随机数与积分

随机数与积分

对于很多实际问题，建立数学模型并不能很好地反应其主要特征．特别是随机因素太多，或者模型过于复杂难以用解析方法求解时，我们可以借助随机模拟的方法．

下面介绍随机数的产生及随机模拟方法的应用．

一　随机数的产生

定义：设随机变量$X \sim F(x)$，则称随机变量X的抽样序列$\{X_i\}$为分布$F(x)$的随机数.

对于很多应用测试、仿真研究，服从某种分布的随机数非常重要。比如设计酒店管理系统时，需要模拟客人到来的时间和不同要求；评估机械设备的可靠性时，需要输入随机的外界干扰.

一 随机数的产生

1. 生成随机数的random命令

y=random('name', A1, A2, A3, m, n)

其中，name为相应分布的名称，比如 Poisson，normal；A1、A2、A3为该分布中的参数，m为产生随机数的行数，n为产生随机数的列数.

m=1时，输出一串n个随机数；m>1时，输出的是一个m行n列随机矩阵，矩阵中的元素服从相应分布.

一　随机数的产生

比如考虑银行窗口排队的顾客数时，设单位时间内窗口排队人数X平均值为3，则可以认为X服从参数为3的泊松分布.

要模拟单位时间内排队人数，可以用：

```
>> x=random('Poisson',3,1,10)
```

```
x =3    2    4    3    5    1    3    3    4    7
```

输出一串10个随机数，这些随机数满足$\pi(3)$分布.

输出一个4×5的矩阵，元素为$\pi(3)$分布的随机数.

```
>> x=random('Poisson',3,4,5)
```

```
x =3    6    1    2    2
   5    2    4    3    7
   3    2    4    2    3
   2    4    2    3    4
```

一 随机数的产生

2. 直接调用

如：y=binornd(n, p, m,k)产生参数为n，p的m行k列的二项分布随机数

分布类型	随机数产生函数
二项分布B(n,p)	binornd(n,p,m,k)
泊松分布$\pi(\lambda)$	poissrnd(λ,m,k)
均匀分布U(a,b)	unifrnd(a,b,m,k)
指数分布E(λ)	exprnd(λ,m,k)
正态分布$N(\mu, \sigma^2)$	normrnd(μ,σ,m,k)

一　随机数的产生

（1）均匀分布$U(a,b)$

1）unifrnd (a,b)产生一个[a,b]均匀分布的随机数

2）unifrnd (a,b,m,n)产生m行n列的均匀分布随机数矩阵

只知道一个随机变量取值在(a,b)内，但不知道（也没理由假设）它在何处取值的概率大，在何处取值的概率小，就只好用$U(a,b)$来模拟它。

一　随机数的产生

例1. 产生服从U(2,8)分布的1个随机数，10个随机数，2行5列随机数。

命令：（1）y1=unifrnd(2,8)

（2）y2=unifrnd(2,8,1,10)

（3）y3=unifrnd(2,8,2,5)

y1 = 7.7008

y2 = 3.3868　5.6411　4.9159　7.3478　6.5726　4.7388　2.1110　6.9284　4.6682　5.6926

y3 = [6.7516　6.4292　4.4342　7.5014　7.3619;

7.5309　3.0576　7.6128　4.4616　2.3473]

一　随机数的产生

（2）正态分布随机数

1）R = normrnd(μ, σ)：产生一个正态分布随机数

2）R = normrnd(μ, σ,m,n)产生m行n列的随机数

练习1：产生N(10,4)上的一个随机数，10个随机数，2行5列的随机数.

一　随机数的产生

（3）指数分布随机数

排队服务系统中，顾客到达率为常数时，顾客的到达间隔可以视为服从指数分布；元器件的故障率为常数时，其寿命也可以认为服从指数分布

我们知道，如果X～E(λ)，则X的数学期望为 $\frac{1}{\lambda}$ ，对X的数学期望进行估计之后，可利用如下命令输出随机数：

1）R = exprnd(λ)：产生一个指数分布随机数

2）R = exprnd(λ,m,n)产生m行n列的指数分布随机数

一　随机数的产生

例2.　产生E(0.1)上的一个随机数，20个随机数，2行6列的随机数。

命令（1）y1=exprnd(0.1)　（2）y2=exprnd(0.1,1,20)

（3）y3=exprnd(0.1,2,6)

结果

（1）y1=0.0051

（2）y2=[0.1465　0.0499　0.0722　0.0115　0.0272　0.0784　0.3990　0.0197

0.0810　0.0485　0.0233]

（3）y3=[0.1042　0.4619　0.1596　0.0505　0.1615　0.0292；0.0207　0.1974

0.1616　0.1301　0.4182　0.0809]

一　随机数的产生

作业　某网站平均每分钟遭遇100次DOD攻击，假设受攻击的间隔时间服从指数分布，生成10个攻击间隔时间的随机数。

注：Matlab中指数分布E(λ)的均值为λ，因此λ=60/100。

攻击间隔时间长度可以用exprnd(0.6)来模拟。

4. 二项分布随机数

1）R = binornd(n, p):　产生一个随机数

2）R = binornd(n,p,m,n):　产生m行n列的随机数

例3. 产生B(10,0.8)上的一个随机数，15个随机数，3行6列的随机数。

命令

（1）y1=binornd(10,0.8)

（2）y2=binornd(10,0.8,1,15)

（3）y3=binornd(10,0.8,3,6)

一 随机数的产生

产生1000个服从如下分布的随机数：

(1) $\pi(2)$, $\pi(20)$

(2) $E(3)$, $E(10)$

(3) $N(0,4)$, $N(10,1)$

分布类型	随机数产生函数
二项分布$B(n,p)$	binornd(n,p,m,k)
泊松分布$\pi(\lambda)$	poissrnd(λ,m,k)
均匀分布$U(a,b)$	unifrnd(a,b,m,k)
指数分布$E(\lambda)$	exprnd(λ,m,k)
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	normrnd(μ,σ,m,k)

