

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1311

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目： 对受风力影响的客机在河面上迫降时，以何种
姿态接触水面是相对最好的选择的探究

关 键 词： 动力学和运动学的耦合过程 动网格技术 俯仰
角 3级波浪情况 静水前后重心情况 刚体模型
的建立与分析 迫降速度的分析

摘 要

随着我国大型民用飞机研制项目的启动，开发设计新型机身结构是提高大型客机寿命、可靠性、经济性、安全性和舒适性的有效手段。因此迫切需要开展民用飞机机身结构设计方面的系统研究，其中包括对目前民机机身壁板结构进行剪切，轴压载荷的试验与结构强度分析，以及整机水上迫降计算分析。

建立了某型飞机的刚体模型，通过对水体用光滑粒子流体动力学（SPH）无网格单元进行模拟，所得结果体现了水体飞溅、晃动对机体结构坠撞的影响。通过飞机水上迫降刚体模型计算，得到飞机在迫降过程中的运动轨迹和飞机各个部位的过载曲线，分析结果表明飞机起落架放下使迫降过程中整个机体产生横向摆动，增加了飞机横向不稳定性，因此最终确定了该型飞机最佳的水上迫降姿态为：起落架全收，襟翼全偏，最佳着水姿态角为7度。

参赛队号 1311

所选题目 A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

对受风力影响的客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面 是相对最好的选择的探究

一、背景介绍：

2009 年 1 月 15 日，[全美航空公司](#)一架空中客车 A320 客机在纽约拉瓜蒂亚机场起飞后，不久坠入哈德逊河中，机上 151 人全部获救。事故原因是这架空客 A320 飞机从拉瓜迪亚机场起飞后不久撞上一群飞鸟，在返回途中坠入哈德逊河中。

海上迫降的飞机，由于飞机本身具有排气孔及飞机迫降后可能造成飞机破损而进水。飞机进水后导致飞机下沉及姿态角变化的时间过程是人们关注的问题。为此，本文基于船舶抗沉性和船舶耐波性理论，试图建立飞机在波浪中的漂浮特性计算模型，首先用抗沉性理论来研究飞机在静水中的下沉运动和姿态角的变化，并在此基础上进一步考虑波浪对飞机下沉运动及姿态角的影响，并同时考虑风力对飞机的作用，以期能为飞机在波浪中的漂浮特性。

计算提供一种较为实用的工程计算方法。

飞机水上迫降后，由于各种渗漏源如排水孔及破损口等的存在而发生下沉运动。飞机的漂浮特性研究就是要计算出水位到达最低位置的舱门所需的时间，为乘客和机组人员的安全撤离提供理论上的参考。飞机水上迫降后，其下沉运动不仅与飞机迫降后的初始状态如纵倾和斜倾有关，还与渗漏源的位置及大小有关，因为这些因素都会影响飞机在下沉过程中的进水速度及相应的浮态即下沉量、纵倾角和斜倾角。此外，飞机的漂浮还受到风和浪等海洋环境因素的影响。在风浪较小的情况下可以忽略这些海洋环境因素，并可采用阿基米德静力学原理来进行漂浮特性计算。然而，在较大风浪作用下，风力及波浪作用产生的水动力对漂浮飞机的姿态和运动将会产生较大影响，风浪的考虑是必须的。所以在机漂浮特性研究中，除了考虑重力和浮力的作用外，还必须计及于风浪等海洋环境因素的影响。本文基于船舶抗沉性及耐波性理论来研究飞机在海浪中迫降后的漂浮特性，计算飞机下沉时水位到达低位置舱门所需的时间。计算中考虑飞机在波浪作用下的飞机迫降时的角度和对飞机的损害程度，并同时考虑风力的影响。

通过对飞机迫降的研究，进而为以后航空事业做些贡献，提供一些有用的数据和科学的理论知识。

二. 引言：

过去在水上飞机撞击期间确定水载荷的方法研究中，一般使用两种方法，分别是：（1）依据撞击期间水上飞机机身的流体流动主要出现在垂直于龙骨的二维平面假设的理论研究[167, 168]，（2）依据水上飞机稳定滑行性能的着水撞击方程的求解[169, 170]。近年来，随着数值计算理论不断发展，有限元、边界元方法常常被用来研究冲击问题。在实际弹性结构体入水冲击的过程中，冲击载荷是由弹性结构、空气、水之间复杂的瞬态耦合作用所产生，只有考虑了上述复

杂的耦合作用，才能对冲击载荷进行准确的预报，并在此基础上开展结构设计和分析工作。

飞机水上迫降研究传统的方法主要以真实飞机试验和模型试验[171]为主，验证其迫降能力是否满足要求，同时也指导设计工作。现在随着计算数学、计算机技术的发展，CAE 技术日趋成熟，对工程设计中所涉及的各种学科问题，在国外已经开展了大量的类似数值计算，但国内水上迫降研究不多或者刚刚开始。

由于水上迫降状态很多，特别是有些试验情况在实验室根本不可能完成，如：斜波迫降和顺波迫降，必须进行真机水上迫降试验。而进行真机试验成本和时间花费很大，另外实验室水上迫降模型试验中，模型只能保证外形，质量分布和惯量相似，但不易模拟刚度和强度。因此通过理论计算来完成这些模型试验不易完成的特殊情况具有重大的实际意义。

飞机水上迫降的动力学计算可以直接对全尺寸飞机模型进行分析，通过对水介质的SPH 方法运用可以更为直观的观察飞机与水碰撞的飞溅现象，同时也避免传统水体网格大变形下计算不收敛问题。另外，飞机水上迫降的仿真计算是个复杂多学科问题，包括了机体结构简化，流体力学问题，甚至气动力问题。由于国内支线飞机的一些数据仍处于保密状态，数据有限而且本章主要对迫降数值分析方法进行探讨，所以利用大型专业分析冲击碰撞有限元程序PAM-CRASH 对某轻型飞机进行水上迫降计算，通过飞机刚体模型计算得出飞机的运动轨迹，通过弹性机身段的模型计算得到飞机机身结构冲击响应；并且可以用相同的方法对大型飞机进行分析计算。

三. 模型的建立于求解

首先，我们通过飞机刚体模型分析飞机迫降时的最佳着水姿态，飞机刚体模型的建立于分析结果：

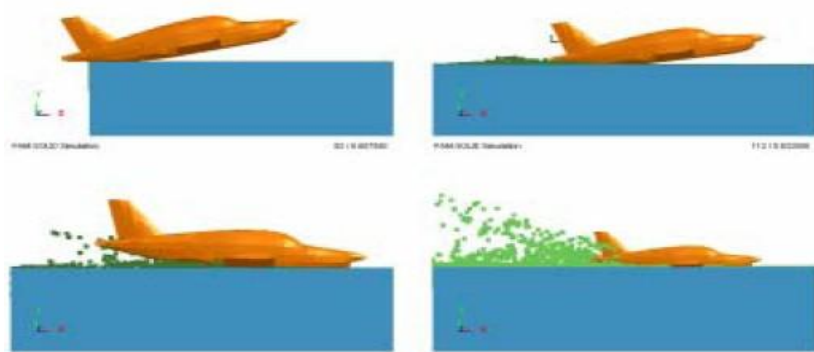
飞机作为刚体考虑，参照 C-5A 考虑飞机三种可能的着水状态：起落架收起，主起放下、前起收起，起落架全部放下。主要得出不同飞行姿态下以及起落架收放对飞机水上迫降运动姿态的影响。模型刚体定义中输入了飞机的重心位置以及各个方向的惯性矩，模型采用的公斤、米单位制。

飞机作为刚体考虑，水体作为SPH 和拉格朗日单元考虑。飞机过载最大值在飞机着水的前2 s 就已经出现，因此100 m 计算水域就可以得出飞机迫降过程最大的纵向过载和法向过载，为了节约计算量，只考虑飞机前100 m 的运动状态。

由于这次仿真缺乏试验数据，因此只能参考美国一些飞机水上迫降的试验资料进行大概的比较，图5.11 (a) 是DC-4 飞机模型[173]水上迫降照片，飞机姿态角12 度，飞行速度40.7 m/s，起落架收起。图5.11 (b) 是第9 种工况仿真计算结果，对比发现运动姿态相似，结果能模拟出水花飞溅的现象。为得出飞机最佳着水状态，给出表5.4 中所列每个工况下的飞机运行轨迹以及X、Y 向过载曲线。



