

# 西南大学第四届大学生数学建模竞赛

## 承 诺 书

我们仔细阅读了西南大学第四届大学生数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，虽然本次竞赛采取分散自行答卷的机制，但在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们的参赛报名号为：1197

题目：A 聪明的汽车

参赛队员 （签名）

队员 1：荣齐辉

队员 2：农岸松

队员 3：刘凡

日期：2010 年 5 月 1 日

## 题 目 聪明的汽车

关 键 词 侧位停车 初等几何方法 平行泊车自动寻轨算法

### 摘 要：

本问题要求我们建立合理模型，判断汽车能否在该处顺利停入，以及给出为进入停车位应选取的位置和角度，并将理想线路及允许的偏差显示在图中。对这些问题我们运用了初等几何分析方法和平行泊车自动寻轨算法来建立模型，解决问题。

就问题一，我们先将问题抽象成直观的平面几何图形，通过运用初等几何知识，建立了两个模型来计算，为保证本车顺利停入，停车位所需的最小长度和最小宽度（由该车的相关参数确定）。我们得出结论：只有本车车长和宽度分别大于停车位的最小长度和最小宽度，它才能在该处顺利停入，否则，它不能在该处侧位停车。

就问题二，我们先讨论了侧位停车的两种理想线路即经过两次泊车最终停在车位正中央。一种是两相切圆弧的半径均为汽车的最小转弯半径  $R_{\min}$ ，一种是两相切圆弧的切点固定，根据这两种情况，我们分别求出了侧位停车的初始位置及偏向角度，并用 matlab 画出了这种理想线路。然后，针对与理想线路有偏差的情况，根据车位尺寸求出了侧位停车的初始位置的允许的偏差范围。接着，对这个范围内的任一点，运用自动泊车原理和自动泊车寻轨算法，可求出以该点为初始位置的泊车轨迹，从而得到在初始位置的偏差范围内，汽车泊车线路的允许偏差范围，并在图上显示出来。

## 一、问题的重述

在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与信心的问题。如果驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这一方面影响人的驾驶体验，一方面也使停车空间不能得到充分的利用。在此，请你协助驾驶员来解决停车的问题。具体要求如下：

- (1) 建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。
- (2) 给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及容许的偏差显示在图上。

## 二、模型的假设

- 1、地面是平坦的；
- 2、车身可看作一个长方体，侧位停车过程中,汽车的运动轨迹可看作其几何中心的运动轨迹；
- 3、车轮与地面无打滑情况；
- 4、汽车的最小转弯半径和前轮最大转角由汽车本身确定，为常数；
- 5、停车位事长方形,停车位的长宽和汽车的长宽给定；
- 6、停车时汽车的速度足够小；
- 7、汽车在侧位停车前与车位保持平行，且汽车与车位之间的距离一定。
- 8、为了研究方便，我们假定汽车几何中心在  $y$  轴上，车位底边在  $x$  轴上。

## 三．符号说明

符号	表示意义
$l_1$	停车位的长度
$l_2$	汽车的长度
$w_1$	停车位的宽度
$w_2$	汽车的宽度
$R_{\min}$	汽车的最小转弯半径
$\varphi_{\max}$	汽车前轮的最大转向角

符号	表示意义
$d_x$	汽车初始位置与目标位置的水平方向距离
$d_y$	汽车初始位置与目标位置的竖直方向距离
$\alpha$	汽车在某处相对初始位置的偏向角
$\theta_n$	步骤 n 结束后后轮泊车轨迹的转角弧度
$\theta_{nt}$	步骤 n 结束后车轴与水平方向的夹角
$(n_x, n_y)$	步骤 n 结束后右后轮中心点坐标
$(n1_x, n1_y)$	步骤 n 结束后车头右端点坐标
$(n2_x, n2_y)$	步骤 n 结束后后左轮中心点坐标
$(n3_x, n3_y)$	步骤 n 结束后车尾左端点坐标
qx	前悬即前轮车轴到车头的距离
d	平行车辆 a 与 b 的距离
m	汽车与后车障碍物的最小允许距离

## 四、问题的分析、模型的建立及求解

### 4.1 问题一的分析与模型的建立：

#### 4.1.1 模型一

##### 问题分析

已知：车位长  $l_1$ ，车位宽  $w_1$ ，车长  $l_2$ ，车宽  $w_2$ ，汽车的最小转弯半径  $R_{\min}$ ，前轮的最大偏转角  $\varphi_{\max}$ ，汽车与后车障碍物的最小允许距离  $m$ ，前后车轴距  $d$ ，车尾部与后轮距的距离  $a$  等参数

要求：建立合理模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。

分析：该问题要求建立合理模型，以判断本车是否能在该处的车位进行侧位停车，即判断出汽车能否顺利停入的区域。从日常的操作经验及简单的几何分析可知，停车位的尺寸必须大于车辆的长度。更重要的是一个合适的车位还应该

考虑到停车的可操作性，即驾驶员可以通过正常的驾驶操作，将汽车无碰撞地驶入车位。侧位停车的轨迹路线是一个可逆的路线，可以从侧位停车的过程的逆过程，即将车辆无碰撞地驶出停车位的过程。

