

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1505

参赛队员（签名）：

队员 1：王鹏

队员 2：夏海颖

队员 3：刘广琼

参赛队教练员（签名）：无

参赛队伍组别：研究生组

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1505

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛

题 目 交通网络中的 Braess 悖论研究及应用

关 键 词 Braess 悖论 微分方程模型 差分方法 GPS

摘 要：

对于问题一，采用离散问题连续化的方法，针对高峰时期的典型易拥堵路网建立了微分方程模型。基于节点和单一道路的出入流守恒准则，该模型综合考虑了道路通行能力和车流量变化率，得到出行时间成本关于它们的函数关系，进一步对其求导得到 Braess 悖论发生的条件。选取北京市二环路内地安门西大街与新街口南大街交叉路口的晚高峰流量数据作为实证，最终判断出北京市二环内的路网中的拥堵情况，不符合 Braess 悖论的描述；但是，交叉路口外围二级道路是否会引发 Braess 悖论，则与车流量密切相关。本实例外围个别二级道路存在 Braess 悖论，加剧了北京市二环以内的路网拥堵状况。

对于问题二，假定用户广泛使用 GPS 会对某些关键路段的车流量产生小量扰动，运用问题一模型，通过分析扰动量对出行时间成本的影响，得出使用 GPS 导航系统以缓解交通堵塞的扰动条件，并根据该条件判断使用 GPS 是否能在实际中改善城市路面交通。结果显示，GPS 在缓解交通堵塞中所起的作用随时间不断变化，同时，个体行为的自由性也加大了这种变化。而通过分析 GPS 用户的多样化需求，根据道路情况进行动态预测，并将用户对道路的选择反馈到预测当中，这些方法都将为 GPS 导航系统发挥更大作用提供可能。

参赛队号 1505

所选题目 B

参赛密码

(由组委会填写)

英文摘要（选填）

For Question1, a differential equation model is given out for the traffic jam at rush hour with continuity methods for discrete problems. Based on the conservation of inflow and outflow, road capacity and the change rate of vehicle flow are so comprehensively considered that the functional relationship between the travel time cost and them will be presented. With the derivative of smooth functions, Braess paradox can arise. The crossroad of West ANMEN Street and South Xinyiekou Street within 2nd ring road of Beijing is presented as example verification. The result shows that the traffic jam within 2nd ring road of Beijing does not conform to Braess paradox. However, whether other secondary roads do so depends on vehicle flow. In this case, paradox does exist in several secondary roads so that the traffic jam is aggravated.

For Question2, under the premise of the widespread use of GPS resulting in disturbance on vehicle flow in critical links, a disturbance value at which GPS can alleviate traffic pressure is obtained by analyzing the influence of disturbance quantity on time cost on the basis of the model in Question1. According to it, estimate whether GPS could alleviate traffic pressure in practice. The result shows that the role GPS play part in alleviating traffic jams changes through time. In the mean time, great changes may take place due to arbitrariness of one's behavior. What's more, GPS can play a bigger role in traffic situation by analyzing the public's diversified demands and apply them into dynamic prediction.

一、问题重述

Dietrich Braess 在 1968 年的一篇文章中提出了道路交通体系当中的 Braess 悖论。它的含义是：有时在一个交通网络上增加一条路段，或者提高某个路段的局部通行能力，反而使所有出行者的出行时间都增加了，这种为了改善通行能力的投入不但没有减少交通延误，反而降低了整个交通网络的服务水平。人们对这个问题做过许多研究，在城市建设当中也尽量避免这种现象的发生。但在复杂的城市道路当中，Braess 悖论仍然不时出现，造成实际交通效率的显著下降。在此，请你通过合理的模型来研究和解决城市交通中的 Braess 悖论。

1. 第一阶段问题：

(1). 通过分析实际城市的道路交通情况 1（自行查询的数据需给出引用来源），建立合理的模型，判断在北京市二环路以内的路网中（包括二环路）出现的交通拥堵，是否来源于 Braess 悖论所描述的情况。

(2). 请你建立模型以分析：如果司机广泛使用可以反映当前交通拥堵情况的 GPS 导航系统，是否会缓解交通堵塞，并请估计其效果。

二、问题分析

随着现代城市的快速发展和规模的不断扩大，城市交通开始面临越来越大的压力，特别是在工作日的上下班高峰期，交通拥堵问题尤为明显。为了提高城市道路的通行能力，通常采用的方法是新建道路或扩建已有道路。但是，Dietrich Braess 早在 1968 年就提出，在某种情况下，在交通网络中增加一条通路反而会增加网络中所有用户的出行时间，这种违背常理的现象被称作 Braess 悖论。从博弈论角度来看，Braess 悖论实质上是非合作网络中 Nash 平衡点不满足 Pareto 最优性时出现的诡异现象^[1]。

