

报名号#1474

一、问题重述

问题1. 整车在转弯时不是刚性的大型车辆，如铰接式集装箱货车，有时也会面临狭小空间的停车问题。通过建立合适的模型，判断这样的车辆能否安全停车狭窄车位。

问题2. 通过第一阶段的工作，我们已经能够设计出较优的停车线路。但人工驾驶时操作可能不准确，客观条件可能影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的线路行进。为简化问题，在此问题中只需考虑小型车辆。假设我们可以实时测定本车的确切位置，建立合理的模型，根据本车的当前位置，随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。

二、模型假设

1. 停车过程中，车身不能越过本车位的界线。
2. 车转弯过程中速度很小，不影响转弯半径的调整。
3. 模型一以三轴半挂车为研究对象。
4. 模型二中假设可以实时测定汽车的位置坐标和车身偏向角
5. 模型二中车位能满足停车需求，即不用考虑车位限制

三、符号说明

模型一所涉及的符号：

A	牵引销的中心	C	挂车后悬
B	半挂车中间轴中点	D	牵引车前悬
b	半挂车三轴之间的轴距	γ	挂车与牵引车的夹角
L_n	半挂车中间轴到牵引销中心的距离	L_z	牵引车轴距
K_g	半挂车车身宽	k_z	牵引车车身宽
R_o	曲线运动部分牵引车（牵引车）的转弯半径	R_1	直线运动部分挂车的转弯半径

报名号#1474

模型二所涉及的符号：

r_0	汽车最小转弯半径	x_f	理想停车位置（右后轮）横坐标
θ	车身偏向角（与 y 轴）	y_f	理想停车位置（右后轮）纵坐标
φ_m	车身最大转向角度		
x	汽车右后轮横坐标	y	汽车右后轮纵坐标

四、 问题分析

问题1：

本题要求建立大型车辆（如挂车）的侧位停车模型，当停车位狭窄时，驾驶员能根据这个模型，判断车子能否安全停入。

1) 研究对象的选取

不同的车型，转弯时的动力学分析方法也不一样，为方便分析，我们需要选取一种具有代表性的车作为研究对象。查阅一些资料后我们了解到，拖挂车的磨损轮胎的磨损是大型货车维修费的主要来源，而半挂车为三轴，且均为转向轴的车辆，可以提高汽车

列车的行驶性能，减少轮胎磨损和功率损耗，减少车辆用户的经济损失等^[1]。考虑到这个原因，我们的分析对象定为如图所示的三轴半挂车，即此车的拖车部分为三轴车，另外，其牵引车为双后桥，前桥是单桥，且为转向桥，半挂车的三轴均为转向轴。

结构如图4-1^[1]：

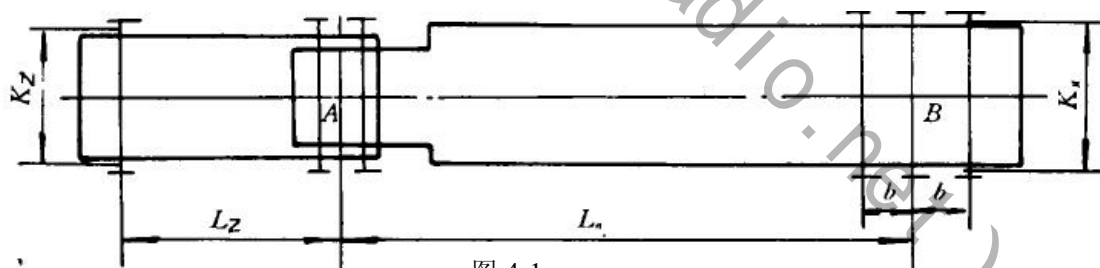


图 4-1

图中符号意义如下：

A： 牵引销的中心

B： 半挂车中间轴中点

b： 半挂车三轴之间的轴距

L_n ： 半挂车中间轴到牵引销中心的距离

L_z ： 牵引车轴距

k_z ： 牵引车车身宽

K_g ： 半挂车车身宽

报名号#1474

2) 侧位停车的行车路径分析

与第一阶段中考虑刚性车的情况一样，实际的停车过程中所需要的空间受个人的停车技术与习惯影响较大，在模型建立过程中，不可能考虑到所有人的情况。我们仍应选取具有代表性的停车方式，求出停车过程中整车扫过的宽度与长度，与已知停车位的尺寸做比较即可。

