课程内容回顾

本课涉及数学分支

- 微积分(极限, 导数, 积分)
- 高等代数(多项式, 矩阵, 线性方程组)
- 常微分方程
- 数值计算方法(插值理论, 数据拟合)
- 概率论与数理统计
- 最优化方法

函数的极限

- 函数的极限
- 多变量函数的极限

数学运算	Matlab命令
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	limit(f)
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	limit(f, x, a) 或 limit(f, a)
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$	limit(f, x, a,’ left’)
$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$	limit(f, x, a,’ right’)
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$	limit(f, x, inf)

导数及偏导

- 一阶导数、高阶导数
- 偏导数
- 雅克比矩阵
- 向量求导
- 参数方程求导
- 隐函数求导
- 数值微分
- 极值
- 方程组的根
- Taylor展开
- 单调性

导数及偏导

Matlab求导命令diff调用格式：

diff(f(x)), 求 $f(x)$的一阶导数 $f'(x)$；

diff(f(x), n), 求 $f(x)$的n阶导数 $f^{(n)}(x)$；

diff(f(x, y), x),

求$f(x, y)$对x的一阶偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$；

diff(f(x， y), x,n),

求$f(x, y)$对x的n阶偏导数 $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$；

matlab求雅可比矩阵命令jacobian：

jacobian([f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)], [x, y, z])

极值和最值

[x, f]=fminbnd(F, a, b)：

x返回一元函数在[a, b]内的局部最小值点,f返回局部最小值,F为函数。

[x, f]=fminsearch(F, x0)：

x返回一元或多元函数在x0附近的局部最小值点, f返回局部最小值, F为函数。

导数的应用

求方程（组）的根

求代数方程 $f(x)=0$ 的根，可以用Matlab命令：solve(f, x).

输出结果即 $f(x)=0$ 的所有符号解或精确解.

求函数在一定范围内的零点

求f(x)=0在点x0附近的零点：x=fzero(f, x0).

求f(x)=0在[a, b]内的零点：x=fzero(f, [a, b]).

导数的应用

指定初始点求函数零点

从x0出发求f(x)=0的零点：[x, f, h]=fsolve(f, x0).

输出结果为向量[x, f, h]，x为近似零点，f为该点处函数值，h输出值大于零表示结果可靠，否则不可靠.

求函数$f(x)$在$x=a$处的n-1阶幂级数展开式：

taylor(f, x,' Order',' ExpansionPoint')

积分计算

- 求和（sum）
- 不定积分（int）
- 定积分（int）
- 广义积分（int）
- 数值积分（梯形法trapz，自适应辛普森quad）
- 二重积分（int）
- 数值计算重积分（dblquad, tripquad）
- 曲线积分（int）
- 曲面积分（int）

插值方法

- 插值法，interp1，
- 分段线性插值，linear
- 三次样条插值，spline, cubic
- 二维插值，interp2, griddata

插值法

插值命令

- 分段线性插值：interp1(x0, y0, x) — 默认选择其中x0和y0为已知节点数组，x为待计算的插值点数组.
- 分段三次多项式插值：interp1(x0, y0, x, 'cubic')，插值效果比分段线性插值更加光滑一些(节点处可导)。
- 三次样条插值：spline(x0, y0, x)或interp1(x0, y0, x, 'spline')每个子区间是三次多项式，光滑（节点处二阶可导）
- 最近区域插值：interp1(x0, y0, x, ‘nearest’)就近插值节点区域上的函数值为该点函数值

插值法

二维插值

已知二元函数$z=f(x, y)$在若干个点的取值.

如果这些节点分布很均匀，数据点落在由一系列平行直线组成的矩形网络的各个顶点上，可以用命令：interp2(x0, y0, z0, x, y, 'method')

其中method可选nearest（最近邻点插值）、linear（线性插值）、spline（三次样条插值）、cubic（三次插值）.

如果节点分布散乱，可以用命令：griddata(x0,y0,z0,x,y, 'method'). 其中method可选nearest、linear、cubic等

数据拟合

多项式拟合**MATLAB命令：**

格式： p=polyfit(x,y,n)

最小二乘拟合**MATLAB命令：**

格式： $[a,\ jm]=lsqcurvefit(Fun,a_0,x,y)$

B 样条拟合**MATLAB命令：**

格式： S=spapi(k,x,y)

常微分方程

- **ODE的精确解—dsolve('eqn1', 'eqn2', ..., t)**
  - 通解
  - 特解
- **ODE的数值解—[t, y]=ode45('odefun', tspan, y0, options)**
  - Euler法
  - Euler法的改进
  - 龙格-库塔法

常微分方程的数值解

求常微分方程数值解的函数

求常微分方程的数值解有多种算法，因此可供使用的函数也有多个. 常用的函数有：

函数名	简介	适用对象
ode45	单步，4/5阶龙格-库塔法	大部分ODE
ode23	单步，2/3阶龙格-库塔法	快速、精度不高的求解
ode113	多步，Adams算法	误差要求严格或计算复杂

注：上述函数仅适用于非刚性（nonstiff）方程（组），即其特征值的实部绝对值差异比较小.

