

第十一届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第十一届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：2089

参赛队员（签名）：

队员 1：郭璟

队员 2：闵心怡

队员 3：管世源

参赛队教练员（签名）： 杨鹏辉

参赛队伍组别（例如本科组）：本科组

第十一届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）： 2089

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2018 年第十一届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目 关于沙丁鱼躲避天敌运动规律的研究

关 键 词 三元定位模型 位置迭代模型 三角网络重心模型

摘 要：

本文探讨了沙丁鱼群受到天敌威胁时，收到同伴警告信号而运动的应激行为。根据三元定位模型，位置迭代模型，三角网络重心模型,我们对鱼群的运动规律进行了深入研究。

针对问题，我们将其细分为三个阶段。分别是海豚发现鱼群阶段，鱼群稳定阶段，鱼群非稳定阶段。

在第一阶段，我们建立三元定位模型，研究海豚的回声定位系统，了解海豚的捕食行为原理，发现其捕食特征与定位机制。另外在远距离时，建立二元侧向模型，这时海豚的回声定位只能判断大体积鱼群的位置，对个体单位的定位效果较差。在此前提下探究沙丁鱼躲避海豚捕食的原理。

了解海豚的捕食机理后，在第二阶段建立位置迭代模型，我们将沙丁鱼群划分为稳定与非稳定状态。从稳定状态着手确定游动的四原则：惯性、靠近、对齐和规避。过渡到非稳定状态后，引入逃逸和同伴警告，结合个体鱼对它们倾向的权重，确定出个体鱼的移动方向。在一个步长周期，可以迭代出鱼在遭受攻击时刻逃逸的位置坐标。

针对第三阶段我们建立三角网络重心模型，鱼在满足上述逃逸位置坐标条件的同时，会由于本能向鱼群重心逃离，因此我们建立模型，采用加权平均法来计算。因为个体鱼物理性质存在差异，所以我们引入群体离散度，曲率和临近点差异三项特征因子来确定重心坐标。得出沙丁鱼在遭受海豚攻击时的运动规律：保持与同伴相同速率的基础上无碰撞的向重心聚群。

参赛队号： 2089

参赛密码 _____
(由组委会填写)

所选题目： A 题

Abstract

The article discusses that the sardine group moves by Stress behavior when they were threatened by enemies and received warning signals from companions.

According to Three-element positioning model, location iteration model, triangle network center of gravity model, we conduct further research for the movement of fish group.

For the problem, we subdivide it into three stages. They are the stages that the dolphins find the fish group, the stable stage of fish group, and the unstable stage of fish group.

In the first stage, we build the three-element positioning model, and we study the echolocation system of dolphins, learn about dolphin hunting behavior and find its predation characteristic and localization mechanism. At a distance, we build the binary lateral model, the echo-location of dolphins can only determine the position of large fish populations, but the localization effect of individual unit is poor. Under the premise, we explore the principle of sardines escaping from dolphin predation.

After understanding the dolphin's predation mechanism,. we build the position iteration model for the second stage, we divide the sardine group into stable and unstable state. The four principles of swimming are determined from a stable state: inertia, proximity, alignment and avoidance. When the sardine group is in an unstable state, combined with the weight of individual fish to their tendency, the movement direction of individual fish was determined. In a step cycle, we can iterate over the position coordinates of the fish escaping at the time of the attack.

For the third stage, we establish the triangle network center of gravity model. The fish will escape from the center of gravity by instinct, while the fish meets the above escape position coordinate condition. So we build a model, using the weighted average method to calculate. Because of the differences in the physical properties of individual fish, we introduce the group dispersion degree, the curvature and the adjacent point difference three characteristic factors to determine the center of gravity coordinates. We found the movement of the sardines: Sardines will cluster together on the basis of maintaining at the same rate as the peers when they are attacked by dolphins.

Keywords: Three-element positioning model Location iteration model
Triangle network center of gravity model

目录

一、问题的重述	2
1.1 背景介绍	2
1.1.1 总背景介绍	2
1.1.2 研究的意义	2
1.2 需要解决的问题	2
二、问题的分析	2
三、模型的假设	3
四、名词解释与符号说明	3
4.1 名词解释	3
4.2 符号说明	4
五、模型的建立与求解	5
5.1 对问题的分析	5
5.2 海豚回声定位模型	5
5.2.1 模型的分析	5
5.2.2 模型的建立与求解	5
5.2.3 模型的结论	6
5.3 鱼群在稳定状态下的模型	6
5.3.1 问题的分析	6
5.3.2 模型的建立	7
5.4 鱼群在非稳定状态下的模型	11
5.4.1 非稳定状态下的运动规则	11
5.3.2 三类鱼的运动位置方程求解	12
5.3.3 趋向群体重心移动的模型	14
5.4 问题的结论	17
六、模型的误差分析和优缺点	18
6.1 误差分析	18
6.2 模型的优缺点	18
6.2.1 模型的优点	18
6.2.2 模型的缺点	18
七、模型的优化与推广	19
7.1 模型的优化	19
7.1.1 针对运动规律模型	19
7.1.2 针对三角网络重心模型	20
7.2 模型的推广	20
八、参考文献	21

一、问题的重述

1.1 背景介绍

1.1.1 总背景介绍

在丰富的海洋世界中，存在着各种各样的生物，他们构成一系列的食物链和食物网，通过层层捕食，来维持海洋生态圈的稳定。沙丁鱼群作为深海中最大的鱼群，自然成为海豚等大型食肉动物的美食。每到洋流来袭时，会给沙丁鱼群带来丰富的浮游生物，迫使沙丁鱼群从安全的深海区域游向危险的浅海区域觅食，而此时，也正是海豚捕食沙丁鱼群的好时机。

数以百万记的沙丁鱼以聚成大群的方式来对抗海豚的捕食。由于水下光线较暗，所以在距离较远时，海豚通过超声波回声定位的方法来判断鱼群的整体位置。鱼群的行动是有协调性的，在没有外部威胁或障碍物时，鱼群常常会聚成接近球形的形态。而当海豚接触甚至冲进鱼群，鱼群则会进行协同的躲避，然后再聚成一团。如此行为来降低自己被海豚捕食的概率。

1.1.2 研究的意义

自然几亿年的不断演变，使得每个生物体都找到了最适合自己的生存方式，捕食者与被捕食者数量的相互稳定也是生态系统稳定的基础。作为捕食者，在捕食时有着自己独特的方式，同时，被捕食者在遭遇捕食时，也会采取一系列的行为运动来保护自己。本文通过研究分析沙丁鱼群在遇到一条海豚捕食时的运动规律，我们可以从中得到鱼群运动的独特方式，提取大自然的智慧去运用到人类生活中的各个方面。

1.2 需要解决的问题

请你建立合理的数学模型来描述沙丁鱼群在遇到一条海豚捕食时的运动规律。

二、问题的分析

针对沙丁鱼在被海豚攻击时的运动规律求解，我们将问题细分为如下四步。

第一步，我们了解海豚声呐的回声机制。海豚在由于水下光线很暗，海豚只能使用回声定位方法来判断鱼群的整体位置。通过建立海豚的回声定位模型，了解到海豚的捕食行为原理，发现其捕食特征，从而探究沙丁鱼躲避海豚捕食的原理。

第二步，开始，未受到海豚入侵时的平衡状态，个体鱼的运动规律遵循惯性规则，靠近规则，对齐规则，无碰撞规则。并且个体鱼的在游动时可以感受到一定范围内的同伴的位置，游动方向和速度。个体鱼的运动方向由四个规则加权决定，我们可以对每一时刻的方向方程进行迭代，如此对沙丁鱼的运动状态更新。

第三步，引入海豚，模型处于非平衡状态。海豚游向最近的个体鱼，靠近个体鱼感知范围内时个体鱼逃跑并将信号传递，接收到的鱼也产生避险意识。离散方向为感知到危险的鱼的平均离散方向。此时鱼迭代方程权重因子增加。使用新方程得出新位置。

