

2010 第三届“ScienceWord”杯数学中国 数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord”杯数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：# 1204号

参赛队员（签名）：

队员1： 刘 曦

队员2： 黄文辉

队员3： 黄国平

参赛队教练员（签名）： 邓 磊

参赛队伍组别： 本科组

2010 第三届“ScienceWord”杯数学中国数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：(请各个参赛队提前填写好)：

1204号

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010年第三届“ScienceWord”杯数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目：_____ A题：聪明的汽车

关键词：最小车位长度、宽度模型 N次停车探路算法 MATLAB编程仿真

摘 要

本问题要求我们建立合理的模型，判断大型车辆是否能安全进入侧向车位，并且随时给小汽车驾驶员提供建议的停车线路和操作建议。对于这些问题，我们运用几何分析的方法建立模型，用N次停车探路算法，成功解决了问题。

针对问题一，我们分别以半挂式铰接车和全挂式铰接车为研究对象，将泊车过程转化为几何问题进行研究，分别建立最小停车位长度和宽度的模型。于是，根据每一辆车的具体情况，我们可以求出能够使它安全进入停车位的最小停车位长度和宽度。这样我们就可以判断该铰接式卡车是否能停入已知的停车位。

针对问题二，通过第一阶段的工作，我们用N次停车探路搜索算法，从理论角度找到了存在的可能停车线路，并用MATLAB编程仿真，告知司机每个位置方向盘应该转动的角度。但是，这么做的结果是停车线路过于死板，如有意外，停车任务不能顺利完成。因此，第二阶段的任务就是综合考虑这些客观存在的因素，结合前面的工作，找出实际可行的解决方案。结合实际，本模型引入了GPS导航仪选路算法思想，使模型在现实中具有较强可操作性。其核心思想是将所有可行线路全部存入数据表中，结合车辆实时位置，自动搜索需要的路线，并指出使用该路线时应该选择的角度和路线轨迹。这样，即使司机驶入无法停车区域，也可以即时调整车的位置，将其放在已有路线上，并根据提示完成泊车过程。本模型的优点在于路线的精确、直观和可操作性强。

参赛队号 #1204号

所选题目 A题

参赛密码

(由组委会填写)

目 录

1	问题的重述	1
2	模型的假设	1
3	符号假设和说明	1
4	问题一的分析、模型的建立与求解	3
4.1	问题一的分析	3
4.2	半挂式卡车模型的建立与求解	4
4.2.1	停车位的最小长度模型	4
4.2.2	停车位的最小宽度模型	7
4.3	全挂式卡车模型的建立	10
5	问题二的分析、模型的建立与求解	11
5.1	问题二的分析	11
5.2	问题二模型的建立与求解	15
5.3	问题二的结果分析	21
6	模型的评价	21
7	模型的改进和推广	22
8	参考文献	22

报名号#1204

1 问题的重述

要在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，对驾驶员的停车技术和自信心一直是个很大的挑战。调查报告显示，超过一半的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这不仅会影响驾驶员的驾驶体验，也不能使停车空间得到充分的利用。尤其是对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会很难确定自己的汽车是否能顺利进入空位，因此什么情况下能够使自己的汽车顺利进入停车位成了广大驾驶员关注的一个问题。现在我们要协助驾驶员解决以下两个问题：

1、针对侧位停车，在第一阶段中我们已经对小型汽车是否能进入车位进行了研究，现在，我们以铰接式车辆为例，讨论大型车辆的停车问题。对于铰接式车辆，由于车头和集装箱之间有可以活动的牵引销，整个车在转弯时不是刚性的。在能够得到停车位置的平面图以及铰接式车辆本身的数据的时候，我们需要判断它是否能在该空位侧位停车。

2、通过第一阶段的工作，我们用N次停车探路搜索算法，从理论角度找到了存在的可能停车线路，并用MATLAB编程仿真，告知司机每个位置方向盘应该的角度。但是，这么做的结果会使停车线路过于死板。驾驶员操作不准确，避让行人或障碍物等因素，可能影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的线路前进。因此，第二阶段的任务就是考虑这些客观存在的情况，结合前面的工作，找出实际可行的解决方案。简而言之，不论车怎么开，只要有可能，我们就得根据目前位置随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。

2 模型的假设

1. 问题一中牵引车和半挂车的宽度是一样的
2. 问题二中假设路况较好，无打滑现象发生。
3. 问题而中如果障碍物比较小，不足以影响停车的进入，则不计入讨论范围。
4. 对于问题二，小车在停车过程中，无其它车辆的干扰，即正在机动车道行驶的车辆不会影响小车的泊入。

3 符号假设和说明

报名号#1204

表 1 问题一的符号说明

符号	表示意义
L	停车位长度
W	停车位宽度
l	半挂车车长
l_1	牵引车车长
l_2	牵引车与半挂车之间的距离
w	车宽
h	牵引车轴距
k	主销中心距
q	半挂车前悬长度
r	半挂车的最小转弯半径
θ_1	半挂车前轮第一次泊车的转角度数
θ_1^*	半挂车前轮第一次泊车的转角度数的最小值
α	第一次泊车完成时牵引车与半挂车之间的转角

报名号#1204

表 2 问题二的符号说明

符号	表示意义
m_1	小车前中轴
m_2	小车后中轴
v	m_1 的速度, 规定方向为参考正方向
R	小车的最小转弯半径
R_1	m_2 点最小转弯半径
P, P_1	转弯圆心
L	小车轴距
w	小车宽度
L_1	小车前悬
L_2	小车后悬
$ABCD$	分别为小车左前轮, 后前轮, 右后轮, 左后轮
A', B', C', D'	A, B, C, D 对应的边角
φ	m_1 偏转角度
d_1, d_2, d_3, d_4	分别为后、前、左、右的安全距离
lw	停车位长度

4 问题一的分析、模型的建立与求解

4.1 问题一的分析

由于铰接式卡车有半挂式和全挂式两种情况, 因此我们需要建立半挂式卡车模型和全挂式卡车模型。对于每一种固定的铰接式卡车, 能够通过相应的模型求出其对应的最小停车位长和宽。这样我们就可以判断出卡车是否能够停入已知的停车位了。

同第一阶段一样, 对于半挂式卡车, 我们将其简化成几何图形进行研究, 其简化图形如图1所示:

报名号#1204

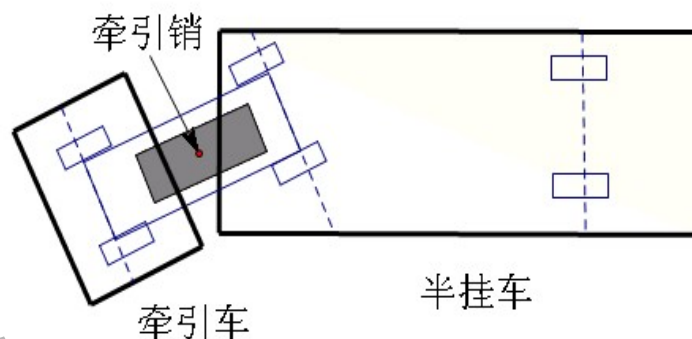


图 1 半挂式卡车的几何简图

根据半挂式卡车的结构，我们可以知道，半挂式卡车的前部和后部由一个牵引销相连。前部和后部可以灵活转动，因此我们可以将半挂式卡车看作前后两辆汽车的组合，分别对其进行研究。其中，一二轴之间看作第一辆车，叫做牵引车，二三轴之间看作第二辆车，叫做半挂车。这样就和我们第一阶段建立的模型联系起来了。

