

关于如何控制浴缸水温的模型

摘要

人们平时洗澡时用的简单浴缸很容易受时间、人类活动等各种因素影响而使水温变凉，因此，需要建立一个浴缸的水温模型来让整个浴缸尽可能保持适宜的温度。

首先，根据傅立叶定律，简化了作为点热源的热水的加入，建立了浴缸水在空间和时间上的偏微分方程模型。应用 ANSYS 方法求解偏微分方程，我们可以得到每单位时间进水量随水的温度升高而增加。

第二，使每单位时间内水流入浴缸的量和水温增加量为设计变量，设定整个浴缸的温度且尽量靠近初始温度而又不浪费太多的水为目标，建立多目标优化模型。

第三，利用加权法将多目标转化为单目标。接下来，我们应用遗传算法求解模型，得到的结果，在人可以接受浴缸的大小。当洗澡的时间是 30 分钟时，热水温度增加 282.71K，单位时间的水量为 $10 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ ，水的最终温度变化为 0.0622K^2 ，最终温度和初始温度之间的差为 -0.127K ，浪费水是 0.25m^3 。

关键词：浴缸 加权法 温度 傅立叶

1. 问题重述

简单浴缸只是一个水容器，即不带二次加热系统和循环喷流的功能，所以其很容易受时间等因素的影响而使水温降低，因此就需要在适当的时候用水龙头注入热水，使水温上升并接近初始温度。本文要求用建模的方法研究出最佳策略使得用尽可能少的水来保持初始温度，并且考虑模型对人的运动体温形状及浴缸形状体积的依赖程度，考虑加入泡泡剂后模型的结果。

2. 问题分析

第一问：需要建立一个模型来找出最佳的加水策略。因此解决这个问题需要找到水的温度随时间的变化函数以及加水时的水温变化函数。结合两函数得出加水时间及每次加水量与最终用水量的函数关系，利用穷举法得出最佳的的加水方案。

第二问：需要考虑浴缸的形状、体积以及人的运动等因素对模型的依赖程度，即需要对模型做灵敏度分析以确定模型对各种因素的敏感程度。

第三问：因加入了泡泡剂使得模型中的水面蒸发散热以及对流散热受到影响，需将水面上的泡泡考虑为有一定保温能力的某种材料，重新优化加入泡泡剂后的最佳加水策略。

3. 模型假设

- 1) 人在浴缸内产生热的功率是恒定；
- 2) 加泡沫剂后泡泡细腻且均匀的覆盖在水面上；
- 3) 将人的比热容近似看作水的比热容；
- 4) 浴室内无风且温度及饱和气压是恒定不变的；

4. 符号说明

变量符号	变量含义
t	时 间
P	人体在水中产热的功率
T_n	温 度
V	水的体积
v	水龙头水的流量
ρ	水的密度
C	水的比热容
S	表面积
Q	热 量

5. 模型建立与求解

5.1 问题一：浴缸和水物理状态对温度的影响

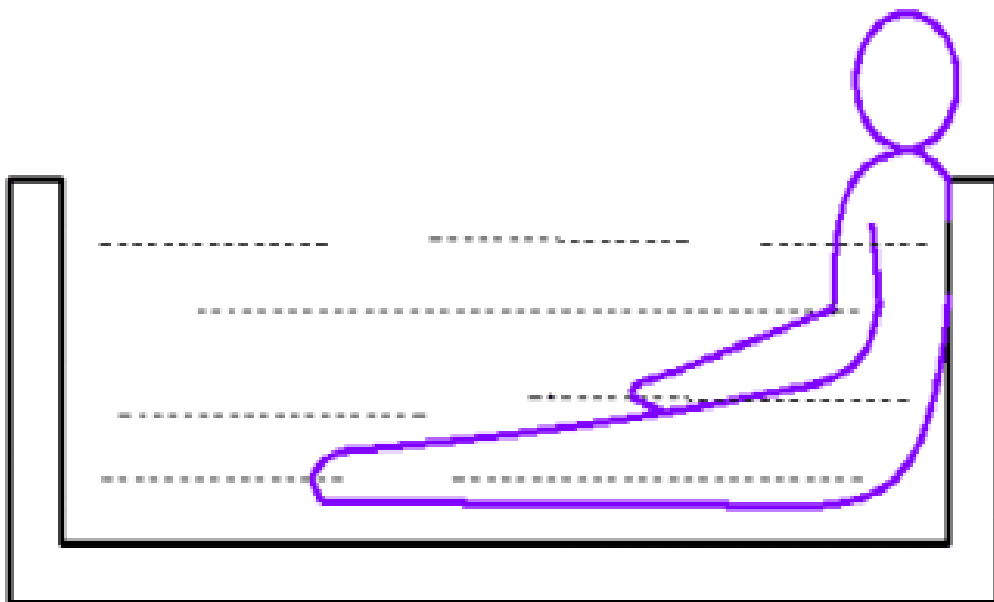
浴缸中水的温度之所以会降低，是因为水不仅在上表面会形成蒸发散热，还会与浴缸发生热交换，所以，此部分针对水和浴缸的吸热放热的物理反应，利用其能量平衡方程，建立了一个数学模型，继而在适宜的时间加热水保证水的温度在舒适的范围之内。

