

第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

#3042

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第十二届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

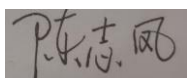
我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

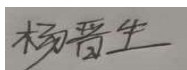
我们的参赛队号为：**#3042**

参赛队员（签名）：

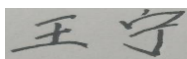
队员 1：



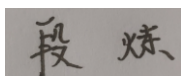
队员 2：



队员 3：



参赛队教练员（签名）：



参赛队伍组别（例如本科组）：本科组

第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

#3042

第十二届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛
编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#3042

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

第十二届数学中国数学建模网络挑战赛

#3042

2019 年第十二届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段论文

题 目 纸飞机飞行最佳投掷角度及最佳重心位置研究

关 键 词 交叉分析；CAD；力矩平衡法；微分方程；最优化求解

摘 要：

为探究纸飞机出手角度和重心位置对纸飞机飞行距离和留空时间的影响，将其分解成三个问题。问题一：纸飞机重心位置求解；问题二：飞行距离最远时的最佳投掷角度和最佳重心位置；问题三：留空时间最长时的最佳投掷角度和最佳重心位置。建立模型解决相关问题，模型一首先求解纸飞机重心坐标，使用 CAD 绘图软件剖析纸飞机的层次，绘制出三视图确定重心位置坐标，之后建立模型二和模型三具体分析重心位置与投掷角度的影响。分别对飞行距离和留空时间的影响。模型分析及结果如下：

模型一：为解决有胶带作用下的纸飞机的重心坐标把纸飞机机身和机翼拆分成很多层，其中胶带也看作是分布均匀的层次，我们先通过求解每个层次的重心坐标，再求出机身的重心坐标和机翼的重心坐标，最后整合两者重心坐标，得到了纸飞机的重心坐标。

模型二：为解决问题二，综合使用力矩平衡法、牛顿第二定律、物体斜抛微分方程，建立出飞机飞行距离与重心位置、抛射倾角的函数方程：
$$x = \frac{(1-\lambda)^2 m^2 g V_o \sin 2\theta}{((1-\lambda)mg + cV_o \cos \theta)^2}$$
。最

后，通过 MATLAB 求解方程，得出当重心到机头的距离与整体机身的长度比值为 30%，投掷出手角度为 18° 时，飞行距离最远。

模型三：通过建立微分方程和控制变量，在重心位置不变的情况下，探究留空时间与投掷角度的关系，交叉分析重心位置与投掷角度对留空时间的影响。为了进一步验证模型的合理性，我们用 MATLAB 插值法绘制出不同投掷角度和不同重心位置下纸飞机留空时间的曲线图，可以看出，当出手角度在 68° 左右，纸飞机重心距机头约为机身的 $1/4$ 时，纸飞机的留空时间达到最长。

本文从实际角度出发，结合回归分析、检验，运用 MATLAB 对多目标问题进行优化，先具体通过数学方式具体分析问题，再结合资料实验数据得出相关结论，然后在基本模型之上进一步优化，通过对纸飞机飞行距离和飞行留空时间优化，达到确定纸飞机的最佳重心位置及最佳投掷角度，最后根据模型的优缺点对模型进行推广。

参赛队号： #3042

所选题目： A 题

参赛密码
(由组委会填写)

第十二届中国数学建模网络挑战赛

#3042

英文摘要（选填）

In order to explore the influence of the paper airplane's hand Angle and center of gravity position on the paper airplane's flight distance and leave time, the paper airplane was divided into three questions. Problem 1: solve the position of center of gravity of paper airplane; Problem two: the best throwing Angle and the best position of the center of gravity when flying the longest distance; Question 3: the best Angle of throw and the best position of center of gravity for the longest time in the air. The model is established to solve relevant problems. The first model is to solve the barycenter coordinates of the paper airplane. The CAD drawing software is used to analyze the hierarchy of the paper airplane, and the three views are drawn to determine the barycenter coordinates. Impact on flight distance and dwell time, respectively. Model analysis and the results are as follows:

Model 1: To solve the problem with tape under the action of paper airplane barycentric coordinates the paper airplane fuselage and wings split into many layers, the tape is also regarded as the level of the uniform distribution, we first by solving barycenter coordinate of each level, then the center coordinates of the fuselage and wings of barycentric coordinates, the integration of both barycentric coordinates, the paper airplane center of gravity coordinate.

Model 2: In order to solve problem 2, the function equation of aircraft flight distance, center of gravity position and projectile inclination Angle was established by using moment balance method, Newton's second law and oblique projectile differential equation:

$$x = \frac{(1-\lambda)^2 m^2 g V_o \sin 2\theta}{((1-\lambda)mg + cV_o \cos \theta)^2} .$$

Finally, by solving the equation through MATLAB, it is

concluded that when the distance between the center of gravity and the head and the length of the overall fuselage is, and the throwing Angle is 18° , the flying distance is the longest.

Model 3: By establishing the differential equation and controlling variables, the relationship between the center of gravity position and the Angle of throw is explored under the condition that the position of the center of gravity remains unchanged, and the influence of the position of the center of gravity and the Angle of throw on the time of stay is cross-analyzed. In order to further verify the rationality of the model, we use MATLAB interpolation method to draw the graph of the paper airplane's holding time under different throwing angles and different positions of the center of gravity. It can be seen that when the shooting Angle is around 68° and the center of gravity of the paper airplane is about 1/4 of the fuselage, the holding time of the paper airplane reaches the maximum.

From practical perspective, this paper combined with the regression analysis, inspection, use MATLAB to optimize multi-objective problem, first, analyzing the specific mathematical way combining data related conclusions on the experimental data, the further optimization, and then in the basic model through optimization for the blank paper airplanes flying distance and time, to determine the optimal position of the center of gravity of paper planes and optimum putting Angle, according to the advantages and disadvantages to promote the model of the model.

目录

一、问题的重述.....	2
1.1背景介绍.....	2
1.2具体问题.....	2
二、问题的分析.....	2
2.1 飞行原理分析.....	2
2.2 具体问题分析.....	3
2.3 解题思维.....	4
三、问题的假设.....	5
四、名词解释与符号说明.....	5
4.1名词解释.....	5
4.2主要符号说明.....	6
五、模型的建立与求解.....	7
5.1模型一层次拆分纸飞机重心位置.....	7
5.1.1 问题的分析.....	7
5.1.2 重心位置的求解.....	8
5.2模型二纸飞机飞行距离最远.....	13
5.2.1 模型的提出与简化.....	13
5.2.2 模型的建立.....	14
5.2.3 模型的求解.....	18
5.3模型三纸留空时间最长.....	20
5.3.1 建模准备.....	20
5.3.2 模型建立.....	21
5.3.3 模型结果分析.....	28
六、模型的评价.....	29
参考文献.....	31
附录.....	32

一、问题的重述

1.1 背景介绍

纸飞机是我们大多数人童年的回忆，儿时的我们虽不懂纸飞机飞行的原理，但我们对其充满好奇心，如今我们知道小小的纸飞机却蕴含着很多值得我们探讨研究的科学问题。研究纸飞机飞行也是研究飞行器领域的基础。上网查询可知“复仇者”、DC-03 纸飞机、“空中之王”(sky king)这三架纸飞机被称为世界最好的纸飞机，而本文研究的距离机 Suzanne 纸飞机深受欢迎。这些纸飞机引人思考的除了折法的不同，纸飞机的出手角度和重心位置也是影响其良好飞行的主要因素，这两个因素也是本文所探讨的问题。到现在已经出现了很多经典的折纸飞机的方法，如 Glider、Silke、Ganard, 2012 年，Johon-Collins 仅用 A4 纸经过 25 个步骤创造出一个可以飞 68 米多的纸飞机打破吉尼斯世界纪录，并且到现在他仍然保持着这项纪录。

1.2 具体问题

使用一张具有一定规格的纸，以 A4 大小的纸张为例，折成纸飞机，并且可以使用少量的胶带来改变纸飞机的重心位置。折好后在无风的室内环境投掷，并测量飞行距离和飞行时间。以 Suzanne 纸飞机为例，假设纸飞机的翼面是精确的平面，不存在有弯曲，建立合理的数学模型，计算出为了使飞行距离尽可能远，飞机重心的最佳位置以及投掷出手的最佳角度和使纸飞机留空时间最长对应的重心位置和最佳投掷角度。对此我们可以细化为三个问题，如下：

问题一：根据 Suzanne 纸飞机的模型做出三视图，采用相应的方法求出不同胶带位置纸飞机的重心坐标；

问题二：利用控制变量法和微分方程法求解不同重心坐标下飞行最远距离的最佳投掷倾角，通过数据分析对比，确定最佳的重心位置和投掷倾角；

问题三：利用控制变量法和层层深入法求解不同重心坐标下纸飞机留空时间的长短，通过数据分析对比得到最佳的重心位置和投掷倾角。

二、问题的分析

2.1. 飞行原理分析

首先我们必须了解纸飞机的飞行原理：纸飞机是一种用纸通过物理方式折出的飞机。属于无动力滑行方式，在给予初始投掷力度后，纸飞机靠惯性往前飞行，翼面切割空气，产生压差，维持滑翔。图 1 给出了由压力差产生的升力图。

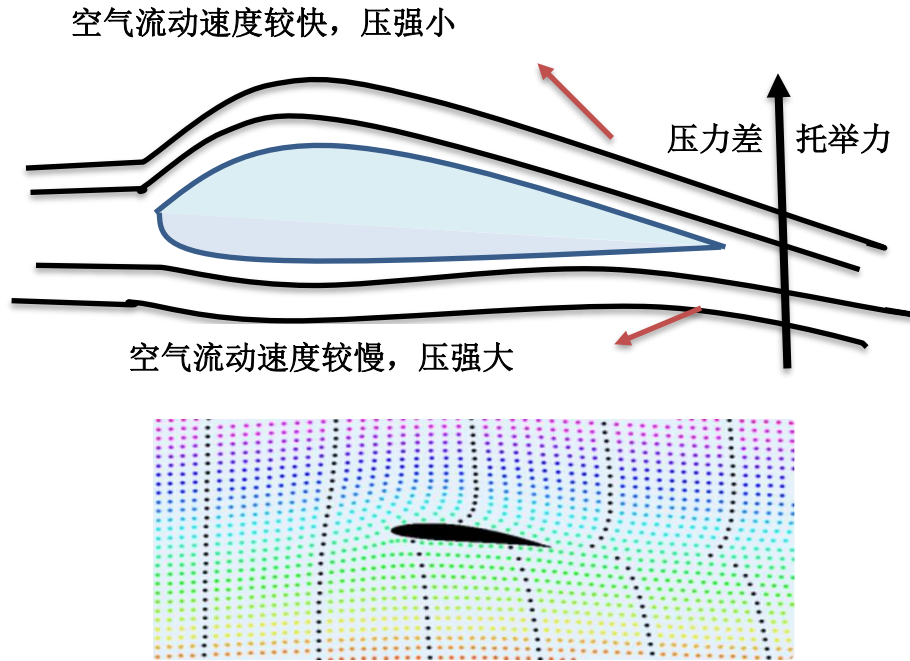


图 1 气流流过的压力差产生的升力图

一般纸飞机折叠的机翼对称，机身小翅膀大，翼面会产生压差，可以产生向上的升力，这样就可以滑行较长时间，当上翼面压力大于下翼面时，就会坠落，纸飞机和真飞机外形不同，大多数真飞机有机翼、尾翼和机身而大多数纸飞机只是将纸折出一对翅膀和一个手可以握住、投掷的部分，成百上千的纸飞机都证明没有尾翼的飞机也能平稳飞行，纸飞机的平衡主要取决于它的重心，飞机和真正的滑翔机飞行原理相同，它们都由 4 种基础力控制，分别是：重力、升力、推力和阻力，图 2 为纸飞机升力简图。大多数人有一个错觉，认为好的纸飞机折好后就不用调整了，其实我们可以通过胶带去固定“低”机翼及不停改变重心位置，用胶布把翼面上有重叠的纸张紧张部位贴紧，减小阻力，使纸飞机在空中滑翔更久。而且很大程度上，角度跟重心有关，重心向前，俯仰稳定性好，可以角度大一点，反之角度小一点。确定一个重心位置不停改变投掷角度，最后综合得到最佳投掷角度和最佳重心位置。

