

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 第四届“互动出版杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 承 诺 书

我们仔细阅读了第四届“互动出版杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛队号为：#1122

参赛队员（签名）：

队员 1：金娜

队员 2：李勇

队员 3：华胜

参赛队教练员（签名）： 邓磊

参赛队伍组别：本科组

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 第四届“互动出版杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 2011 年第四届“互动出版杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第二阶段

题 目 车险方案及风险评估

关 键 词 数据挖掘 特征函数 风险评估 灰色预测

### 摘 要

为了获得更高的收益，保险公司采取一系列措施以降低车辆出险率、提高保户续保率、发展潜在客户量。通常公司会为一定条件的保户提供一些优惠方案。同时，总公司也会对分公司进行潜在风险评估以评估分公司业绩。对于问题一，我们建立模型一，以保费、车辆使用性质、出险次数、续保次数作为影响因素，采用多因素共同影响建立保费浮动方案，通过特征函数的性质得到了适用于每位保户的保费折扣方案的表达式。该模型的特点是使用范围广，可以为每位保户提供保费浮动方案。通过可行性检验、误差分析，结果保费误差在 4.5% 以下，优惠值误差大多在 25% 以下。该模型较合理，具有一定可行性。

问题二，用灰色预测建立 GM(1,1) 模型二，根据参考数据，通过预测 4、5、6 月平均每天的赔付总金额、每天签单保费总额，评估保险公司的潜在风险。发现 4、5、6 月处于亏损状况，并且亏损上千万，损失较严重。然后根据车辆用途对参考数据进行挖掘，发现重、中型载货汽车及家庭自用车的赔款额波动性很大（家庭自用车在 1、2 月之间差值达 159.03 万），据此给出风险控制的合理建议。

参赛队号 \_\_\_\_\_

所选题目     C    

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 英文摘要（选填）

In order to obtain higher returns, insurance company adopt a series of measures, in order to reduce the probability of traffic accident, increase protecting a renewal rate and developing potential customers, usually provide some insurance discount or other preferential schemes to certain condition customers, meanwhile, headquarters company will also review and evaluation of potential risks to subsidiary of subsidiaries of the collective leadership of the decision to leave or to stay.

For the first question, we established the first model. Use the car insurance cost, the usage of cars nature, the dangerous occurrence times, continue to attend insurance times as influencing factors. Using a variety of factors to establish insurance costs influence discount schemes, and by using the characteristic function the nature got applies to each insurance customer insurance costs, the expression of the discount schemes. This model is characteristic of the wide usage, can provide insurance for each insurance fee discount schemes. Through the feasibility, insurance costs error inspection in 4.5% the following, mostly in the 25% discount value error below. This model is reasonable, and has certain feasibility.

The second problem, with the gray prediction establish GM (1, 1) the second model, according to the reference data, through the forecast 4, 5, 6 months on an average day, every day the compensation total amount, sign the bill insurance premiums amount, to evaluate the potential risk of insurance company. Found that 4, 5, 6 months in the red state, and losses thousands of millions. Then on reference data to carry out, find out the factors affect venture, according to the size of risk control, puts forward some suggestions.

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 目录

一. 问题的背景与重述.....	1
1.1 背景资料与说明.....	1
1.2 需要解决的问题.....	1
二. 基本假设.....	1
三. 符号说明.....	1
四. 问题分析.....	2
4.1 问题的重要性分析.....	2
4.2 问题的思路分析.....	2
4.2.1 问题一的分析.....	2
4.2.2 问题二的分析.....	2
五. 模型的建立与求解.....	3
5.1 问题一.....	3
5.1.1 模型一的构成.....	3
5.1.2 模型一的结果.....	6
5.2 问题二.....	7
5.2.1 模型二的建立.....	7
5.2.2 数据的检验与处理.....	8
5.2.3 模型求解与结果.....	8
5.2.4 风险控制建议.....	10
六. 模型的检验.....	12
6.1 模型一的检验.....	12
七. 模型的评价与不足.....	14
7.1 模型的评价.....	14
7.2 模型的不足.....	14
八. 模型的改进.....	15
九. 参考文献.....	15
十. 附录.....	15

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 一. 问题的背景与重述

### 1.1 背景资料与说明

近几年来，国内汽车销售市场异常火爆，销售量屡创新高，我国成为汽车大国指日可待。如今在车轮上的世界，汽车保险与我们如影随形。所谓汽车保险，是指机动车辆由于自然灾害或意外事故所造成的人身伤亡或财产损失负责赔偿的一种商业保险。汽车保险是财产保险中的主要险种，主要有交强险和商业保险。自交强险实施以来，车险与广大车主间就有了更加亲密的关系。交强险，即机动车交通事故责任强制保险，是我国首个国家法律规定实行的强制保险制度，是由保险公司对被保险机动车发生道路交通事故造成受害人（不包括本车人员和被保险人）的人身伤亡、财产损失，在责任限额内予以赔偿的强制性责任保险。除了交强险，各个保险公司有自己的商业车险产品，种类繁多。

连续多年，汽车保险稳居国内产险业第一大险种。也就是说，对于财产保险公司，得车险得天下！

### 1.2 需要解决的问题

汽车保险公司为了降低车辆的出险率，鼓励保户续保，发展潜在保户，通常都会对满足一定要求的保户或者投保人给与一定比例的保费浮动优惠，就是通常所说的保费折扣，以吸引老客户长期投保，并且博得更多新客户的眼球与信赖。

一些大型的保险公司要在全中国很多地区设立分公司。分公司领导班子为了提高每年的直接影响去留的业绩考核成绩，会使用受理一些风险较大的投保或者故意拖延理赔时间等办法。传统的考核方法就是计算分公司的保费收入和理赔支出的差额。因此，很多保险公司开始考虑引入风险评估机制来对分公司进行考核，潜在风险较低的分公司会得到较高的考核成绩。用这种机制可以尽量避免很多分公司之间的不良竞争，具有深远的意义。

