

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1852

参赛队员（签名）：

队员 1：夏林林

队员 2：张健

队员 3：刘维东

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1852

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 四面六边体框架群的结构分析与改进

关 键 词 能量转换、显著性检验、正态分布、堆砌方式

摘 要：

“护岸防洪防冲四面六边透水框架”是水利部西北水利科学研究所拥有的使用新型专利，并得到广泛应用。在江河治理工程中应用四面六边透水框架，能够减小流速的作用，对河道治理起到防洪、护岸、促淤的作用。但是四面六边透水框架在抛投和使用过程中，可能被水流冲击而翻滚移位，而且关于四面六边透水框架两两之间钩连方式的研究目前尚不完善，且框架群结构强度存在不足，这些诸多因素导致框架群不能达到理想的堆砌效果，对其消能减速功能有不利影响。为了得到良好的框架结构，本文在现有研究结果基础上，对原有四面六边透水框架改进，建立了新的数学模型。本文解题思路如下：

首先，我们考虑四面六边框架体两两之间钩连方法，查阅资料了解到已有连接方式多为钢筋焊接等硬性连接，而在水的巨大冲击下，焊接点受力过大易断裂，为此我们设计用耐压耐腐蚀等性能优异的弹簧连接，将水的部分动能转换成了弹性势能，减少了水流对框架组的冲击力，降低翻滚位移的可能，同时缓解了焊接节点的受力，使之不易断裂分离。

其次，考虑四面六边框架群的堆砌形式，并进行结构强度分析，我们首先论证了四个小四面六边透水框架体可以组成一个大四面六边框架群的新框架模型，并通过桁架结构理论，说明了其结构强度比单个透水框架好，最后，我们根据参考文献中实验数据对一维（横向排）、二维（横纵向排）、三维（横纵竖排）的减速率进行了对比分析，得出新框架模型减速效果优于其他排列方式，从减速率方面验证了新框架体的优良性。但是由于数据量和数据精度的限制，说服力不强，因此我们利用第一阶段得出的框架尺寸，架空率，铺设长度三因素制约的经验公式进行模型验证，通过新旧模型的对比得出新框架模型的优良性。

最后，为了使框架群在水中相互钩连。我们给透水框架各个角加钩，大量密集分布在一定区域的四面六边透水框架群在海水的冲击下，它各角上的钩子就发挥作用开始钩“鱼”了。这时每一个四面六边体都充当了两个角色，它们既是捕鱼者也是被捕者，我们用显著性检验及正态分布求概率原理，验证了钩子确实可以使分散的新框架模型钩连在一起，从而众志成城一起防洪落淤。

参赛队号： #1852

参赛密码 _____ (由组委会填写)

所选题目： A 题

英文摘要（选填）

Abstract:

The "revetment flood and scour protection Penetrating Framework is owned by the Ministry of Water Resources Northwest Hydraulic Research Institute model patents, the siltation role. But the the Penetrating framework dumped and use, may be the current rush to roll shift, and hooked way between any two tetrahedron is not perfect, and the the framework group of structural strength deficiencies, In order to get a good frame structure, the establishment of a new mathematical model. Problem-solving ideas in this article are as follows:

First, we consider the framework of the tetrahedron body between any two hooked, access to information learned existing connection for welded steel rigid connection, and the huge impact of the water, while alleviating the force of the welded joints, so that separation of the easy to break.

Next, consider the tetrahedron framework pile of forms and structural strength analysis, we first demonstrated the new framework model of four small Penetrating frame body can form a tetrahedron frame group, However, due to the limit of the amount of data and data accuracy, not convincing enough, so we use on the first phase of the frame size, overhead rate, the laying of the length of the three factors of the empirical formula to model validation, through the contrast of the old and the new model new The superiority of the framework model.

Finally, in order to hook connected to each other in the water so that the frame group. Then each tetrahedron body acts as two roles, both fishing arrested, significance test and normal distribution and probability theory to verify the hook does the dispersion new framework model hook together, to surmount with flood control and the fall of the silt.

目录

摘 要.....	
英文摘要（选填）	
一、问题重述及分析	2
1.1 空心四面体框架群的研究现状.....	2
1.2 本文主要研究工作.....	2
二、模型假设	3
三、符号说明与相关定义	3
3.1 符号说明.....	3
3.2 相关定义.....	4
四、模型的建立	4
4.1 四面六边框架体两两之间钩连方式.....	4
4.1.1 四面六边体两两之间用不同连接形式的简易模型对比.....	5
4.1.2 四面六边体两两之间用不同连接形式的简易模型对比.....	5
4.2 新框架模型（四面六边体的堆砌形式）的提出.....	6
4.2.1 新建框架模型结构示意图.....	6
4.2.2 模型能够堆砌成的分析.....	7
4.2.3 此大四面六边透水框架（四个堆砌）的结构强度分析.....	8
4.2.4 新模型的结构强度总分析.....	9
4.3 四面六边形透水框架不同堆砌、排列形式的减速率分析.....	9
4.3.1 实验结果及分析.....	10
五、新框架模型的改进与优化	11
5.1 钩连次数的显著性检验.....	12
5.1.1 显著性检验的理论分析.....	12
5.1.2 显著性检验的方法用于钩连次数大于 10 的检验.....	12
5.2 四面六边透水框架钩连次数大于 10 的概率求解.....	13
5.2.1 正态分布求解概率原理分析.....	13
5.2.2 应用正态分析知识求解新建模型加钩子使用中的两两之间相互钩连的概率.....	14
六、模型的优缺点及改进	16
七、参考文献	16

一. 问题重述及分析

长期以来,河道整治中习惯采用实体材料构筑建筑物,如丁坝护坡和抛石护脚,实践证明,这些措施不够经济,且容易被洪水冲毁。一种新型的护坡技术——四面六边透水体框架群近年来已开始在护坡工程中应用,因其具有取材方便、容易预制等优点,且还具有自身稳定性好、透水、不易被冲刷、适合地形变化的特性。近几年,该技术在长江航道整治工程施工中得到广泛运用,效果十分显著。

