当拓扑学家成为政治家…

摘要

据最高法院法官 Villiam Brennan 所说，前最高法院法官 Sandra Day O’Connor 曾经说过：任何不为本党派保卫权利做任何事情的政治家“应该被弹劾”[Toobin2003]。尽管国会争辩说像“一对耳罩”这样的自然选区是非常公平合理的，但是这样划分选区太违反直觉，国会的声明很难令人信服。

定义什么是公平这样的问题可以留给哲学家或者计算机。利用一种新方法，我们把各州划分为人数相等的选区，使得各区尽量紧凑和基础。这里的紧凑被定义为关于各区人口密度的转动惯量。由于在分组时没有参考其他人口统计数据，我们避免了许多人们可能强加的偏见。我们得到的俄亥俄州和纽约州国会选区比当前的选区更加紧凑的多。

由于按照“共同利益”把人们划分到不同的国会选区听上去是很合理的，我们又考虑了这些地区信息的其他人口统计数据，从而把问题进一步展开，得到在尽量保证这些质量统一性的修正选区。我们鉴别了这些解决办法的是适合度和它们各自的优缺点。

最后，我们建议考虑县级边界和自然边界的可供选择的划分选区技术。

1 问题重述

当拓扑学家成为政治家…纽约州的第十三选区的范围可能不会再是完整的整体了。划分选区的行为——把一个国家划分为合适数量的选区——通常是由某个政治党派组织完成的，尤其是国家立法机构和统治者。毫不为奇，党徒会以一种他们认为极大化本党派即将送入国会代表数量的方式划分选区。这个过程就叫不公正划分选区，它是以 1812 年马萨诸塞州州长 Elbridge Gerry 的名字命名的。这个州长当年很出名地通过了形似水晰蝾螈的国会选区划分。

由于划分选区对个人偏见的敏感性，这样一个相对简单的问题在这些年已经变得急剧复杂。Gerry 的 1812 年水晰蝾螈法甚至不能和今天熟知的选区划分方法如 Louisiana 的“the‘Z’with drips”法，或者 Pennsylvania 的“supine seahorse”和“upside-down Chinese dragon”法相比。这些棘手复杂的选区划分经常忽略美国宪法中强调的众议院的最基本目标：为人民提供区域代表。就这点而论，我们要寻求建立一个“公平”、“简单”的国会选区划分系统，这个系统要寻求极大化所有人对于区域代表的可访问性，并且提供的国家选区划分对于政党动机不敏感。

为了达到公平划分的目标，我们定义了目标函数 F，当函数 F 最小化后就得到了我们定义的最优划分（把国家划分为不同的选区）。作为应用，我们把这个方法应用于纽约州和俄亥俄州我们。我们坚持我们划分选区的方法以便说服选民和政治家这是解决国会选区问题的一个公平的方法。

2 定义

为了本论文的阐述，我们定义了如下概念：

Block（块）：一个与一定固定数量的人口相对应的面积。尽管为每个块挑选的人口数足够少，块的整体面积也能被限定，但由于人口密度的不同，块面积也各不相同。块在平面上由一对（x，y）坐标表示。

District: 包含一定数量块的集合（这样就有固定的人口）。

Captitol：与每个区域中心相对应的一个点，例如，在每个区域中的块的坐标的平均值。由于每个块有一个单位人口，因此 capitol 就是人口中心的近似值。

Fairness：在 *Shaw v.Reno* [1993]，美国最高法院提到划分选区可以接受的方法包括“紧凑性、邻近性、尊重以实际共同利益定义的政治单元或团体”。通过紧凑性，法官们实际上暗指一个模糊的概念，那就是国会选区应该是正方形或圆形，而不是“spitting amoebas”。