这时，使整个路网出行时间最少的流量分布并不是 Nash 平衡的，相应的个体会改变整体的最优策略，以缩短单个个体的出行时间，而同时却使整体的出行时间变长。

对于问题一，我们需要对北京市二环路内出现的交通拥堵现象进行判断，以确定该现象是否源于 Braess 悖论。所以在选择数据时，我们仅需选取发生交通拥堵的路口或路段的相关数据，而不必对每条主干道和支干道进行研究。此外，考虑到城市路网出现拥堵的典型时间段为上班高峰期和下班高峰期，为使研究不失一般性，我们选取这两个时间段的相关数据作为数值分析的依据；同时，这两个时间段还分别代表了两种交通流量模型：多对一（多起点单终点）和一对多（单起点多终点），应该在研究过程中加以分类讨论。本文旨在通过建模，找出出行时间成本关于道路通行能力和单位时间车流量变化率的关系，通过对出行时间成本 TC 求导的方式，判断该时间成本是否会随道路通行能力的增大而增大，进而判断是否产生了 Braess 悖论。

对于问题二，考虑到使用车载 GPS 导航仪的司机选择通行路线的原因较为复杂（定性分析主要为路面是否畅通、路段长度、通行路费等一系列因素的函数），故而在研究中采取逆向思维的方法。首先假定使用 GPS 的结果是使原来某些路段的车流量产生扰动，在问题一模型的基础上讨论该扰动对出行时间成本的影响，从而判断在该扰动下能够缓解交通堵塞的条件。最后，根据实际情况，估计广泛使用 GPS 导航系统能否对缓解城市交通阻塞产生正面影响。

三、符号说明

| 符号 | 描述 |
|--------------------|--|
| $P_{ij}(t)$ | 到 t 时刻为止，通过 i 点进入路段 e_{ij} 的车辆数目； |
| $Q_{ij}(t)$ | 到时刻为止，从 j 点离开路段 e_{ij} 的车辆数目； |
| τ_i^s | s 时刻从起点出发车辆到达 i 点的最短时间； |
| y_{ij}^s | 从 i 点进入 e_{ij} 随时间变化率； |
| $C_{ij}(\tau_i^s)$ | s 时刻从 O 点出发的车辆在 τ_i^s 时刻通过边 e_{ij} 的时间； |
| TC | 从 T 时刻起，驾驶员从起点至终点的总时间代价。 |

四、模型假设^[2]

本文采用的模型基于以下四个假设：

4.1 Nash 均衡

也称为 Dynamic User Equilibrium (DUE)，指每个司机都从个人利益出发，选择使自己出行成本最低的路线；而不会因为考虑他人的出行成本而改变路线，使自己的成本增加。

4.2 FIFO 与车辆模型假设

假设公路上的车辆都遵循先进先出 (First In First Out) 原则，且将车辆看作一个没有物理长度的质点。

4.3 饱和路网

基于两个假设：

- 在路网的每条公路上都有车流流入量；
- 路网的每条公路均非自由流。

对于假设 a)，我们可以根据实际存在车流流入量为正的公路的集合，来构造符合该假设的路网；对于假设 b)，由于本文仅对北京市二环路内存在拥堵情况的公路进行研究，所以该假设是合理的；并且在该假设下，我们可以得到定量的解析解。

4.4 最短路径选择

在 DUE 的假设下，假定出行成本最低的路线即为路径最短的路线。

五、模型的建立

5.1 晚高峰（下班模型）^[2]

考虑到城市功能分布的实际情况，在晚高峰模型中，本文假设路网中有一个中心起点和几个不同的终点，车辆从不同的起点出发，终止于不同的终点。为了便于讨论，本文引入以下符号：沿用图论中的记法习惯，令 $G(N, L)$ 表示所研究的具体路

网，其中， N 为路网中节点个数的集合， L 为路网中的所有有向边的集合。显然，根据定义，起点和终点都是节点集合 N 的子集。记起点为 O ，终点为 D ，则在晚高峰的模型中， O 唯一而 D 不唯一。

记从节点 i 到节点 j 的有向边为 e_{ij} ， $P_{ij}(t)$ 为到 t 时刻为止，通过 i 点进入路段 e_{ij} 的车辆数目， $Q_{ij}(t)$ 为到时刻为止，从 j 点离开路段 e_{ij} 的车辆数目。若在 $t=0$ 时刻， e_{ij} 路段上无滞留车辆，则 $X_{ij}(t) = P_{ij}(t) - Q_{ij}(t)$ ，其中， $X_{ij}(t)$ 定义了到 t 时刻为止，路段 e_{ij} 上的车辆数目。

进一步，记 τ_i^s 为 s 时刻从起点出发车辆到达 i 点的最短时间， y_{ij}^s 为从 i 点进入 e_{ij} 随时间变化率，即 $y_{ij}^s = \frac{dP_{ij}(\tau_i^s)}{ds}$ ；定义 $Q_{od}(s)$ 为到 $t=s$ 时刻止，从 O 点出发并以 D 为终点的车辆总数，这与 $Q_{ij}(t)$ 的定义是一致的。

在 Nash 均衡的条件下，结合 FIFO 准则，易知 s 时刻从 O 点出发的车辆在 τ_i^s 时刻通过边 e_{ij} 的时间 $C_{ij}(\tau_i^s)$ 满足：

$$C_{ij}(\tau_i^s) = \begin{cases} m_{ij} & X_{ij}(\tau_i^s) = 0, \text{ 即没有堵塞,} \\ \frac{X_{ij}(\tau_i^s)}{\mu_{ij}} & X_{ij}(\tau_i^s) > 0, \text{ 即产生堵塞.} \end{cases} \quad (5.1)$$

