数学实验与实践

函数的极限

本次课主要内容

- 函数的极限
- 多变量函数的极限

实验目的

1. 画图展示变化趋势，理解极限的概念；

2. 掌握用MatLab软件求极限的方法。

函数的极限

- 学习MATLAB命令
- 理解极限概念
- 求函数极限

实验内容

1. 学习Matlab命令

Matlab求极限命令列表如下：

数学运算	Matlab命令
$\lim_{x\to 0} f(x)$	limit(f)
$\lim_{x\to a} f(x)$	limit(f, x, a) 或 limit(f, a)
$\lim_{x\to a-} f(x)$	limit(f, x, a,’ left’)
$\lim_{x\to a+} f(x)$	limit(f, x, a,’ right’)
$\lim_{x\to \infty} f(x)$	limit(f, x, inf)

实验内容

建立符号变量命令sym和syms调用格式：

x=sym('x')　　　**建立符号变量 x;**

syms x y z　　　**建立多个符号变量 x, y, z;**

实验内容

2. 理解极限的概念

数列极限　如果对于$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 使得当$n>N$时有$|x_n-a|<\varepsilon$，则称a为数列$\{x_n\}$的极限，或称$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

直观上表示：n趋于无穷大时，$\{x_n\}$无限接近a。

就图形而言，就是某点列以某一平行于x轴的直线为渐近线。

函数极限　如果当$x\to x_0$时，有$f(x)\to A$，则称A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

实验内容

例. 求单位半径圆的周长。

STEP1：以直代曲，得到一系列越来越逼近于圆周长的近似值；

STEP2：考察这一系列值的变化趋势，从而确定出圆周长的准确值。

考察圆内接正多边形的变化趋势。

实验内容

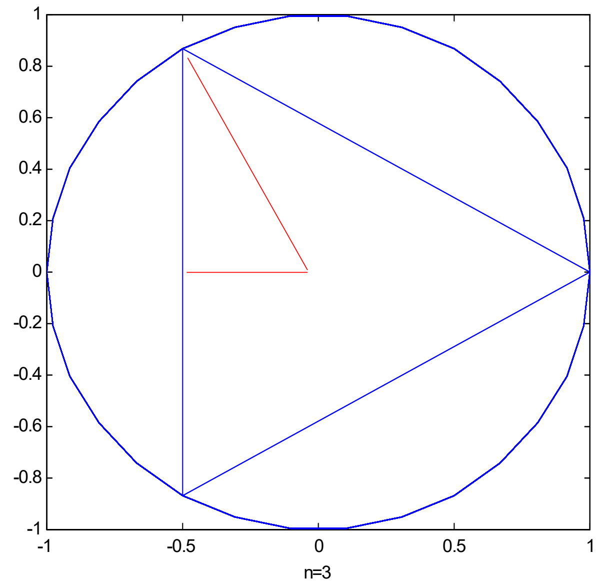
半径为1的圆；

用正 n 边形来逼近，周长为

$$l_3=3\cdot 2\cdot \sin(\frac{2pi}{n}\cdot\frac{1}{2}),\ n=3$$

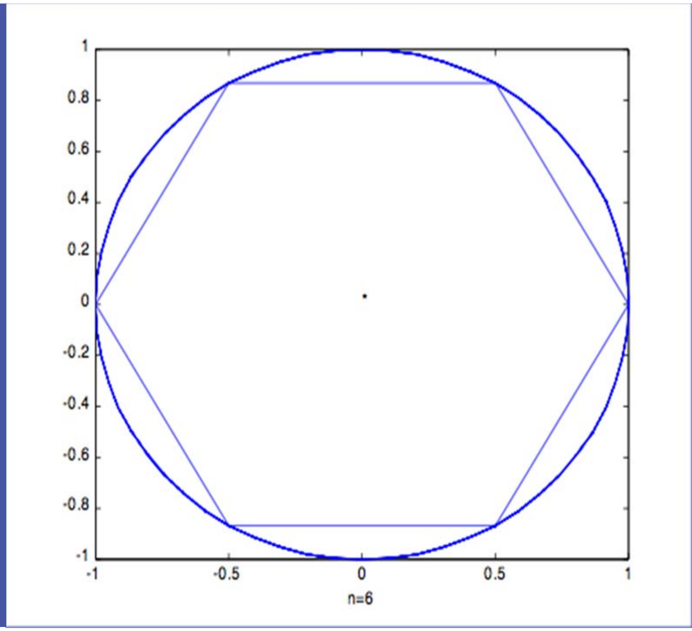
$$l_4=4\cdot 2\cdot \sin(\frac{2pi}{n}\cdot\frac{1}{2}),\ n=4,\ \ldots$$

