

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#2264

参赛队员（签名）：

队员 1: 秦翎峰

队员 2: 贺钰敏

队员 3: 杨学柳

参赛队教练员（签名）: 陈淑娟

参赛队伍组别（例如本科组）：

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 A 题 折与飞 II

关 键 词 质心 运动学方程 平抛测试 角加速度

摘 要：

气流对机翼的冲击作用能够平衡机身的重力这是纸飞机的特点，在不考虑机翼弯曲的情况下，气流对机翼的作用不存在压强差，仅剩气流对机翼的冲击。由动量定理可知气流对机翼的冲击作用与机翼相对空气的流速有关系，由于机翼形状特殊，且难以知道气流冲击机翼之后的速度分布，所以很难算出冲击力，不过一般与流速的指数次成正比，文中把这个指数称为气流指数，是气流与机翼复杂综合作用的结果，一般可以从实验得到，本文还得到水平方向的气流指数和竖直方向的气流指数并不相同，可能受扰流及机身机构的影响。

对问题的分析：要在竖直方向上获得飞行高度争取飞行时间，与水平方向上速度不变是矛盾的，因此必然存在一个合适的仰角使得飞行距离最远，这正是要求解的问题，为了得到飞行距离与仰角的关系，以 Suzanne 纸飞机抛出时在地面上的投影为坐标原点，纸飞机飞行方向为横坐标，建立平面直角坐标系，这也就假设了在平面内考虑该问题。将 Suzanne 纸飞机的运动在第一象限内正交分解，由牛顿运动定律得到两个方向上的运动学方程，由于上升阶段与下降阶段受力不同，因此需要分开讨论该问题，最终得到的运动学方程是一个分段函数，由分段函数的连续性可以得到水平距离与仰角的函数从而解决该问题。

对数据的处理：计算结果表明这是一个非常复杂的函数，不能用一般的方法得到解析解，因此需要将角度离散得到对应水平距离的一组数值解，最后拟合离散角度与对应的水平距离数值得到函数图像，从图中找到最远距离对应的角度，本文的结果约为 42.3° 。

本文的问题：计算中发现竖直下落的速度太大，也就是冲击力对竖直速度的平方成正比的假设是不对的，同理水平速度过小，均表示气流指数需要重新调整，这也是本文的最远距离（57m）小于 Suzanne 实验距离的原因，同时也是后面需要修正的地方，通过时间切片重构图片，可以将视频中飞行轨迹数据提取出来，与计算轨迹进行比对，是修正气流指数的方法。本文没有从机身的结构去分析气流对机体的作用，显然没有直面问题，这是后续要研究的地方。

参赛队号： # 2264

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

Abstract

The impact of the airflow on the wing can balance the gravity of the fuselage, which is the characteristic of paper airplanes. Without considering the bending of the wing, there is no pressure difference between the airflow and the wing, only the impact of the airflow on the wing. The momentum theorem shows that the impact of the airflow on the wing is related to the velocity of the wing relative to the air. Due to the special shape of the wing and the difficulty in knowing the velocity distribution of the airflow after impacting the wing, it is difficult to calculate the impact force, but it is generally proportional to the exponential order of the velocity. The index is called the airflow index in this paper, which is the result of the complex and comprehensive interaction between the airflow and the wing. Generally, it can be obtained from experiments. In this paper, it is also found that the airflow index in the horizontal direction and the airflow index in the vertical direction are not the same, and may be affected by turbulence and fuselage mechanisms.

Analysis of problems: In order to obtain the flight height in the vertical direction and strive for the flight time, it is inconsistent with the constant speed in the horizontal direction. Therefore, there must be an appropriate elevation angle to make the flight distance the farthest. This is exactly the problem to be solved. In order to obtain the relationship between the flight distance and the elevation angle, the projection on the ground when Suzanne paper plane is thrown is taken as the origin of coordinates, and the flight direction of the paper plane is taken as the abscissa to establish the Plane Rectangular Coordinate System, which also assumes that the problem is considered in the plane. The motion of Suzanne paper airplane is orthogonally decomposed in First Quadrant, and the kinematics equations in two directions are obtained from Newton's laws of motion. Because the forces in the ascending and descending phases are different, the problem needs to be discussed separately. The final kinematics equation is a piecewise function, and the function of horizontal distance and elevation angle can be obtained from piecewise continuous function to solve the problem.

Processing of data: The calculation results show that this is a very complex function and cannot be solved analytically by general methods. Therefore, it is necessary to obtain a set of numerical solutions corresponding to the horizontal distance by discretizing the angle. Finally, the function image is obtained by fitting the discrete angle with the corresponding horizontal distance value, and the angle corresponding to the farthest distance is found from the figure. The result of this paper is about.

The fatal problem in this article is: It was found in the calculation that the vertical falling speed is too large, that is, the assumption that the impact force is proportional to the square of the vertical speed is incorrect. Similarly, the too small horizontal speed indicates that the airflow index needs to be readjusted. This is also the reason why the farthest distance (57m) in this paper is smaller than Suzanne's experimental distance, and it is also the place to be corrected later. By reconstructing the picture with time slice, the flight trajectory data in the video can be extracted and

compared with the calculated trajectory, which is the method to cultivate the airflow index. This article does not analyze the effect of airflow on the airframe from the structure of the airframe. Obviously, it does not face the problem directly. This is the place to be studied later.

目录

| | |
|---|----|
| 一 问题重述 | 1 |
| 二 问题分析..... | 1 |
| 三 模型假设..... | 1 |
| 四 符号说明..... | 2 |
| 五 模型的建立与求解..... | 3 |
| 5.1 模型建立的总思路..... | 3 |
| 5.2 误差小于 1mm 的 suzanne 纸飞机重心（质心）的计算 | 4 |
| 5.2.1 机身平面（ xO_3y 平面）各版块重心（质心）坐标计算 | 4 |
| 5.2.2 机翼平面（ xO_3z 平面）各版块重心（质心）坐标计算..... | 8 |
| 5.2.3 Suzanne 纸飞机重心（质心）坐标计算 | 10 |
| 5.3 Suzanne 纸飞机上升段的运动学方程..... | 12 |
| 5.3.1 Suzanne 纸飞机上升段竖直方向的运动学方程 $y_1(\theta, t)$ | 13 |
| 5.3.2 Suzanne 纸飞机上升段水平方向的运动学方程 $x_1(\theta, t)$ | 13 |
| 5.4 Suzanne 纸飞机下降段的运动学方程..... | 15 |
| 5.4.1 Suzanne 纸飞机下降段竖直方向的运动学方程 $y_2(\theta, t)$ | 15 |
| 5.4.2 Suzanne 纸飞机下降段水平方向的运动学方程 $x_2(\theta, t)$ | 16 |
| 5.5 问题一冲击模型的修改..... | 17 |
| 5.5.1 上升段竖直方向运动学方程 $y_1(\theta, t)$ 的修改 | 17 |
| 5.5.2 上升段水平方向运动学方程 $x_1(\theta, t)$ 的修改 | 18 |
| 5.5.3 下落段竖直方向运动学方程的修改..... | 18 |
| 5.5.4 下落段水平方向运动学方程的 $x_2(\theta, t)$ 修改..... | 19 |
| 六 数据处理与问题分析..... | 19 |
| 6.1 问题 1 的分析及数据处理..... | 20 |
| 6.1.1 初速度 v_0 和阻尼系数 k 的实验测量 | 20 |
| 6.1.2 下落时间 t_2 的数值解分析 | 21 |
| 6.1.3 纸飞机最佳仰角及飞行最远距离的平抛测试对照表及测试函数..... | 23 |
| 6.2 问题 2 的分析及数据处理..... | 27 |
| 6.3 模型计算结果及改进想法..... | 29 |
| 6.3.1 该模型下的计算结果..... | 29 |
| 6.3.2 模型的问题及改进想法..... | 30 |

| | |
|-------------|----|
| 七 参考文献..... | 30 |
| 八 附录..... | 31 |

一 问题重述

纸飞机有好多种折法。世界上有若干具有一定影响力的纸飞机比赛，通常的参赛规定是使用一张特定规格的纸，例如 A4 大小的纸张，折成一架纸飞机。大多数比赛都不允许使用剪刀和胶水，有的比赛中可以少量使用胶带以调整纸飞机的重心。折好后在无风的室内环境投掷，并测量其留空时间和飞行距离等成绩。在 2012 年，有一种叫 *suzanne* 的折法曾创下飞行距离的吉尼斯世界纪录。飞行了超过 69 米。

第一阶段问题：如果纸飞机（以 *suzanne* 为例子）的翼面是精确的平面，不允许有弯曲，建立合理是数学模型，根据纸飞机的三视图和重心位置，计算投掷的合理角度，以使飞行距离尽可能远。

第二阶段问题：我们依然假定纸飞机（以 *Suzanne* 为例）的翼面是精确的平面，假定我们可以使用少量的胶带粘贴在飞机上，用以调整重心的前后位置。请建立合理的数学模型，计算出为了使飞行距离尽可能远，飞机重心的最佳位置以及投掷出手的最佳角度。如果我们希望留空时间尽可能的长，重心的位置和出手角度又该如何取值

二 问题分析

气流对机翼的冲击作用能够平衡机身的重力这是纸飞机的特点，在不考虑机翼弯曲的情况下，气流对机翼的作用不存在压强差，仅剩气流对机翼的冲击。由动量定理可知气流对机翼的冲击作用与机翼相对空气的流速有关系，由于机翼形状特殊，且难以知道气流冲击机翼之后的速度分布，所以很难算出冲击力，不过一般与流速的指数次成正比，文中把这个指数称为气流指数，是气流与机翼复杂综合作用的结果，一般可以从实验得到，本文还得到水平方向的气流指数和竖直方向的气流指数并不相同，可能受扰流及机身机构的影响。

对问题的分析：要在竖直方向上获得飞行高度争取飞行时间，与水平方向上速度不变是矛盾的，因此必然存在一个合适的仰角使得飞行距离最远，这正是要求解的问题，为了得到飞行距离与仰角的关系，以 *Suzanne* 纸飞机抛出时在地面上的投影为坐标原点，纸飞机飞行方向为横坐标，建立平面直角坐标系，这也就假设了在平面内考虑该问题。将 *Suzanne* 纸飞机的运动在第一象限内正交分解，由牛顿运动定律得到两个方向上的运动学方程，由于上升阶段与下降阶段受力不同，因此需要分开讨论该问题，最终得到的运动学方程是一个分段函数，由分段函数的连续性可以得到水平距离与仰角的函数从而解决该问题。

三 模型假设

1. 上升过程中飞行姿势（仰角）没有发生改变。
2. 在整个飞行过程中机翼始终没有弯曲变形，始终在同一数值平面内飞行。
3. 飞行姿势在最高点处对时间不可导。
4. 气流对机翼冲击后的速度为零。

四 符号说明

表 1 符号对照表 (不包含程序变量符号)

| 符号 | 说明 |
|------------------|---|
| v_0 | Suzanne 纸飞机脱手时速度 |
| θ | Sunanne 纸飞机脱手时速度方向与水平方向的夹角 |
| H_0 | 抛出时 Suzanne 纸飞机到地面的竖直距离(可近似为抛出者的身高) |
| A | 纸飞机的最高点 |
| B | 纸飞机的落地点 |
| O | 坐标原点, |
| O_1 | 抛出时纸飞机在地面上的投影 (也可近似认为抛出者的站立点) |
| O_2 | Suzanne 纸飞机的重心 |
| S | Suzanne 纸飞机的两个机翼的总面积约为 176.8cm^2 |
| m | Suzanne 纸飞机的质量 (A4 纸的质量约为 4.366g) |
| ρ | 空气密度, 标准状态下为 $1.29\text{kg}/\text{m}^3$ |
| $v_{y\max}$ | 下落阶段竖直方向的极限速度为 |
| t_1 | Suzanne 纸飞机上升段的时间 |
| t_2 | Suzanne 纸飞机下降段的时间 |
| g | 实验室当地重力加速度, 通常取 $9.8\text{m}/\text{s}^2$ |
| y_0 | Suzanne 纸飞机上升阶段的高度 |
| x_0 | Suzanne 纸飞机上升阶段的水平距离 |
| x_1 | Suzanne 纸飞机下降阶段的水平距离 |
| $v_{y1}(t)$ | 上升阶段的竖直速度时间函数 |
| $v_{x1}(t)$ | 上升阶段的水平速度时间函数 |
| $y_1(\theta, t)$ | 上升阶段竖直方向的运动学方程 |
| $x_1(\theta, t)$ | 上升阶段水平方向的运动学方程 |
| $v_{y2}(t)$ | 下降阶段的竖直速度时间函数 |

| | |
|------------------|---|
| $v_{x_2}(t)$ | 下降阶段的水平速度时间函数 |
| $y_2(\theta, t)$ | 下降阶段竖直方向的运动学方程 |
| $x_2(\theta, t)$ | 下降阶段水平方向的运动学方程 |
| B(3) | 机翼版块向量，由四个坐标组成，前三个表示该版块的质心，第四个坐标表示该版块的质量，3 表示叠加层数为 3 层，依次类推 |
| A(8) | 机身版块向量，由四个坐标组成，前三个表示该版块的质心，第四个坐标表示该版块的质量，3 表示叠加层数为 3 层，依次类推 |

五 模型的建立与求解

5.1 模型建立的总思路

在忽略机翼弯曲的情况下，纸飞机不会获得升力，纸飞机的只能以下降来换取气流对机翼的冲击，试图来平衡自身的重力，因此纸飞机的坠落是必然的结局。在相同高度下（飞行的时间相同）水平抛出纸飞机飞行的距离是最远的，因为水平抛出时受到空气的阻力是最小的，这也是为什么往往飞的较远的纸飞机最后都是以水平飞行姿势落地，对于 *suzanne* 纸飞机来说一定是满足的，所以要使得纸飞机飞行的远我们希望能增加高度（出手速度过大，气流对机翼的作用会破坏机翼始终为平面的假设，因此对于同样纸张和机型的纸飞机而言，最大出手速度是固定的），但是抛出的高度总是受限和有限的，一般就和抛出着的身高相当计为 H_0 ，

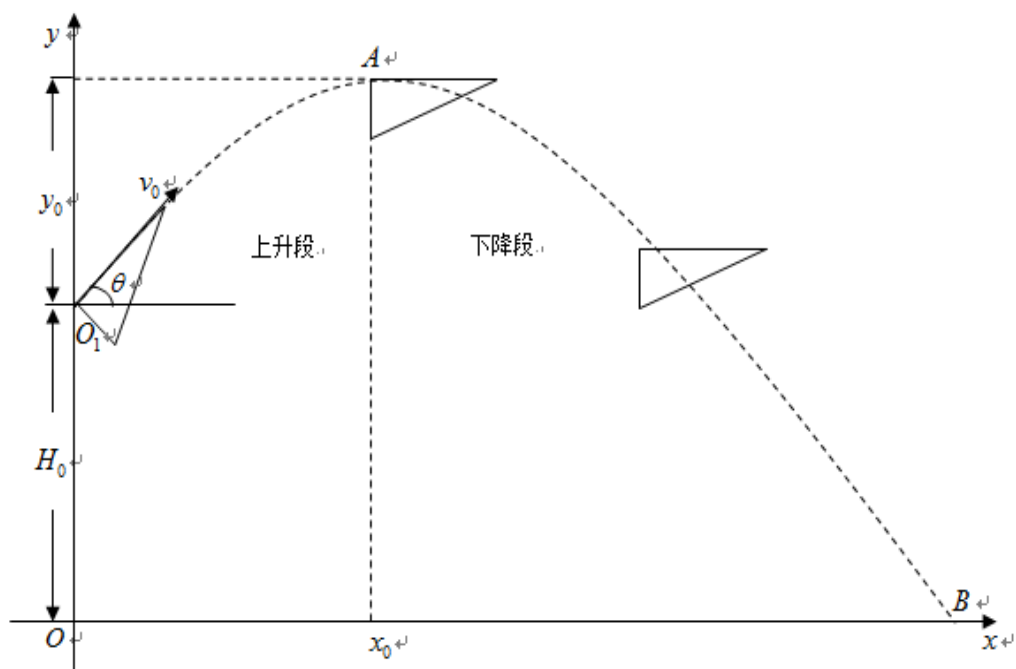


图 1 飞行过程示意图

如图 1 所示，以抛出者的立足点为坐标原点，纸飞机的飞行方向为 x 轴建立直角

坐标系，斜抛正是通过牺牲水平速度来增加抛出高度，增加的高度计为 y_0 ，在这一增一减中必然存在一个最优的抛出角度，使得抛出的距离最远，这个最优的角度 θ_0 正是本题要选找的，为了求解 θ_0 需要将运动进行水平和竖直两个方向的正交分解，但是上升段和下降段的受力不同需要分开讨论，最终得到两个方向上含角度和时间的运动方程 $x(\theta, t)$ 和 $y(\theta, t)$ ，当纸飞机落地时 $y(\theta, t) = 0$ ，从而得到 $t(\theta)$ ，将 $t(\theta)$ 代入 $x(\theta, t)$ 中得到一个 x 关于 θ 的函数 $x(\theta)$ ，通过令 $\frac{dx(\theta)}{d\theta} = 0$ 可求得飞行最远距离的 θ_0 ，但是一般不会有解析解，计算结果表明这是一个非常复杂的函数，不能用一般的方法得到解析解，因此需要将角度离散得到对应水平距离的一组数值解，最后拟合离散角度与对应的水平距离数值得到函数图像，从图中找到最远距离对应的角度。