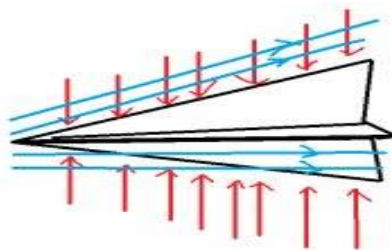


图 2 纸飞机受升力简图

2.2 具体问题分析

本题要求我们还以 Suzanne 纸飞机为例，通过改变重心的位置，进一步探究纸飞机飞行距离与留空时间与重心位置和投掷倾角的关系，最终目的要分别得到最佳的重心位置和投掷倾角。为了解决题目要求的问题，我们建立了三个模型，分别求解了因胶带的改变的纸飞机的重心坐标的模型一，结合不同重心坐标建立求解最大距离的模型二，以及结合重心坐标求解留空时间的模型三。

问题一:在研究重心位置改变对纸飞机飞行的影响，需要我们给出 Suzanne 纸飞机的重心坐标，由于 A4 纸张可以认为密度均匀分布，这样我们可以把纸飞机拆分成不同的部件分部求各部分的重心，最后再利用力矩关系的出整个纸飞机的重心坐标。

问题二:通过查找资料得知，在纸飞机飞行过程中，重力和升力会产生一对偶力矩，中心位置的改变会影响偶力矩^[1]。首先，通过力矩平衡，找出重心变化对重力与升力的函数关系。其次，通过受力分析，结合斜抛运动积分方程，求解不同重心位置和抛射角度对纸飞机飞行距离之间的函数方程。最后，通过控制变量，利用 MATLAB 拟合数据图像，分析图像得出合理的心位置与抛掷角度对纸飞机飞行距离的影响。

问题三:由于纸飞机的翼面可以看作精确的平面，我们研究多种情况下纸飞机飞行时间，递进分析，确立最优化目标并运用微分方程思想和 MATLAB、Maple 等数学软件进行求解，并通过理论计算以及查阅相关文献对数据进行分析，用 SPSS 做误差分析，对纸飞机留空时间与飞行距离和重心位置建立多元线性回归，拟合效果不佳，考虑建立非线性二次回归，利用 MATLAB 对最优化目标进行求解。

2.3 解题思维



图 3 问题分析流程图

三、问题的假设

1. 纸飞机的翼面为精确的平面
2. 假设用胶带固定纸飞机时胶带质量忽略不计
3. 假设每次使用的胶带形状，材料都一样
4. 假设胶带只在机身位置改变，且粘贴胶带后纸飞机仍旧关于中轴线对称
5. 假定 g 取 $9.8m/s^2$
6. 假设纸飞机在飞行过程中不改变重心位置

四、名词解释与符号说明

4.1 名词解释:

1. 极曲线:极曲线是飞机升力系数对阻力系数的曲线。极曲线是影响飞机升阻重要的气动数据，也是计算飞机性能最重要的原始数据^[2]。

2. 升力:纸飞机在飞行时由于机翼上表面速度大于下表面速度，从而上表面压力小于下表面，翼面压差产生向上的力^[3]。

3. 飞机攻角: 攻角也称迎角，为流体力学名词。对于翼形来说，攻角定义为翼弦与来流速度之间的夹角，抬头为正，低头为负，常用符号 α 表示^[4]。

4.2.主要符号说明:

本模型中所用主要符号及意义如下表所示:

表 1 符号说明

序号	符号	符号说明
1	m	Suzanne 纸飞机质量
2	c	阻力系数
3	l	水平抛射距离
4	v_0	纸飞机离开手时的初速度
5	θ	纸飞机的抛射倾角

6	t	纸飞机的留空时间
7	L	投掷距离
8	H	出手高度
9	s	投掷者的臂长
10	G	纸飞机所受重力
11	F_L	纸飞机所受升力
12	α	不同时刻纸飞机与水平面的夹角
13	n	纸飞机不同部位的纸张层数

五、模型的建立与求解

5.1 模型一:层次拆分纸飞机重心位置

5.1.1. 问题的分析

题目要求我们可以用少量的胶带粘贴在纸飞机上，从而改变纸飞机重心的前后位置，由于纸飞机是对称分布，所以胶带粘贴的位置为飞机的中心轴部位，且粘贴位置也要对称。我们需要用美式 A4 纸折叠出 Suzanne 纸飞机，通过测量工具测出多组纸飞机尺寸，

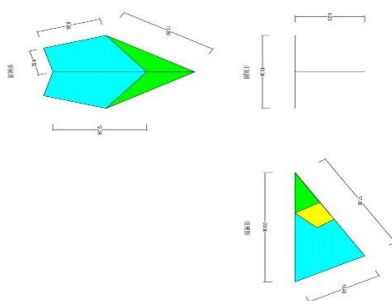


图 4 纸飞机的三视图

再利用 CAD 做出三视图，如下图 4 所示。计算有胶带的纸飞机重心时，我们可以采

用分层计算法求解飞机的重心坐标，其中胶带我们可以假设每次使用的大小，形状，材料都一样，并且对称粘贴在机身上，只是通过改变胶带在机身上的位置，来改变纸飞机的重心位置。

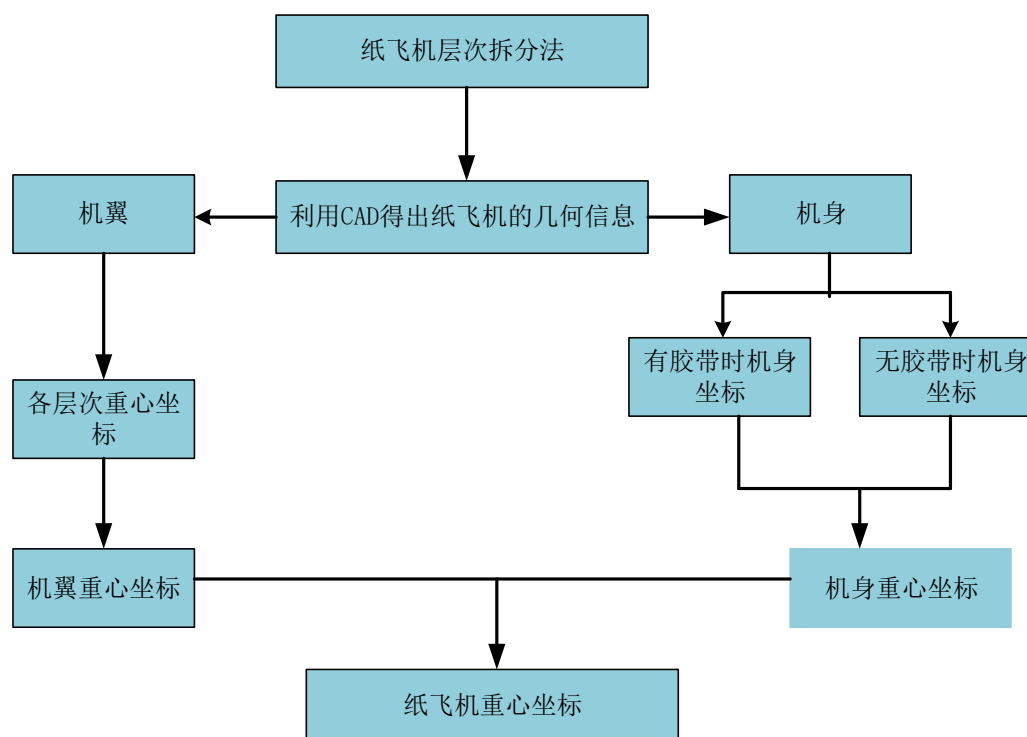


图 5 求解纸飞机重心坐标思路图

5.1.2.重心位置的求解

(1) 模型的准备

因为 A4 纸张可以认为质量分布均匀，在通过 CAD 做出三视图的同时，也可以计算出纸飞机各层次包括机身与机翼两个部分的面积和重心位置坐标，此功能为 CAD 自带功能。然后在纸飞机机身上选取合适的坐标原点 O ，建立水平方向与竖直方向的坐标系即 x, z 方向，从而构成 xoz 平面这样可以定量确定机身重心坐标，同理可以得到机翼重心坐标，最后两者重心坐标结合可得纸飞机整体的重心坐标。

(2) 模型的建立

在确定合适的坐标系的情况下，利用 CAD 软件的作图原理及功能做出各层次的重心坐标，数据如下图所示。然后利用 MATLAB 软件编程，组合各层次的坐标，最终得到纸飞机的重心坐标。

在得到每个层次的重心坐标之后，计算每个层次关于 X 轴的力矩和 Z 轴的力矩，再分别计算按 X 轴、 Z 轴求和，进而得出两个轴的力矩值，把这两个值分别除于纸飞机重量 G ，从而得到重心坐标。此模型用的具体公式如下：

$$\begin{cases} x = \frac{\sum G_i x_i}{G} \\ z = \frac{\sum G_i z_i}{G} \\ y = \frac{\sum G_i y_i}{G} \end{cases} \quad (1)$$