常微分方程的数值解

所谓刚性方程（组），其数值解只有在步长很小时才会稳定，步长较大时解就会不稳定. 在具体应用中，如果使用常用函数长时间无结果，可以考虑换用如下函数：

函数名	简介	适用对象
ode23t	采用梯形算法	具有一定的刚性特点
ode15s	多步，反向数值积分法	ode45失效时可以试用
ode23s	单步，2阶Rosebrock算法	精度设定较低时，速度快
ode23tb	采用梯形算法	精度设定较低时，速度快

常微分方程的数值解

常微分方程数值求解的命令

求常微分方程的数值解，Matlab中的命令格式为：

[t, y]= solver ('odefun', tspan, y0, options)

solver—选择ode45等函数名；

odefun—待解方程或方程组的m文件名；

tspan—自变量的区间$[t_0, t_f]$，t_0为初始点；

y0—初始值；

options—用于设定误差限制．命令格式为：

options=odeset('reltol', rt, 'abstol', at)

rt—输入相对误差，at—输入绝对误差．

矩阵计算

- 矩阵的生成

  (eye,size,ones,zeros,rand,diag,compan,vander,sym)

- 矩阵的修改 A(:,end:-1,1), diag, tril, triu, fliplr, flipud,

- 矩阵的运算(+, -, inv, /, \, ./. .\ .*, *)

矩阵计算

生成特殊矩阵的函数	
eye(n)	*n* 阶单位矩阵
zeros(n),zeros(m,n)	*n* 阶零矩阵，零矩阵
ones(n),ones(m,n)	*n* 阶全 1 矩阵，全 1 矩阵
[ ]	空阵
rand(n)	*n* 阶均匀分布的随机矩阵
randn(n)	*n* 阶正态分布的随机矩阵
compan(P)	伴随阵
diag(*v*,*k*)	生成对角阵
vander(C)	生成 Vandermonde 阵

矩阵计算

矩阵操作函数	
diag	提取对角元素，生成对角矩阵
fliplr	左，右翻转
flipud	上，下翻转
rot90	按逆时针旋转
tril	提取矩阵的主下三角部分
triu	提取矩阵的主上三角部分

矩阵计算

基本矩阵的运算符

运算符	含义	运算符	含义
A + B	加法	A ^ n	A为方阵时，自乘n次
A - B	减法	A.^n	A的各元素n次方
A * B	乘法	A.^B	A,B两矩阵对应元素乘方
A .* B	对应元素相乘	exp（A）	A的所有元素取以e为底的指数
A \ B	左除	log（A）	对A的各元素取 e为底的对数
A / B	右除	sqrt （A）	对A的各元素求平方根
A ./ B	A的元素被B的 对应元素除	det（A）	求A的行列式
		inv（A）	求A的逆矩阵
k*A	数乘	A’	求A转置

多项式

1. 多项式表达式和根

设p为n维向量，poly2sym(p)输出以p为系数的多项式

比如p=[1 2 3 4 5]，则poly2sym(p): $x^4+2x^3+3x^2+4x+5$

polyval(p, a)返回多项式p(x)当x=a时的值polyval(p, 4)

roots(p) 返回多项式函数p(x)=0的所有复数根

conv(p1, p2)返回多项式p1(x)和p2(x)的乘积结果的系数.

[a b]=deconv(p1, p2)返回p1(x)除以p2(x)的商式a和余式b的系数.

多项式

syms x

collect(f) 对符号多项式f进行合并同类项

expand(f) 对符号多项式f进行展开

horner(f) 对符号多项式f进行嵌套分解

factor(f) 对符号多项式f进行因式分解

有理分式的分解与合并

[a b r]=residue(p, q) 将p(x)/q(x)分解为最简分式之和。

[p q]=residue(a, b, r)

将简单分式之和，合并为有理分式，即residue(p, q)的逆运算。

齐次线性方程组解的结构

B=null(A)　输出列向量B，为系数矩阵A的齐次方程组的基础解系。

B=null(A,'r')　输出列向量B，为系数矩阵A的齐次线性方程组的有理数形式的基础解系；

特征值与二次型

- 特征值与特征向量(eig)
- 矩阵的相似对角化(eig)
- 二次型化标准型(schur， eig)
- 正定二次型的判定(eig， chol)

特征值与二次型

用Matlab计算特征值和特征向量的命令如下：

d=eig(A)　　仅计算A的特征值(以向量形式**d**存放)

[V,D]=eig(A)　　其中：D为由特征值构成的对角阵，V为由特征向量作为列向量构成的矩阵。且使 $AV=VD$ 成立

trace(A)　　计算矩阵A的迹

特征值与二次型

Matlab中二次型化成标准形的命令为：

[P , T] = schur (A)

或 [P , T] = eig (A)

