最优化方法

最优化方法

最优化方法的应用领域

生产计划：设备数量、时间、原材料一定，如何产出尽量多/价值最高的产品?

广告营销：如何投入营销资源，以获得最佳效果？

运输管理：如何设定运输路线、运输工具达到最快/成本最低/最大价值的运输目的?

……

最优化方法

1. 线性规划问题
2. 0-1规划问题
3. 一元函数的无约束优化问题
4. 多元函数的无约束优化问题
5. 二次规划
6. 一般约束非线性规划

线性规划问题的一般形式

目标函数：$\max(\min)Z=c_1x_1+c_2x_2+\dots\dots+c_nx_n$

约束条件：
$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n \le (=, \ge) b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\dots+a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m \\
x_1, x_2, \dots \ge 0
\end{cases}
$$

决策变量：x_1，x_2，……，x_n

最优化方法

某工厂生产甲、乙、丙三种产品，生产三种产品每件需要A、B两种资源的数量，每件产品的利润由下表1给出，问每天生产甲、乙、丙三种产品各多少，可使总利润最大？

品类	甲	乙	丙	总量
A	2	3	1	100
B	3	3	2	120
利润	40	45	24	

设生产甲、乙、丙数量x1、x2、x3

目标函数：z=40*x1+45*x2+24*x3；

约束条件：

2*x1+3*x2+x3≤100

3*x1+3*x2+2*x3≤120

x1≥0, x2≥0, x3≥0

1. 求解线性规划问题

$$\min Z = cX$$

$$s.t. \quad AX \le b$$

Matlab命令：x=linprog(c,A,b)

例1. 求解线性规划问题

$$\min Z = x+2y$$

$$\text{s.t. } 2x+3y \le 4,$$

$$x-y \le -5$$

```
c=[1,2];
A=[2,3;1,-1];
b=[4;-5];
x=linprog(c, A, b)
```

```
x =
  1.0e+007 *
   -7.9362
   -7.9362
```

若没有约束条件，令A=[], b=[]即可.

最优化方法

$$\min Z = cX$$
$$s.t. \quad AX \le b,$$
$$BX = d$$

Matlab命令： x=linprog(c,A,b,B,d)

例2. 求解线性规划问题

$$\min Z = x + 2y$$
$$\text{s.t. } 2x+3y \le 4,$$
$$x-y \le -5,$$
$$9x+17y = 20$$

```
c=[1,2];
A=[2,3;1,-1];
b=[4;-5];
B=[9,17];
d=[20];
x=linprog(c,A,b,B,d )
```

```
x =

   -2.5000
    2.5000
```

最优化方法

$$
\begin{aligned}
&\min\ Z = cX \\
&s.t.\quad AX \le b, \\
&\qquad\quad BX = d, \\
&\qquad\quad VLB \le X \le VUB
\end{aligned}
$$

Matlab命令： x=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)

Matlab命令： [x,fval]=linprog(...)

返回最优解x及x处的目标函数值fval.

例3. 求解线性规划问题

$$\min z = 13x_1+9x_2+10x_3+11x_4+12x_5+8x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1+1.1x_2+x_3 \le 800 \\ 0.5x_4+1.2x_5+1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,6 \end{cases}$$

$$\min Z = cX$$

$$s.t.\quad AX \le b,\quad BX = d,\quad VLB \le X \le VUB$$

$$x=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)$$

例3. 求解线性规划问题

$$\min z = 13x_1+9x_2+10x_3+11x_4+12x_5+8x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1+1.1x_2+x_3 \le 800 \\ 0.5x_4+1.2x_5+1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,6 \end{cases}$$

```
c = [13,9,10,11,12,8]
A = [0.4,1.1,1,0,0,0;0,0,0,0.5,1.2,1.3]
b = [800;900]
B = [1,0,0,1,0,0; 0,1,0,0,1,0; 0,0,1,0,0,1]
d = [400;600;500]
VLB = [0;0;0;0;0;0]
VUB = [ ]
[x,fval]=linprog(c,A,b,B,d,VLB,VUB)
```

最优化方法

计算结果：

```
x =

    0.0000
  600.0000
    0.0000
  400.0000
    0.0000
  500.0000


fval =

  1.3800e+004
```

2. 求解0-1规划问题

$$\min Z = cX$$

$$s.t.\quad AX \le b,$$

$$BX = d,$$

$$X=0,\ 1$$

X的每个分量都只能是 0或1.

任务分配、挑选人/物、装包等问题

Matlab命令： x= intlinprog(c,intcon,A,b,B,d,lb,ub)

Matlab命令： [x,fval]= intlinprog(c,intcon,A,b,B,d,lb,ub)

若没有不等式约束条件，令A=[], b=[].

例4. 求解0–1规划问题

$$\min z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_2 + x_3 \le 6 \\ x_i = 0 \text{ or } 1 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

$$\min Z = cX$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & AX \le b, \\ & BX = d, \\ & X = 0,\ 1 \end{aligned}$$

例4. 求解0-1规划问题

$$\min\ z = 3x_1-2x_2+5x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 \le 2 \\ x_1+4x_2+x_3 \le 4 \\ x_1+x_2 \le 3 \\ 4x_2+x_3 \le 6 \\ x_i = 0 \text{ or } 1 \qquad i = 1,2,3 \end{cases}$$

```
c = [3,-2,5]
intcon = [1, 2,3]   %三个变量都是整数
A = [1 2 -1; 1 4 1; 1 1 0; 0 4 1]
b = [2;4;3;6]
lb=[0;0;0]
ub=[1;1;1]
x=intlinprog(c,intcon,A,b,[],[],lb,ub)

[x,fval]= intlinprog(c,intcon,A,b,[],[],lb,ub)
```

