

一 问题提出

图书馆源于保存记事的习惯。图书馆是为读者在馆内使用文献而提供的专门场所。而高校的图书馆为教学和科研服务，具有服务性和学术性强的特点。

现在的高校图书馆存在着许多不良的现象，比如对书籍的损坏、借阅超期等。在搜索引擎下输入“图书超期”等关键字，成千上万的网页被检索出，大多都是超期读者的信息列表。超期现象是读者借阅图书资料时超过规定借阅期限后不归还的一种普遍现象。处理超期罚款是流通服务中常遇到的事，特殊情况则需酌情处理。这一现象虽是小事，但处理不当会影响图书馆与读者之间的关系，从而影响图书馆的声誉，以及馆藏资源的利用率，最终影响图书馆功能的正常发挥。

随着信息化的发展，图书的预约服务也逐渐普及。图书的预约与借阅超期的现象也有很大的内在联系。试通过数学模型来研究以下的问题：

- (1) 近几年，在国内高校中图书预约系统被普遍采用，书籍一旦被预约，就不能再续借，附件中提供了某高校图书预约系统的运行统计数据。请建立数学模型评价图书预约系统对提高图书流通率的作用。
- (2) 根据前面三个问题的结论，请设计一个新的图书管理方案，尽量降低图书超期现象的发生率并提高图书利用率。

二 问题分析

网络环境下图书预约模式作为高校图书馆流通服务工作中的一种新生事物，^[1]它可以满足读者个性化需求，让图书资源更公平的分配，提高了图书的利用率。新兴的网络图书预约方法，其载体是多媒体，载体的特殊性决定了预约的特殊性。网络图书预约的一般流程是：读者欲借图书被借出未还回时提出图书预约申请、图书馆发出还回通知、借出预约图书或未借出预约图书而取消预约。其间的任何一个环节出了问题都会导致网络预约的失败。^[1]

问题1分析：

(1) 总体分析：

问题1的实质是比较有了预约系统后的图书管理方案与没有预约的图书管理方案的图书流通率。为什么预约可以提高图书的流通率呢？有了预约后，对于比较热门的书，它就不可以再被续借了。实质就是缩短读者占用热门图书资源的时间，可以让更多读者享受热门图书资源。但是它也会带来另外两个问题：首先，图书预约了，就不能再续借，部分学生为了强占资源，就会故意拖延还书，引起借阅超期的不良现象。另外一个是预约的成功率不高，不超过40%，大部分预约到的书就会摆在书架上存放5天，也就失去了书5天带给其他学生的价值，同时降低了图书馆工作人员的积极性。图书预约系统的利与弊可以表示如下。

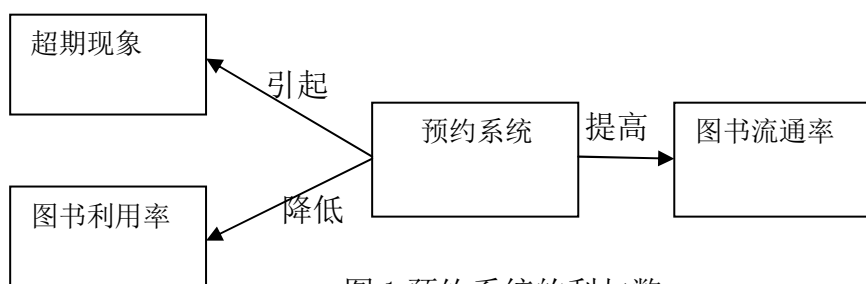


图1 预约系统的利与弊

（2）数据挖掘与分析：

仔细分析某高校 2008 年预约图书分类统计表，发现 A—N 类（马列类、哲学类、社科总论类等）被预约者借出的书数都为 0，在实际生活中，这是不可能的。因此，剔除 2008 年的数据，用 2009、2010 年的数据进行分析。取 2009 年的数据分析，发现图书预约申请数、预约到的书数、被预约者借出图书数的关系如下：

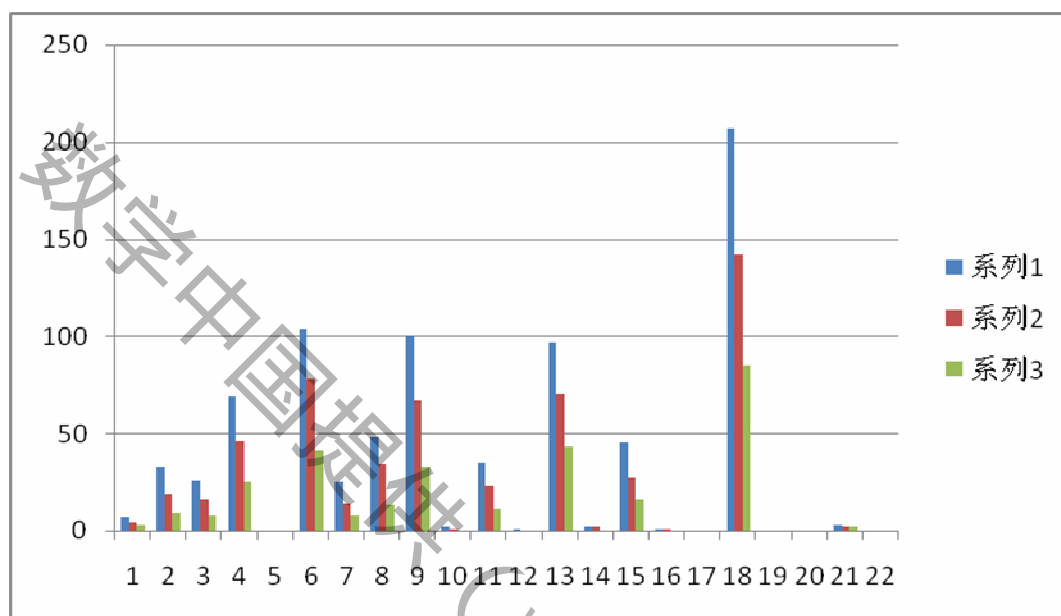


图 2 图书预约申请数、预约到的书数、被预约者借出图书数的关系

说明：系列 1：预约申请数；系列 2：预约到的书数；系列 3：被预约者借出图书数。可以看出，相对比较热门的书（技术类，语言文学类，经济类等）预约的人数最多，而比较冷门的书（马列类，农学类，军事类等）预约的人很少。同时可以看出，被预约者借出的图书数远远少于预约申请数，即预约失败率很高，高达 63% 以上。

（3）问题 1 的分析思路与解决方法

在预约系统的影响下，第 i 类图书的流通次数会增长，而流通增长次数是一个随机变量，所以要假设它服从某一种分布，我们假设它服从二项分布。求出每一类图书流通增长次数的数学期望，然后将 22 类图书流通增长期望相加起来，就是总的增长次数。

问题 2 的分析：

（1）总体分析

问题 2 实质是综合图书馆借阅期限，预约规则，续借次数，惩罚规则等因素，以提高图书的利用率与学生的满意度，降低图书的超期数为目标，制定出有效合理的图书管理规则。

（2）问题 2 的求解思路

可以用均衡的思想来分析。学校想使它的利益最大（图书利用率提高与降低超期数），学生也想从图书的得到的利益最大（借期长，续借时间长，惩罚小），两个是互相对抗的，唯有达到平衡才可以使双方的利益最大化。本质上就是双目标规划的思想。以图书