本文选取汽车行车路径如图4-2所示，

问题2:

1) 初始状态对理想停车路径的影响

在前几问中，我们都假设了车能达到预定的初始状态，然后按特定的路径进入。本问中，这个假设不能再用了，因为驾驶员可能会受到客观条件影响而不能到达预定的初始状态。对于不同的初始位置，要找到相对应的适合的理想路径。

设停车位附近准备进入车位的挂车与停车位的夹角为 θ 。根据第一阶段的最优行车路径分析，我们知道车辆的理想驶入角在 40° 至 50° 之间。

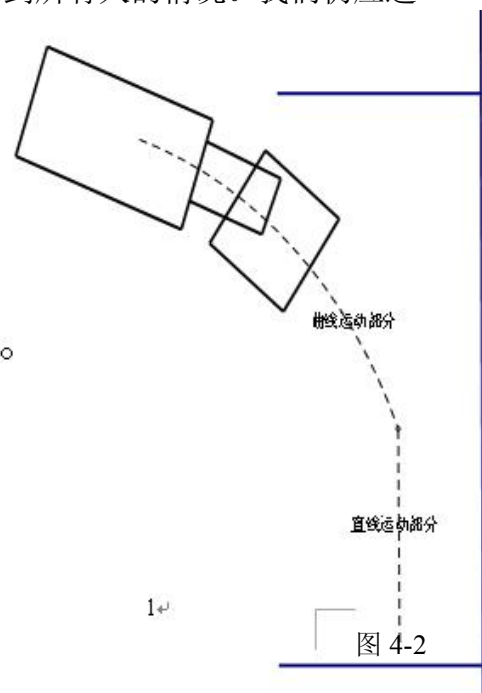


图 4-2

车型 项目	微型车	小型车	轻型车	中型车
θ (汽车的驶入角)/ 单位: 度	40.3149	43.7617	47.6751	48.8605

表 4-1

因此，当某车的驶入角接近 40° — 50° 或更大时，调整角度到理想驶入角比较方便，则以图4-3所示的一次倒车方法进入较优；当驶入角较小（极端情况为 $\theta=0$ ），更容易调整至S型倒车方式初始角（ $\alpha=0$ ），显然选择S型路径为优。我们可以选取 $\theta=30^\circ$ 为零界角，提供两种停车路径如下：

1. $\theta > 30^\circ$ 时，采用一次倒车入位^[2]方法（路径A）
2. $\theta < 30^\circ$ 时，采用S型倒车^[3]方式停车（路径B）。

2) 实际路径有偏差时，如何调整至理想路线
这个问题的关键在于如何表示任意时刻实际路径与理想路径的偏差。我们可以用 (x_i, y_i, θ) 来表示理想路径下车的位置， θ 为车身偏向角。用 (x'_i, y'_i, θ') 表示实际位置车的状态量，当 $y_i = y'_i$ 时，可以求得横向偏差及车身偏向角偏差。