$$l_n=n\cdot 2\cdot sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{1}{2}\right)$$



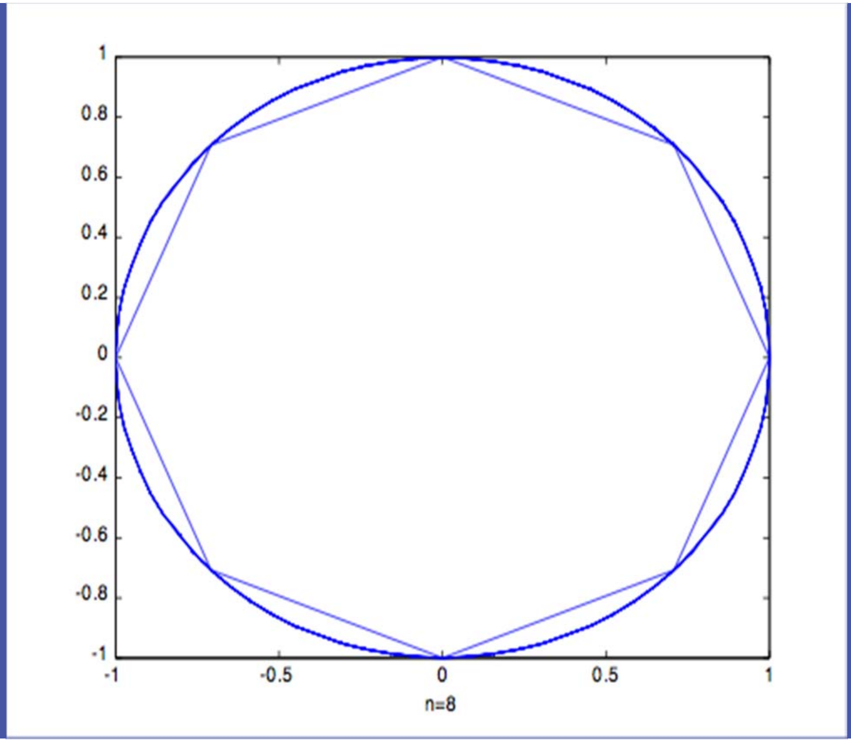
实验内容

$$l_n = n \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}\right)$$



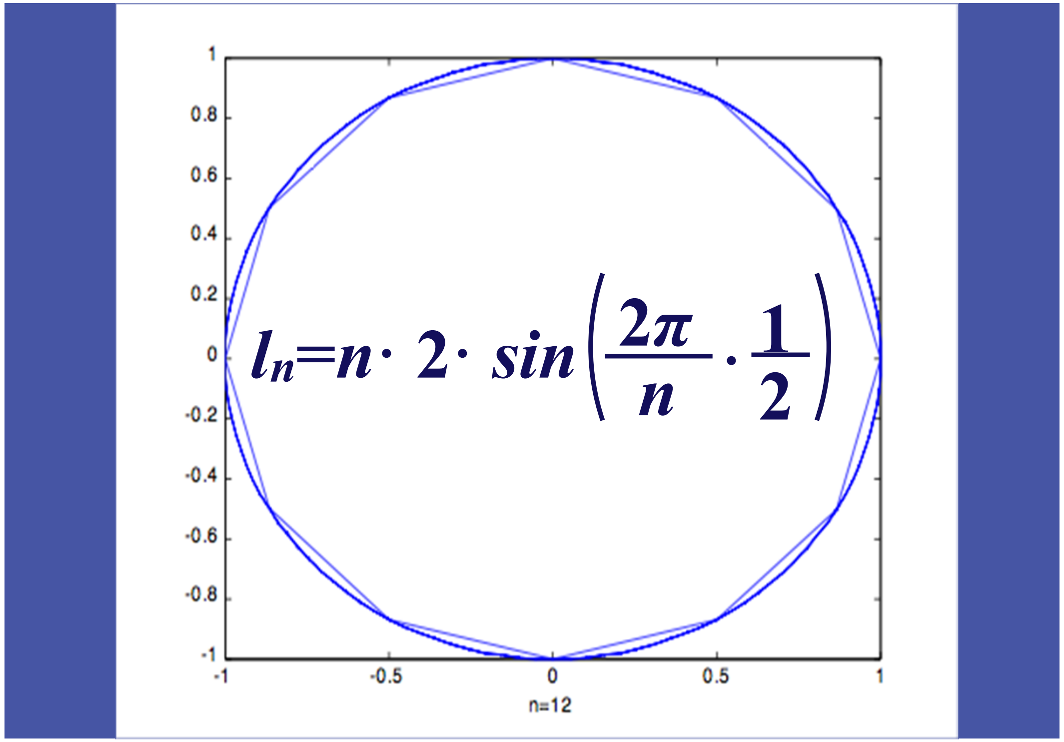
实验内容

$$l_n = n \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}\right)$$



实验内容

```
syms n;
l=n*2*sin(pi/n);
limit(l, n, inf)
```



