

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1260

参赛队员（签名）：

队员 1：郭净净

队员 2：丁雄伟

队员 3：张建秀

参赛队教练员（签名）：姜永

参赛队伍组别：本科组

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

第四届“互动出版杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

1260

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email：2011@tzmcm.cn

2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机水面迫降最佳姿态

关 键 词 物理受力分析、数学积分方法、最佳迫降姿态

摘 要：

本文对客机由于各种原因导致失去动力而在水面迫降，针对将安全系数上升至最大或将损失减小到最小的飞机最佳迫降姿态建立模型并进行分析。通过分析，飞机能否迫降成功主要取决于飞机能否承受水对飞机底面产生的应力和飞机迫降时的加速度是否超过人所能承受的加速度的极限值。通过对飞机迫降瞬间与水面之间的倾角以及迫降时的加速度分析，建立了机头先接触水面和机尾先接触水面两种不同模型。综合运用受力分析，运动状态变化分析，压强分析，数学积分等方法来解决这一问题。

对于问题（1），为简化模型利于求解，我们将水看作为可压缩的弹性物质。有力学知识结合数学积分方法建立当飞机与水面接触时初速度为一定情况下水对飞机产生的应力 σ 与飞机与水面倾角 θ 的函数关系式，求出水对飞机应力最小情况下，飞机两翼与水面的倾角 θ_0 。

对于问题（2）（3），我们通过各种途径查找有关飞机各方面的参数，对问题（1）所得到的倾角 θ 做可行性分析。

对于模型的求解，我们利用 mathematics 软件，求出水面对飞机应力与飞机与水面的倾角 θ 的函数关系式。由于方程十分复杂，我们计算不同倾角 θ 时的应力最大值，由此判断飞机的最佳飞行姿态。

更进一步，我们对此方案进行了改进。在实际情况下，飞机是以三维模型与水面相接触的，我们将建立的二维模型向实际推广，大致确定三维情况下比较合理的 θ 值。

参赛队号 1260

所选题目 A

参赛密码 _____
(由组委会填写)

第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会
电话：0471-5220129

邮编：010021

网址：www.tzmcm.cn
Email: 2011@tzmcm.cn

英文摘要（选填）

Passenger plane may be forced loading on the surface of water when it out of motive power, this article establish to analysis the best gesture to make sure more safety or less wastage on the model. Through analysis, we found that weather it is success due to if the plane can bear the stress the water act on the plane and if people can bear the accelerated speed when the plane is forced loading. We set two different models, the aircraft nose touches water first and the tail touches water first via to analysis the dip angel at the moment when the plane is touching water and the accelerated speed when the plane is forced loading. We integrated use of force analysis on the structure and state of motion analysis and pressure analysis and so on to resolve this problem.

A case on the issue 1, we regard the water as the reduced model elastic materials which can compress to convenient us to count. We establish the functional relationship of the stress named δ which is water act on the plane and the dip angel named θ which is between the plane and the surface of water by the mechanics science combine with math integral when the plane touches water and we take the initial velocity is a fixed record. We should work out the dip angel θ_0 between the aerofoil and water when the stress is the minimum.

A case on the issues 2 and 3, we have found the parameters of aircraft by some ways to make a feasibility analysis about the dip angel θ which is mentioned in the issue 1.

