

#1575

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1575

参赛队员（签名）：

队员 1：余剑秋

队员 2：曹 喆

队员 3：赖秋平

参赛队教练员（签名）：朱家明

参赛队伍组别(中学|专科|本科|研究生)：本科

#1575

# 第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1575

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

#1575

## 2014 年第七届“认证杯”数学中国

## 数学建模网络挑战赛第二阶段论文

题 目 不同路况下各类车辆最优轮胎花纹组合的分析

关键词 轮胎花纹；模糊综合评价，层次分析；MATLAB 软件；EXCEL

## 摘 要：

针对陆地上的主要交通工具，分为货车、越野汽车、轿车、客车、摩托车五类；针对市面上各种不同样式的轮胎花纹，归纳为由四种最常见的花纹类型，即横向花纹、纵向花纹、横纵花纹和越野花纹的组合，对四类基础性花纹进行模型化。对每种轮胎花纹模型设定相应的基础参数，建立五种数理模型，对其排水性，自洁性，防滑性，耐磨性，散热性进行定量分析。同时，对现实生活中不同的路面状况，从摩擦系数，路面沙石大小的均值和方差，路面湿滑程度三个方面，采用实证分析法，对路面进行抽象化分级。综合上述两大类模型，通过建立模糊综合评价模型，层次分析模型，综合运用模糊综合评价法、层次分析方法、构造比较判断矩阵，一致性检验等知识，通过 Matlab, Excel 等软件的求解，先从客观上确定了不同种类车辆在给定路面上的最优轮胎花纹方案，即四类基础性花纹应占的比重，再根据该车型在该路面上行驶的频率，结合实际设立主观权重，得出该种车辆在全路面上的最适花纹方案。

问题 I ——研究车辆分类问题和路面抽象化分级问题：由于不同车辆在不同环境道路上的行驶状况是不同的，轮胎所受到的影响也不相同。现实生活中道路状况千变万化，且受到气候，环境，道路周边人口密度等自然因素和人为因素的影响，不方便进行定量研究，因此在研究轮胎花纹之前，对车辆和路面进行合理的分类，是十分必要的。

问题 II ——研究轮胎花纹模型化问题：现实生活中存在着数不胜数的轮胎花纹种类，不可能对每一种花纹进行研究，所以，在研究不同轮胎花纹的功能特征问题之前，先对最简单最常见的四类花纹进行物理模型的构建，这样既抓住了主要矛盾，也简化了计算量。也为最后车辆在全路面上的最适花纹方案的设立奠定基础。

问题 III ——研究四种不同花纹轮胎在不同等级路面上的防侧滑性，排水性，散热性，自洁性，耐磨度问题：结合问题 I 与问题 II 的模型，通过对基础属性参数的假设，定量的解决此问题

问题 IV ——研究不同车型在不同等级路面上的最优花纹组合问题：通过模糊综合评价模型，得出四类基础性轮胎花纹在最优花纹组合中所占的客观比例。

问题 V ——研究现实生活中各类车辆在全路面上的最适花纹方案：结合问题 IV 的研究成果，联系实际生活，根据车辆在不同路面上的使用频率，运用层次分析法，设立主观权重，得出各类车辆全路段最优花纹方案中四种基础性花纹各占的比重，并画出其简图。

最后，针对所建模型进行了优缺点评价和推广。

参赛队号： 1575

所选题目： A 题

参赛密码 _____ (由组委会填写)
------------------------

#1575

## Abstract

The main means of transportation on land, divided into trucks, off-road vehicles, cars, buses, motorcycles five categories; according to the different types of tire tread, summed up four kinds of the most common pattern, namely horizontal, longitudinal, transverse and longitudinal pattern and more wild patterns, and to model the. On the basis of setting parameters corresponding to each tire model, establish five mathematical model, drainage of the, self-cleaning, skid resistance, wear resistance, by quantitative analysis of heat dissipation. At the same time, the various road conditions in real life, the friction coefficient, the mean and variance of pavement aggregate size, the road is wet and slippery level in three aspects, using empirical analysis, abstraction classification on the pavement. The above two kinds of models, by establishing the model of fuzzy comprehensive evaluation, AHP, fuzzy comprehensive evaluation method, AHP method, structure comparison judgment matrix, consistency test of knowledge, through the Matlab, solving software such as Excel, to objectively determine the optimal solution in a given tire tread on the road different kinds of vehicles, namely four types of basic pattern should be accounted for, and then according to the vehicle driving on the road on the frequency, combined with the actual establishment of the subjective weight, that optimal pattern scheme in all the vehicles on the road.

**Problem I** -- Research on pavement abstraction classification problem: the status of vehicle driving on the road in different environment is different, the influence of tire is not the same. The myriads of changes of road conditions in real life, and affected by the climate, environment, natural factors roads surrounding population density and human factors, it is not convenient for quantitative research, so before the study of tire tread pattern, reasonable classification of pavement condition, is very necessary.

**Problems II** -- Research on tire model problem: there are lots of tire tread type numbers of real life, impossible to study, to each kind of pattern so, before the functional characteristics of different tire tread patterns, constructing the first physical model of four kinds of patterns of the most simple and common, so as to seize the main contradiction, also simplifies the calculation amount. Also for the last vehicle in the road lay the foundation to set up the most suitable pattern scheme. Anti skid,

**Problems III** -- Study on four different tire tread pattern in different grade roads on the issue of III drainage, heat dissipation, self-cleaning, wear-resisting degree problem: with the problems I and II model, based on the basic attribute parameter assumptions, quantitative solution to the problem The optimal pattern combination problem in a level road, two road and three road on the issue of IV

**Problems IV**-- Study on different models: the model of fuzzy comprehensive evaluation, the proportion of these four basic tread pattern in the pattern of.

**Problems V** -- all kinds of vehicles of real life in the pavement on the optimum designs: combining research results of IV, contact the actual life, according to the use frequency of vehicle on different road surfaces, by using the analytic hierarchy process, the establishment of the subjective weight, the final ratio of these four basic patterns of various vehicles optimal pattern scheme of railway section of, and draw the diagram.

Finally, aiming at the model of the advantages and disadvantages of the evaluation and promotion.

**Key words:** tyres decorative pattern; Fuzzy comprehensive evaluation and analytic hierarchy; Software.

#1575

## § 1 问题的重述

### 一、问题的基本背景

在车辆的行驶中，轮胎是关键部件之一，它被广泛使用在多种交通工具上。轮胎的性能关系到车辆在运行中的安全性与稳定性，根据性能的需要，轮胎表面常会加工出不同的形状，在设计轮胎时，往往要针对其使用环境，设计出相应的轮胎花纹。

#### （一）轮胎花纹的功能

一般来讲，轮胎花纹即轮胎胎面上各种纵向、横向、斜向组成的沟槽。别看这些横着竖着的花纹很乱，其实他们可是有着明确的分工。轮胎花纹的主要作用就是增加胎面与路面间的摩擦力，以防止车轮打滑，这与我们鞋子地步花纹的原理是一样的。轮胎上的花纹是轮胎牵引力、制动力、耐磨性、操控稳定性、排水、静音性等的来源，采用不同的花纹设计也很大程度上影响了轮胎的综合性能。

#### （二）影响花纹作用的因素

轮胎的花纹设计类型影响着花纹作用，但起主要作用并与汽车使用有关的因素是花纹样式和花纹深度。

### 二、要解决的问题

问题一：不同车辆在不同环境道路上的行驶状况是不同的，因此首先对车辆进行简要分类，并对路面的状况进行分级；

问题二：对于常见的四种不同花纹的轮胎进行模型化；

问题三：对四种基础性花纹轮胎在不同等级路面上的防侧滑性，排水性，散热性，自洁性，耐磨度的定量分析；

问题四：解决不同车辆在不同等级路面上的四类基础性花纹比例最优化问题；

问题五：结合实际，探讨在全路面下，各类车辆的最优花纹方案。

## § 2 问题的分析

### 一、相关知识介绍

#### （一）轮胎花纹样式

轮胎花纹设计类型看似很多，但归纳起来可以分为以下四种基础性花纹的组合：

1. 横向花纹：是以轮胎的横截面为主轴设计的花纹，特点是胎面花纹纵向断开，横向连续，胎面纵向刚度大，横向刚度小；

2. 纵向花纹：花纹方向按照轮胎圆周排列，这种花纹在一条轮胎上通常拥有数条（也有少部分轮胎仅一条或者一条都没有），特点是胎面纵向连续，横向断开，胎面横向刚度大，纵向刚度小；

