

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4343756

邮编：010021

报名号 # 1008

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1008

参赛队员（签名）：

队员 1：杨 茜

队员 2：巫金亮

队员 3：王 超

参赛队教练员（签名）：杨 茜

参赛队伍组别：研究生组

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4343756

邮编：010021

报名号 # 1008

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1008

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4343756

邮编：010021

报名号 # 1008

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 侧位停车可行性分析

关 键 词 侧位停车 Matlab 两步泊车

摘 要：

随着中国经济的发展，越来越多都市人选择私家车出行。然而，如何在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与经验的问题。本文对侧位停车的方式进行了可行性分析，并且得到了科学的侧位停车方案。

首先，假设试验车进行匀速圆周运动，将其作为质点来观察汽车侧位停车的可行方案，得出其运动是一个 S 型路线。然后通过分析，将试验车作为质点是不合理的。于是，考虑到汽车的车长、车宽，以车身中心为转轴，得出汽车车头先入库的模型。通过模型检验，得出此汽车在正向入库且车位长度有限（1 个车位）的情况下，是无法顺利完成侧位停车的，在停车空间延长至 2 个车位以上的情况下，可顺利正向入库。最后，本文对上述模型进行修正，综合考虑汽车的动力学特征，选择倒车入库的方法研究该问题。研究表明，该倒车入库方案科学合理，具有较高的参考价值和实用价值。

参赛队号 1008

所选题目 A

参赛密码
(由组委会填写)

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

网址：www.tzmcm.cn

电话：0471-4343756

邮编：010021

报名号 # 1008

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

With the development of china's economy, more and more urbanites chose private cars to travel. However, parking the car in the right place in the condition of the narrow space, or parallel parking in the small parking space always is an issue for testing driver's technology and confidence. In order to reduce the difficulty of the parallel parking, the paper proposed a solution of the parallel parking.

First of all, suppose test vehicle for uniform circular motion, discuss the test vehicle as a particle and deduce that the motion is S-line. But this method is unreasonable through calculating. Second study a method that is full account of vehicle length, vehicle width and consider the vehicle's center as an axis, then deduce the model that headstock come into the parking space first. It proves that the method is infeasible by calculating because there is only one parking space. Finally, this paper modifies the above model which is account of vehicle dynamics characteristics and chooses the solution of reverse stall parking. It indicates that the technology roadmap of solution is scientific and rational and has a high application value.

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

邮编：010021

侧位停车可行性分析

一、 问题提出

近年来，随着人们生活水平的提高，私家车得到了普及，给人们出行带来方便的同时，对交通造成的压力越来越大，导致路边的停车位越来越少，这种现象在城市尤为严重。因此在停车位有限的情况下，如何泊车已经成为一个被普遍关注的问题。本文以如何侧位停车为研究对象，考虑驾驶员是否能在一定条件下顺利泊车。泊车过程中需要考虑汽车是否会碰到前车或者后车的问题，泊车过程依赖于驾驶者的驾驶经验，驾驶技巧以及反应灵敏程度，任何一个环节出问题都会导致驾驶员不能够顺利准确的侧位停车。

影响汽车泊车的因素主要包括以下两个方面。第一，为环境因素和道路参数，包括停车位长度、停车位宽度和泊车初始位置即泊车时两平行车辆间水平距离。第二个为汽车的动力学因素，主要包括车辆自身参数，包括车长、车宽、前悬、最小转弯半径等。汽车在泊车的过程中，我们需要考虑以下几个问题：第一，停车位大小是否能够满足车辆的要求；第二，车辆在进入车位的过程中，是否会发生碰撞前后车辆的行为。

二、 符号说明及相关数据

常用符号说明部分：

- L2: 停车场的长度
- L1: 停车场的宽度
- l: 汽车的长度
- w: 汽车的宽度
- r: 车的最小转弯半径
- d: 车辆与离他最近的停车位的距离
- θ : 汽车进入与平行路线所形成的夹角

实验车辆及停车位相关的数据^[1]：

- L2: 7500mm
- L1: 2200mm
- l: 4525mm
- w: 1725mm
- r: 5060 mm
- d: 1450mm

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

三、 初始质点模型分析

本文首先将汽车作为质点来考虑，假设汽车进行的是匀速圆周运动，以车辆的右侧的车头的一点作为质点来考虑车辆的运动过程（Fig.1）。在汽车前行进入到停车位的过程中，走的是S型路线。侧位停车为：驾驶员右转弯，以一定半径 r 进行运动，当质点到达它所要达到的车位的左下角的时候，汽车驾驶员开始左转弯，直到车辆完全进入到车库，到达与其他车辆平行的位置。因此，在汽车在进入到停车位的整个过程中，走的是两段半径相同的相切于目标车位左下角点的两个圆。

