

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#1215

参赛队员（签名）：

队员 1：查泽奇

队员 2：刘 明

队员 3：赵东辉

参赛队教练员（签名）：郑克龙 徐艺萍

参赛队伍组别：本科组

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1215 队

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址: 内蒙古数学会
电话: 0471-5220129

邮编: 010021

网址: www.tzmcm.cn
Email: 2011@tzmcm.cn

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段

题 目 客机水面迫降航向与最优姿态

关 键 词 波浪; 有限元方法; SPH 方法; 数值仿真

摘 要:

在越洋飞行的航班中, 曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因, 被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下, 飞机的海面迫降具有更大的难度和危险性。本文研究并建立合理的数学模型, 对客机在海面的迫降进行分析, 指出在有风浪的条件下, 飞机以何种姿态和航向接触海面是相对安全的选择。

首先, 客机在撞击水面的瞬间, 波浪和客机的相互作用是一个高度复杂的流固耦合动力学过程, 极短的时间内, 客机的载荷达到峰值 F_{max} , 客机损失大部分动能。本文对流固接触面进行了全面的受力分析, 得到动力学平衡方程 $M\ddot{\mu} + C\dot{\mu} + K\mu = F_n^{ext}$ 和刚体固定边界条件 $\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial n_s} = 0$ 和水面自由边界条件

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0。$$

其次, 将所建立的初始模型进行数值化处理, 得到有限元数值仿真模型 $M\ddot{u}_{t+\Delta t} + cu_{t+\Delta t}^{\frac{1}{2}} + ku_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}^{ext}$. 结合有限单元的质量、动量及能量方程: $\Delta M = \rho' \Delta v$ $\Delta Mom = \rho' \cdot u \cdot \Delta v$ 及 $\Delta TE = \rho'(et) \Delta v$. 从而, 建立起有限元的数值仿真模型。

最后, 针对机身撞水的流固耦合及机壳变形问题, 使用有限元法存在难度, 在模型改进部分, 提出了 SPH 与 FEM 结合的方法, 得到机身速度的离散化格式

$$为 v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) \frac{dv_i^n}{dt}。$$

参赛队号 1215 队

所选题目 A 题

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2011@tzmcm.cn

The best Water-entry Gesture of Aircraft Emergency Landing on Wave

Abstract: Flying in international flight, had a few flight across the major failure or accident, forced landing on the sea. There are bad conditions, the landing of aircraft are more difficult and dangerous. this research and establish a reasonable mathematical model, to the airliner flew at the analysis of landing that there are bad conditions, what attitude and put in contact with the sea is relatively safe.

First, the authors analyze the moment of aircraft into the water for the highly nonlinear dynamics of fluid-structure interaction. The impact of the interaction with the airliner is a highly complex of coupling it energetic and a short period of time, the passenger loading achieve the peak F_{max} . Airbus lost most of the kinetic energy. This article convection can be carried out extensive contact surfaces, the analysis, dynamics equilibrium equations $M\ddot{\mu} + C\dot{\mu} + K\mu = F_n^{ext}$. And just a fixed term of the

border $\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial n_s} = 0$, the freedom of the boundary conditions $\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$.

Secondly, Will be built on the initial model for the amount of processing, element numerical simulation model $M\ddot{u}_{t+\Delta t} + cu_{t+\Delta t} + ku_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}^{ext}$. Combination of the finite element of quality, quantity and energy equation $\Delta M = \rho' \Delta v$, $\Delta Mom = \rho' \cdot u \cdot \Delta v$ and $\Delta TE = \rho'(et) \Delta v$.

Finally, against the stream of water into it and shape the speaker, coupled with the finite-element method is difficult, some improvements in the model, and a SPH with FEM, the rate for the format of discrete scheme

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) \frac{dv_i^n}{dt}.$$

Key words: Wave-condition; Finite Element Method; SPH Method
Numerical Simulation

一 问题重述

随着世界各国经济的发展，各个国家之间建立的航空飞行线越来越多。大型运输机的飞行活动越来越普遍，从而增加了水上迫降事故发生的可能性。但是，大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。在越洋飞行的航班中，曾有个别航班出现过由于重大故障或意外原因，被迫在海面迫降的情况。在有风浪的条件下，飞机的海面迫降具有更大的难度和危险性。现在，需要建立合理的数学模型，对客机在海面的迫降进行分析，指出在有风浪的条件下，飞机以何种姿态和航向接触海面是相对安全的选择。



图 1 A320 客机迫降航线图

二 符号说明

- α ：客机刚接入水面，机身轴线与水平面所成仰角；
- β ：客机刚接入水面，机身轴线与波浪速度方向所成夹角，记为切角；
- v_h ：客机刚接入水面，水平面方向速度的大小；
- μ ：破浪的切向速度大小；
- v_v ：客机刚接入水面，竖直方向下沉速度大小；
- F_{max} ：客机入水后，所受的压力的峰值；
- $v_{0水平}$ ：客机入水后，其水平方向的速度大小；
- h_0 ：客机入水后，其下沉的深度；
- θ_0 ：客机入水后，其仰角大小；
- $v_{t水平}$ ：客机入水后， t 时刻客机的水平速度；

$v_{t\text{竖直}}$ ：客机入水后， t 时刻客机的竖直速度；

h_t ：客机入水后， t 时刻客机的竖直方向的下沉深度；

其他未加说明的变量将在其出现之后，加以说明。

三 问题分析

客机迫降入水过程分析：客机以仰角 α ，水平面方向以速度 v_h ，竖直方向以 v_v 撞击水面，机身与波浪速度方向成 β 角，破浪的切向速度 μ 。撞击水面后，机身受到水的撞击力，客机的运动那个主要分为以下两个状态：

I. 客机在撞击水面的瞬间，波浪和客机的相互作用是一个高度复杂的流固耦合动力学过程，极短的时间内，客机的载荷达到峰值 F_{max} ，客机损失大部分动能，水平速度变为 $v_{0\text{水平}}$ ，下潜深度为 h_0 。通过第一阶段静水情况下分析与计算显示，壳单元最大应力主要出现在刚体链接处，原因是该局部区域有刚度的突度，因为出现了应力集中。但是各个部分的平均应力小于极限应力，从而保证了下半机身蒙皮不会破坏。对于舱门处地应力小于极限力，并且变形较小，可以保证舱门的开启。

