

高等学校教材

# 自适应控制及应用

陈新海 李言俊 周军 编著

西北工业大学出版社

1998年12月 西安

(陕)新登字 009 号

**【内容简介】** 本书主要介绍自适应控制的基本原理及应用。全书共分 10 章,主要为绪论、自适应控制系统的理论基础、模型参考自适应控制、自校正控制、变结构控制、混合自适应控制、对象具有未建模动态时的混合自适应控制、非线性控制对象的自适应控制、模糊自适应控制和自适应控制的应用。

本书可作为高等学校自动控制类专业研究生教材,也可供本科高年级学生和工程技术人员参考。

高 等 学 校 教 材  
自适应控制及应用  
陈新海 李言俊 周 军 编著  
责任编辑 王夏林 楚康鸿  
责任校对 耿明丽

\*

西北工业大学出版社出版发行  
(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8493844)  
陕西省新华书店发行  
陕西天元印务有限责任公司印装  
ISBN 7-5612-1032-9 TP 149(课)

\*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:18 字数:44 千字  
1998 年 12 月第 1 版 2003 年 1 月第 3 次印刷  
印数:1 501—1 700 册 定价:23.00 元

购买本社出版的图书,如有缺页、错页的,本社发行部负责调换。

# 前 言

自 60 年代以来,由于航空航天技术和过程控制发展的需要,在计算机技术发展的推动下,自适应控制技术发展很快,应用范围也在不断扩大。我们在多年从事自适应控制课程教学工作的基础上,编写了本书。

本书主要阐述自适应控制的基本原理及应用。全书共分 10 章,第 1 章至第 4 章为绪论、自适应控制系统的理论基础、模型参考自适应控制和自校正控制,这些内容是自适应控制理论的基本内容。第 5 章至第 9 章为变结构控制、混合自适应控制、对象具有未建模动态时的混合自适应控制、非线性控制对象的自适应控制和模糊自适应控制。第 10 章为自适应控制的应用。

本书编者分工如下:陈新海编写第 1 章至第 4 章、周军编写第 5 章、李言俊编写第 6 章至第 10 章。

西安交通大学刘文江教授审阅了全书,提出了许多宝贵意见,在此深致谢忱。书中可能存在缺点和不妥之处,敬请读者批评指正。

编著者  
1998 年 3 月

# 目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 自适应控制问题的提出	1
§ 1.2 自适应控制的基本内容及分类	1
§ 1.3 自适应控制的发展概况	3
参考文献	3
第二章 自适应控制的理论基础	5
§ 2.1 李雅普诺夫稳定性理论	5
§ 2.2 动态系统的正实性	10
§ 2.3 超稳定性理论	16
§ 2.4 系统参数估计方法	19
§ 2.5 闭环系统的辨识	30
习题	38
参考文献	38
第三章 模型参考自适应控制	39
§ 3.1 用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统	39
§ 3.2 用李雅普诺夫稳定性理论设计模型参考自适应系统	43
§ 3.3 用超稳定性理论设计模型参考自适应系统	57
§ 3.4 离散模型参考自适应系统	70
§ 3.5 模型参考自适应控制的鲁棒性	74
习题	78
参考文献	79
第四章 自校正控制	81
§ 4.1 最小方差自校正调节器	81
§ 4.2 最小方差自校正控制器	88
§ 4.3 极点配置自校正调节器与控制器	93
§ 4.4 多变量最小方差自校正调节器	99
§ 4.5 多变量最小方差自校正控制器	102
习题	104
参考文献	105

第五章 变结构控制·····	106
§ 5.1 变结构控制基本原理 ·····	106
§ 5.2 变结构调节器控制 ·····	113
§ 5.3 变结构模型跟踪控制 ·····	120
§ 5.4 变结构模型参考自适应控制 ·····	126
习题·····	134
参考文献·····	135
第六章 混合自适应控制·····	136
§ 6.1 基于 Narendra 方案的显式模型参考混合自适应控制·····	136
§ 6.2 Elliott 隐式模型参考混合自适应控制方案 ·····	140
§ 6.3 玲木模型参考混合自适应控制方案 ·····	143
§ 6.4 随机系统混合自适应控制 ·····	148
参考文献·····	154
第七章 对象具有未建模动态时的混合自适应控制·····	155
§ 7.1 连续对象具有未建模动态时的混合自适应控制器 ·····	155
§ 7.2 $\sigma$ 校正混合自适应律 ·····	162
§ 7.3 积分式混合自适应律 ·····	164
§ 7.4 基于 Narendra 方案的混合自适应修正方案 ·····	172
§ 7.5 对象具有未建模动态时的间接式混合自适应极点配置方案 ·····	176
§ 7.6 对象具有未建模动态时的混合自适应控制系统的持续激励问题 ·····	177
参考文献·····	182
第八章 非线性控制对象的自适应控制·····	184
§ 8.1 非线性系统的自适应线性控制 ·····	184
§ 8.2 非线性一阶系统的鲁棒自适应控制 ·····	190
§ 8.3 可补非时变非线性系统的自适应控制 ·····	194
§ 8.4 对象具有未知死区时的自适应控制 ·····	199
参考文献·····	213
第九章 模糊自适应控制·····	214
§ 9.1 模糊控制的基本概念 ·····	214
§ 9.2 模糊自适应控制器 <sup>[7]</sup> ·····	223
§ 9.3 模糊自校正控制 ·····	226
§ 9.4 神经网络模糊自适应控制 ·····	227
§ 9.5 基于模糊聚类算法的模糊自适应控制 ·····	233
参考文献·····	243

第十章 自适应控制的应用 .....	244
§ 10.1 战术导弹的自校正控制 .....	244
§ 10.2 具有多输入和扰动作用的空—空导弹滚动通道的前馈/ 反馈自适应控制器 .....	254
§ 10.3 广义预测自适应控制器在导弹控制系统设计中的应用 .....	257
§ 10.4 导弹控制系统的随机混合自适应控制方案 .....	264
§ 10.5 高精度激光跟踪系统的综合设计 .....	270
§ 10.6 空间站的混合自适应控制 .....	273
参考文献 .....	279

# 第一章 绪论

## § 1.1 自适应控制问题的提出

很多控制对象的数学模型随时间和随工作环境的改变而变化,其变化规律事先往往不知道。例如导弹或飞机的气动参数会随其飞行速度、飞行高度和大气密度而变。特别是导弹的飞行速度和飞行高度的变化范围很大,因此导弹的数学模型参数可在很大的范围内变化。除了环境变化对控制对象有影响外,控制对象本身的变化也可影响其数学模型的参数。例如导弹在飞行过程中,其重量和质心位置会随着燃料的消耗而改变,这会影响其数学模型的参数。当控制对象的数学模型参数在小范围内变化时,可用一般的反馈控制、最优控制或补偿控制等方法来消除或减小参数变化对控制品质的有害影响。如果控制对象的参数在大范围内变化时,上面这些方法就不能圆满地解决问题。为了解决控制对象参数在大范围内变化时,系统仍能自动地工作于最优或接近于最优的运行状态,就提出了自适应控制问题

自适应控制可简单地定义如下:在系统工作过程中,系统本身能不断地检测系统参数或运行指标,根据参数的变化或运行指标的变化,改变控制参数或改变控制作用,使系统运行于最优或接近于最优工作状态。自适应控制也是一种反馈控制,但它不是一般的系统状态反馈或系统输出反馈,而是一种比较复杂的反馈控制。自适应控制系统很复杂,即使对于线性定常的控制对象,其自适应控制亦是非线性时变反馈控制系统。所以设计自适应控制比一般的反馈控制要复杂得多。

## § 1.2 自适应控制的基本内容及分类

自适应控制的种类很多,大致上可分为三大类,即自校正控制、模型参考自适应控制和其他类型的自适应控制。

### 一、自校正控制

典型的自校正控制方框图如图 1.2-1 所示,系统受到随机干扰作用。

自校正控制的基本思想是将参数递推估计算法与对系统运行指标的要求结合起来,形成一个能自动校正调节器或控制器参数的实时计算机控制系统。首先读取被控对象的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  的实测数据,用在线递推辨识方法,辨识被控对象的参数向量  $\theta$  和随机干扰的数学模型。按照辨识求得的参

