积分计算

本次课主要内容

- 求和（sum）
- 不定积分（int）
- 定积分（int）
- 广义积分（int）
- 数值积分（梯形法trapz，自适应辛普森quad）
- 二重积分（int）
- 数值计算重积分（dblquad, tripquad）
- 曲线积分（int）
- 曲面积分（int）

实验目的

1. 通过实验加深理解积分理论中分割、近似、求和、取极限的思想方法；
2. 学习并掌握matlab求不定积分、定积分、二重积分、曲线积分的方法；
3. 学习matlab命令sum, symsum, int。

实验内容

- 学习MATLAB命令
- 计算不定积分
- 定积分的概念
- 不定积分和广义积分
- 二重积分的计算
- 曲线积分

Matlab命令

1. 学习Matlab命令

1）求和命令sum调用格式：sum(x)

给出向量x的各元素的累加和。若x为矩阵，则是一个元素为每列和的行向量。

例1

```
x=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10];
sum(x)
```

ans=55

Matlab命令

例2

```
x=[1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9]
```

```
x=
    1    2    3
    4    5    6
    7    8    9
```

```
sum(x)          %计算每列元素和
ans=12   15   18
```

Matlab命令

2）求和命令symsum调用格式：

symsum(s, n) $\longrightarrow \sum_{k=1}^{n} s$

symsum(s, k, m, n) $\longrightarrow \sum_{k=m}^{n} s$

当x的元素很有规律，例如为s(k)时，可用symsum求得x的各项和，n可取无穷。

symsum(s(k), 1, n)=s(1)+s(2)+….+s(n)

symsum(s(k), k, m, n)=s(m)+s(m+1)+….+s(n)

Matlab命令

例3.

```
syms k n
symsum(k, 1, 10)
symsum(k, 2, 10)
```

ans=55

ans=54

```
symsum(k^2, k, 1, n)
```

ans=

1/3*(n+1)^3-1/2*(n+1)^2+1/6*n+1/6

Matlab命令

例4. 求下列部分和

（1）$\sum_{n=1}^{30} \frac{(-1)^{n+1}x}{n(n+2)}$ （2）$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a\sin(k)$ （3）$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2}$

symsum(s(k), k, m, n)=s(m)+s(m+1)+....+s(n)

```
syms n x;
s1=symsum((-1)^(n+1)*x/(n*(n+2)), n, 1, 30)
```

s1=(495*x)/1984

Matlab命令

（2）$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a\sin(k)$

```
syms n a k;
s2=symsum((-1)^k*a*sin(k), k, 0, n-1)
```

（3）$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2}$

```
syms n;
s3=symsum(1/n^2, n, 1, 10)
```

```
s2 =

a*((((-1)^n*exp(n*1i) - 1)*1i)/(2*(exp(1i) + 1)) + (exp(-
n*1i)*exp(1i)*(exp(n*1i) - (-1)^n)*1i)/(2*(exp(1i) + 1)))

s3=1968329/1270080
```

Matlab命令

例5. 讨论下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ （2）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ （3）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$

```
syms n;
s1=symsum(1/n^2, n, 1, inf)
```

s1 = pi^2/6

```
syms n;
s2=symsum(1/n, n, 1, inf)
```

s2 = Inf

```
syms n;
s3=symsum(a^n/n, n, 1, inf)
```

s3 =piecewise(1 <= a, Inf, abs(a) <= 1 & a ~= 1, -log(1 - a))

Matlab命令

课堂练习：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{M}{n}\sin\frac{M}{n}$$

M=你的学号末两位之和.

Matlab命令

3）积分命令int调用格式：

int(f(x)) ⟶ 计算不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$

int(f(x, y), x) ⟶ 计算不定积分$\int f(x, y)\mathrm{d}x$

int(f(x), a, b) ⟶ 计算定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

int(f(x, y), x, a, b) ⟶ 计算定积分$\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$

2. 计算不定积分

例6 计算不定积分$\int x^2 \ln x dx$

```
syms x y1;
y=x^2*log(x);
y1=diff(y)     %对函数求导
y0=int(y1)    %对导数积分的原函数
y2=int(y)
```

```
y1 =2*x*log(x)+x

y0 =x^2*log(x)

y2 =1/3*x^3*log(x)-1/9*x^3
```

例7 计算不定积分

1） $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$； 2） $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{3x-1}}\,dx$； 3） $\int x^2\arcsin x\,dx$.

```
syms x;
syms a real;
y=[sqrt(a^2-x^2), (x-1)/(3*x-1)^(1/3), x^2*asin(x)];
int(y, x)                    %定义向量函数，对其求积分
```

```
ans =

[ 1/2*x*(a^2-x^2)^(1/2)+1/2*a^2*asin((1/a^2)^(1/2)*x), 1/15*(3*x-1)^(5/3)-
1/3*(3*x-1)^(2/3), 1/3*x^3*asin(x)+1/9*x^2*(1-x^2)^(1/2)+2/9*(1-x^2)^(1/2)]
```

不定积分

例8　试证明

$$\int x^3\cos^2(ax)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{8}+\left(\frac{x^3}{4a}-\frac{3x}{8a^3}\right)\sin(2ax)+\left(\frac{3x^2}{8a^2}-\frac{3}{16a^4}\right)\cos(2ax)+C$$

```
syms a x;
f1=int(x^3*(cos(a*x))^2)
```

```
f1 =
((3*sin(a*x)^2)/8 + (a^3*x^3*sin(2*a*x))/4 - (3*a^2*x^2*(2*sin(a*x)^2
     - 1))/8 - (3*a*x*sin(2*a*x))/8)/a^4 + x^4/8
```

不定积分

```
syms a x;
f1=int(x^3*(cos(a*x))^2)
f2=(x^4)/8+(x^3/(4*a)-(3*x)/(8*a^3))*sin(2*a*x)
    +((3*(x^2))/(8*(a^2))-3/(16*a^4))*cos(2*a*x);
simplify(f1-f2)
```

```
f1 =
 ((3*sin(a*x)^2)/8 + (a^3*x^3*sin(2*a*x))/4 - (3*a^2*x^2*(2*sin(a*x)^2
    - 1))/8 - (3*a*x*sin(2*a*x))/8)/a^4 + x^4/8

ans=3/16/a^4
```

