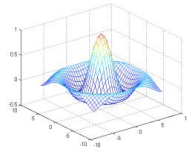


# 五一数学建模竞赛



## 题目： 公交最优排班模型

### 摘要

随着徐州市经济的快速发展，公交车系统对于人们的出行扮演着越来越重要的角色，在公交车资源有限的情况下，公交车车辆的使用数量会直接影响公交车的利用效率，因此对公交运行的合理编排（排班）进行探讨具有现实指导意义。

为了研究徐州市 2 路公交车在满足某些条件下的排班问题，本文基于 *Matlab* 得出所需公交车的最少数量，再利用 *Lingo* 得出合理的单双班公交排班表，算法较为快捷。

针对问题一，需要解决 2 路公交车在早高峰所需要使用的最少公交车数量。只需要建立一个简单的线性最优函数模型，加上约束条件，可用直接求出早高峰时期的最少公交数为 16，其中单班车小于等于 8 辆，双班车大于等于 8 辆。

针对问题二，需要解决在问题一的基础上，一天内最少公交数量的排班问题。我们建立 0-1 模型，确定 0-1 变量  $w_1^i$ ， $w_2^i$  及约束条件，用 *Matlab* 求解出最少的 2 路公交车数量为 16 辆，其中单班车数量范围为  $[0, 8]$ ，双班车数量范围为  $[8, 16]$ 。接着在 *Lingo* 中编程得到 2 路公交车排班表。（见附录 9.2.1 表 1-2）

针对问题三，需要解决在问题二的基础上，将单班车的数量限制在三辆以上的排班问题。建立 0-1 模型，参照问题二的结果，知最少的公交车数量为 16 辆，用 *Matlab* 验证此结论是正确的，其中单班车数量范围为  $[3, 8]$ ，双班车数量范围为  $[8, 13]$ 。接着在 *Lingo* 中编程得到 2 路公交车排班表。（见附录 9.2.2 表 1-3）

针对问题四，考虑的实际因素比较多，我们另外确定 0-1 变量  $X_{ijk}$  和  $Y_{ijk}$  及约束条件，构成 0-1 模型，运用 *Lingo* 编程得出公交车排班表（见附录 9.2.3 表 1-5），以及求出最少的公交车数量为 22，其中单班 3 辆，双班 19 辆。

最后，我们对模型进行评价，分析了本模型的优缺点，而本模型最主要的优点就是思想简单，具有启发性，考虑比较全面，结果比较精确，可行度与可操作性高，在现实生活中具有重要的实际指导意义。

**关键词：**最少车辆数，*Matlab* 编程，*Lingo* 编程，0-1 模型，排班问题

## 一、问题重述

### 1.1 问题背景

随着徐州市经济的快速发展，公交车系统对于人们的出行扮演着越来越重要的角色。在公交车资源有限的情况下，合理的编排公交车的行车计划成为公交公司亟待解决的问题。公交运行班次的编排设计是公交运行计划的第一道工序，公交班次编排的科学与否，直接影响到乘客出行方便度、车辆满载率、运行安全和企业的经济效益。

### 1.2 问题概述

本文是典型的排班问题，基于线路的基本情况及相关规定和假设为：

(1) 班次：1 辆公交车从起点出发到达终点停止为 1 个班次。

(2) 单班车和双班车都可以用于公交车排班。

(3) 单班车：由同一个驾驶员驾驶的公交车。单班车通常要求在早高峰跑 2-3 个班次，晚高峰 2-3 个班次，一天不超过 5 个班次。

(4) 双班车：由两个驾驶员驾驶的公交车。双班车要求上、下午各一个司机，上午和下午司机的工作时间尽可能均匀，并且都不超过 8 小时。每辆双班车一天运行不超过 10 个班次。

(5) 公交车运行的单程时间，已经包含乘客在各站(包括起点和终点)的上下车时间。

(6) 假设每辆公交车可以运行 1 整天不需要加油。

(7) 末班车的发车时间，可以在原有的基础上调整 2 分钟 ( $\pm 2$  分钟)。

(8) 本题以简单的环路公交路线为例，即公交车从 A 点出发，经过一系列站点后再次回到 A 点为 1 个班次。

最短停站时间是指公交车完成 1 个班次之后，开始运行下一个班次之前，需要在终点停留的最短的时间。在问题 1-3 中，每辆公交车的最短停站时间为 0，即：公交车回到终点后不需要停留，可以继续运行下一班次。重点解决以下问题：

问题一：徐州市 2 路公交车行车信息如附录 9.1 表 1。请建立数学模型，计算徐州市 2 路公交车，在早高峰时段(6:00-8:00)运行所需要使用的最少公交车数量(需要给出含单班车和双班车各多少辆)。

问题二：在问题一的基础上，请建立数学模型并设计相应的求解算法，给出徐州市 2 路公交车完成一整天的运行所需要最少的公交车的数量(需要给出含单班车和双班车各多少辆)，并按照如附录 9.1 表 2 的格式给出公交车排班计划表。

问题三：在问题二的基础上，如果要求单班车不少于 3 辆，请建立数学模型并设计相应的求解算法，给出徐州市 2 路公交车完成一整天的运行所需要最少的公交车的数量(需要给出含单班车和双班车各多少辆)，并按照如附录 9.1 表 2 的格式给出公交车排班计划表。

问题四：在公交车排班过程中，除以上要求之外，还需要考虑如下的实际因素的限制：

(a) 单班车司机不安排吃饭，所有双班车司机都安排吃饭(早餐和晚餐)，每餐饭需要 20 分钟用餐时间。早餐 8:00 开始供应，10:00 截止；晚餐 18:00 开始供应，20:00 截止。

(b) 限定双班车辆的数量为 19 辆。

(c) 双班车辆运行 5 班次以后，上午、下午班司机进行换班，换班时间最少为 20 分钟(含最短停站时间)。

试建立数学模型并设计相应的求解算法，并以如附录 9.1 表 3 给出的行车信息表为例，给出徐州市 2 路公交车行车信息调整后，完成一整天的运行所需要最少的公交车的数量(需要给出含单班车和双班车各多少辆)，并按照如附录 9.1 表 2 的格式给出公交车排班计划表。

## 二、模型假设

1. 公交在各个时间段内是匀速行驶的, 途中没有堵车和意外事故;
2. 8:00 时刻发出的那班车属于日间平峰时段的一个班次;
- 3 本文以分钟作为最小的时间单位，下面不再作相应说明;
4. 若公交车在行驶的途中（还没完成一个班次）就已经从一个时间段变为另一个时间段，则取其出发时的那个时间段的单程时间来计算;
5. 双班车司机只要在供应时间内到达早、晚餐供应点就能完成用餐;
6. 假设双班车司机吃饭和换班的时间不属于工作时间。

## 三、符号说明

表 1-1

符号	意义
$w$	一整天运行所需要使用的最少公交车数量
$w_1$	早高峰时段运行所需要使用的公交车数量
$w_{11}$	早高峰时段所需使用的单班车数量
$w_{21}$	早高峰时段所需使用的双班车数量
$w_0$	早高峰时段公交的总运行班次数
$\Delta t_j$	早高峰时段第 $j$ 个班次与第 $j+1$ 个班次的车之间的发车间隔
$w_{1k}^i$	依公交行车信息表 1，将时间分为 4 段，第 $k$ 段里第 $i$ 辆单班车的运行班次数。(k=1, 2, 3, 4)

