露天矿生产的车辆安排

参赛队员：黄　振（数理学院），

黄际洲（软件学院）

黄　鑫（软件学院）

指导教师：龚　劬

参赛单位：重庆大学

参赛时间：2003 年 9 月 25~28 日

露天矿生产的车辆安排模型

[摘要]　本文根据露天矿生产的车辆安排中“ 一个好的生产计划 ”的两条原则，分别建立了规划模型，成功地解决了露天矿中电动铲车及卡车调度问题。基于“ 一个好的生产计划 ”的第一条原则，作者建立了双目标规划模型Ⅰ。在求解的第一步中，作者暂未考虑总运量，只在出动卡车最少的目标下，用单纯形法得出出动卡车的最少数目，即卡车的下限；求解的第二步是在此下限和上限（现有卡车数）之间以总运量最小为目标逐个搜索，并选取运输成本最小的一组解作为最优解。作者用 Mablab6.1 编程实现了以上两个步骤，求解得到最优解：总运量为 8.4829 万吨公里；电铲数为 7，分别安放在铲位 1、2、3、4、8、9、10；卡车数为 13，具体路线及趟数见论文第 7、8 页的表 3、表 4。值得一提的是，作者构造了一种新的算法---回代搜索的分步算法，很好地处理了该模型的约束条件较多并其非常复杂等难点，另外，作者创造性地提出了“ 时间四边形 ”的思想，成功地解决了同一条线路上卡车的等待问题。

基于“ 一个好的生产计划 ”的第二条原则，考虑到岩石产量优先的条件，作者在目标函数中引入了优先权系数，建立了规划模型Ⅱ。在求解过程中，考虑到各露天矿具体的地理、经济环境不同和管理者对岩石产量的重视程度不同，作者把优先权系数从 0.55 到 1 之间按 0.05 的步长递增，利用单纯形法，用 Mablab6.1 编程求得了权系数取不同值时的安排表，结果见论文第 8 页。由于在目标函数中引入了优先权系数，露天矿生产的管理者可根据露天矿具体的地理、经济环境不同等因素改变优先权系数，从而得到符合管理者需要的最优生产计划，由此，该模型具有一定的实用性。

最后,本文对卸点可移和卡车可转运的情况作了推广和改进。

[关键词]　双目标规划，回代搜索，单纯形法，优先权系数

1　问题重述

如图 1 所示，某露天矿共有 10 个铲点、5 个卸点。每个铲位旁边的数字从上到下分别表示矿石量、岩石量和矿石的平均铁含量，每个卸点旁边的数字分别表示一个班次的产量要求。且各矿石卸点对铁含量的要求为 29.5%±1%。每个铲位与每个卸点都有一条车道，图中连线上的数字表示从铲位到卸点的车道距离。

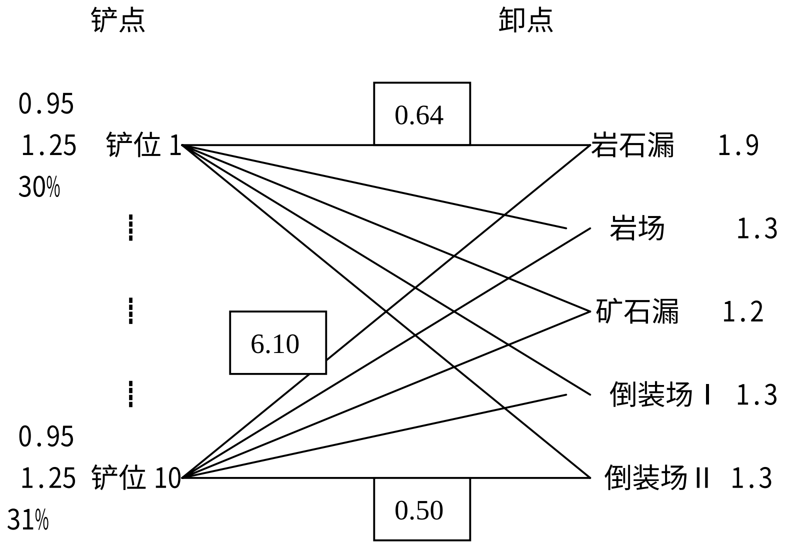


图 1 铲位和卸点有关参数示意图

由于卡车发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量，所以一个班次只点火一次，且卡

车在等待时消耗的能量相当可观，所以卡车在工作时原则上不能发生等待的情况。

又已知每个铲位只能安排一台电铲，电铲的平均装车时间为 5 分钟，卡车平均卸载时间为 3 分钟且电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车载重量量为 154 吨，每次满载运输，不出现堵车现象。

