

## 第四届“互动出版杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#1070

参赛队员（签名）：

队员 1：杨军

队员 2：李文强

队员 3：艾光谨

参赛队教练员（签名）： 无

参赛队伍组别：大学组

## 第四届“互动出版杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#1070

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2011年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目：关于车险续保率与销售方式的数学模型研究

关 键 词：车险 主成分分析法 种群竞争模型 层次分析法 马可链模型

## 摘 要：

近几年，国内汽车销售市场异常火爆，销售量屡创新高。车轮上的世界，保险已经与我们如影随形。汽车保险，简称车险，是指对机动车辆由于自然灾害或意外事故所造成的人身伤亡或财产损失负赔偿责任的一种商业保险。

对于分析多种因素对车险续保率的影响，本文进行了分层分析。先通过较简单的线性统计回归模型的参数比较剔除影响相当小的因素。而后通过运用 SPSS 数学软件求解余下影响因素相近且较大的因素的相关系数矩阵，得到他们之间的相关度。最后运用主成分分析法，通过降低数据维度的思想找出对目标而言，包含信息最多即相关性最大的因素。对于车险续保率影响最大的因素分别为：出险次数、承保渠道、使用性质。

而对于电话车险对企业其他传统营销手段的影响，企业总体的影响分析。本文创新的引入了生物种群竞争模型以期对电话车险对其他传统营销手段的影响进行模拟。并对投保者进行分类以创造生物种群竞争模型所能运用的条件。

对于电话车险的长期预测，本文转化视角着眼于个体投保者得选择。建立了层次分析与马可链模型联用的数学模型，较为简单、合理的预测出电话车险在未来的占有率，约为 53.24%。

参赛队号 1070

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

所选题目 C 题

## 英文摘要（选填）

**Abstract:** In recent years, the domestic automobile sales market are booming, sales hit record highs. Wheels of the world, insurance has been with us hand in hand. Car insurance, referred to as auto insurance, refers to motor vehicle accidents due to natural disasters or caused personal injury or property damage liability of a business insurance.

For the analysis of multiple factors on the rate of auto insurance renewal, we conduct a stratified analysis. First through relatively simple linear statistical regression model excluding the parameter of comparison rather small factor. Then solved by using mathematical software SPSS factors similar to the rest of the factors and the larger the correlation coefficient matrix, obtained the correlation between them. Finally, principal component analysis, by reducing the data dimension of thought to identify the target, the most information that contains the most relevant factor. Renewal rate for auto insurance were the most important factor: the number Chuxian, underwriting sources, the use of nature.

As for the car phone on the business impact of other traditional means of marketing, overall business impact analysis. The introduction of this innovative competition models of biological species on the car phone on the impact of other traditional marketing simulation. And classification of the insured in order to create competition model of biomass can use conditions.

Long-term forecast for the car phone, this paper focuses on the individual perspective into the option of the insured. Established a level of analysis and Mark chain model combined with the mathematical model, relatively simple, reasonable to predict the share of car phone in the future, about 53.24 percent.

## 目录

一、问题重述.....	1
二、问题分析.....	1
三、基本假设.....	2
四、符号说明.....	2
五、模型的建立与求解.....	3
问题一：.....	3
1、简单回归模型的建立与求解.....	3
2、主成分分析法的建立于求解.....	4
3、问题一模型的检验.....	7
问题二：.....	9
1、评估模型的建立与求解.....	9
1、对数据的分析.....	9
2、电销对保险企业的影响分析（种群模型）.....	10
2、马氏链预测模型.....	13
A、层次分析法，分析 P1、P2。.....	14
B、马氏链预测.....	17
六、模型的评价.....	18
问题一：.....	18
模型的优点.....	18
模型的缺点.....	18
问题二：.....	19
模型的优点.....	19
模型的缺点.....	19
七、模型的改进.....	19
八、模型的推广.....	20
九、参考文献.....	20
十、附录.....	21

## 一、问题重述

近几年，国内汽车销售市场异常火爆，销售量屡创新高。车轮上的世界，保险已经与我们如影随形。汽车保险，简称车险，是指对机动车辆由于自然灾害或意外事故所造成的人身伤亡或财产损失负赔偿责任的一种商业保险。在我国的保险行业中，汽车保险有着不可撼动的重要地位。多年来，汽车保险稳居国内产险业第一大险种。可以说，对于财产保险公司来说，得车险者得天下！对此关于车险的数学模型的研究就具有重要的研究价值与研究意义。

### 问题1：建立合理的数学模型，说明影响续保率的因素。

评价一个保险公司的综合影响力时，其市场份额具有举足轻重的作用。近年来，由于越来越多的保险公司涉足车险市场，使得车险市场格局也发生了一些不容忽视的变化。为了量化变化，很多保险公司开始关注续保率这个指标，续保率就是当年到期的客户中续保客户所占的比重。

在续保数据中，我们发现承保车辆的使用性质，承保车辆的销售渠道以及新车购买价格的不同都会影响续保率。

为此建立模型的关键就在于判断各个影响因素之间的关系以及对续保率的影响强度。

### 问题2：全面评估电销业务的推广对于保险企业的影响，预测电销的方式将在多大程度上会取代传统的销售方式。

因为各大保险公司竞相杀入车险，为了增加市场占有率，各种营销措施和促销花样也开始层出不穷。除了传统的营销模式类似于柜台销售、代理销售与营销员销售，电话车险开始成为众多保险公司争相运用的营销手段。电话车险，简称电销，其以较低的保费价格，快速便捷的服务越来越受到广大群众的欢迎。

为了全面评估电销业务对保险企业的影响，就必须先分析保险公司的各个方面，并且评估电销对各个方面的影响。预测电销的关键就在于量化电销的影响并建立电销长期发展的数学模型。

## 二、问题分析

### 问题1：建立合理的数学模型，说明影响续保率的因素。

结合题目中数据与网络等资料可以发现，续保率的主要影响因素包括承保车辆出险次数，承保车辆年龄，承保车辆品牌，承保车辆使用性质，承保渠道，新车购买价格六个。这些因素相互之间又并不完全独立，每个因素评判的指标也完全不同。

六个影响因素较多，为了分析这六个因素对续保率的影响强度。首先要解决的就是简化因素，逐步分成剔除影响较小的因素。

故在一开始可以采用较简单的线性回归，通过数据统计回归得到的函数的灵敏度，在一定跨度内，找出对目标影响最小的元素，将其剔除。后根据数据运用数学软件求解余下不容易被简单剔除的元素的相关系数矩阵，得到他们之间的相关度。最后运用主成分分析法，找出对目标而言，包含信息最多的因素（对主体贡献最大的因素）。较准确

的比较出对续保率影响最大的因素。

**问题 2：全面评估电销业务的推广对于保险企业的影响，预测电销的方式将在多大程度上会取代传统的销售方式。**

先分析题目所给出的数据，注意到题目数据中 2010 年无电销记录，而 2011 年有电销记录，故开始时可以先定性的对比数值，找出电销业务的推广对于保险企业的影响面。而后，分析电销可能对保险企业的那些方面存在影响，对其进行逐个分析。而后给出一个较为简单，合理的评估模型。

最后依据评估模型的建立以及电销业务的推广对于保险企业的影响，量化电销方式取代传统销售方式的表现，找出电销发展的内在因素，分析出电销发展的规律，最后预测出预测电销的方式将在多大程度上会取代传统的销售方式。

### 三、基本假设

问题 1：

- (1) 假设题中所给数据真实、可靠、有效。
- (2) 假设个体投保人购买或续买汽车保险时从自己的角度出发。
- (3) 假设数据给定区间不存在国家关于车险政策的改变，即国家或地方政府政策恒定。
- (4) 假设个体投保人不考虑熟人推荐或保险公司开展打折等活动的特殊情况。
- (5) 假设将车险仅分为商业车险和交强险两类（且商业车险包括交强险）。

问题 2：

- (1) 假设保险企业均具有较为同一传统营销方法，对方法的偏重性均衡。
- (2) 假设保险企业都具有较为同一的企业结构。
- (3) 假设个体投保人选择销售方式受到环境概率，个人经济，受教育程度的影响相同。
- (4) 假设个体投保人不考虑熟人推荐或保险公司开展打折等活动的特殊情况。

