

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1206

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：
1206

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 A 题：客机水面迫降时的姿态

关 键 词 弹簧——阻尼模型 变步长求解 误差拟合 修正

摘 要

本文通过对客机失去动力时水面迫降的研究，通过受力分析，取客机所受冲击力为研究对象，对客机最佳入水姿态做出了定量求解，利用文献[1]实验数据对理论模型进行反复验证和误差修正，最终得出飞机迫降时最佳入水角度为 $\theta \in (6^\circ, 9^\circ)$ 。

基于模型求解流程图，我们首先根据相似原理与非弹性完全碰撞理论，将飞机与水面碰撞简化为弹簧——阻尼碰撞模型，利用动力平衡方程，对简化模型进行受力分析，得到了冲击力与入水角度的关系，但由于在弹簧——阻尼模型中，弹性系数及阻尼系数的不确定性，为了确定弹性系数 k 与阻尼系数 C ，本文采用变步长搜索求解法，结合文献[1]提供的一组数据，利用 C 语言编程计算，对简化模型中弹簧及水阻尼的物性参数进行求解，得到结果 $C = 98400N / (m \cdot s^2)$ ， $k = 44200N / m$ ，进而得到飞机所受最大冲击力与入水角度和时间的关系的原始模型 $F = f(\theta)$ 。

在原始模型的基础上，结合文献实验数据[1]，就模型固有误差对入水角度的影响进行阐述。由误差修正原理，拟合出误差项函数，从而分离出理论模型中的误差，通过对文献[1]剩余实验数据的验证，逐步提高模型的精确度，最后获得入水角度每间隔 0.5 度对飞机所受冲击力的力值（表）。另外，充分有效利用了文献[1]的数据，既避免了数据的重复利用，又保证了模型的可靠性和正确性。

本文给出了飞机所受冲击力的统一表达式，公式简便，便于推广。文中还就模型精确性方面做了详细讨论，提出了模型的拓展方向。

参赛队号 1206

所选题目 A 题

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

Making a research the aircraft which has lost power land on the water, through the force analysis, we take the shock as the research object and made the best quantitative solution of the aircraft's attitude to enter the water. Using the experimental data of literature [1] and repeating corroborating the theoretical model and correcting errors, we got that $\theta \in (6^\circ, 9^\circ)$ is the best angle region to entry the water when the airplane take a force landing.

Based on the flowing chart of the model, we take similarity theory and inelastic collisions theory and simplify the collision between aircraft and the surface of water as spring - damper collision model. Using the power balance equation, we analysis the force on the simplified model and achieve the impact relationship between the angle into the water and the force. However, the elastic coefficient and damping coefficient cannot been defined certainty in the spring - damper model. In order to determine the elastic coefficient-- k and damping coefficient-- C , we use variable step search algorithm, combining with a set of data provided by reference [1], with the help of C programming language, to solve the simplified the model of springs and the damping of the physical parameters of water. Finally, we get the results, which is " $c=98000, k=45000$ ". Then it is easy to find the original model $F = f(\theta)$ about the biggest force into the water influenced by the relationship between angle and time.

According to the original model, combining of experimental data of reference [1], we explain the impact of the inherent error into the water. Depend on the principle of error correction method, we fit the error term function to isolate the errors in the theoretical model. What is more, through confirming the remaining experimental data from reference [1] to increase the accuracy of the model gradually, we get the table about the force numerical value when the aircraft enter the water at intervals of 0.5 degree angle o finally. In addition, the data from reference [1] are used fully and effectively, which not only avoiding the reuse of data, but also ensure the reliability and validity of the model.

In this paper, we formed a formula about aircraft suffered impact when entering the water, which is both simple and easy to promote. We also make a discussion about the model in term of the accuracy in detail and put forward the development direction of the model at the same time.

1. 问题的重述

1.1 问题背景

2009 年 1 月 15 日下午（美国东部时间），US Airways 所属 1549 航班（空中客车 A320 客机）在起飞后不久在纽约哈德逊河紧急迫降。经及时救助，机上 155 人（包括两名机师和三名乘务人员）在飞机沉没之前全部获救。该起事故造成 78 人受伤，无人死亡。

这架客机从纽约拉瓜迪亚机场起飞约 90 秒后遭飞鸟撞击，导致两个发动机损坏。机长萨伦伯格凭借着出色的驾驶技术和冷静的判断使飞机迫降在哈德逊河河面。而飞机上的乘客在乘务员的指挥下，有次序地逃出紧急舱门并全部获救。

1.2 问题的提出

大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。建立合理的数学模型，对客机在平静水面上的迫降进行分析，指出客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。

