

## 第六届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：**1485**

参赛队员（签名）：

队员 1： 郭珍

队员 2： 郭家桥

队员 3： 史丽娜

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：

## 第六届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 四面六边透水框架群的减速率影响因素分析

关 键 词 四面六边透水框架群 量纲分析 Pi 定理 数据拟合

## 摘 要：

混凝土四面六边透水框架群护岸技术不但可以减弱水流冲刷，还能促进泥沙的淤积，具有良好的护岸作用。[1]但它作为一项新型的江河护岸技术，仍缺乏完善的理论体系，其自身各个参数与减速效果之间还没有形成具体的经验公式，对此仍有很大的研究空间。

本文围绕着四面六边透水框架群的三个主要参数：框架尺寸、架空率和抛投长度对其减速率的影响建立了数学模型并进行了比较详细的分析和研究。由于此题目涉及到物理领域中的流体运动方面的知识，所以本文采用量纲分析法建立该问题的数学模型。首先分析找出影响四面六边透水框架减速率的各个变量，采用量纲分析的方法建立变量之间的关系式，利用 Pi 定理求解分析出透水框架尺寸、框架群架空率和抛投长度是影响四面六边透水框架群减速率的直接主要的因素。然后通过收集相关的模拟实验数据资料，利用 MATLAB 中 CFTOOL 工具箱拟合数据曲线，得出各参数和减速率之间的拟合函数，计算出透水框架群减速率的最优解，并分析各个参数在不同的取值范围内对透水框架群减速率的影响。最后得出结论：减速率与长宽比的关系表达式为

$$\eta = -4.233e-006 \lambda^4 + 0.0002286 \lambda^3 - 0.006103 \lambda^2 + 0.08657 \lambda + 0.2883$$

减速率与架空率关系表达式为

$$\eta = -0.008752 \varepsilon^4 + 0.1425 \varepsilon^3 - 0.8749 \varepsilon^2 + 2.441 \varepsilon - 1.95$$

减速率与抛投长度的关系表达式为

$$\eta = 0.7377 (1.89 - e^{-0.2701L})$$

当杆件长宽比为 15.2077，框架群架空率为 5.0337，抛投长度大约为 15m 时，减速率达到最优。

本文的主要特点是将复杂的物理流体力学方面的模型转化为较简单的数学模型，算法更加简便易懂，且所得结果较为准确，在堤岸防护方面具有现实的指导作用。

参赛队号： 1485

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

所选题目： A 题

## 英文摘要（选填）

The permeable tetrahedrons'revetment technology can not only weaken water erosion, but also promote sediment accumulation. It has a good role in revetment. But as a new technology of the river bank protection, it still lacks a complete theoretical system and it has not yet formed empirical formula between its own parameters and the effect of slowing. So we still have a big space to research it.

We made a mathematical model around the effect of the permeable tetrahedrons' three main parameters: the size of frame, the overhead ratio and the casting length to its speed reduction ratio and had a deep research and analysis on it in this article.

Because this question relates to the knowledge of fluid motion in the physical, we use the Dimensional Analysis to make a mathematical model for this question in the article.

At first, we should analyze and find out the variables that affect the permeable tetrahedrons' speed reduction ratio. We use the Dimensional Analysis to establish the relationship between the variables and work out that the size, the overhead ratio and the casting length of the permeable tetrahedrons are the directly principal factors affecting the permeable tetrahedrons' speed reduction ratio by the Pi Theorem. Then we use the CFTOOL Toolbox in the MATLAB to fit the data curve by collecting the simulation data and work out the best answer of the permeable tetrahedrons' speed reduction ratio and analyze the various parameters' effect on the permeable tetrahedrons' speed reduction ratio in various. So the final relational expression of the speed reduction ratio and length-width ratio is that  $\eta = -4.233e-006 \lambda^4 + 0.0002286 \lambda^3 - 0.006103 \lambda^2 + 0.08657 \lambda + 0.2883$ . The relational expression of the speed reduction ratio and the overhead ratio is that  $\eta = -0.008752 \varepsilon^4 + 0.1425 \varepsilon^3 - 0.8749 \varepsilon^2 + 2.441 \varepsilon - 1.95$ . The relational expression of the speed reduction ratio and casting length is that  $\eta = 0.7377 (1.89 - e^{-0.2701L})$ . Above all, we can conclude that when the pole's length-width reaches to 15.2077, the overhead ratio reaches to 5.0337, and the casting length of the permeable tetrahedrons reaches to 15m, the speed reduction ratio will get its best value.

The main feature of this article is translating the models about Hydromechanics to the mathematical models. The algorithm becomes more easy and the results become more accurate. Moreover, this article will guide the direction about the river bank protection.

## 一、问题的重述

在江河中，堤岸、江心洲的迎水区域被水流长期冲刷侵蚀。在河道整治工程中，需要在受侵蚀严重的部位设置一些人工设施，以减弱水流的冲刷，促进该处泥沙的淤积，以保护河岸形态的稳定。

现在常用的设施包括四面六边透水框架等。这是一种由钢筋混凝土框杆相互焊接而成的正四面体结构，常见的尺寸为边长约1 m，框杆截面约 $0.1 \times 0.1$  m。将一定数量的框架投入水中，在水中形成框架群，可以使水流消能减速，达到减弱冲击，防冲促淤的效果。

对四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度都直接或间接地影响着其消能减速的效果。当前人们通过水槽实验等方法，已经积累了一些实验数据，也见诸各类文献当中。但由于数据量和数据精度仍有各种不足之处，还没有形成足够完善的经验公式。请你建立合理的数学模型，给出这三个参数与其减速效果之间的关系。

