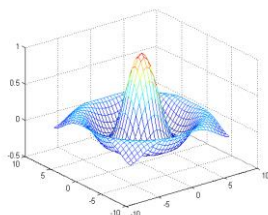


2016 年第十三届五一数学建模联赛



题 目

购房中的数学问题

摘 要

针对于问题一, 通过观察14#的分布发现, 7#和8#会影响14-8-802客厅的采光, 利用公式 $\sin \theta = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega$ 计算出冬至日不同时刻的太阳高度角[1], 通过公式 $H_1 = H - L * \tan(\theta)$ 和 $H_2 = \frac{H_1}{h}$ 计算出14#被前面的楼遮挡的高度, 并以此作为依据得到A小区14-2-802房间(客厅)在冬至日9:00-16:00间可以享受日照的时间区间为[9:00, 10:28]; [12:31, 14:19]; [15:51, 16:00]。

针对于问题二, 根据公式(4.4)计算得出计算二十四个节气的太阳赤纬角, 以此得到每个节气14-2-802客厅采光的时间长度, 并用二十四个节气的太阳赤纬角近似这个节气中每一天的太阳赤纬角, 进而计算出全年日照总时间为2015.175个小时; 分析每个节气的采光时间, 找出采光时间为6个小时的日期区间, 根据模型一反推出太阳赤纬角的正弦值(0.5843), 再计算出太阳赤纬角的正弦值(0.5873)相比较, 得到惊蛰后的第11天采光时间为6小时, 即3月17日, 同理可计算出寒露和秋分之间的采光时间为6小时的日期为10月12日, 由此可得14-2-802客厅全年享受日照时间超过6小时的天数为209天。

针对于问题三: 在仅考虑采光问题时, 我们从房间的日照时间和房间的类型等因素对每栋楼和每个单元进行综合评价。首先, 仅考虑在正午时刻南北方向楼栋间的遮挡楼层数。其次, 考虑在任意时刻楼栋间的遮挡楼层数及被遮挡日照的时间区间。最后, 利用点坐标求出楼间距和时角, 从而求出该楼在任意时刻被前面的楼所遮挡的时间区间。在仅考虑采光问题时, 综合被出售过的房间我们给出C消费者最优的购房方案为: 1-1, 4#, 5-2, 6#整栋楼在冬至日任意时刻采光都较好。

针对于问题四, 本文在问题3的基础上, 从购房者角度出发, 综合考虑采光、价格、交通、环境、噪音等因素, 采用层次分析法[3]构建层次结构选房模型, 将采光、价格、交通、环境、噪音5个因素作为评价准则, 对文中所给条件进行量化, 并用楼号数和楼层两个因素来确定房间位置, 划分房间等级, 其中最优房间为A类房间, B类房间次之, 包括7#26-34层, 8#26-34层, 9#26-34层。

针对于问题五: 通过分析7#的泊车位我们发现了3个不合理的地方。第一: 传统的平行泊车位; 第二: 7#本身是有一定的倾斜角度为 9.15° ; 第三: 车位排列分布不合理。进而我们通过汽车的最小转弯半径[10]建立数学模型, 利用公式(4.10)可以求出最优角度 $\theta=58.20^\circ$, 再与楼的倾斜角度取平均得到 $\theta'=69.525^\circ$, 在安排泊车位排列顺序的时候我们把楼层相对高的停车位安排到电梯附近, 从电梯附近依次向周围排列泊车位。

关键词: 层次分析法 太阳高度角 最小转弯半径

购房中的数学问题

1. 问题重述

随着现代社会经济的快速发展,房地产成为国家经济发展中重要的经济增长点之一。为了充分利用楼房建设的土地面积,开发商经常会选择建筑高层住宅。在购买住房时,影响消费者选择购房的因素较多,其中主要有:地理位置、周边环境、交通便利性、住房户型、住房价格、采光、噪音污染、空气污染等。

目前,在东经 117.17° , 北纬 34.18° 地理位置 A 处有高层建筑小区, 小区规划图见附件 1。不考虑降雨、下雪等影响日照的天气, 解决下列问题:

问题 1: 建立数学模型, 求解 A 小区 14-2-802 房间(客厅)在冬至日 9:00-16:00 间可以享受日照的时间区间(具体楼高和楼间距等相关参数见附件 1 和 4)。

问题 2: 在问题 1 的基础上建立数学模型, 以 A 小区 14-2-802 房间(客厅)为例, 描述全年 365 天每一天可以享受日照的累计时间, 并给出 14-2-802 房间(客厅)全年享受日照时间超过 6 小时的天数和日期。

问题 3: 假设在消费者 C 购房之前已经有一部分房间售出(数据见附件 2), 在仅考虑采光影响的条件下, 给出消费者 C 的最优选房方案。

问题 4: 在问题 3 的基础上, 建立选房模型, 要求考虑价格、交通、环境和噪音的影响, 给出此时消费者 C 最优选房方案。相关信息如下:

该小区售房价格方案:1-8 层为基价, 然后逐层增加层价, 最顶层单价为次顶层的 85%; 1-14#楼除 10、11、12 号楼三处河景房的基价为 4450 元/m^2 , 其他楼的基价为 4250 元/m^2 , 所有楼的层价均为 10 元/层。

小区北侧有一条美丽的河流, 河流北岸已经计划开发高架桥, 高架桥北 300m 处为规划地铁口; 小区东侧为乡村公路和国有铁路; 西侧为国道; 南侧为街道, 且距离小区南侧 500m 有发电厂烟囱。

问题 5: 汽车停车位分布对于住户出行非常重要, 建立数学模型并说明附件 3 中 7#楼汽车车位分布是否合理? 考虑从停车位到电梯距离、楼层高度、上下班高峰期人流量等影响, 建立数学模型, 针对 7#楼重新设计合理的汽车车位分布方案。附件 3 中每车位的方格中第一行是车位号, 第二行是对应的房间号。

2. 问题假设

1. 周年以 2015 年记;
2. 用二十四节气的太阳高度角去近似该节气 15 天的太阳高度角;
3. 假设太阳光线经过 A, B 和 C, D 时是匀速的;
4. 在问题 3 中, 以冬至日正午时太阳高度角计算接受日照情况;
5. 除考虑因素, 其他因素对房间好坏影响可忽略不计;
6. 假设环境、交通、噪音、采光、价格 5 个评价准则的权重是相等的;
7. 假设以同一种车型计算最小转弯半径、车库宽度以及车库长度;
8. 不考虑车库边线的宽度;
9. 假设每辆车都按规定停放, 不超出泊车位边界线。

