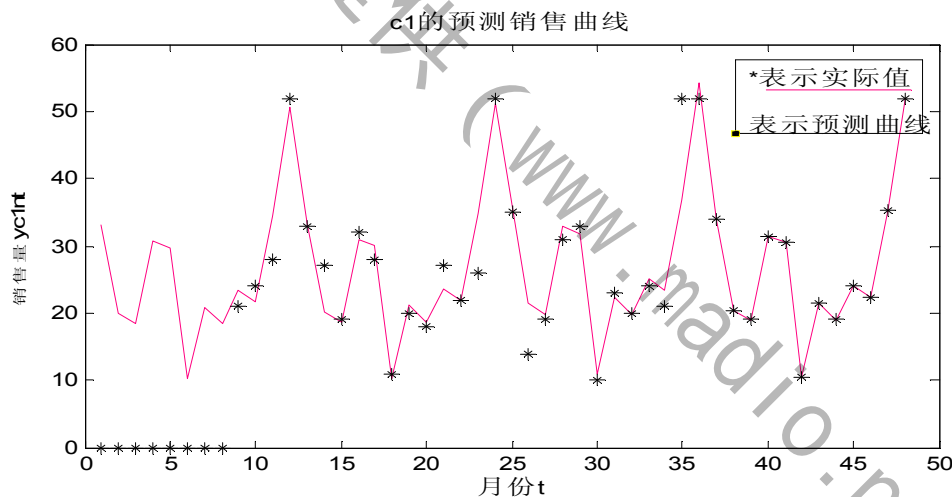
$$\sum m_n = 960.5$$

$$x_t = [0.1062, 0.064, 0.0593, 0.0984, 0.0953, 0.0328, 0.0672, 0.0593, 0.0750, 0.0698, 0.1104, 0.1624]$$

$$y_{c14t} = m_4 x_t = [34, 20.5, 19, 31.5, 30.5, 10.5, 21.5, 19, 24, 22.3, 33, 35.3333, 52]$$

取整后得

$$y_{c14t} = m_4 x_t = [34, 21, 19, 32, 31, 11, 22, 19, 24, 22, 35, 52]$$



C2 的预测：季节推移法

由散点图发现 c2 的周期性较强，刚上市时销量较大，后来受到 c1 的竞争，销量有所下降，因此可以运用季节推移法进行预测：

$$y_{c2nt} = (c + dt)S_j + \varepsilon$$

$y_{c2nt}$  为 c2 型号第 t 个月的销售量，在此 t 从 2005 年 5 月开始编号， $S_j$  是同月平均因子，令

$$T_t = c + dt$$

则

$$S_j = y_{c2nt} / T_t$$



最小二乘法求解

$$a = 23.7492$$

$$b = 4.8304 e^{-5}$$

$$T_t = 23.7492 + 4.8304e^{-005t}$$

$$S_j = \frac{\bar{y}_{c2t}}{T_t} = [1.7053, 0.7158, 0.8000, 0.6737, 1.0667, 0.8561, 0.7298, 0.4351, 1.0667, 0.7860, 1.2632, 1.8667]$$

$$\sum S_t = 11.9649$$

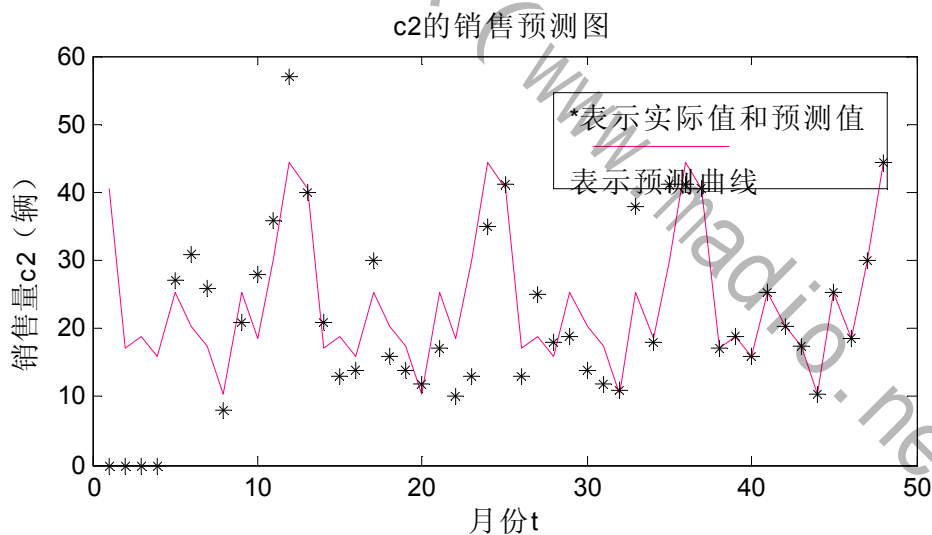
$$y_{at} = (23.7492 + 4.8304e^{-5}t) \times S_j$$