## 二、问题的分析

由题意可知，该问题的目的是建立一种数学模型，求出混凝土四面六边透水框架群的框架尺寸、架空率和长度这三个参数与其减速效果之间的具体函数关系表达式。首先我们需要提出减速率这一概念用来衡量框架群的减速效果，则减速率 $\eta$ 即为函数表达式里的因变量。由于该问题有三个参数，即三个自变量，为了更清楚直观的表示出减速率与这三个参数之间的关系，我们在求解的过程中将其中两个参数取固定值，单独分析和研究减速率与另外一个参数的关系，最后求出减速率与该参数的具体函数关系表达式。问题中的第一个参数为框架尺寸，在这里采用杆件的长宽比 $\lambda$ 来表征单个框架体的杆件长和杆截面正方形边长之比；第二个参数架空率表征框架群内部空隙的相对大小；第三个参数长度指四面六边透水框架群沿顺水流方向的铺设长度。然后需要利用量纲分析方法建立数学模型，依次确定减速率与这三个参数之间是否具有某种联系，即确定减速率是否是分别以这三个参数为自变量的函数。最后通过搜集得到的模拟实验数据，列出数据表格，再通过 MATLAB 软件进行数据拟合，分别绘制出减速率与这三个参数的关系图形，进而求出具体的三个函数关系表达式，求出最优解。

## 三、模型假设

- 1、在模拟实验中，忽略实际情况中发生的水面风力及地转力等因素对水流速率造成的影响
- 2、忽略实际情况下河道中的水流会受到旁侧入流或降雨等水流的汇聚。
- 3、假设河道的底坡倾斜角度  $i=0$ 。
- 4、假设河道的边壁光滑平整，水流速率均匀恒定，忽略边壁粗糙造成的水流流速的变化。
- 5、假设四面六边透水框架杆件截面是正方形。

## 四、符号说明

- L: 四面六边透水框架群沿顺水流方向的铺设长度  
l: 单个四面六边透水框架的杆长度  
d: 单个四面六边透水框架体边杆的截面宽度（即截面正方形的边长）  
 $V_{\text{单}}$ : 单个四面六边透水框架所排开水的体积  
V: 四面六边透水框架群所占空间的总体积

N: 四面六边透水框架群中四面体的个数

$\varepsilon$ : 单位体积架空率

$V_1$ : 为投放四面六边透水框架群前测点的流速

$V_2$ : 为投放四面六边透水框架群后测点的流速

g: 重力加速度

p: 流体密度

u: 流体粘度

$\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ : 量纲分析中所需的无量纲量

$\eta$ : 减速率

$\lambda$ : 杆件长宽比

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 研究减速率与框架尺寸（长宽比）之间的关系

减速率, 即是原河床流速（即无工程措施）减去框架群末端的河床流速（即有工程

措施）前后流速的差值与原流速之比。[2]即:

$$\eta = \frac{v_1 - v_2}{v_1}$$

杆件长宽比表征单个框架体的大小, 定义为:

$$\lambda = \frac{l}{d}$$

(1) 关系原理分析: 由于框架的四个节点附近杆间距小, 对水流的作用相互重叠, 其分割碰撞水流的效果降低, 因而杆件两端的减速作用低于中部。杆件长宽比加大, 受节点影响的两端长度相对减小, 杆件对水流作用的效率提高, 减速率增加。杆件长宽比过大, 则水体中杆件体积显著减小, 因而对水流的作用也减弱。因此, 四面六边透水框架群只有在具有恰当的透水性时减速效果较好, 过密或过疏都会影响其减速效果。[3]

(2) 量纲分析[4]: 在水中投放透空四面体后, 某测点流速 $V_2$ 一般来说与 $V_1, p, u, g, l, d$ 有关: 要寻求的关系为:

$$V_2 = y_1(V_1, p, u, g, l, d)$$

更一般的形式记作:

$$f_1(V_2, V_1, p, u, g, l, d) = 0$$

利用 Pi 定理解决问题:

取长度 L, 质量 M 和事件 T 为基本量纲, 上式中各个物理量的量纲分别为:

$$[V_2] = [V_1] = LT^{-1},$$

$$[p] = ML^{-3},$$

$$[u] = ML^{-1}T^{-1},$$

$$[g] = LT^{-2},$$

$$[l] = [d] = L$$

由此得到量纲矩阵

$$A_{37} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 A 的秩为 3，所以齐次方程：

$Ay=0$ ,  $y=(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)^T$  有  $7-3=4$  个基本解

解齐次方程的基础解系为  $y=($

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

由这四个基础解可以得到 4 个无量纲量：

$$\pi_1 = V_2 * V_1^{-1} \quad \pi_2 = V_1 * p * u^{-1} * d^{-2}$$

$$\pi_3 = V_1^{-2} * g * d \quad \pi_4 = 1 * d^{-1}$$

存在某个函数  $f_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$

取特殊形式  $\pi_1 = \varphi_1(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$

其中  $\pi_1 = 1 - \eta$ ,  $\pi_4 = 1/d$  即为长宽比，

则说明减速率  $\eta$  与长宽比有直接联系，

其中  $\eta = 1 - \varphi(\pi_2, \pi_3, 1/d)$ ；具体的函数表达式通过量纲分析无法求得，我们通过数据拟合曲线得到其具体表达式。

