

参赛编号#1661

第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛

承诺书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料）必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1661

参赛队员（签名）：

队员1：冯启俊

队员2：李成

队员3：肖飞

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

参赛编号#1661

第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）

1661

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛编号#1661

2014年第七届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

题 目： 确定轮胎花纹的最佳适用范围

关键词： 轮胎花纹、数值分析法、图像法、层次分析法

摘 要：

当今社会，轮胎被广泛的使用在多种陆地交通工具上。对于不同花纹和不同的环境条件，本文将从以下步骤分析其性能特征，并且确定轮胎的最佳适用范围。

第一步，不同轮胎花纹的分类。查阅了关于汽车轮胎的相关书籍后，本文确定了轮胎的花纹大致可以分为横向花纹、纵向花纹、混合花纹、越野花纹等主要的四种花纹。

第二步，不同轮胎花纹影响其性能特征的确定。根据我们查阅的文献资料，我们了解到花纹对汽车的影响主要表现在汽车的制动性、附着性、排水性和噪音等四个方面。

第三步，对于汽车行驶的不同环境状况，我们根据生活常识，假定了普通路面、泥泞路面、雪地路面和越野路面四种主要的环境条件，然后建立数学模型，运用层次分析法求解出不同轮胎花纹的最佳适应环境。

模型一，数值分析法。通过对不同花纹的图表数据的分析，最后我们得出横纵花纹的附着性差别不大，但是混合特别是越野花纹的附着性表现的尤为优秀。

模型二，图像法。根据所查阅的数据资料，我们绘出了不同的图形，更加直观的看出了不同环境下轮胎花纹对其性能的影响大小。

模型三，层次分析法。用四种不同轮胎花纹作为目标层，四种影响性能作为准则层，然后四种环境条件作为方案层。通过用数值分析法、图表法和查阅文献等方法，我们进一步对准则层的四个要素具体的进行了分析，然后根据对准则层的具体分析结果，给出权重，最终利用权值排序确定了：纵向花纹稳定性、排水性好，更适合在普通道路上行驶；横向花纹制动力、驱动力都表现较出色，更适合在泥泞、雪地道路上行驶；混合花纹的驱动力、制动力相比纵向花纹表现更好，更适合在雪地道路上行驶；越野花纹是专门为适应干、湿、崎岖山路和泥泞、沙路而设计的花纹，因此更适合于在越野道路上行驶。

最后我们对所建立的模型得出的结果进行了客观有效的评价和推广。

参赛队号： 1661

所选题目： A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

参赛编号#1661

Abstract

Nowadays, the tire is widely used in a variety of land transport. For different patterns and different environment conditions, this article will analysis from the following steps to analyze its performance characteristics, and determine the optimum scope of the tire.

The first step, the different tyres decorative pattern classification. Refer to the related books about car tyres, this paper determines the tire pattern can be roughly divided into horizontal pattern, vertical pattern, the mixed pattern, cross-country decorative pattern such as the main four kinds of patterns.

The second step, the different tire pattern influence the determination of performance characteristics. According to consult literature material, we learned that the pattern of the main performance in the influence of car brake, adhesion, drainage, and the four aspects, such as noise.

The third step, for the car of different environmental conditions, according to the life common sense, we assume that the ordinary roads, the muddy road, the road snow and cross-country road four main types of environmental conditions, and then establish mathematical model, using the analytic hierarchy process (ahp) to solve different tyres decorative pattern best adapt to the environment.

Model, a numerical analysis method. Through the analysis of different pattern of the chart data, finally, we concluded that the transverse and longitudinal pattern of adhesion difference is not big, but mixed particularly cross-country decorative pattern of adhesion performance is particularly outstanding.

Model 2, image method. According to the access to the data, we draw the different graphics, more intuitive to see the tire pattern under different environment affect the performance of its size.

Model 3, analytic hierarchy process. Using four different tread patterns as the target layer, four kinds of impact performance as criterion layer, and then four kinds of environmental conditions as the plan layer. Through the method,graphic method and literature method with numerical analysis, we further elements of the four criteria layer of concrete is analyzed, then according to the analysis results, the criterion layer weights, the weights ranking identified:longitudinal pattern stability, good drainage, more suitable for ordinary road the horizontal pattern; the braking force, drive performance better, more suitable for running in the mud, snow on the road; mixed pattern of the driving force, the braking force compared longitudinal patterns better, more suitable for the road driving in the snow; this pattern is specially suited for dry, wet and muddy, rugged mountain road, designed the pattern, so it is more suitable for running on a cross-country road.

Finally, we carried out on the results of the proposed model the objective and effective evaluation and promotion.

参赛编号#1661

§ 1. 问题重述

在这个道路四通八达的时代，汽车的数量已经达到被限制的地步，而这么多的车辆行驶在道路上，最重要的就是安全，除了驾驶员和车辆本身的因数，轮胎在行车安全中扮演着最重要的角色，对于不同的环境，我们需要轮胎表现出我们希望的性能，除了轮胎的其他制造要素，轮胎的表面花纹对轮胎的性能起着决定性作用。

现在，轮胎的花纹主要分为四种：横花纹、纵花纹、混合花纹、越野花纹。所以我们需要针对轮胎的四种花纹形状加以分析得出不同花纹的轮胎具有怎样的性能，更加方便判断出轮胎的最佳使用范围。

§ 2. 问题分析

轮胎是影响车辆安全行驶最重要的部分，而轮胎的花纹对轮胎性能起着最主要的作用，在实际生活中，轮胎生产厂家会根据车辆和季节、道路实行不同的轮胎花纹方案制造出不同性能的轮胎。本文需要对轮胎花纹对轮胎性能的影响作出分析，并选择出最佳适用范围。

本文通过以花纹和不同环境使用层次分析法，得到不同花纹最适合的适用环境，但是我们需要解决一下问题：

首先，我们需要知道不同的花纹的轮胎他们在轮胎各个性能方面的表现差别或者具体的参数。

其次，我们知道不同花纹对应的轮胎性能之后，我们需要把花纹和不同环境用层次分析法进行最优解，这样做四次最优解，我们就能得到不同的花纹对应的最佳适用范围。

§ 3. 模型假设

1. 假设不同花纹的轮胎的材料相同。
2. 假设不同花纹的轮胎轮廓设计相同。
3. 假设不同花纹的轮胎结构设计相同。
4. 假设不同花纹的轮胎是由同一公司生产，不存在技术差别。
5. 假设本文中所给出的数据分析和理论计算都是合理的，不存在人为因素。
6. 假设不考虑车辆本身、驾驶员及环境对轮胎的影响。

参赛编号#1661

§ 4. 符号说明

序号	符号	意义
1	ϕ	附着系数
2	i_0	滑转率特性曲线
3	f	滚动阻力系数
4	G_a	汽车质量
5	Z_1	从动轮的法向反力
6	ϕ	滚动阻力系数
7	P_{μ}	水的动压
8	V	速度
9	ρ	水的密度
10	P_{cr}	轮胎胎面接地压力
11	p	轮胎内气压
12	A	目标层
13	B	准则层
14	C	方案层
15	CI	一致性指标
16	λ_{\max}	最大特征根
17	RI	平均一致性指标