3. 问题分析

针对于问题一: 通过观察 14# 的分布我们发现, 7# 和 8# 会影响 14-8-802 客厅的采光, 利用公式 $\sin \theta = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega$ 计算出冬至日不同时刻的太阳高度角 (主要计算 A, B, C, D 四点), 利用太阳高度角和楼层高度通过公式 $H_1 = H - L * \tan(\theta)$ 和 $H_2 = \frac{H_1}{h}$ 就可以计算出 14# 被前面的楼遮挡的高度, 计算出遮挡区间, 即可得到享受日照时间。

针对于问题二: 一年中每一天的太阳赤纬角是不同的, 一天中每一时刻的太阳高度角也是不同的, 计算出每一天的太阳赤纬角和该天中不同时刻的太阳高度角那么就可以计算出 7# 和 8# 对 14-2-802 客厅采光的影响。根据公式 (4.4) 可以计算出一年中任何时刻的太阳赤纬角, 为方便计算我们用二十四节气的太阳赤纬角 [2] 去近似这个节气中每一天的太阳赤纬角, 即每一节气的 15 天都用该节气的太阳赤纬角计算。得到每个节气 14-2-802 客厅采光的时间长度, 进而计算出全年日照总时间: 分析每个节气的采光时间, 找出采光时间为 6 个小时的日期区间, 再通过太阳时角和楼间距根据模型一反推出太阳赤纬角的正弦值 (0.5843), 再计算出太阳赤纬角的正弦值 (0.5873) 进行比较得到采光 6 小时的日期, 由此求得 14-2-802 客厅全年享受日照时间超过 6 小时的天数。

针对于问题三: 在仅考虑采光问题时, 我们从房间的日照时间和房间的类型等因素对每栋楼和每个单元进行综合评价, 通过公式 $\sin \theta = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega$ 计算出冬至日不同时刻的太阳高度角, 利用太阳高度角和楼层高度和, 通过公式

$H_1 = H - L * \tan(\theta)$ 和 $H_2 = \frac{H_1}{h}$ 可以计算出每栋楼被前面的楼遮挡的高度。其次, 在仅考虑在正午时刻南北方向楼栋间的遮挡楼层数, 从而可以求出正午时刻被遮挡的楼层数。最后, 考虑在任意时刻楼栋间的遮挡楼层数及被遮挡日照的时间区间, 我们利用点坐标可以求出楼间距和时角从而求出该楼在任意时刻被前面的楼所遮挡的时间区间, 给出最优方案。

针对于问题四, 针对问题 4, 本文在问题 3 的基础上, 从购房者角度出发, 综合考虑采光、价格、交通、环境、噪音等因素, 采用层次分析法构建层次结构选房模型, 将采光、价格、交通、环境、噪音 5 个因素作为评价准则, 对文中所给条件进行量化, 并用楼号数和楼层两个因素来确定房间位置, 划分房间等级, 给出最优方案。

针对于问题五, 通过分析 7# 的泊车位我们发现了 3 个不合理的地方。第一: 传统的平行泊车位; 第二: 7# 本身是有一定倾斜角度的为 9.15° ; 第三: 车位排列分布不合理; 进而我们通过汽车的最小转弯半径建立数学模型

$S(\theta) = wL + \frac{1}{2}WR = H_1I + \frac{H_1^2 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{H_1C_1}{2 \sin \theta} - \frac{H_1C_2 \cos \theta}{2 \sin \theta}$ 可以求出最优角度，再与楼的倾斜角度取平均。在安排泊车位排列顺序的时候我们把楼层相对高的停车位安排到电梯附近，从电梯附近一次往周围排列泊车位。

4. 模型建立

4.1 问题 1 的模型建立与求解

由附件 1 和附件 4 可知，楼的总高度为 $H = 98.6m$ ，总 34 层。则每层楼的高度为 $h = 2.9m$ 。小区在东经 117.17° ，北纬 $\varphi = 34.18^\circ$ 地理位置，冬至日正午时的太阳赤纬度 $\delta = -23.26^\circ$

遮挡高度

$$H_1 = H - L * \tan(\theta) \quad (4.1)$$

其中 L 为日照间距

遮挡高度层

$$H_2 = \frac{H_1}{h} \quad (4.2)$$

太阳位置可由太阳高度角 θ ，根据球面三角基本公式可得：太阳高度角 θ 求算公式

$$\sin \theta = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \omega \quad (4.3)$$

在 (4.3) 式中 δ 为太阳赤纬，表示太阳光线与地球赤道面的夹角，一年四季每天都在变动着，冬至日 $\delta = -23.26^\circ$ ，春分日和秋分日 $\delta = 0^\circ$ ，夏至日 $\delta = 23.26^\circ$ 。

ω 为太阳时角，以当地正午为 $\omega = 0^\circ$ ，上午为负，每小时 -15° ，下午为正，每小时 $+15^\circ$ ， ω 在赤道面上每小时变化为 $+15^\circ$ ， ω 所表示的是真太阳时，与时钟不同（冬至日平太阳时=真太阳时+1 分 22 秒）。



图 4.1 14-2-802 客厅光照路线

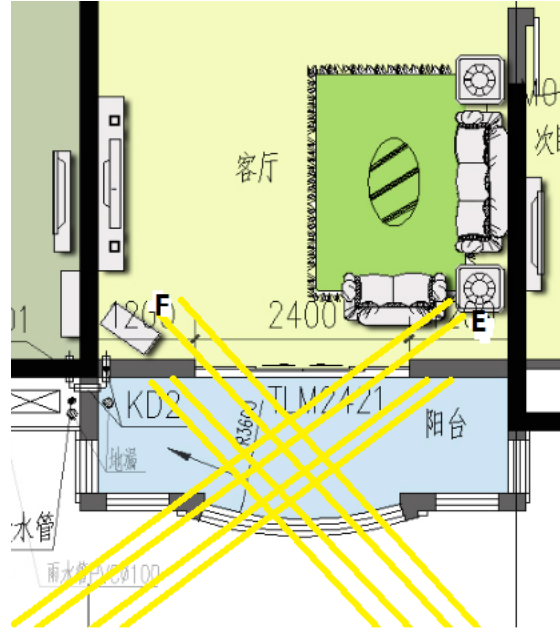


图 4.2 客厅采光示意图

由图 4.1 可知，有四个临界点 A, B, C, D 。由图 4.2 可知，当太阳光线在 E, F 之间时，客厅可以采到光。

(1) 太阳从东往西照射，当太阳光线经过 8# A 点和 14-2-802 阳台 F 点时，由公式 (4.1)、(4.2) 可计算出 14# 被 8# 遮挡的高度 H_1 和遮挡高度层 $H_2 = 28$ (层)。此时 14# 的 8 层楼房开始被 8# 楼遮挡，阳光不能照射到客厅。由公式 (4.3) 计算出 $\omega = -23.2400$ ， $\theta = 12.6448$ ，求出被遮挡的时刻为 $t = 10:28:43$ 。

