

## 一、问题重述

Dietrich Braess 在 1968 年的一篇文章中提出了道路交通体系当中的 Braess 悖论。它的含义是：有时在一个交通网络上增加一条路段，或者提高某个路段的局部通行能力，反而使所有出行者的出行时间都增加了，这种为了改善通行能力的投入不但没有减少交通延误，反而降低了整个交通网络的服务水平。人们对这个问题做过许多研究，在城市建设当中也尽量避免这种现象的发生。但在复杂的城市道路当中，Braess 悖论仍然不时出现，造成实际交通效率的显著下降。在此，请你通过合理的模型来研究和解决城市交通中的 Braess 悖论。

### 第二阶段问题：

Braess 悖论宣称：提高某一路段的通行能力，反倒可能使整体路网的通行能力下降。那么，在发生交通拥堵的时候，如果暂时关闭其中的某条道路，是否可以缓解交通堵塞的现象？请建立合理的模型，研究临时关闭道路以缓解交通堵塞的可行性。如果可行，请给出具体的关闭方案。城区道路网可以使用北京市二环路的地图。

## 二、问题分析

随着现代城市的快速发展和规模的不断扩大，城市交通开始面临越来越大的压力，特别是在工作日的上下班高峰期，交通拥堵问题尤为明显。为了提高城市道路的通行能力，通常采用的方法是新建道路或扩建已有道路。但是，Dietrich Braess 早在 1968 年就提出，在某种情况下，在交通网络中增加一条通路反而会增加网络中所有用户的出行时间，这种违背常理的现象被称作 Braess 悖论。从博弈论角度来看，Braess 悖论实质上是非合作网络中 Nash 平衡点不满足 Pareto 最优性时出现的诡异现象<sup>[1]</sup>。

这时，使整个路网出行时间最少的流量分布并不是 Nash 平衡的，相应的个体会改变整体的最优策略，以缩短单个个体的出行时间，而同时却使整体的出行时间变长。

考虑到城市路网出现拥堵的典型时间段为上班高峰期和下班高峰期，为使研究不失一般性，本文选取这两个时间段作为建模的背景；同时，这两个时间段还分别代表了两种交通流量模型：多对一（多起点单终点）和一对多（单起点多终点），应该在研究过程中加以分类讨论。为了研究关闭道路以减轻交通拥堵状况的可行性，本文旨在通过建模，找出出行时间成本关于道路通行能力和单位时间车流量变化率的关系，通过对出行时间成本 TC 求导的方式，判断该时间成本是否会随道路通行能力的增大而增大，而在其导数大于零的前提下，采用模拟关闭道路的方法，得到道路关闭后总的时间成本，讨论时间成本的变化率，进而得到最优的道路关闭方案。

在对北京市二环路内道路拥堵的实证中，仅需选取发生交通拥堵的路口或路段的相关数据，而不必对每条主干道和支干道进行研究。考虑到关闭道路需要投入的相关成本，以及关闭使用中道路对交通带来的扰动，只有当关闭道路对交通拥堵的改善作用比较明显时，关闭道路的方案才具有实际意义。进一步，运用统计的方法，针对固定路段采取相对固定的道路关闭方案，也将会使关闭道路的实际效果更为显著。

### 三、符号说明

符号	描述
$P_{ij}(t)$	到 $t$ 时刻为止, 通过 $i$ 点进入路段 $e_{ij}$ 的车辆数目;
$Q_{ij}(t)$	到 $t$ 时刻为止, 从 $j$ 点离开路段 $e_{ij}$ 的车辆数目;
$m_{ij}$	路段 $e_{ij}$ 没有阻塞时车辆通过的时间, 为一常数;
$\mu_{ij}$	路段 $e_{ij}$ 的最大通行能力;
$\tau_i^s$	$s$ 时刻从起点出发车辆到达 $i$ 点的最短时间;
$y_{ij}^s$	从 $i$ 点进入 $e_{ij}$ 随时间变化率;
$C_{ij}(\tau_i^s)$	$s$ 时刻从 $O$ 点出发的车辆在 $\tau_i^s$ 时刻通过边 $e_{ij}$ 的时间;
$TC$	0 到 $T$ 时刻止, 路网中驾驶员从起点至终点总时间代价;
$S$	允许关闭的路段集合。

### 四、模型假设<sup>[2]</sup>

本文采用的模型基于以下四个假设:

#### 4.1 Nash 均衡

也称为 Dynamic User Equilibrium (DUE), 指每个司机都从个人利益出发, 选择使自己出行成本最低的路线; 而不会因为考虑他人的出行成本而改变路线, 使自己的成本增加。

#### 4.2 FIFO 与车辆模型假设

假设公路上的车辆都遵循先进先出 (First In First Out) 原则, 且将车辆看作一个没有物理长度的质点。

#### 4.3 饱和路网

基于两个假设:

- 在路网的每条公路上都有车流流入量;
- 路网的每条公路均非自由流。

对于假设 a), 我们可以根据实际存在车流流入量为正的公路的集合, 来构造符合该假设的路网; 对于假设 b), 由于本文仅对北京市二环路内存在拥堵情况的公路进行研究, 所以该假设是合理的; 并且在该假设下, 我们可以得到定量的解析解。