2. 其他分布随机数的产生方法

根据统计数据，某随机变量并不服从已知的分布。

定理：设X的分布函数为$F(x)=P(X\leq x)$，连续且严格单调上升，它的反函数存在，且记为F^{-1}，则

① $F(X)\sim U(0,1)$

② 若随机变量$U\sim U(0,1)$，则$F^{-1}(U)$的分布函数为$F(x)$。

此定理给出的构造分布函数为$F(x)$的随机数的产生方法为：

取$U(0,1)$随机数U_i,$(i=1,2\ldots)$，令$X_i=F^{-1}(U_i)$，则X_i $(i=1,2\ldots)$就是服从$F(x)$分布的随机数。

一　随机数的产生

（一）直接抽样法（反函数法）

设连续型随机变量X的分布函数为F(x)

1. 取U(0,1)随机数U_i,(i=1,2…)；
2. 令$X_i=F^{-1}(U_i)$,
3. 输出结果X_i , i=1,2…, 即服从F(x)的随机数。

一　随机数的产生

例4. X分布函数如右侧所示，生成X的随机数 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}$

解：$F(x)$的反函数为 $F^{-1}(y)=\begin{cases}\ln(2y), & 0<y\le 1/2\\ -\ln 2(1-y), & 1/2<y<1\end{cases}$

首先生成服从U(0,1)分布的随机数：U=unifrnd(0,1,1,10)；然后判断所得随机数与1/2的大小关系，换算为：y=ln(2u)或-ln2(1-u).

一　随机数的产生

（2）离散分布的直接抽样法

设分布律为$P(X=x_i)=p_i$，$i=1, 2, \ldots$，其分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<x_1 \\ \sum_{j=1}^{i} p_j, & x_i \le x < x_{i+1} \end{cases}$$

① 产生均匀随机数R，即$R\sim U(0,1)$

② $$X=\begin{cases} x_i & \text{若 } F(x_{i-1})<R\le F(x_i),\ (i=2, 3, \ldots) \\ x_1 & \text{若 } R\le F(x_1) \end{cases}$$

注：不是反函数

则$X\sim F(x)$

一　随机数的产生

例5：生成服从0-1两点分布的随机数.

首先生成服从U(0,1)分布的随机数　（注：取值在0-1之间）

u=unifrnd(0,1,1,10)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ p, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}\qquad X=\begin{cases}x_i & 若F(x_{i-1})<R\le F(x_i),\ i=2,3,\dots\\ x_1 & 若R\le F(x_1)\end{cases}$$

$x_1=0,\ x_2=1;$

$F(x_1)=p, F(x_2)=1$

$$X=\begin{cases}0, & u\le p\\ 1, & p\le u\le 1\end{cases}$$

0-1两点分布随机数：binornd(1,p,m,n)

