

参赛队号 # 1753

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1753

参赛队员（签名）：

队员 1：刘少杰

队员 2：彭岩

队员 3：姚娟娟

参赛队教练员（签名）： 无

参赛队伍组别：研究生组

参赛队号 # 1753

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1753

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号 # 1753

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降时的姿态关 键 词 水上迫降、有限元、插值函数、Newmark

摘 要：

随着航空业的不断发展，飞机的不断增多，近年来飞机、直升机在近海或跨海使用越来越频繁，发生水上迫降和坠毁事故也逐渐增多。1959 年到 1991 年以来发生的 26 起商用飞机水上事故的统计表明，飞机水上迫降安全至少需要考虑两方面因素：飞机着水姿态和结构强度。

水上迫降模型试验表明，客机合适的着水姿态，可以保证客机着水时不出现剧烈的“跳跃”、“翻转”等情况；而且保证机身下部蒙皮不破裂，从而使得机舱在一定时间内不进水，为乘员安全撤离赢得足够时间和空间。

由于客机水上迫降涉及多场耦合，问题十分复杂。基于本问题，从经典的弹性力学出发建立的多场耦合偏微分方程组无法计算。为此，本文采取有限单元法，用三角形壳单元离散了客机模型的求解域，找到了位移插值函数，建立了动力学控制方程。这将问题简化成求解一组常微分方程组，使得客机迫降姿态问题可解。

利用 ABAQUS 软件平台，建立了客机的有限元模型，并导入具体参数，基于 Newmark 计算方法使控制方程解耦，对 4 种工况条件进行了动力学计算，得到了如下结果：

工况 序号	攻角/ $^{\circ}$	腹部应力峰 值/MPa	尾翼应力峰 值/MPa	舱门 X 方向 变形/cm	舱门 Y 方向 变形/cm	舱门 Z 方向 变形/cm
1	5	37.85	58.79	6.05	3.76	0.64
2	10	58.79	81.53	9.28	7.73	1.85
3	12	141.2	293.9	16.1	12.5	3.26
4	15	214.6	499.7	25.78	23.75	7.65

结果表明：客机以 5° 攻角着水时，客机腹部和尾翼应力峰值最小，客机的舱门 X、Y、Z 三个方向的变形也最小，舱门可安全打开。

参赛队号 1753所选题目 A参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 # 1753

英文摘要（选填）

Abstract

With the continuous development of aviation and the growing number of the plane in recent years, the use of planes and helicopters in offshore or sea-crossing is so frequent that the occurrence of water landing and crash is increasing. The statistics of the 26 commercial aircraft water accident cases from 1959 to 1991 show that, the plane water landing in security needs consider two factors at least: the water stance and structural strength.

The test of water landing aircraft model shows that, on one hand, the right water stance can guarantee the jet without the sharp "jump", the "flip" and so on; and on the other hand, it can ensure that the lower fuselage skin is not broken to make the cabin no water inside in a certain time, and to win enough time and space for occupant safety evacuation.

Because water landing aircraft involved in multi-field coupling, the problem is very complicated. Based on the issues, from the classic multi-elastic coupling which is established on the partial differential equations can not be calculated. Therefore, this paper takes the finite element method by using triangular shell element model for solving the discrete domain of the plane and found the displacement functions and established the kinetic equations. This will simplify the problem into solving a set of ordinary differential equations, making the aircraft landing stance problem solvable.

Using ABAQUS software platform to build the finite element model of the aircraft, and import specific parameters, then based on the Newmark method to decouple control equations. Through the kinetic calculations on 4 kinds of working conditions, the following results obtained:

NO.	Angle /°	Abdominal peak stress /MPa	Tail peak stress /MPa	Hatch X direction deformation/cm	Hatch Y direction deformation/cm	Hatch Z direction deformation/cm
1	5	37.85	58.79	6.05	3.76	0.64
2	10	58.79	81.53	9.28	7.73	1.85
3	12	141.2	293.9	16.1	12.5	3.26
4	15	214.6	499.7	25.78	23.75	7.65

The result shows that:when airliner landing on the water with angle of 5, the abdominal peak stress and the tail peak stress are the minimum,the X,Y,Z deformation in the hatch door also is the minimum,the hatch door can open safely.

参赛队号 # 1753

1、问题重述

美国东部时间2009年1月15日下午，一架载155人（其中包括两名机师和三名乘务人员）的客机从纽约长岛拉瓜迪亚机场起飞，约90秒后飞机遭飞鸟撞击，导致两个发动机损坏。凭借机长萨伦伯格的出色的驾驶技术和冷静的判断使得飞机迫降在哈德逊河面。飞机上的乘客在乘务员的指挥下，有秩序地逃出紧急舱门并全部获救。该起事故造成78人受伤，无人死亡。

大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。基于此事故提出如下问题：

客机在平静水面上的进行迫降指出飞机以何种姿态接触水面是相对最好的选择？

2、合理假设

1、客机在与平静水面冲击时，机身下部蒙皮强度满足要求不会发生破裂，水不会流入机舱。

2、客机在与平静水面冲击时不会发生第二次跳跃或者翻转。

3、客机在平静水面迫降时先机尾与水面接触冲击，然后是客机腹部与水面冲击；

4、客机在与平静水面冲击时不考虑飞机的冲击后在水面的漂浮距离；

5、客机在与平静水面冲击时向前减速度不太大、撞击压力和滑行压力也不太大；

6、客机在平静水面迫降时，迫降姿势只与攻角有关。

3、符号约定

σ_{ij} :	模型应力；
ε_{ij} :	模型应变；
u_i :	模型位移；
x_i	单元节点坐标；
\mathbf{a}^e :	单元节点位移；
N_i :	单元插值函数或者形函数；
\mathbf{B}	应变矩阵；
\mathbf{M} :	系统的质量矩阵；
\mathbf{C} :	系统的阻尼矩阵；
\mathbf{K} :	系统的刚度矩阵；
$\mathbf{Q}(t)$	系统的节点载荷向量；
\mathbf{M}^e :	单元的质量矩阵；
\mathbf{C}^e :	单元的阻尼矩阵；
\mathbf{K}^e :	单元的刚度矩阵；
\mathbf{Q}^e :	单元的节点载荷向量；
\mathbf{f} ;	体力；
\mathbf{T} :	面力；
ρ :	模型密度；

参赛队号 # 1753

μ :	阻尼系数;
β_i :	广义坐标;
A :	三角形单元面积;
L :	微分算子;

4、问题的分析

随着航空业的不断发展,飞机的不断增多,近年来飞机、直升机在近海或跨海使用越来越频繁,发生水上迫降和坠毁事故也逐渐增多。

2009年1月15日下午(美国东部时间),US Airways 所属第1549 航班(空中客车A320客机)在起飞后不久在纽约哈德逊河紧急迫降。经及时救助,机上155人(其中包括两名机师和三名乘务人员)在飞机沉没之前全部获救。该起事故造成78 人受伤,无人死亡。

这架客机从纽约长岛拉瓜迪亚机场起飞约90 秒后遭飞鸟撞击,导致两个发动机损坏。机长萨伦伯格凭借着出色的驾驶技术和冷静的判断使飞机迫降在哈德逊河河面。而飞机上的乘客在乘务员的指挥下,有秩序地逃出紧急舱门并全部获救。

为此各国民航部门都把水上迫降安全性作为颁发飞机适航证的重点考察内容之一,我国规范也做了明确的要求。对1959 年到1991 年以来发生的26 起商用飞机水上事故做了统计,通过对机体结构的完整性、破坏部位、座舱完整性等的观察,分析了造成伤害和死亡的主要因素,指出飞机水上迫降安全至少需要考虑两方面因素:飞机着水姿态和结构强度。通过水上迫降模型试验,可以给出飞行器允许的着水姿态,从而验证飞行器着水时不出现剧烈的“跳跃”、“翻转”等情况;在强度方面的指标是:在允许的着水姿态下,需要保证机身下部蒙皮不破裂,从而使得机舱在一定时间内不进水,以保证机身能够漂浮一段时间,为乘员安全撤离赢得足够时间。

试验和理论分析以及实际水上迫降表明,飞机要具有良好的漂浮特性,其降落应该是柔和的、没有俯冲或跳跃、向前减速度不太大、撞击压力和滑行压力也不太大。因为俯冲会给飞机结构造成灾难性破坏,跳跃会使飞机失去操纵,第二次着水也会给飞机结构造成灾难性破坏,着水时向前速度太大也会直接伤害乘员,过大的撞击压力和滑行压力会引起飞机结构的严重破坏。

水上迫降时,飞机与水面接触瞬间是面载荷,与地面撞击相比,撞击载荷又相对较小,导致常规的缓冲吸能部件压溃较小,难以发挥效能,同时由于起落架无法正常工作,未被吸收的能量很可能造成机体结构的损坏,由此水上迫降有可能导致比地面撞击更严重的伤害。如果机身下部蒙皮破裂,那么水将流入机舱,乘员很难有充足的时间逃离。

本文建立了客机缩比模型的有限元模型,采用有限单元法通过建立客机的运动控制方程对客机的入水冲击问题进行求解。讨论客机着水时的姿态对于飞机结构压力的影响,从而得出客机在平静水面上的进行迫降以何种姿态接触水面是相对最好的选择。

5、模型的建立

5.1 方法选取

5.1.1 有限单元法

有限单元法，是一种有效解决数学问题的解题方法。其基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的结点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的结点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式，便构成不同的有限元方法。

