

第八届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2015@tzmcm.cn

第八届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第八届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#3318

参赛队员（签名）：

队员 1：刘志鹏

队员 2：陈 键

队员 3：党文铮

参赛队教练员（签名）： 吕雷

参赛队伍组别： 本科组

第八届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2015@tzmcm.cn

第八届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#3318

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第八届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2015@tzmcm.cn

2015 年第八届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段论文

题 目 绳结松脱性能推广及其对断裂负荷影响

关 键 词 绳结矩阵模型 相关分析 曲带模型 加权分析

摘 要

绳索打结是人们在日常生活中的必要技能，在不同的情境中有不同的用处和编法，而绳结是否容易自动松脱的性质和对绳子极限强度的影响程度都是影响其使用的重要性能。打结的方式不同，对绳结的缠绕数，扭转数等空间特征和机械性能和造成了不同的影响。

针对问题一：上一阶段，仅对由单结构成的同向结和镜像结的自动松脱性质进行了探究，本阶段要将自动松脱的性质进行推广。为了易于对绳结的空间特征进行描述，我们使用投影映射法、分类讨论的方法将空间上的点表示在平面上，分析不同打法下的单结在三维空间上的结点、交叉类型，将它们投影到二维平面，写出它们对应的编码矩阵，建立绳结矩阵模型。分析数据的不同之处，找出变量，得出影响绳结稳定性的因素，结扣数、交叉点数、缠绕数。利用相关分析中的简单相关分析，用 Person 相关分析方法进行比较，利用 SPSS 软件，得到相关性 r 值，将这三种影响因素的 r 值进行比较，可得到结论。结扣数是与是否容易自动脱落之间的关系最密切的因素。从而得出判定每种绳结的结扣数，来比较每种绳结自动脱落性质的简单方法。

针对问题二：由于绳结的出现使绳子的极限强度发生了变化，所以我们以绳结对绳子的变化因素扭转程度和弯曲程度为变化量，通过实验，探究出变化量扭转数（扭转程度）和缠绕数（弯曲程度）对绳子极限强度的影响规律。然后我们用分类讨论的方法，讨论了不同材料下，扭转数和缠绕数对绳子极限强度影响程度问题，并对每个因素加权来刻画其影响程度。对于柔韧性材料，我们展开探究，建立了曲带模型，运用 EXCEL 软件及物理定理得出扭转数和缠绕数对负荷率的关系。列举了不同打法的结来讨论，通过对每种结的扭转数和缠绕数的分析，来比较其负荷率，从而来估计其强度。

参赛队号： #3318

所选题目： A 题

参赛密码
(由组委会填写)

第八届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2015@tzmcm.cn

英文摘要 (Guidance Note)

Hitch is the people in the necessary skills in everyday life, have different uses in different situations and weave, and is it easy to automatically loosen the knot on the nature and degree of influence on the ultimate strength of the rope was an important effect on its use. Knot it in different ways, the winding number of knots, reversing the space characteristics and mechanical properties such as number and which has a different impact.

Question one: the previous phase, only by a single structure in the same direction and mirror node automatically loose nature of the inquiry, this stage will automatically loose nature of the promotion. In order to facilitate describing the spatial properties of the knot, we use projection mapping, discussing methods to space on a point in the plane, analyses different styles under the single node in three dimensions, cross type, projecting them onto a two-dimensional plane, wrote their corresponding code matrix, knots matrix model is established.

Problem two: because knots appear to make the ultimate strength of the rope has changed, so we have a knot on the rope of variable degree of torsion and bending degree of variation through experiments on how the change in reverse (degree of torsion) and the winding number (degree of) effect on ultimate strength of the rope.

