2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛

题　目　B 题：Braess 悖论

关 键 词

摘　要：

通过 Braess 悖论我们知道当提高某一路段的通行能力，反倒可能使整体路网的通行能力下降。这一现象不仅阻碍了交通的流畅性，而且让我们的道路资源得不到充分的利用，此时，我们不妨就反过来考虑，当道路发生交通拥堵的时候，将拥堵的路段暂时关闭，看能否缓解交通拥堵，即 Braess 悖论的反面，并且还要考虑什么时候该关闭拥堵路段，关闭多长时间，从而使总效益达到最优，即既缓解了交通拥堵，又使得道路交通资源得到充分的利用，使得我国的交通又好又快的发展!

本文中我们先利用第一阶段的模型求解出不关闭某路段时的最优通行时间和总代价。首先我们关闭可能出现拥堵的路段，接着再讨论关闭某路段的情况，我们引入了参数 k 并且假定经过一段时间当通过车流量为 k*Q 以后（其中 k 为参数 0<k<1），我们再打开这条路段。在关闭某路段这个时间段，我们利用系统达到平衡（由假设（2）知）求得此时的时间t_1和总代价u_1;在打开这条路段时，我们以所花的总代价和时间综合考虑最小为目标，通过 Lingo11.0 求解出此时的最优的通行时间t_2和总代价u_2（注意此时的t_1，u_1,t2, u_2都与 k 有关），最后算出所有车流量都通过时t_1+t_2的最小值和u_1+u_2的最小值，也就是我们通过引入参数 k 将总流量通过分为临时关闭和打开两个阶段的综合。

为了使计算方便，我们最后是通过找出某一个 k 的值使得$t_1+t_2<t$及$u_1+u_2<U$，这样就说明了关闭某路段可以缓解交通的堵塞情况。再通过符合要求具体的 k 值计算出该路段关闭的时间。

参赛队号

所选题目　B 题

参赛密码

（由组委会填写）

英文摘要（选填）

Through the braess paradox that we know when to improve a section of capacity, but may make the whole network capacity drops. This phenomenon is not only hinder the traffic smoothness, and let us get the full use of road resources, at this time, we might as well will in turn, when the road traffic congestion occurs when the road traffic congestion, will be temporarily closed, can alleviate traffic jam, namely, the negative braess paradox and consider what time the closed congestion, long road closed, thereby the optimal overall benefit, that is to alleviate traffic jam, and makes the road traffic resources can be fully utilized, and make our traffic sound and fast development!In this paper we use the first stage of the model does not close one section of the optimal time and total cost traffic. First we closed the road congestion might appear, then discuss some sections of the closed, we introduce the parameter k and assume that after a period of time when traffic through qq for k * (including k for parameters after $0 < k < 1$), we try to open this section. In this section, a closed system to achieve balanced (we use by the assumption (2) at the time know) seek total cost; and U_1 t_1 - In this section, open to spend our time and total cost of comprehensive consideration of the target of minimizing the Lingo11.0 through solving the optimal time of total cost U_2 (t_2 and attention of t_1 and t_2, U_2 U_1, and k), finally calculated through all the traffic when the minimum $t_1 + t_2 + U_2$ U_1 and the minimum value, also is our overall by introducing parameter k will be temporarily closed and opened by is divided into two phases. In order to calculate, we finally find a k is through the value that $t_1 + t_2 < t$ and $U_1 + U_2 < U$, it shows a section can ease off the traffic jams. Through the concrete requirements calculated the k value close time.

一 问题重述：

交通系统是整个社会体系的重要组成部分，随着经济的发展和汽车保有量的增加，交通拥堵已成为国内外大中城市常见的一个通病，特别是在一些比较发达的地区更是一个严重的问题。为了解决这一问题，在车流量不变的前提下，人们有时在一个交通网络上增加一条路段，或者提高某个路段的局部通行能力，反而使所有出行者的出行时间都增加了，这种为了改善通行能力的投入不但没有减少交通延误，反而降低了整个交通网

络的服务水平，即所谓的的 Braess 悖论问题。我们从第一阶段的求解得知增加一条路线会产生 Braess 悖论，于是在第二阶段中讨论适当地关闭某道路会不会缓解交通拥挤的现象。若可行，给出具体的方案。