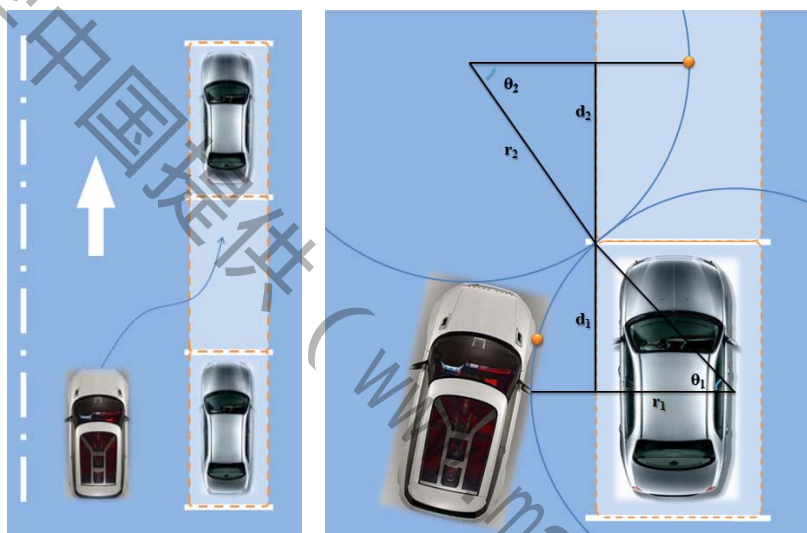


Fig.1 a 初始模型 b 质点轨迹

然而，在实际的问题中，我们并不能够将汽车作为质点来分析，第一，汽车的实际的长度和宽度相对于停车位来讲是不能够忽略的。第二，汽车在进入停车位的过程中，需要防止汽车和前后的其他车辆相撞，这时候，需要分别考虑到车头和车尾的两个点的行进轨迹，不能将整个车辆当作一个质点来进行处理。

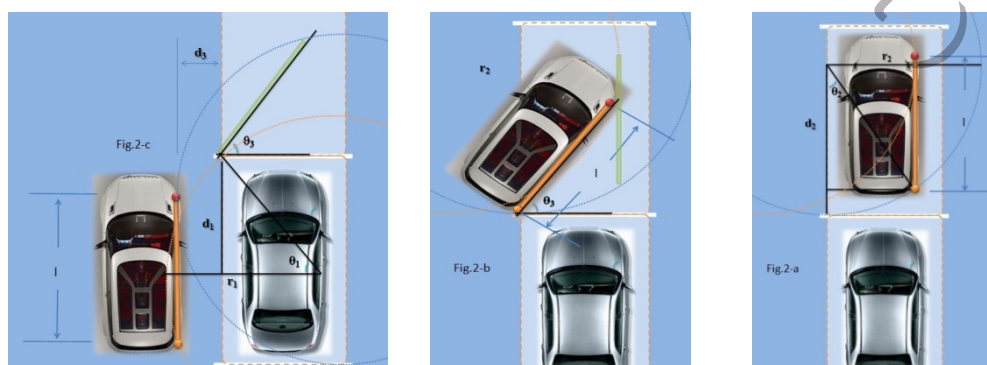


Fig.2 a 入库前 b 入库时 c 入库后

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

四、模型修改：正车入库

将试验车作为质点处理，由上节的分析可知，建立的模型是不合理的。因此在侧位停车的建模过程中，并不能简单地将试验车当作质点来处理，必须充分考虑到试验车进入停车场的整个过程，以及车的长度和宽度等问题。

因此在本节中，选择两个容易碰撞的点为关键点，一个是车子右上角的点，另外一个点是车子右下角的点，这两点连成一条线，即车子右侧。车子在进入的过程中，我们假设这个停车场是可以容纳下这个车子的。如图 Fig. 3-a 和 Fig. 3-b 所示。汽车进入停车场的流程是：汽车先按照 Fig. 3-b 的路径驶入停车场，再按照 Fig. 3-a 的路径调整好位置。

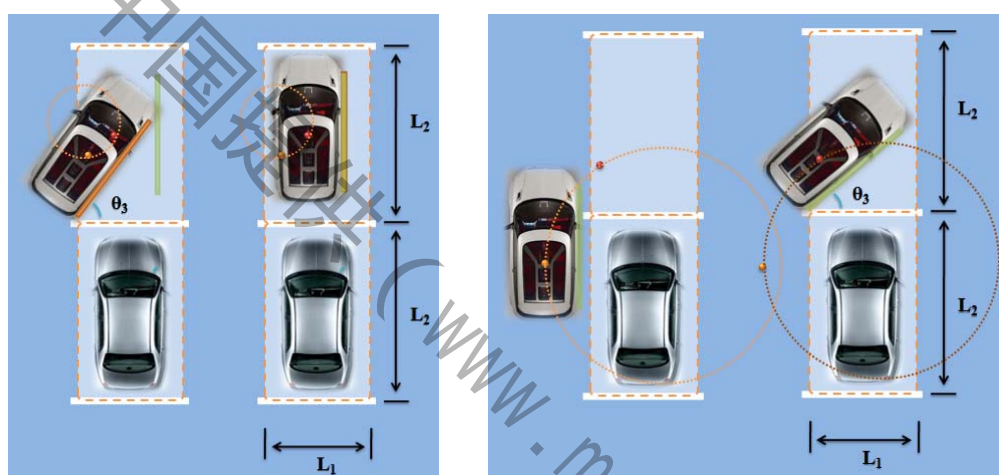


Fig.3 a 入库中的转弯半径 b 入库前转弯半径

建立模型：

假设一：分两步完成入库过程，如图 Fig.3-a 和 Fig.3-b 所示；

假设二：以汽车中心为考察点，汽车模型为长方形，重点考察容易与前后车库相互碰撞汽车右侧。

步骤一：本文反向思考，先分析并计算汽车已经进入停车场时的过程，如图 Fig.4 所示。以停靠之后的汽车的中心坐标轴为原点，建立直角坐标系，可以得到车右下角端点即点 A 的坐标为：