我们将半挂车看作我们第一阶段中的研究对象，其通过两次泊车进入停车位的路径也是“S”形的。则如果半挂车能够安全进入停车位，那么作为驱动半挂车前进的牵引车也能够顺利进入停车位。在第一阶段中，我们得出了能够使每种车顺利停入停车位的最小停车位长度 L 的计算公式。于是我们可以计算出能够使半挂车顺利进入停车位所需的最小停车位长度“ L ”，再加上牵引车前部到半挂车前部的距离，我们就得到了能够使整辆铰接式卡车停入停车位的最小长度。

但是，在卡车的整个运动过程中，我们要求牵引车的前部不能和停车位的边缘有任何的接触，否则牵引车将会被损坏，因此我们需要对停车位的宽度“ w ”进行限制，使得牵引车安全转弯。于是我们可以对牵引车恰好不和停车位边缘相碰的情形进行研究，得到“ w ”需要满足的条件，进而确定出最小停车位宽度。

4.2 半挂式卡车模型的建立与求解

4.2.1 停车位的最小长度模型

在第一阶段中，我们得出了汽车能够顺利进入停车位所需的最小停车位长度“ L ”应满足的条件：

$$L \geq 2(l - q) \cos \theta_1^* - 2(r - w) \sin \theta_1^* + 2q + l$$

其中 l 为半挂车的长度, w 为半挂车的段度, r 为半挂车的最小转弯半径, θ_1^* 为半挂车前轮转角的最小值, q 为半挂车的前悬。于是, 针对每种半挂车, 我们就可以得到能够使它安全进入的最小停车位长度。然后再加上牵引车前部到半挂车前部的距离 $l_1 + l_2$, 我们就可以得到能够使整辆半挂式客车完全停入停车位的最小停车长度为 H_{min} , 其计算公式为:

$$H_{min} = 2(l - q) \cos \theta_1^* - 2(r - w) \sin \theta_1^* + 2q + l + l_1 + l_2 \quad (1)$$

于是根据 q, l, r, θ_1^*, w 的值, 我们就可以计算出能够使半挂式卡车安全停入的最小空位长度 H_{min} 。其中 q, l, w 可由半挂车自身的属性得到, θ_1^* 的范围可由第一阶段的模型三得出¹, 具体为

$$35 \leq \theta_1 \leq 45$$

接下来, 我们需要确定半挂车的最小转弯半径 r 。

半挂车最小转弯半径 r 的确定

对于一般的汽车, 其最小转弯半径一般都是由轴距及转向轮的最大转角确定【1】, 相应计算起来比较简单, 并且通常下我们可以比较容易在汽车参数里面得到汽车的最小转弯半径, 因此我们将最小转弯半径当做已知条件进行考虑。但是对于铰接式卡车, 在转弯时由于在牵引车与挂车之间存在一个水平转角而在一般的卡车参数当中我们难以查到其最小转弯半径, 因此我们将对铰接式卡车的最小转弯半径进行考虑如下:

假设铰接式卡车以一定的角度进行转弯, 当牵引车与挂车夹角 β 最大 β_{max} 时转弯半径 r 最小, 其具体情况如图2所示:

¹1204队第一阶段论文第9页

报名号#1204

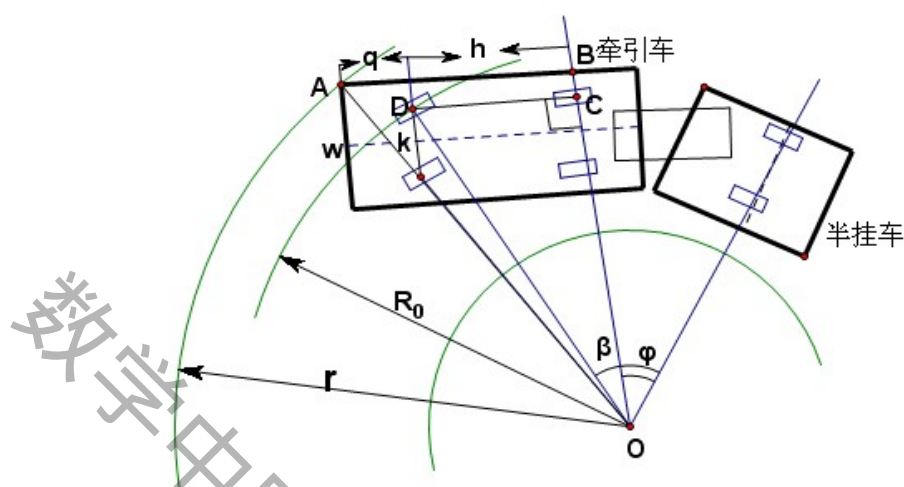


图 2 铰接式卡车转弯时的示意图

通过上图，我们采用解析几何方法进行分析，在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中，有

$$|OC| = \frac{|CD|}{\tan \beta_{\max}} = \frac{h}{\tan \beta_{\max}}$$

且有

$$|OB| = |OC| + |CB| = \frac{h}{\tan \beta_{\max}} + \frac{w-k}{2}$$

在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中，有

$$r = |OA| = \sqrt{|OB|^2 + |AB|^2} = \sqrt{(h+q)^2 + \left(\frac{h}{\tan \beta_{\max}} + \frac{w-k}{2}\right)^2}$$

实际上，通过下面图3我们很容易知道 $\alpha = \beta_{\max}$ ，这样我们就得到了铰接式卡车的最小转弯半径 r 的确定关系。

最小转弯半径 r 的检验

我们使用MATLAB软件对最小转弯半径 r 编写程序（见附录1）并通过如下表格中的数据

进行检验分析（表格中最小转弯半径 r_0 称为真实值），得到最小转弯半径 r 的实验值，并通过

$$\rho = \frac{|r_0 - r|}{r_0} \times 100\%$$

计算出其误差。

报名号#1204

表 3 各种车型相关参数(单位: mm)

车型车号	轴距h	前悬q	转角 α	车宽w	主销中心距k
中集牌1	3650	1200	40	2480	2850
长城牌2	3880	2100	40	2550	2950
京华牌3	3420	1735	40	2500	2880
BJQ9260TJZP4	4000	2115	40	2480	2900

表 4 各种车型转弯半径误差分析

车型车号	中集牌1	长城牌2	京华牌3	BJQ9260TJZP4
转弯半径真实值 r_0	5850	6940	7450	7360
转弯半径实验值 r	5931	7031	7130	7195
误差 ρ_i	1.39%	1.31%	4.30%	2.24%