2. 名词、符号说明及基本假设

2.1 名词、符号说明

m ：飞机的质量

C ：水面的阻尼系数

k ：弹簧弹性系数

ω_n ：无阻尼圆周率

β ：阻尼比

ω_d ：有阻尼圆周

$y(t)$ ：圆柱 y 方向上位移

g ：重力常数

V_{y_0} ：入水时飞机 y 方向速度

t_A ：飞机竖直方向达到最大位移时所用时间

$y(t)_{\max}$ ：飞机竖直方向达到的最大位移量

t_v ：飞机 y 方向上达到最大速度时所用时间

2.2 基本假设

根据上述资料并考虑到该问题涉及的碰撞过程具有非定常特殊性，笔者做如下几点假设和限定：

1) 迫降成功的假设：

1、迫降能够确保飞机结构的完整性，以保护乘员。

2、迫降过程中，必须保证乘客所受冲击力在乘客能承受范围内，乘客不会受伤。

3、迫降后能够提供足够的漂浮时间使乘客逃离机舱。

2) 迫降过程中物性参数的假设：

1、由于飞机型号的限制，不同型号的飞机的物性参数不同，为了简化问题，笔者通过对某型客机（空客 A320）的分析得到最佳入水姿态。

2、本问题是在飞机在失去动力的迫降情况下进行讨论的，该状态下，飞机无法获得动力，所以无须考虑迫降过程中飞机自身动力问题。

3、飞机迫降时在空中会有一定时间的停留，假设在这段时间内飞机可以在空中利用空气摩擦阻力和自身升力使飞机迫降入水时入水速度大小和方向一致。考虑到大型客机的运营安全性，大型客机的机身强度不会随机身变化而变化，从机头到机尾的强度一致，可以将机体近似看成一个圆柱体。

4、飞机作为一种高精度集成化产品，其机身所受冲击力很大程度上决定了飞机迫降时的漂浮性能与乘客所受冲击力，因此可以将飞机所受冲击力作为决定飞机水上迫降是否成功的第一因素。

5、由于大型客机的数据保密性，假设文中所查数据与文献真实，文中数据均按照 2009 年数据计算。

3.模型的初步探讨与分析

本节主要研究入水角度对冲击力的影响以及如何矫正模型的误差。目前常用的冲击力计算可以分为以下几个步骤：首先，通过几何关系，从理论角度建立入水角度与冲击力的函数关系 $F = f(\theta)$ ；之后，利用空客A320实际最佳入水角度对该理论函数进行误差修正；最后，结合空客A320实际最佳入水角度，对修正后的模型函数进行验证。

整个模型的核心流程图如图1所示。

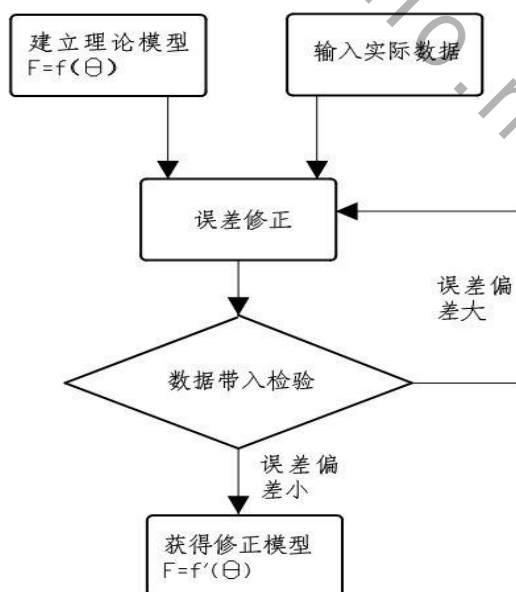


图1 模型工作流程框图

基于上述流程，我们的工作分以下3个小节：

- 3.1 理论模型的建立，通过相似原理及非弹性完全碰撞理论上建立飞机撞击水面过程中冲击力与入水角度的 $F = f(\theta)$ 模型；
- 3.2 实际数据与理论求解进行比较，获得在不同入水角度情况下，飞机所受冲击力的模型系统误差，并进行相应的函数拟合；
- 3.3 建立修正后的模型 $F = f'(\theta)$ 并进行数据验证。

3.1 飞机迫降碰撞模型的建立—— $F = f(\theta)$

本问题要求航空公司飞机安全迫降，通过分析飞机所受冲击力来决定飞机最佳入水姿态，从机身材料的强度来看，碰撞过程中机身所受冲击力控制在飞机极限强度之内时飞机迫降即为成功，但是在具体迫降过程中碰撞所生的冲击力不能控制在极限强度之内，所以笔者认为将最佳迫降姿态定义为在最佳迫降姿态下，飞机所受冲击力在所有入水姿态中最小，此时飞机结构变化达到最小值，乘客所受冲击力最小。因此为了评价飞机的最佳入水姿态，其最佳入水姿态取决于其所受冲击力是否达到最小。

由于实际的飞机碰撞为三维碰撞，且该碰撞为非完全弹性碰撞，在碰撞过程中水由于受压会导致形变并发生振动。现阶段采用流固耦合、流体力学及有限元分析的方法过于复杂，不具有普遍性，为了简化模型，我们采用相似原理，应用非完全弹性碰撞理论将碰撞模型等效为二维碰撞——弹簧——阻尼模型。

