

1. 问题重述

众所周知，近几年随着国内汽车销售量的屡创新高，汽车保险越来越受关注。汽车保险，简称车险，是近年来财产保险业的主要险种，正所谓得车险者得天下，为了占据该市场的更多份额，保险公司在考虑续保率的同时，想通过对投保人实行一定的保费折扣，从而留住更多的客户。现在题目要求我们通过相关数据的分析，制定出一套比较合理的保费浮动方案。

当今的中国保险市场是一个面向世界开放、内部不断变革的保险市场。外资保险公司的不断涌入，内资、合资保险公司的不断增多，使保险市场的竞争日益激烈。汽车保险市场同样面临着如何在竞争中求生存、谋发展的的问题。因此，以风险管理服务为理念、运用科学理论手段为客户提供良好的风险管理服务，这是与国际先进汽车保险的发展趋势相一致的，也将促进我国汽车保险由恶性竞争向良性竞争的转变，同时，也将是对保险权益的保障。因此，保险业更多的关注集中到了对风险评估机制的考虑上来。题目要求我们建立合理的模型对保险公司的风险进行科学评估，并且在公司的风险控制方面提出自己的建议。

2. 问题分析

对于汽车保险，就客户而言，最关注就是保费折扣的问题；就保险公司而言，最关注就是风险问题。本文就分别站在顾客和保险公司的角度，结合参考数据和自找数据对保险业的保费折扣和风险管理问题进行了具体分析。

就第一问题而言，本文采用了灰色系统 Verhulst 模型^[1]、保费折扣数据分析模型^[2]

以及保费折扣费率浮动方案设计模型^[3]对保费折扣及费率浮动方案进行了研究：灰色系统 Verhulst 模型，是通过 2002-2010 年《中国统计年鉴》中关于保险业机动车方面的数据对 2010 和 2011 年是出险次数、保费收入及赔付进行了预测，并相应的得出了保险公司在机车保险业的收益率；保费折扣数据分析模型，是通过对参考数据按照折扣不同分为 0.8 以下、0.8-0.9、0.9-1、1、1-1.4、1.4 以上六个等级，然后对各级的保费收入、赔付额和未决赔付额进行了统计筛选，这些数据的分析将为保险折扣费率浮动方案的设计和制定提供数据支撑；保费折扣费率浮动方案设计模型，是在参照北京市关于机动车辆保费折扣的方案^[4]进行了适当的修正，最后通过优化得出了最佳的浮动方案。

就第二问题而言，本文采用了保险分公司风险评估模糊数学模型^[5]对保险分公司的风险评估机制进行了研究：保险分公司风险评估模糊数学模型，是将风险分为一般风险和潜在风险两类，一般风险中选择了财务风险，潜在风险选择了未决赔付额、驾驶员过失、高管人员舞弊行为以及管理制度的不完善四方面进行研究。然后对五方面分别求得其单因素模糊评价关系，利用 matlab 软件对数据进行了处理计算，得出了五类风险分别的比重。

3. 模型假设

1. 假设影响风险评估的因素为已知的五个方面，其他因素的影响相对较小；

2. 假设收集到的关于保费收入和风险评估的数据是准确无误的；
3. 假设五个方面的因素是相互独立的；

4. 符号说明

$x^{(1)}$ ：表示原始数列；

$x^{(0)}$ ：表示累减数列；

Δ ：表示相对误差指标；

g_0 ：表示绝对关联度指标；

g ：表示绝对关联度；

c_0 ：表示均方差比值指标；

c ：表示均方差比值；

A_i ：无赔款优待及上年赔款记录系数；($i=1, 2, \dots, 12$)

B_k ：平均年行驶里程系数；($k=1, 2$)

C_j ：特殊风险系数；($j=1, 2, 3$)

D ：新车或首保系数；

λ ：最终费率浮动系数；

X ：保费收入；

C ：赔付支出；

M ：保费标准；

Z ：保费收益；

R ：风险评估模糊评价矩阵；

A ：风险评估综合评价权重向量；

V ：综合评价指数

5. 模型建立、求解及检验

5.1 模型一：灰色系统 Verhulst 模型

Verhulst 模型常用于人口预测、生物生长、繁殖预测及产品经济寿命预测等。近年来，中国道路交通事故符合该模型的变化趋势，故可采用 Verhulst 模型对其进行预测。本文采用 Verhulst 模型来对交通事故方面的机动车辆发生交通事故次数和机动车辆保险保费以及赔付情况进行预测。根据 2002-2010 年《中国统计年鉴》的数据得表 1-1：

表 1-1: 2001-2009 年中国机动车出险次数、保险保费及赔付

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
机车次数 (万次)	70.5396	67.5449	62.7029	47.1080	42.4409	35.8249	30.9216	25.1077	22.5096
机车保费	422	472	540	745	858	1108	1484.3	1702.5	2155.6

(亿元)									
机车赔付 (亿元)	218	271	328	416	483	599	790.3	1046.5	1200.7

建模过程如下：

(1) 设 $x^{(1)}$ 为 2001~2009 年的原始数据序列，即

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_9^{(1)}) = (70.5396 \quad 67.5449 \quad 62.7029 \quad 47.1080 \quad 42.4409 \\ 35.8249 \quad 30.9216 \quad 25.1077 \quad 22.5096) \text{ (机车次数)}$$

(2) 对 $x^{(1)}$ 作一次累减生成 (1-IAGO)，由

$$x_k^{(0)} = x_k^{(1)} - x_{k-1}^{(1)}, \quad k=2, 3, \dots, 9$$

得

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_9^{(0)}) = (70.5396 \quad -2.9947 \quad -4.8420 \quad -15.5949 \quad -4.6671 \\ -6.6160 \quad -4.9033 \quad -5.8139 \quad -2.5981)$$

(3) 对 $x^{(1)}$ 作紧邻均值生成，令

$$z_k^{(1)} = 0.5 \times (x_k^{(1)} + x_{k-1}^{(1)}), \quad k=2, 3, \dots, 9$$

于是

$$B = \begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \dots & \dots \\ -z_9^{(1)} & (z_9^{(1)})^2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \dots \\ x_9^{(0)} \end{bmatrix}$$

(4) 对参数列

$$\hat{\alpha} = (a, b)^T$$

进行最小二乘估计，得

$$\hat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 0.2814 \\ 0.0029 \end{bmatrix}$$

(5) Verhulst 模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + 0.2814x^{(1)} = 0.0029(x^{(1)})^2$$

其时间响应为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \frac{\hat{\alpha} x_1^{(1)}}{\hat{b} x_1^{(1)} + (\hat{a} - \hat{b} x_1^{(1)}) e^{a k}} = \frac{0.28137}{0.00285651 + 0.0011324 \times e^{0.281377k}}$$

