第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会 网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4969085 邮编：010021 Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承　诺　书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为： #1366

参赛队员 (签名)：

队员 1：邓　浩

队员 2：张　鑫

队员 3：谢　添

参赛队教练员 (签名): 李以瑜

参赛队伍组别： 专科组

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会　　网址：www.tzmcm.cn
电话：0471-4969085　　邮编：010021　　Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#1366

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2013 年第六届“认证杯”数学中国
数学建模网络挑战赛

题　　目　　杨阿姨的困惑

关 键 词　　离散型报童模型；最优化；计算机模拟

摘　　　要：

本文把两个不同售价所在时间段看成相互独立的两个时段进行分析，假设在杨阿姨这里买包子的日需求量变化符合泊松分布，运用离散型报童模型，得到每天最优的包子生产量。然后用计算机对这个问题进行模拟，验证模型的准确性，得到该模型可靠的结论。

问题一:我们要问的问题有：

1 最近几天里，每天 0.5 元卖出去的包子数和 0.3 元卖出去的包子数。

2 阿姨每天最多能包多少个包子。

问题二:在第一个时段的平均需求量 $\lambda=300$，第二个时段的平均需求量为 $\lambda=50$ 的情况下，日最优包子生产量为 362 个。日期望利润为 89.44 元。

参赛队号：　#1366

参赛密码 ____________
（由组委会填写）

所选题目：　D　题

Abstract

The classical Miss Yang’ s problem can be similar to the classical newsboy problem in some ways.

So we can make as two sections that can analysis independently , then we can get the best result. At the last,
We use the computer to simulate in order to test and verify the result.

Problem 1(we must ask the Miss yang’ s problems):

How many steamed stuffed buns are sold by 0.5yuan.

How many steamed stuffed buns are sold by 0.3 yuan.

How many steamed stuffed buns are made by Miss yuan.

Problem 2:

In first section, the average wanted number is $\lambda = 300$, and in second section, the average wanted number is $\lambda = 50$, so the best steamed stuffed numbers is 362, and the profit is 89.44 yuan.

一、 问题重述

杨阿姨每天上午在家中做好包子，下午在所住小区的大门外贩卖，晚上到另一个小区陪孙子。杨阿姨每天为一件事纠结：不知道该做多少包子。包子的成本是 2 角钱，一般卖 5 角钱一个，如果包子做多了，到了距离晚上还有半个小时的时候包子还没有卖完，杨阿姨就必须降价处理，按 3 个包子 1 元钱销售；到了晚上包子仍有剩余就只能免费送人处理。但是如果包子做少了，不够卖，又会造成一定的利润损失。现在杨阿姨向你请教，每天应该做多少包子?

问题 1 为了解答该问题，你需要了解哪些情况? 所举情况需要尽量保证杨阿姨可以回答。

问题 2 假定你需要了解的情况都已经了解到，请建立数学模型，给出每天应该做的包子数量，并进行适当论证。

二、问题分析

杨阿姨每天下午去小区门口卖包子， 主要问题是该做多少包子才能使杨阿姨的利润最大。

对于问题 1，由于主要问题要求求出该做多少包子才能使杨阿姨的利润最大，所以提问首先应该涉及售价和销售情况，另外题中牵涉定时降价与赠送处理所以要问清阿姨的工作时间。利润可以通过已知条件得到，那么就应该围绕销售情况进行提问。

对于问题 2，题目要求在问题中的情况都了解的情况下，建立相应的数学模型，得到具体的应做包子数，并进行适当论证。本题的包子问题与“报童模型”类似，那么我们可以结合报童模型对该问题进行分析。与报童问题不同的地方是本题的售价分为两个阶段，第一个阶段是下午到晚上半个小时，包子的售价为$0.5元/个$,第二个阶段是接下来半个小时，包子的售价为 1 元三个，即$\frac{1}{3}元/个$。可以把这两个时间段看成独立的两段，分别讨论最优的包子准备数，其和即为一天该做的包子数。又如果杨阿姨做的包子不能满足别人购买包子的需求，那么她可以赚到的钱没赚到，这也是要考虑的损失（机会损失）。

