参赛队号#2068

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承　诺　书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的, 如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：2068

参赛队员　(签名) ：

队员 1：　胥拿云

队员 2：　杨军港

队员 3：　王鑫雨

参赛队教练员 (签名)：　刘万稳

参赛队伍组别：中学组

参赛队号#2068

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

2068

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

参赛队号#2068

2013 年第六届“认证杯”数学中国
数学建模网络挑战赛

题　　目　　杨阿姨的困惑

关 键 词　　心理价位　模拟　poisson 分布　随机概率函数　购买概率函数　经济学模型　均衡价格　市场稳定

摘　　要

本文研究做包子的售价最优问题。

建立模型分为两步，第一步为设计市场调查方案，收集所需数据条件。第二步为运用这些条件进行模型的建立，对杨阿姨如何确定两个时段的售价，以获得最大收益作出讨论，并根据这些条件给出一个确定售价的最佳方案。我们形成了两种不同的思路：

思路 1：杨阿姨不能不断改变售价以获得实际数据，所以只能询问调查对象心理价位。研究对象为调查问卷所得结果，调查结果的主体为不同调查对象的心理价位，假设这些心理价位是受到各种因素影响后的数据，具有广泛的代表性，从中可以研究出售价与需求量的关系。经过验证，我们使用了反比例函数拟合了一个购买概率与心理价位与实际售价的差值的函数，称其为 $f(x)$，代表的意义为当（心理价位 − 实际售价）$= x_0$ 时，此调查对象购买包子的概率为 $f(x_0)$，并通过此函数模拟求解出售价与需求量关系，最终完成模型的求解。

思路 2：杨阿姨可以不断改变售价以获得实际数据。杨阿姨的包子成本发生了变化，那么我们觉得有必要改变价格，所以制定了这样的大体思路：根据经济学中的价格模型进行证明，价格变化会不断接近市场的均衡价格。然后利用一个月的市场实验，获得人们需求和供应量在不同的单价时的具体平均数。获得供需函数的交点，确定均衡价格，然后再根据超需求函数来检验价格范围内的市场稳定性，从而将交点上的单价确定为市场内获得的均衡价格。

两种思路最终得到的结果十分相似，说明互为印证，两种模型具有较高的实用性和可行性。

参赛队号：　2068

所选题目：　D　　题

参赛密码 ________
（由组委会填写）

参赛队号#2068

Summary

This paper researches into the best scheme of the price of steamed stuffed buns. What we have known is that the steamed stuffed buns are sold at the market price in daytime,sold at a discount when they can't be sold when it is half an hour to the night,and the rest are sold for free at night.Other information and data requires us to design a scheme of marketing research to get. Building the model is divided into two steps.

Step 1 is to design a scheme of marketing research to get necessary information.

Step 2 is to use the information to build the mathematical model. The model aims to discuss the price in two periods which can lead to the maximum profit and give a best scheme of the price.

When we are discussing the problem, we have two different thoughts, and we build two different models.

Thought 1:Considering that Aunt Yang cannot change the price frequently to get the actual information, our research object is the result of the marketing research, the major part is the psychological price. We suppose that the psychological prices have been affected by various factors and is has comprehensive representativeness, and that we can get the relationship between price and demand. Finally, we decided to use a function $f(x)$ to represents that when psychological price minus actual price is x_0, the probability of the person's buying the steamed stuffed buns is $f(x_0)$. Then we use the function to figure out the relationship between price and demand, and finally finish the model.

Thought 2: Aunt Yang can change her price frequently to get the actual information. So we use the principles of economic to find the regular pattern of the market that Aunt Yang is facing. Next, we will analyze the supply function and demand function to find the balanced price. After ,we can find differential coefficient to prove that when Aunt Yang sells steamed stuffed buns at the balanced price ,the market is stable, so we decide to choose the balanced price as the unit price.

That results of the two thoughts are very similar , which proves that they complement each other , indicates that the two models both have feasibility and practical use.

参赛队号#2068

解决杨阿姨的困惑

1 问题重述

第二阶段的问题建立在第一阶段问题的基础上。第一阶段问题为杨阿姨卖包子，每个成本价 0.2 元，在下午的第一时段，每个售价 0.5 元，第一时段未能卖完，则进入第二时段，售价 3 个 1 元，第二时段仍不能卖完，则开始免费赠送。而到了最近的一个月，包子的成本上涨了 10%，为了能够帮助杨阿姨更加准确的把握市场，获得较多的利润，需要进行比较详细的市场调查，目的是确定包子的售价和处理价是否需要调整。我们需要设计一个合理易行的市场调查方案，以获得足够的数据来分析该地市场的规律并制定合理方案。

2 问题的分析

第二阶段的问题与第一阶段的问题的区别在于成本价的上升和售价成为了变量，可以在建模过程中调整售价以求更大的收益。而且，取得条件和数据的方法，变成了设计调查方案，这决定了我们所提出的问题要能在实际调查过程中得出，加大了我们建立模型的难度。

思路一：显然，本题中能调整的变量是价格，所以关键是要找到价格和销售量的关系。但这很难在实际调查中得出，因为我们不能要求杨阿姨不断调整售价，来采集实际数据，因为杨阿姨卖包子售价本身已经十分低廉，即使是小的调整，就比例而言也较大，所以如果要求杨阿姨调整售价，会对经营产生不好的影响。所以经过讨论与资料收集，我们提出一个心理价位的概念，心理价位表示调查对象所认为的包子的价值，简单的说是调查者觉得一个包子值多少钱。根据生活经验，当包子的价格低于心理价位的时候，调查对象购买包子的概率较大，当包子的价格高于心理价位时，调查对象购买包子的几率就较小。这个概率可以构造成一个关于 心理价位-售价 的函数，我们将其定义为 f(x)，这就是我们模型的核心函数。