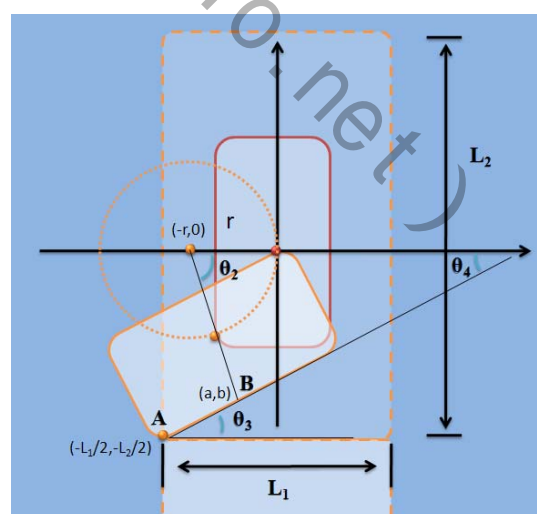


Fig.4 入库后示意图

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

$$A: \left(-\frac{L_1}{2}, -\frac{L_2}{2}\right)$$

通过分析可知，汽车中心的轨迹的方程为：

$$(x+r)^2 + y^2 = r^2 \quad (4-1)$$

那么，汽车的右侧的相对应的点的轨迹方程为：

$$(x+r)^2 + y^2 = \left(r + \frac{w}{2}\right)^2 \quad (4-2)$$

下面以 A 点为基准点，计算 A 点到达圆的部分的切点。设这个切点为 B 点，B 点的具体坐标为 (a,b)。

根据几何图形，可以得到以下的计算公式：

$$(a+r)^2 + b^2 = \left(r + \frac{w}{2}\right)^2 \quad (4-3)$$

$$\frac{b + \frac{L_2}{2}}{a + \frac{L_1}{2}} * \frac{b}{a+r} = -1 \quad (4-4)$$

联立使 (4-2)、(4-3) 两个方程，可以得到 B 点的坐标 (a, b) 进而，可以得到 θ_2 的角度值，

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{-b}{r + \frac{w}{2}}\right) \quad (4-5)$$

另外通过对几何图形 Fig. 4 的分析，延长 AB 交横轴于一点，他与横轴正方向所形成的角为 θ_4 ，由于此处为切线，那么有 $\theta_4 + \theta_2 = 90^\circ$ ，可以得到 $\theta_3 + \theta_2 = 90^\circ$

步骤二：分析并计算汽车从路边进入停车场的过程，如图 Fig.5 所示。以车右后轮为原点建立直角坐标，得到车的右侧中心点 C 点的坐标和车的轨迹的圆心点 D 的坐标。

$$C: \left(\frac{L}{2} * \cos \theta_3, \frac{L}{2} * \sin \theta_3\right)$$

$$D: (x_d, y_d)$$

那么图示的几何分析，可以得到方程：

$$x_d^2 + y_d^2 = \left(r - \frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (4-6)$$

$$(x_d - \frac{L}{2} * \cos \theta_3)^2 + (y_d - \frac{L}{2} * \sin \theta_3)^2 = \left(r - \frac{s}{2}\right)^2 \quad (4-7)$$

联立 (4-6)，(4-7) 我们可以得到 D 点的坐标 (x_d, y_d)

得到：C 点相应的坐标： (x_c, y_c)

$$\text{那么有：} x_c = x_d - r \quad (4-8)$$

$$y_c = y_d \quad (4-9)$$

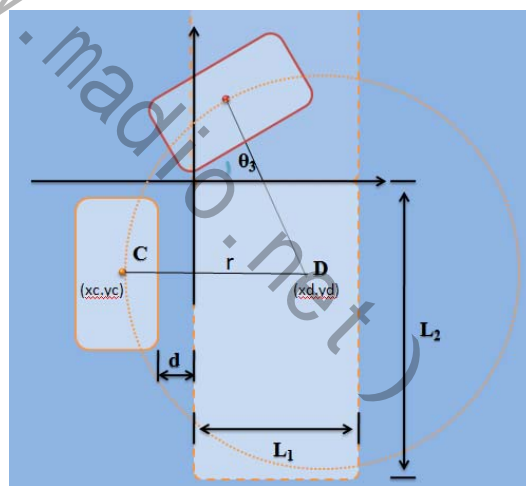


Fig.5 入库前示意图

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

邮编：010021

$$\text{可得选择的停车位置 } d: d = r - x_d - \frac{L}{2} \quad (4-10)$$

五、模型检验

上一小节中建立了正向泊车入位的模型，本节将带入相关数据，求解模型，验证模型的合理性。

(1) Matlab 编程以及计算结果如下：

```
[a,b]=solve('(a+5060)^2+b^2=6170^2','b*(b+3750)=-(a+1100)*(a+5060)')
b =
275220/33049 + (33935000*43^(1/2)*i)/99147
275220/33049 - (33935000*43^(1/2)*i)/99147
a =
- 475861250/99147 + (11945120*43^(1/2)*i)/33049
- 475861250/99147 - (11945120*43^(1/2)*i)/33049
```