(6) $x^{(1)}$ 的预测值 $\hat{x}^{(1)}$ 为

$$\hat{x}^{(1)} = (\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}, \dots, \hat{x}_9^{(1)}) = (70.5396 \quad 64.5819 \quad 58.0822 \quad 51.2484 \quad 44.3367 \\ 37.6152 \quad 31.3235 \quad 25.6409 \quad 20.6720)$$

2010 年和 2011 年的预测值为 16.4487 万次和 12.9447 万次。

(7) 模型精度检验。一个灰色模型要经过检验才能判定其是否合理。只有通过检验的模型才能用来进行预测。

常用的精度等级见表1-2，可供检验模型参考。一般情况下，最常用的是相对误差检验指标。

表1-2 灰色模型精度检验等级

等级	指标			
	相对误差 Δ	绝对关联度 g_0	均方差比值 c_0	小误差概率 p_0
一	0.01	0.90	0.35	0.95
二	0.05	0.80	0.50	0.80
三	0.10	0.70	0.65	0.70
四	0.20	0.60	0.80	0.60

由以上检验方法，可得2001-2009年机车出险次数Verhulst模型误差检验值表1-3：
(计算程序源代码见附录一)

表1-3 机车出险次数Verhulst模型误差

序号	年份	原始值	预测值	残差	相对误差
1	2001	70.5396	70.5396	0	0
2	2002	67.5449	64.5819	2.9630	0.0439
3	2003	62.7029	58.0822	4.6207	0.0737
4	2004	47.1080	51.2484	-4.1404	0.0879
5	2005	42.4409	44.3367	-1.8958	0.0447
6	2006	35.8249	37.6152	-1.7903	0.0500
7	2007	30.9216	31.3235	-0.4019	0.0130
8	2008	25.1077	25.6409	-0.5332	0.0212
9	2009	22.5096	20.6720	1.8376	0.0816

平均相对误差为 $\Delta=0.0462$ ，则模型精度为二级；同时绝对关联度为 $g=0.994$ ，均方差比值为 $c=0.1472$ ，则模型精度均为一级，可见模型精度较高，可以用于机动车出险次数预测。预测出 2010 年和 2011 年的机车出险次数预测值为 16.4487 万次和 12.9447 万次。

同理，对机动车保费和赔付值进行预测，分别得误差检验表 1-4 和表 1-5：

表 1-4 机车保费 Verhulst 模型误差

序号	年份	原始值	预测值	残差	相对误差
1	2001	422	422	0	0.0000
2	2002	472	521.4	-49.4030	0.1047
3	2003	540	644.4	-104.4307	0.1934
4	2004	745	796.8	-51.8091	0.0695
5	2005	858	985.7	-127.7110	0.1488
6	2006	1108	1220.2	-112.1535	0.1012
7	2007	1484.3	1511.5	-27.2207	0.0183

8	2008	1702.5	1874.3	-171.7610	0.1009
9	2009	2155.6	2326.8	-171.2318	0.0794

平均相对误差为 $\Delta=0.0907$ ，则模型精度为三级；同时绝对关联度为 $g=0.9394$ ，均方差比值为 $c=0.1016$ ，则模型精度均为一级，可见模型精度较高，可以用于机动车保费预测。预测出 2010 年和 2011 年的机车保费预测值为 2893.0 亿元和 3603.7 亿元。

表 1-5 机车赔付 Verhulst 模型误差

序号	年份	原始值	预测值	残差	相对误差
1	2001	218	218	0.0000	0.0000
2	2002	271	283	-11.9654	0.0442
3	2003	328	364.9	-36.8864	0.1125
4	2004	416	466.7	-50.6718	0.1218
5	2005	483	590.8	-107.8397	0.2233
6	2006	599	739	-139.9668	0.2337
7	2007	790.3	911	-120.7406	0.1528
8	2008	1046.5	1104.9	-58.3662	0.0558
9	2009	1200.7	1315.8	-115.0589	0.0958

平均相对误差为 $\Delta=0.1155$ ，则模型精度为四级；同时绝对关联度为 $g=0.9162$ ，均方差比值为 $c=0.1463$ ，则模型精度均为一级，可见模型精度较高，可以用于机动车赔付预测。预测出 2010 年和 2011 年的机车赔付预测值为 1536.7 亿元和 1759.4 亿元。