对 (5.1) 式求取微分，得到

$$\frac{dC_{ij}(\tau_i^s)}{ds} = \begin{cases} 0, & X_{ij}(\tau_i^s) = 0, \\ \frac{dX_{ij}(\tau_i^s)}{ds} \cdot \frac{1}{\mu_{ij}} = \frac{y_{ij}^s}{\mu_{ij}} - \frac{d\tau_i^s}{ds}, & X_{ij}(\tau_i^s) > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

注意到对任意一条路段 e_{ij} ，在 FIFO 准则下，其流量守恒，即：

$$\sum_{i \in I_k} y_{ik}^s - \sum_{j \in O_k} y_{kj}^s - \frac{dQ_{ok}(s)}{ds} = 0, \quad \forall k \in N, \forall s \in \mathbb{R}^+. \quad (5.3)$$

其中， I_k 为与 k 点相连且有向边指向 k 点的结点集合， O_k 为与 k 点相连，而有向边背离 k 点的结点集合， $Q_{ok}(s)$ 为 s 时刻从 b 点出发并以 k 点为目的地的车辆数目。

定义 N 维行向量 $\frac{dQ(s)}{ds}$ 如下：

$$\frac{dQ(s)}{ds} = \left(\frac{dQ_{od_1}(s)}{ds}, \frac{dQ_{od_2}(s)}{ds}, \dots, \frac{dQ_{od_{N-1}}(s)}{ds} \right), \quad d_i \in N \quad (5.4)$$

定义 L 维列向量 $y(s)$ ：

报名号 #1505

$$y(s) = (y_{i_1 j_1}^s, y_{i_2 j_2}^s, \dots, y_{i_L j_L}^s), e_{i_k j_k} \in L, k=1, \dots, L. \quad (5.5)$$

记 A^* 为道路网拓扑结构矩阵，即： $A^* = (a_{ij})_{N \times L}$ 满足

$$a_{il} = \begin{cases} 1, & \text{若结点 } i \text{ 为边 } l \text{ 起点,} \\ -1, & \text{若结点 } i \text{ 为边 } l \text{ 终点,} \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

注意到对矩阵 A^* ， $\sum_{i=1}^N a_{il} = 0$ ，所以矩阵 A^* 的秩为 $N-1$ （假设 $L \gg N$ ），移除矩阵

A^* 的任意一行得到矩阵 A ， $A \in M$ ，并称被移除行为“关联行”。虽然矩阵 A 比矩阵 A^* 行数少 1，但 A 与 A^* 所反映的信息量完全相同。将矩阵 A 中取值为 1 的元素转换为 0，得到的新矩阵记为 A_- 。利用上面的记号，根据节点处流量守恒原理，可得：

$$A \cdot y(s) = -\frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.6)$$

同理，对于路段的情况，由流量守恒得到：

$$C_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.7)$$

对 (5.7) 式求微分，有：

$$\frac{dC_{ij}^s}{ds} + \frac{d\tau_i^s}{ds} - \frac{d\tau_j^s}{ds} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.8)$$

在此，本文假设 $C_{ij}(t) > m_{ij}$ ， $\forall e_{ij} \in L$ ， $t \in \mathbb{R}^+$ ，即为模型假设 4.3 的公式描述。

将 (5.8) 式带入 (5.2) 式，得：

$$y_{ij}^s = \overline{\mu_{ij}} \cdot \frac{d\tau_j^s}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.9)$$

记 M 为 $L \times L$ 对角矩阵，其中对角元 $m_{kk} = \mu_{i_k j_k}$ ， $1 \leq k \leq L$ ；

记 $\frac{d\tau(s)}{ds}$ 为 $N-1$ 维列向量： $\frac{d\tau(s)}{ds} = \left(\frac{d\tau_1^s}{ds}, \frac{d\tau_2^s}{ds}, \dots, \frac{d\tau_{N-1}^s}{ds} \right)$

可得矩阵表达式：

$$y(s) = -(MA_-^T) \cdot \frac{d\tau(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.10)$$

将 (5.10) 式代入 (5.6) 式，有：

$$(AMA_-^T) \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.11)$$

式 (5.11) 中，为使 $\frac{d\tau(s)}{ds}$ 有唯一解，必须要求 AMA_-^T 可逆（满秩矩阵），而

AMA_-^T 的秩强烈依赖于得到 A 矩阵时所删除的“关联行”，当“关联行”为一对多模型中的起点时， AMA_-^T 秩为 $N-1$ ，此时有：

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = (AMA_-^T)^{-1} \cdot \frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.12)$$

记从 T 时刻起，道路网中车辆从起点至终点的总时间代价为 TC ，则有：

$$TC = \sum_d \int_0^T Q'_{od}(s) [\tau_d(s) - s] ds \quad (5.13)$$

根据上式，可分析当某条公路通行能力增强或在两节点间产生新公路时，路网总耗时 TC 的改变趋势。当 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} > 0$ 时，表示当路段 e_{ij} 的通行能力增强，路网的总时间

