

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 承 诺 书

我们仔细阅读了第七届“认证杯”数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们接受相应处理结果。

我们允许数学中国网站([www.madio.net](http://www.madio.net))公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

**我们的参赛队号为：#4576**

**参赛队员（签名）：**

队员 1：李鑫

队员 2：王莎莎

队员 3：龚婷婷

**参赛队教练员（签名）：**

**参赛队伍组别：**

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 第七届“认证杯”数学中国

### 数学建模网络挑战赛

#### 编号专用页

参赛队伍的参赛队号：（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 2014 年第七届“认证杯”数学中国 数学建模网络挑战赛第一阶段论文

题 目                      A 题： 轮胎的花纹

关 键 词                  轮胎花纹 单位压力分布 磨损 热解 低噪声

### 摘 要

轮胎花纹的设计关系到轮胎是否充分发挥轮胎的牵引、制动、转弯、排水及噪音等性能,对其基本结构和作用的优化分析,对发挥轮胎的最大性能,起着十分关键的作用。

首先对轮胎花纹的分类进行简化,有针对性地只对某几种特殊的花纹参数进行考究,并利用多参数的变量控制,运用相关性分析和数据拟合的方法,先对不同花纹和其性能的对应指标进行相关性分析,再将指标的具体参数范围和各种不同路面相关系数进行分析比较,对于不同的路面适用范围综合出最优的轮胎花纹方案。

为了使轮胎花纹在某一性能上能更好的发挥其优势,本文将其分成三步,进一步进行分析优化:

1、以附着系数最优为原则,通过分析平均流量模型和液膜厚度方程,结合胎面单元载荷的平衡方程,得到雷诺方程。再将胎面花纹进行种类细分,并对其进行定量分析,分析出了与液膜厚度和液体压力相关的胎面单元分布压力,得到了胎面对地附着性更好,抗滑水行最强的方案。

2、以最大耐磨为原则,首先采用了有限元方法分析轮胎材料的散热系数,得到了热解本征动力学方程的转换式,用线性回归的方法求解得到了反应活化能和频率因子。然后分析轮胎在路面行驶过程中的牵引力、摩擦力和磨损率得出橡胶磨损机理,结合 Sackoor 摩擦定律得到:接地区域的磨损量的方程。

3、以噪音最小为原则,建立轮胎噪声数学模型,通过对花纹块和花纹槽的定性分析,得到汽车行驶过程中噪声产生的因素,通过对其改进,得到最优的沟槽纹路。

本文从实际角度出发,先具体通过数学方式具体分析问题,再结合资料实验数据得出相关结论,然后在基本模型之上进一步优化,通过对花纹的沟槽深度、纹理方向优化,达到确定轮胎的最佳适用范围。

参赛队号: #4576

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

所选题目:                  A                  题

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 英文摘要（选填）

Tyre pattern design relates to whether the tire traction and braking, turning into full play, drainage and noise performance, the optimization of its basic structure and function analysis, to exert the maximum performance of the tire, plays a crucial role.

First of all is to simplify the tyre pattern classification, targeted only for certain kinds of special pattern parameters, and use of multiple parameters of control variables, using correlation analysis and data fitting method, first on the properties of different decorative pattern and its corresponding index correlation analysis, then index of specific parameters and various road surface is analyzed by correlation coefficient, scope of application for different pavement comprehensive optimal tire pattern scheme.

In order to make the tyre pattern on a certain performance can better play to its advantages, this article will be divided into three steps, further analyzes the optimization:

1, attached to the optimum for the principle, through the analysis of the average flow model and liquid film thickness equation, combined with the tread of unit load balance equation, the equation for mayor. Then tread fractionizing types, and carries on the quantitative analysis, analysis of the related to the thickness of liquid film and liquid pressure tread unit pressure distribution, the fetal face to better adhesion, resistance to water ski line the strongest solution.

2, with maximum wear resistance for the principle, first adopted the finite element method (fem) analysis of coefficient of heat transfer of tire material, the pyrolysis kinetics of eigen equation transformation type, with the linear regression method to solve the reaction activation energy and frequency factor are obtained. Then analysis the tyres on the road in the process of driving the traction, friction and wear rate of rubber and wear mechanism of combining Sackoor law of friction are: erosion rate equation of grounding area.

3, the minimum noise as the principle, the mathematical model of the tire noise through the qualitative analysis of pattern block and slot decorative pattern, to get the car noise produced in the process of factors, through the improvement, get the optimal groove lines.

From practical perspective, this paper first problem, analyzing the specific mathematical way combining data related conclusions on the experimental data, the further optimization, and then in the basic model based on the optimization pattern of the groove depth, texture, to determine the optimum scope of the tire.

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 目录

一、问题的重述与分析.....	2
1.1 问题的重述.....	2
1.2 问题的分析.....	2
二、问题假设.....	2
三、符号说明.....	3
四、模型的建立与求解.....	4
4.1 模型的提出与简化.....	4
4.2 初始数学模型.....	4
4.2.1 模型准备.....	4
4.2.2 模型分析.....	5
4.2.3 模型求解.....	6
4.2.4 模型结论.....	8
4.3 优化目标一：附着性能最优原则.....	8
4.3.1 建模准备.....	8
4.3.2 初始化模型.....	9
4.3.3 模型建立.....	9
4.3.4 模型求解.....	11
4.3.5 相关性分析.....	12
4.3.6 模型结果分析.....	16
4.4 优化轮胎目标二：最大耐磨原则.....	16
4.4.1 建模准备.....	16
4.4.2 轮胎热量散失.....	17
4.4.3 轮胎花纹磨损.....	19
4.4.4 模型结果分析.....	22
4.5 优化轮胎目标三：噪音最小原则.....	23
4.5.1 建模准备.....	23
4.5.2 轮胎花纹噪音模型.....	23
4.5.3 模型结果分析.....	26
4.5.4 模型的改进.....	26
4.5.5 花纹槽低噪优化原理.....	26
五、模型的解析.....	27
5.1 模型的优点.....	27
5.2 模型的缺点.....	27
参考文献.....	28

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 一、问题的重述与分析

### 1.1 问题的重述

轮胎被广泛使用在多种陆地交通工具上。根据性能的需要，轮胎表面常会加工出不同形状的花纹。在设计轮胎时，往往要针对其使用环境，设计出相应的花纹形状。对于不同的轮胎花纹设计方案，请建立合理的数学模型，以确切地分析其性能特性，并确定轮胎的最佳适用范围。

### 1.2 问题的分析

花纹不仅是轮胎外观漂亮与否的决定因素，而且更重要的事它关系到是否能够充分发挥轮胎的牵引、制动、转弯、排水及噪音等性能。它主要由花纹沟、花纹块及节距等构成<sup>[1]</sup>。

轮胎作为车辆与地面接触的唯一媒介，肩负着承重、刹车以及行车安全等重要职责。而车辆在正常路面上行驶时，轮胎真正与地面接触的面积，绝对不比我们行走在路上鞋底与地面所接触的面积大多少。这么小的接触面积，需要完成以上这么多重要而又复杂的工作，这时轮胎上的花纹就起到了至关重要的作用<sup>[2]</sup>。

一般来讲，轮胎花纹即轮胎胎面上各种纵向、横向、斜向组成的沟槽。花纹看似杂乱，其实他们有明确的分工。纵向花纹因为具有纵向连续性的特点，所以主要承担雨天排水的功能，并且对于轮胎的散热也很有帮助，但它的抓地力不足。而横向花纹则有着较大的抓地能力，从而可以弥补纵向花纹的先天缺陷。

轮胎上的纵向花纹主要起到快速排水的作用，但其会导致轮胎的抓地能力不足；而轮胎上的横向花纹拥有较高的抓地能力，但排水能力及导向性不好。因此设计轮胎的工程师们将两种花纹混搭在一起。让中间的能提供快速排水的纵向花纹与胎肩上提供抓地力的横向花纹结合到一个完美的情况，这就是混合花纹。目前这种混合花纹轮胎被广泛运用于轿车，客车，货车等绝大多数车辆上，是一种最省心的选择。



图 1 轮胎花纹作用

## 二、问题假设

1. 假设在试验环境下，路面状况处在理想状态
2. 假设在试验中车辆的负载状况相同
3. 假设在试验中车轮的材质相同
4. 假设在试验中花纹槽的深度在规定范围
5. 假设车的运行速度相同

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 三、符号说明

$h_1$	太慢单元的垂直变形
$h_0$	胎面单元为刚性体时的表面高度值
$\delta_1$	路面单元两表面均方根偏差
$\delta_2$	胎面单元两表面均方根偏差
$\delta$	粗超度
$\phi_x, \phi_y$	压力流量因子
$\phi_s$	剪切流量因子
$h$	散热系数
$k$	导热系数
$\Delta T$	试件表面与空气温度差
$\rho$	密度
$C$	比热容
$T$	未知表面温度
$T_0$	试件的初始温度
$T_s$	左表面温度
$T_1$	右表面温度
$q$	密度
$T_c$	单元温度
$m_1$	起始质量
$m_\infty$	终止质量
$E$	活化能
$A$	前因子



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$R$	气体常数
$\alpha$	角度
$\delta$	其大小与轮胎的载重量、充气压力和胶的弹性系数有关
$\theta$	相位角
$s$	面积
$\omega_b$	圆频率
$h$	高度
$\rho_b$	密度
$\eta_b$	转换系数
$d$	花纹块完全接地的宽度
$\bar{a}$	加速度
$r$	轮胎半径
$l$	长度

## 四、模型的建立与求解

### 4.1 模型的提出与简化

由于轮胎是作为汽车与地面接触的媒介，肩负着承重、刹车以及行车安全的作用，轮胎的材料在实际情况中都为橡胶。对于模型的实验环境需要进行简化假设，除进行磨损实验外，其余实验忽略掉汽车行驶过程中，轮胎与地面上灰尘接触导致的摩擦因数减小，以及与杂物之间的影响，使汽车在行驶中处于一个理想状态；轮胎在磨损过着中，磨损的速度相同；搭建一个合理的实验环境，通过雷达测速仪测量汽车在试验中各个过程中的速度。具体的实验数据由于条件原因只能参照其他相关材料数据。为了便于后期的试验数据测试和分析研究，就需要对该模型及周边环境进行忽略简化。