$w_{2k}^i$	依公交行车信息表 1，将时间分为 4 段，第 $k$ 段里第 $i$ 辆双班车的运行班次数。（ $k=1, 2, 3, 4$ ）
$X_{ijk}$	第 $i$ 辆单班车在第 $k$ 个时段的第 $j$ 个班次
$Y_{ijk}$	第 $i$ 辆双班车在第 $k$ 个时段的第 $j$ 个班次
$C_{ik}$	第 $i$ 辆公交车在第 $k$ 个时段等待的时间间隔
$C_i$	第 $i$ 辆双班车司机的吃饭时间点
$D_i$	第 $i$ 辆双班车司机的换班时间
$D_{ik}$	第 $i$ 辆公交车在第 $k$ 个时段的行车单程时间
$Z_{ij}$	第 $i$ 辆双班公交车的第 $k$ 个班次的单程行车时间；
$L_{ij}$	为第 $i$ 辆双班公交车的第 $j$ 个班次的等候时间

## 四、问题分析

本题研究的是公交车排班问题，问题一至四为四种递进情况下合理编排公交的问题。本文的解题思路也是沿着这样的思想一步一步展开的，即通过简单到复杂的情况逐步展开讨论。

### 4.1 问题一的分析

针对问题一，我们只需要讨论早高峰时期的公交编排问题：

首先，根据题意，将早高峰时间的公交排班分为单班车和双班车两部分；

其次，已知早高峰时期单程时间为 80 分钟，并且我们知道单班车在高峰时间要跑 2 到 3 个班次，而双班车没有班次限制。据此，我们可以求出需要使用的公交车数量，然后可以确定单班车在两个小时（早高峰时期）内的首次发车时间上限（6:40 之内发首班车）；

最后，根据每段时间间隔，取每个班次间隔时间的最大值为 5 分钟，即可得出早高峰时期要安排的最少公交数量为 16，并且确定单班车在早高峰时段可以被安排的最大数量为 8 辆，再求出双班车被安排的数量不小于 8 且不大于 16。

### 4.2 问题二的分析

针对问题二，在问题一的基础上设计公交车的排班方案属于典型的分配模型。考虑单班车与双班车的约束条件及早高峰需要使用最少公交车数量，求解出了每

天的最多运行班次为 120，在 *Matlab* 中用 *intlinprog* 函数产生出此 0-1 模型的最优解，接着在 Lingo 中编程得出徐州市 2 路公交车行车的排班表。

4.3 问题三的分析

基于第二问，问题三将单班车一整天的编排车辆数辆限制在 3 辆以上。给出 0-1 模型的目标函数及约束条件，设计算法，求出最优解，再在 Lingo 中编程得出徐州市 2 路公交车行车的排班表。

4.4 问题四的分析

问题四考虑了许多实际因素，加入了对应的限制条件，即要考虑 38 位双班车司机在吃饭和换班时候不能进行某些班次，再联立题目给出的其余约束条件，建立模型，利用 Lingo 编程求出单双车司机的排班表，以及求出最少车辆数，注意，此处双班车司机的数量为双班车数量的 2 倍关系。。

五、模型建立与求解

5.1 问题 1 的模型及求解

5.1.1 建模过程

我们要求早高峰时期需要使用的最少公交车数量，这是一个优化问题，建立一个最优函数模型，机理分析如下：

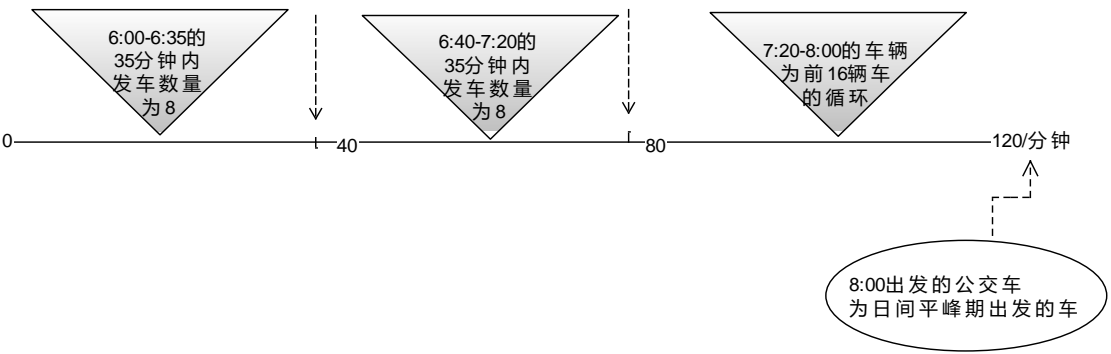


图 1-1 早高峰公交排班示意图

## 5.1.2 模型建立

$$\begin{aligned}
 &\text{目标函数} \quad \min \quad w_1 = w_{11} + w_{21} \\
 &\text{约束条件} \quad s.t. \quad \begin{cases} w_0 = \sum_{i=1}^{w_{11}} w_{11}^i + \sum_{i=1}^{w_{21}} w_{21}^i \\ \sum_{j=1}^{w_0-1} \Delta t_j \leq 120 \\ 3 \leq \Delta t_j \leq 5 \\ w_{11}^i = \{0,1\} \\ w_{21}^i = \{0,1\} \\ i, j \in N^* \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 5.1.3 模型的求解

### 1. 算法

Step1: 考虑没约束条件下的最优解,  $w_1 \leq \left\lceil \frac{40}{5} \right\rceil$ ,  $w = \left\lceil \frac{80}{5} \right\rceil$ ;

Step2: 代入约束条件中验证此结果是否满足;

Step3: 若满足, 则输出此结果; 若不满足, 则无解。

### 2. 结果

早高峰时段运行所需的最少公交车数量为  $80 \div 5 = 16$  辆, 其中单班车数量小于等于 8 辆, 双班车数量大于等于 8 辆, 但总和为 16 辆。

## 5.2 问题 2 的模型及求解

### 5.2.1 建模过程

在第一题的基础上, 已知了高峰期 (第 1 个时间段) 最少公交车数量为 16, 我们以此为一个约束条件, 即早高峰时段内单班车的数量不大于 8, 双班车的数量不小于 8 且不大于 16, 而且早高峰时间段内第  $i$  个单班车的运行班次数只能为 0 或 2。据此建立 0-1 规划最优模型, 取最大发车时间间隔, 经计算单班车最多有 120 个班次 (双班车也最多 120 个班次), 由此确定 0-1 变量  $w_1^i$ ,  $w_2^i$ , 再根据

题目约束条件, 求出最优解。再在 *Lingo* 软件中编程得到排班表。(见附录)

## 5.2.2 模型的建立

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } \min w &= \sum_{i=25}^{120} w_1^i + \sum_{i=25}^{120} w_2^i + 16, \quad w_1^i = \begin{cases} 0 & w_{1k}^i = 0 \\ 1 & w_{2k}^i \neq 0 \end{cases}, w_2^i = \begin{cases} 0 & w_{1k}^i = 0 \\ 1 & w_{2k}^i \neq 0 \end{cases} \\ \text{约束条件 } s.t. &\begin{cases} 0 \leq \sum_{i=1}^8 w_1^i \leq 8 \\ 8 \leq \sum_{i=1}^8 w_2^i \leq 16 \\ 0 \leq \sum_{k=1}^4 w_{2k}^i \leq 10 \\ 0 \leq \sum_{k=1}^4 w_{1k}^i \leq 5, w_{11}^i \in \{0,1\} \end{cases} \quad i = \{1, 2, 3, \dots, 120\}, k = \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

