

报名号 # 1143

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：

参赛队员（签名）：

队员 1： 许鸿尧

队员 2： 余天宇

队员 3： 肖峰

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别： 大学本科

报名号 # 1143

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：1143

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

报名号 # 1143

# 2010 年第三届 “ScienceWord 杯” 数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车关 键 词 汽车转向 几何作图 动态规划 数据拟合

## 摘 要：

本论文主要是在第一阶段论文的基础上，研究铰接式的集装箱货车停车和实时改进停车路线，并将改进建议反馈给驾驶员。

第一问中铰接式的集装箱货车与第一阶段的小汽车相比，在转弯时是非刚性的。因此重新建立车体模型。之后沿用第一阶段思路建立了轨迹判定模型，重新确立约束条件。模型主要通过程序求解，输入车身参数，停车位置，转向角和停车位的长和宽来判定是否能进行停车。结果有计算机以自然语言的形式输出。在模型的改进中结合动态规划的思想，根据实际情况来调整转向角，达到合适的停车位置。

第二问解决了两个方面的问题。首先是运用动态规划的思想，将整个停车过程，看做多个状态，如果当前状态的下一个状态能进入较优路线，则进入下一个状态。如果不能则重新调整转向角。在转向角的所有范围内都不能满足要求时，就按原路返回至上一个状态。对于状态转换建立了状态转换模型，判断下一状态是否能进入较优路线又建立了判定模型。其次，为提高驾驶员的实际操作体验，建立了驾驶员体验模型，主要将外侧轮转向角转换成实际的方向盘的圈数，并运用数据拟合对原先提出的线性正比模型进行了改进。模型的求解运用递归算法思想编程实现。

最后，对第一和第二问的模型分析了误差产生的原因和误差处理的思路方法。

参赛队号 \_\_\_\_\_

所选题目 \_\_\_\_\_

参赛密码 _____ (由组委会填写)
------------------------

## 报名号 #1143

## Abstract

This thesis was based on the paper from the first phase, and researched the container truck parking. and improved the real-time parking line to give drivers the advise.

The first question of container truck is similar with the first stage of the car . But there are some diffirences. So We have to build the body model. After used the first stage model to rebuild the track judgement model and modify constraint conditions. Model is mainly calculate by program, input parameters, such as the stop position, the body of the steering Angle and parking space length and width to decide whether to stop. Results are outputed by computer in the form of natural language .In the improvement of the model we use dynamic planning. According to the actual situation of steering Angle,we can adjust to the parking place.

In the second question we have solved the two aspects of the problem. First we use dynamic programming to analyse the whole process and divide the whole process to some states. If the next state can enter a optimal route, the current state enter the next state. If not, readjust steering Angle. If all the steering Angle in Angle range can satisfy the requirements , the current state returns to the previous state . Secondly, in order to improve the driver's actual operating experience , we establish the driver experience model. This model converts the steering angles to the Steering Wheel angles and laps. We use data fitting to improve the linear model . Model is calculated by recursion algorithm of programming.

Finally, for the first and second question's e model we analyze the reason of errors and come up with how to handle errors.

报名号 # 1143

## 一 问题重述

在第一阶段完成设计的较优停车路线之后，又提出了两个新的问题

(1) 将原先的小汽车换成铰接式的集装箱货车（图1-1），因为车头和拖挂的集装箱拖车之间有可活动的连接部整车在转弯时不是刚性的，所以与原先的小汽车相比存在不同，需要设计一个方法来判断铰接式的集装箱货车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。

(2) 由于人工驾驶时操作误差，客观条件引起的驾驶员的判断失误等原因，使其不能按照设计的线路行进。但我们可以实时测定本车的确切位置，需要建立合理的模型，根据本车的当前位置，随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。建议要考虑实用性。问题中只需考虑小型车辆。



图 1-1 铰接式的集装箱货车图

报名号 # 1143

## 二 符号说明

$L_1$ ：牵引车前后轮之间的距离

$L_2$ ：挂车后轮到车头的距离

$L$ ：整车（牵引车和挂车）长度

$S$ ：牵引车后车轮到车尾的距离

$T$ ：挂车后车轮到车尾的距离

$\alpha$ ：牵引车外侧轮转向角

$\theta$ ：牵引车和挂车的偏差角

$P_l$ ：停车位长度

$P_w$ ：停车位宽度

$R_1$ ：铰接式的集装箱货车第一次转弯最小转向半径

$R_2$ ：铰接式的集装箱货车第二次转弯最小转向半径

$m$ ：初始时，待停车与已停汽车的水平距离

$n$ ：初始时，待停车与已停汽车的垂直距离

$\beta$ ：方向盘转向角

$k$ ：小汽车外侧轮转向角和方向盘转向角线性关系正比系数

$m_i$ ：第  $i$  状态时，待停车与已停汽车的水平距离

$n_i$ ：第  $i$  状态时，待停车与已停汽车的垂直距离

$\alpha_i$ ：第  $i$  状态时，小汽车外侧轮转向角

$\alpha_{\min}$ ：小汽车最小外侧轮转向角

$\alpha_{\max}$ ：小汽车最大外侧轮转向角

报名号 # 1143

### 三 问题分析

第(1)问与第一阶段的问题比较相似,但是由于铰接式的集装箱货车在转弯时非刚性。所以需要重新建立一个车体模型,来分析具体转弯的轨迹,在采用第一阶段判断小汽车是否可停车的方法来判断铰接式的集装箱货车是否可以停车