### 四、符号说明

问题 1：

变量	含义
$x_1$	承保车辆出险次数
$x_2$	承保车辆年龄
$x_3$	承保车辆品牌
$x_4$	承保车辆使用性质
$x_5$	承保渠道
$x_6$	新车购买价格
$Y$	续保率



问题 2:

变量	含义
P1	电销的转移概率
P2	非电销的转移概率
P	转移概率矩阵
w	稳定态概率分布

## 五、模型的建立与求解

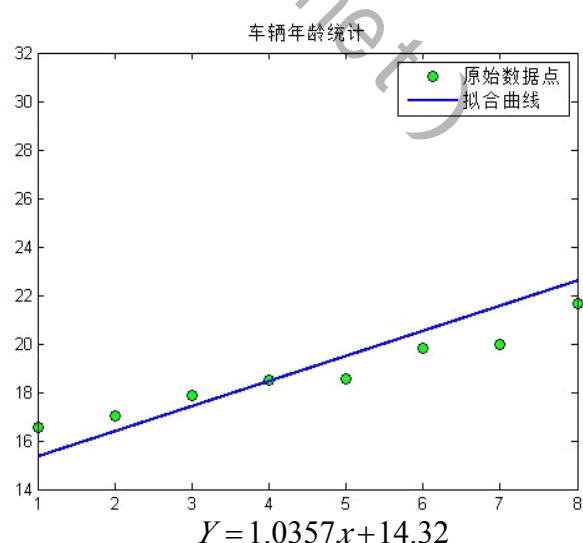
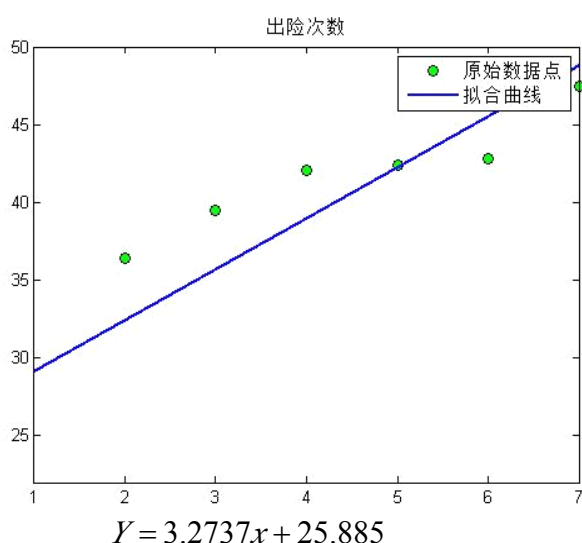
问题一:

### 1、简单回归模型的建立与求解

通过对本题中提供的数据的分析和处理，我们发现目标客户的续保率和当年到期的车辆数与整体客户的续保率和当年到期的车辆数变化趋势基本一样，故本文将整体续保率作为目标函数，引入影响因素  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  作为评判续保率的标准。

观察数据知，在 2010 年得 9-12 月间，各项指标对续保率的影响均较为稳定，而从 2010 年 12 月到 2011 年 1 月，续保率都出现了一个较明显的涨幅，在随后的几个月里，续保率又趋近平稳。这说明突然的涨幅与上面六个元素都没有关系，可以看作是由于外界大环境改变所造成的。

故我们在分析数据时，以 2010 年 12 月为时间界限，分两段来分析。前四个月的数据用于推导结论，后三个月的用于验证结论。我们先将六个因素的决定因子的前四个月即（9-12 月）的对应的续保率平均值样本数据按一定的步长做递增的线性拟合回归，得到如下图所示的回归图形及其拟合方程式：





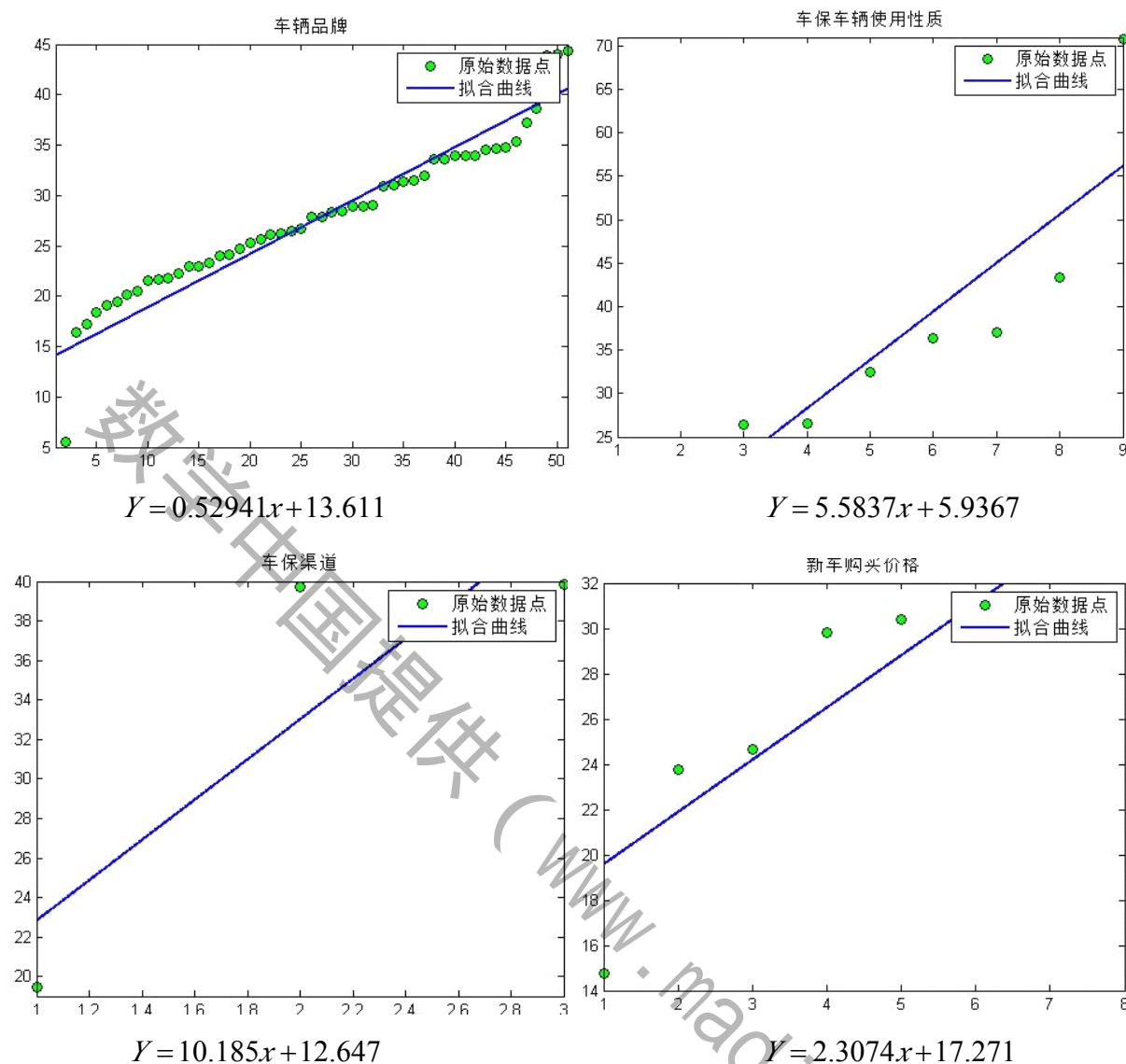


图 1 线性回归图形及其拟合方程式

由线性回归图形与拟合方程式的斜率可以定性的判断在一定范围内 6 个因素对  $Y$  的影响大小。根据拟合方程的斜率，容易看出  $x_3$  对  $Y$  的影响相较其他因数小一个数量级。为了使下一步建立主成分分析模型能得到更为精确的结果，先将影响最小的因素剔除。

