

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1124

参赛队员（签名）：

队员 1：林传通

队员 2：黄晓健

队员 3：邱少峰

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1124

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降的最佳姿态

关 键 词 迫降姿态 数据拟合 微分方程

摘 要：

建立了客机水面迫降时的姿态模型，使飞机在失去动力的情况下驾驶员能以正确的姿态迫降，减少伤亡。在飞机表面没有损坏前提下，给出了较理想的姿态迫降，并且根据不同受力的情况给出了相应的迫降姿态。

在第一阶段的模型中，建立了飞机迫降刚接触水面的速度模型，给出了飞机在飞行过程中受力情况及速度与时间、高度的关系，为解决飞机与水面接触的安全夹角 θ 打下基础。为解决飞机受的最大冲撞力问题，特建立第二阶段的模型，它给出了飞机在什么时候受冲撞力最大，以及受最大冲撞力 $f_{\text{水}}$ 与角度 θ 、速度 v_m 的关系，从而为进一步解决飞机迫降姿态建立理论依据。第三阶段的模型就是解决飞机以何种姿态迫降了，为此我们在前面两阶段的基础上建立了飞机所受压强 P 与角度的关系，也就在飞机结构材料一定（能承受最大压强 P_m ）的情况下，可以得出角度 θ 的范围，从而得到飞机安全迫降的姿态。

为更好的保证上述模型的可行性，我们特建立了：

优化模型：有风存在及考虑飞机机体形状的前提下的迫降最佳姿势模型；

在增加空气流量和飞机形态两因素时，在原模型的基础上，增加了阻力，减少入水初速度 v_1 及入水的接触面积，再根据前面的模型可以得出 θ 的更精确的取值。

参赛队号 1124

参赛密码 _____
(由组委会填写)

所选题目 A 题

英文摘要

Abstract

We establish the attitude model of an aircraft while it making an emergency water landing, which can make a correct posture landing and save lives when the aircraft lost power. Without damaging the surface of the aircraft, we give an ideal posture board, and give relevant posture according to the different stressing state as well. We establish the time profit model of the force landing aircraft when it just touches the water surface. We also give the relation of stressing state, time and high degree while the aircraft was in flight, which will make a good foundation for solving the security angle θ between the aircraft and water surface. In order to solve the problem of maximum clashing tectonic forces of the aircraft, we establish the second step model, which can indicate the time when the aircraft has maximum clashing tectonic forces, what's more, it can give us the relation between the maximum $f_{\text{水}}$ and angle θ speed v_m , thus establishing theoretical basis of posture of the force landing aircraft.

The third model is used to figure out which posture the force landing aircraft will choose, so we establish the relation between pressure P and angle according to the former two stages, while the aircraft structure maintaining a constant, in this way, We can draw the range of angle θ , so that we can have the secure posture.

In order to assure the feasibility of those models, we also establish the follows:

Optimal model: The model which considering the structure of the force landing aircraft under the condition that the wind is exist.

While increasing the air flow and aircraft configurations and on the basis of original model, diminish the speed and the contact area at the moment when the aircraft enter the water, so that we can obtain more accurate value of according to the foregoing model.

题目背景

随着航空业的迅速发展，客机跨国跨海域飞行运作也越来越频繁，发生在水上迫降和坠毁的事故也越来越多。

2009 年1 月15 日下午（美国东部时间），US Airways 所属第1549 航班（空中客车A320 客机（资料见附表一））在起飞后不久在纽约哈德逊河紧急迫降。经及时救助，机上155 人（其中包括两名机师和三名乘务人员）在飞机沉没之前全部获救。该起事故造成78 人受伤，无人死亡。

这架客机从纽约长岛拉瓜迪亚机场起飞约90 秒后遭飞鸟撞击，导致两个发动机损坏。机长萨伦伯格凭借着出色的驾驶技术和冷静的判断使飞机迫降在哈德逊河河面。而飞机上的乘客在乘务员的指挥下，有秩序地逃出紧急舱门并全部获救。

问题重述

大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。飞机在平静的河上进行迫降需要给出它的最佳姿势，即：求出与水平面夹角的相对最优值。

问题分析

大型客机安全着陆所需要的是较小的速度和良好的机动性，因此需要应用动力系统对客机进行减速。因而大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。因此在失去动力系统对飞机进行控制的情况下，只能对迫降的地点和飞机迫降姿势以及飞机自身的结构强度等重要因素进行考虑。

而飞机在平静的河上进行迫降，决定是否安全着陆的最关键在于：飞机的迫降姿势和飞机自身的结构强度。然而，飞机的结构强度在机身设计时已经到达一个标准水平（即飞机的结构强度一定），在这样的情况下，我们需要解决的就是：

- （1）飞机在空中降落的整个过程中的速度是怎么样变化的？
- （2）飞机迫降河面瞬间机身与水平面的夹角为何值是飞机能安全迫降？
- （3）飞机进入水面时受到压强在何种条件下符合安全范围？

名词解释

1. 飞机结构强度：飞机结构设计必须满足强度要求。满足强度要求指的是在飞机各种使用情况的外载荷作用下，飞机结构能够符合安全规定。飞机结构的强度计算，以结构力学、弹性力学、塑性力学、钣金理论、疲劳和断裂力学为理论基础。

2. 飞机在水上安全迫降：在允许的着水姿态下，需要保证机身下部蒙皮不破裂，从而使得机舱在一定时间内不进水，以保证机身能够漂浮一段时间，为乘员安全撤离赢得足够时间。

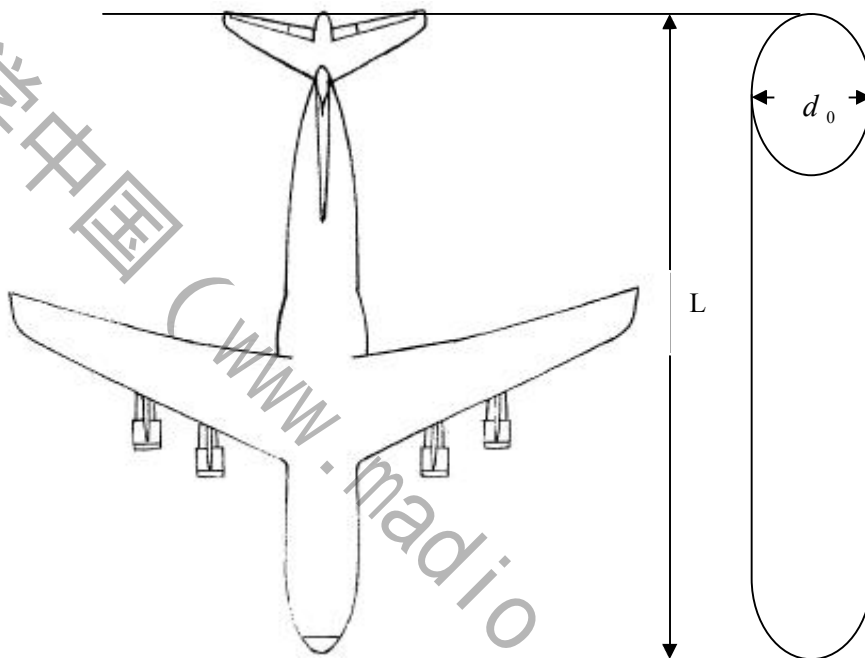
3. 飞机动力系统：为飞机提供动力，推动飞机前进的装置称为动力装置。它由发动机、推进剂或燃料系统以及保证发动机正常有效工作所必需的导管、附件、仪表和飞行器上的固定装置等组成。为了方便起见，我们把动力系统简称为发动机。

