

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2014@tzmcm.cn

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会

电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)

Email：2014@tzmcm.cn

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

## 摘要

汽车依靠轮胎支承在路面上，而直接与路面接触的却是轮胎花纹。因而轮胎花纹的形状直接决定了轮胎性能的好坏，通过对大量轮胎的分析和归纳，我们将轮胎花纹分为横向、纵向和混合型三种。轮胎性能指标分为摩擦、噪声和排水，接下来本文将着重分析上述三种花纹对轮胎性能的影响。

模型一：根据有限元分析，运用Catia软件进行绘图，Ansys软件进行模拟建立了摩擦力模型。通过整体分析和局部分析得到不同花纹所受摩擦力沿各个方向的分量。对于小变形问题进行力学求解，对于大变形问题采用有限元分析求解得到：横向花纹抗滑能力呈现纵强横弱；纵向花纹抗滑能力呈现横强而纵弱；混合花纹横纵方向抗滑能力均比较好。最后将有限元模拟结果与GB9744/2003进行对比，证明了有限元模型的有效性。

模型二：根据发声的动力学原理和Matlab插值运算建立了噪声模型。通过分析发现噪声由花纹块和花纹槽两部分产生：花纹块的噪声在外荷载相同的情况下只与花纹块的面积有关；对于花纹槽的噪声：首先通过对轮胎花纹面划分网格，然后根据发声原理求解出每一方格面积上的噪声，通过插值运算绘制出整个花纹面的三维噪声分布图。最后根据噪声合成公式

$$P(t) = \sum_{k=0}^{s-1} (\alpha \sum_{i=0}^{a-1} p_{bi}(t) + \beta \sum_{j=0}^{n-1} p_{sj}(t))$$

求出干涉合成后的噪声声级。得到三种花纹噪声声级由大到小依次为：横向花纹>混合花纹>纵向花纹。

模型三：根据流体力学和橡胶的附着性建立了排水模型。首先基于胎面花纹对液膜单元压力分布的影响以及外载荷对胎面单元附着性能的影响，得到花纹与附着性之间的关系。然后将液膜划分为 $n \times n \times 1$ 个体积 $V = dxdydz$ 的立方体，对其中任意一个立方体进行流体力学分析，得到其仅在垂直于花纹边缘的方向上受力，其移动速度

$$v = \int_{y_0}^y \frac{\Delta F_x}{m} dy = \int_{y_0}^y \frac{P_i(x_0, y_{-1}) - P_i(x_0, y_1)}{\rho dz} dy$$

最后综合以上两方面运用Mathematic计算得到得到花纹的排水能力依次为：混合花纹>横向花纹>纵向花纹。

本文对横向、纵向以及混合型三种花纹和轮胎性能之间的关系做了详细的分析和阐述，并运用Ansys有限元分析软件对花纹做了受力模拟；运用Matlab对噪音进行了插值分析，因此本文所述具有一定的可信度和说服力。

**关键词：**有限元分析    Matlab插值    发声动力学原理    平均流量模型    微元法

**参赛队号：** 1911

**所选题目：** A 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## 摘要

Car tires rely on the support surface, and direct contact of the road surface is tire pattern. Thus the shape of the tire tread directly determines performance is good or bad. By analyzing and summarizing a large number of tires, we divided tread into horizontal, vertical and mixed. Tire performance indicators divided into friction, noise and drainage. Next, we will focus on analyzing the impact of the three patterns of tire performance.

Model one: According to finite element analysis, use Catia software for drawing, Ansys software to simulate the establishment of a friction model. Get different patterns suffered friction component in all directions through the whole analysis and local analysis. we deal small deformation with Solving mechanics, and use finite element analysis to solve large deformation problems: the horizontal pattern's skid resistance weak in Transverse direction; Vertical pattern's skid resistance weak in vertical direction; mixed pattern of horizontal and vertical direction of the skid resistance are better. Finally, the finite element simulation results were compared with GB9744/2003 proves the validity of the finite element model.

Model II: According to the principles of sound dynamics and Matlab interpolation to establish a noise model. The analysis shows that the noise from the lug and groove produced in two parts: the outer block noise load the same scenario with only the relevant area of the block; slots for noise pattern: first through the tire tread surface mesh, then according to sound principles for solving the noise on each grid area, draw the three-dimensional distribution of the entire tread surface noise through interpolation. Finally, according to the noise synthesis formula:

$$P(t) = \sum_{k=0}^{s-1} (\alpha \sum_{i=0}^{a-1} p_{bi}(t) + \beta \sum_{j=0}^{n-1} p_{sj}(t))$$

interference noise level obtained after synthesis. Get three kinds of pattern noise level in descending order: Horizontal pattern > Mixed pattern > Vertical pattern.

Model III: According to fluid mechanics and adhesion of rubber to establish a drainage model. First, based on the impact of the film unit tread pressure distribution and the impact of external load cell adhesion properties of the tread, to get the relationship between pattern and adhesion. Then the film is divided into  $n \times n \times 1$  cubes and  $V = dx dy dz$ , do hydrodynamic analysis for any one of the cube, it is only in a direction perpendicular to the edge of the force pattern, the moving speed

$$v = \int_{y_0}^y \frac{\Delta F_x}{m} dy = \int_{y_0}^y \frac{P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}}{\rho dz} dy$$

Finally, the above two aspects of the use of Mathematic been calculated pattern of drainage capacity as follows: mixed pattern > horizontal pattern > vertical patterns.

In this paper, we made a detailed analysis and elaboration for the relationship between horizontal, vertical and mixed patterns and the tires' performances, and use Ansys finite element analysis software to do force simulation for pressure; also using Matlab do interpolation for the noise, Therefore, this article is credibility and persuasiveness.

# 花纹对轮胎特性的影响

## 目录

1	问题重述	5
2	模型假设	5
3	符号说明	6
4	模型一：基于有限元分析的摩擦力模型	6
4.1	整体分析	6
4.2	模型的建立	8
4.2.1	局部小变形的力学模型	8
4.2.2	局部大变形的有限元模型	9
4.3	模型的求解	10
4.3.1	小变形模型的力学求解	10
4.3.2	大变形模型的有限元求解	11
4.4	模型的检验	14
4.5	结论	14
5	模型二：噪声模型	15
5.1	问题分析	15
5.1.1	单个花纹块发声分析	15
5.1.2	单个花纹槽噪声分析	15
5.2	模型的建立	16
5.2.1	花纹块发声的动力学模型	16

5.2.2	花纹槽发声模型	17
5.3	模型的求解	20
5.3.1	不同花纹槽面积的求解	20
5.3.2	不同花纹槽产生噪声的求解	20
5.3.3	轮胎花纹噪声的干涉合成	26
5.4	模型的检验和改进	27
5.5	结论	28
6	模型三：胎面排水模型	29
6.1	问题分析	29
6.2	模型的建立	30
6.2.1	胎面花纹对液膜单元压力分布的影响	30
6.2.2	胎面载荷平衡和边界条件方程	32
6.2.3	外荷载对胎面单元附着性能的影响	33
6.2.4	不同花纹在外荷载作用下的排水能力模型	33
6.3	模型的求解	35
6.4	模型的改进	36
6.4.1	平均流量	37
6.4.2	橡胶材料和粘弹特性	37
7	模型的评价	38
7.1	模型的优点	38
7.2	模型的缺点	39
8	参考文献	40
9	附录	41

## §1 问题重述

随着交通条件的日益发达，轮胎被广泛使用在多种陆地交通工具上。根据性能的需要，轮胎表面常会加工出不同形状的花纹。在设计轮胎时，往往要针对其使用环境，设计出相应的花纹形状。

对于不同的轮胎花纹设计方案，建立合理的数学模型，以确切地分析其性能特性，并确定轮胎的最佳适用范围。

## §2 模型假设

- 所选取胎面单元几何尺寸相同。
- 不同花纹胎面单元所承受的外荷载相等。
- 轮胎的制作材料，工艺一样。
- 不同轮胎的转速相同。
- 不同花纹槽内腔深度均相同。
- 每个方格内的噪声声级等于其中心的噪声声级。
- 每个立方体所受的压强等于其中心所受的压强。

### §3 符号说明

---

$f$	轮胎与地面的静摩擦力
$F_n$	轮胎发生形变时的应力
$n$	与地面接触部分的轮胎花纹条数
$E$	轮胎弹性模量
$\varepsilon$	轮胎花纹处应变
$l_b$	调节常数
$\sigma$	槽的宽度
$\delta$	声压脉冲宽度
$\Delta V$	体积压缩量
$\omega_{ij}$	振动频率
$R$	轮胎半径
$L$	噪声声压级
$v_c$	汽车行驶速度
$v'$	轮胎的转动线速度
$\tau$	花纹槽压缩前的体积与压缩后的体积之比的倒数
$S_k$	花纹块的面积
$A_i$	花纹块的面积比例矩阵
$P(t)$	噪声声压级
$P_i(x, y)$	(x,y)坐标处的压强
$W$	喷出气团的动能
$v_h$	气团喷出时的合成速度
$v_g$	气团喷出时相对车的速度
$\Delta r$	圆球状空气团的径向增大量
$w_r$	逆向花纹槽的噪声功率
$w_c$	顺向花纹槽的噪声功率

---

### §4 模型一：基于有限元分析的摩擦力模型

#### §4.1 整体分析

轮胎花纹的主要作用就是增加胎面与路面间的磨擦力，以防止车轮打滑。它提高了胎面接地弹性，在胎面和路面间切向力(如驱动力、制动力和横向力)的作用下，花纹块能



产生较大的切向弹性变形。切向力增加，切向变形随之增大，接触面的“磨擦作用”也就随之增强，进而抑制了胎面与路面打滑或打滑趋势。

而要对车轮所受摩擦力进行分析首先应该对车轮的整体受力进行分析，如下图所示，运用有限元分析软件Ansys14.0对车轮整体进行受力分析。

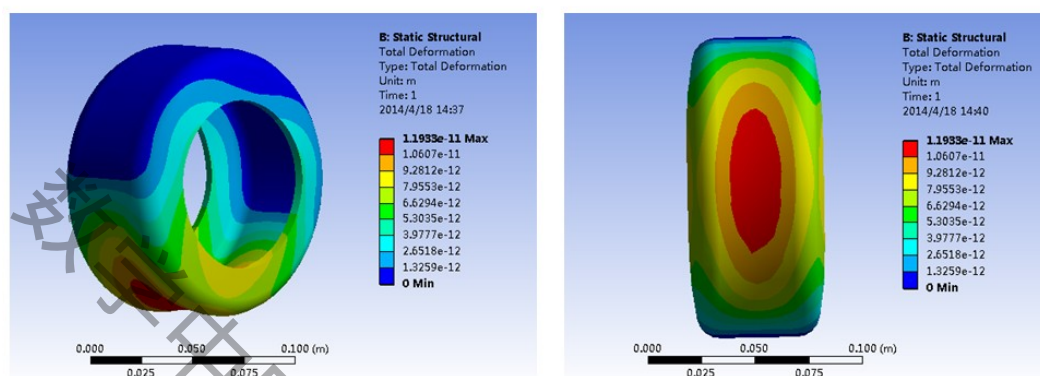
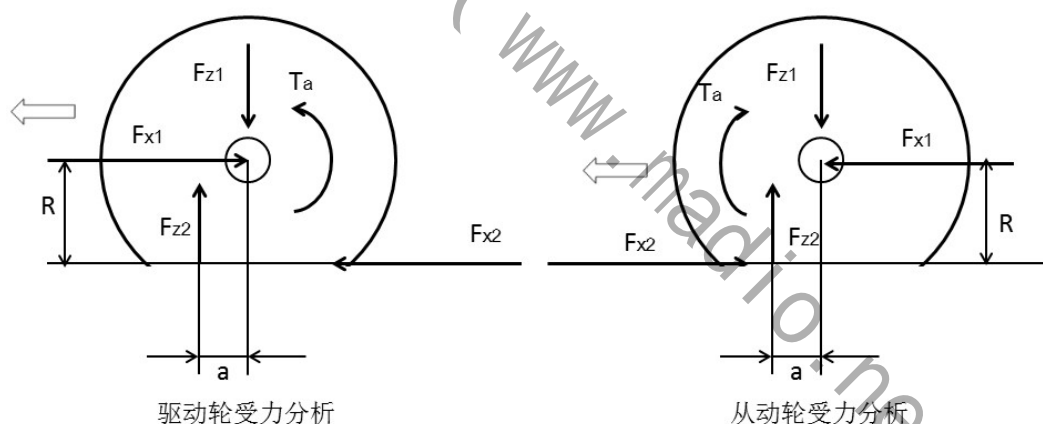


图 1 有限元分析

其次，对地面对车轮的反作用力进行分析，如下图所示：



图中： $T_a$ 为驱动力矩， $F_{z1}$ 为车重力， $F_{x1}$ 为轮毂对轮胎的作用力， $F_{z2}$ 为地面对轮胎的反作用力的垂直分量， $F_{x2}$ 为地面对轮胎的反作用力的切向水平分量， $R$ 为轮胎变形后圆心到地面的距离。

由图可知，垂直作用力在车轮滚动过程中产生阻力矩。

$$M_f = F_z R$$

$$F_f = \frac{M_f}{r} = \frac{F_z R}{r}$$

式中， $r$ 为轮胎的半径。

$$F_x R = T_a - M_f$$

$$F_x = \frac{T_a}{R} - \frac{M_f}{R} = F_a - F_f$$

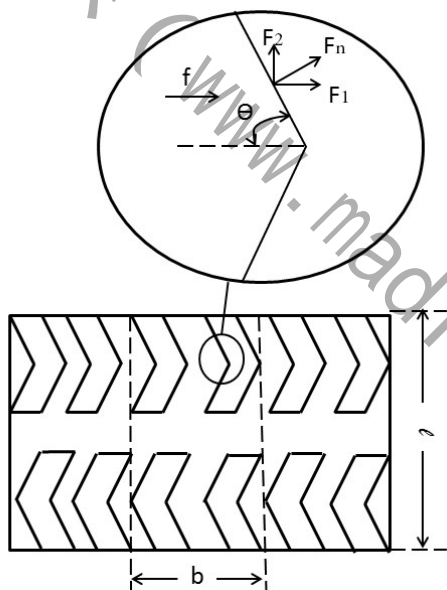
由上式可知，真正作用在驱动轮上的汽车行驶的力为地面对轮胎的切向水平作用力 $F_x$ ，它的数值为驱动力 $F_a$ 减去驱动轮上的滚动阻力 $F_f$ 。

## §4.2 模型的建立

通过整体的受力分析，我们可知车轮在转动过程中的普遍受力情况，但对于不同类型的花纹，受力情况亦不相同，这是整理分析所不能解决的。故我们采用局部分析的方法，针对不同类型的花纹作进一步分析。

