

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

**我们的参赛队号为：1370**

**参赛队员（签名）：**

队员 1：陈曦笛

队员 2：吴哲辉

队员 3：林翰韬

**参赛队教练员（签名）： 包文涛**

**参赛队伍组别：中学组**

参赛队号 #1370

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1370

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2014 年第七届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 幼儿园园长的苦恼

关 键 词 警戒区；布朗运动；安全系数；生理学原理

## 摘 要：

本文针对有限老师的最优分配问题，分离出了三个子问题。在综合考虑老师与学生人数、学生活动范围、老师学生运动能力和老师监管范围的前提下，搜集了可信数据；建立了三种监管能力预测模型；提出了最优分布准则；选出了最优方案。

**问题的分解与分步研究**——由于我们把设置警戒区作为问题解决的基础，从而将问题分解为：对学生运动分布模式的研究、警戒区的设置和老师的分配安排，**三个部分**。

**针对学生的运动分布模式**，我们依据学生运动时间长，活动范围相对小的特点，结合不同人群的运动能力差异，通过**布朗运动模型**对学生三十分钟的运动及分布进行了预测，推算出，学生在每一区域内分布的数目、概率基本相当，由此我们认为：其运动接近随机运动，极大多数时间内是**均匀分布**的。

**针对警戒区的设置**，我们对老师、学生运动速度进行计算，结合老师监控范围的大小，对一维运动进行了**几何推算**，计算出老师能确保学生安全的监控区域大小，以此为依据，确定了边缘警戒区和中心安全区的范围。其次，我们引入了**安全系数**这一概念，并将警戒区占有率作为教师分布对安全系数**贡献值**计算的主要依据。

**针对老师的分配与安排**，我们利用以上两个问题得到的结论，建立了**三个不同分配规则**下教师的分配方案，以及安全系数贡献的预测模型。依据三个不同模型，按照不同的贡献率权重，分别输出它们各自的安全系数。通过对安全系数的比较，我们看到“守住边界，四角留出空白”的方案**安全系数高达 9.775**，因此，我们确信“守住边界，四角留出空白”为最优方案。

**针对模型的评价**，在上述方案中，预测的基础（学生运动分布模式的研究）存在统计误差，同时不可否认，预测模型本身也存在相对误差，故我们对模型的误差值、数据方差、标准差进行计算，得出**误差对结论影响很小**的结论。因此，本模型是合理可行的。

**针对模型的改进与推广**，为了提高预测模型的精确程度，可完善三种方案作为改进与补充：一、加入教师位置固定而进行视线转动的预测模型；二、结合生理学对教师的监视效率衰减进行估计；三、将动态巡逻对安全系数贡献率的提高纳入考虑。在推广方面，本模型可用于解决**森林防火、疫区防控**等问题。

参赛队号： 1370

所选题目： D 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 英文摘要（选填）

aiming at solving the problem that limited teachers need to take care of students which are more than afford, we get this problem separated for three parts, and solve them under consideration of the number of teachers and students, the distribution of students and their movement ability and the scopes of regulation cases, we gathered credible data; The supervisory ability of the three kinds of prediction model is established; Put forward the evaluating rule; compare model for the optimal.

Decompose the problem and solve them, because we have decided to use set caution area as the basis of problem solving, the problem is divided into the study of distribution patterns of the student's movement, the distribution of the alert area and the teachers arrangement.

In view of the students' movement distribution patterns, we notice that the students' movement time is relatively long, and movement range is relatively small, so we try to use the Brownian motion model to students, forecast the movement and distribution of the calculated, the number of students in each area is similar, the probability of the basic equals, believed that the movement is close to random motion.

For the set of alert areas, we make movement speed calculations for the teachers and students, combined with the teachers' monitor size. And we calculate the teacher can monitor area size, ensure the safety of students based on it, determine the exclusionary area at the edge of the activity area and in a safe area in the center of the range. We introduced the safety coefficient, and regard it as the basis of the rate of contribution to students' safety.

For the distribution of the teachers' arrangement, we use data from the two problems above, calculating the different distribution' contribution to safety factor prediction model. Through the safety coefficient of the comparison, as a result of the scheme of guard border corners left blank of safety coefficient of 9.775, we believe "defend the border corners, left blank" is the best one.

In view of the improvement and promotion model, in order to improve the accuracy of prediction models, we believe that:

- A, join the teachers' position fixed forecast model;
- B, combined with the physiology and estimate, its monitoring efficiency attenuation of teachers;
- C, get patrol model under the condition of the safety factor contribution to promote into account.

## 一、问题重述

幼儿园中的 130 个孩子被安排在长五十米，宽三十五米的矩形空地上活动，每次活动三十分钟。由于走出空地孩子可能会遇到危险，所以要安排仅有的十五名老师使孩子尽量留在活动空地的范围内，从而最大限度地确保孩子的安全。

## 二、问题分析

### 2.1、建立模型之前的数据收集与预处理

首先，我们对已有数据进行了分析。从空地面积与老师监视范围的比较中可以得知，老师无法保障所有区域都得到监控。又由于学生的活动时间长、人数多的特点，分析得出了学生运动不规则，分布均匀的结论。

其次，我们意识到，模型的建立很可能与学生的运动情况及老师的运动能力有关。因此，我们收集了不同人群运动速度的数据，将成人（老师）、幼童（学生）的运动能力数据化，并进行了分析，得出了可信的结论。

### 2.2、建模的理念

第一，我们对问题进行分解，对各个部分进行了不同的分析，建立了预测模型，并得出结论。依据结论进行下一步的预测与问题解决。

第二，我们提出了三种不同的模型，得到了不同的量化结果。加入误差因素后，进行比较，得出最优方案。

第三，我们对方案进行了改进与推广。

## 三、模型假设与符号说明

为了更好地解决问题，我们经过分析，提出下列合理假设：

1. 每一个学生作为单独样本进行无规则运动。
2. 当学生进入警戒区，老师会立即发现与制止。
3. 老师对学生的制止是必定成功的。
4. 出于对学生的负责，老师 30 分钟内的监控效率保持一致。