(2) 当太阳光线到达 8# B 点经过 14-2-802 阳台 E 点时，由公式 (4.1) (4.2) 可计算出 14# 将被 8# 遮挡的高度 H_1 和遮挡高度层 $H_2 = 26$ (层)，由公式 (4.3) 计算出 $\omega = 7.4400$ ， $\theta = 17.2501$ ，求出被遮挡的时刻为 $t = 12:31:22$ 。

由此可知，太阳在经过整个 8# 楼时都会遮挡 14-2-802，当太阳光线过 B 点后，此时 14-2-802 不再被 8# 楼遮挡，阳光可以照射到客厅。

(3) 当太阳光线到达 8# C 点经过 14-2-802 阳台 E 点时，由 $C(\frac{X = 3784157.25}{Y = 516974.351})$ 点坐标和 $E(\frac{X = 3784237.29}{Y = 517029.504})$ 点坐标，可求出遮挡高度层 $H_2 = 30$ (层)， $\omega = 34.5700$ ，由公式 (4.3) 计算出 $\theta = 8.3413$ ，求出被遮挡的时刻为 $t = 14:19:17$ 。

(4) 当太阳光线到达 8# D 点经过 14-2-802 阳台 F 点时，由 $D(\frac{X = 3784178.895}{Y = 516935.202})$ 点坐标和 $F(\frac{X = 3784237.29}{Y = 517027.104})$ 点坐标，可求出遮挡高度层 $H_2 = 22$ ， $\omega = 57.5800$ 由公式

(4.3) 计算出 $\theta = 17.9736$ ，求出被遮挡的时刻为 $t = 15:51:38$ 。

当太阳光线过 D 点后，此时 14-2-802 楼房不会被其它楼房遮挡，阳光可以照射到客厅，则 A 小区 14-2-802 房间(客厅)在冬至日 9:00-16:00 间可以享受日照的时间区间为 $[9:00, 10:28:43]$; $[12:31:22, 14:19:17]$; $[15:51:38, 16:00]$ 。

4.2 问题 2 的模型建立与求解

一年中每一天的太阳赤纬角是不同的，一天钟每一时刻的太阳高度角也是不同的，如果我们可以计算出每一天的太阳赤纬角和该天中不同时刻的太阳高度角那么就可以计算出 7# 和 8# 对 14-2-802 客厅采光的影响。

由于太阳赤纬角在周年运动中任何时刻的具体值都是严格已知的，我们由公式 $ED = 0.03723 + 23.2567 \sin \theta + 0.1149 \sin 2\theta - 0.1712 \sin 3\theta - 0.758 \cos \theta + 0.3656 \cos 2\theta + 0.0201 \cos 3\theta$ (4.4)

其中：ED 为太阳赤纬角；θ 为日角，即 $\theta = 2\pi t / 365.24422$ ； $t = i - 79.6764 + 0.2422 \times 3$ （以 2015 年为例）；i 为积日，即日期在年内的顺序号，例如，1 月 1 日其积日为 1，平年 12 月 31 的积日 365，闰年则为 366。可以推算出全年每一天的太阳赤纬角。

为简单计算我们利用二十四个节气的太阳赤纬角去近似这个节气中每一天的太阳赤纬角，即每一节气的 15 天都用该节气的太阳赤纬角计算。

计算出的 24 个节气 7# 和 8# 对 14# 遮挡的高度如表 4.1 所示（计算程序见附录）：

表 4.1 二十四节气日 ABCD 四点对 14-2-802 客厅遮挡的高度

	A 点遮挡高度	B 点遮挡高度	C 点遮挡高度	D 点遮挡高度
冬至	18.669832283467358	16.397634999611796	19.380569099019500	27.047952840277659
小寒	18.146495540977398	15.800190867501705	18.857535510744967	26.631799054308761
大寒	16.599345701757812	14.016872582349428	17.325649700501891	25.431055426087422
立春	14.088155363093442	11.063064325690419	14.886608244650580	23.575767768472641
雨水	10.590245400320898	6.808088613925384	11.591601874017993	21.180521007468347
惊蛰	6.106973100520399	1.065981810973545	7.550595514554621	18.414914365290457
春分	0.624670556014235	-6.513778516466936	2.895069930401383	15.451977105136688
清明	-6.110184248264991	-16.957629734498255	-2.394550074363195	12.347679787915910
谷雨	-13.432540084989240	-30.359152841984560	-7.631547934679940	9.506935482321451
立夏	-21.035135280414210	-47.815980169258772	-12.553680432579284	6.998478473481439
小满	-27.599578015901173	-67.747068902661113	-16.439271402817866	5.087227692948979
芒种	-31.994095648963178	-85.303824667773327	-18.885546853928759	3.892898860139475
夏至	-33.494332810616655	-92.442734019455557	-19.697667080641949	3.494305458283505
小暑	-31.921709468185245	-84.976425925522662	-18.846095314996127	3.912215098113063
大暑	-27.421390669262514	-67.120699410473236	-16.337691201373996	5.136809103167885
立秋	-20.819572830766138	-47.252393238145672	-12.420717836023208	7.064689232377523
处暑	-13.244150965125469	-29.979484042903199	-7.503175637649525	9.574209697609648
白露	-5.878032091229690	-16.571938584827198	-2.219939751640367	12.446111144991509
秋分	0.624670556014235	-6.513778516466936	2.895069930401383	15.451977105136688
寒露	6.271339748135647	1.283045443805152	7.695055194236294	18.510594438038172
霜降	10.688405409775038	6.929970098360329	11.682394407139890	21.244815476367631
立冬	14.176489906866591	11.168307654050905	14.971382599051202	23.639079000776583
小雪	16.662535655802962	14.090227828153074	17.387788567026682	25.479232512806188
大雪	170720314042981	15.827908549926116	18.881692756698087	26.650951012252833