Compactness：假设一个地区 D 包含 n 个块，$z_1, z_2 \dots z_n$ 和一个中心（Capitol）c 。那么紧凑

性 C 就是人口空间分布的方差。

$$C=\sum_{i=1}^{n}\|z_i-c\|^2$$

当 C 很小时，我们总结出地区的选民生活在一个相对小的区域。

Shared Interests（S）：我们为每个块设定了一个向量，向量中的每个元素代表一种利益，然后最小化这个地区的元素方差的和。也就是说，向量$\mathrm{v_i}$与块$\mathrm{z_i}$想关联，平均利益向量$\vec{\mathrm{u}}=\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\vec{\mathrm{v_i}}$ ，那么共同利益就是

$$S=\sum_{i=1}^{n}\|\vec{v}_i-\vec{u}\|^2$$

关于共同利益的说明

虽然种族、性别、年龄和宗教信仰对于很多事情来说是很重要的问题，但许多法律含糊存在于这些准则的使用中。由于将这些人分在同组或分散于不同的组那个更好使没有被证明的东西，所以我们不考虑这些因素。尽管衡量政治倾向是完全合法，也是经常用来分区的工具，我们仍然不考虑党派归属，即便避免有意无意地偏向于一方。

3 问题的具体表述

有了上面关于紧凑性和共同利益的定义，我们现在就可以恒量国会选区划分的公平性。假设我们有一个国会选区划分$P=\{D_1\cdots D_k\}$，而且每个选区都是临近和包含相同数目的块。我们定义$f(D_i)=\omega_1C_i+\omega_2S_i$ ，其中ω_n表示某些正的常量系数，这些系数对所有选区都相同。对于全局问题，我们定义$F(P)=\sum_i^k f(D_i)$ 。因为快的数量是有限的，而且$F(P)$是正的函数，所以全局最小值。

因此，我们的目标就是找到一种划分$P*$使得$F(P*)$为全局最小值。

4 模型假设

我们做出如下假设：

- 我们已经得到有关国家人口地理分布的准确数据和其它相关因素
- 块代表的人口数量足够少以保证选区有可以忽略的人口数量的不同
- 为每个地区初始分配的块足够随机，以保证我们的算法收敛时产生的地区集合与全局最优相关的集合很接近

5 背景和目标

追求“公平”划分选区模型几乎与追求不公平模型的历史一样长。在这个过程中，计算机被证明是非常宝贵的工具。由于计算机允许在不需要人看地图的情况下完成选区划分，因此理论上可以避免潜在的利益冲突。然而不幸的是，几乎没有政治家会让他们的生涯依赖于一串由电脑屏幕吐出的坐标，因此无党派划分技术可能永远只停留在“理论”上而非在政治科学的“实践”中。

在 1963 年，James Weaver 和 Sidney Hess 制定了计算机无党派划分标准。利用整数规划的方法，一系列 capitols（在原文中叫“LDs”）被一些块（“EDs”）所匹配以达到最小化转动惯量，例如，本文中定义的“C”。重复如下过程：将 LDs 调整到合适的质量中心，然后将 EDs 重新分配与每个 LD 直到达到一个转动惯量达到一个局部最小值。以大量的初值频繁地重复上述过程，他们认为可以近似得到转动惯量的全局最优值，从而得到一个地区最紧凑的划分。虽然精确，但整数规划算法应用于海量数据时，即便对于速度最快的计算机也是很耗时的（所以我们只能想象在 1963 年时它是如何在超级计算机上运行的）。尽管 Weaver 和 Hess 的方法只在县级和小州级得到很好的适用性，但他们里程碑式的工作为许多试图达到国家选

区划分技术的发展铺好了路。

既然历史已经教给大家如何去做，那么我们在这些基础上继续扩展建立模型，为此，我们设定了如下目标：

- 找到理想的划分$P*$，例如，使 F 全局最优的 P
- 算法具有通用性：能够为有很多共同利益的函数 S 找到理想划分
- 算法具有可伸缩性：能够快速处理大量数据

