

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

计算流体力学

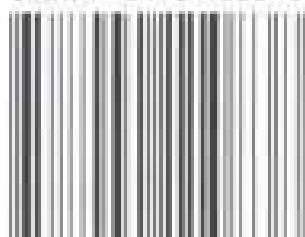
Computational Fluid Dynamics

傅德薰 马延文 编著

高等教育出版社

研究生教学用书 教育部研究生工作办公室推荐

ISBN 7-04-011083-0



9 787040 110838 >

定价 20.30 元

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

计算流体力学

Computational Fluid Dynamics

高等教育出版社

内容提要

本书是为高等院校和科研单位研究生撰写的“计算流体力学”课程的教科书。全书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法,包括流体动力学的诸方程和模型方程及其数学性质、数值解的理论依据、基本计算方法和数值解的行为分析等。计算方法包含有空间离散方法、代数方程和非定常方程(包括时间离散)的求解方法。这里涉及到的离散方法有有限差分方法、有限体积方法、有限元方法和谱方法。这些都是已经成熟和具有普适性的方法。书中描述了构造这些方法的基本思想,重点是有限差分方法。书中的后四章是针对各种物理问题讲述计算方法。这里包含低速不可压和高速可压缩流体运动数值模拟的计算方法和网格生成技术。着重阐述了针对不同物理问题的特征对计算方法精度的要求,及构造不同计算方法的基本思想,且给出了一些简单物理问题的数值模拟结果,以证实计算方法的有效性。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学/傅德薰,马延文编著. —北京:高等教育出版社, 2002.7

ISBN 7-04-011083-0

I. 计... II. ①傅...②马... III. 计算流体力学 - 高等学校 - 教材 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 031663 号

计算流体力学

傅德薰 马延文 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京铭成印刷有限公司

开 本 787×960 1/16

印 张 14.25

字 数 230 000

版 次 2002 年 7 月第 1 版

印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷

定 价 20.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

序

在 19 世纪, 流体力学家曾努力寻找问题的解析解。20 世纪上半叶, 由于工程技术的需要, 流体力学家又努力寻找问题的近似解。20 世纪 60 年代后, 由于计算机的迅速发展, 使得寻找问题的数值解成为可能。从那时起, 就逐步形成了计算流体力学这一新的学科。现在, 计算流体力学不但已经成了解决工程技术问题的最有效的工具之一, 而且也是流体力学基础研究中不可缺少的工具。因此, 计算流体力学就不但是流体力学专业学生的必修课, 而且也是很多其他专业学生应该学习的一门课程。

但是, 目前无论是在国内还是国外, 都很难买到一本好的计算流体力学的教科书。因此, 教育部所属工程力学专业教学指导委员会就约请了本书作者专门来撰写这本书。

计算流体力学的发展非常迅速, 而且由于流体力学问题的面非常之广, 它要对付的问题也千变万化。所以要写好一本计算流体力学的书, 首先选材就不容易。其次, 能不能既把基本内容讲清楚, 又能反映本学科的最新进展及发展方向更不容易。这些都要取决于作者的经验和水平。

本书的两位作者, 是我国计算流体力学方面的著名学者。他们原先从事的是与航空航天技术有关的计算流体力学的工作, 为我国航空航天技术的发展作出过重要的贡献。近年来, 又从事与湍流的直接数值模拟有关的工作。而这两方面正是计算流体力学中发展最快和最困难的两个方向。两位作者不但从事具体的计算工作, 而且对计算流体力学的基本理论和方法的发展, 也有重要的贡献。特别是在一种重要格式, 即紧致格式的发展上, 他们可以说是代表了我国的最高水平, 在国际上也有相当的影响。

如上所说, 由于计算流体力学牵涉的面太广, 一本书不可能包含一切而必须有所选择。我相信, 两位作者的经验和水平将保证选材的合理性, 也将保证能反应计算流体力学的最新进展和发展方向。特别是, 两位作者曾经主编过“导弹与航天丛书”中的《计算空气动力学》一书, 得到过很好的评价。

本书的内容既包含了适合流体力学专业本科生的内容, 也包含了适

合于研究生的内容。这样安排是必要的, 因为流体力学的研究生也可能, 或更确切地说, 往往来自其他专业。他们在本科生阶段的学习中, 不一定学过计算流体力学。因此在研究生的学习过程中, 必须从基本内容学起。本书不但可以用于学校的教学, 对正在工作的工程技术人员和学校的教师, 也将是一本很好的参考书。

周 恒

中科院院士

工程力学专业教学指导委员会(第二届)主任委员

2000 年 12 月 29 日

前 言

本书是以中国科技大学研究生院流体力学专业和中国科学院力学研究所研究生班的“计算流体力学”讲义为基础，结合作者多年科学研究工作的实践，且参考了国内外一些计算流体力学的书籍，并吸收了国内外一些最新研究成果撰写而成。

随着计算技术的发展，计算流体力学自 20 世纪 60 年代中已形成一独立的学科分支，成为研究流体运动规律，解决很多工程实际问题的三大手段(理论、实验、计算)之一。近年来，随着高速巨型并行计算机的出现，计算方法的不断创新，计算流体力学更有了日新月异的进展。它为流体力学的发展掀开了新的一页，成为当今最活跃的研究领域之一。

本书是为高等院校和科研单位研究生撰写的计算流体力学课程的教科书，可用于一般流体力学专业和工程力学专业的教材，也可作为本科高年级大学生和该学科研究工作者的参考书。特点是力求深入浅出地讲清楚计算流体力学的一些基本内容，着重阐明其基本概念、构造计算方法的基本思想及方法所依据的理论基础。强调计算流体力学的成果应主要体现在解决实际问题的能力上。目的是希望通过该课程的学习能了解计算流体力学的特点和研究问题的基本方法。完成课程的学习后，有能力阅读该学科的一些现有文献，且能将其基本方法应用于自己所关心的研究领域。

本书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法。包括数值解的理论依据，基本计算方法和数值解的行为分析等。计算方法包含有在计算流体力学中更为成熟和更具有普适性的四种方法：有限差分法、有限体积法、有限元法和谱方法。第六章至第八章是针对各种物理问题讲述计算方法。第九章介绍了计算流体力学中的一重要技术——网格生成技术。应当指出，该书中所结合的物理问题重点是针对空气动力学中的问题来讲述方法。这一方面是因为该领域确实是计算流体力学应用最多和最活跃的领域；另一方面也是因为作者的工作领域所限。对于其他领域的应用，应适当增加内容。

书中的第四章至第七章由马延文编写；其他章节由傅德薰编写。全书由傅德薰和马延文共同定稿。

本书在编写过程中得到周恒院士和中科院力学研究所学位委员会多

位专家的热情指导和支持。原稿经周恒院士细心审阅，提出了很多宝贵意见，这是提高该书质量的关键。在此一并表示衷心感谢。

傅德薰 马延文

2002年2月21日

目 录

主要符号表	1
第一章 引论	1
1.1 计算流体力学及其特征	1
1.2 计算流体力学的发展	3
1.3 本书的目的和内容	5
参考文献	6
第二章 流体力学方程及模型方程	7
2.1 流体力学基本方程	7
2.2 模型方程及其数学性质	11
2.3 双曲型方程组的初边值问题	17
2.4 Riemann 间断解	27
参考文献	34
第三章 偏微分方程的数值解法	35
3.1 有限差分方法	35
3.2 偏微分方程的全离散	48
3.3 有限体积方法	54
3.4 有限元方法	57
3.5 谱方法	71
参考文献	78
习题	79
第四章 高精度有限差分法及数值解的行为分析	81
4.1 模型方程及半离散化方程	82
4.2 高精度差分逼近式	84
4.3 数值解的精度及分辨率分析	91
4.4 数值解中的耗散效应与色散效应	94
4.5 数值解的群速度	96
4.6 数值解行为的进一步分析	100
4.7 时间离散的色散与耗散效应	106
参考文献	108
习题	108
第五章 代数方程的求解	110
5.1 Gauss 消去法	110

5.2 追赶法	111
5.3 迭代法求解代数方程	114
5.4 交替方向追赶法	119
5.5 非线性方程的求解	120
5.6 时间关系法及局部时间步长法	121
5.7 多重网格技术	124
参考文献	126
习题	126
第六章 可压缩流体力学方程组的离散	128
6.1 一维流体力学方程及 Jacobian 系数矩阵的分裂	128
6.2 一维 Euler 方程的离散	133
6.3 Godunov 间断分解法	135
6.4 Roe 格式与 Roe 分解	137
6.5 多维问题的差分逼近	141
6.6 粘性项的差分逼近	146
参考文献	148
习题	149
第七章 激波高分辨率差分格式	150
7.1 数值解中的非物理振荡	150
7.2 一阶 TVD 格式	157
7.3 二阶 TVD 格式	159
7.4 TVD 格式在流体力学方程中的应用	163
7.5 MUSCL 格式	168
7.6 其他类型的激波高分辨率格式	170
参考文献	175
习题	176
第八章 不可压 Navier - Stokes 方程的差分逼近	178
8.1 控制方程	178
8.2 求解定常 N - S 方程的人工压缩性方法	179
8.3 非定常原始变量 N - S 方程的求解	183
8.4 涡量 - 流函数法	186
参考文献	189
习题	189
第九章 网格技术	191
9.1 网格生成技术	191
9.2 非结构网格	199
9.3 基于非等距网格上的有限差分法	203
参考文献	205

习题	205
专业名词索引	206
外国人名译名对照表	210
Synopsis	211
Contents	213
作者简介	216

第一章 引 论

计算流体力学在 20 世纪 70 年代以来有了突飞猛进的发展,而且正在以更快的速度前进。推动这一发展的原因一方面是实际需求,另一方面是计算技术的飞速发展和高速巨型计算机的出现,使其发展成为一门独立的学科。计算流体力学是多领域的交叉学科。它所涉及的学科有流体力学、偏微分方程的数学理论、数值方法和计算机科学等。它的发展进一步促进了这些学科的发展。为了掌握该学科的基本内容,首先必须了解什么是计算流体力学,它的特征是什么。

1.1 计算流体力学及其特征

1.1.1 什么是计算流体力学

任何流体运动的动力学特性都是由质量守恒律、动量守恒律和能量守恒律所确定的。这些基本定律可由数学方程组(偏微分方程组或积分方程组)来描述,如欧拉方程(Euler 方程),纳维-斯托克斯方程(Navier-Stokes 方程,简称为 N-S 方程)等。利用数值方法通过计算机求解描述流体运动的数学方程,揭示流体运动的物理规律,研究定常流体运动的空间物理特性和非定常流体运动的时-空物理特征,这样的学科称为计算流体力学。

计算流体力学的兴起推动了流体力学研究工作的的发展。自从 1687 年牛顿定律公布以来,直到 20 世纪 50 年代初,研究流体力学的主要方法是两种:一是实验研究——以地面实验为研究手段;另一是理论分析方法——利用简化的流动模型假设,给出所研究问题的解析解或简化方程。理论工作者在研究流体运动基本规律的基础上,提出了各种简化流动模型,给出了一系列解析解和数值方法。这些研究成果推动了流体动力学的发展,奠定了今天计算流体力学的基础。很多方法仍在目前解决实际问题中采用。然而,仅采用这些方法研究复杂非线性流体运动规律是不够的。它已不能满足 20 世纪 50 年代开始高速发展起来的近代科学技术的需求。

今天随着实际的需要,计算流体力学已发展成为流体动力学第三种

研究方法 它的兴起促进了实验研究和理论分析方法的发展。将实验研究与理论分析方法联系起来,为简化流动模型的建立提供了更多的依据,使很多简化方法得到了发展和完善。例如,目前在飞机工业中广泛应用的面元法就是一个很好的例子。然而,更重要的是计算流体力学采用它独有的新的研究方法——数值模拟方法——研究流体运动的物理特性。

1.1.2 计算流体力学的能力及限制

计算流体力学是采用数值方法直接求解描述流体运动基本规律的非线性数学方程组,通过数值模拟方法研究流体运动的规律。它不同于实验研究和理论分析方法。其特点主要有以下几点^[1]:

1. 扩大了研究范围

一些原来认为难以解决的问题,采用数值模拟方法可能得到解决。例如,研究汽车运动时,必须考虑相对于汽车运动的地面。这在实验中难以做到,但采用数值模拟方法求解 N-S 方程不难得到所需的数值解。又如超声速、高超声速钝体绕流、分离流、涡运动、真实气体效应、湍流直接数值模拟等问题都是原来认为难以求解的问题,今天通过数值模拟方法很多问题已得到解决。

2. 能给出较完整的定量结果

若物理问题的数学提法(包括数学方程及其边界条件)正确,则数值模拟所能研究问题的流动参数(如雷诺数、流体性质、模型尺度、来流条件等)范围广泛。且能给出定常流动的空间流场和非定常流动的时-空流场的定量结果。这常常是实验研究和理论分析方法难以做到的。

3. 数值解总是离散近似解

因为数值模拟的基本方法是通过离散方程逼近描述流体运动基本规律的数学方程及其边界条件。并需采用一定方法来求解这些离散方程。故即使所选择的数学方程是所研究物理问题的准确方程,由于在数值解中将引入误差,如离散误差,求解方法中的误差(迭代误差,舍入误差等),故所得到的数值解也是按一定精度逼近准确物理解的近似解。也就是说数值解总是离散的近似解。由于正确模拟不同的物理问题,所能允许的数值误差是不相同的,故一方面计算方法应当是针对不同的物理问题进行选择和构造;另一方面,必须认识数值解引入的误差。在本书中结合具体实例讲解了这些问题,讨论了数值方法的精度。

应当指出,要建立正确的数学方程,特别是对于复杂的流动问题,如燃烧、多相流、湍流等,还必须与实验研究和理论分析方法相结合。

更重要的是计算流体力学中所求解的是非线性偏微分(积分)方程组,其数值方法的现有数学理论尚不够充分,严格的稳定性分析、误差估计和收敛性证明等理论工作的发展还跟不上数值模拟方法的进展。虽然关于广义解唯一存在性等问题的严格数学理论已取得了长足进展,但还不足以对一些复杂流动的求解问题给出明确的回答。所以,在计算流体力学中,一方面仍必须依靠对一些简单的、线性的、与原有问题有一定关系的数学方程进行严格的数学分析,依靠启发性的推理,分析非线性问题,给出数值解的理论依据;另一方面,依靠对线性和非线性数学方程的数值实验及数值解与地面试验值或他人典型算例的计算结果的比较和物理特性分析,验证计算结果,进一步改进计算方法。所以实验研究、理论分析和数值模拟方法是研究流体运动的三种基本方法,它们的发展是相互依赖相互促进的。

1.2 计算流体力学的发展

计算流体力学的发展与计算机技术的发展直接相关。这是因为采用数值方法可能模拟物理问题的复杂程度,解决问题的广度、深度和所能给出数值解的精度都与计算机的速度、内存和外围设备(如图像输出的能力)直接相关。一般来说,只有计算机的速度、内存和外围设备达到一个新的水平时,才会有计算流体力学新阶段的出现。在文献^[2]中 Chapman 将计算流体力学的发展进程分为四个阶段:1. 求解线性无粘流方程,如小扰动位势流方程;2. 求解非线性无粘流方程,如全位势流方程, Euler 方程;3. 求解雷诺平均 N-S 方程;4. 求解非定常全 N-S 方程。这就是按求解的数学方程逐步逼近非定常全 N-S 方程的过程,从易到难的过程。随着计算技术的提高,巨型计算机的出现,计算流体力学求解问题的深度和广度不断发展。它不但可用于研究一些物理问题的机理,解决实际流动中的各种问题,而且可用于发现新的物理现象,如, Kim 和 Moin 等人在槽道湍流的直接数值模拟中发现了倒马蹄涡,后来经实验研究所证实^[3,4]。计算流体力学的研究领域也随着计算机速度和内存的增加而不断扩大。特别是大型并行计算机的问世使该学科的发展达到了一个新的阶段。近年来采用直接数值模拟和大涡模拟的方法,研究湍流所取得的成果足以使人们确信,采用数值模拟方法与实验研究相结合是突破多年来流体力学中的难题——湍流问题——的重要途径。

实际需求是促进该学科发展的关键。从 20 世纪 40 年代开始,随着

喷气式飞机、超声速导弹的出现,在气体动力学中提出了很多需要解决的问题。例如,飞行器以高超声速飞行时,为了防热需以钝头为前缘形状。故高超声速钝体绕流成为 20 世纪 50 年代末 60 年代初的重要气体动力学问题。该问题是难以用线性理论为基础的方法解决的。在图 1-1 中给出了钝体绕流的典型流场示意图。

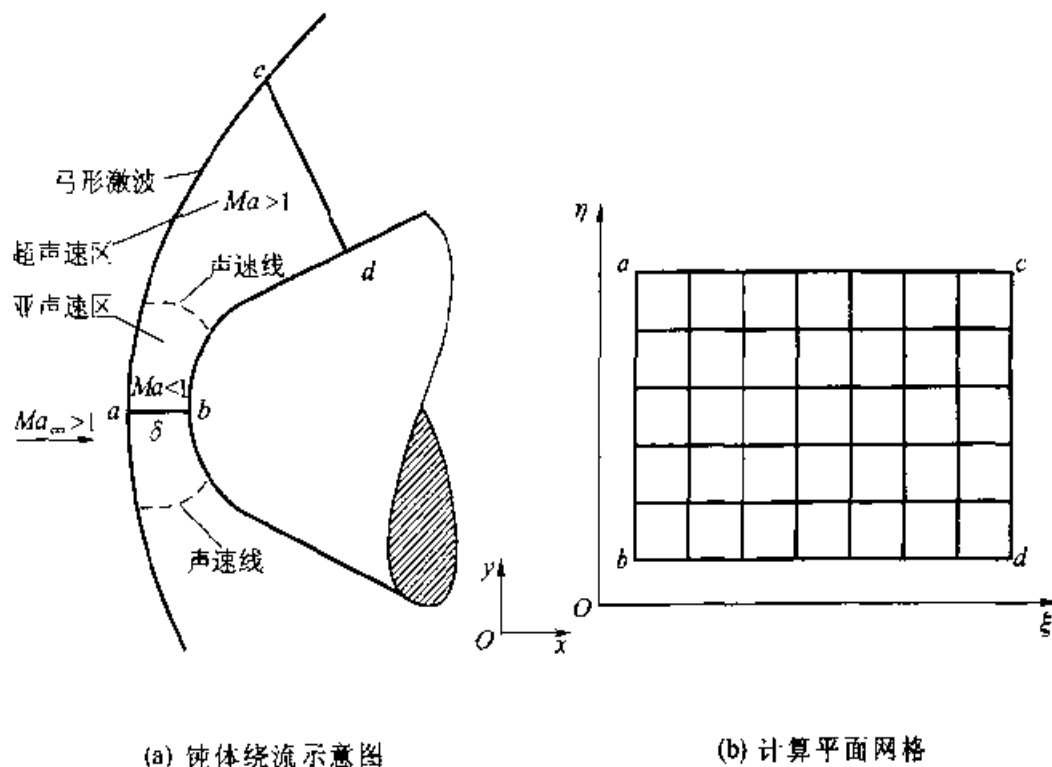


图 1-1 钝体绕流典型流场示意图

可以看出,在物面与头激波之间的流场包括有亚、跨、超声速不同性质的流动区域,是一个非线性激波问题。Liepman 和 Roshko 在 1957 年^[5]中对该问题曾断言“目前,激波和脱体距离不可能有理论方法预测。”(这里,激波是指图 1-1 中的弓形头激波,脱体距离是指对称轴上头激波与物面驻点之间的距离)。而采用数值方法求解 Euler 方程和 N-S 方程,使该问题得以解决。随着计算流体力学的发展,今天已可以利用巨型计算机,采用合适的网格生成技术和有效的计算方法,求解三维 Euler 方程和三维 N-S 方程,给出各种飞行器(如航天飞机整机)的超声速、高超声速无粘和粘性绕流的复杂流场。

数值方法的理论研究促进了计算方法的发展。伴随着计算流体力学的发展,很多数学家研究了偏微分方程的数学理论。Hadamard, Courant 和 Friedrichs 等人研究了偏微分方程的基本特征、数学提法的适定性、物理波的传播特征和解的唯一性等问题,发展了双曲型偏微分方程理论。以后, Courant, Friedrichs 和 Lewy 等人发表了经典论文^[6,7],证明了

连续的椭圆型、抛物型和双曲型方程组解的存在性和唯一性定理。且针对线性方程组的初值问题，首先将偏微分方程离散化，证明了离散系统收敛到连续系统的条件。且利用代数方法确定了差分解的存在性。他们还讨论了双曲型方程的特征性质，给出了特征线方法和著名的稳定性条件——CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) 条件。这些研究成果为数值方法奠定了理论基础。数值理论的研究促进了计算方法的发展，扩大了研究范围。

目前数值计算方法已成功地应用于数值模拟非定常多尺度的复杂流场、研究流动的失稳、拟序结构的形成及发展、流动的转换和湍流等^[3,4,8~11]。

1.3 本书的目的和内容

随着计算技术和计算机科学的飞速进展，计算流体力学正以突飞猛进的速度向前发展，新的内容层出不穷。本书的目的不是全面介绍计算流体力学的现状，而是力求深入浅出地讲清楚一些基本内容。着重阐明计算流体力学中的一些基本概念，构造计算方法的基本思想及方法所依据的理论基础。并在一定程度上反映了计算流体力学中的最新成果。

本书的对象是高等院校和科研单位的研究生。也可作为该学科的教学和研究工作者的参考书。

本书的目的是使读者通过学习能了解这一学科的特点和研究问题的基本方法。完成该课程的学习后，有能力阅读该学科的一些现有文献资料，且能将其基本方法应用于自己所关心的研究领域。

全书共分九章。前五章讲述了计算流体力学中的基本概念和基本方法。包括流体动力学的诸方程和模型方程及其数学性质，数值解的理论依据和基本计算方法以及数值解的行为分析等。计算方法包含有空间离散方法、代数方程的求解方法和非定常方程(包括时间离散)的求解方法。这里涉及的离散方法有有限差分方法、有限体积方法、有限元方法和谱方法。虽然在离散方法中还有很多其他方法，如边界元方法、格子方法等，但前四种方法是更为成熟和更具有普适性的方法。书中将描述构造这四种方法的基本思想，重点是有限差分方法。为了突出本课程的特点，书中所涉及的数值方法的理论(如 Lax 定理等)，都略去了数学证明过程，只给出了各种理论的结论。

书中的后四章是针对各种物理问题讲述计算方法。这里包含低速不可压和高速可压缩流体运动数值模拟的计算方法。着重阐述了针对不同

物理问题的特征对计算方法精度的要求, 及构造不同计算方法的基本思想, 且给出了一些简单物理问题的数值模拟结果, 以证实计算方法的有效性。在第九章简单介绍了网格生成技术。

参 考 文 献

- 1 傅德薰. 流体力学数值模拟. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 2 Chapman D R. Trends and pacing items in computational aerodynamics. AIAA 79 - 129
- 3 Moin P, Kim J. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow: Part 1, Analysis of instantaneous fields statistical correlations. J Fluid Mech, 1985, 155: 441 ~ 465
- 4 Kim J, Moin P. The structure of the vorticity field in turbulent channel flow: Part 2, Study of ensemble-averaged fields. J Fluid Mech, 1986, 162: 339 ~ 363
- 5 Liepmann HW, Roshko A. Elements of gasdynamics. New York: Wiley, 1957
- 6 Courant R, Friedrichs K O, Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics. IBM Journal, 1967 (11): 215 ~ 234
- 7 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems. New York: Interscience, 1967
- 8 Kim J, Moin P, Moser R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. J Fluid Mech, 1987, 177: 133 ~ 166
- 9 Fu Dexun, Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow fields. J Comput Physics, 1997, 134: 1 ~ 15
- 10 傅德薰, 马延文, 张林波. 可压混合层流动转捩到湍流的直接数值模拟. 中国科学(A辑), 2000, 30 (2): 161 ~ 168
- 11 Moser R D, Rogers M M. The three dimensional evolution of plane mixing layer: pairing and transition to turbulence. J Fluid Mech, 1993, 247: 275 ~ 320

第二章 流体力学方程及模型方程

描述流体运动基本规律, 包括质量、动量和能量守恒律的数学方程组是计算流体力学研究问题的出发点。本章将认为读者已掌握了流体力学的基本知识。因此, 这里将直接给出在计算流体力学中广泛应用的几种流体力学方程, 其推导过程可参考文献^[1~3]。为了描述不同物理问题的数学方程性质及其边界条件, 本章通过模型方程简要介绍了流体力学基本方程的性质、定解条件及其边界处理等问题。目的是给出本书中所讨论问题的依据。

2.1 流体力学基本方程

2.1.1 可压缩 Navier - Stokes 方程

流体力学的基本方程包括描述流体运动的质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律方程, 以及给出热力学关系式的状态方程。在直角坐标系 $Oxyz$ 中, 若不考虑外力, 这些方程的量纲为一的守恒形式可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(U)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(U)}{\partial z} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \quad (2.1.1)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + P) \end{pmatrix}$$

$$F_2(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vx \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + P) \end{pmatrix}, \quad F_3(U) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(E + P) \end{pmatrix}$$

$$G_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \frac{c_p \mu}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial x} + u\tau_{11} + v\tau_{12} + w\tau_{13} \end{pmatrix}$$

$$G_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \tau_{23} \\ \frac{c_p \mu}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial y} + u\tau_{21} + v\tau_{22} + w\tau_{23} \end{pmatrix}$$

$$G_3(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \frac{c_p \mu}{Pr Re} \frac{\partial T}{\partial z} + u\tau_{31} + v\tau_{32} + w\tau_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \frac{\mu}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), & (i \neq j) \\ \frac{\mu}{Re} \left(2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \operatorname{div} V \right), & (i = j) \end{cases}$$

$$E = \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right)$$

x_i ($i=1,2,3$) 对应于坐标 x , y 和 z , u_i 对应于 u , v 和 w 。方程组 (2.1.1) 称为可压缩 Navier-Stokes 方程。其中第 1 个方程为连续方程, 第 2, 3, 4 方程对应为 3 个坐标方向的动量方程, 最后一个方程是能量方程。 ρ , u , v , w , T , p 分别对应为密度, 3 个坐标方向上的速度分量、温度和压力, t 为时间变量。本书中所选用的量纲为一的形式对于 ρ , u , v , w , T , p 分别对应为 ρ_∞ , U_∞ , U_∞ , U_∞ , T_∞ , $\rho_\infty U_\infty^2$, 这里下标 ∞ 表示来流参数; 式 (2.1.1) 中的 μ 和 κ 为粘度和传热系数。其量纲为一的参数对应为 μ_∞ 和 κ_∞ 。方程的右端为粘性项, τ_{ij} 为粘性应力张量的分量。取流场特征长度为 L , 特征时间为 L/U_∞ , 则有以下量纲为一的参数: 雷诺 (Reynolds) 数: $Re = \rho_\infty U_\infty L / \mu_\infty$; 普朗特

(Prandtl)数: $Pr = c_p \mu_\infty / \kappa_\infty$ (应当指出, 量纲为一的形式的选取是非唯一的, 书中采用了以上形式)。

从式(2.1.1)可以看出, 这里有5个方程, 6个未知量。为了使方程封闭, 需增加一个状态方程。对于完全气体, 在以上定义的量纲为一的形式下, 状态方程可写为

$$p = \rho T / (\gamma Ma_\infty^2) \quad (2.1.2)$$

且有 $e = c_v T$, 这里 e 为内能, c_v 为质量定容热容, γ 为质量热容比, 在以上量纲为一的定义下有 $c_v = 1 / [Ma_\infty^2 \gamma (\gamma - 1)]$, 其中 Ma_∞ 为来流马赫数, $Ma_\infty = U_\infty / a_\infty$, $a_\infty = \sqrt{T_\infty / Ma_\infty}$, 粘度 μ 由苏式兰德 (Sutherland) 公式给出

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{T^{3/2}(1 + T_s/T_\infty)}{T + T_s/T_\infty} \quad (2.1.3)$$

式中 T_s 为参考温度, 对于空气一般取 $T_s = 110.4 \text{ K}$ 。

从式(2.1.1)可以看出, N-S 方程是复杂的非线性方程组。其数学性质为混合型方程。对于定常 N-S 方程, 即流动参数只是空间变量 (x, y, z) 的函数, 不是时间 t 的函数, 方程(2.1.1)中的第1项 $\partial \mathbf{U} / \partial t = 0$, 则方程组为非线性椭圆型方程, 而非定常 N-S 方程则是双曲-抛物型方程。采用数值方法求解不同类型的偏微分方程时, 边界条件的确定是很重要的。不同的物理问题, 边界条件的提法也不相同。这将在后几节中以模型方程为例加以说明。另外, 对不同类型的偏微分方程, 合适的计算方法也有所不同。

2.1.2 Euler 方程

当流体运动的雷诺数 Re 足够大且我们所感兴趣的只是定常和非定常的宏观流动时, 粘性效应可以忽略不计。如各种飞行器绕流的流场, 在雷诺数足够大时, 物面附近的粘性边界层厚度很薄, 它对飞行器表面压力分布及其定常气动特性的影响可忽略不计。忽略粘性影响的流动称为无粘流动。这时在直角坐标系 (x, y, z) 中的 N-S 方程(2.1.1)右端的粘性项可忽略, 方程将简化为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_1(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\mathbf{F}_2(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\mathbf{F}_3(\mathbf{U})}{\partial z} = 0 \quad (2.1.4)$$

其中矢量 \mathbf{U} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 的表达式与方程(2.1.1)相同。方程组(2.1.4)称为 Euler 方程。其数学性质对不同的问题将有所不同: 对于亚声速流动, 即流动速度小于声速, 定常 Euler 方程为椭圆型方程; 对于跨声速流动, 定常 Euler 方程为混合型; 对于超声速流动, 则为双曲型

方程。而非定常 Euler 方程为双曲型。其边界条件与 N-S 方程相比，也有较大差别。例如在物面上，其物理边界条件应为 $\mathbf{V}_n = 0$ ，即物面法向速度为零。关于边界条件问题将在后面几节中讨论。

2.1.3 不可压粘性流方程

1. 原始变量不可压 N-S 方程

当流体运动速度与声速相比足够小时，流体粘度 μ 和流体密度 ρ 近似为常数。这种流动称为不可压粘性流动。这时，方程(2.1.1)可大为简化。为便于应用，这里给出简化后方程的展开形式。

连续方程：

$$\mathbf{D}(\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1.5)$$

这里可以看出， $\mathbf{D}(\mathbf{V})$ 是速度的散度，散度为零就是不可流动的连续方程。

动量方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

这里 ∇^2 为拉普拉斯(Laplace)算子： $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ 。

在不可压流动中，能量方程可以独立求解，这将在后面讨论。方程组(2.1.5)~(2.1.6)称为不可压 N-S 方程，或称为原始变量不可压 N-S 方程。这是相对于不可压粘性流其他形式的基本方程而言的。方程中所有参数的定义与前面相同。将式(2.1.6)中的第一、二、三式分别对 x 、 y 、 z 求导并相加，且考虑到连续方程(2.1.5)，可得到压力 p 的 Poisson 方程

$$\nabla^2 p = - \left[\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (uv)}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 (uw)}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 (vw)}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (w^2)}{\partial z^2} \right] \quad (2.1.7)$$

2. 涡量-流函数方程

在不可压粘性流的数值模拟中，经常采用的基本方程还有涡量-流函数型的 N-S 方程。特别是在研究涡运动时，更为合适。对于二维流动，在这类方程中消去了压力 p ，只有涡量和流函数两个未知函数，求

解时更为方便。下面以二维流动为例给出直角坐标系中的涡量-流函数型的 N-S 方程

引入流函数 $\Psi(x, y, t)$, 定义为

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.1.8)$$

其中 u, v 分别为坐标 (x, y) 方向的速度分量。不难看出, 对于流函数 Ψ , 连续方程(2.1.5)自动满足。对二维流动, 动量方程(2.1.6)可简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

将式(2.1.9)中的第一式对 y 求导减去第二式对 x 求导消去压力 p , 且考虑到涡量的定义

$$\omega = \nabla \times V \quad (2.1.10)$$

式(2.1.10)中的 V 为速度矢量, ∇ 为梯度算子, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 。

对二维情况 $\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, 则可得涡量方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.1.11)$$

或写为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (2.1.12)$$

将式(2.1.8)代入式(2.1.10), 则得流函数 Ψ 的 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (2.1.13)$$

或写为

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (2.1.14)$$

方程组(2.1.11)和(2.1.13)称为涡量-流函数型的二维不可压 N-S 方程

关于不可压粘性流方程的数学性质及其边界条件等问题将在后面讨论。

2.2 模型方程及其数学性质

从前一节可以看出, 流体力学的基本方程是复杂的非线性方程组。这些方程的数学性质, 如解的存在性、唯一性、数学提法的适定性等都

还是正在研究中的问题,且很难找到一般情况下方程的解析解或精确解。所以,在计算流体力学中,经常首先针对模型方程,分析所采用计算方法的一些基本特征,如方法的精度、收敛性、稳定性以及数值解的误差特征等,且通过对模型方程的试算结果与其精确解进行比较,验证计算方法的可靠性,进一步改进计算方法。然后,再将其计算方法用于求解流体力学的基本方程。当然,由于所求解方程的复杂性,所得结果仍需通过与实验值或人们所公认的一些典型问题的计算结果进行比较,以证实计算结果的可靠性。一般来说,模型方程应该具有对应的流体力学基本方程的基本特征,且多采用单个线性方程。这是因为单个线性方程的数学理论较为完善。本节将给出在计算流体力学中常采用的几种模型方程,并简要讨论其数学性质。重点是边界条件的处理。且尽可能给出一些精确解,用于验证数值解的精度。

2.2.1 线性模型方程

为了认识流体力学基本方程的数学性质,现以单波方程近似模拟非定常 Euler 方程,以伯格(Burgers)方程近似模拟 N-S 方程,并讨论其数学性质。

1. 单波方程

单波方程是双曲型方程,它的解反映了非定常 Euler 方程解中波传播的基本特征。对于初值问题,如果在定解域中微分方程解的存在、唯一、且连续依赖于初始值,则称数学问题的提法是适定的。

考虑以下数学问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

定解域: $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ 。

式中 c 是常数, $\varphi(x)$ 为给定的初始值。

在 (x, y) 平面上引进斜率为 $\frac{dx}{dt} = c$ 的直线族: $x - ct = \text{const}$ 。从式 (2.2.1) 可以看出,沿此直线族有 $\frac{du}{dt} = 0$, 即 $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ 。这说明沿此直线族,扰动波的幅值不随时间而改变,传播速度为 c 。该直线族也就是特征线。根据初始条件可得微分方程 (2.2.1) 的解: $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ 。若初始条件 $\varphi(x)$ 是一个给定的三角形,则在 $t = t_0$ 时刻仍为此三角形,只是以速度 c 向前传播了一段距离 ct_0 (参见图 2-1)。当 $c > 0$ 时,沿 x 的正向传播,当 $c < 0$ 时,沿负向传播,而波形保持不

变。扰动波以有限速度传播是双曲型方程解的一重要特征。

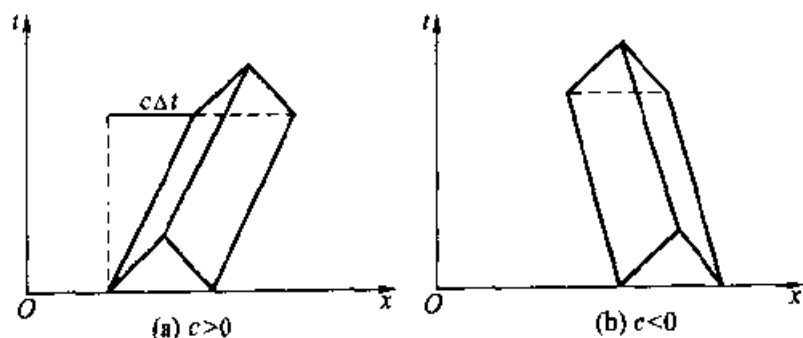


图 2-1 扰动传播示意图

对于更为一般的双曲型方程，波形、波幅均可能有变化，但是扰动波恒以有限速度传播，并能保持波阵面。

单波方程(2.2.1)的初边值问题同样可部分地模拟非定常 Euler 方程初边值问题的基本特征。假设要求在 $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ 区域内定解，因方程(2.2.1)的解沿特征线为常数，可以看出，当 $c > 0$ 时，如果在 $x = 0$ 处没有给边界值，则按纯初值问题不可能得到整个求解域内的解(参见图 2-2a)；而在 $x = L$ 处，不能再给边界条件，因其上的解已由 $t = 0$ 时的初值和 $x = 0$ 处的边值所确定。若在 $x = L$ 处给了边界条件，则称为过定；而在 $x = 0$ 处边界条件必须给定，否则称为欠定。过定和欠定的边界条件都称为数学提法不适定。该问题适定的数学提法是当 $c > 0$ 时，在 $x = 0$ 处给定边值，在 $t = 0$ 处给定初值；当 $c < 0$ 时，则在 $x = L$ 处给定边值，在 $t = 0$ 处给定初值。这样，在 $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ 区域内的解就唯一确定了。由此可见，正确边界条件的确定取决于求解域各边界上方程的特征方向。若选取一个曲线作为以上问题的边界^[4]。(参见图 2-2b)，

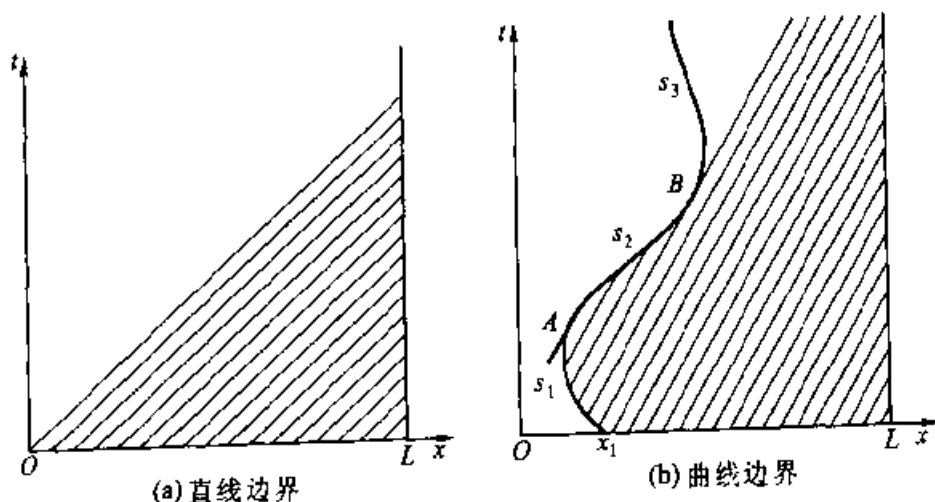


图 2-2 边界示意图

若 $c > 0$, 则正确的边界条件是必须而且只能在 $t = 0, x_1 \leq x \leq L_2$ 和 s_1, s_3 边界弧上给定初始值和边界函数值, 在弧 s_2 (s_2 为特征线 $x - ct = \text{const}$ 与曲线边界内外两个切点 B, A 之间的弧长) 上不能给任何条件, 否则将破坏数学提法的适定性。实际上, s_2 上的值是由 s_1 上的边界值确定的。因 s_2 上的任一点将落在与从 s_1 上出发的某一特征线上。

2. 热传导方程

热传导方程是抛物型方程的模型方程。它描述物理问题的扩散过程, 而双曲型方程是描述物理过程的对流过程。热传导方程的初值问题为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \mu = \text{const} > 0 \quad (2.2.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$$

该问题的精确解有以下形式:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\mu t}\right] \varphi(\xi) d\xi \quad (2.2.3)$$

设初始值 $\varphi(x)$ 也是给定的一个三角形, 则随时间 t 的推移, 解的演化如图 2-3b 所示。可以看出, 初始扰动波的角逐渐平滑化。这种物理问题的扩散过程与热传导中温度均匀化过程相类似。不管初始分布如何集中, 它总是在瞬间影响于无穷远。虽然这种影响是随距离按指数衰减的, 然而它是以无限速度传播的。这是抛物型方程解的特征。

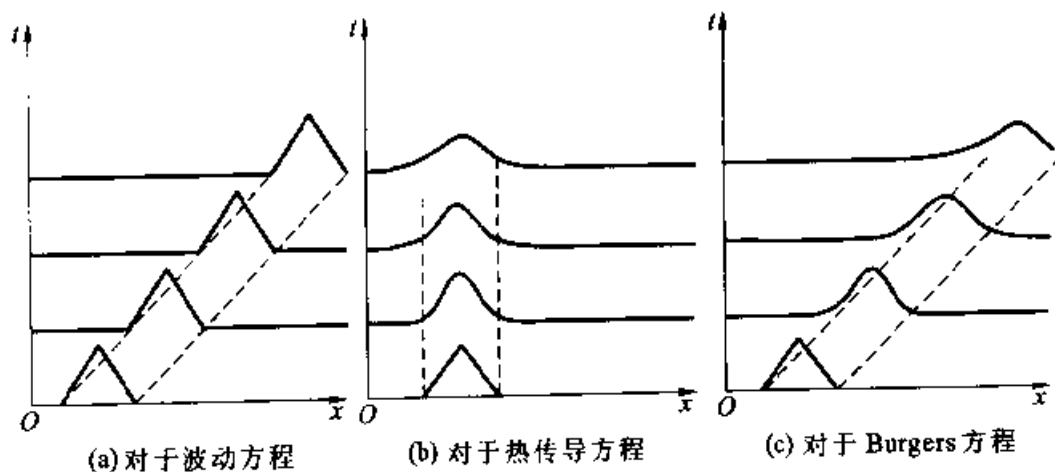


图 2-3 扰动波的传播

3. 线性 Burgers 方程

Burgers 方程是 N-S 方程的模型方程, 它是双曲-抛物型方程。它描述物理问题的对流和扩散的综合过程, 所以它兼有单波方程和热传导方程的特征。线性 Burgers 方程的初值问题有以下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu > 0 \quad (2.2.4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (-\infty < x < +\infty, t \geq 0)$$

不难求出该问题的精确解:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi-ct)^2}{4\mu t}\right] \varphi(\xi) d\xi \quad (2.2.5)$$

若初始值 $\varphi(x)$ 也是三角形, 在图 2-3c 中给出了 $t > 0$ 时刻解的演变过程. 这里表现了扩散与对流相耦合的物理过程, 扰动波以速度 c 传播, 但由于扩散作用, 它不能保持波阵面. 为了比较, 在图 2-3 中还给出了方程 (2.2.1) 和 (2.2.2) 的解在 $t > 0$ 时的演变过程, 且都假设给定的初始值 $\varphi(x)$ 是三角形. 这里可以看出三者的差别, 也简单地给出了双曲型、抛物型和双曲-抛物型方程所描述物理问题之间的差别.

4. Laplace 方程的边值问题^[4]

椭圆型偏微分方程最简单的模型方程是拉普拉斯 (Laplace) 方程. 二维的 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2.6)$$

更为一般的是变系数方程, 如

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f \quad (2.2.7)$$

这里 $\beta = \beta(x, y) > 0$, $f(x, y)$ 是给定的函数。

椭圆型方程的主要定解问题是边值问题, 要求问题的解 $u(x, y)$ 在某一封闭区域 D 内满足微分方程, 且在边界 Γ 上满足给定的边界条件. 通常有以下 3 种类型边界条, 且在边界的不同区段上可取不同的类型.

(1) Dirichlet 问题

在边界 Γ 上给定函数值:

$$u|_{\Gamma} = \bar{u} \quad (2.2.8)$$

(2) Neumann 问题

在边界 Γ 上给定函数的外法向导数值:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} = g(x) \quad (2.2.9)$$

(3) Robin 问题

这类问题又称为混合边值问题. 要求在边界 Γ 上给定函数值及其外法向导数值的线性组合. 如

$$\alpha_1(x) \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma} + \alpha_2(x) u |_{\Gamma} = h(x) \quad (2.2.10)$$

或

$$\beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \eta(x) u \Big|_{\Gamma} = g(x) \quad (2.2.11)$$

这里 α_1 , α_2 , h , g , η 均为边界上所给定的函数, β 是方程(2.2.7)中的系数在边界 Γ 上的值。显然, 第2类边界条件是第三类的特殊情况, 相当于方程(2.2.11)中 $\eta=0$ 的情况。此外, 在 $\beta>0$ 时, 第1类边界条件虽然不能被包含在第3类之中, 但可看为第3类边界条件 $\beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \eta(u - \bar{u}) \Big|_{\Gamma} = 0$ 当 η 趋近于无穷时的极限情况。

一般来说, 边界 Γ 可分解为互补的两部分 Γ_1 和 Γ_2 。在 Γ_1 和 Γ_2 上分别给定第1类和第3类边界条件, Γ_1 和 Γ_2 各自又可由不相连的区段组成, 如图2-4b所示, 边界上的粗线部分表示 Γ_1 , 其余部分表示 Γ_2 。边界条件可表示为

$$\begin{aligned} \Gamma_1: u &= \bar{u}, & \Gamma_2: \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \eta u \Big|_{\Gamma} &= g \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned}$$

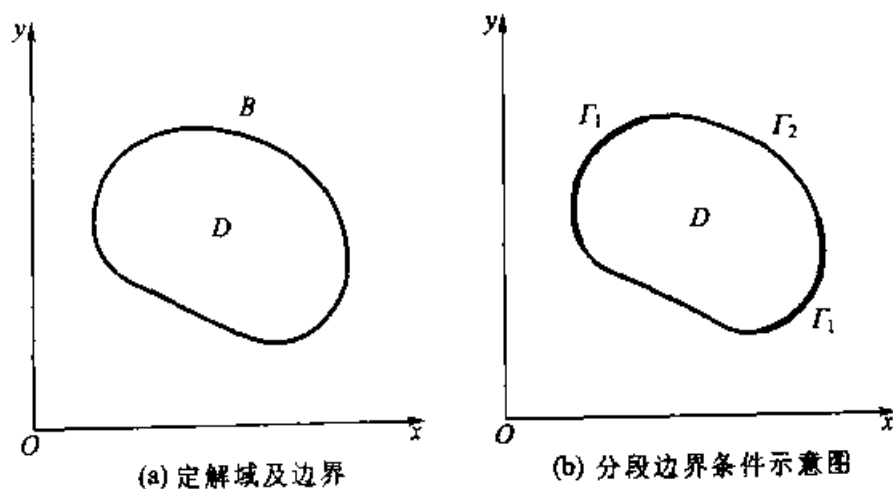


图2-4 椭圆型方程的定解域

2.2.2 非线性 Burgers 方程

前一节所讨论的都是线性模型方程。虽然这些方程反映了流体力学基本方程中的一些重要特征, 但因流体力学方程都是复杂的非线性方程组, 而在很多实际流动中, 非线性物理特征是极为重要的, 如具有激波、分离的流场及湍流等。对于这类复杂流动问题的模拟精度, 对激波和小尺度物理量的分辨能力都是我们关心的问题。为了考查非线性项的影响, 这里将针对模型方程给出其准确解。

考虑非线性粘性 Burgers 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.2.12)$$

这是 N-S 方程的一个较好的模型方程，空间一阶导数项可用于模拟 N-S 方程中的非线性对流项，方程右端二阶导数项可用于模拟 N-S 方程中的粘性项，它保留了 N-S 方程的混合型特征。对于特殊选定的初始值和边界条件，及特别选定的函数 f ，可得到微分方程的准确解。

设 $f = u^2/2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{定解域为:} \\ \text{边界值为:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = u_0 \\ u(L, t) = 0 \end{array} \quad (2.2.13)$$

这里 u_0 为已知常数，则可得定常问题的准确解：

$$u(x) = u_0 \frac{1 - \exp\left[-\frac{\bar{u} Re_L}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]}{1 + \exp\left[-\frac{\bar{u} Re_L}{L} \left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]} \quad (2.2.14)$$

其中

$$Re_L = \frac{u_0 L}{\mu}, \quad \frac{\bar{u} - 1}{\bar{u} + 1} = \exp(-\bar{u} Re_L)$$

准确解有助于验证数值解的合理性及方法的精度。

2.3 双曲型方程组的初边值问题

在计算流体力学中，边界条件的选取是求解流体力学问题的必要条件。为此，首先应清楚认识微分方程合适的边界条件。前面针对单个线性模型方程进行了简单介绍。本节将针对一维方程组的模型方程，以特征理论为依据介绍双曲型方程的边界条件处理方法。

2.3.1 特征矢量和特征值的定义

考虑一维方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0 \quad (2.3.1)$$

式中 $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, 或写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.3.2)$$

式中 A 为 $f(U)$ 对 U 的雅可比 (Jacobian) 矩阵，显然， A 为 $m \times m$ 阶矩阵， $A = D(f)/D(U)$ ，对于矩阵 A ，如果存在有非零矢量 X ，使得以

下等式成立:

$$AX = \lambda X \quad (2.3.3)$$

则 λ 称为矩阵 A 的特征值, 矢量 X 为对应于特征值 λ 的特征矢量。一般说来, 特征矢量是非唯一的。由式(2.3.3)可得

$$[A - \lambda I] X = 0 \quad (2.3.4)$$

其中 I 为单位矩阵。为了使式(2.3.4)中的 X 为非零解, 则要求行列式

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (2.3.5)$$

这就是确定矩阵 A 之特征值 λ 的方程。若存在有非零矢量 Y , 使得 $YA = \lambda Y$, 则 Y 为矩阵 A 对应于特征值 λ 的左特征矢量。如果在定解区域内的任一点 (x_0, t_0) 上, 矩阵 A 存在有 m 个实特征值和对应的 m 个线性无关的特征矢量, 则方程组(2.3.1)或(2.3.2)在定解域内称为双曲型方程组, 此时存在有矩阵 S , 使得 $A = S^{-1} \Lambda S$, 其中 Λ 为矩阵 A 的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 组成的对角矩阵, 即

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

S 为由左特征矢量组成的矩阵。

如果在定解域内任意一点上, 矩阵 A 的所有特征值是互不相等的实数, 则方程组称为严格双曲型方程组。如果在定解域内任一点上, 矩阵 A 的所有特征值是复数, 则方程组在定解域内是椭圆型方程组。如果矩阵 A 的特征值有实数又有复数, 则方程组为混合型方程组。

2.3.2 边界条件的讨论^[4]

考虑在 $x \geq 0, t \geq 0$ 区域内求解方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.3.7)$$

式中 U 为矢量, $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$, A 为 $m \times m$ 阶矩阵。设方程组为严格双曲型方程组, 即矩阵 A 的特征值为互异的实数, 则存在有矩阵 S , 使得 $A = S^{-1} \Lambda S$, 其中 Λ 是以矩阵 A 的特征值为元素的对角矩阵 [如式(2.3.6)]。为了简单, 设 A 为常数矩阵, 即方程组(2.3.7)为线性方程组。以矩阵 S 左乘式(2.3.7), 则方程组可化为特征型:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2.3.8)$$

式中 $V = SU$ 这样, 方程组(2.3.7)就被分裂为 m 个单个方程, 且可独立积分。因此, 方程组(2.3.8)中每一个方程的初边值问题的提法与单波方程(2.2.1)相同。现将矩阵 A 写为以下形式:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & \\ & A^2 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{r+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{r+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

式中 A^1 为对角元素是 $\lambda_i > 0$ 的对角矩阵; A^2 为对角元素是 $\lambda_i < 0$ 的对角矩阵。对于方程组(2.3.7), 若考虑 $x=0$ 为边界, 初始值和边值条件可写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} U(x, 0) &= \varphi(x) \\ U^{(1)}(0, t) &= RU^{(2)} + g(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.9)$$

则方程组的解在 $x \geq 0, t \geq 0$ 的区域内是唯一确定的。式(2.3.9)中 R 是 $r \times (m-r)$ 阶矩阵, $g(t)$ 为 r 维矢量。事实上, 将方程组(2.3.7)化为特征型方程(2.3.8)时, 因 $V = SU$, 故 V 可表示为

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

其中 V_1 和 V_2 是方程组(2.3.8)对应于 $\lambda_i > 0$ 和 $\lambda_j < 0$ ($i=1, 2, \dots, r, j=r+1, \dots, m$) 的解。从一阶波动方程的讨论中可知, 对于方程组在 $x=0$ 处, 合适的边界条件应有以下形式:

$$V_1(0, t) = \tilde{g}(t)$$

对于 $\lambda_i > 0$, 在 $x=0$ 处应提边界条件, 上式可写为

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

将式(2.3.10)代入式(2.3.11), 则可得式(2.3.9)中的边界条件形式。当考虑波的传播时, 式(2.3.9)中第2式右端的第1项表示边界上波的反射规律(参见图2-5a), 而式(2.3.9)中的 $g(t)$ 表示边界处的外界影响。

从以上可以看出, 适定边界条件的选取, 取决于求解域边界上方程的特征方向及个数。

2.3.3 双曲型方程的初边值问题举例

现根据前面对于双曲型方程组所得到的一般结论, 讨论二维非定常

Euler 方程初边值的提法，以保证问题提法的适定性。在计算流体力学中，有时边界处理从非守恒方程出发更为方便。考虑直角坐标系中，二维非定常 Euler 方程的非守恒形式：

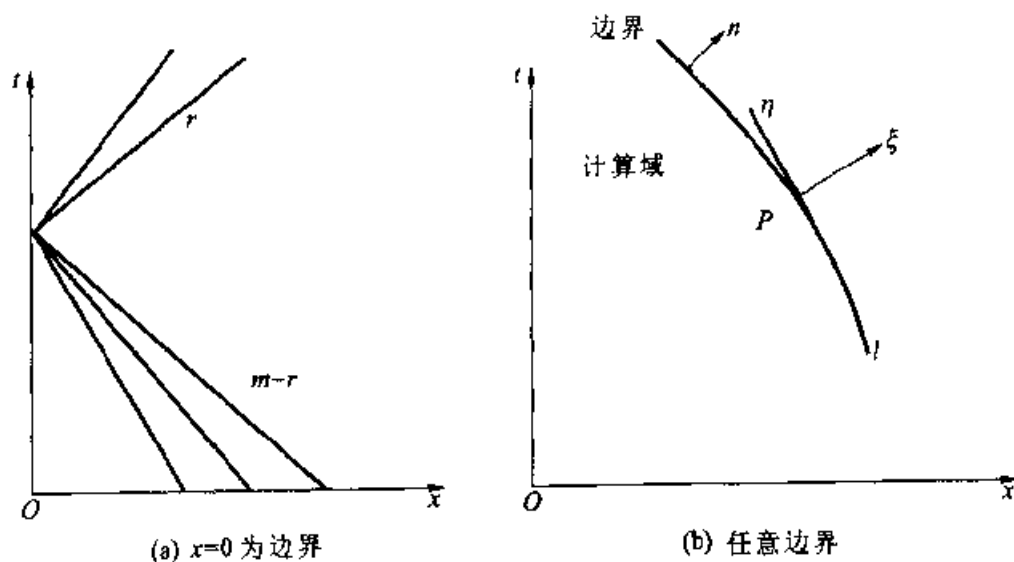


图 2-5 双曲型方程组边界条件示意图

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0 \quad (2.3.12)$$

式中：

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ c^2/\rho & u & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ c^2/\rho & 0 & v & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial S} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

这里 ρ 为密度， u, v ，为速度在 (x, y) 坐标方向上的分量， p 为压力， S 为熵， c 为声速。

在二维非定常流动中，特征线有两个波特征和两个流特征。设所考虑的边界为曲线 l (如图 2-5b 所示)，则只需在边界曲线 l 的任一点 P 上，引进法向和切向所组成的局部坐标系 (t, ξ, η) ，在该坐标系内考虑特征线的走向。在边界上应提出边界条件的个数应等于穿越此边界进入求解域的个数。设在 P 点处，边界曲线 l 的外法向为 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ ，

则在 P 点上的流体法向速度为 $v_n = un_1 + vn_2$ ，而在局部坐标系内，对应于两个波特特征的特征值为： $\lambda_1 = v_n - c$ ， $\lambda_4 = v_n + c$ ，对应于两个流特征的特征值为 $\lambda_{2,3} = v_n$ ，故对于方程组(2.3.12)，适定的边界条件有以下几种：

1. 在物面边界上， $v_n = 0$ ，故 $\lambda_1 < 0$ ， $\lambda_{2,3} = 0$ ， $\lambda_4 > 0$ ，其边界上的特征走向如图 2-6a 所示。由此可知，在这类边界上应提一个边界条件。因穿越此边界进入求解域(物面正法向区域)的特征线只有一个。

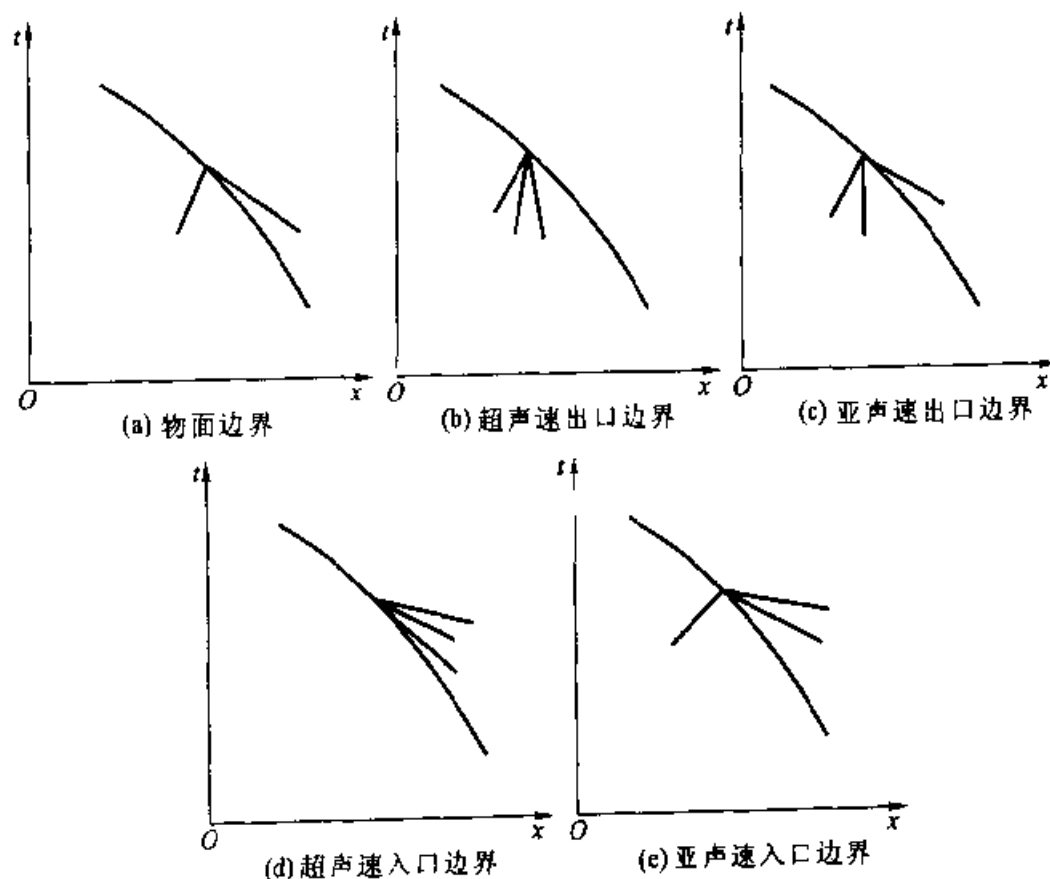


图 2-6 边界上特征走向示意图

2. 若 $v_n > 0$ ， $\frac{c^2}{v_n^2} < 1$ ，则边界为超声速往外流的出口。在此情况下 $\lambda_1 > 0$ ， $\lambda_{2,3} > 0$ ， $\lambda_4 > 0$ ，其边界上的特征走向如图 2-6b 所示。在此类边界上不应提边界条件。因这里的所有的特征线都是从计算域内穿越该边界走出计算域的。

3. 若 $v_n > 0$ ， $\frac{c^2}{v_n^2} > 1$ ，则边界为亚声速出口。在此情况下有 $\lambda_1 < 0$ ， $\lambda_{2,3} > 0$ ， $\lambda_4 > 0$ ，边界上的特征走向如图 2-6c 所示。在此类边界上应提一个边界条件。因对应于特征值 λ_1 的特征线是穿越该边界进入计算域的，而其他特征线则是穿越该边界走出计算域的。

4. 若 $v_n < 0$, $\frac{c^2}{v_n^2} < 1$, 则边界为超声速入口。在此情况下 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_{2,3} < 0$, $\lambda_4 < 0$, 其边界上的特征走向如图 2-6d 所示。在此类边界上应提四个边界条件。因四个特征线都是穿越边界进入计算域的。

5. 若 $v_n < 0$, $\frac{c^2}{v_n^2} > 1$, 则边界为亚声速入口。在此情况下有 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_{2,3} < 0$, $\lambda_4 > 0$, 边界上的特征走向如图 2-6e 所示。在此类边界上应提三个边界条件。

对于三维定常 Euler 方程, 其适定边界条件的提法与上述方法类似, 只是以空间推进坐标代替时间坐标 t 。

在计算流体力学中, 有时只有以上的边界条件还不够, 还需要附加边界条件。

2.3.4 双曲型方程组的特征方程

在计算流体力学中, 所附加的边界条件理论上最清楚的是增加相应的特征方程。前面针对方程组 (2.3.7), 为讨论双曲型方程组的边值问题, 在假设系数矩阵 A 为常系数矩阵的条件下, 得到了对应的特征方程。下面为得到黎曼 (Riemann) 不变量, 将在更为一般的条件下介绍对应于式 (2.3.7) 的特征方程。

如前面所述, 该方程组为双曲型, 故矩阵 A 的所有特征值都是实数, 且存在有矩阵 S , 使得 $A = S^{-1} \Lambda S$, 其中 Λ 为以 A 的特征值 λ_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 为对角元素的对角矩阵。

在 (x, t) 平面上, 以特征值 λ_i 为斜率的直线方向称为特征方向, 且以 x 轴的正向为正。在 (x, t) 平面上, 若一条曲线每一点上的切向与特征方向一致, 则称该曲线为特征线。

设 ω^* 为矩阵 A 的左特征行矢量, 则关系式

$$\omega^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.3.13)$$

称为方程组 (2.3.7) 的特征关系式, 或称相容关系式。特征关系式是各物理量在特征线 (对于二维非定常问题是特征面) 上的一个关系式, 它只包含各物理量沿特征线的方向导数, 且各物理量有相同的导数方向。因此特征关系式表示物理量在特征线上必须满足的“约束”条件, 所以又称为相容关系, 它不随坐标变化而改变。

根据特征行矢量的定义有: $\omega^* A = \lambda \omega^*$, 故对于双曲型方程 (2.3.7), 当 $m=2$ 时特征关系式可写为以下形式:

$$\omega_1^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

$$\omega_2^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

引入特征坐标并分别取 $dx/dt = \lambda_1$ 和 $dx/dt = \lambda_2$, 这里 λ_1 和 λ_2 对应为特征线族 α 和 β 的斜率。在特征坐标系内, 以上特征关系可写为

$$\omega_1^* \frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0, \quad \omega_2^* \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0$$

或写为

$$\omega_{11}^* \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \omega_{12}^* \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} = 0$$

$$\omega_{21}^* \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \omega_{22}^* \frac{\partial u_2}{\partial \beta} = 0$$

如果存在有积分因子, 使得

$$\mu_1 \omega_{11}^* du_1 + \mu_1 \omega_{12}^* du_2 = dR$$

$$\mu_2 \omega_{21}^* du_1 + \mu_2 \omega_{22}^* du_2 = dS$$

则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= 0, \quad R = R(\beta) \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} &= 0, \quad S = S(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2.3.14)$$

可以看出, R 、 S 是沿特征线的不变量, 称为黎曼(Riemann)不变量。

一般来说, 积分因子不容易找出, 特别是对于 $m > 2$ 的情况。下面以一维非定常等熵流动为例讨论 Riemann 不变量。

考虑一维非定常等熵流动, 基本方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.3.15)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix}$$

其中 c 为声速, ρ 为密度, u 为速度。矩阵 B 的特征值: $\lambda_{1,2} = u \pm c$ 。对应的特征矢量为: $\omega_1^* = (c, \rho)$; $\omega_2^* = (-c, \rho)$ 。特征关系式有以下形式:

$$\omega^* \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

或写为展开式

$$\left. \begin{aligned} c \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= 0 \\ c \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] - \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.16)$$

式(2.3.16)是一维非定常等熵流的特征关系式。可以看出, 这里所有的流动参数都沿同一方向微分。式(2.3.16)是各流动参数在特征线上必须满足的“约束”条件。

引入特征坐标, 一是斜率为 $dx/dt = u - c$ 的曲线族: $\alpha(x, t) = \text{const}$; 另一是斜率为 $u + c$ 的曲线族: $\beta(x, t) = \text{const}$ 。则有:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = (u + c) \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = (u - c) \frac{\partial t}{\partial \beta} \quad (2.3.17)$$

在特征坐标系内, 特征关系式(2.3.16)有以下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} = 0 \quad (2.3.18)$$

以上两式是一维非定常等熵流特征方法的方程组。式(2.3.18)可写为

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$$

或写为

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{c}{\rho} d\rho \\ S &= -\frac{u}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{c}{\rho} d\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.3.19)$$

对于理想气体有 $c^2 = \gamma(p/\rho)$, 再考虑到等熵条件: $p = A\rho^\gamma$, 则可得

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1} \\ S &= -\frac{u}{2} + \frac{c}{\gamma - 1} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.20)$$

