

参赛队号 # 1753

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1753

参赛队员（签名）：

队员 1：刘少杰

队员 2：彭岩

队员 3：姚娟娟

参赛队教练员（签名）： 无

参赛队伍组别：研究生组

参赛队号 # 1753

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1753

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号 # 1753

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降时的姿态关 键 词 水上迫降、有限元、插值函数、Newmark

摘 要：

随着航空业的不断发展，飞机的不断增多，近年来飞机、直升机在近海或跨海使用越来越频繁。在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机在海面的迫降具有更大的难度和危险性。

客机在海面迫降，主要考虑飞机入水姿势和海面情况。

客机在海面迫降，为抵抗客机腹部低压区对客机的拉力，需要客机以一定仰角入水，产生一些正面压力，在竖直方向托起客机。但是如果仰角过大，机身尾段受到的阻力过大，而前段靠惯性仍然保持较高的速度向前滑行，超过了机身结构的强度之后，飞机就会从中间断开。

水面情况是对机组最大的考验。客机在海面迫降，海面的波浪要比河面上大的多。如果飞机迎面撞上一个浪头，后果比撞进森林还要可怕。因此最理想的情况是顺着波浪的方向着陆。

由于客机海面迫降涉及多场耦合，加上有风浪的存在，问题十分复杂。基于本问题，从经典的弹性力学出发建立的多场耦合偏微分方程组无法计算。为此，本文采取有限单元法，用三角形壳单元离散了客机模型的求解域，找到了位移插值函数，建立了动力学控制方程。这将问题简化成求解一组常微分方程组，使得客机海面迫降问题可解。

利用 ABAQUS 软件平台，建立了客机的有限元模型，并导入具体参数，基于 Newmark 计算方法使控制方程解耦，对 3 种工况条件进行了动力学计算，分析了客机入水时的姿态和航向对于飞机结构压力的影响，并分析客机落水后，风浪对客机振动的影响。得到了如下结果：

工况 序号	航向/ °	攻角/°	腹部应力 峰值/MPa	尾翼应力 峰值/MPa	舱门 X 方 向变形/cm	舱门 Y 方 向变形/cm	舱门 Z 方 向变形/cm
1	0	5	287.8	229.6	6.40	10.76	0.82
2	0	8	327.4	269.3	21.58	36.31	1.28
3	4	5	289.6	217.4	6.88	10.94	0.99

客机航向与风浪运动方向相同并以 5°攻角着水时，客机腹部和尾翼应力峰值最小，客机的舱门 X、Y、Z 三个方向的变形也最小，舱门可安全打开。

参赛队号 1753所选题目 A参赛密码 _____
(由组委会填写)

Abstract

With the continuous development of aviation and the growing number of the plane in recent years, the use of planes and helicopters in offshore or sea-crossing is so frequent that the occurrence of water landing and crash is increasing. During the transoceanic flights, there is significant flights failure occurred for the accident, the plain is forced landing in the sea.

The plane water landing in security needs consider two factors: the water stance and structural strength.

While the plain is forced landing in the sea. You need a certain elevation plain into the water to create some positive pressure, hold up passenger aircraft in the vertical direction to resist the pull to the abdominal area of low pressure of the passenger plane. However, if the elevation is too large, and the resistance of the fuselage tail section was too large, while the front remained relatively high through the speed of inertial sliding forward over the fuselage structural strength, the plane will be disconnected from the middle.

Water is the greatest test of the plain unit. Airliner lands in the sea, the power of sea waves are much larger than the river. If the plane hit a wave directly, the consequences are more terrible than that crashes into the forest. So the ideal situation of landing is along the direction of the wave.

Because water landing aircraft involved in multi-field coupling, the problem is very complicated. Based on the issues, from the classic multi-elastic coupling which is established on the partial differential equations can not be calculated. Therefore, this paper takes the finite element method by using triangular shell element model for solving the discrete domain of the plane and found the displacement functions and established the kinetic equations. This will simplify the problem into solving a set of ordinary differential equations, making the aircraft landing stance problem solvable.

Using ABAQUS software platform to build the finite element model of the aircraft, and import specific parameters, then based on the Newmark method to decouple control equations. Through the kinetic calculations on 5 kinds of working conditions, the following results obtained:

NO.	Head- ing /°	Angle /°	Abdominal peak stress /MPa	Tail peak stress /MPa	Hatch X direction deformation/cm	Hatch Y direction deformation/cm	Hatch Z direction deformation/cm
1	0	5	287.8	229.6	6.40	10.76	0.82
2	0	8	327.4	269.3	21.58	36.31	1.28
3	4	5	289.6	217.4	6.88	10.94	0.99

When aircraft heading and wave motion in the same direction and to get a 5 ° attack angle of the water, the peak stress to the aircraft belly and tail peak is the smallest ,and aircraft door has the minimum deformation to the X, Y, Z directions ,it is safe to open the door.

参赛队号 # 1753

1、 问题重述

在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机在海面的迫降具有更大的难度和危险性。



大型客机因为失去动力而进行的海面迫降具有相当大的危险性。基于客机海面迫降提出如下问题：

客机在有风浪的海面上进行迫降，客机以何种姿态和航向接触海面是相对最好的选择？

2、合理假设

- 1、客机在与海平面冲击时，机身下部蒙皮强度满足要求不会发生破裂，水不会流入机舱；
- 2、客机在与海平面冲击后不会发生第二次跳跃或者翻转，只是随着海浪振动；
- 3、客机在海平面迫降时先机尾与水面接触冲击，然后是客机腹部与水面冲击；
- 4、海平面的风浪高度是一定的；
- 5、海平面风浪冲击客机的频率是一定的；
- 6、客机在与海平面风冲击时不考虑客机冲击后在水面的漂浮距离；
- 7、客机在海面迫降时，迫降姿势与攻角和航向都有关系。

3、符号约定

P	客机稳态振幅；
a	风浪振幅；
η	振幅放大因子；
λ	频率比；
ζ	相对阻尼系数；
σ_{ij} ：	模型应力；
ε_{ij} ：	模型应变；
u_i ：	模型位移；
x_i	单元节点坐标；
\mathbf{a}^e ：	单元节点位移；
N_i ：	单元插值函数或者形函数；

参赛队号 # 1753

B	应变矩阵；
M ：	系统的质量矩阵；
C ：	系统的阻尼矩阵；
K ：	系统的刚度矩阵；
Q(t)	系统的节点载荷向量；
M^e ：	单元的质量矩阵；
C^e ：	单元的阻尼矩阵；
K^e ：	单元的刚度矩阵；
Q^e ：	单元的节点载荷向量；
f ；	体力；
T ：	面力；
ρ ：	模型密度；
μ ：	阻尼系数；
β_i ：	广义坐标；
A ：	三角形单元面积；
L ：	微分算子；

4、问题的分析

随着航空业的不断发展，飞机的不断增多，近年来飞机、直升机在近海或跨海使用越来越频繁,发生水上迫降和坠毁事故也逐渐增多。

在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机在海面的迫降具有更大的难度和危险性。

飞机在海面迫降时很高的速度会构成一个威胁，入水姿态与水面情况是另一个威胁。

喷气式客机正常着陆的 IAS（指示空速）大概在 222~260 公里/小时，假设海面平静无风，飞机与水面平行入水，则机腹下方将有相对速度超过 200 公里/小时的水流过，这样在飞机腹部形成一个低压区，这个低压区会试图把飞机硬拽到水中。这时候唯一抵抗这股拉力的，只有靠机身仰角产生的一些正面压力了，这个压力在竖直方向是托起飞机的，但在水平方向却是非常强大的阻力。如果仰角过大，机身尾段受到的阻力过大，而前段靠惯性仍然保持较高的速度向前滑行，超过了机身结构的强度之后，飞机就会从中间断开。

水面情况是对机组最大的考验。US Airways 1549 航班在 Hudson 河迫降的种例子是少数情况，通常飞机不得不在水面迫降时都是在开阔的海面。俗话说无风三尺浪，海面的波浪要比河面上大的多。如果飞机迎面撞上一个浪头，后果比撞进森林还要可怕。因此最理想的情况是顺着波浪的方向着陆。

本文建立了客机缩比模型的有限元模型，采用有限单元法建立客机的运动控制方程，并对客机在有风浪的情况下入水冲击问题进行求解。讨论客机着水时的姿态和航向对于飞机结构压力的影响，并分析客机落水后，风浪对客机振动的影响。从而得出客机在有风浪的海面进行迫降，客机以何种姿态和航向接触海面是相对最好的选择。

5、模型的建立

5.1 方法选取

5.1.1 有限单元法

有限单元法，是一种有效解决数学问题的解题方法。其基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的结点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的结点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式，便构成不同的有限元方法。

5.1.2 有限单元法求解流程

有限元运用在实际问题求解过程中，主要有七个主要步骤，分别是①对结构进行离散；②形成单元的刚度矩阵和等效结点载荷列阵；③集成结构的刚度矩阵和等效结点载荷列阵；④引入强制边界条件；⑤求解有限元求解方程，得到结点位移；⑥计算单元应变和应力；⑦进行必要的后处理。

有限元求解的七个步骤中，按照目标可以分成四个模块，分别为①选取网格离散求解域；②建立控制方程；③选择计算方法；④计算结果后处理。有限元求解步骤与求解模块的关系见图 5.1。

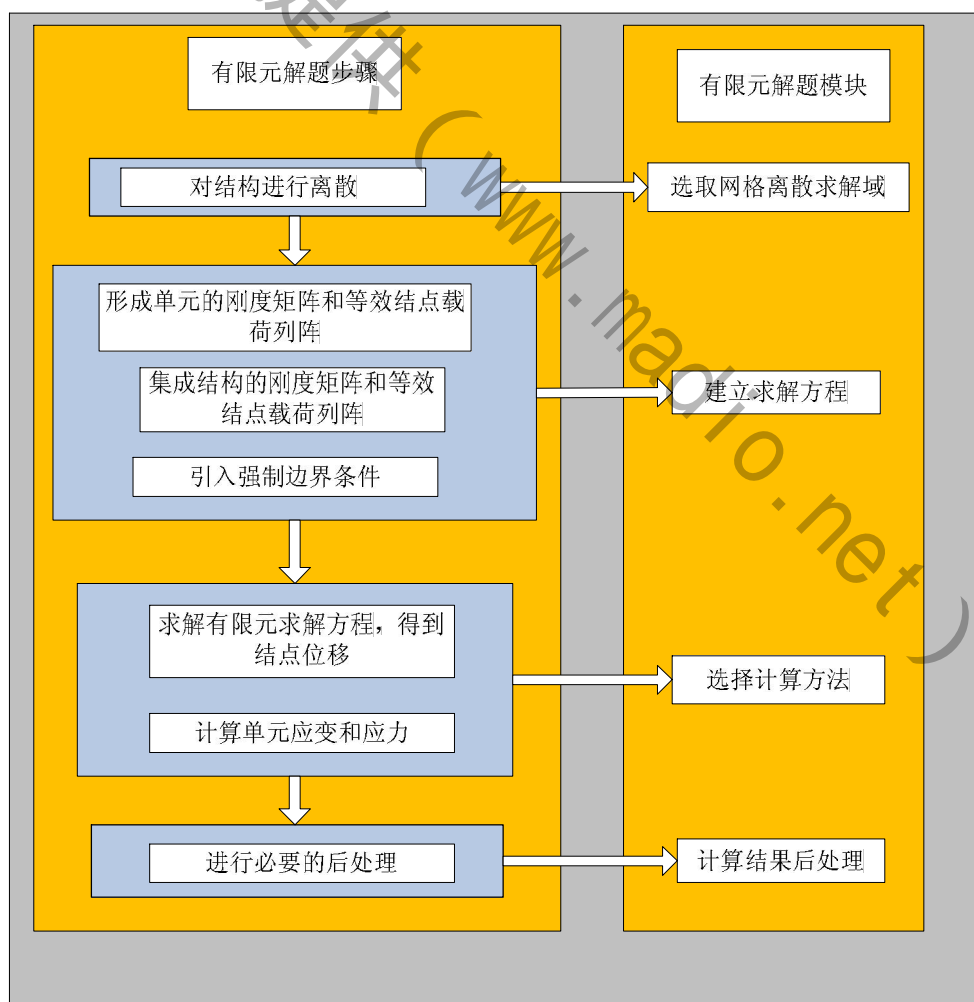


图 5.1 有限元计算方法步骤流程图

5.2 建立模型

5.2.1 选取网格离散求解域并构造插值函数

客机主体结构为壳体，在有限元求解过程中，需要用壳单元离散客机模型。壳单元由于厚度方向的尺寸很小，因此，在厚度方向上不划分单元。壳单元属于平面单元。在建立模型时，客机机舱、机翼、机头和机尾等主要部件可以只用曲面建立。