5.1.1 浴缸水温模型的建立：

首先考虑人没有进入浴缸，即静止的浴缸因散热蒸发以及池壁与水的热传导对水温造成的影响。根据热能守恒原理有水池中减少的热能 $\Delta\varepsilon$ 与因蒸发散热及热传导引起的热量损耗 η 的关系如下：

$$\Delta\varepsilon = \eta$$

解释图



(1) 假设浴缸是标准的立方体，水与空气接触时，水汽化带走的热量以及水面与空气的热传导

通过假定室内温度湿度恒定，室内无风等理想条件，定出水的蒸发换热功率可以假设人热为恒温的即以恒定的功率产 P_4 ，则：

$$P_1 = h_e S_2 (T_1 - T_2) (P'_v - P_v)$$

P'_v 为水的蒸发换热系数 P_v 为水面水蒸气的薄饱和气压， p_v 、 p'_v 、 h_e 都可视为常数故令 $k = h_e (P'_v - P_v)$ 可得：

$$P_1 = k S_2 (T_1 - T_2)$$

根据傅里叶热传导公式可得出水与空气的传热功率：

$$P_2 = (T_1 - T_2) \cdot \lambda_b \cdot S_2 / d$$

浴缸四壁的热传导功率为：

$$P_3 = (T_1 - T_2) \cdot S_3 \cdot \lambda_c$$

可以假设整个过程人体始终是恒温的，即以恒定的功率产热 P_4 ，故得浴缸

内水在无人状态下的散热功率为：

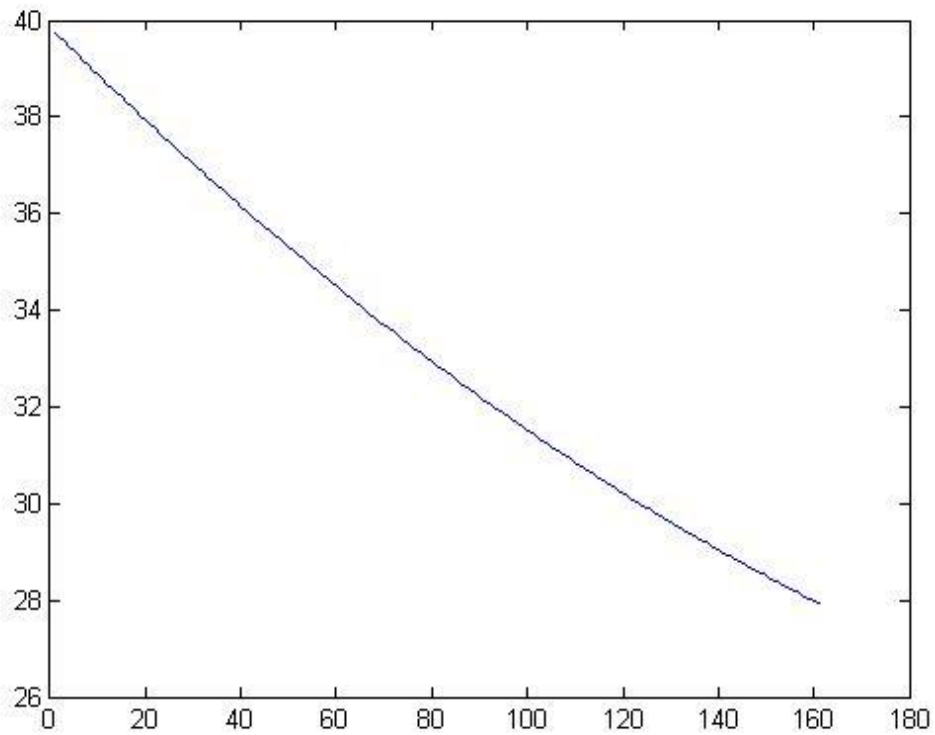
$$P = -P_1 - P_2 - P_3 + P_4$$

$$P = -(T_1 - T_2) (k \cdot S_2 + \lambda_b S_2 / d + \lambda_c S_3) + P_4$$

利用能量守恒可知浴缸内水的瞬时变化的能量即为散热功率 P

$$\rho V C \frac{dT}{dt} = -(T_1 - T_2) (k S_2 + \lambda_b S_2 / d + \lambda_c S_3) + P_4$$