第四步，通过上述步骤我们推知个体鱼的位置方程。但是鱼群的最终趋势是向重心移动，鱼的位置仍会进一步调整。我们首先用不同鱼的位置权重得出重心的表达式，但是鱼的个体存在物理性质的差异，因此我们引入离散度，曲率和邻近度差异对模型重心方程加以限制。模拟出鱼群的总体运动状态。

三、模型的假设

1.在定位个体沙丁鱼时，我们假设沙丁鱼在信号接收感知方面都是一样的。即所有鱼的感知能力相同，物理行为不受外界其他行为打扰，行为趋同。若是遇到障碍物会自动规避。

2.我们假设沙丁鱼群在未遭受攻击时处于信息交互而且内部稳定的状态，在遭受海豚攻击后，在攻击范围内的鱼第一反应并向同伴传递信息，同伴会迅速反应并继续传递信息。

3.我们在建立位置权重向量时，只建立了 x 和 y 两个方向上的方程。虽然海洋对于沙丁鱼近乎是一个广袤的三维平面，但是三维坐标系的选取会使计算复杂。为简便计算我们使用了二维坐标。

四、名词解释与符号说明

4.1 名词解释

1.海豚回声定位模型

典型的回声定位信号是海豚在觅食的时候产生的，具有短脉冲、高强度、高指向性的特点，可以用来探测目标的距离、方位和种类。海豚估计目标的距离依靠发射和接收回声定位信号的时间差。从水声定原理来看，方位估计通常有三种方式，分别是有指向性的发射和有指向性的接收，有指向性的发射和无指向性的接收，无指向性的发射和有指向性的接收。海豚的发射信号具有一定的指向性，海豚用双内耳来接收信号，也具有一定的方位分辨能力，方位估计精度取决于双耳的距离。

2.个体鱼

个体鱼是一个自驱动的个体，形状大小形同，具有一定的感知能力，感知范围是以其质心为原点的半径为 R 的圆形区域，且它能感知这一区域内其他个体鱼的所有动态信息（包括速度大小和方向有没有发出告警信号等）。

3.通信机制

当 A_i 的位置坐标发生变化后， A_i 立即更新其通信范围内的通信对象；能及时通知到所有通信对象，所有通信对象能将它们的位置、运动等信息传递给 A_i 。通过 A_i 与通信对象之间的通信，实现个体鱼在群体中的局部交互。

4.局内交互

鱼在群体中排列十分紧密，但有时拥挤会造成身体遮挡了部分感知范围但是离散的鱼却能组合成连贯的鱼群结构，实现全局的统一。我们假设每条鱼能够与其他所有个体进行交互，获取全局信息，那么所有鱼都将集聚在鱼群的重心，而不是一种均匀的分布。因而可以推断在鱼群中只存在局部交互。局部的交互，经过反复协调，最终达成全局的和谐结构。

5.三角网络重心模型

点集的三角剖分，是对数值分析以及图形学的一种预处理技术，本文使用的是Delaunay三角剖分，具有最接近规则化的唯一性。我们利用模型划分鱼群并确立权重。

4.2 符号说明

序号	符号	符号含义
1	A_i	鱼群中的个体鱼
2	R	个体鱼感知的范围半径
3	P_{1t}	本周期中 A 的游动方向
4	P_{2t}	当前个体到邻居平均位置的方向
6	P_{3t}	邻居的平均方向
7	P_{4t}	小于碰撞距离的邻居到当前个体方向的平均值
9	λ	个体鱼决策方向的权重值
10	P_{t+1}	下一个步长周期个体鱼的运动方向
11	P_{5t}	为躲避威胁以最快方式逃逸的方向
12	P_{6t}	个体鱼收到其他个体发出警告信号的平均方向
13	γ	避免碰撞的最小距离
14	R_0	海豚威胁范围
15	\bar{x}	鱼群重心位置的 x 坐标
16	\bar{y}	鱼群重心位置的 y 坐标
17	$\Delta x(t)$	$\Delta x(t)$ 为坐标 x 邻近点的差异
18	$\Delta y(t)$	$\Delta y(t)$ 为坐标 x 邻近点的差异

五、模型的建立与求解

5.1 对问题的分析

首先海豚捕食沙丁鱼，我们需要对海豚的回声定位模型做出基本的阐述，由此才可以确定鱼群状态。随后，我们把鱼群的整体状态分为稳定状态与非稳定状态。鱼群运动时遵循惯性、靠近、对齐和规避四项原则。在非稳定状态时即受到攻击时，鱼群会由原来的稳定有限自由聚集状态变为小区域无序状态而整体向中心移动。运动时的规律增加警告与逃逸两项。由这六项的不同权重可以得出个体鱼的运动方程。随后重心的方程三角网络模型带入不同鱼的位置可求解。最终得出每条鱼趋向重心变动的运动原则。

5.2 海豚回声定位模型

5.2.1 模型的分析

海豚在由于水下光线很暗，海豚只能使用回声定位方法来判断鱼群的整体位置。通过建立海豚的回声定位模型，了解到海豚的捕食行为原理，发现其捕食特征，从而探究沙丁鱼躲避海豚捕食的原理。

5.2.2 模型的建立与求解

典型的回声定位信号是海豚在觅食的时候产生的，具有短脉冲、高强度、高指向性的特点，可以用来探测目标的距离、方位和种类。海豚估计目标的距离依靠发射和接收回声定位信号的时间差。从水声定原理来看，方位估计通常有三种方式，有指向性的发射和有指向性的接收，有指向性的发射和无指向性的接收，无指向性的发射和有指向性的接收。海豚的发射信号具有一定的指向性，海豚用双内耳来接收信号，也具有一定的方位分辨能力，方位估计精度取决于双耳的距离。

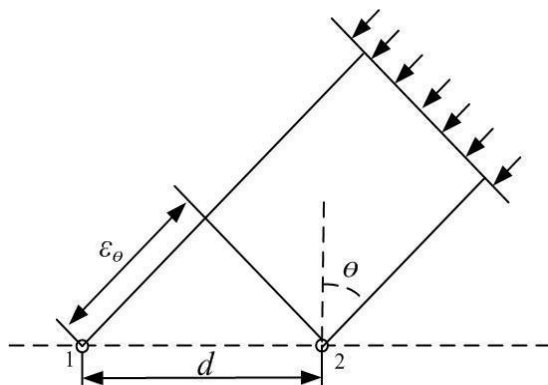


图1 远场时的二元测向模型

在中远场时，通常假设声波以平面波方式传播，如图 2. 2 所示[1]。依据二元测向原理，目标方位可由下式近似估计：

$$\theta = \arcsin \frac{c\tau_{12}}{d}$$

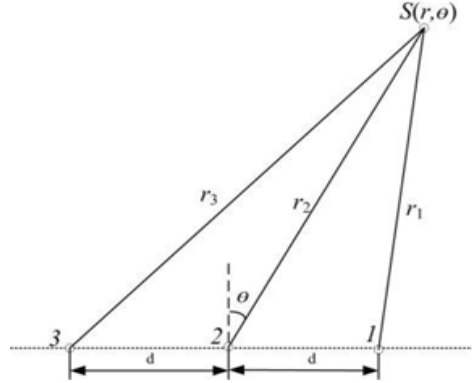


图 2 三元定位模型

在近场时，假设目标是点源，则声波按球面波方式传播，如图 2 所示，假设 1、2 和 3 分别为三个子阵的声中心，目标方位角是线阵声中心处法线与 r_2 的夹角，用 c 表示声速，目标到线阵的距离，则目标的声信号到达各个阵元的时延差如下所示：[2]

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \frac{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr \sin \theta} - r}{c} \\ \tau_{23} &= \frac{r - \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \sin \theta}}{c} \\ \tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23} &= \frac{\sqrt{r^2 + d^2 + 2dr \sin \theta} - \sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \sin \theta}}{c} \end{aligned}$$