将 2001-2011 年机车出险次数、保费及赔付额的实际值与预测值用图 1-1 表示，如图：

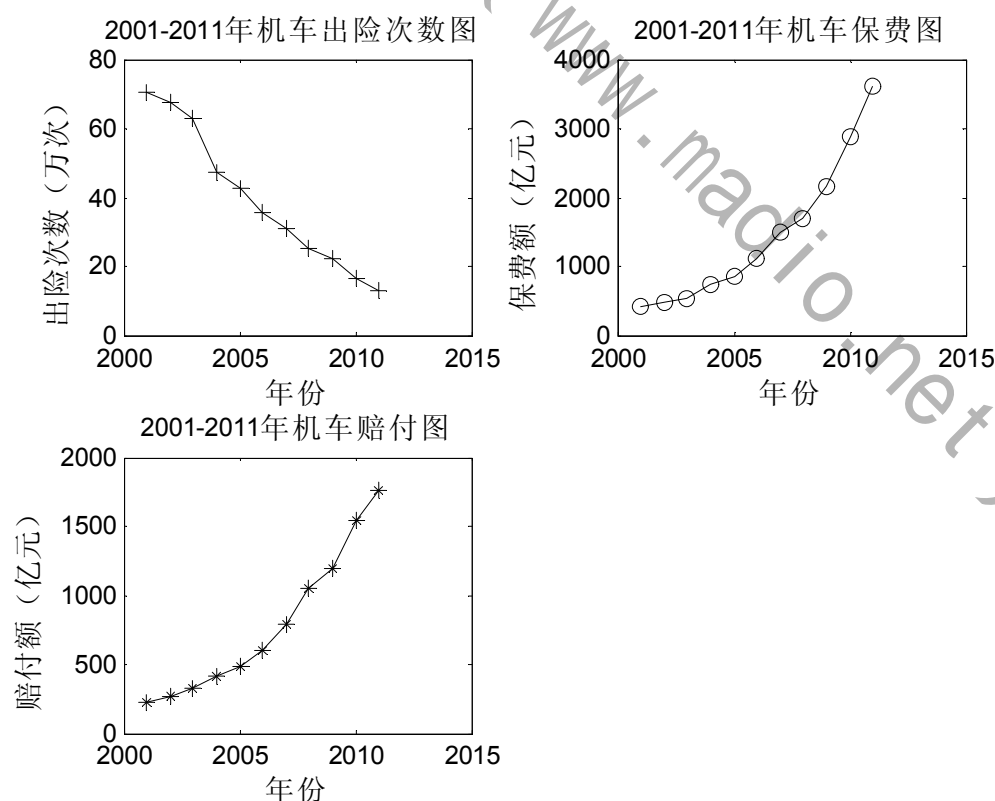


图 1-1 2001-2011 机车出险次数、保费及赔付额对比图

从图 1-1 可以看出，从 2001 到 2011 年，机车出险次数逐年递减，机车保费和机车

赔付额均逐年上升。机车出险次数的逐年下降说明机车出险的概率在减小，这可能因为机动车出险所面临的外部环境在改变，并且其自身的性能也有所改善。具体分析见模型三。

将 2001-2011 年机车保费与赔付额的实际值与预测值用图 1-2 表示如图：

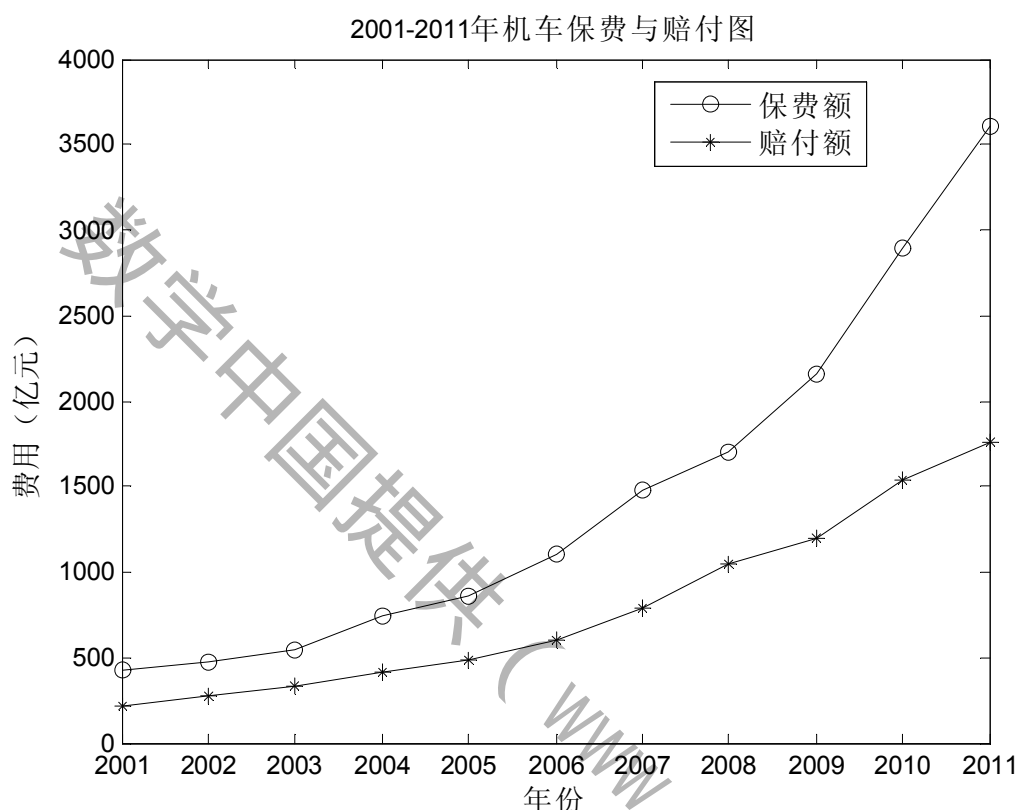


图 1-2 2001-2011 年机车保费与赔付图

从图 1-2 可以看出，从 2001 到 2011 年，保费额和赔付额均逐年提高，但保费额的增长速度要明显快于赔付额的增长速度，由两者的差额可以发现保险公司在机动车车险这一方面的盈利逐年增加。由此，得出 2001-2011 年保险公司在机动车方面的收益率见表 1-6：

表 1-6 2001-2011 年保险公司机动车收益率

年份	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
收益率	0.4834	0.4258	0.3926	0.4416	0.4371	0.4594	0.4676	0.3853	0.4430	0.4688	0.5118

从表 1-6 可以看出，从现有的《中国统计年鉴》的数据，通过模型可以计算出 2001 到 2009 年保险公司的机动车车险收益率，从预测得出的机动车车险收益率的值可以看出，2010 年和 2011 年的机动车收益率较 2009 年都是呈增长态势的。这可以看到保险公司在车险方面的收益能力是呈上升趋势的。

5.2 模型二：保费折扣数据分析模型

汽车保险公司为了降低车辆出险率，鼓励保户续保，发展潜在保户，通常都会对满足一定要求的保户或者投保人给与一定比例的保费浮动优惠，就是通常所说的保费折扣。然后本文根据对参考数据的整理，将保费折扣划分为六个等级，六个等级的折扣为 0.8 以下、0.8-0.9、0.9-1、1、1-1.4、1.4 以上。通过整理得表 2-1：

表 2-1 保费折扣等级的数量保费以及赔付额

折扣等级	0.8 以下	0.8-0.9	0.9-1	1	1-1.4	1.4 以上
数量	924	1907	253	4774	488	20
保费额	11772205.51	8231675	1751046	11599552	2763314	139868.8
赔付额	322770.8	2153990	623044.2	3862373	1698868	48785.53
收益率	0.9726	0.7383	0.6442	0.6670	0.3852	0.6512