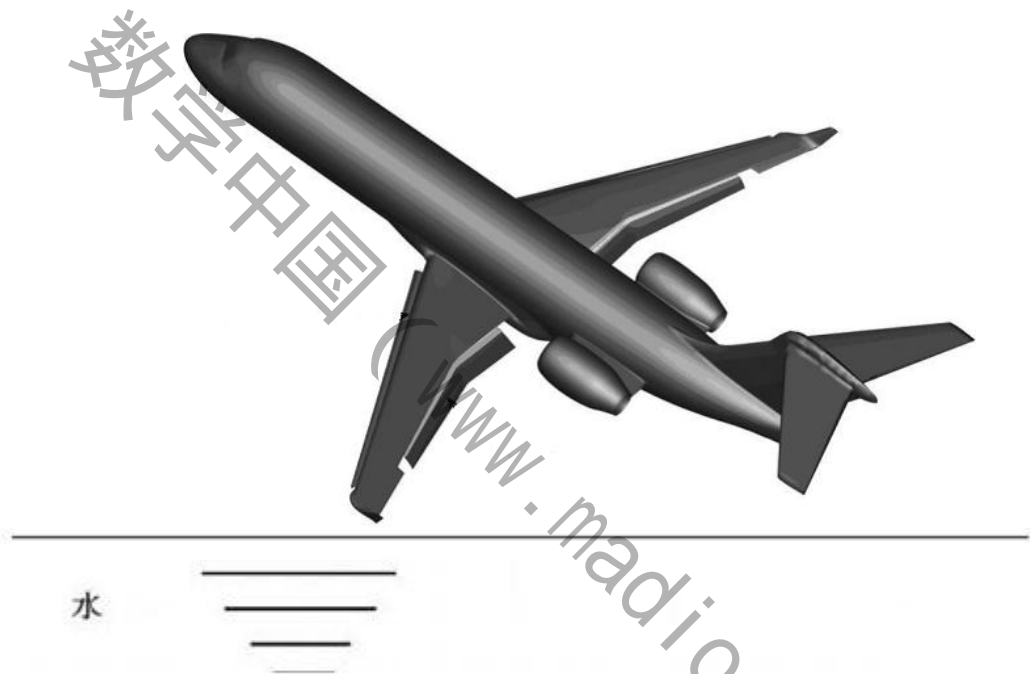
We used mathematics software to work out the functional relationship of the stress which is water act on the plane and the dip angel between the plane and the surface of water. We can work out the maximum stress on the different dip angels to judge the best gesture when the plane is forced loading due to the complex equations.

Finally, we have improved our project to make it better. In practical, the model is three-dimensional of plane touches water, and we extend the two dimension model to resolve the problem and certain the rational number of the θ approximately.

一. 问题的重述

为使客机在平静水面成功迫降，选择最好的姿态接触水面。需建立合理的数学模型解决下列问题：

- (1) 飞机与水面接触时的飞行速度给定，判断在飞机与水面倾角一定时，飞机与水面接触过程中机身能否承受水面对飞机的最大压力。
- (2) 为保证飞机迫降停止后，飞机上的乘客有足够的时间安全撤离，飞机应在尽量短的时间内停止，且没入水的深度足够小。
- (3) 在飞机与水面接触过程中飞机的速度会骤然下降，此时必然产生很大的加速度。此加速度是否能在乘车所能承受的极限范围内，若这一点无法保证，对问题的求解就毫无意义。



二. 模型的假设与符号说明

2.1 模型假设

- (1) 飞机两翼与水平面得倾角相同，忽略左右两翼歪斜情况；
- (2) 飞机可以任意合适的的倾角与水面相接触；
- (3) 水面足够宽，能保证飞机从接触水面到停止过程中的滑行距离；
- (4) 不考虑水上其他障碍物得影响，以及飞机接触水面前一段过程飞机的飞行状态；
- (5) 驾驶员驾驶状态正常，驾驶技术相当，飞机性能相当；
- (6) 飞机上的乘客正常，所能承受的加速度极限值与正常人相同；
- (7) 可以将整个飞机看作是一个长方体刚体，飞机与水面相接触是以底面相接触的；
- (8) 水内部任一点沿流动方向的粘滞力为零；
- (9) 飞机与水面接触过程中，不考虑水向周围扩张，把水看成是可压缩的弹性物质；
- (10) 飞机从于水面接触到停止整个过程都未完全没入水中；
- (11) 不考虑飞机竖直方向的空气阻力，考虑飞机水平方向的空气阻力。

参赛队号 #1260

2.2 符号说明

v	飞机与水面刚接触时的速度
v_t	飞机与没入水中 t 时刻的速度
v_x	飞机与水面刚接触时水平方向的速度分量
v_y	飞机与水面刚接触时竖直方向的速度分量
v_{xt}	飞机水平方向的速度
v_{yt}	飞机竖直方向的速度
a_y	飞机在竖直方向的加速度
a_x	飞机在水平方向的加速度
a_{\max}	人体所能承受的极限加速度
a_l	飞机加速度
s_y	竖直方向的位移
s_x	水平方向的位移
F_N	飞机所受水面的冲力
F	飞机所受的浮力
F_x	飞机在水平方向所受到的合力
F_y	飞机在竖直方向所受到的合力
f_x	未没入水中机体部分水平方向所受空气阻力
f_y	未没入水中机体部分竖直方向所受空气阻力
M	飞机的质量
G	飞机的重力
θ_1	飞机前部与水面相接触时，两机翼构成的平面与水平面的倾角
θ_2	飞机后部与水面相接触时，两机翼构成的平面与水平面的倾角
θ	飞机与水面相接时的倾角
a	飞机的长度
b	飞机的宽度
c	机身的厚度
l_1	前轮到机头的距离
l_2	后轮的机尾的距离
d_1	前轮到机身的距离
d_2	后轮到机身的距离
h	水深
ρ	水的密度
K	体积模量
ΔV	水被压缩时体积变化量

