

露天矿生产的车辆安排

房亮 矫健 于伟

指导教师 谭欣欣等

摘 要

本文针对露天矿车辆的合理安排问题进行研究，利用线性规划方法和 C 语言程序，建立了模型 I 和模型 II。在模型 I 中根据“总运量最小，同时出动最少的卡车（卡车不等待且满足质量和品位条件下）使运输成本最小”的原则，结合实例给出了一个班次生产计划：在铲位 1、2、3、4、7、9、10 上安排 7 辆铲车和 16 辆卡车运输，使得运输成本最小，由此总运量最小为 10 万吨。在模型 II 中，利用现有车辆运输，获得最大产量的条件建立了目标函数，用每辆车在一个班次内所行驶的最大次数来约束产量，即可得到最大产量，经计算可知最大产量 10.8 万吨。另外，本文对模型进行分析，并将该模型的应用推广到其他的运输车辆调度问题中去。

问题重述

钢铁工业是国家工业的基础之一，铁矿是钢铁工业的主要原料基地。许多现代化铁矿是露天开采的，它的生产主要是由电动铲车（以下简称电铲）装车、电动轮自卸卡车（以下简称卡车）运输来完成。提高这些大型设备的利用率是增加露天矿经济效益的首要任务。

露天矿里有若干个爆破生成的石料堆，每堆称为一个铲位，每个铲位已预先根据铁含量将石料分成矿石和岩石。一般来说，平均铁含量不低于 25% 的为矿石，否则为岩石。每个铲位的矿石、岩石数量，以及矿石的平均铁含量（称为品位）都是已知的。每个铲位至多能安置一台电铲，电铲的平均装车时间为 5 分钟。

卸货地点（以下简称卸点）有卸矿石的矿石漏、2 个铁路倒装场（以下简称倒装场）和卸岩石的岩石漏、岩场等，每个卸点都有各自的产量要求。从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 $29.5\% \pm 1\%$ ，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。从长远看，卸点可以移动，但一个班次内不变。卡车的平均卸车时间为 3 分钟。

所用卡车载重量为 154 吨，平均时速 28 km/h 。卡车的耗油量很大，每个班次每台车消耗近 1 吨柴油。发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量，故一个班次中只在开始工作时点火一次。卡车在等待时所耗费的能量也是相当可观的，原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车每次都是满载运输。

每个铲位到每个卸点的道路都是专用的宽 60 m 的双向车道，不会出现堵车现象，每段道路的里程都是已知的。

感谢您对网站建设一如既往的支持与关心

一个班次的生产计划应该包含以下内容：出动几台电铲，分别在哪些铲位上；出动几辆卡车，分别在哪些路线上各运输多少次（因为随机因素影响，装卸时间与运输时间都不精确，所以排时计划无效，只求出各条路线上的卡车数及安排即可）。一个合格的计划要在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求，而一个好的计划还应该考虑下面两条原则之一：

1. 总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车，从而运输成本最小；
2. 利用现有车辆运输，获得最大的产量（岩石产量优先；在产量相同的情况下，取总运量最小的解）。

请你就两条原则分别建立数学模型，并给出一个班次生产计划的快速算法。针对下面的实例，给出具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量。

某露天矿有铲位 10 个，卸点 5 个，现有铲车 7 台，卡车 20 辆。各卸点一个班次的产量要求：矿石漏 1.2 万吨、倒装场 I 1.3 万吨、倒装场 II 1.3 万吨、岩石漏 1.9 万吨、岩场 1.3 万吨。

铲位和卸点位置的二维示意图见附录三，各铲位和各卸点之间的距离（公里）见附录四。

问题假设

- 1 假设每辆电铲装车时间为 5 分钟，卡车的卸车时间为 3 分钟。
- 2 设卡车和电铲有足够的燃料和电瓶能量供给，不会导致停车现象发生。
- 3 卡车不会因为天气恶劣，司机吃中午饭，意外出故障等因素而在一个班次内停止行驶。
- 4 假设卡车从铲位到卸点所行驶的路程是直线型的，这样可使路程最短。
- 5 设电铲和卡车从上午 8:00 开始运行并在一个班次内不停歇。
- 6 设汽车空载和满载的速度一样。

符号约定

r_i	($i=1, 2, \dots, n$)	矿石铁在各铲点含量百分比
R_j	($j=1, 2, \dots, m$)	各个铲位的矿石运到同一卸点后铁的平均含量
A_i	($i=1, 2, \dots, n$)	各个铲位
B_j	($j=1, 2, \dots, m$)	各个卸点
N	($i=1, 2, \dots, n$)	铲车数
X_{ij}	($i=1, 2, \dots, n$) ($j=1, 2, \dots, m$)	从铲位 A_i 运送到卸点 B_j 所需的卡车数
S_{ij}	($i=1, 2, \dots, n$) ($j=1, 2, \dots, m$)	从铲位 A_i 运送到卸点 B_j 的行驶路程
D_i	($i=1, 2, \dots, n$)	第 i 辆卡车
Q_i	($i=1, 2, \dots, n$)	第 i 个铲点矿石产量

q_i	($i=1, 2, \dots, n$)	第 i 个铲点岩石产量
V		卡车的平均时速
t_{ij}		卡车 D_i 到各卸点 B_j 所用时间
f		卡车往返总次数
其余符号在文中说明		