$S_a$	活动范围的面积	$C_a$	活动区域的周长
$S_b$	监控范围的面积	$h$	身高
$f$	频率	$\mathcal{E}$	安全系数

## 四、模型的建立

### 4. 1、数据的预处理：

#### 4.1.1、对已知数据的处理

由于题目中给了我们准确的范围长宽、人数、活动时间数据，我们经过分析，认为首先应当确定活动范围的大小与边界。

通过简单的几何知识可得知： $S_a = l_x \times l_y$ ， $S_b = l'_x \times l'_y$ ， $C_a = 2 \times (l_x + l_y)$

依照上式得出： $S_a = 1750$ ， $S_b = 30$ ， $C_a = 170$

从面积上看，由于 $15S_b < S_a$ 老师不可能对所有区域进行监控；从周长上看，老师也无法对边界进行完全监控。

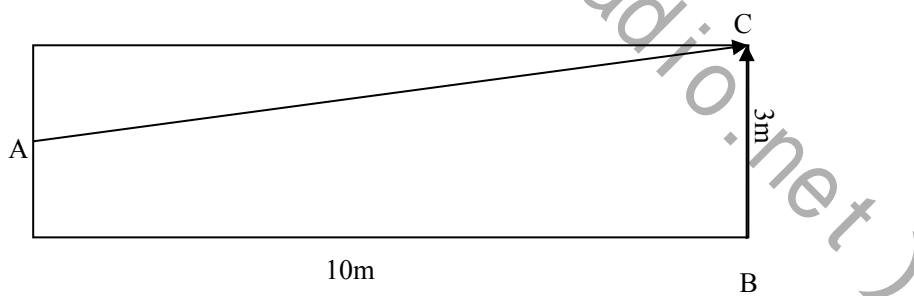
#### 4.1.2、对所需数据的取得与处理

由于题目需要我们对老师及学生进行动态规划。故我们对他们的运动速度和运动路程进行了分析，根据参考文献<sup>[1]</sup>并结合实际，我们得知成人平均身高为 1.67m，儿童平均身高为 1m，而成人儿童身高之比近似于步幅之比，表达式为：

$$\frac{h_1}{h_2} \approx \frac{a_1}{a_2}$$

又利用表达式 $v = f \times a$ ，得到老师速度 $v_1 = 6m/s$ ，学生速度 $v_2 = 0.9m/s$

由以上数据，我们可对监控区域内老师制止学生能力进行如下论证：



图一：老师制止学生追击模型

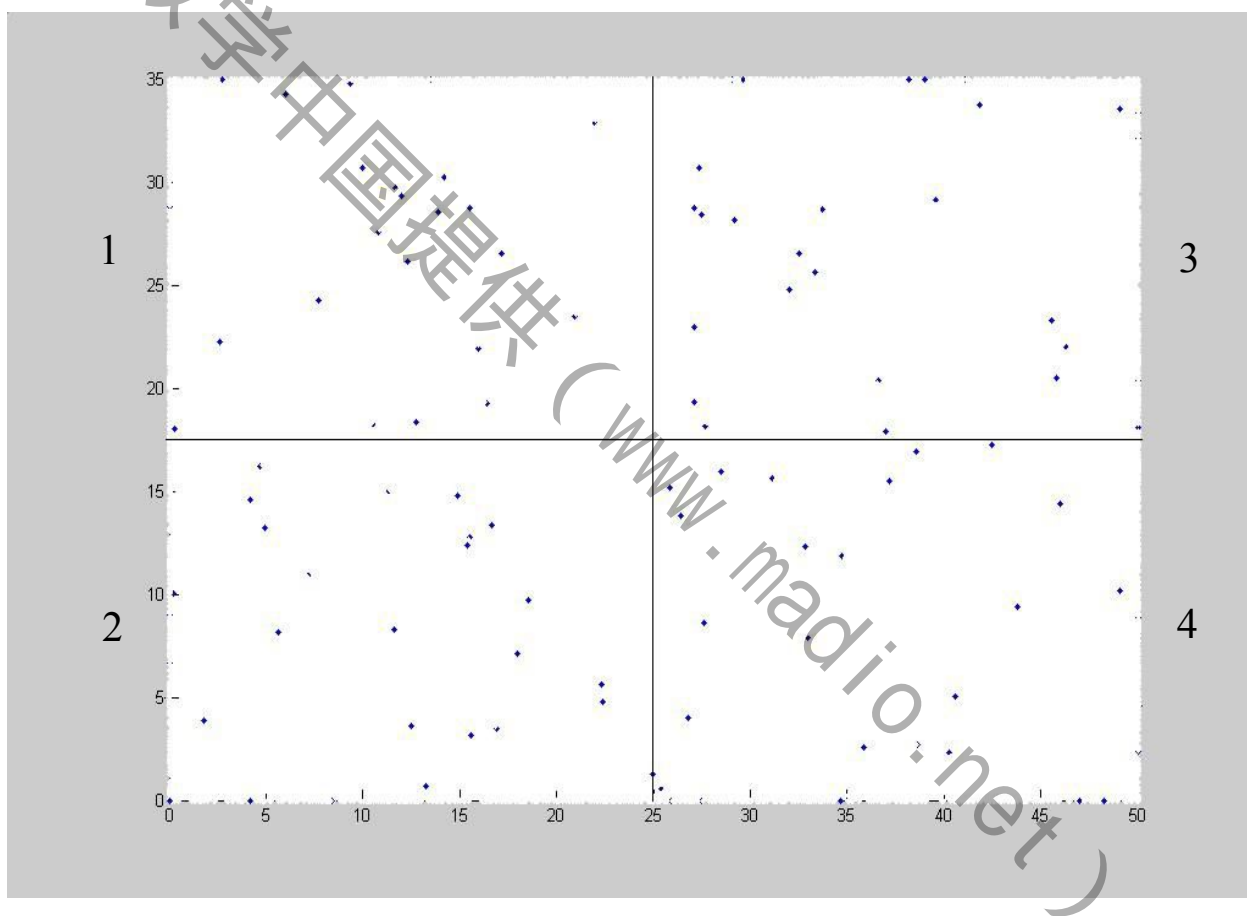
假设老师到达最远端时间为 $t_1$  学生逃逸最短时间为 $t_2$

利用表达式 $t_1 = \frac{|AC|}{v_1}$ ， $t_2 = \frac{|BC|}{v_2}$ ，我们得到 $t_1 \approx 1.69$ ， $t_2 = 3.33$ 。由此我们得到，老师