由上表显然有:

$$\rho_i \leq 5\% \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

因此我们断定最小转弯半径 r 的模型是比较正确的。

4.2.2 停车位的最小宽度模型

在牵引车进行两次泊车的过程中, 它第一次泊车结束时, 左前方端点“N”距停车位的边界最近。此后进行第二次泊车, N点与停车位边界的距离逐渐增大。因此, 我们只需对第一次泊车结束时这个临界状态进行研究。并且, 当牵引车右后端与半挂车的右前端点 b_1 重合时, 对停车位长度的要求最低。此时的泊车示意图如图3所示:

报名号#1204

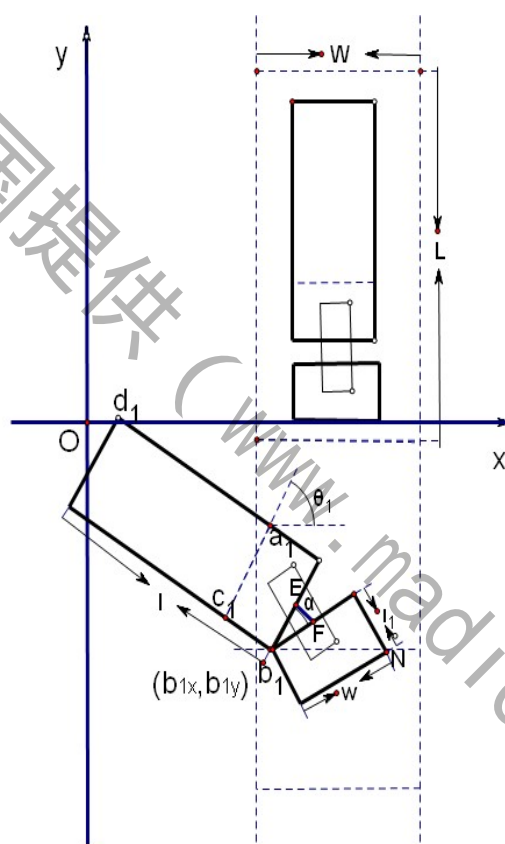


图 3 牵引车完成第一次泊车时的状态

报名号#1204

其中, θ_1 为车身沿以半径 r_1 旋转所得的角度。 a_1, b_1, c_1, d_1, N 的坐标分别为: $a_1(a_{1x}, a_{1y})$, $b_1(b_{1x}, b_{1y})$, $c_1(c_{1x}, c_{1y})$, $d_1(d_{1x}, d_{1y})$, $N(N_x, N_y)$ 。 根据几何关系我们能够得到以下关系式:

$a_1(a_{1x}, a_{1y})$:

$$\begin{cases} a_{1x} = w + (r - w)(1 - \cos \theta_1) \\ a_{1y} = q - (r - w) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (2)$$

$b_1(b_{1x}, b_{1y})$:

$$\begin{cases} b_{1x} = c_{1y} + q \sin \theta_1 \\ b_{1y} = c_{1y} - q \cos \theta_1 \end{cases} \quad (3)$$

$d_1(d_{1x}, d_{1y})$:

$$\begin{cases} d_{1x} = a_{1x} - (l - q) \sin \theta_1 \\ d_{1y} = a_{1y} + (l - q) \cos \theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

$c_1(c_{1x}, c_{1y})$:

$$\begin{cases} c_{1x} = r(1 - \cos \theta_1) \\ c_{1y} = q - r \sin \theta_1 \end{cases} \quad (5)$$

针对 $N(N_x, N_y)$, 我们要分三种情况进行讨论:

1. 当 $w \tan(\theta_1 - \alpha) = l_1$ 时,

$$\begin{cases} N_x = b_{1x} + \sqrt{l_1^2 + w^2} \\ N_y = b_{1y} \end{cases} \quad (6)$$

2. 当 $w \tan(\theta_1 - \alpha) < l_1$ 时,

$$\begin{cases} N_x = \frac{w}{\cos(\theta_1 - \alpha)} + [l_1 - w \tan(\theta_1 - \alpha)] \sin(\theta_1 - \alpha) \\ N_y = b_{1y} - [l_1 - w \tan(\theta_1 - \alpha)] \cos(\theta_1 - \alpha) \end{cases} \quad (7)$$

3. 当 $w \tan(\theta_1 - \alpha) > l_1$ 时,

$$\begin{cases} N_x = \frac{w}{\cos(\theta_1 - \alpha)} - [w \tan(\theta_1 - \alpha) - l_1] \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_1 + \alpha) \\ N_y = b_{1y} + [w \tan(\theta_1 - \alpha) - l_1] \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_1 + \alpha) \end{cases} \quad (8)$$

报名号#1204

由(3)(5)式我们可以得到

$$b_{1x} = q + (q - r) \sin \theta_1$$

则 N_x 就由 $q, l_2, r, \theta_1^*, \alpha, w$ 唯一确定,除了 α 外,其余的数据都确定了,于是我们需要求出 α 的大小。

牵引车和半挂车之间的转角 α 的确定

如图二,在三角形 b_1EF 中, b_1E 与 b_1F 均为车的宽度,即 $w/2$ 。 EF 为牵引车与半挂车之间的距离,等于 l_2 ,则在等腰三角形 b_1EF 中,我们可以得到以下关系式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l_2}{w}$$

于是有:

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{l_2}{w}$$

于是我们可以通过判断 $w \tan(\theta_1 - \alpha)$ 与 l_1 的大小关系,确定将 $q, l_2, r, \theta_1^*, \alpha, w$ 的值带入(6)(7)(8)式中的哪一个,求出 N_x 的值。当停车位的宽度 W 大于 N_x 时,牵引车就不会和停车位边界发生碰撞,因此有

$$W_{min} = N_x \quad (9)$$

这样,针对每一种半挂式铰接车,我们就可以根据车本身的数据以及车的最小转角 θ_1^* ,牵引车和半挂车在第一次泊车完后的偏转角 α 的值,通过(1)式确定停车所需的最小车位长度,通过(9)式确定最小车位宽度。

4.3 全挂式卡车模型的建立

同半挂式卡车一样,我们将铰接式全挂车简化成几何图形进行研究,其简化图形如图4所示:

报名号#1204

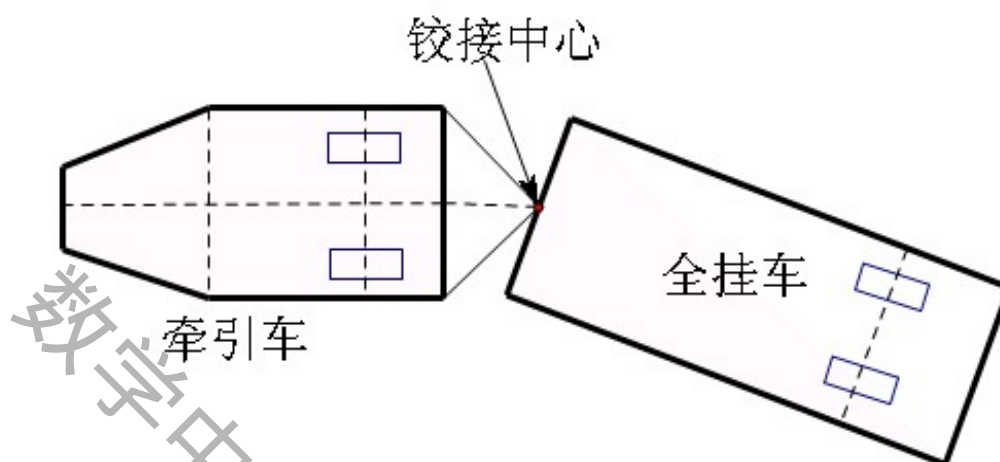


图 4 全挂式卡车简图

同样，全挂车与半挂车一样都是由牵引车和若干个挂车组合而成，这里我们主要讨论后面相连一个挂车的情况，多个挂车的情况同理考虑。全挂车与半挂车最主要的区别在于其中的结点不同，汽车突然改变方向盘的时候，挂车部分会随着牵引车方向的改变立即改变方向，而全挂车在突然改变方向盘的时候，由于其中是一个结点相连接，所以在一定程度上，挂车相对于半挂式来说改变方向较小，其灵活性稍好，因此，上面的半挂式卡车模型中的图3中，我们很容易证明，这种情况下全挂车也是满足情况的，即就是说，只要半挂式车能够顺利停入车位，那么全挂式卡车也一定能够顺利进入停车空位。因此一定程度来说，我们可以利用半挂式卡车模型来讨论全挂式卡车的情况，那么全挂式卡车模型也就建立起来了。

5 问题二的分析、模型的建立与求解

5.1 问题二的分析

结合实际，本模型引入了GPS导航仪选路算法思想，以便在现实中具有较强可操作性。其核心思想是将所有可行线路全部存入数据表中，结合车辆实时位置，自动搜索实时所在路线，并指出使用该路线时应该的角度和路线轨迹。这样，即使司机驶入无法停车区域，也可以即时调整车的位置，将其转入已有路线上并根据提示完成泊车过程。

