

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cnEmail：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为： 1244 号

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别： 本科组

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1244 号

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段

题 目 关于防洪设施的外观和放置的研究

关 键 词 有限元方法 等效水流场 总体稳定函数 锯齿设计 四面六边体

摘 要：

本次建模目的是找到一种设计方案，使阻水框架尽量不发生如四面六边体框架一样会侧翻的问题，同时具有良好的稳固性、较强的操作性、显著的促淤性。

首先，我们首先考虑框架棱边的选择。我们通过考虑几何非线性的有限元方法建模，采用 ANSYS 静力非线性功能进行分析多面体的各种棱的承压能力和抗形变能力，最终得出结论：将棱做成五棱柱不仅能够起到很好的消能作用，而且还不容易损坏。

其次，我们考虑阻水框架是什么样的形状可以使阻流效果和整体稳定性最好。我们创意性地用温度场等效水流场，通过 PED 软件分析各种不同截面形状的框架对水流的减速作用，发现截面为三角形的框架阻水效果最好。于是，我们对截面为三角形的三种框架展开理论分析，通过利用重心高度与地面面积构造总体稳定函数 V_i ，评价各多面体的稳定性，结果四面六边体以稳定、性价比高的优点略胜一筹。

接着，我们回到了解决四面六边体框架缺陷的讨论中，为了处理框架易翻滚移位的问题，我们设计出了一种新的框架，适当的使用可以促使部分框架倒立，从而产生一种契合的效果来保证框架群的稳定。另外，我们建议四面六边体棱边表面带有锯齿状凸起，在实际操作中只需对浇筑模具进行简单的改良即可实现。

通过从细节到整体的分析与筛选，我们最终的设计方案是，框架总体上保持四面六边体形状，但将其的各条棱设计成带有锯齿能相互咬合的五棱柱型结构，并且增加一种能够使得四面六边体框倒立放置的辅助框架。

本文从稳定性方面着手，客观地排除了四面六边体之外的框架；又从理论和实践的双方面改进了四面六边体框架，一定程度上解决了阻水框架目前面临的难题。

参赛队号： 1244 号

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cnEmail：2013@tzmcm.cn

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

The purpose of our modeling is to find a kind of design, which won't roll over easily like the tetrahedron-like penetrating frame, and the design should be stable, flexible, and have significant ability to promote the deposition of the sand.

First of all, we consider the choice of the frame edge. We use the finite element method of geometric nonlinear to set our model. Using the ANSYS static nonlinear function of bearing capacity analysis of various edges of polyhedron and anti-deformation ability, finally we draw a conclusion: Edge into five prisms can not only play a very good energy dissipation effect, and is not easy to damage.

Secondly, we try to find out which shape of the permeable frame can make the effect of reducing current velocity more perfect and the construction more stable. We creatively make the Flow field equivalent the Temperature field by using PED. Surprisingly, we discovered that with the permeable frame reduce the water impact force most if with triangular section. Thus, we make theoretical analysis for three frames which all have a triangular section by constructing a overall stability function V_i , which is used to evaluate those frames. And we find that tetrahedron-like penetrating frame is more stable and highly cost effective.

So we need to solve the problem of the tetrahedron-like penetrating frame — they may be burst under the weight of the water. Then we design a new frame that can make some other frames into inverted pendulum, in order to produce a fit way to protect the frame's stability. What is more, we suggest the edge of frames to be toothed, which is easy to achieve by improving placement die.

We get our final framework by the analysis and screening from the details to the overall. The permeable frame still maintains tetrahedron shape, but its edges are advised being designed as special five prismatic structures with serrated bite. Besides, an auxiliary frame is added to make the tetrahedron shape placed vertically.

The article objectively excludes outside the framework of other shapes except for the tetrahedron. To a certain extent, we solve the problems with which the water-blocking framework is faced up by improving the current framework from both sides of theory and practice.

关于防洪设施的外观和放置的研究

目 录

一 问题背景和分析	2
二 符号说明	2
三 框架棱边的研究	3
3.1 基本模型	3
3.2 结果分析	5
四 多种方案框架在水流中的模拟	6
4.1 框架剖平面对减水流速的影响	6
4.2 不同形状的框架稳固性测评.....	9
4.2.1 问题分析.....	9
4.2.2 模型建立.....	10
4.2.3 模型的求解.....	10
五 框架摆放研究	11
六 模型改进	13
七 模型的评价	14
八 结论	14
参考文献	15

一 问题背景和分析

长期以来,河道整治中河岸防腐防损为长期的课题。常见的防洪护岸框架为四面六边透水框架,对此我们在上一阶段的论文已经给出了四面六边透水框架群^[1]的框架尺寸、置空率和摆放长度对河道减速效果的定量影响,然而在抛投时和在使用过程中,四面六边体极有可能被水流冲击而翻滚移位,使框架群不能达到理想的堆砌效果,不利于促淤防沙的功能。

为了使框架在水中互相钩连,需要设计新的形状(例如图 1 所示)或摆放方式。参考已有的设计方案,本次建模论文主要集中讨论护岸框架的结构强度和群体稳定性两方面。

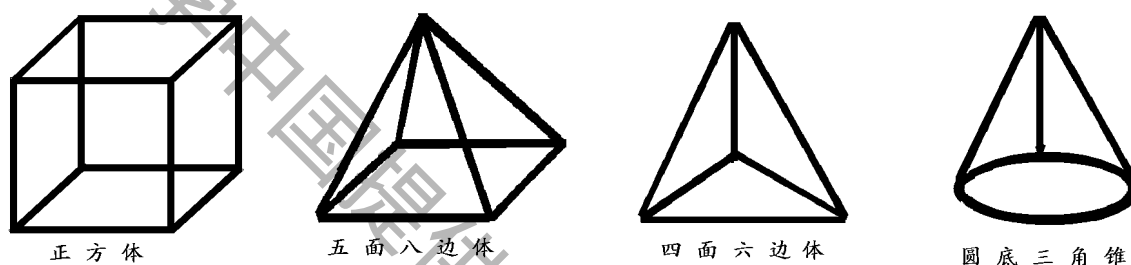


图 1 几种不同形状的护岸框架

此次建模的目的在于得到一种相对稳定并且实际操作性强的防洪框架的设计方案,并不是单纯的解决四面六边体透水架存在的问题。因此建模的过程中必须要考虑到尽量多的因素,从细节到宏观对我们想要得到的框架进行逐步探讨。