假设太阳光线在经过 A，B 和 C，D 点之间是匀速的，那么在各个节气时 14-2-802 客厅可以采到光的是时间长度分别为（单位：min）：205，205，205，205，235.75，327.36，370.46，397，409.78，420，420，420，420，420，420，420，409.78，397，370.46，327.36，235.75，205，205，205。则全年日照总时间为 120910.5 分钟，即 2015.175 个小时。

从表 4.1 我们还可以看出从立夏到立秋 7# 和 8# 对 14-2-802 客厅无遮挡，那么从 9:00 到 16:00 就有 7 个小时可以采到光。惊蛰和寒露时每天的采光时间为 327.36 分钟，

春分和秋分时每天的采光时间为 370.46 分钟，也就是说，每天采光 6 小时的临界点一定在惊蛰和春分、寒露和秋分中的某一天。惊蛰时 A, B, C 三点对 14-2-802 客厅均无遮挡，而 D 点有遮挡，如果 7# 的某一点开始遮挡到 D 点结束的时间为一个小时那么从该天开始以后每天采光都会大于一小时。我们计算出当太阳光线的角度为 42.5° 时，太阳光线移动到 D 点的时间为 1 小时，估计该位置的楼间距为 101.24m，通过太阳时角和楼间距根据模型一反推出太阳赤纬角的正弦值 (0.5843)，再有公式 (4.4) 计算出太阳赤纬角的正弦值 (0.5873) 计算出的太阳赤纬角为) 相比较发现，惊蛰后的第 11 天采光时间为 6 小时，通过查阅 2015 年日历可知该天为 3 月 17 日，同理可计算出寒露和秋分之间的采光时间为 6 小时的日期为 10 月 12 日，由此可得，14-2-802 客厅全年享受日照时间超过 6 小时的天数为 209 天。

4.3 问题 3 的模型建立与求解

仅考虑采光问题，要保证每天都可以采光，就是要保证冬至日正午时分可以接受自然光[5][6]。我们把房间(客厅)在冬至日 9:00-16:00 间可以享受日照的时间区间做为消费者 C 的选房方案。

(1) 在仅考虑在正午时刻南北方向楼栋间的遮挡楼层数利用公式 (4.1)(4.2)(4.3) 得遮挡楼层数，如表 4.2

表 4.2 南北方向楼栋间的遮挡楼层数结果

楼栋间	遮挡楼层数	楼栋间	遮挡楼层数
1#—9#	11	7#—13#	22
2#—10#	13	8#—14#	18
3#—11#	4	17#—7#	22
4#—12#	0	18#—8#	21
5#—17#	24	16#—5#—1	1
6#—18#	20	2#	0
1#	0	6#	0
16#—5#—2	0	4#	0
3#	0		

从以上表格我们得出以下结论：

- 1) 1#, 2#, 3#, 4#, 5#, 6#, 12#整栋楼在冬至日正午时刻采光较好
- 2) 7#在冬至日正午时刻 22 层以上采光较好
- 3) 8#在冬至日正午时刻 21 层以上采光较好
- 4) 9#在冬至日正午时刻 11 层以上采光较好
- 5) 10#在冬至日正午时刻 13 层以上采光较好
- 6) 11#在冬至日正午时刻 4 层以上采光较好
- 7) 13#在冬至日正午时刻 15 层以上采光较好
- 8) 14#在冬至日正午时刻 18 层以上采光较好
- 9) 17#在冬至日正午时刻 24 层以上采光较好
- 10) 18#在冬至日正午时刻 20 层以上采光较好

(2) 在任意时刻楼栋间的遮挡楼层数及被遮挡日照的时间区间。

- 1-1 单元在时间区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时；
- 1-2 单元在时间区间[14:34, 16:00]时被 15#最高遮挡 7 层。
- 2-1 单元在区间[8:07, 11:01]时被 3#最高遮挡 17 层；
- 2-2 单元在区间[8:20, 11:06]时被 3#最高遮挡 15 层。

3-1 单元在区间[8:34, 11:10]时被 4#遮挡 12 层;
3-2 单元在区间[8:46, 11.05]时被 4#最高遮挡 9 层。
4-1 单元在区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时;
4-2 单元在区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时。
5-1 单元在区间[8:32, 11:22]时被 6#最高遮挡 12 层;
5-2 单元在区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时。
6-1 单元在区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时;
6-2 单元在区间[9:00, 16:00]全天日照时间有 7 小时。

10-1 单元在区间[11:45, 12:52]时被 2#最高遮挡 11 层, 在区间[14:15, 15:04]时被 1#最高遮挡 4 层;

10-2 单元在区间[11:03, 13:39]时被 2#最高遮挡 9 层。在区间[13:24, 14:38]时被 1#最高遮挡 6 层。

11-1 单元在区间[12:00, 13:32]时被 3#最高遮挡 6 层; 在区间[13:52, 15:01]时被 2#最高遮挡 10 层;

11-2 单元在区间[11:44, 13:58]时被 3#遮挡最高 6 层。在区间[13:05, 14:34]时被 2#最高遮挡 13 层。

12-1 单元在区间[11:40, 12:00]时被 7#最高遮挡 2 层;

12-2 单元在区间[11:51, 12:00]时被 7#最高遮挡 8 层。

13-1 单元在区间[10:35, 12:00]时被 7#最高遮挡 22 层; 在区间[8:07, 11:00]时被 7#最高遮挡 19 层;

13-2 单元在区间[9:45, 13:02]时被 7 最高#遮挡 21 层;在区间[9:25, 11:02]时被 7 最高#遮挡 16 层

14-1 单元在区间[10:08, 12:11]时被 8#遮挡 28 层; 在区间 [14:01, 15:23]时被 7#最高遮挡 30 层。

14-2 单元在区间[10:28, 12:31]时被 8#遮挡 28 层; 在区间[14:19, 15:51] 时被 7#最高遮挡 30 层。

我们从房间的日照时间和房间的类型等因素。仅考虑采光问题, 综合被出售过的房间和以上两种情况, 我们给出消费者 C 可参考以下选房方案

- (1) 1-1, 4#, 5-2, 6#整栋楼在冬至日采光都较好
- (2) 2-2 在冬至日 15 层以上采光较好
- (3) 3-2 在冬至日 9 层以上采光较好
- (4) 7#在冬至日 22 层以上采光较好
- (5) 8#在冬至日 18 层以上采光较好
- (6) 9#在冬至日 11 层以上采光较好
- (7) 10-1#在冬至日 4 层以上采光较好
- (8) 11-1 在冬至日 10 层以上采光较好
- (9) 12-1 在冬至日 24 层以上采光较好
- (10) 13-1 在冬至日 19 层以上采光较好
- (11) 14-1 在冬至日 30 层以上采光较好
- (12) 17#在冬至日 24 层以上采光较好
- (13) 18#在冬至日 20 层以上采光较好