(3) 模型求解

通过 CAD 软件得出机身的分层剖析：

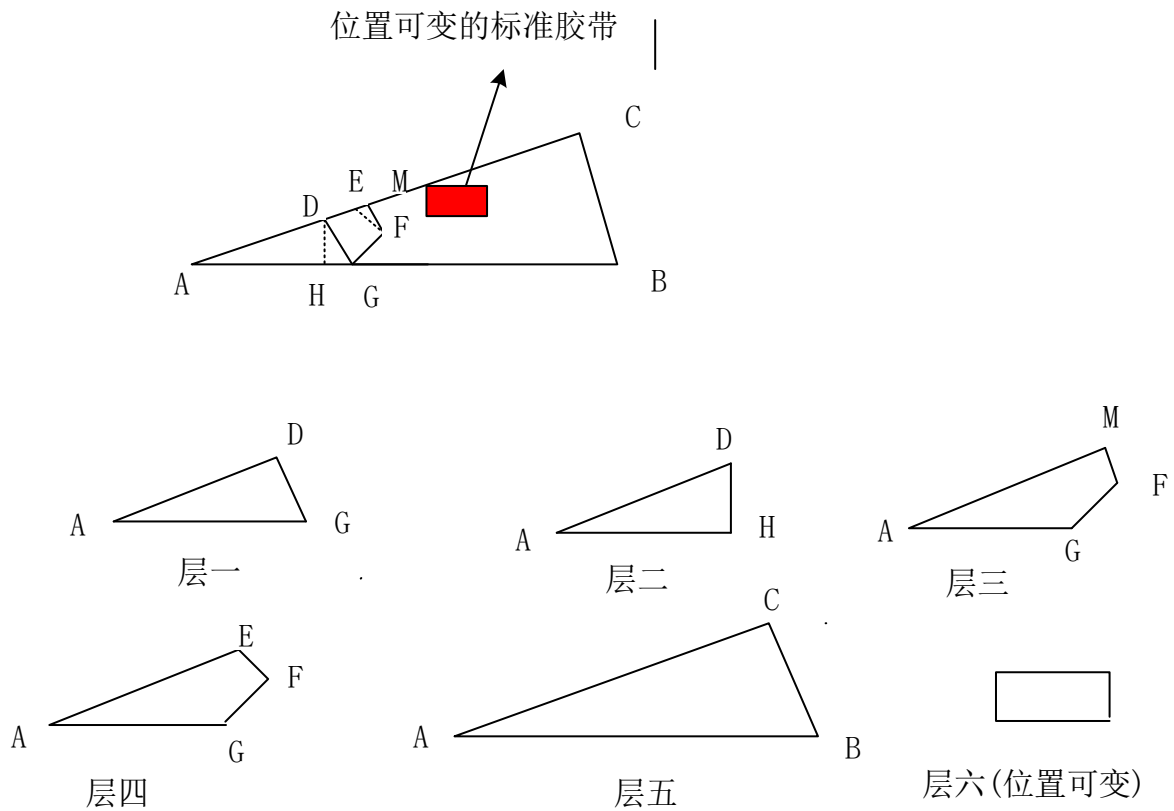


图 6 纸飞机机身分层图

由于纸飞机折叠有一定的层厚，我们可以将机身拆分若干层，考虑到 A4 纸质量分布均匀，我们可以假设纸张单位面密度大小为 1，粘贴胶带单位面密度为 4，大小为 1 cm^2 因此纸飞机单位重量 $G_0 = 1 \times S \times g$

故上述两式可以变为新的机身重心公式：

$$x = \frac{\sum S_i x_i}{\sum x_i} \quad (2)$$

$$z = \frac{\sum S_i y_i}{\sum y_i} \quad (3)$$

表 2 纸飞机机身参数

层次	层数 n	面积 S/cm^2	重心位置坐标 $(x, z) / \text{cm}$
1	4	7.1723	(4.6533, 0.8505)
2	4	5.4635	(3.8729, 0.5971)
3	2	15.6262	(6.1537, 0.9978)
4	2	13.6255	(6.1536, 0.9978)
5	2	59.2100	(12.7332, 2.0668)

按照假设的条件计算出机身的质量为 227.46，利用 MATLAB 编程计算没有粘贴胶带时机身重心坐标为 (8.8890cm, 1.42944cm) 如下图所示：

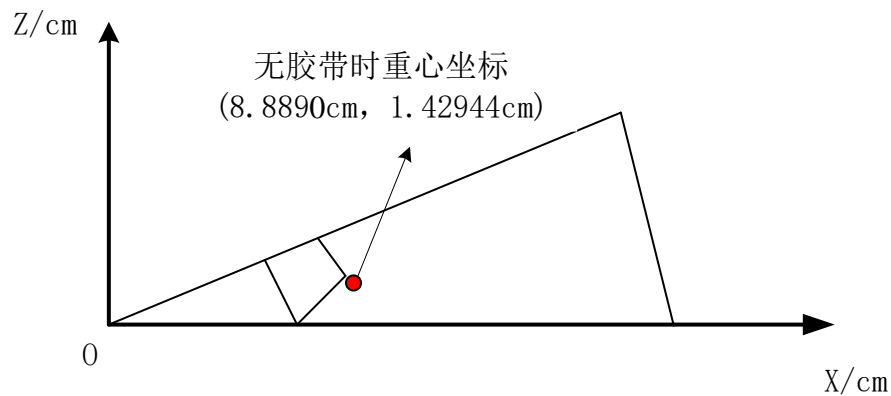


图 7 纸飞机重心坐标图

由于改变胶带前后位置，可以改变纸飞机整体的重心位置，鉴于本模型胶带改变的位置在机身上，我们可以把层次六即胶带层次的重心在相同的 xoz 坐标系下用坐标表示出来。我们选取适当的胶带重心坐标梯度范围横坐标梯度范围为 2 至 3cm，纵坐标梯度范为 1cm，同样利用 MATLAB 编程，得出一系列有胶带时机身的重心坐标。数据如下表 3 所示：

表 3 纸飞机重心坐标点表

胶带重心坐标/ <i>cm</i>	机身重心坐标/ <i>cm</i>	纸飞机重心坐标/ <i>cm</i>
(1, 1)	(5. 6526, 1. 4220)	(6. 8505, 0. 7793)
(3, 1)	(6. 7812, 1. 4220)	(7. 1210, 0. 6793)
(3, 2)	(6. 7872, 1. 4393)	(7. 1210, 0. 7887)
(3, 3)	(6. 7872, 1. 4566)	(7. 1210, 0. 8982)
(5, 1)	(7. 8217, 1. 4220)	(8. 0243, 0. 7783)
(5, 2)	(7. 8217, 1. 4393)	(8. 0243, 0. 7887)
(5, 3)	(7. 8217, 1. 4556)	(8. 0243 0. 5432)
(7, 1)	(8. 8563, 1. 4220)	(8. 5432, 0. 5432)
(7, 2)	(8. 8563, 1. 4393)	(8. 5422, 0. 6793)
(7, 3)	(8. 8563, 1. 4566)	(8. 5422, 0. 7887.)
(9, 1)	(9. 5252, 1. 4220)	(9. 1215, 0. 5432)
(9, 2)	(9. 5252, 1. 4393)	(9. 1215, 0. 6793)
(9, 3)	(9. 5252, 1. 4566)	(9. 1215, 0. 8982)
(12, 1)	(10. 2120, 1. 4220)	(10. 0102, 0. 5432)
(12, 2)	(10. 2120, 1. 4393)	(10. 0102, 0. 6793)
(12, 3)	(10. 2120, 1. 4566)	(10. 0102, 0. 8982)
(15, 1)	(12. 0046, 1. 4220)	(11. 1215, 0. 5432)
(15, 2)	(12. 0046, 1. 4393)	(11. 1215, 0. 6792)
(15, 3)	(12. 0046, 1. 4566)	(11. 1215, 0. 8982)

机翼的分层剖析:考虑到纸飞机机翼也存在折叠现象，同样将纸飞机拆分若干层，以下为纸飞机的机翼分层图：

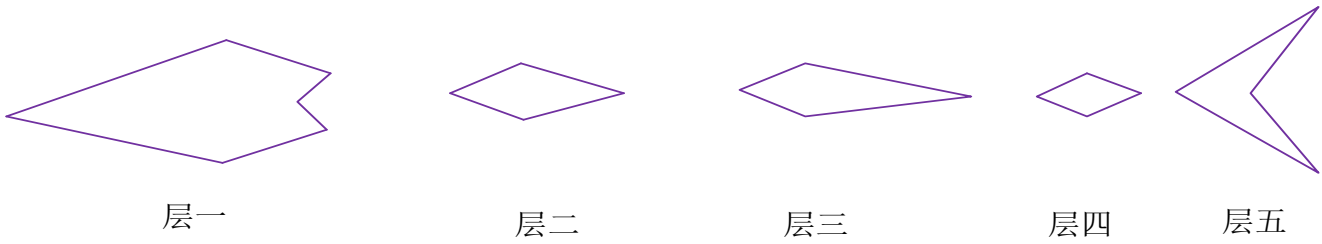


图 8 机翼分层图

同样假设 A4 纸单位面密度大小 1，利用 AutoCAD 得到每一层均值分布面积以及其重心位置，如下表所示：

表 4 机翼参数

层次	层数 <i>n</i>	面积 <i>S/cm</i> ²	重心位置坐标 (<i>x, y</i>) / <i>cm</i>
1	1	148. 900	(12. 4911, 0)
2	1	3. 626	(2. 0632, 0)
3	2	4. 892	(2. 5633, 0)
4	2	3. 033	(1. 8300, 0)