### 4.2 初始数学模型

#### 4.2.1 模型准备

轮胎花纹是汽车直接与路面接触的部位，为了保证汽车轮胎的寿命和路面良好的行驶环境，需要根据路面的不同情况，选择出对于每种路面情况最适用的胎面花纹轮胎。在选择轮胎的花纹时，常常需要考虑每种花纹方案在与路面作用方面的相关系数，而这些系数并不能直观给出，通过参考轮胎导购资料<sup>[3]</sup>，得知轮胎的花纹与其牵引力指数、磨损值、噪声值有一定联系。本模型试图通过下面的层递关系，定性地分析出轮胎花纹对路面情况方面系数的关系，分析的逐次递进关系如下图所示：



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

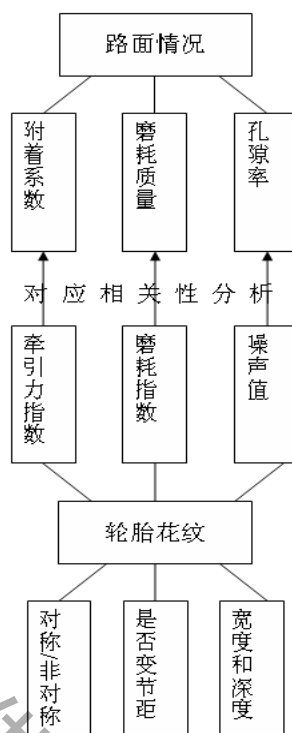


图1 模型分析方法

## 4.2.2 模型分析

### (1) 路面情况参数指标

为了得到轮胎胎面花纹的不同方面对不同轮胎指标的关系，本模型经查找数据，通过逐一对应地进行相关性分析。

首先，我们找到了对路面情况进行描述的一些参数表（表1、表2、表3）：

	干 燥		潮 湿	
混凝土路面	0.80-1.00	0.70-0.85	0.50-0.80	0.40-0.75
	0.60-0.80	0.60-0.75	0.45-0.70	0.45-0.65
	0.55-0.75	0.50-0.65	0.45-0.65	0.45-0.60
沥青路面	0.80-1.00	0.60-0.70	0.50-0.80	0.45-0.75
	0.60-0.80	0.55-0.70	0.45-0.70	0.40-0.65
	0.55-0.75	0.45-0.65	0.45-0.65	0.40-0.60
铺砂子的公路	0.50-0.60	0.35-0.60	0.30-0.60	0.25-0.55
	0.40-0.70	0.40-0.70	0.45-0.75	0.45-0.75
	0.50-0.70	0.50-0.70	0.65-0.75	0.65-0.75
灰渣捣实的公路	0.10-0.25	0.07-0.20	0.05-0.10	0.05-0.10
	0.30-0.55	0.35-0.55	0.30-0.60	0.30-0.60

表1 普通路面附着系数情况

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

状态	附着系数
新雪、接近冰的压实雪	0.1-0.2
普通雪	0.2-0.25
粗雪、开始溶解的雪	0.25-0.30
积雪上撒上盐	0.30-0.40
积雪上撒上砂	0.35-0.45
积雪上撒上砂和盐	0.30-0.45

表2 积雪路面附着系数情况

级别	路面性质	路面质量
甲	行车道平整,路面密实,无裂纹,波浪及其它明显变形	优
乙	行车道平整,路面密实,有少量无碍行驶横裂纹	良
丙	行车道略不平整,有少量大裂纹	可
丁	行车道有波浪,有较大的纵向、横向或斜向裂纹,有凹陷,路面有明显损坏	差

表3 观察法鉴定路面的标准

(2) 轮胎花纹数据提取 (如表4所示):

其中,车外噪声值测定环境是:噪音仪车辆距离200cm,距地面53cm;热衰减性,是通过测量以60km/h绕圈行驶前后的胎面温差来测定。深度和宽度的单位是mm,车内外噪声值单位是db。

不同花纹相关参数情况

花纹类型	两侧纵向深度	中间宽度	两侧宽度	车外噪声值	车内噪声值	磨损指数	牵引力指数	热衰减性能
条形对称	7	8.24	13.36	70.5	58	320	A	13.1
条形非对称	7.4	8.1	11.95	78.5	69.8	400	A	14.4
变节距非对称	7.84	13.23/11.86	10.62	79.8	70.9	360	AA	16.9
变节距对称	7.94	7.94	10.29	73.4	63.1	300	A	15.6
块状非对称	8.03	6.82	10.52	81.3	68.1	370	AA	28.5
变节距非对称	8.03	11.78	12.46/10.86	77.8	70.3	350	AA	15.8
块状非对称	5	5	4	75.2	67.5	340	AA	12

表4 不同花纹相关系数情况

## 4.2.3 模型求解

(1) 相关性分析<sup>[4]</sup>:

相关关系是一种非确定性的关系,相关系数是研究变量之间线性相关程度的量。

根据概率论定理:  $|\rho_{XY}| = 1$  的充要条件是,存在常数  $a, b$ , 使得  $P\{Y=a+bX\}=1$ ;

相关系数  $\rho_{XY}$  取值在-1到1之间,  $\rho_{XY} = 0$  时,

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

称  $X, Y$  不相关； $|\rho_{XY}| = 1$  时，称  $X, Y$  完全相关，此时， $X, Y$  之间具有线性函数关系； $|\rho_{XY}| < 1$  时， $X$  的变动引起  $Y$  的部分变动， $\rho_{XY}$  的绝对值越大， $X$  的变动引起  $Y$  的变动就越大， $|\rho_{XY}| > 0.8$  时称为高度相关，当  $0.5 < |\rho_{XY}| < 0.8$  时称为显著相关，当  $0.3 < |\rho_{XY}| < 0.5$  时，成为低度相关，当  $|\rho_{XY}| < 0.3$  时，称为无相关。

据概率论与数理统计中的知识可得随机变量  $X, Y$  的协方差如下计算：

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

再根据协方差的数值计算出相关系数的值如下计算：

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

在以上理论基础上，我们分别将表 4 中的两侧纵向深度、中间宽度、两侧宽度作为  $X$ ，分别对应车外噪声、磨损指数、牵引力指数、热衰减性能指数作为  $Y$  来计算两两之间的相关性系数，得出如下结果数据（表 5）：

	两侧纵向深度	中间宽度	两侧宽度
热衰减性能	0.52805901	-0.063710857	0.248657349
车外噪声值	0.37007931	0.047534627	-0.149904767
磨损指数	0.4698794	0.09175471	-0.334498175
牵引力指数	-0.5085079	-0.055801927	-0.546208297

表 5 各参数与性能指标的相关性系数计算结果  
牵引力指数的相关等级指标如下表 6：

Traction Grades	Asphalt g force	Concrete g force
AA	Above 0.54	0.41
A	Above 0.47	0.35
B	Above 0.38	0.26
C	Less Than 0.38	0.26

表 6 牵引力等级指标

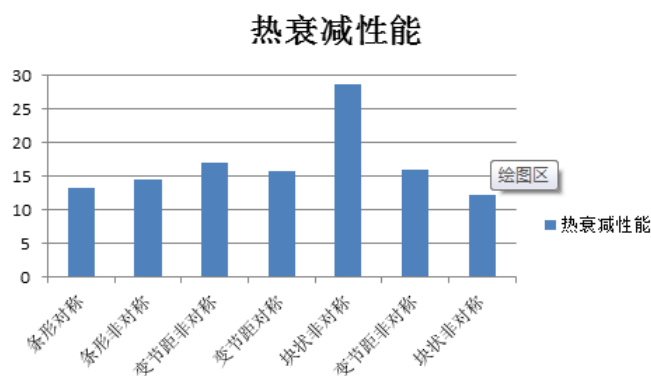


表 7 不同胎面花纹的热衰减性能对比（对应表 4 生成的结果）

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## (2) 计算结果分析

由上表 5 可知，两侧纵向深度和热衰减性能是显著正相关，和车外噪声值是低度正相关，和磨损指数是低度正相关，和牵引力指数是低度负相关；两侧宽度和热衰减性能是低度正相关，和牵引力指数是显著负相关。

也就是说，两侧纵向深度在可允许范围内较大时，热衰减性能较好，从而抓地力较好，附着能力更好，抗滑水性更好，车外噪声更小，磨损更小；两侧宽度在可允许的范围内较大时，热衰减性能更好，车外噪声更小，磨损更大，两侧宽度较小时，磨损更小，对地面的附着能力更好，抗滑水性更好。

又通过观察对比表 4 发现，对称和不对称对牵引力指标是有规律可循的，对称花纹的牵引力通常表现为 A，而费对称花纹通常表现为 AA。由于这里的牵引力指标是等级越高越好，所以非对称花纹在对湿地路面的附着性能表现更佳。

在对称的轮胎花纹中，变节距和非变节距在噪声的影响上也略有区别，由数据显示可知，变节距的噪声要比非变节距的噪声更小。因此可知变节距在抗噪声方面表现更佳。

由表 7 可知，纵向深度和两侧宽度偏低的块状非对称胎面的热衰减性能更好（以低为佳），热衰减性能是和轮胎抓地力有直接联系的，所以纵向深度和两侧宽度偏低的块状非对称胎面有更强的抓地力。

### 4.2.4 模型结论：

下面是通过我们的模型分析确定的轮胎适用范围：

(1) 在潮湿的混凝土路面和沥青路面环境下：由于 4 附着系数较小，抗滑性不太好，所以需要使用两侧纵向深度更大、横纹非对称的抗滑性较好的花纹轮胎；

(2) 在干燥的混凝土路面环境下：由于附着性系数较大，就不需要刻意在意轮胎花纹的牵引力性能，又由于许多混凝土路面因年久失修存在不平整地段，需要考虑轮胎的噪声性能，所以更适合使用有变节距花纹的轮胎；

(3) 在相对平整沥青路面环境下：由于其附着性能较之于混凝土路面更低，所以需要牵引力指数更高的轮胎，通过上面的结果分析可知，选用抓地力更强的块状非对称花纹的轮胎更好。由于此种路面的路况较好，所以也可以选用条形对称和条形非对称花纹的轮胎；

(4) 在新雪或接近冰的压实雪路面下：由于路面附着系数最低（只有 0.1-0.2），考虑到安全问题，因选用组合了多种抗滑水性强和抓地力强的花纹的轮胎，在上面分析的花纹种类中，非对称块状的花纹轮胎。

## 4.3 优化目标一：附着性能最优原则

### 4.3.1 建模准备

有文献<sup>[5][6]</sup>表明，车辆在潮湿路面高速行驶时，由于液膜的动力润滑作用，汽车在行驶过程难免由于附着性不强而出现黏性滑水、侧滑的情况。轮胎的花纹的作用之一是传递牵引力和制动力，使轮胎对地面具有一定的附着性能，防止车轮空转和打滑，是行车安全的保证。

