

报名号 # 1457

# 2008 年 第一届“数学中国杯”

## 数学建模网络挑战赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了首届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1457

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：研究生组

报名号 # 1457

# 2008 年 第一届“数学中国杯”

## 数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：1457

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

报名号 # 1457

# 2008 年 第一届“数学中国杯” 数学建模网络挑战赛

题 目 广义预测控制在冷库温度控制系统中的应用研究关 键 词 广义预测控制;冷库温度控制系统;受控自回归积分滑动平均模型;

## 摘 要

冷库中的备用制冷系统，是在常规制冷系统失效，温度显著超过警戒值的时候自动启动，让冷库中的温度恢复到规定值。在这过程中存在两个未知因素和两个要求。因素一：冷库的具体环境以及物品数量不同，我们把它总结为模型参数的不确定性。因素二：温度传感器有反应并给制冷系统提供信息有延迟，事先人们并不知道这段延迟会有多长，我们把它总结为存在延迟且延迟时间未知。要求一：尽快使冷库里的温度恢复到规定值，我们把它总结为算法调节时间要短。要求二：尽量减少温度的波动，我们把它总结为控制结果要尽量平滑无超调，不震荡。

本文采用广义预测控制算法，对因素一，广义预测控制算法基于传统的参数模型，因而模型参数少，对数学模型要求低，有模型预测、柔化作用、滚动优化和在线校正等特征，使模型的不确定性的影响得到克服；对因素二，利用预测控制方法具有预报能力，能够有效地克服纯滞后环节对系统稳定性的影响，减小闭环系统的滞后时间，可以显著加快系统响应速度，减小调节时间。

仿真研究结果表明，算法较好的解决了题目中的两个问题，针对现场实际控制情况常有干扰，仿真中加入了一类随机噪声，系统能较好地克服扰动，具有较强的抗干扰能力，控制结果符合前述的两个要求。

对于第二阶段，本文设计了一个时滞系统鲁棒故障诊断系统。在有突发事件时，如执行器、传感器失效或者系统大扰动，能自动地检测出来，进而启用备用制冷系统，辅助控制人员防止温度失控，压制振荡。

仿真结果表明：此故障诊断系统能及时准确的检测出系统故障，提高了控制系统的可靠性和安全性，可以应用于一般的时滞系统。

参赛队号 1457所选题目 A 题 自适应温控系统

参赛密码 _____ (由组委会填写)
------------------------

## 报名号 # 1457

### 1. 问题提出

传统的 PID 控制算法以其调试简单,方便明了的优点成为了近几十年来一直被广泛应用的控制算法,但它的控制效果依赖于对简单的(通常不超过二阶)被控对象数学模型的精确估计和比例积分微分参数的恰当组合。因此 PID 控制的显著缺点是不适用于有大滞后的,参数变化较大甚至结构也发生变化的控制对象,以及系统复杂、控制性能要求高的场合。预测控制自 70 年代后期问世以来,以其独到的优点解决了系统难于建模的问题,显示了强大的生命力成为当前自动控制领域中重要的研究课题。近年来,随着人工智能、模糊控制、专家系统、神经网络等新技术的发展应用,极大的促进了预测控制技术的研究,并为其向高层次的发展提供了空间,其应用也日趋广泛。

冷库温度的控制质量优劣直接关系到库内所存货物的质量和能耗及环境污染等问题。冷库内的温度受诸多因素的影响,如存放物品温度的高低,物品的充满率及开门的频繁程度以及环境温度的变化等。冷库控制系统所进行的过程是一个融合传热、传质流动的非线性、强耦合的动态过程。在多数场合下,冷库内温度场的数学模型是很难建立的,因此无法用传统的PID实现精确的控制。

本文应用广义预测控制(GPC)的基本方法原理,构建一套广义预测控制系统,将其应用于冷库恒温的温度控制中。

### 2. 广义预测控制基本方法

#### 2.1 预测模型

在 GPC 中,被控对象的数学模型采用受控自回归积分滑动平均(CARIMA)模型来描述。

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \frac{C(q^{-1})\xi(t)}{\Delta} \quad (2.1)$$

$$\text{式中 } A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b}$$

$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1q^{-1} + \cdots + c_{n_c}q^{-n_c}$$

式中,  $q^{-1}$  是后移算子,表示后退一个采样周期的相应量;  $\Delta = 1 - q^{-1}$  为差分算子;  $\xi(t)$  是一个不相关的随机序列,表示一类随机噪声的影响。A、B、C 都是  $q^{-1}$  的多项式,其中多项式  $B(q^{-1})$  的若干首项元素  $b_0, b_1, \dots$  可以是零,以表示装置相应的纯滞后的步数。为了突出方法原理,这里假设  $C(q^{-1}) = 1$ 。式(2.1)实际上可以用 z 传递函数给出装置模型的描述。由输入 u 对输出 y 之间的传递函数为

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.2)$$

为了利用模型式(2.1)导出 j 步之后输出  $y(t+j)$  的预测值,首先考虑下述丢番图(Diophantine)方程(恒等式)

$$1 = E_j(q^{-1})A\Delta + q^{-j}F_j(q^{-1}) \quad (2.3)$$

式中  $E_j, F_j$  是由  $A(q^{-1})$  和预测长度 j 唯一确定的多项式

$$E_j(q^{-1}) = e_{j,0} + e_{j,1}q^{-1} + \cdots + e_{j,j-1}q^{-(j-1)}$$

$$F_j(q^{-1}) = f_{j,0} + f_{j,1}q^{-1} + \cdots + f_{j,n}q^{-n}$$

## 报名号 # 1457

这样，在式 (2.1) 中两端乘以  $E_j \Delta q^{-j}$  后可得

$$E_j A \Delta y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + E_j \xi(t+j)$$

利用式 (2.3)，可以得出  $t+j$  时刻的输出量

$$y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) + E_j \xi(t+j)$$

注意到  $E_j$ ,  $F_j$  的形式，可以知道  $E_j B \Delta u(t+j-1)$  与  $u(t+j-1)$ ,  $u(t+j-2)$ , ... 有关， $F_j y(t)$  只与  $y(t)$ ,  $y(t-1)$ , ... 有关，而  $E_j \xi(t+j)$  与  $\xi(t+j)$ , ...,  $\xi(t+1)$  有关。由于到  $t$  时刻未来的噪声  $\xi(t+i)$  ( $i=1, 2, \dots, j$ ) 都是未知的，所以  $y(t+j)$  最合适的预测值可由下式得到

$$\hat{y}_t(t+j|t) = E_j B \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) \quad (2.4)$$