思路二：本题中能调整的变量是价格，所以关键是要找到价格和销售量的关系成本的上涨反映了市场的波动，物价会对消费者的购买量产生一定影响，所以我们通过改变售价以获得实际数据，对数据进行分析，找出市场均衡价格周围稳定性较高的定价区域，从而确定方案。

两种思路产生于对于前提不同的假设，即杨阿姨是否能够通过不断改变售价来获得实际市场信息。我们希望通过两种思路的分别实践，以达到互相印证、互相补充的效果。

3 模型假设

思路一：

1.假设每个调查对象购买包子的概率和心理价位与售价之差（心理价位-售价）存在一个函数关系，这个函数以 心理价位与售价之差 为自变量，购买包子的概率是因变量，函数图像斜率逐渐减小。这个假设的可行性和科学性将在模型建立中分析。

2.初步模型中，假设每个人一次只购买一个包子。在模型优化中，再将一个人买几个包子的情况纳入考虑。

3.假设每个调查对象的心理价位已经是经过包子的质量、服务态度等多种因素影响后的结果，具有代表性。

思路二：

1 生产者只生产一致的商品，就是包子。

2 存在大量的独立的消费者和生产者。
3 不存在大量购买，如一次上千只的情况。
4 销售和购买的双方充分了解成本与购买价格。
5 杨阿姨的制作能力有限，当利润加大时，杨阿姨会加大生产量，但是到达杨阿姨的能力极限时，又会慢慢地降低她的供应数量

4 符号约定与说明

1.市场调查目的：

进一步了解市场情况，从而得出价格对市场需求产生的影响，最终帮助解决最优包子销售方案。

2.市场调查对象：

杨阿姨包子铺周边流动人群。他们都属于可能的消费者。一般在设定调查对象的时候要考虑到购买者与使用者的不一致，在这里就是买包子的和吃包子的不是同一人，而他们买包子的消费倾向是由两者共同影响决定的。根据生活经验，加上杨阿姨卖包子的特点：廉价，这个不一致可以被忽略，即我们假设包子铺周围的流动人群购买包子的消费倾向已经具有代表性，可以作为参考依据。

3.市场调查内容：

1.是否购买过杨阿姨的包子
2.是否属于回头客
3.一般每次购买多少个包子
4.认为一个包子值多少钱，即心理价位
5.平时一天的需求量

4.市场调查问卷

您好，首先感谢您协助我们的调查。本调查的目的在于了解杨阿姨卖包子的市场情况，以期能给顾客带来更好的服务，提供更理想的价格。耽误您的宝贵时间，再次向你致谢。

请您就以下问题在您认为合适的地方打“✔”或在横线上填写

1.请问您以前是否买过杨阿姨的包子？

□买过 □没买过

2.请问您是否属于回头客？

□属于 □不属于

3.请问您一般每次买多少个包子？

□没买过 □1 个 □2 个 □3 个 其他________个

4.请问您认为一个包子值多少线

□0.3 元 □0.4 元 □0.5 元 □0.6 元 □0.7 元 □0.8 元 □0.9 元
□1 元 其他________元

5.市场调查地区范围

杨阿姨卖包子的最大顾客范围，大概在包子摊周边 100m 范围内

6.样本的抽取

在不同的时间段抽取样本，每天第一时段 50 个样本，第二时段 30 个样本。调查进行 7 天，总共 560 份。

在接下来的一个月里，利用 0.5 到 1 元六种价格进行销售，并且在销售点附近对每天的消费者需求量进行询问和记录

7.资料的收集和整理方法

以发放调查问卷并回收的方式收集资料。对于收集到的资料，利用 Excel 对资料进行整理，并利用 C++、PASCAL 等编程软件对数据进行进一步分析、模拟。

经过市场调查，我们得到了以下数据

第一时段每个调查对象的心理价位（元）	Pi
第一时段每个调查对象一般每次购买多少个包子(个)	Di
第二时段每个调查对象的心理价位（元）	Qi
第二时段每个调查对象一般每次购买多少个包子(个)	Ei
所有调查对象中买过杨阿姨包子的人数（人）	N1
所有调查对象中回头客的人数（人）	N2
所有调查对象中没买过杨阿姨包子的人数（人）	N3
总调查问卷份数（份）	N
在价格 p 下的需求量	D(p)
在价格 p 下的供应量	S(p)
单价	p

经过整理得，在本模型中需要用到的条件或变量如下：

第一时段每个调查对象的心理价位（元）	Pi
第一时段每个调查对象一般每次购买多少个包子(个)	Di
第二时段每个调查对象的心理价位（元）	Qi

第二时段每个调查对象一般每次购买多少个包子(个)	Ei
所有调查对象中买过杨阿姨包子的人数（人）	N1
所有调查对象中回头客的人数（人）	N2
所有调查对象中没买过杨阿姨包子的人数（人）	N3
总调查问卷份数（份）	N
第一时段每个包子的售价（元）	a
第二时段每个包子的售价（元）	b
每天制作包子的数量（个）	T
第一时段每个调查对象的心理价位-第一时段售价（元）	$\Delta xi=Pi-a$
第二时段每个调查对象的心理价位-第二时段售价(元)	$\Delta ri=Qi-b$
在价格 p 下的需求量	D(p)
在价格 p 下的供应量	S(p)
单价	p

