

## 1. 问题重述

随着汽车工业的快速发展，如今发达国家的汽车普及率已非常高。近年来，我国的汽车销售量也增长很快。在各大城市，由于汽车数量剧增，“停车难”问题逐渐显现。对于驾驶者来说，经常要面对将车辆停入狭窄停车位置的难题。为帮助驾驶员解决停车问题，本文研究以下问题：

- 1.1 建立合理模型，判断铰接式集装箱卡车能否安全地侧位停车，即计算出侧位停车所需的最小车位尺寸。
- 1.2 人工驾驶泊车时，在驾驶员视野内不免有临时障碍物或者人，可能会影响到汽车行驶路线。根据汽车实时准确位置，建立合理模型，提出停车新路线，并给出操作建议。

## 2. 基本假设

- 2.1 假设可以得到停车位置的平面图，包括空位的长度、宽度等数据。考虑实用性，模型所涉及到的车辆数据能容易测得，例如车辆尺寸，转弯半径等。
- 2.2 假设汽车的车载显示器上能显示停车位置的平面图。
- 2.3 假设汽车低速泊车，且不考虑轮胎侧滑。
- 2.4 假设驾驶员在侧位停车时选择的是两圆相切的路径。
- 2.5 在安全区域内，驾驶员可以轻松调整汽车的位置，使得汽车以两圆相切路径泊车。
- 2.6 假设汽车在侧位泊车过程中，驾驶员发现临时障碍物未在行驶线路上，能用喇叭或其他方式让临时障碍物远离行驶线路。

## 3. 符号说明

$w$	车辆宽度
$m$	车辆与障碍物的最小距离
$L$	轴距
$l$	前桥中心到铰接中心的距离
$\beta$	前车轮等效车轮的偏转角度
$\varphi_{\max}$	小车前轮向右侧偏转到最大角度
$V$	车辆前车轴中点 $m_1$ 的运行速度
$R_{\min}$	最小转弯半径
$H$	车位的长度
$B'$	车位的宽
$B$	后轮距
$R_1$	前外轮转弯半径
$R_1'$	前内轮转弯半径
$R_2$	后外轮转弯半径
$R_2'$	后内轮转弯半径

$\theta$	车身方向角
a	后悬
b	前悬

## 4. 模型准备

### 4.1 侧位停车相关参数的描述

分析车辆平行侧位停车的全过程，有两个因素对平行侧位停车质量影响较大，一为汽车动力学特性，二为环境因素。汽车的动力学特性即车辆自身参数，包括车长、车宽、前悬、最小转弯半径；环境因素主要是道路参数，包括停车位长度、停车位宽度、侧位停车初始位置，即侧位停车时两平行车辆间水平距离。

下面将以轿车为例，如图1，对侧位停车过程有影响的几个重要参数详述之：

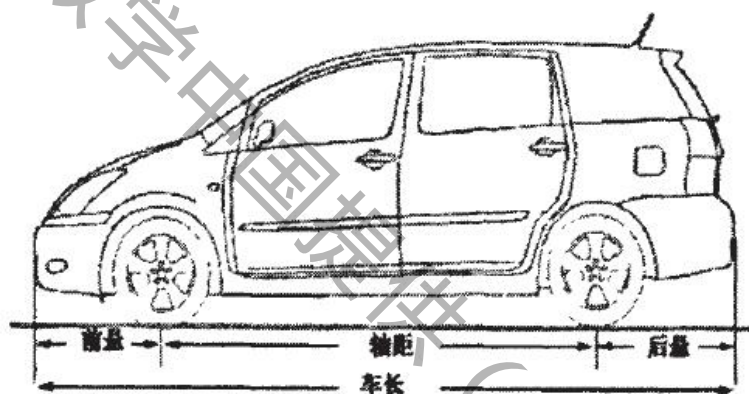


图1 汽车基本参数示意图

1. 车长：沿汽车的前进方向最前端到最后端的距离。
2. 车宽：汽车最左端到最右端的距离，不包括反光镜、转向侧灯、脚踏板等部位。
3. 轴距：汽车前轴中心至后轴中心的距离。
4. 后悬：汽车最后端至后轴中心的距离。
5. 最小转弯半径：转向盘转到极限位置时的转弯半径为最小转弯半径。当转向盘转到极限位置，汽车以最低稳定车速转向行驶时，外侧转向轮的中心平面在支承平面上滚过的轨迹园半径。如图2所示

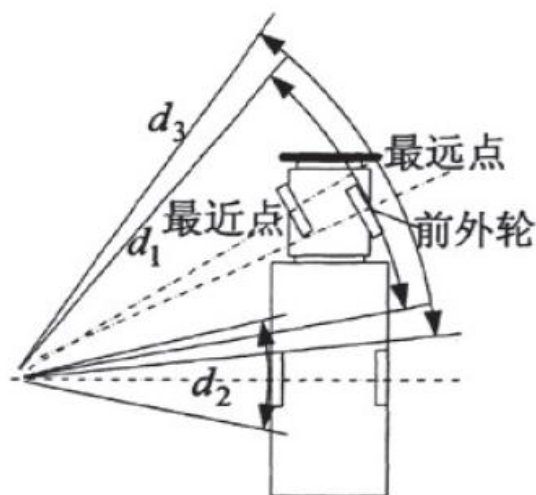


图2 汽车最小转弯半径示意图

6. 车位长度：路旁停车位前后都停有车辆时，前方车辆尾部到后方车辆头部的距离。

7. 车身方向角的定义为：车身与竖直方向Y的夹角 $\theta$ 。

当给定停车位空间、车型，需要计算侧位停车轨迹时，在整个侧位停车过程中，车位长度、车位宽度、车长、车宽、轴距及最小转弯半径为已知参数，两平行车辆间水平距离、侧位停车转弯半径为及转向角为未知参数。侧位停车已知参数可不断变化，如何通过已知参数的不断变化，归纳出侧位停车算法，准确的计算未知参数的值，并归纳出侧位停车轨迹变化规律，是下文将要论述的问题。

#### 4.2 “侧位停车完成”的定义

车辆完全进入车位，车身与竖直方向夹角不大于 $5^\circ$ ，且车辆中轴与停车位中轴间水平距离不大于100mm(根据实践知，即使停车结果不是很理想，驾驶员也可在停车入位后，轻松的把车辆调整到理想位置)。

