插值法

本次课主要内容

- 插值法，interp1,
- 分段线性插值，linear
- 三次插值，spline, cubic
- 二维插值，interp2, griddata

插值法

在很多工程实践中，往往需要通过若干节点的数据，来获得其它节点的数据. 比如测到飞行器在几个时间点的坐标，希望给出其它时间点的坐标. 这时会用到插值方法.

这里我们将介绍几种常用的插值算法.

插值法

已知在互不相同的多个点x_0，x_1，…，x_n处，函数$y=f(x)$分别取到函数值$y_0, y_1, \cdots, y_n$. 构造一个最高次数不超过n的多项式$y=L_n(x)$，使其满足$y_k=L_n(x_k)$, $k=0, 1, \cdots, n$. 然后用$L_n(x)$来作为$f(x)$的近似值，这种方法即插值法. 其中多项式$L_n(x)$称为$f(x)$的插值函数，也称为n次拉格朗日插值多项式.

插值法

已知$y=f(x)$和(x_k, y_k), k=0, 1, ⋯, n，要求$L_n(x)$，可设

$L_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

将(x_k, y_k)代入多项式：

$$\begin{cases} a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=y_0, \\ \cdots\cdot \\ a_nx_n^n+a_{n-1}x_n^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0=y_n. \end{cases}$$

解方程组即可得$L_n(x)$的各项系数. $L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$

插值法

特别地，当 n=1，$L_1(x) = a_1x + a_0$. 将(x_0, y_0), (x_1, y_1)代入,得到

$$y_0 = a_1x_0 + a_0, \qquad y_1 = a_1x_1 + a_0.$$

因此，

$$L_1(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\begin{cases} a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1x_0 + a_0 = y_0, \\ \cdots\cdots \\ a_nx_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \cdots + a_1x_n + a_0 = y_n. \end{cases}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

插值法

编写拉格朗日插值函数：

```
function y=lagrange(x0,y0,x)
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
    z=x(i);s=0;
    for k=1:n
        p=1;
        for j=1:n
            if j~=k         %不等于
                p=p*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
            end
        end
        s=s+p*y0(k);
    end
    y(i)=s;
end
end
```

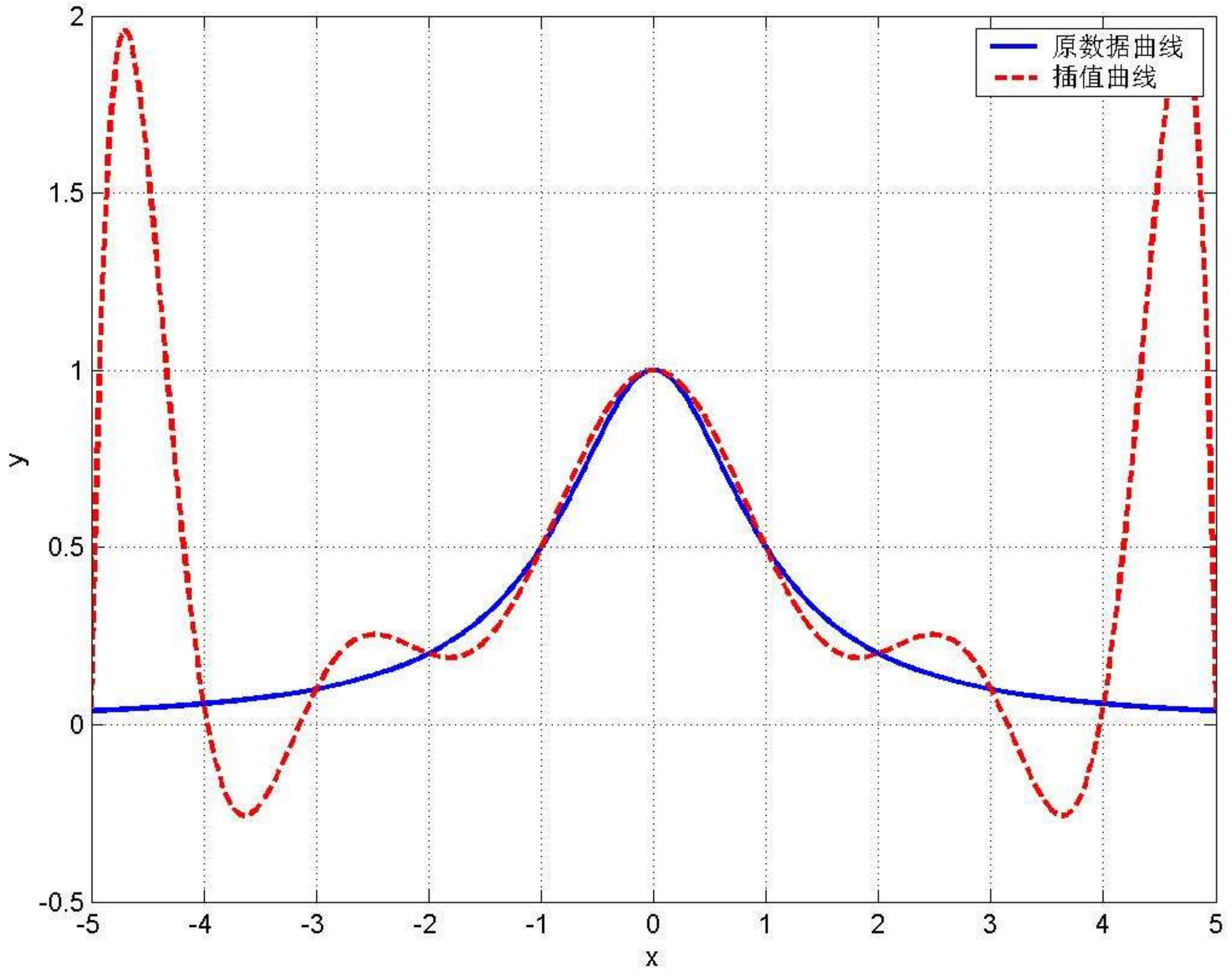
$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