第(2)问需要解决两个方面的问题第一是小汽车沿较优路线行驶中,出现偏差后如何处理第二是提供给驾驶员的建议,要将小汽车的一些参数转换成驾驶员实际能够操作的参数(例如方向盘的圈数)。

### 四 问题假设

- 1: 汽车为2轮后轮驱动符合阿克曼转动特征公式
- 2: 地面平整(无坡度和倾斜情况)
- 3: 行驶过程中不出现侧滑,漂移等现象
- 4: 车速对转角不产生影响。
- 5: 汽车的最小转向半径是确定的。
- 6: 最终停车位置为最佳位置(停车位正中间)。
- 7: 使用最短的合适的停车路线。
- 8: 集装箱车分牵引车和挂车两部分,整车有牵引车的后轮驱动。
- 9: 近似认为牵引车和挂车都符合阿克曼方程。
- 10: 整个过程中车身保持匀速运动

### 五 模型的准备

根据参考文献[1],将铰接式的集装箱货车的运动轨迹分成3种状态如下:

状态1:

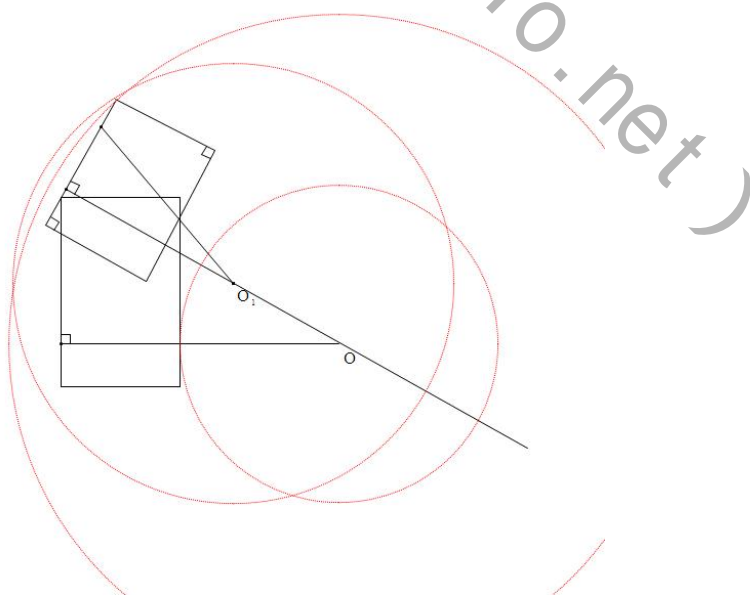


图 5-1 铰接式的集装箱货车的运动轨迹状态一图

## 报名号 # 1143

状态 2:

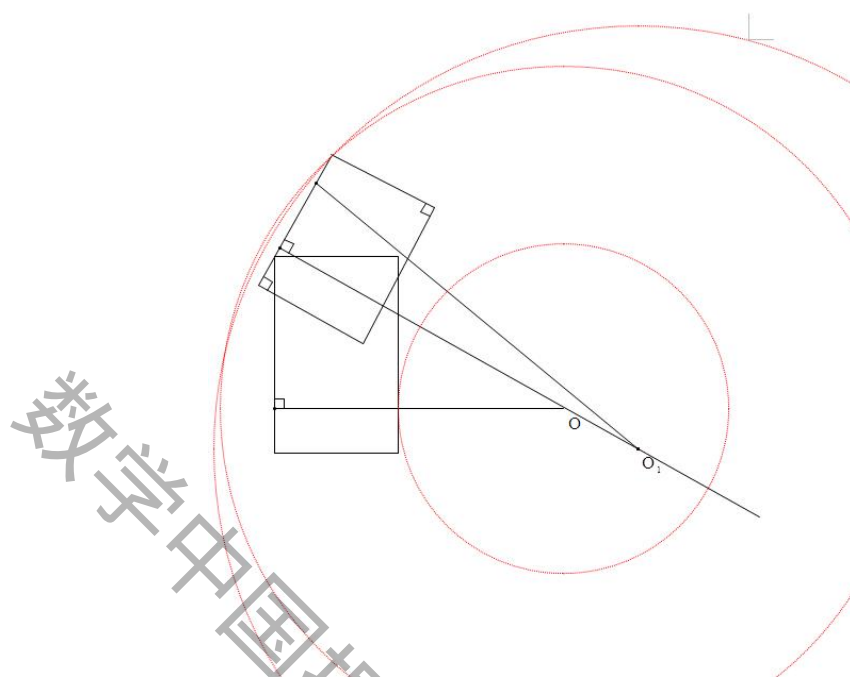


图 5-2 铰接式的集装箱货车的运动轨迹状态二图

状态 3:

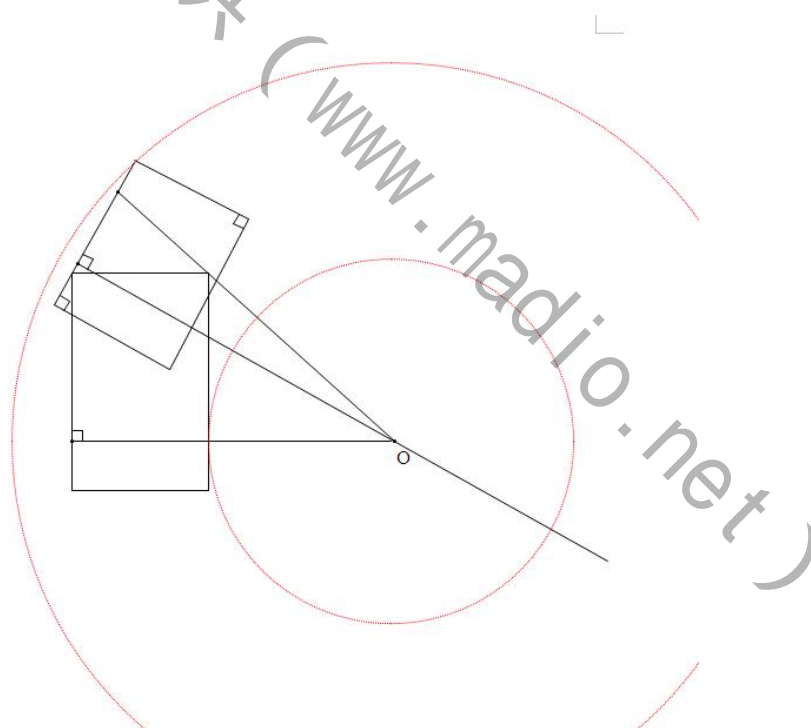


图 5-3 铰接式的集装箱货车的运动轨迹状态三图

根据几何图分析, 状态 3 走过的轨迹范围大于状态 2 和状态 3, 虽然状态 3 的范围小于状态 2, 但是实际情况下还要留出部分空间, 预防出现的偏差。因此在模型的建立中选用状态 3 来分析。模型中称状态 3 为理想状态[1]。



报名号 # 1143

## 六 模型建立

第一问模型：

车体模型：

原始图如图 6-1：



图 6-1 铰接式的集装箱货车原始图

抽象成几何图如图 6-2：

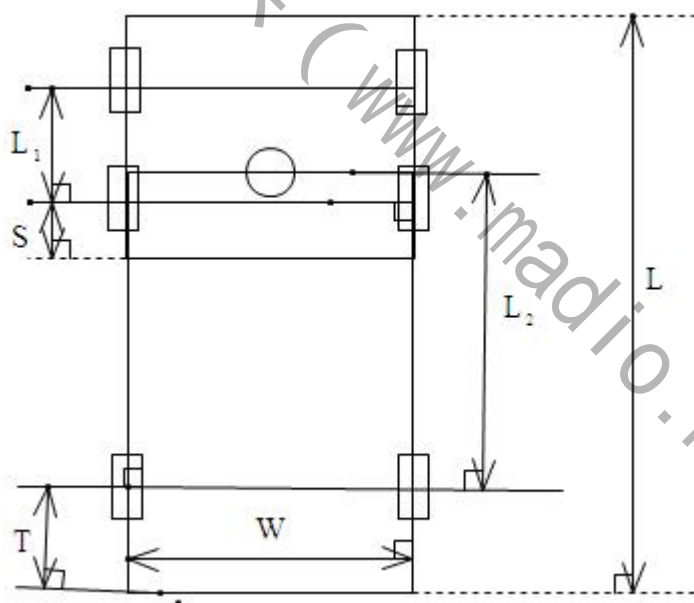


图 6-2 铰接式的集装箱货车几何图

在图 6-2 中  $L$  表示车身长度（包括牵引车和挂车）。 $L_1$  表示牵引车前后轮距离。 $L_2$  表示挂车车头到后车轮的距离。 $S$  表示牵引车后车轮到车尾的距离。 $T$  表示挂车后车轮到车尾的距离。

## 报名号 #1143

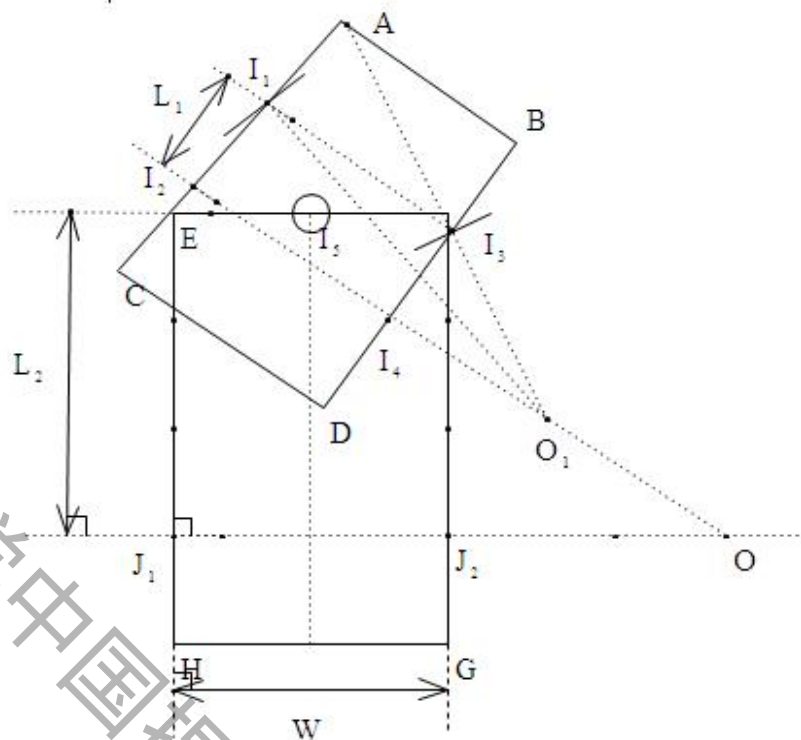


图 6-3 铰接式的集装箱货车几何图[1]

