

## 第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站 (www.madio.net) 公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：# 1204

参赛队员 （签名）：

队员 1： 刘 曦

队员 2： 黄文辉

队员 3： 邓瀚杰

参赛队教练员（签名）： 邓 磊

参赛队伍组别： 大学组

第三届“ScienceWord”杯数学中国  
数学建模网络挑战赛  
编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1204 号

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

## 2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目：\_\_\_\_\_ A 题：聪明的汽车  
关键词：\_\_\_\_\_ 规划模型 安全区域 最小车位长度

### 摘 要

该问题要求我们协助驾驶员解决侧位停车问题。停车位置的平面图是已知的，汽车本身的数据能够方便测得，我们要做的就是确定汽车是否能安全进入停车位，在汽车能够进入停车位的时候，确定汽车进入时的位置和角度，即停车的安全区域。在汽车能够安全进入停车位的情况下，我们可以算出汽车刚好进入时的临界情况，这样我们就可以方便地确定汽车安全进入的条件，这样问题一就解决了。因此，我们从问题二着手，先解决问题二，然后再解决问题一。由于两次泊车是最基础的，因此我们先讨论两次泊车的情况。

针对问题二，我们建立合适的直角坐标系，将车的运动转化成点的轨迹。由于汽车开始倒车时的初始位置、车刚到达空位边线的位置以及第一次泊车过程中，右后轮转过的角度，这三个因素对车是否能安全进入具有很大的影响，因此，我们分别对三种状况选取合适的参量建立规划模型，并寻找使得其最优的约束条件。最终我们得出了车能够安全进入的位置范围和角度范围，即得出了汽车停车的安全区域。对于一般的汽车来说，我们得出，车刚到达停车位边线时，转向角  $\theta$  的范围为  $[35, 45]$  度。车的右后方端点在坐标系中的纵坐标  $y$  的范围为  $[-3.3, -2.6]$

针对问题一，车的后悬  $q$ ，长  $l$ ，宽  $w$  以及最小转弯半径  $r$  等都是确定的，我们在上一问模型三的基础上，建立出停车位的长度  $L$  与  $q, l, w, r$  之间的函数关系式。由于每辆车都由一个匹配的  $q, l, w, r$ ，这样我们就能根据每辆车的具体情况，确定出能够使车安全停放的最小车位长度  $L$ 。由于停车位的宽度一般都为 2.2 米，这样我们就得到了能够容纳汽车的最小车位的长度  $L$  宽度 2.2。则问题一就顺利解决了。

参赛队号 \_\_\_\_\_ #1204  
所选题目 \_\_\_\_\_ A 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

## Abstract

The problem here needs us to help the driver solve the lateral parking issue. Since the 2-Dimensional graph of parking position is known and the parameters of the car is easy to obtain, we are able to make sure under what condition can the car be safely parked into the parking position and pinpoint the route and angle that the car is going to take. Ensuring the car can be safely parked, we can calculate the critical situation under which the car can exactly and also safely be put in. Therefore, problem one can be solved. However, our plan starts from problem two, after this problem one can be easily settled. Moreover, based upon the fact that twice parking is the most basic way to park, so we take twice parking as the main discussion, which is the following.

For problem two, we established a rectangular coordinate and regard the movement of car as points of locus. Since the initial position, the position that the car reaches the baseline of parking space and the first-parking angle are the three key factors, we build three different models for them respectively by taking appropriate parameters. Furthermore we tried to find the best parameters and constraints that can lead to optimal result. At last, we are able to get security zones and angles that the car can be put into space. For normal cars, we get a conclusion that when the car reaches the baseline of the parking space, the best angle ranges is  $[35, 45]$  and the range of the car's rear in the coordinate is  $[-3.3, -2.6]$ . For problem one, Car rear overhang( $q$ ), car length( $l$ ), car width( $w$ ) and the minimum turning radius( $r$ ) are determined. Based on the model three above, we established a functional relationship between the parking space length( $L$ ) and  $q, l, w, r$ , which can be measured from a specific car. After that, we can calculate the minimum parking space length( $L$ ). From experience, normal parking space width is 2.2 meters which, in our model, is considered as the minimum parking space width for the car. Finally, problem one is settled.

## 目 录

|       |                 |    |
|-------|-----------------|----|
| 1     | 问题的重述           | 1  |
| 2     | 模型的假设           | 1  |
| 3     | 符号的假设和说明        | 2  |
| 4     | 问题二的分析和模型的建立、求解 | 2  |
| 4.1   | 问题二的分析          | 2  |
| 4.2   | 问题二模型的建立与求解     | 4  |
| 4.2.1 | 模型一的建立          | 4  |
| 4.2.2 | 模型二的建立          | 7  |
| 4.2.3 | 模型三的建立、求解与结果分析  | 7  |
| 4.3   | 模型一、二的结果分析      | 9  |
| 4.3.1 | 模型一的结果分析        | 9  |
| 4.3.2 | 模型二的结果分析        | 10 |
| 5     | 问题一的分析和模型的建立、求解 | 11 |
| 5.1   | 问题的分析           | 11 |
| 5.2   | 模型的建立及求解        | 11 |
| 5.3   | 结果分析            | 12 |
| 6     | 模型的评价           | 13 |
| 7     | 模型的改进和推广        | 14 |
| 7.1   | 模型的改进措施         | 14 |
| 7.2   | 模型的推广           | 14 |
| 8     | 参考文献            | 14 |
| 9     | 附录              | 15 |