一　随机数的产生

（二）变换抽样法

（三）值序抽样法

（四）舍选抽样法

（五）复合抽样法（合成法）

（六）近似抽样法

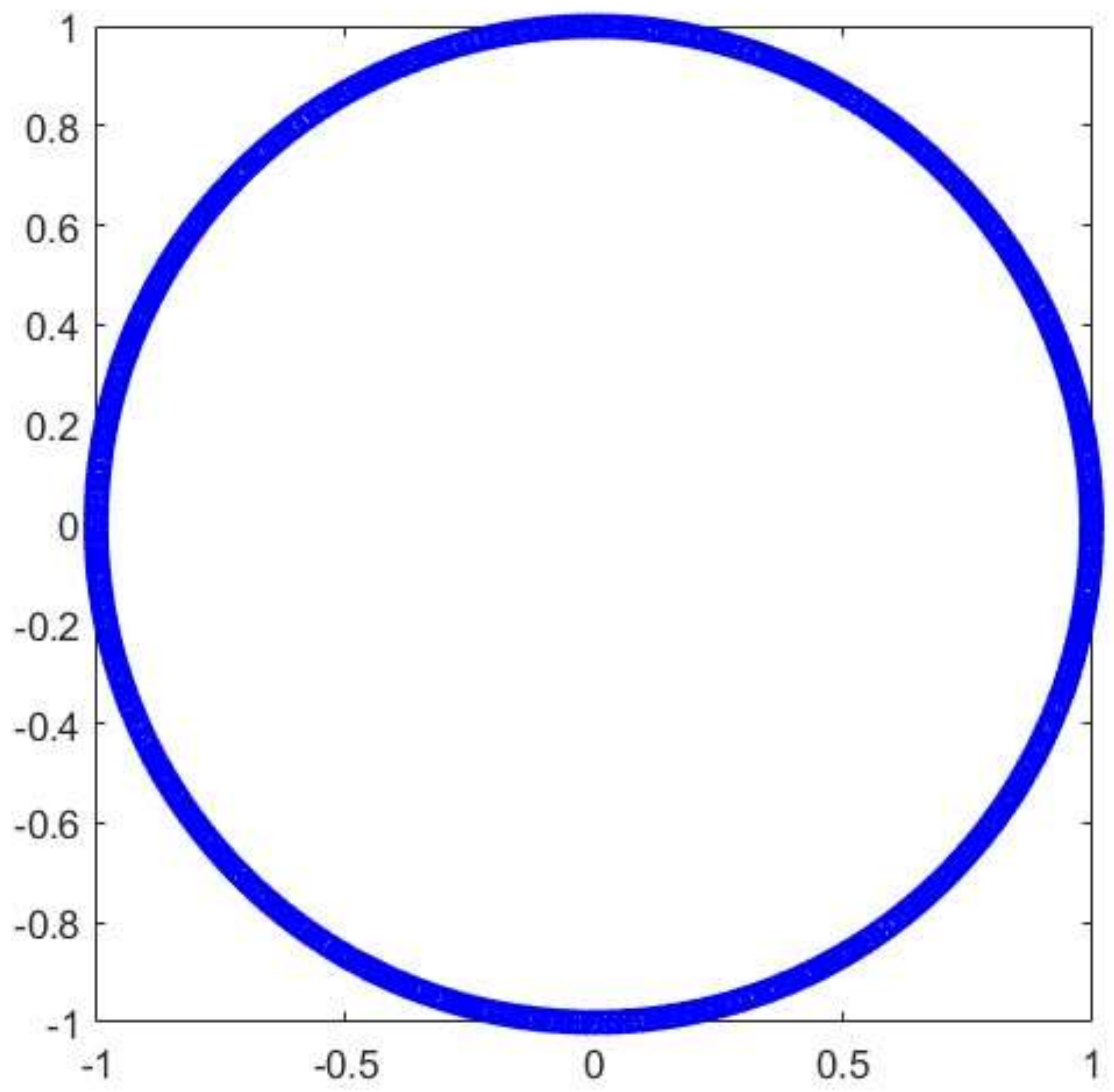
详见：高惠璇 北京大学出版社《统计计算》

一　随机数的产生

例6 生成单位圆周上均匀分布的10000个随机点.

```
function suijiyuan
Randnum=unifrnd(0,2*pi,1,10000);      %(0,2pi)上均匀分布随机数
xRandnum=cos(Randnum);   %横坐标
yRandnum=sin(Randnum);   %纵坐标
plot(xRandnum,yRandnum, 'bo');
axis equal
axis([-1,1,-1,1])
```

一　随机数的产生



一　随机数的产生

频率的稳定性

1. 事件的频率

在一组不变的条件下，重复作n次试验，记m是n次试验中事件A发生的次数。

频率 $f=m/n$

2. 频率的稳定性

在重复试验中，事件A的频率总在一个定值附近摆动，而且，随着重复试验次数的增加，频率的摆动幅度越来越小，呈现出一定的稳定性.

一　随机数的产生

例：掷一枚硬币，记录掷硬币试验中频率P*的波动情况。

p为正面向上的概率，n为试验次数

（1）模拟产生n个0-1分布随机数　　binornd(1,0.5,1,n)

（2）对模拟产生的随机数1表示正面向上，0表示反面向上。

（3）统计前i次试验中正面向上的次数，计算频率

（4）作图（关于频率和试验次数的图像）

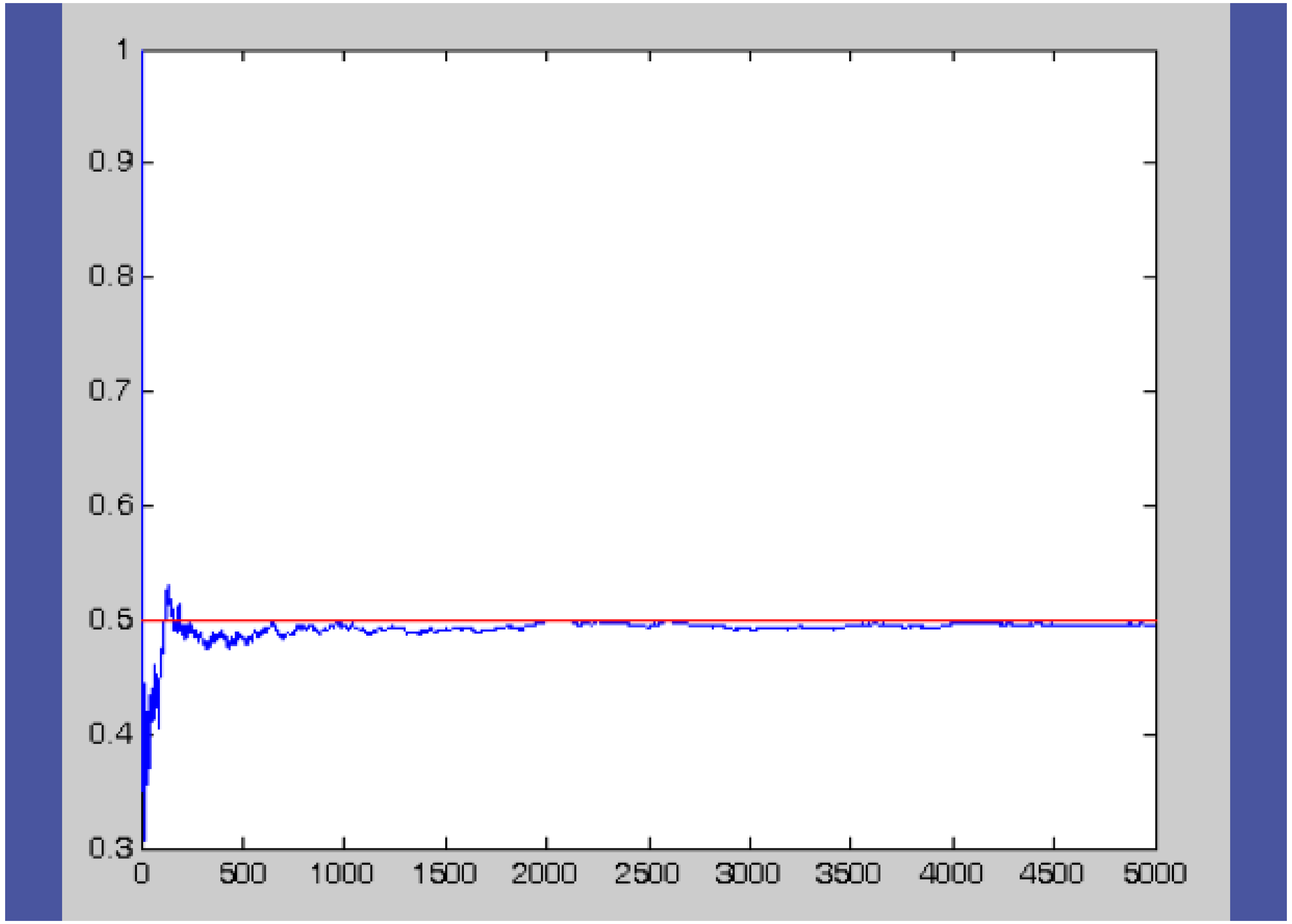
一 随机数的产生

在Matlab中编辑.m文件输入以下命令：

```
function binomoni(p,n)
%随机数与积分 - 用二项分布验证频率的稳定性
pro=zeros(1,n);                        %初始化频率向量
randnum = binornd(1,p,1,n);
%产生服从B(1,p)分布的1行n列随机数，B(1,p)的意义是只做一次实验，结果为1
的概率为p
a=0;
for i=1:n
    a=a+randnum(1,i);    %频数-计算前i个随机数之和
    pro(i)=a/i;                      %得到频率向量pro
end
num=1:n;
plot(num,pro,num,p)
```