根据以上的三个等式可推导出目标方位的精确表达式：

$$\theta_{correct} = \arcsin \frac{cd^2\tau_{13} - c^3\tau_{12}\tau_{23}\tau_{13}}{2d^3 - c^2d(\tau_{23}^2 + \tau_{12}^2)}$$

5.2.3 模型的结论

在距离较远时，根据二元侧向模型，海豚的回声定位只能判断大体积鱼群的位置，对个体单位的定位效果较差。在距离较近时，根据三元定位模型，海豚的回声定位能精确到定位到个体。

5.3 鱼群在稳定状态下的模型

5.3.1 问题的分析

个体行为是构成群体行为的基础，在一个集群中所有个体行为的匹配结合就映射一

种集群的运动行为。为了研究沙丁鱼群的集群运动规律就必须先研究清楚每个沙丁鱼个体的运动行为和由个体构成的局部的运动行为。因此，我们采用自上而下的建模方法，将模型分为三个部门：第一部分是分析个体鱼（设为 A_1 、 $A_2 \cdots A_n$ ）的模型。假设每条鱼都满足设定的游动规则，模型具有普遍的适用性。第二部分是通过分析个体鱼之间的相互作用（例如信息交互）从而形成局部的行为。第三部分是分析局部行为扩大到整个鱼群的运动行为模型。

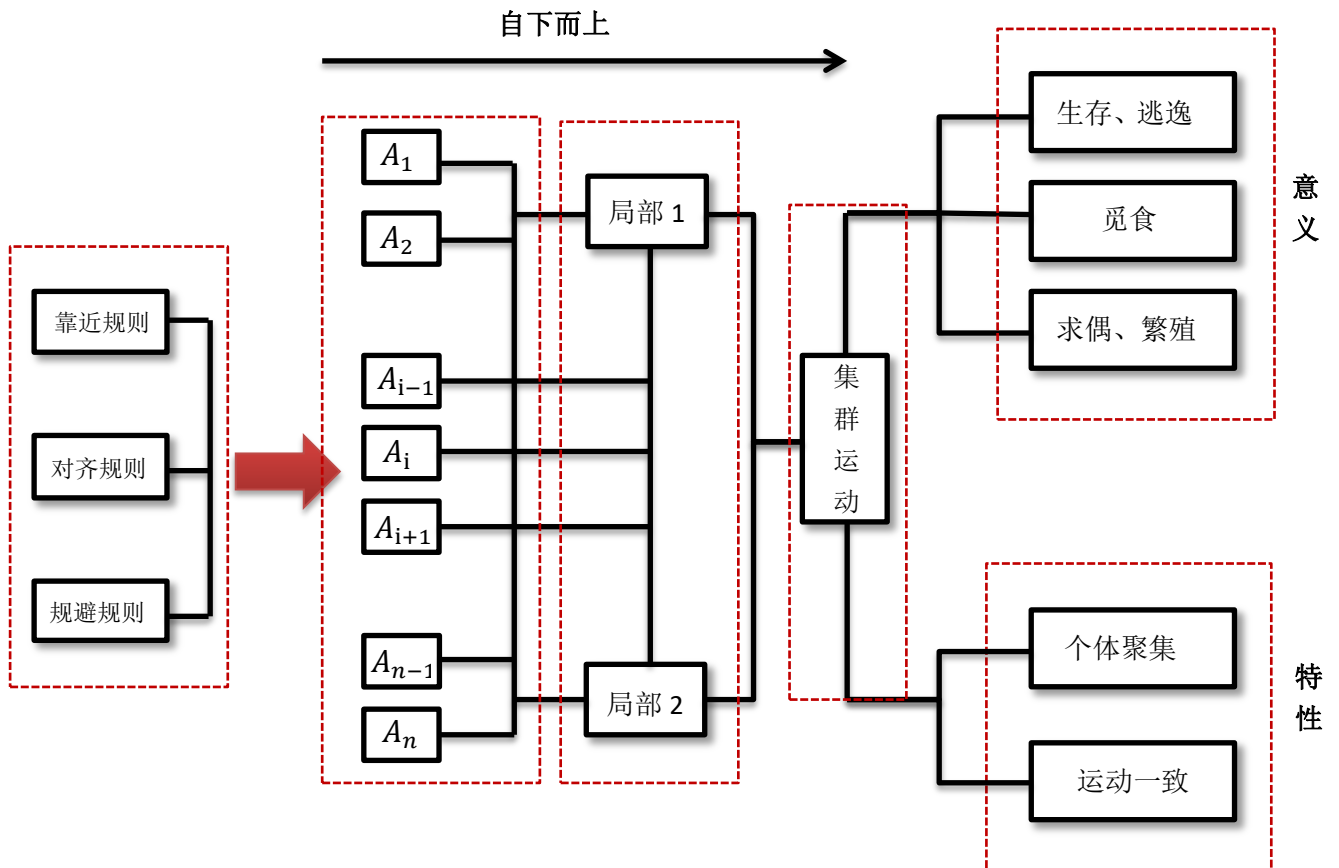


图 3 个体到集群的行为关系图

5.3.2 模型的建立

1. 个体鱼的游动规则[5]

我们这里假设每一个体鱼是一个自驱动的个体，形状大小形同，具有一定的感知能力，感知范围是以其质心为原点的半径为 R 的圆形区域，且它能感知这一区域内其他个体鱼的所有动态信息（包括速度大小和方向有没有发出告警信号等）。

(1) 靠近规则：为了不脱离鱼群，需要尽量靠近邻居的中心，如图 a

(2) 对齐规则：为了保持鱼群运动的连贯性，每个个体鱼尽量与邻居的方向一致，如图 b

(3) 规避规则：为了保持鱼群运动的一致性，个体鱼运动尽量避免碰撞，如图 c

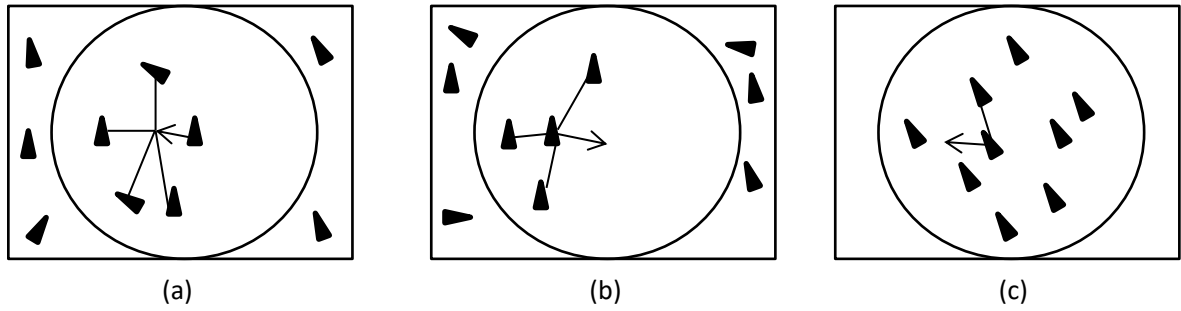


图 4 运动规则描述示意图

2.位置迭代模型

每条鱼都要以上遵守三条规则（尽量靠近邻居的中心，尽量与邻居的方向一致，尽量避免碰撞）游动，这三条规则对改变鱼下一时刻游动方向起作用。但实际上，鱼的游动方向不可能立刻改变，还表现了某种惯性的作用。假设每一个体鱼在 t 时刻具有相同大小的速度，而运动速度的方向是任意的或者随机的，并且位置坐标在给定的平面内是已知的，建立个体鱼的运动模型就是要研究个体鱼在下一个时刻即 $t+1$ （ 1 表示一个时间步长）时刻运动的方向和其处于坐标平面内的位置。

取个体鱼 A_1 研究其运动，根据这四个方向的平均方向作为鱼下一时刻游动的方向。由于方向就是与水平方向的夹角，因此仅仅需要对这四个方向与水平方向的夹角进行平均，即为下一时刻该鱼的游动方向。用公式表示为：

$$P_{t+1} = \frac{(P_{1t} + P_{2t} + P_{3t} + P_{4t})}{4}$$

其中 P_{t+1} 为下个周期 A_1 的游动方向， P_{1t} 为周期 t 中 A_1 的游动方向， P_{2t} 为周期 t 当前个体到邻居平均位置的方向， P_{3t} 为邻居的平均方向， P_{4t} 为小于碰撞距离的邻居到当前个体方向的平均值：（见图 5）