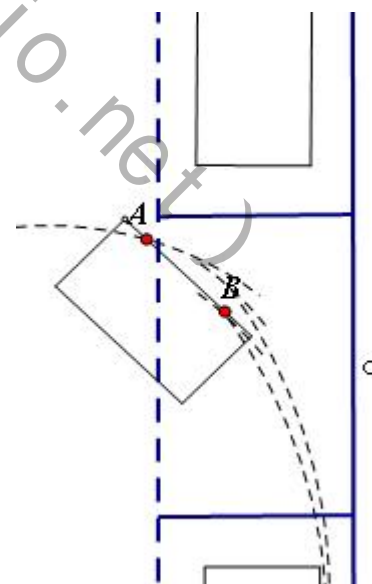


图 4-3

报名号#1474

线 AB 的垂线，垂足为 C。根据跟随性最佳的条件，由三角函数关系可得：

$$\tan \alpha_1 = \frac{(\frac{L_n}{2} - b)}{\sqrt{R_0^2 - (\frac{L_n}{2})^2 - \frac{K_g}{2}}} \dots\dots\dots (1)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\frac{L_n}{2}}{\sqrt{R_0^2 - (\frac{L_n}{2})^2 - \frac{K_g}{2}}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{(\frac{L_n}{2} + b)}{\sqrt{R_0^2 - (\frac{L_n}{2})^2 - \frac{K_g}{2}}} \dots\dots\dots (3)$$

$$R_0 = \frac{L_n}{2 \sin \gamma} \dots\dots\dots (4)$$

以上各式即为接下来分析曲线运动的基本条件。

b. 曲线运动部分所需停车位的长宽

曲线运动的末位置应如图 5-2 所示：牵引车与车位平行，挂车的左后角与停车位左端点重合。设 l_1 和 d 分别为曲线运动过程中所需的停车位长度和

宽度，则有

$$\begin{cases} d = \frac{K_z}{2} + a * \sin \varphi \\ l_1 = D + L_z + a * \cos \varphi \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{又 } a = \sqrt{(L_n + C)^2 + (\frac{K_g}{2})^2}, \quad \varphi = \gamma - \beta, \quad \tan \beta = \frac{K_g}{2(L_n + b + C)}$$

代入 (8) 式，得曲线运动过程中所需要的长宽：

$$\begin{cases} d = \frac{K_z}{2} + \sqrt{(L_n + C)^2 + (\frac{K_g}{2})^2} * \sin \{ \gamma - \arctan[\frac{K_g}{2(L_n + b + C)}] \} \\ l_1 = D + L_z + \sqrt{(L_n + C)^2 + (\frac{K_g}{2})^2} * \cos \{ \gamma - \arctan[\frac{K_g}{2(L_n + b + C)}] \} \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

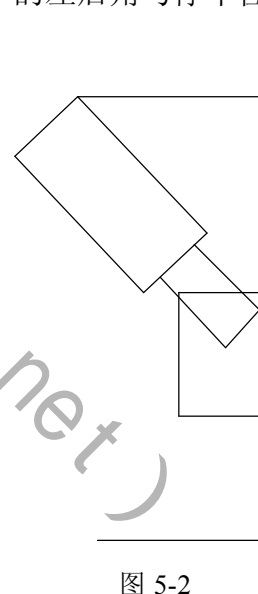


图 5-2

报名号#1474

5.1.2 两运动过程的过渡

曲线运动的末状态，牵引车前轮转角必定不为0，此时，驾驶员只需通过方向盘的调整即可使其转角变为0，根据经验可知，这样的调整不会使车发生位移。

5.1.3 牵引车直线运动部分的处理

在这一过程中，牵引车直线行驶，显然此时拖车的运动轨迹为弧线，挂车和牵引车的夹角 γ 逐渐变小，直至趋近于0，表示整车已停正，这个角度表示为 $\delta(\delta \rightarrow 0)$ 。在此过程中， γ 与 α_2 同步减小，直至到零，通过关系分析易得这两角相差不大，为简化分析与计算，我们假设在第二部分的直线运动过程中始终有 $\alpha_2 = \gamma$ 。

设直线运动过程中牵引车的速度恒为 V ，挂车的转弯半径为 R_1 。则

$$\text{挂车横摆角速度为 } \omega = \frac{V}{R_1} \frac{d\gamma}{dt} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{根据几何关系，有 } R_1 = \frac{L_n \cos \alpha_2}{\sin(\gamma + \alpha_2)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{因为已有假设 } \alpha_2 = \gamma \quad \dots\dots\dots (9)$$