模型的建立与求解

一 模型一的建立与求解

数学模型的建立

对所给问题进行分析, 由于各铲点到各卸点的路程为常量, 所以在每辆车满载 (154 吨) 的情况下, 要想求出总运量 (吨公里) 最小, 则只需求出路程最短即可满足要求。故建立如下线性规划模型, 在路程最短的前提下, 求出我们认为是最少的车辆数。则最小总运量为:

$$f(x) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m s_{ij} (x_{ij} \times 154 \times f)$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} \times 154 \times f = D_i \times 154$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij} \times 154 \times f \leq (Q_i + q_i) / 154$$

2. 数学模型的求解

a. (1) 多路径目标选择问题:

由于题目中要求“从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑, 应该尽量把矿石按矿石卸点的需要的铁含量 (假设要求都为 $29.5\% \pm 1\%$, 称为品位限制) 搭配起来送到卸点, 并且满足品位限制。在附录四中只有铲位 1, 铲位 2, 铲位 3 满足题中要求。但是如果我们只用这 3 个铲位, 这样保证不了卸点一个班次的产量要求。所以我们将这 3 个和其余的 7 个铲位搭配起来送卸点, 这样保证了卸点铁含量能够在品位限制以内。则可得:

$$R_i = \frac{X_{ij} \times r_i \times 154 + X_{ij} \times r_{i+1} \times 154}{(X_{ij} + X_{i+1j}) \times 154}$$

满足条件为 $28.5\% \leq R_i \leq 30.5\%$

在附录四中可看出百分比数值有 28, 29, 30 和 31, 32, 33, 若将该六个数

任意组合可得出搭配起来后运送到卸点的矿石铁含量的百分比的平均值，如下

$$\begin{aligned} (33+28)/2 &= 30.5 & (32+29)/2 &= 30.5 & (31+30)/2 &= 30.5 \\ (32+28)/2 &= 30 & (31+29)/2 &= 30 & (31+28)/2 &= 29.5 \\ (30+28)/2 &= 29 & (30+29)/2 &= 29.5 \end{aligned}$$

对于 $(33+29)/2=31$ $(33+30)/2=31.5$ $(32+30)/2=31$ 以及 28, 29, 30 这三个数与自身组合，不满足品位限制要求，不予于考虑。 $(28+29)/2=28.5$ 该组合虽然满足品位限制，但是这两个百分数较小，若采取此组和不能再和百分比比较大的数相组合。所以排除此可能性。

搭配方案如下表

	A9+A2	A6+A2	A4+A3	A7+A3	A5+A1	A8+A1	A10+A1	A4+A2	A7+A2
矿石漏	5.83	7.93	8.21	6.67	8.21	7.16	6.53	9.19	7.65
倒装场 1	4.08	3.54	3.03	3.38	3.17	3.94	5.41	2.12	2.47
岩场	6.67	9.26	10.17	8.07	9.4	8.35	6.46	10.17	8.07
岩石漏	6.81	4.36	3.1	5.48	3.38	4.36	6.74	3.59	5.97
倒装场 2	5.13	6.67	6.88	4.5	6.67	6.04	4.92	7.02	4.64
	A3+A8	A3+A10	A5+A3	A2+A8	A2+A10	A2+A5	A2+A1	A3+A1	
矿石漏	6.11	5.48	7.16	7.09	6.46	8.14	10.45	9.47	
倒装场 1	3.94	5.41	3.17	3.03	4.5	2.26	2.89	3.8	
岩场	8.07	6.18	9.12	8.07	6.18	9.12	11.5	11.5	
岩石漏	4.99	7.37	4.01	5.48	7.86	4.5	2.4	1.91	
倒装场 2	5.34	4.22	6.27	5.48	4.36	6.11	8.28	8.14	

表中 $A_i + A_{i'}$ ($i=1, 2, \dots, 10$) 是两个铲位到各卸点路程之和。

(2) 有了这些数据我们可以对题目进行进一步分析。题中给出“卸货地点有卸矿石的矿石漏、2 个铁路倒装场和卸岩石的岩石漏、岩场。”也就是说，卸矿石的卸点有 3 个地方，即矿石漏、倒装场 1 和倒装场 2。卸岩石的卸点有 2 个地方，即岩场和岩石漏。我们只要找到所有搭配铲位到卸点的距离最小即可。

