
2008 年 第一届“数学中国杯”

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了首届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1100

参赛队员（签名）：

队员 1：俞雪永

队员 2：郑宣诚

队员 3：田敏

参赛队教练员（签名）：康旭升

参赛队伍组别：大学组

2008 年 第一届“数学中国杯”

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）： 1100

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2008 年 第一届“数学中国杯”
数学建模网络挑战赛

题 目 城市公交线路网络效率的综合评价数学模型

关 键 词 灰色；模糊数学；公交网络；效率；综合评价；线路设计；离散

摘 要：

本文研究的是城市公交线路网络效率的综合评价数学模型。首先我们选出了评价城市公交线路网络效率的指标，如下表所示：

指标层	线路网络性能	经济效益	环境影响	客运能力	服务状况	乘客满意度
评价指标	线路网密度	营运费用	土地占用	车辆保有量	服务人口	候车时间
	重复系数	设备折旧	能源消耗	车辆拥有率	换乘系数	步行时间
	非直线系数	营运收入	生活质量	客运周转量	车辆满载率	换车率
	站点覆盖率	内部收益率	噪声	运营速度	出行时耗	行车准点率
		利润率	废气			票价合理性
			振动			安全性
						舒适性

通过分析评价公交线路网络效率的指标，我们建立了多层次的灰色、模糊数学模型来综合评价城市公交线路网络效率。根据杭州现行公交线路的实际情况对模型进行了检验，结果发现模型稳定性非常好。

其次，在对新城市给出公交线路网络的设计方案时，我们分三部分来解决，分别是(1)根据城市状况设立站点问题；(2)确定站点的情况下确定公交线路的问题；(3)给定站点和公交线路的状况的车次问题。三个部分分别建立了不同的模型，最终从兼顾乘客与公交公司双方的利益出发，确定公交网络线路设计方案。

再次，考虑到目前大城市的公交网络线路已错综复杂，我们从城市公交站点的选择和公交站距优化这两个方面小幅度地修改公交线路网络的结构来提高公交网络整体运营效率。分别建立了离散与连续的直线行车路线站点选择和转弯行车路线站点选择模型来分析站点的设置；对于公交站距设置距离的长短做了交互的损益分析，然后对乘客出行时间总价值和公交公司的系统总成本分别进行了分析和推导，建立了乘客总出行时间最小站距优化模型和系统总成本最小站距优化模型并对模型进行了深入的探讨，以提高公交网络整体线路的运行效率。

最后，我们对建立的模型进行了评价，分析了模型的优缺点及将来可以研究或改进的方向。

参赛队号 1100
所选题目 B

参赛密码 _____
(由组委会填写)

一、 问题重述

在大城市的城市交通中，公交系统占据了十分重要的地位。但是往往在城市规模大到一定程度的时候，公交线路会越来越多，换乘体系也会越来越复杂。这样，维持整个系统的运转就需要更多的资金。但是换乘次数过多或者线路过长，会影响人们的乘车心情，使乘客的满意度下降，请评估城市公共汽车线路网络的效率，具体要求如下：

- 构建合适的指标体系和评价模型，评价城市市区公共汽车线路网络的效率。对指标的选择要注意数据的可靠性和易获得性，模型对数据应当具有良好的健壮性。
- 现在要建立一个城市的公交系统，使得公交车的利用效率最高，并且尽量减少堵车现象，给出该市公交线路网络的设计方案。
- 现有的大城市公交线路系统已经很难实施大幅度调整，设计一套算法，使人们能够小幅度地修改公交线路网络的结构，以提高整体运营效率。对线路系统的改动要以尽量减少对人们出行习惯的影响为宜，整体运营效率的提高越明显越好。

二、 模型的假设及符号的约定

(I). 模型假设

假设 1：各街区的交通发生吸引量相同；

假设 2：假设车站 1 和车站 2 分别有车场 A 和 B 存车，即均可作为始发站和终点站；

假设 3：上行和下行路线独立运行；

假设 4：城市内某个区域的周边的公交线路是直线走向的；

对假设的说明：

假设 4 是由于绝大多数城市的道路分布一般都是纵横走向的，所以我们可以假设城市内某个区域的周边是直线走向的。

其他假设在文中具体模型中进行说明。

(II) 在模型中用到的符号及含义

在模型中用到的符号及含义如表一所示：

表一 模型中用到的符号及含义

符号	含义
R_{ij}	弯曲系数
T_{ij}	平均步行时间(分钟)
m	交通小区总数
n	通行公交车辆的道路网结点数
N	公交线路数
K_{ij}	线路起终点 (i, j) 间直达乘客量(人次)
I_{ijk}	节点 i 至节点 j 的距离(km)
Q_{ij}	节点 i 至节点 j 间断面日客流量(人次)
x_{ij}	决策变量， $x_{ij}=1$ 表示边 (i, j) 在规划公交路线上， $x_{ij}=0$ 表示边 (i, j) 不在规划公交路线上

SP_{ij}	网络内从节点i 到节点j 的直达客流量
Q_k	线路k的断面客流量
Q_k^{\max}	线路的最大断面客流量；
b_n	线路断面客流的不均匀系数
ATT	平均换乘次数

注：其他符号在本文用到时再具体进行说明。

三、 问题分析

因为公共交通是公用事业，它应该以追求社会效益为主，同时还得兼顾公交企业自身的经济利益，所以对城市公交网络的研究就是对现有的城市公交系统进行客观评价和优化组合，发挥它们的最佳效益。而城市公交网络的评价应该以乘客利益和公交企业的利益为主要目的，通过分析评估乘客和公交企业二者的受益情况，来衡量城市公交网络的现状，发现现存的主要问题，并能找出解决问题的有效途径。城市公交交通线路网络的评价是对公交线网的线路网络特性、经济效益、环境影响，客运能力，服务状况，乘客满意度等方面做出相对满意度的评价。目前对公交线网评价较多采用线路总发送量、日均客流量、客流强度、路线重复系数、线网覆盖率、非直线系数、出行时间等评价指标，对城市公交网络的评价有两类^[1]：一类是定性的研究，通过建立一些定性的模型，来对整个城市公交网络进行定性评价。缺点是主观性大、得到的结果不能很好地反映客观实际需要。另一类是纯理论的研究，通过建立一些简单的数学模型来对整个网络进行评价，缺点是由于公交系统的复杂性，在建立数学模型时忽略了许多关键因素，最后建立的模型具有片面性。

由于公交系统有些因素是已知的（属于白色信息），有些因素是未知的（属于黑色信息），还有一些因素是介于已知和未知之间的（属于灰色信息），所以可以用灰色系统的知识对城市公交网络进行研究。利用灰色系统的知识就可以对公交网络现有的规模、布局上与城市发展需求的适应性、公交线网的性能和乘客满意度等做出定性和定量分析，所以我们可以利用灰色系统的差异信息量、解的非唯一性原理，比较合理地解决了城市公交线网评价中的信息不完全、评价指标较多、部分指标之间存在相差或重复的问题。故我们可以根据城市公交线网的自身特点，利用灰色理论或模糊数学的知识对城市公交线网进行综合评价。

发展城市公共交通是一项系统工程，它涉及到外部条件和内部管理^{[13][17]}等多方面的因素。我国目前除少数城市已经有地铁外，绝大多数城市公共交通的主体都是公交汽车和公交车。众多城市居民日常生活和上下班都得依靠公交车，而从他们居住的地方到公交车的车站往往必须步行一段路程。如果公交车车站的选取缺乏科学性，势必会造成市民步行时间的增加，产生人行道拥挤，影响交通安全等一系列不良效果，从而降低整个公交网络的运行效率。合理地选取公交车车站，对于缓解交通拥挤，提高交通安全度，繁荣市场经济，提高整个公交网络的运行效率，无疑会有积极的影响。

公交车站点一般设立在商业街道、娱乐场所、大型公司、工业基地、学校、居民住宅区等附近。通常要符合一个原则，就是人员出入较多的地方一般都应设立公交车站。由于现有的大城市公交线路系统已经很难实施大幅度调整，为了提高整体运营效率而且线路系统的改动要以尽量减少对人们出行习惯的影响为宜，故可以考虑对某些线路上的公交站点重新布局选择，以提高公交网络线路的整体运营效率。

四、模型的建立及求解

4.1 城市公交网络评价指标体系

4.1.1 评价指标原则的选取

城市公交线网的评价涉及到许多领域和行业。一方面城市公交线网评价的目的是方便居民出行，推动城市结构的合理调整以及改善城市的生活环境。另一方面城市公交线网的评价指标应该能够独立反映城市公交线网某一具体方面的特征，并与公交网络的其他因素相联系，所以评价指标应该满足如下原则：

- ◆ (1)整体完备性原则：应该从不同侧面反映公交发展的特征和状况，评价指标要能够完整、准确地反映城市公交线网系统的实际情况，同时评价指标体系应尽可能全面反映各子区公交线网的实际情况；
- ◆ (2)评价指标体系应具有可比性，即为了便于各个城市之间比较，要求评价指标在时间和空间上具有可比性；
- ◆ (3)客观性原则：保证评价指标体系的客观公正，保证数据来源的可靠性、准确性和评估方法的科学性；
- ◆ (4)科学性原则：指标的选择与指标权重的确定、数据的选取、计算与合成必须以公认的科学理论为依据；
- ◆ (5)非线性原则：城市公共交通是一个复杂的系统，评价指标选取应遵循非线性原则，实现指标体系的结构最优化；
- ◆ (6)实用性原则：城市公共交通发展水平评价工作的意义在于分析现状，认清所处阶段和发展中存在的问题，更好地指导实际工作，因此，尽量选取日常统计指标或容易获得的指标，以便直观、简便地说明问题。

我们在以下建模过程中遵循以上6条评价指标原则。

4.1.2 城市公交线网的评价体系

城市常规公交评价涉及面广、内容多，评价指标选取考虑的因素也多^[2]，因此，用简单的线性结构难以描述各指标的内在联系，我们将采用多层次分析法建立树状的关系结构，运用目标层次分类展开法，将目标按逻辑分类向下展开为若干目标，再把各个目标分别向下展开成分目标或准则，依此类推，直到可定量或可进行定性分析（指标层）为止。评价指标应该具有科学性、现实性、可比性和可测性^{[3][4]}通过综合分析和考虑，得到城市公交线网评价指标体系如表二所示：

表二 城市公交网络的评价指标体系

准则层		指标层		分类
u_1	线路网络性能	u_{11}	线路网密度	定量
		u_{12}	重复系数	定量
		u_{13}	非直线系数	定量
		u_{14}	站点覆盖率	定量

u_2	经济效益	u_{21}	营运费用	定量
		u_{22}	设备折旧	定性
		u_{23}	营运收入	定量
		u_{24}	内部收益率	定量
		u_{25}	利润率	定量
u_3	环境影响	u_{31}	土地占用	定量
		u_{32}	能源消耗	定性
		u_{33}	生活质量	定性
		u_{34}	噪声	定量
		u_{35}	废气	定量
		u_{36}	振动	定量
u_4	客运能力	u_{41}	公共车辆保有量	定量
		u_{42}	公共车辆拥有率	定量
		u_{43}	客运周转量	定性
		u_{44}	运营速度	定量
u_5	服务状况	u_{51}	服务人口	定量
		u_{52}	换乘系数	定量
		u_{53}	车辆满载率	定量
		u_{54}	出行时耗	定量
u_6	乘客满意度	u_{61}	候车时间	定量
		u_{62}	步行时间	定量
		u_{63}	换车率	定量
		u_{64}	行车准点率	定量
		u_{65}	票价合理性	定性
		u_{66}	安全性	定性
		u_{67}	舒适性	定性

4.1.3 多层次灰色、模糊综合评价模型

为了使评价过程科学合理，通过建立评价等级标准将评价指标值进行量化处理。由于评价体系是多层次^[6]的，所以把评价指标分为两个集合，即令评价指标一级评价集合为 $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$ ，二级评价集合为 $u_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, \dots, u_{in}\}$ ， $(i=1, 2, \dots, m)$ 。则二级评价指标 $u_{ij}(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$ 的评价等级标准如表三所示：

表三 评价等级标准

评价等级			级别区间
v_1	一级	优秀	[4.0, 4.5, 5.0]
v_2	二级	良好	[3.0, 3.5, 4.0]
v_3	三级	一般	[2.0, 2.5, 3.0]
v_4	四级	差	[1.0, 1.5, 2.0]
v_5	五级	特差	[0.0, 0.5, 1.0]

4.1.3.1 确定各个评价指标的权重

由于各指标对综合评价值的重要程度不同，所以它们就有不同的权重值来表示其重要程度。为了减少评价过程的主观性，能使评价过程科学地反映实际情况，我们用标准差法来确定权重，则 $u_{ij}(j=1, 2, \dots, n)$ 的权重值为

$$w_{ij} = (s_i - s_j) / (n-1)s_i \quad (1)$$

$$s_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \quad (2)$$

其中： s_{ij} 为 u_{ij} 的标准差。于是二级指标的权重

$$w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}), (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

同理 $u_i(i=1, 2, \dots, m)$ 的权重值为 $w_i = (s - s_i) / (m-1)s$, $s = \sum_{i=1}^m s_i$ ，式中 s_i 为 u_i 的标准差。于是一级指标的权重

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$$

4.1.3.2 评价指标样本矩阵的确定

在确定评价指标体系和评价指标权重的情况下，按照评价指标 u_{ij} 评分等级标准，可以给出评价指标的 l （为自然数）种评价值。于是就有评价样本矩阵为

$$D = \begin{bmatrix} d_{111} & d_{112} & \dots & d_{11l} \\ d_{121} & d_{122} & \dots & d_{12l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{mn1} & d_{mn2} & \dots & d_{mnl} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{mn} \end{matrix} \quad (4)$$

4.1.3.3 确定评价灰类、模糊指数

为了使评价过程科学合理，必须对样本矩阵进行标准化处理。根据灰色理论和模糊数学^[7]知识，进行如下的标准化处理，根据评分等级标准，得到 $e=1, 2, 3, 4, 5$ 个灰类，其白化权函数如表四所示：

表四 白化权函数表

评价灰类	e	灰数	白化权函数	取值范围
第一灰类（优秀）	1	[0,4.0,∞]	$f_1(x) = \frac{1}{4}x$	[0,4.0]
			$f_1(x) = 1$	[4.0,8.0]
第二灰类（良好）	2	[0,3.0,6.0]	$f_2(x) = \frac{1}{4}x$	[0,4.0]
			$f_2(x) = -\frac{1}{4}x + 2$	[4.0,8.0]
第三灰类（一般）	3	[0,3.0,6.0]	$f_3(x) = \frac{1}{3}x$	[0,3.0]
			$f_3(x) = -\frac{1}{3}x + 2$	[3.0,6.0]
第四灰类（差）	4	[0,2.0,4.0]	$f_4(x) = \frac{1}{2}x$	[0,2.0]
			$f_4(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	[2.0,4.0]
第五灰类（特差）	5	[0,1.0,2.0]	$f_5(x) = 1$	[0,1.0]
			$f_5(x) = -\frac{1}{2}x + 2$	[1.0,2.0]

4.1.3.4 计算灰色评价权值

对评价指标 u_{ij} ，受评者属于第 e 个评价灰类的灰色评价系数

$$X_{ije} = \sum_{g=1}^l f_e(d_{ijg}) \quad (5)$$

则对评价指标 u_{ij} ，受评者属于各评价灰类的总灰色评价数

$$X_{ij} = \sum_{e=1}^5 X_{ije} \quad (6)$$

受评者属于 e ($e=1,2,3,4,5$) 个灰类的灰色评价权

$$r_{ije} = X_{ije} / X_{ij} \quad (7)$$

所以灰色评价权向量 $r_{ij} = (r_{ij1}, r_{ij2}, r_{ij3}, r_{ij4}, r_{ij5})$ 所属指标 u_i 对于各评价灰类的灰色评价权矩阵

$$R_i = \begin{bmatrix} r_{i11} & r_{i12} & \cdots & r_{i15} \\ r_{i21} & r_{i22} & \cdots & r_{i25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{im1} & r_{im2} & \cdots & r_{im5} \end{bmatrix} \quad (8)$$

4.1.3.5 公交网络的综合评价

对受评者的 u_i 作综合评价，其评价结果

$$B_i = A_i \cdot R_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4}, b_{i5}) \quad (9)$$

对于各评价灰类的灰色评价权矩阵

$$R = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} & b_{m5} \end{bmatrix} \quad (10)$$

所以对受评者 U 做综合评价，其评价结果为

$$B = A \cdot R = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad (11)$$

取各种评价分类等级值向量 $C = (4.5, 3.5, 2.5, 1.5, 0.5)^T$ ，则最后的综合评价值为

$$Z = B \cdot C \quad (12)$$

模型的健壮性我们将在模型检验中给出。

4.2 公交线路网络的设计

我们可以根据以下三个方面来设计某市公交线路网络的设计方案^{[8][9]}:

- 1 根据城市状况设立站点问题
- 2 确定站点的情况下确定公交线路的问题
- 3 给定站点和公交线路的状况的车次的问题

4.2.1 根据城市状况设立站点问题

4.2.1.1 模型假设

假设 1: 城市由若干商业区(C)、工业区(I)、住宅区(R)、旅游区(T)组成, 并假设商业区是城市的主要集散地。

假设 2: 城市的公交路线需覆盖上述四区之间的道路。

假设 3: 公交车的最大容量, 车的长度以及两辆行驶着的公交车之间的最短距离分别是 S , L , D_0 。

假设 4: 假设每条道路的设计都符合通过这条道路的最大流量 q_{\max} 。

4.2.1.2 模型目标

- 公交公司尽可能少的利用公交车, 尽可能提高公交车的利用率。
- 在此基础上, 使公交车行驶路线尽可能短, 以提高公交车的准点率。

4.2.1.3 模型建立

- ◆ 公交车的最大行驶速度为 V_m (当道路密度 $\rho \rightarrow \infty$ 时达到)。
- ◆ 公交车的行驶速度与路况有关, 满足 $V = V_m \times (1 - \frac{\rho}{\rho_m})$ 其中 ρ_m 是道路车辆的最大密度。
- ◆ 当 $\rho = \rho_m$ 时, $V=0$ 。

C I R T 四区两两间的距离如表五所示:

表五 C I R T 四区两两间的距离

	C_1	...	C_R	I_1	...	I_R	R_1	...	R_R	T_1	...	T_R
C_1	d_{CC}	...	d_{CC}	d_{CI}	...	d_{CI}	d_{CR}	...	d_{CR}	d_{CT}	...	d_{CT}
...
C_R	d_{CC}	...	d_{CC}	d_{CI}	...	d_{CI}	d_{CR}	...	d_{CR}	d_{CT}	...	d_{CT}
I_1	d_{IC}	...	d_{IC}	d_{II}	...	d_{II}	d_{IR}	...	d_{IR}	d_{IT}	...	d_{IT}
...
I_R	d_{IC}	...	d_{IC}	d_{II}	...	d_{II}	d_{IR}	...	d_{IR}	d_{IT}	...	d_{IT}
R_1	d_{RC}	...	d_{RC}	d_{RI}	...	d_{RI}	d_{RR}	...	d_{RR}	d_{RT}	...	d_{RT}
...