4.4 问题 4 的模型建立与求解

4.4.1 建立层次结构模型

针对问题 4, 本文在问题 3 的基础上, 从购房者角度出发, 综合考虑采光、价格、

(1) 构造判断矩阵

根据判断矩阵, 我们可依次得到环境、交通、噪声、采光、价格五个影响因素中第 i 个因素对于第 j 栋楼所占的权重为 w_{ij} , 则对于第 j 栋楼五个因素所占的权重为 $w_j = (w_{1j}, \dots, w_{5j})$, 同时可以 w_j 所对应的最大特征根 $\lambda_{\max j}$ 。

根据判断矩阵, 我们可以依次得到环境、交通、噪声、采光、价格五个影响因素中第 i 个因素对于第 j 段楼所占的权重为 v_{ij} , 则对于第 j 段楼五个因素所占的权重为 $v_j = (v_{1j}, \dots, v_{5j})$, 同时可以 v_j 所对应的最大特征根 $\lambda_{\max 2}$ 。

给出一致性指标:

8

由于随着 n 的增加判断误差就会增加, 因此判断一致性时应当考虑到 n 的影响, 使用随机性一致性比值 $C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$, $R.I.$ 为平均随机一致性指标见(表 4.3)。当 $C.R. < 0.1$ 时, 通过一致性检验; 如果 $C.R. \geq 0.1$, 则说明判断矩阵没有较好的一致性, 应重新考虑并调整两两比较判断矩阵, 直到具有满意的一致性。

表 4.3 平均随机一致性指标表

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R.I.$	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

(3) 房间等级分类

创建两个矩阵 W 和 V , 令

$$W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,5} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{15,1} & w_{15,2} & \cdots & w_{15,5} \\ w_{16,1} & w_{16,2} & \cdots & w_{16,5} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,5} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{5,1} & v_{5,2} & \cdots & v_{5,5} \end{bmatrix},$$

使 $D = W * V'$ 。

此外, 还要建立每一栋楼各楼层等级之间的影响, 每栋楼有 34 层, 划分为 5 个等级, 用 (2) 中方法可算得每一阶段楼层所占的权重, 记为

$$E = \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \cdots & e_{1,5} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \cdots & e_{2,5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{15,1} & e_{15,2} & \cdots & e_{15,5} \\ e_{16,1} & e_{16,2} & \cdots & e_{16,5} \end{bmatrix}。$$

通过矩阵 D 和 E 加权平均 $F = \frac{D+E}{2}$ 可求得楼号等级与楼层等级关系的权重, 并根据矩阵 F 中元素大小可划分房间等级。

4.4.2 模型求解

根据判断矩阵 F , 可得环境、交通、噪音、采光、价格 5 个因素分别对每一栋和每一楼段的权值。如下列表

表 4.4 每一栋楼各个因素的权重

楼号	环境	交通	噪声	采光	价格
1#	0.1579	0.1579	0.0890	0.2976	0.2976
2#	0.1071	0.1071	0.1429	0.3214	0.3214
3#	0.0769	0.1154	0.1154	0.3462	0.3462
4#	0.0400	0.1200	0.1200	0.3600	0.3600
5#	0.1724	0.1034	0.1034	0.3103	0.3103
6#	0.0476	0.0476	0.0476	0.4286	0.4286
7#	0.1724	0.1724	0.2414	0.1034	0.3103
8#	0.1905	0.2286	0.0381	0.1143	0.4286
9#	0.2000	0.2571	0.1429	0.1429	0.2571
10#	0.2543	0.2439	0.1829	0.1665	0.1524

11#	0.2571	0.2000	0.2000	0.2000	0.1429
12#	0.2250	0.2000	0.2250	0.2250	0.1250
13#	0.2286	0.2000	0.1714	0.1429	0.2571
14#	0.2593	0.1852	0.0370	0.1852	0.3333
17#	0.1304	0.1739	0.2174	0.0870	0.3913
18#	0.0500	0.3000	0.0500	0.1500	0.4500

表 4.5 每一楼段各个因素的权重

楼层	环境	交通	噪声	采光	价格
1~8 层	0.1921	0.1921	0.1921	0.1568	0.2671
9~18 层	0.1988	0.1988	0.1988	0.2223	0.1814
19~25 层	0.1988	0.1988	0.1988	0.2223	0.1814
26~33 层	0.1921	0.1921	0.1921	0.2671	0.1568
34 层	0.1997	0.1997	0.1997	0.1904	0.2105

表 4.6 三每栋楼各个楼段所占比重

楼号	1~8 层	9~18 层	19~25 层	26~33 层	34 层
1#	0.2020	0.2003	0.2003	0.2020	0.2001
2#	0.2024	0.2004	0.2004	0.2024	0.2001
3#	0.2029	0.2005	0.2005	0.2029	0.2001
4#	0.2032	0.2005	0.2005	0.2032	0.2001
5#	0.2022	0.2003	0.2003	0.2022	0.2001
6#	0.2046	0.2007	0.2007	0.2046	0.2002
7#	0.1247	0.1547	0.1923	0.2587	0.2709
8#	0.1290	0.1561	0.1914	0.2571	0.2715
9#	0.1193	0.1818	0.2117	0.2420	0.2457
10#	0.1150	0.1804	0.2129	0.2448	0.2450
11#	0.1433	0.1902	0.2066	0.2222	0.2360
12#	0.1968	0.1989	0.2010	0.2023	0.1995
13#	0.1193	0.1818	0.2117	0.2420	0.2457
14#	0.1522	0.1799	0.2081	0.2221	0.2414
17#	.1292	0.1632	0.1770	0.2524	0.2816
18#	0.1291	0.1560	0.1916	0.2580	0.2714

根据所求的数据，设定房间等级评定权重范围表，如下表

表 4.7 房间等级表

权重范围	0.115~0.155	0.156~0.2003	0.2004~0.2413	0.2414~0.2586	>0.2587
房间等级	最坏 (E)	不好 (D)	一般 (C)	好 (B)	最好 (A)