## 2、主成分分析法的建立于求解

据主成分分析法建立模型，运用数学软件实现得出对目标影响最大的几种因素求解。所建立的主成分分析模型从所求量总体样本相关系数矩阵  $R$  出发求解主成分。

当总体各变量取值的单位或数量级不同时，从总体协方差矩阵出发求解主成分就显得不合适了，此时应将每个变量标准化。记标准化变量为

$$x_{i^*} = \frac{x_i - E(x_i)}{\sqrt{\text{var}(x_i)}}, \quad i=1,2,3,\dots,p$$

从标准化总体  $x_i^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)'$  的协方差矩阵出发求解主成分，即从总体  $x$  的相关系数矩阵出发求解主成分（总体  $x^*$  的协方差矩阵就是总体  $x$  的相关系数矩阵）。设总体  $x$  的相关系数矩阵为  $R$ ，从  $R$  出发求解主成分的步骤与从  $\Sigma$  出发求解主成分的步骤一样。设  $\lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq \dots \geq \lambda_p^* \geq 0$  为  $R$  的  $p$  个特征值， $t_1^*, t_2^*, \dots, t_p^*$  为相应的正交单位特征向量，则  $p$  个主成分分为

$$y_i^* = t_i^{*'} x^*, \quad i=1, 2, \dots, p$$

$$y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \dots \\ y_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^{*'} x^* \\ t_2^{*'} x^* \\ \dots \\ t_p^{*'} x^* \end{pmatrix} = (t_1^*, t_2^*, \dots, t_p^*)' x^* = T^{*'} x^*$$

故：

$$E(y^*) = 0, \quad \text{var}(y^*) = \Lambda^* = \text{diag}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_p^*)$$

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i^* = \text{tr}(R) = p$$

$$\rho(x_i^*, y_i^*) = \frac{\text{cov}(x_i^*, y_i^*)}{\sqrt{\text{var}(x_i^*)} \sqrt{\text{var}(y_i^*)}} = \sqrt{\lambda_j^*} t_{ij}^*$$

$$i, j = 1, 2, \dots, p$$

此时前  $m$  个主成分的累积贡献率为

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \lambda_i^*$$

1、从各影响因素的数据分析中，整合得出舍去因素  $x_3$  之后的五个因素对应续保率的前四个月的平均值的体样本数据矩阵。

2、通过数学软件 SPSS 进行因子分析（相关 SPSS 分析结果见附录），得到续保率样本数值矩阵的相关系数矩阵  $R$ （如下表 1 所示）。

	出险次数	车辆年龄	使用性质	承保渠道	购买价格
出险次数	1	-0.305	0.995	-0.194	0.991
车辆年龄	-0.305	1	-0.396	-0.875	-0.429
使用性质	0.995	-0.396	1	-0.098	0.999
承保渠道	-0.194	-0.875	-0.098	1	-0.062
购买价格	0.991	-0.429	0.999	-0.062	1

表 1：续保率五项影响因素的样本相关系数矩阵

得到续保率样本相关系数矩阵  $R$  后，调用 matlab 中的 pcacov 函数作主成分分析，返回主成分表达式的系数矩阵 COEFF, 以及特征值向量 latent 和主成分贡献率向量 explained。

所谓 matlab 函数为：[COEFF,latent,explained]=pcacov( $R$ )（具体程序见附录）

结果分析：经过软件计算得到以下结果

result1 =

'特征值'	'差值'	'贡献率'	'累积贡献率'
[ 3.1867]	[ 1.3740]	[63.7331]	[ 63.7331]
[ 1.8127]	[ 1.8124]	[36.2538]	[ 99.9868]
[3.8347e-004]	[1.8307e-004]	[ 0.0077]	[ 99.9945]
[2.0040e-004]	[1.2619e-004]	[ 0.0040]	[ 99.9985]
[7.4206e-005]	[ ]	[ 0.0015]	[ 100.0000]

result2 =

'标准化变量'	'prin1'	'prin2'
'x1：出险次数'	[-0.5428]	[-0.1832]
'x2：车辆年龄'	[ 0.2972]	[-0.6296]
'x3：使用性质'	[-0.5536]	[-0.1125]
'x4：承保渠道'	[-0.0302]	[ 0.7416]
'x5：购买价格'	[-0.5564]	[-0.0859]

从 result1 的结果来看，前两个主成分的累积贡献率达到了 99.98%。因此可以只用前两个主成分进行后续的分析；这样做虽然会有一定的信息损失，但损失不大，不影响

大局。

result2 中列出了 2 个主成分的相关结果，可知前 2 个主成分的表达式分别为：

$$y_1^* = -0.5428x_1^* + 0.2972x_2^* - 0.5536x_3^* - 0.032x_4^* - 0.5564x_5^*$$

$$y_2^* = -0.1832x_1^* - 0.6296x_2^* - 0.1125x_3^* + 0.7416x_4^* - 0.0859x_5^*$$

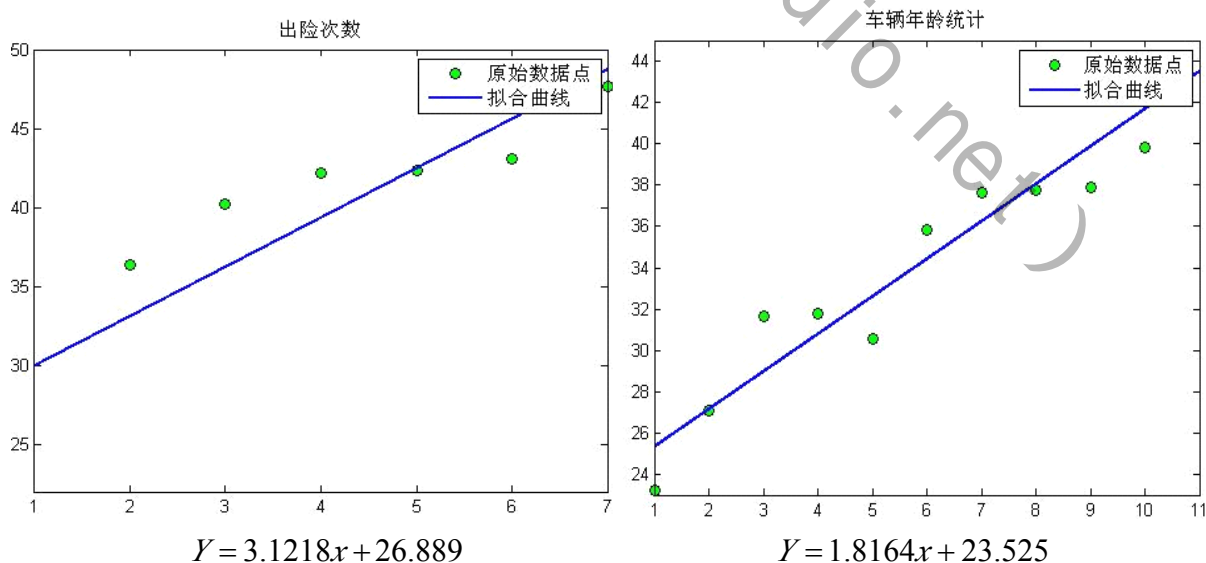
从第一主成分  $y_1^*$  的表达式来看，它的标准化变量  $x_1^*$ 、 $x_3^*$  和  $x_5^*$  有相近的载荷， $x_4^*$  的载荷比较小， $x_2^*$  为载荷相比  $x_1^*$ 、 $x_3^*$  和  $x_5^*$  的值小了些，说明第一主成分  $y_1^*$  为出险次数、使用性质、购买价格这三类影响因素起主要作用。

从第二主成分  $y_2^*$  的表达式来看， $x_2^*$  的载荷比较大， $x_4^*$  的正载荷比较大。说明  $x_4^*$  承保渠道与  $x_2^*$  车辆年龄之间相互协调、出险次数和使用性质次之影响续保率大小。

