

承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ScienceWord 杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：

参赛队员（签名）：

队员 1：文超凡

队员 2：冈敦殿

队员 3：张俊

参赛队教练员（签名）： 吴孟达

参赛队伍组别：1057

第三届“ScienceWord 杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码：（请各个参赛队提前填写好）：

1057

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

2010 年第三届 “ScienceWord 杯” 数学 中国 数学建模网络挑战赛

题 目 侧位停车问题研究

关 键 词 车位判断模型 停车线路优化模型 安全裕量 总泊入能力 线路约束

摘 要：

随着车辆数目的急剧增加，停车的空间显得越来越少，侧位停车的概念也应运而生。判断车辆能否停进车位并且设计出合适的停车线路对于提高有限车位的使用效率有着重要的意义。

针对第一问，我们提出了车位判断模型，模型通过研究停车入位的逆过程即车位开出的过程，利用已知的车辆几何参数和动力学参数，分析其几何关系，求解到该车要求的最小车位尺寸，通过和实际的车位尺寸比较判断车辆能否停进车位。并且用实际算例验证了模型的正确性和合理性。

针对第二问，我们提出了停车线路优化模型，根据几何关系，模型建立了泊车线路方程及衡量线路安全性的安全裕量和总泊入能力等评价指标。模型的初始条件如下：我们建立了三个标准：安全性、车位面积利用、简单性标准定性地判断出初始位置，然后用主观评价法得出转弯点位置。在算例中仿真了内转弯半径 R_2 不变，不同外转弯半径 R_1 下的泊车线路，得出当 $R_1=700\text{cm}$ ， $R_2=550\text{cm}$ 时线路最优，并给出了线路仿真图以及允许的偏差仿真图，解决了第二个问题。

另外，我们利用纯数学的函数研究推导出停车线路的四种约束，通过假设出其运动轨迹方程，将所有的约束条件转化为不等式，对线路的进一步优化求解具有指导意义。

最后我们进一步用定轴转动的刚体模型对漂移泊车进行了建模，得出在高速条件下，汽车的总转动动能和摩擦力矩所消耗的能量相等时可以实现漂移泊车。

参赛队号 1057

所选题目 A

参赛密码 _____
(由组委会填写)

Abstract

With the number of vehicles quickly increasing, parking area has become particularly short. So the concept of side-parking came out. Judging whether the vehicle could park safely in a selected area and provide the route is of great importance as to the shortened resource of parking area.

To the first question, we come out with the model of area-judging. By studying the reverse process of parking, which is to driving the automobile out of the narrow parking area. We get the narrowest area that we could park an automobile making use of the parameters and relation of geometry offered. Then by comparing the parking area in life with the area got from theory, the driver could judge whether he could park here. Meanwhile we could know how correct and rational the model is by mathematical equations.

To the question next, we put up the optimized model of the parking route. According to the relation of geometry, the model has built up the mathematical equation of route and the standards of judging the safety of route and total capability of parking. The initial conditions of the model are as follows: initial position from practical experience, the place of turning from the method of subjective evaluating. In the mathematical process we simulate the route when the inner radius R_2 of turning is a constant but the outer radius R_1 of turning is changing. At last we get the conclusion that the route is most optimized when $R_1=700\text{cm}$ $R_2=550\text{cm}$, and offer the simulating picture of route, together the picture of permitted error.

Otherwise, we utilize mathematical function to study and deduct the four restrictions of parking path. Assuming the function of moving track, we can transfer the bounding conditions into inequations which are the guidance of further track optimization.

In the end of this paper, we regard the excursion parking as the model of rigid body's rotation. On the condition of rotating at high speed, we conclude that only if the rotational energy of the vehicle is equal to the energy consuming by the friction moment, the excursion parking is valid.

Key words: Parking space judgment model

Minimum size of parking space

Optimization of parking path

Safety allowance

Total ability of parking path restriction

侧位停车问题研究

目录

侧位停车问题研究..... 1

一、问题重述与分析..... 1

1、问题重述..... 2

2、模型分析..... 2

二、问题假设..... 2

三、全局符号说明..... 2

四、车位判断模型..... 2

五、停车路线优化模型..... 2

六、解析约束模型..... 2

七、算例研究与分析..... 2

八、模型优缺点..... 2

九、进一步讨论..... 2

十、参考文献..... 2

十一、附录..... 2

图表目录

图表 1 平行泊车示意图..... 2

图表 2 最小车位长度几何图..... 2

图表 3 最小车位宽度几何图..... 2

图表 4 几何曲线..... 2

图表 5 主观评价法..... 2

图表 6 可能的初始位置..... 2

图表 7 第二种情况..... 2

图表 8 第三种情况..... 2

图表 9 第三种情况..... 2

图表 10 泊车线路示意图..... 2

图表 11 泊入能力指标示意图..... 2

图表 12 总泊入能力指标示意图..... 2

图表 13 安全裕量示意图..... 2

图表 14 车辆的刚体模型假设..... 2

图表 15 倒车进入停车位过程示意图..... 2

图表 16 停入车位示意图..... 2

图表 17 速度分析参考图..... 2

图表 18 安全裕量与外转弯半径的关系.....	2
图表 19 心理安全裕量与外转弯半径的关系.....	2
图表 20 总泊入能力与外转弯半径的关系.....	2
图表 21 线路轨迹仿真图.....	2
图表 22 漂移泊车示意图.....	2
图表 23 停车过程示意图.....	2
图表 24 动力学分析图.....	2
图表 25 R1=800cm R1=600cm R1=550cm.....	2

表格目录

表格 1 符号说明.....	2
表格 2 各种情况对比表.....	2

一、问题重述与分析

1、问题重述

随着经济和社会的发展，汽车日渐成为人们的主要出行交通工具，同时，还伴随着停车空间的日益紧缺，于是不少城市也在路边的专门划出空间作为“停车场”。但是因为空间有限，所以不得不利用好每一寸土地，自然也就出现了侧位停车之类的相对节约空间的停车方式。

另一方面，由于侧位停车的停车位狭小，这无疑对驾驶员的心理造成了巨大的压力。因此判断一辆车能否进入车位十分必要，以及找到合适的线路保证车辆停入车位也非常有意义，这里线路包括车辆的初始位置和角度以及整条轨迹。

2、模型分析

2.1 对问题的理解

1) 对侧位停车概念的理解

百度百科对侧位停车的解释是：“在正规停车场车位逾见紧张时，很多地方都将原有的街道两旁划成停车位，成为‘侧向停车位’。”因此我们认为应该将侧位停车分为两种情况来考虑，即行驶方向和车位平行以及垂直的情况。但是在研究时所要给出的约束条件又是相同的，所以我们首先进行水平侧位停车的研究，然后将结论进行推广。可以从另一个角度来看平行停车和垂直停车，如果认为汽车是靠外力搬运的，那么最终实现的就是一个长方形刚体从一个位