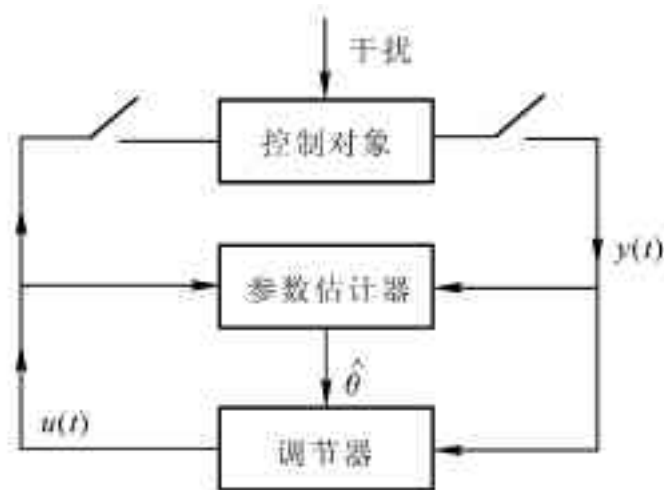


图 1.2-1 自校正控制

数向量估值  $\theta$  和对系统运行指标的要求,随时调整调节器或控制器参数,给出最优控制  $u(t)$ ,使系统适应于本身参数的变化和环境干扰的变化,处于最优的工作状态。

自校正控制可分为自校正调节器与自校正控制器两大类。自校正控制的运行指标可以是输出方差最小,最优跟踪或具有希望的极点配置等等。因此自校正控制又可分为最小方差自校正控制、广义最小方差自校正控制和极点配置自校正控制等。

设计自校正控制的主要问题是用递推辨识算法辨识系统参数,尔后根据系统运行指标来确定调节器或控制器的参数。一般情况下自校正控制适用于离散随机控制系统。

二、模型参考自适应控制

所谓模型参考自适应控制,就是在系统中设置一个动态品质优良的参考模型,在系统运行过程中,要求被控对象的动态特性与参考模型的动态特性一致,例如要求状态一致或输出一致。典型的模型参考自适应系统如图 1.2-2 所示。

自适应控制的作用是使控制对象的状态  $X_p$  与理想的参考模型的状态  $X_m$  一致。当被控对象的参数变化或受干扰影响时,  $X_p$  与  $X_m$  可能不一致,通过比较器得到误差向量  $e$ ,将  $e$  输入到自适应机构。自适应机构按照某一自适应规律调整前馈调节器和反馈调节器的参数,改变被控对象的状态  $X_p$ ,使  $X_p$  与  $X_m$  相一致,误差  $e$  趋近于零值,以达到自适应的要求。

在图 1.2-2 所示的模型参考自适应控制方案中参考模型和被控对象是并联的,因此这种方案称为并联模型参考自适应系统。在这种自适应控制方案中,由于被控对象的性能可与参考模型的性能进行直接比较,因而自适应速度比较快,也较容易实现。这是一种应用范围较广的方案。控制对象的参数一般是不能调整的,为了改变控制对象的动态特性,只有调节前馈调节器和反馈调节器的参数。控制对象和前馈调节器及反馈调节器一起组成一个可调整的系统,称之为可调系统,如图 1.2-2 中虚线所框的部分。有时为了方便起见就用可调系统方框来表示被控对象和前馈调节器及反馈调节器的组合。

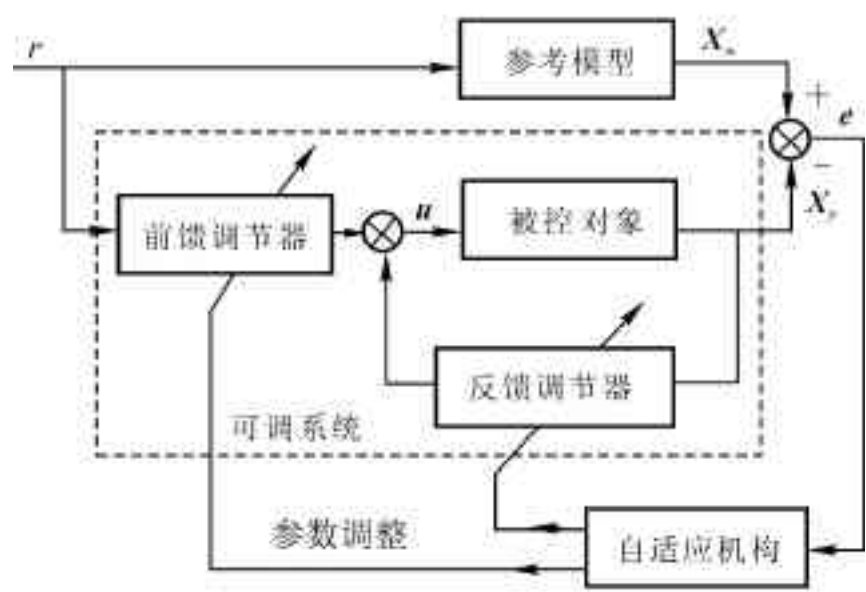


图 1.2-2 模型参考自适应系统

除了并联模型参考自适应控制之外,还有串联模型参考自适应控制和串并联模型参考自适应控制。在自适应控制中一般都采用并联模型参考自适应控制。

上面按结构形式对模型参考自适应控制系统进行分类,还有其他的分类方法。例如按自适



应控制的实现方式(连续性或离散性)来分,可分为(1)连续时间模型参考自适应系统;(2)离散时间模型参考自适应系统;(3)混合式模型参考自适应系统。

模型参考自适应控制一般适用于确定性连续控制系统。

模型参考自适应控制的设计可用局部参数优化理论、李雅普诺夫稳定性理论和超稳定性理论。用局部参数优化理论来设计模型参考自适应系统是最早采用的方法,用这种方法设计出来的模型参考自适应系统不一定稳定,还需进一步研究自适应系统的稳定性。目前都采用李雅普诺夫稳定性理论和超稳定性理论来设计模型参考自适应系统,在保证系统稳定的前提下,求出自适应控制规律。

### 三、其他类型的自适应控制

自校正控制和模型参考自适应控制是自适应控制的基本模式。还有其他形式的自适应控制,主要的有变结构自适应控制、混合自适应控制、对象具有未建模动态的自适应控制、非线性控制对象的自适应控制和模糊自适应控制等。

本书主要讲述上面提到的各类自适应控制的基本原理和设计方法。

## § 1.3 自适应控制的发展概况

在 50 年代末,由于飞行控制的需要,美国麻省理工学院(MIT)怀特克教授(Whitaker)首先提出飞机自动驾驶仪的模型参考自适应控制方案,称为 MIT 方案。在该方案中采用局部参数优化理论设计自适应控制规律,这一方案没有得到实际应用。用局部参数优化方法设计模型参考自适应系统,还需检验其稳定性,这就限制了这一方法的应用。在 1966 年德国学者帕克斯(P.C.Parks)提出采用李雅普诺夫(A.M.Liapunov)第二法来推导自适应算法,以保证自适应系统全局渐近稳定。在用被控对象的输入输出构成自适应规律时,在自适应规律中包含输入和输出的各阶导数,这就降低了自适应对干扰的抑制能力。为了避免这一缺点,印度学者纳朗特兰(K.S.Narendra)和其他学者提出各自的不同方案。罗马尼亚学者波波夫(V.M.Popov)在 1963 年提出超稳定性理论,法国学者兰道(I.D.Landau)把超稳定性理论应用到模型参考自适应控制中来。用超稳定性理论设计的模型参考自适应系统是全局渐近稳定的。

自校正调节器是在 1973 年由瑞典学者阿斯特罗姆(K.J.Åström)和威特马克(B.Wittenmark)首先提出来的。1975 年克拉开(D.W.Clark)等提出自校正控制器。1979 年威尔斯特德(P.E.Wellstead)和阿斯特罗姆提出极点配置自校正调节器和伺服系统的设计方案。

自适应控制经过 30 多年的发展,无论在理论上或在应用上都取得了很大的进展。近 10 多年来,由于计算机的迅速发展,特别是微处理机的广泛普及,为自适应控制的实际应用创造了有利条件。自适应控制在飞行控制、卫星跟踪望远镜的控制、大型油轮的控制、电力拖动、造纸和水泥配料等方面的控制中得到应用。利用自适应控制能够解决一些常规的反馈控制所不能解决的复杂控制问题,能大幅度地提高系统的稳态精度和跟踪精度。

### 参考文献

- 1 Landau I D .Adaptive Control - Model Reference Approach .MARCEL DEKKER, INC, 1979

- 2 Åstrom K J, Wittenmark B .Adaptive control .Addison – Wesley, 1989
- 3 Harrics C J,Billings S A .Self Tuning and Adaptive Control: Theory and Applications .  
London : Peter Peregrinus ,1981
- 4 Hartmanu U, Krebs V .Command and Stability Systems for Aircrafts: A New Digital  
Adaptive Approach .Automatica, 1980 ,16(2)
- 5 James W Gilbert, Geoge C Winston .Adaptive Compensation for optical Tracking  
Telescope .Automatica, 1974, 10(2)
- 6 Amerongen J Van .Adaptive Steering of ships—A Model Reference Approach .  
Automatica, 1984, 20(1)

