

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：史晓伟

队员 2：李阳林

队员 3：刘静

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 年第三届“ScienceWord 杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 聪明的汽车

关 键 词 理想路径，几何运动学模型，最小转弯半径，切入点范围

摘 要

近年来，铰接式卡车以其运输效率高、运输成本低及油耗低的独特优势越来越受到人们的青睐。铰接式卡车的数量也逐渐增多，并由此引发了铰接车的侧位停车问题。

针对第一个问题即铰接车的侧位停车问题，本文将铰接车与非铰接车进行了模型对比。同时通过专业人士介绍了解了侧位停车的基本步骤：开过车位、增大汽车方向角再减小汽车方向角；然后画出侧位停车过程流程图。我们在“二次泊车”就可以泊入目标停车位的假设前提下，并通过车长，车宽，最小转弯半径，汽车的最大转向角，主车与副车的最大夹角，停车位的长与宽等的约束条件并通过 Mercedes-Benz Actros 铰接式集装箱卡车的具体数据进行验证，得到了该车所需的最小停车位的长度与宽度。从而可以判断该车是否可以安全驶入停车位。

针对第二个问题即在驾驶过程中由于避让行人或临时出现的障碍物等客观条件（或驾驶时操作的不准确）而使得汽车偏离最优路径的问题。我们利用第一阶段建立的模型算出切入点 A 到 x 轴的距离 y 的变化范围，设司机驾驶汽车在紧贴着障碍物完成“一次泊车”时车的切入点 A' 到 x 轴的距离 y' ，则知若 y' 在 y 的变化范围之内则其可以安全停入车位。否则需要退回起始位置，然后沿平行停车位的方向行驶到停车位的另一边倒车向车位方向完成半周匀速圆周运动，若此时障碍物没有阻挡则可以安全完成停车，否则无法完成停车。

关键词：理想路径，几何运动学模型，最小转弯半径，切入点范围。

参赛队号 1210

所选题目 A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

英文摘要（选填）

（此摘要非论文必须部分，选填可加分，加分不超过论文总分的 5%）

In recent years, articulated truck with its high transport efficiency, low transport cost and the unique advantages of low fuel consumption are more and more popular in people of all ages. Because the number of articulated trucks have gradually increased, causing the problem of car parking.

For the first problem, which is the problem of articulated vehicle lateral parking, this paper is a comparison of articulated vehicles and non-articulated vehicles. At the same time, through the introducing of the professionals, we do know the basic steps of the lateral stop: driving over the parking spaces, increasing the angle of the direction, and then reducing the angle of direction; then drawing out the flow chart. In condition of the "parking two times" We can acquire the data, needed by the car. And you must know the width, length, the radius of making a smallest turn, the biggest angle in making a turn, the length and the width of the parking spaces. Also through Mercedes-Benz Actros articulated truck container specific data . Which can determine whether the vehicle can safely enter the parking spaces?

The second problem is that in the process of driving ,in case of some obstacles, such as some people or other things.(or inaccurate driving operation).Leading to the car deviated from the optimal path. We can through the first stage of the model calculate the scope of changes' distance y which is the from the entry point A to the x-axis .If the driver drive a car closing to the obstacles in the completion of a "one-parking" car of the entry point when the distance to the x-axis, If the change in y within the scope ,the car can drive into parking spaces safely. Otherwise needing to go back to the starting position, then the drive along the direction of parallel parking spaces to another one-side, making a half turn . If the barrier does not block the stopping of the car at this time, it can have a secure parking, else the parking cannot be completed.

Key words: Ideal path, geometric kinematics model, the minimum turning radius, the entry point range.

一、背景分析及问题重述

随着社会的发展，科技水平的不断进步，汽车工业得到了大力的提高。汽车的应用越来越广泛，在日常生活中有着不可替代的作用。相应地开车的人员也越来越多，因此车辆数也越来越多，这就给交通和停车场带来了很大压力。很多城市的停车场不能满足日夜出增多的车辆停车要求，再加上由于各种各样的原因，大多数时机没有得到专门的驾驶训练，他们的驾驶水平不是很高，尤其表现为泊车水平不高。因此不能有效地利用有限的停车场空间，因此就要求人们寻找一种简单有效停车方法，尤其是侧位停车的有效解决方案。

为了在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，我们已经通过模型的建立和讨论初步解决了如下要求的“第一阶段问题”：

(1) 对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入。请你建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。我们假设可以得到停车位置的平面图，包括停车空位的长度宽度等数据。考虑到实用性，模型所需的本车数据要能够容易测得，例如几何尺寸、转弯半径等。

(2) 我们假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上。请给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及允许的偏差显示在图上。

但是我们知道，现实生活中的车辆绝不仅仅只有上述的类型，还有很多其他各不相同的车辆。那么所有的车辆的停车问题能够用着一类模型来归纳中总结吗？答案很明显，这是不可能的。

铰接式卡车以其运输效率高、运输成本低及油耗低的独特优势越来越受到人们的青睐，但同时由于铰接式卡车转弯时的“柔性”特点，因此铰接式卡车泊车的难度比一般“刚性”车辆要大。这就给我们提出了新的泊车问题，即如下“第二阶段问题”：

(1) 大型车辆有时也会面临在狭窄空间中停车的问题。例如铰接式的集装箱货车，车头和拖挂的集装箱拖车之间有可活动的连接部，所以整车在转弯时不是刚性的。对这样的车辆，请设计一个方法来判断本车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。

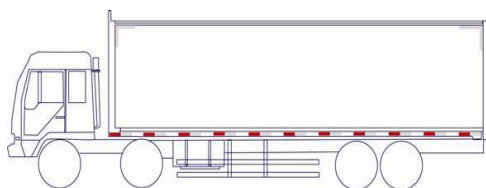
(2) 通过第一阶段的工作，我们已经能够设计出较优的停车线路。但人工驾驶时操作可能不准确，由于客观条件，也可能影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的线路行进。假设我们可以实时测定本车的确切位置，请建立合理的模型，以根据本车的当前位置，随时提出建议的停车线路，并提出对驾驶员操作的建议。建议需要考虑实用性。为简化问题，在此问题中只需考虑小型车辆。

二、问题分析与模型准备

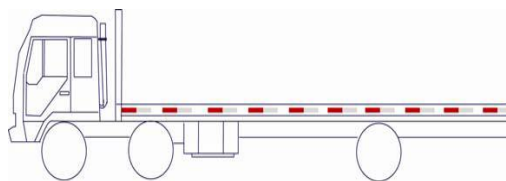
2.1 认识和了解铰接式卡车

为了更好点的解决铰接式卡车的泊车问题，给出铰接式卡车侧位停车的最佳路径，我们首先应该对铰接式卡车有一个清晰透彻的了解。图一是我们找到的两种比较具有代

典型的铰接式卡车模型图。



铰接式重卡车外型图 (1)



铰接式重卡车外型图 (2)

图 1 链中典型的铰接式卡车示意图

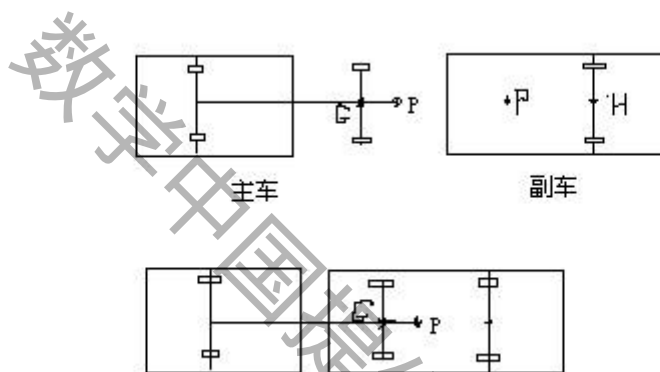


图 2 铰接式卡车俯视示意图

2.2 第二阶段的问题分析

我们知道，对于一般的汽车，通常都将前轮作为转向轮。在本题的第一阶段的研究中，我们可以看出，非铰接式卡车其最小转弯半径和通道宽度主要由转向轮的最大转角和轴距等尺寸决定。相应地对于“二次泊车”模型来说，只要知道了最小转弯半径和车道宽度，我们就能比较轻松的得出其泊车轨道。