建模假设

飞机飞行原理主要涉及物理学中的流体力学。因此在模型建立初期我们需要对模型本身以及模型所在环境中的相关物理量进行假设。

（一）关于飞机本身的模型假设。

大多数飞机都是由下面六个主要部分组成：机翼、机身、尾翼、起落装置、操纵系统和动力装置。它们各有其独特的功用。相对于飞机外形结构的复杂性，在模型建立初期，我们将飞机整体假设成为一个以机身最大横截面直径为底面直径，以机身长度为长的圆



柱体（如图）。

因而，飞机整个迫降过程，就视为相应的模型圆柱体的运动过程。

（二）关于飞机飞行阻力的假设

1. 飞机飞行在空气中会有各种阻力，阻力是与飞机运动方向相反的空气动力。按阻力产生的原因可分为摩擦阻力、压差阻力、诱导阻力和干扰阻力。以上四种阻力是对低速飞机而言，至于高速飞机，除了也有这些阻力外，还会产生波阻等其他阻力。

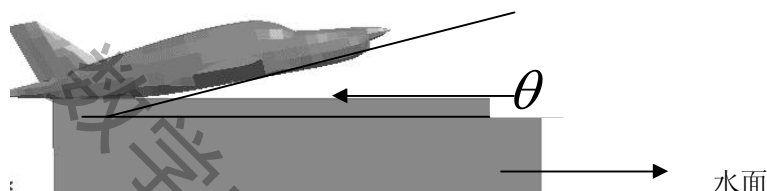
因此，由于飞机迫降模型的复杂性，在模型设立初期，我们将飞机在空中飞行时所受到的各种阻力的合力统设为一个阻力。

2. 由于阻力的大小和方向随着飞机速度，飞机的高度，不同海拔高度中的空气密度和温度在时刻变化，因此，为了模型简化，我们将飞机在空中所受的阻力大小设为只与速度大小成比例的二次关系式，不随其他影响因素而变化，并假设其方向时刻与飞机机身的方向垂直。

3. 假设飞机在降落过程中飞行不受风向和风力的影响

(三) 关于飞机飞行方向与河面水平线的方向夹角的假设。

1. 由于飞机在飞行过程中他的机身方向与水平方向（假设水平方向即河面方向）的夹角是一定的，即飞机在失去动力的情况下通过飞行员不断对飞机的飞行方向进行改变而实现夹角变。
2. 由于客机迫降河面的整个模型是个有初速度的三维模型，因此，由于飞机在迫降之后可能出现机身翻转的立体运动，十分复杂。在模型误差允许的范围内，我们将飞机着陆视为是将飞机和河面视为两条直线的二维模型，飞机和河面的夹角还是其与水平方向的那个角。（图2）



(四) 关于飞机迫降安全以及临界状态的假设。

1. 前面提到，飞机是否安全迫降，主要与飞机自身的结构强度和飞机迫降的姿势有关。因此，我们假设飞机自身的结构强度已经达到一个标准程度，即确定飞机自身能够承受的最大压强为一个定值（即临界值）。
2. 经过分析，我们设定飞机在进入水中达到飞机的最大速度时，飞机所承受的压强最大。
3. 即判定飞机是否安全着陆的标准假定为：飞机所受的压强小于临界值，这时就能保证飞机机身不破裂，也就保证其在一定时间内不会进水而下沉。

符号说明

符号	符号说明	符号	符号说明
L	机身长度	d_0	飞机最大横截面的直径
θ	飞机与水平面的夹角	P_0	飞机能承受的最大压强
$f_{\text{空}}$	空气阻力	$f_{\text{水}}$	水的阻力
$\rho_{\text{空}}$	空气密度	$\rho_{\text{水}}$	水的密度
$k_{\text{空}}$	空气阻力系数	$k_{\text{水}}$	水的阻力系数
S_x	飞机相对水平方向面积	S_y	飞机相对垂直方向面积
v_x	飞机相对水平方向的速度	v_y	飞机相对垂直方向的速度
m	飞机的质量	g	重力加速度

t_0	飞机从失去动力到接触水面时用的时间	h_0	飞机失去动力时的高度
v_m	飞机到达零界条件时的速度	h	飞机到达零界条件时下沉的高度
$S_{\text{表}}$	飞机到达零界条件时与水的接触面积	P	飞机在水中受到的压强
k_0	飞机落入水中的高度与速度的比例系数	$f_{\text{浮}}$	飞机在水中受到的浮力

模型的建立

我们已经将飞机着陆的整个过程分解成三个阶段的问题。分别是飞机在空中未进入水中的运动模型、飞机接触水面瞬间的夹角模型和飞机在水中速度达到最大值时的压强模型。

飞机迫降在不同阶段的模型：

阶段一：飞机空中飞行时的速度变化模型。

飞机在突发情况下失去动力，将其视为圆柱体且其运动为速度不均匀变化的抛体运动，利用一阶线性常微分方程表示变化的加速度（速度对时间的微分），从而得出飞机在不同时刻的速度，并且根据下落高度利用定积分表示下落的时间，进而确定在接触水面瞬间的速度和从下落到接触水面的时间。

阶段二：飞机在接触水面瞬间的夹角及其相关变量的变化情况以及预测。

飞机在接受水面的瞬间，其夹角时确定的，但是接触水面之后，飞机受力情况瞬间发生改变，

利用matlab软件作图可预测飞机进入水面后的速度，压强的变化情况。

阶段三：飞机进入水面后，受到水的浮力和摩擦力的强烈作用，在达到速度最大值的瞬间，机身受到的压强最大，通过飞机结构强度所能忍耐压强的最大值应用能量守恒和动能定理以及受力平衡和变量取极限的方法来定出飞机着陆水面的相对最佳夹角。

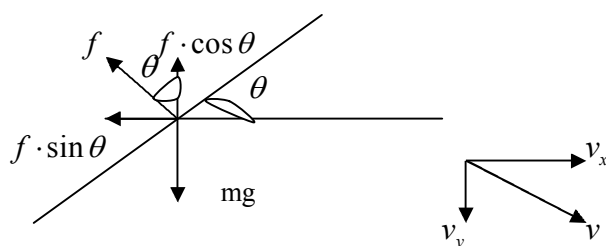
模型的求解

【1】飞机迫降第一阶段模型求解。

（目的：求出飞机在接触水面时水平和竖直方向的速度）

大型客机在空中飞行时突发状况失去动力，飞行员不得不采取措施准备紧急迫降。当飞机在空中突然失去动力后，发动机熄火，使得飞机做抛体运动。在这种情况下，飞机的运动轨迹看成是一条连续的光滑曲线，则：

首先，我们对飞机的受力情况进行分析，（如图）



根据图形可以看出，阻力 f 是阻止飞机下落时速度增加的最重要的因素，而速度方向是与阻力方向相反的，我们将速度同样分为水平和竖直两个方向。由于随着速度的增大，阻力也在增大。

因为它的运动轨迹是连续的，所以用常微分方程可列得：

飞机在任意时刻水平方向上都有：（空气密度见附表二）

$$m \cdot \frac{dv_x}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S_x}{2} \cdot v_x^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

