

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1326

参赛队员（签名）：

队员 1：吴优

队员 2：罗维佼

队员 3：张营

参赛队教练员（签名）：刘瑞娟

参赛队伍组别：本科组

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1326

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2013@tzmcm.cn

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段

题 目 基于层次分析法的护岸框架最优方案选择

关 键 词 护岸框架 层次分析法 立体图形 触脚设计 Matlab

摘 要：

长期以来，四面六边透水框架在河道整治等工程中，因其取材方便、自身稳定性、透水性、阻水性好、适合地形变化等特性优点而被广泛的应用。但是，在抛投和使用过程中，存在被水流冲击而翻滚移位、结构强度的不足、难以合理互相钩连的问题，使框架群不能达到理想的堆砌效果。本文主要探讨如何合理设计改进现有护岸框架，以最大程度减少框架群被水流冲击翻滚移位的情况，增加框架群在使用过程中互相钩连程度和结构强度，达到减速促淤效果。

针对问题，我们结合四面六边透水框架本身的优势特性，在原有框架的基础上进行改进设计，根据三角形稳定性的特性，通过应用机理分析，进行物理图形构造，设计出三种供选方案。

模型一：构建四面六边带触脚框架模型（图 5.2），该模型在四面六边透水框架的基础上，运用触脚设计，较好的融合增强四面六边透水框架本身的优点特性，使框架达到不易翻滚，并与其他框架自然地相互钩连。

模型二：构建六面九边带触脚框架模型（图 5.6），该模型是对模型一的改进，综合模型一和原型模型的结构，不仅具备良好的亲水性、阻水性和稳定性，而且触脚比模型一更多，使框架更加稳定，不易翻滚、框架群之间也更容易钩连；同时，模型二施工简单，更容易构造，也更加节约经济造价成本。

模型三：构建双四面六边护岸框架模型（图 5.12），该模型设计内外双层四面六边透水框架体，旨在增加护岸框架结构强度和稳定性及阻水性。运用内外双层结构设计，形成内外双层保障。由三角形的稳定性可以得知该模型结构强度高、稳定性强。

模型四：应用层次分析法对如何科学、合理地进行选择护岸框架，进行系统的分析。选取施工时架空率易接近 4 到 6、结构强度、不易翻滚程度、框架群间易钩连程度、生产成本及易生产、施工简易度六个因素指标为准则层，选取原有护岸框架和本文设计的三个框架模型作为方案层，运用 Matlab 软件计算比较，最后得出结论为：模型二（六面九边带触脚框架模型）为最优护岸框架模型。

参赛队号： 1326

所选题目： A 题

参赛密码
(由组委会填写)

一、问题重述

在江河中，堤岸、江心洲的迎水区域被水流长期冲刷侵蚀。在河道整治工程中，需要在受侵蚀严重的部位设置一些人工设施，以减弱水流的冲刷，促进该处泥沙的淤积，以保护河岸形态的稳定。

现在常用的设施包括四面六边透水框架等。这是一种由钢筋混凝土框杆相互焊接而成的正四面体结构，常见的尺寸为边长约 1m，框杆截面约 $0.1 \times 0.1\text{m}$ ，将一定数量的框架投入水中，在水中形成框杆群，可以使水流消能减速，达到减弱冲击，防冲促淤的效果。

对四面六边透水框架在抛投时和在使用过程中，可能被水流冲击而翻滚移位，使框架群不能达到理想的堆砌效果，对功能有不利影响。为了使框架在水中互相钩连，需要设计新的形状。但已有的多数设计方案都存在问题，主要集中在两个方面：结构强度不足，以及虽然原则上能够互相钩连，但依然不清楚最终堆砌而成的形状是否合理。请你建立合理的数学模型，设计一个良好的框架结构。

二、问题的分析

近 10 年来，四面六边透水框架作为一种新型的护岸防冲方式，在河道整治等工程中，得到了广泛的应用。这种新型的护岸方式，不仅可以节省工程材料，而且具有良好的减速促淤效果，在投放区域起到了防止冲刷的作用，但是，在实际使用过程中，四面六边透水框架可能被水流冲击翻滚移位，使框架群不能达到理想的堆砌效果，对功能有不利的影响。主要表现为：结构强度的不足，以及虽然原则上能够互相钩连，但是不清楚最终形状是否合理。

针对所给问题，我们要设计出一种新型的护岸框架结构，以解决以下实际生活中护岸框架存在的问题：

- 1) 结构强度的不足；
- 2) 科学、合理的相互钩连；
- 3) 减轻框架群在使用过程中的翻滚移位率。

我们知道混凝土四面六边透水框架群作为新型的江河护岸工程技术^[1]，和其他传统的护岸框架（丁坝、抛石护脚等）相比，拥有取材方便、自身稳定性好、透水性好、阻水性佳、基础不易被冲刷、适合地形变化等特性优点，特别是框架的尺寸、架空率和铺设长度的设计，更是有效的综合了透水性、稳定性和阻水性。

因此，我们考虑在设计新型护岸框架群时，应结合混凝土四面六边透水框架群在护岸技术上的优势，在混凝土四面六边透水框架群的基础上优化设计，发挥四面六边透水框架群的优势，并尽量弥补四面六边透水框架群在结构强度、易钩连程度、翻滚移位程

参赛队号 # 1326

度上的不足，并综合考虑设计后的框架结构在架空程度、经济生产成本、施工的难易程度等指标，通过机理分析，确定出参数关系，从而设计出四面六边带触脚框架模型（模型一）、六面九边带触脚框架模型（模型二）和双四面六边透水框架群（模型三）然后，我们利用 Matlab 软件^[2]，建立框架群层次分析模型^[3]（模型四）通过建立目标层、决策层和方案层，可以选取施工时架空率接近 4-6 的程度、结构强度、易翻滚程度、易钩连程度、生产成本、施工简易度六个指标对模型一、模型二、模型三所设计的改价护岸框架和四面六边透水框架群原型进行综合分析评价，以确立出最优的新型护岸框架方案。

三、模型假设

1. 护岸框架焊接牢固。
2. 护岸框架材料均匀，规格一致。
3. 设计的各类框架选材和四面六边透水框架一样。
4. 设计的各类框架在施工过程中，不出现偷工减料等现象。
5. 不考虑不同市场间的材料的差价。

四、符号说明

符号	含义
d	单个四面六边透水框架的尺寸（边长与边的横截面的边长之比）
l	单个四面六边透水框架的边长
r	四面六边透水框架每一边的横截面（正方形）的边长
l'	护岸框架的触脚长
A	成对比较矩阵（准则层对目标层）
B_i	成对比较矩阵（方案层会目标层）
b_{ij}	矩阵中的元素
w	矩阵 A 的归一化特征向量
n	矩阵的阶数
λ_i	矩阵的最大特征值
CI	一致性指标
RI	随机一致性指标
CR	一致性比率

