Team#2577

喷涂轨迹规划模型

队员：唐　鑫

周维甜

邓雪菁

学校：云南大学

喷射弹道计划问题

在釉喷涂工艺过程中，喷雾所覆盖的平面上的区域为椭圆形，喷射单点喷涂的模型符合椭圆双β分布模型，为了使得喷涂的成品更完美，需要优化喷涂路径使得涂料覆盖更加均匀。

厚度函数：

$$Z(x,y)=Z_{\max}(1-\frac{x^2}{a^2})^{\beta_1-1}\left[1-\frac{y^2}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}\right]^{\beta_2-1}$$

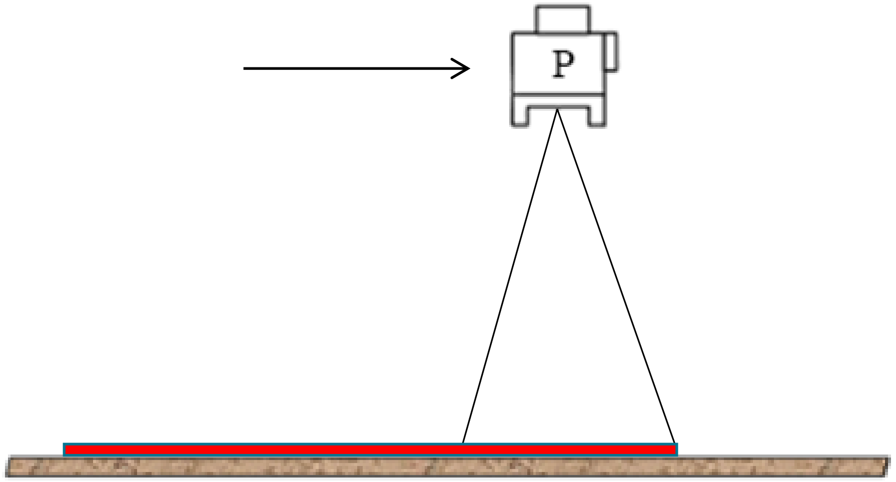
雾化压力 P_1 ,隔膜泵压力 P_2 和喷射距离h是影响上述厚度函数中参数的主要因素它们之间有如下关系：

$$\begin{bmatrix} 129.8665 & -55.2435 & 1.7436 & -297.3908 \\ 52.5130 & -5.7480 & 0.7394 & -128.6368 \\ 59.7245 & 393.9655 & -0.1244 & 150.0184 \\ -7.0125 & 34.5045 & 0.0284 & -9.5229 \\ -4.6130 & 18.3620 & 0.0113 & -0.3924 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ Z_{\max} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

问题一

问题一：

如果喷枪的喷涂方向始终保持不变（如图所示），请计算平面喷涂的累积情况，找出喷枪轨迹的合适搭接间隔（P_1 和 P_2 取 $0.2\,Mpa, h$ 取 $225\,mm$）



Spraying direction of spray gun(always the same)
Curve is modified to plane

问题分析

根据厚度函数中的参数可得到厚度函数

重叠厚度均匀即是两个方向上的重叠横截面积相等

通过求解的两个方向上的搭接间隔进行路径规划

1. 根据影响厚度函数的主要因素的指标值，得到厚度函数。

$$\begin{bmatrix} 129.8665 & -55.2435 & 1.7436 & -297.3908 \\ 52.5130 & -5.7480 & 0.7394 & -128.6368 \\ 59.7245 & 393.9655 & -0.1244 & 150.0184 \\ -7.0125 & 34.5045 & 0.0284 & -9.5229 \\ -4.6130 & 18.3620 & 0.0113 & -0.3924 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ Z_{\max} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 129.8665 & -55.2435 & 1.7436 & -297.3908 \\ 52.5130 & -5.7480 & 0.7394 & -128.6368 \\ 59.7245 & 393.9655 & -0.1244 & 150.0184 \\ -7.0125 & 34.5045 & 0.0284 & -9.5229 \\ -4.6130 & 18.3620 & 0.0113 & -0.3924 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 225 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 109.8438 \\ 47.0812 \\ 212.7664 \\ 2.3655 \\ 4.8999 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

代入参数得到厚度函数：

$$Z(x,y) = 212.7664 \times \left(1 - \frac{x^2}{12065.6604}\right)^{2.3655-1} \left[1 - \frac{y^2}{2216.6393\left(1 - \frac{x^2}{12065.6604}\right)} \right]^{4.8999-1}$$

2. 研究涂料在整个平面的累积情况

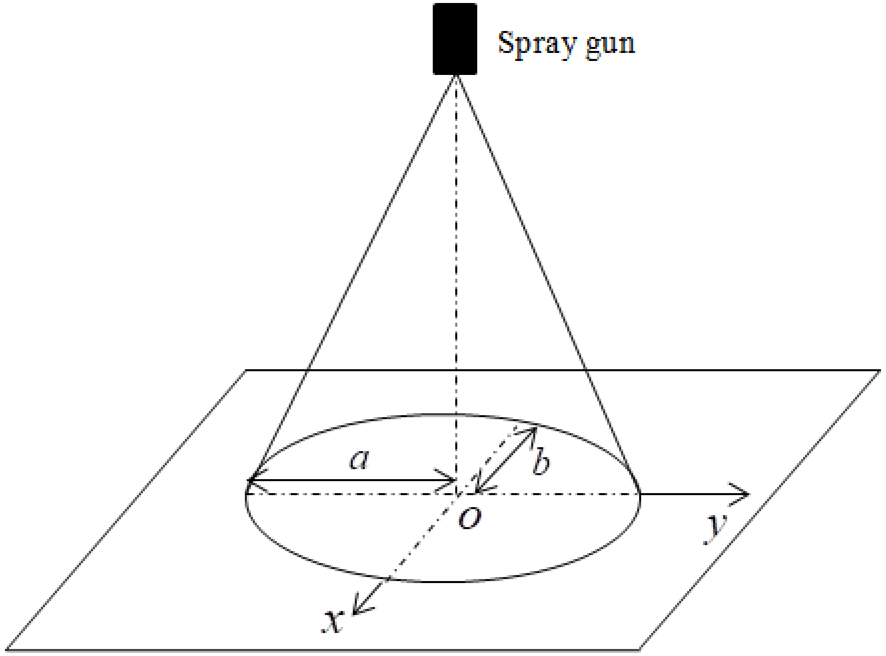


图1 第一次喷涂时建立坐标系图

在喷涂过程中，对厚度函数

$$Z(x,y)=212.7664\times\left(1-\frac{x^2}{12065.6604}\right)^{2.3655-1}\left[1-\frac{y^2}{2216.6393\left(1-\frac{x^2}{12065.6604}\right)}\right]^{4.8999-1}$$