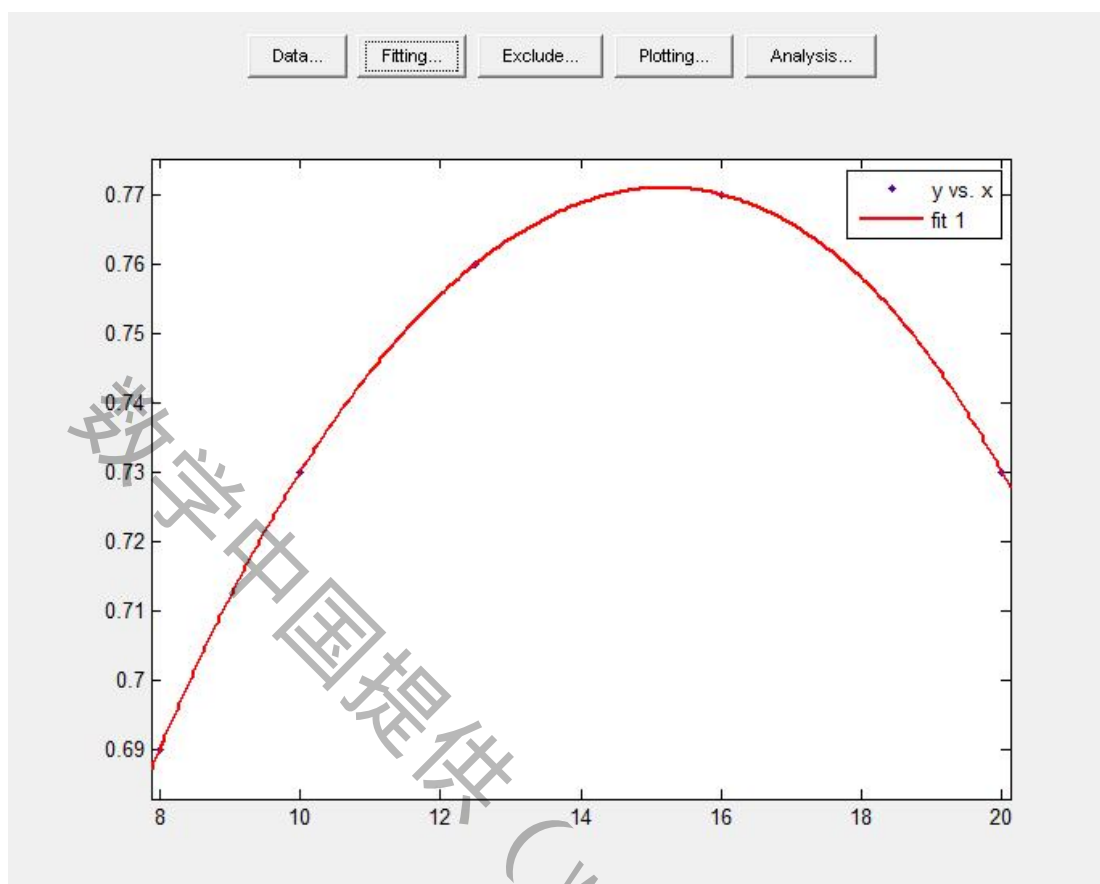
(3) 数据拟合：

我们运行 MATLAB 软件对实验数据进行数据拟合

表 1 对应长宽比的减速率数据

$\lambda$	$\eta^1$	$\eta^2$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta^{\min}$	$\eta^{\max}$	$\bar{\eta}$
8.0	0.70	0.68	0.67	0.71	0.67	0.71	0.69
10.0	0.72	0.74	0.74	0.70	0.70	0.74	0.73
12.5	0.75	0.76	0.77	0.75	0.75	0.77	0.76
16.0	0.78	0.76	0.75	0.77	0.75	0.78	0.77
20.0	0.75	0.73	0.70	0.74	0.70	0.75	0.73

拟合后的曲线为：



横坐标为长宽比  $\lambda$ ，纵坐标为减速率  $\eta$

拟合得减速率与长宽比的表达式为

$$\eta = -4.233e-006 \lambda^4 + 0.0002286 \lambda^3 - 0.006103 \lambda^2 + 0.08657 \lambda + 0.2883$$

通过 MATLAB 软件求最优解，即最优长宽比，使得减速率最佳，解得最优长宽比为 15.20778，故四面六边透水框架的设计长宽比约为 15 时使透空四面体群减速效果较好，而实际情况中框架的长宽比大约在 15—18，符合实际情况。

## 5.2 研究减速率与架空率之间的关系

架空率用来表示框架布设的疏密度，定义为： $\varepsilon = \frac{V}{V_{\text{单}} \cdot N}$

(1) 关系原理分析：当单位体积内架空率较小时，由于四面六边透水框架群的阻水性能相对较强，使得其透水性能较弱，进入四面六边透水框架群内部的水流受到限制，框架群对水流的减速率也相对较低。随着架空率的增加，四面六边透水框架群内部的空隙率增大，使得框架群的透水性得到增强，内部有足够的水流通过，四面六边透水框架群内杆件的阻水消能性能也得到了充分发挥，减速率也在逐渐增大，当架空率进一步增大时，透水性能得到了迅速提高，但由于四面六边透水框架群内部没有足够体积比的杆件对水流进行阻水消能，四面六边透水框架群的阻水性能大为减弱，使得消能效率反而减弱，减速率则迅速减小。[5]



参赛队号#1485

(2) 量纲分析：当水中投放透空四面体后，四面体后某测点流速 $v_2$ 的一般来说与 $V_1, p, u, g, V_{\text{单}}, V$ 有关：

要寻求的关系为：

$$V_2 = y_2(V_1, p, u, g, V_{\text{单}}, V)$$

更一般的形式记作：

$$f_2(V_2, V_1, p, u, g, V_{\text{单}}, V) = 0$$

利用 Pi 定理解决问题：

取长度 L，质量 M 和事件 T 为基本量纲，上式中各个物理量的量纲分别为：

$$[V_2] = [V_1] = LT^{-1},$$

$$[p] = ML^{-3},$$

$$[u] = ML^{-1}T^{-1},$$

$$[g] = LT^{-2},$$

$$[V_{\text{单}}] = [V] = L^{-3}$$

由此得到量纲矩阵

$$A_{37} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 A 的秩为 3，所以齐次方程：

$$Ay = 0, \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)^T \quad \text{有 } 7-3=4 \text{ 个基本解}$$