参赛队号 # 1326

 a_{ij} 矩阵 A 中的元素

五、模型的建立及求解

5.1 模型一（四面六边带触脚框架模型）

本模型通过机理分析，在四面六边框架（如图 5.1）的基础上分析设计。

5.1.1 现有四面六边框架分析

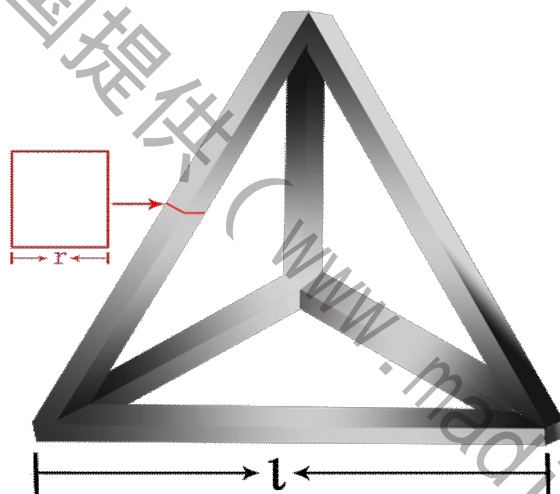


图 5.1 四面六边框架

四面六边框架群作为近 10 年来新型的江河护岸工程技术，具有以下优缺点（如表 5.1 所示）

表 5.1 四面六边框架群优缺点

优点	本身可以近似的看作正三棱锥	每一个面都为正三角形，根据物理学三角形具有固定性，四面六边框架群本身就具备良好的稳定性。
----	---------------	--

参赛队号 # 1326

	框架群合理架空率取值分配，拥有恰当的空隙结构	区别于传统的护岸框架结构，基础不易被冲刷、适合地形变化，具有良好的透水性和阻水性
缺点	结构强度的不足	虽然原则上能够互相钩连，但依然不清楚最终堆砌而成的形状是否合理
	被水流冲击而翻滚移位	在抛投时和在使用过程中，可能被水流冲击而翻滚移位，使框架群不能达到理想的堆砌效果，对功能有不利影响。

针对四面六边框架群在实际护岸中存在的问题和不足，我们为了保证四面六边框架群区别于传统护岸框架的优点，在四面六边框架群的框架结构上进行优化设计。

5.1.2 第一种优化设计方案

四面六边带触脚框架立体效果图（如图 5.2）

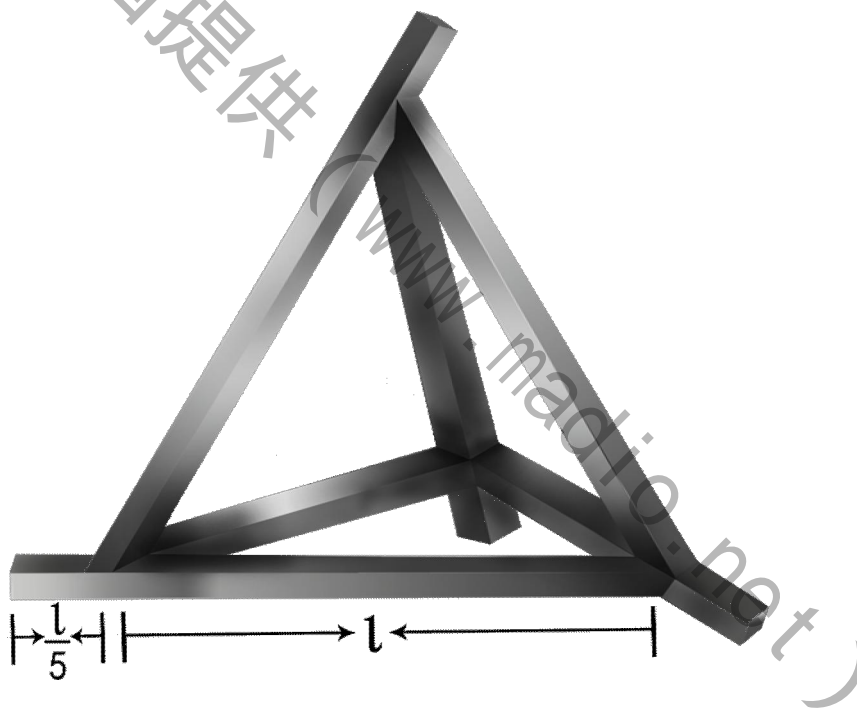


图 5.2 四面六边带触脚框架立体效果图

四面六边带触脚框架平面结构构造（如图 5.3 所示）

参赛队号 # 1326

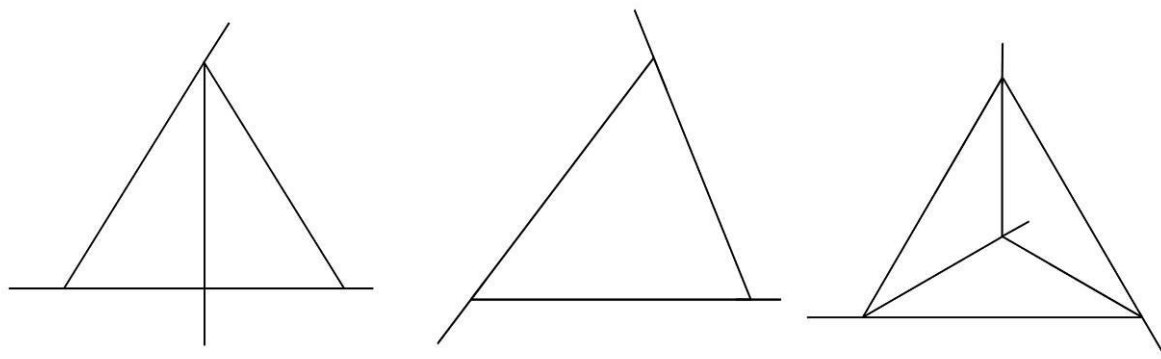


图 5.3 四面六边带触脚框架正视图、左视图、俯视图

5.1.3 四面六边带触脚框架优点分析

四面六边带触脚框架和四面六边框架相比，具有以下优点（表 5.2 所示）

表 5.2 四面六边带触脚框架优点分析表

1	不易翻滚：四面六边带触脚框架和四面六边框架相比，在每个边上新增了触脚，能有效地阻止水流冲击而导致的翻滚移位；护岸框架一般设置在浅水区域，触脚设计能更好地运用地形优势，加大触脚与淤泥的结合度，在一定程度上也减缓了易翻滚度。
2	框架群之间更容易钩连：四面六边带触脚框架的触脚设计，容易与框架群自然地相互钩连，这种自然的相互钩连方式相比而言，更加合理。

5.1.4 四面六边带触脚框架设计步骤方法

步骤一

由于带触脚的四面六边框架，相对于四面六边框架有表 5.2 的优势，所以，我们在四面六边框架的基础上，沿着一边延伸 $\frac{l}{5}$ 的棱长。（如图 5.4 所示）