## 5.2.3 模型的求解

### 1. 算法

求出最少车辆的算法

Step1: 将约束条件中的变量统一写成一个形式，方便第二步矩阵化，

$$\text{目标函数: } w = \sum_{i=1}^{120} w_{1i} + \sum_{j=1}^{120} w_{2j} \Rightarrow w = \sum_{n=1}^{240} w_n \quad w_n \text{ 表示第 } n \text{ 辆车}$$

$$w_n = \begin{cases} 0 & \text{无班次} \\ 1 & \text{有班次} \end{cases}$$

$$\text{约束条件: } s.t. \begin{cases} \sum_{n=1}^{24} w_n \leq 8 & \text{--早高峰最多只安排8辆单班车} \\ \sum_{n=1}^{112} w_n \leq 8 & \text{--晚高峰最多只安排8辆单班车} \\ 8 \leq \sum_{n=121}^{145} w_n \leq 16 & \text{--早高峰至少8辆双班车} \\ 8 \leq \sum_{n=121}^{223} w_n \leq 16 & \text{--晚高峰至少8辆双班车} \end{cases}$$

Step2: 将约束条件矩阵化

$$A = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1 \end{bmatrix}_{242 \times 240}$$

$$b = [8, 8, 5, 5, \dots, 5]_{1 \times 242}$$

$$Aeq = \begin{bmatrix} 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \\ 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}_{2 \times 240}$$

$$beq = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$W_n = [w_1, w_2, \dots, w_{240}] \Rightarrow W_n' = [w_1, w_2, \dots, w_{240}]'$$

注：A 为 242×240 矩阵，第二行前面 112 个元素为 1；

Aeq 为 2×240 矩阵，第一行第 1 个元素到第 24 个元素为 1，第 121 个元素到第 145 个元素为 1，其余元素为 0；第二行第一个元素到第 112 个元素为 1，第 121 个元素到第 223 个元素为 1，其余元素为 0；

$W_n'$  为  $W_n$  的转置，为一个 240 个元素的列向量。

Step3: 根据约束条件列出等式和不等式  $\begin{cases} AW_n' \leq b \\ AeqW_n' = beq \end{cases}$ ；接着用 Excel 将数据导入

Matlab 中，再利用 Matlab 软件编程求解（程序见附录）即可得最少公交车数量以及单双班车辆数。

## 2. 结果

通过 Matlab 程序求解可得最少车辆数也为 16，其中单班车数量小于等于 2，双班车数量大于等于 14 小于等于 16。我们按照单班车 2 辆，双班车 14 辆来排班。排班表详见附录 9.2.1 表 1-2。

## 5.3 问题 3 的模型及求解

### 5.3.1 建模过程

这依然是个 0-1 模型，相比第二问，多了对单班车数量的一个约束条件（不



少于 3 辆), 转化为相应公式就是  $3 \leq \sum_{i=1}^{120} w_1^i \leq 120$ , 接着按照第二问的解法, 用

*Matlab* 软件编程求出最优解。最后再用 *Lingo* 软件进行排班处理 (见附录), 得出公交编排表。

### 5.3.2 模型的建立

$$\begin{aligned} \text{目标函数 } \min w &= \sum_{i=25}^{120} w_1^i + \sum_{i=25}^{120} w_2^i + 16, \quad w_1^i = \begin{cases} 0 & w_{1k}^i = 0 \\ 1 & w_{2k}^i \neq 0 \end{cases}, w_2^i = \begin{cases} 0 & w_{1k}^i = 0 \\ 1 & w_{2k}^i \neq 0 \end{cases} \\ \text{约束条件 } s.t. & \begin{cases} 0 \leq \sum_{i=1}^8 w_1^i \leq 8 \\ 8 \leq \sum_{i=1}^8 w_2^i \leq 16 \\ 0 \leq \sum_{k=1}^4 w_{2k}^i \leq 10 & i = \{1, 2, 3, \dots, 120\}, k = \{1, 2, 3, 4\} \\ 0 \leq \sum_{k=1}^4 w_{1k}^i \leq 5, w_{1k}^i \in \{0, 1\} \\ 3 \leq \sum_{i=1}^{120} w_1^i \leq 120 \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.3.3 模型的求解

#### 1. 算法

求出最少车辆的算法

Step1: 将约束条件中的变量统一写成一个形式, 方便第二步矩阵化,

$$\text{目标函数: } w = \sum_{i=1}^{120} w_{1i} + \sum_{j=1}^{120} w_{2j} \Rightarrow w = \sum_{n=1}^{240} w_n \quad w_n \text{ 表示第 } n \text{ 辆车}$$

$$w_n = \begin{cases} 0 & \text{无班次} \\ 1 & \text{有班次} \end{cases}$$

$$\text{约束条件: } s.t. \begin{cases} \sum_{n=1}^{24} w_n \leq 8 & \text{--早高峰最多只安排8辆单班车} \\ \sum_{n=1}^{112} w_n \leq 8 & \text{--晚高峰最多只安排8辆单班车} \\ 8 \leq \sum_{n=121}^{145} w_n \leq 16 & \text{--早高峰至少8辆双班车} \\ 8 \leq \sum_{n=111}^{223} w_n \leq 16 & \text{--晚高峰至少8辆双班车} \\ \sum_{n=1}^{120} w_n \geq 3 & \text{--单班车数量不少于3辆} \end{cases}$$

Step2:将约束条件矩阵化

$$A = \begin{bmatrix} 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \\ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1 \end{bmatrix}_{242 \times 240}$$

$$b = [8, 8, 5, 5, \dots, 5]_{1 \times 242}$$

$$Aeq = \begin{bmatrix} 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \\ 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}_{2 \times 240}$$

$$beq = \begin{bmatrix} 16 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$W_n = [w_1, w_2, \dots, w_{240}] \Rightarrow W_n' = [w_1, w_2, \dots, w_{240}]'$$

$$C = [1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0]_{1 \times 240}$$

注:  $A$  为  $242 \times 240$  矩阵, 第二行前面 112 个元素为 1;

$Aeq$  为  $2 \times 240$  矩阵, 第一行第 1 个元素到第 24 个元素为 1, 第 121 个元素到第 145 个元素为 1, 其余元素为 0; 第二行第一个元素到第 112 个元素为 1, 第 121 个元素到第 223 个元素为 1, 其余元素为 0;  
 $C$  为一个  $1 \times 240$  矩阵, 前面 120 个元素为 1, 后面 120 个元素为 0;  
 $W_n'$  为  $W_n$  的转置, 为一个 240 个元素的列向量。

Step3:根据约束条件列出等式和不等式 
$$\begin{cases} AW'_n \leq b \\ AeqW'_n = beq; \\ CW'_n \geq 3 \end{cases}$$
 接着用 *Excel* 将数据导

入 *Matlab* 中, 再利用 *Matlab* 软件编程求解 (程序见附录) 即可得最少公交车数量以及单双班所需车辆数。

## 2. 结果

经过 *Matlab* 计算, 得到第三问所使用的最少公交车为 16 辆, 我们的单班车数量大于等于 3 小于等于 8, 双班车大于等于 9 小于等于 13 辆, 下面按照单班车 3 辆, 双班车 13 辆来排班。排班表详见附录 9.2.2 表 1-3。

## 5.4 问题 4 的模型及求解

### 5.4.1 建模过程

首先我们也按照 0-1 模型来计算, 我们可以取每段的最大发车间隔, 即可求分别计算出每一辆公交车的最大单班车班次与最大双班车班次, 都为 353 (向上取整), 还可求每段时间的最大发车班次, 如下表:

表格 1-4

编号	时间段	时段起止时间	公交车的最大班次(范围)
1	早平峰时段	04:30-05:00	[4, 6]
2	早平峰时段	05:00-06:00	[10, 20]
3	早高峰时段	06:00-08:00	[30, 60]
4	日间平峰时段	08:00-16:00	[60, 80]
5	晚高峰时段	16:00-18:00	[30, 60]
6	晚平峰时段	18:00-22:15	[30, 57]
总和		1065 分钟	353