### §4.2.1 局部小变形的力学模型

对于小变形问题，我们首先在轮胎与地面的接触面上截取一块微小面积进行分析，如下图所示，虚线内是我们假设的轮胎和地面的接触面。



取轮胎与地面接触的一部分微小单元进行受力分析，如图所示，得

$$F_x = F_1 + f$$

$$F_y = F_2 + f$$

根据分析我们发现，轮胎发生形变时的应力的纵向分量和横向向量分别为

$$F_1 = F_n \sin \theta, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$F_2 = F_n \cos \theta, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$F_x$ 为地面对轮胎的反作用力的切向水平分量, $F_y$ 为地面对轮胎的反作用力的法向水平分量, $f$ 为轮胎与地面的静摩擦力, $\theta$ 为轮胎花纹与纵向的夹角。

根据胡克定律

$$\begin{cases} \sigma = \varepsilon E \\ b = \frac{G}{4pl} \\ F_n = \frac{nh\sigma b}{\cos \theta} \end{cases}$$

解得

$$F_n = \frac{Gnh\varepsilon E}{4pl \cos \theta}$$

式中： $G$ 为外荷载大小, $p$ 为轮胎充气量, $l$ 轮胎宽度, $h$ 轮胎花纹深度, $\sigma$ 轮胎花纹处应变。

根据以上公式的推导我们可以得到，地面对轮胎的反作用力的切向和法向水平分量分别为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{Gnh\sigma E \tan \theta}{4pl} + f \\ F_y &= \frac{Gnh\sigma E}{4pl} + f \end{aligned}$$

#### §4.2.2 局部大变形的有限元模型

轮胎在高载重和高速滚动状态下，其变形量已经超出了弹塑性力学的小变形假设，呈现严重的几何非线性，应变与位移不再保持线性关系，只能用大变形理论进行求解。轮胎与地接触面的非线性主要来源于两个方面：

- 接触界面的区域大小、相互位置、接触状态是随时间变化的；
- 接触条件的非线性

在轮胎结构分析中，由于其几何非线性，小变形情况的几何方程和平衡条件不再适用，为此必须重新定义其应力、应变度量和平衡方程的表达式。

其格林应变表达式[1]为：

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

式中： $E_{ij}$ 为格林应变， $\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$ 为克朗内记号。

相应的，Kirchhoff应力表达式为：

$$S_{im} = J \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \tau_{ij}$$

式中： $S_{im}$ 为Kirchhoff应力张量。

Kirchhoff应力表达式为：

$$t_i^{(n)} = \lim \frac{\Delta T_i}{\Delta A} = \frac{dT_i}{dA}$$

式中： $t_i^{(n)}$ 为Cauchy应力张量。

用Kirchhoff应力表述的平衡方程和边界条件[2]为：

$$\frac{\partial}{\partial X_k} (S_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial X_i}) + p_{oi} = 0$$

$$S_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial X_i} N_k = q_{oj}$$

最后分别对这些公式进行积分，容易得到虚功方程和平衡方程：

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \int_V p_i \delta u_i dV + \int_A q_i \delta u_i dA \\ \int_{A_o} S_{ij} \delta E_{ij} dV_o &= \int_{V_o} p_{oi} \delta u_j dV_o + \int_{A_o} q_{oi} \delta u_i dA_o \end{aligned}$$

## §4.3 模型的求解

### §4.3.1 小变形模型的力学求解

这是典型的多元非线性方程。从物理学角度分析，当应力和静摩擦力达到最大时， $F_x$ 、 $F_y$ 最大。应力最大即轮胎花纹形变量达到极限， $\varepsilon = \varepsilon_0$ ，可得：

$$F_n = \frac{GnhE\varepsilon_0}{4pl \cos \theta}$$

摩擦力最大即最大静摩擦力约等于滑动摩擦力，可得

$$f = \mu N$$

故

$$\begin{aligned} \max F_x &= \frac{GnhE\varepsilon_0 \tan \theta}{4pl} + \mu N \\ \max F_y &= \frac{GnhE\varepsilon_0}{4pl} + \mu N \end{aligned}$$

当 $\theta > \frac{\pi}{4}$ 时， $F_x > F_y$ ；

即地面对轮胎的反作用力的切向水平分量大于法向水平分量.

当 $\theta < \frac{\pi}{4}$ 时,  $F_x < F_y$ ;

即地面对轮胎的反作用力的法向水平分量大于切向水平分量.

### §4.3.2 大变形模型的有限元求解

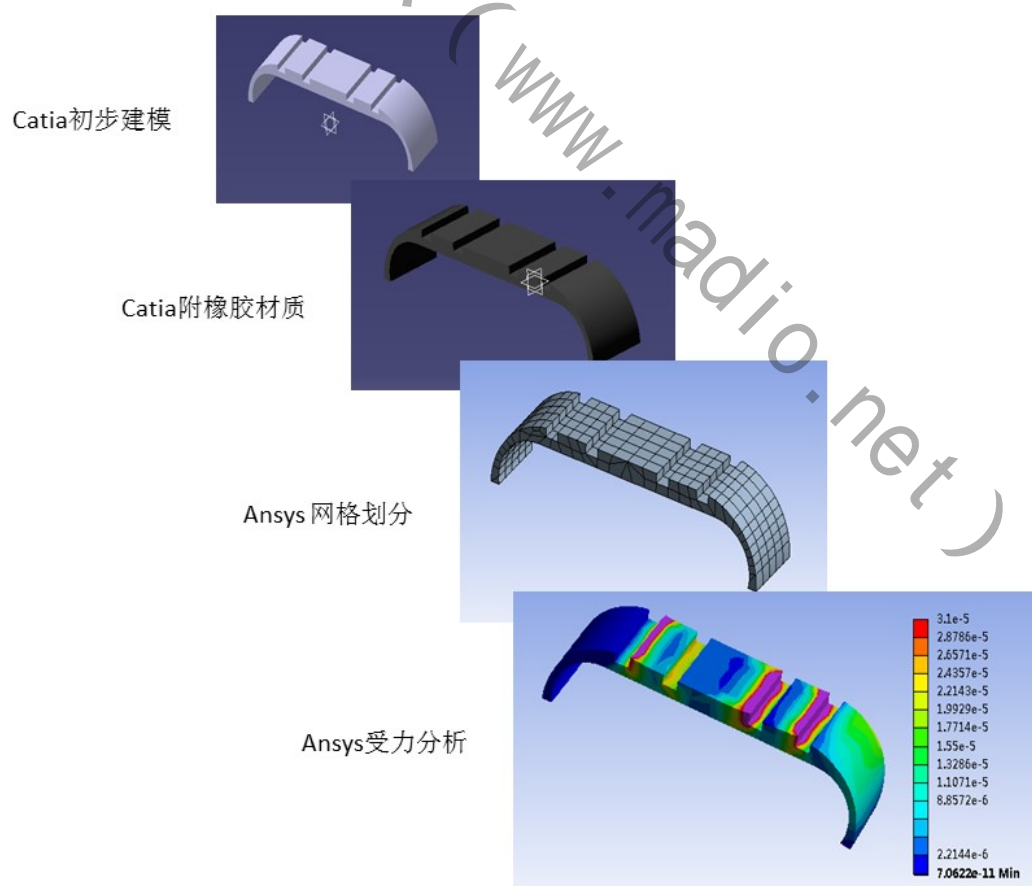
该虚功方程和平衡方程比较复杂, 直接求解计算量大. 这里我们可以利用有限元分析, 将方程导入, 模拟轮胎大变形下的力学状态, 从而得出结论.

本文结合了Catia和Ansys软件对轮胎进行有限元分析.

首先, 用Catia软件模拟制作出轮胎的三维模型, 并且分别附上横向、纵向以及混合型花纹. 试算表明, 取与地面接触的轮胎部分进行有限元分析, 与取整个轮胎建模相比, 计算结果产生的偏差在误差范围之内, 因此本文只取与地面接触的轮胎部分.

然后将该模型导入Ansys软件.

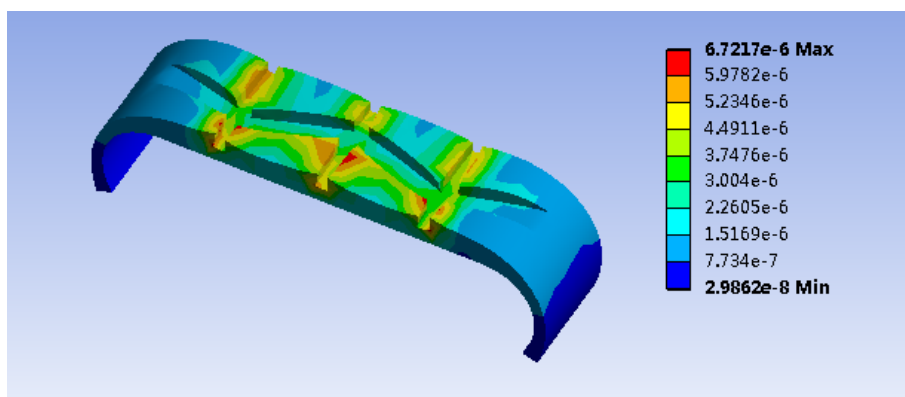
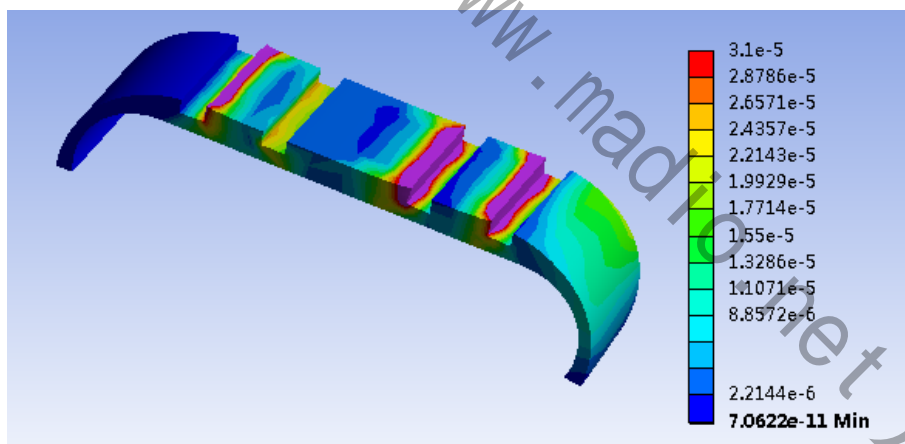
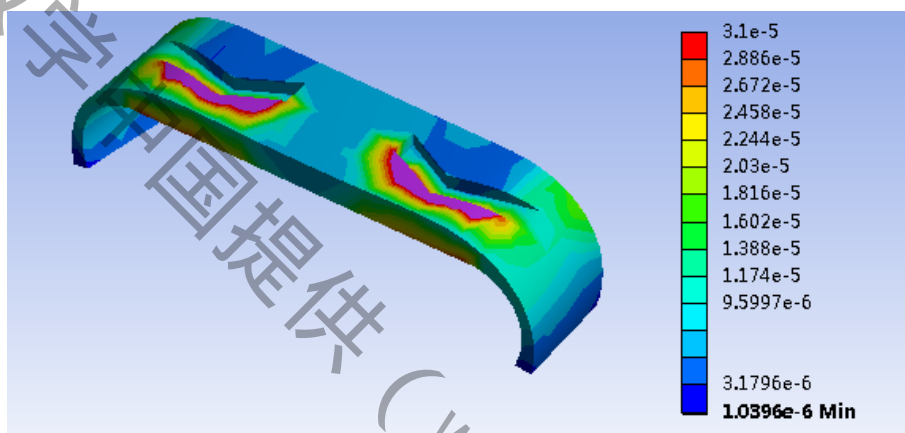
建模流程如下图所示:



模拟工况参数:

- 轮胎与地面之间摩擦系数为0.8
- 额定负荷为7500N
- 额定充气压力为200kPa
- 轮胎行进速度为60km/h

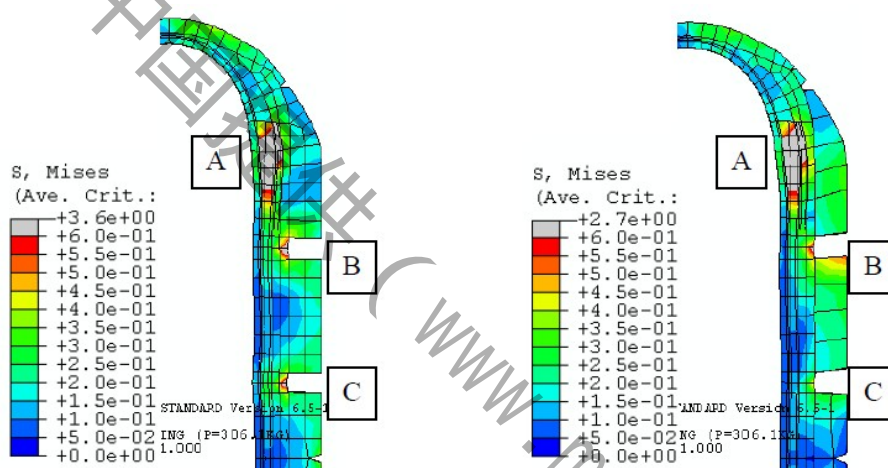
这里本文将地面视为刚体。轮胎主体部分的模拟选用6 节点的六面体单元，胎面花纹部分的模拟选用4节点的六面体单元，骨架结构选用4 节点四边形单元。以下是有限元分析后的轮胎橡胶Mises应力分布：



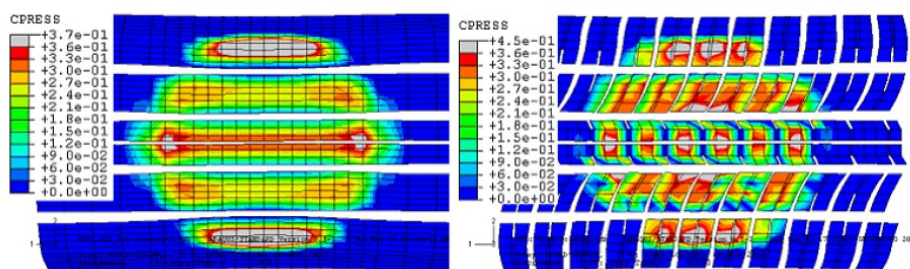
由图可知,在相同工况下,混合型花纹与地面接触部分所受的力最大,纵向花纹次之,而横向花纹最小。说明横向花纹的轮胎能够承受的负荷最大,混合型花纹的轮胎能够承受的负荷最小。

利用前面给出的有限元模型,对横向、纵向、混合式花纹进行了静负荷和实际转动工况进行了模拟,并将计算结果与仅包含纵向花纹的轮胎模型的计算结果进行了对比分析。限于篇幅,本文仅给出了静负荷状态的部分分析结果。

下图为静负荷状态轮胎接地端子午面内橡胶结构Mises应力分布,左图为仅考虑主要纵向花纹的轮胎模型的计算结果,右图为考虑混合型花纹的轮胎模型的计算结果。由图可见,横向花纹对纵向花纹沟底部附近的B区、C区的受力特征有较大影响,对其他区域的影响相对较小。



下图为轮胎接地压力分布,左图为纵向花纹的轮胎模型计算结果,右图为混合型花纹的轮胎模型计算结果。由图可见,花纹形态对接地印痕形状和接地压力分布都有一定影响;与仅考虑纵向花纹相比,包含复杂胎面花纹的轮胎的接地长度(纵向)有所减小,接地面中央区域的接地压力有所增大,同一侧的两条主要纵沟之间的部分接地压力明显增大,靠近肩部的接地压力最大值有所降低,接地压力的分布总体上较为均匀。