在有限元方法中，把计算域离散剖分为有限个互不重叠且相互连接的单元，在每个单元内选择基函数，用单元基函数的线形组合来逼近单元中的真解，整个计算域上总体的基函数可以看为由每个单元基函数组成的，则整个计算域内的解可以看作是由所有单元上的近似解构成。在河道数值模拟中，常见的有限元计算方法是由变分法和加权余量法发展而来的里兹法和伽辽金法、最小二乘法等。根据所采用的权函数和插值函数的不同，有限元方法也分为多种计算格式。从权函数的选择来说，有配置法、矩量法、最小二乘法和伽辽金法，从计算单元网格的形状来划分，有三角形网格、四边形网格和多边形网格，从插值函数的精度来划分，又分为线性插值函数和高次插值函数等。不同的组合同样构成不同的有限元计算格式。对于权函数，伽辽金(Galerkin)法是将权函数取为逼近函数中的基函数；最小二乘法是令权函数等于余量本身，而内积的极小值则为对代求系数的平方误差最小；在配置法中，先在计算域内选取 N 个配置点。令近似解在选定的 N 个配置点上严格满足微分方程，即在配置点上令方程余量为 0。插值函数一般由不同次幂的多项式组成，但也有采用三角函数或指数函数组成的乘积表示，但最常用的多项式插值函数。有限元插值函数分为两大类，一类只要求插值多项式本身在插值点取已知值，称为拉格朗日(Lagrange)多项式插值；另一种不仅要求插值多项式本身，还要求它的导数值在插值点取已知值，称为哈密特(Hermite)多项式插值。单元坐标有笛卡尔直角坐标系和无因次自然坐标，有对称和不对称等。常采用的无因次坐标是一种局部坐标系，它的定义取决于单元的几何形状，一维看作长度比，二维看作面积比，三维看作体积比。在二维有限元中，三角形单元应用的最早，近来四边形等参元的应用也越来越广。对于二维三角形和四边形单元，常采用的插值函数为有 Lagrange 插值直角坐标系中的线性插值函数及二阶或更高阶插值函数、面积坐标系中的线性插值函数、二阶或更高阶插值函数等。

5.1.2 有限单元法求解流程

有限元运用在实际问题求解过程中，主要有七个主要步骤，分别是①对结构进行离散；②形成单元的刚度矩阵和等效结点载荷列阵；③集成结构的刚度矩阵和等效结点载荷列阵；④引入强制边界条件；⑤求解有限元求解方程，得到结点位移；⑥计算单元应变和应力；⑦进行必要的后处理。

有限元求解的七个步骤中，按照目标可以分成四个模块，分别为①选取网格离散求解域；②建立控制方程；③选择计算方法；④计算结果后处理。有限元求解步骤与求解模块的关系见图 5.1。

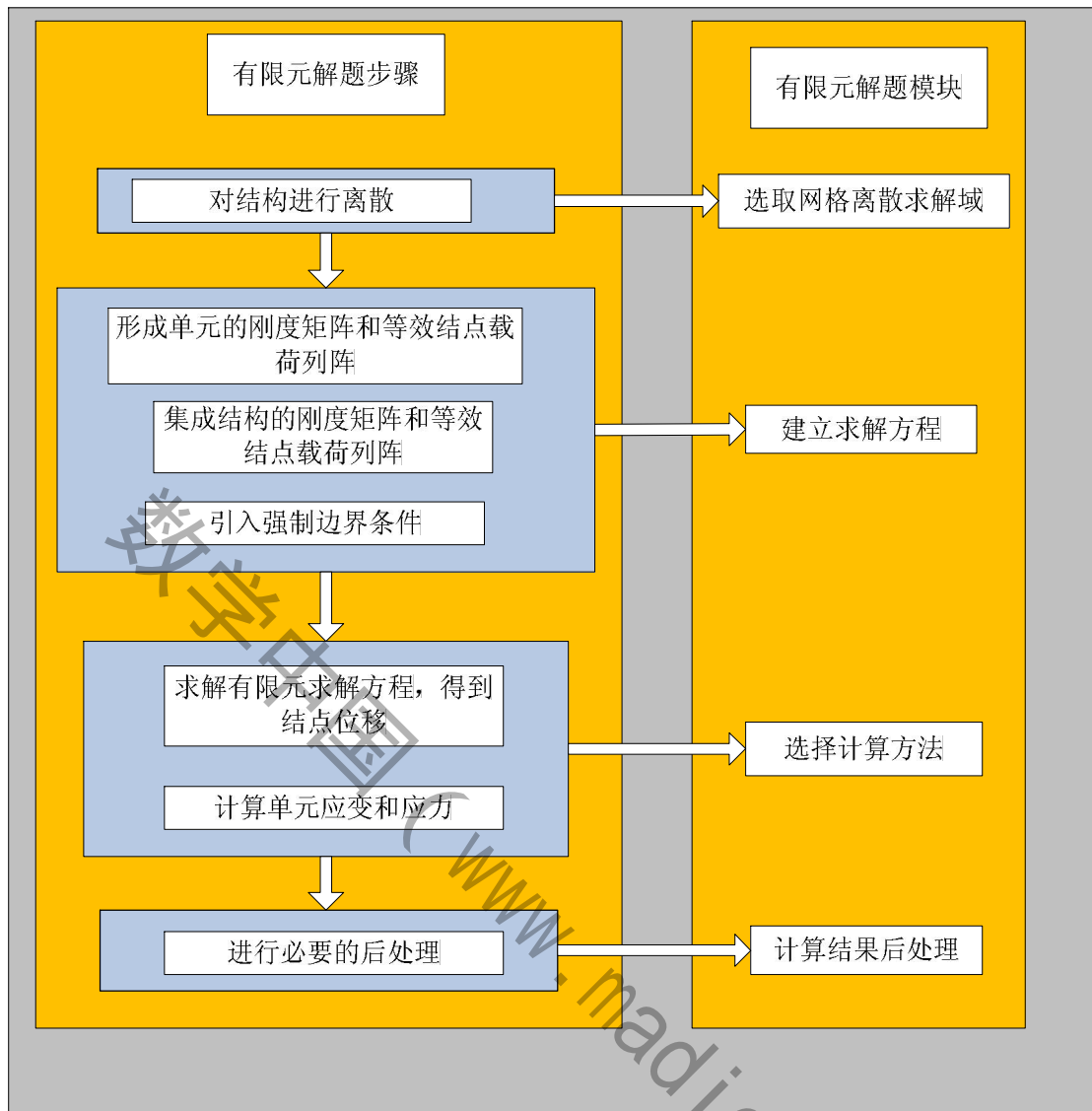


图 5.1 有限元计算方法步骤流程图

5.2 建立模型

5.2.1 选取网格离散求解域并构造插值函数

飞机主体结构为壳体，在有限元求解过程中，需要用壳单元离散飞机模型。壳单元由于厚度方向的尺寸很小，因此，在厚度方向上不划分单元。壳单元属于平面单元。在建立模型时，飞机机舱、机翼、机头和机尾等主要部件可以只用曲面建立。

另外，飞机的几何形状比较复杂，在两翼与机舱连接处的尺寸同其他地方的尺寸相比很小，不容易过度。因此，必须选择适应性较好的形状离散飞机的求解域，才能达到连续的效果。

3 结点三角形单元式有限元方法中最早提出，并且至今仍广泛应用的单元，由于三角形单元对复杂边界有较强的适应能力，因此很容易将一个区域离散成有限个三角形单元，如图 5.2 所示。在边界上以若干线段近似原来的曲线边界，随着单元的增多，这种拟合将趋于精确解

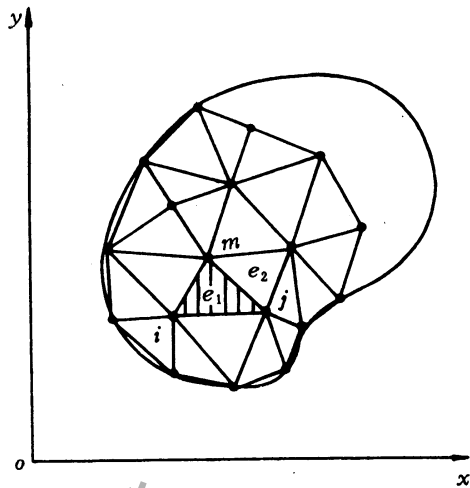


图 5.2 区域离散

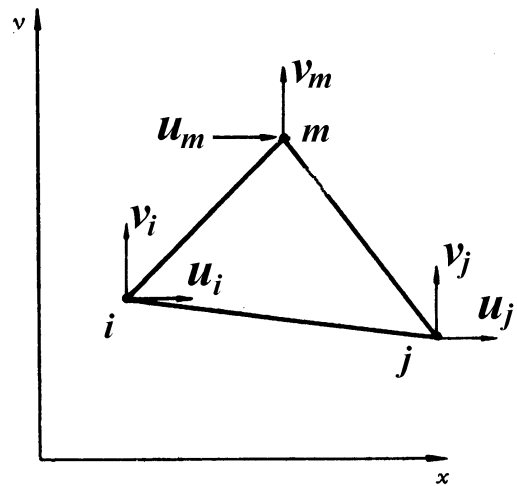


图 5.3 结点三角形单元

典型的 3 结点三角形单元结点编号为 i, j, m ，逆时针转向为正向。每个结点有 2 个位移分量如图 5.3 所示。结点位移：

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{Bmatrix} \quad (i, j, m)$$

每个单元有 6 个结点位移即 6 个结点自由度，亦即

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = [u_i(t) \ v_i(t) \ u_j(t) \ v_j(t) \ u_m(t) \ v_m(t)]^T$$

在有限元方法中单元的位移模式一般采用多项式作为近似函数，因为多项式运算方便，并且随着项数的增多，可以逼近任何一段光滑的函数曲线。多项式的选取应由低次到高次。

3 结点三角形单元位移模式选取如下多项式

$$\begin{cases} u(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)x + \beta_3(t)y \\ v(t) = \beta_4(t) + \beta_5(t)x + \beta_6(t)y \end{cases} \quad (5-1)$$

它的矩阵表示是

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\beta} \quad (5-2)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = [1 \ x \ y] \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6]^T$$

$\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 为待定函数。6 个待定函数可由单元的 6 个结点位移来表示。在 (5-1)

参赛队号 # 1753

中带入结点 i 的坐标 (x_i, y_i) 可以得到结点 i 在 x 方向的位移 u_i ，同理可以得到 u_j ， u_m 。他们表示为

$$\begin{cases} u_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i \\ u_j = \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j \\ u_m = \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m \end{cases} \quad (5-3)$$