$$l_n = n \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

n 越大，正多边形与圆接近的近似程度越高。

实验内容

例1 观察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的变化趋势；

解：输入命令

```
n=1: 100;
xn=n./(n+1);      %得到该数列的前100项。
for i=1: 100
plot(n(i), xn(i),'rd')  %画出xn随n变化的图形.
hold on
pause
end
```

```
syms x;
f=x/(x+1);
limit(f, x, inf)
```

实验内容

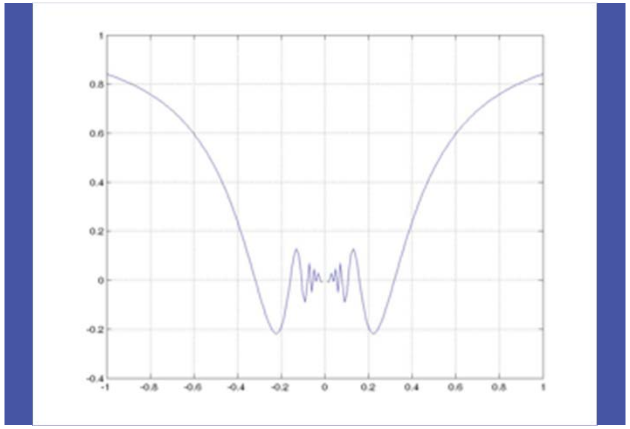
例2　分析函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ ，当$x\to 0$时的变化趋势；