- x0，y0—已知数据点的坐标
- x，y---插值点的坐标，给出拉格朗日插值多项式在x的值

插值法

例：在[-5, 5]上考虑拉格朗日插值 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

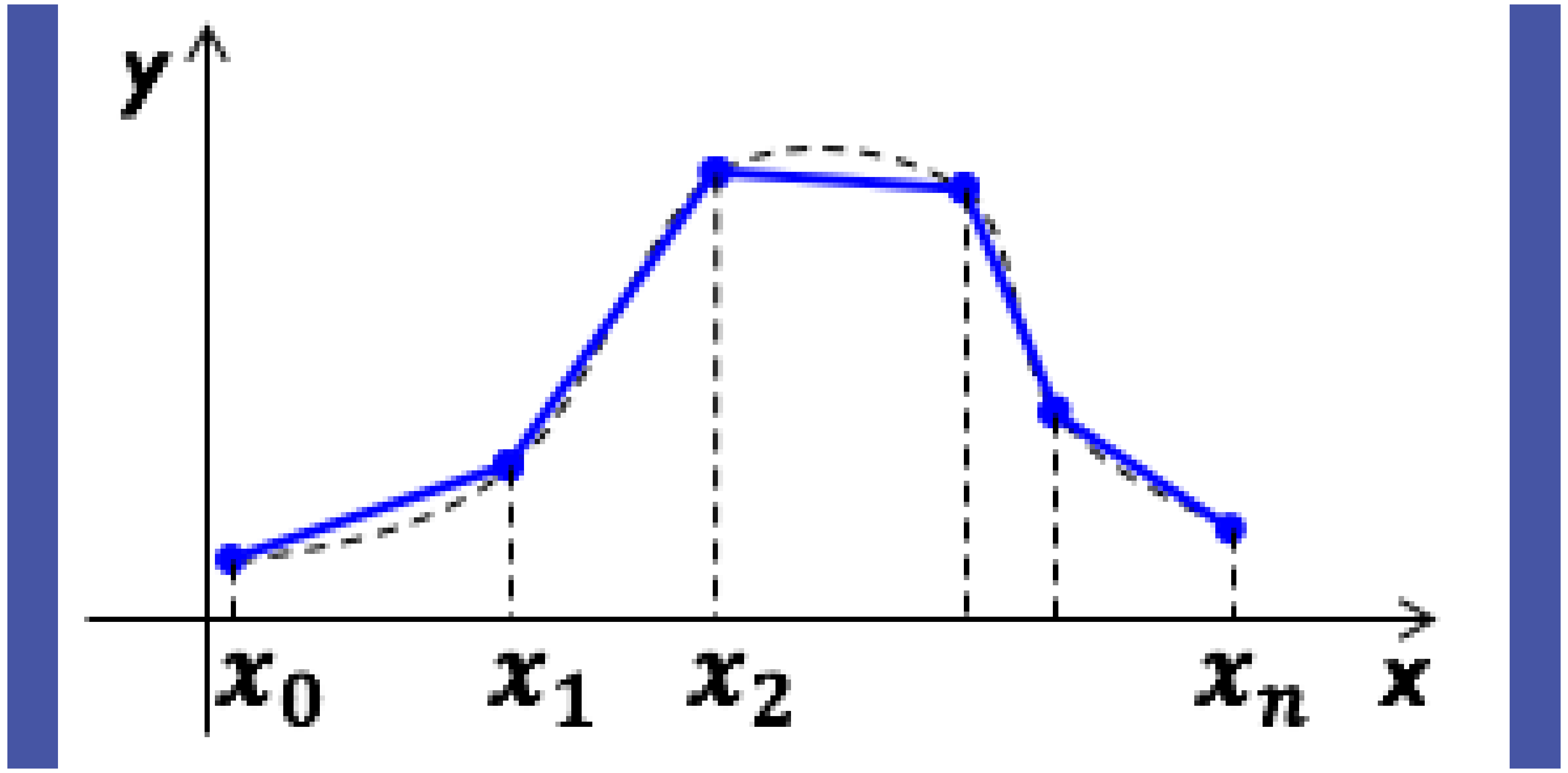
```
function runge
x = -5: 1: 5;
y = 1./(1+x.*x);
xj = -5: 0.01: 5;
yj = 1./(1+xj.*xj);
plot(xj, yj, 'linewidth', 2) %精确解曲线
hold on
yh=lagrange(x, y, xj);     %自己编写**
plot(xj, yh, 'r--', 'linewidth', 2) %插值曲线
grid on; xlabel('x'), ylabel('y')
legend('原数据曲线','插值曲线')
```



插值法

分段线性插值

在实际应用中，已知节点的个数n可能很大，不过相应的$L_n(x)$最高次两点间的函数值用该直线方程给出，插值的效果好，较常用. 这种方法称为**分段线性插值方法**. 数却并非越大越好. 多数情况下，将相邻两点用直线相连，



插值法

具体地，分段线性插值是在每个小区间(x_i, x_{i+1})上采用线性插值。在该区间上的子插值多项式为：

$$F_i(x)=f(x_i)\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

整个区间(x_1, x_n)上的插值函数为

$$F(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1}, x_i],\ i\neq 0\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in[x_i, x_{i+1}],\ i\neq n\\ 0 & x\in[x_1, x_n]/[x_{i-1}, x_{i+1}]\end{cases}$$

插值法

三次样条插值

分段线性插值所得折线可以逼近真实函数，但在节点处不够光滑．我们可以用三次样条插值来解决光滑性．

具体做法：用三次多项式来连接两个节点，通过调节多项式的系数，使得分段多项式在每个节点处二阶可导．

插值法

插值命令

- 分段线性插值：interp1(x0, y0, x) — 默认选择其中x0和y0为已知节点数组，x为待计算的插值点数组.
- 分段三次多项式插值：interp1(x0, y0, x, 'cubic')，插值效果比分段线性插值更加光滑一些(节点处可导)。
- 三次样条插值：spline(x0, y0, x)或interp1(x0, y0, x, 'spline')每个子区间是三次多项式，光滑（节点处二阶可导）
- 最近区域插值：interp1(x0, y0, x, ‘nearest’)就近插值节点区域上的函数值为该点函数值