题目要求在所给的两条原则下分别为一个班次（8 小时）的生产安排一个计划，内容包括：出动几台电铲，分别在哪些铲位上；出动几辆卡车，分别在哪些路线上各运输多少次。

2 假　设

1. 假设运输过程中卡车不会出现堵车现象，路况理想，卡车以恒速行驶；
2. 假设电铲和卡车在一个班次内可以不停地工作，如中途不会出现机器故障等；
3. 假设卸点、电铲的位置固定；
4. 假设卡车在装卸时不会出现等待；
5. 假设卡车的路线可以不固定，当其在一条线上完成了任务之后可以到其他线上去帮助别的车辆运输，且这中间的行车时间不计。

3 符号说明

m_{ij}	从第 j 个铲点运到第 i 个卸点的石料量
n_{ij}	从第 j 个铲点到第 i 个卸点的车次数
d_{ij}	j 铲点到 i 卸点的距离
A_j	第 j 个铲点矿石产量
B_j	第 j 个铲点岩石产量
c_j	第 j 个铲点铁含量
M_i	第 i 个卸点的产量
x	投入使用的卡车辆数
α	优先权重系数

其中 $i=1$ 表示矿石漏；$i=2$ 表示倒装场Ⅰ；$i=3$ 表示岩场；$i=4$ 表示岩石漏；$i=5$ 表示倒装场Ⅱ。

4 模型的建立

1．模型Ⅰ

分析：原则 1 要求总运量最小，同时出动最少的卡车，从而使得运输成本最小，由此很容易想到建立一个双目标规划模型。具体过程如下：

总运量就是每个铲位运往每个卸点的矿石或岩石的量乘以铲位到卸点的距离，要使得总运量最小，则

$$m_{11} \times d_{11} + m_{12} \times d_{12} + \ldots + m_{1,10} \times d_{1,10} + m_{21} \times d_{21} + \ldots + m_{2,10} \times d_{2,10} + \ldots$$
$$+ m_{51} \times d_{51} + \ldots + m_{5,10} \times d_{5,10}$$

最小，亦即$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}(m_{ij} \times d_{ij})$最小，这就是双目标规划模型的第一个目标函数：

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}(m_{ij} \times d_{ij}) \qquad \text{------ (1)}$$

要使得卡车数量少，则第二个目标函数为：

$$\min z_2 = x \qquad \text{------(2)}$$

分析约束条件：

对于每个卸点，都有一个产量要求，这也相当于是供需关系中的需求量。以矿石漏为例有：$m_{11} + m_{21} + \ldots + m_{1,10} \le 1.2$。

对各个卸点有：　$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = M_i$　　$i=1$，2…5　　------(3)

对各铲点的矿石产量，矿石漏、倒装场Ⅰ、倒装场Ⅱ的需求量之和不能大于其生产能力，则有：

$m_{1j} + m_{2j} + m_{5j} \le A_j$　　j=1，2…10

同样对于岩石产量有：$m_{3j} + m_{4j} \le B_j$　　j=1，2…10　　------- (4)

由题目已知，从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5%±1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。则所有运往矿石卸点i的铁的总量除以第i个卸点的产量应在 29.5%±1%范围内。有：

$$28.5\% \le \frac{\sum_{j=1}^{10} m_{ij} c_j}{M_i} \le 30.5\% \qquad i=1,2,5 \qquad \text{-------- (5)}$$

时间限制：n_{ij}为从第 j 个铲点到第i个卸点的车次数，易知$n_{ij} = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor$（$\lfloor\ \rfloor$表示向上取整，即$n_{ij} = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor + 1$），那么来回$n_{ij}$趟装车和卸车时间总和为

$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10} n_{ij}\times\frac{8}{60}$。而运输时间应为$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10} 2\times\frac{n_{ij}\times d_{ij}}{28}$（乘以 2 表示来回两趟）。$x$ 辆卡车最多工作$8x$小时，那么有：

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\left(2\times\frac{n_{ij}\times d_{ij}}{28}+n_{ij}\times\frac{8}{60}\right)-8x\le 0 \qquad \text{----------（6）}$$

