

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第五届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1547

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：本科组

第五届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）： 1547

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2012 年第五届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 资金使用与用人方案模型

关 键 词 线性规划 最优化 博弈 Matlab 软件

摘 要

本文建立了在竞争的市场条件下企业的资金使用与用人方案模型。

对于问题一，首先利用附件中的数据求出粉丝总数 s 与剔除重复的实际粉丝率 y 的关系，由第一阶段中的模型一：理想模型 $s = 25(21^t - 1)$ ，换算出天数 t 与总粉丝数 s 的关系，进而求得剔除重复的实际粉丝率 y 与天数 t 的对应关系，拟合出曲线： $y = 0.859 t^{-0.137}$ ， $R^2 = 0.9909$ ，运用 EViews 软件对天数与剔除重复的实际粉丝率的关系进行拟合产生的残差，再利用 EXCEL 做出残差的散点图，检验残差的绝对值之和为 0.2786，因此拟合效果很好。考虑到乙公司的竞争作用，并在推广资金 20 万元的限制条件下，通过甲乙两公司的博弈最终确定合理的资金使用和用人方案，建立了模型一：线性规划模型。设 $b_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 为第 i 天去推广的专业推广者人数， N_i 为第 i 天雇佣到的专业推广者人数， R_i 为第 i 天的粉丝数，每天雇佣专业推广者的工资为 k_i ，利用 Matlab 输入程序求出最佳用人方案下的 R_i ，代入剔除重复的实际粉丝率 y ，求的实际粉丝数 $S = 1.43856 E + 28$ 。

对于问题二，在模型一的基础上，考虑进去黑客公司研制的自动添加粉丝的软件，首先利用附件中的数据，将统计出的 2502 个推广者分为 25 组，每 100 个推广者一组。假设粉丝数不超过 10 人被认为无条件接受邀请，算出每组中无条件接受邀请者所占的比重 λ ，画出图形并进行拟合得出粉丝添加率逐渐趋向于 0.04，在此基础上，对模型一进行修改，从而建立了模型二：最优化模型，并对方案进行了合理的调整。

参赛队号 1547
所选题目 C

参赛密码
(由组委会填写)

§ 1、问题重述

一、背景知识

奥运营销是借助各种与奥运相关的内容（产品、人物、事件、服务）为载体，使企业和消费者之间建立以奥运文化为核心的品牌文化体系，从而将企业的产品（服务）与奥运精神的内涵进行融合。一般采用奥运明星、体育赞助、活动、公关等方式，建立品牌联想整合传播，有目的地推进营销策略和营销活动的实施。奥运营销有助于帮助企业找到目标人群、挖掘消费者更深层次的需求、提高销售额、提升企业文化和品牌价值、扩大品牌影响力。奥运主张、活动场景能从一定程度上把社会人口特征、行为及生活方式相类似的人群自动汇聚起来，从而使企业更容易瞄准目标人群。激情奥运能极大地激发消费者平时不易显露出来的潜在需求，企业能针对消费者显露出来的潜在需求有效地开发新产品。企业把拟营销的产品与奥运元素对接起来，借助奥运效应，能有效提升产品销售额和品牌价值。

传统的营销模式是与电视结盟，在运动员入场仪式、颁奖仪式、热门赛事、金牌榜发放等受关注的时刻发布赞助商广告，它在每个行业中仅挑选一家奥运全球合作伙伴，也就是“Top 赞助商”。然而这种模式被奥运会主办方发挥到了极致，宣传费用的门槛把绝大多数企业排除在了奥运会之外。因此越来越多的企业不甘心错过奥运会这个吸引大众眼球的宣传机会，寻求新的新闻传播渠道。在这些新的传播渠道之中，利用社交网络进行企业宣传在数字化的今天无疑是一种很好的营销方式。

二、相关数据：

1. 题目中的参考数据及所给附件
2. 附录 2：表 1 剔除重复的实际粉丝率与总粉丝数的关系
3. 附录 3：表 2 两种情况下不同天数的总粉丝数
4. 附录 4：表 3 愿意添加邀请的人数及比重

三、要解决的问题：

问题一：专业推广者是一种稀缺资源，假设能够找到的专业推广者仅有 10 人，他们是否愿意为公司工作，取决于公司开出的薪水。由于工资是按日结算的，他们随时可能转头工资更高的其他公司。兼职推广者可以大量雇佣到，但他们必须由专业推广者培训后才能上岗工作，一个专业推广者一天最多培训 20 人，培训将占用专业推广者的工作时间。甲公司现有网络推广资金 20 万元，想利用网络推广扩大产品的知名度。该公司的一个竞争对手乙公司也同样计划利用奥运期间进行商品的网络推广，他们同样预算了 20 万元的推广资金，乙公司目前产品的市场占有率是甲公司的 1.5 倍。请建立合理的数学模型，帮助甲公司制定一份奥运期间的网络推广的资金使用和用人方案，使得产品推广的效果能够达到最大。