从表中我们先找出到卸矿石的搭配铲位：

A2 和 A4 到倒装场 1 路程之和是最小的，为 2.12。

A3 和 A1 到倒装场 2 路程之和是最小的，为 4.22。

A3 和 A10 到矿石漏路程之和是最小的，为 5.48。

但是各铲位矿石量是一定的，这里 A3 的矿石量会有不够运输的可能，所以要在选一条较短的路径。即：

A2 和 A9 到矿石漏的路程之和为 5.83。

A3 和 A7 到倒装场 2 的路程之和为 4.5。

A2 和 A4 到倒装场 1 的路程之和为 2.12。

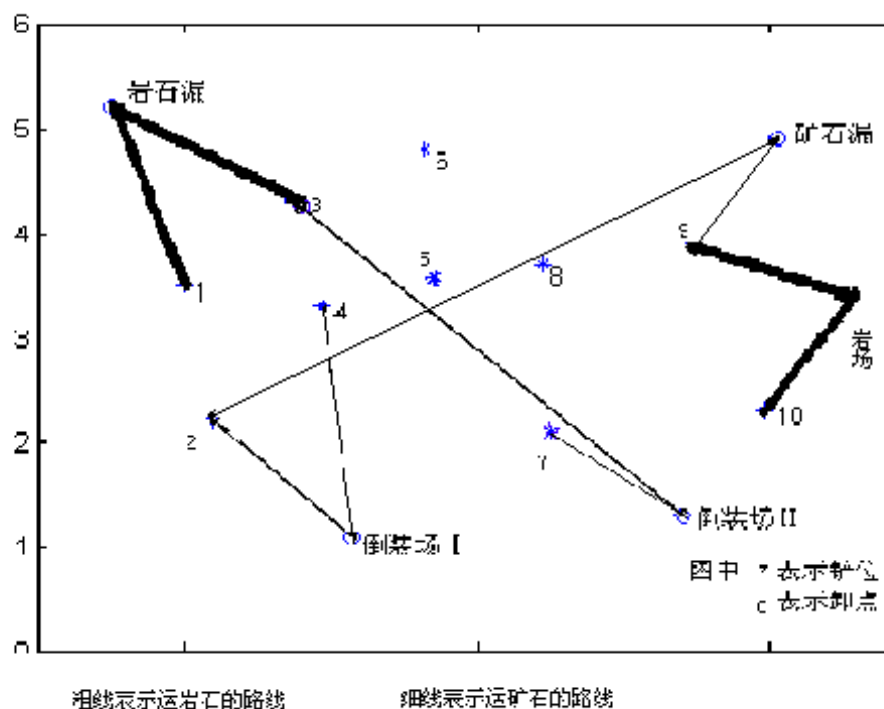
题中没有提出对岩石的要求，所以我们利用最小元素法找最短的路径。

最小元素法的基本思想是从路程中选出最短的路径，将其组合，并满足品位要求

A1 和 A3 到岩石漏的路程之和最小, 为 1.91

A9 和 A10 到岩场的路程之和最小, 为 1.63

下图是铲位到卸点的最优路径:



b. 根据多路径目标选择问题所得出的最短路径，求出到达各个卸点所用车辆总数最小。

I. 卡车到各卸点所用时间:

$$t_{ij} = \frac{S_{ij}}{v} \min$$

II. Di 从 Ai 到 Bj 往返一次所需时间 $T=8+2t_{ij}(\min)$

$$\left(\frac{Q_i}{154} T\right) / 60 \leq 8 \text{小时}$$

即:

$$\frac{Q_i}{154} \left(8 + \frac{2S_{ij}}{v}\right) / 60 \leq 8 \text{小时}$$

代入具体数值计算若不满足该条件，则需增加车辆。

例如:

$$Q=10500t$$

$$S=0.99km$$

$$v=28km/h$$

$$\frac{Q}{154} \left(8 + \frac{2S}{v}\right) / 60 = 9.1$$

则至少增加 1 辆车。

III. 从 A_i 到 B_j 的车数 X_{ij} 发车的次数 $f=Q_i/(154 \times X_{ij})$

X_{ij} 辆车发出 f 次所需时间 $T' = f \times T$

以下是对实例进行分析,并得出详细的生产计划,利用 C 语言进行编程,但只给出了(一)的程序,其余可安此程序推出,程序见附录一,运行结果是安分钟计算的,我们需要转换得出下面计划,运行结果见附录二。

(一)由 A4 和 A2 到倒装场 I

从 A4 发车

某辆车从 A4 到倒装场 I 所需时间 $5+3+3=11\text{min}$, 返回到 A4 的时间是 3min , 因此该辆车往返一次所需时间为 14min 。

D1 8: 00 装车-----8: 11 卸完-----8: 14 返回 A4 点

D2 8: 05 装车-----8: 16 卸完-----8: 19 返回 A4 点

D1 8: 14 装车-----8: 25 卸完-----8: 28 返回 A4 点

D2 8: 19 装车-----8: 30 卸完-----8: 33 返回 A4 点

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

D1 15: 42 装车-----15: 53 卸完-----15: 56 返回 A4 点

D2 15: 47 装车-----15: 58 卸完-----16: 01 返回 A4 点

每辆车满载为 154 吨, 我们需要两辆车从 A4 运到倒装场 I, 因此两辆车所运行的次数 $f=10500/(154 \times 2) \approx 34$ 次。且每辆车运行一个往返需要 14 分钟, 两辆车共用时间