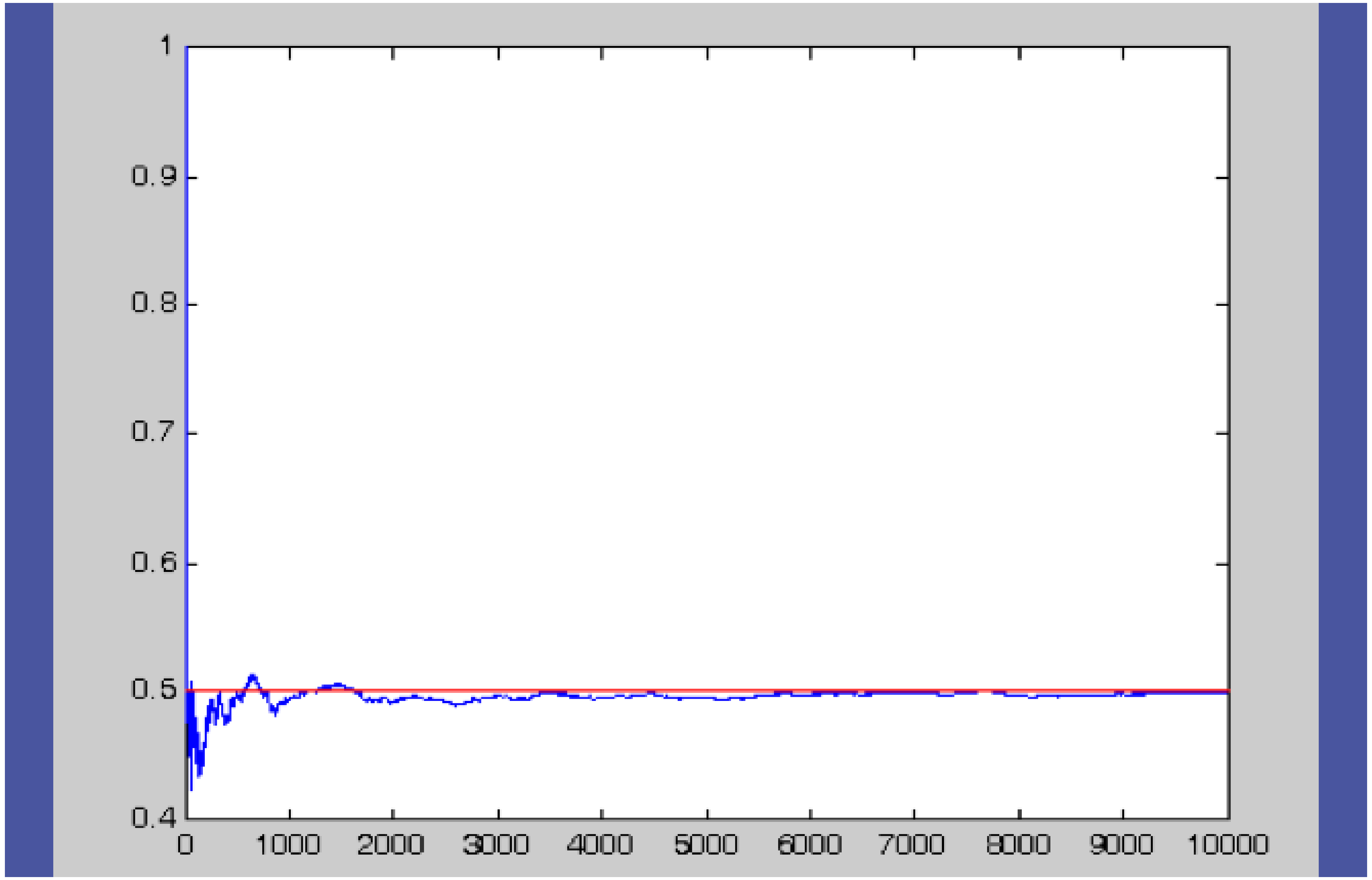
一 随机数的产生

binomoni(0.5,1000)