## 第二章 自适应控制的理论基础

在第一章已谈到模型参考自适应控制的理论基础是李雅普诺夫稳定性理论和超稳定性理论,自校正控制的重要组成部分是系统参数估计,在系统运行过程中要求在线实时估计系统的参数。为了便于学习自适应控制理论,本章简要地介绍上述有关内容。

### § 2.1 李雅普诺夫稳定性理论

李雅普诺夫稳定性理论和方法是研究线性或非线性、定常或时变系统的重要方法。李雅普诺夫稳定性分析方法分为李雅普诺夫第一方法和第二方法。李雅普诺夫第一方法是通过求解系统微分方程来分析系统的稳定性。由于求解微分方程比较困难,对某些非线性微分方程得不到解析解,因此李雅普诺夫第一方法使用不方便。李雅普诺夫第二方法不需求解系统的微分方程,就能分析系统的稳定性。因此这一方法在系统稳定性分析和自适应控制中得到广泛应用。

李雅普诺夫稳定性理论是研究系统受扰后能否保持平衡状态。稳定性、渐近稳定性和全局渐近稳定性是李雅普诺夫稳定性理论的三个基本概念,下面先来讨论这些基本概念。

#### 一、稳定性定义

设系统的状态方程为

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (2.1-1)$$

式中  $X$  为系统的  $n$  维状态向量,是时间  $t$  的函数。 $f(X, t)$  为  $n$  维向量函数。式(2.1-1)为非线性系统状态方程,方程的解  $X(t)$  在状态空间中的轨迹称为轨线。如果在状态空间中存在某一状态  $X_e$ ,满足下列方程

$$f(X_e, t) = 0 \quad (2.1-2)$$

则  $X_e$  就是系统的一个平衡点。如果没有外力作用于系统,系统将保持这个平衡状态。如果系统受到外力作用,则能否保持这个平衡状态,这就提出了平衡状态的稳定性问题。粗略的稳定性概念为:由式(2.1-1)所表示的系统受到干扰作用后,在平衡状态附近发生微小偏离,若随后所有的运动都处于平衡状态附近的小范围内,则系统的平衡状态是稳定的。下面分别讨论比较严格的稳定性、渐近稳定性和全局渐近稳定性的定义。

#### 定义1 稳定性

若对任意给定的实数  $\varepsilon$ ,可找到另一正数  $\delta(\varepsilon)$ ,使得一切满足  $\|X(0) - X_e\| \leq \delta(\varepsilon)$  的系统响应  $X(t)$ ,在所有的时间内都满足  $\|X(t) - X_e\| \leq \varepsilon$ ,则称系统的平衡状态  $X_e$  是稳定的。在上述定义中

$$\|X(0) - X_e\| = \left\{ \sum_{i=1}^n [x_i(0) - x_{ei}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \delta(\varepsilon) \quad (2.1-3)$$

当  $\delta(\varepsilon)$  选得足够小时,则由初始扰动引起的响应,在所有时间内都包括在一个超球体中,即

$$\|X(t) - X_e\| = \left\{ \sum_{i=1}^n [x_i(t) - x_{ei}]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad (2.1-4)$$

在二维情况下,系统稳定性的几何解释如图 2.1-1 所示。

如果对某平衡点  $X_e$  和任意给定的领域  $\varepsilon$ ,找不到满足稳定条件的相对邻域  $\delta(\varepsilon)$ ,那末系统在该平衡点是不稳定的,则称系统是不稳定的。

如果所取的领域  $\varepsilon$  和  $\delta(\varepsilon)$  与初始时刻  $t_0$  无关,即对任何  $t_0$  稳定条件不变,则称该稳定状态是一致稳定的。

## 定义 2 渐近稳定

如果系统的一个平衡状态  $X_e$  是稳定的,且对靠近平衡状态  $X_e$  的任何初始点  $X(0)$  的系统解  $X(t)$  满足

$$\|X_0 - X_e\| \leq \delta, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_e\| = 0 \quad (2.1-5)$$

也就是说,从足够靠近  $X_e$  处出发的每一个解  $X(t)$ ,当  $t \rightarrow \infty$  时收敛于  $X_e$ ,则平衡状态  $X_e$  是渐近稳定的。在二维情况下,系统渐近稳定性的几何解释如图 2.1-2 所示。如果  $X_e$  是渐近稳定的,且系统稳定性质与初始时刻  $t_0$  无关,则系统是一致渐近稳定的。

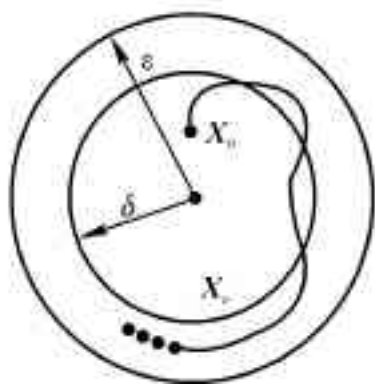


图 2.1-1 系统稳定性的几何解释

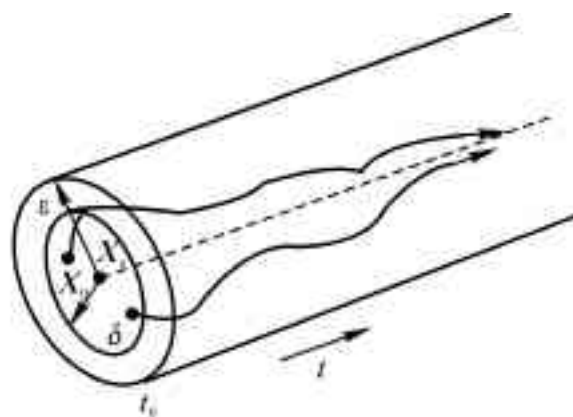


图 2.1-2 系统渐近稳定性的几何解释

## 定义 3 全局渐近稳定

如果系统的平衡状态  $X_e$ ,对状态空间的所有  $X(0)$  都是稳定的,且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_e\| = 0$ ,则  $X_e$  是全局渐近稳定的。

如果系统的稳定性质与初始时刻  $t_0$  无关,则平衡状态  $X_e$  是一致全局渐近稳定。

从工程观点来看,感兴趣的往往是在平衡状态附近比较大的范围内的稳定性问题。若在状态空间中有限的范围内满足稳定条件,则系统称为局部稳定。

在以后分析系统时,我们总是假定系统都以坐标原点为平衡状态。通过坐标变换可将平衡状态  $X_e$  平移到坐标原点,则系统为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, t) \\ f(0, t) &= 0 \end{aligned}$$

如果系统为线性系统,则

$$\dot{X} = AX$$

其平衡状态也为坐标原点 0。

## 二、李雅普诺夫稳定性定理

李雅普诺夫第二方法又称李雅普诺夫直接法,应用这一方法可在不解微分方程的条件下确定系统的稳定性,因此这一方法有很大的优越性。

对于由式(2.1-1) 描述的系统

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (2.1-1)$$

如果

$$f(0, t) = 0 \quad (2.1-6)$$

则系统可能的平衡状态  $X_e = 0$ , 即为坐标原点 0。

为了分析系统的稳定性,李雅普诺夫引出一个虚构的能量函数,称为李雅普诺夫函数。分析这一函数的性质,就可解析地分析系统的稳定性。下面讨论李雅普诺夫函数和李雅普诺夫稳定性定理及其应用。

### (一) 李雅普诺夫函数

对于一个机械振动系统,如果系统的总能量随着时间  $t$  的增长而连续地减少,直到平衡状态为止,则系统是稳定的。在这种情况下,系统的总能量对时间的导数是负的。为了说明问题,先举一个质量-阻尼器-弹簧的机械系统例子,如图 2.1-3 所示。

系统的自由运动方程为

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = 0 \quad (2.1-7)$$

式中  $m$  为物体的质量;  $y$  为物体的位移;  $f$  为阻尼系数;  $k$  为弹簧刚度。取状态变量为  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ , 则可得系统状态方程

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} X \quad (2.1-8)$$

式中  $X = [x_1 \ x_2]^T$ 。设系统静止时  $y = 0$  和  $\dot{y} = 0$ , 即  $x_1 = 0$  和  $x_2 = 0$ ,  $X_e = [0 \ 0]^T$  为系统静止状态或平衡状态。

系统含有两个贮能元件:质量和弹簧。因此,系统的总能量等于贮存在质量中的动能和贮存在弹簧中的势能之和,即

$$V(X, t) = \frac{1}{2} m x_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 \quad (2.1-9)$$