6 友好商人算法

假设所有的块被分配到 n 个区域。通过我们的算法，区域 z 试图放弃对它们最适合（例如，使$f(z)$变得最小）的块。然而，作为商人，我们的区域很“友好”。也就是说，只会在所有的区域整体变好（例如减小 F）的情况下，才会进行交易，放弃和得到相应的块。这些区域之间很友好，事实上，某些交易虽然会使$f(z)$变大，但只要 F 减小，它们就会进行交易。由于在每次交易后区域的组成会发生变化，所以 Captitols 必须在每步后重新计算。这样，找最小值的问题就变为找到和执行所有减小 F 交易，直到没有更好的交易存在。

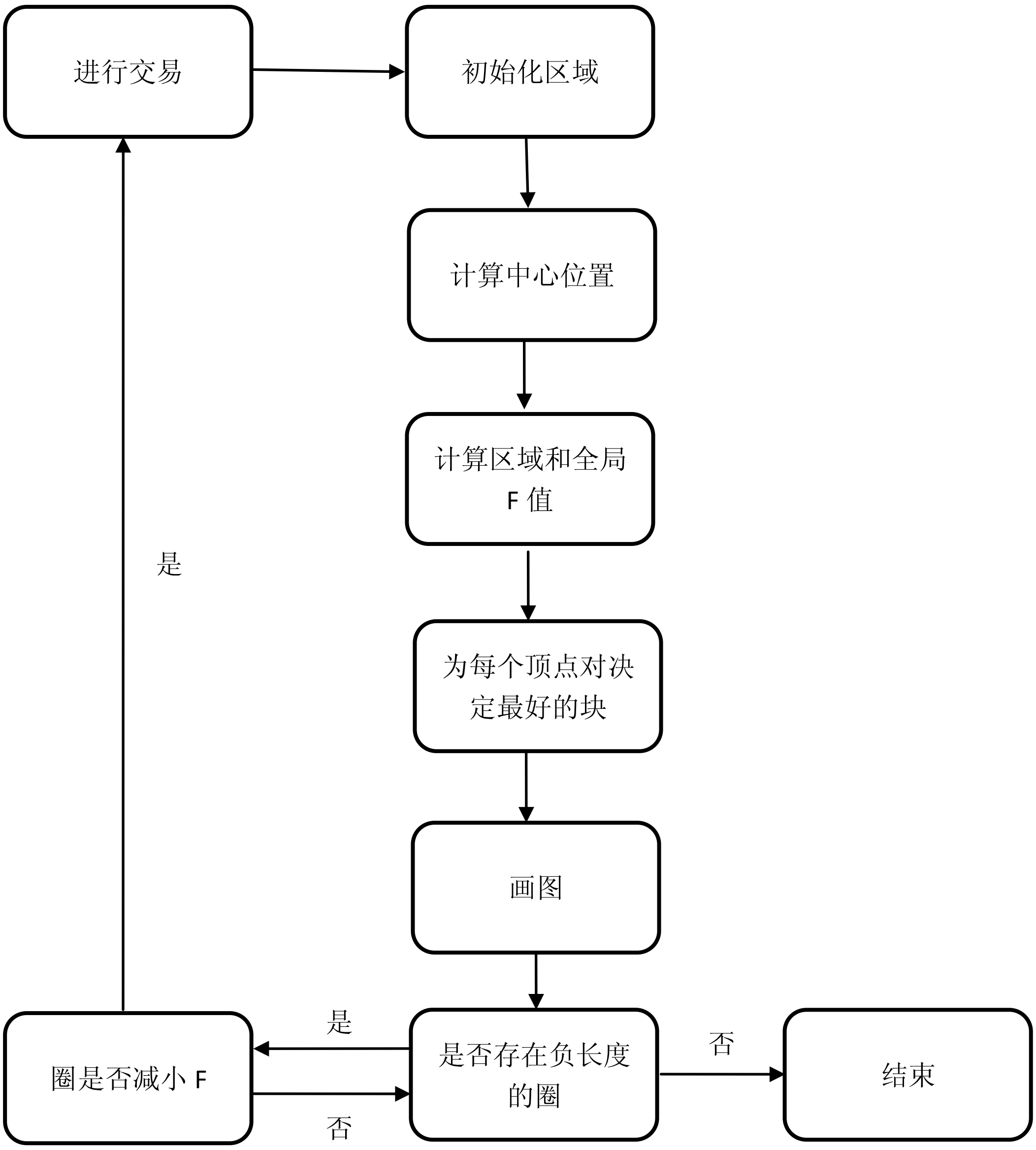


图 1 ：友好商人算法决策过程流程图

一旦块确定了，初始区域就分配好了，交易就一直进行到结束。

如何确定快？

人口统计数据是从美国普查局得到的。对于纽约州，数据被粗略地分为 5000 个大区域，每个大区域包含具体的人口和经纬度坐标。对于更小范围的划分，我们每 250 人划分一个块（250 人左右）。我们最终使用更小区域划分方法分配好这些块。这样，每一个块都有相同的人口，而且人口密度也接近于块密度。

区域如何初始化？

我们尽量得到一个有低 F 值的近似划分。首先我们任意的选择 29 个块作为初始地区的中心。假设每个中心的位置就是人口和地区平均利益的中心。一个接着一个，每个中心选择“最适合”它的中心位置和利益的地区。这个过程就好像是专业体育选秀，所有的队轮流挑选最适合他们各自队伍的选手。当所有的都分配到各个中心后，区域之间的块交换就可以开始了。

如何最大化紧凑性？

假设我们有两个区域D_1和D_2和一个块$b_k \in D_1$。通过将b_k从D_1移动到D_2我们得到新的区域$D_1^{'}$和$D_2^{'}$，我们定义