预测结果为

$$y_{c2t} = [40.5013, 17.0006, 19.0006, 16.253345, 20.3342, 17.3341, 10.3338, 25.3345, 18.6675, 30, 44.3353]$$

取整得：

$$y_{c2t} = [41, 17, 19, 16, 25, 20, 17, 10, 25, 19, 30, 44]$$



D 的预测:月平均比重法

$$x_{dt} = \frac{\sum y_{dnt}}{\sum m_n} \times 100 \quad \%$$

则

$$y_{dnt} = m_n x_t$$

$\sum y_{dnt}$  表示历年同月实际值的和

$\sum m_n$  表示历年实销值的和

$x_t$  表示各月平均比重

$y_{dnt}$  表示各月预测销量

$m_n$  表示年度总销量

模型求解：

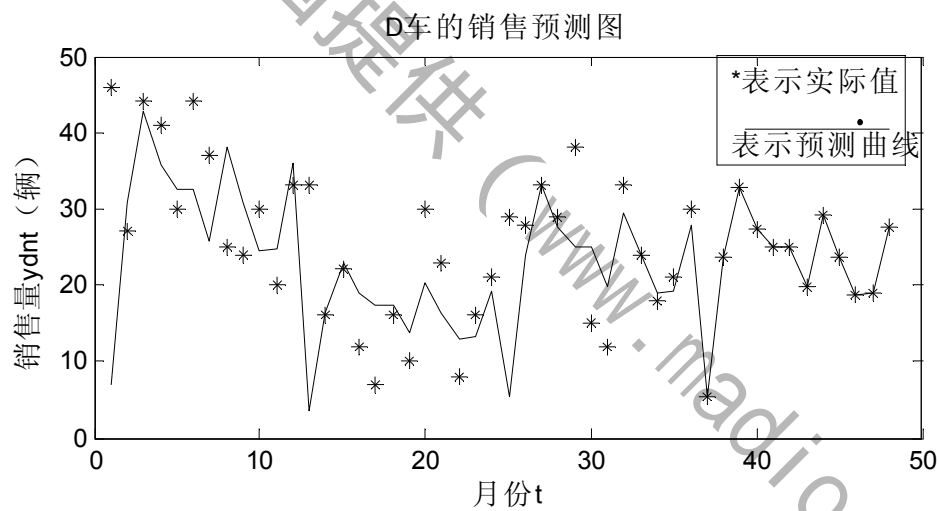
$$\sum y_{dnt} = [108, 71, 99, 82, 75, 75, 59, 88, 71, 56, 57, 84]$$

$$\sum m_n = 925$$

$$x_t = [0.117, 0.077, 0.107, 0.089, 0.081, 0.081, 0.064, 0.095, 0.077, 0.061, 0.062, 0.091]$$