总能量  $V(X, t)$  恒为正, 即当  $X \neq 0$  时,  $V(X, t) > 0$ 。当  $X = 0$  时,  $V(0) = 0$ 。  $V(X, t)$  称为李雅普诺夫函数。

求  $V(X, t)$  对时间  $t$  的导数

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2 = k x_1 x_1 + m x_2 x_2 \quad (2.1-10)$$

由式(2.1-8) 可得

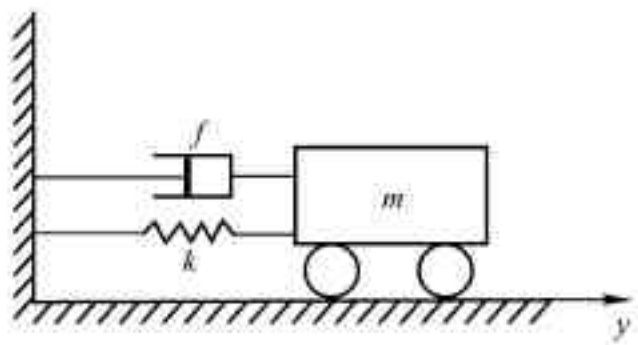


图 2.1-3 质量-阻尼器-弹簧系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2$$

将  $x_1$  和  $x_2$  代入式(2.1-10), 可得

$$V(X, t) = \frac{dV}{dt} = -fx_2^2 \quad (2.1-11)$$

从上式可看出  $V(X, t)$  是负的, 随着时间的增长, 系统的总能量  $V(X, t)$  是不断减少的, 直至平稳状态  $X_e = 0, V(X, t) = 0$ 。从物理概念上来说, 由于存在阻尼器, 系统在运动过程中要不断消耗能量。由此可见上述系统是一个以  $X_e = 0$  为平衡状态的渐近稳定系统。系统的  $V(X, t)$  和轨线变化情况如图 2.1-4 所示。

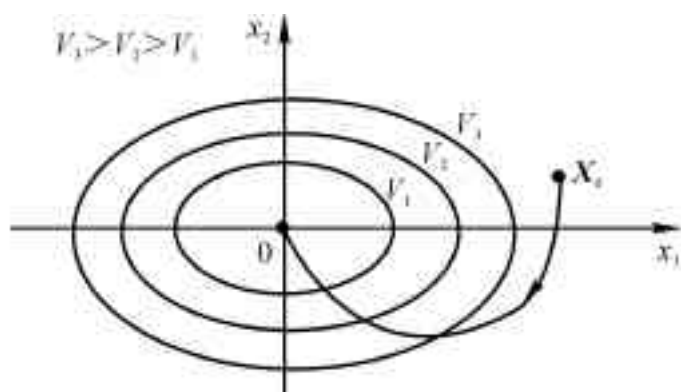


图 2.1-4 系统  $V(X, t)$  和轨线变化图

从上例可看出, 可以不解系统方程, 而由李雅普诺夫函数  $V(X, t)$  及其导数  $\dot{V}(X, t)$  的符号直接判断系统的原点稳定性。这就是李雅普诺夫第二方法的物理含义。

对一般的控制系统, 并没有上例的直观性。李雅普诺夫函数  $V(X, t)$  是状态变量的函数, 是一个广义的“能量函数”。李雅普诺夫函数  $V(X, t)$  应具有下列性质:

- (1)  $V(X, t)$  的一次偏导数是连续的;
- (2)  $V(X, t)$  是正定的, 即对所有  $\|X\| > 0$ , 有  $V(X, t) > 0$ , 且  $V(0) = 0$ 。

对于线性系统寻找李雅普诺夫函数比较简单一些, 选为系统状态变量  $X$  的二次型函数, 即

$$V(X, t) = X^T P X \quad (2.1-12)$$

为了  $V(X, t)$  正定,  $P$  应是正定矩阵。

对于一个复杂的系统, 要想找到一个合适的李雅普诺夫函数是比较困难的。

## (二) 李雅普诺夫稳定性定理

设系统方程为

$$\dot{X} = f(X, t) \quad (2.1-1)$$

并设  $f(0, t) = 0$ , 即原点为系统的平衡点。对此系统有下面的三个定理:

### 定理一 李雅普诺夫稳定性定理

对于式(2.1-1) 描述的系统, 如果在包含原点  $0$  在内的某个域  $D$  内, 存在李雅普诺夫函数  $V(X, t) > 0$ , 而且  $\dot{V}(X, t) \leq 0$ , 则系统在原点  $0$  是稳定的。

**证明** 用  $D_\varepsilon$  表示中心为原点  $0$ , 半径为  $\varepsilon$  的球的内部, 以  $S_\varepsilon$  表示此球的表面。设  $V(X, t)$  为正定,  $V(X, t) \leq 0$ ,  $V(X, t)$  在  $S_\varepsilon$  上的最小值为  $m$ 。以  $D_\delta$  表示中心为原点  $0$ , 半径为  $\delta$  的球的内部, 并设在球体  $D_\delta$  内各点的  $V(X, t) < m$ 。设在  $D_\delta$  之中有任意一点  $X_0$ 。下面来研究由  $X_0$  出发的轨线  $X(t) = X(X_0, t)$  的变化情况。假定在某一时刻  $t$ ,  $X(t)$  穿过  $S_\varepsilon$ , 由于

$$V(X, t) = \sum_{i=1}^n \frac{V}{x_i} x_i < 0 \quad (2.1-13)$$

故沿运动轨线  $X(t)$ ,  $V(X, t)$  并不增加, 因此有  $V[X(t)] \leq V(X_0) < m$ 。另一方面,  $m$  表示在  $S_\varepsilon$  上  $V(X, t)$  的最小值, 如果  $X(t)$  超出  $S_\varepsilon$  的边界, 则必有  $V[X(t)] \geq m$ 。上面的结果是矛盾的。由此可以说明随着时间的延长,  $X(t)$  不能超出  $S_\varepsilon$  的边界, 因此系统在原点稳定, 定理得证[3]。

## 定理二 李雅普诺夫渐近稳定性定理

对式(2.1-1) 描述的系统,如果在包含原点 0 在内的某个域  $D$  内,存在李雅普诺夫函数  $V(X, t) > 0$ , 且  $\dot{V}(X, t) < 0$ , 则系统在原点 0 是渐近稳定的。

证明 设  $D_r$  表示中心为原点 0, 半径为  $r$  的球的内部。若  $X_0$  在  $D_r$  之内, 当  $t > 0$  时, 设  $X(t, X_0)$  不会跑出  $D_r$  之外。设  $\varepsilon$  为任意小的正数, 由前面的定理可有  $\delta(\varepsilon) > 0$ , 当  $X_0$  在  $D_\varepsilon$  之内时,  $X(t, X_0)$  在  $D_\varepsilon$  内。今设  $X_0$  在  $D_r$  之内, 设在  $t > 0$  时,  $X(t, X_0)$  不落入  $D_\varepsilon$ , 则  $X(t, X_0)$  将落入  $D_\varepsilon$  和  $D_r$  两球之间, 即  $D_\varepsilon$  与  $D_r$  之间的区域。但在此中间层内,  $\dot{V}(X, t) < 0$ , 因此存在某个常数  $k > 0$ , 使得中间层内  $\dot{V}(X, t) < -k$ , 于是有下式

$$V(X, t) = V(X_0) + \int_0^t \dot{V} d\tau$$

可得

$$V(X, t) < V(X_0) - kt \quad (2.1-14)$$

当  $t$  不断增长时,  $V(X, t)$  渐渐减小, 但  $V(X, t)$  为正定函数, 不可能变负, 而是渐渐趋近于零。经过一段时间之后,  $X(t, X_0)$  将落入  $D_\varepsilon$ 。 $\delta(\varepsilon)$  是这样选择的, 当  $X(t, X_0)$  落入  $D_\varepsilon$  之后不能跑出  $D_\varepsilon$ , 就是说  $D_\varepsilon$  在  $D_\varepsilon$  之内。由于  $\varepsilon$  是任意小的数,  $D_\varepsilon$  可趋近于零, 因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t, X_0) = 0$ , 系统渐近稳定, 定理得证[3]。