5.2 误差小于 1mm 的 suzanne 纸飞机重心（质心）的计算

纸飞机的重心（质心）在飞行过程中对飞行姿势起决定性作用，是影响飞行距离的关键因素，对 suzanne 纸飞机重心（质心）的求解具有重要的意义，以纸飞机的对称轴为 x 轴，机头处为坐标原点建立 $O_3 - xyz$ 坐标系，如图 2 所示，图 2 为 A4 纸 suzanne 纸飞机的真实尺寸，由于对称性仅画出在第一卦限的部分。

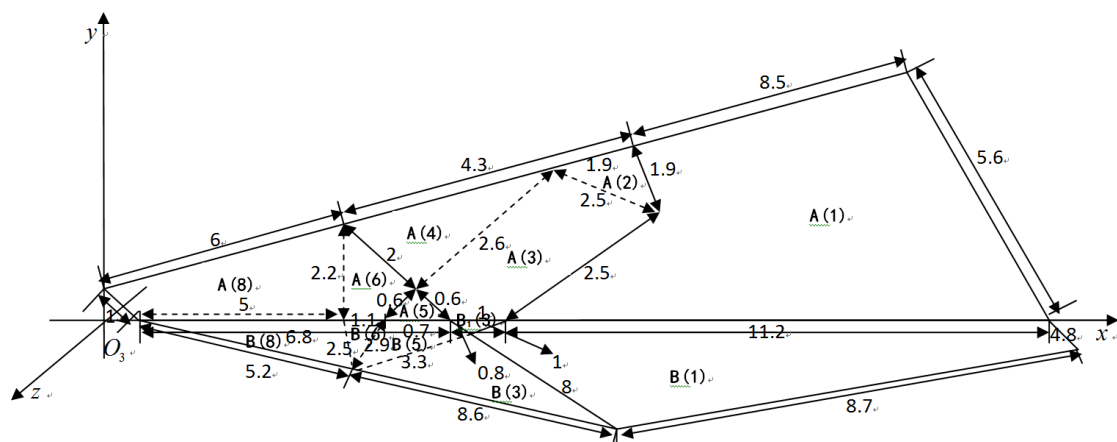


图 2 机身版块分割及尺寸

其中 **A(8)**表示机身位置（ xO_3y 平面）A4 纸重叠部分为 8 层的版块，**B(3)**表示机翼位置（ xO_3z 平面）A4 纸重叠部分为 3 层的版块，以此类推，为了看清纸飞机的层次可以将每一个折叠的步骤反回来。通过测量将每个版块的重心（质心）位置计算出来，最后将每个版块等效为重心（质心）质点，计算出 suzanne 纸飞机的重心（质心）。

5.2.1 机身平面（ xO_3y 平面）各版块重心（质心）坐标计算

为了方便测量及计算，各版块的坐标原点不尽相同，问题均在第一象限内讨论，设 A4 纸的质量面密度为 σ ，如图 3 所示为 **A(1)**和 **A(2)**版块在相应坐标下的测量

结果。则其重心（质心）坐标与质量为

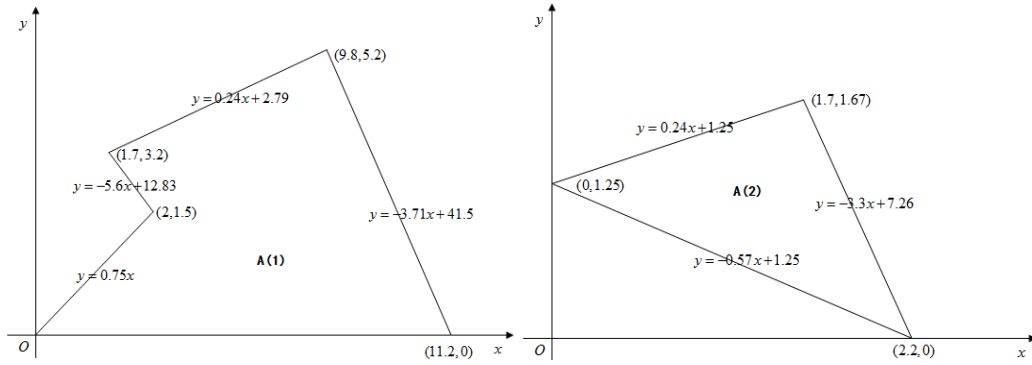


图 3 A(1)和 A(2)版块尺寸

$$x_A(1) = \frac{\int_0^{1.7} 0.75x^2 dx + \int_{1.7}^2 (0.24x + 2.79)x dx - \int_{1.7}^2 (-6.35x + 12.83)x dx + \int_2^{9.8} (0.24x + 2.79)x dx + \int_{9.8}^{11.2} (-3.71x + 41.5)x dx}{\int_0^{1.7} 0.75x dx + \int_{1.7}^2 (0.24x + 2.79)x dx - \int_{1.7}^2 (-6.35x + 12.83)x dx + \int_2^{9.8} (0.24x + 2.79)x dx + \int_{9.8}^{11.2} (-3.71x + 41.5)x dx} = 6.31 \quad (5.2.1)$$

$$y_A(1) = \frac{\int_0^{1.5} (\frac{y-41.5}{-3.17} - \frac{y}{0.75}) y dy + \int_{1.5}^{3.2} (\frac{y-41.5}{-3.17} - \frac{y-12.83}{-5.6}) y dy + \int_{3.2}^{5.2} (\frac{y-41.5}{-3.17} - \frac{y-2.79}{0.24}) y dy}{\int_0^{1.7} 0.75x dx + \int_{1.7}^2 (0.24x + 2.79)x dx - \int_{1.7}^2 (-6.35x + 12.83)x dx + \int_2^{9.8} (0.24x + 2.79)x dx + \int_{9.8}^{11.2} (-3.71x + 41.5)x dx} = 2.02 \quad (5.2.2)$$

$$m_A(1) = \sigma \int_0^{1.7} 0.75x dx + \sigma \int_{1.7}^2 (0.24x + 2.79)x dx - \sigma \int_{1.7}^2 (-6.35x + 12.83)x dx + \sigma \int_2^{9.8} (0.24x + 2.79)x dx + \sigma \int_{9.8}^{11.2} (-3.71x + 41.5)x dx = 38.38\sigma \quad (5.2.3)$$

$$x_A(2) = \frac{\int_0^{1.7} 0.81x^2 dx + \int_{1.7}^{2.2} (-2.77x + 6.01)x dx}{\int_0^{1.7} 0.81x dx + \int_{1.7}^{2.2} (-2.77x + 6.01)x dx} = 1.28 \quad (5.2.4)$$

$$y_A(2) = \frac{\int_0^{1.25} (\frac{y-7.26}{-3.3} - \frac{y-1.25}{-0.57}) y dy + \int_{1.25}^{1.67} (\frac{y-7.26}{-3.3} - \frac{y-1.25}{0.24}) y dy}{\int_0^{1.7} 0.81x dx + \int_{1.7}^{2.2} (-2.77x + 6.01)x dx} = 1.03 \quad (5.2.5)$$

$$m_A(2) = 2\sigma \int_0^{1.7} 0.81x dx + 2\sigma \int_{1.7}^{2.2} (-2.77x + 6.01)x dx = 2.95\sigma \quad (5.2.6)$$

A(3)和 A(4)版块的测量结果如图 4 所示，则其重心（质心）坐标与质量为计算如下

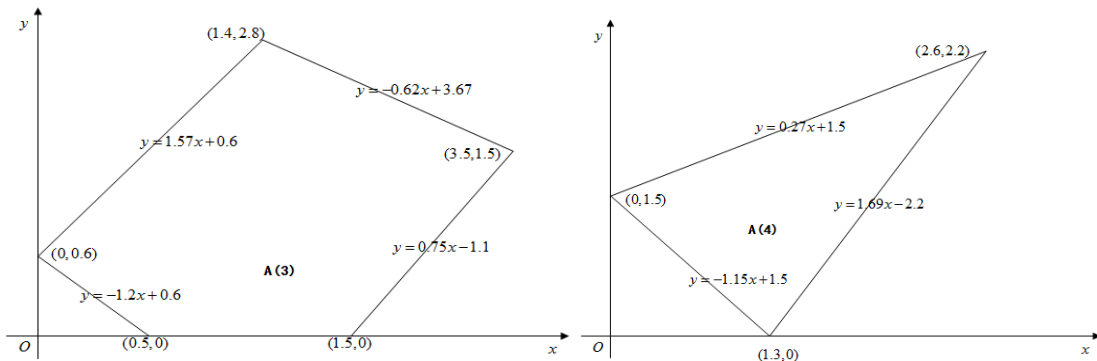


图 4 A(3)和 A(4)版块尺寸

$$x_A(3) = \frac{\int_0^{0.5} 2.77x^2 dx + \int_{0.5}^{1.4} (1.57x + 0.6)xdx + \int_{1.4}^{1.5} (-0.62x + 3.67)xdx + \int_{1.5}^{3.5} (-1.37x + 4.77)xdx}{\int_0^{0.5} 2.77xdx + \int_{0.5}^{1.4} (1.57x + 0.6)dx + \int_{1.4}^{1.5} (-0.62x + 3.67)dx + \int_{1.5}^{3.5} (-1.37x + 4.77)dx} = 1.58 \quad (5.2.7)$$

$$y_A(3) = \frac{\int_0^{0.6} (\frac{y+1.1}{0.75} - \frac{y-0.6}{-1.2})ydy + \int_{0.6}^{1.5} (\frac{y+1.1}{0.75} - \frac{y-0.6}{1.57})ydy + \int_{1.5}^{2.8} (\frac{y-3.67}{-0.62} - \frac{y-0.6}{1.57})ydy}{\int_0^{0.5} 2.77xdx + \int_{0.5}^{1.4} (1.57x + 0.6)dx + \int_{1.4}^{1.5} (-0.62x + 3.67)dx + \int_{1.5}^{3.5} (-1.37x + 4.77)dx} = 1.25 \quad (5.2.8)$$

$$m_A(3) = 3\sigma \int_0^{0.5} 2.77xdx + 3\sigma \int_{0.5}^{1.4} (1.57x + 0.6)dx + 3\sigma \int_{1.4}^{1.5} (-0.62x + 3.67)dx + 3\sigma \int_{1.5}^{3.5} (-1.37x + 4.77)dx = 15.59\sigma \quad (5.2.9)$$

$$x_A(4) = \frac{\int_0^{1.3} 1.42x^2 dx + \int_{1.3}^{2.2} (-1.42x + 3.7)xdx}{\int_0^{1.3} 1.42xdx + \int_{1.3}^{2.2} (-1.42x + 3.7)dx} = 1.25 \quad (5.2.10)$$

$$y_A(4) = \frac{\int_0^{1.5} (\frac{y+2.2}{1.69} - \frac{y-1.5}{-1.15})ydy + \int_{1.5}^{2.8} (\frac{y+2.2}{1.69} - \frac{y-1.5}{0.27})ydy}{\int_0^{1.3} 1.42xdx + \int_{1.3}^{2.2} (-1.42x + 3.7)dx} = 1.03 \quad (5.2.11)$$

$$m_A(4) = 4\sigma \int_0^{1.3} 1.42xdx + 4\sigma \int_{1.3}^{2.2} (-1.42x + 3.7)dx = 9.17\sigma \quad (5.2.12)$$

A(5)和 A(6)版块的测量结果如图 5 所示, 则其重心(质心)坐标与质量为计算如下

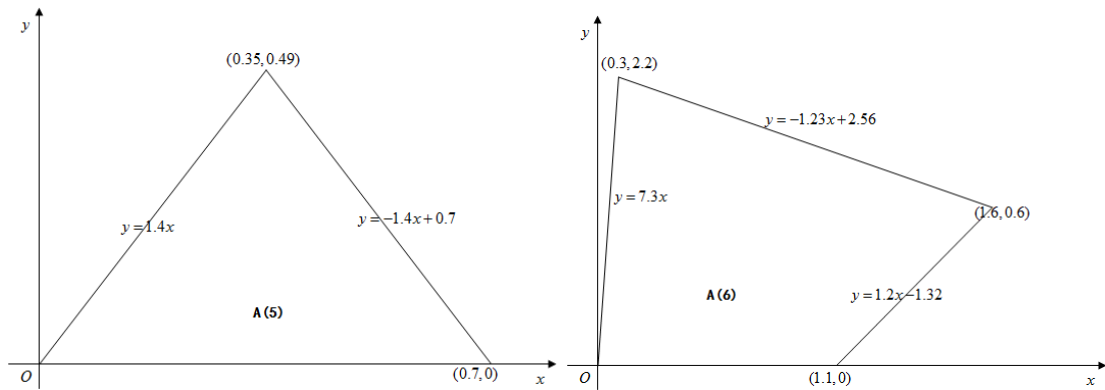


图 5 A(5)和 A(6)版块尺寸

$$x_A(5) = \frac{\int_0^{0.35} 1.4x^2 dx + \int_{0.35}^{0.7} (-1.4x + 0.98)xdx}{\int_0^{0.35} 1.4xdx + \int_{0.35}^{0.7} (-1.4x + 0.98)dx} = 0.35 \quad (5.2.13)$$

$$y_A(5) = \frac{\int_0^{0.49} (\frac{y-0.98}{-1.4} - \frac{y}{1.4}) y dy}{\int_0^{0.35} 1.4x dx + \int_{0.35}^{0.7} (-1.4x + 0.98) dx} = 0.16 \quad (5.2.14)$$

$$m_A(5) = 5\sigma \int_0^{0.35} 1.4x dx + 5\sigma \int_{0.35}^{0.7} (-1.4x + 0.98) dx = 0.86\sigma \quad (5.2.15)$$

$$x_A(6) = \frac{\int_0^{0.3} 7.3x^2 dx + \int_{0.3}^{1.1} (-1.23x + 2.56)x dx + \int_{1.1}^{1.6} (-2.43x + 3.88)x dx}{\int_0^{0.3} 7.3x dx + \int_{0.3}^{1.1} (-1.23x + 2.56) dx + \int_{1.1}^{1.6} (-2.43x + 3.88) dx} = 0.68 \quad (5.2.16)$$

$$y_A(6) = \frac{\int_0^{0.6} (\frac{y+1.32}{1.2} - \frac{y}{7.3}) y dy + \int_{0.6}^{2.2} (\frac{y-2.56}{-1.23} - \frac{y}{7.3}) y dy}{\int_0^{0.3} 7.3x dx + \int_{0.3}^{1.1} (-1.23x + 2.56) dx + \int_{1.1}^{1.6} (-2.43x + 3.88) dx} = 0.81 \quad (5.2.17)$$

$$m_A(6) = 6\sigma \int_0^{0.3} 7.3x dx + 6\sigma \int_{0.3}^{1.1} (-1.23x + 2.56) dx + 6\sigma \int_{1.1}^{1.6} (-2.43x + 3.88) dx = 11.92\sigma \quad (5.2.18)$$

