上海交通大学
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

考虑时间效应的虚内键本构及其在油气储层演化分析中的应用

汇报人： 刘子寒（硕士研究生） zihanliu@sjtu.edu.cn
导　师： 张振南 教授 zhennanzhang@sjtu.edu.cn
单　位： 上海交通大学土木工程系

2020年11月14日

目录 Contents

目录 Contents

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

1 背景

- 岩石类材料的时变效应可能会威胁工程结构的安全性和稳定性

- 蠕变源自亚临界裂纹的增长
- 亚临界裂纹的增长与以下方面有关：
  - 应力腐蚀 (Stress corrosion)[1]
  - 静态疲劳 (Static fatigue)[2]

- 为了有效地模拟蠕变行为，关键是如何将**微观裂纹增长与宏观本构模型联系起来**[1]

→ 虚内键(VIB)理论

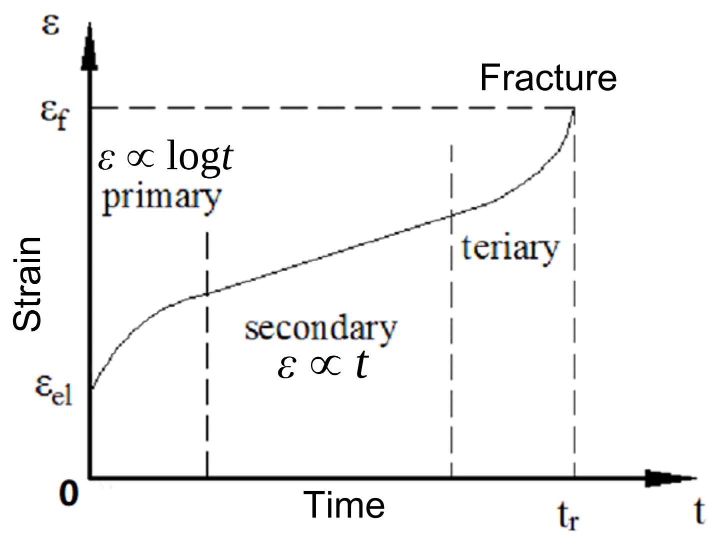

Fig. 蠕变断裂应变-时间曲线

[1] Brantut N, Heap MJ, Meredith PG, Baud P. Time-dependent cracking and brittle creep in crustal rocks: a review. J Struct Geol 2013;52:17–43.
[2] Scholz CH. Mechanism of creep in brittle rock. J Geophys Res 1968;73(10):3295–302.

目录 Contents

2 虚内键(VIB)理论简介(Gao and Klein, 1998)

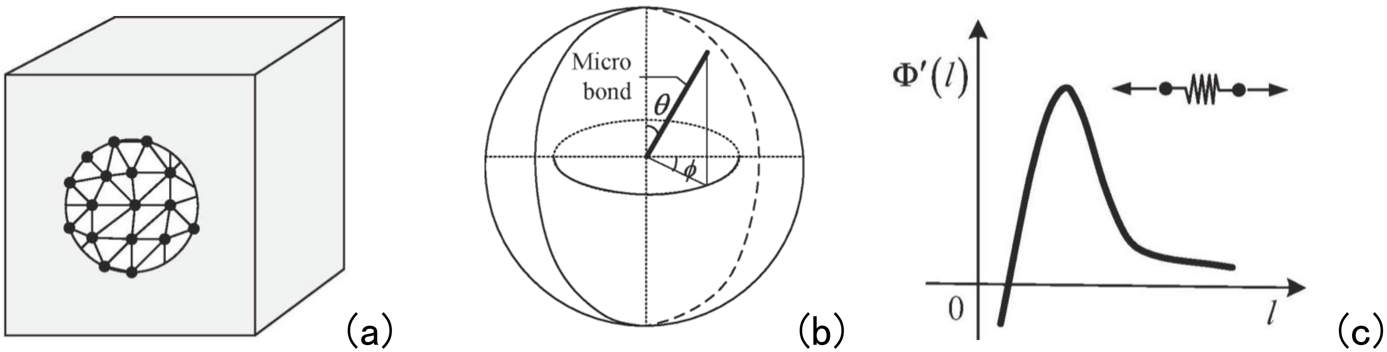

Fig. VIB建模方法
(a)VIB固体的代表性单元；(b)球坐标系中的虚内键；(c)内聚力法则

根据Cauchy-Born规则，键变形后的长度为 $l = l_0\sqrt{\xi^{\mathrm{T}}\bar{F}^{\mathrm{T}}\bar{F}\xi}$