试通过数学模型来研究一下的问题：

(1)、根据所给的参考数据，以及第一阶段中对于影响续保率因素的分析，制定一套较为合理的保费浮动方案。

(2)、结合数据，建立合理的数学模型，对数据中的汽车保险公司进行潜在风险的评估，并通过对模型的深入分析对该公司今后的风险控制提出建议。

## 二. 模型假设

- 1、假设所给的统计数据都是客观真实的；
- 2、假设每个月的天数都为 30 天；
- 3、假设第一阶段模型二的结果适用于参考数据。

## 三. 符号说明

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

$f_m$	针对某因素的优惠值 ( $m=I, j, k, l$ )
$g$	浮动后的保费
$X$	可容覆盖区域
$\sigma(i)$	级比
$a$	发展灰度
$b$	内生控制灰度
$x^{(0)}(k)$	灰导数
$z^{(1)}(k)$	背景值
$y^{(0)}(k)$	变换后的灰导数

## 四. 问题分析

### 4.1 问题的重要性分析

如今汽车保险的巨大潜力使得各大保险公司竞相杀入车险，在汽车保险的市场上竞争是十分激烈的，为了能够赢得在车险市场上的一席之地，降低车辆出现率，鼓励保护续保，发展潜在保户是相当重要的，这就需要我们给与一定条件的保费折扣。

当下是一个竞争激烈的社会，不仅是公司之间存在着不合理竞争，公司内部也有这样的现象。分公司之间竞争的手段在一定程度上增加了公司的潜在风险，日积月累便可决定公司将来的命运，则进行潜在的风险评估以及对该公司今后的风险控制则是不容忽视的重要问题。

### 4.2 问题的思路分析

#### 4.2.1 问题一的分析

汽车保险公司为了降低车辆出险率，鼓励保户续保，发展潜在保户，都会对满足一定要求的客户给与一定的保费浮动方案优惠。为了从多个方向, 多个角度考虑保费浮动方案，我们将从多因素的角度讨论第一问。

第一、二阶段的数据都涉及到车辆的使用性质，并且一阶段第一问的结果表明：使用性质对续保率有显著影响。因此，它是在保费浮动优惠方案中的一个因素。此外，保险公司为客户提供保费浮动优惠的目的是：降低车辆出险率，以减少赔付金额；鼓励保户续保，以增加营业额；发展潜在保户，以扩大市场。于是，可以为出险次数低的保户提供更多的优惠，从而增加出险次数低的客户的比例，进而降低车辆出险率；为续保的客户根据续保次数提供优惠，以增加续保率；为未续保或者市场占有率低的客户群体提供更多的优惠，以发展潜在保户。

首先，利用第一阶段车辆使用性质对续保率的影响分析，我们通过对第一阶段的结果和二阶段的数据进行分析，挖掘出数据中影响车辆出险率，续保率，以及潜在用户投保的因素，然后根据它们的权重，建立优惠折扣表，作为建立模型的依据。最终的优惠价格，即优惠方案，受到所有因素的影响。最终，我们通过特征函数的性质，建立数学模型，讨论第一问。

#### 4.2.2 问题二的分析



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

问题二需要建立合理的模型对参考数据中的汽车保险公司进行潜在风险评估。本文采用灰色预测的方法对数据进行处理，预测 4、5、6 月的数据，然后进行潜在风险评估。保险公司的风险产生的主要来源是赔款额，而赔款额与出险次数、签单保费和保额有关。下表是它们在 1、2、3 月里的数据表格。

月份	签单费用	保额	出险次数	赔付金额
1 月	10579264	746162262	1828	4076764
2 月	5014723	375110960	740	1654737
3 月	20089516	711007471	1376	2978331

表 1、1-3 月总览表

通过上表可以得到：

月份	保额 / 签单费用	签单费用 / 出险次数	签单费用 / 赔付金额	赔付金额 / 出险次数
1 月	70.53	5787.34	2.60	2230.18
2 月	74.80	6776.65	3.03	2236.13
3 月	70.61	7318.07	3.38	2164.48

表 2、

观察上表，发现保额和签单费用，赔付金额和出险次数是线性关系。因此，在模型二中，对签单费用和赔付金额进行预测。

鉴于数据较繁琐，为了给出建议，我们先对数据进行处理，寻找对风险影响显著的因素。然后对其进行分析，给出利于风险控制的建议。

## 五. 模型的建立与求解

### 5.1 问题一

#### 5.1.1 模型一的构成

第一阶段的模型二中，我们用聚类分析得到了续保车辆的购买价格、使用价值、销售渠道、风险次数以及车龄，它们每一类中的元素对续保率影响的比重。因二阶段的数据中没有购买价格、车龄，并且，销售方式的变化太大，车辆品牌种类繁多，显著性不高。所以，我们对这几类因素不给予考虑。

下面我们对车辆使用性质、保费价格阶段、出险次数和续保次数进行讨论。

利用第一阶段模型二的结果，可以得到车辆使用性质中到期车辆数、续保车辆数、未续保车辆数和未续保车辆数百分比的具体数据，如表一。通过对这些数据的深层次挖掘，根据不同的使用性质，给出不同的优惠折扣。

使用性质	到期车辆续保率	到期车辆数	续保车辆数	未续保车辆数	未续保车辆数百分比
家庭自用	25.81%	40489	10451	30038	43.21%



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会

#1122

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)