3. 横纵花纹：这种花纹介于纵向花纹和横向花纹之间。在胎面中部一般具有曲折形的纵向花纹，而在接近胎肩的两边则制有横向花纹，这种轮胎花纹呈“之”字走向，纵横贯通；

4. 越野花纹：越野花纹的共同特点是花纹沟槽宽而深，花纹块接地面积比较小（约

#1575

40%~60%)。

## (二) 轮胎花纹的深度

花纹过深过浅都不好。花纹愈深，则花纹块接地弹性变形量愈大，由轮胎弹性迟滞损失形成的滚动阻力也将随之增加。较深的花纹不利于轮胎散热，使胎温上升加快，花纹根部因受力严惩而易撕裂、脱落等。花纹过浅不仅影响其贮水、排水能力，容易产生有害的“滑水现象”，而且使光胎面轮胎易打滑的弊端凸现出来，从而使前面提及的汽车性能变坏。

## 二. 问题的总体分析

由于车辆种类与花纹样式的繁多，要建立花纹设计与车辆具体性能之间的联系，首先要对车辆进行简单分类，再选取构成复杂花纹的四类基础性花纹，建立抽象化模型。同时，根据模型参数的假设，结合对路面本身状况进行分级，即对各种路面状况抽象为三个等级的路面，设定相应的指标，对轮胎花纹与车辆性能之间建立定量关系。再通过这些定量关系，运用综合评价分析法，解决不同等级路面上不同车辆的四类基础性花纹最优比例问题，并联系实际，根据汽车行驶在不同路况上的频率，探讨全路面上，不同车辆的最优花纹方案。

## § 3 模型的假设

### 1. 五类车辆轮胎的规格分别为

货车轮胎：254R 20-18PR

越野车轮胎：255、50 R19 103V

轿车轮胎：251/65 R15 89H

客车轮胎：195/75 R14 92S

摩托车轮胎：80/90-18 45S

### 2. 假定不同种车辆四种基础性花纹的俯视图样式相同（详见问题二）；

### 3. 车辆在坡度为零的路面无障碍行驶，忽略空气阻力；

### 4. 忽略轮胎性能指标之间的相互影响；

### 5. 路面按照沙石大小均值和标准差、摩擦系数和路面的湿滑程度分级。其中路面沙石分布密度相同，位置随机，大小成正态分布；

### 6. 不同花纹的轮胎在行驶状态下与地面接触面积和凹入面积所构成的平行截面面积大小等于 $ab$ （详见问题一）；

### 7. 所有数据均为原始数据，来源真实可靠。

## § 4 名词解释与符号说明

### 一、名词解释：

法定载荷：法律规定车辆承受的竖向作用力

滑水现象：当瞬时接触地面的水不能被轮胎花纹凹槽容纳时使轮胎上浮的现象

#1575

导热量：物体之间由于温差导致热量在其传导的热量大小

热导率：当温度垂直向下梯度为 $1^{\circ}\text{C}/\text{m}$ ，单位时间内通过单位水平截面所传递的热量

导热面积：发生热传导的物体面积

温度梯度：是自然界中气温、水温变化而出现的阶梯式递增或递减的现象

自洁性：轮胎自我洁净的能力

能卡入缝隙的沙石数：卡在轮胎花纹缝隙中，不随轮胎运动而被甩出的沙石

能进入花纹缝隙的沙石数：包括能被甩出的沙石和不能被甩出的沙石

路面总沙石数：车辆行驶路面上的沙石总数

吸收沙石能力指数：轮胎花纹凹槽体积比轮胎花纹凹凸总体积

自洁率：在轮胎运动中能够被甩出的沙石与能够进入缝隙的沙石的比值

自洁能力指数：自洁率与吸收沙石能力指数的比值与比例系数的乘积（其中，比例系数与轮胎的材质，车身总重等因素有关）

## 二. 符号说明

序号	符号	说明	序号	符号	说明
1	$A_i$	第 $i$ 种花纹轮胎	11	$\gamma_{ij}$	第 $i$ 种轮胎在第 $j$ 级路面上的磨损度
2	$B_m$	第 $m$ 种影响轮胎性能的因素	12	$\Phi_i$	第 $i$ 种花纹轮胎的导热量
3	$a$	轮胎的宽度	13	$F_{ij}$	第 $i$ 种花纹在第 $j$ 种路面上的摩擦力大小
4	$b$	地面与轮胎花纹凹凸部分垂直投影面的长度	14	$\mu_{ij}$	第 $i$ 种花纹在第 $j$ 种路面上的滑动摩擦系数
5	$d$	轮胎凸起花纹的条宽	15	$N$	法定载荷
6	$h$	花纹轮胎的深度	16	$L$	单位时间内轮胎行驶的长度
7	$V_i$	第 $i$ 种花纹轮胎的花纹体积	17	$\Delta S_i$	单位时间内第 $i$ 种花纹轮胎被磨掉表面积
8	$V'_i$	第 $i$ 种花纹轮胎凹槽的体积	18	$\Delta V$	单位时间内轮胎被摩擦掉的体积
9	$S_i$	第 $i$ 种花纹轮胎的接触地面的面积	19	$\frac{dT}{d\theta}$	温度梯度， $K \cdot m^{-1}$
10	$S'_i$	第 $i$ 种花纹轮胎的接触地面的表面积	20	$R_i$	轮胎花纹缝隙地面最大内切球半径为

附加说明：

①  $A_i (i=1,2,3,4)$  分别表示横向，纵向，横纵，越野四种不同花纹的轮胎；

②  $B_m (m=1,2,3,4,5)$  表示轮胎自身的五种性能，依次是摩擦力，排水量，耐磨度，散热性和自洁性。

#1575

## § 5 模型的建立与求解

## 一、问题一的分析与求解

## (一) 问题的提出

现实生活中车辆种类和路面状况多种多样，不同路面状况对不同车辆轮胎的性质影响大小不同，不同车辆在不同环境道路上的行驶状况也是不同的。所以，要研究轮胎花纹对轮胎性能的影响，首先应该对车辆种类和路面状况进行分类处理。

## (二) 问题的分析和求解

## 1. 对车辆的分类问题

根据市面上常见的路面交通工具，简要的分为以下五类（表一），为了方便，在计算中，分别用  $a$  代表轮胎宽度、 $b$  代表轮胎接地瞬间构成的矩形的长、 $d$  代表花纹宽度、 $h$  代表花纹深度、 $m$  代表车的质量。

表 1：车辆分类

属性	$a$ =轮胎宽度 (mm)	$b$ =轮胎接地 长(mm)	$d$ =花纹宽 度(mm)	$h$ =花纹深度 (mm)	$m$ =车的质量 (t)
货车	254	423	40	10.5	8
越野车	255	356	24	10.7	5
轿车	215	299	20	8	1.5
客车	195	284	21	9.5	9
摩托车	80	122	10	3.5	0.1

## 2. 对路面的分级：

路面最基本的属性是摩擦系数，这直接影响到汽车行驶的阻力；路面沙石的大小和数量反映了路面洁净程度；路面的湿滑程度则反映了天气对路面的影响，涉及到轮胎性能中最基本的一项——排水性能。因此，我们根据路面沙石半径大小均值和方差、摩擦系数和路面湿滑程度这三项指标，把路面分为三个等级，数据如下：