通过式子画出温度随时间变化曲线



加入水时带来了热量同时也排出了与浴缸内的水，给出二者功率可以算出瞬时的浴缸内能量变化：

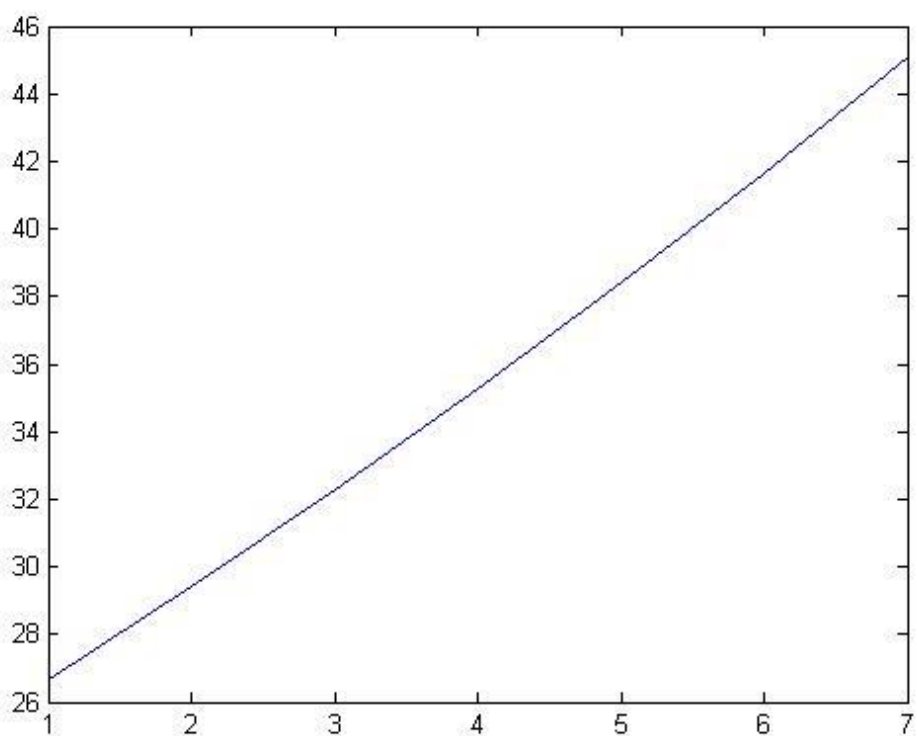
$$P_s = Q + C(T_3 - T_1)$$

（其 Q 为流量 t 为进入水的温度）

由上式不难得出加水时浴缸内热能的瞬时变化：

$$\rho V C \frac{dT}{dt} = -(T_1 - T_2)(kS_2 + \lambda_b S_2 + \lambda_c S_3) + P + Q \cdot \rho \cdot C(T_3 - T_1)$$

得出加水时的温度变化曲线



5.1.2 模型的求解：

此时需要在浴缸内水温不太低时加水，而且加水后水温不可以太高尽可能的使水温接近让人感到舒适的温度，在这里假浴缸内水的最高温度为 42 最低温度 34，因为加水的流量和加入水的温度是可以合理规定的，不妨在此假设一个固定的温度及流量。这样就可以确定加水的间隔以及每一次加水的时长的范围，可以在这一温度区间内任取两值可以算出对应单位时长的耗水量，利用穷举发算出最小耗水时对应的温度，通过这个温度得出对应的加水时长以及间隔。

通过分析得出模型的结果便是均匀的在最低温度加水最低温度附近不断的间歇加水每次加水时间和间隔时间都非常的短，但现实情况并不允许这样快的开关频率。为了实现最小的耗水量实际生活中可以尽量在感到温度较低时加水在感到温