飞机在任意时刻水平方向上都有：

$$m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S_y}{2} \cdot v_y^2 - mg \quad \dots\dots\dots (2)$$

这里我们令 $k_1 = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S_x}{2m}$

$$k_2 = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S_y}{2m}$$

这里的 k_1 、 k_2 作为阻力关于速度的比例系数。 $\dots\dots\dots (3)$

应用matlab程序联立三个方程式可求得 v_x 和 v_y 。下列为程序段：

>> dsolve('Dv_y-g+k₂*(v_y^2)=0','t')

v_y =

tanh(t*(g*k₂)^(1/2)+C1*(g*k₂)^(1/2))*(g*k₂)^(1/2)/k₂ ;

>> dsolve('Dv_x=k₁*(v_x^2)','t')

v_x =

-1/(k₁*t-C2)

(详见附表三)

将t=0的情况（即飞机失去动力的瞬间）带入上式结果可得：C1=0, C2=1/v₀,

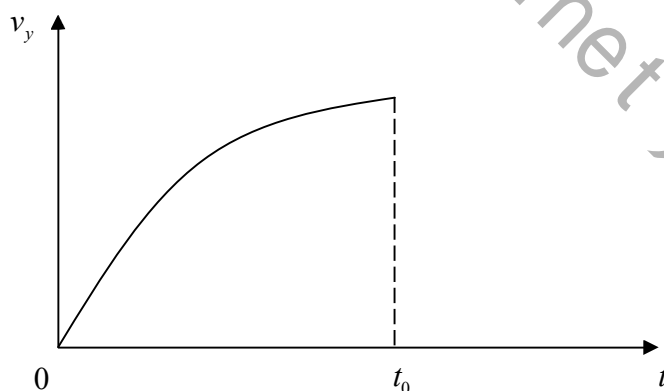
;

所以由第 (1)、(2) 式和C1、C2可得关系式：
$$\begin{aligned} v_x &= f(t) \\ v_y &= g(t) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

又由于时间t是和飞机失去动力时的高度h有下列式子的关系的，因而：

$$h_0 = \int_0^{t_0} g(t) dt \dots\dots\dots (5)$$

通过关系式，我们可以得到竖直方向速度v_y和时间t的而为左边图像：



其中我们令 $v_1 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}$ （其中v₁为接触水面瞬间飞机的和速度）。

分析总结：这里曲线和坐标轴x所围成的图形面积就是高度h₀。

这样，经过解常微分方程和应用matlab软件，我们已经成功计算出飞机在接触水面之前

的运动情况，

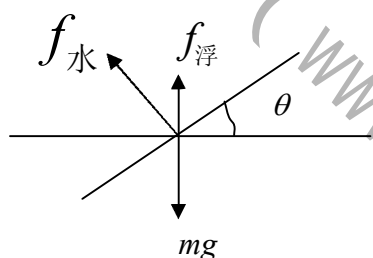
得出了在任意时刻的竖直速度和水平速度的量 v_x 和 v_y ，同时通过定积分得出了时间 t_0

和高度 h_0 的关系。通过数值方向速度的变化情况，我们也可看出飞机在竖直方向上是做加速度减少的加速运动。因而，这也为第二阶段的模型奠定了基础。

【2】飞机迫降第二阶段模型求解。

（目的：根据飞机接触水面瞬间的受力情况，判定飞机从这刻起进入水面后的水平和竖直速度变化情况以及能量变化规律）

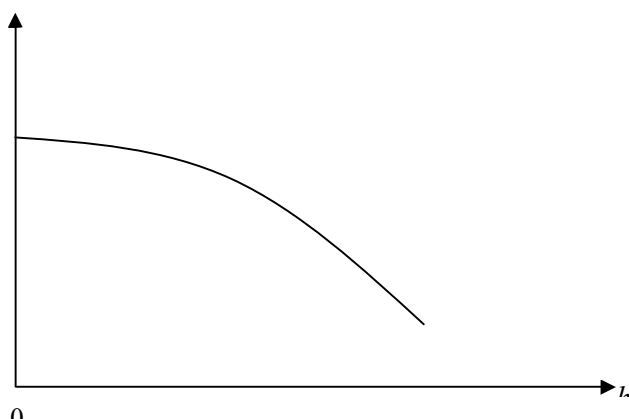
大型客机在进入水面的瞬间，飞机受到的力瞬间增加了水的浮力 $f_{\text{浮}} (= \rho_{\text{水}} g V_{\text{排}})$ 和除浮力外水的阻力 $f_{\text{水}}$ ，我们通过受力分析可得：



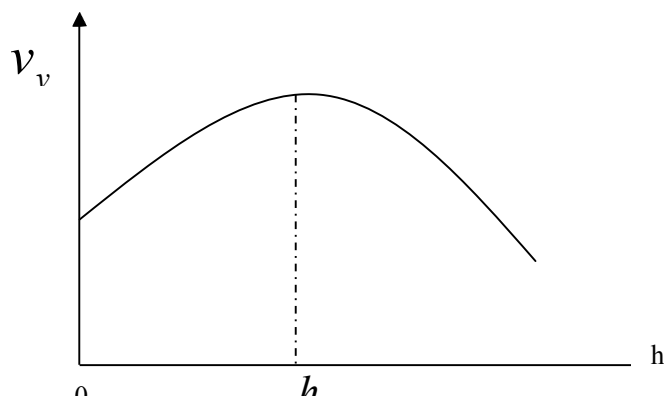
从而可得受力平衡方程式：
$$ma = mg - f_{\text{水}} \cdot \cos \theta - f_{\text{浮}} \dots\dots\dots (6)$$

又有关系式：
$$mg = f_{\text{水}} \cdot \cos \theta + f_{\text{浮}} \dots\dots\dots (7)$$

由（6）式和（7）式可得水平方向的速度变化关于下沉高度 h 的变化关系图：



以及竖直方向上的速度变化图：



分析总结：从图像可以看出，无论是水平方向上的速度还是竖直方向上的速度，他们都是先增大后减小的。又水的阻力与飞机的速度成正比例关系，因此，当速度增大时，阻力增大。

我们假设当飞机的速度到达最大值时，飞机受到的水的压强最大，从而引出飞机迫降的第三个阶段模型。

【3】飞机迫降第三阶段模型求解。

（目的：飞机机舱所受的压强是变化的，有能量守恒定律可得 v_m 和 $f_{\text{水}}$ 从而让这个最大值小于飞机的结构强度所能承受的压强，求出夹角 θ 的范围，再根据matlab图像求出相对最好的角度）