一、问题重述

在第一阶段中对由单结构成的两个不同结构的结，同向结与镜像结进行了分析，讨论了其哪个更容易自动松脱。本阶段的问题具体如下：

1. 将第一阶段问题推广到其它打法的绳结。我们可以以系鞋带为例，原则上可以有多种打法来给鞋带打结。请你对尽量广泛的绳结打法进行总结，并给出一个较为简明的判别方法，来判断其在承受负荷时是否容易自动松脱。

2. 一根完整的绳子在两端受到拉力时，有一个被拉断的极限强度。在绳子中间打了一个结以后，由于绳结位置的弯折和缠绕，将使绳结位置成为根绳子强度较低的一个薄弱点。请你建立合理的数学模型，通过研究不同结的打法来估计其强度。

二、问题分析

针对问题一，在第一阶段的研究中，我们仅仅对由单结两次不同打法的同向结和镜像结的松脱性质做了分析，在本阶段，我们要将绳结自动松脱的性质进行推广，对广泛的绳结进行总结。所以考虑将绳结用矩阵的方式表示，分析影响广泛绳结自动松脱性质的内在联系，找出影响其性质的主要因素。研究每个因素对其的影响规律，及哪个因素的影响大，从而得出可以简单直观判断绳结松脱性质的方法。

针对问题二，该问题主要研究的是绳结对绳子的极限强度的影响，考虑先从绳结对绳子的改变因素入手，控制单一变量，探究每种改变因素对绳子的极限强度的影响规律，建立曲带模型，来形象表述每种变量。最后探究不同打法的绳子，在变量的影响下，如何改变绳子的极限强度。

三、模型假设

1. 假设材料的每一处都是均匀的。
2. 忽略绳子总长度的变化。
3. 假设在拉紧绳结的过程中，两头受力相同。
4. 假设每种打结方法每次打结时的相关参数不变。
5. 曲带模型中打结长度理想化 $L=1$ 。
6. 在柔韧性绳子中， $\beta_1 = \frac{1}{8}$ ， $\beta_2 = \frac{1}{6}$

四、符号说明

符号	含义
K	曲带的中心线
K'	轴向截面和缝合线的表面一边的交线
W_θ	扭转率
T_w	扭转数
W_r	缠绕数
β_1	扭曲影响比重
β_2	弯曲影响比重
ω_0	原绳负荷
ω'	结绳负荷
η	负荷效率

五、模型的建立与求解

5.1 问题的模型建立与求解

5.1.1 绳结的分类

绳结的种类有很多种，不同的场合使用不同的绳结。基本的绳结有祖母结、方结、

#3318

外科结和多重结。祖母结由两个相同方向的结扣组成，方结由两个方向相反的结扣组成。外科结由两个方向相反的结扣组成，但第一个结扣缠绕了两次。3 个及其以上数目的不同方向的结扣的组合叫多重结，见图 1-1。



图 1-1 不同打法的绳结

常见的绳结都是由不同方向 and 不同数目打成的平结，见图 1-2。

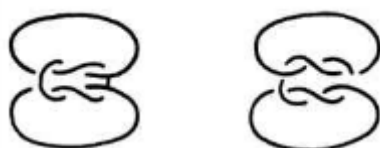


图 1-2

对不同打法的结，进行性能分析：我们认为完整的纽结应该是平整而可靠的，不会松弛。结的安全性要求结平整而几何对称。对称的平结应该是线两头一头进入结的一边，并且几何对称的平结是稳定的。一旦打结线的两端就可以相互锁住而达到结的安全。祖母结容易松弛，所以单一的祖母结在生活中几乎不能单独使用；不过有时祖母结可以用来保证纽结具有恰当的张力。外科结和方结是对称的平结，它们用在生产生活中应用比较广泛。对于多重结，只有方结的组合是对称的平结，因此由方结组成的多重结最为安全可靠，见图 1-3。