所以联立(1)(2)(3)式消去 α_2 ，可得挂车和牵引车夹角 γ 与牵引车的速度 V 的关系

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{2 * V * \sin \gamma}{L_n} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{对上式求解积分 } \int_{\gamma}^{\delta} \frac{1}{\sin \gamma} d\gamma = \frac{2}{L_n} \int_0^t V dt, \text{ 得}$$

$$\text{直线运动过程中，牵引车行进位移 } S = -\frac{L_n}{2} * \ln\left(\frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}\right) \quad \dots\dots\dots (11)$$

综合两部分的运动，由(6)和(11)得到所需停车位的宽度 d 和长度 l ：

$$\begin{cases} d = \frac{K_z}{2} + \sqrt{(L_n + C)^2 + \left(\frac{K_g}{2}\right)^2 * \sin\left\{\gamma - \arctan\left[\frac{K_g}{2(L_n + b + C)}\right]\right\}} \\ l = l_1 + S = D + L_z + \sqrt{(L_n + C)^2 + \left(\frac{K_g}{2}\right)^2 * \cos\left\{\gamma - \arctan\left[\frac{K_g}{2(L_n + b + C)}\right]\right\}} - \frac{L_n}{2} * \ln\left(\frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}\right) \end{cases}$$

报名号#1474

5.2 模型二的建立与求解

在问题分析中我们已经知道根据车辆的初始位置的不同，有两种不同的停车方式可供选择，具体方案如下：

1) $\theta > \theta_0$ 时，采用一次倒车入位^[3]方法

- 调整车到预定倒车位置， θ 约 45 度
- 逆时针打满方向盘（转向角达到最大值 φ_{\max} ），逐渐减小 φ 进行倒车
- 当车身与车位侧边平行时即停止倒车，表示车已达理想位置

2) $\theta < \theta_0$ 时，采用 S 型倒车^[2]方式停车

- 调整车到预定倒车位置 $\theta = 0^\circ$
- 顺时针打满方向盘（转向角达到最大值 φ_{\max} ），倒车到切点 C
- 逆时针打满方向盘（转向角达到最大值 $-\varphi_{\max}$ ），倒车到理想位置 $(x_f, y_f, 0)$ 临界

值 θ_0 可取 30° 。

下面分别对这两种方案的理想轨迹求解

5.2.1 一次倒车法

这种停车方案的行车轨迹是一段弧线，难以得到准确的解析方程，我们考虑将行车轨迹离散化，获得理想轨迹上的一系列状态点 (x_i, y_i, θ_i) 。

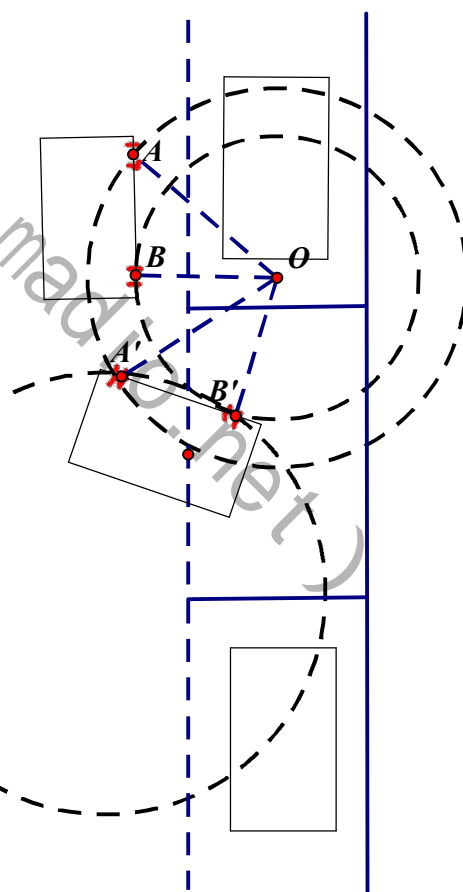
假设车每走过一小段圆弧 Δl 转弯半径增加 Δr ，初始时转弯半径为最小转弯半径 r_m ，车的初始状态为：

