数学实验与实践

求导运算

本次课主要内容

- 一阶导数、高阶导数
- 偏导数
- 雅克比矩阵
- 向量求导
- 参数方程求导
- 隐函数求导
- 数值微分
- 极值
- 方程组的根
- Taylor展开
- 单调性

实验目的

1. 进一步理解导数概念及几何意义;

2. 学习MatLab的求导命令与求导法。

实验内容

- 学习MATLAB命令
- 导数概念
- 求一元函数的导数
- 求多元函数的偏导数
- 求高阶导数或高阶偏导数
- 求隐函数所确定函数的导数与偏导数

一 函数求导

1. Matlab求导命令diff调用格式：

diff(f(x)), 求 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$；

diff(f(x), n), 求 $f(x)$ 的n阶导数 $f^{(n)}(x)$；

直接输入函数表达式

```
syms x;
diff(2*x+sin(x))
```

```
syms x;
diff(2*x+sin(x), 5)
```

一 函数求导

diff(f(x, y), x),

求$f(x, y)$对x的一阶偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ；

diff(f(x， y), x,n),

求$f(x, y)$对x的n阶偏导数 $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$；

一 函数求导

matlab求雅可比矩阵命令jacobian，调用格式：

jacobian([f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)], [x, y, z])

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. 导数的概念

导数为函数的变化率，其几何意义是曲线在一点处的切线斜率。

1). 函数在一点导数是一个极限值

一 函数求导

例1. 设函数$f(x)=e^x$，用定义计算$f'(0)$；

解：$f(x)$在某一点x_0的导数定义为极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

我们记$h=\Delta x$，输入命令：

```
syms x;
diff(exp(x))
```

```
syms h; limit((exp(0+h)-exp(0))/h, h, 0)
```

ans=1　可知结果$f'(0)=1$。

一 函数求导

2) 导数的几何意义是曲线的切线斜率

例2 画出$f(x)=e^x$在x=0处（P(0, 1)）的切线及若干条割线，观察割线的变化趋势.

解：在曲线$f(x)=e^x$上另取一点$M(h, e^h)$，则PM的方程是：

$$\frac{y-1}{x-0}=\frac{e^h-1}{h-0} \quad 即 \quad y=\frac{e^h-1}{h}x+1$$

一 函数求导

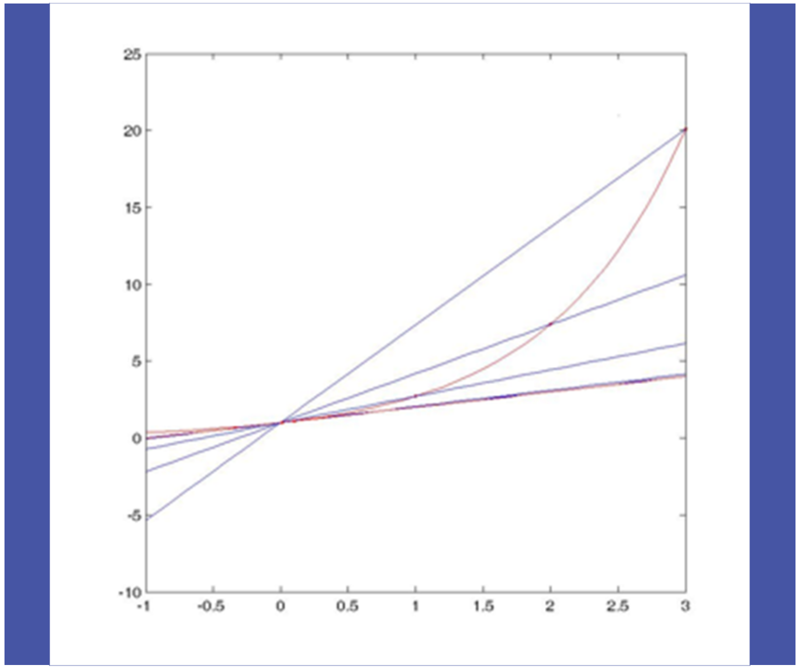
取h=3, 2, 1, 0.1, 0.01，分别作出几条割线.

$$y=\frac{e^h-1}{h}x+1$$

```
function zgexian
h=[3, 2, 1, 0.1, 0.01];    %让h逐渐接近0
a=(exp(h)-1)./h;       %割线斜率
x=-1: 0.1: 3;   plot(x,exp(x),'r');
hold on
for i=1: 5;
plot(h(i),exp(h(i)),'r.')
plot(x,a(i)*x+1)      %割线
hold on
end
plot(x, x+1, 'r')      %作出y=exp(x)在x=0处的切线y=1+x
axis square
```

一 函数求导

从图上看，随着M与P越来越接近，割线PM越来越接近曲线的切线.