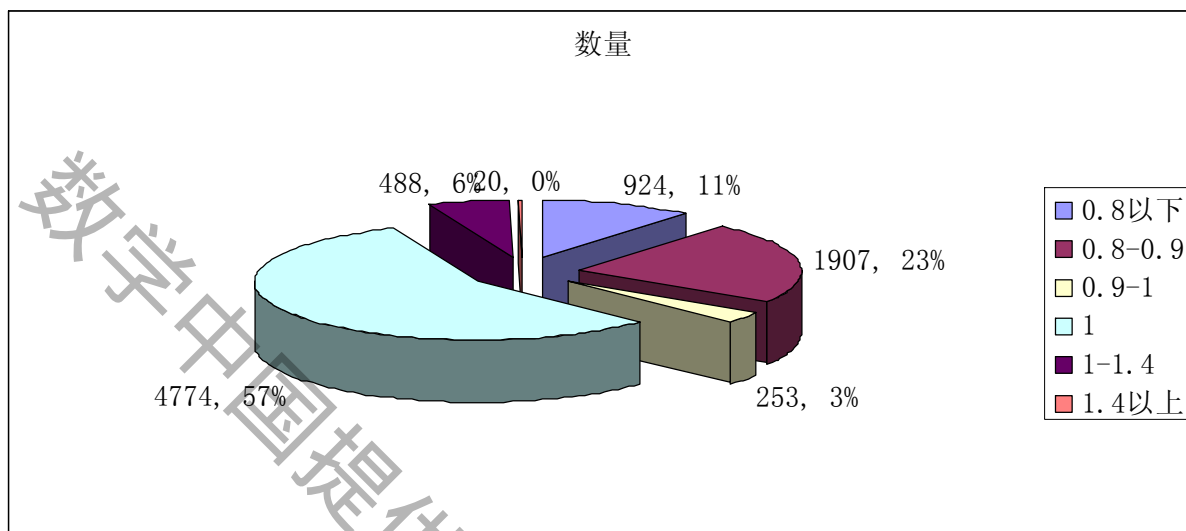


图 2-1 保费折扣等级数量饼状图

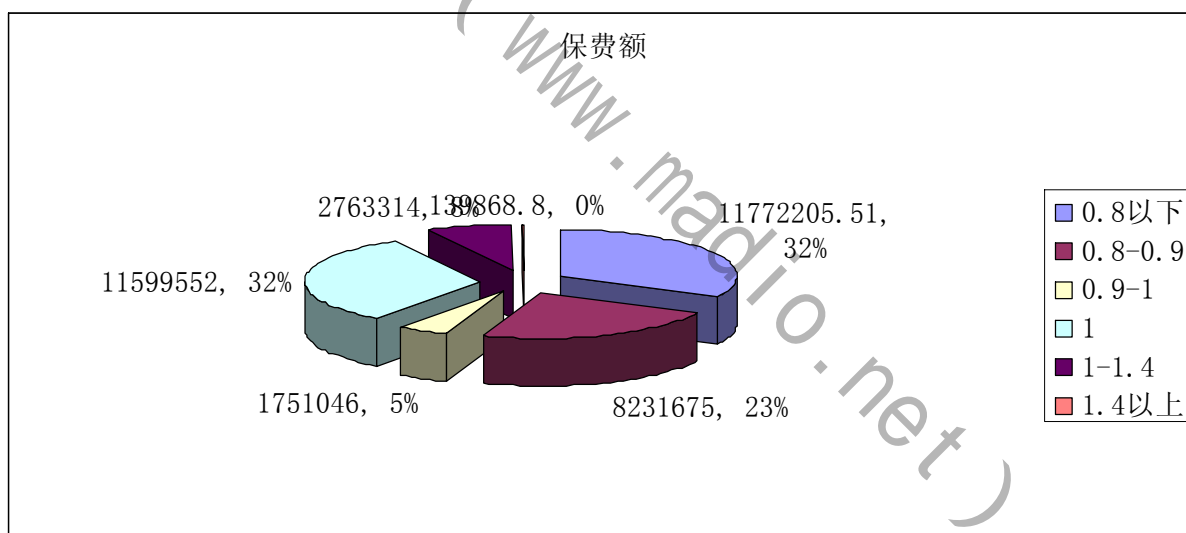


图 2-2 保费折扣等级保费额饼状图

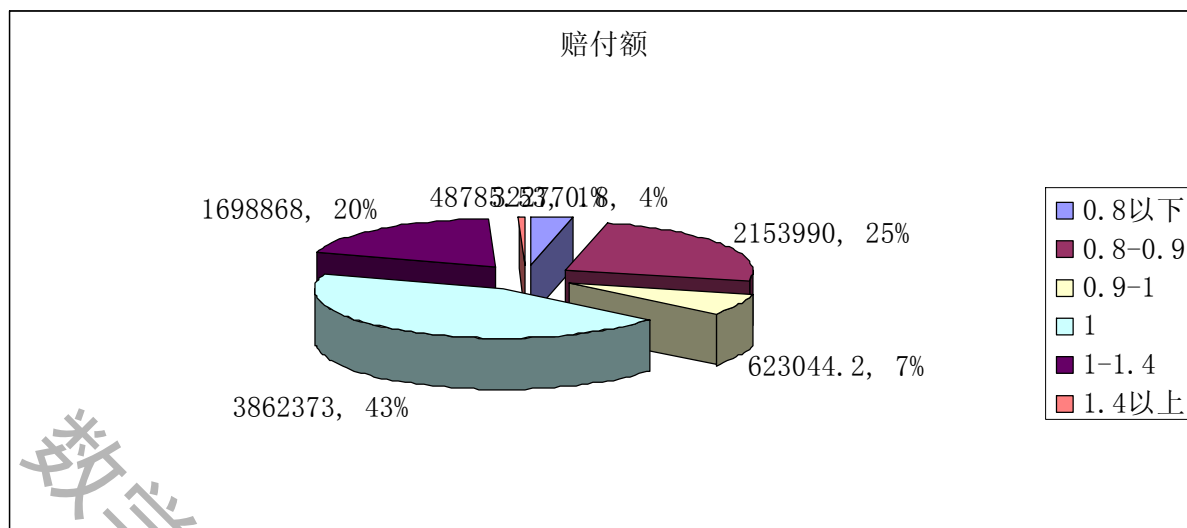


图 2-3 保费折扣等级赔付额饼状图

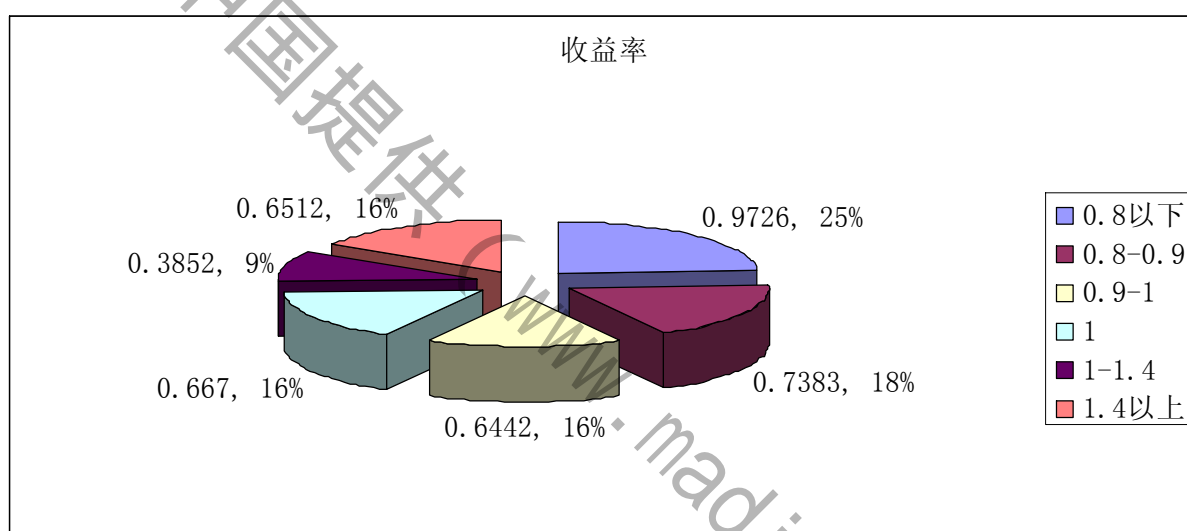
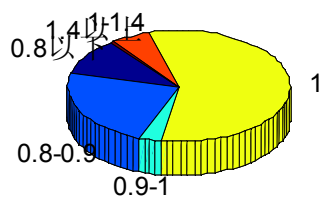