$t=34 \times 14=442\text{min} \approx 7.933\text{h}$ 。

由此可看出最末一次车辆在 16 点以前到达 A4 点满足一个班次内完成。

②从 A2 发车

某辆车从 A2 到倒装场 I 所需时间 $5+2+3=10\text{min}$, 返回到 A2 的时间是 2min , 因此该辆车往返一次所需时间为 12min 。

D3 8: 03 装车-----8: 13 卸完-----8: 15 返回 A2 点

D4 8: 08 装车-----8: 18 卸完-----8: 20 返回 A2 点

D3 8: 15 装车-----8: 25 卸完-----8: 27 返回 A2 点

D4 8: 20 装车-----8: 30 卸完-----8: 32 返回 A2 点

⋮
⋮
⋮
⋮
⋮

D3 9: 27 装车-----9: 37 卸完-----9: 39 返回 A2 点

D4 9: 32 装车-----9: 42 卸完-----9: 44 返回 A2 点

每辆车满载为 154 吨, 我们需要两辆车从 A2 运到倒装场 I, 因此两辆车所运行的次数 $f=2500/(154 \times 2) \approx 8$ 次。且每辆车运行一个往返需要 12 分钟, 两辆车共用时间

$t=8 \times 12=96\text{min} \approx 1.6\text{h}$ 。

由此可看出最末一次车辆在 9: 44 到达 A2 满足一个班次。

所以我们只需要从 A4 发出两辆车运行 34 次并从 A2 发出两辆车运行 8 次即可满足。

(二)由 A2 和 A9 到矿石漏

从 A2 发车

某辆车从 A2 到矿石漏所需时间 $5+11+3=19\text{min}$, 返回到 A2 的时间是 11min , 因此该辆车往返一次所需时间为 30min 。

考虑到一辆铲车只能为一辆卡车服务，所以从 A2 向矿石漏运矿石需要等 A2 到倒装场 I 运完以后，再从 A2 往矿石漏运矿石。并可再次利用 D3 和 D4 车，但还需要加上 D5 和 D6 两辆车。

D3 9: 39 装车-----9: 58 卸完-----10: 09 返回 A2 点
 D4 9: 44 装车-----10: 03 卸完-----10: 14 返回 A2 点
 D5 9: 49 装车-----10: 08 卸完-----10: 19 返回 A2 点
 D6 9: 54 装车-----10: 13 卸完-----10: 24 返回 A2 点
 D7 9: 59 装车-----10: 18 卸完-----10: 29 返回 A2 点
 ⋮
 ⋮

D3 14: 39 装车-----14: 58 卸完-----15: 09 返回 A2
 D4 14: 44 装车-----15: 03 卸完-----15: 14 返回 A2
 D5 14: 49 装车-----15: 08 卸完-----15: 19 返回 A2
 D6 14: 54 装车-----15: 13 卸完-----15: 24 返回 A2
 D7 14: 59 装车-----15: 18 卸完-----15: 29 返回 A2

每辆车满载为 154 吨，我们需要五辆车从 A2 运到矿石漏，因此五辆车所运行的次数 $f=8000/(154 \times 5) \approx 11$ 次。且每辆车运行一个往返需要 30 分钟，五辆车共用时间

$$t=30 \times 11=331\text{min} \approx 5.5\text{h}.$$

从 A9 发车

某辆车从 A9 到矿石漏所需时间 $5+2+3=10\text{min}$ ，返回到 A9 的时间是 2min，因此该辆车往返一次所需时间为 12min。

D8 8: 00 装车-----8: 10 卸完-----8: 12 返回 A9
 D8 8: 12 装车-----8: 22 卸完-----8: 24 返回 A9
 D8 8: 24 装车-----8: 34 卸完-----8: 36 返回 A9
 ⋮
 ⋮

D8 13: 12 装车-----13: 22 卸完-----13: 24 返回 A9

每辆车满载为 154 吨，我们需要一辆车从 A9 运到矿石漏，因此一辆车所运行的次数 $f=4000/(154 \times 1) \approx 26$ 次。且每辆车运行一个往返需要 12 分钟，该车共用时间

$$t=12 \times 26=312\text{min} \approx 5.2\text{h}.$$

(三)从 A3 和 A7 到倒装场 II

①从 A3 发车

某辆车从 A3 到倒装场 II 所需时间 $5+8+3=16\text{min}$ ，返回到 A3 的时间是 8min，因此该辆车往返一次所需时间为 24min。

D9 8:00 装车-----8:16 卸完-----8:24 返回 A3 点
 D9 8:24 装车-----8:40 卸完-----8:48 返回 A3 点
 D9 8:48 装车-----9:04 卸完-----9:12 返回 A3 点
 ⋮
 ⋮

D9 14:00 装车-----14:16 卸完-----14:24 返回 A3 点

每辆车满载为 154 吨，我们需要一辆车从 A3 运到倒装场 II，因此该辆车所运行的次数 $f=2500/(154 \times 1) \approx 16$ 次。且该车运行一个往返需要 24 分钟，该车