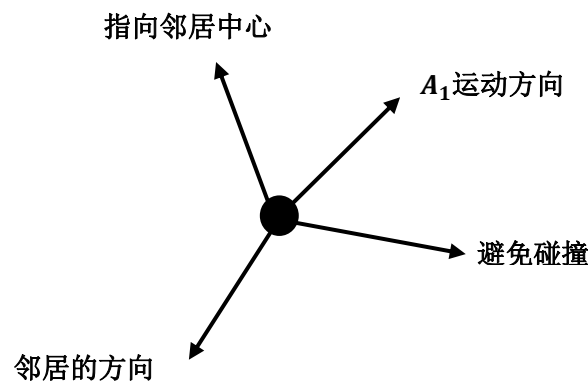


图 5 A_1 下个周期的游动方向确定

考虑到各规则对鱼的影响力不同，我们还需要对各个方向加权，取加权平均值，权重的大小可以根据偏好确定。用公式表示为：

$$P_{t+1} = \lambda_1 P_{1t} + \lambda_2 P_{2t} + \lambda_3 P_{3t} + \lambda_4 P_{4t}$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$

下面将具体分析四个规则所代表的四个方向的实现方法：

(1) 惯性规则： P_{1t} 为本周期 t 中 A_1 的游动方向，本周期内的运动方向上一时刻的运动方向所确定，即 $P_{1t} = P_{t-1}$ 。

(2) 靠近规则：每个个体都有向邻居中心靠拢的特性，邻居的中心为观察范围内各个体位置的平均值。假设当前 A_1 所处的位置为 $D_0(x_0, y_0)$ ， $D_t(x_t, y_t)$ 为当前各个邻居的位置，则邻居平均位置 $\bar{D}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum D_t(x_t, y_t)}{|N|} (i \in N)$ ， P_{2t} 为周期 t 当前个体到邻居平均位置的方向，则

$$P_{2t} = \arctan \frac{\bar{y} - y_0}{\bar{x} - x_0}$$

(3) 对齐规则：个体会和它的邻居朝同一个方向游动。公式表示为：

$$P_{3t} = \frac{\sum P_i}{|N|} (|D_0 D_i| \leq R)$$

其中 P_t 为各个邻居的方向， N 为邻居的个数， P_{3t} 为邻居的平均方向。

(4) 规避规则：当个体和它的邻居靠的太近时（距离小于碰撞距离），应自动避开。公式表示为：

$$P_{4t} = \frac{\sum \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}}{M} (|D_0 D_i| \leq r)$$

其中 P_{4t} 为小于碰撞距离的邻居到当前个体方向的平均值， M 为邻居中小于碰撞距离的邻居个数。

最后根据以上计算可得出个体 A_1 的位置迭代规则为：

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + v \cdot \cos P_t \\ y_{t+1} = y_t + v \cdot \sin P_t \end{cases}$$

此时我们用 JAVA 模型模拟出稳定状态下的鱼群状态如下：

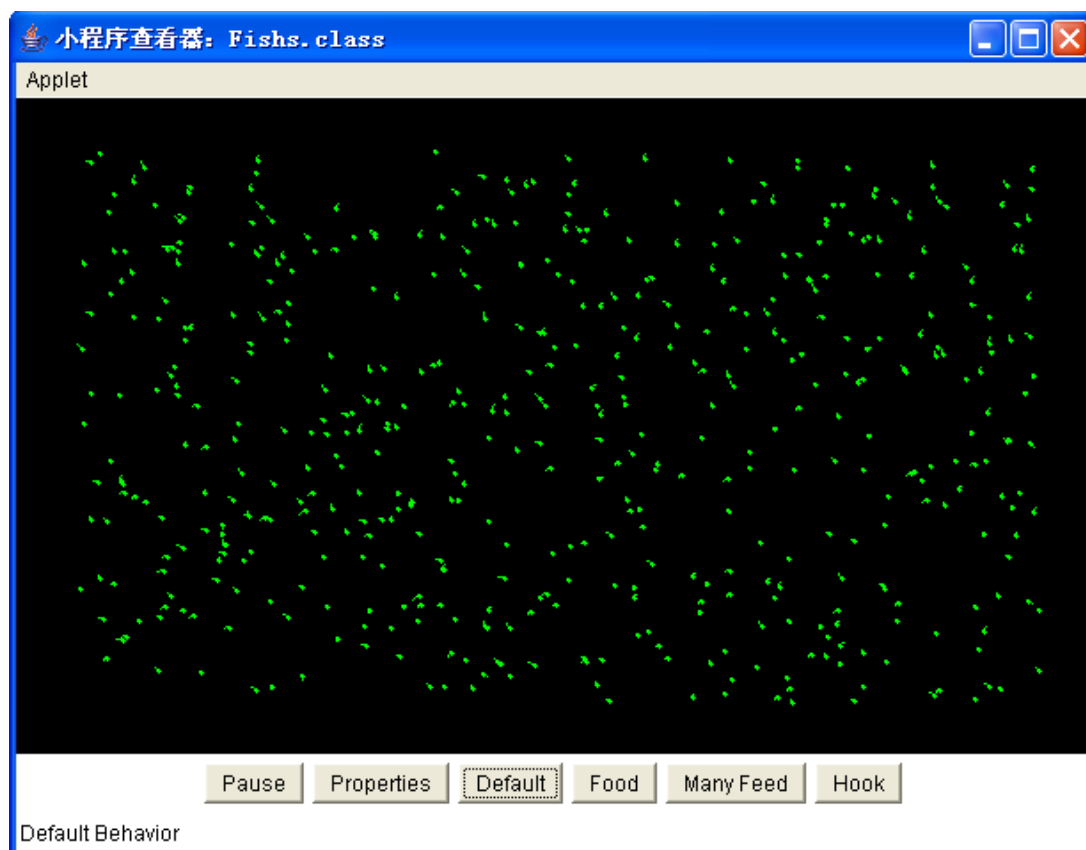


图6 稳定状态下鱼群运动状态模拟

3. 局部运动模型

(1) 个体间的感知

感知问题前已述及，个体鱼在鱼群中相互感知，二维空间内，感知范围为半径为 R 的圆面，通过个体鱼之间的通信，传递位置和运动信息以及其他信号。

(2) 通信机制

通信范围：与感知范围一致。

通信对象：位于 A_i 的通信范围内的所有个体鱼。

通信过程：当 A_i 的位置坐标发生变化后， A_i 立即更新其通信范围内的通信对象；能及时通知到所有通信对象，所有通信对象能将它们的位置、运动等信息传递给 A_i 。通过 A_i 与通信对象之间的通信，实现个体鱼在群体中的局部交互。

(3) 鱼群的局部交互

鱼在群体中排列十分紧密，但有时拥挤会造成身体遮挡了部分感知范围但是离散的鱼却能组合成连贯的鱼群结构，实现全局的统一。但是，如果假设每条鱼能够与其他所有个体进行交互，获取全局信息，那么所有鱼都将集聚在鱼群的重心，而不是一种均匀的分布。因而可以推断在鱼群中只存在局部交互。局部的交互，经过反复协调，最终达成全局的和谐结构。

鱼群运动是一个和谐的整体，而局部与局部是在整体中相交互联的。而且个体之间的交互和局部之间的交互都是在不断地更新中，所以鱼群的整体运动是建立在局部交互的基础上。

4. 鱼群运动模型

根据前面从个体到局部的分析，能过根据个体鱼运动模型求解出在给定的初始状态下，每个个体鱼在下一时刻的运动方向，其所有的位置也能通过迭代给出。按照上述的方法，所有鱼群中的个体区域同步运动，最后形成鱼群的一种聚群运动。