利用率与误期发生率之差最大作为目标函数，以对误期发生率、图书利用率的影响函数（主要为三类指数函数）作为约束条件，建立最优化模型。

三 模型假设

- (1) 假设每一本书的归还还是相互独立的。
- (2) 假设没有预约系统的情况下，对于某一类预约书，学生按时归还数 k 服从二项分布；
- (3) 假设整理后的数据是真实可靠的。
- (4) 假设预约失约人数与预约人数成线性关系。
- (5) 假设读者每人保留书天数、预约误期惩罚额数对误期发生率、图书利用率的影响为指数函数关系。
- (6) 假设续借期限可以看成是多次续借的总和
- (7) 假设续借期限对误期发生率、图书利用率的影响为指数函数关系。

四 符号说明

k ：没有预约系统的情况下，对于某一类预约书，学生按时归还数；
 a_i ：第 i 类图书流通增长次数（ $i=1,2,3,\dots,22$ ）；
 n_i ：第 i 类书被预约者借出的数量（ $i=1,2,\dots,22$ ）；
 A_{ik} ：第 i 书归还数为 k 时，在预约系统的影响下，流通的增长次数的数学期（ $i=1,2,\dots,22$ ）；
 A ：总的流通增长期望；
 p ：没有预约系统下，学生按时还书的概率；
 C ：组合数符号；
 \tilde{N} ：预约失败的书在5天内被其他学生借出的总数；
 M ：预约失败书的总数；
 P ：预约失败的书在5天之内被其他同学借出的概率；
 n_3 ：书的预约人数；
 m ：续借期限；
 C_{11} ：预约读者保留书天数对误期发生率的指数函数；
 C_{12} ：预约惩罚额数对误期发生率的指数函数；
 C_{21} ：预约读者保留书天数对图书利用率的二次函数；
 C_{22} ：预约惩罚额数对图书利用率的指数函数；
 C_{23} ：预约人数对图书利用率的指数函数；
 C_{24} ：失约人数与图书利用率的指数函数；
 k_2 ：预约人数对惩罚额数的指数函数；
 k_3 ：预约人数对失约人数的线性函数；
 k_1 ：预约人数对每人保留书天数的指数函数；
 y_1 ：惩罚力度对误期发生率的指数函数；
 y_2 ：惩罚力度对图书利用率的指数函数；
 $f_i(x)$ ：针对第 i 类误期读者的惩罚函数（ $i=1,2,3$ ）；
 f_i ：第 i 类惩罚函数针对第 i 类读者的惩罚力度（ $i=1,2,3$ ）；

五模型的建立和求解

5.1 预约系统评价模型

5.1.1 模型 V 的分析

模型 V（考虑到前面阶段建立的四个模型，在本论文定义为模型 V、模型 VI）的目的是建立数学模型来描述预约系统对提高图书流通率的作用。由于不知道图书馆总的流通次数，所以无法求出具体的流通率的变化，因此，可以通过流通次数的增加情况来表示流通率的变化。

预约系统决定了预约某一类书的人数，规定预约的书不能再续借，还规定了预约图书到馆后保留的天数。

为了方便讲清解题思路，拿某高校 2009 年经济类图书预约情况来说明。2009 年某高校经济类图书申请预约数为 104，预约到书为 78 本，被预约者借出的有 41 本。

假设没有预约系统的情况下，如果学生按时归还的书都大于 41 本，那么预约系统的功效就没有发挥出来，如果学生按时归还的图书数目小于 41 本，而在预约系统的督促下，又有多于 $(78-41)=37$ 个人还书，并且多出来的书可以让其他同学再借，这时预约系统就可以提高图书的流通次数。

因此，引入图书流通增长次数来描述预约系统对图书流通率的影响。图书流通增长次数定义为：

$$a_i = n_i' - k \quad (i=1,2,3,\dots,22) \quad (1)$$

其中 a_i 表示第 i 类图书流通增长次数， n_i' 表示第 i 类书被预约者借出的书数， k 是一个随机变量，表示在没有预约系统下，学生按时归第 i 类书的本数。因此， a_i 也是一个随机变量。最后用 22 类图书流通增长次数的期望来表示总的流通的增长次数，即

$$A_{ik} = \sum c_i a_i \quad (2)$$

其中 a 表示图书流通 总的增长次数， c_i 表示 a_i 的发生的概率。

下面进行详细的分析与求解：

5.1.2 模型 V 的建立

(2) 假设第 i 类书预约数中按时归还（没有预约系统，学生照样按时归还）的人数 k 服从二项分布，每个学生按时还书的概率为 p_i ，被预约者借出的书数为 n_i' ，当 $n_i' - k > 0$ 时，就是说部分被预约者借出的书是由于预约系统督促学生还回的，流通的增长次数可以表示为

$$a_i = n_i' - k \quad (k > 0) \quad (3)$$

因此，流通的增长次数的数学期望可以表示为

$$A_{ik} = \begin{cases} 0 & k \geq n_i' \\ C_{n_i'}^k p^k (1-p)^{n_i'-k} (n_i' - k) & k < n_i' \end{cases} \quad (4)$$

其中 A_{ik} 表示第 i 书归还数为 k 时，在预约系统的影响下，流通的增长次数的数学期望。

n_i' 表示在预约系统的影响下，第 i 类预约书归还的数目。

当 $k \geq n_i$ ，表示没有预约系统按时归还的书籍数不小于被预约者借出的书数，这时预约系统没有提高流通次数。

当 $k < n_i$ 时，预约系统都可以提高图书的流通次数，督促更多读者按时还书，这时预约系统提高了流通次数。

因此，第 i 类书流通增长次数的平均数学期望为

$$A_i = \sum_{k=0}^{n_i} A_{ik} \quad (5)$$

其中 A_i 表示第 i 类书流通增长次数的平均期望。对于被预约者借出的书数为 0 的图书类，可以认为它的数学期望为 0。

(3) 每一类书都有流通增长次数的平均期望，将 22 类平均期望相加起来，就可以表示整个图书馆的流通增长次数的平均期望，即

$$A = \sum_{i=1}^{22} A_i \quad (6)$$

5.1.3 模型 V 的求解

(1) 首先要确定 p 。初步估计 2009 与 2010 年预约到的总数跟预约的总数之比为 0.6447，因此， p 必定要小于 0.6447。根据实际情况，可以合理地假设 $p=0.3$ ，0.4 或 0.5。

(2) 整理 2009, 2010 年的数据

将 2009 年与 2010 年同一类书预约申请数，预约到的书，被预约者借出的数目分别对应相加起来，得到表 1

表 1 图书预约情况

| 书类别 | 预约数 | 归还数 | 被预约者借出的书 |
|-----|-----|-----|----------|
| A | 8 | 4 | 3 |
| B | 52 | 27 | 15 |
| C | 33 | 21 | 12 |
| D | 112 | 62 | 37 |
| E | 0 | 0 | 0 |
| F | 146 | 106 | 55 |
| G | 33 | 21 | 12 |
| H | 75 | 50 | 25 |
| I | 153 | 103 | 60 |
| J | 5 | 3 | 1 |

报名号 #1082

续表

| 书类别 | 预约数 | 归还数 | 被预约者借出的书 |
|-----|-----|-----|----------|
| K | 68 | 47 | 26 |
| N | 1 | 0 | 0 |
| O | 157 | 111 | 68 |
| P | 2 | 2 | 0 |
| Q | 70 | 44 | 26 |
| R | 1 | 1 | 0 |
| S | 0 | 0 | 0 |
| T | 299 | 197 | 116 |
| U | 0 | 0 | 0 |
| V | 0 | 0 | 0 |
| X | 4 | 3 | 3 |
| Z | 0 | 0 | 0 |