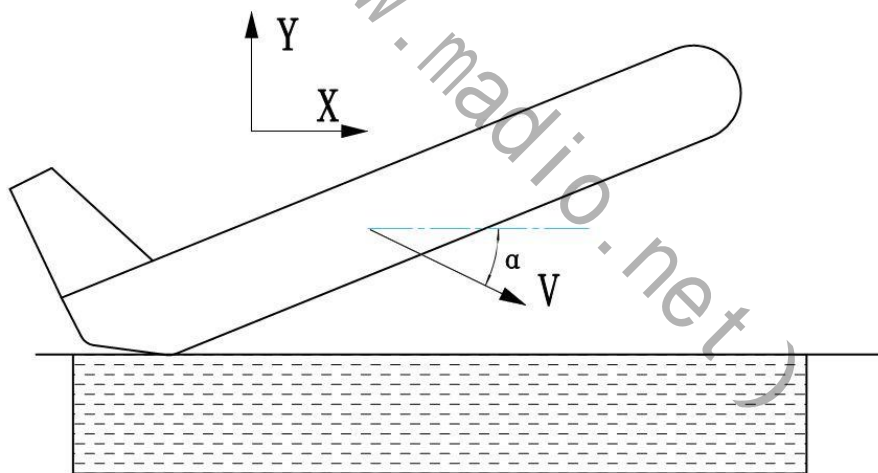


图2 飞机水面迫降示意图

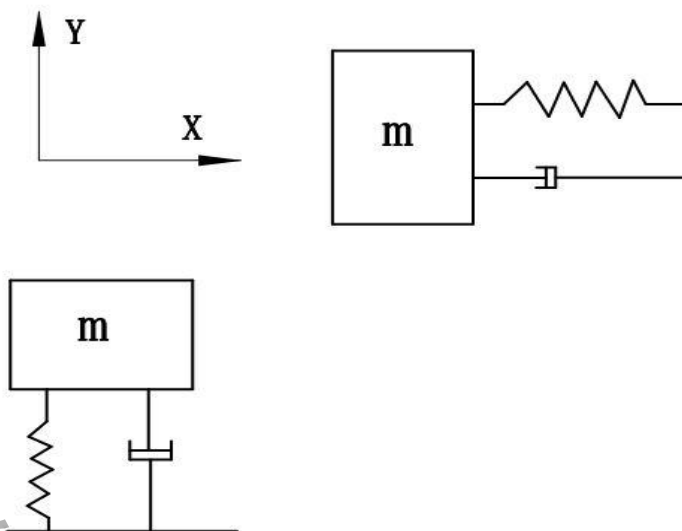


图3 弹簧——阻尼碰撞模型

相似原理的分析及模型的建立：

对于两个同类的物理现象，如果在相应时刻及相应的地点上与现象有关的物理对应成比例，则称两现象彼此相似，判断相似的充要条件：

1、几何相似：

在问题假设中不考虑机翼及飞机其他外部设备，由圆柱体取代飞机机身作为碰撞体模型，由于圆柱体具有轴对称性，在 x 轴方向上的力相互抵消，则只用考虑圆柱体与水面的 x 方向与 y 方向碰撞，此时碰撞与两个圆柱分别垂直于 x 方向、 y 方向碰撞相似。

$$\text{相似方程：} \frac{V_x}{V_y} = \frac{V \cos \alpha}{V \sin \alpha}$$

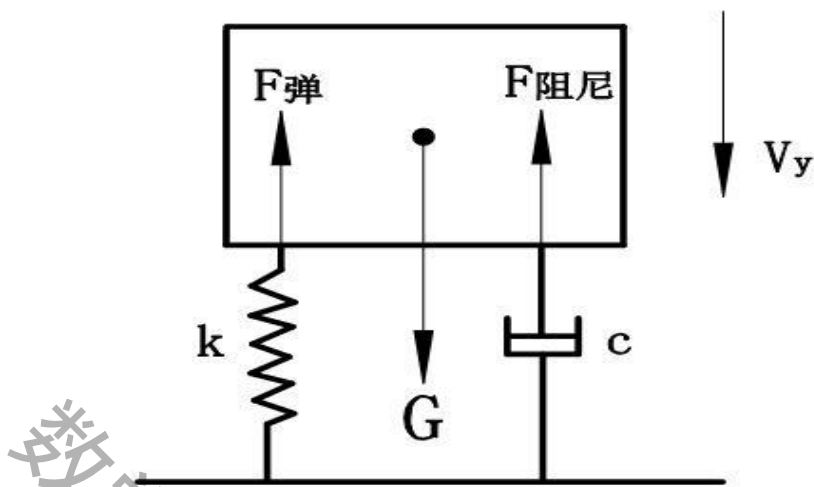
2、运动相似：

由于运动物体在水中受到浮力和水对其的冲击力。浮力随这物体进入水中的深度而不断增加，类似于弹簧形变量随力线性单增变化，于是我们采用了弹簧碰撞模型，由弹簧的形变产生力并吸收能量。

但是由于水与机身的碰撞过程中，通过参考文献[2]，知飞机冲击水面时力的变化是震荡衰减的，而弹簧模型的力却不断增加。飞机所受冲击力与速度变化有关，类似于阻尼力与速度的关系，所以在这个过程中我们引入了阻尼模型，由阻尼吸收弹簧的形变能，使弹簧的力不断减小，这样就使得简化模型碰撞与实际碰撞很大程度的符合。

通过模型的两次简化，达到了运动相似的目的，运动相似是指飞机等效圆柱体碰撞与两圆柱体二维碰撞——弹簧——阻尼模型（图3）速度场相似。将飞机等效圆柱体的速度沿 x 轴与 y 轴分解为两垂直相连的圆柱体的相应速度。由于两圆柱体在 x 方向和 y 方向的受力相似，因此我们通过研究 y 方向的受力情况就可以得到 x 方向受力，对此下面就 y 方向的力进行讨论。

