

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

## 第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1271

参赛队员（签名）：

队员 1：童章明

队员 2：赖钟艳

队员 3：何陈文

参赛队教练员（签名）： 吴卢荣

参赛队伍组别：本科组

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

## 第四届“互动出版杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

#1271

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

## 2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 客机迫降姿态的探讨与研究

关 键 词 客机迫降、微积分、铅直加速度、仰角、复合函数求导

### 摘 要：

近年来，客机在近海或跨海使用越来越频繁，发生在水上迫降和坠毁事故也逐渐增多，为此水上迫降应急救生引起了有关部门的高度关注。人们也在不断探索客机以何种姿态进行水上迫降，保证机舱在一定时间内不进水，为乘客安全撤离争取足够的时间。

在研究客机迫降过程中，我们首先假定客机在迫降过程中水平速度不变，建立客机迫降曲线的数学模型： $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，并运用高等数学知识求解出

$$a = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3}, \quad b = \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2}, \quad c = \tan \theta, \quad d = 0, \quad \text{由此可得}$$

$$y = f(x) = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3} x^3 + \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2} x^2 + x \tan \theta.$$

为了研究客机以何种姿态接触水面最好，我们分别假定降落仰角为  $0^\circ$ 、 $3^\circ$ 、 $6^\circ$ 、 $9^\circ$ 、 $12^\circ$ 、 $14^\circ$ ，由此得到六个不同的迫降曲线函数。而为了在下降过程中保持较小的铅直加速度，由物理知识可知，铅直加速度与水平距离存在一定关系：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6x_0 \tan \theta - 12h}{x_0^3} x + \frac{6h - 4x_0 \tan \theta}{x_0^2}, \quad \text{运用 Excel 软件进行数据整理，以及依赖}$$

Matlab 绘制不同函数模拟客机的降落曲线，根据水平距离和垂直高度的关系综合来分析并得到客机水上迫降相对最好的仰角。从而验证客机水上迫降的可行性、迫降姿态和拟定最佳的应急迫降方式，确定该机在此状态下的最少损坏和最大安全度。

从中我们可得出结论：当仰角为  $14^\circ$  时，所受的铅直加速度最小，受的冲击力最小，客机迫降时机身不易损坏。襟翼放下  $40^\circ$  (全伸)，着陆速度为 66.5 米 / 秒，前起收上，主起全伸。

研究表明，所设计的客机迫降曲线比较合理，具有较高的参考价值和使用价值。但是因为一些时间限制因素，一些细节的地方没有做比较深入的研究。

参赛队号 #1271

所选题目 A

参赛密码  
(由组委会填写)

Abstract

## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

In recent years, use of aircraft in the sea offshore or more frequent occurrence and crash landing in the water is gradually increasing, for ditching emergency rescue departments caused a high degree of correlation as. People are continuing to explore the aircraft for ditching what kind of attitude, in a certain period of time to ensure that the cabin is not water, for the safe evacuation of passengers for enough time.

Aircraft landing in the research process, we first assume that the level of aircraft in the landing speed of the process of change, the establishment of the mathematical model of the  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . And using knowledge of high mathematics, we can obtain:

$$a = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3}, \quad b = \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2}, \quad c = \tan \theta, \quad d = 0,$$

and

$$y = f(x) = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3} x^3 + \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2} x^2 + x \tan \theta.$$

In order to study the surface contact with the aircraft in which the best attitude, we were assumed to land elevation is  $0^\circ, 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 14^\circ$ , the resultant curve of six different landing function. In order to maintain a smaller decline in the course of the vertical acceleration, the physics we know that the level of vertical acceleration and there is a certain distance relationship:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6x_0 \tan \theta - 12h}{x_0^3} x + \frac{6h - 4x_0 \tan \theta}{x_0^2}$ . Thus, the use of Excel

software for data consolidation, and the reliance on simulation of Matlab functions to draw the plane landed in different curves, according to horizontal distance and vertical height to analyze the relationship between the integrated elevation ditching the aircraft. Hence, it verifies the feasibility of ditching the aircraft, landing attitude and develop the best way of emergency landing. And the minimum destructiveness and maximum safety can determine in this state.