表 2：路面分级

等级	摩擦系数	沙石半径均值	沙石半径标准差	路面湿滑程度
一级路面	0.010~0.035	7.0	1.0	0~20%
二级路面	0.035~0.150	15.0	2.0	21%~40%
三级路面	0.150~0.300	35.0	3.0	41%~60%

## 二、问题二的分析与求解

## (一) 问题的提出

花纹的类型种类繁多，但所有的花纹都可由四大类基础花纹：横向花纹、纵向花纹、纵横花纹、越野花纹组合而成。对于这四类花纹，再进行抽象性概括，建立对应的物理模型。

## (二) 问题的分析与求解

首先，假设车辆在行驶时，轮胎与地面接触的瞬间，轮胎曲面在弹性形变的作用下，



#1575

接触地面的部分近似的看作成一个由凹凸花纹共同构成的长方体（如图）

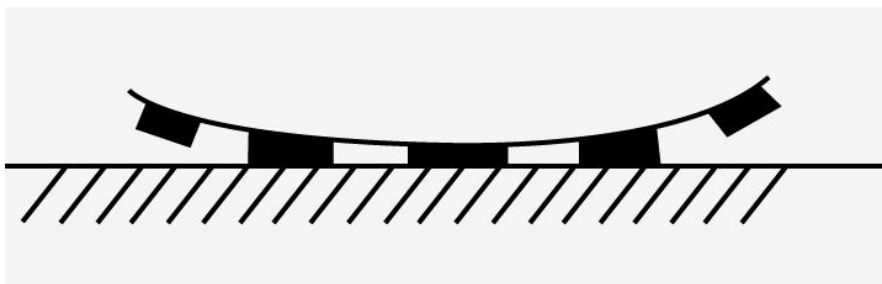


图 1

并且，根据不同车辆轮胎的材质，凹槽深度，车身的总重等不同，不同种车辆的花纹体积不同，但同种车辆的四种花纹的接地的瞬间体积相同。同时假定不同种车辆四种花纹的俯视图样式相同。

下面，对四种不同花纹的轮胎构建物理模型



图 2：横向花纹轮胎

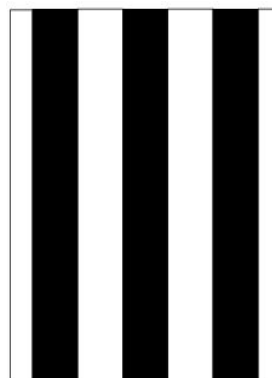


图 3：纵向花纹轮胎

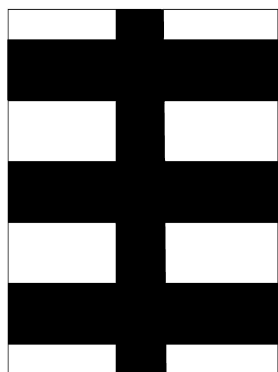


图 4：纵横花纹轮胎



图 5：越野花纹轮胎

上图为上述长方体的俯视图，阴影部分为轮胎花纹凸起部分。其中，设各长方形宽为  $a$ ，长为  $b$ ，花纹凸起部分条宽为  $d$ ，高度为  $h$ 。图 1、图 3 中，矩形上下白色部分面积相等，中间两个白色部分面积相等，且是上下白色部分面积的两倍。图 2 中左右白色部分面积相等，中间两个白色部分面积相等，且是左右白色部分面积的两倍。图 4 斜线与直线的夹角为  $45^\circ$ ，每条折线的第一个点与第三个、第二个点与第四个点在一条水平线上。

对于此模型的一些属性，进行如下的计算

$$V = abh$$

#1575

表示图中凹凸部分总体积凸起花纹的体积  $V_i$ ，其中  $i=1, 2, 3, 4$  分别表示横向，纵向，横纵，越野四种花纹，以下相同

$$\begin{aligned} V_1 &= 3adh \\ V_2 &= 3bdh \\ V_3 &= 3adh - bdh - 3d^2 \\ V_4 &= \frac{dh}{\sin 45^\circ} \times \frac{1}{3} a \times 9 \end{aligned}$$

凹槽的体积  $V'_i$ ：

$$\begin{aligned} V'_1 &= abh - 3adh \\ V'_2 &= abh - 3bdh \\ V'_3 &= abh + 3d^2 - 3adh - bdh \\ V'_4 &= abh - \frac{dh}{\sin 45^\circ} \times \frac{1}{3} a \times 9 \end{aligned}$$

轮胎花纹接触地面的面积  $S_i$ ：

$$\begin{aligned} S_1 &= 3ad \\ S_2 &= 3bd \\ S_3 &= 3ad + bd - 3d^2 \\ S_4 &= \frac{d}{\sin 45^\circ} \times \frac{1}{3} \times a \times 9 \end{aligned}$$

轮胎接触地面的表面积  $S'_i$ ：

$$\begin{aligned} S'_1 &= ab + 6ah \\ S'_2 &= ab + 6bh \\ S'_3 &= ab + 6(a-d)h + (b-3d) \times h \times 2 \\ S'_4 &= ab + \frac{1}{3 \sin 45^\circ} \times a \times h \times 18 \end{aligned}$$

轮胎花纹缝隙地面最大内切球半径为  $R'_i$ ：

$$\begin{aligned} R'_1 &= \frac{b-3d}{6} \\ R'_2 &= \frac{a-3d}{6} \\ R'_3 &= \frac{b-3d}{6} \\ R'_4 &= \frac{a}{3} \tan 15^\circ \end{aligned}$$

### 三、问题三的分析与求解

#### (一) 模型 I——耐磨度模型

##### 1. 模型的提出

#1575

在实际生活中，轮胎耐磨度直接影响轮胎的使用寿命，而耐磨度与轮胎的花纹样式直接相关，不同的花纹样式对应着不同的轮胎在运转时与地面瞬间接触的面积，轮胎与地面接触面积的大小关系着其耐磨程度，所以我们建立轮胎花纹对其耐磨程度影响的模型。

## 2. 模型的分析

其他条件不变，不同的轮胎花纹样式对应着不同的地面接触面积，所以，我们可以把轮胎花纹对耐磨度的影响，量化为轮胎与地面接触面积的大小对耐磨度的影响，通过物理方法建立函数关系模型，求得结果。

## 3. 模型的建立

### (1) 模型的假设

- ①假设4种轮胎参数除花纹不同外，其余均相同；
- ②假设分别安装了4种不同轮胎的车辆均相同

### (2) 型的具体分析

经过研究，磨损度可以表示轮胎的耐磨程度，即在特定界面条件下，输入单位摩擦功的橡胶（体积）损耗量  $\gamma$ 。

我们的出如下公式：

$$\gamma = \frac{\Delta V}{FL} = \frac{\Delta V}{\mu NL}$$

其中  $\Delta V = \Delta S_i \times h^*$

我们已经假定，4种轮胎除花纹样式不同外，其他变量如材质，大小等均相同，并且4种轮胎以相同的速度，方向，时间运行了相同的长度，因此，轮胎在单位时间内被磨损的花纹高度相同。同时，由于车身重量与单位时间内行驶距离相同，所以不同轮胎的  $N$ 、 $L$  也相同。

所以我们可以得到：

$$\gamma_{ij} = \frac{\Delta S_i \times h^*}{\mu_{ij} NL}$$

由公式可得

- i.  $\Delta S_i$  与  $\gamma_{ij}$  成正比，即接触地面的花纹面积越大，橡胶损耗量越大，胎耐磨度越低。
- ii.  $\mu_{ij}$  与  $\gamma_{ij}$  反成正比，即地面与轮胎之间摩擦系数越大，由轮胎磨损量越低，反之亦然。

### (二) 模型 II——排水性模型

#### 1. 模型的提出

当我们仔细观察轮胎就会发现，轮胎上的花纹形成了一道道沟槽，这些沟槽其实就是轮胎的排水槽。汽车在雨天湿滑的路面上行驶时，被挤压进轮胎花纹里的水会顺着沟槽排出，从而保证汽车在湿滑的路面上正常行驶。然而，轮胎与地面接触面积的瞬时容