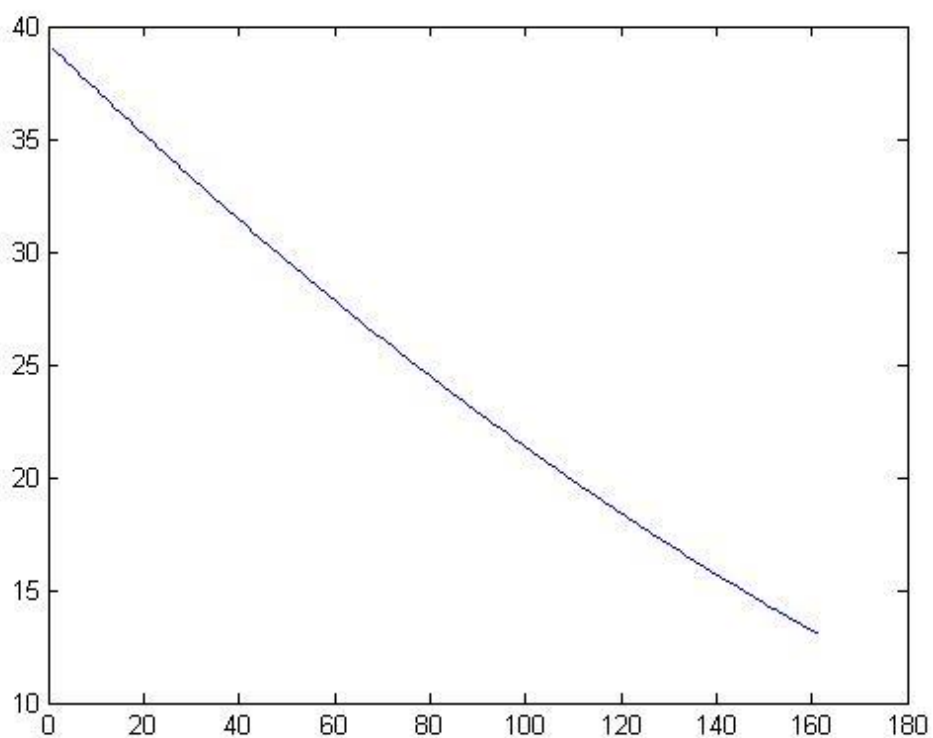
度合适时停止加水。

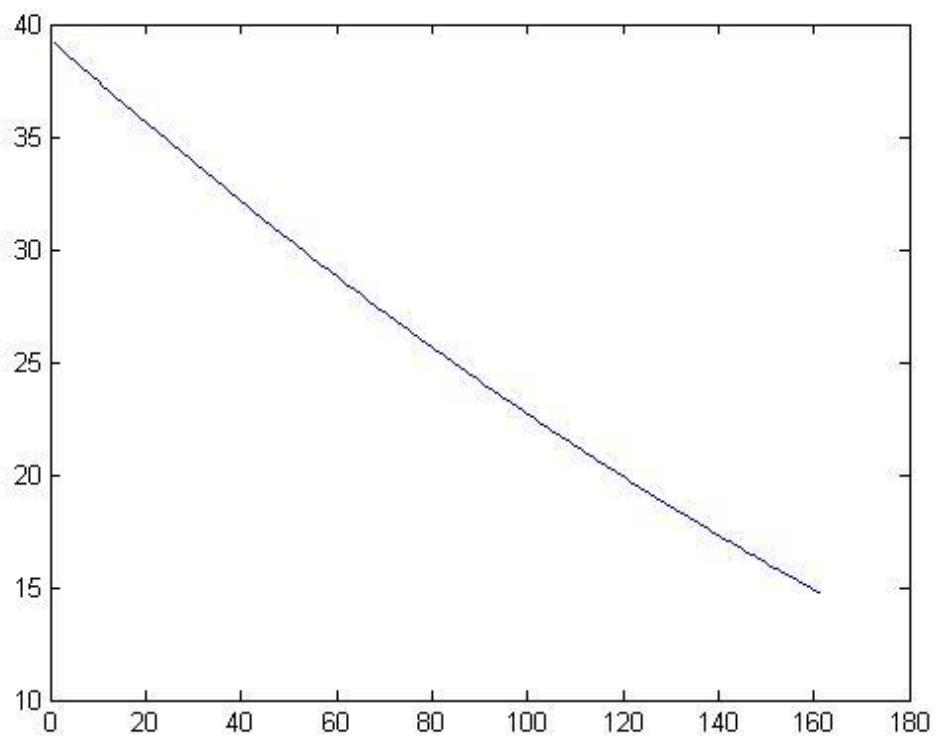
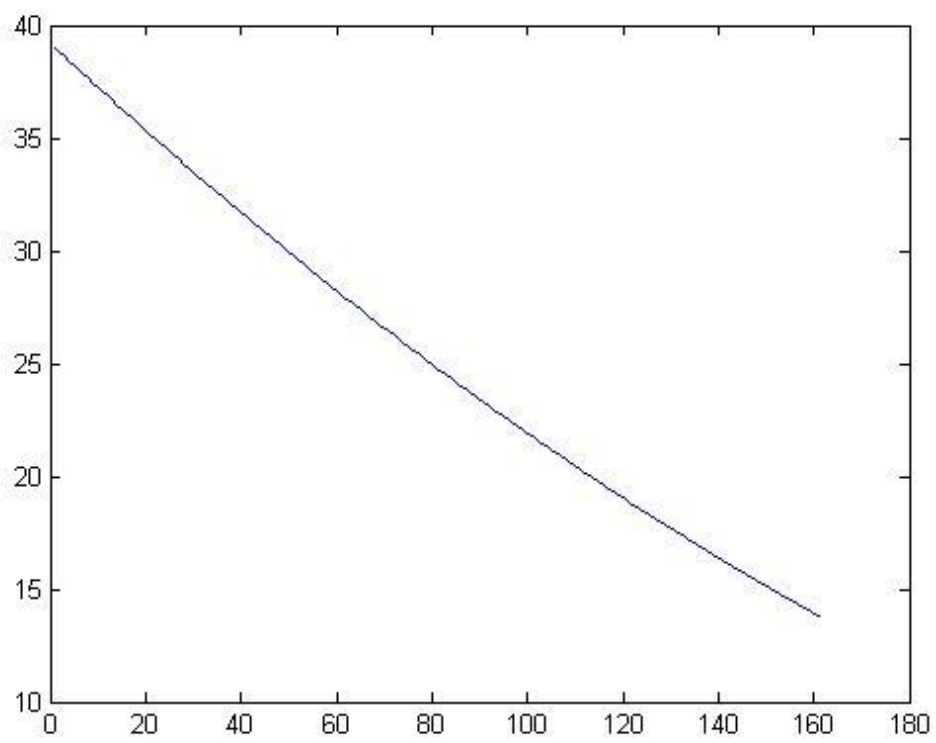
5.2 问题二：模型对各因素的依赖程度