## 三、李雅普诺夫稳定性理论的应用

李雅普诺夫稳定性理论在系统稳定性分析和系统设计中得到较多的应用。下面讨论李雅普诺夫第二方法在线性系统稳定性分析中的应用。

设系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX \quad (2.1-15)$$

式中  $X$  为  $n$  维状态向量;  $A$  为  $n \times n$  维常数矩阵。选下列二次型函数为可能的李雅普诺夫函数

$$V(X) = X^T P X \quad (2.1-16)$$

式中  $P$  为  $n \times n$  对称正定矩阵, 求  $V$  对时间  $t$  的导数

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \dot{X}^T P X + X^T P \dot{X} = (AX)^T P X + X^T P A X = X^T (A^T P + P A) X \quad (2.1-17)$$

由于  $V(X)$  取正定, 如果要使系统渐近稳定, 必须使  $\dot{V}(X)$  为负定, 即要求

$$\dot{V} = -X^T Q X \quad (2.1-18)$$

式中

$$-Q = A^T P + P A \quad (2.1-19)$$

因此使一个线性系统稳定的充分条件是  $Q$  必须为正定。可先选取一个正定  $Q$  阵, 然后用式(2.1-18) 求解  $P$ , 再根据  $P$  是否正定来判定系统的渐近稳定性。这比选一个正定的  $P$ , 再检查  $Q$  阵是否也是正定要方便得多。 $P$  为正定是一个必要条件。为方便计,  $Q$  阵常取为单位阵  $I$ , 此时  $P$  的元素可按下式确定

$$A^T P + P A = -I \quad (2.1-20)$$

例 2.1-1 设系统状态方程为

$$\dot{X} = AX$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$$

求系统的李雅普诺夫函数。

[解] 设

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{且 } p_{12} = p_{21}$$

由式(2.1-19)有

$$\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

求解上式可得

$$p_{11} = 5, \quad p_{22} = 1, \quad p_{12} = p_{21} = 1$$

$P$  阵为

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$P$  为正定矩阵, 李雅普诺夫函数为

$$V(X) = X^T P X = 4x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$$

$V(X)$  对  $t$  的导数为

$$\dot{V}(X) = -\frac{V}{x_1} x_1 + \frac{V}{x_2} x_2 = -16(x_1^2 + x_2^2)$$

$V(X)$  正定,  $\dot{V}(X)$  负定, 因此系统渐近稳定。

寻找李雅普诺夫函数并不是一件容易的事情, 如果一时找不到合适的李雅普诺夫函数, 还不能说明系统不稳定。

将来我们应用李雅普诺夫稳定性理论来设计自适应控制系统。

## § 2.2 动态系统的正实性

正实性概念最先是在网络分析与综合中提出来的。随着控制理论的不断发 展, 在滤波、最优控制和自适应控制等方面也引入正实性概念, 正实性概念对自适应控制起着重要的作用。

下面先引入一些基本的数学定义, 在这些定义的基础上讨论系统的正实性及有关问题。

### 一、正实函数与正实函数矩阵

#### (一) 正实函数与严格正实函数

在电工网络分析与综合中首先提出正实性概念。数学上的正实函数概念与电工中的无源网络概念密切相关。由电阻、电容、电感及变压器等构成的无源网络总要从外界吸收能量, 因此无源性表现了网络中能量的非负性, 其相应的传递函数是正实的。正实性的概念也被引进自动控制中来, 系统传递函数的正实性概念对研究自适应控制起着重要作用。

#### A. 复变量的正实函数

设  $h(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$  是复变量  $s = \sigma + j\omega$  的有理函数, 其中  $M(s)$  和  $N(s)$  都是  $s$  的多项式。下



面给出正实函数和严格正实函数的定义。

### 1. 正实函数的定义

若  $h(s)$  为正实函数,则应满足下列条件:

- (1) 当  $s$  为实数时,  $h(s)$  是实的;
- (2)  $h(s)$  在开的右半平面  $\operatorname{Re} s > 0$  上没有极点;
- (3)  $h(s)$  在  $\operatorname{Re} s = 0$  轴(也就是  $s = j\omega$ ) 上如果存在极点,则是相异的,相应的留数为实,且为正或为零;
- (4) 对任意  $\omega (-\infty < \omega < +\infty)$ , 当  $s = j\omega$  不是  $h(s)$  的极点时, 有  $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ 。

例 2.2-1

$$(a) \quad W(s) = \frac{1}{s+a} \quad (a > 0)$$

$$W(j\omega) = \frac{a - j\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$\operatorname{Re}[W(j\omega)] = \frac{a}{\omega^2 + a^2} > 0$$

所以  $W(s)$  为正实函数。

$$(b) \quad W(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (a_0 > 0, a_1 > 0)$$

$$W(j\omega) = \frac{a_0 - \omega^2 - ja_1\omega}{(a_0 - \omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}$$

$$\operatorname{Re}[W(j\omega)] = \frac{a_0 - \omega^2}{(a_0 - \omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}$$

当  $\omega^2 > a_0$  时,  $\operatorname{Re}[W(j\omega)] < 0$

所以  $W(s)$  不是正实函数。

$$(c) \quad W(s) = \frac{bs + b}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$W(j\omega) = \frac{a_0 b + (a_1 b - a_0 b)\omega^2 + j\omega[b(a_0 - \omega^2) - a_1 b]}{(a_0 - \omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}$$

$$\operatorname{Re}(j\omega) = \frac{a_0 b + (a_1 b - a_0 b)\omega^2}{(a_0 - \omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}$$

若  $a_1 b \geq a_0 b$

$$\operatorname{Re}(j\omega) \geq 0$$

则  $W(s)$  为正实函数。

### 2. 严格正实函数的定义

若  $h(s)$  为严格正实函数,则应满足下列条件:

- (1) 当  $s$  为实数时,  $h(s)$  是实的;
- (2)  $h(s)$  在闭右半平面  $\operatorname{Re} s \geq 0$  上没有极点;
- (3) 对任意  $\omega (-\infty < \omega < +\infty)$ , 当  $s = j\omega$  时有  $\operatorname{Re} h(j\omega) > 0$ 。

例 2.2-2

$$(a) \quad W(s) = \frac{1}{s+a} \quad (a > 0), \text{ 为严格正实函数。}$$

$$(b) \quad W(s) = \frac{bs + b}{s^2 + a_1 s + a_0}, \quad \text{当 } a_1 b > a_0 b \text{ 时, 为严格正实函数。}$$

从上面的二个定义可看出,正实传递函数与严格正实传递函数之间的差别是:在严格正实函数的情况下,不允许  $h(s)$  在虚轴上有极点,并且对于所有的实  $\omega$ ,  $\operatorname{Re}[h(j\omega)] > 0$ 。

本书将主要讨论具有下列形式的传递函数

$$h(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (2.2-1)$$

的正实性。式中  $M(s)$  和  $N(s)$  都是复变量  $s$  的互质多项式。当  $M(s)$  和  $N(s)$  具有哪些特点时,  $h(s)$  为正实函数,归纳起来有下列几点:

- (1)  $M(s)$  与  $N(s)$  都具有实系数;
- (2)  $M(s)$  与  $N(s)$  都是古尔维茨多项式(稳定多项式);
- (3)  $M(s)$  与  $N(s)$  的阶数差不超过  $\pm 1$ 。关于这一点可解释如下:  $h(j\omega)$  为  $h(s)$  的频率特性,因为要求正实传递函数的频率特性的实部  $\operatorname{Re}[h(j\omega)] \geq 0$ ,所以在复变量  $s$  平面上,当  $\omega$  在  $(-\infty, +\infty)$  范围内变化时,  $h(j\omega)$  只能在第一和第四象限内变化,也就是正实函数  $h(j\omega)$  的相角在  $-\frac{\pi}{2}$  与  $+\frac{\pi}{2}$  之间变化,因此  $M(s)$  与  $N(s)$  的阶数差不超过  $\pm 1$ ;

- (4)  $\frac{1}{h(s)}$  仍为正实函数。

#### B. 正实矩阵与严格正实矩阵

设传递函数矩阵  $H(s)$  是一个  $m \times m$  实有理函数矩阵。与正实函数一样,传递函数矩阵也可分为正实矩阵与严格正实矩阵。

##### 1. 正实函数矩阵的定义

当  $H(s)$  为正实函数矩阵时,须满足下列三个条件:

- (1)  $H(s)$  的所有元素在开右半平面  $\operatorname{Re}s > 0$  上都是解析的,即在  $\operatorname{Re}s > 0$ ,  $H(s)$  没有极点;
- (2)  $H(s)$  的任何元在轴  $\operatorname{Re}s = 0$  上(即虚轴上),如果存在极点,也是相异的,相应的  $H(s)$  的留数矩阵为非负的赫米特矩阵;
- (3) 对于不是  $H(s)$  任何元素的极点的所有实  $\omega$  值,矩阵  $H(j\omega) + H^T(-j\omega)$  是非负赫米特矩阵。