模型一的建立与求解：

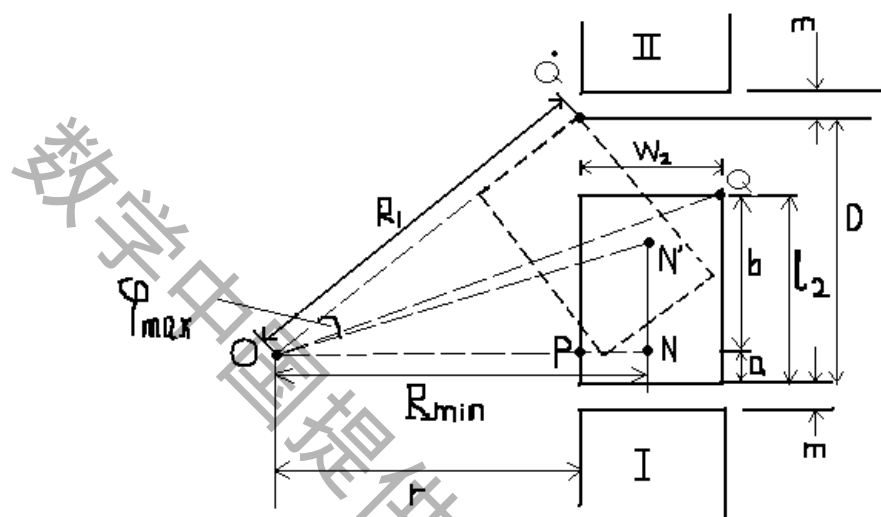


图 1-1 侧位停车的车为长度尺寸示意图

如上图，一辆长为  $l_2$ ，宽为  $w_2$  的小车停泊在车 I 和车 II 两车之间。为了驶出车位，首先将小车后退至与 I 车距离为  $m$ （即与后车障碍物的最小允许距离）的位置，而后把小车前轮向左侧偏转到最大角度  $\varphi_{max}$ ，小车低速前进，直到小车右前角 Q 到达停车位的左边缘线上，即图 1-1 中的  $Q'$  位置；最后，小车可以继续前进离开车位。从图可以看出，要确保小车驶出时不与 I，II 车碰撞，则停车位的长度  $l_1$  应该满足以下条件：

$$l_1 > D + 2m \quad (1.1)$$

其中  $D$  的定义如图 1-1 所示。因小车转向运动时，可看作是围绕某一点作圆周运动。在图 1-1 中，点  $O$  是小车运动轨迹的圆心点，点  $N$  及  $N'$  是小车后轮轴与前轮轴的中点。 $\angle NON'$  的大小等于前轮偏转角度  $\varphi_{max}$ ，线段  $ON$  的长度定义为最小转弯半径  $R_{min}$ ，则由简单的几何关系，可列出以下等式：

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\min} = d \cdot \cot \varphi_{\max} \\ r = R_{\min} - \frac{w_2}{2} \\ R_1^2 = \left(R_{\min} - \frac{w_2}{2}\right)^2 + (l_2 - a)^2 \\ D = \sqrt{R_1^2 - r^2} + a \end{array} \right. \quad (1.2)$$

在上个式子中， $d$  是前后车轴距， $a$  是车尾部与后轮距的距离， $r$  是线段  $OP$  长度， $R_1$  是线段  $OQ$  或线段  $OQ'$  的长度。综合上列 (1.1) (1.2) 两个式子得，侧位

停车时车位的最小长度  $l_{1\min} = \sqrt{2dw_2 \cdot \cot \varphi_{\max} + (l_1 - a)^2} + a + 2m$  (1.3)

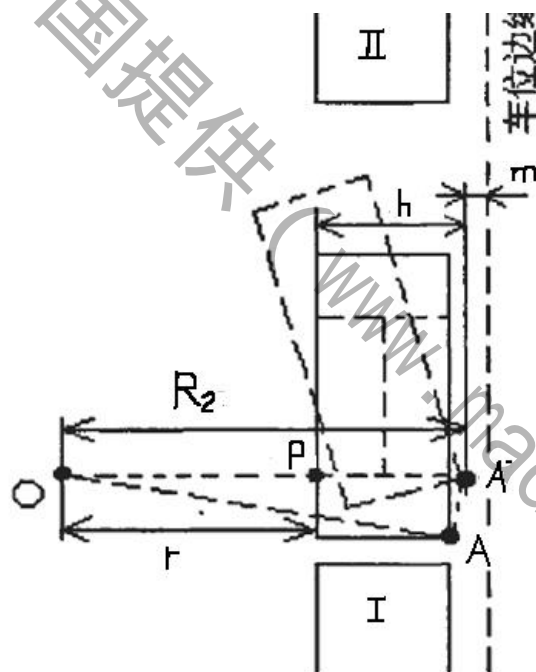


图 1-2：车位宽度分析示意图

对于侧位停车的车位宽度要求，如图 1-2 所示。小车右边后角  $A$  移动至  $OP$  延长线上的点  $A'$  时，与车位右边的设线段  $OA$  或  $OA'$  的长度为  $R_2$ ，线段  $PA'$  长度为  $h$ 。

车位的宽度  $w_1$  满足以下条件：

$$w_1 > h + m \quad (1.4)$$

从几何关系列出以下不等式：

$$\begin{cases} h=R_2-r \\ R_2^2=a^2+(r+w_2)^2 \end{cases} \quad (1.5)$$

则由 (1.4) . (1.5) 和 (1.2) 可得，侧位停车时候，车位最小宽度

$$W_{1\min} = \sqrt{a^2 + (d \cdot \cot \varphi_{\max} + \frac{W_2}{2})^2} - (d \cdot \cot \varphi_{\max} - \frac{W_2}{2}) + m \quad (1.6)$$

#### 4.1.2 模型二

##### 问题分析：

首先，定义“侧位停车完成”：车辆已经进入指定停车位，车身与竖直方向夹角不大于  $5^\circ$ ，而且车辆中轴与停车位间水平距离不大于 0.1m。车辆在允许的偏差的情况下，即使停车结果不理想，驾驶员也可以在停车入位后，在经过几次的调整，仍然可以达到理想的位置。

我们采用极限转弯半径，即最小转弯半径，来确定最小停车位长度从而约束停车初始位置。

如果停车位长度很长，车辆停车的初始位置合理，车经过两次“圆弧运动”即可完成停车入库。一般来说停车空间较长时，两平行车辆间存在着一最佳水平距离，车辆两次“圆弧运动”可进入理想位置。显然，车辆初始位置不同，两次“圆弧运动”进入停车空间时，所需要的停车位长度是不同的。当车辆转向角最小时，停车位长度有一个极限，称最小停车位。侧位停车入位过程中，当车的方向盘转到极限转弯状态，汽车两次“圆弧运动”完成进入停车空间时，所占用的停车位长度最小。

##### 模型二的建立与求解：

极限转弯最远点值的确定如图 1-1 所示，F 代表侧位停车初始位置，MNPQ 代表车位走势，把方向盘转到极限位置后，以较低的速度转弯。距离应该大于  $m$ （即与障碍物的最小允许距离）。







1.4 倍。车位的最小宽度为  $B_{\min} \approx 2.0$  米，这与小车宽度相近。从这里可以看出，停车位尺寸大于汽车尺寸只是车能停入的一个必要条件，即使满足停车位尺寸大于汽车尺寸也不一定能顺利侧位停车。