3.1.1 y 方向受力分析



i) 动力平衡方程的建立

如图 1 所示，在图 1 中我们定义 C 是水面的阻尼系数， k 为弹簧系数。圆柱撞击水面时在 Y 方向的动力学平衡方程为：

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + C \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = mg \dots\dots ①$$

式中左边第一项 $m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$ 为圆柱惯性力，第二项 $C \frac{dy(t)}{dt}$ 为阻尼力，第三项 $ky(t)$ 为阻力。由运动相似知飞机受力是一个震荡衰减过程，其欠阻尼系统 $\beta < 1.0$ ，求解受力①方程，其通解为：

$$y(t) = e^{-\beta \omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + \frac{m_1 g}{k}$$

$$\text{其中} \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \beta = \frac{C}{2\sqrt{k_m}} \\ \lambda = \frac{C}{2m} \\ \omega_d = \sqrt{1 - \beta^2} \omega_n \end{cases}$$

A, B 为待定系数，由边界条件确定。

ii) 边界条件的确定及方程求解

圆柱体与弹簧——阻尼模型接触瞬间，其初始位移条件：

圆柱在 y 方向上的初速度为 V_{y_0} ，初位移 $y(t)=0$ 。

即：

$$y(t)|_{t=0} = 0 \quad \frac{dy(t)}{dt}|_{t=0} = V_{y_0}$$

将边界条件代入①式确定系数 A,B，得到动力平衡方程为：

$$y(t) = e^{-\lambda t} \left(\frac{V_{y_0} - \frac{\lambda}{k} mg}{\omega_d} \sin \omega_d t - \frac{mg}{k} \cos \omega_d t \right) + \frac{mg}{k} \dots\dots ②$$

即此为圆柱在竖直方向的运动方程。

通过对②式的求解可得到飞机的运动机理和受力情况。

首先当到达最大位移时 $V_y(t) = 0$ ，应用此边界条件可以得到最大位移时间 t_A 与竖直方向最大位移 $y(t)_{\max}$

$$t_A = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{V_{y_0} \omega_d}{\lambda V_{y_0} - g} ;$$

$$y(t)_{\max} = e^{-\lambda t_A} \left(\frac{V_{y_0} - \frac{\lambda}{k} mg}{\omega_d} \sin \omega_d t_A - \frac{mg}{k} \cos \omega_d t_A \right) + \frac{mg}{k} ;$$

将此时的飞机竖直方向最大位移 $y(t)_{\max}$ 作为边界条件，可以求得竖直方向速度与时间的关系：

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\lambda t} \left(\frac{g - \lambda V_{y_0}}{\omega_d} \sin \omega_d t + V_{y_0} \cos \omega_d t \right)$$

对速度求导可得即 $\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ ，得到在撞击过程中获得最大速度时间：

$$t_V = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{(g - 2\lambda V_{y_0}) \omega_d}{\lambda g + V_{y_0} \omega_n^2}$$

此时便可以求得竖直方向最大速度：

$$\frac{dy(t)}{dt} \Big|_{\max} = e^{-\lambda t_V} \left(\frac{g - \lambda V_{y_0}}{\omega_d} \sin \omega_d t_V + V_{y_0} \cos \omega_d t_V \right)$$

竖直方向加速度随时间变化关系：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = e^{-\lambda t} [(g - 2\lambda V_{y_0}) \cos \omega_d t - \frac{\lambda g + V_{y_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t]$$

对加速度求导即当 $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} = 0$ ，可得最大加速度的时间：

$$t_a = \frac{1}{\omega_d} \arctan \frac{2\lambda g + (1 - \beta^2) V_{y_0} \omega_n^2}{\lambda V_{y_0} \omega_d (2 + \frac{1}{1 - \beta^2}) - g \omega_d (2 - \frac{1}{1 - \beta^2})}$$

这样便可以知道圆柱的最大加速度：

$$\frac{d^2 y}{dt^2}_{\max} = e^{-\lambda t_a} [(g - 2\lambda V_{y_0}) \cos \omega_d t_a - \frac{\lambda g + V_{y_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t_a]$$

所以最后可以求得竖直方向冲击力与时间关系：

$$F_y(t) = m \{ g - e^{-\lambda t} [(g - 2\lambda V_{y_0}) \cos \omega_d t - \frac{\lambda g + V_{y_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t] \}$$

于是得到竖直方向最大冲击力：

$$F_y(t)_{\max} = m \{ g - e^{-\lambda t_a} [(g - 2\lambda V_{y_0}) \cos \omega_d t_a - \frac{\lambda g + V_{y_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t_a] \}$$

3.1.2 x方向的受力方向

在x方向上的受力与y方向上受力相似，但是在x方向上没有飞机的质量力作用，

我们任然沿用①式，但由于没有重力作用，我们将重力加速度g化为0，这样沿用上述推导过程，可以得到：

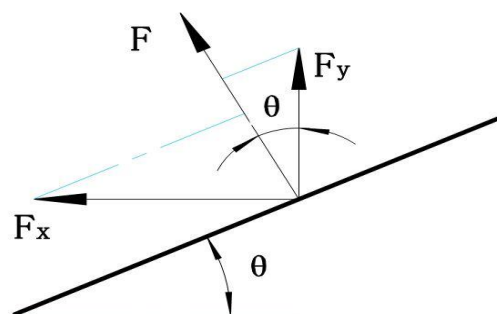
水平方向冲击力与时间关系：

$$F_x(t) = m \{ -e^{-\lambda t} [(-2\lambda V_{x_0}) \cos \omega_d t - \frac{V_{x_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t] \}$$