§ 5. 模型的准备

5.1 建立花纹对轮胎四种主要性能的影响的模型

5.1.1 轮胎花纹类型

花纹主要分 3 类[3]，即普通花纹、混合花纹、越野花纹，普通花纹又分纵花纹和横花纹。如图 1。

参赛编号#1661

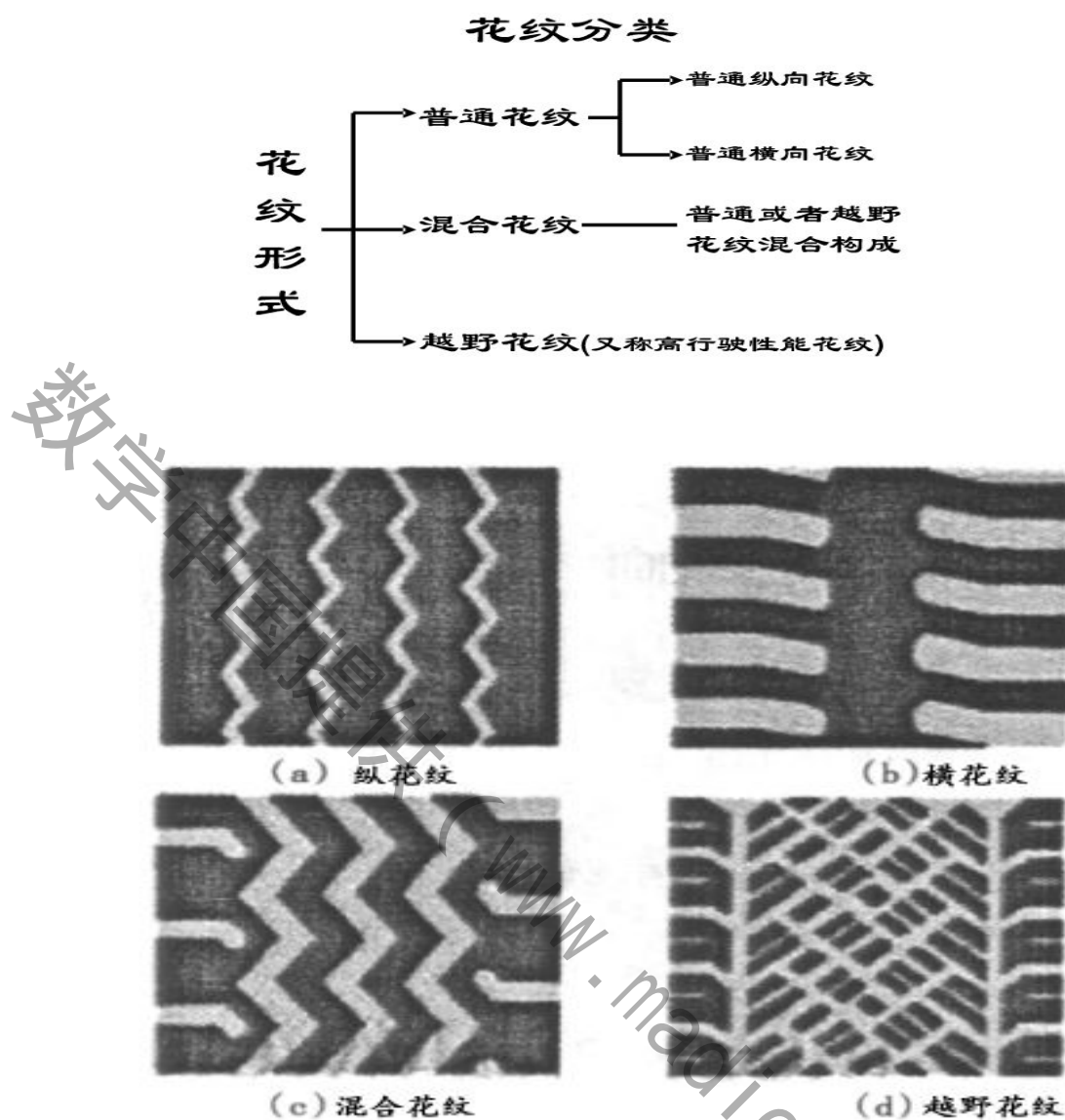


图 1 轮胎常见的 4 中花纹形式图

5.1.2 路面种类

我们通过查阅资料，将路面分为普通路面、泥泞路面、雪地路面、越野路面这 4 大类，其中普通路面包括一般水泥路面和沥青路面。

5.2 花纹对轮胎性能的影响

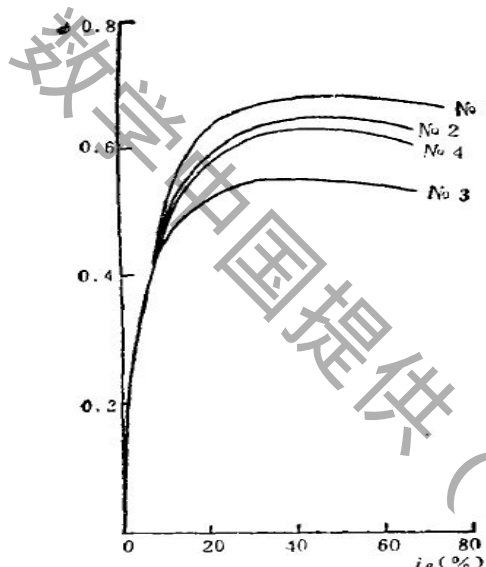
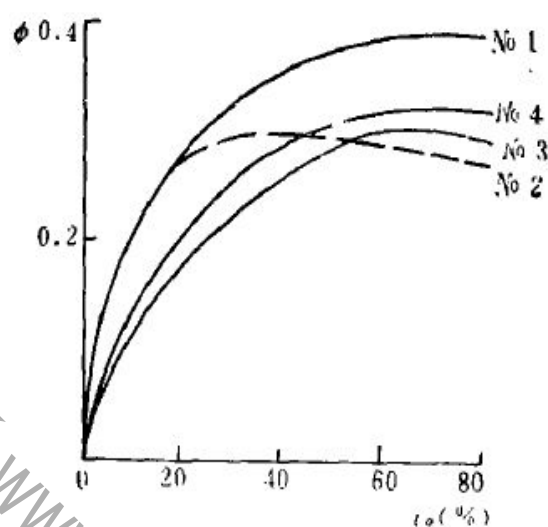
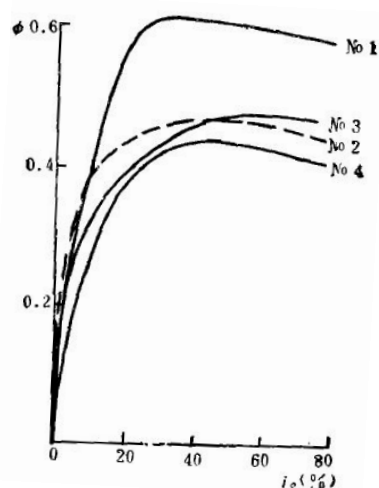
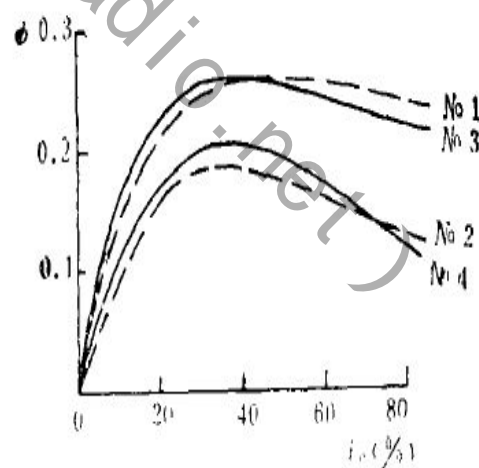
5.2.1 花纹对附着性的影响