解 (5-3) 式可以得到待定函数由结点位移表示的表达式。上式的系数行列式是

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A$$

其中 A 是三角形单元面积。

按克莱姆 (Cramer) 法则，求解上述方程组，可求得待定函数 $\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 。

$$\beta_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (a_i u_i(t) + a_j u_j(t) + a_m u_m(t))$$

$$\beta_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (b_i u_i(t) + b_j u_j(t) + b_m u_m(t))$$

$$\beta_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (c_i u_i(t) + c_j u_j(t) + c_m u_m(t))$$

$$\beta_4(t) = \frac{\begin{vmatrix} v_i & x_i & y_i \\ v_j & x_j & y_j \\ v_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (a_i v_i(t) + a_j v_j(t) + a_m v_m(t))$$

$$\beta_5(t) = \frac{\begin{vmatrix} v_i & x_i & y_i \\ v_j & x_j & y_j \\ v_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (b_i v_i(t) + b_j v_j(t) + b_m v_m(t))$$

$$\beta_6(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & v_i \\ 1 & x_j & v_j \\ 1 & x_m & v_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (c_i v_i(t) + c_j v_j(t) + c_m v_m(t))$$

其中：

参赛队号 # 1753

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \quad (i, j, m)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = x_m - x_j$$

上式 (i, j, m) 表示下标轮换，如 $i \rightarrow j, j \rightarrow m, m \rightarrow i$ 。以下同此。

将求得的函数 $\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 代入(5-1)式可将位移函数表示成结点位移的函数，即

$$\begin{cases} u(t) = N_i u_i(t) + N_j u_j(t) + N_m u_m(t) \\ v(t) = N_i v_i(t) + N_j v_j(t) + N_m v_m(t) \end{cases} \quad (5-4)$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m)$$

N_i, N_j, N_m 称为单元的插值函数或形函数。 $a_i, b_i, c_i, \dots, c_m$ 是常数，取决于单元的3个节点坐标。

(5-4)式的矩阵形式是

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ u_j(t) \\ v_j(t) \\ u_m(t) \\ v_m(t) \end{Bmatrix} \\ &= [\mathbf{I}N_i \quad \mathbf{I}N_j \quad \mathbf{I}N_m] [\mathbf{a}_i \quad \mathbf{a}_j \quad \mathbf{a}_m]^T = \mathbf{N} \mathbf{a}^e \end{aligned} \quad (5-5)$$

确定单元位移以后，可以很方便的利用几何方程求得单元的应变。单元的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{a}^e = \mathbf{L} [\mathbf{N}_i \quad \mathbf{N}_j \quad \mathbf{N}_m] \mathbf{a}^e = [\mathbf{L} \mathbf{N}_i \quad \mathbf{L} \mathbf{N}_j \quad \mathbf{L} \mathbf{N}_m] \mathbf{a}^e$$

参赛队号 # 1753

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \mathbf{a}^e = \mathbf{B} \mathbf{a}^e \quad (5-6)$$

\mathbf{B} 称为应变矩阵， \mathbf{L} 是微分算子。

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L} \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

同理可得 $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m$ ，所以三结点单元的应变矩阵 \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i & \mathbf{B}_j & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

在应变梯度较大的部位，单元的划分应该适当密集，否则不能反应应变的真实变化而导致较大的误差。

5.2.1 控制方程的建立

有弹性力学的知识得到三维弹性动力学的基本方程是：

$$\text{平衡方程：} \sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,tt} - \mu u_{i,t} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-8)$$

$$\text{几何方程：} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-9)$$

$$\text{物理方程：} \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-10)$$

$$\text{边界条件：} u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 边界上}) \quad (5-11)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 边界上}) \quad (5-12)$$

$$\text{初始条件：} u_i(x, y, z, 0) = u_i(x, y, z) \quad (5-13)$$

$$u_{i,t}(x, y, z, 0) = u_{i,t}(x, y, z) \quad (5-14)$$

(5-8) 式中， ρ 是质量密度， μ 是阻尼系数， $\mu_{i,tt}$ 和 $\mu_{i,t}$ 分别是 μ_i 对 t 的二次导数和一次导数，即分别表示 i 方向的加速度和速度； $-\rho\mu_{i,tt}$ 和 $-\mu\mu_{i,t}$ 分别代表惯性力和阻尼力。它们作为体积力的一部分出现在平衡方程中，是弹性动力学和静力学相区别的基本特点之一。由于在动力学中载荷是时间的函数，以上各式中的各个符号位移、应力、应变是时间的函数。因此，在动力学的定解问题中加入了初始条件 (5-13) 式。

以上各式联立可以解决动力学问题，但是偏微分方程不能直接解出，必须引用有限元的方法。

在动力学分析中，因为引入了时间坐标，处理的是四维 (x, y, z, t) 问题。在有限元分析中一般采用部分离散的方法，即只对空间域进行离散。如图 5.2 所示。

平衡方程 (5-8) 式及力的边界条件 (5-11)、(5-12) 式的等效积分形式的伽辽金提法可表示如下：

参赛队号 # 1753

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,tt} - \mu u_{i,t}) dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) ds = 0 \quad (5-15)$$

对上式的第 1 项 $\int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} dV$ 进行分部积分，并带入物理方程，则从上式可以得到

$$\begin{aligned} & \int_V (\delta \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \delta u_i \rho u_{i,tt} + \delta u_i \mu u_{i,t}) dV \\ & = \int_V \delta u_i f_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{T}_i dV \end{aligned} \quad (5-16)$$

将空间离散后的位移表达式 (5-12) (现在情况下, $u_1=u$, $u_2=v$) 代入上式, 并注意到结点位移变化 $\delta \mathbf{a}$ 的任意性, 最终得到系统的控制方程 (在动力学问题中, 又称运动方程) 如下:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (5-17)$$

其中 $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{a}}(t)$ 分别是系统的结点加速度向量和结点速度向量, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 和 $\mathbf{Q}(t)$ 分别是系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和结点载荷向量, 并分别由各自的单元矩阵和向量集成, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_e \mathbf{M}^e & \mathbf{C} &= \sum_e \mathbf{C}^e \\ \mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{K}^e & \mathbf{Q} &= \sum_e \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (5-18)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV & \mathbf{C}^e &= \int_{V_e} \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \\ \mathbf{K}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{Q}^e &= \int_{V_e} \mathbf{N}^T f dV + \int_{S_\sigma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} dV \end{aligned} \quad (5-19)$$

\mathbf{M}^e , \mathbf{C}^e , \mathbf{K}^e 和 \mathbf{Q}^e 分别是单元的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和载荷向量。

5.2.3 求解方法

本计算过程中采用 Newmark 方法求解控制方程。

在 $t \sim t+\Delta t$ 的时间区域内, Newmark 积分方法采用下列的假设:

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{a}}_t + \delta\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (5-20)$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \dot{\mathbf{a}}_t \Delta t + [(1-\alpha)\ddot{\mathbf{a}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (5-21)$$

其中 α 和 δ 是按积分精度和稳定行要求决定的参数。另一方面, α 和 δ 取不同数值则代表了不同的数值积分方案。当 $\alpha=1/6$ 和 $\delta=1/2$ 时, (5-20) 和 (5-21) 式相应于线性加速度法, 因为这是他们可以由下式, 即时间间隔 Δt 内线性假设的加速度表达式的积分得到。

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{a}}_t + (\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{a}}_t)\tau / \Delta t \quad (0 \leq \tau \leq \Delta t) \quad (5-22)$$

当 $\alpha=1/4$ 和 $\delta=1/2$ 时, Newmark 方法相当于常平均加速度法这样一种无条件稳定的积分方案。此时, Δt 内加速度为:

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\tau} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{a}}_t) \quad (5-23)$$

Newmark 方法中相同时间 $t+\Delta t$ 的位移解答 $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 是通过满足时间 $t+\Delta t$ 的运动方程得到的。即由:

参赛队号 # 1753

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (5-24)$$

而得到的。为此首先从 (5-21) 式解得

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{a}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\mathbf{a}}_t \quad (5-25)$$

将上式代入 (5-20) 式, 然后再一并代入 (5-24) 式, 则得到从 \mathbf{a}_t 、 $\dot{\mathbf{a}}_t$ 、 $\ddot{\mathbf{a}}_t$ 计算 $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 的两步递推公式

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{a}_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{a}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{a}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\mathbf{a}}_t\right] + \\ &\quad \mathbf{C}\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{a}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{\mathbf{a}}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{a}}_t\right] \end{aligned} \quad (5-26)$$

至此, 可将利用 Newmark 方法逐步求解控制方程的算法步骤归结如下:

1 初始计算

- (1) 形成刚度矩阵 \mathbf{K} 、指令矩阵 \mathbf{M} 和阻尼矩阵 \mathbf{C} 。
- (2) 给定 \mathbf{a}_0 、 $\dot{\mathbf{a}}_0$ 和 $\ddot{\mathbf{a}}_0$ ($\ddot{\mathbf{a}}_0$ 由 $\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{a}_0)$ 确定)
- (3) 选择时间步长 Δt 及参数 α 和 δ , 并计算积分常数。

这里要求: $\delta \geq 0.50, \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$

$$c_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad c_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad c_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad c_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$c_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad c_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad c_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad c_7 = \delta\Delta t$$

- (4) 形成有效刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + c_0\mathbf{M} + c_1\mathbf{C}$

- (5) 三角分解 $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$

2 对于每一时间步长

- (1) 计算时间 $t+\Delta t$ 的有效载荷

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(c_0\mathbf{a}_t + c_2\dot{\mathbf{a}}_t + c_3\ddot{\mathbf{a}}_t) + \mathbf{C}(c_1\mathbf{a}_t + c_4\dot{\mathbf{a}}_t + c_5\ddot{\mathbf{a}}_t)$$

- (2) 求解时间 $t+\Delta t$ 的位移

$$\mathbf{LDL}^T\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$$

- (3) 计算时间 $t+\Delta t$ 的加速度和速度

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = c_0(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t) - c_2\dot{\mathbf{a}}_t - c_3\ddot{\mathbf{a}}_t$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + c_6\ddot{\mathbf{a}}_t + c_7\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$$