一 函数求导

3. 求一元函数的导数

1）y=f(x)的一阶导数

例3. 求 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的导数；

解：输入指令

```
syms x;
dy_dx=diff(sin(x)/x)
```

此处不能用符号dy/dx，因为“/”代表除法

得结果：dy_dx=cos(x)/x-sin(x)/x^2

一 函数求导

例4. 求y=ln(sin$x$)的导数

解：输入指令

```
syms x;
dy_dx=diff(log(sin(x)))
```

得结果：dy_dx=cos(x)/sin(x)

在matlab中，函数lnx用log(x)表示，log10(x)表示lgx。

一 函数求导

例5. 求$y=(x^2+2x)^{20}$的导数；

解：输入指令

```
syms x;
dy_dx=diff((x^2+2*x)^20)
```

得结果：dy_dx=20*(x^2+2*x)^19*(2*x+2)

一 函数求导

例6. 求下列函数的导数：

$y_1=\sqrt{x^2-2x+5}$； $y_2= \cos(x^2)+ 2\cos(2x)$；

$y_3= 4^{\sin x}$； $y_4 = \ln(\ln x)$.

解： 输入指令

```
syms a x;
a=diff([sqrt(x^2-2*x+5), cos(x^2)+2*cos(2*x),
4^(sin(x)), log(log(x))])
```

Matlab函数可以对矩阵或向量操作。

一 函数求导

a =

[1/2/(x^2-2*x+5)^(1/2)*(2*x-2),

-2*sin(x^2)*x-4*sin(2*x),

4^sin(x)*cos(x)*log(4),

1/x/log(x)]

一 函数求导

2）参数方程确定的函数的导数

设参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 所确定的函数$y=f(x)$，

则$y=f(x)$的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ 。

一 函数求导

例7 设 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

```
syms a t;
dx_dt=diff(a*(t-sin(t)), t);
dy_dt=diff(a*(1-cos(t)), t);
dy_dx=dy_dt/dx_dt
```

dy_dx = sin(t)/(1-cos(t))

一 函数求导

4. 求多元函数的偏导数

例8 设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求u的一阶偏导数；

解：输入命令

```
syms x y z;
du_dx=diff((x^2+y^2+z^2)^(1/2), x)
du_dy=diff((x^2+y^2+z^2)^(1/2), y)
du_dz=diff((x^2+y^2+z^2)^(1/2), z)
```

```
du_dx=1/(x^2+y^2+z^2)^(1/2)*x
du_dy=1/(x^2+y^2+z^2)^(1/2)*y
du_dz=1/(x^2+y^2+z^2)^(1/2)*z
```

一 函数求导

设$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求u的一阶偏导数；

一个命令求多个偏导数：

```
a=jacobian((x^2+y^2+z^2)^(1/2), [x y z])
a =
 [x/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2), y/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2), z/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)]
b=gradient((x^2+y^2+z^2)^(1/2))
b =
x/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)
y/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)
z/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)
```

一 函数求导

例9. 求下列函数的导数：$z_1=\arctan(y/x)$; $z_2=x^y$ 。

解：输入指令

```
syms x y;
diff(atan(y/x), x)
```

ans = -y/x^2/(1+y^2/x^2)

```
syms x y;
diff(atan(y/x), y)
```

ans = 1/x/(1+y^2/x^2)

```
syms x y;
jacobian(atan(y/x), [x y])
```

ans=[-y/x^2/(1+y^2/x^2),   1/x/(1+y^2/x^2)]

一 函数求导

```
syms x y;
jacobian([atan(y/x), x^y], [x, y])
```

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

```
ans =
[-y/x^2/(1+y^2/x^2), 1/x/(1+y^2/x^2)]
[           x^y*y/x,          x^y*log(x)]
```

一 函数求导

5. 求高阶导数或高阶偏导数

例10 设 $f(x)=x^2e^{2x}$，求 $f^{(20)}(x)$；

解：输入命令

```
syms x ;
a=diff(x^2*exp(2*x), x, 20)
```

```
a =
99614720*exp(2*x)+20971520*x*exp(2*x)+1048576*x^2*exp(2*x)
```

一 函数求导

例11 设$z=x^6-3y^4+2x^2y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

解：输入命令

```
syms x y;
dz_dx=diff(x^6-3*y^4+2*x^2*y^2, x, 2)
dz_dy=diff(x^6-3*y^4+2*x^2*y^2, y, 2)
dz_dxdy=diff(diff(x^6-3*y^4+2*x^2*y^2, x), y)
```

```
dz_dx = 30*x^4+4*y^2
dz_dy = -36*y^2+4*x^2
dz_dxdy =8*x*y
```

一 函数求导

课堂练习：

总结$y=e^{-x}\cos x$的n阶导数规律，给出$y^{(n)}$的通项公式.