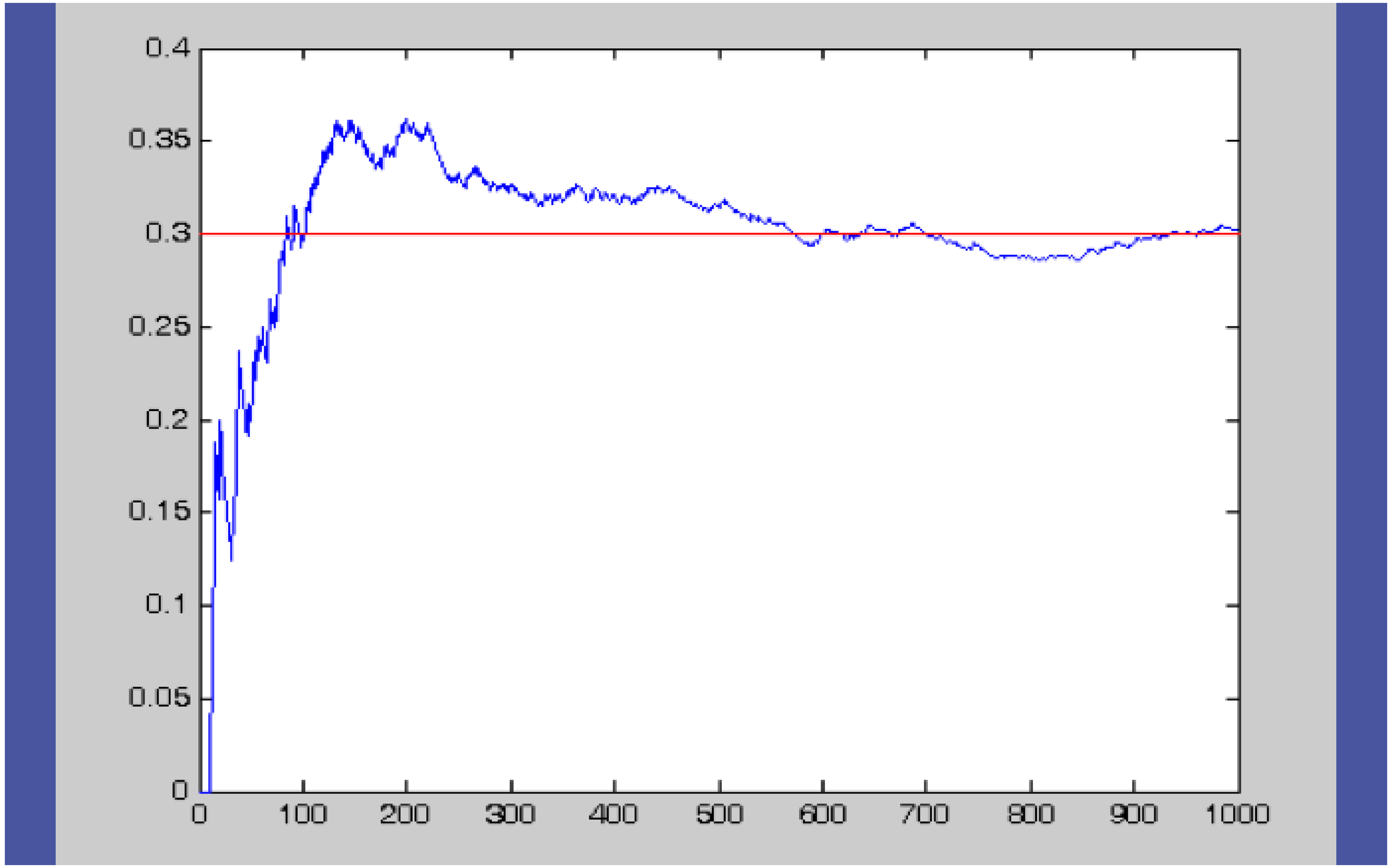
一 随机数的产生

binomoni(0.5,10000)



一 随机数的产生

binomoni(0.3,1000)



随机模拟法计算数值积分

随机模拟方法

随机模拟是指通过随机试验，并根据所得结果的频率、平均值等情况来估计有关的规律.

蒙特卡洛(Monte Carlo)方法就是一种典型的随机模拟方法.

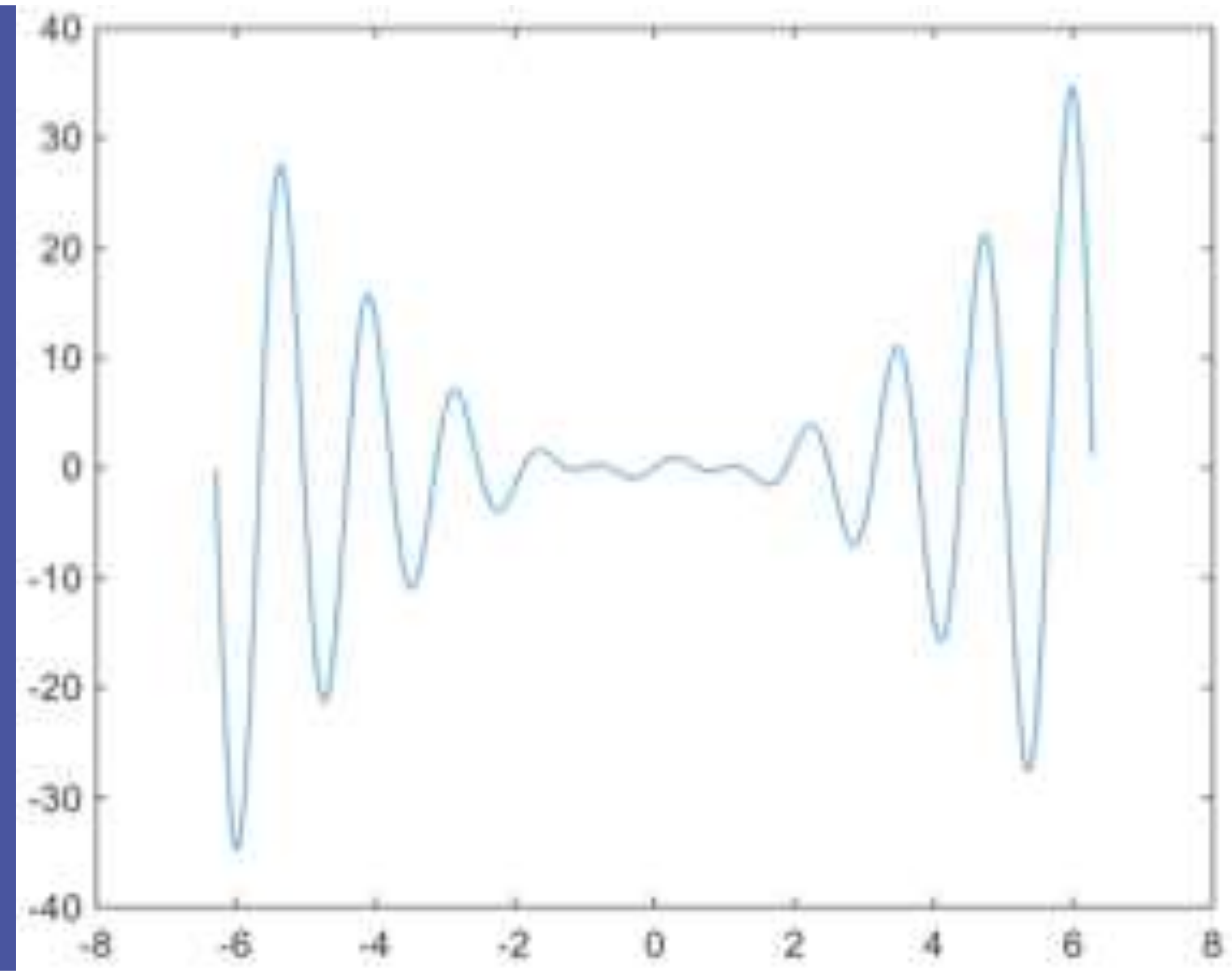
比如要求$f(x)$在$[a,b]$上的最值，应求出函数的驻点、不可导点，然后比较这两类点与区间端点处的函数值. 若采用随机模拟方法，整个过程会简单得多.