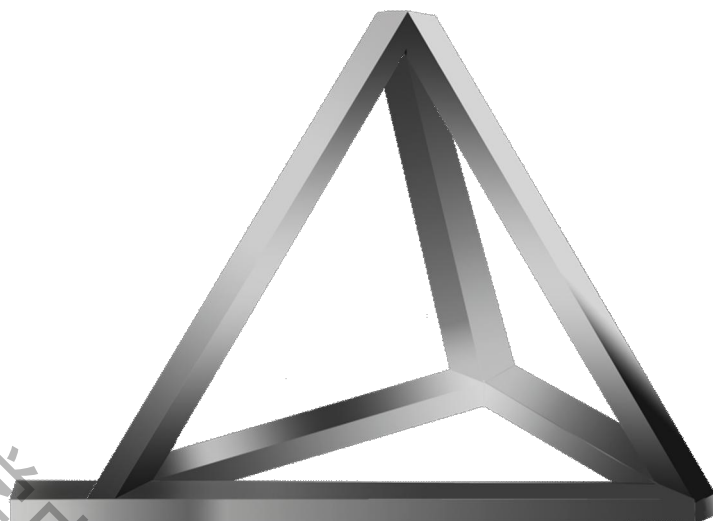


图 5.4 四面六边透水框架延长一边棱长

步骤二

确立参数尺寸。如图 5.5 为图 5.4 延长的触脚横截面。

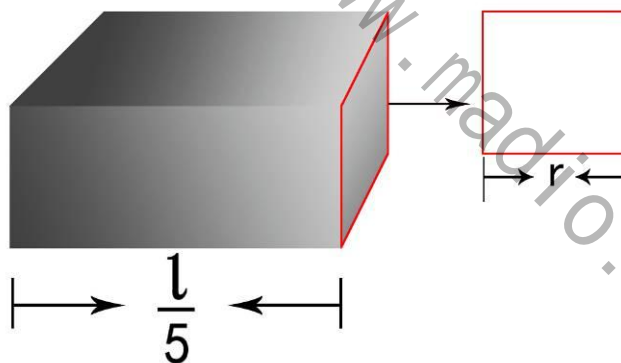


图 5.5 延长的棱长横截面

如图 5.5 所示， r 为框架每一边的横截面（正方形）的边长，通过机理分析文献资料和实验数据^[1]，我们知道尺寸并不是越大或者越小就越好， d 的最优取值为 15 至 18。为了方便计算，我们取中间值 16，使：

$$d = \frac{l}{r} = 16$$

现实中，触脚并不是越长越好，实际中，触脚越长越容易折断，触脚越短，效果也

参赛队号 # 1326

就不明显，为了方便计算，我们约定：触脚长为 $3r$ 。

则：

$$\frac{l}{r} = 16$$

$$l = 16r$$

$$l : 3r = 16r : 3r = \frac{16}{3} \approx 5$$

$$l' = \frac{l}{5}$$

即触脚长为边长的 $1/5$ 。

步骤三

按照步骤一到步骤二的方法，同时延长其他几个边，到达如图 5.2 所示的四面六边带触脚框架。

四面六边带触脚框架在四面六边框架的基础上，新增了触脚，使框架结构不尽具备四面六边框架的基本优点，而且不易翻滚，容易钩连，克服了四面六边框架本身的不易钩连。

5.2 模型二（六面九边带触脚框架模型）

模型二(六面九边框架带触脚框架模型)是模型一的改进模型。

5.2.1 第二种优化设计方案：六面九边框架优化设计方案

模型二的立体效果图（如图 5.6 所示）

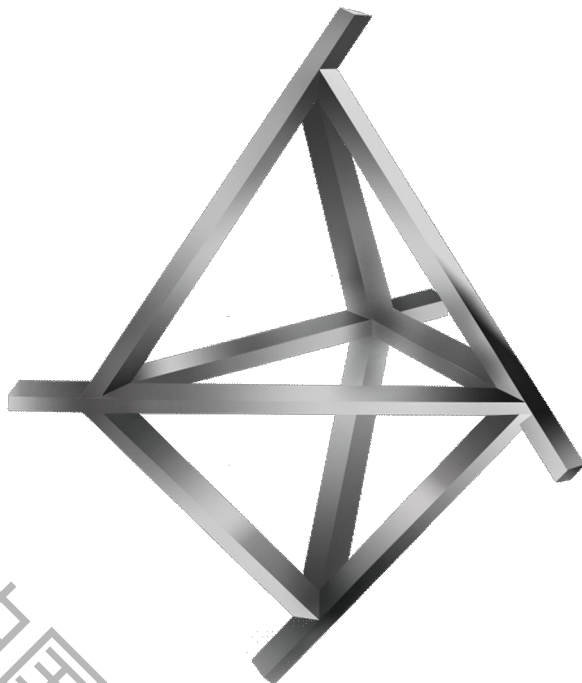


图 5.6 六面九边带触脚框架立体图

六面九边框架设计平面结构构造（如图 5.7）

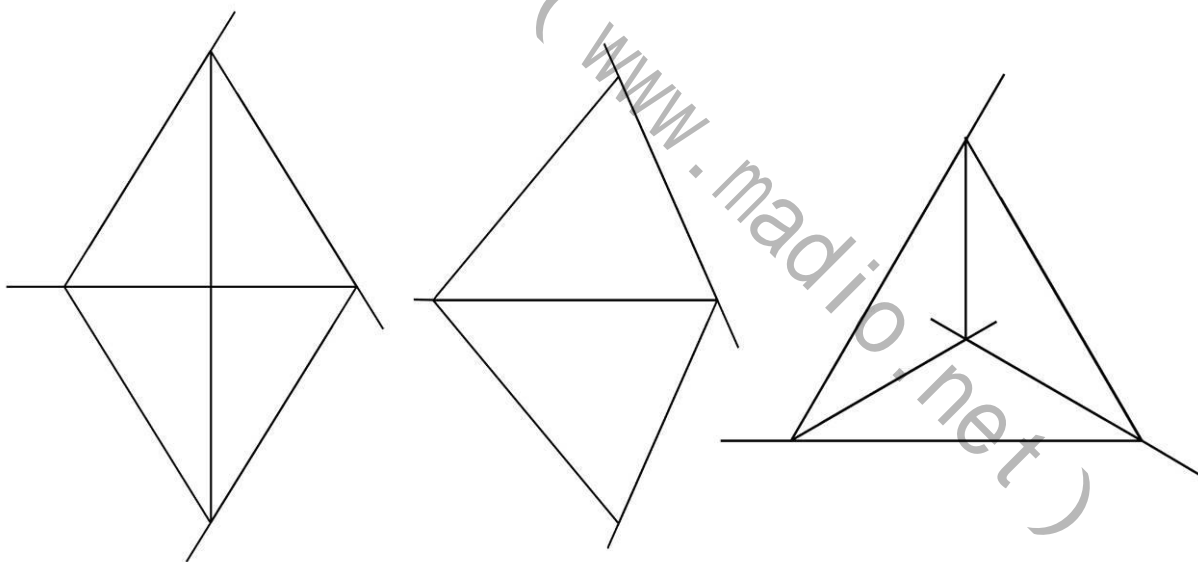


图 5.7 六面九边框架带触脚正视图、左视图、俯视图

模型二由上下两个四面六边框架构成，形成六面九边框架，每个面都是三角形的六面九边框架，具有更强的结构强度，稳定性虽然相比四面六边框架有所降低，但是与传统的护岸框架稳定性具有一定的优势。综合模型一带触脚的特性，使模型二组成的框架群更加容易相互钩连，触脚容易扎入泥土，使框架群更加稳定，不易翻滚。