We can conclude that when the elevation is  $14^\circ$ , suffered the smallest vertical acceleration, under the impact of the minimum, the aircraft makes a forced landing when the body easily damaged. Flaps down 40 (full extension), the landing speed of 66.5 m / s, the first from the income on the entire stretch from the Lord.

## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

---

Studies show that the design of aircraft landing curve is reasonable, with a high reference value and use value. But some of the details of the places not to do more in-depth research because of some time constraints.

数学中国 (www.madio.net)

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

## 一 问题重述

客机飞行时遭遇意外必须迫降一直是考验驾驶员技术和心态的问题。据调查：2009年1月15日下午，US Airways 所属第1549航班（空中客车A320客机）从纽约长岛拉瓜迪亚机场起飞约90秒后撞鸟，导致两个发动机损坏，在纽约哈德逊河紧急迫降，经机长出色的技术和冷静的判断，客机上的乘客在乘务员的指挥下，有秩序地逃出紧急舱门并全部获救。

### 1 第一阶段问题：

问题：大型客机因为失去动力而进行的迫降具有相当大的危险性。请你建立合理的数学模型，对客机在平静水面上的迫降进行分析，指出客机在河面上迫降时，以何种姿态接触水面是相对最好的选择。



## 二 符号说明

$g$	重力加速度 ( $\text{m/s}^2$ )
$x$	客机飞行的水平距离 ( $\text{km}$ )
$y$	客机飞行的垂直高度 ( $\text{km}$ )
$x_0$	客机开始降落点 ( $\text{km}$ )
$h$	客机的飞行高度 ( $\text{km}$ )
$u$	客机的水平速度 ( $\text{m/s}$ )
$\theta$	客机与水平面的仰角 (度)
$a$	铅直加速度 ( $\text{m/s}^2$ )

## 三 问题分析

客机受到外物撞击下落过程受到外力的作用（即阻力影响），落水前的俯冲阶段的轨迹是三次方程（理想状态即不考虑风向的影响），机体的速度增加，从而加大了客机下落过程中的撞击力。着水前的提升过程（客机下落后期运动），客机由于本身的惯性



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

力，阻力以及外力作用也发生了变化，整个阶段的加速度均呈现不同的变化。客机迫降着水时，根据客机本身机体属性以及现实生活中的实践证明：客机机身与水面成一定的角度，客机才能以较好的姿态相对安全地着陆。其中，我们分析了客机从飞行到坠落再到着水滑行运动过程中出现的一些问题，得出了客机着水时最好选择的姿态与客机的最佳入水角度、着水速度、襟翼位置、起落架收放状态等有关。

由于客机受到了外力的影响，问题本身的难易度加大，我们先用物理受力分析方法先对问题进行简单处理，分析每一阶段客机的运动状态，从而获得客机迫降过程的轨迹，借助数学解题思想，按照客机迫降过程进行分段，分为客机下落过程（客机下落前期、客机下落中期、客机下落后期即客机机体提升过程）以及客机着水滑行过程，然后，利用微积分、导数、复合函数、复合函数求导方法分别对不同阶段的客机状态进行运算分析与处理。

## 四 模型假设

1. 假设水面平静且足够宽，无水流速度。
2. 假设忽略客机本身长度和宽度，看成一个质点。
3. 假设客机在同一个垂直切面内滑翔。
4. 假设客机在迫降过程中除空气阻力外，没有遇到其他障碍物。
5. 假设客机迫降安全性高低只取决于客机以何种姿态接触水面。
6. 运用到其他假设时当场说明。