进行两个轴方向的积分即可得到累积函数 $Z_1(x,y)$，即

$$Z_1(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} z(u,v)\,du\,dv$$

3. 研究喷涂路径规划以及搭接间隔问题

喷涂路径：喷枪中心沿着长轴与短轴方向直线前进

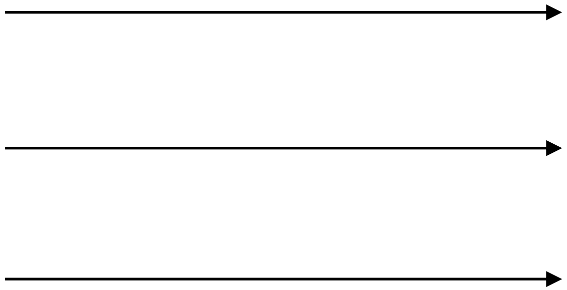


图2 喷涂路径

①沿长轴方向喷涂

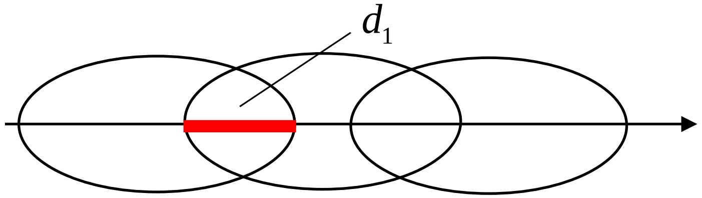


图3 沿长轴方向喷涂俯视图

②沿短轴方向喷涂

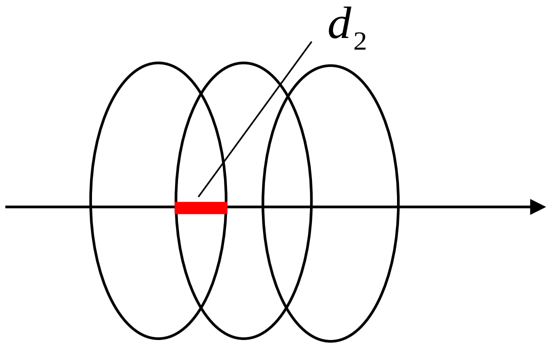


图4 沿短轴方向喷涂俯视图

3. 研究喷涂路径规划以及搭接间隔问题

根据移动所设定的搭接间隔，喷枪前后两次喷涂可以在移动方向上重叠，只要使得重叠的累积最大厚度达到所需均匀累积厚度Z_{max}即可。

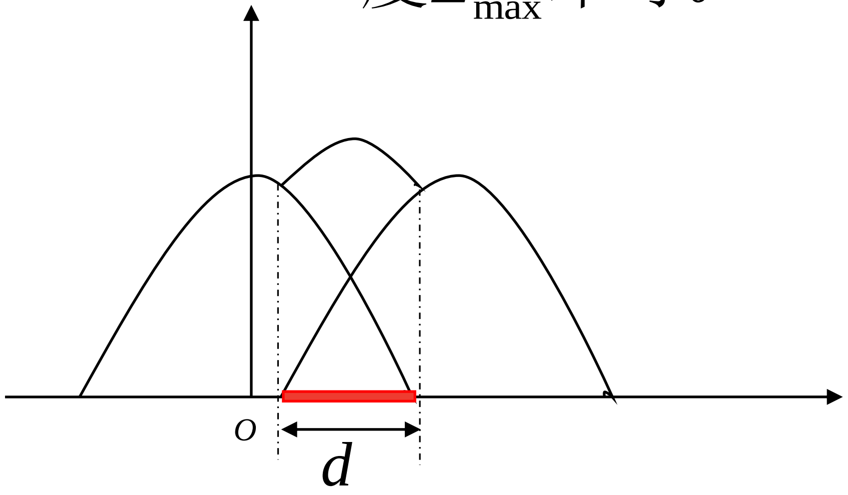


图2-3.重叠的示意图

涂料厚度在空间均匀达到均匀厚度 Z_{max}

降维 →

涂料在横截面上面积均匀

3. 研究喷涂路径规划以及搭接间隔问题

①求解沿长轴搭接间隔d_1

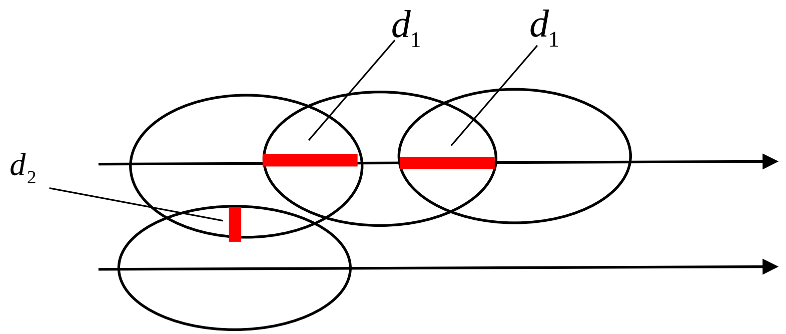


图5 沿长轴喷涂俯视图

截取$x=0$ 时前后两次累积截面图，如图6所示。点D处即是椭圆边缘最薄处，线段OD 即为椭圆半长轴a.

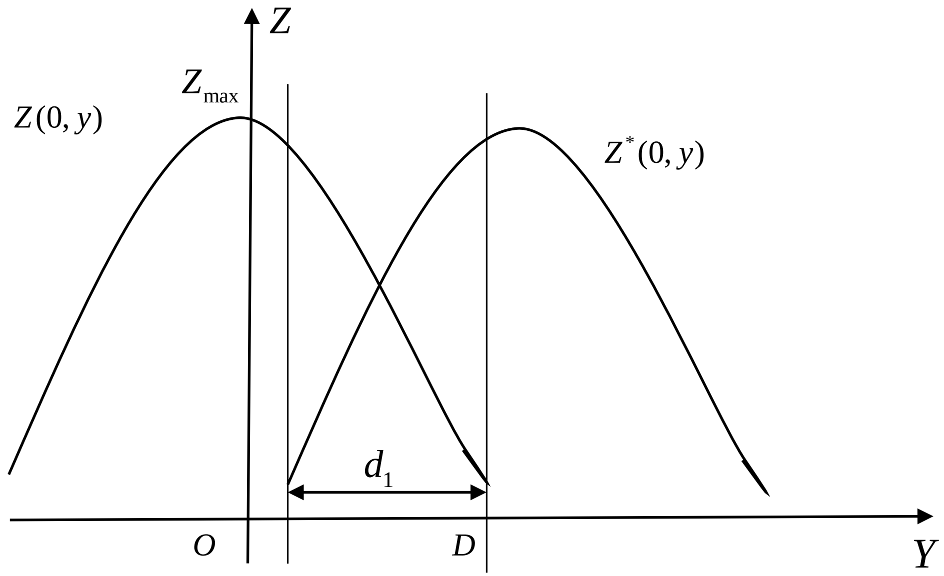


图6 累积截面图

3. 研究喷涂路径规划以及搭接间隔问题

$$Z(0,y)=Z_{\max}(1-\frac{y^2}{b^2})^{\beta_2-1}=212.7664(1-\frac{y^2}{2216.6393})^{3.8999})$$