求$y=(x^2+2x)^{20}$的n阶导数；

```
syms x;
dy_dx=diff((x^2+2*x)^20, n)
```

一 函数求导

课堂练习：

$$z = \frac{x\sin y}{y\sin x}$$

1. 求z关于x的5阶偏导

2. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

一 函数求导

6. 求隐函数所确定函数的导数或偏导数

例12 设$\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=e$，求$\dfrac{dy}{dx}$；

解：$F(x, y)=\ln x+e^{-\frac{y}{x}}-e$，先求$F_x$，再求$F_y$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

```
syms x y;
df_dx=diff(log(x)+exp(-y/x)-exp(1), x)
df_dy=diff(log(x)+exp(-y/x)-exp(1), y)
dy_dx=-df_dx/df_dy
```

```
df_dx = 1/x+y/x^2*exp(-y/x)
df_dy = -1/x*exp(-y/x)
dy_dx = -(-1/x-y/x^2*exp(-y/x))*x/exp(-y/x)
```

一 函数求导

例13 设$\sin(xy)+\cos(yz)+\tan(xz)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$；

解：F(x, y, z)=sin(xy)+cos(yz)+tan(xz),

```
syms x y z;
a=jacobian(sin(x*y)+cos(y*z)+tan(x*z) , [x, y, z])
dz_dx=-a(1)/a(3)
dz_dy=-a(2)/a(3)
```

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$$

$$(F_x, F_y, F_z)$$

二 导数的应用

在高等数学课程中，导数的应用随处可见. 比如求极限时用到的洛必达法则，函数的Taylor展开式，函数的单调性和求极值等.

利用Matlab，我们可以很好地验证地上述理论.

二 导数的应用

验证洛必达法则

洛必达法则：如果$\lim\limits_{x\to a} f(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to a} g(\mathrm{x})=0$，在点a的某去心领域内，$f$ 和g均可导且$g'(x)\neq 0$，同时$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或无穷大，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则,主要用于解决$\dfrac{0}{0}$型和$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限问题.

二 导数的应用

例1. 求极限问题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$.

用limit命令直接计算：

```
syms x;
f=3^x-2^x;
g=x;
limit(f/g,x,0)
```

```
ans =

log(3)-log(2)
```

求导之后再用limit命令计算：

```
syms x;
f=3^x-2^x;
g=x;
limit(diff(f,x)/diff(g,x),x,0)
```

```
ans =

log(3)-log(2)
```

二 导数的应用

验证Taylor展开

Taylor展开定理：如果函数$f(x)$在$x=a$处存在任意阶导数，则在$x=a$的某个领域内，

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

二 导数的应用

求函数$f(x)$在$x=a$处的n-1阶幂级数展开式，所对应的Matlab命令：taylor(f, x,’ order',' expansionpoint')

例2. 观察$f(x)=e^x\sin x$在$x=1$处的幂级数展开式

```
syms x;
f=exp(x)*sin(x);
T2=taylor(f,x,2,1)
T3=taylor(f,x,3,1)
```

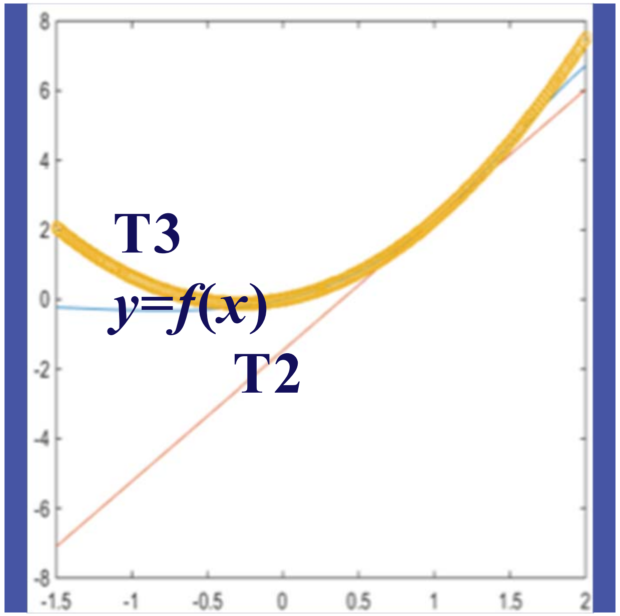
```
T2 =

exp(1)*sin(1)+(exp(1)*cos(1)+exp(1)*sin(1))*(x-1)


T3 =

exp(1)*sin(1)+(exp(1)*cos(1)+exp(1)*sin(1))*(x-1)+exp(1)*cos(1)*(x-1)^2
```

二 导数的应用

例2. 观察$f(x)=e^x\sin x$在$x=1$处的幂级数展开式.