但是对于铰接式卡车，不同于“刚性”卡车，在转弯时由于主车和副车之间存在一个水平转角，即在车辆转弯时副车的中心线要绕铰接点相对主车中心线转过一个角度，这样铰接式卡车转弯时和非铰接式卡车就有所不同，在确定铰接式卡车转向轮的最大转角时，还要考虑主、副车之间的夹角和其他参数的影响。

2.3 铰接式卡车和“刚性”卡车的转弯特点分析与比较

通过图3、图4两幅图所示情况，我们可以比较直观的了解铰接式卡车和“刚性”汽车转弯时的情况。

从图2和图3的对比中，我们可以明显地看出两类卡车在转弯时的不同之处。

首先，决定通道宽度的车辆最内点转过的最小转弯半径 r 不同。非铰接式卡车是后轴中心线处的最内点，而铰接式卡车则是副车中心线处的最内点，铰接式客车明显小于非铰接式客车。

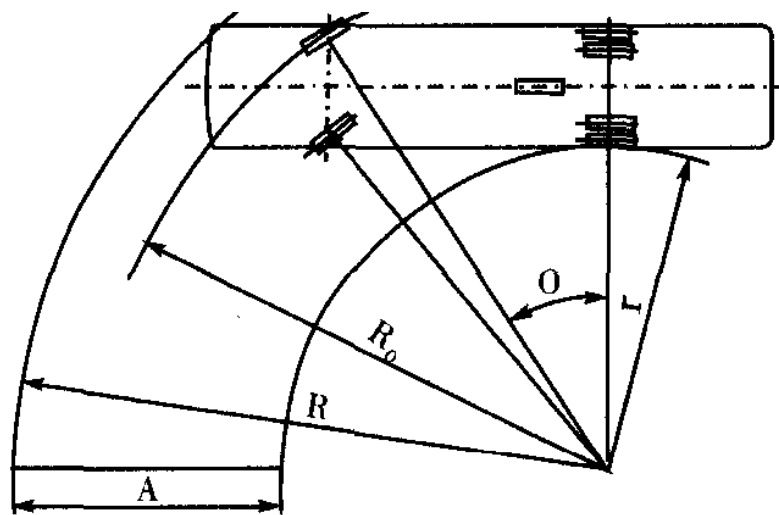


图3 “刚性”车转弯时的情景示意图

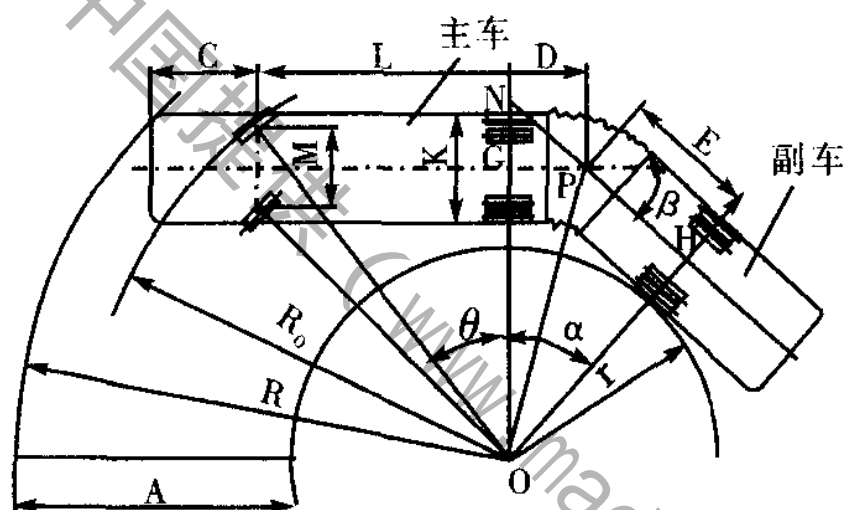


图4 铰接式卡车转弯时的情景示意图

其次，对于铰接式客车，其最小转弯半径除与转向轮的最大转角 θ 有关外，还受主、副车之间的最大夹角 β 的影响。铰接式客车由于铰接蓬及其它装置的限制，主、副车之间的夹角一般不会太大；如果主、副车之间的最大夹角 β 过小，则当车辆在转大弯时，就会出现如图5所示的主车和副车的转向中心不重合的情况。当车辆在转弯时，转向轮转角还未达到最大，而主、副车之间已达最大转角，这时如果转向轮转角继续增大，就会在主、副车之间出现附加的横向转向力，影响到车辆的转向性能，严重时还会损坏主、副车连接处的车架。所以在确定铰接式客车转向轮最大转角时，还应在结合转向轮最大转角的同时，合理确定主、副车之间的最大夹角，以使车辆主、副车绕同一个转向中心转向。