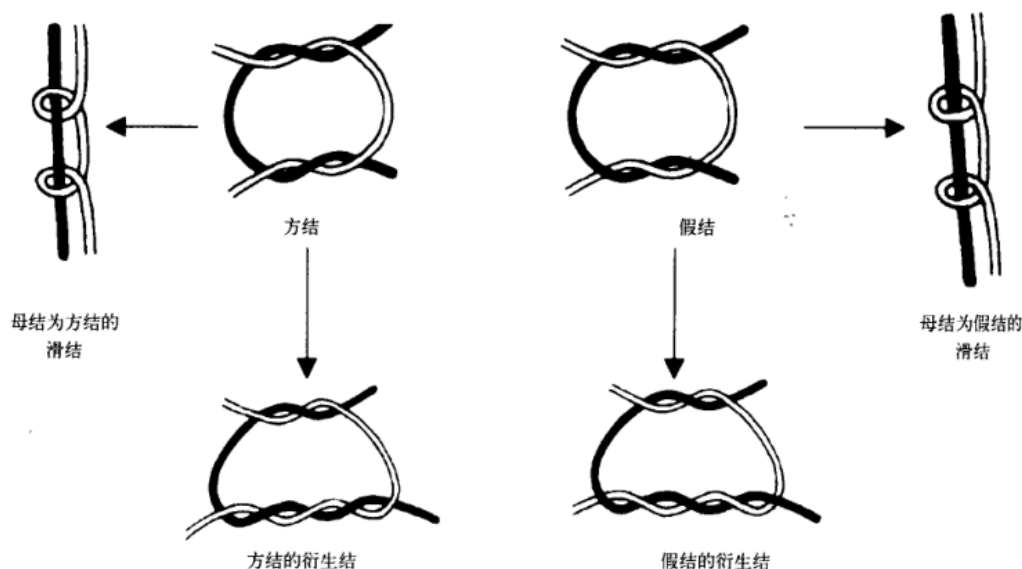







图 1-3 方结组成的多重结

5.1.2 绳结矩阵

为了找到纽结的数字化表示方法，需要根据打结操作的动作分析和相关纽结理论建立绳索纽结的数学模型。

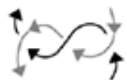

表 1-1 绳结矩阵






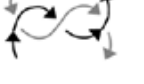
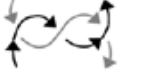
分类		编号	结扣数	编码矩阵	交叉点 数	缠绕数
简单结		1	1	(I_3)	3	+3
祖母结		1×1	2	$(I_3 \ I_4)$	6	+6
方结		1=1	2	$(I_3 \ I_2)$	6	0
外科结		2=1	2	$(I_7 \ I_2)$	8	+2
三重结		1=1=1	3	$(I_3 \ I_2 \ I_3)$	9	+3

5.1.3 建立绳结矩阵模型

绳结 K 由 n 个结扣组成, 则 $K=[B_1B_2B_3\cdots B_n]$, B_i 属于 I , $i=1, 2, 3, \cdots n$ 。例如, 绳结 $K=[I_1 \ I_2 \ I_3]$ 。见下表 1-2:

表 1-2 模型矩阵际表示方法

I_i	组扣元素	r_i	缠绕 数	组扣元素编码矩阵	交叉点所组成的绳索 线
1		3	-3	${}_1E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_1 = \{1, 2, 3\}$ $En_1 = \{4, 5, 6\}$
2		3	-3	${}_2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_2 = \{1, 2, 3\}$ $En_2 = \{4, 5, 6\}$
3		3	+3	${}_3E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_3 = \{1, 2, 3\}$ $En_3 = \{4, 5, 6\}$

4		3	+3	${}_4E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_4 = \{1, 2, 3\}$ $En_4 = \{4, 5, 6\}$
5		5	+5	${}_5E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $En_5 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
6		5	+5	${}_6E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_6 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $En_6 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$
7		3	+3	${}_7E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_7 = \{1, 2, 3, 4\}$ $En_7 = \{5, 6\}$
8		3	-3	${}_8E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_8 = \{1, 2, 3, 4\}$ $En_8 = \{5, 6\}$
9		3	+3	${}_9E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_9 = \{1, 2\}$ $En_9 = \{3, 4, 5, 6\}$
10		3	-3	${}_{10}E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$Ex_{10} = \{1, 2\}$ $En_{10} = \{3, 4, 5, 6\}$

在打结操作中，形成线圈的好坏影响着打结质量的好坏。而所形成的线圈的稳定性及线圈的质量和线圈的能量有很大的关系。线在低能量状态是稳定的。线处于高能量状态时，有向低能量状态转变的趋势。转变的方式往往是线发生变形，因此，线圈形成时，如果线具有的能量较高，容易在接下来的打结操作动作中发生从正确位置上滑动等不良现象。根据线绳的能量分布，线绳在扭转数接近于零时，处于低能量的稳定状态。不同打结方法在线圈形成时线产生的扭转数不同，因此不同打结方法在线圈形成的过程中使缝合线具有不同的能量，只有使线扭转数接近为零的打结方法才能打出稳定而高质量的纽结。假定在线圈形成过程中，采用理想的线，能量转换除了在其扭转能量和缠绕能量之间转换外，其线所消耗的其他能量为零。为了探讨绳结的性能，可以把它的尺寸定义作为一个恰当的起始点。绳子其尺寸范围从最初的基于标准的很小范围，扩展到它的所