问题二：某黑客公司研制了一个能够自动添加粉丝的软件，售价 10000 元，该软件一天可以自动发出 100000 个粉丝添加邀请，待添加的目标用户都是从社交网络中按照广度优先的原则搜索到的，但是其中仅有一些粉丝数较少或者经常无目的添加关注的网友愿意接受邀请。请建立数学模型说明这个软件的出现对上一问的用人和资金使用方案是否有影响？如果有影响，该如何对方案进行调整？

§ 2、问题分析

利用社交网络进行企业宣传，主要是利用社交网络的专业推广者以及从网络上雇佣来的兼职推广者每天新增粉丝，然后新增的这些普通粉丝又每天新增粉丝来不断的增加

其粉丝数，以至其含有企业广告的信息被越来越多的人看到。但是专业推广者是一种稀缺的资源，能够找到的专业推广者的人数是有限的（题中假设是 10 个人），并且他们是否愿意为公司工作，取决于公司开出的薪水，由于工资是按日结算，在市场不同公司的竞争下，他们随时可能转投工资更高的其他公司。兼职推广者可以大量雇佣到，但他们必须由专业推广者培训后才能上岗工作，一个专业推广者一天最多培训 20 人，培训将占用专业推广者的工作时间。

(1) 由于专业推广者不进行培训兼职推广者时，每天能新增 500 个粉丝，进行培训兼职推广者后每天能培训出 20 个人，这些兼职推广者每天能新增 35 个粉丝，这样一共能新增 700 个粉丝，但是专业推广者培训出的兼职推广者当天由于接受培训而不能增加粉丝，从第二天开始才增加粉丝，因此从当天来看，让专业推广者增加粉丝比去给兼职推广者培训粉丝数增加更多。但是由于资金的限制，专业推广者在甲乙两家公司对其的争夺中工资一度上涨，甲公司不得不雇佣一部分薪水低很多的兼职推广者。因此对甲公司而言，假设其每天雇佣到 $N_i (i = 1, 2, \dots, 16)$ 个专业推广者，这 N_i 个专业推广者中有 b_i 个去工作以增加粉丝，则另有 $(N_i - b_i)$ 个专业推广者去给兼职推广者培训，这些专业推广者每天工资为 k_i ，在所用资金不超过 200000 的情况下，要使其宣传的粉丝数最大化同时使其所用资金最小化，建立线性规划模型，求出合理的用人方案。

(2) 黑客研制出的软件由于需要资金购买，并且也能通过其增加粉丝，所以此软件的出现会对模型一中的用人和资金使用方案产生影响，假设黑客公司研制出的自动添加粉丝的软件发出的 100000 个粉丝添加邀请有 λ 的愿意接受邀请率，其售价为 10000 元一个，假设公司购买了 a 个此软件，建立此种情况下的最优化模型。

§ 3、合理的假设

- (1) 专业推广者和兼职推广者不算入总粉丝数中。
- (2) 推广者的粉丝基数为 0，即默认推广者账户为新开账户，所以初始粉丝为 0，从 0 开始新增粉丝。
- (3) 在不考虑粉丝重复的情况下，无论是专业推广者还是兼职推广者还是普通网络用户，每天新增的粉丝数都按题目给定的进行新增，在我们所考虑的时间范围内，认为它不会变化。
- (4) 每天新增的粉丝在当天不继续新增粉丝，到第二天才新增粉丝。
- (5) 按假设奥运会为期 16 天进行宣传计算。
- (6) 剔除重复的真实粉丝率是剔除重复的真实粉丝人数与粉丝总数的比值。
- (7) 专业推广者的工资可以随着竞争的变化而变化，兼职推广者的工资一天 50 元不变。
- (8) 专业推广者培训出的兼职推广者当天由于接受培训而不能增加粉丝，从第二天开始才增加粉丝。
- (9) 1 个专业推广者的开始工资均为 500 元/天。
- (10) 甲、乙公司都能及时获得关于对方给出的工资水平。
- (11) 题目提供的所有数据是确切可靠的。

§ 4、名词解释与符号说明

序号	符号	意义
1	S	总粉丝数
2	y	剔除重复的实际粉丝率
3	t	天数

4	R^2	可决系数
5	b_i	第 i 天去推广的专业推广者人数
6	N_i	第 i 天雇佣到的专业推广者人数
7	$N_i - b_i$	第 i 天去给兼职推广者培训的推广者人数
8	R_i	第 i 天的粉丝数
9	x_i	在进行线性规划时统一为 b_i, N_i 的对应赋值
10	k_i	第 i 天雇佣专业推广者每个人所付工资
11	λ	添加邀请的接受邀请率
12	a	购买软件数目