这样，根据已知的输入输出信息，及未来的输入信息，就可以预测对装置未来的输出，式 (2.4) 就是 GPC 的预测模型。

在式 (2.4) 中，记  $G_j = E_j B$ ，结合式 (2.2)，式 (2.3) 可得

$$G_j = \frac{B(1-q^{-j}F_j)}{A\Delta}$$

因此多项式  $G_j(q^{-1})$  中前  $j$  项的系数正是装置阶跃响应前  $j$  项的采样值，记做  $g_1, \dots, g_j$ 。若把  $G_j$  展开写作

$$G_j(q^{-1}) = g_{j,0} + g_{j,1}q^{-1} + \dots$$

则有  $g_{j,i} = g_{i+1}$  ( $i < j$ )。

为了由式 (2.4) 计算预测值  $\hat{y}_t(t+j|t)$ ，必须首先知道  $E_j$ ,  $F_j$ ，对于不同的  $j=1, 2, \dots$  这相当于并行的求解一组丢番图方程 (2.3)，其计算量过大。为此克拉克给出了一个  $E_j$ ,  $F_j$  的递推算法。首先，根据式 (2.3) 可写出恒等式

$$1 = E_j A \Delta + q^{-j} F_j$$

$$1 = E_{j+1} A \Delta + q^{-(j+1)} F_{j+1}$$

两式相减得到

$$A\Delta(E_{j+1} - E_j) + q^{-j}(F_{j+1} - F_j) = 0$$

记： $\tilde{A} = A\Delta = 1 + \tilde{a}_1 q^{-1} + \dots + \tilde{a}_{n+1} q^{-(n+1)} = 1 + (a_1 - 1)q^{-1} + \dots + (a_n - a_{n-1})q^{-n} - a_n q^{-(n+1)}$

$$E_{j+1} - E_j = \tilde{E} + e_{j+1,j} q^{-j}$$

则可得

$$\tilde{A}\tilde{E} + q^{-j}(q^{-1}F_{j+1} - F_j + \tilde{A}e_{j+1,j}) = 0$$

显然，必须有  $\tilde{E} = 0$

$$F_{j+1} = q(F_j - \tilde{A}e_{j+1,j})$$

并且由于  $\tilde{A}$  的首项系数为 1，必然有

$$e_{j+1,j} = f_{j,0}$$

$$f_{j+1,i} = f_{j,i+1} - \tilde{a}_{i+1} e_{j+1,j} = f_{j,i+1} - \tilde{a}_{i+1} f_{j,0}, i = 0, \dots, n-1$$

$$f_{j+1,n} = -\tilde{a}_{n+1} e_{j+1,j} = -\tilde{a}_{n+1} f_{j,0}$$

这一  $F_j$  系数的递推关系亦可用向量式记为  $f_{j+1} = \tilde{A}f_j$

式中

## 报名号 # 1457

$$f_{j+1} = [f_{j+1,0} \cdots f_{j+1,n}]^T$$

$$f_j = [f_{j,0} \cdots f_{j,n}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1-a_1 & 1 & & \\ a_1-a_2 & & \ddots & 0 \\ \cdots & & & \ddots \\ a_{n-1}-a_n & 0 & & 1 \\ a_n & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

此外还可得  $E_j$  的递推公式为

$$E_{j+1} = E_j + e_{j+1,j} q^{-1} = E_j + f_{j,0} q^{-j}$$

当  $j=1$  时, 方程 (2.3) 为  $1 = E_1 \tilde{A} + q^{-1} F_1$

故可取  $E_1 = 1$ ,  $F_1 = q(1 - \tilde{A})$  为  $E_j$ ,  $F_j$  的初值。这样  $E_{j+1}$ ,  $F_{j+1}$  便可按照下式递推计算

$$\left. \begin{aligned} f_{j+1} &= \tilde{A} f_j, f_0 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ E_{j+1} &= E_j + f_{j,0} q^{-1}, E_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

## 2.2 滚动优化

在 GPC 中,  $t$  时刻的优化性能指标具有以下形式

$$\min J(t) = E \left\{ \sum_{j=N_1}^{N_2} [y(t+j) - \omega(t+j)]^2 + \sum_{j=1}^{NU} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \right\} \quad (2.6)$$

式中,  $E$  为数学期望;  $\omega$  为装置输出的期望值;  $N_1$  和  $N_2$  分别为优化时域的始值和终值;  $NU$  为控制时域, 即在  $NU$  步后控制量不再变化

$$u(t+j-1) = u(t+NU-1), j > NU$$

$\lambda(j)$  为控制加权系数, 为简化, 一般常可假设其为常识  $\lambda$ 。

该性能指标采用了长时间段预测的概念, 把所要优化的方差从一个时间点扩展到一段时域, 其中  $N_1$  应该大于装置的时滞数, 而  $N_2$  应大到对象的动态特性能充分表现出来。由于以多步预测优化代替了一步预测优化, 即使对时滞估计不当或时滞发生变化, 仍能从总体优化中得到合理的控制, 这是 GPC 对模型不精确性具有鲁棒性的重要原因。为了更清楚的表达, 在下面的式子中将假设  $N_1 = 1, N_2 = N$ 。

利用预测模型式(2.4), 可得

$$\hat{y}(t+N|t) = g_{N,N-NU} \Delta u(t+NU-1) + \cdots + g_{N,N-1} \Delta u(t) + f_N(t)$$

$$\text{其中 } f_N(t) = q^{N-1} [G_N(q^{-1}) - q^{-(N-1)}(g_{N,N-1} - \cdots - g_{N,0})] \Delta u(t) + F_N y(t)$$

使上述性能指标最优的解为:

$$\Delta U = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (W - f)$$

$$\text{式中 } \Delta U = [\Delta u(t) \ \cdots \ \Delta u(t+NU-1)]^T$$

$$f = [f_1(t) \ \cdots \ f_N(t)]^T$$

报名号 # 1457

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \cdots & & g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_N & \cdots & g_{N-NU+1} \end{bmatrix}_{N \times NU}$$

