

文章编号:1005-3085(2003)05-0065-06

## 车灯灯丝长度优化设计的数学模型和数值模拟

谭永基

(复旦大学数学系,上海 200433)

**摘 要:**本文对在车灯反射光满足一定设计规范的前提下优化车灯灯丝长度的问题建立了基于光线跟踪和基于反射点轨迹分析的两类优化模型,并对模型的数值模拟和数值求解进行了讨论。本文还对出现的其他模型进行了评述。

**关键词:**数学模型;线光源;数值模拟

**分类号:**AMS(2000) 49K35;78A55

**中图分类号:**O224;O29;TM923.02

**文献标识码:**A

### 1 问题的提出

为保证汽车夜间行驶的安全,要求汽车的车灯能照亮汽车行驶正前方一定距离内的一定宽度范围,但为了节省能源,这一宽度范围不必太大(沿宽度方向有一定衰减率)。各类车灯的工业设计规范正是据此而制定的。由于车灯的照明主要靠反射光,又考虑到汽车通常的速度,我们采用的设计规范为,在水平放置的车灯的反射面焦点  $F$  点正前方 25 米处( $A$  点)放置一个测试屏,与  $FA$  垂直,在该测试屏上过  $A$  点引出一条与地面相平行的直线,在该直线  $A$  点的同侧取  $B$  点和  $C$  点,使  $AC = 2AB = 2.6$  米,要求在测试屏上  $B$  点与  $C$  点的反射光强度分别超过  $2H$  和  $H$ ,其中  $H$  表示某一额定的光强度。

我们考察的汽车车灯的形状为一个水平放置的旋转抛物面,其开口半径为 36 毫米,深度为 21.6 毫米,焦点离开口平面的距离为 6.6 毫米。该车灯安装在汽车的头部,对称轴指向水平正前方。经过车灯的焦点  $F$ ,在与对称轴相垂直的水平方向对称地放置长度为毫米且均匀分布的线光源。记线光源的总功率为  $W$ ,在测试屏上  $B$  与  $C$  点的反射光强度可分别记为  $h_B(l)$  与  $h_C(l)$ ,设计规范可表示为

$$h_B(l)W \geq 2H, h_C(l)W \geq H$$

现在问题就是求出最优的线光源长度,满足此规范并使功率  $W$  最小。

不难看出,  $H$  可取为 1,在求得最小的  $W$  后,再乘以  $H$  即可。

这样一来,问题就归结为

$$\begin{cases} \min w \\ 0 \leq l \leq l_0 \\ \text{s.t. } h_B(l)W \geq 2 \\ h_C(l)W \geq 1 \end{cases}$$

只要建立  $h_B(l)$  和  $h_C(l)$  的数学模型, 求解上述优化问题即可。

## 2 反射光线的方向

建立坐标系如下, 取车灯旋转抛物反射面的顶点为原点  $O$ ,  $OA$  为  $Z$  轴方向,  $Y$  轴平行于灯丝的右手坐标系如图 1 所示。以毫米为单位(下同), 由所给信息不难求出车灯反射面方程为  $z = \frac{x^2 + y^2}{60}$ , 焦点坐标为  $(0, 0, 15)$ 。

位于点  $P(0, w, 15)$  的点光源发出的光线经反射面上一点  $Q$  反射出去, 设反射点的坐标为  $Q(x, y, \frac{x^2 + y^2}{60})$ , 若记入射向量为  $\vec{a}$ , 该点反射面外法线方向为  $\vec{b}$ , 不难得到反射向量  $\vec{c}$  满足

$$\vec{c} = \vec{a} - \frac{2\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