显然，模型在实数范围内无解。尝试修改停车位的长度来寻找是否有实数解的存在。

(2) 逐步增加停车位的长度，直到将停车位的长度设置为汽车车长的 2 倍时，模型在实数范围内才有实数解。其计算过程如下：

```
[a,b]=solve('(a+5060)^2+b^2=6170^2','b*(b+7500)=-(a+1100)*(a+5060)')
a =
(385625*338627^(1/2))/59943 - 59228070/19981
- (385625*338627^(1/2))/59943 - 59228070/19981
b =
(67870*338627^(1/2))/19981 - 237930625/59943
- (67870*338627^(1/2))/19981 - 237930625/59943
```

此时，模型在实数范围内有实数解。那么，可以得出以下结论：当停车位的长度大于等于一个停车位的 2 倍时，正向入库可以将汽车开进停车位。但是，在本题中，如果停车位的长度小于 2 倍的停车位长度，则此方案行不通，需要继续寻找其他可行方案，使的在停车位长度有限时，仍然可以实现侧位停车。

六、模型拓展

第三节探讨了将试验车作为质点建立侧位停车模型的不合理性，第四、五节建立了正向入库的侧位停车模型并指出了缺陷。在本节中提出倒车停车入库的方案，并验证此方案的合理性和可行性。

6.1 建立车辆侧位停车的运动学模型

上文中建立了侧位停车系统中质点的运动学模型。在此需要求车辆侧位停车时车轮的运动轨迹。需要建立车辆侧位停车的运动学模型，以推导出车辆侧位停车的运动轨迹方程式，作为后续研究侧位停车系统的理论基础。下面是侧位停车运动轨迹方程式的具体推导过程^[2]。

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

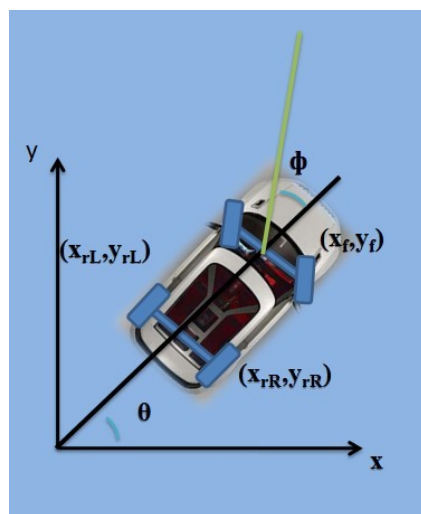


Fig.6 前轮转向示意图

图为车辆侧位停车的运动学模型，其中 (x_f, y_f) 为前轴中心坐标， (x_r, y_r) 为后轴中心坐标， v 为前轴中心点速度， l 为轴距， w 为后轮距， ϕ 为前轴中心带转向角， θ 为车辆中心轴与水平方向的夹角。正常情况下侧位停车速度很低，由此假定无滑轮现象发生，后轮轨迹的垂直方向速度为 0，其方程式表示如下：

$$y'_r \cos \theta - x'_r \sin \theta = 0 \quad (6.1)$$

而由 Fig.6 可知，前后轴中心点坐标关系为：

$$\begin{cases} x_r = x_f - l \cos \theta \\ y_r = y_f - l \sin \theta \end{cases} \quad (6.2)$$

对式(6-2)进行积分，可得其速度关系为：

$$\begin{cases} x'_r = x'_f + \theta' \cdot l \cdot \sin \theta \\ y'_r = y'_f - \theta' \cdot l \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (6.3)$$

将(6.3)代入式 (6.1) 可得关系式：

$$x'_f \sin \theta - y'_f \cos \theta + \theta' l = 0 \quad (6.4)$$

前后中心点的 x , y 方向速度为：

$$\begin{aligned} y'_f &= v \sin(\theta + \phi) \\ x'_f &= v \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

由此将式 (6.5) 代入式 (6.4)，即可求得车辆回转圆周速度为：

$$\theta' = v \frac{\sin \phi}{l} \quad (6.6)$$

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

将 (6.5) 和 (6.6) 同时代入式 (6.3), 即可求得后轮中心点 x , y 方向速度分别为:

$$\begin{cases} y_r' = v \sin \theta \sin \phi \\ x_r' = v \cos \theta \cos \phi \end{cases} \quad (6.7)$$

最后将式 (6.6) 对时间积分并代入式 (6.7) 后, 在对时间积分即可求得后轴中心点的轨迹方程式:

$$\begin{cases} x_r(t) = \int v \cos \theta \cos \phi dt = l \cot \phi \sin\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) \\ y_r(t) = \int v \sin \theta \sin \phi dt = -l \cot \phi \cos\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) + l \cot \phi \\ x_r^2 + (y_r - l \cot \phi)^2 = (l \cot \phi)^2 \end{cases} \quad (6.8)$$

根据 Fig.6 中坐标位置的关系, 可进一步求出左右轮中心点的运动轨迹方程式:
左轮:

$$\begin{cases} x_{rL}(t) = \left(l \cot \phi - \frac{w}{2}\right) \sin\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) \\ y_{rL}(t) = -\left(l \cot \phi - \frac{w}{2}\right) \cos\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) + l \cot \phi \\ x_{rL}^2 + (y_{rL} - l \cot \phi)^2 = \left(l \cot \phi - \frac{w}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (6.9)$$

右轮:

$$\begin{cases} x_{rR}(t) = \left(l \cot \phi + \frac{w}{2}\right) \sin\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) \\ y_{rR}(t) = -\left(l \cot \phi + \frac{w}{2}\right) \cos\left(\frac{v \sin \phi}{l} t\right) + l \cot \phi \\ x_{rR}^2 + (y_{rR} - l \cot \phi)^2 = \left(l \cot \phi + \frac{w}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (6.10)$$