综上所述可以从五个因素中提取出三个影响续保率的因素，它们是出险次数、承保渠道、使用性质。

### 3、问题一模型的检验

现在用 2011 年 1-3 月的数据平均值进行线性统计回归以对问题一的模型进行检验：



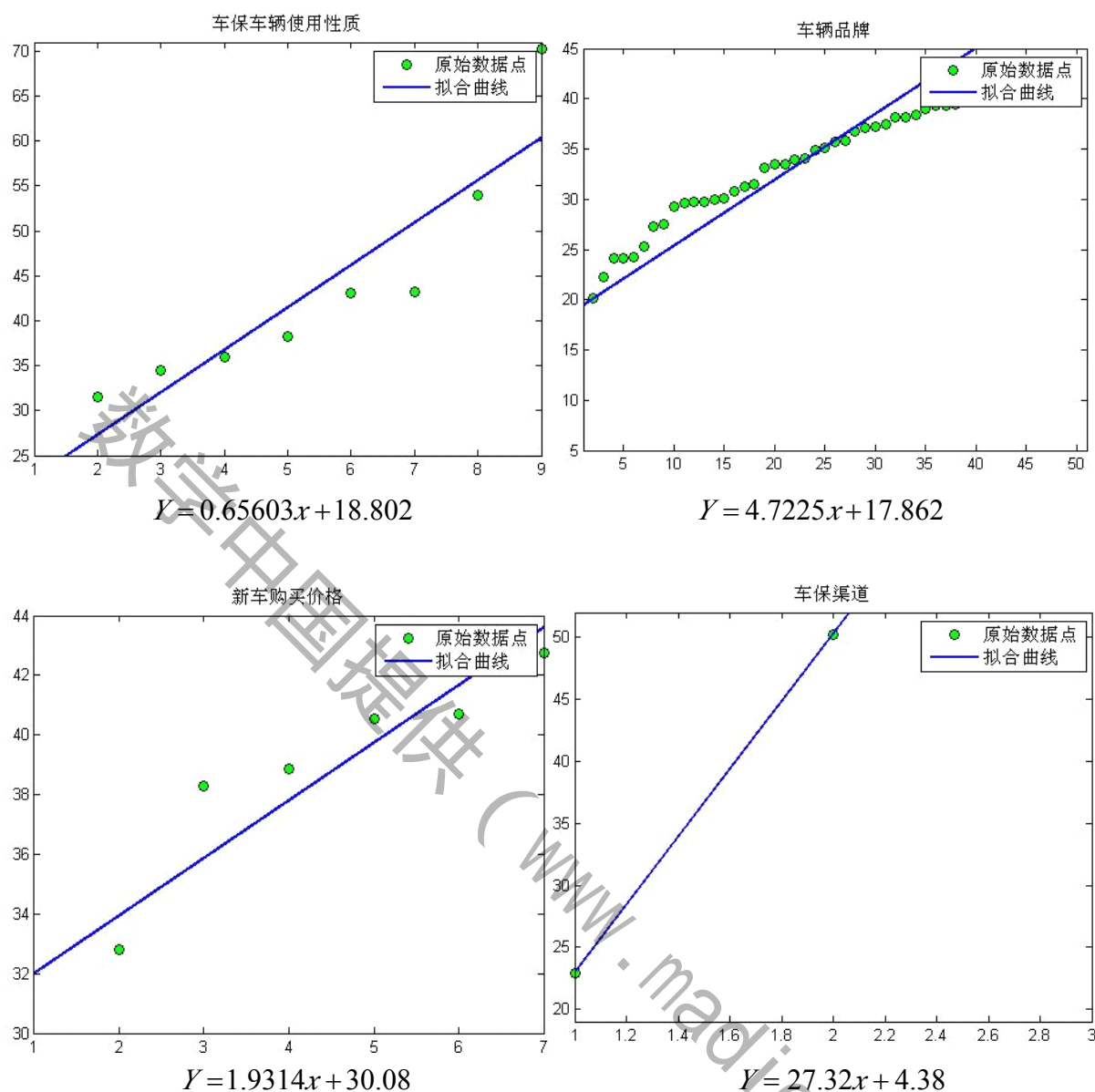


图 2 线性回归图形及其拟合方程式

由上面的拟合方程的斜率可以定量的对得出 2011 年后三个月对目标造成最小影响的元素仍然是汽车的品牌。结合回归图像可以看到出险次数，使用性质，承保渠道这三个因素在一定范围内对续保率相较其他因数有更大影响，与用主成分分析法得出的结果基本相同，说明我们建立的模型有一定的重复性与合理性。

## 问题二

### 1、评估模型的建立与求解

#### 1、对数据的分析

自从电销这一新的车险营销方式出来后，其强劲的势头很大程度上冲击着传统的销售方式。通过对题目所给的某公司 2010 年与 2011 年第一季度电销数的对比图进行分类优化统计，以车型为统计对象分析因车型不同得到保险方式，销售方式，保险类型的分类表格（如表 2）：

车型	保险方式		销售方式				保险种类	
客车	续保	新保	营销员	代理	电销	柜台	交强险	商业车险
70%	23%	77%	51%	25%	0%	0%	46%	54%
69%	31%	68%	40%	9%	9%	32%	61%	39%

车型	保险方式		销售方式				保险种类	
挂车	续保	新保	营销员	代理	电销	柜台	交强险	商业车险
8%	26%	74%	92%	8%	0%	0%	50%	50%
8%	26%	74%	49%	10%	0%	39%	45%	55%

车型	保险方式		销售方式				保险种类	
货车	续保	新保	营销员	代理	电销	柜台	交强险	商业车险
20%	26%	74%	88%	13%	0%	0%	61%	39%
22%	31%	69%	58%	9%	0%	30%	63%	37%

表 2 某公司 2010 年与 2011 年第一季度电销数的对比图

从表中可以得出，公司 2011 年仅仅是在客车方面进行了电销，电销与其他的销售方式为竞争的关系，且可能由于电销的原因使得续保、交强险比率波动，。其他两种车型在各参数上变化不大。

为了确定是否交强险的影响，我们又对交强险与各个参数做了统计（如表 3）：

	交强险	商业保险	续保	新保	总费率平均值
电销	28%	72%	14%	86%	0.92%
总销售量（客车）	61%	39%	31%	68%	0.98%

表 3 某公司电销与总销售量（客车）参数对比图

从表中可以直观的看出电销的影响集中在商业保险与新保，电销的总费率平均值低也说明其给企业带来的盈利大。

由于题目只给出了 2010 第一季度与 2011 第一季度两个季度的数据，且从数据中发现 2010 年的数据中没有电销这一展业方式，而建立的这个模型需要大量的详细数据，由于比赛时间的限制以及这些数据在网上很难找到，所以本文现在仅就题目所给数据统计后进行简单的对比分析，得出一般的结论。

## 2、电销对保险企业的影响分析（种群模型）

结合数据分析时得到的结论以及文献的调研，现将电销对保险企业的影响分成三个具体的方面（企业参保人数增长、企业盈利的增长、企业业务展开的方式）进行一般的建模分析。

（a）电销对企业参保人数增长、企业盈利的增长的影响：

结合数据分析所得的方法，对这两项因素的增长影响分析只需通过分别以时间与企业参保人数增长、企业盈利的增长进行统计回归得到增长率  $K_1$ ,  $K_2$ 。再通过时间与电销参保人数增长、电销盈利的增长进行统计回归得到增长率  $K_3$ ,  $K_4$ 。对比  $K_1$  与  $K_3$ ,  $K_2$  与  $K_4$  即可得电销对这两项因素的影响系数。

（b）电销对企业业务展开的方式的影响：

电销对保险企业影响最大的方面就是保险企业业务的展开方式，为了具体的评估和量化电销的影响，本文引入了生物学中的种群竞争模型，以期能够更好的定性的评估电销对业务展开方式的影响。

将电销与其他三种销售模式（柜台、营销员、代理）看成四种不同的生物种群。四种不同生物种群抢占的生存资料为企业的人力、财力、物力，种群的数量即为投保人的数量。

为了更好的讨论与简化模型：

1、将投保人人群按照其特点分类。

人群特点为：a、投保便利；b、价格便宜；c、渠道信任。将人群依据对 a, b, c 三类不同的重视程度分六种。又依据《2010 年上海保险总体服务满意度调查报告》得到的权重比例：a=0.4；b=0.3；c=0.27。计算出人群分类的比率（如表 4）

分类	最重视	重视	一般	比率
A	a	b	c	0.21053
B	a	c	b	0.18947
C	b	c	a	0.1209
D	b	a	c	0.1791
E	c	a	b	0.15429
F	c	b	a	0.11571