而第四问已知双班车数量为 19, 所以我们得到单班车最大车辆数为 40. 我们的目标是求最少车辆数, 为此我们先设 0-1 变量,  $X_{ijk}$  和  $Y_{ijk}$ :

$$X_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 辆单班车在第 } k \text{ 个时段的第 } j \text{ 个班次;} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 辆单班车在第 } k \text{ 个时段的第 } j \text{ 个班次;} \end{cases}$$

$$Y_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{第 } i \text{ 辆双班车在第 } k \text{ 个时段的第 } j \text{ 个班次;} \\ 1, & \text{第 } i \text{ 辆单班车在第 } k \text{ 个时段的第 } j \text{ 个班次;} \end{cases}$$

$$k = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; i = \{1, 2, 3, \dots, 40\}, j = \{1, 2, 3, \dots, 353\}.$$

接着, 由于实际所需的单班车数量是不清楚的, 为此我们假设为  $p$  辆。然后

我们在给出目标函数，根据题意确定约束条件。这里双班车司机吃饭问题与换班问题对本模型的约束极为重要，需着重考虑。然后再利用 *Matlab* 软件编程求解即可得我们的最优解。

#### 5.4.2 模型的建立

目标函数值：  $X_{ij}$  ,  $Y_{ij}$  ,  $C_{ij}$  ,  $D_{ij}$

$$\text{约束条件:} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [4, 6], k = 1 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [10, 20], k = 2 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [30, 60], k = 3 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [80, 160], k = 4 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [30, 60], k = 5 \\ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^n (X_{ijk} + Y_{ijk}) \in [30, 57], k = 6 \\ X_{ijk} \in [2, 3], k = 3, i = 1, \dots, m \\ X_{ijk} \in [2, 3], k = 5, i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n X_{ijk} \leq 5 (\forall i) \\ \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^n Y_{ijk} (C_k + D_k) \leq 480, l = 1, \dots, 6, i = 1, \dots, 40 \\ \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^n Y_{ijk} = 0 (i > 19) \\ \sum_{k=1}^6 \sum_{j=1}^n Y_{ijk} \neq 0 (i \leq 19) \\ Y_{ijk}, Y_{i(j+1)k}, Y_{i(j+2)k} = 0 (C_i \in 4) \text{---} 4 \text{为第4个时间段} \\ Y_{ijk}, Y_{i(j+1)k} = 0 (C_i \in 6) \text{---} 6 \text{为第6个时间段} \end{array} \right.$$

由于  $j$  和  $k$  相互限制，所以也可以写成：

$$C_{ij} = \begin{cases} 0, \text{第} i \text{辆双班车的司机在第} j \text{个班次不吃饭} \\ 1, \text{第} i \text{辆双班车的司机在第} j \text{个班次吃饭} \end{cases};$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0, \text{第} i \text{辆双班车的司机在第} j \text{个班次没有换班} \\ 1, \text{第} i \text{辆双班车的司机在第} j \text{个班次换班} \end{cases};$$

$$\text{约束条件s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=14}^{43} X_{ij} = \{2,3\} \quad \% \text{早高峰}(i=1,\dots,p) \\ \sum_{k=124}^{153} X_{ij} = \{2,3\} \quad \% \text{晚高峰}(i=1,\dots,p) \\ \sum_{j=1}^{353} X_{ij} \leq 5(\forall i) \\ \sum_{k=1}^n (L_{ij} + Z_{ij}) Y_{ij} \leq 480 \\ \sum_{k=1}^n Y_{ij} \leq 10 \\ \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n Y_{ij} = 0 (p > 19) \\ \sum_{k=1}^n Y_{ij} \neq 0 (\forall i \leq 19) \\ \text{当 } C_{ij} = 1, Y_{ij}, Y_{i(j+1)}, Y_{i(j+2)} = 0, (j = [44, 123]) \\ \text{当 } D_{ij} = 1, Y_{ij}, Y_{i(j+1)}, Y_{i(j+2)} = 0, (j = [44, 123]) \\ X_{ij} + X_{i(j+1)} < 2 \\ Y_{ij} + Y_{i(j+1)} < 2 \\ k = (1, 2, \dots, n), i = (1, 2, \dots, p) \end{array} \right.$$

其中

$L_{ij}$  为第  $i$  辆双班公交车的第  $j$  个班次的等候时间；

$Z_{ij}$  为第  $i$  辆双班公交车的第  $j$  个班次的单程行车时间；

### 5.4.3 模型的求解

#### 1. 算法

Step1: 先将模型中的一部分约束条件组合在一起，用 *Lingo* 软件编程得到 2

路公交车排班表；

Step2: 根据排班表可以计算出最少 2 路公交车使用的最少车辆数以及对应的单双班的车辆数，将此结果与另一部分约束条件进行比较，看其是否符合；

Step3: 若符合，则输出所得结果；若不符合，则再重新选择一部分约束条件，回到 Step1.

#### 2. 结果

最少公交车数量为 22 辆，其中单班车为 3 辆，双班车为 19 辆。排班表详见附录 9.2.3 表 1-5。

## 六、模型检验

### 6.1 问题一

#### 6.1.1 误差分析

1. 由于发车时间间隔的变动,实际的最小车辆数可能比算出来的理论值稍大;
2. 由于对公交行车途中的速度并没有作详细的讨论,当公交从一个时段行驶至另一个时段时,由于人流密度等因素影响,引起速度改变,从而影响了总班次数,进而可能间接对最小车辆数造成影响。

#### 6.1.2 结果分析

我们通过先确定发车间隔,再由单班车的性质得到我们所需的结果,早高峰时段运行所需的最少公交车数量为 16 辆,其中单班车数量小于等于 8 辆,双班车数量大于等于 8 辆,总和为 16 辆不变。此方法简单,结果易得,且符合实际。

#### 6.1.3 模型检验

按照计算的结果利用 *Lingo* 软件得出 2 号公交排班表,其结果符合实际,满足各个约束条件,说明本模型正确合理,是可行的。

### 6.2 问题二和问题三

#### 6.2.1 误差分析

1. 考虑平峰时段与高峰时段边缘发车的行车时间影响,会产生一定的误差;
2. 由于时段边缘点发车时间,实际的最小车辆数可能比算出来的大一点;
3. 由于发车间隔属于变量,而我们计算时采用取最大为条件,可能结果会有误差。

#### 6.2.2 结果分析

通过 *Matlab* 软件自己设计算法,计算求得结果,结果比较精确。我们得出第二问的最少车辆数为 16,单班小于等于 8 辆,双班大于等于 8 辆,总公交数为 16 辆不变;第三问的最少车辆数为 16,单班车大于等于 3 辆小于等于 8 辆,双班大于等于 9 辆小于等于 13 辆。结果与实际相符,每个公交车司机上班的时间都符合实际情况,车辆数也合乎情理,这表明结果无误可行。

### 6.2.3 模型检验

按照计算的结果利用 *Lingo* 软件得出 2 号公交排班表，发觉符合实际，和生活中的排班模型基本一致，所以本模型是正确合理的，是可行的。

## 6.3 问题四

### 6.3.1 误差分析

1. 每辆车的停留时间不确定，是按照均匀分布的取法来取的，这使得计算结果存在一定的误差；
2. 公交车途中行车时间并未做细致的讨论，因此带来的时间误差不可忽略；
3. 发车时间间隔的取法不是很准确，由此也带来了一定的误差。