插值法

选择何种插值方法？

看数据特征和实际情况！

最近区域插值误差较大

分段线性不够光滑、存在误差

分段三次多项式比较光滑（节点处可导）

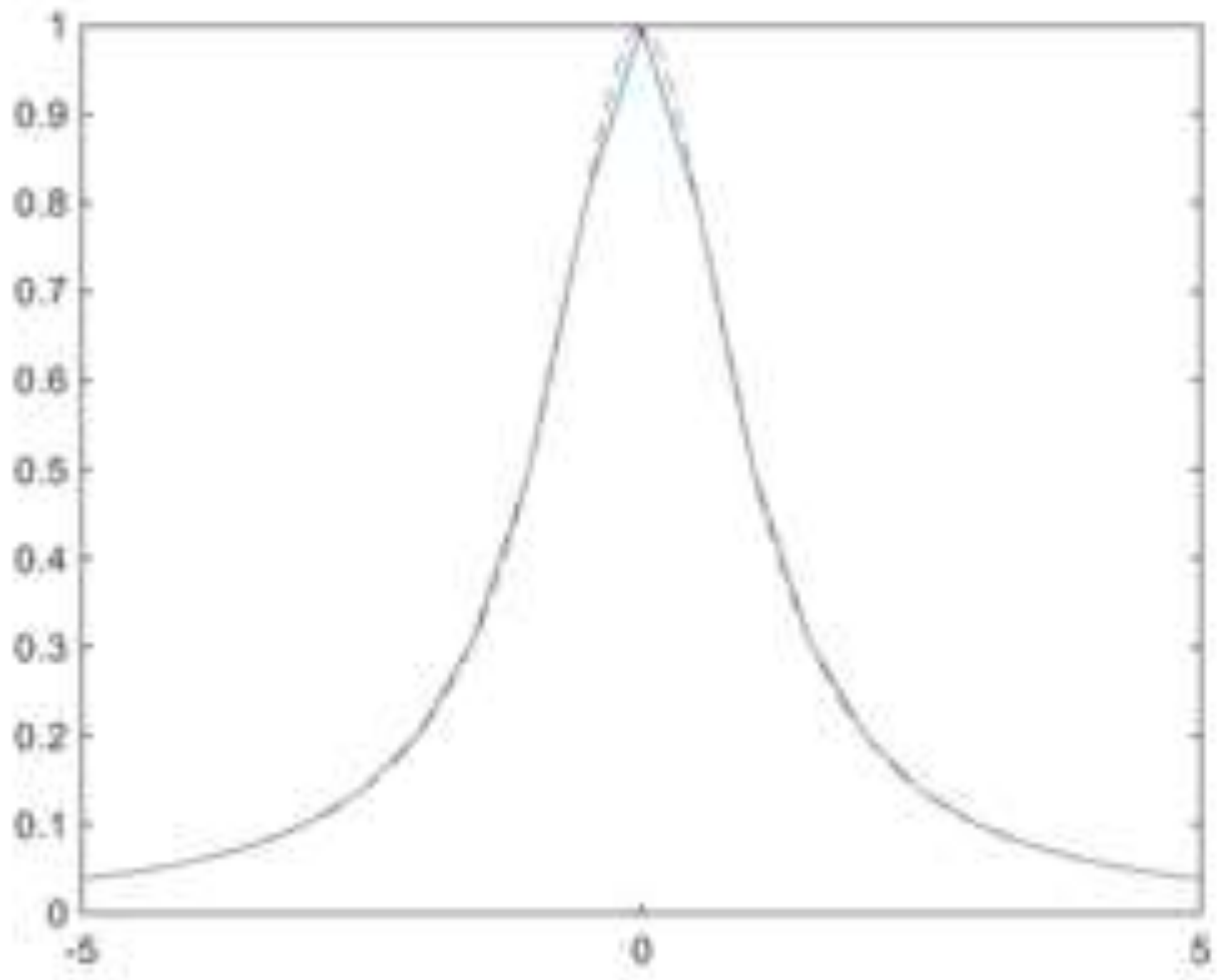
三次样条插值更加光滑（节点处二阶可导）

插值法

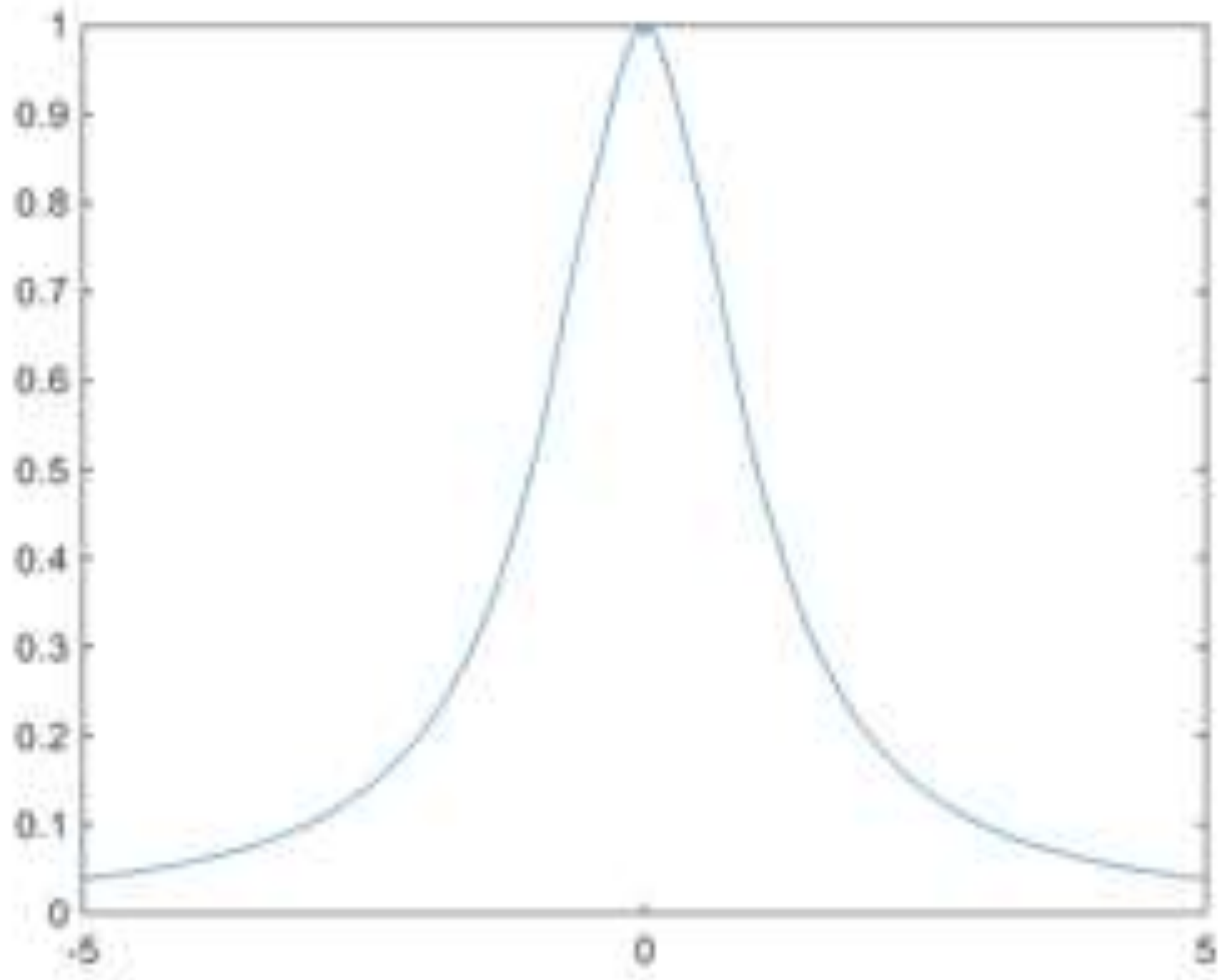
例1. 用$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 区间[-5, 5]上取21个节点，并分别验证分段线性插值、三次样条插值、分段三次插值法.

```
function chazhi1
x0=-5:0.5:5;                    %取21个x值
y0=1./(1+x0.^2);                %取对应的y值
x=-5: 0.1: 5;                   %选取准备插值的点
y1=interp1(x0, y0, x);          %分段线性插值
y2=spline(x0, y0, x);           %三次样条插值
y3=interp1(x0, y0, x, 'cubic'); %分段三次插值
plot(x, y1, x, y2, '--')
figure(2)
plot(x, y3)
```

插值法



分段线性插值（实线）
三次样条插值（虚线）



分段三次插值法

插值法

练习1： 用$f(x)=x^2\sin x$在区间[-5, 5]上取20个节点，分别验证分段线性插值、三次样条插值、分段三次插值法

插值法

例：已知下列数据：

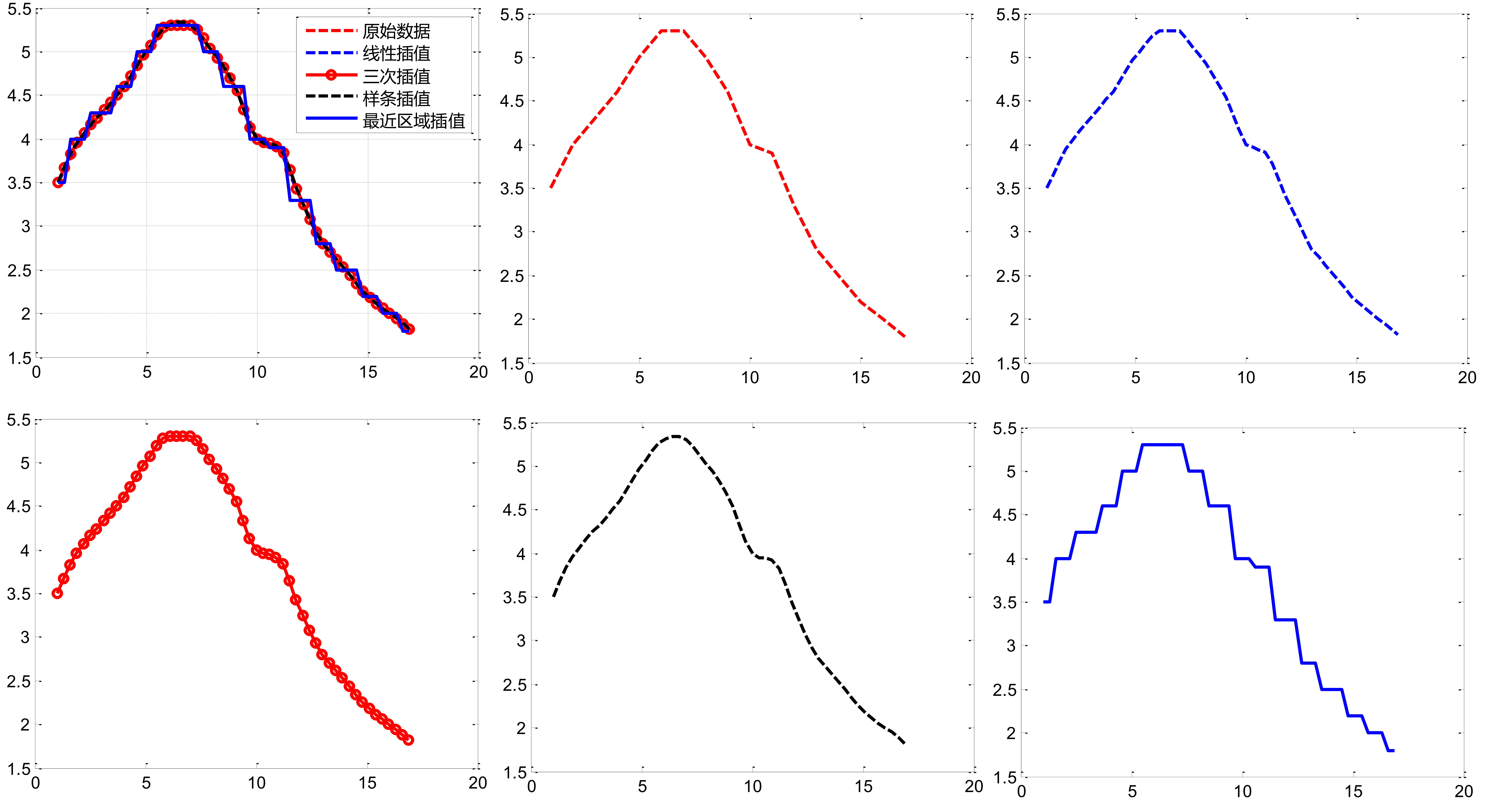
xx=1: 1: 17;

yx=[3.5, 4, 4.3, 4.6, 5, 5.3, 5.3, 5, 4.6, 4, 3.9, 3.3, 2.8, 2.5, 2.2, 2.0, 1.8];