二 模型假设：

1：在北京市二环路以内（包括二环路）这个交通网络上，假设对任一条弧(i，j)∈A，流量 f_{ij} 通过它的时间为：$t_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} * f_{ij}$，其中 α_{ij} 是一个常数，表示在路段（i， j）上的自由交通时间，体现了路段的长短；β_{ij} 指路段（i, j）上的耽误系数，即在路段（i,，j）上，每增加一个单位流量所增加的交通时间，它是一个常数，体现了路段的质量。

2：假设所有用户都能了解交通系统中各路段的拥挤情况，允许个体自由竞争而不加任何限止，其结果是在从出发点到目的地的所有路上所花的时间都相等时，系统达到平衡。

三 符号说明：

f_{ij}——指通过路段（i，j）的车流量；

t_{ij}——指车流量 f_{ij} 通过路段（i， j）的时间；

Q——指从始点到目的地的总流量；

T——指从出发点到目的地所花费的总时间；

U——指该系统所花的总代价；

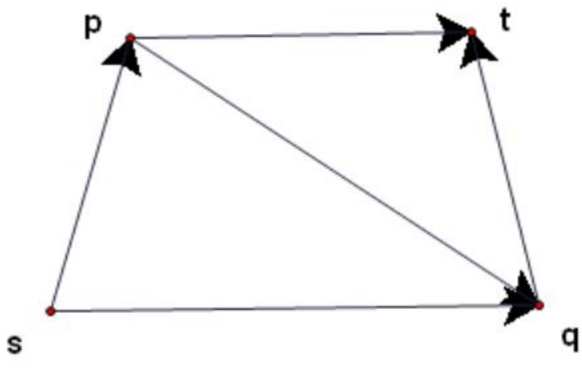
k——指临时关闭某路段所通过的车流量与总流量的百分比；

四 问题分析：

在第一阶段问题中我们用简单的四边形来代表二环路的基本地形，在确定起点和终点以及流量一定的前提下，通过查找相关数据，计算出在自由竞争的情况下，到达目的地所花的时间和总代价。然后增加一条可行路段，计算出该系统所花的最优时间和总代价，然后分别把增加路线前后的出行时间和总代价进行比较，最后来说明北京市二环内的交通拥堵是否是由 Braess 悖论造成的。

那么对于第二阶段的问题，我们依然把北京市二环路简化为四边形，对于目前的北京市二环路的路线如下图 1(如下图所示)

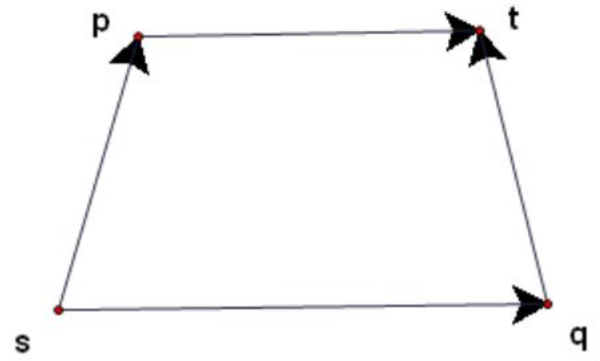
图（1）



图（2）

我们可以用图（2）（如下图所示）所示的简化图形来代表二环路,其中 s、p、q、t 四点分别代表菜户营桥、西直门桥、东直门桥、左安门桥四个具代表性的地点。对于图(2)不关闭路段（p, q）时，我们借用第一阶段的模型求解出此时该系统所花的时间和

总代价的最优值。下面我们来讨论，暂时关闭其中的某条路段（p, q）是否可以缓解交通堵塞的现象。当关闭某一条路段（p, q）时，此时路线图如图（3）所示，由假设（2）



图（3）

知此时系统达到平衡，即车流量从$s \to p \to t$路线和从$s \to q \to t$路线所用时间相等，利用这个条件我们可以求出总时间 t1 和总代价 U1.。我们通过引入参数 k（0<=k<=1），假设当从 s 到 t 的车流量达到 k*Q 时，我们把路段（p, q）开放，如图（2）所示，此时从 s 到 t 的车流量为（1-k）*Q, 我们再次通过 Lingo 软件以所花的总时间和总代价最少为目标函数求得最优解 t2 和 U2，如果存在某一个 k 使得 t1+t2<t,且同时 U1+U2<U（也就是说，在目前路况下所得到的最优解都没有比采取措施时所得的最优解优），则我们可以说对于北京市二环路，在发生交通拥堵的时候，如果暂时关闭其中的某条道路，是有可以缓解交通堵塞现象的。如果不存在任何一个符合条件 k 值使得 t1+t2<t,及同时 U1+U2<U，则我们就说对于北京市二环路，在发生交通拥堵的时候，如果暂时关闭其中的某条道路，对于缓解交通堵塞现象是无益的。