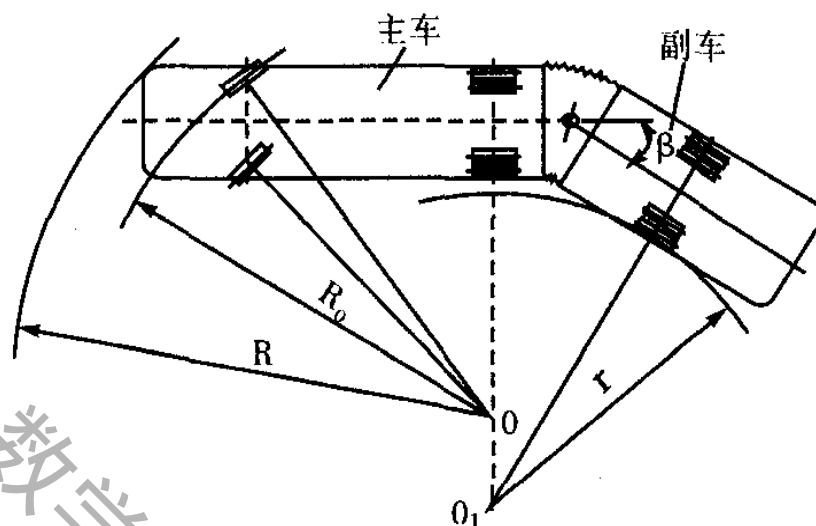


图5 铰接式卡车主、副车太小使转向中心不重合

2.4 铰接式卡车侧位停车与“刚性”汽车侧位停车的比较

从文献一中，我们可以知道“刚性”卡车二次泊车的最理想路径如图6所示。

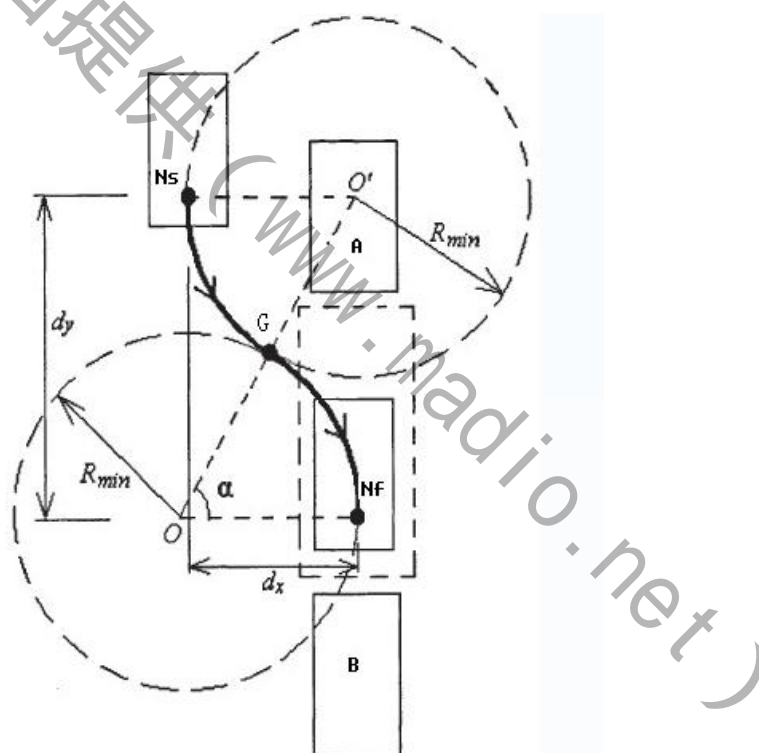


图6 理想的两最小半径圆相切图

而从2.3中的介绍和图3、图4的对比中，我们不难看出。铰接式卡车的最小转弯半径和非铰接式卡车的完全类似（在整个转弯过程中，如果转向轮转角不发生变化，则完全相同），由转向轮的最大转角和轴距等尺寸决定。只是在转向轮转角发生变化时由一些细微的不同之处，这点，我们将在模型建立与计算中（第4.5节 模型的建立于求解）作详细介绍。于是，对于铰接式卡车的侧位停车问题，我们也可以用“理想路径”的思想得到比较有效的解答。

2.5 模型假设

1. 相邻两个车位都已有车停入，且该车不能越过其他的的停车线。
2. 驾驶员能够在某位置能够准确判断障碍物的坐标，并知道是否能避让，然后改变路径。
3. 本文汽车侧位停车都时一次性调整入车位的，即通常所说“二次泊车”。
4. 在本文中汽车都是以倒车形式调整入车位，并且以最小大偏转角，和最小转弯半径开始缓慢行驶。
5. 假设此时交通压力不大，车位前面有足够大的空间供汽车调整位置：有足够的时间调整车的位置，能够是整个泊车过程都能够在低速的理想状态下进行，而不需要加快泊车速度影响泊车效果；
6. 假设前后停置的汽车都在三维空间上沾满整个车位，车位边角线为汽车相碰的危险点。汽车及汽车在地面的垂直投影，在整个倒车过程当中都不与车库垂直方向的两个边界相交；
7. 假设车主开始调整入车位时都以最小半径倒车，再转向运动；

注：一个重要的模型假设

在建立模型之前，我们对铰接式卡车在转弯过程中，改变转向轮外轮转向角的情况做一番探讨和假设。

在前面得第2.2节、2.3节以及2.4节中，我们就已经对铰接式卡车与非铰接式卡车（即“刚性”汽车）在转弯过程中的一些参数指标做了一些探讨，得出的结论是，在单向转弯（或单向后退转弯）过程中，决定铰接式卡车和“刚性”汽车转弯路径的各种参数几乎相同。

但是，通过实际情况的调查，以及从收集到的各种研究“刚性”汽车侧位停车模型的优秀论文中，我们不难看出，在实际为了跟有效的地利用有形的停车空地资源，在停车过程中，车子都要经历不同程度的转向——转向轮转向角发生变化。因此，我们认为，铰接式卡车的侧位停车也一定要经历这样的过程。

因此，为了得到更好、更理想的模型，我们假定铰接式卡车主、副车从一面的最大夹角，转变为另一面的最大夹角的过程中，副车的位置可以“不变”，而只是主车相对于副车的相对位置发生改变；或者副车的位置虽然会发生改变，但这样的改变对与我们的研究没有多少影响，可以忽略不计。

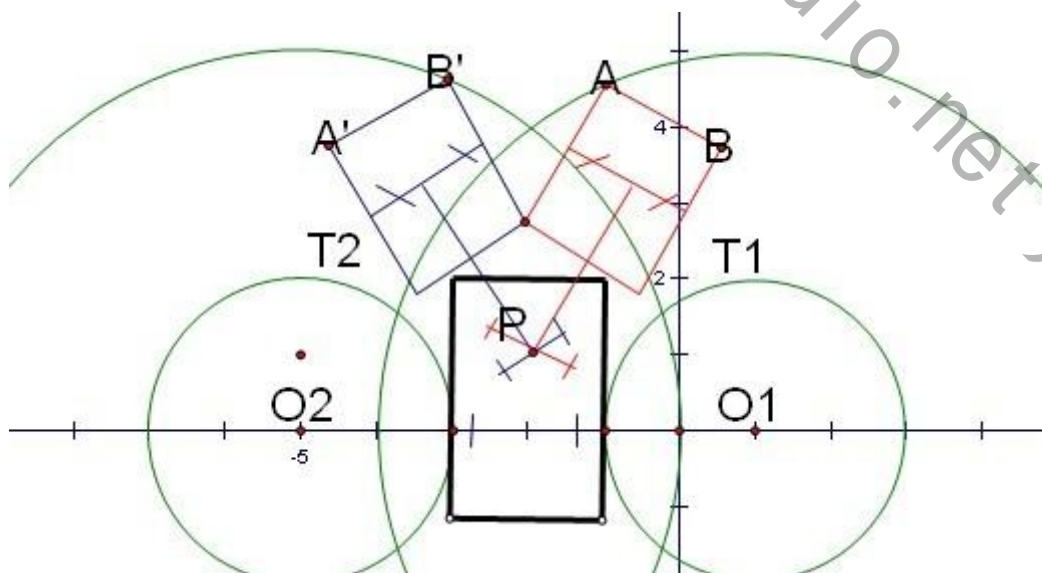


图7 铰接式卡车“转向”前后的位置变化示意图

如图7所示，铰接式卡车可以从T1时刻（主车用红色表示）以最大转向角逆时针后

退（或顺时针前行）转变为T2时刻（图中有蓝色表示）的以最大转向角顺时针后退（或逆时针前行），其中，在整个“转向”过程中，副车的位置不改变。

三 符号说明

R_0 ——转向轮外轮中心轮迹的最小转弯半径；

R ——车身最外点的最小转弯半径；

L ——轴距；

b ——前轮距；

r ——最内点的最小转弯半径；

θ_{\max} ——转向轮外轮最大转角；

B ——车长（整车长度）；

C ——前悬长度；

F ——后悬长度；

K ——整车宽度；

M ——主销中心距；

A ——通道宽度；

D ——中桥中心线到铰接点P的距离；

E ——后桥中心线到铰接点P的距离；

m ——车子在三维空间内里外物的最小“安全”距离；

四 模型一建立与求解

4.1 铰接式卡车的最小转弯半径的计算

如图4所示，可通过如下公式计算：

以转向轮外轮中心轮迹计算的最小转弯半径：

$$R_0 = \frac{L}{\sin \theta_{\max}} + \frac{b - M}{2} \quad (1)$$

以车身最外点计算的最小转弯半径：

$$R = \sqrt{(L + C)^2 + \left(\frac{L}{\tan \theta_{\max}} + \frac{K - M}{2} \right)^2} \quad (2)$$

4.2 通道宽度的计算

按GB 1589-2004《道路车辆外廓尺寸、轴荷、及质量限值》的要求，车辆通道宽度应为车身最外点在地面上的投影所形成的外圆周轨迹 R 与最内侧部位在地面上的投影所形成的内圆周轨迹 r 的差值不大于7.2 m，即通道宽度 A 为：

$$A = R - r \quad (3)$$

其中 R 为上面以车身最外点计算的最小转弯半径， r 的计算如图4所示，可根据直角三角

形 $\triangle OGP$ 和 $\triangle OHP$ 利用三角形边长的关系求得：

$$\overline{OG} = \frac{L}{\tan \theta_{\max}} - \frac{M}{2}$$

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OG}^2 + D^2}$$

$$r = \sqrt{\overline{OP}^2 + E^2} - \frac{K}{2} \quad (4)$$

4.3 铰接式卡车主、副车之间最大夹角的计算

如图4所示，铰接式卡车在转弯时转向轮外轮、中桥和副车上的后轴都应绕同一中心点O转弯。通过几何关系可证明，中桥、后桥中心线与转向中心点O所形成的夹角 α 等于主、副车之间的夹角 β 。证明如下：