试用Matlab中插值方法分析该数据，并画出图形。

插值法

```
clc, clear, close all
format short
hold off
xx=1: 1: 17;
yx=[3.5, 4, 4.3, 4.6, 5, 5.3, 5.3, 5, 4.6,
4, 3.9, 3.3, 2.8, 2.5, 2.2, 2.0, 1.8];
xxi=1: 0.3: 17;
f0=interp1(xx, yx, xxi)
f1=interp1(xx, yx, xxi, 'linear')
f2=interp1(xx, yx, xxi, 'cubic')
f3=interp1(xx, yx, xxi, 'spline')
f4=interp1(xx, yx, xxi, 'nearest')
plot(xx, yx, 'r--', 'linewidth', 2)
hold on
%plot(xxi, f0, 'r.-', 'linewidth', 2)
plot(xxi, f1, 'b--', 'linewidth', 2)
plot(xxi, f2, 'ro-', 'linewidth', 2 )
plot(xxi, f3, 'k--', 'linewidth', 2)
plot(xxi, f4, 'b', 'linewidth', 2)
legend('原始数据','线性插值','三次插值','
样条插值','最近区域插值')
grid on
```


原始数据
线性插值
三次插值
样条插值
最近区域插值

二维插值法

二维插值

已知二元函数$z=f(x, y)$在若干个点的取值.

如果这些节点分布很均匀，数据点落在由一系列平行直线组成的矩形网络的各个顶点上，可以用命令：interp2(x0, y0, z0, x, y, 'method')

其中method可选nearest（最近邻点插值）、linear（线性插值）、spline（三次样条插值）、cubic（三次插值）.

如果节点分布散乱，可以用命令：griddata(x0,y0,z0,x,y, 'method').
其中method可选nearest、linear、cubic等

二维插值法

```
>> help interp2
interp2 - Interpolation for 2-D gridded data in meshgrid format
    Vq = interp2(X, Y, V, Xq, Yq)
    Vq = interp2(V, Xq, Yq)
    Vq = interp2(V)
    Vq = interp2(V, k)
    Vq = interp2(___, method)
    Vq = interp2(___, method, extrapval)
```

二维插值法

例：某实验对一根长10米的钢轨进行热源的温度传播测试。测试数据如下。x表示测试点，h表示测试时间，T表示各点温度。用二维线性插值表示在1分钟内每隔2秒，钢轨每隔1米处的温度。

测试数据：

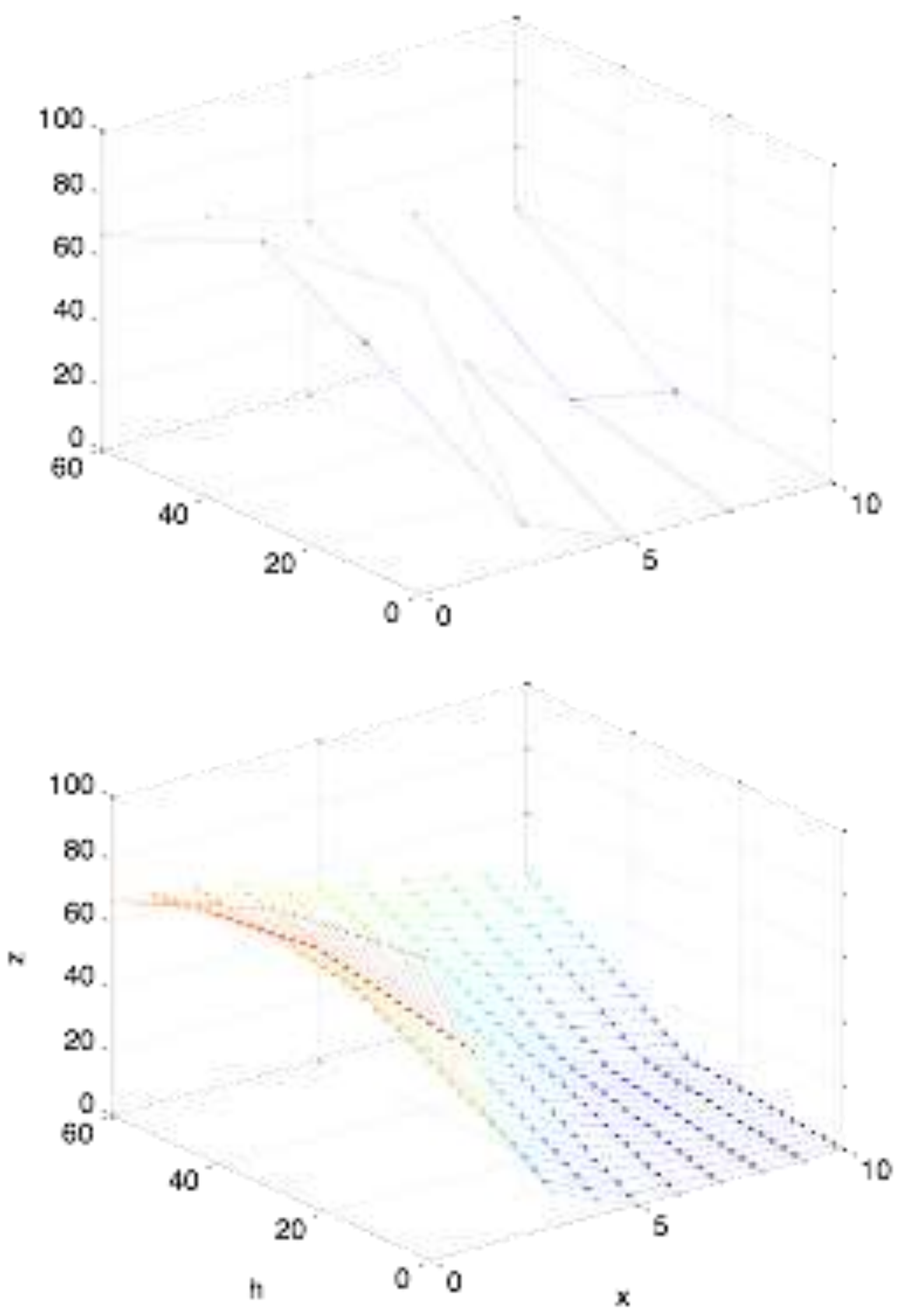
x=0: 2.5: 10;

h=[0: 30: 60]';

T=[95, 14, 0, 0, 0; 88, 48, 32, 12, 6; 67, 64, 54, 48, 41];

二维插值法

```
clc, clear, close all
x=0: 2.5: 10;
h=[0: 30: 60]';          %转置或者[x, h]=meshgrid(x, h)
T=[95, 14, 0, 0, 0; 88, 48, 32, 12, 6; 67, 64, 54, 48, 41];
subplot(2, 2, 1); mesh(x, h, T);          %原始数据图形
xlabel('x'); ylabel('h'), zlabel('z')
xi=[0: 10];
hi=[0: 2: 60]';
Ti=interp2(x, h, T, xi, hi);
subplot(2, 2, 2); mesh(xi, hi, Ti)        %二维线性插值图形
xlabel('x'); ylabel('h'), zlabel('z')
```