置平移到了另一个位置。则问题就转化为了通过怎样的路径将汽车搬运到泊车位，而在下面的研究中会发现在不考虑环境因素的情况下，平行泊车和垂直泊车的四个约束方程是相同的，只需要适当变换一下参数就可以将平行泊车应用到垂直停车中来。

2) 对问题一的理解

问题一可以理解为，已知了本车的基本数据，包括车辆的几何尺寸和动力学性能，通过各种几何约束来求解出车辆所停入车位的临界尺寸，即最小车位长度和宽度。最后通过和实际的车位尺寸比较，来判断车辆是否可以顺利停入车位。

3) 对问题二的理解

如果我们判断出车辆可以停入车位，那么设计出一条可行的最优的停入路线就是最终的目标。最优停入路线需要满足几个指标，路线的起始位置即为题目中要求的位置，角度可以理解为路线的斜率。由于可以进入车位的路线不止一条，在最优路线的附近位置存在一个区域，通过这个区域的路线可以使得车辆进入车位，我们称这个区域为允许的偏差。

二、问题假设

1. 假设汽车为不可变形的长方形刚体
2. 假设周围的环境对停车不构成影响因素，同时认为驾驶元驾车技术熟练，即只要停车位足够的大，那么司机必然可以将汽车顺利安全停入车位。

三、全局符号说明

表格 1 符号说明

符号	代表含义
W	汽车宽度
L	整车长度
p	汽车前轮轴与车头间的长度
q	汽车后轮轴与车尾间的长度
l	汽车前后轮轴间的长度
R_{min}	汽车最小转弯半径
$ABCD$	汽车的刚体框架
$f(x)$	泊车运行轨迹
w	汽车定轴转动的角速度

M	刹车后总的摩擦力矩
-----	-----------

四、车位判断模型

4.1 车位判断思路

直观地讲，车位尺寸是不能小于车辆大小。我们考虑到一个合适的车位还应考虑到泊车的可操作性，即驾驶者可通过正常的操作，将车辆无碰撞地驶入车位。

我们认为泊车过程是一个可逆的过程，可以从泊车过程的逆过程，即将车辆无碰撞地从车位中驶出的过程，分析车位的尺寸要求。
我们在这个问题中已知的条件是：车身長，宽，车的最小转弯半径，车尾部与后轮轴的距离。根据这些已知条件以及不发生碰撞的情形下的几何约束，求解得到车位的最小长度和宽度，从而实现判断。

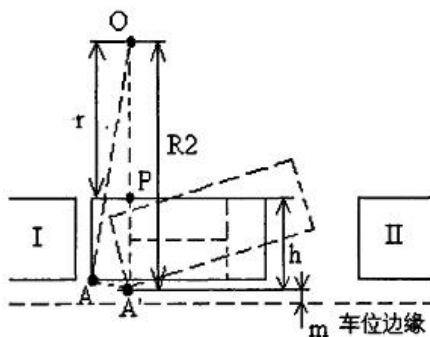
4.2 车位判断模型建立



图表 1 平行泊车示意图

这种情况下，路边的停车位与行车的方向保持平行的关系，我们称之为平行车位停车。

4.2.1 最小车位长度



图表 3 最小车位宽度几何图

对于平行停车的车位宽度要求，我们结合上图进行分析。小车右后角 A 移动至 OP 延长线上的点 A' 时，与车位右边边缘的距离应大于 m 。设线段 OA 或 OA' 的长度为 R_2 ，线段 PA' 长度为 h 。因此得到车位宽度 B 满足下面条件：

$$B > h + m$$

由图中的几何关系可以得到：

$$\begin{cases} h = R_2 - r \\ R_2^2 = a^2 + (r + W)^2 \end{cases}$$

综合得到平行停车时车位的最小宽度 B_{\min} 为：

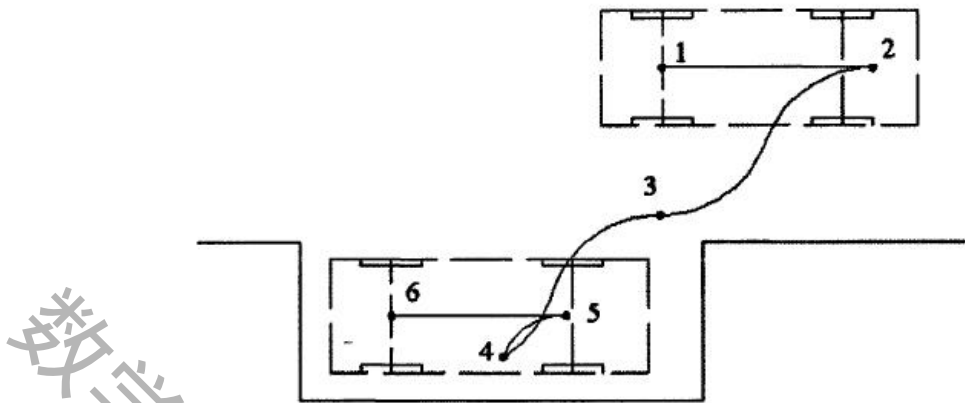
$$B_{\min} = \sqrt{a^2 + (d \cdot \cot \varphi_{\max} + W/2)^2} - (d \cdot \cot \varphi_{\max} - W/2) + m$$

至此，对于水平停车的情况，我们可以根据车辆的参数以及车位的几何参数来判断该车是否可以在这个车位停车。

五、停车线路优化模型

5.1 关键几何点和几何曲线

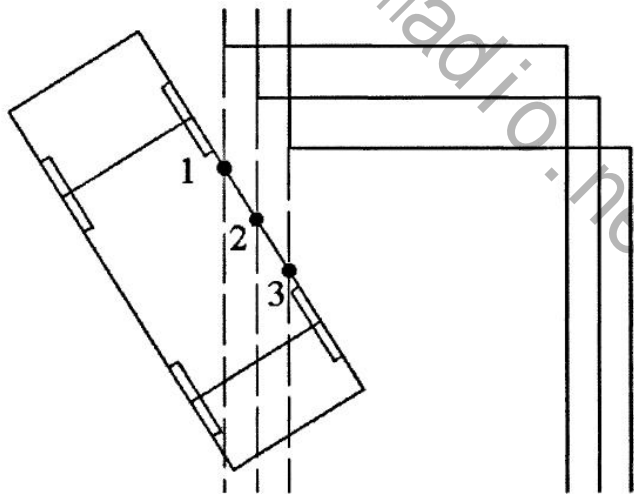
5.1.1 几何曲线和拐点位置的确定



图表 4 几何曲线

凭经验，当采用由相切圆弧和直线组成的多段式参考路径的数学模型，有简单可靠，可实施性强等优点。因此我们先假设采用的是由简单的几何元素(圆弧和直线)构成的路径。但我们在确定最优路线时，需确定一些关键数据，如图中拐点位置和圆弧线的曲率半径。在确定最优路线时，关于两段圆弧切点的位置的选择，借鉴主观评价方法来确定。