$m_4$  近期预算变化不大，可取前 3 年的平均值当作下一年的预测值，在此  $m_4 = 308$

$$y_{d4t} = m_4 x_{dt} = [36, 24, 33, 27, 25, 25, 20, 29, 24, 19, 19, 28]$$



对问题 1 中各车款预测销量的汇总

月 数值	08 . 1	08 . 2	08 . 3	08 . 4	08. 5	08. 6	08. 7	08. 8	08. 9	08. 10	08 . 11	08 . 12
$y_{a4t}$	4	2	3	3	1	1	1	1	2	1	1	1
实际 值 (偏 差 $\varepsilon$ )	1 (- 3)	1 (- 1)	2 (- 1)									
$y_{c14}$	34	21	19	32	31	11	22	19	24	22	35	52
实际 值 (偏 差 $\varepsilon$ )	41 (7 )	15 (- 6)	19 (0 )									
$y_{c24t}$	41	17	19	16	25	20	17	10	25	19	30	44
实际 值 (偏 差 $\varepsilon$ )	39 (- 2)	11 (- 6)	27 (8 )									
$y_{d4t}$	36	24	33	27	25	25	20	29	24	19	19	28
实际 值 (偏 差 $\varepsilon$ )	31 (5 )	29 (- 5)	32 (- 1)									

## 2. 模型分析与误差修正

从整个季节上分析，总销量的偏差只有 5 辆，总的相对误差为

$$E_x = \frac{5}{228} \times 100\% = 2.2\%$$

因此可以说明，我们在总数上预测是比较准确的。

对 A，从预测图上看该模型的近期预测还是比较准确的，经过与 2008 年的前 3 个月

的对比，我们发现 1, 2, 3 月份的预测值与实际值相差有 3, 1, 1 辆，每个月有 1 到 2 辆车的偏差，那是在正常的预测范围内，况且 A 车为老款中级轿车，销量已经接近 0，因此其相对误差会比较大，对其再进行修改相对误差也会很大，因此对预测值保留。

对 C1, C2, D 各车款的季销量预测偏差为

$$E_{C1x} = \frac{1}{75} \times 100\% = 1.3\%$$

$$E_{C2x} = \frac{0}{77} \times 100\% = 0.0\%$$

$$E_{dx} = \frac{1}{93} \times 100\% = 1.0\%$$

可见 C1, C2, D 各车款的季销量相对偏差也较小，可以预测到这 3 款车的预测年总销量偏差也不大。

虽然我们的季总销量预测准了，但具体到每个月的销量，偏差就比较大了，尤其对二月份，各款车的销量都比预测值低，且数量较大，因此我们考虑到了二月份全国性的大雪灾对出行、试车、油价等负影响较大，销量比预测值低在所难免，除此外 1、3 月份属于正常情况，因此要对正常月份的预测值进行修正，在此我们取

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}$$

即各月 C1, C2, D 各款车预测值都加上一个误差修正量  $\varepsilon_t$ ，得到 4 到 12 月的修正结果：

对问题 1 中各车款修正后预测销量的汇总（1、2、3 月保留实际值）

月 数值	08 . 1	08 . 2	08 . 3	08 . 4	08. 5	08. 6	08. 7	08. 8	08. 9	08. 10	08 . 11	08 . 12
$y_{a4t} + \varepsilon$	1	1	2	3	1	1	1	1	2	1	1	1
$y_{c14} + \varepsilon$	41	15	19	35	34	14	25	22	27	25	38	55
$y_{c24t} + \varepsilon$	39	11	27	19	28	23	20	13	28	22	33	47
$y_{d4t} + \varepsilon$	31	29	32	29	27	27	22	31	26	21	21	30

## 六、模型的评价与改进方向

### 1、本文优点：

(1) 本文预测时建立的数学模型的是时间序列分析预测模型，这种模型原理简单，容易操作，有利于模型的推广使用；

(2) 在问题一，我们考虑到各种销售趋势，建模时对它进行了独立分析，这使得

模型更贴近实际；

(3) 本文建立的预测模型可以推广到其他领域，比如一些季节性变化的预测等

2、缺点：本文在建立模型的时候，没有考虑各种车款相互间的影响尤其是对 C 型车，并没有考虑他们的相互竞争因素，只是单纯的考虑了时间对销量的影响。而对外界的影响只是简单地定性的进行了分析，说明大雪灾对销量造成了较大的影响，而对其没有进行定量的分析。

3、改进方向：可以建立一个综合 A，C1，C2，D 型车预测模型。

对于问题二：

## 销售策划报告书

通过对今年全年每月每种车型每款车的销售数量的预测，可以看出两厢经济 C1 型家庭车、三厢 C2 型经济家庭车以及高级商务 D 型车的销量都很好，而老款中级 A 型车销量则相去甚远。为此我们计划实施的销售总方案是“稳中有升抓强势，尽力扶持提弱势”——其中我们的重心将放在“抓强势”一方。