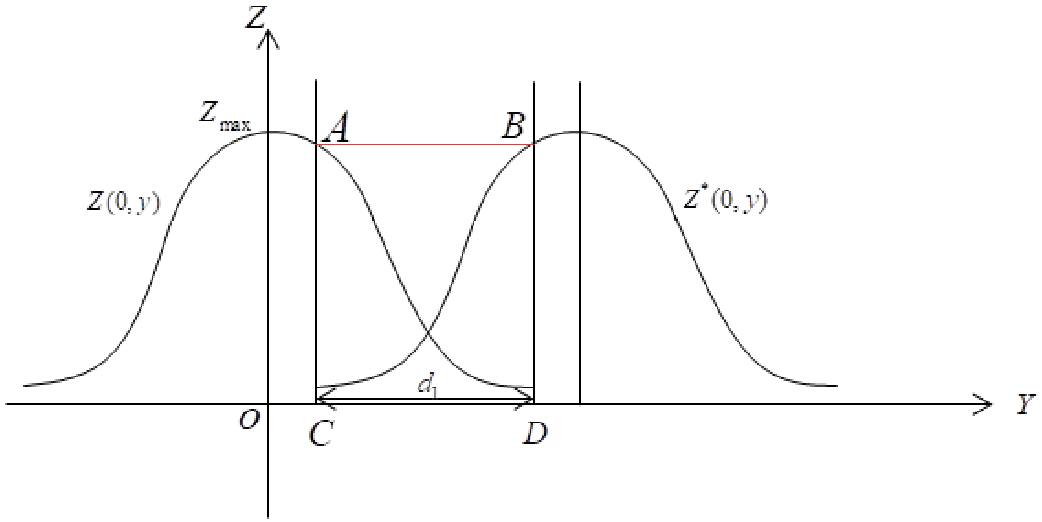


图6 累积截面图

等量关系：$s=s_1+s_2(s_1=s_2)$

即 $2\int_{a-d_1}^{a}Z(0,y)dy=Z_{\max}\cdot d_1$

（其中 $Z_{\max}=212.7664$）

解得 $d_1=107.9115(mm)$

注：

S_1:线段AC、Y轴与函数$Z(0,y)$构成的面积

S_2:线段BD、Y轴与函数$Z^*(0,y)$构成的面积

S:矩形$ABDC$的面积

3. 研究喷涂路径规划以及搭接间隔问题

②求解沿短轴搭接间隔d_2

等量关系：$S^* = S_3 + S_4 \ (S_3 = S_4)$

即 $2\int_{b-d_2}^{b} Z(x,0)dx = Z_{\max}\cdot d_2$

（其中 $Z_{\max} = 212.7664$）

解得 $d_2 = 41.2128(mm)$

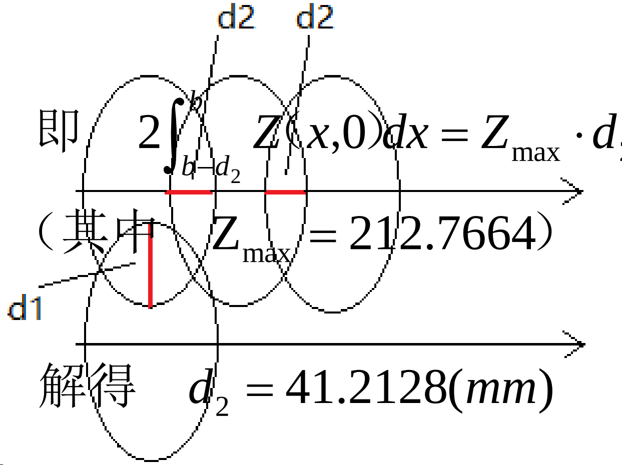


图7 沿短轴喷涂俯视图

注:

S_3:线段EG、X轴与函数$Z(x,0)$围成的面积

S_4:线段BD、X轴与函数$Z^*(x,0)$围成的面积

S^*:矩形$EFHG$的面积

截取$y=0$ 的前后两次累积截面图，如图所示。点H处即是椭圆边缘最薄处，线段OH 即为椭圆半短轴b.

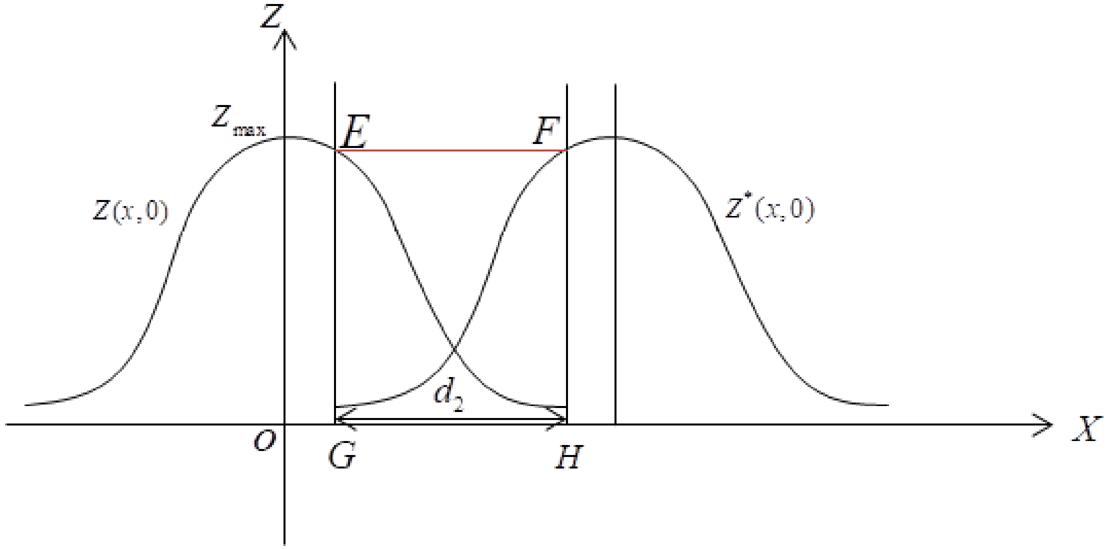


图8 累积截面图

$$Z(x,0) = Z_{\max}(1-\frac{x^2}{a^2})^{\beta_1-1} = 212.7664(1-\frac{x^2}{12065.6604})^{1.3655})$$

4. 路径规划

①当喷涂图形的长轴与喷涂方向一致时，即如图5. 此时沿着喷涂方向的喷枪搭接间隔为$d_1=107.9115\,mm$ 路径间搭接间隔为$d_2=41.2128mm.$

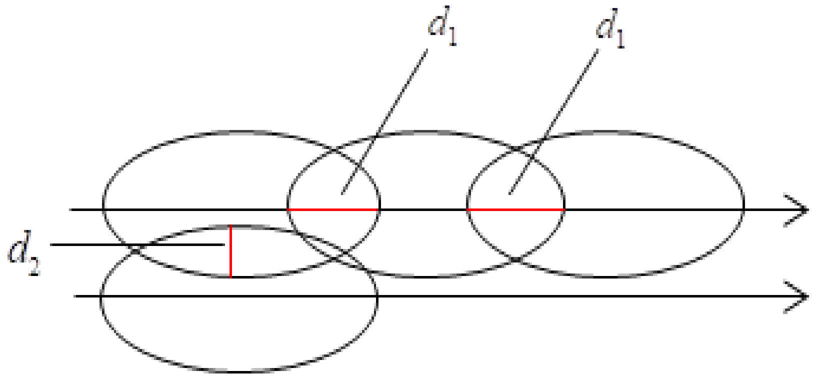


图5 沿长轴喷涂俯视图

②当喷涂图形的短轴与喷涂方向一致时，即如图7. 此时沿着喷涂方向的喷枪搭接间隔为$d_2=41.2128\,mm$ 路径间搭接间隔为$d_1=107.9115mm.$

