

参赛队号 # 1656

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
承 诺 书

我们仔细阅读了第五届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1656

参赛队员（签名）：

队员 1：钟树涛

队员 2：王曼波

队员 3：商敏妮

参赛队教练员（签名）：詹扬

参赛队伍组别：专科组

参赛队号 # 1656

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1656

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号 # 1656

2012 年第五届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 人机游戏中的数学模型

关 键 词 贪婪法 最小间隔 最优方案

摘 要：

本文从颇有新意的角度出发，重点研究“植物大战僵尸”的游戏问题。以游戏中的向日葵、豌豆荚和僵尸为讨论对象，利用数学建模的方法，对不同的游戏要求，给出合理有效的设计方案。然后，应用我们所建立的模型，求得问题 3 最优解为最少种 5 棵豌豆荚，使僵尸产生的最小间隔为 $\frac{2m}{v}$ ，而计算机永远不会赢。文章的最后部分对问题 4 的三种方案进行了详细分析，选择出了最佳方案为种植 1 株向日葵和 1 棵豌豆荚。

参赛队号 1656

所选题目 D

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛队号 # 1656

1、问题重述

计算机游戏在社会和生活中享有特殊地位。游戏设计者主要考虑易学性、趣味性和界面友好性。人机游戏主要考虑如何设计模型和算法，使它的难度、趣味性达到平衡，这样玩家感觉既有难度，又有解决的信心。设计者既要像导演，规划玩家的行为，又要加入一定随机因素，使玩家觉得不是简单重复。所以在游戏创意和模型确定下来后，参数选择和优化变得非常关键。

以“植物大战僵尸”游戏中的一些简单模型为例，现在只有向日葵、豌豆荚和一种僵尸这三种角色。向日葵能产生阳光，必须用鼠标点击阳光才能收集，过一定时间不点击就会消失。种植向日葵和豌豆荚需要花费阳光；当豌豆荚右侧或所在格有僵尸时便一粒一粒发射豌豆，豌豆数量无限；豌豆向右飞行打击场地上的僵尸，不受向日葵和豌豆荚的阻挡，但不能射穿僵尸；僵尸只从屏幕最右边产生，沿着直线向左行进，会吃掉沿途遇到的向日葵和豌豆荚，但会被豌豆打死立即消失。僵尸走到屏幕最左边，则计算机获胜，游戏结束。一个格内只能种植一株豌豆荚或向日葵，但可以有任意多个僵尸。

假设僵尸 3 步走 1 格，豌豆飞行的速度是僵尸的 18 倍，僵尸每一次抬脚（落脚）豌豆荚就发射一次豌豆，僵尸被打中 9 次立即消亡。僵尸走到豌豆荚或向日葵所在的格开始吞噬，走 3 步将其吃掉。向日葵每产生 1 朵阳光僵尸走 4 格，僵尸走 1 格的时间不点击阳光，阳光就消失。2 朵阳光换 1 株向日葵，4 朵阳光换 1 棵豌豆荚。场地只有从左至右一行 9 个格。

现要求解决以下 4 个问题：

- 1、将以上假设用更简洁明了的方式进行复述；
- 2、场地只在最左边的 1 个格内有豌豆荚，没有向日葵和阳光。求出最小多大间隔产生 1 个僵尸，计算机永远不会赢。
- 3、场地在最左边的若干格内种有豌豆荚，没有向日葵和阳光，等间隔每次产生 1 个僵尸。问最少种几棵豌豆荚，使产生僵尸的间隔最小，而计算机永远不会赢。
- 4、假设游戏开始时有 6 朵阳光，每次产生 1 个僵尸。请设置最佳的种植方案和僵尸产生方案，使计算机永远不会赢，并且游戏紧张有趣。