改写函数并作图：

```
f=exp(x)*sin(x);
ezplot(f, [-1.5, 2])
hold on
ezplot('exp(1)*sin(1)+(cos(1)*exp(1)+exp(1)*sin
(1))*(x-1)',[-1.5, 2])
ezplot('exp(1)*sin(1)+(cos(1)*exp(1)+exp(1)*sin
(1))*(x-1)+cos(1)* exp(1)* (x-1)^2',[-1.5, 2])
```



二 导数的应用

求方程（组）的根

求代数方程 $f(x)=0$ 的根，可以用Matlab命令：solve(f, x).

输出结果即 $f(x)=0$ 的所有符号解或精确解.

比如求 $x^2+3x+2=0$ 的根.

```
syms x
f=x^2+3*x+2;
solve(f,x)
```

```
ans =

[ -2]
[ -1]
```

二 导数的应用

解方程组 $\begin{cases} f(x, y)=0 \\ g(x, y)=0 \end{cases}$，命令代码为：

[x, y]=solve(f, g, x, y).

比如求 $\begin{cases} x^2+6y+2=0 \\ x+y=b \end{cases}$ 的根.

```
syms x y b;
f=x^2+6*y+2;
g=x+y-b;
[x,y]=solve(f,g,x,y)
```

```
x =

[ 3-(-6*b+7)^(1/2)]
[ 3+(-6*b+7)^(1/2)]

y =

[ b-3+(-6*b+7)^(1/2)]
[ b-3-(-6*b+7)^(1/2)]
```

二 导数的应用

例3. 求$5\sin(2x)=e^x$的根.

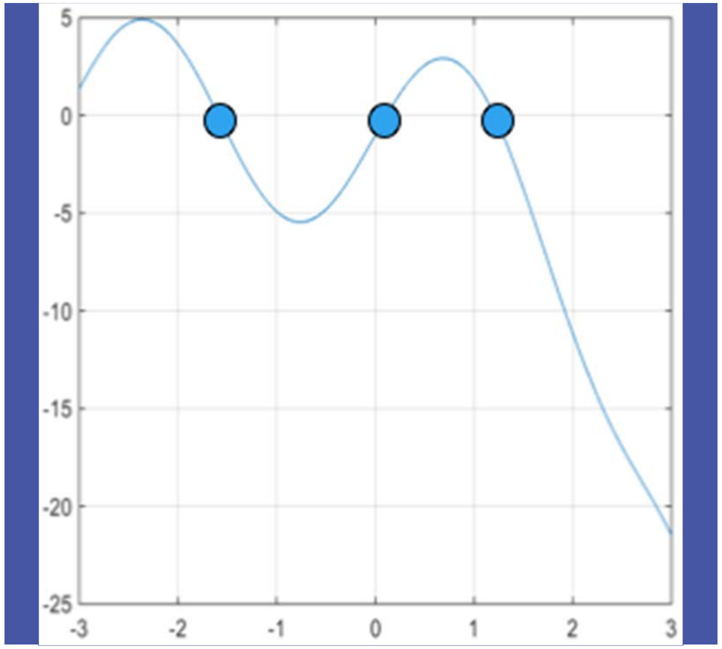
```
syms x;
f=5*sin(2*x)-exp(x);
solve(f,x)
```

```
ans =

.11291035698994542654891471155014
```

由于无法求出精确解，输出的是近似的数值解.

二 导数的应用

观察y= 5sin(2x) -e^x的图可以发现， 5sin(2x) -e^x=0的解并不唯一，因此在使用solve命令解方程时，要注意甄别输出的解是否满足要求.



二 导数的应用

课堂练习：

求$6x^5+4x^3+3x^2+x+7=0$的根.

```
syms x;
f=6*x^5+4*x^3+3*x^2+x+7;
solve(f,x)
```

```
ans =

[                                 -.97149748989767945217313482264702]
[ -.20911707617765352265630425648870-1.0257179797368662305148819620999*i]
[ -.20911707617765352265630425648870+1.0257179797368662305148819620999*i]
[  .69486582112649324874287166781221-.78296962908456449013891905804100*i]
[  .69486582112649324874287166781221+.78296962908456449013891905804100*i]
```

二 导数的应用

函数单调性与极值

讨论函数的单调性，就是求导数的正负区间，极值点要从导数正负区间的端点中筛选.