所以,本文的**行文思路**非常明确。首先第一步,我们研究框架的棱边选用几边体最为合适;第二步拟合常见的几种不同形状的框架在水流中的稳定性情况,结合第一步而决策出最稳定的护岸框架大体外观;第三步,我们研究框架的摆放以及细节处的改善,来解决框架群的堆砌问题。

二 符号说明

符号	代表含义	单位
π_p	泛函总位能	N
n	棱数	/
a_i	单位元节点,	/
u_i, v_i	每个结点的两个分位移	/
N	插值函数矩阵	/

参赛队号 #1244 • A 题

δ_{ij}	示性函数	/
S	应力矩阵	/
E_0, ν_0	材料常数	/
D	直径	mm
t	边壁厚度	mm
K	单元刚度矩阵	/
h	物体的重心高度	m
ζ	物体的总体稳定函数	/
S'	物体的截面积	m^2
L	棱边长	m
S	物体与地面最终接触面积	m^2
k	比例常数	/
L'	新的框架高度	m

三 框架棱边的研究

汛洪的冲击力可以非常大，把架在桥墩之间的钢筋水泥板冲走也不为过，因而防洪框架的稳固性和承压能力对框架题的防洪作用起到直接的影响。在护岸框架的使用中，大量的框架使得单个棱边带来的微小改变，可以影响整个框架群的阻流作用。因此，我们首先考虑棱边外观的选择。

在这里，我们的模型考虑几何非线性的有限元方法建模，采用 ANSYS 静力非线性功能进行分析，主要研究三棱柱、四棱柱、五棱柱、六棱柱、八棱柱和圆柱壳的受力性能、整体失稳破坏及它们之间的对比。

3.1 基本模型

首先，我们在本实验中的侧移位移一定程度上模拟了水流对棱柱的冲击，在相同的冲击力下，位移越小的越稳固。在水流垂直的冲击中，我们假设认为与水流方向（以及分向量）呈垂直关系的面对水流有消能作用，显然棱柱棱数（圆柱体视作棱无数的柱体）越少的情况下，消能作用最明显。因此，我们设定棱数 n 、消能作用 $g(n) \geq 1$ 、泛函总位能 π_p 之间存在着反比函数关系：

$$\pi_p = a(g(n))^{-b} + c$$

a, b, c 为参数。 n 与 π_p 之间此消彼长的关系中，我们可以通过模糊评价确定棱数 n 的最优解。所以，我们接下来建立 π_p 的模型。

利用有限单位元法^[2]，我们对不同形状的单位元结点编码 i, j ，以逆时针编码为正， (x_i, y_j) 为任意一点的坐标。每个结点有两个分位移。

参赛队号 #1244 • A 题

$$a_i = (u_i, v_i)^T \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$a' = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)^T = (u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \dots, u_n, v_n)^T$$

其中 $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)^T$ 表示不同的结点， $(u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}, \dots, u_n, v_n)^T$ 表示各个节点的集合。
为了方便起见，接下来的过程中，我们选取 $n=3$ 。

为了确定有限单位元的位移函数，可以用多项式插值来拟合，鉴于过程较为复杂我们直接引用《有限单位元的基本原理与数值方法》一书中的介绍：

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} IN_i & IN_j & IN_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_m \end{Bmatrix}$$

$$= [N_i, N_j, N_m] a' = Na'$$

N 为插值函数矩阵。插值函数应该具备以下三个性质：

(1) 在结点上的插值函数的值有：

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } j = i \\ 0, & \text{当 } j \neq i \end{cases}$$

(2) 在单位中任一点各插值函数和应等于 1，即 $N_i + N_j + N_m = 1$ 。这是刚体位移的客观发生条件。

(3) 对于现在的单位元，插值函数是线性的，这样保证了相邻单元在公共边界上位移的连续性。

接下来我们将弹力学基本方程带入 u ，得到：

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = D\varepsilon = DBa' = Sa'$$

其中 $S = DB = D[B_i \ B_j \ B_m] = [S_i \ S_j \ S_m]$ 称为应力矩阵。而 S 的分块矩阵为：

$$S_i = DB_i = \frac{E_0}{2(1-\nu_0^2)} A \begin{bmatrix} b_i & \nu_0 c_i \\ \nu_0 b_i & c_i \\ \frac{1-\nu_0}{2} c_i & \frac{1-\nu_0}{2} b_i \end{bmatrix}$$

其中 E_0, ν_0 为材料常数。

最小位能原理的泛函总位能 π_p 在平面问题中采取矩阵的表达形式：

$$\pi_p = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon dx dy - \int_{\Omega} u^T f dx dy - \int_{S_0} u^T T dx$$

其中， t 是二维厚度， f 是作用在二维体内的体积力， T 是作用在二维体边界上的面积力。

此外，令

$$\int_{\sigma} B^T D B t dx dy = K' \quad \text{为单元刚度矩阵。}$$

$$\int_{\sigma} N^T f dx dy = P'_b, \quad \int_{S_0} N^T T dx dy = P'_s, \quad P' = P'_b + P'_s \quad \text{为单元等效结点载荷列阵。}$$

3.2 结果分析

本小节中，我们对 4.1 中的通过弧长迭代法^[3]对泛函总位能进行求解。

为了得到量化的结果，我们对柱壳模型进行赋值，直径 $D=500\text{mm}$ （实际外径为 502.5mm 、内径为 497.5mm ）；六棱柱壳壁厚 $t=5\text{mm}$ ，边长 $a=261.8\text{mm}$ （由于壁厚相对直径很小，周长相等，即截面面积相同）；其他棱柱壳边长类似算出。几种棱柱壳与圆柱壳之间的对比柱形图见图 2。