参赛队号 #1260

V	某区域内水的体积
g	重力加速度
S	飞机没入水内面积
p	飞机压缩水时产生的压力
k	空气阻力系数
σ	飞机单位面积上所受到的冲击力

三. 问题的分析

由于飞机迫降与水面接触过程中，可能会遇到大面积水草；漂浮在水面上的物体等障碍物的影响，以及驾驶员心理问题导致迫降过程出现异常情况。为利于简化模型，我们忽略飞机多次迫降情况，模型建立在一次性迫降成功基础上。同时我们也不考虑飞机两翼的歪斜情况。

对于问题（1），我们考虑，在飞机与水面以一定的速度 v 相接触时，飞机与水面的倾角 θ 取何值时，飞机机身所受水面的压力情况，而不考虑飞机在与水面接触前的运行状态。由于飞机是以很高的速度与水面相接触，必然在接触的极短时间内受到水面对它很大的冲力，因此，我们不妨假设飞机与水面接触时水面由于惯性不会向四周扩散。同时，我们把水面看成弹性物质，飞机与水面接触时水会向下被压缩，此时水会产生体积形变，我们利用体变公式 $\Delta p = K \frac{\Delta V}{V}$ 计算水发生体变时的压强变化量 Δp ，然后利用压强公式通过数学积分方法计算水对飞机的反冲力 F_N 。之后，我们利用平均压强公式 $\bar{p} = \frac{F_N}{S}$ 求解飞机没入水内部分的平均压力，再对压力求最大值。此值即是飞机在飞行速度一定，与水面倾角为 θ 时，飞机没入所受的最大压强。此 θ 值将是我们初步确定的飞机与水面接触时的最佳飞行姿态。对于模型所得到的结果，我们最终由通过各种途径搜集到得各种实际情况来对所求的 θ 值进行检验与修订，以弥补该模型的缺陷与不足。

对于问题（2），一旦飞机与水接触时的倾角确定后，我们由此解出飞机没入水中的深度与飞机在水面上滑行的距离。对此数据作可行性分析。

对于问题（3），我们利用问题（1）所得到的 θ 值结合飞机与水面接触时的速度 v 确定飞机在与水面接触时的最大加速度。通过各种途径找出正常人体所能承受加速度的极限值，从而确定此倾角 θ 值是否合理。若此 θ 值不合理，我们根据问题（1）重新确定合理的倾角 θ 。

看来问题（1）的求解是整个问题的关键，对此我们建立两个不同的模型：

模型一：飞机前部先于水面相接触。由于实际情况，出于飞机前轮先与水面相接触之后，机身再与水面相接触的限制，则在接触过程中，飞机两翼与水平面构成的倾角值必然不能过大，这样我们就可以求出飞机与水面接触时的最大倾角 θ_1 。飞机与水面接触过程中，我们把飞机看作是长方形刚体。飞机前部与水面接触过程中，我们根据水的压力公式及牛顿第二定律，通过积分方法求出水对机身的冲力 F_N ，找出最小压强下，机身与水面倾角 θ_1 值。

模型二：飞机后部先于前部与水面相接触。由于实际情况，飞机后轮先与水面相接触之后，机身再与水面相接触。则在接触过程中，飞机两翼与水平面构成的倾角值必然不能过大，这样我们就可以求出飞机与水面接触时的最大倾角。求解飞机后部与水面相

