

1522

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

承 诺 书

我们仔细阅读了第六届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站(www.madio.net)公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：1522

参赛队员（签名）：

队员 1：王珂

队员 2：窦浩桢

队员 3：刘海超

参赛队教练员（签名）： 周俊杰

参赛队伍组别： 本科组

1522

第六届“认证杯”数学中国

数学建模网络挑战赛

编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

1522

2013 年第六届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目 四面六边透水框架（群）的再研究关 键 词 量纲分析法, 多元回归, 机理建模

摘 要:

“护岸防洪防冲四面六边透水框架”是水利部西北水利科学研究所拥有的使用新型专利, 并得到广泛应用。在江河治理工程中应用四面六边透水框架, 能够减小流速的作用, 对河道治理起到防冲、护岸、促淤的作用。但是, 影响其减速效果的因素很多, 尤其是框架尺寸、架空率和长度等都直接或间接地影响其减速效果。目前, 研究学者们主要是通过实验来测得数据进行研究, 由于数据量和数据精度的限制, 只能得到不太完善的经验公式。为了完善现有的经验公式, 我们分两步进行建模, 首先, 对单个四面六边透水框架进行研究, 采用量纲一致性进行分析, 最终分析得出减速率与流体的雷诺数、佛汝德数、四面体所在截面的横截面积及四面体中心到测量面的距离有直接关系; 其次, 对四面六边框架群进行建模, 分两步进行, 第一, 机理建模, 将框架群简化成一定的物理模型, 参考研究学者们的研究成果, 并在此基础上进行理论分析, 得出流体通过四面六边透水框架群后的压降, 其中包含一个待定系数 λ_1 , 其物理意义为四面六边透水框架

群的摩擦系数; 第二, 结合学者吴龙华的实验数据进行回归分析, 得出 $\Psi=4.8$, $\lambda=16$, $L=20$ 时速度降低率较高, 而且工程经济效益较好, 论文最后根据单因素实验结果, 建立多元回归模型, 并评价了模型了优缺点。

关键词: 量纲分析法, 多元回归, 机理建模

参赛队号: 1522

参赛密码 _____ (由组委会填写)

所选题目: A 题

1522

ABSTRACT

"Revetment flood scour surrounded six sides of permeable frame" is a new use of patent which is owned by the Northwest Water Conservancy Science Inst and is widely used. In the harnessing of rivers project, the application of this patent can reduce the velocity of flow, which plays an important role in scour protection, revetment and siltation of river training. However, there are so many factors which affect the slowing effect, especially the frame size, the overhead rate, and length and so on which could affect the slowing effect directly or indirectly. At present, the researchers mainly do experiments to measure data for research. Because of the limit of data and the data precision, the researchers can only get some imperfect formulas. In order to improve the existing empirical formula, we set modeling by two steps. Firstly, to the single tetrahedron with six sides penetrating frame, we analysis by using dimensional consistency and got the conclusion: there is a direct relationship between Re , F_r , the cross sectional area of the cross section of the tetrahedron, the distance from the center to the measuring surface of tetrahedron and deceleration rate. Secondly, to tetrahedron framework group, we set modeling by two steps, too. First, the mechanism modeling. We simplify the framework group into a physical model. By referring the achievement of researchers', we developed the theoretical analysis on the basis of them and got the pressure drop when fluid through penetrating frame groups which contains an undetermined coefficient λ and the physical meaning of the coefficient was the friction of the penetrating frame groups. Second, with the experimental data of the scholar Wu Longhua, we developed Regression Analysis. And we got that when $\Psi=4.8$, $\lambda=16$, $L=20$, the deceleration rate was highest and had a better economics of engineering. In the last, we established a multiple regression model with the experimental results of the single factor. Then, we evaluate the advantages and disadvantages of the model.

Keywords: Dimensional Analysis, Multiple regression, Mechanism modeling

1522

问题重述及分析

护岸固脚工程是河道整治工程的重要内容，也是堤防工程的重要部分。护岸固脚工程具有其特殊性和复杂性，涉及诸多因素，如：河势演变、水流要素、河床介质、水文气象等。我国建有大量的堤防，堤防的安全直接影响到社会经济的发展和人民生命财产，长期以来，为了治河护岸，采用过各种各样的技术和方法。

护岸工程按机理分类，可分为实体抗冲护岸和减速不冲护岸。

(1) 实体抗冲护岸是以实体抗冲材料顶住江水的冲刷保护岸坡，或强迫水流转向绕过一段江岸，以保护岸坡，例如一般的抛石、砌石护岸，丁坝或矶头，沉排、土工枕等均为此类。其中，抛石固脚是河段防冲、护岸工程中最为普遍的方法。但是，抛石在经过一段时间的冲刷后，会逐渐下沉流失，最终导致岸坡失稳，固岸效果不明显。

(2) 另一类护岸方法，即局部改变水流的流态，将低岸边流速，将其降到不冲流速一下甚至可以起到落淤的效果，使岸边的冲淤态势发生改变，改岸边的冲势为缓冲或淤势，以护住河岸，稳住岸坡。其中，四面六边透水框架群治河护岸防冲技术是水利部西北水利科学研究所于20世纪90年代初期针对多沙河流的河道整治研究开发的一种新型透水性治河护岸技术。四面六边体透水框架群治河技术，其基本原理是利用框架群多个杆件的滞留减速作用，促使含沙水流在一定的区域内减速落淤，并营造新的水流边界条件，从而达到控导河势、保滩护岸的目的。该结构群具有透水 and 阻水消能的作用，将传统的护岸技术中的集中消能变为逐步分级消能，从而达到减速落淤的效果。

近10年来，四面六边体透水框架作为一种新型的护岸防冲方式，因其特殊的减速促淤效果，在河道整治、消力池、桥墩防冲等工程中，得多了广泛的应用。相比于实体护岸方式，该结构不仅节省工程材料，而且具有良好的减速促淤效果，在投放区域起到了防止冲刷，保护水工建筑的作用。但是，有关四面六边透水框架的研究，大多停留在实验和工程运用上，且数据量和数据精度均存在各种不足，没有形成完善的经验公式。

在现有的数据和数据精度的前提下，为了更好的确定框架尺寸、架空率和长度与减速率之间的关系式，我们首先将模型分两部分来研究：1、单个四面六边体透水框架对流体的作用，该部分主要采用机理建模，从理论分析入手，根据常用的量纲分析法来确定对流速影响较大的因素，为第二步建模做铺垫。2、考虑四面六边体透水框架群，该部分建模可简化成一定的物理模型，

模型一

对于堤防岸滩的防护来说，最为重要的是消减水流对堤防岸滩的冲刷、淘刷能量，透空四面体其护岸保滩的作用也是体现在消减水流的能量。水流通过透水透空四面体产生绕杆件的非定常漩涡结构以及穿越杆件空隙而过的复杂射流，在尾流中形成强烈的相互作用，从而在一定范围内造成水流能量的消减。当多个透空四面体按一定形式排列组合在一起，就能通过透空四面体的群体效应达到固滩护岸的目的。