## 五 模型的建立与求解

### 5.1 相关知识

#### 5.1.1 着水仰角

一般迫降时可采用较小仰角或较大仰角两种方式接水，这两种接水方式有着不同的特点。以较小仰角接水，客机的迎角也较小，接水速度较大，下沉速度较小，与水面的撞击力也小。且因接水仰角小，以机身中部接水，产生的水动力距质心近，对质心形成的力矩小，客机接水时的俯仰摆动小，比较平稳。但接水速度大，接水后的滑跑距离长；喷溅强烈，影响机组离机的准备工作。同时，因客机的仰角小，速度大，比较容易跳跃。以较大仰角接水，主要是机身后部接水，因水动力作用于客机质心之后，对质心形成下俯力矩，有减小迎角的作用，加之接水速度较小，不易引起跳跃，且接水后的滑跑距离短。但接水时的下降速度较大，与水面的撞击力较大，机身承受的载荷较大。

#### 5.1.2. 着水跳跃原因分析

客机的着水跳跃属于较严重的着水偏差，若处置不当，都会形成连续增幅跳跃，危及安全。其产生的原因主要是：

（1）接水时的仰角过小，速度过大若接水时仰角过小，以机身中部接水，机身的水动力对质心形成较大上仰力矩，迫使客机迎角增大，升力也增大，就可能使客机的升力超过重力而跳起。

#### （2）带俯角接水

迫降拉平、平飘中操纵不当，会使客机带俯角接水。这种情况下，以机身前部接水，

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

机身的水动力产生上仰力矩。加之，带俯角接水的下降率往往较大，撞击到水面，受到的反作用力，对质心也形成较大的上仰力矩，在这些因素共同作用下，就可能使客机的升力超过重力而跳起。

(3) 水面平静或风浪过大如水面平静，一方面，在颜色单调的开阔水面上没有波浪可用来参考，飞行员不易准确判断客机距水面的高度，从而不易掌握好拉杆的分寸，以达到正确接水。另一方面，在平静的水面上接水时，失去了波浪的缓冲作用，飞行员会感到平静的水面(硬)，即客机受到的冲击力较大。因此，在平静的水面接水，客机容易产生跳跃。

## 5.2 模型的建立

在研究客机的自动着陆系统时，技术人员需要分析客机的降落曲线。用 Matlab 绘制不同函数来模拟客机的降落曲线，可初步确定，客机降落曲线是几次多项式。假设一架水平飞行的客机，其降落曲线是一条三次抛物线，客机的飞行高度为  $h$ ，客机的着陆点为原点  $O$ ，且在整个降落过程中，客机的水平速度始终保持为常数  $u$ ，出于安全考虑，客机垂直加速度的最大绝对值不得超过  $g/10$ ，此处  $g$  是重力加速度。