(a) DC-4 飞机模型水上迫降照片



(b) 工况 9 仿真结果

下面是计算结果的对比：

1.2°姿态角

(1) 起落架收起

机体运动轨迹如图5.12所示，飞机几乎水平着水，着水后由于水的粘性阻尼使产生低头力矩，碰撞结束后，飞机头部弹起，后面重力作用下飞机低头在水面滑行。

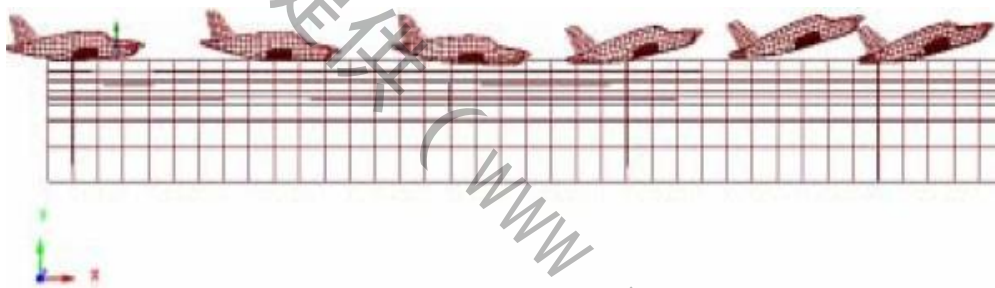
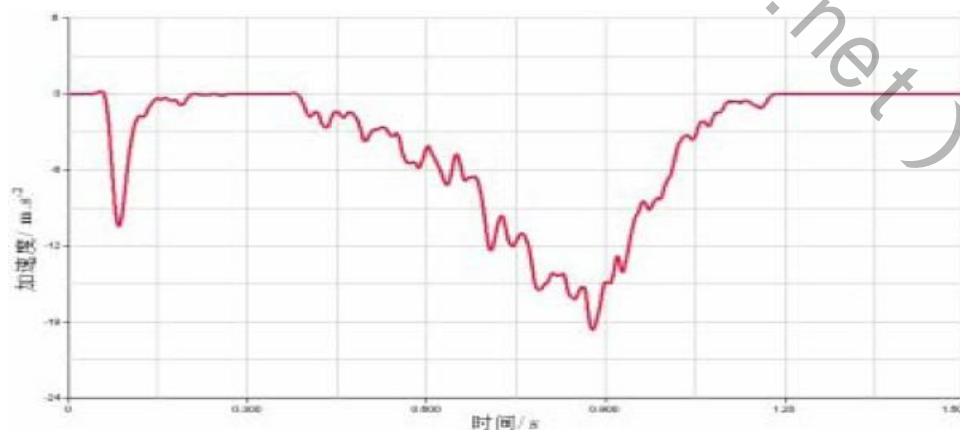
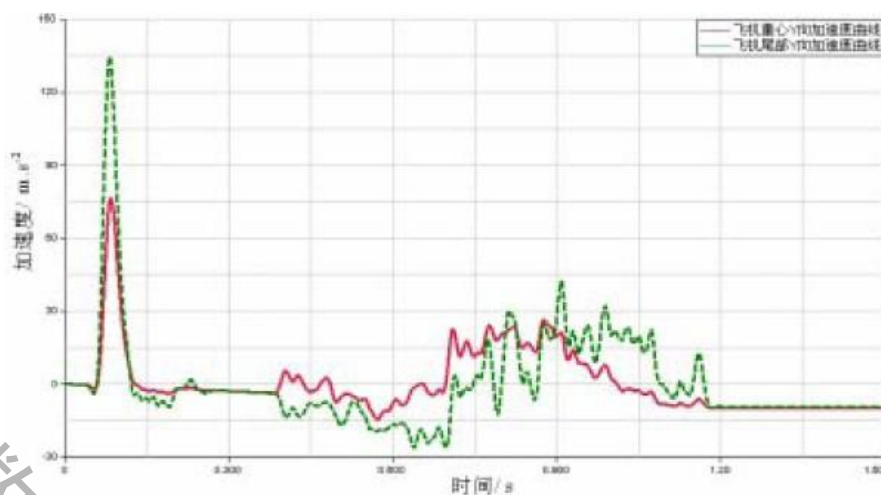


图 5.12 姿态角为 2°，起落架收起时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.13所示，最大X向过载为-18.6 m/s²，最大Y向过载为134 m/s²；最大法向过载出现在飞机第一次着水时的机体尾部。



(a) X向过载曲线

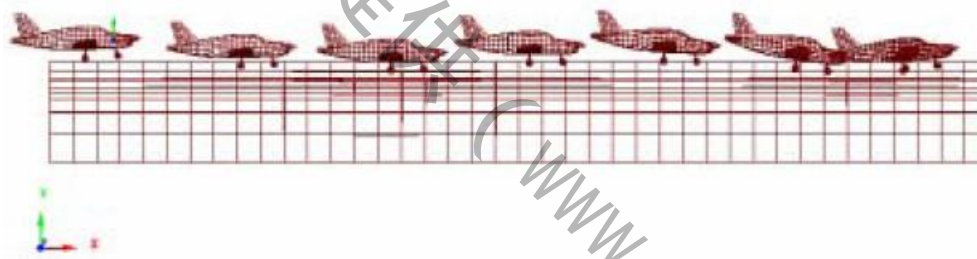


(b) Y 向过载曲线

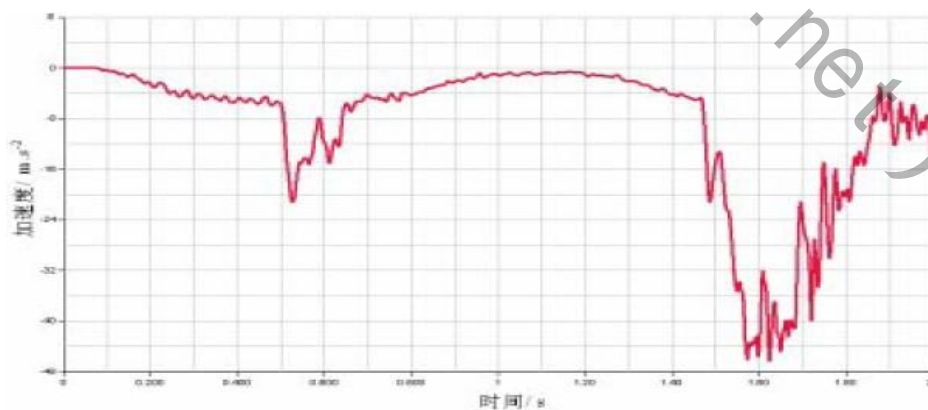
图 5.13 姿态角为 2° ，起落架收起时过载曲线

(2) 起落架全伸

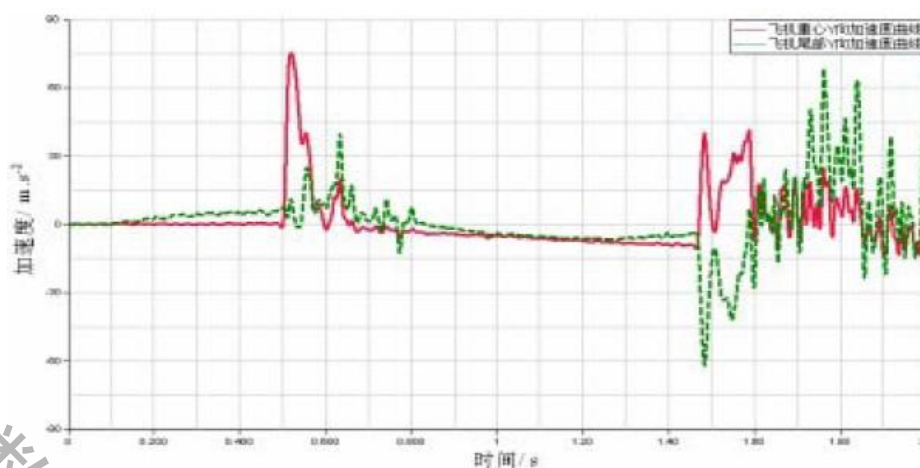
机体运动轨迹如图 5.14 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速。飞机几乎水平着水后弹起，此时由于水阻，使飞机姿态角为负，最终飞机以头部着水。

图 5.14 姿态角为 2° ，起落架全伸时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.15 所示，最大X 向过载为 -46 m/s^2 ，最大Y 向过载为 75.2 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第一次着水时的机体重心处。