#### 4.3侧位停车过程分析

把专家经验进行提炼，整个停车过程可分为3个步骤。以轿车为例，如图3、4、5

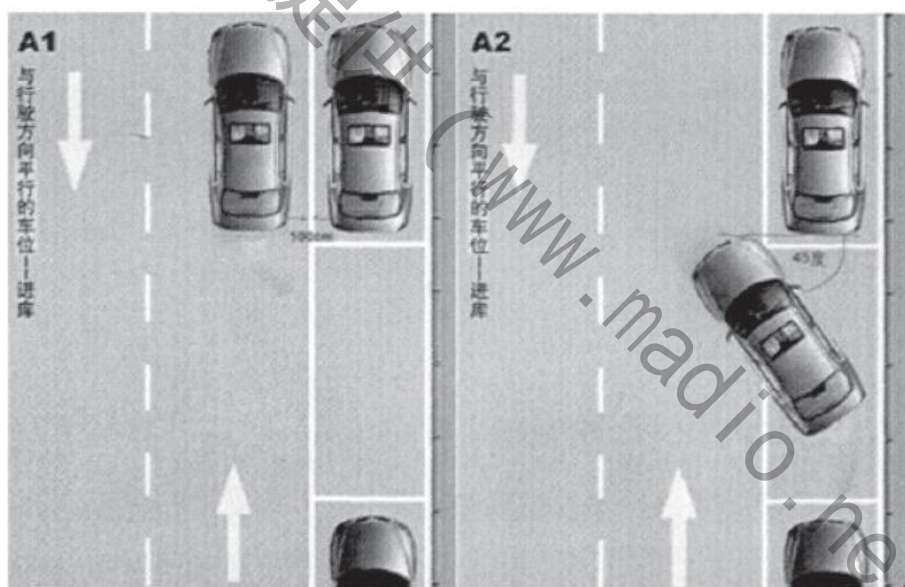
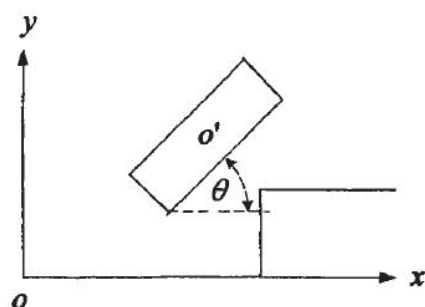
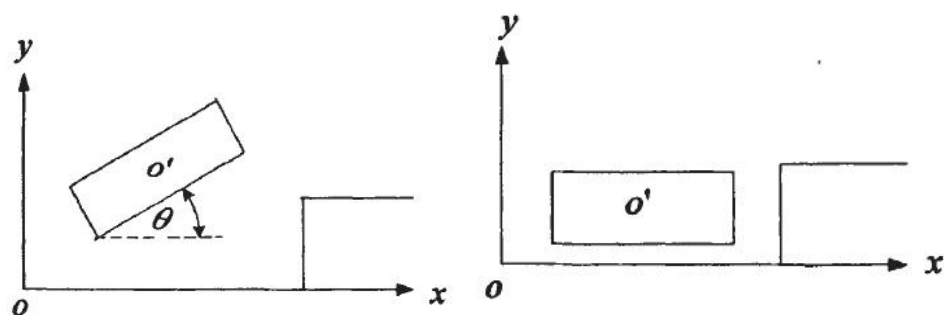


图3 准备泊车，调整方向盘

图4 逐渐增大 $\theta$ 角

图5 逐渐减小  $\theta$  角直至完全泊入停车位

步骤1. 把车辆停放在合适的初始位置，如图3所示。

步骤2. 转动方向盘，逐渐增加车身方向角  $\theta$ ，如图4所示。

步骤3. 侧位停车到适当位置后，逐渐减少车身方向角  $\theta$ ，直到完全泊入停车位为止，如图5所示。

整个侧位停车过程可简述如下(见图3-图5)：选好初始位置，开始侧位停车，在步骤2、步骤3中，在保证车辆不碰撞到前一车辆的前提下，车辆首先逐渐增加，到右后轮距离路边一定距离时，然后逐渐减少  $\theta$ ，到两后轮中任一后轮距离后方车辆、路边一定距离。

#### 4.4 车辆数学模型

##### 4.4.1 铰接车辆模型

如图6所示，铰接轮式车辆转向系统中，铰接的前后车架的各转向轮均绕轴线0作无侧滑的滚动，而转向轴线则是过前后轴线所作垂直地面的平面的交线。图中1表示前桥中心到铰接中心的距离；L为表示轴距； $\theta$ 表示转向角；B表示轮距； $R_1$ 表示前外轮转弯半径；

$R_1$ 表示前内轮转弯半径； $R_2$ 表示后外轮转弯半径； $R_2$ 表示后内轮转弯半径

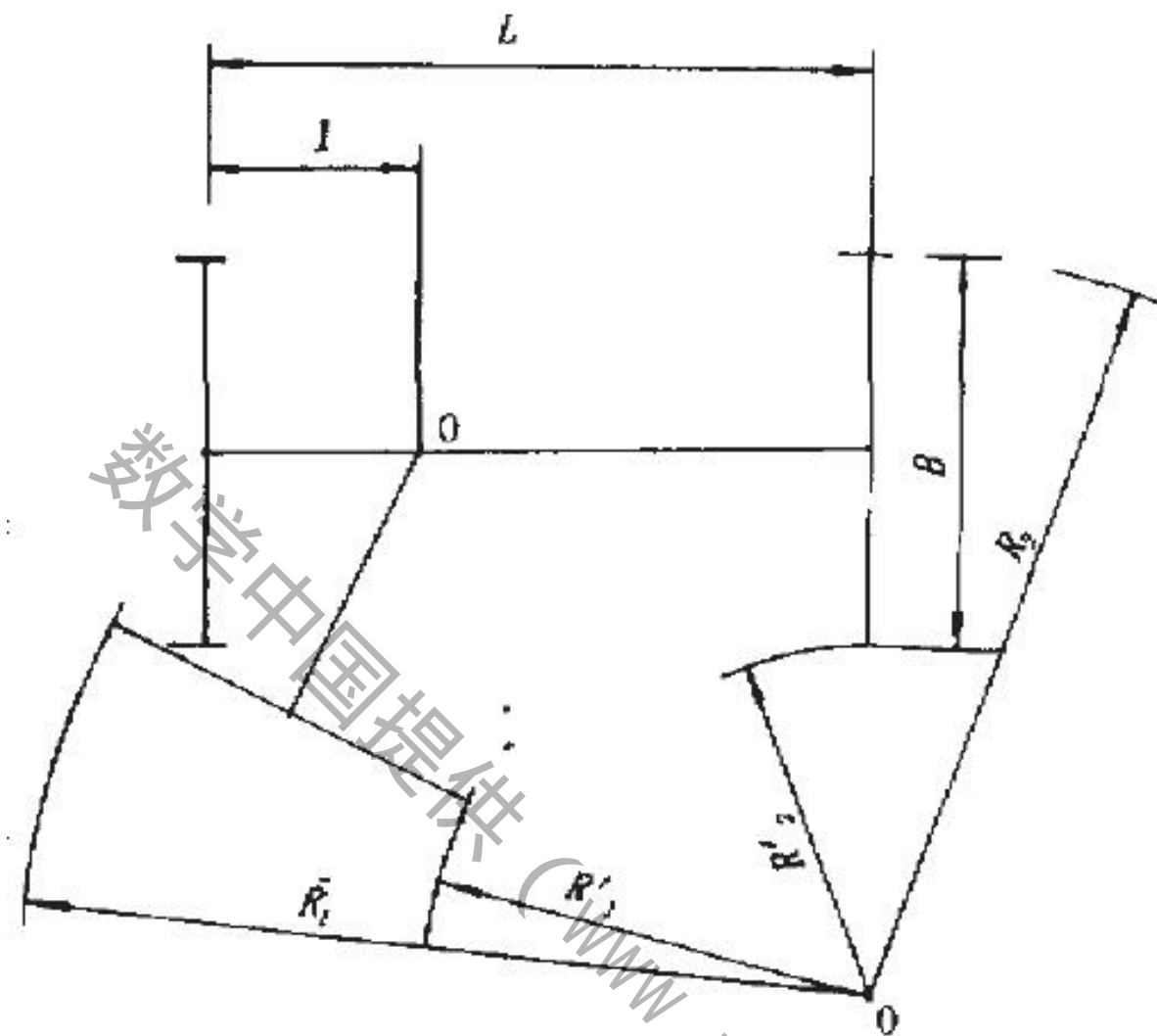


图6 铰接式卡车转弯简图

从图6中的几何关系可以计算出铰接车辆的转弯半径：

$$R_1 = \frac{B}{2} + \frac{(L-l) + l \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$R_2 = \frac{B}{2} + \frac{l + (L-l) \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$R_1' = R_1 - B \quad (1)$$