$$\Delta\mathrm{F}(D_1, D_2, b_k) = f\left(D_1^{'}, D_2^{'}\right) - f(D_1, D_2)$$

现在，为了决定要做那个交易，我们首先在D_1中找到一个块b_{*12}，使得对于D_1中所有的块b_k有$\Delta\mathrm{F}(D_1, D_2, b_{*12}) \le \Delta\mathrm{F}(D_1, D_2, b_k)$ 。最优的块不一定是唯一的，正如它的名字表示的一样，但这与我们的目标无关。

现在我们可以定义一个完全连接的有向图G，图G的顶点表示区域D_j，图G的边$v_i \to v_j$的权值为$\Delta\mathrm{F}\left(D_i, D_j, b_{*\mathrm{ij}}\right)$ ，$b_{*\mathrm{ij}}$是从D_i到D_j的最优块。为了找到减小 F 的交易，我们在图G中搜索带有负权值的圈（圈的权值定义为圈的各边的权值的和，如果某边重复出现则重复计算）。如果一个圈有负权值，则这个圈对应的区域之间的一组块交易很可能减小 F。特别的，如果例如$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1$是图$G$中的含负权值的圈，将$b_{*12}$，$b_{*23}$，$b_{*31}$分别由$D_1$交易至$D_2$，由$D_2$交易至$D_3$，由$D_3$交易至$D_1$，这样应该可以减小 F。因此，寻找区域之间好的块交易的问题就转化为在图中寻找含负权值的圈。

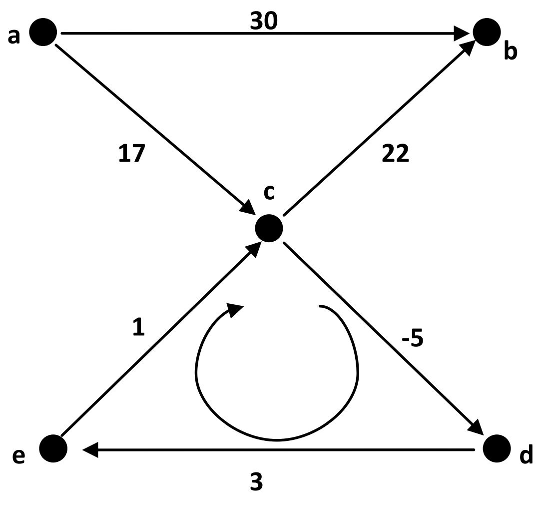


图 2：从 a 到 b 的路经过负权值的圈 c，d，e 可以任意短

在图中寻找负权值的圈的问题可以转化为更简单的寻找任意两点之间最短路的问题。为了说明这点，可以参考图 2。从 a 到 b 的最短路必须包含一个负权值的圈（如果图中存在的），