R_R	d_{RC}	\dots	d_{RC}	d_{RI}	\dots	d_{RI}	d_{RR}	\dots	d_{RR}	d_{RT}	\dots	d_{RT}
T_1	d_{TC}	\dots	d_{TC}	d_{TI}	\dots	d_{TI}	d_{TR}	\dots	d_{TR}	d_{TT}	\dots	d_{TT}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
T_R	d_{TC}	\dots	d_{TC}	d_{TI}	\dots	d_{TI}	d_{TR}	\dots	d_{TR}	d_{TT}	\dots	d_{TT}

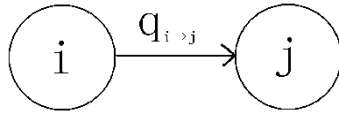
单位时间内从某一地点到另一的点的人数(即流量 q) 如表六所示:

表六单位时间内从某一地点到另一的点的人数

	C_1	\dots	C_R	I_1	\dots	I_R	R_1	\dots	R_R	T_1	\dots	T_R
C_1	q_{CC}	\dots	q_{CC}	q_{CI}	\dots	q_{CI}	q_{CR}	\dots	q_{CR}	q_{CT}	\dots	q_{CT}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
C_R	q_{CC}	\dots	q_{CC}	q_{CI}	\dots	q_{CI}	q_{CR}	\dots	q_{CR}	q_{CT}	\dots	q_{CT}
I_1	q_{IC}	\dots	q_{IC}	q_{II}	\dots	q_{II}	q_{IR}	\dots	q_{IR}	q_{IT}	\dots	q_{IT}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
I_R	q_{IC}	\dots	q_{IC}	q_{II}	\dots	q_{II}	q_{IR}	\dots	q_{IR}	q_{IT}	\dots	q_{IT}
R_1	q_{RC}	\dots	q_{RC}	q_{RI}	\dots	q_{RI}	q_{RR}	\dots	q_{RR}	q_{RT}	\dots	q_{RT}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
R_R	q_{RC}	\dots	q_{RC}	q_{RI}	\dots	q_{RI}	q_{RR}	\dots	q_{RR}	q_{RT}	\dots	q_{RT}
T_1	q_{TC}	\dots	q_{TC}	q_{TI}	\dots	q_{TI}	q_{TR}	\dots	q_{TR}	q_{TT}	\dots	q_{TT}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
T_R	q_{TC}	\dots	q_{TC}	q_{TI}	\dots	q_{TI}	q_{TR}	\dots	q_{TR}	q_{TT}	\dots	q_{TT}

说明: 以上是一个有向图, 单位时间内 $q_{i \rightarrow j} \neq q_{j \rightarrow i}$, 但从全天的角度来考虑, 则 $q_{i \rightarrow j} \approx q_{j \rightarrow i}$ 。

现在我们来考虑任意两个站点, 如下图一所示:



图一 任意两个站点

$$\text{有前面假设得: } q_{i \rightarrow j} = v_{ij} \times \rho_{ij} = \rho_{ij} \times v_m \times (1 - \frac{\rho_{ij}}{\rho_m}) \quad (13)$$

$$\text{其中: } \rho_{ij} = \frac{n \times S}{d_{ij}}, \quad \rho_m = \frac{S}{L + D_0} \quad (n \text{ 为道路 } ij \text{ 上行驶的公交车数})$$

$$\text{由(13)求得: } \frac{dq_{i \rightarrow j}}{d\rho_{ij}} = v_m - \frac{2 \times \rho_{ij} \times v_m}{\rho_m}$$

当 $\frac{dq_{i \rightarrow j}}{d\rho_{ij}} = 0$ 时, 即 $\rho_{ij} = \frac{\rho_m}{2}$

最大流量: $q_{i \rightarrow j \max} = \frac{\rho_m \times v_m}{4}$

道路 $i \rightarrow j$ 上通行的公交车数量为: $n^* = \frac{\rho_m \times d_m}{2S}$

有假设得: 道路就按这个标准进行施工。

由上分析, 可得:

✎ 当 $q_{i \rightarrow j} > q_{i \rightarrow j \max}$ 时, 需要其他道路分流。

✎ 当 $q_{i \rightarrow j} = q_{i \rightarrow j \max}$ 时, 可在 i, j 两个位置各设一个起终点站则 i, j 间分配的最

佳公交车数为 $n^* = \frac{\rho_m \times d_{ij}}{2S}$

✎ 当 $q_{i \rightarrow j} < q_{i \rightarrow j \max}$ 时, 若在 i, j 各设一个起终点站,

则将 $q_{i \rightarrow j}$ 代入 (1) 得到一元二次方程的解为

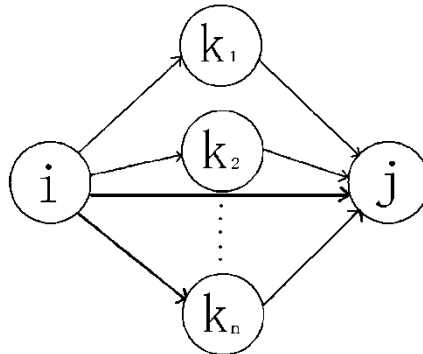
$$\rho_{ij} = \frac{\rho_m \pm \sqrt{\rho_m^2 - 4\rho_m \times q_{i \rightarrow j} / v_m}}{2}$$

取较小根得: $\rho_{ij} = \frac{\rho_m - \sqrt{\rho_m^2 - 4\rho_m \times q_{i \rightarrow j} / v_m}}{2}$

从而: $n^* = \frac{\rho_m - \sqrt{\rho_m^2 - 4\rho_m \times q_{i \rightarrow j} / v_m}}{2S} \times d_{ij}$ (14)

4.2.1.4 模型的进一步拓展

当然, 并非每两个区之间都要设立起终点站, 如果条件允许我们可以把某些区当成中点站, 如下图二所示:



图二 站点示意图

我们可以将从 i 到 j 的流量分配到其他道路上，如果存在可行解的话，可以取消从 i 到 j 的公交车。

首先要满足前提条件为：

$$\sum_i q_{i \rightarrow j} \leq \sum_i q_{i \rightarrow j \max} (j, i = T, C, I, R \text{ 并且 } i \neq j) \quad (15)$$

$$\sum_j q_{i \rightarrow j} \leq \sum_j q_{i \rightarrow j \max} (j, i = T, C, I, R \text{ 并且 } i \neq j) \quad (16)$$

(15) (16) 的含义是达到 j 的流量必须小于到达 j 区的每条道路的最大流量之和。否则，整个城市将过于拥挤，必须开拓路面以加大流量。

引进 $\Delta q_{i \rightarrow j} = q_{i \rightarrow j \max} - q_{i \rightarrow j}$ ，

➤ 当 $\Delta q_{i \rightarrow j} < 0$ 时，道路 $i \rightarrow j$ 过载，需要分流。

➤ 当 $\Delta q_{i \rightarrow j} = 0$ 时， i 到 j 的流量为到达饱和，还可以继续承担一部分流量。

因此在城市的各区域中，存在一条道路 $i \rightarrow j$ ， i 除了直接到达 j 外，也可以经过中间的有限各站点到达 j 。设 i 可以经过 k_1, k_2, \dots, k_r 后到达 j ，并且假设：

$$\Delta q_{k_p} = \min\{\Delta q_{i \rightarrow k_p}, \Delta q_{k_p \rightarrow j}\} (p = 1, 2, \dots, r)$$

如果： $q_{i \rightarrow j} \leq \sum_{p=1}^r \Delta q_{k_p}$ 则可将 $i \rightarrow j$ 的流量分配到其他道路上。

则存在 $1 \leq r_1, r_2 \dots r_k \leq r$

$$\text{且 } \sum_{p=1}^{r_k} \Delta q_{k_p} \approx q_{i \rightarrow j} (\Delta q_{k_p} \geq 0)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } q'_{i \rightarrow k_p} &= q_{i \rightarrow k_p} + \Delta q_{k_p} \\ q'_{k_p \rightarrow j} &= q_{k_p \rightarrow j} + \Delta q_{k_p} \end{aligned}$$

代入(14)得：

$$\begin{aligned} n'_{i \rightarrow k_p} (q_{i \rightarrow k_p}) &= \frac{\rho_m - \sqrt{\rho_m^2 - 4\rho_m * q'_{i \rightarrow k_p} / v_m}}{2S} * d_{ik_p} \\ n'_{k_p \rightarrow j} (q_{k_p \rightarrow j}) &= \frac{\rho_m - \sqrt{\rho_m^2 - 4\rho_m * q'_{k_p \rightarrow j} / v_m}}{2S} * d_{k_p j} \end{aligned}$$

分流后道路 ikp 的公交车增加量为：

$$\Delta n_{i \rightarrow k_p} = n'_{i \rightarrow k_p} - n_{i \rightarrow k_p}$$

同理，道路 kpj 的公交车增加量为：

$$\Delta n_{k_p \rightarrow j} = n'_{k_p \rightarrow j} - n_{k_p \rightarrow j}$$

则道路 $i \rightarrow k_p \rightarrow j$ 的公交车增加总量记为:

$$\Delta n_{k_p} = \Delta n_{i \rightarrow k_p} + \Delta n_{k_p \rightarrow j}$$

比较 $\sum_{p=1}^{n_k} \Delta n_{k_p}$ 与 $n_{i \rightarrow j}$ 大小有以下 3 种情况:

- ◇ 当 $\sum_{p=1}^{n_k} \Delta n_{k_p} < n_{i \rightarrow j}$ 时, 可以将道路 $i \rightarrow j$ 上的流量分配到其他道路上, 即可达到优化公交线路的目的。
- ◇ 当 $\sum_{p=1}^{n_k} \Delta n_{k_p} > n_{i \rightarrow j}$ 时, 若将道路 $i \rightarrow j$ 上的流量分配到其他道路上, 则公交公司需要配置更多的公交车, 那么保留原来的公交路线为宜。
- ◇ 当 $\sum_{p=1}^{n_k} \Delta n_{k_p} = n_{i \rightarrow j}$ 时, 两种方案都可以, 但是比较两种方案, 则选择原来方案为宜, 因为它所制定的公交路线更短, 准点率更高。

4.2.2 在给定站点情况下确定行驶线路问题

4.2.2.1 公交网络设计思想^[10~13]

- 以节点间最短线路为目标, 确定第一线路集: 完成客流量调查及 OD 矩阵, 在公共交通网络简图上标定起终点节点序号, 输入目标函数与约束条件, 执行最短路搜索程序。
- 将交通小区缩小为若干个节点, 并将小区乘客集散量分配到相关路段; 将小区乘客发生与吸引量分配到区内节点上, 再将相关小区的对应节点的 OD 量分配到两节点间最短通路的各路段上。
- 确定满足约束条件的第二线路集: 可依据客流调查所得 OD 表, 寻找其起终点所在的交通小区, 小区 OD 量可按其大小顺序排列, 计算机进行搜索时也按此顺序, 根据城市结构布局(如道路宽度、工业区位置、商业区位置、居住区位置等条件), 按城市公交线网的主干线、次干线、支线依次进行搜索, 直至全部线路确定完毕。
- 搜索流量较大的剩余路段, 组织第三(补充)线路集: 在第二线路集完成之后, 按式 $(D_{ij} + A) / Q_{ij}$, 之最小值进行搜索, D_{ij} 与 Q_{ij} 分别是节点间距离与客流量, A 为权值。

目的是在第二线路集完成之后, 继续搜索尚有剩余的以及与第二线路集有重复的客流量较大的相关路段。

- 确定最终线路集: 即以第二线路集为主, 第三线路集为辅, 确定满足全部目标函数及约束条件要求的线路终集, PSO 算法模型。

$$\min(L) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_{ij} Q_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m D_{ij}} \quad (17)$$

$$\max(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} \delta_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m D_{ij}} \quad (18)$$

$$\max(\gamma) = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ijk} I_{ijk}}{\sum_{k=1}^B \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{nijk} I_{ijk}} \quad (19)$$

约束条件：

$$\delta_{ij} = 1 \quad (i \neq j)$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad (i = j)$$

$$R_{ij} \leq 1.41$$

$$T_{ij} \leq 8.44(\text{min})$$

其中： m ：交通小区总数；

n ：通行公交车辆的道路网结点数；

N ：公交线路数；

K_{ij} ：线路起终点 (i, j) 间直达乘客量(人次)；

I_{ijk} ：节点 i 至节点 j 的距离(km)；

D_{ij} ：交通小区 i 至 j 间的OD量(人次)；

Q_{ij} ：节点 i 至节点 j 间断面日客流量(人次)；

δ_{ij} ：系数

q_{ijk} ：第 k 线路的节点 (i, j) 间路段客流量(人次)；

q_{nijk} ：第 k 线路的节点 (i, j) 间路段车容量(人次)；

R_{ij} ：弯曲系数；

T_{ij} ：平均步行时间(分钟)。

4.2.2.2 公交线路网络设计模型最终确定

4.2.2.2.1 设线准则

公共交通在城市客运中的优势同时也决定了在进行公交网络设计时的主要准则,那就是在一定的舒适度下,能够尽可能多而迅速地将旅客运送到目的地。只有这样,才能充分体现公共交通客流量大,相对占用道路面积小的特点。这就要求在考虑每条线路的设计时,都要坚持相应的设线准则^[5]:

(1)沿主要客流方向开线.为了提高线路网的平均乘车距离,应该把客流量最大的路线挑选出来,优先设线,保证设立的公交线路能覆盖这些出行需求最大的路段。

(2)优先大流量的直达客流。为了降低线路网的平均换乘次数,在设计公交线路时,应该优先大流量的直达客流,所设的线路,要尽量和最大的客流方向一致,使尽可能多的乘客能够避免换乘。

(3)线路平均客流不低于最低开线标准。在开设线路前,必须进行乘客数的估算.只有当乘客数达到一定的标准之后,才能开设公交线路。这样能够使线路开通后有足够的乘客数,保证较高的公交运输效率,同时也能保证公交企业的经济效益。

(4)平均满载率尽可能高。在满足最低客流标准的待选公交线路中,应当尽量选出客流量大的线路,优先布线,保证尽可能高的车辆满载率。这样做的目的在本质上和上一条是一致的。

(5)线路的长度在所规定的范围内。这是为了便于公交系统本身的组织管理。线路太长,车辆周转时间过长,会使车辆的准点率下降,发车、配车都有一定的困难。线路太短,车辆周转过快,客流量可能不足,不能充分发挥公交车的运输效率,经济效益不高。所以在设立公交线路时,应该尽量使生成的线路长度在一定的范围内。一般来讲,线路长度以运行30~40min为宜,最短以20min为限,对于中小城市,最长以45min为限,大城市以60min为限。因此,对于平均运营速度15 km/h的公交线路而言,最短限制距离为5km,最长限制距离为11.25km(中小城市)和15km(大城市)。若备选线路的长度大于最长限制距离或小于最短限制距离时,一般不考虑设线。

(6)线路的客流量应该尽可能的均衡。为了充分发挥车辆的运载能力,公交线路在布设时应尽可能地优先选取客流较大且稳定的线路,以提高经济效益。公交线路的布设应该尽可能地选取最短距离的线路,这是为使全服务区乘客总的乘行时间或乘行距离最短,以保证公交车的服务质量。

4.2.2.2.2 公交线路网络设计模型

依据上述设线准则,我们建立了如下的公交网络设计方案模型:

$$\max f(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n SP_{ij} * x_{ij} \quad (20)$$

$$\text{st.} \quad 5km \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n I_{ij} D_{ij} x_{ij} \leq 15km \quad (21)$$

$$q_x \leq 1.50 \quad (22)$$

$$Q_k < Q_k^{\max} \quad (23)$$

$$b_n \leq 1.5 \quad (24)$$

$$ATT < 3 \quad (25)$$

$$x_{ij} \in (0,1) \quad (26)$$

其中：

f ：直达客流量；

x_{ij} ：决策变量， $x_{ij}=1$ 表示边 (i, j) 在规划公交路线上， $x_{ij}=0$ 表示边 (i, j) 不在规划公交路线上；

SP_{ij} ：网络内从节点 i 到节点 j 的直达客流量；

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n l_{ij} D_{ij} x_{ij} : \text{公交线路的长度；}$$

D_{ij} ：公交线路上从节点 i 到节点 j 的长度；

q_x ：非直线系数；

Q_k ：线路 k 的断面客流量；

Q_k^{\max} ：线路的最大断面客流量；

b_n ：线路断面客流的不均匀系数；

ATT ：平均换乘次数；

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当节点 } i \text{ 和节点 } j \text{ 相邻} \\ 0 & \text{反之} \end{cases}$$

(20) 是使公交网络所运送的直达客流量达到最大, 对于约束条件分别说明如下：

✚ (21) 约束条件是线路长度约束。由于要规划的是大城市，所以线路长度范围为5km到15km；

✚ (22) 约束条件是非直线系数约束。线路的非直线系数是指公交线路的实际长度与空间直线距离之比。线路的非直线系数越小越好，这样可以使乘客尽快到达目的地。对于一般城市，取1.15~1.20为宜。对单条公交线，应不大于1.5。

✚ (23) 约束条件是单线载客容量限制。线路的最大断面客流量 M_v 的计算方法如下：

$$Q_k^{\max} = 60 C_x l_k X_{cr} / h_k \quad (27)$$

其中：

C_x 为不同车型的客容量(人)，一般单节公交车为72人，铰接车129人，双层公交车120人，中巴车26人；

l_k 为线路 k 的满载率，高峰小时一般取0.85，平峰时取0.6；

X_{cr} 为线路重复影响系数, X_{cr} 是与某条线路重复的最大线路条数, 函数式如下:

$$X_{cr} = f(X_c) = \begin{cases} 1.00 & X_c = 0 \text{ 或 } 1 \\ 0.85 & X_c = 2 \text{ 或 } 3 \\ 0.70 & X_c \geq 4 \end{cases} \quad (28)$$

✚ (24) 约束条件是断面客流量不均匀系数约束. 这里:

$$b_n = \max Q_s / \bar{Q} \quad (29)$$

式中: Q_s 为线路的第 s 个断面的客流量(人);

