飞机对战游戏

1.提出问题：

如今，有一种在学生中间比较流行的双方飞机对战游戏，也是一种极为有趣的游戏。在游戏中，双方各自准备一张坐标纸，在上面分别制作7x7方格或9x9方格，在各自的方格中各画一架或两架飞机，飞机呈“士”字形，其中上面的一个长横占5格，下面的短横占3格，一竖占4格，最上面突出的一个格子代表机头。所画飞机的位置以及机头的方向都有游戏者决定，游戏结束前双方不能看对方的坐标纸。假设游戏时游戏者A、B两人交替用“炮弹”打击对方，攻击的一方报告“炮弹”打击的位置，被攻击的一方报告是否命中飞机。游戏双方都是在通过打击对方后的反馈信息来猜测对方飞机的位置。

由此，我们为了使建立的模型简便起见，可采用矩阵对策[1,2]及概率知识来建立模型进行分析说明。

问题一：设计一个人及对战的“飞机对战”游戏。要求先用计算机进行攻击，以取胜为目标，给出进行游戏的策略。

问题二：考虑在9×9坐标纸中画两架飞机的游戏方式，两架飞机所占的格子不能重合，游戏同7×7格时一样。其中一架飞机被命中机头时，要报告飞机被击落。当某方的两架飞机都被击落时游戏结束，被击方失败。分析这种游戏方式与一架飞机的游戏方式在策略上的不同点。

2.问题的假设：

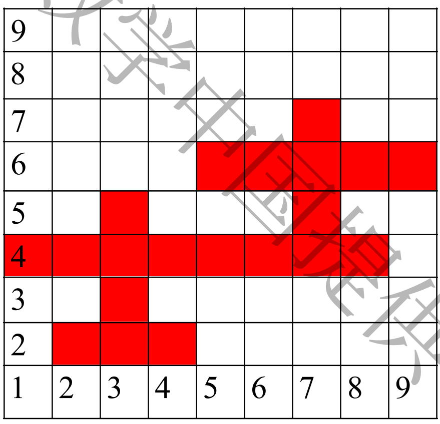
2.1 问题一的假设：

a) 由于游戏双方都在不知道对方坐标纸的情况下，通过打击后对方的反馈信息来猜测对方飞机的位置，由于A、B方攻击的几率相等，则假设A方打完后，位置随机变动，接着由B方继续攻击，与A一样可变换位置，游戏继续进行，直至结束（即一方击落对方）。
b) 由于A、B双方飞机对战中，都是为了击落对方飞机而取得胜利。所以，假设双方的机头都朝向对方，如此，则双方的机头都被限制在一定的区域移动。
c) 由题知，双方攻击时“炮弹”击中某一方机头时，游戏结束。则假设某方攻击时未击中机头、击中飞机其它部位或未击中时，游戏继续循环进行；否则击中机头，游戏结束。
d) 不考虑其它因素的干扰，游戏的进行的连续的、没有间断，只与游戏者的对战策略有关。
e) 在坐标纸上一架飞机所到达的区域为几率是相等的，且在飞机机头所活动的范围内被对方击中的概率也是相等的，不受其它因素的干扰，且是随机进行飞机对战的。

2.2 问题二的假设：

为了简化问题的复杂性及其难度，可做如下假设：

a) 与问题一中 a)、b)、c)的假设基本相同。
b) 此时，游戏对战的坐标纸变为 9x9 格，且 A、B 双方均有两架飞机，为了取得胜利，则假设这四架飞机均无差异，在坐标纸上的位置随机变化，同一方的两家飞机同向且均对准对方攻击，而机头此时被确定在某一区域内随机移动。
c) 由于对战中，某一方其中一架飞机被击中机头时，另一方要报告有一架飞机被击落，但游戏继续进行；当某方的两架飞机都被击落时，游戏结束，被击落方失败；由此，为了是所建模型简化明了，通过对问题的分析有两种对战策略，因此，可建立两种模型。
d) 由于同一方的坐标纸中，两架飞机在同一个表格处不能重合，则两架飞机机头所处的区域如下图(a)表示；且机头到达的每一个表格（从图（b）中可知）的概率均相等。