例4. 求$f(x)=x^3-2x+5$的单调区间与极值.

首先求函数的驻点，即导数为零的点.

输出结果为：$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

```
syms x;
f=x^3-2*x+5;
zhudian=solve(diff(f,x))
```

```
zhudian =

[  1/3*6^(1/2)]
[ -1/3*6^(1/2)]
```

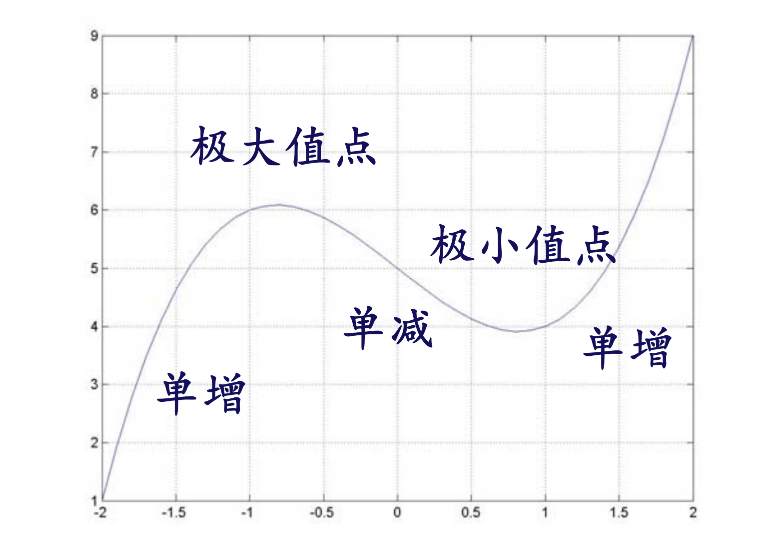
二 导数的应用

例4. 求$f(x)=x^3-2x+5$的单调区间与极值.

首先求函数的驻点，输出结果为:$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

其次作图，根据图像可以看出，函数的单调区间和极值点类型.

```
x=-2: 0.1: 2;
f=x.^3-2*x+5;
plot(x, f)
grid on
```



二 导数的应用

在高等数学课程中，有大量的导数应用习题，我们可以选择其中的部分题目自行验证.

作图时要注意，求导、解方程输出的代码需要修改后才可以用于作图，不注意就会出错.

三 极值和最值

Matlab命令　[x, f]=fminbnd(F, a, b):

x返回一元函数在[a, b]内的局部最小值点，f返回局部最小值，F为函数。

例1：求$y=x^3-2*x^2+5$在[-100, 100]内的局部最小值点.

```
[x, f]=fminbnd('x^3-2*x^2+5',-100, 100)
y=inline('x^3-2*x^2+5', 'x');
[x, f]=fminbnd(y, -100, 100)
```

三 极值和最值

Matlab命令 [x, f]=fminsearch(F, x0):
x返回一元或多元函数在x0附近的局部最小值点，f返回局部最小值，F为函数。

求$y=x^3-2*x^2+5$在$x=5$、$x=0$、$x=-1.5$附近的局部最小值点：

1. [x, f]=fminsearch (y, 5)
2. [x, f]=fminsearch (y, 0)
3. [x, f]=fminsearch (y, -1.5)

1. 2输出结果：x=1.3333, f= 3.8148

3. 输出结果：x=-9e+028，函数值超限画图ezplot(y, [-100, 100])

三 极值和最值

例2：求z=3x^2+2*x*y+y^2在(1,1)附近的局部最小值点和局部最大值点.

```
fun='3*x(1)^2+2*x(1)*x(2)+x(2)^2';
[x, fval]=fminsearch(fun, [1, 1])
```