$W = [\omega(t+1), \cdots, \omega(t+N)]^T$ ,  $\omega$  为对象输出的期望值, 其形式如下:

$$\omega(t) = y(t)$$

$$\omega(t+j) = a\omega(t+j-1) + (1-a)c, \quad 0 < a < 1, j = 1, 2, \cdots, N$$

即时最优控制量则由以下式给出

$$u(t) = u(t-1) + g^T(W - f) \quad (2.7)$$

式中,  $g^T$  是矩阵  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$  的第一行。

至此 GPC 算法的主要步骤已经表达完毕, 但需要指出的是在 GPC 算法中, 对模型参数  $[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$  和  $[b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n_b}]$  的辨识用的是递推最小二乘法, 这一步必须在每个循环周期的第一步完成。

### 3. 仿真模型的离散化

按照题目中制冷系统启动后, 冷库中的温度下降需要一段时间, 直到温度传感器有反应并给制冷系统提供信息, 我们在仿真时将其简化为一个带有纯滞后的一阶惯性环节, 其传递函数为:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

式中:  $K$  为静态增益;  $T$  为时间常数;  $\tau$  为纯滞后时间。

为了进行计算机控制, 我们需要将连续系统离散化以便获得离散信号。分析离散系统可以用古典的  $Z$  变换法求出系统的脉冲传递函数  $G(z)$ , 再从脉冲传递函数  $G(z)$  求出离散系统的动态方程差分方程, 就能方便地对离散系统进行数字仿真及控制了。

用  $z$  变换法求连续系统离散化后的脉冲传递函数及差分方程, 要在系统中加入采样器和保持器。在这里我们采用零阶保持器。

设零阶保持器的传递函数为:

$$G_H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-T_s s} = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s}$$

式中,  $T_s$  为采样周期。则广义对象传递函数为  $G(s) \cdot G_H(s)$ , 对其进行  $Z$  变换可得到与  $G(s)$  等价的离散模型:

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{U(z)} &= z[G(s) \cdot G_H(s)] = z \left\{ \frac{ke^{-\tau s}}{Ts + 1} \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \right\} \\ &= k(1 - z^{-1})z^{-d} z \left\{ \frac{1}{s(Ts + 1)} \right\} \\ &= k(1 - z^{-1})z^{-d} z \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts + 1} \right\} \\ &= k(1 - z^{-1})z^{-d} \left\{ \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T_s/T} z^{-1}} \right\} \end{aligned}$$

报名号 # 1457

$$\begin{aligned}
 &= k(1-z^{-1})z^{-d} \frac{(1-e^{-T_s/T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T_s/T}z^{-1})} \\
 &= k(1-e^{-T_s/T}) \frac{z^{-(d+1)}}{1-e^{-T_s/T}z^{-1}}
 \end{aligned}$$

由上式得

$$Y(z)(1-e^{-T_s/T} \cdot z^{-1}) = k(1-e^{-T_s/T})z^{-(d+1)}U(z)$$

上式两边进行z反变换得

$$y(k) - e^{-T_s/T} \cdot y(k-1) = k(1-e^{-T_s/T}) \cdot u(k-d-1)$$

令  $a = e^{-T_s/T}$ ,  $b = k(1-e^{-T_s/T})$ ,

则上式可整理为

$$y(k) = a \cdot y(k-1) + b \cdot u(k-d-1)$$

#### 4. 仿真试验研究

由于冷库的具体环境以及存放物品多少的不同,事先人们并不清楚备用制冷系统以多大功率工作可以使温度恢复到规定温度。这就直接导致了模型参数的不确定性,因此本文尝试了对两组数据的一阶滞后模型进行控制来验证算法的鲁棒性。

为了突出方法原理,在仿真实验中我们略去了参数辨识这一步,直接选取对象的传递函数为  $\frac{1}{28.57s+1}e^{-5.4s}$ , 采样周期为 20 秒, 并加入一个不相关的随机序列, 表示一类

随机噪声, 离散化后为  $y(t) - 0.496585y(t-1) = 0.5u(t-2) + \frac{\xi(t)}{\Delta}$ , 仿真运行后的结果如下:

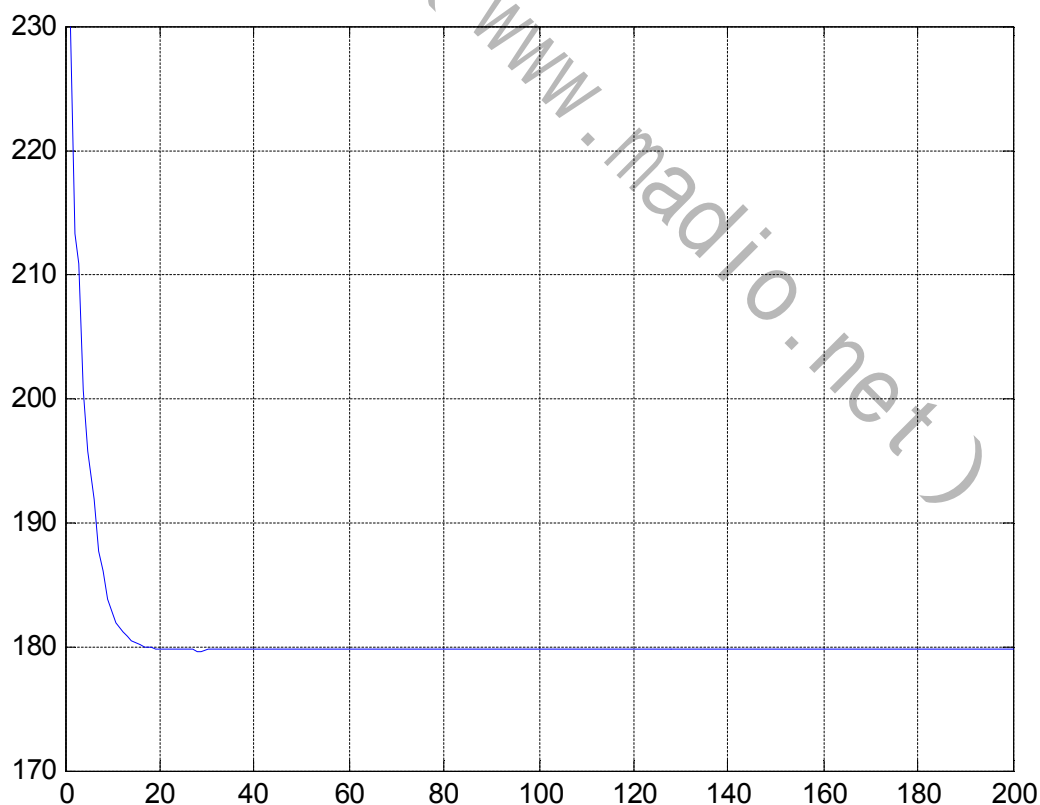


图 1



## 报名号 # 1457

为检验算法对模型参数的鲁棒性,更改对象的传递函数为 $\frac{1.66}{35.33s+1}e^{-2.7s}$ ,采样周期仍为 20 秒,并加入一个不相关的随机序列,表示一类随机噪声,离散化后为 $y(t)-0.5677y(t-1)=0.7176u(t-2)+\frac{\xi(t)}{\Delta}$ ,仿真运行后的结果如下:

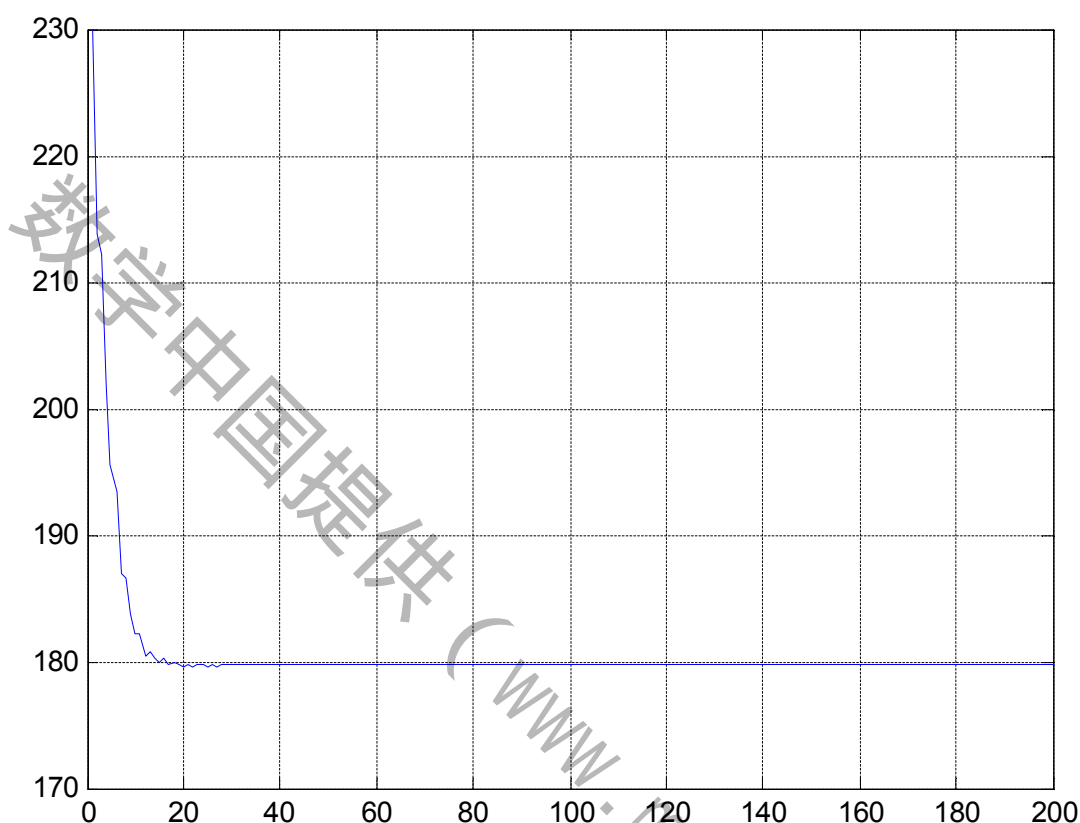


图 2

仿真结果表明:广义预测控制算法对模型参数的变化有较强的鲁棒性,对仿真中加入的一类随机噪声,系统 also 具有较强的抗干扰能力,适应了题目中算法必须自动地适应不同情况的要求,能够实现基于该模型的广义预测控制。

## 5. 故障诊断

在一些特殊应用领域里,计算机并不能完全取代人进行独立控制,往往只能起到辅助控制的作用。控制员虽然经过严格的训练,但由于突发事件带来的情绪紧张,会造成对时滞估计不足,引起超调和振荡的产生。一些严重的情况会导致温度失控。

为了提高控制系统的安全性,需要建立一个监控系统对控制系统进行故障诊断、监控系统的运行状态、实时监测系统中发生的故障,判断,并对故障原因、故障频率、故障特性以及故障的危害程度进行分析、得出结论,进而采取必要的措施防止灾难性事故的发生。

对于冷库系统,存在着不确定性和时滞现象,考虑用如下状态方程描述的线性不确定时滞被控系统来描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bu(t) + B_f f(t) + B_d d(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_f f(t) + D_d d(t) \end{cases}$$

### 报名号 # 1457

其中,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$  和  $y \in R^q$  分别为系统状态、控制输入和测量输出向量,  $f \in R^l$  为需要诊断的故障信号向量,  $d \in R^m$  为不确定扰动信号(包括建模误差信号、外部扰动和影响不大的小故障信号等), 且不失一般性设  $d$  和  $f$  为  $L_2$  范数有界信号,  $A, A_d, B, C, D, B_f, B_d, D_f$  和  $D_d$  为适当维数的已知矩阵或向量,  $h \geq 0$  为时滞常数。

本文采用如下的基于状态观测器的故障诊断滤波器

$$\begin{cases} \hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_d\hat{x}(t-h) + Bu(t) + H(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \\ r(t) = V(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (5.1)$$

其中,  $\hat{x} \in R^n$  和  $\hat{y} \in R^q$  分别表示状态和输出的估计值。定义  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , 可得残差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - HC)e(t) + A_d e(t-h) + B_1 w(t) \\ r(t) = VCe(t) + D_1 w(t) \end{cases}$$