解齐次方程的基础解系为  $y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

由这四个基础解可以得到 4 个无量纲量：

$$\pi_1 = V_2 V_1^{-1} \quad \pi_2 = V_1^{-2} p u^{-1} V_{\text{单}}^{1/3}$$

$$\pi_3 = V_1^{-2} g V_{\text{单}}^{1/3} \quad \pi_4 = V V_{\text{单}}^{-1}$$

存在某个函数  $f_2(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0$

取特殊形式  $\pi_1 = \varphi_2(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$

其中  $\pi_1 = 1 - \eta$ ， $\pi_4 = V V_{\text{单}}^{-1}$  与相关，

则说明减速率  $\eta$  与架空率有直接联系，

其中  $\eta = 1 - \varphi_2(\pi_2, \pi_3, N \cdot \varepsilon)$  同上述分析相同，

具体的函数表达式通过量纲分析无法求得，我们通过数据拟合曲线得到其具体表达式。

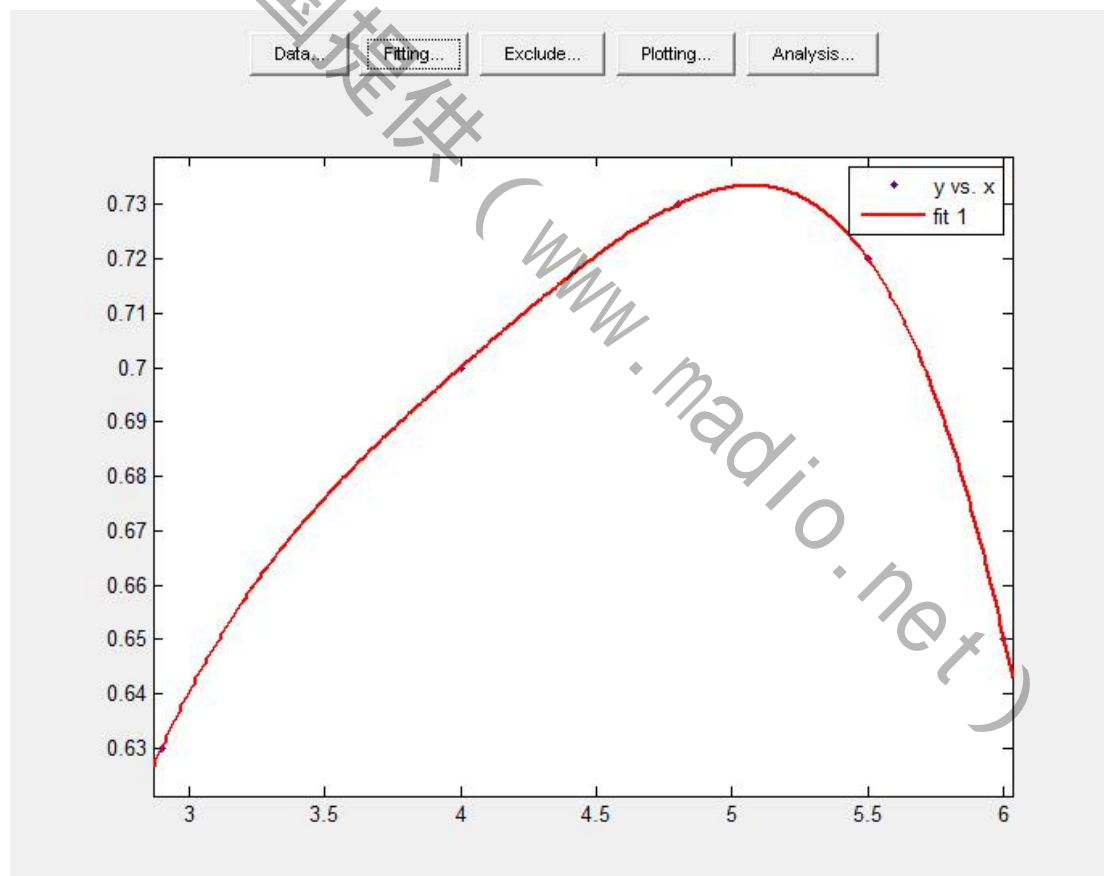
(3) 数据拟合：

搜集资料得到的实验数据为

表 2 不同架空率对应的减速率数据

$\varepsilon$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$	$\eta_{\min}$	$\eta_{\max}$	$\bar{\eta}$
2.9	0.62	0.64	0.64	0.64	0.60	0.64	0.63
4.0	0.71	0.72	0.69	0.68	0.68	0.72	0.70
4.8	0.73	0.73	0.74	0.72	0.72	0.74	0.73
5.5	0.70	0.72	0.73	0.73	0.70	0.73	0.72
6.0	0.64	0.63	0.67	0.66	0.63	0.67	0.65

运行 MATLAB 进行数据拟合：



横坐标为架空率  $\varepsilon$ ，纵坐标为减速率  $\eta$

拟合得减速率与架空率表达式为

$$\eta = -0.008752\varepsilon^4 + 0.1425\varepsilon^3 - 0.8749\varepsilon^2 + 2.441\varepsilon - 1.95$$