参赛队号 #1260

接触时的最佳倾角 θ_2 时，其分析方法同模型一。

最终，比较由模型一与模型二所得到的数据，确定 θ 值。根据问题（2）和问题（3）判断给出的飞机在水面迫降时的最佳飞行姿态是否合理。

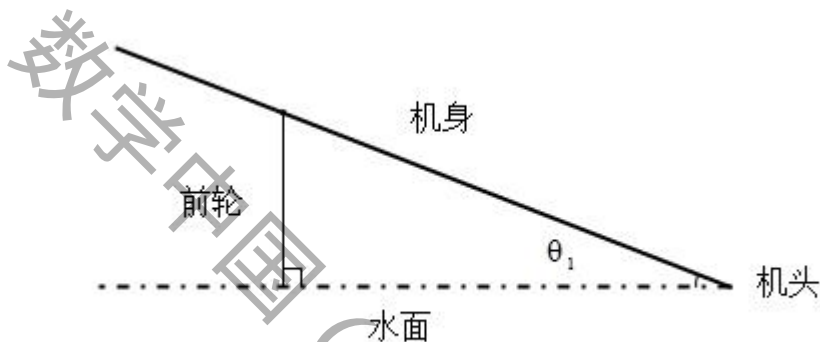
四. 模型的建立与求解

4.1 问题（1）的解决方案及模型

4.1.1 应用几何方法建立模型

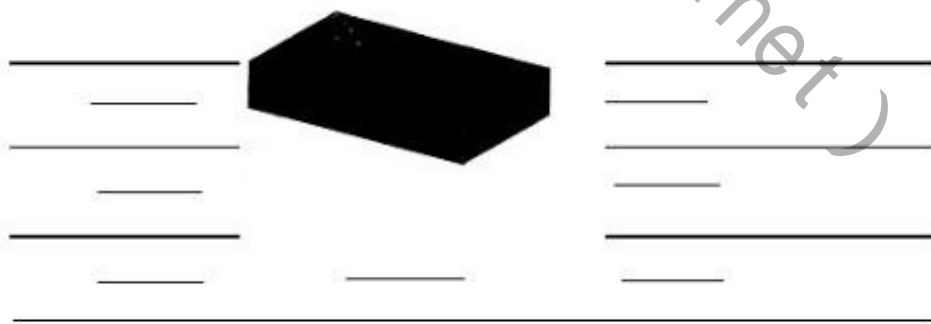
模型一：前部先着水

要求前轮先于机头与水面相接触，首先需保证倾角 θ_1 值不要过大，假设前轮与机头恰好同时与水面相接触，其模型如下：



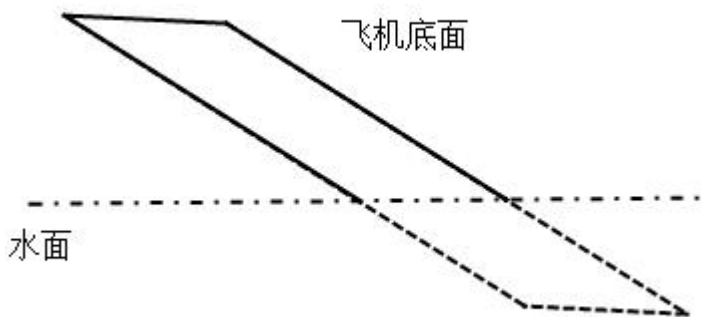
$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{d_1}{l_1}\right)$$

