特征值与二次型

本次课主要内容

1. 矩阵特征值与特征向量 (eig)
2. 矩阵的相似对角化 (eig)
3. 二次型化标准型 (schur, eig)
4. 正定二次型的判定 (eig, chol)

特征值与二次型

实验目的

1、学会用MATLAB软件求矩阵的特征值和特征向量

2、学会用MATLAB软件将二次型化为标准型

3、通过用MATLAB软件编程来判断二次型的正定性

一、特征值与特征向量

矩阵A与向量x相乘，即表示矩阵对向量的变换(Transformation)。一般说来，向量在变换的作用下将发生旋转(Rotation)、反射(Reflection)和放大、缩小。但对于任何一个矩阵来说，总存在那么一些特殊的向量，在对其变换的作用下，向量的方向不变，而仅长短发生变化。这种向量就是所谓的特征向量。

$$Ax = \lambda x$$

特征值与二次型

定义：设A是n阶方阵，λ是一个数。如果存在非零的列向量x，使得

$$Ax = \lambda x$$

成立，则称数λ为方阵A的特征值(Eigenvalue)，非零列向量x称为方阵A的属于特征值λ的特征向量(Eigenvector)，该方程称为特征方程(Eigenvalue Equation)。

A的全体特征值的和称为矩阵A的迹(Trace)。它等于A的主对角元素的和。

特征值与二次型

用Matlab计算特征值和特征向量的命令如下：

d=eig(A)　仅计算A的特征值(以向量形式d存放)

[V,D]=eig(A)　其中：D为由特征值构成的对角阵，V为由特征向量作为列向量构成的矩阵。且使 $AV=VD$ 成立

trace(A)　计算矩阵A的迹

特征值与二次型

例1：求方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 的特征值、特征向量和迹

解：

```
A=[2 2 -2;2 5 -4;-2 -4 5];

[V D]=eig(A)

trace(A)
```

特征向量矩阵与特征值 [V,D]=eig(A)　迹 trace(A)

特征值与二次型

```
V =            %特征向量
   -0.2981    0.8944    0.3333
   -0.5963   -0.4472    0.6667
   -0.7454         0   -0.6667

D =            %与特征向量对应的特征值
    1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0   10.0000
```

```
>> trace(A)

ans =

    12
```

特征值与二次型

答： 特征值为：$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (二重)，$\lambda_3 = 10$

对应于特征值$\lambda_{1,2} = 1$的全部特征向量为：

$$k_1\begin{pmatrix} -0.2981 \\ -0.5963 \\ -0.7454 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0.8944 \\ -0.4472 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中k_1，k_2不能同时为零。

特征值与二次型

对应于特征值$\lambda_3 = 10$的全部特征向量为：

$$k_3 \cdot \begin{pmatrix} 0.3333 \\ 0.6667 \\ -0.6667 \end{pmatrix}$$

其中k_3不能为零。

矩阵A的迹为：$tr(A) = 12$

特征值与二次型

例2： 求方阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值、特征向量和迹

```
A=[4 6 0;-3 -5 0;-3 -6 1]
[V D]=eig(A)
trace(A)
```

特征值与二次型

```
V =            %特征向量
         0    0.5774   -0.7559
         0   -0.5774    0.3780
    1.0000   -0.5774   -0.5345

D =            %与特征向量对应的特征值
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     1

ans =
     0
```

二、矩阵的相似对角化

设 A，B 都是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P，使：$B = P^{-1}AP$，则称矩阵 A，B 是相似的。

设 A 是 n 阶方阵，若 A 与对角矩阵相似，则称 A 可对角化。

定理 1： n 阶方阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量。

定理 2： 方阵A可对角化的充分必要条件是它的几何重数等于代数重数。

A的特征值λ的几何重数为方程组$(\lambda I - A)x = 0$的解空间的维数；

A的特征值λ的代数重数为λ作为特征根的重数。

例3：判断下列方阵是否可对角化。若可对角化，求出可逆阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵。

(1) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

[V D]=eig(A)

AV=VD

$V^{-1}AV=D$

因此P=V

特征值与二次型

解(1):　>> A=[4 -3 1 2;5 -8 5 4;6 -12 8 5;1 -3 2 2]

[P,T]=eig(A)

```
P =
    0.5774   -0.5774    0.2743   -0.2711
    0.5774   -0.5774    0.6226    0.3821
    0.5774   -0.5774    0.7140    0.2918
    0.0000    0.0000    0.1653    0.8339

T =
    2.0000         0         0         0
         0    2.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
```

%观察特征向量是否线性相关.