其中,  $B_1 = [B_f - H_D f \quad B_d - H_D d]$ ,  $D_1 = [VD_f \quad VD_d]$ ,  $w(t) = [f(t) \quad d(t)]^T$

本文研究的主要问题为: 求状态观测器增益矩阵  $H$  和后滤波器矩阵  $V$ , 使  $A - HC$  渐进稳定且最大化如下性能指标

$$J = \|T_{rf}\|_{\infty} - \|T_{rd}\|_{\infty} \quad (5.2)$$

其中,  $T_{rf}$  和  $T_{rd}$  分别为故障信号  $d$  和扰动信号  $f$  到残差信号  $r$  的传递函数。

由  $J \rightarrow \max$  可得:  $\|T_{rf}\|_{\infty} \rightarrow \max$  和  $\|T_{rd}\|_{\infty} \rightarrow \min$

因此选用 (5.2) 作为鲁棒故障诊断器设计优化的性能指标, 可满足产生的残差对故障的灵敏性以及对抗扰动的鲁棒性。

为简单起见, 假设  $l = m$ 。实际上, 若  $l > m$  (或  $l < m$ ), 将  $T_{rd}$  (或  $T_{rf}$ ) 和  $d$  (或  $f$ ) 扩展为  $\tilde{T}_{rd} = [T_{rd} \quad \phi_{l-m}]$  (或  $\tilde{T}_{rf} = [T_{rf} \quad \phi_{m-l}]$ ) 和  $\tilde{d} = [d \quad \phi_{l-m}]^T$  (或  $\tilde{f} = [f \quad \phi_{m-l}]^T$ ), 可得出同样的结果, 其中  $\phi$  表示零矩阵。

研究如下的传递函数:  $T \triangleq LT_{rw}R = L[T_{rf} \quad T_{rd}]R$ , 其中,  $L \in R^{n \times n}$  和  $R \in R^{2l \times l}$  为输入输出通道选择矩阵。

选择  $L = I_{n \times n}$ ,  $R = [I_{l \times l} \quad -I_{l \times l}]^T$ , 则有  $T = T_{rf} - T_{rd}$ 。对于设定的  $\beta > \alpha > 0$ , 有  $\|T\|_{\infty} = \|T_{rf} - T_{rd}\|_{\infty} \geq \|T_{rf}\|_{\infty} - \|T_{rd}\|_{\infty}$ ,  $\|T\|_{\infty} > \beta - r \Rightarrow \|T_{rf}\|_{\infty} > \beta$  和  $\|T_{rd}\|_{\infty} < r$ 。  $T$  所对应的系统为

$$T \begin{cases} \dot{e}(t) = (A - HC)e(t) + A_d e(t-h) + B_1 w(t) \\ r(t) = VCe(t) + D_1 w(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

因此, 故障诊断滤波器的设计可以通过求解如下的最优化问题完成

$$\max_{r, \beta, H, V} (\beta - r) \text{ 约束条件: (5.3) (5.4)}$$

在  $\|d\|_2 \leq N$  ( $N$  为已知的正数) 条件下, 可选择阈值  $J_{th} = r_{opt}N$  ( $r_{opt}$  为  $r$  的最优解), 并基于以下逻辑关系诊断故障的发生:

$$\|r\|_2 > J_{th} \Rightarrow \text{故障信号被检测到} \Rightarrow \text{报警}$$

$$\|r\|_2 \leq J_{th} \Rightarrow \text{无故障信号被检测到}$$

在实际工程中, 时间  $t$  不可能取到无限大, 因此用  $\|r\|_{2,T}^2 = \int_{t_1}^{t_2} r^T r dt$  (其中  $T = t_1 - t_2$ ) 来代替

## 报名号 # 1457

$$\int_0^{\infty} r^T r dt.$$

下面给出求解鲁棒故障诊断滤波器问题的 LMI 解法。首先给出如下引理。

引理 1: 给定  $r > 0$ , 满足  $D^T D - r^2 I > 0$ , 对于系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases}$$

如果存在对称正定矩阵  $P$  和  $Q$ , 满足如下 LMI

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA + C^T C - Q & -PB + C^T D & -PA_d \\ * & D^T D - r^2 I & 0 \\ * & * & Q \end{bmatrix} > 0$$

则系统渐进稳定, 且满足  $\|y\|_2 > r^2 \|w\|_2$ , 其中  $*$  为矩阵的对称项。

定理 1: 对于给定的  $\beta > r > 0$ , 如果存在正定矩阵  $P$ ,  $Q$  和  $Z$ , 矩阵  $Y$ , 满足如下的 LMI

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & -PA_d \\ * & S_3 & 0 \\ * & * & Q \end{bmatrix} > 0$$

则该鲁棒故障诊断滤波器设计问题可解切对应的观测器矩阵为  $H = P^{-1}Y$ , 后滤波器矩阵为  $V = Z^{1/2}$ , 其中  $Z^{1/2}$  表示矩阵  $Z$  的均方根分解,

$$S_1 = -A^T P - PA + C^T Y^T + YC + C^T ZC - Q, \quad S_2 = P(B_d - B_f) + Y(D_f - D_d) + C^T Z(D_f - D_d),$$

$$S_3 = (D_f - D_d)^T Z(D_f - D_d) - (\beta - r)^2 I$$

证明: 将引理 1 中  $A, A_d, B, C$  和  $D$  分别用  $A - HC, A_d, B_1 R, LVC$  和  $LD_1 R$  替代, 并令  $Y = PH, Z = V^T V, L = I_{n \times n}, R = [I_{l \times l} \quad -I_{l \times l}]^T$ , 对于系统(7)应用引理 1, 可以容易得出本定理的证明, 从略。

在  $r > 0$  和  $\beta > 0$  给定的条件下, 定理 1 以 LMI 的形式给出了基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器解存在的条件以及增益矩阵  $H$  和后滤波器  $V$  的求解方法, 要得到问题的最优解可以重复迭代调用定理 1 的结果。

仿真实验如下, 假设被控故障系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -0.01 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.26 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} d(t) \end{aligned}$$