对于被预约者借出的书数为 0 的几类书，可以认为它们流通增长次数的数学期望为 0。通过 MATLAB 编程，求解的结果为：

表 2 不同 p 值下运行结果

| p 取值 | 流通增长次数 A |
|-----------|------------|
| $p = 0.3$ | 219 |
| $p = 0.4$ | 140 |
| $p = 0.5$ | 64 |

表 2 显示，有了预约系统以后，图书的流通数目有了明显的增长，即图书流通率也有较明显的增长。基于实际情况，选择 $p = 0.3$ 作为最合理的概率，因此流通次数增长了 219 次。

5.2 模型 VI 的建立与求解

5.2.1 模型 VI 的分析

(1) 惩罚函数

读者借书时，系统会自动判断该读者是否有误期的书。如果发生有误期的书，就调用模型 II 的 SOM 神经网络进行识别，识别该误期是属于哪种类型，然后调用模型四的惩罚函数，分别调用不同的惩罚函数对读者进行惩罚，而不同的惩罚函数也对误期发生率与图书利用率产生不同的影响。

(2) 图书预约

对一本书，系统会先判断是否已经有人预借了此书，若有，就读取预约人数。以预约人数为变量，建立预借书借期函数、惩罚数额函数、失约人数函数。可以知道，每人保留书天数、惩罚额数对误期发生率有一定的影响：预借书借期越大，误期发生率越小，惩罚额数越大、误期发生率越小。同时，每人保留书天数、惩罚额数、失约人数以及预约人数对图书利用率也是有一定的影响：每人保留书天数越大，图书利用率就越低，惩罚额数越大，图书利用率就越高，失约人数越多，图书利用率就越低，预约人数越多，说明该图书越热门，那么其利用率越高。

(3) 图书续借期限

为了简化问题，对一个图书馆，假设如果可以续借 m 次，每次续借期限是 n ，我们可以把续借 m 次每次续借 n 天，看成一次续借 $m \times n$ 天。而续借期限对误期发生率、图书利用率也有一定的影响：续借期限越长，误期发生率越小，图书利用率越低。

综合以上三点，我们综合考虑了惩罚、图书预约、退书续借对误期发生率、图书利用率所造成的影响。画出这个模型的流程图，如下：

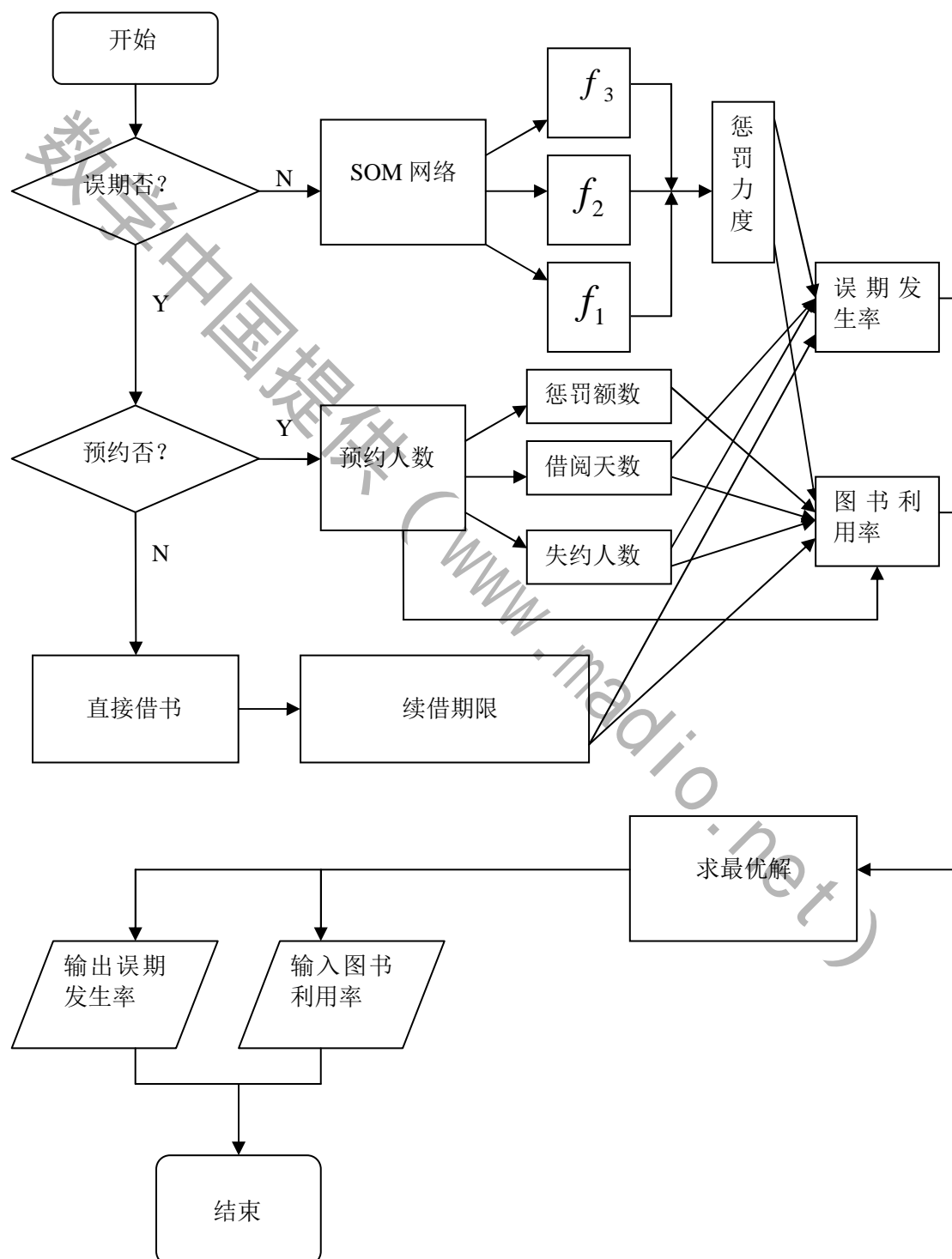


图 3 模型 VI 算法流程图

5.2.2 模型 VI 建立

1 通过对问题二的分析，我们发现惩罚、图书预约、退书续借对误期发生率、图书利用率所造成的影响主要有两种情况：1。影响因素越大，误期发生率越低、图书利用率越低；2。影响因素越大，误期发生率越高、图书利用率越高。