二、 模型假设

1.杨阿姨卖包子的时间为 14：30 到 19 点。
2.杨阿姨每天都要卖包子，不考虑周末和日常时包子需求量的波动。
3.两个时间段的包子需求量在一年内都符合泊松分布。
4.杨阿姨给出的答案为：

	日期 1	日期 2	日期 3	日期 4	日期 5	日期 6	日期 7
0.5 元卖出	330	310	290	290	280	290	310
0.3 元卖出	60	55	40	45	50	55	45

每天最多包包子 500 个。

四、符号说明

λ_a	a 时段的日平均包子需求量
λ_b	b 时段的日平均包子需求量
c	单个包子的成本
p_a	a 时段的包子单价
p_b	b 时段的包子单价
c_{pa}	a 时段单个包子的机会损失
c_{pb}	b 时段单个包子的机会损失
Q	整天的最优日生产量
Q_a	a 时段的包子最优日生产量
Q_b	b 时段的包子最优日生产量
V	整天的最大期望利润
V_a'	a 时段的最大期望利润
V_b'	b 时段的最大期望利润

五、模型的建立与求解

由问题分析，基于问题中存在需求量随机变动与价格定时变动（在一天中固定时间开始降价）牵涉到了利润因为时间的变动而变化。为了方便求解最后最大期望利润，我们通过以开始降价的时间点作为分界点来划分时段，降价前为 a 时段（14：30 到 18：30），降价后为 b 时段（18：30 到 19：30）。

因此可以把问题重新表述为：杨阿姨在时间段 a 到 b 时间段之间在小区门口买包子，单个包子的成本为 c 元，a 时段包子的售价为 p 元，b 时段包子的售价为 p_b。

如果包子卖完之后还有人来买，那这个时候的需求量为损失的机会成本，a 时段机会成本为 c_{pa}，b 时段机会成本为 c_{pa}。b 时段结束后剩余包子免费送人（全部损失）。杨阿姨应该每天应该生产多少个包子能使利润最大化。

5.1 模型建立

5.1.1 需求量的概率分布模型

假设在某阶段的包子需求量都符合泊松分布，每天平均需求量为 λ，即

$$P\{D = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,... \qquad (5\text{-}1)$$

5.1.2 包包子数量的模型

设需求为随机变量 D，假定我们通过问阿姨过去每天的销售记录，获得了需求 D 的概率分布函数[1]：

$$P_k = P\{D = k\}, \qquad k = 0,1,2,...$$

显然，P_k 满足条件 $P_k \geq 0, \sum_k P_k = 1$。由此，我们记需求 D 的分布函数为

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} P_k \qquad x \geq 0$$

如果阿姨做了 Q 个包子。做包子的成本为 Qc。若需求 $D = k$，则当需求 k 小于 Q 时，能收入 kp，但还剩余 $Q-k$，其值为零；而当需求 $k > Q$ 时，阿姨能收入 Qp。于是阿姨做 Q 个包子时的期望为

$$V(Q)=\sum_{k=0}^{Q}k\ pP_k+\sum_{k=Q+1}^{\infty}QpP_k-Qc$$
$$=Q\ (p-c)-p\sum_{k=0}^{Q}(Q-k)P_k$$

于是阿姨的问题是确定订购量Q使她的获利$V(Q)$达到最大，即以下优化问题

$$\max\ \ V(Q)$$

因为在这里Q是离散的，即$Q=0,1,2,...$。也就是$V(Q)$对Q的导数不存在，所以，我们对上式用差分方法来求极值。为此，我们求$V(Q)$的差分

$$\Delta V(Q)=V(Q+1)-V(Q)$$
$$=\left\{(Q+1)(p-c)-p\sum_{k=0}^{Q+1}(Q+1-k)P_k\right\}-\left\{Q\ (p-c)-p\sum_{k=0}^{Q}(Q-k\ )P_k\right\}$$
$$=p-c-pF(Q)$$