电铲的平均装车时间为 5 分钟，又由于电铲不能同时为两辆及两辆以上卡车服务，那么 1 小时内 1 台电铲最多装车 12 辆，则一个班次 8 小时内最多装车 96 辆。那么对于第 j 个矿点，如果安排电铲的话，运出的岩石和矿石量之和应小于 96 辆卡车满载这个最大量。亦即：

$$\sum_{i=1}^{5} m_{ij}\le 96\times 0.0154 \qquad j=1，2\cdots10 \qquad \text{-------（7）}$$

同样的道理，对于卸点来说有：

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij}\le 160\times 0.0154 \qquad i=1，2\cdots5 \qquad \text{-------（8）}$$

m_{ij}为从第 j 个铲点运到第i个卸点的石料量，是非负数。则：

$$m_{ij}\ge 0 \qquad i=1，2\cdots5，\ j=1，2\cdots10 \qquad \text{-------（9）}$$

卡车数量范围为：$0\le x\le 20$ 且x为整数 -------（10）

由式（1）-----（10），得双目标线形规划模型如下：

$$\min z_1=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}(m_{ij}\times d_{ij})$$

$$\min z_2 = x$$

s．t． $\sum_{j=1}^{10} m_{ij}=M_i$ i=1,2⋯5

$$m_{1j}+m_{2j}+m_{5j}\le A_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$m_{3j}+m_{4j}\le B_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$28.5\%\le\frac{\sum_{j=1}^{10} m_{ij}c_j}{M_i}\le 30.5\% \qquad i=1,2,5$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\left(2\times\frac{n_{ij}\times d_{ij}}{28}+n_{ij}\times\frac{8}{60}\right)-8x\le 0 \quad (\text{其中}\ n_{ij}=\left\lfloor\frac{m_{ij}}{0.0154}\right\rfloor)$$

$$\sum_{i=1}^{5} m_{ij} \le 96 \times 0.0154 \qquad j=1，2\cdots 10$$

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \le 160 \times 0.0154 \qquad i=1，2\cdots 5$$

$0 \le x \le 20$ 且 x 为整数

$$m_{ij} \ge 0 \qquad i=1，2\cdots 5， \quad j=1，2\cdots 10$$

2.模型 II

原则 2 要求利用现有车辆运输，获得最大产量（岩石产量优先；在产量相同的情况下，取总运量最小的解）。那么我们在保证各卸点产量需求的基础上，按一定优先权尽可能多地运输岩石。于是，在运输的岩石的总量前加一个优先权系数 α ，那么运输矿石的总量前系数为 $1-\alpha$ 。

目标函数为：

$$\max z_3 = \alpha \sum_{j=1}^{10} (m_{3j} + m_{4j}) + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{10} (m_{1j} + m_{2j} + m_{5j}) \qquad \text{-----（11）}$$

约束条件：

要保证各卸点产量需求，则模型 I 中(3)式变为：$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \ge M_i$ ；另外，为了获得最大产量，必须用上所有的 20 辆卡车，则模型 I 中(6)式 $x=20$ 。其他约束条件与模型 I 相同。

于是原则 2 下的模型为：

$$\max z_3 = \alpha \sum_{j=1}^{10} (m_{3j} + m_{4j}) + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{10} (m_{1j} + m_{2j} + m_{5j})$$

s.t. $$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \ge M_i \qquad i=1，2\cdots 5$$

$$m_{1j} + m_{2j} + m_{5j} \le A_j \qquad j=1,2\cdots 10$$

$$m_{3j} + m_{4j} \le B_j \qquad j=1,2\cdots 10$$

$$28.5\% \le \frac{\sum_{j=1}^{10} m_{ij} c_j}{M_i} \le 30.5\% \qquad i=1,2,5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{10} (2 \times \frac{n_{ij} \times d_{ij}}{28} + n_{ij} \times \frac{8}{60}) - 8 \times 20 \le 0 \qquad (\text{其中} \quad n_{ij} = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor \ )$$

$$\sum_{i=1}^{5} m_{ij} \le 96 \times 0.0154 \qquad j=1,2\cdots10$$

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \le 160 \times 0.0154 \qquad i=1，2\cdots5$$

$$m_{ij} \ge 0 \qquad i=1，2\cdots5，\ j=1，2\cdots10$$

5 模型的求解

1. 模型 I 求解：

模型 I 是一个双目标规化问题，在众多约束条件下直接求解有一定的困难。考虑到此题目中卡车数量的约束性：安排的卡车数量为整数，且最大数量为 20 辆。那么我们采用回代搜索的分步算法 :在暂不考虑总运量的条件下,单以卡车数量最少作为目标函数,这样把它转化为一个求解单目标规化的问题。