二维插值法

例2　某地区发现重金属污染，调查人员在当地均匀采样获得的污染物浓度如下：

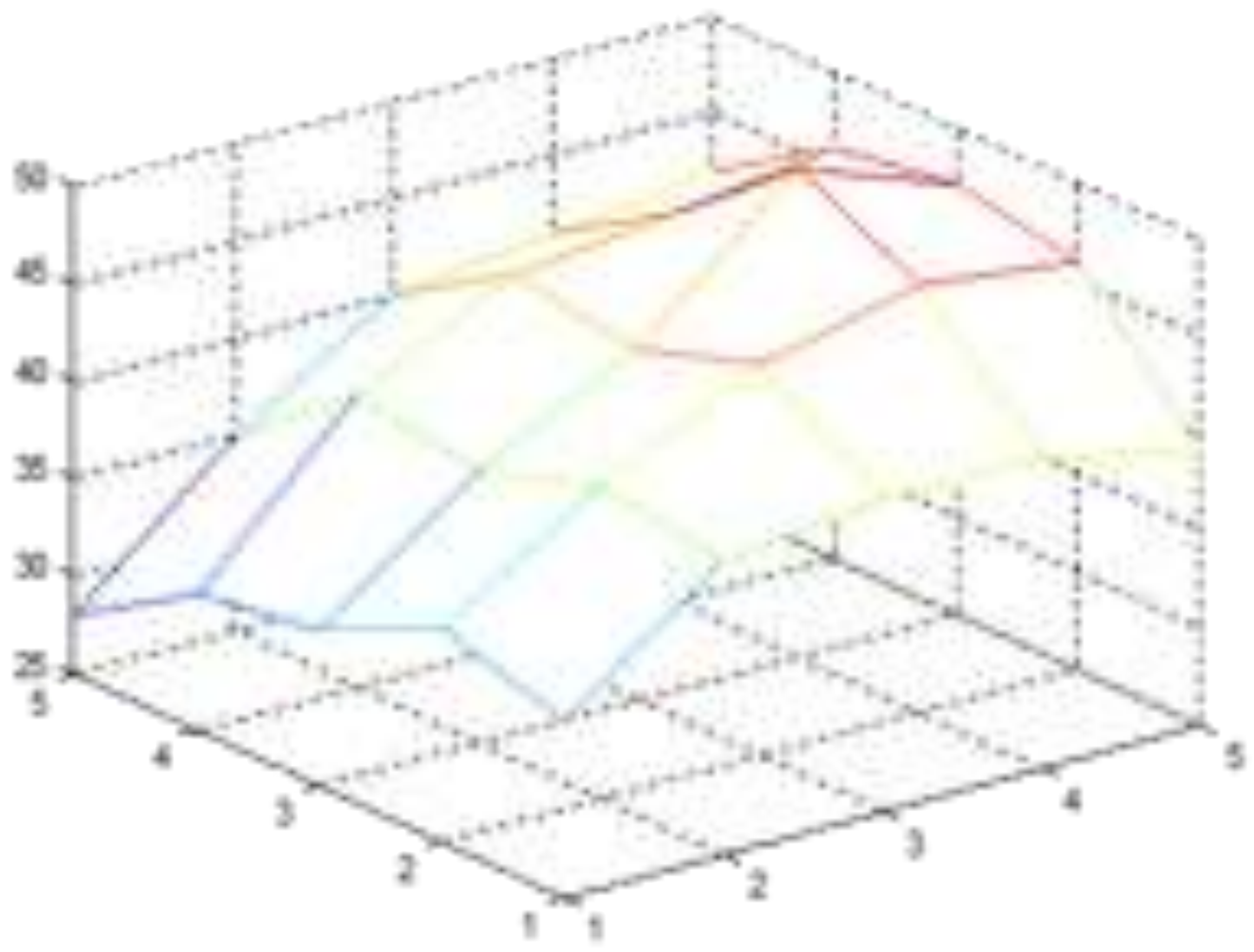
y \ x	1	2	3	4	5
1	34	40	41	41	39
2	36	41	45	47	46
3	33	39	43	50	47
4	32	40	44	45	46
5	28	35	40	41	42

我们可以先做插值处理，然后制作区域内的污染物浓度分布图.

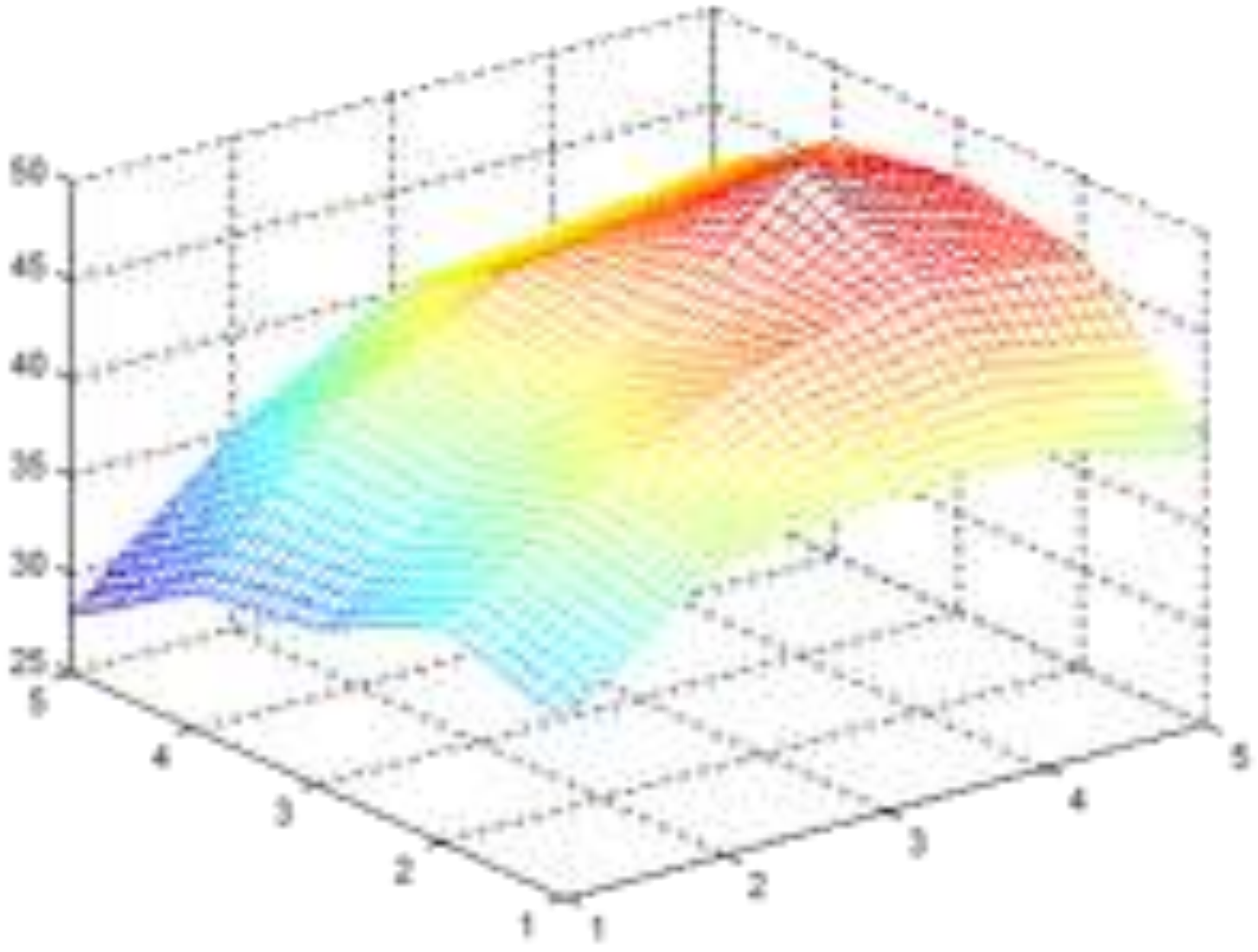
二维插值法

```
[x0, y0]=meshgrid(1: 1: 5, 1: 1: 5);
z0=[34 40 41 41 39; 36 41 45 47 46; 33 39 43 50 47; 32 40 44 45 46;
28 35 40 41 42];              %输入已知节点.
[x, y]=meshgrid(1: 0.1: 5, 1: 0.1: 5);
z1= interp2(x0, y0, z0, x, y, 'linear');
z2= interp2(x0, y0, z0, x, y, 'cubic');   %进行二维插值计算.
figure(1), mesh(x0, y0, z0)         %已知节点画图
figure(2), mesh(x, y, z1)           %线性二维插值
figure(3), mesh(x, y, z2)           %三次二维插值
```