模型假设

- 1、水流速度不随时间与空间变化，为一定值 V_1 。
- 2、流体物理特性在一定的时间内不变，其中包括密度，粘度等。

1522

模型建立及求解

为研究透空四面体群消能减速的效果，我们必须了解为研究单个透空四面体尾流的水力特性，在透空六边四面体投放前后，河道流场发生了很大的变化，利用 PDE 模拟：

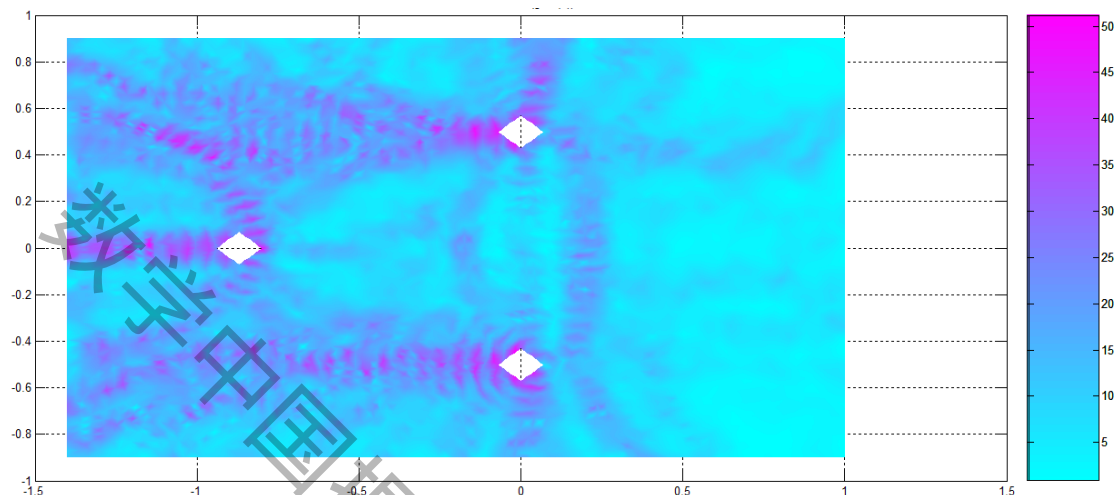


图 1 四面体底部三点的流畅模拟图 a

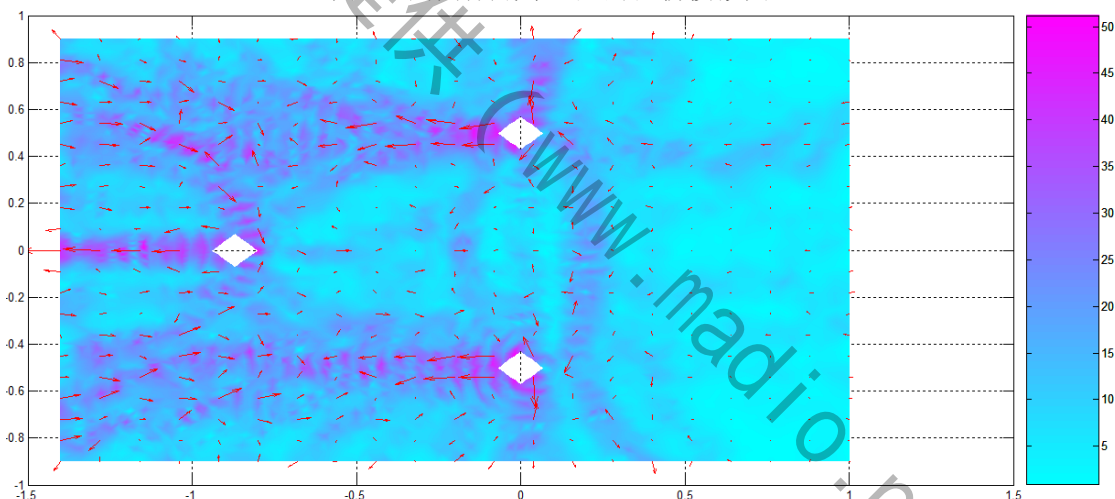


图 2 四面体底部三点的流场模拟图 b

1522

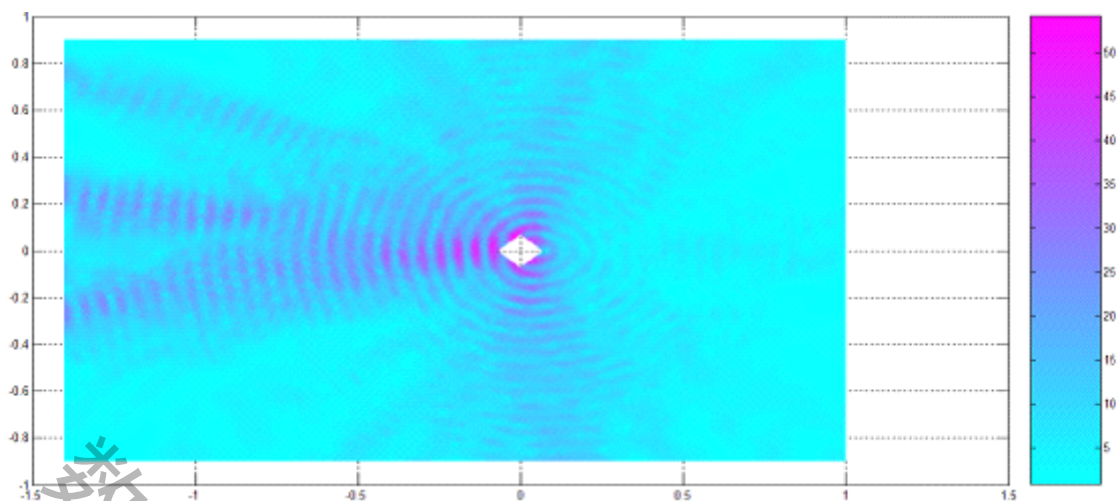


图 3 四面体顶部点的流场模拟图 a

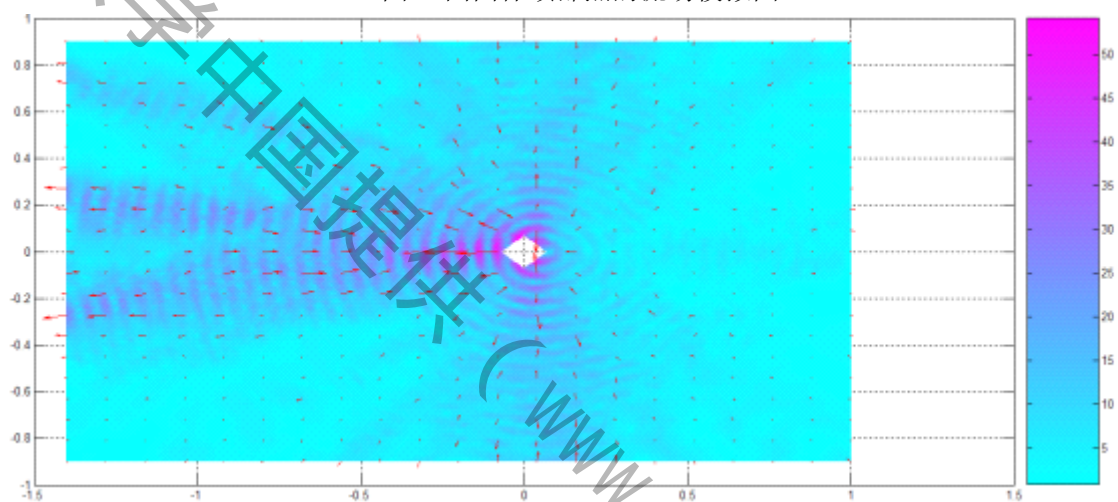


图 4 四面体顶部流场模拟图 b

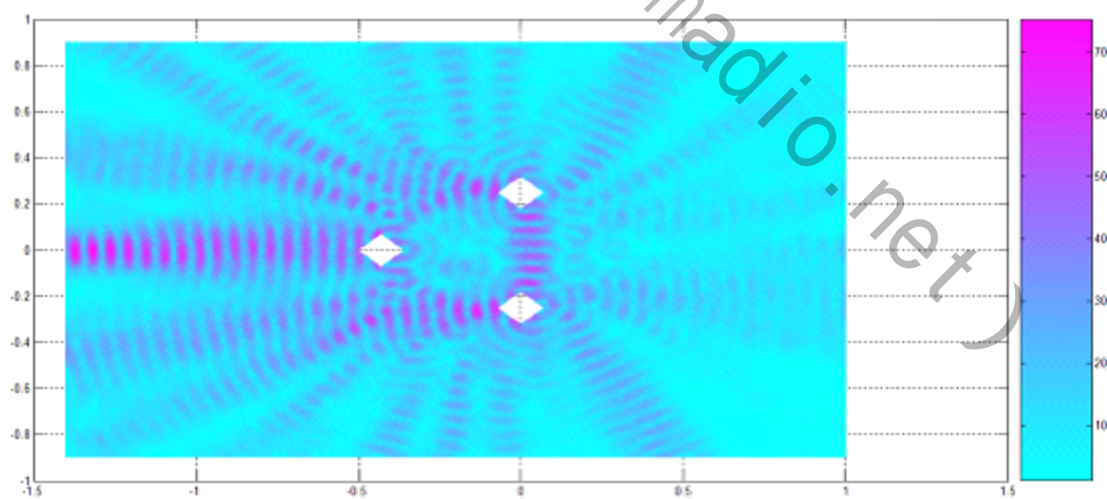


图 5 四面体中间三点的流畅模拟图 a

1522

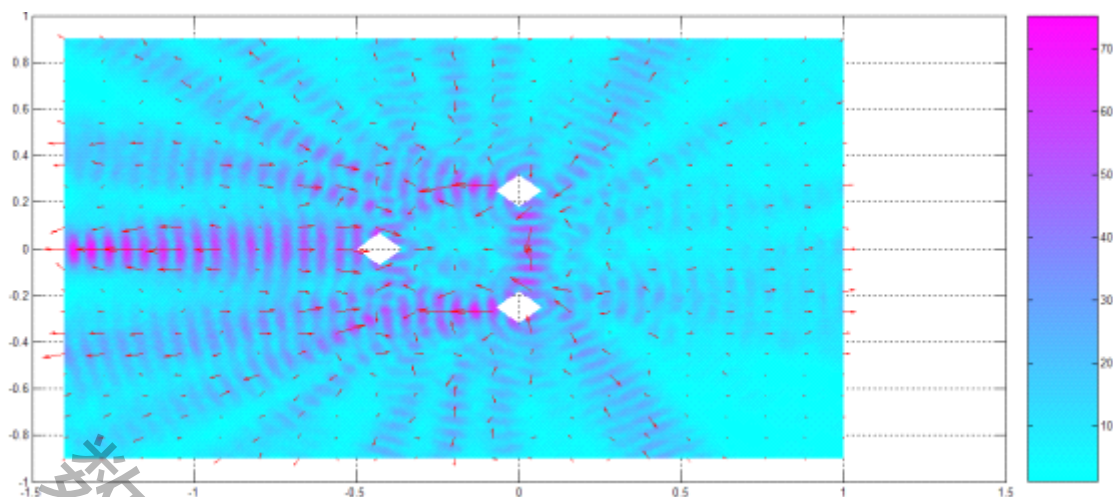


图6 四面体中间三点的流畅模拟图b

根据模拟结果,同时结合学者实验研究,我们可以看出在透空六边四面体投放前后,河道流场发生了的变化表现在以下3个方面

(1) 尾流时均流场特征

四面体的放透空四面体前后的尾流时均流场特征发生了变化,在投放透空四面体后,无论是对圆形截面透空四面体还是方形截面透空四面体,对透空四面体的尾流流场都有显著的影响,特别是透空四面体的尾流流场特征以 $0.8H$ 为分界点,上下流场有着明显的区别。在 $0.2\sim 0.5H$ 高度时,投放透空四面体后,在透空四面体的两个尾边柱后,由于柱体绕流作用,使得柱体后方出现两个明显的小流速区域。同时随着测量平面高度的增加,这两条小流速区域逐渐减小,流场中柱体后的减速效应也相应地减弱,并且减速区域沿水流方向也相对减小。在 $1.0\sim 1.4H$ 高度处,在投放透空四面体后,尾流流场的流速有明显的增加。主要是由于透空四面体对底部水流的减速作用,使得水流流速在垂直方向进行调整,导致透空四面体高度以上的水流流速增加。

(2) 垂直断面流速变化

当投放透空四面体后, X 方向水流流速分量有明显的减小,在透空四面体高度范围内,随着相对高度的增加,由于水流对透空四面体杆件的绕流作用,在透空四面体底部基本上是相互独立的柱体绕流,随着高度的增加,各个柱体之间的绕流逐渐相互影响,由于测点位于透空四面体中线上,因此,使得流速减小幅度逐渐增大,在 $0.8H$ 高度处,流速减小幅度达到最大。随着相对高度的继续增加,透空四面体尾流的水力特性四面体对水流的影响也逐渐减小,流速也逐步恢复平稳。

Y方向流速分量变化:断面垂线流速分量均比投放透空四面体前流速有较大的增加, $0.5L$ 处断面垂线上各点流速变化最大。由于透空四面体的杆件在横向上占据一定空间,过水断面面积减小,使得水流向两边产生横向偏移,从而导致在 Y 方向流速分量普遍增加,而且离透空四面体越近,流速变化幅度也就越大。随着距离的增加,水流通过自身调整, Y 向流速分量逐步趋向平稳,但调整距离较长,超过 $3.5L$ 。