定积分

3. 定积分的概念

定积分为一个和式极限，取f(x)=exp(x)，积分区间为[0, 1]，等距划分为20个子区间

$$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{20} y(I)\cdot\frac{1}{20}$$

选取每个子区间的端点，计算端点处的函数值

取区间的左端点乘以区间长度全部加起来 s1

取区间的右端点乘以区间长度全部加起来 s2

```
x=linspace(0, 1, 21);
y=exp(x);
y1=y(1:20);
s1=sum(y1)/20
y2=y(2:21);
s2=sum(y2)/20
```

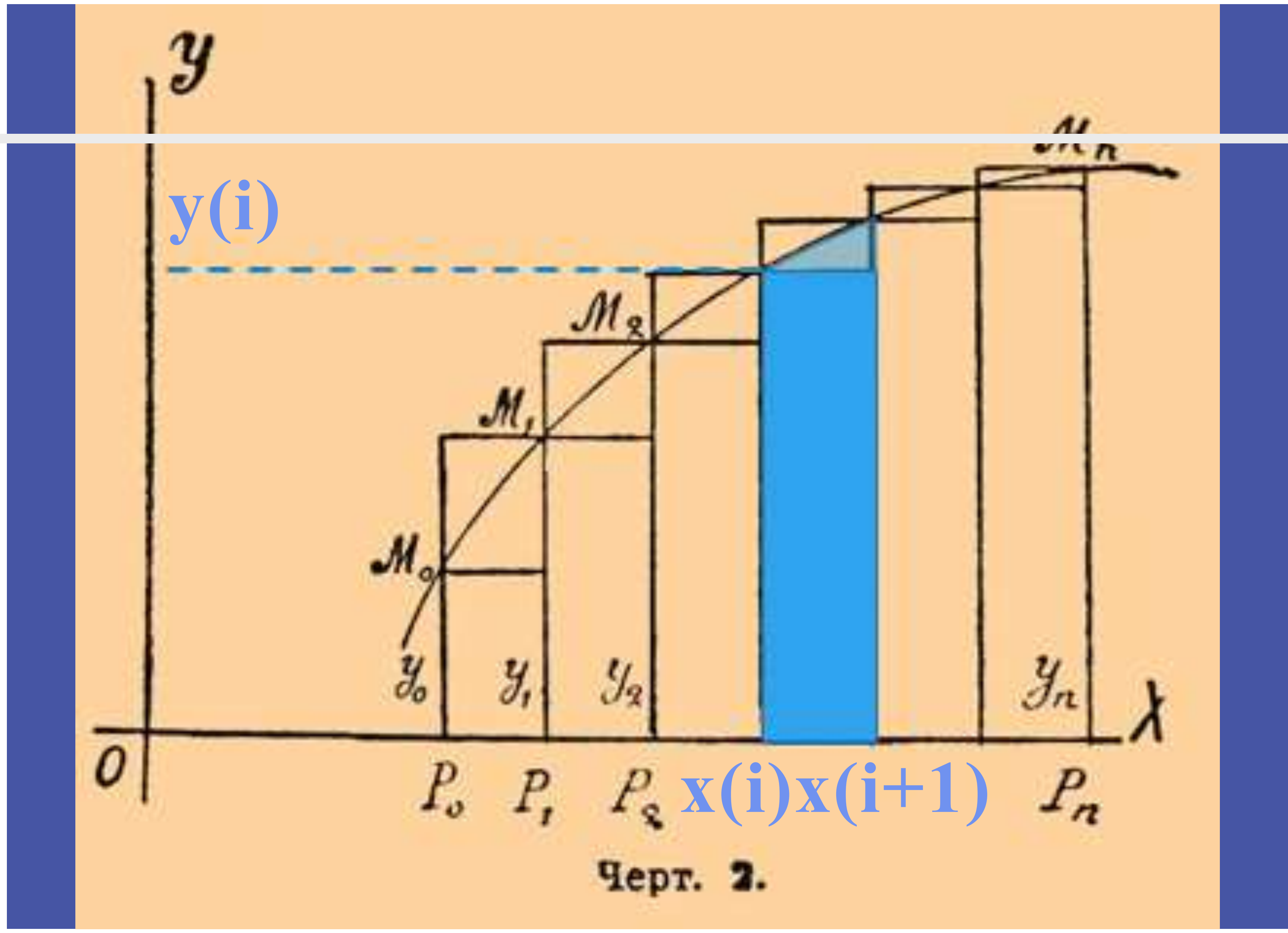
s1=1.6757

s2=1.7616

定积分

做定积分的示意图，取左端点

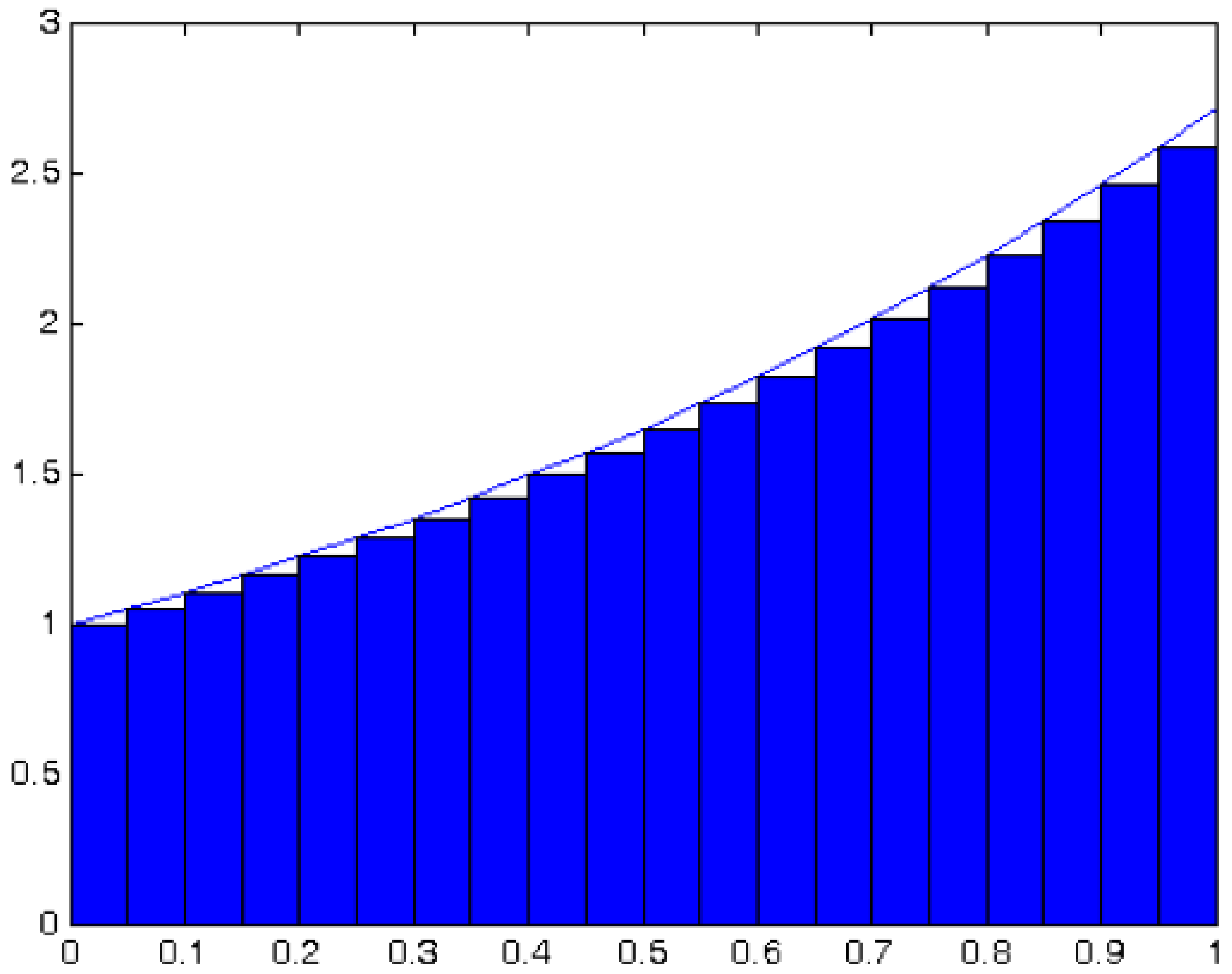
```
x=linspace(0, 1, 21);
y=exp(x);
plot(x, y); hold on
for i=1: 20
fill([x(i), x(i+1), x(i+1), x(i)], [0, 0, y(i), y(i)], 'b')
end
```




```
fill([x(1), x(2), x(3), x(4)], [y(1), y(2), y(3), y(4)], 'k')
```

%将点(x(1), y(1)), (x(2), y(2)), (x(3), y(3)), (x(4), y(4))按照次序连成一条封闭曲线，在该封闭曲线内染色’k’。