因此可以假设以上所述因素与误期发生率、图书利用率都是存在指数关系，并且假设在成正相关的关系下，其函数表达式为：

$$y = 1 - ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)} \quad (7)$$

如果是负相关的关系，其函数表达式可以为：

$$y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)} \quad (8)$$

为了避免在 $x=1$ 时， $y=1$ 的情况出现，也可以运用 S 型函数：

$$y = A_1 + \frac{A_2}{1 + e^{(A_3(x-k))}} \quad (9)$$

具体使用哪种类型的函数，可以按具体情况定夺。

下面将利用上面的假设建立惩罚函数对误期发生率、图书利用率的影响函数。

(1) 惩罚函数影响因素

下面建立惩罚力度对误期发生率的指数函数关系：

我们知道惩罚力度越大，误期发生率就越低，所以这里运用 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 模型，假设在惩罚力度达到 1 的情况下，误期发生率还有 0.2，惩罚力度为 0.1 时，误期发生率达到 0.8，建立惩罚力度对误期发生率的指数函数：

$$y_1 = e^{-\left(\frac{x}{0.7882}\right)^2}, x \in [0.1, 1] \quad (10)$$

其函数图像为：

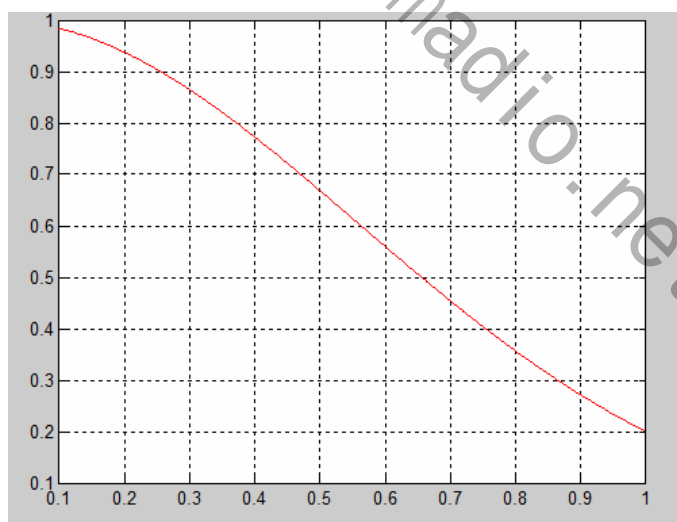


图 4 惩罚力度对误期发生率的指数函数关系图

下面建立惩罚力度与图书利用率的指数函数关系：

我们知道惩罚力度越大，图书利用率就越低，这里运用 S 型函数： $y = A_1 + \frac{A_2}{1 + e^{(A_3(x-k))}}$ 。

假设在惩罚力度达到 1 的情况下，图书利用率达到 1，惩罚力度为 0.1 时，误期发生率

达到 0.2，建立惩罚力度与图书利用率的指数函数：

$$y_2 = 0.2 + \frac{0.8}{1 + e^{(-10(x-0.5))}}, x \in [0.1, 1] \quad (11)$$

其函数图像如图 5 所示：

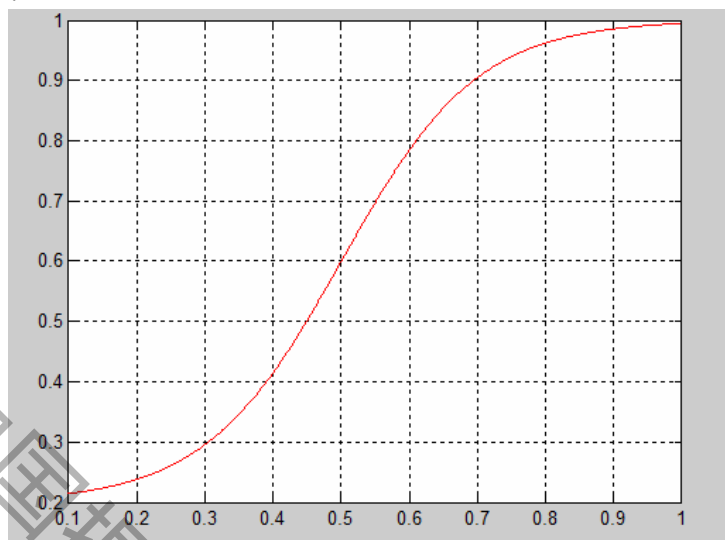


图 5 罚力度与图书利用率的指数函数关系图

下面对上面两个模型进行检验：

前面我们已经建立了 SOM 神经网络，该网络能够根据不同的读者类型、图书类型、误期时间来识别读者误期属于哪种原因。其关系图见图 6：

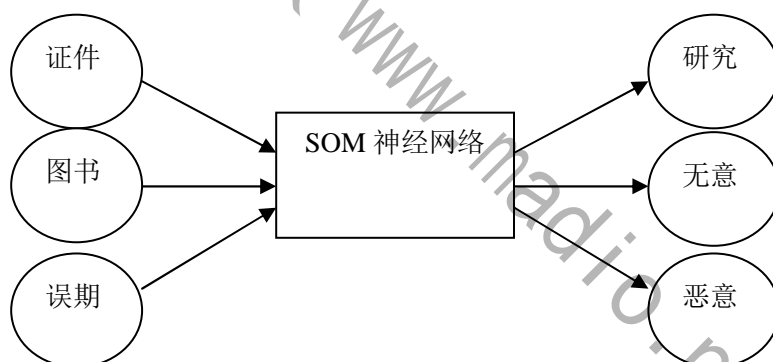


图 6 SOM 神经网络示意图

在这里了利用问题一我们利用模型 V（数据字典模型）所挖掘出来并处理过的 119 个数据作为训练样本进行训练，得到最终的分类结果（见附录 2）

结果显示：在 119 个样本数据当中，研究型误期读者有 40 人，恶意误期读者有 43 人，无意误期读者有 36 人。三种误期读者所占的比例 α_1 ， α_2 ， α_3 分别是：33.61%，36.13%，30.25%。

在模型四我们已经建立针对不同的误期读者类型的不同惩罚函数：

研究超期读者的惩罚函数：

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.1 & t \leq 1500 \\ 0.1 - \frac{0.1}{1 + e^{\left(\frac{x-3250}{400}\right)}} & t > 1500 \end{cases} \quad (12)$$

无意超期读者的惩罚函数：

$$f_2(t) = 0.1 \quad (13)$$

故意超期读者的惩罚函数：

$$f_3(t) = \begin{cases} 0.1 & t \leq 1500 \\ 0.1 + \frac{0.4}{1 + e^{\left(\frac{x-3250}{400}\right)}} & t > 1500 \end{cases} \quad (14)$$

$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的函数图像如图 7 所示：

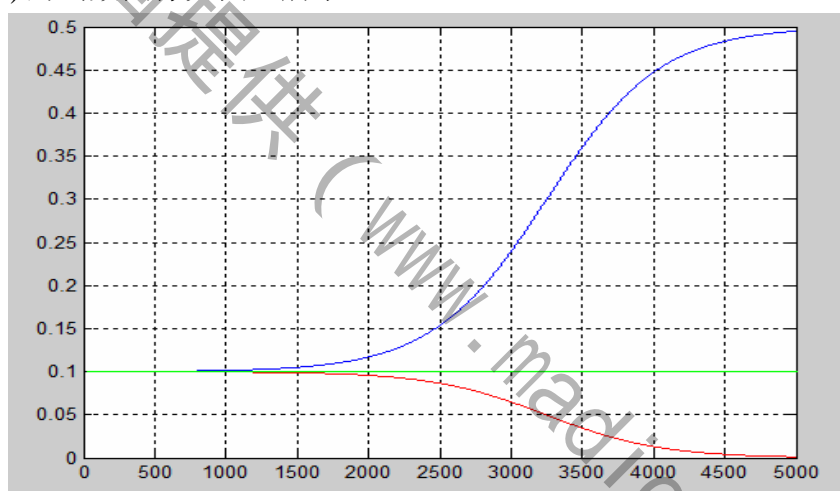


图 7 对三种读者类型的惩罚函数

为了简化问题，我们假设 $f_1(x)$ 的惩罚力度 f_1 是 1， $f_2(x)$ 的惩罚力度 f_2 是 0.5， $f_3(x)$ 的惩罚力度 f_3 是 0.3。