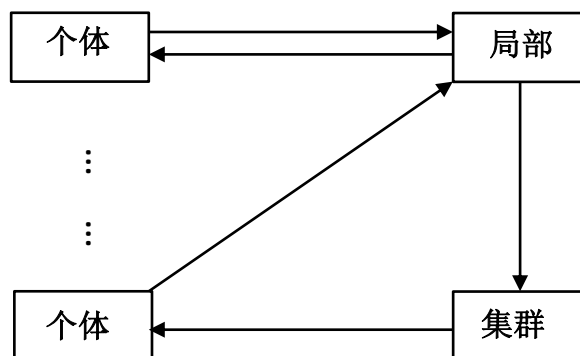


图 7 个体、局部与集群之间的关系图

5.4 鱼群在非稳定状态下的模型

5.4.1 非稳定状态下的运动规则

1. 鱼群分类情况

对问题的分析之后，我们认为海豚的在攻击时存在它的攻击威胁范围 R_0 ，假设在它的威胁范围之内的沙丁鱼都可以感受到威胁存在，并且在移动时向同伴发出信号，产生沙丁鱼群内部的交互。此时，鱼群之中存在三类鱼。第一类：在海豚的攻击范围之内，收到威胁并在其感知范围内发出警告交互信号。第二类：不但在攻击范围之内但是可以收到第一类鱼的信号并发生反应将信号传递下去。第三类鱼：既不在攻击范围内也无法收到信号，具体表现如下：

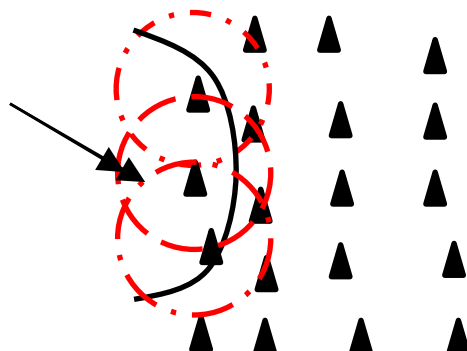


图 8 危险信号的传递

鱼群在移动时遵循以下三个基本原则：

- 1.避免碰撞：避免和临近的鱼群个体接触。
- 2.速度一致：和临近的个体大致上以相同的速度移动。
- 3.向重心聚集：向所在群体的重心位置移动。

考虑到海豚的位置移动受到惯性的影响会游向最接近的一条鱼，方向可在三维空间内表示为 $P_{t+1} = \lambda_1 P_{1t} + \lambda_2 P_{2t}$ ，其中 $P_{1t} = P_{t-1}, P_{2t} = \arctan \frac{y_m - y_0}{x_m - y_0}$ ，其位置：

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + v * \cos P_t \\ y_{t+1} = y_t + v * \sin P_t \end{cases}$$

由此得到海豚的位置变动。

5.3.2 三类鱼的运动位置方程求解

1.第一类鱼：结合在稳定状态下的分析，沙丁鱼的运动反方向受六个因素的影响。如图：

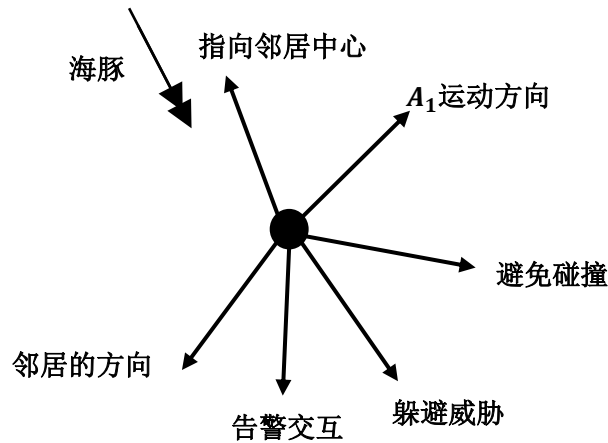


图9 第一类鱼的方向确定

用公式表示为： $P_{t+1} = \lambda_1 P_{1t} + \lambda_2 P_{2t} + \lambda_3 P_{3t} + \lambda_4 P_{4t} + \lambda_5 P_{5t} + \lambda_6 P_{6t}$

其中前四个的含义同图5， P_{5t} 表示个体鱼为了躲避威胁而以最快方式逃逸的方向， P_{6t} 表示个体鱼收到其他个体发出的警告信号的平均方向， $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ 表示鱼在决策时对他们的偏好权重。

其中有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1$ 。

2.第二类鱼：他们的下一时刻运动方向收到五个因素影响，如图：

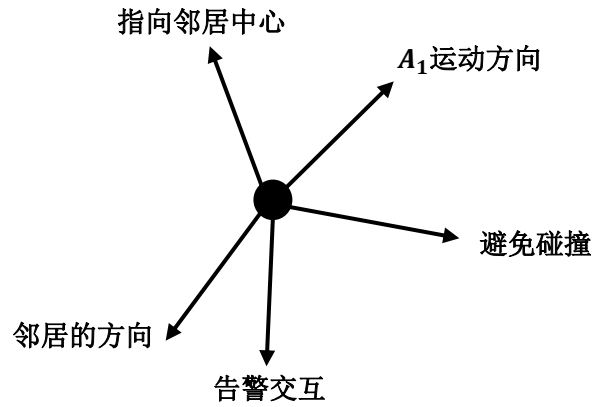


图 10 第二类鱼的方向确定

用公式表示为： $P_{t+1} = \lambda_1 P_{1t} + \lambda_2 P_{2t} + \lambda_3 P_{3t} + \lambda_4 P_{4t} + \lambda_6 P_{6t}$ ，符号含义同图 9，其中有 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1$ 。

3.第三类鱼：他们的运动方向只受到图 5 中的四个因素影响。我们运用参数解算算法求解位置迭代模型。个体鱼在下一时刻的运动方向的确定：

$$P_{5t} = \arctan \frac{x_0 - y_s}{y_0 - y_s}$$

其中 (x_s, y_s) 为海豚当前的位置坐标。

$$P_{6t} = \frac{\sum \arctan \frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}}{I} (i \in I)$$

其中 (x_i, y_i) 表示感知范围第 i 条个体鱼的位置坐标，i 为该个体鱼受其他个体发出的警告信号的个数。

则个体鱼在下一时刻的位置坐标确定：

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + v * \cos P_t \\ y_{t+1} = y_t + v * \sin P_t \end{cases}$$