5	1	34.981	(6.4385, 0)
---	---	--------	-------------

结合上述公式以及上表数据利用 MATLAB 编程可求解出机翼质量为 203.421，机翼重心坐标为(10.4682, 0)如下图。相关程序见附录程序 1。

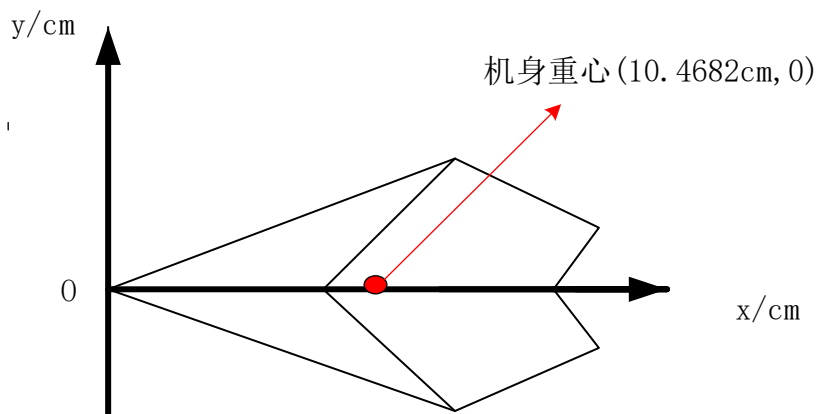


图 9 机翼重心坐标

在分别求出带有胶带位置改变的机身重心坐标和机翼的重心坐标，我们可以通过组合两者的重心坐标得到纸飞机整体的重心坐标，坐标在表 3 中体现。

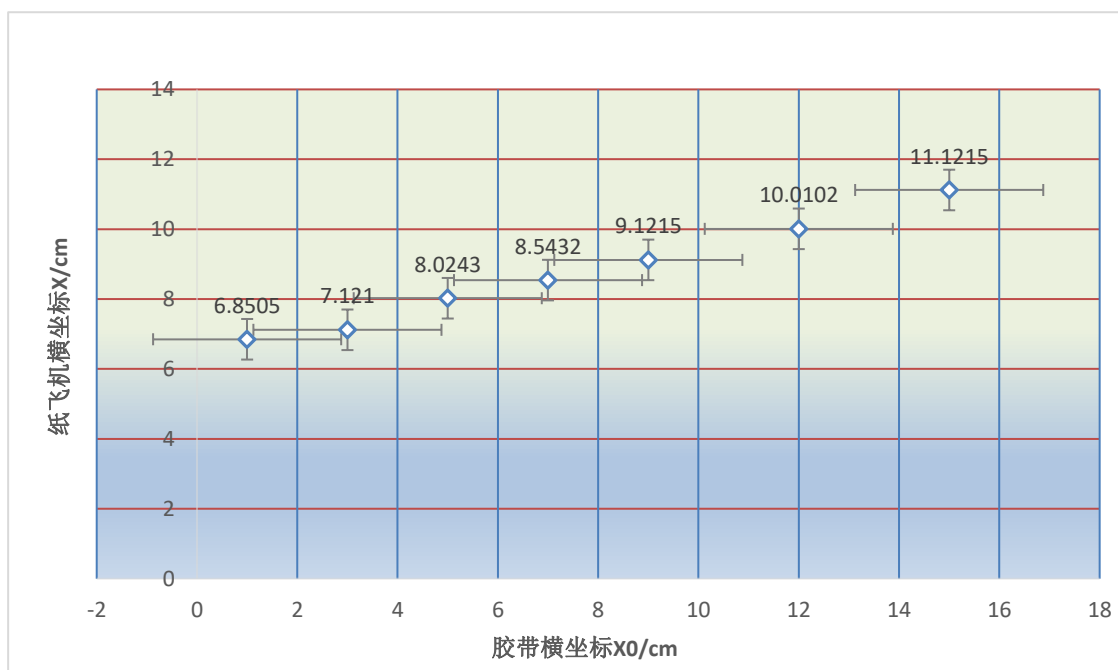


图 10 胶带重心横坐标与纸飞机重心横坐标关系图

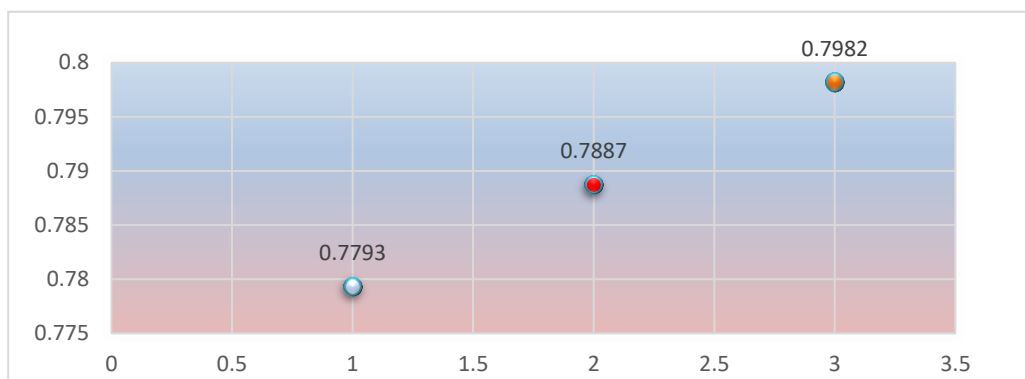


图 11 胶带重心纵坐标与纸飞机重心纵坐标的关系图

通过分析上述图表可以定性得到随着胶带后移，导致纸飞机重心后移，其中在规定的参考系下，横坐标 x 轴后移较明显，纵轴 y 轴上移不明显。建立纸飞机重心坐标点对后续研究重心位置改变对纸飞机飞行距离和时间有重要作用。

5.2 模型二：纸飞机飞行最远距离

5.2.1 模型的提出与简化

纸飞机重心位置的设计与寻找，是纸飞机飞行过程中方程重要的一步。重心位置的不同取值，直接影响着纸飞机的飞行距离与滞空时间。纸飞机重心对飞行效果的影响随着起飞、航行、降落等不同阶段的变化而变化，但主要还是因为重心位置的改变，导致纵向配平力矩的改变，从而影响着飞机的稳定性以及升力。查找资料表明，重心越往后，需要的纵向配平力矩越小，由配平引起的升力损失就越少^[5]。

纸飞机在飞行的过程中，在无风状态下，受力分析时只考虑重力、升力与阻力。通过建立合理的数学模型，找到一个最佳重心位置，能够使重心后移的情况下，找到能够让纸飞机飞行的最远的最佳角度。

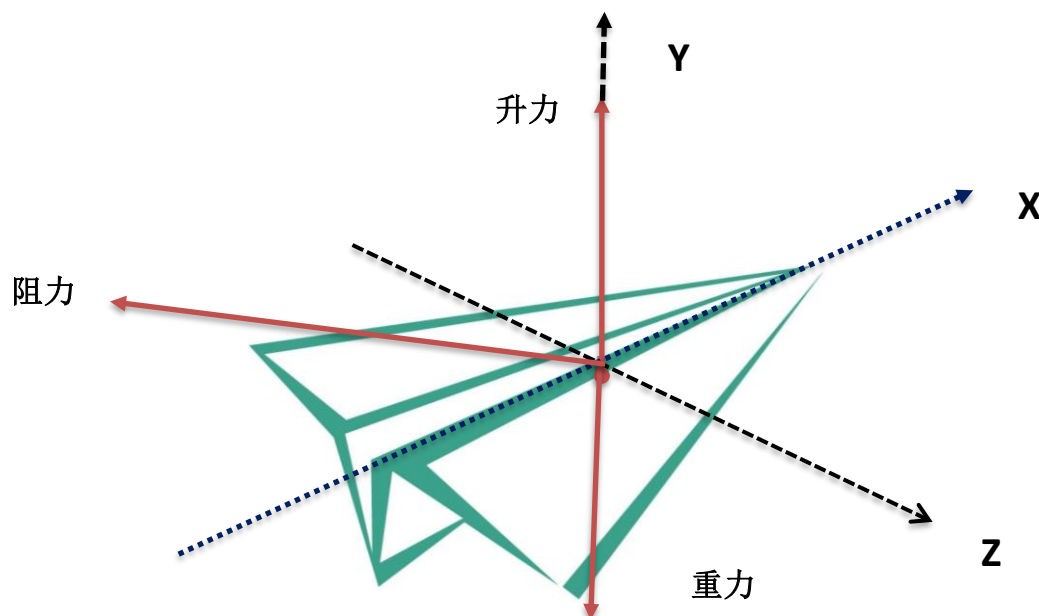


图 12 纸飞机受力分析图

5.2.2 模型的建立

纸飞机的重心对飞机的升力系数有着极大的影响，通过查找资料得出原因在于重力与升力之间产生了一对偶力矩，具体可分为以下两种情况：

(1) 重心靠前，重力影响占主要地位，会产生低头力矩，使飞机机头下降速度加快。如图 13：



图 13 重心太向前俯冲坠落

(2) 重心靠后，升力影响占主要地位，会产生抬头力矩，导致飞机机头上抬，快速爬升。如图 14：



图 14 重心太向后快速爬升而降落

建模思路：通过转动定律与力矩平衡原理，建立重心位置与升力之间的函数模型，通过查找资料得到斜抛问题的微分方程，与牛顿第二定律相结合求解不同重心位置和抛射角度对纸飞机飞行距离之间的函数方程，最后，通过控制变量，利用 MATLAB 拟合数据图像，分析图像得出合理的重心位置与抛掷角度对纸飞机飞行距离的影响。具体思路导图如下：

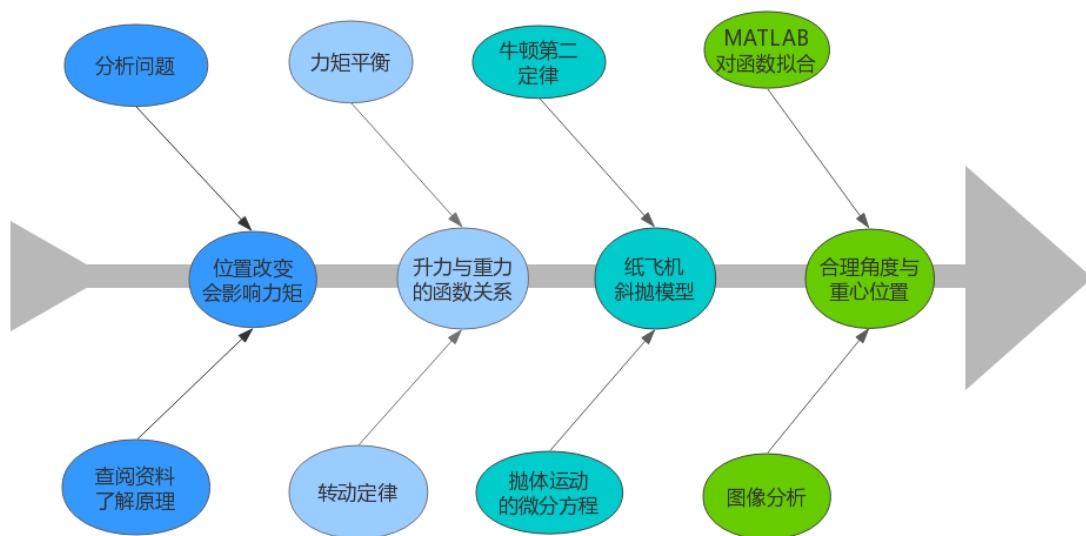


图 15 建模思路导图

纸飞机受力简图如下：

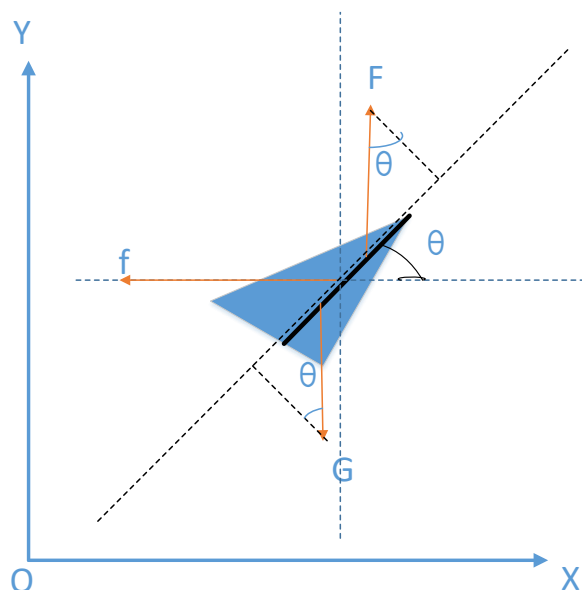


图 16 纸飞机受力分析图

由于阻力 $f = -cv$ 只与速度有关，为了方便研究重力与升力之间的关系，控制变量阻力 f 作用点在转轴上，即不考虑阻力对转动的影响。采用微分的思想，在极短的时间内可认为飞机在静止条件下定轴转动，通过转动定律与简单的配平可得：