## 1 问题的重述

要在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，对驾驶员的停车技术和自信心一直是个很大的挑战。调查报告显示，超过一半的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这不仅会影响驾驶员的驾驶体验，也不能使停车空间得到充分的利用。尤其是对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会很难确定自己的汽车是否能顺利进入空位，因此什么情况下能够使自己的汽车顺利进入停车位成了广大驾驶员关注的一个问题。现在我们要协助驾驶员解决以下两个问题：

1、针对侧位停车，在能够得到停车位置的平面图以及汽车本身的数据的时候，即能够得到空位的长度、宽度，以及汽车的几何尺寸、转弯半径等数据的时候，需要判断汽车是否能在该空位侧位停车。

2、当停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上的时候，汽车为了进入停车位，汽车应该在哪个位置以多大的角度进入是我们要解决的问题，并将停车的理想路线和允许的偏差传送给驾驶员。

## 2 模型的假设

1. 汽车在停车时总是以倒车方式停车，因为汽车前轮既是驱动轮，又是转向轮，具有较强的转向能力而后轮没有。如果先进前轮的话，后轮无法在进入后摆正，所以只能先进后轮，在根据前轮的转向能力把车身摆正。
2. 由我们的经验知道，如果允许无数次倒车，则只要停车位的长、宽比车的长、宽稍微大一点，汽车就能通过无数个一次泊车，使车停入车位。考虑到停车时间和驾驶员的耐性等问题，我们将允许的最大泊车次数定为 5 次。
3. 当停车位前后都有车时，汽车开始倒车时与前一辆车平行，并且车尾处于同一水平面。
4. 标准停车方式为车停在空位的正中央，并且空位前后已停了的车的停车方式均为标准方式。

报名号 #1204

### 3 符号的假设和说明

表 1

| 符号           | 表示意义              |
|--------------|-------------------|
| $L$          | 停车位长度             |
| $W$          | 停车位宽度             |
| $l$          | 车长                |
| $w$          | 车宽                |
| $q$          | 汽车后悬长度            |
| $d$          | 初始位置是甲乙两车的距离      |
| $\theta_1$   | 后车轮第一次泊车的转角度数     |
| $\theta_1^*$ | 后车轮第一次泊车的转角度数的最小值 |
| $r$          | 汽车的最小转弯半径         |

### 4 问题二的分析和模型的建立、求解

#### 4.1 问题二的分析

首先，我们对以下参数进行定义： $L$ ：停车位长度， $W$ ：停车位宽度， $l$ ：车长， $w$ ：车宽， $q$ ：汽车的后悬长度， $r$ ：汽车的最小转弯半径， $d$ ：车 a、车 b 平行时的水平距离。以停车位前面已停的车的车尾为  $x$  轴，以停车位外延为  $y$  轴建立直角坐标系。汽车泊车过程如下图所示：