#1575

水量是有限的，当瞬时接触地面的水不能被相同面积下的轮胎花纹凹槽容纳时，就会产生“滑水现象”，而且，不同花纹的轮胎与地面接触的瞬时凹槽容水量，即排水量是不同的，所以，我们要探讨轮胎花纹对其排水性能的影响。

## 2. 模型的分析

由模型的提出可知，只要计算出当假设不同花纹的轮胎在与地面接触面积一定时，它们各自的花纹凹槽体积，即轮胎在接触地面的一瞬间的排水量，于是我们就将它们在一定面积下的凹槽体积同排水量挂钩，即可得解。

## 3. 模型的求解

### (1) 模型的假设

- ①轮胎瞬时接触的全部面积都接触水面；
- ②四种花纹轮胎在运行时接触地面的面积相同。

### (2) 模型的具体分析与求解

根据排水原理，结合问题二抽象出的不同花纹轮胎的模型可知四种花纹轮胎的瞬时排水量：

用  $V_i$  表示，其中  $i$  为 1、2、3、4，分别表示横向花纹，纵向花纹，横纵花纹，越野花纹。

## (三) 模型 III——散热性模型

### 1. 模型的提出

轮胎胎花纹对轮胎胎面散热性能影响很大，良好的花纹散热效果能保证轮胎低温行驶，提高轮胎的耐久性能和使用寿命。因此，我们需要对不同花纹轮胎的散热性进行研究，从而得出散热性最佳的花纹类型模型。

### 2. 模型的建立

在解决散热问题时为了将花纹对散热性的影响进行量化，我们引入热传导基本方程——傅里叶定律，如下图所示：

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{d\delta}$$

（公式前面的符号仅仅表示热量的传导方向，即热量由轮胎表面向外界传导， $|\Phi|$  大小即轮胎向外传导热量的多少）

我们已经假定，4种轮胎除花纹样式不同外，其他变量如材质，大小等均相同，所以，4种轮胎的热导率，温度梯度都相同，即  $\lambda$ ， $\frac{dT}{d\delta}$  不变。最终，按照这样的假设，花纹的表面积大小决定了花纹的散热能力。

### 3. 模型的具体求解

由问题二抽象出的不同花纹轮胎的模型，除去公式的方向性，可得

$$\Phi_i = \lambda S_i \frac{dT}{d\delta} \quad (i \text{ 等于 } 1, 2, 3, 4 \text{ 分别, 表示横向花纹, 纵向花纹, 横纵花纹, 越野花纹})$$

#1575

#### (四) 模型 IV——摩擦力模型

##### 1. 模型的提出

不同的轮胎花纹，对于轮胎与地面摩擦时摩擦力的大小的影响是不同的，轮胎与地面的摩擦力是我们评价轮胎性能的重要指标之一，所以，我们要研究不同轮胎花纹对其运转中摩擦力的影响。

##### 2. 模型的建立

由于车辆在运动中轮胎在某一时点对于地面的滚动摩擦力可以近似为滑动摩擦力，滑动摩擦力如下：

$$F = \mu N$$

我们已经假定，4种轮胎除花纹样式不同外，其他变量如材质，大小等均相同，故  $N$  值一定，因而，滑动摩擦力的大小与轮胎与地面之间的滑动摩擦力系数  $\mu$  决定

##### 3. 具体的求解

$F_{ij} = \mu_{ij} N$  其中  $F_{ij}$  表示第  $i$  种花纹在第  $j$  种路面上的摩擦力大小， $\mu_{ij}$  表示第  $i$  种花纹在第  $j$  种路面上的滑动摩擦系数

#### (五) 模型 V——自洁性模型

##### 1. 模型的提出

由于不同轮胎花纹缝隙的大小，体积各不相同，沙石进入缝隙的概率与沙石排出缝隙的概率也不相同。通过引入轮胎自洁率、沙石吸引能力指数、自洁能力指数等指标，对轮胎自我洁净能力进行量化分析。

##### 2. 问题的分析：

通过对路面沙石大小与分布状况进行假设，计算出能卡入轮胎花纹间缝隙的沙石数（即符合半径在  $R_i \pm \Delta R$  范围内沙石数）占路面沙石总数的比例，同时计算出能够进入轮胎花纹间缝隙的沙石（即半径小于  $R_i + \Delta R$  的沙石）占路面沙石总数的比例。将两者相比，并用1减去其数值，得到自我清洁出的沙石数与进入缝隙的沙石数之比，比例越高说明此类花纹的自我清洁能力越强；同时，引入轮胎花纹对沙石吸引能力的指标，即轮胎花纹凹入部分体积与轮胎花纹凹凸部分总体积之比。此指标与轮胎的自我清洁能力成反比。同时结合这两项指标，综合判定不同花纹的轮胎的自洁性。

##### 3. 模型的建立

假设1：沙石抽象为大小不同的均匀球体；

假设2：路面沙石位置随机分布，半径大小服从正态分布；

假设3：所有小于轮胎缝隙最大内切圆的沙石均能进入缝隙。但只有符合大小在  $R_i \pm \Delta R$  的范围内沙石才能卡入轮胎缝隙，不因车轮的运动而甩出。

设路面沙石半径大小服从  $X \sim N$  (错误！未找到引用源。)，其分布函数为  $F_j(x)$ ，其中  $j$  为1, 2, 3. 分别表示一级、二级、三级路面。轮胎花纹缝隙地面最大内切圆半径为  $R_i$ ，能够进入花纹缝隙的石子范围为  $(0, R_i + \Delta R)$ ，其中能卡入花纹缝隙的石子范围为  $(R_i - \Delta R, R_i + \Delta R)$ 。其中，通过估计橡胶材质的轮胎弹性形变大小，假定  $\Delta R = 0.5\text{mm}$

#1575

$$\begin{aligned}
 \text{自洁率} &= \frac{\text{卡入缝隙的沙石数}}{\text{进入缝隙的沙石数}} = 1 - \frac{\frac{\text{卡入缝隙的沙石数}}{\text{路面沙石总数}}}{\frac{\text{进入缝隙的沙石数}}{\text{路面总沙石数}}} \\
 &= 1 - \frac{F_k(R_i + \Delta R) - F_k(R_i - \Delta R)}{F_k(R_i + \Delta R)} \\
 &= \frac{F_k(R_i - \Delta R)}{F_k(R_i + \Delta R)}
 \end{aligned}$$

$$\text{吸收沙石能力指数} = \frac{\text{轮胎花纹凹入部分体积}}{\text{轮胎花纹凹凸部分总体积}} = \frac{V'_i}{V}$$

用文字进行描述自洁率指标为：

$$\text{自洁能力指标} = \frac{\text{自洁率}}{\text{吸收沙石能力指数}} \times \text{比例系数}$$

用公式表示为：

$$\beta = k \frac{V \cdot F_k(R - \Delta R)}{V' \cdot F_k(R + \Delta R)}$$

#### 4. 模型的具体求解

$$\beta_i = k \frac{V \cdot F_k(R_i - \Delta R)}{V'_i \cdot F_k(R_i + \Delta R)} \quad (i=1, 2, 3, 4, \text{表示第 } i \text{ 种花纹}, j=1, 2, 3, \text{表示第 } j \text{ 种路面})$$

面)

#### 四、问题四的分析与求解

##### (一) 问题的提出

结合问题二的模型和问题三中各参数对轮胎性能指标的定量关系，通过基础变量的假定，计算出具体数值，并用模糊综合分析与层次分析法，从客观和主观对其各项指标权重进行设置，分析出不同轮胎花纹的最适的路面等级。

##### (二) 问题的假设

为了便于计算，对于其他外生变量单位时间内轮胎行驶的长度  $L$ ，磨损高度  $h^*$ ，法定载荷  $N$ ，自洁比例系数  $k$ ，温度梯度  $\frac{dT}{d\theta}$  均设置为 1