对于驾驶员来说，一般进行平行泊车的过程中，对泊车过程的判断，主要是依据右后视镜中车辆右侧边与泊车位外边界线的交点位置，所以我们可以以这一依据作为主观评价的评价条件来设计主观评价方案。我们可以得出车辆侧边与泊车位边界线交点恰好处于轮距（即车辆前后车轴之间的距离）的中点 2 时的位置时是主观评价的最优位置（如图）。在下面的计算中，我们以此为依据可以确定圆弧拐点。



图表 5 主观评价法

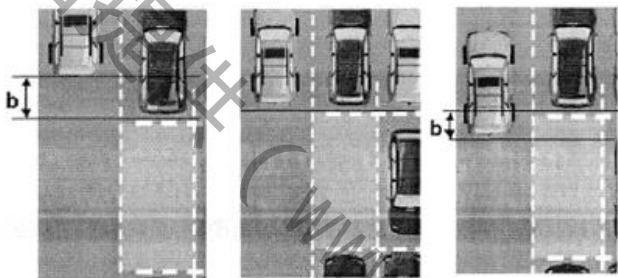
5. 1. 2 初始车位的确定

对于常见的路边停车工况，由于出于安全考虑，路边泊车的车辆不能干扰到外侧车道行驶中的车辆，所以，横向位置距离 a 一般不会大于 1.5 米，所以比

较容易确定，而且很明显， a 的值越小，车辆最终位置越靠近泊车位内侧边，但是 a 值如果过小可能会引起车辆在泊入过程中与车位的右上角相撞，所以目前先取 100cm，待以后建模完成后检验是否符合以上提到的这两点要求后，再加以调整优化。

b 值（如图）的确定就比 a 值相对要复杂，因为 b 值并没有像 a 值那样具有几个约束条件，任何 b 值其实都有相对应的泊车路径。所以对 b 值的选取，我们需要人为设置几点选取的标准。而这些标准设置的目的，主要是为了简化问题和优化参考路径，我们只要从符合这几点标准的参考路径中选取出一条，然后通过仿真和实车试验对其进行优化，最终达到实现顺利泊车入位的目的。标准如下：

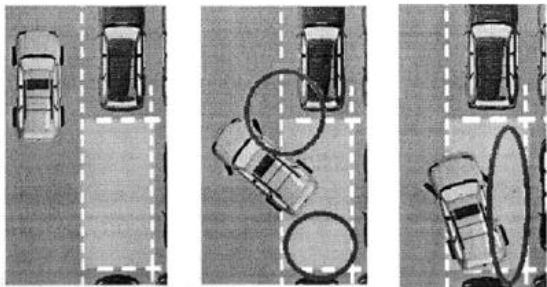
- （1）安全性标准：即不容易与车位右下角相碰撞，便于避障。
- （2）车位面积利用标准：即能够充分利用车位内的窄间面积，减少车何内来回调数，尽量能够步到位或者只进行一次车位内的调整。
- （3）简单性标准：即参考路径应当尽量简单，不需要附加路径。



图表 6 可能的初始位置

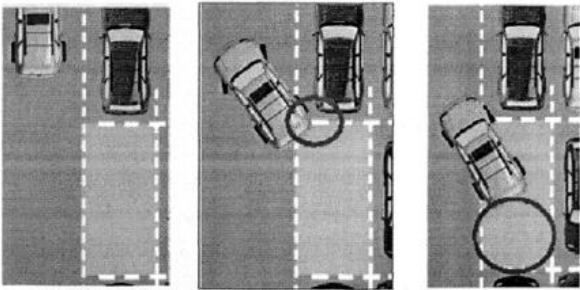
将车的纵向位置分为二类，即如图所示的 b 值分别大于 0，约等于 0，和小于 0 这三种情况（如图）。分别对这三种情况进行分析，并且按照上述三个标准进行评价。分析如下：

对于第一类(b 值大于 0)的情况如图所示，这种情况优点是车位的后半部分面积利用得很充足，车位内调整动作比较容易进行，但是缺点是容易和前而的车尾(或者车位边界)相碰撞，此外，存这种情况下，必须要在原有的两相切圆弧参考路释中加入段内公切线，这样才能有效避免相碰撞的发生，但是这样的话，就增加了路线的复杂性。因此这种情况符合标准 2，但不符合标准 1 和标准 3



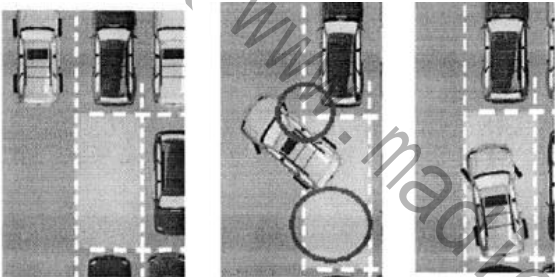
图表 7 第二种情况

对于第二类(b 值小于 0)的情况如图. 这种情况的优点和缺点也很明显, 优点是由于前方空间比较充裕, 所以车辆在行进时不会与车位边界发生碰撞, 但是缺点也很大, 就是由于车位后部预留的面积小, 所以无法一步到位, 导致后续调整过程过多, 所以参考路径就相对较为复杂。



图表 8 第三种情况

对于第三类 (b 值约等于 0)的情况如图所示, 很明显, 这种情况下, 车辆几乎可以“一次到位”, 避障性也不错, 不会造成碰擦, 而且车位内也预留出了足够的空间, 便于车位内车身的调整, 而且这种情况下的参考路径不需要附加诸如第一类情况中所提到的内公切线, 因此不会加大参考路径的复杂程度。所以, 综上所述, 这种情况符合标准 1, 2, 3



图表 9 第三种情况

我们可以得出：

表格 2 各种情况对比表

	b	标准 1	标准 2	标准 3
情况 1	>0	×	√	×
情况 2	≈ 0	√	√	×
情况 3	<0	√	×	×

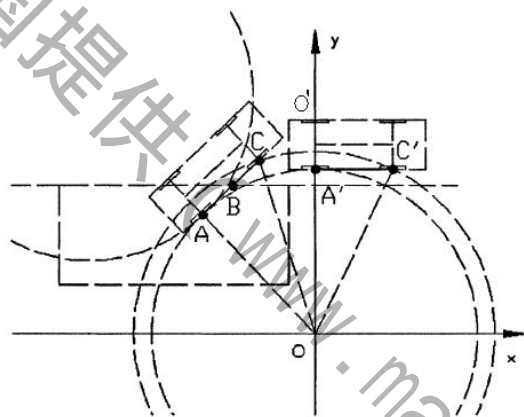
综上所述, 最终选择横向距离 b 约等于 0 的方案

5.2.1 轨迹方程的确定和量化标准

在确定了初始泊车位置后，我们还要确定圆弧轨迹方程。首先要明确坐标系：由于我们确定初始位置是车尾部与障碍平行（即 $b=0$ ），我们建立的 x 轴和车位长平行， y 轴和车位宽平行， y 轴过汽车的后轮轴，车的右侧和泊车位的距离是 100cm。在确定圆心时，我们利用最小转弯半径，即在 y 轴上，圆心和车左后轮的距离是 550cm（如图所示即 OO' ）。