由式(6.9)和式(6.10)知, 当低速侧位停车, 且不考虑轮胎侧滑时, 后轮的行径轨迹与轮距, 轴距及前轴中心点转向角有关, 而与侧位停车速度无关。

6.2 侧位停车系统模型的建立及算法

1. 侧位停车系统模型的建立

Fig.7-a、Fig.7-b 为侧位停车步骤示意图, 其中停车位长度为 lw , 停车位宽度为 cw , 车长尾 l , 车宽为 w , 平行车辆 a 与车 b 间水平距离为 d 。从 Fig.7-a 可看出, 侧位停车过程是后车轮改变方向反复画圆弧的过程, 但圆弧半径与弧度要受到停车位空间和车辆参数的约束。

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

泊车“一个步骤”也可定义为：令泊车时后车轮轨迹顺时针为正，逆时针为负，泊车轨迹改变一次方向成为泊车“一个步骤”，由此把泊车过程分为若干步骤。

为了简化问题，我们假定二个步骤后便可泊车入库。解决了二个步骤泊车入库后再研究 n 个步骤泊车入库的问题。

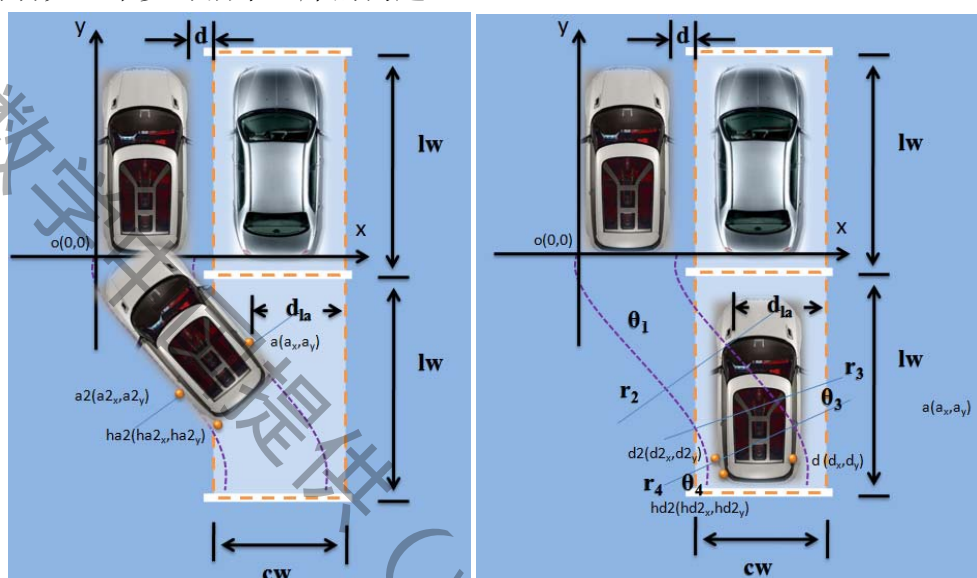


Fig.7 a 侧位停车步骤一 b 侧位停车步骤二

在车辆侧位停车过程中，因为假定泊车步骤二后就可以侧位停车入库。令步骤 n 结束后车轮侧位停车轨迹的转角弧度为 θ_n ，车轴与水平方向的夹角为 θ_m 。

那么有： $\theta_2 - \theta_1 = \theta_{2t}$ ， $\theta_0 = 0$

当车辆完全侧位停车入为时 $\theta_{2t} = 0$ ，即 $\theta_2 = \theta_1$ 。

如图 Fig.7-a 所示，首先右打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_1 旋转 θ_1 。

泊车“一个步骤”后，后车轮中心点记为 $a(a_x, a_y)$ ，车头右端点记为 $a_1(a_{1x}, a_{1y})$ ，

后轮中心点记为 $a_2(a_{2x}, a_{2y})$ ，车轮左端点记为 $ha_2(ha_{2x}, ha_{2y})$ 。容易得出：

$$a(a_x, a_y): \begin{cases} a_x = w + (r_1 - w)(1 - \cos \theta_1) \\ a_y = qx - (r_1 - w) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6.11)$$

$$a_1(a_{1x}, a_{1y}): \begin{cases} a_{1x} = a_x - z \sin \theta_1 \\ a_{1y} = a_y + z \cos \theta_1 \end{cases} \quad (6.12)$$

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

$$a_2(a_{2x}, a_{2y}): \begin{cases} a_{2x} = r_1(1 - \cos \theta_1) \\ a_{2y} = qx - r_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (6.13)$$

$$ha_2(ha_{2x}, ha_{2y}): \begin{cases} ha_{2x} = a_{2x} + qx \sin \theta_1 \\ ha_{2y} = a_{2y} - qx \cos \theta_1 \end{cases} \quad (6.14)$$