通过查文献[4][6]，我们找到了不同花纹的轮胎在不同道路上的附着系数的大

参赛编号#1661

小, 他们通过研究胎面花纹对轮胎的湿附着性能的影响, 把轮胎的动力滑水现象模拟为轮胎胎面单元和粗糙路面之间的挤压、动压膜问题。在平均流量模型和微凸体接触模型的基础上, 建立了几种轮胎胎面花纹模型, 并采用数值分析的方法, 考虑了轮胎花纹的排水作用, 研究了不同胎面花纹对轮胎湿附着性能的影响, 他们在试验中为使轮胎在4种路面上的附着性能具有可比性, 将汽车在空载的情况下, 分别装用四种轮胎, 先后在4种路面上进行了试验。试验是在试验车驱动工况下, 改变负荷拖车的制动强度, 造成被试车驱动轮的滑转, 从而测得不同滑转率下的附着系数。

图2~5的附着系数和滑转率特性曲线 ($\Phi - i_0$ 曲线) 是在汽车空载、行驶速度 $V=10\text{km/h}$ 条件下在不同路面上测得的, 并将峰值附着系数(最大值)列于表1。

图 2 在普通路面上的 $\phi - i_0$ 曲线图 3 在泥泞路面上的 $\phi - i_0$ 曲线图 4 在雪地道路上的 $\phi - i_0$ 曲线图 5 在越野道路上的 $\phi - i_0$ 曲线

通过对上面4种道路上不同的附着系数的分析, 可以得到不同花纹在4种道路上附着性能的相关参数, 进一步对其有了了解。

参赛编号#1661

表1 不同花纹在4种道路上附着性能的相关参数

路面 附着系数 花纹	横花纹 (No 3)	纵花纹 (No 2)	混合花纹 (No 4)	越野花纹 (No 1)
普通路面	0.55	0.64	0.63	0.68
越野路面	0.23	0.22	0.20	0.23
雪地路面	0.48	0.48	0.45	0.63
泥泞路面	0.31	0.30	0.33	0.39

并且的得出结论，横纵花纹的附着性差别不大，但是混合特别是越野花纹的附着性表现的尤为优秀。

5.2.2 轮胎的花纹对制动性（滚动阻力系数）的影响

通过文献[4]的查找，我们得到了不同花纹的附着性系数与滚动阻力系数之间的关系公式如下：

$$\varphi = \frac{F_f - F_{f2}}{Z_2} = \frac{F_f + DP - F_{f2}}{Z_2} = \frac{F_{f1} + DP}{Z_2} \quad (\text{公式-1})$$

$$f = \frac{F_f}{G_a} \quad (\text{公式-2})$$

把（公式-2）变形代入（公式-1）可以得到：

$$\varphi = \frac{fG_a + DP - F_{f2}}{Z_2} \quad (\text{公式-3})$$

通过对（公式-3）对 f 反解，可以得到：

$$f = \frac{\varphi Z_2 - DP + F_{f2}}{G_a} \quad (\text{公式-4})$$

由（公式-4）可以知道，当外界因数一致时，轮胎的滚动阻力系数与轮胎的附着性系数成线性关系。则我们可以得出：不同的花纹对轮胎的附着系数和滚动阻力系数的影响是一样的趋势。

5.2.3 花纹对轮胎的排水性的影响

当轮胎在有积水的路面上滚动时，会挤压积水层，与轮胎接触的前部的积水会产生一定的压力冲向轮胎，水对轮胎产生的动压力与速度的平方成正比[9]，当轮胎的

参赛编号#1661

转速再次提高，当动压力与轮胎的载荷相平衡的时候，这时候轮胎就完全是失去了与路面的接触，漂浮在水膜上，失去与地面的摩擦力。所以排水欠佳的轮胎会使汽车失去控制能力，产生滑水现象，从而对行车安全构成严重威胁。

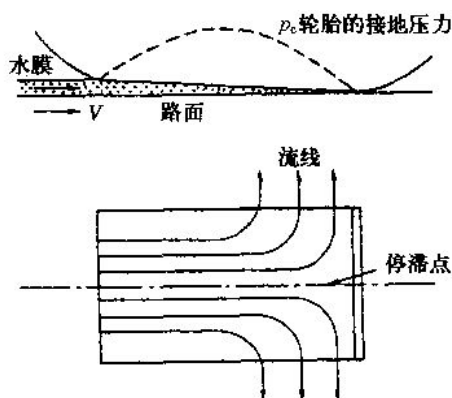


图6 即将发生完全滑水现象之前的状态

如果从固定于轮胎轴的坐标来看，路面和水膜以高速 V 向右方向前进。而且水膜变成楔子状，进入胎面内，设胎面为平板状，并且倾角非常小，那么从前方进入的水被路面和胎面的后端拦住。这时水的流线，如图3中所示，从胎面的两侧流出。在停滞点，水的动压 P_{fd} 根据伯努利定理为

$$P_{fd} = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (\text{公式-5})$$

式中 V ——速度 (m/s)；

ρ ——水的密度 (100kg/m³)

轮胎胎面的接地压力在中心部为最高，设此压力为 P_{cr} ，而且等于内压 p 的 1.55 倍，即 $P_{cr} = 1.55p$ ，若流体压力比公式 2 的 P_{cr} 中心部的接地压力还要高，那么轮胎就会完全浮起来。所以发生完全滑水现象的条件为

$$\frac{1}{2} \rho V^2 \geq 1.55p \quad (\text{公式-6})$$

考虑到量纲关系，1968 年 Home 得出如下的最小极限水上滑行速度

$$V_p = 6.35p^{0.5} \quad (\text{公式-7})$$

式中 V_p ——速度 (km/h)；

p ——轮胎内气压 (kPa)。

如果按照普通轿车胎压是 220kpa 来计算，发生滑水现象的最小速度约为 80KM/H，

参赛编号#1661

胎压越高，临界速度还会越大。这只是最基本的临界速度，影响临界速度的因素多种多样，这其中包括路面结构、积水深度、轮胎气压、载荷、沟槽花纹形式、磨损程度、水的深度，水和泥等杂质的混合程度，排水沟槽的花纹和磨损程度等因素有关。图7表示不同气压下的 V_p 值。