共用时间 $t=16 \times 24=384\text{min} \approx 6.4\text{h}$ 。

②从 A7 发车

某辆车从 A7 到倒装场 II 所需时间 $5+2+3=10\text{min}$ ，返回到 A7 的时间是 2min ，因此该辆车往返一次所需时间为 12min 。

D10 8:00 装车-----8:10 卸完-----8:12 返回 A7 点
 D11 8:05 装车-----8:15 卸完-----8:17 返回 A7 点
 D10 8:12 装车-----8:22 卸完-----8:24 返回 A7 点
 D11 8:17 装车-----8:27 卸完-----8:29 返回 A7 点

⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮

D10 14:48 装车-----14:58 卸完-----15:00 返回 A7 点
 D11 14:53 装车-----15:03 卸完-----15:05 返回 A7 点

每辆车满载为 154 吨，我们需要两辆车从 A7 运到倒装场 II，因此两辆车所运行的次数 $f=10500/(154 \times 2) \approx 32$ 次。且每辆车运行一个往返需要 24 分钟，两辆车共用时间 $t=34 \times 12=408\text{min} \approx 6.8\text{h}$ 。

(四)A1 和 A3 到岩石漏

①从 A1 发车

某辆车从 A1 到岩石漏所需时间 $5+2+3=10\text{min}$ ，返回到 A1 的时间是 2min ，因此该辆车往返一次所需时间为 12min 。

D12 8:00 装车-----8:10 卸完-----8:12 返回 A1 点
 D13 8:05 装车-----8:15 卸完-----8:17 返回 A1 点
 D12 8:12 装车-----8:22 卸完-----8:24 返回 A1 点
 D13 8:17 装车-----8:27 卸完-----8:29 返回 A1 点

⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮

D12 15:36 装车-----15:46 卸完-----15:48 返回 A1 点
 D13 15:41 装车-----15:51 卸完-----15:53 返回 A1 点

每辆车满载为 154 吨，我们需要两辆车从 A1 运到岩石漏，因此两辆车所运行的次数 $f=12000/(154 \times 2) \approx 39$ 次。且每辆车运行一个往返需要 12 分钟，两车共用时间 $t=39 \times 12=468\text{min} \approx 7.8\text{h}$ 。

②从 A3 发车

某辆车从 A3 到岩石漏所需时间 $5+3+3=11\text{min}$ ，返回到 A3 的时间是 3min ，因此该辆车往返一次所需时间为 13min 。

D14 8:03 装车-----8:14 卸完-----8:17 返回 A3
 D15 8:08 装车-----8:19 卸完-----8:22 返回 A3
 D14 8:17 装车-----8:28 卸完-----8:31 返回 A3
 D15 8:22 装车-----8:33 卸完-----8:36 返回 A3

⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮
 ⋮

D14 13:33 装车-----13:44 卸完-----13:47 返回 A3
 D15 13:38 装车-----13:49 卸完-----13:52 返回 A3

每辆车满载为 154 吨，我们需要两辆车从 A3 运到岩石漏，因此两辆车所运行的次数 $f=7000/(154 \times 2) \approx 23$ 次。且两辆车运行一个往返需要 13 分钟，该车共用时间 $t=23 \times 13=299\text{min} \approx 5\text{h}$ 。

(五)A9 和 A10 到岩场

从 A9 发车

某辆车从 A9 到岩场所需时间 $5+2+3=10\text{min}$ ，返回到 A9 的时间是 2min ，因此该辆车往返一次所需时间为 12min 。

D16 8:00 装车-----8:10 卸完-----8:12 返回 A9

D16 8:12 装车-----8:22 卸完-----8:24 返回 A9

D16 8:24 装车-----8:34 卸完-----8:36 返回 A9

D16 8:36 装车-----8:46 卸完

D16 车在岩场卸完货物以后在行驶 $(0.57/28) \times 60 \approx 1\text{min}$ 到达 A10, 和 A10 的 1 辆车一起运货。

D16 8:57 装车-----9:06 卸完-----9:07 返回 A10

D17 9:02 装车-----9:11 卸完-----9:12 返回 A10

D16 9:07 装车-----9:16 卸完-----9:17 返回 A10

D17 9:12 装车-----9:21 卸完-----9:22 返回 A10

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

D16 14:57 装车-----15:06 卸完-----15:07 返回 A10

D17 15:02 装车-----15:11 卸完-----15:12 返回 A10

综合上面(一)、(二)、(三)、(四)、(五)可看出

从 A2 发出 2 辆车共运行 34 次+从 A4 发出 2 辆车共运行 8 次即可满足倒装场 I 的产量

从 A2 发出 5 辆车共运行 11 次+从 A9 发出 1 辆车共运行 26 次即可满足矿石漏的产量

从 A3 发出 1 辆车共运行 16 次+从 A7 发出 2 辆车共运行 34 次即可满足倒装场 II 的产量

从 A1 发出 2 辆车共运行 39 次+从 A3 发出 2 辆车共运行 23 次即可满足岩石漏的产量

从 A9 发出 1 辆车共运行 4 次+从 A10 发出 2 辆车共运行 37 次即可满足岩场的产量

由于 A2 发出的 2 辆车往倒装场 I 没有跑满一个班次，后又转向矿石漏，所以从 A2 往矿石漏发出的 5 辆车中有从 A2 往倒装场 I 的 2 辆车，从 A9 出发的一辆车也可重复利用，所以我们一共需要 16 辆车。