再左打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_2 旋转 θ_2 ，如 Fig.8-b 所示。

泊车“两个步骤”后，后车轮中心点记为 $b(b_x, b_y)$ ，车头右端点记为 $b_1(b_{1x}, b_{1y})$ ，

后左轮中心点记为 $b_2(b_{2x}, b_{2y})$ ，车尾左端点记为 $hb_2(hb_{2x}, hb_{2y})$ 。容易得出：

$$b(b_x, b_y): \begin{cases} b_x = a_x + r_2(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ b_y = a_y - r_2(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (6.15)$$

$$b_1(b_{1x}, b_{1y}): \begin{cases} b_{1x} = b_x - z \sin \theta_{2t} \\ b_{1y} = b_y + z \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6.16)$$

$$b_2(b_{2x}, b_{2y}): \begin{cases} b_{2x} = a_{2x} + (r_2 - w)(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ b_{2y} = a_{2y} - (r_2 - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (6.17)$$

$$hb_2(hb_{2x}, hb_{2y}): \begin{cases} hb_{2x} = b_{2x} + qx \sin \theta_{2t} \\ hb_{2y} = b_{2y} - qx \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6.18)$$

有了上述各点的坐标值，在侧位停车过程中可对车辆车身进行精确的定位。

设车辆右轮中心点横坐标为 x_m ，左下角纵坐标值为 y_{ln} 。车辆自身参数中，车长

1、车宽 w 、前悬 qx 、最小转弯半径 r 已知；道路参数中，平行车辆试验车 a 与不动车 b 间水平距离 d 已知，车位宽 cw 按道路标准设定为定值 2.2m。

当车辆停在停车位正中央时，车辆与停车位右侧水平最小距离为 w_x ，车辆右后轮中心点与停车位右侧水平距离为 d_{jn} 。

由图 Fig.7-a 可知， $w_x = \frac{cw - w}{2}$, $d_{jn} = d + 2w + wx - n_x$, $n = a, b$

车辆侧位停车时车轮运动轨迹为圆，试验车要侧位停车入停车位，侧位停车轨迹由参数 r_1, r_2 与 θ_1, θ_2 决定。因此，对于一泊车任务，如何泊车就转化为如何求

出参数 r_2 和 θ_2 的值，可以用一下方程式来表示：

$$\begin{cases} x_{r2} = P(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \\ y_{l2} = Q(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \end{cases} \quad (6.19)$$

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

式 (6.11) 则等价于式 (6.12):

$$\begin{cases} x_{r2} = P(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) \\ y_{r2} = Q(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\text{其中, } y_{r2} = Q(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) = \begin{cases} -lw & n=2 \\ 0 & n=1 \end{cases} \quad (6.21)$$

6.3 侧位停车轨迹的计算及初始位置的确定

侧位停车过程中, 车身不能和前后车位发生空间干涉, 车轮叶不能跨越路边, 需说明一下符号代表的含义:

轴距设为 z_j , 前悬 $qx = \frac{1-z_j}{2} = 999\text{mm}$;

轴距加前悬设为 z , $z = z_j + qx$;

泊车一次后车辆的右上角到前方车辆的距离设为 v_{jn1} , $v_{jn1} = -n_{1y}$ ($n=a, b$);

泊车一次后车辆的左下角到后方车辆的距离设为 v_{jn2} , $v_{jn2} = -hn_{2y}$ ($n=a, b$);