在进一步分析宏观市场、自身推广策略、竞争对手举措以及消费者心理等四方面，并结合全国汽车市场实际情况，可以暂时得出以下结论：

1、消费者对促销送礼或者变相降价之类的活动敏感度日渐降低，同时，全国各省市地区整体收入水平决定汽车价格的变化对调整销售会产生极大的反应。所以四月推广必须出彩出新，才能更多吸引购车群体；

2、服务成为营销的主要因素，竞争对手在促销活动中大打服务牌；

3、部分竞争对手已经染指农村市场，并且加大农村市场的开拓力度；

4、五一周来临，各微车品牌广告宣传逐渐加大，争取更大的市场份额。

因此，我们在全国汽车市场中以“品牌形象推广为主，临时性促销推广为辅”成为的主要手段开展以下宣传和促销活动：

(一) 活动计划——亲情维系，一起为奥运加油！

主 题：亲情关怀，一路平安

活动依据：基于对本公司两款家庭型用车“用心工作、享受生活、一路有你相伴”的引申，并趁强劲的奥运风，同时也为培养忠实用户，实现真正意义上的“情系客户、超值回馈”。

活动目的：1. 通过游园活动接间举行大型车展，以此展开轰轰烈烈品牌宣传；2. 提升服务品质，提高两厢 C1 型经济家庭车和三厢 C2 型经济家庭车在本省的影响力；

对老客户的亲情回馈，创造良好的口碑效应；制造媒体炒作热点，吸引公众注意力；

活动内容：1. 开展“全家总动员，与奥运同行”大型游园活动，并在其间举办车展  
2. 凡购买我公司两厢 C1 型经济家庭车和三厢 C2 型经济家庭车任一款，便有机会赢取奥运门票——携同家人一起到比赛现场为奥运健儿呐喊助威的抽奖活动。

具体方法：1. 游园活动：在全市范围内，各家都可以以家庭为单位报名参加其中的趣味竞技，奥运知识问答；2. 抽奖活动：针对现有的两厢 C1 型经济家庭车和三厢 C2 型经济家庭车用户群及在本月（即 4 月份）购以上任一款家庭用车的用户，我们将从中抽出 10%送全家三人奥运门票。

前期工作：需提前做好游园活动的筹划和奥运门票的预订工作；向所有的两厢 C1 型经济家庭车和三厢 C2 型经济家庭车用户发出邀请函告之活动内容并回复是否参与；确认此次活动参与人数，如超出 10%需请公证人员抽出幸运人员；邀请几个重要媒体全程参与此次活动并做系列的相关报道。

宣传表现：两厢 C1 型经济家庭车，三厢 C2 型经济家庭车（待定）

## （二）展场建设

地 点：本省各直销店

目 的：为本公司老品牌形象和突出新品推广的重点，此促销手段不在媒体上做专门宣传，而是根据本省用户购车时喜欢讨价还价后才购买的特点，由各直销店在销售终端对老款库存车进行特价优惠销售；

布置内容：针受大众欢迎的车型——在各终端卖场的较为佳展位设立专门的“新品推介展区”，并对其进行卖点包装、展示，营造较好的销售氛围；而与此同时，针对预测销量欠佳的老款中级 A 型库存车——应该选择适宜的展位，在销售终端悬挂特价优惠车促销宣传条幅；在各终端卖场的显著位置设立专门的“特价优惠车展区”，对消费者进行诱导销售；

（三）在品牌形象推广活动中，我们推出“终身 VIP 尊贵我独享”计划：

主 题：尊贵 VIP，终身免费维修/维护

活动时间：2008 年 4—6 月

活动目的：（主要针对预测销量较好的高级商务 D 型车，同时还有两厢经济 C1 型家庭车和三厢 C2 型经济家庭车）针对目前各竞争对手竞相降价，我公司为了体现公司品牌价值和服务质量，提升品牌价值，用服务和质量参与竞争。通过对产品质量的高度承诺，加大目标市场对我公司汽车的品牌认知；锻造公司强硬的产品力，同亲情服务紧密结合；