上式中的 γ 为质量热容比。 R 和 S 是 **Riemann 不变量**。在计算流体力学中, 经常采用 Riemann 不变量处理双曲型方程组的边界条件。

2.3.5 双曲型方程的间断解

双曲型方程的一个重要特点是无论初始值是否光滑, 其解都可能产生间断。间断面可分为两种, 一为弱间断, 即参数连续, 而参数的导数不连续, 如稀疏波波头; 另一为强间断, 即参数产生间断, 如激波和接触间断。下面只讨论强间断。设 \mathbf{n} 为间断面的法向单位矢量, Z 为间断面运动的法向速度, 则流体通过间断面的质量、动量和能量的守恒关系式可写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 (V_1 \cdot n - Z) &= \rho_2 (V_2 \cdot n - Z) \\ \rho_1 V_1 (V_1 \cdot n - Z) + p_1 n &= \rho_2 V_2 (V_2 \cdot n - Z) + p_2 n \\ \rho_1 E_1 (V_1 \cdot n - Z) + p_1 V_1 \cdot n &= \rho_2 E_2 (V_2 \cdot n - Z) + p_2 V_2 \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (2.3.21)$$

式中 ρ 为密度, p 为压力, V 为速度矢量, E 为单位体积流体的总能量, 对于理想气体有

$$E = -\frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{V^2}{2}$$

下标 1, 2 对应表示间断面前后的参数, γ 为质量热容比。若以 m 表示过间断面的质量流, 则有

$$m = \rho_1 (V_1 \cdot n - Z) = \rho_2 (V_2 \cdot n - z) \quad (2.3.22)$$

由式(2.3.21)中的第 2 式可得

$$m (V_1 - V_2) = (p_2 - p_1) n \quad (2.3.23)$$

对式(2.3.23)两端点乘 n , 则得

$$m (V_1 \cdot n - V_2 \cdot n) = p_2 - p_1 \quad (2.3.24)$$

对式(2.3.23)两端叉乘 n , 则得

$$m (V_1 \times n - V_2 \times n) = 0 \quad (2.3.25)$$

因接触间断面定义为流体不穿过的间断面, 故 $m = 0$, 由于 ρ_1 和 ρ_2 不等于零, 故从式(2.3.22)可得 $V_1 \cdot n = V_2 \cdot n = z$; 从式(2.3.24)可得 $p_1 = p_2$ 。这说明, 对于接触间断, 流体的法向速度和压力过间断面都是连续的, 只有密度和切向速度不连续。

对于激波, $m \neq 0$, 从式(2.3.25)可知: $V_1 \times n = V_2 \times n$, 即切向速度连续, 而密度、法向速度、压力和能量通过激波都产生间断。

2.3.6 双曲型方程的唯一解及熵条件^[6]

考虑如下守恒律方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0 \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \\ -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.26)$$

1. 弱解的定义

若 $u(x, t)$ 除在有限条光滑曲线上有间断外连续可微, 在定解域内满足方程(2.3.26)和初始条件, 且在间断线 $x = \xi(t)$ 上满足间断条件

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{f^+ - f^-}{u^+ - u^-} = S \quad (2.3.27)$$

其中

$$\begin{aligned} u^+ &= u[\xi(t)+0, t], \quad u^- = u[\xi(t)-0, t] \\ f^+ &= f(u^+), \quad f^- = f(u^-) \end{aligned}$$

则称 $u(x, t)$ 为方程(2.3.26)的弱解。弱解是非唯一解。只有在间断面上满足熵条件的弱解才是唯一的物理解。

2. 熵条件 I

定理：若 $u(x, t)$ 为式(2.3.26)的弱解，且在间断面上满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{f(u^-) - f(w)}{u^- - w} \geq \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \geq \frac{f(u^+) - f(w)}{u^+ - w} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.28)$$

$$\forall w \in I$$

这里 $I = [\min[u^-, u^+], \max[u^-, u^+]]$

则可证明， $u(x, t)$ 是唯一的物理解。式(2.3.28)被称为弱解 $u(x, t)$ 的熵条件，或称为熵不等式。

3. 熵条件 II

从式(2.3.27)可知， S 为间断面 $\xi(t)$ 的传播速度。对式(2.3.28)的左端取极限 $w \rightarrow u^-$ ，对右端取极限 $w \rightarrow u^+$ ，则熵条件式(2.3.28)可表示为以下形式：

$$a(u^-) \geq S \geq a(u^+) \quad (2.3.29)$$

这里 $a(u) = \partial f / \partial u$ 。式(2.3.29)为熵条件的另一种表达形式，它表征了间断面两侧的特征方向向间断面聚集的特性，故也称其为几何熵条件。

4. 算例

考虑 $f = \frac{u^2}{2}$

(1) 取初始条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} +1, & (x < 0) \\ -1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

则式(2.3.26)的唯一物理解为

$$u(x, t) = \begin{cases} +1, & (x < 0) \\ -1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

不难看出，该物理解不但满足方程和初始条件，且在间断线上满足间断条件和熵条件。

(2) 取初始条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & (x < 0) \\ +1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

则式(2.3.26)的唯一物理解为

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & (-\infty \leq x \leq -t) \\ \frac{x}{t}, & (-t < x \leq t) \\ +1, & (t < x < +\infty) \end{cases}$$

在这种情况下, 还存在无穷多个弱解, 如

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & (x < 0) \\ +1, & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} -1, & (-\infty < x \leq -t) \\ -2, & (-t < x \leq 0) \\ +2, & (0 < x \leq t) \\ +1, & (t < x < +\infty) \end{cases}$$

这些弱解在定解域内满足方程和初始条件, 且在间断线上满足间断条件, 而在间断线上不满足熵条件。

以上的熵条件对应于物理问题是过激波的熵增条件。应当指出, 对于单个一维守恒型方程, 可以证明满足熵条件的弱解是唯一的物理解, 而对于一维守恒型方程组, 一般情况下, 解的唯一性还没有严格证明; 对于多维方程组, 熵条件只是确定唯一物理理解的必要条件。关于熵条件, 这里不再多述。

2.4 Riemann 间断解^[5,6]

2.4.1 问题的提出

考虑一维非定常理想气体流动, 其基本方程的守恒型有以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u + \rho u)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.1)$$

其中的参数的定义除 $\frac{u^2}{2}$ 外其他与前面相同。取 $t=0$ 时刻的初始值在 $x < 0$ 和 $x > 0$ 处分别为常数分布: u_1, ρ_1, p_1 和 u_2, ρ_2, p_2 , 求方程组(2.4.1)满足以上初值且在间断线上满足间断条件的解。间断条件有以下形式:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 (u_1 - Z) &= \rho_2 (u_2 - Z) \\ \rho_1 u_1 (u_1 - Z) + p_1 &= \rho_2 u_2 (u_2 - Z) + p_2 \\ \rho_1 E_1 (u_1 - Z) + u_1 p_1 &= \rho_2 E_2 (u_2 - Z) + p_2 u_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.2)$$

这里 Z 为间断线 $x = x(t)$ 的速度。

2.4.2 解的分类

一般情况下, 给定的初始间断并不满足关系式(2.4.2), 因而它是不稳定的。在 $t > 0$ 以后, 立刻分解为若干个满足此关系式的间断解, 并以各自的速度分别运动。在上面所提出的非定常理想气体的流动中, 初始间断所分解的解, 在考虑到熵增的条件下, 是唯一确定的。这些准确解, 即黎曼问题间断解, 依照所给定的初始条件不同, 可分为 5 类。现在图 2-7 中将这 5 类不同的解用图形形式表示出来, 以后将给出这 5 类的准确解。

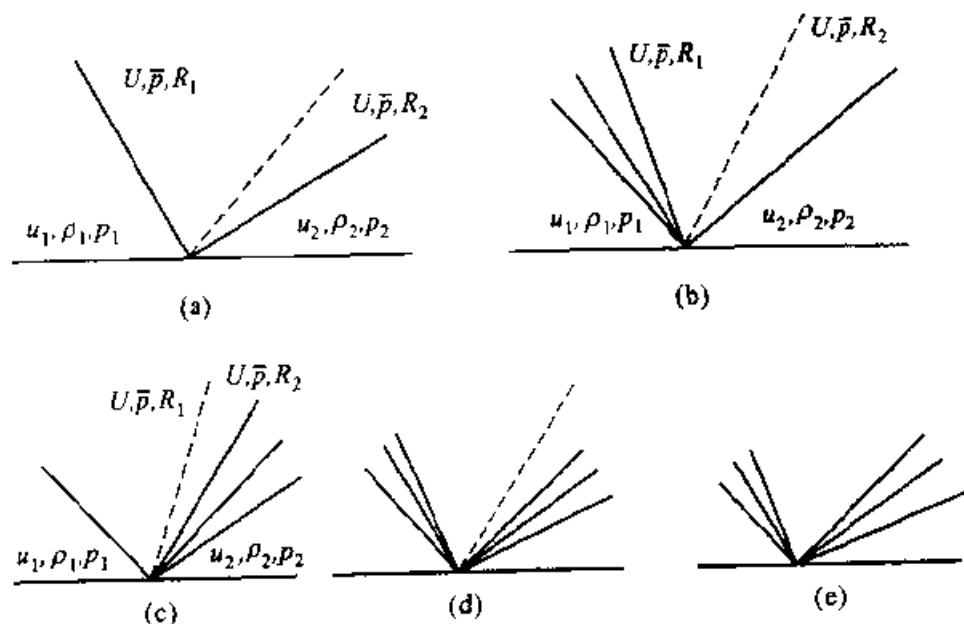


图 2-7 Riemann 间断解

图中虚线表示接触间断, 实线表示激波, 一族中心直线表示中心稀疏波。应指出, 在图 2-7e 中, 表示左右两个中心稀疏波之间为真空区。在这些解中, 对于任何固定的 $t > 0$ 时刻, 左、右波尚未到达的波前区域内, 流体状态仍分别保持常数分布: u_1, ρ_1, p_1 和 u_2, ρ_2, p_2 ; 接触间断两边的速度和压力值相同, 以 U, \bar{p} 表示, 密度值不同, 分别以 R_1 和 R_2 表示; 中心稀疏波是弱间断, 它反映了气流的等熵膨胀过程, 在此区域内, 物理量由波前状态 U_i, ρ_i, p_i 连续过渡到波后状态 U, R_i, \bar{p} , 且有 $\bar{p} \leq p_i$ ($i=1,2$), 只有物理量的导数在波头和波尾处是

间断的；对于激波，物理量由波前状态 U_i, ρ_i, p_i 跳到波后状态 U, R, \bar{p} 时，要求熵是增加的，且 $\bar{p} \geq p_i$ ($i=1,2$)。

2.4.3 求解方法

对于理想气体，由状态方程，单位气体的内能有以下形式：

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

其中 γ 为质量热容比。等熵关系式为：

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}$$

声速

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

根据图 2-7 间断解中的符号，对于左边的激波可将间断条件(2.4.2)写为

$$\left. \begin{aligned} (R - \rho_1)Z - (RU - \rho_1 u_1) &= 0 \\ (RU - \rho_1 u_1)Z - [(RU^2 + \bar{p}) - (\rho_1 u_1^2 + p_1)] &= 0 \\ (R\bar{E} - \rho_1 E_1)Z - [(R\bar{E}U + \bar{p}U) - (\rho_1 E_1 u_1 + p_1 u_1)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

其中

$$E_1 = \frac{p_1}{(\gamma - 1)\rho_1} + \frac{u_1^2}{2}, \quad \bar{E} = \frac{\bar{p}}{(\gamma - 1)R} + \frac{U^2}{2}$$

由式(2.4.3)，对于左激波可得

$$U - u_1 + \frac{\bar{p} - p_1}{A_1} = 0 \quad (2.4.4)$$

同样，对于右激波可得

$$U - u_2 - \frac{\bar{p} - p_2}{A_2} = 0 \quad (2.4.5)$$

其中

$$A_i = \rho_i c_i \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_i} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}, \quad (i=1, 2) \quad (2.4.6)$$

在中心稀疏波内，由于 Riemann 不变量沿特征线保持常数，故有

$$\frac{u_i}{2} + \frac{c_i}{\gamma - 1} = \frac{U}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \left(\gamma \frac{\bar{p}}{R} \right)^{1/2}$$

再利用

$$c_i^2 = \gamma \frac{p_i}{\rho_i}, \quad \frac{p_i}{\rho_i^\gamma} = \frac{\bar{p}}{R^\gamma}, \quad (i=1,2)$$

则对于稀疏波的波前、波后状态可推出如下关系式:

对于左稀疏波

$$U - u_1 - \frac{2}{\gamma-1} c_1 \left[1 - \left(\frac{\bar{p}}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] = 0 \quad (2.4.7)$$

对于右稀疏波

$$U - u_2 + \frac{2}{\gamma-1} c_2 \left[1 - \left(\frac{\bar{p}}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] = 0 \quad (2.4.8)$$

现将式(2.4.4), (2.4.5), (2.4.7)和式(2.4.8)统一写为以下形式:

对于左波

$$U - u_1 = -f(\bar{p}, p_1, \rho_1) \quad (2.4.9)$$

对于右波

$$U - u_2 = f(\bar{p}, p_2, \rho_2) \quad (2.4.10)$$

其中

$$f(\bar{p}, p_i, \rho_i) = \begin{cases} -\frac{\bar{p} - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{\bar{p}}{p_i} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}}, & (\bar{p} > p_i) \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\bar{p}}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & (\bar{p} < p_i) \end{cases}$$

由方程(2.4.9)和(2.4.10)可求出波后速度 U 和压力 \bar{p} 。消去 U 可得到只含 1 个未知量的方程为

$$u_1 - u_2 = f(\bar{p}, p_1, \rho_1) + f(\bar{p}, p_2, \rho_2) \equiv F(\bar{p}) \quad (2.4.11)$$

为了对给定的初始条件判断其间断分解的类型, 需要讨论函数 $F(\bar{p})$ 的性质。不难证明, 函数 $f(\bar{p}, p_i, \rho_i)$ 在 $\bar{p} = p_i$ 处是连续的, 并有连续的一阶导数。因有

$$\lim_{\bar{p} \rightarrow p_i^-} f'(\bar{p}, p_i, \rho_i) = \lim_{\bar{p} \rightarrow p_i^+} f'(\bar{p}, p_i, \rho_i) = \frac{1}{\rho_i c_i}$$

且当 $\bar{p} > 0$ 时, $f(\bar{p}, p_i, \rho_i)$ 是单调上升的凸函数, 即有

$$f'(\bar{p}, p_i, \rho_i) > 0, \quad f''(\bar{p}, p_i, \rho_i) > 0$$

因此, 在 $\bar{p} > 0$ 时, $F(\bar{p})$ 也是单调上升、导数连续的凸函数。根据这一性质, 可以给出间断分解类型的判别式。

为了讨论确定起见, 先设 $p_2 \geq p_1$, 根据给定的初始条件, 可作以下判断:

$$1. u_1 - u_2 \geq F(p_2)$$

$$F(p_2) = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1 \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{1/2}}$$

因 $u_1 - u_2 = F(\bar{p})$, 则由给定的初值可知, $F(\bar{p}) \geq F(p_2)$, 又因 $F(\bar{p})$ 是单调上升且导数连续的凸函数, 故可有

$$\bar{p} \geq p_2 \geq p_1$$

即左波和右波都是激波, 左激波向左边低压区传播 ($\bar{p} \geq p_1$), 右激波向右边低压区传播 ($\bar{p} \geq p_2$)。在左右激波之间的区域内, 压力连续 ($p = \bar{p}$), 气体质点都将向同一方向运动, 且速度连续, 但一般说来密度是间断的, 故在该区域内形成一接触间断 (或称切向间断), 这对应于图 2-7a。

$$2. F(p_2) > u_1 - u_2 \geq F(p_1)$$

$$F(p_1) = -\frac{2c_2}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right)$$

则可推出 $p_2 > \bar{p} \geq p_1$, 即左波为激波, 右波为稀疏波。激波与稀疏波之间区域内, 由于激波后的压力升高, 而稀疏波降低压力, 可使压力连续, 速度连续而密度可产生间断, 故在此区域内将形成一接触间断, 这对应于图 2-7c。

$$3. F(p_1) > u_1 - u_2 \geq F(0)$$

$$F(0) = -\frac{2c_1}{\gamma - 1} - \frac{2c_2}{\gamma - 1}$$

则可得 $p_2 \geq p_1 > \bar{p} \geq 0$, 即左波和右波都是稀疏波, 这对应于图 2-7d。

$$4. F(0) > u_1 - u_2$$

左波和右波都是稀疏波, 且在两个稀疏波之间出现真空区。在这种情况下, 左右两稀疏波之后没有统一的波后速度。式 (2.4.7) 和 (2.4.8) 中的 U 就不再表示同一个量, 且用来求 \bar{p} 的式 (2.4.11) 也不再成立。在真空区内, $R_1 = 0$, $\bar{p} = 0$, 相应的声速亦为零。这对应于图 2-7e。

若设所给的初始值满足 $p_1 \geq p_2$, 则解的类型与上面相似, 只是当 $F(p_1) > u_1 - u_2 \geq F(p_2)$ 时, 可推出 $p_1 > \bar{p} \geq p_2$ 。即右波为激波, 左波为稀疏波, 这对应于图 2-7b。

下面讨论流动参数的确定。由方程 (2.4.11) 可求出 \bar{p} , 因为此方程为超越方程, 故须迭代求解。求得 \bar{p} 值后, 可由式 (2.4.9) 和 (2.4.10) 确定 U 值。

$$U = \frac{1}{2} [u_1 + u_2 + f(\bar{p}, p_2, \rho_2) - f(\bar{p}, p_1, \rho_1)] \quad (2.4.12)$$

一维非定常理想气体在 (t, x) 平面上的间断解 $u(t, x)$, $\rho(t, x)$, $p(t, x)$ 可根据解的类型及 (t, x) 的位置分别由以下公式给出。

1. 左波 $x/t < U$ 的区域

当左波为激波时, 激波速度 Z 和波后密度 R_1 可由关系式(2.4.3)给出

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= u_1 - \frac{A_1}{\rho_1} \\ R_1 &= \frac{\rho_1 A_1}{A_1 - \rho_1 (u_1 - U)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.13)$$

右激波的波前区: $Z_1 < x/t < U$, u , ρ , p 取波后值 U , R_1 , \bar{p} 。

当左波为稀疏波时, 波头的波速 Z_1 和波尾波速 Z_1^* 可由特征线的表达式给出

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Z_1 = u_1 - c_1 \\ Z_1^* &= U - c_1^* \end{aligned} \right\} \quad (2.4.14)$$

波后的密度 R_1 可由声速 $c_1^{*2} = \gamma \bar{p} / R_1$ 推出

$$R_1 = \frac{\gamma \bar{p}}{c_1^{*2}}$$

其中 c_1^* 可由黎曼不变量表达式确定

$$c_1^* = c_1 + \frac{\gamma-1}{2}(u_1 - U)$$

在左稀疏波的波前和波后区: $x/t < Z_1$, $Z_1^* < x/t < U$, u , ρ , p 分别取波前值和波后值, 在稀疏波域内: $Z_1 < x/t < Z_1^*$, 根据黎曼不变量关系式有

$$u + \frac{2}{\gamma-1}c = u_1 + \frac{2}{\gamma-1}c_1$$

再由特征线 $u - c = x/t$ 可确定声速 c 为

$$c(t, x) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(u_1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma-1} c_1$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) &= \frac{x}{t} + c \\ p(t, x) &= p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho(t, x) &= \frac{\gamma p}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.15)$$

2. 右波 $U < x/t$ 的区域

当右波为激波时, 激波速度 Z_2 和波后密度 R_2 为

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= u_2 + \frac{A_2}{\rho_2} \\ R_2 &= \frac{\rho_2 A_2}{A_2 + \rho_2 (u_2 - U)} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.16)$$

上式和式(2.4.13)中的 A_i ($i=1,2$)与式(2.4.6)中的 A_i 表达式相同。

在右激波的波前区: $Z_2 < x/t$, u, ρ, p 取波前值 u_2, ρ_2, p_2 ; 在右激波波后区: $U < x/t < Z_2$, u, ρ, p 取波后值 U, R_2, \bar{p} 。

当右波为稀疏波时, 稀疏波波头的波速 Z_2 和波尾波速 Z_2^* 和波后的密度 R_2 按以上类似的方法可求得

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= u_2 + c_2 \\ Z_2^* &= U + c_2^* \\ R_2 &= \frac{\gamma p_2}{c_2^{*2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.17)$$

其中

$$c_2^* = c_2 - \frac{\gamma-1}{2}(u_2 - U)$$

在右稀疏波的波前区: $Z_2 < x/t$, 波后区: $U < x/t < Z_2^*$, u, ρ, p 分别取波前值和波后值; 在右稀疏波的区域: $Z_2^* < x/t < Z_2$, 可由黎曼不变量关系式

$$u - \frac{2}{\gamma-1}c = u_2 - \frac{2}{\gamma-1}c_2$$

确定声速 c

$$c(t, x) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - u_2 \right) + \frac{2}{\gamma-1} c_2$$

由此可得 u, ρ, p 的计算公式为

$$\left. \begin{aligned} u(t, x) &= \frac{x}{t} - c \\ p(t, x) &= p_2 \left(\frac{c}{c_2} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho(t, x) &= \frac{\gamma p}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.18)$$

3. 出现真空区时

左右稀疏波后压力 $\bar{p} = 0$, 密度 $R_1 = R_2 = 0$, 且波后速度 U 已经无意义, 因此式(2.4.14)和式(2.4.17)中稀疏波波尾速度计算公式不再

成立, 需改写为

$$\left. \begin{aligned} Z_1^* &= u_1 + \frac{2}{\gamma-1} c_1 \\ Z_2^* &= u_2 + \frac{2}{\gamma-1} c_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.19)$$

而稀疏波区域内的流动参数计算方法不变。

参 考 文 献

- 1 钱学森. 气体动力学诸方程. 气体动力学基本原理(A辑). 北京: 科学出版社, 1966
- 2 吴望一. 流体力学. 北京: 北京大学出版社, 1982
- 3 傅德薰, 汪翼云, 马延文等. 计算空气动力学. 北京: 宇航出版社, 1994
- 4 冯康等. 数值计算方法. 北京: 国防工业出版社, 1978
- 5 Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987
- 6 李德元, 徐国荣, 水鸿寿. 二维非定常流体力学数值方法. 北京: 科学出版社, 1987

第三章 偏微分方程的数值解法

在计算流体力学中,研究流体运动规律的手段是采用数值计算方法,求解描述流体运动基本规律的数学方程,以数值模拟的结果为依据研究流体运动的物理特征。数值计算方法是计算流体力学的基础。本章将以模型方程为例介绍几种发展较为成熟,目前应用广泛的计算方法:有限差分方法、有限体积法、有限元方法和谱方法。

3.1 有限差分方法

有限差分方法是计算流体力学中最重要数值方法之一。它理论上系统成熟,应用广泛、有效。在本节中将以模型方程为例,简要叙述该方法中的一些基本概念及其基本特征,如稳定性、相容性、收敛性和差分格式的构造方法等。为了简便,这里略去了数学证明的描述。虽然这里所引入的定理和分析方法是有限差分方法的基础,但只有对线性问题有严格的数学证明,对于非线性问题这里只是简单的“借用”。所以,在求解很多实际问题时,由于其基本方程是复杂的非线性方程组,故必须通过数值实验来验证数值解的稳定性及其正确性。

3.1.1 模型方程的差分逼近

考虑热传导方程(2.2.2),取求解域为

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \quad (3.1.1)$$

初始值和边界条件为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq 1) \\ u(0, t) &= a, \quad u(1, t) = b \end{aligned}$$

为了采用有限差分方法数值求解问题(2.2.2)和(3.1.1),首先要求在求解域内,以差分网格或差分节点将连续的求解域化为有限的离散点集。最简单的差分离散是固定的等距差分网格的划分,如图3-1所示。设求解区域内某一点 (x_j, t_n) 在网格节点上,且网格坐标为 (j, n) ,则以 u_j^n 表示 $t_n = n\Delta t$, $x_j = j\Delta x$ 处($n = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$) $u(x_j, t_n)$ 在差分方程中的近似解。其中 Δx 和 Δt 分别为 x 和 t 方向的网格步长, M 和 N 为求解域在 x 和 t 方向的网格节点数。采用有限差分法求解微分方

程, 如模型方程(2.2.2), 所得的数值解是定解域内, 网格节点上的数值离散解。为此, 确定离散网格后, 还要求在定解域内, 差分方程所给出的数值离散解能以一定精度逼近微分方程的解。下面先讨论导数的差分逼近式。

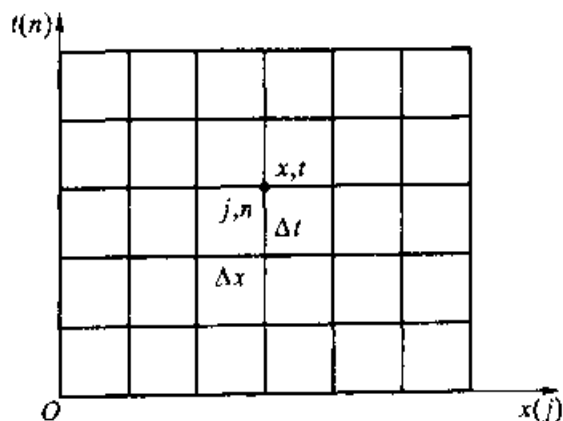


图 3-1 差分网格

1. 导数的差分逼近式

根据导数定义, 若 $u(x, t)$ 在 (x_0, t_0) 点连续则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)]$$

若 Δx 为有界小量, 设 $u(x, t)$ 在区间 $x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x$ 内连续, 则根据中值定理, 在此区间内存在一个点 ξ , 使得

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi} = \frac{1}{\Delta x} [u(x_0 + \Delta x, t_0) - u(x_0, t_0)]$$

这就是偏导数差分逼近式的依据。将 $u(x_0 + \Delta x, t_0)$ 在 (x_0, t_0) 点按 Taylor 级数展开, 则有

$$u(x_0 + \Delta x, t_0) = u(x_0, t_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

或写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_0 \frac{\Delta x}{2!} + \dots \quad (3.1.2)$$

上式右端中的第一项为偏导数 $\partial u / \partial x$ 在 (j, n) 点上的差分逼近式或称差分表达式, 其他项为截断误差。截断误差就是导数与差分表达式之间的差。截断误差的阶数是截断误差中最低阶导数项中 Δx 的幂次数。

定义: 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是定义域 S 内的实函数或复函数, 若存在一个与 x 无关的 k , 使得对于 S 中的所有 x 有以下不等式成立: $|f(x)| \leq k|\varphi(x)|$, 则称 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 为同量级, 或写为 $f(x) =$

$O[\varphi(x)]$ 。差分表达式的精度是截断误差首项差分步长的幂次数，如式(3.1.2)为一阶精度，可写为以下形式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

或称差分表达式以一阶精度逼近偏导数。

为了方便，引入以下差分算子的定义。

$$\text{向前差分: } \delta_x^+ u_j = u_{j+1} - u_j$$

$$\text{向后差分: } \delta_x^- u_j = u_j - u_{j-1}$$

$$\text{中心差分: } \delta_x^0 = \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-), \delta_x^0 u_j = (u_{j+1} - u_{j-1})/2$$

$$\text{二阶中心差: } \delta_x^2 = \delta_x^+ \delta_x^- = \delta_x^- \delta_x^+, \delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$$

从以上可知，导数的差分表达式不是唯一的。如将 $u(x_0 - \Delta x, t_0)$ 在点 (x_0, t_0) 按 Taylor 级数展开，可得到 $(\partial u / \partial x)_j$ 的另一个表达式。若限制只用 2~3 个网络点，则常见的一阶导数的差分表达式有：

$$\text{向前偏心差分: } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x} \delta_x^+ u_j + O(\Delta x)$$

$$\text{向后偏心差分: } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x} \delta_x^- u_j + O(\Delta x)$$

$$\text{中心差分: } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{\Delta x} \delta_x^0 u_j + O(\Delta x^2)$$

$$\text{三点向前偏心差分: } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^+ (3u_j - u_{j+1}) + O(\Delta x^2)$$

$$\text{三点向后偏心差分: } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{1}{2\Delta x} \delta_x^- (3u_j - u_{j-1}) + O(\Delta x^2)$$

$$\text{二阶导数的三点中心差分: } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j = \frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 u_j + O(\Delta x^2)$$

以上差分表达式除前两个为一阶精度外，其他皆为二阶精度。

2. 差分方程

对于热传导方程(2.2.2)，若以向前差分逼近时间导数项，而以中心差分逼近空间二阶导数项，则逼近微分方程(2.2.2)的差分方程有以下形式：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.1.3)$$

将式(3.1.3)中的函数在 (j, n) 点按 Taylor 级数展开，则有

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{\mu}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{n,j} \frac{\Delta t}{2} + \mu \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{n,j} \frac{\Delta x^2}{12} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

偏微分方程与差分方程之间的差就是差分方程的截断误差, 以 TE (Truncation Error) 表示。截断误差的阶数由各导数项截断误差阶数组成。从上式可以看出, 方括号内的项是差分方程(3.1.3)的截断误差, 其阶数为 $O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$ 或表示为 $O(\Delta t, \Delta x^2)$ 。即差分方程(3.1.3)以时间为 1 阶, 空间为 2 阶精度逼近微分方程(2.2.2)。截断误差可表示为:

$$TE = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots \quad (3.1.5)$$

如果差分方程中 $n+1$ 层只含单个未知函数, 则称为显式格式, 如式(3.1.3)。可以看出, $n+1$ 时间层的解可由式(3.1.3)显式地求出, 故称为显式格式; 如果在差分方程中 $n+1$ 层含多个未知函数, 则称为隐式格式, 如对于微分方程(2.2.2)的如下差分方程:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \mu \frac{1}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \quad (3.1.6)$$

这里, 在 $n+1$ 时间层式(3.1.6) [$t = (n+1)\Delta t$] 中的点函数 u_j^{n+1} , u_{j+1}^{n+1} 和 u_{j-1}^{n+1} 皆为未知量。关于这类代数方程的求解将在第五章讨论。

3.1.2 差分方法的理论基础

数值方法的目的之一是寻找恰当的离散方法, 并根据原物理问题的初边值条件, 合理地构造离散化近似方程的初边值问题, 使所求得的离散解以一定精度逼近原微分方程初边值问题的准确解。本节以线性模型方程的初值问题为例, 讨论差分方程的解与微分方程准确解之间的关系。

为了便于讨论, 下面引入一些概念。设 $u(x, t)$ 和 $u_h(j\Delta x, n\Delta t)$ (这里 u_h 表示差分方程的解) 为函数空间的元素。定义 $u(x, t)$ 的范数为 $\|u\|$ 。最常用的范数有平方积分范数(即 L_2 空间模)

$$\|u\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

和极大值范数

$$\|u\| = \max_x |u(x)|$$

不难证明, 以上两种范数都满足一般模所要求的性质:

(1) $\|u\| \geq 0$, 且仅当 $u=0$ 时等号才成立。

(2) 对于任一常数 a , $\|au\| = |a| \|u\|$

(3) 对于任何两个函数 u, v , 有 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

两个函数 u, v 之间的距离由它们差的范数表征: $\delta = \|u-v\|$ 。对于离散函数 $u_h(x, t) = \{u_j\}$ 的 L_2 模记为

$$\|u_h\| = \sqrt{(u_h, u_h)} = \sqrt{\sum_j u_j^2 \Delta x}$$

这里 (\quad) 表示两离散函数的内积。设有两离散函数 $u_h = (u_j)$ 、 $v_h = (v_j)$ ，则内积为

$$(u_h, v_h) = \sum_j u_j v_j \Delta x$$

若以 L 表示微分方程的算子， L_h 表示差分方程算子，则微分方程可写为： $Lu = 0$ ，差分方程可写为 $L_h u_h = 0$ 。

1. 相容性

定义：当差分方程中的步长 $\Delta t \rightarrow 0$ 、 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，差分方程的截断误差也趋近于零，则称差分方程与原微分方程是相容的。或对于算子 L 作用的所有光滑函数 v ，如果当 $\Delta t \rightarrow 0$ 、 $\Delta x \rightarrow 0$ 时 $\|L_h v - Lv\| \rightarrow 0$ ，则称差分算子 L_h 与微分算子 L 是相容的。

应当指出，当差分方程的截断误差中存在有 $O\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$ 型的项时，只有当 $\Delta t \rightarrow 0$ 、 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，且存在有 $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ ，差分方程才是相容的，否则不相容。

仍考虑热传导方程(2.2.2)，采用 Duford - Frankel 1953 年提出的 D - F 格式，对应的差分方程可写为以下形式：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \mu \frac{1}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j-1}^n)$$

将上式函数 u 在 (j, n) 点按 Taylor 级数展开，可得其截断误差：

$$TE = \frac{\Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_j^n - \frac{\Delta x^2}{12} \mu \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mu \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + \dots$$

可以看出，只有当 $\Delta t \rightarrow 0$ 、 $\Delta x \rightarrow 0$ 且存在有 $\Delta t/\Delta x \rightarrow 0$ 的条件下才有 $TE \rightarrow 0$ 。在该条件下差分方程 D - F 是相容的，否则不相容，这种情况下称之为条件相容。

2. 收敛性

定义：当差分方程中，存在有

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \delta = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \|u_h - u\| = 0$$

则称差分方程的解收敛于微分方程的准确解。

3. 稳定性

设 $u_h(x, t_0)$ 为差分方程在 t_0 时刻的解。称差分格式是稳定的，是指在求解过程中，某一时刻所引入的误差扰动不产生实质性的增长，及不会导致差分方程解失真(与微分方程的物理解相比)。对于线性方程，有以下稳定性定义。

定义：称差分方程的初值问题在 L_2 模意义下是稳定的，如果当 Δt 和 Δx 足够小时，存在有与 Δt 和 Δx 无关的常数 C_1 和 C_2 ，使得

$$\|u_h(x, t_n)\| \leq C_1 \exp[C_2(t_n - t_0)] \|u_h(x, t_0)\|$$

这里 $t_n = t_0 + n\Delta t$ ， $t_0 \leq t_n \leq T_0$ 。或简单叙述为：在差分方程的求解过程中，如果某时刻引入的误差随时间的增长有界，则称差分方程是稳定的。

4. 拉克斯(Lax)等价定理^[2]

如果微分方程的初边值问题是适定的，对应的差分方程是相容的，则差分方程解的收敛性和稳定性是等价的，或者说稳定性是收敛性的充分和必要条件。

应当指出，等价定理只对于线性方程的初值问题有严格的数学证明。只有在附加的假设下才能推广到混合型初边值问题。

定义：微分方程的精确解与差分方程的精确解之间的差称为离散误差。或表示为 $DE = \|\bar{u}_h - u\|$ 。这里 \bar{u}_h 表示差分方程的精确解。

在数值运算中，舍入有限个数字而产生的误差称为舍入误差。舍入误差的大小与计算机中选用的字长有关(若选用双精度，则舍入误差比选用单精度的舍入误差小)，且与求解域内选用的网格点数成正比。增加网格点数，截断误差减小，但舍入误差增加。

定义：差分方程所准确逼近的微分方程(即截断误差为零)，称为该差分方程的修正方程。例如：考虑单波方程(2.2.1)，设差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.1.7)$$

将 u_j^{n+1} 、 u_{j-1}^n 在 (n, j) 点按 Taylor 级数展开，并代入上式，则有

$$u_t + cu_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{tt} + \frac{c\Delta x}{2} u_{xx} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{ttt} - \frac{c\Delta x^2}{6} u_{xxx} + \cdots \quad (3.1.8)$$

通常要求在修正方程中不包含有对 t 的高阶导数项。为了消除上式中对 t 的高阶导数项，可利用上式求出 u 对 t 的各阶导数。例如式(3.1.8)对 t 求导减去式(3.1.8)对 x 求导乘以 c ，则可求得 u_{tt} 的表达式。类似可得 u_{ttt} 、 u_{txx} 等：

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + O(\Delta t, \Delta x), \quad u_{ttt} = -c^3 u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x)$$

$$u_{txx} = c^2 u_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x), \quad u_{txx} = -cu_{xxx} + O(\Delta t, \Delta x)$$

这里下标表示偏导数对应的自变量，将其代入(3.1.8)式，则得

$$\left. \begin{aligned} u_t + cu_x &= \frac{c\Delta x}{2}(1-\sigma)u_{xx} - \frac{c\Delta x^2}{6}(2\sigma^2 - 3\sigma + 1)u_{xxx} + \\ &\quad O(\Delta x^3, \Delta x^2\Delta t, \Delta x\Delta t^2, \Delta t^3) \\ \sigma &= c \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.9)$$

这就是差分方程(3.1.7)的修正方程。修正方程是差分方程的微分表达式,它对差分方程的稳定性分析是很有用的。修正方程与原微分方程之差就是差分方程的截断误差。截断误差中的偶次导数项是耗散误差项,奇次导数项是色散误差项。在截断误差项中,若最低阶导数为偶次,则称该差分方程是耗散误差占主导;若最低阶导数为奇次,则称色散误差占主导。在截断误差中的偶次导数项又称为差分粘性项,或称为隐式人工粘性项,而将直接加入到差分方程中的人工粘性称为显式人工粘性。

5. 守恒型差分格式

我们知道,流体动力学的基本方程都是描述流体运动中物理量守恒律的数学方程组。采用守恒型差分格式求解该数学方程组有利于在数值求解的过程中保持物理量的守恒特征。特别是在流场中存在有间断时更为重要。下面以单个偏微分模型方程为例,讨论守恒型差分格式。

在微分方程中,如果所有导数项的系数仅为自变量的函数,则称微分方程是弱守恒型的。若微分方程中,所有导数项的系数仅是常数,则称为强守恒型的。如

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{a=1}^d \frac{\partial f^a(u)}{\partial x^a} = 0$$

为守恒型方程或称为散度型方程。

考虑一维单个守恒型方程的初值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= 0, & (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & (-\infty < x < +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.10)$$

设空间步长和时间步长分别为 h 和 τ , 记 $x_j = jh$, $t^n = n\tau$, u_j^n 表示差分解在 (x_j, t^n) 处的值。

定义: 对于一维单个守恒型方程(3.1.10), 差分格式 $u_j^{n+1} = G(u_{j-1}^n, u_{j-1+1}^n, \dots, u_{j+1}^n)$ 称为守恒型差分格式, 如果其中

$$G(u_{j-1}^n, u_{j-1+1}^n, \dots, u_{j+1}^n) = u_j^n - \frac{\tau}{h} (g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

且 $g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j-1+1}^n, u_{j-1+2}^n, \dots, u_{j+1}^n)$ 。为了使差分格式与式(3.1.10)中的微分方程相容, 则 g 必须满足

$$g(w, w, \dots, w) = f(w)$$

以上定义可简要描述如下: 如果差分方程对微分方程是相容的, 且在求解域内, 对于任意网格点数和任意网格尺度都精确地满足离散型的散度形式, 则称差分方程是守恒型的。

3.1.3 稳定性分析方法

研究差分方程的稳定性主要有 Fourier 分析方法(或称为 Von Neumann 方法)、能量方法和直接方法^[1]。这里首先以模型方程为例, 简述 Fourier 稳定性分析方法^[1]。

1. 先以热传导方程为例, 简述 Fourier 稳定性分析方法。考虑热传导方程(2.2.2), 选取如下形式的差分方程:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \mu \frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.1.11)$$

设 N 为差分方程的数值解, D 为差分方程的精确解, e 为计算过程中产生的误差, 则不难看出 $N = D + e$ 。因 N 满足差分方程(3.1.11), 故 D 和 e 也满足该方程。

Fourier 分析方法是首先将误差 $e(x, t)$ 按 Fourier 级数展开, 也就是将误差函数写为各线性扰动波的叠加:

$$e(x_j, t) = \sum_m b_m(t) e^{ik_m x_j} = \sum_m b_m(t) e^{ik_m \Delta x} \quad (3.1.12)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 。

正如前面所述, 如果在差分方程的求解过程中, 误差的增长有界, 则称差分方程是稳定的。对于线性问题可以证明, 如果 Fourier 级数中的每一项都不增长, 则其总和也是不增长的。故对于误差的增长特性, 可研究其级数的单项特性。将单项误差写为以下形式:

$$\epsilon_m(x_j, t_n) = e^{\alpha t_n} e^{ik_m x_j} = e^{\alpha n \Delta t} e^{ik_m \Delta x} \quad (3.1.13)$$

其中 k_m 为实数, α 一般为复数。将式(3.1.13)代入式(3.1.11), 经整理可得

$$e^{\alpha \Delta t} = 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (3.1.14)$$

其中 $\sigma = \mu \Delta t / \Delta x^2$, $\beta = k \Delta x$ 。从式(3.1.13)可得

$$(\epsilon_m)_j^{n+1} = e^{\alpha \Delta t} e^{\alpha n \Delta t} e^{ik_m \Delta x} = e^{\alpha \Delta t} (\epsilon_m)_j^n$$

由此可得对于差分方程(3.1.11)两个时间层的误差之比值为:

$$\epsilon_j^{n+1} / \epsilon_j^n = e^{\alpha \Delta t} = 1 - 4\sigma \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad (3.1.15)$$

称此比值为放大因子, 以 G 表示。不难看出, 当 $|G| \leq 1$ 时, 即为误差不增长, 对应的差分方程总是稳定的。对于差分方程(3.1.11)有

$$|G| = |1 - 4\sigma \sin^2(\beta/2)| \leq 1 \quad (3.1.16)$$

这可能有两种情况:

(1) 如果 $[1 - 4\sigma \sin^2(\beta/2)] \leq 1$, 则要求 $[4\sigma \sin^2(\beta/2)] \geq 0$, 这种情

况总是满足的, 因 $\sigma > 0$ 。

(2) 如果 $[1 - 4\sigma \sin^2(\beta/2)] \geq -1$, 则要求 $[4\sigma \sin^2(\beta/2)] \leq 2$, 这时只有 $\sigma \leq \frac{1}{2}$ 时式(3.1.16)才成立。因此, 差分方程(3.1.11)的稳定必要条件为

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \quad (3.1.17)$$

对于差分方程, 如果稳定条件要求 σ 限制在一定条件下取值, 则称为条件稳定, 如果差分方程对于 σ 的任意值都是稳定的, 则称为无条件稳定。

应当指出, 稳定性不能单根据某一固定的 $k\Delta x$ 或在某一小范围内的 $k\Delta x$ 值而定, 必须在 $0 \leq k\Delta x \leq \pi$ 范围内确定。

2. 考虑二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1.18)$$

采用式(3.1.11)中相同的差分格式, 则逼近以上微分方程的差分方程为

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n + \sigma_x (u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n) + \sigma_y (u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n)$$

这里, $\sigma_x = \mu \Delta t / \Delta x^2$, $\sigma_y = \mu \Delta t / \Delta y^2$ 。根据 Fourier 稳定性分析方法可得

$$G = 1 - 4\sigma_x \sin^2(\beta_1/2) - 4\sigma_y \sin^2(\beta_2/2)$$

$\beta_1 = k_1 \Delta x$, $\beta_2 = k_2 \Delta y$, k_1 , k_2 分别为 x 和 y 方向的波数。稳定条件要求 $|G| \leq 1$, 由此推出稳定条件为

$$\mu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right] \leq \frac{1}{2} \quad (3.1.19)$$

比较式(3.1.19)和式(3.1.17)可以看出, 二维时稳定条件对时间步长的限制更严。

3. 考虑单波方程(2.2.1), 采用 Lax 格式, 则差分方程有以下形式:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} [u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - \sigma (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)] \quad (3.1.20)$$

这里 $\sigma = c \Delta t / \Delta x$ 。根据 Fourier 稳定性分析方法可得

$$G = \cos \beta - i \sigma \sin \beta, \quad \beta = k \Delta x \quad (3.1.21)$$

由 $|G| \leq 1$ 推出稳定条件

$$|\sigma| \leq 1, \quad \sigma = c \Delta t / \Delta x \quad (3.1.22)$$

通常称 σ 为柯朗 (Courant) 数, 并以 CFL 表示之 (Courant, Friedrichs 和 Lewy 三人名字的字头)。

从式(3.1.22)可以看出, 若 $c > 0$, 则有

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{c} \quad (3.1.23)$$

设所考虑的网格点为 (x_0, t_0) ，该点差分解的依赖域是在 $t = t_0 - \Delta t$ 时刻， $x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0$ 的范围，而该点的特征线是斜率为 $dx/dt = c$ 的直线（参见图 3-2）。由此可知，式 (3.1.22) 表示了微分方程的解在 (x_0, t_0) 点的依赖域包含在该点差分解的依赖域之内。这表明了稳定条件式 (3.1.22) 的物理意义。

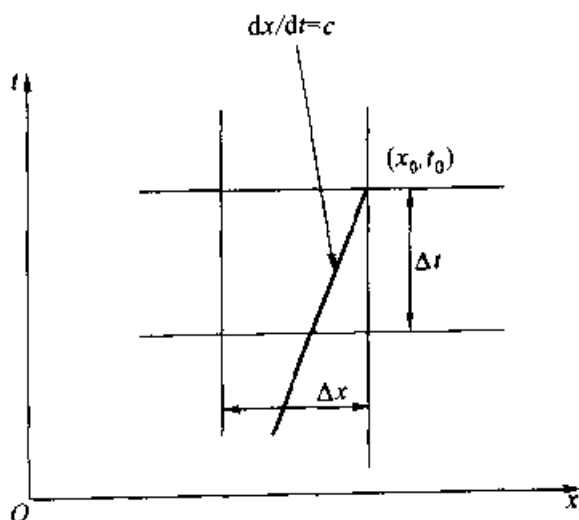


图 3-2 微分影响域与差分影响域

4. 误差的增长特征

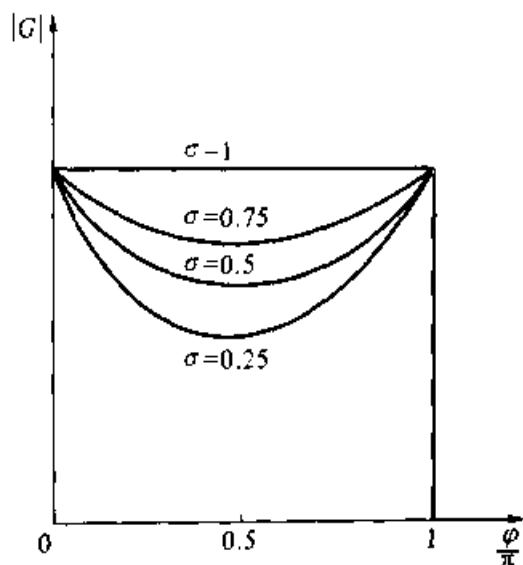
从上面的讨论可以看出，对于给定的数值计算方法， G 依赖于网格尺寸和数值解的波数或频率。现以 1 阶波动方程的放大因子式 (3.1.21) 为例，利用 G 复平面上的变化情况，讨论误差的增长特性。因 G 在复平面内可表示为： $G = |G|e^{i\varphi}$ ，这里 φ 为相角。从式 (3.1.21) 可知

$$|G| = [\cos^2 \beta + \sigma^2 \sin^2 \beta]^{1/2}, \quad \varphi = \arctan(-\sigma \tan \beta)$$

在图 3-3 中给出了对于差分方程 (3.1.20) 放大因子 $|G|$ 随相角 φ 的变化。

可以看出，当 $\sigma = 1$ 时，对于所有频率的误差分量 G 都不减弱，这时 G 在复平面上为单位圆，当 $\sigma < 1$ 时，高频误差分量和低频误差分量 $|G|$ 只有缓慢的减小，而对于中等频率的误差分量， $|G|$ 有明显的减小。

一般来说，以 $|G| \leq 1$ 作为稳定性的必要条件是要要求过严了，当精确解 $u(x, t)$ 随时间 t 增长时，此条件就太苛刻，以至难以达到。事实上，根据前面的定义，稳定性仅要求误差的增长是有界的，也可表示为在某一固定时刻 t ，误差 $e(x, t)$ 的每一个 Fourier 分量的振幅有界，如果精确解是随时间而增长的，则级数分量的振幅可大于 1，但当 $\Delta t \rightarrow 0$ ，

图 3-3 放大因子随相角 φ 的变化

$\Delta x \rightarrow 0$, $0 \leq n\Delta t \leq T$, 且 $n \rightarrow \infty$ 时, 要求下式有界:

$$M = \frac{b_m(t)}{b_m(t_0)} = G^{(t-t_0)/\Delta t} \quad (3.1.24)$$

这里 $b_m(t)$ 为式 (3.1.12) 中的系数, $b_m(t_0)$ 为 t_0 时刻的该系数。即 M 与从 t_0 到 t 之间所取的时间步数 n 无关, 若命 $G = 1 + \varepsilon(k\Delta x, \sigma)$, 根据二项式定理有:

$$G^n = (1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \dots$$

如果保留到 ε 的 1 阶项, 并要求 G 与 Δt 无关, 则 ε 必须满足 $n\varepsilon =$ 常数, 或 $\varepsilon = C\Delta t$, 且 C 为常数。所以, 差分方程稳定的必要条件应写为

$$|G| \leq 1 + C\Delta t \quad (3.1.25)$$

这就是著名的 Von Neumann 稳定性的必要条件。利用 Fourier 级数来分析稳定性的方法, 有时也称为 Von Neumann 稳定性分析方法。

5. 边界条件与稳定性分析

为了考虑边界条件对稳定性影响, 这里以周期边界条件为例, 给出对于已知边界条件的差分方程及其稳定性的分析方法。考虑单波方程 (2.2.1), 若选用三点显式差分格式, 则差分方程可写为

$$u_j^{n+1} = a_0 u_{j-1}^n + a_1 u_j^n + a_2 u_{j+1}^n, \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.1.26)$$

取周期边界条件, 则有

$$u_0^n = u_m^n, \quad u_{m+1}^n = u_1^n$$

差分方程的矢量形式为

$$U^{n+1} = AU^n, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (3.1.27)$$

对于周期边界条件, 矩阵 A 有以下形式:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的特征值为

$$\lambda_j = a_1 + (a_0 + a_2) \cos \left[\frac{2\pi}{m}(j-1) \right] + i(a_2 - a_0) \sin \left[\frac{2\pi}{m}(j-1) \right], \\ (j=1, 2, \cdots, m) \quad (3.1.28)$$

例如: 选用式(3.1.20)的 Lax 格式, 则式(3.1.26)中的系数有

$$a_0 = \frac{1}{2}(1 + \sigma), \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}(1 - \sigma), \quad \sigma = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

因差分解满足差分方程(3.1.26), 其误差也满足该差分方程, 故矩阵 A 也就是两个时间层的误差矢量的增长矩阵, 称为放大矩阵, 以 G 表示。差分方程的稳定条件要求放大矩阵 G 的特征值 $|\lambda_j| \leq 1$ ($j=1, 2, \cdots, m$)。由式(3.1.28)可推出稳定条件为 $|\sigma| \leq 1$, 这与式(3.1.22)相同。说明对于单波方程, 周期边界条件并不影响稳定性限制条件。

下面讨论一维方程组问题, 将 Von Neumann 稳定性必要条件推广到多变量的情况。考虑以下模型方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.1.29)$$

其中 U 为 m 维矢量, A 是 $m \times m$ 阶矩阵, 类似于二维单个方程的情况, 可得 $B_k^{n+1} = GB_k^n$, 其中 B_k 是误差矢量 E 按 Fourier 级数展开时, 波数为 k 的分量。 G 是 $m \times m$ 维矩阵, 称为差分方程的放大矩阵。相应于 Von Neumann 分析, 稳定性的必要条件是 G 的所有特征值 λ_j 满足以下不等式:

$$|\lambda_j| \leq 1 + C\Delta t, \quad (j=1, 2, \cdots, m) \quad (3.1.30)$$

其中 C 为常数。

对于变系数的线性方程, 通常把变系数取为当地值, 然后按照常数系数线性方程, 确定稳定性的必要条件。对于非线性方程, 一般用 $t =$

$n\Delta t$ 时刻的已知值代入方程, 冻结方程中的系数, 然后按线性方程确定稳定性的必要条件。这种方法称为“冻结系数法”。但非线性问题往往会出现非线性的不稳定问题, 这是 Von Neumann 条件判断不出来的。所以在很多实际问题中, 除必须进行线性稳定性分析外, 还需进行数值试验及分析, 通过与实验结果或典型问题的他人计算结果进行比较, 以验证差分方程解的稳定性及数值解的可靠性。

3.1.4 空间离散方法

构造差分格式的方法很多, 近年来为提高计算方法的精度和分辨率, 发展了多种新的差分格式构造方法, 这将在后面介绍。这里仅介绍一些概念及两种一般的构造方法。

1. 待定系数法

考虑构造 $(\partial u / \partial x)_j$ 的差分表达式, 要求其截断误差为 $O(\Delta x^2)$, 且只应用三个网格点:

$(j-2, n), (j-1, n), (j, n)$ 。为此差分表达式可写为

$$(\partial u / \partial x)_j \approx au_{j-2} + bu_{j-1} + cu_j$$

将 u_{j-1}^n 和 u_{j-2}^n 在 (j, n) 点按 Taylor 级数展开:

$$u_{j-1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots \quad (3.1.31)$$

$$u_{j-2}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n (-2\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + \cdots \quad (3.1.32)$$

取 $a(3.1.32) + b(3.1.31) + cu_j$ 所得的式中, $(\partial u / \partial x)_j^n$ 的系数应为 1, 即 $-2a - b = 1$; 为了使所得的差分表达式有二阶精度, 即截断误差为 $O(\Delta x^2)$, 要求 $(\partial^2 u / \partial x^2)_j^n$ 的系数为零, 则有 $2a + b/2 = 0$, 且有 $a + b + c = 0$, 由此可推出 $a = 1/2, b = -2, c = 3/2$ 最后可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{1}{2\Delta x}(u_{j-2}^n - 4u_{j-1}^n + 3u_j^n) + O(\Delta x^2) \quad (3.1.33)$$

下面讨论非等距网格差分表达式的构造。

考虑构造 $(\partial u / \partial y)_j^n$ 的差分表达式, 要求截断误差为 $O(\Delta y^2)$, 且应用 $(n, j), (n, j-1)$ 和 $(n, j+1)$ 三个网格点, 而 $\Delta y_+ = y_{j+1} - y_j$, $\Delta y_- = y_j - y_{j-1}$, $\Delta y_+ \neq \Delta y_-$ 。同样利用待定系数方法可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j^n = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\Delta y_-} [u_{j+1}^n + (\alpha^2 - 1)u_j^n - \alpha^2 u_{j-1}^n] + O(\Delta y_+^2, \Delta y_-^2) \quad (3.1.34)$$

这里 $\alpha = \Delta y_+ / \Delta y_-$, $\Delta y_- \neq 0$ 。

2. 多项式方法

考虑构造逼近 Laplace 方程(2.2.6)的差分方程。首先构造 $\partial^2 u / \partial x^2$ 的差分表达式, 要求只用三个网格点, 为此在给定的 x 处, 将 u 按 x 的二次多项式写出: $u = a + bx + cx^2$, 再利用所选的网格点, 确定多项式的系数。例如, 所选用的网格点为 (i, j) , $(i-1, j)$ 和 $(i+1, j)$, 为了简单, 设 (i, j) 点处 $x=0$, 则有 $u(i, j) = a$, $u(i+1, j) = a + b\Delta x + c\Delta x^2$, $u(i-1, j) = a - b\Delta x + c\Delta x^2$, 最后可得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = 2c = \frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + O(\Delta x^2)$$

同样可求得 $(\partial^2 u / \partial y^2)_{i,j}$ 的差分表达式, 代入式(2.2.6)则可得 2 阶精度逼近微分方程(2.2.6)的差分方程。

3.2 偏微分方程的全离散

在本章第一节中介绍了差分方法, 其中较多地涉及空间导数的离散, 如果所求解的是定常方程, 即方程中不出现时间方向的导数, 则方程经离散后得一代数方程组, 对这一代数方程组可参照第五章介绍的方法进行求解。如果所求解的是一非定常物理问题, 则需对描述物理问题方程的时间导数进行离散。对时间导数和空间导数进行离散后就可以得到相容的差分逼近式。

构造差分格式通常有如下三类要求:

- (1) 基本要求: 格式是相容的和稳定的。
- (2) 一般要求: 方法简单, 求解效率高。
- (3) 特殊要求: 依赖于所求解的物理问题。

基本要求是构造差分格式的最低要求, 保证数值解收敛于物理解的最低要求。一般要求方法尽可能简单, 易于被他人采用。对于大型复杂的物理问题, 从经济考虑要求方法有高的求解效率。其他特殊要求则依赖于所求解的物理问题。例如, 计算激波要求数值解的群速度指向激波, 计算湍流要求数值解有高的分辨能力等。

为了得到高质量的数值解, 在进行时间和空间离散时, 应尽可能地考虑到物理问题在时间和空间的变化特性。当解中有间断存在时, 参照物理问题构造差分格式尤为重要。在本节中主要介绍几种一般全离散的方法。有关间断解的计算方法将在第七章中介绍。本节重点介绍时间方向的离散方法, 主要是时间导数简单离散法、Taylor 级数展开法及 Ronge - Kutta 方法。

3.2.1 时间导数简单离散法

这里所说的时间导数简单离散法是指简单地以差分式来代替时间导数, 如针对热传导方程的显式逼近式(3.1.3), 隐式逼近式(3.1.6), 可把这两个差分式结合起来得

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \theta \mu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \theta) \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.2.1)$$

这里参数 $0 \leq \theta \leq 1$ 。该格式称为 **Crank - Nicolson 格式**。当取 $\theta = 0$ 时为显式格式, 当取 $\theta = 1$ 时为隐式格式。当取 $\theta = 1/2$ 时, 经在 $(n + \frac{1}{2}, j)$ 点进行 Taylor 级数展开可知, 该格式在时间方向和空间方向均有二阶逼近精度, 即截断误差 $TE = O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ 。经 Fourier 稳定性分析可知, 对应的放大因子为

$$G = \frac{1 - 4(1 - \theta)\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + 4\theta\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \alpha = k\Delta x \quad (3.2.2)$$

由 $|G| \leq 1$ 的要求可得稳定条件:

$$(1 - 2\theta)\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.2.3)$$

由此可知, 当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时格式为条件稳定, 当 $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ 时格式为无条件稳定。上面介绍了一个逼近热传导方程的格式, 可采用类似的方法构造逼近于单波方程(2.2.1)的格式。设 $\frac{\delta_x u_j}{\Delta x}$ 为空间导数的一种逼近形式, 则简单的显示逼近式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{\delta_x u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.2.4)$$

设 $c \geq 0$, 如果 $\delta_x = \delta_x^-$ 则得到具有一阶精度的迎风格式。设

$$\gamma = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (3.2.5)$$

这里 γ 即为 Courant 数。这一迎风格式可写为

$$\left. \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \gamma \delta_x^- u_j^n \\ u_j^{n+1} &= u_j^n - \gamma \delta_x^0 u_j^n + \frac{|\gamma|}{2} \delta_x^2 u_j^n \end{aligned} \right\} \quad (3.2.6)$$

式(3.2.6)中的第一式对应于 $c \geq 0$ 时的一阶迎风格式, 对于更为一般的情况, 一阶迎风格式可写为第二式的形式。

经 Taylor 级数展开后可知, 式(3.2.6)的截断误差有以下形式($c > 0$):

$$TE = \frac{c\Delta x}{2}(1-\gamma)u_{xx} - \frac{c(\Delta x)^2}{2}(2\gamma^2 - 3\gamma + 1)u_{xxx} + \cdots \quad (3.2.7)$$

对应于一阶迎风格式的放大因子为

$$G = 1 + \gamma(\cos\alpha - 1) - i\gamma\sin\alpha \quad (3.2.8)$$

由式(3.2.8)可知, 格式的稳定性条件为

$$\gamma = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.2.9)$$

如果式(3.2.9)得到满足, 则式(3.2.7)中右端的首项系数为正。条件 $\gamma \leq 1$ 表明修正方程有非负的耗散特性。非负的耗散特性也是格式稳定性的一个判别方法。

如果取式(3.2.4)中之 $\delta_x = \delta_x^0$ 或 $\delta_x = \delta_x^+$, 可以证明, 对应的格式是不稳定的。现将刚刚提到的三个格式, 即式(3.2.4)中 $\delta_x = \delta_x^-, \delta_x^0, \delta_x^+$ 的三个格式作进一步分析, 这三个格式的图解式给在图 3-4 中。

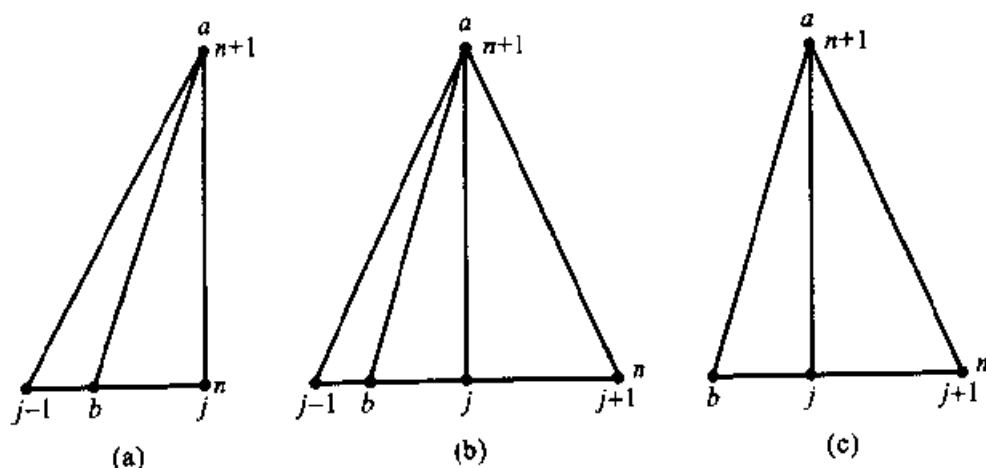


图 3-4 显示格式图解示意图

在图 3-4 中 ab 线表示对应于方程(2.2.1)过 a 点的特征线, 这里 $c > 0$ 。正如前一节所述, 对微分方程而言, 解在 a 点可完全由 b 点的值确定, 通常称 b 点为 a 点的依赖域。对第 1 个差分格式, 解在 $(j, n+1)$ 点的值由 $(j-1, n)$ 和 (j, n) 之间的值确定, 稳定条件式(3.2.9)意味着微分方程解的依赖域位于差分方程解的依赖域之中。这是差分格式稳定的必要条件。当 $\delta_x = \delta_x^+$ 时, 在 $c > 0$ 时(如图 3-4c)是不稳定的。微分方程解的依赖域包含在差分方程解的依赖域之中并不是格式稳定的充分条件, 如 $\delta_x = \delta_x^0$ 且式(3.2.9)得到满足的情况, 但对应的格式是不稳定的。

可参照式(3.2.1)构造对应于模型方程(2.2.1)的隐式格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \theta c \frac{\delta_x^0 u_j^{n+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) c \frac{\delta_x^0 u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.2.10)$$

对应的放大因子为

$$G = \frac{1 - (1 - \theta) \gamma i \sin \alpha}{1 + \theta \gamma i \sin \alpha} \quad (3.2.11)$$

从该式可知, 当 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 时格式是无条件稳定的, 当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时格式在时间和空间方向均具有二阶精度:

$$TE = - \left(\frac{c^3 \Delta t^2}{12} + \frac{c \Delta x^2}{6} \right) u_{xxx} + \cdots \quad (3.2.12)$$

3.2.2. Taylor 级数展开法

考虑模型方程(2.2.1), 将 u^{n+1} 在 n 点进行泰勒(Taylor)级数展开, 并利用式(2.2.1)可得

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \cdots \quad (3.2.13)$$

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} c \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \quad (3.2.14)$$

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \quad (3.2.15)$$

设 $\alpha + \beta + \gamma = 1$, 由上面三个方程组合 α (3.2.13) + β (3.2.14) + γ (3.2.15) 可得:

$$u^{n+1} = u^n - \Delta t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} c \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \cdots \quad (3.2.16)$$

不难看出, 如果式(3.2.16)中的空间一阶导数项以二阶精度进行离散, 二阶导数和混合导数至少以一阶精度进行离散, 在 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 的条件下最终所得的逼近式具有二阶逼近精度。现将式(3.2.16)作进一步的离散化:

$$\frac{\delta_x f}{\Delta x} \approx \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\delta_t u^{n+1} = u^{n+1} - u^n$$

$$\delta_t^2 u^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} (\delta_t u^{n+1} - \delta_t u^n)$$

则离散化后的差分式经整理后可得

$$\Delta u_j = - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \left[- \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x f + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \delta_x^+ c \delta_x^- f - \frac{\alpha}{2} \delta_t u_j^n \right] \quad (3.2.17)$$

$$\left[1 + \frac{\beta \Delta t}{2 \Delta x} \delta_x c - \frac{\gamma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2}{1 - \frac{\alpha}{2}} \delta_x^+ c^2 \sigma \delta_x^- \right] \cdot \delta_t u_j^{n+1} = \Delta u_j^n \quad (3.2.18)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \delta_t u_j^{n+1} \quad (3.2.19)$$

对式(3.2.17)~(3.2.19)中对 δ_x 选取不同的形式, 选取不同的参数 α , β , γ 和 σ 可得到不同的差分格式。下面给出几个例子。

1. 蛙跳格式 (Leap-frog)

取 $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta_x = \delta_x^0$, 差分方程(3.2.17)~(3.2.19)简化为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (3.2.20)$$

该格式在时间和空间方向都具有二阶逼近精度, 当 CFL 数小于 1 时格式是稳定的。

2. 矩形公式

取 $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta_x = \delta_x^0$

此时经整理后可得 $\theta = \frac{1}{2}$ 时的式(3.2.10)

3. Lax-Wandorf 格式 (L-W)

当取 $\alpha = \beta = \sigma = 0$, $\gamma = 1$ 和 $\delta_x = \delta_x^0$ 时可得单步显示 L-W 格式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \delta_x^+ c \delta_x^- c u_j^n \quad (3.2.21)$$