A(8)版块的测量结果如图 6 所示，则其重心（质心）坐标与质量为计算如下

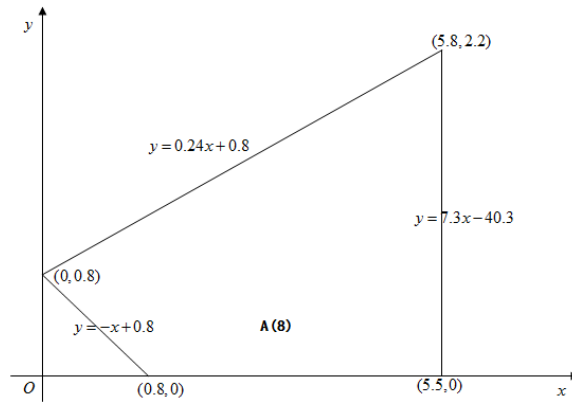


图 6 A(8)版块尺寸

$$x_A(8) = \frac{\int_0^{0.8} 1.24x^2 dx + \int_{0.8}^{5.5} (0.24x + 0.8)x dx + \int_{5.5}^{5.8} (-7.06x + 41.1)x dx}{\int_0^{0.8} 1.24x dx + \int_{0.8}^{5.5} (0.24x + 0.8) dx + \int_{5.5}^{5.8} (-7.06x + 41.1) dx} = 3.39 \quad (5.2.19)$$

$$y_A(8) = \frac{\int_0^{0.8} (\frac{y+40.3}{7.3} - \frac{y-0.8}{-1}) y dy + \int_{0.8}^{2.2} (\frac{y+40.3}{7.3} - \frac{y-0.8}{0.24}) y dy}{\int_0^{0.8} 1.24x dx + \int_{0.8}^{5.5} (0.24x + 0.8) dx + \int_{5.5}^{5.8} (-7.06x + 41.1) dx} = 0.83 \quad (5.2.20)$$

$$m_A(8) = 8\sigma \int_0^{0.8} 1.24x dx + 8\sigma \int_{0.8}^{5.5} (0.24x + 0.8) dx + 8\sigma \int_{5.5}^{5.8} (-7.06x + 41.1) dx = 64.59\sigma \quad (5.2.21)$$

将机身平面（ xO_3y 平面）内各版块的重心（质心）坐标统一在图 1 所示的坐标

系中有

$\mathbf{A}(1) = (14.81, 2.02, 0, 38.38)$ $\mathbf{A}(2) = (9.87, 1.03, 0, 2.95)$ $\mathbf{A}(3) = (8.68, 1.25, 0, 15.59)$
 $\mathbf{A}(4) = (6.95, 1.63, 0, 9.17)$ $\mathbf{A}(5) = (7.05, 0.16, 0, 0.86)$ $\mathbf{A}(6) = (6.18, 0.81, 0, 11.92)$
 $\mathbf{A}(8) = (3.89, 0.83, 0, 64.59)$

其中前三个坐标为重心（质心）的位置坐标，第四个坐标为对应版块的质量坐标（真实的质量还要乘以 A4 纸的质量面密度 σ ）

5.2.2 机翼平面（ xO_3z 平面）各版块重心（质心）坐标计算

同样为了方便测量及计算，机翼处各版块的坐标原点不尽相同，问题均在第一象限内讨论， $\mathbf{B}(1)$ 和 $\mathbf{B}(3)$ 版块的测量结果如图 7 所示，则其重心（质心）坐标与质量计算如下

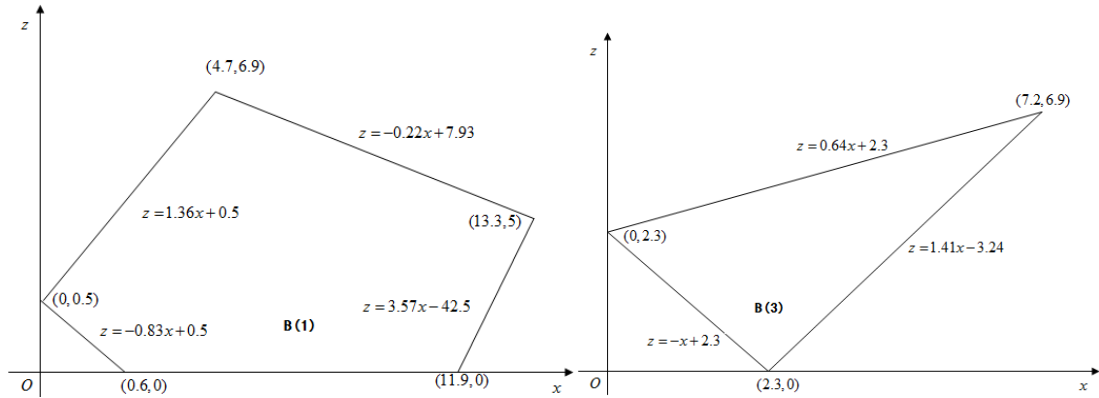


图 7 $\mathbf{B}(1)$ 和 $\mathbf{B}(3)$ 版块尺寸

$$x_B(1) = \frac{\int_0^{0.6} 2.19x^2 dx + \int_{0.6}^{4.7} (1.36x + 0.5)xdx + \int_{4.7}^{11.9} (-0.22x + 7.93)xdx + \int_{11.9}^{13.3} (-3.79x + 50.43)xdx}{\int_0^{0.6} 2.19xdx + \int_{0.6}^{4.7} (1.36x + 0.5)dx + \int_{4.7}^{11.9} (-0.22x + 7.93)dx + \int_{11.9}^{13.3} (-3.79x + 50.43)dx} = 7.04 \quad (5.2.22)$$

$$z_B(1) = \frac{\int_0^{0.5} (\frac{z+42.5}{3.57} - \frac{z-0.5}{-0.83})zdz + \int_{0.5}^5 (\frac{z+42.5}{3.57} - \frac{z-0.5}{1.36})zdz + \int_5^{6.9} (\frac{z-7.93}{-0.22} - \frac{z-0.5}{1.36})zdz}{\int_0^{0.6} 2.19xdx + \int_{0.6}^{4.7} (1.36x + 0.5)dx + \int_{4.7}^{11.9} (-0.22x + 7.93)dx + \int_{11.9}^{13.3} (-3.79x + 50.43)dx} = 2.89 \quad (5.2.23)$$

$$m_B(1) = \sigma \int_0^{0.6} 2.19xdx + \sigma \int_{0.6}^{4.7} (1.36x + 0.5)dx + \sigma \int_{4.7}^{11.9} (-0.22x + 7.93)dx + \sigma \int_{11.9}^{13.3} (-3.79x + 50.43)dx = 64.92\sigma \quad (5.2.24)$$

$$x_B(3) = \frac{\int_0^{2.3} 1.64x^2 dx + \int_{2.3}^{7.2} (-0.77x + 5.54)xdx}{\int_0^{2.3} 1.64xdx + \int_{2.3}^{7.2} (-0.77x + 5.54)dx} = 3.16 \quad (5.2.25)$$

$$z_B(3) = \frac{\int_0^{2.3} (\frac{z+3.24}{1.41} - \frac{z-2.3}{-1})zdz + \int_{2.3}^{6.9} (\frac{z+3.24}{1.41} - \frac{z-2.3}{0.64})zdz}{\int_0^{2.3} 1.64xdx + \int_{2.3}^{7.2} (-0.77x + 5.54)dx} = 3.07 \quad (5.2.26)$$

$$m_B(3) = 3\sigma \int_0^{2.3} 1.64x dx + 3\sigma \int_{2.3}^{7.2} (-0.77x + 5.54) dx = 40.69\sigma \quad (5.2.27)$$

另一个重叠为三层的 **B₁(3)** 版块和 **B(5)** 版块的测量结果如图 8 所示, 则其重心(质心)坐标与质量计算如下

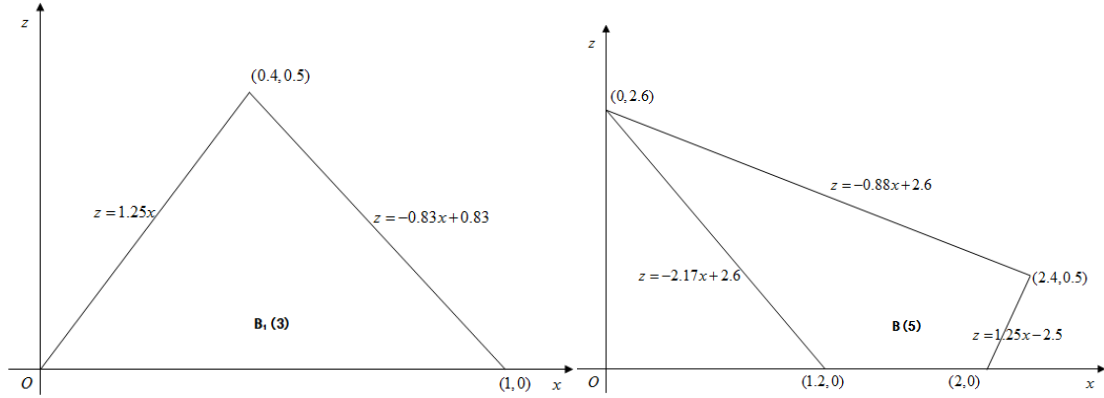


图 8 **B₁(3)**和 **B(5)**版块尺寸

$$x_{B_1}(3) = \frac{\int_0^{0.4} 1.25x^2 dx + \int_{0.4}^1 (-0.83x + 0.83)x dx}{\int_0^{0.4} 1.25x dx + \int_{0.4}^1 (-0.83x + 0.83) dx} = 0.47 \quad (5.2.28)$$

$$z_{B_1}(3) = \frac{\int_0^{0.5} (-2.08z + 0.83)z dz}{\int_0^{0.4} 1.25x dx + \int_{0.4}^1 (-0.83x + 0.83) dx} = 0.07 \quad (5.2.29)$$

$$m_{B_1}(3) = 3\sigma \int_0^{0.4} 1.25x dx + 3\sigma \int_{0.4}^1 (-0.83x + 0.83) dx = 0.75\sigma \quad (5.2.30)$$

$$x_B(5) = \frac{\int_0^{1.2} 1.29x^2 dx + \int_{1.2}^2 (-0.88x + 2.6)x dx + \int_2^{2.4} (-2.13x + 5.1)x dx}{\int_0^{1.2} 1.29x dx + \int_{1.2}^2 (-0.88x + 2.6) dx + \int_2^{2.4} (-2.13x + 5.1) dx} = 1.26 \quad (5.2.31)$$

$$z_B(5) = \frac{\int_0^{0.5} \left(\frac{z+2.5}{1.25} - \frac{z-2.6}{-2.17} \right) z dz + \int_{0.5}^{2.6} \left(\frac{z-2.6}{-0.88} - \frac{z-2.6}{-2.17} \right) z dz}{\int_0^{1.2} 1.29x dx + \int_{1.2}^2 (-0.88x + 2.6) dx + \int_2^{2.4} (-2.13x + 5.1) dx} = 0.8 \quad (5.2.32)$$

$$m_B(5) = 5\sigma \int_0^{1.2} 1.29x dx + 5\sigma \int_{1.2}^2 (-0.88x + 2.6) dx + 5\sigma \int_2^{2.4} (-2.13x + 5.1) dx = 10.24\sigma \quad (5.2.33)$$

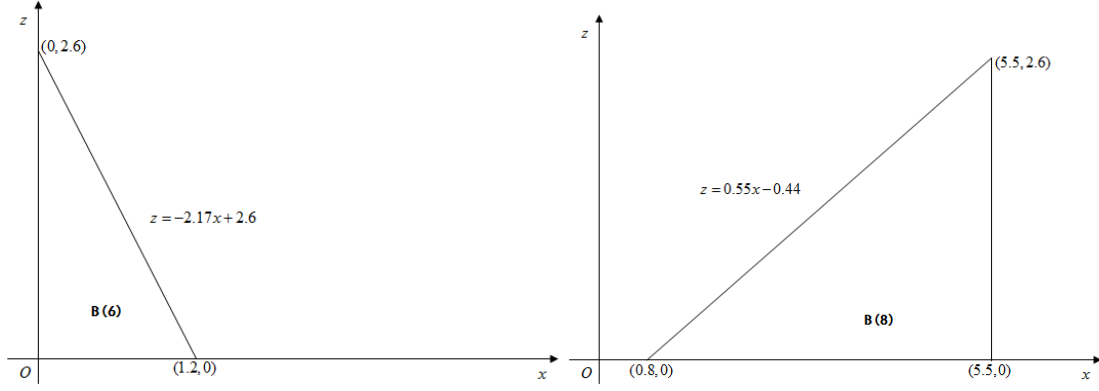


图 9 B(6)和 B(8)版块尺寸

B(6)和 B(8)版块的测量结果如图 8 所示，则其重心（质心）坐标与质量计算如下

$$x_B(6) = \frac{\int_0^{1.2} (-2.17x + 2.6)xdx}{\int_0^{1.2} (-2.17x + 2.6)dx} = 0.4 \quad (5.2.34)$$

$$z_B(6) = \frac{\int_0^{2.6} \frac{z-2.6}{-2.17} z dz}{\int_0^{1.2} (-2.17x + 2.6)dx} = 0.87 \quad (5.2.35)$$

$$m_B(6) = 6\sigma \int_0^{1.2} (-2.17x + 2.6)dx = 9.35\sigma \quad (5.2.35)$$

$$x_B(8) = \frac{\int_{0.8}^{5.5} (0.55x - 0.44)xdx}{\int_{0.8}^{5.5} (0.55x - 0.44)dx} = 3.9 \quad (5.2.36)$$

$$z_B(8) = \frac{\int_0^{2.6} \frac{z+0.44}{0.55} z dz}{\int_{0.8}^{5.5} (0.55x - 0.44)dx} = 2.2 \quad (5.2.37)$$

$$m_B(8) = 8\sigma \int_{0.8}^{5.5} (0.55x - 0.44)dx = 48.6\sigma \quad (5.2.38)$$

以上所有式子的积分计算详见附录 1，将机翼平面（ xO_3z 平面）内各版块的重心

（质心）坐标统一在图 1 所示的坐标系中有

B(1)= (15.04,0,2.89,64.92) **B(3)**= (8.66,0,3.57,40.69) **B₁(3)**= (7.57,0,0.07,0.75)

B(5)= (6.76,0,0.8,10.24) **B(6)**= (5.9,0,0.87,9.35) **B(8)**= (3.9,0,2.2,48.6)