随机模拟法计算数值积分

例1.　求函数$f(x)=(1-x^2)\sin(5x)$ 在闭区间$[-2\pi,2\pi]$上的最小值和最大值.

应用随机模拟法,只需在$[-2\pi,2\pi]$上取大量均匀分布的随机数,求出这些点处的最大、最小的函数值即可.

```
x=unifrnd(-2*pi,2*pi,10000,1);
f=(1-x.^2).*sin(5*x);
fmax=max(f)
```



最大值在34.7111附近摆动.

随机模拟法计算数值积分

例1. 求函数$f(x)=(1-x^2)\sin 5x$在闭区间$[-2\pi,2\pi]$上的最小值和最大值.

也可以考虑取 x=-2*pi:0.001:2*pi

计算其中最大值点和最小值点.

随机模拟法的优点是可以反复多次运行，每次取点都会不同；取定点则只能得到同样结果.

随机模拟法计算数值积分

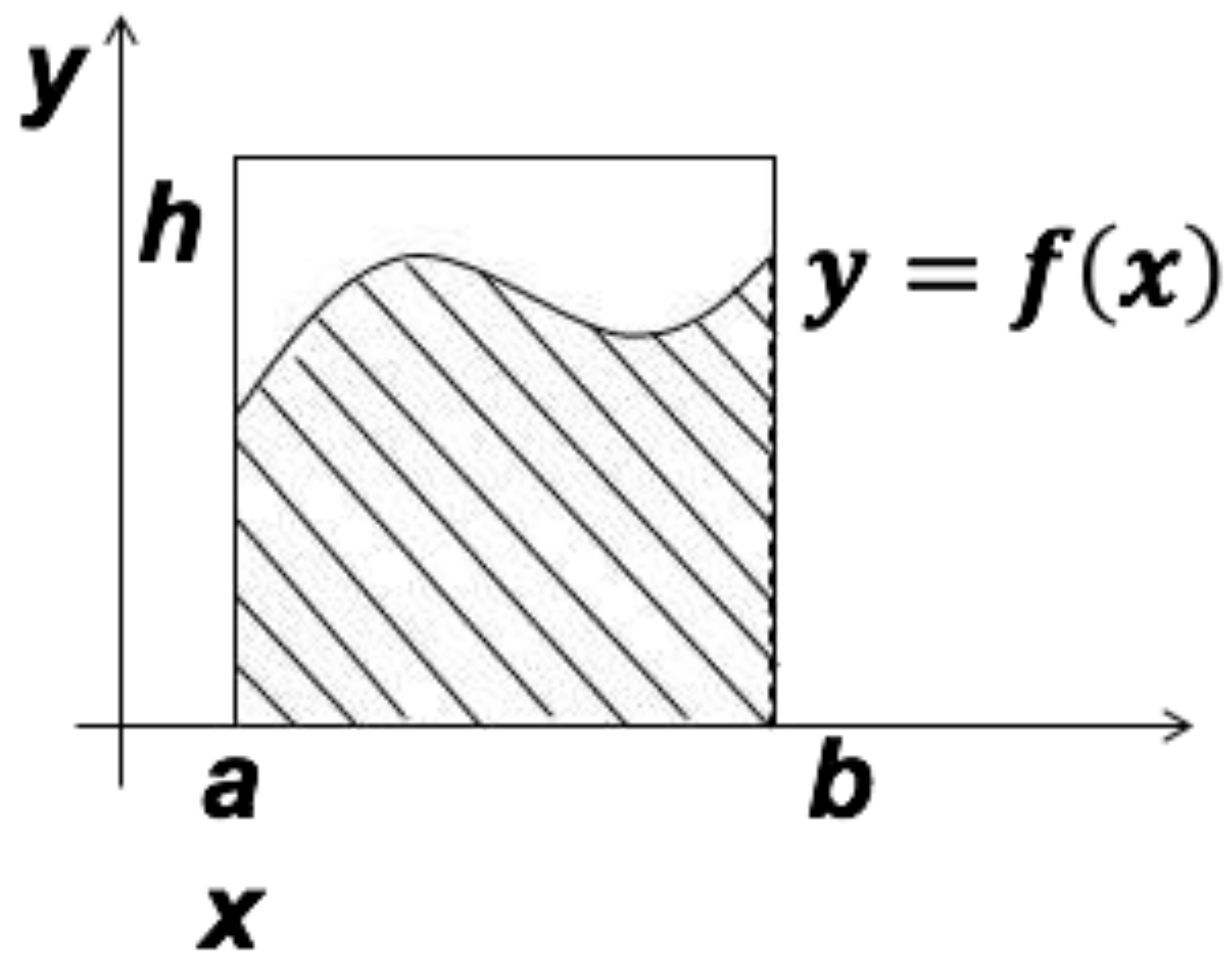
随机模拟法求定积分

假定函数$f(x)$在区间$[a,b]$内有界连续且非负，根据定积分的几何意义可知，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$即下图阴影部分的面积：

随机模拟算法为：

构造一个矩形，以$[a,b]$为底边，以h为高$(h>\max\limits_{[a,b]} f)$.