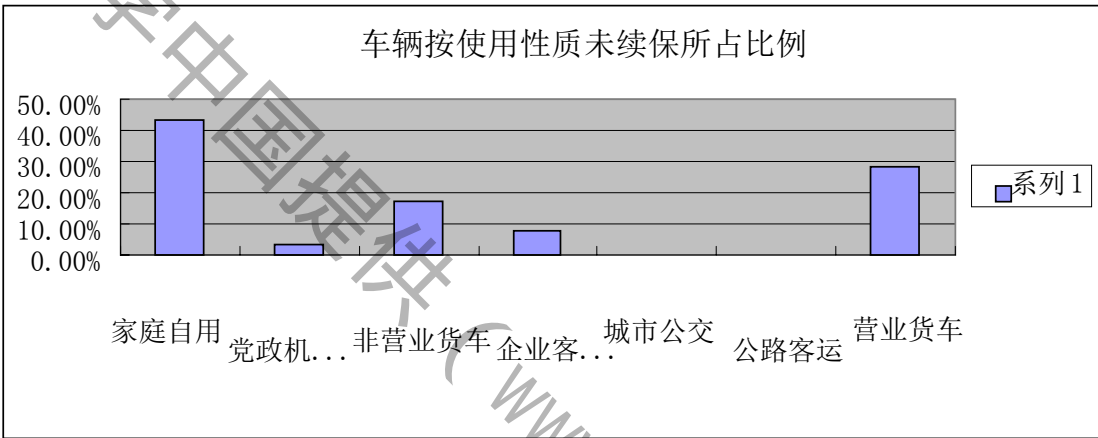
电话：0471-5220129

邮编：010021

Email：2011@tzmcm.cn

党政机关客车、特种车	36.01%	1941	699	2297	3.30%
非营业货车	12.74%	13619	1735	11884	17.09%
企业客车、出租租赁	31.72%	4776	1515	5382	7.74%
城市公交	70.83%	216	153	63	0.09%
公路客运	25.98%	204	53	151	0.22%
营业货车	17.59%	23912	4205	19707	28.35%

表一、车辆使用性质的相关数据



图一、车辆按使用性质未续保所占比例

观察表一，在买了保险的车辆的性质中，家庭自用车、非营业货车、营业货车的未续保车辆数占未续保车辆总数的多数，多达 61629 辆。可见，保险公司在这个部分上具有很广阔的潜在市场，值得保险公司为这些客户提供优惠的价格，以扩大本公司的市场。采取的措施是：根据未续保车辆数的多少，确定优惠折扣，未续保的车辆数越多，保险公司提供的优惠越多。具体折扣如下表，

使用性质	家庭自用	党政机关客 车、特种车	非营业货车	企业非营业 用车、出租租 赁	城市公交	营业货车
优惠折扣	6%	3%	4%	3%	2%	5%

表二、根据车辆使用性质的保费优惠百分比

不同保费阶段的客户，其投保率、续保率显然是不同的。保费在 0—3000 元阶段的投保率约有 70%，该阶段的保额显然要低很多，风险性较小。从风险的角度来看，是保险公司的较理想的客户群体。但是从保险公司盈利的角度来看，利润较低，而需要的公司资源又较多。保费在 20000—30000 元阶段的投保率有 1.54%，份额非常小。客户未出现事故时，获取利润大。一旦客户出事故，理赔金额大，风险性高。同时，保费的高低，对保险公司的让利有影响。显然，高保费的让利范围更广。保险公司在设计优惠活动时，高保费的让利可以更优于低保费的，有利于鼓励保户续保和发展潜在客户。因此，这也

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

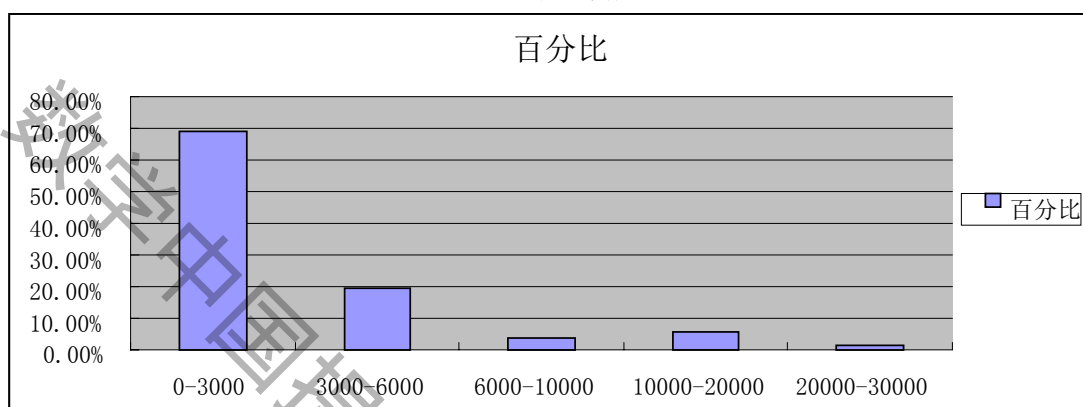
#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

是我们设计方案中的一个因素。由参保数据得到下表。

保费价格段	0-3000	3000-6000	6000-10000	10000-20000	20000-30000
车辆数	5785	1620	331	495	129
平均优惠值	54.72	188.46	28.84	668.08	1050.82

表三、浮动前保费价格阶段表



图二、浮动前保费价格阶段车辆数比例

在表三中,用平均优惠值除以对应价格段中大的一端数值得到对应保费阶段的优惠折扣,如下表。

保费价格阶段	0-3000	3000-6000	6000-10000	10000-20000	20000-30000	30000-50000
优惠折扣	1.50%	3.00%	0.28%	3.40%	3.50%	5.00%

表四、不同保费阶段优惠折扣表

模型一中,出险0次的未续保车辆数达11297辆,续保车辆达6268辆,远多于其它出险次数的车辆数。若为其提供更多的优惠,根据其基数大的特点,能够借此吸引更多的客户,是发展潜在用户、鼓励客户续保的可行行为。为了降低车辆出险率,在续保时,我们将根据不同出险次数提供不同的优惠。出险次数越少,客户获得的相应优惠就越多。因此,我们有必要在方案中考虑出险次数的影响。

为了降低车辆出险率,客户在投保时,若其出险次数较低,我们给与一定优惠。建立由出险次数给与优惠折扣的函数  $y_1(n)$ ,  $n$  表示出险次数(为了鼓励客户减少出现率,所以  $n \geq 4$  时,不给与优惠),函数表达式为:

$$y_1 = \begin{cases} (5-n)\% & n=0, 1, 2, 3 \\ 0 & n=4, 5, 6, \dots \end{cases} \quad (1)$$

由公式(1),我们可以得到出险次数的优惠折扣,如下表:

出险次数	0次	1次	2次	3次	4次	...	$n$
优惠折扣	5%	4%	3%	2%	0%	...	0%

表五、出险次数优惠折扣表

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

为吸引更多出险次数低的客户来投保，降低车辆出险率，可以通过为出险次数低的保户提供优惠以达到目的。同样，为了鼓励客户续保，根据客户续保次数给与一定优惠，以提高续保率。为了发展潜在客户，新投保客户也给与一定优惠。建立由于考虑续保次数这个因素，而给与优惠折扣的函数  $y_2(n')$ ，其表达式如下：

$$y_2(n') = \begin{cases} 2\% & n = 0 \\ 3\% & n = 1, 2, 3 \\ 4\% & n = 4, 5, 6, \dots \end{cases} \quad (2)$$

有公式 (2)，可以得到续保次数的优惠折扣表，如下表：

续保次数	0 次	1 次	2 次	3 次	4 次	...	n
优惠折扣	2%	3%	3%	3%	4%	...	4%

表六、续保次数优惠折扣表

上面对附件中参考数据进行挖掘，再第一阶段中，根据对影响续保率因素的分析，建立了以车辆的使用性质、保费额、出险次数及续保次数为因素的单因素优惠方案。显然，这四类因素，既相互独立又是统一的。为了建立一套较为合理的保费浮动方案，将这四类因素统一考虑，建立以车辆使用性质、保费额、出险次数和续保次数为因素的多因素方案。以便全方位，多角度、多层次的建立保费浮动方案，得到更合理的数学模型。

下面我们利用特征函数的性质，建立数学模型，解决问题一。

已知：点集  $E_i, i=1, 2, 3, \dots, n$ .  $\chi_{E_i} = \begin{cases} 1 & x \in E_i \\ 0 & x \notin E_i \end{cases}$ ,  $C_i$  为  $f(x)$  在  $E_i$  上的函

数值 ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ), 则:  $f(x) = \sum_{i=1}^n C_i * \chi_{E_i}$ .

定义:  $E_1^1, E_2^1, E_3^1, E_4^1, E_5^1, E_6^1$  分别表示车辆的使用性质: 家庭自用, 党政机关客车、特种车, 非营业货车, 企业客车、出租租赁, 城市公交, 营业货车, 对应的  $C_i^1$  分别为: 6%, 3%, 4%, 3%, 3%, 5%;  $E_1^2, E_2^2, E_3^2, E_4^2, E_5^2, E_6^2$  分别表示: 保费价格段 (单位: 元) 0—3000, 3000—6000, 6000—10000, 10000—20000, 20000—30000, 30000—50000, 对应的  $C_j^2$  分别为 1.5%, 3%, 0.28%, 3.4%, 3.5%, 5%;  $E_1^3, E_2^3, E_3^3, E_4^3$  分别表示出险次数: 0 次, 1 次, 2 次, 3 次, 4 次及 4 次以上, 对应的  $C_k^3$  分别为: 5%, 4%, 3%, 2%, 1%, 0;  $E_1^4, E_2^4, E_3^4$  分别表示续保次数 0 次, 1—3 次, 4 次及 4 次以上,  $C_l^4$  分别为: 2%, 3%, 4%。接下来根据特征函数的性质即可求得结果。

## 5.1.2 模型一的结果

模型建立后，经过对各个表格和图示的深入分析，从多个角度，多个方面的因素进行研究考虑，通过对第一阶段的结果和二阶段的数据进行分析，挖掘出有用的数据，然

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email：2011@tzmcm.cn

后计算出影响车辆出险率，续保率，以及潜在用户投保的因素的权重，最终，我们通过特征函数的性质得到任一车辆要投保，均可以应用以下的优惠方案：

$$g = \sum_{i=1}^6 C_i^* \chi_{E_i} + \sum_{j=1}^6 C_j^* \chi_{E_j} + \sum_{k=1}^4 C_k^* \chi_{E_k} + \sum_{l=1}^3 C_l^* \chi_{E_l} \quad (3)$$

## 5.2 问题二

### 5.2.1 模型二的建立

由已知数据，对于 2010 年 1 月—3 月某项指标记为矩阵  $A = (a_{ij})_{3 \times 30}$ ，计算每个月的月平均值，记为：

$$x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3)) \quad (4)$$

我们对  $x^{(0)}$  作一次累加，则

$$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1), x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k) \quad (i = 2, 3).$$

$$\text{记 } x^{(1)}(1) = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3)). \quad (5)$$

取  $x^{(1)}$  的均值，得均值数列  $z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1) \quad (k = 2, 3)$ ,

记

$$z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3)) \quad (6)$$

于是 GM(1, 1) 的白化微分方程模型为

$$\frac{d x^{(1)}}{d t} + a x^{(1)} = b, \quad (7)$$

其中  $a$  是发展灰度， $b$  是内生控制灰度。

由于  $x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1) = x^{(0)}(k)$ ，取  $x^{(0)}(k)$  为灰导数， $z^{(1)}(k)$  为背景值，则将方程 (7) 对相应的灰微分方程为

$$x^{(0)}(k) + a z^{(1)}(k) = b \quad (k = 2, 3)$$

即矩阵形式为

$$Y^{(0)} = B[a, b]^T,$$

$$\text{其中 } Y^{(0)} = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3))^T, B = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

用最小二乘法求得参数的估计值为

$$(\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y^{(0)}. \quad (8)$$

于是方程 (7) 有相应(特解)

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}) e^{-at} + \frac{b}{a},$$

$$\hat{x}^{(0)}(t+1) = \hat{x}^{(1)}(t+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})(e^{-ak} - e^{-a(k-1)}) \quad (9)$$

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

## 5.2.2 数据的检验与处理

为保证建模方法的可行性，需要对已知数据列做必要的简要处理。我们考虑其级比  $\sigma(i) = x^{(0)}(i-1)/x^{(0)}(i)$ ，若所有  $\sigma(i)$  都落在可容覆盖  $X = (e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}}) = (0.6065, 1.6487)$  内，那么数据  $x^{(0)}$  可作为模型 GM(1,1) 和进行数据灰色预测，进一步一次累加：若  $\sigma(i)$  不在可容覆盖区域内，我们需要对数列  $x^{(0)}$  作必要的变换处理，使其落入可容覆盖，即取适当的常数 C，做平移变换