活动方式：与政府和媒体合作，以增加宣传力度。

活动内容：4—6 月凡购买我公司全系列微型车任一款，都有机会免费获得终身免费维修卡和维护。

宣传方式：首先通过电视和报纸以及宣传资料发放形式进行活动告知，选择特定时间举办新闻发布会形式进行承诺：以每 1000 辆汽车为样本，抽取 10 张终身免费维修卡和 50 张终身免费维护卡；邀请公证处全程公证此次活动；各卖场做好客户资料的登记和及时反馈信息；媒体围绕这次活动以新闻的形式进行大肆炒做。

广告配合方式：

1. 报纸广告：依然选择本省唯一强势媒体《第一\*\*报》；同时考虑性价比较高的《神州\*\*早报》
2. 软性广告：不知不觉的提醒，提高公信力——可考虑在公车上喷漆广告；
3. 电视广告：选择权威频道，本省法制频道《汽车领跑先锋》，直面销售；
4. 短信广告：较少费用产生较大市场效力（因消费权益等制约，待定）；
5. 音像资料：面向目标群体发放音像宣传光盘；
6. 网络广告：利用费用低而人数多的网络进行宣传

（四）在临时促销活动中，我们则利用专业知识讲座和交流会，并开展一些活动来实施：

主 题：专业知识讲座和驾驶心得交流

活动时间：2008 年 5 月 1 日

活动方式：与政府和媒体合作，以增加宣传力度。

## 活动内容：

1. 汽车保养知识讲座
2. 车主自身驾驶心得交流
3. 开展一些现场问答活动来获得相关奖品
4. 在活动期间订购汽车者可以获得相应的折扣

## 活动流程：

- 8：00——8：30 人员签到进场
- 8：30——10：00 专业技术人员进行汽车保养知识介绍和培训以及现场咨询等
- 10：00——10：45 车主自身驾驶心得交流
- 10：45——11：30 现场有奖知识问答
- 11：30 上午活动结束
- 14：30——17：00 供观众们参观与订购车辆

## 四项活动的费用预算：单位（元）

媒体费用：	《第一**报》18000
	《神州**早报》：23000
	领跑汽车网：20000
奖品费用：	3200
宣传费用：	4000
短信平台：	300
活动费用：	29000
费用合计：	97500

通过利用“以品牌形象推广为主，临时性促销推广为辅”的销售手段，开展以上的宣传和促销活动，能为我公司的汽车销售在稳达到目标的同时再创佳绩。

## 对于问题三：

## 符号说明

符号	说明	公式
M	服务者（通道）数量	
e	2.718,是自然对数的底数	
$\lambda$	平均到达率	
$\mu$	平均服务速度（假定 $\mu > \lambda$ ）	
$\rho$	利用因子或服务强度因子（系统利用率）	$\rho = \lambda / \mu$

$P_0$	系统 0 单位概率	$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
$P_n$	系统（也就是服务台和队列）中有 n 个客房的概率	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$
$L_s$	系统中（正在等待的及正在被服务的）客户的平均数：	$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
$L_q$	队列中等待服务的平均客户数	$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$
$W_s$	客户花费在系统中的平均时间	$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
$W_q$	客户花费在队列中的平均时间	$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

### 模型假设

- (1) 每天来修车的人数不指问题一中的数量（从该店有 8 名接待员可看出）；
- (2) 到达的速度符合泊松分布，服务时间服从指数分布；在泊松到达率下，在一个给

定时间有 x 个客户到达的概率，公式： $P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

- (3) 接待员都以平均速度工作；
- (4) 顾客只形成一个队（为了维护先来先服务）。
- (5) 每天工作时为 8 小时

### 模型的建立与求解分析

#### 第一阶段

3 月后客户返回 4S 店做首期免费保养，首先由前台接待员接待，由于总共有 8 名接待员，可独立向到达了的顾客提供服务，这是就出现了多通道系统。

#### 多通道排队公式

性能度量	公式
队列中的平均数	$L_q = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M-1)!(M\mu - \lambda)^2} P_0$