在图4中，将副车车辆中心线HP延长，与中桥中心线相交于点N，因为 $\angle \beta = \angle NPG$ ，而直角 $\triangle NPG$ 和直角 $\triangle NHG$ 相似，所以 $\angle \alpha = \angle NPG$ ，则 $\angle \alpha = \angle \beta$

而又在直角 $\triangle OGP$ 和直角 $\triangle OHP$ 中，有 $\angle GOP + \angle HOP = \angle \alpha$ ，所以当车辆转向轮以 θ 转向时，主、副车之间的夹角 β 可按下式计算：

$$\beta = \alpha = \arcsin \frac{D}{\overline{OP}} + \arcsin \frac{E}{\overline{OP}} \quad (5)$$

当转向轮达到最大转角 θ_{\max} 时， \overline{OP} 长度达到最小值 \overline{OP}_{\min} ，主、副车之间的夹角也达到最大的 β_{\max} 。即车辆转向时，主、副车之间所需要的最大夹角为：

$$\beta_{\max} = \alpha_{\max} = \arcsin \frac{D}{\overline{OP}_{\min}} + \arcsin \frac{E}{\overline{OP}_{\min}} \quad (6)$$

这样，要使车辆转弯时主、副车能够绕同一个转向中心转向，则主、副车之间所能达到的最大夹角 β_{\max} 应不小于所需要的最大夹角 β_{\max} ，即：

$$\beta_{\max} \geq \beta_{\max} \quad (7)$$

4.4 由主、副车最大夹角确定转向轮最大转角

如果从转向轮最大转角确定主、副车夹角不太容易，而如果能够先确定主、副车所能达到的最大夹角，则可以根据以上关系式(7)，由主、副车所能达到的最大夹角确定出转向轮最大转角。在图4中，已知 β 角，即已知主、副车所能达到的最大夹角 α_{\max} 。

在直角△OGP和直角△OHP 中，如果令 $\angle GOP = x$ ，则

$\angle HOP = \alpha_{\max} - x$ ，又根据直角三角形边长与角度正弦关系，有下式：

$$\frac{D}{\sin x} = \overline{OP} = \frac{E}{\sin(\alpha_{\max} - x)} \quad (8)$$

由(8)式可以求出：

$$\operatorname{tg} x = \frac{D \sin \alpha_{\max}}{E + D \cos \alpha_{\max}} \quad (9)$$

又根据(4)式及图4有以下关系：

$$\frac{D}{\operatorname{tg} x} = \overline{OP} = \frac{L}{\operatorname{tg} \theta_{\max}} - \frac{M}{2} \quad (10)$$

将以上(9)式代人(10)，即可求根据主、副车最大夹角确定转向轮的最大转角：

$$\theta_{\max} = \arctg \left[\frac{L}{\frac{D(E + D \cos \alpha_{\max})}{D \sin \alpha}} \right] \quad (11)$$

这时转向系的转向轮外轮最大转角 θ 应该不大于根据主、副车最大夹角确定转向轮的最大转角，即 θ 与 θ_{\max} 应该满足如下关系式：

$$\theta \leq \theta_{\max} \quad (12)$$

4.5 实例计算

得到以上相关公式后，我们找到SX6180E型铰接式卡车的一些实际数据，单位为毫米（符号mm），具体尺寸参数为：L=5900,C=2350,M=1792,b=2060，K=2500,D=1950,E=4050。

根据整车要求和前轴相关转交参数，不难知道转向轮外轮的最大转角 $\theta_{\max} = 34^\circ$ ；从而，我们可以很容易得到：

转向轮外轮最小转弯半径：	$R_o = 10685 \text{ mm} = 10.685 \text{ m}$
以车身最外点计算的最小转弯半径：	$R = 12284 \text{ mm} = 12.284 \text{ m}$
与此相应，其直径分别为：	21.370m 、 24.568m
轨道内侧最小半径：	$r = 5753 \text{ mm}$
通道宽度：	$A = R - r = 6531 \text{ mm} = 6.631 \text{ m}$
主、副车之间的夹角：	$\beta = \alpha = 44^\circ$

由以上数据可以看出， $\theta_{\max} = 34^\circ$ 满足限制条件不等式(12)。因此对于我们选取的车型，可以根据需要任意的转动转向轮的角度，而不用担心对车子有所损伤。