参赛队号 # 1326

5.2.2 六面九边带触脚框架在水流中的示例图

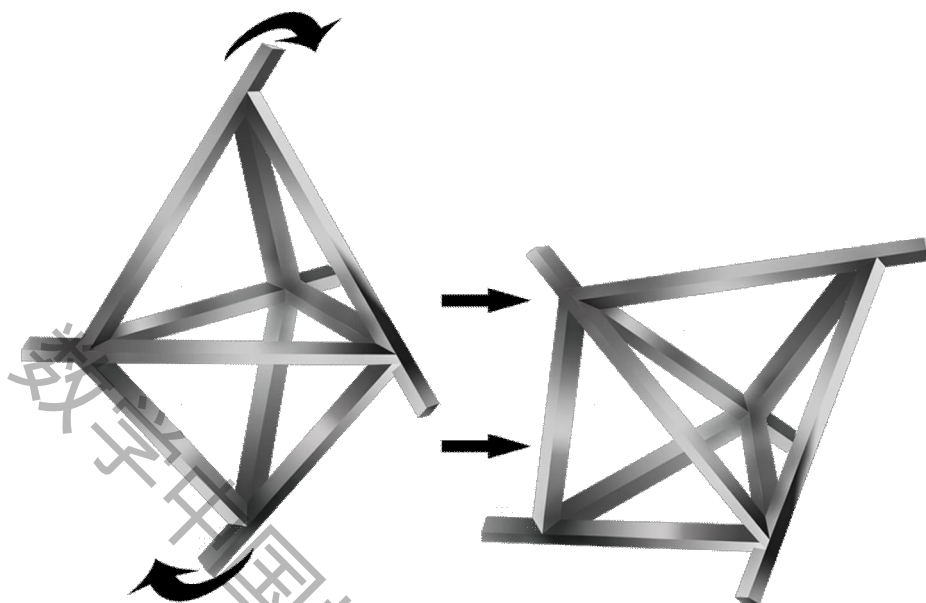


图 5.8 六面九边透水框架旋转

如图 5.8 所示的框架结构，投到岸边，触脚插入泥土中的效果如图 5.9 所示，

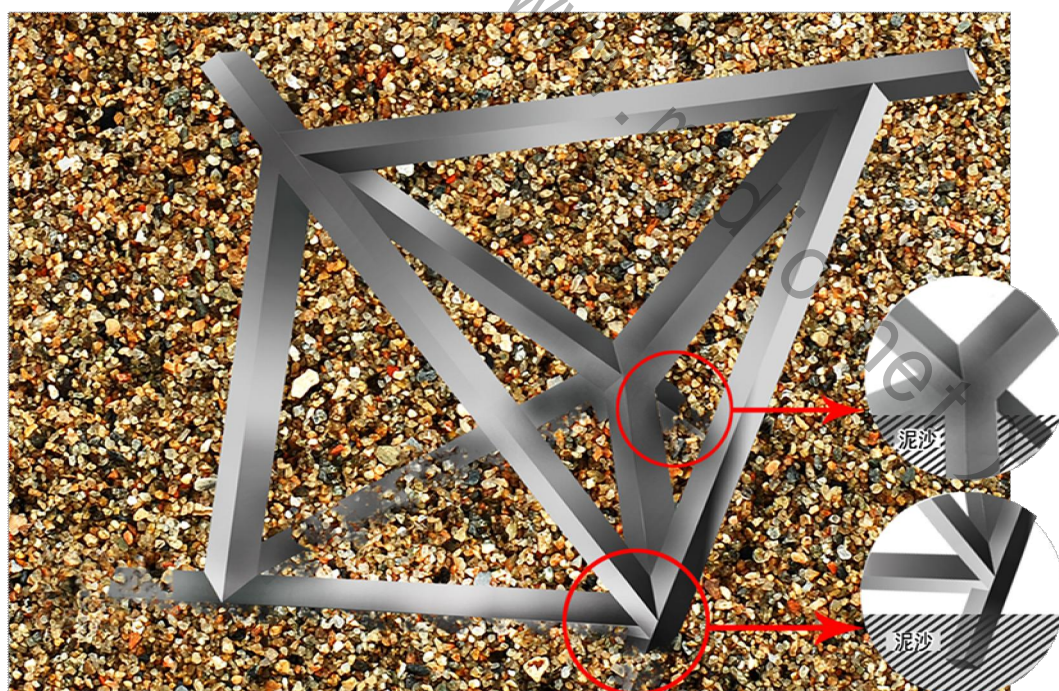


图 5.9 六面九边框架触脚插入泥沙示意图

参赛队号 # 1326

此时为框架放在岸边无水状态下的示意图，当有水流时，框架如图 5.10 所示。



图 5.10 六面九边框架放入水流中示意图

5.2.3 六面九边带触脚框架的优点分析

六面九边带触脚框架和模型一相比，拥有以下优点（如表 5.3 所示）

表 5.3 六面九边带触脚框架优势分析表

1	更加不易翻滚：如 5.2.2 六面九边带触脚框架在水流中的示意图（图 5.10）六面九边带触脚框架在结构上，由上下两个四面六边框架构成，而且每条边延伸的触脚长，容易与框架群自然地相互钩连，触脚设计也更容易扎深泥沙层，使框架结构更加不易翻滚
2	框架群之间更容易钩连：模型二的触脚设计，容易使框架群自然相互钩连，而不是为了钩连而钩连，真正达到科学、合理，而且相比模型一而言，模型二触脚更多，钩连效果更为明显。
3	施工简单，由两个四面六边透水框架上下组成，更容易构造。
4	节约经济成本，由两个四面六边透水框架上下组成的结构，使六面九边框架在成本计算上，每一个比同等条件下两个四面六边透水框架节约 3 根混合泥土的造价成本。

5.2.4 六面九边带触脚框架设计步骤

步骤一

参赛队号 # 1326

参数确定设置。如图 5.1 所示，我们在四面六边透水框架的基础上设计，取每一个框架的一根边的边长为 l ，横截面边长为 r ，每一跟延伸的触脚长为 $l' = \frac{l}{5}$ ，参数计算方法同模型一的参数计算。

步骤二

在图 5.1 的基础上，焊接如图 5.11 所示的六面九边框架结构，由上下两个四面六边透水框架构成。

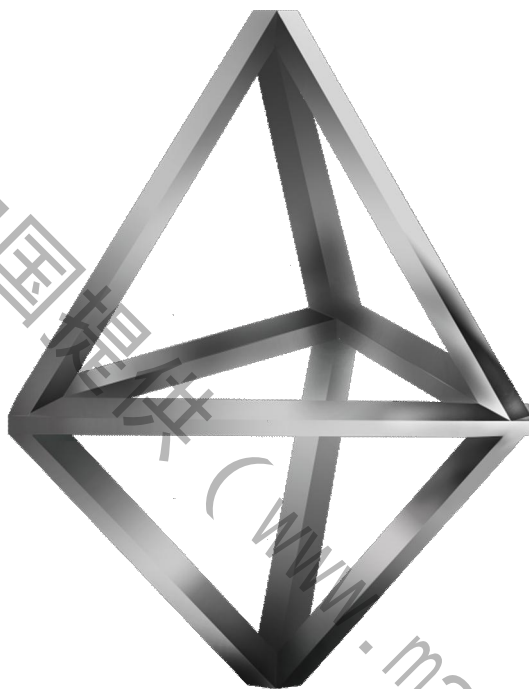


图 5.11 无触脚的六面九边框架

步骤三

如模型一的步骤一到步骤三，在框架结构的边上延伸触脚长，形成最终效果图（如图 5.6 所示）。

5.3 模型三（双四面六边护岸框架模型）

模型三的设计旨在不大范围改变四面六边透水框架的整体基本特性的基础上，增加四面六边透水框架结构强度和稳定性，设计内外双层四面六边透水框架体，以达到更好的防冲促淤的效果。