#### 4.4 最短路径选择

在 DUE 的假设下，假定出行成本最低的路线即为路径最短的路线。

### 五、模型的建立

#### 5.1 晚高峰（下班模型）<sup>[2]</sup>

考虑到城市功能分布的实际情况，在晚高峰模型中，本文假设路网中有一个中心起点和几个不同的终点，车辆从不同的起点出发，终止于不同的终点。为了便于讨论，本文引入以下符号：沿用图论中的记法习惯，令  $G(N, L)$  表示所研究的具体路网，其中， $N$  为路网中节点个数的集合， $L$  为路网中的所有有向边的集合。显然，根据定义，起点和终点都是节点集合  $N$  的子集。记起点为  $O$ ，终点为  $D$ ，则在晚高峰的模型中， $O$  唯一而  $D$  不唯一。

记从节点  $i$  到节点  $j$  的有向边为  $e_{ij}$ ， $P_{ij}(t)$  为到  $t$  时刻为止，通过  $i$  点进入路段  $e_{ij}$  的车辆数目， $Q_{ij}(t)$  为到时刻为止，从  $j$  点离开路段  $e_{ij}$  的车辆数目。若在  $t=0$  时刻， $e_{ij}$  路段上无滞留车辆，则  $X_{ij}(t) = P_{ij}(t) - Q_{ij}(t)$ ，其中， $X_{ij}(t)$  定义了到  $t$  时刻为止，路段  $e_{ij}$  上的车辆数目。

进一步，记  $\tau_i^s$  为  $s$  时刻从起点出发车辆到达  $i$  点的最短时间， $y_{ij}^s$  为从  $i$  点进入  $e_{ij}$  随时间变化率，即  $y_{ij}^s = \frac{dP_{ij}(\tau_i^s)}{ds}$ ；定义  $Q_{od}(s)$  为到  $t=s$  时刻止，从  $O$  点出发并以  $D$  为终点的车辆总数，这与  $Q_{ij}(t)$  的定义是一致的。

在 Nash 均衡的条件下，结合 FIFO 准则，易知  $s$  时刻从  $O$  点出发的车辆在  $\tau_i^s$  时刻通过边  $e_{ij}$  的时间  $C_{ij}(\tau_i^s)$  满足：

$$C_{ij}(\tau_i^s) = \begin{cases} m_{ij} & X_{ij}(\tau_i^s) = 0, \text{ 即没有堵塞,} \\ \frac{X_{ij}(\tau_i^s)}{\mu_{ij}} & X_{ij}(\tau_i^s) > 0, \text{ 即产生堵塞.} \end{cases} \quad (5.1)$$

对 (5.1) 式求取微分，得到

$$\frac{dC_{ij}(\tau_i^s)}{ds} = \begin{cases} 0, & X_{ij}(\tau_i^s) = 0, \\ \frac{dX_{ij}(\tau_i^s)}{ds} \cdot \frac{1}{\mu_{ij}} = \frac{y_{ij}^s}{\mu_{ij}} - \frac{d\tau_i^s}{ds}, & X_{ij}(\tau_i^s) > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

注意到对任意一条路段  $e_{ij}$ ，在 FIFO 准则下，其流量守恒，即：

$$\sum_{i \in I_k} y_{ik}^s - \sum_{j \in O_k} y_{kj}^s - \frac{dQ_{ok}(s)}{ds} = 0, \quad \forall k \in N, \forall s \in \mathbb{R}^+. \quad (5.3)$$

其中,  $I_k$  为与  $k$  点相连且有向边指向  $k$  点的结点集合,  $O_k$  为与  $k$  点相连, 而有向边背离  $k$  点的结点集合,  $Q_{ok}(s)$  为  $s$  时刻从  $o$  点出发并以  $k$  点为目的地的车辆数目。

定义  $N$  维行向量  $\frac{dQ(s)}{ds}$  如下:

$$\frac{dQ(s)}{ds} = \left( \frac{dQ_{od_1}(s)}{ds}, \frac{dQ_{od_2}(s)}{ds}, \dots, \frac{dQ_{od_{N-1}}(s)}{ds} \right), \quad d_i \in N \quad (5.4)$$

定义  $L$  维列向量  $y(s)$ :

$$y(s) = (y_{i_1 j_1}^s, y_{i_2 j_2}^s, \dots, y_{i_L j_L}^s), e_{i_k j_k} \in L, k=1, \dots, L \quad (5.5)$$

记  $A^*$  为道路网拓扑结构矩阵, 即:  $A^* = (a_{ij})_{N \times L}$  满足

$$a_{il} = \begin{cases} 1, & \text{若结点 } i \text{ 为边 } l \text{ 起点,} \\ -1, & \text{若结点 } i \text{ 为边 } l \text{ 终点,} \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

注意到对矩阵  $A^*$ ,  $\sum_{i=1}^N a_{il} = 0$ , 所以矩阵  $A^*$  的秩为  $N-1$  (假设  $L \gg N$ ), 移除矩阵

$A^*$  的任意一行得到矩阵  $A$ ,  $A \in M$ , 并称被移除行为“关联行”。虽然矩阵  $A$  比矩阵  $A^*$  行数少 1, 但  $A$  与  $A^*$  所反映的信息量完全相同。将矩阵  $A$  中取值为 1 的元素转换为 0, 得到的新矩阵记为  $A_-$ 。利用上面的记号, 根据节点处流量守恒原理, 可得:

$$A \cdot y(s)^T = -\frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.6)$$