## 4.2 问题二的分析与模型的建立：

### 4.2.1 问题二的分析

该问题要求给出停车侧位的初始位置和角度，并将理想线路以及允许的偏差显示在图上。由前面的假设可知，满足动力学模型约束条件的汽车，其运动轨迹是若干相切圆弧的组合（直线可看作半径无限大的圆弧）。汽车的状态可用其位置坐标和车身偏向角表示，即状态变量  $(x, y, \theta)$ ，停车过程是汽车从初始状态  $(x_0, y_0, \theta_0)$  转换到目的状态  $(x_d, y_d, \theta_0)$  的过程。

从日常的操作经验及简单的几何分析可知，侧位停车的最理想的线路是由两个相切圆弧组成的‘S’型路径，并且目标位置为车位的正中央。包括以下两种情况：1、相切圆弧的半径为汽车的最小转弯半径  $R_{\min}$ ；2、两圆相切且切点固定。首先，分别就这两种情况建立模型。

### 4.2.2 模型的建立和求解

#### 模型三

#### 问题分析

如图 2—1 所示，汽车的初始位置在  $s_0$  处，目标位置在  $s_d (d_x, l_1/2)$  处。汽车首先把前轮向右偏转到最大值  $\varphi_{\max}$ ，使汽车以最小的转弯半径  $R_{\min}$  向右运动，且汽车运动的圆心为  $O'$ ；当汽车到达 C 点以后，汽车的车身的偏向角为  $\alpha$ ，此时，改变前轮的方向，使前轮向左偏转到最大值  $\varphi_{\max}$ ，汽车以最小的转弯半径  $R_{\min}$  向左运动且汽车运动轨迹的圆心为  $O$ ，最终汽车驶入停车位的正中央位置  $s_d$ 。

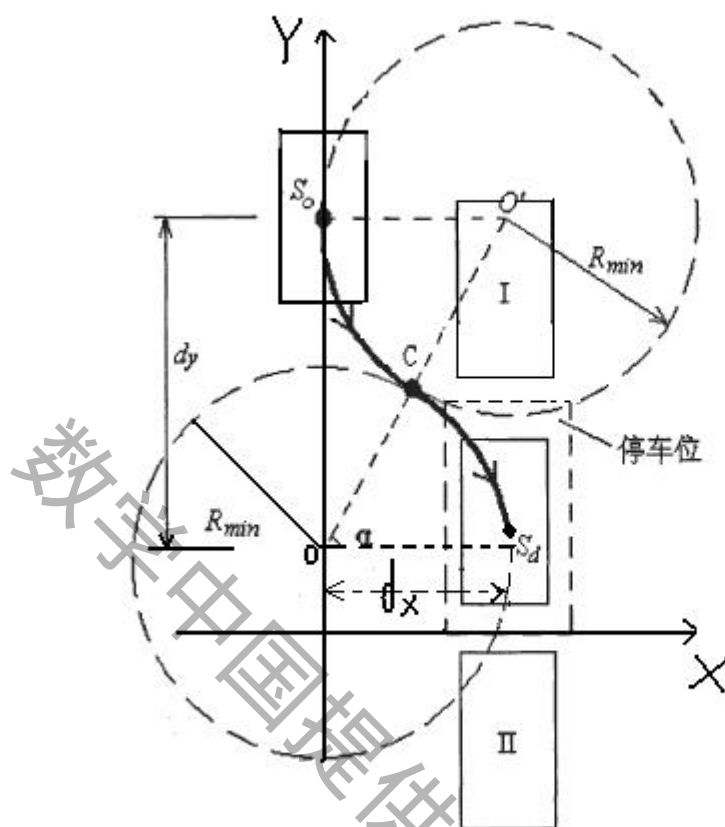


图 2-1

### 模型三的建立与求解

$$d_x = 2 R_{\min} (1 - \cos \alpha) \dots \dots \dots (1)$$

$$d_y = 2 R_{\min} \sin \alpha \dots \dots \dots (2)$$

消去  $\alpha$  可得  $d_y = \sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2}$ ，从而  $s_0$  的坐标为  $(0, \sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2} + l_1/2)$ 。同

时还能求出汽车在 C 处的偏向角  $\alpha = \arccos(1 - \frac{d_x}{2R_{\min}})$ 。此时，汽车从初始位置

在  $S_0$  到目标位置  $S_d$  的停车线路如图中所示。

### 模型三的结果与分析

汽车要从理想线路到达车位正中央位置  $S_d$ ，应从上面所求得的  $S_0$

$(0, \sqrt{4R_{\min}d_x - d_x^2} + l_1/2)$  处开始进入，把前轮向右偏转到最大值  $\varphi_{\max}$ ，使汽车

以最小的转弯半径  $R_{\min}$  向右运动；当汽车偏向角度达到  $\alpha = \arccos(1 - \frac{d_x}{2R_{\min}})$  时，

改变前轮的方向，使前轮向左偏转到最大值 $\varphi_{\max}$ ，汽车以最小的转弯半径 $R_{\min}$ 向左运动，最终汽车驶入停车位的正中央位置 $S_d$ 。

#### 模型四

##### 问题分析

当切点C固定，如下图所示，汽车从初始位置开始，把前轮向右偏转，以 $o'$ 为圆心作圆弧运动，但半径不是 $R_{\min}$ 而是 $R_1$ ， $R_1$ 保证汽车到达固定切点C时，其偏向角为 $\alpha$ ，然后把前轮向左偏转最大角度，以最小偏转半径 $R_{\min}$ 作圆弧运动，最终驶至正中央位置 $S_d$ 。

