

2008 年 第一届“数学中国杯”

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了首届“数学中国杯”数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：1543

参赛队员（签名）：

队员 1：曹原

队员 2：张雯

队员 3：李笛

参赛队教练员（签名）：白恩健

参赛队伍组别：大学组

2008 年 第一届“数学中国杯”

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：
1543

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2008 年 第一届“数学中国杯” 数学建模网络挑战赛

题 目 方格炸飞机之计算机获胜策略

关 键 词 飞机对战游戏 概率统计 随机数法 策略

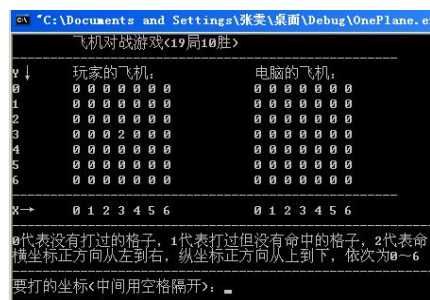
摘 要

本题主要研究如何在最短时间内寻找到敌人隐藏飞机的机头。参赛者利用概率统计与枚举方法，通过随机数法确定了基本点，再通过换步长法进行搜索，最终分析计算寻找到被攻击飞机的头部。

文中详细阐述了在一个飞机和两个飞机情形下的人机对战中计算机获胜的策略，给出了两者策略的不同点，并进一步讨论了文中所提模型的优缺点。最后，就模型的优化方法提出了几个设想。

参赛者用 C 语言模拟了对战的过程：

- 屏幕左边为自己的飞机，屏幕右边为敌人的飞机，均为自动生成。若为两架飞机，两架飞机不可重叠，但可以挨着摆放；
- 自己的飞机布局直接显示，敌人的飞机布局隐藏；如图



- 用输入坐标方式实现对该点打击，根据自己的打击结果来推理敌人的飞机布局情况；打中飞机的头时飞机被击落（标记为 3），打中身体飞机被击伤（标记为 2），打空标记为 1；只有打中飞机的头部，飞机才能被击落；
- 最先击落 2 架飞机者获胜一局，实行 19 局 10 胜制。

参赛队号 1543

所选题目 D 飞机对战游戏

参赛密码 _____
(由组委会填写)

方格炸飞机之计算机获胜策略

问题重述

一个游戏，在游戏中人机双方分别拥有一张 7×7 坐标纸，其上各有一架飞机，游戏时双方交替用“炮弹”打击对方，因为人机坐标互相隐藏，攻击的一方要报告“炮弹”打击的位置，被攻击方报告飞机是否被击中，接下来刚才的被攻击方变成攻击方进行上面的攻击步骤，双方交替攻击对方，如果某一方被命中机头，游戏结束，被命中机头的一方失败。游戏双方都在通过打击后对方的反馈信息来猜测对方飞机的位置。游戏比赛采用 19 局 10 胜制。

问题一：设计一个人机对战的“飞机对战”游戏。要求先由计算机进行攻击，以取胜为目标，给出进行游戏的策略。

问题二：考虑在 9×9 坐标纸上画两架飞机的游戏方式，两架飞机所占的格子不能重合，游戏方法同上。其中一架飞机被命中机头时要报告有一架飞机被击落。当某方的两架飞机都被击落时游戏结束，被击落方失败。分析这种游戏方式与只画一架飞机的游戏方式在策略上的不同点。

问题的分析与求解

一、一架飞机模型

1 问题分析

在只有一架飞机的模型中，由于矩阵的高度对称性，我们只需要分析一个方向的问题，统计机身在各点出现的概率，从出现机身概率最大的点入手，通过扩大搜索步长的方法向已确立点周围寻找其他机身出现点，由于飞机呈士字形，机翼与机尾长度不等，因而两点便可确定机身方向通过计算便可以找到机头位置，便能赢得游戏。