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + C, k = (1, 2, 3)$$

则使数列  $y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), y^{(0)}(3))$  的级比  $\lambda_y(k) = \frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)} \in X$  然后对  $y^{(0)}$  进

行一次累加进行灰色预测。

## 5.2.3 模型求解与结果

### 1) 签单费用

我们对签单费用进行平均处理，得到下面的表格(单位：元)：

月份	签单费用
1 月	352642.13
2 月	167157.43
3 月	669650.53

表七

我们可以得到月平均值的  $x^{(0)}$  数列：

$$x^{(0)} = (352642.13, 167157.43, 669650.53),$$

经检验，我们发现  $x^{(0)}$  的级比不在可行覆盖区域内，经计算，我们令  $C=400000$ ，于是我们得  $y^{(0)} = (752642.13, 567157.43, 1069650.53)$

可验证  $y^{(0)}$  的级比在可容区域  $(0.6065, 1.6487)$  内。

下一步我们利用 (4)、(5) 两式计算可得一次累加值：

$$y^{(1)} = (752642.13, 1319799.56, 2389450.09)$$

由 (6) 式我们可得

$$z^{(1)} = (1036220.85, 1854624.83)$$

再由最小二乘法用 (8) 式求得

$$a = -0.6140, b = -69082.17$$

再由 (9) 式我们可以得到 2010 年 4 月份的签单费用的日平均值为  $\bar{x}_1 = 1853049.63$  元，月总值为  $30\bar{x}_1 = 55591488.9$  元。同理可以得到 5 月份的日平均值为  $\bar{x}_2 = 3423993.76$  元，月总值为  $30\bar{x}_2 = 102719812.92$  元；6 月份的日平均值为  $\bar{x}_3 = 6326921.34$  元，月总值为  $30\bar{x}_3 = 189807640.25$  元。

### 2) 赔付金额（即理赔费用和财务费用的总和）

我们对理赔费用和财务费用求和然后求平均值处理，得到下面这个表格(单位：元)：

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

月份	赔付金额
1 月	135892.13
2 月	55157.9
3 月	99277.7

表八

用以上同样方法利用 (4)、(5) 可以计算出月平均值  $y^{(0)}$  (由  $x^{(0)}$  转换可得, 取  $C=100000$ ) 以及一次累加值  $y^{(1)}$ , 利用 (6) 式可以得到均值数列  $z^{(1)}$ 。由 (7) 可求得

$$a = -1.12, b = 39962.42$$

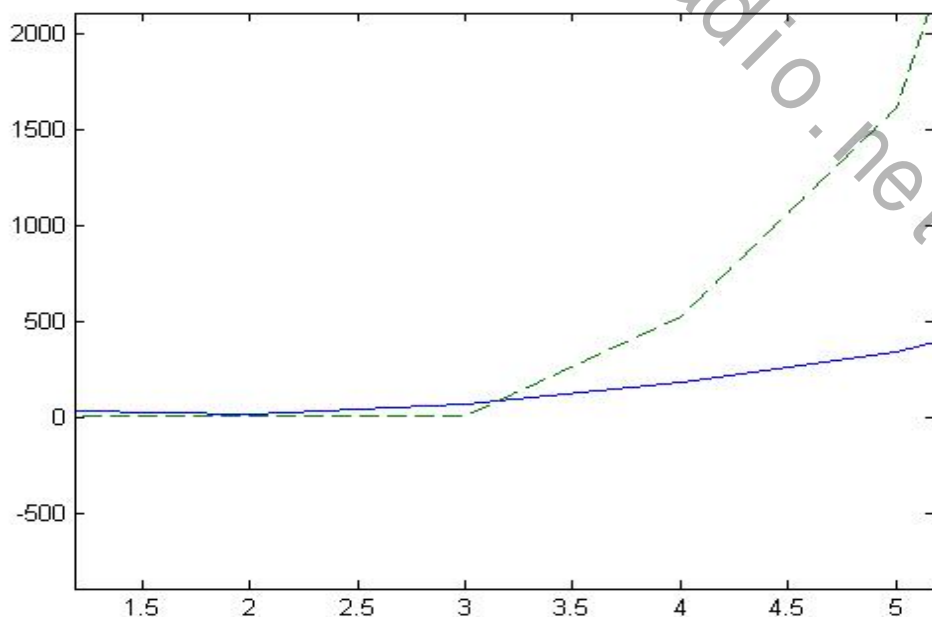
利用 (9) 我们就可得到 4 月份赔付金额的日平均值为  $\bar{y}_1 = 5267399.45$  元, 月平均值为  $30 \bar{y}_1 = 158021983.5$  元; 5 月份的日平均值为  $\bar{y}_2 = 16143782.67$  元, 月平均值为  $30 \bar{y}_2 = 484313480.1$  元, 6 月份的日平均值为  $\bar{y}_3 = 49478315.57$  元, 月平均值为  $30 \bar{y}_3 = 1484349467.1$  元。

对上述结论进行整理, 我们得到关于赔付金额日平均值的表格 (单位: 万元)

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
签单费用	35.26	16.72	66.97	185.3	342.4	632.69
赔付金额	13.59	5.52	9.93	526.74	1614.38	4947.83