表 4 人群的分类及其比例



后又对其进行模糊定性的分类归属（如表五）：

柜台	营销员	代理
CF	DE	AB

表 5 人群的分类的归属

2、定性的讨论作为入侵的电销种群与任一种群的竞争过程与结果。  
当电销种群还未入侵时，原种群的数量演变均遵从 Logistic 规律为：

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right)$$

$x_1(t), x_2(t)$  为两个种群的数量； $r_1, r_2$  为两个种群的固有增长率； $N_1, N_2$  为它们的最大容量。

当电销种群入侵以后，其消耗资源对原种群产生影响，可以合理的将种群增长方程变换为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$\sigma_1$  的意义为：单位数量的电销种群（相对于  $N_2$  而言）消耗的供养原种群的资源量为单位数量原种群（相对于  $N_1$  而言）消耗的供养原种群的资源量的  $\sigma_1$  倍。 $\sigma_2$  为类似的意义。

研究两个种群相互竞争的结局，即  $t$  无穷大时， $x_1(t), x_2(t)$  的趋势，不必解方程只需对其的平衡点进行稳定性分析即可。

先根据上两个方程解代数方程组

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right) = 0 \end{cases}$$

得 4 个平衡点：

$$P_1(N_1, 0), P_2(0, N_2), P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), P_4(0, 0).$$

又计算

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\frac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2 \left(1 - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \frac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x_1} + g_{x_2})|_{P_i}, i=1,2,3,4 \quad q = \det A|_{P_i}, i=1,2,3,4$$

得平衡点稳定性结果与条件：

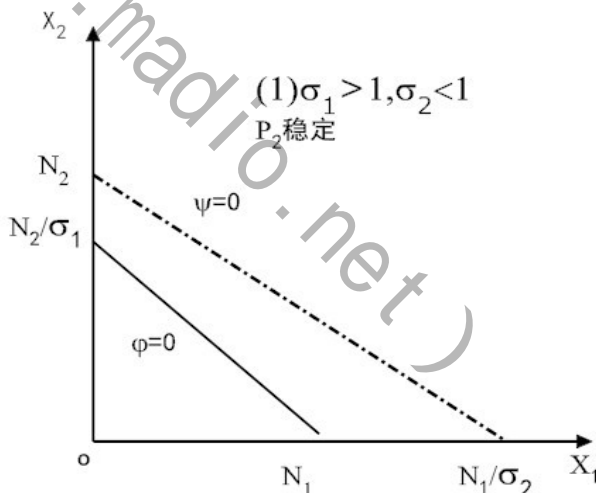
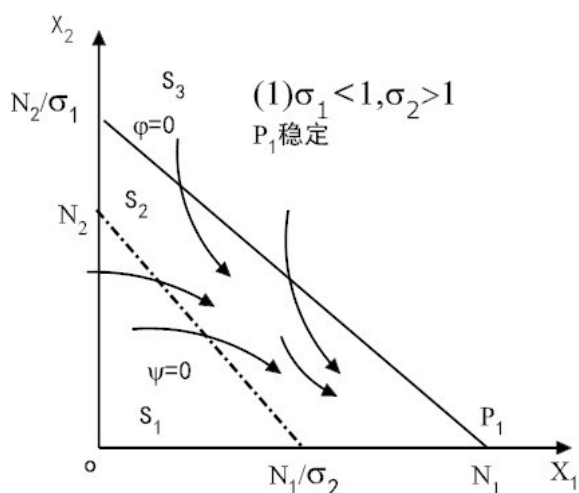
平衡点	$p$	$q$	稳定条件
$P(M, 0)$	$r_1 - r_2(1 - \sigma_2)$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_2)$	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$
$P_2(0, N_2)$	$-r_1(1 - \sigma_1) + r_2$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_1)$	$\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$
$P_3(\frac{N_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \frac{N_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2})$	$\frac{r_1(1 - \sigma_1) + r_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\frac{r_2 r_1(1 - \sigma_2)(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$
$P_4(0, 0)$	$-(r_1 + r_2)$	$r_1 r_2$	不稳定

又记

$$\phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}$$

通过作图分析给出，全局的稳定性及结果（如图3）：



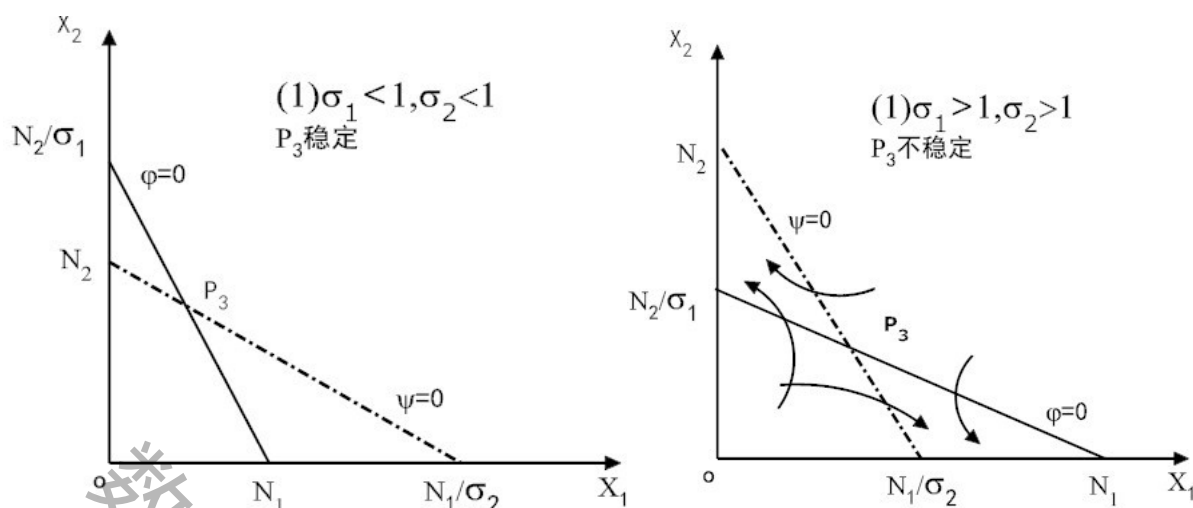


图3 全局的稳定性及结果示意图

即： $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$ 时原种群保持可容纳的最大数量；

$\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$ 时电销群得到可容纳的最大数量；

$\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$ 时电销群与原种群按比例  $\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$  与  $\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$  稳定共存。

### 3、电销群加入原来的四个种群中并通过竞争预测出结果。

模型原计划寻找大量的数据，以电销与任一原销售方式的选择为目标层，a,b,c 三个人群的特点为制约层，电销与所选的方案为方案层进行层次分析。得到的结果权重为  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  的值。

后通过分别在 A 到 F 的条件环境下进行种群竞争的计算，得到的结果与原环境的比率相乘。得出最终各个营销方式所占的最终比例，预测出电销对企业业务展开的方式的影响。

但由于此类数据一般为企业内部统计数据，网上较难查找。加之比赛时间，与本身精力的限制，故本问并未能够给出最终的解答，我们对此感到很可惜，很遗憾。

## 2、马氏链预测模型

通过前面评估模型的建立，评估方法的提出。发现对整体评估的预测涉及很大的数据，且数据指标  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  也不是很好量化。对此为了预测电销的方式会在多大程度上取代传统的销售方式，应该改变思路，分析个体因素即分析个体投保人，而不再是去分析整体的预测，以个体投保人选择传统销售方式或者电销模式的概率来预测和定义整体的目标：在多大程度上会取代传统的销售方式。