（1）. 具体数据：车前后轮距 AC 长为 254.8cm，车宽为 171cm，车辆最小转弯半径为 550cm，所以如图，车辆起始在起始位置时，点 O' 坐标为 $(0, 550)$ 。同时定义第一段弧半径为外转动半径 R_2 ，第二段弧半径为内转动半径 R_1

（2）. AO 长度为 $(550-171)$ cm， $A'C'$ 长度（即 AC 长度）为 254.8cm。点 B 为 AC 中点，且点 B 位于车位边界线上



图表 10 泊车线路示意图

（3）. 车辆初始位置距离车位边界线暂取 100cm，则此时车位边界线距离 O 点为 450cm

要求求出点 A 和点 B 坐标。具体求法如下：

假设，点 A 的坐标为 (a, ka) ，其中， $a < 0$ ， $k < 0$ ， k 为 AO 所在直线的斜率。根据汽车构造知识，可知 AO 所在的直线就是车辆后轴所在的直线，这条直线与第一段圆弧的直径重合，而车辆侧边所在的直线 AC 是和车辆后轴垂直的，因此 AC 与 AO 相垂直， AC 是这段圆弧的切线，切点为点 A 。因此， AC 所在直线的斜率为 $-1/k$ ，从而可得 AC 所在直线方程为：

$$y - ka = -\frac{1}{k}(x - a)$$

设 AO 的长为 R_1 ，可得：

$$a^2 + (ka)^2 = R_1^2$$

联立上式：

$$k = \frac{\sqrt{R_1^2 - a^2}}{a}$$

将 k 值带入可得：

$$y = -\frac{a \cdot (x - a)}{\sqrt{R_1^2 - a^2}} + \sqrt{R_1^2 - a^2} \quad (1)$$

根据已知条件 3 和已知条件 4，假设点 B 坐标为 $(x_b, 450)$ ，

$$x_b = \frac{-450 \cdot \sqrt{R_1^2 - a^2} + R_1^2}{a}$$

由此可得点 B 坐标为 $\left(\frac{-450 \cdot \sqrt{R_1^2 - a^2} + R_1^2}{a}, 450 \right)$

又，根据已知条件 3，可知 AB 长度为 AC 的一半，即 127.4cm。则有

$$(x_b - a)^2 + (450 - ka)^2 = 127.4^2$$

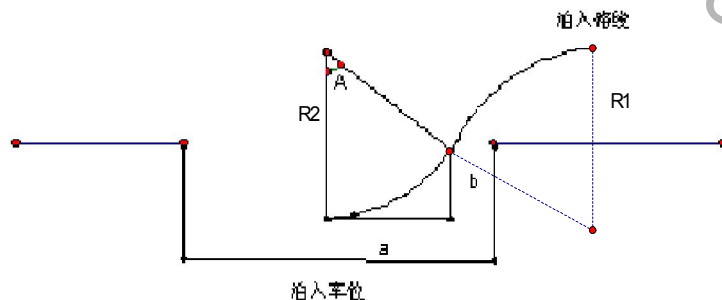
代入上式：

$$\left(\frac{R_1^2 - 450 \cdot \sqrt{R_1^2 - a^2}}{a} - a \right)^2 + (450 - \sqrt{R_1^2 - a^2})^2 = 127.4^2 \quad (2)$$

通过确定 R_1 的值来确定最优路线，确定 R_1 的标准需要我们定义几个量化指标。

我们引入的量化指标：1 泊入能力 2 圆滑性指标 3 安全裕量 d 4 总泊入能力 k

(1) 泊入能力是指在相同泊入夹角（曲线拐点处切线方向和水平方向夹角），相同泊入深度 b 时泊入所需的横向距离 a（如图所示）。泊入能力是通过横向距离 a 检测泊入时，泊入车辆对空间的利用好坏的评价指标。



图表 11 泊入能力指标示意图

由几何关系得

$$b/a = \tan(A/2)$$

$$b = R(1 - \cos A)$$

可解得

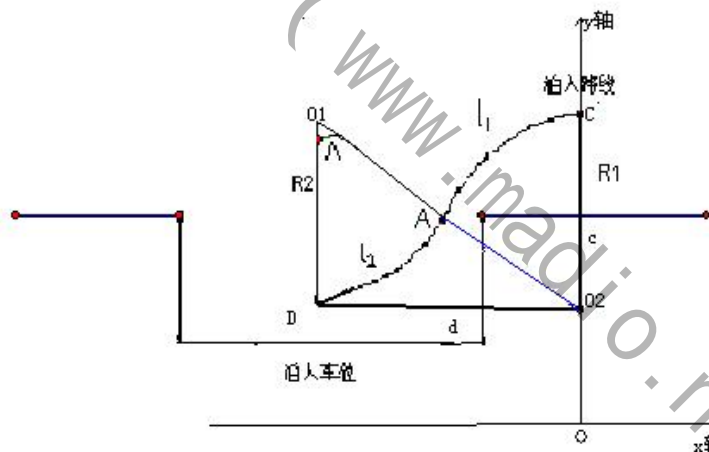
$$a = \sqrt{(2R - b)/b}。$$

即可得当 R_2 越小时， a 越小即泊入能力越强，也就是说如果以最小转弯半径转弯，泊入能力最强（当我们逆向思维，认为它是一个将车开出的过程时也可得出相同结论）。同时在以最小转弯半径转弯时，路线简单具有可行性，且控制系统此时控制精度较高。综上，我们认为无论 R_1 路线如何， R_2 都取最小转弯半径，这个结论很重要。

(2) 圆滑性指标是指在拐点处左右弧线的曲率半径之比。由于我们使用的是圆模型，圆滑性指标即为拐点左右两端圆弧半径之比。圆滑性指标体现了泊车行为的难易程度。是模型的简单性指标。

(3) 安全裕量 d 指在泊车过程中车身和易撞点的距离。这是衡量安全性的指标，对于评价泊车模型的好坏起到至关重要的作用，对于模型的评价可起到一票否决的作用。

(4) 总泊入能力 k 我们将在下文提出。



图表 12 总泊入能力指标示意图

如图，总泊入能力 k 是指在泊入全过程中总的泊入深度和泊入长度之比，在上图中表示为 c/d 。总泊入比越大，泊入能力越强。而 c ， d 的长度可通过 C ， D 的横纵坐标来表示出来，这就需要我们进一步计算弧 l_2 的方程，也就是确定 O_1 坐标和 R_2 长。而从泊入能力这个参数我们已确定 $R_2 = 550\text{cm}$

由于弧 l_1 和弧 l_2 的公共点是 A ，在计算 O_1 坐标时我们可以利用 $\overline{O_1O_2}$ 长为 $R_1 + R_2$ ，且 O_1 在 O_2A 直线上，求出 O_1 坐标：

$$x_{o1} = \frac{a(R_1 + R_2 - W)}{R_1} \quad (3)$$

$$y_{o2} = \frac{(R_1 + R_2 - W)\sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_1}$$