Z方向流速分量变化:各断面垂向上测点的 z 向流速分量在投放透空四面体后,都比投放透空四面体前流速改变,其中在 $0.8H$ 高度处 z 方向流速分量改变幅度最大。在四面体 $0.5H\sim 1.0H$ 高度范围内,随着沿程距离的增加, z 方向流速分量逐渐都变为反方向。但 $0.2H$ 处 z 方向流速分量虽然减小,但始终没有改变方向,这就保证了四面体一定高度以下 Z 方向流速分量大小是减小的。基于抛投透空四面体后 Z 方向流速分量变化的规律,在实际中如果能够进行四面体的多层抛投,将会有大大改善四面体尾流中 z 方向流速分量中出现反方向流速的情况,同时也更利于促进底层四面体水流中泥沙的沉降

1522

和对堤防岸滩的保护。

(3) 尾流紊动特性

透空四面体(群)不但可以用来保护岸滩堤防,同时还能够促使水流中挟带的泥沙淤积沉淀。而泥沙的启动、疏运和沉积与紊动强度有着密切的联系,在投放透空四面体后,在透空四面体高度范围内,水流紊动强度有着明显的增强,超过透空四面体高度后,紊动强度则有所减弱。与之对应是在透空四面体高度范围内水流流速减小,透空四面体高度以上则水流流速增加。

从参考文献中可以看出影响 V_2 的因素很多,但是为了研究的方便,模型的建立,我们从中选取几种影响比较大的因素,采用量纲分析法进行理论分析。

影响过程的主要因素:

经过对过程的分析,可以得到影响过程的主要因素,即为:

V_1 : 投放透空体前的流速, m/s;

H : 水深, 单位: m;

ρ : 流体密度, 单位: kg/m³;

g : 重力加速度, 单位: m/s²;

l : 四面体的中心到测量面的距离, 单位: m;

$f_{\text{阻}}$: 四面体的形状阻力;

对一定高度水平面来说,与四面体的截面面积、来流流速以及自身的阻力系数等因素有关。因此,可列出下列关系式:

$$V_2 = f(V_1, H, A, \rho, \mu, g, l)$$

其中: A 为某一水平高度上四面体的截面面积。采用量纲分析法,根据因次一致性原则,将其写成幂函数的形式,如下式:

$$V_2 = K V_1^a H^b A^c \rho^d \mu^e g^f l^g$$

其中,各个物理量的因此如下:

$$[V] = LT^{-1}$$

$$[H] = L$$

$$[A] = L^2$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[g] = LT^{-2}$$

$$[l] = L$$

将每个物理量的量纲带入到幂函数中,可得下式:

$$LT^{-1} = K(LT^{-1})^a (L)^b (L^2)^c (ML^{-3})^d (ML^{-1}T^{-1})^e (LT^{-2})^f (L)^g$$

1522

根据因次一致性原则，得出下列方程组：

$$\begin{cases} a+b+2c-3d-e+f+g=1 \\ d+e=0 \\ a+e+2f=1 \end{cases}$$

用 e, f, g 来表示其他三个未知数，该方程的解可写成下面的形式：

$$\begin{cases} a=1-e-2f \\ d=-e \\ b=f-2c-g-e \end{cases}$$

将解带入到幂函数中：

$$V_2 = KV_1^{1-e-2f} H^{f-2c-g-e} A^c \rho^{-e} \mu^e g^f l^g$$

将指数相同的物理量合并到一起可得：

$$V_2 = kV_1 \left(\frac{\mu}{\rho V_1 H} \right)^e \left(\frac{Hg}{V_1^2} \right)^f \left(\frac{A}{H^2} \right)^c \left(\frac{l}{H} \right)^g$$