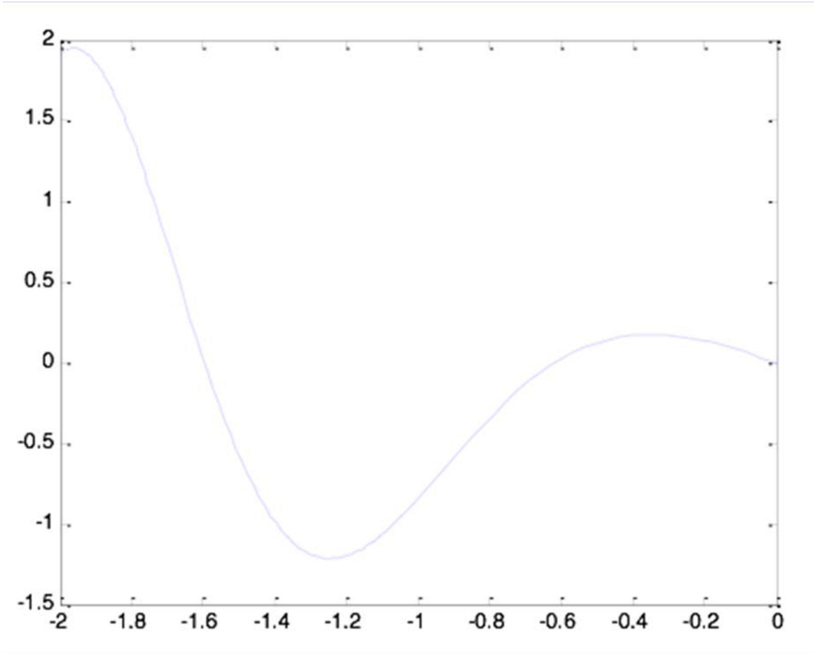
课堂练习

求z=x^3-4*y^2+5在(1, 2)附近的局部最小值点和局部最大值点.

三 极值和最值

例3 求函数$y=x\sin(x^2-x-1)$在[-2, 0]上的极小值。

```
fplot('x*sin(x^2-x-1)', [-2 0])
```

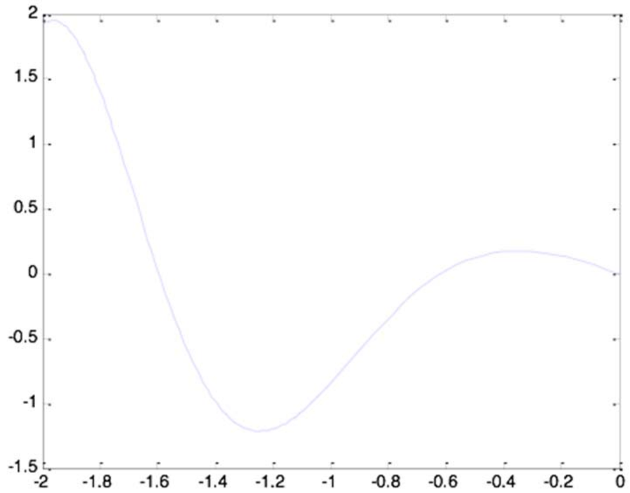


三 极值和最值

例3 求函数$y=x\sin(x^2-x-1)$在[-2, 0]上的极小值。

```
[x, f]=fminbnd('x*sin(x^2-x-1)', -2, 0)
f=inline('x*sin(x^2-x-1)', 'x');
[x, f]=fminsearch(f, -1.2)
```

三 极值和最值




```
ff=inline('-x*sin(x^2-x-1)', 'x');
[x, f]=fminbnd(ff, -1, 0) %求[-1, 0]上的最小值
ff=inline('-x*sin(x^2-x-1)', 'x');
[x, f]=fminsearch(ff, -2) %求-2附近的最小值
```

四 数值微分

数值微分是用离散方法近似计算函数$y=f(x)$在某点$x=a$的导数值。比如没有函数的表达式而只有离散数据时。

根据导数定义，可以用差商近似微商

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (1) \qquad f'(a)=\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \quad (2)$$

其中，$h(>0)$为小的增量.

（1）和（2）分别称为前差公式和后差公式

四 数值微分

$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad （1）$$

前差公式

$$f'(a)=\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \quad （2）$$

后差公式

将二者平均得到 $$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \quad （3）$$ 称为中点公式。

当函数$y=f(x)$在等间距h的分点$x_0<x_1<\ldots<x_n$上用离散数值表示为$y_0, y_1, \ldots, y_n$时,函数在分点$x_0, \ldots, x_n$的导数值可由中点公式计算:

$$f'(x_k)=\frac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h}, \ k=1, 2, \ldots, n-1$$

四 数值微分

20世纪美国人口统计数据如表所示，计算表中这些年份的人口增长率

记时刻t人口为x(t)，则（相对）增长率为

$$r(t)=\frac{dx/dt}{x(t)}$$

试计算每年相对增长率.

年份	人口/百万
1900	76
1910	92
1920	106.5
1930	123.2
1940	131.7
1950	150.7
1960	179.3
1970	204
1980	226.5
1990	251.4
2000	281.4

四 数值微分

```
x=[76 92 106.5 123.2 131.7 150.7 179.3 204
    226.5 251.4 281.4];
for i=1: 9
dx_dt(i)=(x(i+2)-x(i))/20;
end
r=dx_dt./x(2: 10)
```

年份	人口/百万
1900	76
1910	92
1920	106.5
1930	123.2
1940	131.7
1950	150.7
1960	179.3
1970	204
1980	226.5
1990	251.4
2000	281.4

```
r =

   0.0166   0.0146   0.0102   0.0104   0.0158   0.0149   0.0116   0.0105   0.0109
```

五 方程的近似解

另一个问题：方程的近似数值解是如何求出来的？

五 方程的近似解

方程近似解的求法

方程近似解的求法是基于零点存在定理，有两个步骤：

（1）确定根的大致范围[a,b]，可以借助函数作图来观察.连续函数f(x)如果满足f(a)f(b)<0且在(a,b)内仅穿过x轴一次，则f(x)在(a,b)内存在唯一的零点.