总运量(吨公里) = $X_{ij} \times f \times S_{ij} \times 154$

= $(G_{\text{倒装场 I}} + G_{\text{矿石漏}} + G_{\text{倒装场 II}} + G_{\text{岩石漏}} + G_{\text{岩场}}) \times 154$

= $\{(2 \times 34 \times 0.99 + 2 \times 8 \times 1.13) + (5 \times 11 \times 5.19 + 1 \times 26 \times 0.64) + (1 \times 16 \times 3.72 + 2 \times 34 \times 0.78) + (2 \times 39 \times 0.64 + 2 \times 23 \times 1.27) + (1 \times 4 \times 1.06 + 2 \times 37 \times 0.57)\} \times 154 = 100840.74(\text{吨}) \approx 10 \text{ 万吨}$

3.对卡车相遇的冲突问题的分析及计算

因为卸点不能同时为两辆及两辆以上的卡车服务，卡车在卸点相遇会因卸车时间而发生冲突，又因装车和卸车时间是随机的，所以车辆冲突次数属于离散型随机变量，此题冲突次数满足泊松分布，该题可归结为数学中的概率问题。

具体求法如下：

①所有卡车在一个班次内只通过一个卸点，设卡车以 $q=1/2$ 概率能或不能通过卸点（不能通过卸点即为相遇冲突），由离散型随机变量分布可知代入 $q=1/2$ 求解可知

	$P = \{Z = k\} = (1-q)^k q$	
Z	0	1
P	0.5	0.25

由此可知 $P=0.5$ 所以可求出卡车相遇冲突次数不小于 1 的概率

卡车相遇的冲突概率： L =卡车在卸点相遇的次数/卡车在卸点经过的次数

泊松（poisson）定理： 设 $\lambda > 0$ 是一常数， n 是任意正整数，设 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ ，则对于任一固定的非负整数 k ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k \times e^{-\lambda}}{k!}$$

泊松分布内容为：

$$L\{Z = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,3,\dots$$

此题 $n = X_{ij} \times f$ 因此 $\lambda = n \times p = X_{ij} \times f \times p = 0.5 X_{ij} \times f$

所以

$$L\{Z \geq 1\} = 1 - L\{Z = 0\} = 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}$$

将 λ 代入此式即可求出卡车相遇冲突次数不小于 1 的概率。 λ 将由具体的 X_{ij} 和 f 决定。

这样结合上面所列的具体计划，我们就可得出完整且详细的生产计划，这个计划满足卡车不等待，卸点只为一辆卡车服务，总运量最小（即路程最小），使运输成本最小，且可同时出动 16 辆车即可达到各卸点的产量要求。

二 模型二的建立及求解

1. 模型的建立

设有 n 个铲位 $n=1, 2, 3, \dots$ ，有 m 个卸点 $m=1, 2, 3, \dots$

$M=a$ (卡车)

$N=b$ (铲车)

假定含铁 ri 在 28%~33% 考虑到每个铲位都有可能相互搭配，搭配的个数可以从 1 到 n ，也就是说可以有 n 个铲位往同一卸点运送矿石或岩石。这样虽然也可以满足品位限制，但搭配个数是随机的，让其自由搭配，计算复杂。因此，限定两个铲位向一个卸点运送。题中要求利用现有车辆运输，获得最大产量，要想获得最大产量则需求出车辆在 8 个小时之内所行驶的最大往返次数：

$$f' = 8(h) \times 60/T$$

求最大总运量的数学模型为：

$$\max(Q) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij(\text{岩石})} f' + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij(\text{矿石})} f' \right) \times 154$$

$$T = 8 + 2 t_{ij}$$

$$t_{ij} = \frac{S_{ij}}{v}$$

$$Q_{\text{计划要求产量}} \leq \sum_{i=1}^n Q_{Di} \leq \sum_{i=1}^n Q_{Ai}$$

$$q_{\text{计划要求产量}} \leq \sum_{i=1}^n q_{Di} \leq \sum_{i=1}^n q_{Ai}$$

$$Ri = \frac{X_{ij} \times r_i + X_{ij+1} \times r_{i+1}}{X_{ij} + X_{i+1j}}$$

Ri 满足条件为 $28.5\% \leq Ri \leq 30.5\%$

其中：

Q_{Di} 表示第 i 辆车实际运送矿石量。 Q_{Di} 表示第 i 辆车实际运送岩石量。 Q_{Ai} 表示第 i 个铲位的矿石产量。 Q_{Ai} 表示第 i 个铲位的岩石产量。