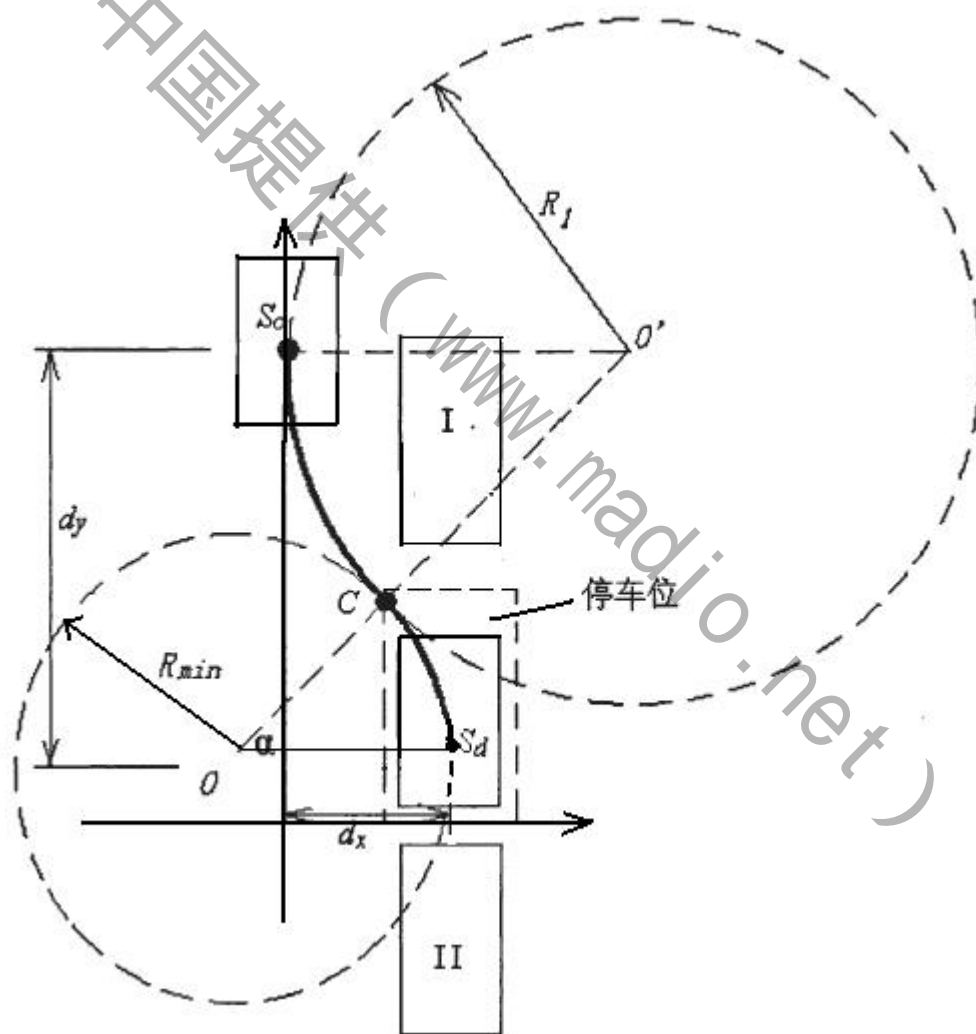


图 2—2

#### 模型四的建立与求解

$$\begin{cases} d_y = (R_l + R_{\min}) \sin \alpha \\ d_x = (R_l + R_{\min})(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

消去变量  $R_l$ ，得

$d_y = d_x \sin \alpha / (1 - \cos \alpha)$ ，从而  $S_0$  的坐标为  $(0, d_x \sin \alpha / (1 - \cos \alpha))$ ，由于切

点 C 固定，故  $\alpha$  也固定，于是  $S_0$  就事确定的了。同时也可得到第一段圆弧得

$$\text{半径 } R_l = \frac{d_x}{1 - \cos \alpha} - R_{\min}。$$

### 模型四的结果与分析

当切点 C 固定时，汽车要从理想线路到达车位正中央位置  $S_d$ ，应从上面求得的  $S_0$

$(0, d_x \sin \alpha / (1 - \cos \alpha))$  处开始进入，把前轮向右偏转，以偏转半径为

$R_l = \frac{d_x}{1 - \cos \alpha} - R_{\min}$  作圆弧运动，以便汽车到达固定切点 C 时，其偏向角为  $\alpha$ ，然

后把前轮向左偏转最大角度，以最小偏转半径  $R_{\min}$  作圆弧运动，最终驶至正中央位置  $S_d$ 。

### 模型五

#### 问题分析

上面两个模型讨论的是侧位停车的理想线路以及汽车沿理想线路到达理想位置时应选的初始位置和角度。然而，这样的线路和初始位置是极其有限的，驾驶者很难把握和操作，尤其是对技术不很熟练的人来说。因此，在实际中，侧位停车的线路和初始位置是允许有偏差的。其实，只要停车的最终位置在车位空间范围之内，以及停车过程中汽车不会与前后两个车位发生空间碰撞，汽车就算是成功进行侧位停车的。

从问题一中的模型二可知，汽车要完成侧位停车，需要满足：初始位置  $S_0$  的横坐标  $S_{0x}$  不小于汽车极限转向圆弧的圆心坐标  $o'$  的横坐标  $o'_x$ ，即

$o'_x \leq S_{0x} \leq l_1 + NE$ 。又知道  $o'_x = w_1 + w_2$ ， $NE = \frac{\sqrt{2}}{2}(R_{\min} - w_2)$ ，所以停车初始位置横

坐标的变化范围为  $(w_1 + w_2, l_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(R_{\min} - w_2))$ ，由于汽车在侧位停车前是朝正前

方行驶的，故其纵坐标是不变的，从而初始位置允许的偏差范围就确定了。下面就初始位置变化范围内给定的一点，作为停车的初始位置，建立模型，得到此时汽车的运动轨迹，从而确定在初始位置的变化范围内，汽车运动轨迹的偏差范围。

### 模型五的建立

首先，定义泊车的“一个步骤”——改变车轮转向，转动一次方向盘的泊车过程，也叫“一次泊车”。由于汽车的运动轨迹可看作若干个圆弧运动，因此侧位停车过程可分为若干个步骤。

图为侧位停车示意图，其中车位长 $l_1$ ，车位宽 $w_1$ ，车长 $l_2$ ，车宽 $w_2$ ，车a与车b水平距离为 $d$ ，从图中可看出停车过程是后轮改变方向反复画圆弧的过程，但弧半径和弧度要受到车位参数和汽车参数的约束。