记$Q'=\min\{Q\mid\Delta V(Q)\le 0\}$，其中约定空集的最小值为$+\infty$。则有上式可得

$$Q'=\min\left\{Q\mid F(Q)\ge\frac{p-c}{p}\right\}$$

于是当$Q<Q'$时，$\Delta V(Q)>0$，即$V(Q+1)>V(Q)$;而当$Q\ge Q'$时，$\Delta V(Q)\le 0$, 即$V(Q+1)\le V(Q)$。因此，$V(Q)$在$Q\le Q'$上单调递增，$Q\ge Q'$上单调递减。故$V(Q)$在Q'处取到最大值，Q'是包子的最优生产量。

显然，Q'是满足下式的唯一Q

$$F(Q-1)<\frac{p-c}{p}\le F(Q)$$

下面考虑包子不够卖的时候的利润损失（机会损失）。

当报包子的生产量小于需求是，即$Q<D$时，有一部分需求$D-Q$没有被满足。对于阿姨而言，这是一种机会损失。而没有被卖出去的包子就会被送人。那么，就需要对以上模型做出修正：没损失一份报纸需求的机会损失为c_p元。此时，准备Q个包子的期望利润为

$$V'(Q)=\sum_{k=0}^{Q}k\ pP_k+\sum_{k=Q+1}^{\infty}[Qp-(k-Q)c_p]P_k-Q_c$$

于是包子的问题是以下的优化问题

$$\max \quad V'(Q)$$

求 $V'(Q)$ 的差分，得

$$\Delta V'(Q)=(p+c_p-c)-(p+c_p)F(Q)$$

与上类似，我们可以推算出阿姨考虑机会损失时的最优生产量

$$Q''=\min\{Q\mid \Delta V'(Q)\le 0\}=\min\left\{Q\mid F(Q)\ge \frac{p+c_p-c}{p+c_p}\right\}$$

或者 Q' 是满足下式的最小 Q

$$F_a(Q_a-1)<\frac{p+c_p-c}{p+c_p}\le F_a(Q_a) \qquad （5-2）$$

综上所述，我们可以给出针对该类问题的一般模型：

$$\begin{cases} P\{D=k\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \qquad k=0,1,2,... \\ F(x)=\sum\limits_{k=1}^{x}P(k) \\ F(Q-1)<\dfrac{p+c_p-c}{p+c_p}\le F(Q) \end{cases} \qquad （5-3）$$

最大期望利润为

$$V'(Q)=\sum_{k=0}^{Q}kpP(k)+\sum_{k=Q+1}^{\infty}[Qp-(k-Q)c_p]P(k)-Qc \qquad （5-4）$$

对 a 阶段，则有

$$\begin{cases} P_a\{D_a=k\}=e^{-\lambda_a}\dfrac{{\lambda_a}^k}{k!}, \qquad k=0,1,2,... \\ F_a(x)=\sum\limits_{k=1}^{x}P_a(k) \\ F(Q_a-1)<\dfrac{p_a+c_{pa}-c}{p_a+c_{pa}}\le F(Q_a) \end{cases} \qquad （5-5）$$

最大期望利润为

$$V_a'(Q_a)=\sum_{k=0}^{Q_a}k\ p_aP_a(k)+\sum_{k=Q_a+1}^{\infty}[Q_ap_a-(k-Q_a)c_{pa}]P_a(k)-Q_ac \qquad （5-6）$$

式中，P_a 为在一段时期内每天在 a 阶段的包子需求量的概率分布，λ_a 为每天 a 阶段的包子平均需求量，Q_a 是为 a 阶段准备的包子数量。p_a 为 a 阶段的包子售价，c_{pa} 为 a 阶段单个包子的机会损失，c 为单个包子的成本。