2 模型的假设

- 1) 人机对话中具有高度智能，即不会点击坐标以外点。
- 2) 一点不会重复点击。
- 3) 人机对话中双方思考时间不受限制。

3 符号说明

首先我们先假设把游戏图表示为 7×7 的矩阵，飞机的机身用 1 表示，机头用 2 表示，空格用 0 表示，飞机产生之前矩阵中所有数均为 0。

4 公式应用

概率 $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$

5 模型求解

5.1 飞机的产生

首先我们利用随机函数产生一个二进制随机数，0 代表机翼横向放置，1 代表机翼纵向放置，再用随机函数产生一个 3~5 之间的随机数 x 和一个 1~7 之间的随机数 y ，如果机翼横向放置，则机头位置为 (x,y) ，接下来确定机尾中间一点的位置：再产生一个二进制随机数，0 代表机头朝下，机尾中点位置就为 $(x,y+3)$ ，将矩阵中 $(x,y) \sim (x,y+3)$ 四点置 1，再将点 $(x-2,y+1) \sim (x+2,y+1)$ 及 $(x-1,y+3) \sim (x+1,y+3)$ 置 1；1 代表机头朝上，则机尾中点位置为 $(x,y-3)$ ，将矩阵中 $(x,y) \sim (x,y-3)$ 四点置 1，再将点 $(x-2,y-1) \sim (x+2,y-1)$ 及 $(x-1,y-3) \sim (x+1,y-3)$ 置 1；同理如果机翼纵向放置，则机头位置为 (y,x) ，将上述置 1 的点处， x 与 y 互换即可，这样飞机的位置便可以确定了。

5.2 飞机的攻击策略

因为题目的要求是给出计算机率先攻击取胜的策略，所以实际上就是设计一个计算机猜测的算法，因此要充分考虑各种可能性：

(一) $(1, 1)$ $(7, 1)$ $(1, 7)$ $(7, 7)$ 四个点不予猜测；

(二) 先猜 $(4, 4)$ ：

(1) 如果未猜中，我们接着猜 $(4, 4)$ （记为点 A）周围的四个点 $(3, 4)$ $(5, 4)$ $(4, 3)$ $(4, 5)$ ，此四点中必定有点会打中。

① 若其中某一点为机头，则退出此局游戏结束，计算机获胜；

② 如果未打中机头，四点中必定打中三点，同样由于四点的等价性，我们不妨设打中为 $(3, 4)$ $(4, 3)$ 与 $(5, 4)$ 这三点，则机头出现的位置便只可能在 $(2, 3)$ 或者 $(6, 3)$ 位置，依次击打直至打中。

(2) 考虑点 $(4, 4)$ 打中：

如果打中正为机头则结束游戏，计算机获胜；如果未打中机头，则依次猜点 $(4, 4)$ 上下左右距其两格的点 $(2, 4)$ $(4, 2)$ 与 $(6, 2)$ $(4, 6)$ 至打中：

① 如果某颗打中机头结束游戏，计算机获胜；

② 如果没打中机头，即打中点为 B，记为点 B（由于四点的对称性，不妨设点 B 为 $(4, 6)$ ），同时扩大搜索半径，打 AB 延长线上点 A 点 B 的相邻点，此处为 $(1, 4)$ 与 $(5, 4)$ ，会出现两种情况：

1> 若两点均空，则线段 AB 为机尾，则机头会出现在 AB 中点与其相距三格位置，搜索这两点至打中；

2> 若两点不空，则显然 AB 为机翼：

i 若打中只有一点则必为 A 的相邻点，记为点 C，此处为 $(5, 4)$ ，则搜索点 A 不位于线 AB 上的相邻点，至打中机头

ii 若两点均打中，则搜索 AB 中点不位于 AB 上的相邻点至找到机头。

具体解决方案：见附录一 《one plane》

Ps.程序截图



二、两架飞机模型

1 问题分析

在解决两架飞机问题上,我们首先找出两个飞机机头位置分别满足(上 上)(下 下)(左 左)(右 右)(上 下)(上 左)(上 右)(下 上)(下 左)(下 右)(左 上)(左 下)(左 右)(右 上)(右 下)(右 左)等情况的坐标,经过大量的统计,得出所有可能的机头位置组合及次数。然后从最多的组合点开始猜测,这样第一次猜测就有可能排除掉很多种可能性,得出较为优化的解。依照一架飞机模式,我们先搜索出一架飞机,然后我们可以在一架飞机的基础上,先将第二架飞机也单独出来考虑,然后再将第二架飞机通过平移、旋转等方法将其填入第一架飞机所在坐标系,即在重复搜索的同时排除第一架飞机及已轰炸过的点,这样就能将第二架飞机机头找出,问题就能解决了。

2 模型的假设

- 1) 人机对话中具有高度智能,即不会点击坐标以外点。
- 2) 一点不会重复点击,而且已击中飞机机身上的点不再受击。
- 3) 人机对话中双方思考时间不受限制。