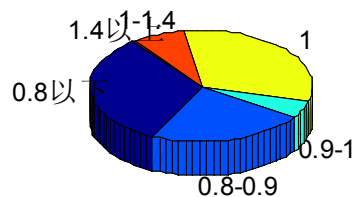
图 2-4 保费折扣等级保费收益率饼状图

从表 2-1、2-2、2-3、2-4 可以看出，就数量而言，折扣率在 1、0.8-0.9 和 0.8 以下的排在前三位；就保费额的多少而言，折扣率在 1、0.8 以下和 0.8-0.9 的占前三位；就赔付额而言，赔付额基本集中在 1、0.8-0.9 和 1-1.4 折扣率的区间内；就收益率而言，收益率较高的主要集中在折扣率为 0.8 以下和 0.8-0.9 的区间内。

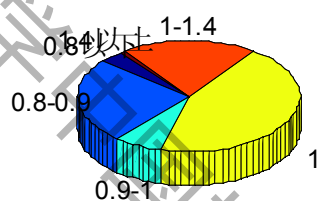
保费折扣等级数量饼状图



保费折扣等级保费饼状图



保费折扣等级赔付额饼状图



保费折扣等级保费收益率饼状图

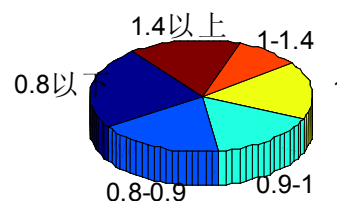


图 2-5 保费折扣各等级数量、保费、赔付额及收益率对比图（见附录四）

从图 2-5 可以看出，从前三张图可以看出一直是折扣率在 1 和 0.8-0.9 区间段的占的比率比较大，但从最后的收益率的饼图分布来看，一直占比率比较大的折扣率在 1 的保费折扣的收益率反倒小，而折扣率在 0.8-0.9 区间内的保费收益率比较大，同时折扣率在 0.8 以下的保费折扣的收益率也比较大。综上所述可以得出，为了获取较高的保费收益率，折扣率应该控制在 0.8 左右，并且可以给予更多客户优惠折扣，更能吸引新投保的客户，从而扩大市场占有率。

因此，本文在兼顾保费收益率和市场份额的基础上，将在模型三中作出具体的保费折扣浮动方案设计。

5.3 模型三：保费折扣浮动方案设计模型

在保费折扣浮动方面，本文将采用影响续保率的因素中三个，即出险次数、车辆年龄和是否为新车。在此，本文还将车辆里程等重要方面纳入研究。

在保费费率确定的过程中，本文将保费费率分为基本费率和费率浮动系数。

1. 基本费率的确定

商业车险基本费率，可以根据各保险公司现行的机动车商业保险基本费率来确定。

2. 费率浮动系数的计算

(1) 商业车险费率浮动系数包括：无赔款优待及上年赔款记录、平均年行驶里程、特殊风险(即原“老、旧、新、特车型”系数)、是否为新车或首次投保四项，具体费率浮动系数值见表 3-1，摩托车和拖拉机暂不浮动。

无赔款优待及上年赔款记录系数为 A_i ($i=1,2,\dots,12$)

平均年行驶里程系数为 B_k ($k=1,2$)

特殊风险系数为 C_j ($j=1, 2, 3$)

新车或首保系数为 D

最终费率浮动系数为 λ

表 3-1 商业车险费率浮动系数表

序号	项目		内容	系数	适用范围
1	无赔款优待	A1	连续 5 年没有发生赔款	0.4	所有车辆
		A2	连续 4 年没有发生赔款	0.5	
		A3	连续 3 年没有发生赔款	0.6	
		A4	连续 2 年没有发生赔款	0.7	
		A5	上年没有发生赔款	0.85	
	上年赔款记录	A6	上年发生 1-2 次赔款	1.0	
		A7	上年发生 3 次赔款	1.1	
		A8	上年发生 4 次赔款	1.2	
		A9	上年发生 5 次赔款	1.5	
		A10	上年发生 6 次赔款	2.0	
		A11	上年发生 7 次赔款	2.5	
		A12	上年发生 8 次及 8 次以上赔款	3.0	
2	平均年行驶里程	B	平均年行驶里程 < 30000 公里	0.90	所有车辆
			平均年行驶里程 \geq 30000 公里	1.0	
3	特殊风险	C	使用 5-10 年	1.3	
			使用 10-15 年	1.5	
			使用 15 年以上	2.0	
4	是否新车	D	本年承保新购置车辆、本年首次投保	1.0	

(2) 与机动车发生赔款次数相联系的浮动系数 A 根据发生赔款情况，等于 A1 至 A14 其中之一，不累加。同时，满足多种情况的，按照向上浮动或者向下浮动比率最高者计算。对于上年发生商业车险赔款的，如上年已决赔款总金额低于或等于上年商业车险签单保费，将对应赔款次数档次的系数值乘以 0.9 的赔款金额调整系数。

(3) 确定最终费率浮动系数采用系数连乘的方式计算：

$$\lambda = A_i \times B_k \times C_j \times D$$

(4) 鉴于北京地区已建立较完善的车险信息平台，因此“无赔款优待及上年赔款记

录”系数应由各公司通过车险信息平台统一查询返回。各公司在录入车辆其他相关承保信息后，计算最终费率浮动系数，并按照“商业车险最终保险费=商业车险标准保险费×最终费率浮动系数”公式计算最终保费，之后向车险信息平台提交校验及投保确认。

(5) 机动车发生赔款次数应根据计算区间内被保车辆的赔款金额不为零的已决赔案次数统计。

(6) 方案实施首年，“无赔款优待及上年赔款记录”系数根据自车辆投保之日起上溯一年(365天)期间所有有效商业车险保单在北京车险信息平台记录的赔款次数进行计算。

3. 在保证保费折扣和稳定的收益率下，对系数的优化

(1) 符号说明：

X——保费收入

C——赔付支出

M——保费标准

Z——保费收益

(2) 优化方程：

$$\begin{aligned} & \text{Max } Z = X - C \\ & 0.4430 \leq \frac{X - C}{X} \leq 0.4680 \quad (\text{该数据来源于模型一}) \\ & X = \lambda M \\ & \lambda = A_i \times B_k \times C_j \times D \\ & \text{s. t. } \begin{cases} 0 \leq A_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, 5) \\ 1 \leq A_i \leq 3 \quad (i=5, 6, \dots, 12) \\ 0 \leq B_k \leq 1 \quad (k=1, 2) \\ 1 \leq C_j \leq 2 \quad (j=1, 2, 3) \\ D=1 \end{cases} \end{aligned}$$

