

## 第五届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第五届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1471

参赛队员（签名）：

队员 1：

队员 2：

队员 3：

参赛队教练员（签名）：

参赛队伍组别：

## 第五届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1471

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

---

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 2012 年第五届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 基于圆网的最合适捕食的蛛网结构模型

关 键 词 螺旋式圆网 捕食网面积 最短路径模型 平衡模型 粘稠度

## 摘 要：

本文围绕最优捕食蛛网问题，建立了平衡模型、最短路径模型，给出了蛛网的评判标准，研究了各评判标准之间的平衡关系，确定了最合适的蛛网结构与面积。最后，运用平衡模型对捕丝粘稠度进行了更深的探讨。

首先通过分析蛛网的进化过程与结果，得出了圆网是最合适的网种。然后对圆环式圆网和螺旋式圆网进行比较，计算出两者的捕食面积与捕食最短路径，根据模拟并计算蜘蛛的相关数据，对比情况为：

$$S_{\text{圆环}} = 8.3767 \times 10^5 < S_{\text{螺旋}} = 8.4307 \times 10^5$$

$$L_{\text{圆环}} = 1.2824 \times 10^{10} > L_{\text{螺旋}} = 7.9692 \times 10^9$$

得出的结论：螺旋式圆网的结构最合适蜘蛛捕食，通过模拟设定基数  $R$ 、吐丝量  $C$ 、偏好的食物半径  $k$ 、最大承受长度  $b$  等影响因素的值，得出最合适捕食的网为 25 圈捕丝、捕丝间距  $20.1367 \text{ mm}$ 、16 根发射线、直径  $50 \text{ mm}$  的螺旋式圆网、其捕食面积为  $843070 \text{ mm}^2$ 、最短路径  $7.9692e+009 \text{ mm}$ 。

其次，为了更好地研究蛛网的结构，我们建立了捕食网面积与捕丝粘稠度关系模型，并根据该模型提出：在基数  $R$  下螺旋式捕食网面积的范围受到捕丝粘稠度范围为  $[0, 9.4346]$  的约束，基数  $R$  取值不同，捕食网面积和捕丝粘稠度都具有唯一对应的关系模型。

参赛队号 1471

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

所选题目 A 题

## Abstract

This paper focuses on the problem of optimal prey spider web to build a balanced model and the shortest path model, given the criteria of the spider web and study the balance between the various criteria to determine the most appropriate structure of the spider web area. Finally, the combination of fishing wire viscosity balance model to investigate deeper.

The first analysis of the evolutionary process and results of the spider's web, come to orb web is the most appropriate network. Then a circular rotary and spiral rotary calculated both predator size and prey Shortest Path, Finally, according to the relevant data of the simulation and calculate the spider, the contrast to the situation as:

$$S_{radius} = 8.3767 \times 10^5 < S_{spiral} = 8.4307 \times 10^5$$

$$L_{radius} = 1.2824 \times 10^{10} > L_{spiral} = 7.9692 \times 10^9$$

Conclusions: the spiral-Rule structure is the most suitable network structure of spider predation simulation to set the value of the influencing factors of the base, the amount of silk, the radius of the preferred food, Maximum length, draw the most suitable prey net for 25 laps of capture thread, capture thread spacing of 20.1367 and 16 transmission lines, diameter of 50 spiral-Rule, its capture area of 843 070 mm<sup>2</sup>, the shortest path is  $7.9692 \times 10^9$  mm.

Secondly, in order to better study the structure of the spider web, we have established a capture area of the capture thread viscosity relationship model, and according to the model proposed by capture thread viscosity range in the range of the spiral-Rule capture area in the base R: [0, 9.4346] constraints of this conclusion.

That is, in a different base R, the capture area and capture thread viscosity have only corresponds to the relational model.

**Keywords:** Shortest path model   Spiral-Rule Capture area Viscosity Balance model

## 参赛队号 # 1471

## 一、问题重述

世界上生存着许多种类的蜘蛛，而其中的大部分种类都会通过结网来进行捕食。请你建立合理的数学模型，说明蜘蛛网织成怎样的结构才是最合适的。

## 二、问题分析

目前世界有上千种蜘蛛，蛛网的种类也有很多种，但从蛛网的进化过程与结果可以知道圆形蛛网比其他类型的网更具有优越性，更适合蜘蛛的生活习性与能满足其对食物的需求，因为圆网是一个高度自适应的结构。圆形蛛网大概分为圆环式蛛网（N边形蛛网）和螺旋式蛛网，比较这两种圆形蛛网哪种更适合蜘蛛捕食，找到合理的评判标准是关键。单位时间内捕食量越大则说明该种蛛网的合适度越高，捕食量的大小取决于捕食区的捕食效率和蜘蛛抓住食物所用的时间。

鉴于蜘蛛一天的吐丝量是有限的，蛛网不可能无限大，在一定量的吐丝量的前提下，捕食区的捕食效率取决于网眼大小和捕食区的面积，求出两决定因素的平衡点，从而分别得出圆环蛛网与螺旋蛛网捕食区的最大捕食效率。蜘蛛抓住食物的最短时间取决于抓住食物的最短路径。在蛛网的捕食区面积与结构相同的前提下，分别求出两种蛛网的最短路径。

针对这两个评判标准，分别建立与求解模型，从而得出结论。为了更好地研究蛛网的结构，还需要对影响蛛网捕食能力的其他影响蛛网捕食能力的因素进行分析研究。通过建立模型，找到各影响因素之间的关系，并通过查找数据来求解模型，最终得出最合适的蛛网。

## 三、模型假设

提出假设：

- 1、两节点之间的蛛丝长短关系到食物逃脱难易程度，假设当两节点之间的蛛丝长度超过  $b$  时，食物将逃脱掉；
- 2、指定的一种蜘蛛对食物的大小有偏爱；
- 3、食物的飞行速度不会导致网的破裂；
- 4、空间会直接影响蛛网的形状，假设蛛网的构建是在无限空间中的；
- 5、假设除了捕食网以外都是对称的。

## 四、符号说明

符号	定义
$a_i$	自蛛网的中枢区往外方向的层， $i=1, 2, \dots, m$ ;
$L$	捕丝间距;
$S$	蛛网的捕食面积;
$C$	蜘蛛一天的吐丝量;
$t$	蛛网放射丝的条数;
$R$	中心区域和自由区域的直径之和;
$L_R$	圆环式蛛网的最短路径长度之和;
$L_S$	螺旋式蛛网的最短路径长度之和;
$S_{ki}$	捕丝粘稠度