3 符号说明

首先我们先假设把游戏图表示为 9*9 的矩阵,飞机的位置用 1 表示,空格用 0 表示,飞机产生之前矩阵中所有数均为 0。

4 公式应用

概率 $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$

5 模型求解

5.1 两架飞机的产生办法

因为要产生两架飞机,而且无论其中一架怎么放置,我们都可以将另一架放入。

- ✧ 我们先画入一架飞机:首先我们一个二进制随机数,0 代表机翼横向放置,1 代表机翼纵向放置,再用随机函数产生一个 3~5 之间的随机数 x 和一个 1~7 之间的随机数 y ,如果机翼横向放置,则机头位置为 (x,y) ,接下来确定机尾中间一点的位置:再产生一个二进制随机数,0 代表机头朝下,机尾中点位置就为 $(x,y+3)$,将矩

阵中 $(x,y) \sim (x,y+3)$ 四点置 1,再将点 $(x-2,y+1) \sim (x+2,y+1)$ 及 $(x-1,y+3) \sim (x+1,y+3)$ 置 1;1 代表机头朝上,则机尾中点位置为 $(x,y-3)$,将矩阵中 $(x,y) \sim (x,y-3)$ 四点置 1,再将点 $(x-2,y-1) \sim (x+2,y-1)$ 及 $(x-1,y-3) \sim (x+1,y-3)$ 置 1;同理如果机翼纵向放置,则机头位置为 (y,x) ,将上述置 1 的点处,x 与 y 互换即可,这样飞机的位置便可以确定了。

- ✧ 接下来我们将第二架飞机填入,设想此架飞机仍填入一个全为 0 的矩阵中,为了说明方便我们设此架飞机机头坐标为 (x_0,y_0) ,按照上述方法将飞机放置点置 1,在将这些点置 1 时必须判断他们是否已经是 1,如果有点已经为 1,则退出重新生成飞机,如此循环直至完全符合条件。

5.2 飞机的攻击策略

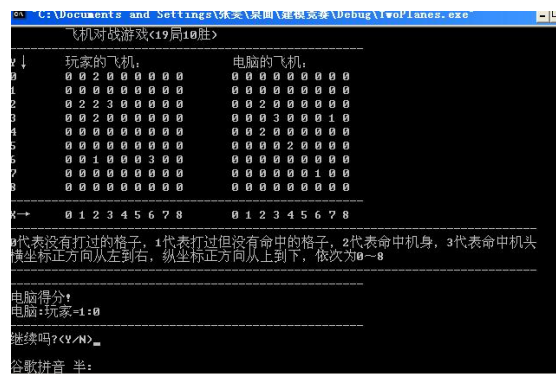
1. 第一架飞机射击方法: 经过对飞机 16 种机头不同方式的放置位置, 初步得出比较合理的高概率统计结果。即当机头为(上, 上)时, 得出横坐标为 7 的位置最容易出现机身(头), 由于对称的原因, 可类似得到(下, 下), (左, 左), (右, 右); 当机头为(右, 上)时, 得出横坐标为 6 或 7 的位置最容易出现机身(头), 由于对称的原因, 可类似得到(左, 上), (右, 上), (上, 左), (左, 下), (右, 下), (下, 左), (下, 右); 当机头为(上, 下)时, 得出横坐标为 7 的位置最容易出现机身(头), 由于对称的原因, 可类似得到(下, 上)。

综上分析, 可以得出, 当横坐标或纵坐标为 7 时, 击中概率最高, 因此得到, 第一步首先依次按照顺序 (3, 7), (7, 3), (3, 3), (7, 7), (4, 4) 射击, 设中其中任一点则停止剩下点的射击。射中后, 按照类似于射击一架飞机的方法进行射击。最终即可确定第一架飞机被射中。

2. 第二架飞机射击方法: 搜索步骤 1 中设定五个点 (3, 7), (7, 3), (3, 3), (7, 7), (4, 4) 未搜索过的点, 首先以顺时针的顺序射击。根据对其进行的大量试验, 得出第二架飞机最可能进入这五点, 这样就可以减少很多可能不会出现第二架飞机的位置。若射击成功, 则可以按照射击第一架飞机的方法继续对第二架飞机进行射击。若未能射中, 计算机将会用 random 方法进行搜索, 尽管如此, 这种情况出现的概率明显要小, 这是在进行的 random 就要好得多了。