该格式在时间和空间方向均具有二阶逼近精度, 其稳定性要求 CFL 数小于 1。

4. 半隐式错点格式

取 $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, 在式(3.2.17)中取 $\delta_x f = \delta_x^0 f$, 式(3.2.17)中之 $\delta_x (c \delta_t u_j^{n+1}) = \delta_x^- (c \delta_t u_j^{n+1})$, 则所得之差分表达式经整理后可得作者所发展的半隐式错点格式:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{\Delta x} \left[\frac{(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{2} + \frac{(u_{j+1}^n - u_j^n)}{2} \right] = 0 \quad (3.2.22)$$

该格式在时间和空间方向均具有二阶逼近精度, 且是无条件稳定的。如果知道 u_{j-1}^{n+1} , 则可很容易按 j 之增长方向求出所有的 u_j^{n+1} 来。

3.2.3 Runge-Kutta 方法 (R-K 方法)

空间导数离散化以后, 所得到的半离散化方程为只依赖于时间的常微分方程:

$$\frac{dU}{dt} = L_h(U) \quad (3.2.23)$$

这里 U 为矢量, L_h 为空间离散算子, 也是矢量。对式(3.2.23)可采用通常的求解常微分方程的求解方法, 如 R-K 方法。最简单的是时间方向采用一阶逼近

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t L_h (U^n) \quad (3.2.24)$$

这一格式时间方向精度太低, 且在很多情况下格式是不稳定的。一个具有二阶精度的 R-K 方法是

$$\begin{aligned} U^{n+\frac{1}{2}} &= U^n + \frac{1}{2} \Delta t L_h (U^n) \\ U^{n+1} &= U^n + \Delta t L_h (U^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

如果所求方程为单波方程, 而对应的一阶导数取具有二阶精度的中心差分, 即

$$L_h (U) = \left(\dots, -\frac{\delta^0 f_j}{\Delta x}, \dots \right) \quad (3.2.26)$$

则格式的稳定性条件为 $CFL \leq 1$ 。

在文献[3]中给出了一个具有三阶精度的 R-K 方法:

$$U^1 = U^n + \Delta t L_h (U^n) \quad (3.2.27)$$

$$U^2 = \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} [U^1 + \Delta t L_h (U^1)] \quad (3.2.28)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} [U^2 + \Delta t L_h (U^2)] \quad (3.2.29)$$

3.2.4 多步法

前面介绍的时间导数简单离散法及 Taylor 级数展开法为单步法, 而在文献[3]中的 R-K 方法为三步法, 也是多步法。这里介绍两个著名的两步法, 它们是两步 Lax-Wandroff 格式(简称 L-W 格式)和 MarCormack 格式。它们都是针对单波方程而建立的。

1. 两步 L-W 格式

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (3.2.30)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (3.2.31)$$

如果将式(3.2.30)代入式(3.2.31), 则可得前面介绍的单步 L-W 格式(3.2.21)。当 $f = cu$ (对应波的传播速度 c 是常数)时, 两个格式是等价的。两者的稳定性条件都是 $CFL < 1$ 。但两步格式的应用更为广泛。因为当所求解的是双曲型方程组时, 对应于单波方程的传播速度 c 是

Jacobian 矩阵。采用单步 L-W 格式需进行矩阵相乘的运算, 且推广到多维问题时更为复杂。而采用两步 L-W 格式, 则不需矩阵运算, 且易于推广到多维问题。

2. MacCormack 格式

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (3.2.32)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_j^n + \overline{u_j^{n+1}}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\overline{f_j^{n+1}} - \overline{f_{j-1}^{n+1}}) \quad (3.2.33)$$

很容易证明, 当波的传播速度 $c = \text{const}$ 时, MacCormack 格式与 L-W 格式是等价的。只要将式(3.2.32)代入式(3.2.33)即可证明。因此该格式的稳定性条件也是 Courant 数小于 1, MacCormack 格式是对 L-W 格式的改进, 比 L-W 格式更为简单。这里不需要计算函数在半点上的值。在进行多维计算时这一优点更为明显。

3.3 有限体积方法

我们知道, 描述流体运动的微分方程是根据流体运动的质量、动量和能量守恒律推导出来的。有限差分方法是从描述这些基本守恒律的微分方程出发构造离散方程, 而有限体积法是以积分型守恒方程为出发点, 通过对流体运动的体积域的离散来构造积分型离散方程。可以看出, 这种方法便于应用来模拟具有复杂边界区域的流体运动。

考虑定义在某一连续区域内, 描述流体运动的积分方程。将该区域离散为有限个小的控制体积, 采用同样方法描述这些小体积内流体运动的守恒律。

设某一物理量为 φ , 当流动为定常状态时, 其守恒律的积分方程可写为以下形式:

$$\int_S \rho \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \mu \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} ds + \int_V q dD \quad (3.3.1)$$

其中, D 为解的定义域, S 为 D 的边界表面, \mathbf{n} 为 S 外法向上的单位矢量, 式中左端为守恒项在该法向上的分量, 右端第 1 项为耗散项在该法向上的分量, 右端第 2 项可表示外力。

首先考虑面积分的逼近, 当定解域被离散为有限个小的控制体积后, 设 f 为守恒项 $\rho \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 或耗散项 $\mu \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}$, 则有

$$\int_S f ds = \sum_k \int_{S_k} f_k dS_k \quad (3.3.2)$$

其中 S_k 为第 k 个小控制体的外表面, 这时 f_k 中的 \mathbf{n} 为 S_k 的外法向单位矢量, 设小控制体为正方形平面(二维)或正方体(三维), 在表面积分时(参见图 3-5), 最简单的方法是取界面中心点的值为其平均值。例如: 在二维时, 对于以 O 点为几何中心的小控制体, 如图 3-5a 所示, 取 de 边中点 a 上的值为 de 界面上的平均值。

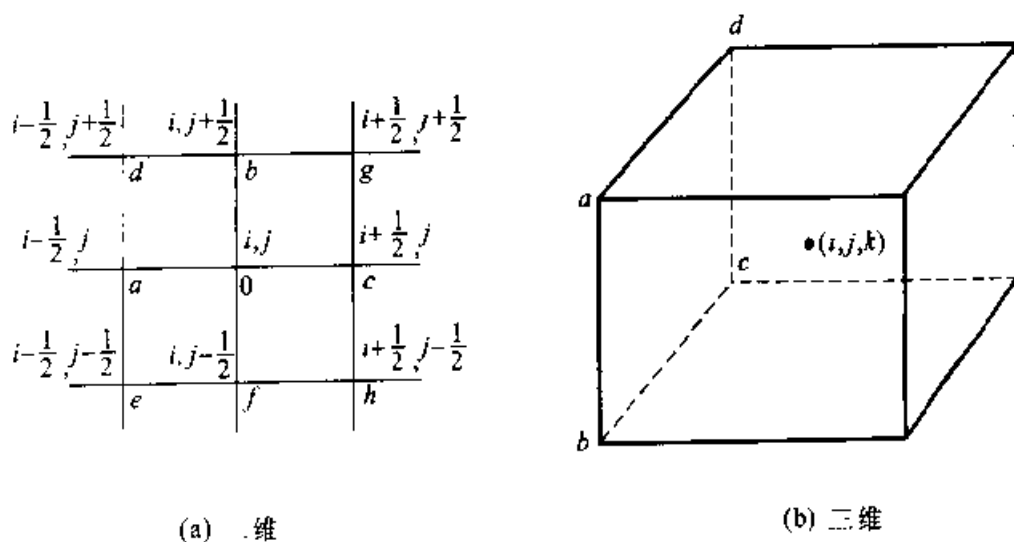


图 3-5 离散控制体

对于体积分, 则有

$$\int_D q dD = \sum_k \int_{D_k} q_k dD_k$$

在积分中可取第 k 个小控制体 D_k 的几何中心点上的值为控制体内的平均值。在二维时, 体积分变为面积分, 若函数 q 以四阶多项式表示, 可写为

$$q(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2 \quad (3.3.3)$$

其系数可以 $(d, b, g, c, o, a, e, f, h)$ 九个点上的函数值确定, 如图 3-5a 所示。取第 k 个控制体积 D_k 的中心点为考察点, 在笛卡儿坐标等距网格 $(\Delta x = \Delta y)$ 的条件下, 积分后由于反对称性, 奇次项将为零, 则有

$$Q_k = \int_{D_k} q_k dD_k \approx \Delta x \Delta y \left[a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta x)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta x^2)(\Delta y^2) \right]$$

将利用以上九点的函数值所求出的系数值 a_i ($i = 0, 3, 4, 8$) 代入上式, 经整理最后可得第 k 个控制体上的积分值:

$$Q_k = \frac{\Delta x \Delta y}{36} (16q_0 + 4q_f + 4q_b + 4q_a + 4q_c + q_h + q_e + q_g + q_d) \quad (3.3.4)$$

这里下标表示节点的位置, 参见图 3-5a。事实上, 式(3.3.3)中函数 $q(x, y)$ 的确定方法有多种, 取决于所选用的网格布局和方法, 且根据不同的物理问题有所不同。这将不在这里讨论了。

在有限体积方法的求解中, 若控制体的界面与求解域 D 的边界有部分相重, 则要求满足所求解问题的边界条件。下面以二维热传导方程为例, 描述有限体积法的求解步骤。

考虑某一容积内的热传导问题, 当热传导系数为常数时, 温度 T 满足 Laplace 方程(2.2.6)。最简单地, 可将定解域 D 划分为有限个相等体积, 如方块体积。内部网格离散点取在体积的几何中心, 边界点取在半点上(参见图 3-5b)。考虑以 (i, j) 点为几何中心的体积 B , 在有限体积方法中, (i, j) 点上的物理量是代表以该点为中心的体积 B 内的平均值。而式(2.2.6)所描述的物理规律是体积 B 内的热流量的变化为零。热流量与温度分布的关系可由 Fourier 关系式给出:

$$q = -k \nabla T$$

对上式取散度, 且考虑到上述物理规律, 则有

$$-\nabla \cdot q = \nabla \cdot (k \nabla T) = 0$$

应用散度定理可得

$$\iiint_D \nabla \cdot (k \nabla T) dD = \iint_S (k \nabla T) \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

这里 \mathbf{n} 为曲面 S 的外法向。对体积(对于二维问题为面积) B 的外表面进行积分(如图 3-5a), 则有(这里仍以边界面中心点上的函数值为边界面上的平均值)

$$\begin{aligned} & -k\Delta y \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2},j} + k\Delta y \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - k\Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} + \\ & k\Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

对于内点, 采用中心差分逼近以上的导数项, 则可得

$$\begin{aligned} & k \frac{\Delta y}{\Delta x} (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + k \frac{\Delta y}{\Delta x} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \\ & k \frac{\Delta x}{\Delta y} (T_{i,j-1} - T_{i,j}) + k \frac{\Delta x}{\Delta y} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

最后可得逼近微分方程(2.2.6)的离散方程:

$$\frac{1}{\Delta x^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}) = 0 \quad (3.3.7)$$

设 (i, j) 点位于边界上, 因方程(2.2.6)的边界条件可有以下形式:

$$h(T_{\infty} - T_{i,j}) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j} \quad (3.3.8)$$

式中的 h 和 k 为常数。边界条件式(3.3.8)的差分形式可写为

$$h(T_{\infty} - T_{i,j}) = \frac{k}{\Delta x}(T_{i,j} - T_{i+1,j}) \quad (3.3.9)$$

从另一方面, 对于有限体积方法, 设体积 B 在 x 方向的外边界为 $x = \Delta x/2$ 处, 按物理的积分守恒关系与式(3.3.6)类似, 参照式(3.3.5)和(3.3.8)可得

$$h(T_{\infty} - T_{i,j}) + \frac{k}{\Delta x}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k\Delta x}{\Delta y^2}(T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}) = 0 \quad (3.3.10)$$

式(3.3.9)与式(3.3.10)之差, 表明了有限差分方法与有限体积法之间在近边界点上的差别。

更重要的是有限体积法更便于求解复杂的计算区域。这种情况下, 计算域内离散后有限个体积的外形可能是任意的多面体(三维), 故面积分后所得的方程(3.3.6)中的函数值可能不是在规正的离散点上, 需通过插值求得。

对于非定常流动, 表征流体运动守恒律的积分方程(3.3.1)中应增加对时间 t 的导数项, 对时间导数项的离散可采用上一节中所给出的方法。

3.4 有限元方法^[4,5]

有限元方法是一种区域性的离散方法。它的特点是对求解域形状没有限制, 边界条件易于处理。适合于具有复杂边界流动域的数值模拟。早期该方法是求解椭圆型方程的有效方法。近年来在流体力学中已逐步得到广泛应用。

3.4.1 加权余量方法

有限元方法的基本思想是以一个近似解逼近所求微分方程的准确解。加权余量方法是导出有限元方法的基本方法之一。它的概念简单, 数学描述较严格。这里以微分方程的初边值问题为例描述该方法。

考虑微分方程的初边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= f, & (0 \leq x \leq X, t \geq 0) \\ u(0, t) &= u_B, & (x = 0, t \geq 0) \\ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} &= g, & (x = X, t \geq 0) \\ u(x, 0) &= u_0, & (0 \leq x \leq X, t = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

或写为更为一般的形式:

$$\left. \begin{aligned} L(u) &= f, & (\text{在 } D \text{ 内}, t \geq 0) \\ S(u) &= u_B, & (\text{在 } \partial D \text{ 上}, t \geq 0) \\ u(x, 0) &= u_0, & (\text{在 } D \text{ 上}, t = 0) \end{aligned} \right\} \quad (3.4.2)$$

这里, L 和 S 是微分算子; D 是问题(3.4.2)解的定义域; ∂D 是区域 D 的边界。设问题(3.4.2)的近似解有以下形式:

$$\hat{u}(x, t) = u_l(x, t) + \sum_{k=1}^N a_k(t) u_k(x) \quad (3.4.3)$$

其中 $u_l(x, t)$ 是满足问题(3.4.2)中的初始条件和边界条件的函数, $u_k(x)$ 为已知的解析函数, 称为基函数, 要求满足式(3.4.2)中右端为零的边界条件, 即

$$S(u_k) = 0, \quad (\text{在边界 } \partial D \text{ 上}, t \geq 0)$$

系数 $a_k(t)$ 将在下面确定。

因为函数空间 $A = \{u_k, k = 1, 2, \dots, N\}$ 是有限维空间, 因此式(3.4.3)所给出的解 $\hat{u}(x, t)$ 一般不可能在定解域 D 内的任意一点上与问题(3.4.2)的准确解 $u(x, t)$ 相同。 $\hat{u}(x, t)$ 只是逼近于准确解 $u(x, t)$ 的近似解。因此将式(3.4.3)代入式(3.4.2)可得余量:

$$R(a_1, a_2, \dots, a_N, x, t) = L(\hat{u}) - f, \quad (\text{在 } D \text{ 上}, t \geq 0) \quad (3.4.4)$$

为了得到逼近微分方程(3.4.2)的近似解, 需求出系数函数 $a_k(t)$, 且要求余量的权积分在 D 上为零:

$$\int_D W_l R dD = 0, \quad [l = 1, 2, \dots, N, W_l = W_l(x)] \quad (3.4.5)$$

或写为更为一般的形式。即要求加权余量的内积为零:

$$(R, W_l) = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4.6)$$

这里 $W = \{W_l, l = 1, 2, \dots, N\}$ 称为 L_2 空间中的权函数集。为了使式(3.4.6)是相互无关的独立关系式, 可用于确定系数函数 $a_k(t)$, 显然要求 W_l 是线性无关的函数。式(3.4.5)或式(3.4.6)的收敛条件要求, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, W 是一完备的函数集, 即在 L_2 空间中任何一个函数都可通过 W_l 的线性组合表示。由式(3.4.6)可知, 余量 R 与 $\{W_l\}$ 中每一个函数正交。这就是说若这样的权函数有无限多个, 则余量就均匀一致地趋于零, 也就是说 R 处处为零, 所以 $\hat{u}(x, t)$ 就趋近于准确解 $u(x, t)$ 。或简单叙述如下: 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 余量 R 按 L_2 模收敛于零。如果余量 R 按 L_2 模收敛于零, 且近似解满足边界条件和初始条件, 则近似解 $\hat{u}(x, t)$ 收敛于问题(3.4.2)的准确解 $u(x, t)$ 。可表示为: $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\hat{u} - u\| = 0$ 。这就是加权余量法的基本思想。

从上所述可以看到, 加权余量法用于求解流体力学问题时, 主要困难是对于复杂流动域, 要找到在整体计算域上满足所有边界条件的特解 $u_l(x, t)$ [参见式(3.4.3)] 是很困难的; 同样, 要找到在整体计算域上线性无关、满足齐次边界条件的基函数 $\{u_k(x)\}$ 也是很困难的。而有限元方法利用区域离散和分段(块)插值的方法克服了这一困难。另外, 加权余量法中求解方程的系数矩阵几乎是满阵, 故要求的计算时间长。而有限元法可得到带形稀疏的矩阵, 故可提高计算效率。

在式(3.4.6)中选用不同的权函数, 就可得到不同的加权余量方法。下面给出 4 种常用的方法。

1. Galerkin 方法

在式(3.4.6)中取权函数与基函数相等, 则得加辽金(Galerkin)方法:

$$W_k(x) = u_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4.7)$$

当 $\{u_k\}$ 是一个线性无关的完备系时, 按照泛函分析的定理^[4]可知, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\|R\|_{L_2} \rightarrow 0$ 。这里 $\|\cdot\|_{L_2}$ 表示 L_2 空间的模。

2. 配置法(Collocation Method)

配置法的基本思想就是使其近似解在离散点上满足微分方程, 且对应的权系数也写在离散点上。如在式(3.4.6)中, 取权函数为 delta 函数, 则得配置法:

$$W_l(x) = \delta(x - x_l), \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4.8)$$

这里

$$\int_D \delta(x - x_l) dD = 1, \quad (\delta(x - x_l) = 0, \text{ 当 } x \neq x_l)$$

利用 delta 函数的性质从式(3.4.5)可知

$$R(x_l, t, a_1, \dots, a_N) = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

这表明余量 R 在配置点 x_l 上为零。当配置点为某一正交多项式的零点时, 该方法被称为正交配置方法。

3. 子域方法(Subdomain Method)

将定义域 D 分为 N 个子区域 D_l , 取权函数为

$$W_l(x) = \begin{cases} 1, & (\text{当 } x \in D_l, l = 1, 2, \dots, N) \\ 0, & (\text{当 } x \notin D_l, l = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (3.4.9)$$

则得子域方法。这类似于有限体积方法。

4. 最小二乘法

取权函数为

$$W_l(x) = \frac{\partial R}{\partial a_l}, \quad (l = 1, 2, \dots, N) \quad (3.4.10)$$

代入式(3.4.5)得

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_l} \int_b R^2 dx = 0$$

这相当于余量平方积分达到最小值。或将式(3.4.10)代入式(3.4.6), 则得

$$\left(R, \frac{\partial R}{\partial a_l} \right) = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, N)$$

这等价于选择 a_l , 使得 (R, R) 达到最小值。该方法由此得名为最小二乘法。

3.4.2 有限元方法

如前所述, 有限元方法的基本思想是采用近似解逼近微分方程的准确解。该方法不同于有限差分方法, 也不同于加权余量法, 其近似解不是对节点函数的近似, 也不是对整个计算域的逼近, 而是采用分段(块)逼近的方法。因此该方法便于求解复杂计算域, 便于边界条件处理。有限元法可采用变分原理或加权余量法建立离散方程。下面以二维 Poisson 方程的混合边值问题为例, 简要描述利用加权余量法建立有限元方程的基本思想。

考虑如下边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f, \quad (\text{在 } D \text{ 内}) \\ u \Big|_{\Gamma_1} &= g \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= h \end{aligned} \right\} \quad (3.4.11)$$

这里 D 为问题(3.4.11)的定解域, ∂D 为 D 的边界, $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, 即 ∂D 由 Γ_1 和 Γ_2 两部分组成。对于以上问题, 有限元法的求解过程可简述如下: 首先将计算域 D 划分为互不重叠的 N_1 个子域, D_l 称为有限单元。单元的形状可以任意, 一般对于二维情况, 单元可是三角形、直线或曲线所组成的四边形; 对于三维问题可为四面体或六面体。它们相互之间的连结点称为单元节点, 如图 3-6 所示。这里选用三角形为子域

D_l , $D = \bigcup_{l=1}^{N_1} D_l$ 。同样, 边界 Γ_1 和 Γ_2 也被直线或曲线段所分割, 且有

$$\Gamma_1 = \bigcup_{l=1}^{N_{\Gamma_1}} \Gamma_l^{(1)}, \quad \Gamma_2 = \bigcup_{l=1}^{N_{\Gamma_2}} \Gamma_l^{(2)}$$

其次, 对每一个单元内任一点的函数值 u , 可通过插值公式用节点

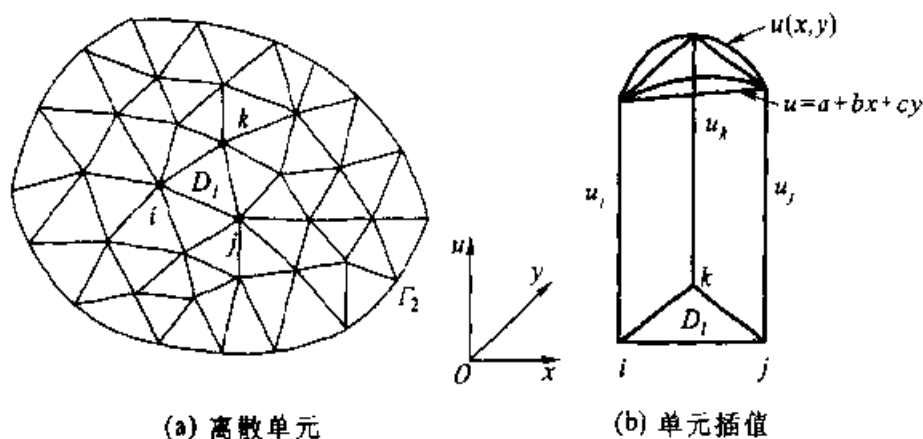


图 3-6 有限单元示意图

上的函数值来表示,称为分块插值方法。例如,对于任一个三角形 D_l ,三个顶点对应的节点为 i, j, k ,如图 3-6a 所示,其函数值分别为 u_i, u_j 和 u_k 。若采用 x, y 的线性插值多项式,则子域 D_l 内任一点的函数值可表示为 $u = a + bx + cy$,其系数可由节点上的函数值 u_i, u_j 和 u_k 来确定。

$$\text{设} \quad \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (3.4.12)$$

这里 (x_l, y_l) 为点 l 处 ($l = i, j, k$) 在 (x, y) 方向的坐标值。

$$\text{则} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} \quad (3.4.13)$$

$$\text{其中} \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \text{是三角形面积}$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & a_j &= x_k y_i - x_i y_k, & a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_k, & b_j &= y_k - y_i, & b_k &= y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j, & c_j &= x_i - x_k, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4.14)$$

利用式(3.4.13),在子域 D_l 内任一点 (x, y) 的函数值可由下式给出:

$$u = (1, x, y) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} (1, x, y) \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix}$$

$$= [N_i(x, y), N_j(x, y), N_k(x, y)] \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \sum_l N_l(x, y) u_l$$

$$u = \sum_l N_l u_l \quad (3.4.15)$$

其中

$$N_l(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_l + b_l x + c_l y), \quad (l = i, j, k)$$

N_l 称为形函数或插值函数，它有如下基本性质：

$$(1) \sum_{l=i,j,k} N_l(x, y) = 1, \quad (0 \leq N_l \leq 1) \quad (3.4.16)$$

$$(2) N_l(x_l, y_l) = \begin{cases} 1, & (\text{当 } l = i) \\ 0, & (\text{当 } l = j, k) \end{cases} \quad (3.4.17)$$

这两个性质对于寻找等参数单元的形函数十分有用。

如前所述，式(3.4.15)和形函数 $N_l(x, y)$ 都只是对于某一单元内 u 的插值公式和形函数。对于计算域 D ，引入整体形函数 $N_j(x, y)$ ，则整体插值函数可写为以下形式：

$$u = \sum_{j=1}^K N_j(x, y) u_j \quad (3.4.18)$$

这里 K 为区域 D 上所有的节点数。整体形函数在 j 点上 $N_j(x, y) = 1$ ，在其他点上值为零。在线性插值的情况下，整体形函数具有伞形或塔形的分布(见图 3-7)，故称其为伞形或塔形函数。

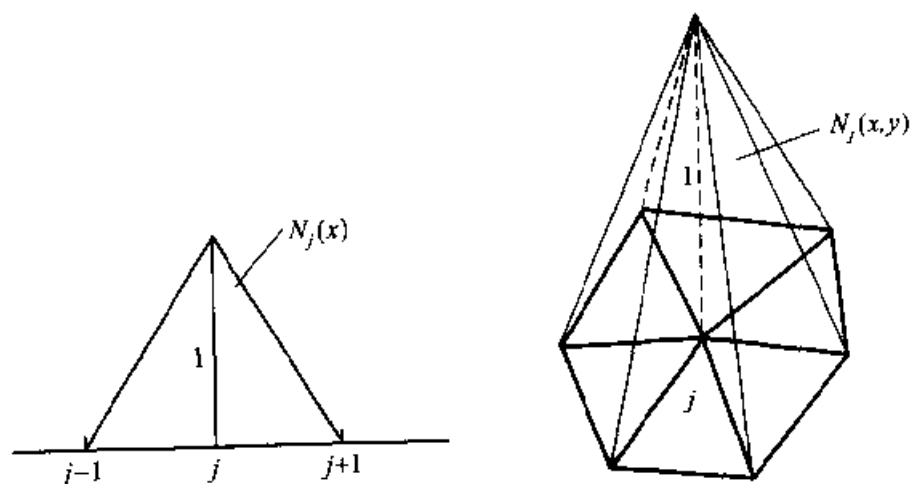


图 3-7 伞形函数示意图

有了整体插值公式(3.4.18)，可采用不同的加权余量方法建立有限元方程。下面利用 Galerkin 加权余量方法，讨论有限元法建立离散化方程的过程。

各项。

首先讨论内部单元。为此利用插值公式(3.4.15)，单元 D_i 内任意一点 (x, y) 上的未知函数 $u^{(i)}$ 可写为

$$u^{(i)} = \sum_{i=1}^p N_i(x, y) u_i^{(i)} \quad (3.4.21)$$

这里 p 为单元节点数目，对三角形单元 $p = 3$ 。对于内部单元，由于边界积分项为零，若仍取 $N_i(x, y)$ 为权函数，则式(3.4.20)可简化为

$$- \iint_{D_i} \nabla N_i \cdot \nabla u^{(i)} dx dy = \iint_{D_i} f N_i dx dy \quad (3.4.22)$$

首先讨论式(3.4.22)的左端项。将式(3.4.21)中 $u^{(i)}$ 的表达式代入式(3.4.22)，并考虑到 $u^{(i)}$ 在单元节点上的值 $u_i^{(i)}$ 与积分无关，则该项可写为

$$\begin{aligned} B_i &= \iint_{D_i} \nabla N_i \cdot \nabla u^{(i)} dx dy = \iint_{D_i} \nabla N_i \cdot \nabla \left(\sum_j N_j u_j^{(i)} \right) dx dy \\ &= \sum_{j=1}^p u_j^{(i)} \cdot \iint_{D_i} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

或写成矢量型： $i = 1, 2, \dots, p$

$$B_i = \mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} \quad (3.4.23)$$

矩阵 $[\mathbf{k}^{(i)}]$ 称为单元影响系数矩阵，或称单元刚度矩阵，其元素有如下形式：

$$k_{i,j}^{(i)} = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.4.24)$$

类似地，方程(3.4.22)中的右端项可写为矢量型：

$$C = \mathbf{P}^{(i)} \quad (3.4.25)$$

$$p_i^{(i)} = - \iint_{D_i} f N_i dx dy \quad (3.4.26)$$

当单元为三角形时，矩阵 $\mathbf{k}^{(i)}$ 是 3×3 的方阵， $\mathbf{P}^{(i)}$ 为三元素矢量，或称单元载荷矢量。将式(3.4.23)和(3.4.25)代入式(3.4.22)，则可得矢量型的内部单元方程：

$$\mathbf{k}^{(i)} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{P}^{(i)} \quad (3.4.27)$$

现在来讨论边界元的单元方程。对于边界单元，式(3.4.20)可写为

$$\oint_{S^{(i)}} N_i \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n} ds - \iint_{D_i} \nabla N_i \cdot \nabla u^{(i)} dx dy = \iint_{D_i} f N_i dx dy \quad (3.4.28)$$

其中 $S^{(i)}$ 为单元 D_i 的边界， n 为边界的外法向。现分别讨论式(3.4.28)

中的各项。不难看出该式中的左端第二项与内部单元相同。式中左端第一项为边界积分项, 根据问题(3.4.11)中给出的边界条件, 如果边界单元的 bc 段是在 Γ_2 上, 则对应为 Neumann 边界条件, 且有

$$\int_{bc} N_i \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n} ds = \int_{bc} N_i h(x, y) ds = H_i^{(i)}$$

此时, 只需对式(3.4.27)中的 $p_i^{(i)}$ 项作如下修正:

$$p_i^{(i)} = - \iint_{\Omega_i} f \cdot N_i dx dy + \int_{bc} N_i h(x, y) ds \quad (3.4.29)$$

若 bc 段是在 Γ_1 上, 则对应为 Dirichlet 边界条件, 利用式(3.4.21)可有

$$\int_{bc} N_i \frac{\partial u^{(i)}}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^p u_j^{(i)} \int_{bc} N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y \right) ds = \sum_{j=1}^p g_{i,j}^{(i)} u_j^{(i)} \quad (3.4.30)$$

$$g_{i,j}^{(i)} = \int_{bc} N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y \right) ds \quad (3.4.31)$$

式(3.4.30)中在边界点上的 $u_j^{(i)}$ 为已知, 可将其放入矢量 $p_i^{(i)}$ 中。内点 $u_j^{(i)}$ 为未知数, 因此, 这时边界积分项将对矩阵 $k^{(i)}$ 有贡献, 其元素应写为以下形式:

$$k_{i,j}^{(i)} = \iint_{\Omega_i} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy - \int_{bc} N_i \frac{\partial N_j}{\partial n} ds \quad (3.4.32)$$

从以上的讨论可以看出, 对于边界单元, 其单元方程形式上与式(3.4.27)相同, 只是系数矩阵 $k^{(i)}$ 和右端矢量 $P^{(i)}$ 的元素应根据不同的边界条件由式(3.4.32)和(3.4.29)确定。

原则上将针对每个单元求出的各项代入式(3.4.20), 则可得对于求解域 D 的总体代数方程组:

$$KU = P \quad (3.4.33)$$

应当指出, 式(3.4.27)只对单元有效, 它是针对单元节点写出的方程。对于三角形单元式(3.4.27)中的系数矩阵为 3×3 矩阵, 右端项为三元素矢量。而我们的目的是要针对整个求解域 D 的所有节点上的未知函数 u_j 给出求解方程(3.4.33)的具体表达式, 它的系数矩阵为 $N \times N$ 矩阵, 右端项为 N 元素矢量, 这里 N 为求解域 D 上的所有节点数。下面利用影响系数方法给出式(3.4.33)的具体表达式。事实上, 在求解域中任意一个节点上都据有单元编号(对于单元)和总体编号(对于总体计算域)两种, 这是不能混淆的。为了便于说明问题, 设求解域 D 为一四边形所包含的区域, 如图 3-9 所示, 单元为三角形, 这时有单元 I 和单

元Ⅱ。图中圆圈标号为单元节点标号，总的节点标号为 1, 2, 3, 4。假设对每个单元 D_l (这里 $l=1, 2$) 已导出单元方程：

$$\begin{pmatrix} k_{11}^{(l)} & k_{12}^{(l)} & k_{13}^{(l)} \\ k_{21}^{(l)} & k_{22}^{(l)} & k_{23}^{(l)} \\ k_{31}^{(l)} & k_{32}^{(l)} & k_{33}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(1)}^{(l)} \\ u_{(2)}^{(l)} \\ u_{(3)}^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{(1)}^{(l)} \\ p_{(2)}^{(l)} \\ p_{(3)}^{(l)} \end{pmatrix} \quad (3.4.34)$$

从图 3-9 不难看出，单元Ⅰ和单元Ⅱ皆为边界单元。设单元Ⅰ与边界 Γ_1 相连而单元Ⅱ与边界 Γ_2 相连，则对于单元Ⅰ系数矩阵 $k^{(1)}$ 的元素将由式 (3.4.32) 给出，而右端的矢量的元素将由式 (3.4.26) 给出；对于单元Ⅱ系数矩阵 $k^{(2)}$ 的元素将由式 (3.4.24) 给出，而右端的矢量的元素将由式 (3.4.29) 给出。

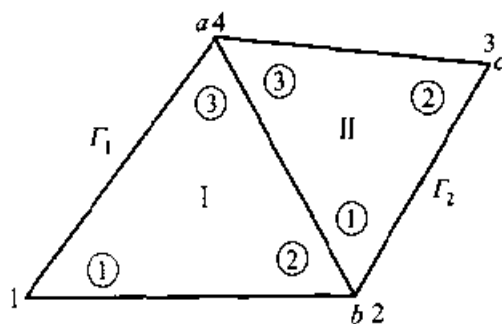


图 3-9 四边形区域

我们的目的是要由此导出总体 4 个节点上未知函数的代数方程，其系数矩阵为 4×4 矩阵，右端项为 4 元素矢量。为此，将引出影响系数矩阵 k 的实质含意，也就是将矩阵每一个元素 $k_{ij}^{(l)}$ 看为第 j 点对第 i 点的影响系数，表示为以下形式：

$$k_{i,j}^{(l)} = k_{i \leftarrow j}^{(l)} \quad (3.4.35)$$

从图 3-9 可以看出，单元节点编号与总体编号有以下关系：

$$1^{(1)} = 1, 2^{(1)} = 2, 3^{(1)} = 4$$

$$1^{(2)} = 2, 2^{(2)} = 3, 3^{(2)} = 4$$

这里，上标表示单元号。以上关系式表明总体影响系数矩阵的元素与单元影响系数矩阵的元素有以下关系：

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{11}^{(1)}, \quad k_{12} = k_{12}^{(1)}, \quad k_{13} = 0, \quad k_{14} = k_{13}^{(2)} \\ k_{21} &= k_{21}^{(1)}, \quad k_{22} = k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}, \quad k_{23} = k_{12}^{(2)}, \quad k_{24} = k_{23}^{(1)} + k_{13}^{(2)} \\ k_{31} &= 0, \quad \dots \end{aligned}$$

也就是说，第三点对第一点没有影响，这反映了有限元方法的区域性离散的特征。而第二节点，它既是第一单元的第②点又是第二单元的第①点，所以这里包含了第一单元之中第②点对第②点的影响，也包含了第二单元中第①点对第①点的影响。同理，可确定方程 (3.4.33) 中右端的矢量 P 的分量： $P_1 = p_{(1)}^{(1)}$ 而 $P_2 = p_{(2)}^{(1)} + p_{(1)}^{(2)} \dots$ ，由此可给出总体影响系数矩阵及其代数方程组。式 (3.4.33) 的具体表达式可写为

$$\begin{pmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & k_{13}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{23}^{(1)} + k_{13}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} + k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} + p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_3^{(1)} + p_3^{(2)} \end{pmatrix} \quad (3.4.36)$$

当由方程(3.4.33)求出所有节点上的 u 值之后, 要求流场中任一点上的 u 或 u_x , u_y 值, 则首先要判别该点落在那一个单元, 然后按插值公式(3.4.15)可求出该点处 u 和 u_x , u_y 的值:

$$u = \sum_l N_l(x, y) \cdot u_l$$

$$u_x = \sum_l \frac{\partial N_l}{\partial x} \cdot u_l$$

$$u_y = \sum_l \frac{\partial N_l}{\partial y} \cdot u_l$$

这里 u_l 为单元节点值。

3.4.3 形函数和等参数变换

正如前面所述, 在有限单元法的计算中, 单元内的插值公式可有不同的选取, 通常选取多项式函数。根据插值公式的不同, 单元的类型也有所不同, 常用的有以下两类: 一为单纯形单元, 它的插值函数(即形函数)往往是常数或线性函数, 单元的顶点取为节点。如上面所述的三角形单元, 或 4 个结点的四边形单元。另一类称为复纯形单元, 它的形状与单纯形单元相同, 而插值函数是 x 、 y 的二次或三次以上的多项式。因此插值点不只是三角形或四边形单元的顶点, 在单元边界上或在单元内部有附加节点, 如图 3-10 所示的三角形 10 节点单元和四边形 8 节点单元。

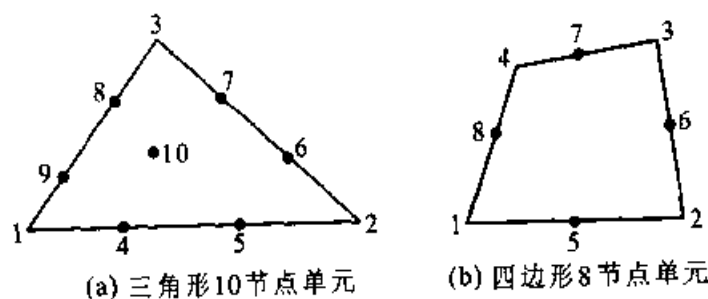


图 3-10 复纯形单元

一般来讲, 采用高阶插值函数将提高方法的精度, 特别是对曲线边界的单元。在求解流体力学问题时, 多采用二阶或三阶插值式。例如, 对于四边形 8 节点单元, 插值函数可取为

$$u = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^2y + hxy^2$$

这种取法保证了形函数的对称性。

应当指出，在有限元法中，采用曲线边界的单元显然比直线边界单元有更高的精度，且便于边界处理。为了针对曲线单元建立形函数，则需引入“等参数”变换的概念。另一方面，从上一节可知，为了形成单元刚度矩阵和载荷矢量，必须计算单元上的积分。为了快速精确地计算这些积分，一个有效的方法是将不同的三角形或四边形单元通过坐标变换转换为标准单元形状，如等腰三角形或正四边形。这也需要“等参数”变换。下面以三角形单元为例简述“等参数”变换的概念。

对于一个单元，如果存在某种表征单元内任何一点位置的坐标，在单元的每条边界上为一条坐标线，则称其为自然坐标。有限元法中使用的面积坐标就是一种自然坐标。对于三角形单元，即为三角形面积坐标： L_1, L_2, L_3 。三角形内任一点 $P(x, y)$ 可用三个面积坐标来确定。定义三角形面积坐标为

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.4.37)$$

其中 A 为三角形总面积， A_i 是 P 点与 2, 3 两点连线构成的小三角形面积(参见图 3-11)。

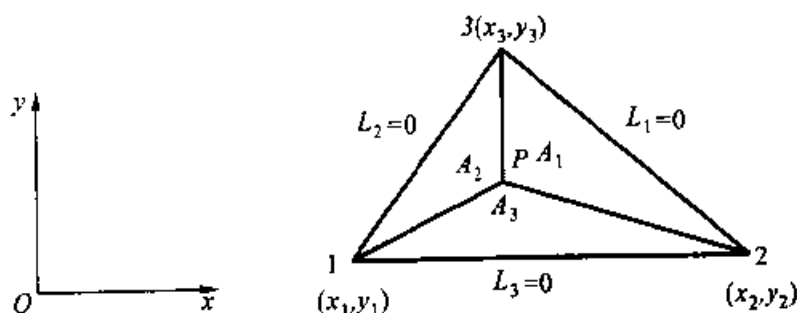


图 3-11 三角形面积坐标

由式(3.4.37)可知：

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = 1$$

即 L_1, L_2, L_3 中只有 2 个是独立的，且 L_i 具有与形函数 N_i 相同的性质 [参见式(3.4.16)和(3.4.17)]。由三角形面积可得

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_2 y_3 - y_2 x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \end{aligned}$$

与式(3.4.15)比较可知:

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3$$

不难验证直角坐标 \$(x, y)\$ 与自然坐标 \$(L_1, L_2, L_3)\$ 之间有以下变换关系式:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = \sum_{i=1}^3 l_i x_i = \sum_{i,j,k} N_i x_i \\ y &= \sum_{i,j,k} N_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4.38)$$

式(3.4.38)称为“等参数”变换式。

下面再以四边形单元为例, 讨论该转换关系。为了简单, 考虑在 \$(x, y)\$ 坐标内的一矩形单元, 如图 3-12a 所示。

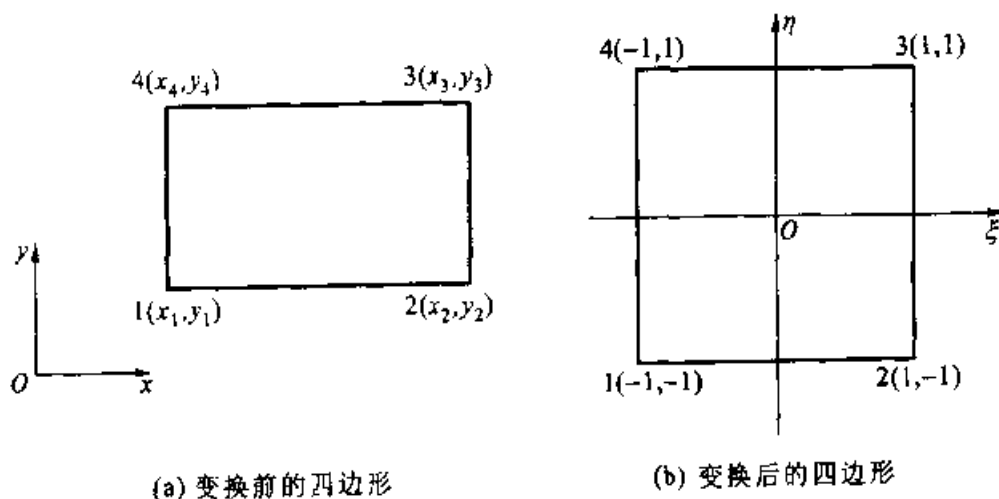


图 3-12 四边形单元的变换

取两对边中点连线的交点为坐标原点, 两对边中点连线对应为 \$\xi\$ 轴和 \$\eta\$ 轴, 如图 3-12 所示。引入坐标变换:

$$\xi = \frac{x - \bar{x}}{x_2 - x_1}, \quad \eta = \frac{y - \bar{y}}{y_2 - y_1} \quad (3.4.39)$$

式(3.4.39)将矩形单元变换为 \$(\xi, \eta)\$ 平面内的正方形单元, 且 4 条边分别为 \$\xi = \pm 1\$ 和 \$\eta = \pm 1\$。不难看出坐标 \$(\xi, \eta)\$ 为自然坐标。将式(3.4.39)的逆变换写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4.40)$$

不难求出

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i), \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.4.41)$$

其中 $\xi_1 = \xi_4 = -1$, $\xi_2 = \xi_3 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = -1$, $\eta_3 = \eta_4 = 1$ 。可以看出, N_i 具有形函数所有的性质: 在第 i 点为 $1/4$, 在其他点上为零, 且

$\sum_{i=1}^4 N_i = 1$, 矩形单元内任一点上的函数值可按下式计算:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i \quad (3.4.42)$$

将变换关系式(3.4.40)的逆变换写为更一般的形式:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (3.4.43)$$

则正变换为

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (3.4.44)$$

可以看出, 对于正变换式(3.4.44), 给定 (ξ, η) 值, 很容易求出 (x, y) 的值; 而给定 (x, y) 值, 则需通过迭代才能求出 (ξ, η) 的值, 对于正变换式(3.4.43)则刚好相反。

对于 2 次插值函数, 利用四边形 8 节点, 则有变换

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4.45)$$

其形函数为

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_1)(1 + \eta\eta_1)(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 - 1), \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_5)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_6)(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_7)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1 + \xi\xi_8)(1 - \eta^2)$$

变换式(3.4.45)还可作为曲边四边形变换为正方形的变换关系式。若取变换式为二次函数, 这相当于用抛物线来近似该曲边。对于三角形单元, 也可采用相同的方法将曲边三角形变换为标准等腰三角形。

从以上讨论可以看到, 对于坐标 x, y 和函数 u 采用了相同的插值公式:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^m N_i u_i$$

且形函数采用了同一种形函数 $N_i(\xi, \eta)$, 这种单元表示法称为等参元

方法。

引入等参元后, 积分计算也应从 (x, y) 平面转换到 (ξ, η) 平面上, 为此, 有以下变换:

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = J d\xi d\eta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

引进等参数变换的好处, 不仅能曲线边界能更好的逼近, 更主要的是在形成刚度矩阵和载荷矢量的过程中, 积分计算更为方便。

3.5 谱方法^[4]

谱方法是一高精度的计算方法。当微分方程的解足够光滑时, 谱方法给出的近似解将以很高的精度逼近微分方程的准确解, 且收敛速度快。另一个特点是该方法所得的近似解是对于整体计算域的近似, 而不是对局域的近似。这是区别于有限元方法的重要特征。快速 Fourier 变换(简称 FFT)的出现, 进一步促进了谱方法的发展。

谱方法仍是以一近似解逼近微分方程的精确解。前面所述的加权余量方法也是推导谱方法的具体方法之一, 这里通过具体算例, 给出谱方法的基本思想。

1. 谱方法的基本思想

考虑热传导方程的初边值问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, & (0 \leq x \leq \pi, t \geq 0) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & (t \geq 0) \\ u(x, 0) &= f(x), & (0 \leq x \leq \pi) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

采用分离变量法, 式(3.5.1)的解可写为以下形式:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.5.2)$$

这里 $\{\varphi_n\}$ 为满足边界条件的完备函数集, 即任意一个函数 $u(x, t)$ 都可通过函数集 $\{\varphi_n\}$ 的线性组合来表示。将式(3.5.1)中满足边界条件的初值函数 $f(x)$ 也以 Fourier 级数展开:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \varphi_m(x)$$

取基函数 $\varphi_m(x)$ 为三角函数, 如 $\varphi_m(x) = \sin(mx)$. 对上式两端乘以 $\sin(nx)$, 并从 0 到 π 进行积分, 并利用 $\sin(nx)$ 的正交性, 则可得

$$f_n = \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

利用线性问题的迭加原理, 现考虑单个 Fourier 模态

$$u_n(x, t) = a_n(t) \sin(nx) \quad (3.5.3)$$

将式(3.5.3)代入式(3.5.1)中的微分方程, 可求出

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

问题(3.5.1)的一般解应为单个模的线性组合

$$u(x, t) = \sum_1^\infty a_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

这里 a_n 为与 t 无关的常数。要求当 $t=0$ 时, 满足初始条件:

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_1^\infty f_n \sin(nx)$$

则有: $a_n = f_n$ 。这样, 对于线性问题(3.5.1)的准确解, 在 L_2 空间有以下形式:

$$u(x, t) = \sum_1^\infty f_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad (3.5.4)$$

只要函数 $f(x)$ 是逐段连续, 在 $(0, \pi)$ 内二次可积, 即 $\int_0^\pi f^2(x) dx$ 有界, 则级数式(3.5.4)总是收敛的。谱方法的基本思想是将无穷级数式(3.5.2)截断到 N 项, 取所得的近似函数 $u_N(x, t)$ 逼近准确解 $u(x, t)$:

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \varphi_n(x) \quad (3.5.5)$$

其中 $\varphi_n(x)$ 为基函数。若仍选用三角函数为基函数, 则对于问题(3.5.1)的近似解可写为

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin(nx) \quad (3.5.6)$$

将式(3.5.6)代入式(3.5.1)可得系数 $a_n(t)$ 的常微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_n(t)}{dt} &= -n^2 a_n(t) \\ a_n(0) &= f_n, \quad (n=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.7)$$

由此可求出:

$$a_n(t) = f_n e^{-n^2 t}, \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3.5.8)$$

将系数 $a_n(t)$ 的表达式代入式(3.5.6), 则可求出逼近准确解 $u(x, t)$ 的近似解 $u_N(t)$ 。由式(3.5.4)和(3.5.6)可得近似解的逼近误差:

$$R_N = \left| u(x, t) - u_N(x, t) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n e^{-n^2 t} \sin nx \right|$$

可以看出:

$$R_N \leq C e^{-N^2 t} \quad (3.5.9)$$

其中 C 是与 N 无关的常数。这就表明, 对于任意 $t > 0$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时 R_N 将以比 $e^{-N^2 t}$ 更快的速度趋近于零, 使近似解 $u_N(x, t)$ 逼近准确解。而对于热传导方程的半离散化差分方程, 其数值解当 $N \rightarrow \infty$ (这里 N 为空间网格点数) 时, 逼近准确解的误差仅随 N 的增加以代数型衰减, 而谱方法随截断项 N 的增加是以指数型衰减, 由此可知谱方法有更高的精度。采用 3.4.1 节中所述的加权余量方法, 针对问题(3.5.1), 谱方法可简述如下: 因式(3.5.5)为近似解, 将其代入式(3.5.1)中的微分方程, 则可得余量

$$R = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} \varphi_n - a_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right) \quad (3.5.10)$$

为了求得逼近微分方程的近似解, 需求出系数函数 $a_n(t)$, 且要求余量的权积分在定解域 D 上 (这里 $D: 0 \leq x \leq \pi$) 为零:

$$\int_0^{\pi} w_l R dx = 0$$

$$\text{即} \quad \sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial a_n}{\partial t} (\varphi_n w_l) - a_n \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2}, w_l \right) \right] = 0 \quad (3.5.11)$$

这里 w_l 为权函数。

初始条件为

$$u_N(x, 0) = f_N(x) = \sum_{n=1}^N f_n \cdot \varphi_n \quad (3.5.12)$$

故 $a_n(0) = f_n$ 。

这样, 我们就建立了求解系数函数 $a_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$ 的方程(3.5.11)。正如前面所述, 采用不同的权函数, 则可得不同的谱方法。

从以上可以看出, 对于谱方法首先要求选取正交基函数 $\{\varphi_n, n = 1, 2, \dots, N\}$, 即相互线性无关, 且内积为零的函数集。一般要求基函数满足边界条件 (否则将导出称为 Tan 逼近的方法)。在应用中, 多采用三角多项式和 Chebyshev 多项式为基函数, 其次必须考虑有限截断所得的近

似解对无限维准确解的逼近问题。

2. 拟谱方法

前面的讨论是要求其解在整个定义域 D 内近似地满足方程, 而拟谱方法的基本思想是要求在定解域 D 内的离散点上满足方程。设 φ_n 是满足边界条件的完备函数集, 近似解仍以式(3.5.5)表示。因只要求近似解在离散点上满足方程, 则将式(3.5.5)代入微分方程(3.5.1)中, 且令 $x = x_j$, 可得

$$\sum_{n=1}^N \left[\frac{\partial a_n}{\partial t} \varphi_n(x_j) - a_n(t) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_{x=x_j} \right] = 0, \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad (3.5.13)$$

式(3.5.13)为求解系数函数 $a_n(t)$ 的 N 个微分方程, 由于 $x = x_j$ 是给定的, 故方程(3.5.13)为一常系数的常微分方程组, 便于求解。

若选基函数 $\{\varphi_n\}$ 为切比雪夫(Chebyshev)多项式 $\{T_n, n=0, 1, \dots\}$, 则近似解可写为

$$\left. \begin{aligned} u_N(x, t) &= \sum_{n=0}^N a_n(t) T_n(x) \\ T_n(x) &= \cos(n \cdot \arccos x) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.14)$$

则由式(3.5.13)可得

$$\sum_{n=0}^N \frac{da_n}{dt} T_n(x_j) = \sum_{n=0}^N a_n T_n''(x_j) \quad (3.5.15)$$

这里 T_n'' 是 T_n 对 x 的 2 阶导数。

3. Fourier 级数展开方法

Fourier 级数展开方法是近年来应用很广的方法。特别在不可压湍流的直接数值模拟中应用更多。该方法是谱方法的一种特殊形式, 其基本思想是在谱空间利用 Fourier 级数展开, 建立谱方法的求解方程。而拟谱方法只要求在离散点上满足方程, 其优点是对于非线性问题可免去复杂卷积的运算。现以非线性模型方程为例说明该问题。

考虑非线性模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x \in [0, 2\pi], t \geq 0) \quad (3.5.16)$$

将式(3.5.16)的精确解在谱空间按 Fourier 级数展开:

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(t) e^{ikx} \quad (3.5.17)$$

这里 $i = \sqrt{-1}$ 。

谱方法的基本思想是对精确解式(3.5.17)取有限波数范围 $(-k_m,$

k_m), 作为逼近精确解的近似解, 可写为以下形式:

$$\hat{u}(x, t) = \sum_{k=-k_m}^{k_m} a_k(t) e^{ikx} \quad (3.5.18)$$

这时, 基函数 e^{ikx} 是以 k_m 为周期。对式 (3.5.18) 求导, 并代入式 (3.5.16) 中的微分方程, 则得

$$\sum_{k=-k_m}^{k_m} a'_k(t) e^{ikx} + \left[\sum_{l=-k_m}^{k_m} a_l(t) e^{ilx} \right] \left[\sum_{m=-k_m}^{k_m} i m a_m(t) e^{imx} \right] = 0 \quad (3.5.19)$$

上式中的第 2 项, 对应于模型方程 (3.5.16) 中的非线性项:

$$II = \sum_{l=-k_m}^{k_m} \sum_{m=-k_m}^{k_m} [i m a_l(t) a_m(t) e^{i(m+l)x}]$$

设 $m+l=k$, $l=k-m$, 对应的定义域为 $k: [-2k_m, 2k_m]$; $l: [k-k_m, k+k_m]$ 。定义: $A_k = \sum_{m=-k_m}^{k_m} m a_{k-m}(t) a_m(t)$, 则有:

$$II = \sum_{k=-2k_m}^{2k_m} (i A_k e^{ikx}) \quad (3.5.20)$$

由于我们选用的有限波数范围为 $[-k_m, k_m]$, 故可近似地将式 (3.5.20) 写为以下形式 (由此带来的误差将在后面讨论)。

$$II = \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left[\sum_{m=-k_m}^{k_m} i m a_{k-m}(t) a_m(t) \right] e^{ikx} \quad (3.5.21)$$

该乘积项称为卷积。将式 (3.5.21) 代入式 (3.5.19), 则有:

$$\sum_{k=-k_m}^{k_m} \left[a'_k(t) + i \sum_{m=-k_m}^{k_m} m a_{k-m}(t) a_m(t) \right] e^{ikx} = 0$$

由于 e^{ikx} 为正交函数基, 故可得:

$$\frac{da_k(t)}{dt} + i \sum_{m=-k_m}^{k_m} m a_{k-m}(t) a_m(t) = 0, \quad (k = -k_m, -k_m+1, \dots, k_m) \quad (3.5.22)$$

系数 $a_k(t)$ 可由式 (3.5.22) 中的 $2k_m+1$ 个数微分方程组确定, 该方程组可采用 R-K 方法求解。

从以上可以看出, 当微分方程中存在有非线性项时, 该项的卷积使算法更加复杂。若采用离散点上的 **Fourier 变换** 及其逆变换, 即采用拟谱

方法则可免去卷积的计算。下面仍以非线性方程(3.5.16)为例说明该问题。将方程(3.5.16)的定义域 $[0, 2\pi]$ 分成 N 等分, 取空间步长 $\Delta x = 2\pi/N$, $x_j = j\Delta x$, 对于求解域内的离散函数 $u(x_j, t)$, 其近似解可写为以下形式:

$$u(x_j, t) = \frac{1}{N} \sum_k \hat{u}(k, t) e^{ikx_j}, \quad x_j = j \frac{2\pi}{N}$$

这里 $\hat{u}(k, t)$ 是 Fourier 级数的系数, 对应于式(3.5.18)中的 $a_k(t)$ 。

定义 \mathcal{F} 为 Fourier 变换算子, \mathcal{F}^{-1} 为其逆变换算子, 则有

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, t) = \mathcal{F}u &= \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j, t) e^{-ikj2\pi/N}, \\ \left(k = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \end{aligned} \quad (3.5.23a)$$

逆变换:

$$\begin{aligned} u(x_j, t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{u} &= \frac{1}{N} \sum_k \hat{u}(k, t) e^{ikj2\pi/N}, \\ \left(k = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \right) \end{aligned} \quad (3.5.24a)$$

实际上, Fourier 正变换是将物理空间的函数 $u(x_j, t)$ 通过式(3.5.23a)变换到了谱空间, 而 Fourier 逆变换, 则将谱空间的函数 $\hat{u}(k, t)$ 变换到物理空间。

类似, 函数 $u(x, t)$ 对 x 的导数 $u_x(x, t)$ 在离散点上的近似解可写为

$$u_x(x_j, t) = \frac{1}{N} \sum_k u'(k, t) e^{ikx_j}$$

这里 $u'(k, t)$ 是对于 u_x 的 Fourier 级数的系数。同样, 利用算子 \mathcal{F} 和 \mathcal{F}^{-1} 可得

$$u'(k, t) = \mathcal{F}u_x = \sum_{j=0}^{N-1} u_x(x_j, t) e^{-ikx_j}, \quad (3.5.23b)$$

$$u_x(x_j, t) = \mathcal{F}^{-1}u'(k, t) = \frac{1}{N} \sum_k u'(k, t) e^{ikx_j}, \quad (3.5.24b)$$

从另一方面, 由式(3.5.18)可知

$$u_x(x_j, t) = \frac{1}{N} \sum_k ik \hat{u}(k, t) e^{ikx_j}$$

故有

$$u'(k, t) = ik \hat{u}(k, t)$$

将上式代入式(3.5.24b), 且考虑到式(3.5.23a), 则有

$$u_x = \mathcal{F}^{-1}(ik \mathcal{F}u), \quad u_{xx} = \mathcal{F}^{-1}(-k^2 \mathcal{F}u) \quad (3.5.25)$$

对时间导数采用 R-K 方法逼近, 并将式(3.5.25)代入式(3.5.16), 则

可得非线性方程(3.5.16)的谱方法求解公式(参见文献[4])。其具体步骤如下:

利用已知的点函数值 u_j 按式(3.5.25)求出的 u_x , 可得到物理空间的 uu_x , 对其求出 $\mathcal{F}(uu_x)$ 后可得方程

$$\frac{\partial a_n(t)}{\partial t} + \mathcal{F}(uu_x) = 0 \quad (3.5.26)$$

上式可利用 R-K 方法进行求解。应注意的是每一步计算之前都需要返回到物理空间求出 uu_x , 然后再回到 Fourier 空间求式(3.5.26)。这样就免去了在 Fourier 空间求卷积的复杂过程。

4. 谱方法的误差

采用拟谱方法求解非线性问题时, 除原有的截断误差外, 还存在两种误差, 一为非线性截断误差, 另一为混淆误差。现以模型方程为例讨论该问题。

设有模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.5.27)$$

将解以有限谱展开:

$$u(x, t) = \sum_{k=-k_m}^{k_m} a_k(t) e^{i2\pi kx} \quad (3.5.28)$$

对式(3.5.28)求导, 并代入式(3.5.27), 则得

$$\sum_{k=-k_m}^{k_m} a'_k(t) e^{i2\pi kx} + \left[\sum_{l=-k_m}^{k_m} a_l(t) e^{i2\pi lx} \right] \times \left[\sum_{m=-k_m}^{k_m} i2\pi m a_m(t) e^{i2\pi mx} \right] = 0 \quad (3.5.29)$$

考虑非线性项(上式中左端的乘积项):

$$[] \times [] = \sum_{l=-k_m}^{k_m} \sum_{m=-k_m}^{k_m} i2\pi m a_l(t) a_m(t) e^{i2\pi(m+l)x}$$

设 $m+l=k$, $l=k-m$, $k = [-2k_m, 2k_m]$, $l = [k-k_m, k+k_m]$

$$[] \times [] = \sum_{k=-2k_m}^{2k_m} \left[2\pi i \sum_{m=-k_m}^{k_m} m a_{k-m}(t) a_m(t) \right] e^{ik2\pi x} \quad (3.5.30)$$

定义:

$$A_k = \sum_{m=-k_m}^{k_m} m a_{k-m}(t) a_m(t) \quad (3.5.31)$$

由此可得

$$[\cdot] \times [\cdot] = \sum_{k=-2k_m}^{2k_m} 2\pi i A_k e^{i2\pi kx} = 2\pi i \left[\sum_{k=-2k_m}^{-k_m-1} + \sum_{k=-k_m}^{k_m} + \sum_{k=k_m+1}^{2k_m} \right] A_k e^{i2\pi kx} \quad (3.5.32)$$

(1) (2) (3)

由于取的是有限空间, $k \in [-k_m, k_m]$, 即上式中的 e 函数是以 k_m 为周期, 而右端中的第(1)+(3)项部分地反映了非线性项的影响, 但由于对应的谐波(函数)超出了取定的区域, 因而在进行 FFT 时隐含了如下的处理:

$$(1) = \sum_{k=-2k_m}^{-k_m-1} A_k e^{i2\pi kx} = \sum_{k=-2k_m}^{-k_m-1} A_k e^{i2\pi(k+k_m)x}, \quad k+k_m \in [-k_m, k_m] \quad (3.5.33)$$

$$(3) = \sum_{k=k_m+1}^{2k_m} A_k e^{i2\pi kx} = \sum_{k=k_m+1}^{2k_m} A_k e^{i2\pi(k-k_m)x}, \quad k-k_m \in [-k_m, k_m] \quad (3.5.34)$$

其结果是原来的非线性效应(1)+(3)给截掉了, 产生了非线性截断, 而以新的式(3.5.33)和式(3.5.34)代之, 由此附加了一个新的误差——混淆误差。这样处理后的函数基已均属于 $[-k_m, k_m]$ 。

采用谱方法在谱空间求解问题时, 取有限谱 $k \in [-k_m, k_m]$, 则式(3.5.32)中的(1), (3)项将被截去。这种情况下将不产生混淆误差, 但产生非线性截断误差, 且需计算非线性卷积。当采用拟谱方法求解方程(3.5.27)时, 如前所述, 为求得方程(3.5.26)需在物理空间求出 uu_x 项, 然后求其 Fourier 变换。这种情况下, 在利用 FFT 时式(3.5.32)中的(1), (3)项无法截去, 而被隐含到低波量中, 从而导致混淆误差的产生, 但可免去非线性卷积的计算。

谱方法的优点是精度高, 但当解不够光滑时, 特别当有激波时, 混淆误差极为严重。此外谱方法不宜用以求解带有复杂计算域和边界条件的问题。

参 考 文 献

- 1 Richtmyer R D, Morton K W. Difference methods for initial-value problems. New York: Wiley, 1967
- 2 Lax P D. Weak solution of nonlinear hyperbolic equation and their numerical computation. Comm Pure & Appl Math, 1954 (7): 159 ~ 193

- 3 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock capturing schemes. J Comp Phys, 1988, 77: 439 ~ 471
- 4 蒋伯诚, 周振中, 常谦顺等. 计算物理中的谱方法. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989
- 5 忻孝康等. 计算流体力学. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989

习 题

3-1 已知方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, 求解域为 $-1 \leq x \leq 1$. 试分析在 x 轴上特征线的走向, 并讨论应如何给定边界条件。

3-2 给出习题 3-1 中方程准确解的一般形式, 并对解加以分析(提示: 利用分离变量法)。

3-3 已知方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$. 求解域为 $-1 \leq x \leq 1$. 试分析在 x 轴上特征线的走向, 并讨论应如何给定边界条件。

3-4 给出习题 3-3 中方程准确解的一般形式, 并对解加以分析(提示: 利用分离变量法)。

3-5 已知方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, 利用网格点 (x_j, t_n) , (x_j, t_{n+1}) 和 (x_{j-1}, t_{n+1}) 构造差分格式, 并分析其精度和稳定性。

3-6 给定习题 3-5 中的方程, 利用网格点 (x_j, t_n) , (x_j, t_{n+1}) , (x_{j+1}, t_n) , (x_{j+1}, t_{n+1}) 构造差分格式, 并分析其精度和稳定性。

3-7 对习题 3-5 中的方程利用网格点 (x_j, t_n) , (x_j, t_{n+1}) , (x_{j-1}, t_n) , (x_{j-1}, t_{n+1}) 构造 2 阶精度的格式, 试分析其稳定性, 并给出修正方程。

3-8 设 $x_{j+1} - x_j = h_j$, $x_j - x_{j-1} = h_{j-1}$, $h_j \neq h_{j-1}$, 利用 (x_{j-1}, x_j, x_{j+1}) 构造具有 2 阶精度的逼近于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分逼近式。

3-9 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $c = \text{const} > 0$, 过网格点 (x_j, t_{n+1}) 引一特征线交于 $t = t_n$ 线上点 x_c , 则有 $u(x_j, t_{n+1}) = u(x_c, t_n)$, 试利用已知 $u(x_{j-1}, t_n)$ 和 $u(x_j, t_n)$ 在 x_c 点上进行插值, 所求得的量以 $u(x_j, t_{n+1})$ 表示。试给出最终表达式, 分析其精度及稳定性。

3-10 利用习题 3-9 之方程, 并设 x_c 为过点 (x_j, t_{n+1}) 之特征线与直线 $t = t_n$ 的交点。试利用在 t_n 时间层已知的 x_{j-2} , x_{j-1} , x_j 点上的函数值 $u(x_j, t_n)$ 进行具有 2 阶精度的插值, 求得 $u(x_c, t_n)$, 并令 $u(x_j, t_{n+1}) = u(x_c, t_n)$ 。给出 $u(x_j, t_{n+1})$ 的最终表达式, 并分析其精度及稳定性。

3-11 对热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 有如下之离散方程:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

试分析其稳定性与精度, 并说明定常解的精度

3-12 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $c = 1$, 初始条件为

$$\begin{cases} 1, & (-1 \leq x \leq 0) \\ 0, & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

试利用 MacCormack 格式给出在 $t = 0.5$ 时的数值解。

3-13 对习题 3-12, 给出两点迎风格式在 $t = 0.5$ 时的数值解。

3-14 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $c = 1$, $Re = 10$, 取 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \delta_x^0 u_j / \Delta x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$