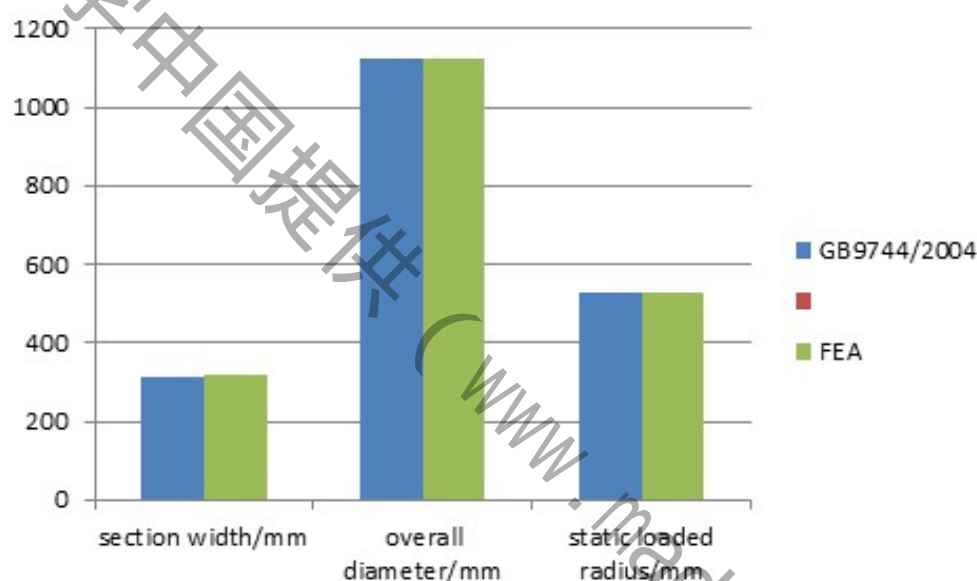




#### §4.4 模型的检验

以下给出有限元模拟结果与GB9744/2004中有关数据比较表：

	section width/mm	overall diameter/mm	static loaded radius/mm
GB9744/2004	315	1125	526
FEA	316.108	1124.794	525.457
Allowance error	3.5%	-1.2%	
Deviation	0.35%	-0.02%	-0.10%



由图可知，该模拟结果与GB9744/2003有很大程度上的吻合，可以认为，本文给出的有限元模型是有效的。

#### §4.5 结论

横向花纹 $\theta$ 大于45度，轮胎抗滑能力呈现出纵强而横弱的特征，汽车以较高速度转向时，容易侧滑；轮胎滚动阻力也比较大，胎面磨损比较严重；能够承受比较大的负荷。

纵向花纹 $\theta$ 小于45度，轮胎抗滑能力呈现出横强而纵弱的特征。这种花纹轮胎的滚动阻力较小，胎面不易磨损；承受负荷的能力次于横向花纹。

混合型花纹既有横向花纹又有纵向花纹，因此胎面的纵横方向抗滑能力比较好；承受负荷的能力比较差。



## §5 模型二：噪声模型

轮胎花纹噪声主要由花纹块击地面的撞击噪声、花纹槽的泵浦噪声、胎面的沙声和花纹槽的气柱共鸣噪声等组成。我们首先对花纹块和花纹槽的发声机理进行研究,并在声点阵分析原理的基础上提花纹块和花纹槽的初级噪声模型。为了提高模型质量,现在从动力学观点出发,进一步对轮胎花纹块与花纹槽的发声机理进行分析(只有当车速大于70km/h时,轮胎花纹噪声才较为突出,因此讨论是基于车速大于70km/h 工况下进行的)。

### §5.1 问题分析

#### §5.1.1 单个花纹块发声分析

根据文献可得到单个花纹块的噪声声压波形,它是一个有毛刺的上大下小的N形波,其周期 $t'_i = \frac{2\pi}{\omega_{bi}}$  ( $\omega_{bi}$  为圆频率)可以用准正弦波来描述.根据“花纹块的发声与花纹块的面积有关,与其形状无关”的理论以及汽车行驶速度对花纹块噪声的影响[3]

可以用下式近似描述第*i*个花纹块发声的时域波形:

$$P_{bi}(t) \approx g_b A_{bi} \sin(\omega_{bi}t + \theta_i) B_i \sin(\omega t + \theta) + l_b$$

其中

$$\begin{cases} 1 & \sin(\omega_{bi}t + \theta_i) \geq 0 \\ \xi_b & \sin(\omega_{bi}t + \theta_i) < 0 \end{cases}$$

式中,  $0 < \xi_b < 1$ ,可以由实验确定;  $A_{bi} = f(S_i, v)$ ,为声压的振幅,  $S_i$ 为第*i*块花纹块的面积,  $v$ 为车速;  $\theta$ 和 $\theta_i$ 为相位角,  $B_i \sin(\omega t + \theta)$ 用来模拟毛刺波,  $\omega \gg \omega_{bi}$ ;  $l_b$ 为调节常数。

#### §5.1.2 单个花纹槽噪声分析

单个横向花纹槽的噪声实测波形如下图所示。它是一个含有较长的毛刺的上大下小的N形波,也可以用准正弦波形描述。设槽的宽度为 $\sigma$ ,其声压脉冲宽度 $\delta$ 可以表示为:

$$\delta = k(l \cos \gamma) + \sigma/v$$

式中,  $l$ 为花纹槽的长度,  $k$ 为常数。当车速为 $v$ 时,面积为 $S_c$ 、体积压缩量为 $\Delta V$ 、走向与汽车行驶方向的夹角为 $\gamma$ 的花纹槽声压的峰值可表示为

$$P_m = g(S_c, \gamma, v, \Delta V)$$

可以用上式近似表示第*j*个花纹槽噪声的时域波形:

$$P_{sj} \approx P_{mj} g_{sj} \sin(\omega_{sj}t + \theta_{sj})(B_s \sin(\omega t + \theta) + l_s)$$

其中

$$\begin{cases} 1 & \sin(\omega_{bi}t + \theta_i) \geq 0 \\ \xi_b & \sin(\omega_{bi}t + \theta_i) < 0 \end{cases}$$

式中,  $0 < \xi_s < 1$ ,  $\theta_{sj}$  和  $\theta$  为相位角,  $B_s \sin(\omega + \theta)$  用来模拟毛刺波,  $\omega \gg \omega_s, l_s$  为调节常数。

## §5.2 模型的建立

### §5.2.1 花纹块发声的动力学模型

花纹块的发声主要是在轮胎胎痕的前沿和后沿。在轮胎前沿, 当汽车前进时, 花纹块撞击地面引起花纹块局部振东, 产生振东噪声。这种噪声的波形如图1前半周期所示, 它的振东与花纹块在这一过程中收到的地面冲击力近似成正比。在胎痕后沿, 随着汽车前进, 胎体和花纹块迅速离开地面, 在该区域产生负压, 同时在轮胎局部弹力的作用下恢复变形时产生的复合噪音。

要求出花纹块产生的噪音, 首先我们先对花纹块进行受力分析, 求出附加加速度。

当花纹块M运行到胎痕前沿时, 其速度突然由  $v_1$  变成  $v_2$ , 根据平行四边形法则, 在这一瞬间  $\Delta t$  ( $\Delta t \approx d/|v|$ ,  $d$  为花纹块的宽度,  $v$  为车速) 内产生了速度  $v_3$ .  $v_3$  的产生是花纹块M受到地面的作用力  $F$  产生了加速度  $a$  的缘故。轮胎前沿花纹速度变化情况如图所示。因为  $|v_2| - |v_1| = |v|$ ,  $v_3$  计算如下:

$$|v_3| = |v_2 - v_1| \approx 2|v| \sin \frac{1}{2}\phi = |v| \sqrt{2 - \sqrt{4 - (L/R)^2}}$$

根据加速度公式可以求出  $a$ :

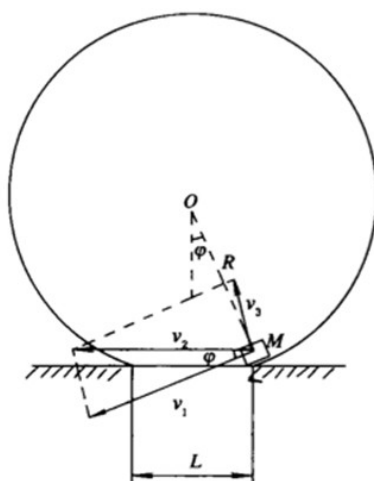
$$|a| \approx \frac{|v_3 - 0|}{\Delta t} = (v_2/d) \sqrt{2 - \sqrt{4 - (L/R)^2}}$$

设花纹块的等效质量为  $m_k$ ,  $m_k = \rho h S_k$  ( $\rho$  为花纹块的密度,  $h$  为花纹块的等效高度,  $S_k$  为花纹块的面积), 由牛顿第二定律

$$|F| = m_k |a| = \rho h (S_k/d) v^2 \sqrt{2 - \sqrt{4 - (L/R)^2}}$$

花纹块振东噪声的声压与振幅成正比, 而振幅与  $F$  成正比, 因此花纹块的噪声声压  $P_b$  与  $F$  成正比。噪声声强  $I_b$  与  $P_b$  是平方关系, 因此由上式可以得出花纹块的  $I_B$  与  $v$  的4次方成正比, 试验已经证实了这一点。同时还可以得出轮胎充气量越小, 胎痕越长, 花纹块的噪声声压越大; 花纹的密度越大 (弹性差), 噪声声压越大等关系。

花纹块在轮胎胎痕后沿的情况可近似看成胎痕前沿的逆过程, 在该处产生负压, 其幅度较小, 噪声声波幅值也较小。在建立花纹块噪声模型时, 可以用花纹块在胎痕前沿处的噪声声波形幅值乘以系数  $\xi_b$  并倒相来表示胎痕后沿处的噪声声波幅值。



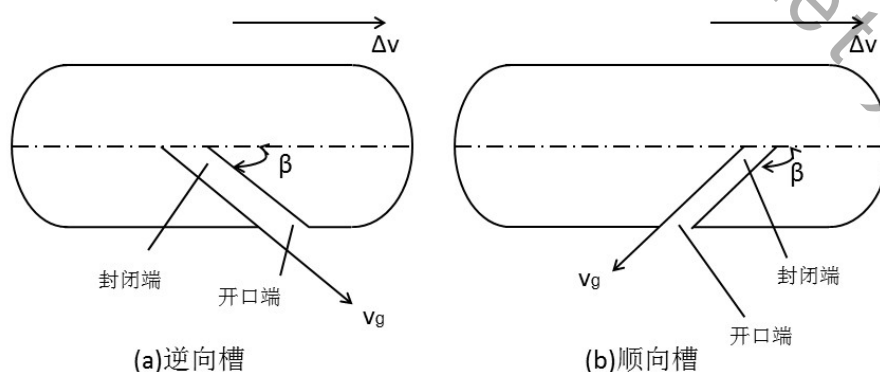
### §5.2.2 花纹槽发声模型

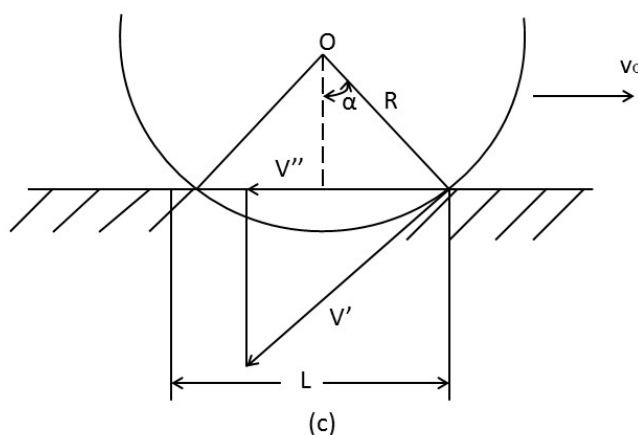
对于众多不同样式的花纹槽，我们分为顺向、逆向、横向、纵向分别进行分析。我们假设不同类型的轮胎转速相同，所受压力相同。

在一定负荷下，汽车以大于70km/h的速度行驶时，花纹槽中的空气被挤压并以一定速度喷出槽外产生噪音[4]。

图(a)中的花纹槽类似封闭端先着地，图(b)中的花纹槽类似于开口端先着地，槽内气体在汽车行驶过程中被挤压而喷出槽外。图(c)所示为轮胎行驶时的速度方向。

图(a)(b)(c)中， $R$ 为轮胎半径， $L$ 为胎痕长度， $v_c$ 为汽车行驶速度， $v'$ 为轮胎的转动线速度， $v''$ 为 $v'$ 投影到车前进方向的速度分量， $\Delta v = v_c - v''$ 为气团从槽内喷出时相对于车的速度， $\sin \alpha = \frac{L}{2R}$ 。汽车行驶速度应该与轮胎转动线速度相同，即 $|v_c| = |v'|$ 。可计算得到 $|v''| = |v'| \cos \alpha$ （一般 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ），因此 $|v'| > |v''|$ ，则 $|v_c| > |v''|$ 。





$|\Delta v|$ 可由下式得到：

$$|\Delta v| = |v_c - |v''||$$

将 $|v''| = |v'| \cos \alpha$ 带入上式得到：

$$|\Delta v| = |v_c| \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2R} \right)^2} \right)$$

$\Delta v$ 投影到 $v_g$ 方向上的分量 $v_d$ 大小为：

$$|v_d| = |\Delta v| \cos \beta = |v_c| \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2R} \right)^2} \right) \cos \beta$$

沟口空气团喷出时的合成速度为 $v_h$

$$v_h = v_g v_d$$

显然有 $R > L/2$ , 得到 $1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2R} \right)^2} > 0$ 。

在一定的车速和负荷条件下, 对上式讨论如下：

- $\beta = \pi/2$ 时,  $\cos \beta = 0, v_d = 0$ , 即花纹槽为横向槽, 没有附加速度分量加在喷出的气团上, 气团出口速度保持不变。
- $\beta = 0$ 时  $\cos \beta = 1, v_d = |\Delta v|$ , 即花纹槽为纵向槽, 全部速度附加在喷出气团上, 使其团出口速度增大。
- $\beta < \pi/2$ 时,  $\cos \beta > 0, v_d > 0$ , 即花纹槽为逆向槽, 有一个正值速度分量加在喷出的气体团上, 使气团的出口速度增大。
- $\beta > \pi/2$ 时,  $\cos \beta < 0, v_d < 0$ , 即花纹槽为顺向槽, 有一个负值速度分量加在喷出的气团上, 使气团的出口速度减小。