飞机前部没入水中示意图如下：

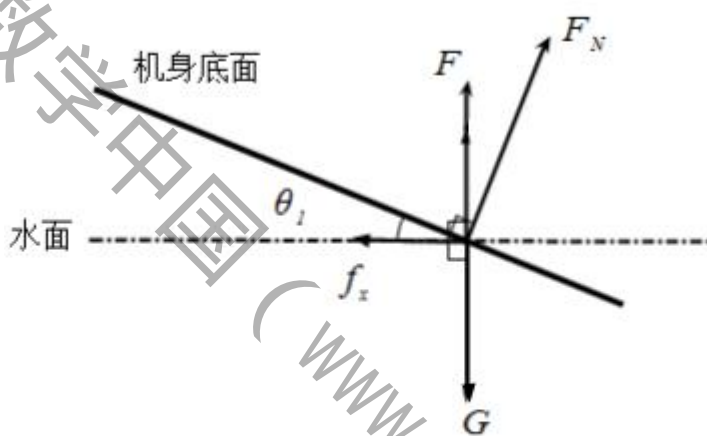


水体模型

飞机与水接触底面与水接触，故简化示意图如下：

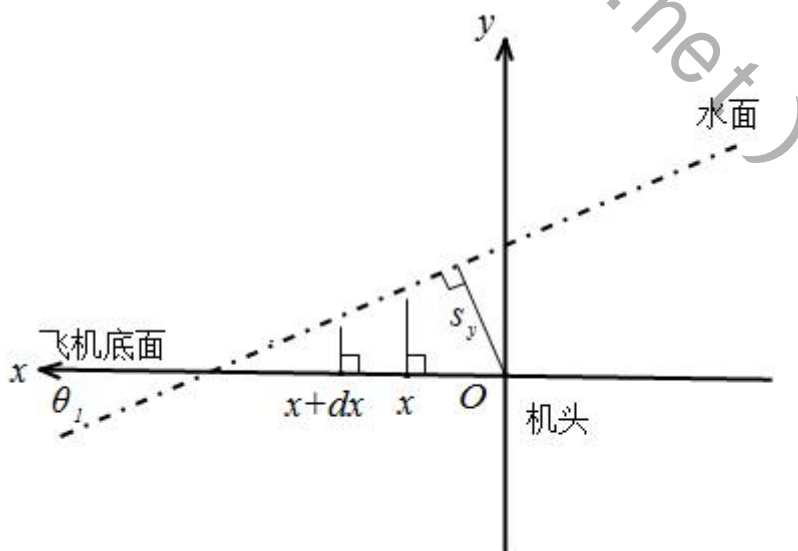


对其进行受力分析，如下所示：



飞机前部进入水中的受力分析图

以飞机底面为 x 轴，以垂直于机身底面的方向为 y 轴建立如下所示直角坐标系：



参赛队号 #1260

飞机机头作为坐标原点，飞机在竖直方向及距离水面的距离为 s_y ，由此可计算出飞机机头在坐标上的位置 $x = \frac{s_y}{\sin \theta_1}$ 。现用微分方法求解，没入水中飞机受到水面的冲击力。不妨对 x 轴进行无限细分，取处于坐标轴上 x 处一小段进行考虑，该处距离水面高度为 $x \sin \theta_1$ 。如图所示，在假设上把水作为弹性物质，且不考虑水在压缩过程中不想四周

扩散，故水在此处由于被压缩产生的压强 $p = K \frac{\Delta V}{V} = K \frac{\left(\frac{s_y}{\sin \theta_1} - x \right) \sin \theta_1}{h}$ ，由于 dx 很小，我们认为从 x 到 $x + dx$ 的压强不变。在此处机身底由于受到水的冲击力 $dF_N = p dx$ ，故

没入水中的机身底面受到水的冲击力 $F_N = \int dF_N = \int_0^{\frac{s_y}{\sin \theta_1}} p dx$
故

$$\begin{aligned} F_N &= \frac{K}{h} a \int_0^{\frac{s_y}{\sin \theta_1}} (s_y - x \sin \theta_1) dx \\ &= \frac{K}{h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_1} - \frac{K}{2h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_1} \\ &= \frac{K}{2h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_1} \end{aligned}$$

没入水中机身部分受到水对机身的浮力为：

$$F = \rho g \frac{s_y}{\sin \theta_1} ac$$

飞机在水平方向所受到的空气阻力：

$$f_x = kv_{xt}^2$$

飞机竖直方向所受到合力为：

$$\begin{aligned} F_y &= -G + F + F_N \cos \theta_1 \\ &= -G + ac\rho g \frac{s_y}{\sin \theta_1} + \frac{K}{2h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_1} \cos \theta_1 \end{aligned}$$

飞机水方向所受到的合力为：

$$F_x = F_N \sin \theta_1 - f_x = \frac{K}{2h} a s_y^2 - f_x$$

飞机在水平方向的加速度为：

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{K}{2Mh} a s_y^2 - \frac{f_x}{M}$$

飞机在竖直方向的加速度为：

$$a_y = \frac{F_y}{M} = -g + \frac{a c \rho g s_y}{M \sin \theta_1} + \frac{K}{2Mh} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_1} \cos \theta_1$$