\bar{Q} 为线路的平均断面客流量(人). 一般地, 取 $b_n \leq 1.5$ 。

✚ (25) 约束是平均换乘次数约束, 不宜超过3次。

在一条公交线路规划好后, 当输出线路所经过站点序列时, 应保证: 一条往返运行的线路, 除首末站可以相同(即为环线公交线路)以外, 不应含有环, 即规定相同的节点不应通过两次以上, 公交线路不应从某一节点又回到它前面的节点。公交线路不应对同一条弧通过两次以上, 这可以通过在公交站点间距离矩阵中将相应位置设为无穷大来保证。

4.2.3 给定站点和公交线路的状况的车次的问题

4.2.3.1 问题分析

由于建设整个公交系统网络过于复杂, 我们首先研究一条线路的运营情况, 我们需要建立了两个多目标规划模型, 来寻找最小车辆数的方法。针对其多目标、多变量的动态特点, 我们建立以下多目标规划模型: 双车站模型。该模型的主要目标是使运客能力与运输需求(实际客运量)达到最优匹配, 其目的是为了兼顾乘客与公司双方的利益。这个模型的主体采用时间步长法, 模拟实际的运营过程, 从而得出符合实际要求的调度方案: 静态调度和动态调度方案。

4.2.3.2 模型假设

假设 1: 车站 1 和车站 2 分别有车场 A 和 B 存车, 即均可作为始发站和终点站。

假设 2: 上行和下行路线独立运行。

4.2.3.3 模型的建立与求解

step1: 发车时刻表的确定

由前面分析, 兼顾乘客与公交公司双方的利益, 分别对单程的上行路线和下行路线建立如下的多目标规划模型:

目标函数

$$\min \sum (Q_i * \beta_i - V_i)^2 \quad (30)$$

$$\min \{N_i\} \quad (31)$$

$$\text{St.} \quad c \leq \beta_i \leq d \quad (32)$$

$$\alpha \leq k \quad (33)$$

$$\beta_i = R_i / (c * N_i) \quad (34)$$

$$\alpha = \frac{\sum V_i}{\sum Q_i} \quad (35)$$

$$V_i = \sum_j (x_{ji} - y_{ji}) L_j \quad \in (n, n-1, \dots, 1, 0) \quad (36)$$

其中：

式(30)为供求的最优匹配；式(31) 各时段的发车车次均最小；式(32) 各时段的平均满载率限制；式(33) 供求匹配比限制

N_i ：第 i 时段发车次数；

β_i ：第 i 时段的平均满载率；

R_i ：第 i 时段的总上车人数；

$c=100$ 人/车次；

α ：供求匹配比；

k ：控制参数；

Q_i ：第 i 时段运客能力（人 \times 公里）（ Q_i =第 i 时段发车次数 $N_i \times$ 每辆车标准载客量 $c \times$ 单程（上行或下行）总运行距离 L ）；

V_i ：第 i 时段的需要运客量（人 \times 公里）

$$V_i = \sum_j (x_{ji} - y_{ji}) L_j \quad \in (n, n-1, \dots, 1, 0) \quad , \text{上行方向}; \quad j \in (0, 1, \dots, n-1, n), \text{下行方向}。$$

其中， x_{ji} 为第 i 时段内 A_j 站的上车人数； y_{ji} 为第 i 时段内 A_j 站的下车人数 L_j 为 A_j 站距该单程方向上终点站的距离。即认为上车乘客的运载距离为正，下车乘客的运载距离为负。

对目标函数说明：

目标函数(30)使第 i 时段的运客能力 Q_i 与运输需求（实际客运量） V_i 达到最优匹配， β_i 反映满载率高低的影晌。

目标函数(31)使高峰期所发车次，即单位时段所发的最大车次，在满足约束条件下尽可能少，以使总共需要的车辆数较少。

对约束条件说明：

条件(32)是限制满载率满足运营调度要求，是考虑了乘客的利益。

条件(33)是限制供求匹配比 α 小于常数 k 。我们根据参数 k 的变动量分别进行模拟，从而筛选最恰当的 k 值。

注：为使始发站车站的每天起始时刻的车辆数保持不变，需使总发车次数与总收车次数相等，即必须使单程车次总数达到匹配（ $N_1 = N_2$ ），而 N_1 不能减少（受满载率限制），

因此我们在求解下行方向的 N_i 时增加约束 $\sum N_{i2} = N_1$ 。在增添约束条件 $\sum N_{i2} = N_1$ 之

后，用二次规划求得各时段发车次数 N_{i1} 和 N_{i2} 。

Step2: 运营过程的模拟

在这部分，我们采用时间步长法，根据假设一个时段内发车间隔时间 t_i 相等，则 t_i 可由 N_i 确定，从而得到发车时刻表。按此发车时刻表模拟实际运行过程，目标是确定满足时刻表的最小车辆数 n ，统计各项运营指标，搜索最优调度方案。

➤ 确定最小车辆数目 n

根据“按流发车”和“先进先出”的原则，对起点站，在发车时刻应至少有一辆车可以发出（处于等待发车状态）。若有多辆车，则先进站者先发车，其余车辆“排队”等候；若无车可发，则出现“间断”。完整的运营过程应保证车辆严格按时刻表发车，不发生间断。

设 1 站和 2 站分别有车场 A 和 B，从车站中不断有车发出，同时接受车进场，则车站中的车的数目是随时间变化的状态量。用 N_a 和 N_b 来描述车站 A 和车站 B 中要满足车流不间断所需的最小数目，分别搜索其在运行过程中的最大值，则所需最小车量数目 $n = N_a + N_b$ 。

➤ 统计各项运营指标

确定各项运营指标，采用模拟统计的计算方法，对不同的运营指标进行定量计算，主要功能是通过定量分析运营指标来检验方案的可行性，以确定方案调整。

注：由于车次与发车时刻一一对应，而车辆的队列顺序是不发生改变，因而对所需车辆进行统一编号，则对每一车次，与其对应的车辆编号是确定的，故我们直接对第 k 次车进行考察。

我们统计的指标及其定义如下：

平均满载率 上行方向 $\beta_{01} = (\sum_k \sum_j \beta(k, j)) / (N1 \cdot J1)$

下行方向 $\beta_{02} = (\sum_k \sum_j \beta(k, j)) / (N2 \cdot J2)$

满载率分布 可以由 $\beta(k, j)$ 确定。

平均候车时间 上行方向 $T1 = (\sum_k \sum_j T(k, j)) / (N1 \cdot J1)$

下行方向 $T2 = (\sum_k \sum_j T(k, j)) / (N2 \cdot J2)$

滞留乘客候车时间分布：

假设乘客在第 i 站有 k 次滞留到 $k+1$ 次，他增加的等候时间为： $t_i(k)$ ，其概率为 $(1 - B(k, i) - B(k, i-1)) / (D(k, i) + C(k-1, i))$ ，有 k 次滞留到更后的车次的概率可由此递推，那么我们就可以得到滞留时间的分布，其中：

$B(k,i)$ 第 k 次车离开第 i 站时车上的人数;

$D(k,i)$ 第 k 次车到第 i 站时上车与下车的人数之差;

$C(k,i)$ 第 k 次车离开第 i 站时站台上的滞留人数; (由于车已达最大满载率以至乘客不能上车, 故称“滞留”)

$T(k,i)$ 为第 k 次车离开第 i 站时站台上滞留者的滞留时间;

$\beta(k,i)$ 为第 k 次车离开第 i 站时的满载率, $\beta(k,i) = B(k,i)/1$;

$N1, N2$ 为一天单程所发的车次总数; $J1, J2$ 为单程站台总数;

Step3: 调度方案的选择:

我们由不同的理解得到两种调度方案, 其共同点是都必须形成完整的运营过程, 使车流不发生间断。

✓ 静态调度方案

认为在该路线上运行的总车数固定不变, 形成序贯流动的车流, 依照“按流开车”和“先进先出”的原则, 按发车时刻表发车。

✓ 动态调度方案

考虑高峰期与低谷期实际需要的车辆数目不同, 为了满足高峰期而求得的车辆数目必然大与其他时间需要的车辆数, 即 m 辆车只在高峰期得到充分利用, 造成资源浪费。我们认为公交公司可进行车辆动态调度, 让一些车辆可以在特殊原因下进行修理调整, 并节约运营成本。由此我们在保证车流不间断的条件下, 可以计算得出各个时段内实际所需的最小车辆数, 同时给出 A、B 车站的存车状态, 可以自由支配的车辆数目。

4.3 公交线路网络结构的修改

现有的大城市公交线路系统已经很难实施大幅度调整, 故我们将小幅度地修改公交线路网络的结构, 以不影响或尽量少影响人们出行习惯并且能提高整体运营效率。我们可以从城市公交站点的选择和城市公交站距优化这两个方面来提高整体公交网络运营效率。

4.3.1 城市公交站点的选择

由于现有的大城市公交线路系统已经很难实施大幅度调整, 为了提高整体运营效率而且线路系统的改动要以尽量减少对人们出行习惯的影响为宜, 故可以考虑对某些公交站点重新布局选择, 以提高公交网络线路的整体运营效率

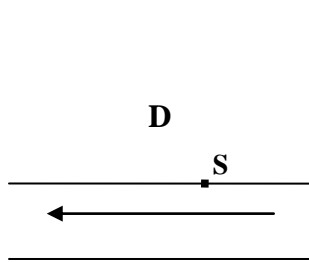
发展城市公共交通是一项系统工程, 它涉及到外部条件和内部管理等多方面的因素^[14]。我国目前除少数城市已经有地铁外, 绝大多数城市公共交通的主体都是公交汽车和公交电车。众多城市居民日常生活和上下班都得依靠公交车, 而从他们居住的地方到公交车的车站往往必须步行一段路程。如果公交车车站的选取缺乏科学性, 势必会造成市民步行时间的增加, 产生人行道拥挤, 影响交通安全等一系列不良效果, 从而降低整个公交网络的运行效率。合理地选取公交车车站, 对于缓解交通拥挤, 提高交通安全度, 繁荣市场经济, 提高整个公交网络的运行效率, 无疑会有积极的影响。

公交车站一般设立在商业街道、娱乐场所、大型公司、工业基地、学校、居民住宅区等附近。通常要符合一个原则^[15-16]，就是人员出入较多的地方一般都应设立公交车站。我们要研究的问题并非想把城市所有公交车站审查一遍，看看它们的安排是否合理。我们想研究的是，假定要在某个区域（一个人员出入较多的区域）建造一个公交车站，那么它应该被建立在该区域的什么地方，才能最大限度地方便居民的出行并且整个公交网络线路的整体运营效率较高。

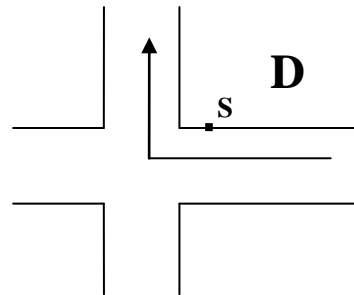
4.3.1.1 区域和车站的关系

为了给某个区域确定一个车站站点，首先必须给出该区域的大致情况，以及能够被用来选择建造车站的范围。由于绝大多数城市的道路分布一般都是纵横走向的，所以，我们可以假设城市内某个区域的周边是直线走向的，不失一般性，不妨可设该区域是矩形的，如住宅小区、学校、工厂、商场等等。我们将该区域记为 D ，考虑如何在 D 的周边建造车站站点 S ，到该车站 S 乘坐公交车的乘客大都来自（或者回到）我们的目标区域 D 。

车站必须建在马路边上，区域附近得有马路，故可设矩形区域 D 至少有一条边是马路。当公交车沿着该区域周围某一边的马路驶过时，它的行驶路线只会出现两种情况：或者沿着该马路一直开下去；或者沿区域某处拐弯，如图三和图四所示。由于区域面积相对较小，我们将不考虑公交车在区域附近拐两个弯的情况。对于直行路线，毫无疑问，公交车的车站站点必定设立在该马路的沿线上，如图三；而对于拐弯的路线，车站站点可以选择在拐弯路线附近，连接拐弯点的两条马路沿线都可以选择，如图四，其中的 S 表示车站。



图三 直线行车路线



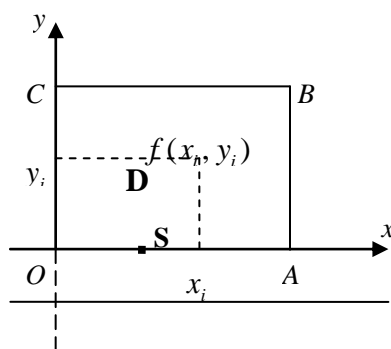
图四 转弯行车路线

必须说明的是上面的假设是非常重要的，它基本符合一般城市内车站点的实际设置情况，而且，上述两种简化的区域结构能够为我们接下来寻求最佳站点提供很大的方便。

现实生活中，并不是所有地方都可以建造车站的，比如，消防栓两旁的几米内就不可以设站点等，但这种情况发生的可能性非常小，所以，我们可以假设公交车在其线路上的站点选择没有受到任何外界限制。我们将分别针对上面公交车的两种行车路线，讨论如何去选择最合理的车站站点 S ，目标是使得区域 D 内行人的步行路程总和最小。考虑到大多数区域的内部道路通常是横竖垂直建造的，因而，这里我们可以约定行人步行的路线必须平行或者垂直于公交车的路线，即不允许走斜线的情况出现。此外，考虑到某些行人，如老人、孩子、孕妇等，行动不便，不应当让他们走太多的路，为使得车站位置的定位更加理性化，规定目标区域 D 内行人到达车站的最大允许路程不超过一个给定的长度 T 。 T 值的大小在一定程度上反映了公交车站站点设置的服务水平， T 的选取可根据所要求的服务水平来定，一般可以取 500 米到 100 米不等， T 越大，表明服务水平越低^[19-20]。

4.3.1.2 直线行车路线站点选择（离散模型）

先考察图三的情形，即公交车路线为直线行车。我们对图三建立直角坐标系，将区域 D 的左边和下边分别放在坐标轴上，如图五所示。矩形区域 $OABC$ 就是区域 D ，即乘坐公交车的人大多来自（或回到）该地区，并设公交车在路线 OA 上沿箭头方向行驶。我们要考虑的是如何在线段 OA 上选择适当的车站站点 S 使得出行人的步行路程总和最小，可以提高公交网络的效率。



图五 直线行车路线离散区域

如果目标区域 D 中的出行人相对集中于几个离散的小区域（如住宅小区、学校、工厂、商场等等），各个小区域相对独立。我们可以在图五所建立的坐标系中用一个点 (x_i, y_i) 近似代表区域 D 中的第 i 个小区域所在的位置，用 $f(x_i, y_i)$ 表示第 i 个小区域中的出行人数，用 $g(x_i, y_i)$ 表示第 i 个小区域中的出行人平均每天步行至车站（或者从车站回来）的次数， $(i=1, 2, \dots, n)$ ，其中 n 表示 D 中包含的小区域的个数。设 S 表示 x 轴上的目标车站点，并设其坐标为 $(\alpha, 0)$ 。那么区域 D 中所有出行人从各自小区域到车站 S 每天步行的总路程可以估计为：

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^n (|x_i - \alpha| + y_i) f(x_i, y_i) g(x_i, y_i)$$

另外设对于该区域的服务水平为 T ，即每个小区域到车站的路程不超过 T ，有：

$$|x_i - \alpha| + y_i \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

综合上面的分析，我们可以得到如下的离散模型：

$$\min W(\alpha) = \sum_{i=1}^n (|x_i - \alpha| + y_i) f(x_i, y_i) g(x_i, y_i) \quad (37)$$

$$s. t. \quad |x_i - \alpha| + y_i \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

$$f(x_i, y_i) \geq 0, \quad g(x_i, y_i) \geq 0, \quad \alpha \in [0, a] \quad (39)$$

离散模型(37)、(38)取得最小值的那个 α 值就是目标车站点的横坐标。下面我们要解决的还有两个问题是：该模型是不是肯定有解，以及如果有解存在，我们又应当如何去求得该车站站点的具体位置。

仔细分析(37)式可知 $\sum_{i=1}^n y_i f(x_i, y_i) g(x_i, y_i)$ 是常数，与 α 无关。另外注意到

$f(x_i, y_i) g(x_i, y_i)$ 的形式仅仅和 i 有关，我们可以设 $h_i = f(x_i, y_i) g(x_i, y_i) > 0$ 。所以(1)式可以转换为：

$$\min V(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i + \alpha h_i \quad (40)$$

将所有小区域的横坐标 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 从小到大的排列，不妨设已有 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ，这样，(40)中的目标函数就可以用分段函数来表示，即

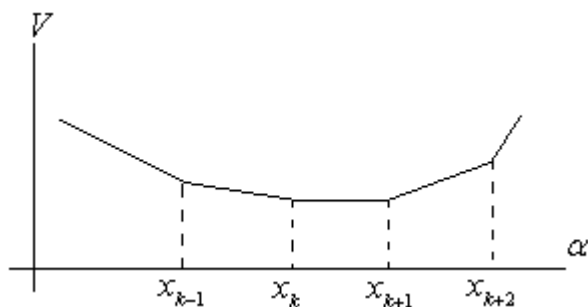
$$V(\alpha) = \begin{cases} x_1 h_1 + \alpha h_1 & \alpha \leq x_1 \\ -x_1 h_1 + x_2 h_2 + \alpha h_2 & x_1 < \alpha \leq x_2 \\ \dots & \dots \\ -x_1 h_1 - x_2 h_2 \dots + x_n h_n - \alpha(-h_1 - h_2 \dots + h_n) & x_{n-1} < \alpha \leq x_n \\ -x_1 h_1 - x_2 h_2 \dots - x_n h_n - \alpha(-h_1 - h_2 \dots - h_n) & x_n < \alpha \end{cases} \quad (41)$$

从上面的分段函数中可以看出， $V(\alpha)$ 在坐标轴上的图像由 $n+1$ 段组成，每段都是直线段或射线，且该函数在这些线段或射线的分界点 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 处都是连续的，故 $V(\alpha)$ 是连续函数。

仔细观察(4)的形式， α 的系数表示了该线段的斜率。由于 $h_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ ，第一个线段的斜率 $-(+h_1 + h_2 + \dots + h_n) < 0$ ，最后一个线段的斜率 $-(-h_1 - h_2 - \dots - h_n) > 0$ ，而且后面一个线段的斜率要肯定大于前面一个线段的斜率，所以，这 n 段线段的斜率从左向右关于 i 严格单调递增。因而必然存在某个分界点 $x_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，在区间 $(-\infty, x_k]$ 内的线段或射线上的斜率都小于或等于零，在区间 $[x_k, +\infty)$ 内的线段或射线上的斜率都大于或等于零。这里具体可以分为两种情况：