2 问题的分析

对于问题 1，要求用更简洁明了的方式对题中的假设进行复述。

对于问题 2，题目告诉我们场地只在最左边的 1 个格内有豌豆荚，没有向日葵和阳光。要求我们求出产生 1 个僵尸的最小间隔，使得计算机永远不会赢，也就是要让僵尸永远不能吃掉豌豆荚。经过分析，我们觉得必须先计算出第一只僵尸从产生到被射死时走过的步数以及死时所在的位置。然后就上一只僵尸还在场地上的情形，对下一只僵尸何时产生的情况进行分析，找出最小的产生间隔。

对于问题 3，题目以场地在最左边的若干格内种有豌豆荚，没有向日葵和阳光，等间隔产生 1 个僵尸为已知条件，让我们求出最少种几棵豌豆荚，使产生僵尸的间隔最小，而计算机永远不会赢。本题也涉及到产生僵尸的最小间隔问题，所以我们可以从问题 2 所探索出的僵尸产生的最小间隔的情况这个基础上对本题进行分析求解。分别计算出种 2—8 棵豌豆荚，每一只僵尸从产生到被射死所走过的步数，以此来计算出在种植不同棵数的情况下，僵尸产生的最小间隔，通过对比，找出其中最小的间隔。

对于问题 4，已经假设游戏开始时有 6 朵阳光，每次产生 1 个僵尸，要让我们设置最佳的种植方案和僵尸产生方案，使计算机永远不会赢，并且游戏紧张有趣。根据所给的 6 朵阳光，我们可以设置出三种不同的种植方案，然后对三种不同方案分别进行分

参赛队号 # 1656

析计算，得出最佳的方案。

3 模型假设

- (1) 僵尸出现的次数为无穷；
- (2) 豌豆发射子弹跟僵尸进入场地是同时发生的；

4 符号约定与说明

符号	含义
$n(0 \leq n \leq 9)$	第几颗豌豆射中僵尸
y	第 n 颗豌豆射中僵尸时，僵尸所走过的步数
x'	后一只僵尸从产生到第一次被击中所走过的步数
y'	后一只僵尸从产生到被射死所走过的总步数
v	僵尸走一步的时间
m	僵尸走一步的的长度
Δt	最小的时间间隔

5 模型的建立及求解

5.1 问题 1

假设僵尸 3 步走 1 格，豌豆飞行的速度是僵尸的 18 倍，僵尸每一次抬脚（落脚）豌豆荚就发射一次豌豆，僵尸被打中 9 次立即消亡。僵尸走到豌豆荚或向日葵所在的格开始吞噬，走 3 步将其吃掉。向日葵每产生 1 朵阳光僵尸走 4 格，僵尸走 1 格的时间不点击阳光，阳光就消失。2 朵阳光换 1 株向日葵，4 朵阳光换 1 棵豌豆荚。场地只有从左至右一行 9 个格。

5.2 问题 2

本题的求解关键在于分析出僵尸产生的时间间隔，找出最小的间隔使得计算机永远不会赢，即每只僵尸还没走到场地的最左端就被射死。

5.2.1 求出第一只僵尸被射死时所走过的步数。

根据材料可知，僵尸三步走一个格，豌豆飞行 6 格的时间僵尸走一步，由此可以得到：豌豆飞行 18 格的时间僵尸走一格，也就是说豌豆飞行的速度是僵尸走路速度的 18 倍。

5.2.1.1 第 1 颗豌豆射到僵尸时，僵尸走过的步数。

豌豆跟僵尸相向而行，在子弹射到僵尸时，二者共同走了 8 格，又豌豆飞行的速度是僵尸走路速度的 18 倍，故既是将 8 格分成了 19 份，每一份设为 x 。

由

参赛队号 # 1656

$$19x = 8$$

求得 $x = \frac{24}{19}$ 步。

即当第 1 颗豌豆射到僵尸时，僵尸走了 $\frac{24}{19}$ 步。

5.2.1.2 第 2 颗豌豆射到僵尸时，僵尸走过的步数。

由材料“豌豆荚发射豌豆的频率与僵尸的步频相等”可知，豌豆荚发射豌豆的时间间隔与僵尸走一步的时间相等，所以当第一个豌豆射到僵尸时，第二个豌豆已经经历了僵尸走 $\frac{5}{19}$ 步所用时间里走过的步数 $\frac{30}{19}$ 格。此时，第二个豌豆与僵尸之间的距离为 6 格。