6、模型的求解

6.1 客机模型

在客机迫降过程中，主要是机身下部和水面接触，因此忽略了不与水体接触的部件。在 ABAQUS 中按照 1:1 建立了客机主要部件的有限元模型，共分为五部分：机头、机舱、机尾、机翼和舱门。飞机模型的拉格朗日有限单元由二维壳单元和一位梁单元组成。如图 6.1 所示。

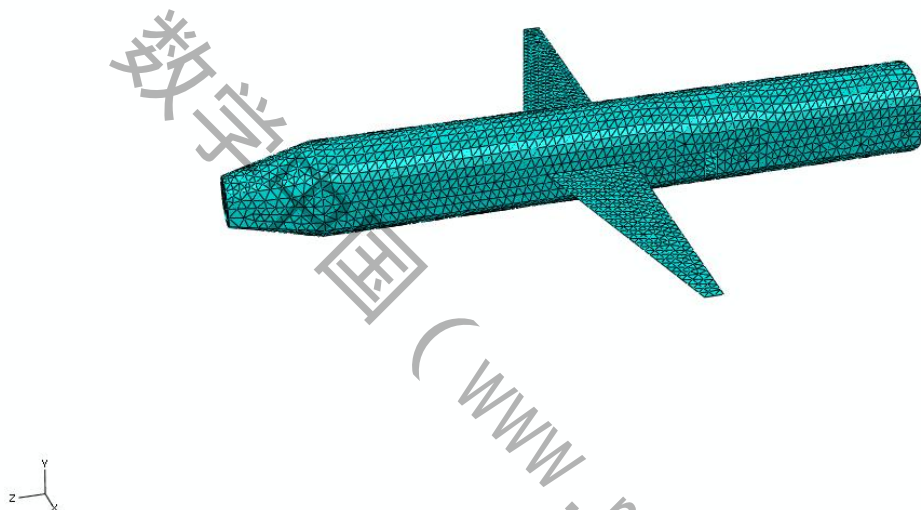


图 6.1 客机模型网格图

发动机、设备等在有限元模型中没有办法真实建模,而由壳单元、梁单元和杆单元建立的模型的总体质量与真实模型存在差距.根据质量报告,将缺少的部分采用集中质量单元添加上去。

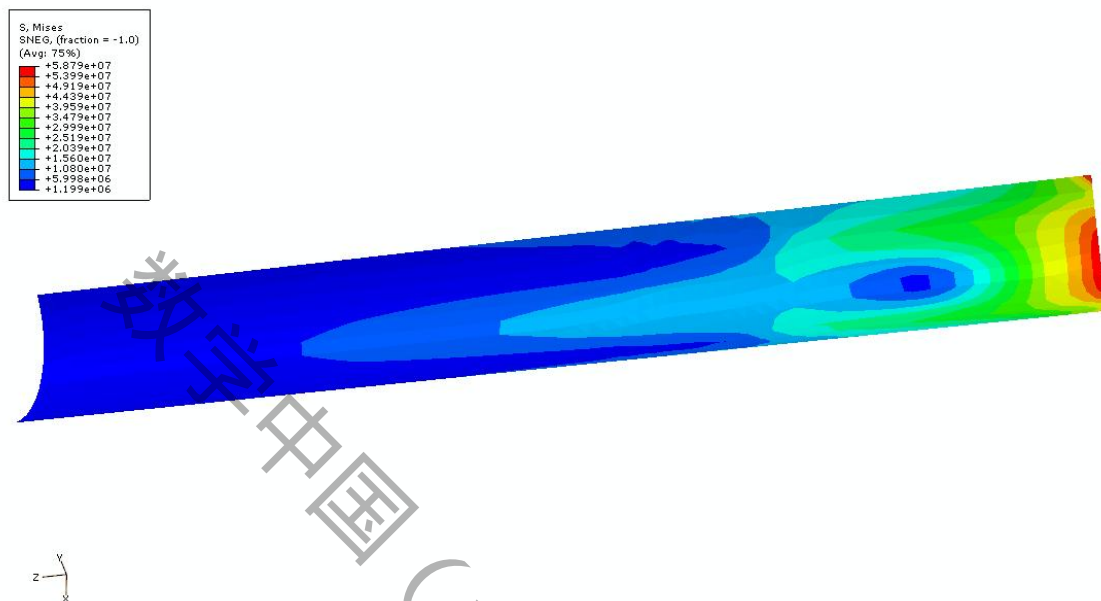
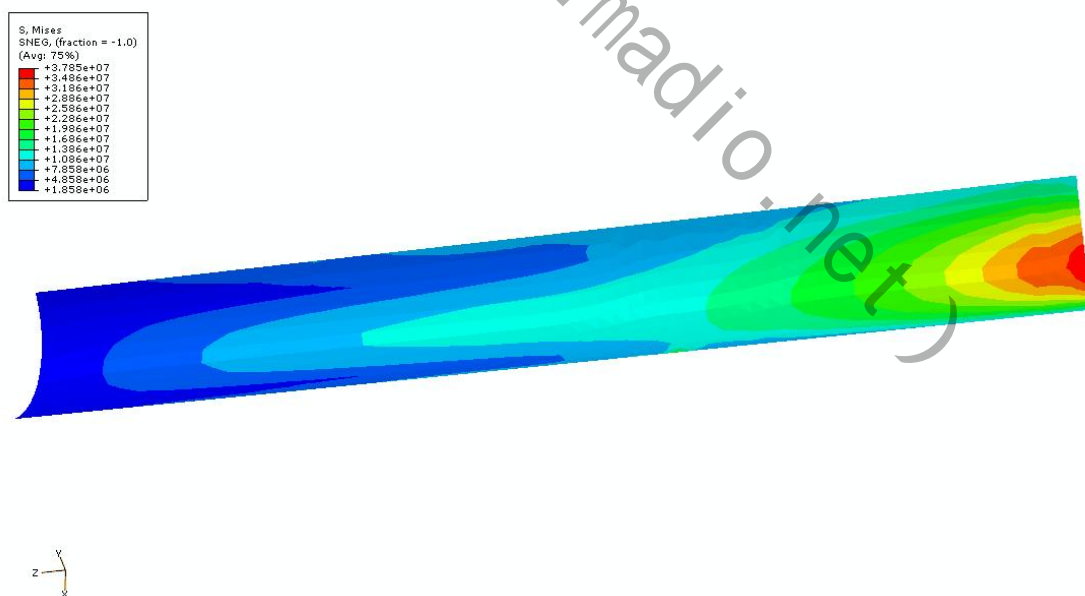
6.2 计算工况

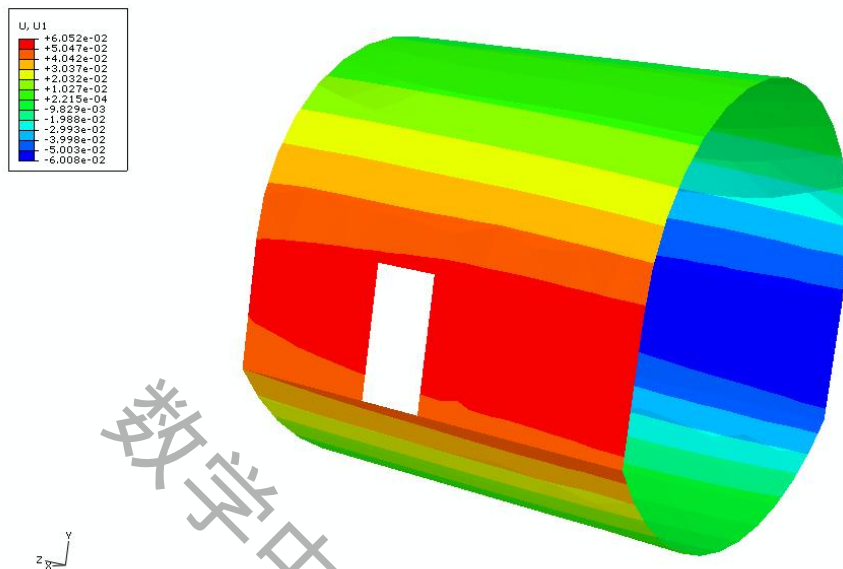
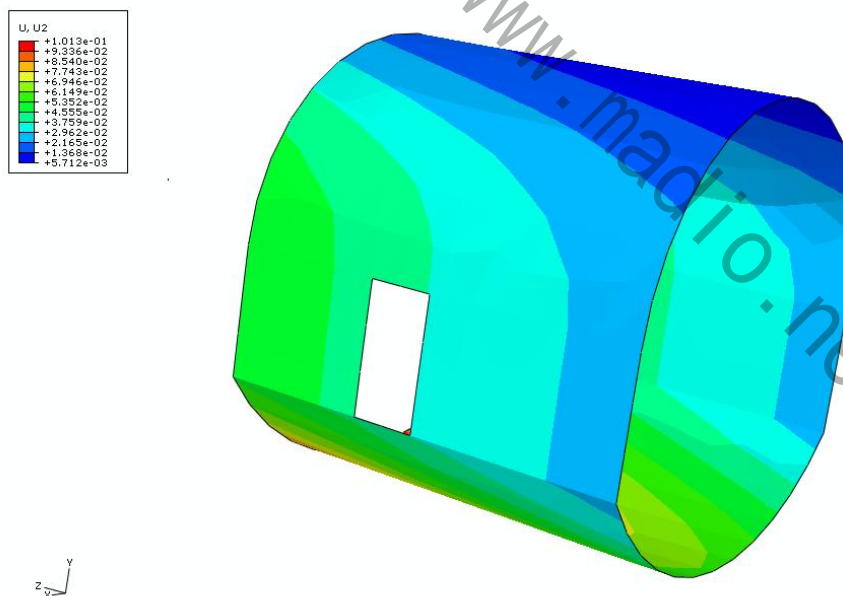
研究客机迫降姿态的影响，为此，把固定客机入水时的速度，本模型中，入水速度均为:X 轴方向 15 m/s,Z 轴方向 0.3 m/s。