在有波浪情况下，机身压力波形与其他情况类似，只是峰值载荷更高，对机身整体的应力分析，出某系应力集中点，整体应力水平低于极限应力。

II. 在复杂的流固耦合动力学过程之后，客机趋于平稳，客机以水平方向速度 $v_{0\text{水平}}$ ，下潜深度 h_0 为初始状态，在重力、浮力、升力和阻力的共同作用下以动力学的规律进行运动，然后达到平衡，直到滑行停止。

综上所述，本文模型主要分为二个阶段：

第一，在客机迫降水面的入水时刻作为第一状态，仰角 α 、水平面方向以速度 v_h 和竖直方向 v_v 以及机身与波浪速度方向成 β 角，破浪的切向速度 μ 决定客机的 F_{max} 、 $v_{0\text{水平}}$ 、 h_0 ，这瞬间的过程属于典型的流固耦合问题，具有高度的非线性关系，传统的牛顿力学规律无法解决此类问题。本文首先对机身冲击水面的过程进行流固接触面的受力分析，建立飞机撞水浪的数值仿真模型。

第二，客机入水后，达到第二状态，客机在 $(v_{0\text{水平}}, h_0, \theta_0)$ 的初状态下运行，客机在竖直方向除受到重力、浮力外，还会受到升力(受滑跑速度 $v_{0\text{水平}}$ 和 h_0 的影响) $F_{升}$ 的作用，在上述各力的作用下，竖直方向，客机会有轻微摆动直到平衡；在水平方向，客机受到水的阻力作用 $F_{阻}$ ，致使水平方向速度变小，直到停止。本部分基于牛顿力学的运动规律，结合Morison方程，采用积分法，建立相应动力学分析模型描述客机入水后第二状态过程的动力学系统。此部分的分析与第一阶段的模型一样，本阶段不再赘述。

四 问题假设

假设 1：客机驾驶员技术娴熟，能在机身入水前将客机调整到指定的入水姿态；

假设 2：客机在滑跑过程中，水流与机身没有复杂的流固耦合关系；

五 模型建立

5.1 机身冲击水面的有限元模型

飞机结构复杂，包含的零部件繁多，要将完整的飞机结构转化为数学模型需要采取一定的简化方法。飞机撞水过程中，由于受到摩擦力的作用，使该过程具有高度的非线性特征。要对飞机撞水过程进行瞬间动力学分析，必须借助有效的分析手段和分析工具。有限元方法（FEM）是当今工程界中应用最为广泛的数值计算方法。

将飞机撞水的过程近似为立方体与波浪的冲击过程，那么飞机本身组合固体域，波浪组成水体域；机身具有固体刚性固定边界，水体具有自由边界，飞机与水浪接触时，飞机机身的受撞部位发生一定的位移，当位移在机身结构受力之内时，不会发生机身破坏现象。

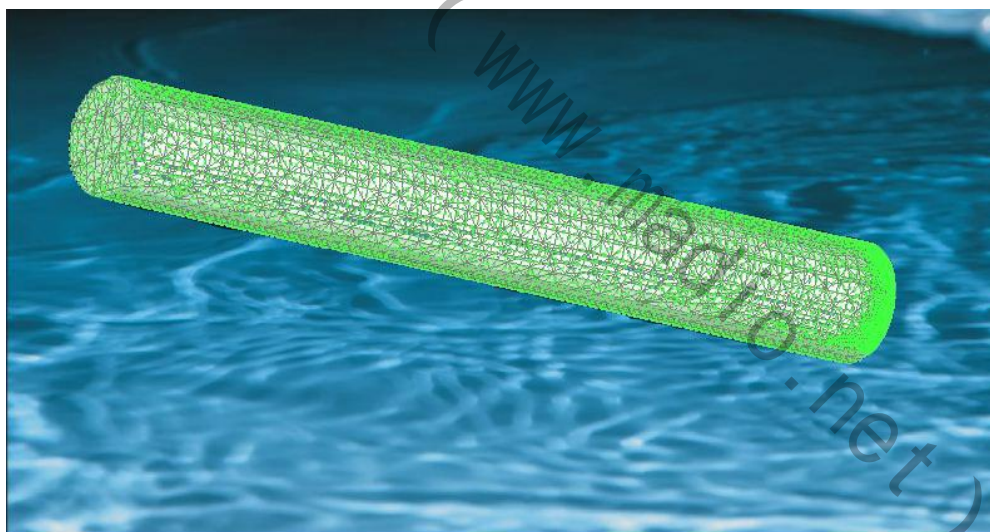


图 2 波浪—机体有限元划分模型

5.1.1 对流固接触面的受力分析

通过第一阶段静水情况下分析与计算显示，壳单元最大应力主要出现在刚体链接处，原因是该局部区域有刚度的突度，因此出现了应力集中。但是各个部分的平均应力小于极限应力，从而保证了下半机身蒙皮不会破坏。对于舱门处地应力小于极限力，并且变形较小，可以保证舱门的开启。

波浪情况下，机身压力波形与其他情况类似，只是峰值载荷更高，对机身整体的应力分析，出某系应力集中点，整体应力水平低于极限应力。

参赛队号：#1215

由于机身建造时，所采用的材料刚性较好，不考虑其发生较大形变，即可将其形变控制在一定范围，设 $P(x, y, z, t)$ 是压力变量， n_s 代表流固的接触面的单位切线向量，则刚性固定边界条件：

$$\frac{\partial P(x, y, z, t)}{\partial n_s} = 0 \quad (1)$$

自由水面边界条件：

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

再对立方体域受力分析，位移边界条件为：

$$u_i = \bar{u}_i \quad (3)$$

受力边界条件为：

$$\delta_{ij} \cdot n_{sj} = \bar{l}_i \quad (4)$$

其中 δ_{ij} 为立方体的应力分量， u_i 为立方体的位移分量。

结点位移 u_i 与节点受力 f_j 关系如下：

$$\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

导数 k_{ij} 数组成整体刚度矩阵 K 。

再有动力学平衡方程

$$M \ddot{\mu} + C \dot{\mu} + K \mu = F_n^{ext} \quad (6)$$

记 F_n^{ext} 为外载荷； F_n^{int} 为内力； μ 是位移量； M 为质量矩阵， K 为整体刚度矩阵； C 为阻尼矩阵。

有限元模型机体采用了铝材料，材料参见表 1，发动机等部位采用了刚体材料等效，仅给出密度。

表 1 有限元模型材料参数

材料	E/Mpa	μ	$\rho / (10^{-3} \text{ gmm}^{-3})$	σ_s / Mpa	δ_b / Mpa
LY12	68000	0.33	2.8	300	392
LD10	71000	0.33	2.8	300	410
LD5	71000	0.33	2.8	300	410
LC4	66000	0.33	2.85	300	392
刚体	200000	0.33	7.8		