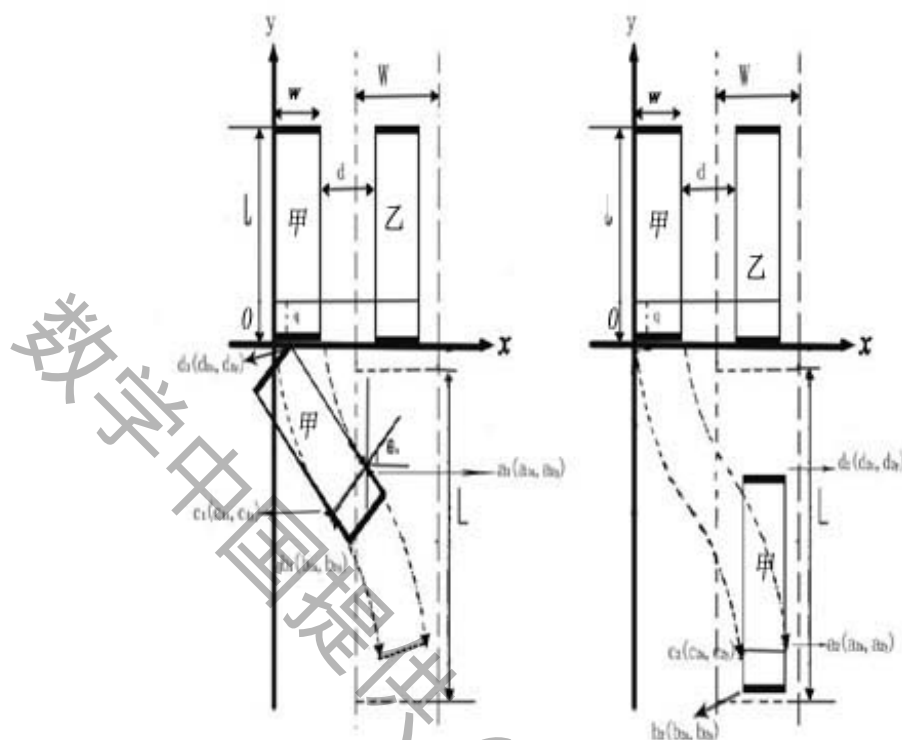


图 1 二次泊车轨迹图

在能够得到停车位置的平面图以及汽车本身的数据的时候，即能够得到空位的长度、宽度，以及汽车的几何尺寸、转弯半径等数据的时候。我们需要判断汽车是否能顺利停入车位。我们先给出下面这个定义：“一次泊车”：为了改变方向而转动一次方向盘的泊车过程称为“一次泊车”。于是我们可以将停车过程分为多次泊车。一般情况下，在前后都有障碍物的时候，驾驶员很难做到一次泊车就将汽车停入空位，因此我们从泊车次数为二的情况开始入手。

在车辆侧位泊车过程中，令第  $n$  次泊车结束时，后车轮泊车轨迹的转角弧度为  $\theta_n$ ，车轴与水平方向的夹角为  $\theta_{nt}$ ，（其中  $n=1$  或  $2$ ， $\theta_0 = 0$ ）

我们首先假设汽车通过两次泊车能够安全进入停车位。我们要确定出汽车初始停车的位置和到达车位边界时，汽车的转入角度。我们建立规划模型【1】，首先对汽车开始泊车时，相对于旁边车辆的距离  $d$  建立目标函数一，其中以停车位的长宽、汽车本身的长宽和转弯半径、转角弧度等作为限制条件，这是我们的模型一。然后我们要确定汽车刚进入停车位时的位置，我们设汽车刚刚进入停车位边线，即汽车的后右端达到点  $A(A_x, y)$ ，然后建立关于  $y$  的目标函数二，该目标函数的限制条件为转向弧度角  $\theta_1$ 。我们只知道  $\theta_n$  不超过  $45$  度，为了确定  $\theta_1$  的具体范围，我们建立模型三。这样我们能够求出  $y$  的范围，



确定汽车的进入点范围。这样，汽车停车时的初始位置和驶入角度我们就可以知道了。

## 4.2 问题二模型的建立与求解

### 4.2.1 模型一的建立

模型一【3】需要建立初始位置时，两车的水平距离  $d$  的目标函数

因为第  $n$  次泊车结束时，后车轮泊车轨迹的转角弧度为  $\theta_n$ ，车轴与水平方向的夹角为  $\theta_{nt}$ ，(其中  $n=1$  或  $2$ ， $\theta_0 = 0$ ) 则有

$$\theta_n - \theta_{n-1} = \theta_{nt}$$

如图 1 左所示，首先右打方向盘，使车身沿后车轴以半径  $r_1$  旋转  $\theta_1$ 。

泊车“一个步骤”后，后右轮中心点记为  $a_1(a_{1x}, a_{1y})$ ，车头右端点记为  $d_1(d_{1x}, d_{1y})$ ，后左轮中心点记为  $c_1(c_{1x}, c_{1y})$ ，车尾左端点记为  $b_1(b_{1x}, b_{1y})$ ，如图 1 右所示。我们能够得到以下关系式：

$a_1(a_{1x}, a_{1y})$ :

$$\begin{cases} a_{1x} = w + (r - w)(1 - \cos \theta_1) \\ a_{1y} = q - (r - w) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

$d_1(d_{1x}, d_{1y})$ :

$$\begin{cases} d_{1x} = a_{1x} - (l - q) \sin \theta_1 \\ d_{1y} = a_{1y} + (l - q) \cos \theta_1 \end{cases} \quad (2)$$

$c_1(c_{1x}, c_{1y})$ :

$$\begin{cases} c_{1x} = r(1 - \cos \theta_1) \\ c_{1y} = q - r \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3)$$

$b_1(b_{1x}, b_{1y})$ :

$$\begin{cases} b_{1x} = c_{1y} + q \sin \theta_1 \\ b_{1y} = c_{1y} - q \cos \theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

再左打方向盘，使车身沿后车轴以半径  $r_2$  旋转  $\theta_2$ ，如图 1 右所示。

泊车“两个步骤”后，后右轮中心点记为  $a_2(a_{2x}, a_{2y})$ ，车头右端点记为  $d_2(d_{2x}, d_{2y})$ ，后左轮中心点记为  $c_2(c_{2x}, c_{2y})$ ，车尾左端点记为  $b_2(b_{2x}, b_{2y})$ 。可以得到：

$a_2(a_{2x}, a_{2y})$ :

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x} + r(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ a_{2y} = a_{1y} - r(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (5)$$

报名号 #1204

$d_2(d_{2x}, d_{2y})$ :

$$\begin{cases} d_{2x} = a_{2x} - (l - q) \sin \theta_{2t} \\ d_{2y} = a_{2y} + (l - q) \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6)$$

$c_2(c_{2x}, c_{2y})$ :

$$\begin{cases} c_{2x} = c_{1x} + (r - w)(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ c_{2y} = c_{1y} - (r - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (7)$$