其中： A 二次型矩阵(即实对称矩阵)；

T 为 A 的特征值所构成的对角形矩阵；

P 为 正交矩阵 ，

P 的列向量为 A的特征值所对应的特征向量

特征值与二次型

---Chol(A)：矩阵A的Cholesky 分解

---Cholesky 分解：A=LL’，其中A是正定对阵矩阵，L为下三角矩阵

---[D p]=chol(A)

- 如果A正定，返回的p＝0
- 如果A不正定，则返回一个正的p，p－1为A中正定子矩阵的阶次

概率与统计

- 古典概率（factorial）
- 随机变量、概率密度函数、分布函数的概念回顾
  - 二项分布
  - 泊松分布
  - 均匀分布
  - 指数分布
  - 正态分布

常见分布的计算

函数名	概率密度函数
binopdf	二项分布的概率密度函数
chi2pdf	卡方分布的概率密度函数
exppdf	指数分布的概率密度函数
fpdf	f分布的概率密度函数
gampdf	伽玛分布的概率密度函数
geopdf	几何分布的概率密度函数
hygepdf	超几何分布的概率密度函数
normpdf	正态分布的概率密度函数
poisspdf	泊松分布的概率密度函数
tpdf	学生氏t分布的概率密度函数
unidpdf	离散均匀分布的概率密度函数
unifpdf	连续均匀分布的概率密度函数

函数名	对应分布的分布函数
binocdf	二项分布的分布函数
chi2cdf	卡方分布的分布函数
expcdf	指数分布的分布函数
fcdf	f分布的分布函数
gamcdf	伽玛分布的分布函数
geocdf	几何分布的分布函数
hygecdf	超几何分布的分布函数
normcdf	正态分布的分布函数
poisscdf	泊松分布的分布函数
tcdf	学生氏t分布的分布函数
unidcdf	离散均匀分布的分布函数
unifcdf	连续均匀分布的分布函数

随机数

生成随机数的random命令

y=random('name', A1, A2, A3, m, n)

其中，name为相应分布的名称，比如 Poisson，normal；A1、A2、A3为该分布中的参数，m为产生随机数的行数，n为产生随机数的列数.

m=1时，输出一串n个随机数；m>1时，输出的是一个m行n列随机矩阵，矩阵中的元素服从相应分布.

随机数

直接调用

如：y=binornd(n, p, m,k)产生参数为n，p的m行k列的二项分布随机数

分布类型	随机数产生函数
二项分布B(n,p)	binornd(n,p,m,k)
泊松分布$\pi(\lambda)$	poissrnd(λ,m,k)
均匀分布U(a,b)	unifrnd(a,b,m,k)
指数分布E(λ)	exprnd(λ,m,k)
正态分布$N(\mu, \sigma^2)$	normrnd(μ,σ,m,k)

随机模拟方法

随机模拟方法

随机模拟是指通过随机试验，根据所得结果的频率、平均值等情况来估计有关的规律. 蒙特卡洛(Monte Carlo)方法就是一种典型的随机模拟方法.

比如要求$f(x)$在$[a,b]$上的最值，应求出函数的驻点、不可导点，然后比较这两类点与区间端点处的函数值. 若采用随机模拟方法，整个过程会简单得多.

常用统计量

在对数据进行深入分析之前，首先需要将已有数据以一定的格式读取，并利用常用的统计量进行概括性分析.

这些常用统计量包括：平均值、中位数、方差、标准差、极差、偏度、峰度等.

常用统计量

- 平均值、中位数(mean,median)
- 方差，标准差，极差(var， std， range)
- 偏度(skewness)
- 峰度(kurtosis)
- 直方图(hist， histfit， cdfplot)

参数估计

参数估计的命令

polyfit(x, y, n)

1. 正态总体的参数估计

点估计和区间估计可同时由以下命令获得：

[muhat,sigmahat,muci,sigmaci] = normfit(X, alpha)

alpha为显著性水平，1-alpha为置信水平。alpha缺省时设定为0.05.

muhat 输出正态分布均值的点估计值

sigmahat 输出标准差的点估计值

muci输出均值的区间估计

sigmaci输出标准差的区间估计

X为数据矩阵（列为变量）时，输出行变量。

一　参数估计

2. 其它分布的参数估计

（1）取容量充分大的样本(n>50)，按中心极限定理，它近似地服从正态分布；

（2）使用特定分布总体的估计命令.

1^0[muhat, muci] = expfit(X,alpha)-----在显著性水平alpha下，求指数分布数据X的均值的点估计、区间估计.

2^0[lambdahat, lambdaci] = poissfit(X,alpha)-----在显著性水平alpha下，求泊松分布数据X的参数的点估计、区间估计.

最优化方法实验

最优化方法的应用领域

生产计划：设备数量、时间、原材料一定，如何产出尽量多/价值最高的产品?

广告营销：如何投入营销资源，以获得最佳效果？

运输管理：如何设定运输路线、运输工具达到最快/成本最低/最大价值的运输目的?

……

最优化方法实验

1. 线性规划问题
2. 0-1规划问题
3. 一元函数的无约束优化问题
4. 多元函数的无约束优化问题
5. 二次规划
6. 一般约束非线性规划