

# 第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2013@tzmcm.cn

## 第六届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承诺书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

**我们的参赛队号为：1993**

**参赛队员（签名）：**

队员 1：江泉明

队员 2：林月娇

队员 3：林伟鹏

**参赛队教练员（签名）： 陈永雪**

**参赛队伍组别：本科组**

# 第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2013@tzmcm.cn

---

## 第六届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1993

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2013@tzmcm.cn

## 2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 探究四面六边透水框架群与减速效果关系

关 键 词 机理分析、多项式拟合、非线性回归、残差分析

### 摘 要：

本文主要通过研究探讨四面六边透水框架群的框架尺寸、架空率和框架群的长度对消能减速的效果建立数学模型。

模型一，首先，通过机理分析，推导相关物理公式，先得出曼宁系数与框架尺寸的关系，再由传递性得到四面六边透水框架长的平方与减速率成正相关，得到它们的关系表达式为  $\eta = Aa^2 + Ba + C$  ( $A, B, C$  系数常量)。

模型二，根据相关文献中的实验数据，对减速率与框架群长度进行拟合得到减速率与框架群的长度关系为  $\eta = -1.2 \times 10^{-6} L^4 + 0.00013L^3 - 0.0052L^2 + 0.087L + 0.12$ 。对减速率与框架尺寸的数据进行二次多项式进行拟合，得到减速率与框架尺寸的关系表达式为  $\eta = -0.0014\xi^2 + 0.0433\xi + 0.4288$ 。对减速率与架空率的数据进行三次多项式进行拟合，得到减速率与架空率的关系表达式为  $\eta = -0.0181\varepsilon^3 + 0.2064\varepsilon^2 - 0.7152\varepsilon + 1.14146$ 。

模型三，通过查阅相关文献得到在同一框架尺寸条件下，减速率与架空率、框架群长度的数据，进行多元非线性回归得到  $R^2 = 0.9460$ ， $S^2 = 0$ ，所以减速率与架空率、框架群长度的关系为  $\eta = -0.0041L\varepsilon + 0.0044L^2 - 0.0433\varepsilon^2 - 0.0604L + 0.4666\varepsilon - 0.1376$ ；再找出同一架空率条件下，减速率与框架尺寸、框架群长度关的实验数据，进行二元非线性回归，得到  $R^2 = 0.9460$ ，接近于 1， $P = 0.0015$  小于 0.01 残差的方差为  $S^2 = 0$ ，所以可以满足二元非线性回归拟合条件，所以减速率与框架尺寸、框架群长度的关系表达式为  $\eta = -0.0041L\varepsilon + 0.0044L^2 - 0.0433\varepsilon^2 - 0.0604L + 0.4666\varepsilon - 0.1376$ ；对减速率与框架尺寸、架空率的数据进行多元非线性回归，得到减速率与框架尺寸、架空率的关系表达式为  $\eta = -0.0032\xi^2 - 0.0353\varepsilon^2 + 0.0055\varepsilon\xi + 0.0694\xi + 0.2403\varepsilon - 0.2925$ 。

模型四，由实验数据，对减速率与架空率、框架尺寸、框架群长度的数据进行多元非线性拟合，我们可以得到减速率与架空率、框架尺寸、框架群长度的关系表达式为  $\eta = 0.09L^2 - 0.0031\xi^2 - 0.0153\varepsilon^2 + 0.0007\varepsilon\xi - 0.0081L + 0.0930\xi + 0.0964\varepsilon - 0.1010$ 。

参赛队号： 1993

所选题目： A 题

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

# 第六届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：数学中国数学建模网络挑战赛组委会  
电话：0471-4969085

邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2013@tzmcm.cn

## Abstract

In this paper is mainly surrounded by tetrahedron, permeable frame overhead rate and frame group group length on the energy dissipation model reduction effect through research. The first, through analysis, relevant physical formula derivation, tetrahedron of the length of permeable frame and deceleration rate is obtained by transitivity.

The second, The deceleration rate and frame length is obtained by fitting group deceleration rate and frame length group

is  $\eta = -1.2 \times 10^{-6} L^4 + 0.00013 L^3 - 0.0052 L^2 + 0.087 L + 0.12$ . Relationship between the expression of deceleration rate and frame size is  $\eta = -0.0014 \xi^2 + 0.0433 \xi + 0.4288$ . And then get The rate of deceleration and overhead rate data for the three polynomial fitting. Get deceleration rate and expression of the overhead rate is

$$\eta = -0.0181 \varepsilon^3 + 0.2064 \varepsilon^2 - 0.7152 \varepsilon + 1.14146$$

The third, there are some datas in the same frame size condition through access to relevant literature. Deceleration rate, data frame group length and overhead, It is

$$\eta = -0.0041 L \varepsilon + 0.0044 L^2 - 0.0433 \varepsilon^2 - 0.0604 L + 0.4666 \varepsilon - 0.1376$$

The fourth, in line with the requirements of deceleration rate and overhead rate, frame size, the length of frame group is

$$\eta = 0.09 L^2 - 0.0031 \xi^2 - 0.0153 \varepsilon^2 + 0.0007 \varepsilon \xi - 0.0081 L + 0.0930 \xi + 0.0964 \varepsilon - 0.1010$$

Key words: Mechanism analysis , Polynomial fitting , Nonlinear regression , Residual analysis

## 参赛队号 # 1993

### 一. 问题的重述

在江河中，堤岸、江心洲的迎水区域被水流长期冲刷侵蚀。在河道整治工程中，需要在受侵蚀严重的部位设置一些人工设施，以减弱水流的冲刷，促进该处泥沙的淤积，以保护河岸形态的稳定。现在常用的设施包括四面六边透水框架<sup>1</sup>等。这是一种由钢筋混凝土框杆相互焊接而成的正四面体结构，常见的尺寸为边长约 1 m，框杆截面约为  $0.1 \times 0.1 \text{ m}$ 。将一定数量的框架投入水中，在水中形成框架群，可以使水流消能减速，达到减弱冲击，防冲促淤的效果。对四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度<sup>2</sup>都直接或间接地影响着其消能减速的效果。当前人们通过水槽实验等方法，已经积累了一些实验数据，也见诸各类文献当中。但由于数据量和数据精度仍有各种不足之处，还没有形成足够完善的经验公式。请你建立合理的数学模型，给出这三个参数与其减速效果之间的关系。

### 二. 模型的假设与符号说明

#### 2.1 模型假设

- (1) 河床部分产生足够的落淤；
- (2) 投放是致密有规律的；
- (3) 单层铺设四面六边透水框架；
- (4) 水深对阻力系数不影响；

#### 2.2 符号说明

符号	含义
$\eta$	减速率
$V_1$	投放四面六边透水框架前间隔区内靠近河流某点的流速
$V_2$	投放框架后同一点的流速
$B$	水槽宽度
$H$	水深
$L$	两控制断面间的距离
$f$	水与玻璃槽壁的阻力
$F$	槽底的透水框架作用于水的等效阻力
$G$	控制体水流所受的重力
$C_d$	框架群的等效阻力
$A_i$	框架群顺水流方向的投影面积
$\rho$	水的密度
$u$	水流速度
$j$	水槽坡度
$n$	曼宁系数
$R$	水力半径
$\mu$	流体粘度

## 参赛队号 # 1993

### 三. 问题分析

先进行机理分析，推导出减速率与框架尺寸或架空率或框架群的长度之间的关系，再由减速率与框架尺寸、架空率和框架群的长度三者任一因素的关系，推导出减速率与其他两个因素的关系。再通过相关文献的实验数据进行验证。

从框架尺寸、架空率、框架群长度三个方面探究四面六边透水框对江河堤岸或是江心洲的迎水区域水流消能减速的关系，通过查找相关文献，得到框架尺寸、架空率、长度对减速效果（减速率）的数据。通过控制变量法，分别对减速率和框架尺寸、架空率、框架群长度的数据进行多项式拟合，再通过方差分析算出它的误差，检验减速率和框架尺寸、架空率、框架群长度拟合是否符合要求。

再通过控制框架尺寸、架空率、框架群长度三者因素之间的任一因素，找出减速率与其中两个因素的数据，进行二元非线性回归，从而得到减速率与三者中任意两个因素的关系表达式。