$\bar{F}$：代表单元的变形梯度
ξ：参考构型中键的方向向量
E_{IJ}：格林-拉格朗日应变张量

$$W = \frac{1}{V}\langle\Phi(l)\rangle \quad\rightarrow\quad S_{IJ} = \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}} \quad\rightarrow\quad K_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}}$$

代表单元的总应变能密度　　Piola–Kirchhoff应力张量　　切线模量张量

V：代表性单元的体积；　积分算子 $\langle\cdots\rangle = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\cdots)D(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi & \text{三维} \\ \int_0^{2\pi}(\cdots)D(\theta,\phi)d\theta & \text{二维} \end{cases}$

2 虚内键(VIB)理论简介(Gao and Klein, 1998)

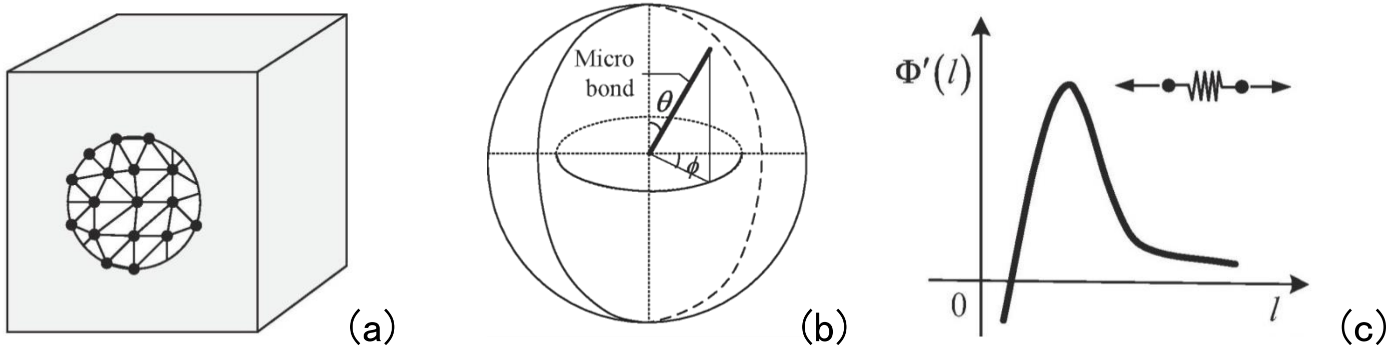

Fig. VIB建模方法

(a)VIB固体的代表单元；(b)球坐标系中的虚内键；(c)内聚力法则

优点：

- 微观断裂机制自然地包含在宏观本构关系中
- 微观键本质上是一维的，因此可以很容易地将流变规律考虑进来

目录 Contents

3 粘-超弹性VIB模型

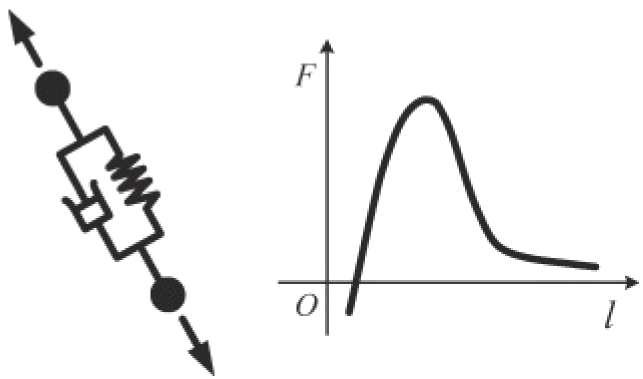

Fig.考虑时间效应的的超弹性键和粘性键组成的混合键

- 考虑时间效应的超弹性开尔文(THK)键势[3]

$$\psi\left(l,\dot{l}\right)=\Phi\left(l,t\right)+\Psi\left(\dot{l},l\right)$$

$\dot{l}$为键长变化率，$\dot{l}=\mathrm{d}l/\mathrm{d}t$

$\Phi\left(l,t\right)$为超弹性键的势能

Piola–Kirchhoff应力张量 $S_{IJ}=\dfrac{\partial W}{\partial E_{IJ}}$

切线模量张量 $K_{IJKL}=\dfrac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}}$

切线粘性张量 $K_{IJKL}=\dfrac{\partial S_{IJ}}{\partial \dot{E}_{KL}}$

[3] Wang, Yujie and Zhang, Z. "Numerical simulation of creep fracture with internal time-dependent hyperelastic-Kelvin cohesive bonds." *Engineering Fracture Mechanics*, 213(2019):206-222.