$$R_2' = R_2 - B$$

$$R_1 = L + l \tan \theta$$

## 4.4.2 小车理想的运动学模型，如图7所示

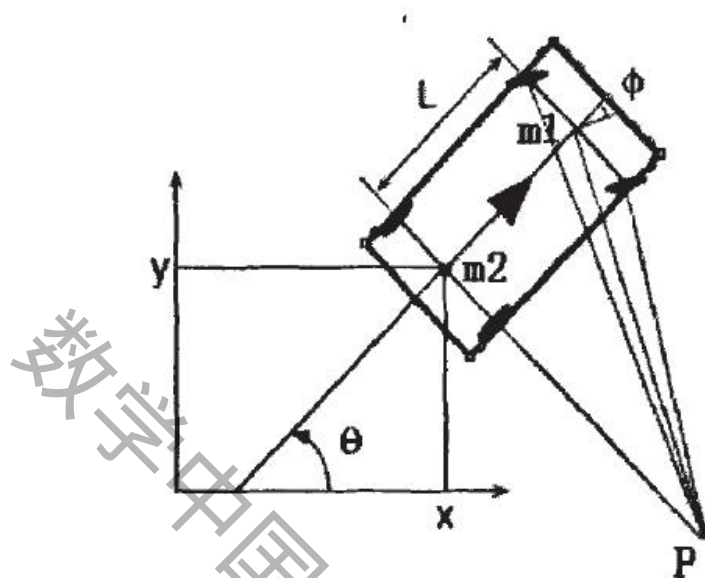


图7 小车的运动学模型

因为要求车辆转向时，车轮不打滑，所以过车辆四个车轮中心点，作车轮的垂直线，相交于一点P。从图7看出，左、右前轮偏转角度是不相同的。可以把两个前轮等效于在前车轴中点J的一个车轮，等效的偏转角度为 $\beta$ 。假设车辆前车轴中点m1的运行速度为

$v$ ，后车轴中点m2的坐标为 $(x, y)$ ，则可列出车辆的运动方程：

$$\begin{cases} x = v \cos \beta \sin \theta \\ y = v \cos \beta \sin \theta \\ \theta = v \sin \theta / L \\ r = l \cot \theta \end{cases} \quad (2)$$

将 $\beta = v \sin \theta / L$ 对时间积分代入 $\begin{cases} x = v \cos \beta \cos \theta \\ y = v \cos \beta \sin \theta \end{cases}$ 后，在对时间积分即可求得前轴中心点

的轨迹方程式：

$$\begin{cases} x_r(t) = L \cdot \cot \theta \cdot \sin\left(\frac{v \sin \theta}{L} \cdot t\right) \\ y_r(t) = -L \cdot \cot \theta \cdot \cos\left(\frac{v \sin \theta}{L} \cdot t\right) + L \cdot \cot \theta \\ x_r^2 + (y_r - L \cot \theta)^2 = (L \cdot \cot \theta)^2 \end{cases} \quad (3)$$

由此证明当低速泊车，且不考虑轮胎侧滑时，前轮的行径轨迹与轮距，轴距及后轴中心点转向角有关，而与泊车速度无关。

## 5. 问题分析

如今汽车越来越多，这对交通的负面影响随之而来。汽车不断增多，而配套的停车场不能跟上汽车的增加速度，停车难时常发生。驾驶员将不断地面临在有限的车位空侧位停车。这对驾驶技术不熟练的驾驶员有一定的难度。本文对解决判断能否停车及轨迹等问题就有实际的意义。

在对题目中的问题进行分析前，我们应该了解侧位停车的基本情况。实际上，判断能否停车的条件是：泊车时须保证车身不与障碍物发生空间碰撞。通过对专家经验的提炼，将泊车过程简述如下：选择好初始位置，开始泊车，转动方向盘，逐渐增加车身方向角 $\theta$ ，逐渐从 $0^\circ$ 增加到 $\theta$  ( $\leq \varphi_{\max}$ )，当两后轮距离障碍物一定距离时又逐渐减少车身方向角，直到侧位泊车完成。为了简化模型的方便求解，根据假设，建立车辆的数学模型证明假设的科学性。

从经验和几何分析知道，侧位停车最简单的路径是由两个相切圆弧构成的“S”型路径，根据圆相切的几何性质建立等式。一次泊车无法将车停入车位，并且多数驾驶员的停车技术存在问题，因此我们只考虑上述两次泊车的情况，研究车辆侧位停车的轨迹、初始位置。由于问题一、二的车型有着质的区别，分别建立了铰接式集装箱货车和小型车的数学模型。

模型一从停车的逆过程探讨了问题一。铰接式集装箱货车头与尾部是不同步的，故必须保证头和尾都不与障碍物相碰撞。然后对车位的最小长度和宽度进行求解，通过比较判断是否可以安全的停入侧位车位。在车辆转弯过程中，模型二根据假设，从建立圆的方程的角度解决汽车改变路线后能否安全驶入车位，进而向驾驶员提出建议。

## 6 模型的建立和求解

### 模型一

#### 1、车位尺寸的要求

明显，车位尺寸大小不得小于车辆大小。一个合适的车位还得考虑到泊车的可操作性。即驾驶员可通过正常的操作将车辆无碰撞地驶入车位。而泊车过程是一个可逆的过程，即车辆可以泊入车位，也可以从车位取出。为了简化模型，本文从取车过程研究车位最小尺寸。

首先，对平行取车的要求进行分析。车辆驶出车位的过程如图(8)、(9)示，车，宽为 $w$ 的卡车泊在I、II两车之间。为了更精确的确定最小车位尺寸，先将卡车后退至与I车距离为 $m$ 的位置。然后将前轮向左侧偏转到最大角度 $\varphi_{\max}$ ，让车辆缓慢行驶。车辆右

后角移动至OP延长线上的点A'时(O点是后轮轨迹的圆心)，与车位右边缘的距离大于 $m$ 。车辆挂箱部分为一个整体，转弯时是刚性的，由此得到 $OA=OA'$ ，设其长度为 $R$ ，线段 $PA'$ 长度为 $h$ 。(如图8)