对于  $\mu$  来说，由于  $\mu$  大小由轮胎花纹式样与地面粗糙状况共同决定，结合问题一中不同级别路面对应不同摩擦系数大小和花纹图案。得出不要花纹的轮胎在不同级别的地面上的摩擦系数如下图

表 3：不同花纹在不同路面上的摩擦系数表

	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.015	0.035	0.020	0.030
二级路面	0.095	0.115	0.100	0.110

#1575

三级路面	0.195	0.215	0.200	0.210
------	-------	-------	-------	-------

### (三) 问题的分析与求解

#### 1. 客观权重分析法——模糊综合分析法

根据问题二、问题三以及本问题的基础变量的假设进行计算，得出不同种类的车辆，在不同路面上，仅安装四类基础性花纹的一种时，各项性能的大小状况。

表 4：货车的计算结果

一级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	1200	320040	333.38	123623	0.3947
纵向花纹	2800	533869	556.11	134315	0.8955
横纵花纹	1600	137284	466.25	127481	0.2152
越野花纹	2400	640080	471.46	130251	0.5004
二级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	7600	320040	40.005	123623	0.3947
纵向花纹	9200	533869	66.734	134315	0.8955
横纵花纹	8000	137284	55.95	127481	0.2152
越野花纹	8800	640080	56.576	130251	0.5004
三级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	15600	320040	20.003	123623	0.3947
纵向花纹	17200	533869	33.367	134315	0.8955
横纵花纹	16000	137284	27.975	127481	0.2152
越野花纹	16800	640080	28.288	130251	0.5004

表 5：越野汽车的计算结果

一级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	750	196452	327.42	107361	0.2526
纵向花纹	1750	275033	458.16	113898	0.3934
横纵花纹	1000	207821	449.32	111915	0.1498
越野花纹	1500	392904	463.04	114142	0.3327
二级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	4750	196452	39.29	107361	0.2526
纵向花纹	5750	275033	54.979	113898	0.3934
横纵花纹	5000	207821	53.919	111915	0.1498
越野花纹	5500	392904	55.565	114142	0.3327
三级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	9750	196452	19.645	107361	0.2526
纵向花纹	10750	275033	27.49	113898	0.3934
横纵花纹	10000	207821	26.959	111915	0.1498
越野花纹	10500	392904	27.783	114142	0.3327

表 6：轿车的计算结果

一级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	225	103200	573.33	74788	0.25
纵向花纹	525	144000	799.61	78861	0.3871
横纵花纹	300	54000	786.54	77666	0.1475
越野花纹	450	206400	810.82	79063	0.3294

#1575

二级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	1425	103200	68.8	74788	0.25
纵向花纹	1725	144000	95.953	78861	0.3871
横纵花纹	1500	54000	94.384	77666	0.1475
越野花纹	1650	206400	97.298	79063	0.3294
三级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	2925	103200	34.4	74788	0.25
纵向花纹	3225	144000	47.976	78861	0.3871
横纵花纹	3000	54000	47.192	77666	0.1475
越野花纹	3150	206400	48.649	79063	0.3294

表 7：客车的计算结果

一级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	1350	116708	108.06	66513.6	0.2851
纵向花纹	3150	170031	157.44	71592.1	0.4773
横纵花纹	1800	58707	148.9	69517.4	0.1659
越野花纹	2700	233415	152.82	71117.6	0.3721
二级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	8550	116708	12.968	66513.6	0.2851
纵向花纹	10350	170031	18.892	71592.1	0.4773
横纵花纹	9000	58707	17.868	69517.4	0.1659
越野花纹	9900	233415	18.339	71117.6	0.3721
三级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	17550	116708	6.4838	66513.6	0.2851
纵向花纹	19350	170031	9.4462	71592.1	0.4773
横纵花纹	18000	58707	8.9342	69517.4	0.1659
越野花纹	18900	233415	9.1694	71117.6	0.3721

表 8：摩托车的计算结果

一级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	15	8400	700	11474.1	0.3261
纵向花纹	35	12855	1071.2	12365.1	0.6
横纵花纹	20	3815	969.58	11911.1	0.1758
越野花纹	30	16800	989.95	12170	0.421
二级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	95	8400	84	11474.1	0.3261
纵向花纹	115	12855	128.55	12365.1	0.6
横纵花纹	100	3815	116.35	11911.1	0.1758
越野花纹	110	16800	118.79	12170	0.421
三级路面	摩擦力	排水力	耐磨度	散热能力	自洁性
横向花纹	195	8400	42	11474.1	0.3261
纵向花纹	215	12855	64.274	12365.1	0.6
横纵花纹	200	3815	58.175	11911.1	0.1758
越野花纹	210	16800	59.397	12170	0.421

在不同的三级地面上，综合摩擦力，排水量，耐磨度，散热性，自洁性的关于轮胎性能的指标，其中，我们把摩擦力看作成本型指标，排水量，耐磨度，散热性，自洁性看做效益型指标，我们用相对偏差模糊矩阵评价法对不同级别地面上的轮胎进行综合评价，再根据综合评价的结果，确定在不同等级路面上的最优花纹方案中，四类基础性花



#1575

纹所占的比例。

(1) 理想方案为:

$$u = (u_1^0, u_2^0, u_3^0, \dots, u^0)$$

$$\text{其中 } u_i^0 = \begin{cases} \max\{a_{ij}\} & \text{当 } a_{ij} \text{ 为效益型指标} \\ \min\{a_{ij}\} & \text{当 } a_{ij} \text{ 为成本型指标} \end{cases}$$

(2) 建立相对偏差模糊矩阵  $\tilde{R}$ :

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{41} & r_{42} & \cdots & r_{46} \end{pmatrix}$$

$$\text{其中 } r_{ij} = \frac{|a_{ij} - u_i^0|}{\max\{a_{ij}\} - \min\{a_{ij}\}}.$$

(3) 我们根据路面分级建立三种不同路面状况下的相对偏差模糊矩阵  $\tilde{R}$ , 并建立评价各指标的权数  $\omega_i (i=1,2,\dots,5)$

$$\text{并由变异系数法可知: } v_j = \frac{s_j}{\bar{x}_j}, \quad \omega_j = \frac{v_j}{\sum_{j=1}^5 v_j}, :$$

建立综合评价模型

$$F_i = \sum_{j=1}^5 \omega_j r_{ij}$$

且若  $F_t < F_s$ , 则第  $t$  个方案排在第  $s$  个方案前。

(4) 具体数值计算

由于不同车辆在一、二、三级路面上的相对偏差模糊矩阵是一样的, 故可以得到如下矩阵:

货车:

$$\tilde{R}_{\sim 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.64 & 0.57 & 1 & 0.74 \\ 1 & 0.21 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.23 & 0.64 & 1 \\ 0.75 & 0 & 0.22 & 0.38 & 0.58 \end{pmatrix}$$

越野汽车:

$$\tilde{R}_{\sim 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0.58 \\ 1 & 0.60 & 0.04 & 0.04 & 0 \\ 0.25 & 0.94 & 0.10 & 0.33 & 1 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

轿车:

$$\tilde{R}_{\sim 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0.68 & 1 & 1 & 0.57 \\ 1 & 0.41 & 0.05 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.1 & 0.33 & 1 \\ 0.75 & 0 & 0 & 0 & 0.24 \end{pmatrix}$$

客车:

$$\tilde{R}_{\sim 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0.67 & 1 & 1 & 0.62 \\ 1 & 0.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.17 & 0.41 & 1 \\ 0.75 & 0 & 0.09 & 0.09 & 0.34 \end{pmatrix}$$

#1575

摩托车：

$$R_{\sim 5} = \begin{pmatrix} 0 & 0.65 & 1 & 1 & 0.65 \\ 1 & 0.30 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0.27 & 0.51 & 1 \\ 0.75 & 0 & 0.22 & 0.22 & 0.42 \end{pmatrix}$$