由

$$19x = 6$$

求得 $x = \frac{18}{19}$ 步。

则第 2 颗豌豆射中僵尸时，僵尸走了 $\frac{42}{19}$ 步。

5.2.1.3 第 3 颗豌豆射到僵尸时，僵尸走过的步数。

当第 2 颗豌豆射到僵尸时，第 3 颗豌豆已经飞行了 $\frac{24}{19}$ 格。此时，第 3 颗豌豆与僵尸之间的距离为 6 格，求得第 3 颗豌豆射中僵尸时，僵尸走了 $\frac{60}{19}$ 步。

5.2.1.4 第 4 颗豌豆射到僵尸时，僵尸走过的步数。

当第 3 颗豌豆射到僵尸时，第 4 颗豌豆已经飞行了 $\frac{18}{19}$ 格。此时，第 4 颗豌豆与僵尸之间的距离为 6 格。

则第 4 颗豌豆射中僵尸时，僵尸走了 $\frac{78}{19}$ 步。

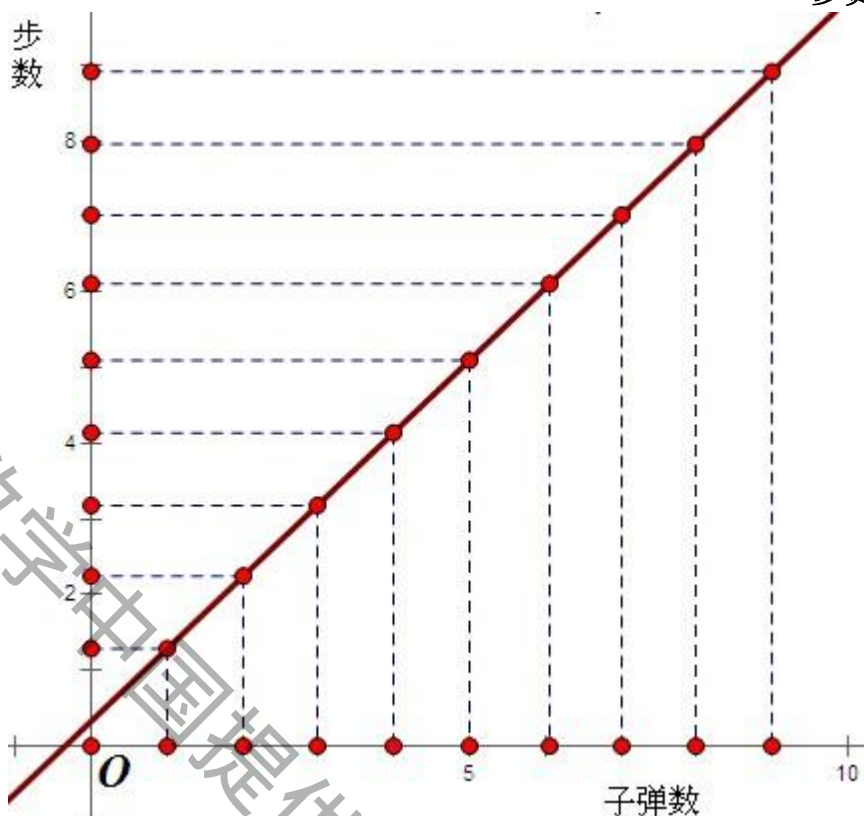
5.2.1.5 第 9 颗豌豆射到僵尸时，即僵尸被射死时它走过的步数。

根据前 4 颗豌豆射击僵尸的情况，我们可以得出第 $n(0 \leq n \leq 9)$ 颗豌豆射中僵尸时，僵尸所走过的步数 y 。

$$y = \frac{24}{19} + \frac{18}{19}(n-1) \quad (2)$$

画成函数图象如图 1 所示。

参赛队号 # 1656

图1 第 n 颗豌豆射中僵尸时，僵尸所走过的步数

将 $n=9$ 代入(2)得 $y=8\frac{16}{19}$ 步，即第一只僵尸被豌豆射死时它一共走了 $8\frac{16}{19}$ 步。

5.2.2 讨论一只僵尸进入场地后，下一只僵尸进入场地的时间的情况，主要分三种进行讨论。

5.2.2.1 差距为9步的情况

由于豌豆荚发射豌豆的频率与僵尸的步频相等，所以僵尸每一次落脚（与抬脚是同时产生的），豌豆荚就发射一颗豌豆，而5.2.1.5算出第一只僵尸死时走了 $8\frac{16}{19}$ 步，那么它死的时候豌豆荚还要等多一只僵尸走 $\frac{3}{19}$ 步所花的时间才会发射第10颗豌豆，因此，第二只僵尸应该在第一只产生并走了9步的那一瞬间产生，才能使每一只僵尸都死在它从进入场地到走了 $8\frac{16}{19}$ 步的地方，这样计算机永远不会赢。