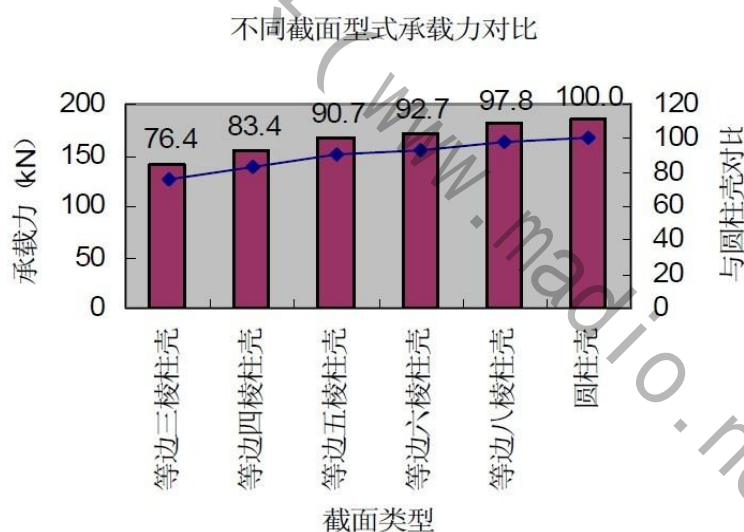


图 2 不同截面型式承载力对比

用 ANSYS 软件可以有效的算出结构稳定的承载力，虽然比欧拉值小，但是从安全角度考虑，结果是可用的；结构的长细比大于某一临界值时，结构发生整体失稳，见表 3。

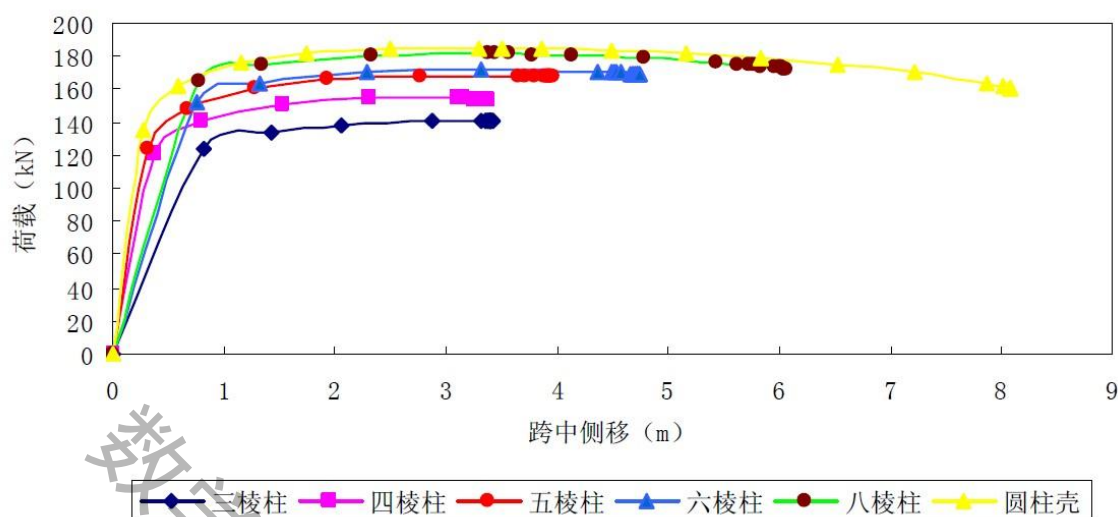


图3 棱柱壳与圆柱壳承载力—侧移位移曲线之间的对比

将实际试验中得到的数据绘成变形图如图3，与理想的力—变形图相比，也得到了曲线的下降段，表示结构已经产生了比较大的弯曲变形，刚度为零，不能再承受力的增加。从图3可以看出，相同条件下，从三棱柱壳，四棱柱壳依次到圆柱壳的极限承载力是逐步增加的。

考虑到 $\pi_p = a(g(n))^{-b} + c$ ，我们认为选择五棱柱是较好的，既有较高的承压能力，对水流消能也有明显的作用。

四 多种方案框架在水流中的模拟

我们知道在平面内三角形最稳定，当各边均受张力作用，三角形不易发生形变；而当水流冲过其他多边形（如四边形）时，很容易使其发生形变——如矩形在外力作用下很容易变成一般的平行四边形——这就导致了框架结构的很不稳定，使其防洪护岸功能大大减弱。因此，我们需要考虑单个防洪框架的实用性的稳固性

4.1 框架剖面对减水流速的影响

我们采用温度场等效替代为水流场，规定如下假设：1、采用计算机模拟流场遇障碍物后的运动状态时，通过设置一定参数以温度场来等效水流场，是合理的。2、结构框架受水的冲刷作用时，只可能发生翻滚现象，不考虑水平移位现象。3、河道底面是稳定的，水流是均匀、稳定的。