同上，其中前三个坐标为重心（质心）的位置坐标，第四个坐标为对应版块的质量坐标（真实的质量还要乘以 A4 纸的质量面密度 σ ）

5.2.3 Suzanne 纸飞机重心（质心）坐标计算

Suzanne 纸飞机各版块的坐标已经计算出来，接下来可按质点系的重心（质心）计算出纸飞机的重心（质心）坐标位置，各版块的位置如下图 9 所示

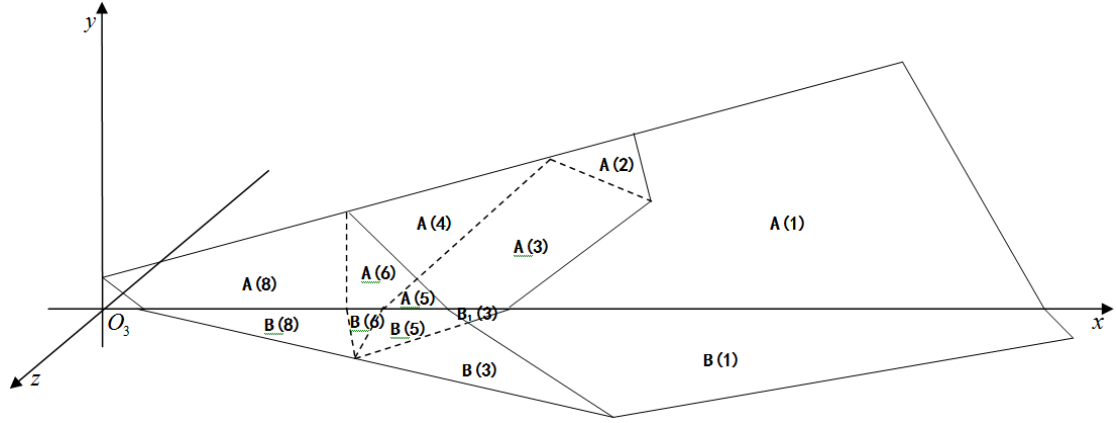


图 10 机身版块分割示意图

机身平面（ xO_3y 平面）重心（质心）坐标计算如下

$$x_c(A) = \frac{x_A(1)m_A(1) + x_A(2)m_A(2) + x_A(3)m_A(3) + x_A(4)m_A(4) + x_A(6)m_A(6) + x_A(8)m_A(8)}{m_A(1) + m_A(2) + m_A(3) + m_A(4) + m_A(5) + m_A(6) + m_A(8)}$$

$$y_c(A) = \frac{y_A(1)m_A(1) + y_A(2)m_A(2) + y_A(3)m_A(3) + y_A(4)m_A(4) + y_A(6)m_A(6) + y_A(8)m_A(8)}{m_A(1) + m_A(2) + m_A(3) + m_A(4) + m_A(5) + m_A(6) + m_A(8)}$$

带入数据计算得到

$$x_c(A) = 7.86, y_c(A) = 1.24 \quad (5.2.39)$$

考虑镜像对称性（机身总质量应该为上式计算结果的两倍）可得机身版块（ xO_3y 平面）重心（质心）坐标为

$$A = (7.86, 1.24, 0, 286.92) \quad (5.2.40)$$

同理，机翼平面（ xO_3z 平面）重心（质心）坐标计算如下

$$x_c(B) = \frac{x_B(1)m_B(1) + x_B(3)m_B(3) + x_{B_1}(3)m_{B_1}(3) + x_B(5)m_B(5) + x_B(6)m_B(6) + x_B(8)m_B(8)}{m_B(1) + m_B(3) + m_{B_1}(3) + m_B(5) + m_B(6) + m_B(8)}$$

$$z_c(B) = \frac{z_B(1)m_B(1) + z_B(3)m_B(3) + z_{B_1}(3)m_{B_1}(3) + z_B(5)m_B(5) + z_B(6)m_B(6) + z_B(8)m_B(8)}{m_B(1) + m_B(3) + m_{B_1}(3) + m_B(5) + m_B(6) + m_B(8)}$$

带入数据计算得到

$$x_c(B) = 9.44, z_c(B) = 2.61 \quad (5.2.41)$$

机翼平面（ xO_3z 平面）重心（质心）坐标为

$$B_+ = (9.44, 0, 2.16, 174.55) \quad (5.2.42)$$

考虑到对称性，在 z 轴负半轴的机翼重心（质心）坐标为

$$B_- = (9.44, 0, -2.16, 174.55) \quad (5.2.43)$$

联立（5.2.42）（5.2.43）可得两个机翼平面的重心（质心）坐标为

$$B = (9.44, 0, 0, 349.1) \quad (5.2.44)$$

联立（5.2.40）（5.2.44）可得 suzanne 纸飞机的重心（质心）坐标为

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_c(A)m_A + x_c(B)m_B}{m_A + m_B} = 8.73 \\ y_c &= \frac{y_c(A)m_A + y_c(B)m_B}{m_A + m_B} = 0.56 \end{aligned} \quad (5.2.45)$$

也可写为

$$G = (8.73, 0.56, 0, 636.02) \quad (5.2.46)$$

其中第 4 个坐标为质量坐标，纸飞机的总质量为 636.02σ 也就是 A4 纸张的总质量，其重心（质心）位置如图 10 所

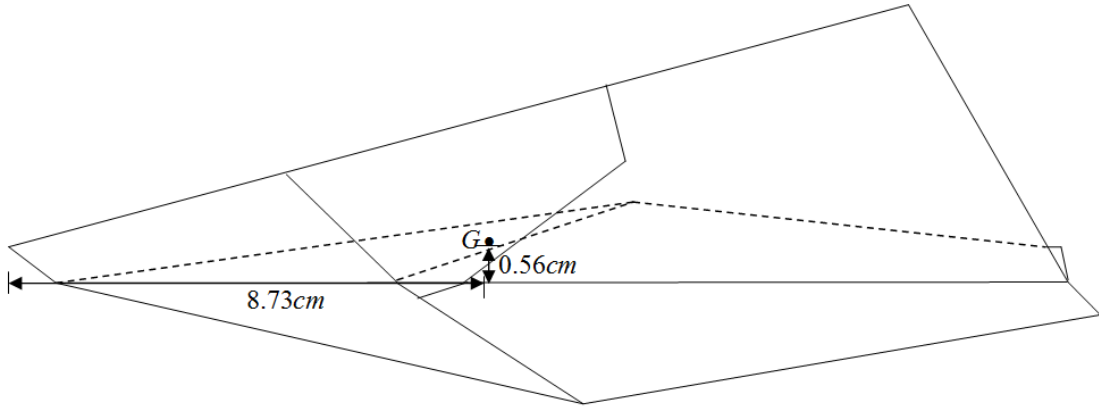


图 11 Suzanne 纸飞机质心位置

5.3 Suzanne 纸飞机上升段的运动学方程

气流对某一面积的作用力可用动量定理来计算，如图 12 所示，流速为 v 空气密度为 ρ 的气体，在 Δt 时间内通过面积 s 的体积为 $sv\Delta t$ ，假设气流冲击后的速度减为零则有 $\rho v^2 s \Delta t = f \Delta t$ 即冲击力

$$f = \rho v^2 s \quad (5.3.1)$$

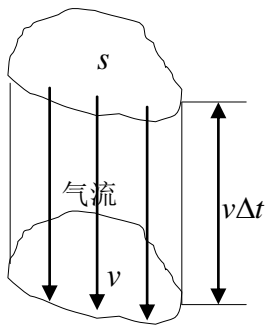


图 12 冲击计算

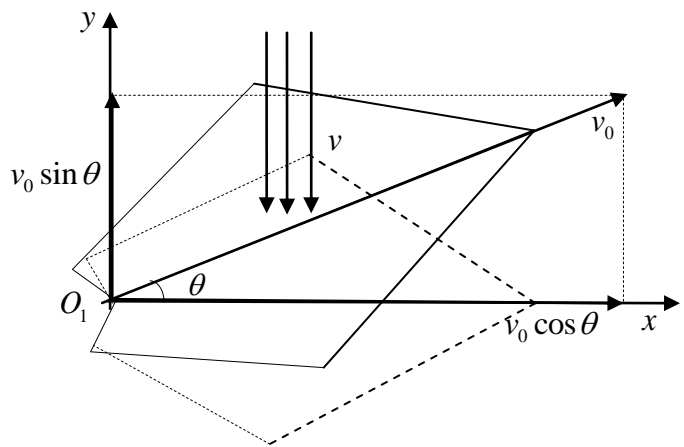


图 13 仰角

5.3.1 Suzanne 纸飞机上升段竖直方向的运动学方程 $y_1(\theta, t)$

如图 13 所示，设 Suzanne 纸飞机两个机翼面积为 S ，在上升段的其在水平面上的投影为 $S \cos \theta$ ，则其在上升段受到的竖直冲击力为 $F_y = \rho k_y v_y^2 S \cos \theta$ 故有

$$\rho k_y v_y^2 S \cos \theta + mg = -m \frac{dv_y}{dt} \quad (5.3.2)$$

其中 m 为纸飞机的质量，分离变量后得

$$-\int_0^t dt = \int_{v_0 \sin \theta}^{v_{y_1}(t)} \frac{mdv_y}{\rho S \cos \theta k_y v_y^2 + mg} \quad (5.3.3)$$

其中 $t \in [0, t_1]$ ， t_1 为 Suzanne 纸飞机从脱手到上升到最大高度所花的时间，积分后得到

$$v_{y_1}(t) = \frac{A - B \tan(bt)}{B + A \tan(bt)} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.4)$$

其中 $A = v_0 \sin \theta$ ， $B = \sqrt{\frac{mg}{\rho S k_y \cos \theta}}$ ， $b = \sqrt{\frac{\rho g S k_y \cos \theta}{m}}$ ， $t_1 = \frac{1}{b} \arctan \frac{A}{B}$ 该式为上升段

竖直方向上的速度与时间关系，(5.3.4) 式子又可以写为 $\frac{dy}{dt} = \frac{A - B \tan(bt)}{B + A \tan(bt)}$ ，两

边同时做定积分可得

$$\int_0^{y_1(\theta, t)} dy = \int_0^t \frac{A - B \tan(bt)}{B + A \tan(bt)} dt \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.5)$$

即

$$y_1(\theta, t) = \frac{1}{b} \ln[B + A \tan(bt)] - \frac{1}{2b} \ln[\tan^2(bt) + 1] - \frac{1}{b} \ln B \quad t \in [0, t_1] \text{ 代入化简得到}$$

$$y_1(\theta, t_1) = \frac{1}{2b} \ln\left(\frac{A^2}{B^2} + 1\right) \quad (5.3.6)$$

(5.3.6) 式就是 Suzanne 纸飞机上升段竖直方向上的运动学方程，即上升段的竖直增加高度

$$y_0 = y_1(\theta, t_1) \quad (5.3.7)$$

5.3.2 Suzanne 纸飞机上升段水平方向的运动学方程 $x_1(\theta, t)$

如图 14 所示，上升段的 Suzanne 受到水平流速 v 的影响，机翼在竖直方向上的投影为 $S \cos \theta$ ，同理可得其在上升段受到的水平冲击力（阻力）为

$$F_x = \rho k_x v_x^2 S \sin \theta$$

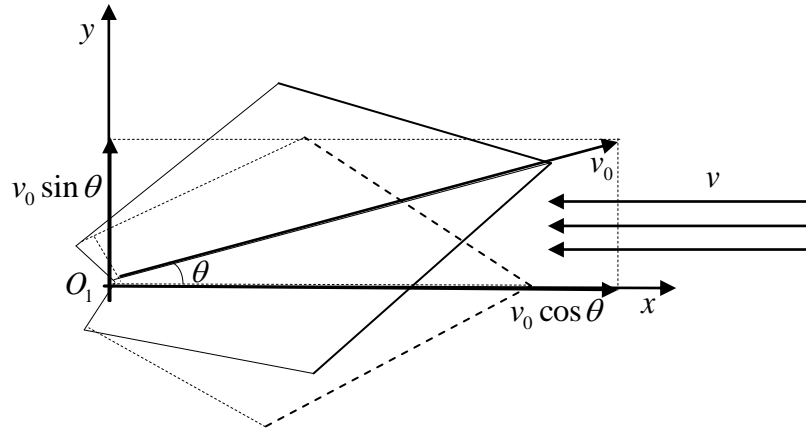


图 14 水平气流作用

故由牛顿运动定理有

$$\rho k_x v_x^2 S \sin \theta = -m \frac{dv_x}{dt} \quad (5.3.8)$$

对式子 (5.3.7) 分离变量后两边同时做定积分有

$$-\int_0^t dt = \int_{v_0 \cos \theta}^{v_{x_1}(t)} \frac{mdv_x}{\rho k_x v_x^2 S \sin \theta} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.9)$$

该式子积分得到

$$v_{x_1}(t) = \frac{CD}{C + Dt} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.10)$$

其中 $C = \frac{m}{\rho k_x S \sin \theta}$, $D = v_0 \cos \theta$, 该式为 Suzanne 纸飞机上升段水平速度与时间的关系, 固有

$$v_{x_1}(t_1) = v_{x_2}(t_1) \quad (5.3.11)$$

其中 $v_{x_2}(t_1)$ 为下降段的初速度, 即上升段的末速度为下降段的初速度, 速度在最高点处是连续的, (5.3.10) 式也可以表达为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{CD}{C + Dt} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.12)$$

对 (5.3.12) 式分离变量后两边同时做定积分有

$$\int_0^{x_1(\theta, t)} dx = \int_0^t \frac{CD}{C + Dt} dt \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.13)$$

积分后得到

$$x_1(\theta, t) = C \ln\left(\frac{C + Dt}{C}\right) \quad t \in [0, t_1] \quad (5.3.14)$$

其中, 同理 (5.3.7) 可得上升段的水平距离为

$$x_0 = x_1(\theta, t_1) \quad (5.3.15)$$

5.4 Suzanne 纸飞机下降段的运动学方程

可以推测，创下吉尼斯世界纪录的 Suzanne 纸飞机能够根据自身的结构在到达最高点后很短的时间内将飞行姿势调整为水平（文中假设飞行姿势在最高点处对时间不可导），该过程用时的长短可以用来衡量纸飞机结构（折法）的优劣，是后面能否平稳滑翔的关键所在，是飞行距离的主要影响因素之一。下降又分为下降加速段与下降（近）匀速段（对于飞行高度低，质量大或者结构不合理的纸飞机可能不存在这一阶段）

5.4.1 Suzanne 纸飞机下降段竖直方向的运动学方程 $y_2(\theta, t)$

在 Suzanne 纸飞机在最高点时已经通过自身的结构将机身调整为水平飞行姿势，（或者飞行仰角变化可以忽略不计），下降段的空间尺寸以及机体的俯视受力图如图 5 所示

气流对机翼的作用力 F 完全可以平衡机体自身的重力 G 这是纸飞机的特点，故在下降开始一段时间后纸飞机将近匀速直线下降（注意机身是保持水平姿势的），在下降第一阶段是加速下降的，由牛顿运动方程可得

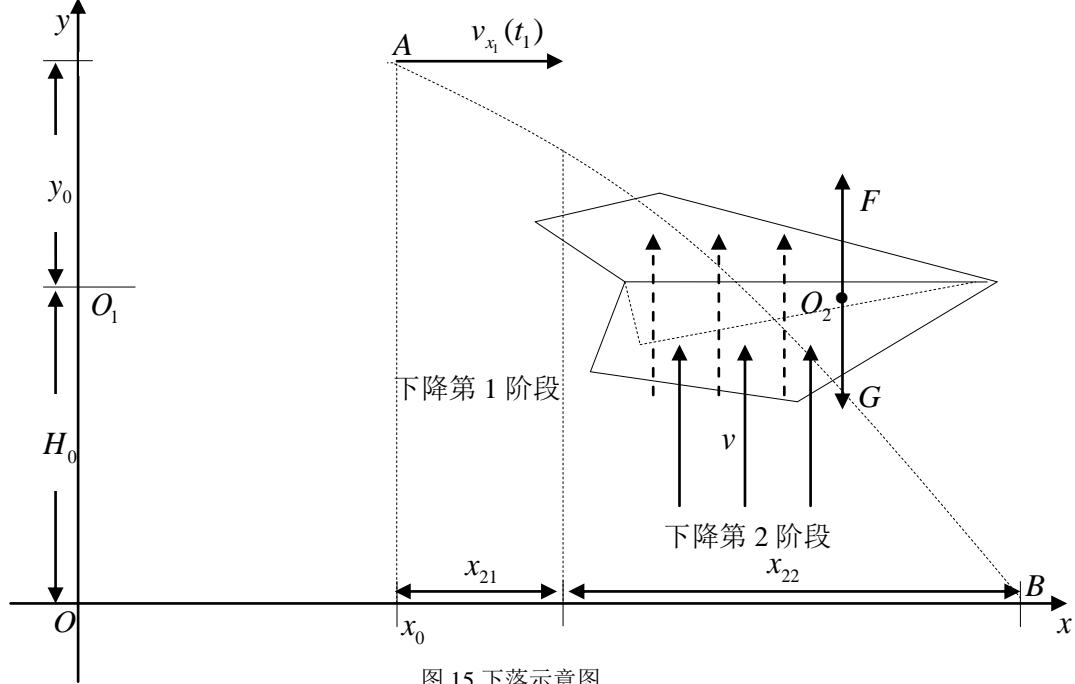


图 15 下落示意图

$$mg - k_y \rho v^2 S = m \frac{dv_y}{dt} \quad (5.4.1)$$

对 (5.4.1) 式分离变量后两边同时做定积分得到

$$\int_0^t dt = \int_0^{v_{y2}(t)} \frac{mdv}{mg - k_y \rho S v^2} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.2)$$