运行 MATLAB 软件求最优解，即最优的架空率，使得减速率最佳，解得最优架空率为 5.0337，故四面六边透水框架的设计约为 5.0 时使透空四面体群减速效果较好，而实际情况中框架的长宽比大约在 4.7—5.3，符合实际。

### 5.3 研究减速率与长度之间的关系

长度  $L$  指四面六边透水框架群沿顺水流方向的铺设长度，即抛投长度。

(1) 关系原理分析：显然四面六边透水框架群对水流的减速率会随铺设长度的增加而增大，但考虑到材料投资的经济效益以及工程施工的安全性，不能无限制的铺设框架群，[6]所以铺设长度存在一个最优值使得减速率和经济效益等其他方面满足相对最优关系。

(2) 量纲分析：当水中投放透空四面体后，四面体后某测点流速  $v_2$  的根据经验一般与

$$V_1, p, u, g, L \text{ 有关:}$$

要寻求的关系为：

$$V_2 = f_3(V_1, p, u, g, L)$$

更一般的形式记作：

$$f_3(V_2, V_1, p, u, g, L) = 0$$

利用 Pi 定理解决问题：

取长度  $L$ ，质量  $M$  和事件  $T$  为基本量纲，上式中各个物理量的量纲分别为：

$$[V_2] = [V_1] = LT^{-1},$$

$$[p] = ML^{-3},$$

$$[u] = ML^{-1}T^{-1},$$

$$[g] = LT^{-2},$$

$$[L] = L$$

由此得到量纲矩阵

$$A_{36} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

因为  $A$  的秩为 3，所以齐次方程：

$$Ay = 0, \quad y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)^T \quad \text{有 } 6-3=3 \text{ 个基本解}$$

$$\text{解齐次方程的基础解系为 } y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由这四个基础解可以得到 3 个无量纲量：

$$\pi_1 = V_2 V_1^{-1} \quad \pi_2 = g^{-1} p u^{-1} \quad \pi_3 = V_1^{-2} g L$$

存在某个函数  $f_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$

取特殊形式  $\pi_1 = (\pi_2, \pi_3)$

其中  $\pi_2 = 1 - \eta$ ， $\pi_3 = V_1^{-2} g L$  与相关，

则说明减速率  $\eta$  与抛投长度有直接联系，

其中  $\eta = 1 - \varphi_2(\pi_2, V_1^{-2} g L)$  同上述分析相同，具体的函数表达式通过量纲分析无法求得，我们通过数据拟合曲线得到其具体表达式。

## (3) 数据拟合:

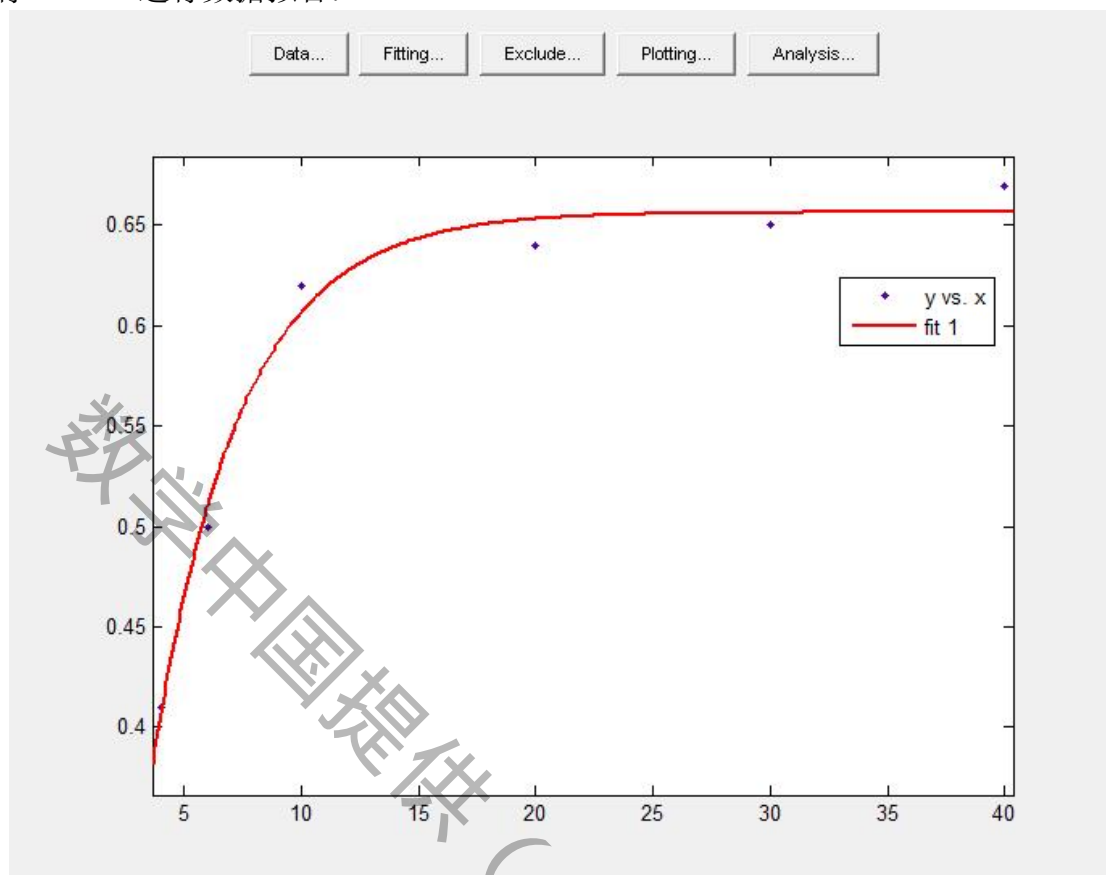
表 3 不同长度对应的减速率数据 ( $\varepsilon=6.0$ )