最后，找出减速率与框架尺寸、架空率、框架群长度三个因素的相关数据，进行三元非线性回归，从而得到减速率与三个因素的关系表达式。

### 四. 模型的建立与求解

#### 4.1 四面六边透水框框架尺寸对水流减速的影响模型

##### 4.1.1 验证四面六边透水框架的框架尺寸是否直接影响其减速效果

四面六边透水框架群具有透水和阻水消能的作用，并且透水框框架尺寸对水流减速有一定的影响。当水中投入透水框时，四面体后某测点流速会改变，这与投放位子的水的深度，水的密度，重力加速度及四面体的形状阻力相关，所以可以用下面的函数式<sup>[1]</sup>表示投放四面体后测点的流速，

$$V_2 = f(V_1, H, A, \rho, \mu, g) \quad (1)$$

其中 A 是某一水平高度上四面体的截面面积。

由量纲的齐次性分析<sup>[2]</sup>可得，公式（1）式等号两边的因次必须一致，所以可将公式（1）又可整理为

$$V_2 = KV_1^a H^b A^c \rho^d \mu^e g^f (a, b, c, d, e, f \in N) \quad (2)$$

再由物理的因次表达式可得到下面公式（3）

$$\begin{aligned} [V] &= LT^{-1} \\ [H] &= L \\ [A] &= L^2 \\ [\rho] &= ML^{-3} \\ [\mu] &= ML^{-1}T^{-1} \\ [g] &= LT^{-2} \end{aligned} \quad (3)$$

由公式（3）和公式（2）可以得到

$$LT^{-1} = K(LT^{-1})^a (L)^b (L^2)^c (ML^{-3})^d (ML^{-1}T^{-1})^e (LT^{-2})^f \quad (4)$$

再由因次一致性可以整理得到以下方程组

$$\begin{cases} a + b + 2c - 3d - e + f = 1 \\ a + e + 2f = 1 \\ d + e = 0 \end{cases} \quad (5)$$

## 参赛队号 # 1993

所以公式 (5) 又可变形为公式 (6)

$$\begin{cases} a = 1 - e - 2f \\ b = f - e - 2c \\ d = -e \end{cases} \quad (6)$$

所以把公式 (6) 代入公式 (2) 则可表示为

$$V_2 = KV_1^{1-e-2f} H^{f-e-2c} A^c \rho^{-e} \mu^e g^f = KV_1 \left( \frac{\mu}{\rho V_1 H} \right)^e \left( \frac{Hg}{V_1^2} \right)^f \left( \frac{A}{H^2} \right)^e \quad (7)$$

通过查阅相关资料<sup>[3]</sup>，对于河道的岸滩部分是属于浅水区，所以可以用水力半径  $R$  代替水深  $H$ 。则雷诺数和佛汝德数可以表示为

$$R_e = \frac{\rho V_1 H}{\mu}, F_r = \frac{gH}{V_1^2} \quad (8)$$

把公式 (8) 代入公式 (2) 可得公式 (9)

$$\frac{V_2}{V_1} = KR_e^e F_r^f \left( \frac{A}{H^2} \right)^e \quad (9)$$

因此投放透水框架后的流速可以用隐函数表示为

$$\frac{V_2}{V_1} = f(R_e, F_r, \frac{A}{H^2}) \quad (10)$$

又因为在水力学中减速率<sup>[4]</sup>通常如下定义

$$\eta = \frac{V_1 - V_2}{V_1} \quad (11)$$

所以由公式 (10) (11) 可得

$$\eta = 1 - f(R, F_r, \frac{A}{H^2}) \quad (12)$$

由此我们可以看到四面六边透水框架对水流的减速作用与水流的雷诺数、佛汝德数及四面体截面面积有直接联系，即与四面体框架尺寸有关。

### 4.1.2 四面六边透水框框架尺寸对水流减速的影响

四面六边透水框的减速原理可以用平面二维水流数学模型描述，根据谢才公式

$$u = C\sqrt{RJ} \quad (13)$$

其中  $C = \frac{1}{n} R^{1/6}$ ，并且不考虑槽壁阻力，所以谢才公式<sup>[3]</sup>公式 (13) 可以近似变为

$$u^2 = \frac{H^{4/3} J}{n^2} \quad (14)$$

又有槽底的空心四面体框架群作用于水的等效阻力  $F$ ，

$$F = C_d A_i \rho u^2 \quad (15)$$

控制体水流中受到的重力  $G$ ，

$$G = \rho g B L H \quad (16)$$

均匀流时，根据阻力与重力平衡，可得

$$f + F = G \times i$$

因为玻璃水槽的阻力较小，槽底铺满四面体框架时， $f \ll F$ ，此时忽略玻璃槽壁的阻力，所以



# 参赛队号 # 1993

$$F = Gi \quad (17)$$

所以由公式 (15) (16) (17) 有公式 (18)

$$C_d A_i \rho u^2 = \rho g B L H i \quad (18)$$

定义四面体抛投密度  $\varepsilon = \frac{A_i}{BL}$ ，并且令  $C'_d = C_d \varepsilon$ ，所以

$$C'_d = \frac{H g i}{u^2} \quad (19)$$

控制体运用达西-魏斯巴赫公式可得

$$h_f = \lambda \frac{L u^2}{4 R^2 g} \quad (20)$$

其中  $h_f$  表示为沿程损失， $\lambda$  为沿程阻力系数。若水力半径  $R$  近似用水深  $H$  代替，则将 (20) 式可变为

$$\frac{1}{8} \lambda = \frac{h_f}{L} \frac{H g}{u^2} \quad (21)$$

其中  $J = \frac{h_f}{L}$ ，则 (21) 变为

$$\frac{1}{8} \lambda = \frac{J H g}{u^2} \quad (22)$$

均匀流时， $i = J$ ，比较公式 (19) 和 (22)，可得

$$C'_d \propto \frac{1}{8} \lambda \quad (23)$$

根据蔡克士大的研究可知，在絮流粗糙区， $\lambda$  是  $\frac{K}{R}$  ( $k$  为粗糙度) 的函数，并且随着  $\frac{K}{R}$  的增大而增大。这里，水流已在絮流粗糙区，所以令  $K = a$ ， $a$  为四面体抛投高度，又  $R = H$ ，所以  $\lambda$  是  $\frac{a}{H}$  的函数，定义  $\frac{a}{H}$  为框架群的相对高度，又因为这里是对单层框架群的研究，所以  $\frac{a}{H}$  可以看成是正四面体的高，即  $\frac{a}{H} = \frac{\sqrt{6}}{3} a$  ( $a$  为正四面体的棱长)。所以阻力系数  $C'_d$  为

$$C'_d = f\left(\frac{a}{H}\right) \quad (24)$$

当四面体抛投密度  $\varepsilon$  一定时，则

$$C_d = f\left(\frac{a}{H}\right) \quad (25)$$

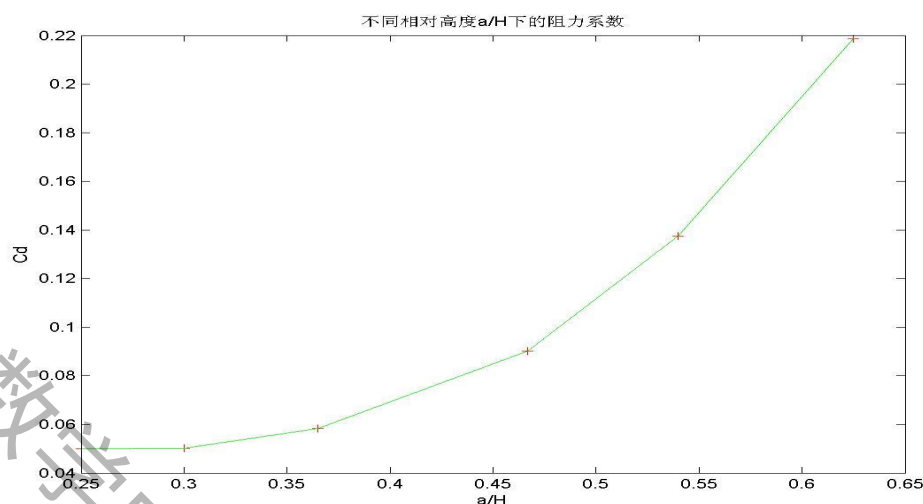
在试验中有如下表 1 不同相对高度下的阻力系数，

表 1 不同高度下实验结果的阻力系数

$\frac{a}{H}$	0.2500	0.3000	0.3650	0.4666	0.5400	0.6250
$C_d$	0.0500	0.0501	0.0583	0.0901	0.1375	0.21875