另外，客机的几何形状比较复杂，在两翼与机舱连接处的尺寸同其他地方的尺寸相比很小，不容易过度。因此，必须选择适应性较好的形状离散客机的求解域，才能达到连续的效果。

3 结点三角形单元式有限元方法中最早提出，并且至今仍广泛应用的单元，由于三角形单元对复杂边界有较强的适应能力，因此很容易将一个区域离散成有限个三角形单元，如图 5.2 所示。在边界上以若干线段近似原来的曲线边界，随着单元的增多，这种拟合将趋于精确解

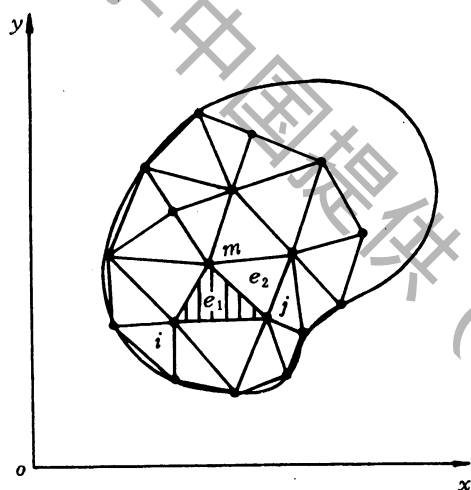


图 5.2 区域离散

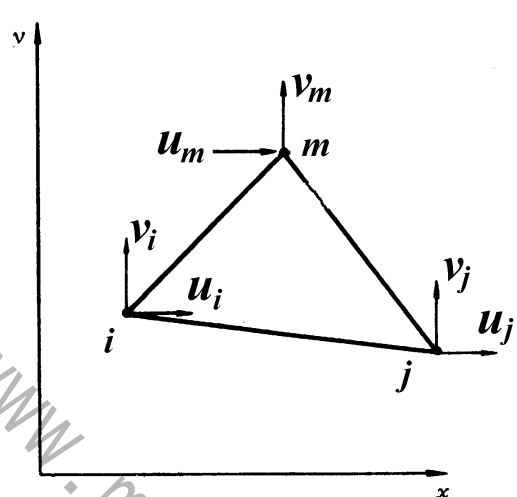


图 5.3 结点三角形单元

典型的 3 结点三角形单元结点编号为 i, j, m ，逆时针转向为正向。每个结点有 2 个位移分量如图 5.3 所示。结点位移：

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \end{Bmatrix} \quad (i, j, m)$$

每个单元有 6 个结点位移即 6 个结点自由度，亦即

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i(t) & v_i(t) & u_j(t) & v_j(t) & u_m(t) & v_m(t) \end{bmatrix}^T$$

在有限元方法中单元的位移模式一般采用多项式作为近似函数，因为多项式运算方便，并且随着项数的增多，可以逼近任何一段光滑的函数曲线。多项式的选取应由低次到高次。

3 结点三角形单元位移模式选取如下多项式

参赛队号 # 1753

$$\begin{cases} u(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)x + \beta_3(t)y \\ v(t) = \beta_4(t) + \beta_5(t)x + \beta_6(t)y \end{cases} \quad (5-1)$$

它的矩阵表示是

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\beta} \quad (5-2)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = [1 \ x \ y] \quad \boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6]^T$$

$\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 为待定函数。6 个待定函数可由单元的 6 个结点位移来表示。在 (5-1) 中带入结点 i 的坐标 (x_i, y_i) 可以得到结点 i 在 x 方向的位移 u_i ，同理可以得到 u_j ， u_m 。他们表示为

$$\begin{cases} u_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i \\ u_j = \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j \\ u_m = \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m \end{cases} \quad (5-3)$$

解 (5-3) 式可以得到待定函数由结点位移表示的表达式。上式的系数行列式是

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A$$

其中 A 是三角形单元面积。

按克莱姆 (Cramer) 法则，求解上述方程组，可求得待定函数 $\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 。

$$\beta_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (a_i u_i(t) + a_j u_j(t) + a_m u_m(t))$$

$$\beta_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (b_i u_i(t) + b_j u_j(t) + b_m u_m(t))$$

$$\beta_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix}}{D} = \frac{1}{2A} (c_i u_i(t) + c_j u_j(t) + c_m u_m(t))$$

参赛队号 # 1753

$$\beta_4(t) = \begin{vmatrix} v_i & x_i & y_i \\ v_j & x_j & y_j \\ v_m & x_m & y_m \end{vmatrix} / D = \frac{1}{2A} (a_i v_i(t) + a_j v_j(t) + a_m v_m(t))$$

$$\beta_5(t) = \begin{vmatrix} v_i & x_i & y_i \\ v_j & x_j & y_j \\ v_m & x_m & y_m \end{vmatrix} / D = \frac{1}{2A} (b_i v_i(t) + b_j v_j(t) + b_m v_m(t))$$

$$\beta_6(t) = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} / D = \frac{1}{2A} (c_i v_i(t) + c_j v_j(t) + c_m v_m(t))$$

其中：

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = y_j - y_m \quad (i, j, m)$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = x_m - x_j$$

上式 (i, j, m) 表示下标轮换，如 $i \rightarrow j, j \rightarrow m, m \rightarrow i$ 。以下同此。

将求得的函数 $\beta_1(t) \sim \beta_6(t)$ 代入 (5-1) 式可将位移函数表示成结点位移的函数，即

$$\begin{cases} u(t) = N_i u_i(t) + N_j u_j(t) + N_m u_m(t) \\ v(t) = N_i v_i(t) + N_j v_j(t) + N_m v_m(t) \end{cases} \quad (5-4)$$

其中

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i, j, m)$$

N_i, N_j, N_m 称为单元的插值函数或形函数。 $a_i, b_i, c_i, \dots, c_m$ 是常数，取决于单元的 3 个节点坐标。

(5-4) 式的矩阵形式是

参赛队号 # 1753

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ v_i(t) \\ u_j(t) \\ v_j(t) \\ u_m(t) \\ v_m(t) \end{Bmatrix}$$

$$= [\mathbf{I}N_i \quad \mathbf{I}N_j \quad \mathbf{I}N_m] [\mathbf{a}_i \quad \mathbf{a}_j \quad \mathbf{a}_m]^T = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \quad (5-5)$$

确定单元位移以后，可以很方便的利用几何方程求得单元的应变。单元的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{a}^e = \mathbf{L} [\mathbf{N}_i \quad \mathbf{N}_j \quad \mathbf{N}_m] \mathbf{a}^e = [\mathbf{L}N_i \quad \mathbf{L}N_j \quad \mathbf{L}N_m] \mathbf{a}^e$$

$$= [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] \mathbf{a}^e = \mathbf{B}\mathbf{a}^e \quad (5-6)$$

\mathbf{B} 称为应变矩阵， \mathbf{L} 是微分算子。

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L}N_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

同理可得 $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m$ ，所以三结点单元的应变矩阵 \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{B}_j \quad \mathbf{B}_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

在应变梯度较大的部位，单元的划分应该适当密集，否则不能反应应变的真实变化而导致较大的误差。

5.2.1 控制方程的建立

有弹性力学的知识得到三维弹性动力学的基本方程是：

$$\text{平衡方程：} \sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,t} - \mu u_{i,t} = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-8)$$

$$\text{几何方程：} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-9)$$

参赛队号 # 1753

$$\text{物理方程: } \sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{在 } V \text{ 域内}) \quad (5-10)$$

$$\text{边界条件: } u_i = \bar{u}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 边界上}) \quad (5-11)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 边界上}) \quad (5-12)$$

$$\text{初始条件: } u_i(x, y, z, 0) = u_i(x, y, z) \quad (5-13)$$

$$u_{i,t}(x, y, z, 0) = u_{i,t}(x, y, z) \quad (5-14)$$

(5-8) 式中, ρ 是质量密度, μ 是阻尼系数, $\mu_{i,tt}$ 和 $\mu_{i,t}$ 分别是 μ_i 对 t 的二次导数和一次导数, 即分别表示 i 方向的加速度和速度; $-\rho\mu_{i,tt}$ 和 $-\mu\mu_{i,t}$ 分别代表惯性力和阻尼力。它们作为体积力的一部分出现在平衡方程中, 是弹性动力学和静力学相区别的基本特点之一。由于在动力学中载荷是时间的函数, 以上各式中的各个符号位移、应力、应变是时间的函数。因此, 在动力学的定解问题中加入了初始条件 (5-13) 式。

以上各式联立可以解决动力学问题, 但是偏微分方程不能直接解出, 必须引用有限元的方法。

在动力学分析中, 因为引入了时间坐标, 处理的是四维 (x, y, z, t) 问题。在有限元分析中一般采用部分离散的方法, 即只对空间域进行离散。如图 5.2 所示。

平衡方程 (5-8) 式及力的边界条件 (5-11)、(5-12) 式的等效积分形式的伽辽金提法可表示如下:

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho u_{i,tt} - \mu u_{i,t}) dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i (\sigma_{ij} n_j - \bar{T}_i) ds = 0 \quad (5-15)$$

对上式的第 1 项 $\int_V \delta u_i \sigma_{ij,j} dV$ 进行分部积分, 并带入物理方程, 则从上式可以得到

$$\begin{aligned} & \int_V (\delta \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \delta u_i \rho u_{i,tt} + \delta u_i \mu u_{i,t}) dV \\ & = \int_V \delta u_i f_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{T}_i dV \end{aligned} \quad (5-16)$$

将空间离散后的位移表达式 (5-12) (现在情况下, $u_1=u$, $u_2=v$) 代入上式, 并注意到结点位移变化 $\delta \mathbf{a}$ 的任意性, 最终得到系统的控制方程 (在动力学问题中, 又称运动方程) 如下:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (5-17)$$

其中 $\ddot{\mathbf{a}}(t)$ 和 $\dot{\mathbf{a}}(t)$ 分别是系统的结点加速度向量和结点速度向量, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 和 $\mathbf{Q}(t)$ 分别是系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和结点载荷向量, 并分别由各自的单元矩阵和向量集成, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_e \mathbf{M}^e & \mathbf{C} &= \sum_e \mathbf{C}^e \\ \mathbf{K} &= \sum_e \mathbf{K}^e & \mathbf{Q} &= \sum_e \mathbf{Q}^e \end{aligned} \quad (5-18)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV & \mathbf{C}^e &= \int_{V_e} \mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \\ \mathbf{K}^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{Q}^e &= \int_{V_e} \mathbf{N}^T f dV + \int_{S_\sigma^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dV \end{aligned} \quad (5-19)$$

\mathbf{M}^e , \mathbf{C}^e , \mathbf{K}^e 和 \mathbf{Q}^e 分别是单元的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和载荷向量。

5.2.3 求解方法

本计算过程中采用 Newmark 方法求解控制方程。

在 $t \sim t+\Delta t$ 的时间区域内，Newmark 积分方法采用下列的假设：

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{a}}_t + \delta\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (5-20)$$

$$\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{a}_t + \dot{\mathbf{a}}_t\Delta t + [(1-\alpha)\ddot{\mathbf{a}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (5-21)$$

其中 α 和 δ 是按积分精度和稳定行要求决定的参数。另一方面， α 和 δ 取不同数值则代表了不同的数值积分方案。当 $\alpha=1/6$ 和 $\delta=1/2$ 时，(5-20) 和 (5-21) 式相应于线性加速度法，因为这是他们可以由下式，即时间间隔 Δt 内线性假设的加速度表达式的积分得到。