为了使模型的建立更具针对性，我们假设在理想的前提下，不考虑行车速度和汽车负载等因素对汽车行驶的影响，只考虑不同轮胎花纹对于地面附着性能的作用。由于轮胎的附着性主要受胎面对地面的挤压、流体动压、胎面单元粗糙度的影响，我们以模拟的方式，将轮胎黏性滑水现象模拟为轮胎胎面单元和粗糙路面之间的挤压、动压问题。

在该模型的建立中，将以上问题具体化为胎面的单元综合粗糙度、滑动速度、楔角对黏性滑水的影响。

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 4.3.2 初始化模型

基于附着性能的不同，将轮胎花纹面分为：交叉花纹、抛物线花纹、斜对角花纹（如图2）。

为了便于数值计算，做出如下假设：

- （1）不同花纹的轮胎所承受的负载重量相等；
- （2）轮胎花纹的功能主要考虑排水作用，不考虑其他功能；
- （3）考虑胎面单元是柔性的，但暂不考虑轮胎的柔性变形。

将胎面单元的几何尺寸规定为  $30 \times 30 \text{mm}$ ，把胎面单元按照下图 X 和 Y 的方向划分为  $30 \times 30$  的均匀矩形区域<sup>[2]</sup>。

胎面单元矩形区域和粗糙路面之间充满了一层楔形液膜，且在 X 方向上，液膜的名义厚度随着 X 值增大而逐渐增大，在 Y 方向上各节点的名义液膜厚度相等。

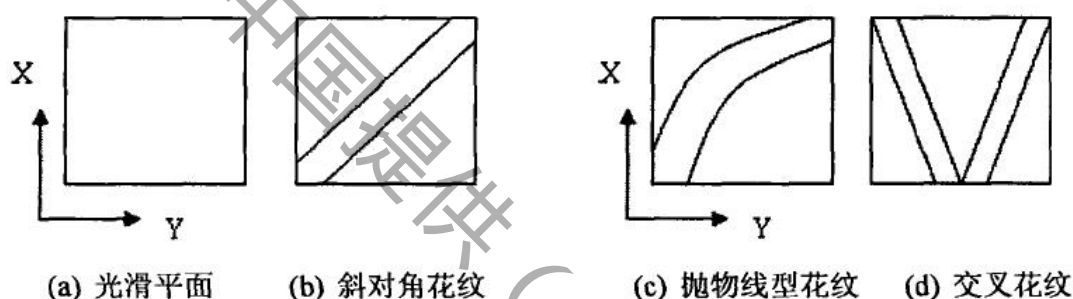


图2 不同矩形胎面花纹及坐标系的建立标示

## 4.3.3 模型建立

（1）构建物理模型：

首先设矩形胎面单元与路面之间充满液体，在矩形胎面单元的以一定速度向前滑动的同时，液体不断从前端流进胎面，后端排出，在这个物理模型<sup>[6]</sup>中，轮胎被简化为以一定速度运动的橡胶块胎面单元，在胎面单元下表面上带有花纹，液膜厚度在速度的反方向上逐渐变薄（下图说明了胎面单元与潮湿路面的接触模型）。

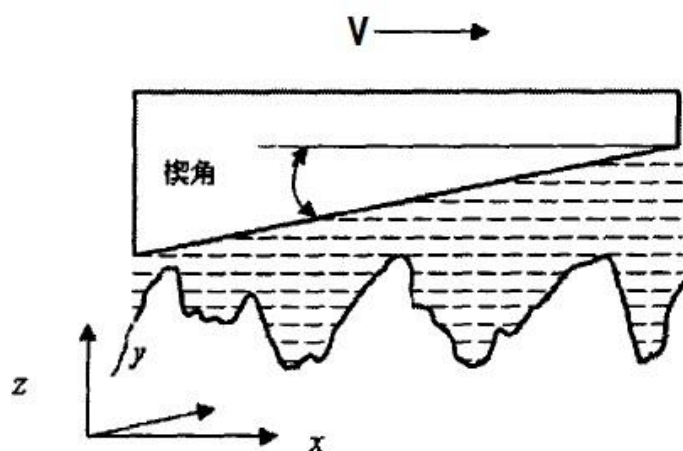


图3 胎面单元与潮湿路面的动力润滑接触模型



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## (2) 液膜厚度方程：

首先，胎面单元的垂直变形  $h_1$  直接导致胎面单元与路面之间液膜厚度的变化；其次，胎面的材料属于弹性材料，力的作用时间  $t$  越久，胎面单元的变形越明显。因此，在胎面单元随时间下降的过程中，考虑任意时刻的液膜厚度，用下面的方程<sup>[2]</sup>来计算：

$$h = h_0(t) + h_1(x, y, t)$$

## (3) 分析平均流量模型：

定义膜厚比，它是指含有表面微凸点接触的润滑状态。设路面和胎面单元两表面的均方根偏差分别为  $\delta_1$  和  $\delta_2$ ，水膜的平均膜厚为  $h$ ，定义膜厚比<sup>[2]</sup>为  $H$ （ $\delta$  为综合粗糙度）：

$$H = \frac{h}{\delta} = \frac{h}{\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}}$$

据前人研究<sup>[5]</sup>表明，对于在等温条件下不可压缩流体三维表面的部分润滑问题，提出了平均流量模型，并推导出同时考虑了滚动引起的动压、滑动引起的动压，以及挤压效应的平均雷诺方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_x h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_y h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = 12\mu \left( \underbrace{\frac{V}{2} \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial x}}_{\text{滚动引起的动压项}} + \underbrace{\frac{V}{2} \delta \frac{\partial \phi_s}{\partial x}}_{\text{滚动引起的动压项}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{h}_T}{\partial t}}_{\text{挤压项}} \right)$$

其中，压力流量因子  $\phi_x$ 、 $\phi_y$  和剪切流量因子  $\phi_s$  的计算公式如下：

$$\phi_x = 1 - 0.9 \exp(-0.56h / \delta);$$

$$\phi_s = \begin{cases} 1.126 \exp(-0.25H) & H > 5 \\ 1.899H \exp(-0.92H + 0.05H^2) & H \leq 5 \end{cases}$$

## (4) 混合润滑状态下的固体承载：

在胎面与路面处于混合润滑状态下时，由于路面和胎面单元都是粗糙表面，当液膜厚度小于某一个临界值，路面微凸体将和胎面发生接触，此时胎面单元所受的支持力并不单只液膜压力，在实质上，还包括了大量的微凸体对它的接触力。

借鉴 Greenwood 和 Tripp<sup>[6]</sup>的理想化的表面微凸模型，推导出微凸体的承载力方程：

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$$W_a(h) = (16 \frac{\sqrt{2}}{15}) \pi (\eta \beta \delta)^2 E' \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} F_{5/2}(\frac{h_0 + h_1}{\delta}) A$$

其中涉及未知参数部分求解如下:

$$F_{5/2} = \begin{cases} 0 & H > 4 \\ 1.1201 \times 10^{-4} (4 - H)^{1.9447} & 3.5 < H \leq 4 \\ 2.1399 \times 10^{-4} \exp(3.804467 \log(4 - H) + 1.341516 (\log(4 - H))^2) & H < 3.5 \end{cases}$$

$$E' = \frac{2}{\left[ \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right]}$$

## 4.3.4 模型求解

综合以上所列举的主要公式、对于胎面单元载荷的平衡方程的引用以及对平衡方程边界条件的分析, 得到以下求解方程:  
平均流量雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_x h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_y h^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = 12 \mu \left( \frac{V}{2} \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial x} + \frac{V}{2} \delta \frac{\partial \phi_s}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial t} \right) \quad (1)$$

液膜垂直变形厚度方程

$$h = h_0(t) + h_1(x, y, t) \quad (2)$$

微凸体承载力方程

$$W_a(h) = (16 \frac{\sqrt{2}}{15}) \pi (\eta \beta \delta)^2 E' \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} F_{5/2}(\frac{h_0 + h_1}{\delta}) A \quad (3)$$

胎面单元载荷的平衡方程

$$W_a(h) + \iint_{D_x} p(x, y, t) dx dy = F \quad (4)$$

$$\text{平衡方程约束边界} \begin{cases} p(x, y, t) = 0 & \text{在沟槽内部及边界} \\ p(x, y, t) = 0 & \text{在外边界} \\ h(x, y, t) = h_{init} & \text{在初始时刻} \end{cases} \quad (5)$$

由于在研究轮胎花纹在附着性能上的特性时, 附着性的考虑一般是指在潮湿地面对



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

液膜的排水性的评估，要联立以上所列出的五个方程求解出  $\overline{h}_T$ ，以此变量在不同轮胎花纹下的数据为参数。

但是想要直接解出五个方程构成的解相对比较困难，在这里采用有限差分的方法来求解数值，下面将上面的方程进行离散化得到新的待解方程组：

$$\begin{cases} a_{ij}p_{(i+1)j} + \beta_{ij}p_{i(j+1)} + \gamma_{ij}p_{(i-1)j} + \delta_{ij}p_{i(j-1)} - \delta_{ij}p_{i(j-1)} - \delta_{ij}p_{ij} = f_{ij} \\ a_{ij} = h_{ij}^3\phi_x / \Delta x^2 + (0.504 / \delta \exp(-0.56h / \delta) \times h_{ij}^3 + 3h_{ij}^2\phi_x)(h_{(i+1)j} - h_{(i-1)j}) / (4\Delta x^2) \\ \beta_{ij} = h_{ij}^3\phi_y / \Delta y^2 + (0.504 / \delta \exp(-0.56h / \delta) \times h_{ij}^3 + 3h_{ij}^2\phi_y)(h_{i(j+1)} - h_{i(j-1)}) / (4\Delta y^2) \\ \gamma_{ij} = h_{ij}^3\phi_x / \Delta x^2 + (0.504 / \delta \exp(-0.56h / \delta) \times h_{ij}^3 + 3h_{ij}^2\phi_x)(h_{(i+1)j} - h_{(i-1)j}) / (4\Delta x^2) \\ \delta_{ij} = h_{ij}^3\phi_y / \Delta y^2 + (0.504 / \delta \exp(-0.56h / \delta) \times h_{ij}^3 + 3h_{ij}^2\phi_y)(h_{i(j+1)} - h_{i(j-1)}) / (4\Delta y^2) \\ \sigma_{ij} = 2h_{ij}^3\phi_x / \Delta x^2 + 2h_{ij}^3\phi_y / \Delta y^2 \\ f_{ij} = 12\mu(\frac{V}{2}(h_{ij} - h_{(i-1)j}) / (\Delta x) + \frac{V}{2} \times \sigma(\phi_{i(j+1)} - \phi_{ij}) / (\Delta x) + (h_{ij}^{(k+1)} - h_{ij}^{(k)}) / \Delta t) \end{cases} \quad (6)$$

$$h_{ij} = h_0 + \sum \sum c_{rs}^{ij} p_{rs} \quad (7)$$

$$F^{(n)} = \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^{m-1} e_{ij}(p_{ij} + p_{(i+1)j} + p_{(i+1)(j+1)}) + W_a(h_0) \quad (8)$$