其中 a 指 A 点横坐标， $W=171$ 为假设 1 中车的宽度。之所以考虑车的宽度是因为 01 点和 02 在泊车轨迹的两侧，导致了从圆心角度看，原来远离圆心的一侧车轮过 A 点后靠近圆心了。我们画出的轨迹是初始泊车时车辆外侧后轮的轨迹，过 A 点后，车辆外侧后轮靠近了 02 点，靠近的距离是车宽 $W=171$ 。则弧 l_2 的半径是 $R_2 - 171$ 。则弧 l_2 的轨迹方程是：

$$\left[x - \frac{a(R_1 + R_2 - W)}{R_1}\right]^2 + \left[y - \frac{(R_1 + R_2 - W)\sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_1}\right]^2 = (R_2 - W)^2$$

综上，我们可以得到整段轨迹的方程：

$$l_1: \quad x^2 + y^2 = R_1^2 \quad x \in (a, 0);$$

$$l_2: \quad \left[x - \frac{a(R_1 + R_2 - 171)}{R_1}\right]^2 + \left[y - \frac{(R_1 + R_2 - 171)\sqrt{R_1^2 - a^2}}{R_1}\right]^2 = (R_2 - 171)^2 \quad x \in (x_{o1}, a)$$

其中 a ， x_{o1} 分别由公式 2，3 给出， R_2 指最小转弯半径。

有了轨迹方程，我们可确定上图 C，D 的坐标，定义总泊入能力

$$k = \frac{|y_c - y_d|}{|x_c - x_d|}$$

代入可得

$$k = \frac{-R_1^2}{a(R_1 + R_2 - W)}。$$

有了轨迹方程，我们还可以将安全裕量 d 表示出来。

如图：

六、解析约束模型

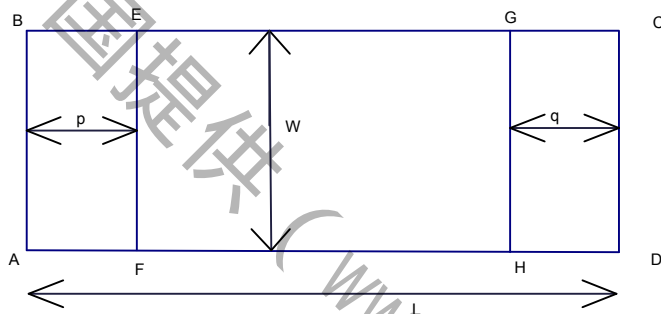
1、解析模型的提出

针对上述提出的问题，我们对汽车停车过程中的运动曲线做了进一步的一般化，说明汽车的运动需要满足怎不样的条件就能够恰当好处的停到预定的停车位置。将曲线描述成普遍意义行的约束方程便是我们的方法。

从实际应用环境上讲，汽车的运行轨迹必然是一阶可导的，因为方向盘不可能实现运动方向的突变。

2、相关参数的说明和假设

设定汽车为不可变形的长方形刚体 $ABCD$

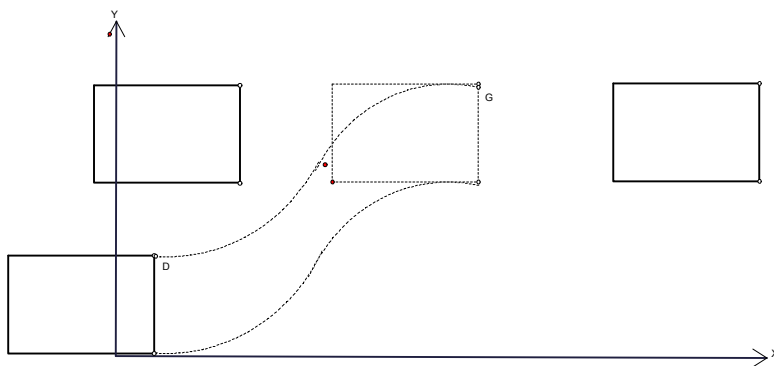


图表 14 车辆的刚体模型假设

汽车的长度为 L ，宽度为 W 。其中 EF ， GH 分别为汽车的前后轮轴， p 、 q 分别为汽车前后轮轴到前后边缘的距离，称为前悬、后悬。前悬后悬之间的距离为 l 。

汽车在进入停车位置过程中左后轮（相对于司机的左后轮，见解析图）运动的轨迹曲线为 $f(x)$ 。容易从实际的运行过程了解到，因为汽车的方向不会发生突然的改变，所以 $f(x)$ 在定义域范围内的各点是连续可导的。

周围的环境对停车不构成影响因素，同时认为驾驶元驾车技术熟练，即只要停车位足够的大，那么司机必然可以将汽车顺利安全停入车位。



图表 15 倒车进入停车位过程示意图

3、倒车进入停车位过程分析

如图所示，根据已有的假设，虚线的方程为 $f(x)$ ，汽车 $ABCD$ 的左后轮 $H(x, y)$

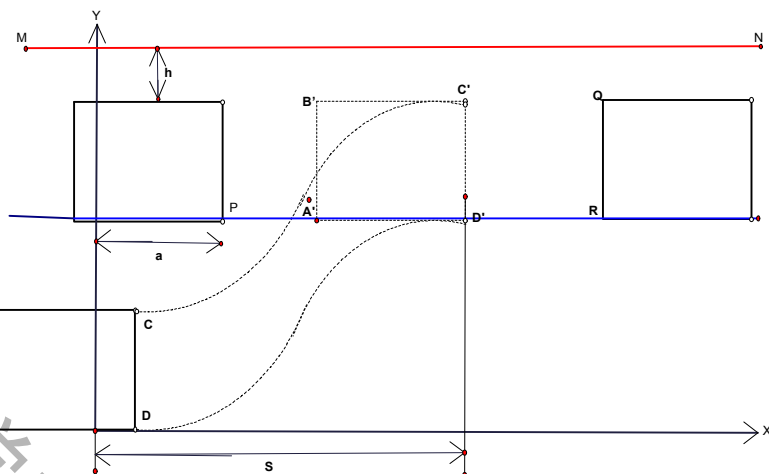
由汽车的结构特性，后轮的轮平面必定是和边 AB 共面，所以曲线 $f(x)$ 的发现方向和后轮轴 GH 平行，因此由几何关系可以得到 B 点的坐标 (x_B, y_B)

$$\begin{cases} x_B = x_H - \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}W - (L-q)\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \\ y_B = y_H - \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}W - (L-q)\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \end{cases}$$

假设 $y_B = g(x_B)$

$$y_B = f\left[x_B + \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}W + (L-q)\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}\right] + \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}W + (L-q)\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} = g(x_B)$$