代价反而会增加，即产生了 *Braess* 悖论；当 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} < 0$ 时，可认为当路段 e_{ij} 的通行能力增强，路网的总时间代价随之减小，从而缓解了交通拥堵的情况。

以上给出了判断城市路网拥堵是否源于 *Braess* 悖论的方法，在第六章中，将利用北京市二环路内易产生拥堵的路段数据，来判断该拥堵是否符合 *Braess* 描述。

5.2 早高峰（上班模型）

对于早高峰（多起点单终点）模型，本文采用与晚高峰模型相同的结构进行分析，注意此时矩阵 A 的元素将有相应变化。由于所采用的方法相同，在此本文将不重复赘述。

5.3 GPS 导航对缓解交通堵塞的作用

关于缓解城市交通压力的措施，除了增加道路通行能力，改善已有道路网外，越来越多的车辆也开始使用车载 *GPS* 导航系统，特别是随着计算机，通讯技术与 GIS 的飞速发展，导航系统在技术上变得更为可行，也为 GIS 导航系统的全面普及带来了更大的可能性。通过 *GPS* 导航系统，驾驶员可在第一时间了解到自己关心路段的实时路况，从而动态改变自己的行车路线，以便避开拥堵路段，节省出行时间。

随着 *GPS* 导航系统的广泛使用，人们开始关注其对缓解实际交通问题的作用大小。首先，*GPS* 导航系统提供的信息为实时路况或近实时路况，司机到达该路段还需要一定时间；由于存在时间差，当司机到达该路段时，可能路况已发生了变化，原本拥堵的路段可能变得畅通，而畅通的路段却变得拥堵，反而提高了司机出行时间的成本；其次，随着 *GPS* 导航系统的广泛运用，用户的趋同性也会造成新的堵塞，即，当 *GPS* 导航系统显示某一路段堵塞时，系统用户会以较大概率选择其它道路，从而避开堵塞路段。但大量用户趋同的行为必然会使得原本畅通的路段变得堵塞，反而不能达到快速通过的目的。这就如同 *Braess* 悖论，信息的广泛普及没有带来出行时间的结余，反而增加了出行时间成本。

对于 *GPS* 导航系统的广泛使用能否改变交通堵塞情况的问题，学术界一直没有定论，因为不同用户对于 *GPS* 的依赖和信任度略不相同，同时，对于相同的路况，不用

司机所作的决策也由多种因素决定。本文为了定量评价 GPS 导航系统对缓解交通堵塞的作用，沿用 5.1 中建立的模型讨论。

5.3.1 GPS 导航系统对微分方程模型的影响

对于 5.1 中得到的微分方程模型，我们没有考虑 GPS 导航系统的作用。使用 GPS 导航系统，部分用户会改变自由状态下的行进路线，从而影响模型中通过某一特定道路的车流量。

基于这样的想法，本文拟对每条道路上车流量 $Q_{ij}(s)$ 做微小改变，记改变量为

$\Delta Q_{ij}(s)$ 。通过分析 $\Delta Q_{ij}(s)$ 对 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_i}$ 的影响，并基于 Braess 悖论的描述，从而对 GPS

系统缓解交通拥堵的能力作出评价。

对单起点多终点模型（下班模型），出行总流量不变，有

$$\sum_{i=1}^m \Delta Q_{oi}(s) = 0 \quad (5.14)$$

其中，下标 oi 表示以 o 为起点 i 为终点的有向路段。

类似地，对多起点单终点模型（上班模型），有

$$\sum_{i=1}^m \Delta Q_{io}(s) = 0 \quad (5.15)$$

5.3.2 车流量扰动 ΔQ_{ij} 的确定

如上所述，本文定义 ΔQ_{ij} 为由于 GPS 导航系统的广泛应用而导致的车流量的改变量，该扰动为时间 s 与实际公路通行能力的函数，本文主要就以下两种情况进行分类讨论：

5.3.2.1 $\Delta Q_{ij}(s) \equiv \Delta_{ij}$

即 $\Delta Q_{ij}(s)$ 为与时间 s 无关的常量，此时，有 $\frac{dQ_{ij}(s)}{ds} \equiv 0$ 。在此情况下，是否会

出现 Braess 悖论所描述的交通问题，取决于对 Δ_{ij} 值的选取。通过为 Δ_{ij} 定义不同的值，以对 GPS 导航系统改善交通堵塞的能力做出评价。

5.3.2.2 $\Delta Q_{ij}(s) \equiv \Delta_{ij} \cdot \sin ks$

该式定义了更为一般的情况，其中， Δ_{ij} 为常量，而 $\Delta Q_{ij}(s)$ 随时间发生周期性变

化， $\frac{dQ_{ij}(s)}{ds} \neq 0$ 。该式中 $\Delta Q_{ij}(s)$ 的确定基于如下两个依据：

(1) 假定路段是否拥挤为司机选择路线的主要因素，则在一定时间段内，路面的拥堵程度将由于司机的趋同性呈现“拥堵—缓行—通畅—缓行—拥堵”的周期性变化规律。本文将此周期性变化用 \sin 函数刻画。