系统中零单位的概率	$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{M! \left(1 - \frac{\lambda}{M\mu}\right)} \right]^{-1}$
一个到达没有立刻服务的平均等候时间	$W_a = \frac{1}{M\mu - \lambda}$
一个到达必须等候服务的概率	$P_w = \frac{W_q}{W_a}$

经调查估计，有以下数据：

某汽车保养维修公司近三年接待部接待情况的平均数据：（在工作时为 8 小时的假设下）

每天需要保养维修的车辆	总 68 辆	平均到达速度 $\lambda_1^* = 8.5$ 辆/小时
一个接待员接待车辆	15 辆	平均服务速度 $\mu_1^* = 1.875$ 辆/小时

由上表可同时建立下表：

接待员的人数（人）	1	2	3	4	5	6	7	8
接待服务率（ $\mu$ ）	1.875	3.75	5.625	7.5	9.375	11.25	13.125	15

由上表看，当接待员人数达到 5 人时，接待服务率（ $\mu$ ）9.375。刚好略超过汽车到达率（ $\lambda$ ）8.5。

现在假设公司目前售后部只雇用 5 名接待员的情况。公司相信增加第 6 名接待员尽管会增加成本，但一定可以提高公司的接待率，估计在售后部有 6 名接待员可以使接待效率从 9.375 辆/小时 加倍到 11.25 辆/小时。分析这个变化对排队的影响，并与 5 名接待员时的情况作比较，如下：

接待员的数量

	5	6
汽车到达率（ $\lambda$ ）	8.5 辆/小时	8.5 辆/小时
接待服务率（ $\mu$ ）	9.375 辆/小时	11.25 辆/小时
系统中平均数量（ $L_s$ ）	9.714 辆	3.091 辆
系统中平均时间（ $W_s$ ）	1.143 小时	0.364 小时
队列中平均数量（ $L_q$ ）	8.81 辆	2.34 辆
排队时间（ $W_q$ ）	1.04 小时	0.27 小时

使用率 ( $\rho$ )	0.907	0.756
系统空闲的概率 ( $P_0$ )	0.093	0.244

这些结果表明当只雇用 5 名接待员时，汽车在进入维修部维修前必须平均等待 1.04 小时，而且平均有 8.81 辆汽车在队列中等待。这种情况对管理人员来说可能不能接受。还可发现增加 1 名接待员后队列长度也缩短了。但同时我们也应考虑到增加 1 名接待员就意味着会增加工资成本，这就涉及成本分析问题。

### 成本分析

服务系统的设计往往反映管理部门对平衡服务能力成本与系统中的期望顾客等候成本所做的思考。（注意，顾客等候成本指的是组织由于顾客等待而发生的成本。）在为客户提供保养维修服务时，成本包括顾客拒绝等待的销售损失，提供等候空间的成本以及阻塞增加的成本（丧失商机等）。

最佳服务能力（通常根据通道数）是使顾客等候成本与服务能力成本（或服务者成本）之和最小的能力。因此，目标就是使

总成本=顾客等候成本+服务能力成本

降至最小

最简单的成本分析方法是计算系统成本；即计算顾客在系统中的成本与总服务能力成本。

找出使总成本最小的服务能力需要一个反复的过程。服务能力每次增加（例如，通道数目增加 1），每增加一次就计算一次总成本。由于总成本曲线是 U 形曲线，随着服务能力的增加，总成本先降后升。当它开始上升时，服务能力的额外增加将导致成本不断上升。因此，这个时候，最佳服务能力规模就能够很容易地确定了。

顾客等候成本的计算以系统中的顾客平均数量为基础。这也许不是很直观和明显，似乎用系统中的故顾客等候时间计算更为适宜，但这种方法只适用于 1 位顾客的情形——没有关于多少顾客长时间等候的信息，显然，5 位顾客的平均等候成本比 9 位顾客的低。因此，有必要把注意力放在等候者数量上。另外，如果系统中平均有 2 位顾客，就等于说系统中随时都有正好 2 名顾客，即使实际上有的时候没人，有的时候有 1、2、3 位或更多的人。