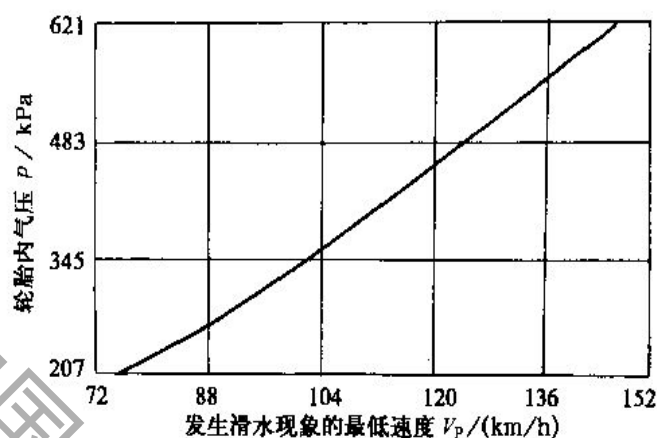


图7 发生滑水现象最低速度与轮胎内气压的关系

试验资料[8]表明，在混凝土路面上，水层为 5mm 深时，普通轮胎在车速 80km/h 时，附着系数已降为干混凝土路面的 1/4 以下(这时的附着系数仅相当于冰雪路面)，100km/h 时附着系数几乎降为零，这时汽车已完全飘在水面上了。对同样的轮胎，水层为 1mm 深时，情况只是略好一点：车速 80km/h 时，附着系数降为干混凝土路面的 1/2 以下，100km/h 时附着系数仅为干混凝土路面的 1/8。这说明，即使是薄如 1mm 的积水层，在车速较高时也会造成惨重的车祸，故排水性直接影响车辆的行驶安全。

根据该实验结果可以知道，4 种不同花纹的轮胎的排水性排序为：越野花纹 > 混合花纹 > 纵花纹 > 横花纹。

下面[10]例举了各种花纹类型的轮胎排水性能的时机模型分析图：



图8 纵向花纹拥有不错的排水性能

参赛编号#1661

对于普通轮胎来说，中间比较深的纵向花纹起到了主要排水的作用，大量的纵向花纹虽然拥有不错的排水效果，操纵稳定、噪声低、热量低，能提供良好的驾乘舒适感等特点，但是制动性能和湿地稳定性能较差，而且在高负荷下容易出现开裂，所以，拥有大量纵向条纹的轮胎还不能够提供可靠的湿地性能。



图9 横向花纹补充了制动缺陷

为了增加制动力，设计师还给轮胎增加了羊角花纹，宽大的羊角花纹还起到了辅助排水的作用，但是羊角花纹会导致更大的噪音。

有些轮胎在排水沟槽上设计了刀槽花纹，除了提供更强的抓地力外，这种尖锐的刀槽还可以划破车辆在高速行驶时候的水膜，从而使车辆拥有更高的积水路段行驶速度。而纵向花纹也要经过精心的设计，有些轮胎的纵向花纹是不对称的，甚至是横向花纹的位置也会不一样，这是因为在车辆高速行驶时，对称的花纹间距会促使轮胎压过小石子所带来的共振时间延长，而非对称式布局则会在花纹接触地面时将共振时间减少，并且可以减小轮胎接触面位移，有效降低滚动阻力。

在轮胎中央及内部的胎纹提供了良好的水滑性和干路制动性。胎纹中央的宽环槽沟与斜槽组合最优化了路面接触径向中心的排水。轮胎的开放式内肩部能使水完全排出。这样的组合可以兼顾了转弯的操控性和排水性能。



参赛编号#1661

图10 纵向花纹的深度

对于纵向花纹的沟槽，虽然理论上越深排水能力越强，但是如果花纹过深，不仅会增加滚动阻力，还会影响轮胎的正常散热，当胎温很快上升到极限值时，花纹根部有可能因受力和高温的折磨而撕裂、脱落。如果把胎纹排水槽设计过浅，排水不畅又会导致水膜的形成。



图11 块状花纹轮胎的排水性能

块状花纹轮胎，其排水性能很好，轮胎花纹呈块状排列，当车辆行驶在雪地或泥泞地面时，花纹深嵌入雪地或泥泞中，车辆借此产生驱动力。因此拥有非常好的驱动力和制动性能，同时，宽大的排水槽拥有非常突出的排水性能。

5.2.4 花纹对噪声的影响

通过查找文献[5][7]，轮胎花纹对噪音的影响主要表现在花纹角度的不同。胎花纹示意图见下图2。

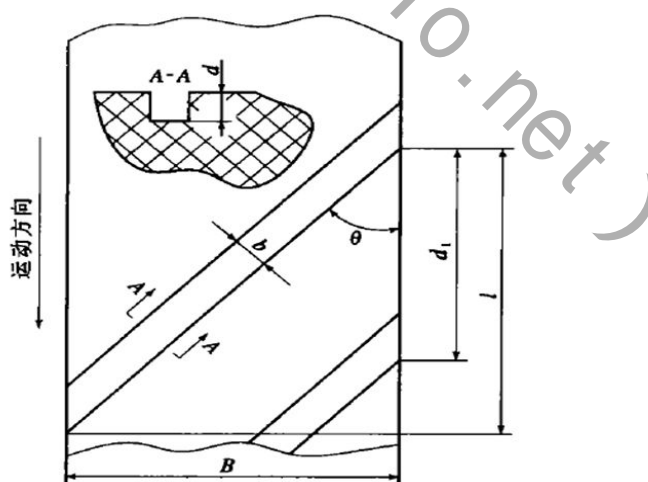


图12 胎面花纹示意图

其中： B —胎面宽度； b 、 d —花纹沟宽度、深度； θ —花纹沟与胎面中心线夹角；

参赛编号#1661

d_1 —花纹沟之间的错位距离； l —花纹沟沿轮胎中线方向的长度。

针对不同轮胎花纹沟角度进行模拟(花纹深度 4 mm, 花纹沟宽度 7 mm), 模拟结果如表2所示。由表2可见, 随着轮胎花纹沟角度的加大, 花纹的泵浦噪声加强, 且随着角度接近 90° , 声压的增幅加大; 轮胎速度提高同样使花纹沟角度所引起的轮胎噪声的差异明显增大。

得出结论: 在花纹沟宽度和深度及其它情况完全不变的情况下, 花纹沟角度每增大 15° , 轮胎的噪声声压将提高110%~130%。从试验中也得到相似的结论, 但由于其它参数的影响, 无法准确测量具体的影响程度, 可以得到一个趋势: 花纹沟角度对轮胎的噪声有很大影响。

