数学分析—期末考试

2013/2014 学年第二学期　考试形式 闭卷　课程名称 数学分析
考试时间 2014/06/25　　　　任课教师　苗栋　孙永忠

班级 ________　学号 __________________ 姓名 ____________

题号	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	总分
得分									

试卷声明：

1).试题凡涉及“是, 否”判断时, 均需给出理由;

2).为记号简洁计, $\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)dx$.

I. （10×2分）

1). 求极限$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}}{x}$.　　2). 极限$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ 是否存在.

II. （20分）设f为周期2π的函数, 且当$x \in [-\pi, \pi)$时, $f(x) = x$.
1). 求f的Fourier级数; 2). f的Fourier级数在$[-\pi, \pi]$上是否一致收敛?

III. （20分）考虑函数序列$f_n(x) = x^n(1-x)^n$, $x \in [0,1]\,(n \in \mathbb{N})$.
1). 任给自然数n, 求f_n在$[0,1]$上的最大值;
2). 求f_n的逐点极限f;
3). 证明$f_n \rightrightarrows f$.

IV. （15分）设$\mathscr{A} = \{(0,0)\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin\frac{1}{x}, x \in (0,1]\}$.
1). 求$\overline{\mathscr{A}}$; 2). $\mathscr{A}$是否为道路连通集?

V. （15分）判断如下级数是否为某Riemann可积函数的Fourier级数：
1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^n}$ ； 2). $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\ln n}$.

VI. （10分）设$\mathscr{V}$是内积空间$(C[0,1],\langle\cdot,\cdot\rangle)$的有限维线性子空间，这里$\langle f,g\rangle := \int_0^1 fg$. 记

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}.$$

证明: $\exists \phi \in \mathscr{V}$ s.t. $\|\phi\|_2 = 1$ 且$\|\phi\|_\infty \geq \sqrt{\dim \mathscr{V}}$.

VII. （8分）求极限$\lim_{n\to\infty} n^2(\int_0^1 \sqrt[n]{1+x^n} - 1)$.

VIII. （12分）设$\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$. 证明: 存在区间$I \subset [0,1]$ s.t.

$$\int_I f = \int_I g = 1/2.$$