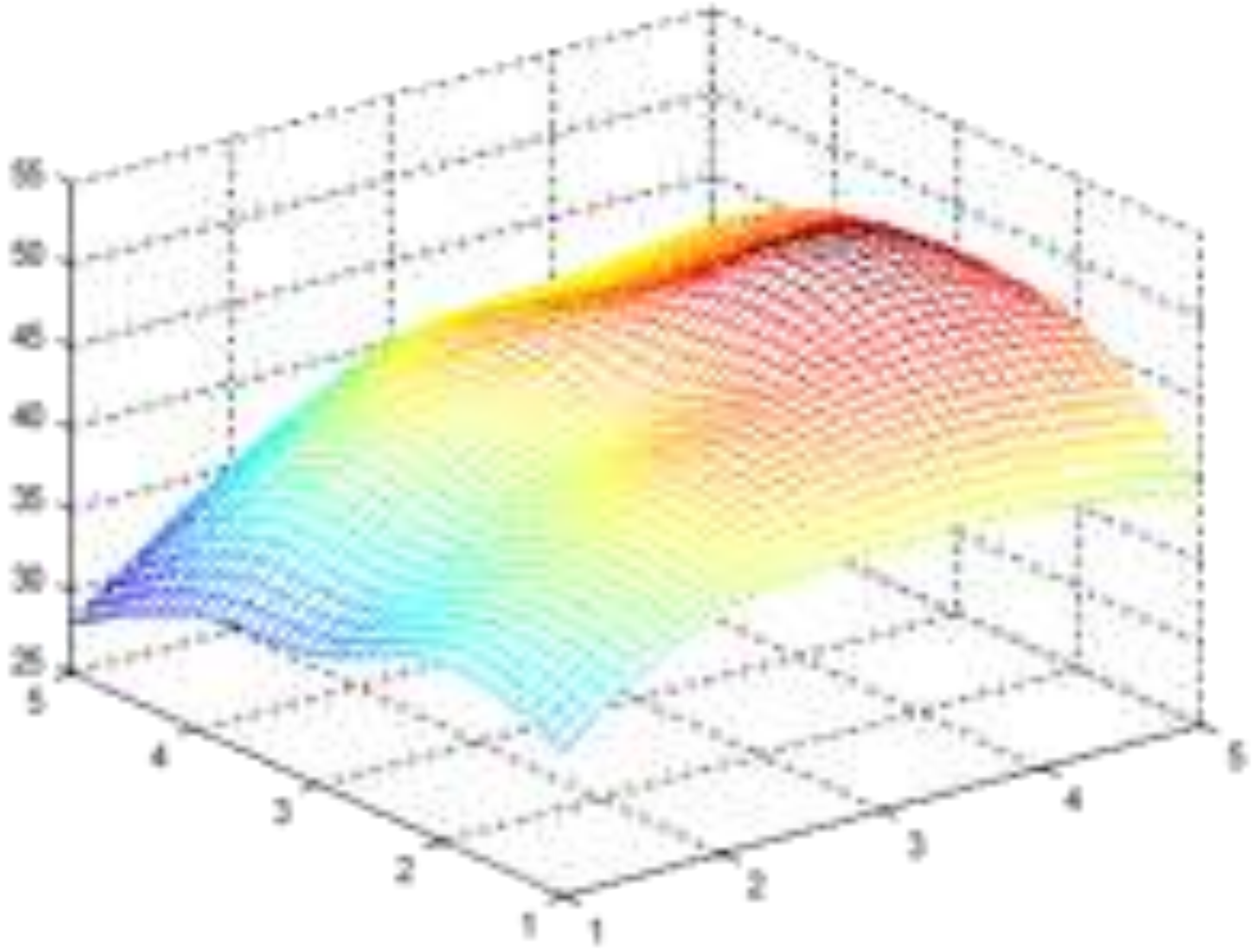
二维插值法



原始数据图
(x0, y0, z0)



线性插值效果图
(x, y, z1)



三次插值效果图
(x, y, z2)

二维插值法

例：某海域测得一些(x, y)点处水深z，数据如下：

x=[129, 140, 103.5, 88, 185.5, 195, 105, 158, 77, 81, 162, 162, 162, 118];

y=[7.5, 142,23, 147, 23, 138, 86, -6.5, -81, 3, 57, -66, 84, -34];

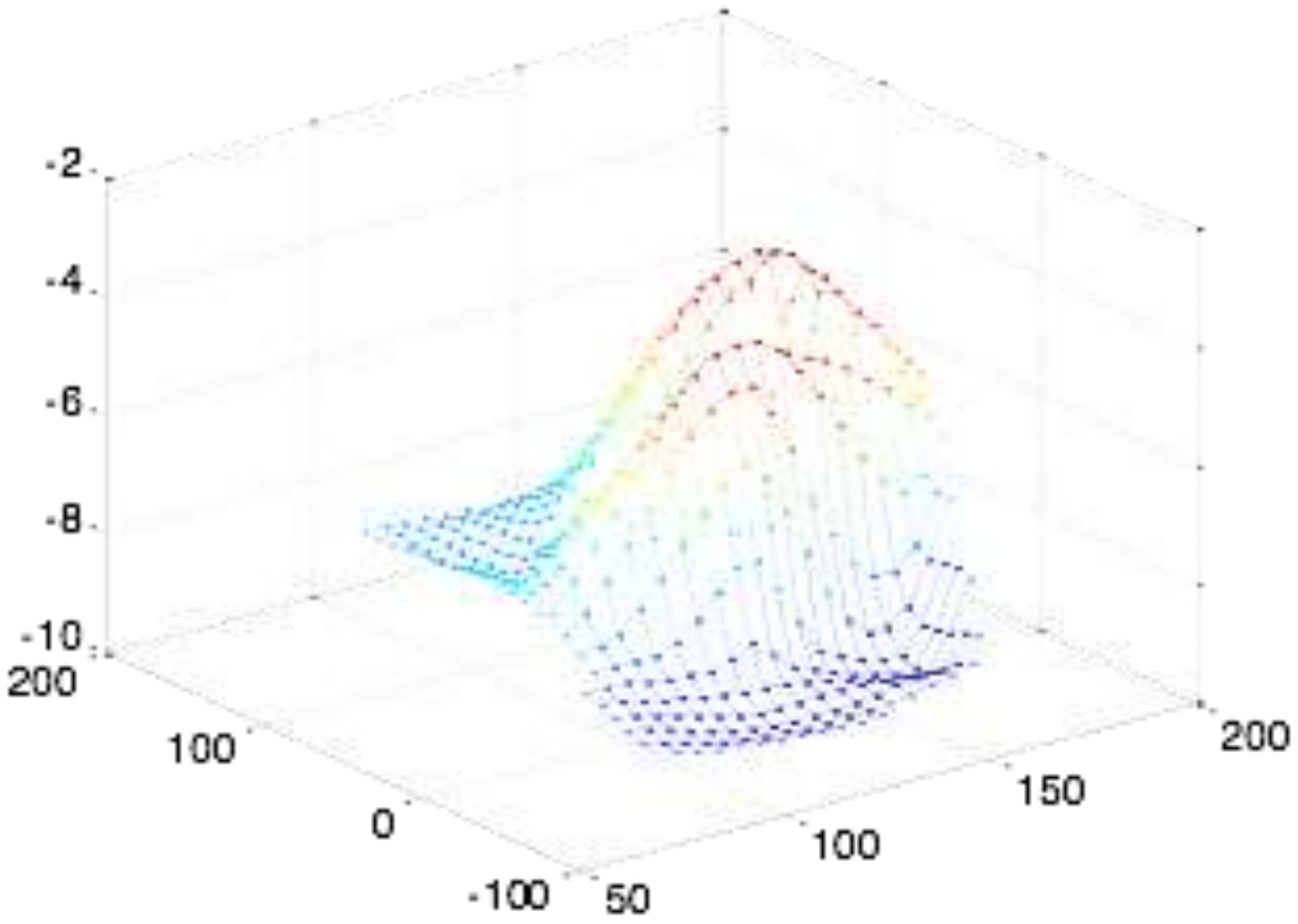
z=[-4, -8, -6, -8, -6, -8, -8, -9, -9, -8, -8, -9, -4, -9];