注：E 为弹性模量； μ 为泊松比； ρ 为密度； σ_s 为屈服密度； δ_b 为强度极限。

5.1.2 飞机撞水的数值仿真建模

飞机撞水的本质是属于非线性瞬态分析问题，撞水过程中机体结构所表现出

来的非线性特征有机身材料，变形状态及边界接触条件所引起的，其中材料非线性和几何非线性都可以采用统一的增量形式的方程表示。接触问题的关键在于如何寻找接触时接触问题的处理目的是判断结点与单元的接触状态，进一步计算接触位置，并通过引入不等式约束条件，计算接触力及贯入量等。一般通过拉格朗日乘子法或罚函数法将接触条件不等式约束条件引入方程进行求解。

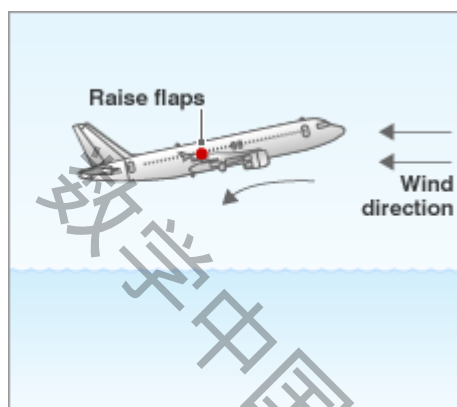


图 3 飞机接浪模型

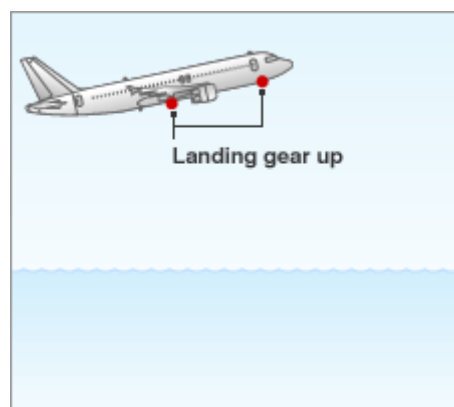


图 4 飞机着水点模型

非线性有限元方法结合接触条件，得到如下显示解法。利用显示方法求解时，通常采用中心差分法，得到如下地推公式：

$$\begin{cases} u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}_t \Delta t^2 \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{1}{2} (\ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t}) \cdot \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

将运动方程(6)

$$M\ddot{u}_{t+\Delta t} + c\dot{u}_{t+\Delta t} + ku_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}^{ext} \quad (8)$$

改写成如下形式：

$$M\ddot{u}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t}^{ext} - F_{t+\Delta t}^{int} \quad (9)$$

其中， $F_{t+\Delta t}^{ext}$ 表示外载荷矢量，包括接触矢量， $F_{t+\Delta t}^{int}$ 表示内力矢量。

$$F_{t+\Delta t}^{int} = C\dot{u}_{t+\Delta t} + ku_{t+\Delta t} \quad (10)$$

根据以上式子，可以将加速度矢量表示如下：

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = M^{-1} F_{t+\Delta t}^{res} \quad (11)$$

$F_{t+\Delta t}^{res}$ 表示残余力矢量。

在计算出上已增量的解 u_t 、 \dot{u}_t 和 \ddot{u}_t 以后，根据地推公式，可以计算 F 增量的解 $\dot{u}_{t+\Delta t}$ 。

同时，把罚函数法结合到显示方法中。因为显示解法是条件稳定的，受 $C.F.L$ 稳定性准则制约，为了保持计算稳定，积分时间步长必须小于网格的最小固有周期。

初始已知条件下,利用控制方程求解任一欧拉在一个时间步内的密度、速度、内能和压力。假设 t_n 时间各物理量已知,对相邻单元型进行线性插值,求出单元边界出流速

$$v_b = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad (12)$$

求出穿越单元表面的质量、动量及能量方程

$$\Delta M = \rho' \Delta v \quad (13)$$

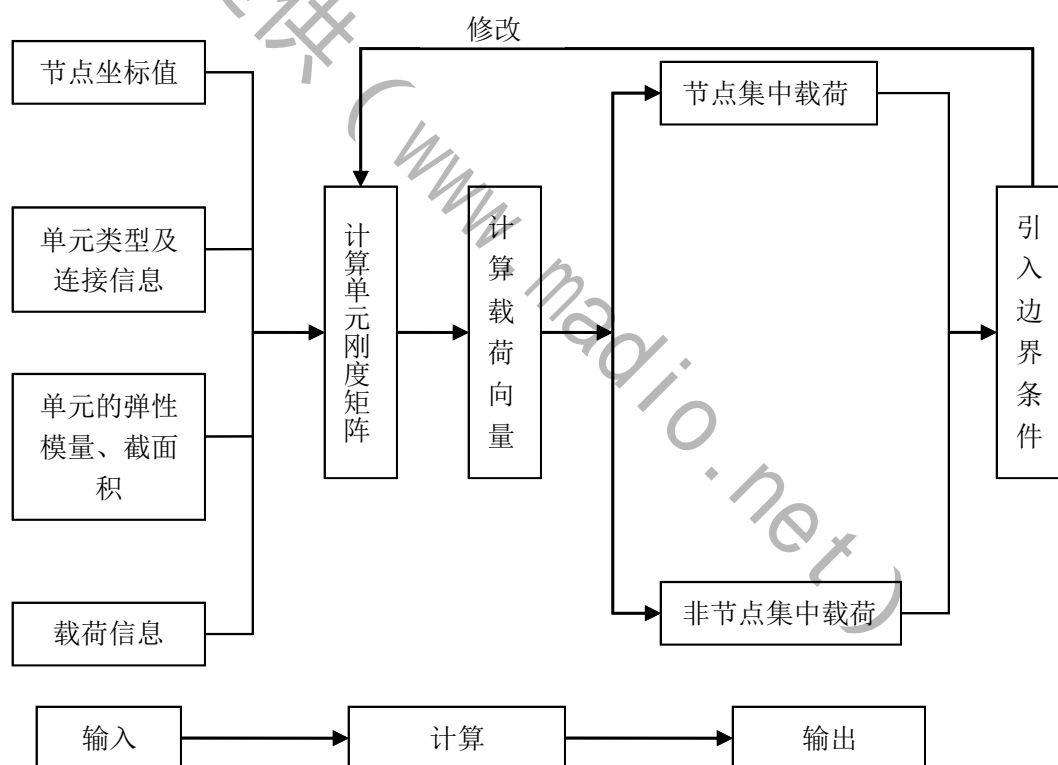
$$\Delta Mom = \rho' \cdot u \cdot \Delta v \quad (14)$$

$$\Delta TE = \rho' (et) \Delta v \quad (15)$$

其中, ρ' 为相邻单元密度; et 为单位质量的总能量; T 为边界上单位面积上的面力; Δv 为相邻时刻 $t_n \sim t_{n+1}$ 的一个时间步长内穿越该单元的表面体积流量。