特征值与二次型

解(2):

```
>> A=[1 1 1 1;1 1 -1 -1;1 -1 1 -1 ;1 -1 -1 1];
>> [P T]=eig(A)

P =
   -0.5000    0.4082    0.2887    0.7071
    0.5000   -0.4082   -0.2887    0.7071
    0.5000    0.8165   -0.2887    0.0000
    0.5000         0    0.8660         0
T =
   -2.0000         0         0         0
         0    2.0000         0         0
         0         0    2.0000         0
         0         0         0    2.0000

B=P(:,2:4)    %%提取后三列
rank(B)
```

例4： 判断下列方阵是否可对角化。若可对角化，求出可逆阵P，使$P^{-1}AP$为对角阵。

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

特征值与二次型

(1)

```
A=[4 6 0;-3 -5 0;-3 -6 1]; %可以对角化
[P D]=eig(A);

P =
         0    0.5774   -0.8944
         0   -0.5774    0.4472
    1.0000   -0.5774         0
D =
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     1
```

(2)

```
A=[0 1 0;-1 2 0;-1 1 1] %可以对角化
[P D]=eig(A)

P =
         0    0.6325    0.4511
         0    0.6325    0.4511
    1.0000    0.4472    0.7701
D =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

三、二次型化标准型

定义： 二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为一个(n元)二次型。若一个二次型只含平方项，不含交叉项，则称此二次型为标准型。

若令 $a_{ij}=a_{ji}$,$i<j$，则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为上述二次型的矩阵。显然，二次型的矩阵是对称的。

特征值与二次型

判断矩阵是否对称，反对称矩阵。例如判断如下矩阵是否对称？

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 9 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
function myflag
A=[1 3 4 6;3 7 9 5;4 9 4 1;6 5 1 0];
if A==A'
    myflag = 1;
else
    myflag = 0;
end
disp(myflag)
```

特征值与二次型

n阶实方阵A称为正交矩阵，如果$A'A=I$。正交矩阵对应的线性变换称为正交变换。

结论：

实对称矩阵一定可以对角化，且对于实对称矩阵A，一定存在正交矩阵P，使$P'AP$为对角形，且对角线上的元素为A的特征值，P的列向量为对应的特征向量。

即任意实二次型都可以通过正交变换化成标准型。

特征值与二次型

Matlab中二次型化成标准形的命令为：

$$[\,P, T\,] = \text{schur}\ (A)$$

或 $$[\,P, T\,] = \text{eig}\ (A)$$

其中：A 二次型矩阵(即实对称矩阵)；

T 为 A 的特征值所构成的对角形矩阵；

P 为 正交矩阵，

P 的列向量为 A的特征值所对应的特征向量

特征值与二次型

- Schur — 矩阵的舒尔分解

- **结论** 任意一个n阶方阵A可以分解为 A=PTP’，其中P为酉矩阵，T为上三角矩阵，T的主对角线上的元素为A的特征值。

- **酉矩阵** 共轭转置是其逆矩阵
  正交矩阵是实酉矩阵

- **若A是实对称阵** schur(A) = eig(A)

特征值与二次型

例6： 求一个正交变换，将二次型

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

化成标准形

解：该二次型所对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

特征值与二次型

```
>> A = [1 1 0 -1; 1 1 -1 0; 0 -1 1 1;-1 0 1 1];
>> [ P , T ]  = schur (A)
```

```
[ P , T ]  = eig (A)
```

P =

-0.5000	0.7071	0.0000	0.5000
0.5000	-0.0000	0.7071	0.5000
0.5000	0.7071	0.0000	-0.5000
-0.5000	0	0.7071	-0.5000