本模型的关键之处在于路线的精确、直观和可操作性。结合实际，我们知道这种路线不必强求有mm级别的精确程度，也不需要知道所有路线，但要方便可行，因为司机会

报名号#1204

自己直观排除一些情形，人工驾驶精度确实也是很有限的。

核心程序流程图，数据结构图，原理示意图【2】如下：

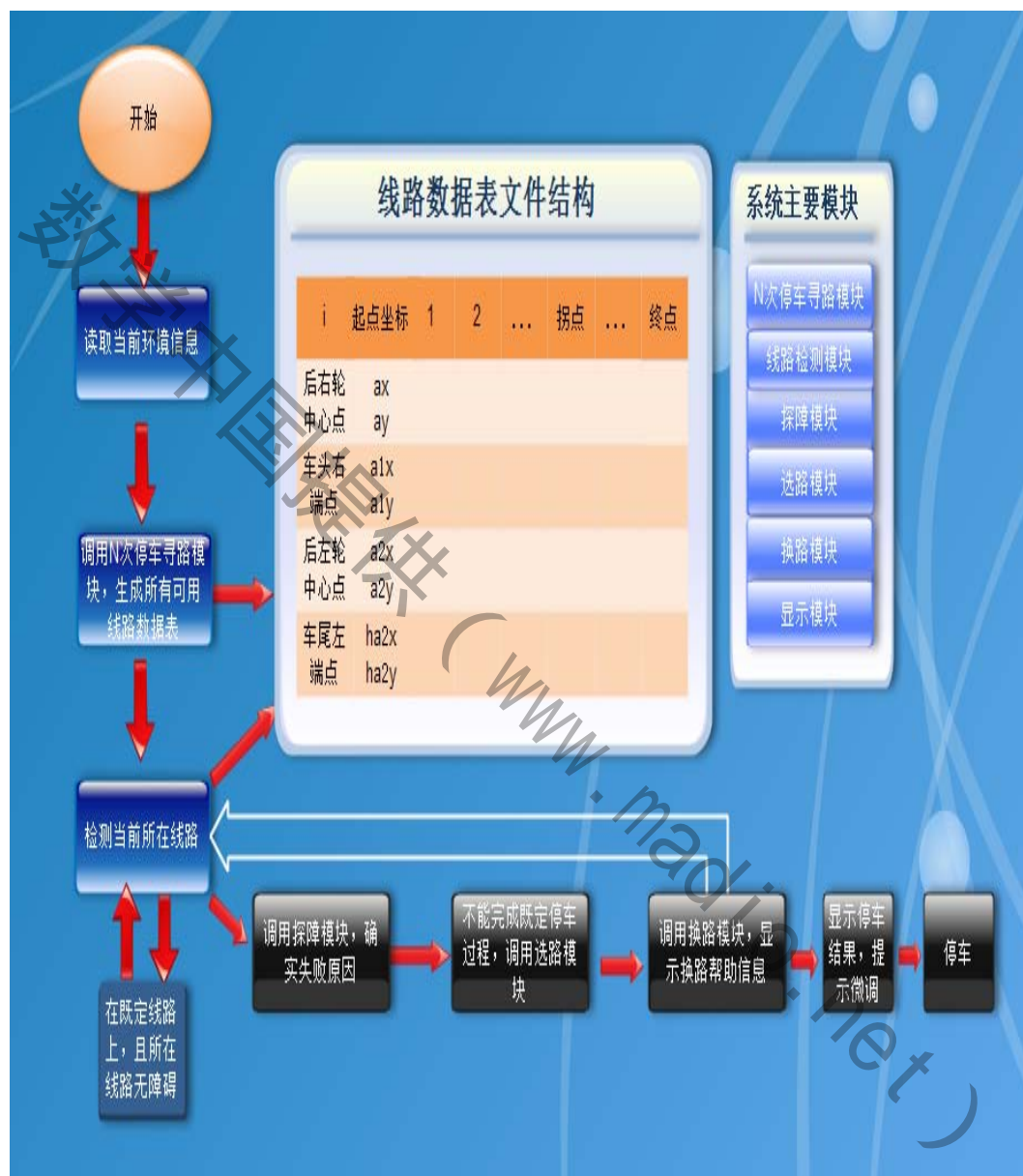


图 5 核心程序流程图

报名号#1204

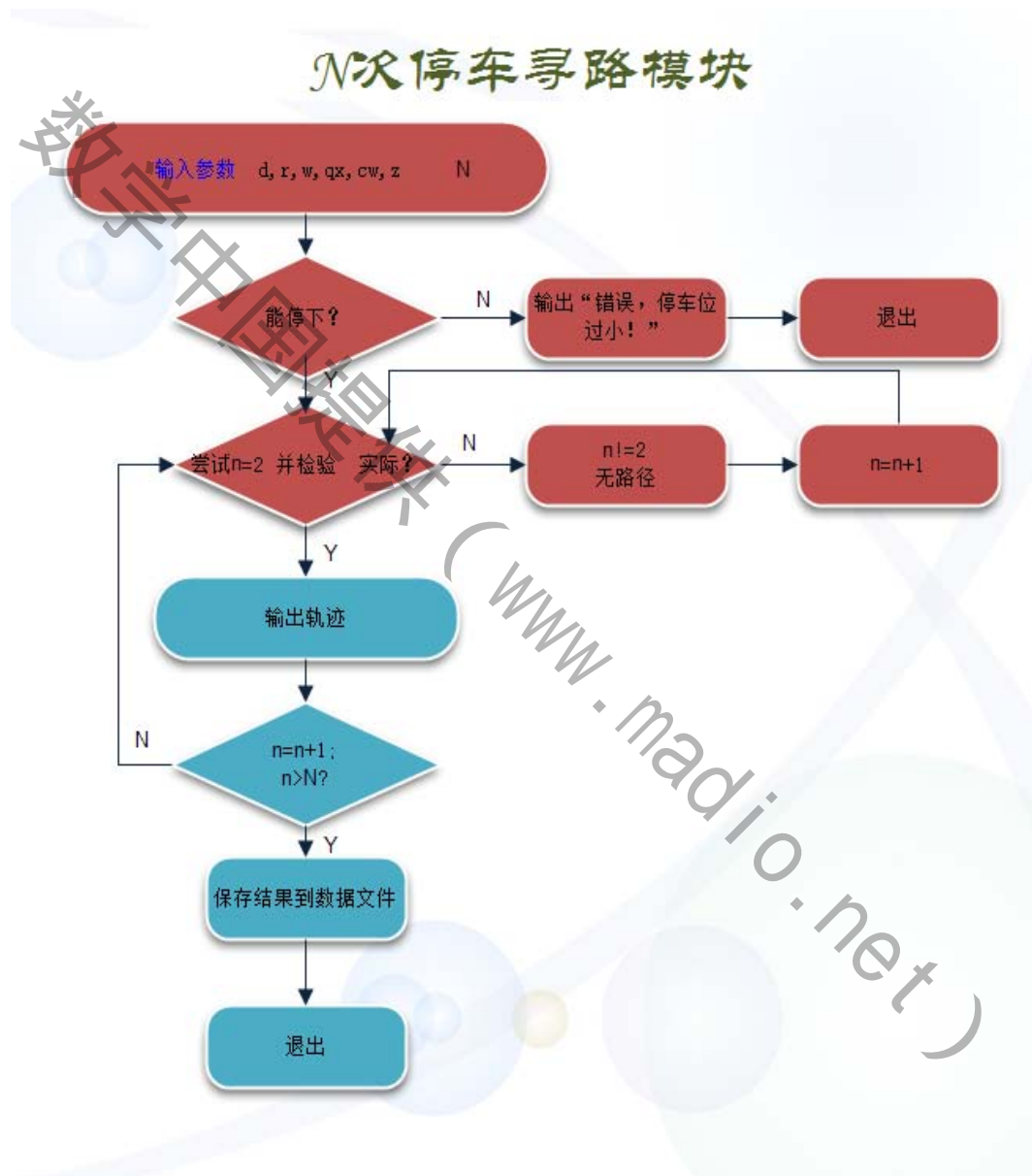


图 6 N次寻路模块流程图

报名号#1204

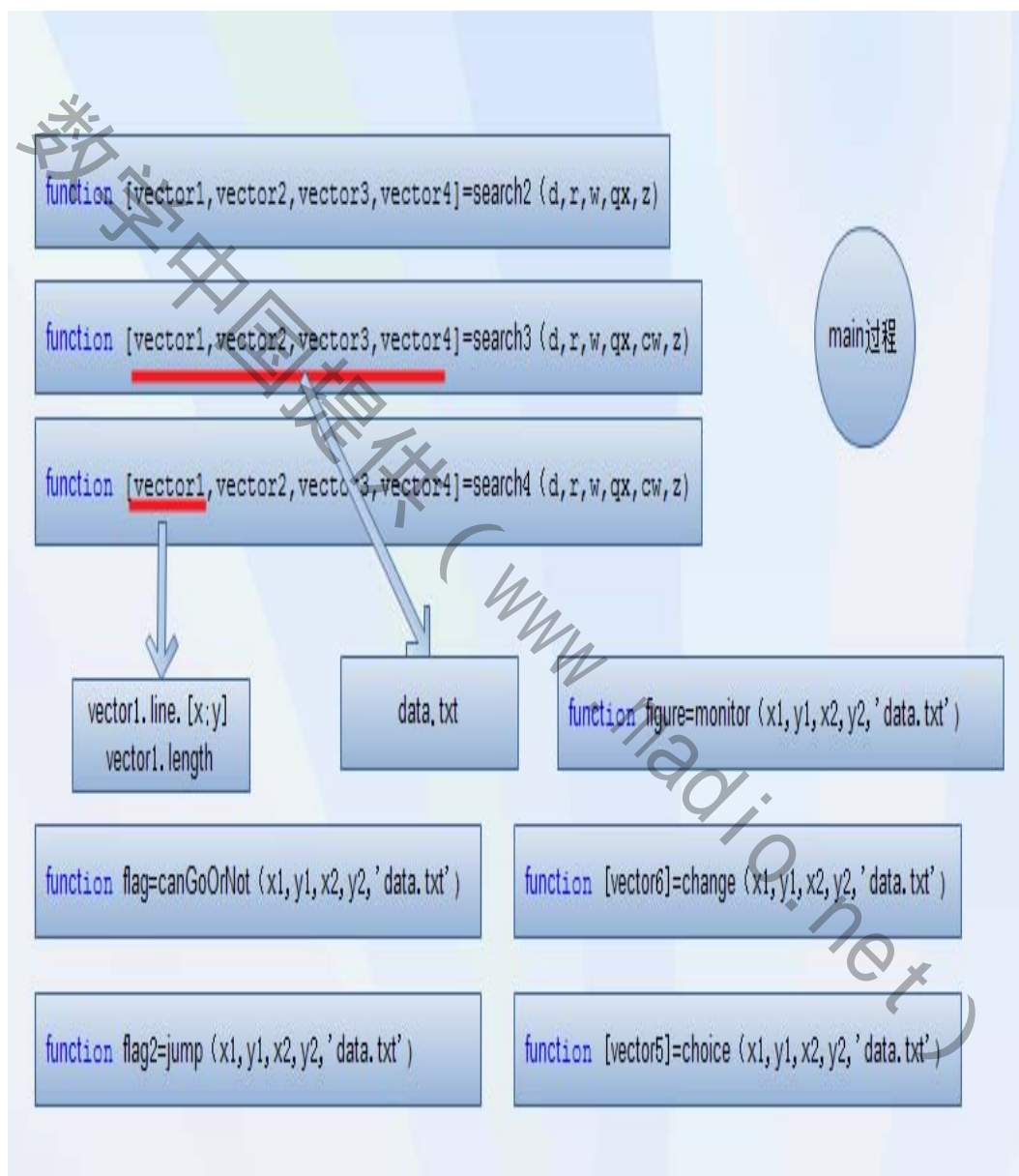


图 7 数据结构图

报名号#1204

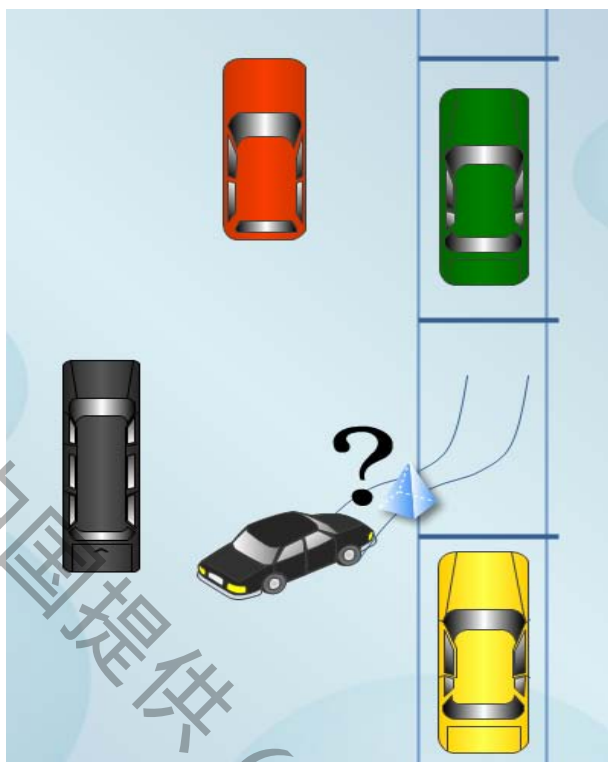


图 8 小车示意图

5.2 问题二模型的建立与求解

因为求解时间所限，本模型不生成实际数据表文件，将所有数据均保存于内存中，除核心程序外不添加在实际中需要的其它功能模块。显而易见，如欲加上数字地图等实用功能也是不困难的。

为易于分析和说明设计思路，引入第一阶段的部分重要数学推导步骤。

令 $m_1(x_{m1}, y_{m1})$ ，则小车静止时各重要部分表达如下：

对于 $m_1(x_{m1}, y_{m1})$ ，有：

$$\begin{cases} v_x = v \cos \varphi \cos \theta \\ v_y = v \cos \varphi \sin \theta \\ v_\theta = \frac{v \sin \varphi}{L} \end{cases} \quad (10)$$

上式中 $v_\theta = \frac{v \sin \varphi}{L}$ ，值得说明的是，小车的转弯等效为以 $m_1(x_{m1}, y_{m1})$ 为圆心， v_θ 为角速度的偏转。

报名号#1204

对于 $m_2(x_{m2}, y_{m2})$, 有

$$\begin{cases} v_x = v_\theta R_1 \cos \theta \\ v_y = v_\theta R_1 \sin \theta \\ v_\theta = \frac{v \sin \varphi}{L} \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$R_1 = \sqrt{R^2 - L^2} - \frac{w}{2}$$

位置关系为:

令 $m_1(x_{m1}, y_{m1})$, 则

$$\begin{aligned} & m_2(x_{m1} - L \cos \theta, y_{m1} - L \sin \theta) \\ & A(x_{m1} - \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m1} + \frac{w}{2} \cos \theta) \\ & B(x_{m1} + \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m1} - \frac{w}{2} \cos \theta) \\ & C(x_{m2} + \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m2} - \frac{w}{2} \cos \theta) = (x_{m1} - L \cos \theta + \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m1} - L \sin \theta - \frac{w}{2} \cos \theta) \\ & D(x_{m2} - \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m2} + \frac{w}{2} \cos \theta) = (x_{m1} - L \cos \theta - \frac{w}{2} \sin \theta, y_{m1} - L \sin \theta + \frac{w}{2} \cos \theta) \end{aligned}$$

对于 A', B', C', D' , 则有

$$\begin{aligned} & A'(x_A + L_1 \cos \theta, y_A + L_1 \sin \theta) = (x_{m1} - \frac{w}{2} \sin \theta + L_1 \cos \theta, y_{m1} + \frac{w}{2} \cos \theta + L_1 \sin \theta) \\ & B'(x_B + L_1 \cos \theta, y_B + L_1 \sin \theta) = (x_{m1} + \frac{w}{2} \sin \theta + L_1 \cos \theta, y_{m1} - \frac{w}{2} \cos \theta + L_1 \sin \theta) \\ & C'(x_C - L_1 \cos \theta, y_C - L_1 \sin \theta) = (x_{m1} - L \cos \theta + \frac{w}{2} \sin \theta + L_1 \cos \theta, y_{m1} - L \sin \theta - \frac{w}{2} \cos \theta + L_1 \sin \theta) \\ & D'(x_D - L_1 \cos \theta, y_D - L_1 \sin \theta) = (x_{m1} - L \cos \theta - \frac{w}{2} \sin \theta - L_1 \cos \theta, y_{m1} - L \sin \theta + \frac{w}{2} \cos \theta - L_1 \sin \theta) \end{aligned}$$

在车辆平行泊车过程中, 令步骤 n 结束时后车轮泊车轨迹的转角弧度为 θ_n , 车轴水平方向的夹角为 θ_m , 如图9, 图10所示:

报名号#1204

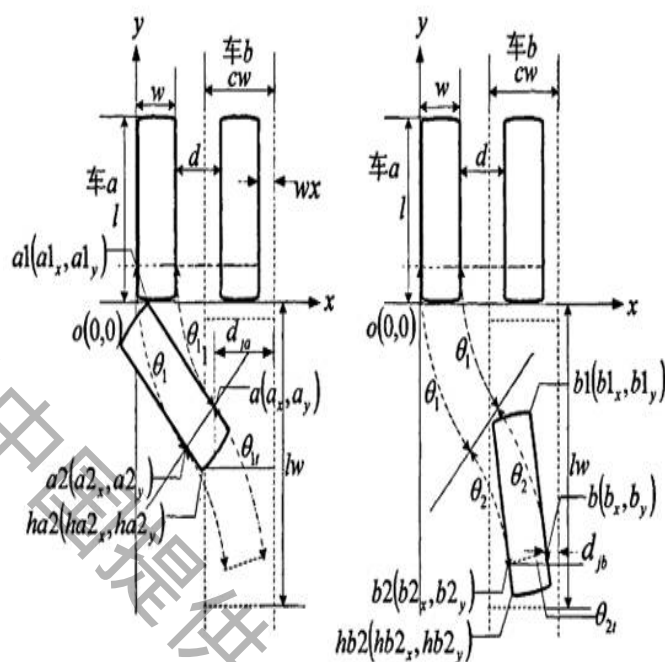


图 9 牵引车完成第一次泊车时的状态

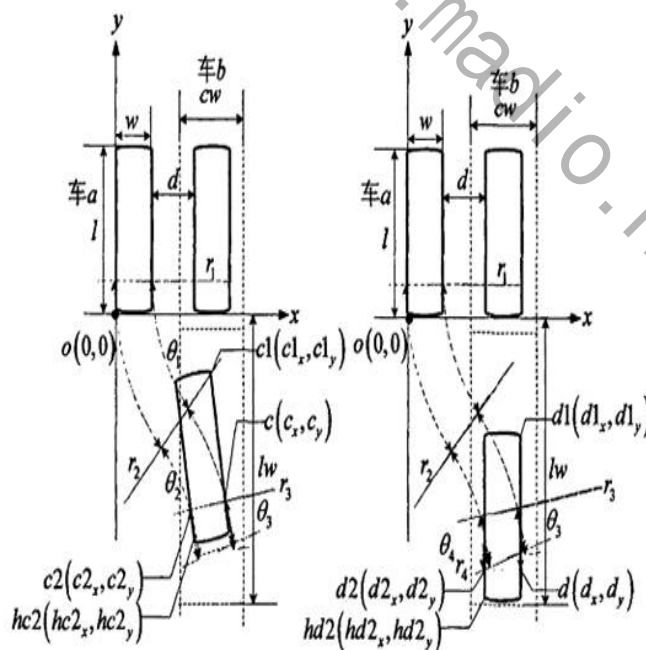


图 10 牵引车完成第一次泊车时的状态

报名号#1204

泊车 n 个步骤后，记后右轮中心点坐标为 $n(n_x, n_y)$ ，车头右端点记为 $n_1(n_{1x}, n_{1y})$ ，后左轮中心点记为 $n_2(n_{2x}, n_{2y})$ ，车尾左端点记为 $hn_2(hn_{2x}, hn_{2y})$ ， $n = a, b, c, d \dots$

如图四所示，首先右打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_1 旋转 θ_1 。

泊车“一个步骤”【3】后，记后右轮中心点坐标为 $a(a_x, a_y)$ ，车头右端点记为 $a_1(a_{1x}, a_{1y})$ ，后左轮中心点记为 $a_2(a_{2x}, a_{2y})$ ，车尾左端点记为 $ha_2(ha_{2x}, ha_{2y})$ 。右几何关系可以得到：

$$a(a_x, a_y): \begin{cases} a_x = w + (r_1 - w)(1 - \cos \theta_1) \\ a_y = qx - (r_1 - w) \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$a_1(a_{1x}, a_{1y}): \begin{cases} a_{1x} = a_x - z \sin \theta_1 \\ a_{1y} = a_y + z \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$a_2(a_{2x}, a_{2y}): \begin{cases} a_{2x} = r_1(1 - \cos \theta_1) \\ a_{2y} = qx - r_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$ha_2(ha_{2x}, ha_{2y}): \begin{cases} ha_{2x} = a_{2x} + qx \sin \theta_1 \\ ha_{2y} = a_{2y} - qx \cos \theta_1 \end{cases}$$

再左打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_2 旋转 θ_2 ，如图四右所示。

泊车“两个步骤”后，后右轮中心点坐标为 $b(b_x, b_y)$ ，车头右端点记为 $b_1(b_{1x}, b_{1y})$ ，后左轮中心点记为 $b_2(b_{2x}, b_{2y})$ ，车尾左端点记为 $hb_2(hb_{2x}, hb_{2y})$ 。由几何关系可以得到：

$$b(b_x, b_y): \begin{cases} b_x = a_x + r_2(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ b_y = a_y - r_2(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases}$$

$$b_1(b_{1x}, b_{1y}): \begin{cases} b_{1x} = b_x - z \sin \theta_{2t} \\ b_{1y} = b_y - z \cos \theta_{2t} \end{cases}$$

$$b_2(b_{2x}, b_{2y}): \begin{cases} b_{2x} = a_{2x} + (r_2 - w)(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ b_{2y} = a_{2y} - (r_2 - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases}$$

$$hb_2(hb_{2x}, hb_{2y}): \begin{cases} hb_{2x} = b_{2x} + qx \sin \theta_{2t} \\ hb_{2y} = b_{2y} - qx \cos \theta_{2t} \end{cases}$$

报名号#1204

接着右打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_3 旋转 θ_3 ，如图五左所示。

泊车”三个步骤”后，后右轮中心点坐标为 $c(c_x, c_y)$ ，车头右端点记为 $c_1(c_{1x}, c_{1y})$ ，后左轮中心点记为 $c_2(c_{2x}, c_{2y})$ ，车尾左端点记为 $hc_2(hc_{2x}, hc_{2y})$ 。由几何关系可以得到：

$c(c_x, c_y)$:

$$\begin{cases} c_x = b_x - (r_3 - w)(\cos \theta_{3t} - \cos \theta_{2t}) \\ c_y = a_y + (r_3 - w)(\sin \theta_{2t} - \sin \theta_{3t}) \end{cases}$$

$c_1(c_{1x}, c_{1y})$:

$$\begin{cases} c_{1x} = c_x - z \sin \theta_{3t} \\ c_{1y} = c_y - z \cos \theta_{3t} \end{cases}$$

$c_2(c_{2x}, c_{2y})$:

$$\begin{cases} c_{2x} = b_{2x} - r_3(\cos \theta_{3t} - \cos \theta_{2t}) \\ c_{2y} = b_{2y} + r_3(\sin \theta_{2t} - \sin \theta_{3t}) \end{cases}$$

$hc_2(hc_{2x}, hc_{2y})$:

$$\begin{cases} hc_{2x} = c_{2x} + qx \sin \theta_{3t} \\ hc_{2y} = c_{2y} - qx \cos \theta_{3t} \end{cases}$$

依次类推，可得出 $d(d_x, d_y)$ ， $d_1(d_{1x}, d_{1y})$ ， $d_2(d_{2x}, d_{2y})$ ， $hd_2(hd_{2x}, hd_{2y})$ 以及 $e(e_x, e_y)$ ， $e_1(e_{1x}, e_{1y})$ ， $e_2(e_{2x}, e_{2y})$ ， $he_2(he_{2x}, he_{2y}) \cdots$ 的坐标值，依次为：

$d(d_x, d_y)$:

$$\begin{cases} d_x = c_x + r_4(\cos \theta_{4t} - \cos \theta_{3t}) \\ d_y = c_y - r_4(\sin \theta_{3t} - \sin \theta_{4t}) \end{cases}$$

$d_1(d_{1x}, d_{1y})$:

$$\begin{cases} d_{1x} = d_x - z \sin \theta_{4t} \\ d_{1y} = d_y - z \cos \theta_{4t} \end{cases}$$