## 参赛队号 # 1993

图 1 不同相对高度  $\frac{a}{H}$  下的阻力系数

在图 1 中,  $x$ 轴和 $y$ 轴 分别是相对高度  $\frac{a}{H}$  和阻力系数  $C_d$ , 在图中, 相对高度  $\frac{a}{H}$  的增大, 阻力系数  $C_d$  也跟着增大, 在  $\frac{a}{H} < 0.36$  时, 框架群高度一定时, 若水深度增加,  $C_d$  逐渐减小, 当水深增大到一定程度后,  $C_d$  变化缓慢。

将公式 (14) 代入公式 (19) 有

$$C_d = \frac{gn^2}{H^{1/3}} \quad (26)$$

因为阻力系数  $C_d$  是无因次数, 所以在原型和模型中应保持一致, 根据几何正态相似, 由公式 (26) 可推出原、模型糙率的相似常数, 即

$$\lambda_n = \lambda_H^{1/6} \quad (27)$$

而试验的几何比尺是  $\lambda_H = 60$ , 由公式 (27) 可以推出原型的糙率。当四面体抛投密度  $\varepsilon$  一定时, 有

$$f\left(\frac{a}{H}\right) = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad (28)$$

采用曼宁公式反求糙率, 又曼宁公式为

$$u = \frac{1}{n} R^{2/3} J^{1/2} \quad (29)$$

透水框架群铺满矩形水槽, 不考虑槽底阻力, 水力坡度  $J$  等于水槽的底坡  $i$ , 曼宁公式又变为

$$u = \frac{1}{n} H^{2/3} i^{1/2} \quad (30)$$

即

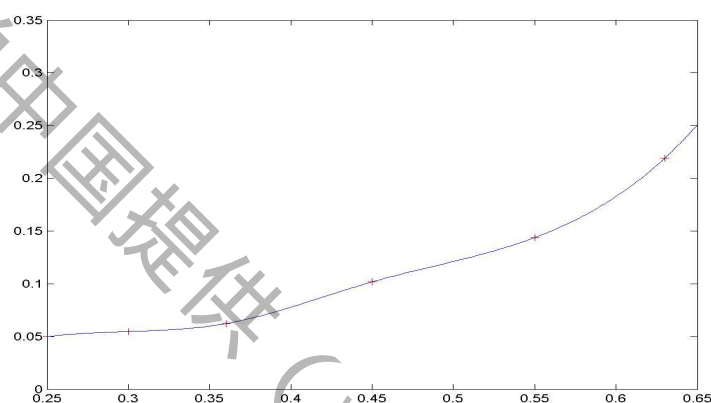
$$n = \frac{H^{2/3} i^{1/2}}{u} \quad (31)$$

由公式 (31) (27) 以及表 2 (实测数据) 进行拟合, 结果见图 2

## 参赛队号 # 1993

表2 不同水深下的  $n$  值计算表

H	a	$\frac{a}{H}$	u	$n_m$	$n_p$	$\frac{n_p^2}{H_p^{1/3}}$
4.47	2.8	0.63	14.2	0.0891	0.176	0.2192
5.11	2.8	0.55	13.9	0.0738	0.146	0.1438
6.18	2.8	0.45	14.5	0.0641	0.1018	0.1018
7.72	2.8	0.36	14.4	0.052	0.0622	0.0622
9.41	2.8	0.3	14.1	0.0504	0.0547	0.0547
11.29	2.8	0.25	13.8	0.0495	0.0497	0.0497

图2  $\frac{n_p^2}{H_p^{1/3}}$  与  $\frac{a}{H}$  的拟合图

所以  $\frac{n_p^2}{H_p^{1/3}}$  与  $\frac{a}{H}$  的表达式为

$$\frac{n_p^2}{H_p^{1/3}} = 0.0263 + 0.0052 \times \exp(5.722 * \frac{a}{H}) \quad (32)$$

因为在公式 (26) 中阻力系数转化成等效的曼宁糙率系数,

$$C_d \propto n^2 \quad (33)$$

这两个系数是正相关的, 所以可以用曼宁阻力系数描述阻力变化的趋势, 并且在物理学中阻力系数与减速率成正相关,

$$C_d \propto \Delta v \propto 1 - \frac{V_2}{V_1} = \eta \quad (34)$$

因为曼宁系数与减速率也是正相关的, 所以

$$n^2 \propto \eta \quad (35)$$

即当曼宁系数达到最佳, 减速率也达到最佳, 这里取最优的曼宁系数  $n_{\max}$  求解相对框架高度  $\frac{a}{H}$ ,

$$\frac{a}{H} = H_{\text{正四面体}} \quad (36)$$

### 参赛队号 # 1993

而正四面体的高  $H_{\text{正四面体}} = \frac{\sqrt{6}}{3} a'$ ，查阅相关资料<sup>[1]</sup>，江河岸区的最佳曼宁系数<sup>[5]</sup>为  $n_{\max} = 0.35$ ，所以把  $H_{\text{正四面体}} = \frac{\sqrt{6}}{3} a'$  代入公式 (32)，并且在试验的基础上取  $a = 2.8$ ，所以  $H = \frac{7\sqrt{6}}{5} a'$ ，所以由公式 (32) 可得  $a' \approx 0.9071m$ ，所以四面六边透水框的最佳边长为 0.9071m

由公式 (32) 可知，

$$n \propto H_{\text{正四面体}} = \frac{\sqrt{6}}{3} a' \Rightarrow n \propto a' \quad (37)$$

结合公式 (37) (35) 可得

$$a' \propto \eta^{1/2} \quad (38)$$

所以得  $\eta = Aa^2 + Ba + C$  ( $A, B, C$  是常量系数)

#### 4.1.3 四面六边透水框框架截面图形对水流减速的影响

查找相关的试验<sup>[6]</sup>，在均匀流的下，选取截面面积相等的三种杆件，其截图分别为圆形，三角形，正方形，研究其截面对流经杆件的速度的影响，其相关数据见表 3

表3 不同杆件截面形式下的减速率分布

$\eta$ 图形	H(m)	0.250	0.750	1.250	1.750	3.250
正方形		0.800	0.650	0.350	0.290	0.200
三角性		0.820	0.666	0.400	3.500	0.200
圆		0.430	0.333	0.201	1.890	0.133

通过 matlab 软件处理数据结果图像见图 3

## 参赛队号 # 1993

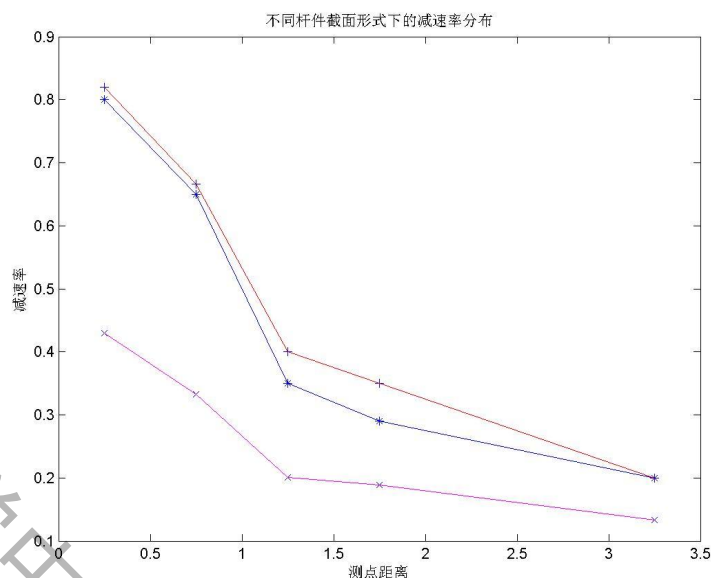


图3 不同杆件截面图形的减速率分布图

在图 3 中，我们可以看到，红色线表示三角形截面杆件的不同距离的减速率分布，青色线表示正方形截面杆件的不同距离的减速率分布，品红色线表示圆形截面杆件的减速率分布。从中我们可以看到，三角形截面杆件的减速率最佳，正方形截面杆件的减速率次之，最后是圆形截面杆件的减速率。