用 JAVA 采用随机数表模拟得到下图：

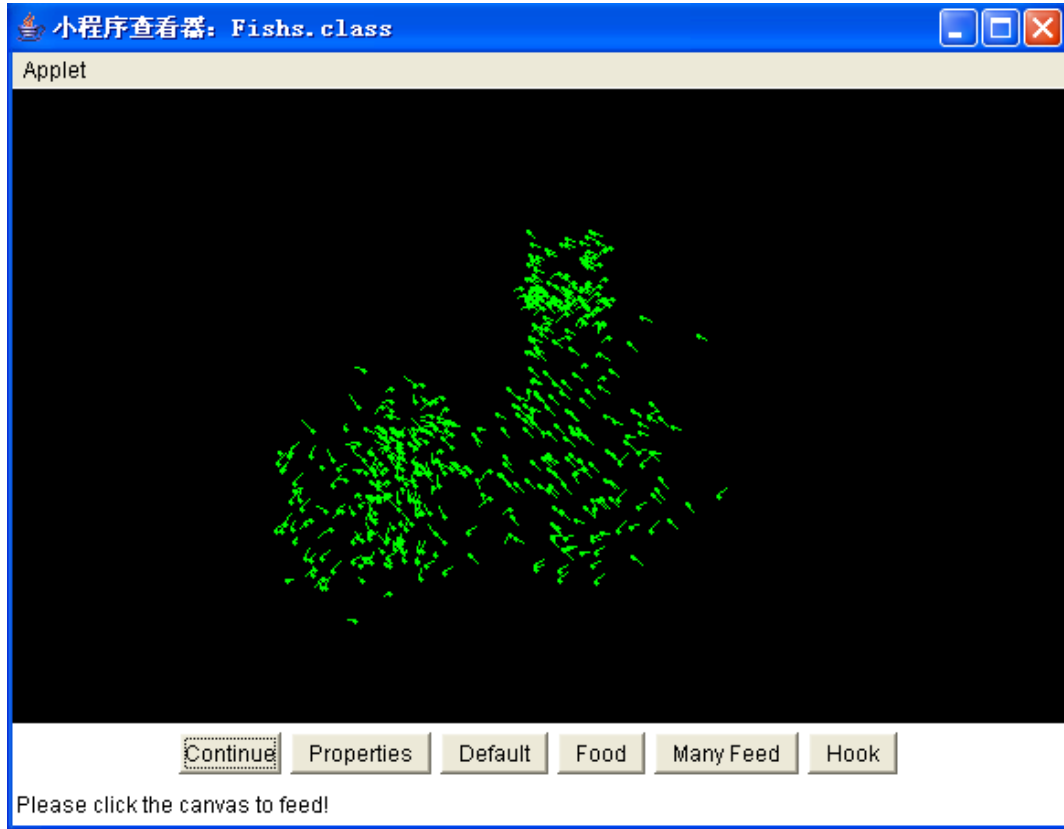


图 11 非稳定状态下鱼群运动状态模拟

5.3.3 趋向群体重心移动模型

大量鱼群沙丁鱼群在聚集成群，进行集体觅食或躲避天敌，这是动物在进化中形成的一种生活方式。沙丁鱼探索当前附近的伙伴数量，计算群体的重心位置，然后把新的重心位置的目标函数与当前位置的目标函数比较。如果重心位置的目标函数优于当前位置的目标函数且满足上述三条原则，就会向重心位置移动。

因为在实际中，大量的沙丁鱼在一片海域聚集，即便存在内部信号传递调整，每个区域的鱼的数量也不会完全一样。即每个区域的权重不一样。我们选择加权平均法获取鱼群重心。

1. 三角网络重心模型的构建

对于处于密集区的鱼和疏散区的鱼区别对待，为它分配不同的权值，我们选用改进的加权平均法，基于 Delaunay 三角网络规划方法，对目标鱼群进行三角划分，建立唯一的三角网络，再根据三角网络分配权值计算鱼群重心坐标，则鱼群的重心坐标 $G(\bar{x}, \bar{y})$ 的计算公式为：

$$\begin{cases} \bar{x} = \sum_{i=1}^i (a_i \times x_i) \\ \bar{y} = \sum_{i=1}^i (a_i \times y_i) \end{cases}$$

其中 a_i 为点 (x_i, y_i) 在整个鱼群中的权重因子。 (x_i, y_i) 为上题中所求出的个体鱼的位置坐标。

权重分配方案：

(1) b_1, b_2, \dots, b_n 为鱼群中检测到每条鱼的中心点。

(2) 其中 b_i 点参与组成三角形的个数为 j ，则有 j 条边经过这个点，这 j 条边的平均边长为 c_i 。

(3) 把 c_i 按大小依次排序，并取此序列中 c_i 的最简比值生成序列 E ，将 E 序列从大到小排序后生成权重比例 d_i 。计算权重因子：

$$a_i = d_i / \sum d_i$$

参考文献对沙丁鱼的运动特征做了大量研究，提取了运动参数即速度，加速度，距离等。这些参数受沙丁鱼个体差异影响较大，建立的模型稳定性欠缺，因此我们引入新的特征参数即鱼群离散度，鱼群运动曲率及邻近特征。

鱼群重心代表了鱼群整体的中心位置，即每条鱼最终倾向游去的位置。但是沙丁鱼个体差异导致并不是每条鱼都紧紧团结在群体之中。正常鱼群处于稳定状态下处于有限，自由的聚集状态。而在遭到攻击时会呈现出小区域无序大趋势聚集的状态。因此我们选择方差表示鱼群的离散度：

$$s^2 = [\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2] / n$$

其中 (x_i, y_i) 为某条鱼位置中心点。我们用上题中的位置替代， (\bar{x}, \bar{y}) 为鱼群重心。

鱼群的运动轨迹表述为一系列离散非连续的点，即跟踪的某鱼群 n 帧视频序列图像的运动轨迹可描述为：[7]

$$T = \{x(t), y(t)\}$$

曲率计算公式为：

$$V_{ic}(t) = (\Delta y(t) - \Delta x(t)) / (\Delta y(t) + \Delta x(t))$$

上式中： $\Delta x(t)$ 为坐标 x 邻近点的差异； $\Delta y(t)$ 为坐标 y 临近点间的差异。邻近特征计算公式：

$$k_t = (x'_t y''_t - y'_t x''_t) / ((x'^2_t + y'^2_t)^{3/2})$$

上式中： t 为时间； x'_t 和 x''_t 分别是 x 对 t 的一阶导和二阶导数， y'_t 和 y''_t 分别表示 y 对 t 的一阶和二阶导数。

下图是求取鱼群重心的对比图，菱形代表沙丁鱼，星号为模型所得结果，不论在较密集还是较分散的鱼群之中，方法误差均不大。因此该模型具有可行性。

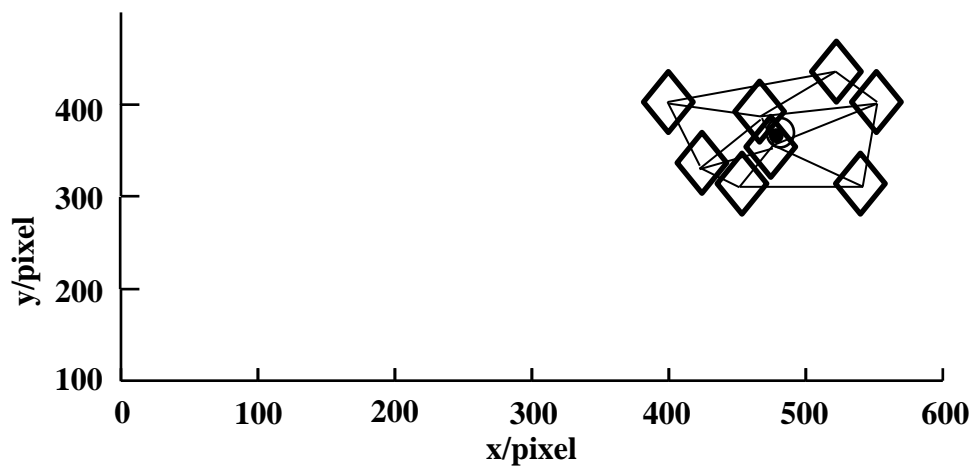


图 12 鱼群密集仿真图

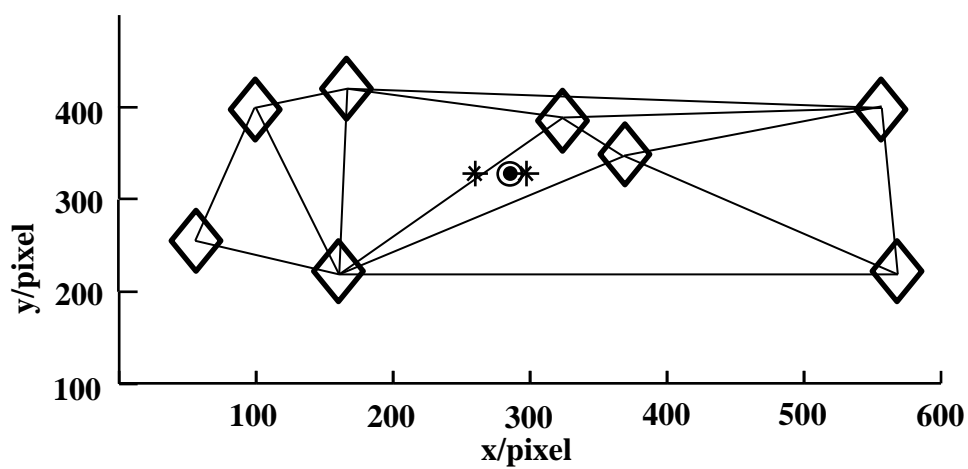


图 13 鱼群疏散仿真图

用 Java 软件模拟得到下图，符合运动趋势。[6]