### 6.3.2 结果分析

经过 *Lingo* 编程算出结果，一整天内所使用的最少车辆数为 22 辆，其中单班车为 3 辆，双班车为 19 辆，具体排班表在附录中给出，单班车与双班车的排班表经过验证与实际相符合，且满足各个约束条件，由此说明结果正确有效。

### 6.3.3 模型检验

将我们得到的结果利用 *Lingo* 软件安排出 2 路公交车排班表后，每个时段分别对应回到模型中看是否符合实际，可以看出我们得到的结果是合理的。

## 七、模型的评价及改进

### 7.1 问题一模型的评价

#### 7.1.1 模型的优点

1. 计算简单，结果准确，符合实际，具有可行性；
2. 用图式的方式表达出来，更生动形象，方便理解。

#### 7.1.2 模型的缺点

还有许多实际因素没有考虑进去，模型较简单，约束条件不多。

#### 7.1.3 模型的改进

可以再用枚举法一一列出第一问的单双班用车的情况，在利用 2 路公交车的排班表，观察哪一个更合理，从而选择时间安排合理的那一个。

## 7.2 问题二和三模型的评价

### 7.2.1 模型的优点

1. 通过比较运筹学求解与 *Matlab* 软件求解，建模过程严谨，很有启发性；*Matlab* 求解过程简单，求值较精确。用 *Lingo* 软件排出的排班表，结果精确，比较合理；
2. 建立的模型能与实际紧密联系，可操作性强，使模型更贴近实际，通用性、推广性较强；
3. 该模型考虑比较全面，不仅计算出了最少车辆数，还给出了单双班公交的排班表，目的明确，结果准确，公交编排计划合理可行；
4. 将运行时间看作均匀分布，简化了对随机性问题的处理，同时又符合实际情况；
5. “峰段排班法”是以客流量科学准确的调查为前提设计出来的，利用“峰段排班法”进行的班次编排计划，既能够根据客流量大小随时调整车隔，满足公交线路客流量的需求，又节约了运营成本，对公交企业提升服务水平和成本控制具有重要而积极的意义。[2]

### 7.2.2 模型的缺点

1. 不足之处是建模过程创新不足，约束条件可能不全面，知识面有待拓展；
2. 考虑平峰期与高峰期边缘发车的行车时间影响，会导致一定的误差产生；
3. 时间段分得不够精细，比较粗糙，可以再细分平缝、高峰时间段。

### 7.2.3 模型的改进

1. 据此模型所建立的运输系统可以很好的解决公交线上公交车的调度问题。但我们也有许多实际因素还没考虑进去，在解决实际问题时可以代入更多的约束条件使之更为准确；
2. 公交车途中行车时间并未做细致的讨论，实际上存在下述两种特殊情况：
  - (1) 某班车发车时处于平峰时段，但一段时间后处于高峰时段；
  - (2) 某班车发车时处于高峰时段，但一段时间后处于平峰时段；这两种情况都会造成公交车在路上运行的时间误差，因此要对处于两种时段之间的公交车的行车时间做修正。[3]
3. 对于单双班数量不确定的情况，我们可以再用枚举法一一列出第一问的单双班用车的情况，在利用 2 路公交车的排班表，观察哪一个更合理，从而选择时间安排合理的那一个。

## 7.3 问题四模型的评价

### 7.3.1 模型的优点

1. 相比前三个问题，第四个模型考虑了更多的实际因素，更符合实际；
2. 约束条件越多，所求出的结果越精确并且我们用 *Lingo* 软件排出的排班表，



公交排班表安排比较合理；

3. 通过运筹学求解与 *Lingo* 软件求解，我们知道，运筹学逻辑性强，过程严谨，值得思考，而用 *Lingo* 求解，过程简单，求值较精确；

4. “峰段排班法”是以客流量科学准确的调查为前提设计出来的，第四问的时间段（平峰，高峰）区分很精确，相比前三个问题更加有实际意义。

### 7.3.2 模型的缺点

1. 约束条件过多，公式较复杂，计算较困难；
2. 没有考虑考虑平峰期与高峰期边缘发车的行车时间影响，会导致一定的误差产生。

### 7.3.3 模型的改进

公交车途中行车时间并未做细致的讨论，实际上存在下述两种特殊情况：

（1）某班车发车时处于正常时段，但一段时间后处于高峰时段；

（2）某班车发车时处于高峰时段，但一段时间后处于正常时段；

这两种情况都会造成公交车在路上运行的时间误差，因此要对处于两种时段之间的公交车的行车时间做修正。[3]

## 八、参考文献

- [1] 陈理荣，数学建模导论，北京：北京邮电大学出版社，1992；
- [2] 聂涛，公交班次的科学设计方法，<https://wenku.baidu.com/view/aaa03a835ef7ba0d4a733ba5.html>，20170430；
- [3] 王青春、王诗怡、朱倩，数模训练公交司机排班方案，<https://wenku.baidu.com/view/18511182680203d8ce2f24c4.html>，20170430。

九、附录

9.1 问题相关表格

表 1 徐州市 2 路公交车行车信息表

时段性质	时段开始时间	时段结束时间	单程时间 (分钟)	发车间隔 (分钟)	最短停站时间 (分钟)
早高峰时段	06:00	08:00	80	$4.0 \pm 1.0$	0
日间平峰时段	08:00	16:00	70	$7.0 \pm 2.0$	0
晚高峰时段	16:00	18:00	80	$4.0 \pm 2.0$	0
晚平峰时段	18:00	20:30	75	$4.5 \pm 2.5$	0

表 2 徐州市 2 路公交车排班计划表

车辆编号	车辆性质 (填写单班或双班)	起点发车时间	返回终点时间	每辆车的总班次	上午司机班次 (仅双班车需要填写)	下午司机班次 (仅双班车需要填写)
1						
2						
...	...	...	...	...	...	...
汇总信息：总车辆数( )，总双班车数量( )，总单班车数量( )，所有车的总班次次数( )						

注：本表格可以根据需要增减行数（第一行和最后一行不能删除），不能增减列数。

表 3 调整后的徐州市 2 路公交车行车信息表

时段性质	时段开始时间	时段结束时间	单程时间 (分钟)	发车间隔 (分钟)	最短停站 时间 (分钟)
早平峰时段	04:30	05:00	70	$7.0 \pm 2.0$	10
早平峰时段	05:00	06:00	70	$4.5 \pm 1.5$	10
早高峰时段	06:00	08:00	75	$3.0 \pm 1.0$	10
日间平峰时段	08:00	16:00	75	$4.5 \pm 1.5$	10
晚高峰时段	16:00	18:00	75	$3.0 \pm 1.0$	10
晚平峰时段	18:00	22:15	70	$6.5 \pm 2.0$	10

## 9.2 路公交排班表结果

### 9.2.1 第二问的 2 路公交排班表

表 1-2

车辆编号	车辆性质 (填写单班或双班)	起点发车时间	返回终点时间	每辆车的总班次	上午司机班次 (仅双班车需要填写)	下午司机班次 (仅双班车需要填写)
1	单班	06:00	07:20	4		
		07:20	08:40			
		16:10	17:30			
		17:34	18:54			
2	单班	06:05	07:25	4		
		07:25	08:45			
		16:16	17:36			
		17:40	19:00			
3	双班	06:10	07:30	8	4	4
		07:30	08:50			
		09:13	10:23			
		11:19	12:29			
		13:25	14:35			
		15:31	16:41			
		17:16	18:36			
		19:01	20:16			
4	双班	06:15	07:35	8	4	4
		07:35	08:55			
		09:22	10:32			
		11:28	12:38			
		13:34	14:44			
		15:40	16:50			