定义读者的综合惩罚力度是：

$$\bar{f} = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 \quad (15)$$

代入数据，计算得出 $\bar{f} = 0.62$ 。

把 \bar{f} 代入 y_1 、 y_2 进行运算，得出误期发生率、图书利用率分别是 $y_1 = 0.5409$ ， $y_2 = 0.8148$ 。该结果还是令人满意，可以接受。该结果也说明了我们的指数模型还是合理的。

(2) 图书预约影响因素

预约人数对每人保留书天数的指数函数关系：当预约人数越大，每人保留书天数就越少，假设最多可以预约 10 个人，最少预约 1 个人（也就是只有一个人借），相应的每人可以保留书天数分别为 7 天、30 天。运用 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 模型得：

$$k_1 = 30.44422e^{-\left(\frac{n_3}{8.2479}\right)^2}, n_3 \in [1, 10] \quad (16)$$

其函数图像如图 8 所示：

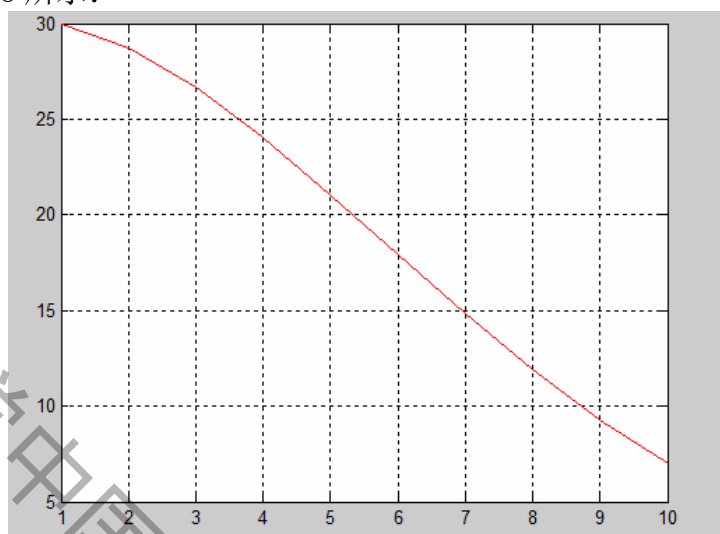


图 8 预约人数对每人保留书天数的指数函数关系图

预约人数对惩罚额数的指数函数：当预约人数越大，每人惩罚额数应该越大，假设最多可以预约 10 个人，最少预约 1 个人（也就是只有一个人借），相应的惩罚额数分别为 0.5 元、0.1 元。这里运用 $y = 1 - ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ 模型：

$$k_2 = 1 - 0.90535e^{-\left(\frac{n_3}{12.978}\right)^2}, n_3 \in [1, 10] \quad (17)$$

其函数图像如图 9 所示：

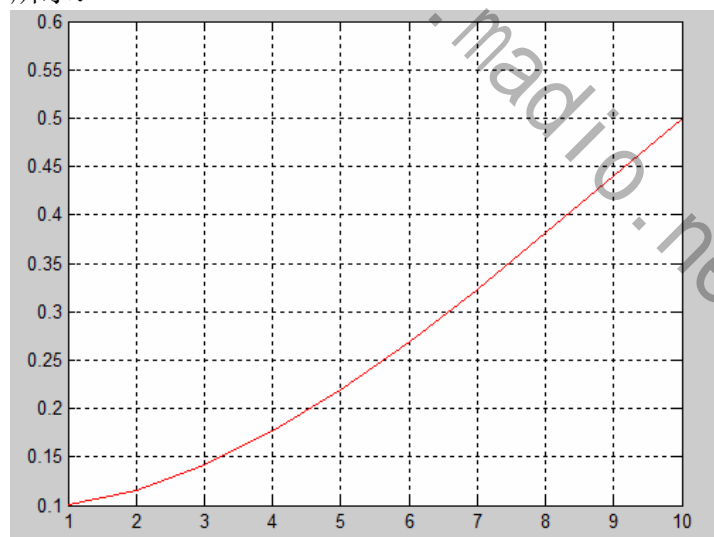


图 9 预约人数对惩罚额数的指数函数示意图

预约人数对失约人数的线性函数：根据题目给出的数据 2008 年、2009 年以及 2010 年上半年的数据：比例一（已外借/预约申请），其值分别为 17.14%、36.89%、39.13%反过来，也就说起失约率达到：82.86%、63.11%、60.87%当然，每年这个数值都在减少，在这里我们取平均值：68.94%。假设预约人数与失约人数成线性关系，即预约人数越大，失约人数也越大。并设失约人数 k_3 ，与预约人数 n_3 成线性关系：

$$k_3 = \lfloor 0.6893n_3 \rfloor, n_3 \in [1, 10] \quad (18)$$

其函数图像如图 10 所示：

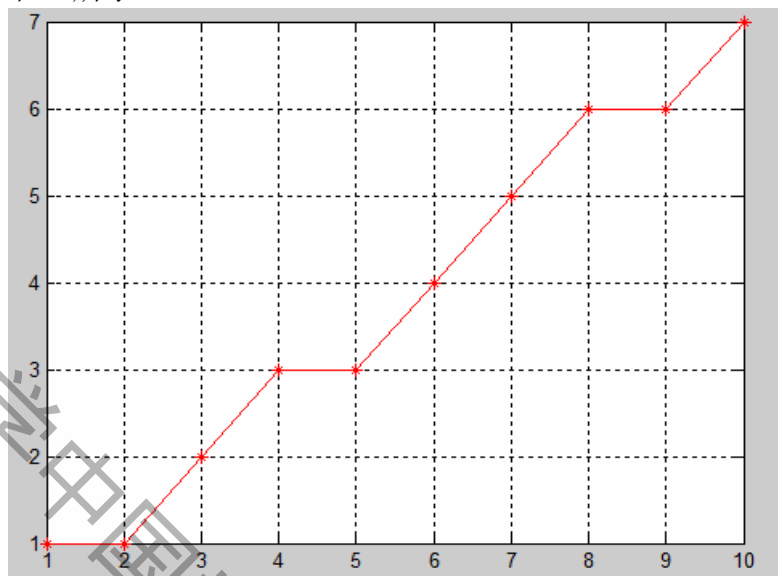


图 10 约人数对失约人数的线性函数示意图

每人保留书天数对误期发生率的指数函数：天数越大，误期发生率越小。假设天数为 7 时，误期发生率为 0.8，天数为 30 时，误期发生率为 0.2。运用 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 模型得：

$$C_{11} = 0.8665e^{-\left(\frac{k_1}{24.7763}\right)^2}, k_1 \in [7, 30] \quad (19)$$