$b_2(b_{2x}, b_{2y})$ :

$$\begin{cases} b_{2x} = c_{2x} + q \sin \theta_{2t} \\ b_{2y} = c_{2y} - q \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (8)$$

则联立 (3) (7) (8) 式可以得到

$$b_{2y} = c_{2y} - q \cos \theta_{2t} = q + r \sin \theta_1 - (r - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) - q \cos \theta_{2t}$$

又因为  $a_{2x} = d + 2w$ , 则联立 (1) (5) 可得:

$$w + (r - w)(1 - \cos \theta_1) + r(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) = d + 2w$$

因为我们讨论的是两次泊车成功的情况, 则  $\theta_{2t} = 0$ , 此时有

$$\begin{cases} b_{2y} = -(2r - w) \sin \theta_1 \\ d = 2r - 2w - (2r - w) \cos \theta_1 \end{cases} \quad (9)$$

又因为  $b_{2y} \geq \frac{l-3L}{2}$ , 则有

$$\frac{3L - l}{2} \leq (2r - w) \sin \theta_1$$

此时, 我们可以得到目标函数为

$$d = 2(r - w) - (2r - w) \cos \theta_1 \quad (10)$$

由于  $r$  为最小转弯半径,  $w$  为车的宽度, 均为已知参数, 则  $d$  由  $\theta_1$  唯一确定 (我们将在模型三中求出  $\theta_1$  的范围)

报名号 #1204

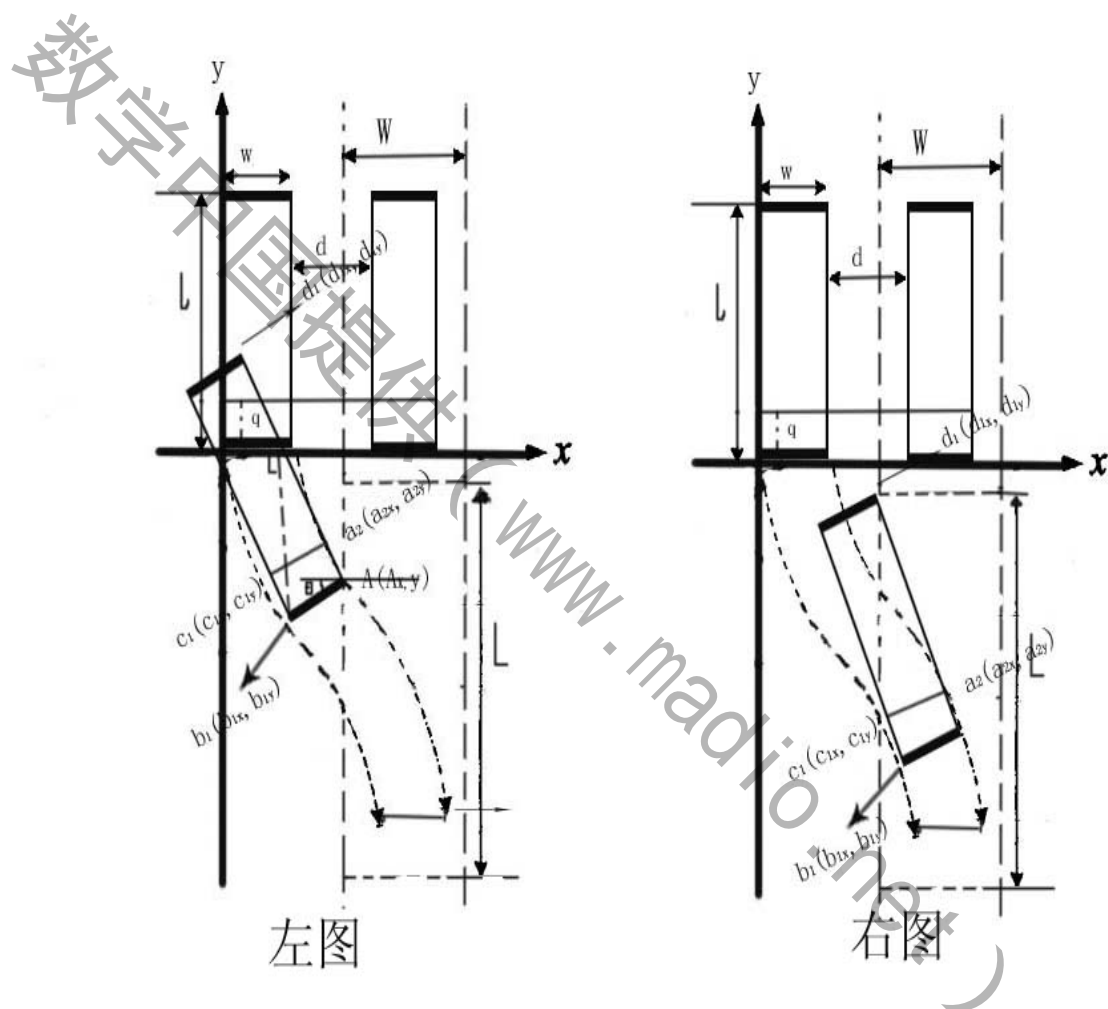


图 2 倒车时的临界情况

### 4.2.2 模型二的建立

在模型二中，我们需要确定汽车从哪个区域进入能够安全停车，即确定汽车的安全进入区域。如图二左所示。我们设汽车刚刚进入停车位边线时与外侧停车线的交点为  $A(A_x, y)$ ，即汽车的后右端达到点  $A$ ，然后建立关于  $A$  的纵坐标  $y$  的目标函数二，这样我们就可以确定出汽车的进入点，此时，相应的后车轮轨迹转向角为  $\theta_1$ ，则根据几何关系我们可以得到