参赛队号 # 1326

5.3.1 第三种优化方案：双四面六边护岸框架模型优化设计结构方案

模型三的立体效果图（如图 5.12 所示）

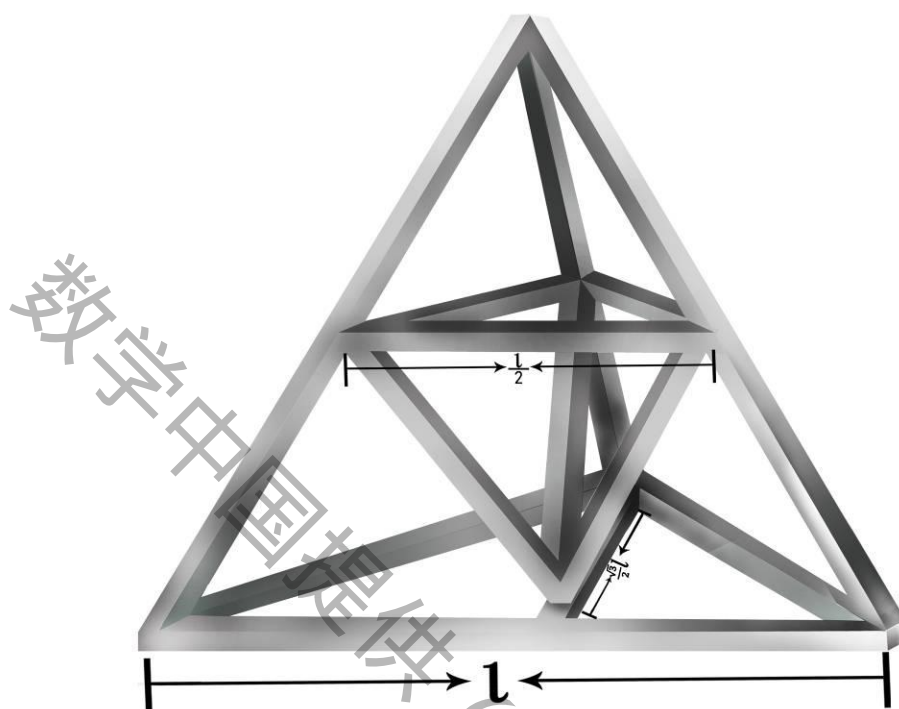


图 5.12 双四面六边护岸框架立体效果图

双四面六边护岸结构内外层框架结构构造

模型三外部框架结构为（如图 5.13）

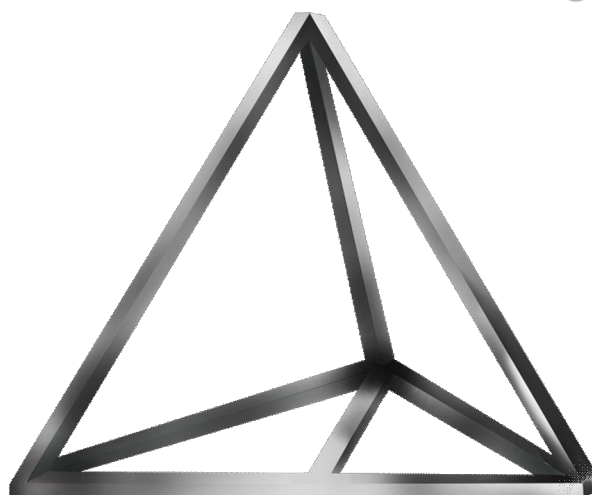


图 5.13 双四面六边护岸外层框架结构

参赛队号 # 1326

如图 5.13 所示，双四面六边护岸外层框架中，底部新增一条辅助轴，以达到固定内部框架的目的。

模型三内部框架结构为（如图 5.14 所示），

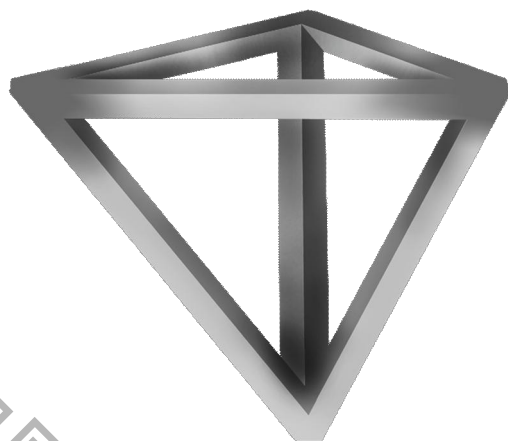


图 5.14 双四面六边护岸内层框架结构

双四面六边护岸内外层整体构造（如图 5.15）

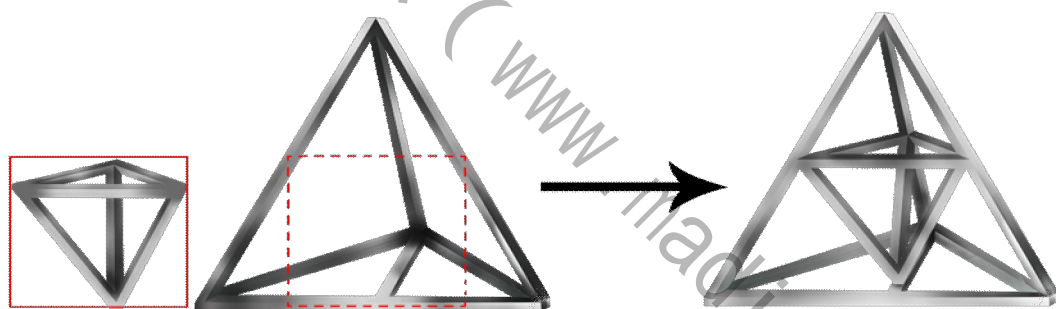


图 5.15 双四面六边护岸内外层框架结构构造

双四面六边护岸框架设计平面结构构造（如图 5.16 所示），

参赛队号 # 1326

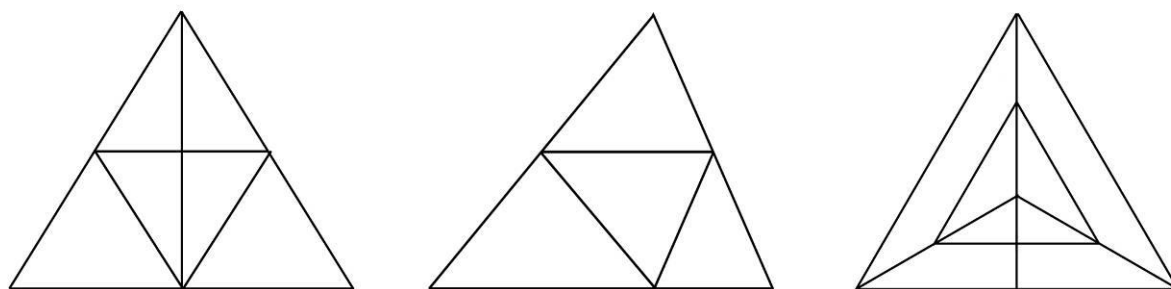


图 5.16 双四面六边护岸框架正视图、左视图、俯视图

5.3.2 双四面六边护岸框架模型优点分析

双四面六边护岸框架和四面六边框架相比，拥有以下优点（如表 5.4 所示）

表 5.4 双四面六边护岸框架优势分析表

1	结构强度：双四面六边护岸框架在结构上由内外两层四面六边框架构成，结构复杂，而且结构强度比模型一、模型二和四面六边框架更好
2	稳定性强：结构设计上，由于都是四面六边框架，保留了四面六边框架本身在透水性、阻水性上的优势，比模型一稳定性更强
3	双层结构设计，由两个四面六边透水框架内外两层组成，很大程度上相互保护，外层四面六边透水框架损坏，也还有内层结构
4	独特框架设计，内外双层框架结构同时又把整体框架划分为小型四面六边透水框架，根据三角形的稳定性，小型的框架结构在很大程度上提高了结构本身稳定性。