PDE 模拟水流通过单个不同截面形状的框架时发生的改变，见图4、图5、图6。

参赛队号 #1244 • A 题

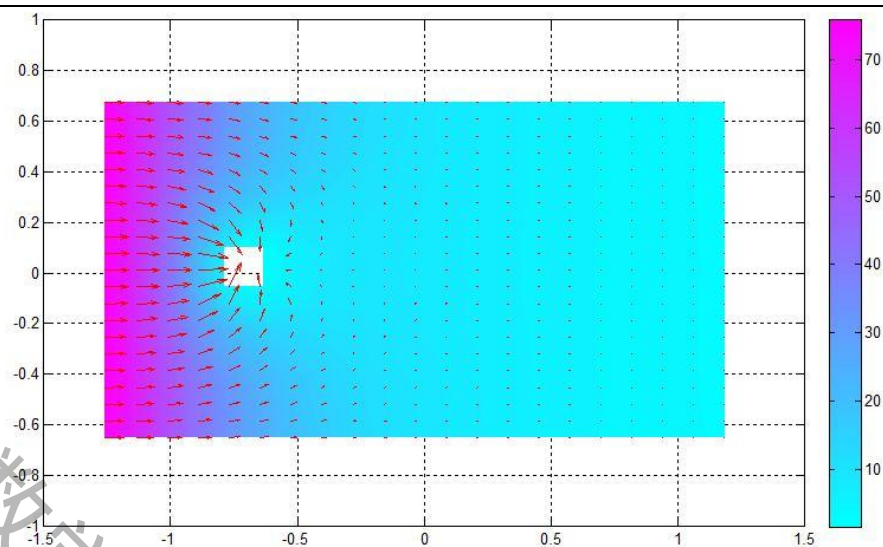


图 4 单个截面为方形的流体模拟

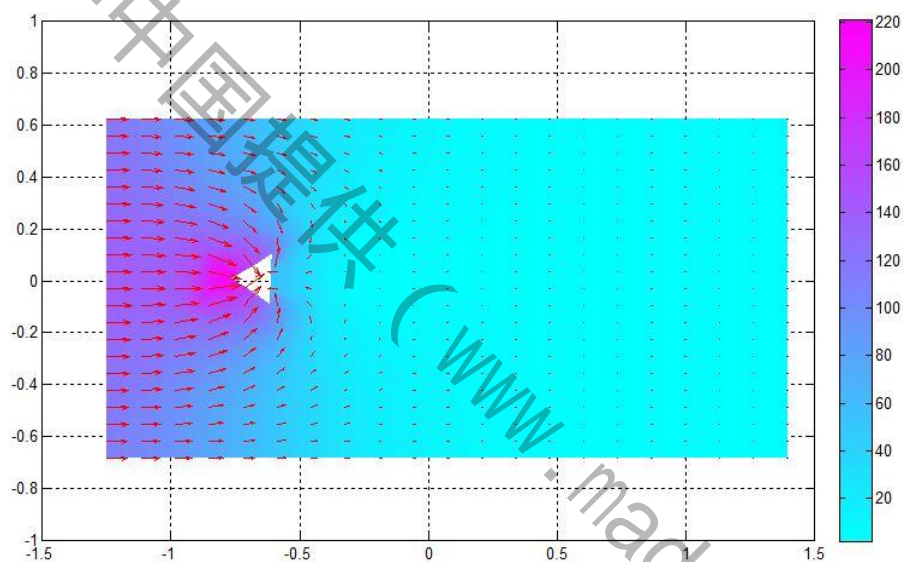


图 5 单个截面为三角形的流体模拟

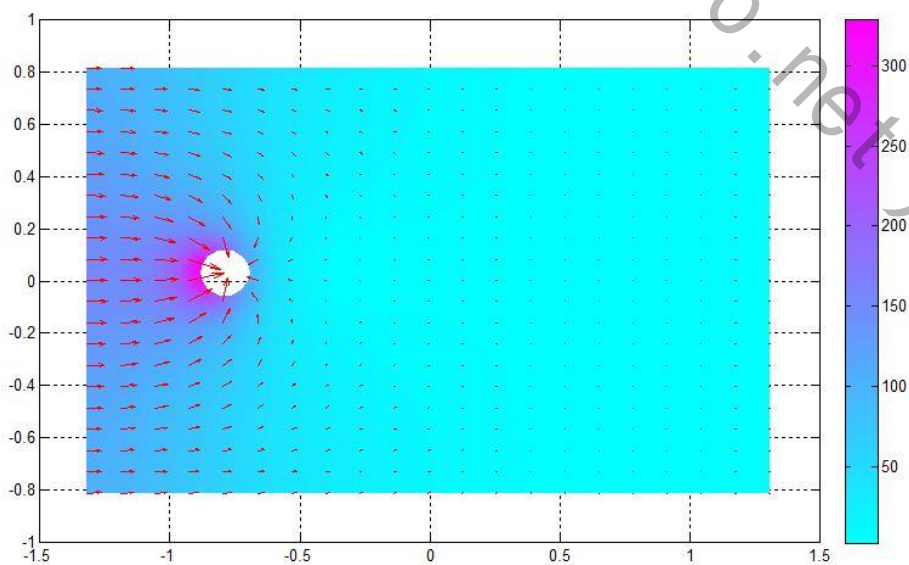


图 6 单个截面为圆形的流体模拟

参赛队号 #1244 • A 题

显然，在个截面的框架模拟下，难以看出对水流减速的差别，我们再采用双个框架下的模拟进行观察。见图 7、图 8、图 9。