2. 模型二的求解

因为题中所给条件要求岩石产量优先，且在产量相同情况下，取总运量最小的解，所以：

我们先考虑从各个铲位到岩石卸点的路程，待岩石运完以后，再考虑运送矿石。

由于还须考虑总运量最小问题，因此只要将各铲位到达各卸点的最短路径求出即可满足总运量最小，先提出最短路径这个约束条件，可减小模型的冗余度，将模型中满足最大产量但路程较长的解，在未算出前，直接排除。

考虑运送矿石时还需考虑矿石中铁含量的品位限制问题，因此只保留铁含量 Ri 满足 $28.5\% \leq Ri \leq 30.5\%$ 的铲位组合。

综上，根据模型二的目标函数和模型一的求解方法及过程可求出最大产量：

(一) 一辆车从铲位 A2 到倒装场 I 往返一次所需时间 12 分钟，该车辆在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/12=40$ 次，所以该辆车从 A2 运送矿石到倒装场 I 的最大产量为 $E21=2 \times f' \times 154=12320$ 吨。

一辆车从铲位 A4 到倒装场 I 往返一次所需时间 14 分钟，该车辆在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/14=34$ 次，所以该辆车从 A4 运送矿石到倒装场 I 的最大产量为 $E41=2 \times f' \times 154=10472$ 吨。

(二) 一辆车从铲位 A2 到矿石漏往返一次所需时间 30 分钟，该车辆在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/30=16$ 次，所以该辆车从 A2 运送矿石到矿石漏的最大产量为 $E22=2$

$\times f' \times 154 = 4928$ 吨。

一辆车从铲位 A9 到矿石漏往返一次所需时间 12 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/12 = 40$ 次, 所以该辆车从 A9 运送矿石到矿石漏的最大产量为 $E92 = 2 \times f' \times 154 = 12320$ 吨。

(三) 一辆车从铲位 A3 到倒装场 II 往返一次所需时间 24 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/24 = 20$ 次, 所以该辆车从 A3 运送矿石到倒装场 II 的最大产量为 $E33 = 2 \times f' \times 154 = 6160$ 吨。

一辆车从铲位 A7 到倒装场 II 往返一次所需时间 12 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/12 = 40$ 次, 所以该辆车从 A7 运送矿石到倒装场 II 的最大产量为 $E73 = 2 \times f' \times 154 = 12320$ 吨。

(四) 一辆车从铲位 A1 到岩石漏往返一次所需时间 12 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/12 = 40$ 次, 所以该辆车从 A1 运送矿石到岩石漏的最大产量为 $E14 = 2 \times f' \times 154 = 12320$ 吨。

一辆车从铲位 A3 到岩石漏往返一次所需时间 14 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/14 = 34$ 次, 所以该辆车从 A3 运送矿石到岩石漏的最大产量为 $E34 = 2 \times f' \times 154 = 10472$ 吨。

(五) 一辆车从铲位 A9 到岩场往返一次所需时间 12 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/12 = 40$ 次, 所以该辆车从 A9 运送矿石到岩场的最大产量为 $E95 = 2 \times f' \times 154 = 12320$ 吨。

一辆车从铲位 A10 到岩场往返一次所需时间 10 分钟, 该辆车在 8 小时之内往返的最大次数 $f' = 480/10 = 48$ 次, 所以该辆车从 A10 运送矿石到岩场的最大产量为 $E105 = 2 \times f' \times 154 = 14784$ 吨。

由此可得

最大的产量为 $\max Q = E21 + E41 + E22 + E92 + E33 + E73 + E14 + E34 + E95 + E105 = 108416$ 吨

模型的特点及改进

本模型假设合理, 算法简单易懂, 适合于其他矿产运输等方面。此外在模型建立中, 引入冲突率来处理卡车运行时相冲突问题, 这是该模型的一大特点。需要改进的是使卡车在卸点不发生冲突, 这就需将卡车到达卸点的时间间隔限制在 3 分钟以外。

参考文献

- [1] 魏权龄等, 数学规划与优化设计, 北京: 国防工业出版社, 1984 年
- [2] 谢式千等, 概率与数理统计, 北京: 高等教育出版社, 1979 年
- [3] L. 库珀等, 运筹学模型概论, 上海: 上海科学技术出版社, 1987 年
- [4] 李德等, 运筹学, 北京: 清化大学出版社, 1983 年
- [5] 徐德民, 最新 C 语言程序设计, 北京: 电子工业出版社, 1997 年
- [6] 赵启兰, 多目标运输问题的决策分析, 铁道物资科学管理, 第一期第 5 卷: 36~37 页, 1997 年