5 模型的建立及求解

思路一：

我们假设函数 f(x)表示 $x=\Delta xi$ 或 $x=\Delta ri$ 时，消费者购买包子的概率。根据生活经验可知：当 $\Delta xi<0$ 或 $\Delta ri<0$，即包子售价高于心理价位时，购买包子的概率是相对较小的。当 $\Delta xi>0$ 或 $\Delta ri>0$ 时，即包子的售价低于心理价位时，购买包子的概率相对较大，且随着 Δxi 或 Δri 的增大，购买包子的概率也逐渐增大，不过增大的速度逐渐减小。因此我们可以假设 f(x)关于 x 单调递增，且斜率逐渐减小。

为了模型的逐步优化和求解，我们初步的模型中假设每个人每次只买一个包子，即 Ei 均为 1。在第一阶段的问题中，第一时段售价为 0.5 元/个，第二时段售价是 3 个 1 元，在此种价格情况下，每日第一时段期望需求量在是 450 个，第二时段期望需求是 50 个，以此为基础，我们可以使用函数 f(x)来求出在售价变化过程中期望需求量的变化情况 g(a)，h(b)，表示第一时段售价为 a 元/个，第二时段售价为 b 元/个时，第一时段期望需求量为 g(a),第二时段期望需求量为 h(b)

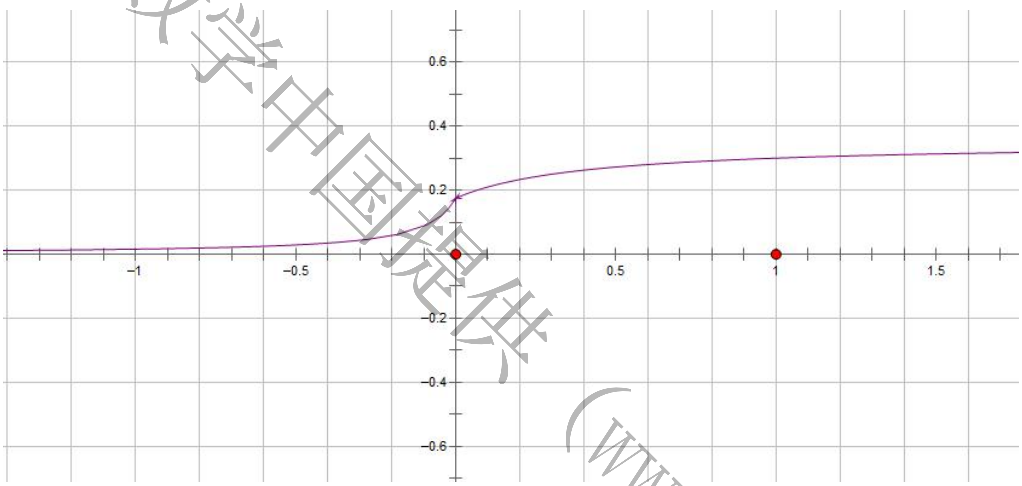
问题在于 f(x)函数如何拟合。我们先使用初等函数来拟合这个函数。

初步假设

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{k}{5x+2}+k(x>0)\\-\dfrac{k}{20x-2}(x<0)\end{cases}$$

k 为一个常数，决定概率的上限。可以通过改变 k 的值来改变概率最大值，在实践中我们最终确定的 k 值为 0.35

图像为



市场调查结果（部分）

心理价位(元)	总调查问卷份数（份）	第一时段份数(份)	第二时段份数(份)
0.3	44	11	33
0.4	89	34	55
0.5	157	89	68
0.6	143	78	67
0.7	70	48	22
0.8	42	31	11
0.9	11	7	4
1	4	4	0
其他	0	0	0