其中 $v_{y21}(t)$ 为下降第一阶段竖直方的速度时间函数， t_2 为纸飞下落阶段的时间

$$v_{y_2}(t) = \frac{e^{2Et} - 1}{e^{2Et} + 1} v_{y\max} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.3)$$

其中 $E = \sqrt{\frac{\rho S g k_y}{m}}$, $v_{y\max} = \sqrt{\frac{mg}{k_y \rho S}}$ 为下落阶段竖直方向的终极速度, 从数学上只能无限接近不能到达, 可以从下落的高度得到 t_2 由位移对时间的导数为速度 (5.4.3) 又可以写为下式子

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2Et} - 1}{e^{2Et} + 1} v_{y\max} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.4)$$

对该式分离变量后两边同时做定积分得到

$$\int_0^{y_2(\theta, t)} dy = \int_0^t \frac{e^{2Et} - 1}{e^{2Et} + 1} v_{y\max} dt \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.5)$$

得到下降阶段的竖直方向的运动学方程

$$y_2(\theta, t) = \frac{v_{y\max}}{E} \ln(e^{2Et} + 1) - v_{y\max} t \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.6)$$

当 $t = t_2$ 时 Suzanne 纸飞机落地, 故有

$$y_2(\theta, t_2) = H_0 + y_0 \quad (5.4.7)$$

将 (5.3.7) 代入 (5.4.7) 有

$$\frac{v_{y\max}}{E} \ln(e^{2Et_2} + 1) - v_{y\max} t_2 = H_0 + \frac{1}{2b} \ln\left(\frac{A^2}{B^2} + 1\right) \quad (5.4.8)$$

即 Suzanne 纸飞机下落阶段的时间 t_2 满足 (5.4.8), 但是 (5.4.8) 式不能分离出 t_2

5.4.2 Suzanne 纸飞机下降段水平方向的运动学方程 $x_2(\theta, t)$

Suzanne 纸飞机下落阶段一定能较好的保持水平的飞行姿势 (这是纸飞机是否能飞得远的关键因素), 因此几乎不受水平阻力的影响, 在水平方向上以 $v_{x_1}(t_1)$ 做匀速直线运动。因此下降阶段的水平速度时间函数为

$$v_{x_2}(t) = v_{x_1}(t_1) \quad (5.4.9)$$

对 (5.4.9) 式子两边积分得到下降阶段水平方向上的运动学方程

$$x_2(\theta, t) = v_{x_1}(t_1) t \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.10)$$

代入 (5.3.10) 得

$$x_2(\theta, t) = \frac{CDt}{C + Dt_1} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.4.11)$$

因此下落段的水平距离为

$$x_1 = x_2(\theta, t_2) \quad (5.4.12)$$

最终 Suzanne 纸飞机的水平飞行距离为上升段水平距离加下落段水平距离

$$L(\theta) = x_1(\theta, t_1) + x_2(\theta, t_2) \quad (5.4.13)$$

代入 (5.3.13)、(5.3.10)、(5.3.11) 到 (5.4.12) 有

$$L(\theta) = C \ln \frac{C + Dt_1}{C} + \frac{CDt_2}{C + Dt_1} \quad (5.4.14)$$

5.5 问题一冲击模型的修改

5.5.1 上升段竖直方向运动学方程 $y_1(\theta, t)$ 的修改

$$kv_y + mg = -m \frac{dv_y}{dt} \quad (5.5.1)$$

式子 (5.5.1) 分离变量后两边同时积分

$$-\int_0^t dt = \int_{v_0 \sin \theta}^{v_{y1}(t)} \frac{mdv_y}{kv_y + mg} \quad (5.5.2)$$

得到

$$v_{y1}(\theta, t) = (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.3)$$

由 $v_{y1}(\theta, t_1) = 0$ 得到上升段时间

$$t_1 = \frac{m}{k} \ln(1 + \frac{kv_0 \sin \theta}{mg}) \quad (5.5.4)$$

式子 (5.5.3) 又可以写为

$$\frac{dy}{dt} = (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.5)$$

式子 (5.5.5) 分离变量后两边同时积分

$$\int_0^{y_1(\theta, t)} dy = \int_0^t [(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}] dt \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.6)$$

得到

$$y_1(\theta, t) = \frac{m}{k} (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.7)$$

其中 $y_1(\theta, t_1)$ 为上升段的数值位移, 即上升高度

5.5.2 上升段水平方向运动学方程 $x_1(\theta, t)$ 的修改

$$kv_x = -m \frac{dv_x}{dt} \quad (5.5.8)$$

(5.5.8) 式分离变量后积分有

$$-\int_0^t dt = \int_{v_0 \cos \theta}^{v_{x1}(\theta, t)} \frac{mdv_x}{kv_x} \quad (5.5.9)$$

得到

$$v_{x1}(\theta, t) = v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.10)$$

且有

$$v_{x1}(\theta, t_1) = v_{x2}(\theta, 0) \quad (5.5.11)$$

(5.5.10) 式又可以改写为

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t} \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.12)$$

分离变量后两边同时积分得到

$$\int_0^{x_1(\theta, t)} dx = \int_0^t v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t} dt \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.13)$$

化简得到

$$x_1(\theta, t) = \frac{mv_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad t \in [0, t_1] \quad (5.5.14)$$

其中 $x_1(\theta, t_1)$ 为上升段的水平位移

5.5.3 下落段竖直方向运动学方程的修改

$$mg - kv_y = m \frac{dv_y}{dt} \quad (5.5.15)$$

(5.5.15) 分离变量后两边同时积分得到

$$\int_0^t dt = \int_0^{v_{y2}(\theta, t)} \frac{mdv_y}{mg - kv_y} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.16)$$

其中 t_2 为下落段的总时间，积分得下落段竖直方向的速度函数

$$v_{y2}(\theta, t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.17)$$

其中 $v_{y\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{mg}{k}$ 为修改后的下落极限速度，物理上无法到达

(5.5.17) 式又可以写为

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.18)$$

上式分离变量后两边同时积分得到

$$\int_0^{y_2(\theta, t)} dy = \int_0^t \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) dt \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.19)$$

即有下落段竖直方向的运动学方程为

$$y_2(\theta, t) = \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} t - \frac{m^2 g}{k^2} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.20)$$

其中下落段的时间 t_2 满足

$$y_2(\theta, t_2) = H_0 + y_1(\theta, t_1) \quad (5.5.21)$$

5.5.4 下落段水平方向运动学方程的 $x_2(\theta, t)$ 修改

下落段水平方向做匀速直线运动

$$v_{x_2}(\theta, t) = v_{x_2}(\theta, 0) = v_{x_1}(\theta, t_1) = \frac{mgv_0 \cos \theta}{mg + kv_0 \sin \theta} \quad (5.5.22)$$

从而有下落段的运动学方程为

$$x_2(\theta, t) = \frac{mgv_0 \cos \theta t}{mg + kv_0 \sin \theta} \quad t \in [0, t_2] \quad (5.5.23)$$

下落段的水平位移为

$$x_2(\theta, t_2) = \frac{mgv_0 \cos \theta t_2}{mg + kv_0 \sin \theta} \quad (5.5.24)$$

综上所述可得整个过程中修正后的水平位移为

$$L(\theta) = x_1(\theta, t_1) + x_2(\theta, t_2) \quad (5.5.25)$$

即

$$L(\theta) = \frac{mv_0^2 \sin \theta \cos \theta}{mg + kv_0 \sin \theta} + \frac{mgv_0 \cos \theta t_2}{mg + kv_0 \sin \theta} \quad (5.5.26)$$

六 数据处理与问题分析

6.1 问题 1 的分析及数据处理

式子 (5.5.26) 中含有 v_0, θ, k, t_2 ，但其是一个关于仰角 θ 的一个函数，其中的 v_0 和 k 可由试飞者在实验场地测试得到。

6.1.1 初速度 v_0 和阻尼系数 k 的实验测量

从视频中可以看出实验者以全力抛出纸飞机，为了测量出抛出纸飞机的初速度可以将一个较重的物体（如橡皮擦），从头顶以全力水平抛出（橡皮擦），测量出水平抛出的距离 s 从而根据平抛运动可得如下式子

$$H_0 = \frac{1}{2}gt^2 \quad (6.1.1)$$

$$s = v_0 t \quad (6.1.2)$$

其中 H_0 为实验者的升高，联立 (6.1.1) 和 (6.1.2) 可得实验者的抛出速度为

$$v_0 = s \sqrt{\frac{g}{2H_0}} \quad (6.1.3)$$

实验及测量如图 16 下所示

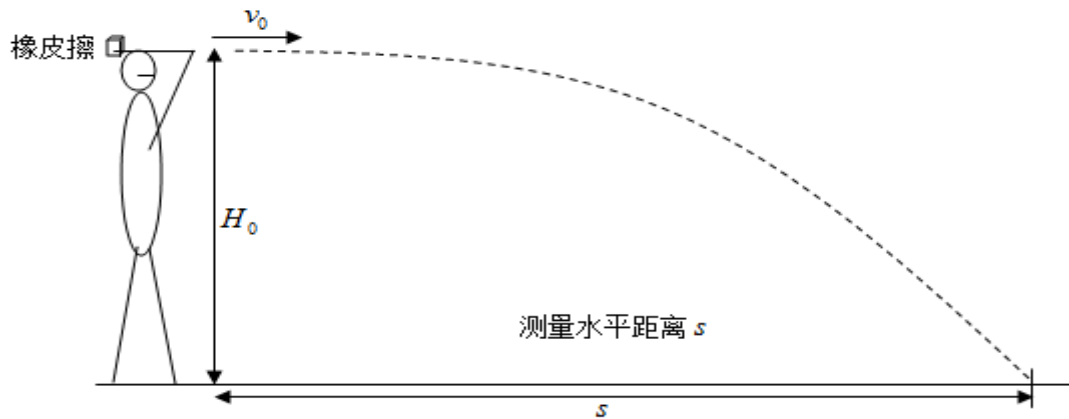


图 16 平抛测试 v_0 值示意图

通过笔者的测试成年人的抛出速度一般在 $15m/s \sim 25m/s$ 之间。

利用 (5.5.20) 式子可以测量出试飞场地的阻尼系数 k ， k 是一个与机翼面积，空气密度，等有关的一个数值，是气流与纸飞机综合作用的结果，对于仰角变化不大的情况下是一个常数，很难通过计算得到，一般可通过实验测量，测量方法如下，从头顶以任意的速度水平抛出纸飞机，测量飞机落地的时间 t 如图 17 所示，

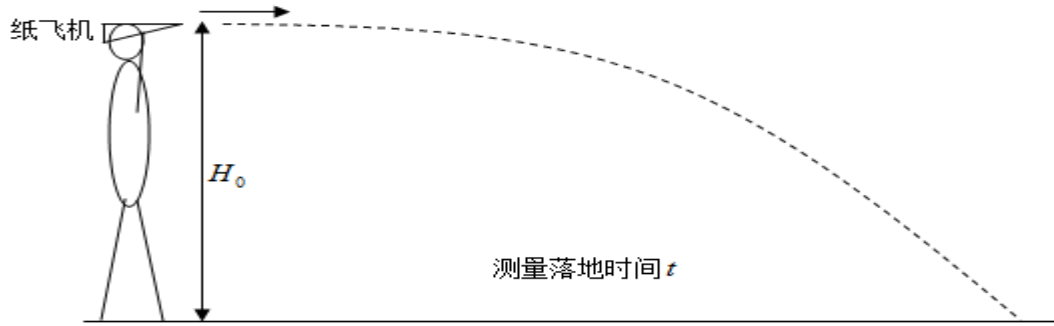


图 17 平抛测试 k 值示意图

带入 (5.5.20) 式即

$$\frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2} = H_0 \quad (6.1.4)$$

通过测试得到 $k \approx 0.0009 \text{ kg/s}$ ，不过 k 值对于时间的变化很敏感，而时间的测量误差较大，这就导致 k 值很难测量（准确）。

6.1.2 下落时间 t_2 的数值解分析

下落时间 t_2 由 (5.5.21) 式子决定，但是该式子无法得到解析解，在固定 k 的情况下等式的右边离散角度，等式的左边离散时间可以得到每个 k 值下不同仰角所对应的时间，如下图 18 所示，箭头所示的虚线路径为不同角度下落时间 t_2 的查找路径

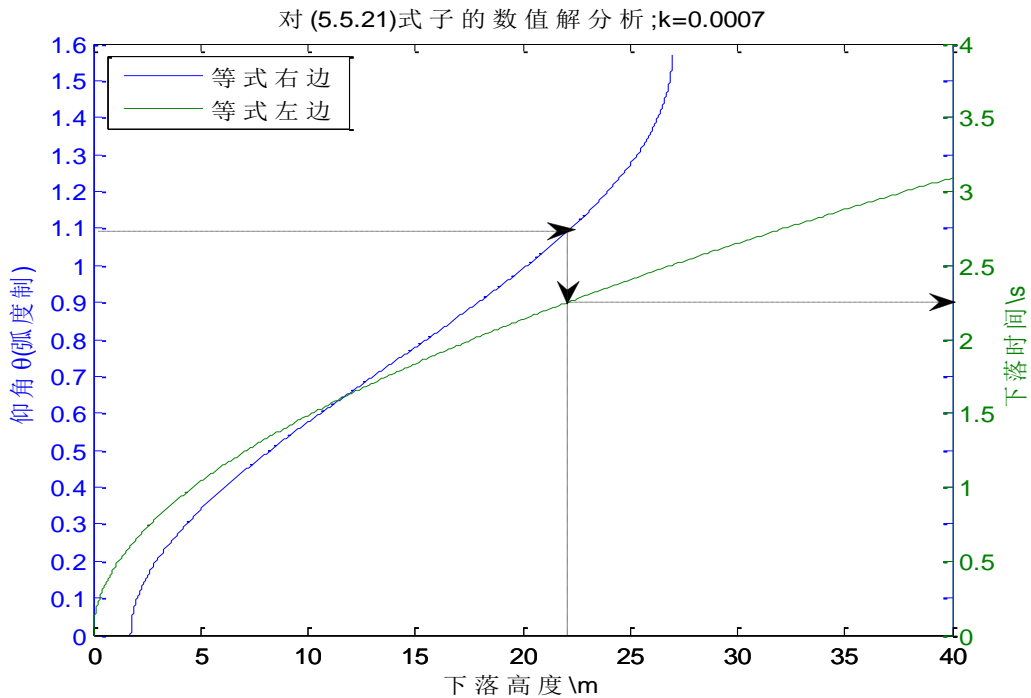


图 18 下落时间的查找路径示意图

可以看出仰角 θ 和下落时间 t_2 是一一对应的，也就是说 t_2 也是仰角 θ 的函数，函数图像如下图 19 所示，程序见附录

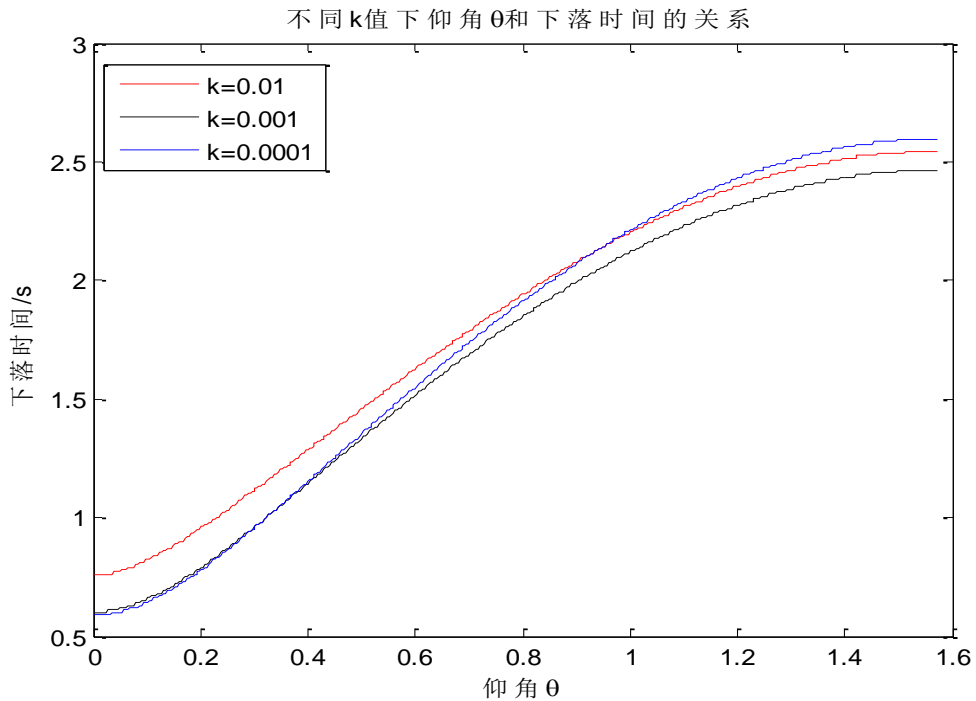


图 19 仰角与下落时间关系

由此可见，下落时间对于阻尼系数 k 的影响很小，而对于仰角的依赖很大，下表 2 为程序中从 500 个离散点中抽出的 10 组数据，很明显 t_2 是一组近似解。