如 Fig.8-a 所示, “一次泊车”后车辆与路边、后方车辆的距离分别为 d_{ja} , v_{ja2} ,

二次泊车后车辆与路边、前方车辆、后方车辆的距离分别为 d_{jb} , v_{jb1} , v_{jb2} 。

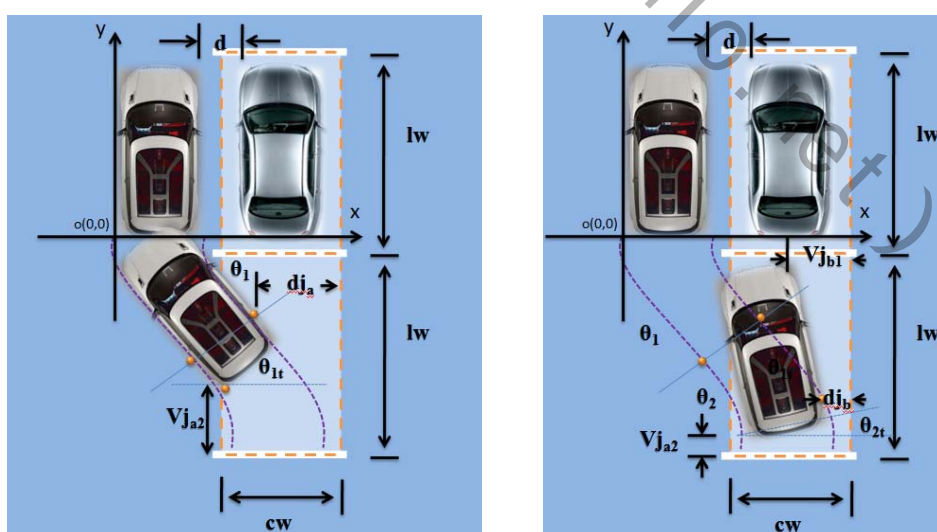


Fig.8 a 侧位停车步骤一 b 侧位停车步骤二

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

6.3.1 侧位停车建模

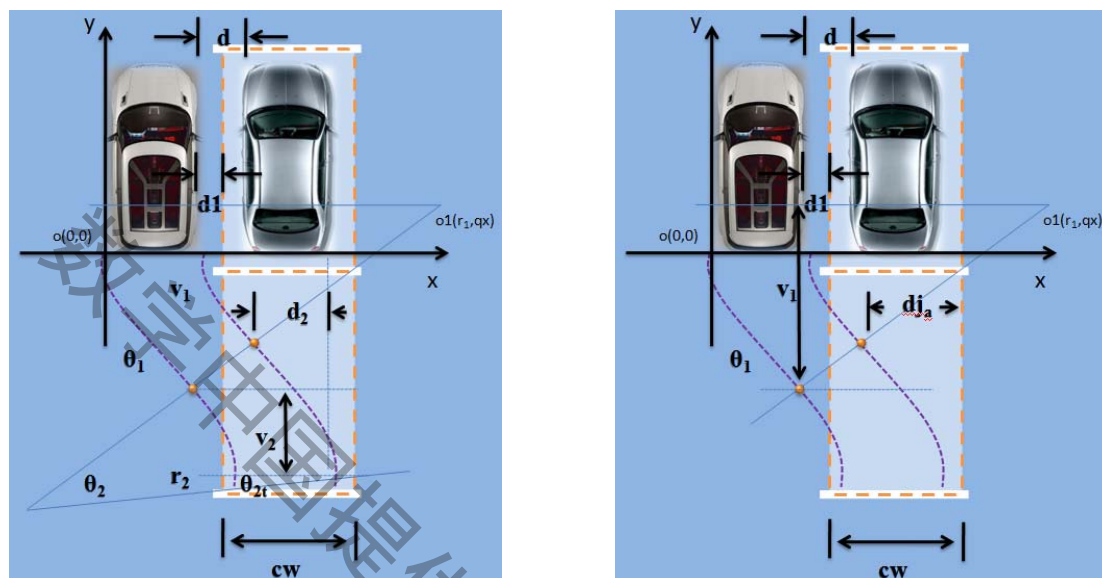


Fig.9 a 侧位停车垂直行进距离 b 侧位停车水平行进距离

给定停车位的车位长度与车位宽度确定不变，要计算车辆泊入停车位的轨迹，结合试验车辆参数，令 $r_1 = r_2 = r$ ，计算过程如下：

如 Fig.9 所示，侧位停车过程中，泊车一次后车辆水平方向行进 d_1 ，垂直方向行进 v_1 ，泊车两次后车辆水平方向行进 d_2 ，垂直方向行进 v_2 。那么：

$$\begin{cases} d_1 = (r_1 - w)(1 - \cos \theta_1) \\ d_2 = r_2(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\begin{cases} v_1 = r_1 \sin \theta_1 \\ v_2 = (r_2 - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = w + d \\ v_1 + v_2 = lw - qx \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6.23)$$

将式 (6.21)、式 (6.22) 代入式 (6.23)，可得：

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = (r_1 - w)(1 - \cos \theta_1) + r_2(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) = w + d \\ v_1 + v_2 = r_1 \sin \theta_1 + (r_2 - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) = lw - qx \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6.24)$$

假设停车位的距离大于或等于最小停车位，车辆两下就可以泊入停车位，此时， $\theta_{2t} = 0$ ，即 $\theta_1 = \theta_2$ ，令 $r_1 = r_2 = r$ ，可求得 θ_1 ：

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

$$\theta_1 = \arccos\left(1 - \frac{w+d}{2r-w}\right) \quad (6.25)$$

侧位停车过程有一个较重要约束条件和假设条件，即假设开始侧位停车时把方向盘打死，必须保证车身不能和前一车位发生空间干涉，因此需要对 θ_1 的值进行修正。

侧位停车时后车轮第二段轨迹上任一点为 $m(m_x, m_y)$ ，车身与垂直方向的夹角为 β ，则 m 点坐标为：

$$\begin{cases} m_x = a_x + r_2(\cos \beta - \cos \theta_1) \\ m_y = a_y + r_2(\sin \beta - \sin \theta_1) \end{cases} \quad (6.26)$$

$m_1(m_{1x}, m_{1y})$ 坐标为：

$$\begin{cases} m_{1x} = m_x - z \sin \beta \\ m_{1y} = m_y + z \cos \beta \end{cases} \quad (6.27)$$

将式 (6.26)，点 $a(a_x, a_y)$ 坐标代入式 (6.27)，可得：

$$\begin{cases} m_{1x} = m_x - z \sin \beta = w + (r_1 - w)(1 - \cos \theta_1) + r_2(\cos \beta - \cos \theta_1) \cdots (1) \\ m_{1y} = m_y + z \cos \beta = qx - (r_1 - w) \sin \theta_1 - r_2(\sin \theta_1 - \sin \beta + z \cos \beta) \cdots (2) \end{cases} \quad (6.28)$$

因车身不能和前一车位发生空间干涉，当 $r_1 = r_2$ ， $m_{1x} = w + d$ 时， m_{1y} 须满足：

$m_{1y} \leq -100$ （为了留够充足的缓冲距离 100mm）。将 $m_{1x} = w + d$ 代入式 (6.28) 的 (1) 中，可得：

$$(2r-w)\cos \theta_1 + d - (r-w) = r \cos \beta - z \sin \beta \quad (6.29)$$

将 $m_{1y} \leq -100$ 代入 (6.28) 的 (2) 中，可得

$$(qx - (2r-w)\sin \theta_1 + 100) + r \sin \beta + z \cos \beta \leq 0 \quad (6.30)$$