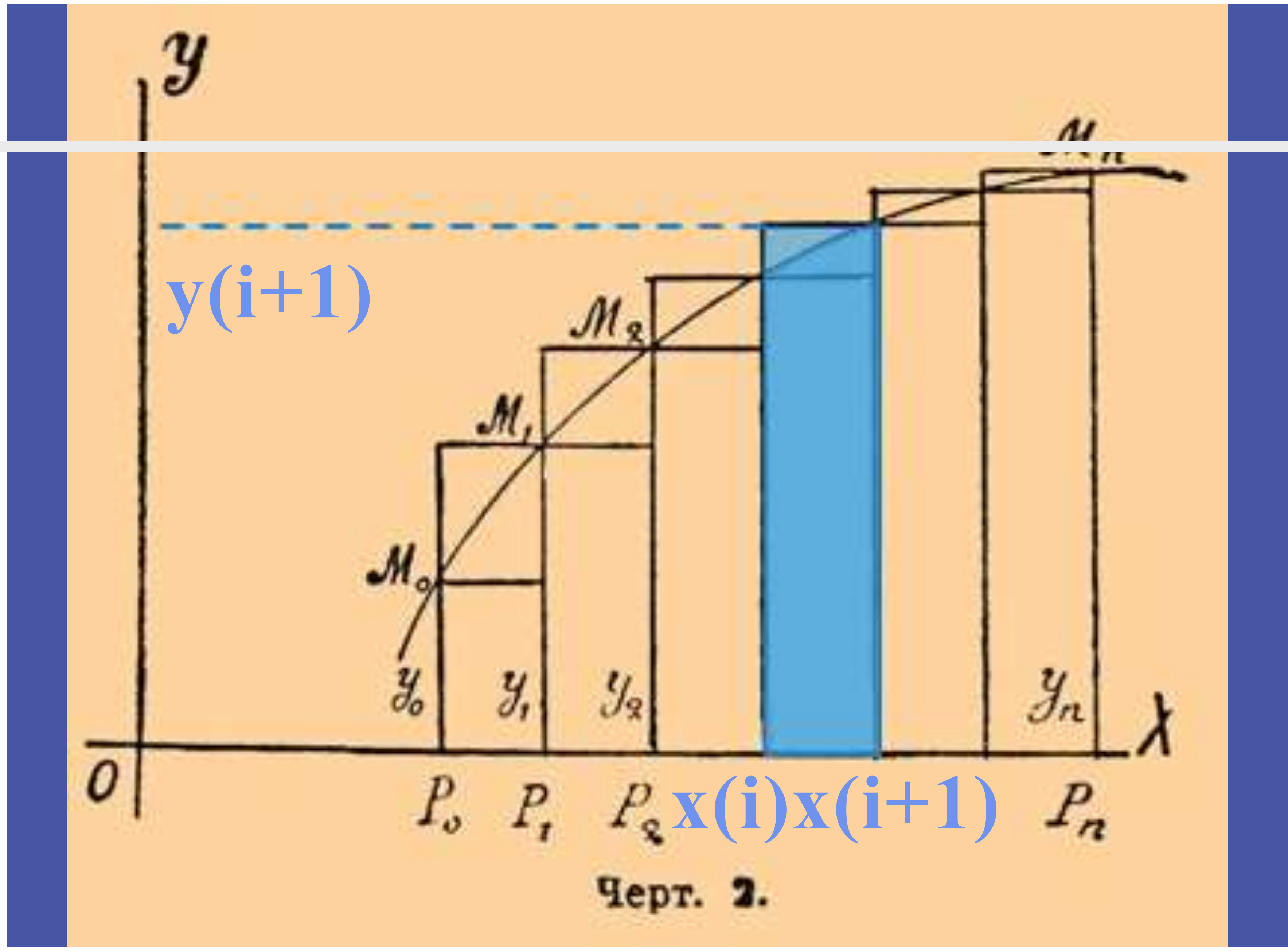
定积分



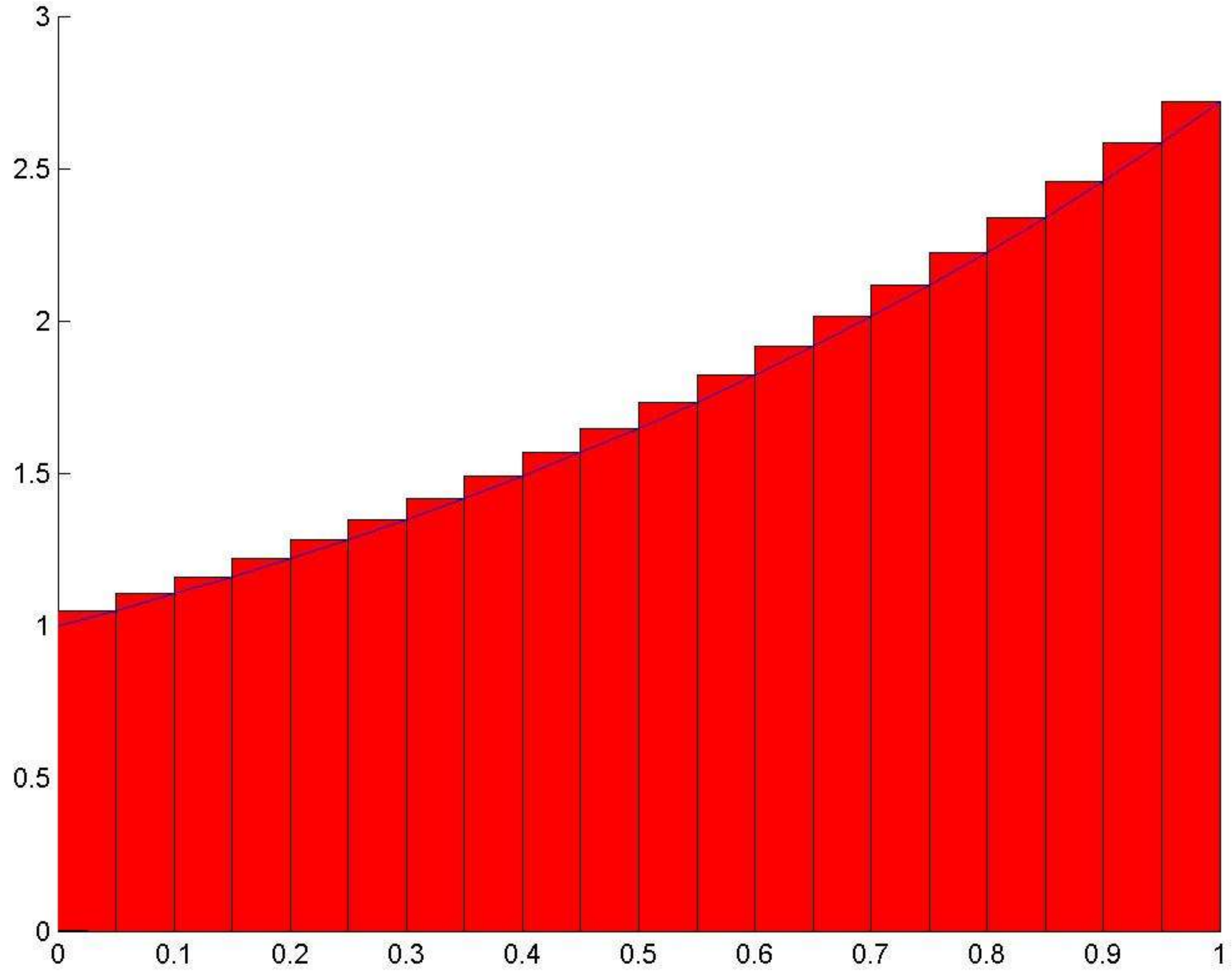
定积分

若取右端点，则

```
x=linspace(0, 1, 21);
y=exp(x); hold on
for i=1: 20
fill([x(i), x(i+1), x(i+1), x(i)], [0, 0, y(i+1), y(i+1)], 'r')
end
plot(x, y);
```



定积分



定积分

从图上可以看出：$s1 < \int_0^1 e^x dx < s2$

当点取得越来越多时，s2-s1的值会越来越小，可试取50个点计算，看结果如何。

下面按等分区间计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n}$

```
syms k n;
s=symsum(exp(k/n)/n, k, 1, n);
limit(s, n, inf)
```

ans = exp(1)-1

4. 计算定积分和广义积分

例9　计算$\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$

解：

```
syms x;
I=int(exp(x), 0, 1)
```

得结果： I=exp(1)-1

结果与上面一样

例10　计算$\int_0^2 |x-1|\,\mathrm{d}x$

解：

```
syms x;
int(abs(x-1), 0, 2)
```

ans = 1.

定积分

int( ) 还可以求变上下限的定积分问题。

例11　试求积分$I(t)=\int_{\cos t}^{e^{2t}}\frac{-2x^2+1}{(2x^2-3x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

```
syms x t;
f=(-2*(x^2)+1)/(2*(x^2)-3*x+1)^2;
I=simple(int(f, x, cos(t), exp(2*t)))
```

I=(2*exp(2*t)*cos(t)-1)*(-exp(2*t)+cos(t))/(2*exp(2*t)-1)/(exp(2*t)-1)/(2*cos(t)-1)/(cos(t)-1)

$$I=\frac{(2e^{-2t}\cos t-1)(e^{-2t}-\cos t)}{(e^{-2t}-1)(2e^{-2t}-1)(\cos t-1)(2\cos t-1)}$$

定积分

课堂练习：求积分$\int_{sint}^{1+cost}(x^2+2x+e^x)\,\mathrm{d}x$

定积分

例12 判别广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$、$\int_1^2\frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性，收敛时计算积分值.