图 6-3 作图方式如下：

作  $\square ABCD$  表示牵引车， $\square EFGH$  表示挂车。 $I_1, I_2, I_3, I_4$  表示牵引车的左前轮，左后轮，右前轮，右后轮。 $J_1, J_2$  表示挂车左后轮和右后轮。过  $J_1, J_2$  做延长线，过  $I_2, I_4$  做延长线交点  $O$ 。过点  $I_1$  做牵引车左前轮垂线交  $OI_2$  于点  $O_1$ 。 $L_1$  表示牵引车前后轮之间的距离。 $L_2$  表示挂车后轮到车头的距离。 $W$  表示车宽。 $I_5$  表示牵引车和挂车的链接点。

轨迹判定模型：

假设牵引车和挂车都符合阿克曼方程（实际将牵引车的后轮车轴看作挂车的前轮车轴是存在一定误差的）。理想状态时  $O_1$  与  $O$  重合 如图 6-4。若  $O_1$  位于  $O$  下方理想状态下所形成的转向宽带比一般情况要大，所以理想状态下能进入的在一般状态下一定能进入。

报名号 # 1143

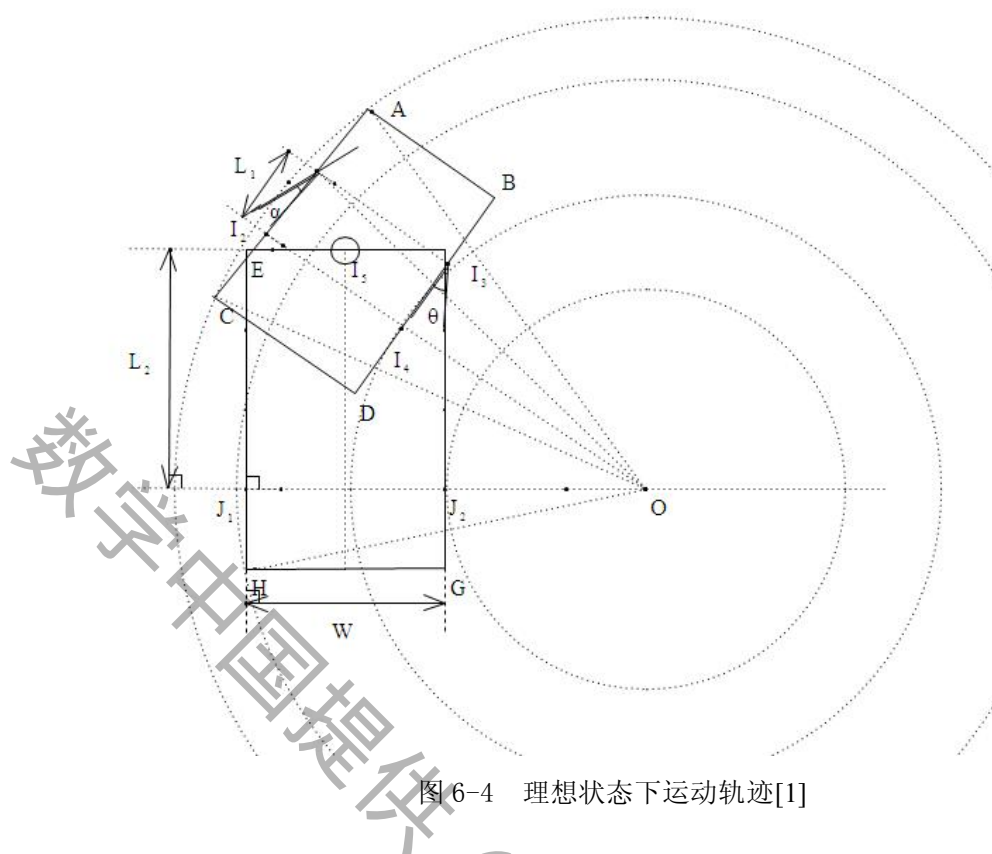


图 6-4 理想状态下运动轨迹[1]