对 b 阶段，则有

$$\begin{cases} P_b\{D_b = k\} = e^{-\lambda_b} \dfrac{{\lambda_b}^k}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\dots \\ F_b(x) = \sum\limits_{k=1}^{x} P_b(k) \\ F(Q_b - 1) < \dfrac{p_b + c_{pb} - c}{p_b + c_{pb}} \le F(Q_b) \end{cases} \tag{5-7}$$

最大期望利润为

$$V_b'(Q_b) = \sum_{k=0}^{Q_b} k\ p_b P_b(k) + \sum_{k=Q_b+1}^{\infty} [Q_b p_b - (k - Q_b) c_{pb}] P_b(k) - Q_b c \tag{5-8}$$

式中，P_b 为在一段时期内每天在 a 阶段的包子需求量的概率分布，λ_b 为每天 a 阶段的包子平均需求量，Q_b 是为 b 阶段准备的包子数量。p_b 为 a 阶段的包子售价，c_{pb} 为 b 阶段单个包子的机会损失，c 为单个包子的成本。

则每天杨阿姨应该做的包子数 Q 为

$$Q = Q_a + Q_b \tag{5-8}$$

最大期望利润为

$$V = V_a' + V_b' \tag{5-9}$$

5.2 模型求解

5.2.1 问题一的解答

根据以上模型的建立，我们可以知道要建立模型，需要得到需求的概率分布中的 λ 值，得到了以往的销售数据后就可以确定 λ 的值，那么，就需要问杨阿姨她以往在 a、b 时段的销售数据。

然后，还要确定杨阿姨包包子的最大值。

5.2.2 问题二的解答

由模型假设中杨阿姨那儿得到的数据可得：

以往在 a 阶段平均的销售量为

$$\frac{330+310+290+290+280+290+310}{7}=300$$

b 阶段的平均销售量为

$$\frac{60+55+40+45+50+55+45}{7}=50$$

则有

$$P\{D_a=k\}=e^{-300}\frac{300^k}{k!},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$P\{D_b=k\}=e^{-50}\frac{50^k}{k!},\qquad k=0,1,2,\ldots$$

又，从题中可以直接知道 a 阶段售价、b 阶段成本、每个包子的单件成本 $p=0.5, p'=0.3, c=0.2$（元），还缺少 a、b 阶段的机会损失。每失去一个包子需求的时候，机会损失就是损失的单件利润，所以

$$c_{pa}=p_a-c=0.3$$
$$c_{pb}=p_b-c=0.1$$

带入公式 5-5、5-6、5-7、5-8 得

$$\begin{cases} F_a(Q_a-1)<0.75\le F_a(Q_a) \\ F_b(Q_b-1)<0.5\le F_b(Q_b) \\ F_a(x)=\sum_{k=1}^{x}P_a(k) \\ F_b(x)=\sum_{k=1}^{x}P_b(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_a'(Q_a)=\sum_{k=0}^{Q_a}k\ p_aP_a(k)+\sum_{k=Q_a+1}^{\infty}[Q_ap_a-(k-Q_a)c_{pa}]P_a(k)-Q_ac \\ V_b'(Q_b)=\sum_{k=0}^{Q_b}k\ p_bP_b(k)+\sum_{k=Q_b+1}^{\infty}[Q_bp_b-(k-Q_b)c_{pb}]P_b(k)-Q_bc \end{cases}$$

用 matlab 求解得（附录 1）：

$$Q_a=312$$
$$Q_b=50$$
$$V_a'=85.57$$
$$V_b'=3.87$$

即

$$Q = Q_a + Q_b = 362$$
$$V' = V_a' + V_b' = 89.44$$

六、结果分析与模型检验

6.1 结果分析

当$\lambda_a = 300$时，$Q_a = 312$，当$\lambda_b = 50$时，$Q_b = 50$。即当平均每天在 a 阶段包子的需求量为 300 个时，应该为 a 阶段准备 312 个包子；当平均每天在 b 阶段包子需求量为 50 个时，应该为 b 阶段准备 50 个包子。那么这种情况下每天就应该准备$Q = 312 + 50 = 362$个包子。