表2 花纹沟角度对轮胎噪声的影响

项 目	最大声压 /Pa	最小声压 /Pa	平均声压 /Pa
花纹沟角度 30°			
50 km · h ⁻¹	2.03×10^{-6}	7.90×10^{-7}	1.41×10^{-6}
80 km · h ⁻¹	5.18×10^{-6}	2.02×10^{-6}	3.60×10^{-6}
100 km · h ⁻¹	8.10×10^{-6}	3.16×10^{-6}	5.63×10^{-6}
120 km · h ⁻¹	1.17×10^{-5}	4.55×10^{-6}	8.11×10^{-6}
花纹沟角度 45°			
50 km · h ⁻¹	4.30×10^{-6}	1.63×10^{-6}	2.96×10^{-6}
80 km · h ⁻¹	1.10×10^{-5}	4.17×10^{-6}	7.59×10^{-6}
100 km · h ⁻¹	1.72×10^{-5}	6.52×10^{-6}	1.19×10^{-5}
120 km · h ⁻¹	2.48×10^{-5}	9.39×10^{-6}	1.71×10^{-5}
花纹沟角度 60°			
50 km · h ⁻¹	1.05×10^{-5}	3.72×10^{-6}	7.12×10^{-6}
80 km · h ⁻¹	2.69×10^{-5}	9.51×10^{-6}	1.82×10^{-5}
100 km · h ⁻¹	4.21×10^{-5}	1.49×10^{-5}	2.85×10^{-5}
120 km · h ⁻¹	6.06×10^{-5}	2.14×10^{-5}	4.10×10^{-5}

根据该实验结果可以知道, 如果我们队四中不同的轮胎的花纹产生的噪声大小排序的话, 可以很容易得到一个趋势: 横向花纹 > 越野花纹 > 混合花纹 > 纵向花纹。

§ 6. 模型的建立与求解

对每一个花纹的轮胎和四种不同的道路环境建立层次分析法模型，求出每中花纹最适合那种环境，从而解决问题。

层次分析法（Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是对一些较为复杂、较为模糊的问题作出决策的简易方法，它特别适用于那些难于完全定量分析的问题。它是美国运筹学家 T.L.Satty 教授于上世纪 70 年代初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。

6.1 层次分析法的原理与步骤

人们在进行社会的、经济的以及科学管理领域问题的系统分析中，面临的常常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂而往往缺少定量数据的系统。层次分析法为这类问题的决策和排序提供了一种新的、简洁而实用的建模方法。运用层次分析法建模，大体上可按下面四个步骤进行：

- (i) 建立递阶层次结构模型；
- (ii) 构造出各层次中的所有判断矩阵；
- (iii) 层次单排序及一致性检验；
- (iv) 层次总排序及一致性检验。

下面分别说明这四个步骤的实现过程。

6.1.1 递阶层次结构的建立与特点

应用 AHP 分析决策问题时，首先要把问题条理化、层次化，构造出一个有层次的结构模型。在这个模型下，复杂问题被分解为元素的组成部分。这些元素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次元素作为准则对下一层次有关元素起支配作用。这些层次可以分为三类：

- (i) 最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称为目标层。

参赛编号#1661

(ii) 中间层：这一层次中包含了为实现目标所涉及的中间环节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层。

(iii) 最底层：这一层次包括了为实现目标可供选择的各种措施、决策方案等，因此也称为措施层或方案层。

递阶层次结构中的层次数与问题的复杂程度及需要分析的详尽程度有关，一般地层次数不受限制。每一层次中各元素所支配的元素一般不要超过 9 个。这是因为支配的元素过多会给两两比较判断带来困难。下面结合实例来说明递阶层次结构的建立：

有 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 4 种不同的环境条件，试确定不同轮胎花纹的最佳适用范围。在此问题中，你会根据诸如制动性、抓地性、排水性、噪音等一些准则去反复比较 4 个不同的环境条件。可以建立如图 9 的层次结构模型。

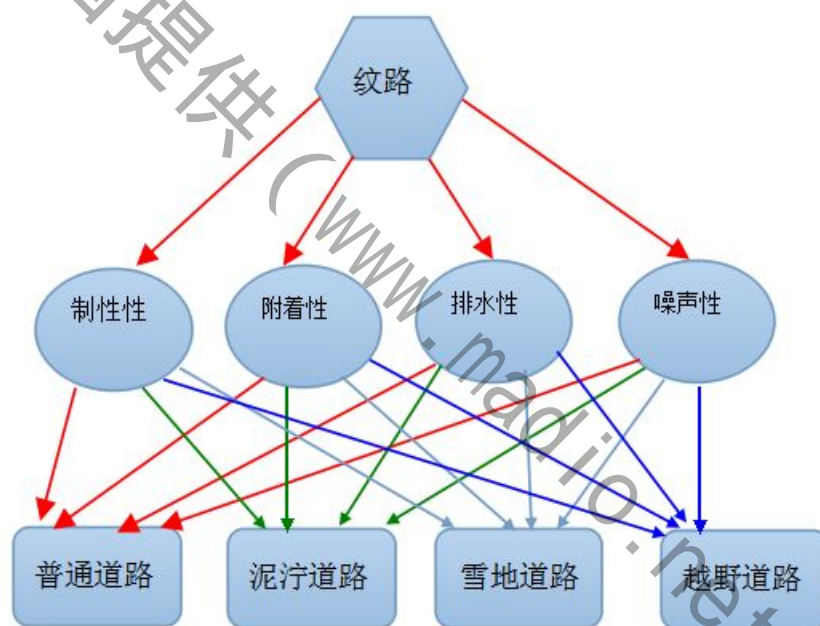


图 13 层次结构模型

6.1.2 构造判断矩阵

层次结构反映了因素之间的关系，但准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同，在决策者的心目中，它们各占有一定的比例。

在确定影响某因素的诸因子在该因素中所占的比重时，遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化。此外，当影响某因素的因子较多时，直接考虑各因子对该因素有

参赛编号#1661

多大程度的影响时，常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据，甚至有可能提出一组隐含矛盾的数据。为看清这一点，可作如下假设：将一块重为 1 千克的石块砸成 n 小块，你可以精确称出它们的重量，设为 w_1, \dots, w_n ，现在，请人估计这 n 小块的重量占总重量的比例（不能让他知道各小石块的重量），此人不仅很难给出精确的比值，而且完全可能因顾此失彼而提供彼此矛盾的数据。

设现在要比较 n 个因子 $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ 对某因素 Z 的影响大小，怎样比较才能提供可信的数据呢？Saaty 等人建议可以采取对因子进行两两比较建立成对比较矩阵的办法。即每次取两个因子 x_i 和 x_j ，以 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对 Z 的影响大小之比，全部比较结果用矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 表示，称 A 为 Z - X 之间的成对比较判断矩阵（简称判断矩阵）。

容易看出，若 x_i 与 x_j 对 Z 的影响之比为 a_{ij} ，则 x_j 与 x_i 对 Z 的影响之比应为 $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$ 。

定义 1 若矩阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 满足：

(i) $a_{ij} > 0$;

(ii) $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$;