$$GX \sin \theta = F_L D \sin \theta \quad (4)$$

约去 $\sin \theta$ 可得：

$$GX = F_L D \quad (5)$$

由(2)可得：

$$F_L = \frac{X}{D} G \quad (6)$$

其中 X 为重心到转动转轴的距离， D 为升力受力点到转动轴的距离， θ 为仰角，即初速度 v_0 与水平方向夹角。

令：

$$\lambda = \frac{X}{D} \quad (7)$$

将(4)代入(3)中得：

$$F_L = \lambda G = \lambda mg \quad (8)$$

对纸飞机受力分析如图，其中 α 为飞行任意时刻速度与水平轴的夹角：

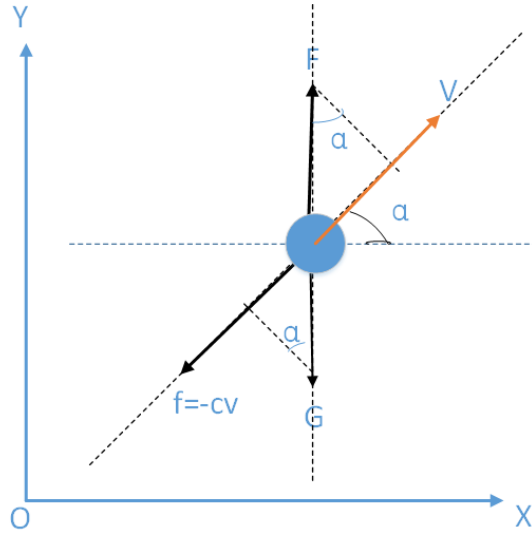


图 17 受力分析简图

以纸飞机为研究对象，通过对以上问题以及受力的分析，我们建立以下模型：
纸飞机水平与竖直方向的速度分量是：

$$\begin{cases} V_x = V \cos \alpha \\ V_y = V \sin \alpha \end{cases} \quad (9)$$

纸飞机水平与竖直方向所受阻力是：

$$\begin{cases} f_x = f \cos \alpha = -cv \cos \alpha \\ f_y = f \sin \alpha = cv \sin \alpha \end{cases} \quad (10)$$

纸飞机水平与竖直方向合力是：

$$\begin{cases} F_x = -cv \cos \alpha \\ F_y = F_L - G - cv \sin \alpha \end{cases} \quad (11)$$

牛顿第二定律适用于宏观坐标系，且参考系为惯性系的物体，根据牛顿第二定律可知，物体的加速度 a 与作用力的大小成正比，与质量成反比，且位移对时间的二阶导为加速度。公式如下：

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (12)$$

物体所受空气阻力 $f = -cv$ ，其中比例系数 c 为阻力系数，其大小与介质以及物体形状有关，假设空气为理想状态，又因为 Suzanne 纸飞机的形状和大小已知，故阻力系数 c 可设为常数。

抛射物体在水平方向的微分方程为：

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (13)$$

抛射物体在竖直方向上的微分方程为：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dx} + g - \frac{F_L}{m} = 0 \quad (14)$$

其中 $L = \lambda G = \lambda mg$ 见式(5), 代入上式得：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy}{dx} + (1 - \lambda) g = 0 \quad (15)$$

当 $t=0$ 时: $V_{xo} = V_o \cos \theta$, $V_{yo} = V_o \sin \theta$, 对(10)、(11)进行一次积分得：

$$\frac{dx}{dt} = V_x = V_{xo} e^{-\frac{c}{m}t} \quad (16)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \left(\frac{(1 - \lambda)mg}{c} + V_{yo} \right) e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{(1 - \lambda)mg}{c} \quad (17)$$

再对(13)、(14)式进行一次积分, 并假设纸飞机刚刚抛离出手时, 即 $t=0$ 时, $x=0, y=0$, 可以得到以下两个方程：

$$x = \frac{m}{c} V_o \cos \theta (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \quad (18)$$

$$y = \left(\frac{(1 - \lambda)^2 m^2 g}{c^2} + \frac{m V_o \sin \theta}{c} \right) (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - \frac{(1 - \lambda)mg}{c} t \quad (19)$$

对(15)、(16)式进行处理, 消去时间 t , 可以得到轨道方程如下：

$$y = \left(\tan \theta + \frac{(1 - \lambda)mg}{c V_o \cos \theta} \right) x + \frac{(1 - \lambda)^2 m^2}{c^2} \ln \left(1 - \frac{cx}{m V_o \cos \theta} \right) \quad (20)$$

通过求解出来的(17)式, 即轨道方程, 可以清楚的看出纸飞机轨迹与质量、投掷初始角度、投掷初始速度、以及重心位置有关。

当纸飞机回到初始高度, 即(16)式中的 $y=0$ 时, 可得：

$$\left(\frac{(1 - \lambda)^2 m^2 g}{c^2} + \frac{m V_o \sin \theta}{c} \right) (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - \frac{(1 - \lambda)mg}{c} t = 0 \quad (21)$$

上述方程为超越方程, 无法直接求出时间 t 的解析式, 但是可以通过近似法求解关于时间 t 的解析式。将 $e^{-\frac{c}{m}t}$ 进行展开并截取二次项^[6]：

$$e^{-\frac{ct}{m}} \approx 1 - \frac{c}{m}t + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{m}t\right)^2 \quad (22)$$

将(19)式代入(18)式，可得纸飞机落回初始高度所需时间为：

$$t = \frac{2mV_o \sin \theta}{(1-\lambda)mg + cV_o \sin \theta} \quad (23)$$

将式(18)代入式(15)得抛射体的射程为：

$$x = \frac{(1-\lambda)^2 m^2 g V_o \sin 2\theta}{((1-\lambda)mg + cV_o \cos \theta)^2} \quad (24)$$

令 $\frac{dx}{dt} = 0$ ，可得最大射程对应角度的关系：

$$2(1-\lambda)mgV_o^2 \cos^2 \theta + c \cos \theta - (1-\lambda)mgV_o^2 = 0 \quad (25)$$

综上以上求解公式如下：

$$\begin{cases} x = \frac{(1-\lambda)^2 m^2 g V_o \sin 2\theta}{((1-\lambda)mg + cV_o \cos \theta)^2} \\ y = \left(\tan \theta + \frac{(1-\lambda)mg}{cV_o \cos \theta}\right)x + \frac{(1-\lambda)^2 m^2}{c^2} \ln\left(1 - \frac{cx}{mV_o \cos \theta}\right) \\ 2(1-\lambda)mgV_o^2 \cos^2 \theta + c \cos \theta - (1-\lambda)mgV_o^2 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

5.2.3 模型的求解

在上文模型的建立的过程中，采用转动平衡力矩找到了重力与升力的关系：

$L = \lambda G = \lambda mg$ ，之后采用牛顿第二定律 $F = ma$ ，以及对纸飞机进行受力分析，通过求解物体斜抛积分公式，建立了纸飞机斜抛模型，确定了重心位置与斜抛角度对纸飞机飞行距离的影响公式，如下，详见公式(19)的推导过程：

$$x = \frac{(1-\lambda)^2 m^2 g V_o \sin 2\theta}{((1-\lambda)mg + cV_o \cos \theta)^2} \quad (27)$$

采用 MATLAB 进行方程的图像的拟合，通过控制变量法，控制 λ 的取值，确定在不同的 λ 的取值下，拟合出斜抛初始角度 θ 。MATLAB 程序见附录，图像拟合结果如下：

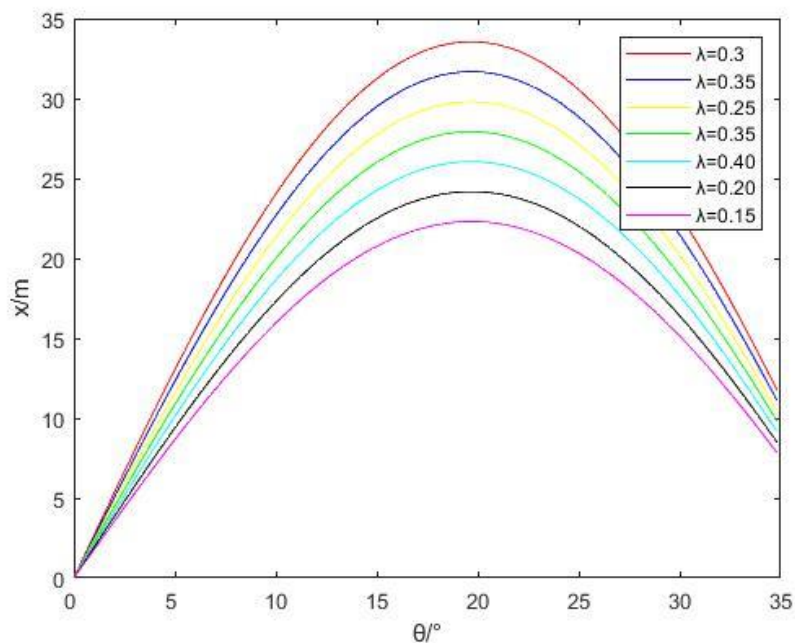


图 18 重心位置与角度对纸飞机飞行距离的影响

可以看出,在 $\lambda=0.3$ 时,纸飞机的飞行距离在相同投掷角度影响下,可以达到最远。为了方便观察 λ 的变化对飞行距离的大致影响,将 $\lambda=0.3$ 左右的 λ 值,用 MATLAB 分别拟合,如图:

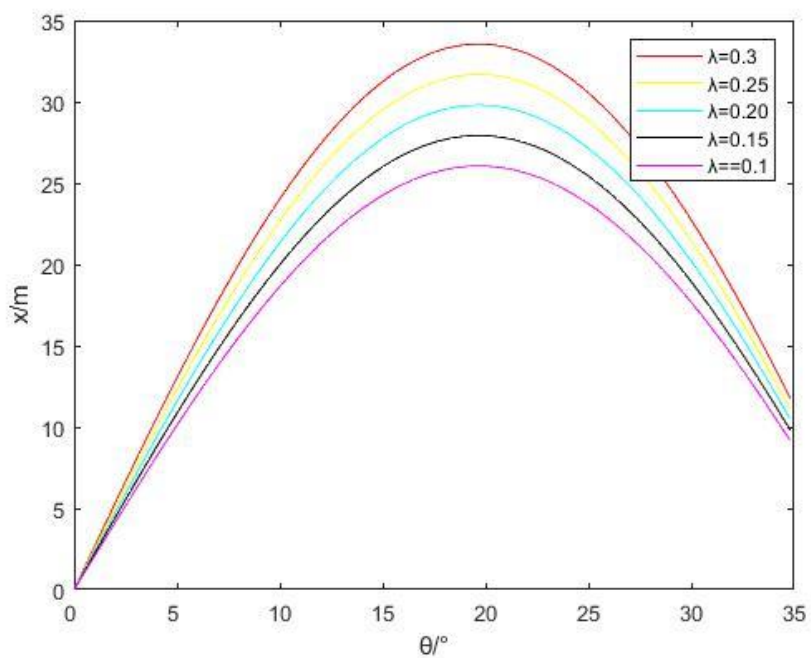


图 19 $\lambda=0.3$ 之下的影响图像

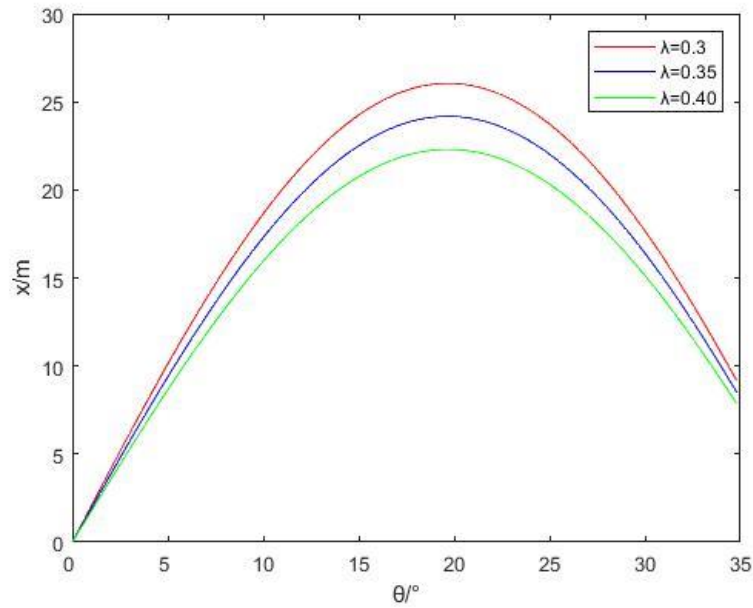


图 20 $\lambda=0.3$ 之下的影响图像

通过观察图像可以得出以下结论：

结论 1：当 λ 从 $0.1 \rightarrow 0.3$ 时，同样的投掷角度下，可以让纸飞机飞行距离越远， λ 从 $0.3 \rightarrow 0.4$ 时则相反。

结论 2：当重心位置满足 $\lambda=0.3$ ，飞机在相同投掷初始角度的影响下飞的最远。

由上述结论以及拟合的图像可得出重心到机头的距离与整体机身的长度比值为 30% 时，相同投掷角度下，飞机距离最远。同时，由拟合图像大致可以看出，在投掷出手角度为 18° 时，飞行距离最远。

5.3 模型三:纸飞机留空时间最长

5.3.1 建模准备

纸飞机有许许多多的折法，而且形状各不相同，由于我们所研究的纸飞机翼面是精确的平面，故不考虑纸飞机折法的不同而引起的差异，我们将通过各种渠道，搜集相关数据，通过控制变量法，研究出手角度和最佳重心位置，将实验和理论结合以得到纸飞机留空时间最长时所对应的最佳出手角度和最佳重心位置。

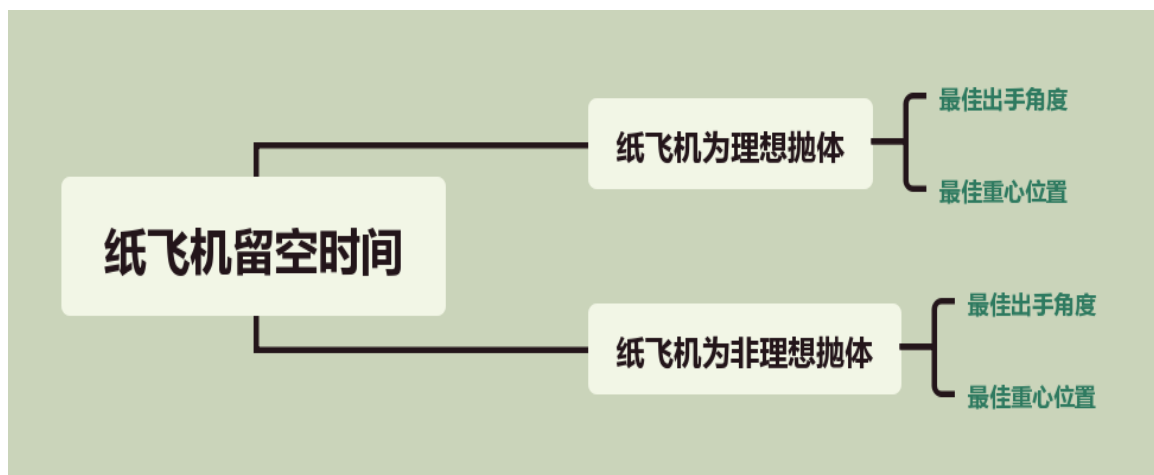


图 21 思维导图

5.3.2 模型建立

1. 纸飞机为理想抛体

简单的来说,纸飞机的飞翔时利用重力与升力的两种力量交互作用形成的,纸飞机自身的重量会牵引机身向下掉落,机翼则会抓住空气,让纸飞机在空气中漂浮,一上一下的两个力的作用下,再加上投掷时使纸飞机向前滑行,纸飞机运用了伯努利原理,图 22 为伯努利原理图。

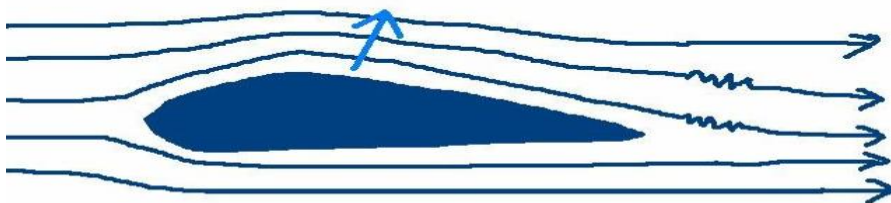


图 22 伯努利原理图

我们知道理想抛体(可视为质点)的抛出点和落地点在同一水平面内时的抛射距离和抛射角的关系^[2]。那么类似的,我们将讨论纸飞机这中非理想抛体的投掷角度和重心位置的改变会给纸飞机的滞空时长带来怎样的影响,在给定纸飞机一定的初速度下,如何在空中滞留时间达到最长,应用微分方法来分析纸飞机飞行时间的影响因素。

众所周知,若把纸飞机视为质点,此时,不改变重心位置,以纸飞机投掷点为原点,一定投掷速率下纸飞机的水平抛射距离

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \quad (28)$$

此时纸飞机飞行最远距离满足的条件为抛射角 $\theta = 45^\circ$,纸飞机的留空时间

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad (29)$$

我们对 v_0 赋初值,利用 MATLAB 做出时间 t 与 θ 的函数曲线,由图可知,当 θ 在 $[0^\circ, 90^\circ]$

范围内时，随着投掷角度的增加，纸飞机的留空时间越长。

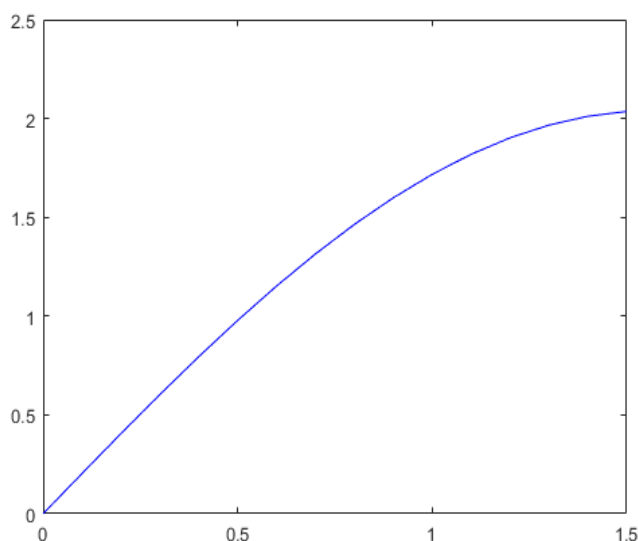


图 23 飞行时间 t 与 θ 的曲线图

当纸飞机竖直抛出时留空时间达到最大，当纸飞机不能视为质点时，此时纸飞机投掷点和落地点不在同一水平面上而具有一定高度差时，竖直抛出便不再是最佳投掷角了，那么重心位置一定的条件下的最佳投掷角为多少呢？先从最简单的情况来看即把纸飞机看作理想抛体，此时轨迹方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (30)$$

当 $y = h_0$ 时，代入得

$$h_0 = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (31)$$

将方程变形为

$$gx^2 - v_0^2 x \sin 2\theta + 2v_0^2 h_0 \cos^2 \theta = 0 \quad (32)$$

两边对方程对 θ 求导，得

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2v_0^2 (x \cos 2\theta + h_0 \sin 2\theta)}{2gx - v_0^2 \sin 2\theta} \quad (33)$$

x 取到最大值 x_{\max} 时， $\frac{dx}{d\theta} = 0$ ，此时投掷角为 θ_0 ，

$$x_{\max} \cos 2\theta_0 + h_0 \sin 2\theta_0 = 0 \quad (34)$$

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{x_{\max}}{h_0} \quad (35)$$

由(34)和(35)得

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}\bigg|_{x=x_{\max}, \theta=\theta_0} = \frac{-4v_0^2 x_{\max} \csc^2 2\theta_0}{\frac{2gx_{\max}}{\sin 2\theta_0} - v_0^2} \quad (36)$$

因为

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}, h_0 = \frac{2v_0^2 \sin^2 \theta}{g} \quad (37)$$

由表达式(10)绘制出 x 与 θ 的函数曲线图如下:

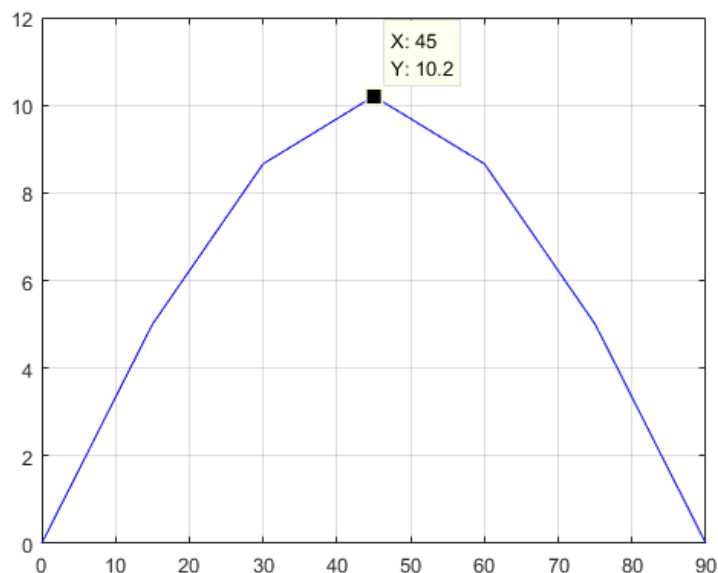


图 24 距离与投掷角度函数图

由(10)可得 x 与 h_0 的函数关系表达式:

$$x = h_0 \cot \theta \quad (38)$$

故当 θ 给定时, 根据求解的最远飞行距离便确定了纸飞机竖直方向上能达到的最大高度, 从而得到留空时间 t 的最大值。即当把纸飞机视为理想抛体时, 纸飞机视为质点, 不考虑重心位置, 根据抛体运动知识, 可得当 $\theta=45^\circ$ 时, 是纸飞机飞行最远的最佳投掷角度; 当 $\theta=90^\circ$ 时, 是纸飞机留空最长时间的最佳投掷角度。

2. 纸飞机为非理想抛体且忽略空气阻力

当纸飞机不能看作理想抛体时, 不计空气阻力时先固定重心位置, 通过相关运算得到纸飞机投掷距离 L 与出手角度 β 、 v_0 、出手高度 H 、投掷者的臂长 s 的关系^[7]

$$L = v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g + 2g(H + \sin \beta * s) / (v_0^2 \sin^2 \beta) \quad (39)$$

我们给定 $v_0 = 10m/s$, $H = 1.51m$, $s = 0.52m$, $g = 9.8m/s^2$, 通过使用数学软件 Maple 的 D 命令可用于计算最佳投掷角度,

$$\frac{dL}{d\beta} = \frac{v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g + \frac{2g(H + \sin \beta * s)}{(v_0^2 \sin^2 \beta)}}{g} + \frac{v_0^2 \sin \beta \cos \beta \frac{2g \sin \beta * s}{v_0^2 \sin^2 \beta} - \frac{4g(H + \sin \beta * s) \cos \beta}{v_0^2 \sin^2 \beta}}{g + \frac{2g(H + \sin \beta * s)}{v_0^2 \sin^2 \beta}} \quad (40)$$

令 $\frac{dL}{d\beta} = 0$, 计算出最佳投掷角度, 使用 MATLAB 的 fsolve 函数, 可得到 $\beta = 14.6^\circ$ 。此时飞

机纸飞机在事先固定的重心位置下可达到最远飞行距离。当忽略空气阻力时, 我们通过赋初值及不断改变纸飞机重心位置, 得到如下数据:

表 5 飞行距离数据表

重 心 距 机 头 距 离(公分)	飞行距离(公分)						
	$\beta = 15^\circ$	$\beta = 25^\circ$	$\beta = 35^\circ$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 55^\circ$	$\beta = 65^\circ$	$\beta = 75^\circ$
16.1	282	256	244	242	238	235	229
15.9	300	296	285	272	263	256	243
15.6	312	308	302	295	287	277	268
15.3	316	310	305	298	289	279	274
15.0	321	320	315	305	300	285	283
14.7	326	324	320	314	305	290	287
14.2	330	329	323	320	313	310	291
13.9	339	337	362	354	336	329	316
13.7	340	339	342	236	251	321	305

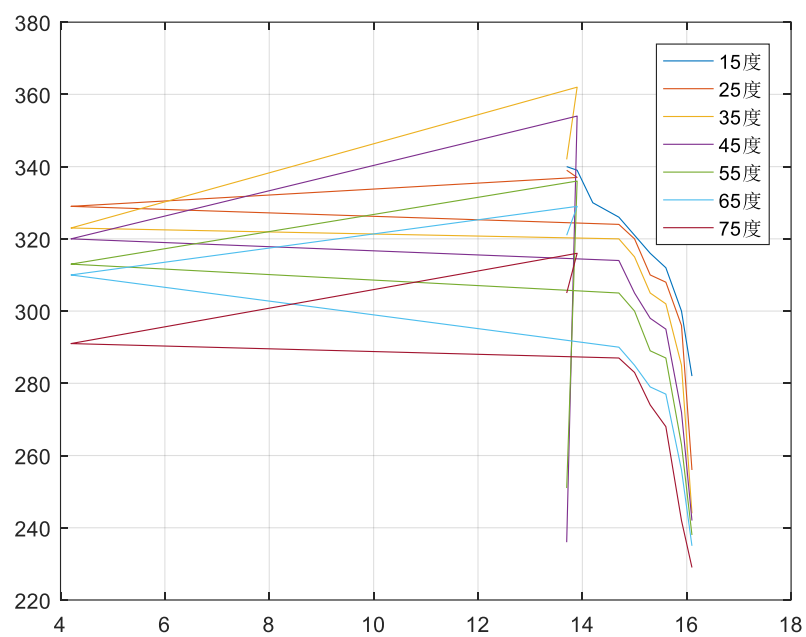


图 25 不同重心位置、投掷角度对应纸飞机飞行距离

表 6 飞行时间数据表

重 心 距 机 头 距 离(厘米)	飞行时间 (秒)						
	$\beta = 15^{\circ}$	$\beta = 25^{\circ}$	$\beta = 35^{\circ}$	$\beta = 45^{\circ}$	$\beta = 55^{\circ}$	$\beta = 65^{\circ}$	$\beta = 75^{\circ}$
16.1	29.6	28.5	27.5	29.8	31.0	321	325
15.9	30.0	29.5	28.2	26.5	31.6	339	334
15.6	31.0	30.0	31.2	31.5	32.6	347	359
15.3	32.6	31.9	34.5	34.6	34.9	368	361
15.0	33.1	32.6	35.5	35.1	35.4	378	375
14.7	34.8	35.1	35.6	36.2	36.9	391	386
14.2	35.6	36.9	37.0	37.6	37.9	401	392
13.9	34.1	35.4	36.5	36.2	36.2	395	374
13.7	32.9	34.2	34.8	35.0	35.6	36.2	354

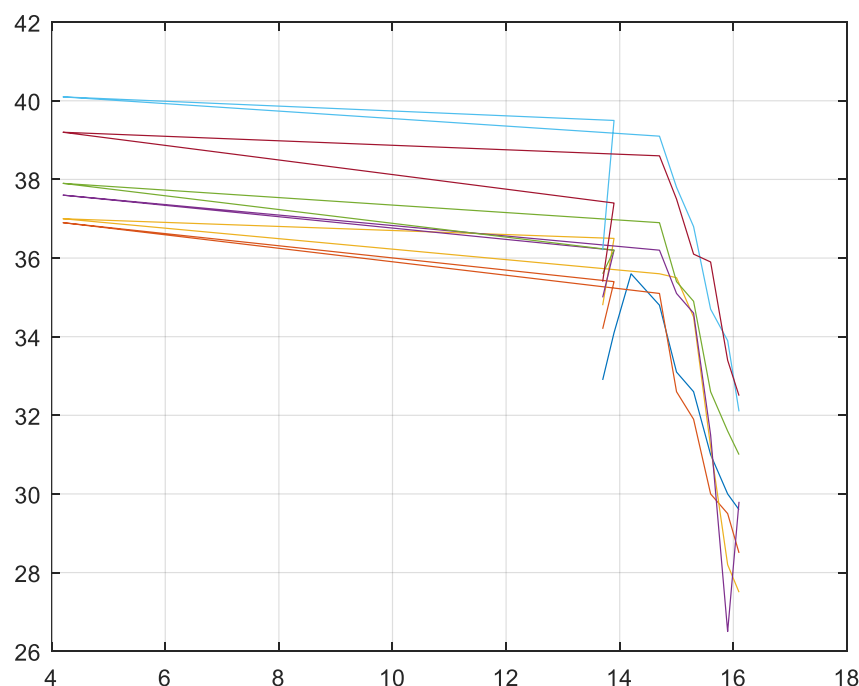
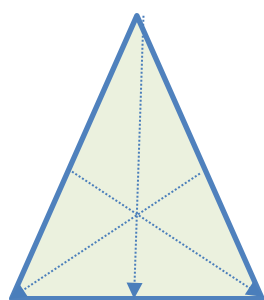
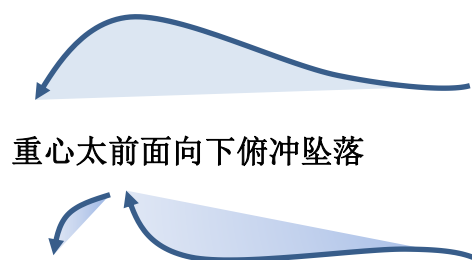


图 26 不同重心位置、投掷角度对应纸飞机留空时间



几何重心



重心太靠后快速爬升而失速坠落

由图可见通过重心位置不断地改变对纸飞机留空时间有很大的影响，同时每次改变重心位置时最佳的投掷角度也在发生变化，角度跟重心有关，重心向前，俯仰稳定性好，可以角度大一点，反之角度小一点，重心太向前达到最高点后直接向下俯冲，重心太后爬升的快但失速坠落。综合影响纸飞机飞行的各个因素，探究出影响纸飞机留空时间与投掷角度、重心位置的关系。我们可以看出当 β 在 70° 左右，纸飞机重心距机头 14.2 公分约为距机头的 $1/4$ 时，纸飞机的留空时间达到最长。

3. 纸飞机为非理想抛体且空气阻力与速率成正比

我们假设空气阻力 $f = -cv$ ， c 为阻力系数，纸飞机的质量为 m ，建立微分方程

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{c}{m}v_x \quad (41)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{c}{m}v_y \quad (42)$$

假定一开始 $x_0 = 0, y_0 = 0, v_{0x} = v_0 \cos \beta, v_{0y} = v_0 \sin \beta$ ，得

$$x = \frac{m}{c}v_0 \cos \beta - e^{\frac{-ct}{m}} \quad (43)$$

$$y = \frac{m}{c}v_0 \sin \beta + \frac{mg}{c} - e^{\frac{-ct}{m}} - \frac{mg}{c}t \quad (44)$$

通过解析计算可得轨迹方程

$$y = \tan \beta x + \frac{mg}{cv_0 \cos \beta}x + \frac{m^2}{c^2}g - \frac{c}{mv_0 \cos \beta}x \quad (45)$$

$$t = \frac{2mv_0 \sin \beta}{mg + v_0 c \sin \beta} \quad (46)$$

我们对微分方程进行数值求解，通过不断改变出手角度 β ，计算飞行的最远距离，

设 $v_0 = 50m/s, m = 0.5kg, g = 9.8m/s^2, c = 0.01kg/s$ ，计算数据

表 7

阻力系数 / (kg/s)	重心距机头距 离(cm)	抛射角度/(°)	射程/m	留空时长/s
0.1	10.3	12°	32.81	10.56
0.2	11.6	28°	30.45	11.32
0.3	12.1	43°	28.72	12.87
0.4	12.7	58°	26.55	14.35
0.5	13.8	73°	24.36	23.68
0.9	14.8	88°	20.01	22.69