有宽度。

5.1.4 模型求解

在时间、绳材相同的前提下，绳索的结扣数、交叉点数、缠绕数与是否容易自动脱落之间的关系。我们用以下两种方式进行分析：

（1）分别探究绳结是否容易松脱以及结扣数、交叉点数、缠绕数不同的打结方式的异同：

①结扣数：应用控制变量法，首先用结扣数为 1、2、3 任选三种绳结分别进行打结操作，将结扣数为 1、2、3 的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在第一、二结点之间）；其次，利用压力感应器均得到几组数据，通过曲线拟合；最后，得出结扣数的影响因素以及两种方法的异同。（注：摩擦力不是自变量时，可使用轻质夹控制绳子的相互作用力，从而控制摩擦力不变；摩擦力作为因变量时，可在绳子相互接触产生摩擦的地方放置一个压力传感器，然后根据 $\text{摩擦力} = \text{压力} \times \text{摩擦系数}$ 从而得到摩擦力的值。）

②交叉点数：控制其他变量不变，首先，使用规格不同的传感器，使得第结点之间的交叉点数量不同，将交叉点数目为 3、6、8、9 的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在结点之间）；其次，利用不同压力传感器得到几组数据，通过曲线拟合；最后，得出结点之间的交叉点数量的影响因素。

③缠绕数：控制其他变量不变，首先，使用规格不同的传感器，使得第结点之间的缠绕数量不同，将交叉点数目为 -3、0、+3、+9 的绳结上分别放置压力感应器（压力感应器放置在结点之间）；其次，利用不同压力传感器得到几组数据，通过曲线拟合；最后，得出结点之间的缠绕数量的影响因素。

（2）交叉点数、缠绕数、结扣数这三种影响因素的大小排序：

利用相关分析中的简单相关分析，用 Person 相关分析方法进行比较，利用 SPSS 软件，得到相关性 r 值，将这四种影响因素的 r 值进行比较，可得到结论。结扣数是与是否容易自动脱落之间的关系最密切的因素。

5.1.5 问题一小节

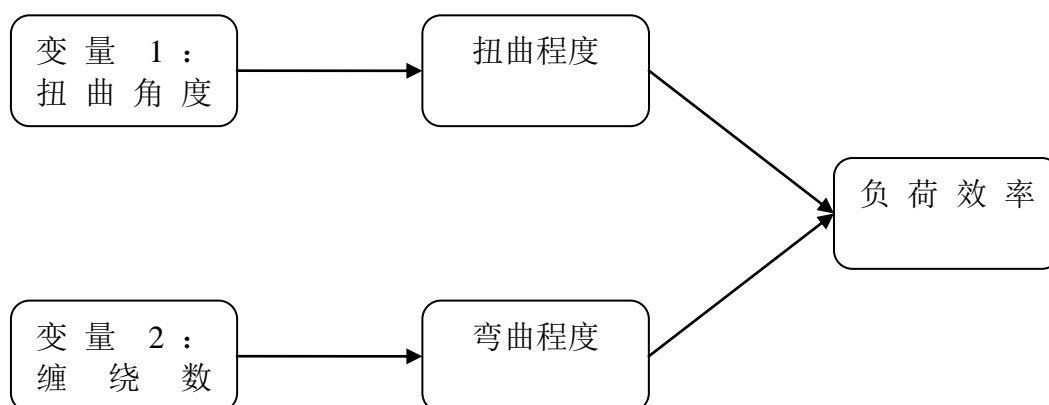
绳索内部的构造是会影响绳结的松紧度的，在生活中，我们由上面的模型判断绳索的结扣数越多绳结就越稳定，但是绳索的结扣数是通过什么来影响绳结的稳定性呢？我们还得考虑其他的因素，综合来说，在考虑绳索结扣数对绳结松紧的时候，我们借鉴了《怎样打好结》中的一些方法和数据，知道绳的结扣数能够影响摩擦力的大小，我们知道摩擦力越大，绳结就不容易脱落。在我们研究的绳结问题中，绳索的结扣数能影响下一结扣的松紧度，我们将其模型简化成绳结问题的模型，当绳索打完结以后，对绳结中的某一段进行受力分析：通过查资料，我们得到了一组绳索结扣数与绳索自身张力的数据，根据这些数据，我们使用 Excel、SPSS 工具对数据进行分析，运用物理受力分析的方法建立模型，得出，绳索的结扣数越多，绳索越不容易自动松脱。