		17: 22	18: 42			
		19: 08	20: 23			
5	双 班	06: 20	07: 40	8	4	4
		07: 40	09: 00			
		09: 31	10: 41			
		11: 37	12: 47			
		13: 43	14: 53			
		15: 49	17: 09			
		17: 28	18: 48			
		19: 15	20: 30			
6	双 班	06: 25	07: 45	8	4	4
		07: 45	09: 05			
		09: 40	10: 50			
		11: 46	12: 56			
		13: 52	15: 02			
		15: 58	17: 08			
		17: 46	19: 06			
		19: 22	20: 37			
7	双 班	06: 30	07: 50	8	4	4
		07: 50	09: 10			
		09: 49	10: 59			
		11: 55	13: 05			
		14: 01	15: 11			
		16: 04	17: 24			
		17: 52	19: 12			
		19: 29	20: 44			
8	双 班	06: 35	07: 55	8	4	4
		07: 55	09: 15			
		09: 58	11: 08			
		12: 04	13: 14			
		14: 10	15: 20			
		16: 22	17: 42			
		17: 58	19: 18			
		19: 36	20: 51			
9	双 班	06: 40	08: 00	8	4	4
		08: 00	09: 10			
		10: 07	11: 17			
		12: 13	13: 23			
		14: 19	15: 29			
		16: 28	17: 48			
		17: 52	19: 12			
		19: 43	20: 58			
1 0	双 班	06: 45	08: 05	8	4	4

			08:09	09:19			
			10:16	11:26			
			12:22	13:32			
			14:28	15:38			
			16:34	17:54			
			17:58	19:18			
			19:50	21:05			
1	1	双 班	06:50	08:10	8	4	4
			08:19	09:29			
			10:25	11:35			
			12:31	13:41			
			14:37	15:47			
			16:40	18:00			
			18:19	19:34			
			19:57	21:12			
1	2	双 班	06:55	08:15	8	4	4
			08:28	09:38			
			10:34	11:44			
			12:40	13:50			
			14:46	15:56			
			16:46	18:26			
			18:26	19:41			
			20:04	21:19			
1	3	双 班	07:00	08:20	8	4	4
			08:37	09:47			
			10:43	11:53			
			12:49	13:59			
			14:55	16:05			
			16:52	18:12			
			18:33	19:48			
			20:11	21:26			
1	4	双 班	07:05	08:25	8	4	4
			08:46	09:56			
			10:52	12:02			
			12:58	14:08			
			15:04	16:14			
			16:58	18:18			
			18:40	19:55			
			20:18	21:33			
1	5	双 班	07:10	08:30	8	4	4
			08:55	10:05			
			11:01	12:11			
			13:07	14:17			

		15： 13	16： 23					
		17： 04	18： 14					
		18： 47	20： 02					
		20： 25	21： 40					
1	6	双	班	07： 15	08： 35	8	4	4
				09： 04	10： 14			
				11： 10	12： 20			
				13： 16	14： 26			
				15： 22	16： 32			
				17： 10	18： 30			
				18： 54	20： 09			
				20： 32	21： 47			
汇总信息：总车辆数（16），总双班车数量（14），总单班车数量（2），所有车的总班次（120）								

### 9.2.2 问题三的 2 路公交排班表

表 1-3

车辆编号	车辆性质 (填写单班或双班)	起点发车时间	返回终点时间	每辆车的总班次	上午司机班次 (仅双班车需要填写)	下午司机班次 (仅双班车需要填写)
1	单班	06: 00	07: 20	5		
		07: 20	08: 40			
		09: 12	09: 22			
		16: 21	17: 41			
		17: 45	19: 05			
2	单班	06: 05	07: 25	5		
		07: 25	08: 45			
		09: 21	09: 31			
		16: 27	17: 47			
		17: 51	19: 11			
3	单班	06: 10	07: 30	5		
		07: 30	08: 50			
		09: 30	10: 40			
		16: 33	17: 53			
		17: 57	19: 17			
4	双班	06: 15	07: 35	8	4	4
		07: 35	08: 55			
		09: 39	10: 49			
		11: 36	12: 46			
		13: 33	14: 43			
		15: 30	16: 40			

		17 : 15	1 8 : 3 5			
		18 : 59	2 0 : 1 4			
5	双班	06 : 20	0 7 : 4 0	9	4	5
		07 : 40	0 9 : 0 0			
		09 : 48	1 0 : 5 8			
		11 : 45	1 2 : 5 5			
		13 : 42	1 4 : 5 2			
		15 : 39	1 6 : 4 9			
		17 : 21	1 8 : 4 1			
		19 : 06	2 0 : 2 1			
		20 : 26	2 1 : 4 1			
6	双班	06 : 25	0 7 : 4 5	8	4	4
		07 : 45	0 9 : 0 5			
		09 : 57	1 1 : 0 7			
		11 : 54	1 3 : 0 4			
		13 : 51	1 5 : 0 1			
		15 : 48	1 6 : 5 8			
		17 : 27	1 8 : 4 7			
		19 : 13	2 0 : 2 8			
7	双班	06 : 30	0 7 : 5 0	8	4	4
		07 : 50	0 9 : 1 0			
		10 : 06	1 1 : 1 6			
		12 : 03	1 3 : 1 3			
		14 : 00	1 5 : 1 0			
		15 : 57	1 7 : 0 7			
		17 : 33	1 8 : 5 3			
		19 : 20	2 0 : 3 5			
8	双班	06 : 35	0 7 : 5 5	8	4	4
		07 : 55	0 9 : 1 5			
		10 : 15	1 1 : 2 5			
		12 : 12	1 3 : 2 2			
		14 : 09	1 5 : 1 9			
		16 : 03	1 7 : 2 3			
		17 : 39	1 8 : 5 9			
		19 : 27	2 0 : 4 2			
9	双班	06 : 40	0 8 : 0 0	8	4	4
		08 : 00	0 9 : 1 0			
		10 : 24	1 1 : 3 4			
		12 : 21	1 3 : 3 1			
		14 : 18	1 5 : 2 8			
		16 : 09	1 7 : 2 9			
		18 : 03	1 9 : 1 8			
		19 : 34	2 0 : 4 9			

10	双班	0 6 : 4 5	0 8 : 0 5	8	4	4
		0 8 : 0 9	0 9 : 1 9			
		1 0 : 3 3	1 1 : 4 3			
		1 2 : 3 0	1 3 : 4 0			
		1 4 : 2 7	1 5 : 3 7			
		1 6 : 1 5	1 7 : 3 5			
		1 8 : 1 0	1 9 : 2 5			
		1 9 : 4 1	2 0 : 5 6			
11	双班	0 6 : 5 0	0 8 : 1 0	8	4	4
		0 8 : 1 8	0 9 : 2 8			
		1 0 : 4 2	1 1 : 5 2			
		1 2 : 3 9	1 3 : 4 9			
		1 4 : 3 6	1 5 : 4 6			
		1 6 : 3 9	1 7 : 5 9			
		1 8 : 1 7	1 9 : 3 2			
		1 9 : 4 8	2 1 : 0 3			
12	双班	0 6 : 5 5	0 8 : 1 5	8	4	4
		0 8 : 2 7	0 9 : 3 7			
		1 0 : 5 1	1 2 : 0 1			
		1 2 : 4 8	1 3 : 5 8			
		1 4 : 4 5	1 5 : 5 5			
		1 6 : 4 5	1 8 : 0 5			
		1 8 : 2 4	1 9 : 3 9			
		1 9 : 5 5	2 1 : 1 0			
13	双班	0 7 : 0 0	0 8 : 2 0	8	4	4
		0 8 : 3 6	0 9 : 4 6			
		1 1 : 0 0	1 2 : 1 0			
		1 2 : 5 7	1 4 : 0 7			
		1 4 : 5 4	1 6 : 0 4			
		1 6 : 5 1	1 8 : 1 1			
		1 8 : 3 1	1 9 : 4 6			
		2 0 : 0 2	2 1 : 1 7			
14	双班	0 7 : 0 5	0 8 : 2 5	8	4	4
		0 8 : 4 5	0 9 : 5 5			
		1 1 : 0 9	1 2 : 1 9			
		1 3 : 0 6	1 4 : 1 6			
		1 5 : 0 3	1 6 : 1 3			
		1 6 : 5 7	1 8 : 1 7			
		1 8 : 3 8	1 9 : 5 3			
		2 0 : 0 9	2 1 : 2 4			
15	双班	0 7 : 1 0	0 8 : 3 0	8	4	4
		0 8 : 5 4	1 0 : 0 4			
		1 1 : 1 8	1 2 : 2 8			