$$b_{1y} = y - w \sin \theta_1$$

再根据公式 (4) 我们可以得到

$$y = (w - r) \sin \theta_1 + q(1 - \cos \theta_1) \quad (11)$$

此时，我们得到了进入点  $A$  到  $x$  轴的距离  $y$  的目标函数，由于  $w, r, q$  是已知量，则  $y$  只与后车轮轨迹转向角  $\theta_1$  有关。因此，同模型一一样，只要我们确定出  $\theta_1$  的范围，我们就可以得到  $y$  的取值范围，这样我们就确定出了汽车的安全进入区域。

### 4.2.3 模型三的建立、求解与结果分析

我们知道：在一般情况下，倒车过程中后车轮泊车轨迹的转角弧度  $\theta_1$  不会超过 45 度。现在我们就在这个条件下，确定出  $\theta_1$  的精确范围。如图二右所示，我们知道，在倒车过程中，如果车的前右端刚好和上一个停车位的边角点相交，则小车能够安全进入空位。此时的  $\theta_1$  最小，是一个临界值，我们记为  $\theta_1^*$ 。现在我们求  $\theta_1^*$  的范围：

当汽车端点与边角点重合时，由几何关系【2】我们可以得到

$$d_{1y} = a_{1y} + (1 - q) \cos \theta_1^* \quad (12)$$

再由 (1) 式，我们可以得到

$$d_{1y} = q - (r - w) \sin \theta_1^* + (l - q) \cos \theta_1^*$$

按照规定的标准停车方式我们可以得到

$$d_{1y} = -\frac{L - l}{2}$$

报名号 #1204

于是我们可以得出  $\theta_1^*$  满足的条件

$$-\frac{L-l}{2} = q - (r-w) \sin \theta_1^* + (l-q) \cos \theta_1^* \quad (13)$$

由三角函数的知识，我们可以将  $\theta_1^*$  表示出来：

$$\theta_1^* = \arcsin \left( \frac{L-l+2q}{2\sqrt{(r-w)^2 + (l-q)^2}} \right) + \arctan \frac{l-q}{r-w} \quad (14)$$

由于  $L, l, q, r, w$  等参数均可测得，那么对于一辆具体的汽车，我们求出它的最小转角弧度  $\theta_1^*$ ，于是针对每辆汽车的  $\theta_1$  的范围我们就求出来了，为

$$\theta_1^* \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4} \quad (15)$$

得出  $\theta_1$  的范围后，我们可以根据公式 (10) 和公式 (11)，求出  $d$  和  $y$  的范围，于是汽车的初始停车位置，汽车进入空位的范围以及汽车切入空位的角度的范围我们都能求出来。

我们搜集到以下 5 种车的相关数据  $l, q, r, w$ ，如表二所示。据调查可知，停车位的长度要在车长的基础上增加 0.2 到 0.5 米，于是我们根据这五种车的车长假设停车位的长度  $L = 5.3m$ ，则我们可以根据公式 (14) 算出每种车对应的最小转角  $\theta_1^*$ ，如表三所示。

表 2 五种车的相关参数 (单位: mm)

|          | 车长 $l$ | 后悬 $q$ | 最小转弯半径 $r$ | 车宽 $w$ |
|----------|--------|--------|------------|--------|
| 宝马 1     | 4820   | 1012   | 5300       | 1855   |
| 宝马 2     | 4871   | 1090   | 5650       | 1855   |
| 奔驰 S 级 1 | 5230   | 1140   | 6100       | 1871   |
| 桑塔纳      | 4546   | 1002   | 5500       | 1710   |
| 奔驰 S 级 2 | 5206   | 1010   | 6100       | 1871   |

表 3 五种车对应的最小转角 (单位: 度)

| 车名           | 宝马 1 | 宝马 2 | 奔驰 S 级 1 | 桑塔纳 | 奔驰 S 级 2 |
|--------------|------|------|----------|-----|----------|
| $\theta_1^*$ | 36   | 35   | 35       | 35  | 34       |

于是每种车的转角范围就求出来了：

报名号 #1204

表 4 五种车对应的转角范围（单位：度）

| 车名             | 宝马 1                       | 宝马 2                       | 奔驰 S 级 1                   | 桑塔纳                        | 奔驰 S 级 2                   |
|----------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\theta_1$ 的范围 | $36 \leq \theta_1 \leq 45$ | $35 \leq \theta_1 \leq 45$ | $35 \leq \theta_1 \leq 45$ | $35 \leq \theta_1 \leq 45$ | $34 \leq \theta_1 \leq 45$ |