同理, 对于路段的情况, 由流量守恒得到:

$$C_{ij}^s + \tau_i^s - \tau_j^s = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.7)$$

对 (5.7) 式求微分, 有:

$$\frac{dC_{ij}^s}{ds} + \frac{d\tau_i^s}{ds} - \frac{d\tau_j^s}{ds} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.8)$$

在此, 本文假设  $C_{ij}(t) > m_{ij}$ ,  $\forall e_{ij} \in L, t \in \mathbb{R}^+$ , 即为模型假设 4.3 的公式描述。

将 (5.8) 式带入 (5.2) 式, 得:

$$y_{ij}^s = \mu_{ij} \cdot \frac{d\tau_j^s}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.9)$$

记  $M$  为  $L \times L$  对角矩阵, 其中对角元  $m_{kk} = \mu_{i_k j_k}$ ,  $1 \leq k \leq L$ ;

记  $\frac{d\tau(s)}{ds}$  为  $N-1$  维列向量:  $\frac{d\tau(s)}{ds} = \left( \frac{d\tau_1^s}{ds}, \frac{d\tau_2^s}{ds}, \dots, \frac{d\tau_{N-1}^s}{ds} \right)$

可得矩阵表达式：

$$y(s) = -(MA_-^T) \cdot \frac{d\tau(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.10)$$

将 (5.10) 式代入 (5.6) 式，有：

$$(AMA_-^T) \frac{d\tau(s)}{ds} = \frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.11)$$

式 (5.11) 中，为使  $\frac{d\tau(s)}{ds}$  有唯一解，必须要求  $AMA_-^T$  可逆（满秩矩阵），而  $AMA_-^T$  的秩强烈依赖于得到  $A$  矩阵时所删除的“关联行”，当“关联行”为一对多模型中的起点时， $AMA_-^T$  秩为  $N-1$ ，此时有：

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = (AMA_-^T)^{-1} \cdot \frac{dQ(s)}{ds} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad (5.12)$$

记从 0 至  $T$  时刻，路网中车辆从起点至终点的总时间代价为  $TC$ ，则有：

$$TC = \sum_d \int_0^T Q'_{od}(s) [\tau_d(s) - s] ds \quad (5.13)$$

根据上式，可知当某条公路通行能力改变（关闭道路可以视作通行能力减小为 0 的特殊情况）时，路网总耗时  $TC$  的改变趋势。即，当  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} > 0$  时，表示当路段  $e_{ij}$  的通行能力  $\mu_{ij}$  增强，路网的总时间代价反而会增加，即产生了 Braess 悖论；当  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} < 0$  时，可认为当路段  $e_{ij}$  的通行能力  $\mu_{ij}$  增强，路网的总时间代价随之减小。为研究通过关闭路网中的某条道路以缓解道路拥堵情况的可行性，本文重点讨论  $\mu_{ij}$  对总时间代价  $TC$  的贡献，定义

$$P_{ij} \triangleq \int_0^{\bar{\mu}_{ij}} \frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} d\mu_{ij} \quad (5.14)$$

其中， $\bar{\mu}_{ij}$  为道路  $e_{ij}$  的现实通行能力。则当  $P_{ij} > 0$  时，表示当路段  $e_{ij}$  的实际通行能力  $\mu_{ij}$  增强，整个路网的总时间代价  $TC$  也随之增加；反之，减弱路段  $e_{ij}$  的通行能力，或关闭路段  $e_{ij}$ （即  $\mu_{ij} = 0$ ），可降低  $TC$ ，缓解交通拥堵的状况。而当  $p_{ij} < 0$  时，则表示增强路段  $e_{ij}$  的通行能力  $\mu_{ij}$ ， $TC$  将随之减小，则采用关闭该路段的方法，不能对缓解交通堵塞的状况起到积极作用。

综上所述，我们可通过判断  $p_{ij}$  的符号来确定关闭路段  $e_{ij}$  的方案是否可行。当  $p_{ij} > 0$  时，关闭  $e_{ij}$  将产生积极的效果；而  $p_{ij} < 0$  时，该措施将会加剧交通拥堵的情况。

进一步讨论式 (5.14)，若  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} > 0 \quad \forall \mu_{ij} \in (0, \bar{\mu}_{ij})$ ，则直接可得  $p_{ij} > 0$ ，这对本文下节中对北京市二环路实际路况的分析很有帮助；而对  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}}$  符号不确定的情况，则需用积分的相关性质进一步进行讨论。

## 5.2 早高峰（上班模型）

对于早高峰（多起点单终点）模型，本文采用与晚高峰模型相同的结构进行分析，注意此时矩阵  $A$  的元素将有相应变化。由于所采用的方法相同，在此本文将不重复赘述。

## 5.3 关闭方案分析

由 5.1 可知，采用关闭路段以缓解路网拥堵情况的可行性由  $p_{ij}$  决定。不妨设

$$S = \{e_{ij} | p_{ij} > 0\} \quad (5.15)$$

其中  $S$  为允许关闭的路段集合。

若  $S \neq \emptyset$  且  $\text{card}(S) > 1$ ，即表示允许关闭的路段不止一条，此时可采用最优化的算法，对优先关闭哪一条路段作出判断；而在关闭该路段后，整个路网的拓扑结构将发生相应改变，本文继续对有新拓扑结构的路网构建 5.1 节中的模型，得到新路网的总时间代价。