再通过计算公式得：

表 9：货车

一级路面					
平均值	2000	407818.3	456.7996	128917.6	0.5015
标准差	730.2967	224148.8	92.0166	4509.316	0.2879
变异系数	0.3651	0.5496	0.2014	0.0350	0.5741
权数	0.2116	0.3186	0.1168	0.0203	0.3328
二级路面					
平均值	8400	407818.3	54.8159	128917.6	0.5015
标准差	730.2967	224148.8	11.0420	4509.316	0.2879
变异系数	0.0869	0.5496	0.2014	0.0350	0.5741
权数	0.0601	0.3798	0.1392	0.0242	0.3967
三级路面					
平均值	16400	407818.3	27.4080	128917.6	0.5015
标准差	730.2967	224148.8	5.5210	4509.316	0.2879
变异系数	0.0445	0.5496	0.2014	0.0350	0.5741
权数	0.0317	0.3913	0.1434	0.0249	0.4087

表 10：越野汽车

一级路面					
平均值	1250	268052.5	424.4869	111829.1	0.2821
标准差	456.4355	90168.53	64.9598	3141.225	0.1054
变异系数	0.3651	0.3364	0.1530	0.0281	0.3735
权数	0.2907	0.2678	0.1218	0.0224	0.2973
二级路面					
平均值	10250	268052.5	25.4692	111829.1	0.2821
标准差	456.4355	90168.53	7.7952	3141.225	0.1054
变异系数	0.0445	0.3364	0.3061	0.0281	0.3735
权数	0.0409	0.3090	0.2812	0.0258	0.3431
三级路面					
平均值	10250	268052.5	25.4692	111829.1	0.2821
标准差	456.4355	90168.53	3.8976	3141.225	0.1054
变异系数	0.0445	0.3364	0.1530	0.0281	0.3735
权数	0.0476	0.3596	0.1636	0.0300	0.3992

表 11：轿车

一级路面					
平均值	375	126900	742.5731	77594.67	0.2785
标准差	136.9306	64520.69	113.2619	1969.85	0.1038
变异系数	0.3651	0.5084	0.1525	0.0254	0.3728

#1575

权数	0.2564	0.3570	0.1071	0.0178	0.2618
<b>二级路面</b>					
平均值	3075	126900	44.5544	77594.67	0.2785
标准差	136.9306	64520.69	13.5914	1969.85	0.1038
变异系数	0.0445	0.5084	0.3051	0.0254	0.3728
权数	0.0354	0.4047	0.2428	0.0202	0.2968
<b>三级路面</b>					
平均值	3075	126900	44.5544	77594.67	0.2785
标准差	136.9306	64520.69	6.7957	1969.85	0.1038
变异系数	0.0445	0.5084	0.1525	0.0254	0.3728
权数	0.0403	0.4607	0.1382	0.0230	0.3378

表 12：客车

<b>一级路面</b>					
平均值	2250	144715.3	141.8065	69685.17	0.3251
标准差	821.5838	74588.56	22.7647	2293.103	0.1321
变异系数	0.3651	0.5154	0.1605	0.0329	0.4063
权数	0.2467	0.3482	0.1084	0.0222	0.2745
<b>二级路面</b>					
平均值	18450	144715.3	8.5084	69685.17	0.3251
标准差	821.5838	74588.56	2.7318	2293.103	0.1321
变异系数	0.0445	0.5154	0.3211	0.0329	0.4063
权数	0.0337	0.3904	0.2432	0.0249	0.3077
<b>三级路面</b>					
平均值	18450	144715.3	8.5084	69685.17	0.3251
标准差	821.5838	74588.56	1.3659	2293.103	0.1321
变异系数	0.0445	0.5154	0.1605	0.0329	0.4063
权数	0.0384	0.4445	0.1384	0.0284	0.3503

表 13：摩托车

<b>一级路面</b>					
平均值	25	10467.5	932.6894	11980.07	0.3807
标准差	9.1287	5607.466	161.222	385.1593	0.1777
变异系数	0.3651	0.5357	0.1729	0.0322	0.4667
权数	0.2322	0.3407	0.1099	0.0204	0.2968
<b>二级路面</b>					
平均值	205	10467.5	55.9614	11980.07	0.3807
标准差	9.1287	5607.466	19.3466	385.1593	0.1777
变异系数	0.0445	0.5357	0.3457	0.0322	0.4667
权数	0.0313	0.3760	0.2426	0.0226	0.3275
<b>三级路面</b>					
平均值	205	10467.5	55.9614	11980.07	0.3807
标准差	9.1287	5607.466	9.6733	385.1593	0.1777
变异系数	0.0445	0.5357	0.1729	0.0322	0.4667
权数	0.0356	0.4279	0.1381	0.0257	0.3728

得最终得其 F 值为：

#1575

表 14：各种车辆 F 值大小

货车 F 值	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.584734	0.278937	0.764305	0.404065
二级路面	0.69715	0.140311	0.263064	0.092571
三级路面	0.718198	0.114356	0.881694	0.325106
越野车 F 值	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.583853	0.456556	0.641959	0.292209
二级路面	0.814322	0.237367	0.186604	0.034373
三级路面	0.783949	0.270309	0.776291	0.135316
轿车 F 值	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.516439	0.408417	0.699592	0.255284
二级路面	0.706955	0.213576	0.22721	0.025517
三级路面	0.666458	0.236569	0.830193	0.111575
客车 F 值	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.532669	0.373001	0.712136	0.289925
二级路面	0.71886	0.175372	0.227261	0.037286
三级路面	0.679941	0.199649	0.839907	0.162724
摩托车 F 值	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	0.542355	0.335702	0.735997	0.327948
二级路面	0.719925	0.145486	0.234643	0.052409
三级路面	0.681253	0.165573	0.860462	0.219859

由 F 值得出五类车辆在对应路面上的最适的基础花纹方案。但这里，我们再进行进一步研究，由于横向花纹，纵向花纹，横纵花纹，越野花纹这四种花纹只是组成复杂花纹的四种基础性花纹，仅用一种花纹作为其最优花纹方案较为欠妥。所以，我们利用 F 值大小，对同种路面上四种基础花纹进行比例化，求出由不同比例的四类花纹组成的最适复杂花纹方案。

通过对 F 值的归一化，求出各类花纹所占的百分比如下表

表 15：各类车辆在不同路面上最优花纹组合

货车	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	28.78%	13.73%	37.61%	19.88%
二级路面	58.43%	11.76%	22.05%	7.76%
三级路面	35.22%	5.61%	43.23%	15.94%
越野汽车	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	29.57%	23.12%	32.51%	14.80%
二级路面	63.99%	18.65%	14.66%	2.70%
三级路面	39.88%	13.75%	39.49%	6.88%
轿车	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	27.47%	21.73%	37.22%	13.58%
二级路面	60.26%	18.20%	19.37%	2.17%
三级路面	36.13%	12.82%	45.00%	6.05%
客车	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
一级路面	27.92%	19.55%	37.33%	15.20%
二级路面	62.04%	15.13%	19.61%	3.22%
三级路面	36.12%	10.61%	44.62%	8.65%
摩托车	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹

	#1575			
一级路面	27.93%	17.29%	37.90%	16.89%
二级路面	62.47%	12.62%	20.36%	4.55%
三级路面	35.35%	8.59%	44.65%	11.41%

由表 15 易知（以货车为例）货车在一级路面上，使得其摩擦性，排水性，耐磨性，散热性，自洁性达到综合最优的轮胎花纹设计方案为横向花纹占总花纹的 28.78%，纵向花纹占 13.73%，横纵花纹占 37.61%，越野花纹占 19.88%。

## 五、问题五的分析与求解

### （一）问题的提出

对于问题四，仅仅解决了在某一级别路面上的最优花纹组合，而在现实生活中，一辆汽车不可能永远行驶在一种等级的路面上，车辆会遇到各种各样的路况，会在各种不同等级的路面上来回行驶，所以，对于某种车辆来说，通过主客观的结合确定其在不同道路上的行驶频率是十分必要的，通过频率的确定，结合问题四的求解结果，计算出车辆在全路面上的最优花纹组合。