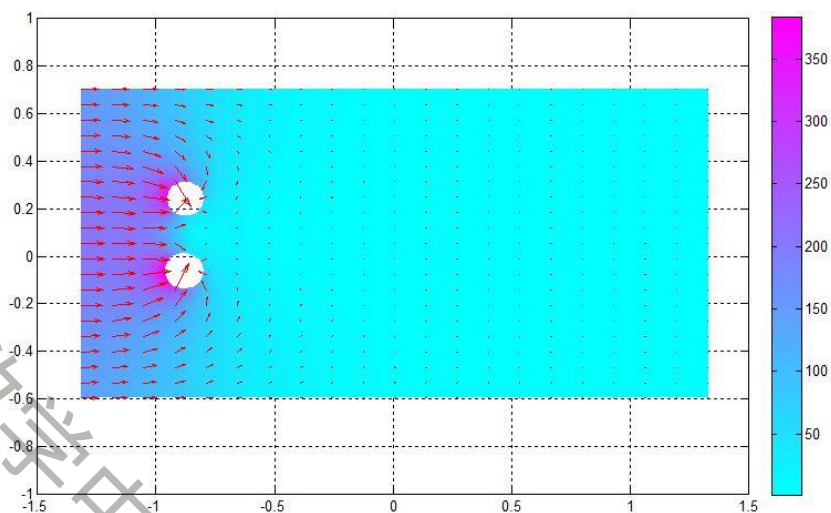


图 7 双个截面为圆形的流体模拟

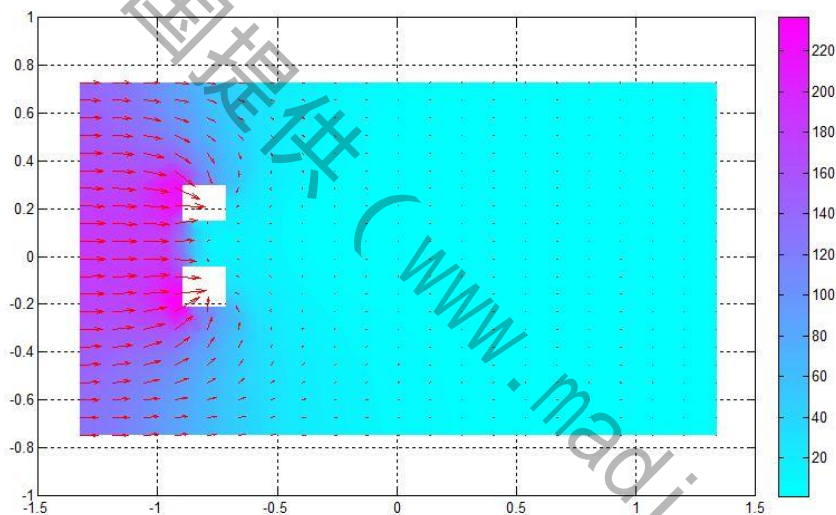


图 8 双个截面为方形的流体模拟

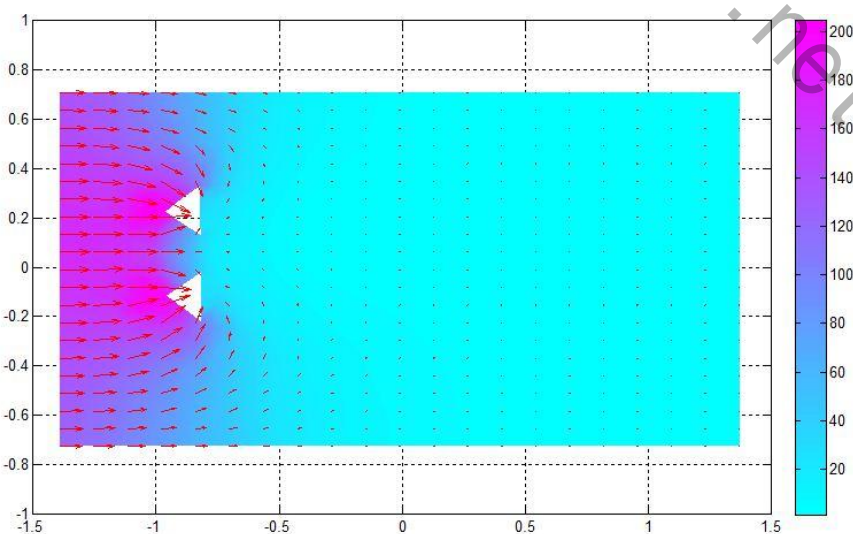


图 9 双个截面为三角形的流体模拟

由于温度场与水流场存在着极大的相似，我们很容易发现，当水流在遇到棱边时会发生旋转，将能量聚集在框架附近，从而使通过的水流消能减速。

显然三角形为截面的框架阻流下，其阻挡的能量最多（红色区最明显），说明三角截面在消能阻流方面比较好。那么在考虑实用性的方面，我们设计的截面选用顺序为三角形 > 正方形 > 圆形。