将式 (6.26) 代入式 (6.29)，可求出 β ，将 θ_1 和 β 同时代入式 (6.30)，若不满足，则令 $\theta_1 = \theta_1 + \pi/180$ ，重新代入式 (6.29)，求出 β ，再代入式 (6.30)。如此循环，可求出恰巧不会碰撞时 θ_1 的最小值。若车位长足够，车辆两下就可侧位

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

邮编：010021

停车入位时， $\theta_{2t}=0$ 。

此时， r_1 ， r_2 ， θ_1 ， θ_{2t} 都为已知，其轨迹就确定了。

6.3.2 两次侧位停车时初始位置的确定及 MATLAB 仿真

一般说来，车辆所需最小车位长度与该车车长、车宽、车位宽、最小转弯半径及两平行车辆水平距离有关。但具体到某一次侧位停车，车长、车宽、车位宽、最小转弯半径都是定值，因此两平行车辆水平距离对最小停车位长度影响最大，及车辆初始位置的确定对侧位停车难易程度起着决定性作用。

两平行车辆间水平距离为 d 。令其初始值为 $d=0.3$ ，依次增大 d ，用 MATLAB 仿真侧位停车轨迹，分别计算 d 不断变化时对应的侧位停车转向角与两次泊入时最小停车位的长度。其中，单位宽度为固定值 2.2m，泊车结束时车辆泊在停车位的正中央。

MATLAB 迭代泊车转角和最小车位的程序如下，水平距离 d 对泊车转向角及最小停车位的影响可利用 MATLAB 模拟出。程序参见附录。

利用 MATLAB 程序可得出， d 变化时对侧位停车转向角和最小停车位的精确数值，如表 1 所示

表 1 泊车转向角和最小停车位的 MATLAB 计算值

平行距离 (mm)	侧位停车 转角 (度)	最小车位 (mm)	平行距离 (mm)	侧位停车 转角 (度)	最小车位 (mm)
600	45	7289	600	48	7291
700	45	7234	700	48	7236
800	45	7234	800	48	7178
900	45	7166	900	48	7178
1000	45	7117	1000	48	7119

由表可以看出：对试验车来说，随着 d 的增加，最小停车位长度减小，更容易停入库中，当 $d=1000\text{mm}$ 为侧位停车初始位置，此时侧位停车转向角为 45° ，“两次泊车”可完成泊车时最小停车位长度为 7117mm ，这与现实生活中采用的车库长度 7500mm 接近。印证了我们的计算结果的实用性和有效性，在水平距离 d 在 1m 左右时能使试验车完成最短路径的倒车入库的侧位停车。

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

邮编：010021

结论

本文由试验车为质点的侧位停车模型到正向侧位停车模型再到倒车侧位停车模型，通过检验模型有效性后，步步深化模型，最终得出最短路径的停车泊车模型。首先建立了基于质点的侧位停车模型，获得了质点行进路线，并讨论了质点模型的不足。然后，将质点还原为试验车建立模型，通过正向前进的方式侧位停车，推导出在有限停车空间内（1 个车位），无法正确入库，而在满足停车位大于等于 2 倍停车位长度时可以实现侧位停车。最后，建立了倒车入库的模型，并以韩国现代伊兰特 1.8L 手动豪华型小轿车作为试验车，利用 MATLAB 计算出最佳的泊车初始位置、泊车转向角和完成侧位停车时的最小停车位长度。通过对比分析可以，倒车侧位停车所需的最小停车位长度明显小于正向侧位停车所以的最小停车位长度。因此对于驾驶员，在处理侧位停车情形时，当路边有能停下 2 辆车的位置时，可采用正向侧位停车；当路边有只能停下 1 辆车的位置时，需要采用倒车侧位停车的方案驶入停车位。

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

参考文献：

[1]北京现代官网 伊兰特配置表

http://www.beijing-hyundai.com.cn/productshow/product_elantra.aspx 2010.04

[2]吴瑞鸿、张光仁，车辆倒车运动轨迹理论推导与验证[J]、车辆研测资讯[J],2006.7

[3] Yanan Zhao, Enunanuel G. Collins Jr. Robust Automatic Parallel Parking in Tight Spaces via Fuzzy Logic[A]. Robotics and Autonomous Systems, 2005.51: 111-127

[4]李大潜等，中国大学生数学建模竞赛,高等教育出版社,1998

[5]张瑞丰等，精通 MATLAB 6.5 中国水利水电出版社,2003

[6]王建卫、曲中水、凌斌等，MATLAB 7.X 程序设计，中国水利水电出版社,2007

第三届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

电话：0471-4343756

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn

报名号 # 1008

附录：

Matlab 程序：

```
d=600;
r=5060;
w=2200;
z=3610;
qx=999;
x=0.838;
while d<1500,
d=d+10;
b1=(2*r-w)*cos(x);
b2=d+b1-(r-w);
b3=[r*r+z*z,2*b2*z,b2*b2-r*r];
b4=roots(b3);
b4=max(b4); %sinbeta
b5=(b2+z*b4)/r; %cosbeta
b6=qx-(2*r-w)*sin(x)+r*b4+z*b5; %bly
while b6>-100;
x=x+pi/180;
b1=(2*r-w)*cos(x);
b2=d+b1-(r-w);
b3=[r*r+z*z,2*b2*z,b2*b2-r*r];
b4=roots(b3);
b4=max(b4);
b5=(b2+z*b4)/r;
b6=qx-(2*r-w)*sin(x)+r*b4+z*b5;
end;
lw=(2*r-w)*sin(x),
end;
```