在这里还须对赫米特矩阵的性质作一简单介绍,以便加深对上面内容的理解。

复变量  $s = \sigma + j\omega$  的函数矩阵  $\Phi(s)$  为赫米特矩阵,如果

$$\Phi(s) = \Phi^T(\bar{s})$$

式中  $\bar{s}$  为  $s$  的共轭(即  $s = \sigma + j\omega$ ,  $\bar{s} = \sigma - j\omega$ )。

则赫米特矩阵的特性如下:

- (1) 赫米特矩阵为一方阵,它的对角元素为实数;
- (2) 赫米特矩阵的特征值恒为实数;
- (3) 如  $\Phi(s)$  为赫米特矩阵,  $X$  为具有复数分量的向量,则二次型  $X^T \Phi X$  恒为实数( $X$  为  $X$  的共轭)。

上面的第(2)和第(3)两条件也可表示为:在  $\operatorname{Re}s > 0$  的平面内,矩阵  $H(s) + H^T(\bar{s})$  是非负定的赫米特矩阵。

##### 2. 严格正实函数矩阵的定义

当  $H(s)$  为严格正实函数矩阵时,须满足下列条件:

- (1)  $H(s)$  的所有元素在闭右半平面  $\operatorname{Re}s \geq 0$  内都是解析的,即在  $\operatorname{Re}s \geq 0$  内  $H(s)$  设有

极点；

(2) 对所有实数  $\omega$ , 矩阵  $H(j\omega) + H^T(j\omega)$  是正定的赫米特矩阵。

## 二、卡尔曼-雅库鲍维奇-波波夫正实引理

在自适应控制中, 这是一个很重要的引理。正实引理可阐述如下:

若  $A, B, C, J$  为  $H(s)$  的最小实现, 相应的系统方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (2.2-2)$$

$$Y = CX + Ju \quad (2.2-3)$$

式中  $A, B$  为完全可控;  $A, C$  为完全可测。传递函数矩阵

$$H(s) = C[sI - A]^{-1}B + J \quad (2.2-4)$$

为复变量  $s$  的  $m \times m$  实有理函数矩阵, 且  $H(\infty) < \infty$ ,  $H(s)$  为正实函数矩阵的充要条件是存在实矩阵  $K, L$  和实正定对称阵  $P$ , 使得下列方程成立

$$PA + A^T P = -LL^T \quad (2.2-5)$$

$$B^T P + K^T L^T = C \quad (2.2-6)$$

$$K^T K = J + J^T \quad (2.2-7)$$

若式(2.2-5) 换为

$$PA + A^T P = -LL^T = -Q \quad (2.2-8)$$

式中  $Q = Q^T > 0$ , 则  $H(s)$  为严格正实函数矩阵。下面证明引理的充分性。

证明:

设  $s$  为  $s$  的共轭复数,  $H^T(s)$  为  $H(s)$  的共轭转置矩阵。

$$\begin{aligned} H(s) + H^T(s) &= J + C[sI - A]^{-1}B + J^T + B^T[sI - A^T]^{-1}C^T = \\ &= K^T K + B^T[sI - A^T]^{-1}PB + B^T[sI - A^T]^{-1}LK + \\ &+ B^T P[sI - A]^{-1}B + K^T L^T[sI - A]^{-1}B \end{aligned} \quad (2.2-9)$$

上式等号右边第二项和第四项之和为

$$\begin{aligned} B^T[sI - A^T]^{-1}PB + B^T P[sI - A]^{-1}B &= B^T[sI - A^T]^{-1} \\ &P[sI - A][sI - A]^{-1}B + B^T[sI - A^T]^{-1}[sI - A^T]P \\ &[sI - A]^{-1}B = B^T[sI - A^T]^{-1}[P(s + s) - PA - A^T P] \\ &[sI - A]^{-1}B = B^T[sI - A^T]^{-1}P[sI - A]^{-1} \\ &B - 2\text{Res} + B^T[sI - A^T]^{-1}LL^T[sI - A]^{-1}B \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

把式(2.2-10) 代入式(2.2-9) 得

$$\begin{aligned} H(s) + H^T(s) &= K^T K + B^T[sI - A^T]^{-1}P[sI - A]^{-1}B - 2\text{Res} + \\ &+ B^T[sI - A^T]^{-1}LL^T[sI - A]^{-1}B + B^T[sI - A^T]^{-1}LK + \\ &+ K^T L^T[sI - A]^{-1}B = [K + L^T(sI - A)^{-1}B]^T [K + L^T(sI - A)^{-1}B] + \\ &+ B^T[sI - A^T]^{-1}P[sI - A]^{-1}B - 2\text{Res} \end{aligned} \quad (2.2-11)$$

在式(2.2-11) 中, 等号右边第一项为非负定矩阵, 第二项  $2\text{Res}$  的系数矩阵为非负定矩阵, 如果数值  $\text{Res} \geq 0$  时,  $H(s) + H^T(s) \geq 0$  为非负定赫米特矩阵, 故  $H(s)$  为正实函数矩阵。

同理也可证明, 在  $H(s)$  中  $A, B, C, J$ , 若满足式(2.2-6)、式(2.2-7) 和式(2.2-8) 的条件, 则  $H(s)$  为严格正实函数矩阵。反过来, 如  $H(s)$  为严格正实函数矩阵, 一定能找到满足条件式(2.2-8) 的正定对称阵  $P$  和  $Q$ 。

关于引理必要性的证明比较复杂,可参考文献[2]。

### 三、正定积分核和正性系统

先讨论正定积分核的定义。方阵核  $K(t, \tau)$  称为正定,如果对于每个区间  $(t_0, t_1)$  和在  $[t_0, t_1]$  上分段连续的所有矢量函数  $u(t)$  有下面的不等式成立:

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) \left[ \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) u(\tau) d\tau \right] dt \geq -\eta_0^2, \quad \eta_0^2 < \infty \quad (2.2-12)$$

式中  $\int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) u(\tau) d\tau$  这一项可解释为系统的脉冲传递函数为  $K(t, \tau)$ , 输入为  $u(t)$  的系统的输出,如图 2.2-1 所示。

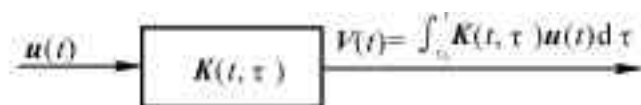


图 2.2-1 脉冲传递函数为  $K(t, \tau)$  的输入输出图

因此式(2.2-12)可解释为系统输入输出内积的积分。当  $K(t, \tau)$  为正定核时,这个积分值为正或为零,如果  $K(t, \tau)$  只依赖于变元  $(t - \tau)$  之值,即  $K(t - \tau) = K(t - \tau)$ , 并且  $K(t - \tau)$  的各元有界,则  $K(t - \tau)$  的拉氏变换为

$$H(s) = \int_0^{\infty} K(t) e^{-st} dt \quad (2.2-13)$$

下面分别讨论连续和离散的正性系统。

#### (一) 连续线性定常正性系统

设线性定常系统的方程为

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (2.2-2)$$

$$V = CX + Ju \quad (2.2-3)$$

式中  $X$  为  $n$  维状态向量,  $u$  和  $V$  分别为  $m$  维输入向量和  $m$  维输出向量。 $A, B, C$ , 和  $J$  为具有相应维数的矩阵。假定矩阵对  $[A, B]$  为完全可控, 矩阵对  $[A, C]$  为完全可测。系统的传递函数矩阵为

$$H(s) = J + C[sI - A]^{-1} B \quad (2.2-14)$$

下面引入正性系统的定义:如果由式(2.2-2)和式(2.2-3)所描述的系统,  $u(t)$  是输入,  $V(t)$  是输出, 系统的脉冲响应为  $K(t - \tau)$ , 若

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} u^T V dt = \int_0^{t_1} V^T u dt = \int_0^{t_1} u^T(t) \left[ \int_0^{t_1} K(t - \tau) u(\tau) d\tau \right] dt \geq -\eta_0^2, \quad \eta_0^2 < \infty$$

成立,则该系统称为正性系统。

正性系统定理:

如果由式(2.2-2)和式(2.2-3)所描述的系统为正性系统,则式(2.2-14)所示的传递函数矩阵为正实传递函数矩阵。可用反证法来证明这一定理,关于定理的证明可参看文献[2]。

对于由方程式(2.2-2)和式(2.2-3)所描述的系统,下列几种关于正性的提法是互相等价的:

(1) 方程式(2.2-2)和式(2.2-3)所描述的系统是正性的。

(2) 由式(2.2-4)所描述的传递函数矩阵是正实传递函数矩阵。

(3) 卡尔曼-雅库鲍维奇-波波夫正实引理:若存在一个正定对称矩阵  $P$ , 以及矩阵  $K$  和  $L$ , 使得

$$PA + A^T P = -LL^T \quad (2.2-5)$$

$$B^T P + K^T L^T = C \quad (2.2-6)$$

$$K^T K = J + J^T \quad (2.2-7)$$

还有一些其他相互等价的提法,在此不多讲了,可参看文献[1]。

## (二) 离散线性定常正性系统

设离散线性定常系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (2.2-15)$$

$$V(k) = CX(k) + Ju(k) \quad (2.2-16)$$

式中  $X(k)$  为  $n$  维状态向量;  $u(k)$  为  $m$  维输入向量;  $V(k)$  为  $m$  维输出向量。 $A, B, C$  和  $J$  为具有相应维数的矩阵。矩阵对  $[A, B]$  为完全可控。矩阵对  $[A, C]$  为完全可测。

离散传递矩阵为

$$H[Z] = J + C[ZI - A]^{-1}B \quad (2.2-17)$$

$H[Z]$  是一个实有理函数的  $m \times m$  矩阵。

$H[Z]$  为正实矩阵的条件为:

- (1)  $H[Z]$  的所有元素在单位圆外是解析的,也就是说在  $|Z| > 1$  时,这些元素没有极点。
- (2) 在  $|Z| = 1$  的单位圆上,  $H[Z]$  的任何元素可能有的极点是简单极点(无重极点),相应的留数矩阵是一个半正定赫米特矩阵。

- (3) 除了  $H[Z]$  在  $|Z| = |e^{j\omega}| = 1$  的单位圆上的极点以外的所有  $\omega$  值,矩阵

$$H[Z] + H^T(Z) = H(e^{j\omega}) + H^T(e^{-j\omega})$$

是半正定赫米特矩阵( $Z$  是  $Z$  的共轭)。

$H[Z]$  为严格正实矩阵的条件为:

- (1) 在  $|Z| \geq 1$  时,  $H[Z]$  的所有元素没有极点,
- (2) 对所有  $\omega$ (即在  $|Z| = |e^{j\omega}| = 1$  单位圆上的所有  $Z$ ), 矩阵

$$H[Z] + H^T(Z) = H(e^{j\omega}) + H^T(e^{-j\omega})$$

是一个正定赫米特矩阵。

离散正性系统的定义:

如果由式(2.2-15) 和式(2.2-16) 所描述的离散系统的脉冲过渡函数为  $F(k, l)$ , 区间  $(k_0, k_N)$  有界, 输入为  $u(k)$ , 输出为

$$V(k) = \sum_{l=k_0}^k F(k, l) u(l)$$

如果

$$\sum_{k=k_0}^{k_N} u^T(k) \left[ \sum_{l=k_0}^k F(k, l) u(l) \right] \geq 0, \quad \text{对所有 } k_N > k_0$$

则系统为正性的。

对于离散系统,与连续系统一样,也有几种关于正性的提法是互相等价的:

- (1) 由方程式(2.2-15) 和式(2.2-16) 所描述的系统是正性的。
- (2) 由式(2.2-17) 所描述的离散传递函数是正实传递函数。
- (3) 离散正实引理: 存在一个正定对称矩阵  $P$  及矩阵  $K$  和  $L$ , 使得

$$A^T P A - P = -LL^T \quad (2.2-18)$$

$$B^T P A + K^T L^T = C \quad (2.2-19)$$

$$K^T K = J + J^T - B^T P B \quad (2.2-20)$$

还有一些其他的等价提法,在此不一一列举了,可参看文献[1]。

## § 2.3 超稳定性理论

波波夫在 60 年代初提出超稳定性理论,它也是研究自适应控制系统的一种重要理论基础。现分连续系统和离散系统二种情况来讨论。

### 一、连续系统的超稳定性定理

自适应系统常可化成一个非线性反馈系统的形式,其中前馈回路是线性的,反馈回路是非线性的。超稳定性问题是作为绝对稳定性问题的一个扩充,波波夫所研究的一类非线性系统是有线性

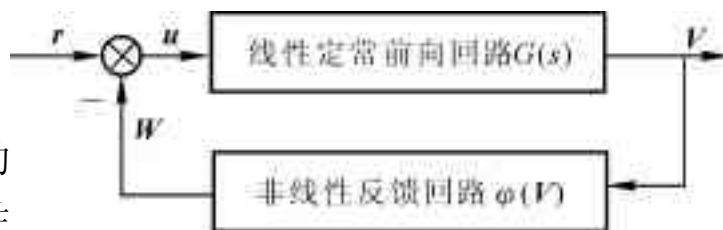


图 2.3-1 非线性反馈系统

定常前向回路  $G(s)$  和非线性反馈回路  $\phi(V)$  所组成的,如图 2.3-1 所示。

反馈非线性元件的输出为

$$W = \phi(V) \quad (2.3-1)$$

非线性元件的输入输出特性规定如下

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \phi(V)V = WV \leq kV \\ \phi(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3-2)$$

非线性元件的特性可用图 2.3-2 表示。

函数  $\phi(V)$  的图形被限制在第一和第三象限中,处于由横轴和斜率为  $k$  的直线所组成的扇形区域内。当  $k = \infty$  时,扇形区域扩大到整个第一象限和第三象限。要求反馈方块在每一瞬间的输入和输出的乘积都大于零。把这一要求推广到如图 2.3-3 所示的多输入多输出系统,就要求每一非线性反馈元件的输入  $V_i$  与对应的输出  $W_i$  的乘积都大于零,即

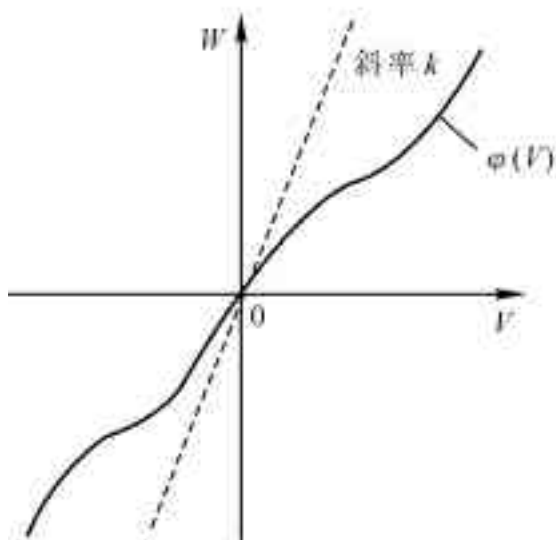


图 2.3-2 非线性特性

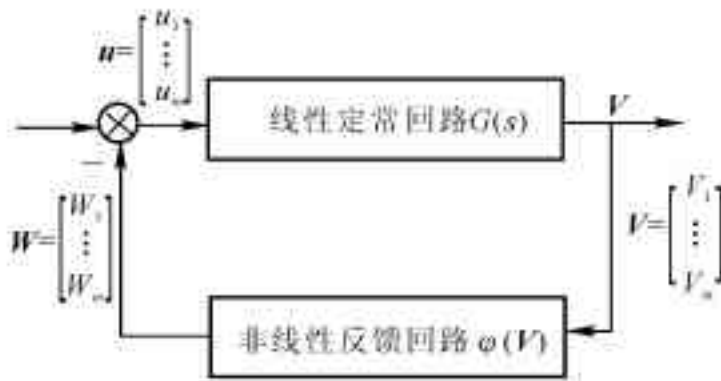


图 2.3-3 多变量非线性反馈系统

$$W_i V_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.3-3)$$

或

$$W^T V \geq 0 \quad (2.3-4)$$

现在要问,在图 2.3-3 所示的非线性反馈条件下,前向方块  $G(s)$  满足什么条件,才能使闭环系统全局稳定或全局渐近稳定?如果  $G(s)$  为正实或严格正实,则闭环系统全局稳定或全局渐近稳定,这就是波波夫的绝对稳定性理论。

如果把非线性特性类型放宽,扩大到并非每一瞬间都要求输入输出的乘积都大于零,而允许在一些充分小的时间间隔中式(2.3-2),式(2.3-3)或式(2.3-4)不满足,而在大部分时间里这二式满足,可用下列积分不等式来表示

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} W^T(\tau) V(\tau) d\tau \geq 0, \quad t_1 \geq t_0 \quad (2.3-5)$$

式(2.3-5)称为波波夫积分不等式,该式还可写成下列形式

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} W^T(\tau) V(\tau) d\tau \geq -\epsilon^2 \quad (2.3-6)$$