五 模型建立与求解：

5．1 建立模型：

一个交通系统可以概略地分为两个侧面，一是使用道路的主体，即通过道路系统的流(包括需要运送的人员、物资及装载人员、物资的车辆)。另一方面是承担交通流的客体。即道路系统的状况，也就是哪些点之闻有道路相联，这些道路的质量如何。二者之间还会相互作用，如通过某路段的通行能力可能会随流量的增大而变弱。下面我们以 s 点为起始点，t 为目的点分析二环路的交通阻塞情况（为叙述方便，在一般情况下总假定两点之间没有相重的弧，即对于使用交通系同的主体而言，假设他们有一个出发点 s 和一个目的地 t，而且有一定的运输量）。穿越网络的运输量构成了一个“流”，所谓“流”是指定义在 A 上的一个非负函效，$\forall$(i．j)$\in$A，f_{ij} 满足:

I: 对不是出发点和目的地的点而言，流入的量必须等于流出的量，即：$\sum_i f_{ji} = \sum_j f_{ij}$

对于一切 i$\in$N，i$\neq$ s ， i $\neq$t 成立

II: 对出发点 s，流出量等于总流量 Q. 同样，对目的地 t，流入量也等于总流量 Q。即：

$$\sum_j f_{sj} = \sum_j f_{jk} = \text{Q}$$

III：由假设（2）知，对于任一条路段(i ， j)∈A，流量 f_{ij} 通过它的时间为：

$$t_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}\, f_{ij}$$

一：我们首先讨论二环路目前的交通情况（即不关闭某一路段时），其交通路线如图（2）所示，由上图可知，从 s 到 t 有三条路径，分别是（s, p, t）,(s, q, t)和（s,p,q,t）. 可以得到，对于既不是起始点，又不是终点的 p,q 两点，流入量等于流出量， 则

对于 p 点 有 $f_{sp} = f_{pq} + f_{pt}$，

对于 q 点同样有 $f_{qt} = f_{sq} + f_{pq}$；

对于始点 s 和终点 t 同样有: $f_{sp} + f_{sq} = f_{pt} + f_{qt} = \text{Q}$；

对系统的管理者而言，流量的分配应使管理指标能达到最优值。现在分别讨论这些模型。

1:总代价最小的单目标模型

设对一个给定的二环路交通网络 G，当总流量为 Q 时，有二次规划问题

$$\text{Min U(f)} = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} * t_{ij}$$

其中 $\sum_i f_{ji} = \sum_j f_{ij}$ 对于∀i∈N. i≠ s ， i ≠t 成立

$$\sum_j f_{sj} = \sum_j f_{jk} = \text{Q}$$

$$f_{ij} \geq 0$$

解二次规划(A)可以得到总代价最小的流 f^* 及最小总代价 U^*

2:总通过时间最少的单目标模型

在二环路的网络 G 上考虑非线性规划问题:

$$\text{Min T(f)=min max} \sum_{(i,j)\in p} t_{ij}$$

其中 $\sum_i f_{ji} = \sum_j f_{ij}$ 对于∀i∈N，且有 i≠ s 和 i ≠t

$$\sum_j f_{sj} = \sum_j f_{jk} = \text{Q}$$

$$f_{ij} \geq 0$$

这个非线性规划问题的最优值即为最小通过时间。

在一般情况下，求解最小通过时间所对应的非线性规划问题(B)比较困难

3:总代价最小和总时间最少的双目标模型及解法

根据上面的分析，交通流的最优指标有两个，即要求总代价小，总的通行时间少，对这个双目标问题，可以合并(A)(B)而给出形式化的描述，但直接求解是比较困难的。由于问题(1)比较好解. 因此我们先求解(A)得出总代价下界，然后逐步减少总通过对间，最后得出一个满意解，其求解步骤如下:

步骤〈1〉：求解二次规划(A)，得到总代价下界U^*及F^*流。

步骤〈2〉：对流f^*，在网络 G 上去掉那些流量为 0 的弧，得到一个新的网络G^0，在G^0上可以找出从出发点 s 到目的地 t 所花时间最长的路$P_{\max}$及所花时间最短的路$P_{\min}$，并算出通过$P_{\max}$的时间$t_{\max}$和通过$P_{\min}$的时间$t_{\min}$，$t_{\max}$及为总代价为U^*时所花的总通过时间 T(f^*)，$t_{\min}$为总代价为U^*时最早到达终点的个体所花的时间。如果$t_{\max}=t_{\min}$则已求得最优解，停止。否则，若管理者认为$t_{\max}$太长而需要改进，则执行步骤 3。

步骤〈3〉：给出一个期望值$\bar{t}$ （$t_{\min}<\bar{t}<t_{\max}$）则求解非线性规划问题：

$$\text{Min } U(f)=\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}*t_{ij}$$

其中 $\sum_i f_{ji}=\sum_j f_{ij}$ 　　对于∀ i∈N. i≠ s， i ≠t 成立

$$\sum_j f_{sj}=\sum_j f_{jk}=Q$$

$$t_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}\ f_{ij} \qquad ,$$

步骤〈4〉：如果总代价值太大，则可用对分法调整；重复执行步 3，直到找出一个可以接收的总代价值和总时间值为止。当最优解f^*时，当$t_{\max}=t_{\min}$时，则正巧得出的解对两个目标函数(总代价和总时间)均达最优，这时 T(f^*)=$t_{\max}=t_{\min}$，如果 T(f)还能减少，则 U(f)亦可减少，与f^*是最优解相矛盾。但这时如果在 G 上(而不是在 G’上)存在一条路，在这条路上的时间要比$t_{\min}$小，则这时便出现了 Braess 悖论现象。当确定出满意的指标值后，也求得了达到这些指标值的流，系统可以根据这些值而进行相应的控制，如行政干涉(某些道路只准单行或限量通行)，经济调控(用收费多少控制通行量)，从而使流量接近计划指标。

二:

1.现在我们来讨论当我们封闭路段（p，q）时，此是路线图如图（3）所示，从出发点 s 到目的地 q 的流通量为 k*Q。由上分析可以得到：对于既不是起始点，又不是终点的 p,q 两点，流入量等于流出量，

对于 p 点有：　　　$f_{sp}=f_{pt}$；

同理对于 q 点有：　$f_{sq}=f_{qt}$；

以及对于始点 s 和终点 t 有:$f_{sp}+f_{sq}=f_{pt}+f_{qt}$=k*Q；

由假设（2）可知从出发点 s 到目的地 t 的两条路上花的时间相等即$t_{sp}+t_{pt}=t_{sq}+t_{qt}$,从而以此作为条件求出隔断弧线上的流量,进而计算出在自由竞争情况下的通行时间 t1 和总代价和 U1（其中 t1 和 U 都是关于参数 k 的表达式）。

2 .当（p， q）路段开放后，二环路的路线如图（3）此时人流量为（1-k）*Q,我们同样可以用类似于（一）的方法（这里就不再重述了），再次通过 Lingo 软件以所花总时间和总代价最少为双目解求得最优解分别计作 t2 和 U2(其中 t1 和 U2 也都是关于参数 k 的表达式)。

三：最后我们结合(一)与（二），比较 t 与 t1+t2，U 与 U1+U2, 从而得出在发生交通拥堵的时候，如果暂时关闭其中的某条路段，是否可以缓解交通堵塞现象。

5.2 模型求解：

我们对模型中的自由交通时间.耽误系数与第一阶段的问题中的数据保持一致。为了与实际情况更切合，也为了方便计算，我们并且把从 s 到 t 的人流量扩大到 Q=200，而其他的不变即：

$$\alpha_{sq}=\alpha_{pt}=50$$

$$\beta_{sq}=\beta_{sq}=3$$

$$\alpha_{sp}=\alpha_{qt}=0$$

$$\beta_{sp}=\beta_{qt}=15$$

$$\alpha_{pq}=20$$

$$\beta_{pq}=4$$

（当 Q=200 时此时也产生 Braess 悖论，详见附录（1）.(2).(3)）

1：分析图（2） 可知对于既不是起始点，又不是终点的p,q两点，流入量等于流出量，

对于p点：　　$f_{sp}=f_{pq}+f_{pt}$；

对于 q 点：　　$f_{qt}=f_{sq}+f_{pq}$；

对于始点 s 和终点 t 同样有: $f_{sp}+f_{sq}=f_{pt}+f_{qt}=Q$；

在上述所述的基础上，下面分几种情况对模型进行讨论：

①：总代价最小的单目标模型

设对一个给定的二环路交通网络G，当总流量为Q时，有二次规划问题

$$\text{Min } U(f)=\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}\, t_{ij}$$