1.1 空心四面体框架群的研究现状

西北水科所通过利用四面体透水体框架群治理多沙游荡性河流的试验证明^[2]:①在不同的边界水流条件下,空心四面体框架具有十分明显的减速落淤作用。②空心四面体框架重心较低,具有良好的稳定平衡性,即使在水流冲击下发生位移滚动,仍能保持其高度不变,继续发挥作用。③框架布设密度越大,减速落淤效果越好。通过河道整治试验指出:四面体框架群同实体材料一样,可以修筑丁坝、顺坝和其他任何形式整治建筑物。河海大学与江西省水利科学研究所通过空心四面体框架群护岸固脚的减速机理试验得到下述结论^[2]:当水流通过单个四面体框架时,受内侧杆件挤压,中部流速略有增加,杆件附近水流受杆件阻挡,在杆后形成绕流尾涡,在此期间消耗了一定的能量,相当于给水体附加一个局部阻力,水体受框架作用,有少量向两侧推开,但不形成大尺度集中绕流,因而四面体后流速有所降低。多个框架联合则会使框架群抛投范围内流速和间隔区内流速明显降低,工程区和工程间隔区内泥沙冲淤规律相同,即岸坡上淤积较小,随着水深的增大,淤积增多,至堤脚附近淤积最多,对防止堤脚条崩,保护堤岸安全是行之有效的。同时也不形成实体抛投物难以避免的集中绕流现象。

江西省水利科学研究所通过室内试验和工程现场试验得到如下结论^[2]:①空心四面体框架群具有自身稳定性好、适应地形变化,不存在基础被淘刷的问题,框架群减速率可达3%~7%,即使在长江河床较深,受冲崩塌段也能产生淤积护岸的效果;施工时,为形成稳定的框架群,底层应抛投两排或两排以上,才能达到堆高的目的。②在进行杆件截面型式对减速率的影响试验中指出:不同截面型式的四面六边透水体框架均有明显的减速效果。框架杆件为正方形截面和三角形截面型式减速效果均明显优于圆形截面型式。

1.2 问题分析及本文的主要研究工作

相关文献中对框架体钩连方式以及结构强度分析,翻滚移位等方面的研究存在空白,实际上,四面六边透水体框架在抛投和使用过程中,可能被水流冲击而翻滚移位,而且四面六边体两两之间钩连方式、框架群结构强度等诸多因素共同作用会导致框架群不能达到理想的堆砌效果,对其消能减速功能有不利影响。为了得到良好的框架结构,本文在现有研究结果基础上,对原有四面六边透水体框架改进,建立了新的数学模型。

(1) 考虑四面六边框架体两两之间钩连方法。

查阅资料了解到已有连接方式多为钢筋焊接等硬性连接,而在水的巨大冲击下,焊接点受力过大易断裂,为此我们设计弹簧连接,将水的部分动能转换成了弹性势能,减少了水流对框架组的冲击力,降低翻滚位移的可能,同时缓解了焊接节点的受力,使之不易断裂分离。

(2) 考虑四面六边框架群的堆砌形式,并进行结构强度分析。

我们首先论证了四个小四面六边透水框架体可以组成一个大四面六边框架群的新框架模型，并通过桁架结构理论，说明了其结构强度比单个透水框架好，

(3) 不同堆砌形式的减速率分析。

我们根据参考文献中实验数据对一维（横向排）、二维（横纵向排）、三维（横纵竖排）的减速率进行了对比分析，得出新框架模型减速效果优于其他排列方式，从减速率方面验证了新框架体的优良性。但是由于数据量和数据精度的限制，说服力不强，因此我们利用第一阶段得出的框架尺寸，架空率，铺设长度三因素制约的经验公式进行模型验证，通过新旧模型的对比得出新框架模型的优良性。

(4) 为了使框架群在水中相互钩连，我们给透水框各个角加钩。

大量密集分布在一定区域的四面六边透水框架群在海水的冲击下，它各角上的钩子就发挥作用开始钩“鱼”了。这时每一个四面六边体都充当了两个角色，它们既是捕鱼者也是被捕者，我们用显著性检验及正态分布求概率原理，验证了钩子确实可以使分散的新框架模型钩连在一起，从而众志成城一起防洪落淤。

二、模型假设

- 1、假设小四面六边透水框架体的规格一致
- 2、假设文中水流速度以框架群重心点位置的速度取值
- 3、假设水流冲刷四面六边透水框架群时的速度是均匀且恒定的
- 4、假设收集的数据准确无误，忽略统计人员统计数据时产生的误差

三、符号说明与相关定义

3.1 符号说明

λ	四面六边体框架尺寸
ε	四面六边体框架群的架空率
l	四面六边体框架群顺水流方向的铺设长度
η	抛投四面六边体透水框架群前后的水流流速变化率
Q_1	为水流冲击框架组之前的总动能
Q_2	为水流经过框架组时由于各个四面六边透水框架的减速消能作用而损失的能量
Q_3	为水流完全流出框架组后的剩余动能
x	为弹簧因两端的四面六边体受力不均而发生的拉扯而发生的形变量长度
$W_{\text{弹}}$	为弹簧发生形变的弹性势能。 $W_{\text{弹}} = \frac{1}{2} kx^2$ （ k 为弹性系数）
s_1	为硬性连接框架组在强力水流作用下发生的整体位移
s_2	为弹性连接框架组在强力水流作用下发生的整体位移
u	样本均值
σ^2	总体方差
α	显著性水平