(a) X 向过载曲线

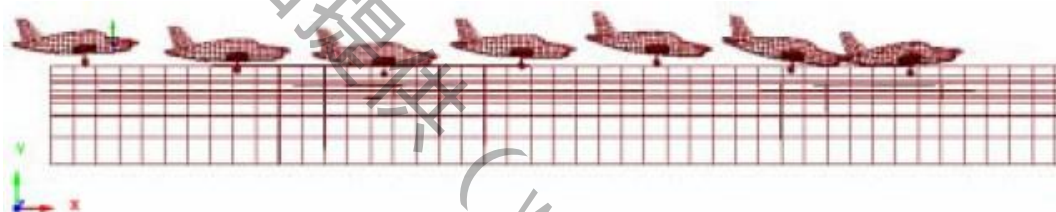
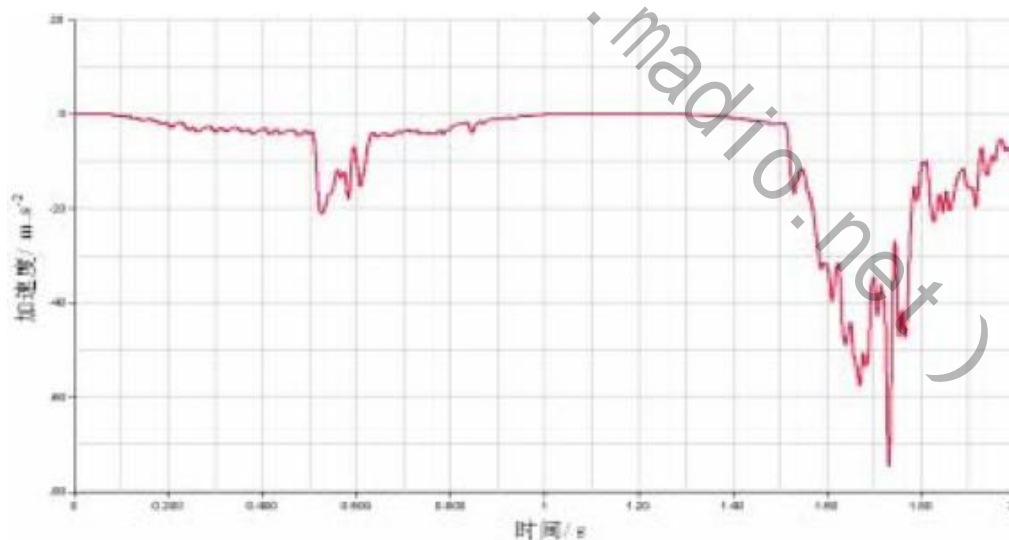


(b) Y 向过载曲线

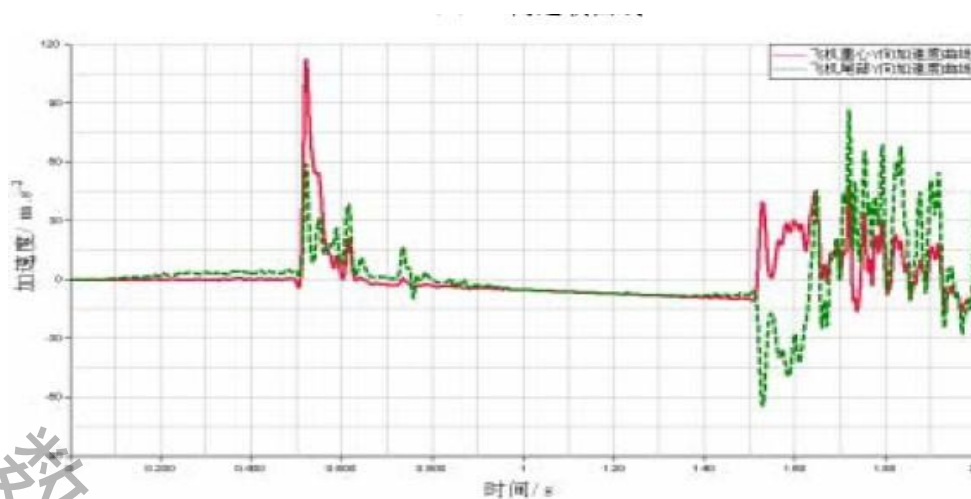
图 5.15 姿态角为 2° ，起落架全伸时过载曲线

(3) 前起落架收上，主起落架全伸

机体运动轨迹如图 5.16 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速。飞机几乎水平着水后弹起，最终飞机姿态角为负，头部着水。

图 5.16 姿态角为 2° ，前起收起、主起全伸时飞机运动轨迹

(a) X 向过载曲线



(b) Y 向过载曲线

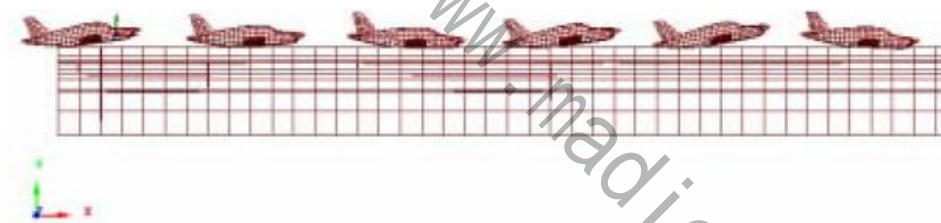
图 5.17 姿态角为 2° ，前起收起、主起全伸时过载曲线

重心处与飞机尾部的过载曲线如图 5.17 所示，最大 X 向过载为 -74.4 m/s^2 ，最大 Y 向过载为 112 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第一次着水时的机体重心处。

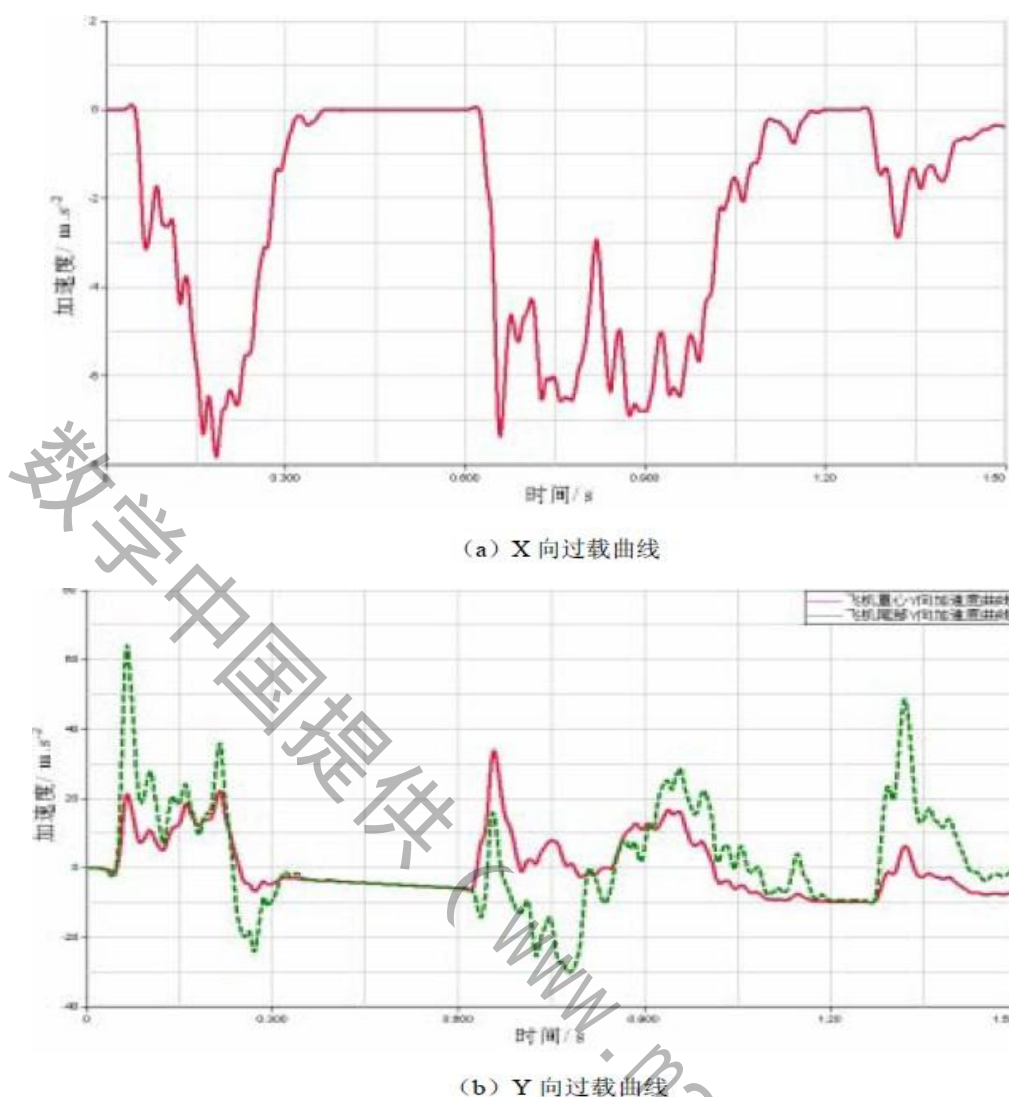
2. 7° 姿态角

(1) 起落架收起

机体运动轨迹如图 5.18 所示，飞机尾部先着水，产生低头力矩后头部着水，头部与水体碰撞后弹起，然后呈颠簸状在水面滑行。

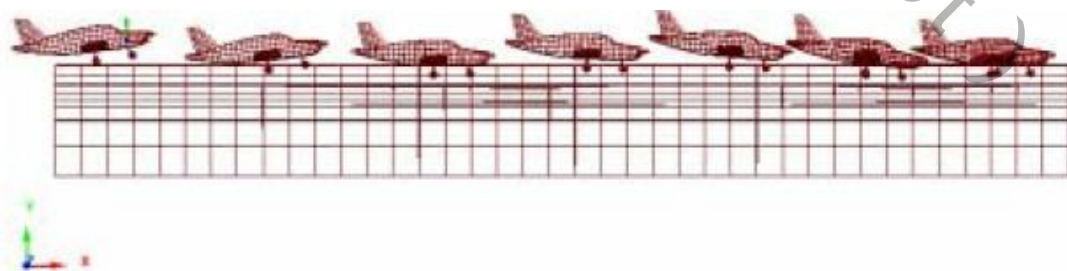
图 5.18 姿态角为 7° ，起落架收起时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图 5.19 所示，最大 X 向过载为 -7.9 m/s^2 ，最大 Y 向过载为 64 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第一次着水时的机体尾部。