由第二阶段的模型以及相关研究资料数据表明：当水对飞机的阻力最大时，这时压强最大（如下图和数据所示），且这个压强必须小于所定的临界值。

（我们查阅相关数据拟合可得图像）

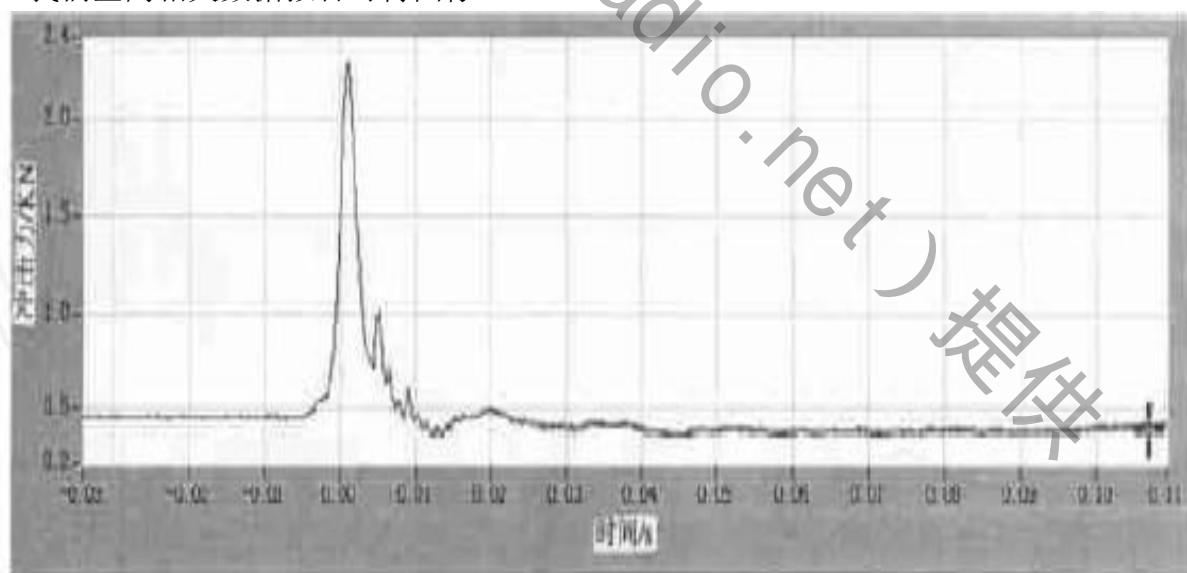


Table 1 Calculated result of actual wave of minor cells by the formula $F = \frac{\int_0^x f(t) dt}{T}$

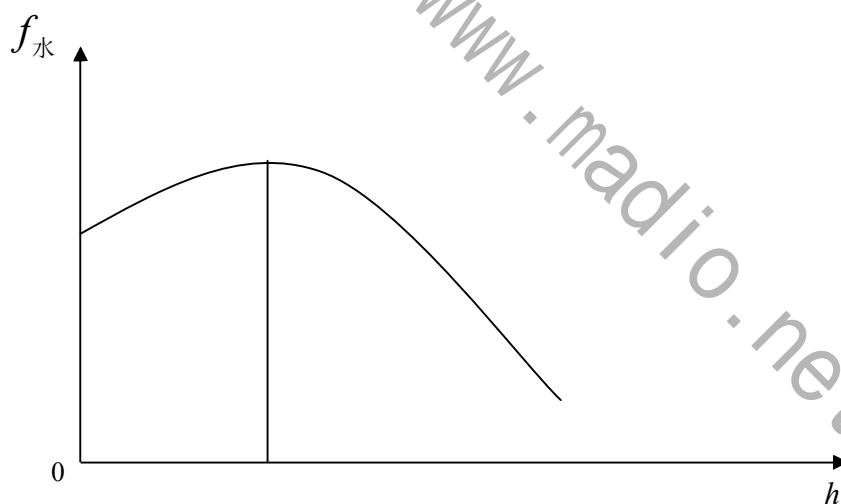
序号	冲量 (KN s)	作用时间 (s)	最大冲击力 (KN)	计算冲击力 (KN)	最大冲击力 / 计算冲击力	序号	冲量 (KN s)	作用时间 (s)	最大冲击力 (KN)	计算冲击力 (KN)	最大冲击力 / 计算冲击力
1	0.02	0.01	11.33	3.00	3.78	9	0.11	0.01	39.28	7.57	5.19
2	0.02	0.02	6.37	1.06	5.99	10	0.14	0.01	57.53	17.38	3.31
3	0.03	0.01	8.07	1.92	4.20	11	0.17	0.01	72.94	21.63	3.37
4	0.03	0.01	17.15	4.25	4.03	12	0.14	0.01	60.89	20.14	3.02
5	0.04	0.01	18.62	5.50	3.38	13	0.21	0.01	79.28	21.20	3.74
6	0.05	0.01	27.25	5.89	4.63	14	0.18	0.01	74.53	22.38	3.33
7	0.07	0.01	34.26	10.00	3.43	15	0.20	0.01	67.98	20.30	3.35
8	0.10	0.01	53.95	14.86	3.63	16	0.29	0.02	52.21	16.00	3.26

因此，我们先将水的阻力类比于空气的阻力，可以得到水的阻力公式：

$$f_{\text{水}} = (1/2)k_{\text{水}}\rho_{\text{水}}sv^2 \dots\dots\dots (8)$$

因而水的阻力也与飞机的速度成正比，

因此当飞机的速度变化时，水的阻力也在无时无刻的变化，直到飞机停止。从而得到水的阻力 $f_{\text{水}}$ 与 h 的变化关系图：



然后由能量守恒定律可得方程： $mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 - W_f \dots\dots\dots (9)$

推导可得：

$$P = \frac{f_{\text{水}_m}}{s_{\text{表}}} = \frac{\rho_{\text{水}} h d k_{\text{水}} v_m^2}{\pi d \frac{h}{\sin \theta}} = \frac{\rho_{\text{水}} k_{\text{水}} \sin \theta}{\pi} v_m^2 \dots\dots\dots (10)$$

从而由第（10）式可以得出飞机受到的压强 P 与最大速度 v_m 以及 θ 角的关系。

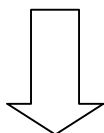
我们知道飞机的下降高度 h 与飞机的初速度 v_0 存在一定的关系，且假设不影响结果的产

生,

因此我们假设 $h = k_0 v_1 \sin \theta$ (其中 k_0 为比例常数)

又在 h 的变化中有 v_m 在变, 而已知 $h \in [0, k_0 v_1 \sin \theta]$ 即存在临界点 $k_0 v_1 \sin \theta$,

$$\text{可得: } h = \frac{mg \sin \theta}{\rho_{\text{水}} g \frac{d_0}{4} \pi + \frac{1}{2} v_m^2 \rho_{\text{水}} k_{\text{水}} d_0 \cot \theta},$$



$$\text{且 } v_m^2 = \frac{mg - \rho_{\text{水}} g k_0 v_1 \frac{d_0^2}{4} \pi}{\frac{1}{2} \rho_{\text{水}} k_{\text{水}} d_0 k_0 v_1 \cot \theta} \dots\dots\dots (11)$$

进而由第 (11) 式得出了角度 θ 与 v_m 的关系。

所以, 根据上述 (10) (11) 两式可得:

$$P = \frac{\rho_{\text{水}} k_{\text{水}} \sin \theta}{\pi} \cdot \frac{4mg - \rho_{\text{水}} g k_0 v_1 d_0 \pi}{2\pi d_0 k_0 v_1 \cot \theta} = k \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \dots\dots\dots (12)$$

其中

$$k = \frac{4mg - \rho_{\text{水}} g k_0 v_1 d_0^2 \pi}{2\pi d_0 k_0 v_1}.$$

因为所求的冲击力应小于等于飞机能承受的最大冲击力, 故

$$k - kt^2 < P_m t,$$

$$\text{又令 } t = \cos \theta,$$

$$\text{所以我们由求根公式可以得到: } t = \frac{-P_m \pm \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k}$$

$$\text{从而有 } t \text{ 的范围 } t > \frac{-P_m + \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k} \text{ 或 } t < \frac{-P_m - \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k}.$$

即:

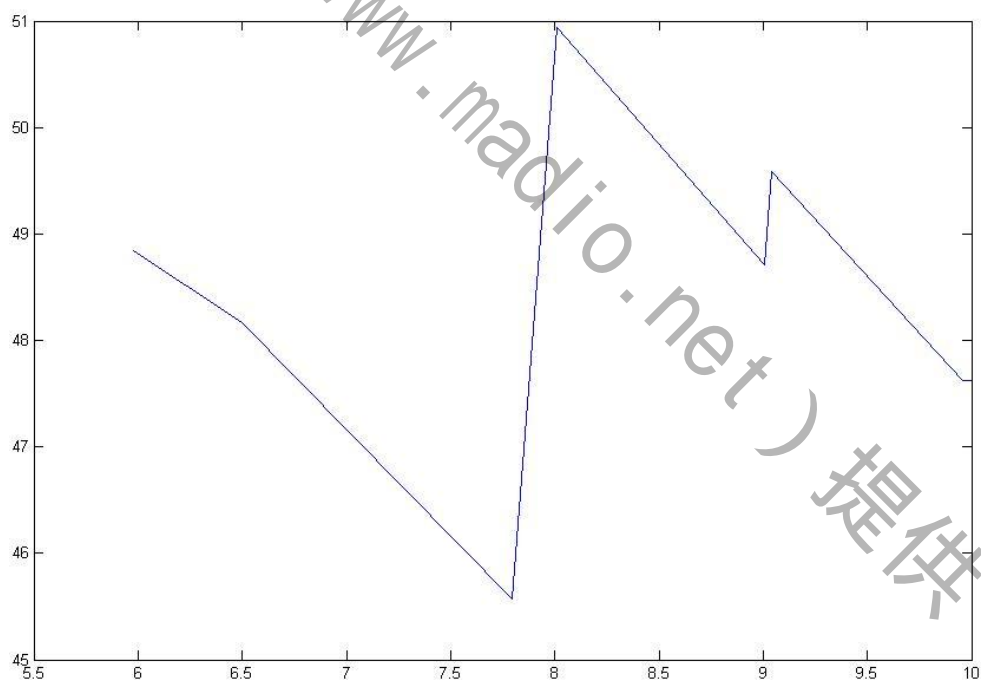
$$\text{可得出 } \theta \text{ 的范围是: } \theta < \arccos \frac{-P_m + \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k} \text{ 或 } \theta > \arccos \frac{-P_m - \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k}.$$

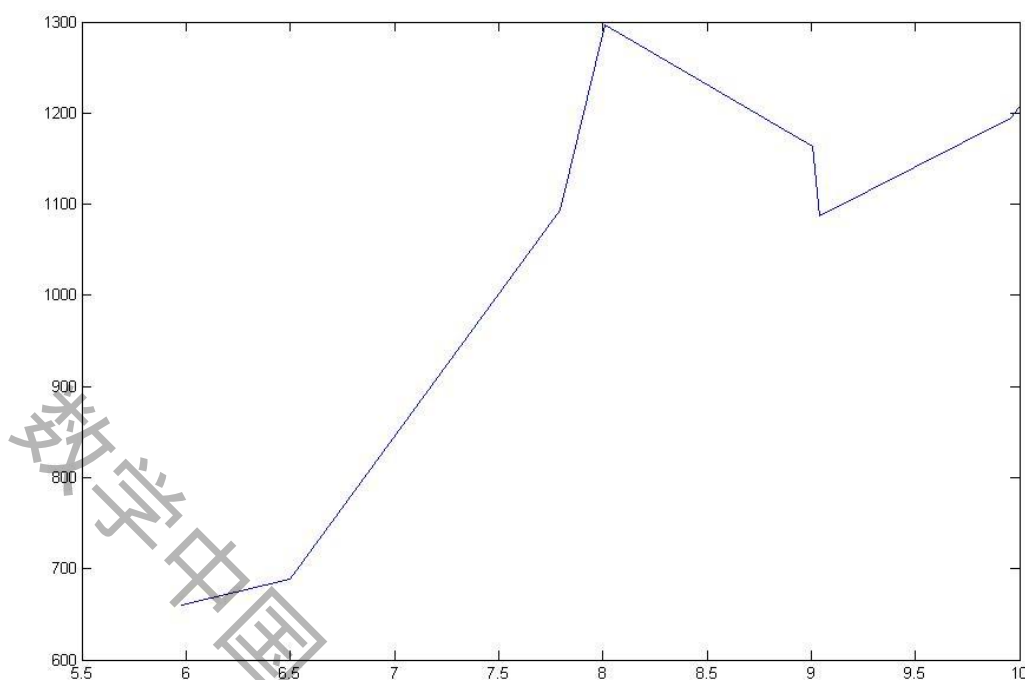
以下用 matlab 对相关数据进行拟合：
给定数据：

工况	攻角 °	水平速度 m/s	下降速度 m/s	襟翼角 °	升降舵 °	压力峰值 KPa
1	5.98	48.945	1	30	-9	660.3(ch7)
2	6.5	48.168	1	30	-10	688.1(ch5)
3	7.972	45.576	1	30	-12	1094.0(ch5)
4	9.956	47.628	1	30	-14	1195.5(ch5)
5	9.043	49.59	1	30	-12	1087.8(ch6)
6	9.995	47.628	1.83	30	-14	1206.5(ch6)
7	8.012	50.94	1	30	-3	1297.2(ch5)
8	9.004	48.705	1	30	-4	1163.6(ch5)
9	9.995	46.656	1	30	-5	1133.3(ch6)
10	9.995	46.656	1.5	30	-5	1090.0(ch6)
11	9.995	46.656	1.83	30	-5	1115.7(ch5)

图像显示：

角度与临街速度的图像





攻角——压力峰值图像

```
>>>> p=[660.3 688.1 1094.0 1195.5 1087.8 1206.5 1297.2 1163.6 1133.3 1090.0 1115.7];
>> t=[48.945 48.168 45.576 47.628 49.59 47.628 50.94 48.705 46.656 46.656 46.656];
>> a=[5.98 6.5 7.972 9.956 9.043 9.995 8.012 9.004 9.995 9.995 9.995];
>> syms t p a;
>> q=4.*(t.^4)-2.*p.*cos(a).*t.^3-(cos(a)).^2
```

y =

$$4*t^4-2*p*cos(a)*t^3-cos(a)^2$$

```
>> solve(y,'t')
```

ans =(见附表四)

其中, $t=v_1/c$ $p=P_m$ $a=\theta$ 。

从 matlab 的拟合图像可以看出：在角度变化的情况下，夹角 θ 越小，飞机受到的压力峰值（压强）越小，刚好与本模型所得出的结果在一个区间内符合，因此，所建立的模型是合理可行。

总结：从计算的结果可以看出飞机迫降的夹角 θ 与最大压强 P_m 的关系，即：又要满足飞机不会出现翻转，垂直或是平行于水平面着陆这几种情况。因此夹角同时要满足

$$\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right), \text{ 因此能得出最终夹角的范围。}$$

从而，当飞机在假设条件下，沿着与河面夹角为 θ 的方向迫降时，飞机能够承受住最大压强的冲击，达到安全迫降的效果。而这里的 θ 满足：

$$\theta \in (0, \arccos \frac{-P_m + \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k},)$$