记  $TC_{ij}$  为关闭路段  $e_{ij}$  后新路网的总时间代价，则模型转化为最优化问题

$$\min \{TC_{ij} / e_{ij} \in S\} \quad (5.16)$$

的求解。

若  $TC_{i_0 j_0} = \min \{TC_{ij} / e_{ij} \in S\}$ ，则表明关闭路段  $e_{i_0 j_0}$  比关闭集合  $S$  中其它路段更好， $e_{i_0 j_0}$  即为所求优先关闭的路段。

### 5.3.1 关闭路段的时间条件

由以上讨论可知，当集合  $S$  非空，关闭集合中的任一路段都将有利于缓解路网拥堵的情况；而对优先关闭路段的选择，则由最优化问题  $\min \{TC_{ij} / e_{ij} \in S\}$  决定。在实际的交通问题中，关闭正在使用中的路段需要一定的开销，且路段进入关闭状态后，应持续一段比较长的时间。

定义

$$\Delta TC_{i_0 j_0} = TC - TC_{i_0 j_0}, \quad \text{其中 } TC_{i_0 j_0} = \min \{TC_{ij} / e_{ij} \in S\} \quad (5.17)$$

引进参数  $\eta > 0$ ，本文定义若  $\frac{\Delta TC_{i_0 j_0}}{TC} > \eta$ ，则关闭路段  $e_{i_0 j_0}$ 。此时，

$$TC_{i_{j_0}} = TC - \Delta TC_{i_{j_0}} < TC - \eta \cdot TC = (1 - \eta) TC \quad (5.18)$$

其中,  $\eta$  作为关闭路段的判断阈值, 一般取值大于 0。它表示, 只有当路网的总时间代价  $TC$  因路段  $e_{i_{j_0}}$  的改变而有明显变化时 (即小于原值的  $(1 - \eta)$  倍), 采取关闭路段的措施才有意义。在  $TC$  随着  $e_{i_{j_0}}$  的变化而有微小改变时, 考虑到关闭路段所需的实际开销, 本文建议路网仍维持原状。

### 5.3.2 开启路段的时间条件

由 5.1 节, 当  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} < 0$  时, 开启路段  $e_{ij}$  将不会产生 Braess 悖论; 故而, 若路段  $e_{i_{j_0}}$

正处于关闭状态, 则其被重新开启的条件为  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} < 0$ 。同时, 为避免  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}}$  值的异常波

动对决策结果的影响, 本文仿照 5.3.1 节, 引进参数  $\bar{\eta} < 0$ , 则重新开启路段  $e_{i_{j_0}}$  的条件相应改写为:

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_{ij}} < \bar{\eta} < 0 \quad (5.19)$$

第六章中, 本文利用北京市二环路内易产生拥堵的路段的相关数据, 结合以上模型算法, 讨论关闭路段以缓解交通拥堵的可行性, 并给出具体的方案。

## 六、模型的求解

### 6.1 关闭路段的可行性分析

本文的研究对象为北京市二环路以内的交通堵塞问题, 并根据模型假设, 选择图 6.1 所示的路段区域进行验证。

如图 6.1 所示, 图中红线标注的十字为本文研究的路段对象。根据周六下午的数据统计, 该路段的拥堵现象严重, 可作为北京市二环路内交通问题的典型进行研究。



图 6.1 北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口图<sup>[3]</sup>

为便于讨论，并由路网的对称性，将上图 6.1 简化为图 6.2 中所示的模型：

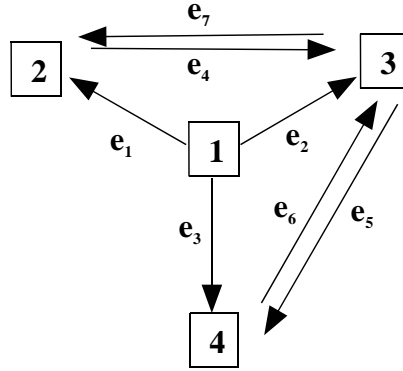


图 6.2 交叉路口示意图

图中，1 表示市中心区域，即晚高峰起始点；2，3，4 为终点。在该模型中，假设车辆均从节点 1 出发，经过各有向路段到达终点 2，3，4。由 6.1 节，易知：

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$M = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$ ，其中  $\mu_i$  为第  $i$  条路段  $e_i$  的最大通行率（即单位时间通过的车辆数），则有

$$AMA_-^T = \begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_7 & -\mu_4 & 0 \\ -\mu_7 & \mu_2 + \mu_4 + \mu_6 & -\mu_5 \\ 0 & -\mu_6 & \mu_5 + \mu_3 \end{bmatrix}$$

为了便于表示，记  $\mu_{xyz} = \mu_x \cdot \mu_y \cdot \mu_z$ ； $\mu_{xy} = \mu_x \cdot \mu_y$ ，则有



$$(AMA_-^T)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \mu_{23} + \mu_{25} + \mu_{34} + \mu_{45} + \mu_{36} & \mu_4(\mu_3 + \mu_5) & \mu_{45} \\ \mu_7(\mu_3 + \mu_5) & (\mu_1 + \mu_7)(\mu_3 + \mu_5) & (\mu_1 + \mu_7)\mu_5 \\ \mu_{67} & \mu_6(\mu_1 + \mu_7) & \mu_{12} + \mu_{14} + \mu_{16} + \mu_{27} + \mu_{67} \end{pmatrix}}{\mu_{123} + \mu_{125} + \mu_{134} + \mu_{145} + \mu_{136} + \mu_{237} + \mu_{257} + \mu_{367}}$$