综上所述：可以直接判断绳索结扣数，来比较绳索是否容易自动松脱。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 模型总体思路

对于所用的绳子，断裂负荷都是其重要的机械性能，打了结的绳子，将使绳结位置成为整根绳子强度较低的一个薄弱点，这是由于绳结位置的弯曲和缠绕变形降低了该位置绳子的极限强度，从而整体降低了绳子的断裂负荷。因此建立模型，分离变量，分析其单一变量对极限强度即断裂负荷的影响，再分析不同绳结中的因子，从而总结出每种绳结对绳子极限强度即断裂载荷的影响。思路图如下：



5.2.2 花托绳试验分析

日本的科学家做了花托绳试验，他们研究了最简单常见的花托绳结，就是两股线绳相互交叉然后拉紧，花托绳结的绳线交叉的次数可以任意，可以交叉一次，也可以交叉两次……通过显微镜观察，物理学家发现：

- ①交叉次数最少的花托绳结断裂发生在绳结末端，因为那儿的绳线弯曲导致的。
- ②交叉次数较多的花托绳结则是在绳结内部深处断裂，因为那儿的扭曲程度大。
- ③绳结交叉的次数越多，绳线之间的摩擦力越大，两股绳形成了一股绳，绳结越结实，越不容易松裂，通常我们用尼龙绳打的绳结就是这样的性质。

若绳线是聚二氟乙烯材料的，得到不一样的结果，绳线只交叉一次的绳结是最结实的。最不结实的尼龙绳结换成聚二氟乙烯材料，就变成了最结实的。最终发现，尼龙绳结更柔韧，在严重扭曲情况下不容易断裂，而聚二氟乙烯绳线就不同了，严重扭曲会导致它脆硬的身躯断裂。

不过，换一种绳结缠法，情况就不同了，例如聚二氟乙烯绳线的螺旋扭结相互交叉的次数越多就越结实，这是因为螺旋扭结的扭曲程度小。

5.2.2 材料分类及分析

通过花托绳试验表明，绳的断裂负荷还与材料密切相关，所以我们将绳子分为两类：第一类为像尼龙绳一样，柔韧性较强的绳子，见图 2-1：



图 2-1 尼龙绳

第二类为像聚二氟乙烯绳一样，脆硬性较强的绳子，见图 2-2；



图 2-2 聚二氟乙烯绳

通过实验我们得出结论，扭曲和弯曲变形都会降低绳子的极限强度，即断裂负荷。但针对每种绳子的影响程度不同：

针对第一类的绳子，我们通过实验得出结论，柔韧性较强的绳子扭曲程度对断裂负荷的影响程度比弯曲程度对其的影响大，所以绳结交叉次数越多，在绳结系紧后扭曲程度越大，绳结越结实，越不容易松裂。

扭曲变形：在弯曲程度相同的情况下，可以加强绳结的稳定性，扭曲程度越大的

结越不容易断裂。设其对绳子极限强度的影响比重为： $\beta_1 = \frac{1}{8}$

弯曲变形：在扭曲程度相同的情况下，弯曲程度越大，绳子的极限强度越低。设其对绳

子极限强度的影响比重为： $\beta_2 = \frac{1}{6}$

针对第二类的绳子，我们通过实验得出结论，脆硬性较强的绳子，绳结的严重扭曲对其破坏性很强，所以绳结交叉次数越多，在绳结系紧后扭曲程度越大，绳结越不结实，越容易松裂。