$f(x)$	概率密度
$F(x)$	分布函数

3.2 相关定义

- 1) 弹性势能：发生弹性形变的物体的各部分之间，由于有弹力的相互作用，也具有势能，这种势能叫做弹性势能（elastic potential energy）。同一弹性物体在一定范围内形变越大，具有的弹性势能就越多，反之，则越小。
- 2) 减速率：即抛投四面六边体透水框架群前后的水流流速变化率，定义公式为：

$$\eta = \frac{v_1 - v_2}{v_1} \text{ 式中, } v_1 \text{ 为原河段的流速: } v_2 \text{ 为经透水框架群作用后的流速。}$$

- 3) 能量守恒定律：能量既不会凭空产生，也不会凭空消失，它只能从一种形式转化为其他形式，或者从一个物体转移到另一个物体，在转化或转移的过程中，能量的总量不变。
- 4) 桁架结构：指的是桁架梁，是格构化的一种梁式结构。由于大多用于建筑的屋盖结构，桁架通常也被称作屋架。其主要特点在于，各杆件受力均以单位拉、压为主，通过对上下弦杆和腹杆的合理布置，可适应结构内部弯矩和剪力分布。
- 5) 正态分布：若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty,$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

- 6) 显著性检验：显著性检验就是事先对总体（随机变量）的参数或总体分布形式做出一个假设，然后利用样本信息来判断这个假设（原假设）是否合理，即判断总体的真实情况与原假设是否有显著性差异。或者说，显著性检验要判断样本与我们对总体所做的假设之间的差异是纯属机会变异，还是由我们所做的假设与总体真实情况之间不一致所引起的。显著性检验是针对我们对总体所做的假设做检验，其原理就是“小概率事件实际不可能性原理”来接受或否定假设。

四. 模型的建立

4.1. 四面六边框架体两两之间钩连方式

首先，我们考虑四面六边框架体两两之间钩连方法，查阅资料了解到已有连接方式多为钢筋焊接等硬性连接，而在水的巨大冲击下，焊接点受力过大易断裂，为此我们设计弹簧连接。分析如下：

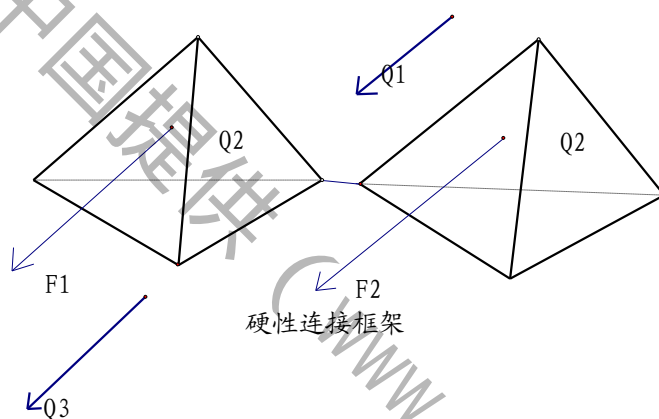
弹簧作用的分析：弹簧是一种利用弹性来工作的机械零件。一般用弹簧钢制成。用以控制机件的运动、缓和冲击或震动、贮蓄能量、测量力的大小等，广泛用于生活及科学应用中。我们利用弹簧可以缓和冲击或震动、储蓄能量的特性来连接四面六边体，从而减少水浪的冲击力所带来的翻滚移位。建立数学模型。

四面六边框架连接的具体施工应用中，对于弹簧种类的选取，要结合实际，以及现已有的各种弹簧性能的研究，最终选择耐拉耐压，耐腐蚀的性能优异的弹簧，具体选取实际应用中根据不同施工需要而定。本文对实际弹簧的选取暂不作更深一步研究。

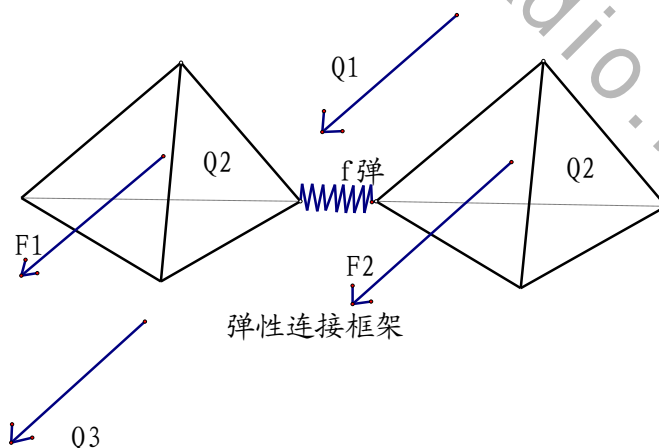


图一：弹簧结构

4.1.2 四面六边体两两之间用不同连接形式的简易模型对比



图二：硬性连接框架



图三：弹性连接框架

水流冲过简易框架组时，系统内不同能量之间存在转换。这里把水流冲击框架组之前的总动能 $Q1$ 看作系统总能量，一部分水的动能因框架组的消能减速作用而损耗，

损耗能量即 Q_2 （这里硬性连接框架组与弹性连接框架组的 Q_2 粗略视为相同），流出框架组后的水动能即为 Q_3 。硬性连接框架组的原始系统总能量和忽略其他能量形式。

如上图装置模拟水流流过框架组的过程中，一组为硬性连接框架组，另一组为弹性连接框架组。我们通过用两组框架在水流强力冲击后的位移距离 s_1 与 s_2 的大小来比较不同连接方式（硬性连接与弹性连接）对框架组耐水冲击力的贡献。两组公式转换后比较分析，位移小的那组好。公式结果推理说明弹性连接，有缓冲水流对框架组冲击力的作用，可以减小翻滚的可能以及缩小位移的距离。当强力水流经过框架组时，水流在强力冲击框架组时，由于四面六边受力面或水流不同等各种原因导致两个四面六边框架组的各自受力大小不相同，被连接的两个四面六边框架彼此拉扯，使用弹簧连接，可以巧妙地利用它们之间的彼此拉扯力，转换成弹性势能，消减了水流流动的部分动能，通过下面推理公式，可以很清楚比较出两组从而减小了框架组翻滚的可能或位移的大小。