设被挤出的空气团的等效质量为 $m_c$ ，以速度 $v_h$ 喷出，其动能为

$$W = \frac{1}{2} m_c v_g^2$$

$m_c$ 与花纹槽内腔的大小有关，内腔越大， $m_c$ 越大。汽车的载质量越大，花纹块的变形越大，花纹槽的体积压缩量 $\Delta V$ 也就越大。同时，由于汽车行驶时轮胎迅速挤压轮胎前方空气，因此车速 $v$ 越快， $\Delta V$ 也越大，并且气体被压缩的越快， $v_g$ 越大。而 $m_c$ 与 $\Delta V$ 成正比。由此可见，花纹槽在轮胎的胎痕前沿时，被基础气体的动能随着汽车载质量和行驶速度的增大而增大。

接下来我们对势能进行分析：

当空气团喷出时，由于出来的是被压缩的气体，因此具有势能。先作两个假设：

- 空气团从槽内喷出时刻的欺压与被压缩的欺压相同，即 $p = \tau p_0$  ( $p_0$ 为大气压强， $\tau$ 为压缩比的倒数)；
- 空气团近似球状，被挤出花纹槽的体积为 $V_s$ 。

因此，可以通过求“做工”的方法求出势能 $E$ 。空气团向外的作用力为 $\Delta p S'$  ( $\Delta p$ 为空气团压强与大气压强的差， $S'$ 为被挤出的空气团表面积)， $\Delta r$ 圆球状空气团的径向增大量，可求功的微元如下：

$$\Delta W = \Delta p S' \Delta r = \Delta p \Delta V$$

则

$$E = W = \int_{V_s}^{rV_s} \left( \frac{V_s p}{V} - p_0 \right) dV = \int_{V_s}^{rV_s} \left( \frac{\tau V_s}{V} - 1 \right) p_0 dV = V_s p_0 (\ln \tau^\tau + \tau - 1)$$

式中， $V$ 为花纹槽内腔体积。

空气团出来后，其动能和势能将在很短的时间内转换成热能和声能。设 $W$ 和 $E$ 转换成 $W_s$ 的比例分别为 $\eta$ 和 $\zeta$ ，则

$$W_s = \eta W + \zeta E = \frac{1}{2} \eta m_c v_h^2 + \zeta V_s p_0 (\ln \tau^\tau + \tau - 1)$$

则声压级为：

$$L = 10 \lg \frac{W_s}{W_0} = 10 \lg \left( \frac{1}{2} \eta m_c v_h^2 + \zeta V_s p_0 (\ln \tau^\tau + \tau - 1) \right) - 10 \lg W_0$$

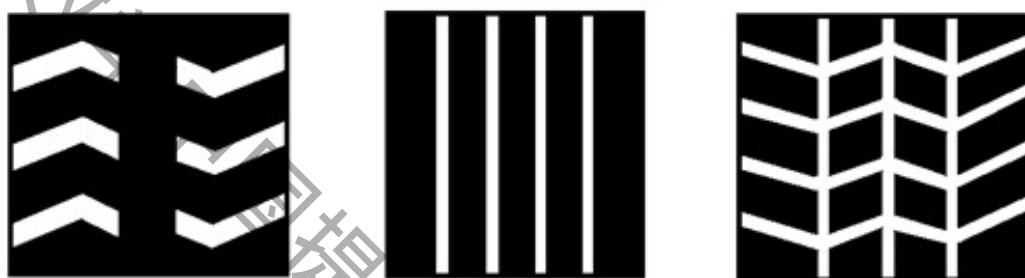
从上面的分析可以看出，单个花纹槽的发声量随着轮胎花纹槽内腔体积，车速和汽车载质量的增大而增大。

### §5.3 模型的求解

由以上建立的模型我们可知花纹槽的发声量随着轮胎花纹槽的内腔体积、车速和汽车质量的增大而增大，但是我们假设车速、质量和花纹槽内腔深度均相同，故我们只需考虑花纹槽内腔投影在路面上的面积与产生噪音的关系。

#### §5.3.1 不同花纹槽面积的求解

通过对众多花纹槽形状的分析，我们将花纹槽分为以下三类，分别是：横向、纵向和混合形。（空白处为花纹槽的面积，阴影处为花纹块的面积）



首先我们分别对横向、纵向和混合形花纹槽面积占整个轮胎面积的比例进行求解，即为上图中白色面积占整个图形面积的比例。

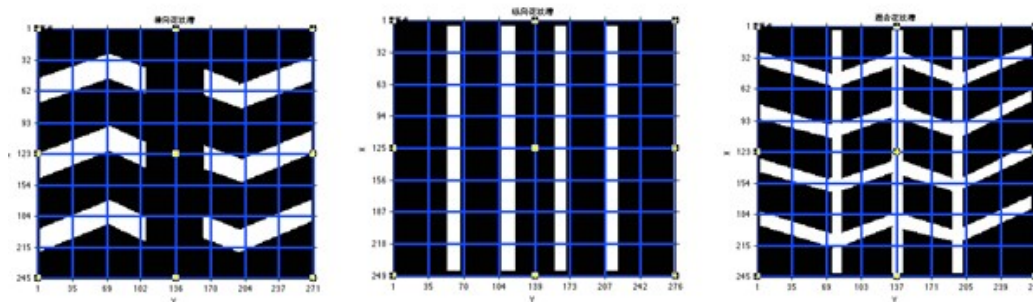
- 分别将三种图片导入Matlab 中，运用rgb2gray功能将其转化为灰度图。
- 使用im2bw函数将灰度图像转换为二值图像。
- 运用sum函数分别对像素点为0的情况和总共的像素点个数进行统计，相除得到白色面积占总面积的比例。

得到以下结果：

花纹槽形状	横向	纵向	混合
花纹槽面积与总面积的比例	0.294	0.285	0.463

#### §5.3.2 不同花纹槽产生噪声的求解

首先我们对以上三张模拟花纹槽形状的图片划分为 $8 \times 8$ 的网格：



根据上图划分的网格在每一方格内进行噪音的求解，其中每一方格内花纹槽的面积根据面积求解方法进行求解，由假设可知不同类型的花纹槽图片的面积相等，即每一个小方格大小相同，边长 $a=3\text{cm}$ 。

通过Matlab运算我们分别得到三个 $8 \times 8$ 面积比例（花纹槽面积与总面积的比）矩阵。

横向花纹比例矩阵 $A_1$ ：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.102 & 0.113 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.045 \\ 0.725 & 0.812 & 0.799 & 0.148 & 0.203 & 0.635 & 0.68 & 0.839 \\ 0.201 & 0 & 0.01 & 0.02 & 0.154 & 0.401 & 0.389 & 0.08 \\ 0.334 & 0.78 & 0.765 & 0.151 & 0.182 & 0.101 & 0.201 & 0.659 \\ 0.713 & 0.169 & 0.18 & 0.151 & 0.206 & 0.759 & 0.736 & 0.334 \\ 0.009 & 0.264 & 0.271 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0.449 \\ 0.793 & 0.551 & 0.602 & 0.189 & 0.258 & 0.75 & 0.798 & 0.47 \\ 0.053 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

纵向花纹比例矩阵 $A_2$ ：

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \\ 0 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0.311 & 0 & 0.311 & 0 \end{pmatrix}$$

混合花纹比例矩阵 $A_3$ :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0 & 0.311 & 0.201 & 0.202 & 0.301 & 0 & 0.137 \\ 0.31 & 0.313 & 0.502 & 0.503 & 0.501 & 0.503 & 0.306 & 0.16 \\ 0.306 & 0.1 & 0.314 & 0.501 & 0.502 & 0.303 & 0.256 & 0.302 \\ 0 & 0.287 & 0.503 & 0.241 & 0.242 & 0.506 & 0.15 & 0.1 \\ 0.31 & 0.289 & 0.45 & 0.468 & 0.483 & 0.487 & 0.302 & 0.289 \\ 0 & 0.13 & 0.42 & 0.149 & 0.15 & 0.394 & 0.05 & 0.296 \\ 0.309 & 0.313 & 0.501 & 0.463 & 0.465 & 0.501 & 0.301 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.31 & 0.14 & 0.142 & 0.3017 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $R=30\text{cm}$ ,  $L=18\text{cm}$ , 横向花纹左半部分 $\beta=70$ , 右侧花纹 $\beta=110$ , 纵向花纹 $\beta=90$ , 混合花纹上下两侧花纹 $\beta=90$ , 左侧花纹 $\beta=110$ , 右侧花纹 $\beta=70$ , 车速为 $140\text{km/h}$ , 花纹槽深度 $h=2\text{cm}$ ,  $\eta=0.12$ ,  $\zeta=0.15$ .

$$L = 10 \lg \frac{W_s}{W_0} = 10 \lg \left( \frac{1}{2} \eta m_c v_h^2 + \zeta V_s p_0 (\ln \tau^\tau + \tau - 1) \right) - 10 \lg W_0$$

$$|v_h = v_g + v_d = v_g + v_c| \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{L}{2R} \right)^2} \right) \cos \beta$$

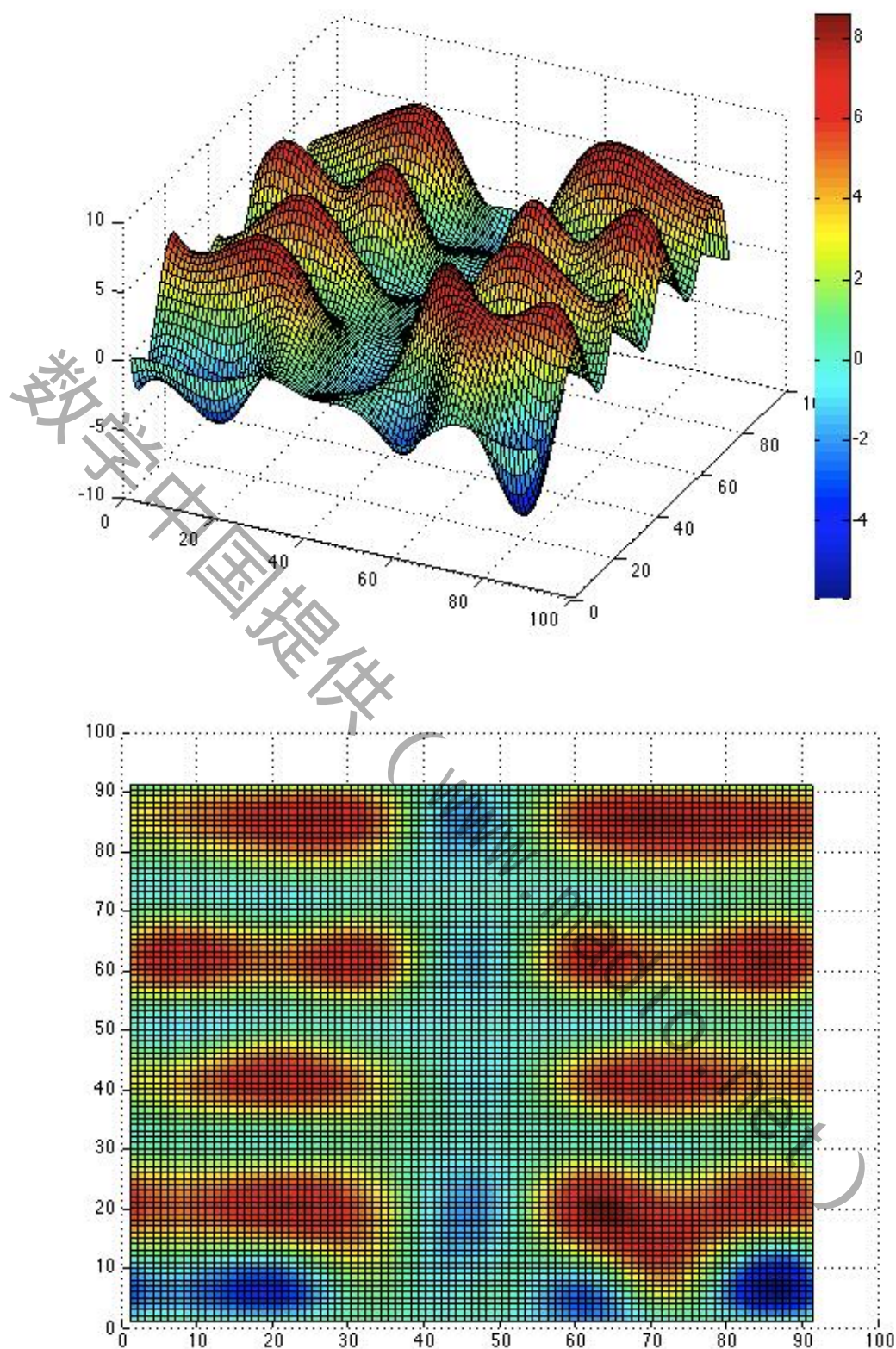
根据面积比例矩阵 $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ , 和以上公式运用Matlab 进行运算, 得到每个方格内的噪声声级, 见以下三个噪声声级分布矩阵:

• 横向花纹:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.02 & -0.12 & 0.9 & 0 & -0.2 & -2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.02 & 0 & 0 & 3 & -0.9 & 0.2 & 2.1 & 5.8 & -0.6 & 0.5 \\ 6.2 & 5.6 & 7.4 & 4.8 & -1 & 0 & 8.1 & 5.2 & 6.6 & 4.5 \\ 0 & 0.2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & -0.3 \\ 2.8 & 5 & 7.2 & 4.2 & 0.2 & 0 & 5.3 & 7.2 & 4.8 & 5.5 \\ 0 & -0.7 & 0.1 & 0 & -0.3 & -0.2 & -0.5 & 0 & 0.9 & -0.6 \\ 4.9 & 6.5 & 4.8 & 6.9 & 0 & 0.4 & 6.7 & 4.5 & 7.1 & 4.6 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.2 & 0 & 0 & -0.2 & -0.4 & 1 & 0.1 \\ 2.1 & 3.6 & 5.6 & 4.9 & -1 & 0.1 & 4.8 & 6.5 & 5.5 & 4.5 \\ 0 & 0.4 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 & -0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三维分布图像:

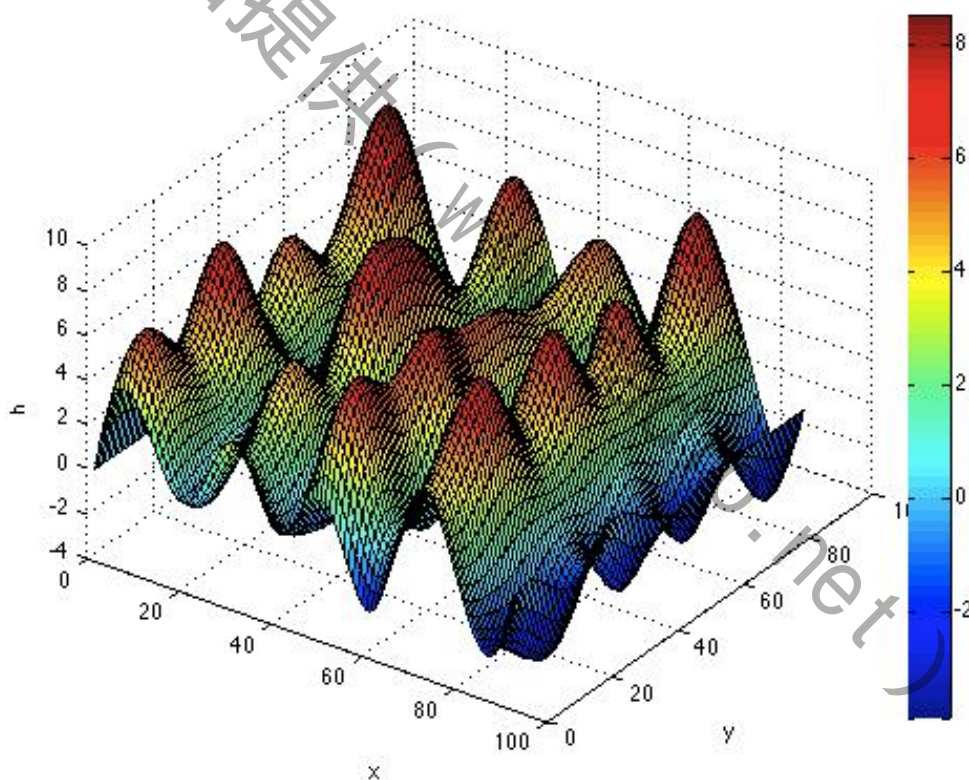




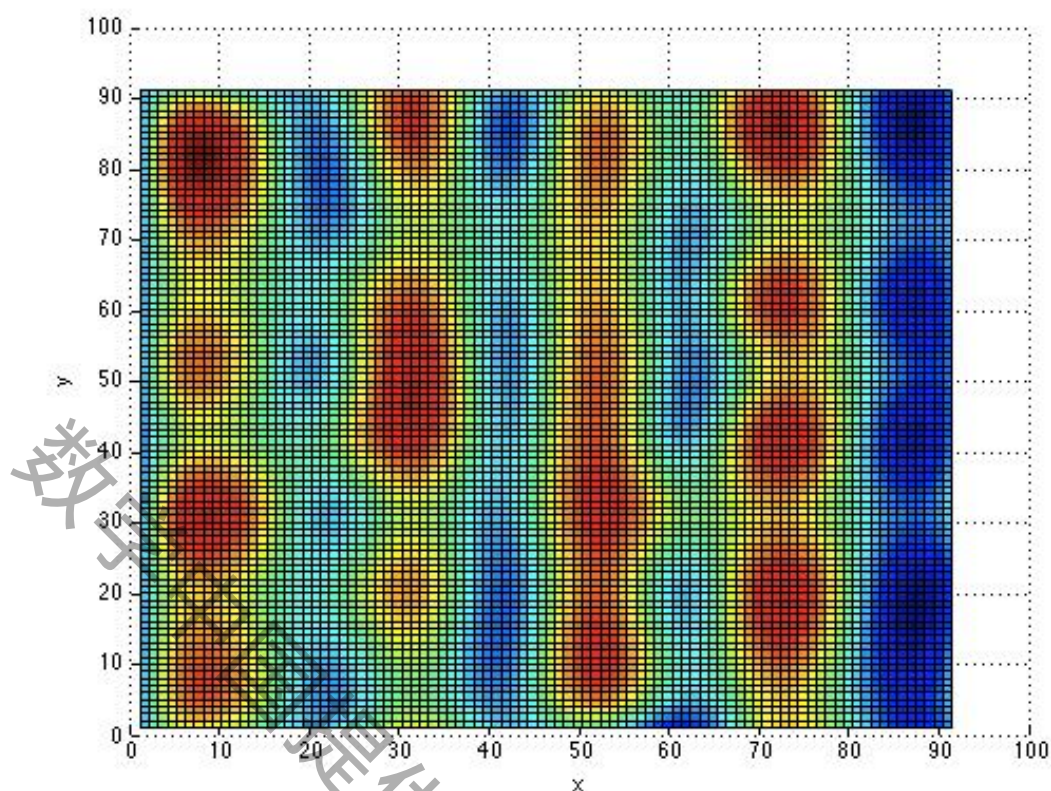
● 纵向花纹：

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3.2 & -0.12 & 3.4 & 0 & 2.1 & -2 & 4.1 & 0 & 0.2 \\ -0.02 & 4.7 & 0 & 3 & -0.9 & 6.7 & 0.7 & 5.8 & -0.6 & 0.5 \\ 0 & 3.9 & 1 & 4.8 & -1 & 5.5 & 0.1 & 7.1 & 0 & -0.6 \\ 0 & 6.5 & 0 & 3.2 & 0 & 6.7 & 2.3 & 4.5 & 0.5 & 1 \\ -0.43 & 3 & 1.8 & 6.7 & 0.2 & 5.8 & 0 & 7.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 4.12 & 0.1 & 7.4 & -0.3 & 5.6 & -0.5 & 4.1 & 0.9 & -0.6 \\ -0.09 & 3.2 & 1.1 & 5.6 & 0 & 4.6 & 0 & 6.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & -0.5 & 3.2 & 0.9 & 4.3 & -0.2 & 3.3 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 6.7 & -1 & 5.5 & -1 & 5.5 & 1.1 & 6.7 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.8 & 5.3 & 0.2 & 2.8 & 0.9 & 5.3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三维分布图像：



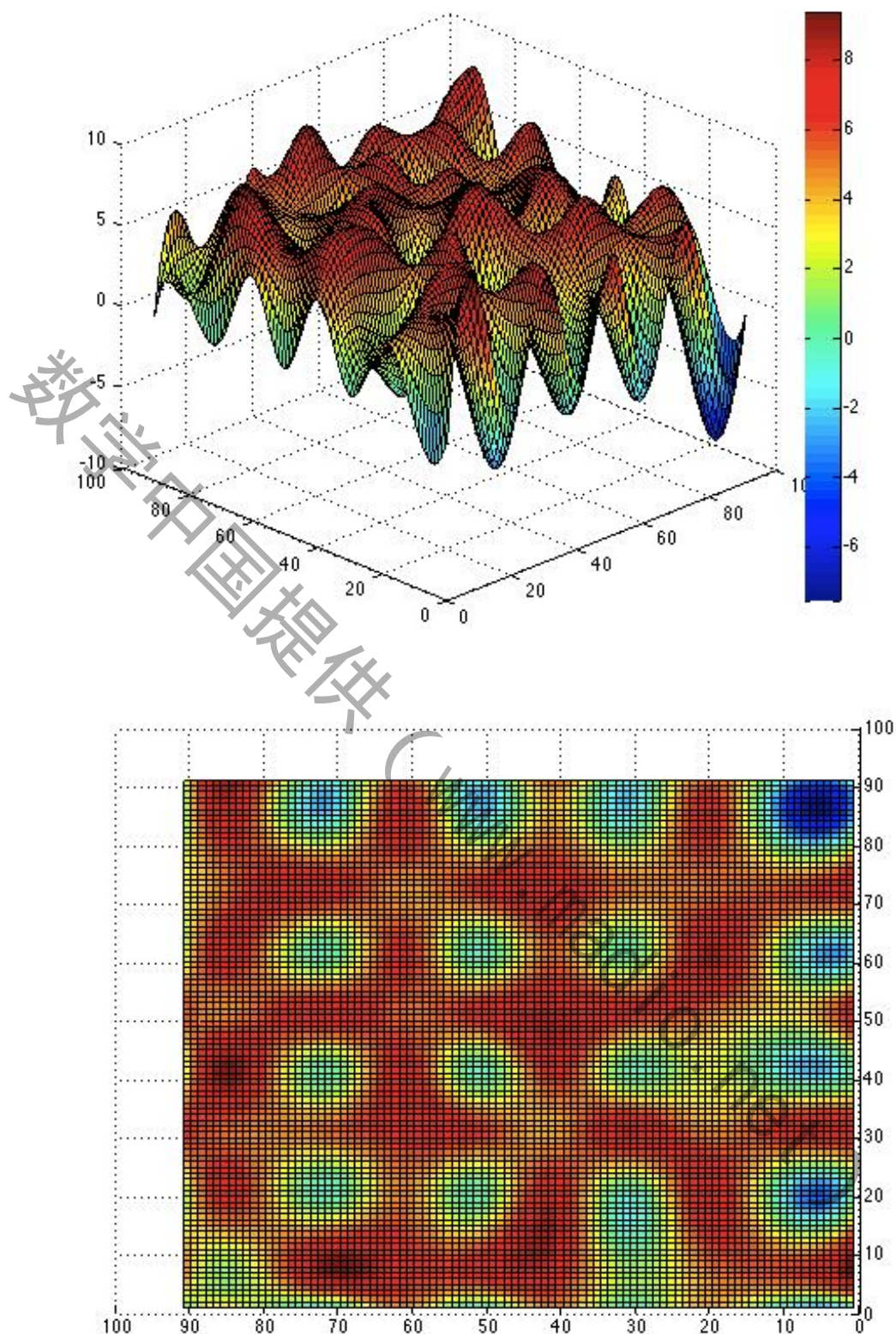




● 混合型花纹

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 7.6 & -0.12 & 7.4 & 0 & 7.2 & -2 & 7.1 & 0 & 0.2 \\ -0.02 & 4.5 & 0 & 6.5 & -0.9 & 3.4 & 2.1 & 5.8 & -0.6 & 0.5 \\ 4.2 & 5.6 & 7.4 & 4.8 & 2.6 & 5.4 & 8.1 & 5.2 & 6.6 & 4.5 \\ 0 & 0.2 & 0 & 7.8 & 0 & 6.6 & 0.1 & 4.9 & 0.5 & -0.3 \\ 5.1 & 8.2 & 7.2 & 4.2 & 6.7 & 8.1 & 5.3 & 7.2 & 4.8 & 5.5 \\ 0 & 5.4 & 0.1 & 6.4 & -0.3 & 6.7 & -0.5 & 6.1 & 0.9 & -0.6 \\ 4.9 & 6.5 & 4.8 & 6.9 & 7.3 & 5.4 & 6.7 & 4.5 & 7.1 & 4.6 \\ 0 & 7.4 & -0.5 & 5.3 & 0 & 7.6 & -0.27 & 1 & 0.1 & 0.6 \\ 2.1 & 3.6 & 5.6 & 4.9 & 7.3 & 5.4 & 5.7 & 6.5 & 5.5 & 7.3 \\ 0 & 4.6 & 0 & 6.7 & 0.2 & 6.2 & 0.1 & 2.4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

三维分布图像：



### §5.3.3 轮胎花纹噪声的干涉合成

轮胎花纹噪声主要由3个部分组成，即花纹块击地的噪声、花纹槽喷吸泵浦噪声以及噪声波之间的干涉与合成，轮胎切割空气噪声、气柱共鸣噪声等是次要的。轮胎花纹噪

声的合成可以用下式表示：

$$P(t) = \sum_{k=0}^{s-1} (\alpha \sum_{i=0}^{a-1} p_{bi}(t) + \beta \sum_{j=0}^{n-1} p_{sj}(t))$$

式中，a，n和s分别表示每条花纹的块数、槽数和胎面花纹的条数， $\alpha$ 和 $\beta$ 分别表示块和槽的合成因子[5]。

其大小可以通过试验得到。

下面讨论轮胎花纹结构参数对轮胎花纹噪声的影响：

- 花纹块和花纹槽的面积越大，声压越大，轮胎噪声的峰值越高。
- 相邻花纹块（槽）之间的节距比例对噪声在各频率分布的作用较为突出，一般来说，他们的比例为无理数时，噪声能量在各频段上的分布比较分散。
- 优化轮胎花纹比和节距排列，可使噪声能量在各频段上分布比较均衡。
- 当轮胎含有多个花纹条时，从上面的合成公式可以看出，轮胎花纹的错位可以使左右花纹产生的N形波部分抵消，避免相互叠加，从而达到降噪的目的[6]。
- 花纹条越多，通过错位就越能使噪声能量在各频段均衡。但花纹条数的增加会影响轮胎的其它力学性能[7]。

#### §5.4 模型的检验和改进

在实验室内的转鼓上做噪声实验时也发现，逆向花纹槽的噪声比顺向槽大。在这种测试条件下，轮胎没有车前进速度的分量，因此在槽喷出的气体上没有附加的分量速度。逆向槽噪声较大的原因在于槽的内侧口先着地，并被胎痕区地面“封闭”，可视为一段开口的槽，槽内的气体是由内向外压缩，并喷射出去；而顺向槽使外侧端口先着地，内侧口还未着地，因此是开启的，这样槽内气团压缩后，在槽内，外两侧端口喷射，速度较小，气团获得的动能就小。

此外，由于顺向槽是两头通气，气团有效压缩量减小，使槽内气体获得的动能和势能之和也较小，一般小于50%如果其中一部分转化成噪声能，则逆顺向槽发出的噪声相差3dB左右，即

$$\Delta L = 10 \lg \frac{\omega_i}{\omega_c} \approx 3dB$$

其中， $\omega_i$ 为逆向沟噪声功率， $\omega_c$ 为顺向沟噪声功率。

故纵向槽除气流的微弱高频涡流噪声外基本上不产生大的噪声，横向槽噪声较大，为

顺、逆向花纹之和，混合槽由于横向槽中间有纵向槽相联通，故混合槽中的横向槽的噪声相对于横向槽有所降低。

由于横向槽中的逆向槽噪声较大，势必在逆向槽某个角度存在一个声压极值(P)，根据下式进行计算：

$$P = K \sin \beta \left| \cos \left( \beta + \frac{70\pi}{4v_c} \right) \right|$$

式中，K是常数， $v_c$ 为车速（考虑其不小于70km/h的情况）

P随着 $\beta$ 的变化而改变，故需对Hayden[8,9]提出的轮胎花纹槽空气彭浦噪声的经验公式进行修正。声援发出的总声压级的原公式为：

$$L = 68.5 + 20 \lg \frac{gl}{s} + 10 \lg n + 40 \lg v_c + 20 \lg f_c - 20 \lg r$$

上式也可表示为：

$$L = 20 \lg \left( \frac{10^{8.5} gl \sqrt{n} v_c^2 f_c}{sr} \right) \equiv 20 \lg \frac{P_d}{P_t}$$

式中， $P_d$ 为等效声压， $P_r$ 为参考声压，g为槽深，l为槽宽，s为槽间距离，n为胎面伤得横槽数， $f_c$ 为胎面槽容积变化率，r为测点到声源的距离。

对于逆向槽应附加声压 $\Delta P$ ，定义 $\varepsilon = \frac{\Delta P}{P_d}$ ，则上式变为

$$L' = 20 \lg \left( \frac{P_d + \Delta P}{P_t} \right) = 20 \lg \left[ \frac{P_d (1 + \frac{\Delta P}{P_d})}{P_t} \right] = 20 \lg \frac{P_d}{P_t} + 20 \lg (1 + \varepsilon) = L + 20 \lg (1 + \varepsilon)$$