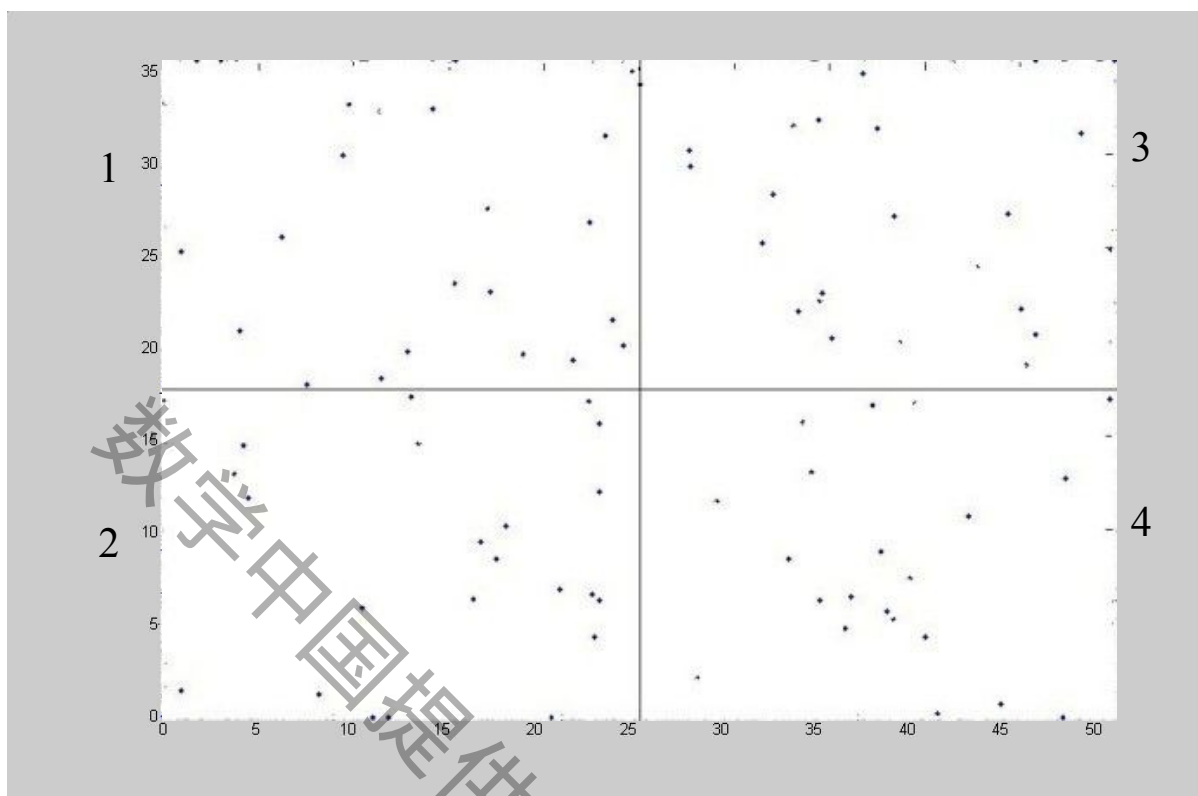
在监控范围内有足够的时间制止学生逃逸，进而也证明了我们的假设是合理的。

确定了老师的监控制止能力后，我们对学生的运动进行研究。我们引入**布朗运动**作为模型。

布朗运动为悬浮粒子在水中运动的模型。通过参考文献<sup>[2]</sup>我们知道，儿童在半小时运动中大约有十五分钟处于活跃状态，所以大约有  $900s$  时间学生处于移动状态之中，学生的运动状态与布朗运动的状态十分相似。所以根据学生移动时间与速度，我们利用布朗运动原理，通过 matlab 编程，对学生运动过程进行时间上的划分，进行多次布朗运动模型预测，得到下列图表（部分模型图样，程序及其他布朗运动图样见附录）：



图二：学生运动点迹图（1）



图三：学生运动点迹图（2）

其次，我们对图表进行区域划分和各区域点迹统计，统计图表如下：

组号	区块	数量 1	数量 2	数量 3	平均
1	1	30	28	30	29
1	2	28	28	33	30
1	3	30	33	32	32
1	4	33	32	28	31
2	1	30	32	34	32
2	2	30	34	33	32
2	3	28	26	32	29
2	4	26	30	29	28
3	1	27	28	30	28
3	2	27	26	32	28
3	3	32	34	30	32
3	4	29	32	32	31
4	1	37	35	34	35
4	2	26	32	30	29
4	3	26	28	32	29
4	4	30	36	31	32