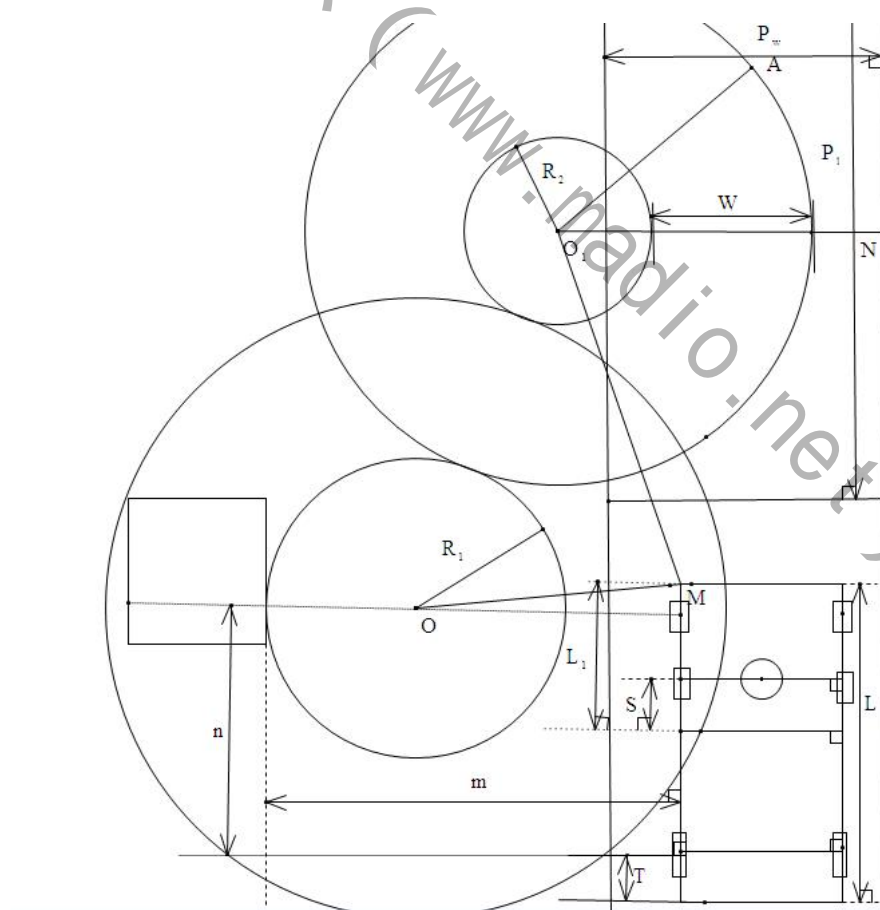


图 6-5 理想状态下的前车停车图

## 报名号 # 1143

根据图 6-5 几何关系，建立模型：

阿克曼方程：

$$R_1 = \frac{L_1}{\sin \alpha} - W$$

$$R_2 = \frac{L_2}{\sin \theta} - W$$

约束条件：

$$O_1A \leq O_1N$$

$$O_1A \leq O_1M$$

$$R_1 \leq OM$$

$$O_1A = \sqrt{(R_2 + W)^2 + (L_1 - S)^2}$$

$$O_1N = R_2 + \frac{P_w + W}{2}$$

$$OM = \sqrt{(m - R_1)^2 + (L - T - n)^2}$$

$$O_1M = \sqrt{(ON - P_w)^2 + [P_l - (L - T)]^2}$$

简化：

$$\sqrt{(R_2 + W)^2 + (L_1 - S)^2} \leq R_2 + \frac{P_w + W}{2}$$

$$\sqrt{(R_2 + W)^2 + (L_1 - S)^2} \leq \sqrt{(O_1N - P_w)^2 + [P_l - (L - T)]^2}$$

$$R_1 \leq \sqrt{(m - R_1)^2 + (L - T - n)^2}$$

令：

$$f_1(P_w, P_l) = (R_2 + W)^2 + (L_1 - S)^2 - \left(R_2 + \frac{P_w + W}{2}\right)^2$$

$$f_2(P_w, P_l) = (R_2 + W)^2 + (L_1 - S)^2 - (O_1N - P_w)^2 - (P_l - L + T)^2$$

$$f_3(P_w, P_l) = R_1^2 - (m - R_1)^2 - (L - T - n)^2$$

当  $(P_w, P_l)$  满足

$$f_1(P_w, P_l) \leq 0$$

$$f_2(P_w, P_l) \leq 0$$

$$f_3(P_w, P_l) \leq 0$$

该车位允许集装箱车进入，若不满足则不能进入。

第二问模型：

## 报名号 # 1143

### 1 实时停车路线修正模型

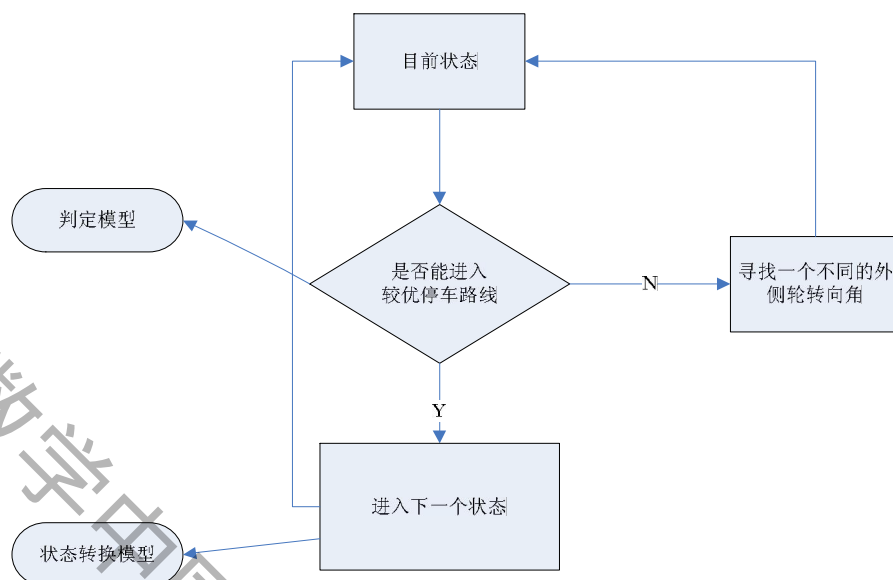


图 6-6 实时停车路线修正模型

模型描述：

- (1) 初始状态已定
- (2) 希望下一个状态进入较优路线
- (3) 计算下一状态
- (4) 判断是否能进入较优路线
- (5) 可以则进入继续(3), 不可以则在选择另外的状态
- (6) 当所有状态都不符合时, 则返回上一个状态。