水平方向最大冲击力：

$$F_x(t)_{\max} = m \{ -e^{-\lambda t_a} [(-2\lambda V_{x_0}) \cos \omega_d t_a - \frac{V_{x_0} \omega_n^2}{\omega_d} \sin \omega_d t_a] \}$$

3.1.3 总力F的计算



将 x 轴方向力 $F_x(t)$ 与 y 方向的力 $F_y(t)$ 分别分解在沿机身方向与垂直机身方向上，由于沿机身方向的力与机身平行，对机身不产生作用力，所以只用考虑垂直于机身方向的合力 $F(t)$ ：

$$F(t) = F_y(t) \cos \theta + F_x(t) \sin \theta$$

这样就得到了总力 $F(t)$ 的关系式。

3.1.4 模型的深入探讨

在碰撞过程中等效水面的阻尼系数 C ，与弹簧弹性系数 k 的具体值无法确定，为了得到一个确定的值，我们将总力看成一个关于 C 、 k 、 t 、 θ 的关系式，通过已知数据来确定总力 $F = f(t, C, k, \theta)$ 中的 C, k 。

对此，我们采用控制变量法，按照图 4 流程图对 C, k 经行求解

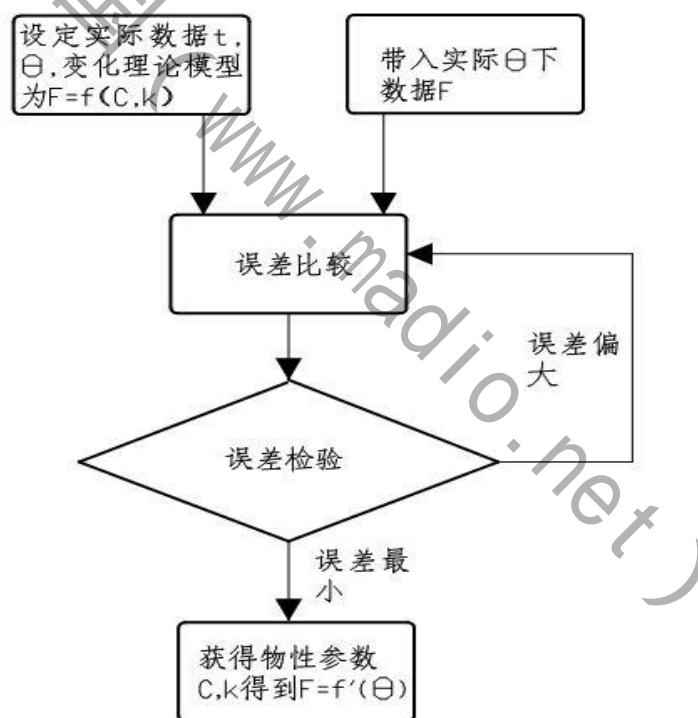


图 4 流程图

在具体求解过程中，由与计算机的运算速度有限，且我们并不能够确定阻尼系数 C 与弹簧弹性系数 k 的范围，因此采用变步长搜索求解法对 C ， k 求解，上述变步长搜索算法的算法思想为：

Step1: 根据已知数据设定 t 与 θ ，输入规划函数 $\min \{f(t, C_i, k_j, \theta) - F_0\}$ ，

其中 F_0 为已知文献数据。

Step2: 输入 C 和 k 的上下限,定于区间 $[0, 1E6]$ 内,取步长为1000,得到 C 和 k 在该步长下的一个最优组合 (C_0, k_0) ;

Step3: 基于**Step2**的算法,改变 C 和 β 的上下限,其中 C 区间定于 $[C_0-100, C_0+100]$, k 区间定于 $[k_0-100, k_0+100]$,步长变为10,在该步长下得到一个最优组合 (C_1, k_1) ;

Step4: 基于**Step3**的算法,改变 C 和 k 的上下限,其中 C 区间定于 $[C_1-10, C_1+10]$, β 区间定于 $[k_1-10, k_1+10]$,步长变为1,搜出 C 和 k 的最优解。

根据上述算法,编写相应的C程序,利用上述算法进行一一枚举和检验,从中挖掘符合要求的答案。代入参考文献[1]的数据,利用C语言编程,最后可以计算得 $C = 98400N / (m \cdot s^2)$, $k = 44200N / m$

3.2 误差的修正模型—— $F = f'(\theta)$

针对上述简化模型,首先需要误差分析。我们从相对误差 ε 出发,其表达式为:

$$\varepsilon = \frac{F_{th} - F_{fact}}{F_{fact}}$$

其中 F_{th} 为模型获得的理论受力值, F_{fact} 为实际的受力值。

基于此,参考文献[1]的实验数据,将入水角度为 12° 的数据代入上式,可得到相对误差 ε ,相对误差的产生是有模型本身的不完整性引起,对于此相对误差,我们通过误差拟合,将模型系统误差分离出模型,使之单独成为一个随入水角度和时间变化的量。