4. 结论：

通过模型的分析，对于保费折扣费率浮动方案可以参照该方案实施。该方案是在保证收益率处于上年与现年预测值之间，然后给予客户尽可能多的优惠与折扣，使得市场占有率逐步扩大，相应的保费收入将有所提高。

5.4 模型四：保险分公司风险评估模糊数学模型

1. 风险评估系统的复杂性与模糊性

风险评估系统是一个复杂的系统，它是自然系统、社会系统、经济系统相互影响、相互作用、相互耦合的系统。如果不考虑社会系统和经济系统，只考虑潜在风险的影响，其价值难以考察。就每个系统而言，又是复杂因素共同作用的复合体。

所以处理这样的复杂系统，运用常规的数学模型是难以如意的。在复杂的系统中存在着“不相容原理”，即当一个系统复杂性增大时，我们使它精确化的能力减少，在达到一定阈值（即限度之上时），复杂性和精确性将相互排斥。

同时，风险的量化以及风险的评估，都具有很大的不确定性，是一模糊事件。

综上所述，风险评估系统是复杂且模糊的系统，它适宜于用模糊数学的方法进行处理。因为模糊集合正适宜于那些“有着人的智力活动参与其内，本身具有高度复杂性”且“紧紧伴随着模糊性”的学科及领域。

汽车保险是我国财产保险业务的龙头险种，同时也是财产保险公司风险管理的焦点之一。我国保险实践表明，驾驶人员的过失是汽车保险的风险焦点，保险公司建立科学规范的无事故管理制度等。

我国汽车的保险风险主要有三类：第一类是自然风险，即火灾、爆炸、洪水、雷击、冰雹、龙卷风、外界物体倒塌等灾害所致保险车辆损失，该项赔款平均每年占车险总赔款的 10% 左右；第二类是盗抢风险，1997 年我国这类风险的保险赔款占车险总赔款的 4%；第三类是交通事故中的碰撞、倾覆风险，这类风险所造成的保险赔款占车险总赔款的 85%。因此，交通事故将是汽车保险业最关注的风险类。根据模型一可知，全国交通事故发生次数在逐年递减，从另一方面可以得出，保险公司在汽车赔付方面的成本会逐年下降，利润空间将有变大的趋势。为此，在对分公司风险评估方面不仅仅局限于收益和利润指标上，本文将对分公司的潜在风险方面做深入研究。潜在风险，本文考虑本年度中的未决赔付额、驾驶员过失、高管人员舞弊行为及管理制度的不完善等。

2. 模糊数学模型

由前文可知，风险有一般风险和潜在风险之分，综合起来可以将其分为五类：财务风险、未决赔付额、驾驶员过失、高管人员舞弊行为及管理制度的不完善。财务风险是风险评估的重要因素之一，是评价分公司的最基础的指标；未决赔付额是对潜在风险的直接体现；驾驶员过失、高管人员舞弊行为是属于很难量化的潜在风险；管理制度的不完善，是体现公司内部风险与外部风险的结合。风险评估模型可以用一个函数表示：

$$V = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

式中：V 为因素综合评价指数； $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 分别为评价风险的因子，如财务风险、未决赔付额、驾驶员过失、高管人员舞弊行为及管理制度的不完善等等。下面对其模型进行具体细化。

设论域 U 为风险评价要素， $U = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ，评价向量为 W， $W = \{\text{高, 偏高, 一般, 偏低, 低}\}$ ，因素综合评价指数可以用下式来表示：

$$V = A \circ R$$

式中 A 为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 要素评价的权重值；“o”为模糊矩阵的复合运算符号，一般为取算子“ \wedge ”或“ \vee ”，V 为风险评估的综合评价价值，R 为单要素 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 评判矩阵所组成的综合评价矩阵，可表示为：

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & R_{n4} & R_{n5} \end{bmatrix}$$

式中 R_{nj} ($n=1, 2, 3, \dots, n$; $j=1, 2, 3, 4, 5$) 代表 n 要素 j 级评价值。 R_{nj} 的确

定, 首先确定 n 要素中各因素的隶属函数。所谓的隶属函数就是给定论域 B , 所谓指定了 B 上的一个模糊集合 C , 是指对任意 $b \in B$, 都有一个隶属程度 μ ($0 \leq \mu \leq 1$) 与之对应, 称 μ 为 的隶属函数。隶属函数的确定有多种方式, 一般常选用升(降)半梯形分布, 建立一元线性隶属函数。对于财务风险 x_1 而言, 其具体隶属函数用下式来确定:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_{i1} (x \geq x_{i2}) \\ \frac{x - x_{i1}}{x_{i1} - x_{i2}} & x_{i1} < x < x_{i2} (x_{i1} > x > x_{i2}) \\ 0 & x \geq x_{i1} (x \leq x_{i2}) \end{cases}$$

$$\mu_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{ij-1}}{x_{i1} - x_{i2}} & x_{i-1j-1} \leq x \leq x_{ij} (x_{ji-1} \geq x_{ij}) \\ \frac{x - x_{ij+1}}{x_{i1} - x_{i2}} & x_{ij} < x < x_{ij+1} (x_{ji-1} > x_{ij}) \\ 0 & x \leq x_{ij-1}, x \geq x_{ij+1} (x \geq x_{ij+1}, x < x_{ij+1}) \end{cases}$$

$$\mu_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq x_{in} (x \leq x_{in}) \\ \frac{x - x_{in-1}}{x_{in} - x_{in-1}} & x_{in-1} < x_{in}, x_{in-1} > x > x_{in} \\ 0 & x \leq x_{in-1}, x \geq x_{in-1} \end{cases}$$

对于 x_2, \dots, x_n 而言, 其隶属函数的确定可以采用类似 x_1 的方法确定。

对于权重 A 而言, 其确定方法是多样的, 如权重分配法, 即与咨询隶属函数矩阵法相配套的方法, 它适用于难以量化的综合评价; 因素贡献率法, 即根据评价因素贡献率的方法确定权重向量; 置信水平权重法, 采用模糊相似矩阵最大矩阵元作为置信水平来评价因素权重。“成对比较法”亦是常用的一种方法。

成对比较法原理, 即根据该区域特征和专家咨询的意见, 对 m 个因子中任意两个因子之间的重要性进行两两比较出比值, 得到评价矩阵:

$$C_{mm} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{bmatrix}$$

式中 C_{ij} 表示第 i 个因子与第 j 个因子重要性的比值, 可以取专家赋值的中值, 然

后

对矩阵 C 每一行元素先相乘再求 m 次方根得一向量:

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)^T$$

$$\text{其中, } \beta = C \left(\prod_{i=1}^m C_{ij} \right)^{1/m} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

作归一化处理，从而得到向量

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$$

3. 模型求解

通过以上模型，我们进行模型的求解：

根据表 4-1 保费收入与赔付支出和表 1-6 的收益率得财务风险的单要素模糊评价关系为：

表 4-1 险种、使用性质分类及保费、赔付、未决赔付额数据汇总表

险种	使用性质	出租	党、企、事	非营利车	营利车	家庭自用
商业险	保费	203649	382226.7	1902153	7130489.2	9785261
	赔付	571	79147.37	721345.6	1736826	4026659
	未决赔付	2000	101600	34734.14	831835	680864.4
	未赔付率	0.00982082	0.265810839	0.018260434	0.116658896	0.069581
交强险	保费	275415	135783	688951.9	2400437	2759285
	赔付	148975.1	16285.4	135430.01	996593.71	847996.1
	未决赔付	107500	121014	20200	783029	254597
	为赔付率	0.39032006	0.891230861	0.029319899	0.326202687	0.092269

$$R_1 = (0.46 \ 0.39 \ 0.1 \ 0.025 \ 0.025)$$

根据表 4-1 的未决赔付率得未决赔付额单要素模糊评价关系为：

$$R_2 = (0.02 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.38)$$

同理可以求得驾驶员过失、高管人员舞弊行为以及管理制度的不完善单要素模糊评价关系为：

$$R_3 = (0.05 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.4)$$

$$R_4 = (0.4 \ 0.3 \ 0.15 \ 0.1 \ 0.05)$$

$$R_5 = (0.45 \ 0.35 \ 0.1 \ 0.06 \ 0.04)$$

因而得到风险评估模糊评价矩阵为：

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.39 & 0.1 & 0.025 & 0.025 \\ 0.02 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.38 \\ 0.05 & 0.1 & 0.15 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \\ 0.45 & 0.35 & 0.1 & 0.06 & 0.04 \end{bmatrix}$$

在风险评估综合评价中，权重的确定我们采用专家咨询与经验相结合的方法，然后对得出的数据进行标准化处理，由此得到风险评估综合评价权重向量为：

$$A = (0.4174 \quad 0.0975 \quad 0.2634 \quad 0.0615 \quad 0.1602)$$

所以, $V=AoR$ 我们可以利用 matlab 软件求得, (见附录五)

$$V=AoR = (0.4174 \quad 0.3900 \quad 0.1500 \quad 0.2634 \quad 0.2634)$$

归一化处理得:

$$(0.2812 \quad 0.2628 \quad 0.1011 \quad 0.1775 \quad 0.1775)$$

从归一化处理得到的数据, 我们可以看到财务风险和未决赔付占风险评估的比重相对较大, 这提示我们在对分公司的风险评估中应该着重考虑分公司的财务风险和未决赔付的比例。

对分公司经营成效评估的风险评估机制可以由以上 5 个因素, 分别是财务风险、未决赔付额、驾驶员过失、高管人员舞弊行为以及管理制度的不完善五个因素, 加上归一化处理后的权重值, 得出一个综合的风险评估值, 从而较为全面地分析评价子公司的经营业绩。

根据模型得出的各风险影响因素的权重值, 我们对公司的风险控制提出的建议是:

1. 加强对财务风险的控制, 因为财务风险是影响总风险的最大的因素, 可以通过对财务风险的控制, 来减小保险公司的风险;

2. 加强对未赔付额的控制, 可以通过制度的改进, 对立案的保险赔付案尽快给出判决, 或者是接受理赔或者是拒绝赔付。减少未赔付额的比重有利于减少保险公司的风险;

3. 对驾驶员过失的风险控制, 主要可以采用三个方面的思路: 运用生物节律理论^[6]; 提供具体仪器诊断; 建立无事故管理制度。通过三个层面的有机结合, 便能比较有效地控制该方面的风险;

4. 针对管理制度的不完善这个风险, 我国保险公司治理监管工作可以坚持以下几个目标: 一是防范保险资金被非法挪用侵占, 保护保险资产安全^[7]; 二是协调解决公司治理层面的严重冲突, 维护公司正常经营; 三是推动监督保险公司建立健全内控体系, 提升决策、执行和风险控制能力;

5. 所谓高管人员舞弊行为的危险, 主要是指公司董事高管人员利用非法手段掩盖亏损, 虚增利润, 抬高股价, 欺骗公众投资者, 而自己则从中获取巨额利益。针对这类风险的控制, 保险公司可以在高管人员的选拔、道德约束、法律制约、分权治理等方面加强对高管人员的管控, 减少舞弊行为的发生。

6. 模型改进及进一步推广

本文在第一问的制定保费浮动方案中, 先用了 Verhulst 预测模型对 2010 年和 2011 年的出险次数、保费额、赔付额进行了预测, 在推广过程中, 可以对汽车保险在财产保险以及财产保险在整个保险业的比重进行预测, 这样能给后续的模式研究给予更多的数据支撑; 在第二个模型中, 本文用题目所给的数据通过整理筛选出了保费折扣等级与出险数量、保费额、赔付额三个方面的对应数据, 在这个模型中, 对题目所给的数据挖掘得还不够深入, 在模型改进中可以对数据中所给的起保日期和车辆用途等栏目进行具体分类, 深入研究。在该模型中, 还可以结合续保率数据以及续保率影响因素的数据交叉研究, 互相比对, 这样可以是模型更具有可塑性; 在模型三中, 本文给出了保费折扣费率浮动方案, 不过只是考虑了机车的出险次数、里程数、车辆年龄、是否新车四方面的因素, 在改进中, 可以将影响续保率的所有因素纳入研究。

在对第二问的求解过程中, 本文采用的模糊数学模型对风险评估影响的因素, 本文

只选取了 5 类，在选取上还缺乏科学性，在模型改进中可以先通过科学的筛选，选出具有代表性的影响因素，然后再进行详细的风险评估方案的设计。

7. 模型评价

本文紧扣汽车保险公司的保费浮动方案设计及风险评估机制引入，从而建立一系列相关模型，依次为灰色系统 Verhulst 模型、保费折扣数据分析模型、保费折扣浮动方案设计模型、保险分公司风险评估模糊数学模型。整个建模过程显得清晰明确，具体的优点表现在如下几方面：

一、充分利用题目所给的参考数据，并对其进行了比较深入的挖掘和分析，从而为模型分析提供了充分的说服力；

二、通过灰色系统 Verhulst 模型综合收集的相关数据分析了中国机动车出险次数、保险保费及赔付的 2001 到 2009 年发展状况并对 2010 和 2011 年得情况进行了较为准确的预测，从而导出了保险公司收益率，为设计保费折扣浮动方案打下基础；