4.6 模型的建立与求解

通过前面的研究，我们最终得出的铰接式卡车“二次泊车”的理想路径模型示意图，如图8 所示。

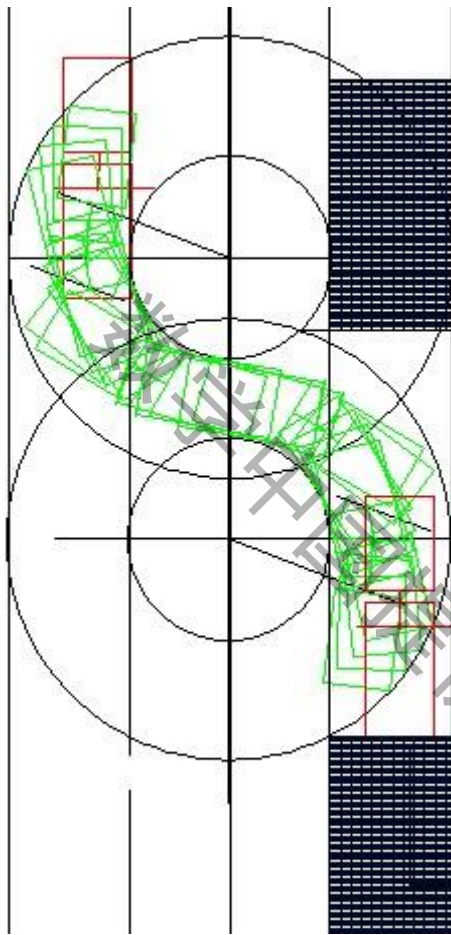


图8 铰接式卡车二次泊车路径示意图

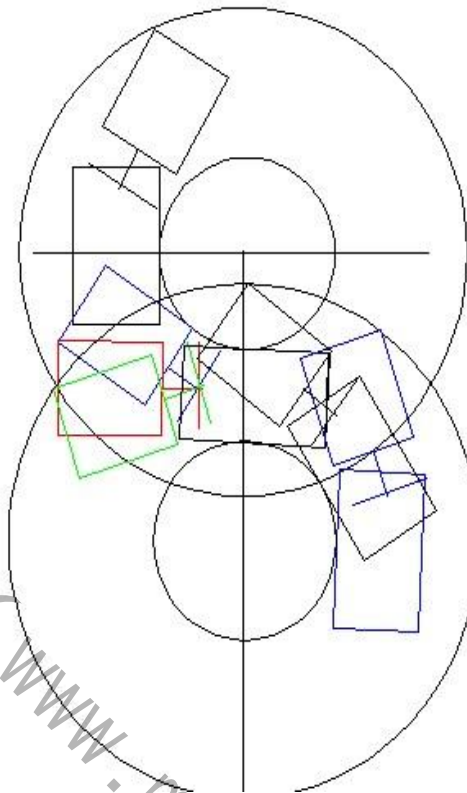


图9 泊车过程中转向示意图

当车子顺利停如车位后，车子与停车位四周的相关参数示如图10 所示

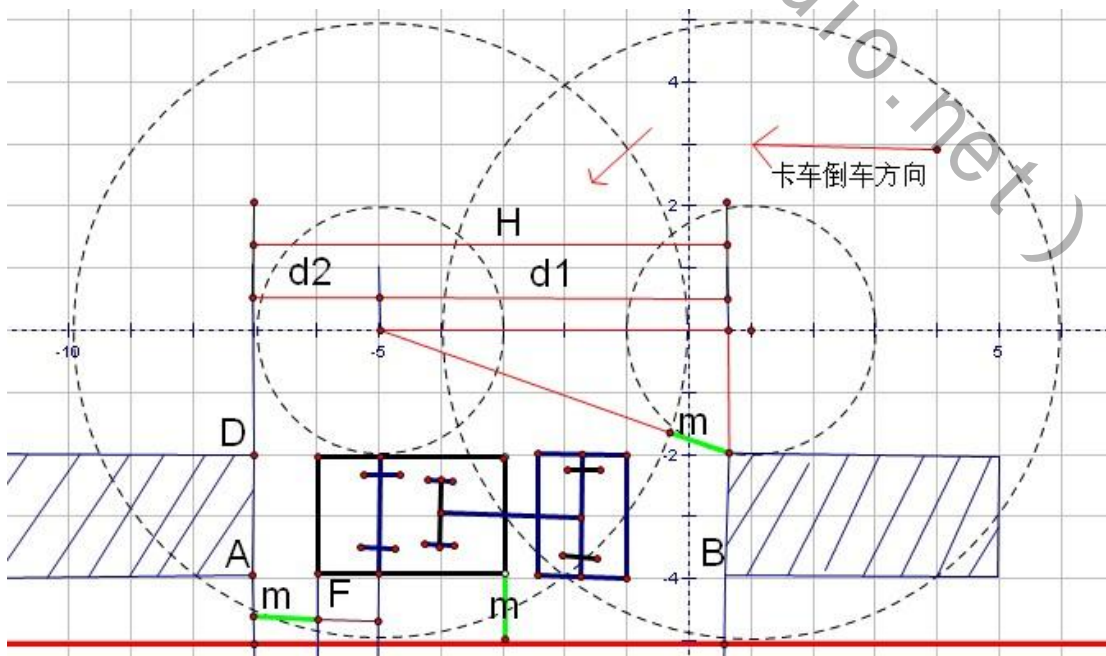


图10

根据前面对铰接式卡车理想路径的相关介绍，以及图10 所示相关数据，我们得出泊车位的数据公式如下：

$$\text{泊车位长 } H = d_1 + d_2 \quad (13)$$

$$\text{其中, } d_2 = m + F, \quad d_2 = \sqrt{(R+m)^2 - r^2}$$

五 模型二的建立于求解

4 问题二的分析与模型的建立、求解

4.1 问题二的分析

汽车的泊车过程如图所示：

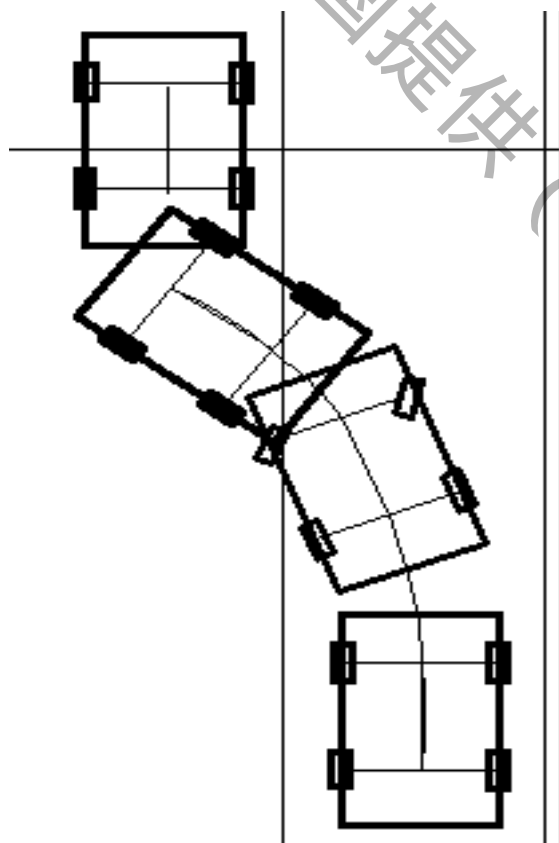


图 11.理想泊车路径

在能够得到停车位置的平面图以及汽车本身的数据的时候，即能够得到空位的长度，宽度以及汽车的几何尺寸、转弯半径等数据时，需要我们根据这些数据求出最优停车时的水平方向的位移和竖直方向的位移。从而判断本车是否能在保证安全的情况下停入侧向车位。

定义：我们给出如下这个定义“一次泊车”：为了改变方向而转动一次方向盘的过程称为“一次泊车”。这样我就可以将停车过程分为多次泊车过程。由于现实生活中的客观原因，驾驶员很难做到一次泊车就可以将汽车停入空车位，因此我们从“二次泊车”情况开始入手分析。

则“二次泊车”的过程如下图所示：

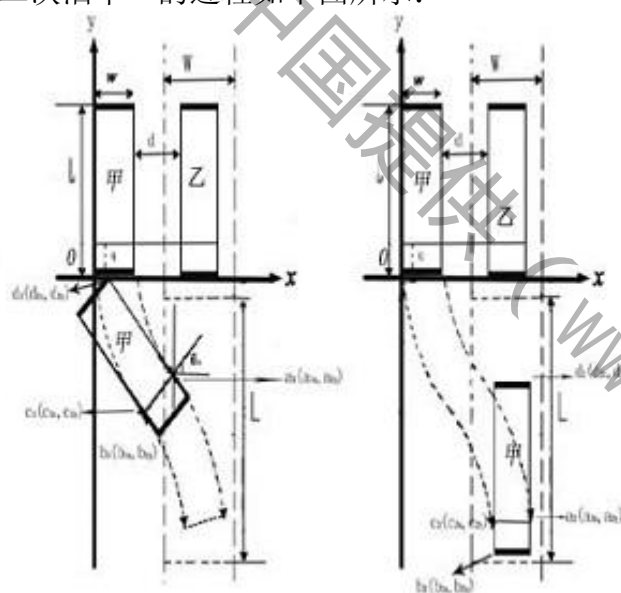


图 12

其中上图中参数的定义为：

L: 停车位长度 W: 停车位宽度 l: 车长 w: 车宽 q: 车的后悬长度

r: 汽车的最小转弯半径 d: 车 a, 车 b 停车时的水平距离

在车辆的侧位泊车过程中，令第 n 次泊车结束时，后车辆泊车轨迹的转角弧度为 θ_n ，车轴与水平方向上的夹角为 α_n ，（其中 $n=1$ 或 2 ， $\theta_0=0$ ）

我们要求出“二次泊车”时的最优路径及此时水平方向的位移与竖直方向的位移，则需要确定出汽车的初始位置和到达车位边界时汽车的转入角度。于是我们对汽车开始泊车时，相对于旁边汽车的距离的 d 建立目标函数一，其中以停车位的长宽，汽车本身的长宽和转弯半径、转角弧度等作为限制条件。然后我们要确定汽车刚进入停车位时的位置，我们设刚进入停车位边界，即汽车的右后端到达点 $A(A_x, y)$ 从而建立关于 y 目标函数二。该函数的限制条件是转向弧度角 θ_1 。我们只知道 θ_1 不超过 45° ，为了确定 θ_1 的具体范围我们进行了进一步的计算。这样我们就能够求出 y 的范围，及确定了汽车的进入点范围。这样的话汽车的起始位置及其驶入角度我们就可以确定了。

4.2 模型的建立与求解

4.2.1 停车起始位置的确定

在求初始位置时两车的水平距离 d 时，有限制条件最小转弯半径 r 因此首先要求出该车的转弯半径 r

最小转弯半径是指当方向盘转到极限位置的，汽车以最低稳定车速转向形式时，外侧转向轮的中心平面在支撑平面上滚过的轨迹元半径。他在很大程度上表征了汽车能够通过狭窄弯曲地带或绕过不可越过的障碍物的能力。转弯半径越小，汽车的机动性能越好。该铰接车的最小转弯半径如下图 4 所示：