其函数图像如图 11 所示：

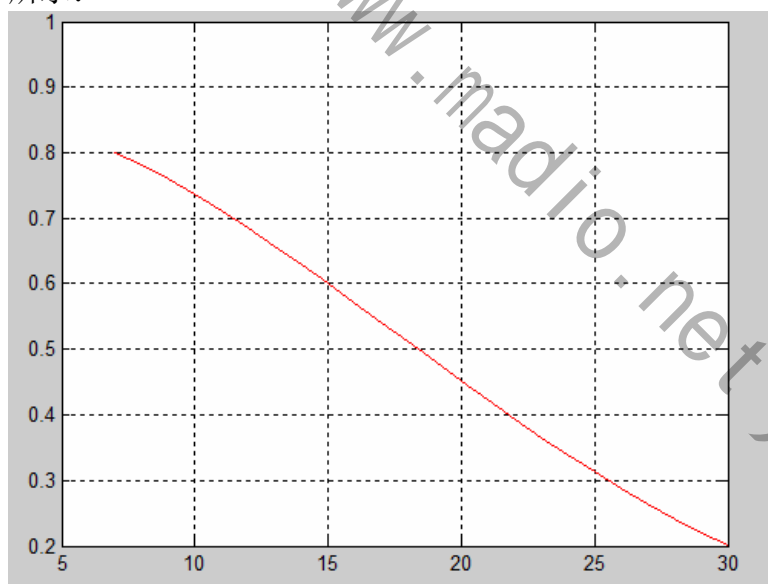


图 11 每人保留书天数对误期发生率的指数函数示意图

每惩罚额数对误期发生率的指数函数：惩罚额数越大，误期发生率越小。假设惩罚额数为 0.1 时，误期发生率为 0.8，惩罚额数为 0.5 时，误期发生率为 0.2，运用模型 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 得：

$$C_{12} = 0.8476e^{-\left(\frac{k_2}{0.4168}\right)^2}, k_2 \in [0.1, 0.5] \quad (20)$$

其函数图像如图 12 所示：

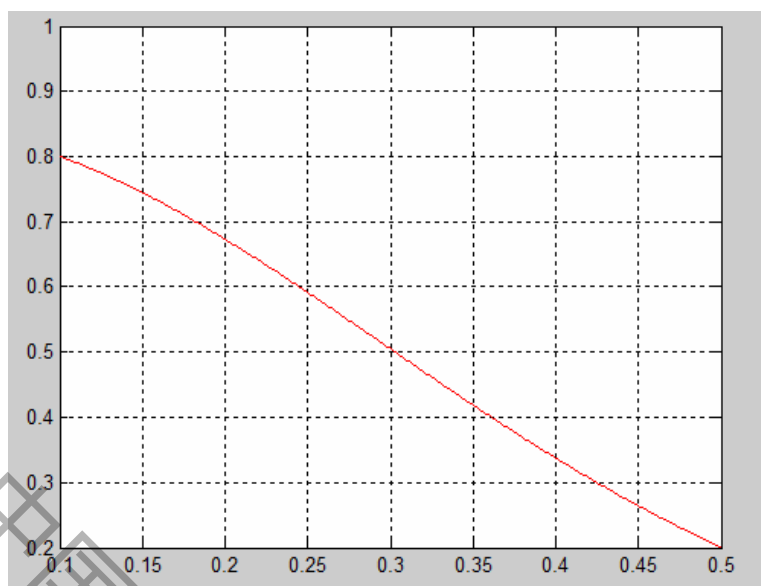


图 12 每惩罚额数对误期发生率的指数函数示意图

每人保留书天数对图书利用率的二次函数：不同于前面的指数模型，这是一个二次函数模型。因为当一个读者所保留书的时间太短，还没来得及吸收书本的知识会归还图书馆，那么利用率肯定不高，同时，如果一本书滞留在一个读者的时间太长，那么其流通率就低了，也就利用率也低。这里假设当天数为 7 时，利用率为 0.4，天数为 30 时，流通率也为 0.4，当天数为 18.5 时，达到最大，为 1。通过以上三个条件（该函数过点 (7, 0.4)，(18.5, 1)，(30, 0.4)）得出模型：

$$C_{21} = -0.0045k_1^2 + 0.1679k_1 - 0.5527, k_1 \in [7, 30] \quad (21)$$

其函数图像如图 13 所示：

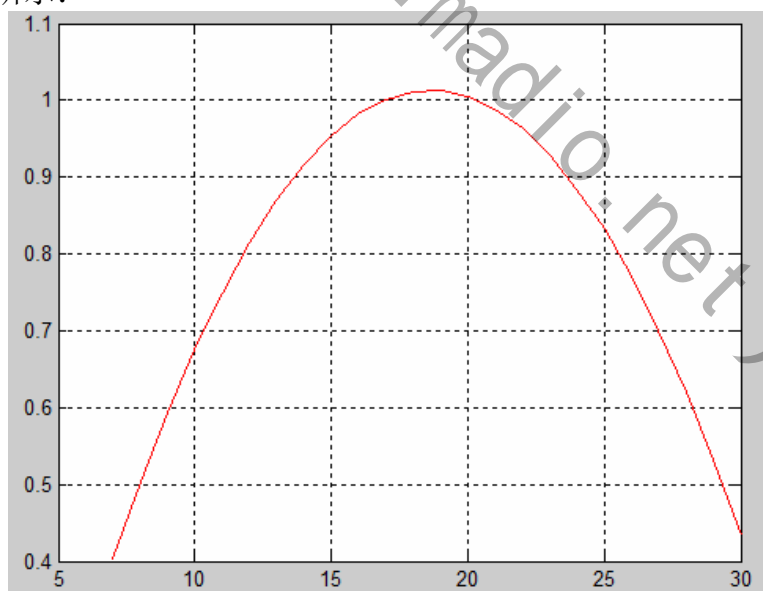


图 13 每人保留书天数对图书利用率的二次函数示意图

惩罚额数对图书利用率的指数函数：惩罚额数越大，图书利用率越高。假设惩罚额数为 0.1 时，图书利用率为 0.2，惩罚额数为 0.5 时，图书利用率为 1，运用模型得

$$y_1 = A_1 + \frac{A_2}{1 + e^{(A_3(x-k))}} \text{ 得:}$$

$$C_{22} = 0.2 + \frac{0.9}{1 + e^{-10(k_2 - 0.3)}}, k_2 \in [0.1, 0.5] \quad (22)$$

其函数图像如图 14 所示：

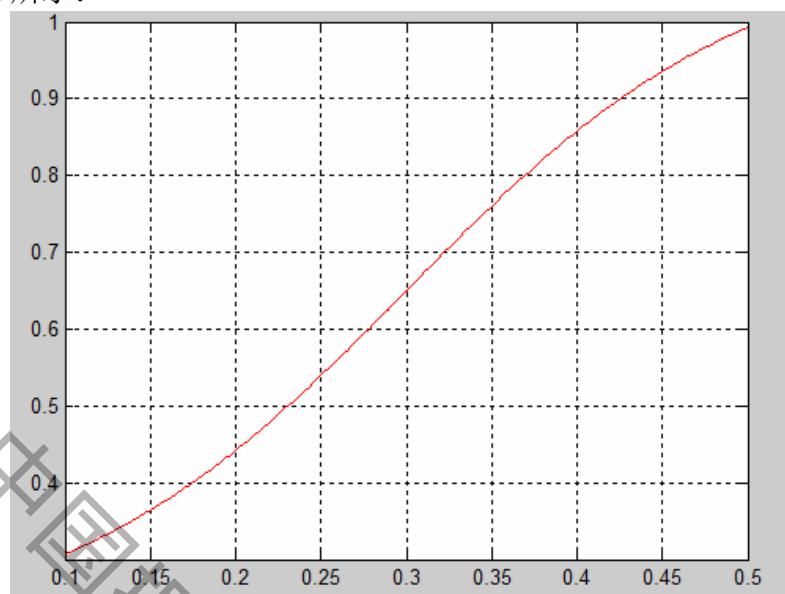


图 14 每惩罚额数对图书利用率的指数函数示意图

失约人数对图书利用率的指数函数：失约人数越大，图书利用率越低。假设失约人数为 0 时，图书利用率为 1，失约数为 7 时，图书利用率为 0.2，运用模型 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 得：