根据房间等级评定权重范围表，算得各套房子的房间等级，如下表

表 4.8 各套房子的房间等级

楼号	1~8 层	9~18 层	19~25 层	26~33 层	34 层
1#	C	D	D	C	D
2#	C	C	C	C	D
3#	C	C	C	C	D
4#	C	C	C	C	D
5#	C	D	D	C	D
6#	C	C	C	C	D
7#	E	E	D	A	A
8#	E	D	D	B	A
9#	E	D	C	B	B
10#	E	D	C	B	B
11#	E	D	C	C	C
12#	D	D	C	C	D

13#	E	D	C	B	B
14#	E	D	C	C	B
17#	E	D	D	B	A
18#	E	D	D	B	A

从表中可以看出，在均衡考虑各项影响因素的前提下，A 等级房间适合购房者优先考虑购买。

4.5 问题 5 的模型建立与求解

4.5.1 原始模型分析

通过问题中附件 3 中我们对 7# 的泊车位进行分析发现了 3 点不合理的地方。第一：7# 的泊车位全部为传统的平行泊车位，平行泊车对司机的驾驶技术有很高的要求，难度很大；第二：在问题一的解决中我们发现 7# 本身是有一定倾斜角度的为 9.15° ，平行泊车位不利于土地的充分利用；第三：楼层越高对电梯的需求量越大，因此电梯周围应该设计楼层较高的泊车位，而且泊车位最好能充分的靠近电梯；下面我们将建立数学模型对 7# 的泊车位进行重新设计与排列。

4.5.2 泊车位的最佳角度的模型建立

车辆从正常行驶到进入泊车位必须通过转弯才能完成，这就涉及到汽车的最小转弯半径。最小转弯半径是指当转向盘转到极限位置，汽车以最低稳定车速转向行驶时，外侧转向轮的中心在支承平面上滚过的轨迹圆半径。我在设计泊车位[9]时假设都是同一种车型，通过查阅资料我们发现一般轿车长 4.8 米，宽 1.8 米，最小转弯半径为 6 米。如图 4.4 倾斜式泊车位模型的建立

设汽车的最小转弯半径为 C_1 ，内侧车轮到转弯中心的距离为 C_2 ， $C_2 = C_1 - H_0$ ，如图 4.4 所示：

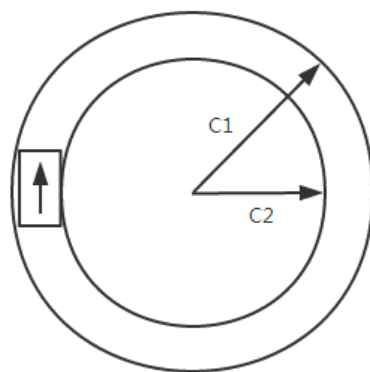


图 4.4 汽车转弯模型

泊车位的一条边必须是靠近通道的，为了使车辆可以更方便的进出泊车位我们要求出泊车位的夹角，设泊车位的长边与通道的夹角为 θ 。为了节省面积考虑，所有泊车位均已相同的度平行排列，如图 4.5 所示：

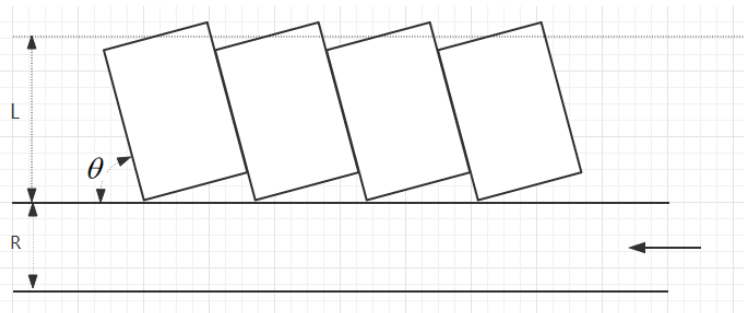


图 4.5 停车位排列模型

车辆从通道驶入停车位的路线如图 4.6 所示：

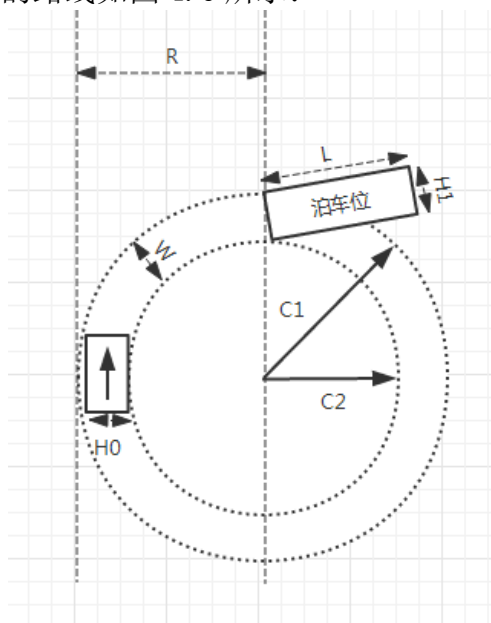


图 4.6 车辆入库模拟模型

其中： R 为通道的最小宽度，车里阿蒙从通道以 θ 角度进入停车位，所以通道的最小宽度为 $R = C_1 - C_1 \cos \theta$ 。在保证车辆可以自由进出停车位和通道宽度最下的前提下，每辆车均已 θ 角度停放， L 为车辆长度，考虑到防火安全问题，根据汽车库、修车库、停车场设计防火规范（GB50067-2014）我们查阅到如表 4.9 所示：

表 4.9 各级耐火等级建筑物构件的燃烧性能和耐火极限

建筑构件名称		耐火等级		
		一级	二级	三级
墙	防火墙	不燃烧体 3.00	不燃烧体 3.00	不燃烧体 3.00
	承重墙	不燃烧体 3.00	不燃烧体 2.50	不燃烧体 2.00
	楼梯间的墙、防火墙	不燃烧体 2.00	不燃烧体 2.00	不燃烧体 2.00
	隔墙、框架填充墙	不燃烧体 1.00	不燃烧体 1.00	不燃烧体 0.50
柱		不燃烧体 3.00	不燃烧体 2.50	不燃烧体 2.00
梁		不燃烧体 2.00	不燃烧体 1.50	不燃烧体 1.00
楼 板		不燃烧体 1.50	不燃烧体 1.00	不燃烧体 0.50
疏散楼梯、坡道		不燃烧体 1.50	不燃烧体 1.00	不燃烧体 1.00
层顶称重构件		不燃烧体 1.50	不燃烧体 0.50	燃烧体
吊顶（包括吊顶搁栅）		不燃烧体 0.25	不燃烧体 0.25	难燃烧体 0.15