该单目标模型如下：

$$\min z_2 = x$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} = M_i \qquad i=1,2\cdots5$$

$$m_{1j} + m_{2j} + m_{5j} \le A_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$m_{3j} + m_{4j} \le B_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$28.5\% \le \frac{\sum_{j=1}^{10} m_{ij} c_j}{M_i} \le 30.5\% \qquad i=1,2,5$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\left(2\times\frac{n_{ij}\times d_{ij}}{28} + n_{ij}\times\frac{8}{60}\right) - 8x \le 0 \quad (\text{其中}\ \ n_{ij} = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor\ )$$

$$\sum_{i=1}^{5} m_{ij} \le 96 \times 0.0154 \qquad j=1，2\cdots10$$

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \le 160 \times 0.0154 \qquad i=1，2\cdots5$$

$$0 \le x \le 20 \quad \text{且} \quad x \text{为整数}$$

$$m_{ij} \ge 0 \qquad i=1，2\cdots5，\ j=1，2\cdots10$$

用 Matlab6.1 编程（程序见附录 B）求解出以上单目标模型的最优解，其结果为卡车辆数为 12.494，显然，此时所得的辆数不为整数，这不符合实际情况，以下将进一步地改进。

考虑到卡车的安排要完全满足约束条件，我们认为卡车的最小数量不得低于 13 辆，即卡车的数量可能为 13 到 20 辆。因此我们对卡车数量为 13 辆至 20 辆时进行回代，以总运量最小为目标逐一求解（其模型见下），并通过比较选取运输成本最小的一组解。

在卡车数量一定的条件下求总运量最小的模型：

$$\min z_1 = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}(m_{ij} \times d_{ij})$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{10} m_{ij} = M_i \qquad i=1,2\cdots5$$

$$m_{1j} + m_{2j} + m_{5j} \le A_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$m_{3j} + m_{4j} \le B_j \qquad j=1,2\cdots10$$

$$28.5\% \le \frac{\sum_{j=1}^{10} m_{ij} c_j}{M_i} \le 30.5\% \qquad i=1,2,5$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\left(2\times\frac{n_{ij}\times d_{ij}}{28} + n_{ij}\times\frac{8}{60}\right) - 8x \le 0 \quad (\text{其中}\ \ n_{ij} = \left\lfloor \frac{m_{ij}}{0.0154} \right\rfloor\ )$$

$$\sum_{i=1}^{5} m_{ij} \le 96 \times 0.0154 \qquad j=1，2\cdots10$$

$$\sum_{j=1}^{10} m_{ij} \le 160 \times 0.0154 \qquad i=1，2\cdots5$$

$$0 \le x \le 20 \ \ \text{且} \ \ x\ \text{为整数}$$

$$m_{ij} \ge 0 \qquad i=1，2\cdots5，\ j=1，2\cdots10$$

用 Matlab6.1 编程（程序见附录 C）求解出总运量最少模型，其结果如表 1。

表 1　　卡车数量回代结果

卡车数量（辆）	13	14	----	20
总运量（吨公里）	8.4829	8.4829	----	8.4829
电铲数量（台）	7	7	----	7

通过表 1 对比发现卡车数量由 13 辆增加到 20 辆的过程中，电铲数量不变，总运量几乎不变，说明此时卡车辆数的增加对总运量的影响不大，那么结合题目对运输成本最小的要求（总运量最小，同时出动最少的卡车），我们认为当卡车数量为 13 辆、电铲数量为 7 辆时，

运输成本最小，总运量为 8.482 9 万吨公里。通过调用卡车为 13 辆时的解，得铲位安排为：1 号，2 号，3 号，4 号，8 号，9 号,10 号铲位分别安排电铲一辆；每条路线的卡车需求量如表 2。

表 2　　各路线对卡车的需求量

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	\	0.82	\	\	\	\	\	1.82	\	0.31
倒装场Ⅰ	\	1.05	\	1.15	\	\	\	\	\	\
岩场	\	\	\	\	\	\	\	\	1.83	0.33
岩石漏	1.81	\	1.18	\	\	\	\	\	\	\
倒装场Ⅱ	\	0.72	\	\	\	\	\	\	\	1.48

由表 2 知，共有 11 条路线对卡车有需求，而 11 条路线对卡车的需求总和为 12.49 台，由于现在共有 13 辆卡车可供调用，因此卡车的分配有一定的自由度，由此我们提出一种较为可行的一种卡车的分配方案。