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\tau} = \ddot{\mathbf{a}}_t + (\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{a}}_t)\tau / \Delta t \quad (0 \leq \tau \leq \Delta t) \quad (5-22)$$

当 $\alpha=1/4$ 和 $\delta=1/2$ 时，Newmark 方法相当于常平均加速度法这样一种无条件稳定的积分方案。此时， Δt 内加速度为：

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\tau} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{a}}_t) \quad (5-23)$$

Newmark 方法中相同时间 $t+\Delta t$ 的位移解答 $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 是通过满足时间 $t+\Delta t$ 的运动方程得到的。即由：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{a}_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \quad (5-24)$$

而得到的。为此首先从 (5-21) 式解得

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}(\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t) - \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{a}}_t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\mathbf{a}}_t \quad (5-25)$$

将上式代入 (5-20) 式，然后再一并代入 (5-24) 式，则得到从 \mathbf{a}_t 、 $\dot{\mathbf{a}}_t$ 、 $\ddot{\mathbf{a}}_t$ 计算 $\mathbf{a}_{t+\Delta t}$ 的两步递推公式

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C}\right)\mathbf{a}_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{a}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{a}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{\mathbf{a}}_t\right] + \\ &\quad \mathbf{C}\left[\frac{\delta}{\alpha\Delta t}\mathbf{a}_t + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right)\dot{\mathbf{a}}_t + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{a}}_t\right] \end{aligned} \quad (5-26)$$

至此，可将利用 Newmark 方法逐步求解控制方程的算法步骤归结如下：

1 初始计算

- (1) 形成刚度矩阵 \mathbf{K} 、指令矩阵 \mathbf{M} 和阻尼矩阵 \mathbf{C} 。
- (2) 给定 \mathbf{a}_0 、 $\dot{\mathbf{a}}_0$ 和 $\ddot{\mathbf{a}}_0$ ($\ddot{\mathbf{a}}_0$ 由 $\ddot{\mathbf{a}}_0 = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Q}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}}_0 - \mathbf{K}\mathbf{a}_0)$ 确定)
- (3) 选择时间步长 Δt 及参数 α 和 δ ，并计算积分常数。

这里要求： $\delta \geq 0.50, \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$

$$c_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad c_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad c_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad c_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$$

$$c_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad c_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right), \quad c_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad c_7 = \delta\Delta t$$

(4) 形成有效刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + c_0 \mathbf{M} + c_1 \mathbf{C}$

(5) 三角分解 $\hat{\mathbf{K}}$: $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{LDL}^T$

2 对于每一时间步长

(1) 计算时间 $t+\Delta t$ 的有效载荷

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(c_0 \mathbf{a}_t + c_2 \dot{\mathbf{a}}_t + c_3 \ddot{\mathbf{a}}_t) + \mathbf{C}(c_1 \mathbf{a}_t + c_4 \dot{\mathbf{a}}_t + c_5 \ddot{\mathbf{a}}_t)$$

(2) 求解时间 $t+\Delta t$ 的位移

$$\mathbf{LDL}^T \mathbf{a}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{Q}}_{t+\Delta t}$$

(3) 计算时间 $t+\Delta t$ 的加速度和速度

$$\ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = c_0 (\mathbf{a}_{t+\Delta t} - \mathbf{a}_t) - c_2 \dot{\mathbf{a}}_t - c_3 \ddot{\mathbf{a}}_t$$

$$\dot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{a}}_t + c_6 \ddot{\mathbf{a}}_t + c_7 \ddot{\mathbf{a}}_{t+\Delta t}$$

5.2.4 支承运动引起的强迫振动

工程上许多场合中,系统产生强迫振动的原因是由于支承点的运动,在这种情况下,外界的激励是作用在支承上或者基础上。

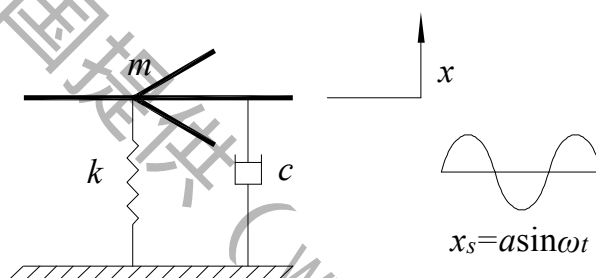


图 5.4 客机振动示意图

这里建立客机迫降海面后,由风浪引起的客机振动模型。设客机的质量为 m , 风浪的运动规律为

$$x_s = a \sin \omega t \quad (5-27)$$

分析客机的受力情况,由于风浪的运动引起弹簧的变形,客机受到的弹性恢复力为 $k(x - x_s)$; 阻尼器两端的相对速度为 $c(\dot{x} - \dot{x}_s)$ 。由达朗贝尔原理可得系统的运动微分方程:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_s) + k(x - x_s) = 0 \quad (5-28)$$

整理得到

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_s + c\dot{x}_s \quad (5-29)$$

从式 (5-29) 可以看出,由于风浪的存在客机上受到的激励由两部分组成: 一个经过弹簧传递过来的激振力 kx_s , 另一个是经过阻尼器传递过来的激振力 $c\dot{x}_s$ 。通过复数法来求解这个方程。将风浪的运动 x_s 与系统的稳态响应 x 表示成复数形式, 即

$$x_s = ae^{i\omega t}, \quad x = Pe^{i\omega t}$$

带入 (5-3) 式得到

参赛队号 # 1753

$$(k - m\omega^2 + ic\omega)P e^{i(\omega t - \theta)} = a(k + ic\omega)e^{i\omega t}$$

$$\text{即} \quad P e^{-i\theta} = a \frac{k + ic\omega}{k - m\omega^2 + ic\omega} \quad (5-30)$$

稳态响应的幅值 B 就是上式复数的模，即

$$P = a \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (5-31)$$

将上式改成无量纲形式

$$\eta = \frac{P}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (5-32)$$

式中 η 称为放大因子。如图 5.5 所示，以频率比 λ 为横坐标，放大因子 η 为纵坐标，做出不同阻尼比情况下的幅频特性曲线。

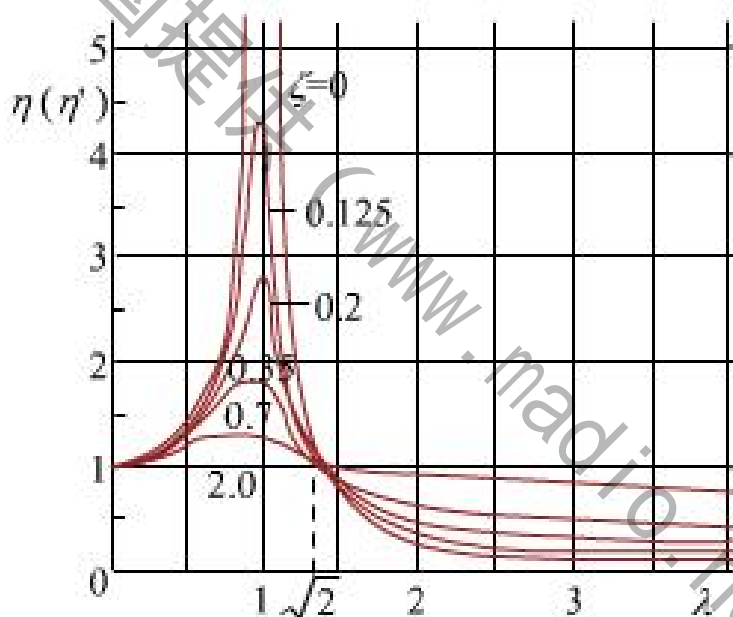


图 5.5 幅频特性曲线

可得客机由于风浪的运动引起的强迫振动，其稳态响应的幅值 P 的大小取决于风浪的幅值 a 、频率比 λ 以及相对阻尼比 ζ 。

由图 5.5 可以看出，当频率比 $\lambda = \sqrt{2}$ ，恒有 $\eta = 1$ ，即无论相对阻尼比 ζ 等于多少，客机响应的幅值 P 等于风浪的幅值 a ，当 $\lambda > \sqrt{2}$ ，恒有 $\eta < 1$ ，此时客机响应的幅值 P 小于风浪的幅值 a 。所以客机降落要保证频率比 λ 落在 $\lambda > \sqrt{2}$ 区间，保证客机的振动幅值较小。

6、模型的求解

6.1 飞机固有频率

飞机的固有频率是飞机的固有特性，飞机的振动特征与它密切相关。当外界载荷的频率与固有频率中的某阶频率相近时，飞机会在这阶频率发生共振，会以与次频率相关的固有振型为主发生振动。应避免飞机在此频率下工作。

固有频率与飞机的质量，机构及发生振动时的边界条件有关。本节内容就是分析飞机入海迫降的过程中的固有频率及振型。为的是分析在风浪载荷作用下，飞机在什么方向上容易发生共振。以下是飞机机舱部分的前 30 阶固有振型及飞机舱门处一点和下部蒙皮中部和尾部两个点（如图 6.1 所示）的特征振动幅值随振动阶数的变化。

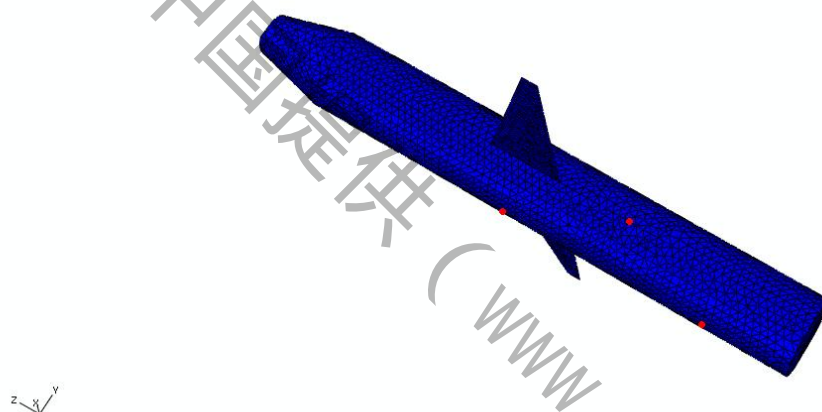
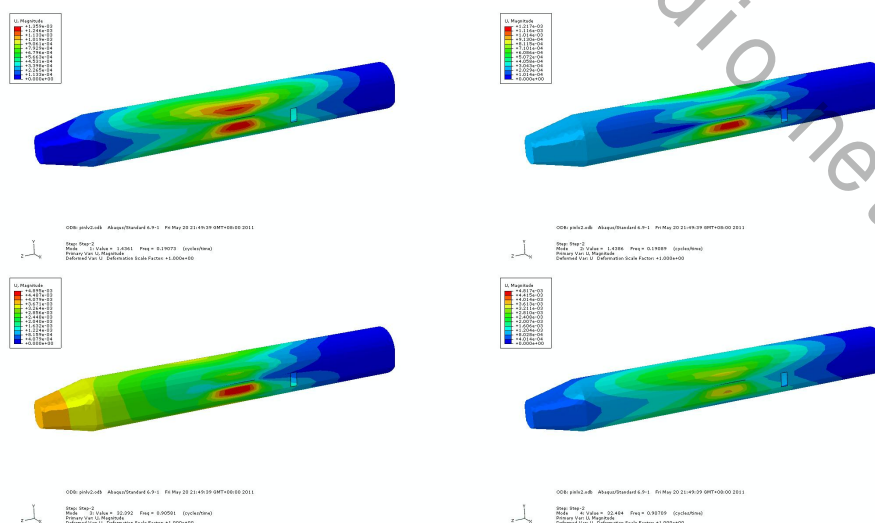
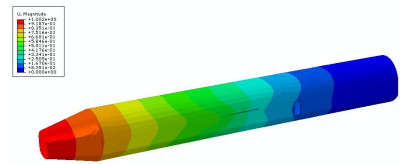