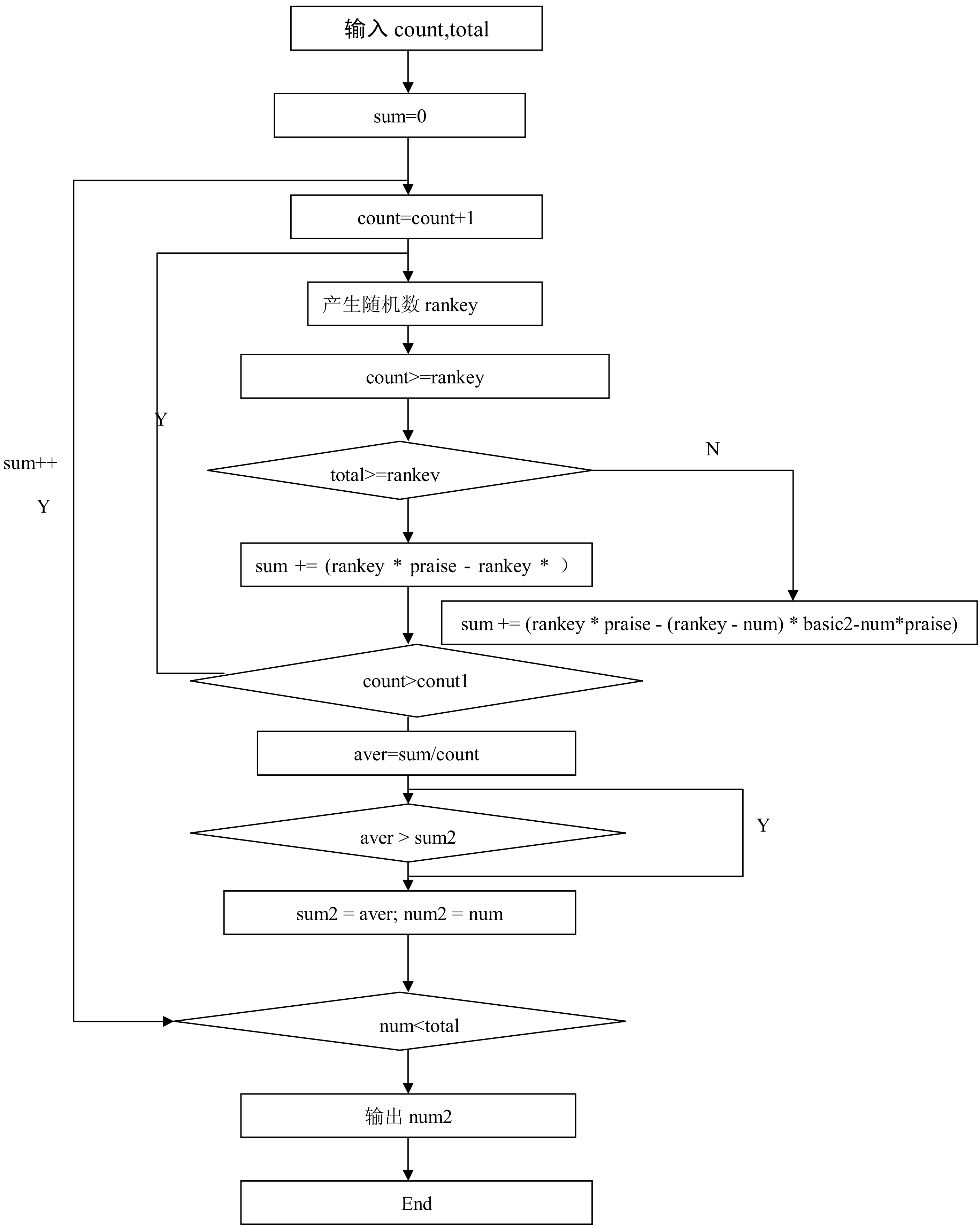
6.2 模型检验（计算机模拟）

为了检验该模型和现实的符合程度，我们用计算机来模拟包子问题。

对于给定的每天做包子量（Q），利用计算机得到服从给定λ值的泊松分布的随机数，即为每天来阿姨这里买包子的需求量，从而可以计算出阿姨每一天包子的利润及经过给定次数的运行后一天的平均利润。于是，令Q依次取 1,2,3 ••• 则经过比较可以得到使阿姨买一天包子的利润最大的最优生产量Q'（$Q' = Q_a' + Q_b'$）。根据这个思路，我们可以做出下面的流程图（用 C#编出程序，附录 3）：

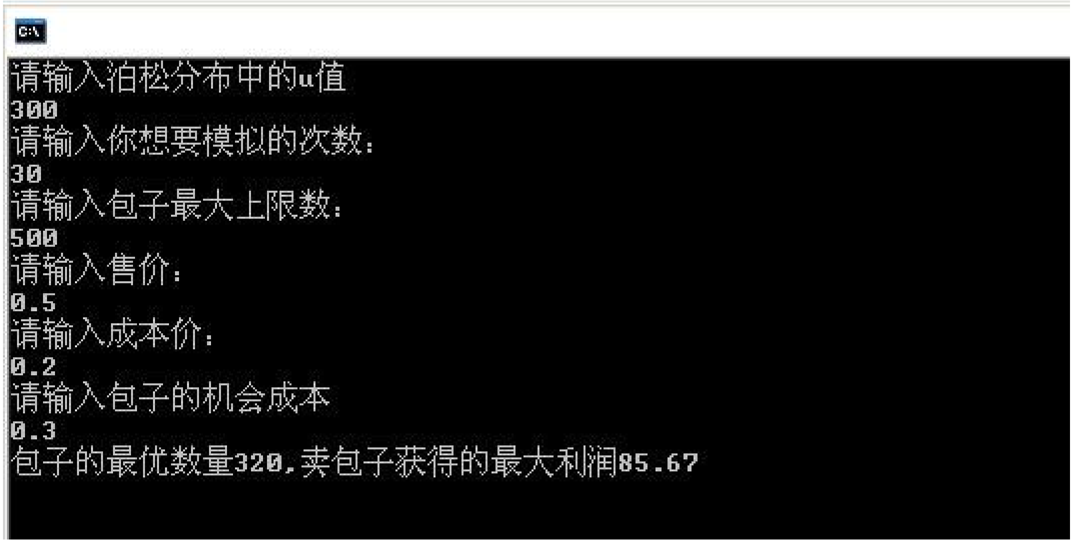
变量说明：
count：模拟次数
count1:模拟天数
total 包子上限数
praise:包子正常售价
basic:包子成本价
basic2:包子的机会成本价格
sum:包子利润的累加
sum2:包子得到的最大利润
num:生产包子的起始数量
num:包子最优生产量
rankey:产生随机卖出包子的样本值

程序流程图：



输入 count,total
sum=0
count=count+1
产生随机数 rankey
count>=rankey
Y
N
sum++
Y
total>=rankev
sum += (rankey * praise - rankey * ）
sum += (rankey * praise - (rankey - num) * basic2-num*praise)
count>conut1
aver=sum/count
aver > sum2
Y
sum2 = aver; num2 = num
num<total
输出 num2
End

第一阶段：



第二阶段：

从上面两个程序运行图可有：每天包子的最优生产量为 320+48=368；

对应的期望利润为 85.67+3.84=89.51;

对比我们模型得出的结果偏差不大，说明我们的模型基本合理。

七、模型评价

优点：得到了关于这类问题的最优化决策和相应利润的一般模型，只需要得到相应的平均需求量就可得到最优目标，推广性较强。

缺点：把两个时间段相对独立来讨论，忽略了他们之间的前后联系。

八、参考文献

[1] 胡英奇，《随机运筹学》，北京：清华大学出版社，2012。
[2] 石博强 等，《matlab 数学计算范例教程》，北京：中国铁道出版社，2004。
[3] 李以渝，《工程应用数学》，北京：北京理工大学出版社，2011。