5.3.3 双四面六边护岸框架设计步骤方法

步骤一

参数确定设置。外框架的边长设置仍然为 l ，横截面同样边长为 r ，外框架层辅助轴长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ ，如图 5.12 所示内框架层棱长为 $\frac{l}{2}$ ，内框架层横截面边长为 r 。

步骤二

制作框架时，有意识的在外框架层内制作如图所示的内框架层结构，内框架层结构

参赛队号 # 1326

和外框架结构方向刚好相反，使总体框架形成内外双层结构，并形成 4 个小型四面六边框架。

步骤三

在外框架底层焊接 $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ 长度的辅助轴，以达到更好的固定内框架层的目的，效果如图 5.12 所示。

5.4 四面六边透水框架框架——原型模型

为了方便比较设计后的护岸框架模型，我们选取四面六边透水框架，作为原型与之比较，效果图如图 5.1 所示。

四面六边透水框架设计平面结构构造（如图 5.17 所示），

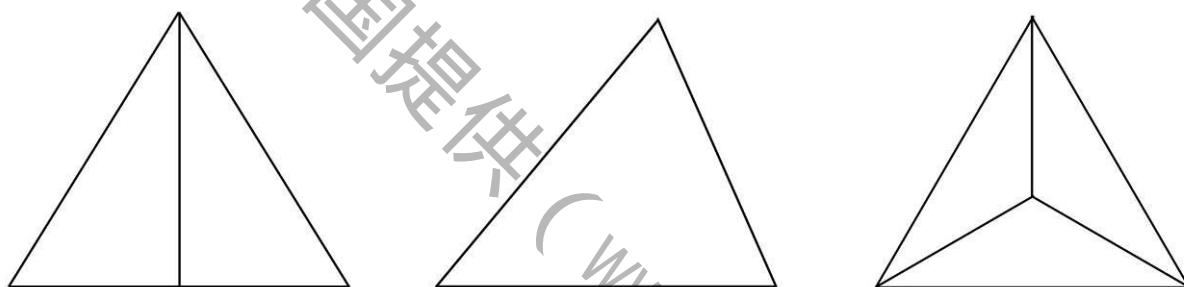


图 5.17 四面六边透水框架正视图、左视图、俯视图

原型的尺寸为：每边长度为 l ，横截面边长为 r 。原型的优缺点如表 5.1 所示。

5.5 模型四（层次分析法确定优化设计方案选择）

5.5.1 问题分析

四种护岸框架模型，哪种护岸框架效果最好，我们这里采用在原有方案和以上设计的三种方案基础上，建立框架群层次分析模型^[3]的决策方法，首先，可以选取施工时架空率接近 4 至 6 的程度、结构强度、易翻滚程度、易钩连程度、生产成本、施工简易度六个指标对所设计的三种改进护岸框架和四面六边透水框架原型进行综合分析评价，确立出最优的新型护岸框架模型方案。

5.5.2 建立层次结构模型

目标是选择一个最优护岸框架，选取准则为施工时架空率易接近 4 至 6、结构强度、

参赛队号 # 1326

不易翻滚程度、框架群间易钩连程度、生产成本及易生产、施工简易度，方案层为原型模型、模型一、模型二、模型三 4 种方案。

准则说明：

(1) 施工时架空率易接近 4 至 6: 架空率表示框架群内部空隙的相对大小。我们根据文献资料和大量的实验数据^[1]得知，设计的护岸框架结构架空率在 4 至 6 的时候，阻水性和亲水性效果最佳，到达最好的减速促淤效果。

(2) 结构强度：指在河岸上的护岸框架自身的稳定性，结构强度越大则自身的稳定越强，构造也越复杂，结构的强度同时也是四面六边透水框架在实际运用中存在，需要克服的问题之一。

(3) 不易翻滚程度：指护岸框架在实际投入运用过程中，受水流冲击而不易翻滚移位的程度，一个好的护岸框架设计应尽量避免框架结构受水流而翻滚移位，所以不易翻滚程度同样也是评价设计好坏的重要指标因素之一。

(4) 框架群间易钩连程度：指护岸框架与其他框架的相互钩连程度，护岸框架结构越容易与其他的框架钩连，就易形成框架群，在实际投入使用过程中，也就越稳定，越能形成良好的减速促淤效果。

(5) 生产成本及易生产：在实际生活投入使用过程中，同样经济生产成本也是重要指标之一，结构强度、稳定性、阻水性、透水性再好，如果生产成本太大，现实中也是不会投入使用的。

(6) 施工简易度：即生产施工框架的便易程度，越容易生产的框架结构，就越容易生产出来，生产效率也就越高，但是就不能保证其减速促淤效果以及框架结构本身的阻水性、透水性和稳定性，所以施工简易度虽然也是一项影响因素，但和另外因素相比，比重相对较低。