记  $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$ , 由

$$\vec{a} = (x, y - w, r^2/60 - 15)$$

$$\vec{b} = (x/30, y/30, -1)$$

从而得  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  的表达式

$$c_x = \frac{2xyw}{r^2 + 900}$$

$$c_y = \frac{w(2y^2 - r^2 - 900)}{r^2 + 900}$$

$$c_z = \frac{r^4 + 1800r^2 - 3600wy + 810000}{60(r^2 + 900)}$$

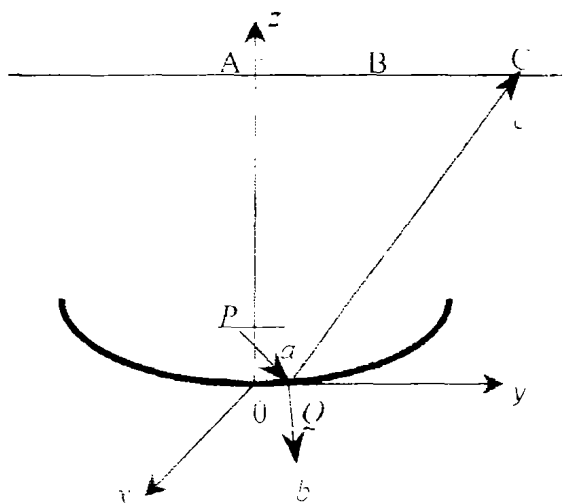


图1 反射光线

## 3 反射面上面元受点光源照射的能量

为研究反射面上一个面元反射一个点光源发射的光强度, 我们首先考察该面元受点光源照射的光强度。由于光强度正比于功率, 若考察单位时间, 我们可以研究单位时间内光源发射到该面元的能量。由几何光学知识, 距离功率为 1 个单位的点光源  $P$  为  $R$  的点  $Q$  附近一面积微元  $dS$  单位时间受该点光源照射的能量为它对点光源所在位置所张的立体角, 即

$$\frac{\cos\beta}{4\pi R^2} dS$$

其中  $\beta$  为  $PQ$  连线与面积微元法线的夹角。

于是, 若旋转抛物面反射点的坐标为  $Q(x, y, z)$ , 则具有功率  $dN$  的位于点的点光源单位时间照射到  $Q$  点附近的旋转抛物面上的面元  $dS$  能量为

$$L = \frac{dN \cos\beta}{4\pi PQ^2} dS$$

其中

$$\overline{PQ} = \sqrt{x^2 + (y - w)^2 + (r^2/60 - 15)^2}$$

而  $\beta$  为  $PQ$  连线与旋转抛物面在  $Q$  点处法线的夹角, 所以

$$\cos\beta = \frac{r^2/2 + 450 - yw}{\overline{PQ} \sqrt{r^2 + 900}}$$

其中  $r^2 = x^2 + y^2$ 。

#### 4 光线跟踪模型

设线光源的长度为  $l$ , 功率为 1。将光源分为每段长的  $M$  等分, 每段光源可视作一个功率为  $1/M$  的点光源。该点光源发射的光可离散为许多条光线, 这些光线中的部分会被抛物面反射出去, 在测试屏  $B$  点(或  $C$  点)附近取一个小领域, 跟踪这些光线, 将反射到此领域中的光线所具有的能量叠加并除以小领域的面积, 即为  $B$  点(或  $C$  点)处的光强度  $h_B(l)$ (或  $h_C(l)$ )。

反射离散光线可用下述方法产生: 1) 将反射面进行剖分, 例如用柱面坐标, 对径向, 环向和高度进行等分, 将反射面分成很多小面元。2) 将面元中心点与光源的连线作为该光源发出的光线。这些反射光线反射到测试屏的位置可由第 2 节的方法计算而反射的能量可由第 3 节所述的方法计算。

采用光线跟踪法如何保证计算精度是至关重要的。具体检验精度的方法是同时将光源和反射面的剖分加密一倍, 将  $B$ (或  $C$ ) 点附近的小领域的面积缩小一半, 得到的结果无显著变化时, 方能认为结果是可信的。

#### 5 基于反射点轨迹分析的模型

这一模型的思路是将线光源视作点光源的叠加, 以  $C$  点的光强度为例, 若位于  $P(0, w, 15)$  的功率为  $dw/l$  的点光源, 经反射面上  $Q$  点反射到  $C$ , 则  $Q$  点附近反射面上微元  $dS$  反射的功率为

$$\frac{dw \cdot \cos\beta}{4\pi \overline{PQ}^2 \cdot l} dS$$

而这束光照射到测试屏  $C$  点附近的面积为  $d\Sigma$ , 则此点光源经反射点  $Q$  对  $C$  点光强度的贡献为

$$\frac{dw \cdot \cos\beta}{4\pi \overline{PQ}^2 \cdot l} dS \frac{dS}{d\Sigma}$$