解：画出函数f(x)在[-1, 1]上的图形

```
x=-1: 0.01: 1; y=x.*sin(1./x); plot(x, y)
```

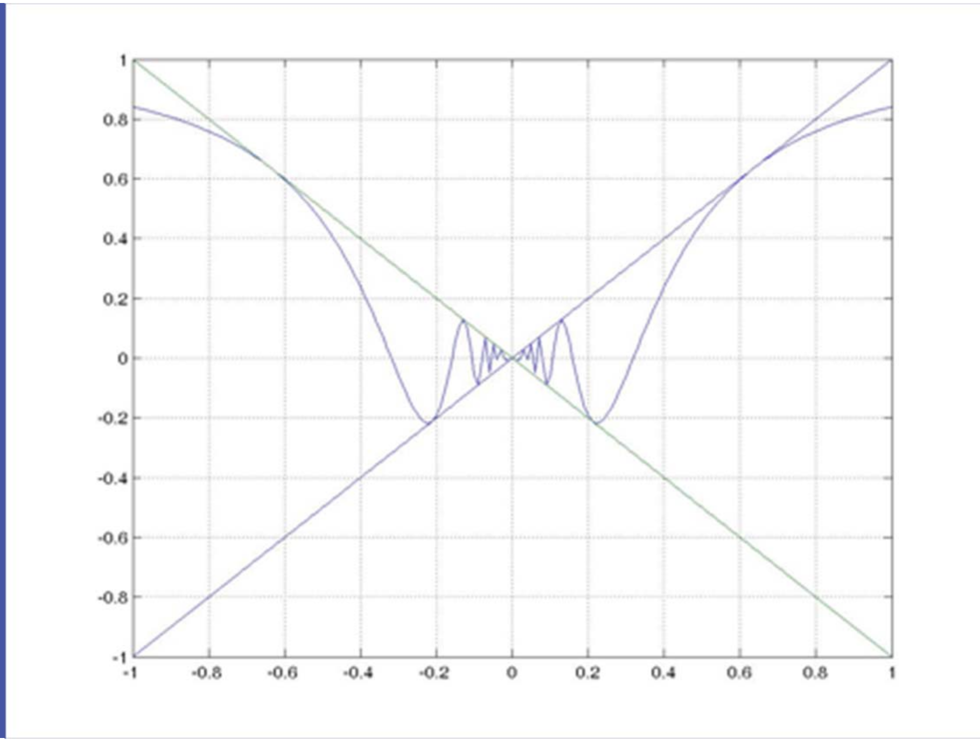
$x\sin\frac{1}{x}$随着$|x|$的减小，振幅越来越小趋近于0，频率越来越高作无限次振荡。

```
syms x;
f=x*sin(1/x);
limit(f, x, 0)
```



实验内容

```
x=-1: 0.01: 1;
y=x.*sin(1./x);
plot(x, y)
hold on;
plot(x, x);
plot(x, -x);
```



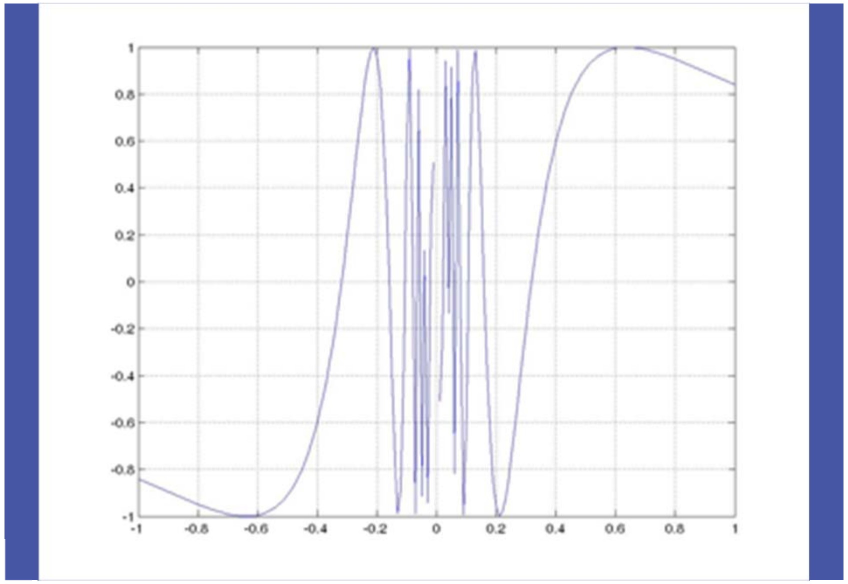
实验内容

例3　分析函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，当$x\to 0$时的变化趋势；

解：画出函数 $f(x)$在[-1, 1]上的图形

```
x=-1: 0.01: 1;
y=sin(1./x);
plot(x, y)
```

缩小步长再看！



$x\to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$在-1 与 1 之间无限次振荡，极限不存在。