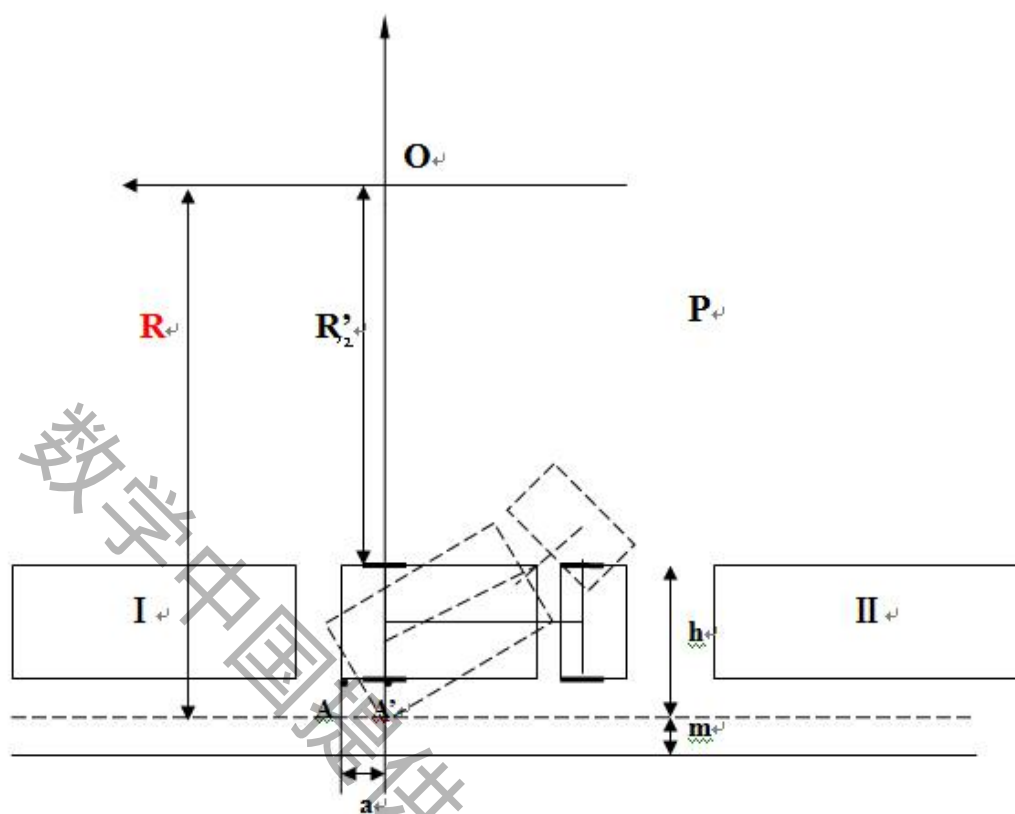


图8 车位的宽度

由图8的几何关系有：

$$\begin{cases} R^2 = \sqrt{a^2 + (R_2' + w)^2} \\ h = R - R_2' \\ B_{\min} = m + h \end{cases} \quad (4)$$

在铰接式集装箱卡车的数学模型中有式子：

$$\begin{cases} R_2' = R_2 - B \\ R_2 = \frac{B}{2} + \frac{l + (L - l)\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{联立(4)、(*)得到车位的最小宽度为：} B_{\min} = m + \sqrt{a^2 + (R_2' + w)^2} - \frac{l + (L - l)\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{B}{2} \quad (5)$$

（由于未查询到数据，所以本文在模型一中一律用字母）

通过图8的几何关系我们得到了车位的最小宽度  $B_{\min}$ ，现在将车辆继续前行到如图9的位置，就可以得到车位的最小长度。图9中车辆前右下角恰好不与车位的车辆碰撞。由图9中的几何关系得到：





## 模型二

在第一阶段的研究中，我们已得出理想情况（即车位大小确定，无临时障碍物出现的情形下）车辆驶入停车位的最优路径，现简述如下：

从日常的操作经验及简单的几何分析知，侧位泊车最简单的路径是由两个相切圆弧组成的“S”型路径，两相切圆等半径如图 10 所示。根据一阶段问题二的模型，知：点  $S_0$  一定在安全区域内。

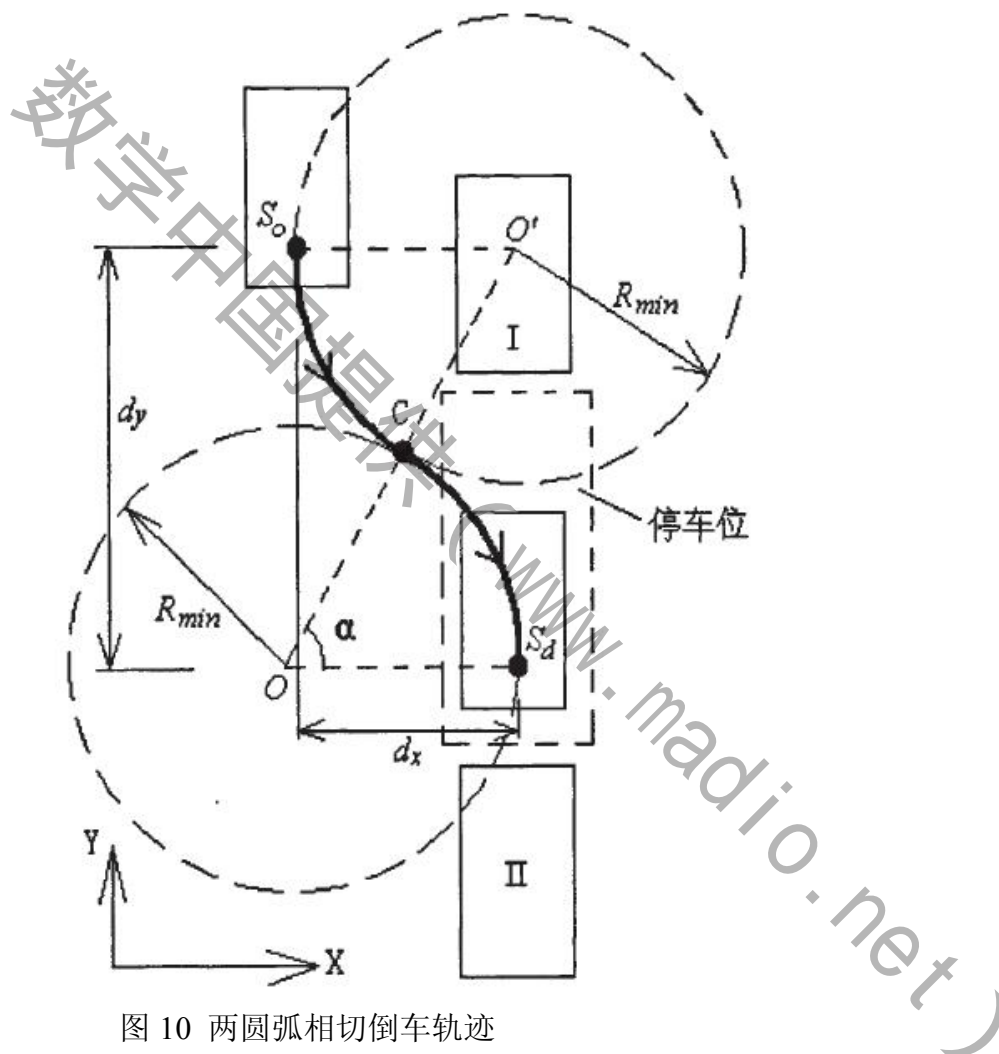


图 10 两圆弧相切倒车轨迹

图 10 中，点  $S_0$  为汽车的初始位置，目标位置在  $S_d$  处，小车首先将前轮向右偏转到最大值  $\varphi_{\max}$ ，以点  $O'$  为中心，以最小转向半径  $R_{\min}$  做转向运动。到达 C 点处时，小车身偏向角为  $\alpha$ ，此时小车前轮向左偏转到达最大值  $\varphi_{\max}$ ，以点  $O$  为中心，以最小转向半径  $R_{\min}$  做转向运动，最终驶入 I、II 车之间的停车位。