以转向轮外轮中心轮迹计算的最小转弯半径：

$$R_0 = \frac{L}{\sin \theta_{\max}} + \frac{b-M}{2}$$

以车身最外点计算的最小转弯半径：

$$R = \sqrt{(L+C)^2 + \left(\frac{L}{\tan \theta_{\max}} + \frac{K-M}{2}\right)^2}$$

设第 n 次泊车结束时，后车轮泊车轨迹的转角弧度为 θ_n ，车轴与水平方向的夹角为 θ_x （其中 $n=1$ 或 2 ， $\theta_0=0$ ）则有 $\theta_n - \theta_{n-1} = \theta_x$

如图 1 左所示，首先右打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_1 旋转 θ_1

泊车“一个步骤”后，后右轮中心点记为 $a_1(a_{1x}, a_{1y})$ ，车头右端点 $d_1(d_{1x}, d_{1y})$ ，我们能够得到以下关系式：

$$a_1(a_{1x}, a_{1y}) :$$

$$\begin{cases} a_{1x} = w + (r - w)(1 - \cos \theta_1) \\ a_{1y} = q - (r - w) \sin \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

$d_1(d_{1x}, d_{1y})$:

$$\begin{cases} d_{1x} = a_{1x} - (l - q) \sin \theta_1 \\ d_{1y} = a_{1y} - (l - q) \cos \theta_1 \end{cases} \quad (2)$$

$c_1(c_{1x}, c_{1y})$:

$$\begin{cases} c_{1x} = r(l - q) \sin \theta_1 \\ c_{1y} = q - r \sin \theta_1 \end{cases} \quad (3)$$

$b_1(b_{1x}, b_{1y})$:

$$\begin{cases} b_{1x} = c_{1x} + q \sin \theta_1 \\ b_{1y} = c_{1y} - q \cos \theta_1 \end{cases} \quad (4)$$

再左打方向盘，使车身沿后车轴以半径 r_2 旋转 θ_2 ，如图 1 右所示。

泊车两个步骤后，后右轮中心点记为 $a_2(a_{2x}, a_{2y})$ 车头右端点记为 $d_2(d_{2x}, d_{2y})$ ，后左轮中心点记为 $c_2(c_{2x}, c_{2y})$ ，车尾左端点记为 $b_2(b_{2x}, b_{2y})$ 。可以得到：

$a_2(a_{2x}, a_{2y})$:

$$\begin{cases} a_{2x} = a_{1x} - r(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ a_{2y} = a_{1y} - r(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (5)$$

$d_2(d_{2x}, d_{2y})$:

$$\begin{cases} d_{2x} = a_{2x} - (l - q) \sin \theta_{2t} \\ d_{2y} = a_{2y} + (l - q) \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (6)$$

$c_2(c_{2x}, c_{2y})$:

$$\begin{cases} c_{2x} = c_{1x} + (r - w)(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ c_{2y} = c_{1y} - (r - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases} \quad (7)$$

$b_2(b_{2x}, b_{2y})$:

$$\begin{cases} b_{2x} = c_{2x} + q \sin \theta_{2t} \\ b_{2y} = c_{2y} - q \cos \theta_{2t} \end{cases} \quad (8)$$

则联立 (3) (7) (8) 式可以得到

$$b_{2y} = c_{2y} - q \cos \theta_{2t} = q - r \sin \theta_1 - (r - w)(\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) - aq \cos \theta_{2t}$$

又因为 $a_{2x} = d + 2w$ ，则联立 (1) (5) 可得：

$$w + (r - w)(1 - \cos \theta_1) + r(\cos \theta_{2t} - \cos \theta_{2t}) - q \cos \theta_{2t}$$

因为我们讨论的是两次泊车的情况，则 $\theta_{2t} = 0$ ，此时有

$$\begin{cases} b_{2y} = -(2r - w) \sin \theta_1 \\ d = 2r - 2w - (2r - w) \cos \theta_1 \end{cases}$$

又因为 $b_{2y} \geq \frac{l - 3L}{2}$ ，则有 $\frac{3L - l}{2} \leq (2r - w) \sin \theta_1$

此时，我们可以得到目标函数为

$$d = 2(r - w) - (2r - w) \cos \theta_1$$

由于 r 为最小转弯半径已经求得， w 为车的宽度为已知参数，则 d 由 θ_1 唯一确定。

4.2.2 进入点 A 到 x 轴的距离 y 的确定

在模型二中，我们需要确定汽车从哪个区域进入能够安全停车，即确定汽车的安全停车区域。如图 2 左所示。我们设汽车刚刚进入停车位时与外侧停车线的交点为 A (A_x, y)，即汽车的后右端达到点 A，然后建立关于 A 的纵坐标 y 的目标函数二，这样我就可以确定出汽车的进入点。此时，相应得后轮轨迹转向角为 θ_1 ，根据几何关系我们可以得到：

$$b_{1y} = y - w \sin \theta_1$$

再根据公式 (4) 我们可以得到

$$y = (w - r) \sin \theta_1 + q(1 - \cos \theta_1)$$

此时，我们得到了进入点 A 到 x 轴的距离 y 的目标函数，由于 w, r, q 为已知量，则 y 只是与后车轮轨迹转向角有关。因此和模型一一样，我们只要确定 θ_1 的范围，就可以得到 y 的取值范围。这样我们就确定出了汽车的安全进入区。

4.2.3 停车时汽车切入空位的角度范围的确定

我们知道：在一般情况下，倒车过程中后轮泊车轨迹的转角弧度 θ_1 不会超过 45 度。现在我们就在这个调节下，确定出 θ_1 的精确范围。如图二右所示，我们知道，在倒车过程中，如果车的前右端刚好和上一个停车位的边角点相交，则小车能够安全进入车位。此时的 θ_1 最小，是一个临界值，我们记为 θ_1^0 的范围。

当汽车端点与边角点重合时，有几何关系（2）我们可以得到

$$d_{1y} = a_{1y} + (l - q) \cos \theta_1^* \quad (12)$$

再由一式，我们可以得到

$$d_{1y} = q - (r - w) \sin \theta_1^* + (l - q) \cos \theta_1^*$$

按照规定的停车方式我们可以得到

$$d_{1y} = -\frac{L-l}{2}$$

于是我们可以得出 θ_1^* 满足的条件

$$-\frac{L-l}{2} = q - (r - w) \sin \theta_1^* + (l - q) \cos \theta_1^* \quad (13)$$

有三角函数知识，我们可以将 θ_1^* 表示出来：

$$\theta_1^* = \arcsin\left(\frac{L-l+2q}{2\sqrt{(r-w)^2 + (l-q)^2}}\right) + \arctan \frac{l-q}{r-w} \quad (14)$$

由于 L 、 l 、 q 、 r 、 w 等参数均可测或已知，所以对已一辆具体的车，我们完全可以求出它的最小转弯角弧度 θ_1^* ，于是对于每一辆车的 θ_1 的范围我们就可以求出来了，即

$$\theta_1^* \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4} \quad (15)$$

得到 θ_1 的范围后，我们可以根据公（10）（11）求出 d 和 y 的范围。于是汽车进入时的初始位置，汽车进入空位的范围和汽车切入空位的角度的范围我们都可以找出来。

我们搜到一下五种车的相关数据 l ， q ， r ， w 如表二所示。

表一 五种车的相关参数（单位：mm）

	车长 l	后悬 q	最小转弯半径 r	车宽 w
宝马 1	4820	1012	5300	1855
宝马 2	4871	1090	5650	1855
奔驰 S 级 1	5230	1140	6100	1871
桑塔纳	4546	1002	5500	1710

奔驰 S 级 2	5206	1010	6100	1871
----------	------	------	------	------

据调查可知，停车位的长度要在车长的基础上增加 0.2 到 0.5 米，于是我们根据这五种车的车长假设停车位的长度是 $L=5.3$ 米，则我们可以根据公式 (14) 算出每种车对应的最小转角 θ_1° ，如表二所示。