六 模型的求解与误差分析

对有限元法计算程序设计流程图如下



综合得到所建方程(1)-(6),得到位移方程组

参赛队号：#1215

$$\begin{cases} k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + \cdots + k_{1,n-1}u_{n-1} + k_{1,n}u_n = f_1 \\ k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + \cdots + k_{2,n-1}u_{n-1} + k_{2,n}u_n = f_2 \\ \cdots \cdots \\ k_{n-1,1}u_1 + k_{n-1,2}u_2 + \cdots + k_{n-1,n-1}u_{n-1} + k_{n-1,n}u_n = f_{n-1} \\ k_{n1}u_1 + k_{n2}u_2 + \cdots + k_{n,n-1}u_{n-1} + k_{n,n}u_n = f_n \end{cases} \quad (16)$$

利用 MATLAB 编程求解，可以将结果显示化为

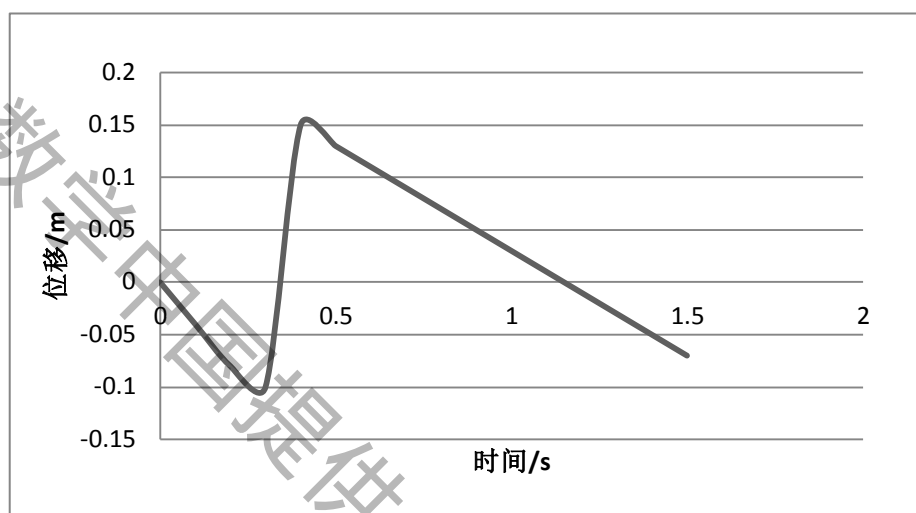


图 5 机身接水后纵向位移—时间关系图

机身与波浪撞击后，先下沉一段时间，直到其竖直速度减为零，开始随着波浪起伏，出现较小程度的位移震动。

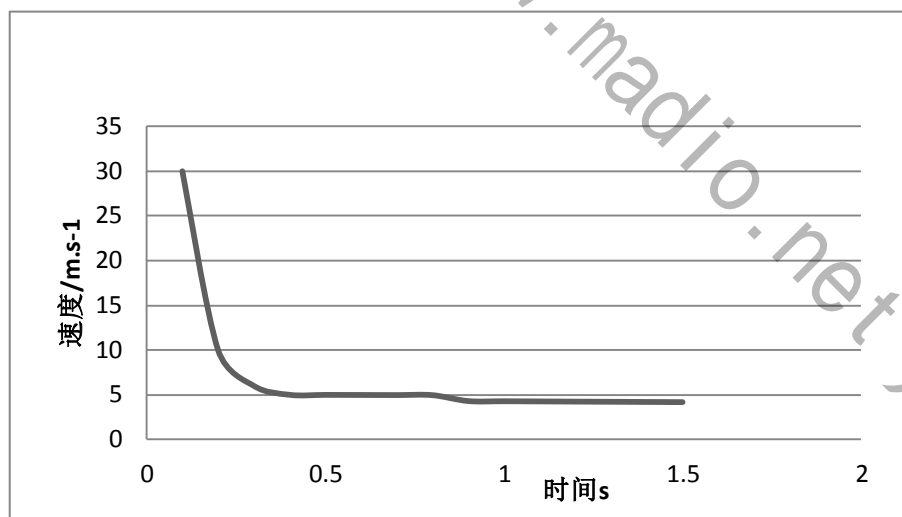


图 6 波浪接触机身速度—时间图

图 6 显示出的结果与图 5 对应：竖直位移达到最低时，速度减为零。从侧面相互印证了机身触浪后的运动状态。

通过第一阶段静水情况下分析与计算表明，壳单元最大应力主要出现在刚体链接处，原因是该局部区域有刚度的空度，因为出现了应力集中。但是各个部分

的平均应力小于极限应力，从而保证了下半机身蒙皮不会破坏。对于舱门处地应力小于极限力，并且变形较小，可以保证舱门的开启。

波浪情况下，机身压力波形与其他情况类似，只是峰值载荷更高，对机身整体的应力分析，出某系应力集中点，整体应力水平低于极限应力。

通过模型分析部分可知，整个飞机结构坠撞分析模型可分为飞机结构和被撞击部分——波浪两个系统。在显示计算格式下，一般采用罚函数法引入两者之间的接触关系。因此，两者之间可以独立建模，再通过接触载荷建立两者之间的关系。

写出矩阵形式的运动微分方程

$$M\ddot{\mu} + C\dot{\mu} + K\mu = f \quad (16)$$

其中， $M, C, K \in R^{n \times n}$ ，分别是质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。 $\mu, f \in R^{n \times 1}$ ，是广义位移矩阵和广义载荷矩阵。

引入状态向量 $X \in R^{2n \times 1}$ 可将(16)式转化到状态空间，得

$$A\dot{X} + BX = F \quad (17)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} \mu \\ \dot{\mu} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad (18)$$