表九

用 MATLAB 对表九绘图, 以月份为横轴, 签单费用、赔付金额为纵轴, 如图三。



图三、签单费用、赔付金额预测图



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

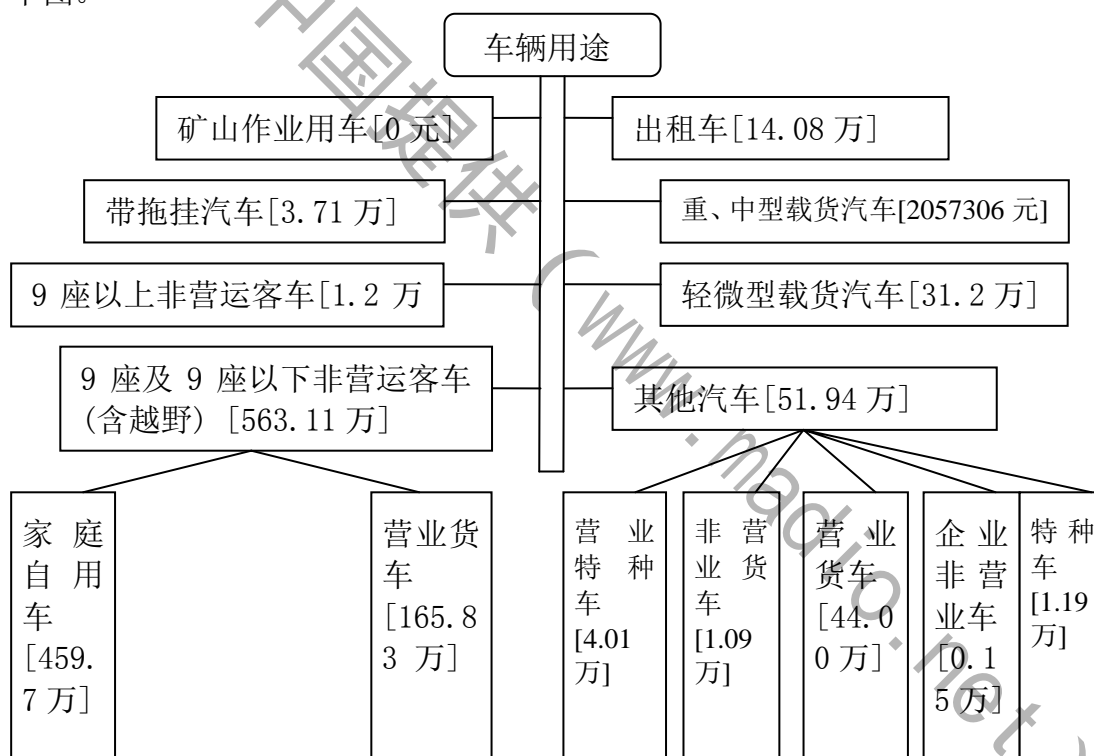
#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

从图三，前三个月签单费用额较赔付金额基本持平。在前三个月，公司分别能够盈利（元）：6502501，3359986，17111185。进入4月以后，赔付金额急剧增加。虽然签单费用也在不断的增加，但是其增加速率远比不上赔付金额的速率。公司在这几个月内处于亏损状况。从图三可以明显的看出，该保险公司在1月到6月是处于亏损状态的。通过表格我们明显可以知道4、5、6三个月的赔付金额明显大于签单费用，于是我们可以得出结论：该公司潜在风险非常大，需要对该公司的策划进行重新调整，加强风险评估，聘请相关的专业顾问进行指导。总公司应加强对该公司的监督。

## 5.2.4 风险控制建议

在模型二中，我们知道了该汽车保险公司潜在的风险很大。我们先对车辆的用途进行分类，通过对数据的挖掘，分析风险大小，然后给出相应的意见。具体流程及结果如下图。



下表是1、2、3月根据车辆用途的类别的赔款金额数据统计表。

出租	9座及以下非营运客车	带拖挂汽车	矿山作业汽车
140814.8	5631130	37094.7	0
其他汽车	9座以上非营运客车	轻微型载货汽车	重、中型载货汽车
519375.6	12078	312032.2	2057306

表十、用途分类赔款金额表

表十中，9座及以下非运营客车的赔款金额比例达64.65%，赔款金额高达563.113

## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

万，对总赔款金额有很大的影响；其次是重、中型载货汽车，其赔款额比例为 23.62%，金额为 205.7306 万；其余的用途依所占比例排序，分别是：其他汽车、轻微型载货汽车、出租、带拖挂汽车、9 座及以上非运营客车、矿山作业汽车。赔款金额越大，使保险公司的风险性就越大（因为模型一中，我们通过聚类分析和线性回归得出的结论是：赔款金额所占比例越大，显著性越强）。因此，我们从 9 座及以下非运营客车，重、中型载货汽车的角度讨论对保险公司风险控制的建议。9 座及以下非运营客车根据商业使用性可以分为：家庭自用车、党政机关、事业单位客车、城市公交等，中、重型载货汽车可以分为：企业非营业货车、营业货车及营业特种车三类。数据统计得到：该保险对家庭自用车在 1、2、3 月内赔款金额为 459.7947 万元，对营业货车的赔款金额为 165.8267 万元。它们分别占 3 各月类总赔款金额的百分比为：52.79%，19.04%。根据第一阶段第一问，我们得到的结论：赔款金额占比例越大，其显著性越强。因此，我们将对营业货车、家庭自用车进行讨论，给与一些风险控制的建议。下表是 1、2、3 月赔付给营业货车、家庭自用车的金额表。

	营业货车	家庭自用车
一月	435824	2565658
二月	364896	975389
三月	857548	1056903
总额	1658267	4597949

表十一、营业货车、家庭自用车

观察上表，我们可以发现每月赔付给营业货车或者家庭自用车的金额变化特别大，尤其是家庭自用车在 1、2 的赔付差值 159.0269 万，比 2 月赔付给家庭自用车的金额还大 61.4880 万，具有很强的波动性。因此我们应提出针对这个问题的建议。对此，我们给出如下建议：

- 1、若该月参保的家庭自用车、营业货车数量激增，则公司需提前准备大量资金应对巨额赔付。
- 2、若该月参保的家庭自用车、营业货车数量减少量很大，则公司可以拿出一部分资金去做其他项目。
- 3、公司在做发展规划时，应尽量保障参保的家庭自用车、营业货车数量较稳定。
- 4、对 9 座以下非运营客车适当降低保额，尤其是家庭自用车。
- 5、对中、重型载货汽车也适当降低保额，尤其是营业货车。

（注：若面临巨额赔偿，我们应及时采取措施甚至违约!!!!）

上面我们从营业货车、家庭自用车的角度分析数据，给出建议，下面我们对车辆用途的数据进行分析，并给出建议。数据如下表（单位：万元）：

	九座下非营业客车	九座及以上非营业客车	出租	带拖挂	矿山作业用车	其他汽车	轻微型载货汽车	重、中型载货汽车
赔付总额	563.11	1.2078	14.08	3.71	0.0	51.94	31.02	205.73
签单保费	1503.54	13.27	41.76	18.04	2.507	226.15	72.14	688.95
赔付/签单保费	37.45%	9.10%	33.71%	20.57%	0.00%	22.97%	43.25%	29.86%