飞机在 t 时刻水平方向的速度分量为：

$$v_{xt} = v_x + \int_0^t a_x dt$$

飞机在 t 时刻竖直方向的速度分量为：

$$v_{yt} = v_y + \int_0^t a_y dt$$

飞机在竖直方向的位移为：

$$s_y = \int_0^t v_{yt} dt$$

飞机没入水中的面积为：

$$S = a \frac{s_y}{\sin \theta_1}$$

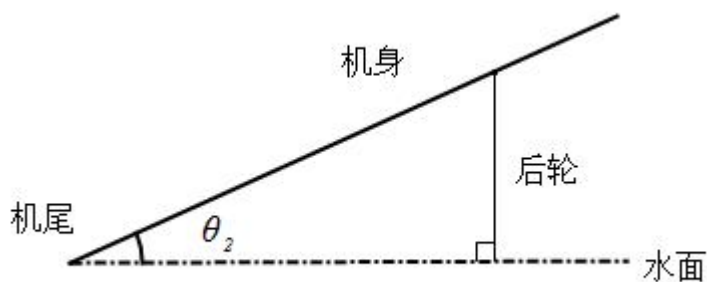
飞机没入水中其表面受到的应力：

$$\sigma = \frac{F_N}{S}$$

4.1.2 模型二：后部先着水

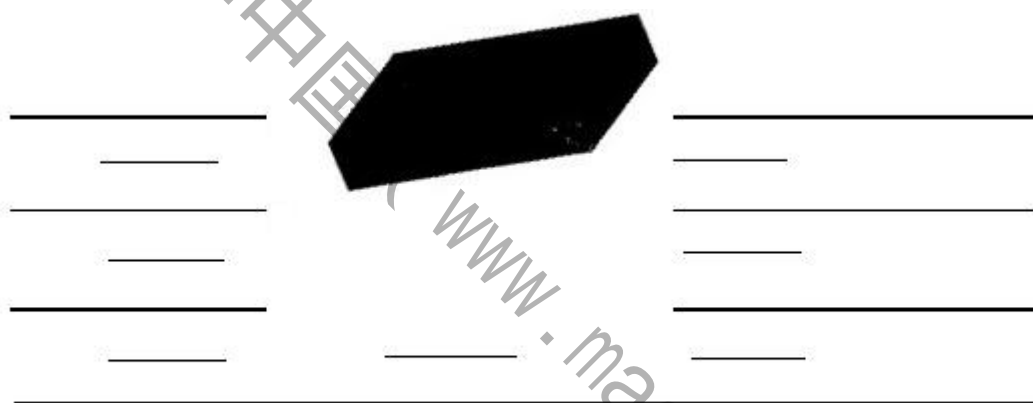
要求后轮先于机头与水面相接触，首先需保证倾角 θ_2 值不要过大，假设前轮与机头恰好同时与水面相接触，其模型如下：