扭曲变形：在弯曲程度相同的情况下，绳结的扭曲对绳子本身的结构破坏很大，对绳子

的极限强度降低有很大的影响。设其对绳子极限强度的影响比重为： $\beta_1 = \frac{1}{2}$

弯曲变形：在扭曲程度相同的情况下，弯曲程度越大，绳子的极限强度越低。设其对绳

子极限强度的影响比重为： $\beta_2 = \frac{1}{4}$

5.2.3 模型建立

因为在生活中，柔韧性的绳子实用性较强，故该模型针对第一类柔韧性较强的绳子作研究分析。

将绳结位置的弯折变形程度用绳结的弯曲程度（即缠绕数 w_r ）这个变量来刻画；

将绳结位置的缠绕变形用绳结的扭曲程度（即扭转数 T_w ）这个变量来刻画。

为了方便研究，我们建立曲带模型，绳索可以用一条细长而非封闭的曲带来表示。曲带的中心线记作 K ，轴向截面和缝合线的表面一边的交线记作 K' ， K 和 K' 组成曲带的两个边缘。

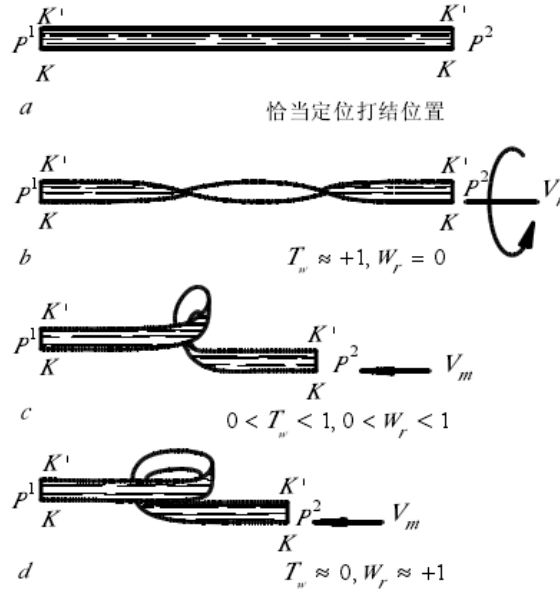


图 2-3 曲带模型

相关变量：

①扭转率 w_θ ：绳截面相对定坐标系绕切线轴扭转的角度的比值；

$$w_\theta = \frac{w}{2\pi} \quad (2-1)$$

②扭转数 T_w ：绳截面相对定坐标系绕切线轴扭转的圈数。若绳的扭率 w_θ 沿绳保持不变，即 w 为常数时，扭转数为：

$$T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} \quad (2-2)$$

作为度量绳结总体扭转程度的参数，扭转数有以下性质：

- (1) 包含绳在内的空间作刚性位移或均匀膨胀时，扭转数不变；
- (2) 扭转数具有可加性，绳总体的扭转数为各组成部分扭转数之和；
- (3) 平面封闭绳的扭转数为整数，空间封闭缝合线的扭转数为实数，

③缠绕数 w_r ：缠绕数沿用第一问题的定义：

$$w_r = \sum_{i=1}^n \text{sign}(pi) \quad (2-3)$$

绳子的缠绕数具有以下性质：

- (1) 以同一条缝合线为中心线扩展出的不同曲带具有相同的缠绕数；
- (2) 平面缠绕数为整数。空间缝合线的缠绕数为实数，但不一定为整数；
- (3) 平面缝合线不自相穿越时缠绕数为零。每穿越一次，根据从上方还是从下方穿越方式的不同，缠绕数增加 1 或 -1。

④原绳负荷 ω_0 ：未打结的绳子两端承受的最大负荷。

⑤结绳负荷 ω' ：打结后的绳子两端承受的最大负荷。

$$\omega = \omega_0 \cdot (1 - T_w \cdot \beta_1) \cdot (1 - w_r \cdot \beta_2) \quad (2-4)$$

⑥负荷效率 η ：绳子打结后的最大承载负荷与绳子在不打结状态下的比值。

#3318

$$\eta = \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| = \left| \frac{\omega_0 \cdot (1 - T_w \cdot \beta_1) \cdot (1 - w_r \cdot \beta_2)}{\omega_0} \right| = \left| (1 - T_w \cdot \beta_1) \cdot (1 - w_r \cdot \beta_2) \right| \quad (2-5)$$