理想情况下汽车应沿最简路径行驶入车位，但人工驾驶时操作可能不准确，由于需要避让行人或临时障碍物等，可能影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的线路行进，则其行驶路线将改变。将临时障碍物看做一个点，当该点出现在原计划“S 形”路线上



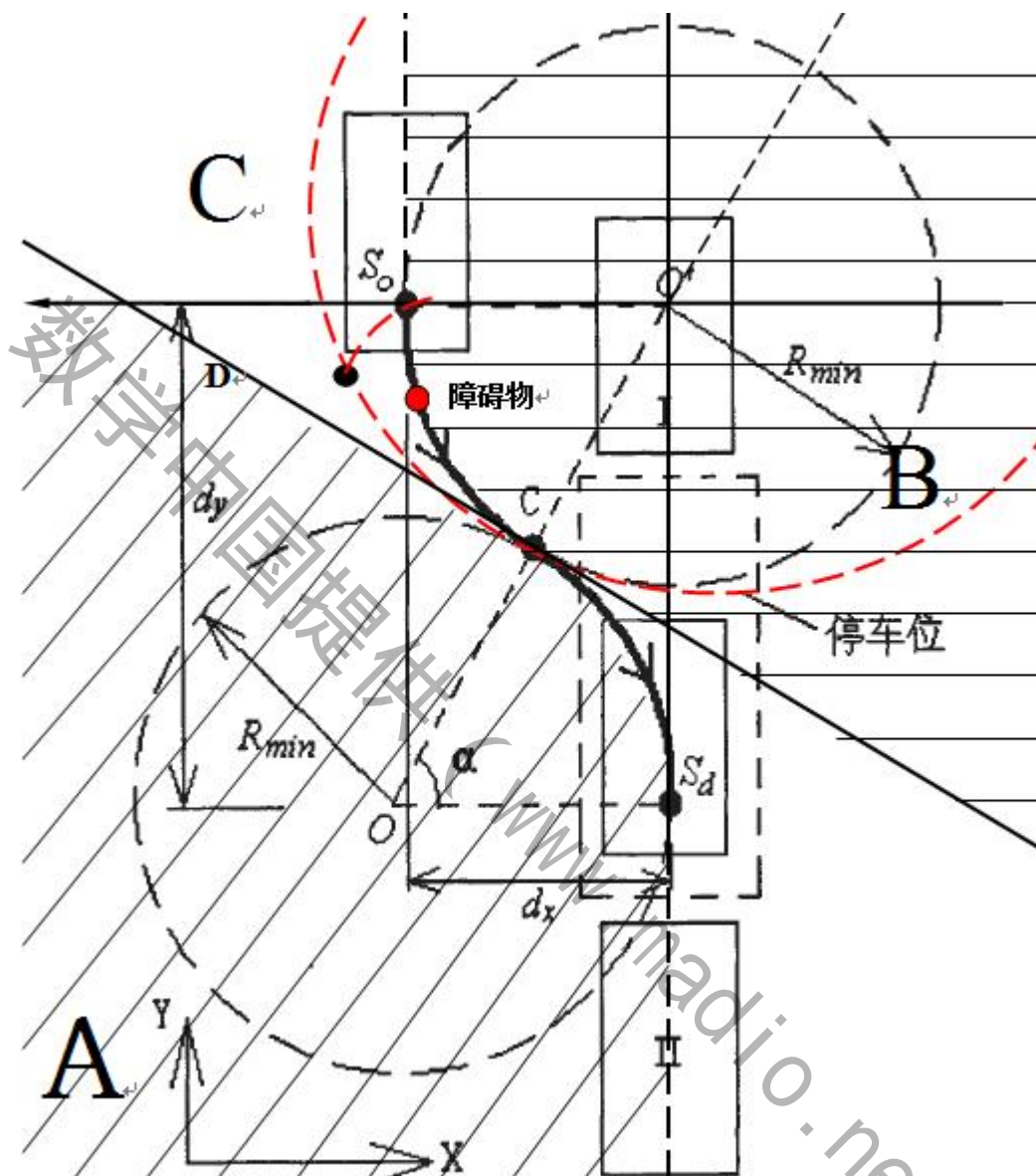


图 12 新线路

图中12，直线m为圆O、圆O'的公切线。小车初始位置在 $S_0$ 处，圆弧 $S_0D$ 为汽车避让临时障碍物过程的轨迹，点D为避开临时障碍物后驾驶员认为安全时汽车的位置。小车从初始位置 $S_0$ 到目标位置 $S_d$ ，在x，y轴上的位移分别为 $d_x, d_y$ 。设 $S_0, S_d$ 坐标分别为 $(x_0, y_0), (x_d, y_d)$ 。则有以下等式

$$\begin{cases} d_x = x_d - x_0 = 2R_{\min}(1 - \cos\alpha) \\ d_y = y_d - y_0 = 2R_{\min}\sin\alpha \\ OO' = 2O'C = 2R_{\min} \end{cases} \quad (7)$$

$$(\angle\alpha = \angle O O' S_d)$$

消去  $\alpha$  得：

$$d_y = -\sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2} \quad (8)$$

试验车为大众桑塔拉世纪新秀1.8MT，该车最小转弯半径  $R_{\min}=5500\text{mm}$ ，由此得点  $O(4763, 2750)$ ,  $C(2381.5, 1375)$ ,  $S_0(0, 2750)$ ,  $S_a(2381.5, 0)$ .

图中 12，直线  $OO'$  的方程为： $y=kx$

代入点  $O(4763, 2750)$  的坐标得

$$\text{到：} y=\sqrt{3}x \quad (9)$$

汽车在  $D$  点时，根据假设，知道汽车的具体位置，即点  $D$  的坐标  $(x_1, y_1)$ 。  
过点  $D$  的新圆圆心为  $E$ ，坐标为  $(m, n)$ ，半径为  $r$ 。则该圆的方程为：

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \quad (10)$$

将点  $C(2381.5, 1375)$ ， $D(x_1, y_1)$  代入圆的方程解得：

$$\begin{cases} m = \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1} \\ n = \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1} \cdot \sqrt{3} \end{cases}$$

故，新轨迹的圆的方程为：

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1}\right)^2 + \left(y - \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1} \cdot \sqrt{3}\right)^2 = \\ & \left(2381.5 - \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1}\right)^2 + \left(1375 - \frac{7562167.25 - x_1^2 - y_1^2}{4763 + 2750\sqrt{3} - 2x_1 - 2\sqrt{3}y_1} \cdot \sqrt{3}\right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由动圆的方程可解出新圆半径  $r$ ，由 (6) 式中的  $r = l \cot \theta$  得到  $r$  与  $\theta$  的关系。该模型将避开临时障碍物后在  $D$  点的位置、新轨迹半径  $r$ 、线路为新轨迹时汽车的转弯角度  $\theta$  联系在一起，三者知其一，其余两个量也就知道了。