5.2.2.2 差距小于9步的情况

如果下一只僵尸在上一只僵尸还没走9步就产生的话，那么等到豌豆第一次射到它时，它已经走了一定步数，我们假设这个步数为 x' ，那么后一只僵尸从刚进入场地到被射死所走过的步数为 y_1 ，则有：

$$y_1 = \frac{168 + 18x'}{19} \quad (3)$$

由(3)可以推出：随着进入场地的僵尸数量的增加，越在后面的僵尸从刚进入场地到第一次被豌豆射击到之间所走的步数就更多，则后一只僵尸比前一只僵尸被射死的位置离豌豆荚越来越远，那么当僵尸的数值足够大时，豌豆荚还没将僵尸射死就已经被吃掉了，所以玩了一定时间后玩游戏者便会输，即计算机不可能永远不会赢。

5.2.2.3 差距大于9步的情况

参赛队号 # 1656

如果上一只僵尸走了 9 步之后，僵尸还没出现，但这个间隔明显就比 9 步要大，所以不符合要求，直接淘汰。

5.2.3 求出最小间隔使得计算机永远不会赢。

综上所述，能使得计算机永远不会赢的最小间隔为第一种情况，即上一只僵尸从产生到走到第 9 步的瞬间，下一只僵尸进入场地。我们假设走一步的时间为 v ，每一步的长度为 m ，即每一格的长度为 $3m$ ，那么最小的时间间隔为 $\Delta t = \frac{9m}{v}$ 。

5.3 问题 3

对问题 2 所得出的结论进一步思考可知，场地上的僵尸死的时候场地上还有在飞行的子弹，如果这时候下一只僵尸就出现的话，那么它被第一颗豌豆击中的地点要比前一只僵尸第一次被射中的地点要靠向场地的右边一点点，这样就没办法使得每只僵尸都死在同一个地方，而根据问题二我们又探究出要使得计算机永远不会赢，每一只僵尸都必须死在同一个地点，这前后构成矛盾。所以下一只僵尸必须在前一只僵尸被射死后再等一小段时间，直到场地上还在飞行的那颗豌豆都打到最右端，在新一轮的子弹发射的瞬间产生，这样才能符合每只僵尸进入场地被击中的情况和死的地点都一致，计算机永远不会赢。