可试增加数据点，比较它们的结果。

实验内容

例3　分析函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，当$x\to 0$时的变化趋势；

求极限：

```
syms x;
f=sin(1/x);
limit(f, x, 0)
```

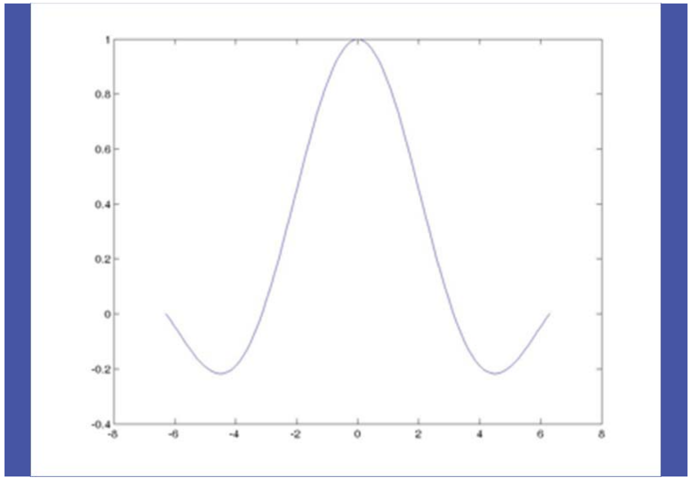
```
ans=
-1 .. 1
```

实验内容

例4　考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ ，当$x\to 0$时的变化趋势；

解：画出函数 $f(x)$在$[-2\pi, 2\pi]$上的图形

```
x=linspace(-2*pi, 2*pi, 100);
y=sin(x)./x;
plot(x, y)
```



实验内容

例4　考察函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，当$x\to 0$时的变化趋势；

```
syms x;
f=sin(x)/x;
limit(f, x, 0)
```

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

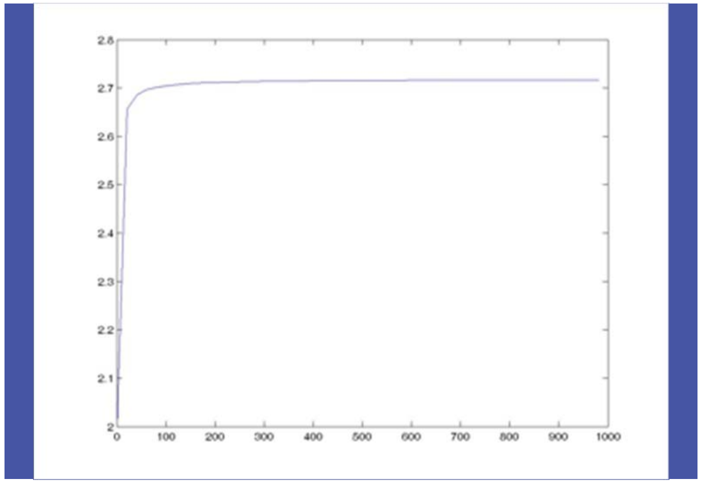
ans = 1

实验内容

例5　考察 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$，当$x\to\infty$时的变化趋势；

解：画出函数 $f(x)$在[10, 1000]上的图形, 并画出直线 y=2.71828

```
x=10: 1000;
y1=2.71828;
y=(1+1./x).^x;
plot(x, y, x, y1)
```



$x\to\infty$时，函数值与某常数无限接近，这个常数就是e

实验内容

例5　考察 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$，当$x\to\infty$时的变化趋势；

```
syms x;
f=(1+1/x)^x;
limit(f, x, inf)
```