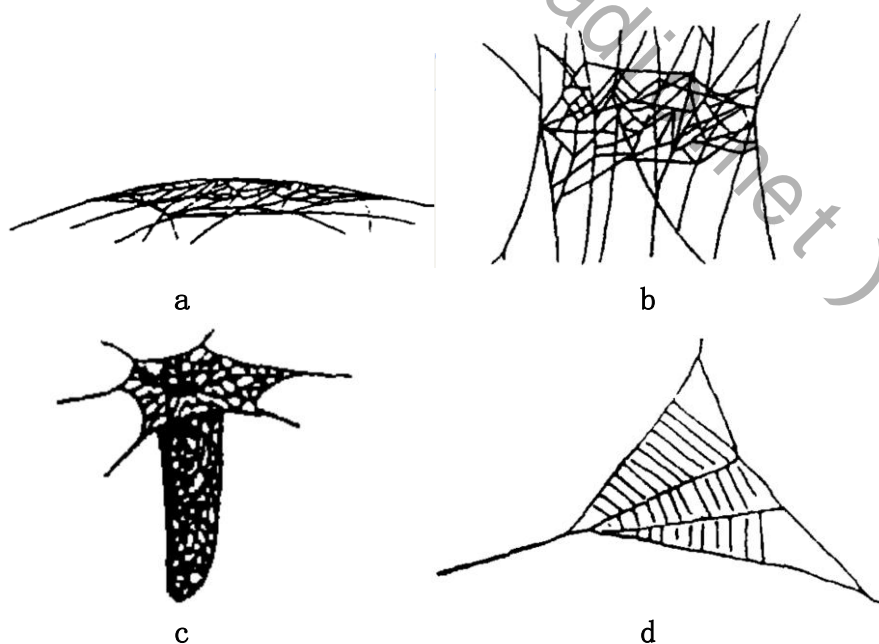
## 五、模型的建立与解答

### 5.1 模型背景

蜘蛛网是由部分种类的蜘蛛吐丝所编成的网状物，主要是用以捕获昆虫、小型脊椎动物等作食物，或用以结巢居住。蜘蛛网有许多不同的大小、形状和黏性丝线的使用量，蜘蛛可以感应到猎物冲撞或受困于蜘蛛网上时所产生的震动；在完成它们的网后，蜘蛛会在网上或附近等待猎物落入陷阱。

蜘蛛网的结构会影响蜘蛛的捕食情况，蜘蛛通过结各种各样的网以适应环境，空中的网一般可分为以下 6 种：如有如薄片状的片网（图 1a）；三维的不规则网（图 1b），蛛丝向各方向不规则的伸出；漏斗网（图 1c），网的形状像个漏斗，旁边还有一个丝质的管，供蜘蛛在网上行动时的出入口及藏身之处；三角网（图 1d），蜘蛛在墙角一般采用的结网方式；华盖网（图 1e），把丝织成丝层，排于一平面上，其他的丝不规则的向四方延伸；以及圆网（图 1f），圆网是由放射丝和螺旋丝在一个框架上交织成的二维的网，属于的圆形结构。蜘蛛网种类虽多，但科学家的最新研究结果称，最为经典的蜘蛛网只“发明”过一次，年代可追溯到大约 1.36 亿年前的白垩纪时期。这一经典蜘蛛网就是圆网。由于受到生态的压力而造成趋同进化，目前至少有 4200 种蜘蛛结的网是圆网，因为圆网是一个高度自适应的结构，可以在日常的基础上因地制宜[5]，据有关资料显示，在蜘蛛网的发展史中（见附录一），圆网（Orb Webs）在所有蜘蛛网中所占的比重越来越大，这反映了“物竞天择，适者生存”，可见，圆网比较有利于捕食，使用价值较高。

对于圆网，由于蛛丝自身存在重力和环境中的各种因素，例如风、雾水等自然条件的综合影响，两节点之间蛛丝并不是直线的，而是有一定的弧度，所以蛛网的多边形近似可以看作是一个个标准的圆环。蛛网与外部环境的连线是视情况而定的，所以本模型不将蛛网与外部环境的连线方式作为模型合适与否评判标准，只考虑蛛网的内部结构。基于圆形蛛网上讨论，圆形蛛网大概分为圆环式蛛网（N 边形蛛网）和螺旋式蛛网，在此，我们要对两种类型的蛛网进行分析，找出最适合捕食的蛛网模型。



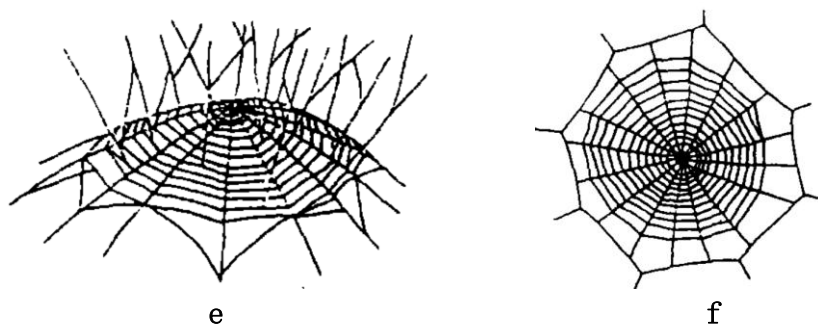


图1 蜘蛛网的6种类型

## 5.2 模型分析

### 5.2.1 评判标准的选取

蛛网是蜘蛛的捕食工具，蛛网的结构性能不仅仅影响蜘蛛的捕食效率，也关系着蜘蛛的捕食投入。在蜘蛛一天吐丝量一定的前提下，在蛛网结构方面影响蛛网的捕食能力的因素有捕食效率和最短路径。

(1) 捕食效率。最外层捕丝与最内层捕丝之间的闭合区域即为捕食面，捕食面是决定捕食效率的要素之一，在食物无法穿透蛛网的前提下，大的捕食面意味着有更多的捕食机会。捕丝间距为相邻的两圈捕丝的距离，其大小可以在一定程度上反映出蜘蛛对食物的选择，也可以反映出网的强度：捕丝间距小，则网的强度大。网眼即为相邻两圈捕丝和相邻两根放射丝围成的小格子，其大小同样反映出蜘蛛对食物大小的选择倾向，还可以反映出网的强度：网眼小，网则更为牢固。捕食面大小、网眼大小和捕丝间距大小都是影响蜘蛛捕食效率的重要特征<sup>[9]</sup>。

(2) 最短路径。在已经尽可能多困住的食物前提下，要达到最优效果，还必须满足最短路径，确保在食物逃脱之前，蜘蛛能在最短时间内赶过去抓住食物。路径不仅与网的大小疏密程度有关，还与网的结构有关，最合适的网必须满足最短路径最短。通过建立最短路径模型，计较两种圆网的最短路径，从而得出最合适的网。