## 4.2 框架群长度、架空率、框架尺寸与减速率的关系模型

$$\varepsilon = V / (NV_{\text{单}}) \quad (39)$$

$$N = x \cdot n \quad (40)$$

$$V_{\text{单}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot l^3 \quad (41)$$

$$V = \frac{\sqrt{9}}{6} l [xl[(2n-2)l_0 + (2n-5)l] + xl\sqrt{[(n-1)l_0 + (n-3)l][(n-1)l_0 + (n-2)l]}] \quad (42)$$

$\varepsilon$  为架空率， $N$  为四面六边体的个数， $V$  为总体积

4.2.1 减速率与框架群长度的关系（间隔长度  $\Delta l = 10$ ）模型

表4 减速率与框架群长度值表

$L$	4.10	5.10	6.10	7.10	8.10	9.10	10.10
$\eta$	0.4101	0.4345	0.4889	0.5133	0.5377	0.5721	0.6165
$L$	15.10	20.10	25.10	30.10	35.10	40.10	
$\eta$	0.6263	0.6347	0.6411	0.6475	0.6519	0.6643	

由表 1 的实验数据<sup>[3]</sup>，画出减速率与框架长度关系的散点图，可以看出它的轨迹是一条光滑的曲线，应该是一条多项式函数曲线，因此我们进行对它进行多项式拟合如下。在多项式拟合中取

$$\{r_1(x), \dots, r_{m+1}(x)\} = \{1, x, \dots, x^m\} \quad (43)$$

即用  $m$  次多项式拟合给定的减速率和框架群长度的数据，这里 matlab 中有现成的函数： $a = \text{polyfit}(x_0, y_0, m)$ ，其中  $m$  为多项式次数， $x_0, y_0$  为要拟合的数据，输出参数  $a$  为

## 参赛队号 # 1993

拟合多项式

$$y = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (44)$$

系数  $a = [a_m, \cdots, a_1, a_0]$ ，经过多次拟合，我们发现，在四次的时候是最接近的，误差最小。

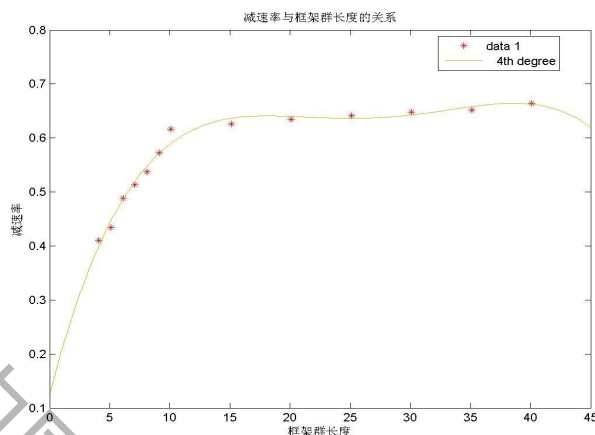


图4 表4对应的散点图

减速率与框架群长度的关系表达式如下：

$$\eta = -1.2 \times 10^{-6} L^4 + 0.00013 L^3 - 0.0052 L^2 + 0.087 L + 0.12 \quad (45)$$

从图中可以看出，在框架群长度  $0m \leq L \leq 10m$  时，随着框架群长度的增大，减速率也迅速增大，但当框架群长度  $L \geq 10m$  时，随着框架群长度的增大，减速率也在增大，但比较不明显。

### 4.2.2 透水框架减速率与架空率的关系模型

通过查找相关文献资料<sup>[6]</sup>，我们找到了一些描述透水框架的减速率与架空率关系的水槽实验的数据，如下表所示

表5 减速率与架空率值表

$\varepsilon$	3.0	3.5	3.7	4.0	4.3	4.5	5.0	5.3	5.5	6.0
$\eta$	0.635	0.663	0.681	0.694	0.711	0.718	0.735	0.724	0.708	0.636

我们先画出这组透水框架减速率与架空率的散点图，如下图所示：

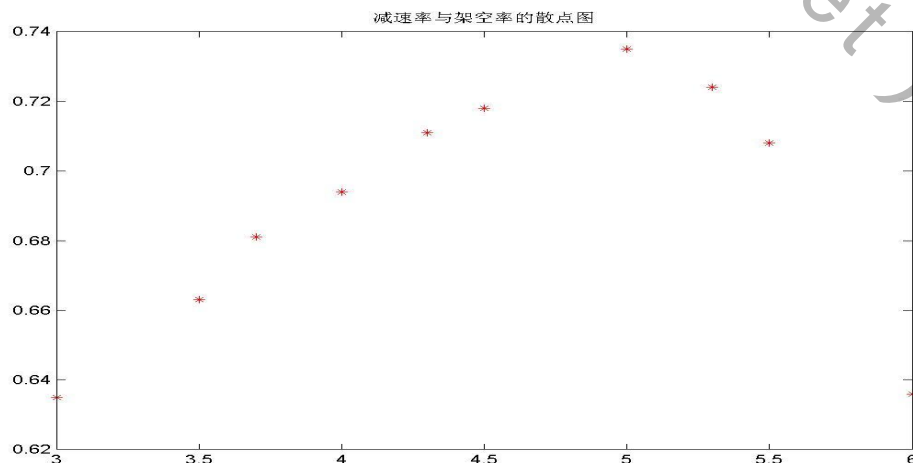


图5 减速率与架空率值对应的散点图

## 参赛队号 # 1993

从图中，可以看出它的轨迹是一条类似于抛物线的光滑曲线，

我们用  $a = \text{polyfit}(x_0, y_0, m)$  函数进行一元二次多项式和三次多项式进行拟合，再用回归分析中的方差分析和残差分析进行对比和比较。

进行一元二次多项式拟合得到它们之间的关系表达式如下：

$$\eta = -0.0956\varepsilon^2 + 0.3510\varepsilon - 0.0376 \quad (46)$$

一元三次多项式拟合得到它们之间的关系表达式如下：

$$\eta = -0.0181\varepsilon^3 + 0.2064\varepsilon^2 - 0.7152\varepsilon + 1.14146 \quad (47)$$

用 matlab 软件分析一元二次多项式的方差分析和残差分析，得到以下结果：

$$R^2 = 0.8556 \quad P = 0.0011, \quad S^2 = 0.0002,$$

相关系数  $R$  还是比较大的，而且  $P = 0.0011$  小于等于  $0.01$ ；

其中残差图为：

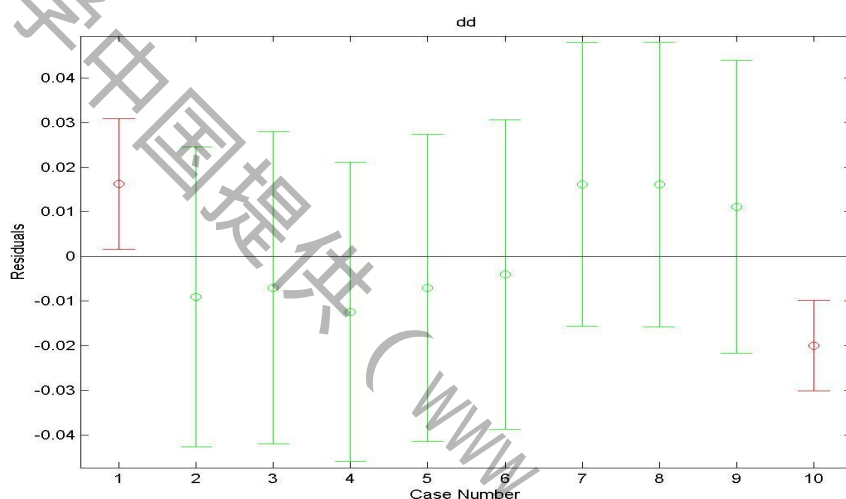
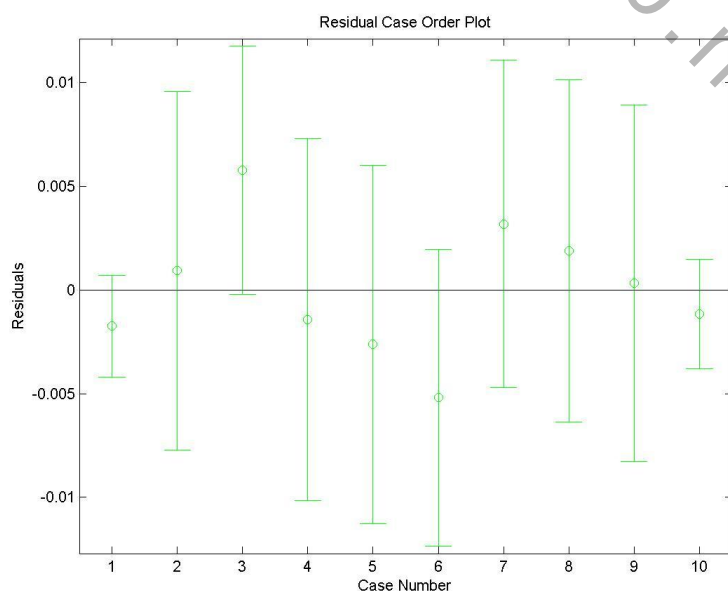