根据上述分析,我们需要建立相应的修正模型:

$$F = f'(\theta) = f(\theta) - \Delta F$$

上式中, $f'(\theta)$ 为修正后的模型, $f(\theta)$ 为理论模型, ΔF 为误差项,其表达式为:

$$\Delta F = \phi(F - F)$$

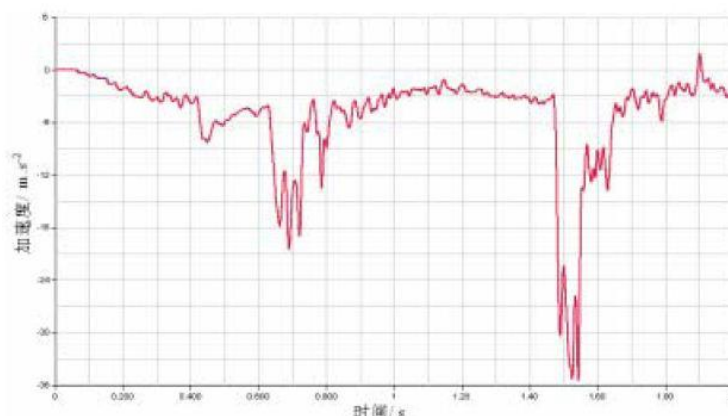


图5 文献[2]的实验数据

利用matlab拟合工具，对误差数据进行初步拟合，获得误差项的拟合函数及其图像（图7）

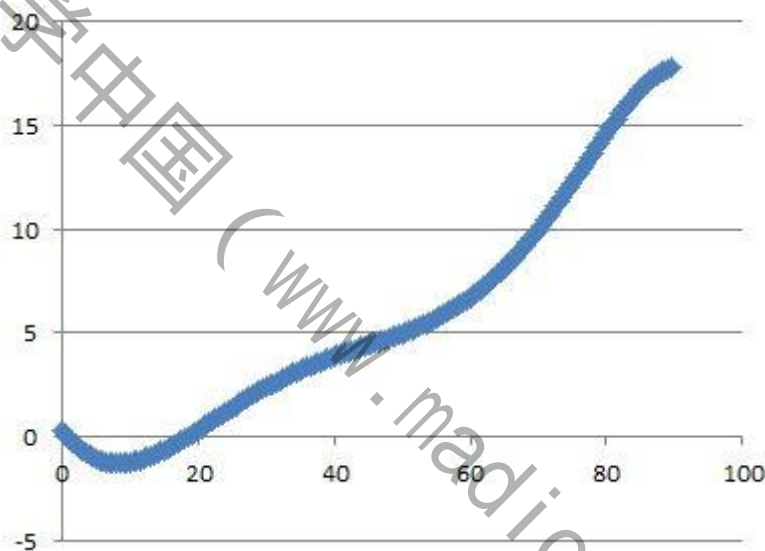


图7 拟合误差函数图象

（x方向为角度，单位为角度制；y方向为补偿冲击力，单位为 $10^5 N$ ）

$$\Delta F = (-4E-10)\theta^6 + 4E-08\theta^5 + 5E-06\theta^4 - 0.0008\theta^3 + 0.0356\theta^2 - 0.4369\theta + 13.323$$

3.3 修正模型的验证

利用修正模型 $F = f'(\theta) = f(\theta) - \Delta F$ ，结合模型流程图，我们还学要对该模型进行验证，使得标定误差可能小。

飞机在入水角度为 7° 时，获得模型的受力解集，相对误差 $\varepsilon \in [-5\%, 6\%]$ ，能够很好的满足模型可靠性与准确性。

上表的结果表明模型改进后，所受冲击力误差都较小，很好的体现了冲击力与飞机入水角度的关系，由此，我们给出在不同入水角度间隔 0.5° 下冲击力的大小，如表1所示。

入水角度 (°)	冲击力大小 (N)	入水角度 (°)	冲击力大小 (N)
0.0	13.323	44.5	17.361
0.5	13.113	45.0	17.415
1.0	12.921	45.5	17.468
1.5	12.745	46.0	17.522
2.0	12.585	46.5	17.576
2.5	12.441	47.0	17.631
3.0	12.311	47.5	17.686
3.5	12.196	48.0	17.742
4.0	12.095	48.5	17.799
4.5	12.007	49.0	17.857
5.0	11.931	49.5	17.917
5.5	11.868	50.0	17.978
6.0	11.817	50.5	18.040
6.5	11.777	51.0	18.104
7.0	11.747	51.5	18.170
7.5	11.728	52.0	18.238
8.0	11.718	52.5	18.308
8.5	11.717	53.0	18.380
9.0	11.726	53.5	18.455
9.5	11.743	54.0	18.532
10.0	11.767	54.5	18.612
10.5	11.799	55.0	18.695
11.0	11.838	55.5	18.781
11.5	11.884	56.0	18.870
12.0	11.936	56.5	18.963
12.5	11.994	57.0	19.058
13.0	12.057	57.5	19.158
13.5	12.126	58.0	19.260
14.0	12.199	58.5	19.367
14.5	12.276	59.0	19.477
15.0	12.358	59.5	19.592
15.5	12.443	60.0	19.710
16.0	12.532	60.5	19.833
16.5	12.624	61.0	19.959
17.0	12.718	61.5	20.090
17.5	12.815	62.0	20.226
18.0	12.914	62.5	20.365
18.5	13.015	63.0	20.510
19.0	13.118	63.5	20.658
19.5	13.222	64.0	20.811
20.0	13.327	64.5	20.969