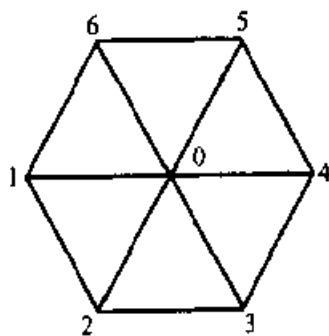
$\delta_x^2 u_j / \Delta x^2$, 初始条件同习题 3-12, 边界条件为:

$u(-1, t) = 1$, $u(1, t) = 0$, 给出定常解。

3-15 考虑 Poisson 方程及其边界条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_r = h \end{cases}$$

设计算域 D 为六边形区域, 如图, 取单元为三角形, 试写出求解域 D 的总体代数方程及其影响系数矩阵的总体表达式。



习题 3-15 图

第四章 高精度有限差分法 及数值解的行为分析

在第三章中介绍了空间和时间导数的简单离散方法。这些方法的形式逼近精度都比较低。在本章将介绍高精度有限差分方法，并通过线性模型方程数值解的行为特性分析，以加深对格式结构特征的认识，了解不同方法数值解对实际问题的模拟能力。

本章所讲的高精度差分格式是指高于二阶精度的格式。对于一般工程问题，如航空航天领域中飞行器的绕流问题，二阶精度格式基本可以满足需要。由于所要求解问题日趋复杂，很多问题要求数值方法对流场特性有更强的模拟能力。这就需提高数值解的分辨能力。这一目的可通过网格技术来实现，也可通过在网格点上的逼近精度来实现。但对非定常多尺度复杂流场的数值模拟，单利用网格技术解决该问题也存在较大困难。这就需要发展更高阶精度的格式。例如，目前人们对气动声学很感兴趣，对这类问题的求解要求模拟方法能很好地捕捉到小扰动量，还要求这一小的扰动量在很长的时间内能得到正确的描述。对这类问题，采用通常的二阶精度差分格式可能由于数值粘性而导致小扰动量随时间而消失，或由于相位误差而导致扰动量有着不正确的传播速度。另一个典型例子是湍流的计算。这类问题要求所采用的方法既能描述大尺度的宏观结构，又要能正确反映出小尺度流动结构的影响。目前，湍流的直接数值模拟(Direct Numerical Simulation, 简称 DNS)受到人们的重视。虽然 DNS 方法计算湍流用于解决工程问题还相差太远，但对典型问题的研究已成为可能，且已取得了较大进展。采用 DNS 方法计算湍流要求既能捕捉大尺度的流动结构，又能捕捉到小尺度流动特征及它们之间的相互干扰。计算这类问题在当前技术条件下要求方法有更高的逼近精度^[1-3]。

采用高精度的方法会带来新的问题，如边界条件的处理更为困难。在计算区域较为复杂的情况下，也难以采用高精度的差分格式。目前高精度格式多用于研究多尺度模型问题的流动结构，目的在于研究流动机理。

在本章中将介绍两种类型的离散方法，一为传统的有限差分方法，一为紧致型有限差分方法。然后将介绍两种分析差分格式精度的方法。

它们是 Taylor 级数展开方法和 Fourier 分析方法。所有的数值解都存在不同程度的误差, 这种数值误差来自多方面, 如离散误差, 初始分布误差, 边界处理带来的误差, 以及迭代误差及舍入误差等。本章中将讨论由于方程离散过程中引入的误差对数值解可能带来的影响。离散引入的误差分两种类型, 一为耗散型, 一为色散型。两种类型的误差对数值解的行为影响不同。进行数值解的行为特性分析, 认识格式对不同尺度物理量的模拟能力, 对选用格式及改造格式都是有益的。本章重点是对有限差分法的数值解进行行为分析。

4.1 模型方程及半离散化方程

所考虑模型方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad f = cu, \quad c, \mu = \text{const} \quad (4.1.1)$$

通常把这一方程中的一阶导数项与流体力学方程中的对流项对应起来, 把二阶导数项与流体力学方程中的粘性项对应起来。利用该式作为流体力学方程的简化模型方程, 用以研究离散方法, 然后通过计算实践来考察和改进方法。实践和分析表明, 对流项的逼近质量对数值解的行为影响极大。因而本章中将重点讨论 $\mu = 0$ 时的逼近情况。其对应的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = cu, \quad c = \text{const} \quad (4.1.2)$$

这里仅讨论初值问题。设在 $t = 0$ 时刻有

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (4.1.3)$$

则方程(4.1.2)的解为

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) \quad (4.1.4)$$

即方程的解沿特征线 $x - ct = \text{const}$ 为常数。为便于讨论, 设方程的解具有周期性, 解的定义域为 $[-\pi, \pi]$ 。将这一区间分成 N 等分: $2\pi/N$, 周期特性表明 $u_1 = u_{N+1}$, 设在 $t = 0$ 时刻的初始分布可通过 Fourier 级数来表示:

$$\varphi(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\varphi}_k \exp(ikx) \quad (4.1.5)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, $\hat{\varphi}_k$ 为 Fourier 系数。则方程(4.1.2)的解可写为如下形式:

$$u(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\varphi}_k \exp[ik(x - ct)] \quad (4.1.6)$$

对应于式(4.1.2)的差分方程解可写为类似的形式。很显然,对于线性问题数值解的逼近精度依赖于以每个 Fourier 分量为初始值时数值解的逼近精度。在以后讨论中将以单个 Fourier 分量为基本元,讨论数值解的逼近精度及数值解行为特性。

设以单个 Fourier 分量为初值:

$$u(x, 0) = \exp(ikx) \quad (4.1.7)$$

利用分离变量法,寻求形式为 $u(x, t) = \hat{u}(t)\exp(ikx)$ 的解。将其分别代入式(4.1.1)和(4.1.2),则不难求出满足初始条件(4.1.7)的准确解。它们分别是:

$$u(x, t) = \exp(-\mu k^2 t) \exp[ik(x - ct)] \quad (4.1.8)$$

$$u(x, t) = \exp[ik(x - ct)] \quad (4.1.9)$$

对应于式(4.1.1)和(4.1.2)的半离散逼近式(只对空间导数进行离散)分别为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{F_x}{\Delta x} = \mu \frac{S_x}{\Delta x^2} \quad (4.1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{F_x}{\Delta x} = 0 \quad (4.1.11)$$

这里 $\frac{F_x}{\Delta x}$ 为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的差分逼近式, $\frac{S_x}{\Delta x^2}$ 为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的差分逼近式。例如,对于方程中的对流项采用二阶精度的中心型差分逼近式,则有

$$F_j = \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) \quad (4.1.12)$$

对粘性项二阶精度的中心型差分逼近式为

$$S_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \quad (4.1.13)$$

这里之所以讨论半离散化的逼近形式,一方面是为了便于讨论,另一方面半离散化后所得到的是沿时间方向的常微分方程。对常微分方程可借助于 R-K 方法进行求解。而对时间导数采用其他形式的高阶精度离散方法会引入过多时间层上的量,这会给求解带来一定困难。采用 R-K 方法较易于提高时间导数逼近精度。

现在讨论差分方程的准确解。在连续空间设有函数 $u(x, t) = \hat{u}(t)\exp(ikx)$, 其 x 方向的一阶导数为 $u_x(x, t) = ik\hat{u}(t)\exp(ikx)$ 。可将其改写为 $\Delta x u_x = k_e \hat{u}(t)\exp(ikx)$, 其中 $k_e = \alpha i = k\Delta x i$ ($\alpha = k\Delta x$)。对于 x 方向的二阶导数为 $u_{xx} = -k^2 \hat{u}(t)\exp(ikx)$, 可将其改写为形式 $\Delta x^2 u_{xx} = -k_d \hat{u}(t)\exp(ikx)$, 其中 $k_d = \alpha^2$ 。对于离散空间可取初值为

$$u(x_j, 0) = \exp(ikx_j) \quad (4.1.14)$$

则也可以得到满足式(4.1.10)或式(4.1.11)的准确差分解。取 $u(x_j, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, $F_j = k_e \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, $S_j = -k_d \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, 将它们代入式(4.1.10)和(4.1.11), 则可得到对应的差分方程的解。它们分别是:

$$u(x_j, t) = \exp\left(-\frac{k_d}{\alpha^2} k^2 \mu t - ck \frac{k_r}{\alpha} t\right) \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{k_i}{\alpha} t\right)\right], \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (4.1.15)$$

$$u(x_j, t) = \exp\left(-ck \frac{k_i}{\alpha} t\right) \exp\left[ik\left(x_j - c \frac{k_i}{\alpha} t\right)\right], \quad (0 \leq \alpha \leq \pi) \quad (4.1.16)$$

这里 $k_r + ik_i = k_e$, k_r 为 k_e 的实部, k_i 为其虚部。 k_r , k_i 和 k_d 均为 $\alpha = k\Delta x$ 的函数。

显然, k_d 与粘性项的逼近形式有关, k_r 和 k_i 与对流项的逼近形式有关。对照式(4.1.15)和式(4.1.8)可知, 对取定波数 k (或 α), 数值解逼近准确解要求:

$$k_d/\alpha^2 \rightarrow 1, \quad k_r/\alpha \rightarrow 0, \quad k_i/\alpha \rightarrow 1$$

它们的逼近程度反映了格式的精度, 它们的逼近方式可反映出数值解的行为特性。对具体的差分表达形式可求出对应于 k_d , k_i 和 k_r 的分析表达式。例如, 两点中心差分式(4.1.12), 考虑到 $x_j = j\Delta x$, $x_{j+1} = x_j \pm \Delta x$, 将 $u_j = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$ 代入, 则有

$$\begin{aligned} F_j &= \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1}) = \frac{1}{2}[\exp(ikx_{j+1}) - \exp(ikx_{j-1})]\hat{u}(t) \\ &= i \sin \alpha \exp(ikx_j) \hat{u}(t) \end{aligned}$$

由此可知

$$k_e = i \sin \alpha, \quad k_r = 0, \quad k_i = \sin \alpha \quad (4.1.17)$$

对具有一阶精度的两点后差有

$$F_j = u_j - u_{j-1} \quad (4.1.18)$$

$$k_r = 1 - \cos \alpha, \quad k_i = \sin \alpha \quad (4.1.19)$$

对二阶导数的逼近式(4.1.13)有

$$k_d = 2(1 - \cos \alpha) \quad (4.1.20)$$

4.2 高精度差分逼近式

为求解一般工程计算问题, 通常二阶精度的格式是可以满足需要的。当所求解问题的解比较光滑时, 采用高精度格式可以减少网格点数, 从而可达到提高求解效率的目的。高精度格式多用于求解

非定常多尺度流动的典型物理问题，目的在于研究流动的细微结构及其机理。

4.2.1 传统型的差分逼近式

从第三章中可以看出，一阶或二阶导数的一般差分逼近式是直接通过在网点上函数值的线性组合来表示。本书中称这类通常采用的差分逼近式为传统型的逼近形式。对一阶导数它们有如下的一般表达式：

$$F_j = \sum_l a_l (u_{j+l+1} - u_{j+l}) \quad (4.2.1)$$

其中

$$\sum_l a_l = 1$$

后者是相容性所要求的。这里所说的相容性是指(4.2.1)所确定的 F_j 逼近 $\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ 的最低要求。可利用 Taylor 级数展开，使得式(4.2.1)右端一阶导数的系数和等于左端 F_j 的系数，则得以上相容条件。

如果差分表达形式可写为

$$F_j = \sum_{l>0} a_l \frac{u_{j+l} - u_{j-l}}{2l} \quad (4.2.2)$$

其中

$$\sum_{l>0} a_l = 1$$

则差分表达式称为对称型的或中心型的。可根据精度的需要，选择适当个数的网格基架点数。将式(4.2.1)或式(4.2.2)进行 Taylor 级数展开，并使更高阶导数的系数等于零，从而得到一组关于 a_l 的线性代数方程组。求解代数方程组可得所需的系数 a_l 。应当注意，构成二阶精度的逼近式最少需要三个网格基架点，构造 N 阶精度的格式至少需 $N+1$ 个网格基架点。下面列出几个具体的逼近一阶导数的差分表达式。

四阶精度的中心型逼近式：

$$F_j = \frac{1}{12} [8(u_{j+1} - u_{j-1}) - (u_{j+2} - u_{j-2})] \quad (4.2.3)$$

在文献[2]中利用具有五阶精度的迎风偏斜差分格式来逼近 $N-S$ 方程中的对流项，计算了不可压槽道湍流问题。这一差分表达式可从式(4.2.1)出发求得，其具体形式依赖于式(4.1.1)中 c 的符号：

$c \geq 0$ 时：

$$F_j^+ = \frac{1}{60} \delta_x^- (-3u_{j+2} + 27u_{j+1} + 47u_j - 13u_{j-1} + 2u_{j-2}) \quad (4.2.4)$$

$c < 0$ 时:

$$F_j^- = \frac{1}{60} \delta_x^+ (-3u_{j-2} + 27u_{j-1} + 47u_j - 13u_{j+1} + 2u_{j+2}) \quad (4.2.5)$$

这里

$$\delta_x^+ f_j = f_{j+1} - f_j, \quad \delta_x^- f_j = f_j - f_{j-1} \quad (4.2.6)$$

式中上标 + 表示 $c \geq 0$ 时的逼近式, 上标 - 表示 $c < 0$ 时的逼近式。在具体计算中系数 c 的符号可能是变化的, 此时对 c 需进行分裂: $c^\pm = [c \pm |c|]/2$, $c = c^+ + c^-$ 。分裂后的 $c^+ \geq 0$, $c^- \leq 0$, 则差分逼近式可写为

$$cF_j = c^+ F_j^+ + c^- F_j^- \quad (4.2.7)$$

上面给出了两种类型的逼近式, 一为中心型的, 一为非中心型的。对于中心型的逼近式可求出 $k_r = 0$, $k_e = ik_i$, 此时差分解式(4.1.16)中的幅值不随时间而改变, 即中心型的差分逼近式是无耗散型的。如果利用 Taylor 级数展开可以看出, 中心型逼近式截断误差的主导项为含有奇次导数的项。注意, 这里所讨论的是半离散逼近式。

从式(4.2.4)和(4.2.5)中可以看到, 导数的逼近式中更多的利用了上游点上的函数值(指相对于波的传播方向而言), 这类格式称为迎风偏斜格式。这一点从物理上考虑是很容易理解的: 因为波是从上游传下来的。如果在半离散的格式(4.1.11)中取逼近式(4.2.4)或(4.2.5), 则对应的 $ck_r > 0$ 。由式(4.1.16)可以看出, 该格式是耗散型的, 即随时间的推移解的幅值衰减。应当注意, 并不是所有的迎风偏斜格式都是耗散型的。强迎风偏斜格式可能出现 $k_r < 0$ 的波, 从而导致数值解的不稳定。

现在介绍几种逼近于二阶导数的差分逼近式。设 $S_j/\Delta x^2$ 为二阶导数的逼近式, 其一般形式为

$$S_j = \sum_{l>0} b_l (u_{j+l} - 2u_j + u_{j-l}) / l^2 \quad (4.2.8)$$

其中

$$\sum_{l>0} b_l = 1 \quad (4.2.9)$$

式(4.2.9)为相容关系式。对二阶导数一般取中心逼近式, 因为从物理上讲, 它描述流动的粘性和热传导特性, 没有理由使网格基架点偏向某一方向。现在给出两个具体的逼近式。

四阶精度的差分表达式:

$$S_j = \frac{4}{3} \delta_x^2 u_j - \frac{1}{12} (u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}) \quad (4.2.10)$$

这里

$$\delta_x^2 u_j = \delta_x^+ \delta_x^- u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \quad (4.2.11)$$

六阶精度的差分表达式:

$$S_j = \frac{3}{2} \delta_x^2 u_j - \frac{3}{20} (u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}) + \frac{1}{90} (u_{j+3} - 2u_j + u_{j-3}) \quad (4.2.12)$$

4.2.2 紧致型差分逼近式

近年在研究非定常多尺度复杂流动时, 紧致型格式引起了人们的关注: 紧致型格式有着精度高和网格基架点少的优点。这里将介绍对二阶导数的紧致格式, 对一阶导数的对称紧致格式和对一阶导数的迎风紧致格式等三种差分格式。

1. 二阶导数的紧致型差分逼近式

首先看一个例子。考虑对二阶导数具有二阶逼近精度的差分逼近式, 经 Taylor 级数展开后有:

$$\delta_x^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j + \frac{1}{12} \Delta x^4 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j + O(\Delta x^6) \quad (4.2.13)$$

设 $S_j = \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j$, 如果式(4.2.13)中四阶导数项通过离散的 S_j 来逼近, 则有

$$\Delta x^4 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j = \Delta x^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_j = S_{j+1} - 2S_j + S_{j-1} + O(\Delta x^6) \quad (4.2.14)$$

将式(4.2.14)代入式(4.2.13)中, 并略去高阶小量, 则可得关于二阶导数的逼近式 S_j 所应满足的关系式:

$$\frac{1}{12} S_{j+1} + \frac{5}{6} S_j + \frac{1}{12} S_{j-1} = \delta_x^2 u_j \quad (4.2.15)$$

从上面推导过程不难看出, $\frac{S_j}{\Delta x^2}$ 是以四阶精度逼近于二阶导数。对于线性代数方程组(4.2.15), 当 S_0 和 S_N (对应于 $j=0, N$) 给定时, 未知量与方程个数相等, 可用一般求解代数方程的方法求解, 如高斯消去法及追赶法等。关于方程组的求解方法以后还将讨论。

对二阶导数紧致型格式的一般表达形式可写为

$$\sum_{l \geq 0} \beta_l (S_{j+l} + S_{j-l})/2 = \sum_{l \geq 0} b_l (u_{j+l} - 2u_j + u_{j-l})/l^2 \quad (4.2.16)$$

$$\sum_{l \geq 0} \beta_l = \sum_{l \geq 0} b_l \quad (4.2.17)$$

可利用 Taylor 级数展开的方法, 使式(4.2.16)展开后的两端 $\frac{\partial^{2k} S_j}{\partial x^{2k}}$ 与 $\Delta x^2 \frac{\partial^{2k+2} u}{\partial x^{2k+2}}$ 的系数相等, 得到一代数方程组, 再通过求解代数方程可确定相应的系数 β_l 和 b_l 。按这种方法可得如下具有六阶精度的紧致型逼近式^[3]:

$$S_j + \frac{5}{12} \delta_x^2 S_j = \delta_x^2 \left(u_j + \frac{1}{12} \delta_x^2 u_j \right) \quad (4.2.18)$$

该式左端用了三个网点值, 右端用了五个网点值。比较上面介绍的紧致型逼近式和具有同样精度的传统型逼近式可知, 紧致型差分逼近式在形式上可利用较少的网格基架点得到较高的逼近精度。这是紧致(compact)一词的含意所指。在紧致逼近式中 F_j , S_j 都是以隐式的形式出现的。需求解一代数方程组, 可用第五章介绍的追赶法进行求解。

2. 一阶导数的对称型紧致逼近式

采用以上类似的方法可构造一阶导数的紧致逼近式。其一般形式为

$$\sum_{l \geq 0} a_l (F_{j+l} + F_{j-l})/2 = \sum_{l > 0} a_l (u_{j+l} - u_{j-l})/(2l) \quad (4.2.19)$$

$$\sum_{l \geq 0} a_l = \sum_{l > 0} a_l = 1 \quad (4.2.20)$$

后者为相容性所要求。采用 Taylor 级数展开, 根据精度需要可得对应于系数 a_l 和 a_l 的代数方程, 求解代数方程可求出相应的系数。为利用式(4.2.19)求出 F_j 需求解一代数方程组。因此, 最好方程式的左端涉及的点数不要过多, 如可取三点。下面给出具有四阶精度紧致逼近式的简单推导过程。写出式(4.2.19)的展开式, 如果左端取二项, 右端取一项则有:

$$\alpha_0 F_j + \frac{\alpha_1}{2} (F_{j+1} + F_{j-1}) = a_1 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2} \quad (4.2.21)$$

将两端在 (i, j) 点按 Taylor 级数展开得

$$\begin{aligned} & \alpha_0 F_j + \frac{\alpha_1}{2} \left(2F + 2 \frac{1}{2!} \Delta x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{1}{4!} \Delta x^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \dots \right)_j \\ &= \left(a_1 \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 \frac{1}{3!} \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dots \right)_j \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

取 $F = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$, 代入式(4.2.22), 并使两侧对应系数相等, 则得

$$\alpha_0 + \alpha_1 = a_1, \quad \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_1}{6} \quad (4.2.23)$$

在式(4.2.21)两端乘以同样常数不影响最终结果, 可取 $a_1 = 1$, 从而得 $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_0 = 2/3$ 。忽略高阶小量, (4.2.21)式可得

$$\frac{1}{6} F_{j-1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j+1} = \delta_x^0 u_j \quad (4.2.24)$$

该式也可以利用类似于推导式(4.2.15)的方法得到。

根据略去的高阶小量可知, $F_j/\Delta x$ 以四阶精度逼近于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 。在文献[3]中利用具有六阶逼近精度的紧致差分式逼近可压 N-S 方程, 数值求解了剪切混合流动问题。这一逼近式的具体形式为^[3]

$$\frac{1}{6} F_{j+1} + \frac{2}{3} F_j + \frac{1}{6} F_{j-1} + \frac{1}{30} \delta_x^2 F_j = \delta_x^0 u_j - \frac{1}{15} \left[\delta_x^0 u_j - \frac{1}{4} (u_{j+2} - u_{j-2}) \right] \quad (4.2.25)$$

3. 迎风紧致差分逼近式

更为一般的紧致型差分表达式为

$$\sum_l a_l F_{j+l} = \sum_l a_l (u_{j+l+1} - u_{j+l}) \quad (4.2.26)$$

$$\sum_l a_l = \sum_l a_l \quad (4.2.27)$$

后者为相容性所要求。可用以构造对称型或非对称型紧致差分逼近式。构造非对称逼近式目的是为产生数值耗散, 以压制数值解中非物理的高频振荡。它的具体形式依赖于式(4.1.2)中 c 的符号。可利用级数展开方法根据精度需要来确定网格基架点数和式(4.2.26)中的系数。下面列出几个具体的差分表达式^[4]。

(1) 具有三阶精度的迎风紧致逼近式:

当 $c > 0$ 时:

$$\frac{2}{3} F_j^+ + \frac{1}{3} F_{j-1}^+ = \left(\frac{5}{6} \delta_x^- + \frac{1}{6} \delta_x^+ \right) u_j \quad (4.2.28)$$

当 $c < 0$ 时:

$$\frac{2}{3} F_j^- + \frac{1}{3} F_{j+1}^- = \left(\frac{5}{6} \delta_x^+ + \frac{1}{6} \delta_x^- \right) u_j \quad (4.2.29)$$

(2) 具有五阶精度的迎风紧致逼近式^[4]:

当 $c > 0$ 时:

$$\frac{3}{5} F_j^+ + \frac{2}{5} F_{j-1}^+ = \frac{1}{60} \delta_x^- (-u_{j+2} + 11u_{j+1} + 47u_j + 3u_{j-1}) \quad (4.2.30)$$

当 $c < 0$ 时:

$$\frac{3}{5} F_j^- + \frac{2}{5} F_{j+1}^- = \frac{1}{60} \delta_x^+ (-u_{j-2} + 11u_{j-1} + 47u_j + 3u_{j+1}) \quad (4.2.31)$$

这里所说的迎风特性与式(4.1.2)中波的传播方向相联系。上标“+”表示 $F_j^+/\Delta x$ 对应于 $c > 0$ 时一阶导数的逼近, 上标“-”表示 $c < 0$ 时的逼近。后面将指出, 如此构造的差分方程解具有耗散特性。从上式中

可看出, F_j^+ 可很容易按 j 的增长方向求解, 而 F_j^- 可很容易按 j 的减小方向求解

不难证明, 按(4.2.28)和(4.2.29)式所得的 $F_j/\Delta x$ 以三阶精度逼近于 $\frac{\partial u}{\partial x}$, 从式(4.2.30)和(4.2.31)中所得的 $F_j/\Delta x$ 以五阶精度逼近一阶导数. 现以式(4.2.28)为例(设 $c > 0$)作进一步分析. 略去上标“+”, 经 Taylor 级数展开后经整理有:

$$\begin{aligned} & \left(F - \frac{\Delta x}{3} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{18} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \dots \right)_j = \\ & \left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\Delta x^4}{36} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_j \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

将上式两边对 x 求导, 并将所得之 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 代入原式(4.2.32)的左端, 经整理得

$$\left[F + \frac{\Delta x^2}{18} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + O(\Delta x^4) \right]_j = \left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{18} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{36} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_j \quad (4.2.33)$$

对该式求 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 并将所得之 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ 代入式(4.2.33)的左端, 经整理可得

$$F_j = \left(\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^4}{36} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_j \quad (4.2.34)$$

可知 $F_j/\Delta x$ 以三阶精度逼近于 $\frac{\partial u}{\partial x}$. 将式(4.2.34)式代入式(4.1.11)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\Delta x^3}{36} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (4.2.35)$$

上式的右端为三阶迎风紧致差分格式对应于式(4.1.2)的截断误差. 当 $c > 0$ 时式(4.2.35)右端四阶导数的系数为负. 在后面将指出, 数值解的耗散特性要求截断误差中四阶导数的系数为负.

可在 Fourier 空间来讨论迎风紧致差分的耗散特性. 将 $u_j = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, $F_j = k_e \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$, 代入式(4.2.28)中, 可求出 $k_e = k_r + ik_i$, 其对应的实部和虚部 k_r 和 k_i 分别为

$$k_r = \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{5 + 4 \cos \alpha}, \quad k_i = \frac{\sin \alpha (8 + \cos \alpha)}{5 + 4 \cos \alpha} \quad (4.2.36)$$

由此可知 $k_r(\alpha) > 0$, 由于 $c > 0$ 的假设, 由数值解式(4.1.16)中可知, 对应于 $\alpha \neq 0$ 的解随时间的增长是衰减的, 即格式是耗散型的. 同样可以证明, 前面介绍的其他迎风差分格式也是耗散型的.

4.3 数值解的精度及分辨率分析

这里介绍两种精度分析方法, 一种是根据差分格式的截断误差来判断格式的精度, 另一是 Fourier 分析方法。这里所说的数值解的分辨率是指数值方法对流场中所感兴趣的物理尺度的模拟能力。将半离散差分方程(4.1.11)进行 Taylor 级数展开, 可得对应的修正方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_l a_l \Delta x^{l-1} \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \quad (4.3.1)$$

如果上式中 $l < l_0$, $a_l = 0$, 且 $a_{l_0} \neq 0$, 则 $l_0 - 1$ 为差分方程的形式精度。即格式为 $l_0 - 1$ 阶精度。(4.3.1)式是差分方程(4.1.11)的微分表达式。式(4.3.1)的解即为差分方程(4.1.11)的解。通过(4.3.1)式更易于讨论差分解的特性。为了便于讨论格式的耗散特性和色散特性, 将式(4.3.1)右端中的偶次导数项和奇次导数项分离开来, 则式(4.3.1)可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_m \mu_{2m} \Delta x^{2m-1} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} + \sum_m \mu_{2m+1} \Delta x^{2m} \frac{\partial^{2m+1} f}{\partial x^{2m+1}} \quad (4.3.2)$$

或将其再改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mu}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mu}_3 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\mu}_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.3.4)$$

这里

$$\tilde{\mu}_2 = \sum_m \mu_{2m} \Delta x^{2m-1} \left(\frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m-1}} \middle/ \frac{\partial f}{\partial x} \right) f_u \quad (4.3.5)$$

$$\tilde{\mu}_3 = \sum_m \mu_{2m+1} \Delta x^{2m} \left(\frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \middle/ \frac{\partial f}{\partial x} \right) f_u \quad (4.3.6)$$

$$a = \sum_m \mu_{2m+1} \Delta x^{2m} \left(\frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \middle/ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.3.7)$$

$$a = \tilde{\mu}_3 \frac{\partial u}{\partial x} \middle/ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.3.8)$$

这里 $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = f_u \frac{\partial u}{\partial x}$, 对模型方程(4.1.2)而言, $f_u = c$ 。含 $\tilde{\mu}_2$ 项反映了误差中偶次导数项对解的影响, 它表征了差分解的耗散特性。含 $\tilde{\mu}_3$ 项(或 a 项)反映了误差中奇次导数项对解的影响, 它表征了差分解中的色散效应。从数值解的非物理振荡角度将式(4.3.4)中的 a 和式

(4.3.3)中的 μ_{l_0} 有某些联系。这一点将在后面讨论。

人们通常参照式(4.3.1)右端的首项来确定格式的精度。如果方程的解足够光滑,这种分析方法确实是可行的。这种情况下解在 Fourier 级数中对应于高波分量的系数为“小量”。近年来,非稳定非定常多尺度流动问题的数值模拟引起人们极大兴趣,湍流的数值模拟是一典型例子。对这类问题要求小尺度的流动特性能得到正确模拟。此时方程解在 Fourier 级数中对应于高波分量的系数已不再是可忽略的小量。这种情况下,按截断误差难以判断数值解的精度。例如,设 $c = \text{const}$, 因截断误差中的一般项为

$$\mu_{l_0} \Delta x^{l_0-1} \frac{\partial^{l_0} u}{\partial x^{l_0}}$$

很显然,对于函数 u 的单个 Fourier 分量 $\hat{u}(t) \exp(ikx)$ 按 x 向取 l_0 次导数,所得之系数为

$$\hat{u}(t) \frac{1}{\Delta x} (ik\Delta x)^{l_0}, \quad (0 \leq k\Delta x = \alpha \leq \pi)$$

对高波分量可能有 $k\Delta x > 1$ 的情况,此时这一系数不再是小量(当然,可取足够小的 Δx ,使对应于高波数的 $\alpha = k\Delta x < 1$ 。然而,这将增加网格点数和计算量。这也是目前湍流直接数值模拟中存在的困难之一),因此难以判断数值解的精度。

在文献[3]中采用 Fourier 方法(即在波空间)来分析数值解的精度。对照 4.1 节中的式(4.1.9)和(4.1.16)[或(4.1.8)和(4.1.15)]可知,对准确解的逼近要求

$$k_r/\alpha \rightarrow 0, \quad k_i/\alpha \rightarrow 1, \quad k_d/\alpha^2 \rightarrow 1$$

可通过 k_r/α 趋于零, k_i/α 趋于 1 以及 k_d/α^2 趋于 1 的程度来估计不同格式的逼近精度。利用这种办法可以了解一个格式对不同尺度物理量(对应于不同波数的 Fourier 分量)的模拟能力。在本章 4.1 节中曾提到,对于线性模型方程,对具体的差分格式可求出 k_d , k_r 和 k_i 的分析表达式。下面给出几个具体的例子。

(1) 一阶导数的二阶迎风逼近式:

$$F_j = \delta_x^b u_j = \frac{1}{2} (3\delta_x^- u_j - \delta_x^- u_{j-1}) \quad (4.3.9)$$

$$k_r = [(1 - \cos \alpha)(3 - \cos \alpha) - \sin^2 \alpha]/2 \quad (4.3.10)$$

$$k_i = \sin \alpha (2 - \cos \alpha) \quad (4.3.11)$$

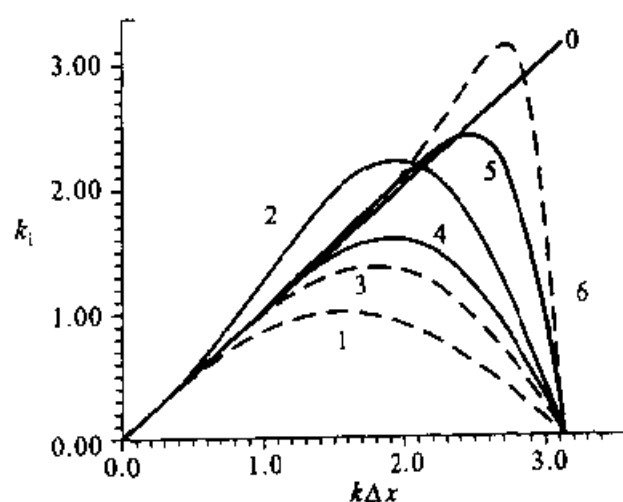
(2) 一阶导数的四阶精度中心型逼近式:

$$k_r = 0, \quad k_i = \frac{1}{6} [8\sin \alpha - \sin(2\alpha)] \quad (4.3.12)$$

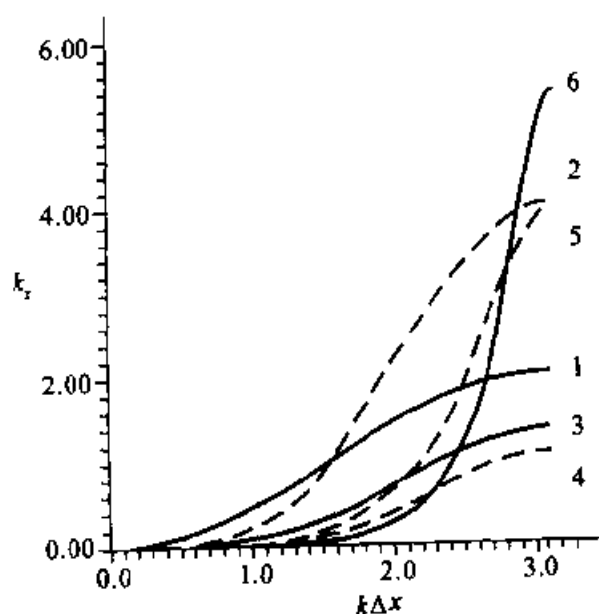
(3) 二阶导数的四阶紧致型逼近式:

$$k_d = \frac{12(1 - \cos \alpha)}{5 + \cos \alpha} \quad (4.3.13)$$

在图 4.1 中给出了部分迎风型逼近式对应的 k_i 和 k_r 随 α 的变化曲线。图 4-1a 中的 0 曲线为 $k_i = \alpha = k\Delta x$ 曲线, 它对应于微分方程的准确解。从图中可以看出, 对低波分量, 各种格式都能较好地逼近准确解。从图



(a) k_i 随 α 的变化



(b) k_r 随 α 的变化

图 4-1 部分格式 k_i 与 k_r 随 α 的变化曲线

1. 两点迎风(一阶精度), 2. 三点迎风(二阶精度)
3. 四点迎风偏斜(三阶精度), 4. 六点迎风偏斜(五阶精度)
5. 三点迎风紧致(三阶精度), 6. 五点迎风紧致(五阶精度)

中还可以看出,与低阶精度格式相比,高精度差分逼近式对中高波分量有较好的模拟能力。比较曲线3与5和4与6可以看出,对于同阶精度的差分逼近式,与传统的差分式相比,紧致型差分式对高波分量有更高的模拟能力。对中心型差分也可给出类似的 k_i 随 α 的变化曲线,得到类似的结论。在图4-1b中给出了几个逼近式对应的 k_i 随 α 的变化。它反映了格式的耗散特性。对准确解及中心型格式 $k_i = 0$ 。从图4-1b中可以看出,高精度格式有着更宽的低耗散波段。对同阶精度的格式,紧致型格式的低耗散波段更宽。从图中还可以看出,在耗散型格式中高精度格式在高波段有着更强的耗散效应。

在图4-2中给出了对应于二阶导数逼近式的 k_d 随 α 的变化曲线。这里0曲线对应于准确解 $k_d = \alpha^2$ 。从图4-2中可以看出,高精度格式对高波分量有更强的模拟能力,其中紧致型格式更为好些。从图4-1和图4-2中可以看出,超高波分量是很难逼近的。为了模拟超高波分量的物理特征,必须减小网格尺度(增加网格点)。这也是高雷诺数湍流直接数值模拟的困难所在。

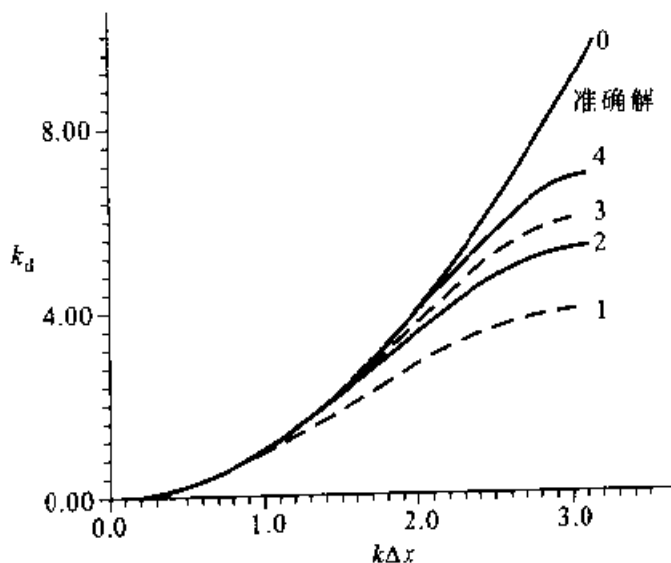


图4-2 部分格式 k_d 随 α 的变化曲线

1. 三点差分(二阶精度), 2. 五点差分(四阶精度)
3. 三点紧致差分(四阶精度), 4. 五点紧致差分(六阶精度)

4.4 数值解中的耗散效应与色散效应

这里仍通过模型方程来分析不同类型误差对数值解的影响。考虑方程(4.1.2)及对应的逼近式(4.1.11), 以及它们对应的解式(4.1.9)和

(4.1.16)。首先可以看出,前面介绍的所有中心型格式都是无耗散的。关于这一点很容易证明。如前一节所述,将差分解写成单个 Fourier 分量形式,并代入相应的差分式中,可以得到 $k_i = k_r + ik_i$ 。可知,对所有中心型格式 $k_r = 0$ 。应当注意,这里的分析是针对半离散化格式而进行的。

可依据 k_r 对格式进行分类。对 $c > 0$ 情况,当 $k_r < 0$ 时格式是反耗散型的,反耗散型格式是不稳定的。当 $k_r = 0$ 时格式为非耗散型的。所有中心型格式都是非耗散型的,对 $k_r (\alpha \neq 0) > 0$ 的格式称为耗散型的。常用的迎风类型格式是耗散型的。耗散型格式是稳定的。关于这一点可从数值解式(4.1.16)中得知。然而强迎风格式可能是不稳定的,因可能出现 $k_r < 0$ 的波段。

上面关于耗散特性的讨论是在波数空间进行的。还可利用修正方程中的余项(指截断误差部分)分析格式的耗散特性。现仍讨论模型方程。很明显,差分方程的解是原微分方程的近似解,修正方程是差分方程对应的微分表示,因而差分方程的解也是修正方程的解。当取单个 Fourier 分量为初值时,差分方程(4.1.11)的解具有形式 $u(x, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx_j)$ 。将其代入式(4.3.5) ($f = cu$) 可得

$$\hat{\mu}_2 = \Delta xc \sum_m \mu_{2m} (-1)^{m-1} (k\Delta x)^{2m-2} \quad (4.4.1)$$

可根据 $\hat{\mu}_2$ 的符号来定义格式的耗散特性:对于 $\hat{\mu}_2 < 0$ 的格式是反耗散型的,反耗散型的格式是不稳定的;对应于 $\hat{\mu}_2 = 0$ 的格式是非耗散型的,对称格式有 $\hat{\mu}_2 = 0$,因而是非耗散型的;对应于 $\hat{\mu}_2 > 0$ 的格式是耗散型的,即耗散特性要求

$$\Delta xc \sum_m \mu_{2m} (-1)^{m+1} (k\Delta x)^{2m-2} > 0 \quad (4.4.2)$$

$\hat{\mu}_2$ 是一无穷级数,不适于用来判别格式的耗散性质,通常是参照式(4.4.2)的首项来判别。对一阶精度的格式 $m = 1$,截断误差的首项含二阶导数。按式(4.4.2)的要求其系数应满足

$$c\mu_2 > 0 \quad (4.4.3)$$

对三阶精度格式 $m = 2$,截断误差首项含四阶导数项,利用式(4.4.2)可知,耗散特性要求

$$c\mu_4 < 0 \quad (4.4.4)$$

对五阶精度格式 $m = 3$,耗散特性要求

$$c\mu_6 > 0 \quad (4.4.5)$$

可以此类推,如前所述,(4.1.16)应是(4.3.4)式的解。将式(4.1.16)代入式(4.3.4)可得

$$\hat{\mu}_2 = \frac{ck_r}{\alpha k} \quad (4.4.6)$$

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k_i}{\alpha} - 1 \right) \quad (4.4.7)$$

由此可知, $\hat{\mu}_2$ 与 ck_r 的符号一致, 即对线性方程依据 $\hat{\mu}_2$ 和 ck_r 来判别格式的耗散性质是一致的。依 ck_r 来判断数值解的耗散特性考虑到了所有波数分量, 但依 ck_r 只能判别线性方程的耗散性质。而依式(4.3.3)的首项可判别非线性方程的耗散性质, 但只能判别低波分量的行为。

现在简单分析一下数值解的色散特性。由式(4.4.7)可知, $a/c > 0$ 表明 $k_i > \alpha$, 对照差分解(4.1.16)可知, $k_i > \alpha$ 表明色散误差使数值解的相位速度向 c 运动的方向倾斜, 有时称由此引入的误差有正色散效应。当 $a/c < 0$ 时, 由式(4.4.7)可知, $k_i < \alpha$ 。由差分解式(4.1.16)可以看出, $a/c < 0$ 表明色散误差使数值解的相位速度向 c 运动的相反方向倾斜, 有时称由此引入的误差导致负色散效应。如果将 $u(x, t) = \hat{u}(t) \exp(ikx)$ 形式的解代入式(4.3.7) ($f = cu$) 可得

$$\frac{a}{c} = \Delta x^2 \sum_m \mu_{2m+1} (-1)^{m-1} (k\Delta x)^{2m-2} \quad (4.4.8)$$

该式为一无穷级数, 难以用来判别色散误差引入的是否是正效应。通常依(4.4.8)式之首项来判别。如对二阶精度格式, 正色散效应要求

$$\mu_3 > 0$$

对四阶精度格式 $m=2$, 正色散效应要求

$$\mu_5 < 0$$

以此类推可得到对更高阶精度格式的正色散效应的要求。

4.5 数值解的群速度

在实际应用中, 由粘性项的离散而引入的误差对数值解影响较为单一。这类离散误差主要影响数值解中每个 Fourier 分量的幅值。由图 4-2 可知, 对常用的中心型格式 $k_d/\alpha^2 < 1$, 这表明粘性项的离散误差导致物理耗散的低亏。对不同的格式低亏量不同。对同一格式, 不同的 Fourier 分量低亏量也不同。对于低波分量 $k_d/\alpha^2 \sim 1$, 随着波数的增加, 低亏量增加。无论如何, 耗散项的存在不会给数值解带来很大的变形。随着精度的提高可改善这种低亏现象。来自对流项离散而引入的误差对数值解的影响更为复杂。相对于微分方程解, 对流项的离散误差可导致数值解有很大的变形。因此, 在本节将只讨论式(4.1.2)及其相应离散方程的误差影响。

从单波方程准确解式(4.1.9)中可知, 对不同波数 k , 微分方程解中所有波都是以相同速度 c 进行传播的。从差分方程的准确式(4.1.16)可以看出, 对于不同的波数其相位速度是不同的。这种情况使初始时刻所分布的波, 随时间的推移它们之间将产生错位。对不同的格式这种错位现象不同, 对同一格式不同的波分量这种错位情况也不同。对于低波分量数值波以与物理波很相近的速度传播。随着波数的增加这种错位现象趋于严重。这里对群速度的讨论就是为了探讨这种错位的传播规律, 以加深对格式的认识。当所要模拟的是非定常多尺度流动问题时, 探讨数值解中不同波之间的错位更为重要。

考虑线性标量方程式(4.1.2), 其解有更为一般的形式:

$$u(x, t) = \exp[i(kx - \omega t)] \quad (4.5.1)$$

则对每个实的波数 k 有一个实的频率 ω , 使对应的式(4.5.1)满足于方程(4.1.2)。其对应关系式

$$\omega = \omega(k) \quad (4.5.2)$$

称为方程的色散关系。式(4.5.1)表明波以速度

$$c = \omega/k \quad (4.5.3)$$

向右传播($c > 0$)。称 c 为相位速度。当波以群体形式出现时, 使情况变得更为复杂。设初始分布 $u(x, 0)$, 有 Fourier 变换:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \exp(ikx) dk \quad (4.5.4)$$

则 $t \geq 0$ 时刻的解有以下形式:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \exp\left\{it\left[\frac{kx}{t} - \omega(k)\right]\right\} dk \quad (4.5.5)$$

假设当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x/t = c^0 = \text{const}$, 沿直线 $x/t = c^0$, 可以看到随着波数 k (为一连续的实数)的增加波的振荡频率加大。由于相邻近波的叠加可使波相互抵消, 人的眼睛所能看到的只是那些满足关系式^[5]

$$\frac{d}{dk} \left[\omega(k) - \frac{kx}{t} \right] = 0 \quad (4.5.6)$$

的波(频率随波数 k 变化的极值), 即满足 $\frac{d\omega}{dk} = \frac{x}{t}$ 的波。定义

$$D(k) \approx \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (4.5.7)$$

为群速度。群速度为波群的传播速度。若干波幅和周期相近的波, 在传播中相互叠加后形成波列, 波列的包络称为波包。群速度则为这一波包的传播速度。

为了说明群速度在数值解特性分析中的作用, 首先考察一算例。考虑单波方程, 取 $c = 1$ 。采用 Leap-Frog (蛙跳) 格式

$$u_j^{n+1} - u_j^{n-1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (4.5.8)$$

这里对于差分方程及其数值解中的群速度概念只是形式上照搬在微分方程中的概念。将形式为式(4.5.1)的解代入式(4.5.8)中, 消去公共因子后可得

$$\sin(\omega \Delta t) = \lambda \sin \alpha, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \alpha = k \Delta x \quad (4.5.9)$$

根据式(4.5.2), 从式(4.5.9)可得相位速度 $c(\alpha)$, 将式(4.5.9)对 α 求导, 可得群速度 $D(\alpha)$:

$$c(\alpha) = \frac{1}{\lambda \alpha} \sin^{-1}(\lambda \sin \alpha) \quad (4.5.10)$$

$$D(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \quad (4.5.11)$$

取定 k 值, 并设 Δt 和 Δx 都很小, 由式(4.5.10)和(4.5.11)可以求出近似的相位速度和群速度。

$$c(\alpha) \approx 1 - \frac{1 - \lambda^2}{6} \alpha^2 \quad (4.5.12)$$

$$D(\alpha) \approx 1 - \frac{1 - \lambda^2}{2} \alpha^2 \quad (4.5.13)$$

可以看出, 群速度和相位速度是不同的。相位速度反映了单个波的运动规律。

现在来考察一具体算例中波的传播情况。取初值为

$$u(x, 0) = \sin(kx) \exp[-16(x - 0.5)^2] \quad (4.5.14)$$

计算域为 $[0, 3]$, $\Delta x = 1/16$ 。这样来取波数 k , 使在一个波长中有 8 个计算点: $\alpha = k \Delta x = 2\pi/8 \approx 0.79$, $k = 125.7$ 。在图 4-3a 中给出了初始分布。微分方程(4.1.2)的解以 1 的速度向右传播。在 $t = 2$ 时, 波心应到达 $x = 2.5$ 处。在图 4-3b 中给出的是在 $t = 2$ 时利用差分格式计算的结果。从图中可以看出, $t = 2$ 时刻数值波的中心位于 $x = 1.97$ 处, 这表明波是以 0.74 的速度进行传播的。这恰好是在 $\alpha = 0.79$ 时的群速度。从这一算例可以看出, 讨论数值解中的群速度是很有意义的。

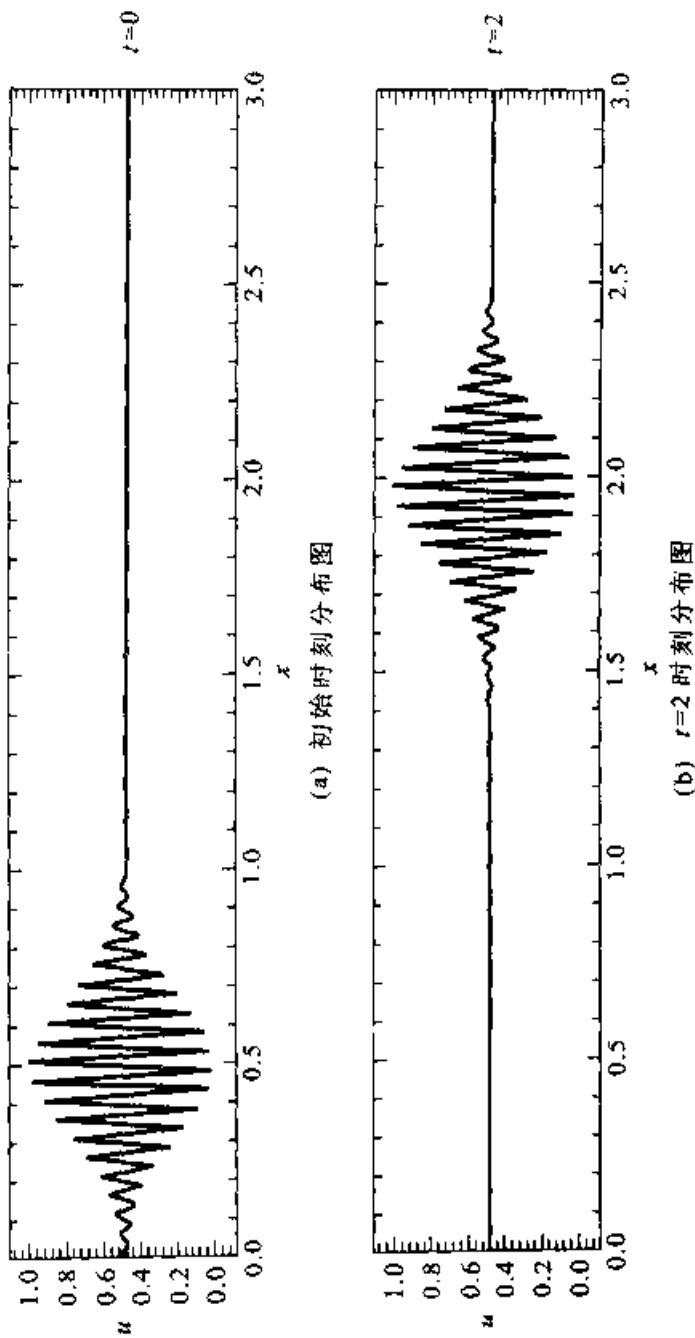


图 4-3 函数 u 的分布图

4.6 数值解行为的进一步分析

为了便于讨论, 针对半离散方程(4.1.11)的解式(4.1.16)定义群速度为

$$D(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} [ck_i(\alpha)] \quad (4.6.1)$$

$$D^0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} [k_i(\alpha)] \quad (4.6.2)$$

在后面讨论中所提到的群速度是指式(4.6.2)。对应于微分方程(4.1.2)的准确解式(4.1.9)有 $k_i = \alpha$, 由此 $D^0(\alpha) \equiv 1$ 。 $D^0(\alpha)$ 是 $k_i(\alpha)$ 随 α 的变化梯度。参照图 4-1a 中各曲线 $k_i(\alpha)$ 随 α 的变化率可将格式分为如下三种类型:

(1) 快型格式(Fast, 简称 FST):

$$D^0(\alpha) > 1, \quad (0 < \alpha \leq \pi) \quad (4.6.3)$$

(2) 慢型格式(Slow, 简称 SLW):

$$D^0(\alpha) < 1, \quad (0 < \alpha \leq \pi) \quad (4.6.4)$$

(3) 混合型格式(Mixed, 简称 MXD):

$$D^0(\alpha) > 1, \quad (0 < \alpha \leq \alpha_0 < \pi) \quad (4.6.5)$$

$$D^0(\alpha) < 1, \quad (\alpha_0 < \alpha \leq \pi)$$

前面曾提到, 对于微分方程的准确解 $D^0(\alpha) \equiv 1$, 数值解在低波段上其群速度逼近于物理的群速度。在高波段上数值解的群速度偏离物理的群速度。在高波段上 FST 型格式使对应的波群以快于物理对应之波群的速度传播, SLW 型格式使高波分量以慢于物理的群速度传播。MXD 型格式使得数值解在较低的高波分量的范围内以快于物理的对应量, 而更高的波分量以慢于物理上的对应量传播。

现在针对如下五个格式作进一步分析:

No.1 Pade 格式(FST):

$$(F_j + F_{j+1})/2 = u_j - u_{j-1} \quad (4.6.6)$$

No.2 二阶精度中心格式(SLW):

$$F_j = \delta_x^0 u_j \quad (4.6.7)$$

No.3 二阶精度迎风格式(MXD):

$$F_j = \frac{1}{2} \delta_x^- (3u_j - u_{j-1}) \quad (4.6.8)$$

No.4 宽网格基的二阶精度中心格式(SLW):

$$F_j = \frac{1}{4} (u_{j+2} - u_{j-2}) \quad (4.6.9)$$

No.5 五阶精度迎风紧致格式(MXD);

参看(4.2.30)式。

在时间方向上对于 No.1 是采用包含两个时间层具有二阶精度的隐式方法进行求解。对其余逼近式采用三步 R-K 方法式(3.2.27) ~ (3.2.29)进行求解。针对这五个格式在图 4-4 中给出了 k_i 和 k_r 随 α 的变化曲线。 $k_i(\alpha)$ 的斜率即为群速度。

从这里可以看出, No.1 是 FST 型的, No.2 和 No.4 是 SLW 型的, 其余是 MXD 型的。从对应于 k_i 的曲线中可以看出各格式的耗散特性。

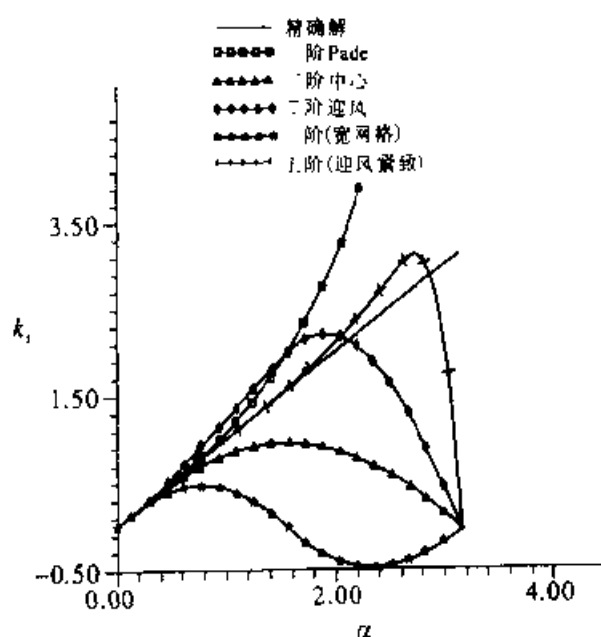
利用上面的五个格式, 取式(4.1.2)中的 $c = 1$ 和如下的初值分别进行了计算:

$$u(x, 0) = \exp(-16x^2) \sin(a_0 x) + \{ \exp[-16(x-1.5)^2] + \exp[-16(x+1.5)^2] \} \sin(a_1 x) \quad (4.6.10)$$

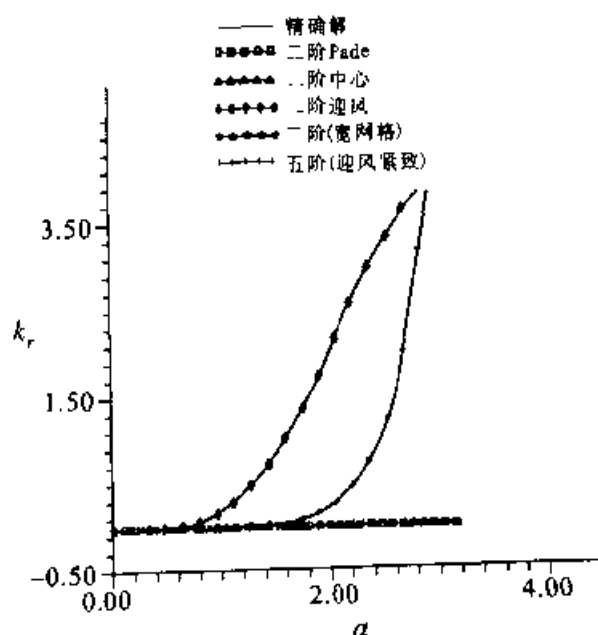
计算中取 $a_1 = 25$, $a_0 = 100, 157, 194$ 。在初始时刻位于 $x = \pm 1.5$ 处的分别为相同的低频波, 位于中间 $x = 0$ 处的为高频波。利用同样的低频波和三种不同的高频波进行了计算。计算的目的是考查不同类型格式的解在不同波段上的运动规律。在图 4-5 中给出了 $t = 0.5$ 时刻的计算结果。在每组图的上方给出了对应时间微分方程的准确解。

其中图 4-5a 对应于 $a_1 = 25, a_0 = 100$ 的情况, 图 4-5b 对应于 $a_1 = 25, a_0 = 157$ 的情况, 图 4-5c 对应于 $a_1 = 25, a_0 = 194$ 的情况。对应的低频波都取 $a_1 = 25$, 目的是为了便于对照。在各组计算中均取 $\Delta x = 1/200$ 。从图 4-5a 中可以看出, 除 No.3 格式的解外, 其他格式的解之间差别不大, 每个格式对应的高频波和低频波以及各个格式所对应的波大体上都以接近于微分方程准确解的速度进行传播。仔细观察可发现, 对应于 No.1 的高频波快了些, 对应于 No.4 的高频波慢了些。在图 4-5a 中可发现, 对应于 No.3 的高频波有很强的衰减效应。在图 4-5b 中加大了对应于高频波的波数, 从这一图中首先看到的是对应于 No.3 的高频波已完全耗散掉了。其次较为明显的是对应于格式 No.4 的高频波停在原地不动。对这一格式, $\alpha = a_0 \Delta x = 0.78$, 恰好位于图 4-4 中 k_i 曲线对应的第一个极值点处, 在此处 $D^0(\alpha) = 0$, 其对应的为驻波。在图 4-5c 中继续加大了对应于高频波的波数。在这一图中已可以看到, 不同格式对应的高频波与准确解之间有了较为明显的差别。对应于格式 No.1 的高频波已明显走在物理波的前面, 对应于格式 No.2 的高频波已明显的落在对应物理波的后面, 对应于格式 No.3 的高频波早已消失, 对应于格式 No.4 的高频波离开 $x = 0$ 处向相反方向(向左方)运动。对应于这组高频波 $\alpha = 0.97$, No.4 格式解的群速度在这一点上 $D^0(\alpha) < 0$

(参见图 4-4), 这是导致高频波向反方向运动的原因。从整个图 4-5 中可以看出, 高精度的五阶紧致格式能更好地模拟高频波的运动规律。上面介绍的不同格式在数值解中, 高频波偏离物理解的行为随波数的减少而减弱, 随波数的增加而加强。这种偏离行为还将随时间的增长而加强。从上面的分析可知, 如果所感兴趣的是非定常多尺度长时间的流动特性, 则在选择模拟方法上应特别注意。

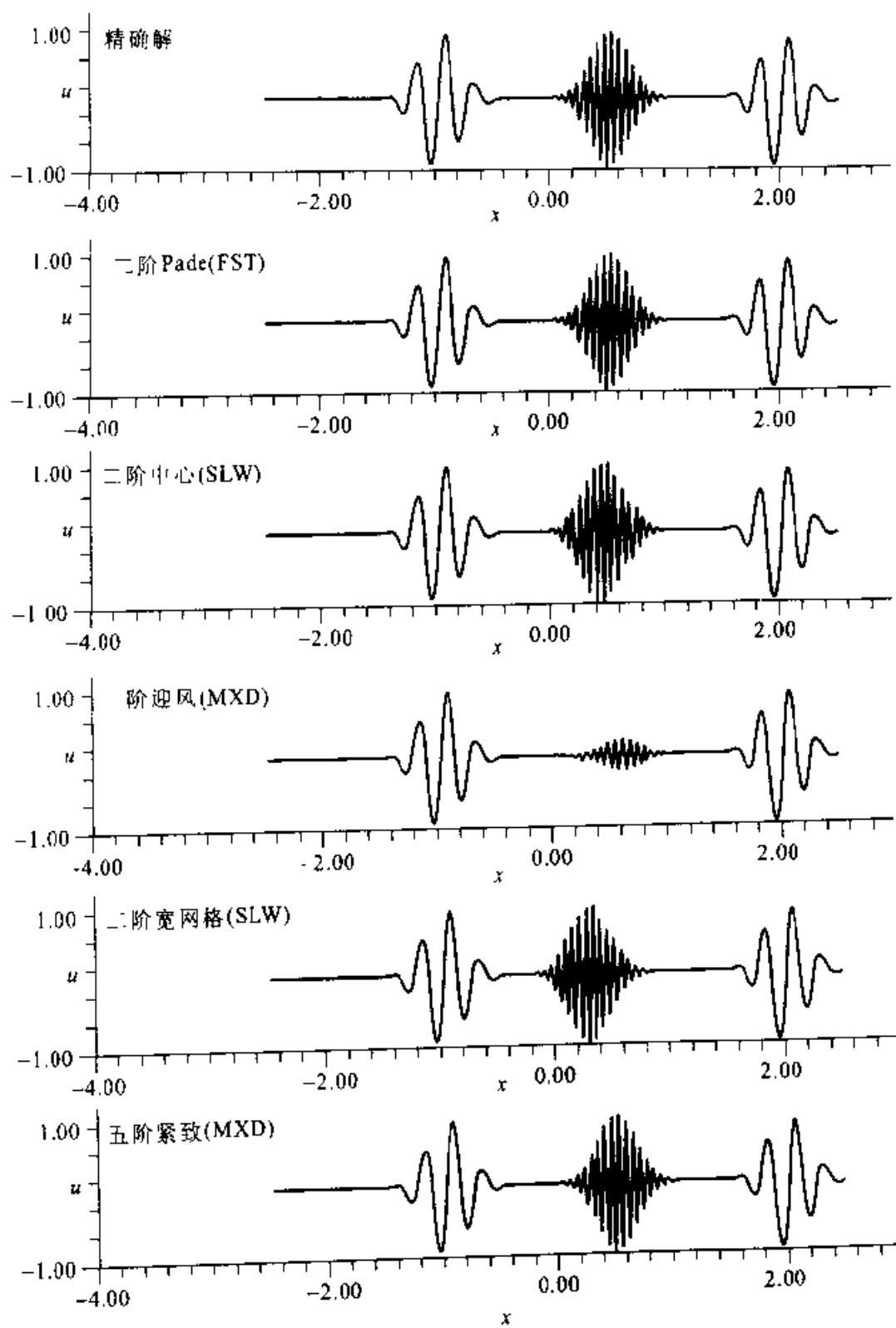


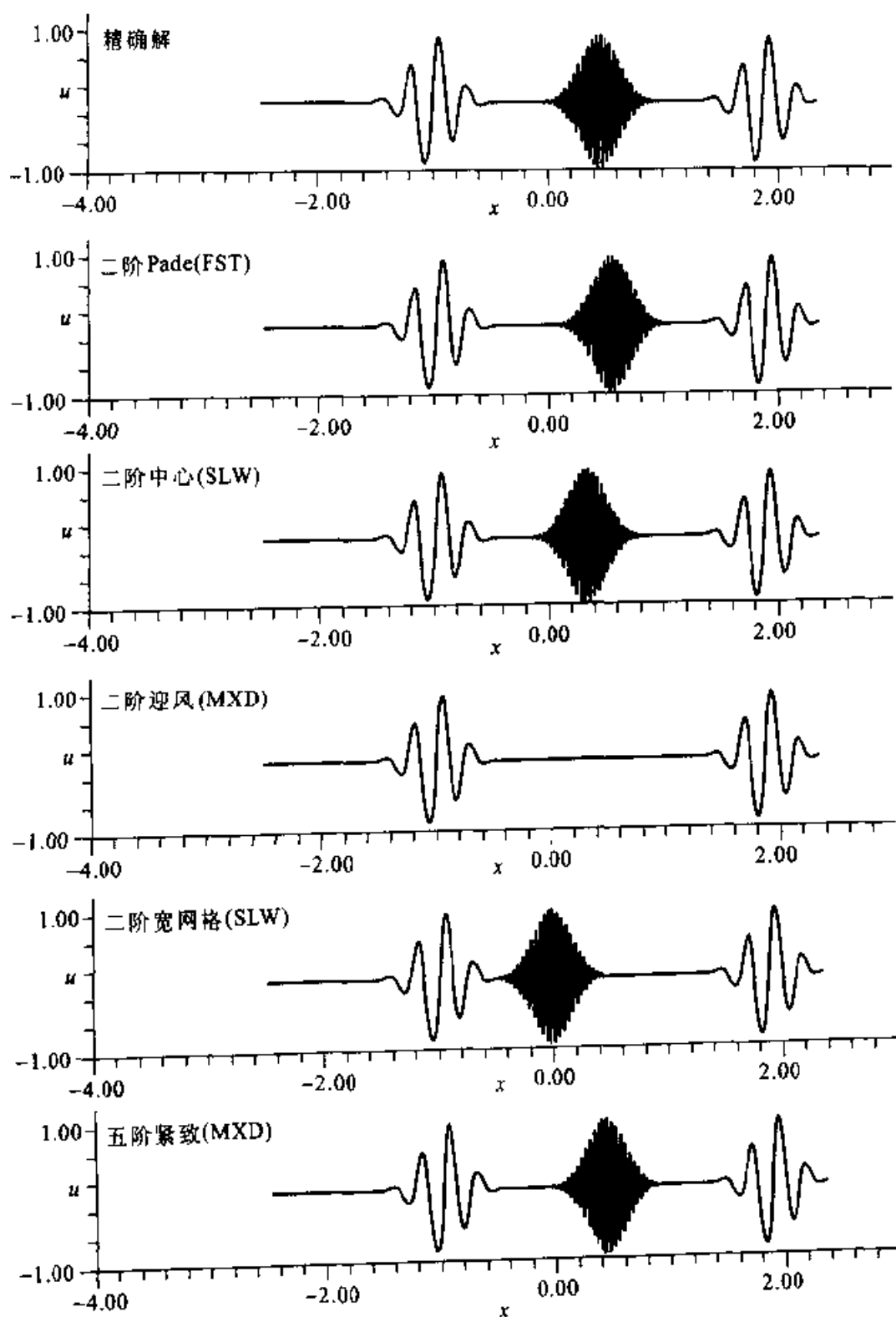
(a) 部分格式 k_i 随 α 变化曲线

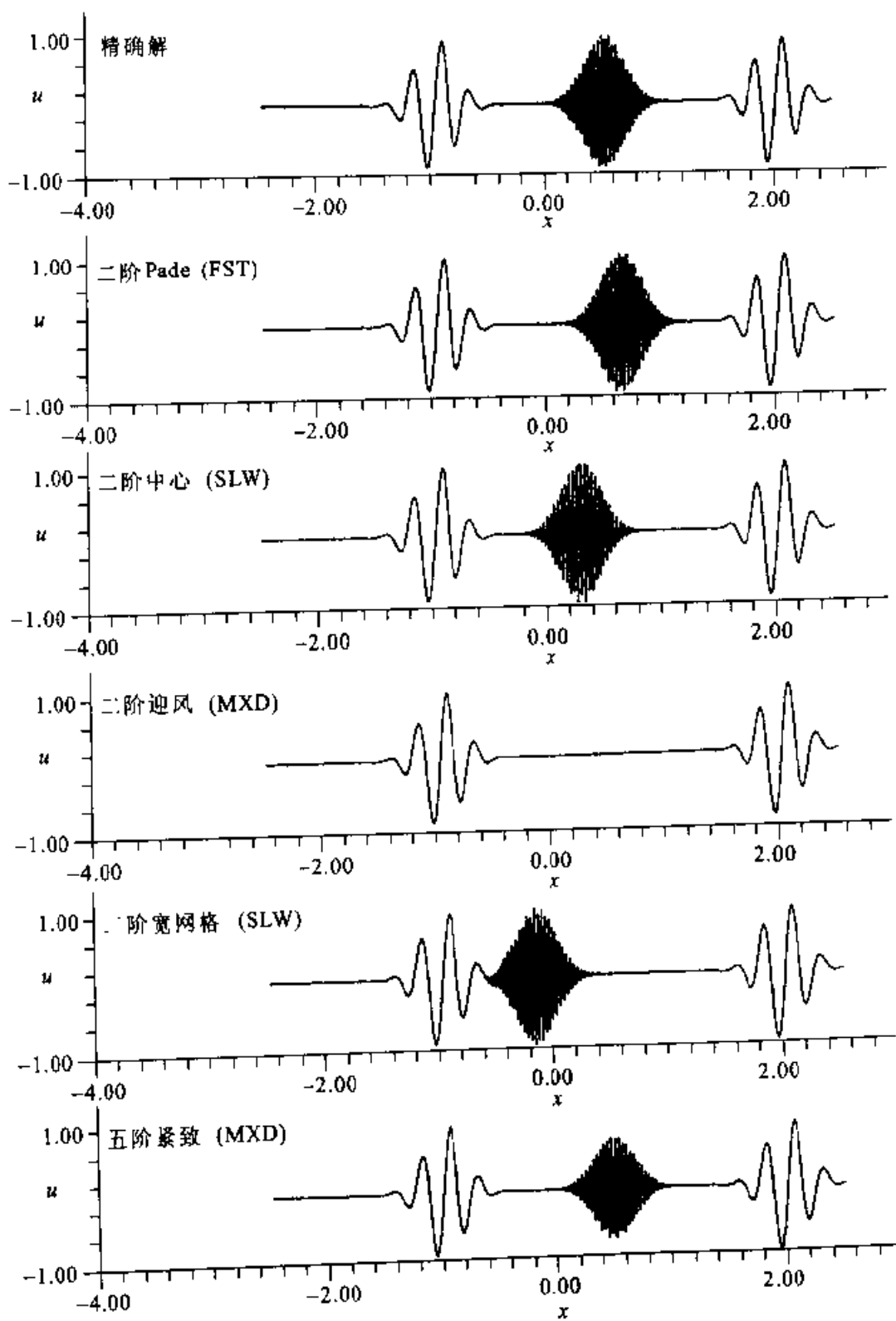


(b) 部分格式 k_r 随 α 变化曲线

图 4-4 k_i, k_r 随 α 变化曲线

(a) $a_1=25, a_0=100$

(b) $a_1=25, a_0=157$



(c) $a_1=25, a_0=194$

图 4-5 不同格式数值解波的传播特征

从算例以及对应格式的 k 随 α 的变化曲线可以看出, 一些格式数值解的行为变化可归纳为以下两个方面:

FST 型格式: 数值解中的高频波群与物理波群有着同样的运动方向, 但行进在物理波群之前。

SLW 型格式: 数值解中高频波群迟后于物理波群, 其中有的波群(在低频段)与物理波群作同向运动, 有的为驻波(在中高波段), 有的波群(对应于高频波段)作反方向运动。

MXD 型格式: 数值解中包含了 FST 和 SLW 型格式数值解中的各种形态。对常用的一些 MXD 型格式的数值解, 一般在低中波段表现为 FST 型格式的特点, 在高波段表现为 SLW 型格式的特点。

上面介绍了对差分格式的分类方法, 介绍了不同类型格式数值解的行为特性。在一般应用中 FST 型格式少见。No.4 格式也不用于求解实际问题, 这里引入这一格式是为了便于分析数值解的行为特性。中心型格式和弱迎风偏斜格式为 SLW 型的, 强迎风格式为 MXD 型的。强迎风格式可能不稳定。稳定的迎风 MXD 格式是耗散型的, 在高波段有着强的耗散效应。而 MXD 格式也主要在高波段表现出 SLW 格式的特性。考虑到在高波段的耗散效应可认为 MXD 型格式主要表现为 FST 格式的特性。文献[7,8]进一步分析了格式的群速度。

在本章中较多地介绍了高精度格式。选取什么样的格式进行计算, 应考虑所求解的是什么样的物理问题。

本章中的数值解行为特性分析是针对线性方程而进行的。非线性问题极为复杂, 不同波之间有相互干扰, 难以进行分析。这里的分析只能作为参考。对非线性问题还需作进一步研究。

4.7 时间离散的色散与耗散效应

应当注意到, 前面的一些分析都是针对半离散方程而进行的。而在实际计算时必须对时间导数进行离散, 这将导致新的色散与耗散误差的产生。对这种由全离散截断误差引入的色散和耗散效应仍可采用前面介绍的两种方法进行讨论, 即 Taylor 级数法及 Fourier 分析方法。这里仅通过一个简单的例子利用 Taylor 级数展开法来分析由时间离散而引入的附加色散与耗散效应。

将修正方程(4.3.4)改写为以下形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u), \quad L_h = L_0 + L_2 + L_3 \quad (4.7.1)$$

这里 $L_0(u)$ 即为式(4.3.4)中的 $-\frac{\partial f}{\partial x}$, 算子 L_2 对应于含 μ_2 的耗散项, L_3 对应于含 a 的色散项.