模型的结果

1. 模型建立思路分析。

通过对飞机紧急迫降河面的整个模型进行假设，分析和讨论。我们将模型的运动全过程分为3个阶段。通过对不同阶段模型的目标值进行列式求解，得出引出下一个模型的关键参量，最终也由第二阶段的模型导出了最为复杂也是最为重要的最终值——飞机迫降时的夹角 θ 。

第一阶段模型，是客机在空中实行抛体运动过程中经过解方程可以得到飞机在接触河面一瞬间的速度 $v_1 = \sqrt{v_{x_{t0}}^2 + v_{y_{t0}}^2}$ ，以及水平方向的速度 v_x 和竖直方向速度 v_y 与时间 t 的关系。从而通过设定飞机与河面的夹角为一个二维模型，此时，第一阶段中的速度 v_1 在竖直方向的分量 v_y 对水的阻力 f_k 的影响，推出两个方向的速度变化，并求出最大速度 v_m 以及最大阻力 f_{k_m} 。最后通过水的最大阻力推出夹角 θ 与最大压强 P_m 的相对关系。

2. 模型结果合理性与验证。

模型结果：从求解第三阶段的模型，我们得到 $\theta \in (0, \arccos \frac{-P_m + \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k},)$ ，也就是说

当飞机在迫降一瞬间，飞机没有发生翻转，则其相对最佳姿势就是与水平面的夹角 θ 满足在算出的区间范围内。在这种情况下，我们说飞机是安全迫降的，机身没有发生破裂而进水沉没。

合理性分析：由于我们在建立模型初期已经对模型的形状和模型所处的环境进行合理的理想化设定，但依然存在不可预料的影响因素存在。

若模型按照假设的情况下进行紧急迫降，则：模型结果在理论上时合理存在的。但由于国内飞行迫降模拟的实验非常少，所获得的实验数据难以获得，但是用有国外实验数据进行分析，验证本飞机迫降模型的建立是合理成功的，从夹角的表达式可以知道其余最大压强存在一次关系，而最大压强是针对不同的飞机构成材料的不同，它能承受的最大压强是确定的，也就是说夹角的范围针对不同的飞机是不同的。

3. 总结：在理论上，本模型是正确合理的。即飞机的最佳姿势迫降是沿水平方向夹角 θ

属于区间 $(0, \arccos \frac{-P_m + \sqrt{P_m^2 + 4k^2}}{2k},)$ 。而要求出相对最佳角度则经过数据拟合后发现的

和飞机的构成材料（即结构强度（见附表五））有关系的。

模型评价

经过建立的客机失去动力而实行的相对最佳迫降模型具有以下特点：

- (1) 一开始设立的模型处于合理简化，便于切入分析。
- (2) 对水的阻力的设定上便于对飞机进行受力分析。
- (3) 计算推到过程中忽略掉一些参量，助于建立成较为简明易懂的模型。
- (4) 最后得出的结果是两个变量的关系式，简明扼要。

本客机迫降模型的优点：

- (1) 飞机的模型简化，以圆柱体代替，从而降低了模型建立过程中由于飞机形状的特点带来的对主体对象分析时带来的不便，从而在飞行模型主体上进行了合理的简化。
- (2) 在对空中飞机所受的阻力上，本模型大胆对其进行合成，从而在对飞机的研究上变得较为简单，有利于模型的建立。
- (3) 巧用定积分和常微分方程的方法列出相关方程式，能对相关变量参量进行求解，使得所学知识得以充分应用。
- (4) 在飞机与阻力的角度上，始终设定夹角不变，在这种情况下就将变力变速度简化成角度不变的变化方式，便于计算和简化模型，为得到最终结果奠定基础。
- (5) 最后得到的最佳着陆角度范围以及角度和最大压强的关系式正好验证了飞机迫降是否安全的两个要素：结构强度和着陆姿势。结果趋于大量研究成果，正好验证了其正确性。

所建立模型存在的缺陷：

- (1) 明显的缺点是：飞机迫降过程中飞机的机翼所带来的能量损失，模型中我们已经将飞机近似化成圆柱，不考虑机翼的影响。
- (2) 重大缺点是：飞机在降落过程中，要保持其与水平面所成角度 θ 不变是非常困难的，这要求飞行员对方向的控制上要时刻警惕并要求其技艺精湛，这与飞机迫降发生的突发性有很大冲突。并且在飞机进入水面后它的角度很难不发生变化，这里的计算误差将较大。
- (3) 计算结果是一个范围，对不同的飞机来说，范围区间的大小也不同，因此无法真正对每架飞机得出一个最佳角度值，只能给出一个相对角度范围，精确性不高。

模型的优化

由于在模式设立初期对 4 个条件进行了合理理想化的假设，因此在模型优化方面，我们可以从

- (1) 飞机的机体形状（以机翼影响为主）；
- (2) 有水平方向风存在；
- (3) 飞机在迫降过程中的角度变化；

这 3 个方面进行优化。

优化模型一：在水平方向风存在情况下考虑飞机机体形状的飞机迫降模型。

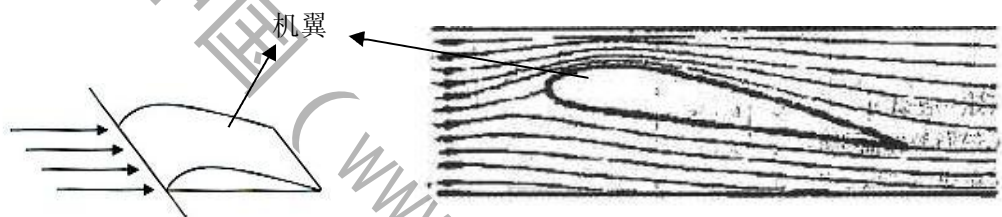
1. 建模分析：

前面建立的模型是在假设飞机形态近似为圆柱的情况下并且在无风飞行下的客机迫降模型。

但是我们知道，在飞机飞行过程中，飞机受到风的影响也是常有的事，因此，考虑飞行过程中风的影响也是必要的。而且飞机除机身外，对飞机迫降飞行影响最大的也是飞机的第二大组成部分机翼，因而，考虑飞机形体也就是主要考虑在原有模型上加上飞机的机翼。

相关说明：

1. 机翼——机翼的主要功用是产生升力，以支持飞机在空中飞行，同时也起到一定的稳定和操作作用。在机翼上一般安装有副翼和襟翼，操纵副翼可使飞机滚转，放下襟翼可使升力增大。机翼上还可安装发动机、起落架和油箱等。不同用途的飞机其机翼形状、大小也各有不同。
2. 机翼面积，形状和表面质量对升力、阻力的影响——机翼面积大，升力大，阻力也大。升力和阻力都与机翼面积的大小成正比例。
3. 我们知道飞机能飞行是涉及到空气动力学的原理，如图所示：