$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = y \\ \theta_0 = \theta \end{cases}$$

将过程离散化处理，有：

$$\begin{cases} r_{i+1} = r_i + \Delta r \\ \Delta \theta_i = \Delta l r_i \end{cases}$$

由于 Δl 很小，可近似认为 (x_i, y_i) 与 (x_{i+1}, y_{i+1}) 之间的距离为 Δl ，根据几何关系，容易得到车的状态参数的递推关系为：



S型倒车
图 5-3

报名号#1474

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta l \cos(\theta_i - \frac{\Delta\theta_i}{2}) \\ y_{i+1} = y_i - \Delta l (\theta_i - \frac{\Delta\theta_i}{2}) \\ \theta_{i+1} = \theta_i - \Delta\theta \end{cases}$$

5.2.2 S型倒车法

要使车能以 S 型行车轨迹倒入理想位置，车的初始位置应满足（以车前轮轴中心位置 M 为考察点）：

$$(x + 2r_0 - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = 4r_0^2$$

S 型轨迹的两段圆弧方程：

第一段圆弧：

$$\begin{cases} x_i = x + r_0 + r_0 \cos \alpha_1 \\ y_i = y + r_0 \sin \alpha_1 \end{cases} \quad \alpha_1 \in (\pi, \pi + \alpha)$$

第二段圆弧：

$$\begin{cases} x_i = x_f - r_0 + r_0 \cos \alpha_2 \\ y_i = y_f + r_0 \sin \alpha_2 \end{cases} \quad \alpha_2 \in (0, \alpha)$$

车行驶到两圆相切的点 C 时车身偏向角达到最大，车身偏向角最大值 α 的确定：

$$\sin \alpha = \frac{y - y_f}{2r_0} \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$$

5.2.3 引导停车模型

a. 引导模型的作用

通过引导模型，我们能随时提出建议路线，这个建议路线总是指导车辆往理想路径靠近。

b. 引导模型的作用原理

当测得本车当前位置时，能分析得到与理想路线的偏差值。引导系统的输入为车的位置状态量 $(x_i; y_i, \theta_i)$ ，输出为路径变化方案和车辆转向角 φ 的指导偏向以及水平偏移距离，给出 Δx 。

c. 引导模型的建立

通过比较同一纵坐标实际路线车身偏向角 θ_i 和理想路线上的理论偏向角来确定汽车偏离理想路线的情况，根据偏离大小给出引导方案。

1) 一次倒车入位法中实时位置 (x_i, y_i, θ_i) 的理论偏向角的确定：

这种停车方案的理想轨迹求解中，对轨迹进行了离散化处理，得到的是轨迹上一系列点的位置状态量，对于一确定 y_i ，在离散点集合中搜索与 y_i 距离最近的点 (x', y', θ') ，

报名号#1474

可以将这个点对应的偏向角作为 y_i 对应的理论偏向角。

$$\text{绝对偏差: } \Delta\theta_1 = \theta_i - \theta'$$

$$\text{水平偏离: } \Delta x_1 = x_i - x'$$

2) S型停车法中实时位置 (x_i, y_i, θ_i) 的理论偏向角的确定:

$$y_i \in (\frac{y - y_f}{2}, y), ,$$

车在 S 型轨迹第一段范围内, 此时 y_i 对应的理论偏向角为: $\theta_{s1} = \arcsin \frac{y_i - y}{r_0}$

$$\text{理想路径横坐标: } x_{s1} = x + r_0 + \sqrt{r_0^2 - (y_i - y)^2}$$

$$\text{绝对偏差: } \Delta\theta_2 = \theta_i - \theta_{s1}$$

$$\text{水平偏离: } \Delta x_2 = x_i - x_{s1}$$

$$y_i \in (y_f, \frac{y - y_f}{2}), ,$$

车在 S 型轨迹第二段范围内, 此时对应于 y_i 的理想偏向角为: $\theta_{s2} = \arcsin \frac{y_i - y_f}{r_0}$

$$\text{理想路径横坐标: } x_{s2} = x_f - r_0 + \sqrt{r_0^2 - (y_i - y)^2}$$

$$\text{绝对偏差: } \Delta\theta_2 = \theta_i - \theta_{s2}$$

$$\text{水平偏离: } \Delta x_2 = x_i - x_{s2}$$

d. 引导方案(引导模型的求解):

