线性相关与方程组

本次课主要内容

多项式、向量组的

线性相关性及线性方程组

实验目的

1. 多项式等式的根、多项式的四则运算
2. 向量组的线性相关性
3. 求解线性方程组

一　多项式

1. 多项式表达式和根

设p为n维向量，poly2sym(p)输出以p为系数的多项式

比如p=[1 2 3 4 5]，则poly2sym(p): $x^4+2x^3+3x^2+4x+5$

polyval(p, a)返回多项式p(x)当x=a时的值polyval(p, a)

一 多项式

roots(p) 返回多项式函数p(x)=0的所有复数根

```
p=[1 2 1];
poly2sym(p)        x^2+2*x+1
roots(p)            -1, -1
```

一 多项式

例1 求多项式函数$p(x)=x^3-2x+3$在 x=2的值。

解：输入命令

```
p=[1 0 -2 3];  y=polyval(p, 2)
```

例2 求方程$x^3-2x+1=0$，$x^3+2x+3=0$的根。

解：输入命令

```
p=[1 0 -2 1]; q=[1 0 2 3]; x1=roots(p);
x2=roots(q)
```

一　多项式

练习：计算下面多项式的根并作图检验。

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

(a, b, c, d, e, f)为随机生成的6维向量。

2. 多项式的四则运算

有关多项式函数四则运算的Matlab命令：conv(p1, p2)返回多项式p1(x)和p2(x)的乘积结果的系数.

[a b]=deconv(p1, p2)返回p1(x)除以p2(x)的商式a和余式b的系数.

```
p1=[1 2 1];
p2=[1 2];
conv(p1, p2)
[a b]=deconv(p1, p2)
```

系数　　分子的系数

$$\frac{x^2+2x+1}{x+2}=x+\frac{1}{x+2}$$

```
ans =     1     4     5     2

a =     1     0

b =     0     0     1
```

一　多项式

例3 求多项式$p_1(x)=x^3-2x+1$，$p_2(x)=3-2x+x^3-x^5$的积

解：输入命令

```
p1=[1 0 -2 1];
p2=[-1 0 1 0 -2 3] ;
p3=conv(p1, p2)
p=poly2sym(p3)    %转为多项式形式
```

```
p3 =     -1     0     3    -1    -4     4
4    -8     3

p = -x^8+3*x^6-x^5-4*x^4+4*x^3+4*x^2-8*x+3
```

一　多项式

例4 求多项式$p(x)=-x^8+3x^6-x^5-4x^4+4x^3+4x^2-8x+3$，分别被$p1(x)=x^3-2x+1$, $p_2(x)= x^3-2x+3$相除后的结果

解：输入命令

```
p=[-1 0 3 -1 -4 4 4 -8 3];
p1=[1 0 -2 1]; p2=[1 0 -2 3];
[q1, r1]=deconv(p, p1)
[q2, r2]=deconv(p, p2)
p=poly2sym(q1)            %转为多项式形式
```

一　多项式

3. 多项式的分解与合并

有关多项式函数分解与合并的Matlab命令：

syms x

collect(f) 对符号多项式f进行合并同类项

expand(f) 对符号多项式f进行展开

horner(f) 对符号多项式f进行嵌套分解

factor(f) 对符号多项式f进行因式分解

例5 合并同类项f=(1+x)t+tx；输出结果比较杂乱时

解：输入命令

```
syms x t;
f=(1+x)*t+x*t;
p=collect(f)
```

例6 展开多项式f=(x-1)(x-2)(x-3)；输出结果是乘式形式时

解：输入命令

```
syms x;
f=(x-1)*(x-2)*(x-3);
p=expand(f)
```

例7 对多项式$f_1=-6+x^3-6x^2+11x$, $f_2=x^5-2x^2+1$进行因式分解

解：输入命令

```
syms x;
f1=-6+x^3-6*x^2+11*x;
f2=x^5-2*x^2+1
p1=factor(f1)
p2=factor(f2)
p3=horner(f1)
```