由附录 A 的证明所得结论，可以安排多辆车在不等待情况下在同一条线路上行驶。

显然所有路线的卡车需求量均小于 2 辆，所以当该路线的卡车需求量大于 1.4 辆时，我们分配 2 辆卡车在此路线上工作；当该路线的卡车需求量小于 0.5 辆时，我们暂不分配卡车；其它情况我们分配 1 辆卡车。当卡车在该路线的工作量全部完成以后，按照就近原则分派它们去完成其它不能按时完工的路线的工作。由于假设卡车从一个地方调到另一个地方的时间不计，所有的卡车仍能运输完全部石料。根据以上原则我们得出各条路线上的卡车数及安排如表 3、表 4：

表 3 卡车在个路线上的趟数安排

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	\	１３	\	\	\	\	\	５４	\	１１
倒装场Ⅰ	\	４１	\	４３	\	\	\	\	\	\
岩场	\	\	\	\	\	\	\	\	７０	１５
岩石漏	８１	\	４２	\	\	\	\	\	\	\
倒装场Ⅱ	\	１４	\	\	\	\	\	\	\	７０

表 4 路线及车辆安排

路线	从铲位	到卸点	卡车数
1	1	岩石漏	2 辆
2	2	矿石漏	1 辆
3	3	倒装场Ⅰ	1 辆
4	4	倒装场Ⅱ	1 辆
5	5	岩石漏	1 辆

6	6	倒装场 I	1 辆
7	7	岩石漏	2 辆
8	8	岩场	2 辆
9	9	倒装场 II	2 辆

当 1 号路线的卡车完成工作后去帮助 3 号路线工作；
当 2 号路线的卡车完成工作后去帮助 5 号路线工作；
当 4 号路线的卡车完成工作后去帮助 6 号路线工作；
当 7 号、8 号、9 号路线的卡车完成工作后去帮助第 10 号铲点工作。

2.模型 II 求解

模型 II 是对岩石产量优先、引入优先权系数建立的线性规划模型。在求解过程中，考虑到各铁矿具体的地理、经济环境不同和管理者对岩石产量的重视程度不同，把优先权系数 α 从 0.55 到 1 之间按 0.05 的步长递增，不同的 α 值得到不同的目标函数，利用单纯形法在同一约束条件下分别求解以不同目标函数构成的线性规划模型的最优解。

通过求解发现，由于模型中没有加入电铲数量的约束，使得在 10 个铲位都要安排电铲才满足理论解，假设在实际生活中电铲不存在移动的问题，则电铲的安排出现矛盾。为解决这一问题，我们把电铲安排在输送量在前七位的铲点，固定好电铲后，再回代到模型中求解，得其总产量、卡车的安排等。

用 Mablab6.1 编程求得了权系数取不同值时的总产量和岩石的产量如表 5 所示。

表 5　不同权值 α 下的总产量和岩石量

优先权 α	55%	60%	65%	70%	75%	80%	85%	90%	95%	100%
总产量	7.62	7.53	7.52	7.55	6.99	7.00	7.02	7.04	7.93	7.63
岩石产量	3.70	3.70	3.69	3.69	3.15	3.16	3.17	3.17	3.60	3.70

举例:当 $\alpha=95\%$ 时,车辆安排如表 6（α 取其它值时的车辆安排表不再赘述)。

表 6 车辆安排表(1 表示安排 1 辆卡车)

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
倒装场 I	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
岩场	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
岩石漏	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
倒装场 II	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1

6 模型的改进和推广

1.同一条线路上等待问题的处理

从附录 A 的定理的证明过程可知，只要在卸点不连续的空闲时间$(n-3)(k-1)>0$，即$n>3$时卡车在卸点处就不等待，只要在铲点不连续的空闲时间$(n-5)(k-1)>0$，即$n>5$时卡车在铲点处就不等待。那么，当$n>5$时，在整条线路上不出现等待情况。

2.在卸点可移的情况下，每个铲点与每个卸点之间的距离发生改变，就会产生很多组距离数据。对每一组数据都可代进模型 I 求解，在所有的解中，可选出一组使运输成本最低的解。从而根据卸点的选定来降低运输成本。

3.题目中的卸点之间和铲点之间相互独立，其实在实际的运输问题中，有时也允许在“收点”之间及“发点”之间的运输。这种转运经常是允许的并且通常得出一个好解（即降低总成本）。结合本问题实际，矿场一般不会在各铲点之间有车道，但在个卸点之间有车道是完全可能的。于是我们可以合理地假设各卸点之间的距离，对模型 I 作改进后可求解。由于时间关系我们没有求出结果。