### （二）问题的分析与求解

运用层次分析法 分析步骤及结果如下：

#### 1. 建立递阶层次结构：

目标层 A：汽车在不同路段上的行驶频率

准则层 B：车辆种类

方案层 C：不同等级路面

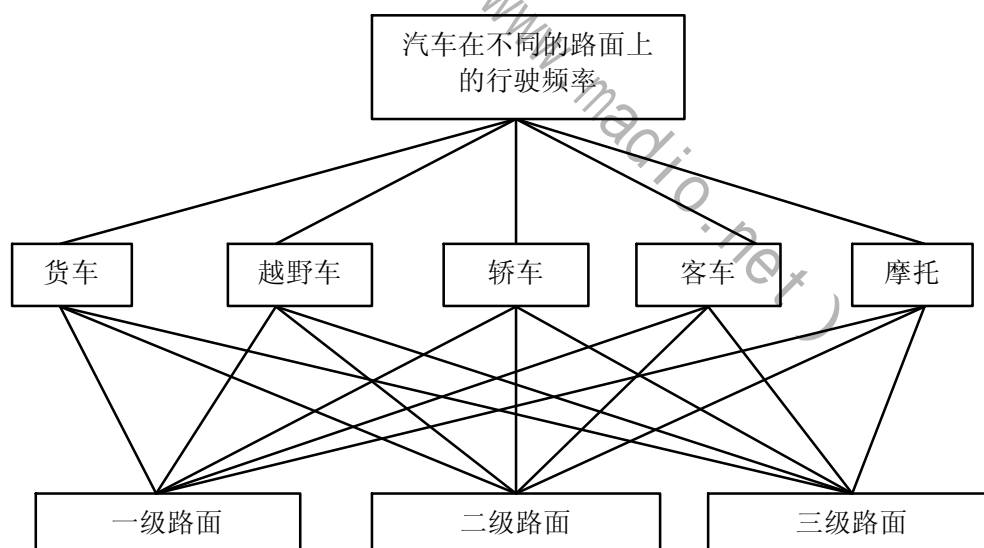


图 6：汽车在不同路面上行驶频率递阶层次结构图

大多采取的方法是：向填写人（专家）反复询问：针对判断矩阵的准则，其中两个元素两两比较哪个重要，重要多少，对重要性程度按 1-9 赋值（重要性标度值见下表）

表 16：判断矩阵

重要性标度	含 义
1	表示两个元素相比，具有同等重要性

#1575

3	表示两个元素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个元素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个元素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个元素相比，前者比后者极端重要
2, 4, 6, 8	表示上述判断的中间值
倒数	<p>若元素 I 与元素 j 的重要性之比为 <math>a_{ij}</math>，则元素 j 与元素 I 的重要性之比为 <math>a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}</math></p>

判断矩阵  $A_{ij} = (a_{ij})_{n \times n}$  满足：

- (1)  $a_{ij} > 0$  ;
- (2)  $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, )$  ;
- (3)  $a_{ii} = 1$

查阅相关资料，根据专家分析及意见，填写后的判断矩阵如下：

(准则层)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ 4 & \frac{1}{2} & 7 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

准则层与方案层判断矩阵表

(方案层)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 层次单排序（计算权向量）与检验：

对于专家填写后的判断矩阵，利用一定数学方法进行层次排序。

#1575

层次单排序是指每一个判断矩阵各因素针对其准则的相对权重，所以本质上是计算权向量。计算权向量有特征根法、和法、根法、幂法等，这里简要介绍和法。

和法的原理是，对于一致性判断矩阵，每一列归一化后就是相应的权重。对于非一致性判断矩阵，每一列归一化后近似其相应的权重，在对这  $n$  个列向量求取算术平均值作为最后的权重。具体的公式是：

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}$$

需要注意的是，在层层排序中，要对判断矩阵进行一致性检验。

在特殊情况下，判断矩阵可以具有传递性和一致性。一般情况下，并不要求判断矩阵严格满足这一性质。但从人类认识规律看，一个正确的判断矩阵重要性排序是有一定逻辑规律的，例如若 A 比 B 重要，B 又比 C 重要，则从逻辑上讲，A 应该比 C 明显重要，若两两比较时出现 A 比 C 重要的结果，则该判断矩阵违反了一致性准则，在逻辑上是不合理的。

因此在实际中要求判断矩阵满足大体上的一致性，需进行一致性检验。只有通过检验，才能说明判断矩阵在逻辑上是合理的，才能继续对结果进行分析。

一致性检验的步骤如下。

第一步：计算一致性指标 C.I. (consistency index)

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

第二步：查表确定相应的平均随机一致性指标 R.I. (random index)

据判断矩阵不同阶数查下表，得到平均随机一致性指标 R.I.。例如，对于 5 阶的判断矩阵，查表得到 R.I. = 1.12

表 17 平均随机一致性指标 R.I. 表 (1000 次正互反矩阵计算结果)

矩阵阶数	1	2	3	4	5	6	7	8
R.I.	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41
矩阵阶数	9	10	11	12	13	14	15	
R.I.	1.46	1.49	1.52	1.54	1.56	1.58	1.59	

第三步：计算一致性比例 C.R. (consistency ratio) 并进行判断

$$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$$

当  $C.R. < 0.1$  时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的， $C.R. > 0.1$  时，认为判断矩阵不符合一致性要求，需要对该判断矩阵进行重新修正。

### 1. 层次总排序与检验：

总排序是指每一个判断矩阵各因素针对目标层（最上层）的相对权重。这一权重的计算采用从上而下的方法，逐层合成。

很明显，第二层的单排序结果就是总排序结果。假定已经算出第  $k-1$  层  $m$  个元素相

#1575

对于总目标的权重  $w^{(k-1)} = (w_1^{(k-1)}, w_2^{(k-1)}, \dots, w_m^{(k-1)})^T$ ，第  $k$  层  $n$  个元素对于上一层（第  $k-1$  层）第  $j$  个元素的单排序权重是  $p_j^{(k)} = (p_{1j}^{(k)}, p_{2j}^{(k)}, \dots, p_{nj}^{(k)})^T$ ，其中不受  $j$  支配的元素的权重为零。令  $P^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ ，表示第  $k$  层元素对第  $k-1$  层个元素的排序，则第  $k$  层元素对于总目标的总排序为：

$$w^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})^T = P^{(k)} w^{(k-1)}$$

$$\text{或 } w_i^{(k)} = \sum_{j=1}^m p_{ij}^{(k)} w_j^{(k-1)} \quad i=1, 2, \dots, n$$

同样，也需要对总排序结果进行一致性检验。

假定已经算出针对第  $k-1$  层第  $j$  个元素为准则的  $C.I._j^{(k)}$ 、 $R.I._j^{(k)}$  和  $C.R._j^{(k)}$ ， $j=1, 2, \dots, m$ ，则第  $k$  层的综合检验指标

$$C.I._j^{(k)} = (C.I._1^{(k)}, C.I._2^{(k)}, \dots, C.I._m^{(k)}) w^{(k-1)}$$

$$R.I._j^{(k)} = (R.I._1^{(k)}, R.I._2^{(k)}, \dots, R.I._m^{(k)}) w^{(k-1)}$$

$$C.R._j^{(k)} = \frac{C.I._j^{(k)}}{R.I._j^{(k)}}$$

通过 matlab 计算

表 18：层次总排序

准则		一级路面	二级路面	三级路面	总排序权值
准则层权值		0.5277	0.2449	0.2274	0.1473
方案层单排序权值	货车	0.1555	0.5234	0.3211	0.3467
	越野汽车	0.1036	0.3842	0.5122	0.0147
	轿车	0.5476	0.4120	0.0404	0.2912
	客车	0.4478	0.2386	0.3136	0.1819
	摩托车	0.3521	0.4522	0.1957	0.0755