比较 $\Delta\theta_1$ 与 $\Delta\theta_2$, 由于实际停车过程中, 人工转向不会那么准确, 总会存在一定误差, 所以并不要求实际路线一定与理想路线重合, 根据实际情况给出一个允许偏差范围, 这里我们取 $\text{eps}=0.00001$, 对于 $\Delta\theta(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2)$ 的判断如下:

$\Delta\theta > \text{eps}$: 表示车与理想路径相比偏右

$|\Delta\theta| < \text{eps}$: 表示车与理想路径的偏差在误差允许范围内

$\Delta\theta < -\text{eps}$: 表示车与理想路径相比偏左

报名号#1474

偏离角度 $\Delta\theta$ 与引导转向角的变化 $\Delta\varphi$ 的映射：

根据上述分析，给出操作建议如下：

$ \Delta\theta_1 > \Delta\theta_2 $	$\Delta\theta_2 > eps$	A	车已偏离 A 路径过远，现转入 B 路径，请向左转，并逐渐减小转向角
		B	车稍微偏离理想路径，请向左传
	$ \Delta\theta_2 < eps$	A	车已偏离 A 路径，现转入 B 路径，请保持方向并逐渐减小转向角
		B	正常前行，请保持
	$\Delta\theta_2 < -eps$	A	车已偏离 A 路径过远，现转入 B 路径，请向右转
		B	车稍微偏离理想路径，请向右传
$ \Delta\theta_1 < \Delta\theta_2 $	$\Delta\theta_1 > eps$	A	车稍微偏离理想路径，请向左传
		B	车已偏离 B 路径过远，现转入 A 路径，请向左传并保持以最大转向角前行
	$ \Delta\theta_1 < eps$	A	正常前行，请保持
		B	车已偏离 B 路径，现转入 A 路径，请保持以最大转向角前行
	$\Delta\theta_1 < -eps$	A	车稍微偏离理想路径，请向右传
		B	车已偏离 B 路径过远，现转入 A 路径，请向右转

表 5-1

报名号#1474

六、模型算例

(一)、模型一的验证



车辆新产品技术参数

产品型号名称: HLQ9330型半挂车 产品ID: A2148 批次: 188

产品商标: 神狐牌 产品号: ZGMXR2SA07E 生效日期: 20090402

企业名称: 湖北合力专用汽车制造有限公司 法人代表: 徐希斌

注册地址: 随州市北郊星光工业园 目录序号: (十七)79

生产地址: 随州市北郊星光工业园 电话号码: 0722-3818477

外形尺寸(mm): 长 13000 宽 2500 高 3100 货厢栏板内尺寸(mm): 长 12800 宽 2285 高 600,550

转向形式: 总质量 32990 (kg) 额定载质量 26000 (kg) 整备质量 6990 (kg)

燃料种类: 排放依据标准: 轴数 3 轴距 6860+1310+1310 (mm) 钢板弹簧片数 -/8/8/8 轮胎数 12 轮胎规格 11.00-20 前轮距 (mm) 后轮距 1840/1840/1840 (mm) 轴荷 -/19390

准拖挂车总质量 (kg) 载质量利用系数 半挂车鞍座最大允许承载质量 13600 (kg) 额定载客(含驾驶员) (人) 驾驶室准乘人数 (人) 接近角/离去角 -/15 (°) 前悬/后悬 -/2420 (mm) 最高车速 (km/h) 防抱死制动系统