则称之为正互反矩阵(易见 $a_{ii}=1, i=1, \dots, n$)。

关于如何确定 a_{ij} 的值，Saaty 等建议引用数字 1~9 及其倒数作为标度。表 3 列出了 1~9 标度的含义：

表 3 标度的含义

标度	含 义
1	表示两个因素相比，具有相同重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2, 4, 6, 8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若因素 i 与因素 j 的重要性之比为 a_{ij} ，那么因素 j 与因素 i 重要性之比为 $a_{ji}=1/a_{ij}$ 。

参赛编号#1661

6.1.3 层次单排序及一致性检验

判断矩阵 A 对应于最大特征值 λ_{\max} 的特征向量 W ，经归一化后即为一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

上述构造成对比较判断矩阵的办法虽能减少其它因素的干扰，较客观地反映出一对因子影响力的差别。但综合全部比较结果时，其中难免包含一定程度的非一致性。如果比较结果是前后完全一致的，则矩阵 A 的元素还应当满足：

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \forall i, j, k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{公式—8})$$

满足关系式 (1) 的正互反矩阵称为一致矩阵。需要检验构造出来的 (正互反) 判断矩阵 A 是否严重地非一致，以便确定是否接受 A 。

正互反矩阵 A 的最大特征根 λ_{\max} 必为正实数，其对应特征向量的所有分量均为正实数。 A 的其余特征值的模均严格小于 λ_{\max} ，若 A 为一致矩阵，则：

- (i) A 必为正互反矩阵。
- (ii) A 的转置矩阵 A^T 也是一致矩阵。
- (iii) A 的任意两行成比例，比例因子大于零，从而 $\text{rank}(A)=1$ (同样， A 的任意两列也成比例)。
- (iv) A 的最大特征值 $\lambda_{\max} = n$ ，其中 n 为矩阵 A 的阶。 A 的其余特征根均为零。
- (v) 若 A 的最大特征值 λ_{\max} 对应的特征向量为 $W = (w_1, \dots, w_n)^T$ ，则

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 即}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \quad (\text{公式—9})$$

n 阶正互反矩阵 A 为一致矩阵当且仅当其最大特征根 $\lambda_{\max} = n$ ，且当正互反矩阵 A 非一致时，必有 $\lambda_{\max} > n$ 。我们可以由 λ_{\max} 是否等于 n 来检验判断矩阵 A 是否为一

参赛编号#1661

致矩阵。由于特征根连续地依赖于 a_{ij} ，故 λ_{\max} 比 n 大得越多， A 的非一致性程度也就越严重， λ_{\max} 对应的标准化特征向量也就越不能真实地反映出 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 在对因素 Z 的影响中所占的比重。因此，对决策者提供的判断矩阵有必要作一次一致性检验，以决定是否接受它。

对判断矩阵的一致性检验的步骤如下：

(i) 计算一致性指标 CI

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (\text{公式—10})$$

(ii) 查找相应的平均随机一致性指标 RI 。对 $n = 1, \dots, 9$ ，Saaty 给出了 RI 的值，

RI 的值是这样得到的，用随机方法构造 500 个样本矩阵：随机地从 1~9 及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵，求得最大特征根的平均值 λ'_{\max} ，并定义

$$RI = \frac{\lambda'_{\max} - n}{n - 1} \quad (\text{公式—11})$$

(iii) 计算一致性比例 CR

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (\text{公式—12})$$

当 $CR < 0.10$ 时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则应对判断矩阵作适当修正。

6.1.4 层次总排序及一致性检验

上面我们得到的是一组元素对其上一层中某元素的权重向量。我们最终要得到各元素，特别是最低层中各方案对于目标的排序权重，从而进行方案选择。总排序权重要自上而下地将单准则下的权重进行合成。

表 5 层次总排序合成表

层 A \ 层 B	A_1	A_2	\dots	A_m	B 层总排序权值
B_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1m}	$\sum_{j=1}^m b_{1j}a_j$
B_2	b_{21}	b_{22}	\dots	b_{2m}	$\sum_{j=1}^m b_{2j}a_j$
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots
B_n	b_{n1}	b_{n2}	\dots	b_{nm}	$\sum_{j=1}^m b_{nj}a_j$

参赛编号#1661

设上一层次（A 层）包含 A_1, \dots, A_m 共 m 个因素，它们的层次总排序权重分别为 a_1, \dots, a_m 。又设其后的下一层次（B 层）包含 n 个因素 b_1, \dots, b_n ，它们关于 A_j 的层次单排序权重分别为 b_{1j}, \dots, b_{nj} （当 B_i 与 A_j 无关联时， $b_{ij}=0$ ）。现求 B 层中各因素关于总目标的权重，即求 B 层各因素的层次总排序权重 b_1, \dots, b_n ，计算按表 3 所示方式进行，即 $b_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} a_j, i=1, \dots, n$ 。

对层次总排序也需作一致性检验，检验仍象层次总排序那样由高层到低层逐层进行。这是因为虽然各层次均已经过层次单排序的一致性检验，各成对比较判断矩阵都已具有较为满意的一致性。但当综合考察时，各层次的非一致性仍有可能积累起来，引起最终分析结果较严重的非一致性。

设 B 层中与 A_j 相关的因素的成对比较判断矩阵在单排序中经一致性检验，求得单排序一致性指标为 $CI(j)$ ，（ $j=1, \dots, m$ ），相应的平均随机一致性指标为 $RI(j)$

（ $CI(j)$ 、 $RI(j)$ 已在层次单排序时求得），则 B 层总排序随机一致性比例为

$$CR = \frac{\sum_{j=1}^m CI(j) a_j}{\sum_{j=1}^m RI(j) a_j} \quad (\text{公式—13})$$

当 $CR < 0.10$ 时，认为层次总排序结果具有较满意的一致性并接受该分析结果。

根据前面已知花纹对各个性能的影响，以及参考一些文献数据，我们可以得出下面的表格。

表 6 不同轮胎花纹对轮胎性能的影响

轮胎性能 花纹类型	横向花纹	纵向花纹	混合花纹	越野花纹
制动性	好	不好（小）	好	好
排水性	一般	不好	好	好
附着性	差	一般	好	好
噪音量	大	小	一般	大