5.5.3 构建层次分析图

我们运用 AHP 对其进行系统的分析，得出如图 5.18 所示的结构模型图

参赛队号 # 1326

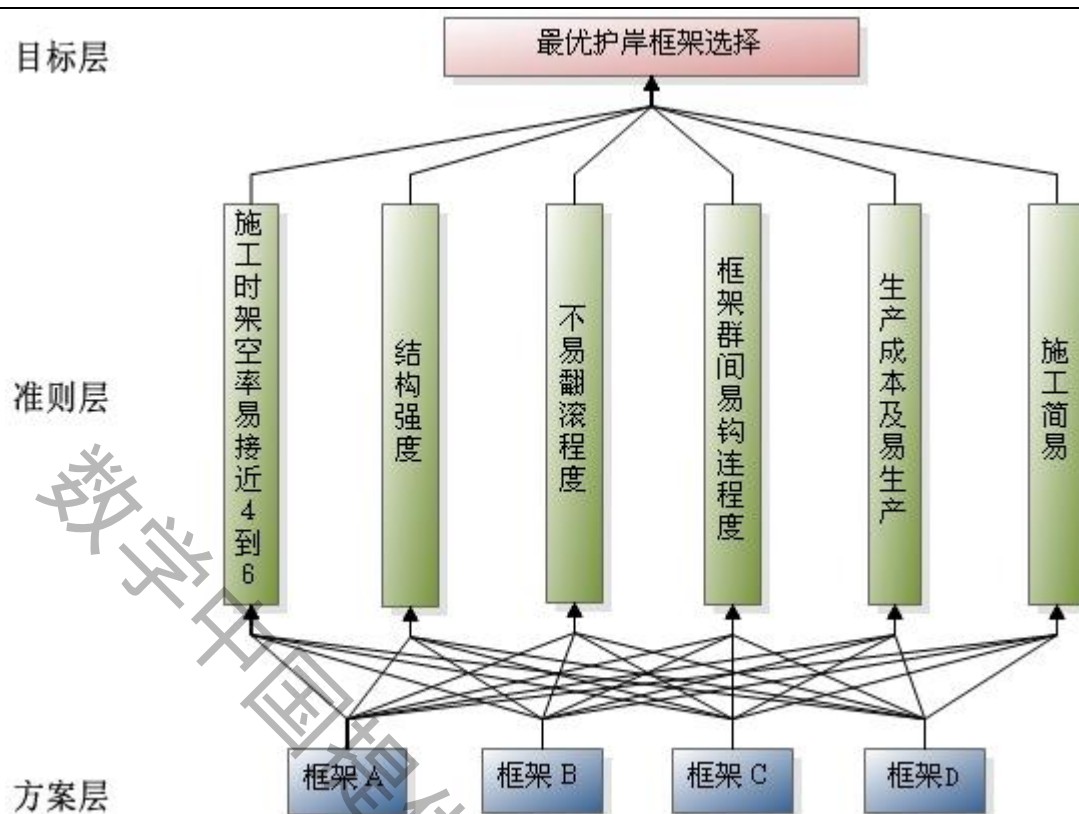


图 5.18 护岸框架形状决策问题的层次结构图

方案层中的框架 A 是四面六边透水框架框架原型模型，框架 B 是模型一（四面六边带触脚框架模型），框架 C 是模型二（六面九边带触脚框架模型），框架 D 是模型三（双四面六边护岸框架模型）

其中，重要性的标度如表 5.5 所示

表 5.5 数值重要性标度表

数值标度	含义
$b_{ij} = 1$	B_i 与 B_j 同样重要
$b_{ij} = 3$	B_i 比 B_j 稍微重要
$b_{ij} = 5$	B_i 比 B_j 比较重要
$b_{ij} = 7$	B_i 比 B_j 十分重要
$b_{ij} = 9$	B_i 比 B_j 绝对重要
$b_{ij} = 2, 4, 6, 8$	上述相邻判断的中间值

5.5.4 构建判断矩阵

我们利用两两比较的方法，由各准则对比，得到正反矩阵如下

参赛队号 # 1326

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 5 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵中 $a_{12} = 3$ ，表示施工时架空率易接近 4 到 6 比结构强度稍微重要，因为当架空率接近 4 到 6 时框架的减速消能效果最好。达到设计的初衷：减速消能。同理，施工时架空率易接近 4 到 6 因素比框架群的易钩连程度稍微重要；比生产成本及易生产程度明显比较重要，与施工的简易相比，比较重要，所以根据判断依据， $a_{14} = 3$ ， $a_{15} = 6$ ， $a_{16} = 5$ 。如果护岸框架容易翻滚，那么就算施工时，架空率接近 4 到 6，随着护岸框架的翻滚，架空率也会很快变化，所以不易翻滚程度与施工时架空率易接近 4 到 6 同等重要。所以 $a_{13} = 1$ 。

矩阵中 $a_{23} = a_{24} = 1$ 表示结构强度与不易翻滚程度和框架群易钩连程度同等重要，因为这些因素都是影响框架消能减速效果的重要因素；结构强度比生产成本及易生产、施工简易更为重要，因为我们的目的是设计出一个较之有效的护岸框架，如果说生产成本低或者有些难施工也可以接受的。所以 $a_{25} = a_{26} = 4$ 。

矩阵中 $a_{34} = 2$ 表示不易翻滚程度比框架群易钩连程度微小重要，因为如果框架群易翻滚，无论钩连程度好坏也会散开；不易翻滚程度比生产成本和施工简易更为重要，因为我们需要的是能够到达减速促淤效果的护岸框架。所以， $a_{35} = a_{36} = 4$ 。同理，框架群的易钩连程度与生产成本及易生产和施工简易相比是比较重要。所以， $a_{45} = a_{46} = 5$ 。而如果生产成本低而且容易生产，但施工起来很困难也是不可行的，所以生产成本与施工简易相比，后者比前者稍微重要。所以 $a_{56} = \frac{1}{3}$ 。

利用 Matlab 软件^[2]对矩阵 A 求最大特征值（代码详见附录），得： $\lambda = 6.3303$ ，归一化特征向量为：

$$w = (0.3331, 0.1697, 0.2312, 0.1671, 0.0392, 0.0596)$$

一致性指标

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1} = \frac{6.3303 - 6}{6 - 1} = 0.06606$$

有资料^[3]可查出随机一致性指标 RI 的数值表（如表 5.6 所示），

参赛队号 # 1326

表 5.6 随机一致性指标 RI 的数值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

由上表知，当 $n=6$ 时， $RI=1.26$ ，所以一致性比例

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.06606}{1.24} = 0.0533 < 0.1$$

即一致性检验通过，上述 w 可作为权向量。

在护岸框架形状决策中，已经得到了第 2 层（准则层）对第 1 层（目标层）的权向量。用同样的方法构造第 3 层（方案层）对第 2 层的每一个准则的成对比较阵，分别如下

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 5 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

这里矩阵 $B_k (k=1,2,3,4,5,6)$ 中的元素 $b_{ij}^{(k)} (i=A,B,C,D; j=A,B,C,D)$ 是方案（护岸框架形状）形状 i 与形状 j 对于准则因素 k 的优越性比较尺度。

由第 3 层的成对比较阵 $B_k (k=1,2,3,4,5,6)$ 通过 Matlab^[2] 计算出权向量 $w_k^{(4)}$ （代码详见附录），最大特征根 λ_k ，一致性指标 CI_k 和一致性比率 CR_k 结果列入下表（表 5.7）。

表 5.7 护岸框架形状决策问题第 3 层的计算结果

k	1	2	3	4	5	6
$w_k^{(4)}$	0.0910	0.1093	0.0803	0.1051	0.4476	0.1996
	0.2871	0.1093	0.2753	0.3078	0.2829	0.1404
	0.5000	0.2090	0.5304	0.4944	0.1636	0.4950
	0.1220	0.5725	0.1140	0.0927	0.1059	0.1650

参赛队号 # 1326

λ_k	4.0961	4.0042	4.1742	4.0325	4.0710	4.0606
CI_k	0.0320	0.0014	0.0580	0.0108	0.0237	0.0202
CR_k	0.0356	0.0015	0.0645	0.0120	0.0263	0.0225

由上表可知，所有矩阵的一致检验均通过。

根据以上数据分别计算出框架 A、框架 B、框架 C、框架 D 在目标中的组合权重列表（如表 5.8）

表 5.8 各框架在目标中的组合权重计算结果

w	0.3331	0.1697	0.2312	0.1671	0.0392	0.0596	总排序
框架 A	0.0910	0.1093	0.0803	0.1051	0.4476	0.1996	0.1144
框架 B	0.2871	0.1093	0.2753	0.3078	0.2829	0.1404	0.2487
框架 C	0.5000	0.2090	0.5304	0.4944	0.1636	0.4950	0.4432
框架 D	0.1220	0.5725	0.1140	0.0927	0.1059	0.1650	0.1936