3 粘-超弹性VIB模型

- 对于小变形情况

$$S_{IJ} \Rightarrow \sigma_{ij},\, E_{IJ} \Rightarrow \varepsilon_{ij}$$

键长及其变化率可以表示成

$$l = l_0 + l_0 \xi_i \varepsilon_{ij} \xi_j, \quad \dot{l} = l_0 \xi_i \dot{\varepsilon}_{ij} \xi_j$$

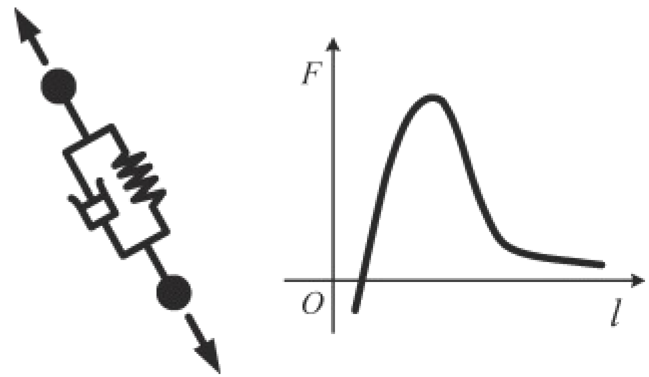

Fig.考虑时间效应的的超弹性键和粘性键组成的混合键

- 应力张量

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V}\left\langle \frac{\partial \Phi(l,t)}{\partial l} l_0 \xi_i \xi_j + \frac{\partial \Psi(\dot{l},l)}{\partial l} l_0 \xi_i \xi_j \right\rangle$$

- 切线模量张量

$$K_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{V}\left\langle \frac{\partial^2 \Phi(l,t)}{\partial l^2} l_0^2 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \frac{\partial^2 \Psi(\dot{l},l)}{\partial l^2} l_0^2 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \right\rangle$$

- 切线粘性张量

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}} = \frac{1}{V}\left\langle \frac{\partial^2 \Psi(\dot{l},l)}{\partial l \partial \dot{l}} l_0^2 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \right\rangle$$

$$\langle \cdots \rangle = \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cdots) D(\theta,\phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi & \text{3D} \\ \int_0^{2\pi} (\cdots) D(\theta,\phi) \, d\theta & \text{2D} \end{cases}$$

目录 Contents

4 参数标定

- 弹性势和粘性势的物理参数

$$A=\left.\frac{\partial^2\Phi(l,t)}{\partial l^2}\right|_{\substack{l=l_0\\t=0}},\quad B=\left.\frac{\partial^2\Psi(\dot{l},l)}{\partial l^2}\right|_{\substack{\dot{l}=0\\l=l_0}},\quad \tilde{\eta}=\left.\frac{\partial^2\Psi(\dot{l},l)}{\partial l\partial\dot{l}}\right|_{\substack{\dot{l}=0\\l=l_0}}$$

$$\psi(l,\dot{l})=\Phi(l,t)+\Psi(\dot{l},l)$$

A：表示超弹性键的初始刚度
B：表示粘性键的初始刚度
$\tilde{\eta}$：表示粘性键的初始粘度

考虑此时的VIB固体的代表性单元处于

$$\varepsilon=0\ \&\ \dot{\varepsilon}=0$$

$$K_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{1}{V}\left\langle\frac{\partial^2\Phi(l,t)}{\partial l^2}l_0^2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l+\frac{\partial^2\Psi(\dot{l},l)}{\partial l^2}l_0^2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\right\rangle \Rightarrow K_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{1}{V}\left\langle(A+B)l_0^2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\right\rangle$$

$$C_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\dot{\varepsilon}_{kl}}=\frac{1}{V}\left\langle\frac{\partial^2\Psi(\dot{l},l)}{\partial l\partial\dot{l}}l_0^2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\right\rangle \Rightarrow C_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\dot{\varepsilon}_{kl}}=\frac{1}{V}\left\langle\tilde{\eta}l_0^2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\right\rangle$$