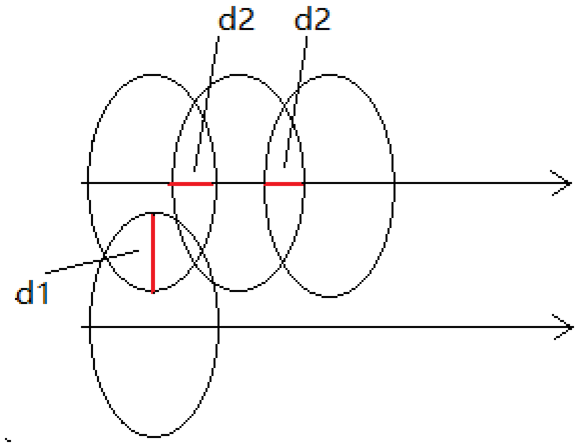


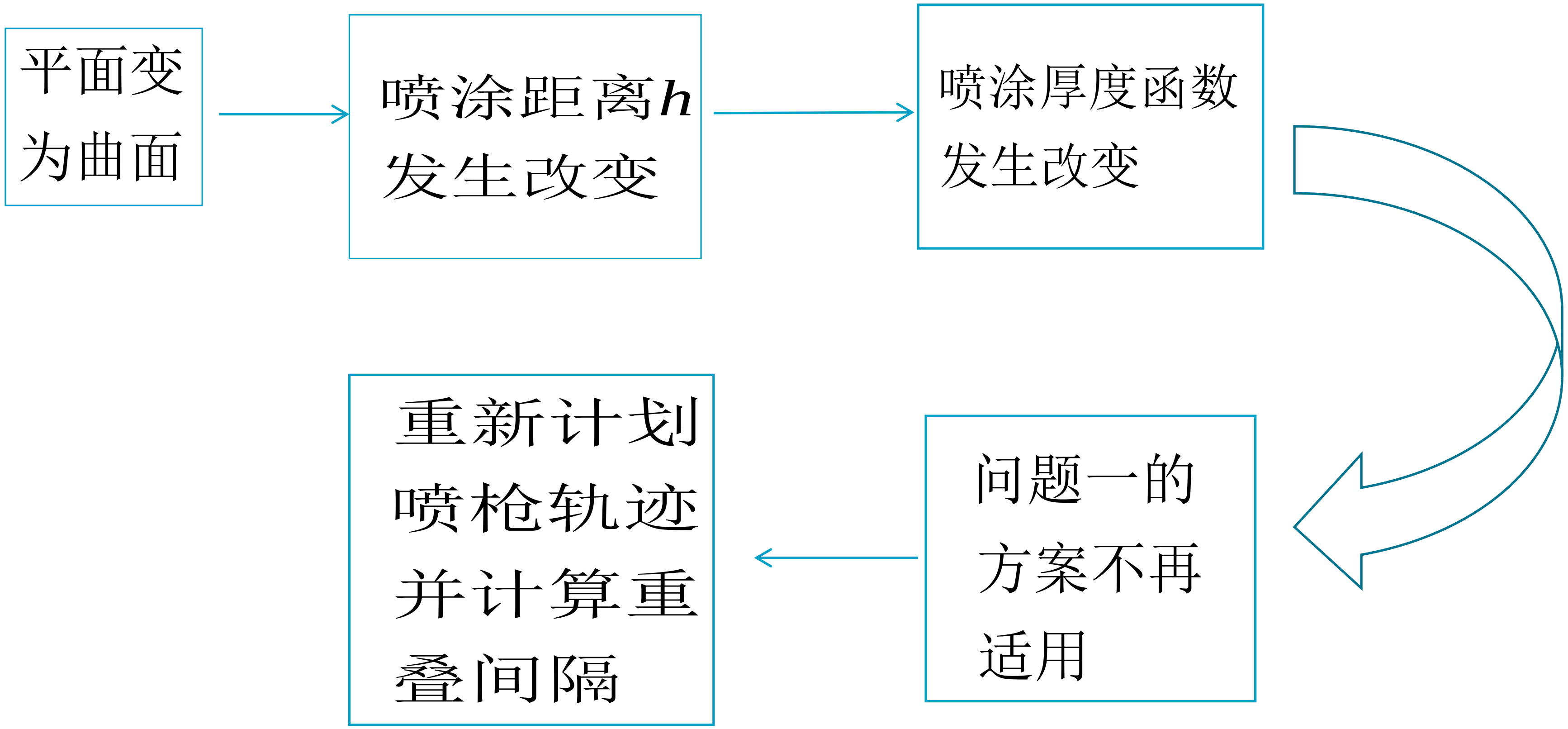
图7 沿短轴喷涂俯视图

问题二

问题二：

对于曲面： $z=-x^2+x-xy(-10\le x\le 10,-10\le y\le 10)$,确定在问题1中计算的喷涂间隔是否适用。如果不适用，请重新计划喷枪轨迹，并计算搭接间隔，以使釉面厚度差小于10%（不同轨迹的间隔可以不同, P_1 和 P_2 取 $0.2\ Mpa, d$ 可根据实际需要进行取值）