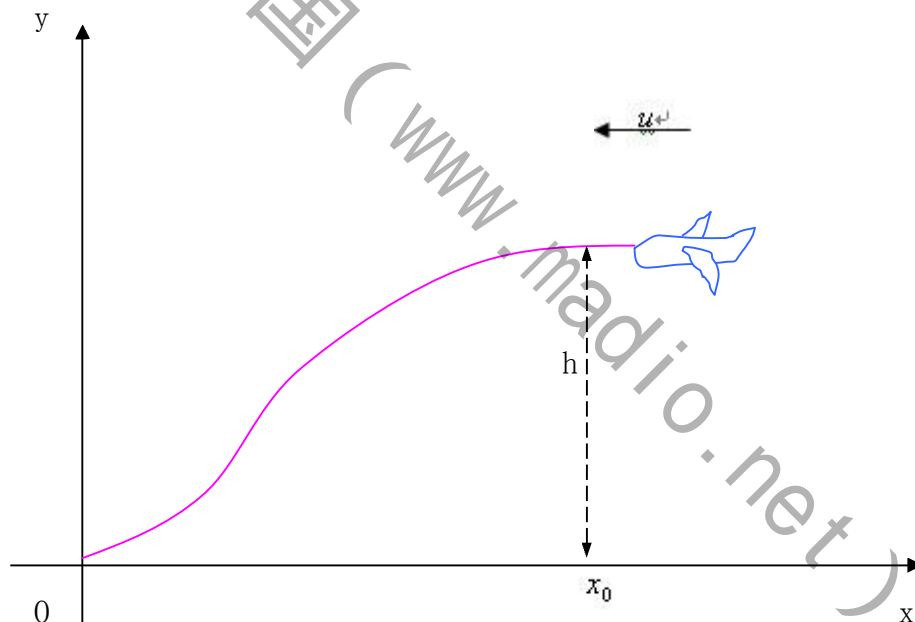


图 1：飞机迫降曲线示意图

### 5.2.1 初始假定

客机开始降落时，距离落点的水平距离为  $l$  (km)，机高为  $h$  (km) (机场的地面高度取作 0)，客机降落所需的最小的水平位移为，在整个降落过程中，客机的水平速度保持不变  $x_0$ 。客机开始降落和着陆时，都保持水平飞行姿态。

### 5.2.2 建立数学表达式

假设客机降落曲线的三次抛物线方程为：
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1)$$

假设客机降落的仰角为  $\theta$ ，则有：

$$y'(0) = 0 \quad (2)$$



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

$$y(x_0) = h \quad (3)$$

由于客机降落的曲线是光滑的，因此，还需满足：

$$y'(0) = \tan \theta \quad (4)$$

$$y'(x_0) = 0 \quad (5)$$

将②③④⑤代入①可得：

$$\begin{cases} y(0) = d = 0 \\ y'(0) = c + d = \tan \theta \\ y(x_0) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = h \\ y'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \end{cases}$$

求得模型的四个待定系数 a, b, c, d 如下：

$$\begin{cases} a = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3} \\ b = \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2} \\ c = \tan \theta \\ d = 0 \end{cases}$$

将上述解代入客机的降落曲线模型可得，客机的降落曲线为：

$$f(x) = \frac{x_0 \tan \theta - 2h}{x_0^3} x^3 + \frac{3h - 2x_0 \tan \theta}{x_0^2} x^2 + x \tan \theta$$

客机降落水平距离与垂直高度的关系如图 2 所示：

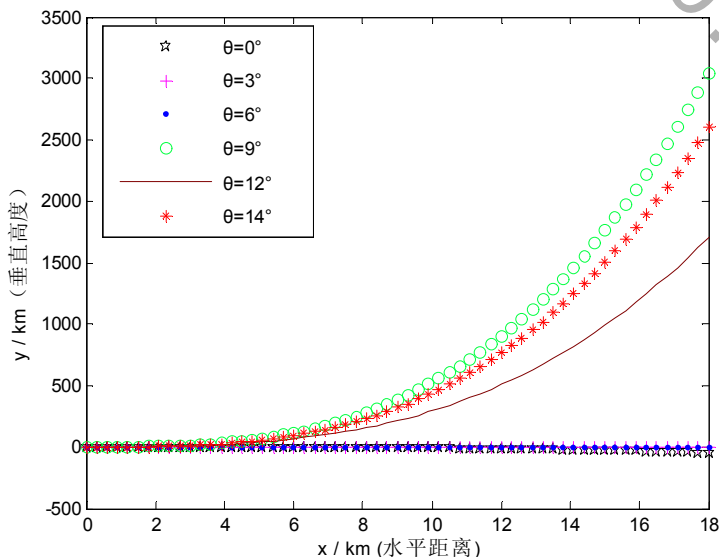


图 2：客机垂直高度与水平距离的关系

由客机降落的曲线模型，可推出客机降落的垂直速度为：

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x_0 \tan \theta - 6h}{x_0^3} x^2 + \frac{6h - 4x_0 \tan \theta}{x_0^2} x + \tan \theta$$

进而推出客机降落的垂直加速度为：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6x_0 \tan \theta - 12h}{x_0^3} x + \frac{6h - 4x_0 \tan \theta}{x_0^2}$$

根据上述式子，可得到不同的客机降落仰角，对客机降落加速度的影响。通过 Matlab 绘图分析，分别画出当仰角为  $0^\circ$ 、 $3^\circ$ 、 $6^\circ$ 、 $9^\circ$ 、 $12^\circ$ 、 $14^\circ$  时，垂直加速度的状态变化值。其图形如图 3 所示：