因为我们可以绕着这个圈任意次，使得路的长度任意短。Bellman-Ford-Moore 算法利用这个性质修改最短路算法可以找到这个圈。需要有一点说明，这个算法只能找到它从顶点 a 出发遇到的第一个负权值的圈，没有其它可供选择的圈。一旦找到一个交易，就必须进行，然后重新计算各区中心。利用这个算法我们要小心地避免重新计算各区中心后的交易实际上增大 F。因为我们只进行严格减小 F 的交易，所以当 F 不能再通过交易减小时，我们就得到了一个局部最优解。

7 模型求解

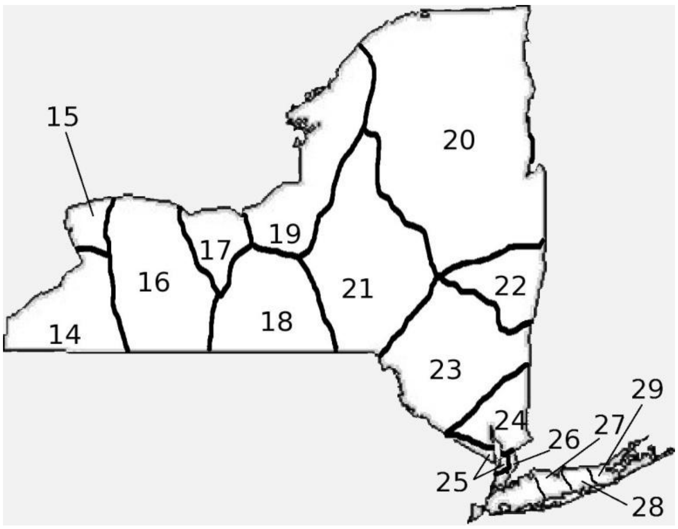
我们编制了模拟上述算法的计算机程序（见附录）。我们挑选出含 250 个人的块，然后运行上述程序直到没有更好的交易进行。这样我们得到了一个局部最优解。然而，我们注意到无论初始分布如何，总会得到相同的选区划分。这使我们坚信我们的设置数据足够多样和丰富，使得算法总会收敛到唯一的全局最优值。

下面是我们模拟分区的结果。其中四个地图对应纽约，三个地图对应俄亥俄州。前面两幅地图是是官方划分的纽约选区。由于纽约市巨大的人口数量，第二幅图有必要集中注意力看一下它的国会选区。