在多个三角形为截面的框架阻水消能的作用下，水流场示意图见图 10。

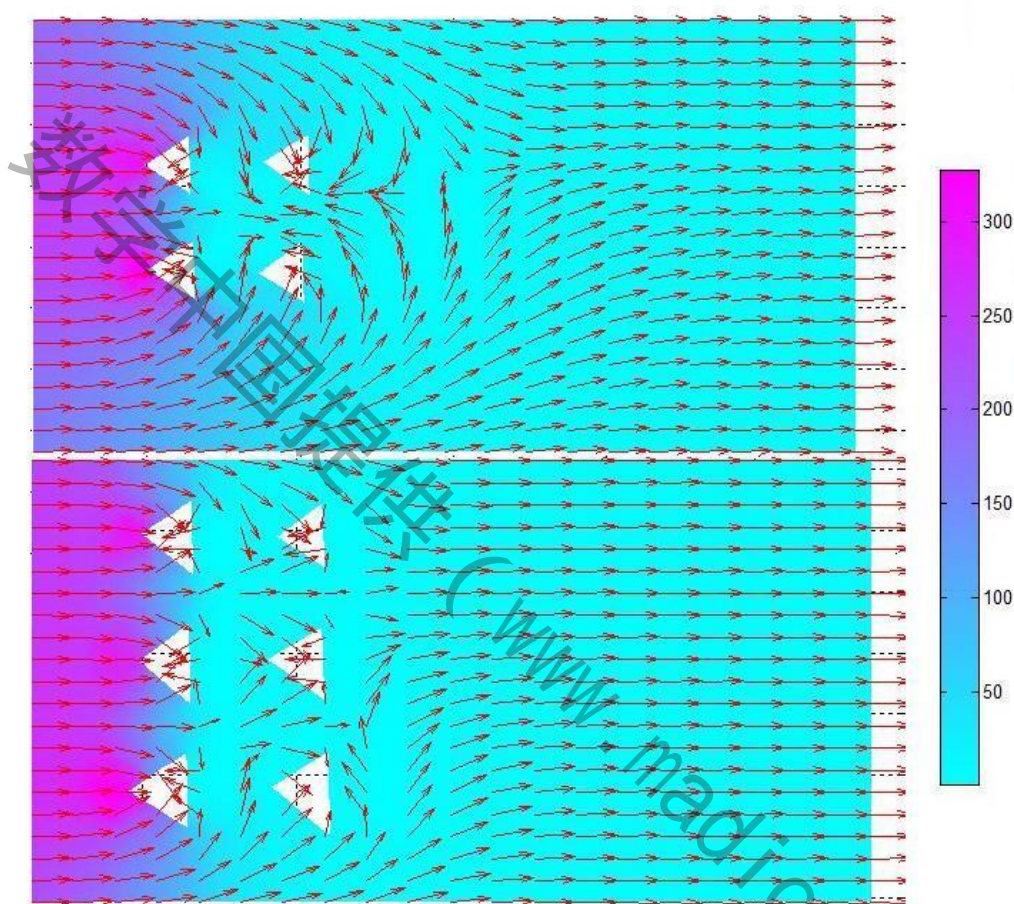


图 10 多个截面为三角形的流体模拟

4.2 不同形状的框架稳固性测评

4.2.1 问题分析

首先分析单个个体对于一定水流冲击时的稳定性问题，即某规则形状物体在一定的水流强度冲击下保持原有位置和形状的能力。为简化问题的复杂性，我们等效地认为对于物体，若其受到的流体的冲力越小，自身固有的稳定性越好，则我们就可认为该物体总体稳定性就好^[4]。

按照我们的简化思路，物体的总体稳定性与两方面相关：其一，由于自身形状而受到冲力的大小。我们有理由认为，物体受到水冲力的大小与水流作用于物体的截面积大小有关，截面积越大，则受到水的冲击越大；其二，自身的固有稳定性。在流体的作用

参赛队号 #1244 • A 题

下物体自身的稳定性可以认为与物体的中心高度以及与地面的接触面积相关，物体中心越低，与地面接触面积越大，则自身固有稳定性就越好。

4.2.2 模型建立

在 4.1 中我们认为截面为三角形的框架阻流效果比较好，因此，我们这一小节不考虑正方体，就五面八边体、四面六边体、圆底三棱锥进行比较。

我们设水流最终作用于物体的截面积为 S' ，物体的重心高度为 h ，与地面最终接触面积为 S 。定义物体的总体稳定函数 ζ ，其与物体的截面积为 S' ，物体的重心高度为 h ，与地面最终接触面积 S 有关。通过上述的定性分析知道：物体的总体稳定函数 ζ ，与物体的截面积 S' 呈正相关，与物体的重心高度 h 呈反相关，与地面最终接触面积呈正相关，因此物体的总体稳定函数 ζ 可以写为

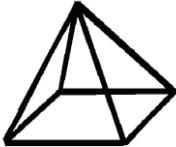
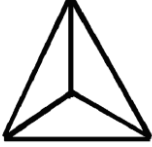

$$\zeta = k \frac{S'S}{h}$$

其中， k 比例常数（与物体具体形状无关）。

4.2.3 模型的求解

总体稳定函数 ζ 表达式中稳定函数 ζ 的自变量 S' 、 S 、 h 与物体的实际形状密切相关，因此这里我们通过求解具体形状的物体综合稳定性，并通过互相比对，确定出具体哪种形状的物体其综合稳定性最好。

我们假定，制作防洪物体的基本刚体截段长度定为 L 。对于圆形底面 h ，认为其直径为 L 。对于上述三种防洪物体形状，其对应的截面积 S'_i ，物体的重心高度为 h_i ，与地面最终接触面积为 S_i （ $i=1,2,3$ ）， ζ_i 分别为：

	五面八边体 ($i=1$)	四面六边体 ($i=2$)	圆底三角锥 ($i=3$)
垂直截面积 S'_i (最佳冲向位置)	$\frac{\sqrt{2}L^2}{4}$	$\frac{\sqrt{6}L^2}{6}$	$\frac{\sqrt{3}L^2}{4}$
重心高度 h_i	$\frac{7\sqrt{6}L}{48}$	$\frac{\sqrt{6}L}{12}$	$\frac{\sqrt{3}L}{6}$
地面最终接触面积 S_i	L^2	$\frac{\sqrt{3}L^2}{4}$	$\frac{\pi L^2}{4}$
总体稳定函数 ζ_i	$\frac{4\sqrt{3}}{7}L^3k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}L^3k$	$\frac{3L^3k}{8}$
形 状			

通过以上表格，明显看出：

$$\zeta_1 > \zeta_2 > \zeta_3$$

即对于上述三种形状防洪框架而言，理论上五面八边体和四面六边体的综合稳定性明显优于圆底三角，不过虽然五面八边体综合稳定性同样优于四面六边体。但通过简单

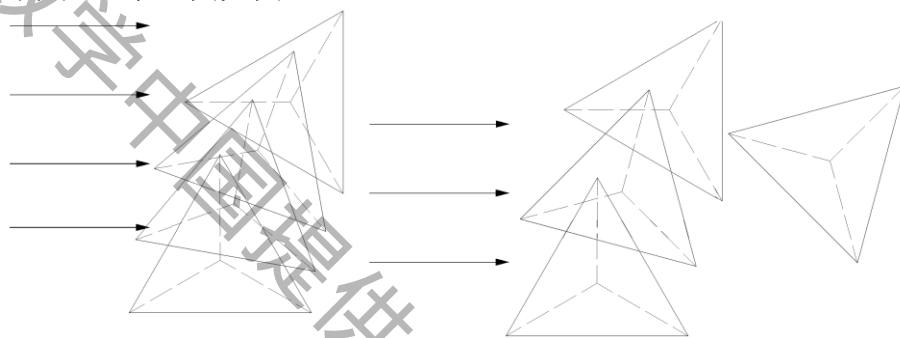
参赛队号 #1244 • A 题

计算可以发现，两种结构的综合稳定性相差并不太明显。若考虑到实际情况，如成本问题等，制作五面八边体防洪框架的成本明显高于四面六边体。

综合这两点，选择四面六边体防洪框架结构是比较切实可行的。接下来的工作重点应为四面六边体的细节改进和摆放研究。

五 框架摆放研究

既然我们难以从外形上对框架体结构进行彻底的改变，那么我们必须正视四面六边体的易冲翻的缺点，示意图见图 11。



图表 11 被冲翻的四面六边体框架群

对此我们给出如图 12 所示的解决方案，增加一个可以让四面倒置的辅助框架（具体见图 15），这样的摆放比单一的将四面六边体结成串投掷稳固的多，不容易发生直接翻落的情况。当在进行四面六边体群的陆地安置时，应采用如图 13 所示的摆放层次。。在水流的冲击下，每一串单独的四面六边体串的每一层都可以受到四边的压制，一定程度避免了图 11 的现象。