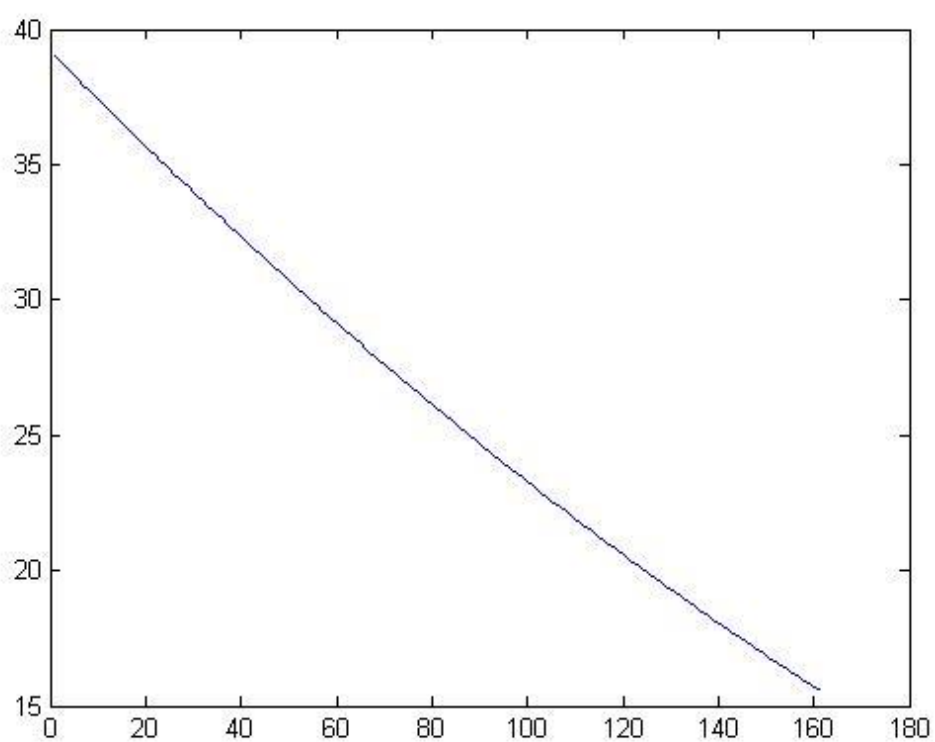
在第一问中对人的运动视为的定值现实中人可能在泡澡在跳舞

5.2.1 对于泡澡的情况即时之前的分析

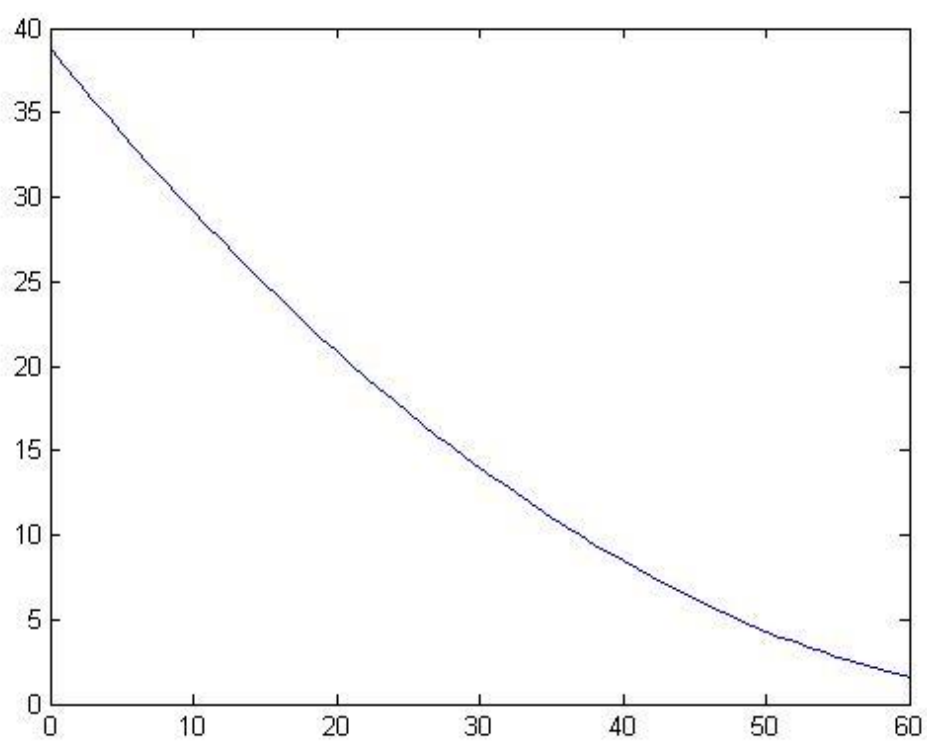
对于人在水中跳舞的情况需考虑到其加大了水的散热面积以及增加了人的即功率 p_4 变大 s_2 变大
得出几个对应的不同曲线