据此，我们使用程序模拟销售，找出售价与期望需求量的关系。

代码见程序 1

输出结果：

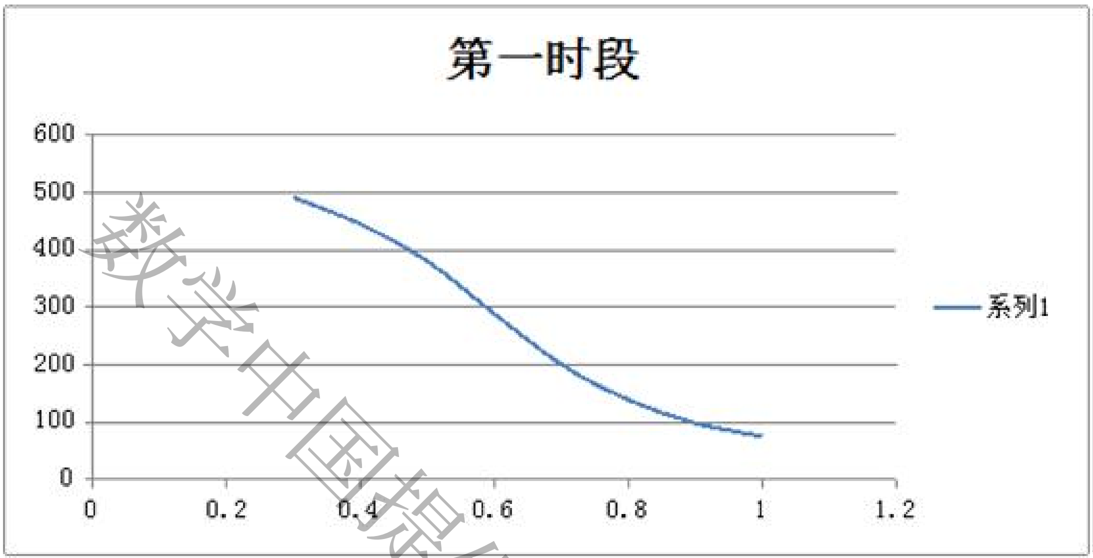
2573

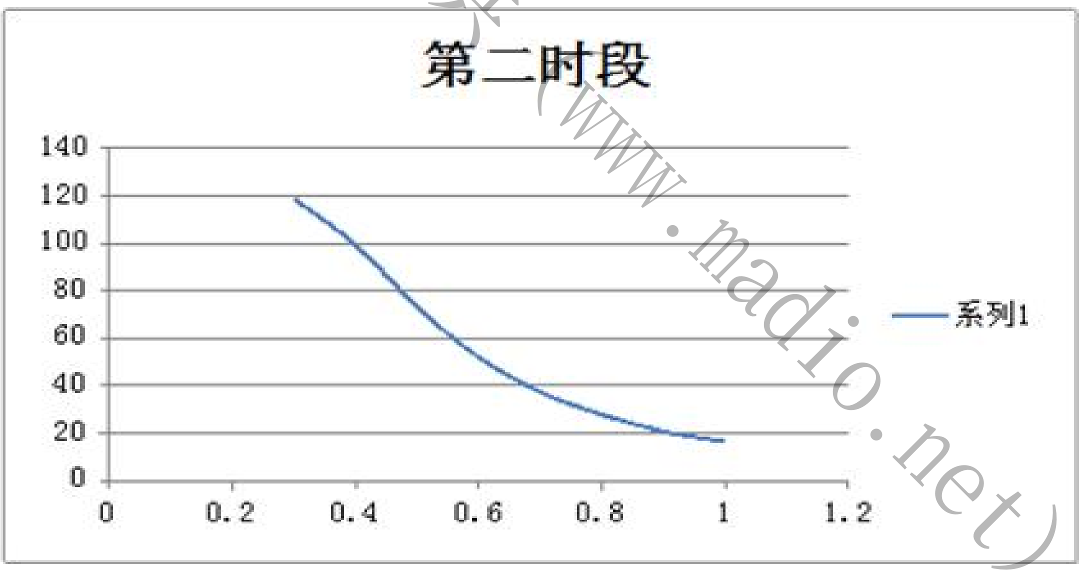
a	b	total a	total b
0.30	0.30	491.25	118.95
0.40	0.30	444.51	118.95
0.40	0.40	444.51	99.50
0.50	0.30	380.15	118.95
0.50	0.40	380.15	99.50
0.50	0.50	380.15	73.20
0.60	0.30	288.92	118.95
0.60	0.40	288.92	99.50
0.60	0.50	288.92	73.20
0.60	0.60	288.92	51.91
0.70	0.30	200.45	118.95
0.70	0.40	200.45	99.50
0.70	0.50	200.45	73.20
0.70	0.60	200.45	51.91
0.70	0.70	200.45	37.28
0.80	0.30	139.13	118.95
0.80	0.40	139.13	99.50
0.80	0.50	139.13	73.20
0.80	0.60	139.13	51.91
0.80	0.70	139.13	37.28
0.80	0.80	139.13	27.78
0.90	0.30	98.61	118.95
0.90	0.40	98.61	99.50
0.90	0.50	98.61	73.20
0.90	0.60	98.61	51.91
0.90	0.70	98.61	37.28
0.90	0.80	98.61	27.78
0.90	0.90	98.61	20.71
1.00	0.30	75.33	118.95
1.00	0.40	75.33	99.50
1.00	0.50	75.33	73.20
1.00	0.60	75.33	51.91
1.00	0.70	75.33	37.28
1.00	0.80	75.33	27.78
1.00	0.90	75.33	20.71
1.00	1.00	75.33	16.32

第一行输出结果表示日均总共有 2573 次卖出包子的机会，因为此阶段我们假设每个人如果买包子只会买一个，所以这里次卖出包子的机会等人次经过杨阿姨的有效销售范围的人次。

以这个日均卖出机会（这里等同于每日经过包子摊的人次）为参数，我们就可以通过我们的购买概率 f(x)来得到期望需求量与售价的关系。这也在程序中得到了体现，是

输出结果的 2 到 36 行，a 为第一时段单价，b 为第二时段单价，total a 为第一时段需求量，total b 为第二时段需求量。我们分别以 a 为横坐标，total a 为纵坐标，b 为横坐标，total b 为纵坐标，绘制期望需求量和售价的函数图像。





由这两个图像，我们可以清晰的看出，随着售价的上升，需求量单调递减，且函数图像先上凸后下凸。这两个函数的定义域均为[0.2，1]，因为当售价低于 0.2 元时必然亏本，没有意义，而当售价高于 1 元时，以高于我们假设的所有调查对象的心理价位，所以必然需求量最小，对我们的模型不造成影响。

利润=售价*销售量-成本*制作量

所以售价的上升只是需求量下降，需求量下降，销售量下降，所以我们无法直接得出使得利润最大的售价。为了方便找出一个使得期望利润最大的售价，我们使用平均需求量作为销售量，来预测在某个售价时，期望所得的了利润。以此找到使得期望利润最大的售价。