客机迫降时，客机还可以控制，因此，入水角度不可能较大，应在很小的范围内变化。本文选取了四种工况进行计算，旨在说明迫降姿态对客机影响的趋势。四种姿态的攻角分别为：5°、10°、12°、15°。

参赛队号 # 1753

6.3 计算结果

6.3.1 攻角 5° 图 6.2 客机 5° 攻角尾翼接触水面等效应力图图 6.3 客机 5° 攻角腹部接触水面等效应力图

图 6.4 客机 5° 攻角舱门 X 方向位移图图 6.5 客机 5° 攻角舱门 Y 方向位移图

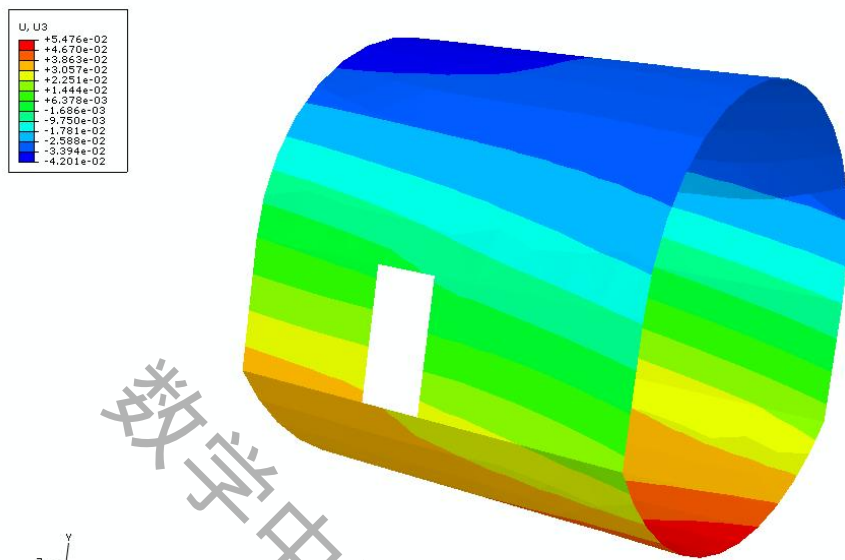


图 6.6 客机 5°攻角舱门 Z 方向位移图

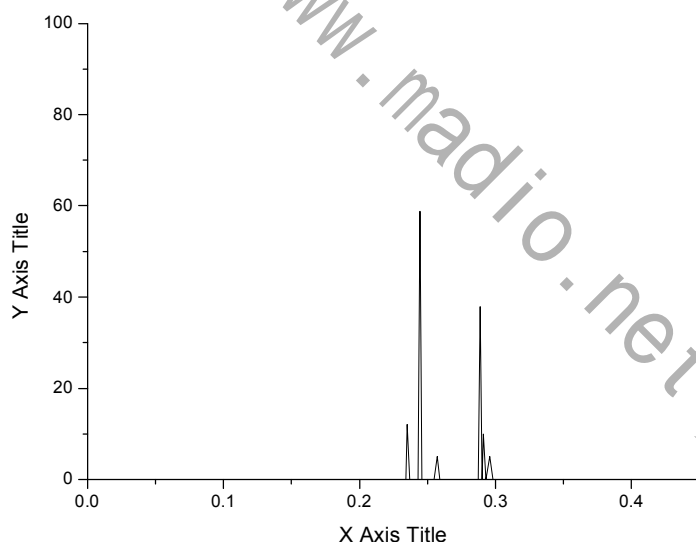
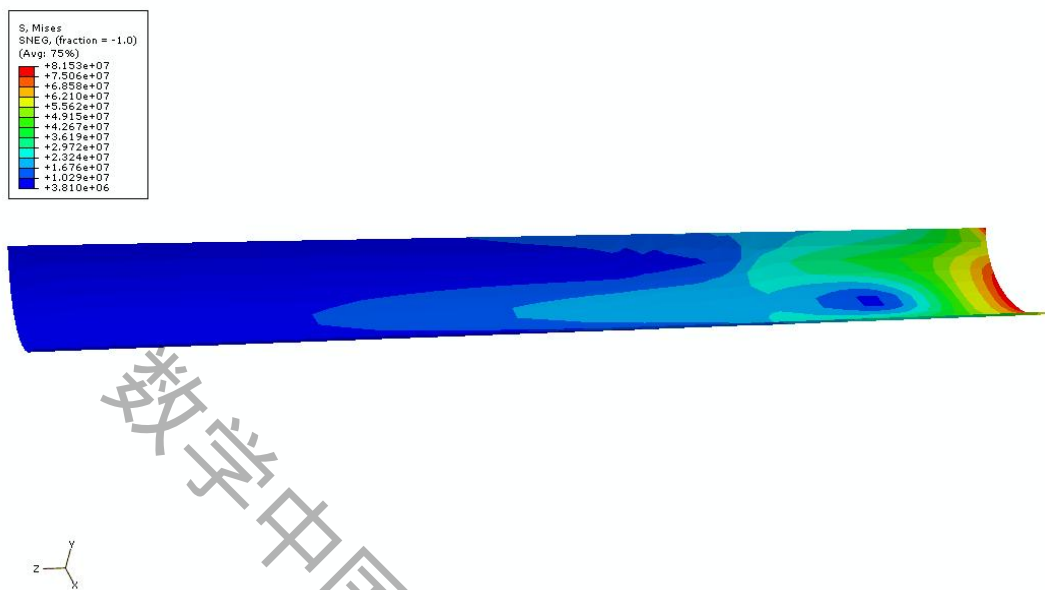
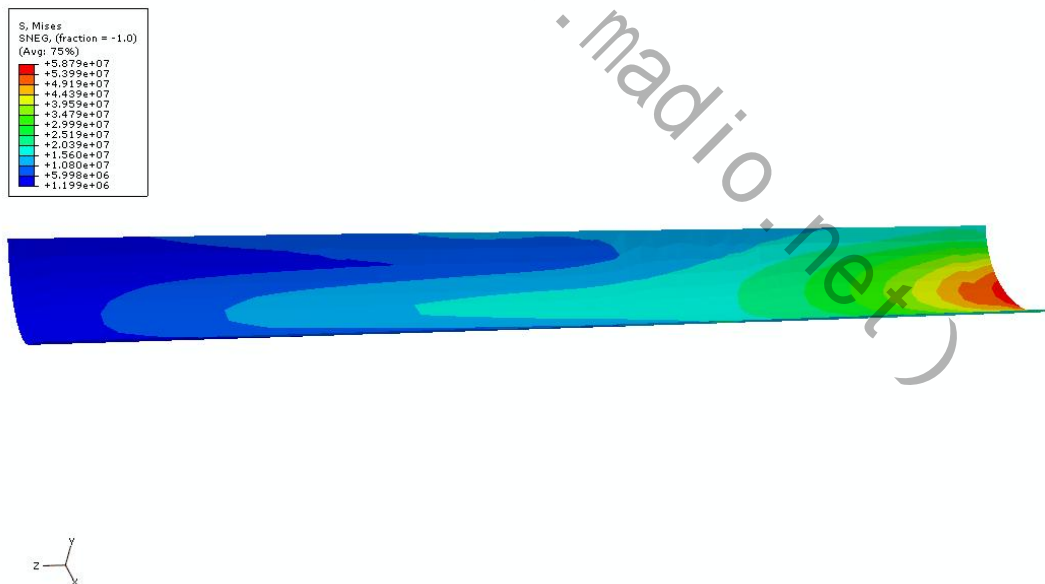


图 6.7 客机 5°攻角下部应力最大点的应力随时间的变化历程曲线

由上述个图可以看出,在攻角为 5° 时,客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.245s,应力峰值为 58.79MPa,出现在尾翼着水的时候;当客机腹部着水时,也出现了应力增大点,应力峰值为 37.85MPa,比尾翼着水时小。由于与水面接触过程中,加载在客机上的载荷是振动的,所以造成了客机应力的波动变化。

客机下部蒙皮的应力峰值远小于材料的破坏强度,因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中,舱门三个方向上的变形最大为 6.9cm,变形较小,舱门可以打开。