对于河道的岸滩部分，一般为浅水区，我们用水力半径 R 代替水深 H 。则雷诺数和佛汝德数可以分别表示为：

$$R_e = \frac{\rho V_1 H}{\mu}, F_r = \frac{gH}{V_1^2}$$

带入前面的式子，并变形可得：

$$\frac{V_2}{V_1} = KR_e^e F_r^f \left(\frac{A}{H^2} \right)^c \left(\frac{l}{H} \right)^g$$

因此， $\frac{V_2}{V_1}$ 可表示为：

$$\frac{V_2}{V_1} = f(R_e, F_r, \frac{A}{H^2}, \frac{l}{H})$$

定义参数 η ，表示抛投四面体后续流速的变化幅度，可表示为：

$$\eta = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$$

将 $\frac{V_2}{V_1} = f(R_e, F_r, \frac{A}{H^2}, \frac{l}{H})$ 带入到 $\eta = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$ 可得：

$$\eta = 1 - f(R_e, F_r, \frac{A}{H^2}, \frac{l}{H})$$

1522

由上式可知，透空四面体对尾流的减速作用不仅与水流的雷诺数、佛汝德数有关，还与四面体横截面积和四面体中心到测量面的距离有直接关系。

模型二

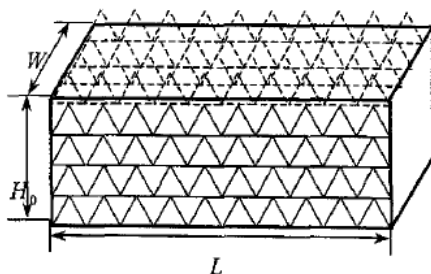


图 7 四面六边透空框架群示意图

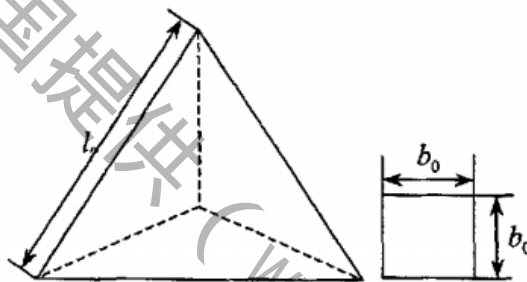
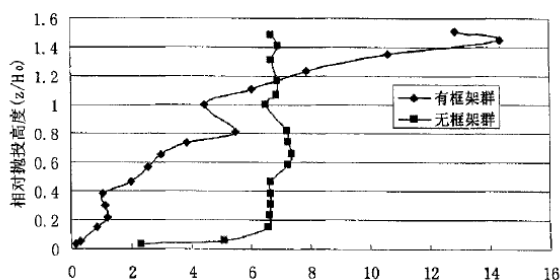


图 8 四面六边透空框架群及杆件截面示意图

吴龙华等通过水槽实验验证了透空四面体群内部水流特征，得到如下结论：

水中放入透空四面体群后，在透空四面体群高度范围内，流速明显小于投放透空四面体群前水流的流速，有透空四面体群时，透空四面体群内部垂线流速分布与透空四面体群上部水流垂线流速分布不是光滑过渡，而是在 $z/H=0.81$ 时出现转折，表明透空四面体群内、外部水流运动有明显的相互影响，导致透空四面体群顶部层面附近水流紊动加剧，有透空四面体群时， $z/H>1$ 时的 V 明显大于 $z/H<1$ 时的 V ，这是由于透空四面体群的阻水，大部分水体只能从透空四面体群上部流动，于是造成上部的水流加速，当 $z/H>1$ 时， V 随着 z/H 的增大而增大，表明透空四面体群在对底部水流进行减速的同时也导致透空四面体群高度外的水流加速，对水流的阻力也只是具有一定的影响高度，当 $z/H>1.45$ 时，由于接近自由面，使得 V 又随着 Z/H 的增大而减小。

图 9 平均流速 V 与相对高度 z/H 的关系曲线

有四面体群时的紊动强度明显小于无四面体群时的紊动强度(有四面体群时，当 z

1522

/H=0.05 时,紊动强度 T 仅为 0.3)。由此可知,河底抛投透空四面体群后,明显降低了水流的紊动强度,水流挟沙能力减弱,有利于泥沙的淤积和岸滩的保护。

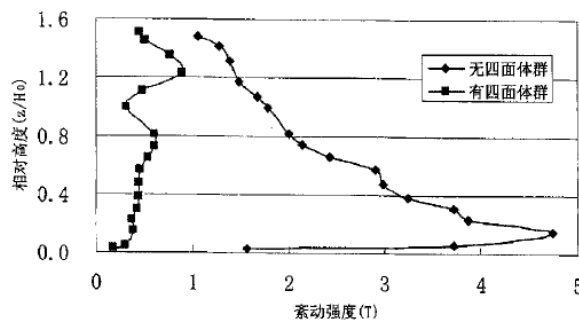


图 10 投放透空四面体群前后目标段面垂线紊动强度变化曲线

从以上结论可知：对四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度都直接或间接地影响着其消能减速的效果。目前学者主要从两个方面探究其关系，其一、工程经验，其二、实验探究。

(1) 工程研究

设原河段流速为 V_1 , 经过四面六边透水框架群作用后的流速为 V_2 , 引入透水框架群作用系数, 以 m_1 表示, 定义其物理意义为垂直于水流方向的单位面积内, 框架杆件投影面积所占的比例。实验研究和圆形观测资料分析表明, 流速的衰减率 V_1/V_2 可以表示为:

$$\frac{V_2}{V_1} = K(1 - m_1)$$

式中: K 为经验系数。对于等边四面体透水框架, 若令杆件的边长为 L , 杆件径向特征尺寸 (矩形截面为边长, 圆形为直径) 为 d , 由透水构件作用系数的定义概化分析后可得 m_1 表达式为:

$$m_1 = \frac{12dL(1 + \tan 30^\circ)}{\sqrt{3}L^2} \approx 11d/L$$

经分析测算当 $L < 10d$ 时, 透水构件的经济成本与其他实体防护工程相比已经无太多优势, 因此在原形实验研究中提出了四面六边透水框架结构透水作用系数小于 1 的限制, 作为构件集合尺寸设计的约束条件。对宽浅多沙河流透水性整治工程的透水结构设计, 从偏安全考虑建议 K 值取为 1.1~1.2。在已知 V_1 和 V_2 的情况下, 由 V_1/V_2 可确定 m_1 的值, 再有确定透水框架杆件的径长比 d/L 。在确定了径长之后, 框架杆件的长度有运输能力、抛投施工工艺和框架群高度确定, 就多沙河流的一般水沙条件和河床边界条件而言, 杆件长度以不大于 2m 为宜。

(2) 实验探究

部分学者通过实验, 通过控制其他因素, 研究某一因素与四面六边透水框架群消能减速效果的关系。但大多停留在只是简单地根据所得数据进行绘图, 然后定性分析其间关系, 对于其机理很少学者进行探究。

针对以上情况, 我们采用两种方法建模, 一、机理建模, 机理建模根据实际问题, 进行假设, 探究内部机理, 最终建立模型, 但由于无法实验, 我们无法验证模型的正确性, 二, 根据学者研究, 进行多元回归分析得到四面六边透水框架群, 框架尺寸、架空率和长度与其消能减速的效果的关系。但缺点是, 无法深入进行探究, 只是停留问题的表面。

(1) 机理建模

1522

透空四面体群中单个四面体形状体透空部分以及单个四面体之间形成了许多可供流体通过的细小通道，这些细小的通道时曲折而且相互交联的，同时这些通道的截面积大小和形状有很不规则，流体通过如此复杂的通道的阻力自然很难计算，必须依靠实验来解决问题。

透空四面体群简化的物理模型：

在透空四面体中单个四面体杆件对流体运动提供了较大的阻力，此阻力一方面可使流体沿透空四面体群速度分布变得相当均匀，另一方面也造成了较大的压降，我们以透空四面体前后两个面的压降作为目标函数，考察其与四面六边透水框架群，框架尺寸、架空率和长度关系。单位体积透空四面体所具有的比表面积对流动阻力有决定性作用。这样为解决压降问题，可在保证单位体积表面积相等的前提下，将颗粒层内的实际流动过程大幅度简化，使之可以用数学方程描述。