解：对第一个积分输入指令：

```
syms x; syms p real; int(1/x^p, x, 1, inf)
```

```
ans = piecewise(1<p, 1/(p-1), p<=1, Inf)
```

由结果看出，当p<=1时，x^(-p+1)为无穷；

当p>1时，ans=1/(p-1).

定积分

对第二个积分，输入命令：

```
syms x; int(1/(x-1)^2, 1, 2)
```

```
ans = inf
```

对第三个积分，输入命令：

```
syms x;
int(1/(2*pi)^(1/2)*exp(-x^2/2), -inf, inf)
```

```
ans = 7186705221432913/18014398509481984*2^(1/2)*pi^(1/2)
```

定积分

例13　计算积分$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解：输入指令：

```
syms x t; int(sin(x)/x, 0, t)
```

→

```
ans = sinint(t)
```

```
>> help sinint
   SININT Sine integral function.
   SININT(x) = int(sin(t)/t, t, 0, x).
   See also COSINT.
   Overloaded methods
   help sym/sinint.m
```

这类积分无法用初等函数或其值来表示，需要用到数值积分。

5 数值积分

（1）梯形积分法

先将积分区间划分为几个小区间，用每个小区间上梯形面积之和作为积分的近似值。

具体方法如下：

分点为：$a=x_0$，$x_1,\ldots$，$x_n=b$，将区间分成n个等长的小区间，区间长度为$\Delta x=b-a/n$，设函数$y=f(x)$对应的各分点的函数值为$y_0,y_1,\ldots,y_n$，每个小梯形的面积为：

$$\Delta A_i=\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x=\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\frac{b-a}{n},\ i=1,2,\ldots,n$$

数值积分

从而有：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]$$

在编程时可采用如下方法估计误差：

$$A(n) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]$$

可以证明梯形法最大误差为：$\dfrac{(b-a)^3}{12n^2} M$ 其中 $|f''(x)| \le M$

数值积分

编程时可如下进行：设误差为ε

逐步计算A(n)，$A(n)=\dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right]$

若|A(n+1)-A(n)|<ε，则A(n)即积分的近似值。

可先编写f.m文件定义函数y=f(x)，然后再编写A.m文件计算积分。

数值积分

z=trapz(x, y) x表示积分区间的离散化向量，y是与x同维数的被积函数向量，z返回积分的近似值.

例14.　求积分$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$（高精度近似值为1.49364826)

解：先用较大步长的积分区间离散化向量求解

```
clear
format long
x=-1: 0.5: 1; y=exp(-x.^2); z=trapz(x, y)
```

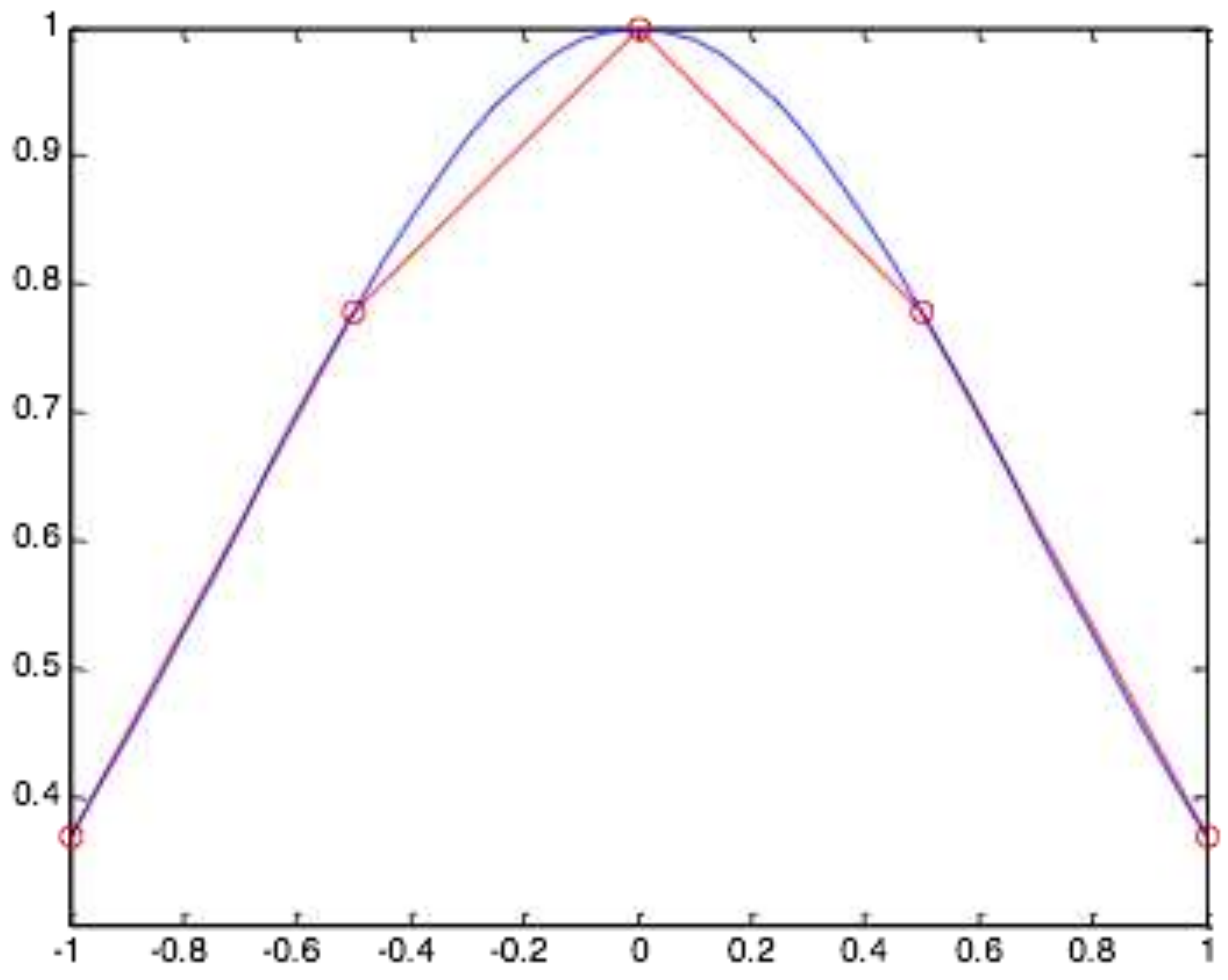
z=1.46274050

数值积分

xx=-1: 0.05: 1; yy=exp(-xx.^2); z=trapz(xx, yy)

z=1.49334167

plot(x, y, 'r-o', xx, yy)