应用 LMI 方法设计基于状态观测器的鲁棒故障诊断系统。取  $\beta = 1.58$ , 利用 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解, 可得  $r$  的最小值为  $r_{opt} \approx 0.5$ , 相应的状态观测器增益矩阵和后滤波器矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} -1.6916 & 0.2134 \\ -0.0741 & -0.4886 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1.6544 & -0.0231 \\ 0.0000 & 1.6715 \end{bmatrix}$$

假设  $\|d\|_2 = 0.8$ , 则阈值为  $J_{th} = 0.4$ 。设时滞常数  $h = 0.5$ , 输入为单位阶跃信号, 外部扰动为能量 0.01 的白噪声, 故障为从 5 秒到 10 秒的单位方波信号, 利用 MATLAB 中的 SIMULINK 进行仿真, 所得结果如下:

报名号 # 1457

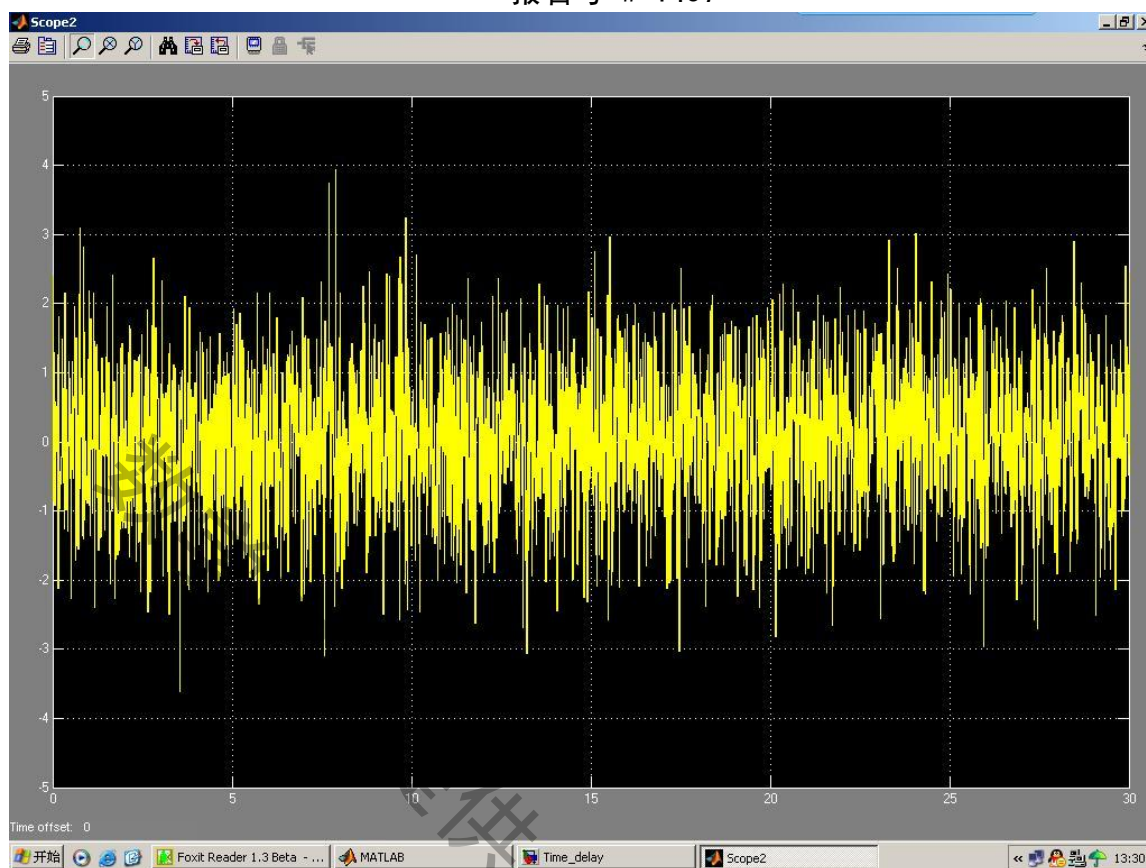
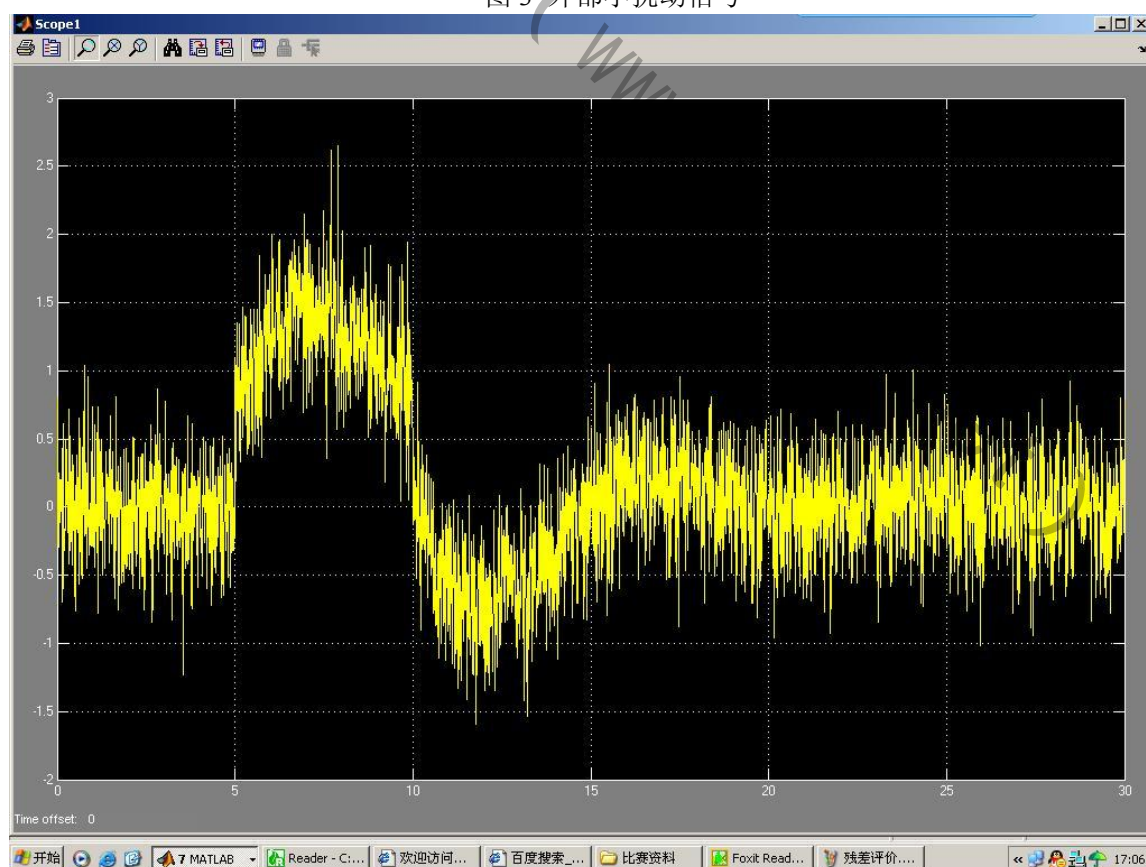