表十二、车辆用途数据

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

上表中，“ $\frac{\text{赔付}}{\text{签单保费}}$ ”的意义是：“ $\frac{\text{赔付}}{\text{签单保费}}$ ”的值越大，保险公司在这块的风险越大；值越小，风险越小。表中，比例小的赔款额业较小，若对其采取措施收效不大；比例大的，风险性大，赔款额也非常多。风险控制措施应该在这些方面入手。可见，上面的建议具有一定的合理性、可行性的。

下面我们给出如下建议：

- 6、 保险公司风险评估工作者应把重点放在 9 座以下非营业客车、重、中型载货汽车这两个对象；加强对它们的预测研究，并完善预测研究的方法。
- 7、 建立更完善的保额系统，遏制保费的极端发展。
- 8、 政府监管保险公司，并作其担保者，保证参保者的利益，以促进社会的稳定。

除了以上 8 条建议，保险公司应该严把承保关，提高承保质量，加强理赔管理，完善理赔制度，建立适合市场机制的保险服务体系等等。

## 六. 模型的检验

### 6.1 模型一的检验

为了验证本文研究工作的正确性，我们给定一些数值，带入得到下表（因为已知数据中无续保次数，因此我们用假定值带入模型进行求解，以验证模型是否达到预期效果，然后再进行误差分析，敏感度分析，以验证模型的正确合理性）。

	车辆使用性质	浮动前保费	出险次数	续保次数	优惠价格	实际保费
1	家庭自用车	1100.00	0	0	159.50	940.50
2	家庭自用车	1100.00	0	1	170.50	929.50
3	家庭自用车	1100.00	0	4	181.50	918.50
4	家庭自用车	3600.00	0	0	576.00	3024.00
5	家庭自用车	3600.00	1	0	540.00	3060.00
6	家庭自用车	3600.00	2	0	504.00	3096.00
7	家庭自用车	3600.00	3	0	468.00	3132.00
8	家庭自用车	3600.00	4	0	396.00	3204.00
9	营业货车	1940.14	1	1	261.92	1678.22
10	营业货车	4005.02	1	1	600.75	3404.27
11	营业货车	9058.28	1	1	1112.36	7945.92
12	营业货车	13939.46	1	1	2146.68	11792.78
13	营业货车	23880.39	1	1	3701.46	20178.93
14	家庭自用车	3600.00	1	1	576.00	3024.00
15	党政机关客车、特种车	3600.00	1	1	468.00	3132.00
16	城市公交	3600.00	1	1	432.00	3168.00
17	营业货车	3600.00	1	1	540.00	3060.00

表十三、取值表

观察上表，容易发现：（1）仅当续保次数发生变化时，即续保次数越多，优惠得越

## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

多；(2) 仅当出险次数发生变化时，即出险次数越多，优惠越少；(3) 仅当保费发生变化时，保费越多，优惠越多，并且非常明显；(4) 仅当车辆使用价值发生变化时，优惠也不同，但是变化不是很明显。符合模型建立时的分析。

表十三中的有些数据可能不符合实际，针对这个问题，下面我们取数据中前 9 个有优惠的数据，带进模型一里去检验是否符合实际情况，进行误差分析。先对签单保费进行误差分析，然后再对优惠值进行误差分析，以较全面的评估模型一的合理性、可行性。

	车辆使用价值	浮动前保费	签单保费	出险次数	方案中的签单保费	签单保费误差值	签单保费误差
1	家庭自用车	950.00	855.00	0	831.25	23.75	2.78%
2	家庭自用车	950.00	855.00	2	850.25	4.75	0.56%
3	家庭自用车	950.00	855.00	0	831.25	23.75	2.78%
4	企业非营业用车	4553.60	4189.31	0	4052.71	136.60	3.26%
5	家庭自用车	3111.82	2738.40	0	2676.17	62.23	2.27%
6	营业货车	3373.88	3036.49	0	2935.28	101.21	3.33%
7	家庭自用车	3410.94	3001.63	0	2933.41	68.22	2.27%
8	家庭自用车	3493.47	3074.25	1	3039.32	34.93	1.14%
9	家庭自用车	6303.91	5358.32	0	5592.83	-234.51	4.38%

表十四、部分数据签单保费检验表

观察表十四，发现签单保费误差除最后一个数据为 4.38% 外，其余的误差在 3.33% 以下，即签单保费的准确率在 95% 以上。说明该模型较合理，具有可行性。下面通过对优惠值的误差进行分析。

	车辆使用价值	浮动前保费	签单保费	出险次数	实际优惠值	计算优惠值
1	家庭自用车	950.00	855.00	0	95.00	118.75
2	家庭自用车	950.00	855.00	2	95.00	99.75
3	家庭自用车	950.00	855.00	0	95.00	118.75
4	企业非营业用车	4553.60	4189.31	0	364.29	500.89
5	家庭自用车	3111.82	2738.40	0	373.42	435.65
6	营业货车	3373.88	3036.49	0	337.39	438.60
7	家庭自用车	3410.94	3001.63	0	409.31	477.53
8	家庭自用车	3493.47	3074.25	1	419.22	454.15
9	家庭自用车	6303.91	5358.32	0	945.59	711.08

表十五、部分数据优惠值检验表

在表十五中，通过模型计算得到的优惠值都在实际优惠值上下波动，并且波动范围相对较小，波动较密集的区间为 (4, 68)。下面通过表十，进行误差分析，进一步验证该模型是否合理，是否具有可行性。

	实际优惠值	计算优惠值	误差值	误差
1	95.00	118.75	23.75	25.00%



# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

2	95.00	99.75	4.75	5.00%
3	95.00	118.75	23.75	25.00%
4	364.29	500.89	136.60	37.50%
5	373.42	435.65	62.23	16.66%
6	337.39	438.60	101.21	30.00%
7	409.31	477.53	68.22	16.67%
8	419.22	454.15	34.93	8.33%
9	945.59	711.08	-234.51	-24.80%