这幅地图和它下面的那幅——靠近纽约市——展示了我们对纽约州的基本的划分。这只是在保证最紧凑的情况下计算出的（$w_2 = 0$）。

纽约的第二幅地图是在虽然视紧凑性为导引，但目标函数倾向于保护人口密度。

接下来的三幅是关于俄亥俄州。我们决定在一个与纽约州不同的州来测试一下我们的算法，



以便于检验我们的算法实际可广泛应用于不同的环境。在第一幅图中，俄亥俄州在只考虑紧凑性的前提下划分选区（正如纽约州的第一幅图）。

图 3：只考虑紧凑性纽约州的国会选区

图 4：近看图三的纽约城

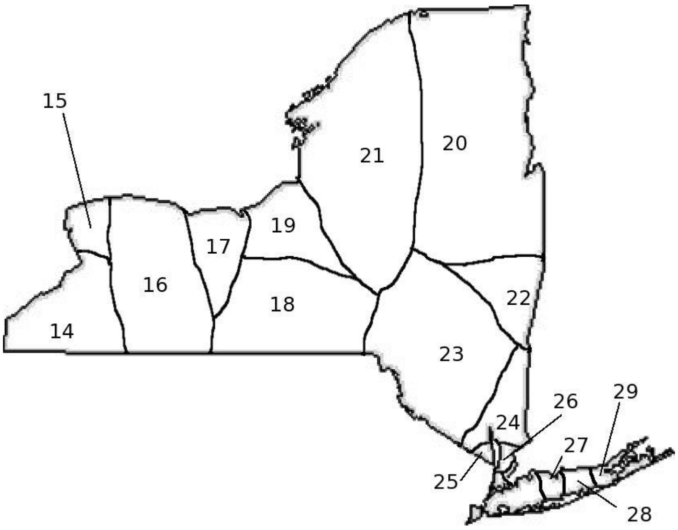


图 5：考虑紧凑性和人口密度的纽约城国会选区

图 6：近看图五纽约城

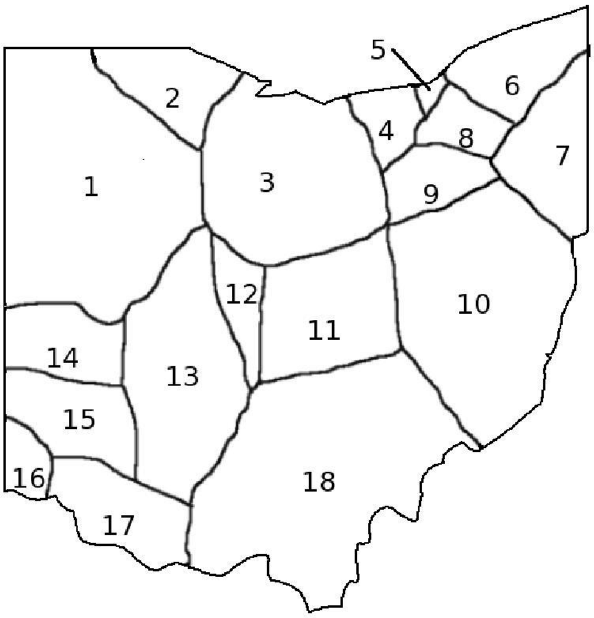


图 7：只考虑紧凑性的俄亥俄州的选区划分

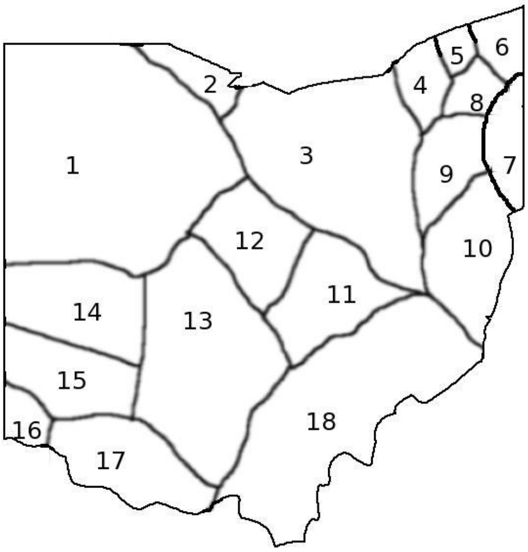


图 8：考虑紧凑性和人口密度的俄亥俄州选区划分

同样的，第二幅俄亥俄州的地图就像纽约州一样，都是利用 F 函数得到最好的划分。为了得到图 10，我们修改程序使得在选区之间不分割县。县在俄亥俄州的国会选区就不在分割了。这样，我们为$f(x)$增加了考虑县分割的一项。这个想法可以很简单的扩展到像河流或高速公路这样的自然边界。

8 结果分析

我们的结果是看得见的而不是数字。正如我们所分析的那样，我们的算法的一个缺点就是缺少用于对比的可量化数据。虽然，我们的最终 F 值是一种比较的方法，但由于 F 本身是一个变量函数，从一种应用到另一种应用所需的标准化工作也是很复杂的。而且，由大量初值得到的结果的显著重现性几乎消除了分离数字数据的需要。