图6 二次多项式残差图

分析一元二次多项式的方差分析和残差分析（程序见附录 A3），得到以下结果：

$$R^2 = 0.9923 \quad P = 0 \text{ 残差的方差为 } S^2 = 0,$$



## 参赛队号 # 1993

图7三次多项式残差图

很显然三次多项式的相关系数  $R$  比二次多项式的  $R$  大，且它的  $P$  比二次多项式的  $P$  小。相关系数越接近 1 越好，因此透水框架减速率与架空率的关系为：

$$\eta = -0.0181\varepsilon^3 + 0.2064\varepsilon^2 - 0.7152\varepsilon + 1.14146 \quad (48)$$

透水框架减速率与架空率的三次多项式拟合曲线如下：

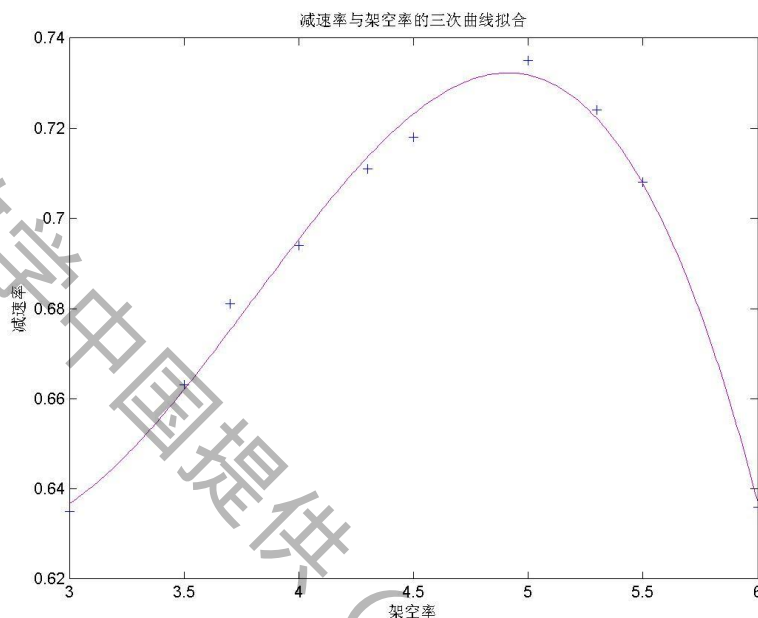


图 8 三次多项式函数拟合曲线

### 4.2.4 透水框架减速率与框架尺寸的关系 ( $\xi = l/d$ , 此时架空率 $\varepsilon = 4.8$ ) 模型：

在这里，我们用四面六边透水框架的长宽比，即  $\xi = l/d$  来表示框架尺寸，通过查找相关文献资料，我们找到了一些减速率与框架尺寸的一些数据，如下表所示：

表 6 减速率与框架尺寸值表

$\xi$	7.8	8.0	10.0	11.0	12.5	14.2	16.0	18.0	20.0
$\eta$	0.680	0.683	0.724	0.735	0.752	0.756	0.761	0.750	0.733

我们可以画出这组减速率与框架尺寸数据的散点图，发现它成抛物线轨迹。用  $a = \text{polyfit}(x_0, y_0, m)$  函数进二次多项式进行拟合，得到  $a_0 = -0.0014$ ， $a_1 = 0.0433$ ,  $a_2 = -0.0014$

所以减速率与框架尺寸比例的关系式为：

$$\eta = -0.0014\xi^2 + 0.0433\xi + 0.4288 \quad (49)$$

再通过一元二次多项式回归进行方差分析和残差分析，得到

$R^2 = 0.9949$ ,  $P = 0$  残差的方差为  $S^2 = 0$ ，显然， $R$  的值接近 1，说明相关性比较强，说明这种拟合是比较贴切的。

它的残差图为



## 参赛队号 # 1993

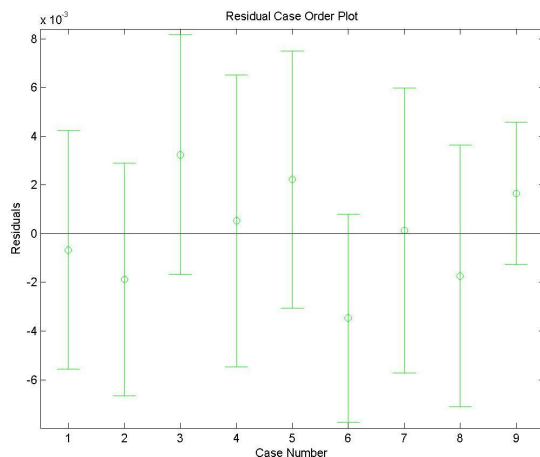


图 8 减速率与框架尺寸的残差图

再画出减速率与框架尺寸的拟合图

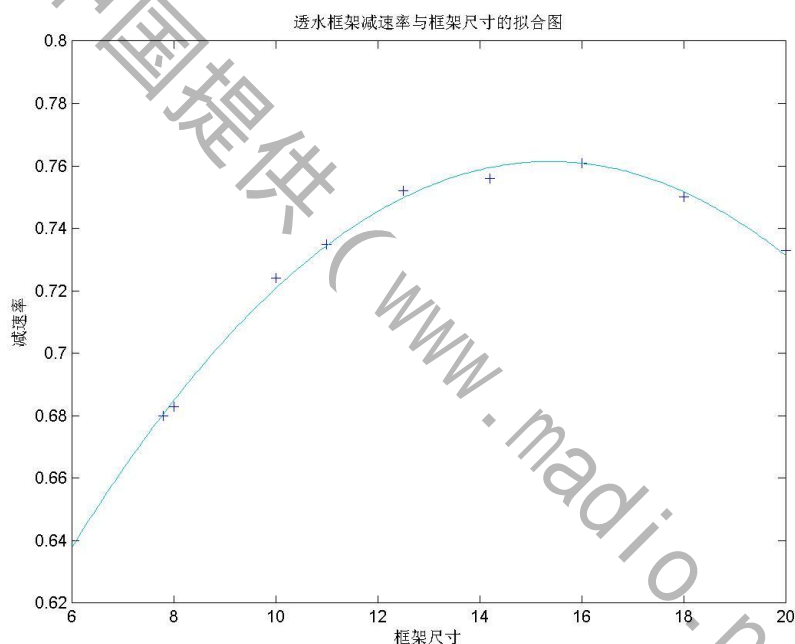


图 9 减速率与框架尺寸的拟合图

### 4.3.1 减速率与架空率、长度的关系

研究减速率与架空率、长度的关系，首先在同样的四面六边的透水框架条件下，收集 10 组减速率与架空率、长度的实验数据如下：

表 7 减速率与架空率、长度的数据

$\varepsilon$	3	4	4.5	5	6	5.5	4.8	3	6.5
$L$	6	8.5	11	10	11	11	10.5	7	8.2
$\eta$	0.6	0.69	0.76	0.77	0.72	0.71	0.76	0.58	0.65

根据实验数据，我们可以进行二元多项式回归分析，找出架空率、框架群长度的相关表达式。

回归分析中有一些主要判断回归拟合是否合理的标准

## 参赛队号 # 1993

$$R^2 = \frac{\left[ \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i + e_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2} \quad (50)$$

表示相关系数的平方， $R$  越接近 1 越好

$$S^2 = \frac{Q}{N - M - 1} \quad (51)$$

表示剩余方差，越小越好。 $P$  值必须小于 0.01 或 0.05，

在 matlab 中调用函数 `regress(y',x)` ;(程序见附录 A2)我们得到系数分别为-0.1376, 0.4666, -0.0604, -0.0433, 0.0044, -0.0041

调用函数 `rcoplot(r,rint)`得到残差分析图如下所示:

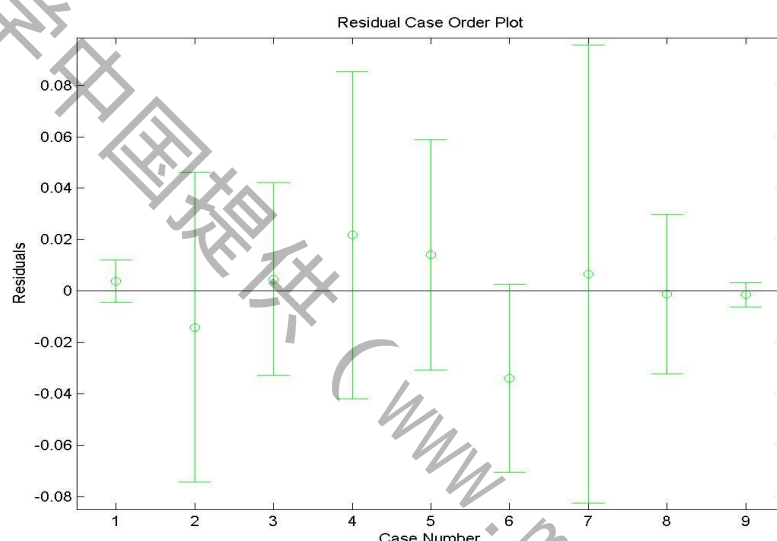


图 10 减速率与架空率、长度的残差图

$R^2 = 0.9460$   $P = 0.0015$  残差的方差为  $S^2 = 0$ ，发现相关性接近于 1，符合要求可以用表达式来描述它们之间的关系

$$\eta = -0.0041L\varepsilon + 0.0044L^2 - 0.0433\varepsilon^2 - 0.0604L + 0.4666\varepsilon - 0.1376 \quad (52)$$

#### 4.3.2 减速率与四面六边透水框框架尺寸、框架群长度关系模型

研究减速率与透水框尺寸、长度的关系，首先在同样的四面六边的透水框架条件下，收集 10 组减速率与框架尺寸、长度的实验数据如下：

表 8 减速率与框架尺寸、长度的实验数据

$\eta$	$\xi$	$L$
0.6	8	6
0.69	10	8.5
0.76	12	11
0.77	16	10
0.72	16	11
0.71	12	11
0.76	13	10.5
0.58	7.5	7
0.65	16	8.2

## 参赛队号 # 1993

根据这 10 组减速率与框架尺寸、长度的实验数据，我们可以进行二元多项式回归分析，找出框架尺寸、框架群长度的相关表达式，在 matlab 中调用函数 `regress(y',x)`；我们得到系数分别为-0.2362, 0.1011, 0.0604, 0.0091, -0.0070, -0.0091

调用函数 `rcoplot(r,rint)`得到残差分析图如下所示：

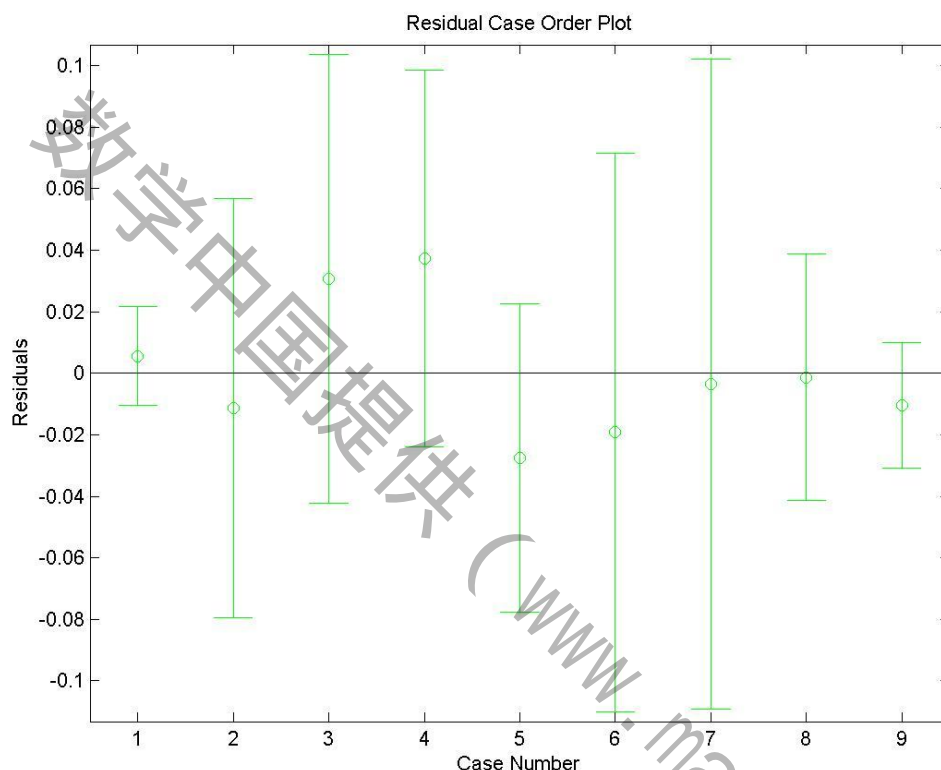


图 10 减速率与框架尺寸、框架群长度的残差图

$R^2 = 0.9046$   $P = 0.035$  残差的方差为  $S^2 = 0.012$ ，发现相关性接近于 1,所以用以下表达式来描述它们之间的关系。

$$\eta = -0.0091L^2 - 0.0070\xi^2 + 0.0091L\xi + 0.0604L + 0.1011\xi - 0.2361 \quad (53)$$

### 4.3.3 减速率与架空率、框架尺寸的关系模型

研究减速率与架空率、框架尺寸的关系，首先在同样的四面六边的透水框架条件下，收集 10 组减速率与框架尺寸、长度的实验数据如下：

表 9 减速率与架空率、框架尺寸

$\varepsilon$	3	4	4.5	5	6	5.5	4.8	3	6.5
$\xi$	8	10	12	16	16	12	13	7.5	16
$\eta$	0.6	0.69	0.76	0.77	0.72	0.71	0.76	0.58	0.65

根据这 10 组减速率与架空率、框架尺寸的实验数据，我们可以进行二元多项式回归分析，找出框架尺寸、框架群长度的相关表达式。

在 matlab 中调用函数 `regress(y',x)`；(程序见附录 A6)我们得到系数分别为-0.2925, 0.2403, 0.0694, 0.0055, -0.0353, -0.0032，调用函数 `rcoplot(r,rint)`得到残差分析图如下

## 参赛队号 # 1993

所示：

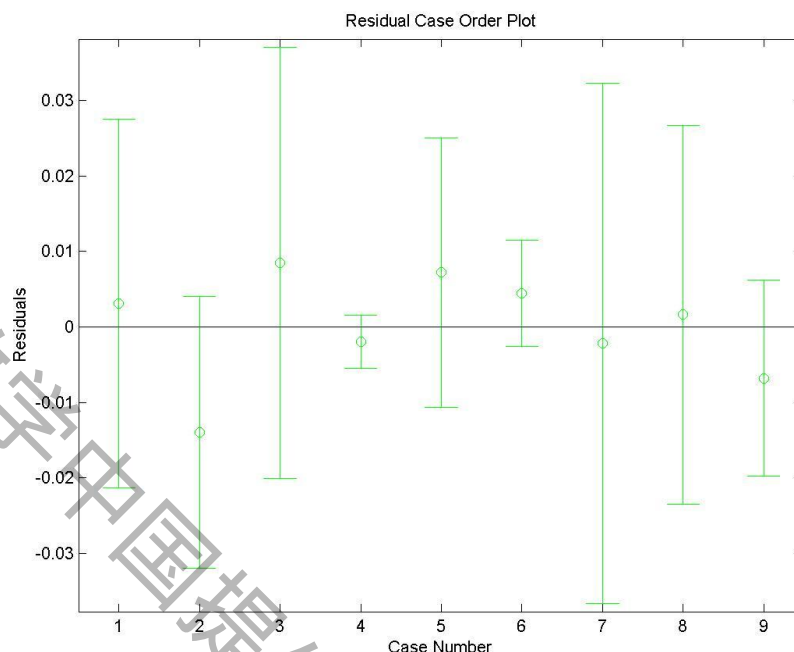


图 11 减速率与架空率、框架尺寸的残差分析图

$R^2 = 0.9897$ ,  $P = 0.0035$ ,  $S^2 = 0.0001$ , 显然相关系数是比较接近 1 的, 且  $P$  值小于 0.01, 因此我们可以用以下表达式来描述杆件长宽比对减速率对减速率的关系

$$\eta = 0.1249L + 0.0615\xi - 0.0064L\xi - 0.5123 \quad (54)$$

$$\eta = -0.0032\xi^2 - 0.0353\varepsilon^2 + 0.0055\varepsilon\xi + 0.0694\xi + 0.2403\varepsilon - 0.2925 \quad (55)$$