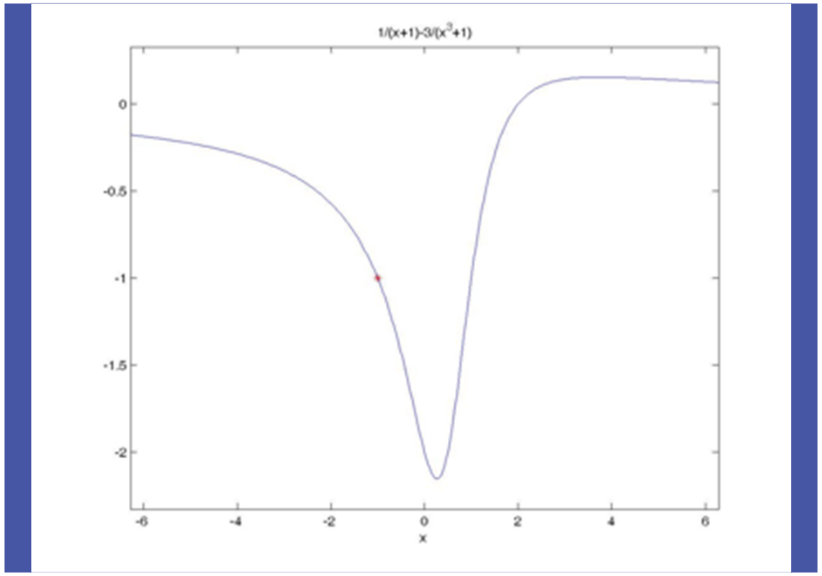
```
ans =
exp(1)
```

实验内容

例6　求 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^3+1}\right)$;

解：输入命令：

```
syms x;      %说明x为符号变量
f=1/(x+1)-3/(x^3+1);
limit(f, x, -1)
ezplot(f);
hold on;
plot(-1, -1,' r.')
```




```
ans =

  -1
```

实验内容

例7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

输入命令：

```
syms x;
f=((tan(x)-sin(x))/x^3);
limit(f)
```

```
ans =

 1/2
```

实验内容

例8　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\sin x^2}$；

解：输入命令

```
f=sym('x*log(1+x)/sin(x^2)');
limit(f)
```

```
ans =

  1
```

实验内容

例9　求$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$；

解：输入命令

```
syms a;
f=sym('(1+a/x)^x');
limit(f,'x', inf, 'left')
```

```
ans =

exp(a)
```

测试如下命令：

```
limit(f, ‘x’, inf)
limit(f, ‘x’, -inf)
limit(f, ‘x’, inf, 'right')
```

实验内容

练习：用matlab求上述极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^{x}$$

```
syms x;
f=…;
limit(f, x, inf)
```

实验内容

例10. 如何预测某地区一种耐用消费品的市场保有量？

假设：（1）第n个月，商品的保有总量为$x(n)$；

（2）每个月每个用户会影响λ个人购买商品；

（3）λ会随着总数$x(n)$增加而减少；

（4）不考虑其他因素影响.

$x(n+1) = x(n)+\lambda x(n)$　根据假设（3），取λ=a-bx，

得到：$x(n+1)=x(n)+(a-bx(n))x(n)$.

实验内容

（1）第n个月，商品的保有总量为$x(n)$；

（2）每个月每个用户会影响$\lambda=a-bx$个人购买商品；

$$x(n+1)=x(n)+(a-bx(n))x(n)$$

令$y(n)=bx(n)$，可得$y(n+1)=(1+a-y(n))y(n)$.

这就是离散形式的阻滞增长模型.

我们现在的问题是：

给定参数a和初始值 $y(0)$, $y(n)$会有怎样的变化趋势？

实验内容

编写如下的m文件： %logistic.m

```
function y=logistic(y0, a, n)
y=zeros(n, 1);
y(1)=y0;
for i=2: 1: n
y(i)=y(i-1)*(1+a-y(i-1));
end
plot(y)
```

设y初始为n维0向量.

为y(1)重新赋值为y0.

for循环进行递推计算.