九、附录

1.matlab 求包子最优生产量

```
clear

syms p1 p2 u
u=            %日平均需求量
for i=1:2000
    p1=0;
    p2=0;
   for j=1:i-1;
      p1=p1+poisspdf(j,u);
      p2=p1+poisspdf(j+1,u);
   end


    if p1<0.5&p2>0.5;

    break

    end
    i

End
```

2.matlab 求日期望利润

```
clear
syms q cp p c a1 a2 u V
q=      %包子生产量
cp=     %机会损失
p=      %售价
c=      %单件成本
u=      %日平均需求量
a1=0
a2=0
for i=1:1000
    if i<=q

         a1=a1+i*p*poisspdf(i,u);
    else
        a2=a2+(q*p-(i-q)*cp)*poisspdf(i,u);
    end
end
V=a1+a2-q*c  %日期望利润
```

3.C# 模拟包子问题

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;

namespace ConsoleApplication1
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {


            Console.WriteLine("请输入泊松分布中的u值");
            int u = Convert.ToInt32(Console.ReadLine());
            int bosong1 = 1;
            int bosong2 = 0;
            int bosong = 0;
            int count1 = 1;//模拟天数
            int sum3 = 1;
            int sum4 = 1;
```

```
#region  泊松分布

for (int i = 0; i <= u; i++)
    bosong1 *= (int)(1 / 2.7);
for (int i = 0; i <= count1; i++)
{
    sum3 *= u;
}
for (int i = 1; i < count1; i++)
{
    sum4 *= i;
}
bosong2 = (sum3 / sum4);
bosong = bosong1 * bosong2;

#endregion

#region   计算包子的卖出量

Console.WriteLine("请输入你想要模拟的次数：");
int count = Convert.ToInt32(Console.ReadLine()); //模拟次数的输入
Console.WriteLine("请输入包子最大上限数：");
int total = Convert.ToInt32(Console.ReadLine()); //包子上限数的输入
Console.WriteLine("请输入售价：");
double praise = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());//包子正常售价
Console.WriteLine("请输入成本价：");
double basic = Convert.ToDouble(Console.ReadLine());  //包子成本价
Console.WriteLine("请输入包子的机会成本");
double basic2 = Convert.ToDouble(Console.ReadLine()); //包子的机会成本价格
int bosong3 = 0;//泊松分布范围1
int bosong4 = 0;//泊松分布范围2
double sum = 0; //包子利润的累加
double sum2 = 0; //包子得到的最大利润
int num = 1; //生产包子的起始数量
int num2 = 0;//包子最优生产量
Random ran = new Random();  //产生随机卖出包子的样本值
for (num = 1; num < total; num++)    //判断生产包子的数量与包子上限数的关系
{
```

```
                for (count1 = 1; count1 < count; count1++)  //模拟天数与模拟
次数的关系
                {
                    for (int i = 1; i <= count1; i++)
                    {
                        bosong3 += bosong;
                    }
                    for (int i = 1; i < count1; i++)
                    {
                        bosong4 += bosong;
                    }

                    int rankey = ran.Next(0, 300);//随机卖出包子的样本值范围

                    if (num > rankey && num == rankey) //包子样本与生产包子
的关系及其利润的累加

                        sum += (rankey * praise - rankey * basic);

                    else
                        sum += (rankey * praise - (rankey - num) * basic2 - num
* praise);
                }



                double aver = sum / count; //每一次模拟的平均利润
                if (aver > sum2)
                { sum2 = aver; num2 = num; }
            }

            Console.WriteLine("包子的最优数量{0},卖包子获得的最大利润{1}",
num2, sum2);
            Console.Read();
            #endregion
        }
    }
}
```