表十六、数据误差表

观察表十六，有 8 个数据的误差在 30% 以下，7 个数据在 25% 以下，4 个数据在 17% 以下，仅有 1 个数据误差达到了 37.50%。说明该模型还有待改进，存在一些不足。并且，用数据验证模型时，因数据中无续保次数，仅讨论了车辆的使用性质、保费和出险次数，如果对续保次数也一起进行讨论，误差将会减小。

根据续保次数这一因素为客户提供一定的优惠，可以吸引更多的客户续保。并且模型一中，根据续保的次数，提供的优惠是递增的。因此，模型一中对续保次数进行讨论是有必要的。

通过误差分析，发现在模型一方案中得到的优惠比实际的优惠要多一些，从单个客户来看，保险公司的利润降低了。模型一中讨论的因素，要么从可以降低出险次数的角度出发，要么从可以提高续保率的角度出发，要么为了可以发展潜在保户，也许还不能够做到全面顾及各个因素。但是，通过模型一的方案，可以提高保险公司的综合竞争力。不过能否为保险公司带来更多的收入，该模型无法进行预测。不过，模型一中讨论的因素都是有利于保险公司的综合竞争力的。因此，我们觉得该模型具有一定的可行性。

## 七. 模型的评价与不足

### 7.1 模型的评价

模型一中，我们通过对多因素的考虑，对参考数据的深层次挖掘，以及第一阶段的结果，建立了浮动优惠方案。方案的优点在于能够从多角度的方向去建立优惠方案，方案的适用范围广，可以对每位客户给与与其相适合的优惠方案，而且方案的实施也较简便。

该模型从汽车保险公司的切身利益出发，针对降低出险率，提高续保率，发展潜在客户给出了汽车使用性质、保费、出现次数和虚报次数这四个因素。误差分析中表明了该模型的合理性和可行性。

模型二中，对参考数据进行统计，利用灰色预测 GM(1,1) 模型，预测 4、5、6 月的赔付金额和保单费用额。参考数据少，适于使用灰色预测模型。在预测过程中，通过读数据的平移，使得预测数据合理、科学。根据预测的结果，对保险公司作出风险评估，更合理、科学。另外，灰色预测具有运算方便、短期预测精度高的优点，使得问题的解决更简便。

### 7.2 模型的不足

# 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

模型一中，虽然从多因素讨论问题，但是只是根据利于保险公司竞争力的一些较肤浅的因素。没有根据参考数据具体的分析，也没有对四个元素作权重分析，以得到更精确的模型。对数据进行了误差分析，但是没有做敏感度分析，给人一种不科学的感觉。在很大程度上依赖于感觉，受主观因素的影响很大。

模型二中，利用灰色预测模型进行预测，存在一定的不足，波动性适应不够理想、对历史数据有很强的依赖性。保险的赔付是有一定随机性的，比如参考数据中，1、2、3月的赔付金额在二月发生了很大的波动，见表十一。

## 八. 模型的改进

鉴于模型的不足，问题一可以先对数据进行挖掘，从参考数据的险种类、车型品牌、车辆用途、使用性质、车辆类型、展业方式、保费、出现次数、赔付金额中找出对降低车辆出险率、提高续保率、发展潜在保户显著的因素，然后用模糊综合评价给出它们的权重，再进行建模，避免严重的客观片面性。另外，还可以从敏感度分析的角度对模型一进行改进。

问题二，模型二中，还可用马尔科夫模型进行预测，预测结果与灰色预测结果相比较，然后再风险评估，使得模型二更合理、更科学。

对于风险控制建议，可对参考数据做数理统计分析，通过泊松分布，或者其它类型的正态分布，对出险次数进行分析，从出险次数的角度对保险公司的潜在风险进行评估，从而更全面的进行评估，以得到准确、科学的评估结果。在提出建议的过程中，还可以对参考数据进行更深层次、更全面的挖掘。

## 九、参考文献

- [1] 韩中庚，数学建模方法及其应用，北京：高等教育出版社，2005.6：350-357
- [2] 费浦生 羿旭明，数学建模及其基础知识详解，湖北：武汉大学出版社，2007.1:17
- [3] 李志林 欧宜贵，数学建模与典型案例分析，北京：化学工业出版社，2007.4
- [4] 汪晓银 邹庭荣，数学软件与数学实验，科学出版社，2008.8
- [5] 1122 参赛队,车险浅析,数学建模网络挑战赛第一阶段,2011.4

## 十、附录

附录一：

模型二中结论的 MATLAB 程序：

```
>> x=[1, 2, 3, 4, 5, 6];  
>> y1=[35.26, 16.72, 66.97, 185.3, 342.4, 632.69];  
>> y2=[13.59, 5.72, 9.93, 526.74, 1614.38, 4947.83];  
>> plot(x, y1, '- ', x, y2, '--')
```

附录二：

风险控制建议



## 第四届数学中国数学建模网络挑战赛

地址：内蒙古数学会  
电话：0471-5220129

#1122  
邮编：010021

网址：[www.tzmcm.cn](http://www.tzmcm.cn)  
Email: 2011@tzmcm.cn

- 1、若该月参保的家庭自用车、营业货车数量激增，则公司需提前准备大量资金应对巨额赔付。
  - 2、若该月参保的家庭自用车、营业货车数量减少量很大，则公司可以拿出一部分资金去做其他项目。
  - 3、公司在做发展规划时，应尽量保障参保的家庭自用车、营业货车数量较稳定。
  - 4、对 9 座以下非营运客车适当降低保额，尤其是家庭自用车。
  - 5、对中、重型载货汽车也适当降低保额，尤其是营业货车。
  - 6、保险公司风险评估工作者应把重点放在 9 座以下非营业客车、重、中型载货汽车这两个对象；加强对它们的预测研究，并完善预测研究的方法。
  - 7、建立更完善的保额系统，遏制保费的极端发展。
  - 8、政府监管保险公司，并作其担保者，保证参保者的利益，以促进社会的稳定。
- （注：若面临巨额赔偿，我们应及时采取措施甚至违约!!!!）