我们认为，这种摆放的方式不仅能在有限的空间里摆放更多的四面六边体，其稳定性也是较之前有了大大的提升。

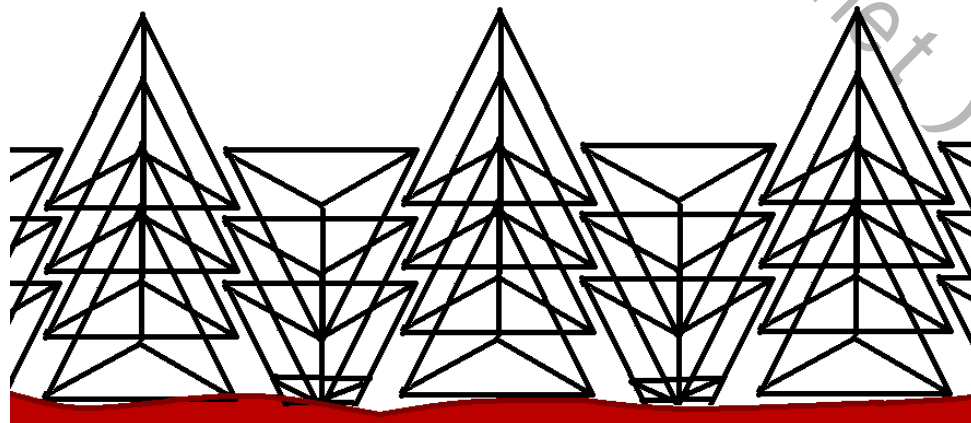


图 12 互相牵制的框架放置立体示意图

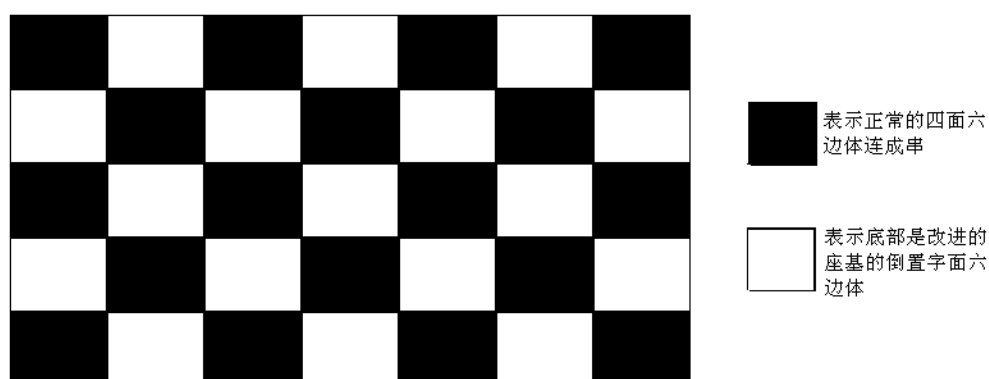


图 13 俯视下互相牵制的框架放置示意图

即便是在往河体抛投，额外的防治框架（见图 15）也会以小头朝下大头朝上的方式坠落，在一定程度上还是可以产生如图 14 所示的效果的。

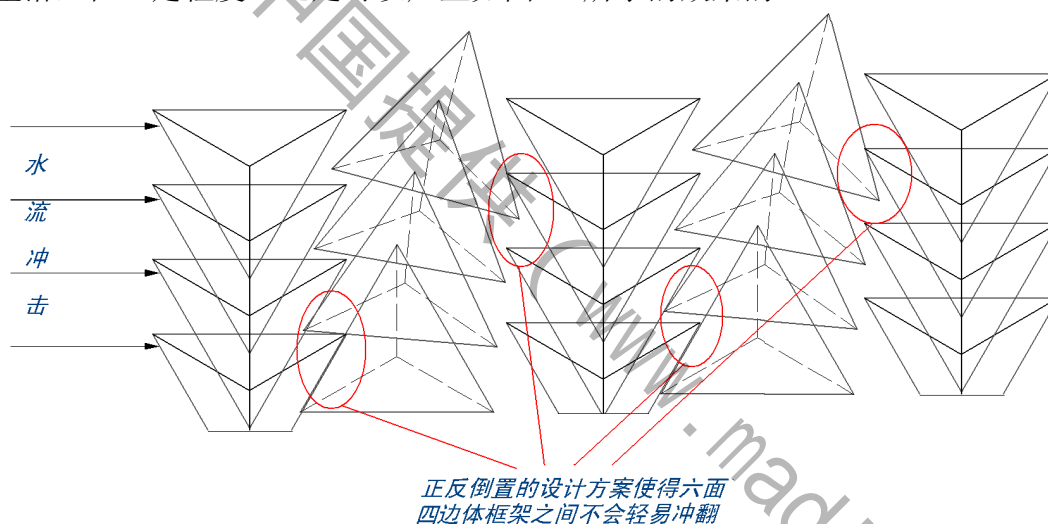
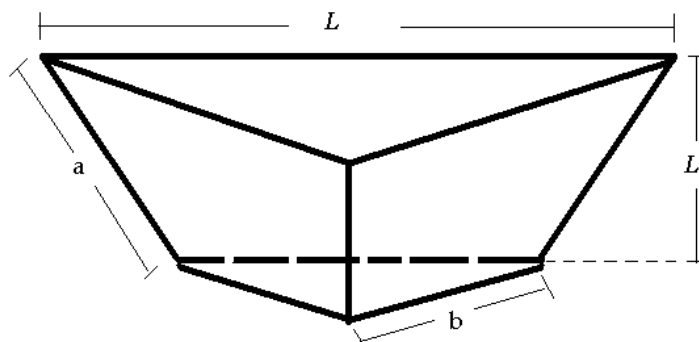