L	$\eta^1$	$\eta^2$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta_{\min}$	$\eta_{\max}$	$\bar{\eta}$
4.0	0.41	0.41	0.42	0.40	0.40	0.42	0.41
6.0	0.50	0.49	0.50	0.51	0.49	0.51	0.50
10.0	0.61	0.61	0.63	0.63	0.61	0.63	0.62
20.0	0.64	0.63	0.65	0.64	0.63	0.65	0.64
30.0	0.65	0.65	0.64	0.65	0.64	0.65	0.65
40.0	0.67	0.68	0.66	0.68	0.66	0.68	0.67

表 4 不同长度对应的减速率数据 ( $\varepsilon=4.8$ )

L	$\eta^1$	$\eta^2$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta_{\min}$	$\eta_{\max}$	$\bar{\eta}$
4.0	0.43	0.42	0.43	0.44	0.42	0.44	0.43
6.0	0.53	0.52	0.54	0.54	0.52	0.54	0.53
10.0	0.70	0.71	0.68	0.70	0.68	0.71	0.70
20.0	0.71	0.74	0.72	0.73	0.71	0.74	0.73
30.0	0.75	0.76	0.74	0.75	0.74	0.76	0.75
40.0	0.76	0.77	0.75	0.75	0.75	0.77	0.76

运行 MATLAB 进行数据拟合：



得减速率与抛投长度的关系表达式为

$$\eta = 0.7377 (1.89 - e^{-0.2701L})$$

根据曲线可得：刚开始时随着四面六边透水框架群抛投长度的增加，减速率也在逐渐增大，但当抛投长度超过20m后，随着抛投长度的持续增加，其对流速的影响没有明显的增加，在这种情况下，考虑到造价以及抛投人工费，继续增加透空四面体群抛投长度是不明智和不经济的，故据图形我们可取群长度为15m，达到最优的减速率。

## 六、模型的优缺点及改进

### 6.1 模型的优点

(1) 本模型最大的优点就是将复杂的物理流体力学方面的知识通过数学模型推导出来，将模型简单化。

(2) 本模型运用 Matlab 软件对数据进行处理，效率较高，节省时间，减少了计算量，且结果较为合理。

(3) 本模型所使用的量纲分析方法是一种比较准确的分析各个变量之间关系的方法，是分析流体运动的有力工具。

(4) 模型是由简单到复杂一步步建立的，这使得本模型更加贴近实际，容易理解。

### 6.2 模型的缺点

(1) 由于本题目可搜集到的数据有限，使用数据拟合的方法还不够精确，存在误差。

(2) 本模型忽略了一些自然因素造成的影响，结果可能与实际情况有一定偏差。

### 6.3 模型的推广与改进

本模型有助于处理含有较多变量的问题，并用来分析物理方面的流体运动以及流体力学方面的问题。该模型还不够完善，无法准确的解得各个变量之间具体的表达式。应该采用更为灵活的方法，例如多次进行变量代换，从而得到更准确的函数表达式。

## 七、参考文献

- [1]徐国宾，张耀哲，混凝土四面六边透水框架群技术在河道整治、护岸及抢险中的应用，天津大学学报，第39卷，第12期：1466-1467页，2006年。
- [2]张文捷，王玢，麻夏，王南海，江河护岸新技术，北京：中国水利水电出版社，第24页，2002年。
- [3]李若华，空心四面体框架群减速特性研究，  
<http://www.doc88.com/p-381741448022.html>, 2013/4/13。
- [4]姜启源，谢金星，叶俊，数学模型（第四版），北京：高等教育出版社，第192页，2011年。
- [5]吴龙华，透空四面体（群）尾流水力特性及应用研究，  
<http://www.docin.com/p-587499023.html>, 2013/4/12。
- [6]吴龙华，周春天，严忠民，王南海，四面六边透水框架群护岸机理研究，  
<http://www.paper.edu.cn>, 2013/4/14。

## 附录

使用 matlab 拟合工具箱进行数据拟合：

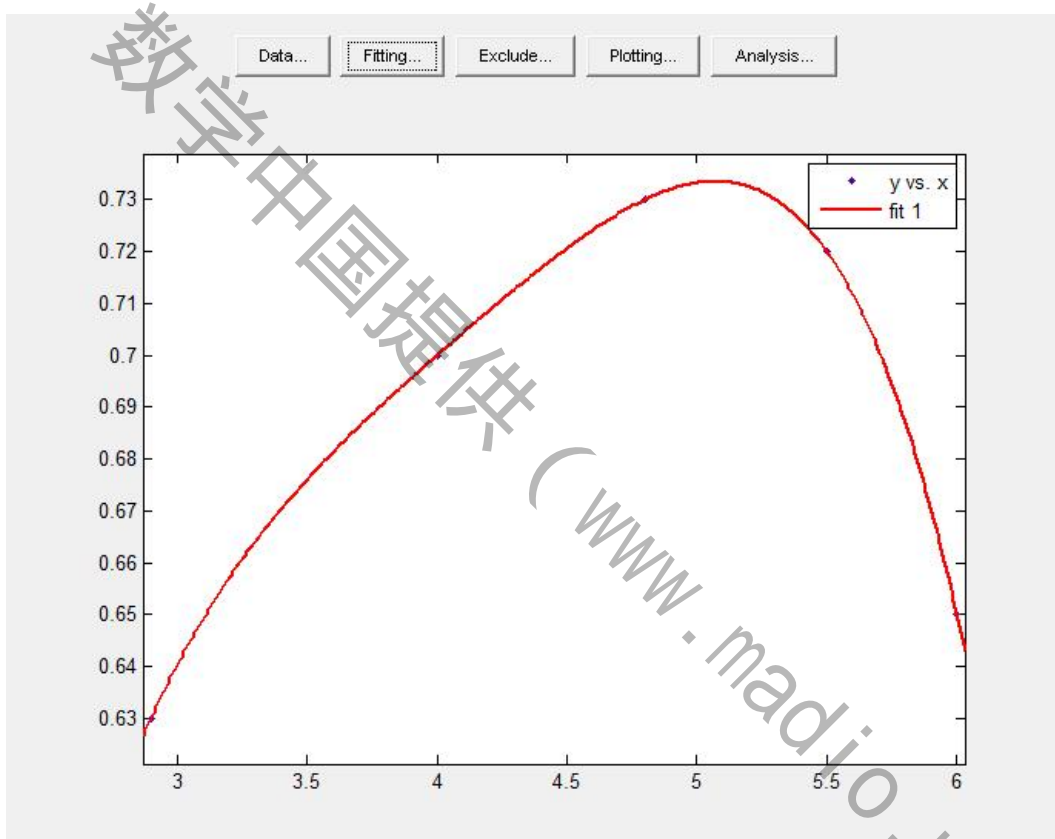
架空率与减速率的关系曲线拟合

```
x=[2.9 4.0 4.8 5.5 6.0];
```

```
y=[0.63 0.70 0.73 0.72 0.65];
```

```
cftool(x,y);
```