表一：学生运动点迹统计



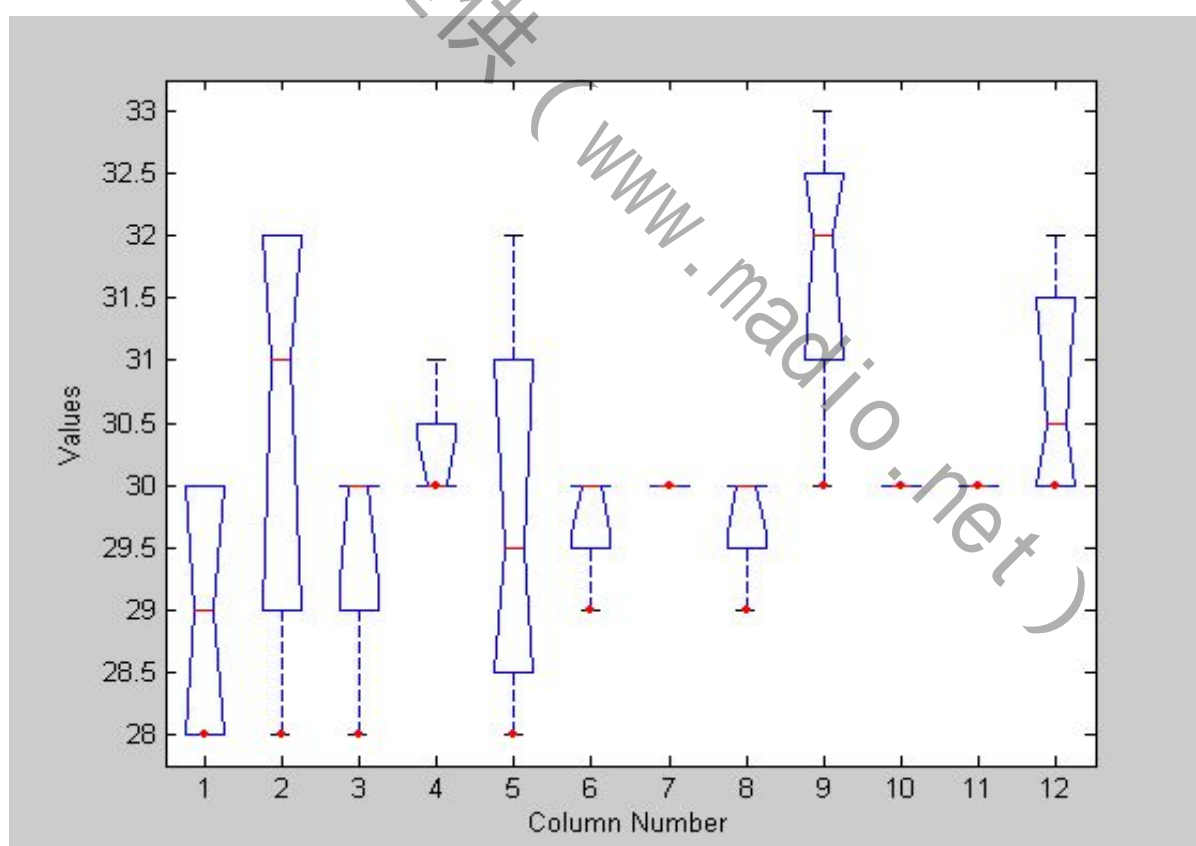
我们认为样本数量的缺失是由于点迹重叠导致无法计数造成的，缺失数量很小，对实验造成的影响可以控制。

从统计图表中我们很容易看出，点迹在图表（1）（2）中的分布基本是均匀的，说明学生在整个运动过程中的分布是随机而均匀的。

为了验证我们实验的可信度，我们对数据进行了单因素方差分析（预设 $\alpha = 0.1$ ），分析图像如下：

ANOVA Table					
Source	SS	df	MS	F	Prob>F
Columns	21.1667	11	1.92424	1.9	0.073
Error	36.5	36	1.01389		
Total	57.6667	47			

图四：单因素方差分析数据图像



图五：单因素方差分析钟形图

由图四、五可知结果： $p = 0.073 < 0.1$ ，拒绝原假设。 $s = 0.9965$ ，故总体标准差无偏估计。所以多次实验结果都稳定在同一水平，实验结论可信度高。

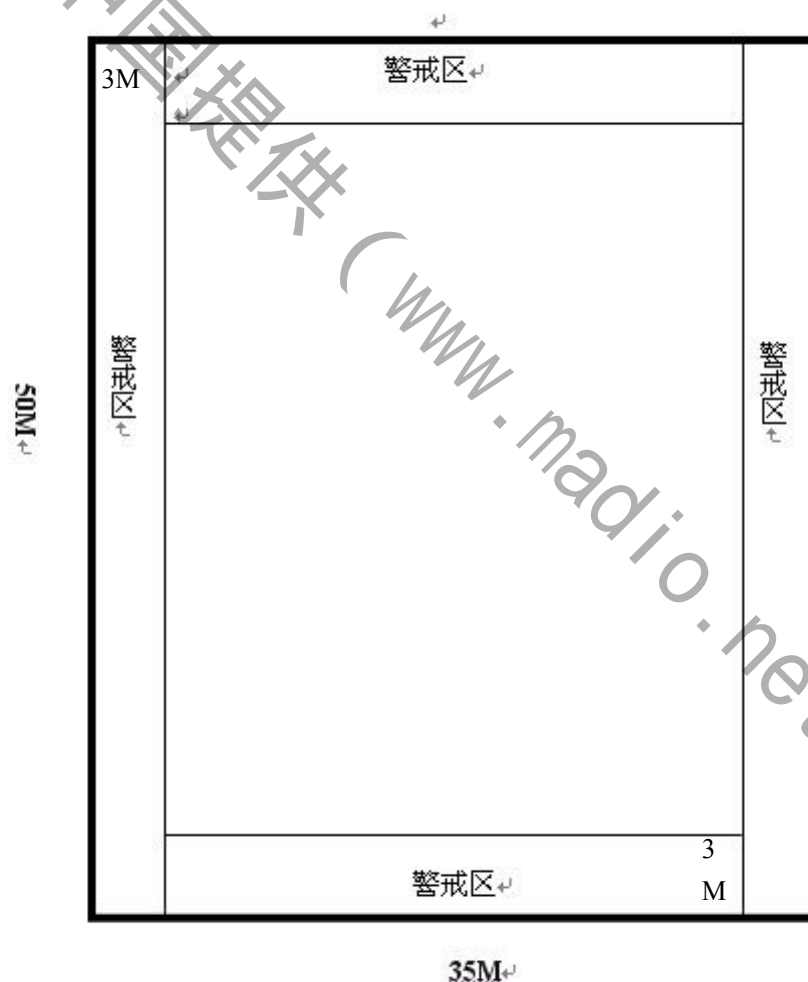
### 4.1.3 、分析数据得到的结论和应用

根据上述布朗运动的模拟点迹的统计，以及对其方差、标准差的分析，我们可以看出：1、学生的分布在大多时刻基本符合均匀分布；2、学生的运动属于随机运动。由此，我们得到，学生从各个边际离开的概率是基本相当的。我们以此为基础进行下一步预测模型的建立。