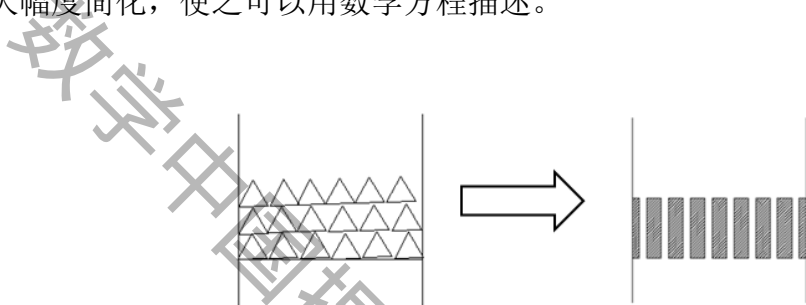


图11 简化的物理模型

将透空四面体床层中不规则通道简化长度为 L_e 的一组平行细管，并规定：

- 1、细管内表面积等于透空四面体群中四面体全部表面积
- 2、细管的全部流通空间等于透空四面体群的空隙容积

根据上述假定，可求得这些虚拟细管的当量直径 d_e

$$d_e = \frac{4 \text{通道截面积}}{\text{润湿周边}}$$

分子分母同时乘 L_e

$$d_e = \frac{4 \text{透空四面体群流动空间}}{\text{细管全部内表面}}$$

下面分别求解四面体与透空四面体群的比表面积

$$\text{单个透空四面体比表面积 } a_0 = \frac{S}{V}$$

$$\alpha_B \text{透空四面体群比表面积 } \alpha_B = \frac{2(BL + LH_0 + BH_0)}{BLH_0}$$

$$\text{透空四面体群孔隙率: } \varepsilon = \frac{V_{\text{群}} - NV_{\text{单}}}{V_{\text{群}}}$$

1522

$$V_{\text{群}} = BLH_0$$

$$V_{\text{单}} = 6b^2 l_0$$

忽略单个四面体因接触而使裸露的四面体表面积减少， $\alpha_B = \alpha_0(1-\varepsilon)$

$$d_e = \frac{4\varepsilon}{\alpha_B} = \frac{4\varepsilon}{\alpha_0(1-\varepsilon)}$$

根据上述简化，将流体通过透空四面体群的压降简化为通过均匀圆管的压降，不难应用现有理论做出如下数学描述：

$$h_f = \frac{\Delta \phi}{\rho} = \lambda \frac{L_e}{d_e} \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$u = \frac{v_1}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta \phi}{L} = \left(\lambda \frac{L_e}{8L} \right) \frac{(1-\varepsilon)\alpha_0}{\varepsilon^3} \rho u^2$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{8} \frac{L_e}{L}$$

由于透空四面体水平放置，则

$$\frac{\Delta \phi}{L} = \frac{\Delta P}{L}$$

因此：

$$\frac{\Delta P}{L} = \lambda_1 \frac{(1-\varepsilon)\alpha_0}{\varepsilon^3} \rho u^2$$

此式即为流体通过透空四面体群的压降，其中包含了一个待定系数 λ_1 ， λ_1 即为模型参数，就其物理意义而言可以成为透空四面体群的摩擦系数，上述简化处理只是一种假定，其有效性要通过验证，由于无法进行试验，我们无法评价其模型的好坏。

(2) 多元回归分析建模

透空四面体群作为一种新型的岸滩防护技术，它不仅是对透空四面体群内部水流具有良好的减速消能作用，而且对于其后尾流在一定范围内也有明显的减速消能效果，从学者研究中可以看出四面体群的结构特征对尾流减速具有重要影响，四面体群的空间尺寸（如透空四面体群的长宽）主要影响在该方向速度减小范围。

透空四面体群的透水性和阻水性是其两个对立统一面，透水性强就意味着阻水性能受到制约，透水性过强则使得阻水性能得不到有效发挥，将使得水流对防护对象直接进行冲刷，达不到消能防护的目的，另一方面，阻水性能增强，则透水性能就受到制约，阻水性能过强，就达不到“亲水”防护的目的，又回到了传统的阻水式防护。因此，如何在透空四面体群的透水性和阻水性能之间找到一个平衡点，达到透空四面体群的最优减速防护效果，就成为透空四面体群实现“亲水”防护的一个关键环节。由透空四面体群结构组成可以知道，透空四面体群内的空隙率、透空四面体的数量将直接影响到透空四面体群的透水性和阻水性能，制约着透空四面体群的减速效果，而且在工程实际运用中，单个透空四面体群单位体积所包含的透空四面体数量的多少，直接影响到工程的投资。对单位体积的透空四面体群，其内部四面体的数量多少将直接影响到透空四面体群的空

1522

隙率，而单个透空四面体的大小又会直接影响到内部透空四面体数量的多少。为此，引入单位体积架空率和杆件长宽比两个参数对透空四面体群结构特征进行描述，其定义如下：

架空率的定义：

$$\psi = \frac{V_{\text{群}}}{NV_{\text{单}}}$$

$V_{\text{群}}$ 为透空四面体所占空间的总体积， $V_{\text{单}}$ 为单个透空四面体所排开水的体积，

N 为透空四面体中四面体的个数。

杆件长宽比的定义：

$$\lambda = \frac{l_0}{b_0}$$

其中： l_0 为单个透空四面体的边长， b_0 为单个透空四面体杆件的截面宽度。

透空四面体群长度对度对顺水流方向减速范围的影响，选择合适的透空四面体群抛投长度，在有效保护堤防岸滩的同时，优化透空四面体群抛投的长度，对地提高工程效益，具有重要意义。部分学者还研究了投抛高度，宽度对水流影响，从其研究结果可以看出，投抛高度与宽度主要影响流速在高度方向与宽度方向减速范围，对顺水流方向的流速影响不大。

综上所述，我们主要讨论透空四面体孔隙率，杆件长宽比，投抛长度对减速率及减速范围的影响。为了探究其影响关系，我们先控制其他变量，探究一个变量与减速率关系，然后建立一个多元函数模型 $g(\psi, \lambda, L)$ ，探究透空四面体群减速消能效果。由于无法进行试验论文中的数据来源于吴龙华博士论文。

以下是引用的数据：

(1) 架空率，杆件长宽比与减速速率间的关系

表 1 不同架空率、杆件长宽比下的透空四面体群减速率

ε	λ	η
4.8	8.0	0.69
	10.0	0.73
	12.5	0.76
	16.0	0.77
	20.0	0.73
6.0	8.0	0.62
	10.0	0.65
	12.5	0.68
	16.0	0.71
	20.0	0.68

(2) 投抛长度与顺水流方向减速范围间的关系

1522

表 2 不同抛投长度下透空四面体减速率

ε	L	η	ε	L	η
4.8	4.0	0.43	6.0	4.0	0.41
	6.0	0.53		6.0	0.50
	10.0	0.70		10.0	0.62
	20.0	0.73		20.0	0.64
	30.0	0.75		30.0	0.65
	40.0	0.76		40.0	0.67