其中 $\sum_i f_{ji}=\sum_j f_{ij}$　　对于一切i∈N. i≠ s , i≠t成立

$$\sum_j f_{sj}=\sum_j f_{jk}=Q$$

$$f_{ij}>=0$$

我们用Lingo11.0软件解得(具体程序查看附录（2）)最少总代价U(f)=370000,此时用时T=3020

②：总通过时间最少的单目标模型，在二环路的网络G上考虑非线性规划问题：

$$\text{Min } t(f)=\min\max\sum_{(i,j)\in p} t_{ij}$$

其中 $\sum_i f_{ji}=\sum_j f_{ij}$　　对于一切i∈N. i≠ s , i≠t成立

$$\sum_j f_{sj}=\sum_j f_{jk}=Q$$

$$f_{ij}\geq 0$$

这个非线性规划问题的最优值即为最小通过时间。我们用Lingo11.0软件解得(具

体程序查看附录（3））最少出行时间t=3020,此时的总代价为U=495316

对（1）解出结果进行分析：

当U(f)取到最小值370000 ，时间为3020

对（2）解出结果进行分析：

当T取到最小值3020时，总代价为495316

综合以上两点可得模型对通过的总时间和总代价可同时取得最优解，最优解为:U(f)=370000,T=3020

2.①：当封闭（p，q）路段时，

分析图(3)，在α_{ij}、β_{ij}一定的条件下，我们引入参数k，有k*Q车流量从s到t点 ，此时由 $f_{sp}=f_{pt}$ ； $f_{sq}=f_{qt}$；

对于始点s和终点t有:

$f_{sp}+f_{sq}=f_{pt}+f_{qt}=k*Q$；

假设个体知道全局信息，容许个体自由竞争，最终导致从出发点到目的地的两条路上花的时间相等，即：

$t_{sp}+t_{pt}=t_{sq}+t_{qt}$

以此为条件求解（具体程序查看附录（4））

②当解除（p，q）路段的封闭时，分析图（2此时车流量为（1-k）*Q, 我们同样有 $f_{sp}=f_{pq}+f_{pt}$ ； $f_{qt}=f_{sq}+f_{pq}$；

$f_{sp}+f_{sq}=f_{pt}+f_{qt}=$（1-k）*Q

此时我们也像前面一样分几种情况对模型进行讨论：

<1>.总代价最小的单目标模型

设对一个给定的二环路交通网络G，当总流量为（1-k）*Q时，有二次规划问题

$$\text{Min } U(f)=\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}\, t_{ij}$$

（具体程序查看附录（5））

〈2〉.总通过时间最少的单目标模型

在二环路的网络G上考虑非线性规划问题：

$$\text{Min } t(f)=\min\max\sum_{(i,j)\in p} t_{ij}$$

（具体程序查看附录（6））

〈3〉.在综合考虑（1）与（2），求解出使总流量和通行时间同时达到最优时的解U2和t2.（详细步骤见模型建立(一)中的（3），这里不再重复）

3.我们通过对k值的尝试，可以得出当k=0.25时，临时关闭(p, q)道段(即当有s到t的人流量达到0.25Q=50时)我们可以说，对于北京市二环路，在暂时关闭（p，q）这条道路时，是可以缓解交通堵塞的现象的。具体求解结果如下：

1.1:当不关闭（p，q）路段时,由以上分析可以得知此时的使通行时间t和总代价U同时达到最优时的解为t=3020;U=370000;

2.1: 当封闭（p，q）路线时，可以求得总时间t1=500,总代价U1=25000

2.2 :解除对(p, q)路线的封闭后，

（1） 总代价最小的单目标

可以求得 $U_{\min}$ =210000 ，此时总出行时间为t=2270

(2) 总通过时间最少的单目标模型

可以求出$t_{\min}$=2270，此时总代价为U=279696

综合可得，当流量为0.75Q时，最优解为t2=2270,U2=210000

2.3: 此时可以得到t1+t2=500+2270=2770

U1+U2=25000+210000=235000

比较得t1+t2=2770<t=3020

U1+U2=235000<U=370000

为了更方便比较数据，我们建立了如下表格

	总代价	总时间
目前路况下图（2）总代价最小	3700000	3020
目前路况下图（2）总时间最短	495316	3020
目前路况下的最优解	370000	3020
流量为0.25Q时，封闭pq路线图（3）	25000	500
解除封闭后图（2）总代价最小	210000	2270
解除封闭后图（2）总时间最短	279696	2270
解除封闭后的最优解	210000	2270