利用 MATLAB 编写程序，分别绘制距离、留空时长与重心位置、抛射角度的曲线图(程序见附录程序三)

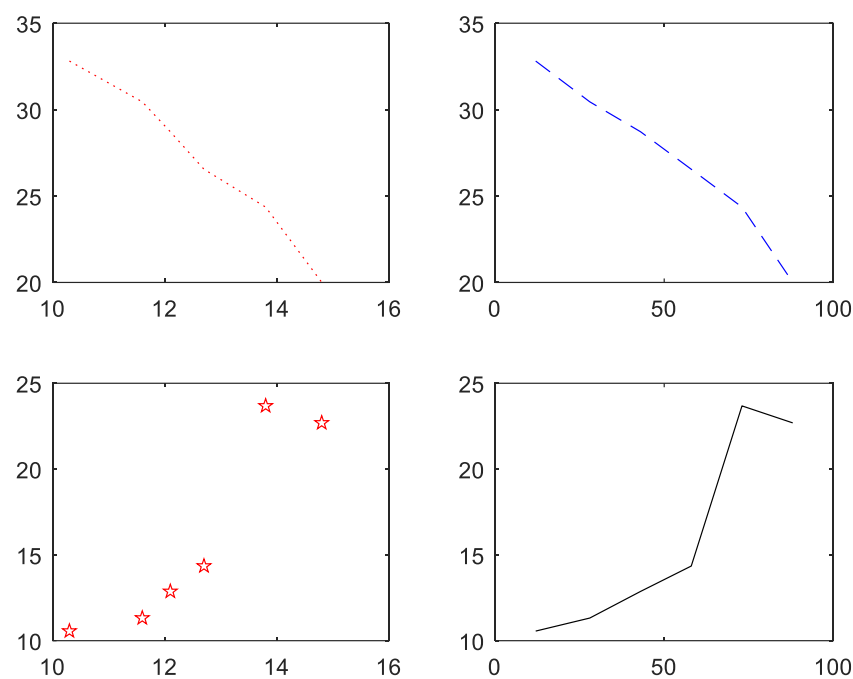


图 27 距离、留空时长与重心位置、抛射角度的曲线图

5.3.3 模型结果分析

我们将数据录入 SPSS 中，分别分析纸飞机飞行距离、留空时间与投掷角度、重心位置的关系，先对各变量之间作 Spearman 相关分析，得到如下结果

相关系数						
			x1	x2	y1	y2
Spearman 的 rho	x1	相关系数	1.000	1.000**	-1.000**	.943**
		Sig. (双侧)005
		N	6	6	6	6
	x2	相关系数	1.000**	1.000	-1.000**	.943**
		Sig. (双侧)005
		N	6	6	6	6
	y1	相关系数	-1.000**	-1.000**	1.000	-.943**
		Sig. (双侧)005
		N	6	6	6	6
	y2	相关系数	.943**	.943**	-.943**	1.000
		Sig. (双侧)	.005	.005	.005	.
		N	6	6	6	6

** 在置信度 (双侧) 为 0.01 时, 相关性是显著的。

可以看出个变量间显著相关，即重心位置、投掷角度是影响纸飞机的飞行的重要因素，用 SPSS 中分析回归，分别用飞行距离、留空时间对投掷角度、重心位置进行多元线性回归，得方差分析表，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，模型的 p 值 <0.05 ，方程通过显著性水平。

Anova ^b						
模型		平方和	df	均方	F	Sig.
1	回归	102.513	2	51.256	76.836	.003 ^a
	残差	2.001	3	.667		
	总计	104.514	5			

a. 预测变量: (常量), x1, x2。

b. 因变量: y1

我们通过 MATLAB 拟合方程，得出当 β 在 68° 左右，纸飞机重心距机头约为距离机头的 $1/4$ 时，纸飞机的留空时间达到最长。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

模型一建立了纸飞机层次拆分模型，利用AutoCAD软件制图，得到了纸飞机的三维模型和三视图，使得模型更加直观，在视图的基础上建立合适的坐标系，可以方便得出各层次的重心坐标，最后可以准确得到三维立体对的重心坐标。

模型二采用力矩平衡，牛顿第二定律，建立的微分方程简单易懂，贴合实际。模型二中使用 MATLAB 处理函数，拟合出重心位置与斜抛初始角度对飞行距离的函数图像，直观形象的观察出最佳重心位置和抛射初始角度对飞行距离的影响。

在模型三中，数据处理及模型求解时充分运用了 matlab 等数学软件，较好的解决了问题，得到了较为合理的结果，并不断的分析、检验和完善改进使得模型具有了较高的准确性，同时也确保了模型结构的严谨性。

6.2 模型的缺点

模型一中求解带有胶带的纸飞机重心时忽略了胶带对纸飞机质量的改变，因此计算出的重心坐标存在一定的偏差。

模型二为了突出考虑重力与升力之间的相互影响，将无风状态下的空气阻力 $f=-cv$ 中的空气阻力系数视作常量。

模型三中部分数据存在一定误差，数据的精确度会受到相关影响，所以可能对结果会产生微小影响。

6.3 模型的推广

上述模型具有一定的推广性，不仅适用于研究理想状态下，一、飞机飞行距离与重

心位置、投掷角度的关系;二、飞机滞空时间与重心位置、投掷角度的关系,而且可以扩展到其他理想化的领域。

比如:通过查找资料得知,飞机航油是影响航空公司支出的主要因素,公司通常通过提高飞行高度、减少飞机重量、降低速度等方式降低飞机燃油支出。但是,飞机的重心位置与飞行角度对飞行性能的影响也十分重要,为了使飞机平稳飞行,机身需要产生一个向下的配平力。这个额外的力使飞机抬头用于平衡因重力而产生的低头趋势,但同时也会附带产生一个向后的阻力分力而且其大小与重心位置密切相关^[8]。很容易得出,这一额外阻力会对飞机飞行性能有影响,造成不必要的能量损失,因此增加油耗损失。

通过,寻找合理重心位置与飞行角度,可以尽可能的减少这一额外阻力,以达到减少油耗的目的。

参考文献

- [1]梁新. B757-200 飞机重心位置变化对阻力影响机理分析及计算[J]. 长沙航空职业技术学院学报, 2017, 17(3):67-71. DOI:10.13829/j.cnki.issn.1671-9654.2017.03.019.
- [2]百度百科, <https://baike.so.com/doc/4111335-4310424.html> 2019年5月20日.
- [3]百度百科, <https://baike.so.com/doc/6197965-6411227.html> 2019年5月20日.
- [4]百度百科, <https://baike.so.com/doc/6357741-6571375.html> 2019年5月20日.
- [5]梁新. B757-200 飞机重心位置变化对阻力影响机理分析及计算[J]. 长沙航空职业技术学院学报, 2017, 17(3):67-71. DOI:10.13829/j.cnki.issn.1671-9654.2017.03.019.
- [6]李伟民, 阮黎黄松, 王慧. 抛体运动的轨迹长度与所围面积研究[J]. 科技资讯, 2013, (28):243-244. DOI:10.3969/j.issn.1672-3791.2013.28.170.
- [7]宋维才. 最佳抛射角和最远抛射距离[J]. 物理通报, 2001(06):13-14.
- [8]郭玉涛. 飞机重心节油原理研究和案例分析[J]. 空运商务, 2018, (11):57-59.

附录

程序一:

```
%机身重心的求解
x1=[4.6533 3.8729 6.6016 6.1537 12.7332];
%不同层次重心的x 轴坐标
y1=[0.8505 0.5971 0.9555 0.9978 2.0667];
%不同层次重心的y 轴坐标
m1=[7.1723*4 5.4635*4 15.6263*2 13.6256*2 59.2100*2]';
%不同层次在面密度为单位1 下的质量
m=7.7823*4+5.4636*4+15.6263*2+13.6256*2+59.2100*2
%机身总质量
```

```

x0=x1*m1/m;
%机身重心x 坐标求解
y0=y1*m1/m;
%机身重心y 坐标求解
x0
y0

%机翼重心的求解
x1=[12.4911 2.0632 2.5633 1.8300 6.4385];
%不同层次重心的x 轴坐标
y1=[0 0 0 0 0];
%不同层次重心的y 轴坐标
m1=[148.9070 3.6267 2*4.8919 2*3.0363 34.9826]';
%不同层次在面密度为单位1 下的质量
m=148.9070+3.626+2*4.8919+2*3.033+34.981
%机翼总质量
x0=x1*m1/m;
%机翼重心x 坐标求解
y0=y1*m1/m;
%机翼重心y 坐标求解
x0
y0

```

程序二：

```

clear; %清空变量
m=5; %设定纸飞机质量
g=9.8; %重力加速度，理想状态下近似为 9.8N/m
z=0.1:0.05:0.4; %几种不同的重心位置
c=0.05; %空气阻力系数
v0=7.5; %设置初速度为 7.5m/s
r=0:pi/600:pi/2.25; %选定角度范围
for i=1:267
x1(i)=(1-z(1))*(1-z(1))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(1))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
% 根据公式求对应的 x 水平距离
x2(i)=(1-z(2))*(1-z(2))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(2))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
x3(i)=(1-z(3))*(1-z(3))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(3))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
x4(i)=(1-z(4))*(1-z(4))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(4))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
x5(i)=(1-z(5))*(1-z(5))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(5))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
x6(i)=(1-z(6))*(1-z(6))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(6))*m*g+c*v0*cos(r(i)));
x7(i)=(1-z(7))*(1-z(7))*m*m*g*v0*sin(2*r(i))/((1-z(7))*m*g+c*v0*cos(r(i)));

```

end

```
plot(r,x1,'r',r,x2,'b',r,x3,'y',r,x4,'g',r,x5,'c',r,x6,'k',r,x7,'m');
%绘制几种不同的曲线
xlabel('  $\theta / ^\circ$  ');
ylabel(' x/m '); %设置标签
set(gca,'xticklabel',{0:5:90}) %设定 x 坐标的刻度显示
legend('  $\lambda =0.1$  ', '  $\lambda =0.15$  ', '  $\lambda =0.20$  ', '  $\lambda =0.25$  ', '  $\lambda =0.30$  ', '  $\lambda =0.35$  ', '  $\lambda =0.40$  '); %添加图例
```

程序三：

```
subplot(2,2,1);
x1=[10.3,11.6,12.1,12.7,13.8,14.8];
x2=[12,28,43,58,73,88];
y=[32.81,30.45,28.72,26.55,24.36,20.01];
y1=[10.56,11.32,12.87,14.35,23.68,22.69];
plot(x1,y,'r:');
subplot(2,2,2);
plot(x2,y,'b--');
subplot(2,2,3);
plot(x1,y1,'rp');
subplot(2,2,4);
plot(x2,y1,'k')
```