三、整个保费折扣浮动方案的设计，考虑的因素较多，比较能够拟合实际情况，因而在客观的模型求解下就具有很强的参考价值与重要的现实意义；

四、风险评估本是一个较为抽象和难以准确定位的对象，然而本文充分考虑其性质，运用模糊数学的思想，找到了较好的分析口径，寓定性定量于一体，实现了风险评估的具体化。这样，为保险总公司对分公司的管理提供了更为开阔的外延，也更加规范了公司治理，从而有好的政策建议效果^[8]。

尽管本文以连贯性、严密性和现实性为其优点，但也存在一些不足：

- 一、时间所限，难于对所用一些模型作优化处理，从而保留了可以提升的空间；
- 二、以收益率为前提考虑保费折扣浮动方案的设计，其中忽略了一些重要的因素；
- 三、模型部分数据来自不同的统计部门，由于口径问题可能存在不必要的误差。

参考文献：

- [1] 韩中庚, 数学建模方法及其应用[M], 北京: 高等教育出版社. 2005.
- [2] 龚纯、王正林, MATLAB 语言常用算法程序集[M], 北京: 电子工业出版社, 2008.
- [3] 姜启元, 数学建模(第二版)[M], 北京: 高等教育出版社, 1993
- [4] 北京地区机动车商业保险费率浮动方案. 访问时间: 2011-5-21
<http://wenku.baidu.com/view/e8f2610c7cd184254b3535e2.html>
- [5] 《运筹学》教材编写组, 运筹学(第三版)[M], 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [6] 袁力. 保险公司治理: 风险与监管. [J]. 中国金融 2010 年第 2 期
- [7] 陈丽霞、赵春梅. 论我国汽车保险的风险管理. [J]. 保险研究. 论坛 2001 年第 6 期
- [8] 赵国忻. 保险公司风险控制的目标与力度探讨. [J]. 中国保险管理干部学院学报 2004 年第五期

附录：

附录一：

```

clc,clear
x1=[70.5396    67.5449    62.7029    47.1080    42.4409    35.8249    30.9216
    25.1077    22.5096];
n=length(x1);
nian=2001:2009;
plot(nian,x1,'o-');
x0=diff(x1);
x0=[x1(1),x0]
for i=2:n
    z1(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
z1
B=[-z1(2:end)',z1(2:end)'.^2]
Y=x0(2:end)'
abhat=B\Y %估计参数a,b 的值
x=dsolve('Dx+a*x=b*x^2','x(0)=x0'); %求解常微分方程
x=subs(x,{ 'a','b','x0'},{abhat(1),abhat(2),x1(1)}); %代入参数值
yuce=subs(x,'t',0:8) %计算预测值
digits(6);
x=vpa(x) %显示微分方程的解，为了提高计算精度，把该语句放在计算预
%测值之后，或者不使用该语句
epsilon=x1-yuce %计算残差
delta=abs(epsilon./x1) %计算相对误差
delta_mean=mean(delta) %计算平均相对误差
x1_0=x1-x1(1); %数据列的始点零化像
yuce_0=yuce-yuce(1); %数据列的始点零化像
s0=abs(sum(x1_0(1:end-1))+0.5*x1_0(end));
s1=abs(sum(yuce_0(1:end-1))+0.5*yuce_0(end));
tt=yuce_0-x1_0;
s1_s0=abs(sum(tt(1:end-1))+0.5*tt(end));
absdegree=(1+s0+s1)/(1+s0+s1+s1_s0) %计算灰色绝对关联度
c=std(epsilon,1)/std(x1,1) %计算标准差比值

```

(1) 将x1换为机车保费数据

422 472 540 745 858 1108 1484.3 1702.5 2155.6

(2) 将x1换为机车保险赔付数据

218 271 328 416 483 599 790.3 1046.5 1200.7

附录二：

```

x=2001:2011;
y1=[70.5396    67.5449    62.7029    47.1080    42.4409    35.8249    30.9216
     25.1077    22.5096    16.4487    12.9447];
y2=[422    472 540 745 858 1108    1484.3 1702.5 2155.6 2893 3603.7];
y3=[218    271 328 416 483 599 790.3    1046.5 1200.7 1536.7 1759.4];
subplot(2,2,1);plot(x,y1,'k+-')
hold on
title('2001-2011 年机车出险次数图')
xlabel('年份')
ylabel('出险次数 (万次)')
subplot(2,2,2);plot(x,y2,'ko-')
title('2001-2011 年机车保费图')
xlabel('年份')
ylabel('保费额 (亿元)')
subplot(2,2,3);plot(x,y3,'k*-')
hold on
title('2001-2011 年机车赔付图')
xlabel('年份')
ylabel('赔付额 (亿元)')

```

附录三：

```

x=2001:2011;
y1=[422    472 540 745 858 1108    1484.3 1702.5 2155.6 2893 3603.7];
y2=[218    271 328 416 483 599 790.3    1046.5 1200.7 1536.7 1759.4];
plot(x,y1,'ok-',x,y2,'*k-')
title('2001-2011 年机车保费与赔付图')
xlabel('年份')
ylabel('费用 (亿元)')
legend('保费额','赔付额')

```

附录四：

```

A=[924 1907    253 4774    488 20];
B=[11772205.51    8231675    1751046    11599552    2763314    139868.8];
C=[322770.8    2153990    623044.2    3862373    1698868    48785.53];
D=[0.9726    0.7383    0.6442    0.6670    0.3852    0.6512];
label={'0.8 以下','0.8-0.9','0.9-1','1','1-1.4','1.4 以上'};
subplot(2,2,1);pie3(A,label)
title('保费折扣等级数量饼状图')
subplot(2,2,2);pie3(B,label)
title('保费折扣等级保费饼状图')
subplot(2,2,3);pie3(C,label)
title('保费折扣等级赔付额饼状图')
subplot(2,2,4);pie3(D,label)

```

title(' 保费折扣等级保费收益率饼状图')

附录五：

(i) 编写 m 文件如下：

```
function ab=synt(a,b);  
m=size(a,1);n=size(b,2);  
for i=1:m  
for j=1:n  
ab(i,j)=max(min([a(i,:);b(:,j)'] ));  
end  
end
```

(ii) 主程序：

```
a=[0.4174    0.0975    0.2634    0.0615    0.1602];  
b=[0.46 0.39 0.1 0.025 0.025;  
0.02 0.1 0.2 0.3 0.38;  
0.05 0.1 0.15 0.3 0.4;  
0.4 0.3 0.15 0.1 0.05;  
0.45 0.35 0.1 0.06 0.04];  
ab=synt(a,b)
```