## 4.2、评价方法的引入和警戒区的设置

### 4.2.1、警戒区的设置

为了量化我们的方案，对学生安全性的影响，我们提出了“警戒区”这一概念。老师对警戒区的监控，可视为对安全性起到了一定的提升作用，老师监控警戒区的面积越大则对安全性的提升越大。我们设置的警戒区，如图所示：



图六：警戒区分布图

如图六，我们得知，警戒区面积为： $474m^2$

### 4.2.2、安全系数的引入

为了刻画一个区域经过我们的布置后，对孩子安全的保障能力。我们引入了“安全系数”的概念。我们将安全系数的最高分设置为10分（不会出现危险），将最低分设为0分（一定离开区域）。危险系数由0到10递增。不同的布置，将带来不同的安全系数。

由此，我们设安全系数  $\varepsilon = \frac{10S'_b}{\alpha}$ （ $S'_b$  为老师监控警戒区范围， $\alpha$  为警戒区面积）。

### 4.3、模型一的建立与求解

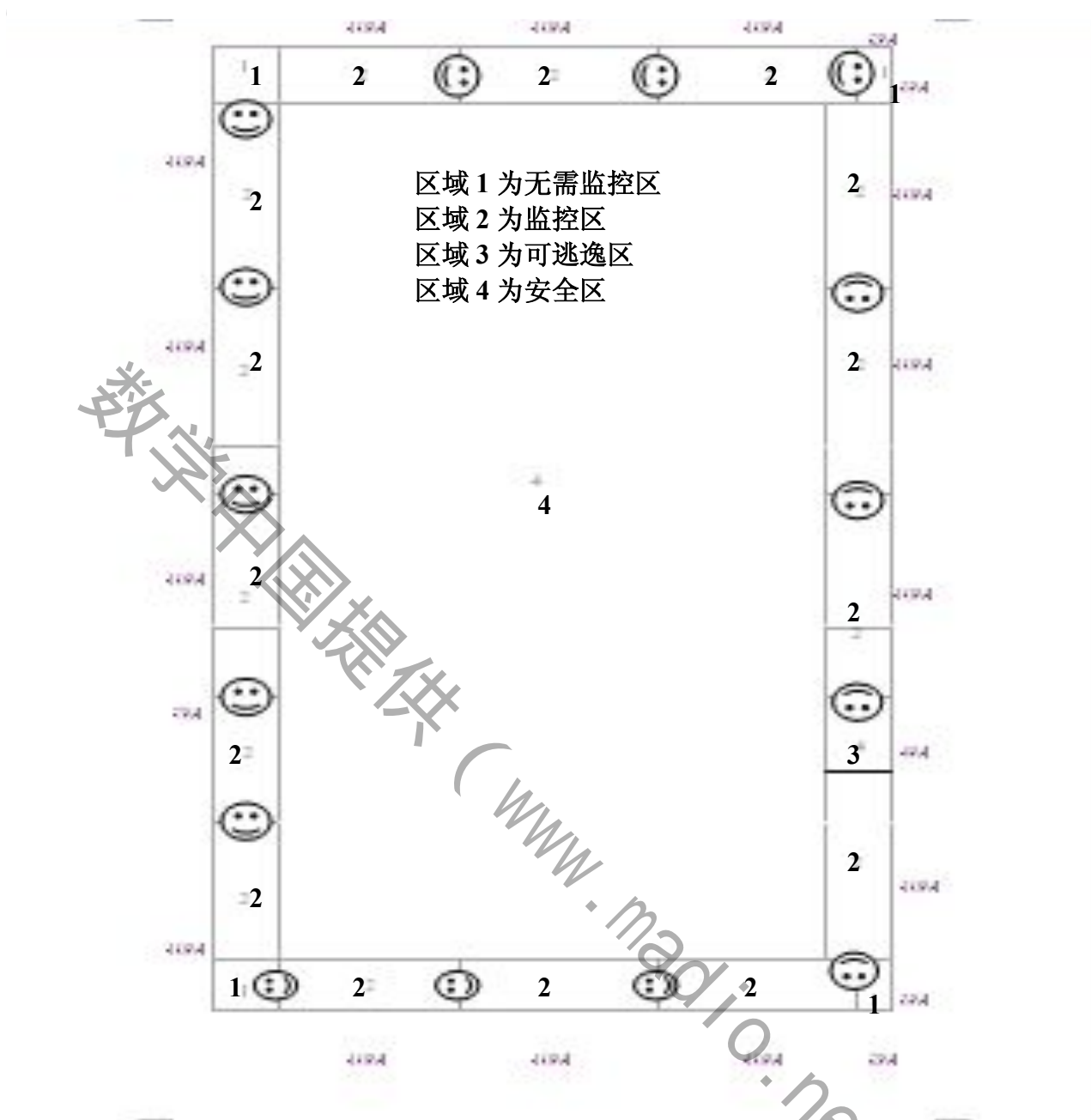
#### 4.3.1、模型的建立

基于学生的分布特点和警戒区的设立，我们建立了将老师沿边缘分布的方案。以活动区域左下角顶点为原点  $(0,0)$  建立平面直角坐标系。于是标记出各个老师的坐标如下：

$(3, 1.5), (13, 1.5), (23, 1.5)$   
 $(33.5, 3), (33.5, 13), (33.5, 23)$   
 $(33.5, 33), (33, 48.5), (23, 48.5)$   
 $(13, 48.5), (1.5, 10), (1.5, 17)$   
 $(1.5, 37), (1.5, 47), (1.5, 27)$