图 14 水流冲击下的改善四面六边体摆放

对于图 15，我们最主要的是确定 L' 的值。但是在实际施工中，追求的是方便快捷，所以我们令 $a=b=L/2$ ，这样在实际施工浇筑时会更加直接简单，也不用增加另开模具的费用和时间。



图表 15 额外添加的放置框架

六 模型改进

框架群在实际的运用中，当洪水较大时可能将框架直接摧毁，使其防洪护岸性能减弱或者消失，但是这种情况并不常见，更多时候的问题是能被水流冲击而翻滚移位。针对这种情况，我们受到生活中各种器械的启发，建议在多面体各条棱的铸造过程中不是直接将其做成表面平整的结构，而是在表面均匀地增加锯齿状纹路。这样在叠放的时候并不会增加阻力，但是在遇到洪水冲击时，由于各个锯齿相互咬合，增加了被冲散的难度。

如图 16 所示，当在 A 棱相对稳定的情况下，B 棱想要沿 A 棱而下较为容易，而想要被图示方向脱离 A 棱则阻力较大。

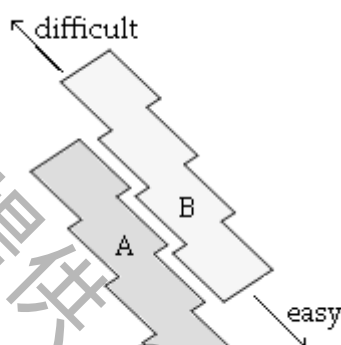


图 16 改进的框架棱边固定原理

要注意的是，在本次改进中，我们对于每条棱边只是加入少量（二三个）的锯齿，并不影响在前几个小节中的分析；至于制作材料上，我们默认为钢筋混凝土，就可事实性方面而言，一般防水框架的棱边多为 1m 长，制成具有若干凸出 5cm 左右的锯齿状的模具并不困难，且最终铸造出带锯齿的框架将更加的耐用稳固。

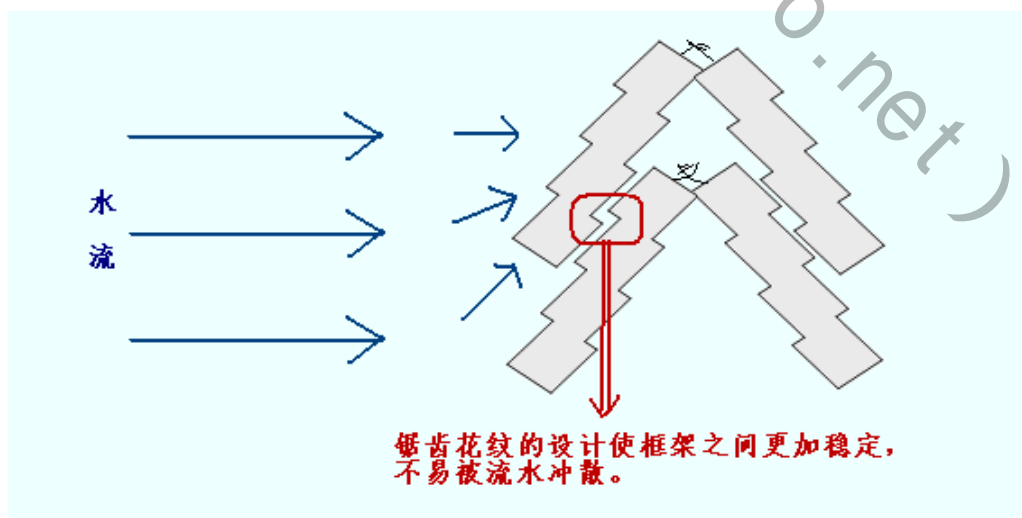


图 17 流水冲击下的防洪框架平面示意图

七 模型的评价

模型的优点：1) 本次建模目的清晰，思路明确，由细节到整体逐步分析得到最优的防洪框架设计方案；2) 充分考虑了不同形状、不同棱边的框架之间的不同，从计算机 PED 模拟和理论分析两个点出发，为最终的设计方案作了理论可行的依据，用温度场模拟水流场的思路也颇为创新；3) 所提出的方案考虑到了实际操作中的便利性，均不难实现。

模型的缺点：1) 因材料时间有限，无法通过水槽实验来实证模拟设计方案的可行性，可以在下一步工作中进行；2) 在第四节进行的框架对比类型比较少，可以考虑更多的截面为三角形的阻水框架。

八 结论

本建模工作旨在追求稳固性和实用性的防洪框架，通过理论分析和计算机模拟，我们考察了框架不同的外观对减流、抗压的作用比较（也是本文工作的重点之一，是支持设计方向的重要依据），最终我们认为仍然采用四面六边体为大方向的设计，在以下三方面进行改进：

(1) 对于边棱，通过有限单位元原理进行抗压和位移度的分析，我们认为采用五棱柱的形式是最优的；

(2) 在投掷和摆放上，我们新增了一个可以倒置的半截四面六边体，使得在摆放的过程中形成正反两种互相契合的四面六边体串，进一步缓解了四面六边体易被冲翻的问题。

(3) 细节处我们为四面六边体的棱设计了锯齿花纹，在实施和使用的过程中都是可行的。

当然，本文的工作最大的遗憾是没有进行水槽实验模拟，如果能在下一步工作中实际模拟一下本文提出的策略，相信对阻水促淤的护岸工作会很有借鉴作用。

参考文献

- [1] 韩滚观、张翅哲等, *实用新型专利说明-专利号 98233050.2*, 专利文献出版社出版, 2000 年。
- [2] 王勖成、邵敏, *《有限元基本原理和数值方法》[M]*, 清华大学出版社, 38-69 页, 1997 年。
- [3] 庄茁, *《连续体和结构的非线性有限元》[M]*, 清华大学出版社, 127-132 页, 2012 年。
- [4] 陶丘德, 李世昌(译), *《结构力学能量原理》[M]*, 人民交通出版社, 08-24 页, 1984 年。

数学中国提供 (www.madio.net)