### 4.3 模型一、二的结果分析

#### 4.3.1 模型一的结果分析

在模型三中，我们可以求出汽车的最小转角  $\theta_1^*$  值，根据表三中的数据我们可以将  $\theta_1^*$  的值取为 35 度。则模型一的约束条件  $\theta_1^*$  的范围为  $[35, 45]$  度，则目标函数即为：

$$d = 2(r - w) - (2r - w) \cos \theta_1$$

$$35 \leq \theta_1 \leq 45$$

通过  $\theta_1$  的范围，我们可以通过 MATLAB 程序（见附录 2）得到  $d$  随  $\theta_1$  变化的函数图像：

报名号 #1204

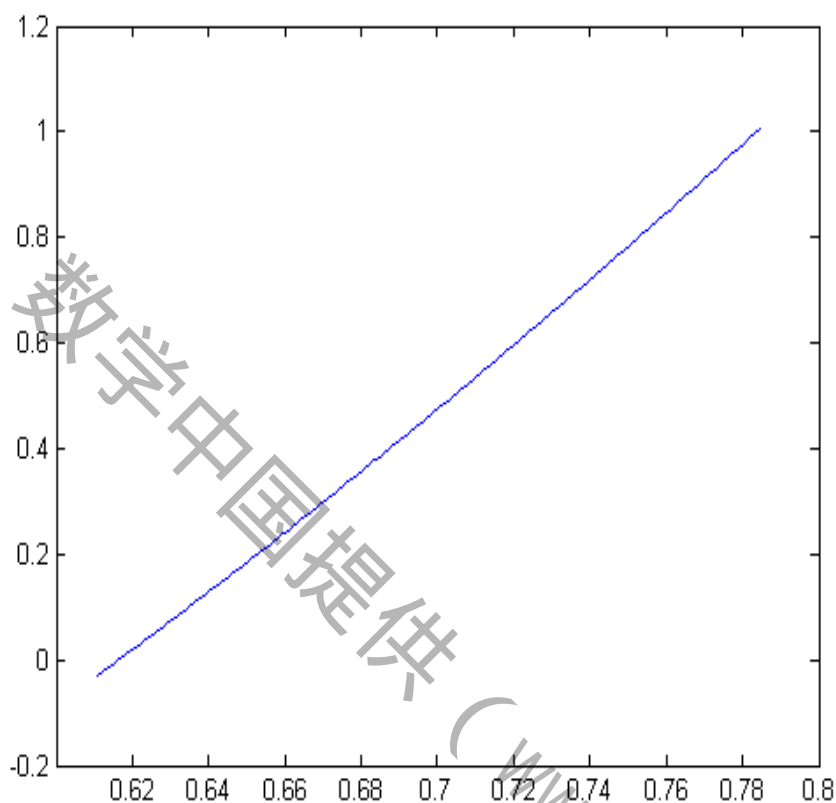


图 3  $d$  随  $\theta_1$  的变化图

由图所示， $d$  不会超过  $1\text{m}$ ，又因为  $d$  大于  $0$ ，所以有  $0 \leq d \leq 1$

#### 4.3.2 模型二的结果分析

与模型一一样，我们通过模型三中的转角  $\theta_1$  范围的确定，进而求得：目标函数二

$$y = (w - r) \sin \theta_1 + q(1 - \cos \theta_1)$$

中进入点  $y$  的范围，通过 MATLAB 程序（见附录 3）分别得出以上五种汽车的进入点的范围如表 5：

报名号 #1204

表 5 五种车对应的进入点范围（纵坐标表示）

| 车名 | 宝马 1               | 宝马 2               | 奔驰 S 级 1           | 桑塔纳                | 奔驰 S 级 2           |
|----|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| y  | $[-2.852, -2.499]$ | $[-2.858, -2.582]$ | $[-3.240, -2.857]$ | $[-2.918, -2.749]$ | $[-3.338, -2.870]$ |

于是我们就可以得出汽车驶入点到 x 轴的距离 y 的范围，这样我们就得出了汽车进入点的范围。由表 5 我们可以近似估计 d 的范围为  $[-3.3, -2.6]$

## 5 问题一的分析和模型的建立、求解

### 5.1 问题的分析

在模型三中，我们已经建立了当汽车恰好能安全进入停车区域所对应的最小转角  $\theta_1^*$  值，我们继续对 (15) 式进行研究。根据图 2 右，我们可以知道 B 点的纵坐标的值不能超过  $d_{1y}$  的纵坐标的值，否则两车将会相碰。于是我们有：

$$-\frac{L-l}{2} \geq q - (r-w) \sin \theta_1 + (l-q) \cos \theta_1$$

我们将上式转化成为关于角度  $\theta_1$  的函数问题。由于  $\theta_1$  的范围在模型三中可以求出，则我们可以得到  $L$  与  $q, l, r, w$  的关系，又由于  $q, l, r, w$  都只与汽车的性能有关，因此我们就可以完全根据汽车的性能参数，通过程序计算出每个型号的汽车具有的最小停车空位长度。只有当空位的长度大于所求出的  $L$  值时，汽车才可以安全泊车，否则汽车将无法安全停车。于是，当知道停车空位的长度  $L$  的时候，我们就可以知道汽车是否能够顺利停车了，这样，我们的问题一就成功解决了。