最优化方法

指派问题

有m项任务分给m个人（每人只分一项），考虑各人的知识、能力、经验等，如何分配效率最高或消耗资源最少？0-1规划问题

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{指派第}i\text{个人完成第}j\text{项任务}\\ 0 & \text{不指派第}i\text{个人完成第}j\text{项任务}\end{cases}$$

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1 & i=1,2,\dots,m\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1 & j=1,2,\dots,m\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}$$

定额贷款发放 /研究基金分配/ 生产设备分配人员调配

装箱问题

不同价值、体积、重量的物品，装入容量、承重有限的容器中，如何达到某个目标的最大化？

0-1规划问题

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij} \qquad s.t.\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}=1 & i=1,2,\ldots,m\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=1 & j=1,2,\ldots,m\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}$$

3. 一元函数的无约束优化问题

标准形式： $\min f(x)$，　　**其中** f: **R→R**

Matlab命令：

```
x= fminbnd(fun,x1,x2,options)
[x,fval]=fminbnd(...)
[x,fval,exitflag]=fminbnd(...)
[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(...)
```

最优化方法

例5.　求 $f = 2e^{-x}\sin x$在区间(0, 8)上的最大值和最小值.

[x,fval]=fminbnd(fun,x1,x2,options)

求最小值：　f='2*exp(-x).*sin(x)';

[xmin,ymin]=fminbnd (f,0,8)

计算结果：　xmin =3.9270, ymin = -0.0279

求最大值：　f='-2*exp(-x).*sin(x)';

[xmin,ymin]=fminbnd (f,0,8)

计算结果：　xmin =0.7854, ymin = -0.6448

4. 多元函数的无约束优化问题

标准形式： *min* $f(x)$， 其中 $f:R^n \to R$

Matlab命令：x0为搜索的初始点.

x= fminunc(fun,x0,options)

x= fminsearch(fun,x0,options)

[x,fval]=fminunc(...)

[x,fval]=fminsearch(...)

例6. 求 $f=(4x^2+2y^2+4xy+2y+1)e^x$的最小值.

编写m文件fun1.m:

```
function f = fun1(x)
f=exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
```

求最小值:

```
x0=[-1,1];
x=fminunc('fun1',x0)
y=fun1(x)
```

输出结果:

```
x=0.5000    -1.0000
y=1.3028e-10
```

5. 二次规划

标准形式：

$$\begin{aligned} & \min f = X^T H X + cX \\ & \text{s.t.}\quad AX \le b, \\ & \qquad\quad BX = d, \\ & \quad VLB \le X \le VUB \end{aligned}$$

Matlab命令： x=quadprog(H,c,A,b,B,d,VLB,VUB,x0)

[x,fval]=quaprog(...)

例7. 求解 $\min f(x_1, x_2)=-2x_1-6x_2+x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$

s.t. $x_1+x_2\le 2,$

$-x_1+2x_2\le 2,$

$x_1\ge 0, x_2\ge 0.$

化成标准形态：$\min z=(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\le\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

最优化方法

$$\min\ z=(x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\ -6\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\le\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

```
H=[1 -1; -1 2];
c=[-2 ;-6];
A=[1 1; -1 2];
b=[2;2];
B=[ ];
d=[ ];
VLB=[0;0];
VUB=[ ];
```

```
[x,z]=quadprog(H,c,A,b,B,d,VLB,VUB)
```

计算结果：x=0.6667 1.3333

z=-8.2222

6. 一般约束非线性规划

标准形式：

$$\min f(X)$$

$$\text{s.t. } AX \le b,$$

$$BX = d,$$

$G(X) \le 0$ （非线性）

$H(X) = 0$ （非线性）

$VLB \le X \le VUB$

定义目标函数：

```
function f=fun(X);
f=f(X);
```

非线性约束：

```
function [G,H]=nonlcon(X);
G=...;
H=...;
```

Matlab命令：

```
x=fmincon('fun',x0,A,b,B,d,VLB,VUB,'nonlcon')
[x,fval]=fmincon('fun',x0,A,b,B,d,VLB,VUB,'nonlcon')
```

例8. $\min f(x)=e^{x_1}(4x_1^2+2x_2^2+4x_1x_2+2x_2+1)$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & x_1+x_2=0\\
& 1.5+x_1x_2-x_1-x_2\le 0\\
& -x_1x_2-10\le 0
\end{aligned}
$$

```
function f=fun(x); %定义目标函数
f=exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
function [g,ceq]=nonlcon(x); %定义非线性约束
g=[1.5+x(1)*x(2)-x(1)-x(2);-x(1)*x(2)-10];
ceq=[ ];
```

```
x0=[-1;1];
A=[];b=[];
B=[1 1];d=[0];
vlb=[];vub=[];
```

```
x=fmincon('fun',x0,A,b,B,d,vlb,vub,'nonlcon')
```

作 业

某工厂生产甲、乙、丙三种产品，生产三种产品每件需要A、B两种资源的数量，每件产品的利润由下表1给出，问每天生产甲、乙、丙三种产品各多少，可使总利润最大？

品类	甲	乙	丙	总量
A	2	3	1	100
B	3	3	2	120
利润	40	45	24	

设生产甲、乙、丙数量x1、x2、x3

目标函数：-z=-40*x1-45*x2-24*x3;

约束条件：

2*x1+3*x2+x3≤100

3*x1+3*x2+2*x3≤120

x1≥0, x2≥0, x3≥0