利用(18)式，容易计算出流固接触系统较低阶的 l 对模态 $\Phi^l \in C^{2n \times 2l}$ 。

根据流固接触面的受力分析，将机身分化为 6 个通道，见图 7。



图 7 飞机机身的压力边界剖分图

从而，得到各个通道的载荷—时间图。选取接水的显著通道 3 和通道 4 为例，其载荷如下：

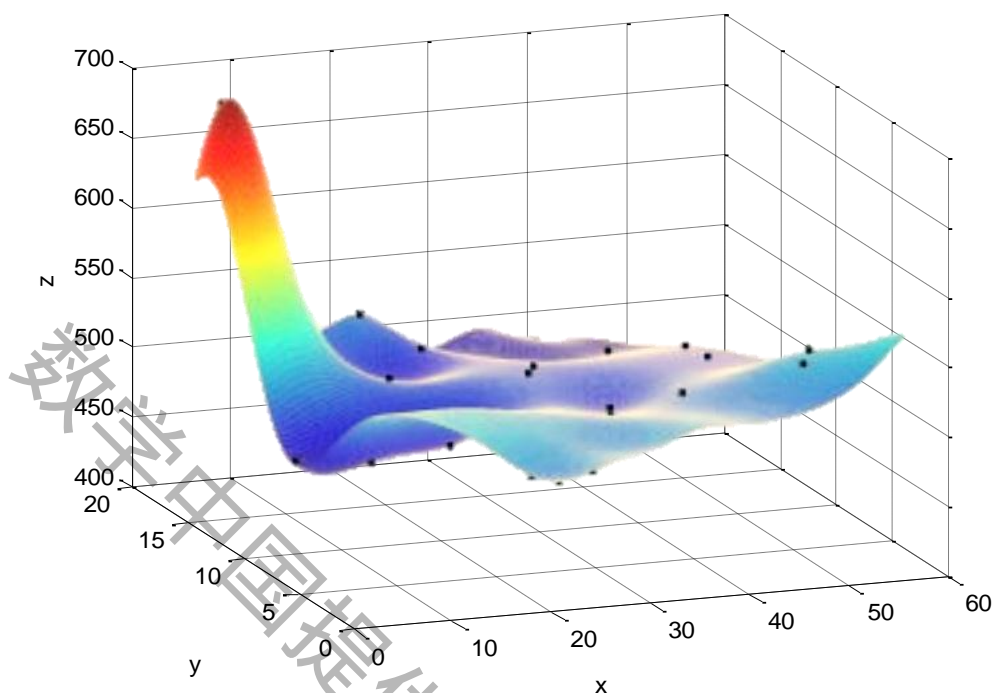


图 8 波浪对通道 3 载荷响应面

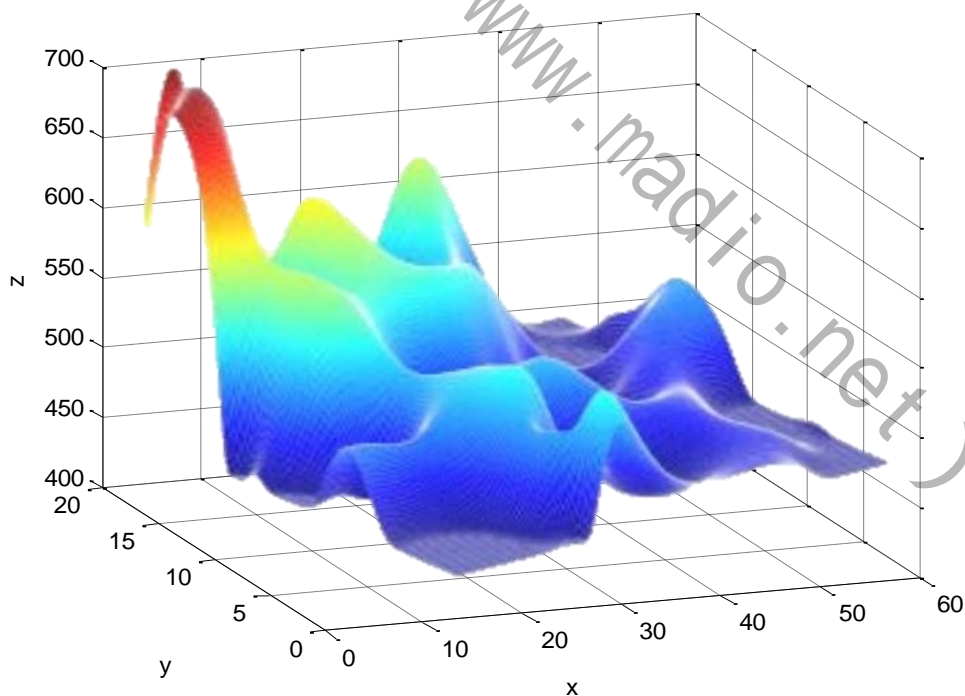


图 9 波浪对通道 4 载荷响应面

从图 8 和图 9 的结果表明，通道 4 与波浪接触面大，并且呈现多次接触；通道 3 接水的峰值更大，受到的载荷超过通道 4 的最大载荷。这说明，机身通道 3

参赛队号：#1215

部位的材料极限应力要求大于通道 4。

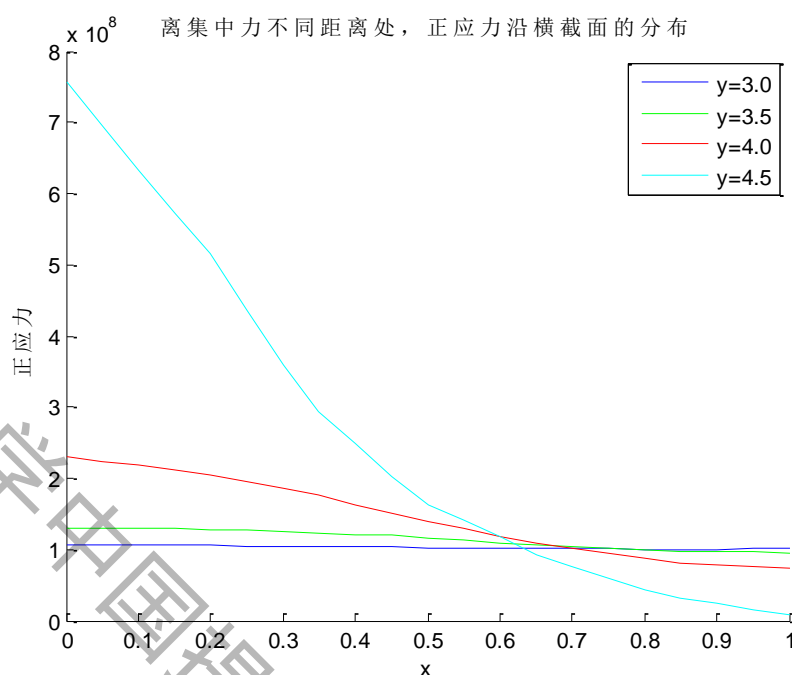


图 10 正应力沿横截面的分布图

结果分析

通过对客机 5 种不同工况下飞机着水时的姿态进行数值计算，得到如下表 2 的计算结果：

表 2 不同工况计算结果

工况 序号	仰角/ $^{\circ}$	切角/ $^{\circ}$	通道 3 应力 峰值/MPa	通道 4 应力 峰值/MPa	水平方向 变形/cm	竖直方向 变形/cm
1	5	10	55	62	1.0	1.3
2	8	25	66	69	1.4	1.6
3	10	45	72	75	1.5	1.7
4	12	60	90	94	1.9	2.3
5	15	90	140	145	2.3	3.0