图3 外部小扰动信号

图4 残差输出信号  $r_1$

报名号 # 1457

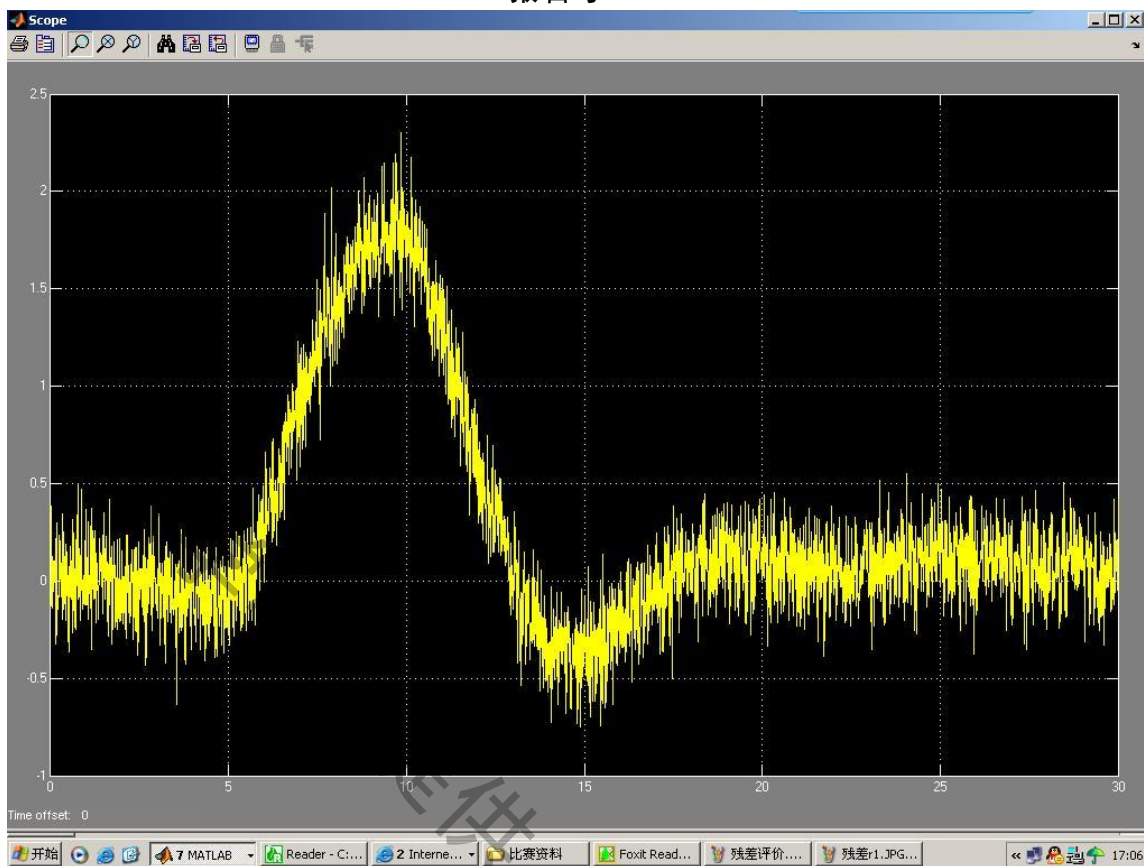


图 5 残差输出信号  $r_2$

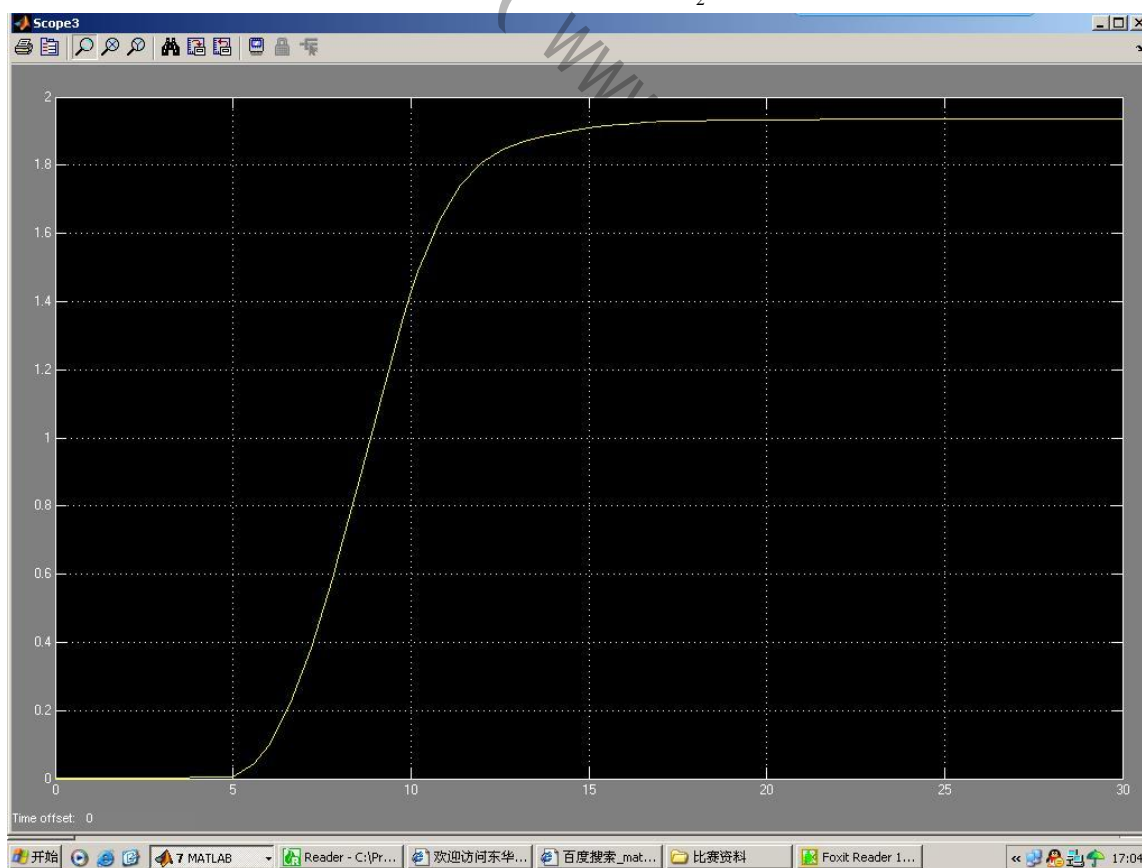


图 6 残差评价函数

从图 6 可以看出，残差评价函数  $\|r\|_{2,7} \approx 0.4$ ，也就是说在故障发生 2 秒后报警，由此可

## 报名号 # 1457

见本方法对于突发事件的检测效果还是不错的。

## 6. 结论

采用本文的算法控制的冷库温度，在不同模型参数的情况下，都能够比较快速、平稳地达到设定温度，具有较强的抗干扰能力，取得了较好的控温效果，从而解决了冷库因具体环境以及物品数量的不同，控制回路时变、滞后大、控制难的问题，尽量减少了温度的波动。针对问题二，设计了鲁棒故障诊断系统。通过对输入输出通道的组合变换，引入一种新的性能指标，同时兼顾产生的残差对故障的灵敏性和对扰动的鲁棒性，将故障诊断设计问题转化为  $H_\infty$  优化问题，给出了故障诊断设计的LMI方法，利用MATLAB工具箱中的求解器可以方便求解，并用仿真实例和仿真结果验证了本方法的有效性。

## 参考文献

- [1]Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S, Generalized predictive control—Part I and Part II, Automatica, 23(2):137~160, 1987
- [2]阮学斌, 广义预测控制在空调监控系统中的应用, 控制工程, 14(1):18-20, 2007
- [3]钱积新, 赵均, 徐祖华, 预测控制, 北京: 化学工业出版社, 2007
- [4]师五喜, 广义预测控制中Diophantine方程的显式解, 自动化学报, 32(1):148-153, 2006
- [5]白雷石, 一种新的时滞系统鲁棒故障诊断滤波器设计方法, 自动化学报, 32(4):624-629, 2006

## 附录

对一阶惯性纯滞后系统的广义预测控制算法源程序（曲线一）

```
M=4;P=6;
A=[1 -0.496585];
A1=[1 -1.496585 0.496585];
B=[0 0.5 -0.5];
la=length(A);
lb=length(B);
na=la-1;nb=lb-1;
S=zeros(P,na+1);
S(1,:)=[-1.496585 0.496585];
for j=1:P-1
    for i=1:na
        S(j+1,i)=S(j,i+1)-A1(i+1)*S(j,1);
    end
    S(j+1,na+1)=-S(j,1)*A1(na+2);
end
G=zeros(P,P+nb);
for j=1:nb+1
    G(1,j)=B(j);
end
for j=1:P-1
    for i=1:j+nb
        if i<j
            bij=0;
        else
            bij=B(i-j+1);
        end
        G(j+1,i+1)=G(j,i+1)+S(j,1)*bij;
    end