表 2 t_2 的一组近似解 ($k = 0.0007$)

| θ / rad | y_1 / m | y_2 / m | t_2 / s |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| 0.0000 | 1.7500 | 1.7722 | 0.6112 |
| 0.1574 | 2.5015 | 2.5221 | 0.7315 |
| 0.3148 | 4.5710 | 4.5760 | 0.9920 |
| 0.4722 | 7.6280 | 7.6494 | 1.2926 |
| 0.6296 | 11.2994 | 11.3050 | 1.5832 |
| 0.7870 | 15.2011 | 15.1293 | 1.8437 |
| 0.9444 | 18.9650 | 18.9255 | 2.0741 |
| 1.1018 | 22.2611 | 22.3437 | 2.2645 |
| 1.2592 | 24.8153 | 24.8253 | 2.3948 |
| 1.4165 | 26.4228 | 26.4089 | 2.4749 |

现将 500 个数据点进行多项式拟合，拟合参数为下表 3 所示

表 3 拟合参数

| SSE | R-square | Adjusted R-square | RMSE |
|----------|----------|-------------------|----------|
| 0.007265 | 1 | 1 | 0.003835 |

拟合结果为

$$t_2(\theta) = -0.5522\theta^5 + 2.761\theta^4 - 5.573\theta^3 + 4.731\theta^2 + 0.22463\theta + 0.5898 \quad (6.1.5)$$

拟合曲线如下图 20 所示

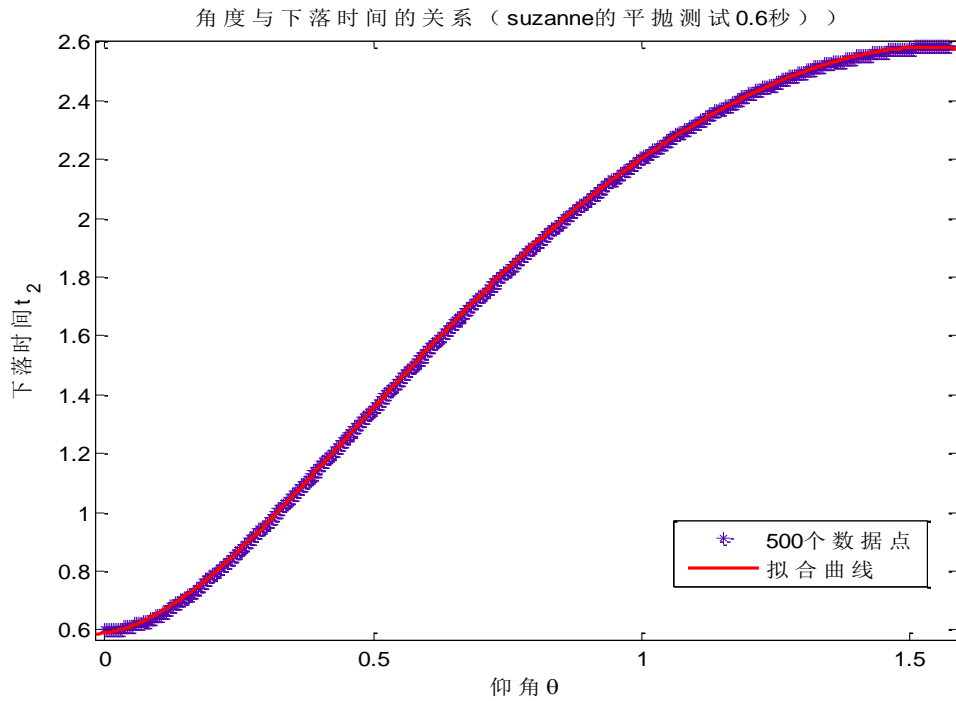
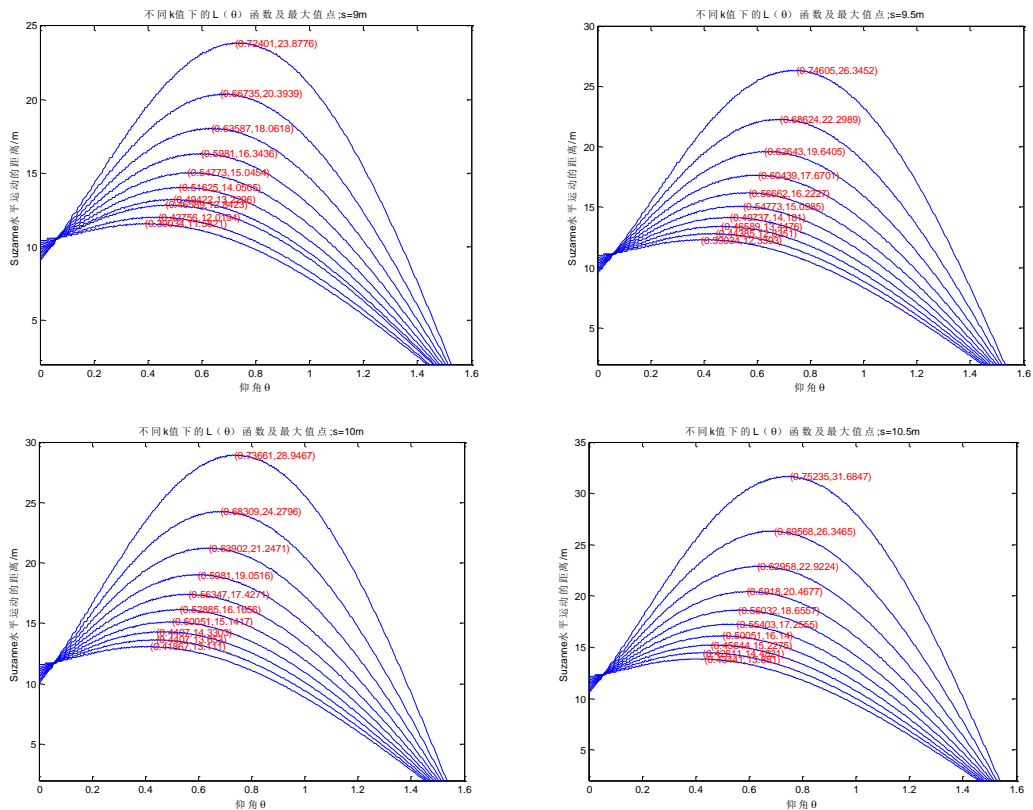


图 20 仰角与下落时间关系

6.1.3 纸飞机最佳仰角及飞行最远距离的平抛测试对照表及测试函数



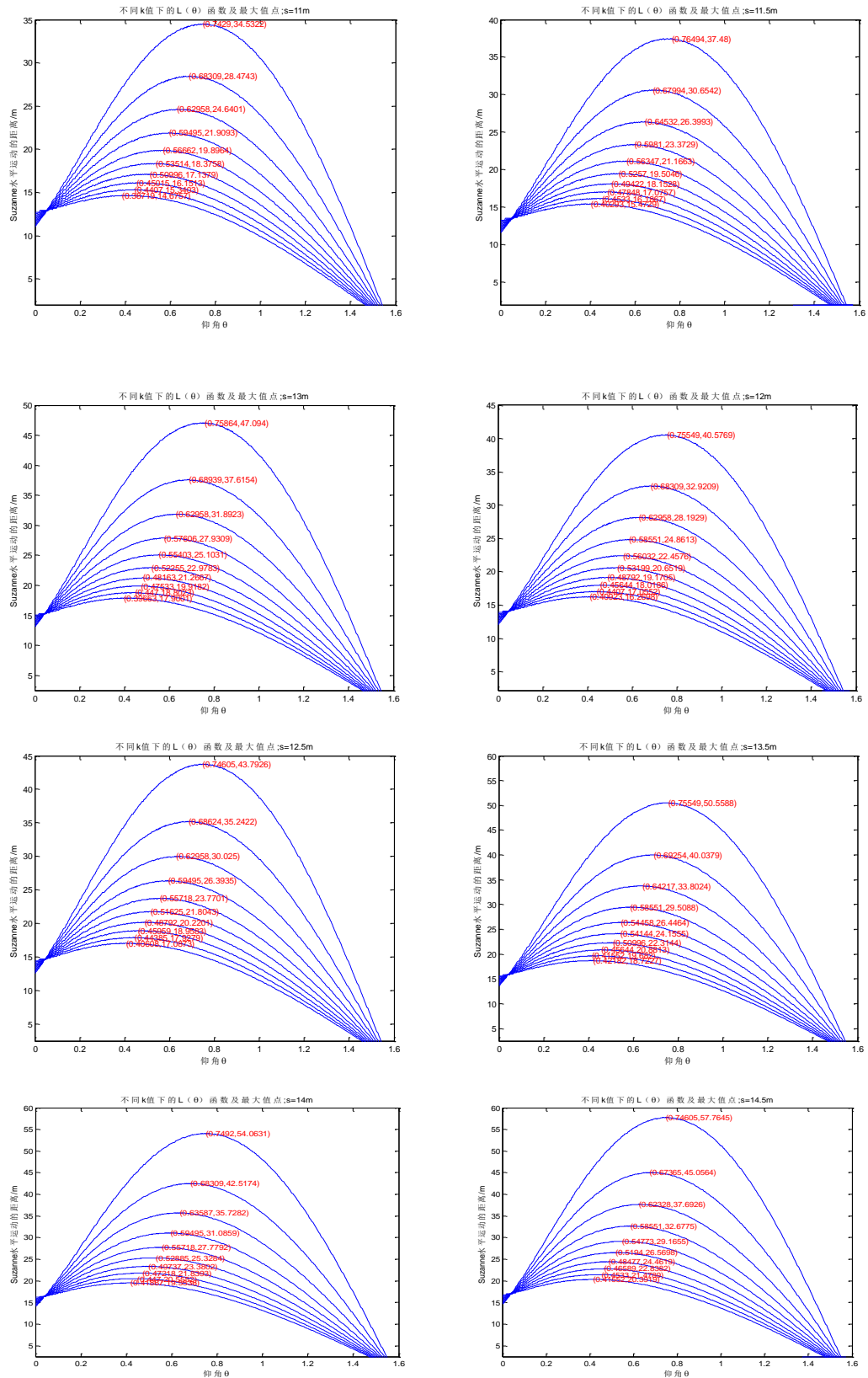


图 21 不同平抛测试距离和时间下的最佳抛射角

图中标出了每条曲线的最大值坐标，如下表 4 所示

表 4 平抛测试与最佳仰角对照表，（测试高度取身高 1.75m，黑体表示测试结果及对应角度）

| t/s | 0.60 | 0.61 | 0.62 | 0.63 | 0.64 | 0.65 | 0.66 | 0.67 | 0.68 | 0.69 |
|-------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 9.0m | 0.72 | 0.68 | 0.63 | 0.60 | 0.53 | 0.52 | 0.49 | 0.47 | 0.44 | 0.39 |
| 9.5m | 0.74 | 0.69 | 0.63 | 0.60 | 0.57 | 0.55 | 0.50 | 0.47 | 0.44 | 0.39 |
| 10.0m | 0.74 | 0.68 | 0.64 | 0.60 | 0.56 | 0.53 | 0.50 | 0.44 | 0.44 | 0.42 |
| 10.5m | 0.75 | 0.70 | 0.63 | 0.59 | 0.56 | 0.55 | 0.50 | 0.46 | 0.43 | 0.43 |
| 11.0m | 0.74 | 0.68 | 0.63 | 0.59 | 0.57 | 0.54 | 0.51 | 0.46 | 0.44 | 0.39 |
| 11.5m | 0.76 | 0.68 | 0.65 | 0.60 | 0.56 | 0.53 | 0.49 | 0.48 | 0.45 | 0.40 |
| 12.0m | 0.76 | 0.68 | 0.63 | 0.58 | 0.56 | 0.53 | 0.49 | 0.46 | 0.44 | 0.41 |
| 12.5m | 0.75 | 0.69 | 0.63 | 0.59 | 0.56 | 0.52 | 0.49 | 0.46 | 0.44 | 0.41 |
| 13.0m | 0.76 | 0.69 | 0.63 | 0.58 | 0.55 | 0.52 | 0.48 | 0.48 | 0.44 | 0.39 |
| 13.5m | 0.76 | 0.69 | 0.64 | 0.59 | 0.54 | 0.54 | 0.51 | 0.46 | 0.42 | 0.42 |
| 14.0m | 0.75 | 0.68 | 0.64 | 0.59 | 0.56 | 0.53 | 0.49 | 0.47 | 0.45 | 0.42 |
| 14.5m | 0.75 | 0.67 | 0.62 | 0.59 | 0.55 | 0.52 | 0.48 | 0.47 | 0.45 | 0.42 |
| 15.0m | 0.75 | 0.70 | 0.62 | 0.58 | 0.54 | 0.51 | 0.47 | 0.45 | 0.43 | 0.42 |
| 弧度制 | 0.75 | 0.66 | 0.63 | 0.59 | 0.55 | 0.53 | 0.49 | 0.46 | 0.44 | 0.41 |
| 角度制 | 42.9 ⁰ | 37.8⁰ | 36.1 ⁰ | 33.8 ⁰ | 31.5 ⁰ | 30.4 ⁰ | 28.1 ⁰ | 26.3 ⁰ | 25.2 ⁰ | 23.5 ⁰ |