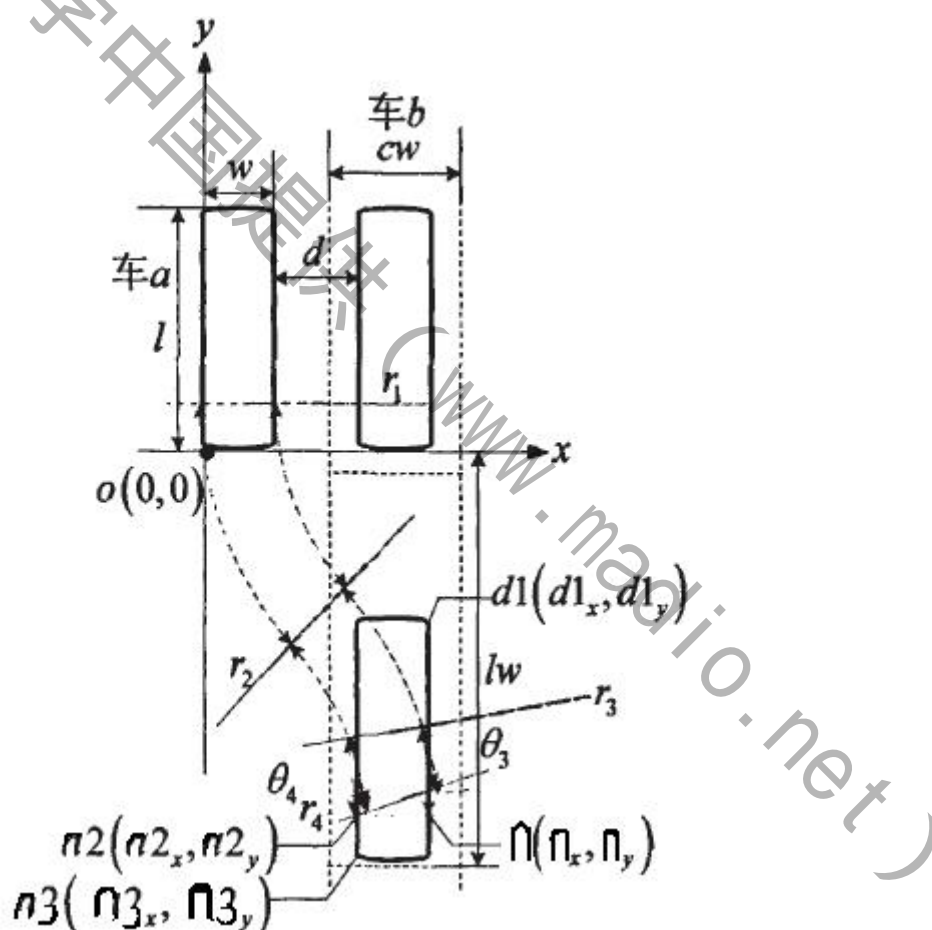


图 2-3

在侧位停车过程中，令步骤 $n$ 结束后后轮泊车轨迹的转角弧度为 $\theta_n$ ，车轴与水平方向的夹角为 $\theta_{nt}$ ，那么有： $\theta_{nt} = \theta_n - \theta_{n-1}$ ，其中， $n=1, 2, 3\cdots, \theta_0=0$

当汽车完全泊车入位时 $\theta_{nt}=0$ ，即 $\theta_n = \theta_{n-1}$ ，泊车 $n$ 个步骤后，右后轮中心点 $(n_x, n_y)$ ，车头右端点记 $(n1_x, n1_y)$ ，后左轮中心点记为 $(n2_x, n2_y)$ ，车尾左端点

记为为 $(n3_x, n3_y)$

首先右打方向盘，使车身沿后车轴以半径 $r_1$ 旋转 $\theta_1$ 。泊车“一个步骤”后，后右轮中心点记为 $(1_x, 1_y)$ ，车头右端点记为 $(11_x, 11_y)$ ，后左轮中心点记为 $(12_x, 12_y)$ ，车尾左端点记为 $(13_x, 13_y)$ 。则易得出：

$$(1_x, 1_y): \begin{cases} 1_x = w + (r_1 - w) \cdot (1 - \cos \theta_1) \\ 1_y = qx - (r_1 - w) \cdot \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$(11_x, 11_y): \begin{cases} 11_x = 1_x - z \cdot \sin \theta_1 \\ 11_y = 1_y + z \cdot \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$(12_x, 12_y): \begin{cases} 12_x = r_1 \cdot (1 - \cos \theta_1) \\ 12_y = qx - r_1 \cdot \sin \theta_1 \end{cases}$$

$$(13_x, 13_y): \begin{cases} 13_x = 12_x + qx \cdot \sin \theta_1 \\ 13_y = 12_y - qx \cdot \cos \theta_1 \end{cases}$$

再左打方向盘，使车身沿后车轴以半径 $r_2$ 旋转 $\theta_2$ 。

泊车“两个步骤”后，后右轮中心点记为 $(2_x, 2_y)$ ，车头右端点记为 $(21_x, 21_y)$ ，

后左轮中心点记为 $(22_x, 22_y)$ ，车尾左端点记为 $(23_x, 23_y)$ 。则容易得出：

$$(2_x, 2_y): \begin{cases} 2_x = 1_x + r_2 \cdot (\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ 2_y = 1_y - r_2 \cdot (\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases}$$

$$(21_x, 21_y): \begin{cases} 21_x = 2_x - z \cdot \sin \theta_{2t} \\ 21_y = 2_y + z \cdot \cos \theta_{2t} \end{cases}$$

$$(22_x, 22_y): \begin{cases} 22_x = 12_x + (r_2 - w) \cdot (\cos \theta_{2t} - \cos \theta_1) \\ 22_y = 12_y - (r_2 - w) \cdot (\sin \theta_1 - \sin \theta_{2t}) \end{cases}$$

$$(32_x, 32_y): \begin{cases} 32_x = 22_x + qx \cdot \sin \theta_{2t} \\ 32_y = 22_y - qx \cdot \cos \theta_{2t} \end{cases}$$

接着右打方向盘, 使车身沿后车轴以半径  $r_3$  旋转, 依此类推, 到  $n$  个步骤后, 有:

$$(n_x, n_y): \begin{cases} n_x = n_{x-1} + (r_n - w_2)(\cos \theta_{nt} - \cos \theta_{(n-1)t}) \\ n_y = n_{y-1} + (r_n - w_2)(\sin \theta_{(n-1)t} - \sin \theta_{nt}) \end{cases}$$

$$(n1_x, n1_y): \begin{cases} n1_x = n_x - z \sin \theta_{nt} \\ n1_y = n_y + z \cos \theta_{nt} \end{cases}$$

$$(n2_x, n2_y): \begin{cases} n2_x = (n-1)2_x - r_n(\cos \theta_{nt} - \cos \theta_{(n-1)t}) \\ n2_y = (n-1)2_y - r_n(\sin \theta_{(n-1)t} - \sin \theta_{nt}) \end{cases}$$

$$(n3_x, n3_y): \begin{cases} n3_x = n2_x + qx \sin \theta_{nt} \\ n3_y = n2_y - qx \cos \theta_{nt} \end{cases}$$