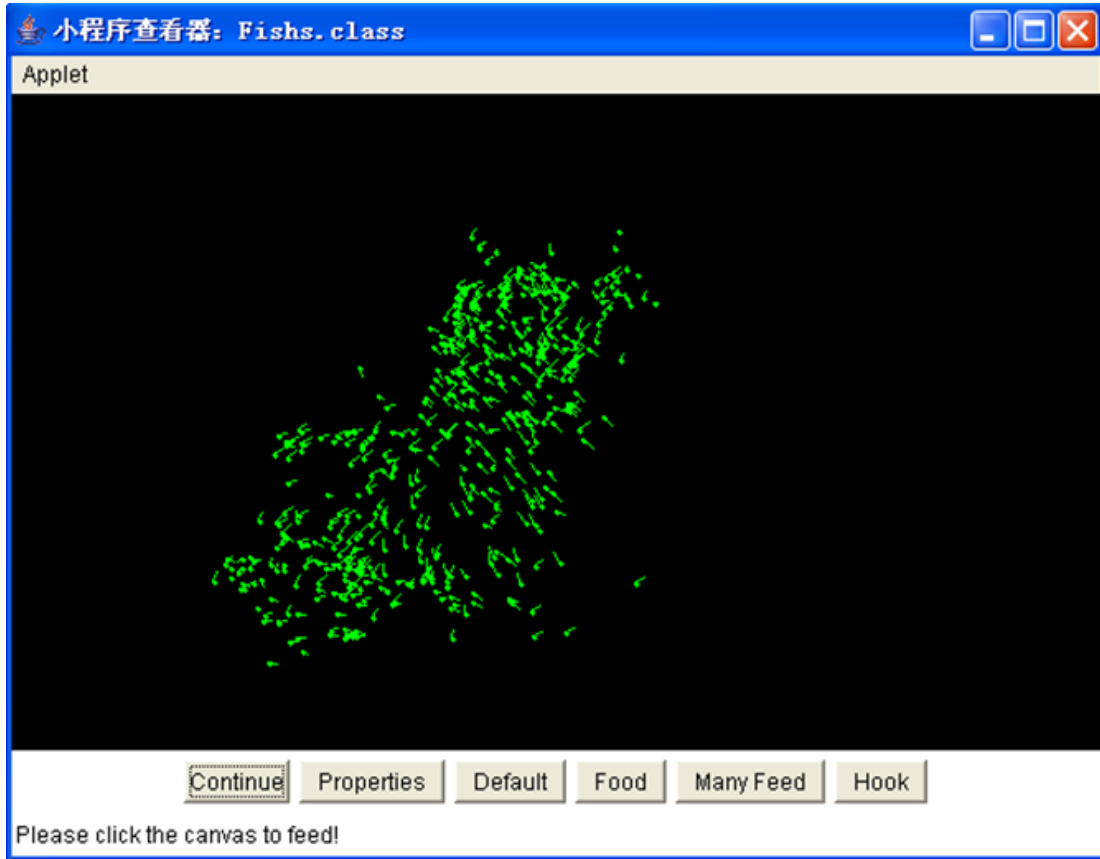


图 14 个体鱼趋向鱼群重心运动模拟

5.4 问题的结论

我们得知，在遭受到海豚的攻击后，沙丁鱼群内部进行信息传导从而产生应激反应。由原本稳定的方程

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + v * \cos P_t \\ y_{t+1} = y_t + v * \sin P_t \end{cases} (1 \leq t \leq 4),$$

变换到：

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + v * \cos P_t \\ y_{t+1} = y_t + v * \sin P_t \end{cases} (1 \leq t \leq 6),$$

其后每一步的移动会逐渐趋向整群沙丁鱼的重心，即一步步通过移动方程：

$$T = \{x(t), y(t)\}$$

$$V_{ic}(t) = \frac{(\Delta y(t) - \Delta x(t))}{(\Delta y(t) + \Delta x(t))}$$

到达重心点 $G(\bar{x}, \bar{y})$ 。即鱼群在逃散时仍然具有聚群行为，不会过度偏离总体，总体鱼群形态调整，所有个体鱼运动时会趋向重心。

六. 模型的误差分析和优缺点

6.1 误差分析

1.针对运动规律模型,我们选取的沙丁鱼鱼群的运动参数,方法上存在一定的误差,但由于鱼群的运动参数和水的波动的影响对获取数据有很大的难度。利用此模型可以在清澈水体中,且干扰因素较少时,快速提取鱼群的运动参数,为掌握鱼类的群体运动特性,尤其是在研究单一因素条件(仅存在海豚捕食)下,鱼群的运动特性提供了方法。但是由于实际环境中的水体大部分呈现水质浑浊、光照强度不均匀、鱼群密度过大等缺陷,海豚的回声定位应当是一个复杂高效的机制,使得实际捕食过程可以顺利进行。模型需要根据不同环境条件下行为参数的变化特点,结合统计方法和人工智能算法,建立自动判断应激的方法。

2.针对重心模型,我们使用上一题已经得出的个体鱼的位置坐标去迭代鱼群的重心坐标来求得鱼群的最终运动倾向。但上一题个体鱼的位置在二维球型平面上的坐标,只含有 x 和 y 轴坐标,方向夹角也只有 \cos 和 \sin ,因此我们在重心的求解上也只能做到二维空间。无法对三维空间推广。这是模型的误差项之一。

6.2 模型的优缺点

6.2.1 模型的优点

1.关于运动规律模型,只需比较目标函数值,对目标函数的性质要求不高;这也就意味着对于数据的要求不高,我们可以定性模拟并用随机数表检验。

2.对初值的要求不高,随机产生或设置为固定值均可,也不需要问题的严格机理模型,甚至不需要问题的精确描述,这使得它的应用范围得以延伸。

3.对参数设定的要求不高,容许范围大;参数的改变具有较大的可适性,可以根据实际问题进行调节。不需要问题的严格机理模型,甚至不需要问题的精确描述,这使得它的应用范围得以延伸。

4.针对三角网络重心模型,我们对传统的重心算法进行了改进,增加了算的高效性和科学性,在原有的加权平均法的基础上,我们选取了离散度,曲率和临近特征作为评价因子。我们用大量随机数模拟带入 JAVA 软件,发现准确率随着数量增大而增大,这对于海中大量沙丁鱼群的特征模拟是具有较大建设意义。

6.2.2 模型的缺点

1.针对运动规律模型,这种函数的收敛性较为缓慢,数据运行处理能力较差,虽然能够得到最优的方程解,但是这种方程解往往会陷入局部最优的问题中,难以推广到全面最优。

2.针对三角网络重心模型,我们令其中 b_i 点参与组成三角形的个数为 j , 则有 j 条边经过这个点,这 j 条边的平均边长为 c_i 。在这个前提下,我们采用的就是规则三角网络模型,

这个模型是连续的。这个区域都是可微的，但是鱼群的离散应该是分散的，区域中任意点落在三角面的顶点、边上或角开内。

七. 模型的优化与推广

7.1 模型的优化

7.1.1 针对运动规律模型

在收到刺激我们假设鱼的物理特性不变。但是实际情景中面对天敌运动状态一定会发生较大改变。一是尽量想临近中心靠近寻求存活机会，二是调整自身平均速度使之尽可能接近附近区域所有单位平均速度。

1.关于第一项，我们的改进步骤如下：

(1) 找出区域内的点；

(2) 求出中心；

(3) 距离中心 d 越大，其加速度 a 越大，方向为个体鱼到中心的方向，求出该点到平均位置的距离和方向：

$$\begin{aligned} v_x &= x - x_0, \quad v_y = y - y_0 \\ a_1 &= \text{MAXA} * \frac{(d_{\text{初}} - d_{\text{末}})}{d} \\ a_{x1} &= x - x_0 \quad a_{y1} = y - y_0 \end{aligned}$$