附录一

```
#define www1 "在%d 分钟开始装车\n"
#define www2 "在%d 分钟卸完\n"
#define www3 "在%d 分钟返回 A4\n"
#define A4todaol 10
#define daolreturnA4 3
#define A2todaol 10
#define daolreturnA2 2
```

```
main()
{
    int a,b,c;
    printf("从 A4 发第一辆车\n");
    a=0;
    while(c<=476)
    {
        printf(www1,a);
        b=a+A4todaol;
        printf(www2,b);
        c=b+daolreturnA4;
        printf(www3,c);
        a=c;
    }
    printf("从 A4 发第二辆车");
    a=5;
    while(c<=476)
    {
        printf(www1,a);
        b=a+A2todaol;
        printf(www2,b);
        c=b+daolreturnA2;
        printf(www3,c);
        a=c;
    }
}
```

附录二

从 A4 发第一辆车

在 0 分钟开始装车,在 10 分钟卸完,在 13 分钟返回 A4,在 13 分钟开始装车,在 23 分钟卸完,在 26 分钟返回 A4,在 26 分钟开始装车,在 36 分钟卸完,在 39 分钟返回 A4,在 39 分钟开始装车,在 49 分钟卸完,在 52 分钟返回 A4,在 52 分钟开始装车,在 62 分钟卸完,在 65 分钟返回 A4,在 65 分钟开始装车,在 75 分钟卸完,在 78 分钟返回 A4,在 78 分钟开始装车,在 88 分钟卸完,在 91 分钟返回 A4,在 91 分钟开始装车,在 101 分钟卸完,在 104 分钟返回 A4,在 104 分钟开始装车,在 114 分钟卸完,在 117 分钟返回 A4,在 117 分钟开始装车,在 127 分钟卸完,在 130 分钟返回 A4,在 130 分钟开始装车,在 140 分钟卸完,在 143 分钟返回 A4,在 143 分钟开始装车,在 153 分钟卸完,在 156 分钟返回 A4,在 156 分钟开始装车,在 166 分

钟卸完,在 169 分钟返回 A4,在 169 分钟开始装车,在 179 分钟卸完,在 182 分钟返回 A4,在 182 分钟开始装车,在 192 分钟卸完,在 195 分钟返回 A4,在 195 分钟开始装车,在 205 分钟卸完,在 208 分钟返回 A4,在 208 分钟开始装车,在 218 分钟卸完,在 221 分钟返回 A4,在 221 分钟开始装车,在 231 分钟卸完,在 234 分钟返回 A4,在 234 分钟开始装车,在 244 分钟卸完,在 247 分钟返回 A4,在 247 分钟开始装车,在 257 分钟卸完,在 260 分钟返回 A4,在 260 分钟开始装车,在 270 分钟卸完,在 273 分钟返回 A4,在 273 分钟开始装车,在 283 分钟卸完,在 286 分钟返回 A4,在 286 分钟开始装车,在 296 分钟卸完,在 299 分钟返回 A4,在 299 分钟开始装车,在 309 分钟卸完,在 312 分钟返回 A4,在 312 分钟开始装车,在 322 分钟卸完,在 325 分钟返回 A4,在 325 分钟开始装车,在 335 分钟卸完,在 338 分钟返回 A4,在 338 分钟开始装车,在 348 分钟卸完,在 351 分钟返回 A4,在 351 分钟开始装车,在 361 分钟卸完,在 364 分钟返回 A4,在 364 分钟开始装车,在 374 分钟卸完,在 377 分钟返回 A4,在 377 分钟开始装车,在 387 分钟卸完,在 390 分钟返回 A4,在 390 分钟开始装车,在 400 分钟卸完,在 403 分钟返回 A4,在 403 分钟开始装车,在 413 分钟卸完,在 416 分钟返回 A4,在 416 分钟开始装车,在 426 分钟卸完,在 429 分钟返回 A4,在 429 分钟开始装车,在 439 分钟卸完,在 442 分钟返回 A4,在 442 分钟开始装车,在 452 分钟卸完,在 455 分钟返回 A4,在 455 分钟开始装车,在 465 分钟卸完,在 468 分钟返回 A4,在 468 分钟开始装车,在 478 分钟卸完,在 481 分钟返回 A4, 从 A4 发第二辆车 Press any key to continue

附录三

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	5.26	5.19	4.21	4.00	2.95	2.74	2.46	1.90	0.64	1.27
倒装场 I	1.90	0.99	1.90	1.13	1.27	2.25	1.48	2.04	3.09	3.51
岩场	5.89	5.61	5.61	4.56	3.51	3.65	2.46	2.46	1.06	0.57
岩石漏	0.64	1.76	1.27	1.83	2.74	2.60	4.21	3.72	5.05	6.10
倒装场 II	4.42	3.86	3.72	3.16	2.25	2.81	0.78	1.62	1.27	0.50

附录四

各铲位矿石、岩石数量(万吨)和矿石的平均铁含量如下表:

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石量	0.95	1.05	1.00	1.05	1.10	1.25	1.05	1.30	1.35	1.25
岩石量	1.25	1.10	1.35	1.05	1.15	1.35	1.05	1.15	1.35	1.25
铁含量	30%	28%	29%	32%	31%	33%	32%	31%	33%	31%