1. 时间方向采用一阶精度的逼近式

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^n) \quad (4.7.2)$$

将式之左端 u^{n+1} 在 n 点进行 Taylor 级数展开, 并经整理可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \cdots = L_h(u^n) \quad (4.7.3)$$

对式(4.7.3)两端取 $\frac{\partial}{\partial t}$, 将所得之 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 代入式(4.7.3)经整理可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u^n) - \frac{\Delta t}{2} L_h^2(u^n) + O(\Delta t^2) \quad (4.7.4)$$

考虑到与 $L_0(u)$ 相比, $L_2(u)$ 和 $L_3(u)$ 是小量, 则式(4.7.4)可写为形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u^n) - \frac{\Delta t}{2} L_0^2(u^n) + \cdots = L_h(u^n) - \frac{\Delta t}{2} c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \quad (4.7.5)$$

由此可知, 时间方向采用一阶显式逼近, 式(4.7.2)将主要引入负耗散效应. 如果 L_h 是非耗散型的, 则格式(4.7.2)是不稳定的. 如果时间方向采用一阶隐式逼近, 则可以证明, 时间离散将引入正耗散, 这有利于格式的稳定性.

2. 时间方向的二阶逼近式

考虑以下二步时间离散方法:

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^n + \frac{1}{2} \Delta t L_h(u^n) \quad (4.7.6a)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^{n+\frac{1}{2}}) \quad (4.7.6b)$$

将式(4.7.6a)代入式(4.7.6b)中可得:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L_h(u^n) + \frac{\Delta t^2}{2} L_h^2(u^n) \quad (4.7.7)$$

左端在 n 点进行 Taylor 展开, 并经整理后可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u) + \frac{\Delta t}{2} L_h^2(u) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + O(\Delta t^3) \quad (4.7.8)$$

利用式(4.7.8)及其按时间方向的导数, 可消去右端的 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 和 $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u) + \frac{\Delta t}{2} L_h^2(u) - \frac{\Delta t}{2} L_h\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\Delta t^2}{4} L_h^2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\Delta t^2}{12} L_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + O(\Delta t^3) \quad (4.7.9)$$

再将该式及对应的导数代入其右端, 并考虑到 L_h 为线性算子, 略去高阶小量后有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h(u) - \frac{\Delta t^2}{6} L_h^3(u) + O(\Delta t^3) \quad (4.7.10)$$

考虑到 $L_h^3(u) \sim -c^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ 可知, 时间方向采用二阶精度的逼近式 (4.7.6) 时, 将引入新的色散和耗散误差, 其中主导项是色散效应。

可采用 Fourier 分析法来讨论时间离散所引入的附加色散与耗散效应, 这里不作进一步的分析。

参 考 文 献

- 1 Kim J, Moin P, Moser R D. Turbulence statistics in fully-developed channel flow at low Reynolds number. J Fluid Mech, 1987, 177: 133 ~ 166
- 2 Rai M M, Moin P. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes. J Comput Phys, 1991, 96 (1): 15 ~ 53
- 3 Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. J Comput Phys, 1992, 103: 16 ~ 42
- 4 Fu Dexun, Ma Yanwen. High resolution schemes. In: Hafez M, Oshima K eds. Computational fluid dynamics review 1995. Wiley, 1995: 234 ~ 250
- 5 Collatz, L. The Numerical Treatment of Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1966
- 6 傅德薰, 马延文, 张林波. 可压混合层流动转换到湍流的直接数值模拟. 中国科学(A), 2000, 30 (2): 161 ~ 168
- 7 Fu Dexun, Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow fields. J Comput Phys, 1997, 134: 1 ~ 15
- 8 Fu Dexun, Ma Yanwen, Kobayashi T, et al. Nonphysical oscillation in numerical solutions—reason and improvements. CFD J, 1995, 4 (4): 427 ~ 450

习 题

4-1 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 。其对应的差分逼近式为 $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^b u_j^n$ 。利用 Taylor 级数展开法给出对应的修正方程, 并根据修正方程的耗散特性说明在什么条件下格式是稳定的。

4-2 设习题 4-1 中之 $c > 0$, 并 x 方向取等距网格, t 方向取两点前差, 空间导数利用点 $(j-3, j-2, j-1, j)$ 4 点构造具有三级精度的逼近式。对所得之格式给出 k_i, k_r 随 α 的变化曲线, 并分析格式的稳定性。

4-3 针对习题 4-1 中的方程, 时间导数利用 (x_j, t_n) 和 (x_j, t_{n+1}) 上的值进行逼近, 空间取等步长, 空间导数利用 $\frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^n [u_k(u_{j+k}^n - u_{j-k}^n)/(2k)]$ 逼近, 试分析格式的相容性和稳定性。

4-4 有习题4-1中的方程,其逼近式为 $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} F_j^n$, 其中 F_j^n 满足方程 $a_0 F_j^n + \sum_{k=1}^m a_k (F_{j+k}^n + F_{j-k}^n)/(2k) = \sum_{k=1}^n b_k (u_{j+k}^n - u_{j-k}^n)/(2k)$, 试分析格式的相容性和稳定性。

4-5 有习题4-1中的方程,其逼近式为 $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} F_j^n$, 这里 F_j^n 满足方程 $\frac{2}{3} F_j^n + \frac{1}{3} F_{j-1}^n = \frac{5}{6} \delta_x^- u_j^n + \frac{1}{6} \delta_x^+ u_j^n$, 其中 $c > 0$ 。试分析格式的稳定性。

4-6 针对习题4-1中的方程,利用单步 L-W 格式,以单个 Fourier 分量 e^{ikx} 为初值,给出差分方程的准确解,将解写为形式: $\exp(-k_r t/\Delta x) \exp\left[ik\left(x - c \frac{k_i}{a} t\right)\right]$, 给出 k_r, k_i 随 α 的变化曲线 ($0 \leq \alpha \leq \pi$)。

4-7 针对习题4-1中的方程,利用差分逼近式 $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^b u_j^n$, 以单个 Fourier 分量 e^{ikx} 为初值,给出差分方程的准确解。将解写为形式 $\exp(-k_r t/\Delta x) \cdot \exp\left[ik\left(x - c \frac{k_i}{a} t\right)\right]$, 给出 k_r, k_i 随 α 变化曲线 ($0 \leq \alpha \leq \pi$)。

4-8 已知方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, 其半离散化方程为 $\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = 0$, 其中 $F_j = \frac{1}{2}(u_{j+1} - u_{j-1})$ 。以 $\exp(ikx_j)$ 为初值,给出差分方程的准确解。从准确解中可知, $\left|1 - \frac{k_i(\alpha)}{a}\right| \leq \epsilon$, 表明格式对不同 α 的逼近精度,其中 $k\Delta x = \alpha$ 。试问当 $\epsilon = 0.05$ 时,取步长为 $\Delta x = \pi/200$, 格式所能模拟的最大波数 k 是多少?

4-9 对习题4-8,如果 $\epsilon = 0.05$, $k = 50$,试问为满足精度需要所能取的最大空间步长是多少?

4-10 已知方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, 其半离散化方程为 $\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{F_j}{\Delta x} = 0$, 其中 F_j 由五阶迎风紧致差分式中得出。设 $|1 - k_r t/\Delta x| \leq 0.05$, 如果只考虑耗散效应试问:

- (1) 取 $\Delta x = \pi/200$ 时,格式所能模拟的最大波数 k 是多少?
- (2) 取 $k = 50$ 时,在满足精度要求下,所能取的最大空间步长是多少?

4-11 有二维方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 计算域为 $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, 初始条件为 $u(x, y, 0) = \exp\{-[a(r - r_0)]^2\} \sin(\pi br)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_0 = 0.0$ 。在时间方向采用三阶 R-K 方法,空间方向采用宽网格基的二阶中心差分,即 $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{1}{4\Delta x}(u_{i+2,j} - u_{i-2,j})$, 在近边界点采用普通两点中心差分,边界上采用法向梯度为零的条件。取 $\Delta x = 1/200$, $\Delta y = 1/200$, 试计算:

- (1) $a = 10$, $b = 10$, $t = 0.5$ 时的结果,并绘出 u 的等值线图。
- (2) $a = 10$, $b = 100$, $t = 0.5$ 时的结果,并绘出 u 的等值线图。

4-12 计算条件与习题4-11完全一样,但空间导数逼近采用五阶迎风紧致差分,给出相应情况 u 的等值线图,并加以比较。

第五章 代数方程的求解

从以前各章的讨论中可知,流体力学方程(无粘流动或粘性流动)经离散化后所得到的是一代数方程组,它们可能是线性的或非线性的。对非线性代数方程组必须采用迭代法进行求解。在迭代过程中也会遇到求解线性代数方程组的问题。因而线性代数方程组的求解在 CFD 中起着重要作用。

由于在 CFD 中所遇到的代数方程组多由流体力学方程离散化后所得,因而所对应的代数方程组有其独特性,即对应的矩阵为稀疏矩阵,远离对角线的元素多为零。这将使代数方程的求解大为简化。在本章中将介绍几种求解线性代数方程组的方法,并将介绍一下求解非线性代数方程组的方法。

5.1 Gauss 消去法

Gauss 消去法是求解线性代数方程组的一个最基本的直接求解法。设有代数方程

$$AX = b \quad (5.1.1)$$

这里 b 为已知 n 维矢量, X 为需求解的 n 维未知矢量, A 为 $n \times n$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

Gauss 消去法由两个过程组成。其正过程为通过消去的办法将原来大的代数方程组化为小的代数方程组,最后化为对应于一个未知数的方程,这时所对应的矩阵为上三角矩阵。其反过程为逐次代入的办法求出新的未知数。现将求解过程简述如下。

将方程(5.1.1)的第一行乘以 $-a_{21}/a_{11}$ 加到第二行中去,这样矩阵中整个第二行的元素(包括右端的第二个元素)都已改变。为了简便起见,对改变了的矩阵元素仍用原来的表示法。如此得到的矩阵之第二行

的第一个元素为零。通过类似的方法, 将第一行的元素乘以 $-a_{i1}/a_{11}$ 加到第 i 行中去, 则可使矩阵中第 i 行之第一个元素为零。如此所得到的对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

采用类似的方法可消去 $a_{i2} (i = 3, 4, \cdots, n)$, $a_{i3} (i = 4, \cdots, n)$, \cdots , 最后所得方程对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.1.4)$$

应注意, 经正消去过程后所得代数方程对应的矩阵及右端元素除第一行外都已改变。对应于矩阵(5.1.4)的代数方程组是很容易求解的。其最后一个方程只包含一个未知量 x_n 。很显然

$$x_n = b_n / a_{nn} \quad (5.1.5)$$

利用已求得的 x_n 和倒数第二个方程可求得 x_{n-1} 。然后可逐次求出 x_{n-2}, \cdots, x_1 。具体的求解过程为

$$x_i = (b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}x_k) / a_{ii}, \quad (i = n-1, n-2, \cdots, 1) \quad (5.1.6)$$

当矩阵很大时应考虑到计算过程中舍入误差的积累。因而通常人们采用主元消去法。关于主元消去法的细节可参阅一般的线性代数学。考虑到 CFD 中遇到的矩阵为稀疏矩阵, 因而误差的积累并不严重。

5.2 追 赶 法

首先讨论标量追赶法。由于 CFD 中所遇到的代数方程是由微分方程的离散化而得, 它们有其自身的特点。因而可采用一些特殊的方法进行求解, 以尽可能地减少计算工作量。现以热传导方程(2.2.2)为例进行讨论。取隐式逼近式(3.1.6), 且在区域两端给定边界条件 $u(0, t) =$

$a_0, u(1, t) = b_0$ 。这一隐式逼近式经整理后略去上标可写为以下形式:

$$b_1 u_1 + c_1 u_2 = d_1 \quad (5.2.1)$$

$$a_j u_{j-1} + b_j u_j + c_j u_{j+1} = d_j \quad (5.2.2)$$

$$a_m u_{m-1} + b_m u_m = d_m \quad (5.2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} a_j &= -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad b_j = 1 + 2\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \quad c_j = -\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \\ d_j &= u_j^n, \quad (j = 1, 2, \dots, m) \\ d_1 &= u_1^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} a_0, \quad d_m = u_m^n + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} c_0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

代数方程的矢量形式为式(5.1.1), 其中

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \quad (5.2.5)$$

$$X = (u_1 \quad \cdots \quad u_m)^T, \quad b = (d_1 \quad \cdots \quad d_m)^T$$

现介绍求解方程组(5.2.1)~(5.2.3)的追赶法。设所求的数值解满足如下关系式

$$u_j = A_j u_{j+1} + B_j \quad (5.2.6)$$

如果系数 A_j 和 B_j 为已知, 且 u_{j+1} 也是已知, 则可由式(5.2.6)中求出 u_j , 进而可求出 u_{j-1}, u_{j-2}, \dots 。问题在于如何求出这些系数。利用式(5.2.6)给出的 u_{j-1} (即以 $j-1$ 代替式中的 j) 的表达式, 并代入式(5.2.2)中可得

$$u_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}} u_{j+1} + \frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}} \quad (5.2.7)$$

对照式(5.2.6)和(5.2.7)可得

$$A_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j A_{j-1}}, \quad B_j = \frac{d_j - a_j B_{j-1}}{b_j + a_j A_{j-1}} \quad (5.2.8)$$

在式(5.2.8)中 a_j, b_j 和 c_j 为已知量。很显然, 如果已知 A_1 和 B_1 , 则可由式(5.2.8)求出所有的 A_j 和 B_j ($j = 2, \dots, m-1$)。求解 A_j 和 B_j 的过程称为正追赶过程。 A_1 和 B_1 可由式(5.2.1)求出

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{c_1}{b_1} u_2 + \frac{d_1}{b_1} \\ A_1 &= -\frac{c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

由计算的边界条件可确定 b_1 和 c_1 。假设所需之 A_j 和 B_j 都已求出, 则利用在 $j = m-1$ 点上的式(5.2.6)及式(5.2.3)可得

$$\begin{aligned} u_{m-1} - A_{m-1} u_m &= B_{m-1} \\ a_m u_{m-1} + b_m u_m &= d_m \end{aligned}$$

由此可求出 u_m :

$$u_m = \frac{d_m - a_m B_{m-1}}{b_m + a_m A_{m-1}} \quad (5.2.10)$$

按式(5.2.10)求得 u_m , 然后按式(5.2.6)可求出所有的 u_j 。利用式(5.2.6)求 u_j 的过程称为反追赶过程。

当求解的问题维数很大时应注意舍入误差的积累, 即正追赶过程和反追赶过程的稳定性。可以证明, 如果系数满足条件

$$|a_j| + |c_j| \leq |b_j| \quad (5.2.11)$$

则追赶过程是稳定的。式(5.2.11)意味着主对角元素占优。

在正追赶过程中确定 A_j 及 B_j 的方法及在反追赶过程确定 u_m 的方法依边界条件的不同而不同。

上边介绍了求解三对角线方程的标量追赶法。通常对应于式(5.2.2)中的 a_j , b_j , c_j 为矩阵, 对应于 u_j 和 d_j 的为矢量。此时需采用矩阵追赶法求解对应的代数方程组。矩阵追赶法与标量追赶法类似。设有三对角块方程组

$$A_j V_{j-1} + B_j V_j + C_j V_{j+1} = D_j, \quad (j=2, \dots, M-1) \quad (5.2.12)$$

这里 A_j , B_j 和 C_j 为矩阵, V_j 和 D_j 为矢量。设解满足关系:

$$V_j = \bar{A}_j V_{j+1} + \bar{B}_j \quad (5.2.13)$$

这里追赶系数 \bar{A}_j 和 \bar{B}_j 的表达式为

$$\bar{A}_j = -[B_j + A_j \bar{A}_{j-1}]^{-1} C_j \quad (5.2.14)$$

$$\bar{B}_j = [B_j + A_j \bar{A}_{j-1}]^{-1} [D_j - A_j \bar{B}_{j-1}] \quad (5.2.15)$$

在本节介绍了追赶法, 现从另一角度来分析这一方法。可将式(5.2.5)中的矩阵 A 分解为两个矩阵乘积的形式

$$A = LU \quad (5.2.16)$$

这里 L 为下三角矩阵(lower), U 为上三角矩阵(upper):

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -A_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.17)$$

利用式(5.2.5)中已知的 A 矩阵的元素及关系式(5.2.16)可得

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_1, & A_1 &= -c_1/a_{11} \\ a_{22} &= b_2 + a_2 A_1, & A_2 &= -c_2/a_{22} \\ &\dots & &\dots \\ a_{jj} &= b_j + a_j A_{j-1}, & A_j &= -c_j/a_{jj} \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

可按顺序求出矩阵 L 和 U 的元素 $a_{11}, A_1, a_{22}, A_2, \dots$, 因 $A = LU$, 故由式(5.1.1)有 $LUX = b$, 设 $UX = Y$, 则原代数方程的求解归结为如下两个代数方程的求解:

$$LY = b \quad (5.2.19)$$

$$UX = Y \quad (5.2.20)$$

首先由方程(5.2.19)求出矢量 Y , 然后由式(5.2.20)求出矢量 X 。前面介绍的正追赶过程对应于求 L 和 U 矩阵及式(5.2.19)的求解, 反追赶过程对应于对方程(5.2.20)的求解。

从上面的讨论中可以看出, 用追赶法求对应于三对角矩阵的代数方程相当于矩阵分解为下三对角矩阵 L 和上三对角矩阵 U , 然后求解两个更为简单的代数方程组。对矩阵追赶法情况完全类似。在本章第一节介绍的 Gauss 消去法实际上也相当于将矩阵分解为矩阵 L 和 U 求解式(5.2.19)的过程, 未知量的代入过程相当于对式(5.2.20)的求解。在实际计算中这种 L 和 U 矩阵分解方法是经常采用的。如在第七章也用到了这种类型的因式分解或近似因式分解法。在后面介绍的迭代法中也会遇到 LU 分解。

实际上前面介绍的追赶法和 LU 分解法都是 Gauss 消去法的特殊形式。这类方程都可用 Gauss 消去法来求解。这里较为仔细地介绍了追赶法, 因为三对角线或三对角块矩阵是 CFD 中最为常见的矩阵, 追赶法求解充分考虑了矩阵的特殊性, 且按追赶法求解可节省工作量。按类似的方法可构造对应于五对角线或五对角块矩阵的追赶法。关于追赶法的并行化是目前并行算法研究的重要课题。

5.3 迭代法求解代数方程

5.3.1 迭代法的基本概念

上两节中介绍的追赶法简便, 且计算量也小。在一般情况下, 一个稀疏矩阵经 L 和 U 分解后所得之上下三对角矩阵不一定仍是稀疏矩阵。在这种情况下, 计算量仍可能很大。此外, 所求解的代数方程是由偏微

分方程离散化而得, 这意味着已有离散误差存在, 因而可不必准确的去求代数方程。这一思想诱使人们采用迭代法来求解代数方程。

在采用迭代法来求解代数方程时, 首先需对未知量给一预测值, 然后利用方程对其进行改进, 直到收敛为止。在进行迭代求解时要求每次迭代时的工作量要小, 迭代的次数也应少, 以使迭代计算总的工作量少于直接求解时的计算量。

设所求解的代数方程为式(5.1.1)。在进行了 n 次迭代后得到近似解为 X^n 。 X^n 并不满足方程。将其代入原方程后有余量 ρ^n 产生:

$$AX^n = b - \rho^n \quad (5.3.1)$$

设 X 为收敛解, ε^n 为迭代误差:

$$\varepsilon^n = X - X^n \quad (5.3.2)$$

则 ε^n 满足方程

$$A\varepsilon^n = \rho^n \quad (5.3.3)$$

迭代解的收敛要求 ρ^n 或 ε^n 趋于零。

在实际应用中通常以求解下列方程代替对式(5.1.1)的求解:

$$PAX = B \quad (5.3.4)$$

这里 $B = Pb$, P 为非奇异的预处理矩阵(pre-conditioning matrix)。选取合适的预处理矩阵可加快收敛速度。

在进行迭代求解时通常将矩阵 PA 分为两个矩阵和的形式:

$$PA = M - N \quad (5.3.5)$$

迭代式为

$$MX^{n+1} = NX^n + B \quad (5.3.6)$$

从方程两端减去 MX^n 得

$$M\delta^n = \rho^n \quad (5.3.7)$$

其中 $\delta^n = X^{n+1} - X^n$, $\rho^n = B - (M - N)X^n = B - PAX^n$ 。这里给出了一个一般形式的迭代法。实际上找到一个好的预处理矩阵和式(5.3.6)中合适的矩阵 M 和 N 并不容易, 它依赖于原物理问题和离散化后矩阵 A 的特性。这也是 CFD 工作者需研究的课题。

5.3.2 迭代法的收敛速度

在这里将简单分析一下迭代法的收敛速度。迭代的收敛解要求 $X^{n+1} = X^n = X$, 因而有关系式

$$MX = NX + B \quad (5.3.8)$$

定义

$$\varepsilon^n = X - X^n$$

由式(5.3.8)中减去式(5.3.6)得

$$M\epsilon^{n+1} = N\epsilon^n, \quad \epsilon^{n+1} = M^{-1}N\epsilon^n \quad (5.3.9)$$

迭代的收敛性要求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n = 0$ 。收敛的速度与矩阵 $M^{-1}N$ 的结构特性相联系。设矩阵 $M^{-1}N$ 的特征值与对应的特征矢量分别为 λ_k 和 g_k :

$$M^{-1}Ng_k = \lambda_k g_k, \quad (k = 1, \dots, m) \quad (5.3.10)$$

设特征矢量 g_k 是完备的, 则初始误差 ϵ^0 可通过特征矢量来表示:

$$\epsilon^0 = \sum_{k=1}^m \alpha_k g_k \quad (5.3.11)$$

由关系式(5.3.9)可得

$$\epsilon^{n+1} = (M^{-1}N)^n \epsilon^0 \quad (5.3.12)$$

再利用式(5.3.10), 且将式(5.3.11)代入式(5.3.12), 则可得关系

$$\epsilon^{n+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k (\lambda_k)^n g_k \quad (5.3.13)$$

当迭代次数 $n \rightarrow \infty$ 时, $\epsilon^n \rightarrow 0$ 的充分与必要条件是 $|\lambda_k| < 1$ 。在所有特征值中其绝对值最大者称为矩阵 $M^{-1}N$ 的谱半径。假设 λ_1 为 $|\lambda_k|$ 中之最大者, 则经过一定的迭代次数之后在式(5.3.13)中右端的主导项为含 λ_1 项, 故有

$$\epsilon^{n+1} \approx \alpha_1 (\lambda_1)^n g_1 \quad (5.3.14)$$

如果要求收敛误差小于 δ_0 , 则可确定, 达到这一要求所需要的迭代次数应满足以下关系式:

$$\alpha_1 (|\lambda_1|)^n \approx \delta_0$$

由此可得

$$n \approx \frac{\ln(\delta_0/\alpha_1)}{\ln|\lambda_1|} \quad (5.3.15)$$

从上式可知, 当谱半径接近于 1 时, 收敛速度将会很慢。

现通过一个很简单的例子来说明迭代的收敛情况。设所需求解的为一单个方程:

$$ax = b \quad (5.3.16)$$

分裂 $a = m - n$, 取 p 为迭代次数, 则迭代式为

$$mx^{p+1} = nx^p + b \quad (5.3.17)$$

由上式可知, 迭代误差 $\delta^{p+1} = x^{p+1} - x^p$ 满足方程

$$\delta^{p+1} = \frac{n}{m} \delta^p \quad (5.3.18)$$

从式中可以看出, 如果 m 非常接近于式(5.3.16)中的 a , 则 n 很小, 收敛速度也越快。对更为一般情况也是如此, 即式(5.3.5)中的 M

越接近于矩阵 PA ，则收敛速度越快。

这里在分析收敛速度时利用了矩阵 $M^{-1}N$ 的谱半径，而谱半径本身也是很难计算的。现介绍一个判断迭代次数的方法。根据 ϵ^n 的定义，利用式(5.3.14)可得

$$\delta^n = X^{n+1} - X^n = (X^{n+1} - X) - (X^n - X) \approx (1 - \lambda_1)(\lambda_1)^n \alpha_1 g_1 \quad (5.3.19)$$

由此可得

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\delta^n\|}{\|\delta^{n-1}\|} \quad (5.3.20)$$

这里 $\|a\|$ 表示矢量 a 的模。利用式(5.3.14)及式(5.3.19)得

$$\epsilon^n = X - X^n \approx \frac{\delta^n}{1 - \lambda_1} \quad (5.3.21)$$

$$\|\epsilon^n\| \approx \frac{\|\delta^n\|}{1 - \lambda_1} \quad (5.3.22)$$

这样利用两次迭代的量 X^n 和 X^{n+1} 可近似地预估出 λ_1 及 $\|\epsilon^n\|$ 来。利用预估出的 λ_1 及 $\|\epsilon^n\|$ 可得到满足预定要求所需要的迭代次数。

这里介绍的估计迭代收敛速度的方法也适用于非线性方程的迭代求解，但只适用于 $M^{-1}N$ 的特征值为实根的情况。对矩阵有复特征值时关于迭代收敛速度的估计可参阅文献[1,2]。

5.3.3 Gauss-Seidel 方法及松弛迭代法

在前面介绍了迭代法的基本概念及收敛速度的经验估计。这里将介绍两个迭代方法，即 Gauss-Seidel 迭代法及松弛迭代法。考虑一个 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (5.3.23)$$

对 x 和 y 方向的二阶导数均采用具二阶精度的中心差分，且取 $x_i = i\Delta x$ ， $y_j = j\Delta y$ ， Δx 和 Δy 分别为 x 和 y 方向的网格间距。则离散后的方程为

$$\frac{1}{\Delta x^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = f_{i,j} \quad (5.3.24)$$

图 5-1 中给出了网格示意图。一种简单的迭代方法为

$$u_{i,j}^{p+1} = \frac{A(u_{i-1,j}^p + u_{i+1,j}^p) + B(u_{i,j-1}^p + u_{i,j+1}^p) - f_{i,j}}{2(A+B)} \quad (5.3.25)$$

这里 $A = 1/\Delta x^2$ ， $B = 1/\Delta y^2$ ， p 为迭代数。式(5.3.25)表明，在 (i,j) 点

上新的迭代值为上次迭代值的加权平均。采用式(5.3.25)这种简单迭代方法收敛速度是很慢的。因而在实际应用中采用的不多。

另一种较为简单的迭代方法为 Gauss-Seidel 迭代方法, 后面有时称为 GS 方法。假设求解的方向为按 x 和 y 的增长方向, 则在求解 (i, j) 点时在 $(i-1, j)$ 和 $(i, j-1)$ 点上的值已经求得。Gauss-Seidel 迭代方

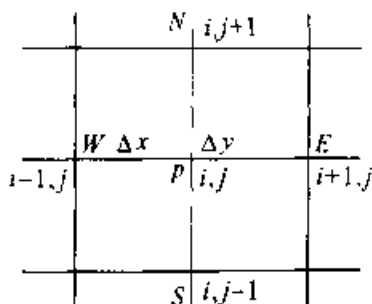


图 5-1 网格示意图

法的思想是把已经求得的量马上代入迭代式中去。针对方程式(5.3.24)的 Gauss-Seidel 迭代式为

$$u_{i,j}^{p+1} = \frac{A(u_{i-1,j}^{p+1} + u_{i+1,j}^p) + B(u_{i,j-1}^{p+1} + u_{i,j+1}^p) - f_{i,j}}{2(A+B)} \quad (5.3.26)$$

Gauss-Seidel 迭代方法的收敛速度快于普通迭代方法式(5.3.25)。

松弛迭代法(relaxation method)是 Gauss-Seidel 迭代方法的改进。其迭代形式为

$$u_{i,j}^{p+1} = \omega \frac{A(u_{i-1,j}^{p+1} + u_{i+1,j}^p) + B(u_{i,j-1}^{p+1} + u_{i,j+1}^p) - f_{i,j}}{2(A+B)} + (1-\omega)u_{i,j}^p \quad (5.3.27)$$

式中 ω 被称为松弛因子。当 $\omega = 1$ 时为 Gauss-Seidel 迭代法, 当 $\omega > 1$ 被称为超松弛迭代法(Successive Over-Relaxation), 简称为 SOR 方法。SOR 方法可加速迭代收敛速度。针对代数方程(5.3.24), 通过理论分析可找到最优松弛因子。对一般问题可参照简单问题的松弛因子进行调试。通常, 如果网格点增多, 则最优因子加大。如果所选择的松弛因子小于最优因子, 则迭代过程中变量的变化是单调的。通常如果所选的松弛因子大于最优因子, 则迭代过程的量随迭代次数会有摆动现象产生。可采用这种方法来寻求最优因子。

上面通过一个简单例子介绍了 GS 和 SOR 方法。现简单介绍更为一般的情况。将式(5.1.1)中的矩阵写为两个矩阵和的形式:

$$A = L + U \quad (5.3.28)$$

这里下三角矩阵 L 由矩阵 A 中对应的对角元素及其以下的元素组成, 而 U 由 A 之其余的对应元素组成。SG 迭代法为

$$LX^{p+1} = b - UX^p \quad (5.3.29)$$

或

$$X^{p+1} = L^{-1}(b - UX^p) \quad (5.3.30)$$

由于 L 为下三角阵, 所以很容易求逆、可以证明, 如果满足关系

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5.3.31)$$

并至少有一个 i , $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ 成立, 则迭代是收敛的。

对应的 SOR 方法为

$$X^{p+1} = \omega L^{-1}(b - UX^p) + (1 - \omega)X^p \quad (5.3.32)$$

5.4 交替方向追赶法

在文献中通常称这一方法为 ADI (Alternating Direction Implicit) 方法³。这一方法是其他一些方法的基础, 主要是针对多维抛物型方程的求解而设计的。也可用这一方法求解椭圆型方程。椭圆型方程可以看成是当时间足够大时抛物型方程的渐进解。这种从不定常方程出发求解定常问题的方法通常称为时间关系法 (time dependent method)。设有二维抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.4.1)$$

采用第二章中介绍的 C-N 方法进行逼近

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\delta_x^2 u^n}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^n}{\Delta y^2} + \frac{\delta_x^2 u^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u^{n+1}}{\Delta y^2} \right)_{i,j} \quad (5.4.2)$$

这里 δ_x^2 表示 x 方向的二阶中心差分, δ_y^2 为 y 方向的二阶中心差分

$$\left. \begin{aligned} \delta_x^2 u_{i,j} &= u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \\ \delta_y^2 u_{i,j} &= u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.4.3)$$

可将式 (5.4.2) 改写成与其完全等价的如下形式:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \right) \left(1 - \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^{n+1} \\ &= \left(1 + \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \right) \left(1 + \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^n + \left(\frac{\mu \Delta t}{2} \right)^2 \frac{\delta_x^2 \delta_y^2 (u^{n+1} - u^n)}{\Delta x^2 \Delta y^2} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

由于 $u^{n+1} - u^n = O(\Delta t)$, 且方程式 (5.4.2) 的逼近精度为 $O(\Delta t^2)$, 因而可忽略掉式 (5.4.4) 右端的第 2 项而不影响原来的逼近精度, 忽略掉高阶小量后的方程可以改写为以下形式:

$$\left(1 - \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \right) u_{i,j}^* = \left(1 + \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^n \quad (5.4.5)$$

$$\left(1 - \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_y^2}{\Delta y^2} \right) u_{i,j}^{n+1} = \left(1 + \mu \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_x^2}{\Delta x^2} \right) u_{i,j}^* \quad (5.4.6)$$

可利用已知的 u^n 及本节前面介绍的追赶法沿 x 方向求出 $u_{i,j}^{n+1}$, 然后利用所求得的 $u_{i,j}^{n+1}$ 由式(5.4.6)求出 u^{n+1} 。这里对式(5.4.5)和(5.4.6)采用的都是直接解法, 勿需迭代。可以证明, 按式(5.4.5)和(5.4.6)的求解过程是无条件稳定的。应注意到, 在推导式(5.4.5)和(5.4.6)时忽略了高阶小量。如果解的是定常问题, 则要求达到定常解的速度尽量快, 希望尽量取大的时间步长。忽略的项并不影响定常解的精度。如果所求解的问题是定常的物理过程, 则时间步长不宜取得过长, 以免影响时间方向的精度。

上面介绍的 ADI 方法可很容易推广到对三维问题的求解。应当注意的是, ADI 方法在二维问题求解时是无条件稳定的, 但简单的推广到三维问题时则变成条件稳定的了。在文献[4]中构造了一种对三维问题无条件稳定的 ADI 方法。式(5.4.5)和(5.4.6)也可称为近似因式分解法。在文献[5]中对三维近似因式分解的稳定性进行了分析。

5.5 非线性方程的求解

对流体力学方程进行隐式求解时, 将会遇到非线性代数方程的求解。此时可根据具体的物理问题在满足一定的要求情况下进行线性化处理。在一般情况下需要进行迭代求解。**牛顿(Newton)**迭代法的收敛速度比较快, 但要求有比较好的迭代初值。在求解非定常问题时可利用前时刻的物理量给出较好的迭代初值。现介绍一下 Newton 迭代法。设需求解代数方程 $f(x) = 0$ 的根, 已知第 p 次迭代值为 x^p , 希望利用该值经迭代得到更为精确的值 x^{p+1} 。将 $f(x^{p+1})$ 在 x^p 点进行 Taylor 级数展开, 设 $f(x^{p+1}) \approx 0$, 并取主导项有

$$\begin{aligned} 0 &\approx f(x^p) + f'(x^p)(x^{p+1} - x^p) \\ x^{p+1} &= x^p - [f'(x^p)]^{-1}f(x^p) \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

不断重复这一过程, 直到 $x^{p+1} - x^p$ 趋于零为止。

这一方法可推广到对非线性代数方程组的求解。设有非线性代数方程组

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.5.2)$$

$x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p$ 为已知第 p 次迭代的近似值, 而 $x_1^{p+1}, x_2^{p+1}, \dots, x_n^{p+1}$ 是需预测的更为准确的值。如同单个方程一样, 将函数 $f(x_1^{p+1}, x_2^{p+1}, \dots, x_n^{p+1})$ 在 (x_i^p) 点按 Taylor 级数展开:

$$0 \approx f_i(x_1^{p+1}, x_2^{p+1}, \dots, x_n^{p+1}) = f_i(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p) +$$

$$\sum_{j=1}^n (x_j^{p+1} - x_j^p) \frac{\partial f_i(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)}{\partial x_j} \quad (5.5.3)$$

定义

$$X^p = (x_1^p \quad x_2^p \quad \dots \quad x_n^p)^T, \quad f^p = (f_1^p \quad f_2^p \quad \dots \quad f_n^p)^T \quad (5.5.4)$$

$$\frac{D(f)}{D(X)} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a_{i,j} = \frac{\partial f_i^p}{\partial x_j}, \quad f_i^p = f_i(x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$$

则 Newton 迭代公式为

$$\frac{D(f)}{D(X)} (X^{p+1} - X^p) = -f(X^p)$$

或写为形式

$$X^{p+1} = X^p - \left[\frac{D(f^p)}{D(X)} \right]^{-1} f^p \quad (5.5.5)$$

这一方法的收敛速度很快,但不足之处是当方程组很大时,矩阵 $D(f)/D(X)$ 的求逆是很耗时间的。

5.6 时间关系法及局部时间步长法

5.6.1 时间关系法

时间关系法(time dependent)及局部时间步长法都是为求解定常问题而设计的。在求解定常问题时很自然想到从定常方程出发,离散方程中的空间导数,然后选择适当的直接解法或迭代方法,最后得到对应于物理问题的解。实践中用这种方法求解非线性问题是很困难的。首先难以选择一个好的收敛快的迭代方法,而且初始条件也难以预测。从物理上讲,定常问题都是在一定的初始条件和边界条下经过长时间过程的一个渐近解。所谓时间关系法是求解定常问题的一种方法。它是从描述对应的非定常物理问题的方程出发,在取定的初始条件和边界条下,取长时间后的渐近解作为定常问题的解。采用时间关系法求解定常问题的好处是,数学问题的提法更为简单。如,非定常 Euler 方程沿时间推进为双曲型方程,双曲型方程的数学理论和求解方法更为成熟。又如,定常 Euler 方程对于跨声速流(如钝体绕流)则为混合型方程,故初始问题的提法很难适定。采用时间关系法的初始条件较易于选取,且可以追踪真

实的物理演化过程,计算方法也比较成熟。关于流体力学方程的一些算法请参见第六、第七和第八章

5.6.2 局部时间步长法

时间关系法是常被采用的一种求解定常问题的方法。当采用隐式法求解定常问题时可放大时间步长。但在每个时间步上都要求解一非线性代数方程组。采用显式法易于求解,但由于稳定性的要求使得时间步长不能放大。局部时间步长法就是在求解定常问题时对显式法的一种改进。

由于所感兴趣的是定常问题的解,因而可适当改变求解的中间过程,以加快达到定常解的目的。为简便起见,考虑如下之模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x) = 0, \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (5.6.1)$$

$$a(x) = 1.1 + \tanh(bx), \quad (b = 10) \quad (5.6.2)$$

在图 5-2 中给出了系数 $a(x)$ 随 x 的变化曲线。按通常的显式格式逼近式(5.6.1),如 L-W 格式,则稳定性要求

$$\max_x [a(x)] \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (5.6.3)$$

从图 5-2 可知,在计算的大部分区域内 $a(x)$ 的值都很小,即在很大的区域内都可以放大时间步长。但由于 $a(x)$ 值大的局部区域决定了在整个区域的时间步长。为加快达到定态解的速度,在文献[6]中采用了局部时间步长法,即选取

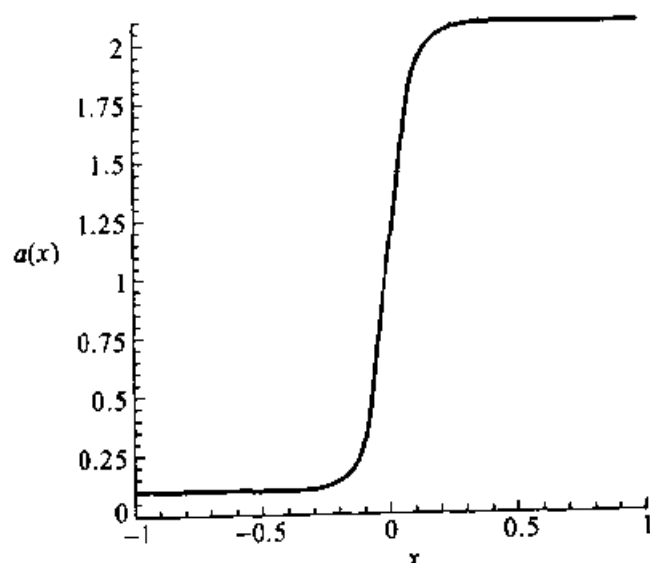


图 5-2 单波方程特征值变化曲线图

$$\Delta t_j = \sigma \frac{\Delta x}{|a(x_j)| + \epsilon}, \quad (0 < \sigma < 1) \quad (5.6.4)$$

这里 ϵ 是一小量。针对方程(5.6.1)按局步时间法离散后的显式格式经整理后可写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \sigma \frac{1}{[|a(x_j)| + \epsilon] \frac{\Delta t}{\Delta x}} \left\{ a(x_j) \frac{\delta_x u_j^n}{\Delta x} + g(x_j) \right\} = 0 \quad (5.6.5)$$

显然局步时间法不影响稳定解, 但可加速收敛过程。

在文献[7]中采用了人工不定常方法。为了求定常解不是直接求解式(5.6.1), 而是求解变形方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H \left[a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + g(x) \right] = 0 \quad (5.6.6)$$

其中

$$H = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} |a(x)|} \quad (5.6.7)$$

此时对离散后的式(5.6.6)可取很大的步长比 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 。显然, 式(5.6.6)与式(5.6.1)有着共同的定常解。应注意的是在采用局部时间步长法和人工不定常方法时, 计算过程中的时间并不对应于物理的时间, 它只是对应于某种迭代方法中的参数。

5.6.3 关于定常解与步长比的注记

在实践中发现, 有时定常解依赖于步长比 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, 即解依赖于步长的选取, 这是所不希望的。对于线性模型方程经分析可知, 对时间导数进行简单差分逼近和 R-K 方法, 所得到的定常解不依赖于 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, 而采用 L-W 格式或 MacCormack 格式, 其定常解依赖于步长比 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 。如果解比较光滑, 则这种依赖性是很小的。当解的梯度比较大时, 这种依赖性比较明显。关于这种定常解与步长比的依赖关系可从如下两个简单例子中看出。第一个例子是逼近单波方程的时间和空间均具有 2 阶精度的格式, 如 $\theta = \frac{1}{2}$ 的式(3.2.10), 当时间趋于无穷大时 $u_j^{n+1} = u_j^n = u_j$, 从而可得

$$c(u_{j+1} - u_{j-1}) = 0$$

即定常解不依赖于时间步长比。

另一个例子是单步的 L-W 格式。对定常解 $u^{n+1} = u^n = u$ 有关系式

$$c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0$$

从式中可以看出, 定常解依赖于步长比, 这是人们所不希望的。二步 L-W 格式及 MacCormack 格式的解也依赖于步长比。经分析可知, 如果解比较光滑, 这种依赖性是很弱的。

5.7 多重网格技术

多重网格技术是提高求解效率的一种有效方法。早期 Brandt 等人在文献[8]中对压力项进行迭代求解时利用了多重网格法。后来 Ni 利用多重网格法求解了 Euler 方程^[9], Jernason 在这方面也作了一些工作^[10,11]。这里将针对椭圆型方程的多重网格法进行简单讨论。设有方程

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad (5.7.1)$$

最简单的差分逼近式为

$$A\delta_x^2 u_{i,j} + B\delta_y^2 u_{i,j} = f_{i,j} \quad (5.7.2)$$

这里

$$A = \frac{a}{\Delta x^2}, \quad B = \frac{b}{\Delta y^2}$$

求解式(5.7.2)的 GS 迭代法为

$$A(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^n) + B(u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^n) = f_{i,j} \quad (5.7.3)$$

其中 n 为迭代数。该式的收敛因子为

$$G = \frac{Ae^{i\alpha} + Be^{i\beta}}{2(A+B) - Ae^{-i\alpha} - Be^{-i\beta}}$$

当 $A = B$ 时对误差的高频分量 $\alpha = \beta = \pi$ 有

$$|G| = \frac{1}{3}$$

而式(5.7.3)的线 GS 迭代式为

$$A(u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^n) + B(u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^n) = f_{i,j} \quad (5.7.4)$$

该式的收敛因子为

$$G = \frac{A}{2(A+B - B\cos\beta) - Ae^{-i\alpha}}$$

当 $A = B$ 时对误差的高频分量 $\alpha = \beta = \pi$ 有

$$|G| = \frac{1}{7}$$

对低频分量($\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$)这两种迭代的收敛因子 $|G| \rightarrow 1$ 。通常的迭代法一般都能使高频分量的误差很快地衰减,但对衰减低频分量都不理想。采用多重网格技术是利用细的网格来减少误差的高频分量,利用计算量更小的粗网格来降低低频误差。

为简便起见,只考虑两层网格,例如取粗网格间距为 h_c ,细网格间距为 $h_f = h_c/2$ 。先利用GS迭代法在细网格上求解方程

$$\Delta_{h_f} U^f = F_f \quad (5.7.5)$$

这里左端表达式与式(5.7.2)之左端相同,上下标 f 表示对应于细网格的参数。当迭代到一定次数后,收敛速度明显减慢。这表明误差的高频分量已得到很大的衰减。如果继续算下去,虽然花费了很大的计算量,但低频误差衰减却不明显。这部分工作可放到粗网格上来作。设 u^f 为方程(5.7.5)的近似解, $V^f = U^f - u^f$ 为解的误差。收敛减慢表明 V^f 已变得比较光滑,它可用粗网格上的 V^c 来逼近。此时可在粗网格上求解方程

$$\Delta_{h_c} V^c = I_f^c (F - \Delta_{h_f} u^f) \quad (5.7.6)$$

这里上标和下标 c 表示对应于粗网格上的参数, I_f^c 表示为由细网格到粗网格上的插值算子。由于

$$\Delta_{h_f} V^f = F - \Delta_{h_f} u^f \quad (5.7.7)$$

所以方程(5.7.6)是在细网格上关于 V^f 的方程在粗网格上的逼近。

设 v^c 为迭代到一定次数后方程(5.7.6)的近似解,则可得到经修正了的在细网格上的解

$$u_{new}^f = u_{old}^f + I_c^f v^c \quad (5.7.8)$$

这里 I_c^f 为由粗网格到细网格的插值算子, $I_c^f v^c$ 是 V^f 的近似值。可重复这一过程,最后得到需要的解。

这种多重网格技术可以由细网格到粗网格,再到更粗网格,然后逐次返回到细网格上去,也可先从粗网格开始到细网格。

前面是针对线性算子 Δ_h 进行讨论的。现讨论更为一般的情况。设有一非线性方程

$$LU = F \quad (5.7.9)$$

在细网格上的差分逼近式为

$$L_{h_f} U^f = F \quad (5.7.10)$$

此时对应于式(5.7.6)和(5.7.8)的方程为

$$L_{h_1} U^k = F_1(F - L_{h_1} u^k) + L_{h_1}(F_1 u^k) \quad (5.7.11)$$

$$u_{\text{new}}^k = u_{\text{old}}^k + L_{\nu}(u^k - F_1 u_{\text{old}}^k) \quad (5.7.12)$$

这里 u^k 是式(5.7.11)中 U^k 的近似解。关于 Euler 方程的多重网格技术请参看文献[9~11]。

参 考 文 献

- 1 Ferziger J H, Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin: Springer, 1996
- 2 Golub VanLoan, Matrix Computation. Baltimore: John Hopkins Univ Press, 1990
- 3 Hegeman L A, Young D M. Applied iterative methods. New York: Wiley, 1981
- 4 Douglas J, Gunn J E. A general formation of alternative direction methods: Part 1, Parabolic and hyperbolic problems. Numerische Mathematik, 1964 (6): 428~453
- 5 傅德薰, 马延文. 钝锥三维绕流背风面分离流动的数值模拟. 力学学报, 1991, 32 (2): 129~138
- 6 Shang J S, Hankey W L. Numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations for a three-dimensional corner. AIAA 77~169
- 7 马延文. 人工不定常方法数值求解一维 Navier-Stokes 方程. 计算数学, 1978 (2): 61~67
- 8 Brandt A J E, Dendy Jn, Ruppel H. The multi grid method for semi-implicit hydrodynamics codes. J Compt Physics, 1980, 34: 348~370
- 9 Xi Ron Hu. A multigrid algorithms for solving the Euler equations. AIAA J, 1982, 20: 1565~1571
- 10 Jameson A. Multigrid algorithms for compressible flow calculations. Second European conference on multigrid method, Cologne, 1985
- 11 Jameson A. Solution of the Euler equations by a multigrid method in solving gas dynamic equations. Applied Math & Computations, 1983, 13: 327~356

习 题

5-1 常微分方程 $\frac{d^2 u}{dx^2} = 2$, 计算区域 $-1 \leq x \leq 1$, 边界条件为 $u(x = -1) = u(x = 1) = 1$ 。

(1) 给出准确解。

(2) 采用中心差分逼近二阶导数, 利用追赶法求解, $\Delta x = 1/100$ 。

(3) 采用迭代法进行求解。

5-2 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \right)$, $Re = 10$, 计算区域为 $-1 \leq x \leq 1$, 初始条件

为 $u(t=0)=1$, 边界条件为 $u(x=-1)=u(x=1)=1$, 时间导数利用 $(u^{n+1}-u^n)/\Delta t$ 逼近, 空间导数利用 $\delta_x^2 u^n / \Delta x^2$ 逼近, 取 $\Delta x = 1/50$, 试给出定常解并绘出解的函数曲线

5-3 方程及其计算条件如习题 5-2, 时间导数利用 $(u^{n+1}-u^n)/\Delta t$, 空间导数利用 $\delta_x^2 u_j^{n+1} / \Delta x^2$ 逼近, 试给出定常解并绘出解的函数曲线

5-4 有方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \right)$, $Re = 10$, 计算区域为 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, 边界条件为 $u(x=-1)=u(x=1)=0, u(y=-1)=u(y=1)=0$. 方程采用如下格式进行离散: $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{Re} \left(\frac{1}{\Delta x^2} \delta_x^2 u_{i,j}^n + \frac{1}{\Delta y^2} \delta_y^2 u_{i,j}^n + 2\pi \sin(\pi x_i) \sin(\pi y_j) \right)$. 试给出定常解及解的三维函数曲面.

5-5 针对习题 5-4 中的显式格式, 利用 Von Neumann 方法分析格式的稳定性条件.

5-6 方程及边界条件如习题 5-4, 但采用隐式法, 利用交替方向追赶方法 (ADI), 即本章中的 (5.4.5) 及 (5.4.6) 式求解定常解, 并绘出三维函数曲面图.

5-7 有方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y)$, $Re = 10$, 计算区域为 $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, 边界条件为 $u(x=-1)=u(x=1)=0, u(y=-1)=u(y=1)=0$. 试利用迭代法 $\frac{1}{\Delta x^2} (u_{i+1,j}^p - 2u_{i,j}^{p+1} + u_{i-1,j}^p) + \frac{1}{\Delta y^2} (u_{i,j+1}^p - 2u_{i,j}^{p+1} + u_{i,j-1}^p) = 0$ 求解方程的数值解.

5-8 方程及条件同习题 5-7, 试采用 Gauss-Seidel 迭代法给出数值解.

5-9 参照式 (5.4.5) 和式 (5.4.6) 给出对应于三维抛物型方程的 ADI 方法, 并分析格式的稳定性.