1. 存在 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得 $-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) = 0$ ，于是组成 $V(\alpha)$ 的线段或射线的斜率在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 内为零，在区间 $(-\infty, x_k]$ 内都小于零，在区间 $[x_{k+1}, +\infty)$ 内都大于零。 $[x_k, x_{k+1}]$ 中的每一点都是 $V(\alpha)$ 的最小值点，在最小值点附近， $V(\alpha)$ 的函数图像

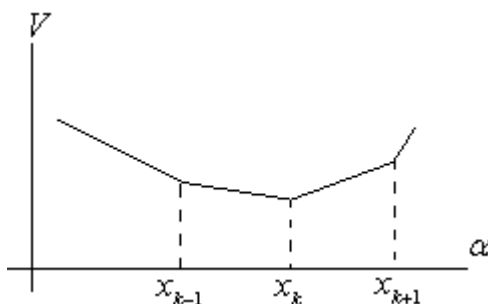
大致如图六所示：



图六 $V(\alpha)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 取到最小值的图像

2. 存在 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $-(-h_1 \cdots -h_{k-1} + h_k + \dots + h_n) < 0$ 且

$-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) > 0$, 此时组成 $V(\alpha)$ 的线段或射线的斜率在区间 $(-\infty, x_k]$ 内都小于零, 在区间 $[x_k, +\infty)$ 内都大于零。 $V(\alpha)$ 仅在 x_k 这一点取到最小值, 在该最小值点附近 $V(\alpha)$ 的函数图像大致如图七所示。



图七 $V(\alpha)$ 仅在 x_k 点取到最小值的图像

综上所述, 我们可以得到如下的结论 1

结论 1 函数 $V(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i - \alpha |h_i|$ 满足 $x_i \geq 0, h_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 若存在

$k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) = 0$, 则 $[x_k, x_{k+1}]$ 中的每一点都是 $V(\alpha)$ 的最小值点。否则必存在一个 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $-(-h_1 \cdots -h_{k-1} + h_k + \dots + h_n) < 0$ 且 $-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) > 0$, 并且 $V(\alpha)$ 仅在 x_k 处取到最小值。

无论对于结论 1 的哪种情况, $V(\alpha)$ 在最小值点的左侧严格单调递减, 在最小值的

右侧严格单调递增。

再来看看模型的约束条件(38)，要使得 $|x_i - \alpha| + y_i \leq T$ 有解，必然有 $y_i \leq T$ ， $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，所以 $T \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}$ 是(38)有解的必要条件。

另外对于 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，由 $|x_i - \alpha| + y_i \leq T$ 可以推出：

$$x_i + y_i - T \leq \alpha \leq x_i - y_i + T$$

设 $\alpha_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i - T\}$ ， $\alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i + T\}$ ，要使得(38)有解，必须有 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 。

而且在 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 成立的条件下，对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，有：

$$x_i + y_i - T \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i - T\} = \alpha_1 \leq \alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i + T\} \leq x_i - y_i + T,$$

即 $y_i \leq T$ ，所以 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 包含了条件 $T \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}$ 。

综合上面分析我们可以得到如下的结论 2：

结论 2 $|x_i - \alpha| + y_i \leq T \quad i = 1, 2, \dots, n$ 有解的充分必要条件为 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ，这里的 $\alpha_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} - T$ ， $\alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\} + T$ ，并且该条件成立下的解集为 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 。

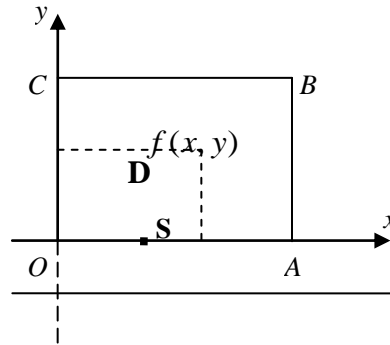
根据结论 1 和结论 2，我们对(37)、(38)所描述的车站站点选择模型给出如下的解法，算法分为以下几个步骤：

1. 通过交通调查和统计结果得到 $x_i, y_i, f(x_i, y_i), g(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，以及区域 D 所要求的服务水平 T 。
2. 计算 $\alpha_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} - T$ 和 $\alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\} + T$ 。
3. 若 $\alpha_1 > \alpha_2$ ，此时在任何一个位置上建设车站都无法满足该服务水平，可见该区域 D 要求的服务水平太高，我们本着尽量少地降低服务水平的原则来提高 T 的值，以便使得车站选址问题有解。由于 $T = \frac{1}{2} \left[\max_{1 \leq i \leq n} (x_i + y_i) - \min_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i) \right]$ 是使得车站选置问题有解的最小的 T ，也就是最高的服务水平，所以我们选择在 $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} - T$ 处建设车站。
4. 若 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ，则(38)的解集为 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 。对 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 从小到大排序和编号，使重新编排后满足 $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ 。计算 $h_i = f(x_i, y_i)g(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。找到最小的 k ， $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，使得 $-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) \geq 0$ 。若

$-(-h_1 - \dots - h_k + h_{k+1} + \dots + h_n) = 0$ ，(37)的最小值点集为 $[x_k, x_{k+1}]$ ，否则， x_k 是(37)的唯一最小值点。

5. 若(38)的解集与(37)的最小值点（或点集）的交集为空。如果(38)的解集 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 在(37)的最小值点（或点集）的左边，我们将在 $\alpha = \alpha_2$ 建车站；如果(38)的解集 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 在(1)的最小值点（或点集）右边，我们将在 $\alpha = \alpha_1$ 建设车站。若两者交集为一个点 α ，那么我们就在 α 点建设车站。
6. 若(38)的解集与(37)的最小值点（或点集）的交集为一个闭区间 $[\beta_1, \beta_2]$ 。由于在该区间内任何一点都能使(37)达到最小值，此时我们可以提高服务水平，也就是减少 T 值。考察区间 $[\alpha_1, \alpha_2] = [\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} - T, \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\} + T]$ ，可知对于不同的 T ，区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 的中心点都在 $\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2}(\max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + y_i\} + \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\})$ ，区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 越大， T 也就越大。换句话说，离中心 α_0 越远的点要求的 T 值也就越大。如果 $\alpha_0 \in [\beta_1, \beta_2]$ ，我们将在 α_0 建车站；如果 α_0 在 $[\beta_1, \beta_2]$ 左边，我们将在 β_1 建车站；如果 α_0 在 $[\beta_1, \beta_2]$ 右边，我们将在 β_2 建车站。

4.3.1.3. 直线行车路线站点选择（连续模型）



图八 直线行车路线连续区域

如图八，我们的目标区域 D 和行车路线的关系以及坐标设置都和离散模型一样，但是唯一的也是最重要的区别在于已知的是区域 D 上出行人口的分布。如果目标区域中的出行者相对比较分散而不能像上面的离散情况那样分为几块，则可不妨将出行者密度近似看成连续函数。设 (x, y) 为小区内某点的坐标， $0 \leq x \leq |OA| = d_1$ ， $0 \leq y \leq |OC| = d_2$ ，

$f(x, y)$ 为 (x, y) 点的人口密度， $g(x, y)$ 为 (x, y) 点的出行人平均每天步行至车站（或者从车站回来）的次数，其它符号定义同前。考察 (x, y) 的一个邻域 $\Delta x \cdot \Delta y$ ，可以用 $f(x, y)\Delta x \Delta y$

近似表示该邻域内出行人数， $f(x,y)g(x,y)\Delta x\Delta y$ 表示该邻域内每天的出行人流量或人次，他们到目标车站行走的总距离为 $(|x-\alpha|+y)f(x,y)g(x,y)\Delta x\Delta y$ 。于是区域 D 内的行人每天到目标车站的总行程为 $\int_0^{d_1}\int_0^{d_2}(|x-\alpha|+y)f(x,y)g(x,y)dydx$ ，我们可以确定如下的连续型模型：

$$\min W(\alpha) = \int_0^{d_1}\int_0^{d_2}(|x-\alpha|+y)f(x,y)g(x,y)dydx \quad (42)$$

$$s. t. \quad |x-\alpha|+y \leq T \quad \forall (x,y) \in D \quad f(x,y)g(x,y) > 0 \quad (43)$$

$T > 0, f(x,y) \geq 0, g(x,y) \geq 0 \quad \forall 0 \leq x \leq d_1, 0 \leq y \leq d_2$ 且 f 和 g 在 D 内连续

上述模型中使得(42)取到最小值的那个 α 就是目标车站的横坐标。约束条件(43)中的第二个约束，即 $\forall (x,y) \in D$ 且 $f(x,y)g(x,y) > 0$ ，表明了区域 D 中肯定有行人去车站或由车站返回，对这些地点我们有服务水平 T 的要求。下面我们就来求解这个连续模型。

对于(42)式，由于 $\int_0^{d_1}\int_0^{d_2} yf(x,y)g(x,y)dydx$ 与 α 无关，故我们只需考虑

$$V(\alpha) = \int_0^{d_1}\int_0^{d_2} |x-\alpha| f(x,y)g(x,y)dydx$$

记 $f(x,y)g(x,y) = h(x,y)$ ，有：

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \int_0^{d_1}\int_0^{d_2} |x-\alpha| h(x,y)dydx \\ &= \int_0^{d_1} |x-\alpha| \int_0^{d_2} h(x,y)dydx \\ &= \int_0^{\alpha} (\alpha-x) \int_0^{d_2} h(x,y)dydx + \int_{\alpha}^{d_1} (x-\alpha) \int_0^{d_2} h(x,y)dydx \\ &= \alpha \int_0^{\alpha} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - \int_0^{\alpha} x \int_0^{d_2} h(x,y)dydx + \int_{\alpha}^{d_1} x \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - \alpha \int_{\alpha}^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx \\ &= 2\alpha \int_0^{\alpha} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - \alpha \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - 2 \int_0^{\alpha} x \int_0^{d_2} h(x,y)dydx + \int_{\alpha}^{d_1} x \int_0^{d_2} h(x,y)dydx \\ V'(\alpha) &= 2 \int_0^{\alpha} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - 2\alpha \int_0^{d_2} h(\alpha,y)dy + \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - 2\alpha \int_0^{d_2} h(\alpha,y)dy \\ &= 2 \int_0^{\alpha} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx - \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx \end{aligned} \quad (44)$$

考察(44)，由于 $h(x,y) \geq 0$ ，故 V' 单调递增且连续。另外

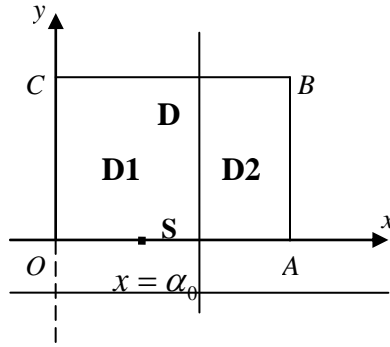
$V'(0) = -\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx < 0$ ， $V'(d_1) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x,y)dydx > 0$ ，所以必然存在一点 $\alpha_0 \in (0, d_1)$ 使得 $V'(\alpha_0) = 0$ ， $V'(\alpha)$ 在区间 $[0, \alpha_0)$ 内为负，在区间 $(\alpha_0, d_1]$ 内为正。即 $V(\alpha)$ 在区间 $[0, \alpha_0]$ 内单调递减，在区间 $[\alpha_0, d_1]$ 内单调递增，在 α_0 点取到最小值。而且由(44)

可以得出 α_0 满足 $\int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$ 。我们得到如下的结论 3。

结论 3 若 $h(x, y)$ 在区域 D 内非负且连续，则存在一点 $\alpha_0 \in (0, d_1)$ ，使得

$$\int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$$

函数 $V(\alpha) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} |x - \alpha| h(x, y) dy dx$ 在区间 $[0, \alpha_0]$ 内单调递减，在区间 $[\alpha_0, d_1]$ 内单调递增，在 α_0 点取到最小值。



图九 直线行车路线连续区域

结论 3 的几何意义非常明显，如图九， $\int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$ 就是区域 D 内一天出行到车站的总人次，用直线 $x = \alpha_0$ 将区域 D 分为左右两个矩形 $D1$ 和 $D2$ ，那么 $\int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$ 就是区域 $D1$ 内一天出行到车站的总人次。当左右两个矩形内一天出行到车站的总人次相等的时候，他们分界点的位置就是使得 $V(\alpha) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} |x - \alpha| h(x, y) dy dx$ 取到最小值的点，即车站的建造点。

更为严格地说，考虑到 $h(x, y)$ 非负而不一定永远是正的，满足结论 3 的点 α_0 有可能不止一个，在这种情况下，使得 $V(\alpha)$ 取到最小值的点集是一个闭区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ ，该区间内任何一点 α_0 都满足 $\int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$ 。

再来看约束条件(43)，设 $D0 = \{(x, y) \in D \mid f(x, y)g(x, y) > 0\}$ ，我们称之为行人存在区域，并设 $y_m = \max_{(x, y) \in D0} \{y\}$ ，即行人存在区域的最上方。要使(43)的解集非空，必须有 $y_m \leq T$ ，在此前提下，由

$$|x - \alpha| + y \leq T, \text{ 可知 } x + y - T \leq \alpha \leq x - y + T$$

设 $\alpha_1 = \max_{(x,y) \in D_0} \{x+y\} - T$, $\alpha_2 = \min_{(x,y) \in D_0} \{x-y\} + T$, 可知(42)(43)解集非空的另一个必要条件是 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 。条件 $\alpha_1 \leq \alpha_2$ 包含了 $y_m \leq T$, 所以, 我们有如下结论 4:

结论 4 $|x - \alpha| + y \leq T, \forall (x, y) \in D \Leftrightarrow \exists (y, \in) \mathbb{D} |x| \leq g(x)$ 有解的充分必要条件为 $\alpha_1 \leq \alpha_2$, 这里的 $\alpha_1 = \max_{(x,y) \in D_0} \{x+y\} - T$, $\alpha_2 = \min_{(x,y) \in D_0} \{x-y\} + T$, 并且该条件成立下的解集为 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 。

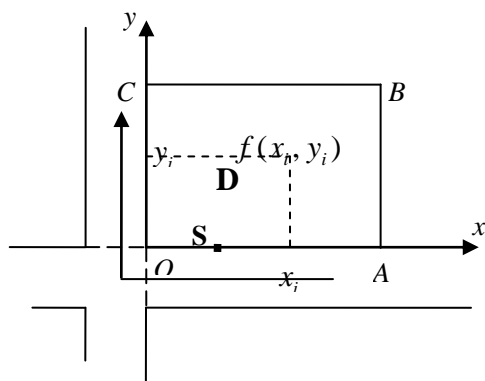
现实生活中当然没有现成的人口密度函数 $f(x, y)$ 和平均出行次数函数 $g(x, y)$ 。一般的, 我们可以选取一定数量且广泛分布在区域 D 各个地方的点 (x, y) , 通过交通调查得到各点的 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$, 然后通过样条插值构造连续函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ [15]。所以, 一般地, 我们可以假设对于区域 D 内的任何一点都有 $f(x, y)g(x, y) > 0$, 即 $D_0 = D$ 。于是 $\alpha_1 = \max_{(x,y) \in D_0} \{x+y\} - T = d_1 + d_2 - T$, $\alpha_2 = \min_{(x,y) \in D_0} \{x-y\} + T = -d_2 + T$, 此时, 使得(43)的解集非空的 T 必须满足 $T \geq \frac{1}{2}d_1 + d_2$ 。

我们给出连续模型直线行车路线时车站站点选择的具体解法步骤如下:

1. 在区域 D 内选取一定的地理位置分布和人口出入较多且有代表性的点, 通过交通调查和统计得到这些点的 $x, y, f(x, y), g(x, y)$ 和区域 D 要求的服务水平 T , 这里要求 $T \geq \frac{1}{2}d_1 + d_2$ 。计算这些点的 $h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$ 。
2. 利用样条插值方法作 D 内的正连续函数 $h(x, y)$ 。
3. 求点 $\alpha_0 \in [0, d_1]$ 使得 $\int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dx dy = \frac{1}{2} d_1 \int_0^{d_2} h(x, y) dx$ 。先计算 $\frac{1}{2} \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$, 令 $U(\alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} \int_0^{d_2} h(x, y) dy dx$, 由于函数 $U(\alpha_0)$ 在 $[0, d_1]$ 内严格单调递增, 所以, 求 α_0 时可以采用对区间 $[0, d_1]$ 反复使用二分法来求解。
4. 计算(43)式得解集 $[\alpha_1, \alpha_2] = [d_1 + d_2 - T, -d_2 + T]$ 。
5. 如果 $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$, 我们将会在 α_0 建设车站; 如果 α_0 在 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 左边, 我们将会在 α_1 建设车站; 如果 α_0 在 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 右边, 我们将会在 α_2 建设车站。

4.3.1.4. 转弯行车路线站点选择（离散模型）

现在来考察我们最初假设中的第二种路线，即转弯行车路线，如图十所示。设某公交车在直行路段 AO 上沿箭头方向行驶并且在街角处右拐（左拐的情况讨论类似）。假定乘坐该路公交车的出行人来自（或回到）矩形区域 D 。建立类似于图五的直角坐标系，此时我们能够选择的车站站点不仅可以考虑位于线段 OA 上的点，还可以考虑位于线段 OC 上的点。



图十 转弯行车路线离散区域

类似于直行路线的离散情形，如果目标区域 D 中的出行人相对集中于几个离散的小区域且各个小区域相对独立，我们可以在图十所示的坐标系中用一个点 (x_i, y_i) 近似代表区域 D 中的第 i 个小区域，用 $f(x_i, y_i)$ 表示第 i 个小区域的出行人数，用 $g(x_i, y_i)$ 表示第 i 个小区域的出行人平均每天步行至车站（或者从车站回来）的次数， $i=1, 2, \dots, n$ 。

如果目标车站站点 S 建立在 x 轴上，设其坐标为 $(\alpha, 0)$ ，我们得到和(1)(2)一样的模型。

如果目标车站站点 S 建立在 y 轴上，设其坐标为 $(0, \beta)$ ，我们得到类似于(37)(38)的模型：

$$\min W_y(\beta) = \sum_{i=1}^n (x_i + |y_i - \beta|) f(x_i, y_i) g(x_i, y_i) \quad (45)$$

$$s.t. \quad x_i + |y_i - \beta| \leq T \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (46)$$

$$f(x_i, y_i) \geq 0, g(x_i, y_i) \geq 0, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