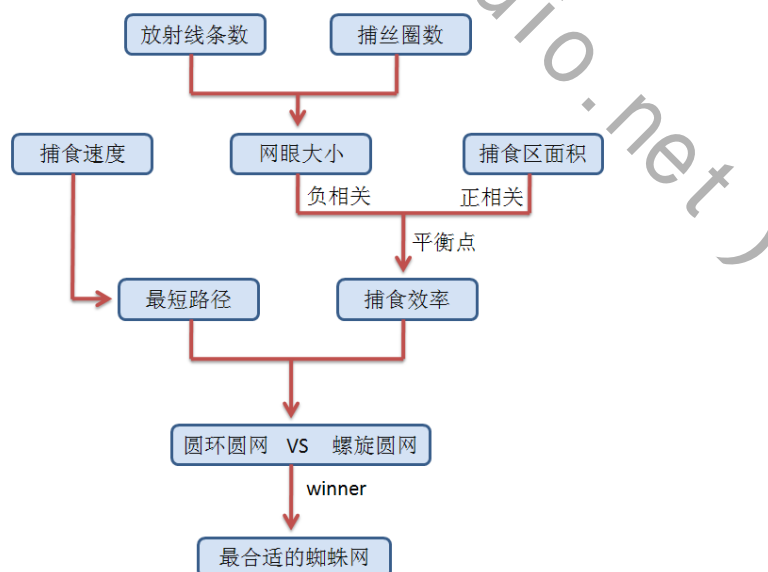


图2 寻找最合适蛛网的流程图

### 5.3 模型 I

#### 5.3.1 平衡模型的建立

##### 5.3.1.1 捕食效率

由于捕食面大小、网眼大小和捕丝间距大小都是影响蜘蛛捕食效率的重要特征，故放射丝条数和捕丝间距决定了捕食效率。单位面积内，捕丝越密则捕食效率越大；捕丝密度一定时，捕食面越大则捕食效率越大；但一只蜘蛛一天的吐丝量是有限的，捕丝越密必将导致捕食面越小，如何找到两者之间的平衡点，从而使捕食效率最大是问题的关键。令圆环蛛网的捕丝间距是等长  $L$ ，中枢区直径为  $R$  自中枢区往外，分别用  $a_i (i=1,2,\dots,m)$  来表示第  $i$  圈。圆环蛛网的结构如图 3 所示。

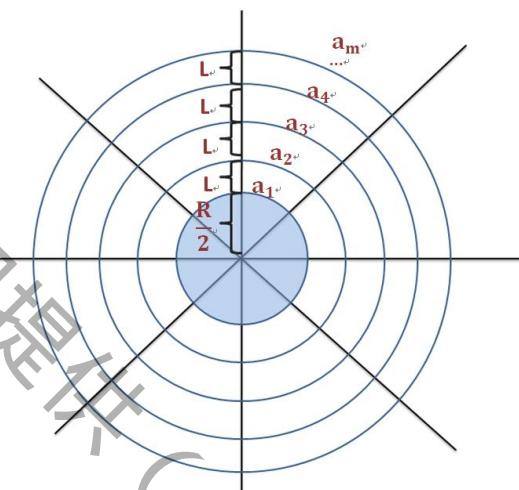


图 3

令一只蜘蛛一天的吐丝量为  $C$ ，放射丝的条数为  $l$  条，捕丝的圈数为  $m$ ，则有：

$$C = 2 \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{R}{2} + iL \right) \pi + l \left( \frac{R}{2} + (m-1)L \right) \quad (1)$$

其中根据假设 1，有：

$$L_{\text{弧}} \leq b \quad (2)$$

则

$$2\pi \left( \frac{R}{2} + (m-1)L \right) = bn$$

$$l = \frac{C - 2\pi \sum_{i=0}^{m-1} \left( \frac{R}{2} + iL \right)}{\frac{R}{2} + (M-1)L}, l \geq 3 \quad (3)$$

把(3)代入(1)中化简得

$$C = (\pi L + L^2) m^2 + \left( \pi R - \pi L + \frac{2RL\pi}{b} + 2L^2 \right) m + \left( \frac{\pi R^2}{2b} - \frac{2\pi RL}{b} + L^2 \right) \quad (4)$$

根据假设 2，指定的一种蜘蛛对食物有偏爱，假设蜘蛛偏爱的食物的半径为  $k$ ，如图 4 所示，当食物穿过网时，如果其身体中心落在阴影部分则会被网丝粘住，否则安全穿过蛛网。阴影面积越大，则捕食效率越高。已知蛛网的放射线是没有粘性的，只有捕



食面上的圆环丝才有粘性。

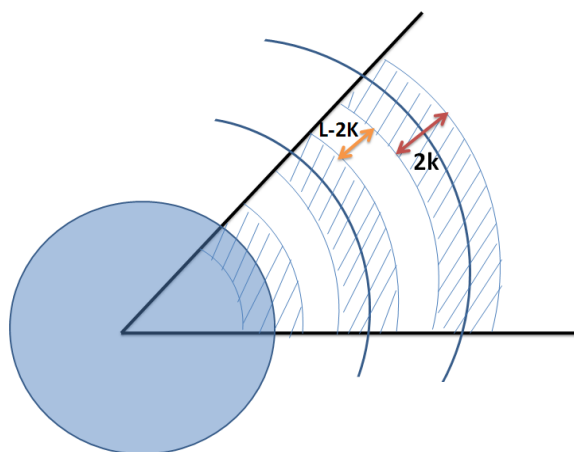


图 4

因此得出捕食面积方程：

$$S_{\text{圆环}} = \pi \sum_{i=0}^{m-1} \left( \left( \frac{R}{2} + iL + k \right)^2 - \left( \frac{R}{2} + iL - k \right)^2 \right) \quad (5)$$

由方程(4)和(5)，运用 matlab 软件编写程序，运行得出圆环圆网的最优捕食面积。同时可以确定在吐丝量为  $C$  的条件下最合适圆环蛛网的结果，即放射线条数与捕丝的间距。

### 5.3.1.2 针对螺旋圆网

为了在等同条件下比较圆环圆网与螺旋圆网，螺旋网的放射线条数、捕丝圈数、捕丝间距的取值将都与圆环的相同，从而可以得出螺旋网的最大捕食面积为：

$$S_{\text{螺旋}} = \left( C - t \left( \frac{R}{2} + (m-1)L \right) \right) L \quad (6)$$

通过比较计算结果来判断圆环圆网与螺旋圆网哪种更合适，若  $S_{\text{圆环}} > S_{\text{螺旋}}$ ，则圆环圆网比螺旋圆网更加合适；若  $S_{\text{圆环}} < S_{\text{螺旋}}$ ，则相反；若  $S_{\text{圆环}} = S_{\text{螺旋}}$ ，则圆环圆网与螺旋圆网有同样的合适度。

## 5.3.2 模型 I 的求解

选取长脚蜘蛛作为例子来求解模型。长脚蜘蛛是结空心圆网蜘蛛。体长雌性约 9~13 毫米，雄性约 7~8 毫米。蜘蛛一天最多能吐 75 米长的丝。基于这些数据，合理设定下列数据：

表 1

变量	R(中枢区直径)	K(食物直径)	C(吐丝量)	b(最大承受长度)
取值	50mm	10mm	50000mm	200mm

运行 Matlab 软件（程序见附录二），运行结果见表 2

表 2

网种	捕丝圈数	捕丝间距	发射线条数	最大捕食面积
圆环圆网	25mm	20.1367mm	16mm	837670mm
螺旋圆网				843070mm

由表中数据可得：

$$S_{\text{圆环}} = 8.3767 \times 10^5 < S_{\text{螺旋}} = 8.4307 \times 10^5 \quad (7)$$