end
```

报名号 # 1457

```

end
for j=2:P
    G(j,1)=B(1);
end
G1=zeros(P,P);
for i=1:P
    for j=1:i
        G1(i,j)=G(i-j+1,i-j+1);
    end
end
G11=zeros(P,M);
for i=1:P
    for j=1:M
        G11(i,j)=G1(i,j);
    end
end
G2=zeros(P,nb);
for i=1:P
    for j=1:nb
        G2(i,j)=G(i,nb+1+i-j);
    end
end
u1=zeros(P,1);
u0=zeros(nb,1);
y0=zeros(na+1,1);
y=[];
u01=zeros(na+2,1);
u=[];
for j=1:na+1
    u(j)=0;
end
u=u';
yr=[];yr(1)=0;
yr1=zeros(P,1);
sy=zeros(P,1);
d1=zeros(1,M);
d1(1,1)=0.7;
f=zeros(P,1);
w=-30;r=0.2;a=0.1;
for t=1:200
    for j=1:P
        yr(t+j)=a*yr(t+j-1)+(1-a)*w;
        yr1(j)=yr(t+j);
    end
    for j=1:P
        syy=0;
        for i=1:na+1
            syy=syy+S(j,i)*y0(i);
        end
        sy(j)=syy;
    end
end

```

报名号 # 1457

```

end
f=G2*u0+sy;
lamda=r*eye(M);
lamda(1,1)=1;
u1=inv(G11'*eye(P)*G11+lamda)*G11'*eye(P)*(yr1-f);
ut1=d1*u1;
ut=ut1+u01(na+2);
for i=1:na+1
    u01(i)=u01(i+1);
end
u01(na+2)=ut;
u=[u;ut];
for i=1:nb-1
    u0(i)=u0(i+1);
end
u0(nb)=ut1;
if t<30
    yyy1=0;
    yyy2=0;
    for i=1:lb
        yyy1=yyy1+B(i)*u(nb+1+t-i);
    end
    for i=2:la
        yyy2=yyy2+A(i)*y0(i);
    end
    y1=yyy1-yyy2;
else
    yyy1=0;
    yyy2=0;
    for i=1:lb
        yyy1=yyy1+B(i)*u(nb+1+t-i);
    end
    for i=2:la
        yyy2=yyy2+A(i)*y0(i)-0.1;
    end
    y1=yyy1-yyy2;
end
y=[y;y1];
for i=la:-1:2
    y0(i)=y0(i-1);
end
y0(1)=y1;
end
t=1:200;
figure;
plot(t,y);
grid on

```

(曲线二程序同，参数略有改动)