§ 5、模型的建立与求解

模型一：线性规划模型

一、模型的准备

1、对所给附件中的 835541 个数据，运用 Access、Excel 进行处理，得到粉丝总数、剔除重复的实际粉丝率以及天数之间的关系，如表 1：

表 1 剔除重复的实际粉丝率与总粉丝数的关系

组数	天数 t	实际粉丝数 N	总粉丝数 S	剔除重复的实际粉丝率 y
1	2.4	28397	32446	0.875
2	2.6	54645	68340	0.800
3	2.7	79358	107466	0.738
4	2.8	101172	144771	0.699
5	2.9	123704	183507	0.674
6	3.0	144912	218603	0.663
7	3.0	166426	255562	0.651
8	3.1	186833	290003	0.644
9	3.1	207268	327337	0.633
10	3.1	225834	358952	0.629
11	3.2	243602	393586	0.619
12	3.2	259925	428508	0.607
13	3.2	277394	464946	0.597
14	3.2	291968	493254	0.592
15	3.3	307773	520895	0.591
16	3.3	324002	550827	0.588
17	3.3	340583	582007	0.585
18	3.3	356365	613211	0.581
19	3.3	370969	643405	0.577
20	3.4	385035	673141	0.572
21	3.4	401154	705262	0.569
22	3.4	416276	733935	0.567

23	3.4	435686	769198	0.566
24	3.4	450652	801774	0.562
25	3.4	464137	833427	0.557

表一中的数据，是先利用 Access 查询出实际的网络用户数，即 2502 个实际网络用户，并将其按 100 人每组，划分为 25 组，分别求出各组的总粉丝数、剔除重复的实际粉丝数，进而可以算出剔除粉丝的实际粉丝率。天数是由总粉丝数换算得到的，即由第一阶段中的模型一：理想模型 $S = 25(21^t - 1)$ ，其中 S 表示总粉丝数， t 表示天数。

根据表 1，作出剔除重复的实际粉丝率与天数 t 之间的关系图，如图 1

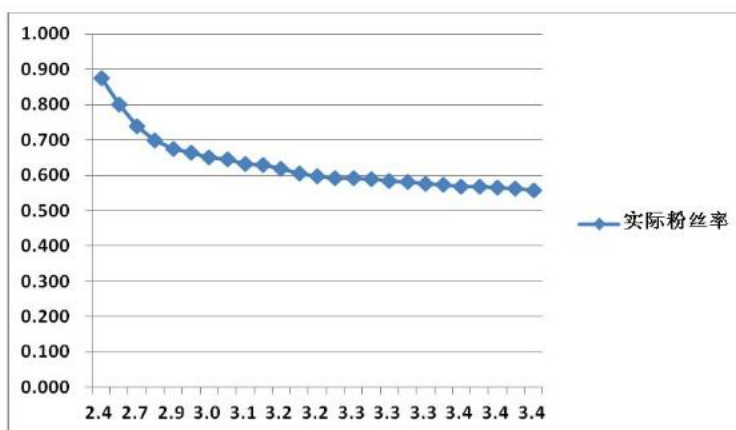


图 1 剔除重复的实际粉丝率 y 与天数 t 的关系

利用 Excel 对图中数据进行拟合，如图 2

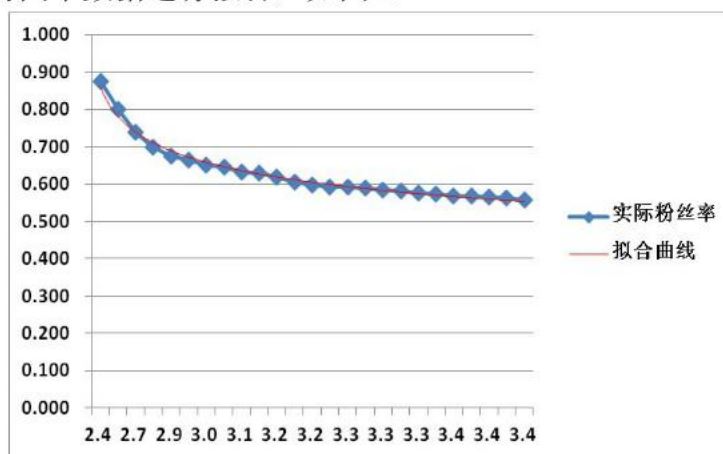


图 2 剔除重复的实际粉丝率 y 与时间 t 的拟合曲线

(其中，蓝色表示剔除重复的实际粉丝率与时间的关系曲线，红色表示拟合曲线。)
由此，可以得到剔除重复的实际粉丝率与天数的关系式：

$$y = 0.859 t^{-0.137} \quad (1)$$

其中 y 表示剔除重复的实际粉丝率， t 表示时间。由于 $R^2 = 0.9909$ ，因此拟合的效果很好。

2、对甲公司来说，要想利用网络推广扩大产品的知名度，在资金 20 万元的限制条件下，必须制定一份合理的用人方案，即确定雇佣专业推广者和兼职推广者的人数。虽然兼职推广者可以大量雇佣到，但是他们必须由专业推广者培训后才能上岗，培训将占用专业推广者的工作时间。这就又需要确定培训工作将占用多少个推广者。

