

客机水面迫降时的姿态

1.1 问题重述

大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。请你建立合理的数学模型，对客机在平静水面上的迫降进行分析，指出客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。

1.2 模型假设

- (1) 飞机在飞行过程中符合牛顿三大运动定律。
- (2) 以 A320 大型客机为例进行研究。
- (3) 所研究飞机是智能的，可以按照设计的理想路线航行。
- (4) 研究过程中不考虑云层、气压、气温，所考虑的环境为静止标准大气压。重力加速度可近似于 $9.8 m/s^2$ 。
- (5) 飞机看成是规则的圆柱体，由文献上可假设其质心位置为机长的 29.74%。
- (6) 由文献可知飞机水面迫降时起落架收起，机翼开启最大角。
- (6) 由于飞机在水面会出现振荡，可将飞机竖直运动进行简化，建立一自由度体系有阻尼振动。
- (7) 假设飞机入水速度与阻力呈线性关系。

1.3 符号说明

| | |
|--------|------------|
| 飞机长度 | L |
| 飞机宽度 | W |
| 水的粘滞系数 | c |
| 阻力系数 | γ |
| 固有周期 | ω_0 |
| 入水角度 | α |
| 飞机质量 | m |
| 飞行高度 | H |
| 水密度 | ρ |
| 重力加速度 | g |

1.4 模型的建立

以我们搜集的数据为基础，A320 大型客机的有关配置参数为：机长 37.57 m，机高 11.80m，机翼面积 $122.4 m^2$ ，机身宽度 3.95m，空重 42400kg，满载 180 人，飞机总重 51400kg^[1]，我们将飞机迫降过程分解为两个阶段的问题进行分析，第