图（a）

3\4	5	6	7	8	9
4					
5					
6					
7					

图（b）

3. 符号说明：

α_i	表示 A 方的第 i 个策略
β_j	表示 B 方的第 j 个策略
P_i	表示飞机被击中机头的概率
S_i	表示 i 方的策略集，i=A、B
x_i	表示 A 方的策略 α_i 的概率
y_i	表示 B 方的策略 β_j 的概率
G	表示矩阵对策
E	表示矩阵对策的期望赢得
V_G	表示 A 方取到最优纯策略 x*与 B 方取到最优纯策略 y*时的期望赢得值
ω	表示飞机机头移动范围内到达各个方格的概率
R	表示 A 方的赢得矩阵

4. 问题的分析：

4.1 问题一的分析：

a) 由于在不知道对方坐标纸的情况下，不容易确定比较好的策略进行作战，只能通过打击后对方的反馈信息来猜测对方飞机的大概位置，而对方的飞机位置不是确定不变的、是随机的，在此我们就借鉴与用一般的论证过程来讨论；假设作战双

方飞机在随机变化，则 A、B 游戏者就会采取不同的作战策略对战，

记 A 的符合对策集为：

$$S_A=\{\alpha_1、\alpha_2、\cdots、\alpha_m\}$$

则 B 的符合对策集为：$S_B=\{\beta_1、\beta_2、\cdots、\beta_n\}$

此时将 A、B 两个游戏者看作此次人机作战模型中的决策者，具有决定作用。

b) 此次 A、B 双方飞机对战的目的在于决出胜负，对于不同的作战方式，则双方可采取各自有限策略集中的不同策略，此时我们可以以此来建立一个矩阵对策模型，在建立之前则有如下定义：

定义 1[3]：设 $G=\{S_A, S_B, R\}$为矩阵对策，其中

$$S_A=\{\alpha_1、\alpha_2、\cdots、\alpha_m\} \qquad S_B=\{\beta_1、\beta_2、\cdots、\beta_n\}$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 。若等式

$$\max_i \min_j a_{ij}=\min_j \max_i a_{ij}=a_{i^*}a_{j^*} \qquad i=1、2、\cdots、m;$$

$j=1、2、\cdots、n$; (*) 成立；

记 $V_G=a_{i^*}a_{j^*}$ 。

上述(*)式成立的纯局势（a_{i^*}，β_{j^*}） 为 G 在纯策略下的平衡局势，a_{i^*}与β_{j^*}分别是 A 方、B 方的最优纯策略。

c) 由于在上述 b)中矩阵对策中求出的最优纯策略是两方都采取的，都令己方满意的最佳选择；但经过是模型的建立及分析后，会发现上述所建立的矩阵对策不一定存在纯策略意义下的解，则需要对模型作进一步的修改，建立一个矩阵对策的混合策略[3]模型。

4.2 问题二的分析：

a) 与问题一相似之处在于 A、B 双方采取的作战策略均是随机的，且与问题一中 a)假设相同。

b) 不同之处在于：由于 9×9 方格坐标纸上双方均有两架飞机，且有假设 b)可知两架飞机机头所在的区域范围，只要某方“炮弹”落在对方机头移动的范围之内，将有 p_1 的概率可以命中，且两架飞机随机移动时，则需要根据策略选取的不同及假设 c)可建立两个模型。

4.2.1 对两种模型的假设：

模型Ⅰ：因为 A、B 双方取胜的概率相同，则假设 A 方攻击 B 方（或 B 方攻击 A 方），如果 A 方连续击落 B 方的两架飞机，则游戏结束。此时，可将双方的两架飞机当作一架飞机作战，所建模型与问题一相似，将问题转化为问题一中的模型处理。

模型Ⅱ：假设 A 方两架飞机先击落 B 方的任一架飞机，再由 B 方的一架飞机击落 A 方的任一架飞机；此时 A、B 双方均只剩一架飞机对战，将问题转化为问题一中的模型处理。