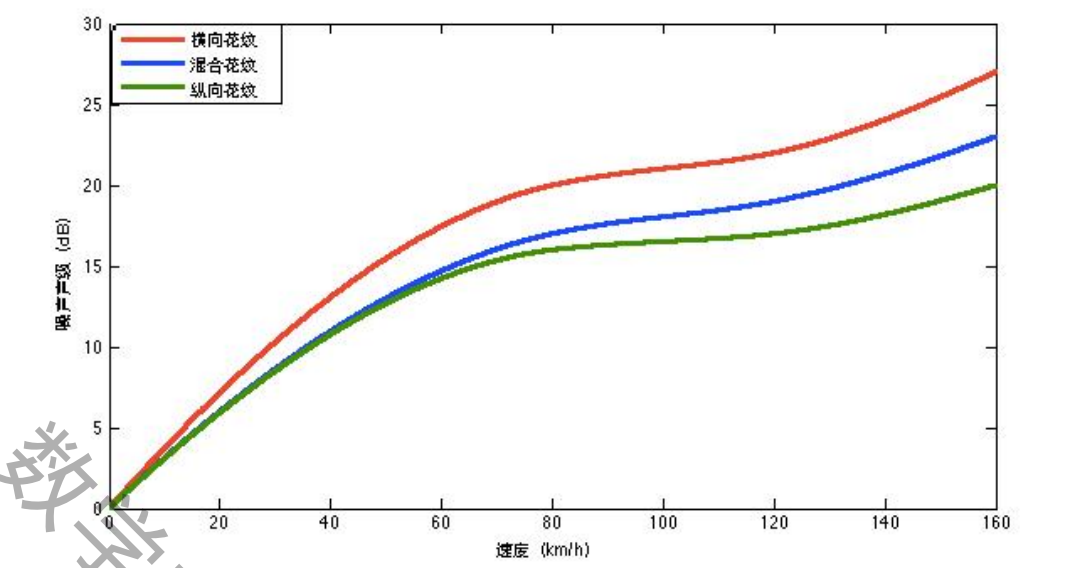
一般 $\varepsilon$ 为20%~100%，则逆向槽比顺向槽的声压级增大(2~6) dB。同理我们可以得到横向槽比纵向槽高(5~10) dB；横向槽比混合槽高(3~6) dB。

## §5.5 结论

通过以上的分析我们得到以下结论：

- 逆向槽比顺向槽的声压级增大(2~6) dB；横向槽噪声声压级比纵向槽高(5~10) dB，比混合槽高(3~6) dB。
- 花纹块和花纹槽的面积越大，声压越大，轮胎噪声的峰值越高。
- 当轮胎含有多个花纹条时，轮胎花纹的错位可以使左右花纹产生的N形波部分抵消，避免相互叠加，从而达到降噪的目的。
- 不同花纹产生的噪声随速度的变化如下图所示：





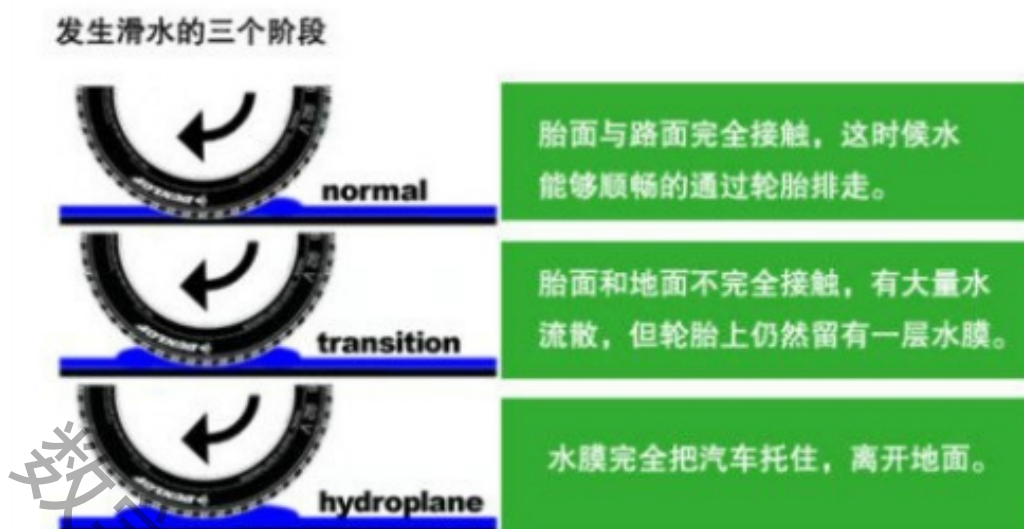
## §6 模型三：胎面排水模型

### §6.1 问题分析

汽车在雨天行驶时容易打滑，我们查阅资料可知，轮胎的湿附着性能与排水能力有着紧密相连的关系。绝大多数的轮胎都有排水沟的花纹，所以在这个模型中，我们着重于分析不同胎面花纹的湿附着性能。

当轮胎在有积水的路面上滚动时，会挤压积水层，与轮胎接触的前部的积水会产生一定的压力冲向轮胎，这个就和我们把手伸进水缸里搅动水，会发现水会回馈手一个反作用力一样。但是水对轮胎产生的这个动压力与速度的平方成正比，当轮胎的转速再次提高，当动压力与轮胎的载荷相平衡的时候，这时候轮胎就完全是失去了与路面的接触，漂浮在水膜上，失去与地面的摩擦力。

这种现场就是学术上的“滑水现象”具体情况如下图所示：



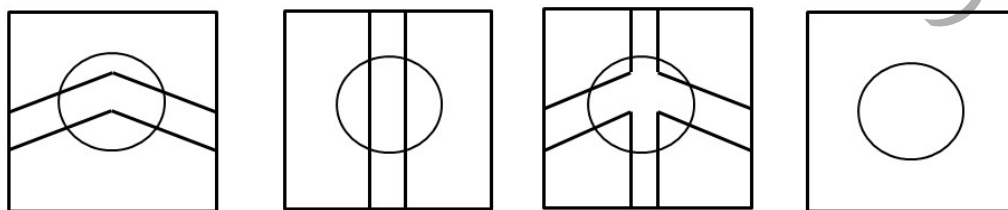
在研究潮湿路面上胎面单元附着性能的各影响因素中，由于考虑胎面单元是柔性的，胎面单元的表面压力决定了它的垂直变形，进而影响了胎面单元和路面之间的液膜厚度，所以研究胎面单元的压力分布意义重大。

## §6.2 模型的建立

### §6.2.1 胎面花纹对液膜单元压力分布的影响

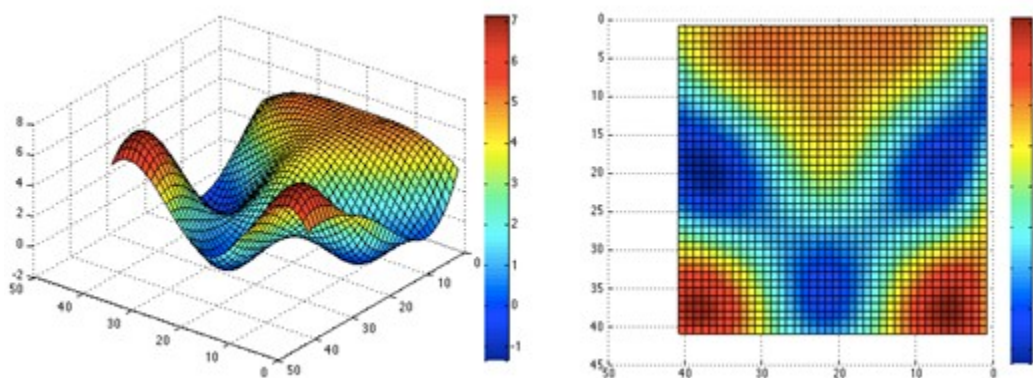
在轮胎发生粘性滑水时，胎面花纹的作用是非常复杂的。本文把胎面花纹导入模型时层假设，在轮胎发生滑水湿，胎面花纹的作用为排水。下面为我们来看看，在这一假设下胎面花纹对轮胎性能的影响。

在 $F=1\text{N}$ ，滑动速度为 $10\text{m/s}$ ，路面粗糙度为 $0.5\text{mm}$ ，楔角为 $1.5^\circ$  条件下，太慢单元下降 $0.01\text{m/s}$ 后，光滑胎面单元和带不同花纹的胎面单元的液体呀压力分布。运用Matlab对下图中的一块微小面积进行压力计算，并将结果用三维图表现出来。

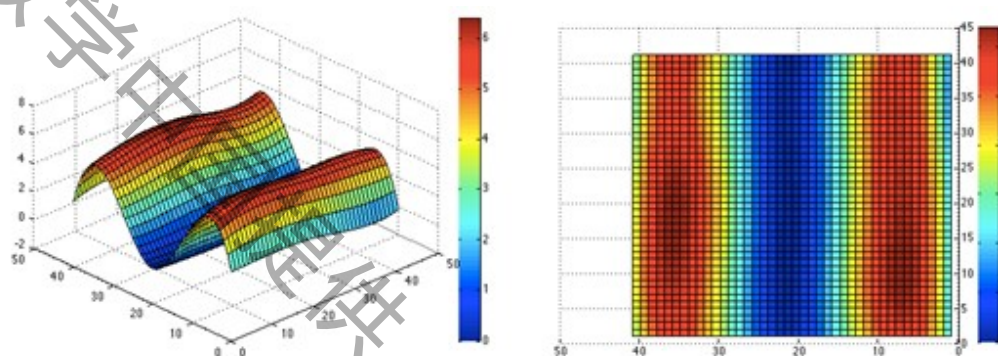


#### ● 横向花纹对地面压力分布图

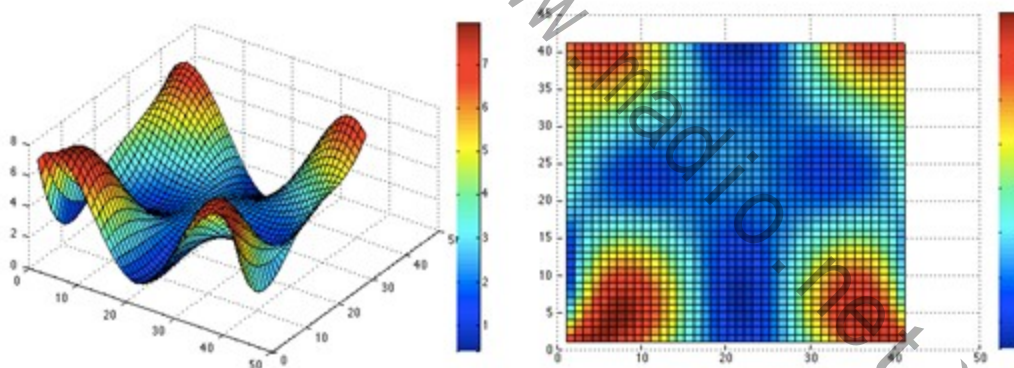




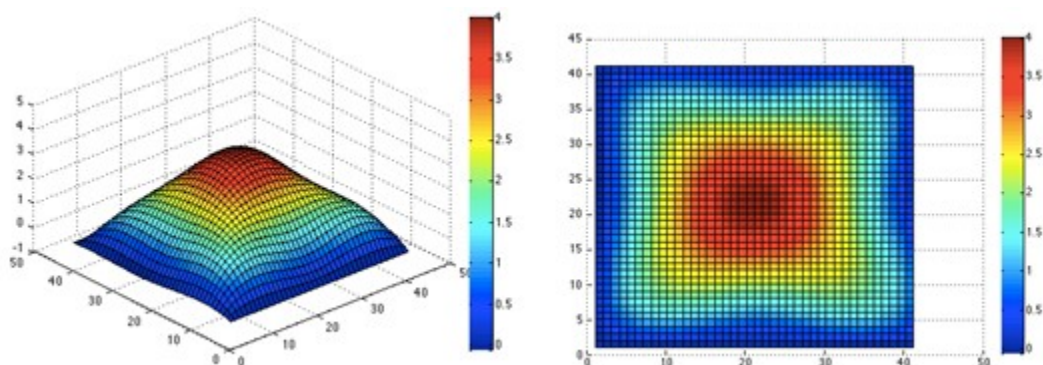
- 纵向花纹对地面压力分布图



- 混合花纹对地面压力分布图



- 光滑胎面对地面压力分布图



由上图可以发现，花纹对胎面单元的液体压力影响较大。从液体压力的分布来看，花纹对其附近的液膜压力的拉低作用明显，但带花纹的胎面单元的液体压力最大值比光滑胎面单元要大。

- 纵向花纹对液膜的最大、最小压强分别为

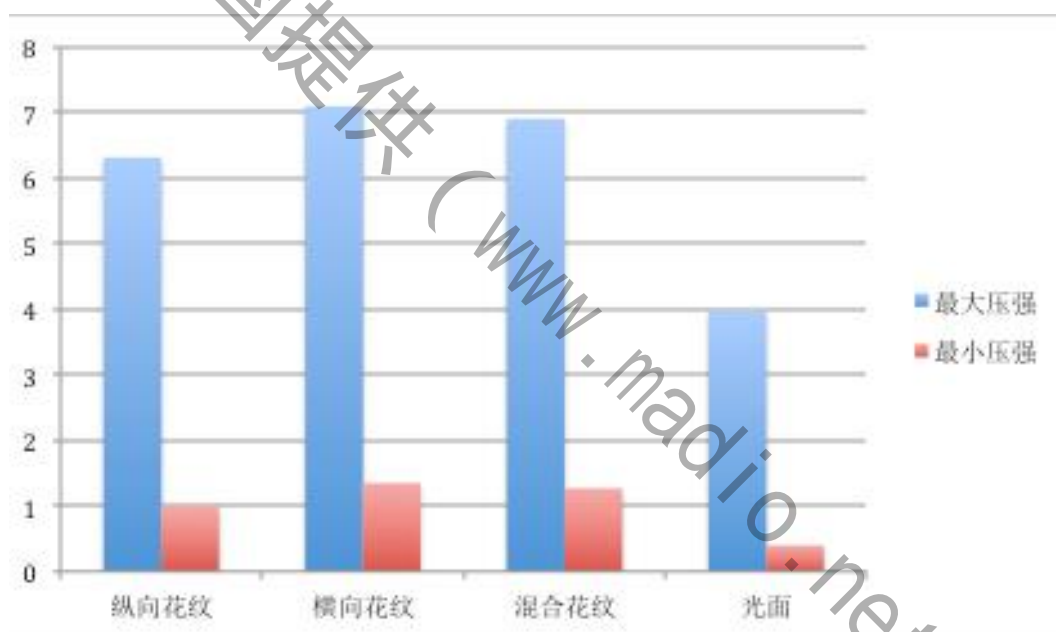
$$P_{max} = 6.32 \times 10^{-2} MPa, P_{min} = 1.01 \times 10^{-2} MPa$$

- 横向花纹对液膜的最大、最小压强分别为

$$P_{max} = 7.1 \times 10^{-2} MPa, P_{min} = 1.35 \times 10^{-2} MPa$$

- 混合花纹对液膜的最大、最小压强分别为

$$P_{max} = 6.91 \times 10^{-2} MPa, P_{min} = 1.27 \times 10^{-2} MPa$$



### §6.2.2 胎面载荷平衡和边界条件方程

综上所述，胎面单元与路面处于混合润滑状态时，胎面单元的受力平衡方程为：

$$W_a(h) + \iint_{D_s} p(x, y, t) dx dy = F$$

式中， $p(x, y, t)$  为  $t$  时刻路面-胎面单元流体压力； $D_s$  为胎面单元表面区，也是计算域； $F$  为作用在胎面单元上的垂直外荷载。