本文为车辆调度建立了一个很好的解决方案，只要稍作修改，便可用于其他地方，比如说很多运输问题都可用本问模型求解。

7 优缺点分析

优点：

1. 建立的模型的原理简单易懂，简化了算法，并且切实可行。
2. 可移植性强，对于类似的露天矿运输安排，只要在程序中输入数据，并用相同的规则判断，便可以容易地得出结果。
3. 设定卡车不固定在一线路上运输，这与现实生活接近，应尽量提高设备的利用率，从而降低成本。
4. 引入的优先权系数对不同的管理者和具体的露天矿的运输安排情况弹性较大，与现实相符。

缺点：没有完全解决等待问题，只解决了同一条线路上卡车的等待问题。

参考文献

[1]J.P.伊格尼齐奥著.闵仲求等译.单目标和多目标系统线性规划.上海.同济大学出版社.1982

[2]《运筹学》教材编写组.运筹学.北京.清华大学出版社.1987

[3]赫孝良等.数学建模竞赛赛题简析与论文点评.西安.西安交大出版社.2002

[4]Chen Chi-tsong.Linear system theory and design.New York.Holt,Rinehart and Winston.1984

[5]http://wwww.iurpp.net.cn/02kejichengjuo/s0015kjcg/ln351.html 2003.9.22

9 附录

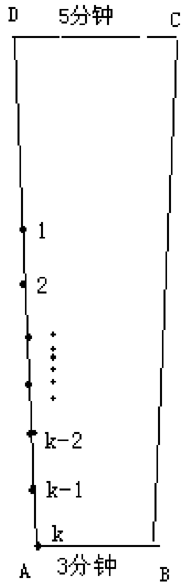
附录 A

定理 如果在同一条线路有k辆车以相同的时间间隔n相继开出，并且以恒速v行进，那么此线路上的卸点没有该线路上的车停留的时间是：$\frac{2d_{ij}}{v}+5-n(k-1)+(n-3)(k-1)$

$$且 K < \frac{2}{n} d_{ij} + \frac{5}{n} + 1$$

在铲点处没有该线路上的车停留的时间是：

$\frac{2d_{ij}}{v} + 3 - n(k-1) + (n-5)(k-1)$ 且 $K < \frac{2}{n} d_{ij} + \frac{5}{n} + 1$， 其中 d_{ij} 表示线路的距离。



“ 时间四边形 ”

为了在证明此定理过程中表示得直观、形象，作者引入了“ 时间四边形 ”。把卡车在铲点装载石料的时间表示为 DC，在卸点卸载石料的时间表示为 AB，AD 和 BC 都表示卡车的运输时间，且 $AD = BC$。为了证明的简洁，假设 k 辆卡车等时间间隔 n 从 A 点逆时针开出。

证明：每间隔 n 分钟从 A 点出发有一辆车开出，第 1 辆车到达 $A(B)$ 卸点前，在这条线路上无车辆在 $A(B)$ 卸货，这段空闲时间等于第 1 辆车到达 B 所需时间

$$\frac{2d_{ij}}{v} + 5 - n(k-1) \text{ 且 } K < \frac{2}{n} d_{ij} + \frac{5}{n} + 1$$

这段空闲时间为在第 1 辆处于 A 状态时，第 2 辆还有 $(n-3)$ 分钟到 B，那么 $A(B)$ 卸点空闲 $(n-3)$ 分钟，还有 $(k-1)$ 辆车经过 B 后整个车群处于初始状态，即行驶完一个周期，所以这段不连续的空闲时间应为 $(n-3)(k-1)$ 分钟。

综上，当车群处于初始状态时，即完成一个周期空闲时间：

$$\frac{2d_{ij}}{v} + 5 - n(k-1) + (n-3)(k-1) \text{ 且 } K < \frac{2}{n} d_{ij} + \frac{5}{n} + 1$$

同理，在铲点处没有该线路上的车停留的时间是：

$$\frac{2d_{ij}}{v}+3-n(k-1)+(n-5)(k-1)\text{ 且 }K<\frac{2}{n}d_{ij}+\frac{5}{n}+1$$

由此,在同一条路线上可以安排$K<\frac{2}{n}d_{ij}+\frac{5}{n}+1$辆车在不等待情况下在同一条线路上行驶。