$$C_{24} = e^{-\left(\frac{k_3}{5.5177}\right)}, k_3 \in [0, 7] \quad (23)$$

其函数图像如图 15 所示：

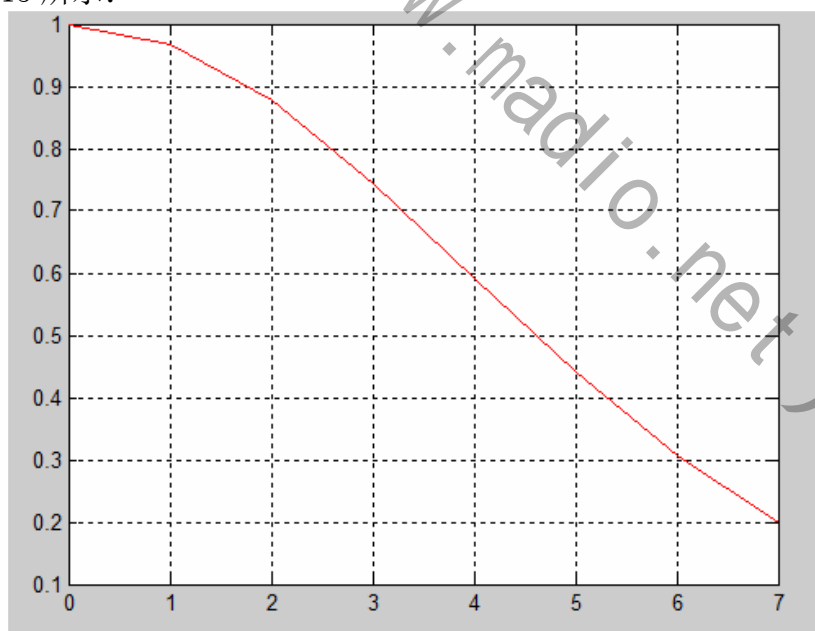


图 15 失约人数对图书利用率的指数函数示意图

预约人数对图书利用率的指数函数：预约人数越大，说明该图书也热门，图书利用率越高。假设预约人数为 1 时，图书利用率为 0.5，预约数为 10 时，图书利用率为 1，运用模型 $y = 1 - ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)}$ 得：

$$C_{23} = 0.5 + \frac{0.5}{1 + e^{(5-n_3)}}, n_3 \in [1, 10] \quad (24)$$

其函数图像如图 16 所示：

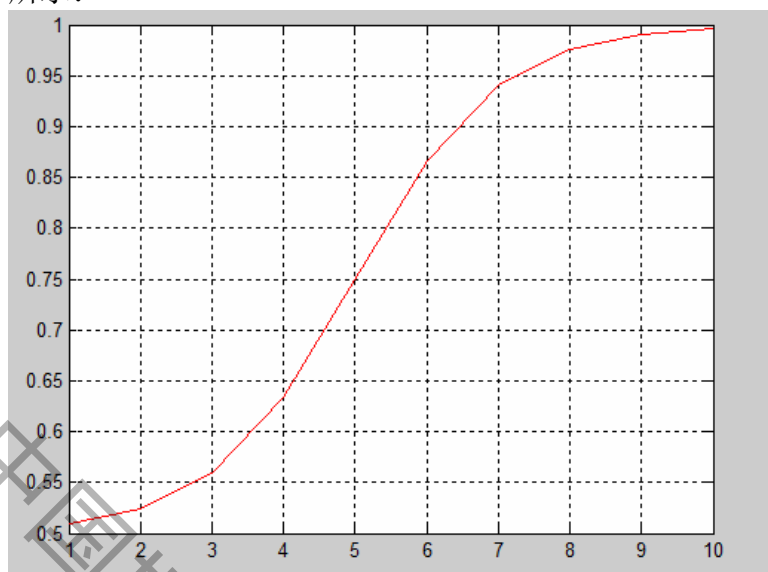


图 16 预约人数对图书利用率的指数函数示意图

(3) 图书续借期限

图书续借期限对误期发生率造成的指数函数影响：图书续借期限越大，误期发生率越小。假设图书续借期为 0 天，误期发生率为 0.8，图书续借期为 60 天（两次续借，一次 30 天），武器发生率为 0.2。运用模型 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)^m}$ 得：

$$Y_1 = 0.8e^{-\left(\frac{m}{50.9593}\right)^2}, m \in [0, 60] \quad (25)$$

其函数图像如图 17 所示：

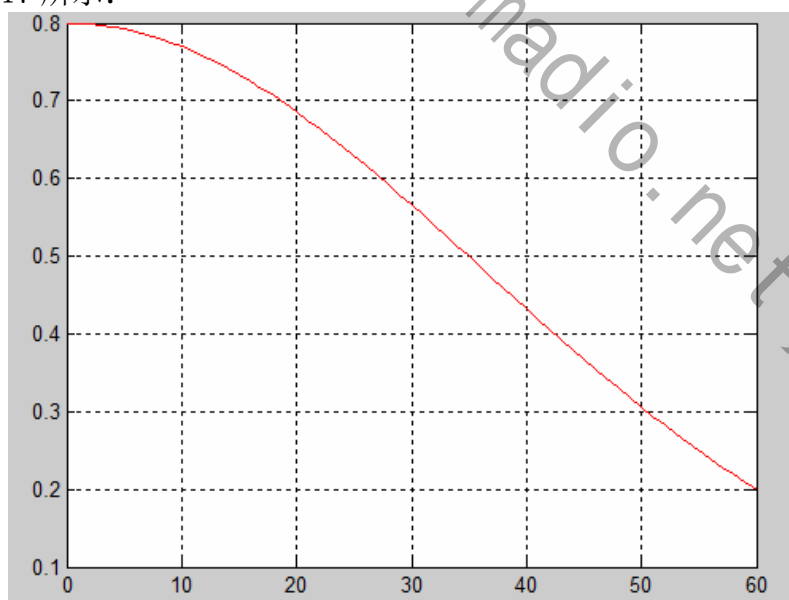


图 17 图书续借期限对误期发生率造成的指数函数示意图

图书续借期限对图书利用率造成的指数函数影响：图书续借期限越大，图书利用率越小。假设图书续借期为 0 天，图书利用率为 0.4，图书续借期为 60 天（两次续借，一次 30 天），武器发生率为 0.2。运用模型 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)^m}$ 得：

天), 图书利用率为 0.8。运用模型 $y = ae^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$ 得:

$$Y_2 = 0.8e^{-\left(\frac{m}{72.0673}\right)^2}, m \in [0, 60] \quad (26)$$

其函数图像如图 18 所示:

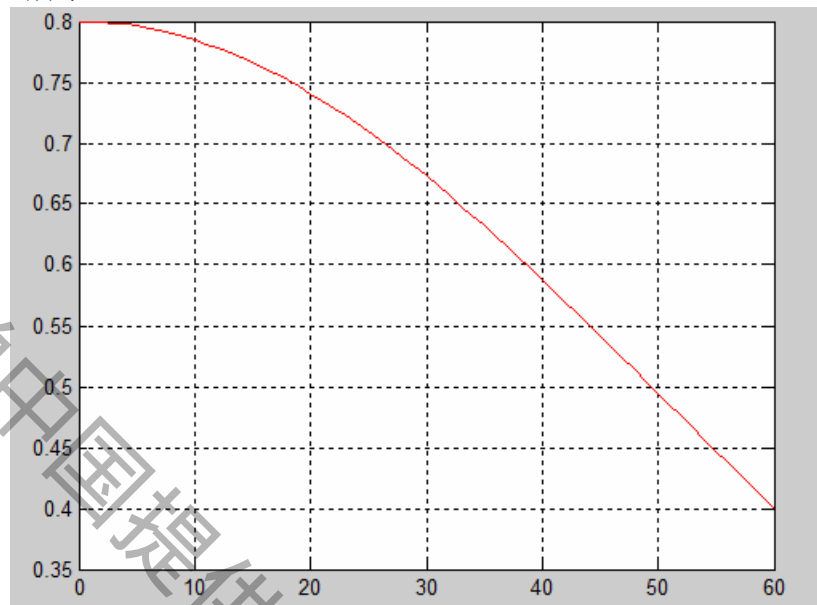


图 18 图书续借期限对图书利用率造成的指数函数示意图

模型的求解:

综合以上的各个小模型, 得出

误期发生率

$$P_1 = \frac{C_{11} + C_{12} + Y_1}{3} \quad (27)$$

图书利用率

$$P_2 = \frac{C_{21} + C_{22} + C_{23} + C_{24} + Y_2}{5} \quad (28)$$

最终模型为:

$$\text{Max} \quad P = \frac{P_2 - P_1}{2} \quad (29)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} k_1 = 30.44422e^{-\left(\frac{n_3}{8.2479}\right)^2} \\ k_2 = 1 - 0.90535e^{-\left(\frac{n_3}{12.978}\right)^2} \\ k_3 = \lfloor 0.6893n_3 \rfloor \\ C_{11} = 0.8665e^{-\left(\frac{k_1}{24.7763}\right)^2} \\ C_{12} = 0.8476e^{-\left(\frac{k_2}{0.4168}\right)^2} \\ C_{21} = -0.0045k_1^2 + 0.1679k_1 - 0.5527 \\ C_{22} = 0.2 + \frac{0.9}{1 + e^{-10(k_2 - 0.3)}} \\ n_3 < 10 \\ m < 60 \end{cases} \quad \text{s.t.} \begin{cases} C_{23} = 0.5 + \frac{0.5}{1 + e^{(5 - n_3)}} \\ C_{24} = e^{-\left(\frac{k_3}{5.5177}\right)} \\ Y_1 = 0.8e^{-\left(\frac{m}{50.9593}\right)^2} \\ Y_2 = 0.8e^{-\left(\frac{m}{72.0673}\right)^2} \\ P_1 = \frac{C_{11} + C_{12} + Y_1}{3} \\ P_2 = \frac{C_{21} + C_{22} + C_{23} + C_{24} + Y_2}{5} \\ n_3 \in N^+ \\ m \in N^+ \end{cases} \quad (30)$$

运用 MATLAB 编写程序，求解得出结果：最优的预借书人数为 6 人，每人保留书的天数为 18 天，发生误期的惩罚额数为 0.27，续借的期限为 60 天，即可以两次续借，一次 30 天。图书利用率为：0.6813，误期发生率为：0.4234。

再考虑前面惩罚力度对误期发生率、图书利用率的影响 (0.8148, 0.5409)，得出最终的图书利用率为：0.7481，误期发生率为：0.4822。结果基本是令人满意的。

5.3 图书管理的方案：

- (1) 实行预约制度，对于同一本书，最多预约的人数为 6 人，每人保留书最多 18 天。
- (2) 对于正常读者发生误期，判断属于哪种原因发生误期，调用不同的惩罚函数进行惩罚。
- (2) 对于预约超期的惩罚力度，平均每天控制在 0.27 元。
- (3) 借期为一个月，续借有两次，每一次 30 天。

六 模型的改进

6.1 模型 V 的改进

在实际预约系统中，由于种种原因，预约失败的现象时有发生。在预约的书被归还以后，预约者迟迟不来取书，但图书馆必须为预约者保留一段时间。在这段时间里，可能有些读者需要借书，但是无法借阅，这就造成了一部分图书的流通数目降低。为了能够更精确地评价预约系统对流通率的作用，我们考虑对模型 V 进行改进，建立一个同时考虑预约成功带来的正面影响，也考虑预约失败带来的负面影响的评价模型。

在图书保留其间，假设有读者借阅的概率为 P ，而每一类书被读者借阅都是相互独立的，所以这些书总数 M 中，有 N 本书被读者借阅的概率是服从二项分布的，我们可以得出 N 的数学期望值：

$$\tilde{N} = \sum_{k=0}^M C_M^k P^k (1-P)^{M-k} k \quad (31)$$

所以改进后的模型为：

$$A = \sum_{i=1}^{22} A_i - \sum_{k=0}^M C_M^k P^k (1-P)^{M-k} k \quad (32)$$

由表一得到预约的书的归还（第三列）总数为：802，而其中被预约者借出的总数为：459，即还剩下 $(802-459)=343$ 本书是被预约了但是没有借出，即 $M=343$ 。另外，

在这里我们取 $P=0.1$ ，通过 MATLAB 编程，求解的结果为： $\tilde{N}=34$ 。由此，得到改进后的图书流通数目的增长情况如下表

表 3 模型改进后不同 p 值下运行结果

| p 取值 | 流通增长次数 A |
|---------|------------|
| $p=0.3$ | 185 |
| $p=0.4$ | 106 |
| $p=0.5$ | 30 |

取 $p=0.3$ ，最终得到的增长次数为 185 次。

七 模型讨论

7.1 模型 V 的优点

(1) 模型的建立思路清晰，考虑的问题也比较全面，既考虑了预约系统对于图书的流通率的正面影响，也考虑了其中的负面影响。

(2) 模型的适用性和灵活性较强，可以通过收集不用的相关数据，即根据不同图书馆的预约系统的运行状况，得出预约系统对图书流通率的影响。

(3) 模型很好地转化了问题的角度，从图书流通次数的增加，体现图书流通率的增加。

7.2 模型 V 的缺点

(1) 模型参数的定义存在一定的主观性。

7.3 模型 VI 的优点

(1) 模型 VI 很好的利用前面模型 I 数据字典模型、模型 II 的 SOM 神经网络模型、模型 IV 的惩罚函数，来验证本次建模中的假设函数是否合理、正确。

(2) 模型 VI 构造了 13 个初等函数，这些构造函数虽然存在一定的主观性，但是也能较好的描述各种因素对误期发生率、图书利用率的影响。体现了本文的大胆创新，勇于实践。

7.4 模型 VI 的缺点

(1) 模型 IV 构造的函数人的主观性强，不一定完全符合实际情况。

(2) 模型 VI 的失约人数与预约人数的关系的比例系数是个平均值，如果是考虑某一类书的话，应该利用题目给出的数据中具体某一类书的比例一(已外借/预约申请)。

八 参考文献

- [1] 李祖芳, 侯建华, 宋红梅, 高校网络图书预约失败原因的调查分析, 图书情报, (25) 125:52-52, 2008 年
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊, 数学模型, 第三版, 高等教育出版社: 2009 年
- [3] 韩力群, 人工神经网络理论设计及应用, 北京: 北京工业出版社, 2007.
- [4] 谭浩强, C 程序设计 (第三版), 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [5] 韩中庚, 数学建模竞赛——获奖论文精选与点评, 北京: 科学出版社, 2007.

数学中国提供 (www.madio.net)