首先控制其他因素，探究单因素与速度衰减效果的关系

1、框架群长度 L 与减速率的拟合曲线

架空率为 4.8 时：

长度：4 6 10 20 30 40

减速率 4.8：0.43 0.53 0.70 0.73 0.75 0.76

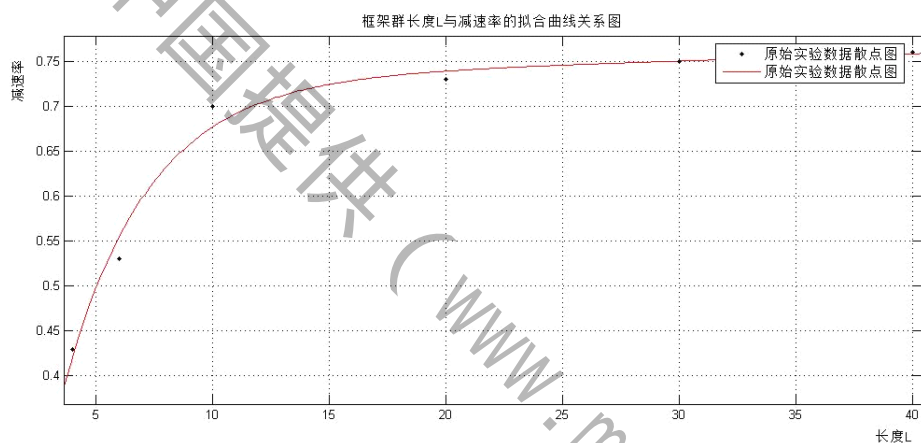


图 12 框架群长度 L 与减速率的拟合曲线关系图 a

拟合曲线公式： $g(L) = 0.7275e^{0.00105x} - 0.9451e^{-0.2785x}$

架空率为 6.0 时：

长度：4 6 10 20 30 40

减速率 6.0：0.41 0.50 0.62 0.64 0.65 0.67

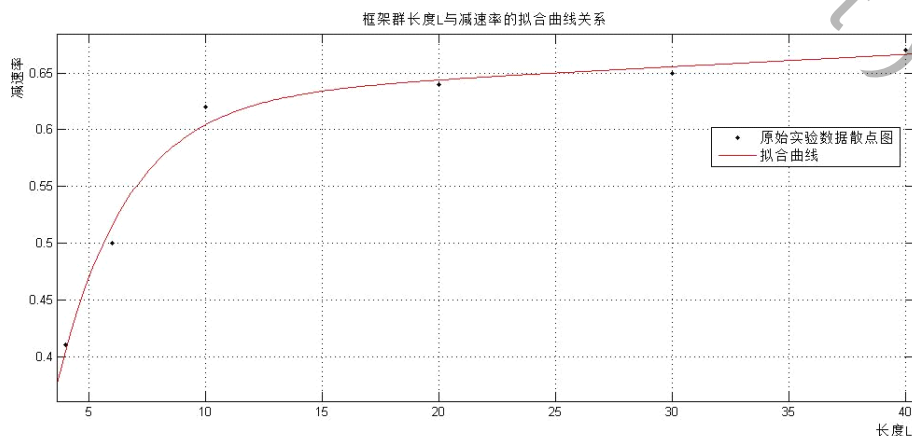


图 13 框架群长度 L 与减速率的拟合曲线关系图 b

1522

拟合曲线公式： $g(L) = 0.6242e^{0.001642x} - 0.8508e^{-0.3336x}$

框架长宽比与减速率的拟合曲线

架空率为 3.0 时：

长宽比：8.0 10.0 12.5 16.0 20.0

减速率 1.0：0.60 0.63 0.66 0.69 0.67

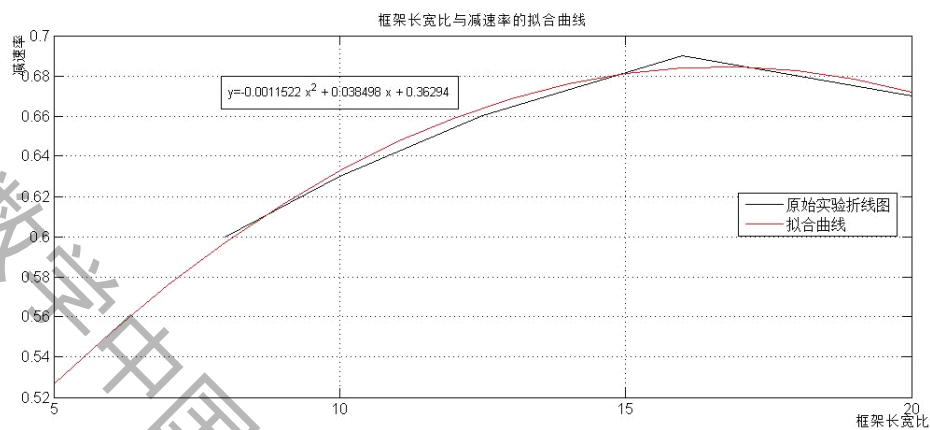


图 14 框架长宽比与减速率的拟合曲线 a

拟合曲线公式： $g(\lambda) = -0.0011522\lambda^2 + 0.038498\lambda + 0.36294$

架空率为 4.0 时：

长宽比：8.0 10.0 12.5 16.0 20.0

减速率 4.0：0.65 0.70 0.73 0.74 0.71

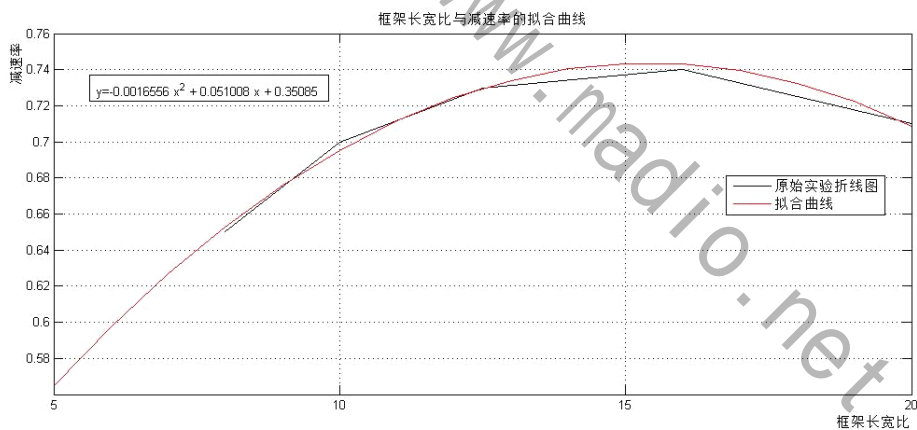


图 15 框架长宽比与减速率的拟合曲线 b

拟合曲线公式： $g(\lambda) = -0.0016556\lambda^2 + 0.051008\lambda + 0.35085$

架空率为 4.8 时：

长宽比：8.0 10.0 12.5 16.0 20.0

减速率 4.8：0.69 0.73 0.76 0.77 0.73

1522

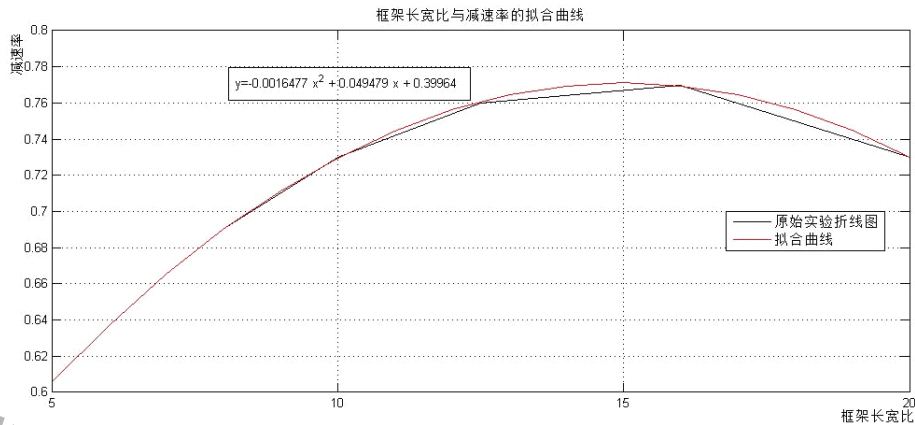


图 16 框架长宽比与减速率的拟合曲线 c

拟合曲线公式： $g(\lambda) = -0.0016477\lambda^2 + 0.049479\lambda + 0.39964$

架空率为 6.0 时：

长宽比：8.0 10.0 12.5 16.0 20.0

减速率 6.0：0.62 0.65 0.68 0.71 0.68

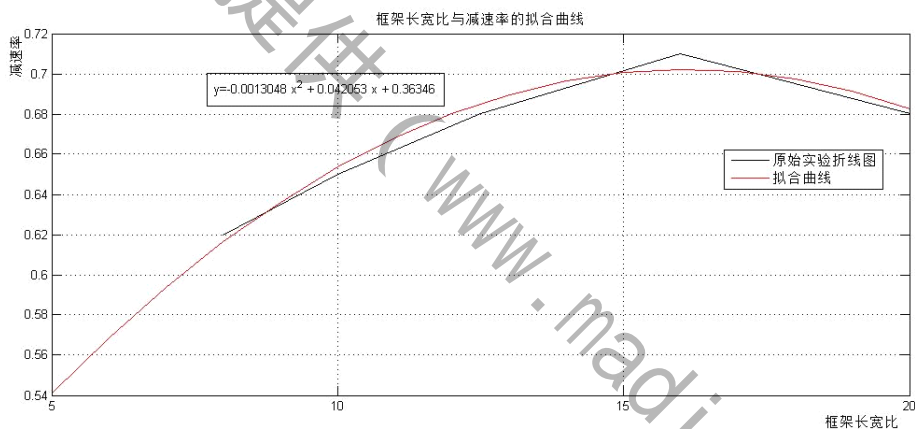


图 17 框架长宽比与减速率的拟合曲线 d

曲线拟合公式： $g(\lambda) = -0.0013048\lambda^2 + 0.042035\lambda + 0.36346$

架空率与减速率的拟合曲线

长宽比为 10 时：

架空率：3.0 4.0 4.8 6.0

减速率：0.63 0.70 0.73 0.65

1522

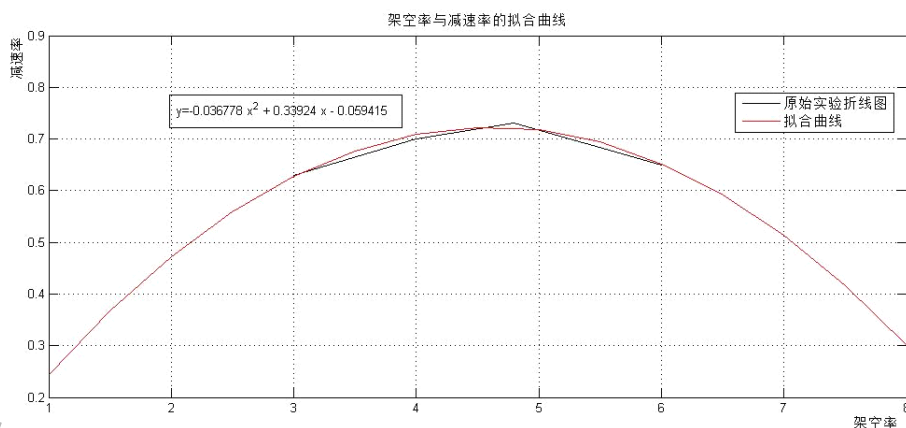


图 18 架空率与减速率的拟合曲线 a