- 硬性连接框架组的能量守恒公式：

$$Q_1 = (F_1 + F_2)s_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\text{整理得： } s_1 = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{F_1 + F_2}$$

- 弹性连接框架组的能量守恒公式

$$Q_1 = (F_1 + F_2)s_1 + W_{\text{弹}} + Q_2 + Q_3。$$

$$\text{整理得： } s_2 = \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{F_1 + F_2} - \frac{W_{\text{弹}}}{F_1 + F_2}$$

$$\text{因为 } \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{F_1 + F_2} - \frac{W_{\text{弹}}}{F_1 + F_2} < \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{F_1 + F_2}, \text{ 所以 } s_2 < s_1。 \text{ 硬性连接组的位移比弹性}$$

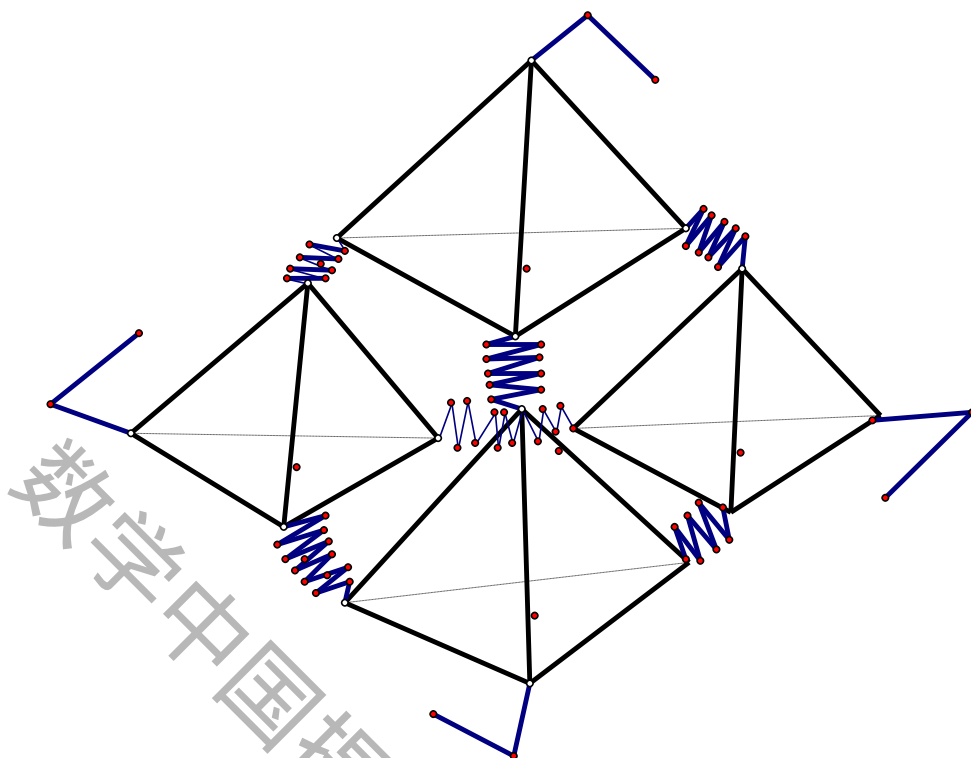
连接组的位移大，即：弹性连接组的耐水流冲击力要强，同时也说明了弹性框架组减小了框架组翻滚的可能或位移的大小。

实验组说明：实际河流底部水流在强力冲击框架组时，由于四面六边受力面或水流不同等各种原因导致两个四面六边框架组的各自受力大小不相同，被连接的两个四面六边框架彼此拉扯，使用弹簧连接，可以巧妙地利用它们之间的彼此拉扯力，转换成弹性势能，消减了水流流动的部分动能，从而减小了框架组翻滚的可能或位移的大小。由能量守恒定律的公式及简易模型理论分析，验证了用弹簧连接四面六边框架组的耐水流冲击力要强。

（本简易模型分析中，四面六边体的受水冲击过程受水流冲击力粗略认定为是恒力，作用于框架重心；木棍连接处受的水冲击力忽略不计，弹簧受水流冲击力忽略不计，框架组与水流组成的总系统能量中水中沙石碰撞等其他能量转换忽略不计）