此方案将老师沿着警戒区排列，用两个接触的监视区域封所各个边角上为面积  $3 \times 3$  的区域，使得学生在进入此区域之间就被制止。

附上图示（☺笑脸朝向即为老师朝向）如下：



图七：老师分布与朝向图（1）

#### 4.3.2、模型的求解

确定了方案中老师的排布后，我们已经设定警戒区的宽度与教师监控区域最大宽度相等，所以监控警戒区面积的表达式：

$$S'_b = (15l'_x + 8l_1 - 8)l'_y \quad S'_b = (15l'_x + 8l_1 - 8)l'_y$$

又由  $\varepsilon = \frac{10S'_b}{\alpha}$  我们可以求出： $\varepsilon = 9.77$

### 4.3.3、模型的发展

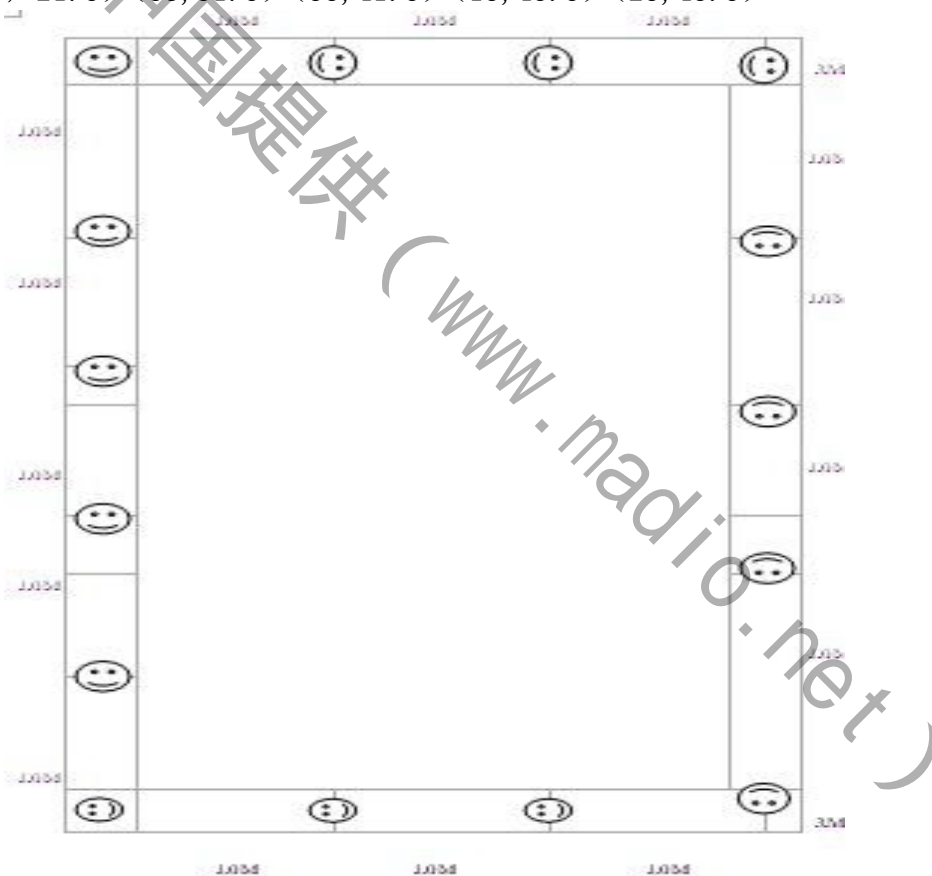
在设置模型的过程中，我们发现出现了视野的重叠，我们认为这对安全性有进一步的提升作用，所以，我们决定给重叠区域为 $9m^2$ 对于安全系数贡献率以0.3的权重来平衡不考虑此因素对安全系数的影响，所以最终得到的安全系数 $\varepsilon = 9.775$ 。

### 4.4、模型二的建立与求解

#### 4.4.1、模型二的建立

我们在方案二中决定，不预留四个角的禁区，将各个监视范围（老师）重叠地沿边界拼接起来，以达到扩大对安全系数贡献的目的。

我们同样以左下角顶点为原点建立直角坐标系，老师的坐标分别为 $(1.5, 1.5)$   $(1.5, 13)$   $(1.5, 23)$   $(1.5, 33)$   $(1.5, 43)$   $(1.5, 48.5)$   $(13, 1.5)$   $(23, 1.5)$   $(33.5, 1.5)$   $(33, 11.5)$   $(33, 21.5)$   $(33, 31.5)$   $(33, 41.5)$   $(13, 48.5)$   $(23, 48.5)$



图八： 老师分布与朝向图（2）

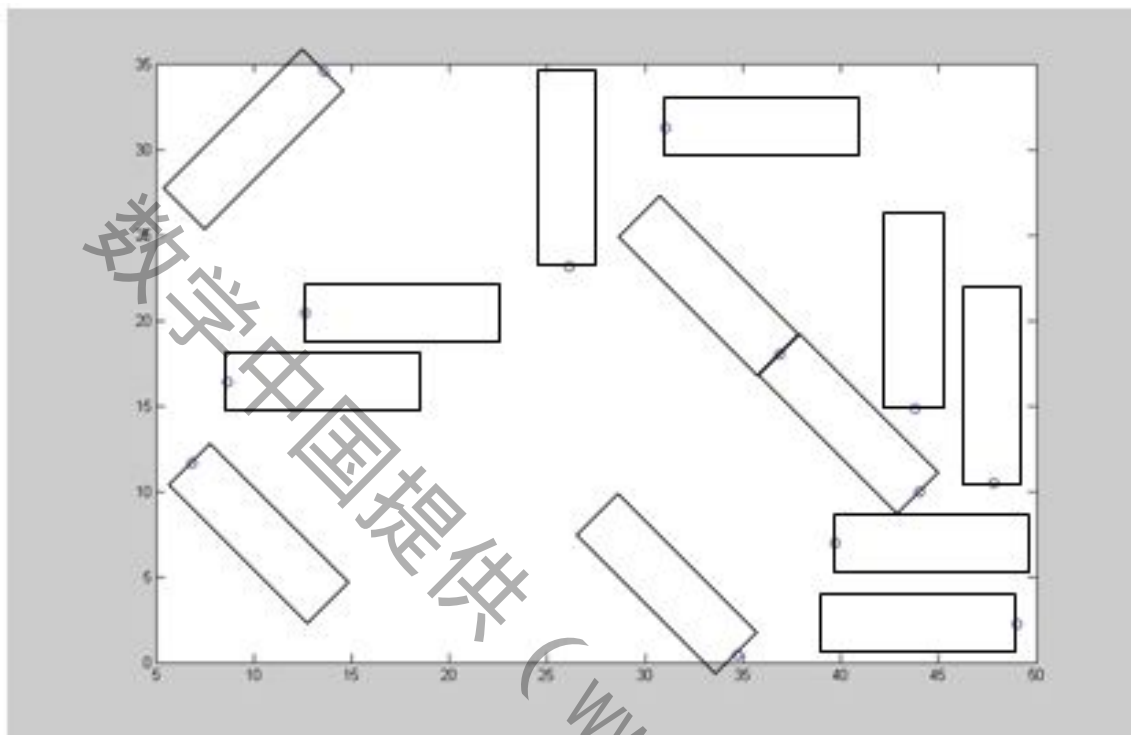
#### 4.4.2 模型的解决

参考方案一的解决，我们利用表达式 $S'_b = (15l'_x + 8l'_1 - 8)l'_y$ 与 $\varepsilon = \frac{S'_b}{\alpha}$ 代入数据，得到方案二的安全系数 $\varepsilon = 9.533$ 。