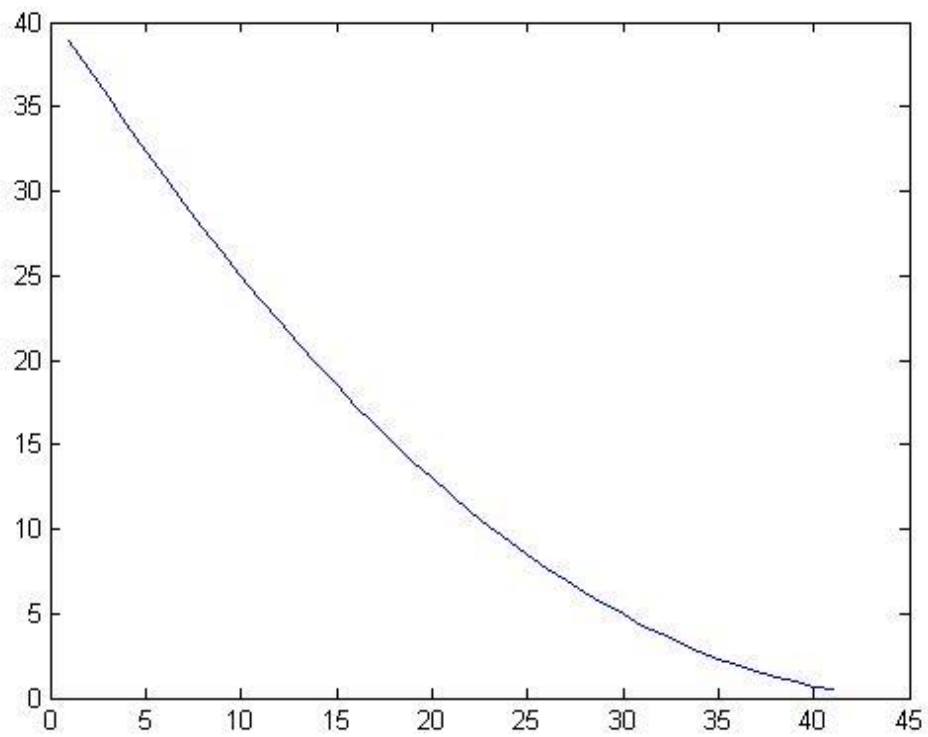
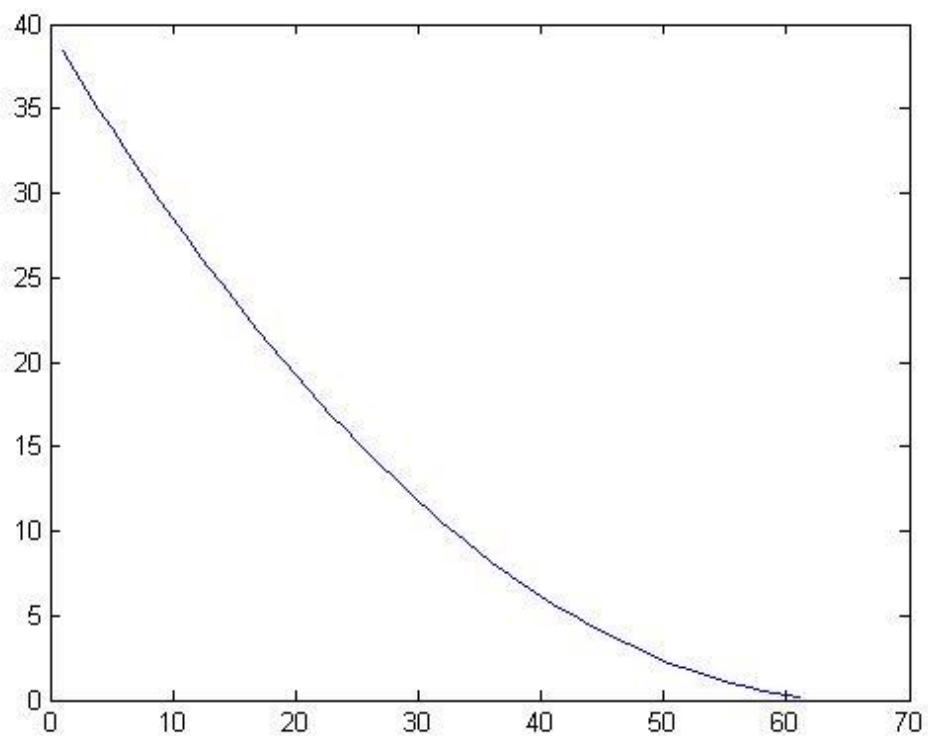