参赛队号#1206

20.5	13.433	65.0	21.131
21.0	13.540	65.5	21.298
21.5	13.647	66.0	21.469
22.0	13.755	66.5	21.645
22.5	13.863	67.0	21.826
23.0	13.970	67.5	22.010
23.5	14.077	68.0	22.199
24.0	14.184	68.5	22.393
24.5	14.291	69.0	22.590
25.0	14.396	69.5	22.792
25.5	14.501	70.0	22.998
26.0	14.605	70.5	23.208
26.5	14.707	71.0	23.421
27.0	14.808	71.5	23.638
27.5	14.909	72.0	23.858
28.0	15.007	72.5	24.082
28.5	15.104	73.0	24.308
29.0	15.200	73.5	24.537
29.5	15.294	74.0	24.769
30.0	15.386	74.5	25.003
30.5	15.477	75.0	25.239
31.0	15.565	75.5	25.476
31.5	15.652	76.0	25.715
32.0	15.737	76.5	25.955
32.5	15.821	77.0	26.195
33.0	15.902	77.5	26.435
33.5	15.982	78.0	26.676
34.0	16.060	78.5	26.915
34.5	16.136	79.0	27.154
35.0	16.210	79.5	27.390
35.5	16.282	80.0	27.625
36.0	16.353	80.5	27.857
36.5	16.422	81.0	28.086
37.0	16.490	81.5	28.311
37.5	16.555	82.0	28.531
38.0	16.620	82.5	28.746
38.5	16.683	83.0	28.956
39.0	16.745	83.5	29.159
39.5	16.805	84.0	29.355
40.0	16.864	84.5	29.542
40.5	16.922	85.0	29.722
41.0	16.980	85.5	29.891
41.5	17.036	86.0	30.050

42.0	17.091	86.5	30.198
42.5	17.146	87.0	30.333
43.0	17.200	87.5	30.455
43.5	17.254	88.0	30.563
44.0	17.308	88.5	30.656
44.5	17.361	89.0	30.732
45.0	17.415	89.5	30.791

最终，通过对比，我们得到飞机最佳入水角度 $\theta \in (6^\circ, 9^\circ)$ 。

4 模型的评价和拓展

4.1 模型的评价

1) 有效利用数据

飞机的最佳入水姿态的准确性最佳检验手段就是飞机仿真实验，即通过飞机迫降的模拟实验最佳入水角度与模型入水角度的偏差，就可以对相应模型的最佳入水角度进行修正，在解决最佳入水角度的过程中，我们发现模型最佳入水角度与实验最佳入水角度偏差不大，因此，利用某一入水角度数据拟合来修正理论模型，利用其它入水角度对修正后的模型进行验证。

这种方法有效避免了数据的重复利用，更充分使用了文献提供的有限数据，同时也获得了较好的效果。

2) 充分简化积分模型

解决最佳入水姿态的关键在于求的飞机所受冲击力与入水角度的函数关系，然而通过流固耦合、有限元分析及流体力学的方法求的解析解的难度很大，为此我们利用非完全弹性碰撞和相似理论，化繁为简，获得了精度较高的理论模型，另外，这种简化思想也充分体现在对 C 和 k 的编程求解上：我们单从定积分的定义出发，依据近似、求和，取极限的步骤编程，通过微元法取数量级很小的步长来实现结果的准确性。

4.2 模型的拓展

由于附件中信息有限，加之时间的紧迫，所以本文的模型在实际中仍然有改进的空间。目前国际上对最佳入水姿态的目标是建立一种实用性强、准确性高、方法科学的标定方法。从这一目标出发，我们可以拓展的方向集中在精确度和准确性上。

1) 体积求解的改进

为了快速建立飞机所受冲击力与入水角度的函数关系，我们划定了步长，然后利用C语言经行有限次逼近，使得模型的求解结果符合飞机撞击实验结果，但是这里只考虑了飞机入水角度的影响，没有考虑到飞机起落架收放对飞机冲击力的影响，造成了对最佳入水姿态的误差。

在时间充裕的情况下，可以考虑建立飞机起落架的影响，将飞机起落架等效成为双质量模块，通过无限次的逼近算法，使得冲击力积分偏差减小到最低。

2) 误差项拟合的强化

对于误差项拟合的好坏，直接关系到数据的准确性。本文建立了简单的误差拟合手段，虽然取得了较好的整体效果，但是误差项的拟合可以进一步深入，使得拟合出的误差项函数更加精准。

3) 流程循环的反复性

在对问题的分析中，我们建立了相应的流程图，流程图中有验证环节，但在文中，修正的值和实际值的最大相对误差降低到0.3%，我们就认定为修正值满足实际要求，没有继续深入。但如果考虑到起落架等问题中，计算过程中需要多次计算，会使误差相互传递、相互放大，最终影响结果。