参赛队号 # 1753

6.3.2 10° 攻角图 6.8 客机 10° 攻角尾翼接触水面等效应力图图 6.9 客机 10° 攻角腹部接触水面等效应力图

参赛队号 # 1753

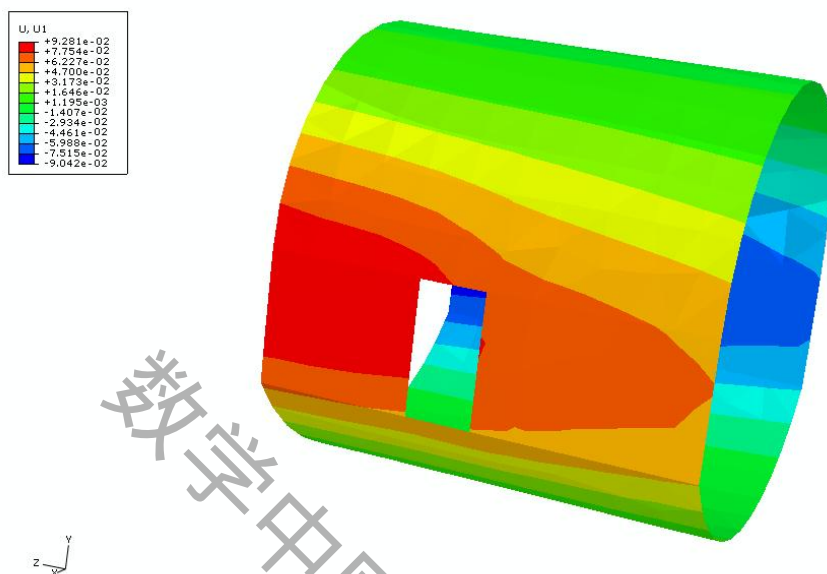


图 6.10 客机 10°攻角舱门 X 方向位移图

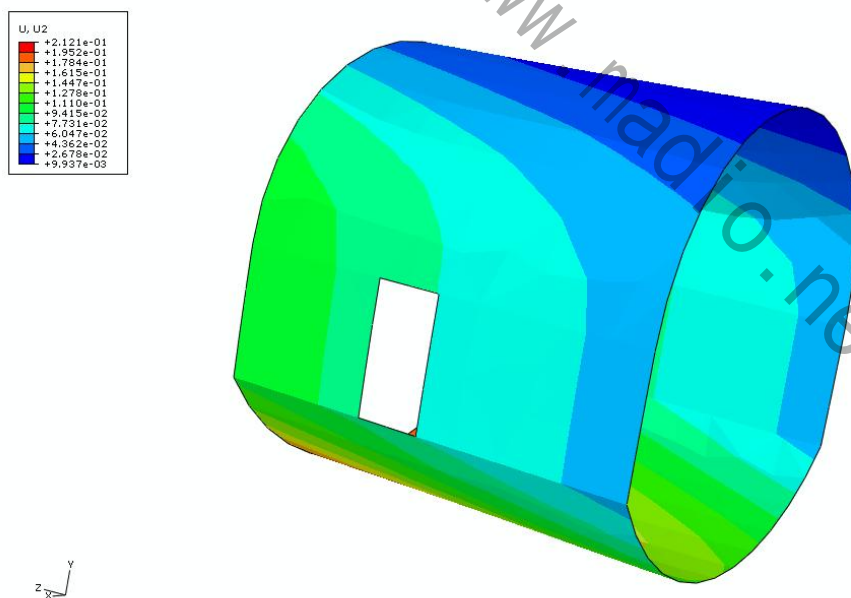


图 6.11 客机 10°攻角舱门 Y 方向位移图

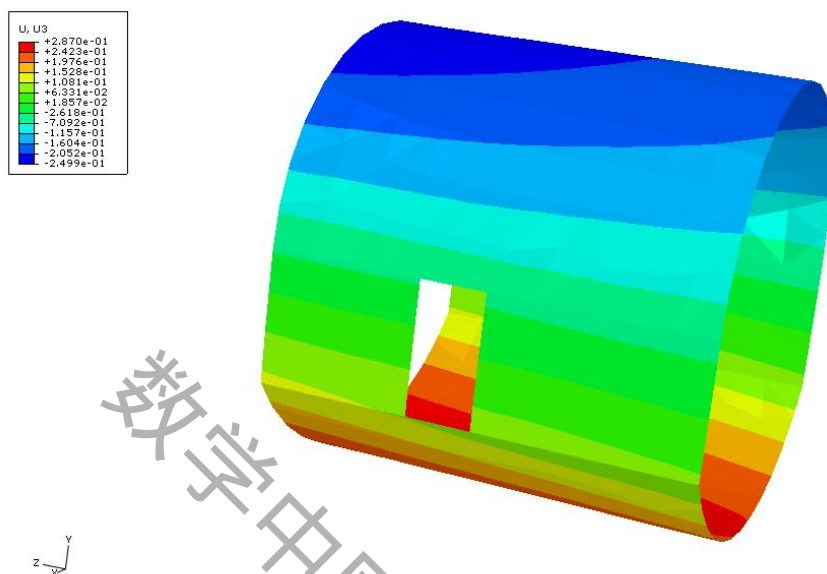


图 6.12 客机 10°攻角舱门 Z 方向位移图

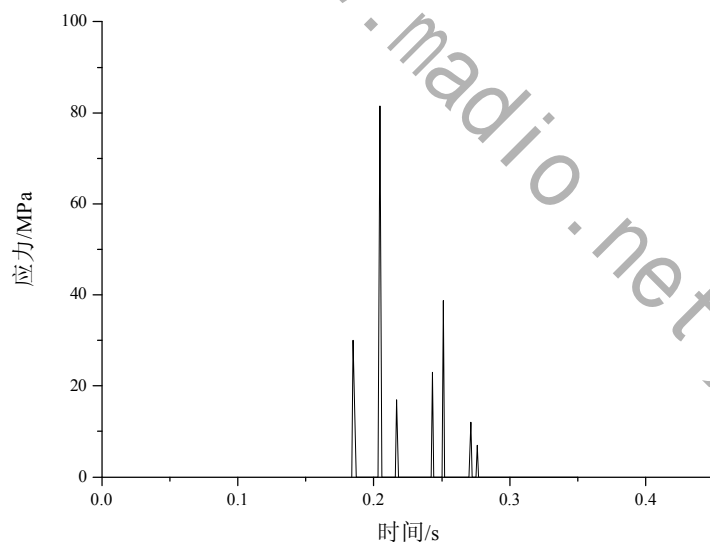
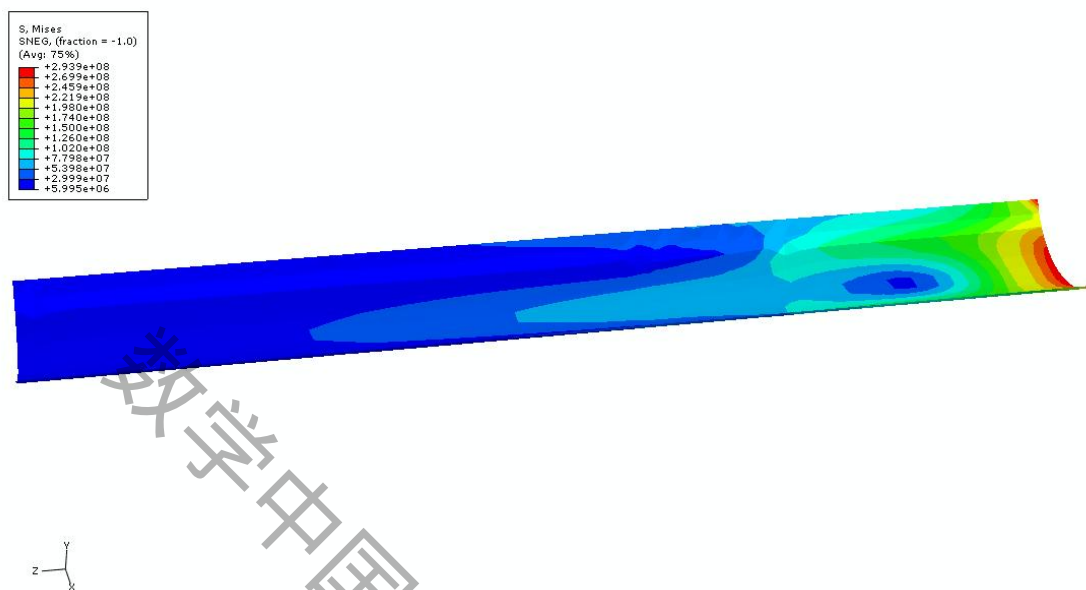
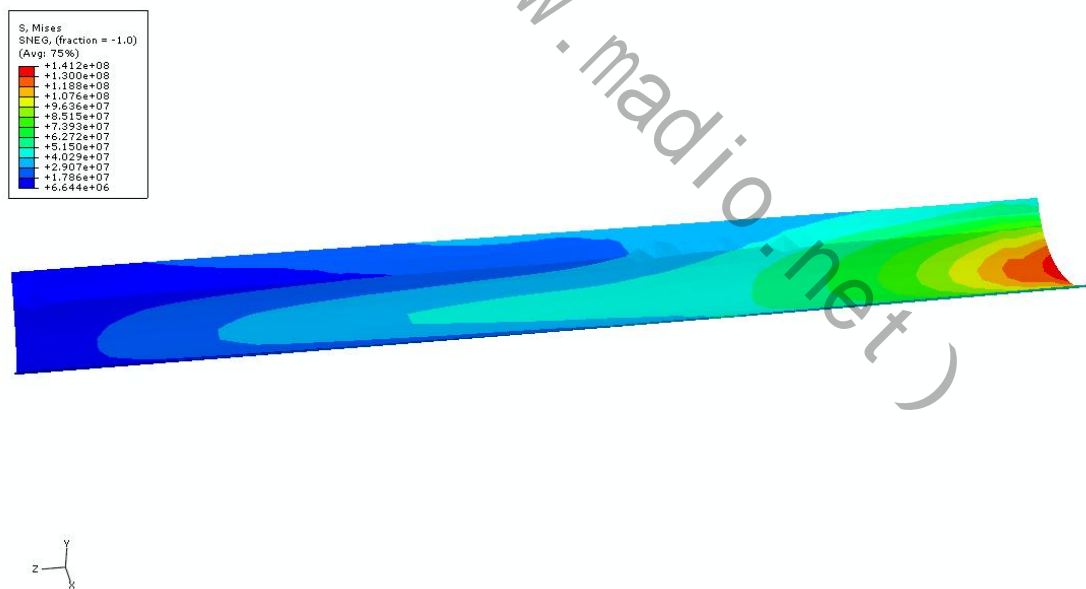


图 6.13 客机 10°攻角下部应力最大点的应力随时间的变化历程曲线

由上述个图可以看出，在攻角为 10°时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.214s，应力峰值为 81.53MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 58.79MPa。客机下部蒙皮的应力峰值小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 9.28cm。