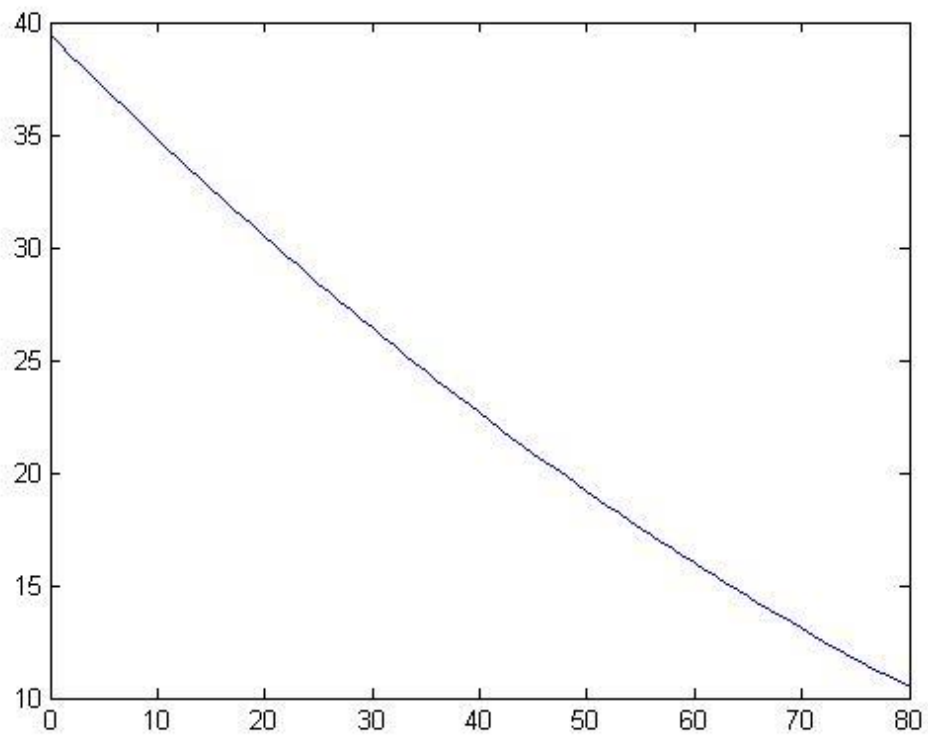
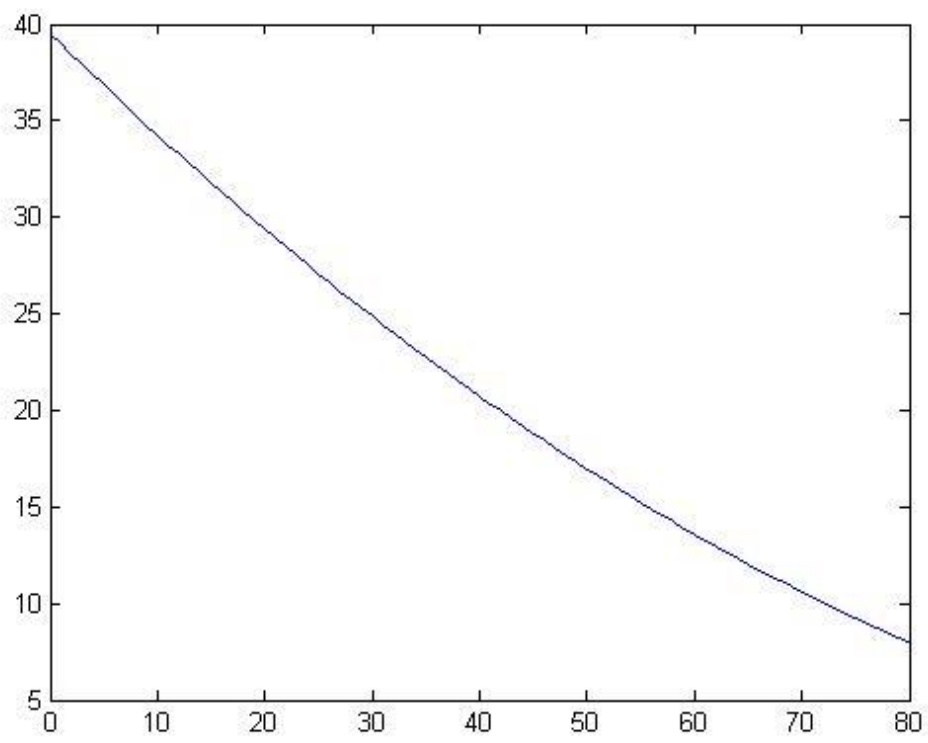