针对个体投保人的建模主要涉及到了两个方面：

### 1、量化电销方式对传统销售方式的取代：

为了简化模型这里只将销售方式分为两种：电销型，与非电销型。并以个体投保人选择非电销销售方式或者电销方式的稳定概率来量化电销方式对传统销售方式的取代。

## 2、电销方式对传统销售方式的取代的预测：

以个体投保人为分析，我们采用简单的马氏链模型对个体投保人选择非电销销售方式或者电销方式的稳定概率进行预测。

首先将模型就的受众简化为同一人群，此类人群在选择销售方式受到环境概率，个人经济，受教育程度的影响相同。

结合文献，分析对个体投保人选择产生影响的因素，并运用层次分析法量化转移概率。建模思路如下图所示：

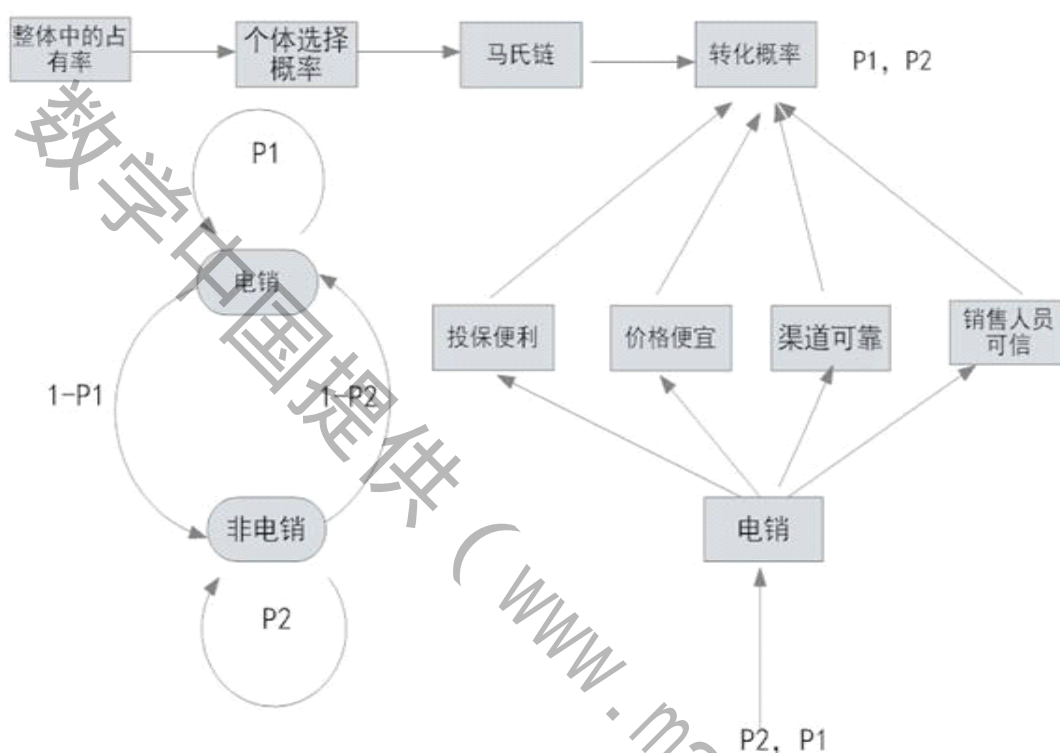
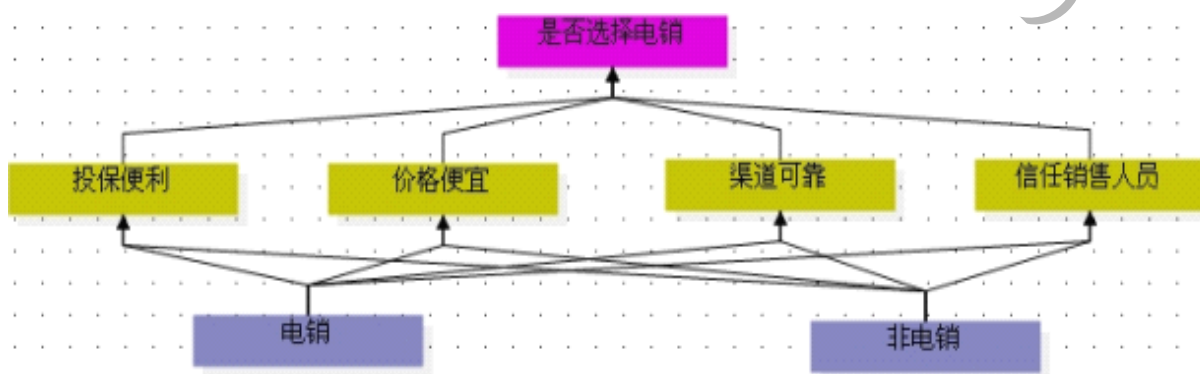


图4 马氏链模型建模思路

### A、层次分析法，分析 $P_1$ 、 $P_2$ 。

#### (1) $P_1$ 电销转移概率分析



**最终结果**

备选方案	权重
电销	0.6507
非电销	0.3493

1. 是否选择电销 判断矩阵一致性比例：0.0245；对总目标的权重：1.0000；

$\lambda_{\max}$ ：4.0654

是否选择电销	投保便利	价格便宜	渠道可靠	信任销售人员	Wi
投保便利	1.0000	1.0000	3.3201	4.9530	0.4316
价格便宜	1.0000	1.0000	1.8221	2.7183	0.3198
渠道可靠	0.3012	0.5488	1.0000	1.0000	0.1367
信任销售人员	0.2019	0.3679	1.0000	1.0000	0.1119

2. 投保便利 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.4316；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

投保便利	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	3.3201	0.7685
非电销	0.3012	1.0000	0.2315

3. 价格便宜 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.3198；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

价格便宜	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	2.2255	0.6900
非电销	0.4493	1.0000	0.3100

4. 渠道可靠 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.1367；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

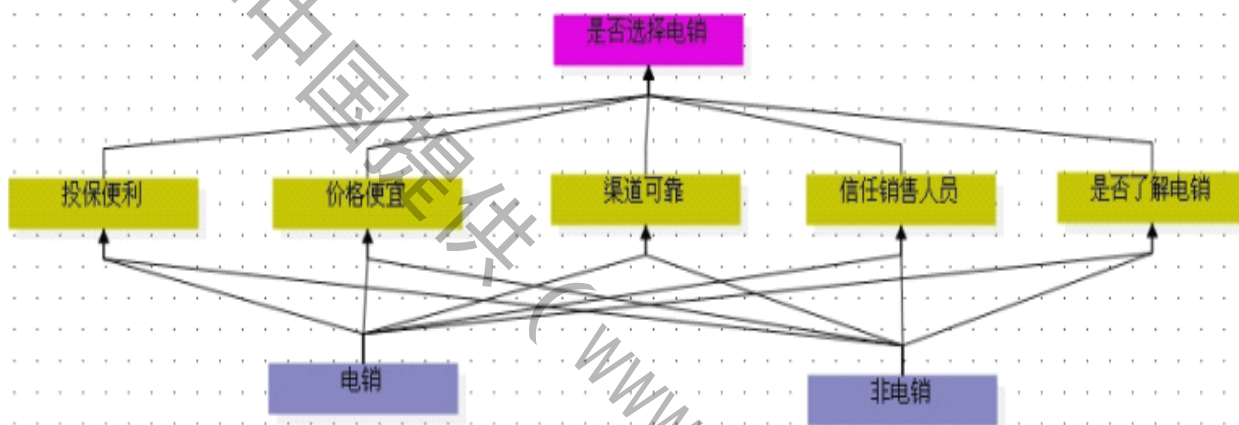
渠道可靠	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	0.4493	0.3100
非电销	2.2255	1.0000	0.6900

5. 信任销售人员 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.1119；  
 $\lambda_{\max}$ ：2.0000

信任销售人员	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	1.0000	0.5000
非电销	1.0000	1.0000	0.5000

(2) P2 非电销转移概率分析

在非电销的转移中还要考虑一个因素：个体投保人是否对电销方式了解。



最终结果

备选方案	权重
电销	0.3977
非电销	0.6023



### 1. 是否选择电销 判断矩阵一致性比例：0.0054；对总目标的权重：1.0000；

$\lambda_{\max}$ ：5.0240

是否选择电销	投保便利	价格便宜	渠道可靠	信任销售人员	是否了解电销	Wi
投保便利	1.0000	1.4918	2.7183	4.0552	0.6703	0.2619
价格便宜	0.6703	1.0000	1.4918	2.2255	0.3012	0.1496
渠道可靠	0.3679	0.6703	1.0000	1.2214	0.2019	0.0926
信任销售人员	0.2466	0.4493	0.8187	1.0000	0.2019	0.0728
是否了解电销	1.4918	3.3201	4.9530	4.9530	1.0000	0.4232