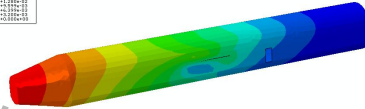
图 6.1 飞机模型网格及三个采样点示意图



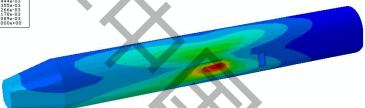
参赛队号 # 1753



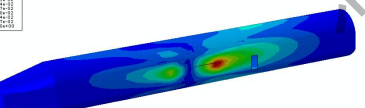
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

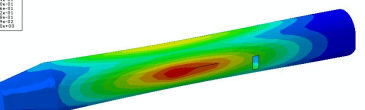
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

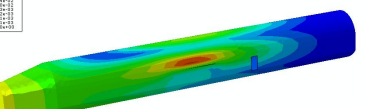
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

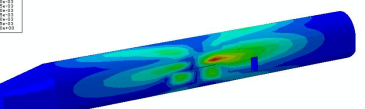
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

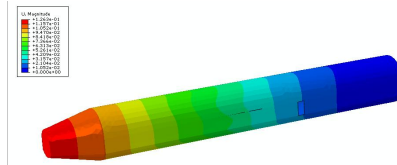
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

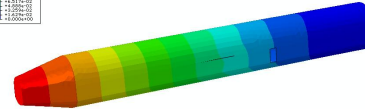
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

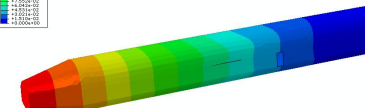
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

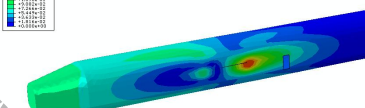
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

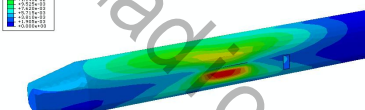
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

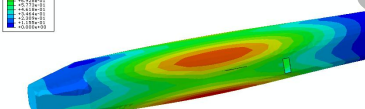
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

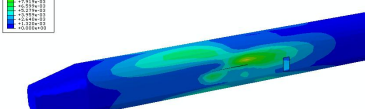
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

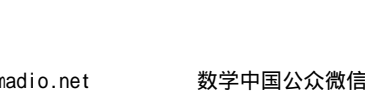
ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

ODB: p002-048 - Abaqus/Standard 6.9-1 Fri May 20 21:49:39 GMT+08:00 2011

Step: Step-2
Min: 0.000e+00 Max: 1.000e+01 (Equivalent)
Display On: U1 Magnitude
Enhanced View: U1 Deformation Scale Factor: +1.000e+00

参赛队号 # 1753

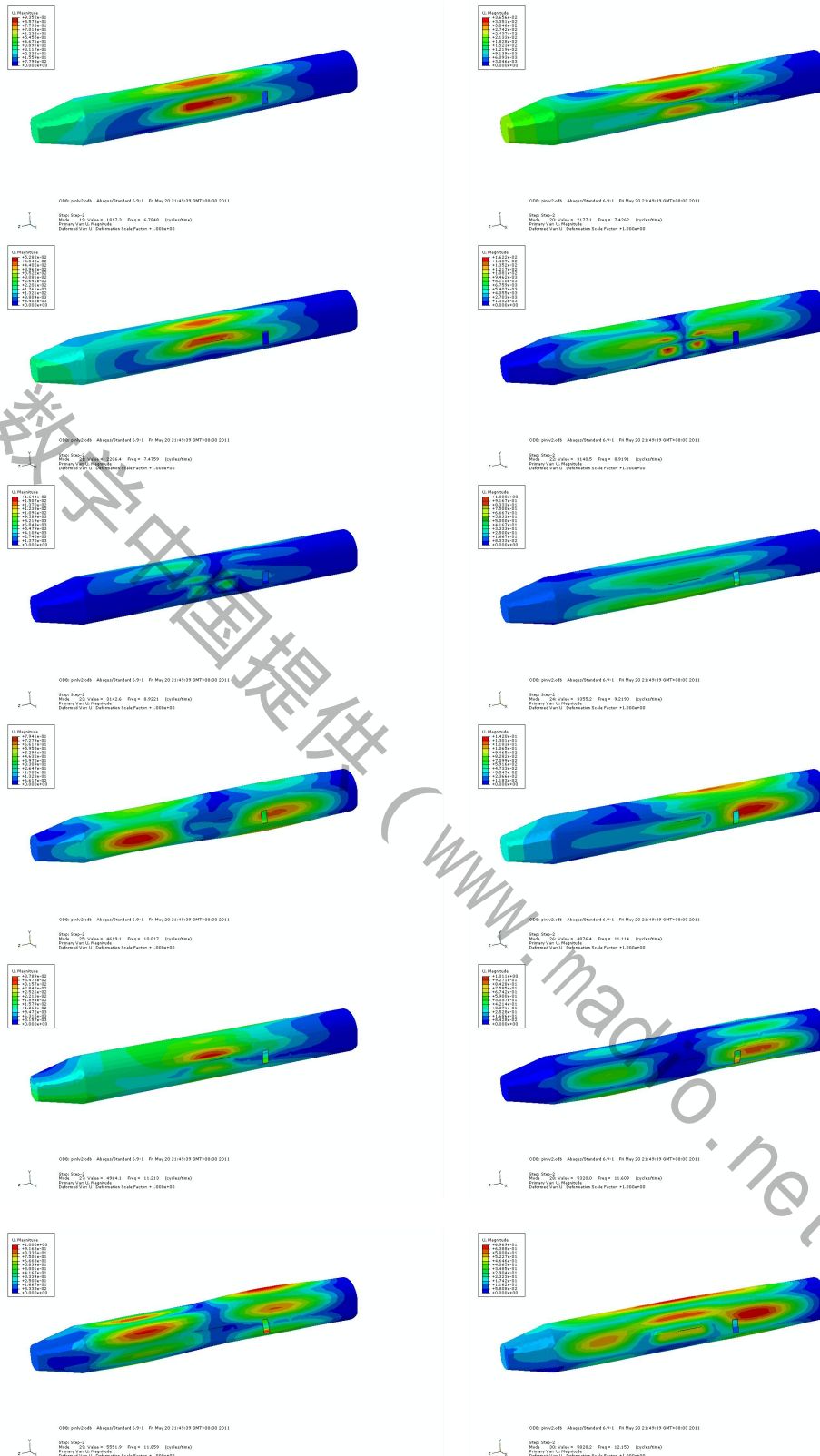
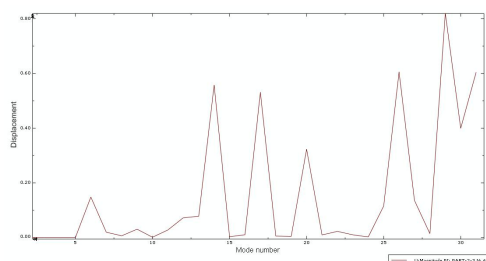
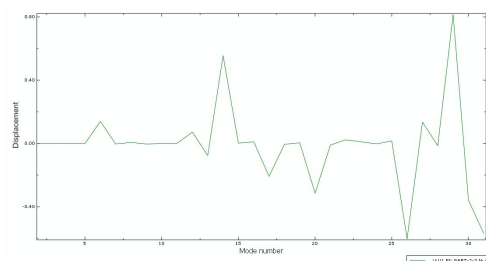


图 6.2 飞机前 30 阶固有振型

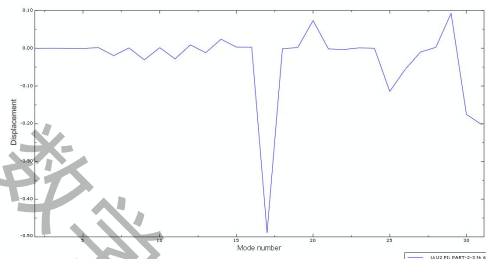
参赛队号 # 1753



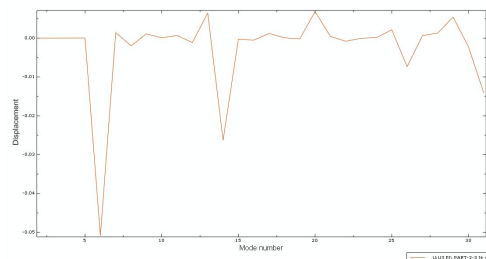
(a) 6 结点整体方向



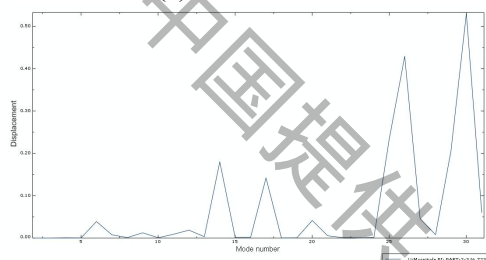
(b) 6 结点 X 方向



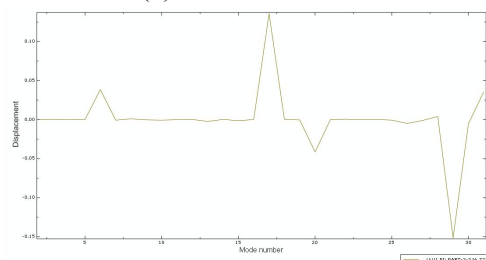
(c) 6 结点 Y 方向



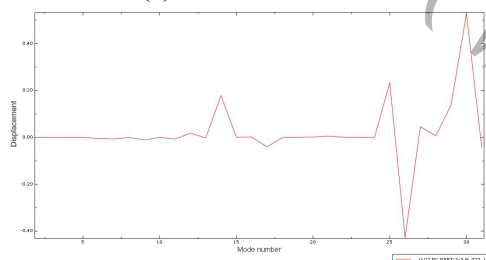
(d) 6 结点 Z 方向



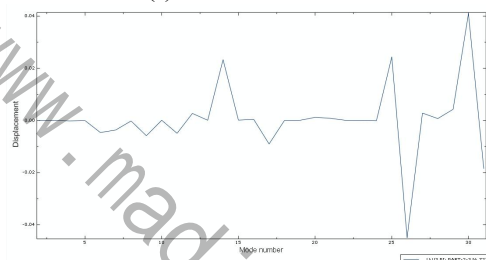
(e) 723 结点整体方向



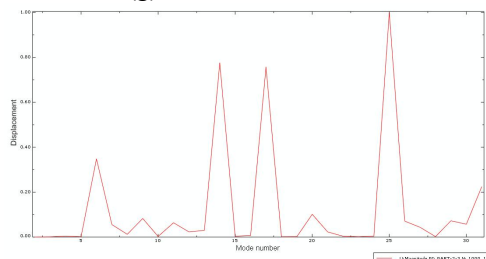
(f) 723 结点 X 方向



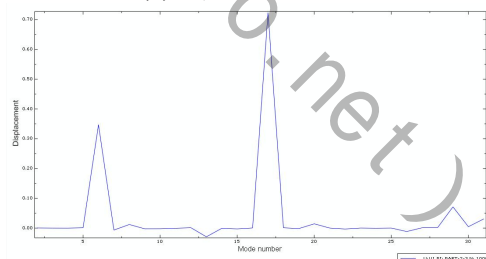
(g) 723 结点 Y 方向



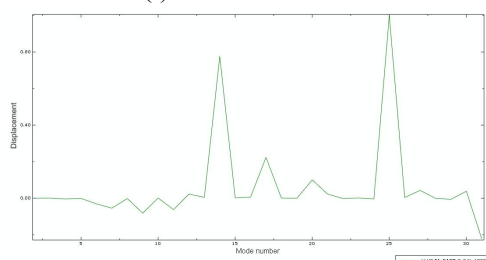
(h) 723 结点 Z 方向



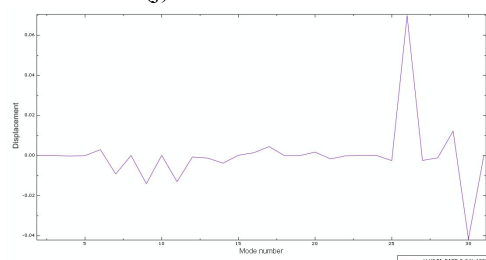
(i) 1000 结点整体方向



(j) 1000 结点 X 方向



(k) 1000 结点 Y 方向



(l) 1000 结点 Z 方向

图 6.3 特征振动幅值随振动阶数的变化

表 6.1 飞机前 30 阶频率值

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频率(Hz)	0.1907	0.1909	0.9058	0.9071	2.169	2.197	2.223	2.283	2.363	2.433
阶数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
频率(Hz)	3.347	3.420	3.778	4.511	4.523	5.152	5.378	5.379	6.785	7.423
阶数	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
频率(Hz)	7.476	8.919	8.922	9.219	10.817	11.114	11.213	11.609	11.859	12.150