具体解决方案: 见附录二《two planes》

Ps 程序截图



三、模型一与模型二的区别：

1 射击第一步时的不同点：

模型一：

此模型使用的是 7×7 方格，飞机出现点的概率差别较大，成由中央向两边递减趋势，因而中心点出现飞机的概率最大，射击的第一点自然从中心开始。

模型二：

由于方格数变大为 9×9 ，且飞机数变为两架，因此第一个射击点并不是射击 (4, 4) 这么简单，为取得可能出现的位置的最大策略，我们利用大量试验的方法得出，再 (3, 7), (7, 3), (7, 7), (3, 3), (4, 4) 这四个点为最优首先射击点。

2 模型二对第二架飞机射击的要求：

在对第一架飞机射击成功后，第二架飞机的位置不能随意放置。这是电脑将会对第二架非出现的位置进行一定的控制。我们采取同样试验的方法，得出第二架飞机仍进行顺时针射击上一步中的五个点中还未被射击过的点。若五个点中有任一个射中就可以按照射击一架飞机的方法继续进行射击。若五个点均未射中飞机（此种情况极少情况下出现），我们减让计算机进行 random 搜索。

3 对计算机的难度系数不同，取胜概率不同：

模型一：

由于只有一架飞机，使用的猜测步数无论对于人还是对于机器都较少，因而机器取胜的概率就相对较小，从而对程序的时效性要求较高，但由于计算机的计算是程式化的高于人，因而从这方面讲计算机将在人机对战中占据优势地位。

模型二：

除了和模型一同样的步骤外，对第二架飞机的第一步射击若未射击成功，将进行又一次 random 方法，因此，模型二射中飞机的概率会低于第一架飞机射中的概率，进行搜索的时间可能会长一些。模型二的复杂程度明显有一定的提高，计算机将稍慢些集中飞机。

模型的优缺点及进一步讨论

一、模型的优点

- 1 在一架飞机模型中，我们成功的利用了扩大步长的搜索方式，并且加入了智能化的计算，从而使飞机以最大的概率及最少的步骤完成设定的任务，减少了搜索的步数，有效地节省了时间消费；
- 2 程序可以对人机端的操作进行“追踪”，显示出双方的每一步操作，实现了“操作透明化”，整个操作过程方便，易懂。
- 3 在用来解决问题的程序中，实现了很好的可视化效果，和交互作用。

二、模型存在的不足：

- 1 在解决问题的两个方案中，我们的飞机即使被打落了，退出游戏时也未能将飞机的整个机身都显示出来。
- 2 由于设计需要，我们在程序中使用的是数组策略，即点的坐标是从 0 开始计数的，而我们写报告时为了说明清楚，使用的是矩阵，即点坐标的下标使从 1 开始的，这样照成了一定的差异，但不影响整个策略的实现。
- 3 两架飞机模型中，可能会有极少情况：一旦进入 random 就会进行遍历，逐个查询至搜索到。

三、关于模型的进一步讨论：

我们在剩下的时间里，对建立的模型进行了多方面的讨论，并产生了一些用于改进得更为优化的方法：

在模型二中，我们对第二架飞机采取某种固定的套路可能比 random 算法更有效的击中目标，我们考虑国在射中一架飞机后，可以采用三种方法射击下一步：

- 1 以射中的机头为起点，向四个方向 3*3 格子的对角线另一点进行射击，若未射中，继续以 3*3 的四个方向散射，这样可以快速的，较大范围的将剩余格子的特殊位置全面覆盖，这样就更容易击中飞机；
- 2 以射中的某个机翼为起点，向四个方向 3*3 格子的对角线另一点进行射击，若未射中，继续以 3*3 的四个方向散射，这样可以快速的，较大范围的将剩余格子的特殊位置全面覆盖，这样就更容易击中飞机；
- 3 以射中的机头为起点，向四个方向 4*3 格子的对角线另一点进行射击，若未射中，继续以 4*3 的四个方向散射，这样也可以更容易地击中飞机；

这几种方法尚未考虑成熟，但这样有利于提高效率，将会以提高程序的复杂度来换取算法实践上的开销，是比较好的射击方法。

附录一：一架飞机模型程序《one plane》[one plane](#)

附录二：两架飞机模型程序《two planes》[two planes](#)