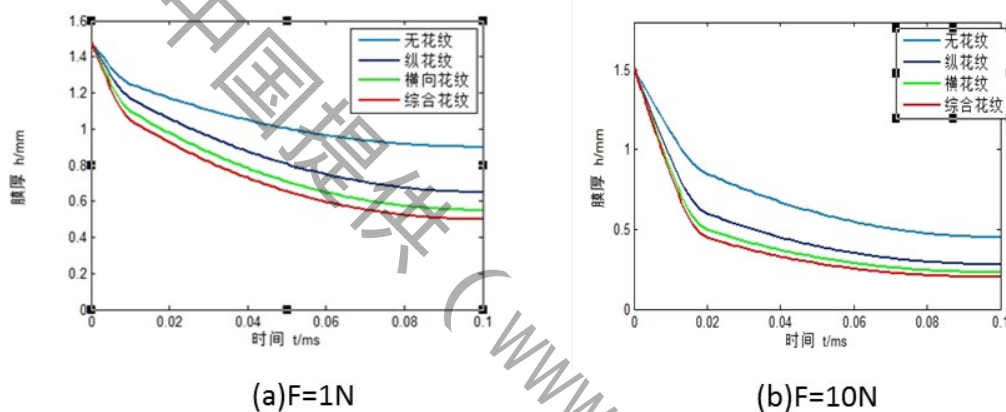
其中，它的约束边界条件为：

$$\begin{cases} p(x, y, t) = 0 & \text{out} \\ p(x, y, t) = 0 & \text{in} \\ h(x, y, t) = h_i & \text{start} \end{cases}$$

式中， $h_i$  为初始时刻胎面单元高度值。

### §6.2.3 外荷载对胎面单元附着性能的影响

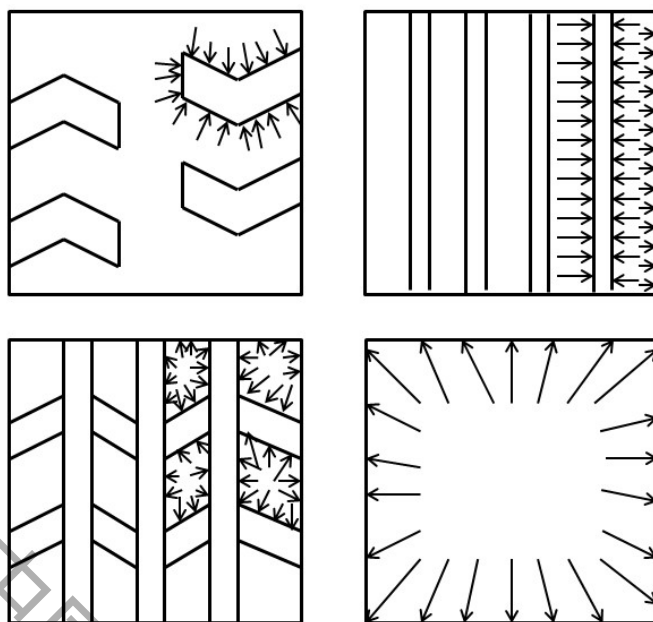
下图为 $\alpha = 1.5^\circ$ ， $\sigma = 0.5\text{mm}$ ， $U = 10\text{m/s}$ 时不同花纹单元在不同阶段下的膜厚/时间曲线。



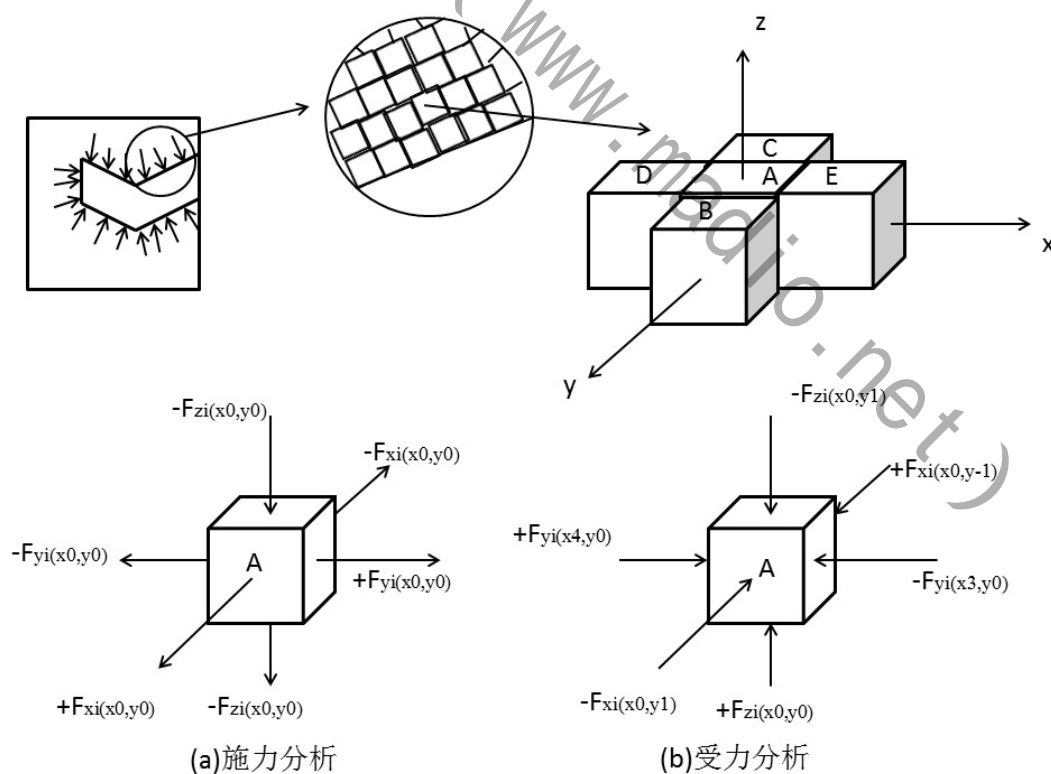
由上图可以看出，当胎面单元的外荷载增大时，各种花纹胎面单元下降速度的提升都十分明显，且在相同的外荷载条件对不同花纹性能比较都可以得到，综合花纹的附着性能最好，光面胎面单元得附着性能最差。

### §6.2.4 不同花纹在外荷载作用下的排水能力模型

如下图所示，我们分别对在相同外荷载作用下的四种花纹进行排水性能的分析，其中箭头表示在微小面积内排水的方向。



我们以横向花纹为例，如下图所示，进行分析某一微小面积上的排水性能分析，我们将该微小面积上的水膜划分为 $n$ 多个长 $dx$ 宽 $dy$ 高 $dz$ 的立方体，对其中任意一个立方体进行受力分析。



设其单位面积所受的压强为 $P_{i(x,y)}$ , ( $x, y$ 表示其横纵坐标值,  $i$ 表示花纹类型)

$$+P_{zi(x_0,y_0)} = P_{i(x_0,y_0)} dx dy$$

此处 $x_0, y_0$ 为微小立方体中心处的坐标。

我们近似认为该微小立方体的受力大小等于该立方体中心点的受力大小。

由于微小液体块对其受力的传递基本无损耗，故：

$$+F_{xi(x_0, y_0)} = +F_{yi(x_0, y_0)} = +F_{zi(x_0, y_0)} = -F_{xi(x_0, y_0)} = -F_{yi(x_0, y_0)}$$

“+”表示力沿该轴正方向，“-”表示力沿该轴负方向。

如上图所示，为该微小立方体相邻的立方体，分别令为B、C、D、E。对该微小立方块所受力沿x, y, z轴分别进行分析沿x轴方向分析：

$$\begin{cases} +F_{ci(x_0, y-1)} = P_{i(x_0, y-1)} dx dy \\ -F_{xi(x_0, y_1)} = P_{i(x_0, y_1)} dx dy \end{cases}$$

综合x, y, z轴分析可得：

$$\begin{cases} \Delta F_x = F_{ci(x_0, y-1)} - F_{xi(x_0, y_1)} = [P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}] dx dy \\ \Delta F_y = 0 \\ \Delta F_z = 0 \end{cases}$$

由上式我们可以发现，该微小立方体沿y、z轴方向的合力为0，故我们只需考虑其沿x轴方向的受力。

故加速度为

$$a = \frac{\Delta F_x}{m} = \frac{[P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}] dx dy}{\rho dx dy dz} = \frac{P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}}{\rho dz}$$

进而我们通过对其加速度积分可以求得其排水的速度为

$$v = \int_{y_0}^y \frac{\Delta F_x}{m} dy = \int_{y_0}^y \frac{P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}}{\rho dz} dy$$

其中y为点 $(x_0, y_0)$ 到最近得花纹槽或者轮胎边缘得距离。

### §6.3 模型的求解

根据以上模型的建立我们得到以下计算公式：

● 边界条件：

$$\begin{cases} p(x, y, t) = 0 & out \\ p(x, y, t) = 0 & in \\ h(x, y, t) = h_i & start \end{cases}$$



- 排水速度:

$$v = \int_{y_0}^y \frac{\Delta F_x}{m} dy = \int_{y_0}^y \frac{P_{i(x_0, y-1)} - P_{i(x_0, y_1)}}{\rho dz} dy$$

- 总控制方程:

$$W_a(h) + \iint_{D_s} p(x, y, t) dx dy = F$$

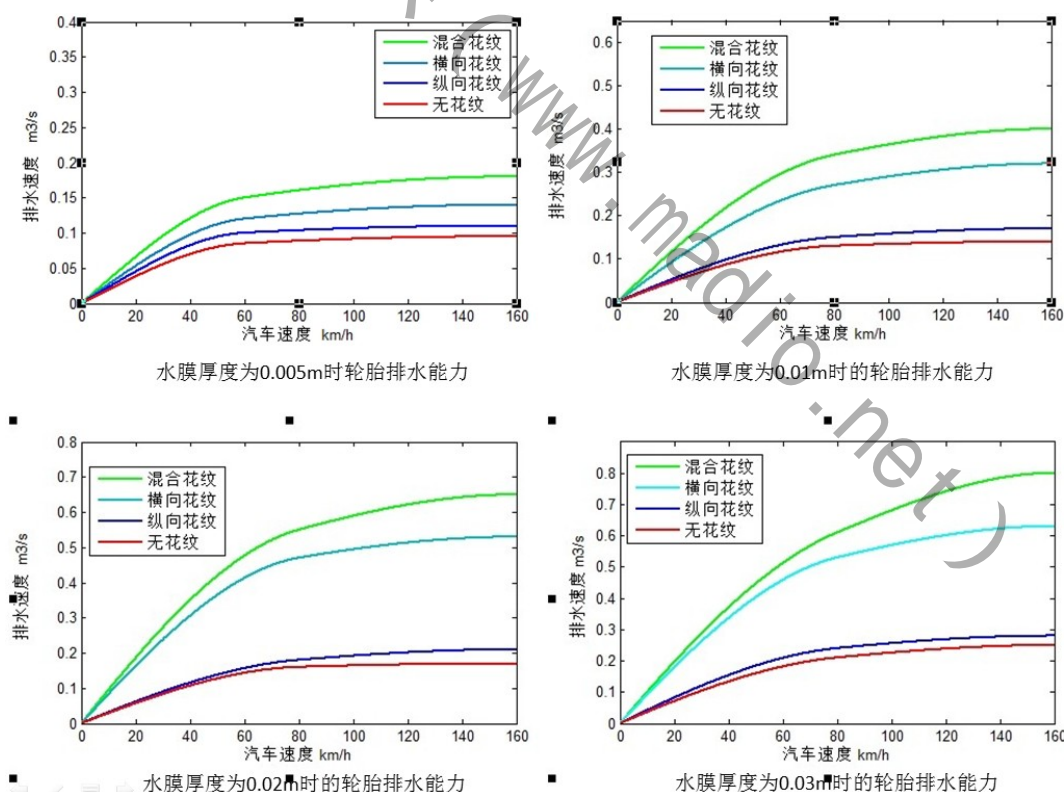
综合上述4个方程，主要考虑以下两个方面:

- 胎面花纹对液膜单元压力分布的影响;
- 不同花纹在受相同外荷载作用下的排水能力。

首先将胎面网格化，划分为10X10个网格，进而对每一个网格面运用Matlab计算出该网格所受的压强见6.2.1中得三维图像。

其次通过不同花纹面下的压强和膜高控制方程求解出不同花纹的水膜高度。

最后运用Mathematic通过总控方程和排水能力方程求解出不同花纹的排水能力如下图所示:



## §6.4 模型的改进

由于车轮在水面行使时，不光对水膜具有滚动形式的压力，同时也有因为滑动引起的动压、和积压效应。因此会对轮胎的排水效果产生进一步的影响。另一方面橡胶对水

膜有一定的附着度我们并未考虑，故我们主要在平均流量和橡胶材料的粘弹性方面进行改进。

### §6.4.1 平均流量

当轮胎与路面之间的水膜很薄时，路面和胎面单元的粗糙度对于润滑性能具有决定性的影响。我们假设两表面粗糙度的均方根偏差分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ ，而水膜的平均膜厚为 $h$ ，则定义膜厚比为：

$$H = \frac{h}{\sigma} = \frac{h}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

通常有， $H \geq 3 \sim 4$ 时，称为全膜润滑；当 $H < 3 \sim 4$ 时，称为部分润滑，它指的是含有表面微凸点接触的润滑状态。

我们再根据Patir和Cheng对在等温条件下不可压缩流体三维表面的部分润滑问题，提出的平均流量模型，推导出如下的平均雷诺方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi_x h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi_y h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}) = 12\mu(\frac{U}{2} \frac{\partial \bar{h}_\tau}{\partial x} + \frac{U}{2} \sigma \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_\tau}{\partial t})$$

在上式中，右边的第一项为滚动引起的动压项，第二项为滑动引起的动压项；第三项为挤压项。该雷诺方程同时考虑了滚动，滑动引起的动压，和挤压效应。其中，为具体位置的液膜厚度， $h = (x, y, t)$ ； $\bar{h}_\tau$ 为实际液膜厚度的平均值； $\bar{p}$ 为液膜平均压力， $\bar{p} = \bar{p}(x, y, t)$ ； $\mu$ 为液体动力粘度； $t$ 为时间； $\sigma$ 为路面与胎面单元的综合粗糙程度； $U$ 为胎面单元在X方向上相对路面的滑动速度； $\phi_x, \phi_y$ 为压力流量因子， $\phi_\sigma$ 为剪切流量因子，对双向同性表面， $\phi_x = \phi_y$ 。