经过  $n$  个步骤以后, 有了上述各点的坐标, 在侧位停车过程中可对汽车进行较精确的定位, 在自动寻轨算法(附录中)泊车轨迹进行精确计算。

设当汽车停在车位正中央时, 车身与车位右侧水平最小距离为  $w_x$ , 右后轮中心点与车位右侧水平距离为  $d1$ , 由图可知,  $w_x = \frac{w_1 - w_2}{2}$ ,  $d1 = d + 2w_2 + w_x - n_x$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ 。

车  $a$  要停入车位, 其运动轨迹由参数  $r_1, r_2, \dots, r_n$  和  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  决定。因此, 对一泊车任务, 如何泊车就转化为如何求未知参数  $r_1, r_2, \dots, r_n$  和  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  的值, 可以用下列方程式来表示:

$$\begin{cases} x_{rn} = f(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ y_{ln} = g(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{cases}$$

$$\text{该式等价于} \begin{cases} x_{rn} = f(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{nt}) \\ y_{rn} = g(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{nt}) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{其中 } y_{rn} = g(r_1, r_2, \dots, r_n, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{nt}) = \begin{cases} -w_1 & (n=2k) \\ 0 & (n=2k+1) \end{cases}$$

## 模型的求解与结果分析



根据车位长  $l_1$ ，车位宽  $w_1$ ，车长  $l_2$ ，车宽  $w_2$ ，车 a 与车 b 水平距离为  $d$ ，以及汽车最小转弯半径  $R_{\min}$  和前悬  $qx$  等已知参数，运用平行泊车自动寻轨算法可算得  $r_1, r_2, \dots, r_n$  和  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  这些参数的值（详见附录，在此不加以叙述），从而可求出汽车的泊车轨迹。又由于汽车的初始位置是在一定的范围内变化的

（初始位置横坐标的变化范围为  $(w_1 + w_2, l_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(R_{\min} - w_2))$ ，纵坐标保持不变），

所以其侧位停车线路可在理想线路附近有偏差，最大的偏差是以该变化范围内的端点为初始位置时的运动轨迹，这些轨迹同样可以通过平行泊车自动寻轨算法求得。最后，用 matlab 软件画出以上模型中的理想线路以及允许的偏差，如下图所示：

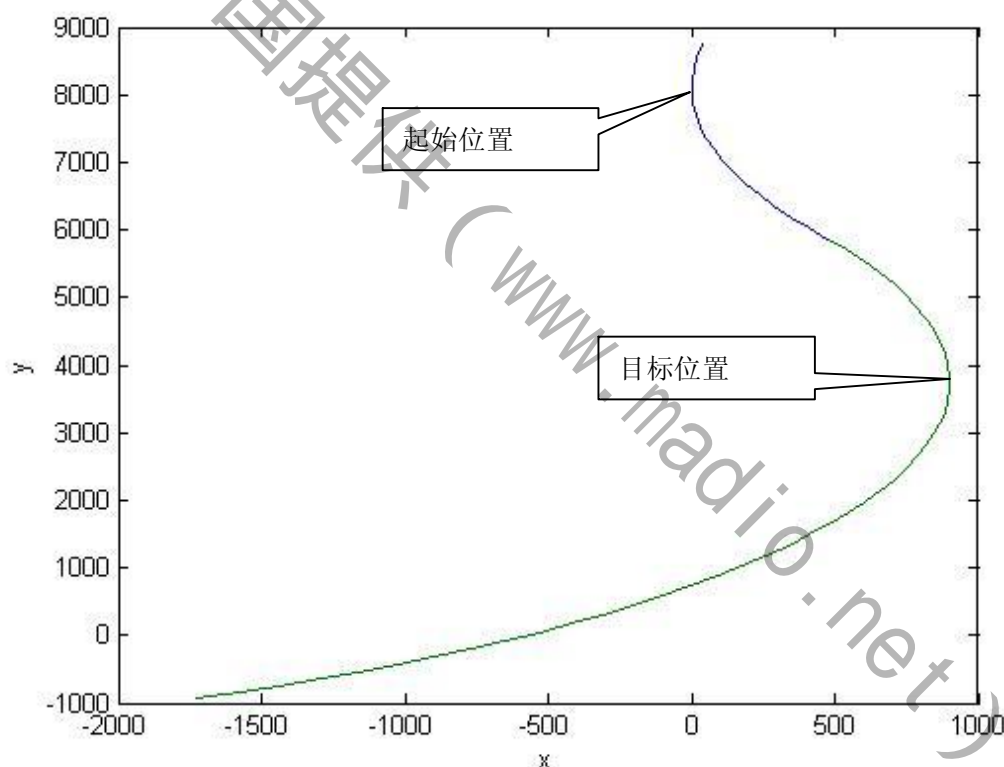


图 2-4 模型的理想线路

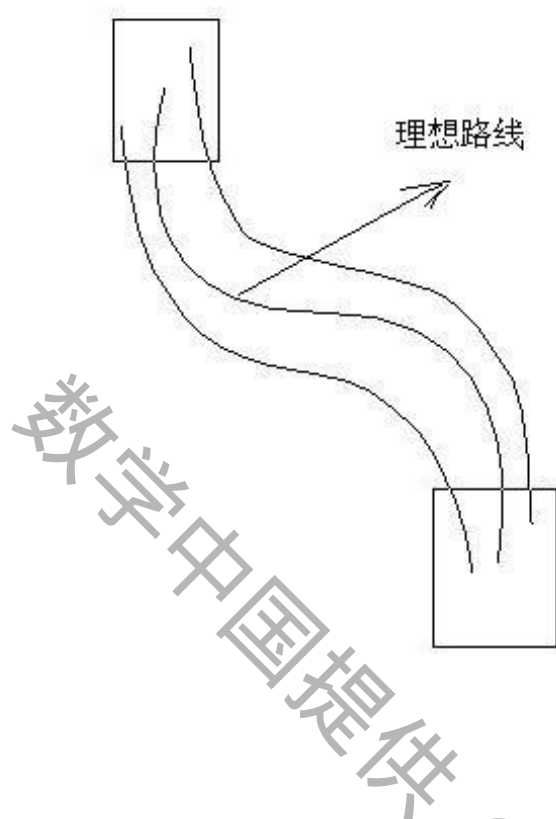


图 2-5 理想线路及允许的偏差示意图

## 五、模型的评价

模型优点：

- 1、在问题一中，我们通过求停车位的最小空间尺寸，来判断汽车能否在该处顺利停入，转换角度，适应我们的习惯思维。并且利用两个简单的初等几何模型，通俗易懂。
- 2、在问题二中，我们巧妙运用了自动泊车原理，通过平行泊车自动寻轨算法，将不很规则的汽车运动轨迹给精确计算出来。