5.2.4 模型的应用与求解

不同的打结方法，对绳子造成了不同的弯曲程度和扭曲程度，在绳结系紧后，有不同的扭转数和缠绕数。下面我们就列举 5 种不同的绳子打结方法，对其强度进行比较：

A. 简单结，又称单结，是最基本的结，也是最简单的结。单结打结过程，见图 2-4：

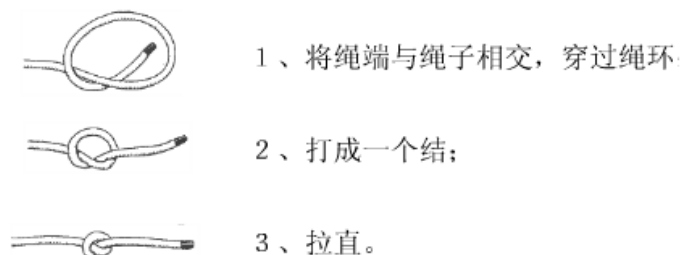


图 2-4 单结打结过程

分析：

$$\text{扭转率 } w_\theta: w_\theta = \frac{w}{2\pi} = \frac{2/\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\text{扭转数 } T_w: T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} = L \cdot w_\theta = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{模型理想化, 设 } L=1)$$

$$\text{缠绕数 } w_r: w_r = +3$$

$$\text{负荷效率 } \eta: \eta = 0.48$$

B. 祖母结，又称同向结，懒散结，是由两个相同的简单结组成的。将祖母结系紧后，见下图 2-5：

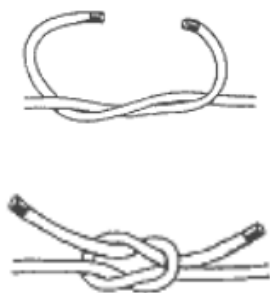


图 2-5 祖母结打结过程

分析：

$$\text{扭转率 } w_\theta: w_\theta = \frac{w}{2\pi} = \frac{2/\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

#3318

扭转数 T_w : $T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} = L \cdot w_\theta = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (模型理想化, 设 $L=1$)

缠绕数 w_r : $w_r = 0$

负荷效率 η : $\eta = 0.96$

C. 方结, 又称镜像结, 方结, 是由两个互为镜像的简单结组成的。将方结系紧后, 见下图 2-6:



图 2-6 方结

分析:

扭转率 w_θ : $w_\theta = \frac{w}{2\pi} = \frac{2/\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$

扭转数 T_w : $T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} = L \cdot w_\theta = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ (模型理想化, 设 $L=1$)

缠绕数 w_r : $w_r = +6$

负荷效率 η : $\eta = 0$

D. 水结, 水结的打结过程见下图 2-7:

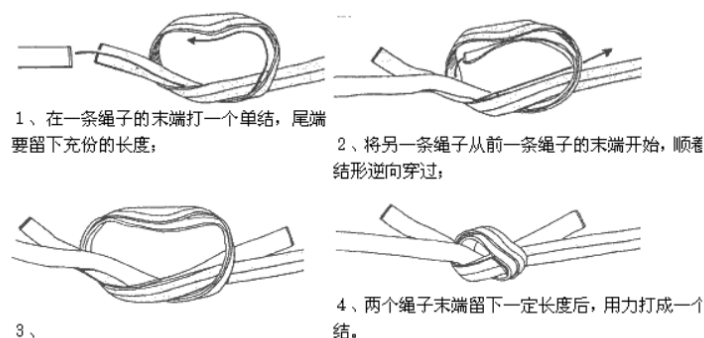


图 2-7 水结打结过程

分析:

扭转率 w_θ : $w_\theta = \frac{w}{2\pi} = \frac{2/\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$

扭转数 T_w : $T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} = L \cdot w_\theta = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (模型理想化, 设 $L=1$)