（2）以区间端点a和b为根的初始近似值，采用某种算法逐步改进精确度，直至求得满足要求的近似解.

下面介绍：牛顿迭代法、弦截法

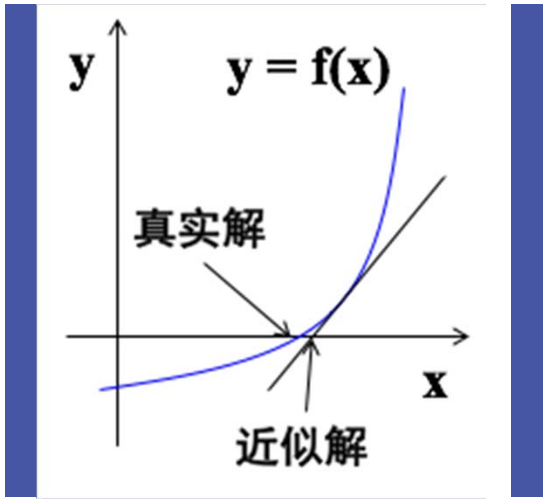
五 方程的近似解

牛顿迭代法

如果$f(x)$在$[a, b]$上二阶可导，$f(a)f(b)<0$且$f'(x)$与$f''(x)$在$[a, b]$上不变号，则可用牛顿迭代法来求解$f(x)=0$.

即单调性与凹凸性不发生变化.

牛顿迭代法：用$y=f(x)$在各点的切线来代替曲线，以切线与x轴交点的横坐标作为$f(x)=0$实根的近似。

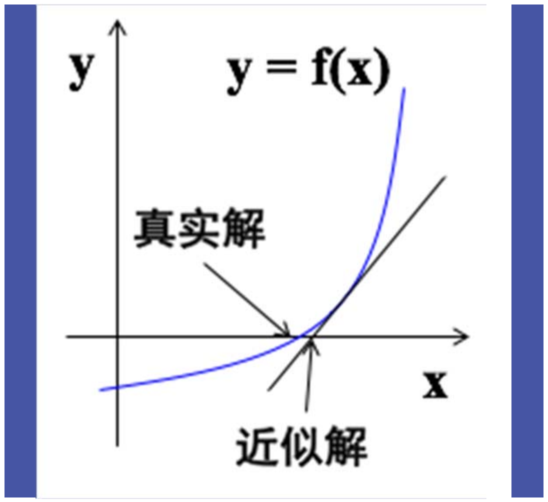


五 方程的近似解

牛顿迭代法的流程：

如果f(b) f′(b)>0，则取$x_0=b$（否则取$x_0=a$）.

在$x=x_0$处函数$y=f(x)$的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，切线上令$y=0$，得到$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.



若x_1不满足精度要求，可在$x=x_1$处做切线...

如此反复迭代，直到x_n满足精度要求为止.

五 方程的近似解

牛顿迭代法的具体步骤：

（1）输入精度指标$\varepsilon>0$；

（2）确定区间$[a, b]$，满足$f(a)f(b)<0$且$f'(x)$与$f''(x)$不变号；

（3）若$f(b)f'(b)>0$，取$x_0=b$，否则取$x_0=a$；

（4）$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$；

（5）若$|x_1-x_0|<\varepsilon$，则输出近似解x_1，否则令$x_0=x_1$并返回步骤4.

五 方程的近似解

弦截法

如果f(x)的一阶导数不容易计算， 可以将牛顿迭代法中的迭代公式变成：

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{\boxed{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}}} \qquad x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{\boxed{f'(x_0)}}$$

下面介绍的几个命令均以牛顿法为基础.

五 方程的近似解

求函数在一定范围内的零点

求f(x)=0在点x0附近的零点：x=fzero(f, x0).

求f(x)=0在[a, b]内的零点：x=fzero(f, [a, b]).