问题分析


平面变为曲面
喷涂距离h发生改变
喷涂厚度函数发生改变
问题一的方案不再适用
重新计划喷枪轨迹并计算重叠间隔

模型建立与求解

1、研究问题一的方案是否适合本题曲面

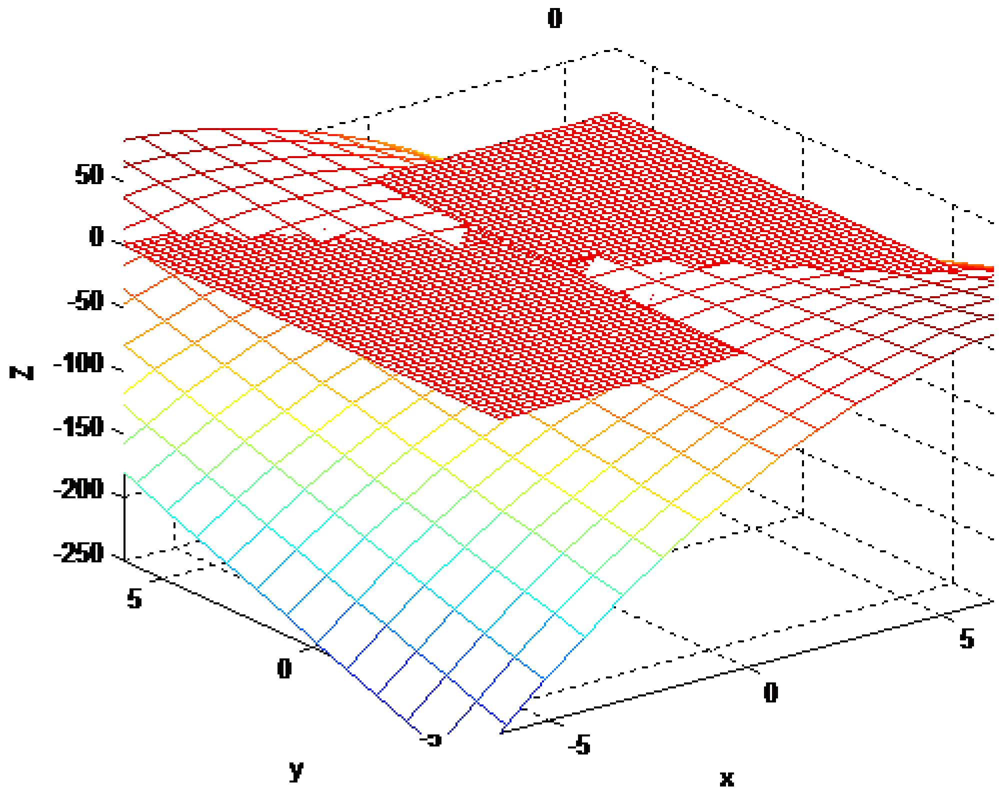


图9 曲面$z=-x^2+x-xy$与平面$z=0$

将给定曲面$z=-x^2+x-xy$与平面$z=0$放在同一个图中。在该图中取出一个交点O

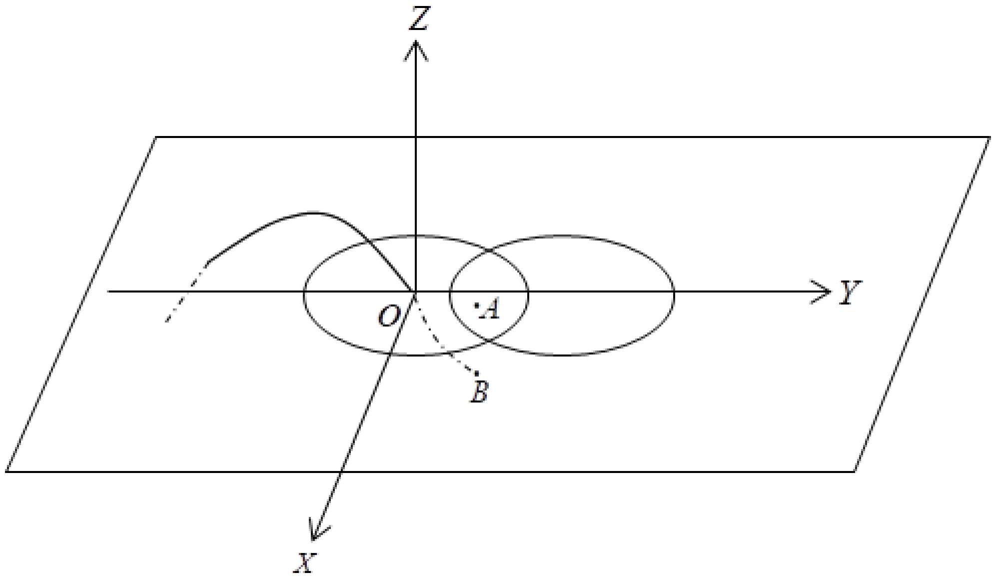


图10 曲面一曲线与平面的交点图

以点O为坐标原点建立新的坐标系

将O沿X轴平移一个单位
沿Y轴平移$a-d_1+1$个单位
得到点A

得到点A在曲面上的投影点B

$Z(x_A,y_A)=212.7664\,mm, Z(x_B,y_B)=209.4323\,mm.$
显然$Z(x_A,y_A)\neq Z(x_B,y_B)$

问题一的方法不适用于该问题

2、确定适合曲面 的新的弹道设计方案

①算出新的厚度函数

喷射距离为 $h^{'} = h - (-x^2 + x - xy) = 225 + x^2 - x + xy.$

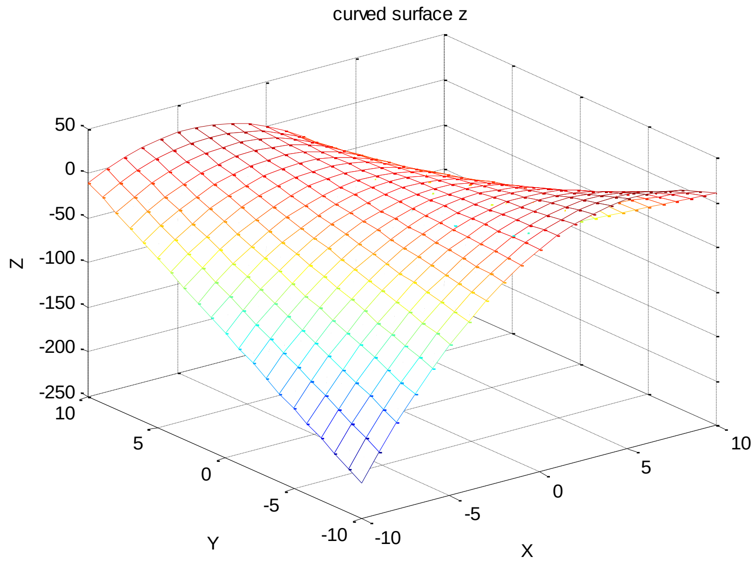


图11 曲面$z = -x^2 + x - xy$的图像

将新的参数代入关系矩阵中得到新的厚度函数为：

$$Z_3(x,y) = Z^*_{\max}\left(1 - \frac{x^2}{(a^*)^2}\right)^{\beta_1^* - 1}\left[1 - \frac{y^2}{(b^*)^2\left(1 - \frac{x^2}{(a^*)^2}\right)}\right]^{\beta_2^* - 1}$$

注：

$$a^* = 109.8438 - 1.7436(-x^2 + x - xy)$$
$$b^* = 47.0812 - 0.7394(-x^2 + x - xy)$$
$$Z^*_{\max} = 212.7664 - 0.1244(-x^2 + x - xy)$$
$$\beta_1^* = 2.3655 - 0.0284(-x^2 + x - xy)$$
$$\beta_2^* = 4.8999 - 0.0113(-x^2 + x - xy)$$

2、确定适合曲面的新的弹道设计方案

②求出搭接间隔

a. 求出沿长轴搭接间隔d_1^*

此时截面图如图所示：

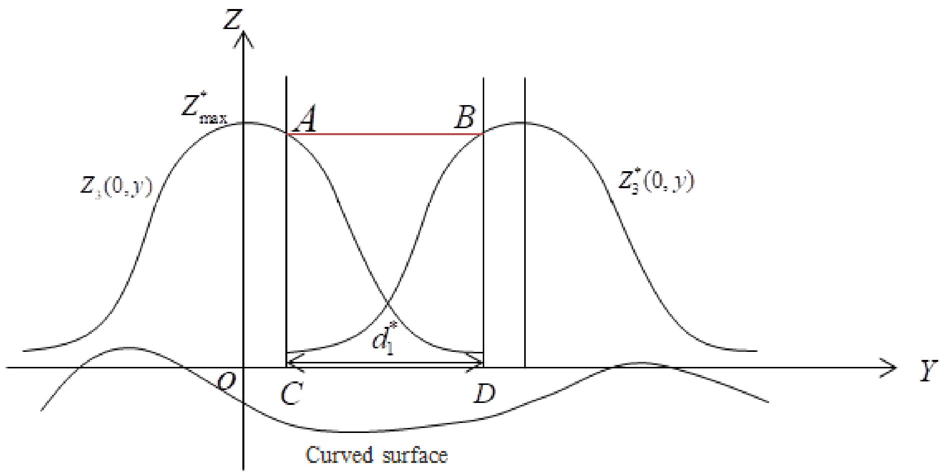


图5 沿长轴喷涂俯视图

图12 YOZ累积截面图

当$x=0$时，得到函数$Z_3(0,y)=Z^*_{max}(1-\frac{y^2}{b^2})^{\beta_2^*-1}$

不等关系：$\frac{s_1+s_2}{s}>90\%$,即

$$\frac{\int_{a^*-d_1^*}^{a^*} z_3(0,y)dy+\int_{a^*-d_1^*}^{a^*} z^*_3(0,y)dy}{z^*_{max}\cdot d_1^*}>90\%$$