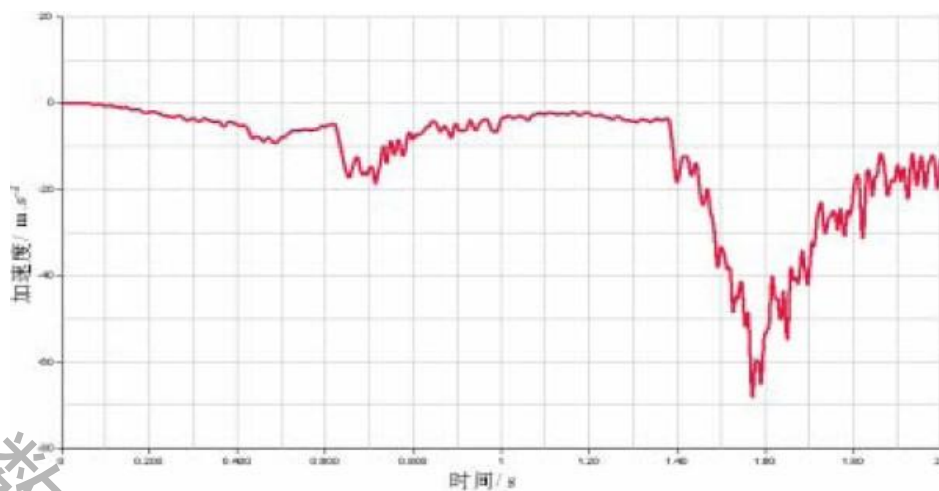
图 5.19 姿态角为 7° ，起落架收起时过载曲线

(2) 起落架全伸

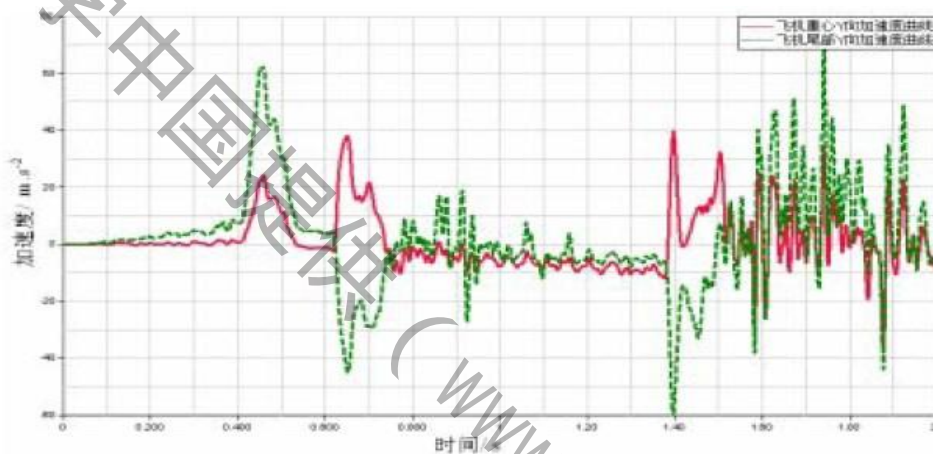
机体运动轨迹如图 5.20 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速并产生低头力矩；尾部着水后，机身配平后弹起，此时姿态角为负；机身再次着水后，模型横向有一些晃动。

图 5.20 姿态角为 7° ，起落架全伸时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.21 所示，最大X 向过载为 -68 m/s^2 ，最大Y 向过载为 71 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第二次着水时的机体尾部。



(a) X 向过载曲线

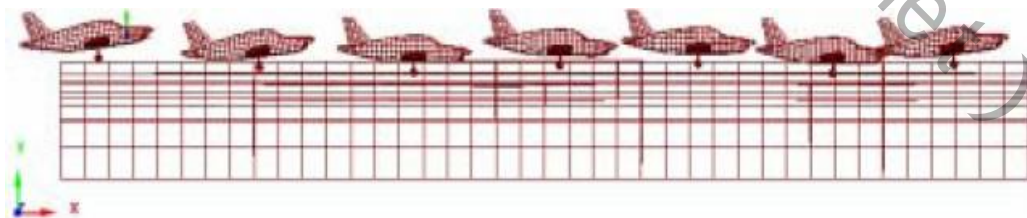


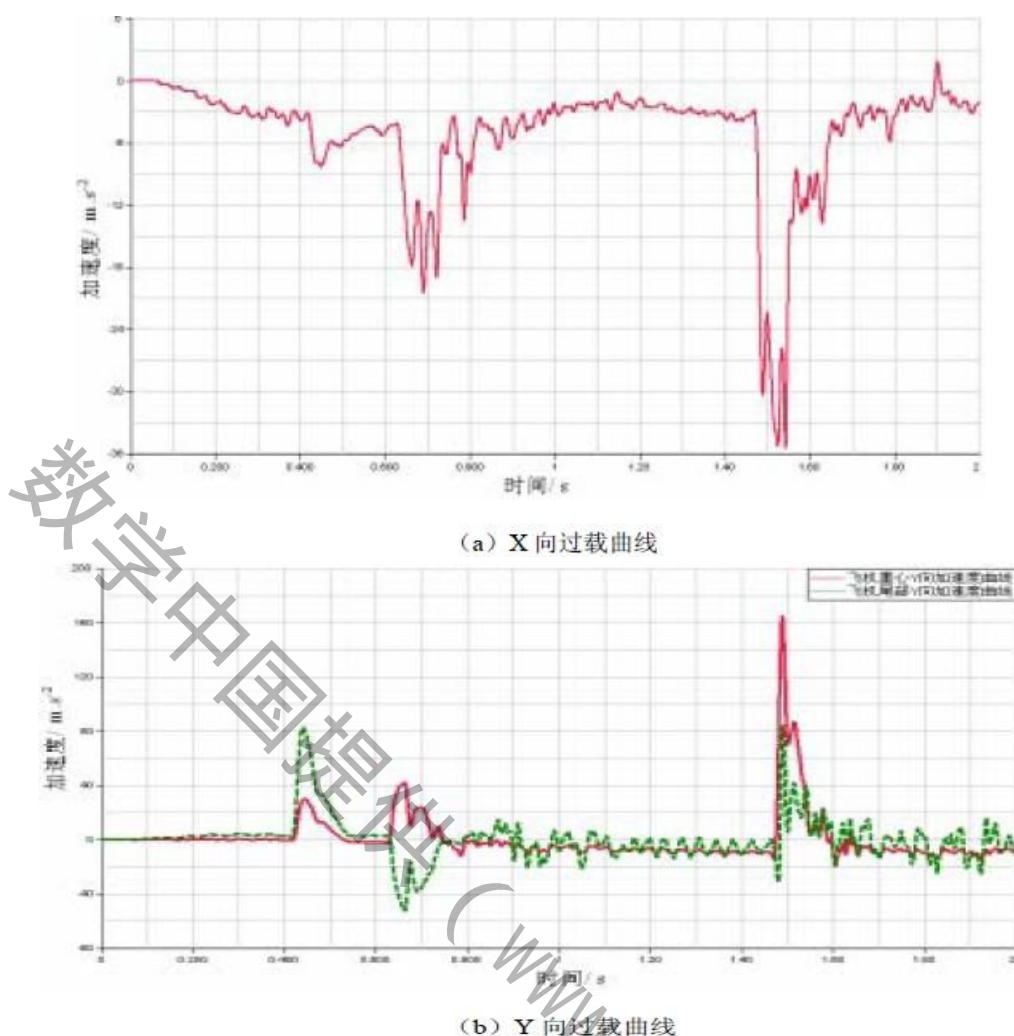
(b) Y 向过载曲线

图 5.21 姿态角为 7° ，起落架全伸时过载曲线

(3) 前起落架收起，主起落架全伸

机体运动轨迹如图5.22 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速；尾部着水后，机身配平后弹起，此时姿态角为负；机身再次着水后，模型横向有一些晃动。