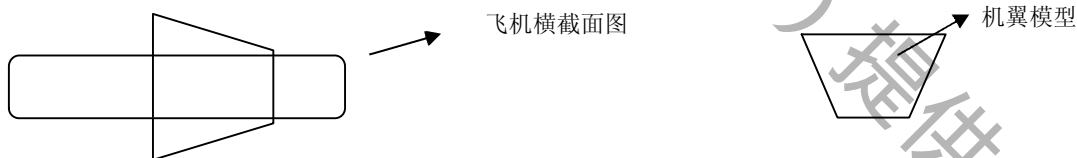


因而，加入飞机机翼的模型在有风条件下的迫降模型也是相对于原有模型更接近实际情况的优化模型之一，建立此模型有其一定的意义。

2. 模型假设。

在建立有风存在下的考虑飞机机体形状的客机迫降模型，我们同样要对其中的相关因素进行模型假设。

- (1) 假设飞机的机体形状为在原有圆柱模型上嵌入一个面积确定的梯形（如图）。



- (2) 对飞机在迫降过程中所受到的风向进行假设。

因为飞机在失去动力的情况下在空中的运动类似于抛体运动，因此，受到的风向在时刻发生改变，为了建立模型的简易，我们在这里对风向做出合理的假设：

假设风向是沿水平方向的，风速大小飞机仪器可测。

- (3) 假设飞机空中飞行中受到的阻力增加了风的阻力。其余假设不变（飞机质量不变）。

3. 添加的符号说明。

符号	符号说明	符号	符号说明
$v_{\text{风}}$	风的速度	S'	考虑机翼后飞机的迎风面积
$f_{\text{风}}$	风所形成的阻力	v_1'	飞机接触水面时的临界速度

4. 模型的建立与求解。

飞机在加入风存在以及考虑飞机机翼的情况下，增加了两个变量影响因素。在模型假设中我们已经将风的方向假设为水平方向。在飞机失去动力的情况下飞机的其他仪器是良好的，因此，飞行员可以得知风的速度 $v_{\text{风}}$ ，且我们通过物理学知识可知：

风速 $v_{\text{风}}$ 与对飞机机体压力的公式为 $f_{\text{风}} = 0.5 \rho_{\text{空}} v_{\text{风}}^2 S' / g$

在这种情况下，飞机的迫降遇到的水平风向有 2 种：顺风和逆风。下面，我们分情况考虑。

分析：（在进入水面前）

顺风情况：

在顺风情况下，飞机迫降是受到的阻力就减少了为原有假设阻力减去风所给的压力。因此在这种情况下，飞机顺风迫降，则其两个方向的速度分量分别为：

$$\text{竖直方向速度：} m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S'_y}{2} \cdot v_y^2 - mg \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{水平方向下的速度为：} m \cdot \frac{dv_x}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S'_x}{2} \cdot v_x^2 - \frac{0.5 \rho_{\text{空}} \cdot v_{\text{风}}^2 \cdot S'_x}{g} \dots\dots\dots (2)$$

由于此优化模型的建立过程中与原模型相比只是在接触面积上增加，而且在受力上多了顺风压力，因此，通过 matlab 演算可以算出顺风时的 v_x 和 v_y 与原来初速度 v_0 以及 $v_{\text{风}}$ 的关系。

从而，由原模型的建立同样有接触水面时的时间 t_0' 与高度 h_0 的关系式：

$$h_0 = \int_0^{t_0'} g(t) dt \dots\dots\dots (3)$$

联立上面 (1) (2) (3) 个式子就可以得到飞机在接触水面时的速度 v_1' 。

逆风情况：

在逆风情况下，飞机逆风迫降，在这种情况下，飞机受到的总体阻力增大，则其两个方向的速度分量分别满足：

$$\text{竖直方向: } m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S'_y}{2} \cdot v_y^2 - mg$$

$$\text{水平方向: } m \cdot \frac{dv_x}{dt} = \frac{\rho_{\text{空}} \cdot k_{\text{空}} \cdot S'_x}{2} \cdot v_x^2 + \frac{0.5 \rho_{\text{空}} \cdot v_{\text{风}}^2 \cdot S'_x}{g},$$

同样，由原模型的建立同样有接触水面时的时间 t_0^* 与高度 h_0 的关系式：

$$h_0 = \int_0^{t_0^*} g(t) dt$$

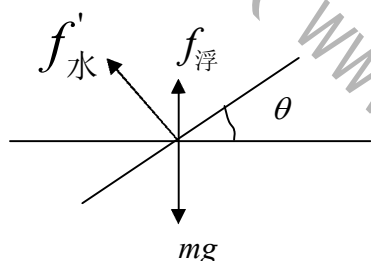
类似于第一种情况顺风情况的分析，我们同样能够得到相应的接触水面的临界速度 v_1^* 。

以上是飞机在未进入水面前的迫降模型建立于求解。

接下来我们要考虑飞机进入水面后的模型。

分析：（在进入水面之后）

客机在进入水面之后的受力情况已由原模型分析，为：



其中 $f'_水$ 为增大了的水的阻力。

又因为水面是平静的，我们假设水面附近的风速为 0。

则这是我们只要对原来迫降模型中的压强方程式改进，就能得到以下关于飞机受到压强

$$\text{的方程表达式: } P = \frac{2mg \sin \theta - \frac{1}{2} k_0 v_1' \rho_{\text{水}} g d_0^2 \pi \sin \theta}{(S' - S) \cos \theta \pi + d_0 k_0 v_1' \pi} \dots\dots\dots (4)$$

分析（4）式可以知道，这时候的 v_1' 将根据飞机顺风 and 逆风而不同。其中我们令：

$$\begin{cases} k_1 = 2mg - \frac{1}{2} k_0 v_1' \rho_{\text{水}} g d_0^2 \pi \\ k_2 = (S' - S) \pi \quad (\text{其中 } (S' - S) \text{ 表示机翼面积}) \\ k_3 = d_0 k_0 v_1' \pi \end{cases}$$

使方程得到简化，且 P 必须满足：

$$\frac{k_1 \sin \theta}{k_2 \cos \theta + k_3} < P_m \dots\dots\dots (5)$$

又我们由实际分析可以知道这个夹角 θ 必须满足： $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (6)

紧接着我们由 (5) 和 (6) 就能得到： $\sqrt{k_1^2 + P_m^2 k_2^2} \sin(\theta + \mu) < P_m k_3$ ，其中 $\tan \mu = \frac{P_m k_3}{k_1}$ ，

→ 从而可得 θ 的范围为：

$$0 < \theta < \arctan \frac{P_m k_3}{\sqrt{k_1^2 + P_m^2 k_2^2}} - \mu$$

我们将所求 θ 的值用区间表示就是： $\theta \in (0, \arctan \frac{P_m k_3}{\sqrt{k_1^2 + P_m^2 k_2^2}} - \mu)$ 。

模型结果：

此优化了的模型的结果是：当客机迫降时，客机所在的直线与水平面的夹角 θ 满足在固

定区间 $(0, \arctan \frac{P_m k_3}{\sqrt{k_1^2 + P_m^2 k_2^2}} - \mu)$

其中：

$$\begin{cases} k_1 = 2mg - \frac{1}{2} k_0 v_1' \rho_{\text{水}} g d_0^2 \pi \\ k_2 = (S' - S) \pi \quad (\text{其中 } (S' - S) \text{ 表示机翼面积}) \\ k_3 = d_0 k_0 v_1' \pi \end{cases}$$

的时候，客机能够承受住其结构强度所能承受的压强，这时候客机能够安全迫降河面。

5. 优化模型一与原模型比较的优劣分析。

优点：经过优化后的模型与原模型相比有了较大的改进。

- (1) 优化的模型考虑了飞机的形状，使得得到的结果更为符合实际；同时，也考虑到了影响飞机迫降的一大因素——风的影响。通过对风速的假设，以及对风向的讨论，得出了飞机从开始迫降到接触水面这段时间的更为精确的速度变化。
- (2) 由于多考虑了飞机的机翼以及风的影响，在得出飞机迫降的结果上，和原来的模型相比，优化模型的数值显得更具有说服力，角度 θ 的取值范围更小更为精确，这为飞行员确定出最佳迫降姿势更具有帮助。