在 (5.2) 式中对  $s$  积分, 得到

$$\tau(s) = (AMA_-^T)^{-1} \cdot Q(s) + \tau(0) \quad (6.1)$$

由 (5.13) 式, 有

$$TC = \sum_{i=2}^4 \int_0^T \frac{dQ_i(s)}{ds} [\tau_i(s) - s] ds = \int_0^T \left( \frac{dQ(s)}{ds} \right)^T \cdot [\tau(s) - s] ds \quad (6.2)$$

将  $\tau(s)$  代入 (6.2) 式, 得到

$$TC = \int_0^T \left( \frac{dQ(s)}{ds} \right)^T \cdot [(AMA_-^T)^{-1} \cdot Q(s) + \tau(0) - s] ds \quad (6.3)$$

为判断关闭路网中的路段是否可以缓解二环路内的交通堵塞, 本文通过对  $TC$  关于  $\mu_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 求取偏导的方法, 得到  $P_i$  的大小。

由 (6.3) 式, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \mu_1} = & - \left[ \int_0^T \frac{121Q_{12}Q'_{12} + 66Q_{12}Q'_{13} + 44Q_{12}Q'_{14} + 66Q_{13}Q'_{12} + 36Q_{13}Q'_{13}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right. \\ & \left. + \int_0^T \frac{24Q_{13}Q'_{14} + 44Q_{14}Q'_{12} + 22Q_{14}Q'_{13} + 16Q_{14}Q'_{14}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \mu_2} = & - \left[ \int_0^T \frac{36Q_{12}Q'_{12} + 54Q_{12}Q'_{13} + 36Q_{12}Q'_{14} + 54Q_{13}Q'_{12} + 81Q_{13}Q'_{13}}{(9\mu_2 + 12)^2} ds \right. \\ & \left. + \int_0^T \frac{54Q_{13}Q'_{14} + 36Q_{14}Q'_{12} + 54Q_{14}Q'_{13} + 36Q_{14}Q'_{14}}{(9\mu_2 + 12)^2} ds \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \mu_3} = & - \left[ \int_0^T \frac{16Q_{12}Q'_{12} + 22Q_{12}Q'_{13} + 44Q_{12}Q'_{14} + 24Q_{13}Q'_{12} + 36Q_{13}Q'_{13}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right. \\ & \left. + \int_0^T \frac{66Q_{13}Q'_{14} + 44Q_{14}Q'_{12} + 66Q_{14}Q'_{13} + 121Q_{14}Q'_{14}}{(11\mu_1 + 10)^2} ds \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_4} = \int_0^T \frac{(2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(-6Q'_{12} - 9Q'_{13} + 15Q'_{14})}{(3\mu_4 + 15)^2} ds \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_5} = \int_0^T \frac{(11Q_{12}+6Q_{13}+4Q_{14})(-5Q'_{12}+3Q'_{13}+2Q'_{14})}{(5\mu_5+11)^2} ds \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_6} = \int_0^T \frac{(2Q_{12}+3Q_{13}+2Q_{14})(15Q'_{12}-9Q'_{13}-6Q'_{14})}{(3\mu_6+15)^2} ds \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial TC}{\partial \mu_7} = \int_0^T \frac{(4Q_{12}+6Q_{13}+11Q_{14})(2Q'_{12}+3Q'_{13}-5Q'_{14})}{(5\mu_7+11)^2} ds \quad (6.10)$$

注意到,  $p_i = \int_0^{\mu_i} \frac{\partial TC}{\partial \mu_i} d\mu_i$ 。以下本文利用实测数据对问题进行进一步讨论。

本文数据来源于 2010 年 4 月 24 日周六晚 16:00~17:58 的高峰时间段北京市二环路内地安门西大街与新街口南大街交叉路口处的交通流量<sup>[3]</sup> (详见附录)。由于所得数据已经过量化, 且量化阶很低, 本文无法就该处流量信息数据进行精确计算。但利用以上模型及算法, 仍可判断关闭路段的方案是否有利于缓解交通状况。

在数据采集时间点  $t=s_i$  处, 利用差分法算得

$$Q'_{1j}(s_i) = |Q_{1j}(s_i) - Q_{1j}(s_{i-1})|, j=2, 3, 4 \quad (6.11)$$

其中,  $Q_{1j}(s) > 0$ ,  $Q'_{1j}(s) \geq 0 \quad \forall j=2, 3, 4, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$ 。

注意到  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_1} < 0$ ,  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_2} < 0$ ,  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_3} < 0$ 。则  $p_1 < 0$ ,  $p_2 < 0$ ,  $p_3 < 0$ , 即在连接起点和终点的

的三条主干道上没有产生 Braess 悖论, 关闭该路段对缓解交通拥堵没有帮助。

而对连接各终点间的路段,  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_i}$ ,  $i=4, 5, 6, 7$  与 0 的大小关系公路流量的变化决定。