判定模型：

引用第一阶段判断是否可停位的模型。 
$$f(m, n, \alpha) = \frac{m}{2} + \frac{(L+S)^2}{2m} + W - \frac{L}{\tan \alpha}$$

$m$  : 初始时, 待停汽车与已停汽车的水平距离

$\alpha$  : 外侧轮转角

$S$  : 前轮到车头距离

$L$  : 前后轮距

$W$  : 左右轮距

状态转换模型：

这里采用的是倒车停车的情况进行分析。

## 报名号 # 1143

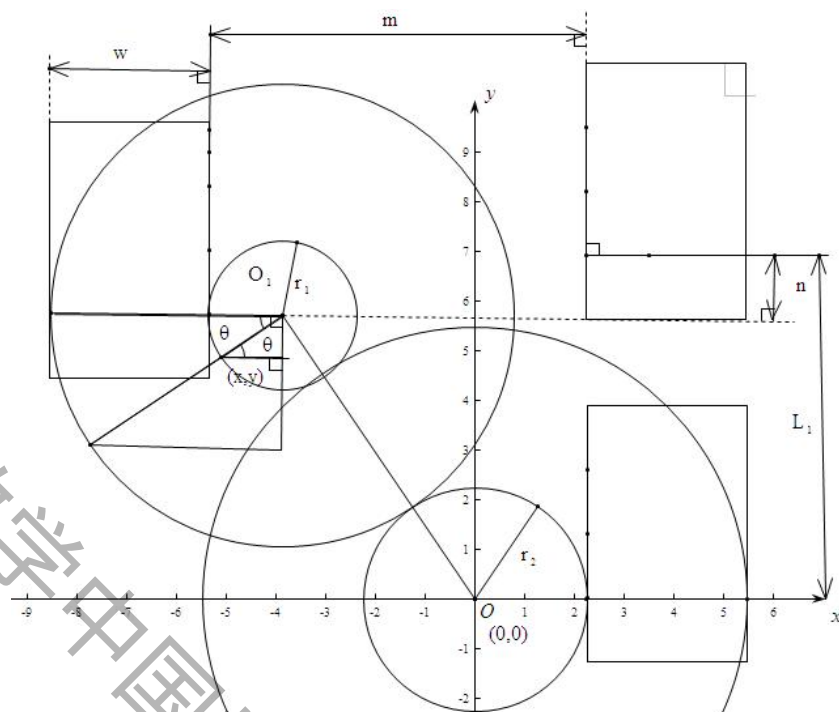


图 6-7 倒车停车轨迹图

$$(m_{k+1}, n_{k+1}, \alpha_{k+1}) = F[(m_k, n_k, \alpha_k)]$$

$$\text{令 } g(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \notin (\alpha_{\min}, \alpha_{\max}) \\ 1, & \alpha \in (\alpha_{\min}, \alpha_{\max}) \end{cases}$$

如果  $g(\alpha_k) = 1$

且  $f(m_k, n_k, \alpha_k) \leq 0$

则

$$m_{k+1} = m_k - (r_1 - |x|) \dots \dots \dots x = -[r_1 \cos \theta - \sqrt{(r_2 + W + r_1)^2 - n_k^2}]$$

$$n_{k+1} = n_k + |y| \dots \dots \dots y = n_k - r_1 \sin \theta$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k$$

若  $f(m_k, n_k, \alpha_k) > 0$

则

$$m_{k+1} = m_k$$

$$n_{k+1} = n_k$$

$$\alpha_{k+1} \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \text{ 且 } \alpha_{k+1} \neq \alpha_k$$

否则

## 报名号 # 1143

$$m_{k+1} = m_{k-1}$$

$$n_{k+1} = n_{k-1}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_{k-1}$$

## 2 驾驶员体验模型

假设外侧轮转向角最大为  $\alpha$ ，方向盘转向角  $\beta$ （即  $n = \frac{\beta}{360}$  圈），外侧轮转向角和方向盘转向角成线性关系则：

$$\beta = k\alpha \Rightarrow n = \frac{k}{360}\alpha$$

$k$  为外侧轮转向角和方向盘转向角线性关系正比系数。

驾驶员能通过方向盘转向估算外侧轮转向角，从而对汽车的转向进行，更加准确有效的控制。

## 七 模型的求解

第一问模型的求解：

先将汽车及停车位的相关参数  $L, S, T, W, K, m, n, \alpha, P_w, P_l$  代入模型判断是符合要求，判断的过程主要通过程序求解，求解程序流程图如图 6-1：