（2）Simpson公式（抛物线法）

f在$[a, b]$区间上积分的Simpson公式 。

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],\ h=\frac{b-a}{2}$$

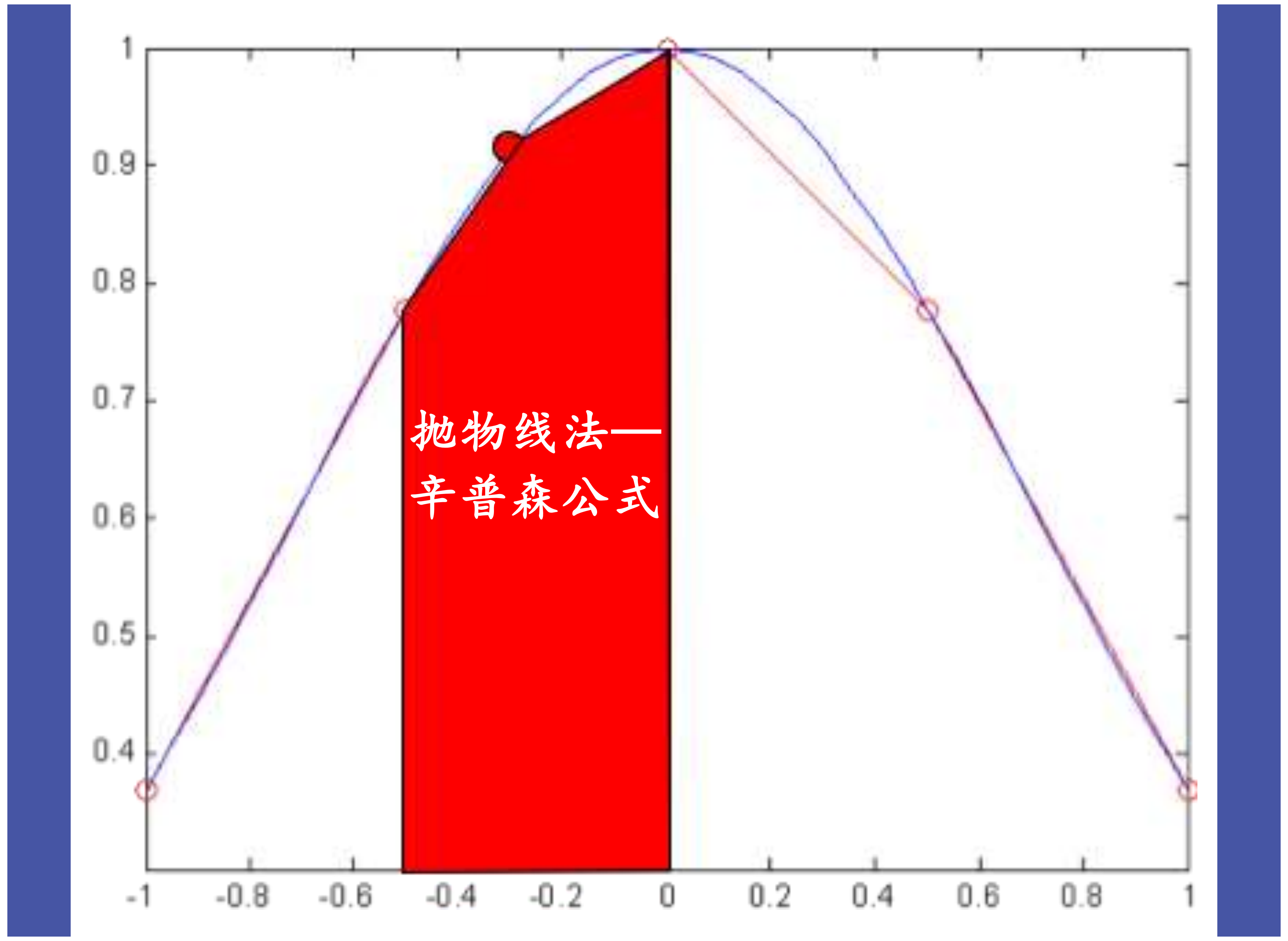
用通过三点$(a, f(a))$, $((a+b)/2, f((a+b)/2))$, $(b, f(b))$的抛物线围成的曲边梯形的面积来代替由 f 围成的曲边梯形的面积，由此获得积分的近似值.

（2）Simpson公式（抛物线法）

f在$[a, b]$区间上积分的Simpson公式 。

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right],\ h=\frac{b-a}{2}$$

将区间$[a, b]$分为n等分，步长为$h=(b-a)/n$，分点为$x_k=a+kh$（$k=0,\ldots,n$）。在每个小区间$[x_k, x_{k+1}]$上采用辛普森公式，得到小区间上f积分的近似值。对每个小区间上积分的近似值求和，得到f在$[a, b]$区间积分的近似值，这就是复合Simpson公式：



数值积分

复合Simpson公式

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})],\ x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$$

可以证明最大误差不超过 $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M$

其中M是$|f^{(4)}(x)|$在$[a, b]$上的最大值。

梯形法最大误差为：$\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M$

（3）adaptive Simpson公式（自适应辛普森法）

被积函数f区间$[a, b]$上变化不均匀，有时变化急剧，有时变化平缓 — 等距剖分区间的复合求积公式不很合适。

为了提高精度、节省计算量，可以在函数变化急剧的部分增多节点，在函数变化平缓的地方减少节点，即自适应积分法（adaptive quadrature methods）