从上述图表中可以看出，飞机迫降海面的固有频率在 12 赫兹之内，基频为 0.1907Hz，这与海浪的频率相近，因此海浪可能会使飞机在某阶频率上发生共振，会对飞机造成更大的伤害。

从图 6.2 看出，飞机舱门在 Y 方向（飞机高度方向）发生向下的变形的可能性较大，在 Z 方向（飞机纵向）发生向后的变形的可能性较大，在 X 方向（飞机宽度方向）发生杂乱的变形，主要看风浪载荷的频率。飞机下部蒙皮的后部在 Z 方向发生向后的变形的可能性较大，而飞机下部蒙皮的中部在 Z 方向发生向前的变形的可能性较大。因此，飞机迫降过程中有从中间断裂的危险。

6.2 航向顺风浪

6.2.1 攻角 5°

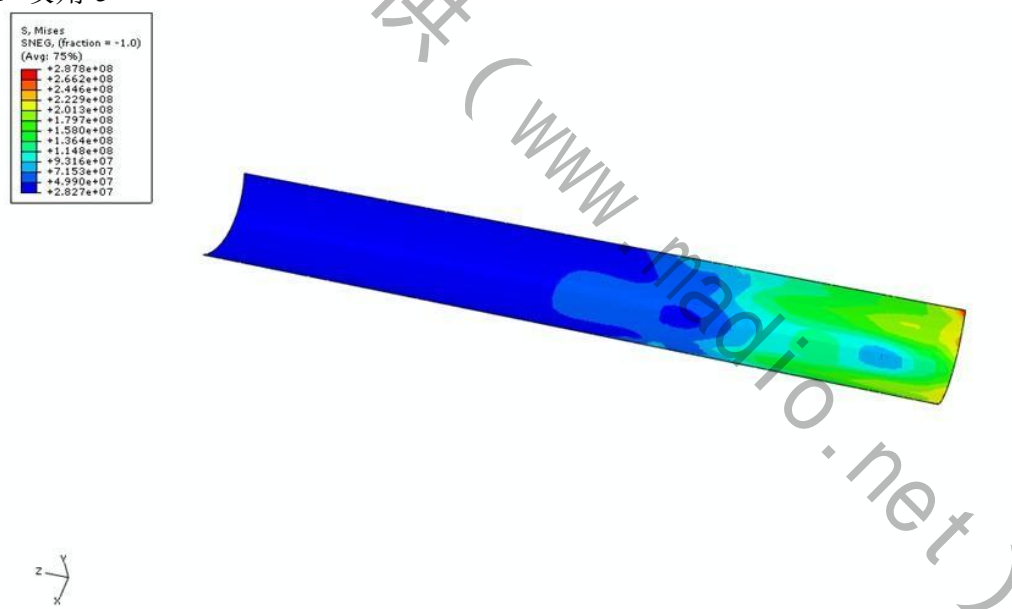


图 6.4 客机顺风浪 5°攻角尾翼接触水面等效应力图

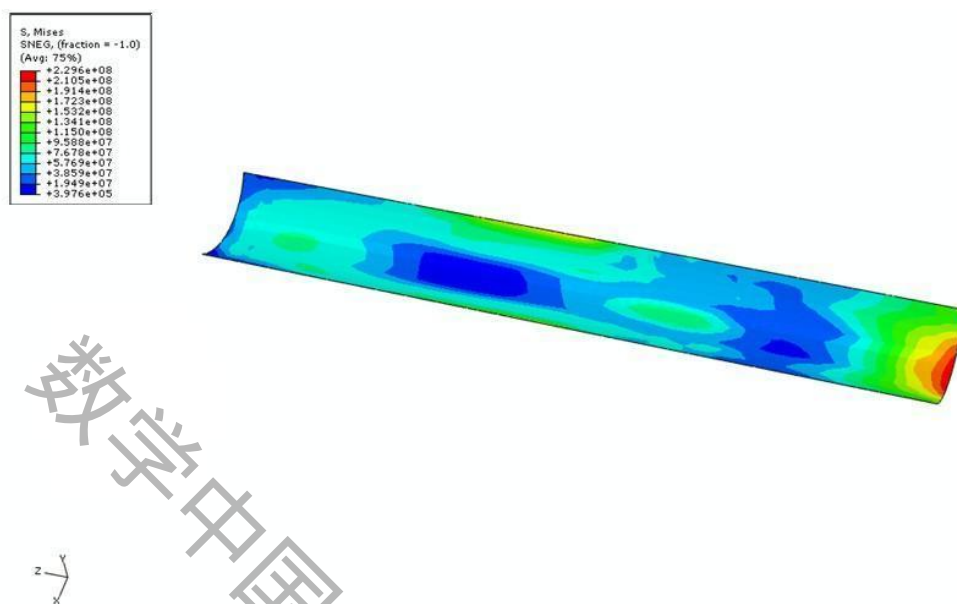


图 6.5 客机顺风浪 5°攻角腹部接触水面等效应力图

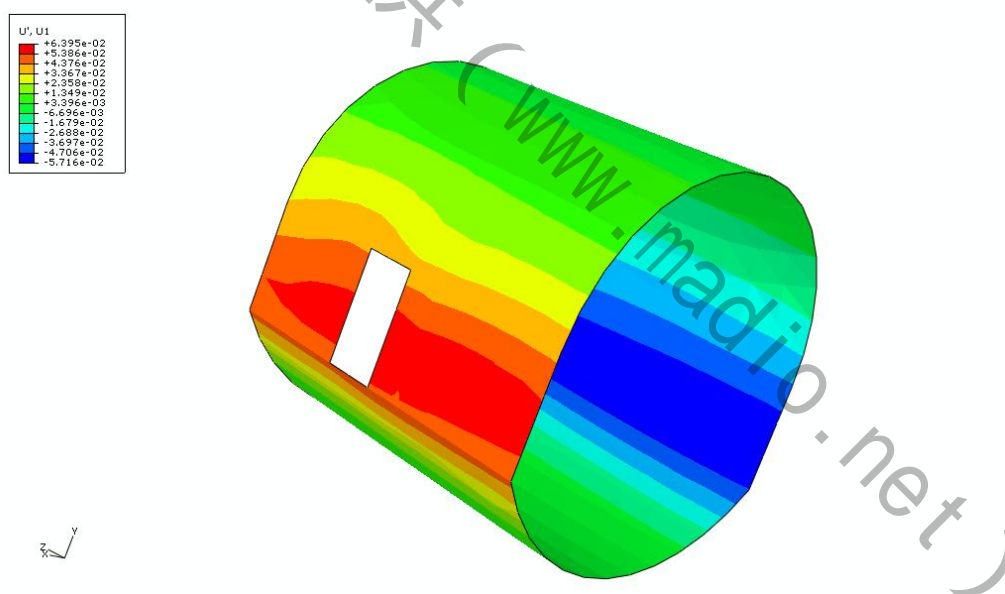


图 6.6 客机顺风浪 5°攻角舱门 X 方向位移图

参赛队号 # 1753

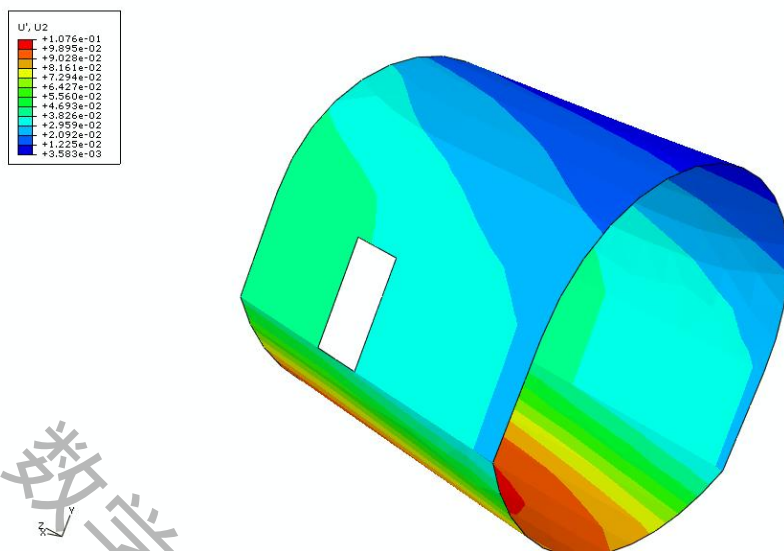


图 6.7 客机顺风浪 5°攻角舱门 Y 方向位移图

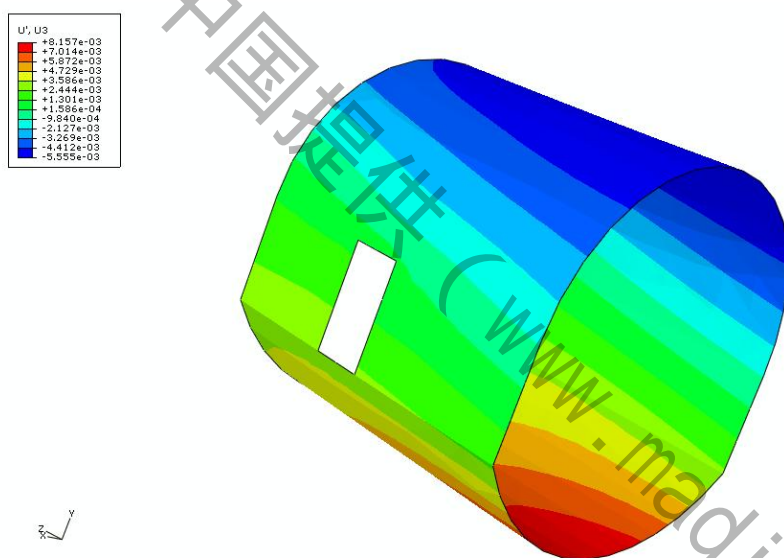


图 6.8 客机顺风浪 5°攻角舱门 Z 方向位移图

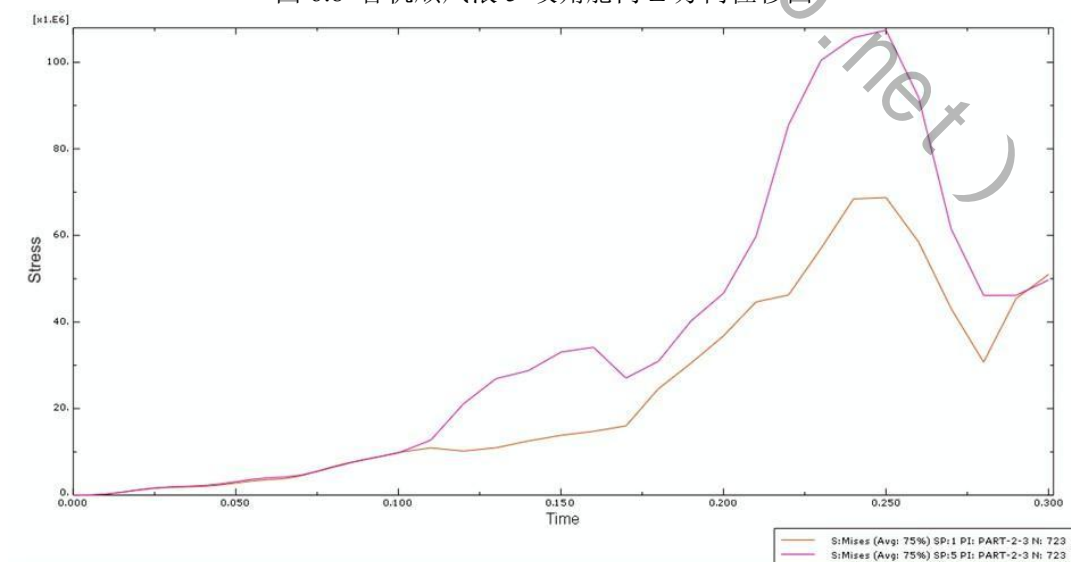


图 6.9 客机顺风浪 5°攻角 723 结点 MISES 应力随时间变化

参赛队号 # 1753

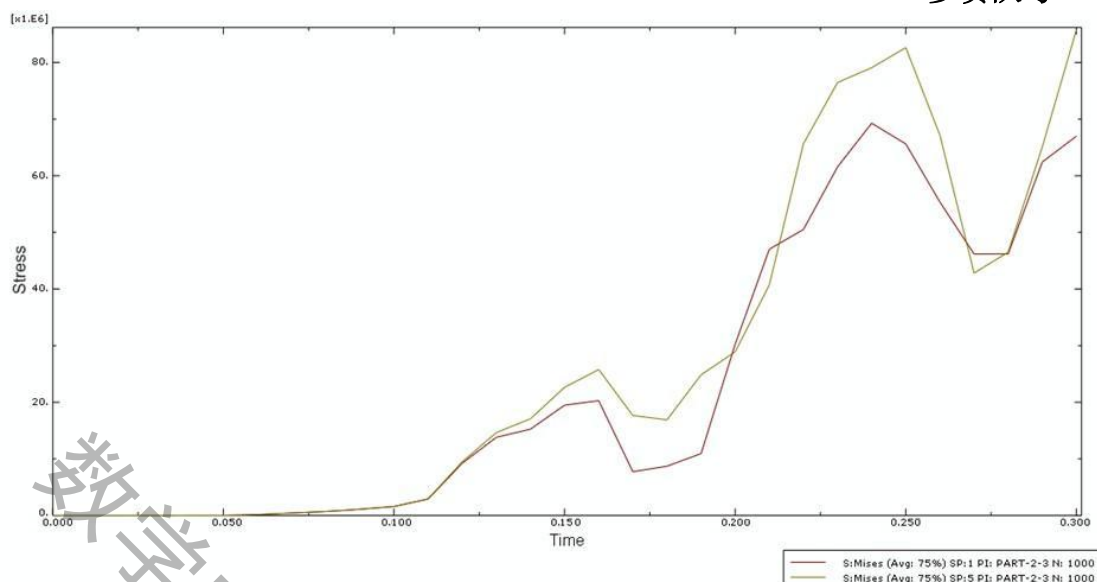


图 6.10 客机顺风浪 5°攻角 1000 结点 MISES 应力随时间变化

由上述个图可以看出，在顺风浪攻角为 5°时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.250s，应力峰值为 287.8MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 229.6MPa，比尾翼着水时小。由于与水面接触过程中，加载在客机上的载荷是振动的，所以造成了客机应力的波动变化。比在静水时的应力增大了，这是风浪载荷的影响。

客机下部蒙皮的应力峰值远小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 10.76cm，变形较小，舱门可以打开。