例1. 求$5\sin(2x)=e^x$在$x=-5$附近的零点：

```
syms x;
f='5*sin(2*x)-exp(x)';
x=fzero(f,-5)
```

```
x =

-4.7133
```

例2. 求$5\sin(2x)=e^x$在[0, 1]上的零点：

```
x=fzero(f, [0, 1])
```

```
x =0.1129
```

五 方程的近似解

指定初始点求函数零点

从x_0出发求$f(x)=0$的零点：[x, f, h]=fsolve(f, x_0).

输出结果为向量[x, f, h]，x为近似零点，f为该点处函数值，h输出值大于零表示结果可靠,否则不可靠.

例3. 求$y=2\sin x-1.5$的零点：

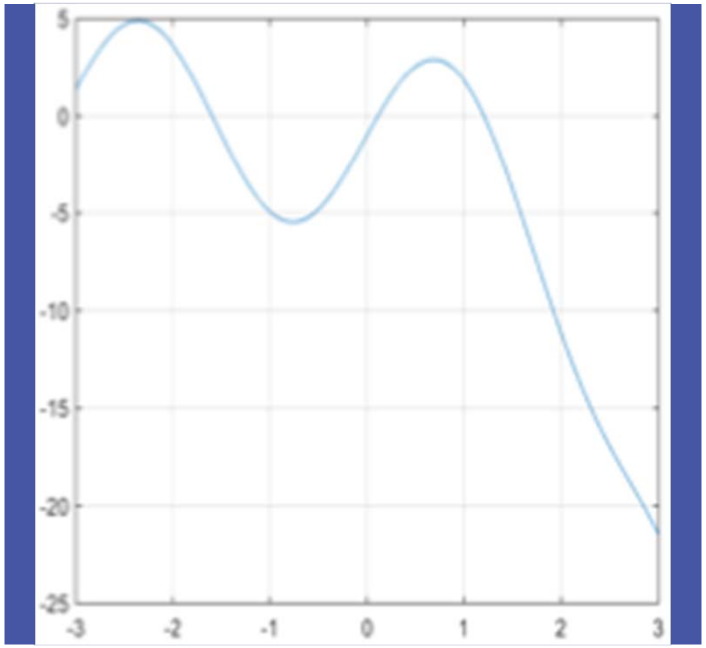
```
syms x f h;
f='2*sin(x)-1.5';
[x,f,h]=fsolve(f,0)
```

```
x =    0.8481

f = -1.0918e-010

h =    1
```

五 方程的近似解

例4. 求$5\sin(2x)=e^x$的根.

```
syms x;
f=5*sin(2*x)-exp(x);
solve(f, x)  %只有一个根0.1129...
fsolve('5*sin(2*x)-exp(x)',1)
            %以1出发求解得到1.2053
fsolve('5*sin(2*x)-exp(x)',0)
            %以0出发求解得到0.1129
```



五 方程的近似解

例5. 求$x^2=0$的根

- solve：多项式函数，符号计算
- fsolve, fzero：非线性函数

```
syms x;
f=x^2;
solve(f, x)                  %x=0  0
fsolve('x^2', 1)             %得到0.0078
fsolve('x^2', 0.01)          %得到0.0050
fzero('x^2', 0.01)           %出错
fzero('x^2', [-1, 1])        %出错，区间端点处的函数值必须有不同符号
```

五 方程的近似解

课堂练习：

$f(x)=e^x\sin x-3$，

1. 求函数在x=4附近的零点

2. 求函数在[5, 20]内的零点

如果初始点不同，或者使用的命令不同，计算出的结果可能会有差异，在使用中要注意.

练　习

1. 求下列函数的导数

1）$y=(\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)$；　　2）$y=x\sin x\ln x$；

3）$y=2\sin^2\frac{1}{x^2}$；　　4）$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

2. 求下列参数方程所确定的函数的导数

1）$\begin{cases} x=t^4 \\ y=4t \end{cases}$；　　2）$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$。

练　习

3. 求下列隐函数的导数

1）$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;　2）$x^y=y^x$;

4. 设$y=e^x\cos x$，求$y^{(4)}$;

5. 验证$y=e^x\sin x$满足关系式$y''-2y'+2y=0$

6. 求下列函数的偏导数

1）$z=x^2\sin(xy)$;　　2）$u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$;

练　习

7. 设$u=x\ln(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

8. 求下列多元函数的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$

1）$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$；　　2）$e^z=xyz$；

9. 证明函数$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$（a, b为常数）满足 Laplace 方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$（对结果用simplify化简）

练　习

10. 作出下列函数的图形，观察极值点的位置并求出

（1）$f(x)=x^2\sin(x^2-x-2)$ $[-2, 2]$

（2）$f(x)=3x^5-20x^3+10$, $[-3, 3]$

（3）$f(x)=|x^3-x^2-x-2|$, $[-3, 3]$