试在矩形区域(75, 200)×(-70, 150)内画出海底图形。

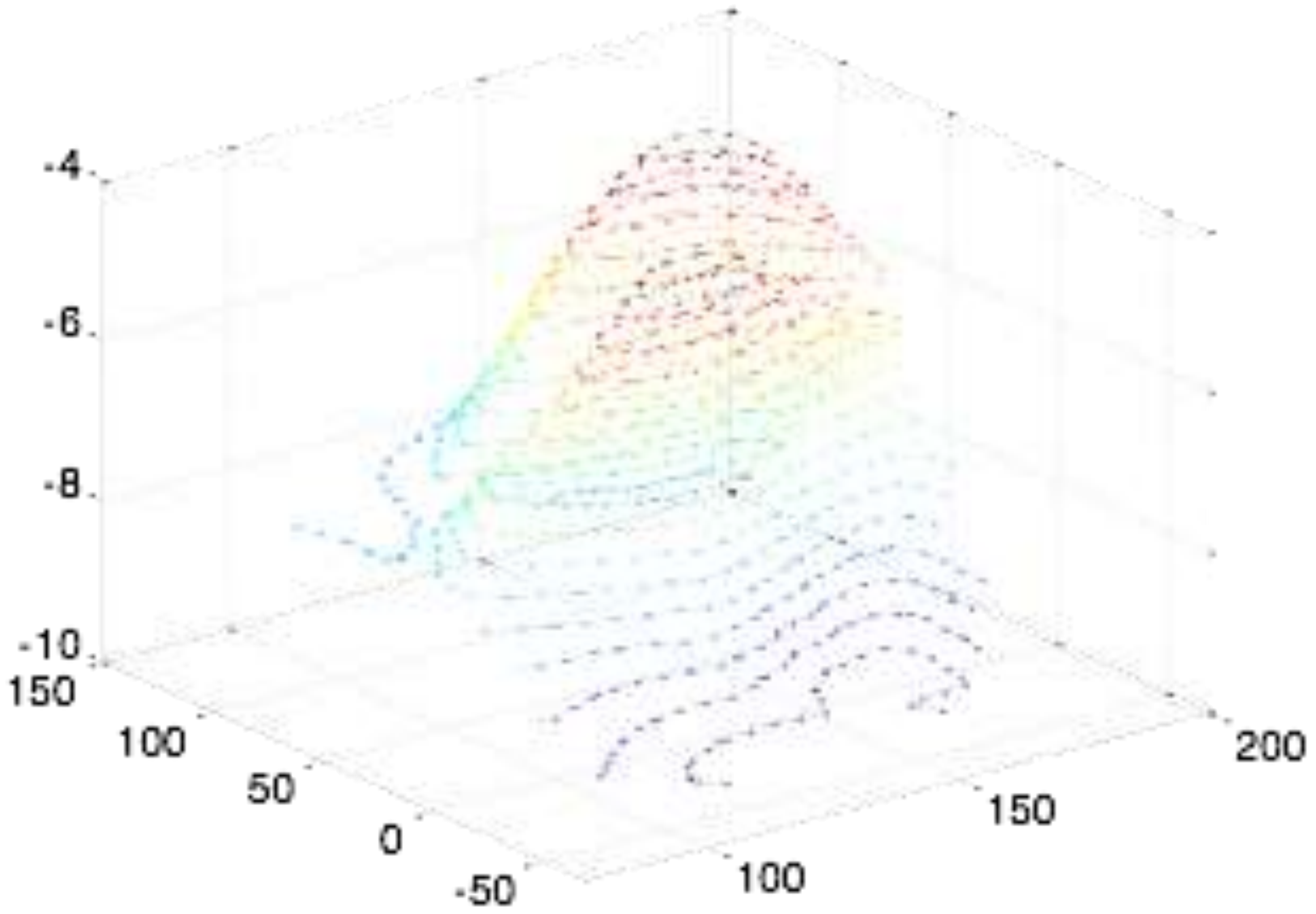
二维插值法

```
x=[129, 140, 103.5, 88, 185.5, 195, 105, 158, 77, 81, 162, 162, 162, 118];
y=[7.5, 142,23, 147, 23, 138, 86, -6.5, -81, 3, 57, -66, 84, -34];
z=[-4, -8, -6, -8, -6, -8, -8, -9, -9, -8, -8, -9, -4, -9];
cx=75: 5: 200;
cy=-70: (150+70)/25: 150;
[CX, CY]=meshgrid(cx, cy); CZ=griddata(x, y, z, CX, CY, 'cubic');
figure(1),
mesh(CX, CY, CZ);                    %空间曲面图
figure(2),
contour3(CX, CY, CZ, 16)             %空间等高线，16是等高线稀疏参数
```