我们依照直行路线离散模型的解法，求出 x 轴上的车站建设点 $(\alpha, 0)$ ，该点一天的行人总路程

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^n (|x_i - \alpha| + y_i) f(x_i, y_i) g(x_i, y_i)$$

该点的服务水平 $T(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i - \alpha| + y_i)$

类似可求出 y 轴上的车站建设点 $(0, \beta)$ ，该点一天的行人总路程

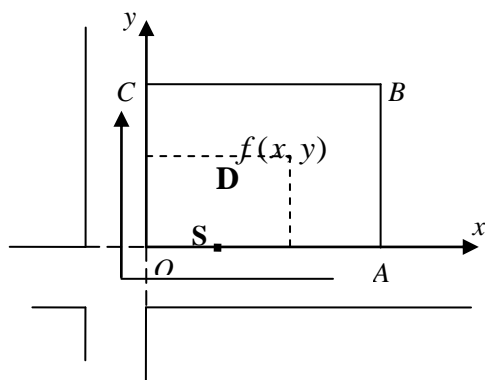
$$W_y(\beta) = \sum_{i=1}^n (x_i + |y_i - \beta|) \quad \text{和该点的服务水平 } T_y(\beta) = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i + |y_i - \beta|\}。$$

然后比较这两个车站候选点，可能出现三种情况：

1. 如果在上述两点建站都没有使 T 值增大，即保持在服务水平 T 内，可分别求出在 x 轴上建车站站点的最优位置 $(\alpha, 0)$ 和在 y 轴上建车站站点的最优位置 $(0, \beta)$ 。那么最终到底选择这两个位置中的哪一个作为车站站点的建造位置，应当按行人总路程为优先，服务水平为其次的法则选择。即选取行人总路程小的那个，若其相等，则选服务水平小的那个。
2. 如果在比较求得的两点时，发现有一个增大了 T 值，则我们选择 T 值没有增大的那个点建设车站。
3. 如果在比较求得的两点时，发现 T 值都增大了，则比较 $(\alpha, 0)$ 和 $(0, \beta)$ 时应以服务水平为优先，行人总路程为其次的法则选择车站建设点。

4.3.1.5 转弯行车路线站点选择（连续模型）

对于转弯行车路线的连续模型，如图十一所示，和直线行车路线的连续模型一样，如果目标区域 D 中出行人数分布稀疏，亦可以将出行人数近似成连续流，只是，在选择车站站点的时候既可以考虑线段 OA ，也可以考虑线段 OC 。其各个变量选取都和直线行车路线的连续模型一样。



图十一 转弯行车路线连续区域

如果目标车站点 S 建立在 x 轴上，设其坐标为 $(\alpha, 0)$ ，我们得到和(42)(43)一样的模型。

如果目标车站点 S 建立在 y 轴上，设其坐标为 $(0, \beta)$ ，我们得到类似于(42)(43)的模型：

$$\min W_y(\beta) = \int_0^{d_2} \int_0^{d_1} (x + |y - \beta|) f(x, y) g(x, y) dx dy \quad (46)$$

$$s. t. \quad |y - \beta| \leq T \quad \forall (x, y) \in D \quad f(x, y) g(x, y) \quad (47)$$

$T > 0, f(x, y) \geq 0, g(x, y) \geq 0 \quad \forall 0 \leq x \leq d_1, 0 \leq y \leq d_2$ 且 f 和 g 在 D 内连续

对于该模型的求解, 我们仍然在区域 D 内选取一定的地理位置分布和人口出入较多的且有代表性的点, 通过交通调查和统计得到这些点处的 $x, y, h(x, y) = f(x, y)g(x, y)$, 然后利用样条插值方法作 D 内的正连续函数 $h(x, y)$ 。此时, 对服务水平 T 的限制可以与直线行车路线连续模型时一样, 取 $T \geq \frac{1}{2}d_1 + d_2$ 。考虑到模型关于 x 和 y 的对称性, 令 $T \geq \min\{\frac{1}{2}d_1 + d_2, d_1 + \frac{1}{2}d_2\}$ 即可。

如果 $T \geq \max\{\frac{1}{2}d_1 + d_2, d_1 + \frac{1}{2}d_2\}$, 对上面的模型依照直行路线连续模型的解法求出 x 轴上的目标车站点 $(\alpha, 0)$ 、该点一天的行人总路程

$$W(\alpha) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} (|x - \alpha| + y) f(x, y) g(x, y) dy dx$$

$$\text{该点的服务水平 } T_x(\alpha) = \max\{\alpha + d_2, d_1 - \alpha + d_2\}$$

同样求出 y 轴上的目标车站点 $(0, \beta)$ 、该点一天的行人总路程

$$W_y(\beta) = \int_0^{d_2} \int_0^{d_1} (x + |y - \beta|) f(x, y) g(x, y) dx dy$$

$$\text{该点的服务水平 } T_y(\beta) = \max\{d_1 + \beta, d_1 + d_2 - \beta\}$$

然后对这两个候选点依照行人总路程优先, 服务水平为其次的法则选择车站的建设点。

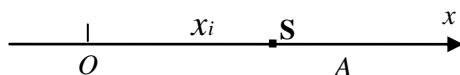
如果 $\min\{\frac{1}{2}d_1 + d_2, d_1 + \frac{1}{2}d_2\} \leq T < \max\{\frac{1}{2}d_1 + d_2, d_1 + \frac{1}{2}d_2\}$, 则 x 轴上的目标车站站点 $(\alpha, 0)$ 和 y 轴上的目标车站站点 $(0, \beta)$ 中必有一个不满足服务水平而无解, 我们选择有解的那个就可以了。

4.3.1.6 其他模型

以上我们分两种不同的行车路线, 分别就离散和连续的情况讨论了各自的模型和解答。综合起来, 基本的思想是在保证一定服务水平的前提下使得一天内区域 D 内所有行人的总路程最小, 提高公交网络线路的整体运行效率。对于现实生活中的一些特殊情况, 还可以考虑其他的模型。

1、将目标区域 D 由二维转换成一维, 将目标区域中的出行人近似地看作集中于路段 OA 中的 n 个小路口, 比如住宅小区大门、大商场门口等等。我们可以用数轴上的一

个点 x_i 代表第 i 个小路口, 用 $f(x_i)$ 和 $g(x_i)$ 表示第 i 个小路口每日出行的人数和这些人的平均出行次数, ($i=1,2,\dots,n$)。同样设 $x=\alpha$ 为目标车站站点 S , 如图十二, 建立如下模型:



图十二 一维出行人区域图

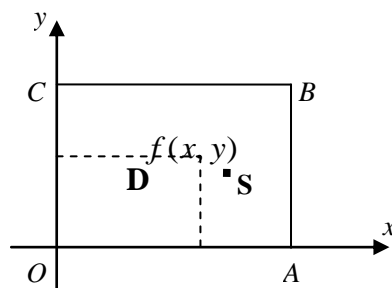
$$\min W(\alpha) = \sum_{i=1}^n x_i + \alpha f(x_i) g(x_i)$$

$$s. t. |x - \alpha| \leq T, i = 1, 2$$

$$f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, \alpha \geq 0$$

显然它是模型(37)、(38)的特殊情况, 即 $y_i = 0, f(x_i, y_i) = f(x_i), g(x_i, y_i) = g(x_i)$ 情况下的简化。同样对于这种一维的情况也可以考虑连续模型, 比如, 在一个商业街上的情况就比较适合用一维连续模型。

2、我们还可以考虑较为复杂的情况, 如矩形服务区域 D 内的任何一点都可以建造车站的情况, 行人行走路线还是平行或垂直与区域 D 的边, 如图十三所示:



图十三 区域内建设车站

以连续模型为例 (离散模型情况类似), 假设目标车站站点 S 的坐标为 $(\alpha, \beta) \in D$, 于是可以得到如下的模型:

$$\min W(\alpha, \beta) = \int_0^{d_1} \int_0^{d_2} (|x - \alpha| + |y - \beta|) f(x, y) g(x, y) dy dx$$

$$s. t. |x - \alpha| + |y - \beta| \leq T, (x, y) \in D, f(x, y) \geq 0$$

$$T > 0, f(x, y) \geq 0, g(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D \text{ 和 } (x, y) \text{ 在 } D \text{ 内连续}$$

易知, $W(\alpha, \beta)$ 是闭区域 D 上的连续函数, 它的最小值必存在, 从而该模型的解在足够大的 T 下总是存在的。

4.3.1.7 公交线路站点的布设

公交车站的间距、位置、设计和管理对公交系统发挥作用有着很大的影响，尤其时车站间距，是影响车辆运营速度和调度计划的重要因素。

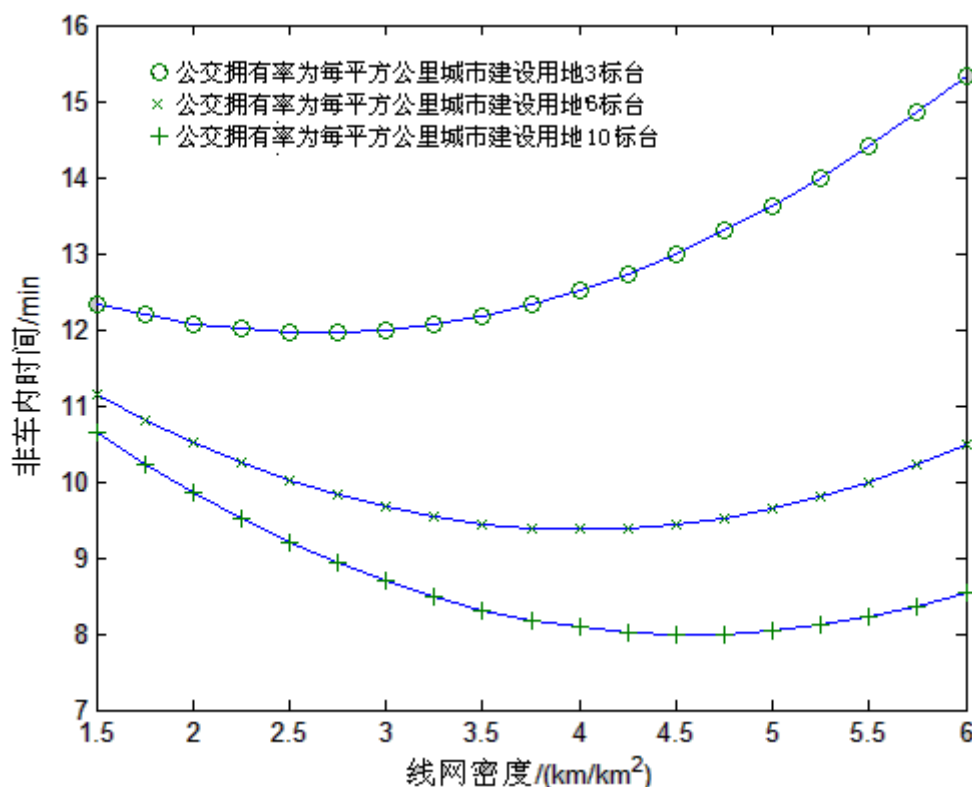
公交车站在路线确定后根据最优站距和车站长度限制等情况确定。起(终)点站是公交线网规划的重要约束条件，可在路线优化后，根据路线及车辆配置情况确定起(终)点站及其规模。中途站点规划在公交车辆的起(终)点站及线路走向确定以后进行，综合以上离散与连续的站点选择原则^[19]，站点规划应该为：

- (1)中点站点应设置在公共交通线路沿途所经过的各主要客流集散点上；
- (2)中点站点应延街布置，站址宜选择在能按要求完成车辆的停和行两项任务的地方，以提高公交网络运行效率；
- (3)交叉口附近设置中间站点时，一般设在过交叉口 50 米以外处，在大城市车辆较多的主干道上，宜设在 100 米以外处。

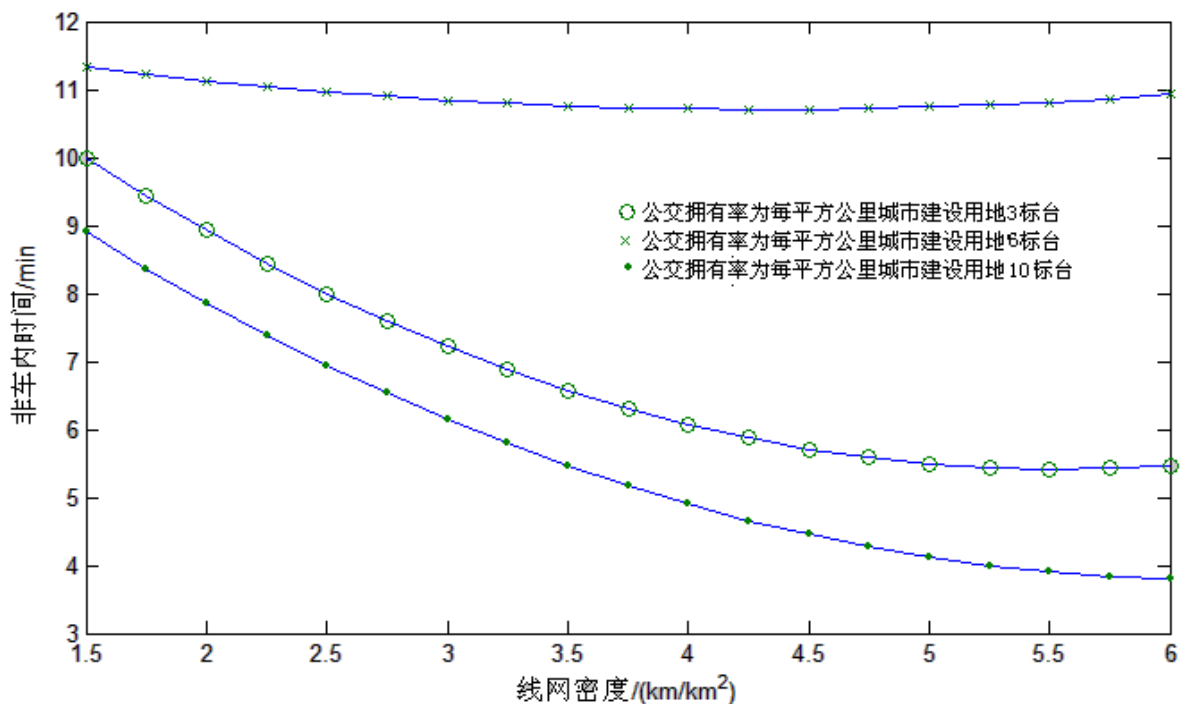
4.3.2 城市公交站距优化

公交网络线路运行效率时间取决于公交正常运行时间、交叉口延误、站点延误时间。在一定的道路与交通条件下，线路长度、公交运行速度、每条线路上停车站数量及停车时间是影响公交车运行速度的及其重要的因素。公交站点的延误时间则取决于设站数量、设站位置、并线数目、发车频率、乘客需求等。

欧洲许多国家的公交车按时刻表运行^[12]，乘客可以利用候车时间去做其他的事情，候车时间可按接近零的常数考虑。如图十四，图十五分别为公交不按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系和公交按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系。



图十四 公交不按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系



图十五 公交按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系

从图十四、图十五可以看出，公交线网密度越大，越有利于减少乘客非车内时间，而且公交车辆按时刻表运行时，其数量多少不再那么重要。随着公交线网密度的加大，在节省时间方面起到的作用变小^[20]。所以，4.0-6.0 km/km²的公交线网密度比较合理，相应的路网间距为300-500米。

4.3.2.1 效用分析

公共交通包括两个站点之间运行的车辆的各区段。它包括段容量即每个运输单元(车辆)的容量；相应的发车频率；乘客的出行时间即到达车站时间、等车时间、在车时间、离开车站到达目的地的时间。乘客在选择公交过程中，可以步行到一个停车站，在两个服务设施之间选择；亦可以骑自行车到达车站，而后换乘公交车。乘客采用何种方式选择公交，主要取决于乘客所需要的时间和费用。用一种广义的时间或费用方式来表示：

$$c_t = c_1 t_v + c_2 t_w + c_3 t_i + c_4 t_f + c_5 f + c_1 t_z + c_6 t_m \quad (48)$$

其中：

c_t ：广义的时间或费用；

t_v ：线路在车运行时间(min)；

t_w ：骑~(步)~行到站时间(min)；

t_i ：乘客车站等车时间(min)；

f ：线路出行的票价费用；

t_z : 乘客换车时阻碍时间, 一般取 2~5 分钟;

t_m : 从车站往目的地的步行时间(min);

$c_1 \sim c_6$ 是以上各因素相关的系数(一般取 $c_1 = 1.0; c_5 = 1.0; c_2 c_3 c_4 c_6 = 2 \sim 3$)

线路在车运行时间取决于公交正常运行时间、交叉口延误、站点延误时间。在一定的道路与交通条件下, 线路长度、公交运行速度、每条线路上停车站数量及停车时间是影响公交车运行速度的及其重要的因素。公交站点的延误时间则取决于设站数量、设站位置、并线数目、发车频率、乘客需求等。

骑行 (步行)时间由乘客到最佳停车点的可达性决定, 可以用整个小区的平均值确定。换乘时间则依赖于两条公交线路的设站结构和距离, 而等车时间则依赖于公交公司的服务频率和服务水平即可靠性。

一般来说, 在长度为 l 的线路上, 公交车辆的总行驶时间(t_t)由正常运行时间 (t_n), 交叉口的延误时间 (t_j) 及站点延误时间 (t_s), 即有:

$$t_t = t_m + t_j + t_s = \frac{l}{v} + \sum_{k=1}^{nj} di_k + \sum_{k=1}^{ns} (dp_k + dc_k) \quad (49)$$

其中:

l : 公交线路长度 (m);

v : 车辆正常运行车速 (m/min);

di_k : 车辆在交叉口的延误时间(min);

dp_k : 乘客上下车时间(min);