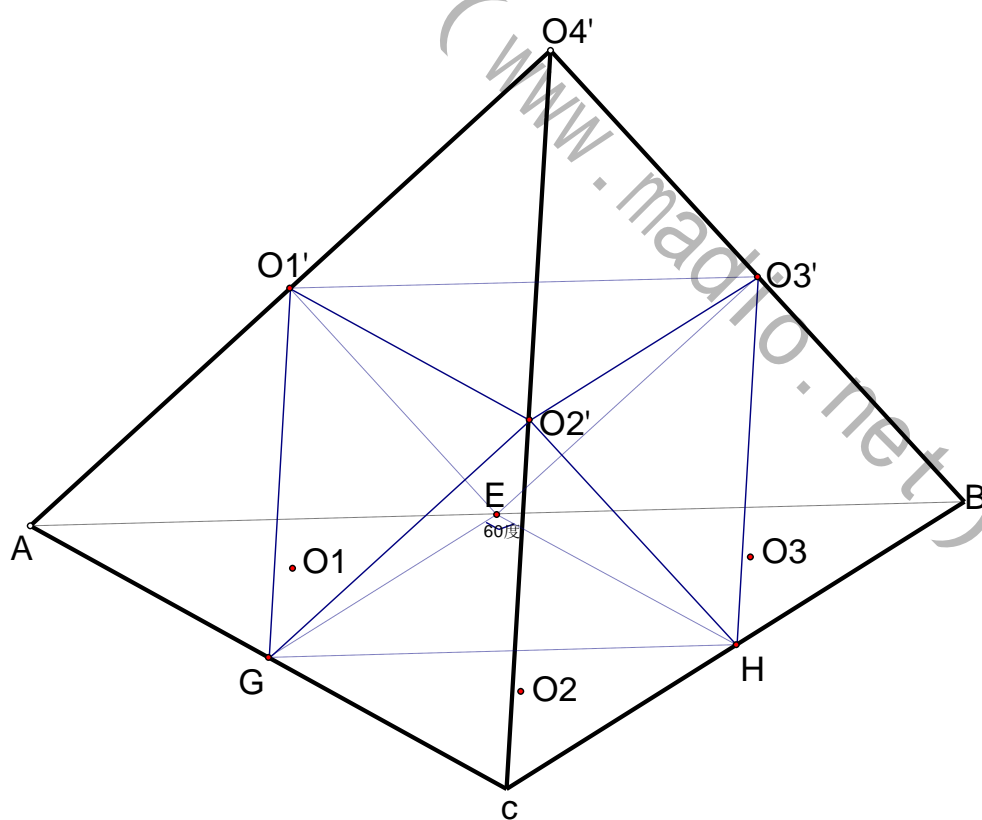
4.2 新框架模型（四面六边体的堆砌形式）的提出

4.2.1 新建框架模型结构示意图如下：



图四 新四面六边框架透水模型

上图四简易模型示意图如下：



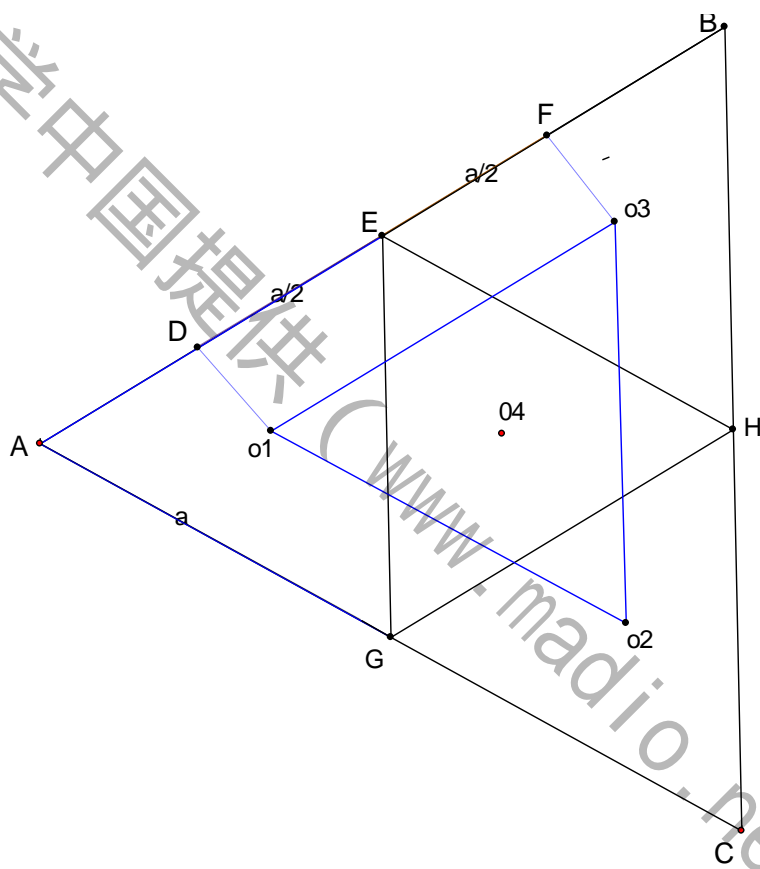
四个小四面六边透水框拼成一个坚固性更强的大四面六边透水框K~ABC

图四（1）：四个小四面六边透水框架拼成的一个坚固性更强的大四面六边透水框架

由图知大四面六边透水框 $O_4'-ABC$ 是由四个小透水框架 $O_1'-AGE$, $O_2'-GCH$, $O_3'-EHB$, $O_4'-O_1'O_2'O_3'$ 堆砌而成的。

4.2.2 模型能够堆砌成分析

观察四个小四面六边透堆砌的大四面六边透水框架群的俯视图知 $\triangle GCH$, $\triangle HBE$, $\triangle EAG$ 分别为三个小四面六边透水框 $O_1'-AGE$, $O_2'-GCH$, $O_3'-EHB$, $O_4'-O_1'O_2'O_3'$ 的底面, 此三个透水框的底面排放在一个平面上, 而三角形 O_1 , O_2 , O_3 为第四个透水 $O_4'-O_1'O_2'O_3'$ 框的底面投影。



图五：大四面六边体透水框架的俯视图

因为 $\angle GEH = 60^\circ$, 而四面六边透水框的每一条边都为 a , 则 DF 分别为 AE , EH 的中点。从而 $DE = a/2$, $EF = a/2$, 从而 $DF = a$. 又 $DF = O_1O_3 = a$, 同理 $O_1O_2 = O_2O_3 = a$, 因此这四个四面六边透水框大小是完全相等的。 O_1 , O_2 , O_3 恰为 $O_1'-AGE$, $O_2'-GCH$, $O_3'-EHB$ 的底面中心, 而 O_1' , O_2' , O_3' 恰为 $O_4'-O_1'O_2'O_3'$ 的底面顶点。

4.2.3 此大四面六边透水框（四个堆砌）的结构强度分析

原理说明：

桁架结构理论：桁架指的是桁架梁，是格构化得一种梁式结构。由于其稳固性它经常被用于大跨度的厂房、展览馆、体育馆和桥梁等公共建筑中。桁架结构中各杆均是单轴受力，且以控、压为主。通过合理布置各杆空间位置来适应结构内力分布。由于结构拉、压在水平方向上保持平衡，使得整个结构在支座处在水平方向上合力为零。