第六章 可压缩流体力学

方程组的离散

在第三章中, 针对模型方程介绍了离散方法, 在第四章中, 通过模型方程, 分析了数值解的行为特征。模型方程比较简单, 在很多情况下可以求出精确解, 因而可很容易地考查格式的逼近精度。同时对模型方程数值解的行为分析也有助于对流体力学方程逼近式的认识。另一方面, 描述流体运动的方程组是非线性的方程组, 有它们自己的特性。在本章中将参照对模型方程的离散方法, 介绍可压缩流体力学方程的一般离散方法。对非线性双曲型方程, 常常利用光滑的初始条件可得到非光滑的解。求解这类问题对数值方法有着特殊的要求。关于这类问题的求解将在第七章中介绍。

6.1 一维流体力学方程及 Jacobian 系数矩阵的分裂

为了正确模拟复杂的粘性流动, 需求解 N-S 方程。从第二章中的式(2.1.1)可知 N-S 方程由两个部分组成: 一是反映对流特性的无粘项部分, 另一为反映耗散特性的粘性项部分。粘性项的存在使解趋于平滑, 一般不会对数值求解带来很大困难。对粘性项通常都是采用中心型差分, 当 Re 较大或空间网格尺寸不是太小时, 可采用显式处理, 当 Re 很小或空间网格尺寸很小时需采用隐式处理。给计算带来更多困难的是无粘项的处理, 在本章和第七章将重点介绍关于无粘项的差分离散方法。

6.1.1 一维流体力学方程组

对完全气体的一维可压 N-S 方程是式(2.1.1)的简化形式, 对一量纲为一的维方程可写成如下矢量形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = Vis \quad (6.1.1)$$

这里

$$U = (\rho \quad \rho u \quad E)^T, \quad f = (\rho u \quad \rho u^2 + p \quad u(E + p))^T \quad (6.1.2)$$
$$Vis = (Vis_1 \quad Vis_2 \quad Vis_3)^T$$

$$E = \rho \left(c_1 T + \frac{u^2}{2} \right) \quad (6.1.3)$$

$$Vis_1 = 0$$

$$Vis_2 = \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.1.4)$$

$$Vis_3 = \frac{4}{3} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_p}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x} \quad (6.1.5)$$

$$c_1 = p/(\gamma - 1), c_p = \gamma c_v$$

状态方程可参见式(2.1.2), 粘度可采用 Sutherland 公式计算(参见第二章)。在以后的讨论中, 将主要针对如下之一维 Euler 方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (6.1.6)$$

6.1.2 Jacobian 系数矩阵

Courant 等人^[1]于 1952 年依据流体力学方程特征走向构造了差分逼近式, 后来在 1979 年 Moretti^[2]利用非守恒型 Euler 方程构造了“λ 格式”。他们的主要想法是根据双曲型方程反映了信息传播的依赖域, 故要求逼近于双曲型方程的差分格式应当反映特征理论的本质。Chakravarthy^[3]于 1980 年利用矩阵代数概念, 使对应的格式具有更确定的形式。他们的格式更为明显地反映了物理上的特征本质。后来 Steger 和 Warming^[4]提出了流通矢量分裂法。这是一种求解守恒型 Euler 方程组的方法。此方法将方程中代表质量、动量和能量的流通矢量按 Jacobian 系数矩阵的特征值进行了分裂, 然后按分裂后的流通矢量构造差分格式。

按定义, 对应于方程式(6.1.6)中流通矢量 f 的 Jacobian 矩阵为

$$A = \frac{D(f)}{D(U)} \quad (6.1.7)$$

其展开形式为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-2}{2}u^3 - \frac{uc^2}{\gamma-1} & \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{3-\gamma}{2}u^2 & \gamma u \end{pmatrix} \quad (6.1.8)$$

其中 γ 为质量热容比, c 为量纲为一的声速

$$c^2 = \frac{T}{Ma_\infty^2} \quad (6.1.9)$$

Jacobian 系数矩阵经相似变换后, 可通过对角矩阵来表示:

$$A = RAL \quad (6.1.10)$$

其中矩阵 L 为由矩阵 A 之左特征行矢量组成之矩阵, $RL = I$, A 为由矩阵 A 之特征值构成之对角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = u, \lambda_2 = u - c, \lambda_3 = u + c \quad (6.1.11)$$

R 为由矩阵 A 之右特征矢量组成之矩阵。相似变换矩阵的具体表达形式为

$$L = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} - \frac{c^2}{\gamma-1} & -u & 1 \\ -u - \frac{\gamma-1}{c} \frac{u^2}{2} & 1 + \frac{\gamma-1}{c} u & -\frac{\gamma-1}{c} \\ -u + \frac{\gamma-1}{c} \frac{u^2}{2} & 1 - \frac{\gamma-1}{c} u & \frac{\gamma-1}{c} \end{pmatrix} \quad (6.1.12)$$

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma-1}{c^2} & -\frac{1}{2c} & \frac{1}{2c} \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} u & -\frac{u-c}{2c} & \frac{u+c}{2c} \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} \frac{u^2}{2} & -\frac{1}{2c} [H - uc] & \frac{1}{2c} [H + uc] \end{pmatrix} \quad (6.1.13)$$

这里: $H = \frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1}$ 。不难验证, 矩阵 R 的每一列为矩阵 A 的右特征矢量。

现指出关于流通矢量 f 的一个很重要的特性。不难验证, 若状态方程形式如下:

$$p = \rho g(e) \quad (6.1.14)$$

则流通矢量 f 为矢量 U 的一次齐次函数, 即

$$f(\alpha U) = \alpha f(U) \quad (6.1.15)$$

对任意 α 都成立。式(6.1.14)中 $e = c_v T$ 。对式(6.1.15)之两侧都取对 α 的导数, 再令 $\alpha = 1$, 则可得

$$f = AU \quad (6.1.16)$$

关于这一等式也可根据矢量 f , U 及 Jacobian 矩阵 A 的具体表达形式来直接验证, 如果式(6.1.16)之两侧取对 x 或对 t 的导数, 且利用关系式

$$f_x = AU_x, \quad f_t = AU_t$$

则可得

$$A_x U = A_t U = 0$$

这里 A_x 和 A_t 为矩阵, 其元素是由对矩阵 A 的元素分别按 x 和 t 求导而得, A_x 和 A_t 为非零矩阵。利用流通矢量 f 为 U 的 1 次齐次函数这一特性可得:

$$\frac{\partial}{\partial x} A U = A \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} A U = A \frac{\partial U}{\partial t} \quad (6.1.17)$$

从形式上看 Jacobian 矩阵 A 如同常数矩阵, 可提到微分号的外边来。对单个的标量方程, 只有当系数是常数时才可能将系数提到微分号的外边来。

如果状态方程有形式(6.1.14), 对二维和三维 Euler 方程在每个坐标方向上的流通矢量都是矢量 U 的一次齐次函数。

6.1.3 Jacobian 矩阵的分裂

在第三章中针对单波方程(2.2.1)给出了具有 1 阶逼近精度的两点迎风格式(3.2.6)。当系数 $c \geq 0$ 时, 空间导数用两点后差来逼近, 当 $c \leq 0$ 时, 用两点前差来逼近。对一般情况可作如下处理:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\delta_x^- f_j^+}{\Delta x} + \frac{\delta_x^+ f_j^-}{\Delta x} = 0 \quad (6.1.18)$$

其中

$$\begin{aligned} f^\pm &= c^\pm u, \quad c^\pm = (c \pm |c|)/2 \\ f &= f^+ + f^-, \quad c = c^+ + c^- \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

这里利用了系数的分裂。

对流体力学方程中的流通矢量可作类似的分裂, 而流通矢量的分裂是通过 Jacobian 系数矩阵的分裂来完成的。通常是利用特征值的分裂来分裂 Jacobian 矩阵, 且有以下关系式:

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-, \quad \lambda_k^+ \geq 0, \quad \lambda_k^- \leq 0 \quad (6.1.20)$$

$$A^\pm = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{pmatrix} \quad (6.1.21)$$

这里 λ_k 为矩阵 A 的特征值。利用对角矩阵 A^\pm 可定义出相应于矩阵 A^\pm 之分裂后的流通矢量 f^\pm :

$$A^\pm = R A^\pm L, \quad f^\pm = A^\pm U \quad (6.1.22)$$

$$A = A^+ + A^-, \quad f = f^+ + f^-$$

下面给出两个具体分裂的例子: 第一种为

$$\lambda_k^\pm = (\lambda_k \pm |\lambda_k|)/2 \quad (6.1.23)$$

第二种分裂为

$$\lambda_k^+ = \lambda^+ \geq \max[0, \lambda_k] \quad (6.1.24)$$

$$\lambda_k^- = \lambda_k - \lambda^+$$

按第二种分裂可使计算大为简化, 不难验证

$$f^+ = \lambda^+ U, \quad f^- = f - \lambda^+ U \quad (6.1.25)$$

可取 $\lambda^+ = |u| + c$ 。从精度角度考虑取式(6.1.23)分裂格式误差系数最小。

6.1.4 流通矢量的分裂

这里介绍两种流通矢量的分裂方法, 一为斯蒂尔-沃明(Steger-Warming)分裂法, 一为 Van Leer 分裂法。

1. Steger-Warming 分裂法^[4]

利用已分裂的 Jacobian 系数矩阵可构造分裂后的流动矢量。Steger 和 Warming 利用关系式 $f^\pm = RA^\pm LU$ 给出了 f^\pm 的具体表达形式:

$$\bar{f}_1 = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} 2(\gamma-1)\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 \\ 2(\gamma-1)\bar{\lambda}_1 u + \bar{\lambda}_2(u-c) + \bar{\lambda}_3(u+c) \\ (\gamma-1)\bar{\lambda}_1 u^2 + \frac{\bar{\lambda}_2}{2}(u-c)^2 + \frac{\bar{\lambda}_3}{2}(u+c)^2 + w \end{pmatrix} \quad (6.1.26)$$

$$w = \frac{(3-\gamma)(\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3)c^2}{2(\gamma-1)}$$

在式(6.1.26)中如果取 $\bar{\lambda}_k$ 等于矩阵 A 的特征值, 则可得到原流通矢量。如果取 $\bar{\lambda}_k = \lambda_k^\pm$, 则可得到分裂后的流通矢量 f^\pm 。对二维及三维问题可作类似的流通矢量分裂。具体分裂形式可参阅文献[4]。

上面介绍的矩阵和流通矢量分裂方法, 目的在于提高所构造之格式的质量, 然而有时分裂会带来新的问题。如利用分裂式(6.1.23)使得在 $|u|=0$ 处 f^\pm 不是连续可微的, 在声速线上 $|u \pm c|=0$ 处也不是连续可微的了。这种人为的不连续可微性可导致在声速线上数值解的振荡。为克服这一缺点, 可引入一小的参量进行修正, 如

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm (\lambda_k^2 + \epsilon^2)^{1/2}}{2} \quad (6.1.27)$$

这一修正量有利于改进数值解的非物理振荡。

2. 范利尔(Van Leer)分裂法

Van Leer 于 1982 年给出了一种流通矢量分裂方法^[5], 这一方法只适应理想气体的 Euler 方程。设局部马赫数为 $Ma = u/c$, 则对于一维 Euler

方程(6.1.6) Van Leer 的流通矢量分裂式为:

$$\text{当 } Ma \geq +1 \text{ 时: } f^+ = f, f^- = 0 \quad (6.1.28)$$

$$\text{当 } Ma \leq -1 \text{ 时: } f^- = f, f^+ = 0$$

当 $|Ma| < 1$ 时:

$$f^\pm = \begin{pmatrix} f_1^\pm \\ \frac{f_1^\pm}{\gamma} [(\gamma - 1)u \pm 2c] \\ \frac{f_1^\pm}{2(\gamma^2 - 1)} [(\gamma - 1)u \pm 2c]^2 \end{pmatrix} \quad (6.1.29)$$

式中

$$f_1^\pm = \pm \rho c \left[\frac{Ma \pm 1}{2} \right]^2 \quad (6.1.30)$$

这里 f^\pm 以及 $D(f^\pm)/D(U)$ 均是 U 的连续函数。

6.2 一维 Euler 方程的离散

在第三章针对标量方程所构造的格式都可用来逼近 Euler 方程。下面给出几个具体的例子。

1. MacCormack 格式

$$U_j^{\overline{n+1}} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- f_j^n \quad (6.2.1)$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^n + U_j^{\overline{n+1}}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ f_j^{\overline{n+1}} \quad (6.2.2)$$

在预测步式(6.2.1)中的差分算子也可以取向前差分, 而校正步式(6.2.2)中的差分算子取后差。对标量常系数单波方程, 麦柯马科(MacCormack)格式与 L-W 格式等价, 在一般情况下它们并不等价, 其定常解都依赖于步长比, 而都曾用来解了大量实际问题。由于两步 L-W 在解多维问题时需要在半点上的量, 因而现在很少用来逼近 N-S 方程。单步 L-W 格式将引入矩阵运算, 也给计算带来很多困难, 因而 MacCormack 格式的应用更为普遍。

MacCormack 格式是显式的。由于流通矢量 f 是 U 的非线性函数, 因而难以对其进行稳定性分析。在实践中通常采用冻结系数法进行稳定性分析。设 $f = AU$, A 为 **Jacobian** 矩阵。在进行稳定性分析时设 A 为常数矩阵, 在这些假设条件下将式(6.2.1)代入式(6.2.2)中可得

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (AU_{j+1}^n - AU_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (6.2.3)$$

参照相似变换关系式(6.1.10)并设

$$V = LU \quad (6.2.4)$$

则由(6.2.3)式可得

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 A^2 (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \quad (6.2.5)$$

式中 A 为由矩阵 A 之特征值组成的对角矩阵。矢量形式的式(6.2.5)实际上是由 3 个互不关联的方程组成。可利用第三章介绍的方法进行稳定性分析。由此可知, 稳定性要求

$$|\lambda_k| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (k = 1, 2, 3)$$

λ_k 的具体表达式在式(6.1.11)中给出。

2. Euler 隐式格式

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x} (f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}) = 0 \quad (6.2.6)$$

该格式的形式逼近精度是 $TE = O(\Delta x^2, \Delta t)$ 。为便于求解, 可对其进行线性化处理:

$$f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1} = f_{j+1}^n - f_{j-1}^n + A_{j+1}^n \delta_i U_{j+1}^{n+1} - A_{j-1}^n \delta_i U_{j-1}^{n+1} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (6.2.7)$$

将其代入(6.2.6)式经整理后可得:

$$\left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_i A^n \cdot \right) \delta_i U^{n+1} = - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_i f_j^n \quad (6.2.8)$$

这里左端括号内之“ \cdot ”表示其前面的差分算子作用于矩阵与后面项的乘积, $\delta_i U^{n+1}$ 表示时间方向之后差, I 为单位矩阵。利用冻结系数法可知, Euler 隐式法是无条件稳定的。这种线性化方法在流体力学计算中经常被采用。

3. 一类单步格式

参照第三章的式(3.2.17) ~ (3.2.19)可构造逼近于一维 Euler 方程的对应格式。当取 $\gamma = 0$ 时有

$$\Delta U_j^n = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \left(- \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x A U^n - \frac{\alpha}{2} \delta_i U_j^n \right) \quad (6.2.9)$$

$$\left(I + \frac{\frac{\beta}{2} \Delta t}{1 - \frac{\alpha}{2}} \delta_i A \cdot \right) \delta_i U_j^{n+1} = \Delta U_j^n \quad (6.2.10)$$

$$U^{n+1} = U^n + \delta_i U^{n+1} \quad (6.2.11)$$

类似的格式最早由 Beam 和 Warming 在文献[6]中给出, 这里是参照文献[7]给出的。方程中的 Jacobian 矩阵 A 均取在 n 时间层上。式中取不同的参数 α 和 β ($\alpha + \beta = 1$), 以及取不同的空间差分则可得不同的差分格式。例如, 取 $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $\delta_x = \delta_x^0$ 即为蛙跳格式, 取 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 1$, $\delta_x = \delta_x^0$ 为矩形公式。在文献[6]中给出的格式为

$$\Delta U_j = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \left[-\frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta_x^b f_j^+ + \delta_x^b f_j^-) - \frac{\alpha}{2} \delta_x U_j^n \right] \quad (6.2.12)$$

$$\left[I + \frac{\frac{\beta}{2} \Delta t}{1 - \frac{\alpha}{2}} (\delta_x^- A_j^+ + \delta_x^+ A_j^-) \right] \delta_x U_j^{n+1} = \Delta U_j^n \quad (6.2.13)$$

格式中利用了矩阵和流通矢量分裂技术。式(6.2.13)中的矩阵分裂利于使对应矩阵的主对角元素占优, 减少矩阵求逆过程中的误差积累。式(6.2.12)中利用了具有二阶逼近精度的迎风差分逼近式:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x^b g_j &= \frac{1}{2} (3\delta_x^- g_j - \delta_x^- g_{j-1}) \\ \delta_x^b g_j &= \frac{1}{2} (3\delta_x^+ g_j - \delta_x^+ g_{j+1}) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.14)$$

使得格式具有耗散特性, 有利于减缓数值解中的振荡现象。

在文献[7]中采用了如下形式的具有二阶逼近精度的错点格式($\alpha = 0, \beta = 1$):

$$\Delta U_j = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^0 f_j \quad (6.2.15)$$

$$\left[I + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta_x^- A_j^+ + \delta_x^+ A_j^-) \right] \delta_x U_j^{n+1} = \Delta U_j^n \quad (6.2.16)$$

在式(6.2.12)中空间离散也可以采用第四章介绍的迎风紧致型差分逼近式, 以提高空间导数的逼近精度。对式(6.2.13)或式(6.2.16)可直接利用矩阵追赶法求解, 也可利用如下之近似因式分解法:

$$\left(I + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- A_j^+ \right) \left(I + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ A_j^- \right) \delta_x U_j^{n+1} = \Delta U_j^n \quad (6.2.17)$$

6.3 Godunov 间断分解法

上面介绍的一些方法多从数学角度出发。1959年前苏联学者 Godunov 提出了一种称为间断分解的方法来计算一维流体力学方程组, 这一方法是从物理流动特性出发来构造解法, 因而较好地反映了一些物理

流动特征。当时所发展的方法只有一阶逼近精度，然而对后来 CFD 的发展影响很大，相继发展了高阶精度的 Godunov 格式。

Godunov 方法的基本思想是：将 t_n 时刻已知的离散分布量 $\{u_{j+1/2}^n\}$, $\{\rho_{j+1/2}^n\}$, $\{p_{j+1/2}^n\}$ ，分别看成是在每个小网格区间 $x_j < x < x_{j+1}$ 内以 $u_{j+1/2}^n$, $\rho_{j+1/2}^n$, $p_{j+1/2}^n$ 值作为该 x 分段的常数分布 $u(x, t_n)$, $\rho(x, t_n)$ 和 $p(x, t_n)$ 。于是在每两个相邻网格 (x_{j-1}, x_j) , (x_j, x_{j+1}) 范围内，可以分别局部地考虑初始间断为

$$(u, \rho, p) = \begin{cases} (u, \rho, p)_{j-1/2}^n, & (x < x_j) \\ (u, \rho, p)_{j+1/2}^n, & (x > x_j) \end{cases} \quad (6.3.1)$$

的 Riemann 问题，并可得到相应的 Riemann 问题的精确解^[7,8]。取 Δt 使得在 $t_n \leq t \leq t_n + \Delta t$ 的时间间隔内，这些相邻的局部 Riemann 问题精确解互相都不干扰。这样可把这些局部 Riemann 问题精确解组合成整个计算区内的精确解 $u(x, t)$, $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, $t_n \leq t \leq t_n + \Delta t$ 。再将此精确解在 $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 时的值 $u(x, t_{n+1})$, $\rho(x, t_{n+1})$ 和 $p(x, t_{n+1})$ 在每个网格区间内 (x_j, x_{j+1}) 分别进行平均，得到的平均值 $\{u, \rho, p\}_{j+1/2}^{n+1}$ 就构成下一轮计算循环所需 t_{n+1} 时刻的离散分布 $\{u_{j+1/2}^{n+1}\}$, $\{\rho_{j+1/2}^{n+1}\}$, $\{p_{j+1/2}^{n+1}\}$ 。

Godunov 格式是从积分形式的守恒方程出发构造的，因为积分形式的守恒方程组对间断解是成立的，而不需另外考虑间断线上的间断关系。对应于式(6.1.6)的积分形式守恒方程组为

$$\left. \begin{aligned} \oint_{\Gamma} \rho dx - \rho u dt &= 0 \\ \oint_{\Gamma} \rho u dx - (\rho u^2 + p) dt &= 0 \\ \oint_{\Gamma} E dx - u(E + p) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3.2)$$

以式(6.3.2)中之第 1 式为例，回路 Γ 为长方体 $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ 之四边形组成，则有关系式

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \rho(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho u(x_{j+1}, t) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \rho u(x_j, t) dt = 0 \quad (6.3.3)$$

根据 Godunov 的思想，在 $t \geq t_n$ 时， x_j 上的函数值可通过求解 Riemann 问题而解决：

$$(u_L, \rho_L, p_L) = [u, \rho, p]_{j-1/2}^n$$

$$(u_R, \rho_R, p_R) = [u, \rho, p]_{j+1/2}^n$$

这里下标 L 和 R 分别表示间断面左面和右面的值。求解 Riemann 问题可确定 $x = x_j$ 线上的物理量 (u_j, ρ_j, p_j) ，因此有

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho u)_j dt = (\rho u)_j \Delta t \quad (6.3.4)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\rho u^2 + p)_j dt = (\rho u^2 + p)_j \Delta t \quad (6.3.5)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [u(E + p)]_j dt = [u(E + p)]_j \Delta t \quad (6.3.6)$$

新的离散量分布可通过以下网格平均来定义：

$$g_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g(x, t_{n+1}) dx \quad (6.3.7)$$

$g = \rho, \rho u, E$ 。于是 Godunov 格式为

$$\frac{\rho_{j+1/2}^{n+1} - \rho_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_j}{\Delta x} = 0 \quad (6.3.8)$$

$$\frac{(\rho u)_{j+1/2}^{n+1} - (\rho u)_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{(\rho u^2 + p)_{j+1} - (\rho u^2 + p)_j}{\Delta x} = 0 \quad (6.3.9)$$

$$\frac{E_{j+1/2}^{n+1} - E_{j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{[u(E + p)]_{j+1} - [u(E + p)]_j}{\Delta x} = 0 \quad (6.3.10)$$

式中 $(\rho, u, p, E)_j$ 是 $x = x_j$ 处局部 Riemann 问题的解在 Δt 范围内的积分量，如式(6.3.4) ~ 式(6.3.6)所示。为了求得压力 p 还需利用状态方程。在利用 Godunov 格式时重要的一步是在局部区域内求解 Riemann 问题，有关 Riemann 问题的求解可参见第二章及文献[7,8]。

6.4 Roe 格式与 Roe 分解

6.4.1 罗(Roe)格式

Roe 格式是一种迎风格式。对单个守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, a(u) = \frac{df}{du} \quad (6.4.1)$$

可构造如下之 Roe 分解式

$$f(u) - f(v) = a(u, v)(u - v) \quad (6.4.2)$$

这里重要的是如何确定系数 $a(u, v)$ 。一个简单的方法为

$$a_{j+1/2} = a(u_{j+1}, u_j) = \begin{cases} \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j \neq 0) \\ a(u_j), & (\text{当 } u_{j+1} - u_j = 0) \end{cases} \quad (6.4.3)$$

根据所确定的 $a_{j+1/2}$ 可构造 Roe 格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) \quad (6.4.4)$$

$$\hat{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)] - \frac{1}{2} |a_{j+1/2}^n| (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (6.4.5)$$

现在来构造逼近于拟线性双曲型方程组的 Roe 格式。设有拟线性双曲型守恒律方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (6.4.6)$$

很明显, Roe 格式是对于双曲型单波方程迎风格式 (3.2.6) 的一种推广。首先它是迎风格式, 这一点可从对应的修正方程中看出。另外它又是守恒型格式, 这对计算具有间断解的问题时是很重要的。对拟线性双曲型守恒律方程组的 Roe 格式为

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) \quad (6.4.7)$$

其数值通量 $\hat{f}_{j+1/2} = \hat{f}(U_j^n, U_{j+1}^n)$ 具有以下形式:

$$\hat{f}(U, V) = \frac{1}{2} [f(U) + f(V)] - \frac{1}{2} |A(U, V)| (U - V) \quad (6.4.8)$$

而且, 其中矩阵 $A(U, V)$ 满足的以下条件:

(1) 矩阵 $A(U, V)$ 对变量 U 和 V 是 Lipschitz 连续的, 且

$$A(U, U) = A(U) = \frac{D(f)}{D(U)} \quad (6.4.9)$$

(2) 矩阵 $A(U, V)$ 有 N 个实特征值及特征矢量的完备集。记对应的特征值, 左特征行矢量和右特征列矢量分别为 $a_k(U, V)$, $L_k(U, V)$, $R_k(U, V)$, $k = 1, 2, \dots, N$ 。并可选择特征矢量, 使得由它们组成的特征矢量矩阵 $L(U, V)$, $R(U, V)$ 是非奇异的, 并满足互为逆矩阵的条件。且

$$|A(U, V)| = R(U, V) |A(U, V)| L(U, V) \quad (6.4.10)$$

$$|A(U, V)| = \text{diag}(|a_1(U, V)|, \dots, |a_N(U, V)|)$$

(3) 对任何给定 U, V 有关系式

$$f(U) - f(V) = A(U, V)(U - V) \quad (6.4.11)$$

如果对矢量函数 $f(U)$ 存在矩阵 $A(U, V)$ 且满足条件(1)、(2)、(3), 则称相应的拟线性双曲型守恒律方程组存在 Roe 分解。Roe 在文献[9]中称条件(1)、(2)、(3)为 U 特性(Uniform)。

6.4.2 一维 Euler 方程的 Roe 分解

在一般情况下有两种平均方法:

$$\tilde{A}(U, V) = \frac{1}{2} [A(U) + A(V)], \quad \tilde{A}(U, V) = A\left[\frac{1}{2}(U + V)\right]$$

这都不满足 U 特性, 这里 A 是 Jacobian 矩阵。Roe 通过引入参矢量的办法针对 Euler 方程流通矢量, 给出了满足 U 特性的矩阵 $A(U, V)$ 的办法。在构造这一矩阵时利用了如下之恒等关系式:

$$\left. \begin{aligned} \delta(a + b) &= \delta a + \delta b \\ \delta(ab) &= \bar{b}\delta a + \bar{a}\delta b \\ \delta\left(\frac{1}{b}\right) &= -\delta b / b^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.12)$$

这里 $\delta(f) = f_R - f_L$, \bar{a} 和 \bar{b} 为算术平均, b^* 为几何平均:

$$\bar{a} = \frac{1}{2}(a_R + a_L), \quad \bar{b} = \frac{1}{2}(b_R + b_L), \quad b^* = (b_R b_L)^{1/2} \quad (6.4.13)$$

考虑理想流体, 针对方程(6.1.6)引入新的矢变量:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \rho^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix} \quad \rho H = E + p \quad (6.4.14)$$

于是

$$U = U(W) = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_2 \\ w_1 w_3 - p \end{pmatrix} \quad f[U(W)] = \begin{pmatrix} w_1 w_2 \\ w_2^2 + p \\ w_3 w_2 \end{pmatrix} \quad (6.4.15)$$

式中

$$p = p(w) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(w_1 w_3 - \frac{1}{2} w_2^2 \right) \quad (6.4.16)$$

因此可以计算得

$$B(W) = \frac{D(U)}{D(W)} = \begin{pmatrix} 2w_1 & 0 & 0 \\ w_2 & w_1 & 0 \\ \frac{w_3}{\gamma} & \frac{\gamma-1}{\gamma} w_2 & \frac{w_1}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (6.4.17)$$

$$C(W) = \frac{D(f)}{D(W)} = \begin{pmatrix} w_2 & w_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}w_3 & \frac{\gamma+1}{\gamma}w_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}w_1 \\ 0 & w_3 & w_2 \end{pmatrix} \quad (6.4.18)$$

以及

$$A(U) = A[U(W)] = \frac{D(f)}{D(W)} \cdot \frac{D(W)}{D(U)} = C(W)B^{-1}(W) \quad (6.4.19)$$

由于 $B(W)$ 是非奇异的, 因此由隐函数定理可以由 $U = U(W)$ 解出 $W = W(U)$, 即 U 与 W 之间存在一一对应关系。现任取 U 的两个值 U_L 及 U_R , 并令 $W_L = W(U_L)$, $W_R = W(U_R)$ 。利用式(6.4.15)算出 $U_R - U_L$ 及 $f(U_R) - f(U_L)$ 。矢量 U 和 f 的跳跃关系可通过 W 的跳跃关系来表示。通过推导, 并用关系式(6.4.12)可得到关系

$$U_R - U_L = B(\bar{W})(W_R - W_L) \quad (6.4.20)$$

$$f_R - f_L = C(\bar{W})(W_R - W_L) \quad (6.4.21)$$

而其中矩阵 $B(\bar{W})$ 和 $C(\bar{W})$ 与对应的式(6.4.17)和(6.4.18)完全一样, 只是 $B(W)$ 和 $C(W)$ 自变量以 \bar{W} 代之, 而

$$\bar{W} = \frac{1}{2}(W_R + W_L) \quad (6.4.22)$$

这样利用关系式(6.4.20)和(6.4.21)可得

$$f(U_R) - f(U_L) = C(\bar{W})B^{-1}(\bar{W})(U_R - U_L) \quad (6.4.23)$$

之所以可以写成式(6.4.20)和(6.4.21)这种简单形式是因为 U 和 f 中任何一个矢量与另一矢量互为一次齐次函数, 而这些矢量又是 W 的二次齐次函数。

由式(6.4.23)可得到

$$A(U_R, U_L) = C(\bar{W})B^{-1}(\bar{W}) = A(\bar{U}(\bar{W})) = A(\bar{U}) \quad (6.4.24)$$

$$\bar{U} = U(\bar{W}) = \begin{pmatrix} \bar{w}_1^2 \\ \bar{w}_1 \bar{w}_2 \\ \bar{w}_1 \bar{w}_3 - p(\bar{w}) \end{pmatrix} \quad (6.4.25)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p(\bar{w}) &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\bar{w}_1 \bar{w}_3 - \frac{1}{2} \bar{w}_2^2 \right) \\ \bar{w}_1 &= \frac{1}{2} (\rho_R^{1/2} + \rho_L^{1/2}) \\ \bar{w}_2 &= \frac{1}{2} (\rho_R^{1/2} u_R + \rho_L^{1/2} u_L) \\ \bar{w}_3 &= \frac{1}{2} (\rho_R^{1/2} H_R + \rho_L^{1/2} H_L) \end{aligned} \right\} \quad (6.4.26)$$

可利用式(6.4.26)很容易求出对应的平均量 $\bar{\rho}$ 、 \bar{u} 和 \bar{H} :

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= \bar{w}_1^2 = \rho_L \left[\frac{1}{2}(1 + \bar{D}) \right]^2 \\ \bar{u} &= \frac{u_L + Du_R}{1 + D} \\ \bar{H} &= \frac{H_L + \bar{D}H_R}{1 + \bar{D}} \\ \bar{c} &= \left[(\gamma - 1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{p} &= \frac{1}{\gamma} \bar{\rho} \bar{c}^2 \\ \bar{E} &= \bar{\rho} \bar{H} - \bar{p} = \bar{\rho} \left(c_1 \bar{T} + \frac{\bar{u}^2}{2} \right) \\ \bar{D} &= \sqrt{\frac{\rho_R}{\rho_L}} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.27)$$

由于 $A(\bar{U})$ 矩阵与 Jacobian 矩阵具有完全相同的形式, 因而可很容易求出对应的特征值, 它们是

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{u}, \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{u} - \bar{c}, \quad \bar{\lambda}_3 = \bar{u} + \bar{c} \quad (6.4.28)$$

如此构造的矩阵 $A(\bar{U})$ 满足 U 特性, 因为当取 $U_R = U_L = U$ 时有 $\bar{U} = U$, 因此前面提到的条件(1)成立。又由于 $A(\bar{U})$ 的特征值是互异的实数, 有完全的特征矢量集, 因而条件(2)成立。由于 $A(\bar{U})$ 矩阵的特殊构造, 条件(3)自然满足。

对二、三维问题的 Roe 分解及对应的特征值与特征矢量可参看文献 [7,9]。

6.5 多维问题的差分逼近

除 Godunov 格式外, 在第三章和本章介绍的一些方法都可很容易用于求解多维问题。本节只对部分方法作一简单介绍, 并强调多维问题与一维问题的不同之处。

6.5.1 二维流体力学方程与 Jacobian 系数矩阵

可很容易从式(2.1.1)中得到二维 N-S 方程和 Euler 方程, 这里主要讨论二维问题, 二维的 Euler 方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad (6.5.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} U &= [\rho, \rho u, \rho v, E]^T \\ f_1 &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, u(E + p)]^T \\ f_2 &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, v(E + p)]^T \\ E &= \rho [c_v T + (u^2 + v^2)/2] \end{aligned} \right\} \quad (6.5.2)$$

关于压力的表达式参见式(2.1.2)。设 A_k 为流通矢量 f_k 的 **Jacobian** 矩阵:

$$A_k = \frac{D(f_k)}{D(U)}, \quad (k=1,2) \quad (6.5.3)$$

现考虑更为一般形式的流通矢量

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2 \quad (6.5.4)$$

这里 α 和 β 为不依赖于矢量函数 U 的自由参量。设 A 为对应于 f 流通矢量的 **Jacobian** 矩阵:

$$A = \frac{D(f)}{D(U)} = \alpha A_1 + \beta A_2 \quad (6.5.5)$$

矩阵 A 可通过其特征值组成的对角矩阵来表示:

$$A = R \Lambda L \quad (6.5.6)$$

这里 L 为由矩阵 A 的左行特征矢量组成的矩阵, R 为由右列特征矢量组成的矩阵, Λ 为由特征值

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2}(A) &= \alpha u + \beta v \\ \lambda_{3,4}(A) &= \alpha u + \beta v \mp c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.5.7)$$

组成的对角矩阵为

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1(A), \lambda_2(A), \lambda_3(A), \lambda_4(A)]$$

下面给出矩阵 A 及对应的相似变换矩阵 L 和 R 的具体形式。设

$$V^2 = u^2 + v^2, W = \alpha u + \beta v, H = \frac{V^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1}, \sigma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (6.5.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha \frac{\gamma-1}{2} V^2 - uW & W + \alpha u(2-\gamma) & \beta u - \alpha v(\gamma-1) & \alpha(\gamma-1) \\ \beta \frac{\gamma-1}{2} V^2 - vW & \alpha v - (\gamma-1)\beta u & W + \beta v(2-\gamma) & \beta(\gamma-1) \\ W \left(\frac{\gamma-1}{2} V^2 - H \right) & \alpha H - (\gamma-1)uW & \beta H - (\gamma-1)vW & \gamma W \end{pmatrix} \quad (6.5.9)$$

$$L = \begin{pmatrix} V^2 - H & -u & -v & 1 \\ \beta u - \alpha v & -\beta & \alpha & 0 \\ \frac{\sigma}{2} V^2 - W & \alpha + \frac{\gamma-1}{c} u \sigma & \beta + \frac{\gamma-1}{c} v \sigma & -\frac{\gamma-1}{c} \sigma \\ -\frac{\sigma}{2} V^2 - W & \alpha - \frac{\gamma-1}{c} u \sigma & \beta - \frac{\gamma-1}{c} v \sigma & \frac{\gamma-1}{c} \sigma \end{pmatrix} \quad (6.5.10)$$

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma-1}{c^2} & 0 & -\frac{1}{2\sigma c} & \frac{1}{2\sigma c} \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} u & -\frac{\beta}{\sigma^2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{u}{\sigma c} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\sigma^2} + \frac{u}{\sigma c} \right) \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} v & \frac{\alpha}{\sigma^2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma^2} - \frac{v}{\sigma c} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma^2} + \frac{v}{\sigma c} \right) \\ -\frac{\gamma-1}{c^2} \frac{V^2}{2} & \frac{\alpha v - \beta u}{\sigma^2} & \frac{1}{2\sigma c} \left(\frac{cW}{\sigma} - H \right) & \frac{1}{2\sigma c} \left(\frac{cW}{\sigma} + H \right) \end{pmatrix} \quad (6.5.11)$$

式中 c 为声速。注意，矩阵 L 和 R 的具体表达式与矩阵 A 之特征值的排列顺序紧密相连，在文献[4]中，特征值的排列顺序为

$$\alpha u + \beta v - \sigma c, \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v + \sigma c$$

则对应的相似变换矩阵是不同于(6.5.10)和(6.5.11)的。

对于三维问题 Euler 方程(2.1.4)也可构造类似的一般形式的流通矢量：

$$f = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 \quad (6.5.12)$$

对应的 Jacobian 矩阵及相似变换矩阵等，读者可参阅文献[4,7]。

如果状态方程有形式(6.1.14)，则一般形式的流通矢量式(6.5.12)是 U 的一次齐次函数，因而式(6.1.16)及(6.1.17)成立。可通过特征值对 Jacobian 矩阵进行分裂。可采取式(6.1.23)或(6.1.24)形式的分裂，根据分裂后的矩阵构造分裂流通矢量。可采用 Steger - Warming 和 Van Leer 之方法构造分裂流通矢量，这里仅给出 Steger - Warming 形式的分裂流通矢量。对于一般情况，式(6.5.4)的一般流通矢量分裂式为

$$\tilde{f}_\Pi = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_0 + \tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_4 \\ \tilde{\lambda}_0 u + \tilde{\lambda}_3 u_1 + \tilde{\lambda}_4 u_2 \\ \tilde{\lambda}_0 v + \tilde{\lambda}_3 v_1 + \tilde{\lambda}_4 v_2 \\ \frac{\tilde{\lambda}_0}{2} V^2 + \frac{\tilde{\lambda}_3}{2} (u_1^2 + v_1^2) + \frac{\tilde{\lambda}_4}{2} (u_2^2 + v_2^2) + W_\Pi \end{pmatrix} \quad (6.5.13)$$

式中 $\tilde{\lambda}_0 = 2(\gamma - 1)\tilde{\lambda}_1, u_1 = u - c\tilde{k}_1, u_2 = u + c\tilde{k}_1$

$$\bar{k}_1 = \alpha/\sigma, \bar{k}_2 = \beta/\sigma, v_1 = v - c\bar{k}_2, v_2 = v + c\bar{k}_2$$

$$W_{\Pi} = \frac{(3-\gamma)(\bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4)c^2}{2(\gamma-1)}$$

如果取 $\bar{\lambda}_k(A) = \lambda_k(A)$, 则可得到原流通矢量式(6.5.4), 如果取 $\bar{\lambda}_k(A) = \lambda_k^+(A)$ 则可得分裂后的流通矢量 f^+ 。

6.5.2 单步差分逼近

在第三章中针对模型方程介绍了几种全离散化的方法, 如时间导数的简单离散, Taylor 级数法以及 R-K 方法等。原则上这些方法都可以用于求解多维流体力学方程组。例如, 当流体力学方程组在空间离散后, 则得按时间方向的常微分方程组。对应的常微分方程组可按 R-K 方法进行求解, 这里不再重述。这里将简单介绍一下 Taylor 级数展开法及相应的隐式求解法。对应的方程可以是二维标量方程, 也可能是二维方程组。

参照第三章之式(3.2.17)及(3.2.18)可得(取 $\gamma = 0$):

$$\Delta U_{i,j}^n = -\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x f_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y f_2 \right)_{i,j}^n - \frac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \delta_t U_{i,j}^n \quad (6.5.14)$$

$$\left[I + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x A_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y A_2 \right) \cdot \right] \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n \quad (6.5.15)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \delta_t U_{i,j}^{n+1} \quad (6.5.16)$$

$$\sigma = \frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (6.5.17)$$

式中 δ_x 为空间 x 方向的差分算子, δ_y 为空间 y 方向的差分算子。对式(6.5.14)中之流通矢量 f_k 可进行分裂, 对 δ_x 和 δ_y 可采用不同的差分。在式(6.5.15)中的算子希望取较为简单的形式以便矩阵求逆。如果再选用不同的参数 α, β ($\alpha + \beta = 1$), 则可得到不同的格式。

现在来讨论一下式(6.5.15)的求解方法。对该式可采用按维数进行近似因式分解, 如对其中的差分算子取 $\delta_x = \delta_x^0, \delta_y = \delta_y^0$ 则有:

$$\left(I + \sigma \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^0 A_1 \cdot \right) \left(I + \sigma \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^0 A_2 \cdot \right) \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n \quad (6.5.18)$$

或写为形式

$$\left(I + \sigma \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^0 A_1 \cdot \right) \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n \quad (6.5.19)$$

$$\left(I + \sigma \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^0 A_2 \cdot \right) \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \delta_t U_{i,j}^* \quad (6.5.20)$$

$$\text{这里} \quad \delta_x^\pm g_{i,j} = \mp (g_{i,j} - g_{i \pm 1,j}), \quad \delta_y^\pm g_{i,j} = \mp (g_{i,j} - g_{i,j \pm 1}) \quad (6.5.21)$$

$$\delta_x^0 = \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-) \quad \delta_y^0 = \frac{1}{2}(\delta_y^+ + \delta_y^-)$$

按维数进行近似因式分解, 则将原二维问题式(6.5.15)的求解化为对两个方向上的一维问题式(6.5.19)和(6.5.20)的求解。可以证明, 如果原二维格式是无条件稳定的, 则按近似因式分解后的格式仍是无条件稳定的。在文献[10]中指出, 对三维问题, 如果原格式是无条件稳定的, 经按维数近似因式分解后的格式可能不再是无条件稳定的了。

现在介绍另一种近似因式分解法, 或称 LU 分解法。将式(6.5.15)中的 Jacobian 矩阵进行分裂, 而差分算子采用简单的前差或后差, 则有

$$\left[I + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- A_1^+ \cdot + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^- A_2^+ \cdot \right) + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ A_1^- \cdot + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^+ A_2^- \cdot \right) \right] \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \Delta U_{i,j}^n \quad (6.5.22)$$

对该式进行近似因式分解后得:

$$\left[I + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- A_1^+ + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^- A_2^+ \right) \cdot \right] \delta_t U_{i,j}^* = \Delta U_{i,j}^n \quad (6.5.23)$$

$$\left[I + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ A_1^- + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^+ A_2^- \right) \cdot \right] \delta_t U_{i,j}^{n+1} = \delta_t U_{i,j}^* \quad (6.5.24)$$

因(6.5.23)之左端对应为下三角矩阵, 而式(6.5.24)对应为上三角矩阵, 故对式(6.5.23)可按 i, j 增长方向求解, 对式(6.5.24)按 i, j 减少方向进行求解。对三维问题可采用类似的 LU 分解法。

6.5.3 MacCormack 格式及时间分裂法

逼近于二维 Euler 方程(6.5.1)的 MacCormack 格式为

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^- f_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^- f_2 \right)_{i,j}^n \quad (6.5.25)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (U^n + \overline{U}^{n+1})_{i,j} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x^+ f_1 + \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y^+ f_2 \right)_{i,j}^{\overline{n+1}} \quad (6.5.26)$$

对预测步和校正步的后差前差可采取不同的组合形式。

对二维标量方程, 这一格式的稳定性条件为:

$$\Delta t \left[\frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \left(\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right) \right] \leq 1 \quad (6.5.27)$$

为了简化求解过程提高求解效率, 发展了各种不同形式的时间分裂法。根据 MacCormack 的思想, 可把微分方程(6.5.1)写成如下的形式的

一维序列:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad (6.5.28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad (6.5.29)$$

设 $L_x(\Delta t_x)$ 为式(6.5.28)的一个逼近算子:

$$U_{i,j}^* = L_x(\Delta t_x) U_{i,j}^n \quad (6.5.30)$$

该算子等价于如下两个运算序列:

$$U_{i,j}^- = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} \delta_x^+ f_{1,i,j}^n \quad (6.5.31)$$

$$U_{i,j}^* = \frac{1}{2} \left(U_{i,j}^n + U_{i,j}^- - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} \delta_x^- f_{1,i,j}^- \right) \quad (6.5.32)$$

类似可定义求解式(6.5.29)的算子 $L_y(\Delta t_y)$, 这里 Δt_x 和 Δt_y 是对应于 x 和 y 方向的时间步长。在计算中可采用 $\Delta t_x \neq \Delta t_y$, 这有利于在一个方向为非均匀流动的数值计算。其具体展开式为

$$U_{i,j}^* = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} \delta_y^+ f_{2,i,j}^n \quad (6.5.33)$$

$$U_{i,j}^* = \frac{1}{2} \left(U_{i,j}^n + U_{i,j}^* - \frac{\Delta t_y}{\Delta y} \delta_y^- f_{2,i,j}^* \right) \quad (6.5.34)$$

利用算子 L_x 和 L_y 可构造逼近于式(6.5.1)的具有二阶逼近精度的差分格式:

$$U_{i,j}^{n+1} = L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) L_x(\Delta t) L_y \left(\frac{\Delta t}{2} \right) U_{i,j}^n \quad (6.5.35)$$

这一格式的截断误差为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ 。一般说来: (1) 如果时间步长不超过每个分算子稳定允许的步长, 则格式是稳的; (2) 不同坐标方向上各分算子的时间步长之和相等, 则格式是相容的; (3) 如果算子序列是对称排列的, 则格式具有二阶逼近精度。

对三维问题可构造类似的格式, 这里不再重复。

应当指出, 在利用时间分裂法时由于中间过渡层上引入了中间量, 由此为边界条件的处理带来困难。在采用隐式的时间分裂法时这一困难更为突出。

6.6 粘性项的差分逼近

在很多的实际计算中需要求解完全的可压 N-S 方程。由于粘性项的存在, 通常使流动参数趋于平滑。早期人们是采用显式法来逼近可压

N-S 方程的。在粘性占主导地位时方程主要表现为抛物型的性质。参照第三章对抛物型方程显式差分式(3.2.1) ($\theta \approx 0$)，由其稳定条件式(3.2.3)可知，显式格式对时间步长要求过严，因而近年来多采用隐式法进行求解。

以一维 N-S 方程式(6.1.1)为例进行讨论。例如，对粘性项采用二阶精度的差分逼近：

$$\nu_{ix} \approx \frac{4}{3} \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}}(u_{i+1} - u_i) - \mu_{i-\frac{1}{2}}(u_i - u_{i-1})}{Re \Delta x^2} \quad (6.6.1)$$

设 A_0 为矢量 U 对 U_0 的 Jacobian 矩阵：

$$A_0 = \frac{D(U)}{D(U_0)} \quad (6.6.2)$$

这里

$$U = [\rho, \rho u, E]^T, U_0 = [\rho, u, T]^T \quad (6.6.3)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ c_v T + \frac{u^2}{2} & \rho u & c_p \rho \end{pmatrix} \quad (6.6.4)$$

设 $B = B_0 A_0^{-1}$ ：

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \frac{\mu}{Re} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \frac{\mu u}{Re} & \frac{c_k \mu}{pr Re} \end{pmatrix} \quad (6.6.5)$$

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \frac{u^2 - E/\rho}{\rho c_v} & -\frac{u}{\rho c_v} & \frac{1}{\rho c_v} \end{pmatrix}$$

则 N-S 方程式(6.1.1)可写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} B \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6.6.6)$$

将 U^{n+1} 在 n 点进行 Taylor 级数展开，并利用式(6.6.6)可得 ($\alpha + \beta = 1$)：

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial x} B \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left\{ \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \right. \\ \left. \beta \left[-\frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} B \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (6.6.7)$$

式中 $\{ \}$ 中的项主要起着两个作用：其一为控制时间方向的精度，另一

为调节差分格式后格式的稳定性。希望在不影响这两个作用的情况下对式(6.6.7)作简化处理, 可将() 括号内与粘性有关的项 $\frac{\Delta t^2}{2} \beta \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right)$ 以 $\frac{\Delta t^2}{2} \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)$ 代之。考虑到 $B \approx \frac{1}{Re}$, 因而简化处理带来的误差为 $O(\Delta t^2/Re)$ 。在 Re 较大时这种处理不会给逼近精度带来很大影响。对求解定常问题, 这种简化将不影响定态解。此时之差分逼近式为

$$\Delta U_j^n = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \delta_x (B_0 \delta_x U_0) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x f - \frac{\alpha}{2} \delta_t U \right]_j^n \quad (6.6.8)$$

$$\left[I + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x \mathbf{A} \cdot - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \delta_x \mathbf{B} \delta_x \cdot \right) \right] \delta_t U_j^{n+1} = \Delta U_j^n \quad (6.6.9)$$

式中 σ 在(6.5.17)中给出。对粘性项采用中心型差分, 对其他项可采用不同的参数 α 和 β 、不同矩阵和流通矢量分裂法和不同的差分逼近。

对多维问题可采用类似的方法进行差分逼近。在方程含 β 项的隐式部分中可将空间混合导数项略去, 一般空间混合导数项对稳定性影响不大。

参 考 文 献

- 1 Courant R, Isaacson E, Rees M. Comm. Pure Appl Math, 1952, 5: 243 ~ 255
- 2 Moretti G. The λ -scheme. Computers and Fluids, 1979, 7: 191 ~ 205
- 3 Chakravarthy S R. The split-coefficient matrix method for hyperbolic system of gas dynamics equations. AIAA 80-0268
- 4 Steger J L, Warming R. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. J Comput Phys, 1981, 40: 263 ~ 293
- 5 Van Leer B. Flux vector splitting for Euler equations. ICASE Report 82-30, 1982
- 6 Warming R F, Beam R M. Upwind second order difference scheme and applications in aerodynamics. AIAA J, 1976, 14: 1241 ~ 1249
- 7 傅德薰, 马延文. 流体力学数值模拟. 北京: 国防工业出版社, 1993
- 8 水鸿寿. 一维流体力学差分方法. 北京: 国防工业出版社, 1998
- 9 Roe P L. Approximate Riemann solver, parameter vectors and difference scheme. J Comput Phys, 1981, 43: 357 ~ 372
- 10 傅德薰, 马延文. 钝锥三维粘性绕流背风面分离流动的数值模拟. 力学学报, 1991, 23 (2): 129 ~ 138

习 题

6-1 有一维超声速流, 来流马赫数为 Ma_∞ , 给出通过来流马赫数 Ma_∞ 表示的激波关系式。

6-2 有一维 N-S 方程, 利用 MacCormack 格式逼近方程的对流项, 而预测和校正步中的粘性项均采用中心差分逼近, 在 $x=0$ 处的边界条件为 $\rho = u = T = 1$, 在右边界 $x=1$ 处的边界条件由激波关系式确定的值给定, 计算参数为 $Ma_\infty = 2$, $Re = 10$, 给出定常解及流动参数随 x 的变化曲线。

6-3 所求物理问题及边界条件同习题 6-2。在一维 N-S 方程中的时间导数项以后差逼近 $\frac{\partial U}{\partial t} \approx (U^{n+1} - U^n)/\Delta t$, 所有空间导数均取在 $n+1$ 时间层上, 对流项和粘性项均取中心差分, 求定常解, 给出流动参数变化曲线。

提示: 原 N-S 方程粘性项中含有形式为 $\frac{\partial}{\partial x} B_0 \frac{\partial U_0}{\partial x}$ 的项, 这里 $U_0 = (\rho, u, T)^T$, 可首先求出矩阵 B 。因有 $\frac{\partial U_0}{\partial x} = A_0^{-1} \frac{\partial U}{\partial x}$, 这里 $U = (\rho \quad \rho u \quad E)^T$, 然后求出矩阵 A_0 。而粘性项可写为形式 $\frac{\partial}{\partial x} B_0 A_0^{-1} \frac{\partial U}{\partial x}$ 。由于所求的是定常解, 为了便于求解, 可将 U 取在 $n+1$ 时间层, 而 $B = B_0 A_0^{-1}$ 取在 n 时间层。对无粘流也需要采用线性化处理(参看本章第二节)。

6-4 所计算的物理问题及边界条件如习题 6-2。时间方向采用三步 R-K 方法, 对流项采用三阶迎风紧致差分逼近, 粘性项采用二阶中心差分逼近。试求定常解, 并给出流动参数分布曲线。注: 在采用迎风紧致差分前先对流通矢量进行分裂。

6-5 有一槽道, 初始时刻气体处于静止状态, 上表面突然启动以速度 $u=1$ 运动, 下物面边界为无滑移条件, 流动方向取周期边界条件, 即为 $g(x=0) = g(x=1)$, $g = \rho, u, v, T$ 。二维可压 N-S 方程时间方向采用二步显式 R-K 方法, 空间导数均取中心差分逼近, 试给出定常解, 并给出 $x=0, 0.5, 1$ 处流动参数随 y 的变化曲线。

第七章 激波高分辨率差分格式

7.1 数值解中的非物理振荡

7.1.1 逼近精度与特征尺度

在利用数值方法模拟物理问题时，首先遇到的是精度问题。一般流动都极为复杂，如有光滑区，分离涡流动区，边界层及剪切流动区，以及含有间断面及激波区等。流动结构都有一定的尺度。为了能正确模拟流动局部特性，必须在相应的物理尺度范围内分布有足够的网格点。否则所得到的结果不能给出流动结构细致的刻画，甚至会出现违反物理规律的结果。

如果解是光滑的，流动大尺度宏观参数的变化与其特征长度有着同样的量级。在这种情况下人们多采用具有 2 阶精度的格式，对这类问题人们主要把重点放在提高求解效率方面。在求解粘性绕流问题时，需要考虑物面附近的粘性效应。求解这类问题将遇到不同的特征长度，其一为物体的特征长度，另一为边界层的厚度。在物面附近的法向物理量的变化很大，为正确模拟在该区内的流动特性，网格点的合理布局是非常重要的。数值解的分辨率一般指数值解对所感兴趣的流动特性的刻画能力。高分辨率的差分格式一般指该格式的解能较精细地刻画所感兴趣物理尺度范围内的流动特性，通常是较小尺度的流动结构。在网格尺度给定的情况下高精度格式有较高的分辨率。

再看一下无粘激波的计算。无粘激波的厚度为零，即激波法向的特征尺度趋近于零，这给激波的捕捉带来很大困难。人们为解决这一问题也投入了相当大的力量。早期人们采用人工粘性法或激波装配法来解决这一问题。自 20 世纪 80 年代以来激波的模拟取得了重大进展。在本章将主要讨论对激波有高分辨率的格式。这里激波高分辨率指数值激波陡峭，无和只有小的数值振荡。激波高分辨率格式不一定是高阶的。对带有激波的多尺度复杂流动(如湍流)要求格式有着高的精度和强的激波捕捉能力。

7.1.2 单个守恒律方程解的 TVD 特性

TVD 意为总变差不增 (Total Variation Diminishing)。这一概念是由 Harten 引入的^[1]。现对总变差这一概念作进一步的讨论。考虑一维函数 $u(x)$ ，将其定义域任意给一划分： $\bigcup_j (x_j, x_{j+1}]$ 。总变差为对所有划分 $\sum |u(x_{j+1}) - u(x_j)|$ 的上确界。记总变差为

$$TV[u(x)] = \sup_{\Delta} \left[\sum_j |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \right] \quad (7.1.1)$$

如果 $u(x)$ 在整个实轴上连续可微，则在实轴上的总变差定义为

$$TV[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (7.1.2)$$

如果函数是离散的 $u_k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ，则总变差定义为

$$TV[u(x)] = \sum_k |u_{k+1} - u_k| \quad (7.1.3)$$

下面来讨论非线性模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = a \quad (7.1.4)$$

之解的总变差变化情况。该方程的解沿特征线

$$\frac{dx}{dt} = a(u) \quad (7.1.5)$$

是常数

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (7.1.6)$$

参看图 7-1，设从 t_1 到 t_2 时刻特征线没有相交。在 t_1 时刻取任意网格划分，可在 t_2 时刻找到相应的网点 x_j^* ，使得 $u(x_j^*, t_2) = u(x_j, t_1)$ ，反之亦然。由此可知，在特征线相交之前，方程 (7.1.4) 的解之总变差为常数。

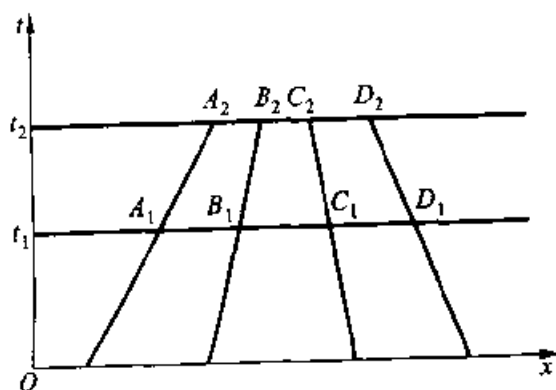


图 7-1 特征线相交前之总变差

现假设特征线 B_1B_2 和 C_1C_2 于 t_2 时刻相交(参看图 7-2), 则 t_2 时刻 B_2 点之左方的总变差与 t_1 时刻 B_1 之左方的总变差相等, C_2 和 C_1 之右方的总变差相等, 而

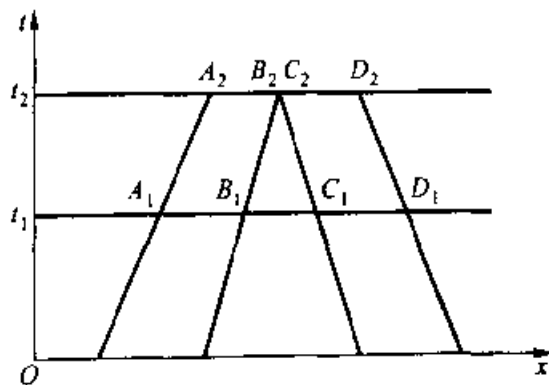


图 7-2 特征线相交时之总变差

$$|u(C_2) - u(B_2)| = |u(C_1) - u(B_1)| \leq \sum_{B_1 \leq x \leq C_1} |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \quad (7.1.7)$$

因而当有激波时总变差是下降的。

由上面的简单讨论中可知, 方程(7.1.4)的物理解随时间的推移总变差是不增长的。由于方程解的这一特性使得随时间的增长, 解中不可能产生新的局部极值点, 且解的最小值在时间的推移过程中不再减小, 而局部最大值不再增加。

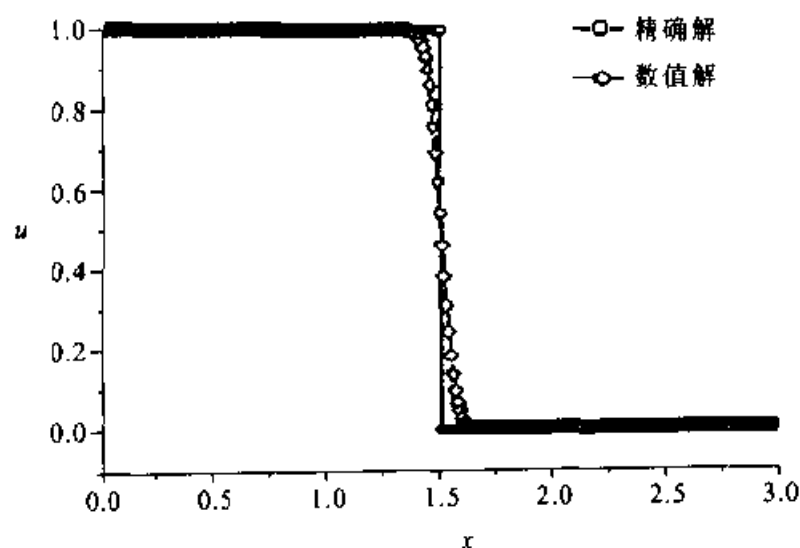
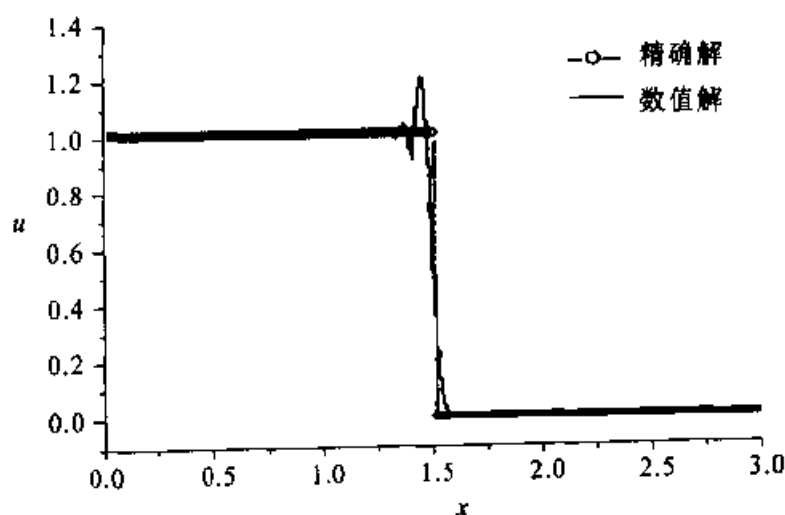
应注意, 这里对 TVD 特性的讨论是针对非线性标量方程而进行的, 对非线性方程组和多维问题实际上没有相应的特征。

7.1.3 数值解中的非物理振荡

上面的讨论指出, 标量守恒律方程的解之总变差不增长, 而一般的数值解并非如此。现在考查一具体算例的数值解变化情况, 以式(2.2.1)为例, 计算区域为 $[0, 3]$, 取网格点数为 301, $c = 1$, 初值为

$$u_j = \begin{cases} 1, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0, & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

取 $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5$, 在图 7-3 和图 7-4 中分别给出了在 $t = 0.5$ 时刻利用二点迎风格式和 MacCormack 格式的计算结果。图中还给出了对应的准确解。从计算结果中可以看出, 两点迎风格式的解无振荡产生, MacCormack 格式的解中有数值振荡产生, 而在两点迎风格式解中数值激波厚度被拉宽。这两个格式对激波的分辨率都不高。

图 7-3 $t=0.5$ 时两点迎风格式结果图 7-4 $t=0.5$ 时 MacCormack 格式结果

7.1.4 数值解振荡的初步分析

从算例可以看出, MacCormack 格式的解中有数值振荡, MacCormack 格式是色散型的。两点迎风格式的数值解中无数值振荡, 两点迎风格式是耗散型的。而高阶精度的耗散型格式的数值解中也有数值振荡产生。经验表明, 耗散型格式数值解中的振荡小于色散型格式解中的振荡。

在第四章中针对线性单波方程数值解的行为进行了分析。从数值解的行为分析中可知, 耗散误差只影响 Fourier 分量的幅值。而色散误差导致 Fourier 级数中对应于不同波数的分量传播速度不同, 从而导致高波分量的错位, 这是产生数值振荡的原因。这种波错位的运动形态是以

波束的群速度进行传播的。归根结底是由于高波分量, 或小尺度量得不到正确模拟而引起的数值振荡。如果将一间断函数(激波)进行 Fourier 级数展开, 则只有级数中的项数趋于无穷大时才能正确表征这一间断, 即趋于零的小尺度量都需得到正确的模拟(对于无粘流动)。

利用第四章的分析可知, 前面算例中的 MarCormack 格式是慢型的, 因而数值解中对应于高波数的数值波落后于物理波的传播。同样分析可知, 两点迎风格式也是慢型的, 因而高频波的传播速度也是不对的, 但从图 7-3 中看不到数值振荡, 这是因为过大的差分粘性抑制了数值振荡, 但也导致了数值解中间断过多地被平滑。

7.1.5 网格 Reynolds 数

到目前为止, 所讨论的方程都是无粘流动的方程。我们知道, 粘性使解趋于平滑, 在粘性流的计算中为了使数值解中不出现振荡, 对网格需有一定限制。在文献[2]中针对方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (c > 0) \quad (7.1.8)$$

构造了 FTCS 格式(Forward Time, Central Space)

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

将其改写为如下形式:

$$u_j^{n+1} = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{Re \Delta x} - \frac{1}{2} \right) u_{j+1}^n + \left(1 - 2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \mu \right) u_j^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{Re \Delta x} + \frac{1}{2} \right) u_{j-1}^n \quad (7.1.9)$$

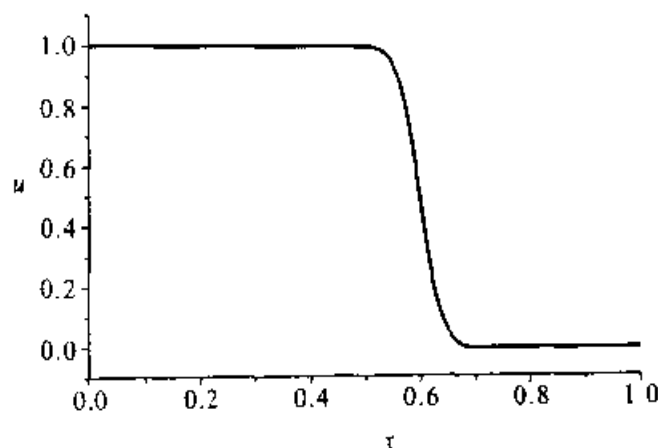
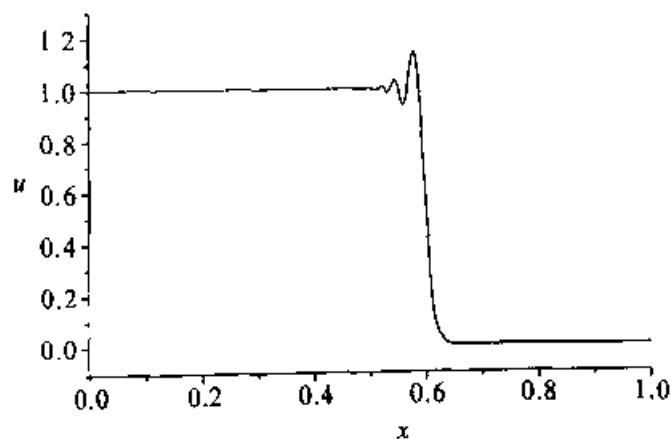
其中 $Re = c/\mu$, 定义 $Re_{\Delta x} = Re \Delta x$ 为网格 Reynolds 数, 现通过算例分析式(7.1.9)数值解的行为。取计算域为 $[0, 1]$, $N = 201$, $c = 1$, $\Delta t = 0.0005$ 。

初值为

$$u = \begin{cases} 1, & (\text{当 } x \leq 0.5) \\ 0, & (\text{当 } x > 0.5) \end{cases}$$

在图 7-5 中给出的是 $Re = 200$, $t = 0.1$ 时的结果, 图 7-6 是在同一时间对应 $Re = 2000$ 的结果。对这一粘性流模型问题, 物理解中不应有跳动现象, 数值解的跳动是由于网格不够细, 使得物理粘性不足以压制由色散误差引起的高波分量错位。在本章第二节将指出, 为使差分格式的解为单调的充分必要条件是该格式的系数为非负。很显然, 为使式(7.1.9)的系数为正, 要求

$$\mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad Re_{\Delta x} \leq 2 \quad (7.1.10)$$

图 7-5 $Re = 200$, $t = 0.1$ 时 FTCS 格式结果图 7-6 $Re = 2000$, $t = 0.1$ 时 FTCS 格式结果

第一个不等式是热传导方程显式格式的稳定性要求, 第二个不等式就是通常在计算粘性流时对网格 Reynolds 数的要求。

现在再看一下逼近于式(7.1.8)的两点迎风格式($c > 0$):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{\delta_x^2 u_j^n}{\Delta x^2} \quad (7.1.11)$$

经 Taylor 级数展开可得修正方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\mu \left(1 + \frac{Re_{\Delta x}}{2} \right) - \frac{c^2 \Delta t}{2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \quad (7.1.12)$$

从修正方程中可以看出, 为了保持差分格式具有正耗散特性, 要求对时间步长有一定的限制, 为了使物理粘性起主导作用要求对网格 Reynolds 数进行限制, 即满足式(7.1.10)的第二式。

目前在实际应用中都把 $Re_{\Delta x} \leq 2$ 作为粘性流计算的一个条件。在文献[3]中通过对修正方程和 Fourier 分析法指出, 提高格式的精度可以放宽对网格雷诺数的限制。应注意, 这里对网格 Reynolds 数的限制是指对

局部网格 Reynolds 数的限制。

7.1.6 人工粘性

一般说来格式本身的耗散特性使数值解在激波附近趋于平缓。格式中这种固有的耗散特性通常称其为格式粘性或差分粘性。通常差分粘性考虑到了不同特征量的关系。差分粘性引入的误差通常小于同量级的人工粘性误差。

如果从 N-S 方程出发来计算激波,原则上如果网格足够细,或网格雷诺数足够小,则在激波附近可无数值振荡产生。但在实际应用中通常雷诺数都很大,因而如果要求网格雷诺数很小,则要求网格尺寸非常小,这大大的增加了计算量。因而早期人们为了计算激波,不是从完全 N-S 方程出发,而是从 Euler 方程出发在右端加人工粘性项。这样在不增加很多工作量的情况下使激波解得以改善。当然一个前提条件是不因此而影响所感兴趣的物理量。

引入人工粘性的作用是压制数值振荡而不是消除振源,因而为很好地压制数值振荡通常需过大的人工粘性系数,这将导致对激波的过度平滑。应当指出,对于高阶精度格式,所引入的人工粘性需是对应的高阶偶次导数项。为了克服激波附近的数值振荡而人为加入的粘性项通常称为人工粘性。早期人们通过人工粘性的方法来克服数值振荡。加入人工粘性项后,在计算过程中可以不加区分地用统一的计算格式来计算包括激波在内的整个区域。这种用统一的格式计算流场和激波间断的数值方法,常称之为激波捕捉法。

Von Neumann 人工粘性法是最早的激波捕捉法^[4]。针对一维 Euler 方程引入的人工粘性项为

$$\rho (b_1 \Delta x)^2 I \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (7.1.13)$$

这里 b_1 为常数, I 为三阶的单位矩阵。

后来 MacCormack 引入的人工粘性项为^[5,6]

$$a_2 \Delta x^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{|u| + c}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| \frac{\partial U}{\partial x} \right) \quad (7.1.14)$$

这里 a_2 为常数, c 为声速, U 的定义如式(6.1.2)。压力二阶导数的引入为使在光滑区域减小这一附加量,而只在压力曲率大的地方突出人工粘性项的作用。

Jameson, A. 在进行翼型绕流计算时,引入了更为复杂的人工粘性^[7]。

7.2 一阶 TVD 格式

7.2.1 单调格式

单调格式最早是由 Godunov 提出的^[8]。考虑一个一般的差分格式：

$$u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n, \quad \sum_k a_k = 1 \quad (7.2.1)$$

如果在 n 时间层对所有 j , $u_{j+1}^n - u_j^n > 0$ (或 $u_{j-1}^n - u_j^n < 0$), 且由式 (7.2.1) 所得到的解仍保持这种关系, 则格式 (7.2.1) 称为单调格式。Godunov 证明, 为使式 (7.2.1) 为单调格式的充要条件是所有 $a_j \geq 0$ 。Godunov 所讨论的是线性差分格式。他还证明, 常系数单调格式只能是一阶精度的。利用单调格式计算激波数值解中不会出现振荡现象。

Jenning^[9] 将单调差分格式的概念推广到非线性差分格式上。设有更为一般形式的差分格式：

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-l}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+l}^n) \quad (7.2.2)$$

Jenning 称格式 (7.2.2) 为单调格式, 如果满足关系

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j+k}} \geq 0, \quad (k = -l, \dots, l) \quad (7.2.3)$$

设 u_j^n 是单调函数, 如果经过一个算子 (格式) 作用后所得之 $n+1$ 层上的量仍是单调的, 则称该格式是保单调的。保单调的格式不一定满足条件式 (7.2.3)。这表明了单调格式与保单调格式的差别。

7.2.2 一阶 TVD 格式

TVD 格式的基本思想是将微分方程总变差不增的特征应用于构造差分格式。考虑差分格式

$$u_j^{n+1} = L_h(u_j^n) \quad (7.2.4)$$

设它与式 (7.1.4) 是相容的, 且 t_{n+1} 时刻差分解的总变差不超过 t_n 时刻差分解的总变差, 则称该差分格式为 TVD 格式。TVD 格式是保单调格式。

为了构造 TVD 格式, Harten 给出了一个判别格式具有 TVD 性质的充分条件, 即如果差分格式可以写成如下形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (7.2.5)$$

且对任何 j 都满足如下关系:

$$C_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, D_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n \leq 1 \quad (7.2.6)$$

则格式(7.2.5)是 TVD 格式。

很明显, 满足稳定条件且具有一阶精度的两点迎风格式是 TVD 格式。参照 Roe 格式(6.4.4)和(6.4.5), 考虑单个守恒律方程(7.1.4)的相容守恒格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} \right), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (7.2.7)$$

其数值通量 $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 具有以下形式:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left[f_j + f_{j+1} - \frac{1}{\lambda} Q(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1} - u_j) \right] \\ \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j \neq 0) \\ a(u_j), & (\text{当 } u_{j+1} - u_j = 0) \end{cases} \\ a(u) &= f'_u \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

利用上面提到的充分条件(7.2.6)可以证明, 如果满足不等式

$$|x| \leq Q(x) \leq 1, \quad (\text{对 } 0 \leq |x| \leq \mu < 1) \quad (7.2.9)$$

则格式(7.2.7)和(7.2.8)是 TVD 格式。其中 μ 为某一常数。

下面给出满足条件(7.2.9)的 $Q(x)$ 的几个具体函数形式。

$$(1) \quad Q(x) = |x| \quad (7.2.10)$$

$$(2) \quad Q(x) = \begin{cases} |x|, & (\text{当 } |x| \geq \delta) \\ \delta, & (\text{当 } |x| \leq \delta) \end{cases} \quad (7.2.11)$$

$$(3) \quad Q(x) = \begin{cases} |x|, & (\text{当 } |x| \geq \delta) \\ \frac{x^2 + \delta^2}{2\delta}, & (\text{当 } |x| \leq \delta) \end{cases} \quad (7.2.12)$$

其中 δ 为一小量, 这里主要是使 x 的取值不等于零。

按这几种函数 $Q(x)$ 的选择所得格式在条件(7.2.9)满足的情况下都是 TVD 格式。

按第(1)种选择有

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[f_j + f_{j+1} - |\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}| (u_{j+1} - u_j) \right] \quad (7.2.13)$$

这里 $\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}$ 按式(7.2.8)计算, 这就是在第六章中所介绍的 Roe 格式, Roe 格式是 TVD 格式。然而简单地按第(1)种 $Q(x)$ 函数的选取不能保证差分解满足离散熵条件^[16], 因而可能得到非物理解。

7.3 二阶 TVD 格式

这里将主要介绍两种构造二阶 TVD 格式的方法, 一种是利用一阶精度的迎风格式(TVD 格式)通过对流通量的修正而得到二阶精度的 TVD 格式; 另一种是通过对称型的 L-W 格式来构造二阶精度的 TVD 格式。前者有时称为迎风型 TVD 格式, 后者有时称为对称型 TVD 格式。