假设 1 个专业推广者只做推广或者只做培训工作，那么在不考虑实际粉丝率，并且不将专业推广者和兼职推广者作为粉丝数计入的条件下，专业推广者每天新增粉丝数

500 个，这 500 个普通网络用户又会在下一天每人新增 20 个粉丝。培训工作者每天培训兼职推广者 20 人，这 20 人会在下一天每人新增粉丝数 35 人。随着天数的增加，两种情况下总粉丝人数的预测值如下表 2 所示：

表 2 两种情况下不同天数的总粉丝数

天数	只推广总粉丝数	只培训总粉丝人数	两者之差
1	500	0	500
2	11000	700	10300
3	231500	15400	216100
4	4862000	324100	4537900
5	102102500	6806800	95295700
6	2144153000	142943500	2E+09
7	45027213500	3001814200	4.2E+10
8	9.45571E+11	63038098900	8.83E+11
9	1.9857E+13	1.3238E+12	1.85E+13
10	4.16997E+14	2.77998E+13	3.89E+14
11	8.75694E+15	5.83796E+14	8.17E+15
12	1.83896E+17	1.22597E+16	1.72E+17
13	3.86181E+18	2.57454E+17	3.6E+18
14	8.1098E+19	5.40653E+18	7.57E+19

由表 2 可知，一个专业推广者只做推广时，每天的粉丝总数，比只做培训时，由培训出的兼职推广者所推广每天增加的粉丝总数要多得多。因此在条件允许的情况下，甲公司会尽可能多的让专业推广者只做推广工作，但是由于甲、乙公司在招揽人才过程中会竞相开出更高工资以吸引更多的专业推广者，所以甲公司会因为资金的限制而让一小部分专业推广者做培训工作培养出兼职推广者来增加粉丝以减少开支，毕竟兼职推广者的工资低很多。

在理想状态下，即在考虑实际粉丝率，不考虑乙公司的竞争，可雇用 10 名专业推广者，每人每天工资为 500 元，推广资金 20 万元的条件下：

$$\text{能够雇佣的天数} : t = \frac{200000}{10 \times 500} = 40 \text{ (天)}$$

$$\text{又因为，真实粉丝率：} y = 0.859 t^{-0.137}$$

故 40 天后的粉丝总数为：

$$S = 25 (21^t - 1) y = 25 (21^{40} - 1) \times 0.859 \times 40^{-0.137} = 1.00282 E + 54$$

由于专业推广者仅有 10 人，且受高薪诱惑，流动性强，而兼职推广者可以大量雇佣，因此必须适当的雇佣一些兼职推广者。

二、模型的建立

设 $b_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 为第 i 天去推广的专业推广者人数， N_i 为第 i 天雇佣到的专业推广者人数，则 $N_i - b_i$ 为第 i 天去给兼职推广者培训的推广者人数， R_i 为第 i 天的粉丝数，则 R_i 分为三部分，第一部分为当天专业推广者进行推广新增的粉丝数，第二部分为前一天新培训出来的兼职推广者新增的粉丝数，第三部分为前 $i-1$ 天粉丝数新增后包括以前粉丝数在内之和。

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 500 b_1 \\
 R_2 &= 500 b_2 + (N_1 - b_1) \times 20 \times 35 + 21 R_1 \\
 R_3 &= 500 b_3 + (N_2 - b_2) \times 20 \times 35 + 21 R_2 \\
 R_4 &= 500 b_4 + (N_3 - b_3) \times 20 \times 35 + 21 R_3 \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_n &= 500 b_n + (N_{n-1} - b_{n-1}) \times 20 \times 35 + 21 R_{n-1}
 \end{aligned}$$

将各式迭代进去可得

$$\begin{aligned}
 R_n &= 500 b_n + 21 \times 500 b_{n-1} + 21^2 \times 500 b_{n-2} + \dots + 21^{n-1} \times 500 b_1 + \\
 &700 (N_{n-1} - b_{n-1}) + 21 \times 700 \times (N_{n-2} - b_{n-2}) + 21^2 \times 700 \times (N_{n-3} - b_{n-3}) + \dots + 21^{n-2} \times 700 (N_1 - b_1)
 \end{aligned}$$