其它: 保存图片>> 下一页

后部照片 防护装置照片 车辆识别代号 保存Word 打印 退出

图 6-1

模型一的检验用图6-1参数^[4]。牵引车与半挂车转弯半径相等时的条件在模型建立过程中已求得：式（1）（2）（3）（4）。

因为在实际情况中， α_2 的值比 γ 容易控制，所以我们在表中有必要列出 α_2 的值

$$\text{将 (4) 式代入 (2) 式, 整理得 } \cot \gamma - \cot \alpha_2 = \frac{K_g}{L_n} \dots\dots\dots (12)$$

我们选取变量 γ 为控制变量，取 $\gamma \in [\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}]$ ，步长为 $\frac{\pi}{90}$ 。利用MATLAB程序可求出各 γ 值所对应的停车位宽度与长度，运行结果如表所示。程序详见附件。

报名号#1474

挂车和牵引车之间的夹角 φ	角度 γ	20°	22°	24°	26°	28°	30°
挂车内2轮转向角的取值范围 φ	角度 α_2	24.5°	27.5°	30.6°	33.8°	37.0°	40.3°
直线运动部分牵引车的位移 φ	s 单位：米	3.9	3.7	3.5	3.3	3.1	3.0
停车位宽度 φ	d 单位：米	2.6	2.9	3.1	3.4	3.6	3.8
停车位长度 φ	l 单位：米	15.6	15.3	15.0	14.8	14.5	14.3

表 6-1

（二）、模型二的检验

选取新威驰1.6LGLXi为实验对象：

车长4300ram，车宽1700ram，轴距2550mm，最小转弯半径4800ram

使用 MATLAB 对引导模型进行模拟检验，程序参见附录二.