图 5.22 姿态角为 7° ，前起收起、主起全伸时飞机运动轨迹

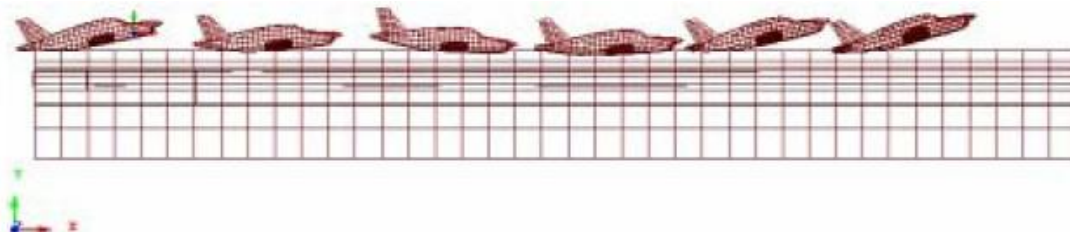
图 5.23 姿态角为 7° ，前起收起、主起全伸时过载曲线

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.23 所示，最大X 向过载为 -35.4 m/s^2 ，最大Y 向过载为 164 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第二次着水时的机体重心处。

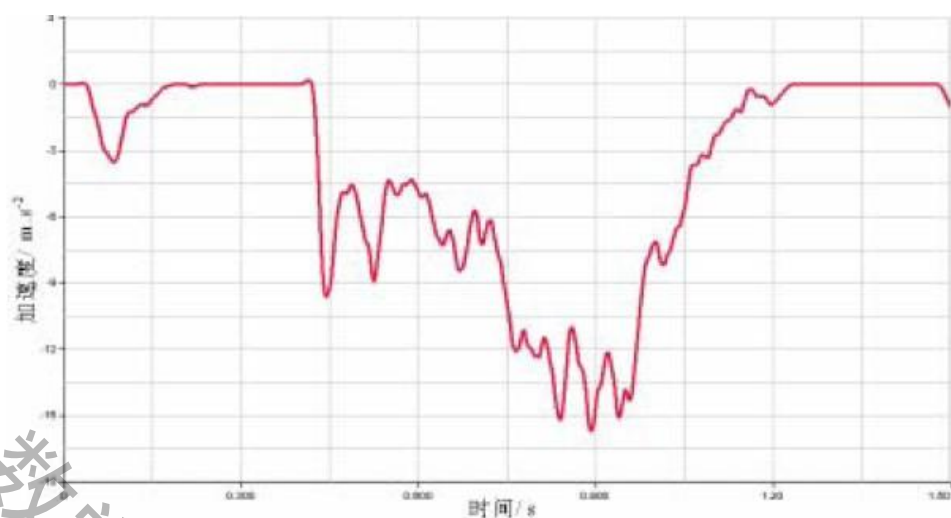
3. 12° 姿态角

(1) 起落架收起

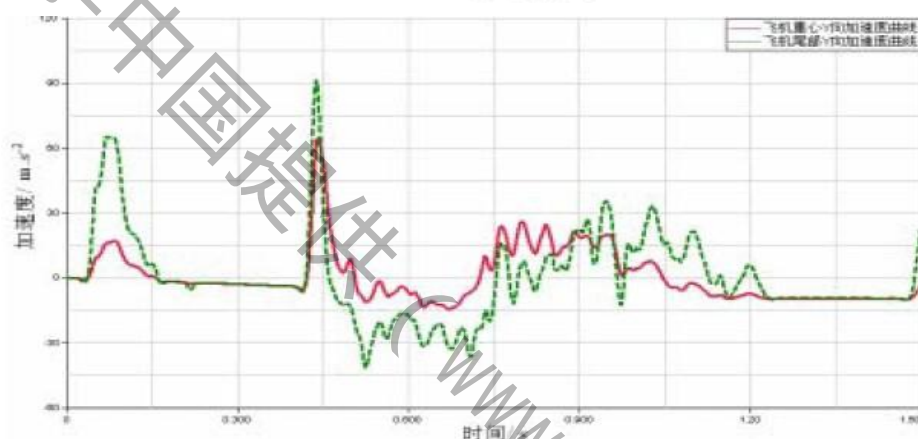
机体运动轨迹如图5.24 所示，飞机尾部先着水，产生低头力矩飞机配平后，头部与水体碰撞后弹起，然后呈颠簸状在水面滑行。

图 5.24 姿态角为 12° ，起落架收起时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.25 所示，最大X 向过载为 -15.7 m/s^2 ，最大Y 向过载为 91 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第一次着水时的机体尾部。



(a) X 向过载曲线

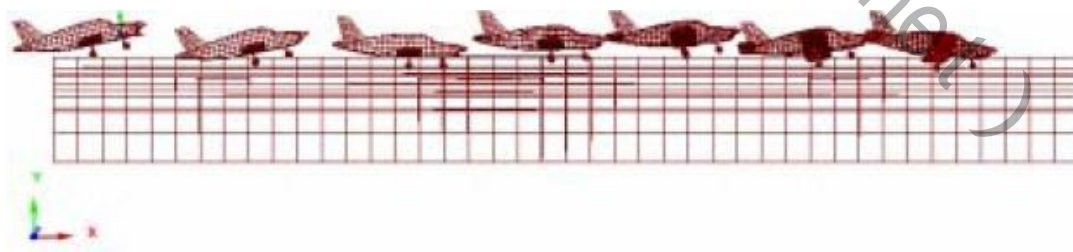


(b) Y 向过载曲线

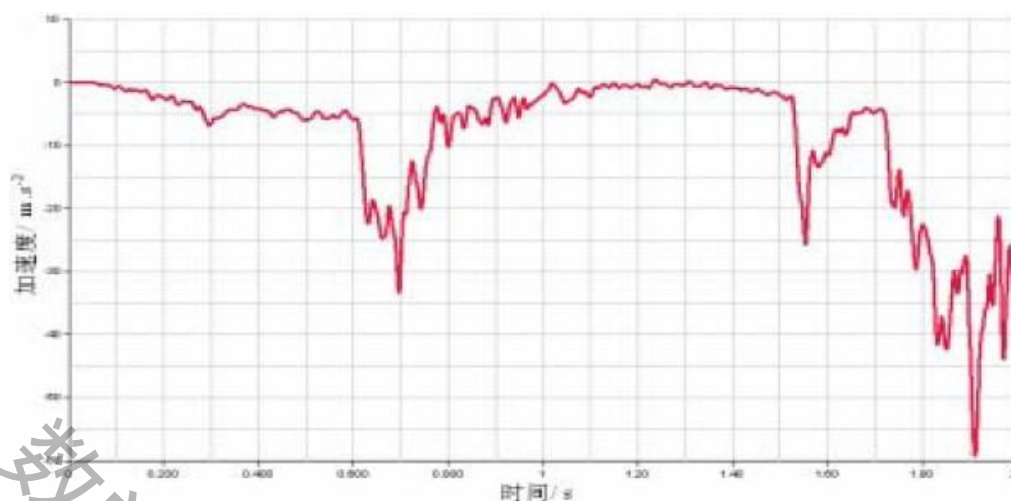
图 5.25 姿态角为 12° ，起落架收起时过载曲线

(2) 起落架全伸

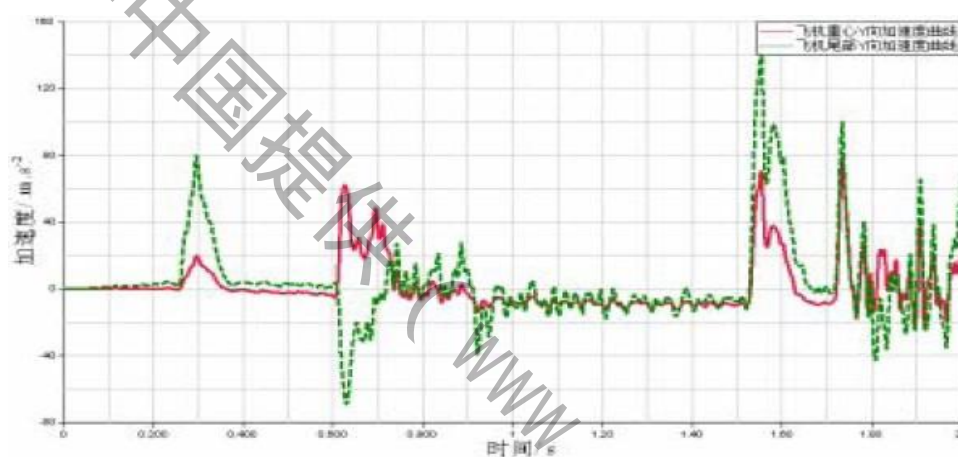
机体运动轨迹如图5.26 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速并产生低头力矩；尾部着水后，机身配平后弹起，机身再次着水后，模型横向有较大的晃动。