建立线性规划问题得(其中 k_i 为第 i 天雇佣专业推广者每个人所付工资,并假设兼职推广者每个人一天 50 元工资始终不变)

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = R_n \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{cases} k_1 N_1 + k_2 N_2 + \dots + [20(N_1 - b_1) + 20(N_2 - b_2) + \dots + 20(N_{16} - b_{16})] \times 50 \leq 200000 \\ b_1 - N_1 \leq 0 \\ b_2 - N_2 \leq 0 \\ \dots\dots\dots \\ b_{16} - N_{16} \leq 0 \\ N_1 \leq 10 \\ N_2 \leq 10 \\ \dots\dots\dots \\ N_{16} \leq 10 \\ b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 16 \end{cases}
 \end{aligned}$$

将 $R_n = 500 b_n + 21 \times 500 b_{n-1} + 21^2 \times 500 b_{n-2} + \dots + 21^{n-1} \times 500 b_1 +$ 代入, 设 $700 (N_{n-1} - b_{n-1}) + 21 \times 700 \times (N_{n-2} - b_{n-2}) + 21^2 \times 700 \times (N_{n-3} - b_{n-3}) + \dots + 21^{n-2} \times 700 (N_1 - b_1)$ 代

$$\begin{aligned}
 b_1 &= x_1 & b_1 &= x_1 \\
 b_2 &= x_2 & b_2 &= x_2 \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 b_n &= x_n & b_{16} &= x_{16} \\
 N_1 &= x_{n+1} & N_1 &= x_{17} \\
 N_2 &= x_{n+2} & N_2 &= x_{18} \\
 &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\
 N_n &= x_{2n} & N_{16} &= x_{32}
 \end{aligned}$$

以奥运会为期 16 天计算,

化简得:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = (21^{15} \times 500 - 21^{14} \times 700)x_1 + (21^{14} \times 500 - 21^{13} \times 700)x_2 + \dots + (21 \times 500 - 700)x_{15} + 500x_{16} \\ & + 21^{14} \times 700x_{17} + 21^{13} \times 700x_{18} + \dots + 700x_{31} + 0x_{32} \\ s.t. \quad & \begin{cases} -1000x_1 - 1000x_2 - \dots - 1000x_{16} + (k_1 + 1000)x_{17} + (k_2 + 1000)x_{18} + \dots + (k_{16} + 1000)x_{32} \leq 200000 \\ x_1 - x_{17} \leq 0 \\ x_2 - x_{18} \leq 0 \\ \dots \\ x_{16} - x_{32} \leq 0 \\ x_{17} \leq 10 \\ x_{18} \leq 10 \\ \dots \\ x_{32} \leq 10 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 16 \end{cases} \end{aligned}$$

由于受到乙公司的竞争作用，每天能够雇佣到的专业推广者总人数不是固定的，即 $N_i (i = 1, 2, 3, \dots, 16)$ 不是固定的，且在竞争作用的驱使下，专业推广者每天的工资也不是固定的。在这种情况下，就会形成甲、乙两公司通过提高工资水平，而达到雇佣更多专业推广者的目的。又因为甲、乙两公司现有的网络推广资金均为 20 万元，故甲、乙两公司对专业推广者的竞争实力是相当的，即当甲公司给专业推广者多少工资时，乙公司同样可以给出相同的工资。当甲公司提高对专业推广者的工资水平，而乙公司不变时，甲公司雇佣的专业推广者就会越来越多，甚至等于 10 人。若乙公司也相应的提高工资水平，那么这就会导致在不同的工资水平下，甲、乙两公司最终的均衡专业推广者人数均为 5 人。其竞争情况如下图 3、图 4 所示：

