

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

前置知识

讲解024 - 随机选择算法，本节课题目6需要

讲解108 - 树状数组，理解康托展开需要

讲解110 - 线段树，理解逆康托展开需要

本节课讲述

康托展开（题目1）

逆康托展开（题目2）

约瑟夫环问题（题目3、题目4）

完美洗牌算法（题目5、题目6）

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目1

康托展开

数字从1到n，可以有很多排列，给出具体的一个排列，求该排列的名次，答案对 998244353 取模

$1 \leq n \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P5367>

$$\text{排列 } S \text{ 的排名} = \sum_{i=1}^n \text{rightSmall}(S[i]) \times (n - i)!$$

注意排名从0开始，不从1开始

利用树状数组即可做到时间复杂度最优 $O(n * \log n)$ ，当然用线段树也可以，但是常数时间稍大

课上重点图解

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目2

逆康托展开

数字从1到n，可以有很多排列，给定一个长度为n的数组s，表示具体的一个排列
求出这个排列的排名假设为x，打印第x+m名的排列是什么

$$1 \leq n \leq 10^5$$

$$1 \leq m \leq 10^{15}$$

题目保证s是一个由1~n数字组成的正确排列，题目保证x+m不会超过排列的总数

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/U72177>

依然利用康托展开公式，但实际过程中排名往往比较大，又不能取余，所以需要用阶乘进制来表示排名
排名用阶乘进制来表示，然后根据阶乘进制每一位状态，可以求出排列的每一位字符，这就是逆康托展开
这个过程利用线段树才能做到时间复杂度最优 $O(n * \log n)$ ，这个技巧叫线段树二分，不推荐树状数组

课上重点图解

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目3

约瑟夫环问题

一共有 $1 \sim n$ 这些点，组成首尾相接的环

从1号点从数字1开始报数，哪个节点报到数字 k ，就删除该节点

然后下一个节点从数字1开始重新报数，最终环上会剩下一个节点

返回该节点的编号

$1 \leq n, k \leq 10^6$

测试链接：<https://www.luogu.com.cn/problem/P8671>

环的大小用 c 表示， $c = 1$ 时， $ans = 1$ ，利用如下公式依次计算 ans ，当 $c = n$ 时， ans 就是答案

$$ans = (ans + k - 1) \% c + 1$$

课上重点图解

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目4

约瑟夫环问题加强

一共有 $1 \sim n$ 这些点，组成首尾相接的环，游戏一共有 $n-1$ 轮，每轮给定一个数字 $arr[i]$

第一轮游戏中，1号点从数字1开始报数，哪个节点报到数字 $arr[1]$ ，就删除该节点

然后下一个节点从数字1开始重新报数，游戏进入第二轮

第 i 轮游戏中，哪个节点报到数字 $arr[i]$ ，就删除该节点

然后下一个节点从数字1开始重新报数，游戏进入第 $i+1$ 轮

最终环上会剩下一个节点，返回该节点的编号

$1 \leq n, arr[i] \leq 10^6$

来自真实大厂笔试，对数器验证

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目5

完美洗牌算法

给定数组 arr ，给定某个范围 $arr[l..r]$ ，该范围长度为 n ， n 是偶数

因为 n 是偶数，所以范围可以分成左右两部分， $arr[l_1, l_2, \dots, l_k, r_1, r_2, \dots, r_k]$ ， $k = n / 2$

请把 $arr[l..r]$ 范围上的数字调整成 $arr[r_1, l_1, r_2, l_2, \dots, r_k, l_k]$ ，其他数字不变

要求时间复杂度 $O(n)$ ，额外空间复杂度 $O(1)$ ，对数器验证

- 1，左右部分交换的原地调整实现
- 2，下标编号的变化分析 + 下标循环怼的基本思路
- 3，一些特殊长度，**可以利用一个数学结论**，就能找到所有子环的起点，分批进行下标循环怼
- 4，这些特殊长度，**类似某种进制**，任意偶数长度都可以从大到小拆分成特殊长度，使问题得到解决
- 5，时间复杂度和空间复杂度分析

课上重点图解

康托展开、约瑟夫环、完美洗牌

题目6

摇摆排序ii(满足全部进阶要求)

给定一个数组arr，重新排列数组，确保满足： $arr[0] < arr[1] > arr[2] < arr[3] > \dots$

题目保证输入的数组一定有解，要求时间复杂度 $O(n)$ ，额外空间复杂度 $O(1)$

测试链接：<https://leetcode.cn/problems/wiggle-sort-ii/>

满足全部进阶要求的做法：

随机选择算法 + 完美洗牌算法 + 题目分析