结果表明：客机以 5° 仰角着水时，切角在 10° 接浪，客机通道 3 应力峰值最小。

七 模型评价与改进

7.1 模型评价

本文从非线性有限元理论方面讨论了飞机撞水过程的数值仿真模型，将机身与波浪简化为机体模型和水体模型，给出了飞机撞水非线性有限元计算的格式，相对于传统的流固耦合过程，既具有合理性又具有简单性。同时，作者也注意到了模型的使用性：把波浪作为一个干扰因子，提取出机身与波浪夹角、波浪切向

速度作为变量，变量选择具有合理性。

但是，对机身撞水的流固耦合及机壳变形问题，使用有限元法存在难度，这正是模型改进所作的工作。

7.2 模型改进——SPH 法+有限元法

针对有限元方法（FEM）处理流固耦合及超大变形问题时所存在的困难，提出了光滑粒子流体动力学（SPH）耦合有限元的方法来模拟有波浪冲击的流固耦合过程。

光滑粒子流体动力学（Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH）方法是一种无网格方法，基本思想是利用相互作用的粒子组来描述连续流体（固体），求解整个力学系统。

将 SPH 和 FEM 方法结合起来，模拟有波浪条件下机身与水面的接触过程。应用流体力学知识，可用以下方程组来描述波浪的运动状态：

$$\text{运动方程} \quad \Delta \sigma = \rho \frac{dv}{dt} \quad (16)$$

$$\text{连续方程} \quad \frac{d\rho}{dt} = \rho \cdot \nabla v \quad (17)$$

$$\text{能量方程} \quad \rho \frac{dE}{dt} = \sigma \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (18)$$

其中， $\sigma, v, E, \varepsilon$ 分别是波浪的应力、速度、内能和应变，对运动方程应用 SPH 方法加以离散化，得

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \sigma_j \cdot \nabla w_{ij} \quad (19)$$

通过一定形式的变形得到其对称形式：

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \cdot \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) \cdot \nabla w_{ij} \quad (20)$$

根据上式，可由 t_n 时刻的应力求得 t_n 时刻的加速度，进而由如下显示中心差分格式：

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) \frac{dv_i^n}{dt} \quad (21)$$

求出 t_{n+1} 时刻的位移和速度，从而得到 $t_{n+\frac{1}{2}}$ 时刻的应变率为

$$\frac{d\varepsilon_i^{n+\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\Delta v + (\Delta v)^T \right]_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (22)$$

再结合流体本构方程和能量方程，可得 t_{n+1} 时刻的应力 σ_i^{n+1} 和内能 E_i^{n+1} 。

八 参考文献

- [1] Zhao R, Faltinsen O. Water entry of 2-dimensional bodies [J]. J Fluid Mech, 1993(246): 593-612.
- [2] 屈秋林,刘沛清等某型客机水上迫降的着水冲击力学性能数值研究民用客机设计与研究 S1 期: 2009
- [3] 王永虎,石秀华等斜入水高速冲击的理论建模及缓冲分析机械科学与技术 06 期: 2008.
- [4] 王文华物体入水问题的分析研究及其在船舶与海洋工程中的应用大连理工大学 09 期: 2010.
- [5] 蒋培,石汉成等弹体入水冲击载荷特性分析舰船科学技术 06 期: 2010
- [6] Fang G,Y Kwok,K Yu,et al. Numerical simulation of principal tidal constituents in the South China Sea, Gulf of Tonkin and Gulf of Thailand[J].Continental Shelf Research,1999, 19:845- 869.
- [7] 施阳,李俊 Matlab 语言工具箱——Toolbox 使用指南[M] 西安: 西北工业大学出版社, 1991.
- [8] 余熊庆,丁运亮多学科设计优化算法及其在飞行器设计中应用[J] 航空学报 01 期: 2000.
- [9] 吴家鸣,崔寅等运动边界条件下平底结构抨击水面的水动力分析[J] 10 期: 华南理工大学学报(自然科学版) 2010.
- [10] 张成红高速运动体入水和运动体参数的优化 08 期: 2008.

九 附录

程序 1——计算节点应力程序

```
function exam5_1
% 定义全局变量
% gNode ----- 节点坐标
% gElement --- 单元定义
% gMaterial -- 材料性质
% gBC1 ----- 第一类约束条件
% gDF ----- 分布力
% gNF ----- 集中力
% gK ----- 整体刚度矩阵
% gDelta ----- 整体节点坐标

file_in = 'exam5_1.dat';
% 根据输入文件名称生成输出文件名称
[path_str,name_str,ext_str] = fileparts( file_in );
ext_str_out = '.mat';
file_out = fullfile( path_str, [name_str, ext_str_out] );

FemModel( file_in );      % 定义有限元模型
SolveModel;               % 求解有限元模型
SaveResults( file_out );  % 保存计算结果
DisplayResults(file_out); % 显示结果
return;

function FemModel( file_in )
% 定义有限元模型
% 输入参数:
```

参赛队号：#1215

```
%      file_in --- 输入文件名称
% 返回值：
% 说明：
global gNode gElement gMaterial gBC1 gDF gNF

% 打开文件
fid = fopen( file_in, 'r' );

% 节点坐标
node_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gNode = zeros( node_number, 3 );
for i = 1:node_number
    dummy = fscanf( fid, '%d', 1 );
    gNode( i, : ) = fscanf( fid, '%f', [1 3] );
end

% 单元定义
element_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gElement = zeros( element_number, 5 );
for i = 1:element_number
    dummy = fscanf( fid, '%d', 1 );
    gElement( i, : ) = fscanf( fid, '%d', [1 5] );
end

% 材料性质
material_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gMaterial = zeros( material_number, 2 );
for i = 1:material_number
    dummy = fscanf( fid, '%d', 1 );
    gMaterial( i, : ) = fscanf( fid, '%f', [1 2] );
end

% 第一类约束条件
bc1_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gBC1 = zeros( bc1_number, 3 );
for i = 1:bc1_number
    gBC1(i,1) = fscanf( fid, '%d', 1 ); % 结点号
    gBC1(i,2) = fscanf( fid, '%d', 1 ); % 自由度号
    gBC1(i,3) = fscanf( fid, '%f', 1 ); % 约束值
end

% 分布压力（线性分布）
df_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gDF = zeros( df_number, 7 );
for i = 1:df_number
    gDF(i,1:3) = fscanf( fid, '%d', [1 3] ); % 三个结点号
    gDF(i,4:6) = fscanf( fid, '%f', [1 3] ); % 三个结点上的压力值
end

% 集中力
nf_number = fscanf( fid, '%d', 1 );
gNF = zeros( nf_number, 3 );
for i = 1:nf_number
    gNF(i,1) = fscanf( fid, '%d', 1 ); % 结点号
    gNF(i,2) = fscanf( fid, '%d', 1 ); % 自由度号
    gNF(i,3) = fscanf( fid, '%f', 1 ); % 集中力大小
end

% 关闭文件
fclose( fid );
return
```