		1 3 : 1 5	1 4 : 2 5			
		1 5 : 1 2	1 6 : 2 2			
		1 7 : 0 3	1 8 : 2 3			
		1 8 : 4 5	2 0 : 0 0			
		2 0 : 1 6	2 1 : 3 1			
16	双班	0 7 : 1 5	0 8 : 3 5	8	4	4
		0 9 : 0 3	1 0 : 1 3			
		1 1 : 2 7	1 2 : 3 7			
		1 3 : 2 4	1 4 : 3 4			
		1 5 : 2 1	1 6 : 3 1			
		1 7 : 0 9	1 8 : 2 9			
		1 8 : 5 2	2 0 : 0 7			
		2 0 : 2 3	2 1 : 3 8			
汇总信息：总车辆数（16），总双班车数量（13），总单班车数量（3），所有车的总班次数（120）						

### 9.2.3 问题四的2路公交排班表

表 1-5

车辆编号	车辆性质 (填写单班或双班)	起点发车时间	返回终点时间	每辆车的总的班次	上午司机班次 (仅双班车需要填写)	下午司机班次 (仅双班车需要填写)
1	单班	06 : 02	07 : 17	5		
		07 : 30	08 : 45			
		13 : 07	14 : 22			
		16 : 08	17 : 23			
		17 : 44	18 : 59			
2	单班	06 : 06	07 : 21	5		
		07 : 34	08 : 49			
		13 : 13	14 : 28			
		16 : 12	17 : 27			
		17 : 48	19 : 03			
3	单班	06 : 10	07 : 25	5		
		07 : 38	08 : 53			
		13 : 19	14 : 34			
		16 : 16	17 : 31			
		17 : 52	19 : 07			
4	双班	04 : 30	05 : 40	10	4	4
		06 : 14	07 : 29			
		07 : 42	08 : 57			
		09 : 28	10 : 43			
		11 : 22	12 : 37			

		1 3 : 2 5	1 4 : 4 0			
		1 5 : 0 8	1 6 : 2 3			
		1 6 : 5 2	1 8 : 0 7			
		1 8 : 4 4	1 9 : 5 4			
		2 0 : 0 4	2 1 : 1 4			
5	双班	0 4 : 3 7	0 5 : 4 7	10	4	5
		0 6 : 1 8	0 7 : 3 3			
		0 7 : 4 6	0 9 : 0 1			
		0 9 : 3 4	1 0 : 4 9			
		1 1 : 2 8	1 2 : 4 3			
		1 3 : 3 1	1 4 : 4 6			
		1 5 : 1 4	1 6 : 2 9			
		1 6 : 5 6	1 8 : 1 1			
		1 8 : 5 2	2 0 : 0 2			
		2 0 : 1 2	2 1 : 2 2			
6	双班	0 4 : 4 4	0 5 : 5 4	10	4	4
		0 6 : 2 2	0 7 : 3 7			
		0 7 : 5 0	0 9 : 0 5			
		0 9 : 4 0	1 0 : 5 5			
		1 1 : 3 4	1 2 : 4 9			
		1 3 : 3 7	1 4 : 5 2			
		1 5 : 2 0	1 6 : 3 5			
		1 7 : 0 0	1 8 : 1 5			
		1 9 : 0 0	2 0 : 1 0			
		2 0 : 2 0	2 1 : 3 0			
7	双班	0 4 : 5 1	0 6 : 0 1	9	5	4
		0 6 : 2 6	0 7 : 4 1			
		0 7 : 5 4	0 9 : 0 9			
		0 9 : 4 6	1 1 : 0 1			
		1 1 : 4 0	1 2 : 5 5			
		1 3 : 4 3	1 4 : 5 8			
		1 5 : 2 6	1 6 : 4 1			
		1 7 : 0 4	1 8 : 1 9			
		1 9 : 3 2	2 0 : 4 2			
8	双班	0 4 : 5 8	0 6 : 0 8	9	5	4
		0 6 : 3 0	0 7 : 4 5			
		0 7 : 5 8	0 9 : 1 3			
		0 9 : 5 2	1 1 : 0 7			
		1 1 : 4 6	1 3 : 0 1			
		1 3 : 4 9	1 5 : 0 4			
		1 5 : 3 2	1 6 : 4 7			
		1 7 : 0 8	1 8 : 2 3			
		1 9 : 4 0	2 0 : 5 0			

9	双班	0 5 : 0 3	0 6 : 1 3	9	5	4
		0 6 : 3 4	0 7 : 4 9			
		0 8 : 0 4	0 9 : 1 9			
		0 9 : 5 8	1 1 : 1 3			
		1 1 : 5 2	1 3 : 0 7			
		1 3 : 5 5	1 5 : 1 0			
		1 5 : 3 8	1 6 : 5 3			
		1 7 : 1 2	1 8 : 2 7			
		1 9 : 4 8	2 0 : 5 8			
10	双班	0 5 : 0 8	0 6 : 1 8	9	5	4
		0 6 : 3 8	0 7 : 5 3			
		0 8 : 1 0	0 9 : 2 5			
		1 0 : 0 4	1 1 : 1 9			
		1 1 : 5 8	1 3 : 1 3			
		1 4 : 0 1	1 5 : 1 6			
		1 5 : 4 4	1 6 : 5 9			
		1 7 : 1 6	1 8 : 3 1			
		1 9 : 5 6	2 1 : 0 6			
11	双班	0 5 : 1 3	0 6 : 2 3	9	5	4
		0 6 : 4 2	0 7 : 5 7			
		0 8 : 1 6	0 9 : 3 1			
		1 0 : 1 0	1 1 : 2 5			
		1 2 : 0 4	1 3 : 1 9			
		1 4 : 0 7	1 5 : 2 2			
		1 5 : 5 0	1 7 : 0 5			
		1 7 : 2 0	1 8 : 3 5			
		2 0 : 5 2	2 2 : 0 2			
12	双班	0 5 : 1 8	0 6 : 2 8	9	5	4
		0 6 : 4 6	0 8 : 0 1			
		0 8 : 2 2	0 9 : 3 7			
		1 0 : 1 6	1 1 : 3 1			
		1 2 : 1 0	1 3 : 2 5			
		1 4 : 1 3	1 5 : 2 8			
		1 6 : 2 0	1 7 : 3 5			
		1 7 : 2 4	1 8 : 3 9			
		2 1 : 0 0	2 2 : 1 0			
13	双班	0 5 : 2 3	0 6 : 3 3	9	5	4
		0 6 : 5 0	0 8 : 0 5			
		0 8 : 2 8	0 9 : 4 3			
		1 0 : 2 2	1 1 : 3 7			
		1 2 : 1 6	1 3 : 3 1			
		1 4 : 1 7	1 5 : 3 2			
		1 6 : 2 4	1 7 : 3 9			