在矩形内随机投点，落在阴影内的比例与$(b-a)h$乘积即积分结果.

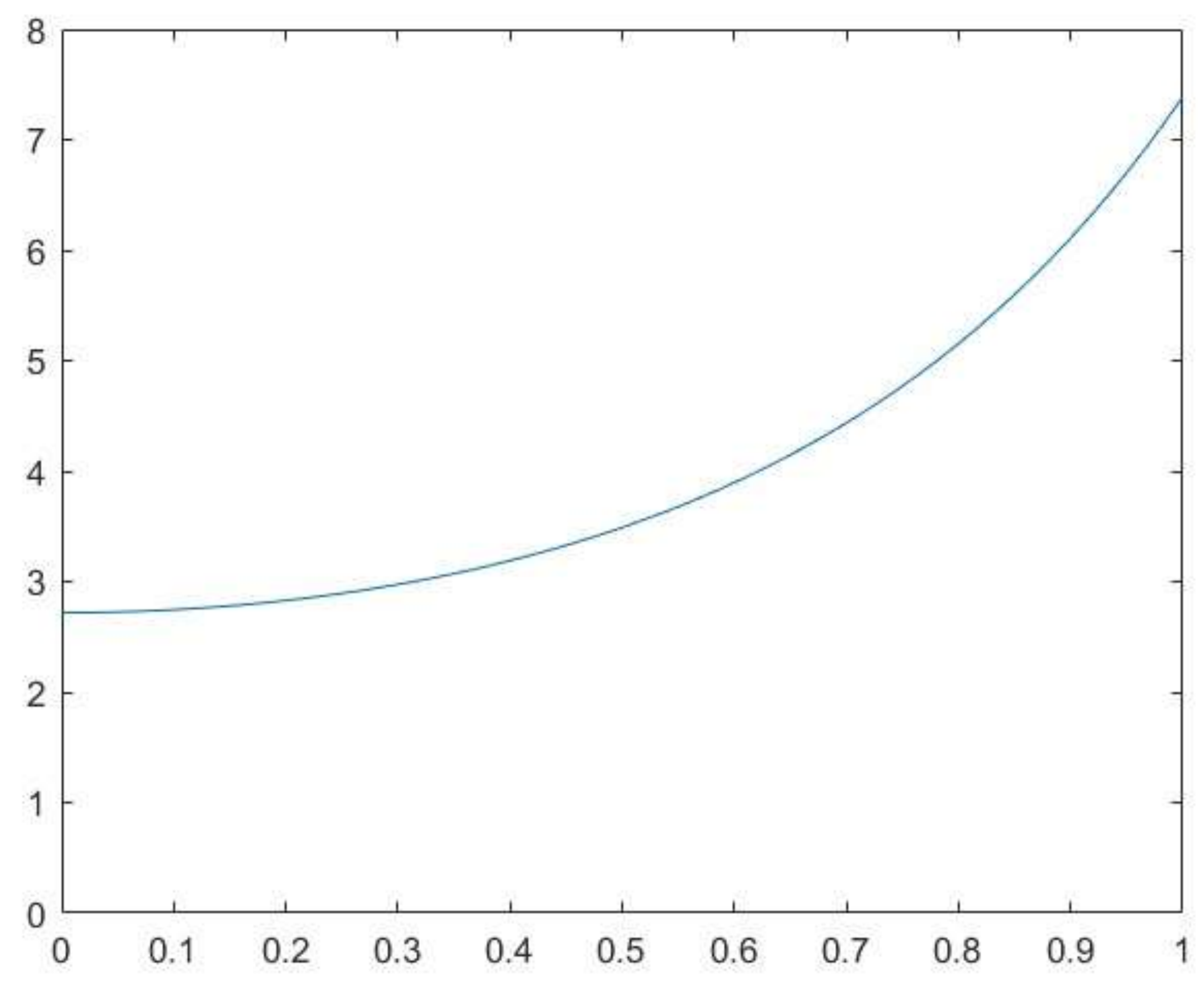


随机模拟法计算数值积分

例2. 求$\int_0^1 e^{x^2+1}\,dx$.

右图为函数图象，先来看数值积分：

```
f=inline('exp(x.^2+1)','x');
quad(f,0,1)
```



可得结果为3.9759. 接下来用随机模拟法求定积分.

估计被积函数在积分区间上的最大值，取h=9.

则以积分区间[0,1]为底，以h=9为高的矩形面积为M=9.

随机模拟法计算数值积分

```
function S=suiji
xi=unifrnd(0,1,500000,1);
yi=9*rand(500000,1);
y=exp(xi.^2+1);k=0;
for i=1:500000
    if yi(i)<=y(i)
       k=k+1;
   end
end
S=k/500000*9;
```

取得500000个随机点(xi,yi)

取得对应xi的函数值

比较向量yi与y的各个分量

若yi的分量小于对应的y(xi)，则计数1次

S =   3.9775

随机模拟法计算数值积分

```
function S=suiji2
xi=unifrnd(-1,1,500000,1);
yi=3*rand(500000,1);
y=xi.^2.*exp(xi); k=0;
for i=1:500000
if yi(i)<=y(i)
k=k+1;
end
end
S=k/500000*6
```

求$\int_{-1}^{1} x^2 e^x \,dx$

s =0.8753

随机模拟法计算数值积分

用随机模拟法求定积分：

$$\int_0^1 x^{10}(2+\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-10}^{10} x^3 \sin(30x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{x\sin x^2 + x^3\cos x}{2+\cos^3 x}\mathrm{d}x$$

随机模拟法计算数值积分

随机模拟法求二重积分

假定$f(x,y)$在区域S上有界连续、非负，根据二重积分的几何意义，$\iint_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是以$S$为底，以$f(x,y)$为顶的曲顶柱体体积