数值积分

自适应辛普森方法，采用逐次将区间二等分的方法。将区间$[a, b]$记为$[a, a+h]$，其中$h=b-a$为区间的长度，称为0级区间。在区间$[a, a+h]$上采用辛普森公式，把结果记作

$$S^{(1)}_{a,\ a+h}=\frac{h}{6}\left[f(a)+4f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f(a+h)\right]$$

再等分$[a, a+h/2]$和$[a+h/2, a+h]$，为1级子区间，其长度为$h/2$.在每个子区间上采用辛普森公式计算积分，然后相加并令

$$S^{(2)}_{a,\ a+h}=S^{(1)}_{a,\ a+\frac{h}{2}}+S^{(1)}_{a+\frac{h}{2},\ a+h}$$

数值积分

再将1级子区间中的一个或所有的两个二等分，所得的子区间称为2级子区间，其长度为$h/2^2$, ……。如此继续下去，最后将区间$[a, a+h]$分成n个子区间$[a_i, a_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$，这样有

$$a=a_0<a_1<\dots<a_i<a_{i+1}<\dots<a_n=b=a+h$$

子区间的长度一般是不同的，如果子区间$[a_i, a_{i+1}]$是r级，则其长度为 $a_{i+1}-a_i=\dfrac{h}{2^r}$

区间的划分应根据被积函数的变化而定的，函数变化平缓则不再划分子区间，函数变化急剧则继续划分。

数值积分

设$S_{a,\ a+h}$表示积分$I(f)$的近似值，那么有

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S_{a,\ a+h} = \sum_{i=0}^{n-1} S^{(2)}_{a_i,\ a_{i+1}}$$

数值积分

自适应辛普森方法的命令：z=quad(f, a, b, tol, trace)

→ $f(x)$为被积函数

a　为积分下限

b　为积分上限

tol　为计算精度，缺省为0.001

trace非0时，以动态点图的形式实现积分的整个过程。

注意：调用quad函数时，先要建立一个描述被积函数f(x)的函数文件或语句函数。

例15. 用自适应辛普森方法求积分

$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ （高精度近似值为1.49364826）

解：使用语句函数（内联函数）

```
clear;
g=inline('exp(-x.^2)');
z=quad(g,-1,1)
```

z=1.49364827

数值积分

例16. 用自适应辛普森方法求积分

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \mathrm{d}x$$ （高精度近似值为1.49364826）

```
clear;
g=inline('exp(-x.^2)');
z=quad(g,-1,1, 1e-6)
```

z=1.49364828

数值积分

```
clear;
g=inline('exp(-x.^2)');
z=quad(g,-1, 1, 1e-6, 1)
```

9	-1.0000000000	5.43160000e-001	0.3198710950
11	-1.0000000000	2.71580000e-001	0.1290739989
13	-0.7284200000	2.71580000e-001	0.1907965490
15	-0.4568400000	9.13680000e-001	0.8538774475
17	-0.4568400000	4.56840000e-001	0.4269534258
19	-0.4568400000	2.28420000e-001	0.2024448313
21	-0.2284200000	2.28420000e-001	0.2245087588
23	0.0000000000	4.56840000e-001	0.4269534258
25	0.0000000000	2.28420000e-001	0.2245087588
27	0.2284200000	2.28420000e-001	0.2024448313
29	0.4568400000	5.43160000e-001	0.3198710950
31	0.4568400000	2.71580000e-001	0.1907965490
33	0.7284200000	2.71580000e-001	0.1290739989

z = 1.49364827606288

数值积分

练习：用自适应辛普森方法法计算积分

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$

```
clear;
f=inline('f(x)');
z=quad（f，下限，上限，精度）
```

6　二重积分

例18　求二次积分$\int_0^1 dx\int_{2x}^{x^2+1} xy\,dy$；

解：输入指令：

```
syms x y;
int(int(x*y, y, 2*x, x^2+1), x, 0, 1)
```

ans =1/12

重积分

例19 求积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \sin(\pi(x^2+y^2))dxdy$;

解：积分区域可用不等式表成：$-1\leq x\leq 1$，$-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq \sqrt{1-x^2}$

二重积分可化为二次积分 $\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin(\pi(x^2+y^2))dy$

```
syms x y;
int(int(sin(pi*(x^2+y^2)), y, -sqrt(1-x^2), sqrt(1-x^2)), x, -1, 1)
```

重积分

ans =

sum(1/2*2^(-3-2*_k1)*(-1)^_k1*pi^(2+2*_k1)/(1+_k1)*hypergeom([1/4, 3/4], [1/2, 2+_k1, 3/2+_k1],-1/4*pi^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)*2^(3/2+2*_k1)/(3/4+_k1)*gamma(5/2+2*_k1)/gamma(2+2*_k1)^2+1/2*2^(-2-2*_k1)*(-1)^_k1*pi^(2+2*_k1)*hypergeom([3/4, 5/4], [3/2, 2+_k1, 3/2+_k1], -1/4*pi^2)*2^(1/2)/pi^(1/2)*2^ (2*_k1 - 1/2)/(1/4+_k1)/_k1*gamma(3/2+2*_k1)/gamma(2*_k1)/gamma(3+2*_k1), _k1 = 0 .. inf)

Gamma函数是积分式，表明int命令求不出结果

重积分

所以采用极坐标化为二次积分：$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin(\pi r^2)\mathrm{d}r$

输入命令：

```
syms r a;
int(int(r*sin(pi*r^2), r, 0, 1), a, 0, 2*pi)
```

ans = 2

7. 数值重积分

z=dblquad(f, a, b, c, d)

求得二元函数$f(x, y)$的重积分，其中a, b为变量x的积分下、上限；c, d为变量y的积分下、上限；

z=tripquad(fun, a, b, c, d, e, f)

求得三元函数$fun(x, y, z)$的重积分，其中a, b为变量x的积分下、上限；c, d为变量y的积分下、上限；e, f 为变量z的积分下、上限

数值重积分

例20. 计算重积分 $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2} x\exp(x^2+y^2)\,dxdy$

解：

```
fun=inline('x.*exp(x.^2+y.^2)', 'x', 'y');
dblquad(fun, 0, 2, -2, 2)
```

ans =8. 818304115675463e+002

课堂练习：求精确结果和数值计算结果 $\iint\limits_{\substack{0<x<M\\0<y<M}} xye^{x^2+y^2}\,dxdy$

M是你学号末两位之和.