参赛队号：#1215

```

function SolveModel
% 求解有限元模型
% 输入参数：
% 无
% 返回值：
% 无
% 说明：
% 该函数求解有限元模型，过程如下
% 1. 计算单元刚度矩阵，集成整体刚度矩阵
% 2. 计算单元的等效节点力，集成整体节点力向量
% 3. 处理约束条件，修改整体刚度矩阵和节点力向量
% 4. 求解方程组，得到整体节点位移向量

global gNode gElement gMaterial gBC1 gDF gNF gK gDelta gNodeStress gElementStress

% step1. 定义整体刚度矩阵和节点力向量
[node_number,dummy] = size( gNode );
gK = sparse( node_number * 3, node_number * 3 );
f = sparse( node_number * 3, 1 );

% step2. 计算单元刚度矩阵，并集成到整体刚度矩阵中
[element_number,dummy] = size( gElement );
for ie=1:1:element_number
    disp( sprintf( '计算节点刚度矩阵并集成，当前单元: %d', ie ) );
    k = StiffnessMatrix( ie );
    AssembleStiffnessMatrix( ie, k );
end

% step3. 计算分布压力的等效节点力，并集成到整体节点力向量中
[df_number, dummy] = size( gDF );
for idf = 1:1:df_number
    enf = EquivalentDistPressure( gDF(idf,1:3), gDF(idf,4:6) );
    i = gDF(idf, 1);
    j = gDF(idf, 2);
    m = gDF(idf, 3);
    f( (i-1)*3+1:(i-1)*3+3 ) = f( (i-1)*3+1:(i-1)*3+3 ) + enf( 1:3 );
    f( (j-1)*3+1:(j-1)*3+3 ) = f( (j-1)*3+1:(j-1)*3+3 ) + enf( 4:6 );
    f( (m-1)*3+1:(m-1)*3+3 ) = f( (m-1)*3+1:(m-1)*3+3 ) + enf( 7:9 );
end

% step4. 把集中力集成到整体节点力向量中
[nf_number, dummy] = size( gNF );
for i = 1:1:nf_number
    in = gNF( i, 1 );
    id = gNF( i, 2 );
    f( (in-1)*3 + id ) = f( (in-1)*3 + id ) + gNF( i, 3 );
end

% step5. 处理约束条件，修改刚度矩阵和节点力向量。采用乘大数法
[bc_number,dummy] = size( gBC1 );
for ibc=1:1:bc_number
    n = gBC1(ibc, 1 );
    d = gBC1(ibc, 2 );
    m = (n-1)*3 + d ;
    f(m) = gBC1(ibc, 3)* gK(m,m) * 1e15 ;
    gK(m,m) = gK(m,m) * 1e15 ;
end

% step 6. 求解方程组，得到节点位移向量
gDelta = gK \ f ;

% step 6. 计算单元应力

```

参赛队号：#1215

```

gElementStress = zeros( element_number, 6 );
for ie=1:element_number
    disp( sprintf( '计算单元应力, 当前单元: %d', ie ) );
    es = ElementStress( ie );
    gElementStress( ie, : ) = es;
end

% step 7. 计算节点应力(采用绕节点加权平均)
gNodeStress = zeros( node_number, 6 );
for i=1:node_number
    disp( sprintf( '计算节点应力, 当前结点: %d', i ) );
    S = zeros( 1, 6 );
    V = 0;
    for ie=1:element_number
        for k=1:1:4
            if i == gElement( ie, k )
                vol = ElementVolume( ie );
                S = S + gElementStress(ie,:) * vol;
                V = V + vol;
                break;
            end
        end
        gNodeStress(i,:) = S / V;
    end
end
return

function k = StiffnessMatrix( ie )
% 计算单元刚度矩阵
% 输入参数:
%   ie ---- 单元号
% 返回值:
%   k ---- 单元刚度矩阵

global gNode gElement gMaterial

% 读取结点坐标
x = gNode( gElement( ie, : ), 1 );
y = gNode( gElement( ie, : ), 2 );
z = gNode( gElement( ie, : ), 3 );

% 计算 6V
V6 = det( [ 1 x(1) y(1) z(1)
            1 x(2) y(2) z(2)
            1 x(3) y(3) z(3)
            1 x(4) y(4) z(4) ] );

if V6 < 0
    disp( sprintf( '警告: 单元 %d 的结点排列顺序有问题', ie ) );
    pause;
end
% 计算应变矩阵
B = zeros( 6, 12 );
for i=1:4
    j = mod(i, 4) + 1;
    m = mod(i+1,4) + 1;
    p = mod(i+2,4) + 1;
    bi = - det( [ 1 y(j) z(j)
                 1 y(m) z(m)
                 1 y(p) z(p) ] );
    ci = det( [ 1 x(j) z(j)
               1 x(m) z(m)
               1 x(p) z(p) ] );