参赛队号#1574

一阶段为飞机失去动力时至飞机入水前一刻，如图一。第二阶段为飞机与水面接触开始至最终静止于水面，如图二。

在此基础上，我们建立水面迫降飞机姿态理想模型，通过一系列理论推导求得飞机水面迫降的完整滑行轨迹，从而分析飞机水面迫降的最佳入水姿势。

第一阶段问题：

假设飞机在空中仅受到两个力的作用，阻力（ f ）与重力（ G ），且保持其。

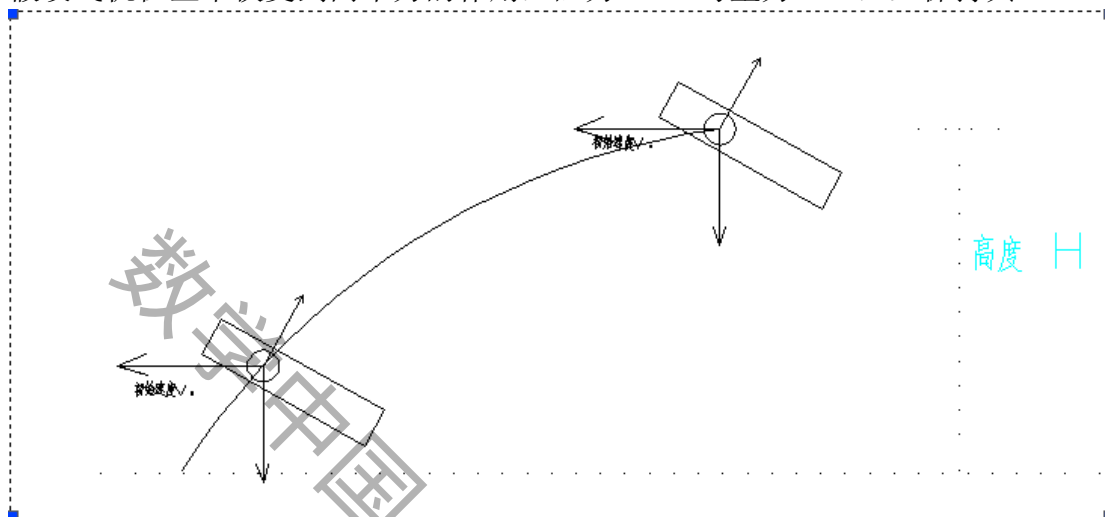


图 1

$$ma_x = \sin \alpha \cdot f \dots \dots \dots (1)$$

$$ma_y = G - \cos \alpha \cdot f \dots \dots \dots (2)$$

$$v_{x1} = v_0 - a_x t \dots \dots \dots (3)$$

$$v_{y1} = -a_y t \dots \dots \dots (4)$$

$$H = \frac{1}{2} a_y t^2 \dots \dots \dots (5)$$

其中阻力（ f ）与重力（ G ）， v_0 为飞机的横向初速度， m 为飞机的质量， α 为飞机水面迫降时的倾斜角， a_x, a_y 分别为飞机飞行过程中水平和竖直方向的加速度， v_{x1}, v_{y1} 分别为飞机入水前一刻的水平 and 竖直方向的速度， t 为飞机从 H 高度处迫降到水面所飞行时间^[2]。

由上述方程（1）——（5）可知

$$a_x = \frac{\sin \alpha \cdot f}{m}$$

$$a_y = \frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{\left(\frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m}\right)}}$$

$$v_{x1} = v_0 - \frac{\sin \alpha \cdot f}{m} \sqrt{\frac{2H}{\left(\frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m}\right)}}$$

$$v_{y1} = -\frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m} \sqrt{\frac{2H}{\left(\frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m}\right)}}$$

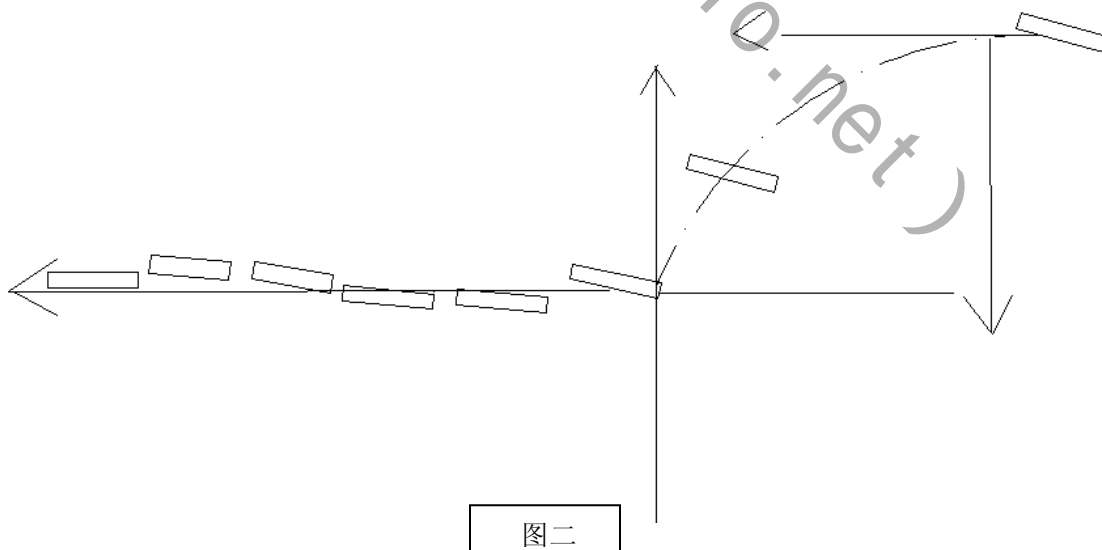
从而可知

$$v_{x1} = v_0 - \frac{\sin \alpha \cdot f}{m} \sqrt{\frac{2Hm}{G + \cos \alpha \cdot f}}$$