基于这改进后的离散化的方程组，方程（6）（7）用高斯-塞德尔迭代法求解，方程（8）为约束条件，若式子（8）不能得到满足则调整膜厚  $h_0$ ，重复以上的求解过程可以解出最合适的膜厚数据。

## 4.3.5 相关性分析

据上述模型公式可知，影响轮胎对地面的抗滑水能力的主要因素是轮胎花纹的对地面的分布压力的大小，这里所说的分布压力与很多因素有关。为了获取各种轮胎花纹对地面附着能力的对比结果，现根据以上模型基础，分别对交叉花纹、抛物线花纹、斜对角花纹进行定量分析。

下面通过控制变量法，分析列举了在除花纹不同外，其它因素对于花纹均相对相同的条件下，三种花纹方案在影响分布压力的几个主要因素中表现出的不同情况。

这些实验使用了类似生物上的空白对照法，把没有花纹的光滑轮胎为对照组，用更直观的方式体现出几个不同花纹方案对不同因素的影响程度。

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## (1) 与液膜厚度的大小有关

为研究分布压力的决定因素——液膜厚度，与轮胎不同花纹的抗滑水性能的优劣比较，我们通过几个实验结果来更直观地说明问题。在实验准备的过程中，为保证花纹之间只有花纹形状分布不同，且接地面积相等，我们用调整花纹的宽度方式来实现。计算所用直角坐标系的原点位于胎面单元的点， $x$ 、 $y$  方向分别代表了胎面单元的长-宽方向。参数设定如下： $p_1 = 0.01045s^{-1}$ 、 $q_1 = 4.18MPa \cdot s$ 、水的黏度为  $9.6E-4Pa \cdot s$ 、轮胎-路面的综合杨氏模量取为  $400MPa^{[9]}$ 。

### 实验一：相同楔角变化趋势下的膜厚对比

设定之前所求模型中的  $F = 1N$ ， $\sigma = 0.5mm$ ， $V = 0m/s$

下图 3、图 4 表示了楔角  $\alpha = 0^\circ$ 、 $\alpha = 1.5^\circ$  时三种不同轮胎花纹的膜厚随时间变化的曲线。

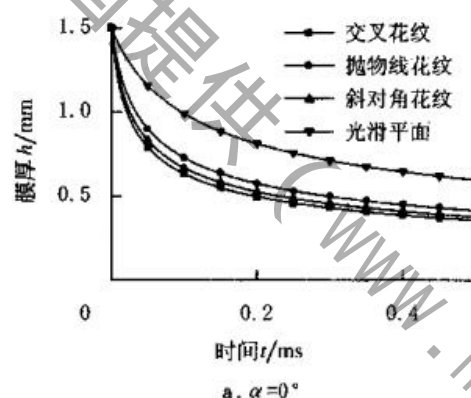


图 4 不同胎面花纹膜厚在楔角  $\alpha = 0^\circ$  的时间变化曲线

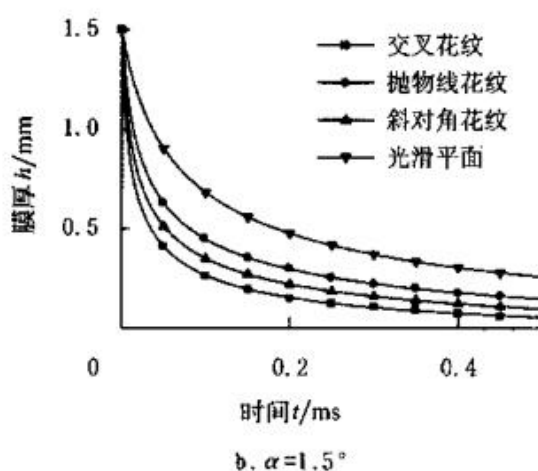


图 5 不同胎面花纹膜厚在楔角  $\alpha = 1.5^\circ$  的时间变化曲线

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

由以上图 4 和图 5 所表现的趋势可知，由于  $V = 0 \text{ m/s}$ ，可知此实验无动压作用的影响，三种不同的花纹方案在相同楔角变化条件的情况下：

A) 从横向角度看，随着横坐标时间的增加，不同花纹的膜厚都呈现出相似的非线性降低的趋势；

B) 从纵向角度看，首先和光滑的胎面比较，有花纹的胎面膜厚都比较小，这也更确切地说明了液膜厚度可以体现胎面的抗滑水性（即附着力）。

然后，在同一时间下，不同的花纹方案在膜厚数据上又出现有高有低的可比性。显然，最靠近坐标轴的代表液膜厚度最小的，也就是说，在相同情况下，交叉花纹的也膜厚度最小，其次是斜对角花纹，液膜最厚的是抛物线花纹。

在楔角  $\alpha$  从  $0^\circ$  增加到  $1.5^\circ$  时，交叉花纹的抗滑水性优势更加明显。

## 实验二：相同外载荷变化趋势下的膜厚对比

设定之前模型中的  $\alpha = 1.5^\circ$ ， $\sigma = 0.5 \text{ mm}$ ， $V = 10 \text{ m/s}$

下图 5、图 6 表示了外载荷为  $F = 1 \text{ N}$ 、 $F = 10 \text{ N}$  条件下不同花纹膜厚随时间变化的曲线。

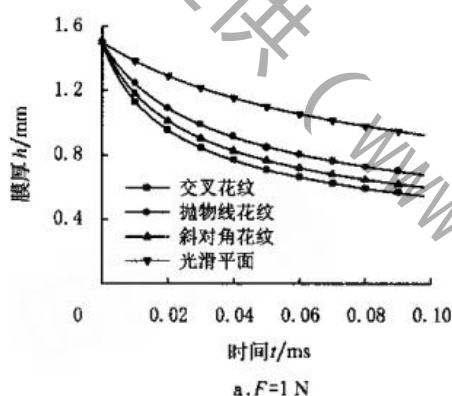


图 6 不同胎面花纹膜厚在  $F = 1 \text{ N}$  下的时间变化曲线

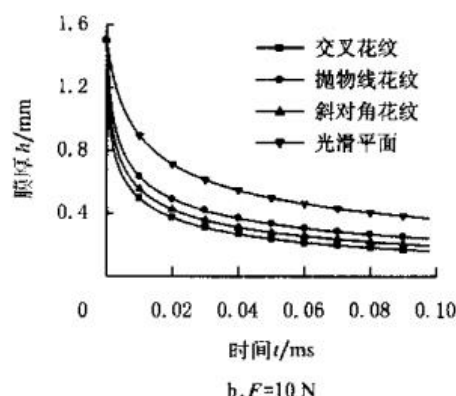


图 7 不同胎面花纹膜厚在  $F = 10 \text{ N}$  下的时间变化曲线

由以上图 5、图 6 的曲线变化趋势可知，由于  $V = 10 \text{ m/s}$ ，动压效应和挤压效应

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

同时在起作用，三种不同胎面花纹在相同外载荷变化的条件下：依然是交叉花纹的膜厚最小，斜对角花纹次之，抛物线花纹最大。因此交叉花纹在此情况下的抗滑水性最好，斜对角花纹次之，抛物线花纹最差。

(2) 与液体压力大小有关

**实验：**相同楔角变化下的液压对比

设定之前模型中  $F=1\text{N}$ ， $\sigma=0.5\text{mm}$ ， $V=10\text{m/s}$

下面图 8、图 9 为楔角  $\alpha=0^\circ$ 、 $\alpha=1.5^\circ$  条件下液体压力的变化曲线

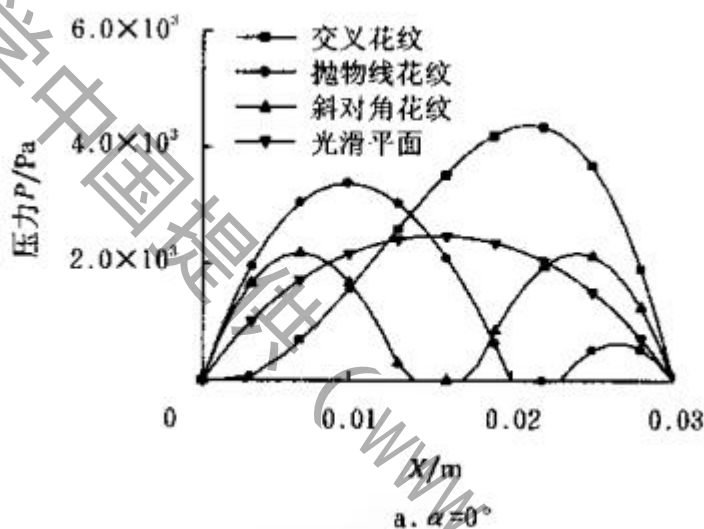


图 8 不同胎面花纹在  $\alpha=0^\circ$  时的压力变化曲线

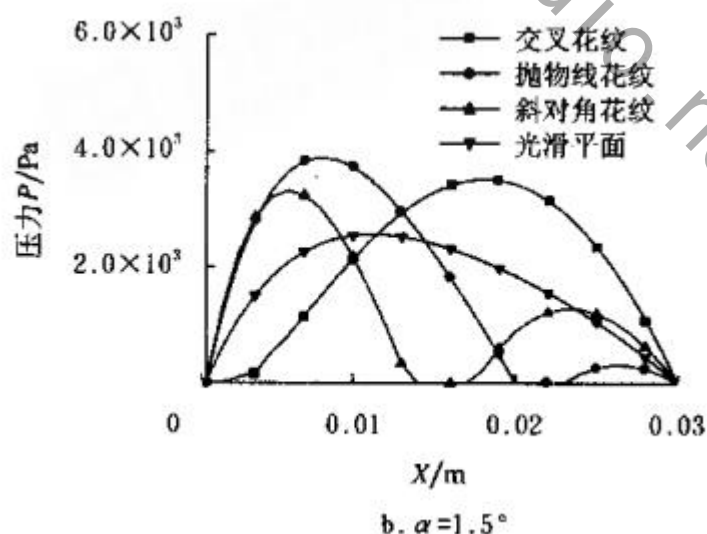


图 9 不同胎面花纹在  $\alpha=1.5^\circ$  时的压力变化曲线

据图 7、图 8 的压力分布情况可知，几种不同花纹胎面单元液压的最大值，随着楔

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

角 $\alpha$ 增大，同一时刻不同花纹胎面单元的压力最大点向X减小方向偏移，且交叉花纹的压力最大值总是在不同程度上高于其他花纹，抛物线花纹次之，斜对角花纹较小（对照光滑胎面的最大值而言）。