2.4:综上所述，我们得出存在一个k=0.25，使得暂时关闭（p，q） 路段时（即当从s到t都的人流量为0.25Q时解除封闭），所得到的最优解都没有我们在采取此措施后所得的最优解好，所以我们得出结论：临时关闭道路是有可能缓解交通堵塞的，且当从始点到目的地的车流量为0.25Q时，即关闭道路的时间为500，此时解除对路段（p，q）的封闭。

六　模型评价与不足：

6.1 模型的评价：

我们通过求解在二环路目前线路下如图（2）所示人们出行的最优总时间和总代价，再求出适当封闭(p, q)路线如图（3）所示，以及解除封闭后，在人流量一定的条件下所示人们出行的最优总时间和总代价，通过比较两个最优解，得出在某种情况下临时封闭(p, q)路线人们出行的最优总时间和总代价都比未封闭时优一些。从而得出在交通拥堵时，暂时封闭某条路线是有可能环节交通阻塞的，最终说明此模型是可行的。

6.2 模型的不足：

(1)我们只求得一个 k=0.25 是可行的，即适当关闭(p, q)路段时有可能会缓解交通堵塞。可能还有符合条件的 k 值我们并未找出。

（2）我们不一定要封闭（p，q）路段，还可以讨论在封闭其它路段使的可行解。

(3)由于第一阶段的数据不够准确，为了方便计算，我们取Q=200(此时也产生Braess

悖论，具体见附录（1）（2）（3））。

（4）我们刚好使总时间和总代价同时取得最优值。但是对于真实的二环路的数据，可能总时间和总代价不能同时取得最优值，这就需要更进一步的求解。

(5) 第一阶段的问题一与问题二的改进只是理论上简单的提及，没有做出实际结果.

七 模型改进：

1:我们在暂时封闭某条路线时可以多讨论几种情况，即可以封闭其它的路线，把问提考虑的更详细一些。

2:我们在求符合条件的 k 值时，应该求出所有可行的值，然后在这些值中选出一个最优化的方案来执行，为行人提供最大的便利。

八 参考文献：

【1】 姜启源，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003.8（2008 重印）；

【2】赵静 但琦，数学建模与数学实验，高等教育出版社 施普林格出版社 2000.11；

九 附录：

（1）
```
model:
U=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4;
t1+t3=t2+t4;
t=t1+t3;
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
x1+x2=Q;
x3+x4=Q;
x1=x3;
x2=x4;
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);
data:
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
Q=200;
enddata
end
```

```
Variable           Value
                                          U        370000.0
                                         X1        100.0000
                                         T1        350.0000
```

X2	100.0000
T2	1500.000
X3	100.0000
T3	1500.000
X4	100.0000
T4	350.0000
T	1850.000
A1	50.00000
B1	3.000000
A2	0.000000
B2	15.00000
A3	0.000000
B3	15.00000
A4	50.00000
B4	3.000000
Q	200.0000

（2）model:

```
min=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4+x5*t5;
t=@smax(t2+t4,t2+t3+t5,t1+t3);
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
t5=a5+b5*x5;
x1+x2=Q;
x3+x4=Q;
x2=x4+x5;
x3=x1+x5;
data:
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
a5=20;b5=4;
Q=200;
Enddata
end
```

```
 Local optimal solution found.
  Objective value:                              370000.0
  Infeasibilities:                              0.000000
  Total solver iterations:                            11
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	100.0000	0.000000
T1	350.0000	0.000000
X2	100.0000	0.000000
T2	1500.000	0.000000

X3	100.0000	0.000000
T3	1500.000	0.000000
X4	100.0000	0.000000
T4	350.0000	0.000000
X5	0.000000	2370.000
T5	20.00000	0.000000
T	3020.000	0.000000
A1	50.00000	0.000000
B1	3.000000	0.000000
A2	0.000000	0.000000
B2	15.00000	0.000000
A3	0.000000	0.000000
B3	15.00000	0.000000
A4	50.00000	0.000000
B4	3.000000	0.000000
A5	20.00000	0.000000
B5	4.000000	0.000000
Q	200.0000	0.000000

（3）model:

```
min=@smax(t2+t4,t2+t3+t5,t1+t3);
U=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4+x5*t5;
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
t5=a5+b5*x5;
x1+x2=Q;
x3+x4=Q;
x2=x4+x5;
x3=x1+x5;
@gin(x1);
@gin(x2);
@gin(x3);
@gin(x4);
@gin(x5);
data:
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
a5=20;b5=4;
Q=200;
enddata
end
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                              3020.000
  Objective bound:                              3020.000
  Infeasibilities:                              0.000000
  Extended solver steps:                               0
  Total solver iterations:                             9
```

Variable	Value
T2	2385.000
T4	527.0000
T3	615.0000
T5	20.00000
T1	173.0000
U	495316.0
X1	41.00000
X2	159.0000
X3	41.00000
X4	159.0000
X5	0.000000
A1	50.00000
B1	3.000000
A2	0.000000
B2	15.00000
A3	0.000000
B3	15.00000
A4	50.00000
B4	3.000000
A5	20.00000
B5	4.000000
Q	200.0000

(4)
```
model:
U=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4;
t1+t3=t2+t4;
t=t1+t3;
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
x1+x2=k*Q;
x3+x4=k*Q;
x1=x3;
x2=x4;
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);
data:
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
Q=200;
k=?;
enddata
end
```

Variable	Value
U	25000.00
X1	25.00000
T1	125.0000
X2	25.00000
T2	375.0000
X3	25.00000

```
        T3        375.0000
        X4        25.00000
        T4        125.0000
         T        500.0000
        A1        50.00000
        B1        3.000000
        A2        0.000000
        B2        15.00000
        A3        0.000000
        B3        15.00000
        A4        50.00000
        B4        3.000000
         K        0.2500000
         Q        200.0000
```

（5）model:

```
min=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4+x5*t5;
t=@smax(t2+t4,t2+t3+t5,t1+t3);
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
t5=a5+b5*x5;
x1+x2=(1-k)*Q;
x3+x4=(1-k)*Q;
x2=x4+x5;
x3=x1+x5;
data:
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
a5=20;b5=4;
Q=200;
k=?;
enddata
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);@gin(x5);
end
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                         210000.0
  Objective bound:                         210000.0
  Infeasibilities:                         0.000000
  Extended solver steps:                          0
  Total solver iterations:                        6


                 Variable           Value
                       X1        75.00000
                       T1        275.0000
                       X2        75.00000
                       T2        1125.000
                       X3        75.00000
                       T3        1125.000
```

X4	75.00000
T4	275.0000
X5	0.000000
T5	20.00000
T	2270.000
A1	50.00000
B1	3.000000
A2	0.000000
B2	15.00000
A3	0.000000
B3	15.00000
A4	50.00000
B4	3.000000
A5	20.00000
B5	4.000000
K	0.2500000
Q	200.0000

（6）model:

```
min=@smax(t2+t4,t2+t3+t5,t1+t3);
U=x1*t1+x2*t2+x3*t3+x4*t4+x5*t5;
t1=a1+b1*x1;
t2=a2+b2*x2;
t3=a3+b3*x3;
t4=a4+b4*x4;
t5=a5+b5*x5;
x1+x2=(1-k)*Q;
x3+x4=(1-k)*Q;
x2=x4+x5;
x3=x1+x5;
data:
k=?;
a1=50;a4=50;
b1=3;b4=3;
a2=0;a3=0;
b2=15;b3=15;
a5=20;b5=4;
Q=200;
enddata
@gin(x1);@gin(x2);@gin(x3);@gin(x4);@gin(x5);
end
```

```
Local optimal solution found.
  Objective value:                     2270.000
  Objective bound:                     2270.000
  Infeasibilities:                     0.000000
  Extended solver steps:                      0
  Total solver iterations:                    9
```

Variable	Value
T2	1785.000
T4	407.0000
T3	465.0000

T5	20.00000
T1	143.0000
U	279696.0
X1	31.00000
X2	119.0000
X3	31.00000
X4	119.0000
X5	0.000000
A1	50.00000
B1	3.000000
A2	0.000000
B2	15.00000
A3	0.000000
B3	15.00000
A4	50.00000
B4	3.000000
A5	20.00000
B5	4.000000
K	0.2500000
Q	200.0000