表二 五种车对应的最小转角 (单位：度)

车名	宝马 1	宝马 2	奔驰 S 级 1	桑塔纳	奔驰 S 级 2
θ_1°	36	35	35	35	34

于是每种车的转角范围就求出来了：

表三

车名	宝马 1	宝马 2	奔驰 S 级 1	桑塔纳	奔驰 S 级 2
θ_1 的范围	$36 \leq \theta_1 \leq 45$	$35 \leq \theta_1 \leq 45$	$35 \leq \theta_1 \leq 45$	$35 \leq \theta_1 \leq 45$	$34 \leq \theta_1 \leq 45$

我们通过模型三的转角 θ_1 范围的确定，进而求得目标函数二

$$y = (w-r)\sin \theta_1 + q(1 - \cos \theta_1)$$

中进入点 y 的范围。如表四所示

表四

车名	宝马 1	宝马 2	奔驰 S 级 1	桑塔纳	奔驰 S 级 2
y	$-2.852 \leq y \leq -2.4$	$-2.858 \leq y \leq -2.5$	$-3.240 \leq y \leq -2.8$	$-2.918 \leq y \leq -2.7$	$-3.338 \leq y \leq -2.8$
	09	82	57	34	70

于是我们就可以得到汽车驶入点到 x 轴的距离 y 的范围，这样我们就得出了汽车进入点的范围。

模型二：匀速圆周运动进入停车位

由于题目所要求的是以该车辆作为参考对象，因此在由上面的计算可以知道车位外调整路径是一定可行的。另外在以最小半径转移的过程中我们所有数据都是基于最小

半径 R_{\min} 。我们要验证汽车能否匀速圆周运动进入停车位则只需验证在以最小转弯半径运动时是否会有车身的碰触现象发生. 而这只有如图。。。所示的两种情形，我们下面将就这两种情况分别加以验证：

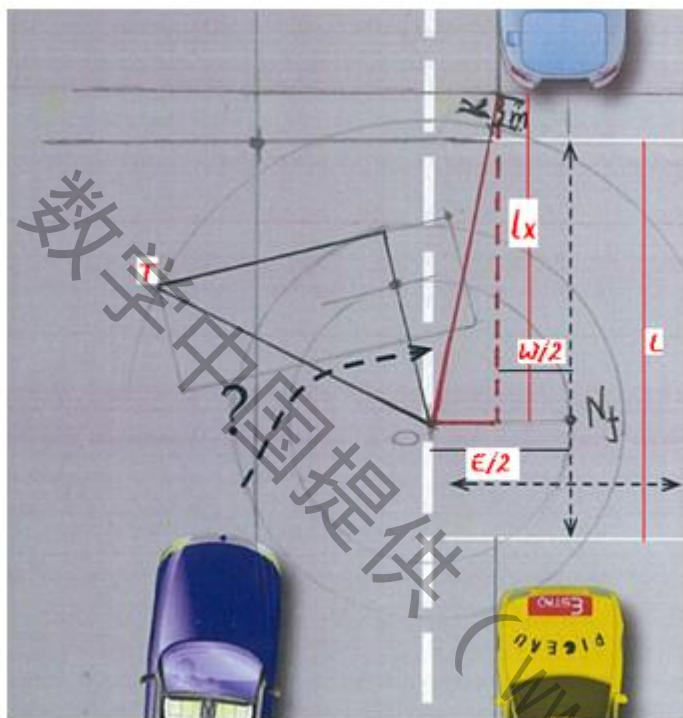


图 13

在做以最小转弯半径为半径的圆周运动时，由于车体本身是刚性物质，因此由物理学知识不难得到在运动过程中每一点也都是做圆周运动的。

现在我们考察运动中的右前轮 T，它也是以 O 为圆心，以某固定半径做圆运动. 要判断此方案是否可行，我们只要论证当右前轮 T 运动至点 K 时，是否有

$$L_x \leq H - a$$

（其中 L_x 是如图所示距离，H 是车库有效长， a 是保险杠后轮中心 N 点的距离）

将上面的式子展开，有

$$(R_{\min} - W/2)^2 + L_x^2 = (\sqrt{(R_{\min} + W/2)^2 + (L - a)^2} + m)^2$$

$$\text{于是 } L_x = \sqrt{(\sqrt{(R_{\min} + W/2)^2 + (L - a)^2} + m)^2 - (R_{\min} - W/2)^2}$$

带入相关数据，我们得到

$$L_x = 3.5275 < H - a = 4.5 - 0.598 = 3.9020$$

模型二在第一种情况下是成立的。

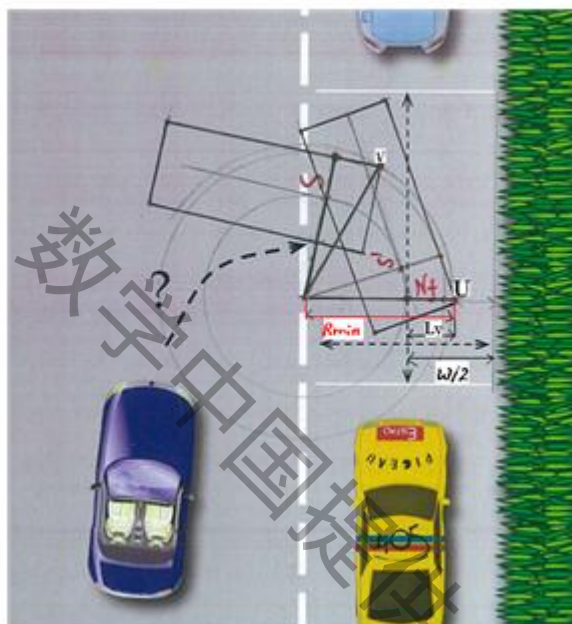


图 14

我们继续考察运动中的右后轮 V ，它同样也是以点 O 为圆心，以一固定半径为半径的圆周运动. 而要判断此方案是否可行，只要论证当右后轮 V 运动至 U 点时，是否有

$$Ly + m \leq E / 2$$

(其中 Ly 是如图所示距离， m 为两安全距离， E 为车库有效宽度)

展开上式，即 $\sqrt{(R_{\min} + W/2)^2 + a^2} - R + m \leq E/2$

代入数据，我们有 $0.8913 < 2.85/2 = 1.425$

故该模型二在第二种情况下也是成立的.

因此该路径可以保证安全的将车停入空车位。

在驾驶过程中由于人工驾驶时操作可能不准确，或由于客观条件也会影响驾驶员的判断，使其不能按照设计的最优路线行进。在下面的模型建立中我们以存在临时障碍物而无法按照设计的最优路径行进为代表。