### 2. 投保便利 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.2619；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

投保便利	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	1.8221	0.6457
非电销	0.5488	1.0000	0.3543

### 3. 价格便宜 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.1496；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

价格便宜	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	2.2255	0.6900
非电销	0.4493	1.0000	0.3100

### 4. 渠道可靠 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.0926；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

渠道可靠	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	0.3679	0.2689
非电销	2.7183	1.0000	0.7311

### 5. 信任销售人员 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.0728；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

信任销售人员	电销	非电销	Wi
电销	1.0000	0.3012	0.2315
非电销	3.3201	1.0000	0.7685



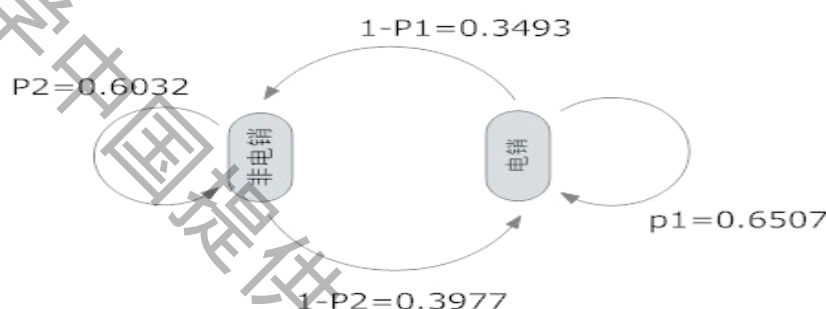
6. 是否了解电销 判断矩阵一致性比例：0.0000；对总目标的权重：0.4232；

$\lambda_{\max}$ ：2.0000

是否了解电销	非电销	电销	W <sub>i</sub>
非电销	1.0000	4.0552	0.8022
电销	0.2466	1.0000	0.1978

## B、马氏链预测

转移矩阵 P 为  $P=[0.6507, 0.3493; 0.3977, 0.6023]$ 。



易知此为一个正则链，具有稳定态概率分布  $w$ ，且与初始数值无关。

由：

$$wP = w$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1$$

用 matlab 解得

$$w=[0.5324, 0.4676]$$

即电销模式在将来可能占销售模式的 53.24%

对于问题二模型的检验，由题目给出的数据在时间跨度上太小。且数据一般为企业内部统计数据，网上较难查找。加之比赛时间，与本身精力的限制，我们没有对问题二的模型进行检验，我们对此感到很可惜，很遗憾。

## 六、模型的评价

### 问题一：

主要通过线性统计回归与主成分分析法建立数学模型。

#### 模型的优点

- ①：通过线性统计回归简单可靠的排除了下一步中可能产生分析误差的因素。
- ②：第二步通过主成分分析法简单、合理的计算出了结果。
- ③：由于影响续保率的因素有很多，题给数据中就有六个，而主成分分析法正好是通过降维技术把多个变量化为少数几个主成分的多元统计方法并且给出了一半的解析方程。

#### 模型的缺点

- ①：运用 SPSS 软件处理数据时得出影响因素的相关系数矩阵，所用的数据仅是当年到期车辆续保率这一栏的数据，不能免除由于其他数据的波动性给续保率带来的影响程度差别。
- ②：分析数据时有点偏于理想化，偏片面化。仅是有了 2010 年 9 到 12 月的数据进行求平均值作为总体样本数据矩阵，而 2011 年 1 月到 3 月的数据只运用在第一问模型的检验中。
- ③：主成分分析法得出的主成分的两个主成分表达式的说明情况不是特别有说服力，可能是因为数据统计的不全面的原因。
- ④：一般主成分分析法都不单独使用，其经常和聚类分析法、判断分析法结合起来分析。所以本文缺少这一方面的考虑。

### 问题二：

主要通过种群模型、层次分析法与马可链模型建立数学模型。

#### 模型的优点

- ①：对问题二的建模新颖、合理的引入生物模型中的种群模型，来描述电销与其他销售模式的竞争，具有一定的思维发散性，为其他设计竞争的问题提供了一种新的思路，新的尝试。
- ②：很好的运用了层次分析法的最终权重，为 P1，P2 的求解打开了道路。
- ③：模型针对整体评估的预测涉及大量的数据，且数据指标也不是很好量化的问题。通过简化车险销售方式以及将众人目标转化为以个人为研究对象的简单马氏链模型

来预测和定义整体的目标，符合问题的要求，并有一定的创造性与合理性。

### 模型的缺点

①：所建立的种群模型并不是特别的成熟，且需要大量的数据分析作为支持，而恰好本题的数据较难通过网络找出，题设给出的数据也很少。最终因数据不够导致了模型未能给出一个最终解。

②：因为车险的销售方式很多，而模型统一定为电销型和非电销型。这样定义不免因为其他销售方式的一些状态的变化而引起的对预测的影响不能分析的全面。

③：由于车险销售是针对不同人群的，而不同人群的选择方式必然受到环境，受教育程度，个人经济能力的影响，且所受影响程度的概率一般不同。模型中概率定为一样的有一定的不合理性。

④：研究个人得出来的的结果一般带有随机性、片面性。不能与整体体现出来的那种普遍性进行比较，本文所用的模型缺失这一点的考虑。

## 七、模型的改进

问题一：

本文所运用的主成分分析法其一般都不单独使用，所以在此基础上将主成分分析法与 R 聚类分析法结合起来建立一个新的模型，来对各因素对续保率的影响进行综合的评价，找出其中影响续保率程度最大的几种因素。

同时注意到题目给了大量的重复数据，可以采用 BP 神经网络等启发式模型对数据进行分析，建立合理的评估指标。

再来题设及数据实际上都是给出了一个灰色系统，这样就可以采用灰色系统广联分析对模型进行检验。

问题二：

对于种群模型  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  的求解可以采取除去层次分析法以外的算法，运用少量数据较为简单合理求解出  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$ 。

针对于结果一般带有随机性、片面性，可以将模型从个体到总体，从单方面销售方式到多方面销售方式进行推广研究，用以得到更加合理的结论。

问题二中所建立的是一个静态转移系数 P 的模型，而真正存在于现实生活中的转移系数往往是动态的。对于转移系数 P 可以将其与其他影响它的因素之间建立统计回归方程，给定一个动态变化的 P 值从而建立一个动态的马可链模型。

## 八、模型的推广

问题一的模型：

主成分分析法其主要目的是希望用较少的变量去解释原来资料中的大部分变异，将许多相关性很高的变量转化成彼此相互独立或不相关的变量。通常是选出比原始变量个数少，能解释大部分资料中的变异的几个新变量，即所谓主成分，并用以解释资料的综

合性指标。

所以主成分分析法可推广至社会调查研究、应用于各种领域的综合评价系统如学术期刊评价、城市道路交通安全评价、面条品质研究、大学师资评价、证券投资基金综合评价等各个领域都可以运用到主成分分析。

问题二的模型：

在以后处理竞争问题的时候可以参考本文所建立的种群模型，以合理的评估竞争问题。

由于层次分析法在处理复杂的决策问题上的实用性和有效性，与马可链模型预测的简单性和合理性。故层次分析模型与马可链模型的联用可以推广到经济计划和管理、能源政策和分配、行为科学、军事指挥、运输、农业、教育、人才、医疗、环境等领域中的指标预测中去。

## 九、参考文献

- [1]谢中华，MATLAB 统计分析与应用：40 个案例分析，北京：北京航空航天大学出版社，2010 年。
- [2]姜启源，数学模型，北京：高等教育出版社，2003 年。
- [3]杨浩，模型与算法，北京：北方交通大学出版社，2002 年。
- [4]肖华勇，实用数学建模与软件应用，西安：西北工业大学出版社，2008 年。
- [5]解放日报，2010 年上海保险总体服务满意度调查报告，保险周刊，2010 年
- [6]高秋红，邵增兵，电销冲击下传统销售渠道将何去何从，中国保险，第 7 期：40—41，2010。
- [7]万研，电销新渠道突破，商周刊，第 21 期：68—69，2010。
- [8]时培建，戈峰，外来物种入侵后的多物种竞争共存的集合种群模型，生态学报，29（3）：1241—1250，2009。
- [9]梁仁君，林振山，物种竞争的动力机制及数值模拟分析，生物数学学报，22（3）：569—575，2007。
- [10]王君，湖南省电销保险之现状分析，现代经济信息，第 18 期：215，2010。