桁架的优点：各杆件受力均以单向拉、压为主，通过对上下弦杆和腹杆的合理布置，可适应结构内部的弯矩和剪力分布。由于水平方向的拉、压内力实现了自身平衡，整个结构不对支座产生水平推力。结构布置灵活，应用范围非常广。桁架梁和实腹梁（即我们一般所见的梁）相比，在抗弯方面，由于将受拉与受压的截面集中布置在上下两端，增大了内力臂，使得以同样的材料用量，实现了更大的抗弯强度。在抗剪方面，通过合理布置腹杆，能够将剪力逐步传递给支座。这样无论是抗弯还是抗剪，桁架结构都能够使材料强度得到充分发挥。更重要的意义还在于，它将横弯作用下的实腹梁内部复杂的应力状态转化为桁架杆件内简单的拉压应力状态，使我们能够直观地了解力的分布和传递，便于结构的变化和组合。

4.2.4 新模型的结构强度总分析

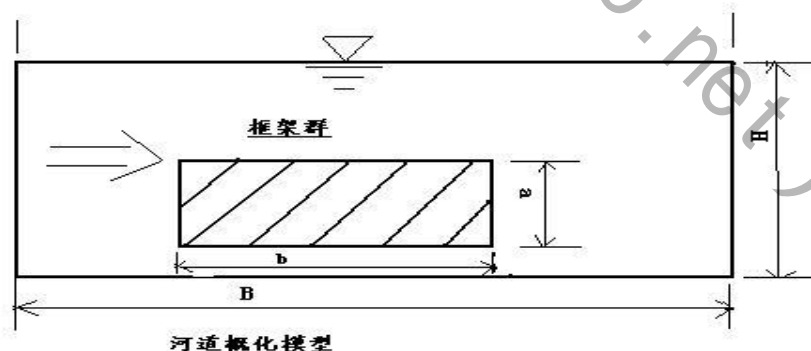
由四个四面六边透水框架组合成的新框架模型，在结构形式上属于三角形桁架结构。因此由桁架结构的原理说明新模型的结构强度较优良，即在巨大海浪的冲击下，新模型不容易被冲散。

因为新模型是用弹簧连接的，而使用弹簧连接，可以巧妙地利用四个小四面六边体之间的彼此拉扯力，转换成弹性势能，消减了水流流动的部分动能，从而减小了框架组翻滚的可能或位移的大小由能量守恒定律的公式及简易模型理论分析，知道用弹簧连接四面六边框架组的耐水流冲击力要强，即新模型结构更稳定。

4.3、四面六边形透水框架不同堆砌、排列形式的减速率分析

4.3.1 试验布置

为充分了解四面体透水框架的不同堆砌形式对减速护岸的影响。模型选取了若干个四面体透水框架（实验选取 4 个），以它们的不同堆砌作为整体构件，李若华等人进行了四面体透水框架对水流减速的影响实验。实验模型如下

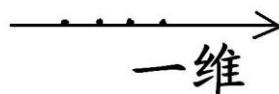


图六：河道概化模型

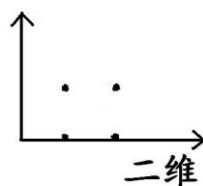
试验中，为考虑四面六边形框架的不同堆砌形式对流速变化的影响，把四面六边形

框架的不同堆砌形式简化为以下三种：

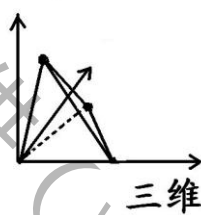
- 横向排列，即一维线性排列，如图；



- 横纵排列，即二维平面排列。如图



- 横纵竖排列，即三维空间排列(我们的新框架模型即为此种三维空间堆砌方式，此实验即采用新模型的堆砌方法)，如图



4.3.2 实验结果及分析

试验中，采用了 ADV 测试工程前后流水通过不同组合框架后变化情况，经分析得出了下表：

表一：不同堆砌方式的减速率数据对比^[3]

测试点	高度 (m)	天然 (m/s)	一维	变化	二维	变化	三维	变化
1	0.15	0.89	0.60	-32.6%	0.32	-63.1%	0.28	-68.4%
	0.30	0.89	0.72	-20.6%	0.38	-58.0%	0.30	-67.1%
	0.60	0.93	0.86	-5.3%	0.53	-41.7%	0.42	-54.0%
	0.90	0.94	0.93	+3.0%	0.70	-22.9%	0.60	-34.15%
	1.27	0.90	0.95	+3.2%	0.91	+0.1%	0.84	-7.0%

参赛队号 #1852

1.66 0.90 0.92 +5.4%% 0.95 +6.4% 0.76 +7.35%

注：“+”表示增加，“-”表示减少

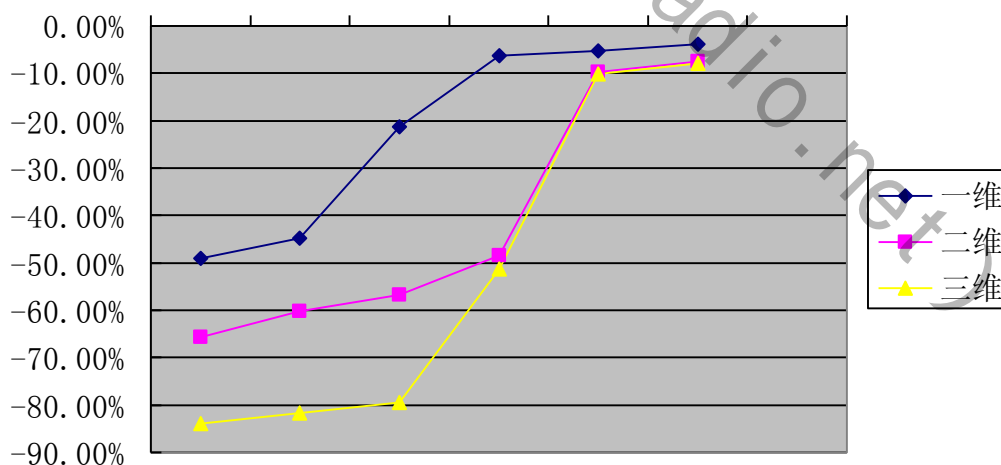
四面六边体透水框架不同堆砌方式前后流速的变化表明（上图），对于透水框架不同的堆砌形式，减速效果也是不一样的。对于一维线性堆砌形式而言，其效果远差于平面和立体的堆砌；在其他条件相同的情况下，从平均减速效果来说，三维（立体堆砌）效果优于二维堆砌。