(2) 用 \sin 函数描述扰动 $\Delta Q_{ij}(s)$ ，有利于得到解析解。

基于如上依据，通过改变式中的 Δ_{ij} 与 k ，即调节 $\Delta Q_{ij}(s)$ 的幅度与周期，得到更为一般的结论。

六、模型的求解

6.1 问题一的求解

本文的研究对象为北京市二环路以内的交通堵塞问题，并根据模型假设，选择图 6.1 所示的路段区域进行验证。

如图 6.1 所示，图中红线标注的十字为本文研究的路段对象。根据周六下午的数据统计，该路段的拥堵现象严重，可作为北京市二环路内交通问题的典型进行研究。



图 6.1 北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口图^[3]

为便于讨论，并由路网的对称性，将上图 6.1 简化为图 6.2 中所示的模型：

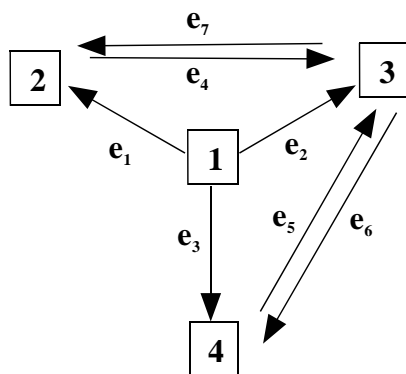


图 6.2 交叉路口示意图

图中，1表示市中心区域，即晚高峰起始点；2，3，4为终点。在该模型中，假设车辆均从节点1出发，经过各有向路段到达终点2，3，4。由6.1节，易知：

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$ ，其中 μ_i 为第*i*条路段 e_i 的最大通行率（即单位时间通过的车辆数），则有

$$AMA_-^T = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_7 & -\mu_4 & 0 \\ -\mu_7 & \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 & -\mu_5 \\ 0 & -\mu_6 & \mu_5 + \mu_3 \end{bmatrix}$$

为了便于表示，记 $\mu_{xyz} = \mu_x \cdot \mu_y \cdot \mu_z$ ； $\mu_{xy} = \mu_x \cdot \mu_y$ ，则有

$$(AMA_-^T)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \mu_{23} + \mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{45} + \mu_{36} & \mu_4(\mu_3 + \mu_5) & \mu_{45} \\ \mu_7(\mu_3 + \mu_5) & (\mu_1 + \mu_7)(\mu_3 + \mu_5) & (\mu_1 + \mu_7)\mu_5 \\ \mu_{67} & \mu_6(\mu_1 + \mu_7) & \mu_{12} + \mu_{14} + \mu_{16} + \mu_{27} + \mu_{67} \end{pmatrix}}{\mu_{123} + \mu_{125} + \mu_{134} + \mu_{145} + \mu_{136} + \mu_{237} + \mu_{257} + \mu_{367}}$$

在 (5.2) 式中对 s 积分, 得到

$$\tau(s) = (AMA_-^T)^{-1} \cdot Q(s) + \tau(0) \quad (6.1)$$

由 (5.13) 式, 有

$$TC = \sum_{i=2}^4 \int_0^T \frac{dQ_i(s)}{ds} [\tau_i(s) - s] ds = \int_0^T \left(\frac{dQ(s)}{ds} \right)^T \cdot [\tau(s) - s] ds \quad (6.2)$$

将 $\tau(s)$ 代入 (6.2) 式, 得到

$$TC = \int_0^T \left(\frac{dQ(s)}{ds} \right)^T \cdot [(AMA_-^T)^{-1} \cdot Q(s) + \tau(0) - s] ds \quad (6.3)$$

为判断二环路内的交通堵塞是否符合 *Braess* 悖论的描述, 即在该式中, 判断总时间代价 TC 是否会随路段通行能力 μ 的增大而增大, 本文通过对 TC 取偏导的方法, 确定 TC 关于 μ_i ($i=1, 2, \dots, 7$) 函数的增减性。

由 (6.3) 式, 得:

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_1} = - \left[\int_0^T \frac{121Q_{12}Q'_{12} + 66Q_{12}Q'_{13} + 44Q_{12}Q'_{14} + 66Q_{13}Q'_{12} + 36Q_{13}Q'_{13}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds + \int_0^T \frac{24Q_{13}Q'_{14} + 44Q_{14}Q'_{12} + 22Q_{14}Q'_{13} + 16Q_{14}Q'_{14}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right] \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_2} = - \left[\int_0^T \frac{36Q_{12}Q'_{12} + 54Q_{12}Q'_{13} + 36Q_{12}Q'_{14} + 54Q_{13}Q'_{12} + 81Q_{13}Q'_{13}}{(9\mu_2 + 12)^2} ds + \int_0^T \frac{54Q_{13}Q'_{14} + 36Q_{14}Q'_{12} + 54Q_{14}Q'_{13} + 36Q_{14}Q'_{14}}{(9\mu_2 + 12)^2} ds \right] \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_3} = - \left[\int_0^T \frac{16Q_{12}Q'_{12} + 22Q_{12}Q'_{13} + 44Q_{12}Q'_{14} + 24Q_{13}Q'_{12} + 36Q_{13}Q'_{13}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds + \int_0^T \frac{66Q_{13}Q'_{14} + 44Q_{14}Q'_{12} + 66Q_{14}Q'_{13} + 121Q_{14}Q'_{14}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right] \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_4} = \int_0^T \frac{(2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(-6Q'_{12} - 9Q'_{13} + 15Q'_{14})}{(3\mu_4 + 15)^2} ds \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_5} = \int_0^T \frac{(11Q_{12} + 6Q_{13} + 4Q_{14})(-5Q'_{12} + 3Q'_{13} + 2Q'_{14})}{(5\mu_5 + 11)^2} ds \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_6} = \int_0^T \frac{(2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(15Q'_{12} - 9Q'_{13} - 6Q'_{14})}{(3\mu_6 + 15)^2} ds \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_7} = \int_0^T \frac{(4Q_{12} + 6Q_{13} + 11Q_{14})(2Q'_{12} + 3Q'_{13} - 5Q'_{14})}{(5\mu_7 + 11)^2} ds \quad (6.10)$$