不妨设  $\frac{\Delta Q_{1i}}{Q_{1i}} \ll 1, i=2, 3, 4$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial TC}{\partial \mu_4} &= \int_0^T \frac{(2Q_{12}+3Q_{13}+2Q_{14})(-6Q'_{12}-9Q'_{13}+15Q'_{14})}{(3\mu_4+15)^2} ds \\ &\approx \frac{2Q_{12}(s_0)+3Q_{13}(s_0)+2Q_{14}(s_0)}{(3\mu_4+15)^2} \\ &\quad \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n [-6Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) + 15Q'_{14}(s_i)] \cdot \Delta(s_i) \right\} \end{aligned} \quad (6.12)$$

同理，可简写  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_5}$ ,  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_6}$ ,  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_7}$ 。

令

$$R_4(i) = -6Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) + 15Q'_{14}(s_i) \quad (6.13)$$

$$R_5(i) = -5Q'_{12}(s_i) + 3Q'_{13}(s_i) + 2Q'_{14}(s_i) \quad (6.14)$$

$$R_6(i) = 15Q'_{12}(s_i) - 9Q'_{13}(s_i) - 6Q'_{14}(s_i) \quad (6.15)$$

$$R_7(i) = 2Q'_{12}(s_i) + 3Q'_{13}(s_i) - 5Q'_{14}(s_i) \quad (6.16)$$

分别将量化后的原始数据代入式 (6.13) ~ (6.16)，则结果如下表 6.1（相关原始数据见附录）所示。

本文对 Mabc 地图显示的路况信息进行了量化，分别将拥挤、缓行、畅通量化为 10、20、30。当相同路段呈现两种不同路况时，采取根据路段长度加权平均的方法，得到估计值。

表 6.1  $R_j(i)$ ,  $j=4, \dots, 7$  结果数值表

$i$	R4(i)	R5(i)	R6(i)	R7(i)	$i$	R4(i)	R5(i)	R6(i)	R7(i)
1	0	0	0	0	24	120	16	-48	-40
2	-90	30	-90	30	25	150	20	-60	-50
3	0	0	0	0	26	90	-30	90	-30
4	-30	80	-240	10	27	75	10	-30	-25
5	0	0	0	0	28	225	30	-90	-75
6	90	-30	90	-30	29	-60	34	-102	20
7	150	20	-60	-50	30	120	16	-48	-40
8	90	-30	90	-30	31	150	20	-60	-50
9	150	20	-60	-50	32	0	0	0	0
10	0	0	0	0	33	-90	30	-90	30
11	0	0	0	0	34	-90	30	-90	30
12	-60	-50	150	20	35	-90	30	-90	30
13	0	0	0	0	36	0	0	0	0
14	0	0	0	0	37	0	0	0	0
15	0	0	0	0	38	0	0	0	0
16	0	0	0	0	39	0	0	0	0
17	150	20	-60	-50	40	-150	-20	60	50
18	-102	20	-60	34	41	270	36	-108	-90
19	-48	-40	120	16	42	135	-24	72	-45
20	-90	30	-90	30	43	225	30	-90	-75
21	0	0	0	0	44	75	10	-30	-25
22	150	20	-60	-50	45	-15	40	-120	5
23	30	4	-12	-10	46	-60	-50	150	20

令  $R_i = \sum_k R_i(k)$ ，则得到的结果如表 6.2 所示。

表 6.2  $R_i, i=4, \dots, 7$  均值表

$R_4$	$R_5$	$R_6$	$R_7$
1470	322	-966	-490

由上表可知， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_4} > 0$ ， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_5} > 0$ ， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_6} < 0$ ， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_7} < 0$ 。

记

$$C_4 = \int_0^T (2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(-6Q'_{12} - 9Q'_{13} + 15Q'_{14})ds > 0 \quad (6.17)$$

$$C_5 = \int_0^T (11Q_{12} + 6Q_{13} + 4Q_{14})(-5Q'_{12} + 3Q'_{13} + 2Q'_{14})ds > 0 \quad (6.18)$$

$$C_6 = \int_0^T (2Q_{12} + 3Q_{13} + 2Q_{14})(15Q'_{12} - 9Q'_{13} - 6Q'_{14})ds > 0 \quad (6.19)$$

$$C_7 = \int_0^T (4Q_{12} + 6Q_{13} + 11Q_{14})(2Q'_{12} + 3Q'_{13} - 5Q'_{14})ds > 0 \quad (6.20)$$

则

$$p_4 = C_4 \int_0^{\mu_4} \frac{1}{(3\mu + 15)^2} d\mu \quad (6.21)$$

$$p_5 = C_5 \int_0^{\mu_5} \frac{1}{(5\mu + 11)^2} d\mu \quad (6.22)$$

$$p_6 = C_6 \int_0^{\mu_6} \frac{1}{(3\mu + 15)^2} d\mu \quad (6.23)$$

$$p_7 = C_7 \int_0^{\mu_7} \frac{1}{(5\mu + 11)^2} d\mu \quad (6.24)$$

可得  $S = \{e_4, e_5\}$ ，即对上述实际模型，在晚高峰时段，关闭  $e_4$  或  $e_5$  道路对缓解整个路网的交通拥堵情况均有效可行。

进一步，从  $\frac{\partial TC}{\partial \mu_4}$ ， $\frac{\partial TC}{\partial \mu_5}$  的表达式中可见，随着  $e_4, e_5$  通行能力的降低，整个路网