我们再次使用程序模拟，找出使得期望利润最大的售价。

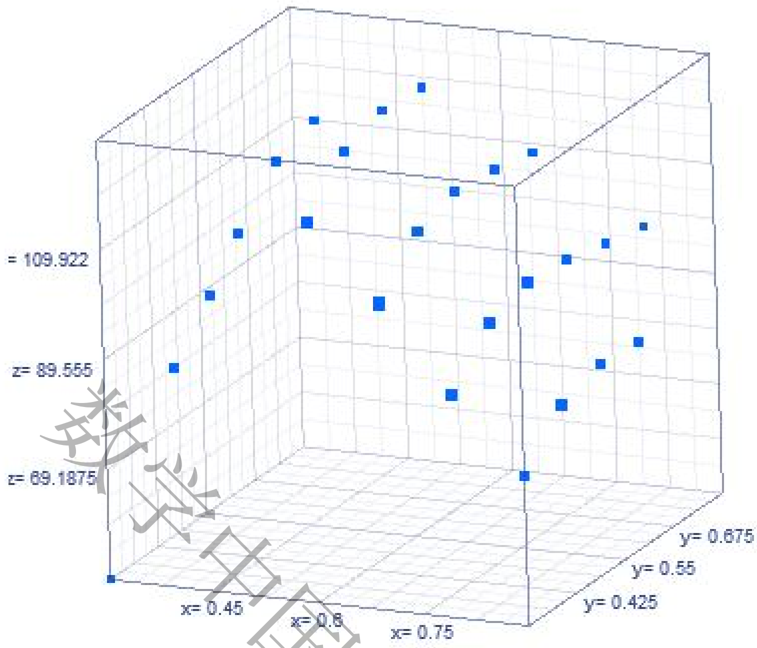
程序仍然需要使用上文中求售价与期望需求量关系的那段程序，并在此基础上增加一部分代码，得到不同售价时的期望利润。

增加代码：

```
amount:=ppp1*(i*0.1-0.22)+(jj*0.1-0.22)*ppp2;
writeln('{',i*0.1:0:2,',',jj*0.1:0:2,',',amount:0:2,'}');
```

输出结果：

a	b	expected income
0.30	0.30	48.82
0.40	0.30	89.53
0.40	0.40	97.92
0.50	0.30	115.96
0.50	0.40	124.35
0.50	0.50	126.94
0.60	0.30	119.30
0.60	0.40	127.70
0.60	**0.50**	**130.29**
0.60	**0.60**	**129.51**
0.70	0.30	105.73
0.70	0.40	114.13
0.70	0.50	116.71
0.70	0.60	115.94
0.70	0.70	114.11
0.80	0.30	90.21
0.80	0.40	98.61
0.80	0.50	101.19
0.80	0.60	100.42
0.80	0.70	98.59
0.80	0.80	96.81
0.90	0.30	76.57
0.90	0.40	84.97
0.90	0.50	87.55
0.90	0.60	86.78
0.90	0.70	84.95
0.90	0.80	83.17
0.90	0.90	81.14
1.00	0.30	68.27
1.00	0.40	76.66
1.00	0.50	79.25
1.00	0.60	78.48
1.00	0.70	76.65
1.00	0.80	74.87
1.00	0.90	72.84
1.00	1.00	71.49



根据数据我们绘制了函数图像。

根据图像及数据，我们找到了最高的平均期望收入在 a=0.6,b=0.5 时出现。至此，我们已经获得了需求量、不同时段的售价，已经满足了第一阶段问题所需的条件，所以我们已经可以利用第一阶段的模型求解最佳制作个数。

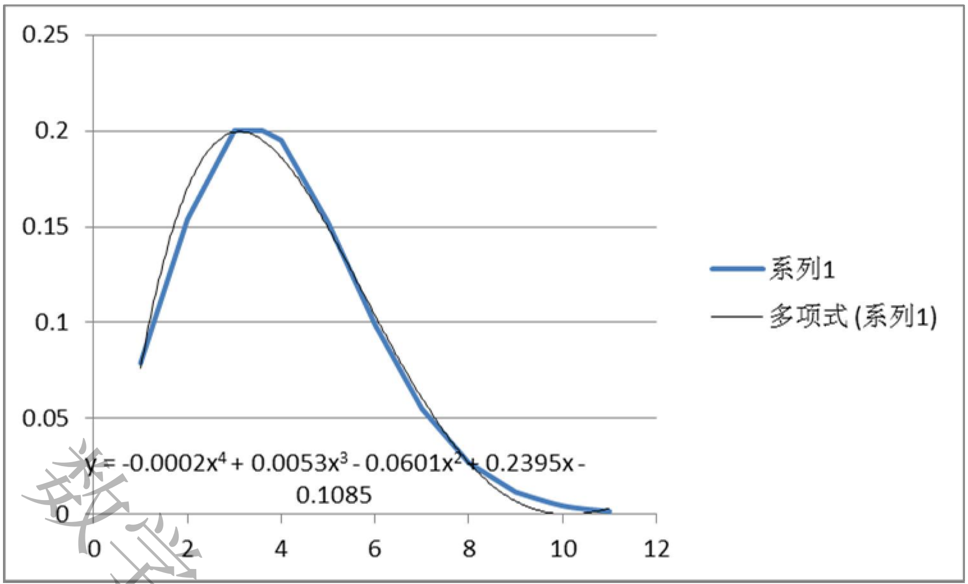
已知条件 第一时段期望平均需求量 288.92，第二时段期望平均需求 73.2，第一时段售价 0.6 元，第二时段售价 0.5 元。将这些条件代入第一阶段模型，利用泊松分布模型、随机概率函数模拟出长期的需求情况，然后确定最佳的每日制作包子数量。