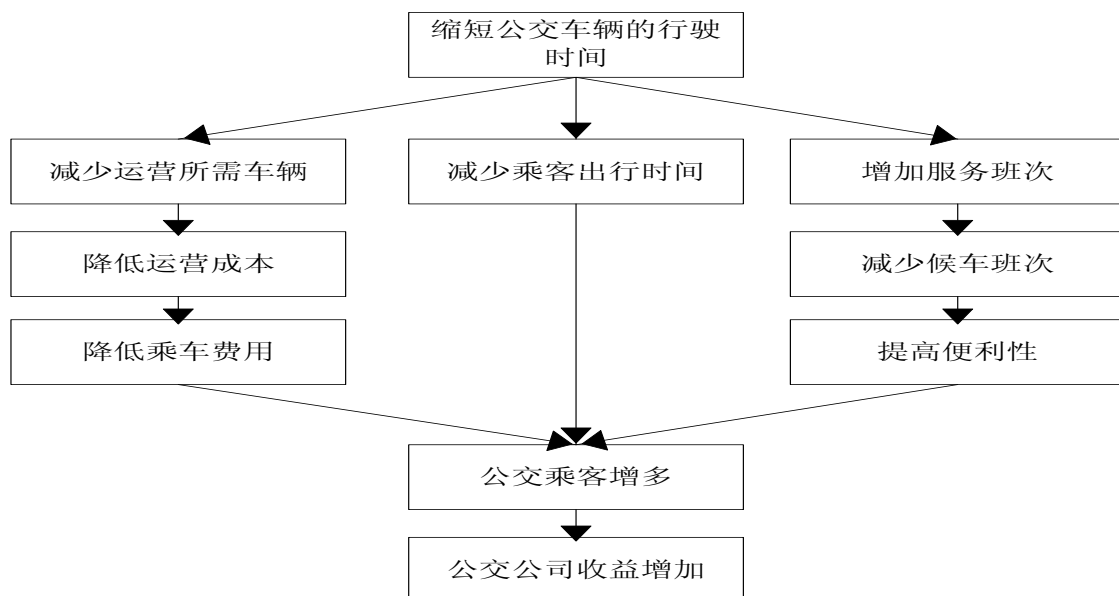
dc_k : 因站点拥挤而延误的时间(min);

nj : 沿线交叉口数目(个);

ns : 沿线站点数目(个);

由上式可见, 在一定的道路与交通条件下, 因公交车辆在沿线站点的停靠而造成的延误是影响公交营运车速极其重要的因素。

车辆总的行驶时间长短, 常为乘客选择交通工具的重要因素之一。当乘车费用相同时, 乘客一般必然选择时间较短的交通工具, 即使行驶时间相差无几, 乘客一般都乐于使用较为经济与舒适的交通工具。对营运者---公交公司而言, 如车辆行驶时间缩短, 则其所需配置的车辆数可以减少, 即为成本减少; 另一方面, 公交车辆行驶时间的缩短, 则以相同数量的车辆, 可发出较多的班次, 甚至提高营运车速, 吸引更多的乘客坐公交而增加营运收入, 提高公交网络运行效率。如图十六所示公交车辆行驶时间缩短后的连锁效益。



图十六 交车辆行驶时间缩短后的连锁效益

为减少车辆行驶时间，从而提高公交与自行车及其他私人交通的竞争力，吸引更多的市民乘坐公交，提高工交运行效率。最为经济且成效显著的方法为采用适当的站间距离及设站位置。

增大站间距离时，对营运者、乘客及社会所要产生的负面及正面影响分别如下：

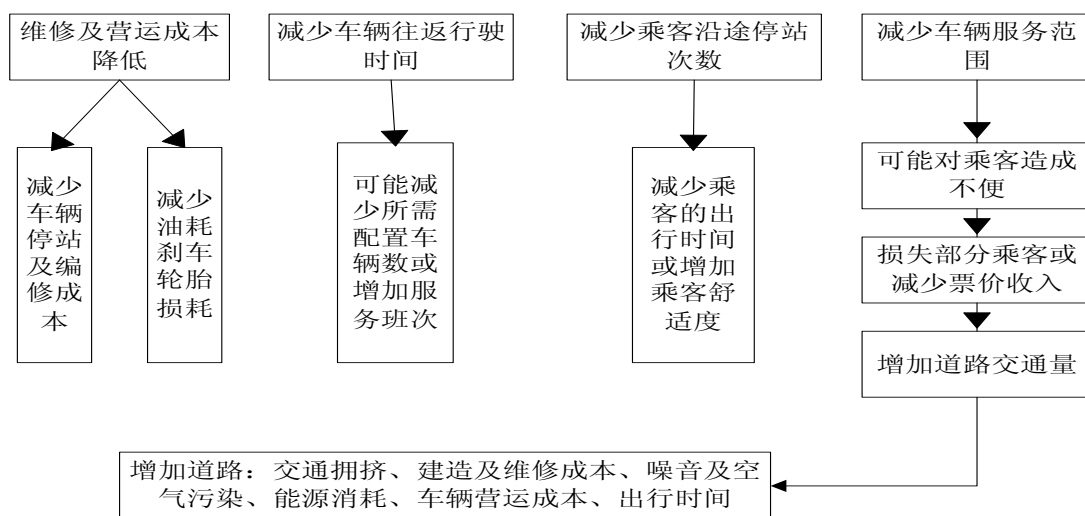
➤ 负面影响

降低公交线路服务的面积，可能会失去一些乘客及票价收入。可能会增加道路的交通流量，造成道路拥挤及环境污染等现象。

➤ 正面影响

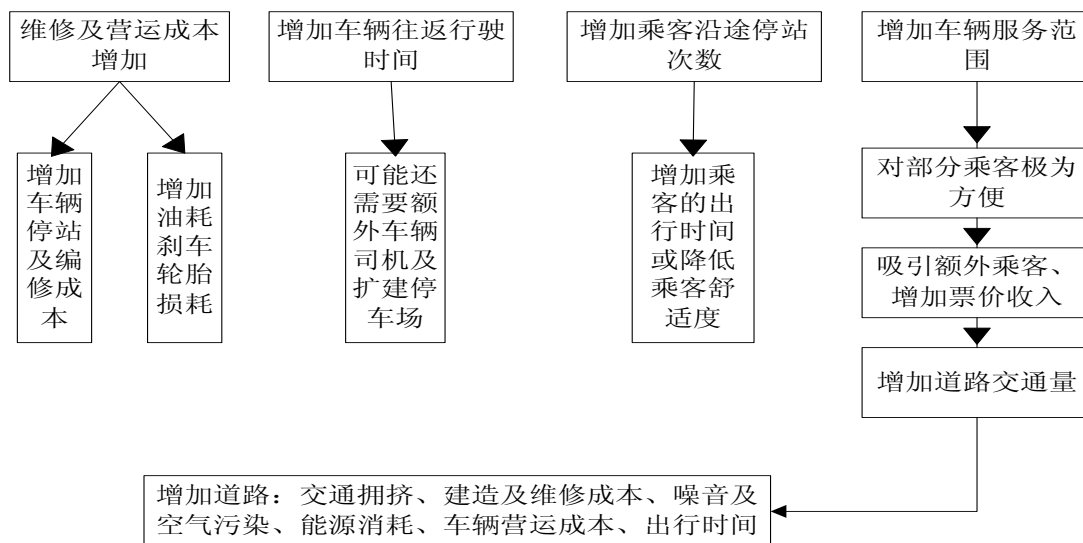
减少车辆停站机会，可减少乘客出行时间，提高乘客舒适乘客。降低车辆往返终点时间，可减少系统所需车辆或增加服务班次。减少车辆及车站的维修与营运成本。

如图十七所示：



图十七 增大站距所产生的影响分析

同理，减少站距所产生的影响，如图十八所示：



图十八 减少站距所产生的影响分析

由上述分析可见，如果所设计的站距过大，虽然能减少车辆的营运成本，但是乘客进入车站的距离也相应增加，使少数具有选择性的乘客改承其他公交工具，降低公交网络的效率。相反，如果站距过小，虽然乘客进入站点的距离减小，可吸引较多乘客，但是线路上设置的站点也相应增加，使部分乘客停站次数增多，增加他们的出行时间。因此，在设计站距时，必须规划目标，并对使用者成本与营运者成本作交互损益分析，提高公交网络运行效率，以作为选择站距大小的依据。

4.3.2.2 公交线路站距优化

在设计站距时，我们必须先制定规划目标，对乘客进入站点的距离与运营者成本作交互损益分析，以此作为选择站距的依据。

一般来说，规划站距的目标^{[17][18]}有以下四点：

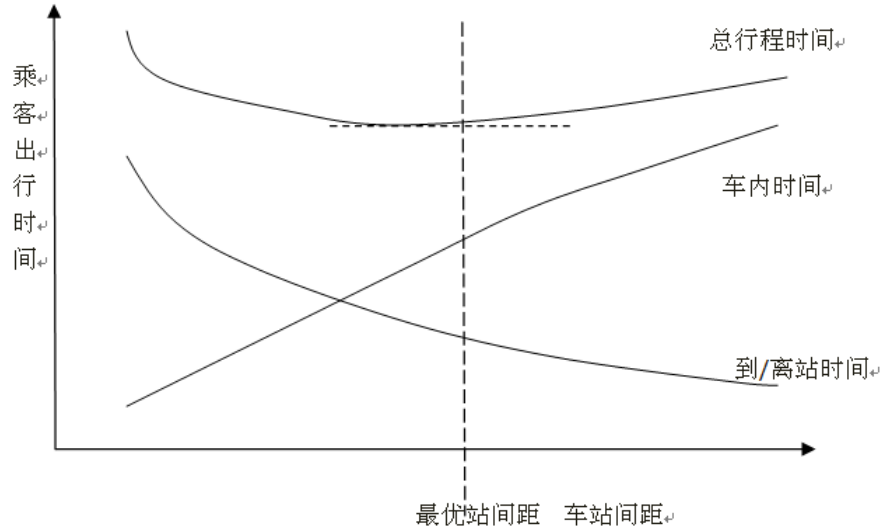
- (1) 以乘客的观点而言，希望所设计的站距，能够使乘客的总出行时间最小，此总出行时间包括乘客在车外的出行时间及乘客在车内的出行时间。
- (2) 以营运者的观点而言，希望所设计的站距，能够使站点的覆盖面积最大，即使站点的服务范围最大以吸引更多的乘客，提高公交网络运行效率。
- (3) 以乘客与营运者共同的观点而言，希望所设计的站距，能够使系统社会总成本(乘客总出行时间成本及营运者——公交公司的营运成本)最小，提高公交网络运行效率。
- (4) 配合其他方面的要求，如配合城市发展，土地使用及其地区的特征等。

由以上四个规划目标，我们可以建立数学规划模型求出最佳公交线路站距设计值，以便满足不同的规划目标要求。

4.3.2.2.1 乘客总出行时间最小站距模型

对于一条固定公交线路来说，设站距离的大小直接影响公交公司的服务水平和生产

管理水平。站距过大，减少了公交车的行驶时间，对公交公司来说则是有利的，但是降低了公交线路服务的范围，使乘客的步行距离增大，并给换乘带来不便；站距过小，增大了公交线路服务的范围，减少了乘客步行时间，但对公交公司来说则是增加了公交公司的运营成本。站距对乘客出行时间的影响如图十九所示：



图十九 乘客出行时间与站距的关系基本图示

公交线路的乘客总出行时间包括两部分，一部分为乘客车外总出行时间（ T_{out} ），包括乘客到站步行时间(T_1)、乘客候车时间(T_2)及乘客离站步行时间(T_3)；另一部分是乘客车内总出行时间(T_{in})，包括乘客车内总出行时间包括乘客车内乘车时间(T_4)及乘客因公交车辆停站而损失的时间(T_5)。

本文以方便乘客和节约乘客总出行时间为出发点，对以上部分进行讨论，以乘客总出行时间最小，即公交网络运行效率最优为目标建立数学模型。

4.3.2.2.1.1 目标函数

目标函数

$$\min T_A = \sum_P T$$

式中：

T_A ：线路上所有乘客的总出行时间(min)；

T ：一个乘客的总出行时间(min)；

P ：线路上所有乘客的集合；

考虑与站距有关的主要出行时间，有：

$$T = T_{out} + T_{in} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 \quad (50)$$

式中： T_1 ：乘客到站步行时间(min)；

T_2 : 乘客候车时间(min);

T_3 : 乘客离站步行时间(min);

T_4 : 乘客车内乘车时间(min);

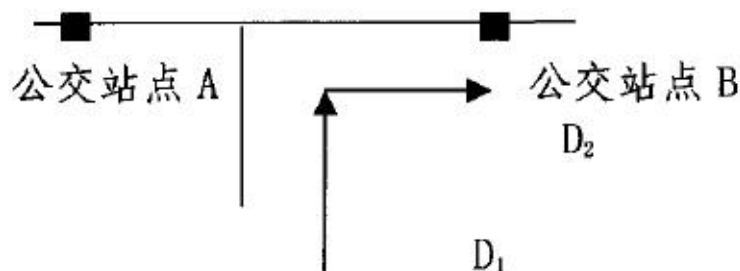
T_5 : 乘客因公交车辆停站而损失的时间(min);

4.3.2.2.1.2 乘客的出行时间

➤ 乘客车外总外出时间 T_{out}

(1) 乘客到站步行时间(T_1)

乘客由出发地步行到达公交站点的时间与周围道路线网密度、公交线路网密度和设站距离大小密切相关[17]。一般来说,乘客乘坐公交汽车要先由出发地步行到达公交线路,然后沿公交线路步行到达最近的公交站点候车,如图二十所示:



图二十 乘客到达公交站点示意图

对于一条固定公交线路,乘客步行到达公交线路的平均距离(D_1)与设站距离关系不大,可以假设为常数 w ,则乘客步行到达公交线路的时间为:

$$t_{11} = L \cdot P \cdot w / v_a \quad (51)$$

其中:

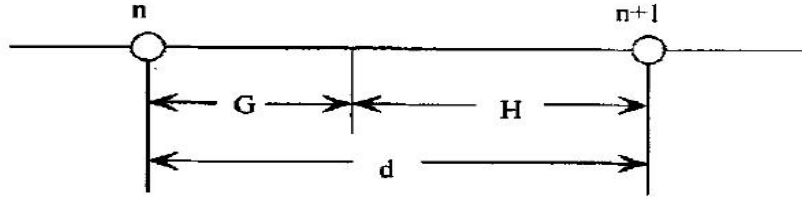
L :线路长度(m);

P :线路乘客需求(人/m);

w :乘客步行到达公交线路的平均距离(m);

v_a :乘客步行速度(m/min);

乘客沿公交线路到达最近公交站点的距离(D_2),则需要分析乘客选择站点的分界点的行为特征。如图二十一所示,乘客在考虑任一站点的分界点时,应以乘客步行到达 $n+1$ 站点的时间加上候车时间等于步行到达 n 站点加上车辆行驶到 $n+1$ 站点的时间与候车时间之和,有如下公式:



图二十一 公交站点的分界点

$$\begin{cases} \frac{H}{v_a} + T_w = \frac{G}{v_a} + T_R + T_w \\ G + H = d \end{cases} \quad (52)$$

式中， G 、 H ：站距 d 的两个组成部分，分别代表使用 n 和 $n+1$ 站点的乘客分界距离；

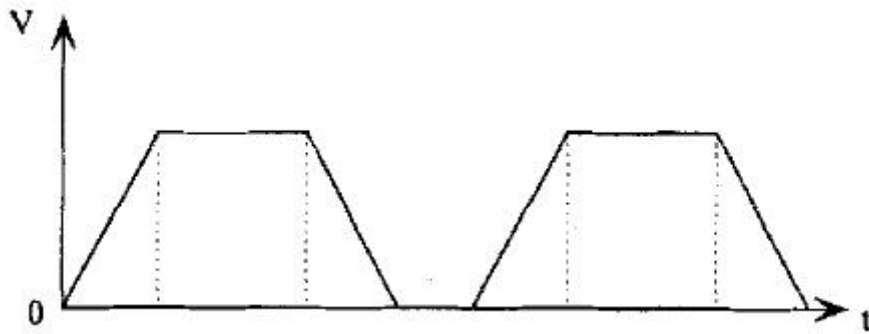
T_w ：在站点的平均候车时间；

T_R ：从 n 站运行到 $n+1$ 站的运行时间。

由上式可以导出：

$$\begin{cases} G = \frac{1}{2}(d - T_R \cdot v_a) \\ H = \frac{1}{2}(d + T_R \cdot v_a) \end{cases} \quad (53)$$

假设车辆在站间行驶车速为 v ，进站减速度为 b ，出站加速度为 a ，停站时间（乘客上下车平均时间）为 t_s ，则由车辆的速度时间曲线，从图二十二可以看出，车辆站间运行时间包括车辆站间以正常车速行驶的时间、车辆进站减速时间、车辆停站时间及车辆出站加速时间。



图二十二 公交车辆速度与时间关系曲线

则有：

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{d}{v} + t_1 \\ t_1 &= \frac{v}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + t_s \end{aligned} \quad (54)$$

其中 t_1 ：车辆停站损失时间(min)；

t_s :车辆停站时间(min);

若将公式(54)代入公式(53)中, 可得:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}(d - d \cdot \frac{v_a}{v} - v_a \cdot T_1) = a \cdot d - r \\ H &= \frac{1}{2}(d + d \cdot \frac{v_a}{v} + v_a \cdot T_1) = E \cdot d + r \end{aligned} \quad (55)$$

其中: $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{v_a}{v})$

$$E = \frac{1}{2}(1 + \frac{v_a}{v})$$

$$r = \frac{t_1 \cdot v_a}{2}$$

设 n 为公交线路站点数, 则所有乘客沿公交线路到达最近站点的时间为:

$$t_{12} = (G \cdot P \cdot \frac{G}{2v_a} + H \cdot P \cdot \frac{H}{2v_a}) \cdot n \quad (56)$$

则可得到乘客沿公交线路达到站点的时间:

$$T_1 = t_{11} + t_{12} = L \cdot P \cdot \frac{w}{v_a} + (G^2 + H^2) \cdot \frac{P \cdot n}{2v_a} \quad (57)$$

乘客离站步行到达目的地时间与乘客到站步行时间基本相同, 即 $T_3 = T_1$ 。

(2) 乘客候车时间(T_2)

每位乘客的候车时间长短不一, 但是它与公交线路的发车间隔密切相关, 在乘客随机到达站点的情况下, 其平均候车时间可以假定为发车间隔的一半, 因此, 对沿线所有乘客来说, 候车时间为:

$$T_2 = L \cdot P \cdot \frac{h_0}{2} \quad (58)$$

其中 h_0 :所规划公交线路平均发车间隔(min)

我们可得乘客车外总出行时间 (T_{out})

$$\begin{aligned} T_{out} &= T_1 + T_2 + T_3 \\ &= 2 \cdot L \cdot P \cdot \frac{w}{v_a} + (G^2 + H^2) \frac{P \cdot n}{v_a} + L \cdot p \cdot \frac{h_0}{2} \\ &= \frac{L \cdot P}{d \cdot v_a} (\frac{1 + y^2}{2} \cdot d^2 + 2y \cdot r \cdot d + 2r^2) + L \cdot p \cdot (\frac{2w}{v_a} + \frac{h_0}{2}) \end{aligned} \quad (59)$$