### 5.2 模型的建立及求解

由模型三以及根据图 2 右可知：汽车能够安全二次泊车的临界条件是  $d_{1y}$  与 B 点重合，那么当  $d_{1y}$  在 B 点下方时，显然汽车能够安全二次泊车的。则有：B 点纵坐标的值小于或者等于  $d_{1y}$  的纵坐标值，即

$$-\frac{L-l}{2} \geq q - (r-w) \sin \theta_1 + (l-q) \cos \theta_1, \quad (\theta_1^* \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4})$$



报名号 #1204

令函数

$$f(\theta_1) = (r - w) \sin \theta_1 - (l - q) \cos \theta_1 + \frac{L - l}{2} - q, \quad (\theta_1^* \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4}) \quad (16)$$

为了满足要求，我们要让  $f(\theta_1) \geq 0$  在定义域  $[\theta_1^*, \frac{\pi}{4}]$  内恒成立。对  $f(\theta_1)$  求导可得：

$$f^{(1)}(\theta_1) = (r - w) \cos \theta_1 + (l - q) \sin \theta_1$$

一般对于汽车而言，有： $r > w$ ， $l > q$  且有对于  $\theta_1 \in [\theta_1^*, \frac{\pi}{4}]$  均有

$$\cos \theta_1 \geq 0, \quad \sin \theta_1 \geq 0$$

故有：

$$f^{(1)}(\theta_1) \geq 0$$

恒成立。则函数  $f(\theta_1)$  在定义域  $[\theta_1^*, \frac{\pi}{4}]$  内单调递增，则只要  $f(\theta_1^*) \geq 0$  即可。即

$$f(\theta_1^*) = (r - w) \sin \theta_1^* - (l - q) \cos \theta_1^* + \frac{L - l}{2} - q \geq 0$$

恒成立。故有：

$$L \geq 2(l - q) \cos \theta_1^* - 2(r - w) \sin \theta_1^* + 2q + l$$

将此式与模型三中的 (14) 式联立，我们就得到了  $q, l, r, w$  对  $L$  的限制关系，于是根据  $q, l, r, w$  的值我们就可以计算出能够使汽车安全停入的最小空位长度，而停车空位的宽一般为 2.2m，因此，能够安全停车的停车位我们就知道了。

### 5.3 结果分析

与模型一二相类似，我们可以通过模型三中的转角  $\theta_1$  范围的确定，进而求得：车位长度

$$L \geq 2(l - q) \cos \theta_1^* - 2(r - w) \sin \theta_1^* + 2q + l$$

我们取  $L$  的最小值  $L_{min}$  作为最短的停车空位的长度，由 MATLAB 程序（见附录 2）得到相应的五种不同型号的汽车的  $L_{min}$  如表 6：

报名号 #1204

表 6 五种车对应的停车位长度的最小值

| 车名        | 宝马 1  | 宝马 2  | 奔驰 S 级 1 | 桑塔纳   | 奔驰 S 级 2 |
|-----------|-------|-------|----------|-------|----------|
| $L_{min}$ | 5.301 | 5.312 | 5.698    | 5.103 | 5.691    |

那么我们可以通过这个程序对每个型号的汽车都进行  $L_{min}$  值的确定，然后直接通过比较实际车位长度与  $L_{min}$  值的大小，当实际车位长度大于  $L_{min}$  的值的时候，我们才说该汽车可以安全二次停车，可以进行侧位停车，否则将不能进行侧位停车。

通过这个模型，我们就得到了问题 1 的直观简单的判断汽车是否能够安全泊车，即实际车位长度大于  $L_{min}$  的值时可以安全泊车，否则不能。

## 6 模型的评价

### 模型的优点

- 我们从第二问着手，分析了影响汽车安全进入车位的因素，包括：汽车开始倒车时的初始位置、车刚到达空位边线的位置以及第一次泊车过程中，右后轮转过的角度。将安全停车问题进行简化，转化为寻找安全区域的问题，使得问题得到简化。
- 我们分别对三个因素建立规划模型，分别找出使得它们成立的最优解。于是确定了安全进入的位置范围和角度范围，即得出了汽车停车的安全区域。安全区域的确定可以让驾驶员在停车时更有自信，降低了因碰撞导致的汽车损坏。
- 为了解决问题一，我们对停车位的长进行限制，得出它与车的后悬，长宽以及最小转弯半径之间的关系式，并且这些参数都可容易得到。于是给定一辆车，我们就能求出它所需的最小空位长度。于是，在停车位的长度确定的时候，驾驶员就可以直接判断是否能够停车。

### 模型的缺点

1. 由于时间原因，我们只对两次泊车的情况进行讨论，没有考虑其他情况。
2. 在假设中规定了标准停车方式为车停在空位的正中央，这样的要求稍微过高。

## 7 模型的改进和推广

### 7.1 模型的改进措施

该模型是建立的汽车能够安全二次泊车的假设条件下，根据汽车本身性能以及车位的一些关系建立起来的，能够粗略的确定出汽车安全泊车的准确位置和转角，以下是我们对该模型进行的一些改进措施：