从表中可以看到平抛测试距离与最佳抛射角度没有关系，也就是说最佳抛射角度与抛投者无关，而对平抛测试时间依赖极强。

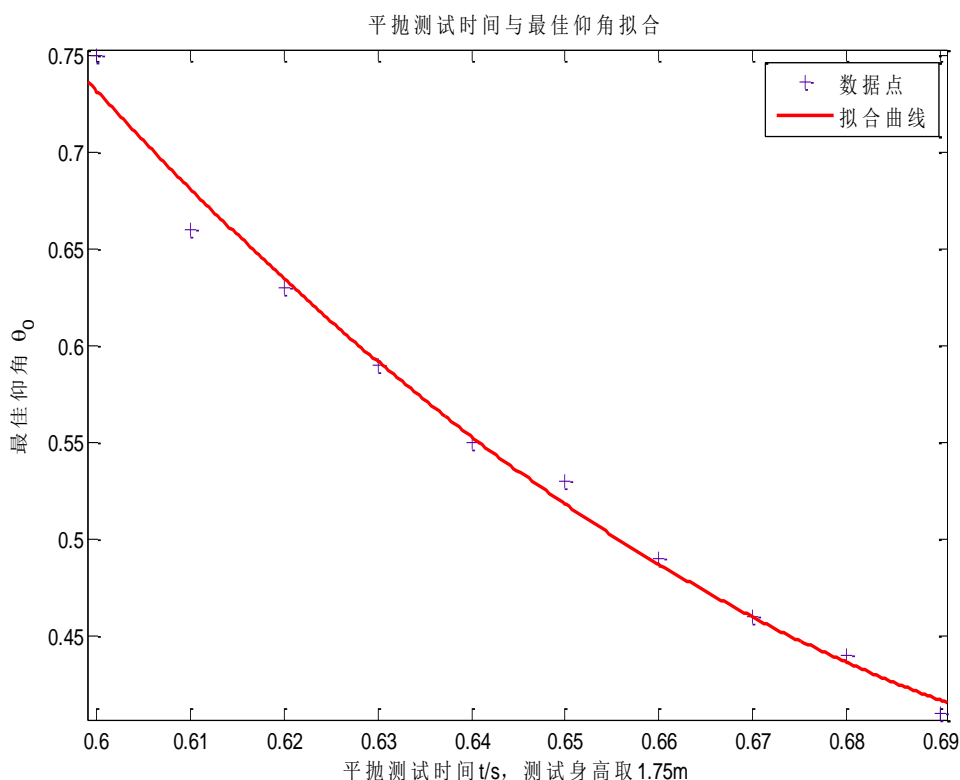


图 22 平抛测试时间与最佳仰角关系

最佳抛射角测试函数

$$\theta_0 = 19.32t^2 - 28.42t + 10.83 \quad t \in [0.60, 0.69] \quad (6.1.6)$$

拟合参数如下表 5 所示

表 5 最佳抛射角测试函数拟合参数

| SSE | R-square | Adjusted R-square | RMSE |
|----------|----------|-------------------|---------|
| 0.001032 | 0.9901 | 0.9872 | 0.01214 |

表 6 水平测试与最远距离对照表

| t/s | 0.60 | 0.61 | 0.62 | 0.63 | 0.64 | 0.65 | 0.66 | 0.67 | 0.68 | 0.69 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 9.0m | 23.9 | 20.4 | 18.1 | 16.3 | 15.1 | 14.1 | 13.2 | 12.8 | 12.0 | 11.6 |
| 9.5m | 26.3 | 22.3 | 19.6 | 17.6 | 16.2 | 15.1 | 14.2 | 13.4 | 12.8 | 12.3 |
| 10.0m | 28.9 | 24.3 | 21.2 | 19.1 | 17.4 | 16.1 | 15.1 | 14.3 | 13.6 | 13.1 |
| 10.5m | 31.6 | 26.3 | 22.9 | 20.5 | 18.6 | 17.2 | 16.1 | 15.2 | 14.5 | 13.9 |
| 11.0m | 34.5 | 28.4 | 24.6 | 21.9 | 19.8 | 18.4 | 17.1 | 16.1 | 15.3 | 14.6 |
| 11.5m | 37.5 | 30.6 | 26.4 | 23.4 | 21.2 | 19.5 | 18.1 | 17.1 | 16.2 | 15.5 |
| 12.0m | 40.6 | 32.9 | 28.2 | 24.8 | 22.4 | 20.6 | 19.2 | 18.0 | 17.1 | 16.3 |
| 12.5m | 43.8 | 35.2 | 30.0 | 26.4 | 23.8 | 21.8 | 20.2 | 18.9 | 17.9 | 17.1 |
| 13.0m | 47.1 | 37.6 | 31.9 | 27.9 | 25.1 | 22.9 | 21.3 | 19.9 | 18.8 | 17.9 |
| 13.5m | 50.5 | 40.0 | 33.8 | 29.5 | 26.4 | 24.1 | 22.3 | 20.8 | 19.7 | 18.7 |
| 14.0m | 54.1 | 42.5 | 35.7 | 31.1 | 27.8 | 25.3 | 23.3 | 21.8 | 20.5 | 19.5 |
| 14.5m | 57.7 | 45.0 | 37.7 | 32.7 | 29.2 | 26.7 | 24.5 | 22.8 | 21.5 | 20.4 |
| 15.0m | 61.6 | 47.7 | 39.7 | 34.4 | 30.5 | 27.8 | 25.6 | 23.8 | 22.4 | 21.2 |

从表 6 中可以看出最远距离和平抛测试距离和时间基本成线性关系

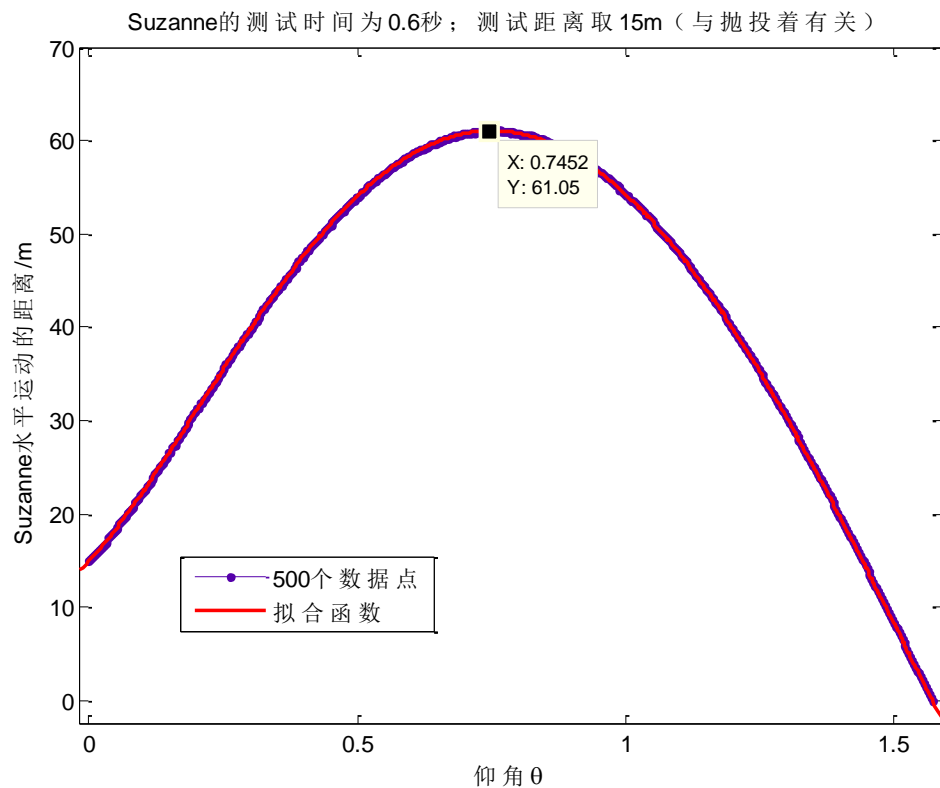


图 23 Suzanne 仰角与距离的关系

多项式拟合拟合式子 (5.5.26) 得到 Suzanne 水平距离与抛投仰角函数为

$$L(\theta) = 10.16\theta^6 - 65.24\theta^5 + 198.5\theta^4 - 311.7\theta^3 + 145.1\theta^2 + 62.43\theta + 14.96 \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

(6.6.7)

拟合参数如下表 7 所示

表 7 Suzanne 水平距离与抛出仰角函数拟合参数

| SSE | R-square | Adjusted R-square | RMSE |
|-------|----------|-------------------|--------|
| 1.327 | 1 | 1 | 0.5188 |

6.2 问题 2 的分析及数据处理

设上升时间 t 后相应的飞行仰角为 $\theta(t)$ ，则联立 (5.5.3) 和 (5.5.10) 有

$$\tan \theta(t) = \frac{(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}}{v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t}} \quad (6.6.8)$$

(6.6.8) 式子两边同时对时间求一阶导数有

$$\sec^2 \theta(t) \theta'(t) = \frac{-g}{v_0 \cos \theta} e^{\frac{k}{m}t} \quad (6.6.9)$$

(6.6.9) 式子两边同时对时间求一阶导数有

$$2 \sec^2 \theta(t) \theta'(t) \tan \theta(t) \theta'(t) + \theta''(t) \sec^2 \theta(t) = \frac{-gk}{mv_0 \cos \theta} e^{\frac{k}{m}t} \quad (6.9.10)$$

将 (6.6.9) 式子代入 (6.6.10) 可得

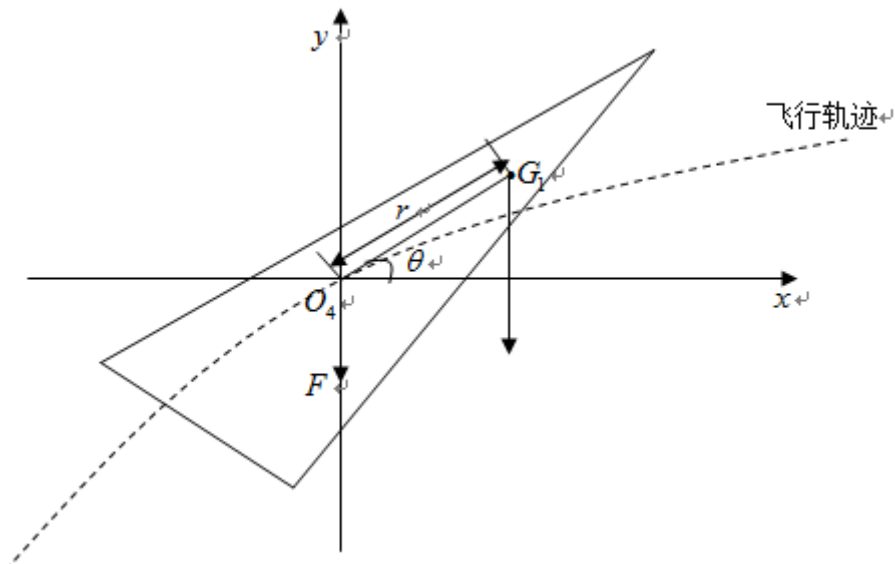


图 24 机身旋转示意图

$$\frac{2g^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t)}{v_0^2 \cos^2 \theta} e^{\frac{2k}{m}t} + \theta''(t) \sec^2 \theta(t) = \frac{-gk}{mv_0 \cos \theta} e^{\frac{k}{m}t} \quad (6.6.11)$$

当 $t=0$, $\theta(0)=\theta$, 代入 (5.5.4) 式得到

$$\theta''(t)|_{t=0} = -\frac{g^2 \sin 2\theta}{v_0^2} - \frac{gk \cos \theta}{mv_0} \quad (6.6.12)$$

式子中的 $\theta''(t)$ 叫做角加速度, 是衡量机身旋转的一个物理量, 如上图 24 所示, 假设气流的作用大小和重力最用大小是一样的则可以得到最简单的旋转模型, 选择顺时针方向 (角度减小的方向) 为正, 有转动定理可得

$$mg\Delta r \cos \theta(t) - kv_{y_1}(\theta, t)(r - \Delta r) \cos \theta(t) = m\Delta r^2 \theta''(t) \quad (6.6.13)$$

化简式子 (6.6.13) 得到

$$\theta''(t) = \frac{mg\Delta r \cos \theta(t) - kv_{y_1}(\theta, t)(r - \Delta r) \cos \theta(t)}{m\Delta r^2} \quad (6.6.14)$$

联立 (6.6.12) 和 (6.6.14) 可以得到

$$\frac{mg\Delta r - kv_0(r - \Delta r) \sin \theta}{m\Delta r^2} = -\frac{2g^2 \sin \theta}{v_0^2} - \frac{gk}{mv_0} \quad (6.6.15)$$

取旋转中心为 $\Delta r = 0.0001m$, 及其的靠近调整后的重心 G_1 , 而重心调整后的

距离在 $r \in [0.001, 0.01]$ 上面离散, 即在 1 毫米到 1 厘米之间的调整

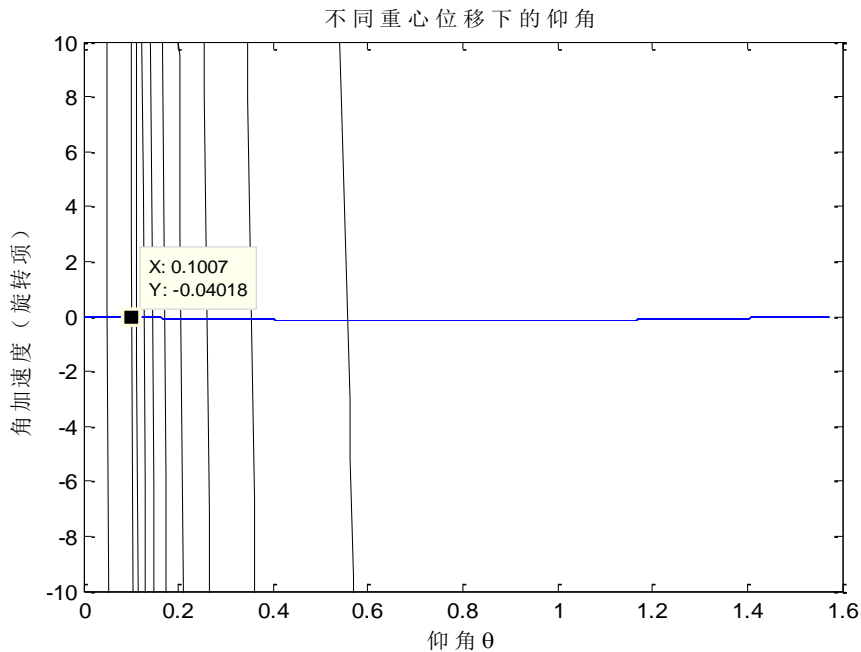


图 25 不同重心位移下的发射仰角

表 8 不同位移下的发射角度

| | 数组 1 | 数组 2 | 数组 3 | 数组 4 | 数组 5 | 数组 6 | 数组 7 | 数组 8 | 数组 9 | 数组 10 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| r | 0.001 | 0.002 | 0.003 | 0.004 | 0.005 | 0.006 | 0.007 | 0.008 | 0.009 | 0.01 |
| θ | \ | 0.554 | 0.356 | 0.261 | 0.200 | 0.170 | 0.148 | 0.129 | 0.116 | 0.10 |

将表 8 中的数组拟合得到图 26

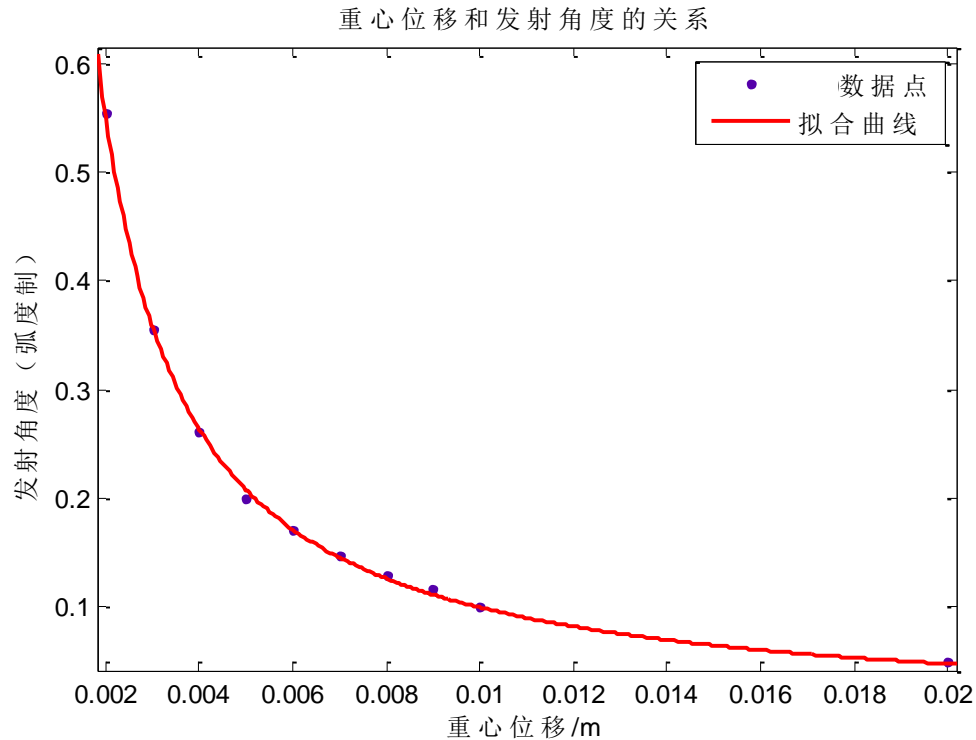


图 26 不同重心位移下的发射仰角

$$\theta(r) = 0.94r^{-0.8} \exp(-4.8r^{0.02}) \quad (6.6.16)$$

表 9 拟合参数

| SSE | R-squre | Adjusted R-squrte | RMSE |
|-----------|---------|-------------------|----------|
| 0.0001297 | 0.9994 | 0.9993 | 0.004207 |