5.模型的建立：

5.1 问题一的模型：

由以上的分析及假设条件，我们可得如下表（1）所示策略：

		B 的策略					
		1	2 … …	j	… … … …		n
A 的策略	1	（α_1，β_1）	… … …	（α_1，β_j）	… … … …		（α_1，β_n）
	2	（α_2，β_1）	… … …	（α_2，β_j）	… … … …		（α_2，β_n）
	⋱	⋱	⋱	⋱	⋱	⋱	
	m	(α_m, β_1)	… … … …	(α_m, β_j)	… … … … …		(α_m, β_n)

表（1）

其中α_i ，β_j 分别表示 A 方、B 方的赢得场数；若将上表中 A、B 双方的赢得场数减去两方的平均赢得数，则上表转化为零和对策，有 A 的赢得矩阵为：

$$R=\begin{bmatrix} \alpha 1-\dfrac{\alpha 1+\beta 1}{2} & \cdots & \cdots & \alpha 1-\dfrac{\alpha 1+\beta n}{2} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha m-\dfrac{\alpha m+\beta 1}{2} & \cdots & \cdots & \alpha m-\dfrac{\alpha m+\beta n}{2} \end{bmatrix}$$

由于 A 与 B 所采取的策略均至多为 A_{19}^{19}=19！次，带入计算时，计算量复杂，如果采用计算机在随机进行攻击情况下求解，可收到一曲同工之效；而以上的算法由分析知，存在一定的问题，即在只使用纯策略的范围内，矩阵对策问题可能无解。

为了改进方案，我们有如下定义：

定义 2[3]： 设矩阵对策 G = { S_A，S_B，R}，其中 S_A={α_1、α_2、…、α_m}，S_B = {β_1、β_2、…、β_n}， A = （a_{ij}）$_{m\times n}$ ，记为

$$S_A^* = \{x\in E^m \mid x_i\geqslant 0 , i = 1, 2, \cdots, m, \quad \sum_i x_i = 1 \}$$

$$S_B^* = \{y\in E^n \mid yi \geqslant 0, j =1, 2, \cdots, n, \quad \sum_j y_i = 1 \}$$

则S_A^* 和S_B^* 分别成为 A 方和 B 方的混合策略集，x∈ S_A^*和 y∈ S_B^*分别称为 A 方和 B 方的混合策略，队 x∈S_{A^*}和 y∈S_{B^*}称为（x , y）为一个混合局势，A 方的赢得期望函数记为

$$E（x , y）= x^T R\, y = \sum_i \sum_j a_{ij}x_i y_i \qquad (5.1.1)$$

可以得到一个新的矩阵对策，记为 G* = { S_A^*， S_B^*，E}

称 G*为矩阵对策 G 的混合扩充。

由此可以看出纯策略是混合策略的特例。即

A 方的策略 a_k 等价于 A 方的混合策略 $x = \{ x_1, x_2, \cdots, x_m \}$

$$其中\ x_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

均上可知：A 方可保证自己的赢得期望值不少于：

$$V_1 = \max_{x \in S_A^*} \min_{y \in S_B^*} E(x, y)$$

B 方可保证自己的所失期望值之多是：

$$V_2 = \min_{y \in S_B^*} \max_{x \in S_A^*} E(x, y)$$

则有 $V_1 = \min_{y \in S_B^*} E(x^*, y) \leqslant E(x^*, y^*) \leqslant \max_{x \in S_A^*} E(x, y^*) = V_2$

且有定理可知：

定理 1[3]：对任一矩阵对策 $G = \{S_A, S_B, R\}$，一定存在混合意义下的解。

由此可见在问题一中，假设如果本题在纯策略矩阵中无解，则可在其期望混合矩阵中找到最优策略，而此时的最优策略即为所求。

可由下列定义给出：

定义 3：设 $G^* = \{ S_A^*, S_B^*, E\}$是矩阵对策 $G = \{ S_A, S_B, R\}$的混合扩充，如果

$$\max_{x \in S_A^*} \min_{y \in S_B^*} E(x, y) = \min_{y \in S_B^*} \max_{x \in S_A^*} E(x, y)$$