参赛编号#1661

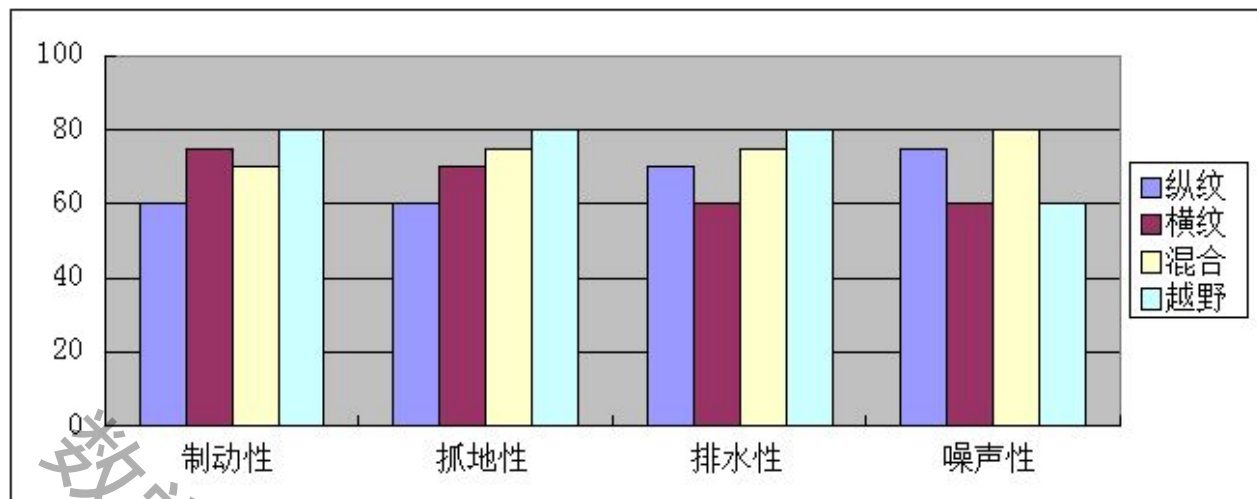


图 14 不同轮胎花纹对轮胎性能的影响柱状图

表 7 道路对轮胎不同性能比重分配表

比重 性能 \ 道路	普通道路	泥泞道路	冰雪道路	越野道路
制动	0.4	0.3	0.2	0.4
排水	0.2	0.4	0.3	0.3
附着	0.2	0.2	0.4	0.2
噪音	0.2	0.1	0.1	0.1

6.2 判断矩阵构造及一致性检验

首先，我们针对前面的解答方案，列出四个目标判断层的判断矩阵：

表 8 目标判断层判断矩阵

A1	B1	B2	B3	B4
B1	1	3	5	5
B2	1/3	1	3	3
B3	1/5	1/3	1	1
B4	1/5	1/3	1	1

A2	B1	B2	B3	B4
B1	1	1	1/3	1/5
B2	1	1	1/3	1/5
B3	3	3	1	1/3
B4	5	5	3	1

参赛编号#1661

A3	B1	B2	B3	B4
B1	1	1	1	3
B2	1	1	1	3
B3	1	1	1	3
B4	1/3	1/3	1/3	1

A4	B1	B2	B3	B4
B1	1	1	1	5
B2	1	1	1	5
B3	1	1	1	5
B4	1/5	1/5	1/5	1

然后再根据道路列出四个方案判断层：

表9 方案判断矩阵

B1	C1	C2	C3	C4
C1	1	3	5	1
C2	1/3	1	3	1/3
C3	1/5	1/3	1	1/5
C4	1	3	5	1

B2	C1	C2	C3	C4
C1	1	1/3	1/3	1/3
C2	3	1	3	3
C3	3	1/3	1	1
C4	3	1/3	1	1

B4	C1	C2	C3	C4
C1	1	3	3	3
C2	1/3	1	1	1
C3	1/3	1	1	1
C4	1/3	1	1	1

B3	C1	C2	C3	C4
C1	1	1	1/5	1
C2	1	1	1/5	1
C3	5	5	1	5
C4	1	1	1/5	1

参赛编号#1661

表 10 不同花纹的轮胎在不同道路上的

准则层		制动性	排水	附着	噪声性	总权值 排序
准则层权值排序		0.5595	0.2495	0.0955	0.0955	
方案层 权值排 序	冰雪	0.3899	0.0956	0.5000	0.1250	0.3017
	泥泞	0.1524	0.4874	0.1667	0.1250	0.2347
	普通	0.0679	0.2085	0.1677	0.6250	0.1656
	越野	0.3899	0.2085	0.1677	0.1250	0.2980
越野轮胎在这几种轮胎中在越野路面表现得最最好，所以最适用于越野路面						

一致性 检验	准则层	方案层 1	方案层 2	方案层 3	方案层 4
	0.0161	0.0161	0.0572	-1.6447e-16	0

准则层		制动性	排水	附着	噪声性	总 权 值 排序
准则层权值排序		0.3000	0.3000	0.3000	0.1000	
方 案 层 权 值 排 序	冰雪	0.3899	0.0956	0.5000	0.1250	0.3081
	泥泞	0.1524	0.4874	0.1667	0.1250	0.2544
	普通	0.0679	0.2085	0.1677	0.6250	0.1954
	越野	0.3899	0.2085	0.1677	0.1250	0.2420
混合轮胎在各种道路上面都表现的比较稳定，可以适用于各种路面，最佳适用于雪地路面。						

一致性 检验	准则层	方案层 1	方案层 2	方案层 3	方案层 4
	0.0161	0.0161	0.0572	-1.6447e-16	0

参赛编号#1661

准则层		制动性	排水	附着	噪声性	总 权 值
准则层权值排序		0.3125	0.3125	0.3125	0.0625	排序
方 案 层 权 值 排 序	冰雪	0.3899	0.0956	0.5000	0.1250	0.3158
	泥泞	0.1524	0.4874	0.1667	0.1250	0.2598
	普通	0.0679	0.2085	0.1677	0.6250	0.1775
	越野	0.3899	0.2085	0.1677	0.1250	0.2469
横向最佳适用范围是泥泞，松软的和雪地道路						

一致性	准则层	方案层 1	方案层 2	方案层 3	方案层 4
检验	-3.2895e-16	0.0161	0.0572	-1.6447e-16	0

准则层		制动性	排水	附着	噪声性	总 权 值
准则层权值排序		0.0955	0.0955	0.2495	0.5595	排序
方 案 层 权 值 排 序	冰雪	0.3899	0.0956	0.5000	0.1250	0.2410
	泥泞	0.1524	0.4874	0.1667	0.1250	0.1726
	普通	0.0679	0.2085	0.1677	0.6250	0.4177
	越野	0.3899	0.2085	0.1677	0.1250	0.1687
纵向花纹最佳适用范围是普通的道路，其噪音小，更适用于城市道路						

一致性	准则层	方案层 1	方案层 2	方案层 3	方案层 4
检验	-3.2895e-16	0.0161	0.0572	-1.6447e-16	0

最后我们可以得到不同花纹的性能以及其对应的最佳使用范围如下：

纵向花纹的共同特点是胎面纵向连续，横向断开，因而胎面纵向刚度大，而横向刚度小，轮胎抗滑能力呈现出横强而纵弱。这种花纹轮胎的滚动阻力较小，散热性能好，但花纹沟槽易嵌入碎石子儿。综合起来看，这种型式花纹适合在比较清洁、良好的硬路面上行驶。最佳使用环境是普通道路。

横向花纹共同特点是胎面横向连续，纵向断开，因而胎面横向刚度大，而纵向刚度小。故轮胎抗滑能力呈现出纵强而横弱，汽车以较高速度转向时，容易侧滑；轮胎滚动阻力也比较大，胎面磨损比较严重。最佳适用路面是泥泞路面。