表二：不同堆砌方式的减速率平均值

测试点	高度	一维	二维	三维
1	0.15	-49.0%	-65.7%	-83.9%
	0.30	-44.7%	-60.3%	-81.7%
	0.60	-21.2%	-56.8%	-79.4%
	0.90	-6.0%	-48.5%	-51.3%
	1.27	-5.3%	-9.8%	-10.2%
	1.66	-3.8%	-7.5%	-8.0%

注：“+”表示增加，“-”表示减少

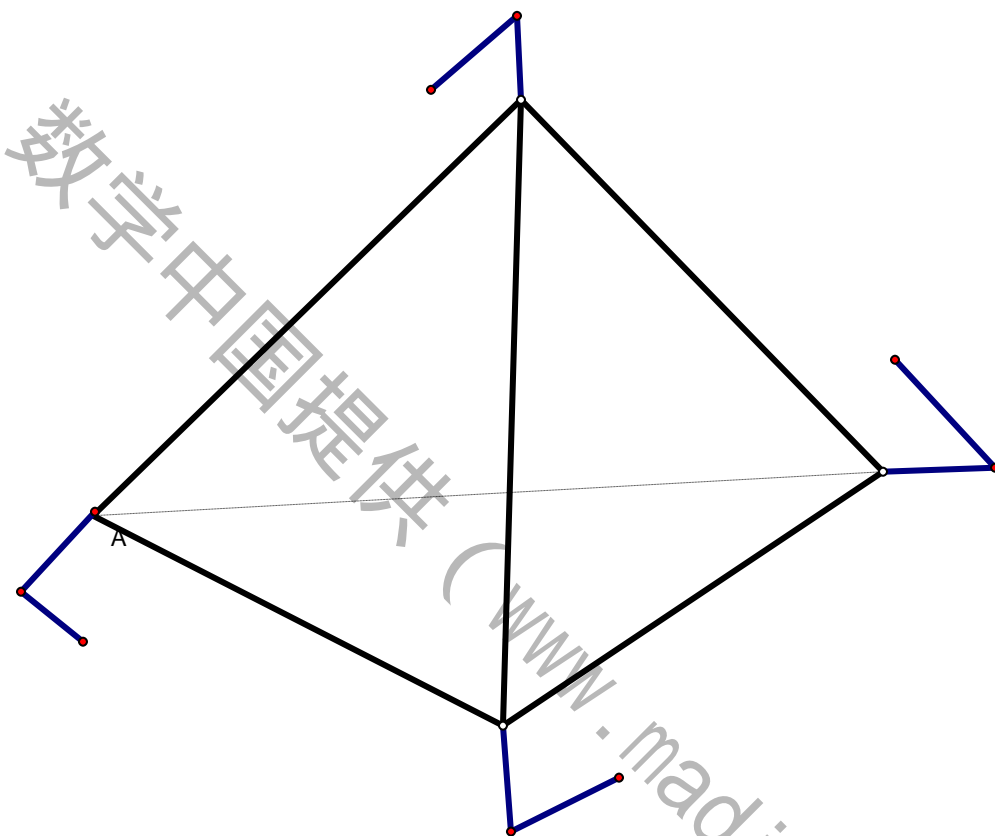
图七：四面透水框架不同堆砌形式的平均减速率变化折线图



由相关的实验（上述）及实验数据，利用 word 作图工具分别得出了，三种堆砌形式，一维、二维、三维在同一水深下减速率变化的不同。（如下图）。从图中可以得出三维空间堆砌效果更好。因此，我们选用三维框架结构，即四个四面六边体所堆砌成的新模型。

五、新框架模型（大四面六边框架体）的改进与优化

钩子的好处：为了使框架群在水中相互钩连。我们给透水框各个角加钩。大量密集分布在一定区域的四面六边透水框架群在海水的冲击下，它各角上的钩子就发挥作用开始钩“鱼”了。这时每一个四面六边体都充当了两个角色，它们既是捕鱼者也是被捕者，一个带钩透水框被咆哮的大海冲来了，它能顺利钩住的其他透水框吗？在足够多的透水框架抛投下，钩连数近似服从正态分布。那么下面运用正态分布的知识及显著性检验验证加钩可有效提高水中四面六边透水框架的钩连率。



图八：加钩大四面六边透水框架体的简易模型图

5.1 钩连次数的显著性检验

通过查阅资料，我们得到分别在相同水流作用下抛投 100 个钩子 10 次，透水框相互钩连的次数分别为 13, 11, 10, 9, 12, 14, 13, 8, 12, 15. ^[2]

又在足够多的透水框架抛投下， X 近似服从参数为的正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，由测得的十个数据，观察发现大部分钩连次数是大于 10 的，关于这个结论，我们采用显著性检验的方法。

5.1.1 显著性检验的理论分析^[5]：

①定理 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本， \bar{X}, S^2 分别是样本均值和样本方差，则有：

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

②设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 未知, 我们来求检验问题:

$$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$$

的拒绝域 (显著性水平为 α)。

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本。由于 σ^2 未知, 现在不能利用 $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 来确定拒绝域了。注意到 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 我们用 S 来代替 σ , 采用