6.2.2 攻角 8°

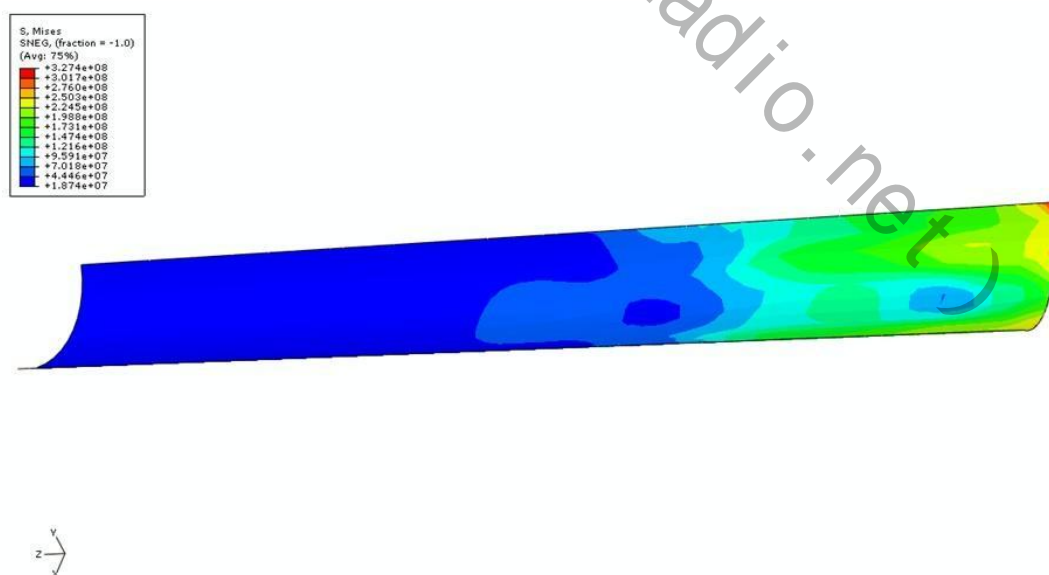


图 6.11 客机顺风浪 8°攻角尾翼接触水面等效应力图

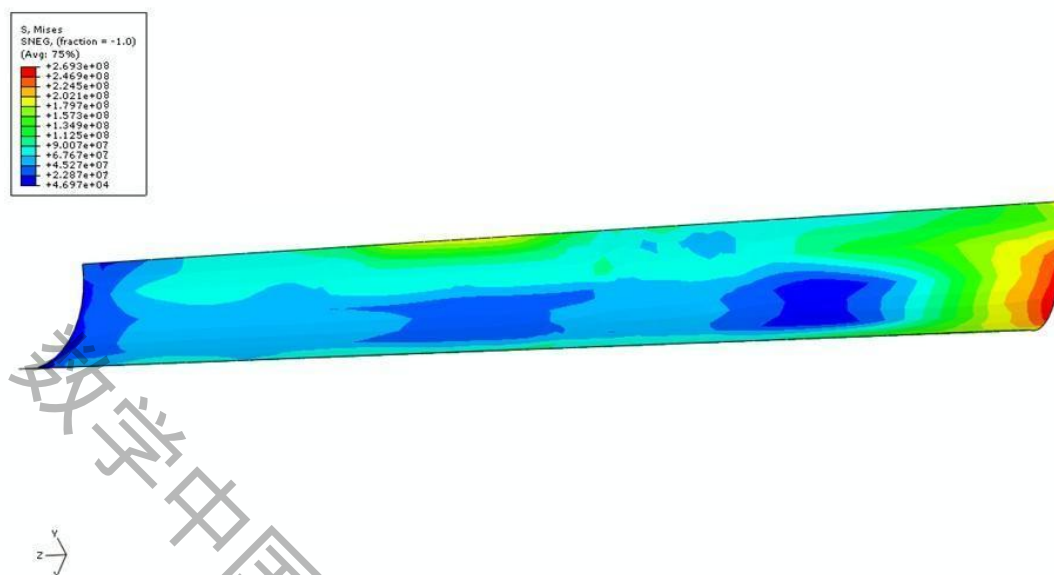


图 6.12 客机顺风浪 8°攻角腹部接触水面等效应力图

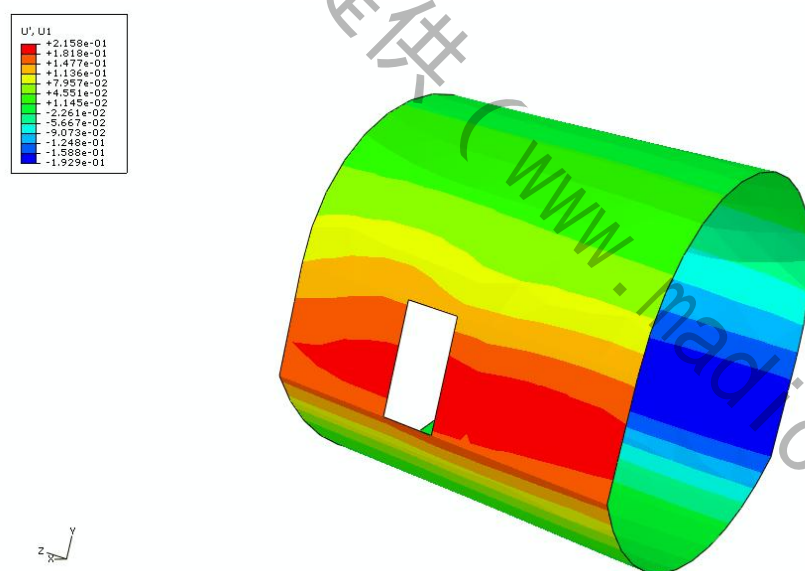


图 6.13 客机顺风浪 8°攻角舱门 X 方向位移图

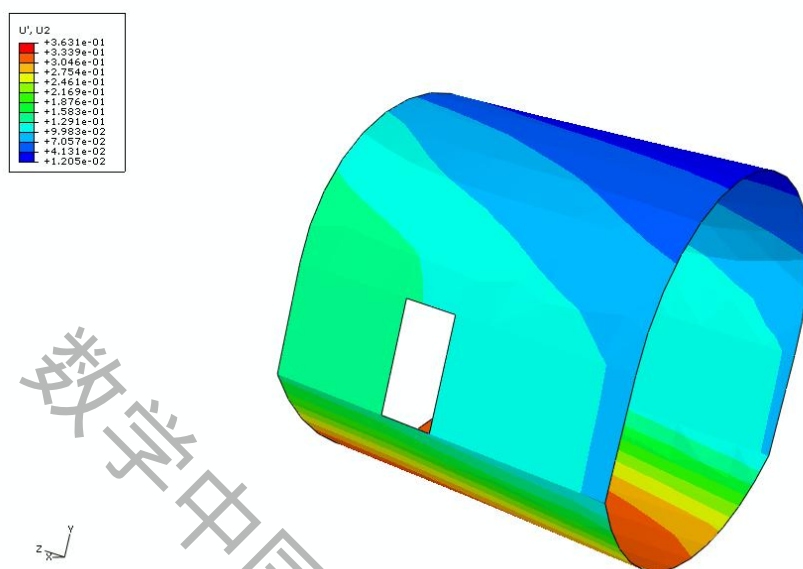


图 6.14 客机顺风浪 8°攻角舱门 Y 方向位移图

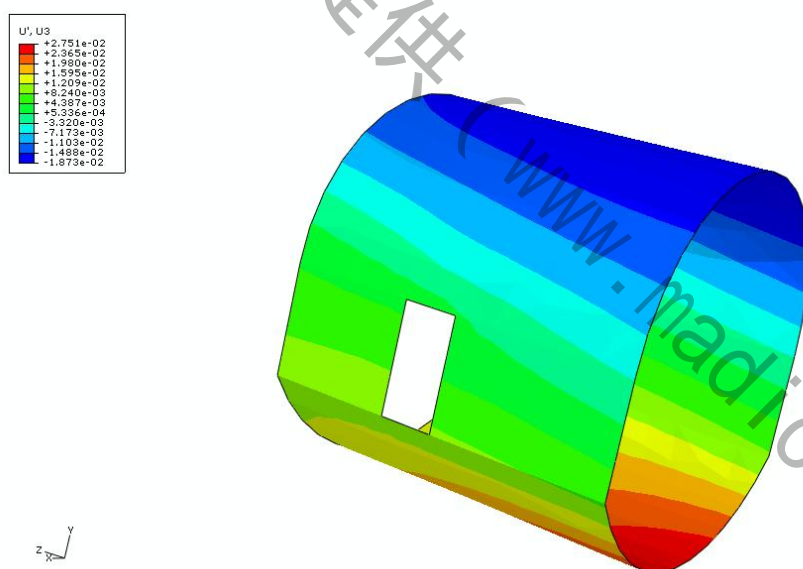


图 6.15 客机顺风浪 8°攻角舱门 Z 方向位移图

参赛队号 # 1753

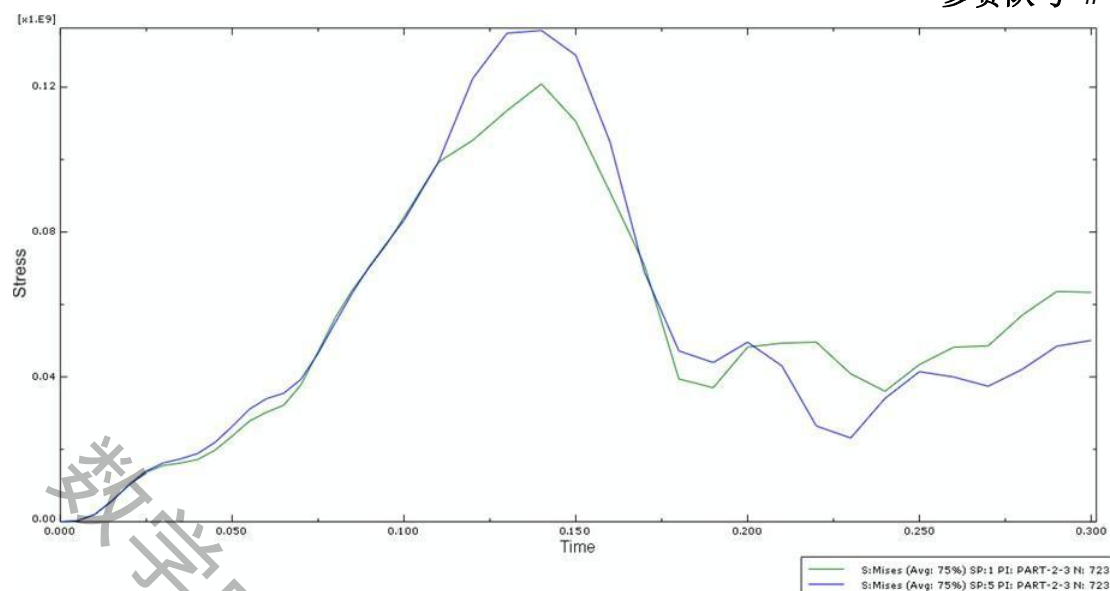


图 6.16 客机顺风浪 8°攻角 723 结点 MISES 应力随时间变化