假设能够将车顺利的停进泊位，那么有如下四点要求，否则即视为没有完成停车任务，停车轨迹设计的不合理



图表 16 停入车位示意图

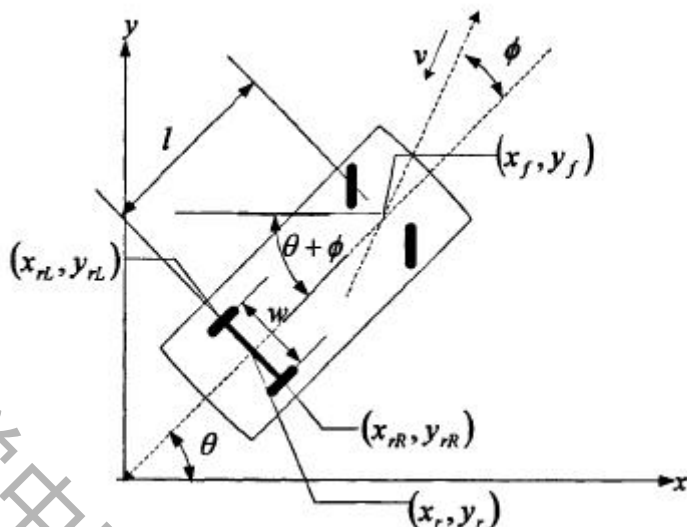
汽车不能碰到马路的边沿 MN，为了尽量节省空间并遵守交通法则，车的下边界 AD 不得低于 PR ，即至少应与其他两车的外边界平齐。汽车在整个运动过程中，框架的 B 点都不能够与前车的 P 点后车的 Q 点发生摩擦甚至碰撞在初始位置和终点停车位置的曲线斜率均为 0，终点的斜率为 0 即视为车已经停好。运

动轨迹的曲率半径不得小于汽车的最小转弯半径 r_{\min}

对以上的四个约束条件进行数学整合,得到如下约束方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} g(a) < d + W \\ S - a < L_{y,d} \\ \left| \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \right| > r_{min} \\ f(S) + W < 2W + d + h \\ f(S) > d + W \end{array} \right.$$

4、速度倾角与运动轨迹之间的关系



图表 17 速度分析参考图

定义 ϕ 为车体与速度方向之间的夹角，速度的方向始终是与前轮的方向一致的。

因为正常情况下，汽车的停车速度较低（小于 5 公里每小时），所以根据汽车本身的物理结构特性，轴 EF 不存在沿轴向的速度

$$\frac{y_r}{x_r} = \tan \theta$$

对 x_r

求导并化简得到

$$y_r' \cdot \cos \theta - x_r' \cdot \sin \theta = 0$$

由几何关系能够得到

$$\begin{cases} x_r = x_f - l \cdot \cos \theta \\ y_r = y_f - l \cdot \sin \theta \end{cases}$$

上式两边对时间 t 求导得到

$$\begin{cases} x_r' = x_f' + \theta' \cdot l \cdot \sin \theta \\ y_r' = y_f' - \theta' \cdot l \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$x_f' \cdot \sin \theta - y_f' \cdot \cos \theta + \theta' \cdot l = 0$$

在 xoy 坐标系的两轴上分解速度 v 得到

$$\begin{cases} y_f' = v \cdot \sin(\theta + \phi) \\ x_f' = v \cdot \cos(\theta + \phi) \end{cases}$$

带入我们就可以得到角速度的表达式

$$\theta' = v \cdot \frac{\sin \phi}{l}$$

两边同时与曲率半径 r 相乘得到

$$\theta' \cdot r = v \cdot \frac{\sin \phi}{l} \cdot r = v$$

$$r = \frac{l}{\sin \phi}$$

这个关系式便是我们寻求的速度倾角与曲率半径之间的关系，于是

$$r = \frac{l}{\sin \phi} = \left| \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \right|$$

进而我们能够根据这一关系式由曲线确定方向盘的控制过程，即如果预定好了汽车泊车的轨迹曲线，便能够较容易的计算出在每一位置方向盘的状态，为智能车或者自动泊车系统的可行性提供了理论依据。

$$\phi = \sin^{-1} \frac{l}{\left| \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''} \right|}$$

七、算例研究与分析

7.1 车位判断算例研究

7.1.1 算例参数

本文所采用的参数来自于文献[1]，模拟车辆为大众桑塔纳世纪新秀 1.8MT 基本型小轿车。车长 $L = 454.6\text{cm}$ ，车宽 $W = 171\text{cm}$ ，轴距 $d = 254.8\text{cm}$ ，最小转弯半径 $R_{\min} = 550\text{cm}$ ，车尾部与后轮轴距离 $a = 100\text{cm}$

平行停车位长度 $H = 750\text{cm}$ ，宽度 $B = 200\text{cm}$

与障碍物的最小允许距离 $m = 20cm$

7.1.2 平行停车判断

由 2.1, 2.2 中的模型可以计算出最小车位长度, 宽度:

$$H_{\min} = 700.2cm < H$$

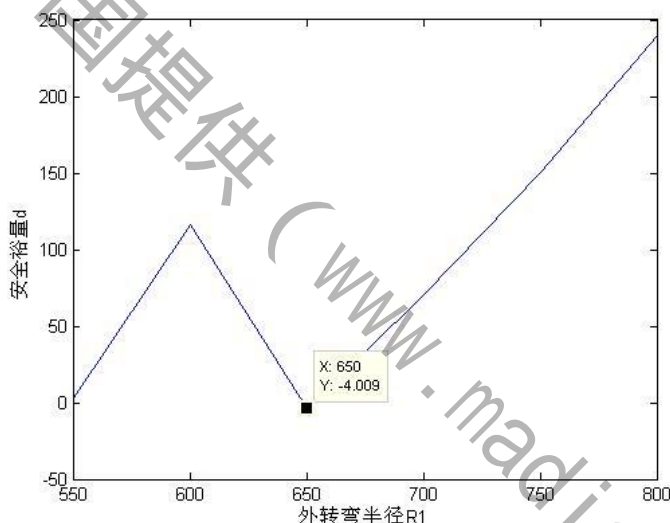
$$B_{\min} = 198.8cm < B$$

所以可以判断出该车在该种情况下可以停到车位里。

7.2 最优停车线路算例

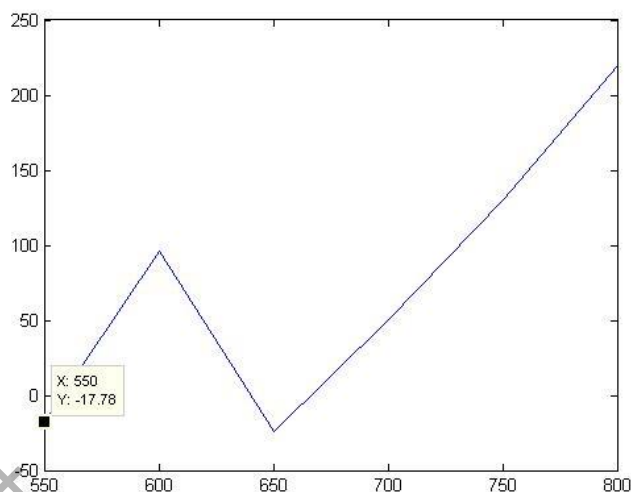
通过模型的分析, 我们固定内转弯半径 R_2 为最小转弯半径 550cm, 改变外转弯半径 R_1 的值, 得到不同的线路方程, 通过所定义的评价指标: 总泊入能力 k 和安全裕量 d , 来找出最优的线路。