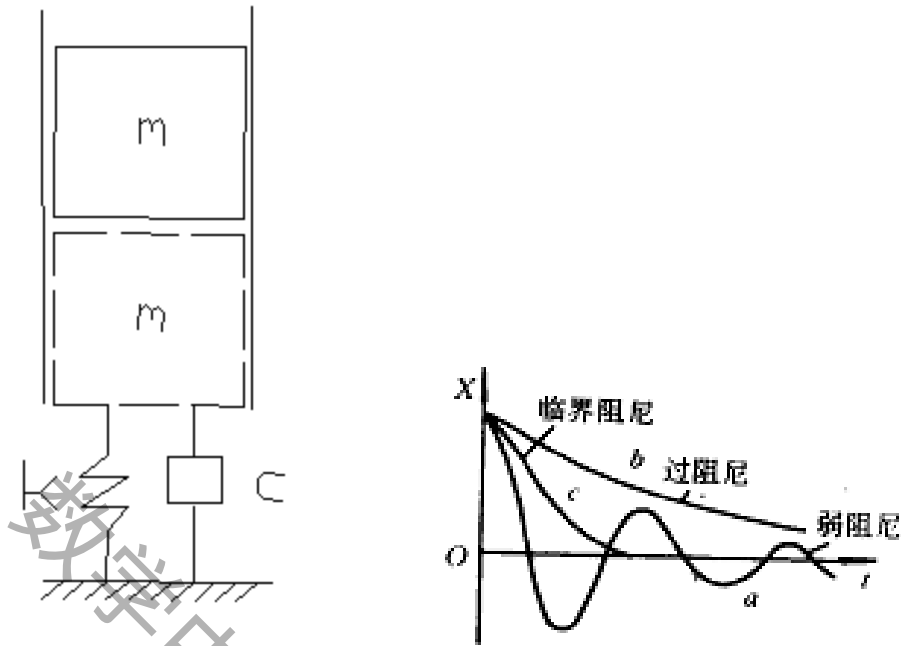
$$v_{y1} = -\frac{G + \cos \alpha \cdot f}{m} \sqrt{\frac{2Hm}{G + \cos \alpha \cdot f}}$$

第二阶段问题：

在第一阶段基础上，我们现在所研究的知识飞机在竖直方向上的颠簸次数，不考虑水平方向的滑行距离，假设飞机在到达水面后以单自由度体系在水面上进行有阻尼振荡，呈现如图所示轨迹：



假设飞机在水中对竖直方向运动可用如下图模型表示：



根据牛顿第二定律可知

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \gamma \frac{dy}{dt}$$

以 m 遍除各项

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - \frac{\gamma}{m} \frac{dy}{dt}$$

并令

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad \gamma = -\frac{F_{\text{阻}y}}{v_{y1}}$$

在此模型中 $F_{\text{阻}y} = G$ 。

ω_0 即振动系统的固有频率， γ 为阻力系数， β 为阻尼因数和振动系统以及介质的性质有关。于是，方程可为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$$

按照微分方程理论，对于一定振动系统，可根据阻尼因数 β 大小之不同，由此动力学方程解欠阻尼运动状态^[3]：

(1) 当阻力很小，以致 $\beta < \omega_0$ ，可由上式求出质点的运动学方程

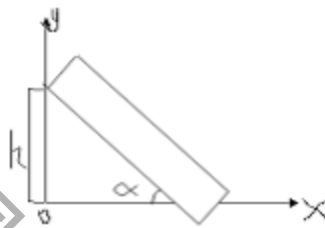
$$y = Ae^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A 与 α 为待定常数，由初始条件决定。因子 $Ae^{-\beta t}$ 表示不断随时间而衰减的振幅 $\cos(\omega' t + \alpha)$ 则以 ω' 为圆周率周期的变化，二因子相乘表示质点做运动范围不断缩小的往复运动。这里我们可以选为如下图坐标系而使得 $\alpha = 0$ ，使得方程变为

$$y = Ae^{-\beta t} \cos \omega' t$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



因为飞机的头部离水面的距离 h 由下述公式给出

$$h = L \sin \alpha$$

其中 L 为飞机的长度。而且 $t = 0$ 时刻振幅最大即为 h ，所以

$$h = Ae^{-\beta t} \Big|_{t=0} = A,$$

$$\text{即 } A = h$$

从而运动学方程为

$$y = he^{-\beta t} \cos \omega' t$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m},$$