4 参数标定 弹性势参数

对于线弹性连续介质，三维胡克定律的形式为

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{31}\end{bmatrix}^T = \mathrm{Q}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & \gamma_{12} & \gamma_{23} & \gamma_{31}\end{bmatrix}^T$$

$$\mathrm{Q} = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symmetric} & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}$$

$$K_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{V}\left\langle (A+B) l_0^2 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{Q}_{\mathrm{VIB}} = \frac{4\pi (A+B) l_0^2}{5V}\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symmetric} & & 1/3 & 0 & 0 \\ & & & & 1/3 & 0 \\ & & & & & 1/3 \end{bmatrix}$$

通过VIB固体和连续介质之间的等价关系 $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_{\mathrm{VIB}}$

$$\begin{cases} \dfrac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} = \dfrac{4\pi (A+B) l_0^2}{5V} \\ \dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1-2v}{2(1-v)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$A+B = \frac{3EV}{2\pi l_0^2} \qquad v = 0.25$$

4 参数标定 粘性势参数

材料的宏观粘度系数定义为 $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$

类似于三维胡克定律，可知 $[\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T = \Omega[\dot{\varepsilon}_{11} \quad \dot{\varepsilon}_{22} \quad \dot{\varepsilon}_{33} \quad \dot{\gamma}_{12} \quad \dot{\gamma}_{23} \quad \dot{\gamma}_{31}]^T$

$$\Omega = \frac{\eta(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symmetric} & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix}$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}_{kl}} = \frac{1}{V}\left\langle \tilde{\eta} l_0^2 \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l \right\rangle$$

$$\Rightarrow \Omega_{\text{VIB}} = \frac{4\pi\tilde{\eta} l_0^2}{5V} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Symmetric} & & 1/3 & 0 & 0 \\ & & & & 1/3 & 0 \\ & & & & & 1/3 \end{bmatrix}$$

通过VIB固体和力学连续介质之间的等价关系 $\Omega = \Omega_{\text{VIB}}$

$$\begin{cases} \dfrac{\eta(1-v)}{(1+v)(1-2v)} = \dfrac{4\pi\tilde{\eta} l_0^2}{5V} \\ \dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1-2v}{2(1-v)} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\tilde{\eta} = \frac{3\eta V}{2\pi l_0^2} \qquad v = 0.25$$

4 参数标定

与三维情况类似，二维状态下的参数可以推导为

$$A+B=\frac{3E_0V}{2\pi l_0^2}=\begin{cases}\dfrac{3EV}{2\pi l_0^2} & \text{平面应力}\\[2ex] \dfrac{8EV}{5\pi l_0^2} & \text{平面应变}\end{cases}$$

$$\tilde{\eta}=\frac{3\eta V}{2\pi l_0^2}=\begin{cases}\dfrac{3\eta V}{2\pi l_0^2} & \text{平面应力}\\[2ex] \dfrac{8\eta V}{5\pi l_0^2} & \text{平面应变}\end{cases}$$

目录 Contents

5 数值实现

整个系统的控制方程 $\mathrm{M}\ddot{\mathrm{u}}+\mathrm{F}(\mathrm{u},\dot{\mathrm{u}})=\mathrm{R}$

通过中心差分法

$$\mathrm{u}_1=\mathrm{u}_0+\Delta t\left[(1-\theta)\dot{\mathrm{u}}_0+\theta\dot{\mathrm{u}}_1\right]$$

$$\dot{\mathrm{u}}_1=\dot{\mathrm{u}}_0+\Delta t\left[(1-\theta)\ddot{\mathrm{u}}_0+\theta\ddot{\mathrm{u}}_1\right]$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\theta^2\Delta t^2}\mathrm{M}\mathrm{u}_1+\mathrm{F}_1(\mathrm{u}_1,\dot{\mathrm{u}}_1)=\mathrm{R}_1+\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\mathrm{R}_0+\frac{1}{\theta^2\Delta t^2}\mathrm{M}\mathrm{u}_0+\frac{1}{\theta^2\Delta t}\mathrm{M}\dot{\mathrm{u}}_0-\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\mathrm{F}_0(\mathrm{u}_0,\dot{\mathrm{u}}_0)$$

然后使用Newton-Raphson方法进行求解

谢 谢！