易知当 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_i} > 0$ 时，即增加相应路段的通行能力（增加 μ_i ）将导致总路网出行时间

成本 TC 增加，将会产生 *Braess* 悖论，这也是本文判断北京二环路内交通拥堵是否符合 *Braess* 悖论描述的依据。

本文数据来源于 2010 年 4 月 24 日周六晚 16:00~17:58 的高峰时间段北京市二环路内地安门西大街与新街口南大街交叉路口处的交通流量^[3]（详见附录）。由于所得数据已经过量化，且量化阶很低，本文无法就该处流量信息数据进行精确计算。但利用以上模型及算法，仍可判断该拥堵现象是否符合 *Braess* 悖论。

在数据采集时间点 $t=s_i$ 利用差分法算得

$$Q'_{ij}(s_j) = |Q_{ij}(s_i) - Q_{ij}(s_{i-1})|, j=2, 3, 4 \quad (6.11)$$

其中， $Q_{ij}(s) > 0$, $Q'_{ij}(s) \geq 0 \quad \forall j=2, 3, 4, \forall s \in \mathbb{R}^+$ 。

则有 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_1} < 0$, $\frac{\partial TC}{\partial \mu_2} < 0$, $\frac{\partial TC}{\partial \mu_3} < 0$ 。即若增加连接起点和终点的三条主干道的通行

能力，可使整个路网所消耗的时间代价减小，即不会导致 *Braess* 悖论的产生。

而对于链接各终点间的路段， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_i}$, $i=4, 5, 6, 7$ 与 0 的大小关系取决于公路流量的

变化。不妨设 $\frac{\Delta Q_{li}}{Q_{li}} \ll 1, i=2, 3, 4$ ，则

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \mu_4} &= \int_0^T \frac{(2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(-6Q'_{12} - 9Q'_{13} + 15Q'_{14})}{(3\mu_4 + 15)^2} ds \\ &\approx \frac{2Q_{12}(s_0) + 3Q_{13}(s_0) + 2Q_{14}(s_0)}{(3\mu_4 + 15)^2} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n [-6Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) + 15Q'_{14}(s_i)] \cdot \Delta(s_i) \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{令 } R_4(i) = -6Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) + 15Q'_{14}(s_i)$$

$$R_5(i) = -5Q'_{12}(s_i) + 3Q'_{13}(s_i) + 2Q'_{14}(s_i);$$

$$R_6(i) = 15Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) - 6Q'_{14}(s_i);$$

$$R_7(i) = 2Q'_{12}(s_i) + 3Q'_{13}(s_i) - 5Q'_{14}(s_i);$$

代入数据，则结果如下表 6.1（相关原始数据见附录）所示。

本文对 MabC 地图显示的路况信息进行了量化，分别将拥挤、缓行、畅通量化为 10、20、30。当相同路段呈现两种不同路况时，采取根据路段长度加权平均的方法，得到估计值。

表 6.1 $R_j(i)$, $j=4, \dots, 7$ 结果数值表

| i | $R4(i)$ | $R5(i)$ | $R6(i)$ | $R7(i)$ | i | $R4(i)$ | $R5(i)$ | $R6(i)$ | $R7(i)$ |
|-----|---------|---------|---------|---------|-----|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 | 120 | 16 | -48 | -40 |
| 2 | -90 | 30 | -90 | 30 | 25 | 150 | 20 | -60 | -50 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 26 | 90 | -30 | 90 | -30 |
| 4 | -30 | 80 | -240 | 10 | 27 | 75 | 10 | -30 | -25 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 28 | 225 | 30 | -90 | -75 |
| 6 | 90 | -30 | 90 | -30 | 29 | -60 | 34 | -102 | 20 |
| 7 | 150 | 20 | -60 | -50 | 30 | 120 | 16 | -48 | -40 |
| 8 | 90 | -30 | 90 | -30 | 31 | 150 | 20 | -60 | -50 |
| 9 | 150 | 20 | -60 | -50 | 32 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 33 | -90 | 30 | -90 | 30 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 34 | -90 | 30 | -90 | 30 |
| 12 | -60 | -50 | 150 | 20 | 35 | -90 | 30 | -90 | 30 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 37 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 39 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 17 | 150 | 20 | -60 | -50 | 40 | -150 | -20 | 60 | 50 |
| 18 | -102 | 20 | -60 | 34 | 41 | 270 | 36 | -108 | -90 |
| 19 | -48 | -40 | 120 | 16 | 42 | 135 | -24 | 72 | -45 |
| 20 | -90 | 30 | -90 | 30 | 43 | 225 | 30 | -90 | -75 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 44 | 75 | 10 | -30 | -25 |
| 22 | 150 | 20 | -60 | -50 | 45 | -15 | 40 | -120 | 5 |
| 23 | 30 | 4 | -12 | -10 | 46 | -60 | -50 | 150 | 20 |