由此可得$d_1^*<f_1(x,y)$,此时d_1^* 取值与变量x,y 有关

注：

S_1:线段AC、Y 轴与函数$Z_3(0,y)$ 围成的面积

S_2:线段BD、Y 轴与函数$Z_3^*(0,y)$ 围成的面积

S:矩形$ABDC$ 的面积

2、确定适合曲面 的新的弹道设计方案

②求出搭接间隔

b. 求出沿短轴搭接间隔d_2^*

此时截面图如图所示：

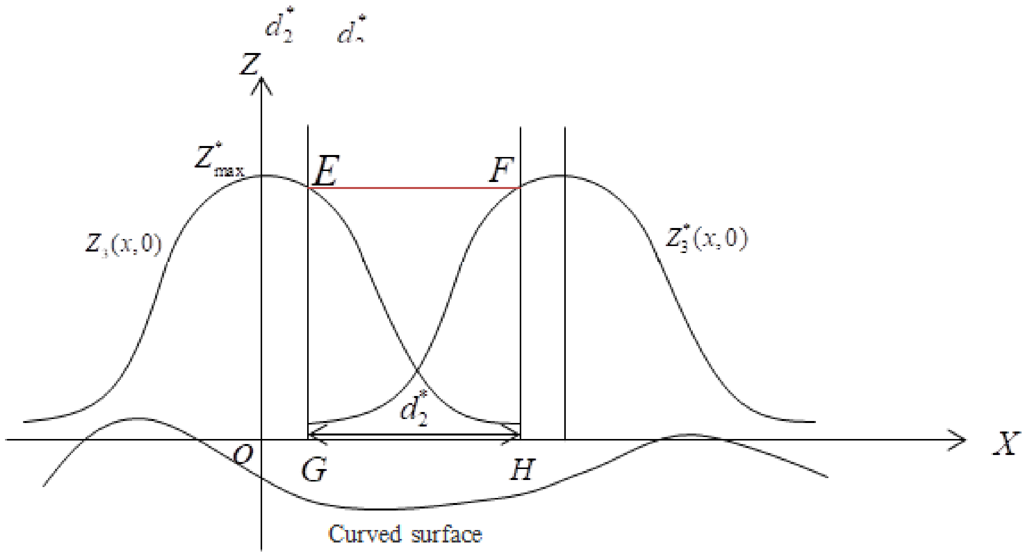


图13 XOZ累积截面图

当$y=0$时，得到函数$Z_3(x,0)=Z_{\max}^*(1-\frac{y^2}{(a^*)^2})^{\beta_1^*-1}$

不等关系：$\frac{s_3+s_4}{s^*}>90\%$，即

$$\frac{\int_{b^*-d_2^*}^{b^*} z_3(x,0)dx+\int_{b^*-d_2^*}^{b^*} z_3^*(x,0)dx}{z_{\max}^*\cdot d_2^*}>90\%$$

由此可得$d_2^*<f_2(x,y)$,此时d_2^* 取值与变量x,y 有关

注：

S_3:线段EG、X轴、与函数$Z_3(x,0)$围成的面积

S_4:线段BD、X轴、与函数$Z_3^*(x,0)$围成的面积

S^*:矩形$EFHG$的面积

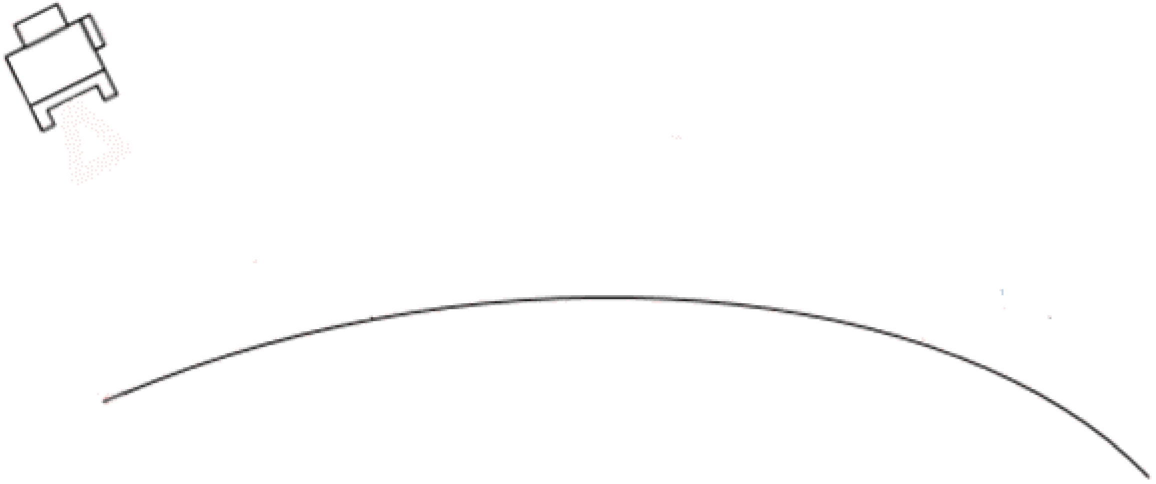
3、路径规划

由2得到的搭接间隔d_1^*和d_2^*，对于曲面上的任意一点(x, y)均有不同的取值范围，即在此问题中，我们的搭接间隔由变量x和y决定，根据具体的(x, y)可以得出两个搭接间隔的具体值。

问题三

问题三：

如果在喷涂过程中喷枪的喷涂方向始终是雾锥中心喷涂点的法线方向（如图所示），其他条件保持不变，请重新计算问题二的结果。



Spraying direction of spray gun (normal direction of mist cone center)

问题分析

问题一中，喷涂方向为雾锥中心喷涂点的法线方向

平面→曲面

找出平面上与曲面上涂料厚度关系，建立新厚度模型

模型建立与求解

1. 选取适当的试验平面

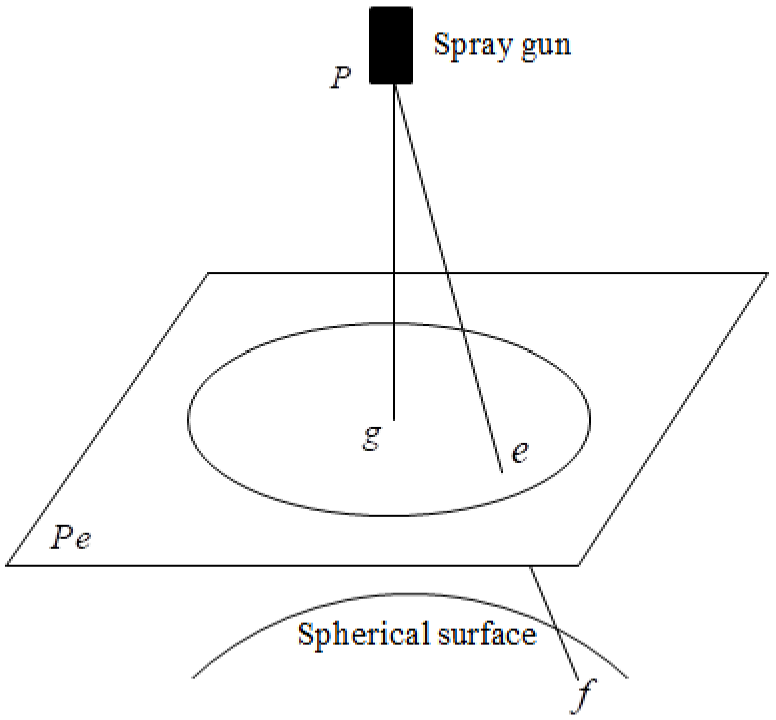


图14 球面静态喷涂示意图

图中：

f - 球面上喷涂区域内一点；

Pe - 试验平面；

g - 喷枪中心点沿喷射方向在 Pe 平面上的投影点；

e - 直线 pf 与平面 Pe 的交点.