通过过信息检索得到以下表8<sup>[10]</sup>，该表体现了几种花纹的胎面在楔角不断变大的条件下，液体压力最大值的对比关系。不同花纹胎面单元在不同楔角时的液体压力最大值

楔角 $\alpha/(^{\circ})$	不同花纹下的液压最大值 $p/\text{Pa}$			
	光滑平面	斜对角花纹	抛物线花纹	交叉花纹
0	2454.8	3140.6	3738.8	4410.6
0.5	2464.6	3505.3	3898	4136.4
1.0	2528.9	3877.3	4032.9	3836.7
1.5	2561.4	4309	4131.7	3543.4

表8 不同花纹胎面单元在不同楔角时的液体压力最大值

以上表8的数据显示，以纵向对比的角度去看每种胎面针对于楔角角度变化趋势的情况看，光滑胎面的液压最大值随着楔角的增大而增大，这说明液膜压力随楔角增大而增大的趋势下，胎面对地面的附着性不太好。斜对角花纹和抛物线花纹均类似于光滑胎面，液压最大值都随着楔角角度的增大而增大，但是，只有交叉花纹的液压最大值是随着楔角角度的增大而减小的，这说明交叉花纹在这三种花纹中拥有更好的抗滑水能力，即对地面的附着性能更好。

## 4.3.6 模型结果分析

本模型的以平均流量模型和雷诺方程、胎面单元载荷平衡方程等轮胎动力滑水为参考，分析出了与液膜压力和液膜厚度相关的胎面单元分布压力，是轮胎胎面花纹影响轮胎胎面对地面附着能力好坏的主要因素。通过与光滑胎面数据的对比分析，可初步得到以下结论：

液膜厚度越小、液膜压力最大值随楔角角度的增大而呈现减小趋势的那种花纹胎面，在抗滑水性能、对地面的附着性能方面更优于其它花纹方案的胎面。

以这次我们讨论的交叉花纹、斜对角花纹、抛物线花纹为例，通过用一系列控制变量和对光滑胎面的空白对照组比较的方法，对不同胎面花纹在液膜厚度和液膜压力上的进行分析对比，可初步得到：在相同外载荷、相同滑动速度的条件下，交叉花纹较之于另外两种花纹，在楔角和外载荷增大的情况下，其液膜厚度相对更小；且在相同楔角角度增大趋势相同的情况下，只有交叉花纹液压最大值呈现出的，是不同于其它花纹的趋势，其液压最大值变化趋势是随楔角角度增大而减小的趋势。故以我们分析出的附着性能最优的评估方案来看，在这三种花纹方案中，采用交叉花纹的胎面对地面的附着性更好，抗滑水性更强。

## 4.4 优化轮胎目标二：最大耐磨原则

### 4.4.1 建模准备

轮胎与路面接触区域的胎面花纹能描述轮胎的大部分特性，如接触压力、磨损等<sup>[11]</sup>。在车辆运行过程中，胎面花纹形式和性能是影响轮胎滚动阻力和磨损均匀性的重要因素



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

之一<sup>[12]</sup>。汽车行驶过程中，轮胎与地面产生摩擦，生成大量热量，由于沟槽宽带和深度的影响，部分热量堆积于沟槽内，轮胎内气体在不停地被压缩的过程中，也会产生大量的热量，二者一起作用，导致轮胎的温度升高，而随着在用车行驶里程的增加，会导致轮胎发生机械、组织结构、物理和化学变化，使得磨损发生。轮胎磨损以后其滚动半径将变小，这将使得在相同的发动机转速下达不到理论车速，要达到与理论车速相同的实际车速，就要依靠提高发动机转速来实现，发动机转速的提高导致了其负荷的增加。结合以上因素通过控制变量的方法结合相关文献资料对它们造成的影响予以分析。

## 4.4.2 轮胎热量散失

轮胎是热的不良导体，其热导性平均为 0.25 米/米\*小时\*度，仅仅为铁导热性的 1/232。一般轮胎使用时胎体温度约在 100℃ 以内，可以认为是处在正常温度。在 100℃ 时帘线强度大约一降低 20%<sup>[13]</sup>。橡胶与帘线间的粘附强度大约降低一倍，轮胎在 100℃~121℃ 是灵界温度，超过 121℃ 时，轮胎在较高温度影响下，帘线的物理性能将急剧下降，而导致引起轮胎的脱层或爆破。

轮胎的构成材料——橡胶及其复合材料均属粘弹性材料，在轮胎滚动过程中，橡胶及其复合材料在脚边载荷作用下生热，导致轮胎的损坏，降低了其使用性能<sup>[14,15]</sup>。

计算散热系数<sup>[16]</sup>

$$h = \frac{k}{\Delta T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

$h$ ——散热系数       $k$ ——导热系数       $\Delta T$ ——试件表面与空气的温度差  
热传导方程

$$\rho C \frac{dT}{dt} = ky^2 T$$

初始条件

$$T(x, t) = T(x, 0) = T_0$$

左边界条件

$$T_s = T(x)$$

右边界条件

$$qh = h(T_1 - T_\infty)$$

式中  $\rho$ ——密度       $C$ ——比热容       $T$ ——未知表面温度

$T_0$ ——试件的初始温度       $T_s$ ——左表面温度

$T_1$ ——右表面温度       $t$ ——时间       $q$ ——密度

采用有限元方法可以得到下式<sup>[17]</sup>：

$$(K_c + K_h + K_p)T_c = R_h + R_p \quad (9)$$

$K_c$ ,  $K_h$ ,  $K_p$ ——系数矩阵，是与热传导、对流散热、非稳态相对应的导热“刚度”矩阵

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$T_c$ ——单元温度

$R_h, R_p$ ——表示对流散热的热载荷和温度随时间变化而引起的热载

轮胎产生的部分热量散出到了空气中，但大部分仍然存在于轮胎中，这部分热量使得轮胎的温度升高。橡胶的热解温度为  $190^\circ\text{C}$  [18]。当达到热解温度，橡胶开始热解反应。

热解反应速率是升温速率、终温及热解产物质量的函数。假设把在无线短时间的不等温反应认为是等温反应，热解本征动力学方程可表示为[19]

$$\frac{d\alpha}{dt} = kf(\alpha)$$

其中， $t$ 时刻的失重率  $\alpha = \frac{m_0 - m_t}{m_0 - m_\infty}$ ， $m_t$ 、 $m_\infty$  分别表示为反应起始和终止时的质量，

单位  $kg$ ；根据阿累尼乌斯公式，反应速率常数  $k = A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$ ，单位  $s^{-1}$ ， $E$  是活化能，

单位  $kJ \cdot mol^{-1}$ ， $A$  是指前因子，单位  $s^{-1}$ ， $R$  是通用气体常数，其值为  $8.314 J \cdot (mol \cdot K)^{-1}$ ，

$T$  是反应温度，单位  $K$ ； $f(\alpha)$  是描述反应过程的机理函数，一般简单表示为

$f(\alpha) = (1-\alpha)^n$ ， $n$  为反应级数。

所以，热解本征动力学方程可转换为

$$\frac{d\alpha}{dt} = A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) (1-\alpha)^n \quad (10)$$

由推导得到[20][21]

当  $n=1$  时

$$\frac{-\ln(1-\alpha)}{T^2} = \frac{AR}{\beta E} \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$$

取对数则

$$\log\left[\frac{-\ln(1-\alpha)}{T^2}\right] = \log\left(\frac{AR}{\beta E}\right) - \frac{E}{2.303R} \cdot \frac{1}{T} \quad (11)$$

对  $\log\left[\frac{-\ln(1-\alpha)}{T^2}\right] - \frac{1}{T}$  作图，应是一条直线，斜率为  $-\frac{E}{2.303R}$ ，截图为  $\log \frac{AR}{\beta E}$

当  $n \neq 1$  时

$$\frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{(1-n)T^2} = \frac{AR}{\beta E} \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$$

取对数则



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$$\log \left[ \frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{(1-n)T^2} \right] = \log \left( \frac{AR}{\beta E} \right) - \frac{E}{2.303R} \cdot \frac{1}{T} \quad (12)$$

对  $\log \left[ \frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{(1-n)T^2} \right] - \frac{1}{T}$  作图，也为一条直线，其斜率为  $-\frac{E}{2.303R}$ ，截距为  $\log \frac{AR}{\beta E}$ 。

采用线性回归的方法求解上述方程，就可得到反应活化能  $E$  和频率因子  $A$ 。

随着温度的变化，热解反应机理可能会有所不同，因此不同温度下的热解动力学参数需进行独立的计算分析。Cumming 提出了重量加权平均活化能，用于分析热解的整体活性<sup>[22]</sup>

$$E_m = F_1 \times E_1 + F_2 \times E_2 + \cdots + F_n \times E_n$$

其中  $E_1$  到  $E_n$  时每个阶段的平均活化能， $F_1$  到  $F_n$  时各阶段相对失重份额。

根据 Arrhenius 定律得到热解反应速率方程 (13) 为

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{d\alpha_3}{dt} = A_i \exp \left( -\frac{E_i}{RT} \right) \cdot f(\alpha) \quad (13)$$

式中  $i$  为各组分散解的第  $i$  阶段

## 4.4.3 轮胎花纹磨损

轮胎的制造材料，包括橡胶和帘线都不是完全弹性材料，因此在车胎行驶时，每次轮胎变形后都会产生滞后损失和消耗部分<sup>[13]</sup>，这部分能量变成了热量。着部分热量堆积在沟槽中，使得轮胎的热量上升。随着车速提高时轮胎变形次数和频率都增加，轮胎的热量随之增加。胎体温度的升高，帘线静疲劳强度降低，引起轮胎的磨损。

横沟花纹轮胎具有较好的牵引力和制动力，在恶劣路面标线良好，但是由于横沟花纹横向阻力小，易发生侧滑，而且噪音较大。而直沟花纹适用于道路状况较好的柏油路、水泥马路以及高速公路上，行驶过程中阻力小，操控与稳定性好，噪音小，但同时它的驱动与制动力较横沟花纹差。下面实验中采用直沟花纹。路况选择较好的柏油、水泥马路以及高速公路。