对于 Suzanne 而言角度取 0.7452 得到重心调整距离为 0.0059m, 即为 5.9mm, 对上微分后取 $\Delta r = 0.0059$ 得到 $\Delta \theta = +0.2$ 表示向后调整 0.01 (增大抛投角度), 即仰角调整到 0.7552。

飞行时间由飞行高度决定, 要想纸飞机停留的时间最长重心可向机尾调节, 让飞机在不失速的情况下尽可能的爬升, 而相应的角度应该向前调整(减小抛投角度)。

6.3 模型计算结果及改进想法

6.3.1 该模型下的计算结果

(1) 要使得纸飞机飞行最远先要做两个平抛测试

一个是以任意速度平抛出纸飞机测量落地的时间, 可以通过时间在表 4 查找最佳抛投角度; 一个是以投掷纸飞机同样的速度平抛投掷橡皮擦 (类似的受到阻力可以忽略的东西) 测量落地距离, 可通过距离在表 5 中找出最远距离

(2) Suzanne 纸飞机的模型计算结果 (未能计算出最长时间)

| 最佳抛投角度 | 最远距离 | 最远距离重心向前调整 | 最远距离仰角向后调整 |
|-------------------|--------|------------|-------------------|
| 42.9 ⁰ | 61.05m | 5.9mm | 0.57 ⁰ |

(3) Suzanne 纸飞机的质心为从机头往后 8.73cm, 从机翼平面往上 0.56cm

6.3.2 模型的问题及改进想法

(1) 通过视频的观看发现在最高位置的时候机身并不是水平的, 而且下落段机身也不是水平的, 这个跟本文模型的假设是不符的。

(2) 在视频中发现上升时间和下落时间都是 3 秒钟, 而模型计算结果显示下落段的时间为 2.5s, 而上升段的时间为 1.9s 与视频中实验结果相差较大。

(3) 视频中抛投纸飞机的视频镜头追随纸飞机的移动, 使得参照物在变化, 这使得提取视频中的飞行轨迹失败, 最好能有镜头不动的纸飞机飞行实验, 这样可以提取轨迹, 以便调校模型。

七 参考文献

- [1]楚安夫. 关于斜抛运动的分析[J]. 大学物理, 1997, 16(9):46-46.
- [2]郝成红, 黄耀清, 王欢,等. 考虑空气阻力时空竹的斜抛运动[J]. 大学物理, 2016, 35(3):15-17.
- [3]范毅方, 岑人经. 基于斜抛运动学方程的运动技术分析[J]. 生物医学工程研究, 2005, 24(2):87-89.
- [4]甘志国. 斜抛运动的最佳抛射角[J]. 数学通报, 2011, 50(12):35-36.
- [5]王洪有. 基于 Matlab 的斜抛运动研究[J]. 技术物理教学, 2009, 17(4):42-44.
- [6]韩新民. 两种斜抛运动的最大射程[J]. 湖南中学物理, 2012(6):62-62.
- [7]张宗喜. 斜抛运动的一般性讨论[J]. 合肥师范学院学报, 2000(6):68-68.
- [8]陈绍铭. 斜抛运动研究[J]. 成都体育学院学报, 1984(4):87-92.
- [9]陈奇. 正交法在折纸飞机中的应用[J]. 数理统计与管理, 1989(1):41+9.
- [10]彭新春, 李亮. 涡流发生器对机翼流场影响研究[J]. 军民两用技术与产品, 2017(6).
- [11]李其轩. 探究迎角对机翼升力的影响及"失速"现象的解释[J]. 内燃机与配件, 2018(5):209-210.
- [12]傅维标. 高温气流中直流式喷嘴后方燃油浓度场计算方法[J]. 航空学报, 1980, 1(1):54-52.
- [13]刘文红, 郭烈锦, 张西民. 有气流扰动下管流油水混合物粘度的实验测量与计算模型[J]. 工程热物理学报, 2005, 26(4):605-608.
- [14]李爱军, 沈毅, 章卫国. 一种飞机大仰角飞行的模糊控制方法[J]. 飞机设计, 2002(4):42-44.
- [15]Maloney D P. Novice rules for projectile motion[J]. Science Education, 2010, 72(4):501-513.
- [16] Gosselin C J, Cloutier L. The Generating Space for Parabolic Motion Error Spiral Bevel Gears Cut by the Gleason Method[J]. Journal of Mechanical Design, 1993, 115(3):483-489.
- [17] Yabushita K, Yamashita M, Tsuboi K. An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method[J]. Journal of Physics A Mathematical & Theoretical, 2007, 40(29):8403.

八 附录

%质心坐标计算

```

xa1=(int(0.75*x^2,0,1.7)+int((0.24*x+2.79)*x,1.7,2)-int((-6.35*x+12.8
3)*x,1.7,2)+int((0.24*x+2.79)*x,2,9.8)+int((-3.71*x+41.5)*x,9.8,11.2)
)/(int(0.75*x,0,1.7)+int(0.24*x+2.79,1.7,2)-int(-6.85*x+12.83,1.7,2)+
int(0.24*x+2.79,2,9.8)+int(-3.71*x+41.5,9.8,11.2))
ya1=(int(((x-41.5)/-3.71-x/0.75)*x,0,1.5)+int(((x-41.5)/-3.71-(x-12.8
3)/-5.6)*x,1.5,3.2)+int(((x-41.5)/-3.71-(x-2.79)/0.24)*x,3.2,5.2))/(i
nt(0.75*x,0,1.7)+int(0.24*x+2.79,1.7,2)-int(-6.85*x+12.83,1.7,2)+int(
0.24*x+2.79,2,9.8)+int(-3.71*x+41.5,9.8,11.2))
xa2=(int(0.81*x^2,0,1.7)+int(-2.77*x^2+6.01*x,1.7,2.2))/(int(0.81*x,0
,1.7)+int(-2.77*x+6.01,1.7,2.2))
ya2=(int((x-7.26)/-3.3-(x-1.25)/-0.57,0,1.25)+int((x-7.26)/-3.3-(x-1.
25)/0.24,1.25,1.67))/(int(0.81*x,0,1.7)+int(-2.77*x+6.01,1.7,2.2))
xa3=(int(2.77*x^2,0,0.5)+int(1.57*x^2+0.6*x,0.5,1.4)+int(-0.62*x^2+3.
67*x,1.4,1.5)+int(-1.37*x^2+4.77*x,1.5,3.5))/(int(2.77*x,0,0.5)+int(1
.57*x+0.6,0.5,1.4)+int(-0.62*x+3.67,1.4,1.5)+int(-1.37*x+4.77,1.5,3.5
))
ya3=(int(((x+1.1)/0.75-(x-0.6)/-1.2)*x,0,0.6)+int(((x+1.1)/0.75-(x-0.
6)/1.57)*x,0.6,1.5)+int(((x-3.67)/-0.62-(x-0.6)/1.57)*x,1.5,2.8))/(in
t(2.77*x,0,0.5)+int(1.57*x+0.6,0.5,1.4)+int(-0.62*x+3.67,1.4,1.5)+int
(-1.37*x+4.77,1.5,3.5))
xa4=(int(1.42*x^2,0,1.3)+int(-1.42*x^2+3.7*x,1.3,2.2))/(int(1.42*x,0,
1.3)+int(-1.42*x+3.7,1.3,2.2))
ya4=(int(((x+2.2)/1.69-(x-1.5)/-1.15)*x,0,1.5)+int(((x+2.2)/1.69-(x-1
.5)/0.27)*x,1.5,2.6))/(int(1.42*x,0,1.3)+int(-1.42*x+3.7,1.3,2.2))
xa5=(int(1.4*x^2,0,0.35)+int(-1.4*x^2+0.98*x,0.35,0.7))/(int(1.4*x,0,
0.35)+int(-1.4*x+0.98,0.35,0.7))
ya5=(int(((x-0.98)/-1.4-x/1.4)*x,0,0.49))/(int(1.4*x,0,0.35)+int(-1.4
*x+0.98,0.35,0.7))
xa6=(int(7.3*x^2,0,0.3)+int(-1.23*x^2+2.56*x,0.3,1.1)+int(-2.43*x^2+3
.88*x,1.1,1.6))/(int(7.3*x,0,0.3)+int(-1.23*x+2.56,0.3,1.1)+int(-2.43
*x+3.88,1.1,1.6))
ya6=(int(((x+1.32)/1.2-x/7.3)*x,0,0.6)+int(((x-2.56)/-1.23-x/7.3)*x,0
.6,2.2))/(int(7.3*x,0,0.3)+int(-1.23*x+2.56,0.3,1.1)+int(-2.43*x+3.88
,1.1,1.6))
xa8=(int(1.24*x^2,0,0.8)+int(0.24*x^2+0.8*x,0.8,5.5)+int(-7.06*x^2+41
.1*x,5.5,5.8))/(int(1.24*x,0,0.8)+int(0.24*x+0.8,0.8,5.5)+int(-7.06*x
+41.1,5.5,5.8))
ya8=(int(((x+40.3)/7.3-(x-0.8)/-1)*x,0,0.8)+int(((x+40.3)/7.3-(x-0.8)
/0.24)*x,0.8,2.2))/(int(1.24*x,0,0.8)+int(0.24*x+0.8,0.8,5.5)+int(-7.
06*x+41.1,5.5,5.8))
xb1=(int(2.19*x^2,0,0.6)+int(1.36*x^2+0.5*x,0.6,4.7)+int(-0.22*x^2+7.

```

```

93*x,4.7,11.9)+int(-3.79*x^2+50.43*x,11.9,13.3))/(int(2.19*x,0,0.6)+i
nt(1.36*x+0.5,0.6,4.7)+int(-0.22*x+7.93,4.7,11.9)+int(-3.79*x+50.43,1
1.9,13.3))
zb1=(int(((x+42.5)/3.57-(x-0.5)/-0.83)*x,0,0.5)+int(((x+42.5)/3.57-(x
-0.5)/1.36)*x,0.5,5)+int(((x-7.93)/-0.22-(x-0.5)/1.36)*x,5,6.9))/(int
(2.19*x,0,0.6)+int(1.36*x+0.5,0.6,4.7)+int(-0.22*x+7.93,4.7,11.9)+int
(-3.79*x+50.43,11.9,13.3))
xb3=(int(1.64*x^2,0,2.3)+int(-0.77*x^2+5.54*x,2.3,7.2))/(int(1.64*x,0
,2.3)+int(-0.77*x+5.54,2.3,7.2))
zb3=(int(((x+3.24)/1.41-(x-2.3)/-1)*x,0,2.3)+int(((x+3.24)/1.41-(x-2.
3)/0.64)*x,2.3,6.9))/(int(1.64*x,0,2.3)+int(-0.77*x+5.54,2.3,7.2))
xb13=(int(1.25*x^2,0,0.4)+int(-0.83*x^2+0.83*x,0.4,1))/(int(1.25*x,0,
0.4)+int(-0.83*x+0.83,0.4,1))
zb13=(int(-2.08*x^2+0.83*x,0,0.5))/(int(1.25*x,0,0.4)+int(-0.83*x+0.8
3,0.4,1))
xb5=(int(1.29*x^2,0,1.2)+int(-0.88*x^2+2.6*x,1.2,2)+int(-2.13*x^2+5.1
*x,2,2.4))/(int(1.29*x,0,1.2)+int(-0.88*x+2.6,1.2,2)+int(-2.13*x+5.1,
2,2.4))
zb5=(int(((x+2.5)/1.25-(x-2.6)/-2.17)*x,0,0.5)+int((x-2.6)/-0.88-(x-2
.6)/-2.17,0.5,2.6))/(int(1.29*x,0,1.2)+int(-0.88*x+2.6,1.2,2)+int(-2.
13*x+5.1,2,2.4))
xb6=int(-2.17*x^2+2.6*x,0,1.2)/int(-2.17*x+2.6,0,1.2)
zb6=int(((x-2.6)/-2.17)*x,0,2.6)/int(-2.17*x+2.6,0,1.2)
xb8=int(0.55*x^2-0.44*x,0.8,5.5)/int(0.55*x-0.44,0.8,5.5)
zb8=int(((x+0.44)/0.55)*x,0,2.6)/int(0.55*x-0.44,0.8,5.5)
% (5.5.21) 式子的解析
j=linspace(0,pi/2,500);
m=linspace(0.004366,0.004366,500);
g=linspace(9.8,9.8,500);
v0=linspace(25,25,500);
H0=linspace(1.75,1.75,500);
k=linspace(0.0007,0.0007,500);
t2=linspace(0,4,500);
t1=m./k.*log(1+k.*v0.*sin(j)./(m.*g));
y1=m./k.*(v0.*sin(j)+m.*g./k).*(1-exp(-k.*t1./m))-m.*g.*t1./k+H0
y2=m.^2.*g./k.^2.*exp(-k.*t2./m)+m.*g.*t2./k-m.^2.*g./k.^2
[AX,H1,H2]=plotyy(y1,j,y2,t2);
set(AX(1),'yTick',[0:0.1:1.6]);
set(get(AX(1),'ylabel'),'string','仰角{theta} (弧度制)');
set(get(AX(2),'ylabel'),'string','下落时间\s')
set(AX(2),'yTick',[0:0.5:4]);
set(AX,'xlim',[0,40],'xtick',[0:5:40])
legend('等式右边','等式坐标',2)
title('对(5.2.21) 式子的数值解析;k=0.00017')

```

```

xlabel('下落高度\m')
%抛投仰角与距离的解析
j=linspace(0,pi/2,500);
x=linspace(0,pi/2,500);
m=linspace(0.004366,0.004366,500);
g=linspace(9.8,9.8,500);
v0=linspace(25.0998,25.0998,500);
H0=linspace(1.75,1.75,500);
k=linspace(0.00615,0.00615,500);
t2=linspace(0,5,500);
t1=m./k.*log(1+k.*v0.*sin(j)./(m.*g));
y1=m./k.*(v0.*sin(j)+m.*g./k).*(1-exp(-k.*t1./m))-m.*g.*t1./k+H0;
y2=m.^2.*g./k.^2.*exp(-k.*t2./m)+m.*g.*t2./k-m.^2.*g./k.^2;
aa=zeros(500,500);
y11=meshgrid(y1);
for i=1:500;
aa(:,i)=y2'-y11(:,i);
end
bb=aa.^2;
[C,D]=min(bb);
t22=t2(D);
plot(j,t22)
t=t22;
y=(m.*v0.^2.*sin(x).*cos(x)+9.8*m.*v0.*cos(x).*t)./(9.8.*m+k.*v0.*sin
(x));
a=max(y);
b=find(y==a);
plot(x,y);
text(x(b),y(b),['(',num2str(x(b)),',',num2str(y(b)),')'],'color','r')
title('不同k值下的L({\theta})函数及最大值点;s=15m');
xlabel('仰角 {\theta}');
ylabel('Suzanne水平运动距离/m');

```