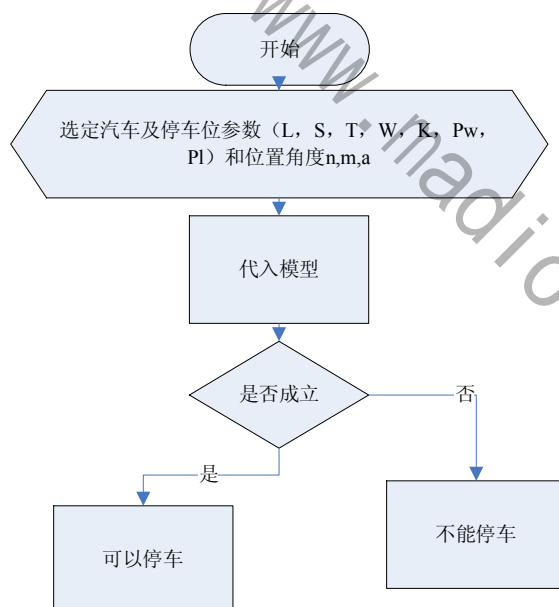


图 7-1 第一问模型求解流程图

第二问模型的求解：

这部分计算主要用动态规划的思想，程序主要通过递归的方式实现。用长度为 3 的数组来表示当前的前一个状态，当前状态，下一个状态。每个阶段将状态记录在数组中，每次转换时读取数组中的数据来判断此刻汽车运行的状态，再根据当前状态对驾驶员提供实际的建议。具体求解的流程图如图 6-3。源代码见附录二。但由于缺少实际的数据，未能进行实际的计算验证。

## 报名号 # 1143

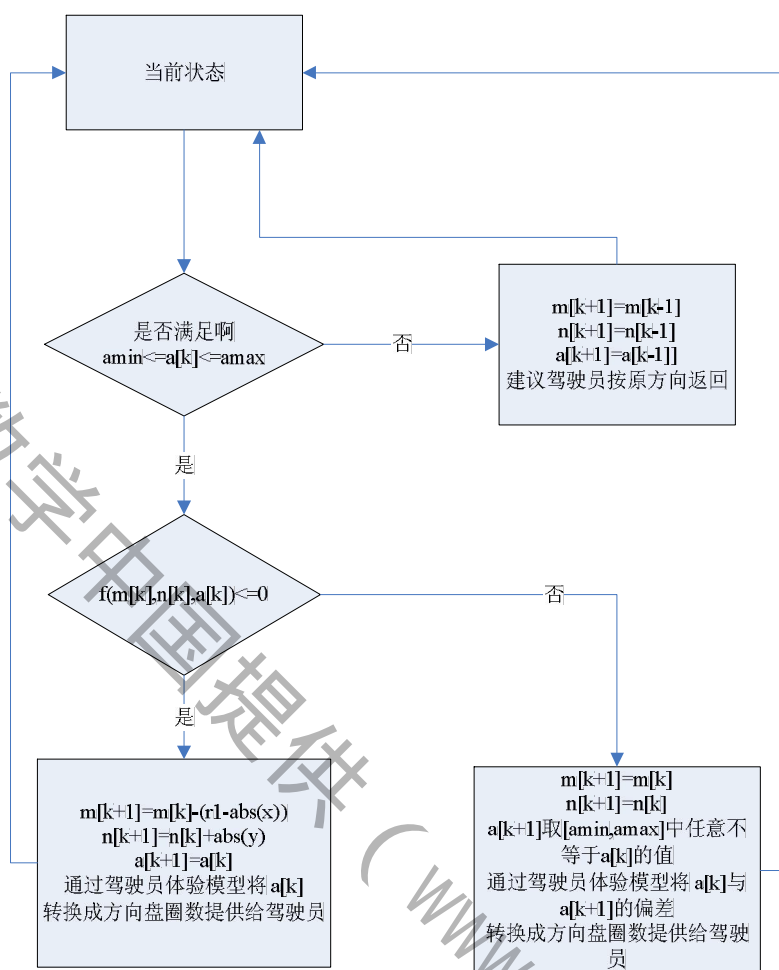


图 7-2 第二问模型求解流程图

## 八 模型的误差分析及求解方法

### (一) 误差产生原因分析

1: 第(1)问中的误差由于理想与一般状态实际的运行轨迹存在不同。理想状态下的运动轨迹所产生的运行宽带比一般状态要大。因此，一般状态下能停车的在理想状态下未必能停。

2: 第(2)问中的误差状态与状态之间的间隔不同所产生的误差。间隔越大，所产生的误差就会越大。

3: 沿用第一阶段中模型所产生的误差。由于第一阶段模型存在误差，在此阶段使用第一阶段的模型时，都可能产生第一阶段的误差。

### (二) 求解思路及方法

1: 实际使用时，存在一些人为或客观因素的影响，不能完全按照设计的路线行驶，需要提供部分的空间，预防产生的偏差，选用理想模型，虽然扩大了范围，但却更符合实际。因此如果理想模型产生的误差在允许偏差范围内，还是可以接受的，超出允许偏差范围，可以向一般状态转换。