缠绕数 w_r : $w_r = +3$

负荷效率 η : $\eta = 0.46$

E. 渔人结，渔人结的打结过程见下图 2-8:

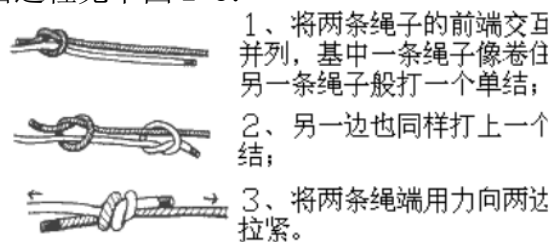


图 2-8 渔人结打结过程

分析:

$$\text{扭转率 } w_{\theta}: w_{\theta} = \frac{w}{2\pi} = \frac{2/\pi}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

$$\text{扭转数 } T_w: T_w = \frac{L \cdot w}{2\pi} = L \cdot w_{\theta} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{模型理想化, 设 } L=1)$$

$$\text{缠绕数 } w_r: w_r = +2$$


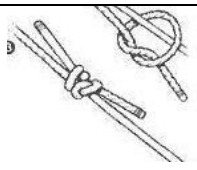
$$\text{负荷效率 } \eta: \eta = 0.63$$

5.2.5 问题二小结

将上述数据进行总结，见表 1:

表 1: 各打法绳结的相关因素数据

绳结图	名称	缠绕数	扭转数	负荷效率
	单结	+3	$\frac{1}{4}$	0.48
	祖母结	+6	$\frac{1}{3}$	0.96
	方结	0	$\frac{1}{4}$	0

	水结	+3	$\frac{1}{3}$	0.46
	渔人结	+2	$\frac{1}{2}$	0.63

六、模型的优点与缺点

6.1 模型的优点：

1. 分别考虑各变量对绳子松脱系性质的影响和对极限强度（即负荷效率），大大减少了实验的复杂程度，使得模型的控制变量建立更具有条理性。
2. 对数据进行回归分析，能够看出各变量对绳子松脱性质的影响程度。
3. 使用了 SPSS 分析数据。

6.2 模型的缺点

1. 模型有些过于理想化，数据采集比较困难；
2. 模型变量随机性太大，造成模型分析时的困难和一些数据分析的粗糙；
3. 仅仅是对于柔韧性的绳子考虑不具有普遍性，对于其他质地脆硬的绳子，不具有相同的说明性；
4. 模型中各变量数据之间没有关联性，很难对数据进行综合分析反映到一个多元函数上，对于多因素同时变化时，不能较好的反应绳子松弛程度的变化；
5. 应用简单相关分析得到的相关程度与模型检验得到的结果存在部分不同，实验过程变量的控制还有待改进。

七、模型的评价与推广

7.1 模型改进：

- 1、在给绳索打结时，由于人为地拉紧绳索，很可能造成受力不均，因此，我们在打结过程中，用机器对绳索两头用力，且用力大小相同。
- 2、在绳索打结拉紧过程中，绳结由松到紧的过程中，运动速度不同，可能对绳结最终状态有一定的影响，因此，我们在建立模型的过程中进一步改进，在拉紧过程中速度缓慢，近似将它看为静力平衡状态。
- 3、在测量绳索角度时候我们使用更加精细的测量工具，将数据误差控制到最小的范围之内。

7.2 模型推广：

本模型虽然存在一些不足，但是得到的结果还是较为合理的。文章对绳结问题进行了详细的分析和探讨，对判断绳索强度或松紧程度起到一定的指导作用，同时本文中采取的一些方法对处理部分优化问题有借鉴意义，一些简化问题的方法也可应用到其他类似的问题求解上。

#3318

七. 参考文献

- [1]王惠娟. 面向微创手术机器人系统的缝合打结行为研究, 2015. 4. 18.
- [2]岳龙旺. 外科手术机器人缝合打结研究, 2015. 4. 18.
- [3]哪种绳子更结实 大科学(科学之谜). 2007. 6. 5.
- [4]纽结理论
<http://wenku.baidu.com/view/7c870853f01dc281e53af064.html> 2015. 5. 17
- [5]两种区分平面投影图平面合痕类的算法. 2015. 5. 17
<http://www.docin.com/p-232082849.html>
- [6]两种区分平面投影图平面合痕类的算法 2015. 5. 17-卢婷:
<http://www.doc88.com/p-9085923686712.html>
- [7]姜文锋 张书杰. 浅谈绳结检验方法, 中国刑警学院学报, 2012.