利用第一阶段的随机概率函数，以已知条件作参数，并对程序进行修改后，我们利用修改后的程序对包子销售情况进行了长期的模拟，最终得出结果：

每日制作量 352，平均每日收益 126.2 元。

模型的优化

将假设 2 中假设的每个人每次只会买一个包子取消，考虑更加实际的情况，每个人都有一个买包子的个数 Di 和 Ei，我们假设这个 Di 和 Ei 的分布满足 poisson 分布。我们列举了一组数据。绘制了图像，图像如下：



我们使用了分段的二次函数对其进行拟合。图中黑色曲线即为拟合的函数。表达式为

$y = -0.0002x^4 + 0.0053x^3 - 0.0601x^2 + 0.2395x - 0.1085$

将此函数作为我们随机概率函数（在阶段一中有详解）的依据，得到了更加实际的需求。从而代入本阶段的模型，求解出更加贴近实际的售价。

最终得出结果 售价为第一时段单价 0.6 元，第二时段单价 0.4 元，日均期望收入为 146.7 元。

思路二（详细的市场调查）

成本的上涨反映了市场的波动，物价会对消费者的购买量产生一定影响，我们为了更好地进行市场调查，需要明确我们想要调查的根本目标，下面我们将进行详细的演算，证明均衡价格的正确性：

假设在某一时刻，包子的价格为 p(t)，其中 t 可以说是以周为单位，它与该商品该成本下的均衡价格间有差别，此时，存在供需差，此供需差促使价格变动。对新的价格，又有新的供需差，如此不断调节，就构成市场价格形成的动态过程，假设价格 p(t)的变化率 dp / dt 与需求和供给之差成正比，并记 f(p，r)为市求函数，g(p)为供给函数(为 r 参数)，于是:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \alpha\left[f(p,r) - g(p)\right] \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

其中 p_0 为包子在 t=0 时划的价格就是初定的函数，α 为正常数。

若设，f(p，r)=-ap+b，g(p)=cp+d，则上式变为:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\alpha(a+c)p + \alpha(b-d) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \quad ①$$

其中 a，b，c，d 均为正常数，其解为：

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{b-d}{a+c}\right)e^{-\alpha(a+c)t} + \frac{b-d}{a+c}$$

下面对所得结果进行讨论:

设 $\overline{p}$ 为静态均衡价格，

而存在目前市场均衡的条件有以下：

则其应满足:

$f(\overline{p},r)-g(\overline{p})=0$

即， $-\alpha\overline{p}+b=c\overline{p}+d$

于是得： $p(t)=(p_0-\overline{p})e^{-\alpha(a+c)t}+\overline{p}$ ，从而价格函数 p(t)可写为：

$p(t)=(P_0-\overline{p})e^{-\alpha(a+c)t}+\overline{p}$,

令 $i\to+\infty$ ，取极限得：

$$\lim_{i\to+\infty}p(t)=\overline{p}$$

这说明，市场价格逐步趋于均衡价格 $p_0=\overline{p}$ 。又若初始价格，则动态价格就维持在均衡价格 $\overline{p}$ 上，整个动态过程就化为静态过程；

(2)由于 $dp/dt=(\overline{p}-P_0)\alpha(a+c)e^{-\alpha(a+c)t}$ ，所以，当 $P_0>\overline{p}$ 时，dp/dt<0，p(t),单调下降向 $\overline{p}$ 靠拢；当 $P_0<\overline{p}$ 时，当 dp/dt>0，p(t),单调增加向 $\overline{p}$ 靠拢。

这说明:

包子的初始价格高于均衡价格时，动态价格就要逐步降低，日逐步靠近均衡价格，反之，初始价格低于均衡价格时，动态价格就要逐步升高，且逐步靠近均衡价格。

因此，式①在一边程度上反映了价格影响需求与供给，而需求与供给反过来又影响价格的动态过程，并指出了动态价格逐步向均衡价格靠拢的变化趋势。

我们将 p 当做这个市场环境内，销售的均衡价格，这个价格是在所有人群心目中的一个平均的价格大小，杨阿姨的销售由于受实际限制，不可能出现垄断的情况，我们将使用影响方案：通过大量数据分析，找出市场均衡价格周围稳定性较高的定价区域，从而确定方案。

我们先来调查出大量的数据，经过多组数据进行拟合，获得供应函数和需求函数：

根据假设 1 生产者只生产一致的商品，就是包子。

2 存在大量的独立的消费者和生产者。

3 不存在大量购买，一次上千只的情况，为个体进行销售。

4 销售和购买的双方充分了解成本与购买价格。

那么可得杨阿姨的市场环境是一种理想的市场，那么必将出现一个市场的短期均衡，通过调查问卷，我们确定：

1、商品单一；2、没有他人垄断；3、双方掌握规律；4、贸易自由。

在价格 Pe 上，供给函数曲线与需求曲线

即 $q_e=D(p_e)=S(p_e)$ 有交点 $M(p_e,q_e)$,则 M 为市场的短期均衡状态，这个时候杨阿姨和消费者均得到满足且无改变的需求：

$D(p)\neq S(p_e)$

$D(p)<S(p_e)$

$D(p)>S(p_e)$

如果不等，当消费者需求高于生产者的供给，卖方市场，价格就有增长的趋势，当消费者的需求量低于杨阿姨的供应，卖方市场，价格趋于下降，因为杨阿姨的销售策略中存在一定的误差，所以不可能存在完完全全的相等，接下来，将利用均衡价格的稳定性来确定一个合理的价格范围。