图 5.26 姿态角为 12° ，起落架全伸时飞机运动轨迹

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.27 所示，最大X 向过载为 -59.2 m/s^2 ，最大Y 向过载为 148.5 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第二次着水时的机体尾部。



(a) X 向过载曲线



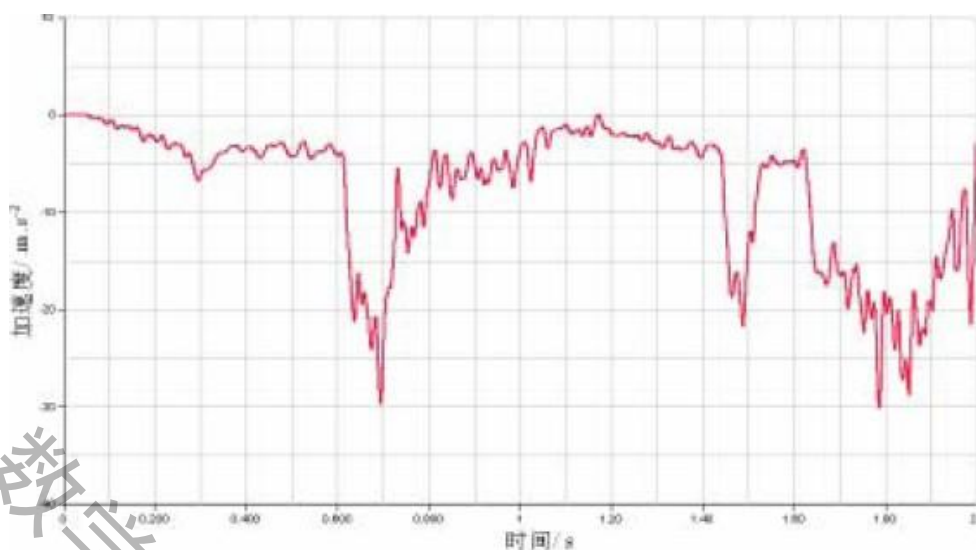
(b) Y 向过载曲线

图 5.27 姿态角为 12° ，起落架全伸时过载曲线

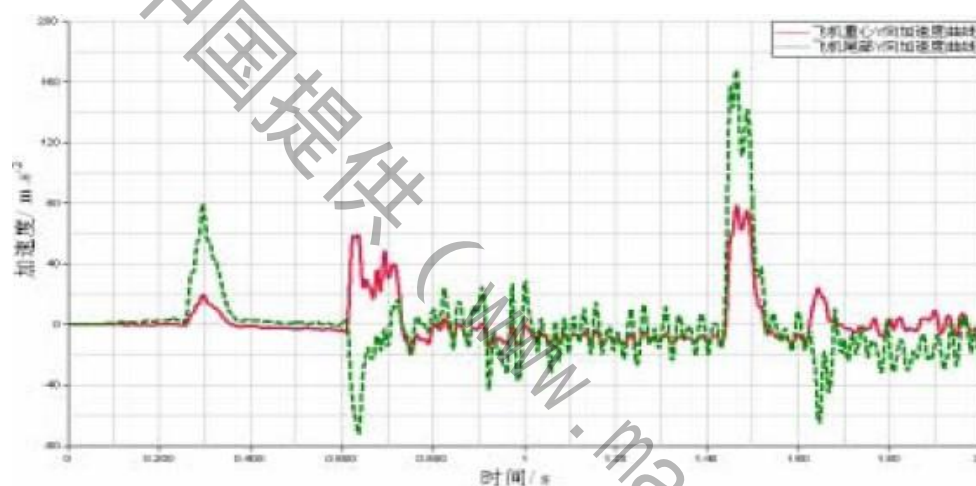
(3) 前起落架收起，主起落架全伸

机体运动轨迹如图5.28 所示，飞机起落架着水的时候飞机X 向、Y 向有轻微的减速并产生低头力矩；尾部着水后，机身配平后弹起；机身再次着水后，模型横向有一定的晃动。

图 5.28 姿态角为 12° ，前起收起、主起全伸时飞机运动轨迹



(a) X 向过载曲线



(b) Y 向过载曲线

图 5.29 姿态角为 12° ，前起收起、主起全伸时过载曲线

重心处与飞机尾部的过载曲线如图5.29 所示，最大X 向过载为 -30 m/s^2 ，最大Y 向过载为 168 m/s^2 ；最大法向过载出现在飞机第二次着水时的机体尾部。

4. 结果分析

根据上面计算结果列表如表 5.5 所示，与C-5A 飞机水上迫降试验数据表 4.4 对比，运动姿态有一定的类似，因此计算分析采用的方法具有一定的可行性。

表 5.5 计算结果列表

姿态 角/度	起落架 位置	水平速度/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	下沉速度/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	纵向过 载/g	重心法向 过载/g	尾部法向 过载/g	模型 状态
2	收起	33.75	1.74	1.9	7.7	13.6	w-u-h
7	收起	33.75	1.74	0.8	3.5	6.5	w-h
12	收起	33.75	1.74	1.6	6.6	9.3	w-u-h
2	放下	33.75	1.74	4.6	7.6	7.0	w-h-b
7	放下	33.75	1.74	6.9	4.0	7.2	w-h-b-p
12	放下	33.75	1.74	6.0	8.0	15.2	w-h-b-p
2	前起收起 主起全伸	33.75	1.74	7.6	11.4	8.8	h-n
7	前起收起 主起全伸	33.75	1.74	3.6	16.7	8.6	w-h
12	前起收起 主起全伸	33.75	1.74	3.0	8.0	17.1	w-h-n-b

模型状态中字母表示状态与表 4.4 中状态一致。

计算结果表明：由于为轻型飞机，起落架放下对飞机着水的姿态影响较大，容易产生横向扰动。飞机在 7° 姿态角着水的时候，重心和尾部处的法向过载最小；因此最终飞机最佳入水状态为：起落架全收，襟翼全偏，最佳着水姿态角为 7° 。