		1 7 : 4 0	1 8 : 5 5			
		2 1 : 0 6	2 2 : 1 6			
14	双班	0 5 : 2 8	0 6 : 3 8	9	5	4
		0 6 : 5 4	0 8 : 0 9			
		0 8 : 3 4	0 8 : 4 9			
		1 0 : 2 8	1 1 : 4 3			
		1 2 : 2 2	1 3 : 3 7			
		1 4 : 3 2	1 5 : 4 7			
		1 6 : 2 8	1 7 : 4 3			
		1 7 : 5 6	1 9 : 1 1			
		2 1 : 1 4	2 2 : 2 4			
15	双班	0 5 : 3 3	0 6 : 4 3	9	5	4
		0 6 : 5 8	0 8 : 1 3			
		0 8 : 4 0	0 9 : 5 5			
		1 0 : 3 4	1 1 : 4 9			
		1 2 : 2 8	1 3 : 4 3			
		1 4 : 3 8	1 5 : 5 3			
		1 6 : 3 2	1 7 : 4 7			
		1 8 : 0 4	1 9 : 1 4			
		2 1 : 2 2	2 2 : 3 2			
16	双班	0 5 : 3 8	0 6 : 4 8	9	5	4
		0 7 : 0 2	0 8 : 1 7			
		0 8 : 4 6	1 0 : 0 1			
		1 0 : 4 0	1 1 : 5 5			
		1 2 : 3 4	1 3 : 4 9			
		1 4 : 4 4	1 5 : 5 9			
		1 6 : 3 6	1 7 : 5 1			
		1 8 : 1 2	1 9 : 2 2			
		2 1 : 3 0	2 2 : 4 0			
17	双班	0 5 : 4 3	0 6 : 5 3	9	5	4
		0 7 : 0 6	0 8 : 2 1			
		0 8 : 5 2	1 0 : 0 7			
		1 0 : 4 6	1 2 : 0 1			
		1 2 : 4 0	1 3 : 5 5			
		1 4 : 5 0	1 6 : 0 5			
		1 6 : 4 0	1 7 : 5 5			
		1 8 : 2 0	1 9 : 3 0			
		2 1 : 3 8	2 2 : 4 8			
18	双班	0 5 : 4 8	0 6 : 5 8	9	5	4
		0 7 : 1 0	0 8 : 2 5			
		0 8 : 5 8	1 0 : 1 3			
		1 0 : 5 2	1 2 : 0 7			
		1 2 : 4 6	1 4 : 0 1			

		1 4 : 5 6	1 6 : 1 1			
		1 6 : 4 4	1 7 : 5 9			
		1 8 : 2 8	1 9 : 3 8			
		2 1 : 4 6	2 2 : 5 6			
19	双班	0 5 : 5 3	0 7 : 0 3	9	5	4
		0 7 : 1 4	0 8 : 2 9			
		0 9 : 0 4	1 0 : 1 9			
		1 0 : 5 8	1 2 : 1 3			
		1 2 : 5 2	1 4 : 0 7			
		1 5 : 0 2	1 6 : 1 7			
		1 6 : 4 8	1 7 : 0 3			
		1 8 : 3 6	1 9 : 4 6			
		2 1 : 5 2	2 3 : 0 2			
20	双班	0 7 : 1 8	0 8 : 3 3	10	5	5
		0 9 : 1 0	1 0 : 2 5			
		1 1 : 0 4	1 2 : 1 9			
		1 2 : 5 5	1 4 : 1 0			
		1 4 : 2 0	1 5 : 3 5			
		1 5 : 5 6	1 7 : 1 1			
		1 7 : 2 8	1 8 : 4 3			
		1 9 : 0 8	2 0 : 1 8			
		2 0 : 2 8	2 1 : 3 8			
		2 2 : 0 0	2 3 : 1 0			
21	双班	0 7 : 2 2	0 8 : 3 7	10	5	5
		0 9 : 1 6	1 0 : 3 1			
		1 1 : 1 0	1 2 : 2 5			
		1 2 : 5 8	1 4 : 1 3			
		1 4 : 2 3	1 5 : 3 8			
		1 6 : 0 0	1 7 : 1 5			
		1 7 : 3 2	1 8 : 4 7			
		1 9 : 1 6	2 0 : 2 6			
		2 0 : 3 6	2 1 : 4 6			
		2 2 : 0 8	2 3 : 1 8			
22	双班	0 7 : 2 6	0 8 : 4 1	10	5	5
		0 9 : 2 2	1 0 : 3 7			
		1 1 : 1 6	1 2 : 3 1			
		1 3 : 0 1	1 4 : 1 6			
		1 4 : 2 6	1 5 : 4 1			
		1 6 : 0 4	1 7 : 1 9			
		1 7 : 3 6	1 8 : 5 1			
		1 9 : 2 4	2 0 : 3 4			
		2 0 : 4 4	2 1 : 5 4			
		2 2 : 1 5	2 3 : 2 5			

汇总信息：总车辆数（22），总双班车数量（19），总单班车数量（3），所有车的总班次（192）
---

## 9.3 模型 2 的程序

### 9.3.1. Matlab 求解最少公交车辆数程序

```
f=ones(220,1);
>> intcon=1:1:220;
>> lb=zeros(220,1);
>> ub=ones(220,1);
>> [x,fval,exitflag,output]=intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

输出结果：

LP: Optimal objective value is 16.000000.

Optimal solution found.

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolerance of the optimal value, options.TolGapAbs = 0 (thedefault value).

The intcon variables are integer within tolerance, options.TolInteger = 1e-05 (the default value).

x=[0, ..., 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, ..., 0]

%由于 220 辆公交车排班可能性太多，所以程序结果没有完全列出，所以只列出了使用了的公交车。

fval =  
16

exitflag =  
1

output =  
  
relativegap: 0  
absolutegap: 0  
numfeaspnts: 1  
numnodes: 0  
constrviolation: 0  
message: 'Optimal solution found.'

Intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolera...

### 9.3.2. Lingo 软件算出排班表程序

```
model:
sets:
banci/1..110/;
cheliang/1..16/;
link(cheliang,banci):x,c;
endsets
data:
c=@ole('F:\MyDownloads\Download\LINGO11\LINGO11\book3.xlsx','txx');
enddata
@for(banci(k):@sum(cheliang(i):c(i,k)*x(i,k))<353;);
@for(cheliang(i):@sum(banci(k):x(i,k))<10;);
@for(cheliang(i):@sum(banci(k):75*x(i,k))<480;);
@for(link:@bin(x));
end
```

### 9.4 模型三的程序

#### 9.4.1 求出最少车辆的程序

```
f=ones(220,1);
>> intcon=1:1:220;
>> lb=zeros(220,1);
>> ub=ones(220,1);
>> [x,fval,exitflag,output]=intlinprog(f,intcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
```

注意：其中，程序三的矩阵与程序二的矩阵不同

### 9.5 模型四的程序

```
model:
sets:
banci/1..184/;
cheliang/1..30/;
link(cheliang,banci):x,y,c,d;
enddata
@for(cheliang(i):@sum(banci(k):x(i,k))<=5;);
@for(cheliang(i):@sum(banci(k):76*y(i,k))<=480;);
@for(cheliang(i):@sum(banci(k):y(i,k))<=10;);
@for(cheliang(i)|i#ge#19:@sum(banci(k):y(i,k))>0;);
@for(cheliang(i)|i#le#19:@sum(banci(k):y(i,k))=0;);
@for(link:@bin(x);@bin(y);@bin(c);@bin(d));
End
```