其中: $y = \frac{v_a}{v}, r = T_1 \cdot \frac{v_a}{2}$

➤ 乘客车内总出行时间 T_{in}

(1) 乘客车内乘车时间(T_4)

乘客车内乘车时间主要由乘客平均乘距及车辆行驶车速决定, 即

$$T_4 = L \cdot P \cdot \frac{L_a}{v} \quad (60)$$

其中 L_a 为乘客平均乘距(m)

(2) 乘客因公交车辆停站而损失的时间

$$T_5 = L \cdot P \cdot n \cdot T_1 = L \cdot P \cdot \frac{L_a}{d} \cdot T_1 \quad (61)$$

其中 n 为乘客经过的站点数。

因此乘客车内总出行时间 T_{in} 为:

$$T_{in} = T_4 + T_5 = L \cdot P \cdot \frac{L_a}{d} \left(\frac{d}{v} + T_1 \right) \quad (62)$$

由上得到乘客总出行时间 T 为:

$$\begin{aligned} T &= T_{out} + T_{in} \\ &= \frac{L \cdot P}{d \cdot v_a} \left(\frac{1+y^2}{2} \cdot d^2 + 2y \cdot r \cdot d + 2r^2 \right) + L \cdot P \cdot \left(\frac{2w}{v_a} + \frac{h_0}{2} \right) + L \cdot P \cdot \frac{L_a}{d} \left(\frac{d}{v} + T_1 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

为求得最佳站距 d_0 , 使得乘客总出行时间最小, 将上式对 d 求偏微分, 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial d} &= L \cdot P \cdot \left(\frac{1+y^2}{2v_a} - \frac{2r^2}{v_a \cdot d^2} \right) - \frac{L \cdot P \cdot L_a \cdot T_1}{d^2} = 0 \\ \Rightarrow d_0 &= 2 \sqrt{\frac{r(r+L_a)}{1+y^2}} \end{aligned} \quad (64)$$

其中 $y = v_a / v$, $r = t_1 \cdot v_a / 2$, $t_1 = \frac{v}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + t_s$

分析公式(64), 一般而言乘客步行速度 v_a 、公交车辆进出车站的加速度 a 和减速度 b 为常数, 则影响平均站距的因素为: 公交车路段平均运行速度 v 、公交车辆在站点的停靠时间 t_s 、线路上乘客的平均运距 L_a 。当 $v \uparrow, t_s \uparrow, L_a \uparrow \Rightarrow d \uparrow$

4.3.2.3 系统总成本最小站距模型

系统总成本可以分为乘客总出行时间成本和公交运营成本两个部分。利用非线性规划方法, 并以时间价值理论与系统总成本的观念, 建立站距对乘客总出行时间成本及营运者成本之间的关系模型, 使系统总成本最小化, 提高公交网络运行效率。

4.3.2.3.1 有关概念

◆ 车辆营运成本

车辆营运成本有两部分, 即经常性的经营管理费和设备折旧费。经常性的经营管理费是营运成本的主要部分, 可以划分为固定性支出的经营管理费和变动性支出的经营管

理费。前者不受车辆行驶里程的影响而决定于公交公司该线路规模和设备情况，后者决定于车辆行驶里程的多少，并与它成正比。折旧费指公交公司的各种设备和构筑物等在反复使用和运用过程中，不断处于损耗状态，定期地大修和翻新，使得公交公司得以正常运转的费用。

本文根据车辆行驶状态的不同，将每日车辆营运总成本划分为车辆以正常行驶时的营运成本及车辆在站点停站时的营运成本。之所以这样划分每日车辆营运总成本，是因为车辆以正常车速行驶和停站两种情况下，二者单位时间的油耗及轮胎的损耗不同，而且只有停站情况下，车辆营运成本才和站距关系密切。

◆ 乘客的时间价值

传统的运输经济学家在估计时间节省值时，分别视其所能节省的时间作何种用途而乘以不同的单位时间价值。乘客出行目的各不相同，一般有上下班、上学、购物、娱乐、公务、观光。按出行目的不同，若作为休闲活动时，则单位时价值较低。

本文利用时间价值理论，将乘客的总出行时间划分为乘客到站步行时间、乘客候车时间、乘客车内乘车时间，乘客上下车损失时间及乘客离站步行时间。其中，乘客到站步行时间又可分为乘客步行到该路时间及沿线路步行到站时间。乘客离站步行时间则与到站步行时间相似。

因此，上述时间分别乘以不同的单位时间价值，即可得到公交线路每日乘客出行时间成本。

4.3.2.3.2 建模及优化

➤ 每日车辆营运成本(C_{bus})

首先假设公交车辆在着站点停靠时，其营运成本为油耗的 $1+\alpha$ 倍，车辆以正常运行车速行驶时单位时间成本为 λ_{bus} ，则有：

$$C_{bus} = \sum_{t=1}^T \frac{L}{v_t} \cdot \lambda_{bus} \cdot f_t + (1+\alpha) \cdot \sum_{t=1}^T \frac{L}{d} \cdot F_p \cdot (C_{sv} + C_s \cdot T_{st}) \cdot f_t \quad (65)$$

其中

λ_{bus} : 车辆以正常车速行驶时单位时间成本(元/min);

C_{sv} : 每次停站加减速油耗值(1/次);

C_s : 停站单位时间油耗(1/min);

F_p : 燃油价格(元);

L : 线路长度;

T_{st} : t时段每站平均停车时间 (min);

f_t : t时段服务班次 (次);

α : 除燃油成本以为的其他成本系数，通常取 $\alpha=1$ 。

➤ 每日乘客总出行时间成本 (C_a)

(1) 每日乘客到站步行成本(C_1)

其包括乘客步行到达公交线路的时间成本和乘客沿公交线路步行到达最近的公交站点的时间成本, 即:

a. 乘客步行到达公交线路的时间成本 (C_{1a})

$$C_{1a} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \cdot w \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (66)$$

其中

λ_a :乘客步行时间价值(元/min);

v_a :乘客步行速度(m/min);

w :乘客平均到达公交线路的距离(m);

p_t^a :t 时段公交线路乘客需求运量(人/min);

p_t :t 时段持续时间(min).

b. 乘客沿公交线路步行到站时间成本(C_{1b})

计算方法与乘客步行到达公交线路的时间成本 C_{1a} 相似, 只是将乘客平均步行至站距离以 $\frac{d}{4}$ 取代 w , 其表达式如下:

$$C_{1b} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \cdot \left(\frac{d}{4}\right) \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (67)$$

其中 d 为平均站距(m)。

因此每日乘客到站步行时间成本为:

$$C_1 = C_{1a} + C_{1b} = \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \left(w + \frac{d}{4}\right) \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (68)$$

每日乘客离站步行时间成本与每日乘客到站步行时间成本基本相同, 即:

$$C_5 = C_1 \quad (69)$$

(2) 每日乘客候车时间成本 (C_2)

将乘客平均候车时间 βh_t 乘以乘客候车时间价值 λ_w 及公交线路乘客需求运量 p_t^a 与时段持续时间 p_t , 即可得到公交线路每日乘客候车时间成本 C_2 一项, 其表达式如下:

$$C_2 = \sum_{t=1}^T \lambda_w \cdot \beta h_t \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (70)$$

其中： λ_w ：乘客候车时间价值（元/min）；

β ：平均候车时间与发车间隔之比值；

h_t ：t 时段的发车间隔（min）

(3) 每日乘客车内乘车时间成本（ C_3 ）

若以乘客平均乘距 L_a 除以公交车辆行驶速度 v_t ，可得到平均乘客车内时间，再乘以公交乘客车内时间价值 λ_m 及公交乘客需求运量 p_t^a 及 t 时段持续时间，即得到每日乘客车内乘车时间成本，其表达式如下：

$$C_3 = \sum_{t=1}^T \lambda_m \left(\frac{L_a}{v_t} \right) \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (71)$$

其中： λ_m ：乘客车内时间价值（元/min）；

L_a ：乘客平均距离（m）；

(4) 每日乘客上下车损失时间成本（ C_4 ）

由于公交车辆要在沿线停站，导致乘客时间损失，该时间成本计算方法如下：将乘客平均乘距 L_a ，除以公交线路的站距 d ，并乘上公交线路各站平均停靠时间 T_{st} ，及公交乘客需求运量 p_t^a ，乘客车内时间价值 λ_m ，及 t 时段持续时间 p_t ，即得到每日乘客着站点上下车损失时间成本，以数学公式表示如下：

$$C_4 = \sum_{t=1}^T \lambda_m \left(\frac{L_a}{d} \right) \cdot T_{st} \cdot p_t^a \cdot p_t \quad (72)$$

其中：

λ_m ：乘客车内时间价值（元/min）；

T_{st} ：t 时段平均每站停靠时间（min）；

由上述分析可知，建立数学模型：

$$\min C = C_{bus} + C_a \quad (73)$$

其中： $C_a = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$ ，可得：

$$C = \sum_{t=1}^T \frac{L}{v_t} \cdot \lambda_{bus} \cdot f_t + (1 + \alpha) \cdot \sum_{t=1}^T \frac{L}{d} \cdot F_p \cdot (C_{sv} + C_s \cdot T_{st}) \cdot f_t + 2 \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \left(w + \frac{d}{4} \right) \cdot p_t^a \cdot p_t$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{t=1}^T \lambda_w \cdot \beta h_t \cdot p_t^a \cdot p_t + \sum_{t=1}^T \lambda_{in} \left(\frac{L_a}{v_t} \right) \cdot p_t^a \cdot p_t + \sum_{t=1}^T \lambda_{in} \left(\frac{L_a}{d} \right) \cdot T_{st} \cdot p_t^a \cdot p_t \\
 \text{令 } \frac{\partial C}{\partial d} = 0, \text{ 则 } d^2 = & \frac{(1+\alpha) \sum_{t=1}^T L \cdot F_p \cdot (C_{sv} + C_s \cdot T_{st}) \cdot f_t + \sum_{t=1}^T \lambda_{in} \cdot L_a \cdot T_{st} \cdot p_t^a \cdot p_t}{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \cdot p_t^a \cdot p_t} \\
 \Rightarrow d = & \sqrt{\frac{(1+\alpha) \sum_{t=1}^T L \cdot F_p \cdot (C_{sv} + C_s \cdot T_{st}) \cdot f_t + \sum_{t=1}^T \lambda_{in} \cdot L_a \cdot T_{st} \cdot p_t^a \cdot p_t}{\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\lambda_a}{v_a} \cdot p_t^a \cdot p_t}} \quad (74)
 \end{aligned}$$

4.3.2.3.3 公交站距优化的模型改进

乘客的特性也是影响公交线路每日社会总成本的一个极其重要的因素，因此，必须加以考虑。乘客若等车时间过长，或者站距过大，则会选择其它公交线路或者出行方式，从而影响本线路的客运量，使得公交线路营运收益下降。

➤ 公交线路乘客等车时间限制条件

从乘客特性来看，若乘客在站点等车时间过长，往往使人产生不耐烦，因此，为提高满意程度和公交服务水平，有必要使乘客车外等车时间占乘客总出行时间的比例 δ 保持在一个固定的百分比之下，此百分比在此称为等车时间容忍限制因素子，其表达式如下：

$$\begin{aligned}
 \beta h_t \leq & \delta \left(\frac{2r+d/2}{v_a} + \frac{L_a}{v_t} + \beta h_t + \frac{L_a}{d} \cdot T_{st} \right) \\
 \text{即： } \beta(1-\delta)h_t \leq & \delta \left(\frac{2r+d/2}{v_a} + \frac{L_a}{v_t} + \frac{L_a}{d} \cdot T_{st} \right) \quad (75)
 \end{aligned}$$

其中

βh_t ：平均乘客候车时间（min）；

$\frac{2r+d/2}{v_a}$ ：平均乘客步行时间（min）；

$\frac{L_a}{v_t}$ ：平均乘客车内乘车时间（min）；

$\frac{L_a}{d} \cdot T_{st}$ ：乘客站点上下车总损失时间（min）；

δ ：乘客候车时间容忍因子。

➤ 乘客步行最大容忍距离限制条件

乘客沿行公交线路步行到站距离有其所能容忍的最大距离，否则乘客将会改其它出行方式，其表达式如下：

$$\frac{d}{4} \leq L_1 \quad (76)$$

其中：

d ：平均站距（m）；

L_1 ：乘客容忍的最大步行距离（m）。

➤ 公交线路站距 d 最小设计限制条件

以公交乘客的立场而言，当然希望公交线路的平均站距愈小愈好，以缩短其步行距离，相比之下，以营运者一公交公司的立场而言，则希望在允许的范围内，尽量降低成本，并提高营运效率，以数学公式表示如下：

$$d \geq L_2 \quad (77)$$

其中 L_2 为最小设计站距（m）。

因此，在上述限制条件下，为使每日社会总成本最小，可以建立如下非线性数学规划模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & C = C_{bus} + C_a \\ \text{s.t.} \quad & \beta(1-\delta)h_i \leq \delta \left(\frac{2r+d/2}{v_a} + \frac{L_a}{v_t} + \frac{L_a}{d} \cdot T_{st} \right) \\ & \frac{d}{4} \leq L_1 \\ & d \geq L_2 \end{aligned}$$

利用非线性数学规划方法，可得公交线路最佳站距设计值 d_0 ，使得每日社会总成本最小，最终提高公交网络运行效率。

五、模型的检验

我们查询得到杭州市公交线路网络运行的一组网络指标初始评价数据如下：

$u[6][7][5]=\{\{4.9,4.1,4.2,4.4,4.8\},\{3.7,3.8,3.9,4.0,3.9\},\{4.1,4.3,3.9,3.7,3.8\},\{3.1,3.3,3.5,3.7,3.4\}\}$
 $\{\{3.6,4.2,4.4,4.4,3.8\},\{4.8,5.4,7.4,3.4,6\},\{3.3,3.3,3.3,3.5\},\{3.8,3.6,3.6,3.8,3.5\},\{5.4,8.5,5.4,8\}\}$
 $\{\{3.3,2.3,2.3,1.2,9\},\{3.3,3.2,8,2.7,3.1\},\{2.3,2.9,2.5,2.8,2.4\},\{3.1,2.8,3.4,2.7,2.6\},\{2.6,2.3,2.2,2.7,2.9\},\{3.1,3.5,3.1,2.9,2.8\}\},\{4.1,4.2,3.8,3.6,4\},\{2.9,2.6,2.5,2.9,2.5\},\{3.2,2.8,2.7,3,2.9\},\{2.6,2.5,2.9,2.6,2.4\}\},\{3.1,3.2,2.8,2.7,3.1\},\{2.6,2.5,2.5,2.3,2.3\},\{2.5,2.4,2.3,2.6,2.7\},\{5.4,8.4,6,4.8,4.6\}\},\{3.2,2.8,2.9,3,2.9\},\{2.7,2.5,2.4,2.5,2.6\},\{3.2,3.1,2.9,3.1,3\},\{2.3,2.5,2.3,2.4,2.6\},\{3.5,3,3,2,3,1,3\},\{2.6,2.3,2.4,2.3,2.6\},\{2.8,2.9,2.3,2.6,2.5\}\}$

通过公式 (5)~(11) 在 VC++6.0 中编程（程序见附录 A）求解得到 $Z=3.45$ ；然后我们随机删除或增加一组评价，从结果的变化幅度来检验模型的稳定性。

在检验中，为方便，我们选取 u_{14} 指标作为删除的对象，得到结果 $Z'=3.36$ ；经过比较，得到误差为 3%；另外，我们增加指标 $u_{15}=\{4,4,4,4,4\}$ ，得到结果 $Z''=3.73$

经过比较，得到误差为 8%。具体如表七所示(其他数据见附录 B)：

表七 评价指标的权重

评价指标	权重向量
u_1	$A_1=[0.1356 \quad 0.2188 \quad 0.2068 \quad 0.1888 \quad 0.2500]$
u_2	$A_2=[0.1746 \quad 0.1883 \quad 0.1951 \quad 0.2180 \quad 0.2239]$
u_3	$A_3=[0.1827 \quad 0.1684 \quad 0.1658 \quad 0.1567 \quad 0.1619 \quad 0.1645]$
u_4	$A_4=[0.2361 \quad 0.2506 \quad 0.2556 \quad 0.2578]$
u_5	$A_5=[0.2265 \quad 0.2672 \quad 0.2554 \quad 0.2509]$
u_6	$A_6=[0.1439 \quad 0.1495 \quad 0.1495 \quad 0.1471 \quad 0.1355 \quad 0.1439 \quad 0.1307]$
u	$A=[0.1764 \quad 0.1579 \quad 0.1801 \quad 0.1648 \quad 0.1408 \quad 0.1800]$

综上所述，在 C 程序中经过多次检验，本模型的误差不超过 10%，具有比较好的稳定性，即模型对数据具有良好的健壮性。

六、模型的改进

6.1 根据城市状况设立站点问题的改进

- ✎ 每条道路允许的最大车速 v_m 都不是一个常数，而在本模型中 v_m 处理成一个常数。可以通过设立权值，加以改进。
- ✎ 一天之中，道路的流量是时间的函数，若要精确求解，要建立偏微分方程模型。因为时间紧迫，没有深入研究。

6.2 给定站点和公交线路的状况的车次问题的改进

➤ 关于采集运营数据的讨论

由于我们假设乘客到站服从均匀分布，而实际中乘客到站时间不可能都服从均匀分布。特别是在高峰期的情况下，乘客到站时间的不均匀分布就会使模型结论误差较大。因此我们可以采用不等的统计人数的间隔时间：即在高峰期的情况下，为削弱乘客到站时间的不均匀分布带来的影响，可适当减小统计的间隔时间但统计时间加密应有一定限度。对客流量很小的时段，我们可适当增大统计的间隔时间，不必要每小时都统计一次。

➤ 对调度方案的进一步讨论

我们依据假设：各时段内乘客到站时间服从均匀分布，从而认为各时段内的发车时间间隔相等。我们在模型的改进中，可考虑对不等的发车时间间隔进行模拟，并与等间距的结果进行比较。

6.3 公交站点的选择改进

在建立离散与连续模型之后，讨论其他模型时，具体求解的时候会有点麻烦，可以考虑用数值方法求解，由于时间关系，没有做进一步的讨论。

七、 模型的评价及推广

7.1 模型的评价

模型的优点：我们选取了影响公交网络线路性能效率的六个准则层指标：线路网络性能，经济效益，环境影响，客运能力，服务状况，乘客满意度及六个准则层所对应的30个具体评价指标，运用多层次的灰色、模糊的数学模型建立了评价公交网络线路效率的数学模型，从易获得性和可靠性两个方面对数据进行选择，最后运行杭州公交的实际数据对模型的敏感度与稳定性进行了检验，检验结果表明模型对数据具有良好的健壮性。