2、均衡态的存在和唯一：

1 $D(p)$ 单调递减，$S(p)$ 单调递增，且相交，则存在唯一的均衡状态。

2 $S(p)$ 为减函数，则存在多个平衡状态。

我们利用一个月的时间进行市场实验，获得以下数据：

调查需求量和供应量

单价/元	实际需求量 （每日）	杨阿姨的供给量（每日）
0.5	540	470
0.6	500	490
0.7	462	500
0.8	418	490
0.9	379	470
1	340	465

以上的数据是在调查的一个月中，获得的平均值

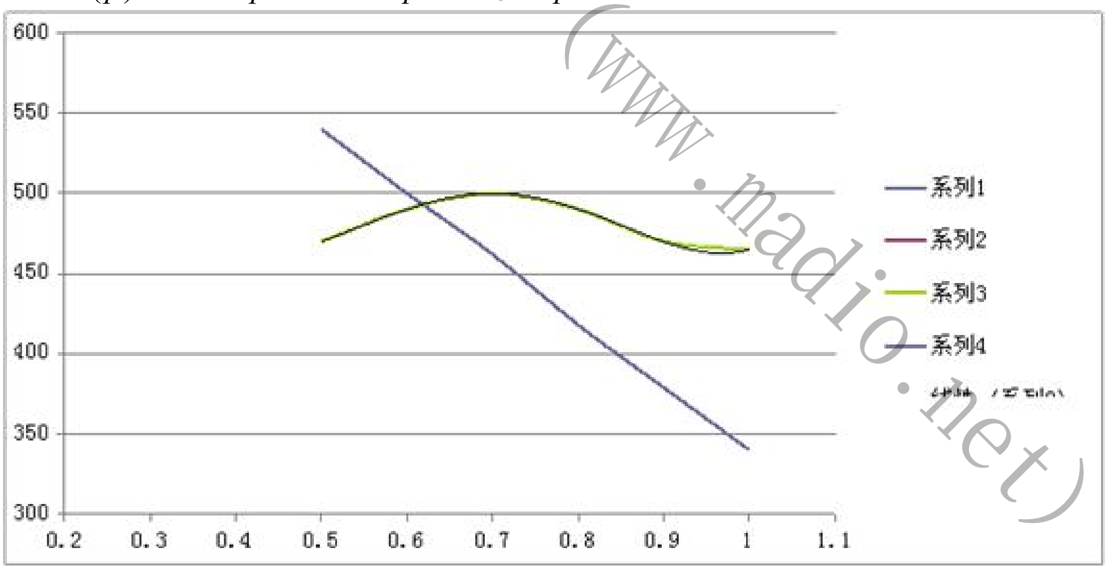
根据基本的经济规律，随着商品的价格上升，消费者对该商品的需求量是越来越低的，基本成线性变化。

我们因此获得市场需求函数近似为一次：

$D(p) = -400p + 740$

而杨阿姨的制作能力有限，当利润加大时，杨阿姨会加大生产量，但是到达杨阿姨的能力极限时，又会慢慢地降低她的供应数量，那么我们将杨阿姨的数据进行平均处理，并且对数据进行函数拟合，根据增长和降低，可以将其定义为三次的函数：

$S(p) = -1666p\wedge 3 + 2500p\wedge 2 - 1033p + 570$



上图为供给函数与市场需求函数：

出现交点在价格 0.6 元到 0.7 元之间，具体价格为：0.62 元，492 个

此时市场出现短暂稳定，销售迎合需求。

在交点左侧，那么需求大于供应，那么可以保持利润，最为稳定，但是无法获得最大利润，所以要不断扩大供应量，在交点右侧，那么会存在大量赠送的情况，导致的损失为：$-0.22E(p)$ 那么我们需要减少供应量，保持较少量的赠送数目。

在均衡价格附近，每日获利最高可达 190 几元。

3 检验均衡状态平衡性：

经过数据的拟合，我们在上一步发现杨阿姨的供应函数为三次函数，我们把交点的横坐标定义为均衡价格，且设置

$E(p)=D(p)-S(p)$ 为超量需求的商品量，那么称为超需求函数，显然，当 $E(p_e)$=0 时是我们求解范围的中间值，

所以考虑价格在均衡态附近的一个价格扰动 p-pe，则有

$$E(p)=(p-p_e)E'(p_e)+o(|p-p_0|)$$

$$E'(p_e)<0$$

那么市场在 p_e 时满足稳定

计算结果发现：

$$E(p)=633p+1666p^3-2500p^2+220$$

$$E'(p)=633+4998p^2-5000p$$

带入 pe=0.62 元，导数为负，(-545.7688)，满足稳定要求。

该结果对于价格的扰动市场是稳定的。

导数为负所以在（0.55，0.7）(元)的区域内都为稳定

所以杨阿姨的定价确定方案如下：

1 正常销售价格在 0.6 到 0.7 元的范围内。

2 将捆绑销售方式按区域同比例放大为两元 5 个

3 尽量减少赠送数量，制作的数量与第一阶段基本一致。

数学模型评价：

思路 1：基于我们根据生活经验与数学知识，得出的购买概率函数 f(x),以及上阶段的假设，我们利用计算机程序的枚举、搜索和模拟找到了一个需求量与售价的关系，再通过这个关系，求解出最佳售价。我们的模型具有科学性，逻辑缜密，但是整个模型的正确性与 f(x)的合理性密切相关，所以我们拟合的 f(x)决定了模型的可行性。由于数学与经济方面知识的限制，我们目前的 f(x)还不够完善，因此对模型的实用性产生了一定影响，在此方面需要加强。