参赛队号 #1260

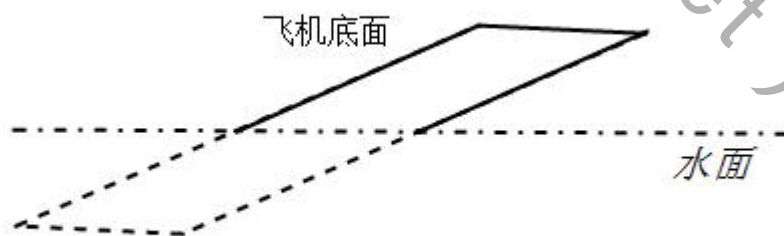


此时， $\theta_2 = \arcsin\left(\frac{d_2}{l_2}\right)$

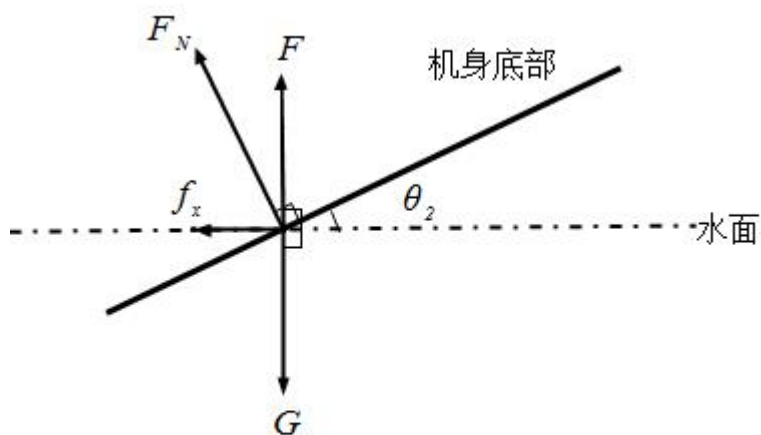
从飞机与水接触到没入水中：对应的示意图如下：



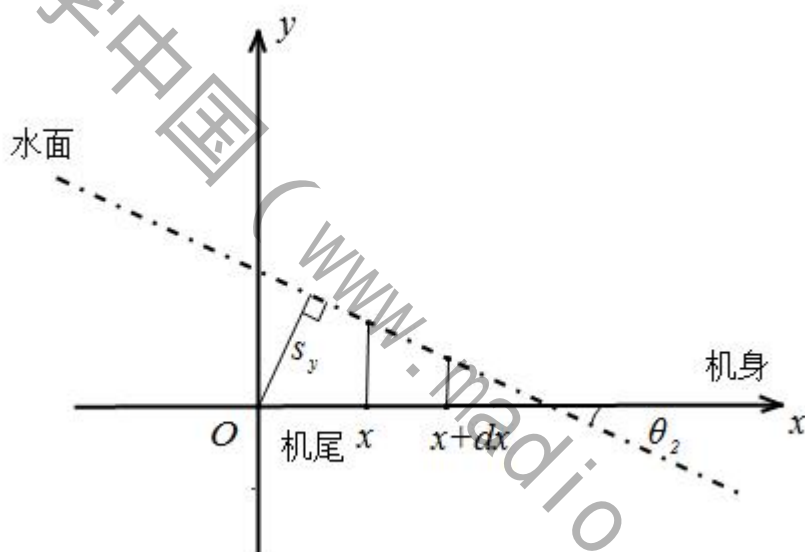
水体模型



对飞机进行受力分析，如下所示：



飞机后部进入水中的受力分析图



其分析过程同上，有：

$$F_N = \frac{K}{h} a \int_0^{\frac{s_y}{\sin \theta_2}} (s_y - x \sin \theta_2) dx = \frac{K}{2h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_2}$$

没入水中机身部分受到水对机身的浮力为：

$$F = \rho g \frac{s_y}{\sin \theta_2} ac$$

飞机在水平方向所受到的空气阻力：

$$f_x = kv_{xt}^2$$

飞机竖直方向所受到合力为：

$$\begin{aligned}
 F_y &= -G + F + F_N \cos \theta_2 \\
 &= -G + ac\rho g \frac{s_y}{\sin \theta_2} + \frac{K}{2h} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_2} \cos \theta_2
 \end{aligned}$$

飞机水方向所受到的合力为：

$$F_x = -F_N \sin \theta_2 - f_x = -\frac{K}{2h} a s_y^2 - f_x$$

飞机在水平方向的加速度为：

$$a_x = \frac{F_x}{M} = \frac{K}{2Mh} a s_y^2 - \frac{f_x}{M}$$

飞机在竖直方向的加速度为：

$$a_y = \frac{F_y}{M} = -g + \frac{ac\rho g s_y}{M \sin \theta_2} + \frac{K}{2Mh} a \frac{s_y^2}{\sin \theta_2} \cos \theta_2$$

飞机在 t 时刻水平方向的速度分量为：

$$v_{xt} = v_x + \int_0^t a_x dt$$

飞机在 t 时刻竖直方向的速度分量为：

$$v_{yt} = v_y + \int_0^t a_y dt$$

飞机在竖直方向的位移为：

$$s_y = \int_0^t v_{yt} dt$$

飞机没入水中的面积为：

$$S = a \frac{s_y}{\sin \theta_1}$$

飞机没入水中其表面受到的应力：

$$\sigma = \frac{F_N}{S}$$

4.2 问题（2）的解决方案

飞机在水平方向的位移为：

$$S_x = \int_0^t v_{xt} dt$$

由问题（1）给出的公式可知，飞机后部先于前部着水，在相同的情况下，水平方向加速度更大，加速度方向与速度方向相反，产生的位移更小。故飞机后部先于前部着水，面临的风险系数更小。因此，我们只需计算模型（2）的最佳倾角 θ_2 即可。

4.3 问题（3）的解决方案

由问题（2）所给出的最佳倾角 θ_2 判断此时飞机刚接触水面时产生的加速度是否超过人体所能承受加速度的极限值。

飞机与水面接触时产生的加速度为：

$$a_l = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)}$$

五. 模型的求解

以下是题中所给迫降成功飞机的主要技术参数：

机 型	全 长 (m)	机 高 (m)	机 身 高 (m)	最大起飞 重量 (Kg)	空 重 (kg)	前主轮距 (m)	主轮距 (m)
A320-200	37.57	11.76	5.87/5.94	73,500	42400	12.63	5.07

我们不妨取飞机飞行时的质量为 50000kg。

由资料可知，人体的死亡加速度 $a_{man}=500g$ 。

由模型（2）所建立的微分方程代入数据得到如下微分方程：

$$\frac{d^2 s_y}{dt^2} = -75.14 \times \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} s_y^2 - 86.597 \times s_y + 9.8 \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{K}{2h} s_y \quad (2)$$

现在利用 mathematics 求解微分方程（1），其代码如下：

DSolve[D2 $s_y[t]$ ==

9.8 - 86.597* $s_y[t]$ - 75.14*(cos[i/180*Pi]/sin[i/180*Pi])* $s_y[t]^2$,
 $s_y[t]$, t]