参赛队号 # 1753

6.3.3 12° 攻角图 6.14 客机 12° 攻角尾翼接触水面等效应力图图 6.15 客机 12° 攻角腹部接触水面等效应力图

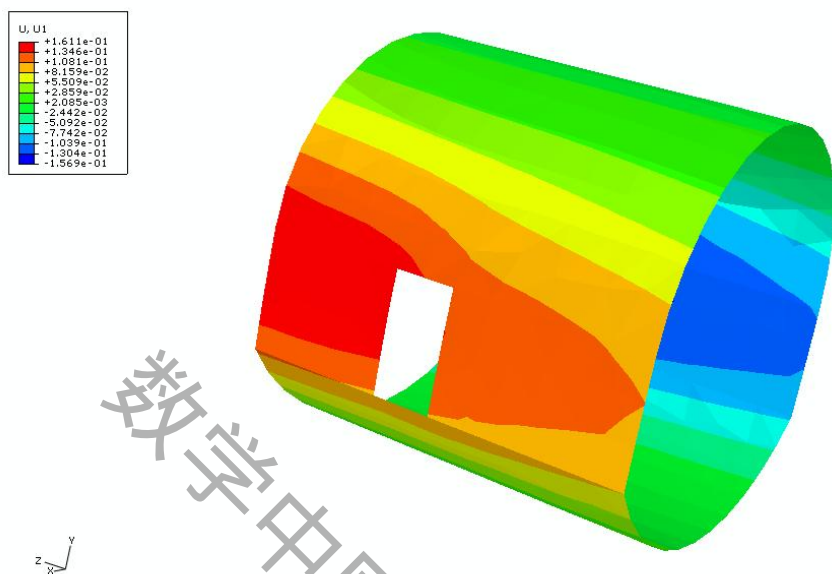


图 6.16 客机 12°攻角舱门 X 方向位移图

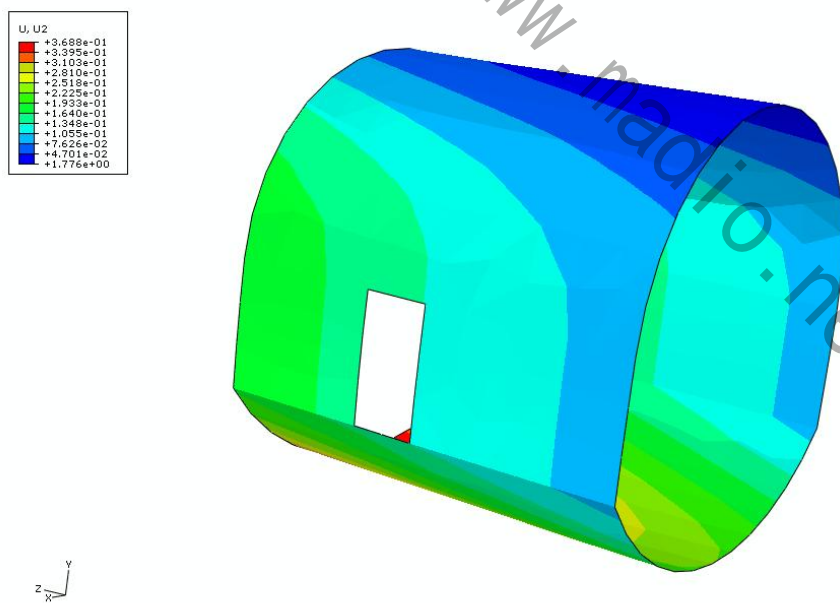


图 6.17 客机 12°攻角舱门 Y 方向位移图

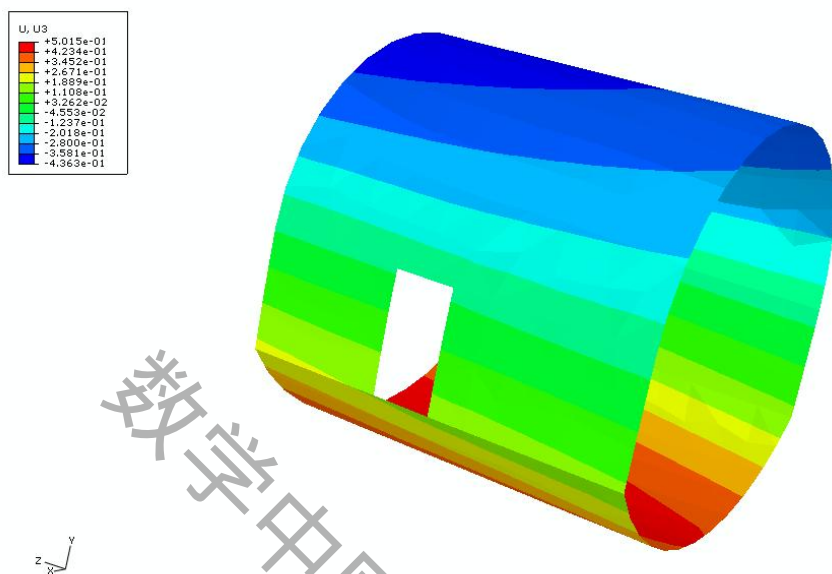


图 6.18 客机 12°攻角舱门 Z 方向位移图

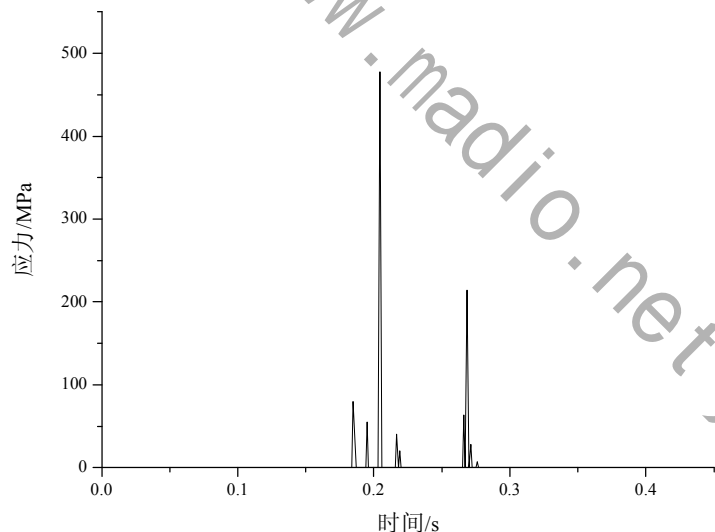


图 6.19 客机 12°攻角下部应力最大点的应力随时间的变化历程曲线

由上述个图可以看出，在攻角为 12° 时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.207s，应力峰值为 293.9MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 141.2MPa。客机下部蒙皮的应力峰值小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 16.1cm，变形较大，比较危险。