磨损率：单位滑动距离橡胶的总损耗量，是磨损特性的基本参数，通常分为线性磨损率、体积磨损率和质量磨损率<sup>[23]</sup>。

线性磨损率  $R_L$

$$R_L = h / L$$

体积磨损率  $R_V$

$$R_V = \Delta V / LA_a$$

质量磨损率  $R_W$

$$R_W = \Delta W / LA_a = \rho R_V$$

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

上述三式中， $h$ ， $\Delta V$ 和 $\Delta W$ 分别表示材料被磨损的厚度、体积和质量； $A_a$ 为摩擦副表观接触面积； $\rho$ 为胶材密度。

磨损度：特定界面条件下，输入单位摩擦共的橡胶（体积）损耗量。

$$\gamma = \Delta V / FL = \Delta V / \mu NL$$

上式中， $\gamma$ 为磨损度， $F$ 为摩擦力， $\mu$ 为摩擦因数， $N$ 为法向载荷。

耐磨性：磨损率或磨损度的倒数，通常用 $\beta$ 表示。

轮胎的磨损机理分为5种基本类型<sup>[24]</sup>：粘附磨损、表面疲劳磨损、磨粒磨损、降解磨损和卷曲磨损。

## (1)粘附磨损

当轮胎相对路面产生运动好似，由于粘附效应所形成的粘附节点发生剪切断裂，是台面表层材料转移到路面的机械磨损现象称为粘附磨损。它是干燥光滑路面上轮胎产生磨损的唯一途径，是台面胶分子对路面的粘附，受接地面温度、轮胎和道路表层材料的物性(如强度)及表面粗糙度和环境条件的影响。

## (2)疲劳磨损

当轮胎在路面上滚动或产生滚滑运动时，台面表层胶料在重复变化的接触应力作用下疲劳而产生剥落的现象统称为表面疲劳磨损。如果橡胶式样与光滑基面长期对磨，受摩擦力作用将产生点坑，并由于接触疲劳过程而产生表面裂纹，此时摩擦力在表面层产生的应力为拉伸力。而侧偏力分布和胎面胶料生热导致轮胎更严重的破坏。

## (3)磨粒磨损

外界硬颗粒(如碎石子或沙子)或者道路表面的硬凸起物(包括微观和宏观纹理)在轮胎摩擦过程中引起其表现材料脱落的现象称为磨粒磨损。当轮胎处于稳定磨损阶段时，磨粒磨损成为轮胎磨损最常见的形式。

## (4)降解磨损<sup>[25]</sup>

在热力作用下，胎面胶可能产生热化学降解或热氧化降解，降解颗粒(约几个微米)随后脱落。橡胶自然脱落的存在表明产生了降解。干燥路面、圆钝粗糙凸体和滑动可导致这种磨损。

## (5)卷曲磨损

如果磨损花纹的隆起在脱落前开始降解，则他们将因为胎面胶的粘附而卷曲，这种机理可以认为是形成磨损花纹和产生热氧化降解的中间过渡。一旦脱落，则卷曲所形成的小圆柱体将使轮胎和路面间的摩擦力下降。

基于对轮胎-道路摩擦的理论研究和轮胎磨损的实际观察<sup>[23]</sup>，得出橡胶磨损机理如图10所示，

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

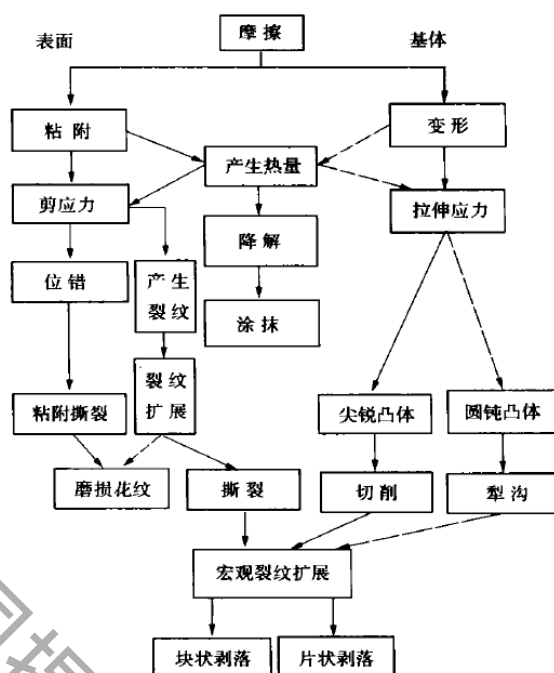


图 10 橡胶磨损机理示意

当橡胶在路面滑动时，摩擦力主要表现为粘着摩擦，根据弹性体摩擦的粘着理论，可以得出粘着摩擦力  $F_a$  为<sup>[26]</sup>

$$F_a = K_1 S \left( \frac{E'}{p^\gamma} \right) \tan \delta \quad (\gamma < 1) \quad (14)$$

式中：  $K_1$ ——常数       $S$ ——滑动界面的有效剪切强度       $p$ ——正压力

$E'$ ——储能模量       $\tan \delta$ ——损耗角正切(粘弹性参数)

得橡胶的粘着摩擦与材料的损耗角正切  $\tan \delta$  成正比

试验表明<sup>[27]</sup>，轮胎在需经常驱动、制动或转向的城市道路上行驶时的磨损量约在他很少需驱动、制动及转向的高速公路上行驶时的磨损率的 32 倍。

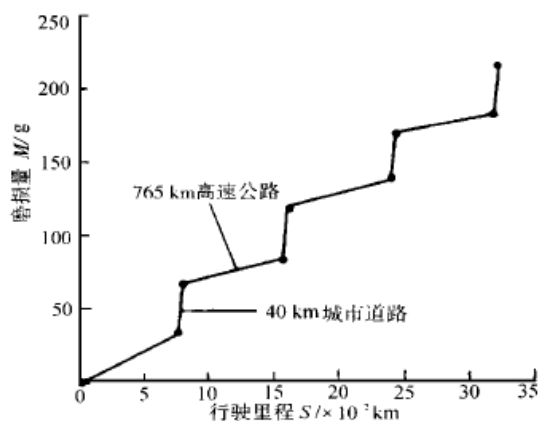


图 11 磨损量与行驶里程之间的关系

对于 Sackoor 摩擦定律<sup>[28][29]</sup>，得到

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$$\mu_{sx} = \mu_0 + (\mu_a - \mu_0) \exp\left(-h^2 \lg^2\left(\frac{|v_s|}{v_m}\right)\right) \quad (15)$$

式中  $v_m$  为最大静摩擦系数时的滑移速度， $\mu_0$  为初始摩擦系数， $h$  为影响因子。

由 S. Goya I 的滑动摩擦系数各向异性理论得

$$\beta = \arctan \frac{v_{sy} \mu_{sy}}{v_{sx} \mu_{sx}}$$

$\beta$  为滑移角

目前轮胎磨损量的计算方法主要有有限单元法<sup>[30]</sup>、单元磨损历程表示法<sup>[31]</sup>和轮胎磨损能量算法<sup>[22]</sup>。轮胎与地面间的摩擦属于干摩擦，有滑移引起的路面对胎面的微观切割和撕裂作用，是胎面磨损的主要原因，且轮胎的切向力和滑移速度有关，因此从摩擦耗散的角度能更准备和科学地预估轮胎磨损量。采用摩擦耗散能来表征磨损量，刷子单元的摩擦耗散能为剪切力与滑移速度的乘积，即

$$dw = dF_{sx} \cdot V_{sx} + dF_{sy} \cdot V_{sy}$$

由于摩擦耗散能和滑移速度有关，可认为胎面磨损主要发生在胎面滑移区。将轮胎的接地滑移区域简化为点接触，这样接地区域的磨损量主要在接触点处产生，其磨损量<sup>[32]</sup>为

$$w = \int_s^{-a} w dx = \int_x^{-a} V_{sx} \cdot \mu_{sx} \cdot q_z(x) dx + \int_s^{-a} V_{sy} \cdot \mu_{sy} \cdot q_z(x) dx \quad (16)$$

为更好地表征磨损量，利用实验拟合的磨损定律，可将刷子单元的摩擦耗散能转化为质量损失，得到磨损质量

$$m = k_1 w^{k_2}$$

式中  $k_1$ ， $k_2$  为质量系数，表征在一定温度下的胎面材料参数和路面参数。

轮胎磨损的质量损失最终体现在轮胎接地高度的变化上，故这里引出轮胎磨损高度的概念，轮胎磨损高度和轮胎的密度尺寸参数有关，提出假设公式

$$h = k_0 \cdot \frac{m}{\rho \cdot 2\pi R \cdot d} \quad (17)$$

$\rho$  为轮胎化合物密度， $d$  为轮胎宽度， $k_0$  为修正系数。

## 4.4.4 模型结果分析

轮胎花纹增加了轮胎与空气的接触面积，便于轮胎内由气体压缩产生的热量散失。增加轮胎花纹的深度可提高轮胎的散热性。但是由于汽车在行驶过程中，启动和制动过程中的摩擦生热，部分热量堆积于轮胎花纹沟槽内，当深度增加到一定程度时，增加深度不能提高散热性，相反会导致热量堆积于沟槽内而无法散出，使轮胎更易变形、磨损使得轮胎使用年限减少。直横沟花纹横沟与直沟互相交错，适用于恶劣的环境和普通公

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

路，结合了横沟花纹与直沟花纹的优点，并相互弥补。同时也增强了轮胎的散热性。汽车行驶中的启动、制动及转弯过程中的磨损使轮胎表层消耗，减少了轮胎沟槽的深度，当轮胎的沟槽深度不足 2mm 时，会导致轮胎的抓地力不足，易出现打滑现象。所以沟槽的深度应大于 2mm，同时考虑沟槽的散热情况及轮胎的使用年限，沟槽的深度在 8mm 时为宜。而内侧沟纹比外侧沟纹多能够使得车辆更平稳的转弯。

## 4.5 优化轮胎目标三：噪音最小原则

### 4.5.1 建模准备

虽然轮胎花纹图案形式多样，不同的花纹产生的噪音也不一样，即使对同一轮胎花纹，在不同的路况、不同的背景噪声、不同的车速下的所产生的噪音也是不一样的，胎面与路面相互作用而产生的噪音是相当复杂的，很难建立准确、科学的数学模型。轮胎花纹噪音控制的前提和基础便是对轮胎花纹噪音发声机理的理解和把握，进而建立科学而实用的轮胎噪音数学模型。根据定性的研究，忽略轮胎的材质等因素的影响，着重考虑花纹块与花纹槽的相关因素与产生噪音强度的定性关系，确定模型，以达到优化花纹噪音的目的。查阅相关文献资料，利用控制变量法结合力学声学知识，予以分析。以确定轮胎的最佳使用范围。