由层次总排序表结果，归一化得出五种车辆在三种路面上的行驶频率

表 19：汽车在各级路面的行驶频率

	货车	越野汽车	轿车	客车	摩托车
一级路面	15.55%	10.36%	54.76%	44.78%	35.21%
二级路面	52.34%	38.42%	41.20%	23.86%	45.22%
三级路面	32.11%	51.22%	4.04%	31.36%	19.57%



#1575

最后，根据表 19 与问题四的结果，求得不同车辆在全路面上的最适花纹组合

	横向花纹	纵向花纹	横纵花纹	越野花纹
货车	46.37%	10.09%	31.27%	12.27%
越野车	6.10%	16.60%	29.23%	48.07%
轿车	41.33%	19.92%	30.18%	8.58%
客车	38.63%	15.69%	35.39%	10.28%
摩托车	45.00%	13.48%	31.29%	10.24%

由上述比例，画出全路段最优花纹设计简图（阴影部分代表凸起部分）

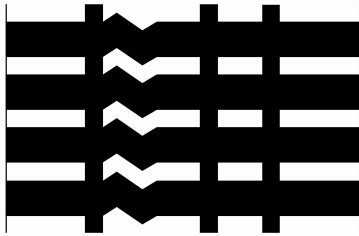
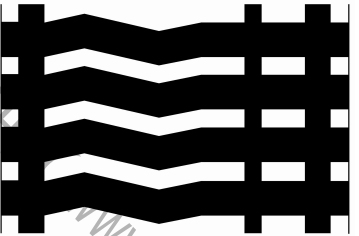
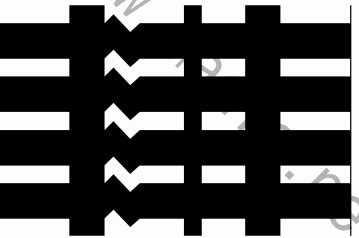
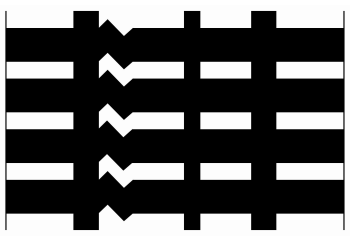
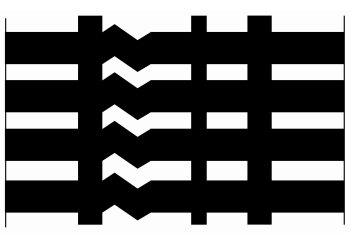
车型	轮胎花纹
货车	
越野汽车	
轿车	
客车	
摩托车	

图 7：花纹设计简图

#1575

## § 6 模型的误差分析与改进

### 一、误差分析

在研究轮胎花纹对摩擦力的影响时，我们对不同花纹的轮胎在不同等级的路面上的滑动摩擦系数是在假定除轮胎花纹及路面状况以外的其他外界条件不变的情况下得到的 $\mu_0$ 值，在实际状况下， $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ ， $\mu_0$ 是最佳理想状况下的滑动摩擦力系数， $\Delta\mu$ 是其受外界环境改变产生的弹性活动区间。

### 二、模型的改进：

改进 1：在研究轮胎花纹对轮胎自身性能的分析时，简单地把花纹凸起与凹槽处侧面的角度看作 $90^\circ$ ，是不太符合客观实际的，在实际问题的研究中，应当设定合理的倾斜角度，从而得出不同的凹槽面积与体积，结果的改动最终会影响不同花纹对轮胎自身性能的影响程度。

改进 2：在对车辆分类时将车辆分为货车，越野汽车，轿车，客车，摩托车过于简单，可以选取其他标准，如专用车种等进一步细分，使结果更加准确，精细；

改进 3：车辆的使用需求还有很多，以上模型仅轮胎花纹同其自身性能结合当做使用需求，在实际生活中，人们对车辆还有速度，制动性能等要求

## § 7 模型的评价与推广

### 一、模型的优点

优点 1：有相关的软件支持，算得的结果贴近实际，可信度高；

优点 2：对问题三，针对合理的模型，该模型从轮胎花纹的特性考虑，可以较精确地对花纹轮胎的各项指标进行量化，并且它可以大大地减少样本容量，从而在很大程度上节省了，并利用软件 MATLAB 定量地检验了模型的可靠性；

优点 3：用层次分析法，建立了层次分析模型，在单准则下进行排序及一致性检验，最后做出总的排序，求得不同车辆在全路面上的最适花纹组合，结果客观实际；

优点 4：利用相对偏差模糊矩阵评价和层次分析法相结合，最终设计的不同车辆在不同需求下的轮胎花纹样式结果更可靠。

### 二、模型的缺点

缺点 1：模型中为使计算简便，使所得结果更理想化，忽略了一些次要的影响因素；

缺点 2：由于模型分析的需要，我们在解题过程中设置了五个轮胎自身的性能，并通过不同花纹对于性能的影响进行研究，因而产生了大量变量，计算过程中难以收敛，有时只能得到局部最优值，无法得到全局最优值；

缺点 3：车辆的使用需求还有很多，以上模型仅轮胎花纹同其自身性能结合当做使用需求，在实际生活中，人们对车辆还有速度，制动性能等要求。

### 三、模型的推广

模糊评价法莫基于模糊数学。模糊技术可以应用于机器人、过程控制、地铁机车、交通管理、故障诊断、医疗诊断、声音识别、图像处理、市场预测等众多领域。模糊理论及模糊法在世界的巨大的市场前景和应用范围；

#1575

层次分析模型的推广:该决策方法可以推广到很多应用领域,如:科研成果的评价,企业评估人才选拔等;

本篇论文针对不同花纹轮胎性能进行评价及对其最适路况做出分析,购买车辆的消费者和生产车辆的制造商可以根据其自身对车辆的需求,经常行驶的路面选择合适的花纹,具有非常重要的现实指导意义。

## § 8 参考文献

- [1] 杨忠敏. 轮胎胎面花纹及其特点[J]. 现代橡胶技术. 2013(04);
- [2] 王晓光. 全钢载重子午线轮胎胎面花纹散热性能探讨[J]. 轮胎工业. 2008(10);
- [3] 杨桂元, 黄己立. 数学建模[M]. 合肥:中国科技技术出版社, 2009.9 第二版;
- [4] 彭援军, 彭卫国. 汽车安全驾驶必读[M]. 北京市: 农业出版社, 1988.10
- [5] 鲁军. 基于自定义特征的轮胎花纹参数化设计的研究[D]. 合肥工业大学 2013
- [6] 文学红. 轮胎花纹反求与数字化设计研究[D]. 广东工业大学 2005
- [7] 丘永亮. 基于反求工程的轮胎花纹结构数字化设计方法研究[D]. 广东工业大学 2007
- [8] 周海超. 花纹结构对轮胎花纹沟噪声和滑水性能影响规律及协同提升方法研究[D]. 江苏大学 2013
- [9] 申瑞利. 浅析轮胎花纹对轮胎使用的影响[J]. 露天采矿技术. 2012(S2)
- [10] 陈理君, 杨克琪, 肖旺新, 陈弘. 基于自适应遗传算法的低噪声轮胎花纹结构参数优化[J]. 橡胶工业. 2010(05)

#1575

## 附录：

一级路面	良好的沥青或混凝土路面	一般的沥青或混凝土路面	碎石路面	良好的卵石路面	压紧土路：干燥的	结冰路面
摩擦系数	0.010-0.0180	0.018-0.020	0.020-0.025	0.025-0.030	0.025-0.035	0.015-0.03
二级路面	压紧的雪道		压紧土路；雨后的		坑洼的卵石路面	湿沙
摩擦系数	0.030-0.050		0.050-0.150		0.035-0.050	0.060-0.150
三级路面	干沙			泥泞土路（雨季或解冻期）		
摩擦系数	0.100-0.300			0.100-0.250		