随机模拟算法的思路为：

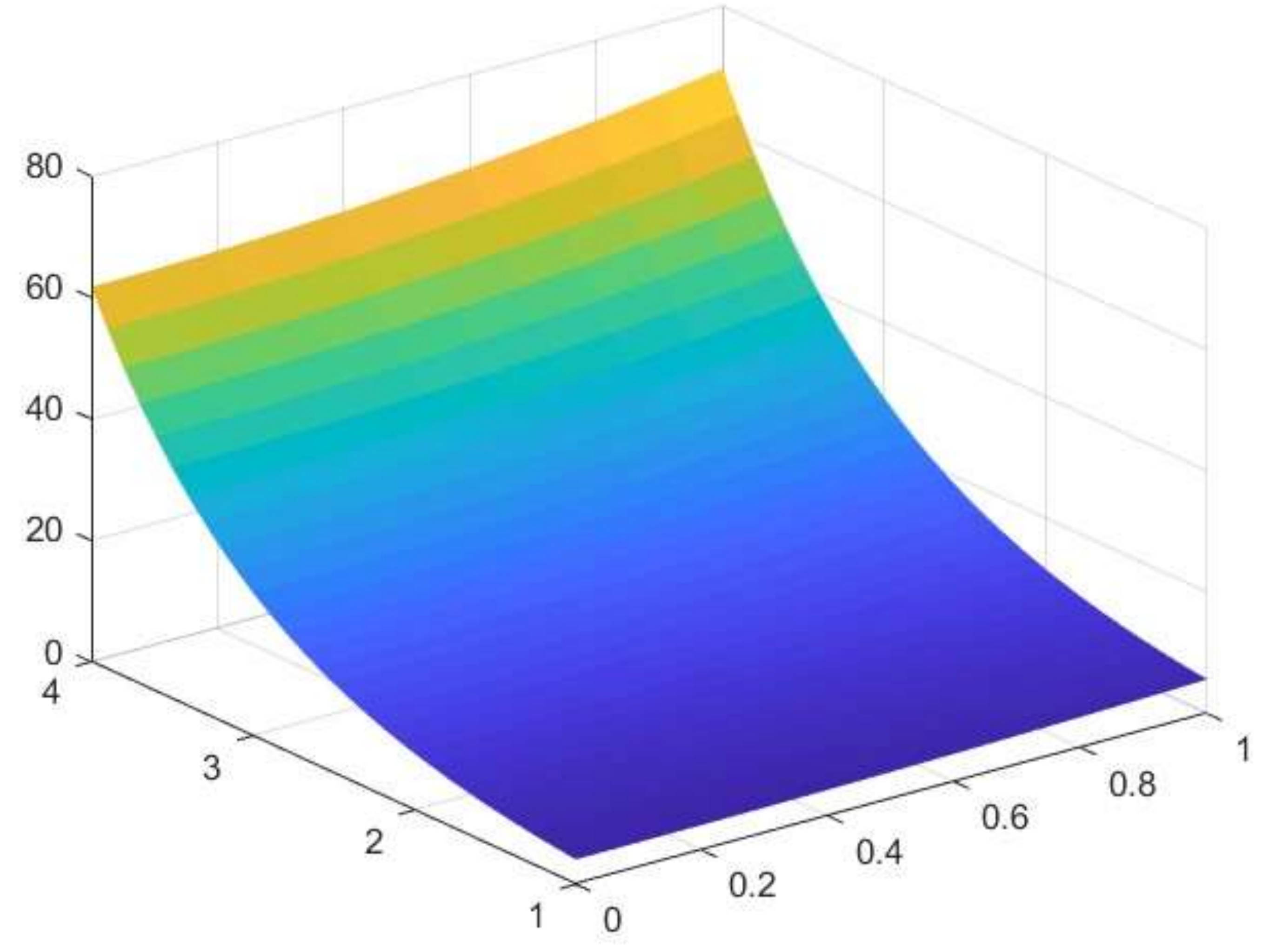
选取一个以S为底、以h为高($h>\max\limits_{(x,y)\in S} f$)的柱体.

在柱体范围内随机投点，落在$f(x,y)$下方的点的比例与柱体体积的乘积即积分结果.

随机模拟法计算数值积分

例3. 求$\int_1^4\int_0^1 e^{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

右图为函数图象：



计算数值积分：

```
f =inline('exp(sqrt(1+x.^2+y.^2))','x','y');
dblquad(f,0,1,1,4)
```

可得结果为64.6374. 接下来用随机模拟方法计算.

取h=70.

随机模拟法计算数值积分

```
function suiji2d
%随机模拟计算二重积分 int_1^4\int_0^1 exp(sqrt(1+x^2+y^2))
x=unifrnd(0,1,1000000,1);y=unifrnd(1,4,1000000,1);
zi=unifrnd(0,70,1000000,1);z=exp(sqrt(1+x.^2+y.^2));
k=0;
for i=1:1000000
if zi(i)<=z(i)
k=k+1;
end
end
P=k/1000000*210
```

比较向量zi与z的各个分量

若zi的分量小于对应的z(xi,yi)，则计数1次

输出结果在64.6上下浮动.

随机模拟法计算数值积分

用随机模拟法求二重积分

$$\int_0^4 \int_{-1}^5 (2+x^2y^4+\sin\sqrt{1+x^3+y^4})\,dxdy$$

随机模拟法计算数值积分

解数值积分只是随机模拟方法的简单应用，事实上当数学模型非常复杂，难以直接求解或分析时，我们都可以尝试用随机模拟法来给出结果.

设定较高的样本量，反复运算多次，模拟结果就会在很大程度上接近真实结果.

作　业

1. 设X的密度函数为f(x)，

生成5行10列X的随机数

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$$

2. 设X的分布律如右下表所示，生成1行100个X的随机数。

X	0	1	2	3	4	5
P	0.5	0.1	0.2	0.1	0.05	0.05

作 业

用随机模拟方法计算积分：

$$\int_0^2 e^{x^2}\sin(2x)\mathrm{d}x,\ \int_0^1\int_1^4 e^{x^2+y^2}\sin(2(x+y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$