### 4.5.2 轮胎花纹噪音模型

轮胎花纹噪音主要来自于花纹块的撞击噪声、花纹槽的泵浦噪声、随机沙声、气柱共鸣声以及喇叭筒效应等。现在我们考虑轮胎花纹块的击地噪声、与花纹槽的泵浦噪声。

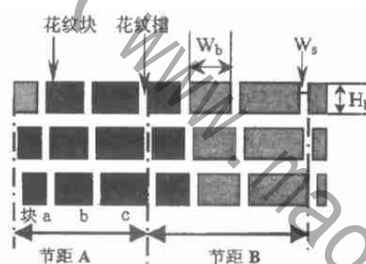
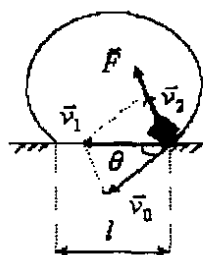


图 12 轮胎花纹简化图

#### (1) 轮胎击打地的噪声

轮胎行驶时(如图 13 所示)，在胎痕前沿 A 点处的矢量速度  $\vec{u}$  突变成  $\vec{u}_1$ ，而  $|\vec{u}| \approx |\vec{u}_1|$ ，依据力的平行四边形分解原则必有指向胎中心的矢量速度  $\vec{u}_2$  存在。产生  $\vec{u}_2$  必伴有指向胎中心区的  $\vec{F}$ ，形成块撞击地面而引起的撇振，产生撞击噪声。





# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

图 13 胎痕前沿图

花纹块拍打地面时，前沿区的空气被压缩，空气密度增加，空气排出，产生正声压；随着花纹块的离地，空气变得逐渐稀疏从而形成负的声压，从而产生扰动噪声；两者合成即为花纹块的噪声，实验测定它的波形为上大下小的 N 形波。

用一波  $P_{(t)}$  来近似描述<sup>[33]</sup>

$P_{(t)}$  为花纹块产生的声压值<sup>[34]</sup>

$$P_{(t)} = g_b A_\alpha \sin(\omega_b + \theta) \quad (17)$$

$$\text{其中, } g_b = \begin{cases} 1 & \sin(\omega_b + \theta) \geq 0 \\ \delta & \sin(\omega_b + \theta) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$\delta$ :  $0 < \delta < 1$  其大小与轮胎的载重量、充气压力和胶的弹性系数有关，选取遵循原则为：硬度越大， $\delta$  越小；

$A_\alpha = \alpha \sqrt{s}$  为声压的振幅，与花纹块的面积有关， $\alpha$  为转换系数

$f(v_c, s_b)$  为圆频率， $u_c$  是车速  $K$  和花纹块面积  $s_b$  的函数；

$\theta = g(\omega_b, z_b)$   $\theta$  为相位角， $\omega_b$  为圆频率， $z_b$  与计时起点和该花纹块在圆周上的位置有关。

从动力学的角度研究花纹块的发声，设轮胎半径为  $r$ ，轮胎胎痕长为  $l$ ，花纹块面积为  $s$ ，花纹块高度为  $h$ ，纹块的密度为  $\rho_b$ ， $\eta_b$  为转换系数，则花纹块的等效质量为

$$m_b = \rho_b s h \eta_b, d \text{ 为花纹块完全接地的宽度, 由图 13 知道 } \bar{u}_2 \text{ 方向的加速度 } \bar{a} = \frac{\Delta \bar{u}_2}{\Delta t} = \frac{\bar{u}_2 - 0}{\Delta t},$$

因  $\Delta t = \frac{d}{|u_0|}$ 。由力学公式  $F=ma$ ，求得花纹块撞击地面产生的力<sup>[35]</sup>

$$|\bar{F}| = \frac{\rho_b \cdot s \cdot h \cdot \eta_b}{d} \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{r}{l}\right)^2}} |\bar{V}_0|^2 \quad (19)$$

由公式(19)知，有效声  $\rho_b$  与  $F$  大小成正比，由此可知  $\rho_b$  与花纹块面积  $s$  成正比。

## (2) 花纹槽的泵浦噪声

轮胎在路面旋转期间，胎面的花纹槽随着轮胎的旋转而被压缩、释放。由于胎面为橡胶体，所以槽内的气体随之被高速地在前沿区挤压、后沿区膨胀。这样在胎前后沿产生压差(前沿为正压，后沿为负压)，于是形成了空气涡流，从而引发了泵浦噪声<sup>[31]</sup>。

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

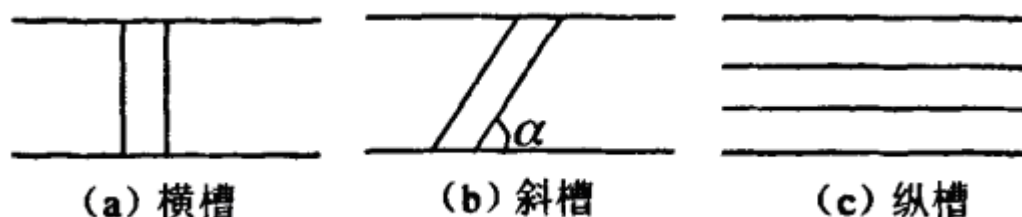


图 14 花纹槽的种类

假设横沟槽声的时域波为  $P_{sf}(t)$

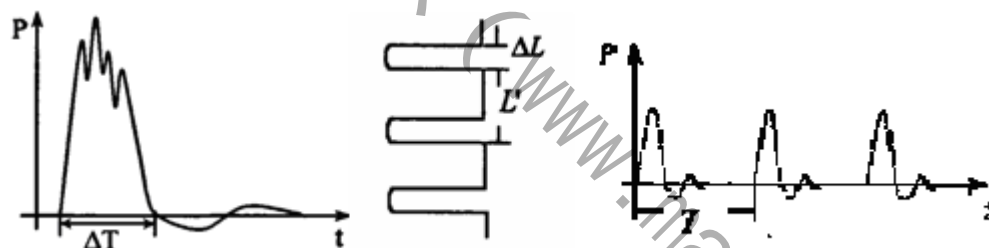
那么  $\alpha$  角度的花纹槽的时域波为：  $P'_s(t) = P_s(t) \cdot \sin \alpha$  (20)

其中  $\alpha = 0$  时为纵槽；  $\alpha = 90^\circ$  时为横槽

$P_s(t)$  的实测波形<sup>[35]</sup>如图 15(a) 所示，若取花纹沟宽为  $a$  (m)，速度为

$u_c$  (m/s)，则声压的脉冲宽度  $\Delta T$  (s) 可由下式表示：  $\Delta T = (a/u_c) \cdot \xi$

对于间距为 1 (m) 的多个槽，如图 15 (b) 所示，脉冲间隔  $T$  (s) 可表示为：



(a) 一个横沟发生的声压变化

(b) 多个横沟发生的声压变化

图 15 由横沟所发生的声压变化

$$\Delta T = (l'/u_c) \cdot \eta$$

声压的最大值为：

$$P_{\max} = k \cdot f(l, w, \Delta u)$$

式中  $f(l, w, \Delta u)$  为槽沟声压函数式， $l$ 、 $w$  分别为槽的产度、宽度， $\xi$ 、 $\eta$ 、 $k$  是转换系数， $\Delta u$  为槽沟腔压缩量。

具有  $\alpha$  角度的斜沟槽声波为：

$$P_s(t) = (p_{\max} \cdot \sin \alpha) \cdot c_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \theta) \quad (21)$$

式中：  $C_1 = \begin{cases} 1 & \sin(\omega_1 + \theta) \geq 0 \\ \eta & \sin(\omega_1 + \theta) < 0 \end{cases}$   $\eta$ ：  $0 < \eta < 1$ ，其中  $\omega_1$ 、 $\theta$  定义与花纹块定义类同。

花纹槽有顺向槽和逆向槽之分，当花纹槽的走向与行进方向一致时，花纹槽的封闭



# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

端先着地，称之为顺向。这时腔内空气随着轮胎的前进被挤到中央，然后在开口端释放，引起的噪声较小。反之，由逆向槽引起的噪声较大。故公式(21)需作以下修正：

$$(\rho_s'(t) \cdot \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha) \cdot \sin \alpha \quad 0 < \alpha < 180^\circ \quad (22)$$

式中： $\varepsilon$ 为正的修正量系数；当 $\alpha$ 为锐角时为逆向槽，槽的修正量噪声较大，当 $\alpha$ 为钝角时为顺向槽，槽的修正量噪声较小。

## 4.5.3 模型结果分析

### (1) 花纹块模型分析

从花纹块发声的数学公式： $P_{(t)} = g_b A_b \sin(\omega_b + \theta)$  (23)

$$\text{式中：} g_b = \begin{cases} 1 & \sin(\omega_b + \theta) \geq 0 \\ \delta & \sin(\omega_b + \theta) < 0 \end{cases} \quad (24)$$

$\omega_b$ 是车速和块参数的函数， $\theta$ 为相位角， $A_a = \alpha \sqrt{s}$ 为声压振幅，与花纹块面积的平方根成正比。在此计算中，采用了声点阵法进行分析，认为花纹块由许多点声源组成，那么，花纹块的发声是由这些点声源进行叠加而成的。若两花纹块包含的点声源数相同，由于一个花纹块的点声源之相位差极小，故认为这两个花纹块的声压相同。由此我们得到轮胎花纹发声的第一个结论，花纹块的发声只与花纹块的面积有关，而与花纹块的形状无关。

### (2) 花纹槽模型分析

于匀速行驶的汽车，不同的槽仍具有相同的体积压缩比<sup>[34]</sup>，也就是说槽内各声点阵产生的声振幅是相等的，因而槽体积越大，总声压也越大。在实际花纹设计中，槽的深度有一定要求可以认为是在二常数范围内，所以花纹槽的发声与槽的长度和宽度有关，与它的深度基本无关。此外槽的发声还与其走向有关。花纹槽的基本样式为横槽、斜槽和纵槽。对于横沟槽，在汽车行驶中不断地类似脉冲式喷气和吸声，产生泵浦噪声。对于有口角度的斜沟槽，由于接地时间比横沟槽长，空气流的压缩和释放也较慢，声压幅值就较小。而对于纵沟槽，由于车辆行驶时槽内空气受压随时间基本不变，只产生声压的“直流成分”，可以理想地认为纵沟槽不发声。