思路 2：基于对杨阿姨的销售市场判断，利用纯代数来证明市场的价格变化基本的规律，从而进行市场实验，获得足够的数据，从而获得稳定的均衡销售量，从而确定我们的销售价，此模型有广泛的代表性，有较强的经济学模型理论支持，所以可应用范围较广。

不足之处在于，没有好好地对不同的销售方式下的购买人数进行分类，特别是赠送处理的规划。但是方法可以广泛使用弥补该缺点。

推广:利用该模型可以解决许多有关供需的市场问题，根据不同的市场情况，有更多的供应和需求函数，可以是 3 次，4 次，5 次等，数据拟合出来的函数在接近现实的基础上，可以帮助不同的营销者掌握市场，确定定价，稳定获利。

总结：两种思路最终得到的结果十分相似，相互验证了两个模型的可行性和实用性。

参考文献：

<<利润最大化原则>> www.baidu.com 访问日期：2013.5.19

参赛队号#2068

泊松分布 www.baidubaike.com 访问日期：2013.5.19
<<经济学中的数学模型>> www.baiduwenku.com 访问日期：2013.5.19

附录
程序 1

```
var jj,i,j,tt,ans:longint;
      a,b,c:array[1..100] of longint;
      k,pp1,pp2,ppp1,ppp2,t,x1,x2,p1,amount,p2:real;

function f(x:real):real;
begin
   if x>0 then
      f:=(-1/(5*x+2)+1)*k
   else f:=(-1/(20*x-2))*k;

end;
begin
   assign(output,'data.txt');
   rewrite(output);

   k:=0.35;
   a[1]:=44;     b[1]:=24;     c[1]:=20;
   a[2]:=89;     b[2]:=47;     c[2]:=42;
   a[3]:=157;    b[3]:=130;    c[3]:=27;
   a[4]:=143;    b[4]:=129;    c[4]:=14;
   a[5]:=70;     b[5]:=64;     c[5]:=6;
   a[6]:=42;     b[6]:=36;     c[6]:=6;
   a[7]:=11;     b[7]:=9;      c[7]:=2;
   a[8]:=4;      b[8]:=4;      c[8]:=0;

   for i:=560 to 30000 do
   begin

      for j:=1 to 8 do
         begin
            x1:=(j*0.1+0.2-0.5);
            x2:=(j*0.1+0.2-0.3);
            p1:=f(x1);
            p2:=f(x2);
            amount:=amount+b[j]/560*i*p1+c[j]/560*i*p2;
         end;

      if abs(amount-500)<1 then begin writeln(i);ans:=i;break;end;
      if ans>0 then break;
      amount:=0;
   end;

  writeln('    a ','    b    ',' total a ','total b');
  for i:=3 to 10 do
      for jj:=3 to i do
      begin

         amount:=0;
         ppp1:=0;
         ppp2:=0;
```

```
        for j:=1 to 8 do
          begin
            p1:=f((j*0.1+0.2-i*0.1));
            p2:=f((j*0.1+0.2-jj*0.1));
            pp1:=b[j]/560*ans;
            pp2:=c[j]/560*ans;
            ppp1:=ppp1+pp1*p1;
            ppp2:=ppp2+pp2*p2;
            amount:=amount+(i*0.1-0.22)*pp1*p1+(jj*0.1-0.22)*pp2*p1;
          end;
        writeln(i*0.1:0:2,' ',jj*0.1:0:2,' ',ppp1:0:2,'    ',ppp2:0:2);
      end;
     close(output);
end.
```

程序 2

```
var k1,n,av,min,k,max,av1,av2,j,i,s,num:longint;
      ans,p,fst,sec:extended;
      a,early,late,free :array[1..1000]of longint;
      h,h2:array[1..1000000]of longint;
begin
  assign(output,'rando.out');rewrite(output);


  randomize;


  k:=1;
  for i:=1 to 60 do
  begin
    for j:=k to k-(i-30)*(i-30)+2000 do
      h[j]:=i;
    k:=j;
  end;
  k1:=1;
  for i:=1 to 30 do
  begin
    for j:=k1 to k1-(i-15)*(i-15)+900 do
      h2[j]:=i;
    k1:=j;
  end;

  read(n,av1,av2);
  read(fst,sec);
  max:=0;
  min:=800;
  av:=av1+av2;
  for i:=1 to n do
    begin
      a[i]:=av+h[random(k)]-30;
      late[i]:=av2+h[random(k1)]-15;
      free[i]:=random(30);
      early[i]:=a[i]-late[i]-free[i];
      if a[i]>max then max:=a[i];
      if a[i]<min then min:=a[i];
    end;
```

```
p:=0;
for i:=min to max do
begin
  for j:=1 to n do
  begin
    p:=p-i*0.22;
    if i>a[j] then p:=p+early[j]*fst+late[j]*sec
    else if i>=early[j] then
                begin
                  p:=p+early[j]*fst;
                  if i>=early[j]+late[j] then    p:=p+late[j]*sec
                                   else p:=p+(i-early[j])*sec;
                end
          else p:=p+i*fst;
  end;
  if p>ans then begin ans:=p;num:=i;end;
  p:=0;
end;
for i:=1 to n do
  s:=s+a[i];
writeln('average: ',s/n:0:4);
write('total: ');
for i:=1 to n do
  write(a[i]:5);
writeln;
write('early: ');
for i:=1 to n do
  write(early[i]:5);
writeln;
write('late : ');
for i:=1 to n do
  write(late[i]:5);
writeln;
write('free : ');
for i:=1 to n do
  write(free[i]:5);
writeln;
writeln('maxprofit: ',ans:0:4);
writeln('everyday: ',num);


end.
```