在驾驶过程中司机要避开障碍物无非有三种选择如下图所示：

#1210

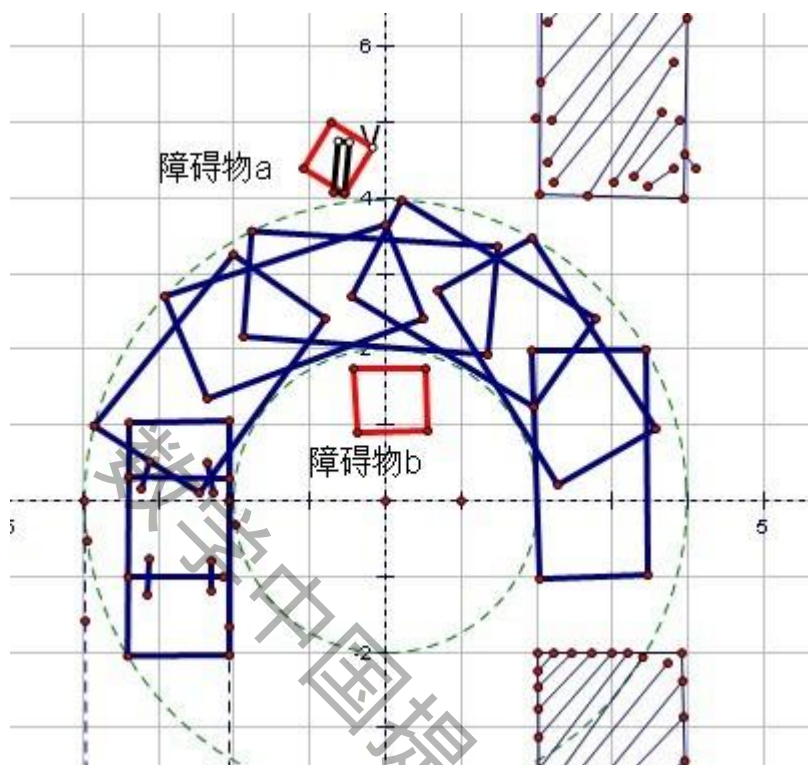


图 15

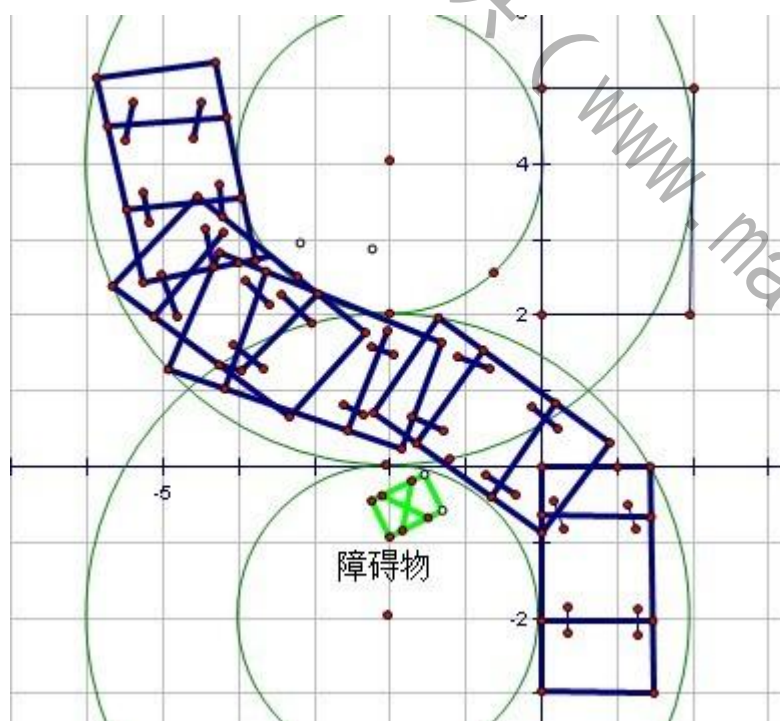


图 16

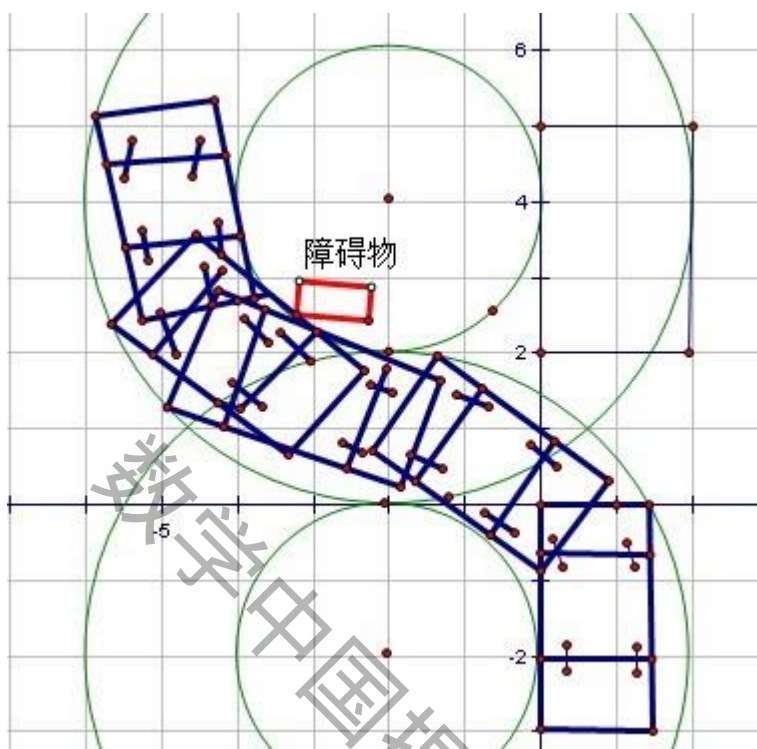


图 17

在第一与第二种选择中, 设司机在驾驶过程中使得汽车在紧贴着障碍物完成“一次泊车”时车的进入点 A' 到 x 轴的距离 y' 。则由我们上面的模型知道若 y' 在 y 的变化范围之内则其可以安全停入车位。否则需要退回起始位置。沿 y 轴方向即平行停车位的方向行驶到停车位的另一边选择第三种停车方式。

在第三种选择中,显然它是一个匀速圆周运动。将车驾驶到与远初始位置相对应的 c 点,然后以 o 点为圆心最小转弯半径为半径做低速稳定的圆周运动,若汽车在该种情况下能够避开障碍物则其可以安全进入空的停车位。

若这三种选择均无法使汽车安全进入停车位, 则该车将无法安全进入停车位。

附录 1:

/** * 求 θ 的值, 参数有, L,l,q,r,w

```

*/ public class Calculate
public static void main(String[] args)
cal(5.7, 5.2, 1.1, 6.1, 1.871);
public static void cal
(double L, double l, double q, double r, double w)
for(int i = 0; i<=360; i+=1)
double a = -(1-L+2*q)/2+(r+w)*Math.sin(Math.toRadians(i));
double b = -(L-q)*Math.cos(Math.toRadians(i));
System.out.println("a="+a+" "+"b="+b);
if((b-a)>0.001)
System.out.println(" 所得的角度为: "+i); return;

```

附录 2:

/** * 求 θ 的值, 参数有, L,l,q,r,w

* @author John Deng

* 得出 θ 的角度

*/ public class Calculate

public static void main(String[] args)

L = 0;

l = 4.82; q = 1.12; r = 5.3; w = 1.855;

L = 2*(l-q)*Math.cos(Math.toRadians(40)) -

2*(r - w)*Math.sin(Math.toRadians(40)) + 2*q + l;

System.out.println(L);

//cal(L, l, q, r, w);

//domain(q, r, w);

//System.out.println(compare(5.3,4.82,5.3,1.855));

//System.out.println(abs(5.35,4.87,5.65,1.855));

附录 三

集中重型卡车的相关参数对照表												
型号	车头(mm)			轮距(mm)		轴距(mm)	货箱(mm)			最小转弯半径 (mm)	前悬 (mm)	后悬 (mm)
	长	宽	高	前	后	前中后	长	宽	高			
CGC4251	6855	2490	3515	2370	1860	3500+1350	6855	2490	3515	15000	1430	875
CGC4180	5985	2490	3410	2037	1860	3500						
CGC4250	6855	2490	3515			3200+1350						
DYX	11030	2490	3490			1800+4600+1350						
DYX13111	11780	2490	2980			1800+4600+1350				24000		
Actros4160	8297	2850	3714			3300+1350						
Actros2641	6867	2495	3483			3300+1350						
Actros3340	6817	2495	3581			3780+1450						
Actros3341	8220	2500	2550	2054	1804	3300+1350						
Actros3344	8220	2500	2550	2035	1804	3300+1350						
解放 J6	6345	2490	3560	2055	1830							
中国重汽 A7	6985	2496	3560	2022	1830						1525	725
德龙 F3000	6825	2490	3624	2036	1800							