一　多项式

4. 有理分式的分解与合并

多项式除式的分解与合并的Matlab命令：

```
syms x
[a b r]=residue(p, q)
```

将p(x)/q(x)分解为最简分式之和。

$$\frac{x^5}{x^2-x-2}$$

```
p=[1 0 0 0 0 0]; q=[1 -1 -2];
[a, b, r]=residue(p, q)
```

a=10.6667　0.3333; b=2　-1; r=1 1 3 5

$$\frac{x^5}{x^2-x-2}=\frac{10.6667}{x-2}+\frac{0.3333}{x+1}+x^3+x^2+3x+5$$

例8 将下列两个有理分式分解为最简分式之和

（1） $$\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6}$$

```
p=[1 0 1]; q=[1 -6 11 -6];
[a b r]=residue(p, q)
```

$$\frac{5}{x-3}+\frac{-5}{x-2}+\frac{1}{x-1}$$

a =[5 -5 1], b =[3 2 1], r =[ ]

（2） $$\frac{1}{x^4-1}$$

一　多项式

```
syms  x
[p q]=residue(a, b, r)
```

将简单分式之和，合并为有理分式，即residue(p, q)的逆运算。

$$\frac{32}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}+x^3+x^2+3x+5$$

```
a=[32/3 1/3];
b=[2 -1];
r=[1 1 3 5]
[p,q]=residue(a, b, r)
```

```
p =     1     0     0     0     0     0

q =     1    -1    -2
```

$$\frac{x^5}{x^2-x-2}$$

一　　多项式

练习

生成随机数M、N，分解有理式：

$$\frac{x^5+Mx^4+Nx-1}{(x-1)^6}$$

二　向量组的相关性

定义： 设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，如果存在 m 个不全为零的一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = 0$$

成立，则称向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是线性相关的；

如果仅当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ 时，才有上面等式成立，则称向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的。

二　向量组的相关性

定义： 设T是一个向量组，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是它的一个部分组，如果：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关；

（2）T任何向量都可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出；

则称$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 T的一个极大线性无关组，极大线性无关组的个数　r称为向量组 T的秩。

二　向量组的相关性

三个命令

rank（A）　求矩阵A的秩

rref（A）将A化为行简化阶梯形，其中单位向量对应的列向量入选极大无关组.

[R,jb]=rref(A)　输出A变换后的行阶梯形R和入选极大无关组的向量序号jb，jb是一个向量.A(:,jb)即为矩阵A的列向量基.

例1 设向量组 T:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix}\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}\quad \alpha_5=\begin{pmatrix}2\\4\\4\\9\end{pmatrix}$$

（1）求 T 的秩，判断向量组 T 是否线性相关；

（2）求 T 的一个极大线性无关组；

二　向量组的相关性

```
A1=[2 1  4  3;-1 1 -6 6;-1 -2 2 -9;1 1 -2 7;2 4 4 9];
A=A1';
r=rank(A)          %% r=3
A2=rref(A)         %将A化为行简化阶梯形

[R,jb]=rref(A)     % jb--极大无关组的向量序号
A2=A(:,jb)         %提取矩阵的极大无关组
```

R =

1	0	-1	0	4
0	1	-1	0	3
0	0	0	1	-3
0	0	0	0	0

jb =

1	2	4

A2 =

2	−1	1
1	1	1
4	−6	−2
3	6	7

二　向量组的相关性

例2 设向量组 T:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix}\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\6\end{pmatrix}\quad \alpha_5=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-7\end{pmatrix}$$

（1）求 T 的秩，判断向量组 T 是否线性相关；

（2）求 T 的一个极大线性无关组；

二　　向量组的相关性

解：

```
A1=[1 1 2 3;1 -1 1 1;1 3 3 5;4 -2 5 6;-3 -1 -5 -7];
A=A1';
[R,jb]=rref(A)
```

R =

1	0	2	1	-2
0	1	-1	3	-1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

jb =

1	2

```
A(:,jb)
```

ans =

1	1
1	-1
2	1
3	1

例3： 利用矩阵的初等行变换求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&2&2\end{pmatrix}$ 的逆。