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

作为检验统计量。当观察值 $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq k$ 时,

由上定理知, 当 H_0 为真是, $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, 故由

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真拒绝 } H_0\} = P_{\mu_0}\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq k\right\} = \alpha$$

得 $k = t_\alpha(n-1)$, 即得拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1).$$

5.1.2 显著性检验的方法用于钩连次数大于 10 的检验

由于我们要检验钩连次数是否有理由大于 10 次, 则给出假设:

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = 10, H_1: \mu > 10$$

取 $\alpha = 0.05$,

知此检验问题的拒绝域为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_\alpha(n-1)$$

现在 $n = 10, t_{0.05}(9) = 1.8331$

得 $\bar{x} = 11.7, S = 2.2$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{11.7 - 10}{2.2/\sqrt{10}} = 2.44 > 1.8331$$

t 落在拒绝域内，故拒绝 H_0 ，认为钩连个数一般大于10个。

5.2 四面六边透水框钩连次数大于10的概率求解

由2.1知钩连次数显著大于10，那么四面六边透水框钩连次数大于10的概率是多少呢？我们通过正态分布求解其概率。

5.2.1 正态分布求概率原理分析^[5]

若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < \infty,$$

其中 $\mu, \sigma (\sigma > 0)$ 为常数，则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布或高斯（Gauss）分布，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

引理 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。

证 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} P\{Z \leq x\} &= P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq x\right\} = P\{X \leq \mu + \sigma x\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu + \sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \end{aligned}$$

令 $\frac{t - \mu}{\sigma} = u$ ，得

$$P\{Z \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x),$$

由此知 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ，

于是，若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则它的分布函数 $F(x)$ 可写成：

$$F(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

对于任意区间 $(x_1, x_2]$ ，有：

$$\begin{aligned}
 P\{X_1 < X \leq X_2\} &= P\left\{\frac{X_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right\} \\
 &= \Phi\left\{\frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right\} - \Phi\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

5.2.2 应用正态分布的知识求解新建模型加钩子使用中的两两之间相互钩连的概率

通过查阅资料，我们得到分别在相同水流作用下抛投 100 个钩子 10 次，透水框相互钩连的次数分别为 13, 11, 10, 9, 12, 14, 13, 8, 12, 15.

由上公式知 μ 的最大似然估计为

$$\begin{aligned}
 \mu = \bar{x} &= \sum_{i=1}^{10} x_i \\
 &= \frac{1}{10} \{13 + 11 + 10 + 9 + 12 + 14 + 13 + 8 + 12 + 15\} \\
 &= 11.7
 \end{aligned}$$

σ^2 的最大似然估计为

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \\
 &= \frac{1}{9} [(13-11.7)^2 + (11-11.7)^2 + \dots + (15-11.7)^2] \\
 &= \frac{1}{9} (1.3^2 + 0.7^2 + \dots + 3.3^2) \\
 &= \frac{1}{9} \times 44.1 \\
 &= 4.9
 \end{aligned}$$

$$\sigma = \sqrt{4.9} = 2.2$$

从而 X 近似服从参数为 $\mu = 11.7, \sigma = 2.2$ 的正态分布，记为 $Z \sim N(11.7, 4.9)$ ，由经验的钩连次数为 10 次以上最好。其概率为：

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\
 &= 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{10 - \mu}{\sigma}\right) \\
 &= 1 - P\left(\frac{X - 11.7}{2.2} < \frac{10 - 11.7}{2.2}\right) \\
 &= 1 - \Phi(-0.77) \\
 &= 1 - (1 - \Phi(0.77)) \\
 &= \Phi(0.77) \\
 &= 0.7794
 \end{aligned}$$

显然四面六边透水框的钩连率是很大的，我们有理由认为钩子的确可以使分散的透水框钩连在一起，从而众志成城一起防洪落淤。

六、模型的优缺点及改进

6.1 优点

(1) 两四面六边透水框之间用弹簧钩连是一个创新的设计，理论分析也说明弹簧对防止翻滚移动，减小两者之间焊接点受力起重要作用。

(2) 对于数学模型的建立，充分利用了几何画板，excel，spss 等计算绘图类软件，效率较高，节省时间，减少了计算量，且结果较为合理。

(3) 模型是由简单到复杂一步步建立的，这使得本模型更加贴近实际，容易理解。

6.2 缺点

(1) 由于本题目可搜集到的数据有限，使用数据拟合的方法还不够精确，存在误差。

；(2) 本模型忽略了一些自然因素造成的影响，结果可能与实际情况有一定偏差。

6.3 模型的推广与改进

各角带钩的由四个小四面六边透水框架组成的新模型不仅减少了翻滚移动，而且其结构强度也增大，同时加钩又解决了大量抛投时它们相互钩连的问题。通过实验数据又说明了新模型的堆砌形式确实提高了减速率，值得推广和用于实际施工。但是没考虑弹簧的使用长度及劲度系数等问题，期待下一步解决。

七、参考文献

【1】徐国宾，张耀哲，混凝土四面六边透水框架群技术在河道整治、护岸及抢险中的应用，天津大学学报，第 39 卷 第 12 期；2006 年 12 月

【2】吴龙华，透空四面体（群）尾流水力特征性及应用研究，中国知网，2005年11月

【3】李若华，严忠民，四面六边透水框架群减速特性研究，中国知网，2004年3月

【4】吴龙华，周春天，严忠民，水利水运工程学报，第三期，2003年9月

【5】工昌兴，李立平等，概率论与数理统计，北京：高等教育出版社，1995

【6】原乃东，正态分布在教育学中的应用，《黑龙江高教研究》，2005年第4期

【7】徐国宾，张耀哲，徐秋宁等，多沙河流河道整治新型工程措施试验研究[J]，西北水资源与水工程，1994 5（3）：1—8

【8】徐国宾，任晓枫，几种新型护岸工程技术浅析，人民黄河，第26卷 第8期；2004年8月