## 十、附录

### 一、问题一程序

```
clc;clear;
```

```
%%问题一主成分分析模型程序
```

```
%R为影响因素的相关系数矩阵
```

```
R=[1 -0.305 0.995 -0.194 0.991;-0.305 1 -0.396 -0.875 -0.429;0.995 -0.396 1  
-0.098 0.999;-0.194 -0.875 -0.098 1 -0.062;0.991 -0.429 0.999 -0.062 1];
```

```
[COEFF,latent,explained]=pcacov(R)
```

```
%为了更加直观，以元胞数组形式显示结果
```

```

result1(1,:)={'特征值','差值','贡献率','累积贡献率'};
result1(2:6,1)=num2cell(latent);
result1(2:5,2)=num2cell(-diff(latent));
result1(2:6,3:4)=num2cell([explained,cumsum(explained)])
%以元胞数组形式显示前三个主成分表达式
s={'标准化变量';'x1:出险次数';'x2:车辆年龄';'x3:使用性质';'x4:承保渠道';'x5:购买价格'};
result2(:,1)=s;
result2(1,2:3)={'prin1','prin2'};
result2(2:6,2:3)=num2cell(COEFF(:,1:2))

```

## 二、问题二程序

```

clc;clear;
% 读入状态转移概率矩阵
p=[0.6507,0.3493;0.3977,0.6023];
% 读入初始状态概率向量
x=[0,1];
for i=1:10,
    y=x*p^i
end

```

## 三、问题一运用 SPSS 软件求相关系数矩阵的分析表

Factor Analysis			
Descriptive Statistics			
	Mean	Std. Deviation	Analysis N
出险次数	.2838	.07178	3
车辆年龄	.2533	.03266	3
使用性质	.3540	.08507	3
承保渠道	.3302	.11723	3

购买价格	.2406	.08989	3
------	-------	--------	---

Correlation Matrix(a)						
		出险次数	车辆年龄	使用性质	承保渠道	购买价格
Correlation	出险次数	1.000	-.305	.995	-.194	.991
	车辆年龄	-.305	1.000	-.396	-.875	-.429
	使用性质	.995	-.396	1.000	-.098	.999
	承保渠道	-.194	-.875	-.098	1.000	-.062
	购买价格	.991	-.429	.999	-.062	1.000
a This matrix is not positive definite.						

Component Matrix(a)		
	Component	
	1	2
出险次数	.969	.246
车辆年龄	-.530	.848
使用性质	.988	.152
承保渠道	.054	-.999
购买价格	.993	.115

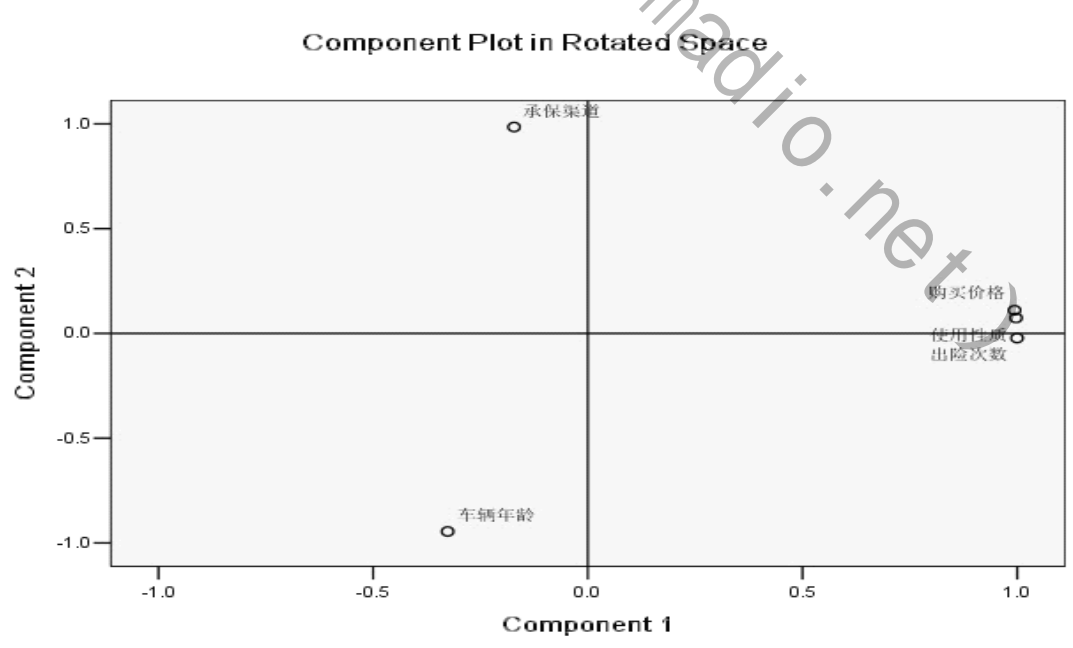
Communalities	
	Extraction
出险次数	1.000
车辆年龄	1.000
使用性质	1.000
承保渠道	1.000
购买价格	1.000
Extraction Method: Principal Component Analysis.	

Total Variance Explained						
Component	Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %

<b>1</b>	3.187	63.746	63.746	3.118	62.359	62.359
<b>2</b>	1.813	36.254	100.000	1.882	37.641	100.000
Extraction Method: Principal Component Analysis.						

Rotated Component Matrix(a)		
	Component	
	1	2
出險次數	1.000	-.022
車輛年齡	-.327	-.945
使用性質	.997	.074
承保渠道	-.172	.985
購買價格	.994	.111

Component Transformation Matrix		
Component	1	2
<b>1</b>	.974	.225
<b>2</b>	.225	-.974
Undefined error #11401 - Cannot open text file "D:\Program Files\SPSS\en\windows\spss.err": No such		



Component Score Coefficient Matrix
------------------------------------



	Component	
	1	2
出险次数	.327	-.064
车辆年龄	-.057	-.493
使用性质	.321	-.012
承保渠道	-.107	.541
购买价格	.318	.008

Component Score Covariance Matrix		
Component	1	2
1	1.000	.000
2	.000	1.000
Undefined error #11401 - Cannot open text file "D:\Program Files\SPSS\en\windows\spss.err": No such		

## 四、电销参考数据统计表一和表二

表一

	险种		保险方式	
客车	续保	新保	交强险	商业车险
6034	1401	4633	2783	3255
6006	1886	4112	3690	2316
	险种		保险方式	
挂车	续保	新保	交强险	商业车险
665	175	490	330	335
661	171	490	298	363
	险种		保险方式	
货车	续保	新保	交强险	商业车险
1720	450	1270	1056	664
1969	603	1366	1236	733
	险种		保险方式	
特种车	续保	新保	交强险	商业车险
136	7	129	85	51
119	17	102	74	45
	险种		保险方式	
其它	续保	新保	交强险	商业车险
20	2	18	20	0
9	1	8	9	0

表二

销售方式									
经纪人	营销员	银行代理	其他兼业代	专业代理	电销	运输行业	汽车销售行	柜台	个代产
35	3034	29	5	1530	0	0	0	0	0
8	2379	54	89	413	550	23	1442	284	164
销售方式									
经纪人	营销员	银行代理	其他兼业代	专业代理	电销	运输行业	汽车销售行	柜台	个代产
0	612	0	0	53	0	0	0	0	0
0	322	6	2	57	0	13	241	19	1
销售方式									
经纪人	营销员	银行代理	其他兼业代	专业代理	电销	运输行业	汽车销售行	柜台	个代产
29	1480	0	0	215	0	0	0	0	0
0	1135	108	24	82	0	47	473	90	10
销售方式									
经纪人	营销员	银行代理	其他兼业代	专业代理	电销	运输行业	汽车销售行	柜台	个代产
6	120	0	0	10	0	0	0	0	0
2	46	6	4	6	0	0	53	2	0
销售方式									
经纪人	营销员	银行代理	其他兼业代	专业代理	电销	运输行业	汽车销售行	柜台	个代产
0	20	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0			1	