两条理想轨迹的模拟结果如下：

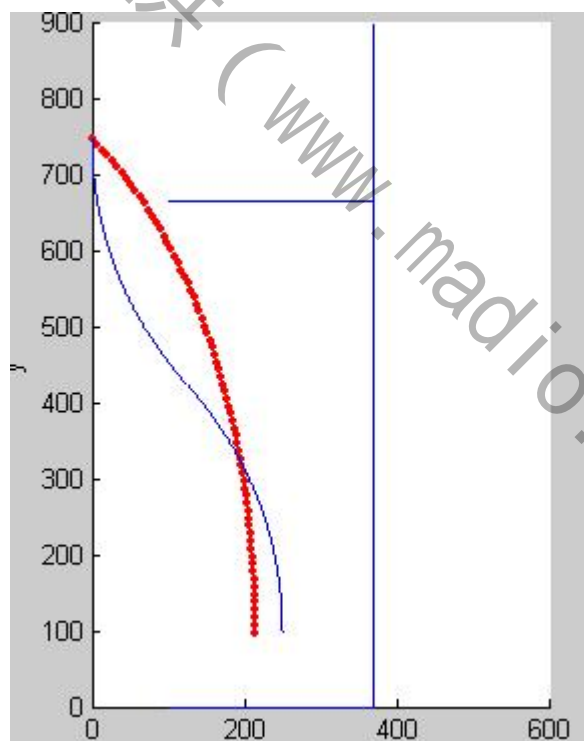


图 6-2

其中，A 路径（图中红线）采用离散化处理方法，理想轨迹中车身偏向角变化情况如下：

报名号#1474

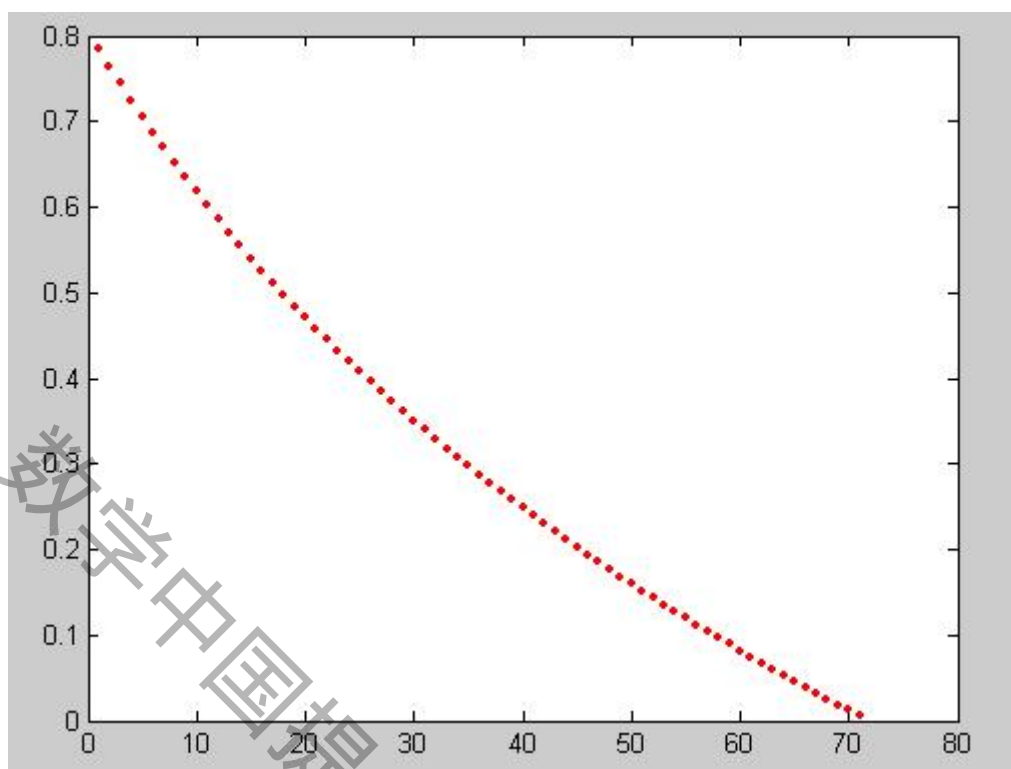


图 6-3

从图中可以看到当车到达预定位置时车身偏向角为 0，表示车已停好。

引导模型的输入参数为 $ydao(xs, ys, setas, luxian, x, y, seta)$ ，其中 $xs, ys, setas$ 为车的实际位置状态(坐标和车身偏向角)， $luxian$ 为当前选择的倒车路线， $x, y, seta$ 为路径 A 的离散序列状态点集合。

从绘制的理想路线图中选取几个点对引导模型进行验证，结果如下：

```
>> ydao(0, 746, pi/4, 0, x, y, seta)
与AB两条理想路线的水平偏移距离：
0.000000 0.000000
操作建议：
正常前行，请保持
>> ydao(0, 746, 0, 0, x, y, seta)
与AB两条理想路线的水平偏移距离：
0.000000 0.000000
操作建议：
车已偏离A路径，现转入B路径，请保持方向并逐渐减小转向角
>> ydao(200, 400, pi/6, 1, x, y, seta)
与AB两条理想路线的水平偏移距离：
200.000000 52.692050
操作建议：
车已偏离B路径过远，现转入A路径，请向右转
```

图 6-4

结果与实际情况相符，证明我们建立的引导模型是可行的。

报名号#1474

七、模型评价及改进

模型一

优点：推导过程中使用的原理简单，模型简洁，模型检验时所需的数据便于测出。

缺点：挂车与牵引车的夹角的范围很难确定，所以在模型检验中检测出的停车位的长宽会存在微小误差。

模型二

模型二建立的引导方案能实时地根据汽车当前状态量给出行车建议以及操作指导，实现简单，可操作性强，实用效果好。

模型值得改进的是优化路线的选择，本文模型中只提出了两条最优参考路线，但实际停车过程中路线的选择可能根据各个驾驶者的情况不尽相同，所以模型中还可以对最优路线进行深入研究，以更符合不同驾驶者的停车习惯。

八、参考文献

[1]宫慧敏，超长型半挂车全轮转向的理论关系及实现方法，China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved, 1994-2010

[2]吴锴，智能自动泊车系统研究，硕士论文，20080615, pp. 15

[3]何峰，自动泊车系统的研究及实现，硕士论文，20090401, pp. 32

[4]该图为湖北合力专用汽车制造有限公司提供