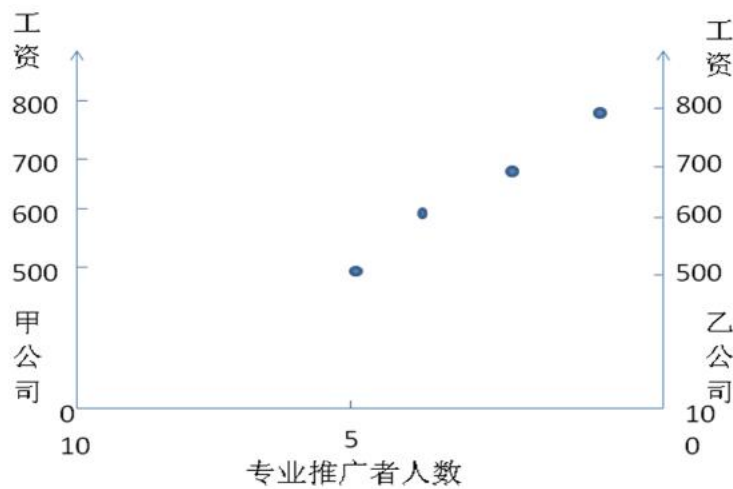


图 3 仅甲公司提高工资时专业推广者人数变化

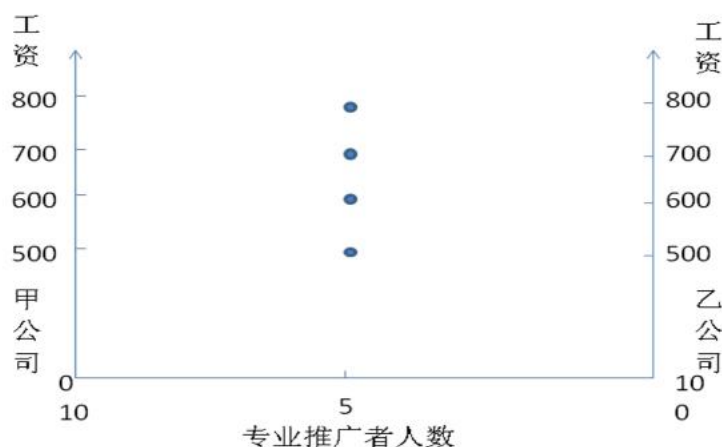


图 4 甲、乙公司同时提高工资时专业推广者人数的变化

由图 4 可以看出，当甲、乙公司同时提相同价格时，最终受益的只是专业推广者。因而最终甲乙两公司会选择最低工资 500 元时，每家公司分别雇佣 5 名专业推广者。将这两个数据代入公式 (3)，并在附录 1 中的程序中运行可以得到最终的粉丝总数为

$$S = (2.4485 e + 028) y = (2.4485 e + 028) \times 0.859 \times 16^{-0.137} = 1.43856 E + 28$$

三、模型的改进

不论是甲公司还是乙公司，都希望最大限度的雇佣专业推广者。对于商人来说，获得最大的利润才是最终的目的。对于专业推广者来说，他们一天可以发布多条商业广告。故在条件允许的情况下，甲乙两公司可以选择携手合作，给出适当的工资，将 10 名专业推广者全部雇佣。当然给出的工资由甲乙两公司共同承担，且要大于均衡时的工资，即大于 500 元，这样才能有效的防止其他公司的竞争。

模型二：最优化模型

一、模型的准备

某黑客公司研制的一个能够自动添加粉丝的软件，虽然该软件一天可以自动发出 100000 个粉丝邀请，但是仅有一些粉丝数较少或者经常无目的的添加关注的网友愿意接受邀请，故求得 100000 个粉丝中愿意添加邀请的概率是关键。

对于附件中的 835541 个数据，利用 access 可以求出推广者总数为 2502 个。将推广者分为 25 组，每 100 个推广者一组。假设粉丝数不超过 10 人被认为无条件接受邀请，那么可以求出每组中无条件接受邀请者所占的比重，即 λ ，如下表 3：

表 3 愿意添加邀请的人数及比重

推广者人数	粉丝少者	粉丝添加率 λ
100	7	0.07
200	12	0.06
300	12	0.04
400	16	0.04
500	17	0.034
600	20	0.033333
700	24	0.034286
800	27	0.03375
900	33	0.036667

1000	33	0.033
1100	36	0.032727
1200	39	0.0325
1300	45	0.034615
1400	50	0.035714
1500	57	0.038
1600	66	0.04125
1700	74	0.043529
1800	78	0.043333
1900	82	0.043158
2000	88	0.044
2100	88	0.041905
2200	92	0.041818
2300	96	0.041739
2400	99	0.04125
2500	102	0.0408