记其值为 V_G。则混合局势（x^*，y^*）为 G 在混合意义下的解，x^* 和 y^* 分别称为 A 方与 B 方的最有混合策略。

即可由 $E(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_i$ 求解，

解得： x^* ， y^* 及 $E(x^*, y^*)$

即 $V_G = E(x^*, y^*)$

由此我们得到了 A、B 双方的最优策略，而此算法比较麻烦，我们将采用计算机来求最优解，或对赢得矩阵采用线性规划[3,4]来求解。

5.2 问题二的模型：

通过分析我们有两种模可建立：

模型Ⅰ：由分析即假设条件知，A 方连续或同时击落两架飞机时，游戏结束。我们将 A 方的两架飞机当作一个整体；此时，A 方飞机的命中率记为 P_1,可仍采用问题一中的模型求解。记为：V_{G1}

且假设 $V_{G1} = P_1 \times V_G$ 成立。

模型Ⅱ：由分析及假设条件知，若现由 A 方攻击，且击落 B 方的任一架飞机，此时记其击落的概率为 P_2；再由 B 方击落 A 方的某一架飞机的概率记为 P_3；随之问题有转化为一对一问题，有转化问题一的模型，但此时的命中率变为 P_4；命中率大大下降。记为：V_{G2}

且假设 $V_{G2} = P_2 \times P_3 \times P_4 \times V_G$ 成立。

6. 模型的求解及分析：

6.1 问题一的模型求解及分析：

a) 由题知， $m = n = A_{19}^{19}$，在 7×7 方格中某一方被击落的概率为 $P_0 = \frac{12}{21}$,假设可以用 $V_{G0} = P_0 \times V_G$，则可更精确的表示某方在 19 局 10 胜中取胜的概率，可由计算机求解 V_G 的值。
b) 由于假设的情况只是在特殊情况下进行，却可以得到一个满意的求解及思维过程，机头的指向是经过打击后对方的反馈信息求知，且经过计算机的随机攻击的来的赢得矩阵可以肯定此模型在实际应用中有可取之处。

6.2 问题二的模型求解及分析：

6.2.1 模型Ⅰ求解及分析：

a) $m = n = A_{19}^{19}$,在 9×9 方格中，A 方击落 B 方的两架飞机的概率为 $P_1=\frac{2}{3}$，假设如果用 $V_{G1} = P_1 \times V_G$，则可更精确的表示某一方取胜的概率，已有计算机求解得。
b) 此模型是将同一方的两架飞机当作一家飞机同时进攻，从而将模型简化为模型以进行求解，而不考虑其它因素的干扰，此时的问题就简化的很明了。
c) 题中假设 A 方同时或连续击落 B 方两架飞机，则知将同方的两架飞机当作一个整体时，命中率明显提高，有利于先攻击的一方。

6.2.2 模型Ⅱ求解及分析：

a) $m = n = A_{19}^{19}$,在 9×9 方格中，由所建立的模型及其中的相关概率分别为 $P_2 = \frac{2}{45}$，$P_3 = \frac{2}{45}$，$P_4 = \frac{2}{3}$；在已知 V_G 情况下，假设如果用 $V_{G2} = P_2 \times P_3 \times P_4 \times V_G$ 表示，则 V_{G2} 为所求。
b) 此模型是在假设 A 方先攻击 B 方时，击落 B 方的任一架后，再由 B 方攻击且在某一次命中 A 放的任一架飞机，然后再一对一转化为问题一中的模型进行对战，但此时的两架飞机在坐标纸上的活动范围变大，且在不知对方的坐标纸以及对战策略时，命中对方的几率下降。

综合以上分析可得到一个肯定的结论：

由 V_{G0}、V_{G1}、V_{G2} 可以看出：

V_G 与方格的数目无关，而与 A、B 双方的对策数有关；

击中飞机机头（击落飞机）的概率 P 与方格数目有关，而与对策数无关。

参考文献：

［1］ 谢政，对策论，湖南长沙：国防科技大学出版社，2004.3 ，31-42.
［2］ 吴清烈、尤海燕、徐士钰、陈莉莎，运筹学，南京：东南大学出版社，2004.1， 344-352.
［3］ 杜瑞成、闫秀霞，北京：机械工业出版社，1999.8 ， 209-218.
［4］ 杨启帆、方道元，数学建模，浙江：浙江大学出版社，224-227.