7.3.1 Harten 的二阶 TVD 格式^[1]

Harten 的二阶 TVD 格式是迎风型的。针对守恒律方程(7.1.4)曾指出, 它的解具有 TVD 性质。这种特性不依赖于流通量 f 的具体形式。前面介绍的一阶迎风格式是 TVD 格式, 这种 TVD 格式也不依赖于数值流通量的具体形式, 但这种格式的耗散误差过大[差分粘性的量级为 $O(\Delta x)$]。Harten 的 TVD 格式是从一阶迎风格式出发, 通过对数值流通量的修正, 或通过反扩散的方法使过大的数值耗散反掉, 以提高精度, 但对反掉的量又要有一定的限制使不改变格式的 TVD 性质。设 f 为原流通量, g 为其修正量, 修正后的流通量为 $f^M = f + g/\lambda$ 。无疑, 可构造针对 f^M 逼近于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^M}{\partial x} = 0, \quad f^M(u) = f(u) + \frac{1}{\lambda}g(u) \quad (7.3.1)$$

的具有一阶精度的 TVD 格式。所引入的修正量 $g(u)/\lambda$ 应是一小量, 因而逼近于式(7.3.1)的格式也逼近于式(7.1.4)。按式(7.3.1)构造的格式有一阶精度。 $g(u)$ 项的引入是希望反掉针对逼近式(7.1.4)的格式中的过大的耗散, 从而提高对式(7.1.4)的逼近精度。Harten 的二阶精度 TVD 格式就是利用这一思想而构造的。

针对式(7.3.1)具有一阶精度的迎风格式类似于式(7.2.8):

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^M = \frac{1}{2}(f_{j+\frac{1}{2}}^M + f_j^M) - \frac{1}{\lambda}Q(\lambda \hat{a})(u_{j+1} - u_j)$$

$$\hat{a}_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{f_{j+1}^M - f_j^M}{u_{j+1} - u_j}, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j \neq 0) \\ a_{j+\frac{1}{2}}, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j = 0) \end{cases}$$

将式(7.3.1)中的 f^M 代入上式, 则得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^M - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^M \right)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^M = \frac{1}{2} \left[(f(u_j^n) + \frac{1}{\lambda}g_j + \right.$$

$$f(u_{j+1}^n) + \frac{1}{\lambda} g_{j+1} - \frac{1}{\lambda} Q(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1} - u_j) \Big] \\ \gamma_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{g_{j+1}^n - g_j^n}{u_{j+1} - u_j}, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j \neq 0) \\ 0, & (\text{当 } u_{j+1} - u_j = 0) \end{cases} \quad (7.3.2)$$

这里 $Q(x)$ 可选用式(7.2.12), \bar{a} 的定义如式(7.2.8)。

希望式(7.3.2)对于原方程(7.1.4)是二阶 TVD 格式。为此取修正项具有以下形式:

$$g_j = \text{minmod}(\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}, \tilde{g}_{j-\frac{1}{2}}) \\ \tilde{g}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [Q(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}}) - (\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}})^2] (u_{j+1} - u_j) \quad (7.3.3)$$

其中多变量的 **minmod** 函数的取值方式如下: 当所含变量异号时取零值; 当所含变量同号时取这些变量之中绝对值最小的那个变量的值。其分析表达形式为

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} 0, & (\text{当 } ab \leq 0) \\ (\text{sgn } a) \min(|a|, |b|), & (\text{当 } ab > 0) \end{cases} \quad (7.3.4)$$

这里:

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & (\text{当 } a > 0) \\ 0, & (\text{当 } a = 0) \\ -1, & (\text{当 } a < 0) \end{cases} \quad (7.3.5)$$

对函数 $Q(x)$ 也可采用满足条件

$$|x| \leq Q(x) \leq 1, \text{ 当 } |x| \leq \mu < 1 \text{ 时}$$

的其他表达形式。

可以证明按上面方法构造的格式是 TVD 格式, 且以二阶精度逼近于原守恒律方程(7.1.4)。关于精度, 可利用 Taylor 级数展开法来验证。可以看出, 函数 g 的引入恰好反掉了逼近于式(7.1.4)的两点迎风格式中的误差主导项。但在极值点上精度降价。例如, 设 $u_{j-1} \leq u_j = u_{j+1} \geq u_{j+2}$, 由 $Q(x)$ 的定义和所需满足的条件可知, $\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}$ 的符号与 $u_{j+1} - u_j$ 相同, 因而 $\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}$ 在极值点变号。由式(7.3.3)可知, 在极限点 $g_j = 0$, 因而格式退化到原未经修正的一阶精度格式。

7.3.2 带通量限制因子的二阶 TVD 格式

在 20 世纪 70 年代到 80 年代初很多学者^[10]都曾采用限制通量的方法来构造不同的激波捕捉格式。在 Harten 给出的 TVD 格式概念及充分

条件的基础上, 于 1984 年 Sweby 采用通量限制因子(limiter)的方法来构造一系列的二阶 TVD 格式。下面主要介绍 Sweby 构造格式的思想。考虑单波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const} > 0 \quad (7.3.6)$$

对应的单步 L-W 格式可改写为以下形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{LW}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^{\text{LW}}), \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (7.3.7)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{LW}} = \frac{1}{2} [cu_j^n + cu_{j+1}^n - \frac{1}{\lambda} (\lambda c)^2 (u_{j+1}^n - u_j^n)] \quad (7.3.8)$$

该格式为二阶精度格式。将其数值通量改写为以下形式:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\text{LW}} = cu_j^n + \frac{1}{2\lambda} (\lambda c)(1 - \lambda c)(u_{j+1}^n - u_j^n)$$

可将其看成是在具有 TVD 性质的两点迎风格式($c \geq 0$):

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda c (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (7.3.9)$$

的数值通量 cu_j^n 上, 再加一附加通量修正

$$\frac{1}{2\lambda} (\lambda c)(1 - \lambda c)(u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (7.3.10)$$

则 L-W 格式可以写为形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda c \Delta u_{j-\frac{1}{2}} - \Delta_- \left[\frac{1}{2} (\lambda c)(1 - \lambda c) \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \right] \quad (7.3.11)$$

这里 $\Delta = \delta_x^+$, $\Delta_- = \delta_x^-$ 。因而可将 L-W 格式看成是一阶迎风格式加了一个反扩散项, 将一阶格式中的扩散项全部减掉, 构成了二阶格式, 但这也破坏了一阶格式的 TVD 特性。为不降低精度, 又希望不破坏 TVD 性质, 引入一个通量限制因子 φ_j , 将式(7.3.11)改写为以下形式:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda c \Delta u_{j-\frac{1}{2}} - \Delta_- \left[\varphi_j \frac{1}{2} \lambda c (1 - \lambda c) \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \right] \quad (7.3.12)$$

通量限制因子的引入是为了限制反扩散量, 通常取形式为

$$\varphi_j = \varphi(r_j), \quad r_j = \frac{\Delta u_{j-1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} \quad (7.3.13)$$

现在我们遵循 TVD 的充分条件式(7.2.6)来分析一下通量限制因子 $\varphi(r)$ 所应满足的条件。将式(7.3.12)改写为形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - D_{j-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-\frac{1}{2}} - \Delta_- \left[\varphi_j \frac{1}{2} \lambda c (1 - \lambda c) \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \right] \quad (7.3.14)$$

$$D_{j-\frac{1}{2}} = \lambda c + \frac{\Delta_- \left[\varphi_j \frac{1}{2} \lambda c (1 - \lambda c) \Delta u_{j+\frac{1}{2}} \right]}{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lambda c \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \lambda c) \left(\frac{\varphi(r_j)}{r_j} - \varphi(r_{j-1}) \right) \right]$$

在 $0 < \lambda c < 1$ 条件下, 只要取 $\varphi(r)$ 满足条件

$$\left| \frac{\varphi(r_j)}{r_j} - \varphi(r_{j-1}) \right| \leq \Phi < 2 \quad (7.3.15)$$

就有 $0 \leq \lambda c \left[1 - \frac{1}{2} (1 - \lambda c) \Phi \right] \leq D_{j-\frac{1}{2}} \leq \lambda c \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \lambda c) \Phi \right] \leq 1$

很显然, 此时 TVD 条件(7.2.6)得到满足。

现在再来分析一下选择什么样的 $\varphi(r)$ 格式具有二阶精度。

对于式(7.3.11)型 L-W 格式(二阶精度)有

$$\varphi(r) = \varphi^{LW}(r) \equiv 1 \quad (7.3.16)$$

Warming 和 Beam 给出了一个二阶迎风格式, 它可以改写为形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda c \Delta u_{j-\frac{1}{2}} - \Delta_- \left[\frac{1}{2} \lambda c (1 - \lambda c) \Delta u_{j-\frac{1}{2}} \right] \quad (7.3.17)$$

这相当于在式(7.3.12)中取

$$\varphi(r) = \varphi^{WB}(r) \equiv r \quad (7.3.18)$$

L-W 格式和 W-B (Warming - Beam) 格式都是 2 阶精度格式, 显然, 它们之间的线性组合将仍是二阶精度的。现取通量限制因子为

$$\varphi(r) = [1 - \theta(r)] \varphi^{LW}(r) + \theta(r) \varphi^{WB}(r) = 1 + \theta(r)(r - 1) \quad (7.3.19)$$

如果如此选择的通量限制因子 φ 满足条件(7.3.15), 则格式(7.3.12)就是二阶 TVD 格式。Sweby 通量限制因子 $\varphi(r)$ 还作了如下限制:

(1) $\theta(r)$ 满足条件 $0 \leq \theta(r) \leq 1$

这时对应的 $\varphi(r)$ 相当于由 φ^{LW} 和 φ^{WB} 的内插构成。此时 $\varphi(r)$ 的变化图相当于图 7-7 的阴影部分 [$\varphi = r$ 相当于 $\theta(r) = 1$]。

(2) 要求 $\varphi(r)$ 非负 [$\varphi(r) = 0$, 当 $r \leq 0$ 时]。此时可由式(7.3.15)导出

$$0 \leq \varphi(r) \leq 2, \quad 0 \leq \frac{\varphi(r)}{r} \leq 2$$

此时 $\varphi(r)$ 的变化范围为图 7-8 的阴影部分。

综合上面的两个限制条件, $\varphi(r)$ 的变化区应如图 7-9 的阴影部分。

根据上面的分析可知, 如果所选择的通量限制因子落在图 7-9 的

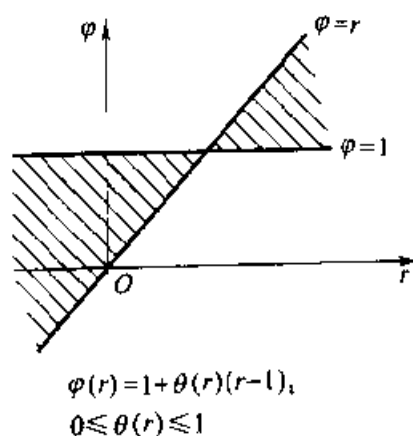


图 7-7 二阶精度区

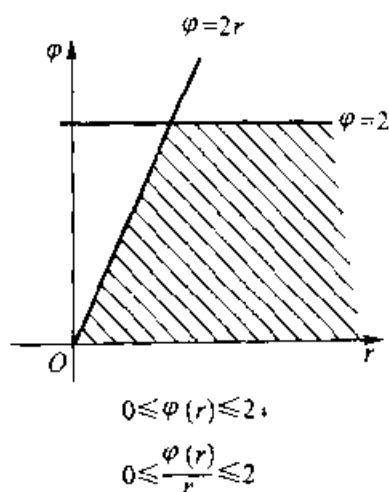


图 7-8 TVD 区

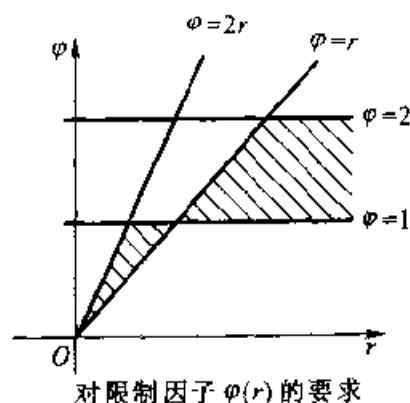


图 7-9 二阶精度 TVD 区

阴影区内, 则所构造的差分格式(7.3.12)是具有二阶精度的 TVD 格式。

下面给出几个具体的通量限制因子的形式。

(1) Van Leer 通量限制因子

$$\varphi_{VL}(r) = \frac{|r| + r}{|r| + 1}$$

(2) Roe 通量限制因子

$$\varphi_{R1}(r) = \max[0, \min(r, 1)]$$

$$\varphi_{R2}(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$

上面介绍了利用通量限制因子可以将一个具有二阶精度的非 TVD 格式改造成 TVD 格式。后来发展了很多利用通量限制因子的 TVD 格式, 这里不作一一介绍。

7.4 TVD 格式在流体力学方程中的应用

7.4.1 常系数一维双曲型方程组的 TVD 格式

设有常系数双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (7.4.1)$$

这里 U 是 m 维矢量, A 为矩阵, 且有 m 个互异的实特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. 矩阵 A 可写为形式 $A = R\Lambda L$, 其中 R 由右特征矢量 r_1, \dots, r_m 组成之矩阵, L 为由左特征矢量组成之矩阵, 且 $L = R^{-1}$ 。

$$R = (r_1, \dots, r_m), \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \quad (7.4.2)$$

引进特征变量

$$W = LU = (w_1, \dots, w_m)^T, \quad w_k = \sum_i l_{k,i} u_i \quad (7.4.3)$$

则可将方程组(7.4.1)写成特征形式的方程组:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (7.4.4)$$

这里 A 为由特征值 λ_k 组成的对角矩阵, 式(7.4.4)的分量形式为

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial w_k}{\partial x} = 0, \quad (k = 1, \dots, m) \quad (7.4.5)$$

可以看出, 对不同的 k , 式(7.4.4)中各方程之间互不相联系, 因而可对每一单个的方程构造相应的 TVD 格式:

$$w_{k,j}^{n+1} = w_{k,j}^n - \lambda \left(\hat{f}_{k,j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{k,j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (7.4.6)$$

$$\hat{f}_{k,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [(\lambda_k w_k)_j + (\lambda_k w_k)_{j+1} + \Psi_{k,j+\frac{1}{2}}] \quad (7.4.7)$$

对一阶 TVD 格式(7.2.8)可取为:

$$\Psi_{k,j+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\lambda} Q_k(\lambda \lambda_k) (w_{k,j+1} - w_{k,j}) \quad (7.4.8)$$

这里 $Q_k(x)$ 可取式(7.2.10) ~ (7.2.12)中的一种。注意, 这里 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, λ_k 为特征值。

又如对 Harten 的二阶 TVD 格式(7.3.2)有

$$\Psi_{k,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} [g_{k,j} + g_{k,j+1} - Q_k(\lambda \lambda_k + \gamma_k)_{j+\frac{1}{2}} (w_{k,j+1} - w_{k,j})] \quad (7.4.9)$$

$$g_{k,j} = \min \text{mod} \left(\tilde{g}_{k,j+\frac{1}{2}}, \tilde{g}_{k,j-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\tilde{g}_{k,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [Q_k(\lambda \lambda_k) - (\lambda \lambda_k)^2]_{j+\frac{1}{2}} (w_{k,j+1} - w_{k,j})$$

$$\gamma_{k,j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{g_{k,j+1} - g_{k,j}}{w_{k,j+1} - w_{k,j}}, & (\text{当 } w_{k,j+1} - w_{k,j} \neq 0) \\ 0, & (\text{当 } w_{k,j+1} - w_{k,j} = 0) \end{cases}$$

关于 minmod 函数的定义参看式(7.3.4), 还可以构造其他种 TVD 格式。

现将对每个方程(7.4.4)所构造的 TVD 格式再返回到原变量中去:

$$U = RLU = RW = \sum_{k=1}^m w_k r_k$$

$$AU = RALU = RAW = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_k r_k$$

以右特征矢量 r_k 乘以式(7.4.6), 并对 k 求和, 则得

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (7.4.10)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \sum_k \hat{f}_{u,j+\frac{1}{2}} r_k = \frac{1}{2} (AU_j^n + AU_{j+1}^n + \sum_k \Psi_{k,j+\frac{1}{2}} r_k) \quad (7.4.11)$$

这就是针对常系数方程组(7.4.1)所构造的 TVD 格式。在这一格式构造过程中需求出对应的在特征矢量 r_k 和对相应特征关系式(7.4.4)所构造的 $\Psi_{k,j+\frac{1}{2}}$

7.4.2 非线性双曲型方程组的 TVD 格式

对非线性方程组 TVD 格式的构造方法只是线性方程组 TVD 格式构造方法的形式推广。设有双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7.4.12)$$

Jacobian 矩阵 $Df/DU = A$ 可写为形式

$$A(U) = R(U) \Lambda(U) L(U)$$

这里 $\Lambda(U)$ 为由 A 之特征值组成之对角矩阵, $R(U)$ 和 $L(U)$ 分别为由矩阵 A 的右、左特征矢量组成的矩阵, 对于方程(7.4.12)可构造一阶 TVD 格式

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (7.4.13)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n) + \sum_k \Psi_{k,j+\frac{1}{2}} r_{k,j+\frac{1}{2}}] \quad (7.4.14)$$

$$\Psi_{k,j+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\lambda} Q_k (\lambda \lambda_{k,j+\frac{1}{2}}) a_{k,j+\frac{1}{2}} \quad (7.4.15)$$

$$Q(x) = \begin{cases} |x|, & (|x| \geq \epsilon_k) \\ \frac{x^2 + \epsilon_k^2}{2\epsilon_k}, & (|x| \leq \epsilon_k) \end{cases} \quad (7.4.16)$$

$$a_{k,j+\frac{1}{2}} = l_{k,j+\frac{1}{2}} (U_{j+1}^n - U_j^n) \quad (7.4.17)$$

式中 $\lambda_{k,j+\frac{1}{2}}$, $l_{k,j+\frac{1}{2}}$, $r_{k,j+\frac{1}{2}}$ 分别是矩阵 $A_{j+\frac{1}{2}}$ 的特征值、左特征矢量和

右特征矢量。这里的 $A_{j, \frac{1}{2}} = A(U_{j, \frac{1}{2}})$, 其中 $U_{j, \frac{1}{2}}$ 是 U_j 和 U_{j+1} 之间的平均值。当存在有 Roe 分解时, 可取 Roe 分解中的矩阵 $A(U_j, U_{j+1})$

可利用一阶 TVD 格式(7.4.13)和(7.4.14)构造二阶 TVD 格式。仍利用式(7.4.13)和(7.4.14), 按如下方法构造 $\Psi_{k, j+\frac{1}{2}}$:

$$\Psi_{k, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} [g_{k, j} + g_{k, j+1} - Q_k(\lambda\lambda_{k, j+\frac{1}{2}} + \gamma_{k, j+\frac{1}{2}})\alpha_{k, j+\frac{1}{2}}] \quad (7.4.18)$$

$$\gamma_{k, j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{g_{k, j+1} - g_{k, j}}{\alpha_{k, j+\frac{1}{2}}}, & (\text{当 } \alpha_{k, j+\frac{1}{2}} \neq 0) \\ 0, & (\text{当 } \alpha_{k, j+\frac{1}{2}} = 0) \end{cases} \quad (7.4.19)$$

$$g_{k, j} = \min \text{mod}(\tilde{g}_{k, j+\frac{1}{2}}, \tilde{g}_{k, j-\frac{1}{2}})$$

$$\tilde{g}_{k, j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [Q_k(\lambda\lambda_{k, j+\frac{1}{2}}) - (\lambda\lambda_{k, j+\frac{1}{2}})^2] \alpha_{k, j+\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_{k, j+\frac{1}{2}} = l_{k, j+\frac{1}{2}}(U_{j+1} - U_j)$$

则可得二阶精度 TVD 格式。这里的 $Q_k(x)$ 仍取式(7.4.16)。

7.4.3 关于 TVD 格式的注记

1. 关于 TVD 特性的注记

在本章第一节中指出, 标量守恒律方程的解有 TVD 特性。后来也给出了一些相应的具有 TVD 特性的差分格式。对于方程组情况还需对总变差作一明确的定义。

对一维线性方程组定义 $|U_j|$ 的总变差为

$$TV(U) = \sum_j \sum_{k=1}^m |w_{k, j+1} - w_{k, j}| = \sum_j \sum_{k=1}^m |\alpha_{k, j+\frac{1}{2}}| \quad (7.4.20)$$

$$\alpha_{k, j+\frac{1}{2}} = w_{k, j+1} - w_{k, j} = l_k(U_{j+1} - U_j)$$

即定义特征变量 $w_k = l_k U$ 之总变差的和为 $|U_j|$ 的总变差:

$$TV(U) = \sum_{k=1}^m TV(w_k) \quad (7.4.21)$$

由于逼近于线性方程组(7.4.1)的格式(7.4.10)和(7.4.11)是通过特征变量的 TVD 格式来构造的, 而对每个特征变量的总变差是不增的, 因而式(7.4.10)、(7.4.11)的总变差是不增的:

$$TV(U^{n+1}) = \sum_{k=1}^m TV(w_k^{n+1}) \leq \sum_{k=1}^m TV(w_k^n) = TV(U^n) \quad (7.4.22)$$

前面介绍的由单个守恒律构造的 TVD 格式推广到非线性方程组时不能严格证明它们的 TVD 性质, 只能证明它们退化到线性方程组时有 TVD 性质式(7.4.22)。实际上 Euler 方程组的精确解本身也不一定是总变差不增的。所谓逼近于流体力学方程组的 TVD 格式实际上也是一种形式上单个守恒律方程 TVD 格式的推广。而在实际计算中利用如此构造的格式也确实能给出对间断有高分辨率的数值解。

2. 关于逼近精度的注记

在本章第三节中构造了二阶精度的 TVD 格式。如前面指出, 二阶的 TVD 格式在极值点和拐点处, 格式的精度降阶。那里所说的二阶精度是指在时间方向和空间方向均具有二阶精度。

到目前为止, 所构造的 TVD 格式都是一维的。在将一维 TVD 格式推广到多维问题时应注意逼近精度是否得到了保持。例如, 对二维问题, 通常的作法是采用 6.5 节中介绍的时间分裂法, 在采用时间分裂法时要求序列分算子是 TVD 的, 且序列分算子的排列是对称的。简单的将原二维方程在每个方向上进行流通矢量的修正(或称反扩散)将导致精度的降低。下面将针对这一点作进一步的分析。

对线性单波方程采用的两点迎风格式进行 Taylor 级数展开有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \Delta x \left[|c| - \frac{1}{\lambda} (\lambda c)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (7.4.23)$$

从上式可以看出, 右端截断误差的首项为差分粘性项, 格式为一阶精度。再来看一下 Harten 二阶 TVD 格式的修正流通量式(7.3.3)。对照式(7.4.23)和(7.3.3)可以看出, 式(7.3.3)中 $\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}$ 的 $Q(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}})$ 项是为了将式(7.4.23)中的差分粘性项(式中右端[]内的第一项)部分被反掉, 以提高空间的逼近精度。在 $\tilde{g}_{j+\frac{1}{2}}$ 中的 $(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}})^2$ 项是为了抵消式(7.4.23)中[]内的最后一项, 为使格式在时间方向具有二阶精度。最后为使反掉的量不要太大, 在式(7.3.3)中引入的 minmod 函数使格式保持 TVD 特性。

对二维方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.4.24)$$

所构造的一阶迎风格式经 Taylor 级数展开后可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \Delta x \left[|a| - \frac{1}{\lambda_x} (\lambda_x a)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$\frac{1}{2} \Delta y \left[|b| - \frac{1}{\lambda_1} (\lambda_1 b)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \Delta t a b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cdots \quad (7.4.25)$$

这里 $\lambda_x = \Delta t / \Delta x$, $\lambda_y = \Delta t / \Delta y$ 。

如果在每个坐标方向上简单地采用对流通量的修正(反扩散), 则上式中的最后混合导数项是无法反掉的, 因而导致精度的降低。在采用时间分裂法时则无精度降价问题。

如果将式(7.3.3)中的修正流通量 $\bar{g}_{j+\frac{1}{2}}$ 取为以下形式:

$$\bar{g}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Q(\lambda \bar{a}_{j+\frac{1}{2}})(u_{j+1} - u_j) \quad (7.4.26)$$

则定常解仍可保证二阶精度。

7.5 MUSCL 格式

MUSCL 格式 (Monotone Upstream Scheme for Conservation Law)^[11] 是 Van Leer 于 1979 年提出的。设有一线性单波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f = cu \quad (7.5.1)$$

将流通量分裂后进行空间离散, 然后可得不同的半离散格式, 例如, 具有二阶精度的中心差分, 具有二阶精度的迎风差分, 以及具有三阶精度的迎风差分等。可将几个不同格式写为统一形式:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (7.5.2)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = f^+(\hat{u}_{j+\frac{1}{2},L}) + f^-(\hat{u}_{j+\frac{1}{2},R}) \quad (7.5.3)$$

其中 $f^\pm = c^\pm u$, 不同的格式依赖于 $u_{j+\frac{1}{2},L}$ 和 $u_{j+\frac{1}{2},R}$ 的不同表达式。一个较为一般的形式为

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{j+\frac{1}{2},L} &= u_j + \frac{1}{4} [(1-k)\delta_x^- + (1+k)\delta_x^+] u_j \\ \hat{u}_{j+\frac{1}{2},R} &= u_{j+1} - \frac{1}{4} [(1-k)\delta_x^+ + (1+k)\delta_x^-] u_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (7.5.4)$$

当取 $k = -1$ 时为迎风格式, 当取 $k = 1$ 时为中心型格式, $k = 0$ 时为 Fromm 格式, 它们都具有二阶精度。当取 $k = \frac{1}{3}$ 时是三阶精度的格式, 如果简单地采用这些格式计算激波, 则会有数值振荡产生。在文献^[11] 中将式(7.5.4)进行了改进, 推广到对单个守恒律方程的离散, 并称其为 MUSCL 格式。对守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7.5.5)$$

的半离散格式为

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) = 0 \quad (7.5.6)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f}^-(\hat{u}_{j+\frac{1}{2},L}) + \hat{f}^-(\hat{u}_{j+\frac{1}{2},R}) \quad (7.5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_{j+\frac{1}{2},L} &= u_j + \frac{1}{4} [(1-k)\bar{\delta}_x^- + (1+k)\bar{\delta}_x^+] u_j \\ \hat{u}_{j+\frac{1}{2},R} &= u_{j+1} - \frac{1}{4} [(1-k)\bar{\delta}_x^- + (1+k)\bar{\delta}_x^+] u_{j+1} \end{aligned} \right\} \quad (7.5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_x^+ u_j &= \min \text{ mod } (\delta_x^+ u_j, b \delta_x^- u_j) \\ \bar{\delta}_x^- u_j &= \min \text{ mod } (\delta_x^- u_j, b \delta_x^+ u_j) \end{aligned} \right\} \quad (7.5.9)$$

$$1 \leq b \leq 3, \quad k = -1, 1, 0, \frac{1}{3}$$

现在来对照一下由式(7.5.4)和(7.5.8)所构成的格式。由式(7.5.4)中可以看出, 对应于 f^+ 的自变量为 $\hat{u}_{j+\frac{1}{2},L}$, 它是利用向上游偏斜的三个点 $(j-1, j, j+1)$ 上的函数值插值而得, 即在上游 j 点处对 u_j 加以梯度修正。对应于 f^- 的自变量为 $\hat{u}_{j+\frac{1}{2},R}$, 它是利用上游 $(j, j+1, j+2)$ 点上的插值而得, 也是利用上游点上的值对 u_{j+1} 的一个梯度修正。如果都不进行梯度修正, 则所得之格式为两点迎风格式, 修正后使得精度提高。在式(7.5.8)中也同样进行了修正, 但不同的是这里为有选择的修正, 选择在邻近点梯度小的量作为修正量, 从而尽可能地减少了 $\hat{u}_{j+\frac{1}{2},L}$ 和 $\hat{u}_{j+\frac{1}{2},R}$ 的大幅度变化。MUSCL 格式是通过这种方法来改进激波解的。

可将 MUSCL 格式推广用于求解流体力学方程组。在文献[12]中指出, 对于真正的非线性守恒律方程, 高于二阶精度的 MUSCL 型格式是不存在的。

TVD 格式提高了对激波的捕捉能力, 但不足之处是在极值点上精度降阶。为克服这一不足, 之后发展了 ENO 格式 (Essential Non Oscillatory)。ENO 格式可基本消除数值振荡, 但不要求满足 TVD 特性。ENO 格式是直接针对 TVD 格式的不足而进行的改进, 使改进后的格式处处都具有二阶精度。也可构造更高阶的 ENO 格式。Chakravarthy 构造了另一类型的 ENO 格式^[13], 它实际上是直接对 Godunov 格式的改进。格式中不是利用片状常数函数界面上的值求解 Riemann 问题, 而是在界面上利用高阶插值的结果来求解 Riemann 问题。从而使格式精度大为提高, 解

的分辨率大为改进。

7.6 其他类型的激波高分辨率格式

在我国也发展了一些具有自己特色的激波高分辨率差分格式，如在文献[14]中发展了 NND (Non oscillatory, Containing No free parameters and Dissipative Scheme) 格式，文献[15]中提出了对 TVD 的修正格式，文献[16]中构造了满足熵增量的差分格式等。在文献[17]中提出了耗散比拟法，文献[18]中参照数值解的行为特性分析构造了群速度控制法。这里将简单介绍两种方法，其一为 NND 方法，在国内已用这一方法数值模拟了很多实际问题。另一种是群速度控制法，这一方法简单，物理含义较清楚，且已应用于很多实际流动的数值模拟中。

7.6.1 NND 格式

在文献[19]中依据对两点中心格式和具有二阶精度的迎风格式的数值解，在间断附近的振荡特征分析构造了 NND 格式。考虑单波方程，将单波方程中的传播速度 c 进行分裂，可得

$$c = c^+ + c^-, \quad c^\pm = (c \pm |c|)/2$$

$$f^\pm = c^\pm u, \quad f = f^+ + f^-$$

则得方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0 \quad (7.6.1)$$

根据文献[19]中的讨论，如果按如下之方法构造格式

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = \begin{cases} -\frac{\delta_x^h f_j^+}{\Delta x} - \frac{\delta_x^0 f_j^-}{\Delta x}, & (\text{激波上游}) \\ -\frac{\delta_x^f f_j^-}{\Delta x} - \frac{\delta_x^0 f_j^+}{\Delta x}, & (\text{激波下游}) \end{cases} \quad (7.6.2)$$

则激波附近将无波动。可将上式重新改写为以下形式：

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta x} (h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}) \quad (7.6.3)$$

$$h_{j+\frac{1}{2}} = f_{L,j+\frac{1}{2}}^+ + f_{R,j-\frac{1}{2}}^- \quad (7.6.4)$$

$$f_{L,j+\frac{1}{2}}^+ = \begin{cases} f_j^+ + \frac{1}{2} \delta_x^- f_j^+, & (\text{激波上游}) \\ f_j^+ + \frac{1}{2} \delta_x^+ f_j^+, & (\text{激波下游}) \end{cases} \quad (7.6.5)$$

$$f_{R,j+\frac{1}{2}}^- = \begin{cases} f_{j+1}^- - \frac{1}{2} \delta_x^- f_{j+1}^-, & (\text{激波上游}) \\ f_{j+1}^- - \frac{1}{2} \delta_x^+ f_{j+1}^-, & (\text{激波下游}) \end{cases} \quad (7.6.6)$$

式(7.6.5)表明,在激波的上、下游需对在 $\delta_x^- f_j^+$ 和 $\delta_x^+ f_j^+$ 中进行选择。对单调变化的激波 $\delta_x^- f_j^+$ 和 $\delta_x^+ f_j^+$ 的符号是相同的。准确到二阶精度,在激波的上游 $|\delta_x^- f_j^+| \leq |\delta_x^+ f_j^+|$, 在激波的下游 $|\delta_x^+ f_j^+| \leq |\delta_x^- f_j^+|$ 。这表明,在激波的上下游应选择 $\delta_x^- f_j^+$ 和 $\delta_x^+ f_j^+$ 中绝对值小的那个。对式(7.6.6)可作同样的讨论,也是需要选取 $\delta_x^- f_{j+1}^-$ 和 $\delta_x^+ f_{j+1}^-$ 中绝对值小的那一个。

这样,利用 minmod 函数,式(7.6.5)和(7.6.6)可改写为如下形式:

$$f_{L,j+\frac{1}{2}}^+ = f_j^+ + \frac{1}{2} \min \text{mod} \{ \delta_x^- f_j^+, \delta_x^+ f_j^+ \} \quad (7.6.7)$$

$$f_{R,j+\frac{1}{2}}^- = f_{j+1}^- - \frac{1}{2} \min \text{mod} \{ \delta_x^- f_{j+1}^-, \delta_x^+ f_{j+1}^- \} \quad (7.6.8)$$

由式(7.6.3)、(7.6.4),式(7.6.7)和(7.6.8)构成最终的 NND 格式。

可以证明 NND 格式是满足 TVD 性质。时间导数可以取一阶逼近、二阶逼近以及 R-K 方法等。如果将 NND 格式与 MUSCL 格式作一比较可知,式(7.6.7)和(7.6.8)相当于 MUSCL 格式(7.5.8)和(7.5.9)中取 $k=1, b=1$ 。不同的是在 MUSCL 格式中是在分裂流通量 $f^*(u)$ 时,对自变量中的 $\delta^* u$ 进行了 minmod 选择,使得格式最多能达到二阶精度。而 NND 格式中是直接对 $\delta^* f^*$ 进行选择。NND 格式的构造思想不同,且易于构造更高阶精度的格式^[20]。

7.6.2 群速度控制法

为便于讨论先作一定义,设波的传播速度 $c > 0$ (参看图 7-10),则称激波的左侧为波后,激波的右侧为波前。当 $c < 0$ 时,则称激波的左侧为波前,波的右侧为波后(图 7-11)。这里所说的激波指 N-S 方程的

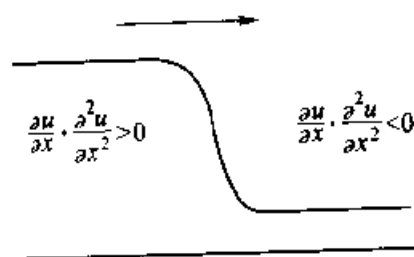


图 7-10 正向 N-S 激波

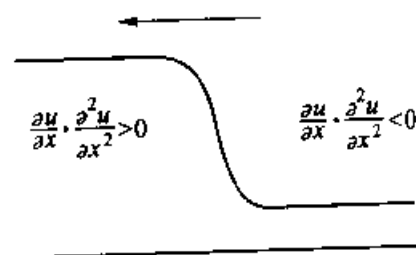


图 7-11 反向 N-S 激波

激波解,即在激波附近解的梯度很大,但解是光滑的。参照第四章数值解的行为分析可知,如果采用慢型格式,则在波后(当 $c > 0$ 时激波的左侧, $c < 0$ 时激波的右侧)出现非物理的高频振荡波,而波前不出现高频振荡波。如果采用快型格式,波前出现高频振荡波而波后不出现。参照这一思想可知,如果所构造的格式在激波前呈现慢型格式的特性,而在激波后呈现快型格式的特性,则在激波的两侧都将不出现非物理的高频振荡波。换句话说,如果波的群速度都指向激波时将不出现非物理的数值振荡。

在实际采用的一些格式中很少有快型格式。从第四章解的行为分析中可知,混合型格式在低中波段主要呈现快型格式的特点,而在高频波段呈现为慢型格式的特点(参看图 4-4),但对于混合型格式在高频波段数值解中有更大的耗散特性。因而如果在激波后采用混合型格式,而波前采用慢型格式,则基本上可使激波两侧的非物理高频振荡得到控制。

为了对格式进行控制,定义一个激波型函数

$$SS(u) = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial x^2}\right)$$

这一函数在激波左侧为正,右侧为负。

上面的分析只适合于线性问题,但实践表明,参照这一思想所构造的格式对改善激波解的分辨率是有效的。下面给出一个利用群速度直接控制法(GVC, Group Velocity Control)构造的格式^[18]。考虑方程(7.1.4),其半离散型差分方程可写为

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} \right) = 0 \quad (7.6.9)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = & \frac{1 + SS(u_{j+\frac{1}{2}})}{4} \left[(3f_j^+ - f_{j-1}^+) + (f_{j+1}^- + f_j^-) \right] + \\ & \frac{1 - SS(u_{j+\frac{1}{2}})}{4} \left[(3f_{j+1}^- - f_{j+2}^-) + (f_{j+1}^+ + f_j^+) \right] \end{aligned} \quad (7.6.10)$$

这一格式是由具有二阶精度的迎风格式和中心格式组合而成。从中可以看出,在激波之左侧对 f_j^+ 选择了快型逼近(混合型),对 f_j^- 选择了慢型逼近,在激波之右侧对 f_j^+ 选择了慢型逼近,对 f_j^- 选择了快型逼近。可以看出,这一方法简便,逻辑简单,且勿需进行大量的矩阵和 $\min\max$ 函数运算。

按这种思想可构造更高阶精度的格式。例如,慢型格式选高阶精度的中心差分逼近,快型格式选高阶迎风差分逼近。也可构造紧致型

CVC 格式^[21]。这一方法很容易用于求解气动方程, 只要求式(7.6.9)和(7.6.10)中的 u , f^+ 和 f^- 换成相应的矢量就可以了。

7.6.3 耗散比拟法

这里仍以守恒律方程(7.1.4)为例进行讨论。假设对流项以两点中心差来逼近, 将所得到的半离散格式进行 Taylor 级数展开后可得如下之修正方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \Delta x^2 \mu_3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \cdots \quad (7.6.11)$$

这里 $\mu_3 = -\frac{1}{6}$ 。参照第四章关于数值解的行为分析可知, 含 μ_3 项影响高波量的传播。在文献[17]中参照式(7.6.11)定义了如下之耗散比拟方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_0 \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.6.12)$$

其中

$$\bar{\mu} = \Delta x \left| \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right| |f_u|, \quad \sigma_0 > |\mu_3| \quad (7.6.13)$$

根据定义 $\bar{\mu} > 0$, 式(7.6.12)如同扩散方程。但实际上它引入的是一色散项, 它等价于

$$\sigma_0 \Delta x^2 \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot f_u \right) \right) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

不同的是在式(7.6.12)中的色散误差波的传播方向得到控制, 使得方程(7.6.12)总是呈现出耗散特性。

如果对式(7.6.12)中之对流项和耗散比拟项都取中心差分, 则这一半离散格式的修正方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \bar{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x} + \cdots \quad (7.6.14)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \bar{\mu} - \mu_3 \mu \quad (7.6.15)$$

$$\mu = \Delta x \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial x}} f_u$$

很显然 $\bar{\sigma} > 0$, 这意味着式(7.6.12)离散化后仍呈现耗散特性, 耗散比拟项的引入并不改变原格式的精度。

可参照式(7.6.12)构造如下之差分格式。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}) \quad (7.6.16)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j) - \sigma_0 \bar{\mu}_{j+\frac{1}{2}} (u_{j+1} - u_j) \quad (7.6.17)$$

其中 $\bar{\mu}_{j+\frac{1}{2}}$ 通过对式(7.6.13)的离散化而得, 为消除奇异性, 其分母可以 $|\partial f / \partial x| + \epsilon$ 代之。

式(7.6.13)可有如下之差分逼近式:

$$\bar{\mu}_{j+\frac{1}{2}} = \left| \frac{\delta_x^+ f_j - \delta_x^- f_j}{\delta_x^+ f_j} \right| |f_u| = \left| 1 - \frac{\delta_x^- f_j}{\delta_x^+ f_j} \right| |f_u|$$

如果设

$$r_{j+\frac{1}{2}} = \min \left\{ \frac{|\delta_x^- f_j|}{\delta_x^+ f_j}, \frac{|\delta_x^+ f_{j+1}|}{\delta_x^- f_j}, 1 \right\} \quad (7.6.18)$$

则可取

$$\bar{\mu}_{j+\frac{1}{2}} = \left(1 - r_{j+\frac{1}{2}} \right) |f_u|_{j+\frac{1}{2}} \quad (7.6.19)$$

为耗散比拟系数在 $j + \frac{1}{2}$ 点上的逼近值。

现在来分析一下耗散比拟项的引入与波的传播之间的关系, 引入耗散比拟项后对应于中心差分格式的修正方程(7.6.14)可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots \quad (7.6.20)$$

$$a = \Delta x \sigma \frac{-\partial u / \partial x}{\partial^2 u / \partial x^2} \quad (7.6.21)$$

设 $f = cu$ 。参看图 7-10 可知, 当 $c > 0$ 时由于 $\bar{\sigma} > 0$, 因而在波后 $a > 0$, 这表明扰动波指向激波(参看第四章第 4 节)。而在波前 $a < 0$, 表明扰动波仍指向激波。在 $c < 0$ 时可得同样结论。通过上面的分析可得这样的结论: 耗散比拟项的引入使误差波指向激波。反之如果误差波指向激波, 则对应的耗散比拟项有正的耗散比拟系数。

耗散比拟法可用于求解流体力学方程组。例如, 针对一维 Euler 方程(6.1.6), 如果对流项取中心差分, 则可构造如下之耗散比拟方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_0 \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \bar{M} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (7.6.22)$$

$$\bar{M} = \text{diag} \{ \cdots, \bar{\mu}_k, \cdots \} |A| \quad (7.6.23)$$

$$\bar{\mu}_k = \left| \frac{\partial^2 f_k / \partial x^2}{\partial f_k / \partial x} \right| \Delta x \quad (7.6.24)$$

这里 f_k 为流通矢量 f 的第 k 个元素, $|A| = R|A|L$, $|A|$ 为由矩阵 A 之特征值的绝对值组成的对角矩阵, 也可取更为简单的形式:

$$\bar{M} = \text{diag} [\cdots, \bar{\mu}_k, \cdots] (|u| + c) \quad (7.6.25)$$

此时已完全消除了矩阵运算, 对角矩阵之元素 $(\bar{\mu}_k)_{j+\frac{1}{2}}$ 可采用简单的离散逼近, 也可取

$$\bar{\mu}_{k,j+\frac{1}{2}} = \left(1 - r_{k,j+\frac{1}{2}} \right) \quad (7.6.26)$$

$$r_{k,j+\frac{1}{2}} = \min \text{ mod} \left(\frac{\delta_x^- f_{k,j}}{\delta_x^+ f_{k,j}}, \frac{\delta_x^+ f_{k,j+1}}{\delta_x^- f_{k,j}}, 1 \right) \quad (7.6.27)$$

耗散比拟方法可用于构造更高阶精度的格式, 也可很容易用以求解多维问题。

参 考 文 献

- 1 Yee H C, Warming R F, Harten A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations. AIAA 83-1902
- 2 Roache P J. Computational fluid dynamics. New York: Hermosa, Albuquerque, 1972
- 3 Fu Dexun, Ma Yanwen. High resolution schemes. In: Hafez M., Oshima K. ed. Computational Fluid Dynamics Review 1995. New York: Wiley, 1995
- 4 Von Neumann J, Richtmeyer R D A. A method for the numerical calculation of hydrodynamical shocks. J Appl Phys. 1950, 21: 232
- 5 MacCormack R W. Numerical solutions of the interactions of a shock wave with a laminar boundary layer. Lecture Notes in Physics. New York: Springer Verlag, 1978
- 6 Hung C M, MacCormack R W. Numerical solution of three-dimensional shock-wave and turbulent boundary layer interaction. AIAA 78-161
- 7 Jameson A, Schmidt W, Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume method using Runge-Kutta time stepping schemes. AIAA 81-1259
- 8 Godunov C K. Difference method for computing the discontinuity in fluid dynamics. Math Sbornik, 1959, 47 (3): 271
- 9 Jennings G. Discrete shock. Comm Pure & Appl Math. 1974, 27: 25-37
- 10 Sweby P K. High resolution schemes using flux limiter for hyperbolic conservation law. SIAM J Numer Anal, 1984, 21 (5): 995-1011
- 11 Van Leer B. Towards the ultimate conservative scheme V. A second-order sequel to Godunov's method. J Comput Phys, 1979, 32: 101-136
- 12 Wu Huamo. UENO-A class of ENO schemes constructed in unified way. Beijing Workshop on CFD, 1994 (6): 171-189

- 13 Chakravarthy S R. Some aspects of essentially non-oscillatory (ENO) formulation for the Euler equations. NASA Contractor Report 4285 (1990)
- 14 张涵信, 无波动、无自由参数的耗散差分格式. 空气动力学学报, 1988 6 (2): 143
- 15 Huang Dun, Yan Chun. Comparison of four recent numerical schemes giving high resolution of shock waves and concentrated vortex. Beijing Workshop on CFD, 1993, 5: 9 ~ 13
- 16 水鸿寿. 一维流体力学差分法. 北京: 国防工业出版社, 1998
- 17 马延文, 傅德薰. 计算空气动力学中一个新的激波捕捉法——耗散比拟法. 中国科学(A辑), 1992, 22 (3): 263 ~ 271
- 18 Fu Dexun, Ma Yanwen. A high order accurate difference scheme for complex flow fields. J Comput Physics, 1997, 134: 1 ~ 15
- 19 Zhuang F G, Zhang H X. Computational fluid dynamics in China. AIAA 87-1134
- 20 Zhang H X, Li Xin, Zhuang F. G. On construction of high order accuracy difference schemes. Acta Aerodynamica Sinica, 1998, 16 (1): 14 ~ 23
- 21 马延文, 傅德薰. 群速度直接控制四阶迎风紧致格式. 中国科学(A辑), 2000, 31 (6): 554 ~ 561
- 22 Shu ChiWang. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. J Comput Physics, 1987, 77: 439 ~ 471

习 题

7-1 已知非线性 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

计算域为 $-1 \leq x \leq 1$, 边界条件为 $u(x=-1)=1$, $u(x=1)=-1$, $Re=500$. 时间导数利用前差 $\delta_t u_j^{n+1}/\Delta t = (u_j^{n+1} - u_j^n)/\Delta t$ 逼近, 对流项取在 n 时间层, 并利用具有一阶逼近精度的迎风差分逼近. 粘性项利用三点中心差分进行逼近, 试给出定常解, 绘出曲线图, 并与准确解进行比较。

7-2 方程及条件同习题 7-1, 时间导数取 $\partial u/\partial t \approx (u^{n+1} - u^n)/\Delta t$, 对流项取 $\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2}\right)_j \approx (u_{j+1}^2 - u_{j-1}^2)^{n+1}/(4\Delta x)$, 粘性项取 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \delta_x^2 u_j^{n+1}/\Delta x^2$, 试给出定常解, 绘出曲线图, 并与准确解进行比较。

7-3 Sod 模型问题为: 在一激波管的左侧初始分布为 $\rho_1=1$, $p_1=1$, $u_1=0$, 右侧分布为 $\rho_2=0.125$, $p_2=0.1$, $u_2=0$, 两种状态之间有一隔膜于 $x=0.5$ 处。隔膜突然去掉, 试给出在 $t=0.14$ 时刻 Euler 方程的准确解, 并给出在区间 $0 \leq x \leq 1$ 这一时刻 p , ρ , u 的分布图。

7-4 对一维 Euler 方程的流通矢量进行分裂, 然后以显式一阶迎风格式进行逼近, 并用以求解 Sod 问题(参看习题 7-3), 给出在 $t=0.14$ 时刻流动参数在区间

$[0,1]$ 的分布图, 并与准确解进行比较

7-5 利用 Harten 的 TVD 格式, 逼近一维 Euler 方程, 求解 Sod 问题(参看习题 7-3), 给出流动参数在区间 $[0,1]$ 的分布曲线, 并与准确解进行比较。

7-6 对一维 Euler 方程, 时间方向采用二步 R-K 方法, 空间导数利用 NND 方法进行逼近, 给出在 $t = 0.14$ 时刻 Sod 模型问题流动参数在区间 $[0,1]$ 的变化曲线, 并与准确解进行比较(参看习题 7-3)。

7-7 对一维 Euler 方程, 时间方向采用二步 R-K 方法, 空间方向利用本章第 6 节中介绍的 GVC 方法求解 Sod 模型问题, 给出流动参数在区间 $[0,1]$ 内 $t = 0.14$ 时的变化曲线, 并与准确解进行比较(参看习题 7-3)。

7-8 有一激波管, 左端为来流 $\rho = u = T = 1$, $Ma_\infty = 2.0$, $Re = 500$, 利用无粘激波关系式求出波后值。在 $x = 1$ 点取波后值, 然后利用 $x = 0$, $x = 1$ 处的值进行线性插值, 所得的值作为初始分布值。在左端取来流值, 右端的 ρ , p 取激波关系式求得之值, 而速度梯度取为 0。利用以下三种不同方法求定常解, 给出流动参数变化曲线。

(1) 时间导数, 利用前差逼近 $\partial u / \partial t = (u^{n+1} - u^n) / \Delta t$, 对流项利用一阶精度迎风差分逼近, 粘性项利用三点中心差分。

(2) 时间方向利用二步 R-K 方法, 空间导数利用二阶精度的中心差分。

(3) 时间方向利用二步 R-K 方法, 粘性项利用三点中心差分, 对流项利用二阶精度的中心差分加上耗散比拟修正。

第八章 不可压 Navier - Stokes 方程的差分逼近

8.1 控制方程

当流体运动速度与声波传播速度相比较低时, 流体的密度变化不大, 可近似为常数, 这种流动称为不可压流动。此时, 描述流体运动规律的 Navier - Stokes 方程可大为简化, 称其为不可压 Navier - Stokes 方程。在流体的密度为常数的假设下, 第二章介绍的方程(2.1.5)和(2.1.6)可改写成如下矢量形式的不可压 N - S 方程:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) + \nabla p = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \quad (8.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (8.1.2)$$

这里 $\mathbf{V} = (u \ v \ w)^T$ 是矢量。其中对流项 $\mathbf{A}(\mathbf{V})$ 可写为守恒形式和非守恒形式:

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) = \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{V}) \quad (8.1.3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (8.1.4)$$

在二维直角坐标系 (x, y) 下速度矢量为 $\mathbf{V} = (u, v)$, 对流项为 $\mathbf{A}(\mathbf{V}) = ai + bj$, 这里 (i, j) 为坐标单位矢量:

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} uv \\ b(u, v) &= \frac{\partial}{\partial x} uv + \frac{\partial}{\partial y} v^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.1.5)$$

或利用式(8.1.2)可写为以下形式:

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ b(u, v) &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8.1.6)$$

方程(8.1.1), (8.1.2)所描述的典型问题是初边值问题: 在以 Γ 为边界的有限区域 Ω 内寻求式(8.1.1)和(8.1.2)的解 \mathbf{V}, p , 使其满足边界条件

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\Gamma \quad (8.1.7)$$

和 $t=0$ 时的初始条件

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 \quad (8.1.8)$$

要求边界条件 \mathbf{V}_F 满足

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V}_F \cdot \mathbf{N} ds = 0 \quad (8.1.9)$$

这里 \mathbf{N} 为垂直于边界 Γ 的单位矢量, 同时还要求初始条件满足方程

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^0 = 0 \quad (8.1.10)$$

从形式上看不可压 N-S 方程比可压 N-S 方程较为简单, 但在其求解上引入了新的困难。如, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ 使得方程组不再是进化形式的, 难以采用已发展比较成熟的时间推进方法。原来的进化型的连续方程变成了在每个时间步上对速度矢量的约束条件。此外对压力缺少边界条件也给不可压 N-S 方程的求解带来一定困难。

目前已发展了一些求解不可压 N-S 方程的方法。下面将主要介绍三种求解方法。

8.2 求解定常 N-S 方程的人工压缩性方法

8.2.1 基本思想

人工可压缩性方法是把不可压流体看作是一种虚拟的可压缩流体。在求解过程中仍采用非定常的动量方程和经过人工非定常化的连续方程, 目的在于求解相应的定常问题解。这样处理的结果使得方程组变为进化型的, 可通过通常的求解进化型方程的方法(如显式方法)进行求解。这一方法最早由 Chorin^[1] 和 Yanenko^[2] 提出, 这里将参照 Chorin 的方法作简单介绍。

在 Chorin 方法中经过变型了的连续方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (8.2.1)$$

这里 c^2 是一任意的自由参数。在未达到定常状态之前式(8.2.1)没有物理意义, 这一方法是用来求解定常解的。在达到定常状态时 $\partial p / \partial t = 0$, 即 $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ 。其中参数 c^2 的选择应使得求解过程收敛和加速收敛。这种求解方法实际上是一种迭代方法, 通常称为人工可压缩性方法。所以称其为人工可压缩性方法, 是因为可形式上从可压 N-S 方程中得到方程(8.1.1)和(8.2.1), 只要假设状态方程为

$$p = c^2 \rho, \quad c^2 = \text{const}$$

就可以了。此外当取 $\epsilon^2 \rightarrow 0$, 或 $\epsilon^2 \ll 1$ 时可把式 (8.2.1) 看成式 (8.1.2) 的一种近似。

在求解这一人工可压缩性方程时, 要求满足边界条件 (8.1.7) 和初始条件:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^0, \quad p = p^0, \quad \text{当 } t = 0 \text{ 时} \quad (8.2.2)$$

原则上 \mathbf{V}^0 和 p^0 可以是任意的, 但 \mathbf{V}^0 应满足散度为零的条件。

8.2.2 方程的离散化

在时间方向采用简单的显式方法, 在空间方向采用由 Harlow 与 Welsh (1965)^[3] 提出的交错网格法 (通常也称 Marker-And-Cell 法, 或简称 **MAC 网格法**)。网格的具体分布如图 8-1 所示。

在这一方法中 x 方向的 u 和动量方程写在 $(i + \frac{1}{2}, j)$ 点上, y 方向的 v 和动量方程写在 $(i, j + \frac{1}{2})$ 点上, 而压力 p 写在 (i, j) 点上。按这一网格布局对于方程 (8.1.1) 和

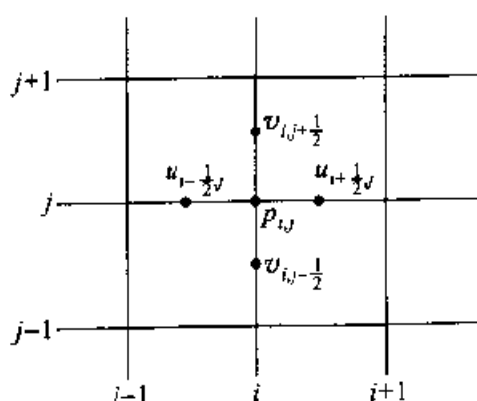


图 8-1 网格分布图

(8.2.1) 可得到如下对应的离散化形式:

$$\frac{1}{\Delta t} (u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n) + a_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{\delta_x^1 p_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (8.2.3)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n) + b_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta_y^1 p_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (8.2.4)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n) + c^2 \left(\frac{\delta_x^1 u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\delta_y^1 v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} \right) = 0 \quad (8.2.5)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} \delta_x^1 f_{i,j} &= f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j} \\ \delta_y^1 f_{i,j} &= f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}} \\ \nabla_h^2 f_{i,j} &= \left[\frac{(\delta_x^1)^2}{\Delta x^2} + \frac{(\delta_y^1)^2}{\Delta y^2} \right] f_{i,j} \\ (\delta_x^1)^2 f_{i,j} &= f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j} \\ (\delta_y^1)^2 f_{i,j} &= f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1} \end{aligned} \right\} \quad (8.2.6)$$

这里, i 和 j 可以是整数, 也可以取半点上的值。对守恒形式 (8.1.5),

$a_{i+\frac{1}{2},j}^n, b_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ 的差分表达形式为

$$\left. \begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2},j}^n &= \frac{\delta_x^1 (u^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \frac{\delta_y^1 (uv)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta y} \\ b_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= -\frac{\delta_x^1 (uv)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \frac{\delta_y^1 (v^2)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (8.2.7)$$

在这一差分式中利用了非计算网格点上的值, 例如差分 $\delta_x^1 (u^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n$ 利用了 $(u^2)_{i+\frac{1}{2},j}^n$ 和 $(u^2)_{i,j}^n$ 值。这些未定义的值是利用如下平均求得的:

$$\left. \begin{aligned} (u^2)_{i,j} &= \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j})^2 \\ (uv)_{i,j} &= \frac{1}{4} (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j})(v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}) \\ (v^2)_{i,j} &= \frac{1}{4} (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}})^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.8)$$

对非守恒形式的式(8.1.6), $a_{i+\frac{1}{2},j}^n, b_{i,j+\frac{1}{2}}^n$ 的差分逼近式为

$$\left. \begin{aligned} a_{i+\frac{1}{2},j}^n &= u_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{\delta_x^0 (u)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} + \tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{\delta_y^0 (u)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta y} \\ b_{i,j+\frac{1}{2}}^n &= \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{\delta_x^0 (v)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{\delta_y^0 (v)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (8.2.9)$$

这里 δ_x^0 和 δ_y^0 在第四章已有定义, \tilde{u} 和 \tilde{v} 表示平均值:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}} &= (u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1})/4 \\ \tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j} &= (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i+1,j-\frac{1}{2}})/4 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.10)$$

8.2.3 对收敛性的讨论

上面介绍的是一种最简单的人工可压缩法。可由式(8.2.3)~(8.2.5)很容易求出 u^{n+1}, v^{n+1} 和 p^{n+1} 来。当下面条件满足时则认为得到了定常解:

$$\frac{1}{\Delta t} \max \left\{ |u^{n+1} - u^n|, |v^{n+1} - v^n|, \frac{1}{c^2} |p^{n+1} - p^n| \right\} < \epsilon \quad (8.2.11)$$

这里 ϵ 是一小量。人工可压缩法的目的在于求解定常问题, 其所以可以达到定常解是基于这两方面的原因: 一是对 Stokes 流已证明当 $t \rightarrow \infty$ 时之极限解为定常解; 另一方面是基于 Lax 等价定理: 对于稳定的相容的差分格式必是一收敛的格式。这两种考虑都只能作为参考, 不是证明, 且等价定理也只是对线性方程而言。实践表明这种方法是可行的。不难

证明人工可压缩法的截断误差为 $O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$

对方法的稳定性分析也是基于简化和线性分析之上的。其中一种假设是略掉方程(8.2.3)、(8.2.4)中的压力梯度项，并设(8.2.9)式中的系数为常数：

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \tilde{u}_{i,j+\frac{1}{2}} = u_0 = \text{const}$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}} = \tilde{v}_{i+\frac{1}{2},j} = v_0 = \text{const}$$

如此就可以对线性化了的对流扩散方程进行稳定性分析。设 $\Delta x = \Delta y$ ，则两个动量方程变成一样，可得稳定性条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4}(|u_0| + |v_0|)\Delta t Re &\leq 1 \\ \frac{4}{Re} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.2.12)$$

另一种近似的稳定性分析方法是忽略对流项，即 $u_0 = v_0 = 0$ (Stokes 近似)。如此所得到的对应于式(8.2.3) ~ (8.2.5)的方程组，经分析可以得到稳定条件

$$4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{Re} + \frac{\Delta t c^2}{2} \right) \leq 1 \quad (8.2.13)$$

可构造其他类型的人工可压缩方法，对其经过改造也可用以求解非定常问题：

8.2.4 边界条件处理

设 Γ 为计算边界，在边界上速度为已知 $V_\Gamma = (u_\Gamma, v_\Gamma)$ 。当采用 MAC 方法时，边界位置如图 8-2 所示。

图 8-2 中虚线表示边界，通过垂直边界的 u 为已知的，通过水平边界的 v 也为已知的。由式(8.2.5)可知，近壁点的压力值可由邻近点的速度值求出，不需 p 的边界条件。

在边界上还需对垂直边上的 v 和水平边上的 u 速度分量进行特殊处理。其中最简单的方法是壁面的反射条件。在这一方法中引入一虚拟的边界，例如为求垂直边界上的导数值，认为在边界 Γ 上的 v_Γ 值(图 8-2)为 v_1 和虚拟边界上的值 v_0 的平均值，由此可得到虚拟边上的值 v_0 ：

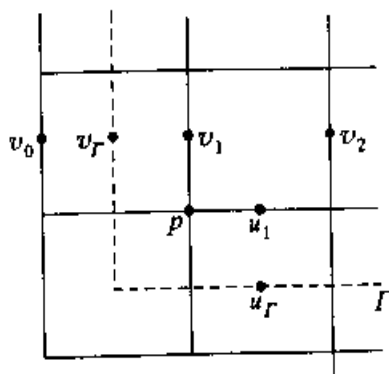


图 8-2 边界网格图

$$v_0 = 2v_F - v_1$$

另一种处理方法为在 1 点对 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ 采用非等距的差分逼近, 如为一阶导数:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_1 = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{v_1 + v_2}{2} - v_F \right) \quad (8.2.14)$$

对二阶导数可利用 v_2, v_1, v_F 求出二阶导数的差分逼近式:

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_1 = \frac{4}{3\Delta x^2} (v_2 - 3v_1 + v_F) \quad (8.2.15)$$

可利用更多的点给出在边界上更高阶的逼近式。

8.3 非定常原始变量 N-S 方程的求解

在本节中简单介绍两种方法: 一为投影法, 另一为 MAC 方法。

8.3.1 投影法

投影法是分别由 Chorin (1968) 和 Temam (1969) 提出的^[4,5], 而其中的显式法是由 Fortin 等人^[5]提出的。这里仅针对最简单情况介绍基本思想。投影法是一种分步法。对于方程(8.1.1)和(8.1.2)简单显式投影法由以下三个步骤组成:

1. 预算步

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} + A(V^n) - \frac{1}{Re} \nabla^2 V^n = 0 \quad (8.3.1)$$

2. 压力修正步

通过下式对预算所得之 V^* 进行修正

$$\frac{V^{n+1} - V^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = 0 \quad (8.3.2)$$

$$\nabla \cdot V^{n+1} = 0 \quad (8.3.3)$$

在修正步中, 要求修正后的速度 V^{n+1} 的散度为零, 这样对方程(8.3.2)取散度后得如下对于压力的 Poisson 方程:

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot V^* \quad (8.3.4)$$

该方程之右端项由预算步求出, 在给定的边界条件下可由该式求出压力 p^{n+1} 。

3. 最终步

利用所求得的 V^* 及 p^{n+1} 由式(8.3.2)求出 V^{n+1} , 将式(8.3.1)和

(8.3.2)相加可消除中间值 V^* 而得

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + A(V^n) + \nabla p^{n+1} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot V^n = 0 \quad (8.3.5)$$

由此可知,按上面三个步骤求得的 V^{n+1} 满足方程(8.3.5)和散度为零的条件。在时间方向的离散精度是一阶的,空间离散精度依赖于空间导数的离散精度。可选用不同的网格,空间导数可采用不同的离散形式,则可得不同类型的投影方法。当采用 MAC 网格并空间导数采用中心差分,则可得不同类型的投影方法。当采用 MAC 网格并空间导数采用中心差分,则可得不同类型的投影方法。关于 MAC 方法及相应边界条件将在下面介绍。

这里所说的投影法是指在满足方程(8.3.5)的解中无散度的子空间寻求解。因而散度为零的约束条件(8.3.3)在计算中极为重要。还应指出,上面的介绍没有强调在式(8.3.4)中关于压力二阶导数的离散形式与式(8.3.2)中关于压力的一阶导数离散形式之间的关系。可针对式(8.3.2)和(8.3.4)中的导数各自分别进行离散。

8.3.2 MAC 方法

这一方法是由 Harlow 和 Welsh 提出^[3]的。首先构造 MAC 网格(图 8-1)。在这一网格上进行如下离散:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^n) + a_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{\delta_x^1 p_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta x} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (8.3.6)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^n) + b_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta_y^1 p_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta y} = \frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (8.3.7)$$

$$\frac{\delta_x^1 u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\delta_y^1 v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \quad (8.3.8)$$

式中差分算子的定义与第 1 节中的定义相同。

将式(8.3.6)中的 $u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ 及式(8.3.7)中的 $v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 代入离散形式的散度为零的式(8.3.8)中,可得到对于压力的离散方程:

$$\nabla_h^2 p_{i,j}^{n+1} = \delta_x^1 \left(\frac{u_{i,j}^n}{\Delta t} - a_{i,j}^n + \frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{i,j}^n \right) / \Delta x + \delta_y^1 \left(\frac{v_{i,j}^n}{\Delta t} - b_{i,j}^n + \frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{i,j}^n \right) / \Delta y \quad (8.3.9)$$

该式即为投影法中式(8.3.4)的一种离散形式。但它不是对式(8.3.4)独立离散而得,而是直接由式(8.3.6)~(8.3.8)直接推导的结果。人们称这种由离散动量方程和离散散度为零的方程而得到的压力离散方程是相容的。因为只有满足式(8.3.9)的解才能保证离散形式的散度为零。实践表明对复杂流动的计算,这种相容关系是很重要的。建议在计算中采

用相容的压力逼近方程。

现在来讨论关于边界条件的处理。不失一般性，考虑图 8-3，设虚线为边界

设在边界上的速度分量 u 和 v 已知，则在近边界点 $(\frac{3}{2}, j)$ 的 x 方向动量方程 (8.3.6) 及节点 $(1, j + \frac{1}{2})$ 上 y 的动量方程 (8.3.7) 所需各量均为已知。现在来分析一下在 $(1, j)$ 点之压力方程 (8.3.9) 的展开形式：