## 4.5、模型三的建立与解决

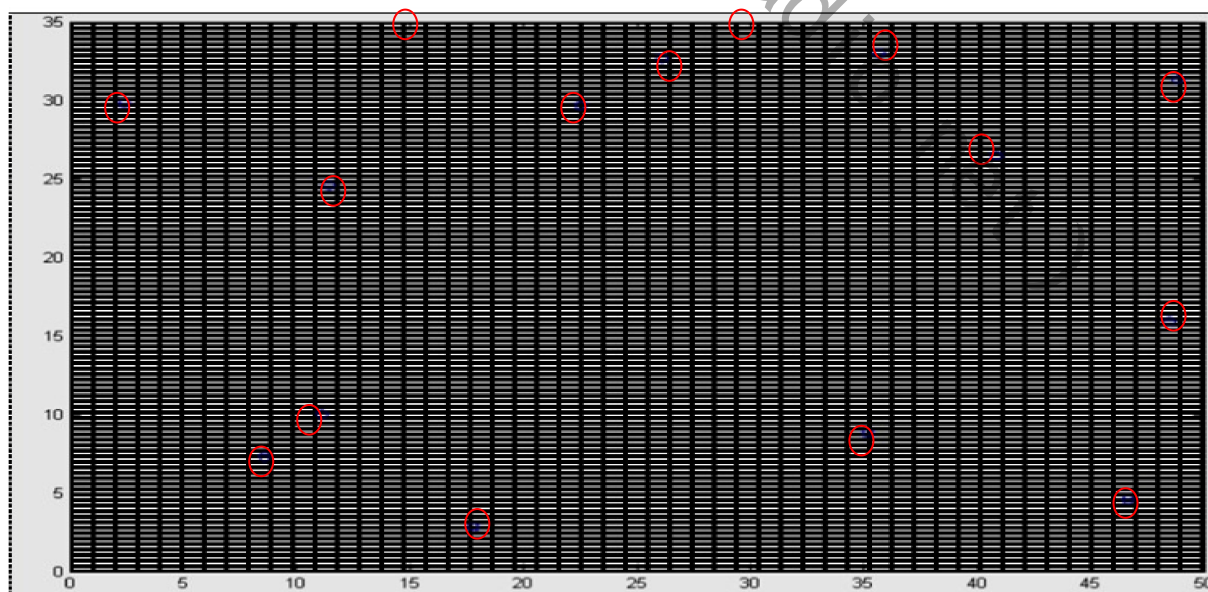
### 4.5.1、模型三的建立

我们继续采用警戒区概念，对老师进行随机但不重合的排列。我们在小比例的图样中模拟了老师视野（小矩形）在活动范围（大矩形）不重叠分布的情况。



图九：监控区域自由不重叠分布图例（圆点是老师）

我们进一步建立分度极小的坐标系，并使图九与其合并。

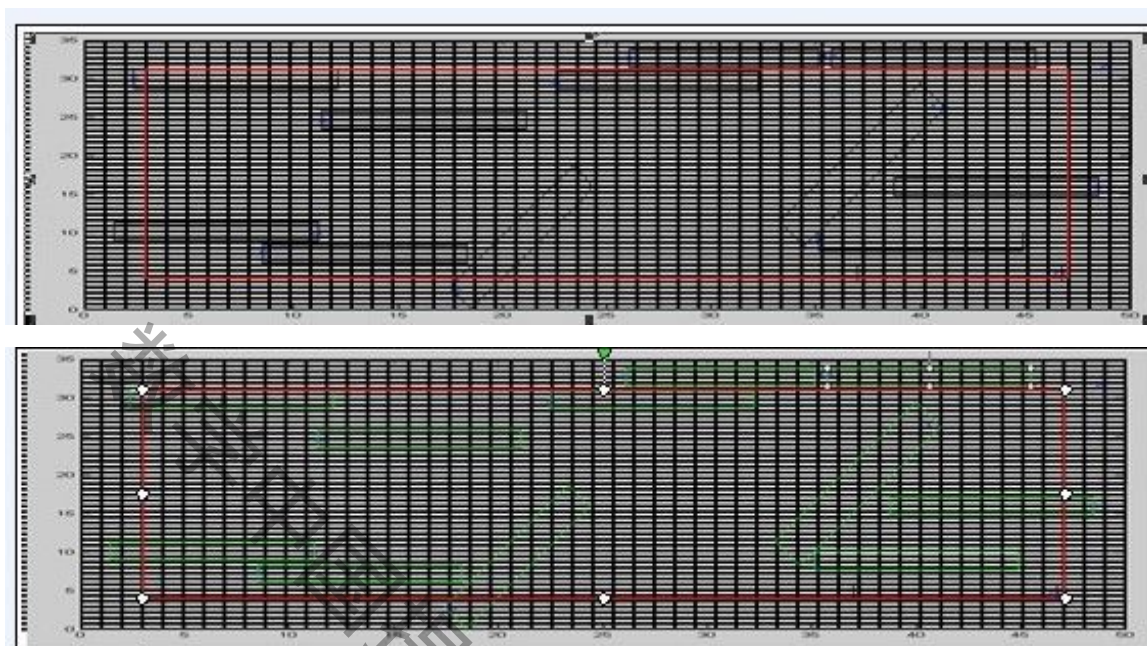


图十：坐标系与图九合并图



### 4.5.2 模型三的解决

在图十的基础上我们加入了警戒区的划分，并且对图例进行统计学分析，图示如下：



图十一、图十二：警戒区的附加图（横纵坐标分度不同）

经过统计和多次模拟，我们算出监控区域对警戒区的占有率约为 11%，方差结果： $p = 0.2273 > 0.05$  接受原假设。

我们对出现上述现象的解释如下：

由于样本的数据量不是足够的多，从而出现了较不稳定情况，但是此结果依旧能够说明此类模型对于安全系数的提升极小。

综合以上情况，利用表达式  $\varepsilon = \frac{10 S_b}{\alpha}$ ，代入数据，我们得出  $\varepsilon = 1.1$ 。