$d_2(d_{2x}, d_{2y})$:

$$\begin{cases} d_{2x} = c_{2x} + (r_4 - w)(\cos \theta_{4t} - \cos \theta_{3t}) \\ d_{2y} = c_{2y} - (r_4 - w)(\sin \theta_{3t} - \sin \theta_{4t}) \end{cases}$$

$hd_2(hd_{2x}, hd_{2y})$:

$$\begin{cases} hd_{2x} = d_{2x} + qx \sin \theta_{4t} \\ hd_{2y} = d_{2y} - qx \cos \theta_{4t} \end{cases}$$

有了上述各点的坐标值，我们就可以在泊车过程中对车辆车身进行精确的定位，在自动寻轨算法中对泊车轨迹进行精确计算。

报名号#1204

生成的各条线路数据，其数据对应的线路信息如图11所示。为了方便查看，图中所示为右后轮的轨迹，车上四个关键点轨迹如图所示：

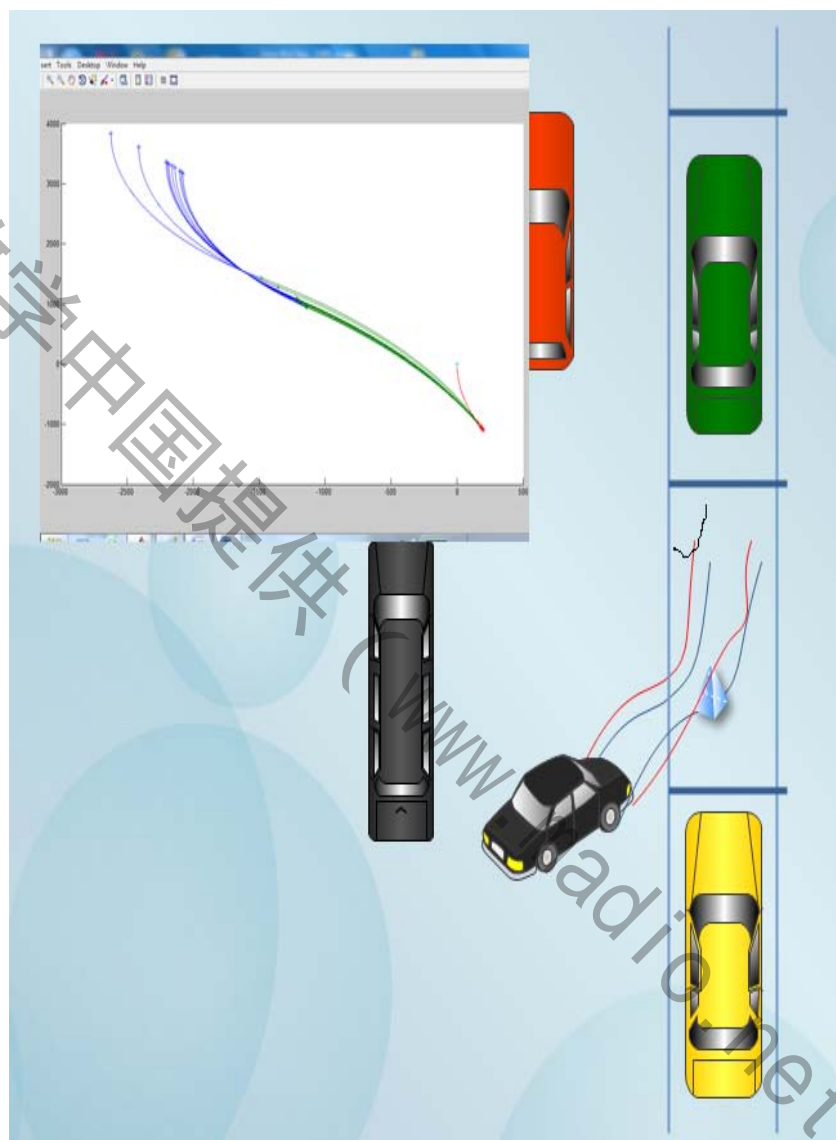


图 11 牵引车完成第一次泊车时的状态

四条关键点轨迹线的覆盖区域为既定路线需要的无障碍区域，如遇障碍，则递归调用选路算法重新选择线路。由图可知，在狭窄的空间中，汽车能够停入的位置区域是有限的。

模型总结本模型设计了类似于GPS导航的选路算法，结合第一阶段已编码的N次停车系统模型，结合车载显示器，驾驶员可方便地得到线路纠偏帮助。

5.3 问题二的结果分析

求解结果如图11所示。需要说明的是，为求简单明了，图11左上角的子图只绘出了右后轮的部分轨迹，用附件中的代码可以直接绘制所有情况下的轨迹。图中的小车在进入停车位时，原来确定轨迹为左右前轮对应的蓝色轨迹。但不凑巧的是此轨迹已被障碍物占据，于是，由程序运行直接得出了红色轨迹。司机可以延红色曲线轨迹顺利进入停车位。这样，在有障碍物的情况下，我们就可以给驾驶员提供停车路线的建议和操作建议，使驾驶员在有障碍物的情况下也能顺利停车

6 模型的评价

模型的优点

- 第一问中，我们将泊车过程转化为平面几何图形进行研究，使得整个过程直观易懂，方便理解。
- 我们分别建立了最小停车位长度和宽度的模型，根据每一种铰接式卡车的具体情况，能够确定出使它安全进入的最小停车位长度和宽度。这样，在停车位已知的时候，驾驶员就可以直接判断汽车是否能够停入。
- 第二问中的模型简单明了，有严格的数学理论基础，易实现，无技术壁垒，容易形成实用产品。

模型的缺点

对于全挂式铰接车的研究，只是在半挂式的基础上研究，没有单独深入下去。在第二问中，因时间所限，未完成全部重要模块编写任务，如没有完事的UI界面，实用价值有所欠缺。

7 模型的改进和推广

1. 按照我们建立的半挂式卡车模型，原理上看起来比较简单，但实际比较符合事实，或许还可以寻找一种使得大型卡车安全进入的最小停车位空间。
2. 在考虑大型车辆是否能够顺利停入车位的时候，我们是以铰接式卡车为例进行探讨的，但实际上，链接式等其他情况与铰接式还是有一些不同的，因此，我们可以继续研究链接式卡车的情况，并且应该在全挂式卡车模型当中进一步加强，虽然全挂式卡车几何关系相较于半挂式卡车复杂。
3. 在问题2中，考虑到人为以及障碍物的不确定性，导致模型的建立以及仿真时难以考虑。

8 参考文献

- 【1】赵党社,魏玲霞,铰接式客车最小转弯半径和通道宽度的计算,客车技术与研究,2007年第2期: 27-28, 2007
- 【2】景振毅,张泽兵等, MATLAB7.0实用宝典,北京:中国铁道出版社,2008.12
- 【3】赵玲,平行泊车方法研究与仿真,长安大学硕士学位论文, U49, 10710-06241282: 18-20, 2009.5