在图 3，4，7 中，可以看见选区边界清晰的界定。将块分配完后，我们将一个地区的所有边界块连接起来，然后进行光滑化处理。与当前的国会选区相比，我们的算法在简单性上有很大的提高，相应的 C 指标对于俄亥俄州减少了 7 因子，相对于纽约州减少了 22 因子（10042200 比 73042325 和 13345270 比 268847395）。由于我们的模型以距离评价分区，因此，它鼓励星形选区（中心与选区中每个点直线相连）而非凹形选区，以提高临近性和减小选区复杂性。在这种情况下，我们的模型很完美的解决了划分选区的问题，得到了简单、合理的结果。然而，我们的利益倾向模型才是我们模型真正的闪光点。

由于我们不选择平常的潜在利益冲突如种族和年龄，我们决定选择可能的普通量：块中的人口密度（肯定没人说我们有偏见）。我们觉得这个量对于划分选区时很有用，因为城区问题一般与农村问题不同，这样，城市的清洁工和农民就都有机会获得代表权。

在某种程度上，我们的模型在选区之间明显倾向于相似的人口密度。由于市区的块的密度比较大，因此它们很自然的就移动到相同的选区。我们的调整仅仅是增加了人口密度组成，这在俄亥俄州产生了明显变化。在俄亥俄州，大城区如中心的哥伦布市，西南的辛辛那提市，西北的克利夫兰市的选区更加紧密了。同样在纽约市人口密集的布朗克斯区和皇后区，选区也更加紧密（图 6 和 9）。这些算法相比于目前的选区划分也增加了紧凑性和人口密度统一性，而且也说明了存在很多合理的方法满足我们紧凑、简单、公平的目标。

在某些州（如俄亥俄州），国会选区划分考虑了保留县边界。由于很多州（包括纽约州和俄亥俄州）有独立的县级政府，因此我们运行俄亥俄州的选区划分时考虑保留县边界。平均利益向量u在每个县中已经制成了表。这样我们就能够近似地评价保留县边界的算法。图 10 显示了这个方法的成功性。在很多选区，它们的边界与县边界几乎完全重合。基于县边界的选区划分算法的优点很明显：由于居民向县级政府交税，也从县级政府得到服务，因此允许县级政府属于同一个国会选区有利于解决好地区问题。令人惊喜的是，考虑这些边界线对于紧凑性和简单性几乎没有影响。然而，由于某些州没有县级政府，因此这个方法就没什么意义。

因为不同的州和不同的人有不同的需求，因此我们回避了选择具体的算法，同时我们也声明了这个事有效的。

9 为什么我们的模型是公平的？

很明显，上述模型产生了更简单的国会选区，但是公平问题却是十分困难。举个例子来说明这个问题，我们考虑美国宪法的第十四条修正案。这个修正案明确提出所有种族、性别在法律意义下是一律平等的。然而，1965 年的选举法指出政府要坚持完善偏远地区的选举制度。这样，就连政府自身在决定“公平”是否包括帮助处于不利地位的人实现他们的权利或给每个人严格平等的对待都很困难。我们说我们的模型是公平的是因为它不考虑这些因素。它只考虑一系列指标（如函数 F），在参考 F 的情况下，将地区划分为相对统一的选区。如果无党派目标配要求，如统一人口密度或紧凑性，那么一种无党派算法也就出现了。

然而，任何组成数据都可能被误用。例如，非洲裔美国人倾向于支持民主党，而农村地区的人则倾向于共和党。这样，种族和人口密度就可以为达到党派目标而被很好地利用。

我们的模型是公平的是因为它不考虑任何上述因素。然而，它被设计用来提高居民对于关心和勤劳的代表的可接近性，用以最大化每个公民的权利。

10 模型的优缺点

我们的模型有效的得到了我们最初设定的目标。它不仅很高效，可以处理大量数据，还有我们期望的灵活性。尽管我们没有为所有的可能性进行测试，但是我们展示了我们的模型可以为任何一个变量优化国会选区。如果我们选择在利益函数中输入收入、财产、犯罪、或教育数据，我们可以很轻松地得到高质量的结果。同时，我们的算法具有健壮性。而且，我们还可以按照我们自己或其它人，尤其是想得到可接触、有爱心而又无偏见的代表的选民设定的要求把区域划分成非常简单，接壤和统一的选区。无论输入的数据是随机的或按照一定顺序的，我们的模型会一致的收敛到最小值点。