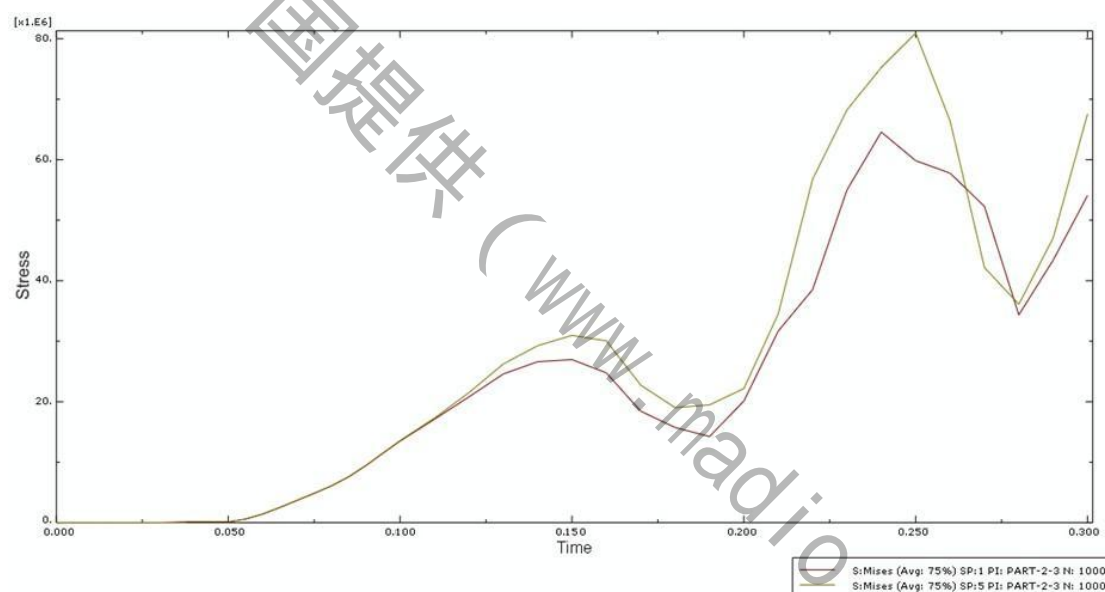


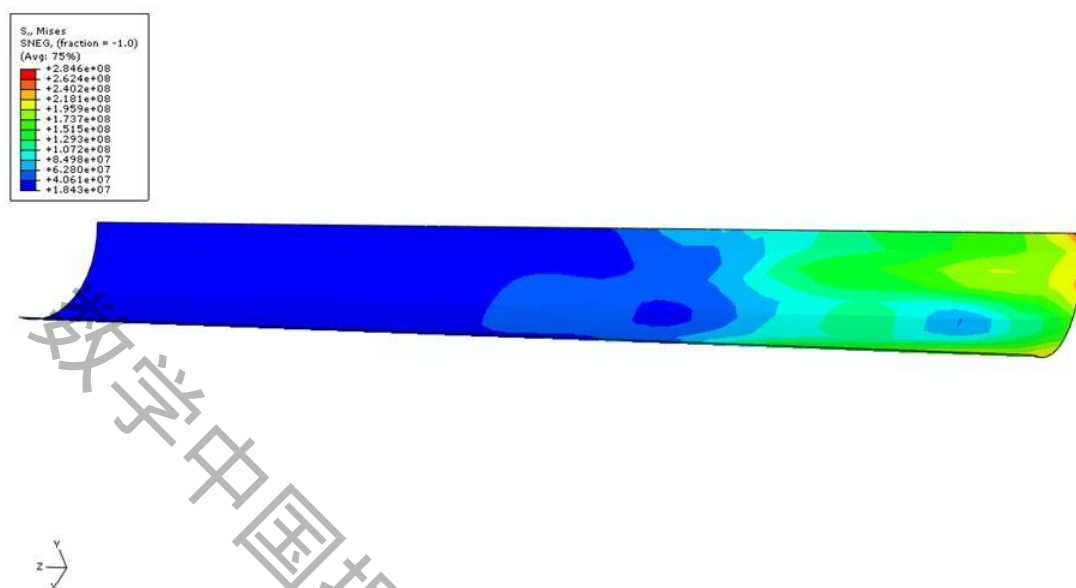
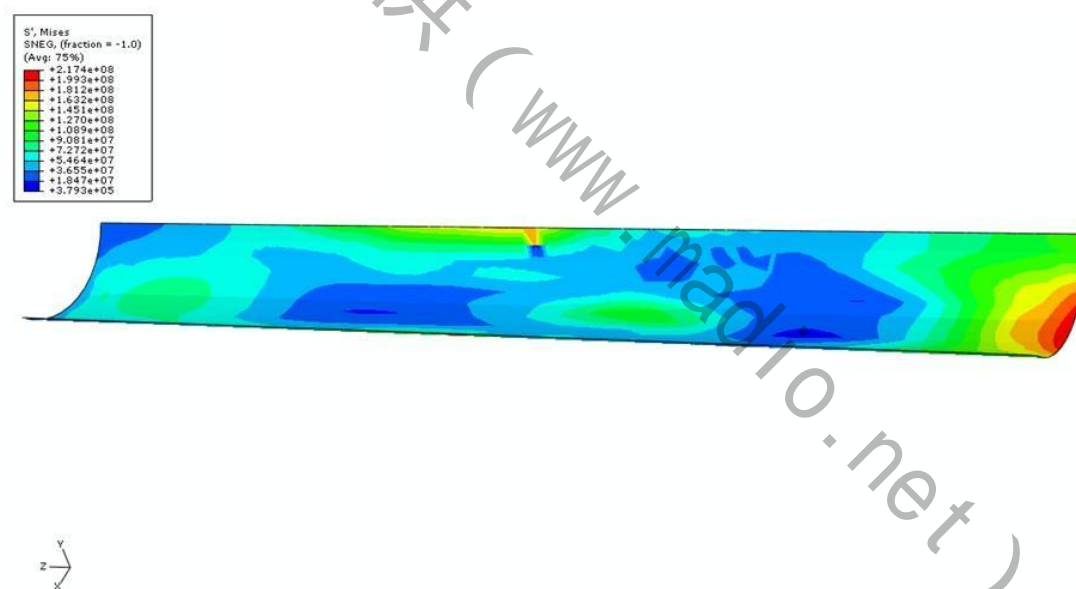
图 6.17 客机顺风浪 8°攻角 1000 结点 MISES 应力随时间变化

由上述个图可以看出，在攻角为 8°时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.150s，应力峰值为 327.4MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 269.3MPa。客机下部蒙皮的应力峰值小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 36.31cm。

6.3 航向与风浪夹角 4°

第一阶段的分析的结论为飞机在攻角 5°时，迫降的效果最好；从上述的分析得到，在飞机航向与风浪运动方向相同的时候，飞机攻角 5°依然是最好的选择。那么在以后的分析中，变化航向方向，但都以 5°攻角为例计算。