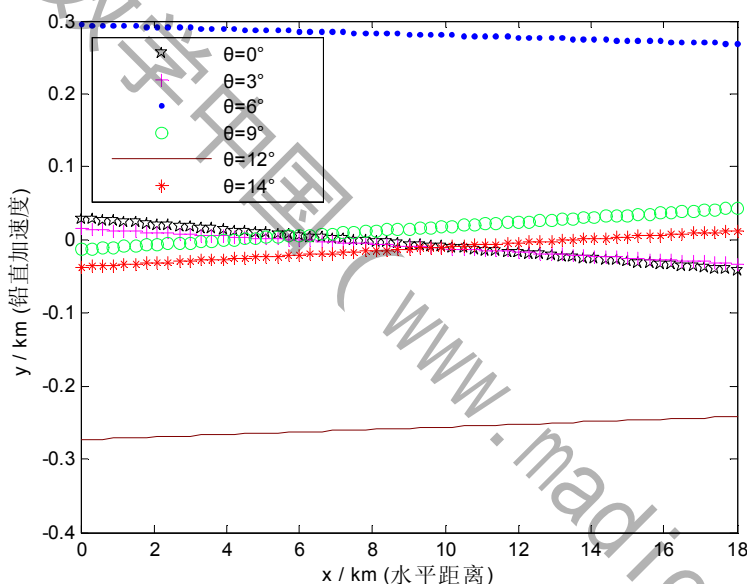


图 3：铅直加速速度与水平距离关系图

根据图 2 和图 3 分析可得：当  $\theta = 14^\circ$  时，所对应的客机迫降的垂直加速度的变化最平稳。客机降落的水平速度不变，其水平加速度等 0，则客机降落总的加速度最小根据牛顿第二定律，有  $F = m \cdot a$ ，这时客机所受的冲击力最小，对机身所造成的损害最小，即客机降落最平稳，也是最安全的姿态。

再看一个不同角度对比下着陆速度及襟翼打开对比的表格，如下：

着陆姿态（度）	襟翼打开（度）	着陆速度（m/s）
9	40	65.8
12	40	70.3
14	40	66.5
9	0	70.6
12	0	83.5
14	0	88.3

可看出最有利的海上迫降状态是： $14^\circ$  着陆姿态（接近正常着陆姿态），襟翼放下

## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

40° (全伸)，着陆速度为 66.5m/s，前起收上，主起全伸。

对于给定的俯仰角，水上迫降过程中客机表面的冲击压力峰值存在最大值，将此值定义为该俯仰角下迫降过程中客机表面的最大冲击压力。迫降过程中客机表面的最大冲击压力随俯仰角变化的曲线见图4。