```

参赛队号：#1215

```

        1 x(p) z(p) ] );
di = - det( [ 1 x(j) y(j)
              1 x(m) y(m)
              1 x(p) y(p) ] );
B(:,(i-1)*3+1:(i-1)*3+3) = (-1)^(i+1)*[bi    0    0
                                           0    ci    0
                                           0    0    di
                                           0    di    ci
                                           di    0    bi
                                           ci    bi    0];

end
B = B / V6;

% 计算弹性矩阵
E = gMaterial( gElement( ie, 5 ), 1 );
mu = gMaterial( gElement( ie, 5 ), 2 );
A1 = mu/(1-mu);
A2 = (1-2*mu)/2/(1-mu);
A3 = E*(1-mu)/(1+mu)/(1-2*mu);
D = [ 1    A1    A1    0    0    0
      A1    1    A1    0    0    0
      A1    A1    1    0    0    0
      0    0    0    A2    0    0
      0    0    0    0    A2    0
      0    0    0    0    0    A2];
D = D * A3;

% 计算单元刚度矩阵
V = abs(V6)/6;
k = transpose( B ) * D * B * V;
return

function AssembleStiffnessMatrix( ie, k )
% 把单元刚度矩阵集成到整体刚度矩阵
% 输入参数:
%   ie --- 单元号
%   k --- 单元刚度矩阵
% 返回值:
%   无
global gElement gK
for i=1:1:4
    for j=1:1:4
        for p=1:1:3
            for q=1:1:3
                m = (i-1)*3+p;
                n = (j-1)*3+q;
                M = (gElement(ie,i)-1)*3+p;
                N = (gElement(ie,j)-1)*3+q;
                gK(M,N) = gK(M,N) + k(m,n);
            end
        end
    end
end
return

function enf = EquivalentDistPressure( node, pressure )
% 计算线性分布压力的等效节点力
% 输入参数:
%   node ----- 结点号
%   pressure ----- 跟结点号对应的压力值
% 返回值:
%   enf ----- 等效节点力向量

```


参赛队号：#1215

```

global gNode

enf = zeros( 9, 1 );
% 计算作用压力的三角形的面积
x = gNode( node, 1 );
y = gNode( node, 2 );
z = gNode( node, 3 );
b = -det( [1 y(1) z(1)
            1 y(2) z(2)
            1 y(3) z(3)] );
c = det( [1 x(1) z(1)
           1 x(2) z(2)
           1 x(3) z(3)] );
d = -det( [1 x(1) y(1)
            1 x(2) y(2)
            1 x(3) y(3)] );
A2 = sqrt( b^2 + c^2 + d^2 );
A = A2 / 2;

% 计算三个结点上的等效节点力
f1 = ( pressure(1) + pressure(2)/2 + pressure(3)/2 ) / 6 * A;
f2 = ( pressure(1)/2 + pressure(2) + pressure(3)/2 ) / 6 * A;
f3 = ( pressure(1)/2 + pressure(2)/2 + pressure(3) ) / 6 * A;

% 计算三个方向上的分量
nx = -b/A2;
ny = -c/A2;
nz = -d/A2;
enf(1:3) = f1*[nx;ny;nz];
enf(4:6) = f2*[nx;ny;nz];
enf(7:9) = f3*[nx;ny;nz];
return

function es = ElementStress( ie )
% 计算单元的应力分量
% 输入参数
% ie ---- 单元号
% 返回值
% es ---- 单元应力分量列阵 (1×6) : [sx, sy, sz, tyz, txz, txy]
global gElement gDelta gMaterial

de = zeros( 12, 1 ); % 单元节点位移列阵
E = gMaterial( gElement(ie, 5), 1 );
mu = gMaterial( gElement(ie, 5), 2 );
A1 = mu/(1-mu);
A2 = (1-2*mu)/2/(1-mu);
A3 = E*(1-mu)/(1+mu)/(1-2*mu);
D = [ 1 A1 A1 0 0 0
      A1 1 A1 0 0 0
      A1 A1 1 0 0 0
      0 0 0 A2 0 0
      0 0 0 0 A2 0
      0 0 0 0 0 A2];
D = D * A3;
B = MatrixB( ie );
for j=1:1:4
    de( 3*j-2 ) = gDelta( 3*gElement( ie, j )-2 );
    de( 3*j-1 ) = gDelta( 3*gElement( ie, j )-1 );
    de( 3*j ) = gDelta( 3*gElement( ie, j ) );
end
es = D * B * de;
es = transpose( es );

```

参赛队号：#1215

```

return

function vol = ElementVolume( ie )
% 计算单元的体积
% 输入参数
%     ie ---- 单元号
% 返回值
%     vol ---- 单元体积

global gNode gElement

% 读取结点坐标
x = gNode( gElement( ie, : ), 1 );
y = gNode( gElement( ie, : ), 2 );
z = gNode( gElement( ie, : ), 3 );

% 计算 6V
V6 = det( [ 1 x(1) y(1) z(1)
            1 x(2) y(2) z(2)
            1 x(3) y(3) z(3)
            1 x(4) y(4) z(4) ] );

vol = abs( V6/6 );
return

function B = MatrixB(ie)
% 计算单元的应变矩阵B
% 输入参数:
%     ie ---- 单元号
% 返回值:
%     B ---- 单元应变矩阵

global gNode gElement

% 读取结点坐标
x = gNode( gElement( ie, : ), 1 );
y = gNode( gElement( ie, : ), 2 );
z = gNode( gElement( ie, : ), 3 );

% 计算 6V
V6 = det( [ 1 x(1) y(1) z(1)
            1 x(2) y(2) z(2)
            1 x(3) y(3) z(3)
            1 x(4) y(4) z(4) ] );

% 计算应变矩阵
B = zeros( 6, 12 );
for i=1:4
    j = mod(i, 4) + 1 ;
    m = mod(i+1,4) + 1 ;
    p = mod(i+2,4) + 1 ;
    bi = - det( [ 1 y(j) z(j)
                  1 y(m) z(m)
                  1 y(p) z(p) ] ) ;
    ci = det( [ 1 x(j) z(j)
                1 x(m) z(m)
                1 x(p) z(p) ] ) ;
    di = - det( [ 1 x(j) y(j)
                  1 x(m) y(m)
                  1 x(p) y(p) ] ) ;
    B(:,(i-1)*3+1:(i-1)*3+3) = (-1)^(i+1)*[bi    0    0
                                             0    ci    0

```

参赛队号：#1215

```

0 0 di
0 di ci
di 0 bi
ci bi 0];

end
B = B / V6;
return

function SaveResults( file_out )
% 保存计算结果
% 输入参数：
%     file_out ---- 存盘文件名
% 返回值：
%     无

global gNode gElement gMaterial gBC1 gDF gNF gK gDelta gNodeStress gElementStress
save( file_out, 'gNode', 'gElement', 'gMaterial', 'gBC1', ...
      'gDF', 'gNF', 'gDelta', 'gNodeStress', 'gElementStress' );

return

function DisplayResults(file_out)
% 显示计算结果
% 输入参数：
%     无
% 返回值：
%     无

y = [3,3.5,4,4.5];
color = 'bgrc';
[x,sy,syi] = exam5_1_post( file_out,y,0:0.25:4.5 );
figure;
hold;
for i=1:length(y)
    plot( x, sy(i,:),color(i) );
end
legend( 'y=3.0','y=3.5','y=4.0','y=4.5' );
title( '离集中力不同距离处，正应力沿横截面的分布' );
xlabel( 'x' );
ylabel( '正应力' );
hold off;
return

```