1) 依据安全裕量 d 作为评价指标



图表 18 安全裕量与外转弯半径的关系

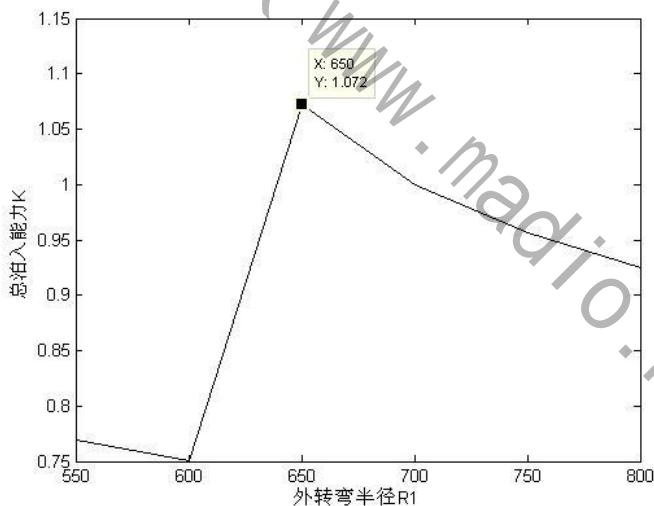
结论: 安全裕量 d 是指泊车过程中车身和易撞点的距离。这是衡量安全性的指标, 也是线路必须满足的指标, 如果 $d < 0$, 那么可以肯定这条线路会发生碰撞, 故不予以采纳。从图中可以看出, $R_1 = 650cm$ 时车辆会发生碰撞, 故应舍弃该线路, 其他的线路均可采用。具体的仿真图参见附录。



图表 19 心理安全裕量与外转弯半径的关系

结论：考虑到心理因素的影响，引入心理安全裕量，即在原距离的基础上减掉司机的心理距离，本文中采用 20cm。由图中可以看出， $R1=550\text{cm}$ 和 $R1=650\text{cm}$ 时的线路均不采纳，其他的都可以考虑。

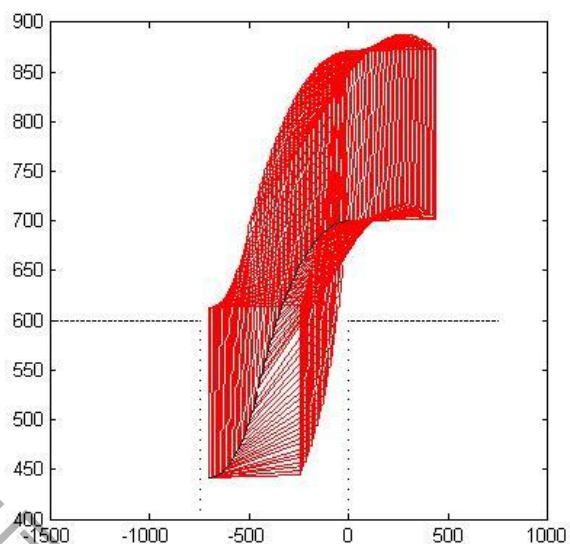
2) 依据总泊入能力指标 k
在考虑安全裕量的基础上，我们从剩下的线路中寻找最优的线路。



图表 20 总泊入能力与外转弯半径的关系

结论：总泊入能力反映了外转弯半径 $R1$ 不同时，车辆泊入狭小空间的能力，即总泊入能力越大，车辆所需要的停车位长度越小，是一个衡量泊车线路对空间利用率的指标。从图中可以看出， $R1=700\text{cm}$ 时的线路为最优线路。其线路方程为：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 700^2, x \in (-454, 0) \\ (x + 700)^2 + (y - 821)^2 = 379^2, x \in (-606, -383) \end{cases}$$



图表 21 线路轨迹仿真图

这样，我们给出了线路的初始位置和角度。另外，我们将其他的几种满足指标的情况作为允许的偏差，至此完成了第二问的要求。（允许的偏差具体参见附录中的图）

八、模型优缺点

模型优点

- 1) 模型针对两个问题，给出了解决方案并给出满意的结果。
- 2) 模型创造性地提出了多个指标来衡量路线的优劣性和可行性，并通过实例验证了相关结论。
- 3) 提出了一种纯数学上的模型，通过各种函数关系描述了本问题。
- 4) 模型对司机的心理因素也有考虑，更加接近现实。

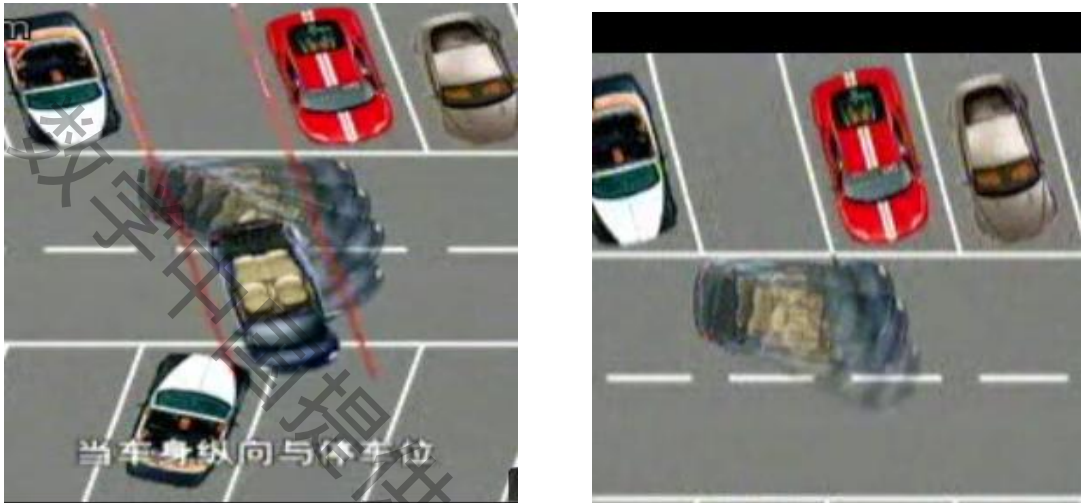
模型缺点

- 1) 问题中的假设使得模型在某种程度上看脱离实际，可能会造成误差。

九、进一步讨论

在实际生活中还存在着另一种形式的泊车——漂移

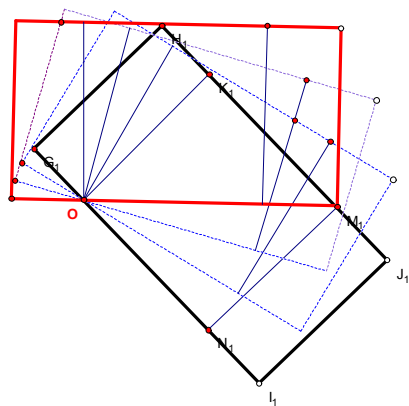
当然这是建立在驾车技术极其娴熟的基础之上，并不适合于一般的驾驶员，但是从物理角度来讲，它又是切实可行的并且在泊车位相对狭小的情况下非常实用！下面的分析是与本论文上述内容相对独立但并不矛盾的讨论，对此第一步中的最小停车位置将不再适用。