1、模型中可以设置许多优化模型，是因为本模型中考虑的一些参数（比如说汽车的  $q, l, w, r$ ）固定化了，我们可以逐步的建立将  $q, l, w, r$  分别发生变化的优化模型，对参数考虑得越周密，所得出的进入点准确位置也会更精确。

2、本模型在安全泊车次数上有比较大的局限性，仅仅考虑的是二次泊车的情形，因此，我们可以采用类似于数学归纳法、通过二次泊车模型逐步建立起  $n(n \geq 3)$  时的模型，这样考虑出来所得出的结果将会具有更强的实用性。

3、本模型采用了利用汽车轨迹逐步寻求的建模步骤来建立模型，这样的轨迹有些在操作过程中难以把握，因此，我们可以对汽车进行仿真，采用 MATLAB 仿真的仿真模型进行改进，这样会使模型更具有说服力。

### 7.2 模型的推广

其实，该模型可以在一定程度上解决所有类似寻求轨迹的问题，比如说船舶系统、飞机运行轨道系统等，是因为这些问题都具有很大的共性，即如何找出实物在操作过程中的转弯以及停留问题。

另外，如果该模型添加了 MATLAB 仿真模型之后，将更具体非常强大的推广价值，比如说通信与卫星系统、飞机飞行系统、船舶系统、生物系统、控制系统等，具有非常直观形象的特点，占据强大的优势。

## 8 参考文献

【1】姜启源，谢金星等，数学模型（第三版），北京：高等教育出版社，2003.8

【2】赵静，但琦，数学建模与数学实验 [M]，北京：高等教育出版社，2002.

【3】赵玲，平行泊车方法研究与仿真，U49-10710-06241282：14-35，2009.5

## 9 附录

附录 1:

```
/** * 求  $\theta$  的值, 参数有, L,l,q,r,w  
* @author John Deng  
* 得出  $\theta$  的角度  
*/ public class Calculate  
public static void main(String[] args)  
cal(5.7, 5.2, 1.1, 6.1, 1.871);  
public static void cal  
(double L, double l, double q, double r, double w)  
for(int i = 0; i<360; i+=1)  
double a = -(l-L+2*q)/2+(r+w)*Math.sin(Math.toRadians(i));  
double b = (L-q)*Math.cos(Math.toRadians(i));  
System.out.println("a="+a+" "+"b="+b);  
if((b-a)>0.001)  
System.out.println(" 所得的角度为: "+i); return;
```

附录 2:

```
/** * 求  $\theta$  的值, 参数有, L,l,q,r,w  
* @author John Deng  
* 得出  $\theta$  的角度  
*/ public class Calculate  
public static void main(String[] args)  
L = 0;  
l = 4.82; q = 1.12; r = 5.3; w = 1.855;  
L = 2*(l-q)*Math.cos(Math.toRadians(40)) -  
2*(r - w)*Math.sin(Math.toRadians(40)) + 2*q + l;  
System.out.println(L);  
//cal(L, l, q, r, w);  
//domain(q, r, w);  
//System.out.println(compare(5.3,4.82,5.3,1.855));  
//System.out.println(abs(5.35,4.87,5.65,1.855));
```

## 报名号 #1204

附录 3:

```

public static void cal(double L, double l, double q, double r, double w)
for(int i = 0; i<=360; i+=1)
double a = -(l-L+2*q)/2+(r+w)*Math.sin(Math.toRadians(i));
double b = (L-q)*Math.cos(Math.toRadians(i));
System.out.println("a="+a+" "+"b="+b);
if((b-a)<0.001)
System.out.println(" 所得的角度为: "+i);
thita = i; return;
public static boolean compare(double L, double l, double r, double w)
double a = (2*Math.sqrt(2)-1)*L + (3-2*Math.sqrt(2))*l;
double b = 2*(r-w);
return a<=b?true:false;
public static double abs(double L, double l, double r, double w)
double a = (2*Math.sqrt(2)-1)*L + (3-2*Math.sqrt(2))*l;
double b = 2*(r-w);
return a-b;
public static void domain(double q, double r, double w)
double climax = Math.atan((r-w)/q);
double y1 = (w - r)*Math.sin(thita) - q*Math.cos(thita) + q;
double y2 = (w - r)*Math.sin(Max) - q*Math.cos(Max) + q;
double y3 = (w - r)*Math.sin(climax) - q*Math.cos(climax) + q;
double max = Math.max(y1, Math.max(y2, y3));
double min = Math.min(y1, Math.min(y2, y3));
System.out.println("Y 的范围为: "+"["+min+"","+max+"]");
System.out.println(y1);
System.out.println(y2);
System.out.println(y3);
public static int thita;
public static final int Max = 45;
public static double L;
public static double l;

```

报名号 #1204

---

public static double q;

public static double r;

public static double w;

数学中国提供 (www.madio.net)