参赛队号 #1260

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[1] = \left\{ s_y[t] \rightarrow \right. \\
 & \frac{0.00665425 \left(-86.597 - 1. \sqrt{7499.04 - \frac{300.56 \cos\left[\frac{i\pi}{180}\right] (-9.8 - D2x[t])}{\sin\left[\frac{i\pi}{180}\right]}} \right) \sin\left[\frac{i\pi}{180}\right]}{\cos\left[\frac{i\pi}{180}\right]}, \\
 & \left. s_y[t] \rightarrow \right. \\
 & \frac{0.00665425 \left(-86.597 + \sqrt{7499.04 - \frac{300.56 \cos\left[\frac{i\pi}{180}\right] (-9.8 - D2x[t])}{\sin\left[\frac{i\pi}{180}\right]}} \right) \sin\left[\frac{i\pi}{180}\right]}{\cos\left[\frac{i\pi}{180}\right]} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

由方程（2）可知， σ 正比于 s_y ，由方程（1）的解我们大致可确定，当倾角 θ 取 10° 左右时，飞机与水接触时所受水的最大应力 σ 取到较小值，且在人体所能承受的极限加速度范围类，此倾角应是飞机与水接触时的最佳飞行姿态。

六. 结果分析

本题中对模型结果产生影响的因素有很多，但通过上述方程我们大致可以确立影响飞机最佳飞行姿态的因素主要是飞机与水面接触时的倾角。由于上述方程十分复杂，超出了计算机所能计算的范围，利用一般作图工具也无法绘出准确图形。但我们可以取 θ 值在确定情况下飞机所受水面的应力，只要 θ 取得足够密集，得出来的结论就越接近最佳倾角。

本题的模型十分简化特殊，但方程求解却十分复杂，现阶段以我们的能力无法求解，因此模型存在一定缺陷，但对飞机水上迫降研究具有重大意义。

七. 模型的优缺点及改进方向

6.1 模型的优点：

- （1）利用物理知识结合数学积分方法分析问题显得比较直观，容易理解；
- （2）就飞机与水面接触时，将水看成是可压缩的弹性物质，具有一定的创新性，也使问题容易求解；
- （3）对于问题（1）建立两个模型，模型建立在物理与数学基础上，利用严格的数学推导，具有一定的严密性，并具有很好的适用性。基于问题的模型也易于求解，所得方案可操作性强，具有较强的扩展研究意义。

6.2 模型的缺点：

- （1）模型过于理想化，可能在实际上具有一定的局限性；
- （2）数据量有限，在参数的确定上有欠缺，忽略其他未考虑因素。

6.3 模型的改进：

参赛队号 #1260

(1) 在模型建立过程中，只考虑到飞机两翼是平行与水面相接触，忽略了飞机两翼歪斜的情况。为使模型更具有实际操作性，将飞机与水接触的情况由二维情况上升到三维情况，进行更为严密的分析。

(2) 与水接触的过程中，把飞机看成是一个长方体刚体，实际上飞机各部分的截面积是有所区别的，而且飞机各部分所能承受的应力也有所区别。因此，应分析飞机与水接触过程中各部分的受力情况，利用拉格朗日-欧拉耦合法计算出飞机各部分的受力情况，判断飞机各部分是否能承受水对其压力。

(3) 由于水面空间有限，而且水面上多有其他障碍物的影响，实际上，飞机一次性迫降成功的几率是很小的，大部分情况下都是要经过多次重复模拟迫降才能成功。

基于以上情况，我们可以将飞机看成同轴但其截面积各不相同的模型，建立三维立体模型，利用积分方法结合物理分析求出飞机与水接触时各部分所受应力情况。通过各种途径查找飞机各部分能够承受应力情况，判断出飞机与水面接触时的最佳倾角。

6.4 模型的推广：

在计算过程中我们发现当飞机靠近水面时，水面对飞机表面的应力较小，基于这种情况我们建立对飞机与水面接触时更接近实际情况的三维模型。由上述计算及考虑到飞机表面各部分所受最大应力不同，我们在此给出飞机与水接触时在三维模型下的合适倾角。其示意图大致如下：



参考文献：

[1] 佚名，飞机主要技术参数简表，

<http://wenku.baidu.com/view/3ac34fe69b89680203d8255e.html>，2011年4月24日

[2] 佚名，死亡加速度，

<http://baike.baidu.com/view/561157.htm#sub561157>，2011年4月24日