拟合为多项式的函数，进行多次比较得到最符合的函数关系曲线：



架空率与减速率的最终拟合曲线

得到的数据为：

Linear model Poly4:

$$f(x) = p1*x^4 + p2*x^3 + p3*x^2 + p4*x + p5$$

Coefficients:

$$\begin{aligned} p1 &= -0.008752 \\ p2 &= 0.1425 \\ p3 &= -0.8749 \\ p4 &= 2.441 \\ p5 &= -1.95 \end{aligned}$$

Goodness of fit:

参赛队号#1485

SSE: 9.548e-029  
R-square: 1  
Adjusted R-square: NaN  
RMSE: NaN

分析结果显示该函数较为准确的揭示了两者关系。

下面求解最佳架空率，使得减速率最大。

首先求导的最大值点，

```
diff(' -0.008752*x^4+0.1425*x^3-0.8749*x^2+2.441*x-1.95')
```

```
ans =
```

```
-.35008e-1*x^3+.4275*x^2-1.7498*x+2.441
```

求解一阶导函数的根值点：

```
>> syms x
```

```
solve('-.35008e-1*x^3+.4275*x^2-1.7498*x+2.441','x')
```

```
ans =
```

```
3.5888771178474156528235296088118-.98583542149738967720042928235315*sqrt(-1)
```

```
3.5888771178474156528235296088118+.98583542149738967720042928235315*sqrt(-1)
```

```
5.0337402798444739959982789907859
```

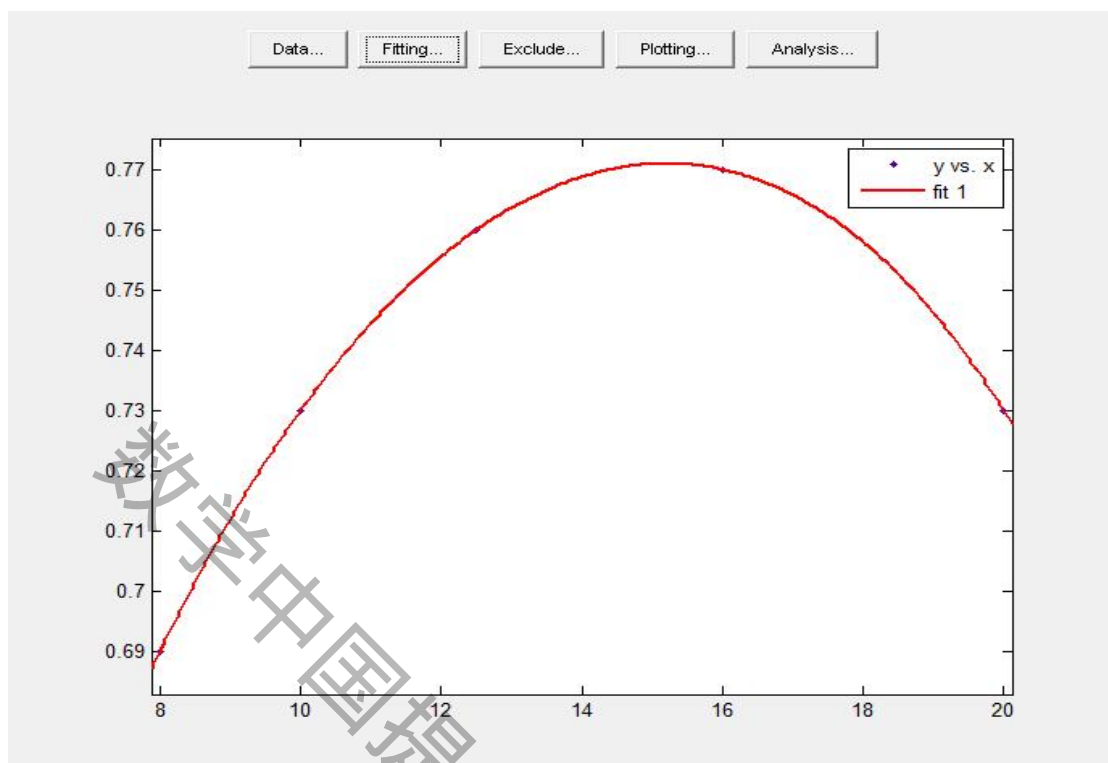
说明架空率的取值为 5.0 时为最佳值。

长宽比与减速率拟合曲线：

```
x=[8.0 10.0 12.5 16.0 20.0];  
y=[0.69 0.73 0.76 0.77 0.73];  
cftool(x,y);
```