其次，我们通过计算得到飞机着水的初始状态，确定计算工况。

5. 对迫降速度进行分析：

飞机坐标系选择为：X 轴即飞机对称平面内水平基准线，向前为正；Y 轴为1 框平面内对

称轴线，向上为正；Z 轴垂直于飞机对称平面，向右为正；坐标原点为1 框中心点，如图5.1所示。



图 5.1 飞机坐标系

飞机重量重心包线图如下图所示：

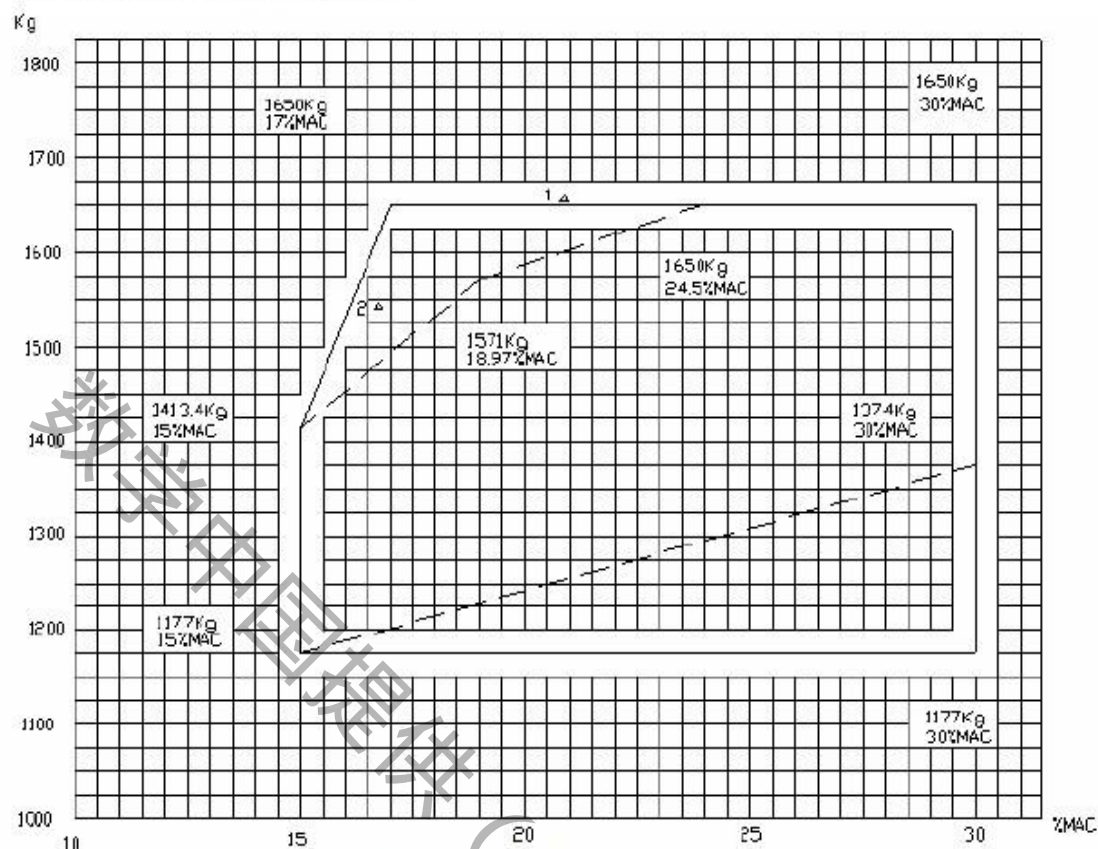


图 5.2 飞机重量重心包线

给出飞机的1650Kg 与1413Kg 下的飞机机翼水平失速速度 V_S 的值见表 5.1，无动力减速率为-0.5m/s；其中IAS 为指示空速（Indicated AirSpeed），CAS 为校正空速（Calibrated AirSpeed），表5.2 给出了飞机限制空速。

表 5.1 机翼水平失速速度

襟翼偏角 / 度	重心 (%MAC)	$V_S (W=1650 \text{ Kg})$		$V_S (W=1413 \text{ Kg})$	
		IAS/ m.s^{-1}	CAS/ m.s^{-1}	IAS/ m.s^{-1}	CAS/ m.s^{-1}
0	前重心	33.6	32.1	32.0	30.2
10	17.8 (W=1650 Kg)	31.8	31.7	31.3	31.1
30	15.42 (W=1413 Kg)	29.4	28.8	28.9	28.6
0	后重心	33.0	31.4	28.9	26.8
10	29.26 (W=1650 Kg)	31.4	31.2	28.2	27.7
30	29.1 (W=1413 Kg)	28.3	27.9	25.4	24.6

表 5.2 重量 1650Kg 时飞机限制空速

序号	名 称		符号	CAS/ m.s ⁻¹	IAS/ m.s ⁻¹
1	不可超越速度		V_{NE}	88.3	86.4
2	最大结构巡航速度		V_{NO}	65.3	63.3
3	机动速度		V_A	61.7	60.0
4	襟翼展	$\delta_j = 10^\circ$	V_{FE}	55.3	53.1
	态速度	$\delta_j = 30^\circ$	V_{FE}	48.1	45.8
5	俯冲速度		V_D	98.3	96.1
6	最大平 飞速度	H=0	V_H	72.5	70.6
		H=1000 m	V_H	68.1	65.8
		H=2000 m	V_H	62.8	60.8
		H=3000 m	V_H	58.6	57.5
7	机翼水	$\delta_j = 0^\circ$	V_s	31.9	33.6
	平失速	$\delta_j = 10^\circ$	V_{SI}	31.7	31.9
	速度	$\delta_j = 30^\circ$	V_{SO}	27.2	29.4

注：机翼水平失速速度为前重心（17.8%MAC）的试飞测定值。

按CCAR-23§23.75[172]要求，飞机着陆下滑降到15.3 米的高度前，必须维持1.3VS 的校正空速定常下滑进场，且降至15.3 米的高度前，稳定下滑梯度必须不大于5.2%。下滑梯度计算公式为：

$$\theta = \frac{C_x}{C_y} \frac{1.75 \bar{N} \eta_B}{V_s W}$$

其中， $C_y=1.25$ ， $C_x=0.139$ ，节流比 $N=0.22$ ， $N_0=300$ 马力， $\eta_B=0.64$ ， $V_3=1.3$ ， $V_s=35.49\text{m/s}$ ， $W=1650\text{Kg}$ ；算得下滑梯度 $\theta=0.049<5.2\%$ 。

由此，按照最差情况考虑，无迫降经验飞行员以 2.8° 坡度接触水面（无突风、静水）为最危险情况，此时：

$$\begin{aligned} V_x &= V_s \times (1 - \theta) \\ V_y &= V_s \times \theta \end{aligned}$$

此时飞机的水平速度为 33.75 m/s，垂直速度为-1.74 m/s，作为飞机水上迫降的最严重状态。

机体参数：

飞机重量取最大飞行重量，重心位置取 29.26%MAC 位置，飞机重量重心如表5.3 示：

表 5.3 飞机重心与惯量分布

名 称	W/ Kg	X _c / m	Y _c / m	Z _c / m	J _x / Kg.m ²	J _y / Kg.m ²	J _z / Kg.m ²
正常起飞	1650.0	-1.565	-0.151	-0.006	3107.80	10911.4	8276.2

设计飞机入水前飞行姿态为：姿态角为 20° ， 70° ， 120° ；飞机水平飞行速度为 33.75m/s，下沉速度为1.74m/s；飞机襟翼满偏 30° 。计算工况如表5.4 所示，迫

降水域为平静水域处理。

表 5.4 飞机计算工况

工况	姿态角/ 度	下沉速度/ $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	起落架状态
1	2	1.74	收起
2	7	1.74	收起
3	12	1.74	收起
4	2	1.74	全部放下
5	7	1.74	全部放下
6	12	1.74	全部放下
7	2	1.74	前起收起，主起放下
8	7	1.74	前起收起，主起放下
9	12	1.74	前起收起，主起放下

飞机气动力采用简化施加。其中升力与飞机重力初始值等效，1 秒内线性减为0。飞机空气

阻力默认与发动机推力等效。飞机的各个操控面气动力矩为低头力矩，数值取为646 N·M，随飞行速度线性减少。

根据此结论，我们对飞机进行第三部分的分析：

水上迫降一般分成两类[135]：有计划的水上迫降和无计划的水上迫降。在此，我们考虑的是无计划的水上迫降。无计划迫降时，飞机的速度、冲击力、损伤一般都比有计划的迫降要大得多，而且常常给乘员带来非常严重的伤害。由于机体损坏，飞机的漂浮性能将降低，从而也减少了乘员成功逃离飞机的可能性。无计划水上迫降的不可控因素太多，在第一阶段假设的条件是：

1. 从飞机无动力飞行时到与水面接触之前无大风大雨等自然天气影响
2. 假设飞机在水中没有受到水中生物的影响；
3. 假设飞机不受水流速度的影响；
4. 飞机接触水面时速度分解为向速度和纵向速度。
5. 在水上迫降过程中，发动机关闭，起落架收起，前后缘襟翼采用最大偏角。
6. 飞机从于水面接触到停止整个过程都未完全没入水中；
7. 飞机在迫降过程中机身完整，飞机的受力不因机身的破损而发生变化，从而影响飞行轨迹。
8. 机身下部蒙皮足够承受水的压力不破裂，因为如果机身下部蒙皮破裂，那么水将流入机舱，乘员很难有充足的时间逃离。
9. 假设飞机接触水面时的姿态是机尾先接触水，并且机头与水面成一定的角度
10. 假设在飞机与水面接触的过程中，除了所受到的浮力、阻力、水的冲击力、及重力之外无其它干扰作用。
11. 关于飞机飞行阻力的假设

(1). 飞机飞行在空气中会有各种阻力，阻力是与飞机运动方向相反的空气动力。按阻力产生的原因可分为摩擦阻力、压差阻力、诱导阻力和干扰阻力。以上四种阻力是对低速飞机而言，至于高速飞机，除了也有这些阻力外，还会产生波阻等其他阻力。

因此，由于飞机迫降模型的复杂性，在模型设立初期，我们将飞机在空中飞行时所受到的各种阻力的合力统设为一个阻力。

(2). 由于阻力的大小和方向随着飞机速度，飞机的高度，不同海拔高度中的空气密度和温度在时刻变化，因此，为了模型简化，我们将飞机在空中所受的阻力大小设为只与速度大小成比例的二次关系式，不随其他影响因素而变化，并假设其方向时刻与飞机机身的方向垂直。