根据表 3，将推广者总数看作粉丝总数，将 λ 看作粉丝添加率，那么可以做出粉丝总数与粉丝添加率的关系图，如下图 5：

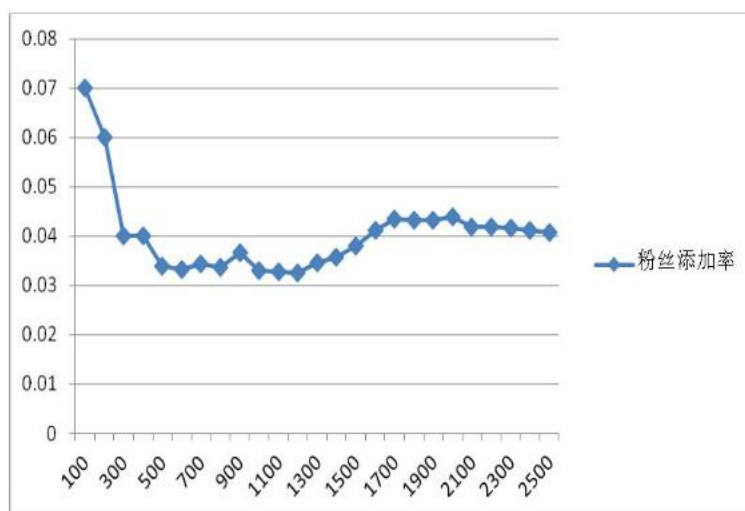


图 5 粉丝添加率的变化

由图 5 可以看出，粉丝添加率逐渐趋向于 0.04，因而在邀请粉丝添加的总数较大的情况下，我们可以近似的认为粉丝添加率就是 0.04。那么一个该软件每天可以添加 $S = 0.04 \times 100000 \times y = 0.04 \times 100000 \times 0.859 \times 16^{-0.137} = 2350$ 个粉丝。因此此软件发的出现对上一问的用人和资金使用发难会有一些影响。

假设公司购买了 a 个此软件，每个售价 10000 元，粉丝添加率 $\lambda = 0.04$ ，建立线性规划模型如下：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = R_n + 21^{15} \times 100000 \times a \lambda = R_n + 21^{15} \times 4000 a \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} k_1 N_1 + k_2 N_2 + \dots [20(N_1 - b_1) + 20(N_2 - b_2) + \dots 20(N_{16} - b_{16})] \times 50 + 10000 a \leq 200000 \\ b_1 - N_1 \leq 0 \\ b_2 - N_2 \leq 0 \\ \dots \\ b_{16} - N_{16} \leq 0 \\ N_1 \leq 10 \\ N_2 \leq 10 \\ \dots \\ N_{16} \leq 10 \\ b_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 16 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n = & 500 b_n + 21 \times 500 b_{n-1} + 21^2 \times 500 b_{n-2} + \dots + 21^{n-1} \times 500 b_1 + \\ & 700 (N_{n-1} - b_{n-1}) + 21 \times 700 \times (N_{n-2} - b_{n-2}) + 21^2 \times 700 \times (N_{n-3} - b_{n-3}) + \dots 21^{n-2} \times 700 (N_1 - b_1) \end{aligned}$$

代入模型中并对其进行类似模型一中的 x_i 编排，输入 Matlab 程序，可得知最佳的用人方案和购买的软件数目。

§ 6、误差分析与灵敏度分析

一、模型的残差分析：

1、运用 EViews 软件对天数与剔除重复的实际粉丝率的关系进行拟合产生的残差，再利用 EXCEL 做出残差的散点图如下图 6：

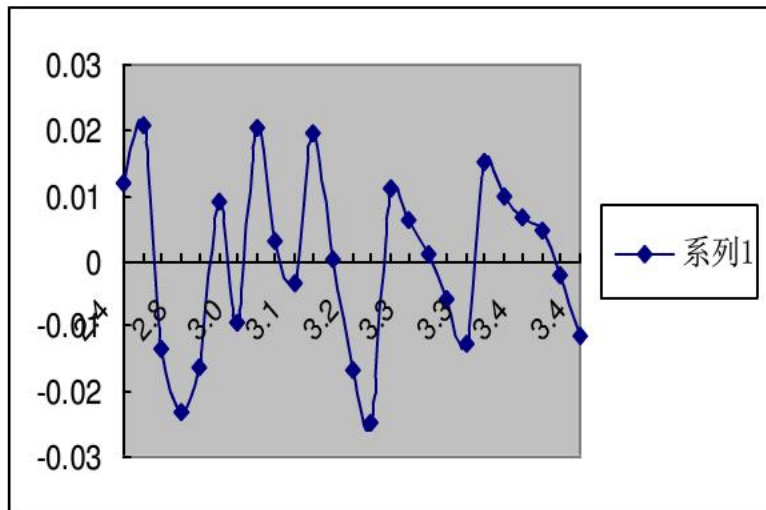


图 6 残差分析图

从图 6 中可以看出残差在坐标轴 $x = 0$ 上下波动，并且呈现正态分布，又残差的绝对值之和为 0.2786，因此效果很好。

二、模型的误差分析

1、由于市场信息获得的不及时和不准确，当甲公司采取措施或改变措施时，乙公司很有可能不能及时采取措施应对，从而导致甲公司雇佣的专业推广者人数短时间内多于乙公司。但是从长远考虑，甲乙两公司在不断博弈的过程中，最终会使得各自雇佣的专业推广者人数相等，从而达到市场均衡。故可以不考虑甲公司短时间内雇佣的专业推广者人数多于乙公司的情况。但是这样会使模型产生少许误差，可以忽略不计。