(2) 当阻力很大，以致 $\beta > \omega_0$ ，根据微分方程的理论可知方程的解为

$$y = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

c_1 和 c_2 是由初始条件据定的常数^[4]。

(3) 由于临界阻尼状态很难达到，这里不予讨论。

1.5 模型的求解

以下求解飞机接触水面后的运动方程：

1、参数水面弹性系数 k 的推导

假设静止水面为弹簧模型，由弹簧的公式^[5]

$$F = -kx$$

其中 F 为浮力， x 为飞机入水深度。现假设飞机全部没入水中，即可由如下公式求得 k 值：

$$k = \frac{F_{\text{浮}}}{s} = \frac{\rho g \pi \left(\frac{W}{2}\right)^2 L}{W}$$

代入已知数据得出 $k=30387.35$ (N/m)。

2、计算参数 $\omega_0=0.24314$, $\beta=2.816$

由于 $\beta > \omega_0$ ，所以飞机竖直方向运动轨迹符合过阻尼运动，即

$$y = c_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t},$$

由初始条件

$$y|_{t=0} = h = L \sin \alpha, \quad \ddot{y}|_{t=0} = g$$

得

$$c_1 + c_2 = L \sin \alpha$$

代入数据得出

$$c_1 = 37.57 \sin \alpha + \frac{9.8 - 37.57 \sin \alpha}{15.39}$$

$$c_2 = \frac{9.8 - 37.57 \sin \alpha}{15.39}$$

用 matlab 求出

$$c_1 = 35.06533 \sin \alpha + 0.65333$$

$$c_2 = 0.65333 - 2.50466 \sin \alpha$$

从而运动方程为

$$y = (35.06533 \sin \alpha + 0.65333) e^{-0.01052t} + (0.65333 - 2.50466 \sin \alpha) e^{-5.62148t}$$

由已知初始条件

$$y|_{t=0} = h = L \sin \alpha$$

知

$$37.57 \sin \alpha = (35.06533 \sin \alpha + 0.65333) + (0.65333 - 2.50466 \sin \alpha)$$

从而算出

$$\alpha = \arcsin(0.26386) = 15.29922^{\circ}。$$

1.6 模型的分析

由上述模型结果可知飞机在水面迫降的过程可近似为飞机遵循单自由度过阻尼振荡运动，其 α 角通过影响飞机振幅控制飞机的颠簸程度，故应选择适当 α 角使得飞机的颠簸程度最小。通过计算当 $\alpha = 15.29922^{\circ}$ 时颠簸程度较小且对机身的损坏程度较小。模型所得理论结果较好符合实际情况。综上所述该假设模型成立。

1、因为有上述模型所得的飞机从出水面开始到静止于水面的运动轨迹方程为

$$y = (35.06533\sin\alpha + 0.65333)e^{-0.01052t} + (0.65333 - 2.50466\sin\alpha)e^{-5.62148t}，$$