解：

```
B=[1 2 3 1 0 0;2 2 1 0 1 0;3 2 2 0 0 1];
format rat  %化小数表达为分数
C=rref(B)
```

```
C =
     1     0     0    -1/3    -1/3     2/3
     0     1     0     1/6     7/6    -5/6
     0     0     1     1/3    -2/3     1/3
```

```
>> D=C(:,4:6)
```

```
D =
    -1/3    -1/3     2/3
     1/6     7/6    -5/6
     1/3    -2/3     1/3
```

答：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

练习：求下面矩阵逆

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

三　齐次线性方程组解的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

三　齐次线性方程组解的结构

齐次线性方程组的矩阵形式为：$AX=0$，其中A是$m\times n$阶矩阵，X是n维未知列向量。

（1）n维零向量是方程组的解；

（2）当$m=n$时，若$|A|\neq 0$，则方程组只有零解；

（3）当$\mathrm{rank}(A)=r<n$时，方程组有无穷多解。此时方程组的解可由方程组的基础解系表示，基础解系含有$n-r$个向量；方程组的通解可表示为基础解系的线性组合

三　　齐次线性方程组解的结构

两个命令

B=null(A)　输出列向量B，为系数矩阵A的齐次方程组的基础解系。

B=null(A,’r’)　输出列向量B，为系数矩阵A的齐次线性方程组的有理数形式的基础解系；

三　齐次线性方程组解的结构

例5 求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$$
的通解。

解：输入命令

```
A=[1 1 1 1 1; 3 2 1 1 -3; 0 1 2 2 6; 5 4 3 3 -1];
B=null(A, 'r')
```

三　齐次线性方程组解的结构

$$B=\begin{matrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

答：齐次线性方程组的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2, k_3为任意常数。

解2：输入命令

```
A=[1 1 1 1 1; 3 2 1 1 -3; 0 1 2 2 6; 5 4 3 3 -1];
B=null(A)
```

```
B =

   0.7530    0.0176   -0.0000
  -0.4167   -0.7464   -0.0000
  -0.3043    0.4533   -0.7071
  -0.3043    0.4533    0.7071
   0.2723   -0.1778   -0.0000
```

三　齐次线性方程组解的结构

例6 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解。

解：输入命令

```
>> A=[...]; B=null(A, 'r')
```

```
B = Empty matrix: 4-by-0
```

说明此齐次线性方程组只有零解。

检验：det(A)≠0

四 非齐次线性方程组解的结构

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

四　非齐次线性方程组解的结构

非齐次线性方程组的矩阵形式为：$AX=b$，其中A是$m\times n$阶矩阵，X是n维未知列向量，b是m维已知列向量。

（1）当$m=n$时，若$|A|\neq 0$，方程组有唯一解；

（2）当$\mathrm{rank}(A)\neq \mathrm{rank}(A\ b)$时，方程组无解；

（3）当$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A\ b)=r<n$时，方程组有无穷多解。

四　非齐次线性方程组解的结构

当$m=n$，且$|A|\neq 0$时，方程组有唯一解，可由两种方式求解：

（1）X=inv(A)*b，或X=A\b；

（2）克莱姆（Gramer）法则求解：$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$，

其中$x_i=\dfrac{D_i}{|A|}$，D_i为把A的第i列换成b所得矩阵的行列式。

四　非齐次线性方程组解的结构

针对Cramer法则编写cramermethod.m文件

（1）输入系数矩阵A和常数向量b；输出X=inv(A)*b或X=A\b

（2）输入系数矩阵A和常数向量b；计算系数矩阵A行列式；
用b代替A中的第k列，得到新矩阵Ak；

输出X=[det(A1), det(A2), ..., det(An)]/det(A)

例7　求下列非齐次线性方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

解法1：

```
A=[1 -1 1 -2; 2 0 -1 4; 3 2 1 0; -1 2 -1 2];
b=[2 4 -1 -4]';
rank(A)
```

```
ans = 4
```

四　非齐次线性方程组解的结构

```
>> X=inv(A)*b
```

或

```
>> format rat  %分数数据格式
>> X= inv(A)*b
```

```
X =

    1.0000
   -2.0000
    0
    0.5000
```

```
X =

     1
    -2
     0
    1/2
```

```
>> X=A\b
```