总时间成本  $TC$  的减小速度加快，即其改善交通拥堵的效果趋于明显。下图 6.3 中给出了该变化特征。

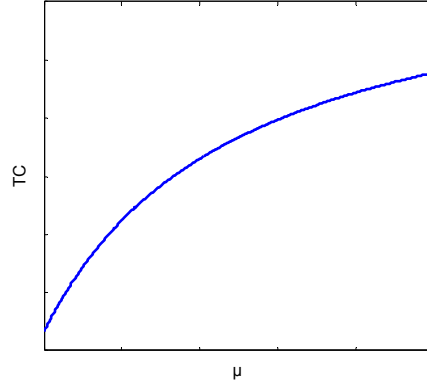


图 6.3  $\mu$ -TC 曲线图

## 6.2 具体关闭方案的确定

由 5.1.2 知，通过对道路通行能力和实时路段的流量检测，得到集合  $S$ 。在集合  $S$  非空的情况下，可通过选择关闭  $S$  中的某条路段元素，以达到缓解交通堵塞的情况。而为确定  $S$  中优先关闭的道路，需要求解最优化问题

$$\min \{ TC_{ij} | e_{ij} \in S \},$$

对于本章的实例，我们要求解的最优化问题是

$$\min \{ TC_4, TC_5 \}.$$

下面本文分别计算关闭路段  $e_4$  和  $e_5$  后，相应  $TC_4$  和  $TC_5$  的值。

### 6.2.1 关闭路段 $e_4$

根据定义， $TC_4$  为关闭道路  $e_4$  后整个路网的总时间成本。此时，路网的拓扑结构如下图所示 6.4 所示：

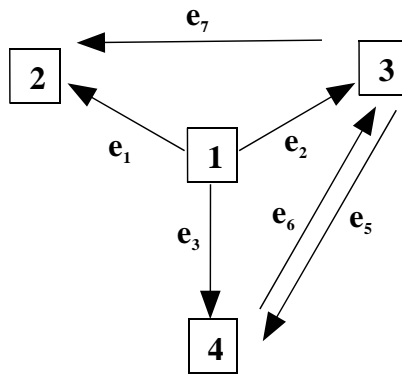


图 6.4 关闭路段  $e_4$  后路网拓扑图

由 5.1 节给出的方法，

$$A_4^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{4-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$M_4 = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6, \mu_7)$ , 则

$$A_4 M_4 A_{4-}^T = \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_7 & 0 & 0 \\ -\mu_7 & \mu_2 + \mu_6 & -\mu_5 \\ 0 & -\mu_6 & \mu_3 + \mu_5 \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

$$(A_4 M_4 A_{4-}^T)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_5 + \mu_3 \mu_6 & 0 & 0 \\ \mu_7(\mu_3 + \mu_5) & \mu_3 + \mu_5 & \mu_5(\mu_1 + \mu_7) \\ \mu_6 \mu_7 & \mu_6(\mu_1 + \mu_7) & (\mu_2 + \mu_6)(\mu_1 + \mu_7) \end{pmatrix}}{(\mu_1 + \mu_7)(\mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_5 + \mu_3 \mu_6)} \quad (6.26)$$

由式 (6.3) 得,

$$TC_4 = \int_0^T \left( \frac{dQ(s)}{ds} \right)^T \cdot [ (A_4 M_4 A_{4-}^T)^{-1} \cdot Q(s) + \tau(0) - s ] ds \quad (6.27)$$

结合实际数据, 采用离散化方法, 有

$$TC_4 \approx \sum_{i=1}^n Q'(i) (A_4 M_4 A_{4-}^T)^{-1} \cdot Q(i) \quad (6.28)$$

其中,  $n$  为样本点个数。

为简化计算, 取  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ,  $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu_7 = 2$ , 则有

$$TC_4 = \frac{21887}{3} \approx 7295.67。$$

此处 7295.67 表征时间的相对长短, 故没有单位 (下同), 其具体计算程序见附录二。

### 6.2.2 关闭路段 $e_5$

同理, 计算可得

$$TC_5 = \frac{91615}{11} \approx 8328.64。$$

### 6.2.3 实际效果分析

由 6.2.1 与 6.2.2 节，可得

$$\min \{ TC_4, TC_5 \} = TC_4 = 7295.67。$$

进一步计算原路网总时间成本： $TC = \frac{59049}{7} = 8435.57。$

接下来，讨论关闭道路的实际效果。

如第五章所述，只有当  $\frac{\Delta TC_{ij}}{TC}$  足够大时，关闭道路  $e_{ij}$  才有实际意义。此处，若取

$$\eta = 10\%，而 \frac{\Delta TC_4}{TC} = \frac{8435.57 - 7295.67}{8435.57} \approx 13.51\% > \eta。$$

所以，关闭道路  $e_4$  是可行的，其对路网拥堵情况的改善显著。

最后，本文给出开启道路  $e_4$  的时间。由第五章结论，只需判定  $\frac{\partial TC_4}{\partial \mu_4}$  与 0 的大小