可得在取相同的  $m$  值与  $L$  值的条件下成立 (8) 式，故，若只考虑捕食效率，螺旋蛛网比。圆环蛛网更合适蜘蛛捕食。

$$S_{\text{圆环max}} \leq S_{\text{螺旋}} \leq S_{\text{螺旋max}} \quad (8)$$

故当  $R, k, C, b$  的取值如表 1 时，放射线为 16，捕丝间距为 25 毫米，捕丝圈数为 25 的螺线圆网是最合适的网。

## 5.4 模型 II 最短路径模型

### 5.4.1 模型的分析

#### ● Step1: 衡量适合捕食蛛网的指标

作为最适合捕食的蛛网，假设在蜘蛛以平均速度的前提下匀速前进，需要在最短时间内到达猎物所在地，即蜘蛛必须通过最短的路径到达猎物所在点，以此，我们建立最短路径的模型，作为衡量最适合捕食的蛛网的一个重要指标。

#### ● Step2: 圆环式蛛网 (N 边形蛛网) 分析

假设蜘蛛网以一个正  $m$  边形为中心，以正  $m$  边形向外扩展，不在同一多边形上的点成网状互连。这种结构有很好的扩展性，它的扩展方式有两种：

- (1) 横向扩展，增加每一环的节点个数；
- (2) 纵向扩展，不增加环节点数，而是增加环数。

它的定义如下：

给定图  $G_1 \langle V_1, E_1 \rangle = \{ (n(m, i), n(m, i+1)) \in E_1, n(m, i) \in V_1 \}$ ， $V_1$  是图中节点集合， $E_1$  是边集合，在图  $G_1$  中，设每个节点依次标号为  $1, 2, \dots, n$ ； $m$  代表层，在相邻的节点之间有一条边，即图  $G_1$  是一个环，如图 5。

给定图  $G_1, G_2, \dots, G_N$  中，设  $m_1 = 1, m_2 = 2, \dots, m_n = n$ ，对任意两个节点  $N(m_1, k_1)$ ， $M(m_2, k_2)$  如果  $k_1 = k_2$ ，和  $m_1 - m_2 = \pm 1$ ， $\{N(m_1, k_1), M(m_2, k_2)\} \in E$ ，其中  $E \in G$ 。

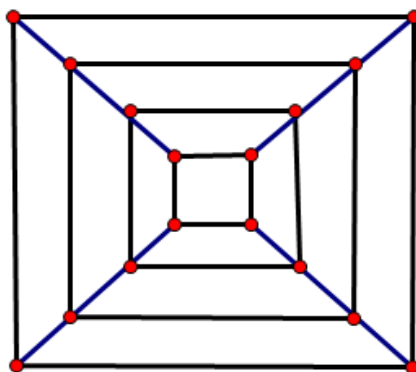


图5 蜘蛛网结构。

蜘蛛网结构的一个特别重要的性质是一个简单的平面网络图，一个简单的没有交叉线的布局图。

#### ● Step3: 螺旋式蛛网分析

螺旋式蛛网是蜘蛛网的一种主要的捕食螺线结构，在数学上被称为阿基米德螺线，

所以，在此我们将这种螺线基于数学的角度上分析。

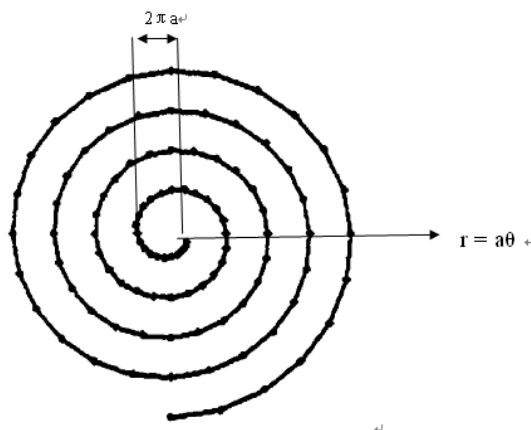


图 6

阿基米德螺线，亦称“等速螺线”。当一点P沿动射线OP一等速率运动的同时，这射线有以等角速度绕点O旋转，点P的轨迹称为“阿基米德螺线”。

极坐标方程为： $r = a\theta$

笛卡尔坐标方程式为：

$$\begin{cases} r = 10 \cdot (1 + t); \\ x = r \cdot \cos\left(\frac{t}{360}\right); \\ y = r \cdot \sin\left(\frac{t}{360}\right); \\ z = 0; \end{cases}$$

这种螺线的每条臂的距离永远相等等于  $2\pi a$ 。

#### 5.4.2 模型的建立

##### ● Step1: 圆环式蛛网 (N边形蛛网) 最短路径

基于捕食网结构上的分析：

假设中心区域和自由区域的直径之和为基数R，如图7。

当基数为R时，蜘蛛网结构是一个  $R^2$  结构，网的直径即为每一环上两节点之间的最远距离 + (R-1)，即为  $\frac{3R}{2} - 1$ 。

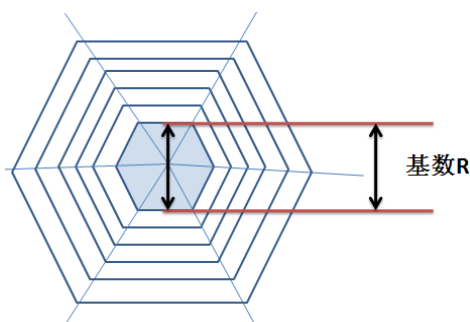


图 7

## 参赛队号 # 1471

设A, B为2维、基为R的双向蜘蛛网上的任意两点, 源结点A的地址为 $(a_1, b_1)$ , 目的结点B的地址为 $(a_2, b_2)$ , 则基为R的双向蜘蛛网上所有结点之间的最短路径长度之和为圆环式蛛网的最短路径长度之和为

$$L_R = \sqrt{\sum_{a_1=0}^{R-1} \sum_{b_1=0}^{R-1} \sum_{a_2=0}^{R-1} \sum_{b_2=0}^{R-1} |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|}$$

$$= \sqrt{R^2 \left( \sum_{a_1=0}^{R-1} \sum_{b_1=0}^{R-1} \sum_{a_2=0}^{R-1} \sum_{b_2=0}^{R-1} |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \right)}$$

● Step2:

模拟圆环式蛛网最短路径模型, 同理, 建立螺旋式蛛网最短路径模型:

由上述已知当基数为R时, 蜘蛛网结构是一个 $R^2$ 结构, 网的直径即为每一环上两节点之间的最远距离 $+(R-1)$ , 即为 $3R/2-1$ 。

如图:

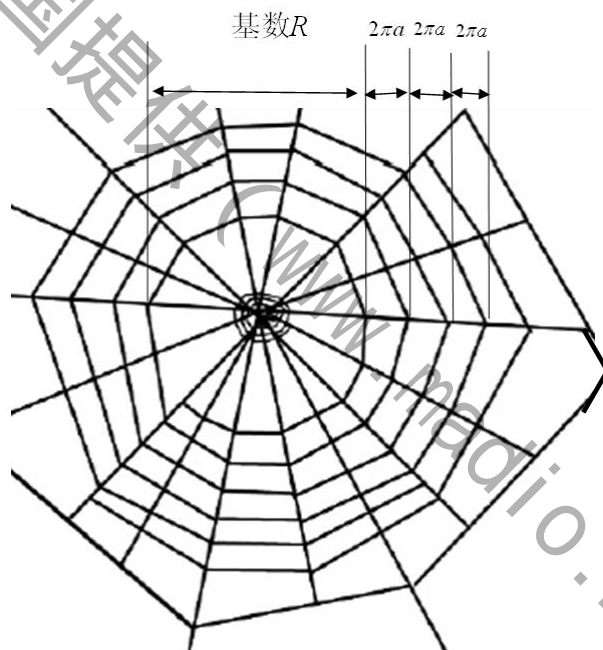


图8

因此, 螺旋式蛛网的直径为:  $R+2\pi a$ .