缺陷：当然，优化后的模型依然存在着需要改进的地方。

- (1) 虽然优化模型考虑的因素相对于原来的模型更为全面，但是，结果依然是比较复杂的一个表达式，且随着不同飞机的结构不同，结果也是不同的，无法确定出精确值。
- (2) 优化后的模型依然没有考虑飞机入水后的角度变化情况，同时，也无法考虑飞机在迫降过程中发生偏转，侧移等复杂的三维运动情况。依然与实际情况存在一定的误差。

6. 模型的再优化。

优化后的模型在客机迫降的进入水后的角度上依然不够全面，可以在这方面进行改

进模型。同时，我们在考虑飞机安全着陆时，只是考虑飞机机体不破裂的情况，而未考虑飞机因为强烈碰撞产生振动而引起的飞机内部的人员伤亡，这方面也是模型优化的一个方向。

模型的实际应用意义

我们所建立的飞机水面迫降模型可为飞行员的飞行模拟训练提供参考依据，也可在实际飞机水面迫降的实际过程中提供一定的帮助，因此模型的建立有其一定的存在意义。

参考文献

- 【1】 胡大勇，杨嘉陵，王赞平，魏教育，童亚斌。某型飞机水上迫降数值化模型【J】。北京航空航天大学学报，第 34 卷，第 12 期，2008 年。
- 【2】 孙为民。民机机身结构稳定性和水上迫降分析与利用研究，南京航空航天大学博士学位论文。2009 年。
- 【3】 张宇，韦方强，王青。基于动量守恒的粘性泥石流冲击力计算【J】。泥沙研究，第 3 期，2006 年。
- 【4】 www.baidu.com
- 【5】 dlib.edu.cnki.net
- 【6】 www.cnki.net

参赛队号 # 1124

附录

附表一：

机型	A318-100	A319-100	A320-100	A321-100
机师数	2	2	2	2
座位数	117 (1级) 107 (2级)	142 (1级) 124 (2级)	180 (1级) 150 (2级)	220 (1级) 185 (2级)
长度	31.45米 (103呎2吋)	33.84米 (111呎)	37.57米 (123呎)	44.51米 (146呎)
翼展	34.10米 (111呎10吋)	34.10米	34.10米	34.10米
后掠角	25°	25°	25°	25°
高度	12.56米 (41呎2吋)	11.76米 (38呎7吋)	11.76米	11.76米
客舱宽度	3.70米 (12呎1吋)	3.70米	3.70米	3.70米
机身宽度	3.95米 (13呎)	3.95米	3.95米	3.95米
空重	39300公斤	40600公斤	42400公斤	48200公斤
最大起飞重量	68000公斤 (149600磅)	75500公斤 (166500磅)	77000公斤 (169000磅)	93500公斤 (206100磅)
巡航速率	0.78马赫	0.78马赫	0.78马赫	0.78马赫
最大速率	0.82马赫	0.82马赫	0.82马赫	0.82马赫
MTOW所需跑道长度	1355米 (4446呎)	1950米 (6398呎)	2090米 (6857呎)	2180米 (7152呎)
满载航距	5950公里 (3200海里)	6800公里 (3700海里)	5700公里 (3100海里)	5600公里 (3000海里)
最大燃油容量	23860升 (6300美国加仑)	29840升 (7885美国加仑)	29680升 (7842美国加仑)	29680升 (7842美国加仑)
巡航速率	0.78马赫	0.78马赫	0.78马赫	0.78马赫
最大速率	0.82马赫	0.82马赫	0.82马赫	0.82马赫
MTOW所需跑道长度	1355米 (4446呎)	1950米 (6398呎)	2090米 (6857呎)	2180米 (7152呎)
满载航距	5950公里 (3200海里)	6800公里 (3700海里)	5700公里 (3100海里)	5600公里 (3000海里)
最大燃油容量	23860升 (6300美国加仑)	29840升 (7885美国加仑)	29680升 (7842美国加仑)	29680升 (7842美国加仑)
实用升限	12000米 (39000呎)	12000米	12000米	12000米
涡扇引擎	普惠PW6122A 或 CFM International CFM56-5	International Aero Engines IAE V2500或CFM International CFM56-5	同A319	同A319

附表二：

空气密度表

绝对压力	空气温度	空气密度	绝对压力	空气温度	空气密度
Mpa	摄氏度	Kg/m3	Mpa	摄氏度	Kg/m3
0.1	25	1.1691	1.4	25	16.367
0.2	25	2.3381	1.5	25	17.537
0.3	25	3.5073	1.6	25	18.706
0.4	25	4.6764	1.7	25	19.875
0.5	25	5.8455	1.8	25	21.044
0.6	25	7.0146	1.9	25	22.213
0.7	25	8.1837	2.0	25	23.382
0.8	25	9.3528	2.1	25	24.551
0.9	25	10.522	2.2	25	25.720
1.0	25	11.691	2.3	25	26.889
1.1	25	12.860	2.4	25	28.058
1.2	25	14.029	2.5	25	29.228
1.3	25	15.198			

附表三：

```
>> dsolve('Dv_y -g+k_2*(v_y^2)=0','t')
```

$$v_y =$$

$$\tanh(t*(g*k_2)^{(1/2)}+C1*(g*k_2)^{(1/2))}*(g*k_2)^{(1/2)}/k_2$$

```
>> dsolve('Dv_x=k_1*(v_x^2)','t')
```

$$v_x =$$

$$-1/(k_1*t-C2)$$

附表四：

```
>> syms t p a;
```

```
>> y=4.*(t.^4)-2.*p.*cos(a).*t.^3-(cos(a)).^2
```

$$y =$$

$$4*t^4-2*p*cos(a)*t^3-cos(a)^2$$

$$\begin{aligned} & \wedge(1/2))^2/3-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}+ \\ & 12*((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a) \\ & ^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2 \\ & +6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}* \cos(a)^2+18*p^3*\cos(a)^3*3^{(1/2)}*(-54*\cos(a) \\ & ^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})/((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)})^{(1/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1/8*p*\cos(a)-1/24*3^{(1/2)}*((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}-1/24*(-(-18*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}*((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}+12*((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)}* \cos(a)^2+18*p^3*\cos(a)^3*3^{(1/2)}*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})/((3*p^2*\cos(a)^2*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)}+4*(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(2/3)}-192*\cos(a)^2)/(-54*\cos(a)^4*p^2+6*(3072*\cos(a)^6+81*\cos(a)^8*p^4)^{(1/2)})^{(1/3)})^{(1/2)})^{(1/2)} \end{aligned}$$

其中, $t=v_1/c$ $p=P_m$ $a=\theta$

附表五:

表 3.5 组装壁板有限元计算结果对比

构型	破坏形式简述	试验值/kN	计算值/kN	R
1	长桁屈曲, 发生明显弯扭, 壁板破坏	80.3	85.4	1.06
2	长桁屈曲, 发生轻微弯扭, 壁板失稳折坏	86	91.7	1.07
3	长桁弯曲明显, 发生歪扭, 壁板失稳	100.7	112.1	1.11
4	长桁弯曲明显, 发生轻微歪扭, 壁板失稳	98.8	110.2	1.12