2、在模型二中，粉丝添加率 λ ，是通过处理附件中的数据进而得到的，它是一个估计值，并不能准确表示实际情况下的粉丝添加率，但是通过对图形的观察可以发现，粉丝总数越大时，粉丝添加率越来越趋近于 0.04。由于该添加粉丝的软件每天可以向 100000 个粉丝发出添加邀请，其粉丝总数相当庞大，故可以用 0.04 近似作为粉丝添加率，由此而带来的误差虽然存在，但却非常小。

§ 7、模型的评价与推广

一、模型的优点：

(1) 模型一、二对企业的实际情况进行了细致的分析，考虑到其每天雇佣到不同的专业推广者人数，每天付其各种不同的工资，每天安排多少专业推广者去推广以及多少专业推广者去培训等各种可能出现的不同情况，将其综合到了一个模型里进行了规划，条理清晰，思路明了，便于读者理解。

(2) 模型的准备阶段中对附件中的 835541 项数据都进行了全面的分析，列出了详尽的对应关系，并拟合出了具体的剔除重复实际粉丝率与天数的函数以及粉丝添加率与粉丝数的关系，工作量大，但处理得当，没有出现异常问题

(3) 利用 EXCEL 软件对数据进行处理并作出各种平面图，简便，直观、快捷；

(4) 运用了多种数学软件进行计算，包括 Excel, Access, Matlab, Lingo 等，取长补短，使计算结果更加准确；

二、模型的缺点：

模型中只对甲乙两公司之间对专业推广者的竞争进行了粗略的分析，没有具体的建立模型进行定性的分析，因此只是在种种假定下求的粗略的粉丝人数和用人方案。

三、模型的改进：

可以进一步参照经济学中的模型，详尽考虑甲乙两公司之间的竞争，求出甲公司每天雇佣专业推广者所付的工资与请到的人数以及宣传的天数之间一一对应的函数关系，代入模型，求出更精确的用人方案和宣传效应。

四、模型的推广：

以上的模型可以运用到实际的经济问题中企业用一定的资金求的最佳的用人方案，具有很强的现实意义。

§ 8、参考文献

杨桂元，黄己立.《数学建模》合肥. 2008 年 8 月第一版

15

[illegible]

附录 2:

表 1 剔除重复的实际粉丝率与总粉丝数的关系

组数	天数 t	实际粉丝数 N	总粉丝数 S	剔除重复的实际粉丝率 y
1	2.4	28397	32446	0.875
2	2.6	54645	68340	0.800
3	2.7	79358	107466	0.738
4	2.8	101172	144771	0.699
5	2.9	123704	183507	0.674
6	3.0	144912	218603	0.663
7	3.0	166426	255562	0.651
8	3.1	186833	290003	0.644
9	3.1	207268	327337	0.633
10	3.1	225834	358952	0.629
11	3.2	243602	393586	0.619
12	3.2	259925	428508	0.607
13	3.2	277394	464946	0.597
14	3.2	291968	493254	0.592
15	3.3	307773	520895	0.591
16	3.3	324002	550827	0.588
17	3.3	340583	582007	0.585
18	3.3	356365	613211	0.581
19	3.3	370969	643405	0.577
20	3.4	385035	673141	0.572
21	3.4	401154	705262	0.569

22	3.4	416276	733935	0.567
23	3.4	435686	769198	0.566
24	3.4	450652	801774	0.562
25	3.4	464137	833427	0.557

附录 3:

表 2 两种情况下不同天数的总粉丝数

天数	只推广总粉丝数	只培训总粉丝人数	两者之差
1	500	0	500
2	11000	700	10300
3	231500	15400	216100
4	4862000	324100	4537900
5	102102500	6806800	95295700
6	2144153000	142943500	2E+09
7	45027213500	3001814200	4.2E+10
8	9.45571E+11	63038098900	8.83E+11
9	1.9857E+13	1.3238E+12	1.85E+13
10	4.16997E+14	2.77998E+13	3.89E+14
11	8.75694E+15	5.83796E+14	8.17E+15
12	1.83896E+17	1.22597E+16	1.72E+17
13	3.86181E+18	2.57454E+17	3.6E+18
14	8.1098E+19	5.40653E+18	7.57E+19

附录 4:

表 3 愿意添加邀请的人数及比重

推广者人数	粉丝少者	λ
100	7	0.07
200	12	0.06
300	12	0.04
400	16	0.04
500	17	0.034
600	20	0.033333
700	24	0.034286
800	27	0.03375
900	33	0.036667
1000	33	0.033
1100	36	0.032727
1200	39	0.0325
1300	45	0.034615
1400	50	0.035714
1500	57	0.038
1600	66	0.04125
1700	74	0.043529
1800	78	0.043333
1900	82	0.043158
2000	88	0.044

2100	88	0.041905
2200	92	0.041818
2300	96	0.041739
2400	99	0.04125
2500	102	0.0408