假设螺旋式蛛网和圆环式蛛网的直径相同, 即

$$\frac{3R}{2} - 1 = R + 2\pi a$$

$$2\pi a = \frac{R}{2} - 1$$

螺旋式蛛网的最短路径长度之和为

## 参赛队号 # 1471

$$\begin{aligned}
 L_S &= \sqrt{\sum_{a_1=0}^R \sum_{b_1=0}^{2\pi a} \sum_{a_2=0}^{2\pi a} \sum_{b_2=0}^{2\pi a} (|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{R}{2} + \left(\frac{R}{2} + 1\right) + \dots + R\right)^2 \left(\sum_{a_1=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{b_1=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{a_2=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{b_2=0}^{\frac{R-1}{2}} (|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)\right)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{3R^2}{8}\right)^2 \left(\sum_{a_1=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{b_1=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{a_2=0}^{\frac{R-1}{2}} \sum_{b_2=0}^{\frac{R-1}{2}} (|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|)\right)}
 \end{aligned}$$

## 5.4.3 模型的求解

## ● Step1:

运用 matlab 软件, 模拟两种蛛网在  $R \subseteq [1, 20]$  的最短路径, 得出下表:

表3

R值 $\subseteq [1, 20]$	圆环式蛛网最短 路径 (mm)	螺旋式蛛网最短 路径 (mm)	相对残差 (mm)
1	0	0	0
2	0	0	0
3	40.9706	0	40.9706
4	438.2137	0	438.2137
5	2.34E+03	0	2341.2
6	8.71E+03	184.3675	8525.433
7	2.58E+04	435.3122	25344.69
8	6.51E+04	2.82E+03	62263.2
9	1.46E+05	5.84E+03	140234.7
10	2.99E+05	2.01E+04	279292
11	5.71E+05	3.74E+04	533563
12	1.03E+06	9.47E+04	931806
13	1.76E+06	1.62E+05	1595440
14	2.89E+06	3.41E+05	2545700
15	4.58E+06	5.47E+05	4030340
16	7.04E+06	1.02E+06	6019700
17	1.05E+07	1.55E+06	8985000
18	1.54E+07	2.64E+06	12757700
19	2.20E+07	3.86E+06	18185500
20	3.10E+07	6.16E+06	24811500
...	...	...	...
50	1.28E+010	7.96E+009	4.8547E+009

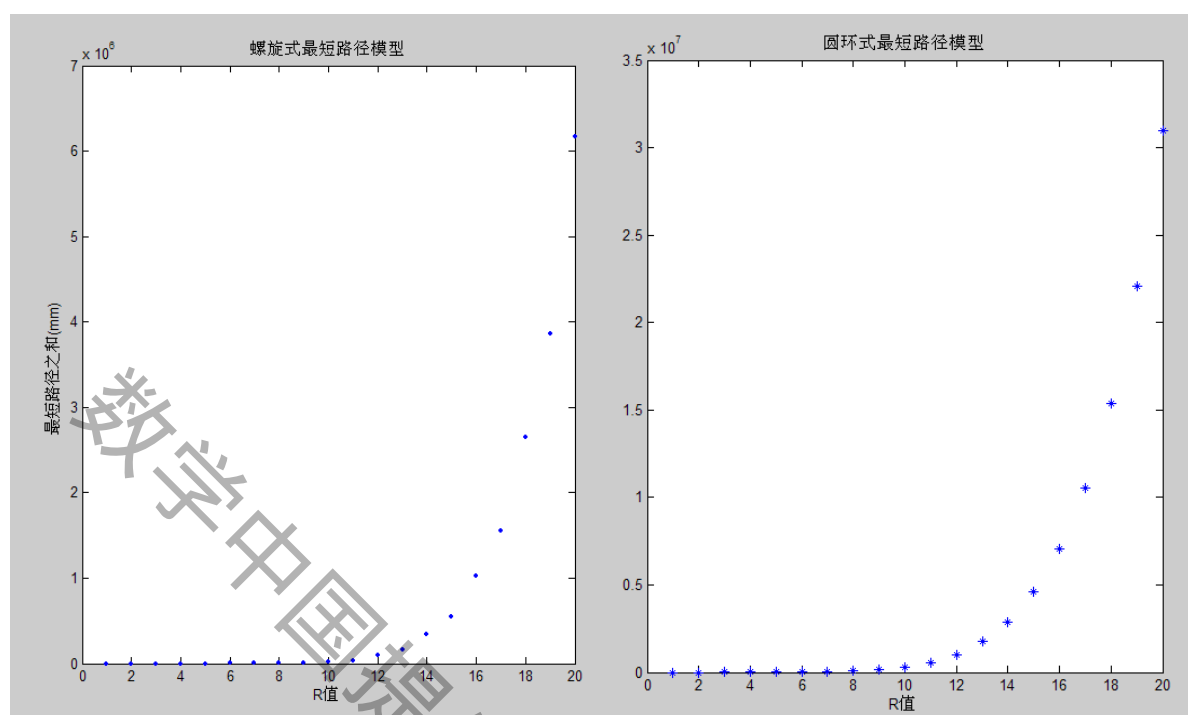


图9

从图9中可以看出，用最短路径作为衡量捕食网结构的标准，螺旋式蛛网比圆环式蛛网更加适合作为捕食网结构。

但是，在 $R$ 小于3的情况下，两种网都不可能存在，在 $R$ 小于6的情况下，螺旋式网并不存在，所以，基于圆形结网的情况下，我们得出的模型为：

$$\begin{cases} \text{当 } R < 3 \text{ 时} & \text{并不存在适合的圆形捕食网} \\ \text{当 } 3 \leq R \leq 5 \text{ 时} & \text{适合采用圆环式蛛网} \\ \text{当 } R > 5 \text{ 时} & \text{适合采用螺旋式蛛网} \end{cases}$$

## 5.5 模型III 捕食网面积与捕丝粘稠度关系模型

### 5.5.1 模型的分析与建立

圆网昆虫会通过增大捕食区面积的和提高单位捕食面积的粘性挺高自己的捕食能力。由于蜘蛛丝总量的限制, 蜘蛛会专门织猎物捕获的螺纹粘网。基于螺旋式蛛网结构的基础上，从现实中分析，即使蜘蛛采用螺旋式蛛网模式作为捕食网的结构，为了提高捕食能力，这个捕食网当然是越大越好，但是捕食网并非可以无限延伸的，根据Opell教授的文献，我们可以得出捕食网面积和捕丝粘稠度是呈负相关的关系的，所以，我们在此讨论捕食网面积和捕丝粘稠度的关系，作为约束捕食网面积无限扩大的可能性。