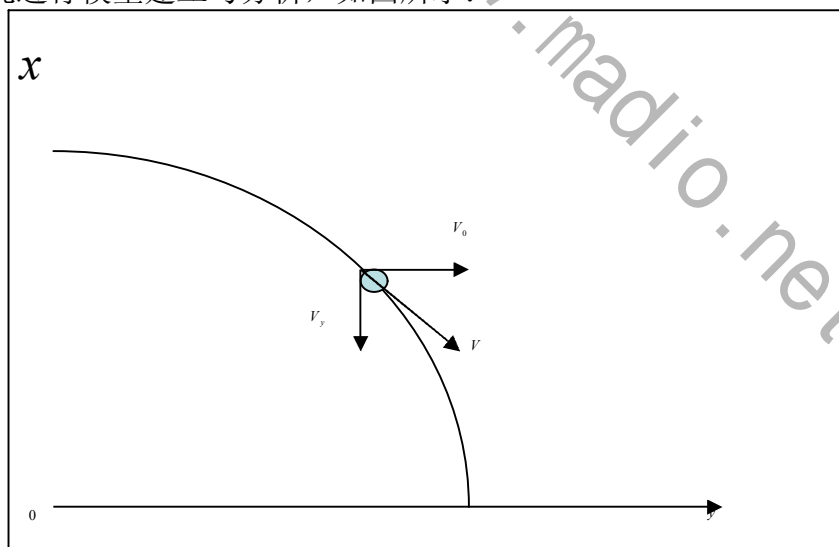
由条件可以看出我们是在理想状态下研究飞机的最佳状态，而第二阶段的问题是：在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机在海面的迫降具有更大的难度和危险性。请你建立合理的数学模型，对客机在海面的迫降进行分析，指出在有风浪的条件下，飞机以何种姿态和航向接触海面是相对安全的选择。这就要求我们考虑不理想状态下，飞机以何种姿态接触水面为最佳状态，因此，我们需在第一阶段的假设基础上，把第十一个假设改为：

11. 关于飞机飞行阻力的假设

(1). 飞机飞行在空气中会有各种阻力，阻力是与飞机运动方向相反的空气动力。按阻力产生的原因可分为摩擦阻力、压差阻力、诱导阻力和干扰阻力。以上四种阻力是对低速飞机而言，至于高速飞机，除了也有这些阻力外，还会产生波阻等其他阻力。因此，由于飞机迫降模型的复杂性，在模型设立初期，我们将飞机在空中飞行时所受到的除风力之外的各种阻力的合力统设为一个阻力。

(2). 由于阻力的大小和方向随着飞机速度，飞机的高度，不同海拔高度中的空气密度和温度在时刻变化，因此，为了模型简化，我们将飞机在空中所受的阻力大小设为只与速度大小成比例的二次关系式，不随其他影响因素而变化，并假设其方向时刻与飞机机身的方向垂直。

(其他假设不变)在这样的假设条件之下，我们对飞机接触水面前做平抛运动的速度情况进行模型建立与分析，如图所示：

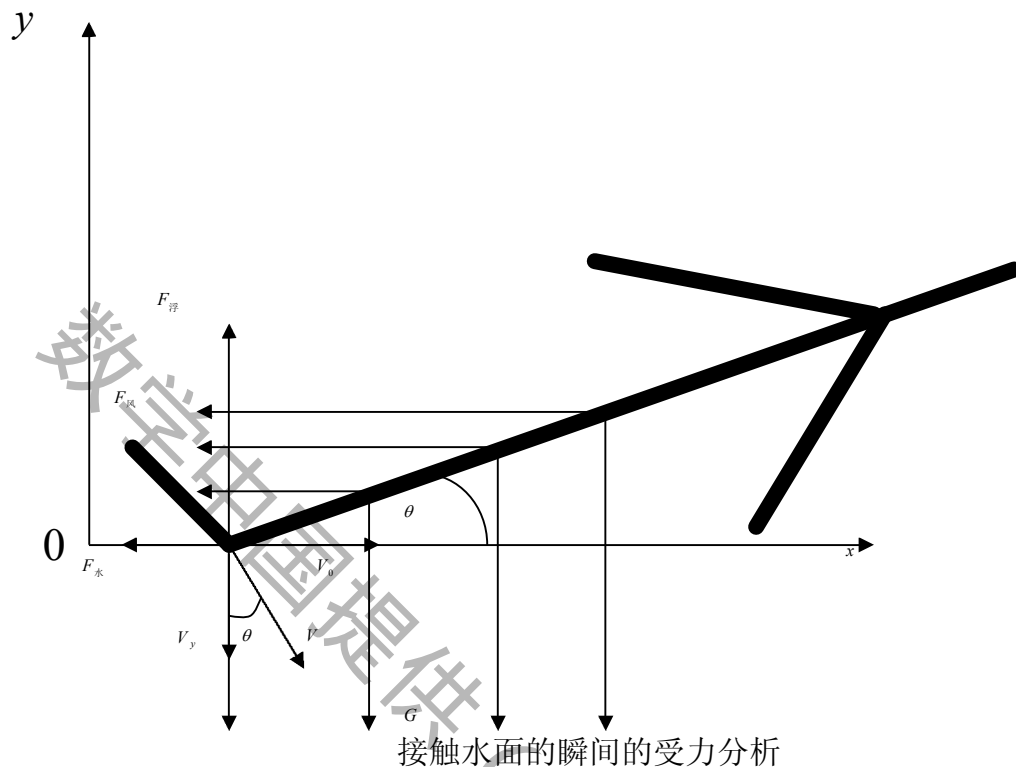


飞机在接触水面时做平抛运动时的模型建立

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

$$V_y = \sqrt{2gH} \quad (2)$$

飞机以一定的速度迫降在海面上，飞机的机尾先接触海面，接触海面时与海面的夹角为 θ 。接触海面的瞬间速度的方向与机尾垂直，飞机接触海面时的受力分析如下图所示：



$$V = \frac{V_0}{\sin \theta} \quad (3)$$

$$\text{水平方向上的合力: } F_1 = F_{\text{水}} + F_{\text{风}} \quad (4)$$

$$\text{竖直方向上的合力: } F_2 = F_{\text{浮}} - G \quad (5)$$

$$F_1 = Ma_1 \quad (6)$$

$$F_2 = Ma_2 \quad (7)$$

飞机受到的风力与受力面积成正比: $F_{\text{风}} = K_1 S \quad (8)$

假设飞机受到风力的受力面积的变化是变减速变化的: $S = \frac{1}{2}at^2 \quad (9)$

假设飞机受到的水的阻力与受力面积也是正比关系: $F_{\text{水}} = K_2 S_1 \quad (10)$

假设飞机落入水中之后淹没在水中的体积与时间成正比关系:

$$V = K_3 t \quad (11)$$

$$F_{\text{浮}} = \rho_{\text{水}} g V \quad (12)$$

$$G = Mg \quad (13)$$

在竖直方向上，飞机首先做加速度减小的变加速运动，然后做加速度增大的变减速运动，当加速度为 0 时飞机完全淹没。在水平方向上飞机一直做加速度较小的变减速运动。

$$\text{由 (5)、(12)、(13) 得, } a_2 = \frac{\rho_{\text{水}} g K_3 t - Mg}{M} \quad (14)$$

$$\text{由 (4)、(8)、(10) 得, } a_1 = \frac{K_2 S_1 + K_1 S}{M} \quad (15)$$

$$\text{所以, } a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \quad (16)$$

$$\text{由 (9) 得, } S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{4}(a_1 + a_2)t^2 \quad (17)$$

$$\text{又 } S + S_1 = L \quad (L \text{ 表示飞机的总长}) \quad (18)$$

飞机与水发生碰撞到部分淹没到水里看做整个过程，根据动量守恒定律定理有：

$$MV_0 = MV_1 \quad (19)$$

$$V_1 = V_0 + at \quad (20)$$

综上所述，可以得到时间 t 与角度的关系，所以在允许的时间范围内飞机以 7° 角落水为最佳姿态。

四. 模型的总结:

通过飞机水上迫降刚体模型，分析飞机在迫降过程中的运动轨迹，得到飞机各个部位的过载曲线，与 C-5A 飞机水上迫降模型试验对比发现机体水上运动轨迹相似，并且通过计算得到飞机着水的初始状态，确定计算工况，此外，还通过对迫降速度的模型建立与分析，求解计算，得出结论。结果表明该型飞机起落架放下导致迫降过程中机体会产生横向摆动，增加了飞机横向不稳定性，因此最终确定了其最佳的水上迫降姿态为：起落架全收，襟翼全偏，最佳着水姿态角为 7° ，但是，风力是变化的，所以这个大答案只是相对而言的，是飞机在某段时间内的最佳姿态。

参考文献

- [1] 崔德刚. 结构稳定性设计手册, 北京: 航空工业出版社, 1996.
- [2] 运输类飞机适航标准 (第三次修订): CCAR-25-R3, 2001.
- [3] 飞机设计员手册编辑委员会. 飞机设计员手册 (第四册), 北京: 国防工业出版社, 1965.
- [4] 飞机设计手册 (第三册), 北京: 国防工业出版社, 1983.
- [5] 黄怀纬, 韩强. 侧压下含缺陷功能梯度材料圆柱壳的屈曲. 华南理工大学学报, 2008, 36(6): 40-46.