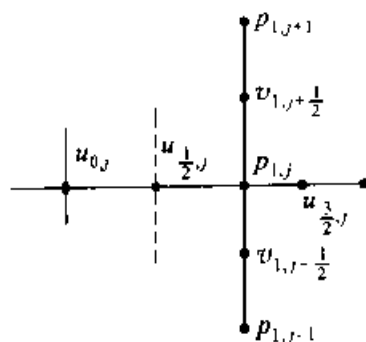


图 8-3 边界网格图

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} (p_{2,j}^{n+1} - 2p_{1,j}^{n+1} + p_{0,j}^{n+1}) + \frac{1}{\Delta y^2} (p_{1,j+1}^{n+1} - 2p_{1,j}^{n+1} + p_{1,j-1}^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} \\ \left[\frac{1}{\Delta x} \left(u_{3/2,j}^n - u_{1/2,j}^n \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(v_{1,j+1/2}^n - v_{1,j-1/2}^n \right) \right] - \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{a}_{3/2,j}^n - \bar{a}_{1/2,j}^n \right) - \\ \frac{1}{\Delta y} \left(\bar{b}_{1,j+1/2}^n - \bar{b}_{1,j-1/2}^n \right) \end{aligned} \quad (8.3.10)$$

式中

$$\bar{a}_{1/2,j}^n = a_{1/2,j}^n - \frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{1/2,j}^n, \quad \bar{b}_{1,j}^n = b_{1,j}^n - \frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{1,j}^n$$

为了对方程 (8.3.10) 求解需要相应的边界条件。下面将指出，对应的边界条件为 Neumann 型边界条件，且不需要对压力方程给出另外附加的条件，只需利用在边界上对应的动量方程就可以了。

利用动量方程 (8.1.1)，取其在边界法向 N 上的投影得边界方程

$$\left(\frac{\partial p}{\partial N} \right)_\Gamma^{n+1} = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + A(V) - \frac{1}{Re} \nabla^2 V \right)_\Gamma^{n+1} \cdot N \quad (8.3.11)$$

这一方程在点 $(\frac{1}{2}, j)$ 上的表达式为

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1} = - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a - \frac{1}{Re} \nabla^2 u \right)_{\frac{1}{2},j}^{n+1} \quad (8.3.12)$$

该式即为在点 $(\frac{1}{2}, j)$ 上的 x 向动量方程，对其采用与式 (8.3.6) 相同的离散形式，则可得差分逼近式

$$\frac{1}{\Delta x} (p_{1,j}^{n+1} - p_{0,j}^{n+1}) = - \frac{1}{\Delta t} \left(u_{1/2,j}^{n+1} - u_{1/2,j}^n \right) - \bar{a}_{1/2,j}^n \quad (8.3.13)$$

该式中 $a_{1/2,j}^n$ 是取在 n 时间层上。式 (8.3.13) 即为式 (8.3.10) 的 Neumann 边界条件。如果将式 (8.3.13) 代入式 (8.3.10) 中，则所得之式中 $p_{0,j}^{n+1}$ 和

$\bar{a}_{\frac{1}{2},j}^n$ 均已消掉, 即实际上 $p_{0,j}^{n+1}$ 及 $a_{\frac{1}{2},j}^n$ 中导数差分逼近形式并不影响 $p_{i,j}^{n+1}$ 的最终结果。从上面的讨论中可以看出, 求解压力方程并不需要附加的边界条件, 只需利用对应的离散形式的动量方程就可以了。

对原始变量的 N-S 方程可构造隐式的 MAC 方法, 这里不作详细的介绍, 读者可参考文献 [6]。MAC 方法可构造高精度格式, 在文献 [7] 中构造了五阶迎风偏斜格式, 在文献 [8] 中构造了五阶迎风紧致格式。下面将简介 MAC 方法的计算步骤。

$$\text{设} \quad V^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix}$$

$$u_{i,j}^* = u_{i,j}^n - \left(a_{i,j}^n - \frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{i,j}^n \right) \Delta t$$

$$v_{i,j}^* = v_{i,j}^n - \left(b_{i,j}^n - \frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{i,j}^n \right) \Delta t$$

则式(8.3.9)可写为以下形式:

$$\nabla_h^2 p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\delta_x^1 u_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{\delta_y^1 v_{i,j}^*}{\Delta y} \right) \quad (8.3.14)$$

其右端为已知, 相对于压力 $p_{i,j}^{n+1}$ 的代数方程可参照第五章介绍的迭代方法进行求解。

根据上面介绍可看出, 在 MAC 方法的求解过程中也可分为三步:

1. 预算步

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^* = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta t \left(\frac{1}{Re} \nabla_h^2 u_{i+\frac{1}{2},j}^n - a_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) \quad (8.3.15)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \Delta t \left(\frac{1}{Re} \nabla_h^2 v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - b_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (8.3.16)$$

2. 压力求解步

利用所求得的 u^* 和 v^* 以及对压力方程的边界条件, 解方程(8.3.14)以求压力。

3. 最终步

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2},j}^* - \frac{\delta_x^1 p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{\Delta x} \Delta t \quad (8.3.17)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{i,j+\frac{1}{2}}^* - \frac{\delta_y^1 p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta y} \Delta t \quad (8.3.18)$$

8.4 涡量-流函数法

针对二维不可压 N-S 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (8.4.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (8.4.3)$$

引入流函数 φ 和涡量 ω :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (8.4.4)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (8.4.5)$$

很显然, 将式(8.4.4)代入式(8.4.1)则连续方程自动得到满足。将式(8.4.2)对 y 求导, (8.4.3)式对 x 求导, 然后消去压力项则给出方程

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (8.4.6a)$$

或

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (8.4.6b)$$

将式(8.4.4)代入式(8.4.5)得

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\omega \quad (8.4.7)$$

方程(8.4.6)和(8.4.7)构成了涡量 - 流函数型的 N-S 方程, 也是涡量 - 流函数法的基本方程。

可用不同的方法对方程(8.4.6)和(8.4.7)进行离散和求解。可以看出压力项不再出现, 使得方程更为简单。当 φ 、 ω 以及 u 和 v 求出后, 可利用动量方程或对应的压力 Poisson 方程求出压力。应当指出, 采用涡量 - 流函数型 V-S 方程求解问题时, 壁面涡量的边界条件是难以处理的。

可利用类似的方法求解三维方程, 但此时所对应的涡量 ω 是三维矢量, 对应的流函数也是三维矢量, 这使所需的内存和计算量都有所增加。在三维的计算中人们多采用原始变量的 N-S 方程。

下面将简单介绍定常和非定常问题的求解。

8.4.1 定常问题的求解

对定常问题可利用定常方程(8.4.6)和(8.4.7)的定常方程, 即略去方程中的时间导数项, 离散后进行联立迭代求解。这里介绍一个更为简便的方法, 即拟不定常方法(Pseudounsteady method)。

可构造如下之方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + w \right) \quad (8.4.8)$$

这里 α 是一正的参数, 对方程(8.4.6)和(8.4.8)之空间导数可采用二阶精度的中心差分进行逼近, 对时间导数项可采用显式方法、隐式方法以及多步法进行求解。下面介绍一个比较有效的交替方向追赶法(简称 ADI 方法)

设求解区域为 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $\omega_{i,j}^n$ 和 $\varphi_{i,j}^n$ 为已知, 则 Peaceman-Rachford 提出的 ADI 方法为:

$$(\tilde{\omega}_{i,j} - \omega_{i,j}^n)/\Delta t + \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^n \frac{\delta_x^0}{\Delta x} - \frac{\delta_x^2}{Re \Delta x^2} \right) \tilde{\omega}_{i,j} + \frac{1}{2} \left(v_{i,j}^n \frac{\delta_y^0}{\Delta y} - \frac{\delta_y^2}{Re \Delta y^2} \right) \omega_{i,j}^n = 0 \quad (8.4.9)$$

$$(\omega_{i,j}^{n+1} - \tilde{\omega}_{i,j})/\Delta t + \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^n \frac{\delta_x^0}{\Delta x} - \frac{\delta_x^2}{Re \Delta x^2} \right) \tilde{\omega}_{i,j} + \frac{1}{2} \left(v_{i,j}^n \frac{\delta_y^0}{\Delta y} - \frac{\delta_y^2}{Re \Delta y^2} \right) \omega_{i,j}^{n+1} = 0 \quad (8.4.10)$$

$$(\tilde{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,j}^n)/\Delta t - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\delta_x^2 \tilde{\varphi}_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 \varphi_{i,j}^n}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1} \right) = 0 \quad (8.4.11)$$

$$(\varphi_{i,j}^{n+1} - \tilde{\varphi}_{i,j})/\Delta t - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\delta_x^2 \tilde{\varphi}_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} + \omega_{i,j}^{n+1} \right) = 0 \quad (8.4.12)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\delta_y^0 \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y}, \quad v_{i,j}^{n+1} = -\frac{\delta_x^0 \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \quad (8.4.13)$$

不考虑边界条件, 对线性情况这一方法是无条件稳定的, 对每一分步可用第五章介绍的追赶法求解。当 $|u| Re \Delta x \leq 2$ 和 $|v| Re \Delta y \leq 2$ 时对任意时间步长这一方法的收敛过程都很满意。当这一条件不能得到满足时, 需对时间步长加以如下限制:

$$\Delta t < \frac{2 Re \Delta X^2}{|W| Re \Delta X - 2}$$

这里当 $X = x$ 时, $W = u$; 当 $X = y$ 时, $W = v$ 。

8.4.2 非定常问题的求解

在上面介绍的拟非定常方法, 在求解过程中的每一时刻并不对应于真实的物理情况, 只有当 $t \rightarrow \infty$ 时的渐近解才对应于真实的物理定常解。对求解定常问题可参照前面介绍的人工不定常法。对于非定常问题, 涡量方程可采取(8.4.9)和(8.4.10)逼近式进行求解, 而对应流函数的逼近式可取式(8.4.11)和(8.4.12), 只是在这两式中需取 α 为足够

大, 使得流函数 φ 近似满足涡量流函数型的 N-S 方程。当然, 这种处理可用来求解一些工程问题, 难以用来研究流动的细致结构。

参 考 文 献

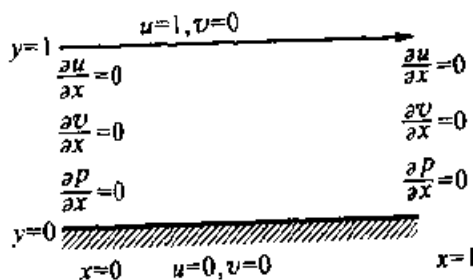
- 1 Chorin A J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys*, 1967 (2): 12 ~ 26
- 2 Yanenko N N. The method of fractional steps. New York: Springer-Verlag, 1971
- 3 Harlow F H, Welsh J E. Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface. *Phys Fluids*, 1965 (8): 2182 ~ 2189
- 4 Temam R. On an approximate solution of the Navier-Stokes equations by the method of fractional steps. *Archiv Ration Mech Anal*, 1969, 32: 377 ~ 385
- 5 Fortin M, Peyret R, Temam R J., Calcul des écoulements d'un fluide visqueux incompressible. *Mec*, 1971, 10: 357 ~ 390. *Lecture Notes in Physics*, New York: Springer-verlag, 1971 (8): 337 ~ 342
- 6 Fletcher C A. *Computational techniques for fluid dynamics*. Vol. 1. Berlin: Springer, 1991
- 7 Rai M M, Moin, P. Direct simulation of turbulent flow using finite difference schemes. *J Comput Phys*, 1991, 96: 15 ~ 53
- 8 Ma Yanwen, Fu Dexun, T Kobayashi, et al. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations with an upwind compact scheme. *J for Num Methods in Fluids*, 1999, 30 (5): 509 ~ 522
- 9 Peaceman D W, Rachford H H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J Soc Indus Appl Math*, 1955, 3: 28 ~ 41

习 题

8-1 一槽道流动及对应的边界如图所示。初始时刻流动处于静止状态。上壁面突然以 $u=1$ 的速度进行运动, 其中 $Re=50$ 。试给出该平行流动定常问题的解, 并利用涡量-流函数法给出相应的数值解, 将二者进行比较, 给出在 $x =$

$\frac{1}{2}$ 处流动参数随 y 的变化曲线。

8-2 一槽道流动及对应的边界如习题 8-1 图所示。从原始变量二维不可压 N-S 方程出发, 采用交错网格及 MAC 方法给出该平行流动定常问题的解, 其中 $Re=50$, 并给出 $x=1/2$ 处流动参量随

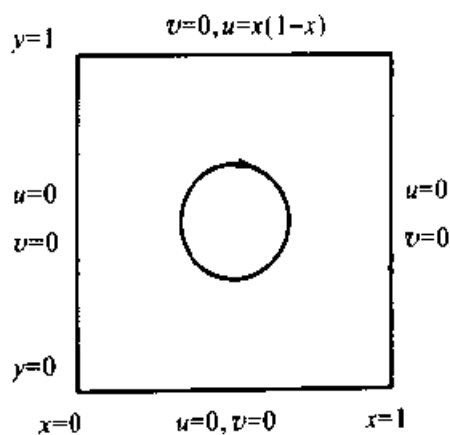


习题 8-1 图

y 的变化曲线。

8-3 一方腔流动，其边界条件如图所示。利用交错网格及 MAC 方法逼近原始变量二维不可压 N-S 方程，并求解方腔问题的定常解，其中 $Re = 50$ ，并给出流线分布图。

8-4 所求物理问题及边界条件如习题 8-3，从原始变量二维不可压 N-S 方程出发采用人工可压缩方法求解其定常问题的解，并给出涡量分布图。



习题 8-3 图

第九章 网格技术

9.1 网格生成技术^[1-3]

计算流体力学的目的是利用数值模拟的方法研究实际流动问题。由于实际问题的复杂性,均匀矩形网格已不适用于很多复杂流动的数值模拟。例如:钝体、机翼以及各种飞行器的绕流等,其求解域都不是矩型域。对于多尺度流动的数值模拟,对不同尺度物理量的分辨率也是一个重要问题。增强对流场中不同尺度物理现象分辨率的一个方法是采用高精度计算方法。当流场中数值解是光滑的且给定网格点数时,采用这种高精度方法有更好的分辨率,但计算方法复杂。另一种方法是增加网格点数,但要求增加计算机内存和运算时间。研究网格生成技术的目的是研究计算区域内具有对物理尺度分辨率高的最优网格布局。在复杂流动中,流场的非均匀性要求在流动参数梯度变化较大的区域内加密网格,使能正确模拟其流动特征。如粘性绕流中壁面附近附面层内的流动。实践证明,合适的网格生成技术往往是正确模拟一些复杂流动的关键。且各种网格生成技术都是在解决实际问题中发展起来的。在本节中将介绍一些简单的网格生成技术,以便能建立一些概念。

网格生成技术的基本思想是根据求解物理问题的特征,构造合适的网格布局,且将原物理坐标 (x, y, z) 内的基本方程变换到计算坐标 (ξ, η, ζ) 内的均匀网格求解,以提高计算精度。为此,必须给出相应导数关系: $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z$,等等。

近年来,网格生成技术有很大的发展,涉及的内容很广,这里只给出一些基本概念和方法。

9.1.1 代数网格生成方法

在复杂外形绕流的数值模拟中,为了边界条件便于处理,多采用曲线坐标系,且使物面与坐标系内某一坐标线重合,称为贴体坐标系。这种坐标系可以是正交的,也可以是非正交的。下面以钝体绕流为例,介绍一种简单的代数网格生成方法。考虑超声速钝锥绕流,来流马赫数 $Ma_\infty > 1$,其流动如图1-1所示。在超声速钝体绕

流中, 钝头前缘将形成弓形激波。所求解区域为物面与弓形激波之间的区域。设所考虑的是轴对称流动, 则求解域可是为 $abcd$ 所包围的区域, 如图 1-1a 所示。选取贴体坐标 (s, r) , 坐标线 s 与物面重合, r 为 s 的法向坐标。在该坐标系下有: 物面方程: $r_b = B_b(s)$; 激波方程: $r_s = B_s(s)$ 。

首先考虑超声速钝锥无粘绕流。由于在该问题中, 激波 $B_s(s)$ 是未知的, 故计算域难以确定。另外, 在球-锥接点处由于存在有曲率间断, 使得在 $r=0$ 物面上的等距网格离开物面法向, $r \neq 0$ 处, 在 s 方向出现非等距网格, 使得差分方法难以求解。为获得计算坐标内的等距规正网格, 可采用以下简单代数网格生成方法:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= s \\ \eta &= (r - B_b) / [B_s(s) - B_b(s)] \end{aligned} \right\} \quad (9.1.1)$$

将物理空间曲线坐标 (r, s) 内的计算域 $B_b \leq r \leq B_s$ 转换到计算空间 (ξ, η) 内的 $0 \leq \xi \leq c$, $0 \leq \eta \leq 1$ 区域内。在计算空间内可得均匀等距的矩形网格, 如图 1-1b 所示, 故便于差分方法的离散。

对于超声速粘性球-锥绕流, 为了正确模拟物面附近的流动, 要求在物理空间法向、 r 方向, 靠近物面的网格加密。则在式 (9.1.1) 坐标变换后, 再引入以下坐标变换:

$$\left. \begin{aligned} S &= \xi \\ \zeta &= \frac{\tanh(b\eta)}{\tanh(b)}, \quad (0 \leq \eta \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (9.1.2)$$

使得将物面法向的非均匀网格, 变换到计算坐标内的均匀矩形网格。其中常数 b 为加密参数, $0 < b$, b 选取不同的值在物理空间物面附近的网格加密程度不同。在计算中可根据所求解的问题, 如不同的雷诺数对应的附面层厚度不同, 则需选用不同的 b 。这里的函数 $\tanh(b\eta)$ 也可选取其他函数, 如取 $\zeta = e^{b\eta} - 1 / (e^b - 1)$ 等。

9.1.2 微分方程的网格生成方法

1. 网格生成

利用微分方程建立贴体坐标系的网格生成方法是在 20 世纪 70 年代初提出来的, 如 J.F.Thompson 等人提出的椭圆型方程的生成方法^[2]。由于该方法适用范围广, 便于处理各种复杂流动, 故发展很快。下面以二维翼型绕流为例, 简要介绍该方法。考虑在二维直角坐标 (x, y) 内的翼型绕流。一般物理坐标 (x, y) 可选用三种不同的网格: C 型、O 型和 O-C 型网格, 如图 9-1 所示。

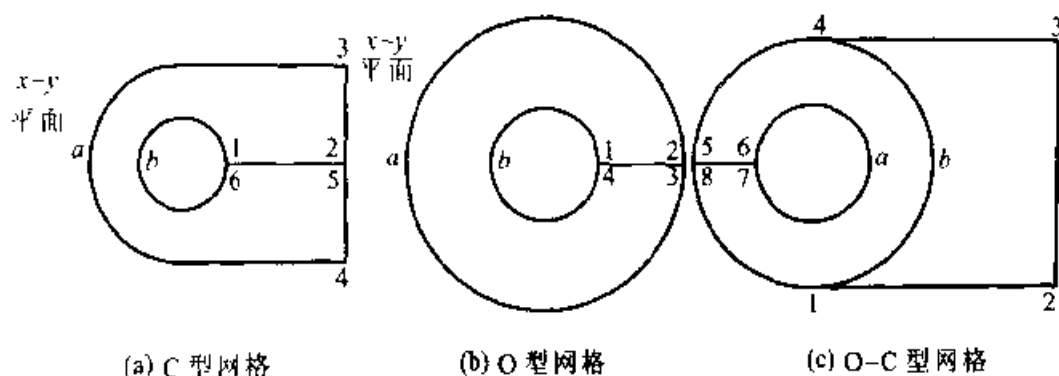


图 9-1 网格示意图

考虑要将物理坐标内计算域 D 的网格变换到计算域 D^* 的网格。对于域 D ，变换函数可写为

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (9.1.3)$$

若要求变换前后的坐标都是正交的，则 (x, y) 与 (ξ, η) 之间的变换应满足的必要条件是柯西 - 黎曼条件：

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (9.1.4)$$

由此可得关系式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.1.5)$$

求解以上方程可得坐标变换关系式(9.1.3)，称为椭圆型方程网格生成方法。应当指出，微分方程(9.1.5)的解不一定满足柯西 - 黎曼条件，所得坐标线不一定正交。Thompson 等人选用了以下方程(9.1.6)代替方程(9.1.5)为确定变换关系式的方程：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= P \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= Q \end{aligned} \right\} \quad (9.1.6)$$

其中 P, Q 为已知函数，利用函数 P 和 Q 可调节网格的疏密和网格的正交性，例如可使粘性绕流在壁面附近的法向加密网格。在实际应用中，由于在 (x, y) 物理平面内区域 D 是一不规则区，在计算域 $D^*(\xi, \eta)$ 平面内是规则区。因此，如果将基本方程转变到 (ξ, η) 坐标内将更为方便。

坐标变换和反变换之间存在以下微分关系式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= x_{\xi}\xi_1 + x_{\eta}\eta_1 = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_{\xi}\xi_2 + x_{\eta}\eta_2 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= y_{\xi}\xi_1 + y_{\eta}\eta_1 = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= y_{\xi}\xi_2 + y_{\eta}\eta_2 = 1 \end{aligned} \right\} \quad (9.1.7)$$

由此解出

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= J\eta_1, \quad \xi_1 = -Jx_{\eta} \\ \eta_x &= -Jy_{\xi}, \quad \eta_1 = Jx_{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (9.1.8)$$

其中

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \xi_x\eta_1 - \eta_x\xi_1 = (x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta})^{-1} \quad (9.1.9)$$

由式(9.1.7)中前两个方程可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} &= x_{\xi\xi}(\xi_1)^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_1\eta_1 + x_{\eta\eta}(\eta_1)^2 + x_{\xi\xi_1} + x_{\eta\eta_1} = 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= x_{\xi\xi}(\xi_2)^2 + 2x_{\xi\eta}\xi_2\eta_2 + x_{\eta\eta}(\eta_2)^2 + x_{\xi\xi_2} + x_{\eta\eta_2} = 0 \end{aligned}$$

上两式相加, 考虑到方程(9.1.6)并利用坐标转换关系式(9.1.8), 可得

$$\alpha x_{\xi\xi} + 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = \varphi \quad (9.1.10)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} + 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = \psi \quad (9.1.11)$$

其中

$$\varphi = -J^{-2}(Px_{\xi} + Qx_{\eta})$$

$$\psi = -J^{-2}(Py_{\xi} + Qy_{\eta})$$

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2$$

$$\beta = -(x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta})$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2$$

方程(9.1.10)和(9.1.11)为对应的反变换方程。其中方程(9.1.6)右端函数 P 和 Q 为给定的已知函数。一般采用迭代方法求解方程(9.1.10)和(9.1.11)。在迭代过程中, 取系数 α 、 β 、 γ 和右端非齐次项 φ 和 ψ 为已知量, 由 n 次迭代的近似值, 求解 $n+1$ 次的迭代值。其求解过程可简述如下:

首先离散方程(9.1.10)和(9.1.11) 若对方程中的一阶和二阶导数皆采用中心差分, 则离散后的方程可写为以下形式:

$$\sum_{l=-1}^{+1} \sum_{m=-1}^{+1} C_{l,m} \gamma_{k,l,m} = S_k, \quad k = 1, 2 \quad (9.1.12)$$

其中

$$\gamma_1 = x, \quad \gamma_2 = y$$

$$S_1 = \varphi, \quad S_2 = \psi$$

$$C_{i,j} = -2 [a_{i,j}/\Delta\xi^2 + \gamma_{i,j}/\Delta\eta^2]$$

$$C_{i+1,j} = C_{i-1,j} = a_{i,j}/\Delta\xi^2$$

$$C_{i,j+1} = C_{i,j-1} = \gamma_{i,j}/\Delta\eta^2$$

$$C_{i+1,j+1} = -C_{i-1,j+1} = C_{i-1,j-1} = -C_{i+1,j-1} = \beta_{i,j}/(2\Delta\xi\Delta\eta)$$

其次是选择迭代方法。对离散方程(9.1.12)将采用迭代方法求解。如 Seidel 迭代方法、SOR (Successive Over Relaxation) 方法以及 ADI (Alternating Direction Implicit) 方法(参见第五章)。下面通过一实际算例, 描述微分方程的网格生成方法。一般 $\Delta\xi, \Delta\eta$ 可取任意值, 为了简单, 通常取 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 。

考虑翼型绕流, 在物理坐标内选择 C 网格, 如图 9-2 所示。

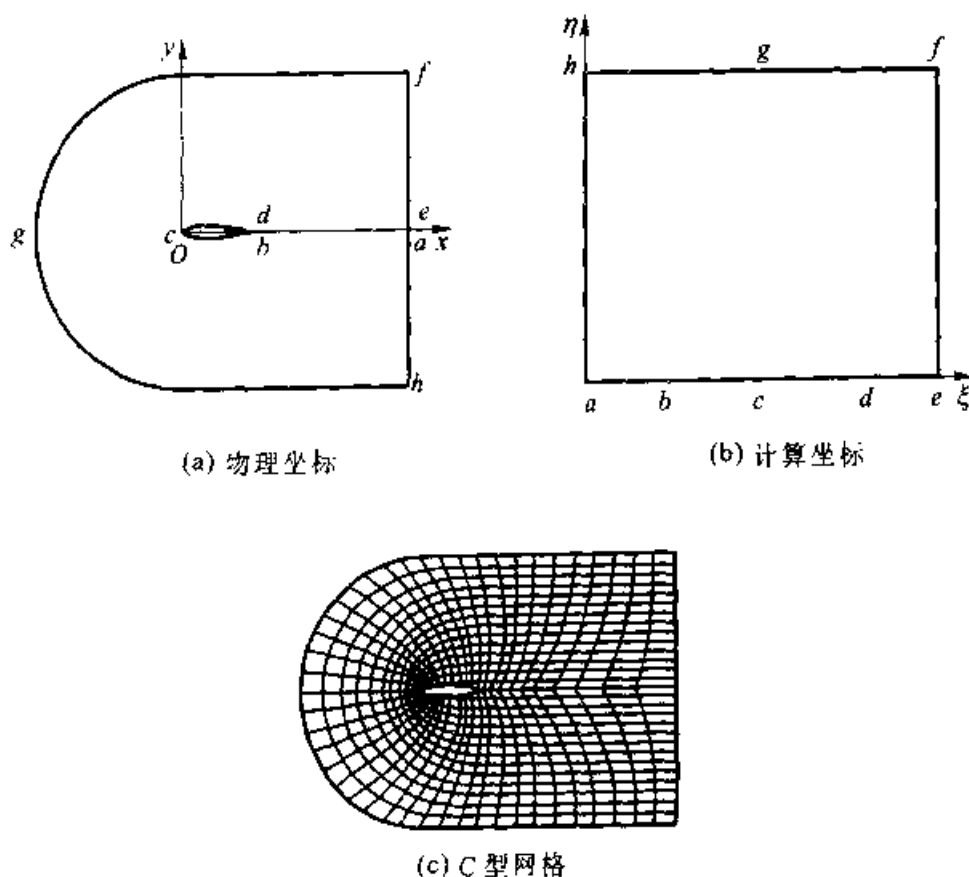
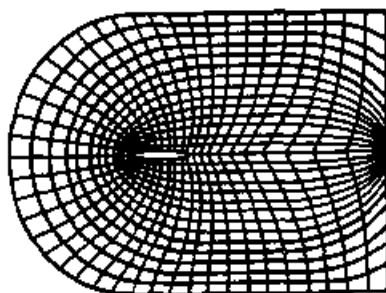


图 9-2 物理区域与计算区域的对应

现选用 $P = Q = 0$ 的 Laplace 方程(9.1.6)生成网格。为此首先需确定求解域边界。例如可选翼面及从后缘出发顺翼弦的尾迹切口, 即图 9-2a 中的 $abcde$, 对应于 $\eta = 1$ 的边界; 前方和上、下远场边界, 即图 9-2a 中的 hgf , 对应于 $\eta = \eta_{\max}$, 在 $\eta = 1$ 和 $\eta = \eta_{\max}$ 边界上点的分布是被指定的, 且选择下游边界的下半部分, 即图 9-2a 中的 ah , 为 $\xi = 1$; 上半部分, 即图 9-2a 中的 ef , 为 $\xi = \xi_{\max}$ 的边界。不难看出, 当封闭边界上所有的点被确定后, 则在边界上计算坐标 (ξ, η) 与物理坐标 (x, y) 也就确定了, 如图 9-2a 和图 9-2b 之间的对应关系。则椭圆型方程(9.1.9)和(9.1.10)的边界条件就确定了。在这里它是 Dirichlet 边值问题。在图 9-2c 中给出了设 $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ 对于 NACA 0012 翼型, 由离散方程(9.1.12)($P = Q = 0$)所生成的网格系。

2. 网格的加密

为了正确模拟复杂流场, 在一定网格点的条件下, 流动参数变化梯度较大的区域, 如粘性绕流中物面附近的附面层区域, 需安排较多的网格点。当采用椭圆方程生成网格时, 首先可通过选择特殊边界点的对应关系来实现网格的加密。但这种方法往往难以生成理想的网格。例如图 9-3 中就是针对 NACA 0012 翼型绕流, 利用 Laplace 方程所生成的网格。



NACA 0012 47*15(91)

图 9-3 Laplace 方程的解

尽管下游翼后缘边界点已是指数加密分布了, 但等 η 线会鼓起来, 不能使等 η 线在尾迹切口线(图 9-2a 中的 $abde$ 线)附近加密。为了解决类似问题, Thompson^[2] 建议取如下形式的非齐次函数:

$$\begin{aligned}
 P(\xi, \eta) &= - \sum_{i=1}^J a_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) \\
 &\quad - \sum_{l=1}^L b_l \operatorname{sign}(\xi - \xi_l) \exp\{-d_l [(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2]^{1/2}\}; \\
 Q(\xi, \eta) &= - \sum_{j=1}^J a'_j \operatorname{sign}(\eta - \eta_j) \exp(-c'_j |\eta - \eta_j|) \\
 &\quad - \sum_{l=1}^L b'_l \operatorname{sign}(\eta - \eta_l) \exp\{-d'_l [(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2]^{1/2}\}
 \end{aligned}$$

其中 $a_i, c_i, b_l, d_l, a'_j, c'_j, b'_l$ 和 d'_l 都是大于或等于零的常数。选用不同的这些常数, 可使网格向指定的点 (ξ_i, η_i) 和指定的线 $\xi = \xi_i, \eta = \eta_i$ 聚集。例如要求网格在翼型后缘点 $\xi = \xi_l, \eta = \eta_l$ 聚集, 可取

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^2 b_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) \exp \left[- d_i \left[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - 1)^2 \right]^{1/2} \right]$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^2 b'_i \operatorname{sign}(\eta - \eta_i) \exp \left[- d'_i \left[(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - 1)^2 \right]^{1/2} \right]$$

所生成的网格如图 9-4a。

又如，要求网格在翼型后缘切线附近聚集，则可取

$$P(\xi, \eta) = 0$$

$$Q(\xi, \eta) = - a'_1 \exp \left[- c'_1 (\eta - 1) \right]$$

所生成的网格如图 9-4b 所示。

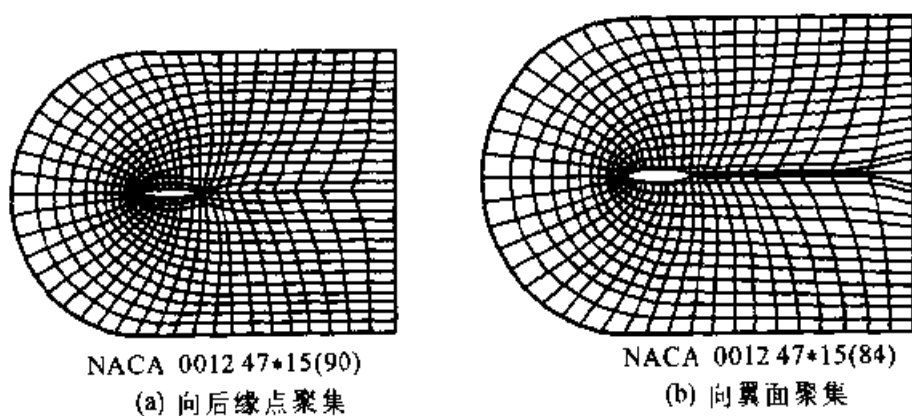


图 9-4 加密网格

9.1.3 一般坐标系下的基本方程^[3]

前面所述的网格生成技术给出了物理坐标 (x, y) 和计算坐标 (ξ, η) 之间的关系。将网格生成技术用于求解实际流动问题时，要求在计算坐标内的均匀网格上求解基本方程。为此，需要将基本方程从物理坐标转换到计算坐标内。另外，为了有利于求解具有激波的流场，要求守恒型方程组经变换后仍为守恒型。下面以二维 N-S 方程为例，简述方程的变换。

考虑二维物理坐标为笛卡儿坐标系 (x, y, t) ，则二维可压 N-S 方程(2.1.1)简化为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} \quad (9.1.13)$$

其中所有函数的定义与第二章中方程(2.1.1)相同。

设有以下坐标变换：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, t) \\ \eta &= \eta(x, y, t) \\ \tau &= t \end{aligned} \right\} \quad (9.1.14)$$

由于正变换与逆变换矩阵之间存在以下关系:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = I \quad (9.1.15)$$

这里 I 为单位矩阵, 所以变换的 Jacobian 矩阵的行列式为

$$J = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right|^{-1} \quad (9.1.16)$$

当空间变换是从左手系变到右手系时, J 总是正值. 求解代数方程组(9.1.15), 且考虑到自变量 ξ, η, τ 为独立无关的变量, 则可得以下关系式:

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= Jy_{\eta}, & \xi_y &= -Jx_{\eta} \\ \eta_x &= -Jy_{\xi}, & \eta_y &= Jx_{\xi} \\ \xi_t &= -(x_{\tau}\xi_x + y_{\tau}\xi_y) \\ \eta_t &= -(x_{\tau}\eta_x + y_{\tau}\eta_y) \end{aligned} \right\} \quad (9.1.17)$$

应当指出, 因从坐标变换关系式(9.1.14)中可以看出 τ 只是 t 的函数, 故有

$$\tau_x = \tau_y = 0 \quad \text{且} \quad x_{\tau} = x_t, \quad y_{\tau} = y_t$$

从而可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_x \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_y \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \xi_t + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta_t + \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (9.1.18)$$

将关系式(9.1.18)代入方程组(9.1.13), 且将其化为守恒型(详细推导参见文献[3]), 则可得计算坐标系 (ξ, η, τ) 内守恒型基本方程:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{G}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}_2}{\partial \eta} \quad (9.1.19)$$

其中

$$\bar{U} = J^{-1} U$$

$$\bar{F}_1 = J^{-1} (\xi_t U + \xi_x F_1 + \xi_y F_2) = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho \bar{u} \\ \rho u \bar{u} + \xi_x p \\ \rho \bar{u} + \xi_y p \\ (e + p) \bar{u} - \xi_x p \end{pmatrix}$$

$$F_2 = J^{-1}(\eta_t U + \eta_x F_1 + \eta_y F_2) = J^{-1} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u \bar{v} + \eta_x p \\ \rho v \bar{v} + \eta_y p \\ (e + p) \bar{v} - \eta_x p \end{pmatrix}$$

式中

$$\begin{cases} \bar{u} = \xi_t + \xi_x u + \xi_y v \\ v = \eta_t + \eta_x u + \eta_y v \end{cases} \quad (9.1.20)$$

式(9.1.20)称为反变速度。方程组(9.1.19)右端的粘性项有以下形式:

$$\bar{G}_1 = J^{-1}(\xi_x G_1 + \xi_y G_2)$$

$$G_2 = J^{-1}(\eta_x G_1 + \eta_y G_2)$$

粘性项 G_1 和 G_2 中所包含的 u , v 和 T 对 x , y 的导数应由关系式(9.1.18)确定, 例如:

$$u_x = \xi_x u_\xi + \eta_x u_\eta$$

不难看出, 在计算坐标 (ξ, η, t) 内的基本方程组 N-S 方程(9.1.19)仍是守恒型的。对方程组的离散和数值求解可采用前几章所介绍的计算方法。方程中的 ξ_x , ξ_y , η_x , η_y , ξ_t , η_t 由网格生成方法中给出的关系式(9.1.14)确定。

9.2 非结构网格

上面所讨论的是结构网格, 其网格的布局是通过代数方程或微分方程的求解确定的。因此网格的节点的结构是有限制的。非结构网格舍去了对网格节点的结构性限制, 易于控制网格单元的大小、形状及网格节点的位置, 因此具有更大的灵活性, 对复杂计算域的适应能力很强。

一般来讲, 非结构网格可以具有任意结构。通常对于二维人们都选用三角形网格, 三维时选用四面体网格, 也就是说网格的类型是统一的。因为三角形和四面体对应为二维和三维空间最简单的形状, 任何空间区域都可被三角形(二维)或四面体(三维)所填满, 故任何计算域都可以被三角形或四面体为单元的网格所划分。另外, 还要求所生成的网格没有折叠, 且避免网格落在计算域外。下面以二维问题为例介绍 Dirichlet 在 1850 年提出的一种网格生成方法。

1. 网格生成

设平面上有一离散点集 $\{P_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, 选其中任一点 P_i , 则平面上距离 P_i 最近的所有点构成一个子集, 形成一区域 S_i , 该区域

称为 Voronoi 区域。可见在 S_i 内所有点 P 都满足以下条件:

$$|S_i| = \{P; |P - P_i| < |P - P_j|, \forall i \neq j\} \quad (9.2.1)$$

这里 $\forall i \neq j$ 表示对于所有 $i \neq j$ 的情况, 即 $j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$ 。相邻 Voronoi 区域的中心 P_i 点相连就形成三角形, 它们称作 Delaunay 三角形, 这种三角形互相不会完全重叠或部分覆盖。在图 9-5 中给出了 Voronoi 区域和 Delaunay 三角形的示意图。

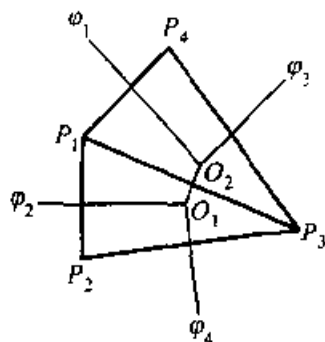


图 9-5 Voronoi 区域和 Delaunay 三角形的示意图

这是 $N = 4$, $\varphi_1 O_2 O_1 \varphi_2$, $\varphi_2 O_1 \varphi_4$, $\varphi_4 O_1 O_2 \varphi_3$, $\varphi_3 O_2 \varphi_1$ 为四个 Voronoi 区域, 而 $P_1 P_2 P_3$ 和 $P_1 P_3 P_4$ 为两个 Delaunay 三角形。不难看出, 为满足 Voronoi 区域的特征条件(9.2.1), O_1 和 O_2 应为两个三角形的垂心, 即三角形的外接圆的圆心。在形成上述三角形的过程中, 除给定的边界点以外, 所有的节点都是逐步加入的。为了讲清楚加点的原则, 设给定的边界节点和初始划分的 Delaunay 三角形如图 9-6 所示。

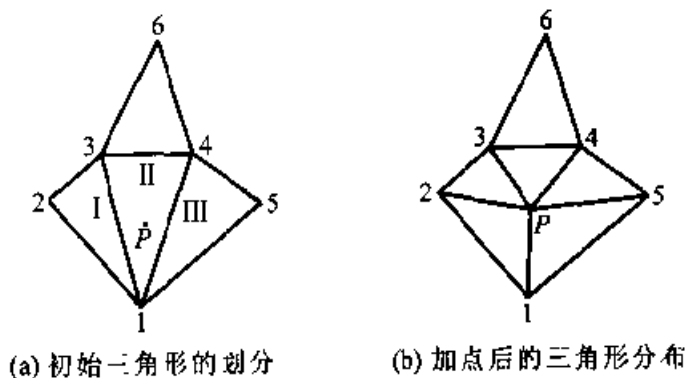


图 9-6 加点原则的示意图

加点原则可简述如下^[1]: 对于每一个 P_0 点, 与其相连接的点为 P_j ($j = 1, 2, \dots, M$), 可以定义一个数 dP_0 为

$$dP_0 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |r_j - r_0| \quad (9.2.2)$$

首先判断新引入的点所在的三角形, 如图 9-6a 所示, 新引入点 P 位于以 1, 3, 4 为顶点的初始化三角形内。

三角形中心点的 dP_0 值定义为所在三角形顶点的 dP_0 值的平均值。当该中心到 3 顶点的距离 dm ($m = 1, 2, 3$) 满足 $dm > \alpha dP_0$, 这里的 dP_0 为三角形中心点的 dP_0 , 且该点到新点 P 的最短距离 S 满足 $S > \beta dm$ 时, 则该点确定为应加入的点。这时所在的三角形(如图 9-6a 中的三角形 II)将被破坏。如果这个三角形的中心点包含在相邻三角形(如图

9-6a 中的三角形 I 和 III) 的外接圆之中, 则这两个三角形的公共边(即图 9-6a 中的 13 边和 14 边)将被打破, 从而形成新的三角形, 如图 9-6b 中所示。计算中 α 和 β 可取为 0.7。利用这种方法可对每一个三角形反复加点, 直到不能再加点点为止。

应当指出, 按上述方法所生成的三角形虽然比给定节点所生成的三角形形状可更接近正三角形, 但可能是很不均匀的, 为解决此问题可采用光滑化方法。这里介绍一 Laplacian 光滑方法: 如果 $P_i(x_i, y_i)$ 为一个内部节点, $N(P_i)$ 为与 P_i 相连的节点总数, 则光滑迭代技术所给出的新的 P_i 点的坐标可写为以下形式:

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{N(P_i)} x_k}{N(P_i)}$$

$$y_i = \frac{\sum_{k=1}^{N(P_i)} y_k}{N(P_i)}$$

光滑方法可以使网格更均匀, 三角形更接近于正三角形。均匀网格可提高计算精度, 加快收敛速度。

2. 方程的离散^[1]

这里将以二维可压欧拉方程为例, 简述非结构网格应用于求解流体力学基本方程的方法。考虑直角坐标系内的二维无粘流, 则欧拉方程(2.1.4)可简化为

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 \quad (9.2.3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}$$

为了离散方程(9.2.3), 选用如图 9-7 所示的单元体。其中 O 是中心点, $1, 2, \dots, 6$ 是与 O 点直接相连的相邻点。 AB, BC, CD, DE, EF, FA 对应为 $O2, O3, O4, O5, O6, O1$ 线段的中垂线。为了确定某一函数值 f 在 O 点的梯度, 可以利用格林公式写为以下离散形式:

$$\nabla f = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^6 f_i n_i \delta l_i \quad (9.2.4)$$

这里 n_i 是 O 到 i ($i=1, 2, \dots, 6$) 的单位矢量, δl_i 是与其垂直的侧面长度(或面积), S 为 $ABCDEF$ 所围的面积(或体积)。在面积 S 上对式(9.2.3)进行积分, 且考虑到式(9.2.4), 则可得

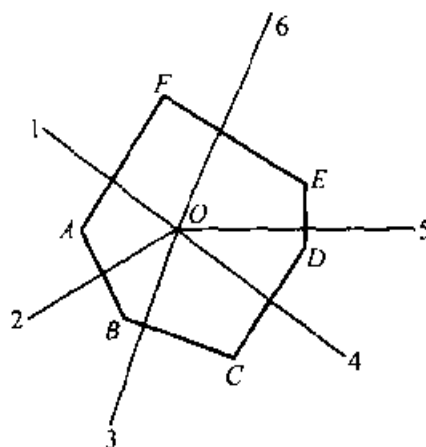


图 9-7 单元体示意图

$$\frac{\Delta(QS)}{\Delta t} + \sum_i F_i \delta l_i = 0 \quad (9.2.5)$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho u U + p n_x \\ \rho v U + p n_y \\ (E + p) U \end{pmatrix}$$

$$U = u n_x + v n_y = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$$

这里 F_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 表示以上 F 的表达式中的矢量, $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ 为 Oi 上的单位矢量。应当指出, 对于可压流动的数值模拟, 在计算中对流项应做适当处理。其流通量 F 项可写为以下形式:

$$F = \frac{1}{2} [(F_r + F_l) - |A| (Q_r - Q_l)] \quad (9.2.6)$$

其中

$$A = \frac{\partial F}{\partial Q} = \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1}$$

$|A|$ 为以 $|\lambda_i|$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 为对角元素的矩阵。 $\lambda_{1,4} = U \mp c$, $\lambda_{2,3} = U$ 。 F_r , F_l 和 Q_r , Q_l 对应为 F 和 Q 在侧面的右侧和左侧单元的值。侧面上的函数值由下式确定:

$$q_f = q_0 + \varphi \nabla q \cdot \mathbf{r}_f \quad (9.2.7)$$

这里下标 f 表示侧面, q_0 为在 O 点上的值, $\mathbf{r}_f = \frac{1}{2} \vec{O}i$, $i = 1, 2, \dots, 6$ (参见图 9-7)

$$\varphi = \frac{\min \text{mod} [(\nabla q)^2, \frac{\beta}{\nabla^2 q} \nabla q \cdot \nabla q_n]}{\nabla^2 q + \phi} + \psi \quad (9.2.8)$$

$\beta = 1.0 \sim 2.0$, ϕ 是用以适当加大数值粘性以滤去噪声干扰, 而 q_n 表示在相邻网格内的 q 值。

对于 N-S 方程, 粘性部分可采用一般的有限体积法进行离散, ∇q 在表面上的值则由表面两侧的平均值给出。边界条件的处理与一般有限单元法相近。

9.3 基于非等距网格上的有限差分法

在解决实际流体力学问题时, 通常会遇到在局部区(如壁面附近)一些流动参数变化剧烈的情况。在这一区域内为了得到更为精细的结果通常需加密网格。在本章前两节介绍了网格生成技术。针对不同的物理问题选择不同的网格生成技术可提高数值解在局部区域的分辨率。采用非结构网格利于提高数值解在复杂局部区域的分辨率, 但难以构造高阶精度的格式。采用坐标变换的方法可构造高阶精度的格式。对于一些常用典型问题, 如绕流物体的表面附近, 采用结构式网格可有两种方法对网格进行加密: 其一为利用坐标变换加密局部区域网格, 经坐标变换后在计算坐标系内可在等距网格上构造导数的逼近式。另一为直接在非均匀网格上构造差分逼近式。对这两种方法都可构造高阶精度的逼近式。实践表明后者为佳。近年来一些作者在非等距网格上直接构造格式, 用以模拟非定常多尺度复杂流动, 取得了较好的结果^[4-6]。本节将介绍几个基于非等距网格上的逼近式。

9.3.1 传统型逼近式

传统型逼近指导数的逼近可显式地通过点函数的线性组合来表示。

定义

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad \theta_j = h_{j-1}/h_j, \quad F_j = (\partial f / \partial x)_j, \quad \delta_x^{\pm} f_j = \mp (f_j - f_{j \pm 1})$$

下面给出几个逼近一阶导数的逼近式。

(1) 二阶中心型

$$F_j = \frac{\theta_j}{1 + \theta_j} \frac{\delta_x^+ f_j}{h_j} + \frac{1}{1 + \theta_j} \frac{\delta_x^- f_j}{h_{j-1}} \quad (9.3.1)$$

(2) 二阶迎风型($c > 0$)

$$F_j = \frac{2 + \theta_{j-1}}{1 + \theta_{j-1}} \frac{\delta_x^- f_j}{h_{j-1}} - \frac{1}{1 + \theta_{j-1}} \frac{\delta_x^- f_{j-1}}{h_{j-2}} \quad (9.3.2)$$

(3) 二阶迎风型($c < 0$)

$$F_j = \frac{1 + 2\theta_{j+1}}{1 + \theta_{j+1}} \frac{\delta_x^+ f_j}{h_j} - \frac{\theta_{j+1}}{1 + \theta_{j+1}} \frac{\delta_x^+ f_{j+1}}{h_{j+1}} \quad (9.3.3)$$

9.3.2 紧致型逼近

(1) 四阶中心型逼近

$$\alpha_j F_{j-1} + F_j + \gamma_j F_{j+1} = a_j \frac{\delta_x^+ f_j}{h_j} + b_j \frac{\delta_x^- f_j}{h_{j-1}} \quad (9.3.4)$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2(1+\theta_j)}, \quad \gamma_j = \frac{\theta_j}{2(1+\theta_j)}, \quad a_j = \frac{3\theta_j}{2(1+\theta_j)}, \quad b_j = \frac{3}{2(1+\theta_j)}$$

(2) 三阶迎风型 ($c > 0$)

$$\alpha_j F_{j-1} + F_j = a_j \frac{\delta_x^+ f_j}{h_j} + b_j \frac{\delta_x^- f_j}{h_{j-1}} \quad (9.3.5)$$

$$\alpha_j = \frac{1}{1+\theta_j}, \quad a_j = \frac{\theta_j^2}{(1+\theta_j)^2}, \quad b_j = \frac{2+3\theta_j}{(1+\theta_j)^2}$$

(3) 三阶迎风型 ($c < 0$)

$$F_j + \gamma_j F_{j+1} = a_j \frac{\delta_x^+ f_j}{h_j} + b_j \frac{\delta_x^- f_j}{h_{j-1}} \quad (9.3.6)$$

$$\alpha_j = \frac{\theta_j(3+2\theta_j)}{(1+\theta_j)^2}, \quad b_j = \frac{1}{(1+\theta_j)^2}, \quad \gamma_j = \frac{\theta_j}{1+\theta_j}$$

(4) 五阶迎风型

对构造更高阶精度难以给出对应系数的分析表达式, 需求解代数方程组。例如, 五阶迎风型逼近式可写为如下形式 ($c > 0$):

$$\alpha_j F_{j-1} + F_j = A_j f_{j+1} + B_j f_{j-1} + C_j f_{j+2} + D_j f_{j-2} + E_j f_j \quad (9.3.7)$$

经 Taylor 级数展开可知, 其系数可由如下方程求出

$$\begin{aligned} h_{j+1}^k A_j + (-1)^k h_j^k B_j + (h_{j+2} + h_{j+1})^k C_j + [-(h_j + h_{j-1})]^k D_j + \beta_k E_j \\ = \gamma_k + (-1)^{k-1} k h_j^{k-1} \alpha_j \end{aligned} \quad (9.3.8)$$

$$k = 0, 1, \dots, 5, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_k (k \neq 0) = 0, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_k (k \neq 1) = 0$$

9.3.3 精度分析

下面通过具体例子来讨论基于非等距网格导数的逼近精度。设有函数 $u(x) = \sin(\pi x)$ 定义域为 $[-1, 1]$ 。可求出其准确的导数值 $du(x)/dx = \pi \cos(\pi x)$ 。我们来看一下采用两种方法所求其逼近值的误差, 一为采用坐标变换的方法, 另一为在非均匀网格上直接构造导数的逼近式。非均匀网格是按下式生成的:

$$x_j = \frac{\tanh(b\eta_j)}{\tanh(b)} \quad (9.3.9)$$

这里 $b = 3$ 是加密参数, $\eta_j = \frac{(j-1)H}{N} - 1$, $j = 1, 2, \dots, N+1$, $H = 2$,

$N = 160$ 。误差定义为 $\epsilon_j = F_j - du(x)/dx = F_j - \pi \cos(\pi x)$ 。在表 9.1 中给出了按两种方法求逼近导数的误差，都采用了五阶迎风紧致差分逼近一阶导数。可以看出，基于非等距网格之格式的精度要好得多。

表 9.1 导数的误差

ϵ_j	坐标变换	非等距网格
$j = 2$	$+0.275^{-2}$	-0.108^{-6}
$j = 3$	-0.153^{-4}	-0.972^{-12}
$j = 4$	$+0.780^{-7}$	-0.435^{-15}

参 考 文 献

- 1 苏明德, 黄素逸. 计算流体力学基础. 北京: 清华大学出版社, 1997
- 2 Thompson J E. Numerical grid generation. Amsterdam, Elsevier Science Publishing Co. 1982: 1 ~ 30
- 3 傅德薰, 汪翼云, 马延文. 计算空气动力学. 北京: 宇航出版社, 1994
- 4 Rai M M, Moin P. Direct simulation of turbulent flow using finite-difference schemes. J Comp Phys. 1991, 96: 15 ~ 53
- 5 Gamet L, Ducros F, Nicoud F, et al. Compact difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. Int J Numer Meth Fluids. 1999, 29: 159 ~ 191
- 6 Li Xinliang, Ma Yanwen, Fu Dexun. DNS of incompressible turbulent channel flow with upwind compact scheme on non-uniform meshes. CFD J, 2000, 8 (4): 536 ~ 543

习 题

9-1 试求出基于非等距网格 $(x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1})$ 点上逼近于一阶导数具有二阶精度的迎风逼近式。

9-2 设 S_j 为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 在 $x = x_j$ 点上的逼近, 定义 $h_j = x_{j+1} - x_j$, $\theta_j = \frac{h_{j-1}}{h_j}$, $h_j = \sigma_j h$, $\theta_j = 1 + O(h)$, 试求出方程

$$\alpha_j S_{j-1} + \beta_j S_j + \gamma_j S_{j+1} = a_j \frac{u_{j+1} - u_j}{h_j} + b_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h_{j-1}}$$

的系数 $(\alpha, \beta, \gamma, a, b)_j$ 。要求 S_j 以四阶精度逼近二阶导数。

9-3 利用二维可压 N-S 方程求解第八章的习题 8-3, 均匀来流马赫数 $Ma_\infty = 2.0$, 雷诺数 $Re = 100$, 要求壁面附近网格加密, 并利用基于非均匀网格上的三阶迎风紧致差分, 时间方向利用两步 R-K 方法。给出流场涡量等值线。

专业名词索引

B

波包	wave packet (4.5)
伯格方程	Burgers equation (2.2.1,2.2.2)

C

差分粘性	difference viscosity (3.1.2)
切比雪夫多项式	Chebyshev polynomial (3.5)
超松弛迭代法	SOR: Successive Over Relaxation method (5.3.3,9.1.2)

D

迭代法	iteration method (5.3.1)
迭代误差	iteration error (5.3.1)

F

放大因子	amplification factor (3.1.3)
放大矩阵	amplification matrix (3.1.3)
LU 分解法	Lower and Upper decomposition method (6.5.1)

傅里叶变换	Fourier transformation (3.5)
傅里叶级数展开方法	Fourier series expansion (3.5,4.1)

G

高斯 - 塞德迭代法	Gauss-Seidel iteration method (5.3.3)
高斯消去法	Gauss elimination method (5.1)
C - N 格式	Crank-Nicolson scheme (3.2.1)
MUSCL 格式	Monotone Upwind Scheme of Conservation Law (MUSCL)scheme (7.5)
NND 格式	Non oscillatory containing No free parameter and Dissipative (NND)scheme (7.6.1)
TVD 格式	Total Variation Diminishing (TVD)scheme (7.2.2)

戈杜诺夫格式 Godunov scheme (6.3)

H

耗散比拟法 method of diffusion analogy (7.6.3)

耗散误差 dissipation error (3.1.2)

混合型格式 MXD scheme (4.6)

J

计算流体力学 Computational fluid dynamics (1.1.1)

加辽金方法 Galerkin method (3.4)

截断误差 truncation error (3.1.1)

接触间断 contact discontinuity (2.4.2)

紧致格式 compact difference scheme (4.2.2)

交替方向追赶法 Alternative Direction Implicit (5.4, 8.4.1.9.1.1)

激波捕捉法 shock capturing method (7.1.6)

近似因式分解法 approximate Factorization (6.5.2)

精度 accuracy (3.1.1)

局部时间步长法 local time step method (5.6.1.6.5.2)

矩阵追赶法 matrix ADI method (5.2)

K

柯朗数 Courant number (3.1.3)

可压 N-S 方程 compressible Navier-Stokes equations (2.1.1)

快型格式 FST scheme (4.6)

L

拉普拉斯方程 Laplace equation (2.2.1, 3.1.4)

雷诺数 Reynolds number (2.1.1)

黎曼不变量 Riemann invariant₂ (2.3.4)

流函数 stream function (8.4)

黎曼问题 Riemann problem (2.4.1, 6.3)

罗格式 Roe scheme (6.4.1.6.4.2)

龙格-库塔方法 Runge-Kutta (R-K) method (3.2.3)

M

麦柯马科格式 MacCormack scheme (6.2)

慢型格式 SLW scheme (4.6)

Minmod 函数 Minmod function (7.3.1)

N

- 纳维 - 斯托克斯方程 Navier-Stokes (N-S) equations (1.1.1, 2.1.1, 2.1.2)
 牛顿迭代法 Newton iteration method (5.5)
 拟谱方法 pseudo-spectral method (3.5)

O

- 欧拉方程 Euler equations (1.1.1, 2.1.2, 2.2.1)
 欧拉隐式格式 Euler implicit scheme (6.2)

P

- 佩德格式 Pade scheme (4.5)
 配置法 Collocation method (3.4.1)
 普朗特数 Prandtl number (2.1.1)
 谱方法 spectral method (3.5)

Q

- 切向间断 tan gential discontinuity (2.4.2)
 群速度 group velocity (4.5)
 群速度控制法 Group Velocity Control (GVC) method (7.6.2)

R

- 人工粘性 artificial viscosity (3.1.2, 7.1.6)
 人工可压缩性方法 artificial compressibility method (8.2.1)

S

- 熵条件 Entropy condition (2.3.6)
 苏式兰德公式 Satherland law (2.1.1)
 塞德迭代法 Seidel iteration method (5.3.3)
 时间关系法 time dependent method (5.6.2)
 舍入误差 round error (3.1.2)
 色散误差 dispersion error (3.1.2)
 守恒型差分格式 conservative scheme (3.1.2)
 收敛性 convergence (2.2, 3.1.2)
 松弛迭代法 Successive Over Relaxation (SOR) iteration method (5.3.3)
 斯蒂尔 - 沃明分裂法 Steger-Warming splitting method (6.1.4, 6.5.1)

T

- 泰勒级数 Taylor series (3.2.2, 4.2.2)

条件相容	conditional consistence (3.1.2)
条件稳定	conditional stable (3.1.3)
投影法	projection method (8.3.1)
通量限制因子	limiter (7.3.2)
特征关系	characteristic relation (2.3.4)

W

MAC 网格法	Marker-And-Cell (MAC)method (8.2.2)
范利尔分裂法	Van-Leer splitting method (6.1.4)
蛙跳格式	Leap-Frog scheme (3.2.2,4.5)
网格生成技术	mesh grid generation (9.1)
网格雷诺数	mesh Reynolds number (7.1.5)
稳定性	stability (2.2.3.1.2)
涡量	vorticity (2.1.3)
涡量 - 流函数法	vorticity-stream function method (2.1.3)
无条件稳定	unconditional stable (3.1.3)

X

相容性	consistence (3.1.2)
相容关系	consistence relation (2.3.4)
显式格式	explicit scheme (3.1.1.3.2.1)
修正方程	modified equation (3.1.2)

Y

雅可比矩阵	Jacobian matrix (2.3.1,6.1.2,6.2,6.5.1)
隐式格式	implicit scheme (3.1.1,3.2.1)
迎风紧致格式	upwind compact difference scheme (4.2.2)
有限元法	finite element method (3.4.2)
预处理矩阵	Pre-conditioning matrix (5.3.1)

Z

直接数值模拟	Direct Numerical Simulation (DNS)(4.1)
子域方法	subdomain method (3.4.1)
最小二乘法	method of least square (3.4.1)
追赶法	Alternative Direction Implicit (ADI)method (5.2)

外国人名译名对照表

Beam, R. M.	比姆(6.2)
Chacravarthy, S. R.	切柯拉沃奇(6.1.2,7.5)
Chapman, D. R.	查普曼(1.2)
Chorin, A. J.	秋林(8.2.1,8.3.1)
Courant, R.	库朗(1.2,3.1.3,6.1.2)
Fortin, M.	弗蒂恩(8.3.1)
Friedrichs, K. D.	弗里德里克斯(1.2,3.1.3)
Godunov, C. K.	戈杜诺夫(6.3,7.2.1)
Hadamard	哈达马德(1.2)
Harlow, F. H.	哈洛(8.2.2,8.3.2)
Harten, A.	哈特恩(7.1.2,7.3.1,7.3.2)
Jameson, A.	杰姆森(5.7)
Jenning, G.	金尼恩(7.2.1)
Kim, J.	金(1.2)
Lax, P. D.	拉克斯(3.1.2)
Lewy, H.	李卫(1.2,3.1.3)
Liepman, H. W.	里普曼(1.2)
MacCormack, R. W.	麦柯马科(3.2.4,5.6.3,6.2)
Moin, P.	莫恩(1.2)
Roe, P. L.	罗(6.4.1,6.4.2)
Roshko, A.	罗什科(1.2)
Steger, J. L.	斯蒂格(6.1.2,6.1.4)
Swebv, P. K.	斯卫泊(7.3.2)
Teman, R.	蒂曼(8.3.1)
Thompson, J. F.	汤姆森(9.1.2)
Van Leer	万利尔(6.1.4,6.5.1,7.3.2,7.5)
Von Neumann	冯·诺伊曼(3.1.3,7.1.6)
Warming, R. F.	沃明(6.1.2,6.1.4,6.2)
Welsh, J. E.	韦尔斯(8.2.2,8.3.2)
Yanenko, N. N.	雅年科(8.2.1)

Synopsis

This book is written based on the class notes of “computational fluid dynamics” which was originally designed for use in graduate courses of the University of Science and Technology of China and the Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences. The book combines our extensive research and working experience over years and the most advanced technology in the field of CFD (computational fluid dynamics).

The book is divided into nine chapters. The first five chapters introduce the fundamental concepts and methodologies in CFD. It covers the governing equations in fluid dynamics, model equations and their mathematical properties, numerical methods and their mathematical basis, methods of scheme construction, and behavior analysis of numerical solutions. The numerical methods include space discretization, solution of system of algebraic equations, solution of unsteady fluid dynamics equations with time discretization. The methods of discretization include finite difference method, finite volume method, finite element method, and spectral method. All these methods are more mature and widely used recently. The basic idea of method construction is presented, and the emphasis is on finite difference method. Within finite difference methods, more attention is paid on behavior analysis of numerical solutions.

The last four chapters describe the numerical methods for solving physical problems. These include the methods for solution of the compressible Navier-Stokes equations, flux splitting, construction of schemes with high resolution of the shocks, solution of the incompressible Navier-Stokes equations, and mesh grid generation techniques. We put some emphasis on non-uniform mesh schemes because of their high accuracy. The accuracy of methods related to physical problems is also discussed. Some numerical examples are given for understanding and validation of the methods.

This book is primarily intended for graduate students in fields of fluid mechanics and senior undergraduate students. It also can be used as a reference book for scientific researchers in the fields of computational fluid dynamics.

We'd like to express our appreciation for the valuable comments and suggestions that we received from academician Zhou Heng. It greatly contributed to the quality of this book.

Contents

List of Main Symbols

Chapter 1 Introduction

- 1.1 Computational Fluid Dynamics and Basic Characteristics
- 1.2 Development of Computational Fluid Dynamics
- 1.3 Purpose and Contents of the Book
- Reference

Chapter 2 Governing Equations in Fluid Dynamics and Model Equations

- 2.1 Governing Equations in Fluid Dynamics
- 2.2 Model Equations and their Mathematical Properties
- 2.3 Initial and Boundary Value Problems for System of Hyperbolic Equations
- 2.4 Riemann Problem for Solution with Discontinuity
- Reference

Chapter 3 Numerical Solutions of Partial Differential Equations

- 3.1 Finite Difference Method
- 3.2 Full Discretization of Partial Differential Equations
- 3.3 Finite Volume Method
- 3.4 Finite Element Method
- 3.5 Spectral Method
- Reference
- Problems

Chapter 4 Finite Difference Method with High Order Accuracy and Behavior Analysis of Numerical Solutions

- 4.1 Model Equations and Their Semi-Discretizations
- 4.2 Difference Approximation with High Order Accuracy
- 4.3 Analysis of Accuracy and Resolution of Numerical Solutions
- 4.4 Dissipation and Dispersion Effects in Numerical Solutions
- 4.5 Group Velocity of Wave Packets in Numerical Solutions
- 4.6 Behavior Analysis of Numerical Solutions
- 4.7 Dissipation and Dispersion Effects from Time Discretization
- Reference
- Problems

Chapter 5 Solution of System of Algebraic Equations

- 5.1 Gauss Elimination
- 5.2 Alternating Direction Implicit (ADI) Method for One-Dimensional Problems
- 5.3 Iterative Methods for Solving System of Algebraic Equations
- 5.4 ADI Method for Two-Dimensional Problems
- 5.5 Solution of System of Non-Linear Equations
- 5.6 Time Dependent Method and Method with Local Time Increment
- 5.7 Multi-Grid Method
- Reference
- Problems

Chapter 6 Discretization of Compressible Aerodynamics Equations

- 6.1 One-Dimensional Aerodynamics Equations and Jacobian Matrix Splitting
- 6.2 Discretization of One-Dimensional Euler Equations
- 6.3 Godunov Method for Solutions with Discontinuity
- 6.4 Roe Scheme and Roe Decomposition of Flux Vector
- 6.5 Difference Approximation for Multi-Dimensional Problems
- 6.6 Difference Approximation of Viscous Terms in Navier-Stokes Equations
- Reference
- Problems

Chapter 7 Difference Schemes with High Resolution of Shocks

- 7.1 Non-Physical Oscillations in Numerical Solutions
- 7.2 First Order Accurate TVD Schemes
- 7.3 Second Order Accurate TVD Schemes
- 7.4 Application of TVD Scheme for Solving Aerodynamics Equations
- 7.5 MUSCL Schemes
- 7.6 Other Schemes with High Resolution of Shocks
- Reference
- Problems

Chapter 8 Difference Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations

- 8.1 Governing Equations
- 8.2 Artificial Compressibility Method for Incompressible Navier-Stokes Equations
- 8.3 Solution of Primitive Incompressible Navier-Stokes Equations
- 8.4 Stream Function-Vorticity Method
- Reference
- Problems

Chapter 9 Technique of Mesh Grid Generation

- 9.1 Mesh Grid Generation
- 9.2 Instructed Mesh Grid

9.3 Finite Difference Scheme on Non-Uniform Mesh**Reference****Problems****Index****English-Chinese Bilingual Name-List****Synopsis****Contents****A Brief Introduction to the Authors**