#### ● Step1: 基于螺旋式蛛网结构上捕食网面积

## 参赛队号 # 1471

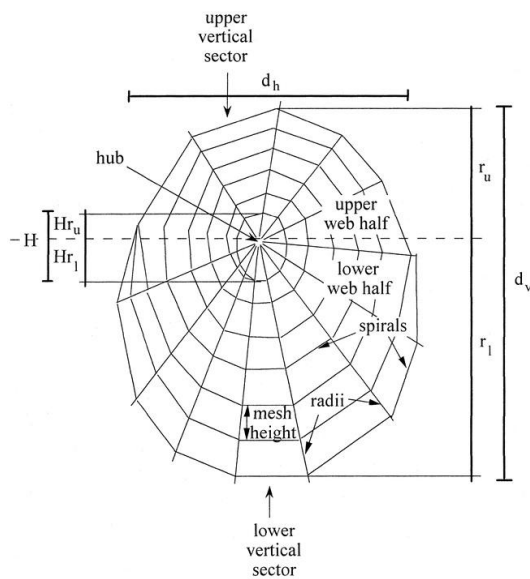


图 10

(注：图片来源 [http://dx.doi.org/10.1636/0161-8202\(2000\)028\[0180:E0FTET\]2.0.CO;2](http://dx.doi.org/10.1636/0161-8202(2000)028[0180:E0FTET]2.0.CO;2) )

基于螺旋式蛛网结构上，中心区域和自由区域的直径之和为 $R$ ，也就是说，除捕食网之外，其余网都是对称结构。所以，在此建立的捕食网面积模型是基于不完全对称方法<sup>[3]</sup>，

$$\left[ \frac{1}{2} \pi r_u^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{H}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \pi r_l^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{H}{2} \right)^2 \right]$$

此时

$$R = H$$

$$2\pi a = \frac{R}{2} - 1$$

$$r_l = n2\pi a = n \left( \frac{R}{2} - 1 \right)$$

$$r_u = (n-1)2\pi a = (n-1) \left( \frac{R}{2} - 1 \right)$$

$$X = \left[ \frac{1}{2} \pi r_u^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \pi r_l^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right]$$

得出捕食网面积模型：

$$= \frac{1}{2} \pi (r_u^2 + r_l^2) - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi \left[ (n-1)^2 \left( \frac{R}{2} - 1 \right)^2 + n^2 \left( \frac{R}{2} - 1 \right)^2 \right] - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi \left[ \left[ (n-1)^2 + n^2 \right] \left( \frac{R}{2} - 1 \right)^2 \right] - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2$$

其中,

$r_l$  捕食网的下半螺旋网

$r_u$  捕食网的上半螺旋网

$n$  捕食网的层数

### ● Step2: 基于螺旋式蛛网结构上捕丝粘稠度

我们通过查阅相关文献<sup>[1]</sup>, 得到估算粘性值的回归方程其中显著性特征是

( $n=51, F=15.26, P=0.0003, R^2=0.23$ )

$$\text{Stickiness} = -1.2742 \ln(\text{web number}) + 9.4346.$$

基于螺旋式蛛网上捕丝粘稠度模型 (基于层数  $n$ ):

$$\text{Stickiness} = -1.2742 \ln(n) + 9.4346$$

$$\text{Stickiness} = S_{ki}$$

$$n = e^{\left( \frac{S_{ki} - 9.4346}{-1.2742} \right)} = e^{\left( \frac{9.4346 - S_{ki}}{1.2742} \right)}$$

### ● Step3: 基于螺旋式蛛网结构上捕食网面积, 捕丝粘稠度, 基数R三者关系

捕食网面积

$$\begin{aligned} X &= \left[ \frac{1}{2} \pi r_u^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \pi r_l^2 - \frac{1}{2} \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \pi \left[ \left[ (n-1)^2 + n^2 \right] \left( \frac{R}{2} - 1 \right)^2 \right] - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi \left[ \left[ \left( e^{\left( \frac{9.4346 - S_{ki}}{1.2742} \right)} - 1 \right)^2 + \left( e^{\left( \frac{9.4346 - S_{ki}}{1.2742} \right)} \right)^2 \right] \left( \frac{R}{2} - 1 \right)^2 \right] - \pi \left( \frac{R}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

三者关系可以表示为下图:

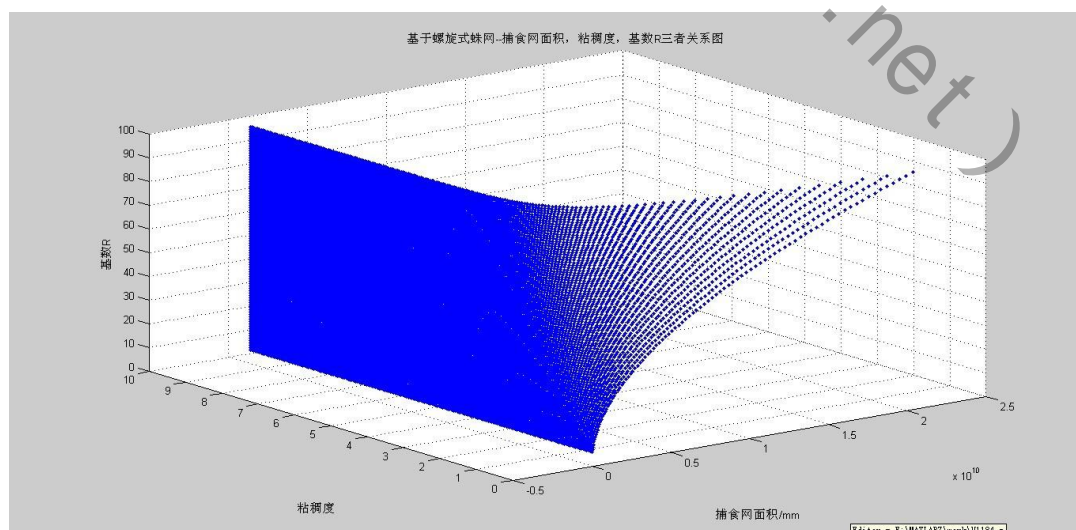


图 11



## 参赛队号 # 1471

## 5.5.2 模型的求解

- Step1: 在一定的R值前提下，捕食面积与捕丝粘稠度的变化情况

表4

R	捕食网面积/mm	捕丝粘稠度
6	$3.39 \times 10^7$	0
	$2.90 \times 10^7$	0.1
	$2.48 \times 10^7$	0.2
	$2.12 \times 10^7$	0.3
	$1.81 \times 10^7$	0.4
	$1.55 \times 10^7$	0.5
...	...	...
无穷趋向于 $+\infty$	0	9.4346