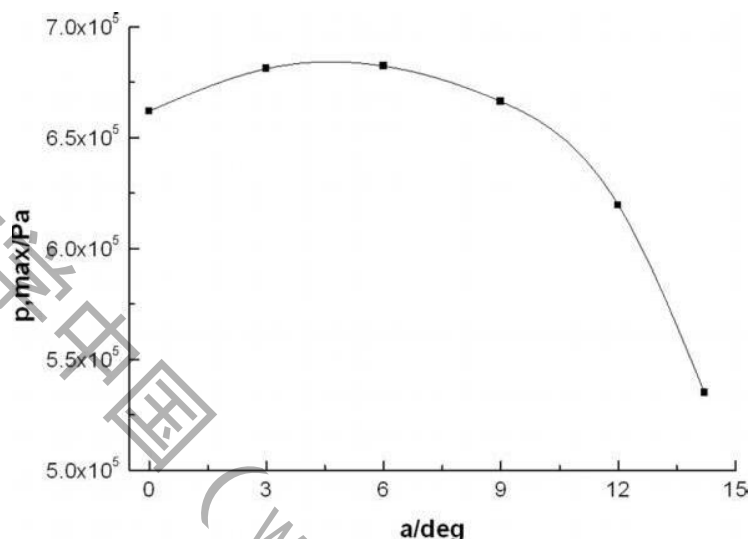


图 4： 客机表面的最大冲击压力随俯仰角变化的曲线

俯仰角增加，客机表面的最大冲击压力先缓慢小幅增加，在  $\alpha = 6^\circ$  时达到最大值，随着俯仰角继续增加，开始迅速大幅减小，在  $\alpha = 14^\circ$  时达到最小值，表明以  $\alpha = 6^\circ$  进行水上迫降时客机结构发生破坏的可能性最大，以  $\alpha = 14^\circ$  进行水上迫降时客机结构发生破坏的可能性最小。

### 5.3 模型评价与分析及推广

#### 5.3.1 模型的优点：

1. 模型建立的合理性。模型的建立是在对收集的数据进行充分的挖掘的基础之上的，通过数据之间的关系提炼出各个变量之间的关系，建立起模型；
2. 模型建立的简介性。模型运用熟悉的数学知识。
3. 模型建立的逻辑性。是按照问题的解决的思路进行的，首先分析客机落水前所做的运动，然后依据客机以何种姿态接触水面最好建立数学模型，层次渐进易于理解。
4. 模型简洁明了，思维清晰可见，通俗易懂。

#### 5.3.2 模型的缺点：

1. 由于时间原因，我们只对几个仰角的情况进行讨论，没有考虑其他情况。
2. 本文中并没有过多的考虑模型中的数据中不是很重要的因素。
3. 对于理想中的迫降路线定义不是很标准，没有权威性的论证。

## 六 模型的改进

1. 针对缺点一，尽可能的对多个仰角进行讨论，确保用更精确的仰角使客机迫降

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

在水面上。

2. 针对缺点二，我们要更多的考虑模型中的有关数据。

3. 针对缺点三，我们要寻求更理想的迫降路线。我们建立的模型解决了客机迫降的问题，同时可以使机长更好的掌握如何使客机以更好的姿态迫降以减少损失。

理想模型如下：



## 七 参考文献

参考文献：

- [1] 华东师范大学数学系. 《数学分析》第三版 高等教育出版社 2001年6月
- [2] 丁大正. 《Mathematica 5在大学数学课程中的应用》 电子工业出版社 2006年6月
- [3] 张磊、毕靖、郭莲英. 《MATLAB 实用教程》 人民邮电出版社 2008 年 12 月
- [4] 翟久刚. 用科学发展观全面推进非水网地区搜救工作[J]. 中国海事, 2008,(12):34-37.

## 八 附录

(1) 求图 2 的程序

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

参赛队号#1271  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

```
x=0:0.3:18;  
y1=-0.0089*x.^3+0.01467*x.^2;  
y2=-0.0004189*x.^3+0.00768*x.^2+0.05240*x;  
y3=0.000185*x.^3-0.00065*x.^2+0.1051*x;  
y4=0.52079*x.^3-0.00645*x.^2+0.1584*x;  
y5=0.29284*x.^3-0.01367*x.^2+0.2126*x;  
y6=0.45627*x.^3-0.1858*x.^2+0.2493*x;  
plot(x,y1,'p');  
hold on;  
plot(x,y2,'+');  
hold on;  
plot(x,y3,'.');  
hold on;  
plot(x,y4,'o');  
hold on;  
plot(x,y5,'-');  
hold on;  
plot(x,y6,'*');  
hold on
```

(2) 求图 3 的程序：

```
x=0:0.3:18;  
a1=-0.003911*x+0.02933;  
a2=-0.00267*x+0.01536;  
a3=-0.00142*x+0.294;  
a4=0.0031*x-0.01290;  
a5=0.001757*x-0.2735;  
a6=0.00274*x-0.03715;  
plot(x,a1,'p');  
hold on;  
plot(x,a2,'+');  
hold on;  
plot(x,a3,'.');  
hold on;  
plot(x,a4,'o');  
hold on;  
plot(x,a5,'-');  
hold on;  
plot(x,a6,'*');  
hold on
```