二维插值法



空间曲面图



空间等高线

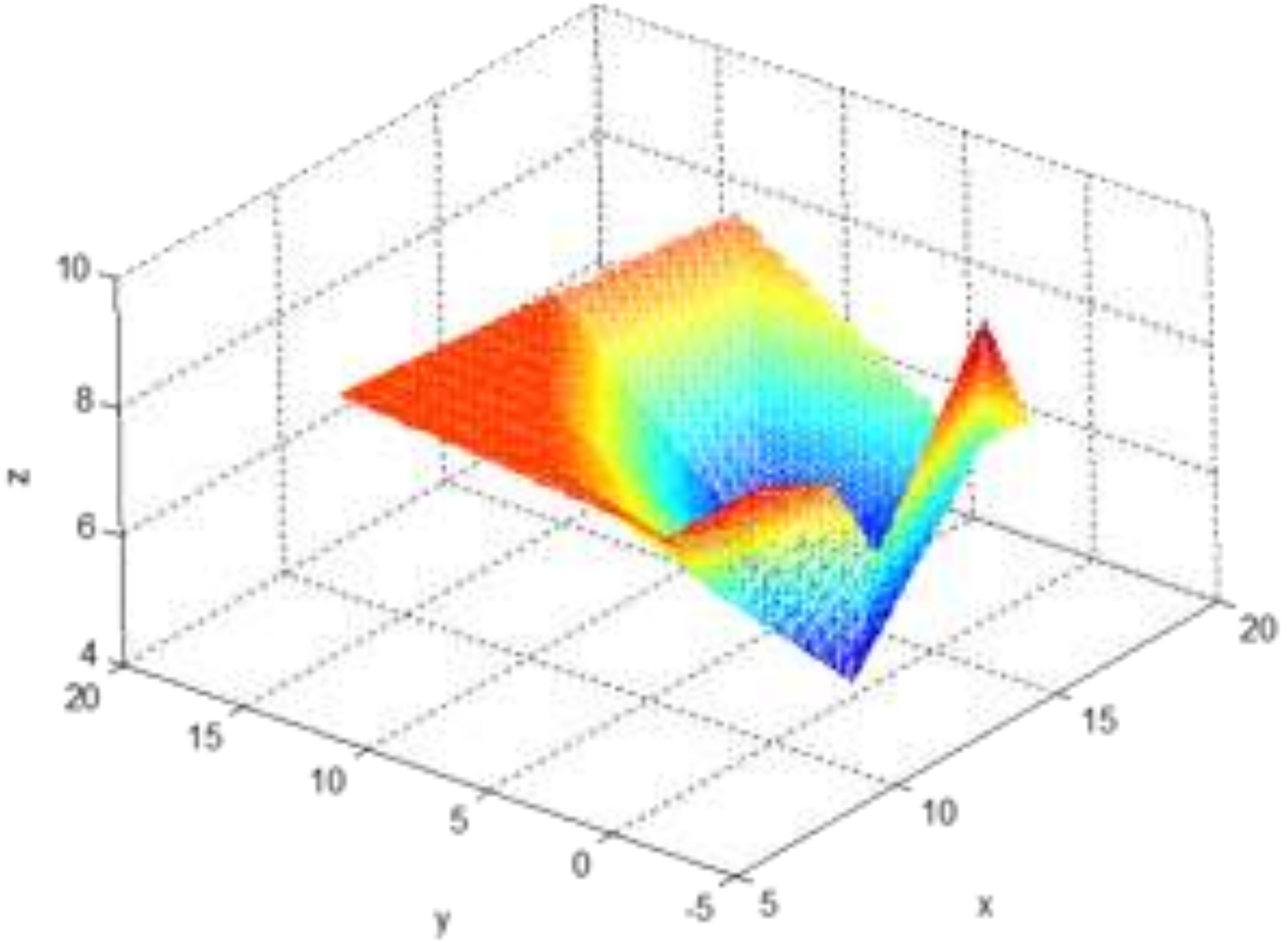
二维插值法

例：如果数据采样不均匀，如下表所示：

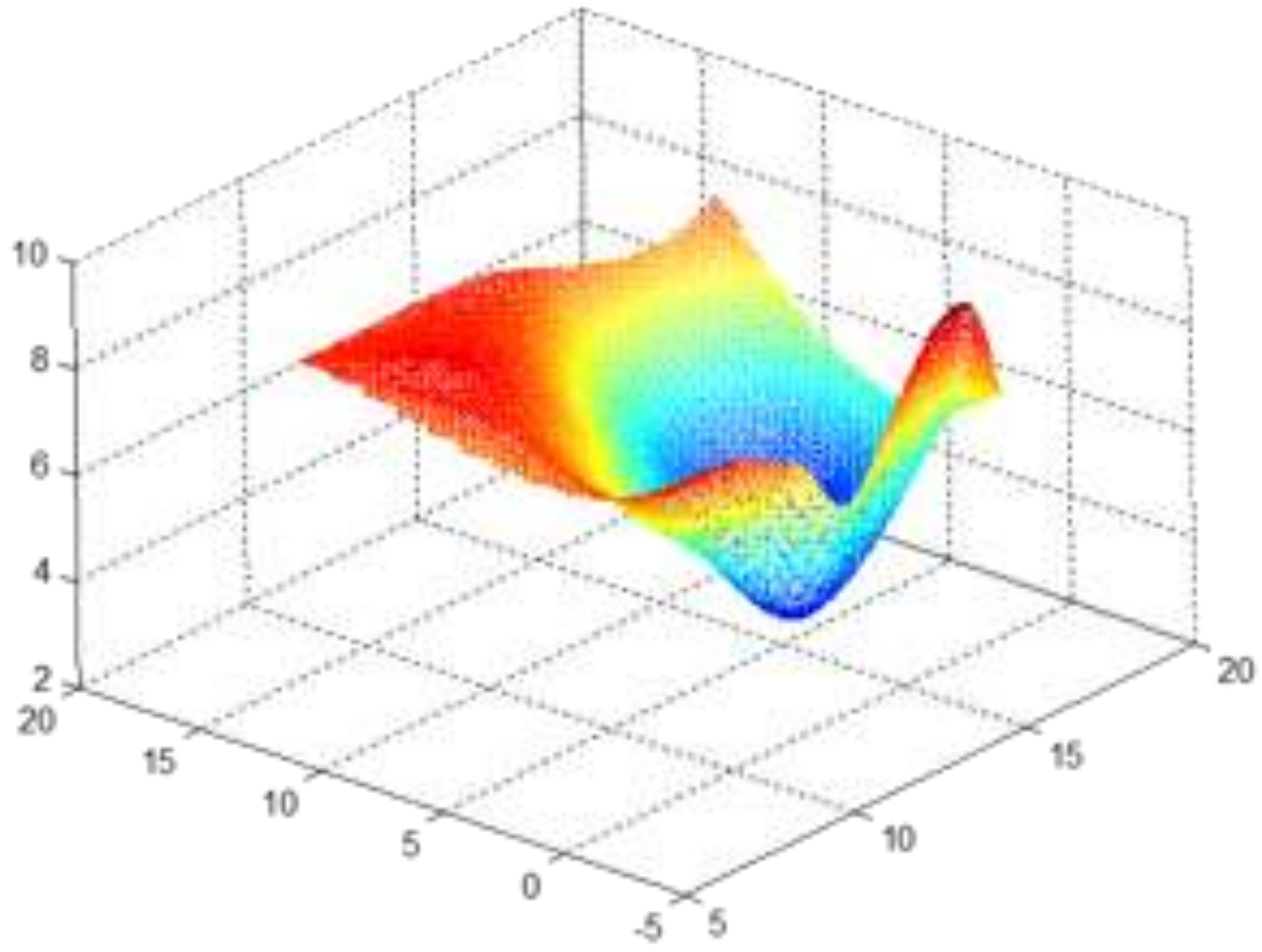
x	13	14	10	8	18	19	10	16	10	7	8	16	16	12
y	0.7	14	2	15	2	13	9	-1	-8	0.3	6	-7	8	-3
z	4	8	6	8	6	8	8	9	9	8	8	9	4	9

```
x0=[13 14 10 8 18 19 10 16 10 7 8 16 16 12];
y0=[0.7 14 2 15 2 13 9 -1 -8 0.3 6 -7 8 -3];
z0=[4 8 6 8 6 8 8 9 9 8 8 9 4 9];                          %输入已知节点.
[x, y]=meshgrid(5: 0.1: 20, -1: 0.1: 20);                  % 定义插值节点.
z1=griddata(x0, y0, z0, x, y, 'linear');  mesh(x, y, z1)     %  线性插值.
figure(2)
z2=griddata(x0, y0, z0, x, y, 'cubic');  mesh(x, y, z2)      %   三次插值.
```

二维插值法



线性插值效果图
mesh(x, y, z1)



三次插值效果图
mesh(x, y, z2)

二维插值法

课堂练习：在[-10，10]上取50个节点构成向量V，令$x=y=V$，取对应函数值$z=x^3+2xy^2+3y^3$。利用这些节点和线性插值、三次插值方法，对函数进行插值并画出其图形。

评述

插值法使用方便、快捷，在估算数据时非常有效，不过不能有效给出变量之间的函数关系，要给出与数据吻合较好的函数，可以使用曲线拟合等方法.

作　业

1. 取函数$f(x)=3\sin(2x)\cos(3x)+4\sin(x/2)\cos(x/3)$在[-10, 10]上100节点，给出其分段线性插值、三次样条插值、分段三次插值的图形。

2. 某地检测土壤某种污染物的含量，用来查找污染源头。经拉网式检测，获得数据如下，

（1）请通过插值计算，画出该区域内的污染物浓度分布图；

（2）分析污染物源头可能的位置，说出你的理由。

y \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	6	5	8	32	45	69	55	57	57	50	53
2	7	10	35	49	73	58	19	20	23	55	54
3	11	35	49	77	60	20	23	32	27	54	53
4	30	51	79	65	40	45	303	33	30	50	54
5	55	80	69	30	47	105	39	35	59	56	50
6	85	79	32	38	98	33	30	62	60	49	11
7	88	25	31	278	45	35	64	61	51	11	10
8	82	20	23	32	25	78	79	54	12	11	10
9	81	23	21	27	82	80	58	10	9	9	7
10	87	77	79	89	87	65	9	9	8	8	6
11	86	78	77	78	69	60	10	8	5	3	0

作　业

3. 某地测得一些(x, y)点处水深z，数据如下：试画出海底图形。

y \ x	1	2	3	4	5
1	34	M			39
2	36		45	47	
3		39			47
4	32		M		
5	28	35		41	M

M是你学号最后两位数