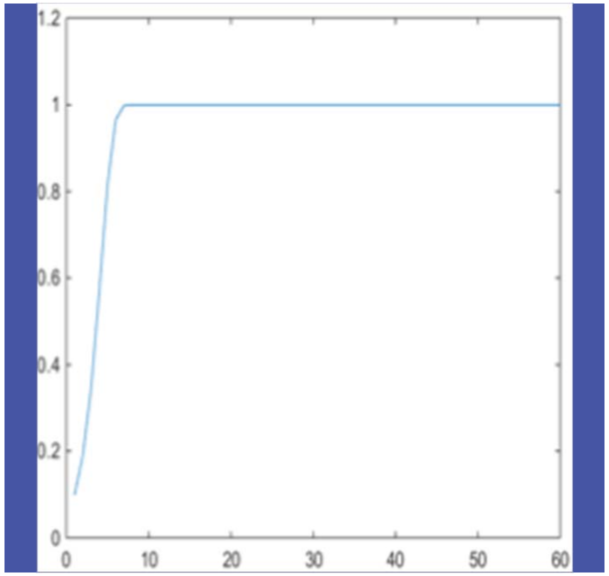
为其中的y0和a选定不同的取值，观察作图的结果.

比如令y0=0.1, a=1, 1.8, 2.1, 2.5, n=60，观察图形.

实验内容

y0=0.1, a=1, n=60

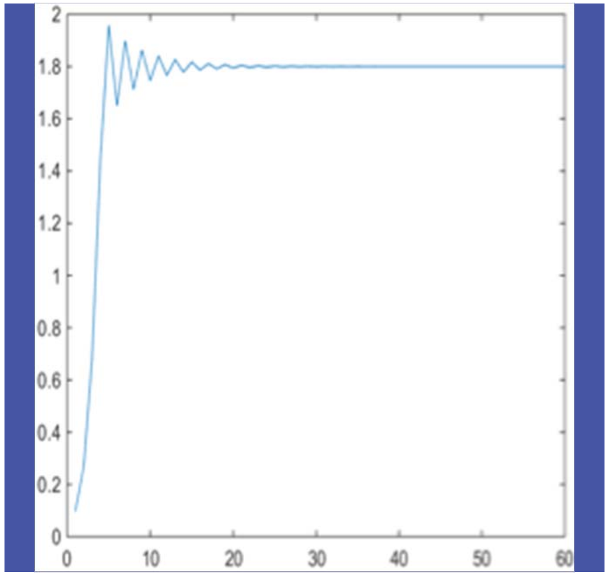
logistic(0.1,1,60)



单增序列、有极限

y0=0.1, a=1.8, n=60

logistic(0.1,1.8,60)



震荡序列、有极限

实验内容

多变量函数的极限 $L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

命令：

L=limit(limit(f, x, x_0), y, y_0)

或

L=limit(limit(f, y, y_0), x, x_0)

实验内容

例10　试求出二元函数极限值

$$\lim_{\substack{x\to 1/\sqrt{y} \\ y\to\infty}} e^{-1/(x^2+y^2)} \frac{\sin^2 x}{x^2} \left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{x+a^2y^2}$$

```
syms x y a;
f=exp(-1/(y^2+x^2))*sin(x)^2/(x^2)*(1+1/y^2)^(x+a^2*y^2);
L=limit(limit(f, x, 1/sqrt(y)), y, inf)
```

```
L =

exp(a^2)
```

实验内容

例11　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

解：输入命令：

```
syms x;
f=((1+x)^(1/x)-exp(1))/x;
limit(f, x, 0)
```

```
ans =

 NaN
```

说明不是所有的极限都可以用Matlab求出，此题可用洛必达法则求出

实验内容

关于多元函数求极限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,\ y) \overset{?}{=} \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,\ y)) \overset{?}{=} \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,\ y))$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y\sin\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x} \qquad \lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}$$

画出$z = y\sin\dfrac{1}{x}$在(0, 0)附近的图像，观察其极限.

练习：用matlab求上述极限

实验内容

作业：求下列极限

01 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$；

02 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$

03 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$；

04 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$；

05 $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

06 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$；

07 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$；

08 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}$。