6.3.4 15°攻角

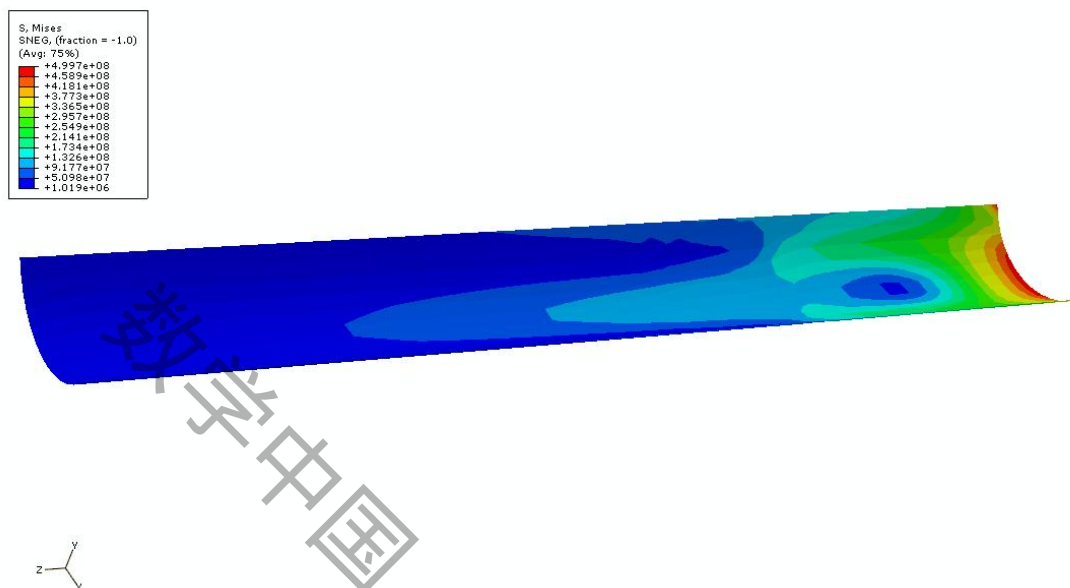


图 6.20 客机 15°攻角尾翼接触水面等效应力图

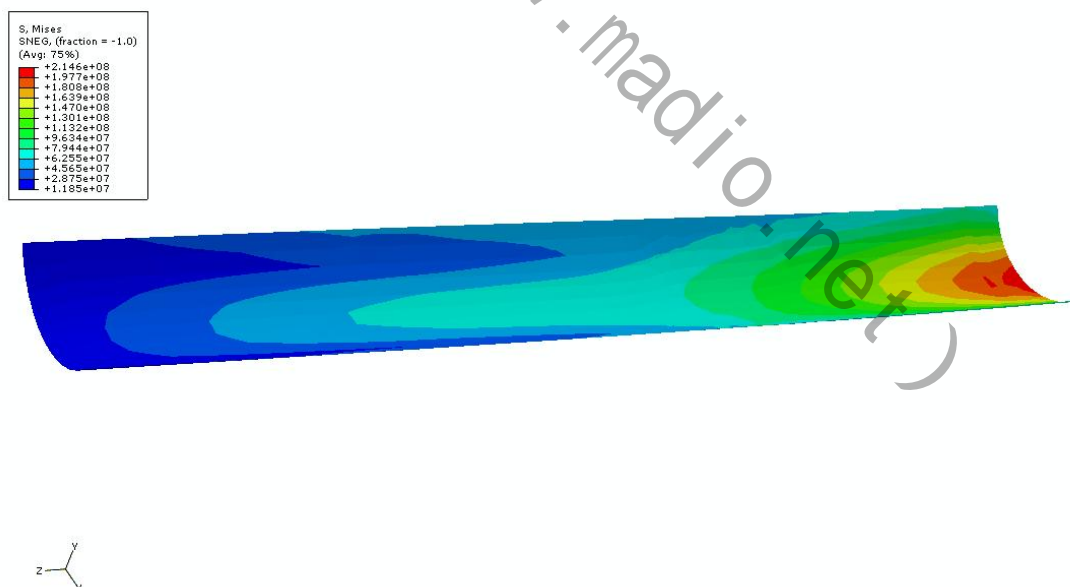


图 6.21 客机 15°攻角腹部接触水面等效应力图

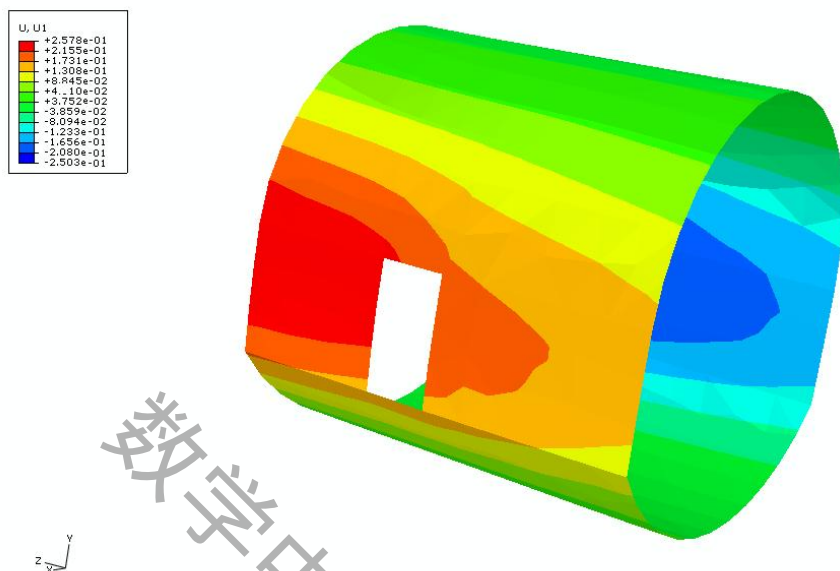


图 6.22 客机 15°攻角舱门 X 方向位移图

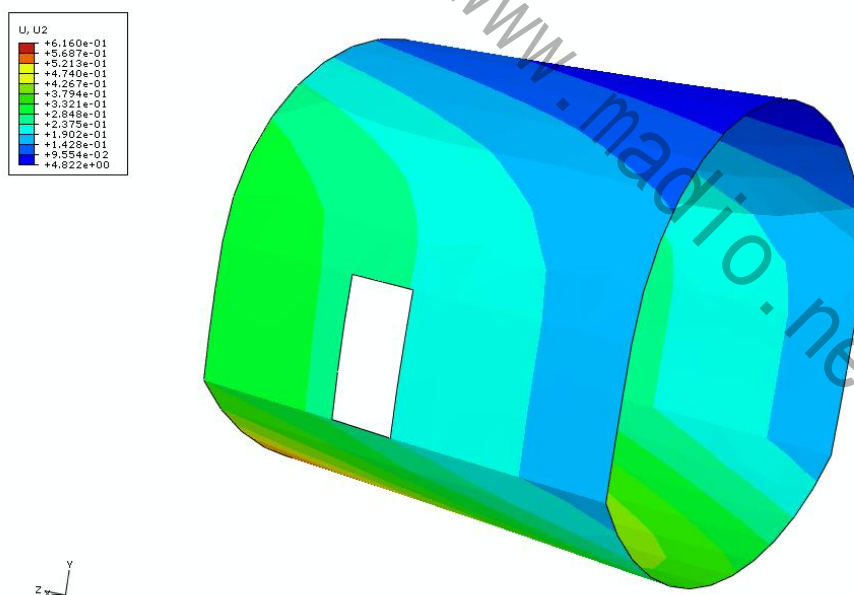


图 6.23 客机 15°攻角舱门 Y 方向位移图

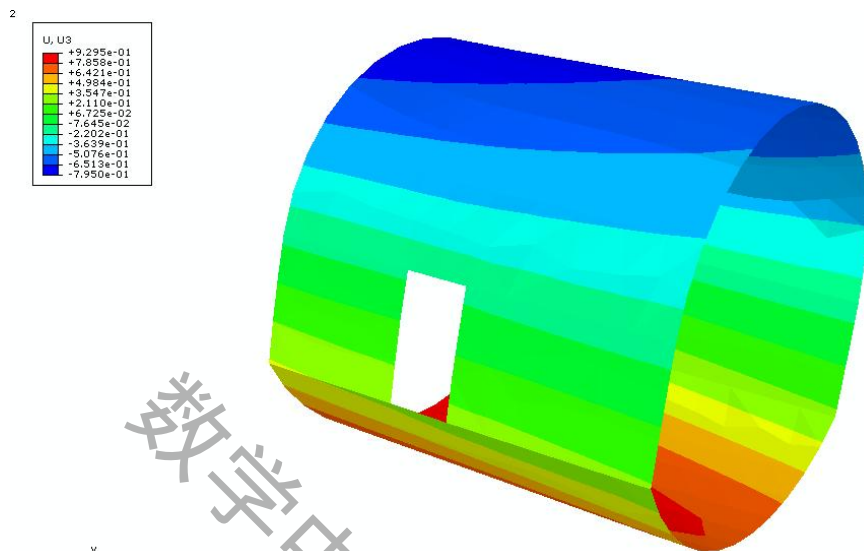


图 6.24 客机 15°攻角舱门 Z 方向位移图

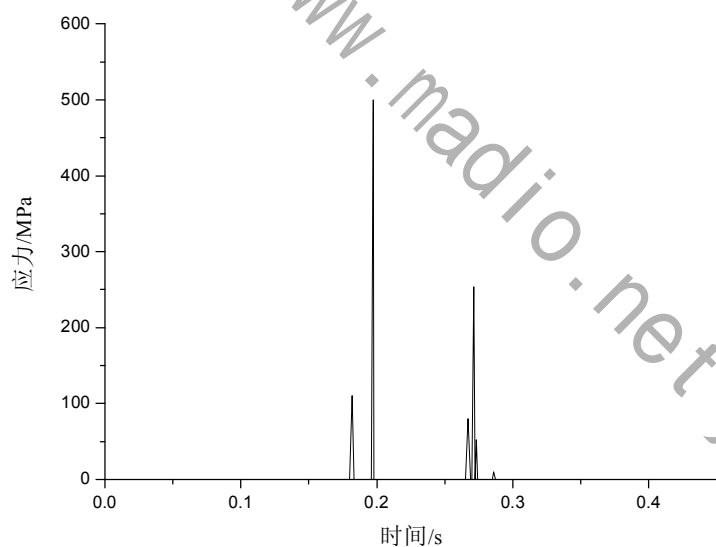


图 6.25 客机 15°攻角下部应力最大点的应力随时间的变化历程曲线

由上述个图可以看出，在攻角为 15° 时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.193s，应力峰值为 499.7MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 214.6MPa。客机下部蒙皮的应力峰值小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 25.78cm，变形较大，比较危险。

参赛队号 # 1753

6.4 结果分析

通过对客机 4 种不同工况下飞机着水时的姿态进行数值计算，得到如下表 1 的计算结果：

表 1 不同工况计算结果

工况 序号	攻角/ $^{\circ}$	腹部应力峰 值/MPa	尾翼应力峰 值/MPa	舱门 X 方向 变形/cm	舱门 Y 方向 变形/cm	舱门 Z 方向 变形/cm
1	5	37.85	58.79	6.05	3.76	0.64
2	10	58.79	81.53	9.28	7.73	1.85
3	12	141.2	293.9	16.1	12.5	3.26
4	15	214.6	499.7	25.78	23.75	7.65

结果表明：客机以 5° 攻角着水时，客机腹部和尾翼应力峰值最小，客机的舱门 X、Y、Z 三个方向的变形也最小，舱门可安全打开。

7、模型的优缺点分析

7.1 模型的优点分析

1、有限单元法的基础理论和方法比较成熟，已经成为当今成效最为显著的数值分析方法。

2、有限单元法适用性强，试用于任何支撑条件和载荷的模型。

3、本文建立的客机模型合理，计算精确度较高。

4、模型采用了数值计算与软件相结合的方法，使问题的解决更加严密。

5、建立的客机动力学控制方程适用范围较广。

6、离散的控制方程形式规范，便于编制通用的计算机程序。

7、模型建立和求解符合实际，为客机安全迫降提供了理论依据。

7.2 模型的缺点分析

1、由于时间的原因不能对模型进行更深一步的计算。

2、模型计算过程中存在一些误差，改进相对困难。

8、参考文献

- [1] 王勖成，有限单元法，北京市：清华大学出版社，2008 年。
- [2] 槽德欣，计算方法，徐州市：中国矿业大学出版社，2004 年。
- [3] 张兴永，数学建模精彩集训材料，徐州市：中国矿业大学出版社，2008 年。
- [4] 张 韬，民用飞机水上迫降分析模型和数值仿真，南京航空航天大学学报，42(3): 392-394，2010 年。
- [5] 胡大勇，某型飞机水上迫降数值化模型，北京航空航天大学学报，34(12): 1369-1374，2008 年。
- [6] Miloh T, On the oblique water entry problem of a rigid sphere, J Eng Math, 25(1): 77-92, 1991 年。
- [7] 吴 凯，飞机紧急迫降的构想，发明与创新，27-28，2009 年

参赛队号 # 1753

附录：

程序：

```
*Heading
** Job name: x Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.9-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=Part-2
*Node
*End Part
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=Part-2-3, part=Part-2
*End Instance
**
*
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Material-1
*Density
7800.,
*Elastic
4e+11, 0.23
** -----
**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1
*Dynamic
1., 1., 1e-05, 1.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet73, 1, 1
_PickedSet73, 2, 2
_PickedSet73, 3, 3
**
** LOADS
**
** Name: Load-1 Type: Pressure
*Dload
_PickedSurf61, P, -8.5e+07
**
** OUTPUT REQUESTS
**
```

参赛队号 # 1753

```
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Step-2
**
*Step, name=Step-2
*Dynamic
1., 1., 1e-05, 1.
**
** LOADS
**
** Name: Load-1    Type: Pressure
*Dload
_PickedSurf61, P, -1e+08
** Name: Load-2    Type: Pressure
*Dload
_PickedSurf62, P, -6.7e+07
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```