令 $R_i = \sum_k R_i(k)$ ，则得到的结果如表 6.2 所示。

表 6.2 $R_j(i)$, $j=4, \dots, 7$ 均值表

| R_4 | R_5 | R_6 | R_7 |
|-------|-------|-------|-------|
| 1470 | 322 | -966 | -490 |

由上表可见，在 μ_4 ， μ_5 对应的边上出现了 Braess 悖论，而在 μ_6 ， μ_7 对应边上没有 Braess 悖论，但增加其通行能力并不能显著减少整个路网通行时间。

综上所述，可以看出北京二环路内交通堵塞不符合 Braess 悖论描述的情形，增加中心区域紧邻道路的通行能力可以较大改善交通堵塞状况；但对于其他道路，盲目增加其通行能力或新增辅助道路都有可能导致 Braess 悖论的产生，即使不出现 Braess 悖论，其改善交通堵塞状况的能力也非常微弱。

6.2 GPS 导航系统对缓解交通堵塞的作用

类似 5.3 中分析，这里重点讨论 ΔQ_{ij} 对避免 Braess 悖论的作用，进而评价 GPS 导航系统对缓解交通堵塞的作用。

6.2.1 $\Delta Q_{ij} \equiv c_{ij}$

这是一种简化的情形，假设 GPS 在每条道路上对交通流量的改变 ΔQ_{ij} 与时间无关。在这种假设下， Q'_{ij} 与没有 GPS 导航时保持一致，由(6.4–6.6)知，对于直接连接起点的道路，GPS 导航系统对其交通堵塞的改善作用很微弱，几乎难以体现。而对于连接终点的道路，利用(6.7–6.10)以及平衡条件 $\sum_{j=2}^4 Q_{ij} = 0$ ，有以下结论：

(1) GPS 对 μ_4 及 μ_6 对应道路 e_4, e_6 的作用呈现相同变化规律，由于

$$2\Delta Q_{12} + 3\Delta Q_{13} + 2\Delta Q_{14} = \Delta Q_{13}, \quad (6.13)$$

GPS 导航系统在 e_4, e_6 上的作用体现在其对 Q_{13} 的改变上，当 $\Delta Q_{13} < 0$ 时， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_4}$ ，

$\frac{\partial TC}{\partial \mu_7}$ 都变小，由 Braess 悖论引起的路网堵塞情况缓解，当 $\Delta Q_{13} > 0$ 时， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_4}$ ， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_7}$ 都

变大，Braess 悖论引起的路网堵塞更为严重，GPS 在这时起不到缓解交通压力的作用。

(2) 对于 μ_5 及 μ_7 对应道路 e_5, e_7 ，GPS 导航系统的作用更为复杂。具体地说，GPS 对每条道路上流量的影响都会体现在 e_5 和 e_7 上，但是对于 e_5 ，GPS 对 e_3 的影响起主导作

用，而对于 e_7 ，GPS 对 e_1 的影响将起主要作用。

6.2.2 $\Delta Q_{ij}(s) = c_{ij} \cdot \sin ks$

在这样的前提下， $\Delta Q_{ij}(s)$ 随时间 s 作周期性变化。令 $\overline{Q_{ij}(s)}$ 为 GPS 作用下的道路车流量，即： $\overline{Q_{ij}(s)} = Q_{ij}(s) + \Delta Q_{ij}(s)$ 。则

$$\frac{d\overline{Q_{ij}(s)}}{ds} = \frac{dQ_{ij}(s)}{ds} + \frac{d\Delta Q_{ij}(s)}{ds} = \frac{dQ_{ij}(s)}{ds} + k \cdot c_{ij} \cdot \cos ks \quad (6.14)$$

注意到 k 的大小决定了 $\Delta Q_{ij}(s)$ 周期性变化的快慢程度。所以，由 (6.14) 可以看出，当 GPS 导航系统带来的道路车流量变化 $\Delta Q_{ij}(s)$ 频繁改变时， $\frac{d\overline{Q_{ij}(s)}}{ds}$ 也会随之快速变化，这时，评价 GPS 导航系统的作用就变得更为复杂，以 (6.7) 为例，若近似认为

$$\overline{2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14}} = 2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14} \quad (\text{假设 } \Delta Q_{13} \text{ 较小}) \quad (6.15)$$

则 $\frac{\partial TC}{\partial \mu_4}$ 的变化范围将会被放大 k 倍。于是，通过估算 $\Delta Q_{ij}(s)$ 随时间改变的频率，就可以评价 GPS 导航系统发挥作用的稳定性，进而决定相应路况信息的更新频率。