情况，结合 (6.7) 和 (6.13) 式，即有：当  $R_4(t) < 0$  时，由路段  $e_4$  带来的 Braess 悖论将不再存在，路段  $e_4$  可开启。同时，为了避免  $R_4(t)$  波动性带来的影响，我们引入参数  $n \in \mathbb{N}_+$  和  $\bar{\eta} < 0$ ，在  $t$  时刻，开启道路的条件可表述为：

$$R_4(t-i) < \bar{\eta}, \quad \forall i=0,1,2,\dots,n. \quad (6.29)$$

在本例中，若取  $n=5$ ， $\bar{\eta}=-50$ ，可看出开启道路条件没有得到满足，道路  $e_4$  还不能开启。

综上所述，在交通拥堵时刻关闭某些产生 Braess 悖论的关键道路，可减少整个路网的总时间成本，从而达到缓解交通拥堵的效果。但需要注意的是，封闭使用中的道路存在成本消耗，与此同时，随意封闭道路也会对车辆正常行驶带来影响，造成交通混乱。所以，封闭道路是一件需要谨慎考虑的事情。一个有效的做法是，利用统计方法对某一特殊路网进行一段时间的研究，得到一个比较固定的关闭道路方案并提前公布。这样，才有可能使得关闭道路有理论上较好的效果。

## 七、模型评价

1. 本文采用连续化方法，给出了计算线路总时间成本的微分方程模型，并得到了时间成本关于道路通行能力的导数，而利用导数取值大小，可以讨论关闭道路以减轻交通拥堵情况的可行性，易于实现，可操作性强；

2. 在数据处理过程中，运用差分方法近似导数，基本克服了因数据量不足而产生

的影响，最大限度地利用了已有信息；

3. 在求解最优关闭方案时，本文运用了最优化的思想，通过模拟关闭相应道路，得到关闭道路后的路网总时间成本，进而通过比较时间成本得到最优方案；

4. 由于时间有限，本文获取的信息量较少。更多，更精确的数据可能得到更好的结果；

5. 在本文的建模过程中，使用了一些未加证明的合理假设，简化了求解过程，同时也使结论更为简洁明了；然而，文中的两种模型是基于高峰时期的路况的，对于其它个别的特殊情况，模型的适用性将变差。

## 八、参考文献

[1] 董菁等，非合作交通网络中的 Braess 悖论及其避免，公路交通科技，第 23 卷第 3 期：56~59，2007 年 9 月。

[2] Baomin Dong, Lei Zhang, *Network Congestion, Braess Paradox and Metropolitan Expressway System*, JEL, CLC: C61, April, 2005。

[3] Mabc 地图网, <http://www.mapabc.com/localsearch.shtml?1,%E5%8C%97%E4%BA%AC,,%E4%BA%8C%E7%8E%AF>。



# 附 录

## 附录一

北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口流量量化值及差分值表

	$Q_{12}$	$Q_{13}$	$Q_{14}$	$Q'_{12}$	$Q'_{13}$	$Q'_{14}$
16:00	20	20	30	0	0	0
16:05	20	30	30	0	10	0
16:10	20	30	30	0	0	0
16:15	20	10	20	0	20	10
16:19	20	10	20	0	0	0
16:23	10	10	30	10	0	10
16:27	10	10	20	0	0	10
16:30	20	10	30	10	0	10
16:33	20	10	20	0	0	10
16:35	20	10	20	0	0	0
16:38	20	10	20	0	0	0
16:40	10	10	20	10	0	0
16:43	10	10	20	0	0	0
16:47	10	10	20	0	0	0
16:51	10	10	20	0	0	0
16:52	10	10	20	0	0	0
16:54	10	10	30	0	0	10
16:58	12	20	30	2	10	0
16:59	20	20	30	8	0	0
17:01	20	10	30	0	10	0
17:02	20	10	30	0	0	0
17:05	20	10	20	0	0	10
17:08	20	10	22	0	0	2
17:09	20	10	30	0	0	8
17:12	20	10	20	0	0	10
17:16	10	10	30	10	0	10
17:18	10	10	25	0	0	5
17:20	10	10	10	0	0	15
17:22	10	20	12	0	10	2
17:24	10	20	20	0	0	8
17:26	10	20	30	0	0	10
17:29	10	20	30	0	0	0
17:30	10	10	30	0	10	0
17:33	10	20	30	0	10	0
17:36	10	10	30	0	10	0
17:37	10	10	30	0	0	0
17:39	10	10	30	0	0	0
17:40	10	10	30	0	0	0

北京市地安门西大街与新街口南大街交叉路口流量量化值及差分值表（续表）

	$Q_{12}$	$Q_{13}$	$Q_{14}$	$Q'_{12}$	$Q'_{13}$	$Q'_{14}$
17:44	10	10	30	0	0	0
17:47	20	20	30	10	10	0
17:49	20	20	12	0	0	18
17:50	10	20	25	10	0	13
17:51	10	20	10	0	0	15
17:54	10	20	15	0	0	5
17:55	10	10	20	0	10	5
17:58	20	10	20	10	0	0

## 附录二

```

clear
score=zeros(1,46);
score_=zeros(1,46);
M=1/21*[11 6 4;6 9 6;4 6 11];           %原始路网对应矩阵
M4=1/15*[5 0 0;6 3 6;4 6 9];           %去掉边 4 路网对应矩阵
M5=1/11*[5 2 0;2 3 0;4 6 11];          %去掉边 5 路网对应矩阵
for i=1:46
    score(i)=data1(i,:)*M*data2(i,:);
    %data1 和 data2 为附录一中的流量数据和流量变化率数据
    score_(i)=data1(i,:)*M4*data2(i,:);
    scores(i)=data1(i,:)*M5*data2(i,:);
end

```