拟合曲线方程： $g(\Psi) = -0.036778\Psi^2 + 0.33924\Psi - 0.059415$

长宽比为 16 时：

架空率：3.0 4.0 4.8 6.0

减速率：0.69 0.74 0.77 0.71

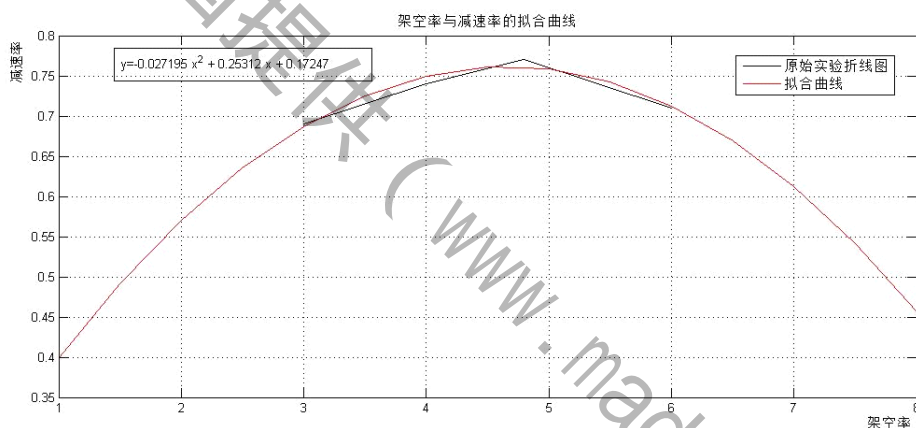


图 19 架空率与减速率的拟合曲线 b

拟合曲线方程： $g(\Psi) = -0.027195\Psi^2 + 0.25312\Psi + 0.17247$

从拟合结果可知：当 $\Psi=4.8$ ， $\lambda=16$ 时透空四面体群的减速效果最好。由此可见，单个透空四面体群的减速效果同时受架空率和杆件长宽比的控制，在工程中可根据实际需要，选择适当的透空四面体群结构特征条件，使得架空率和杆件长宽比尽可能落在其最佳作用范围，使得单个透空四面体群能够充分发挥其防护作用。在不同的架空率下，随着透空四面体群抛投长度的增加，透空四面体群后测点处减速率都在逐渐增大，但当抛投长度超过 20m 后，随着抛投长度的持续增加，对透空四面体群后测点流速的影响没有明显的增加，流速减速率变化在 5% 以内。考虑到工程经济因素 L 取 20。

(1) 多元模型的建立

根据单因素试验与数值模拟结果，对不同因素赋予一定的权重，建立多元回归模型：

$$g(\Psi, \lambda, L) = xg(\Psi) + yg(\lambda) + zg(L)$$

通过单因素实验，我们可知当 $\Psi=4.8$ ， $\lambda=16$ ， $L=20$ 时速度降低率较高，而且工程经济效益较好，但是这个结果可能不是最优结果，而是一个较优的结果。通过单因素实

1522

验与数值模拟我们可以初步判断速度减少率与各个因素的关系，但是每个实验的前提是在其他因素不变的情况下得出来，因此这使研究结果的实用性与推广性大大降低，同时实验得出的数据又不能用来进行多元回归的模拟。因此多元回归模型无法进行求解，我们可以设计正交试验找出最优解，并利用正交实验的数据进行多元回归模型的分析。

数学中国提供 (www.madio.net)

1522

参考文献

- [1] 吴龙华. 透空四面体(群)尾流水力特性及应用研究[D]. 南京: 河海大学. 2006.
- [2] 喻涛. 心滩守护前后水力特性研究[D]. 重庆: 重庆交通大学, 2009.
- [3] 谭伦武. 边滩护滩(底)建筑物布置与结构研究[R]. 武汉: 长江航道规划设计研究院, 2009.
- [4] 李最森. 唐洪武. 戴文鸿. LI Zui-sen. TANG Hong-wu. DAI Wen-hong 透水四面体框架群防护特性及其与抛石防护的对比研究[J]. 泥沙研究, 2011 (6).
- [5] 徐国宾. 任晓枫. 几种新型护岸工程技术浅析[J]. 人民黄河. 2004 (8).
- [6] 刘兆锋. 李如洁. 叶素策. 混凝土四面六边透水框架群技术的研究与应用[J]. 中国水运 (下半月), 2010, 10 (1).
- [7] 刘倩颖. 王平义. 喻涛. 刘怀汉. 付中敏. 四面六边透水框架群的护滩效果研究[J]. 水运工程, 2009 (12).
- [8] 周根娣. 顾正华. 高柱. 唐洪武. ZHOU Gen-di. Zheng-hua. TANG Hong-wu. 四面六边透水框架群尾流场水力特性[J]. 长江科学院院报, 2005, 22 (3).