## 4.5.4 模型的改进

### 花纹块优化降噪原理

花纹块发声的数学描述： $P_{(t)} = g_b A_b \sin(\omega_b + \theta)$  (25)

$$\text{式中：} g_b = \begin{cases} 1 & \sin(\omega_b + \theta) \geq 0 \\ 0.3 \sim 0.5 & \sin(\omega_b + \theta) < 0 \end{cases} \quad (26)$$

$\omega_b$ 是车速和块参数的函数， $\theta$ 为相角， $A_b = \alpha \sqrt{s}$ 为声压振幅。与花纹块面积的平方根成正比。因而，在花纹低噪优化设计中，在确保轮胎的耐磨性能和力的同时，应尽量使用较小花纹块，其大小不等且不成整数比的花纹块，这样取舍可以使噪声能量分散在各频段上，从而可达到降低噪声声压级的目的。

## 4.5.5 花纹槽低噪优化原理

花纹槽的设计参数较多，主要有：花纹槽的宽度、长度、走向和开口形式等。

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

$$\text{花纹槽发声的描述}^{[36]} P_s(t) = \eta(\hat{p} \sin \alpha) \cdot g_s A_b \sin(\omega_s + \beta) \quad (27)$$

$$\text{式中: } g_b = \begin{cases} 1 & \sin(\omega_b + \theta) \geq 0 \\ 0.3 \sim 0.5 & \sin(\omega_b + \theta) < 0 \end{cases} \quad (28)$$

$\hat{p}$  为花纹槽面积的函数<sup>[37]</sup>,  $\alpha$  为槽与轮胎周线的夹角,  $\eta$  为槽逆顺向参数, 顺时取 1, 逆向时取 1.3 ~ 1.5, 其取值与地面刚度有关,  $\omega_s$  为车速和槽宽度的函数,  $\beta$  为起始相位角。

从 (28) 中可以看出花纹槽的发声与槽面积和槽走向有关, 可以通过调整槽面积和槽走向来降噪。研究表明顺向沟槽发出的噪声较逆向沟槽噪声小, 选取沟槽走向时应尽量使其与车行进方向同向。

## 五、模型的解析

### 5.1 模型的优点

我们把轮胎花纹对汽车轮胎的性能的影响分为三个板块, 建立了轮胎花纹的三个模型。

第一个即轮胎花纹与抗滑关系的物理模型, 我们建立了液膜厚度方程, 在胎面单元随时间下降的过程中, 考虑任意时刻的液膜厚度。再在该基础上, 考虑胎面和路面处于混合润滑状态下, 液膜小于某个临界值时的承载力方程。再对模型进行相关性分析得出了不同花纹的抗滑性能的优劣。通过物理性状强有力的分析了不同花纹的抗滑排水性能。

第二个即轮胎花纹的耐用模型, 我们从轮胎的热量散失、轮胎的花纹磨损两方面建立模型, 首先建立了计算散热系数方程, 采用线性回归的方法求解, 得到反应活化能和频率因子, 又改进模型提出重量加权平均活化能。而后利用图像法简明得出轮胎花纹的多种磨损。

第三个即花纹的噪声模型, 我们从声学 and 力学的基础上探讨了花纹块与噪声。控制变量得出花纹块的面积与噪声强度成正比。又探讨了花纹槽与噪声。

最后总结 3 个模型利用线性相关性得出不同的花纹的性能及其适合的范围。

### 5.2 模型的缺点

未考虑完全所有的轮胎花纹, 本文提取了部分具有代表性的花纹进行处理。而且轮胎的花纹分类没有明确的界限, 可能存在误差。

由于本文在数据编写出的大量数据使通过网上搜集的, 在以后的实际检验中可能还需要做更进一步的改动。

由于各个模型胎面花纹分类有所区别, 得到的结果可能不全面。

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

## 参考文献

- [1] 搜狗百科, <http://baike.sogou.com/v33661963.htm>, 2014 年 4 月 18 日
- [2] 轮胎知识大扫盲之 浅谈各种轮胎花纹作用, <http://linyi.auto.sohu.com/20130416/n372812746.shtml>, 2014 年 4 月 18 日
- [3] 太平洋汽车网, <http://www.pcauto.com.cn/drivers/253/2537591.html>, 2014 年 4 月 20 日
- [4] 百度百科, [http://baike.baidu.com/link?url=zjYo7KhZJsrVYfiKR\\_DH9wUn5OVWPdwxYAFiZfinsSjlU-MxSr9XJw3ZTUfY5pE](http://baike.baidu.com/link?url=zjYo7KhZJsrVYfiKR_DH9wUn5OVWPdwxYAFiZfinsSjlU-MxSr9XJw3ZTUfY5pE), 2014 年 4 月 20 日
- [5] 肖永清, 轮胎花纹与行车安全, 安全行车, 24-25
- [6] 张彦辉, 刘小君, 王伟等, 路面上胎面花纹对轮胎附着性能的影响, 农业工程报, 2007 年 6 月, 33-36
- [7] Pati Nadir, Cheng H S. Application of Average Flow Model to Lubrication Between Rough Sliding Surfaces[J]. Journal of Lubrication Technology 1979
- [8] Green wood J A, Tripp J H. The contact of norminally flat Surdface[J]. Proc. Inst. Mesh. Engr. 1971
- [9] 庄继德.现代汽车轮胎技术[M].北京理工大学出版社,2001.
- [10] 路面上胎面花纹对轮胎附着性能的影响
- [11] 颜超,杨卫民, [具有细致花纹块的轮胎网格生成及负荷分析](#)[J]. 轮胎工业, 2008, 28: 664. 668
- [12] 付玉升, 陈照强, 李宝筏等, 基于汽车轮胎花纹的空间曲面造型研究[J]. 农业机械学报, 2005, 36(5): 57-58
- [13] 百度文库, [http://wenku.baidu.com/link?url=c7pSzX-9G8nLMCLJCqeRNcWyUYeDfrgHYRe2uNXUKMBcLvKKuUOZ-3HR8qz\\_-KOHvFq9MLdLBdG677KyxxihJJuv8JtuAWRK\\_DOI4JUSPxW](http://wenku.baidu.com/link?url=c7pSzX-9G8nLMCLJCqeRNcWyUYeDfrgHYRe2uNXUKMBcLvKKuUOZ-3HR8qz_-KOHvFq9MLdLBdG677KyxxihJJuv8JtuAWRK_DOI4JUSPxW), 2014 年 4 月 18 日
- [14] Medalia A I, H eat generation in elast omer compounds: causes and ef fects [J], Rubber Chemist ry an d Technology, 1991,64: 481-4911
- [15] 危银涛, 轮胎热力学分析及耐久性评价[ D], 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 19981
- [16] 邢涛, 钟萍, [橡胶散热洗漱测量方法的研究](#), 2001 年第 48 卷, 266
- [17] 孔祥谦, 有限单元法在传热学中的应用[ M], 北京: 科学出版社, 19981 8-1991
- [18] 赵巍, 汪琦, 邹宗树等, [塑料和橡胶垃圾的热解机理及动力学分析](#), 工程热物理学报, 2008 年 11 月
- [19] 戴贤明, [废轮胎热解过程及产物特性试验研究](#), 2009 年 5 月 22 日
- [20] 李余增, 热分析[M], 北京: 清华大学出版社, 1987: 222-225
- [21] 杨海平, 油棕废弃物热解的实验及机理研究[D], 武汉: 华中科技大学, 2005.
- [22] 王贤华, 生物质流化床热解液化实验研究及应用[D], 武汉: 华中科技大学, 2007
- [23] 彭旭东, 郭孔辉, 丁玉华等, [轮胎磨损的影响因素](#), 橡胶工业, 2003 年第 50 卷第十期, 619
- [24] 彭旭东, 谢友柏, 郭孔辉, 汽车轮胎磨损机理的研究[J], 润滑与密封, 1999 (6): 50-52

# 第七届数学中国数学建模网络挑战赛

#4576

- [25] Muhr A H, Robert A D. Rubber abrasion and wear[J], Wear, 1992, 158: 213-228
- [26] Mo ri K, Kaneda S, Kanae K, et al Rubber Chem.Technol, 1994, 67: 797~ 805
- [27] 王野平, [论轮胎的磨损](#), 汽车技术, 1999 年第 6 期
- [28] H Luper, Numerical Prediction of car tire wear[R], Helmond Chassis and Transport system Department, TNO Automotive, 2003
- [29] Fran sesco B ragh in, Tire Wear Validation and Sens itiv ity Analys is[J], Meccanica, 2006, ( 41 ): 143- 156
- [30] 方庆红, 路金林, 赵立群, 轮胎磨损分析中接地能量损失的有限元计算模型研究[J], 沈阳化工学报, 2002, 9( 3 ): 228
- [31] 黄海波, 靳晓雄, 丁玉兰, 轮胎偏磨损机理及数值解析方法研究[J], 同济大学学报, 2006, 2( 34 ): 234
- [32] 董保利, 左曙光, 吴旭东, 轮胎均匀磨损建模与仿真, 计算机仿真, 2009 年 2 月, 274-276
- [33] 百度文库, 轮胎花纹噪声的发声机理,  
[http://wenku.baidu.com/link?url=-AHREYh6kPjigKfRy\\_8nXdImfphXIpyulrSs5OgII7ufYVb8hKSnyq2Zq1lr1224kMLkxiRw\\_g1cV\\_d8KH3aynSAIbeidowhDFAsBe-w2Ly](http://wenku.baidu.com/link?url=-AHREYh6kPjigKfRy_8nXdImfphXIpyulrSs5OgII7ufYVb8hKSnyq2Zq1lr1224kMLkxiRw_g1cV_d8KH3aynSAIbeidowhDFAsBe-w2Ly), 2014 年 4 月 19 日
- [34] 陈义庆, 低噪轮胎花纹参数优化研究,  
<http://www.doc88.com/p-385773619792.html>, 2014 年 4 月 19 日
- [35] 肖旺新.魏显威.王彦琴 基于胎/路纹理耦合的交通噪声控制新方法[期刊论文]-中外公路 2010(1)
- [36] L\_H, 肖丁, 尼斯基, 声音·人·建筑, 中国环境工业出版社, 1985 年 2 月
- [37] 陈理君, 杨立, 钱业青, 轮胎花纹噪声的发声模型轮胎工业, 1999 年第 19 卷第 10 期