6.3 GPS 导航系统对改善交通堵塞的评价

由 6.2 中两种特殊情况的分析，可以看出，GPS 在改善交通堵塞状况上的作用是动态变化的，这与交通流量的动态变化，GPS 用户个人要求的多样性不无关系。但是，通过分析用户的多样化需求，从多方面评价出行成本，给出总体最优的线路，合理设置 GPS 的信息更新时间间隔，在特殊路段提前进行引导等等，这些措施都会使 GPS 从更多方面发挥积极作用^[4]。

七、模型评价

1. 本文采用连续化方法，给出了判断 Braess 悖论的微分方程模型，该模型仅需要较少的数据量，易于实现，具有可操作性；

2. 在数据处理过程中，运用差分方法近似导数，基本克服了因数据量不足而产生的影响，最大限度地利用了已有信息；

3. 在评价 GPS 导航系统对交通问题的作用时，利用扰动求解的思想大大简化了问题的求解过程，同时提高了微分方程模型的普适性；

4. 由于时间有限，本文获取的信息量较少。为更好地利用模型求解，需要更多的背景数据；

5. 在本文的建模过程中，使用了一些未加证明的合理假设，简化了求解过程，同时也使结论更为简洁明了；然而，文中的两种模型是基于高峰时期的路况的，对于其它个别的特殊情况，模型的适用性将变差。

八、参考文献

[1] 董菁等，非合作交通网络中的 Braess 悖论及其避免，公路交通科技，第 23 卷第 3 期：56~59，2007 年 9 月。

[2] Baomin Dong, Lei Zhang, *Network Congestion, Braess Paradox and Metropolitan Expressway System*, JEL, CLC: C61, April, 2005。

[3] Mabc 地图网, <http://www.mapabc.com/localsearch.shtml?l,%E5%8C%97%E4%BA%AC,,%E4%BA%8C%E7%8E%AF>。

[4] 张国强等，车辆动态导航中 Braess 悖论的解决方法及其算法设计，西安公路交通大学学报，第 21 卷 第 4 期，2001 年 10 月。

[5] 姜启源等，数学模型（第三版），高等教育出版社，2006：135~172。

附录

北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口流量量化值及差分值表

| | Q_{12} | Q_{13} | Q_{14} | Q'_{12} | Q'_{13} | Q'_{14} |
|-------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 16:00 | 20 | 20 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 16:05 | 20 | 30 | 30 | 0 | 10 | 0 |
| 16:10 | 20 | 30 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 16:15 | 20 | 10 | 20 | 0 | 20 | 10 |
| 16:19 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:23 | 10 | 10 | 30 | 10 | 0 | 10 |
| 16:27 | 10 | 10 | 20 | 0 | 0 | 10 |
| 16:30 | 20 | 10 | 30 | 10 | 0 | 10 |
| 16:33 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 10 |
| 16:35 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:38 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:40 | 10 | 10 | 20 | 10 | 0 | 0 |
| 16:43 | 10 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:47 | 10 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:51 | 10 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:52 | 10 | 10 | 20 | 0 | 0 | 0 |
| 16:54 | 10 | 10 | 30 | 0 | 0 | 10 |
| 16:58 | 12 | 20 | 30 | 2 | 10 | 0 |
| 16:59 | 20 | 20 | 30 | 8 | 0 | 0 |
| 17:01 | 20 | 10 | 30 | 0 | 10 | 0 |
| 17:02 | 20 | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 17:05 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 10 |
| 17:08 | 20 | 10 | 22 | 0 | 0 | 2 |
| 17:09 | 20 | 10 | 30 | 0 | 0 | 8 |
| 17:12 | 20 | 10 | 20 | 0 | 0 | 10 |
| 17:16 | 10 | 10 | 30 | 10 | 0 | 10 |
| 17:18 | 10 | 10 | 25 | 0 | 0 | 5 |
| 17:20 | 10 | 10 | 10 | 0 | 0 | 15 |
| 17:22 | 10 | 20 | 12 | 0 | 10 | 2 |
| 17:24 | 10 | 20 | 20 | 0 | 0 | 8 |
| 17:26 | 10 | 20 | 30 | 0 | 0 | 10 |
| 17:29 | 10 | 20 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 17:30 | 10 | 10 | 30 | 0 | 10 | 0 |
| 17:33 | 10 | 20 | 30 | 0 | 10 | 0 |
| 17:36 | 10 | 10 | 30 | 0 | 10 | 0 |
| 17:37 | 10 | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 17:39 | 10 | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 17:40 | 10 | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 |

北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口流量量化值及差分值表（续表）

| | Q_{12} | Q_{13} | Q_{14} | Q'_{12} | Q'_{13} | Q'_{14} |
|-------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 17:44 | 10 | 10 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| 17:47 | 20 | 20 | 30 | 10 | 10 | 0 |
| 17:49 | 20 | 20 | 12 | 0 | 0 | 18 |
| 17:50 | 10 | 20 | 25 | 10 | 0 | 13 |
| 17:51 | 10 | 20 | 10 | 0 | 0 | 15 |
| 17:54 | 10 | 20 | 15 | 0 | 0 | 5 |
| 17:55 | 10 | 10 | 20 | 0 | 10 | 5 |
| 17:58 | 20 | 10 | 20 | 10 | 0 | 0 |