参赛队号#1485



拟合为多项式的函数，进行多次比较得到最符合的函数关系曲线：

Linear model Poly4:

$$f(x) = p1*x^4 + p2*x^3 + p3*x^2 + p4*x + p5$$

Coefficients:

$$p1 = -4.233e-006$$

$$p2 = 0.0002286$$

$$p3 = -0.006103$$

$$p4 = 0.08657$$

$$p5 = 0.2883$$

Goodness of fit:

$$\text{SSE: } 1.972e-031$$

$$\text{R-square: } 1$$

$$\text{Adjusted R-square: NaN}$$

$$\text{RMSE: NaN}$$

得到的数据为上述数据。下面求解最佳长宽比，使得减速率最大。

首先求导的最大值点，

```
>> diff('-4.233e-006*x^4+0.0002286*x^3-0.006103*x^2+0.08657*x+0.2883')
```

```
ans =
```

$$-1.6932e-4*x^3+.6858e-3*x^2-.12206e-1*x+.8657e-1$$

```
>> syms x  
solve('-.16932e-4*x^3+.6858e-3*x^2-.12206e-1*x+.8657e-1','x')
```

```
ans =
```

```
12.647700478107588414323529272977-13.275244057014244412141499015177*sqrt(-1  
)
```

```
12.647700478107588414323529272977+13.275244057014244412141499015177*sqrt(-1  
)
```

```
15.207788271283051378298370227966
```

说明长宽比的取值为 15.2 时为最佳值。

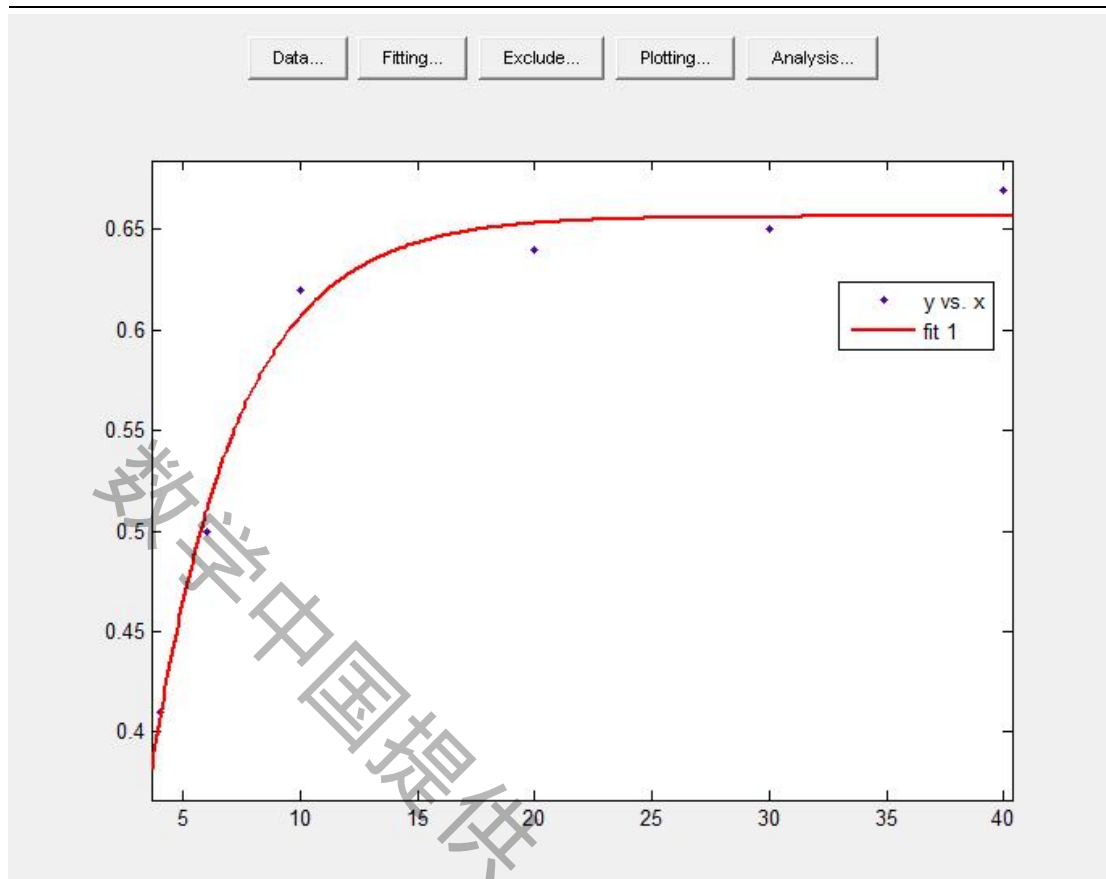
四面六边透水框架群的投抛长度与减速率的拟合曲线：

```
x=[4.0 6.0 10.0 20.0 30.0 40.0];
```

```
y=[0.41 0.50 0.62 0.64 0.65 0.67];
```

```
cftool(x,y);
```

参赛队号#1485



General model:

$$f(x) = a \cdot (1 - \exp(-b \cdot x)) + c$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$\begin{aligned} a &= 0.7377 \quad (0.2525, 1.223) \\ b &= 0.2701 \quad (0.1206, 0.4196) \\ c &= -0.11 \quad (-0.7081, 0.488) \end{aligned}$$

Goodness of fit:

SSE: 0.000693

R-square: 0.987

Adjusted R-square: 0.9784

RMSE: 0.0152