- Step2: 比较不同圆网蜘蛛的粘稠度情况

参考数据：在蛛类蜘蛛<sup>[2]</sup>中抽取几个样本见表5：

表5

物种样本 <i>species</i>	重量 <i>mg</i>	粘稠度 $\mu\text{N/mm}$
Argiope trifasciata (21)	340.4 $\pm$ 33.2	27.15 $\pm$ 1.99
Araneus marmoreus (22)	646.9 $\pm$ 63.9	34.76 $\pm$ 4.21
Cyclosa conica (20)	7.4 $\pm$ 0.3	11.47 $\pm$ 1.03
Micrathena gracilis (20)	90.4 $\pm$ 5.5	28.34 $\pm$ 3.12

- Step3:

由于捕丝粘稠度的范围是 $[0, 9.4346]$ ，所以对上述数据中的粘稠度进行标准化处理

$$Argiope = \frac{(9.4346 - 0) \cdot \sum 27.15 \pm 1.99}{\sum 27.15 \pm 1.99 + \sum 34.76 \pm 4.21 + \sum 11.47 \pm 1.03 + \sum 28.34 \pm 3.12} = 2.5189$$

$$Araneus = \frac{(9.4346 - 0) \cdot \sum 34.76 \pm 4.21}{\sum 27.15 \pm 1.99 + \sum 34.76 \pm 4.21 + \sum 11.47 \pm 1.03 + \sum 28.34 \pm 3.12} = 3.2222$$

$$Cyclosa = \frac{(9.4346 - 0) \cdot \sum 11.47 \pm 1.03}{\sum 27.15 \pm 1.99 + \sum 34.76 \pm 4.21 + \sum 11.47 \pm 1.03 + \sum 28.34 \pm 3.12} = 1.0642$$

## 参赛队号 # 1471

$$Micrathena = \frac{(9.4346 - 0) \cdot \sum 28.34 \pm 3.12}{\sum 27.15 \pm 1.99 + \sum 34.76 \pm 4.21 + \sum 11.47 \pm 1.03 + \sum 28.34 \pm 3.12} = 2.6293$$

设定基数R=50

表6 抽样的集中蜘蛛的粘稠度与捕食网面积情况

物种样本	大小	粘稠度 (uN/mm)	捕食网面积/mm <sup>2</sup>
Argiope trifasciata	21	2.5189	9.3306×10 <sup>7</sup>
Araneus marmoreus	22	3.2222	3.0836×10 <sup>7</sup>
Cyclosa conica	20	1.0642	9.1801×10 <sup>8</sup>
Micrathena gracilis	20	2.6293	7.8429×10 <sup>7</sup>

## 六、模型评价

### 6.1 模型的优点:

- (1) 本文是基于国内外众多研究文献的基础上，依据数学理论，建立的精确性模型
- (2) 本文是基于对圆形蛛网结构的研究，在螺旋式网上深入探讨了捕食网面积与捕丝粘稠度之间的关系。
- (3) 影响蛛网的合适度的因素不单一，建立的平衡模型能将多种影响因素综合考虑，找到平衡点

### 6.2 模型的缺点:

- (1) 本文在基于对圆形蛛网结构的研究最适合捕食结构，只是用了 2 个指标作为比较蛛网结构是否更适合捕食的标准，忽略了其他指标的影响。
- (2) 本文假设环境因素，生存竞争因素，人为因素等都相同，忽略了这些因素对蛛网的影响。
- (3) 模型 I 的求解缺少真实数据，无法与现实中的数据相比较，缺乏说服力；

## 七、模型优化与推广

### 7.1 模型优化

网置于一定的空间中，其大小形状等必然受制于空间大小和形状。在空间较大的情况下，由于重力作用，蜘蛛往下爬行较快，捕食成功率就相应增大，因此，蜘蛛倾向于织椭圆形（纵轴半径大）的网。【蛛网结构性能及其适应性】。

### 7.2 模型推广

(1) 本模型主要研究圆形蛛网结构中最适合捕食结构，并非囊括了所有的蛛网捕食结构。根据本文的研究方法，我们可以向其他蛛网结构进行推广，例如扇形蛛网，片形蛛网，流星形蛛网以及不规则蛛网等。

(2) 本文在基于圆形蛛网结构的中研究最适合捕食结构，分为圆环形蛛网和螺旋式蛛网，而本文只是采用了如何在最短时间内捕食和如何更有效率的捕食，这两大指标作为比较蛛网结构是否更适合捕食的。根据本文的研究方法，我们可以推广更多的指标作为比较蛛网结构是否更适合捕食，例如，如何在最小成本下捕获更多的食物，如何在风险成本下编织最合适捕食的蛛网等。

## 参赛队号 # 1471

(3) 本文是假设环境因素, 生存竞争因素, 人为因素等都相同的情况下得出的结论, 所以, 在本文的基础上, 我们可以推广, 蛛网在受到各种因素影响的条件下, 什么样的网才是最合适捕食的。例如, 湿度对丝的影响, 从而影响网的伸缩; 温度对网结构的影响; 空间大小的限制。