2、在试验平面上分析涂料的厚度，建立模型

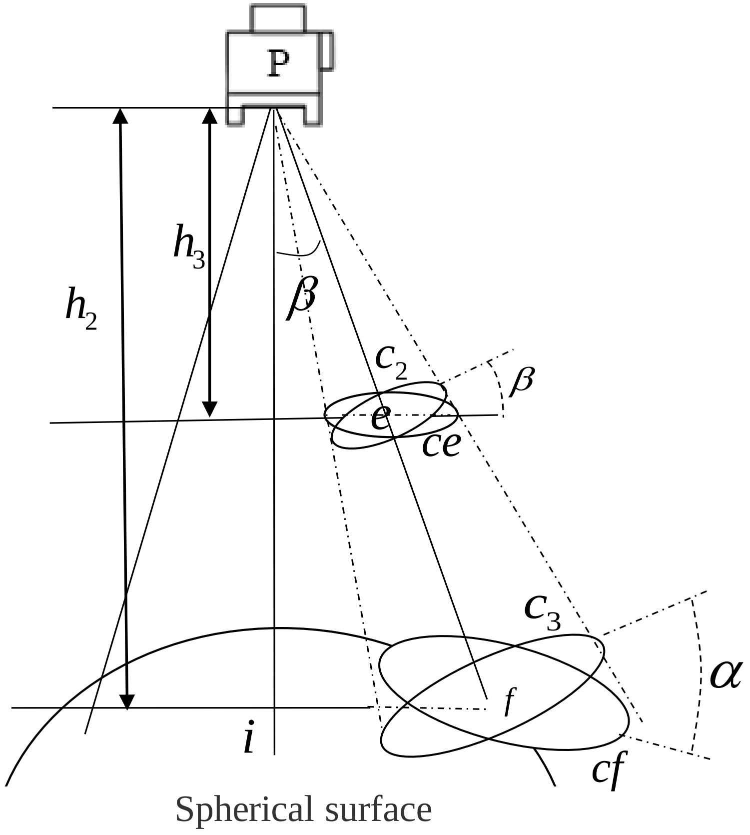


图15 各面片之间的关系图

图中：

P－喷枪中心

β－喷雾夹角

h_3－P点与试验平面的垂直距离

c_2－半径为Δr 的圆，e 为圆心

ce－圆c_2投影在试验平面的椭圆

h_2－点P到f的垂直距离

cf－圆c_3投影在球切面的椭圆

α－圆c_3与椭圆cf的二面角

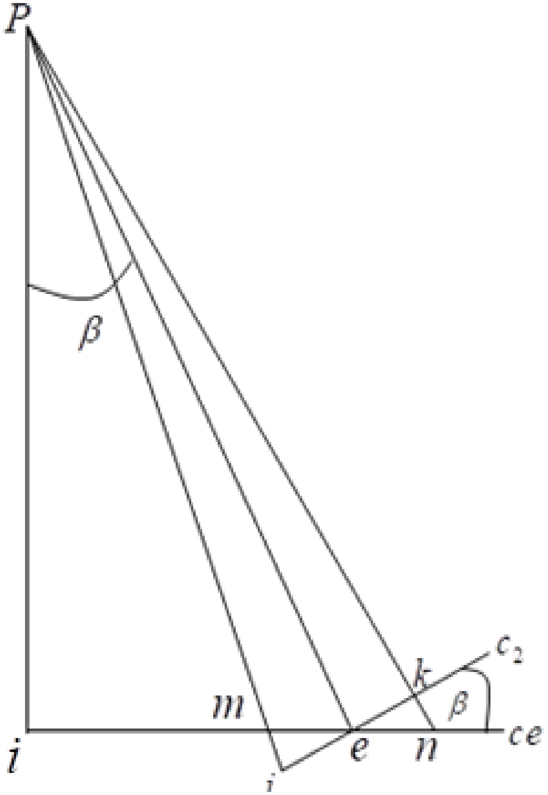


图16 图15的简图

找出椭圆半长轴en 与圆半径Δr 和投影角β 的关系式：

$$\frac{1}{2}mn=\frac{\Delta r}{\cos\beta}$$

圆c_2的面积与椭圆ce 的面积之比为：

$$\frac{S_{c_2}}{S_{ce}}=\frac{\pi\Delta r^2}{\frac{1}{2}\pi\Delta r\cdot mn}=\frac{\Delta r^2}{\frac{\Delta r^2}{\cos\beta}}=\cos\beta$$

由于假设喷枪喷到实验平面和球面上的涂料量相等，所以有$V_{c_2}=V_{ce}$ ，即

$$S_{c_2}\cdot Z_2=S_{ce}\cdot Z_{ce}\text{，因此，}\frac{S_{c_2}}{S_{ce}}=\frac{Z_{ce}}{Z_2}=\cos\beta$$