第一阶段的模型二得到的安全区域如图示 13：

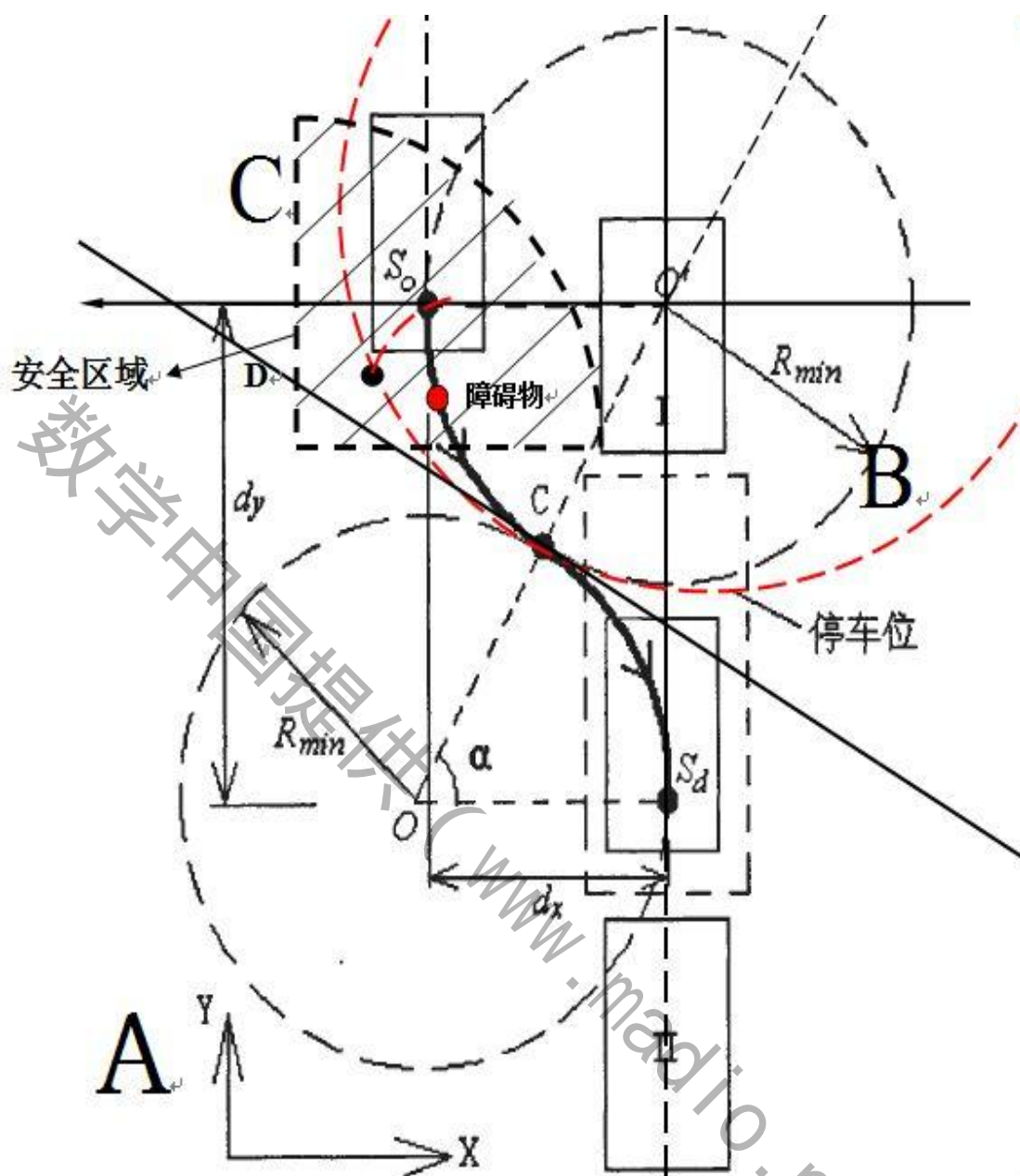


图 13

如图示,若汽车为躲避障碍物行驶至 D 点时,若车载定位装置判断 D 点位置在安全区域外,则汽车不可能两次泊车成功,此时又可分为两种情况:通过多次泊车最终可将汽车行驶进车位,考虑到驾驶员的技术不一致,本文不考虑这种情况;无论怎样泊车都无法使车安全驶入给定车位。若车载定位装置判断 D 点在安全区域内则通过调整汽车,使汽车进入红色圆弧轨迹,行驶至 C 点,沿着弧  $CS_d$  行驶。