### 4.4 减速率与架空率、杆件长宽比、长度

研究减速率与架空率、框架尺寸、框架群长度的关系, 首先在同样的四面六边的透水框架条件下, 收集 10 组减速率与架空率、框架尺寸、长度的实验数据如下:

表 10 减速率与架空率、框架尺寸、长度的实验数据

$\eta$	$\varepsilon$	$\xi$	$L$
0.6	3	8	6
0.69	4	10	8.5
0.76	4.5	12	11
0.77	5	16	10
0.72	6	16	11
0.71	5.5	12	11
0.76	4.8	13	10.5
0.58	3	7.5	7
0.65	6.5	16	8.2

根据实验数据对减速率、架空率、框架长宽比、长度进行三元一次回归分析在 matlab 中调用函数 regress(y',x), (程序附录 A7) 得到  $R^2 = 0.9032$ ,  $P = 0.0057$ ,  $S^2 = 0.0008$  相关系数接近于 1, 但是  $P$  大于 0.05, 误差有点大。

## 参赛队号 # 1993

再考虑架空率和框架长宽比的交错的影响，架空率、框架长宽比、框架群长度的二次方对减速率的影响。得到  $R^2 = 0.9923$ ， $P = 0.00021$ ， $S^2 = 0.0003$ ，显然这时候的相关性比一次多元回归要强，且  $P = 0.00021$ ，小于等于 0.05，所以此时可以用以下表达式描述他们之间的关系

$$\eta = 0.09L^2 - 0.0031\xi^2 - 0.0153\varepsilon^2 + 0.0007\varepsilon\xi - 0.0081L + 0.0930\xi + 0.0964\varepsilon - 0.1010 \quad (56)$$

调用函数 `rcoplot(r,rint)` 得到残差分析图如下所示

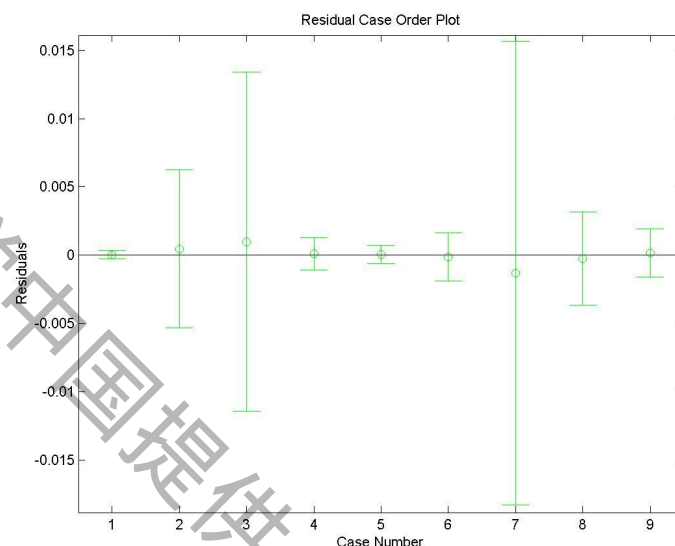


图 12 减速率与架空率、框架尺寸、长度的

从图中，我们可以看出，这种多元非线性回归拟合的效果比较好。

## 五. 结果分析

对于本文中的模型，在单一考虑框架尺寸、架空率和框架群长度的时，三个模型能够比较清晰地描述它们之间的关系，通过对实验数据的拟合，误差不会相差很大。在考虑框架尺寸、架空率和框架群长度中任意两个因素对减速效果时，我们发现在框架群长度相同的情况下，考虑框架尺寸、架空率对减速效果关系的相关性是非常强的，在方差分析中  $R^2 = 0.9897$ ，很接近于 1， $P = 0.0035$  小于 0.01 且残差方差  $S^2 = 0.0001$  接近于 0，说明误差很小。但在固定框架尺寸、架空率中任一个，选其中一个因素和框架群长度对减速效果进行回归分析时， $R^2$  值虽然接近 1，但  $P$  值介于 0.01 和 0.05 之间，效果没那么好。在对三个因素一起考虑时，我们发现框架群长度在表达式中又占了很大的分量，说明框架群长度的大小对减速效果还是起到很重要的作用。

## 六. 模型的优缺点及改进方向

### 6.1 模型的优点：

通过机理分析算框架尺寸对减速率的影响效果是很直接的公式，推导过程没出错，能更直接地看出它们之间的关系。在单一考虑框架尺寸、架空率和框架群长度的时，三个模型能够比较清晰地描述它们之间的关系，模型一通过纯理论的研究推导得出较为严密的理论结果，客观上避免了实验误差，模型二通过对实验数据的拟合，误差不会相差很大。

### 6.2 模型的缺点：

## 参赛队号 # 1993

模型一单纯理论进行机理分析推导，假设条件偏多，有点偏理想，缺乏实践数据作有力依据。模型二中，控制框架尺寸、架空率和框架群长度三者中控制框架尺寸或架空率时，误差比较大一点，单纯靠实验数据，也有点偏模糊。在模型三中，没有考虑三个全部相交所造成的影响，肯能会导致一些误差。

### 6.3 模型的改进：

在建立四面六边透水框架的框架尺寸与其减速的影响模型中，还可以建立指数型流速<sup>[7]</sup>分布公式，一般性的流速分布公式如下公式

$$\frac{u}{u_*} = C \left( \frac{yu_*}{v} \right)^m \quad (57)$$

其中  $u_*$  是摩阻流速， $C$  是试验常系数， $m$  是试验拟合指数，一般情况下  $m = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$  常取  $m = \frac{1}{6}$

用伯努利能量方程推导沿程损失的计算公式为

$$h_f = \lambda \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (58)$$

其中  $L$  是有效长度， $d$  是管道直径， $v$  是断面平均流速， $\lambda$  是 Darcy-weisbach 系数，无量纲数。所以由公式 (58) 式得

$$v = \left( \frac{8gRJ}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (59)$$

或

$$\frac{v}{u_*} = \left( \frac{8}{f} \right)^{1/2} \quad (60)$$

用 Manning-Strickler 公式考虑了沙粒阻力的影响，得到了计算流速的指数型分布公式

$$\frac{u}{u'} = \frac{u}{\sqrt{gR'J}} = \frac{24}{\sqrt{g}} \left( \frac{R'}{k_s} \right)^{1/6} = \frac{24}{\sqrt{g}} \left( \frac{R'}{D_{65}} \right)^{1/6} \quad (61)$$

用二次多项式形式进行拟合，得到垂线流速分布公式

$$\frac{u}{v} = A \left( \frac{y}{h} \right)^2 + B \left( \frac{y}{h} \right) + C \quad (62)$$

其中  $A, B, C$  均为待测常量， $u$  为测点流速， $v$  为断面平均流速

我们选取正四面体的地面为例，任选一顶点为起始坐标点，记  $y_1 = 0$ ，假设水流方向与该点对应的边垂直，那么末点的坐标点记为  $y_2$ ，且  $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，所以

$$\frac{u_1}{v} = A \left( \frac{y_1}{h} \right)^2 + B \left( \frac{y_1}{h} \right) + C = C \quad (63)$$

$$\frac{u_2}{v} = A \left( \frac{y_2}{h} \right)^2 + B \left( \frac{y_2}{h} \right) + C = \frac{3Aa^2}{4h^2} + \frac{\sqrt{3}Ba}{2h} + C \quad (64)$$

所以

### 参赛队号 # 1993

$$\eta = 1 - \frac{u_2}{u_1} = 1 - \frac{\frac{u_2}{v}}{\frac{u_1}{v}} = 1 - \frac{\frac{3Aa^2}{4h^2} + \frac{\sqrt{3}Ba}{2h} + C}{C} = \frac{4Ch^2 - 3Aa^2 - 2\sqrt{3}Bah + 4Ch^2}{4h^2} = -\frac{3Aa^2 + 2\sqrt{3}Bah}{4Ch^2}$$