所以涂料在圆c_2 的厚度Z_2 与在椭圆ce 的厚度Z_{ce} 的关系为：$Z_2=\dfrac{Z_{ce}}{\cos\beta}$

3、根据试验平面上建立出的模型来建立球面上涂料的厚度模型

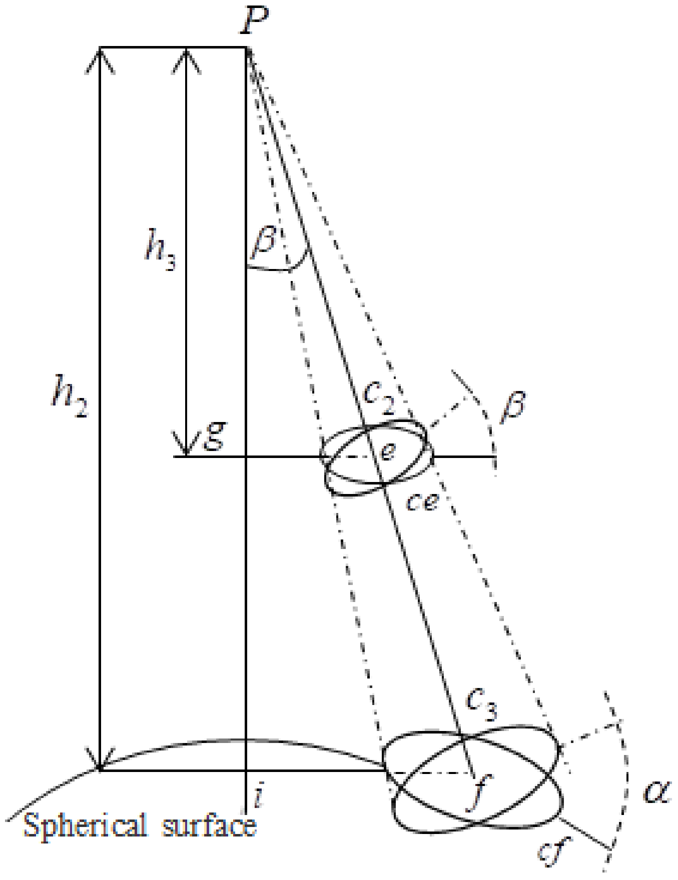


图15 各面片之间的关系图

圆面c_3与圆面c_2的面积关系如下：

$$S_{c_3}=\left(\frac{h_2}{h_3}\right)^2 S_{c_2}$$

圆面c_3上的涂层厚度Z_3与Z_2的关系为：

$$Z_3=\left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2 Z_2$$

涂料在椭圆cf的厚度与圆面c_3的厚度Z_f与Z_3的关系为：

$$Z_f=Z_3\cdot\cos\alpha$$

4、对曲面降维得到曲线，引入圆面进行分析并建立模型

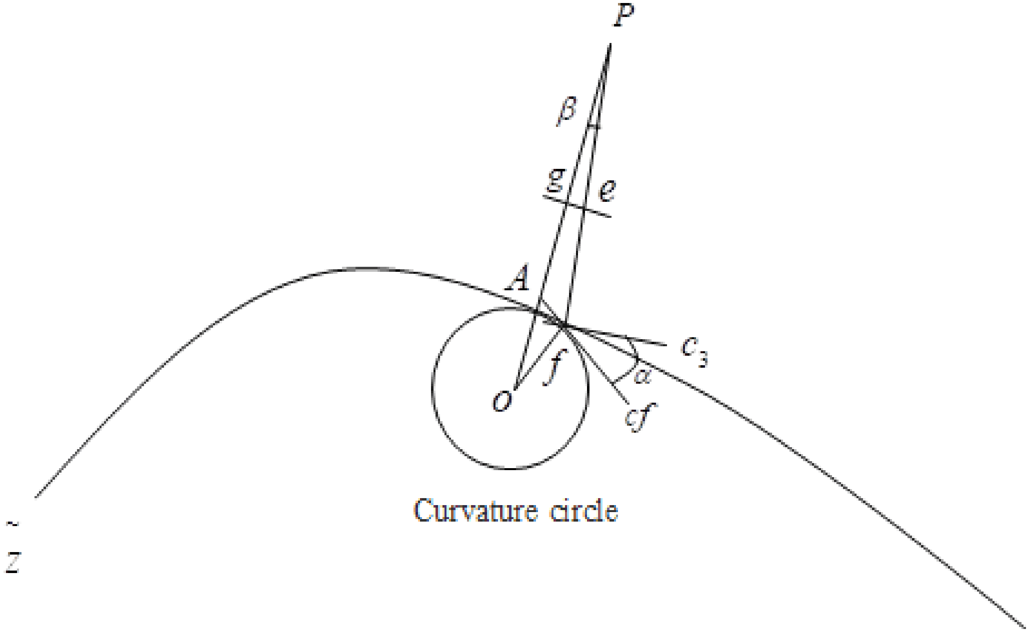


图17 引入曲率圆图像

设 $pA=h_A, pf=l$，则 $h_2=l\cos\beta$

推导出$\cos\alpha$与$\cos\beta$ 的关系式为：

$$\cos\alpha=\frac{(h_A+r)^2-l^2-r^2}{2lr}$$

$$\cos\beta=\frac{(h_A+r)^2+l^2-r^2}{2l(h_A+r)}$$

其中r为曲率半径

注：A–喷枪中心点沿喷枪方向在曲面上的投影点

建立出新的厚度函数模型为：

$$Z_f=\begin{cases} Z_e\cdot\dfrac{4h_3{}^2(h_A+\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^{\frac{3}{2}}}{2})^3[(h_A+\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^{\frac{3}{2}}}{2})^2-l^2-\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^3}{2}]}{\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^{\frac{3}{2}}}{2}[(h_A+\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^{\frac{3}{2}}}{2})^2+l^2-\dfrac{[1+(2x-1+c)^2]^3}{2}]^3} & \alpha<90^\circ \\ 0 \quad \alpha\geq 90^\circ \end{cases}$$

5、根据上一步建立出来的厚度模型计算间隔

（1）当喷涂方向与长轴方向一致时，前后两次的搭接间隔满足关系：

$$\frac{\int_{y_{z\min}-d_1'}^{y_{z\min}} z_f(0,y)dy+\int_{y_{z\min}-d_1'}^{y_{z\min}} z_f^*(0,y)dy}{z'_{\max}\cdot d_1'}>90\%$$

（2）当喷涂方向与短轴方向一致时，前后两次的搭接间隔满足关系：

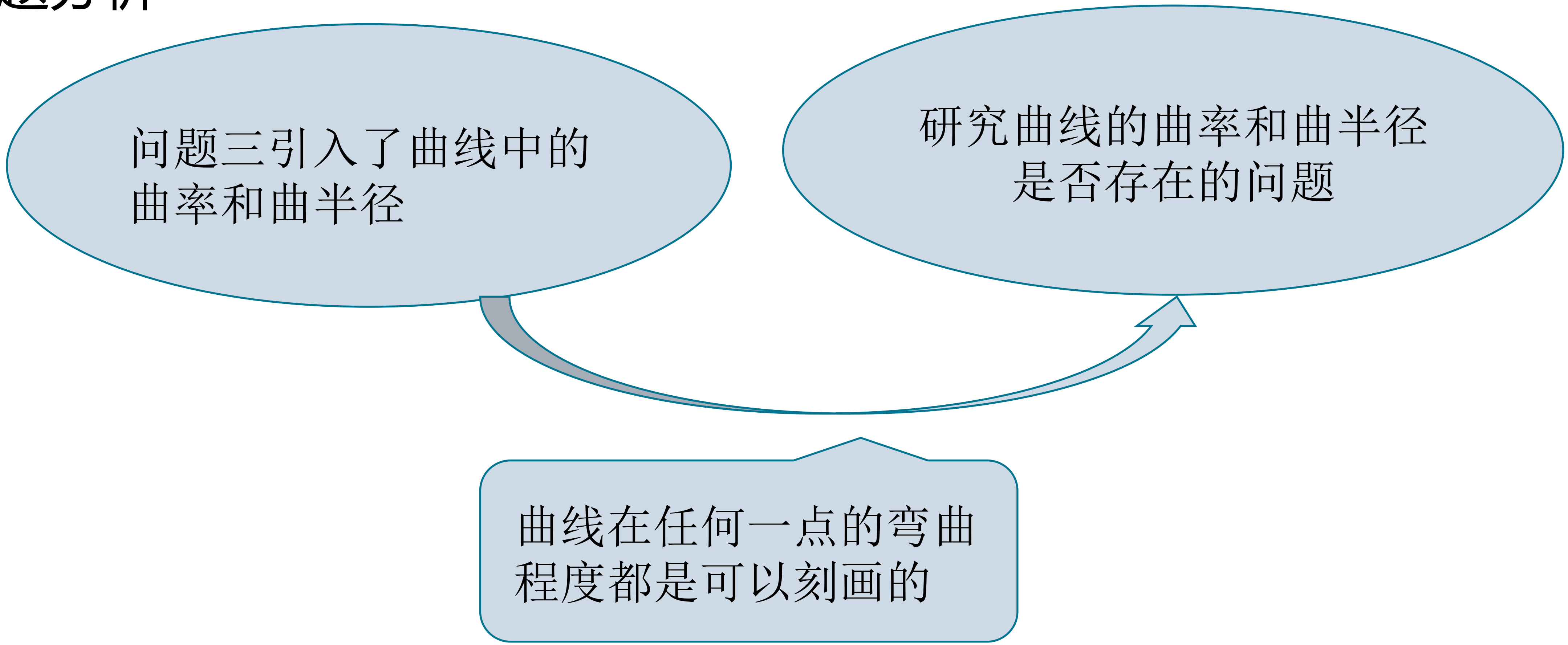
$$\frac{\int_{x_{z\min}-d_2'}^{x_{z\min}} z_f(x,0)dx+\int_{x_{z\min}-d_2'}^{x_{z\min}} z_f^*(x,0)dx}{z'_{\max}\cdot d_2'}>90\%$$

问题四

问题四：

问题三的结果是否适用于任何曲面$z = f(x, y)$？喷雾路径规划是否有一个通用的解决方案？

问题分析


问题三引入了曲线中的
曲率和曲半径
研究曲线的曲率和曲半径
是否存在的问题
曲线在任何一点的弯曲
程度都是可以刻画的

模型建立与求解

1、探讨关于任意曲线的曲率和曲半径是否存在

曲线在某一点x处的曲率的计算公式为：

$$K=\left|\frac{y''}{(1+y')^{\frac{3}{2}}}\right|$$

2、对一阶导或者二阶导不存在的曲线的处理方法

对这条曲线进行划分，分成无数条一阶导和二阶导存在的曲线。

综 上所述，问题三中的结果适用于任何曲面 ，喷雾路径规划通用的解决方案就是问题三中所规划的方案。

模型优缺点

优点:

1. 本文成功地建立了适用于平面以及曲面的喷涂模型。并且在改变喷涂方向时，也能适用，从理论上提出了解决实际问题的方法。
2. 相对于传统喷涂，本文研究的理论方法为机械化操作提供了可能。
3. 建立模型的过程中，我们利用了降维的思想，把空间几何问题转化为平面问题，简化了分析过程。
4. 解题过程中，我们充分利用已知模型与未知模型的关系。比如：平面变成曲面就是研究喷射距离改变；喷枪方向改变，就转化为探讨喷涂面积与厚度关系。

缺点：

1. 为方便讨论，本模型考虑的影响因素比较单一，只考虑了几个重要因素，在模型优化方面应该更多地加入其它影响因素，比如喷枪速度，喷枪张角等。
2. 本文中假设涂料每次喷涂的量以及分布情况完全一致，但在实际问题中总有一定误差。
3. 建立曲面喷涂模型过程中，计算相对比较复杂，对软件的硬件要求较高。

恳请各位专家批评指正！

谢谢观看！