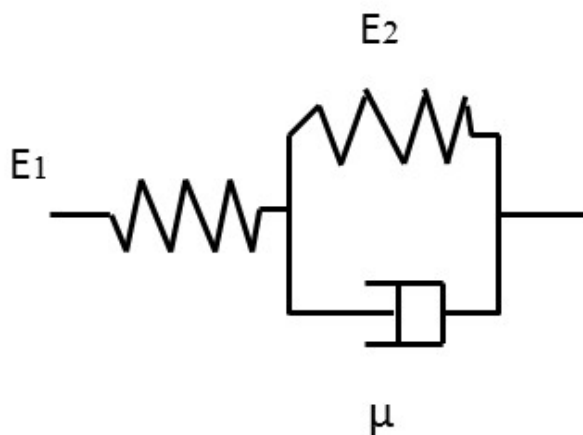
其中压力流量因子和剪切流量因子的计算公式如下：

$$\phi_x = 1 - 0.9 \exp(-0.56h/\sigma)$$

$$\begin{cases} 1.899(\frac{h}{\sigma}) \exp(-0.92\frac{h}{\sigma}) + 0.05(\frac{h^2}{\sigma^2}) & H \leq 5 \\ 1.126 \exp(-0.25\frac{h}{\sigma}) & H > 5 \end{cases}$$

### §6.4.2 橡胶材料和粘弹特性

要确定橡胶变形，首先要确定橡胶才来呢的粘弹性力学模型。经过查阅资料可以知道，它符合标准线性固体模型，如下图所示：



在该模型中，弹性元件和Kelvin元件相互串联。对于这两部分元件，分别有下面的关系：

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1$$

$$\sigma = E_2 \varepsilon_2 + F_2 \dot{\varepsilon}_2$$

总的应变为： $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  对上式进行变换后得到标准线性固体的本构关系：

$$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}$$

其中： $p_1 = \frac{F_2}{E_1 + E_2}$ ,  $q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 \cdot E_2}$ ,  $q_1 = \frac{E_1 F_1}{E_1 + E_2}$

参数名	参数值
表面形貌常数 $\eta\beta\sigma$	0.05
表面形貌常数 $\sigma/\beta$	0.0001
综合杨氏模量 $E'$	400MPa
水的粘度 $\mu_0$	9.6E-4Pa.s
橡胶系数 $q_0$	200MPa
橡胶系数 $p_1$	0.01045s
橡胶系数 $q_1$	4.18MPa.s
橡胶的泊松比 $\nu$	0.5

## §7 模型的评价

### §7.1 模型的优点

- 对于模型一：有效的利用了有限元分析软件Ansys对轮胎整体受力和不同花纹的受力



进行了模拟分析，一方面降低了数学计算的工作量，另一方面在很大程度上提高了模型的精度和可视性。

- 对于模型二：通过对Matlab插值分析的应用，提高了噪声分布图的准确度；运用微分的思想，对每一方格内的噪声进行分别计算避免了复杂的公式，提高了效率。
- 对于模型三：通过对水膜划分立方体，对其进行流体力学分析，使得对排水能力的处理更加高效，同时，增加了橡胶材料的粘弹性分析，使得结果更具有可信度。

## §7.2 模型的缺点

- 对于模型一：在有限元模拟的过程中，对于一些变量值的定义过于简单，施加的受力情况可能不如现实中全面。
- 对于模型二：对噪音的计算过程中忽略了轮胎在转动过程中可能遇到的石头和障碍，同时磨损会的轮胎会产生更大的噪音也没有进行考虑。
- 对于模型三：同样没有考虑花纹的磨损，只假设花纹为光滑平面，而实际中花纹表面因磨损会造成坑洼不平，在一定程度上降低了轮胎的排水性能。会产生一定的偏差。

## §8 参考文献

- [1] 庄继德.汽车轮胎学.北京:北京理工大学出版社,1996.28-32.
- [2] 李炜.子午线轮胎结构有限元分析和设计原理的若干问题研究:[博士学位论文].合肥:中国科学技术大学,2003
- [3] 陈理君, 杨立, 钱业青, 等, 轮胎花纹噪声的发声机理[J], 轮胎工业, 1999, 19(9): 515-518.
- [4] 陈理君, 张艳堃, 杨立, 低噪声轮胎花纹设计原理与方法[J].轮胎工业, 2001, 21(5): 270-276.
- [5] 陈理君, 杨立, 钱业青, 等, 轮胎花纹噪声的发声机理[J], 轮胎工业, 1999, 19(10): 599-602.
- [6] 陈理君, 杨立, 钱业青, 等, 轮胎花纹噪声的发声机理[J], 轮胎工业, 1999, 19(11): 643-647
- [7] 陈理君, 张艳堃, 杨立, 低噪声轮胎花纹设计原理与方法[J].轮胎工业, 2001, 21(5): 270-276.
- [8] Heckl M.Tyre noise generation[J], WAEW, 1989, 12(9): 167-171.
- [9] Kim G J, Holland K R, Lalor N, Identification of the airborne component of type include vehicle interior[J]. Appl,Acous,1997,51(2): 141-156

## §9 附录

## Matlab程序代码

纵向噪音分布:  $[x,y]=\text{meshgrid}(1:10)$ ;  $h=[0\ 3.2\ -0.12\ 3.4\ 0\ 2.1\ -2\ 4.1\ 0\ 0.2\ -0.02\ 4.7\ 0\ 3\ -0.9\ 6.7\ 0.7\ 5.8\ -0.6\ 0.5\ 0\ 3.9\ 1\ 4.8\ -1\ 5.5\ 0.1\ 7.1\ 0\ -0.6\ 0\ 6.5\ 0\ 3.2\ 0\ 6.7\ 2.3\ 4.5\ 0.5\ 1\ -0.43\ 3\ 1.8\ 6.7\ 0.2\ 5.8\ 0\ 7.2\ 0\ 0.4\ 0\ 4.12\ 0.1\ 7.4\ -0.3\ 5.6\ -0.5\ 4.1\ 0.9\ -0.6\ -0.09\ 3.2\ 1.1\ 5.6\ 0\ 4.6\ 0\ 6.5\ 0\ 0\ 0\ 4.5\ -0.5\ 3.2\ 0.9\ 4.3\ -0.2\ 3.3\ 1\ 0.1\ 0.1\ 6.7\ -1\ 5.5\ -1\ 5.5\ 1.1\ 6.7\ 0.1\ 0\ 0\ 0.4\ 0.8\ 5.3\ 0.2\ 2.8\ 0.9\ 5.3\ 0\ 0]$ ;  $[xi,yi]=\text{meshgrid}(1:0.1:10)$ ;  $hi=\text{interp2}(x,y,h,xi,yi,'spline')$ ;  $\text{surf}(hi)$ ;  $\text{xlabel}('x')$ ,  $\text{ylabel}('y')$ ,  $\text{zlabel}('h')$ ;

横向噪音分布:  $[x,y]=\text{meshgrid}(1:10)$ ;  $h=[0\ 0.02\ -0.12\ 0.9\ 0\ -0.2\ -2\ 0.2\ 0\ 0.2\ -0.02\ 0\ 0\ 3\ -0.9\ 0.2\ 2.1\ 5.8\ -0.6\ 0.5\ 6.2\ 5.6\ 7.4\ 4.8\ -1\ 0\ 8.1\ 5.2\ 6.6\ 4.5\ 0\ 0.2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0.1\ 0\ 0.5\ -0.3\ 2.8\ 5\ 7.2\ 4.2\ 0.2\ 0\ 5.3\ 7.2\ 4.8\ 5.5\ 0\ -0.7\ 0.1\ 0\ -0.3\ -0.2\ -0.5\ 0\ 0.9\ -0.6\ 4.9\ 6.5\ 4.8\ 6.9\ 0\ 0.4\ 6.7\ 4.5\ 7.1\ 4.6\ 0\ 0\ -0.5\ 0.2\ 0\ 0\ -0.2\ -0.4\ 1\ 0.1\ 2.1\ 3.6\ 5.6\ 4.9\ -1\ 0.1\ 4.8\ 6.5\ 5.5\ 4.5\ 0\ 0.4\ 0\ -0.2\ 0.2\ 0\ 0.1\ -0.1\ 0\ 0]$ ;  $[xi,yi]=\text{meshgrid}(1:0.1:10)$ ;  $hi=\text{interp2}(x,y,h,xi,yi,'spline')$ ;  $\text{surf}(hi)$ ;  $\text{xlabel}('x')$ ,  $\text{ylabel}('y')$ ,  $\text{zlabel}('h')$ ;  $[xi,yi]=\text{meshgrid}(1:0.1:10)$ ;  $hi=\text{interp2}(x,y,h,xi,yi,'spline')$ ;  $\text{surf}(hi)$ ;

混合噪音分布:  $h=[0\ 7.6\ -0.12\ 7.4\ 0\ 7.2\ -2\ 7.1\ 0\ 0.2\ -0.02\ 4.5\ 0\ 6.5\ -0.9\ 3.4\ 2.1\ 5.8\ -0.6\ 0.5\ 4.2\ 5.6\ 7.4\ 4.8\ 2.6\ 5.4\ 8.1\ 5.2\ 6.6\ 4.5\ 0\ 0.2\ 0\ 7.8\ 0\ 6.6\ 0.1\ 4.9\ 0.5\ -0.3\ 5.1\ 8.2\ 7.2\ 4.2\ 6.7\ 8.1\ 5.3\ 7.2\ 4.8\ 5.5\ 0\ 5.4\ 0.1\ 6.4\ -0.3\ 6.7\ -0.5\ 6.1\ 0.9\ -0.6\ 4.9\ 6.5\ 4.8\ 6.9\ 7.3\ 5.4\ 6.7\ 4.5\ 7.1\ 4.6\ 0\ 7.4\ -0.5\ 5.3\ 0\ 7.6\ -0.2\ 7\ 1\ 0.1\ 2.1\ 3.6\ 5.6\ 4.9\ 7.3\ 5.4\ 5.7\ 6.5\ 5.5\ 7.3\ 0\ 4.6\ 0\ 6.7\ 0.2\ 6.2\ 0.1\ 2.4\ 0\ 0]$ ;  $[xi,yi]=\text{meshgrid}(1:0.1:10)$ ;  $hi=\text{interp2}(x,y,h,xi,yi,'spline')$ ;  $\text{surf}(hi)$ ;  $\text{xlabel}('x')$ ,  $\text{ylabel}('y')$ ,  $\text{zlabel}('h')$ ;  $[xi,yi]=\text{meshgrid}(1:0.1:10)$ ;  $hi=\text{interp2}(x,y,h,xi,yi,'spline')$ ;  $\text{surf}(hi)$ ;

横向花纹的网格绘制:  $\text{img}=\text{imread}('/\text{Users}/\text{zs19940513}/\text{Desktop}/\text{aa.PNG}')$ ;  $M=9$ ;  $N=9$ ;  $\text{figure}$ ;  $\text{imshow}(\text{img})$ ;  $\text{title}('横向花纹槽', 'FontWeight', 'Bold')$ ;  $\text{hold on}$ ;  $[xt, yt] = \text{meshgrid}(\text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 1), M)), \dots \text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 2), N)))$ ;  $\text{mesh}(yt, xt, \text{zeros}(\text{size}(xt)), 'FaceColor', \dots 'None', 'LineWidth', 1, \dots 'EdgeColor', 'r')$ ;  $\text{axis on}$   $\text{set}(\text{gca}, 'XTick', yt(:,1))$   $\text{set}(\text{gca}, 'YTick', xt(1,:))$   $\text{xlabel}('Y')$   $\text{ylabel}('X')$   $\text{text}(1,1, '原点')$

纵向花纹的网格绘制:  $\text{img}=\text{imread}('/\text{Users}/\text{zs19940513}/\text{Desktop}/\text{bb.PNG}')$ ;  $M=9$ ;  $N=9$ ;  $\text{figure}$ ;  $\text{imshow}(\text{img})$ ;  $\text{title}('纵向花纹槽', 'FontWeight', 'Bold')$ ;  $\text{hold on}$ ;  $[xt, yt] = \text{meshgrid}(\text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 1), M)), \dots \text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 2), N)))$ ;  $\text{mesh}(yt, xt, \text{zeros}(\text{size}(xt)), 'FaceColor', \dots 'None', 'LineWidth', 1, \dots 'EdgeColor', 'r')$ ;  $\text{axis on}$   $\text{set}(\text{gca}, 'XTick', yt(:,1))$   $\text{set}(\text{gca}, 'YTick', xt(1,:))$   $\text{xlabel}('Y')$   $\text{ylabel}('X')$   $\text{text}(1,1, '原点')$

混合型花纹的网格绘制:  $\text{img}=\text{imread}('/\text{Users}/\text{zs19940513}/\text{Desktop}/\text{cc.PNG}')$ ;  $M=9$ ;  $N=9$ ;  $\text{figure}$ ;  $\text{imshow}(\text{img})$ ;  $\text{title}('混合花纹槽', 'FontWeight', 'Bold')$ ;  $\text{hold on}$ ;  $[xt, yt] = \text{meshgrid}(\text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 1), M)), \dots \text{round}(\text{linspace}(1, \text{size}(\text{img}, 2), N)))$ ;  $\text{mesh}(yt, xt, \text{zeros}(\text{size}(xt)), 'FaceColor', \dots 'None', 'LineWidth', 1, \dots 'EdgeColor', 'r')$ ;  $\text{axis on}$   $\text{set}(\text{gca}, 'XTick', yt(:,1))$   $\text{set}(\text{gca}, 'YTick', xt(1,:))$   $\text{xlabel}('Y')$   $\text{ylabel}('X')$   $\text{text}(1,1, '原点')$

横向花纹对水膜的压力:  $h=[3.4\ 5\ 5.1\ 5\ 3.5\ 0.2\ 2.7\ 4.7\ 3.2\ 0.5\ 2.6\ 0\ 3.1\ 0.1\ 0\ 4.7\ 3.2\ 0\ 2.6\ 4.6\ 5\ 4.8$

1.2 4.1 5]; [x,y]=meshgrid(1:5); [xi,yi]=meshgrid(1:0.1:5); hi=interp2(x,y,h,xi,yi,'spline');

光滑胎面对水膜的压力: h=[0 0 0 0 0 0.2 2.4 2.5 2.3 0.5 0 2.8 4 2.5 0 0 2.2 2.5 2.1 0 0 0 0 0];  
[x,y]=meshgrid(1:5); [xi,yi]=meshgrid(1:0.1:5); hi=interp2(x,y,h,xi,yi,'spline');

混合花纹对水膜的压力: h=[7 5.5 1.2 5.1 6.8 1.4 5.1 1 5 1.4 3.3 1.6 1.6 1.6 3.6 4.7 3.2 2 2.6 4.6 6.5  
4.8 0.4 5 6.6]; [x,y]=meshgrid(1:5); [xi,yi]=meshgrid(1:0.1:5); hi=interp2(x,y,h,xi,yi,'spline');

面积的求解: I=imread('/Users/zs19940513/Desktop/a.PNG'); H=rgb2gray(I) th=graythresh(I);

J=im2bw(I,th);

k=sum(J(:)==0)/(sum(J(:)==0)+sum(J(:)==1))

I=imread('/Users/zs19940513/Desktop/b.PNG'); H=rgb2gray(I); th=graythresh(I); J=im2bw(I,th);  
k=sum(J(:)==0)/(sum(J(:)==0)+sum(J(:)==1))

I=imread('/Users/zs19940513/Desktop/c.PNG'); H=rgb2gray(I); th=graythresh(I); J=im2bw(I,th);  
k=sum(J(:)==0)/(sum(J(:)==0)+sum(J(:)==1))

### Ansys软件模拟