图表 22 漂移泊车示意图

如以上两图，车辆在进入预定位置的过程中，基本上是通过旋转来完成而不是通过倒车并不停的变换方向来完成。虽然看起来炒作的过程简单了很多，但是由于这样的停车技术一方面需要驾驶员极好的心理素质，另一方面还要求在操作之前准确的判断在这样的狭小的空间里即便是通过漂移是否能够完成停车任务！判断完了还要知道在什么地方开始刹车，以多大的速度切入等等问题！

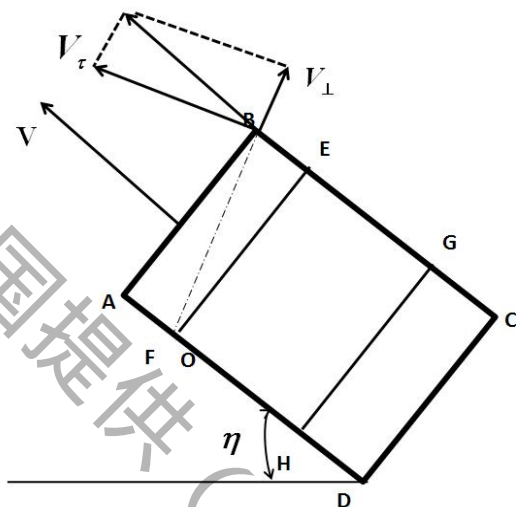
将车辆看作一个矩形框，黑色是刹车位置
而后通过旋转最终定位在红色框所定位的位置



图表 23 停车过程示意图

如图为停车过程示意图，当汽车行进到黑色框所示位置时（左前轮已经达到预定的位置，但是整个车的姿态尚不满足要求）前轮刹车，后轮可以选择是否刹车，此时汽车整体开始绕点 O （ O 左定轴转动）

见下图，当突然在速度较大的情况下前轮刹车时，整个车身的旋转是以前轮 F （亦即点 O ）处所在的重锤线方向进行的。图示的情况就是对 B 点的速度进行分解，得到沿着直线 FB 方向的速度径向速度，和垂直于 FB 的企鹅想速度。当 F 点的速度为零时， B 点的径向速递局也随之变为零。故而仅存在切向速度 V_τ 。



图表 24 动力学分析图

由理论力学知识，我们知道刚体的转动动能 E_k 为

$$E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

其中 I 为汽车以 F 为轴旋转时的转动惯量， ω 为汽车绕 F 旋转的角速度。其中 ω 的大小为

$$\omega = \frac{V_\tau}{|FB|}$$

根据动能定理，所有的转动动能都会被摩擦力做功所消耗，因此计算摩擦力的大小也成为我们需要计算的参数之一。在转动过程中需要计算的，摩擦力转变为摩擦力矩用 M 表示，而切入角 η 本身是已知的，则动能定理可以表示成

$$E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = M\eta$$

现在需要解决的问题就是汽车所受到的总摩擦力矩 M 是多大，解决这个问题之后我们便能够确定相关参数了。但是总摩擦力矩的确定并不是容易散文，因为既存在内部的因素如汽车的重量、轮胎的摩擦系数，还有外部的因素如路

面的粗糙程度和风速，因而可以说总摩擦力矩的确定也是基本全部来源于经验，即驾驶员的驾车熟练程度。

综上所述，漂移作为停车的方法是可行的，但是，因为总摩擦力矩 M 和转动惯量的未知或者说不能玩那个轻易知道，它并不能作为一种可以向普通大众推广的停车方法。同时，由于漂移停车时需要较高的速度作为支撑，造成了该停车方法具有相当的不安全性，因此也是不被国家的交通部门允许的。

十、参考文献

- [1]赵玲，平行泊车方法研究与仿真，长安大学硕士学位论文，2009 年
- [2]何锋，自动泊车系统的研究及实现，广东工业大学硕士学位论文，2009 年
- [3]Hitoshi Miyata, Control of the autonomous mobile robot Dream-1 for a parallel parking, Mathematics and Computers in Simulation, Volume 41, 1996
- [4]F. Gomez-Bravo, Parallel and diagonal parking in noneconomic autonomous vehicles, Engineering Application of Artificial Intelligence, Volume 14, 2001

十一、附录

11.1 主要源代码

1. seg.m % 车位图函数（类似矩形波）

```
function seg()
%lx, ly  $\times$   $\phi \pm \beta \times \hat{i}$ ,  $\beta \mu \hat{a} \mu \hat{\lambda} \times \phi \pm \hat{e}$ 
%rx, ry  $\phi \pm \beta \times \hat{i}$ ,  $\beta \mu \hat{a} \mu \hat{\lambda} \times \phi \pm \hat{e}$ 
a=-1500:10:-750
b=600
plot(a, b, 'k');
hold on
a=-750
b=400:10:600
plot(a, b, 'k')
hold on
a=-750:10:0
b=400
plot(a, b, 'k')
```

```

hold on
a=0
b=400:10:600
plot(a,b,'k')
hold on
a=0:10:750
b=600
plot(a,b,'k')
axis square

```

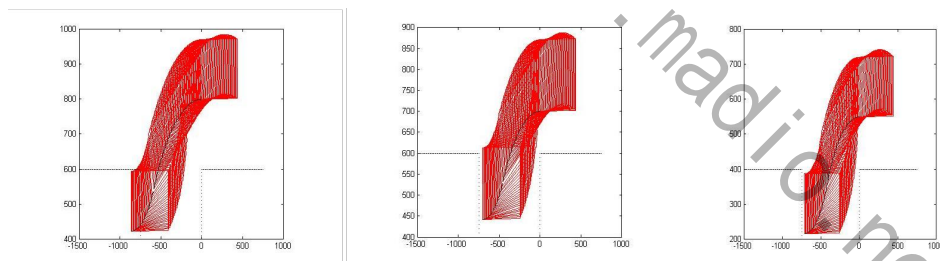
2. rect.m %画停车的轨迹图

```

function rect(x,y,L,W,theta)
x1=x+L*cos(theta);
y1=y+L*sin(theta);
x2=x-W*sin(theta);
y2=y+W*cos(theta);
x3=x+L*cos(theta)-W*sin(theta);
y3=y+L*sin(theta)+W*cos(theta);
plot([x x1 x3 x2 x],[y y1 y3 y2 y],'r');
axis square

```

11.2 允许的偏差仿真图



图表 25 R1=800cm R1=600cm R1=550cm