在大中城市公交网络错综复杂基本不能改变线路时，我们讨论了通过站点选择和站距优化这两个方面建立了不同的模型，通过离散和连续的模型进行了公交站点的选择。公交站距优化通过建立乘客总出行时间最小站距模型和系统总成本最小站距模型并对这些模型作了深入的探讨。根据公交线路站距设计目标要求及有关调查数据，我们可选用合适的站距优化模型。但我们乃从理论上建立线路最佳站距模型，这些理论推算尚有待实践的进一步论证。在进行公交线路站点布设时，站距还要受道路系统、交叉口间距、，而实际客流分布的影响。因此，整条线路上的站距是不等的。一般来讲，市中心区，客流密集，乘客上下频繁，站距宜小些；市边缘地区，站距可大些；郊区，站距可更大些。

模型的缺点：对新城市公交线路网络的设计方案时，我们把每条道路允许的最大车速 V_m 处理成一个常数了。而实际情况中每条道路上下班的高峰期等时间段速度也是不一样的，故在实际实施方案时，需要对部分参数进行微小的调整。

7.2 模型的推广

本模型研究的城市公交线路网络效率的综合评价，采用了多层次灰色理论及模糊数学的知识，可推广到其他有多个因数的评价模型系统中，如城市综合竞争实力的排名等。

修改公交网络时，我们所采用的公交站点设置模型还有很多其他的用途，比如人行过街天桥或人行过街地道的选址，住宅小区内服务点的设置，公共厕所位置的选择等等。

八、 将来模型的研究方向

公交线路站距是城市公交站点布局的重要组成部分。进一步研究的方向是以流体理论中单井渗流理论为基础，假设公交站点位置为单井，人流为水流渗流，公交车为导流设备，当人群集流到一定量，既用公交车运送出去，这种方法可以大大简化计算程序，提高设计效率。

参考文献:

- [1] 胡启洲, 邓卫, 张卫华. 城市公交线网的灰色评价及其应用, 交通运输系统工程与信息, 2006 Vol. 6 No. 02
- [2] 王伟, 杨新苗, 陈学武等. 城市公共交通系统规划方法与管理技术, 北京: 科学出版社, 2002
- [3] 过秀成, 吕憬, 谢实海. 城市轨道线网规划评价决策研究, 城市轨道交通研究, 2000, 3(4), 24-27
- [4] 王海涌, 刘丽艳, 郑丽英. 模糊综合评价法在城市公交线网评价中应用, 兰州交通大学学报(自然科学版), 2004 Vol. 23 No. 3
- [5] 佚名, 城市常规公共交通发展水平综合评价指标体系研究
<http://www.jianshe99.com/html/2007/12/li07456451422170021625.html> 2008. 4. 13
- [6] 邹志云, 李硕. 公交综合发展水平评价的灰色聚类分析方法, 武汉交通科技大学学报, 2000 Vol. 24 No. 1
- [7] 李煜华, 孙凯, 孙彩. 基于灰色聚类方法的城市公交发展水平综合评价, 哈尔滨理工大学学报, 2004, Vol. 9 No. 6
- [8] 韩传峰. 城市公交路网性能的综合计算评估, 哈尔滨工业大学学报, 2005 Vol. 37 No. 6
- [9] 南振岐, 滕彦芳, 武尚磊, 董清. 基于交通效率的城市公共交通路网研究, 兰州大学学报(自然科学版), 2006 Vol. 42 No. 5
- [10] 王运静, 李强. 北京市地面公共交通线路网现状评价, 交通运输系统工程与信息, 2007 Vol. 7 No. 5
- [11] 于景飞. 城市公共交通可持续发展评价体系及方法, Technology & Economy in Areas of Communications, 2007年第1期(总第39期)
- [12] 蔡军. 居民出行效率与合理路网间距的确定, 城市交通, 2005, Vol. 3 No. 3
- [13] 杨忠誓. 公路网络路线布局优化的双层规划模型及算法研究. 北方交通, 2007
- [14] Urban Travel Demand Modeling: From Individual Choices to General Equilibrium; Norbert Oppenheim, John Wiley & Sons; 1995
- [15] 人行过街天桥(地道)选址模型的研究; 陈尚和, 任福田, 肖秋生; 中国公路学报, 1995
- [16] 城市公共汽车停靠点选址模型; 谭满春, 徐建闽, 毛宗源; 公路交通科技, 1999
- [17] 胡刚, 城市公共交通网络及站点优化技术研究[D], 博士论文, 东南大学, 2003。
- [18] Luo Yong, Huang Haibo, Guo Xiuchun. The Study of Bus Stop Spacing Optimizing Model Based on the Minimum System Total Cost. Journal of Sichuan University of Science and Technology, 2003.
- [19] 冯小辉, 张威, 梅伟. 公交线路选择的优化设计, 四川文理学院学报(自然科学), 2008年3月, Vol. 18 No. 2
- [20] 姜延辉, 唐祯敏. 基于小世界网络的北京市未来公交线网规划方法, 铁路计算机应用, Vol. 16 No. 12

附录:

附录 A: 模型综合评价及稳定性的检验

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <math.h>
#include <time.h>
#define l 10
using namespace std;
double
u[6][7][5]={ { {4.9,4.1,4.2,4,4.8},{3.7,3.8,3.9,4.0,3.9},{4.1,4,3.9,3.7,3.8},{3.1,3.3,3.5,3.7,3.4}
,{4,4,4,4,4} },
{ {3.6,4.2,4.4,4,3.8},{4.8,5,4.7,4.3,4.6},{3,3,3.3,3,3.5},{3.8,3.6,3.6,3.8,3.5},{5,4.8,5,
5,4.8} },
{ {3,3.2,3.2,3.1,2.9},{3.3,3,2.8,2.7,3.1},{2.3,2.9,2.5,2.8,2.4},{3.1,2.8,3.4,2.7,2.6},{2.
6,2.3,2.2,2.7,2.9},{3.1,3.5,3.1,2.9,2.8} },
{ {4.1,4.2,3.8,3.6,4},{2.9,2.6,2.5,2.9,2.5},{3.2,2.8,2.7,3,2.9},{2.6,2.5,2.9,2.6,2.4} },
{ {3.1,3.2,2.8,2.7,3.1},{2.6,2.5,2.5,2.3,2.3},{2.5,2.4,2.3,2.6,2.7},{5,4.8,4.6,4.8,4.6} },
{ {3.2,2.8,2.9,3,2.9},{2.7,2.5,2.4,2.5,2.6},{3.2,3.1,2.9,3.1,3},{2.3,2.5,2.3,2.4,2.6},{3.
5,3,3.2,3.1,3},{2.6,2.3,2.4,2.3,2.6},{2.8,2.9,2.3,2.6,2.5} } };
double stdc1(int i,int j)
{
    int k;
    double mean=0,ans;
    for(k=0;k<5;k++)
        mean+=u[i][j][k];
    mean/=5.0;
    ans=0;
    for(k=0;k<5;k++)
        ans+=(u[i][j][k]-mean)*(u[i][j][k]-mean);
    ans/=5.0;
    return sqrt(ans);
}
double stdc2(int i,int n)
{
    int k,j;
    double mean=0,ans;
    for(k=0;k<5;k++)
        for(j=0;j<n;j++)
            mean+=u[i][j][k];
    mean/=5.0*n;
    ans=0;
    for(k=0;k<5;k++)
        for(j=0;j<n;j++)
            ans+=(u[i][j][k]-mean)*(u[i][j][k]-mean);
```

```

    ans/=5.0*n;
    ans=sqrt(ans);
    return ans;
}
double fun1(double x)
{
    if(x>=0&&x<=4)
        return x/4;
    else return 1;
}
double fun2(double x)
{
    if(x>=0&&x<=4)
        return x/4.0;
    else if(x>4&&x<=8)
        return -x/4.0+2.0;
    return 0;
}
double fun3(double x)
{
    if(x>=0&&x<=3)
        return x/3.0;
    else if(x>3&&x<=6)
        return -x/3.0+2;
    return 0;
}
double fun4(double x)
{
    if(x>=0&&x<=2)
        return x/2.0;
    else if(x>2&&x<=4)
        return -x/2.0+2;
    return 0;
}
double fun5(double x)
{
    if(x>=0&&x<=1)
        return 1;
    else if(x>1&&x<=2)
        return -x/2.0+2;
    return 0;
}
int main()
{

```

```

int i,j,g,k;
double w[6][7],ww[6];
double s[6][7],ss[6],sss[6],ssss,d[6][7][1],x[6][7],xx[6][7][5],r[6][7][5];
FILE *fout;
fout = fopen("crypt1.out", "w");
int n[6]={ 5,5,6,4,4,7};
for(i=0;i<6;i++)
    for(j=0;j<n[i];j++)
        s[i][j]=stdc1(i,j);
memset(ss,0,sizeof(ss));
for(i=0;i<6;i++)
    for(j=0;j<n[i];j++)
        ss[i]+=s[i][j];
for(i=0;i<6;i++)
    for(j=0;j<n[i];j++)
        w[i][j]=(ss[i]-s[i][j])/((n[i]-1)*ss[i]);
ssss=0;
for(i=0;i<6;i++){
    sss[i]=stdc2(i,n[i]);
    ssss+=sss[i];
}
for(i=0;i<6;i++)
    ww[i]=(ssss-sss[i])/(5*ssss);
for(i=0;i<6;i++){
    fprintf(fout,"A%d = {",i+1);
    for(j=0;j<n[i];j++)
        fprintf(fout,"% .4lf  ",w[i][j] );
    fprintf(fout," }\n");
}
fprintf(fout,"A = {");
for(i=0;i<6;i++)
    fprintf(fout,"% .4lf  ",ww[i]);
fprintf(fout," }\n");
memset(x,0,sizeof(x));
memset(xx,0,sizeof(xx));
srand((unsigned)time( NULL ));
for(i=0;i<6;i++)
    for(j=0;j<7;j++)
        for(k=0;k<1;k++){
            d[i][j][k]=(10+(int)(50.0*rand()/(RAND_MAX+10.0)))%50/10.0;
//            printf("%.2lf ",d[i][j][k]);
//            d[i][j][k]=5;

```



```

    }
    for(i=0;i<6;i++)
        for(j=0;j<7;j++){
            for(g=0;g<1;g++)
                xx[i][j][0]+=fun1(d[i][j][g]);
            for(g=0;g<1;g++)
                xx[i][j][1]+=fun2(d[i][j][g]);
            for(g=0;g<1;g++)
                xx[i][j][2]+=fun3(d[i][j][g]);
            for(g=0;g<1;g++)
                xx[i][j][3]+=fun4(d[i][j][g]);
            for(g=0;g<1;g++)
                xx[i][j][4]+=fun5(d[i][j][g]);
        }

    for(i=0;i<6;i++)
        for(j=0;j<7;j++){
            for(k=0;k<5;k++)
                x[i][j]+=xx[i][j][k];
            fprintf(fout,"x%d%d=%lf.2\n",i,j,x[i][j]/2);
        }
    for(i=0;i<6;i++)
        for(j=0;j<7;j++){
            fprintf(fout,"r%d%d=[",i,j);
            for(k=0;k<5;k++){
                r[i][j][k]=xx[i][j][k]/x[i][j];
                fprintf(fout," %.2lf",r[i][j][k]);
            }
            fprintf(fout,"]\n");
        }
    double b[6][5];
    memset(b,0,sizeof(b));
    for(i=0;i<6;i++)
        for(j=0;j<5;j++)
            for(k=0;k<n[i];k++)
                b[i][j]+=s[i][k]*r[i][k][j];
    double bb[5];
    memset(bb,0,sizeof(bb));
    for(i=0;i<5;i++)
        for(j=0;j<6;j++)
            bb[i]+=ss[j]*b[j][i];
    for(i=0;i<5;i++)
        printf("%.2lf ",bb[i]);
    double z=0;

```

```

double c[5]={4.5,3.5,2.5,1.5,0.5};
for(i=0;i<5;i++){
    while(bb[i]>1)
        bb[i]-=1;
    z+=bb[i]*c[i];
}
fprintf(fout,"Z = %.2lf\n",z);

return 0;
}

```

附录 B 灰色评价系数及灰色评价权向量

评价指标		灰色评价系数			灰色评价权向量
u_1	u_{10}	x_{10}	14.116667.2	r_{10}	[0.25 0.25 0.25 0.13 0.13]
	u_{11}	x_{11}	14.700000.2	r_{11}	[0.23 0.23 0.27 0.20 0.08]
	u_{12}	x_{12}	13.425000.2	r_{12}	[0.32 0.30 0.27 0.11 0.00]
	u_{13}	x_{13}	12.741667.2	r_{13}	[0.20 0.18 0.19 0.20 0.23]
	u_{14}	x_{14}	12.450000.2	r_{14}	[0.15 0.15 0.17 0.20 0.34]
	u_{15}	x_{15}	12.341667.2	r_{15}	[0.17 0.17 0.22 0.19 0.25]
	u_{16}	x_{16}	12.341667.2	r_{16}	[0.22 0.21 0.21 0.17 0.19]
u_2	u_{20}	x_{20}	13.604167.2	r_{20}	[0.25 0.24 0.22 0.13 0.16]
	u_{21}	x_{21}	13.716667.2	r_{21}	[0.28 0.27 0.25 0.12 0.08]
	u_{22}	x_{22}	12.820833.2	r_{22}	[0.24 0.23 0.21 0.15 0.17]
	u_{23}	x_{23}	14.433333.2	r_{23}	[0.20 0.20 0.22 0.17 0.21]
	u_{24}	x_{24}	11.779167.2	r_{24}	[0.30 0.27 0.21 0.08 0.14]
	u_{25}	x_{25}	13.691667.2	r_{25}	[0.21 0.20 0.20 0.18 0.20]
	u_{26}	x_{26}	11.808333.2	r_{26}	[0.17 0.17 0.21 0.17 0.28]
u_3	u_{30}	x_{30}	13.391667.2	r_{30}	[0.18 0.18 0.21 0.22 0.22]
	u_{31}	x_{31}	13.454167.2	r_{31}	[0.29 0.27 0.23 0.11 0.10]
	u_{32}	x_{32}	14.225000.2	r_{32}	[0.18 0.18 0.21 0.21 0.22]
	u_{33}	x_{33}	14.229167.2	r_{33}	[0.20 0.20 0.23 0.19 0.17]
	u_{34}	x_{34}	13.200000.2	r_{34}	[0.23 0.22 0.23 0.19 0.13]
	u_{35}	x_{35}	11.895833.2	r_{35}	[0.30 0.28 0.20 0.08 0.13]
	u_{36}	x_{36}	12.150000.2	r_{36}	[0.16 0.15 0.17 0.19 0.33]
u_4	u_{40}	x_{40}	11.508333.2	r_{40}	[0.24 0.24 0.22 0.12 0.19]
	u_{41}	x_{41}	10.512500.2	r_{41}	[0.22 0.19 0.16 0.13 0.30]
	u_{42}	x_{42}	10.958333.2	r_{42}	[0.25 0.23 0.20 0.13 0.18]
	u_{43}	x_{43}	12.616667.2	r_{43}	[0.27 0.25 0.22 0.13 0.13]
	u_{44}	x_{44}	12.158333.2	r_{44}	[0.28 0.27 0.22 0.10 0.12]
	u_{45}	x_{45}	13.220833.2	r_{45}	[0.20 0.19 0.21 0.18 0.22]
	u_{46}	x_{46}	13.350000.2	r_{46}	[0.22 0.21 0.20 0.16 0.20]
u_5	u_{50}	x_{50}	10.241667.2	r_{50}	[0.22 0.21 0.19 0.13 0.24]
	u_{51}	x_{51}	11.708333.2	r_{51}	[0.21 0.20 0.20 0.17 0.22]
	u_{52}	x_{52}	14.141667.2	r_{52}	[0.23 0.23 0.24 0.14 0.16]
	u_{53}	x_{53}	12.741667.2	r_{53}	[0.20 0.20 0.23 0.17 0.20]
	u_{54}	x_{54}	13.991667.2	r_{54}	[0.25 0.24 0.24 0.17 0.09]
	u_{55}	x_{55}	13.179167.2	r_{55}	[0.23 0.22 0.22 0.16 0.16]
	u_{56}	x_{56}	12.675000.2	r_{56}	[0.23 0.22 0.22 0.14 0.18]

u_6	u_{60}	x_{60}	13.083333.2	r_{60}	[0.15 0.15 0.18 0.21 0.31]
	u_{61}	x_{61}	12.870833.2	r_{61}	[0.24 0.21 0.21 0.17 0.17]
	u_{62}	x_{62}	13.608333.2	r_{62}	[0.22 0.21 0.20 0.15 0.22]
	u_{63}	x_{63}	13.141667.2	r_{63}	[0.28 0.26 0.26 0.16 0.04]
	u_{64}	x_{64}	11.854167.2	r_{64}	[0.19 0.18 0.19 0.17 0.28]
	u_{65}	x_{65}	12.679167.2	r_{65}	[0.32 0.31 0.25 0.08 0.04]
	u_{66}	x_{66}	12.658333.2	r_{66}	[0.30 0.28 0.24 0.10 0.08]

附录 C 在文中用到的表清单

- 表一 模型中用到的符号及含义
- 表二 城市公交网络的评价指标体系
- 表三 评价等级标准
- 表四 白化权函数表
- 表五 CIRT 四区两两间的距离
- 表六 单位时间内从某一地点到另一的点的人数
- 表七 评价指标的权重

附录 D 在文中用到的图清单

- 图一 任意两个站点
- 图二 站点示意图
- 图三 直线行车路线
- 图四 转弯行车路线
- 图五 直线行车路线离散区域
- 图六 $V(\alpha)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 取到最小值的图像
- 图七 $V(\alpha)$ 仅在 x_k 点取到最小值的图像
- 图八 直线行车路线连续区域
- 图九 直线行车路线连续区域
- 图十 转弯行车路线离散区域
- 图十一 转弯行车路线连续区域
- 图十二 一维出行人区域图
- 图十三 区域内建设车站
- 图十四 公交不按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系
- 图十五 公交按时刻表运行时非车时间与线网密度的关系
- 图十六 交车辆行驶时间缩短后的连锁效益
- 图十七 增大站距所产生的影响分析
- 图十八 减少站距所产生的影响分析
- 图十九 乘客出行时间与站距的关系基本图示
- 图二十 乘客到达公交站点示意图
- 图二十一 公交站点的分界点
- 图二十二 公交车辆速度与时间关系曲线