即滑行当中的颠簸程度是关于 t 的指数函数的线性叠加，最终得到的最优解为 $\alpha = 15.29922^{\circ}$ 。

2、上述模型建立过程当中由于水平方向的受力讨论较为复杂故本文对此未进行讨论。

3、由于模型较常见故亦可在相似运动中进行应用。

参考文献

- 【1】沈继红，张晓微等. 数学建模. 哈尔滨工业大学出版社. 哈尔滨市南通大街哈工程大学 11 号楼. 1995 年 12 月
- 【2】周衍柏，理论力学教程，高等教育出版社，2009 年 7 月
- 【3】杜婵英，力学，普通物理学教程力学，高等教育出版社，2008 年 4 月
- 【4】刘建涛，杜平安，黄明镜，肖耀兵，连续体简谐基础振动有限元计算方法，电子科技大学学报第 38 卷第 6 期报，2009 年 11 月
- 【5】胡大勇、杨嘉陵等，客机水上迫降动强度有限元分析，MSC Software 中国用户论文集，2006 年
- 【6】Sun Weimin, e Research on Civil Aircraft Fuselage Stability and the Ditching, Nanjing University of Aeronautics and Astron The Graduate School, M
- 【7】AmtA P.Richard P G Transport water impact and ditching performance, final report [DOT/FAA/AR-95/54] 1996
- 【8】<http://jpkc.nwpu.edu.cn/jp2009/04/oldsite/wlkc2/dd02/2-1.htm>, 2011 年 4 月 22 日

附录

一、应用 Matlab 软件对第一阶段公式进行化简求解，程序如下：

源程序一、

求解 c1、c2 源程序代码：

```
[c1]=solve('c1=37.57*sin(a)+(9.8-37.57*sin(a))/15')
```

```
[c2]=solve('c2=(9.8-37.57*sin(a))/15')
```

源程序二、

```
% script m-file.m numerical_solutions_for_any_n.m
% This program gives the numerical solutions of velocity profiles of
the
% power-law fluids(n < 1).
% The cooresponding parmeters are taken as following:
% H=0.001m; m=0.0*10^(-3); rho=1.0*10^3; epsilon=8.85*10^(-12)
% phi_omega=-50*10^(-3); E0=10^6;
%=====
=====
clc;
clear;
n=1; %幂律流体的指数
T=0.1;%0.0001; %时间 n=1:5
H=1*10^(-3);%两平行板之间的半宽度
```


参赛队号#1574

```

kappa=35*10^(3);
Ny=30;          %空间离散份数
Nx=20000;       %时间离散份数
hold on;
m=0.9*10^(-3); %流体的粘性系数
rho=1000;       %水的密度
epsilon=8.85*10^(-12);
phi_omega=-50*10^(-3);
E0=10^5;        %这个参数的取值有问题
Y0=0;           %两板之间中心位置的坐标
Yn=H;           %上板处于的位置（设定为1毫米）
T0=0;           %时间初始为零时刻
Tn=T;           %时间最终为T时刻（需要输入）
Hy=(Yn-Y0)/Ny;  %空间步数
Ht=(Tn-T0)/Nt;  %时间步数
dim_Y=linspace(Yn,Y0,Ny+1); %有量纲的空间向量
dimless_Y=linspace(Yn,Y0,Ny+1); %无量纲化的空间向量
T=linspace(T0,Tn,Nt+1); %时间向量
dim_U_num=zeros(Nt+1,Ny+1); %有量纲的数值解矩阵
dimless_U_num=zeros(Nt+1,Ny+1); %无量纲化的数值解矩阵
dim_U_exact=zeros(1,Ny+1); %有量纲的解析解
dimless_U_exact=zeros(1,Ny+1); %无量纲的解析解

U_s=-epsilon*phi_omega*E0/m; %平均速度 n=1 用牛顿流体的平均速度作为
无量纲参数
disp('U_s');
disp(U_s);
%初始条件用近似解
if n==1 || n==1/2 || n==1/3
    if n==1
        for kk=1:Ny+1
            y=dim_Y(kk);
            C1=-(epsilon*E0*phi_omega)/m;
            C2=1-(0.5*exp(kappa*y))/cosh(kappa*H);
            dim_U_num(1, kk)=C1*C2;
        end
    end
    if n==1/2
        for kk=1:Ny+1
            y=dim_Y(kk);
            C1=1/2*kappa*(epsilon*E0*phi_omega/m)^2/(2*(cosh(kappa*H))^2);
            C2=sinh(2*kappa*H)-1/2*exp(2*kappa*y)-2*kappa*(H-y);