层次分析法中方案层对目标层的组合一致性比率为

$$CR = \frac{\eta_1 CI_1 + \eta_2 CI_2 + \cdots + \eta_m CI_m}{\eta_1 RI_1 + \eta_2 RI_2 + \cdots + \eta_m RI_m}$$

其中 η_i 为第 2 层对第 1 层的权向量 w 的第 i 个元素。

护岸框架形状决策问题中方案层对目标层的组合一致性比率为

$$CR = \frac{0.3331 \times 0.0320 + 0.1697 \times 0.0014 + \cdots + 0.0596 \times 0.0202}{0.3331 \times 0.90 + 0.1697 \times 0.9 + \cdots + 0.0596 \times 0.90} = 0.0314 < 0.1$$

所以，组合一致性检验通过检验。

结果表明，在护岸框架形状中，框架 C（六面九边带触脚框架）的综合护岸减速效果最为优越。

六、 结论

根据护岸框架所需求的亲水性、稳定性、阻水性、结构强度、互相钩连程度、易翻滚程度和成本综合考量，我们设计出了三种框架模型和原型：

模型一：构建四面六边带触脚框架模型，运用触脚设计，很好的结合四面六边透水框架本身的优点特性，在构造上，使框架达到不易翻滚，并与其他框架自然、合理的

相互钩连；

模型二：构建六面九边带触脚框架模型，不仅具备良好的亲水性、阻水性和稳定性，而且触脚比模型一更多，使框架更加不易翻滚、框架群之间也更容易钩连；同时，模型二施工简单，更容易构造，也更加节约经济造价成本。

模型三：构建双四面六边护岸框架模型，该模型增加护岸框架结构强度和稳定性。运用内外双层结构设计，形成内外双层保障，而且独特框架设计把整体框架划分为4个小型四面六边透水框架，利用三角形的稳定性，该模型结构强度高、稳定性强。

四面六边透水框架原型模型：具有稳定性、透水性、阻水性好的特点。

三个模型各有优缺点，我们通过模型四（层次分析模型）运用AHP对其进行系统的分析。通过建立判断矩阵，运用一致性检验，通过Matlab软件计算、比较，最后得出结论为：模型二（六面九边带触脚框架模型）最为优越。

所以，我们最终选取我们设计的模型二：六面九边带触脚框架模型方案。

七、 模型的评价

6.1 模型的优点

- (1) 本模型运用层次分析法（AHP），通过构建层次结构和判断矩阵，结合占权比重大的指标准则，科学、系统、合理地选择优化方案；
- (2) 模型设计过程中，运用机理分析确立参数的选择；
- (3) 独特触脚设计结构，使框架结构达到不易翻滚的目的，并与其他框架自然、合理的相互钩连；
- (4) 模型设计运用三角形的稳定性定理；
- (5) 立体水流示意模拟，让框架结构更加形象；
- (6) 运用Matlab软件进行层次分析的计算特征值、特征向量和一致性检验；
- (7) 立体图形结合平面构图，直观、具体地反应出框架设计结构，使人一目了然。

6.2 模型的缺点

模型的缺点层次分析模型（AHP）模型中，准则层的指标选择虽然是本问题中按护岸框架影响因素权重最大的六种因素，但是还是存在一定的主观性。

八、 模型的改进与推广

7.1 模型的改进

在建模过程中，因时间仓促，所构建的设计框架模型有限，这样使方案层的选择方

式也有限，这些问题留在以后进行改进。

7.2 模型的推广

模型可以推广到其他框架结构的设计；立体图形的构造；物理模型。层次分析法可以推广于人力资源管理模型、人口统计模型以及旅游选择、资源分配等选择性、决策性和最优的问题。

九、 参考文献

- [1] 张文捷, 王玢, 麻夏, 王南海, 江河护岸新技术, 北京: 中国水利水电出版社, 2002。
- [2] 赵海滨, MATLAB 应用大全, 北京: 清华大学出版社, 2012。
- [3] 姜启源, 谢金星, 数学模型, 北京: 高等教育出版社, 2011。

参赛队号 # 1326

十、 附录

计算成对比较的最大特征值、权向量、一致性比率的 Matlab 代码

```
clear all;
close all;
a=[1 3 1 3 6 5;
1/3 1 1 1 4 4;
1 1 1 2 4 4;
1/3 1 1/2 1 5 5;
1/6 1/4 1/4 1/5 1 1/3;
1/5 1/4 1/4 1/5 3 1];
[x,y]=eig(a);
eigenvalue=diag(y);
lamda_a=eigenvalue(1)
cia=(lamda_a-6)/5;
cra=cia/1.24
wa=x(:,1)/sum(x(:,1))
b1=[1 1/3 1/4 1/2;
3 1 1/2 3;
4 2 1 5;
2 1/3 1/5 1];
[x,y]=eig(b1);
eigenvalue=diag(y);
lamda_b1=eigenvalue(1)
cib1=(lamda_b1-4)/3;
crb1=cib1/0.9
wb1=x(:,1)/sum(x(:,1))
b2=[1 1 1/2 1/5;
1 1 1/2 1/5; 2 2 1 1/3;
5 5 3 1];
[x,y]=eig(b2);
```

参赛队号 # 1326

```
eigenvalue=diag(y);
lamda_b2=eigenvalue(1)
cib2=(lamda_b2-4)/3;
crb2=cib2/0.9
wb2=x(:,1)/sum(x(:,1))
b3=[1 1/3 1/5 1/2;
3 1 1/3 4;
5 3 1 4;
2 1/4 1/4 1];
[x,y]=eig(b3);
eigenvalue=diag(y);
lamda_b3=eigenvalue(1)
cib3=(lamda_b3-4)/3;
crb3=cib3/0.9
wb3=x(:,1)/sum(x(:,1))
b4=[1 1/3 1/4 1;
3 1 1/2 4;
4 2 1 5;
1 1/4 1/5 1];
[x,y]=eig(b4);
eigenvalue=diag(y);
lamda_b4=eigenvalue(1)
cib4=(lamda_b4-4)/3;
crb4=cib4/0.9
wb4=x(:,1)/sum(x(:,1))
b5=[1 2 3 3;
1/2 1 2 3;
1/3 1/2 1 2;
1/3 1/3 1/2 1];
[x,y]=eig(b5);
eigenvalue=diag(y);
```

参赛队号 # 1326

```
lamda_b5=eigenvalue(1)
cib5=(lamda_b5-4)/3;
crb5=cib5/0.9
wb5=x(:,1)/sum(x(:,1))
b6=[1 2 1/3 1;
1/2 1 1/3 1;3 3 1 3;
1 1 1/3 1];
[x,y]=eig(b6);
eigenvalue=diag(y);
lamda_b6=eigenvalue(1)
cib6=(lamda_b6-4)/3;
crb6=cib6/0.9
wb6=x(:,1)/sum(x(:,1))
w_sum=[wb1,wb2,wb3,wb4,wb5,wb6]*wa
ci=[cib1,cib2,cib3,cib4,cib5,cib6];
cr=ci*wa/sum(0.9*wa)
```