例21. 计算重积分 $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\pi}(y\sin t+z\cos t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解：

```
fun=inline('y.*sin(x)+z.*cos(x)', 'x', 'y', 'z')
triplequad(fun, 0, pi, 0, 1, -1, 1)
```

ans = 1.99999999436264

8. 曲线积分

例22 求曲线积分$\int_L xyds$，其中L为曲线$x^2+y^2=1$在第一象限的一段；

解：曲线参数方程为$x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$

曲线积分可化为：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt$

```
syms t; int(cos(t)*sin(t), 0, pi/2)
```

ans = 1/2

曲线积分

由参数方程给出的曲线长度：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

则曲线长为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

做函数文件 qxhc.m

```
function y=qxhc(x, y, t, a, b)
y=int(sqrt(diff(x, t)^2+diff(y,t)^2), a, b);
```

曲线积分

例23　计算摆线$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$的一拱$(0<t<2\pi)$的长度。

```
function baixian
syms t a;
x=a*(t-sin(t)); y=a*(1-cos(t));
s=qxhc(x, y, t, 0, 2*pi)
pretty(simplify(s))
function y=qxhc(x, y, t, a, b)
y=int(sqrt(diff(x, t)^2+diff(y,t)^2), a, b);
```

```
s = 4*(a^2)^(1/2)*4^(1/2)
8 csgn(a) a
```

曲线积分

第二类曲线积分 $I_2 = \int_l \vec{f}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$,

其中向量$\vec{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$

$$\mathrm{d}\vec{s} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]^T \mathrm{d}t$$

例24 计算 $\oint_l \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，$l$为正向圆周$x^2+y^2=a^2$

```
syms t;
syms a positive;
x=a*cos(t);y=a*sin(t);
F=[(x+y)/(x^2+y^2),-(x-y)/(x^2+y^2)];
ds=[diff(x,t);diff(y,t)];
I=int(F*ds,t,2*pi,0)
```

```
I =  2*pi
```

例25 计算$\int_l (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\,\mathrm{d}y$, l为抛物线$y=x^2(-1\le x\le 1)$.

```
syms x;
y=x^2;
F=[x^2-2*x*y,y^2-2*x*y];
ds=[1;diff(y,x)];
I=int(F*ds,x,-1,1)
```

```
I = -14/15
```

曲面积分

第一类曲面积分 $\mathrm{I} = \iint_S \ \phi(x,y,z)\mathrm{dS}$ ，

若曲面满足 $z = f(x,y)$,

$$\mathrm{I} = \iint_{\sigma_{xy}} \phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中σ_{xy}为积分区域

例26 计算$I=\iint_S xyz\mathrm{d}S$, S由$x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=a(a>0)$ 围成.

```
syms x  y;
syms a positive;
z=a-x-y;
I=int(int(x*y*z*sqrt(1+diff(z,x)^2+diff(z,y)^2),y,0,a-x),x,0,a)
```

```
I = (3^(1/2)*a^5)/120
```

曲面积分

若曲面满足参数方程 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$,

$$\mathrm{I} = \iint_{\Sigma} \phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中 $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$

$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$ Σ为积分区域

曲面积分

例27 计算$\mathrm{I}=\iint_S (x^2y+zy^2)\mathrm{d}S$, S为螺旋曲面, 其中$x=u\cos v$, $y=u\sin v, z=v$ 的 $0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi$部分.

```
syms u  v;
syms a positive;
x=u*cos(v);y=u*sin(v);z=v;f=x^2*y+z*y^2;
E=diff(x,u)^2+ diff(y,u)^2+ diff(z,u)^2;
F=diff(x,u)*diff(x,v)+ diff(y,u)*diff(y,v)+ diff(z,u)*diff(z,v);
G=diff(x,v)^2+ diff(y,v)^2+ diff(z,v)^2;
I=int(int(f*sqrt(E*G-F^2),u,0,a),v,0,2*pi)
```

```
I =(pi^2*(a*(a^2 + 1)^(1/2) - log(a + (a^2 + 1)^(1/2)) + 2*a^3*(a^2 + 1)^(1/2)))/8
```

曲面积分

第二类曲面积分

$$\mathrm{I}=\iint_{S^+}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{I}=\iint_{S^+}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

其中正向曲面S^+由 $z=f(x,y)$ 给出，则

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

$$\mathrm{I}=\iint_{\sigma_{xy}}(-Pf_x-Qf_y+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲面积分

若曲面满足参数方程 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

其中 $A = y_u z_v - z_u y_v, B = z_u x_v - x_u z_v, C = x_u y_v - y_u x_v.$

$$\mathrm{I} = \iint_{S^+}[AP(u,v) + BQ(u,v) + CR(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

曲面积分

例28 计算$\mathrm{I}=\iint_{S^+} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中S为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半部分，且积分沿椭球面的上面.

```
syms u  v;
syms a b c positive;
x=a*sin(u)*cos(v);y=b*sin(u)*sin(v);z=c*cos(u);
A=diff(y,u)*diff(z,v)-diff(z,u)*diff(y,v);
I=int(int(x^3*A,u,0,pi/2),v,0,2*pi)
```

```
I =(2*pi*a^3*b*c)/5
```

练　习

1. 计算下列不定积分：

1）$\int \frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x$；　2）$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$；　3）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+5}}$；

4）$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；　5）$\int x^2 e^{-2x}\mathrm{d}x$；　6）$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$；

2. 计算下列不定积分：

1）$\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x$；　2）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

3）$\int_1^e \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$；　4）$\int_{-1}^{1} \frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$；

练　习

3. 求$\int_2^t \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$并用diff对结果求导；

4. 求摆线$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$与x轴所围成的图形面积；

5. 计算二重积分

1）$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x+y)dxdy$；　　2）$\iint\limits_{x^2+y^2\le x}(x^2+y^2)dxdy$；

6. 若区间等分数n=200，分别用梯形法和抛物线法编程，计算定积分$\int_0^{\pi/2}\sin x^{3/2}(\cos x)^2 x dx$