4.3 小结

本文也有较多的改进之处，模型忽略了较多因素，是在理想情况下获得的近似解；并且在求飞机冲击力的过程中两次模型简化，从而影响了模型的精确性；同时，以上模型都是自己独立建立的，求解效果仍存在一些误差。但总的来说，上述模型还是具有较好的实际操作价值和科学指导意义的。

参考文献

- [1] 孙为名，民机机身结构稳定性和水上迫降分析与应用研究，http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_D076168.aspx，2011年4月
- [2] 胡大勇，杨嘉林，王赞平，魏教育，童亚冰，某型飞机水上迫降数值化模型，第34卷，第12期，2008年12月
- [3] 王永虎，石秀华，李文哲，李强，斜入水高速冲击的理论建模及缓冲分析，机械科学与技术，第27卷，第6期，2008年6月
- [4] 姚文莉，陈滨，考虑摩擦的平面多刚体系统的冲击问题，北京大学学报，第40卷，第5期，2004年9月
- [5] 史有进，张曾鋈，大柔性飞机着陆响应弹性机体模型，东南大学学报，第35卷，第4期，2005年7月

附录一

物性参数 C 与 K 的求解程序

```

#include "stdio.h"
#include "stdlib.h"
#include "math.h"

void main()
{
    double k,c,wn,b,r,wd,tay,tax,fy,fx,f,k0,c0,m,vy,vx,x1=0,x2=0,x=0,f1=0,f2=0;
    vx=33.75;
    vy=1.74;
    m=52475;
    long double f0=m*9.8*13.73,z=1e20;
    for(k=100;k<=5e5;k=k+800)
    {
        for(c=100;c<=1e5;c=c+500)
        {
            wn=sqrt(k/m);
            b=c/(2*sqrt(k*m));
            r=(c*0.5)/m;
            wd=sqrt(1-(b*b*wn));
            x1=2*r*9.8+vy*wn*wn*(1-b*b);
            x2=r*vy*wd*(2+1/(1-b*b))-9.8*wd*(2-(1/(1-b*b)));
            tay=(atan((x1/x2)))/wd;
            if(tay<0)
            {tay=fabs(tay);}
            x=(cos(wd*tay))*(9.8-2*r*vy)-(sin(wd*tay))*(r*9.8+vy*wn*wn)/wd;
            fy=m*(9.8-(exp(0-(r*tay)))*x);
            x1=vx*wn*wn*(1-b*b);
            x2=r*v*wd*(2+1/(1-b*b));
            tax=(atan((x1/x2)))/wd;
            if(tax<0)
            {tax=fabs(tax);}
            x=(cos(wd*tax))*(0-2*r*v)-(sin(wd*tax))*(0+vx*wn*wn)/wd;
            fx=m*(0-(exp(0-(r*tax)))*x);
            f=(fabs(fy))*cos(2*3.14159/180)+(fabs(fx))*sin(2*3.14159/180);

            if((fabs(f-f0))<z)
            {
                z=fabs(f-f0);
                c0=c;
                k0=k;
                f2=f;
            }
        }
    }
}

```

```

    }

    if(f>f1)
    {
        printf("1 ");
    }
    else
    {
        printf("0 ");
    }
    f1=f;
    }printf("\n");
}
printf("%f    %f    %f    %f    %f\n",z,c0,k0,f2,z/f0);

```

}

附录二

计算不同入水角度 α 所对应的最大冲击力 F 值

```
#include "stdio.h"
```

```
#include "stdlib.h"
```

```
#include "math.h"
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    double k,c,wn,b,r,wd,tay,tax,fy,fx,f,k0,c0,m,vy,vx,x1=0,x2=0,x=0,f1=0,f2=0,i,i0;
```

```
    vx=33.75;
```

```
    vy=1.74;
```

```
    m=52475;
```

```
    c=98000;
```

```
    k=45000;
```

```
    double f0=1e20;
```

```
    wn=sqrt(k/m);
```

```
        b=c/(2*sqrt(k*m));
```

```
        r=(c*0.5)/m;
```

```
        wd=sqrt(1-(b*b*wn));
```

```
        x1=2*r*9.8+vy*wn*wn*(1-b*b);
```

```
        x2=r*vy*wd*(2+1/(1-b*b))-9.8*wd*(2-(1/(1-b*b)));
```

```
        tay=(atan((x1/x2)))/wd;
```

```
        x=(cos(wd*tay))*(9.8-2*r*vy)-(sin(wd*tay))*(r*9.8+vy*wn*wn)/wd;
```

```
        fy=m*(9.8-(exp(0-(r*tay)))*x);
```

```
x1=vx*wn*wn*(1-b*b);
x2=r*vx*wd*(2+1/(1-b*b));
tax=(atan((x1/x2)))/wd;
x=(cos(wd*tax))*(0-2*r*vx)-(sin(wd*tax))*(0+vx*wn*wn)/wd;
fx=m*(0-(exp(0-(r*tax)))*x);

for(i=1;i<=15;i=i+1)
{

    f=0;

    f=(fabs(fy))*cos(i*3.14159/180)+(fabs(fx))*sin(i*3.14159/180);

    if(f<f0)
    {
        f0=f;
        i0=i;
    }

    printf("%f\n",f);

}

printf("%f      %f      ",f0,i0);

}
```