其中 $d_{\text{初}}$ 表示刚产生加速度的距离值， $d_{\text{末}}$ 表示最小可以靠近的距离值。 x, y 为平均位置， x_0, y_0 为该点位置。

2.关于第二项，对齐方向或调整方向，使速度方向尽可能靠近区域内所有单位的平均速度方向。即提供一个转向速度方向上的加速度。要求：

(1) 找出视觉范围内的单位；

(2) 求出所有单位的平均速度和方向；

(3) 设定加速度的大小和方向。

如果当前速度方向与平均速度方向差别较大，加速度 a 就越大，速度方向为垂直于当前速度与平均速度方向的连线。求出视觉范围内所有单位的平均速度方向：

$$v_x = \frac{\sum v_x}{n}, \quad v_y = \frac{\sum v_y}{n}$$

求出平均速度方向 $v_x v_y$ ，如果与本体速度方向 α 的夹角越大，加速度越大，

$$a_2 = \frac{\text{MAXA} * \alpha}{P_i}$$

方向为垂直于当前速度与平均速度方向的连线。求加速度方向的方法：

求出 $(x - v_y, y + v_x)$ 到 $(x + v_x, y + v_y)$ 的距离 d ，如果 $d > \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$ ，则 $a_2 = (v_y, -v_x)$ ，否则 $a_2 = (-v_y, v_x)$ 。

7.1.2 针对三角网络重心模型

尽管比起传统的重心模型已经做了优化。但是对于本题中的个体鱼不断改变位置，重心模型应该通过多次迭代调整。

设有 i 个个体鱼，根据之前的研究我们知道它们分布在 (x_i, y_i) ，而我们原来求得的重心位于 (\bar{x}, \bar{y}) 。使所有鱼都调整的最小调整量为：

$$C = \sum_{i=1}^n a_i w_i d_i$$

a_i : 个体鱼到重心移动单位质量，单位距离所需的能量。

w_i : 单位鱼到重心需要移动的质量。

d_i : 重心到个体鱼 i 的直线距离。 $d_i = \sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}$

而重心的调整原则为保证 C 最小，即令：

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial x_0} = \sum a_i w_i (x_0 - x_i) / d_i = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y_0} = \sum a_i w_i (y_0 - y_i) / d_i = 0 \end{cases}$$

此时 (\bar{x}, \bar{y}) 的优化解，带入 (x_0, y_0) 求得 (x_0^*, y_0^*)

$$\begin{cases} x_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n a_i w_i x_i / d_i}{\sum_{i=1}^n a_i w_i / d_i} \\ y_0^* = \frac{\sum_{i=1}^n a_i w_i y_i / d_i}{\sum_{i=1}^n a_i w_i / d_i} \end{cases}$$

7.2 模型的推广

1. 针对运动规律模型，将本文中的二维平面环境变为三维的立体空间可以使模型具

有更广泛的适用性，在推广的过程中，运动方向的改变和位置坐标的迭代均在三维空间上的横，纵，竖坐标上进行。可以灵活的运用于仿真领域。

2.针对聚群运动规律，我们假设不存在集中控制和领导者，只是根据个体间简单交互使群体中应激出现协调和适应，可见这种智能的涌现，正是由于请问群体内部存在大量的反馈机制，将规律运用到控制领域，可以建立多样性控制器，对于存在多种作动器的反应系统有很好的借鉴延伸意义。

3.针对三角网络重心模型，规则角网是一种 DEM 表示方法。模型根据区域有限个采样点取得的离散数据，按照优化组合的原则，把这些离散点(各三角形的顶点)连接成相互连续的三角面，在连接时尽可能地使每个三角形为锐角三角形或三边的长度近似相等，将区域划分为相连的角面网格。区域中任意点落在三角面的顶点、边上或角开内。如果点不在顶点上，该点的高程值通常通过线性插值的方法得到，在边上用边的两个顶点的高程值内插，在三角形内的则用个顶点的高程值内插。所以，模型在整个区域内连续但不可微。

三角网数字高程由连续的三角面组成，三角面的形状和大小取决于不规则分布的测点或结点的位置和密度，通过在一个三角形表面对高程数据进行插值，可以估计任何位置的高程值。它能够避免地形平坦时的数据冗余，又能按地形特征(山脊、山谷线等)表示数字高程特征。如计算高程、坡度、坡向、剖面图创建等，可以运用这种模型。

八. 参考文献

- [1] 田坦，刘国枝，孙大军. 声呐技术. 哈尔滨工程大学出版社. 1999.
- [2] 田坦，水下定位与导航技术. 国防工业出版社. 2007.
- [3].姜启源，谢金星，叶俊，《数学模型》，北京：高等教育出版社，2003
- [4].周义仓，赫良，《数学建模实验》，西安：西安交通大学，2007
- [5].王晓红，基于多 Agent 的人工鱼群自组织行为研究[D],北京，北京科技大学，2006
- [6].赵建，曾建潮，鱼群集群行为的建模与仿真，太原，太原科技大学，2009
- [7].莫思敏，谢丽萍，扩展的微粒群算法[J].控制理论与应用，2012,29(6):811-816
- [8].黄太安，生佳根等.一种改进的简化粒子群算法[J].计算机仿真，2013，30(2):327-330,335

附录

```

public class Fishs extends Applet implements Runnable{
    //定义了静态变量 fishs[]及鱼的个数
    static Fish[] fishs;
    static int NF;
    public void run(){ //在 run()方法中，初始化鱼群和捕食者等
        Fish fish;
        if (First){
            hc=canvas. size(). height;
            wc=canvas. size(). width;
            hookhc=hc/2;
            hookwc=wc/2;
            ha=this. size(). height;
            wa=this. size(). width;
            //初始化普通鱼群
            fishs=new Fish[NF];
            for (i=0;i<NF;i++){
                fishs[i]=new Fish("EBGHIJ",i, wc,hc,0,fishEnergy,Color.green);
                fishs[i].flag=0;
            }
            //初始化捕食者
            hunters=new Hunter[SNF];
        }
        //随机获取某鱼的邻居
        randemize()
        randemizeH()
        First=false;
        hook=new Hook(hookhc,hookwc,100,100,Color.black,1);
    }
    public void randomize() //随机获取普通鱼类的邻居的方法
    public void randemizeH() //捕食者获取邻居的方法
    {
        int i,j,k,n;
        for (k=0;k<SNF;k++){
            Hunter hg=hunters[k];
            For(j=0; j <hg. numnb; j++){
                n =(int) (Math.random()*SNF);
                hg.neighbors[j]=hunters[n];
            }
        }
    }
    public void Process() { //在 Fish 类中，通过 process()方法实现鱼向邻居的运动

```

```

        int rev;
        int i;
        int d;
        if(energy > 0) {           //尾巴的坐标也就是上一个时间的头的坐标
            xtail=x;
            ytail=Y
        }
        rev=-1;
    }
    //判定当前鱼的速度是否大于最大速度，若大于，则为最大速度
    if (vx>maxspeed) vx=maxspeed;
    if (vx<-maxspeed) vx=-maxspeed;
    if(vy>maxspeed) vy=maxspeed;
    if(vy<-maxspeed) vy=-maxspeed;
    //判断当前鱼的位置是否到达边界，若超出，则为最大反弹边界速度
    if (x<0) vx=bouncespeed;
    if (x>width) vx=-bouncespeed;
    if (y<0) vy=bouncespeed;
    if(y>height) vy = -bouncespeed;
    //计算当前鱼的最终速度(加上对中心的加速度)
    if (type=0){
        if (x<width/2) vx+=acctomid;
        if (x>width/2) vx_-=acctomid;
        if (y<height/2) vy+=acctomid;
        if (y>height/2) vy_-=acctomid;
    }
    if(energy>0&&type!=2){
        x+=vx;
        Y+=vy;
    }
}
}
}

```