参赛队号 # 1753

图 6.18 客机航向 4° 尾翼接触水面等效应力图图 6.19 客机航向 4° 腹部接触水面等效应力图

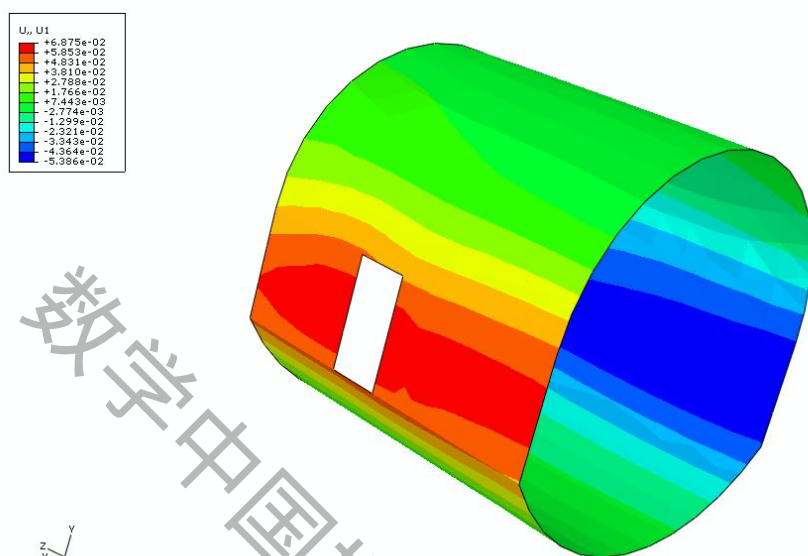


图 6.20 客机航向 4°舱门 X 方向位移图

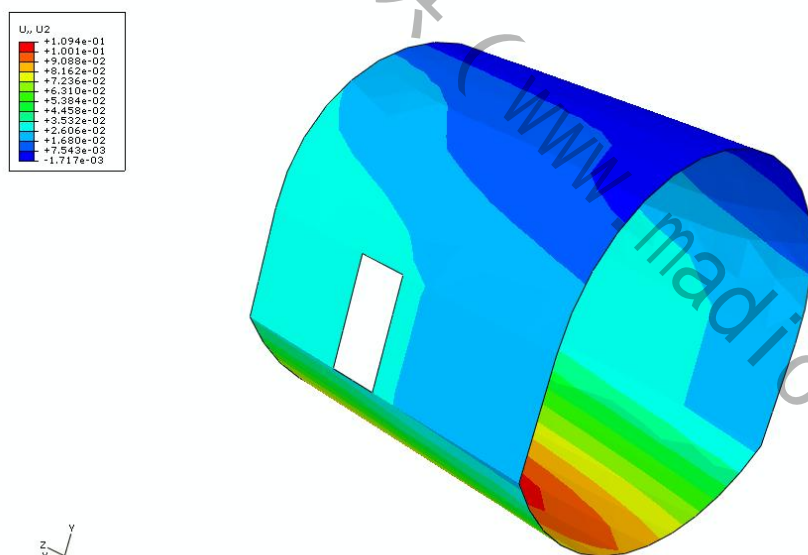


图 6.21 客机航向 4°舱门 Y 方向位移图

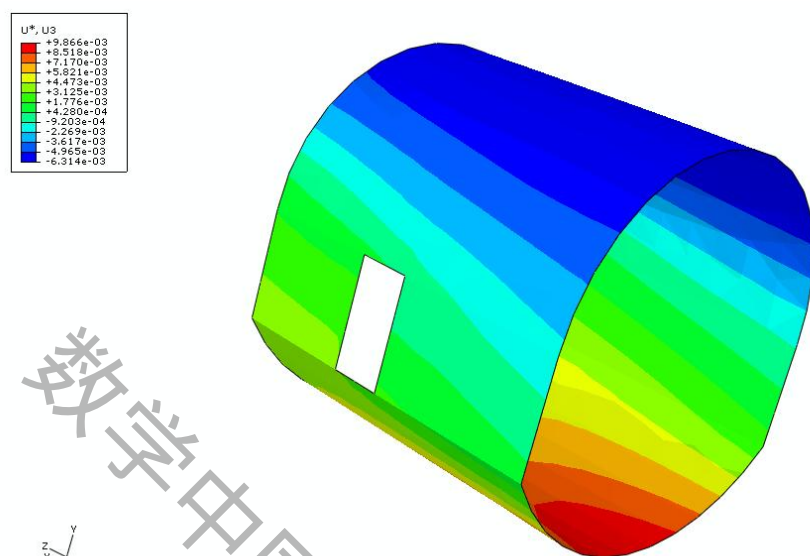


图 6.22 客机航向 4°舱门 Z 方向位移图

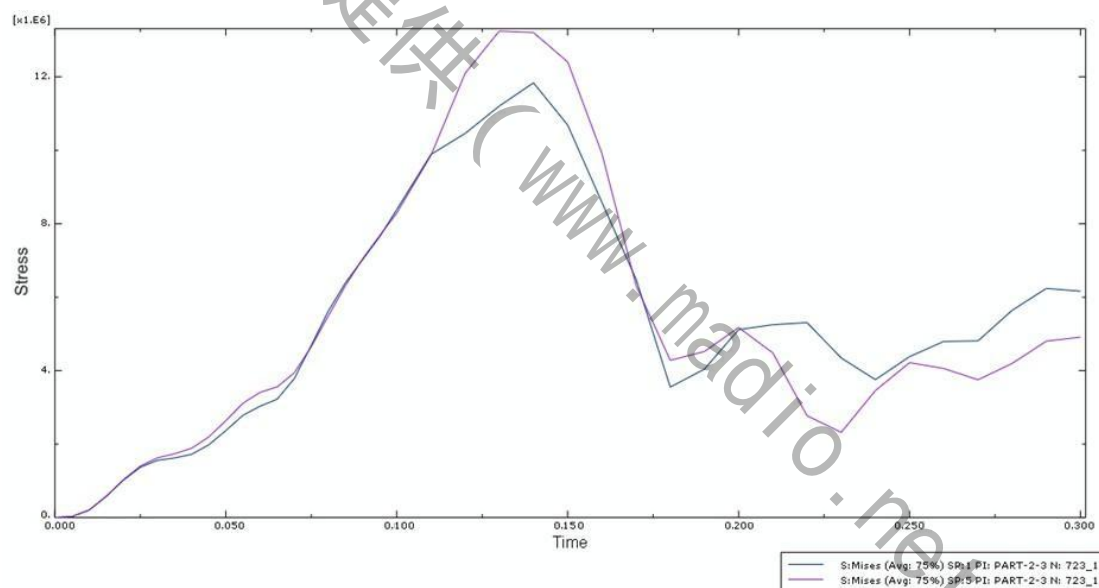
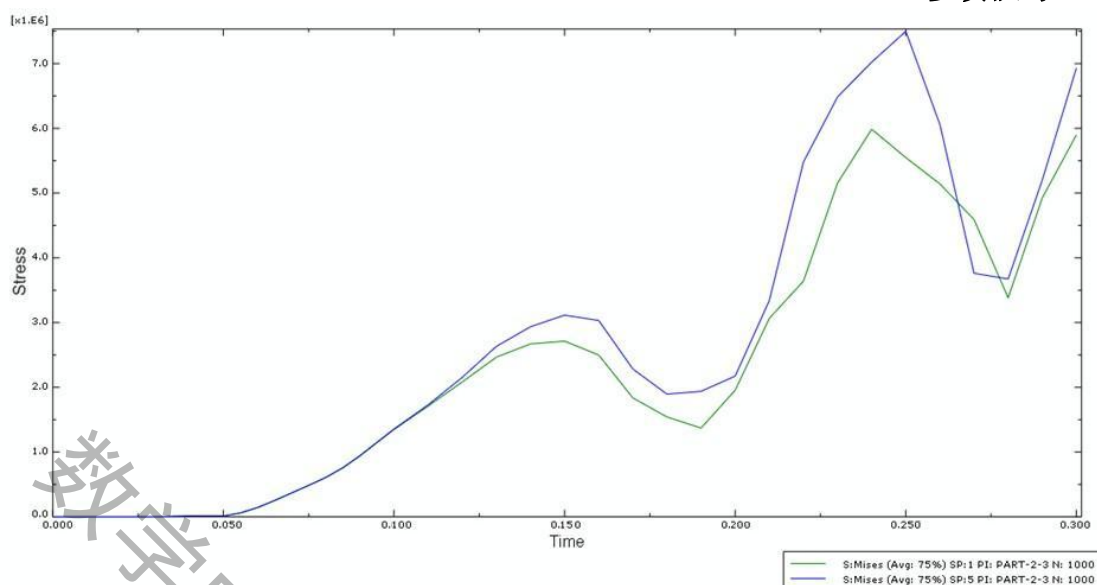


图 6.23 客机航向 4°723 结点 MISES 应力随时间变化

参赛队号 # 1753

图 6.24 客机航向 4° 1000 结点 MISES 应力随时间变化

由上述个图可以看出，在航向与风浪夹角为 4° 时，客机下部蒙皮出现应力峰值的时间为 0.140s，应力峰值为 284.6MPa，出现在尾翼着水的时候；当客机腹部着水时，也出现了应力增大点，应力峰值为 217.4MPa。客机下部蒙皮的应力峰值小于材料的破坏强度，因此下部蒙皮不会出现破裂现象。在迫降过程中，舱门三个方向上的变形最大为 10.94cm，变形较大，比较危险。

通过比较航向 0° 攻角 5° 与航向 4° 攻角 5° 的结果可以看出，航向变化，只对舱门 Z 方向的位移影响较大，对其他结果影响较小。但是舱门对飞机迫降的安全影响巨大，在其他对其他安全因素影响不大的情况下，应当选择对舱门影响较小的航向。因此，客机海上迫降的最佳姿势为航向与风浪运动方向相同攻角为 5° 。

6.4 结果分析

通过对客机 3 种不同工况下飞机着水时的姿态进行数值计算，得到如下表 1 的计算结果：

表 6.2 不同工况计算结果

工况 序号	航向/ $^\circ$	攻角/ $^\circ$	腹部应力 峰值/MPa	尾翼应力 峰值/MPa	舱门 X 方 向变形/cm	舱门 Y 方 向变形/cm	舱门 Z 方 向变形/cm
1	0	5	287.8	229.6	6.40	10.76	0.82
2	0	8	327.4	269.3	21.58	36.31	2.75
3	4	5	289.6	217.4	6.88	10.94	0.99

结果表明：客机航向与风浪运动方向相同并以 5° 攻角着水时，客机腹部和尾翼应力峰值最小，客机的舱门 X、Y、Z 三个方向的变形也最小，舱门可安全打开。

7、模型的优缺点分析

7.1 模型的优点分析

1、有限单元法的基础理论和方法比较成熟，已经成为当今成效最为显著的数值分析方法。

2、支承运动引起的强迫振动理论在工程中有广泛的应用。

3、有限单元法适用性强，适用于任何支撑条件和载荷的模型。

4、本文建立的客机模型合理，计算精确度较高。

5、模型采用了数值计算与软件相结合的方法，使问题的解决更加严密。

6、建立的客机动力学控制方程适用范围较广。

7、离散的控制方程形式规范，便于编制通用的计算机程序。

8、模型建立和求解符合实际，为客机安全迫降海面提供了理论依据。

7.2 模型的缺点分析

1、由于时间的原因不能对模型进行更加完整的数值计算。

2、模型计算过程中存在一些误差，改进相对困难。

8、参考文献

[1] 王勖成，有限单元法，北京市：清华大学出版社，2008 年。

[2] 槽德欣，计算方法，徐州市：中国矿业大学出版社，2004 年。

[3] 殷祥超，振动理论与测试技术，徐州市：中国矿业大学出版社，2007 年。

[4] 张兴永，数学建模精彩集训材料，徐州市：中国矿业大学出版社，2008 年。

[5] Miloh T, On the oblique water entry problem of a rigid sphere, J Eng Math, 25(1): 77-92, 1991 年。

[6] 李启雄，关于水荷载计算几个问题的讨论，(2): 3-5, 2009 年。

[7] 胡大勇，某型飞机水上迫降数值化模型，北京航空航天大学学报, 34(12): 1369-1374, 2008 年。

[8] 贺 谦，李磊，岳珠峰，基于 Lagrange 算法的飞机水面降落过程研究，机械强度, 32(4): 556-56, 2010。

参赛队号 # 1753

附录：

程序：

```

*Heading
** Job name: fl4 Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.9-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
** PARTS
*Part, name=Part-2
*Node
*结点值
*Element, type=S3
  *单元编号
*Nset, nset=men
*Elset, elset=men
*Nset, nset=jicang
*Elset, elset=jicang
*Nset, nset=_PickedSet24, internal, generate
*Elset, elset=_PickedSet24, internal, generate
*Nset, nset=xia
*Elset, elset=xia
** Section: Section-1
*Shell Section, elset=_PickedSet24, material=Material-1
*End Part
** ASSEMBLY
*Assembly, name=Assembly
*Instance, name=Part-2-3, part=Part-2
*End Instance
*Nset, nset=_PickedSet75, internal, instance=Part-2-3
*Elset, elset=_PickedSet75, internal, instance=Part-2-3, generate
*Elset, elset=__PickedSurf61_SPOS, internal, instance=Part-2-3, generate
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf61, internal
  __PickedSurf61_SPOS, SPOS
*Elset, elset=__PickedSurf77_SPOS, internal, instance=Part-2-3, generate
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf77, internal
  __PickedSurf77_SPOS, SPOS
*Elset, elset=__PickedSurf78_SPOS, internal, instance=Part-2-3
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf78, internal
  __PickedSurf78_SPOS, SPOS
*Elset, elset=__PickedSurf79_SPOS, internal, instance=Part-2-3
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf79, internal
  __PickedSurf79_SPOS, SPOS
*End Assembly
*Amplitude, name=Amp-1
** MATERIALS
*Material, name=Material-1
*Density
*Elastic
** BOUNDARY CONDITIONS
** Name: BC-1 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
  _PickedSet75, 1, 1
  _PickedSet75, 2, 2
  _PickedSet75, 3, 3

```


参赛队号 # 1753

```
** -----
** STEP: Step-1
*Step, name=Step-1
*Dynamic, Explicit
*Bulk Viscosity
** LOADS
** Name: Load-1    Type: Pressure
*Dload, amplitude=Amp-2
_PickedSurf77, P, -85000.
** OUTPUT REQUESTS
*Restart, write, number interval=1, time marks=NO
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
*Output, field, variable=PRESELECT
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
** STEP: Step-2
*Step, name=Step-2
*Dynamic, Explicit
*Bulk Viscosity
** LOADS
** Name: Load-1    Type: Pressure
*Dload, op=NEW
** Name: Load-2    Type: Pressure
*Dload, op=NEW, amplitude=Amp-3
_PickedSurf78, P, -60000.
** Name: Load-3    Type: Pressure
*Dload, op=NEW, amplitude=Amp-3
_PickedSurf79, P, -10000.
** OUTPUT REQUESTS
*Restart, write, number interval=1, time marks=NO
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
*Output, field, variable=PRESELECT
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```