所以停车位的宽度比汽车的宽度要宽，用 H_1 表示停车位的纵向宽度则 $H_1 = H_0 + 0.5$ ，用 w 表示停车位宽度，用 L 表示停车位长度，图 4.4 中上虚线分割停车位的小三角区域可以提供给上面或下面的停车位使用， L_0 表示停车位末端与消防车道之间的距离， L_1 表示小三角形顶点到虚线的距离。所以得到关于 θ 的函数，且有：

$$w = \frac{H_1}{\sin \theta} \quad (4.6)$$

$$L_1 = \frac{1}{2} H_1 \cos \theta \quad (4.7)$$

$$L = I \sin \theta + L_1 \quad (4.8)$$

$$L_0 = (I + \frac{1}{2} H_1 \cot \theta) \cos \theta \quad (4.9)$$

得到:

$$S(\theta) = wL + \frac{1}{2} WR = H_1 I + \frac{H_1^2 \cos \theta}{2 \sin \theta} + \frac{H_1 C_1}{2 \sin \theta} - \frac{H_1 C_2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \quad (4.10)$$

首先求出泊车位的最小面积, 将 $C_1 = 6$, $C_2 = 6 - 1.8 = 4.2$, $H_1 = 1.8 + 0.5 = 2.3$, $I = 4.8$ 带入上式可得

$$S(\theta) = 11.04 + \frac{4.15}{\sin \theta} - \frac{2.185 \cos \theta}{\sin \theta}$$

对 $S(\theta)$ 求导得:

$$S'(\theta) = \frac{2.185 - 4.15 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

所以当 $\cos \theta = 0.527$, 即 $\theta = \arccos 0.527 = 58.20^\circ$ 时, $S(\theta)$ 达到最小, $S(\theta)_{\min} = 14.57 m^2$ 。

通过以上分析我们得到, 当泊车位与通道的夹角为 58.20° 时, 可是每辆车占据停车位的面积最小, 但是我们应该考虑到 7# 本身是有一定倾斜角度的为 9.15° , 为了更加充分的利用土地面积, 我们把最优泊车位角度与 7# 的倾斜角度取平均数得到

$\theta' = \frac{58.20 + (90 - 9.15)}{2} = 69.525^\circ$ 。也就是说, 当泊车位的长边也通道的夹角为 69.525° 的时候达到最优。

对于双排泊车位为了车辆更容易进出, 我们的排列方式如图 4.7:

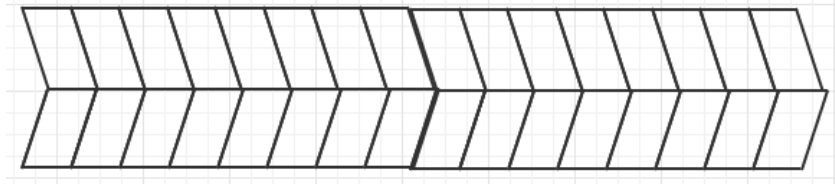


图 4.7 双排泊车位

在安排泊车位排列顺序的时候我们把楼层相对高的停车位安排到电梯附近, 从电梯附近一次往周围排列泊车位。 $H_1 = 1.8 + 0.5 = 2.3$ 是每个泊车位的宽度, 10 个车位依次排列就需要 69 米, 我们在排风机那一排设计了 57 个泊车位, 7# 北面一排设计了 34 个泊车位, 电梯附近设计的泊车位如图 4.7 所示:

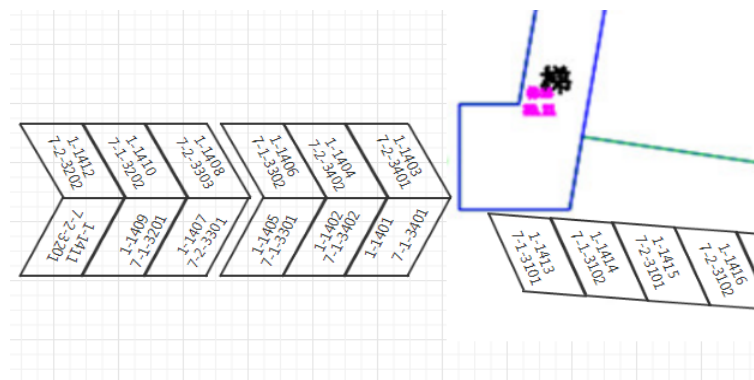


图 4.7 泊车位排列局部图

重新排列的泊车位排列分布图见图 4.8，

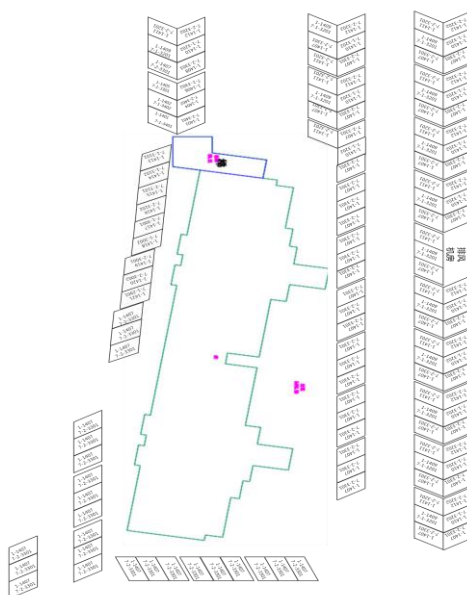


图 4.8 重新设计的泊车位排列分布图

5. 总结

5.1 模型的优点

- 1、本文充分考虑了各个楼之间的遮光影响，通过计算太阳赤纬角、太阳高度角、太阳时角来确定遮挡的楼层数和遮挡时间，模型较精确。
- 2、本文利用二十四节气的太阳赤纬角近似每一天的太阳赤纬角大大减少了计算量。
- 3、在建立最优选房方案我们考虑了环境、交通、噪音、采光、价格五个因素对房屋的决策影响。
- 4、本文通过汽车的最小转弯半径、楼的倾斜角度、停车位到电梯的距离、楼层高度等因素计算最优的泊车位偏角和排列分布。

5.2 模型的缺点

- 1、用近似的方法求出的采光时间不够精确。
- 2、还会有其他的因素会影响购房者对房屋的评价，在层次分析时有一定主观因素，结果会有偏差。
- 3、没用充分考虑到不同车型。