以上模型比较理想化，下面通过结合几款典型轿车的实际参数，运用 MATLAB 计算出参数变化时路径的变化，并用 MATLAB 仿真模拟多次泊车路径。如下图：



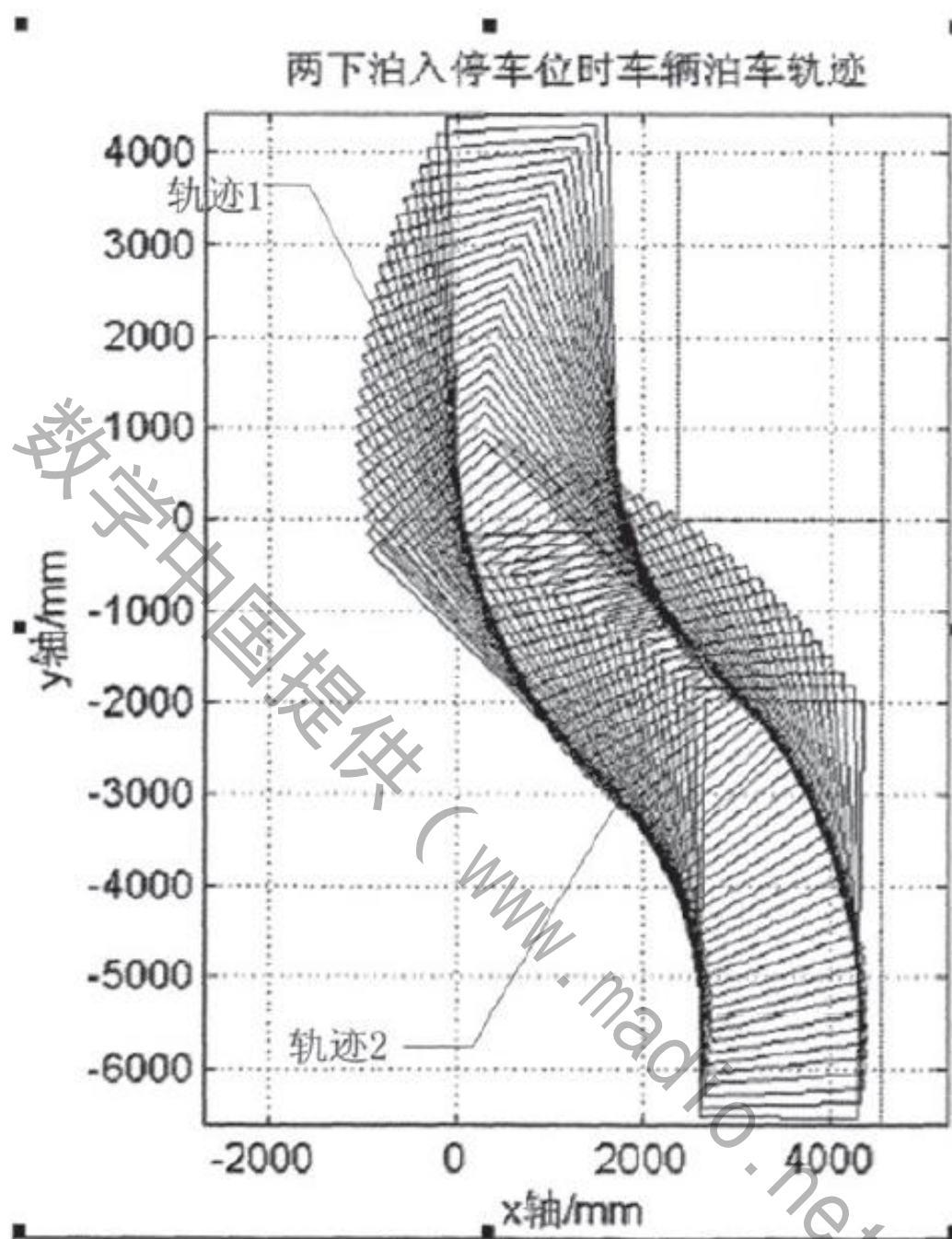


图 15 最小停车位时泊车轨迹的 MATLAB 仿真图

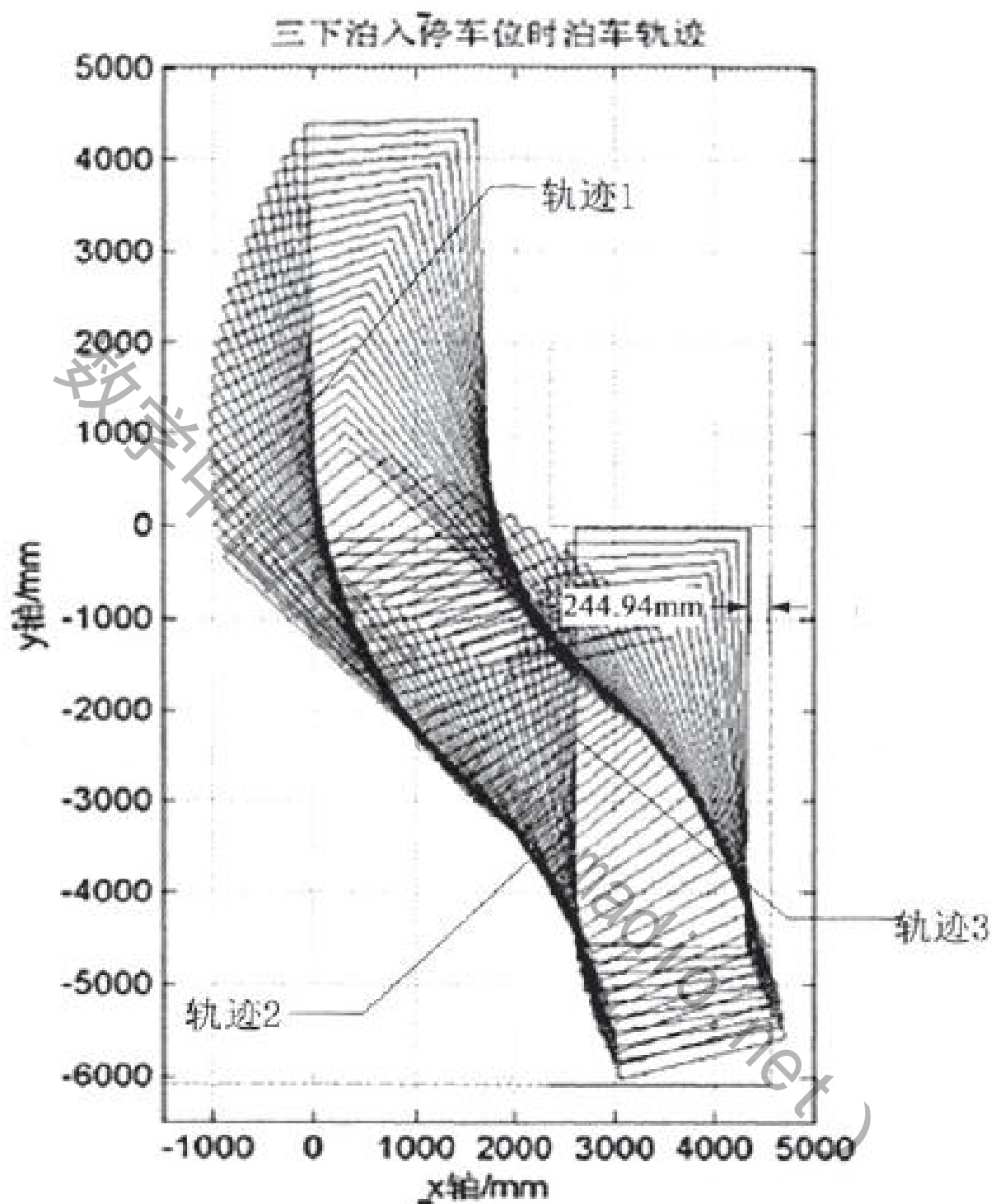


图 16 三次泊入车位时泊车轨迹示意图



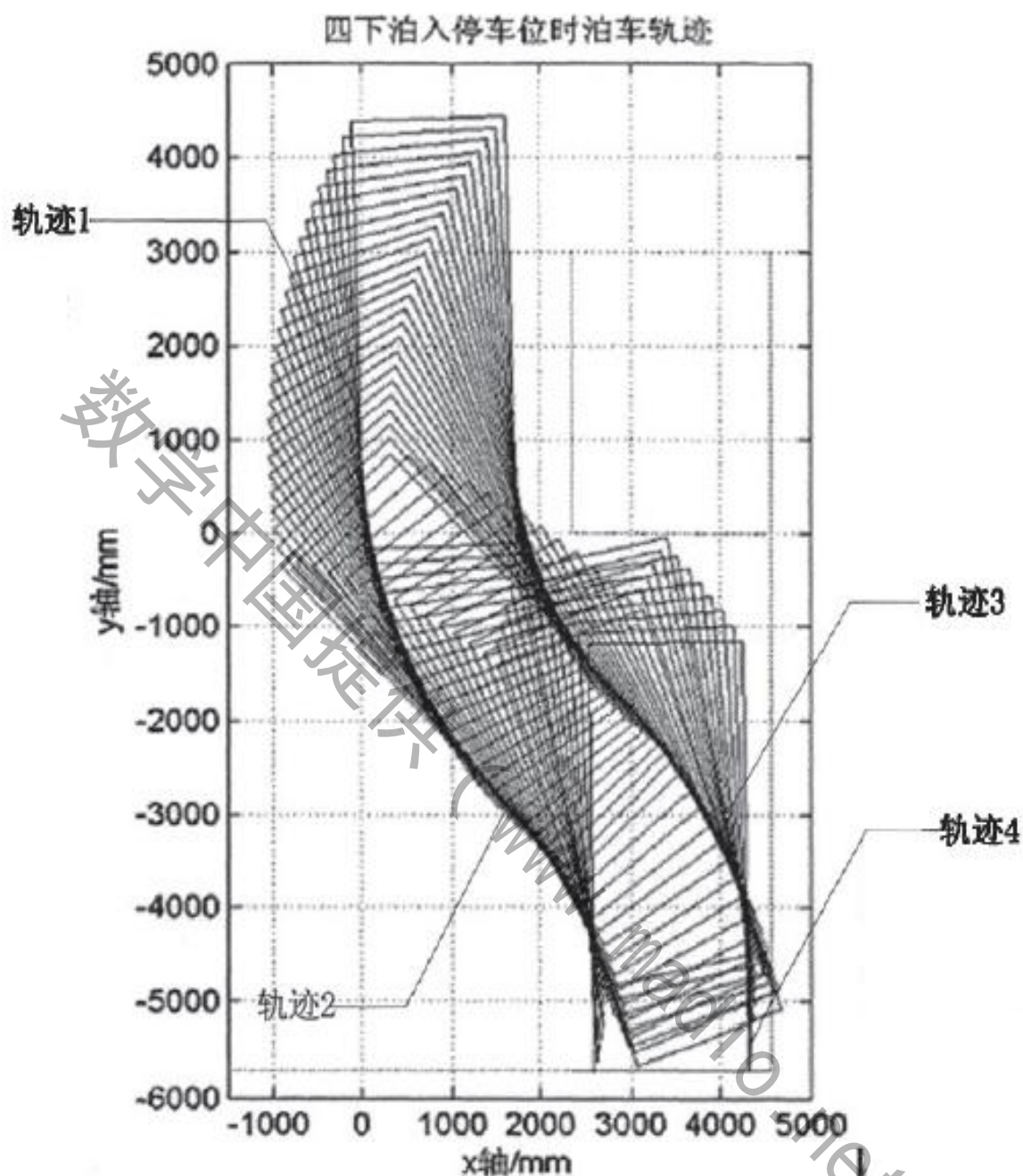


图 17 四次泊入车位时泊车轨迹示意图

通过 MATLAB 仿真模拟多次泊车路径，可以得到更精确的最佳轨迹。从而向驾驶员提出更科学的建议，使得建立的模型更科学。

## 8、模型的结果分析与评价

模型一的建立，通过停车与取车是一个可逆的过程，简化了模型，得到了试验车的最小停车位，其长为  $H_{\min}$ ，宽为  $B_{\min}$ ，Yanan Zhao 在[9]中证明了狭小空间内实现停

车的可能性并提出和验证了侧位停车的车位长度是车长的 1.67 倍, 即:  $lp=1.67*H_{\min}$ ,

而最小宽度为:  $m+w$ .  $m+w$  与  $B_{\min}$  能够较好吻合, 证明建立的模型是成功的。考虑到一

次泊车就驶出车位比较理想化, 不具一般性。本文只是从比较片面的分析了判断能否顺利停车, 没有考虑多次泊车的情况, 这是本文的一大缺陷。因此, 在模型改进时可以从这方面入手, 更好地解决问题一。

而模型二, 模型二通过建立新路线的轨迹方程(即圆的方程), 较粗糙地确定了新路线的轨迹, 考虑到驾驶员的技术不一致, 又通过 MATLAB 仿真模拟行驶路线, 从而较科学地向驾驶员提出建议。

模型的评价:

本文的两个模型在解决问题中都是从简化模型的方式出发, 没有过多地考虑到实际泊车过程的复杂性。因此, 只是较客观地解决了问题, 没有从根本性上解决问题。不过简化模型的方式作者觉得有点创意。

模型的优点:

- (1) 从驾驶者的心理角度来说, 所作的分析基本合理;
- (2) 分析泊车过程是必要而且客观的;
- (3) 建立车辆的数学模型, 使模型的建立更直观、简化了模型。
- (4) 充分利用了汽车转弯轨迹是圆, 在问题二中建立圆的方程解决问题, 使得解决的问题方案简单明了。

模型的缺点:

- (1) 所测数据不是很详细;
- (2) 一次泊车就驶出车位比较理想化, 不具一般性。本文只是比较片面的分析了判断能否顺利停车。模型二也只是简单的从两次泊车研究问题, 只是提出了建议, 并没有给出改变轨迹后的详细操作步骤。使得问题二的解决方案比较模糊。

## 9、模型的改进

模型一只是从取车过程讨论问题, 比较理想化。存在一定的缺陷, 且不具一般性。因此在模型改进时可以通过先固定初始位置建立模型, 然后以此为基础, 改变初始位置, 解决了问题。应用 MATLAB 仿真侧位停车轨迹, 进而更精确的确定试验车的最小停车位尺寸, 科学地判断试验车能否泊车。

模型二中结合几款典型轿车的实际参数, 运用 MATLAB 计算出参数变化时路径的变化, 并用 MATLAB 仿真模拟多次泊车路径。比较科学地解决了问题, 但是没有考虑到实际泊车过程的复杂性及客观条件, 没有从多次泊车入手建立模型解决问题。所以在模型改进中可以从多次泊车入手, 建立新的模型, 更好地解决此问题。

## 10、参考文献

【1】Yanan Zhao, Enunaniel G. Collins Jr. Robust Automatic Parallel Parking in Tight Spaces via Fuzzy Logic [A]. Robotics and Autonomous Systems, 2005, 51:111-127