附录

架空率与减速率的拟合曲线:

长宽比为 10 时:

k10=[3.0 4.0 4.8 6.0];%架空率

k0=[1:0.5:8];

j10=[0.63 0.70 0.73 0.65];%实验结果数据

p2=polyfit(k10,j10,2);

px2=poly2str(p2,'x');

pv2=polyval(p2,k0);

px2

figure(21),plot(k10,j10,k0,pv2)

长宽比为 16 时:

k16=[3.0 4.0 4.8 6.0];%架空率

k0=[1:0.5:8];

j16=[0.69 0.74 0.77 0.71];%实验结果数据

p2=polyfit(k16,j16,2);

px2=poly2str(p2,'x');

pv2=polyval(p2,k0);

px2

figure(21),plot(k16,j16,k0,pv2)

框架长宽比与减速率的拟合曲线

架空率为 3.0 时:

c10=[8.0 10.0 12.5 16.0 20.0];%长宽比

c0=[5:20];

j10=[0.60 0.63 0.66 0.69 0.67];%实验结果数据

p2=polyfit(c10,j10,2);

px2=poly2str(p2,'x');

1522

```
pv2=polyval(p2,c0);
px2
figure(21),plot(c10,j10,c0,pv2)
架空率为 4.0 时：
c40=[8.0 10.0 12.5 16.0 20.0];%长宽比
c0=[5:20];
j40=[0.65 0.70 0.73 0.74 0.71];%实验结果数据
p2=polyfit(c40,j40,2);
px2=poly2str(p2,'x');
pv2=polyval(p2,c0);
px2
figure(21),plot(c40,j40,c0,pv2)
架空率为 4.8 时：
c48=[8.0 10.0 12.5 16.0 20.0];%长宽比
c0=[5:20];
j48=[0.69 0.73 0.76 0.77 0.73];%实验结果数据
p2=polyfit(c48,j48,2);
px2=poly2str(p2,'x');
pv2=polyval(p2,c0);
px2
figure(21),plot(c48,j48,c0,pv2)
架空率为 6.0 时：
c60=[8.0 10.0 12.5 16.0 20.0];%长宽比
c0=[5:20];
j60=[0.62 0.65 0.68 0.71 0.68];%实验结果数据
p2=polyfit(c60,j60,2);
px2=poly2str(p2,'x');
pv2=polyval(p2,c0);
px2
figure(24),plot(c60,j60,c0,pv2)
```

PDE 程序模拟

底部的三个点的模拟：

```
function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',1);
pdetool('snaon','on');
set(ax,'DataAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-1 1]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');
pdetool('gridon','on');
```

1522

```

% Geometry description:
pdepoly([-0.94071067811865483,...
-0.87000000000000011,...
-0.79928932188134527,...
-0.87,...
],...
[ 3.4694469519536142e-017,...
0.070710678118654779,...
4.8572257327350599e-017,...
-0.070710678118654696,...
],...
'R1');
pdepoly([-0.070710678118654779,...
-4.8572257327350599e-017,...
0.070710678118654752,...
6.9388939039072284e-018,...
],...
[ 0.5,...
0.57071067811865483,...
0.5,...
0.42928932188134528,...
],...
'R2');
pdepoly([-0.070710678118654696,...
3.4694469519536142e-017,...
0.070710678118654779,...
4.8572257327350599e-017,...
],...
[-0.50000000000000011,...
-0.42928932188134528,...
-0.5,...
-0.57071067811865483,...
],...
'R3');
pdirect([-1.3999999999999999 1 0.90000000000000002 -0.90000000000000002], 'R4');
set(findobj(get(pde_fig, 'Children'), 'Tag', 'PDEEval'), 'String', 'R4-R1-R2-R3')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode', 0)
pdesetbd(16,...
'neu',...
1,...
'-60i',...
'0')

```

1522

pdesetbd(15,...

'neu',...

1,...

'-60i',...

'0')

pdesetbd(14,...

'neu',...

1,...

'-60i',...

'0')

pdesetbd(13,...

'neu',...

1,...

'-60i',...

'0')

pdesetbd(12,...

'dir',...

1,...

'1',...

'-exp(-i*60*x)')

pdesetbd(11,...

'dir',...

1,...

'1',...

'-exp(-i*60*x)')

pdesetbd(10,...

'dir',...

1,...

'1',...

'-exp(-i*60*x)')

pdesetbd(9,...

'dir',...

1,...

'1',...

'-exp(-i*60*x)')

pdesetbd(8,...

'dir',...

1,...

'1',...

'-exp(-i*60*x)')

pdesetbd(7,...

'dir',...

1,...

'1',...

1522

```

'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(6,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(5,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(4,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(3,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(2,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(1,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')
pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'1.0',...
'-3600',...
'0',...

```

1522

```

'1.0',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
[1.0  ';...
'-3600';...
'0  ';...
'1.0  '])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('1','15068','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1e-4','fixed','inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[2 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve')
中间三个点的模拟：
function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',1);
pdetool('snaon','on');
set(ax,'DataAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-1 1]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');
pdetool('gridon','on');

% Geometry description:
pdirect([-1.3999999999999999 1 0.90000000000000002 -0.90000000000000002],'R4');
pdepoly([-0.50071067811865477,...
-0.42999999999999999,...
-0.35928932188134521,...
-0.42999999999999999,...

```


1522

```

],...
[ -6.9388939039072284e-018,...
  0.070710678118654752,...
  6.9388939039072284e-018,...
  -0.070710678118654752,...
],...
'R1');
pdepoly([-0.070710678118654779,...
  -4.8572257327350599e-017,...
  0.070710678118654752,...
  6.9388939039072284e-018,...
],...
[ 0.25,...
  0.32071067811865478,...
  0.25,...
  0.17928932188134525,...
],...
'R2');
pdepoly([-0.070710678118654766,...
  -2.7755575615628914e-017,...
  0.070710678118654752,...
  6.9388939039072284e-018,...
],...
[ -0.25,...
  -0.17928932188134525,...
  -0.24999999999999997,...
  -0.32071067811865472,...
],...
'R3');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','R4-R1-R2-R3')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(16,...
'neu',...
1,...
'-60i',...
'0')
pdesetbd(15,...
'neu',...
1,...
'-60i',...
'0')
pdesetbd(14,...

```

1522

'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(13,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(12,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(11,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(10,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(9,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(8,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(7,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'
pdesetbd(6,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)'

1522

```

pdesetbd(5,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(4,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(3,...
'dir',...
1,...
'1',...
'-exp(-i*60*x)')
pdesetbd(2,...
'neu',...
1,...
'-60i',...
'0')
pdesetbd(1,...
'neu',...
1,...
'-60i',...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
pdetool('initmesh')
pdetool('jiggle')
pdetool('refine')
pdetool('jiggle')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'1.0',...
'-3600',...
'0',...
'1.0',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')

```

1522

```

setappdata(pde_fig,'currparam',...
['1.0 ',...
'-3600',...
'0 ',...
'1.0 '])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('1','38235','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1e-4','','fixed','inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[2 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve')
顶部点的模拟：
function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',1);
pdetool('snaon','on');
set(ax,'DataAspectRatio',[1.5 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'XLim',[-1.5 1.5]);
set(ax,'YLim',[-1 1]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');
pdetool('gridon','on');

% Geometry description:
pdirect([-1.3999999999999999 1 0.90000000000000002 -0.90000000000000002],'R4');
pdepoly([-0.070710678118654752,...
-1.3877787807814457e-017,...
0.070710678118654752,...
1.3877787807814457e-017,...
],...
[-1.3877787807814457e-017,...
0.070710678118654752,...
1.3877787807814457e-017,...
-0.070710678118654752,...

```

1522

```
],...  
'R1');  
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','R4-R1')
```

```
% Boundary conditions:
```

```
pdetool('changemode',0)
```

```
pdesetbd(8,...
```

```
'neu',...
```

```
1,...
```

```
'-60i',...
```

```
'0')
```

```
pdesetbd(7,...
```

```
'neu',...
```

```
1,...
```

```
'-60i',...
```

```
'0')
```

```
pdesetbd(6,...
```

```
'dir',...
```

```
1,...
```

```
'1',...
```

```
'-exp(-i*60*x)')
```

```
pdesetbd(5,...
```

```
'dir',...
```

```
1,...
```

```
'1',...
```

```
'-exp(-i*60*x)')
```

```
pdesetbd(4,...
```

```
'dir',...
```

```
1,...
```

```
'1',...
```

```
'-exp(-i*60*x)')
```

```
pdesetbd(3,...
```

```
'dir',...
```

```
1,...
```

```
'1',...
```

```
'-exp(-i*60*x)')
```

```
pdesetbd(2,...
```

```
'neu',...
```

```
1,...
```

```
'-60i',...
```

```
'0')
```

```
pdesetbd(1,...
```

```
'neu',...
```

```
1,...
```

1522

```

'-60i',...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
pdetool('initmesh')
pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
'1.0',...
'-3600',...
'0',...
'1.0',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
[1.0  ',...
'-3600';...
'0  ',...
'1.0  '])

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('1','21794','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1e-4','','fixed','inf'))

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[3 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');

% Solve PDE:
pdetool('solve')

```