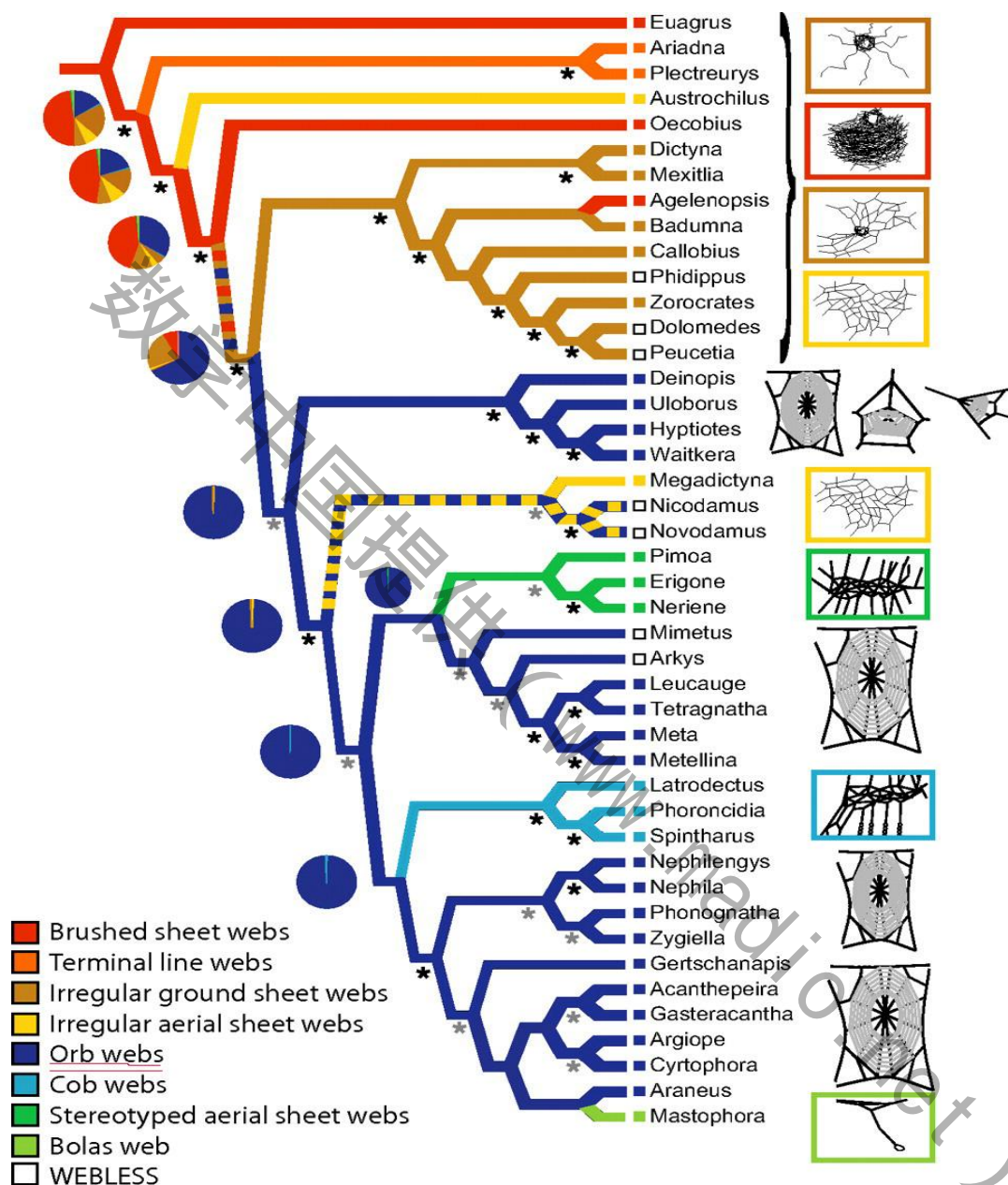
## 八、参考文献

- [1] Sarah C. Crews and Brent D. Opell. 2006. The Feature of Capture Threads and Orb-Webs Produce by Unfed cyclose Turbinata(Aranene:Araneidae). The Journal of Arachnology 34(2): 427 - 434
- [2] Brent D. Opell. 1997. The material cost and stickiness of capture threads and the evolution of orb-weaving spiders. Biological Journal of the Linnean Society, 62: 443 - 458
- [3] Marie Elisabeth Herberstein and I-Min Tso. 2000. Evaluation of Formulae to Estimate the Capture Area and Mesh Height of Orb Web. The Journal of Arachnology 28:180 - 184
- [4] 宋大祥. 蛛网的进化[J]. 荷泽师专学报, 19(2):1-8, 1997
- [5] Thiemo Krink and Fritz Vollrath. 1997. Analysing Spider Web-building Behaviour with Rule-based Simulations and Genetic Algorithms. J. theor. Biol, 185, 321-331
- [6] Fritz Vollrath, Mike Downes and Saen Krackow. 1997. Design variability in Web Geometry of an Orb-Weaving Spider[J]. Physiology & Behavior. Vol, 62(4): 735-743
- [7] 朴守业. 片上网络体系结构性能分析及布局算法的研究[D]. 哈尔滨. 哈尔滨工业大学. 2007 年
- [8] Samuel Zschokke. 2000. Form and function of the orb-web. European Arachnology, 99-106
- [9] 卓春晖, 蒋平, 王昌河等. 蛛网结构性能及其适应性[J]. 四川动物. 25(4), 898-902, 2006
- [10] Brent D. Opell. 1999. Redesigning spider webs: Stickiness, capture area and the evolution of modern orb-webs. Evolutionary Ecology Research, 1: 503 - 516

## 参赛队号 # 1471

## 九、附录

## 附录一 概述蜘蛛网发展史



(注：图片来源 <http://www.pnas.org/content/106/13/5229/F2.expansion.html>)

## 参赛队号 # 1471

## 附录二 程序代码

```

(1) syms m L i P mbest lbest n;
S=0; %判断面积是否为最大值
R=50; %中枢区直径
k=10; %食物的半径
C=50000; %蜘蛛一天的吐丝量
b=200; %最大承受长度
for m=1:((C/(2*R))/pi)
    answer=subs(solve('m*pi*R+m^2*pi*L-m*pi*L+(2*pi)/b*((R/2+(m-1)*L)^2)-C','L'));
    sums=0;
    if answer(1,1)<(2*k)
        S1=pi*(R/2+answer(1,1)*(m-1)+k)^2-pi*(R/2-k)^2;
    else
        for i=0:(m-1)
            P=(R/2+i*answer(1,1)+k)^2-(R/2+i*answer(1,1)-k)^2;
            sums=sums+P; %累加
        end
        S1=pi*sums;
    end
    if S1>S %判断是否为最优
        if (2*pi)/b*(R/2+(m-1)*answer(1,1))>=3
            S=S1;
            mbest=m; %将最大捕食面积所对应的捕丝圈数赋值给 mbest
            lbest=answer(1,1); %将最大捕食面积所对应的捕丝间距赋值给 lbest
        end
    end
end
mbest
lbest
S %圆环的最大捕食面积
n=round((C-(mbest*pi*R+mbest^2*pi*lbest-mbest*pi*lbest))/(R/2+(mbest-1)*lbest)) %放射线条数
S2=(C-n*(R/2+(mbest-1)*lbest))*lbest %对应螺旋圆网的捕食面积

```

## (2) 模型代码

%螺旋式网的平均最短路径

```

feature accel on;
feature jit on;
h=0;u=0;
circle=0;
for R=1:1:20
    A1=zeros(R/2-1,1);
    B1=zeros(R/2-1,1);
    A2=zeros(R/2-1,1);
    B2=zeros(R/2-1,1);

```

## 参赛队号 # 1471

```

for A1=1:1:R/2-1
    for B1=1:1:R/2-1
        for A2=1:1:R/2-1
            for B2=1:1:R/2-1
                h=sqrt(((3*R*R)/8)*((3*R*R)/8)*(abs(A1-B1)+abs(A2-B2)));
                u=u+h;
            end
        end
    end
end
x=u
circle=circle+1;
subplot(121),
plot(circle,u,'.')
hold on
end

%环形网的平均最短路径
j=0;i=0;
circle2=0;
for R=1:1:20
    A1=zeros(R-1,1);
    B1=zeros(R-1,1);
    A2=zeros(R-1,1);
    B2=zeros(R-1,1);
    for A1=1:1:R-1
        for B1=1:1:R-1
            for A2=1:1:R-1
                for B2=1:1:R-1
                    j=sqrt(R*R*(abs(A1-B1)+abs(A2-B2)));
                    i=i+j;
                end
            end
        end
    end
    y=i
    circle2=circle2+1;
    subplot(122),
    plot(circle2,i,'*')
    hold on
end
end

```

## 参赛队号 # 1471

%捕食网面积与粘稠度关系模型

feature accel on;

feature jit on;

grid on;

for R=6:100

    for s=0:0.05:9.4346

        grid on;

$x = (((\pi/2) * (((\exp((9.4346-s)/1.2742)-1)^2) + ((\exp((9.4346-s)/1.2742))^2)) * (((R/2)-1)^2)) - (\pi * (R/2)^2));$

    plot3(x,s,R,',' )

hold on

    end

end

xlabel('捕食网面积/mm');

ylabel('粘稠度');

zlabel('基数 R');

title('基于螺旋式蛛网--捕食网面积，粘稠度，基数 R 三者关系图');