下面，我们从种 2 棵到种 9 棵豌豆荚逐个进行计算，求出在种每一个棵数的情况下僵尸从产生到被射死所走的步数以及前后两只僵尸产生的间隔。

我们约定从场地最左边起的格子所种的豌豆荚依次称为第 1 棵、第 2 棵、第 3 棵……第 8 棵、第 9 棵。

5.3.1 种 2 棵豌豆荚，僵尸所走的步数以及产生的间隔。

两棵豌豆荚同时发射豌豆，但由于第 2 棵比第 1 棵接近场地最右边，所以第 2 棵先射到僵尸，而第 1 棵还需飞行 1 格才能射到僵尸。根据式子 (1) 的算法，有

第 1 次击中： $19x = 7$

求得 $x = \frac{21}{19}$ 步，即走了 $\frac{21}{19}$ 步被射到。

第 2 次击中：由于第 1 棵比第 2 棵远了 1 格，所以当第 2 棵豌豆荚射出的豌豆击中僵尸时，第 1 棵豌豆荚射出的豌豆还距离僵尸 1 格，需僵尸走多 $\frac{3}{19}$ 步才能击中。故 2 次击中时僵尸走了 $\frac{24}{19}$ 步。

第 3 次击中：第 2 次击中时，僵尸已经走了 $\frac{24}{19}$ 步，即所以第 2 棵豌豆荚第 2 轮发射的豌豆已经飞行了 $\frac{30}{19}$ 格，故僵尸被第 2 次击中时距离第 3 颗豌豆荚 $\frac{95}{19}$ 格。

由 $19x = \frac{95}{19}$ 得 $x = \frac{285}{361}$ 步，即走了 $\frac{741}{361}$ 步被射到。

第 4 次击中：根据第 2 次击中的规律，可以求得第 4 次击中时，僵尸走了 $\frac{42}{19}$ 步。

照此种算法可以以此算出第 5、6、7、8、9 次击中时，僵尸走过的步数。列表如下：

表 1 种 2 棵豌豆荚，僵尸每次被击中时所走的步数

第 k 轮子弹	1	1	2	2	3	3	4	4	5
被射击	1	2	3	4	5	6	7	8	9

参赛队号 # 1656

的次数									
被第 s 棵击中	2	1	2	1	2	1	2	1	2
走过的步数 n	$\frac{21}{19}$	$\frac{24}{19}$	$\frac{741}{361}$	$\frac{42}{19}$	$\frac{57}{19}$	$\frac{60}{19}$	$\frac{75}{19}$	$\frac{78}{19}$	$\frac{93}{19}$

由表 1 可知：种 2 棵豌豆荚时，僵尸从产生到被射死共走了 $\frac{93}{19}$ 步，则产生僵尸的间隔为一只僵尸走 5 步所花的时间，由 4.2.3 可知该间隔为 $\Delta t = \frac{5m}{v}$ 。

5.3.2 种 3、4、5、6、7、8 棵豌豆荚，僵尸所走的步数以及产生的间隔。

沿用 4.3.1 的算法，可以得到下表。

表 2 种 3—8 棵豌豆荚，僵尸所走的步数及产生的间隔

种 j 棵豌豆荚	3	4	5	6	7	8
僵尸走的步数	$\frac{79}{19}$	$\frac{51}{19}$	$\frac{36}{19}$	$\frac{33}{19}$	$\frac{27}{19}$	$\frac{24}{19}$
产生的间隔	$\frac{4m}{v}$	$\frac{4m}{v}$	$\frac{2m}{v}$	$\frac{2m}{v}$	$\frac{2m}{v}$	$\frac{2m}{v}$