模型缺点：

模型的假设过于理想化，没考虑汽车的实际形状，对车轮打滑、地面不平等环境因素忽略不计，一定程度上降低了准确度和可信度，那些因素都不能起决定作用，影响不会太大，总体来讲，模型还是比较合理的。

## 六、模型的改进与推广

1、由于模型忽略了很多环境因素和汽车本身状况的影响，虽简化了计算与思维，但降低了模型的准确度。作为模型的改进，在那些被忽略的因素中，我们可以先考虑单个因素的影响，让其他因素不变，然后分别考虑其他因素的影响，得到各个因素影响的权重，得出这些因素对侧位停车的总体影响。

2、该模型研究的是侧位停车即平行泊车的情形，可将其应用到垂直泊车的情形；同时，还可以在该模型的基础上，进一步研究自动停车的原理，考虑结合其它知识设计一套车辆的自动停车系统。当然，这要比我们这个模型复杂和高深的

多，这里只是提供一个方向。

## 七、参考文献

- [1]、姜启源，谢金星，叶俊，数学模型[M]，北京：高等教育出版社，2003
- [2]、何锋，自动泊车系统的研究与实现[J]，广东工业大学，2004
- [3]、赵玲，平行泊车方法研究与仿真[J]，长安大学，2009
- [4]、董景新，吴秋平，现代控制理论与方法概论[M]，北京，清华大学出版社，2007

## 八、附录

### 附录一 平行泊车自动寻轨迹算法

建立好平行泊车系统模型后，就可以根据泊车模型计算未知参数的值，从而确定如何泊车。下面讨论如何根据车位长 $l_1$ ，车位宽 $w_1$ ，车长 $l_2$ ，车宽 $w_2$ ，车a与车b水平距离为d，以及汽车最小转弯半径 $R_{\min}$ 和前悬 $qx$ 等已知参数，运用平行泊车自动寻轨算法可算得 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 和 $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{nt}$ 这些参数的值。

总体来说，计算 $r_1, r_2, \dots, r_n$ 和 $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \dots, \theta_{nt}$ 的步骤可分为如下三个步骤：

步骤一. 假设 $r_n$ 已知，求 $\theta_{nt}$  ( $n=1, 2, 3\cdots$ ) 的值。

步骤二. 优化 $\theta_{nt}$ ，求出新的 $r_n$  ( $n=1, 2, 3\cdots$ ) 值。

步骤三. 确认 $r_n$ 及 $\theta_{nt}$  ( $n=1, 2, 3\cdots$ ) 的值。

其中步骤一可细化为以下4个分步骤：

1. 首先令 $r_n = R_{\min}$  ( $n=1, 2, 3\cdots$ )

- (1) 车辆不可能“一次泊车”泊入车位。首先假设车辆“两次泊车”可泊入车位，此时 $\theta_2=0$ ，根据(2.3)式有：

$$\begin{cases} x_{r2} = f(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) \\ y_{l2} = g(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) \end{cases}$$

由 $x_{r2} = f(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) = d + w$ 可求出 $\theta_{1t}$ 的值，代入

$y_{rk} = g(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t})$ ，此时 $y_{rk}$ 为两平行车辆距离为d时的最小停车位，

车辆恰好泊入停车位正中央。

(2) 假设车辆“三次泊车”可泊入车位，此时 $\theta_{3t}=0$ ，根据式(2.3)有：

$$\begin{cases} x_{r3}=f(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}) \\ y_{l3}=g(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}) \end{cases}$$

由 $y_{l2}=g(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t})=-lw$ ，可求出 $\theta_{2t}$ 的值。其中 $r_1, r_2$ 为已知，

$\theta_{1t}$ ，的值(1)中已知求出。

(3) 假设车辆“四次泊车”可泊入车位，此时 $\theta_{4t}=0$ ，根据式(2.3)有：

$$\begin{cases} x_{r4}=f(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}) \\ y_{l4}=g(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}) \end{cases}$$

由 $y_{l3}=g(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t})=0$ ，可求得 $\theta_{3t}$ 的值。其中 $r_1, r_2, r_3$

已知， $\theta_{1t}, \theta_{2t}$ 的值(1)、(2)中已求出。

由 $y_{l3}=g(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t})=0$ ，可求出 $\theta_{3t}$ 的值。其中 $r_1, r_2, r_3$ 已知，

$\theta_{1t}, \theta_{2t}$ 的值(1)(2)中已求出。

(4) 假设车辆“五次泊车”可泊入车位，此时 $\theta_{5t}=0$ ，根据式(2.3)有：

$$\begin{cases} x_{r5}=f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}, \theta_{5t}) \\ y_{l5}=g(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}, \theta_{5t}) \end{cases}$$

由 $y_{l5}=g(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}, \theta_{5t})=-lw$ ，可求出 $\theta_{4t}$ 的

值； $r_1, r_2, r_3, r_4$ ，已知， $\theta_{1t}$ 的值(1)已求出， $\theta_{2t}$ 的值(2)中已求出， $\theta_{3t}$ 的值(3)中已求出。

以此类推，可依次求得 $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \dots, \theta_{nt}$  ( $n=1.2.3\dots$ ) 的值。

## 2. 步骤二可细化为以下 4 个分步骤:

泊车过程中, 车辆转弯半径和转向角要受到车位长度和车位宽度的约束, 必须对步骤一中假设得  $r_n$  和求得的  $\theta_n$  ( $n=1,2,3\dots$ ) 进行检验并修正, 以下为修正  $r_n$  的具体步骤:

(1) 假设汽车两下可以泊车入给定的位置, 那么停车位长度一定大于等于最小车位的值。  $r_1 = r_2 = R_{\min}$ ,  $\theta_{1t}$  在步骤一中(1)已求出, 仅与两平行汽车间的水平距离  $d$  有关。此时, 汽车恰好泊入车位的正中央, 无需修正。

(2) 假设汽车三下可泊入给定的停车位, 则  $\theta_{3t} = 0$ 。将步骤一中(2)所求的  $\theta_{2t}$  代入  $x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t})$ , 若  $dj_b = w + d + wx - b_x > \frac{wx}{2}$ , 则增大  $r_2$  代入  $y_{th} = Q(r_1, r_2, \theta_{1t}, \theta_{2t}) = -lw$  中, 求出新的  $\theta_{2t}$  重新代入  $x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t})$ , 直到  $dj_b = w + d + wx - b_x \leq wx/2$ , 如此循环, 最终可以求得  $r_2$  和  $\theta_{2t}$  的值。

若  $dj_c = w + d + wx - c_x < \frac{wx}{2}$ , 则增大  $r_3$  重新计算  $c_x$ , 直到

$dj_c = w + d + wx - c_x \approx wx$ 。如此循环, 最终可求得  $r_3$  的值;

若  $dj_c = w + d + wx - c_x \geq \frac{wx}{2}$ , 减小  $wx$  代入

$dj_b = w + d + wx - b_x > \frac{wx}{2}$  以减小  $r_2$  的值, 从而求得  $r_2$  和  $\theta_{2t}$  的值, 在计算  $r_3$

的值, 直到满足  $dj_c = w + d + wx - c_x \approx wx$ 。

(3) 假设车辆四下可泊入给定车位, 则  $\theta_{4t} = 0$ 。将步骤一中(3)所求之  $\theta_{3t}$

代入  $x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t})$ ,

若  $dj_c = w + d + wx - c_x > \frac{wx}{2} + wx$ , 则增大  $r_3$  代入

$y_{rk} = g(r_1, r_2, r_3, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}) = 0$ , 求出新的  $\theta_{3t}$  重新代入

$x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t})$ ，直到  $dj_c = w + d + wx - c_x \leq \frac{wx}{2} + wx$ ，如此重复循环，最终可求得  $r_3$  和  $\theta_{3t}$  的值。

$\theta_{3t}$  以知，令  $r_4 = r$ ，则  $d_x = c_x + r_4 \cdot (\cos \theta_{4t} - \cos \theta_{3t})$  可求得。

若  $dj_d = w + d + wx - d_x > wx + \frac{wx}{4}$ ，则增大  $r_4$  重新计算  $dj_d$ ，直到

$dj_d = w + d + wx - d_x \leq wx + \frac{wx}{4}$ 。如此重复循环，最终可求得  $r_4$ ；

若  $dj_d = w + d + wx - d_x < wx - \frac{wx}{4}$ ，增大  $wx$  代入

$dj_c = w + d + wx - c_x \leq wx + \frac{wx}{2}$  以增大  $r_3$  的值，从而求得  $r_3$  和  $\theta_{3t}$  的值，

再回头计算  $r_4$  的值，直到满足  $dj_d = w + d + wx - d_x \geq wx - \frac{wx}{4}$ 。

(4) 假设车辆五下可泊入给定车位，则  $\theta_{5t} = 0$ 。将步骤一中(4)中所

求之  $\theta_{4t}$  代入  $x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}, \theta_{5t})$ ，若

$dj_d = w + d + wx - d_x > \frac{wx}{2}$ ，则增大  $r_4$  的值代入

$y_{rk} = g(r_1, r_2, r_3, r_4, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}) = -lw$  中，求出新的  $\theta_{4t}$  重新代入

$x_{rk} = f(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \theta_{4t}, \theta_{5t})$ ，直到

$dj_d = w + d + wx - d_x \leq \frac{wx}{2}$ ，如此重复循环，最终可求得  $r_4$  和  $\theta_{4t}$  的

值。

$\theta_{4t}$  已知，令  $r_4 = r$ ，则  $d_x = c_x + r_4 \cdot (\cos \theta_{4t} - \cos \theta_{3t})$  可求得。

若  $dj_e = w + d + wx - e_x > wx + 100$ ，增大  $r_5$  重新计算  $e_x$  的值，直到

$dj_e = w + d + wx - e_x \leq wx + 100$ ，如此重复循环，最终可求得  $r_5$  的值；

若  $dj_e = w + d + wx - e_x < wx - 100$ ，减小  $wx$  的值代入

$dj_d = w + d + wx - d_x \leq \frac{wx}{2}$  以减小  $r_4$  的值，从而求得  $\theta_{4t}$  的值，再计算  $r_5$  的值。

以此类推，可依次求得调整后的  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  及  $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \dots, \theta_{nt}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )。

3. 步骤二计算出的  $r_n$  和  $\theta_{nt}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 有时并不符合实际情况，

例如会出现  $r_n < R_{\min}$  或  $\theta_{(n-1)} < \theta_{nt}$ 。

$R_{\min}$  为车辆的最小转弯半径，即极限转弯半径，计算出的  $r_n$  不能小于极限转弯半径。当计算出  $r_n < R_{\min}$  时，必须修正  $r_n = R_{\min}$ 。

步骤一中  $\theta_{nt}$  的计算是以停车位空间为约束条件的，若修正后的  $\theta_{nt}$  值变小，这意味着车辆必定超出停车空间，在实际泊车中车辆必然会碰到停车位前后方车辆或路边。必须按照步骤二重新计算  $r_n$  和  $\theta_{nt}$ ，直到所有参数  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$  及  $\theta_{1t}, \theta_{2t}, \theta_{3t}, \dots, \theta_{nt}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 都符合实际为止。

## 附录二 模型四的部分代码

dx=900;

L=7500;

Rmin=5500;

a=acos(1-dx/2\*dx);

dy=2\*Rmin\*sin(a);

Cx=Rmin\*(1-cos(a));

Cy=dy+1/2\*L;

t2=3\*pi/4:pi/100:5\*pi/3;

t1=3.3\*pi/4:pi/100:2\*pi;

```
x1=Rmin+Rmin*sin(a);  
y1=dy+1/2*L+Rmin*cos(a);  
x2=dx-Rmin+Rmin*sin(a);  
y2=1/2*L+Rmin*cos(a);  
plot(x1, y1, x2, y2)
```

数学中国提供 (www.madio.net)