T =

-1.0000	0	0	0
0	1.0000	0	0
0	0	1.0000	0
0	0	0	3.0000

答：所作的正交变换为：　$X = PY$

二次型的标准型为：　$f = x' Ax = y' P' APy = y' Ty$

$$= -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 3y_4^2$$

特征值与二次型

例7： 求一个正交变换，将二次型

$$f = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$$

化成标准形

[P , T] = schur (A)

例8： 考虑下列方阵

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

特征值与二次型

(1)

A=[4 6 0;-3 -5 0;-3 -6 1]; %可以对角化

[P D]=eig(A);

```
P =
         0    0.5774   -0.8944
         0   -0.5774    0.4472
    1.0000   -0.5774         0
D =
     1     0     0
     0    -2     0
     0     0     1
```

[P D]=schur(A)

```
P =
    0.8165   -0.5774         0
   -0.4082   -0.5774   -0.7071
   -0.4082   -0.5774    0.7071

D =
    1.0000   -8.4853   -6.9282
         0   -2.0000   -2.4495
         0         0    1.0000
```

(2) A=[0 1 0;-1 2 0;-1 1 1]

>> [P D]=eig(A)

```
P =
         0    0.6325    0.4511
         0    0.6325    0.4511
    1.0000    0.4472    0.7701
D =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

[P D]=schur(A)

```
P =
    0.5774    0.6905   -0.4357
    0.5774   -0.7226   -0.3802
    0.5774    0.0321    0.8159
D =
    1.0000   -2.4476    0.0962
    0.0000    1.0000   -0.0000
         0         0    1.0000
```

四、 正定二次型的判定

定义 1： 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为正定的，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$。

定义 2： 实对称矩阵 A 称为正定的，如果二次型 $x'Ax$ 是正定的。

定理 2： 实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是 A 的特征值都大于零。

定理 3： 实对称矩阵 A 负定的充分必要条件是 A 的特征值都小于零。

特征值与二次型

特征值判别法

(1) 求二次型 f=X'AX 的矩阵 A 的全部特征值 λ_i (i=1,2,……);

(2) 判断 λ_i 是否大于 0 .

例9 判定下列二次型是否正定

$$f = x_1^2 + 3x_2^2 + 9x_3^2 + 19x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 6x_2x_4 - 12x_3x_4$$

$$f_1 = 99x_1^2 + 130x_2^2 + 71x_3^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 - 60x_2x_3$$

[P, T]=schur (A)或eig(A)

例10 判定下列二次型是否负定

$$f = -x_1^2 - 3x_2^2 - 9x_3^2 - 19x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_4 + 12x_3x_4$$

解 二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & 6 & -19 \end{pmatrix}$$

[P, T]=schur (A) 或 eig(A)

特征值与二次型

---Chol(A)：矩阵A的 Cholesky 分解

---Cholesky 分解：A=LL’，其中A是正定对阵矩阵，L为下三角矩阵

---[D p]=chol(A)

- 如果A正定，返回的p＝0
- 如果A不正定，则返回一个正的p，p－1为A中正定子矩阵的阶次

例11 判定下列二次型是否正定

$$f_2 = 10x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 - 28x_2x_3$$

解 二次型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{pmatrix}$$

```
>> A = [10 4 12;4 2 -14;12 -14 1]
>> [V,p]=chol(A)
V =
   3.1623   1.2649
        0   0.6325
p = 3     %非正定
```

作业

1、已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求矩阵A的特征值;

(2) 求矩阵A的特征值对应的全部特征向量.

作业

2 判断下列方阵是否可对角化,若可对角化，求出可逆阵P,使$P^{-1}AP$为对角阵。

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & 6 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3、 已知二次型$f=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$

(1)写出二次型矩阵A;

(2)用正交变换将二次型化为标准形,并写出所作的正交变换;

作业

4、判别下列二次型是否为正定二次型

$$f = 99x_1^2 + 130x_2^2 + 71x_3^2 - 12x_1x_2 + 48x_1x_3 - 60x_2x_3$$

5、判别下列二次型是否为负定二次型

$$f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$