参考文献

- [1] 崔毅, 日照标准及城市空间形态的影响研究[D], 华中科技大学, 2010。
- [2] 王佳莹, 哈尔滨高层住宅日照分析研究[D], 哈尔滨工业大学, 2009。
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊, 数学模型[M], 北京: 高等教育出版社, 2003。
- [4] 黄志宏, 城市居住区空间结构模式的演变[M], 社会科学文献出版社, 2006。
- [5] 刘琦, 王德华, 建筑日照设计[M], 水利水电出版社, 2008。
- [6] 李振宇, 上海中心城区住宅日照间距等规定刍议[J], 城市规划学刊, 2005(1)。
- [7] 赵文凯, 日照标准与日照间距的关系[J], 城市规划, 2003(1)。
- [8] 刘琦, 建筑日照设计[M], 北京: 水利水电出版社, 2008。
- [9] 张少锋, 城市居住小区汽车停放问题研究[D], 郑州大学, 2004。
- [10] 百度文库, 汽车车库库存的优化方案,
http://wenku.baidu.com/link?url=D1-vv3aGfUPcU3z28hqGe9LtmoFASVZpbLxUxQ_NCdbL0tieId7A81cIeoSKc9Ad1qRNBmNzuq4YW9cWy0BeW3R3nJObnvpvqyGugndPyr0 (2015 年 5 月 1 日)
- [11] 百度百科, 太阳赤纬角,
http://baike.baidu.com/link?url=LBiPAbhNEi3RjQ1F0fL87c8YtPauoaCFkCw0XQF5g05s0b4h22oBW1Ovezq7jrS-MZKCmlM4XYkAjyrm3JnCehlvTH4krL7F4JipKtij5ug3w84icf-MReWT-sf11KXUCR2u-bFakiusLVG1kEPVGetNv6InCXxvwcoNb05X4fW342WxBQd3_1gtGJtVKDuZ (2015 年 4 月 30 日)

附录：

1. 问题 1 的 MATLAB 程序

```
(1) a=[23.45 23.45 23.45 23.45];b=[34.3 34.3 34.3 34.3];c=[-23.24 7.44 34.57 57.58];d=[83.01 82.27 97.20 108.89];
a=a*pi/180;b=b*pi/180;c=c*pi/180;d=d*pi/180;
h=sin(a).*sin(b)+cos(a).*cos(b).*cos(c);
h1=asin(h);
z=98.6-d.*tan(h1);
a=z/2.9
```

```
(2) %A 点
x=[-23.45 -22.58 -20.08 -16.25 -11.37 -5.83 0 6.02 11.5 16.38 20.18 22.62 23.45 22.58 20.08 16.25 11.37 5.83 0 -6.02 -11.5 -16.38 -20.18 -22.62];
x=x*pi/180;
h=sin(x)*sin(34.3*pi/180)+cos(x)*cos(34.3*pi/180)*cos(-23.3*pi/180);
h1=asin(h);
z=98.6-83.01*tan(h1);
a=z/2.9
```

```
(3) %B 点
x=[-23.45 -22.58 -20.08 -16.25 -11.37 -5.83 0 6.02 11.5 16.38 20.18 22.62 23.45 22.58 20.08 16.25 11.37 5.83 0 -6.02 -11.5 -16.38 -20.18 -22.62];
x=x*pi/180;
h=sin(x)*sin(34.3*pi/180)+cos(x)*cos(34.3*pi/180)*cos(7.44*pi/180);
h1=asin(h);
z=98.6-82.27*tan(h1);
b=z/2.9
```

```
(4) %C 点
x=[-23.45 -22.58 -20.08 -16.25 -11.37 -5.83 0 6.02 11.5 16.38 20.18 22.62 23.45 22.58 20.08 16.25 11.37 5.83 0 -6.02 -11.5 -16.38 -20.18 -22.62];
x=x*pi/180;
h=sin(x)*sin(34.3*pi/180)+cos(x)*cos(34.3*pi/180)*cos(34.57*pi/180);
h1=asin(h);
z=98.6-97.20*tan(h1);
c=z/2.9
```

```
(5) %D 点
x=[-23.45 -22.58 -20.08 -16.25 -11.37 -5.83 0 6.02 11.5 16.38 20.18 22.62 23.45 22.58 20.08 16.25 11.37 5.83 0 -6.02 -11.5 -16.38 -20.18 -22.62];
x=x*pi/180;
h=sin(x)*sin(34.3*pi/180)+cos(x)*cos(34.3*pi/180)*cos(57.58*pi/180);
h1=asin(h);
z=98.6-108.89*tan(h1);
d=z/2.9
```

2. 问题 2 的 MATLAB 程序

%二十四节气日照时间计算

```
x=[-23.45 -22.58 -20.08 -16.25 -11.37 -5.83 0 6.02 11.5 16.38 20.18 22.62 23.45 22.58 20.08 16.25 11.37 5.83 0 -6.02 -11.5 -16.38 -20.18 -22.62];
for i=1:24
a=[x(i) x(i) x(i) x(i)];b=[34.3 34.3 34.3 34.3];c=[-23.24 7.44 34.57 57.58];d=[83.01 82.27 97.20 108.89];
a=a*pi/180;b=b*pi/180;c=c*pi/180;d=d*pi/180;
h=sin(a).*sin(b)+cos(a).*cos(b).*cos(c);
h1=asin(h);
z=98.6-d.*tan(h1);fprintf('第%f 次输出',i);
lcs=z/2.9
end
```

3. 问题 4 的 MATLAB 程序

```

n=length(a);
RI=[0 0 0.58 0.90 1.12 1.24 1.32 1.41 1.45 1.49 1.51];
w=zeros(n,n);
%将矩阵 a 各列归一化
s=sum(a);
for j=1:n
    a1(:,j)=a(:,j)/s(j);
end
%将归一化的矩阵的各行相加
w=sum(a1');
%将得到的和向量归一化，得到特征向量
s=sum(w);
w=w/s;
%计算特征值
c=a*w';
s=0;
for i=1:n
    s=s+c(i)/w(i);
end
disp('特征值为')
lumda=s/n
%进行一致性检验
CI=(lumda-n)/(n-1);
CR=CI/RI(n)
if CR<0.1
    disp('通过一致性检验')
    disp('特征向量（权重）为')
    w
else
    disp('没通过一致性检验,请重新进行成对比较')
end

```