```

参赛队号#1574

```

        dim_U_num(1, kk)=C1*C2;
    end
end
if n==1/3
    for kk=1:Ny+1
        y=dim_Y(kk);

C1=1/3*kappa^2*(-epsilon*E0*phi_omega/m)^3/(4*(cosh(kappa*H))^3);

C2=sinh(3*kappa*H)-1/2*exp(3*kappa*y)-9*(sinh(kappa*H)-1/2*exp(kappa*
y));
        dim_U_num(1, kk)=C1*C2;
    end
end
else
C1=kappa^((1-n)/n)*(-epsilon*E0*phi_omega/m)^(1/n)/((cosh(kappa*H))^(
1/n));
    for kk=1:Ny+1
        y=dim_Y(kk);
        h=0.001;
        k_x=kappa*y:h:kappa*H;
        C2=0;
        for mm=1:length(k_x)
            C2=C2+h*(sinh(k_x(mm)))^(1/n);
        end
        dim_U_num(1, kk)=C1*C2;
    end
    %dim_U_num(1,:)=U_s;
end
dimless_U_num(1,:)=dim_U_num(1,:)/U_s;
%在上板附近的流体速度为零
for ii=1:Nt+1
    dim_U_num(ii, 1)=0;
end
for ii=2:Nt+1
    for kk=2:Ny
        y=dim_Y(kk);

f_kk=-(Ht*epsilon*kappa^2*phi_omega*E0/rho)*cosh(kappa*y)/cosh(kappa*
H);

dim_U_num(ii, kk)=(-1)^(n-1)*(m*n*Ht/rho)*Hy^(-n-1)*(dim_U_num(ii-1, kk

```

参赛队号#1574

```

+1)-...

dim_U_num(ii-1, kk-1))^(n-1)*(dim_U_num(ii-1, kk+1)-2*dim_U_num(ii-1, kk)
)...
    +dim_U_num(ii-1, kk-1))+dim_U_num(ii-1, kk)+f_kk;
end

dim_U_num(ii, Ny+1)=1/11*(2*dim_U_num(ii, Ny-2)-9*dim_U_num(ii, Ny-1)+18
*dim_U_num(ii, Ny));
end
dimless_U_num=dim_U_num/U_s;
dimless_Y=dim_Y/H;
figure(1);
%plot(dimless_Y, dimless_U_num(1,:), 'ro-', 'linewidth', 2);
%hold on;
plot(dimless_Y, dimless_U_num(Nt+1,:), 'r-', 'linewidth', 1.5);
hold on;
legend('n=1.5', 'n=1.2', 'n=1', 'n=0.8', 'n=0.6');
title(' (a)', 'fontsize', 20);
xlabel(' y/H', 'fontsize', 20);
ylabel(' U/U_s', 'fontsize', 20);
box on;
axis([0 1 0 1.55]);
set(gca, 'fontsize', 18);

```

二、应用 Microsoft Visual C++软件对所建模型模型进行数值计算，源程序代码如下：

```

#include<iostream>
#include<math.h>
using namespace std
const int H=9000           //假设飞机飞行高度为 9000 千米
const double g=9.8         //飞机下落过程中重力加速度 g=9.8 米/秒2
const double k=0.08        //空气阻力系数 k=0.08
const p=1000               //大气压强 p=1000
const pi=3.14              //圆周率 pi=3.14
const l=37.57              //A320 客机机身长度 l=37.57
const R=1.972              //A320 客机机身模型假设后半半径 R=1.972
const vy=1.74              //飞机开始出泵水面时刻竖直方向速度 vy=1.74 米/秒
Void main()
{
    double K, s, t, w, f, r, B, c;
    int m=514000;           //机身重量 m=424000kg+180 人(满载)*50kg
    K=(pi*R*l*p*g)/2;       //计算无量纲数
    f=m*g;

```

参赛队号#1574

```
w=sqrt(K/m);           //计算参数  $\omega$ 
r=f/vy;                //计算参数  $\gamma$ 
B=r/2*m; //计算参数  $\beta$    c=r/w;           //计算粘质系数 c
    cout<<"w="<<w<<endl<<"r="<<r<<endl<<"B="<<B<<"c="<<endl;
}
```

数学中国 (www.madio.net)