于是, 只要确定所有反射点和相应的点光源位置, 将它们对  $C$  点光强度进行叠加或积分即可。

1) 求出反射点的坐标及其反射的能量仍以  $C$  点为例, 设  $P(0, w, 15)$  处的点光源发出的光线经抛物反射面上一点  $Q(x, y, z)$  反射到  $C$  点。注意到反射光向量通过  $C$  点, 应有

$$kc_x = -x$$

$$kc_y = 2600 - y$$

$$kc_z = 25015 - r^2/60$$

其中为  $k$  常数,  $\hat{c} = (c_x, c_y, c_z)$  为反射向量由第二节给出的公式决定。从上述第一式可解得

$x = 0$  或  $k = -\frac{r^2 + 900}{2wy}$  由此得反射点坐标满足以下两组方程

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 2600)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 4680000)y^2 + (9360000w + 810000)y \\ - 1350810000w - 2106000000 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3750w}{13(w - 2600)} \\ x = \pm \sqrt{5200y - 900 - y^2} \end{cases}$$

通过计算可知,存在,当时第一组方程不存在满足的实根,即无反射点。而当时,有两个反射点  $Q_i(0, y_i, y_i^2/60), i = 1, 2$ 。

而第二组方程仅当  $-3.8119 < w < -1.5609$  时存在满足  $r^2 \leq 36^2$  的一对实根,即有两个反射点,记为  $Q_3, Q_4$ 。

设位于点  $P(0, w, 15)$  的单位能量点光源经点  $Q$  附近的面元  $dS$  反射到  $C$  点,将从该面反射的光简化为平行于反射向量光束,该光束照到测试屏的面积为

$$d\Sigma = \frac{dS \cdot \cos\beta_i}{\cos\gamma_i}$$

其中  $\beta_i, \gamma_i$  分别为与反射面在点  $Q_i$  的法线的夹角和反射向量  $Q_iC$  与  $z$  轴的能  $z$  轴的夹角。位于  $P(0, w, 15)$  的功率为  $dw/l$  的点光源经反射对  $C$  点能量密度的贡献为

$$\frac{dw \cdot \cos\beta_i}{4\pi PQ_i^2} \cdot \frac{dS}{l} \cdot \frac{1}{d\Sigma} = \frac{dw \cdot \cos\gamma_i}{4\pi PQ_i^2 \cdot l}$$

而  $\cos\gamma_i = 2502 - r^2/60 / \overline{QC}$ 。

2)  $h_B(l), h_C(l)$  的表达式

由 1) 中的分析,长的具有单位能量的线光源位于点  $P(0, w, 15)$  的长  $dw$  的微小线光源段反射到  $C$  点的能量密度为

$$E(w) = \sum_{i=1}^4 f_i(w)/l$$

其中

$$f_i(w) = \begin{cases} \frac{\cos\gamma_i}{4\pi PQ_i^2}, w \in [-l_0/2, w_0^c], & i = 1, 2 \\ 0, & w \in [-30, w_0^c] \end{cases}$$

$$f_i(w) = \begin{cases} \frac{\cos\gamma_i}{4\pi PQ_i^2}, w \in [-3.8119, -1.5609l], & i = 3, 4 \\ 0, & w \in [-3.8119, -1.5609] \end{cases}$$

长  $l$  的具有单位能量的线光源反射到  $C$  点的能量密度为

$$h_C(l) = \int_{-1/2}^{1/2} E(w) dw$$

类似可得  $h_B(l)$  的表达式。相应的反射点方程为

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 1300)y^4 + 1800y^3 + (1498200w - 2340000)y^2 + (4680000w + 810000)y \\ 1350810000w - 1053000000 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3750w}{13(w - 1300)} \\ x = \pm \sqrt{2600y - 900 - y^2} \end{cases}$$

相应的而第二组方程的有两个反射点的范围为

$$w \in [-1.906, -0.7800005].$$

### 3) $d\Sigma$ 的精确计算

将  $P$  点发出的光线经抛物反射面  $Q$  点附近的点  $(x, y, \frac{x^2 + y^2}{60})$  反射到测试屏上点  $(x_1, y_1, 25015)$  视作变换  $(x, y) \rightarrow (x_1, y_1)$ , 从

$$x_1 = x + kC_x$$

$$y_1 = y + kC_y$$

$$25015 = \frac{x^2 + y^2}{60} + kC$$

的第三式解出  $k$ , 代入第一和第二式, 就可得变换表达式, 进而求得其变换行列式

$$J = \det \left| \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)} \right|$$