关于成本分析还有一点。由于顾客等候成本与服务能力成本通常反映的是估计数量，表面上看来最佳的答案也许并不代表真实的最佳。一方面，当计算结果显示为小数最为近似的分甚至元时，总成本曲线似乎暗示着比成本估计证实了的精确度还高。这一事实源于到达与服务速度能否真正被泊松/指数分布近似。另一方面，如果能够得到成本估计的范围（例如，顾客等候成本估计在每小时 40-50 元之间），就应该分别使用两端数据计算总成本，看它是否会影响最佳方案。如果是，管理部门必须决定是付出额外努力获得更精确的成本估计呢，还是在现已得出的两种最佳方案中选择一个。当不同服务能力水平的总成本与最佳解决方案的结果差别很小时，管理部门极有可能选择后一种方案

现在我们进一步考虑成本问题。

$\rho = \lambda^* / \mu_1^* = 4.5$ ，查表（无限资源下给定  $\lambda / \mu$  与  $M$  时的  $L_q$  与  $P_0$  的值）得  $L_q$  的值：

并根据调查数据：

某汽车保养维修公司近三年接待部接待情况的平均数据：

名称	数据	单位
接待员	2000	元/人/月

其他接待成本	1200	元/人/月
--------	------	-------

列出下表

接待员的数量	接待员工资成本	$L_q$	$\left[ L_s = L_q + \frac{\lambda^*}{\mu^*} \right]$	系统中平均数量	$[L_s \times 1200]$ 其他接待成本	总成本
5	10000	6.862	$6.862 + 4.5 =$	11.362	13634.4	23634.4 (最小成本)
6	12000	1.265	$1.265 + 4.5 =$	5.765	20177.5	32177.5
7	14000	0.391	$0.391 + 4.5 =$	4.891	17118.5	31188.5
8	16000	0.134	$0.134 + 4.5 =$	4.634	16219	32219.0

由上表可知，接待员人数达5名时将使总成本最小。因为一旦达到最小值以后，总成本就会持续上升。不必再计算6名以上接待员的总成本，因为当接待员规模从5上升到6时，总成本已经在上升了。于是，5名接待员是最佳选择。这样就多出了3名接待员——视为是闲置的资源，可以实行轮换质，这样可进一步提高工作效率同时也可以减少一定的成本。

## 第二阶段

服务接待开车进维修部由维修部派师傅维修，同样利用多通道排队模型，经调查估计，有以下数据：

某汽车保养维修公司近三年统计平均数据：（维修师傅每天工作8小时）

每天需要保养维修的车辆	总 68 辆	保养	约 50 辆	平均到达速度 $\lambda_1$	6.25 辆/小时
		一般维修、保修	15 辆	平均到达速度 $\lambda_2$	1.875 辆/小时
		事故维修	3 辆	平均到达速度 $\lambda_3$	0.375 辆/小时
一个维修师傅平均工时		保养	20 分	平均服务速度 $\mu_1$	3 辆/小时
		一般维修、保修	45 分钟	平均服务速度 $\mu_2$	0.75 辆/小时
		事故维修	2 小时	平均服务速度 $\mu_3$	0.5 辆/小时

对于维修师傅的人数确定问题，我们也同样考虑其成本。

在现实中，尤其是在国家颁布了劳动合同法后，公司企业招聘员工的风险增大，这意味着公司在招聘人才时会更加谨慎，而风险的压力使到企业会更倾向于聘请综合型的高级人才，即避多而选精，因而，在此，我们假设该汽车公司聘请的是综合型的高级维

修师傅。则我们可以将上面的问题简化，先计算出每个综合型高级维修师傅的平均工作效率  $\mu^{**}$ ：

$$\mu^{**} = \frac{\frac{50}{68} \times 3 + \frac{15}{68} \times 0.75 + \frac{3}{68} \times 0.5}{3} = 0.8$$