混合花纹这种花纹介于纵向花纹和横向花纹之间。在胎面中部一般具有曲折形的纵向花纹，而在接近胎肩的两边则制有横向花纹。这样一来，台面的纵横抗滑能力比较好。因此这种型式花纹的轮胎适应能力强，应用范围广泛，它即适应普通路面，也适合雪地路面。

参赛编号#1661

越野花纹又叫砌块花纹，花纹沟槽宽而深，花纹块接地面积比较小(约40%~60%)。在松软路面上行驶时，一部分土壤将嵌入花纹沟槽之中，必须将嵌入花纹沟槽的这一部分土壤剪切之后，轮胎才有可能出现打滑，因此，越野花纹的抓着力大。根据测试，在泥泞路上，同一车型的轮胎使用越野花纹的牵引力可达普通花纹的1.5倍。最佳使用范围：越野路面。

综上所述：

- 横向最佳适用范围是泥泞，松软的和雪道路路；
- 纵向花纹最佳适用范围是普通道路，其噪音小，更适用于城市道路；
- 越野花纹轮胎在这几种轮胎中在越野路面表现得最最好，所以最适用于越野路面；
- 混合花纹轮胎在各种道路上面都表现的比较稳定，可以适用于各种路面，最佳适用于雪地路面。

§ 7. 模型评价与改进

7.1 模型优点

模型一：数值分析法是工程实践和实际生活中必不可少的数学方法，用连续的观点处理离散的问题，理论与实际结合，从而轻易的比较出横纵花纹的附着性，这是其他方法所不能比拟的。

模型二：图像法是最直观的，对于连续的函数，可以通过图像看出增减性、零点、顶点、对称轴的大概位置，从而让我们更加的直观看出不同轮胎花纹的不同性能特征在不同环境下的适应性，更能够直观的说明问题。

模型三：层次分析法既不单纯追求高深数学，又不片面地注重行为、逻辑、推理，而是把定性方法与定量方法有机地结合起来，使复杂的系统分解，能将人们的思维过程数学化、系统化，便于人们接受，且能把多目标、多准则又难以全部量化处理的决策问题化为多层次单目标问题，通过两两比较确定同一层次元素相对上一层次元素的数量关系后，最后进行简单的数学运算，就能很容易求出不同轮胎花纹的最佳适应环境。

7.2 模型缺点

对于模型一，数值分析法比较抽象，而且相关数据都需要自己查找文献资料，较为麻烦；对于模型二，图像法只能大致看到其相关变化趋势等，而不能做到准确分析；对于模型三，层次分析法对于本题不同轮胎花纹的最佳适应环境而言最明显的是本题基本没有关于轮胎的数据参数，全部要靠自己去找文献，同时个人对于他的定性比较多，因此多少有些让人难以相信，同时他只是分析最优者，而没有再次提出改进方案，故多少有些缺陷。

7.3 模型改进

1、对于本题，我觉得最大的改进方案就是数据参数的收集，可以说本题给出的

参赛编号#1661

基本不涉及任何参数，因此做题过程中全靠自己收集，需要改进的就是收集大量真实可靠的数据参数。

2、我们对于轮胎花纹的最佳适应环境用的是层次分析法，其中数据较少，不乏有些自己的主观意见，因此我觉得还可以参照另一种数学的方法，最后二者作出对比再确定出最适环境，这样更具有可靠性和真实性。

3、基于不同性能的考虑，我们只是主要分析了轮胎的几个主要性能，其实花纹或多或少还可能影响汽车的一些性能，因此我觉得如果再分析的详细点可能效果会更好。

§ 8. 参考文献

- [1] 杨忠敏, 现代橡胶技术, Advanced Rubber Technology, 2013年04期:第10页
- [2] 申瑞利, 露天采矿技术, Opencast Mining Technology, 2012年 S2期:第84页
- [3] 赵文杰, 轮胎花纹变形特性数值模拟分析, 成都, 西华大学出版社, 2012. 5
- [4] 张彦辉, 胎面花纹对轮胎湿附着性能的影响及轮胎滚动特性研究, 合肥, 合肥工业大学 2007. 5
- [5] 陈理君等, 低噪声轮胎花纹设计原理与方法, 武汉工业大学, 2008. 2
- [6] 邓怀庆, 胎面花纹对汽车附着性能影响的试验研究, 吉林职业师范学院, 2008. 6
- [7] 朱振华等, 轮胎花纹噪声仿真与实测分析, 武汉理工大学, 2008. 2
- [8] 朱林培, 基于 Ls-dyna 的轮胎滑水特性研究, 广州, 华南理工大学, 2009年6月, 第38卷 第11期
- [9] 百度文库, 汽车滑水现象分析及影响因素探讨, http://wenku.baidu.com/link?Url=_9b5vSh7z_jmfgyJtmaQLcEvEvUX8qGJleQsm-CU0G7_YpRJw72qfG9QCBEntpmREiFd_1HQfdro-ehuuEFQ1d13HoHE1nqcInroSKw80bnC, 2014年4月19日
- [10] 百度文库, 解析轮胎排水原理, <http://wenku.baidu.com/view/8d9bc2af83d049649b6658b1.html> , 2014年4月19日

参赛编号#1661

附录

1. 计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
fid=fopen('txt1.txt','r');
n1=4;n2=4;
a=[];
for i=1:n1
tmp=str2num(fgetl(fid));
a=[a;tmp]; %读准则层判断矩阵
end
for i=1:n1
str1=char(['b',int2str(i),'=[];']);
str2=char(['b',int2str(i),'=[b',int2str(i),';tmp];']);
eval(str1);
for j=1:n2
tmp=str2num(fgetl(fid));
eval(str2); %读方案层的判断矩阵
end
end
ri=[0,0,0.58,0.90,1.12,1.24,1.32,1.41,1.45]; %一致性指标
[x,y]=eig(a);
lamda=max(diag(y));
num=find(diag(y)==lamda);
w0=x(:,num)/sum(x(:,num));
cr0=(lamda-n1)/(n1-1)/ri(n1)
for i=1:n1
[x,y]=eig(eval(char(['b',int2str(i)])));
lamda=max(diag(y));
num=find(diag(y)==lamda);
w1(:,i)=x(:,num)/sum(x(:,num));
cr1(i)=(lamda-n2)/(n2-1)/ri(n2);
```

参赛编号#1661

```
end  
crl, ts=w1*w0, cr=crl*w0
```

txt1.txt 矩阵数据:

```
1 1 1 5  
1 1 1 5  
1 1 1 5  
1/5 1/5 1/5 1  
1 3 5 1  
1/3 1 3 1/3  
1/5 1/3 1 1/5  
1 3 5 1  
1 1/3 1/3 1/3  
3 1 3 3  
3 1/3 1 1  
3 1/3 1 1  
1 3 3 3  
1/3 1 1 1  
1/3 1 1 1  
1/3 1 1 1  
1 1 1/5 1  
1 1 1/5 1  
5 5 1 5  
1 1 1/5 1
```