【2】何峰, 自动泊车系统的研究及实现, <http://202.202.121.8:8088/S/paper.aspx?>, 2010-05-21

【3】赵玲，平行泊车方法研究与仿真，<http://202.202.121.8:8088/S/paper.aspx?>，2010-05-21

【4】杨忠炯，铰接式车辆转向机构的优化设计，[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Conference\\_165116.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Conference_165116.aspx)

【5】吴瑞鸿，张光仁。车辆倒车运动轨迹理论推导与验证[J]，车辆研测资讯[J]，2006，7

## 11、附录

1、由于在网上、图书馆中没有查询第一问中铰接式卡车的数据，所以文中用字母代替

2、以下是 MATLAB 程序的编写过程

```
d=300;
while d<1500;
    d=d+10;
    b1=d+b1-(r-w)*cos θ 1;
    b2=d+b1-(r-w);
    b3=[r*r+z*z, 2*b2*z, b2*b2-r*r];
    b4=roots(b3);
    b4=max(b4); %sin β
    b5=(b2+z*b4)/r; %cos β
    b6=qx-(2*r-w)*sin θ 1+r*b4+z*b5; %bly
while b6>-100;
    #=#+1*pi/180;
    b1=(2*r-w)*cos θ 1;
    b2=d+b1-(r-w);
    b3=[r*r+z*z, 2*b2*z, b2*b2-r*r];
    b4=roots(b3);
    b4=max(b4); %sin β
    b5=(b2+z*b4)/r; %cos β
    b6=qx-(2*r-w)*sin θ 1+r*b4+z*b5; %bly
end;
lw=(2*r-w)*sin θ 1, %v1+v2
end;
```

泊车转向角和最小停车位的 MATLAB 计算值

平行距离(mm)	泊车转角( $^{\circ}$ )	最小车位(mm)	平行距离(mm)	泊车转角( $^{\circ}$ )	最小车位(mm)
600	48.2	6935.5	1100	45.8	6656.9
700	47.1	6818.4	1200	46.6	6752.8
800	46.1	6697.2	1300	47.4	6845.9
900	44.0	6456.1	1400	48.3	6936.3
1000	44.9	6558.0	1500	49.1	7024.1

停车次数与泊车次数的关系表

停车位长(mm)	泊车次数	转弯半径 $r_n$ (mm)	转向角 $\theta_n$
7000	2	5500, 5500	$-44.0^{\circ}$ , $44.0^{\circ}$
6500	3	5500, 6200, 13500	$-44.0^{\circ}$ , $7.3^{\circ}$ , $-7.3^{\circ}$
6000	4	5500, 8200, 5500, 5500	$-44.0^{\circ}$ , $21.4^{\circ}$ , $-9.59^{\circ}$ , $9.59^{\circ}$
5800	系统提示：请减小两平行车辆间距离！令 $d = 0.8m$		
	泊车次数	转弯半径 $r_n$ (mm)	转向角 $\theta_n$
	4	5500, 5800, 5500, 5500	$-44.1^{\circ}$ , $14.4^{\circ}$ , $-5.1^{\circ}$ , $5.1^{\circ}$