2: 计算过程中减小状态间的间隔长度。

3: 在使用第一阶段的模型时，结合第二阶段的实际情况，重新修改第一阶段的，



## 报名号 # 1143

减少误差。

## 九 模型的检验

第(1)问需要一组车身的实际参数，停车位的参数和停车位置和角度的参数来代入模型进行检验。

第(2)问需要通过实际的行驶，记录各状态的参数。观察行驶路线是否符合第一阶段设计的较优路线。

## 十 模型改进

### 1: 第(1)问模型的改进

第(1)问中的理想状态还是一般状态的使用的都是一种静态的方式，沿用第(2)问的思路，在行驶过程中动态的改变状态，每个状态仍然采用原先静态状态下的模型。简单的思路如下  
状态之间的转换：

$$(m_{k+1}, n_{k+1}, \alpha_{k+1}) = F[(m_k, n_k, \alpha_k)]$$

每个状态通过第(1)问中的轨迹判定模

$$f_1(P_w, P_l) \leq 0$$

$$f_2(P_w, P_l) \leq 0$$

$$f_3(P_w, P_l) \leq 0$$

来判断在此位置是否可以停车，可以则进入下一个状态，不可以则调整状态。

### 2: 驾驶员体验模型的改进：

驾驶员模型改进方案，需要一组实际的外侧转向角( $\alpha$ )和方向盘转向角( $\beta$ )数据，

由于实际测量需要的时间较长，暂时用( $x_n, y_n$ )表示如表 1

表 1 外侧转向角( $\alpha$ )和方向盘转向角( $\beta$ )数据表

外 侧 转 向 角( $\alpha$ )	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	.....	$x_n$
方 向 盘 转 向角( $\beta$ )	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	.....	$y_n$

通过数据拟合得到外侧转向角( $\alpha$ )和方向盘转向角( $\beta$ )的关系式：

$\beta = f(\alpha) \Rightarrow n = \frac{f(\alpha)}{360} \Rightarrow n = F(\alpha)$  是否与理论上的正比关系式吻合，通过修改得到更加符合实际的模型。

报名号 # 1143

## 十一 模型评价

优点：

使用动态规划思想提高了模型整体的实用性。对原先提出的驾驶员体验模型通过数据拟合的方法改进，提高了与实际的联系。

缺点：

缺少实际数据对模型的支持，模型的实际使用性，有待验证。虽然采取了减少误差的方法，但还是存在部分误差。

## 十二 参考文献

- [1] 韩厚禄. 三轴半挂车转向协调性及随动转向桥结构原理研究[D]. 武汉：武汉理工大学，2009.

## 十三 附录

附录一：第一问模型求解程序

```
#include"stdio.h"
#include"math.h"
double pow(double a,int b)
{
    //求  $a^b$ 
    int i;double temp=a;
    for(i=0;i<b;i++)
    {
        temp=temp*a;
    }
    return temp;
}
int fun(double L , double L1 ,double S , double T , double W ,double Pw , double Pl,double
R1,double R2,double m,double n)
{
    //求
     $f_1(P_w, P_l) \leq 0$ 
     $f_2(P_w, P_l) \leq 0$ 
     $f_3(P_w, P_l) \leq 0$ 
    double f1=pow(R2+W,2)+pow(L1-S,2)-pow(R2+(Pw+W)/2,2);
    double f2=pow((R2+W),2)-pow(L1-S,2)-(pow(R2+(W-Pw)/2,2)+pow(Pl-L+T,2);
    double f3=(pow(R1,2)-pow(m-R1,2)-pow(L-T-n,2);
    if(f2<=0&&f3<=0&&f4<=0)
    return 1;
    else
    return 0;
}
```

## 报名号 # 1143

```

main()
{
    //主函数
    double L,L1,S,T,W,Pw,Pl,R1,R2,m,n;
    scanf("%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f,%f",&L,&L1,&S,&T,&W,&Pw,&Pl,&R1,&R2,&m,
    &n);
    if(fun(L,L1,S,T,W,Pw,Pl,R1,R2,m,n)==1)
    {
        printf("可以停车\n");
    }
    else printf("不可以停车\n");
}

```

附录二：第二问模型求解程序

```

#include "stdio.h"
#include "math.h"
#define aMin 0.00;
#define aMax 3.14/4;
double m[3];
double n[3];
double a[3];
int fun(double m, double n, double a)
{
    double temp;
    int flag=0;
    temp = m/2 + (L+S)*(L+S)/(2*m) + W - L/tan(a); //L,S,W 为已知常数
    if(temp <= 0)
    flag 1;
    return flag;
}
double search(double a)
{
    double temp = aMin + (aMax - aMin) * 100 / random(100);
    if(temp != a)
    temp = temp;
    else temp = +1/100;
    return temp;
}

double convert(double a)
{
    return k * a / 7.28; //k 为常数
}
State(double m, double n, double a)
{

```

## 报名号 # 1143

```

if(a<=aMax&&a>=aMin)
{
if(fun(m,n,a)==1)
m[2]=m[1]-(r1-abs(r1*cos(theta)-sqr((r2+W+r1)*(r2+W+r1)-n[1]*n[1])))
n[2]=n[1]+abs(n[1]-r1*sin(theta))
a[2]=a[1];//r1,theta,r2,W,为可测到的常数
}
else
{
m[2]=m[1];
n[2]=n[1];
a[2]=search(a[1]);
printf("方向有误，请调整方向盘%f圈", convert(a[2])-conver(a[1]));
}
}
else
{
m[2]=m[0];
n[2]=n[0];
a[2]=a[0];
printf("请按原始路线返回，方向盘转%f圈!",convert( a[0]));
}
State( m[2], double n[2],double a[2])
}

```