那么, 就有

$$d\Sigma = |J| dS / \cos \theta$$

由此可得精确表达式, 其中为反射面在  $Q$  点的法线与  $z$  轴的夹角。

北京和广东都有参队得到  $d\Sigma$  的精确表达式, 这是很有创造性的。但是它仅当变换是一对应一时才成立, 而对车灯反射存在多值的情形, 此时  $J = 0$ , 的表达式为广义积分, 计算较为复杂。所以他们在实际计算时, 并未真正用它。

## 6 模型的求解

建立了的光线跟踪模型或反射点轨迹积分模型后, 对给定的可以用数值模拟或积分的方法求得。应具备下列性质

$$h_B(l) = \begin{cases} 0, & 0 < l < l_B = 2|w_0^B| \\ \uparrow, & l_B \leq l \leq l'_B \\ \downarrow, & l'_B < l \leq l_0 \end{cases}$$

其中  $l_B$  为起亮值,  $l_B$  为最大值点,  $l_0$  为考察的最大范围, 例如取为  $20\text{mm}$ 。  $h_C(l)$  也有类似的性质, 但起亮值和最大值点均相应地增大。数值求解  $h_B(l) = 2h_C(l)$ , 记其解为  $l = l_*$ , 再求出  $l'_B, l'_C$ , 不难看出  $l'_B < l'_C$  且  $l_*$  落在  $(l'_B, l'_C)$  之中。

令  $w_* = 1/h_C(l_*) = 2/h_B(l_*)$ , 可以证明  $w_*$  即为问题之最优值。事实上, 对可行域中任一  $(l, w)$ , 当  $l \geq l_*$  有  $w > 2H/h_B(l) > 2H/h_B(l_*) = w_*$  (用到  $l \geq l_*$  时  $h_B \downarrow$ )。当  $l$

$< l_*$ , 有  $w \geq H/h_c(l) > H/h_c(l_*) = w_*$ , (用到  $l < l_*$  时  $h_c \uparrow$ ) 这就证明了  $w_*$  的确是  
最小值。

$l_*$  的数值结果约为  $4\text{mm}$ 。例如用第 5 节的反射点轨迹积分模型, 用 2) 中的方法近似  
 $d\Sigma$ , 最优灯丝长度为  $3.89\text{mm}$ 。

利用反射向量的公式, 不难计算出灯丝上任一点光源经反射面上任一点反射到测试屏  
上点的位置。遍历等丝上所有的点光源和反射面上所有的反射点, 并检验光线是否被反射面  
本身遮挡, 就可得到测试屏上反射光的亮区。

## 7 其他模型和方法

在各参赛队的论文中出现了许多不同的模型和不同的方法。这充分显示出广大学生极  
其活跃的思维和创造精神。在他们提出的各种模型和方法中有一些是相当完美的, 另外一些  
虽有不同程度的缺陷, 但不乏独到之处。

有些参赛队采用光线跟踪模型, 用计算反射到  $B, C$  两点各自领域中中的光线条数来决定  
领域中接受到的反射光的功率。考虑到均匀分布的光线由于反射点距离和反射方向的不同,  
因而具有不同的反射功率, 他们巧妙地改变光线的分布, 使每条光线反射的能量基本相同,  
大大地减少了数值模拟的误差。

有些参赛队采用逆向思维的方式, 注意到反射光线光程的可逆性, 他们在跟踪光线或分  
析反射点轨迹时, 不是从光源上的点发出光线, 而是从测试屏上的  $B, C$  点出发考虑问题。这  
一方法, 在某些情况下可简化问题, 减少计算量。

有些参赛队将光线跟踪法和分析反射点轨迹的方法结合起来, 他们将  $B, C$  两点处的反  
射光功率之比视作能从线光源上任何点发射的能反射到这两点的光线数总和之比, 于是将  
问题归结为反射面上可将光源反射到  $B$  点和  $C$  点的反射点的轨迹的测度之比。此法虽有忽  
略反射点不同反射的能量也不同这一重要性质的缺陷, 但想法还是非常巧妙的。

## 参考文献:

- [1] 苏步青等. 空间解析几何 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984
- [2] 章志鸣等. 光学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1994
- [3] 陈大华. 现代光源基础 [M]. 北京: 学林出版社, 1996

## The Mathematical Model and Numerical Computation of Optimal Design for Linear Headlight Source

TAN Yong-ji