模型的主要缺点是缺少我们的算法的好的逆昵称——无论如何像“鸡蛋”或“钻石型”的名字都不能吸引人的眼球。然而，我们选择批评这个缺点是针对我们迟钝的想象力而非我们的模型本身。严肃地说，对于模型的用户，我们的主要目的是让他们记住这是一个模型。虽然我们得到了稳定的平衡点，但是我们的模型不能保证它总会找到全局最优解。为了说明这一点，考虑一个有不同边的矩形，并假设它的每个顶点有 10 点。并初始化区域于长边。容易验证没有交易会发生，这样，这个配置就是局部最优，不是全局最优点。

模型的另一个主要缺点是缺少用于比较的标准。尽管紧凑性和共同利益级别可以作为州内不同模型的评判标准，但是缺少评价不同区域划分选区的不变标准。最后，还有一个较小的缺点，我们的模型离散化连续的数据，机型数值近似计算；这个缺点存在于任何模型中，我们的模型很好地处理了这一点。

11 思想回味

假设有合适的数据，我们的模型不仅仅可以做政治地区划分。本质上，无论被什么特征所限定，这个模型可以很简单地将区域划分为更小的部分。例如，如果一个政府组织要确定在哪修建警察局或医院，他或她可以向输入我们的模型中输入犯罪，健康，财产或年龄统计数据。模型可以快速高效的将一个州或镇划分为更小的区域。这种划分不仅依靠空间关系，还依靠认为需要或要求。这样，我们的模型可以帮助政治家和权力机关最高效地配置公共资源和服务。具有讽刺意味的是，我们的无党派划分方法可能成为政治家的好朋友。不仅如此，通过输入政治因素数据，政治家还可以鉴别出党派根据地以便最高效地计划竞选。尽管模型非常简单，但我们的分区技术已经超出了我们对它在多样性和活力方面的期望。

12 模型总结

在这篇论文中，我们阐明了一种给定位置，人口和其它设定的因素，确定国会选区的算法。这个算法的目标是公平或无党派：它和不公正选区划分的过程完全相反。我们认为在将州划分为国会选区时的基本特点包括邻近性，紧凑性，和一定程度上地区居民的共同利益或事宜。

我们假设一个州可以被分为拥有较小常量人口的块，然后将国会选区划分的问题转化为将这些块以每个区域含有固定数目的块的方式分配到各个选区的问题。进一步，我们又定义了衡量给定块的地区指标的目标函数 F。有了函数 F，找到将州划分为选区的好方法就等价于找到相应低 F 值的块的分布。因此，有了上述分区的问题，我们的目标就是找到最小化 F 的国会选区划分。这是问题有效的抽象，因为如果大家都同意使用这个算法，F 全局最小值的存在性（问题是有限的）就可以保证如果这个最小值点被找到，那么就没有党派争吵，正如模型的合理性所阐释。

必须承认，我们的州划分算法只能保证得到 F 的局部最优值。然而，以随机初始值开始

的模拟实验总是收敛到同一最终分配表明，算法得到的局部最优值很接近全局最优值。另外，虽然我们应用特定因素量化同一地区居民的共同利益，我们的决定国会选区的步骤是很灵活的；一个简单的因素变化就可以使在不同的准则下将块划分到不同的地区。

13 参考书目

1. Weaver, James B. and Hess, Sidney W., ”A Procedure for Nonpartisan Districting: Development of Computer Techniques,” Yale Law Journal (1963):288-308. 2. ”Shaw v. Reno,” US Supreme Court (1993).