汽车进入的维修部的速度为  $\lambda^{**}$ ：

$$\lambda^{**} = \frac{\frac{50}{68} \times 6.25 + \frac{15}{68} \times 1.875 + \frac{3}{68} \times 0.375}{3} = 1.675$$

$$\rho = \lambda^{**} / \mu^{**} = 2.1$$

查表（无限资源下给定  $\lambda/\mu$  与  $M$  时的  $L_q$  与  $P_0$  的值）得  $L_q$  的值：

并根据调查数据：

某汽车保养维修公司近员工工资情况

工种	数据	单位
接待员	2000	元/人/月
维修师傅	3500	元/人/月

列出下表

高级维修师傅的数量	$[L_s \times 3500]$ 维修师傅的工资成本	$L_q$	$\left[ L_s = L_q + \frac{\lambda^{**}}{\mu^{**}} \right]$ 系统中平均数量		接待员工资成本	总成本
3	10500	1.149	1.149+2.1	3.249	11371.5	17371.5
4	14000	0.220	0.22+2.1	2.32	8120	16120（最小成本）
5	17500	0.052	0.052+2.1	2.152	7532	17532
6	21000	0.012	0.012+2.1	2.112	7392	19392

由上表可知，当聘用的高级

维修师傅人数达 4 名时将使总成本最小。因为一旦达到最小值以后，总成本就会持续上升。不必再计算 5 名以上师傅的总成本，因为当师傅规模从 4 上升到 5 时，总成本已经在上升了。于是，4 名高级维修师傅是最佳选择。

## 七、参考文献

- [1] George E. P. Box 等，时间序列分析预测与控制，北京：中国统计出版社，2003.
- [2] 张华等，市场调查与预测 110 方法和实例，北京：中国国际广播出版社，2000. 1.
- [3] 詹姆斯·B·迪尔沃斯著，运作管理：在产品和服务中提供价值，北京：中信出版社，2006.2.
- [4] 许波 刘征等，MATLAB 工程数学应用，北京：清华大学出版社，2000. 4.

[5]威廉 J·史蒂文森 (William J. Stevenson) 著, 张群 张杰 等译, 运营管理, 北京: 机械工业出版社, 2006.

[6]杰伊·海泽 (Jay Heizer), 巴里·伦德尔 (Barry Render) 著, 陈荣秋, 张祥等译, 运作管理, 北京: 中国人民大学出版社 (第 8 版)

[7] 70830504 , 长安汽车 策划规划 , [http://www.tianyablog.com/blogger/post\\_show.asp?blogid=389151&postid=6178532](http://www.tianyablog.com/blogger/post_show.asp?blogid=389151&postid=6178532), 2008 年 4 月 13 日

## 附录

### 附录一: matlab 主程序

```
>> t=[1:12;13:24;25:36]
>> A = [ 24 ,12,26 ,19 ,6, 9, 11, 12, 18, 10 ,12,7;9,5, 6, 5 ,3, 2, 0, 5,
        7, 3, 2, 4;4,2 ,2, 5 ,3 ,2, 0 ,1 ,2, 3, 5, 1]
c1=[0,0,0,0,0,0,0,0,21 ,24, , 28, 52;33 27, 19, 32, 28, 11, 20,
18, 27, 22,26, 52; 35 14, 19, 31, 33, 10, 23, 20, 24, 21, 52, 52]
c2=[27,31,26,8,21,28,36,57,40,21,13,14,30,16,14,12,17,10,13,35,
41,13,25,18,19,14,12,11,38,18,41,41]
d=[46, 27, 44 ,41, , 30 ,44, , 37, 25 ,24, , 30 ,20 ,33 ,33,
16, 22, 12, 7, 16, 10, 30, 23, 8, 16, 21 ,29 ,28,
33 ,29 ,38 ,15 ,12, , 33 ,24 ,18, , 21, 30]
plot(t,A);
plot(t,c1);
plot(t,c2);
plot(t,d);
>> y4=308.*x1;
>> y3=310.*x1;
>> yt=[24, 12, 26, 19, 6, 9, 11, 12, 18, 10, 12, 7, 9, 5, 6, 5, 3, 2, 0, 5, 7, 3, 2, 4, 4, 2, 2, 5, 3, 2,
0, 1, 2, 3, 5, 1];
>> t2=t.^2;
>> t.*yt;
>> tyt=t.*yt;
>> b=(36*sum(tyt)-sum(t)*sum(yt))/(36*sum(t2)-(sum(t))^2)
>> a=sum(yt)/36-b*sum(t)/36
>> Tt=a+b*t
.....
```