## 五、评价准则与最优模型评价

### 5.1、评价准则的建立

为了完成对几何类问题的评价，我们引入了安全系数对模型的优劣进行评价。主要用对警戒区的占有率结合重叠几率和方差对安全系数的影响，建立了一套评价体系，对三个模型分别进行了评价。

### 5.2 最优模型的评价

我们对三个模型分别进行了预测与评价。模型一得到的安全系数高达 9.975，相比于模型二的 9.77 和模型三的 1.1，模型的效果更好。虽然各模型均存在误差，但我们利用不同的权重对误差进行了平衡，保证了结果的最大合理化。

因此，我们认为：模型一是最优化的教师分配方案。

## 六、模型的改进与推广

### 6.1 针对模型的改进

为了提高预测模型的精确程度，我们认为：

- 一、教师位置固定，进而进行视线转动的模型，可作为本文所建模型的补充与完善。
- 二、结合生理学对教师的监视效率衰减进行估计，加入时间因素的影响，从而得出了最优化模型。
- 三、将动态巡逻下，对安全系数的贡献率的提升，纳入本模型的考虑。

### 6.2 模型的推广

由于本题是几何背景下进行区域控制的问题，针对本问题建立的模型，也可用于森林防火，疫区防控等问题的解决。

## 七、参考文献

- [1]美国医学研究所，《对于儿童看护问题的建议》：2011。
- [2]刘明俊，《证据科学》，中国政法大学，04期：1997。
- [3]陈帼眉，《幼儿心理学》，北京师范大学出版社：第五章，1999。
- [4]约翰·W.桑特洛克，《儿童发展》，上海人民出版社：55-70, 2009. 12。



## 八、附录

布朗运动模型的 MATLAB 程序：

```
function brouwn(x0,y0,xmin,xmax,ymin,ymax,n,step)
```

```
a = xmax - xmin ;
b = ymax - ymin ;
axis([xmin xmax ymin ymax]) ;
hold on ;
plot(x0,y0,'.');
for i = 1 : n
    dx = step * a * (rand(1)-0.5) ;
    dy = step * b * (rand(1)-0.5) ;
    x1 = x0 + dx ;
    y1 = y0 + dy ;
    x1 = max(xmin,min(x1,xmax)) ;
    y1 = max(ymin,min(y1,ymax)) ;
    pause(0.1) ;
    plot(x0,y0,'w. ');
    plot(x1,y1,'. ');
    x0 = x1 ;
    y0 = y1 ;
end
```

学生运动单因素方差分析的 MATLAB 程序：

```
>> clear;
X=[28,30,30,30,28,30,30,31,32,30,30,30;30,32,30,30,30,30,30,30,29,30,30,30;28,32,28,31,29,
29,28,29,30,30,30,32;30,30,30,30,32,30,30,30,32,30,30,31]
[p,tab,stats]=anova1(X,['on'])
```

X =

28	30	30	30	28	30	30	31	32	30	30	30
30	32	30	30	30	30	30	30	29	30	30	30
28	32	28	31	29	29	28	29	30	30	30	32
30	30	30	30	32	30	30	30	32	30	30	31

p =

0.2178

tab =

参赛队号 #1370

'Source'	'SS'	'df'	'MS'	'F'	'Prob>F'
'Columns'	[15.2292]	[11]	[1.3845]	[1.3942]	[0.2178]
'Error'	[35.7500]	[36]	[0.9931]	[]	[]
'Total'	[50.9792]	[47]	[]	[]	[]

stats =

```

gnames: [12x2 char]
n: [4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4]
source: 'anova1'
means: [29.31 29.5000 30.2500 29.7500 29.7500 29.5000 30 30.7500 30 30 30.7500]
df: 36
s: 0.9965

```

**模型 3 的程序 1:**

```

clear;
X=[4.3,6.1,10.0,6.5,9.3,9.5;7.8,7.3,4.8,8.3,8.7,8.8;
3.2,4.2,5.4,8.6,7.2,11.4;6.5,4.1,9.6,8.2,10.1,7.8];
[p,tab,stats]=anova1(X,[],'on')
tab =
'Source'          'SS'      'df'      'MS'      'F'          'Prob>F'
'Columns'    55.5471      5    11.1094    3.5254    [0.0214]
'Error'      56.7225     18     3.1512      []          []
'Total'     112.2696     23      []          []          []
stats = gnames: [6x1 char]      n: [4 4 4 4 4 4]
source: 'anova1'
means: [5.4500 5.4250 7.4500 7.9000 8.8250 9.3750]
df: 18

```

**模型三的程序 2:**

```

clc;
a = 50;      %%%%%%%%% 长
b = 35;      %%%%%%%%% 宽
n = 13;      %%%%%%%%% 点数量
cxd1 = a*rand(n,1);      %%%%%%%%% 产生横坐标
cxd2 = b*rand(n,1);      %%%%%%%%% 产生纵坐标
cxd = [cxd1 cxd2];      %%%%%%%%% 生产随机点
figure(1)
plot(cxd1,cxd2,'o')      %%%%%%%%% 绘图，从图可以大致看出随机分布
figure(2)
hist(cxd1)      %%%%%%%%% 验证横坐标随机分布
figure(3)
hist(cxd2)      %%%%%%%%% 验证纵坐标随机分布

```

布朗运动的剩余图样：