5.3.3 最少种几棵豌豆荚，僵尸产生的间隔最小。

根据前面的分析与计算，得出种植不同棵豌豆荚，僵尸所走的步数及产生的间隔如图 1 所示。

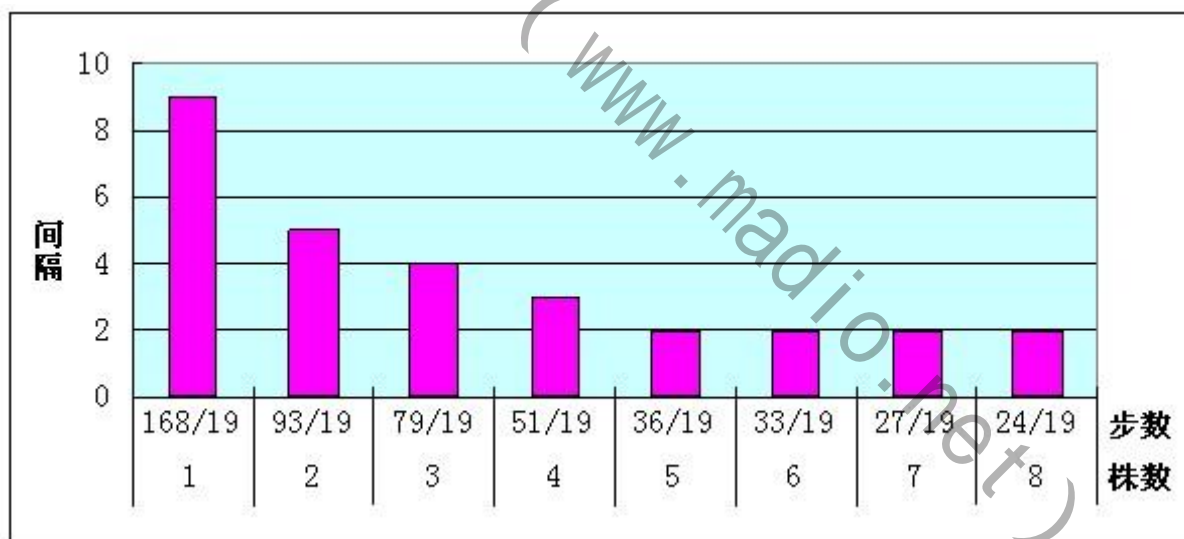


图 1 种不同棵豌豆荚，僵尸所走的步数及产生的间隔

由上图可知：种 5、6、7、8 棵豌豆荚时，僵尸从产生到被射死所走过的步数会随着棵数的增加而减少，但所走的步数都是 1 步多一些不到 2 步，根据前面对问题 3 的分析可以知道，僵尸产生的间隔都是 $\frac{2m}{v}$ ，所以所种豌豆荚的棵数最少为 5，使产生僵尸的间隔最少，且为 $\Delta t = \frac{2m}{v}$ ，而计算机永远不会赢。

5.4 问题 4

已经假设游戏开始时有 6 朵阳光，则有两种方案：其一，1 株向日葵和 1 棵豌豆荚，

参赛队号 # 1656

其二，3 株向日葵。然后对这两种方案进行分析计算，得出种 1 株向日葵和 1 棵豌豆荚这种方案更佳。然后就此方案进一步进行情况的讨论，对向日葵和豌豆荚的种植方案一一列举，筛选出最优方案。在该问题中，我们约定手点击阳光的频率够高，使得生成的阳光不会消失。

5.4.1 这个问题应分成三种情况讨论

(1) 6 朵阳光生成 3 株向日葵

因为向日葵必须在僵尸走完 4 格的时间才能生成阳光，所以无论向日葵如何放置，都会在豌豆生成之前被僵尸吃光。则该情况不符合要求。

(2) 6 朵阳光生成 2 株向日葵，剩下 2 朵阳光

①把两株向日葵都放在第 1、2 个格子里，如图 3。

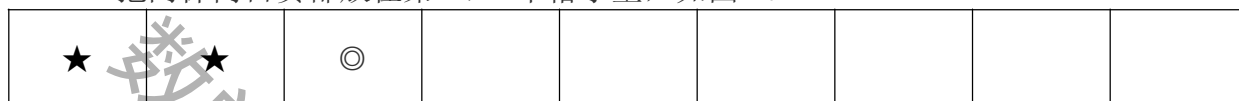


图 3

僵尸走完 4 格，2 株向日葵生成 2 朵阳光，与原来剩下的 2 朵阳光生成 1 棵豌豆荚，种在第 3 格。僵尸从此时起每跨一步豌豆荚就发射一颗豌豆，当它接触到豌豆荚时，已经被击中了 6 次，再花它走 3 步的时间，僵尸被击中 9 次消亡，同时豌豆荚也被吃光。