因为  $A, B, C$  是待测常数，所以上式又可表示成

$$\eta = A'a^2 + B'a \quad (65)$$

该模型能够较好地探究减速率与正四面体边长的关系，只要能求解  $A'$ ， $B'$  的值比较直观。

在透水框架减速率与框架尺寸关系的模型中（ $\xi = l/d$ ，此时架空率  $\varepsilon = 4.8$ ）误差有点大，我们再通过 lsqcurvefit 函数函数进行拟合。（程序见附录 A1）

$$\eta = -8.56 + 9.42e^{\frac{-(\xi - 15.02)^2}{5694.56}}, (7.8 \leq \xi \leq 20) \quad (66)$$

拟合图如下所示：

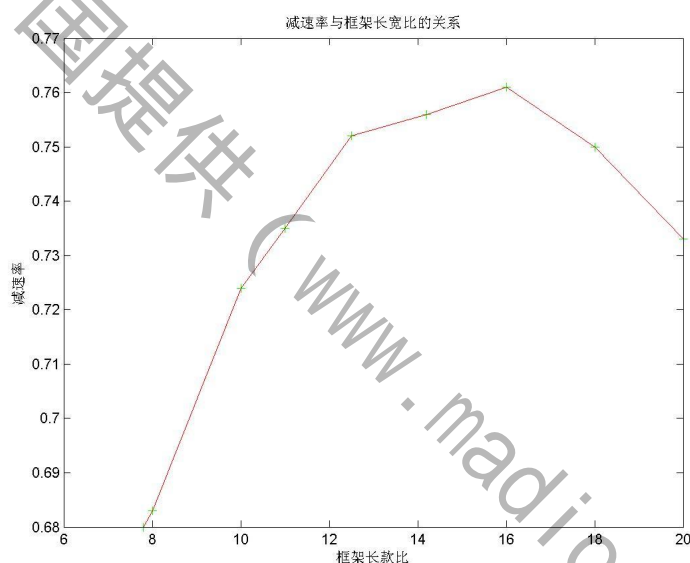


图 13 减速率与框架尺寸的拟合图

经过数据修正后得到

$R^2 = 0.9820$   $P = 0$  残差的方差为  $S^2 = 0$ ，发现相关性接近于 1，符合要求。

#### 6.4 模型的推广

模型一，主要通过机理分析进行推导框架尺寸与减速率的关系的公式，虽然比较理想，但对于以后继续研究框架尺寸、架空率和框架群长度对减速效果可以提供理论指导，同时也可以同实验相结合。

对于模型二和模型三，是根据实验数据得出框架尺寸、架空率和框架群长度与减速率的关系表达式。这对于以后进行控制它们的变化范围有很好的知道作用，可以应用于防洪及防治水土流失等。



## 参赛队号 # 1993

---

### 参考文献：

- [1] 吴龙华. 透空四面体（群）尾流水力特性及应用研究[J]. 环境科学研究. 22 (12): 1382-1388, 2009.
- [2] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学建模. 高等教育出版社, 2012.
- [3] 李若华, 王少东, 曾甄. 穿越四面六边透水框架群的水流阻力特性试验研究[J]. 中国农村水利水电, 2005, (10): 64-66.
- [4] 吴龙华, 周春天, 严忠民, 王南海. 架空率、杆件长宽比对四面六边透水框架群减速促淤效果的影响[J]. 水利水运工程学报, 2003, (03): 74-77.
- [5] 王雯雯, 赵智杰, 秦华鹏. 基于SWMM的低冲击开发模式水文效应模拟评估[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2012, (02): 303-309.
- [6] 李若华. 空心四面体框架群减速特性研究[D]. 河海大学, 2004.
- [7] 陈禾, 余海燕. 微流体速度流型影响因素数值模拟分析[J]. 现代仪器, 2007, (01): 41-43.

## 参赛队号 # 1993

## 附录 A

1

```

x=[7.8 8.0 10.0 11.0 12.5 14.2 16.0 18.0 20.0 ]';
y=[0.680 0.683 0.724 0.735 0.752 0.756 0.761 0.750 0.733]';
x1=7.8:0.1:20.8;
y1=-8.65+9.52*exp(-(x1-15.02).^2/5694.58);
plot(x,y,'g+')
hold on
plot(x,y,'r')

```

```

function f=fun2(x,tdata);
f=x(1)+x(2)*exp(-(tdata-15.02).^2/x(3))

td=[7.8 8.0 10.0 11.0 12.5 14.2 16.0 18.0 20.0];
cd=[0.680 0.683 0.724 0.735 0.752 0.756 0.761 0.750 0.733];
x0=[-8.65 9.42 5694.58];
x=lsqcurvefit(@fun1,x0,td,cd)

```

```

function f=fun2(x,tdata);
f=x(1)+x(2)*exp(-(tdata-15.02).^2/x(3))

```

```

x=[0.25 0.3 0.4 0.48 0.58 0.63];
y=[0.05 0.051 0.052 0.11 0.149 0.23];
plot(x,y,'r+',x,y,'g')

```

2

```

y=[0.70 0.31 0.52 0.60];
x1=[4.8 3.2 5.7 4.2];
x3=[10 4.1 15 7.6];
x=[ones(4,1) x1' x3'];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
rcoplot(r,rint),bint,stats

```

3

```

y=[0.70 0.65 0.6 0.52 0.4];
x2=[16 13 11.5 7 5];
x3=[10.1 8.5 8 7.5 6.5]
x=[ones(5,1) x2' x3'];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
rcoplot(r,rint),bint,stats
y=[0.2192 0.1438 0.1018 0.0622 0.0547 0.0497];
x=[0.63 0.55 0.45 0.36 0.3 0.25];

```

```

function f=fun2(x,tdata);
f=x(1)+x(2)*exp(-(tdata-15.02).^2/x(3))

```

```

x=[0.25 0.3 0.4 0.48 0.58 0.63];

```

## 参赛队号 # 1993

```
y=[0.05 0.051 0.052 0.11 0.149 0.23];
```

```
plot(x,y,'r+',x,y,'g')
```

4

```
y=[0.6 0.69 0.76 0.77 0.72 0.71 0.76 0.58 0.65];
```

```
x1=[3 4 4.5 5 6 5.5 4.8 3 6.5];
```

```
x3=[6 8.5 11 10 11 11 10.5 7 8.2];
```

```
x5=x1.^2;
```

```
x7=x3.^2;
```

```
x8=x1.*x3;
```

```
x=[ones(9,1) x1' x3' x5' x7' x8'];
```

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
```

```
rcoplot(r,rint),bint,stats
```

5

```
y=[0.6 0.69 0.76 0.77 0.72 0.71 0.76 0.58 0.65];
```

```
x2=[8 10 12 16 16 12 13 7.5 16];
```

```
x3=[6 8.5 11 10 11 11 10.5 7 8.2];
```

```
x4=x2.*x3;
```

```
x5=x2.^2;
```

```
x6=x3.^2;
```

```
x=[ones(9,1) x2' x3' x4' x5' x6'];
```

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
```

```
rcoplot(r,rint),bint,stats
```

6

```
y=[0.6 0.69 0.76 0.77 0.72 0.71 0.76 0.58 0.65];
```

```
x1=[3 4 4.5 5 6 5.5 4.8 3 6.5];
```

```
x2=[8 10 12 16 16 12 13 7.5 16];
```

```
x3=x1.*x2;
```

```
x4=x1.^2;
```

```
x5=x2.^2;
```

```
x=[ones(9,1) x1' x2' x3' x4' x5'];
```

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
```

```
b,rcoplot(r,rint),bint,stats
```

7

```
y=[0.6 0.69 0.76 0.77 0.72 0.71 0.76 0.58 0.65];
```

```
x1=[3 4 4.5 5 6 5.5 4.8 3 6.5];
```

```
x2=[8 10 12 16 16 12 13 7.5 16];
```

```
x3=[6 8.5 11 10 11 11 10.5 7 8.2];
```

```
x4=x1.*x2;
```

```
x5=x1.^2;
```

```
x6=x2.^2;
```

```
x7=x3.^2;
```

```
x=[ones(9,1) x1' x2' x3' x4' x5' x6' x7'];
```

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y',x) ;
```

```
rcoplot(r,rint),bint,stats
```