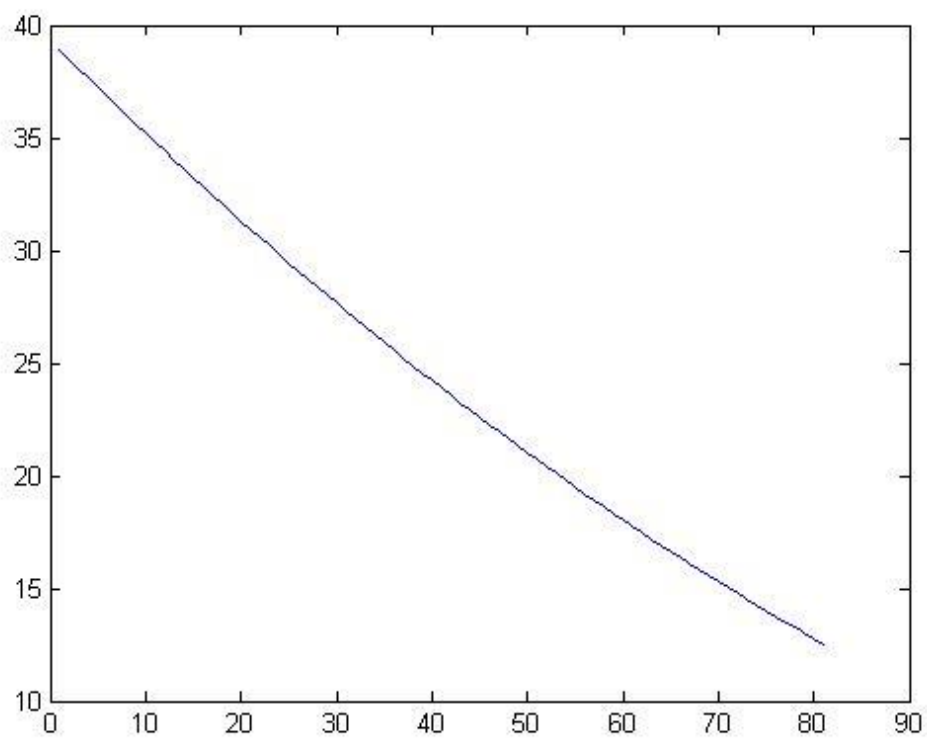
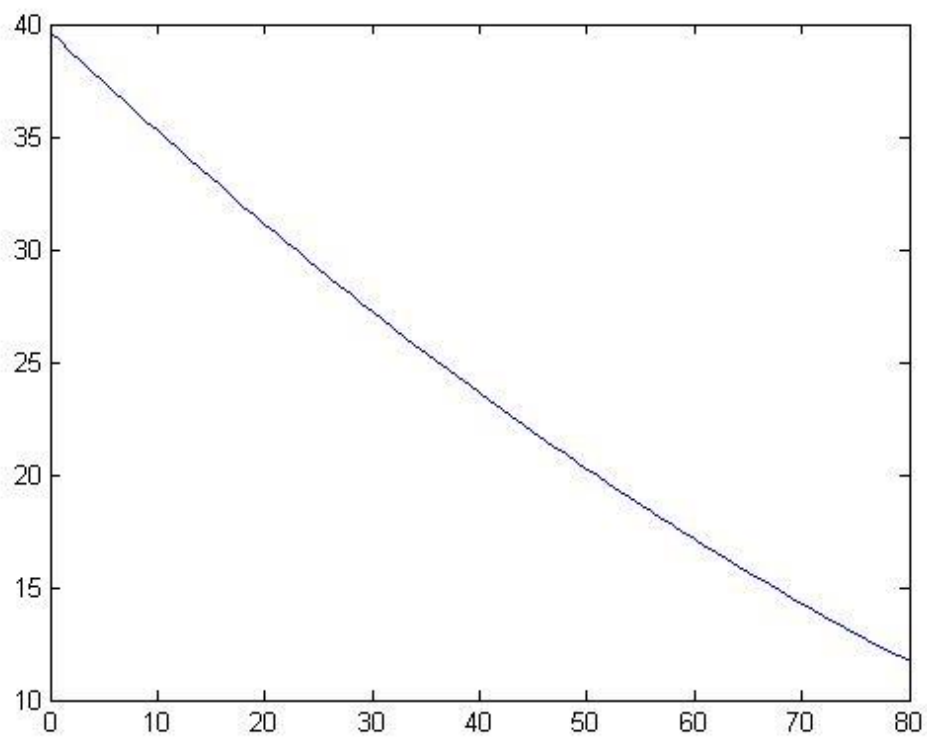
对于浴缸的形状与体积
得出不同的温度变化曲线





由于考虑到了人的体积不同可以转化为人的体表面积不同
 通过转化公式得出人的几种想对应的面积
 对应不同的曲线图





接和不同的图可以对其做分析可以看出浴缸体积越大温度的变化越慢即可以适当的延长加水的时间形状主要看上表面积与体积的比值这个值越大温度就会变

化得越快，人的运动情况图可以看出越是大的运动虽然产生了更多的热但是也会带走更多的热量，即运动幅度大。

5.3 问题三：泡泡浴剂对模型的影响

加入泡泡浴剂后模型的水面可以化简为一层空气膜，因为泡泡上表面存在蒸发散热以及与空气的热传导且表面积会大许多，泡泡的传热性能不好，所以在此仅考虑泡泡气膜的热传导可以简化之前的模型不用考虑蒸发散热水温变化会变得缓慢许多，对于模型的结果更加的支持。这种情况只需增加加水的时间间隔即可使水温维持在一比较稳定的范围内。

5.4 模型的误差分析与检验及推广

1) 误差分析：

主要误差在于题中所用的数据是各种数据的合理值中任取的，在实际中这些参数相互之间可能有联系，即参数的选取的合理性不能保证，会导致模型的对应策略的不同，但由于策略都指向均匀放水的策略。分析后的模型不受参数的影响，而在实际情况下的策略需要精确的测定其中的每一项参数才能找到对应的策略。

模型优点：

1. 我们充分考虑了浴缸在开放空间内吸收散热的大部分情况，使得模型很符合实际意义。
2. 模型利用穷举法和画图法，将所有舒适温度情况下，注入水的情况考虑了进去，寻求到了最适的温度下的，热水的最小需求量，提高了模型的实用性和可操作性。
3. 我们将加入泡泡剂以及人体表面积的因素考虑进去，使得模型适用范围更广，

更具参考性。

4. 模型还考虑了浴缸不同材质的导热系数不同而对水散热造成的不一样的影响。还有水面饱和气压与浴室气压之差对水蒸发带走热量的影响。使模型涉及的内容更全面具体。

模型缺点：

1. 我们没有考虑对流带走热量的情况，在无风的情况下，对流影响较小。
2. 傅里叶热传导方程并不是固定的，是随池壁的厚度的不同而改变的，而我们假设是固定的，以方便建模。

7. 参考目录

- [1] 葛新石，叶宏，等. 传热和传质基本原理. 北京：化学工业出版社，2009：2-3；34-36
- [2] 姜启源，谢金星，等. 数学建模，北京：高等教育出版社，2005
- [3] 高隆昌，杨元，等. 数学建模理论基础. 北京：科学出版社，2007
- [4] 苏振生. 自然蒸发的理论与应用，气象出版社，2001（5）