再考虑下一只僵尸出现的情况。

如果在上一只僵尸还没死之前出现，那么向日葵来不及产生阳光来生成豌豆，那么最后计算机必定赢。

如果在上一只僵尸死后再隔一定时间出现，那么计算机不会赢，但这种情况下，游戏不具备紧张有趣的要求，故该情况也不符合要求。

综上所述，这种情况淘汰。

②分别把两株向日葵都放在第 1、3 个格子里，如图 4 所示。



图 4

僵尸走完 4 格，2 株向日葵生成 2 朵阳光，与原来剩下的 2 朵阳光生成 1 棵豌豆荚，种在第 2 格。僵尸从此时起每跨一步豌豆荚就发射一颗豌豆，当它接触到豌豆荚时，已经被击中了 6 次，再花它走 3 步的时间，僵尸被击中 9 次消亡，同时向日葵也被吃光。此时它走了 6 格。

再考虑下一只僵尸出现的情况。每隔 3 格产生 1 只僵尸。如图 5 所示。

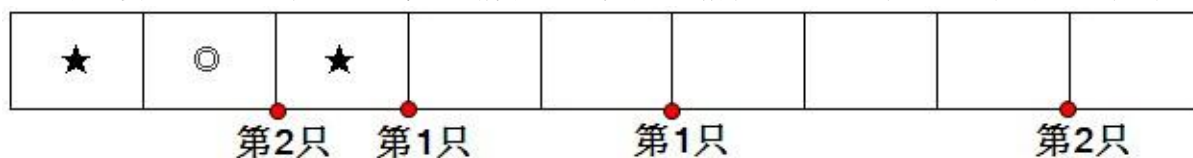


图 5

第一只僵尸在走了 6 格的时候被射死，并且将第 3 格的向日葵吃光。第 2 只僵尸则在走了 7 格的时候被射死，并且此后的每一只僵尸都在走了 7 格的时候被射死，该种情况符合要求。

(3) 6 朵阳光生成 1 株向日葵和 1 棵豌豆荚。

由于场地最开始只有 1 株向日葵和 1 棵豌豆荚，而僵尸必须被豌豆击中 9 颗豌豆才

参赛队号 # 1656

会消亡，即走接近 3 格后被射死。又要使游戏紧张有趣，所以最先考虑将向日葵放在第 1 格，将豌豆荚放在第 6 格，如图 6 所示。

★					◎			
---	--	--	--	--	---	--	--	--

图 6

这样，第一只僵尸在快碰到豌豆荚时被射死，再等片刻，在豌豆荚发射第 10 颗豌豆时第二只僵尸产生，以此种方式产生僵尸，向日葵会不断产生阳光，而所生成的阳光又可以生成豌豆，把生成的豌豆依次放到第 7、第 8 格，然后不再种植豌豆。那么此后产生的僵尸都会在将走完第一格前的 $\frac{1}{19}$ 格被射死。这样的间隔最小，而且游戏紧张有趣。

综上所述，第三种方案的种植方案和僵尸产生的方案最佳。

6 模型评价

6.1 优点

- (1) 能充分考虑各种情况，并从中发现规律，利用规律很好解决问题；
- (2) 文字分析、函数式、表格以及图像交错穿插，相辅相成，使得本文更有说服力；
- (3) 充分利用数据来说明解决该问题。

6.2 缺点

- (1) 模型和求解方法单一；
- (2) 计算复杂冗长。

7 参考文献

- [1] 《数学建模原理与案例》主编 彭杰等 科学出版社 2007.
- [1] 《数学建模及其基础知识详解》主编 王文波 武汉大学出版社 2006.