四　非齐次线性方程组解的结构

解法2：克莱默法则

解法3：求解线性代数方程组的函数：linsolve(A, b)

A, b可以是符号矩阵，A必须行满秩

```
A=[1 -1 1 -2; 2 0 -1 4; 3 2 1 0; -1 2 -1 2];
b=[2 4 -1 -4]';
X=linsolve(A, b)
```

四　非齐次线性方程组解的结构

（2）当rank(A)≠rank(A b)时，方程组无解；

可以求最小二乘解，用命令：X=A\b

$$\begin{cases} 0.1x_1 - 0.1^2\, x_2 = 0.045 \\ 0.2x_1 - 0.2^2 x_2 = 0.12 \\ 0.3x_1 - 0.3^2 x_2 = 0.2 \\ 0.4x_1 - 0.4^2 x_2 = 0.33 \\ 0.5x_1 - 0.5^2 x_2 = 0.52 \end{cases}$$

四　非齐次线性方程组解的结构

（3）当rank(A)=rank(Ab)=$r<n$，即方程$AX=b$有无穷多解。设已知它的一个特解x_0, 且它对应的齐次方程$AX=0$的基础解系为$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-r}$, 则非齐次方程$AX=b$的通解为：

$$X = k_1\varepsilon_1+k_1\varepsilon_2+\dots k_{n-r}\varepsilon_{n-r}+x_0$$

1. 齐次方程通解：B=null(A, 'r')
2. 特解： x0=pinv(A)*b
3. 写出通解

四　非齐次线性方程组解的结构

例9 求非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

的通解。

```
A=[1 2 3 4;2 2 1 1;2 4 6 8;4 4 2 2];
b=[1; 3; 2; 6];
C=[A b];
[rank(A), rank(C)]
```

```
ans =     2     2
```

有解！

四　非齐次线性方程组解的结构

```
>> B=null(A, 'r')

B =

    2.0000    3.0000
   -2.5000   -3.5000
    1.0000    0
    0         1.0000
```

```
>> x0=pinv(A)*b

x0 =

    0.9542
    0.7328
   -0.0763
   -0.2977
```

四　非齐次线性方程组解的结构

答：非齐次线性方程组的通解为：

$$x = k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.9542 \\ 0.7328 \\ -0.0763 \\ -0.2977 \end{pmatrix}$$

其中k_1, k_2, 为任意常数。

四　非齐次线性方程组解的结构

生成8*8随机矩阵A，8*1随机矩阵b． 求AX=b的一组基础解系和一个特解。

求对应齐次方程基础解系：B=null(A, ‘r')

求特解：x0=pinv(A)*b

四　非齐次线性方程组解的结构

总结以上所有情况，自己建立line_solution.m文件，设计解线性方程组的一般函数（留为作业）

[x, y]=line_solution(A, b)

包括如下内容：判断方程组的齐性；

如果是非齐次的：（1）唯一解（2）最小二乘解（3）无穷多解

如果是齐次的：（1）唯一解（2）无穷多解

唯一解和最小二乘解时，x输出解，y输出空矩阵；

无穷多解时，输出x为特解，y为基础解系.

作 业

1　求下列矩阵的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

作 业

2. 已知向量组T $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\8\\9\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\7\end{pmatrix}$,

（1）求向量组T 的秩，并判断向量组T 的相关性；

（2）求T 的一个极大无关组；

（3）将其余向量组用极大无关组线性表示。

作　业

3. 求下列非齐次线性方程组的通解。

（1） $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ （2） $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

作 业

4. 求下列多项式的根

（1）$5x^{23}-6x^7+8x^6-5x^2$

（2）$(2x+3)^3-4$

5. 求下列多项式的根

$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$

$g(x)=3x^3+10x^2-2x-3$

作 业

6. 将$f(x)/g(x)$分解为最简分式之和

（1）$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^4 + 1$

（2）$f(x) = 1,\ g(x) = x^4 + 1$

（3）$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = (x + 1)^2(x - 1)$

（4）$f(x) = x^5 + x^4 - 8,\ g(x) = x^3 - x$