式中  $\epsilon^2$  为一常数。上式表示输入输出必须在平均意义上大于一个负常数,以此来代替这个积分在每一瞬间都大于零。对于满足波波夫积分不等式的非线性反馈方块所组成的非线性系统,  $G(s)$  在什么条件下能使闭环系统稳定,波波夫对上述情况下的稳定性问题定义的超稳定性问题。因为波波夫积分不等式的条件比式(2.3-2)或式(2.3-4)要宽,所以在超稳定性问题中包含了绝对稳定性问题。

超稳定性的定义:

在一个闭环系统中,其前向方块为  $G(s)$ ,反馈方块满足波波夫积分不等式。当传递函数矩阵  $G(s)$  为正实时,这个闭环系统为超稳定系统。当  $G(s)$  为严格正实时,这个闭环系统为渐近超稳定性系统。下面来证明这一结论。

定理: 当  $G(s)$  为正实,  $\Phi(V)$  的特性满足波波夫积分不等式,则闭环系统为超稳定。

设闭环系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX + Bu = AX - BW \quad (2.3-7)$$

$$Y = CX + Ju = CX - JW \quad (2.3-8)$$

$$W = \Phi[Y, t] \quad (2.3-9)$$

式中  $X$  是前向方块的  $n$  维状态向量;  $u$  是  $m$  维控制向量;  $Y$  是  $m$  维输出向量;  $W$  是反馈方块  $m$  维输出向量。系统如图 2.3-4 所示。

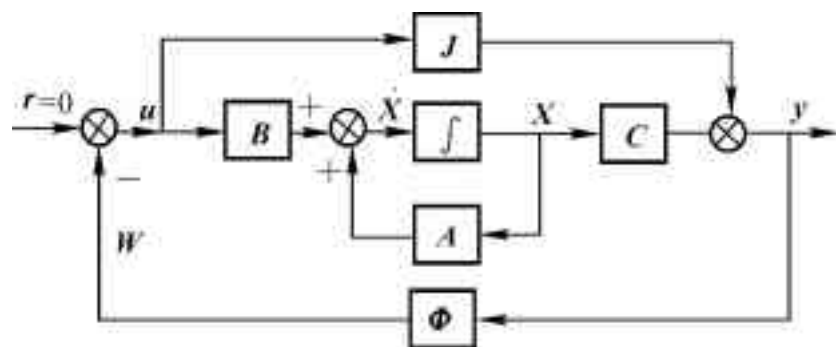


图 2.3-4 系统方块图

假定矩阵对  $[A, B]$  完全可控,矩阵对  $[A, C]$  完全可测。系统的传递函数矩阵为

$$G(s) = J + C[sI - A]^{-1} B \quad (2.3-10)$$

$W = \Phi(Y, t)$  是反馈方块的非线性特性,它满足波波夫积分不等式

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} W^T Y dt \geq 0, \quad t_1 > 0 \quad (2.3-11)$$

或

$$-\int_0^{t_1} W^T Y dt = \int_0^{t_1} u^T Y dt \leq 0 \quad (2.3-12)$$

应用李雅普诺夫稳定性理论来讨论系统的超稳定性和渐近超稳定性问题。可用反证法来证明,如果一个闭环系统,其前向方块的传递函数矩阵  $G(s)$  是正实的,则对所有满足波波夫积分不等式的反馈方块,都能使系统全局稳定,即系统一定是超稳定的。

若系统的传递函数矩阵是正实的,则有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} G(s) &= \operatorname{Re}[J + C(sI - A)^{-1} B] \geq 0 \\ \operatorname{Re} s &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

根据正实引理必存在对称正定矩阵  $P$  及实矩阵  $q, R$  使下列三个等式成立

$$PA + A^T P = -qq^T \quad (2.3-14)$$

$$PB - C^T = qR \quad (2.3-15)$$

$$J + J^T = R^T R \quad (2.3-16)$$

选李雅普诺夫函数为

$$V = X^T P X \quad (2.3-17)$$

求  $V$  对时间  $t$  的导数,并将式(2.3-7)代入得

$$\dot{V} = X^T P \dot{X} + \dot{X}^T P X = X^T (PA + A^T P) X + 2u^T B^T P X \quad (2.3-18)$$

再将式(2.3-8)、式(2.3-14)、式(2.3-15)及式(2.3-16)代入上式得

$$\dot{V} = -[q^T X - u^T R^T]^2 + 2u^T Y \quad (2.3-19)$$

将上式从  $t_0$  到  $t_1$  积分得

$$\begin{aligned} X^T(t_1) P X(t_1) - X^T(t_0) P X(t_0) &= V(t_1) - V(t_0) = \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} (q^T X - u^T R^T)^2 dt + 2\int_{t_0}^{t_1} u^T Y dt \leq 0 \end{aligned} \quad (2.3-20)$$

由于  $t_1 > t_0$ , 且为任意值,那末由式(2.3-20)可看出  $V$  是时间的递减函数,则  $V$  为负定,因此系统是超稳定的。这就证明了如果前向回路传递函数矩阵  $G(s)$  是正实的,反馈回路满足波波夫积分不等式,则闭环系统是超稳定的。同理也可证明,如果前向回路传递函数矩阵  $G(s)$  是严格正实的,则系统是渐近超稳定的。

## 二、离散系统的超稳定性定理

可很容易地把连续系统的超稳定性定理推广到离散系统。设离散系统状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \quad (2.3-21)$$

$$Y(k) = CX(k) + Ju(k) \quad (2.3-22)$$

式中矩阵对  $[A, B]$  是完全可控的,矩阵对  $[A, C]$  是完全可测的。离散反馈系统如图(2.3-5)所示。

前向回路的传递函数为

$$H(Z) = J + C[ZI - A]^{-1} B \quad (2.3-23)$$



图 2.3-5 离散非线性反馈系统



反馈回路的特性为

$$W(k) = \Phi(Y, k, l) \quad k \geq l \quad (2.3-24)$$

波波夫积分不等式为

$$\eta(k_0, k_N) = \sum_{k=k_0}^{k_N} W^T(k) Y(k) \geq -\frac{1}{\rho} \quad (2.3-25)$$

$$k_N \geq k_0$$

式中  $\frac{1}{\rho}$  是一个有限正常数。

如果前向回路传递函数矩阵  $H(Z)$  是(严格)正实的,反馈回路满足波波夫积分不等式,则闭环系统是(渐近)超稳定的。

## § 2.4 系统参数估计方法

在自校正控制中要在线估计系统的参数。有很多种参数估计方法,在自校正控制中用得比较多的为最小二乘法、广义最小二乘法和随机逼近法等。下面分别介绍这些方法。

### 一、最小二乘法

现在讨论以单输入-单输出系统的差分方程为模型的系统参数辨识问题。差分方程模型的辨识问题包括阶的确定和参数估计两个方面。在这里假定模型的结构是已知的,即在差分方程的阶已知的情况下估计系统的参数。参数估计可分为离线估计和在线估计两种情况。所谓离线估计,就是把系统的输入和输出数据集中起来同时处理。在线估计是逐批处理观测到的输入和输出数据,即在参数估计过程中,按递推计算方法不断地给出参数的估值。下面先讨论参数的离线估计。图 2.4-1 表示单输入-单输出线性系统方块图。

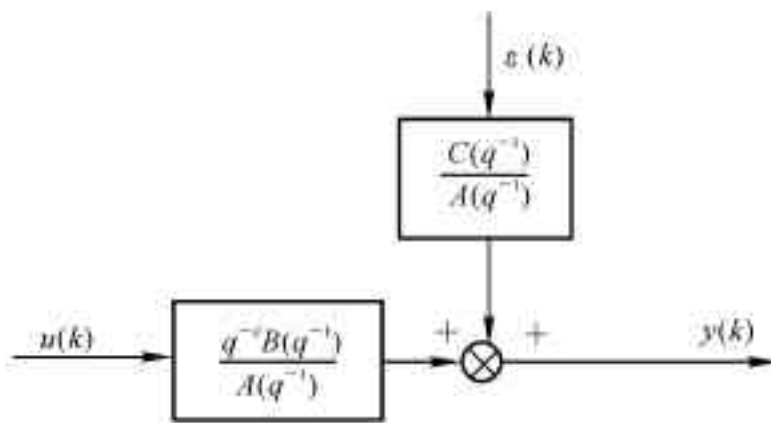


图 2.4-1 单输入-单输出线性系统

设图中所示系统为线性定常系统,可用下列差分方程来表示

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})\varepsilon(k) \quad (2.4-1)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{n_a}q^{-n_a} \quad (2.4-2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_{n_b}q^{-n_b} \quad (2.4-3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \cdots + c_{n_c}q^{-n_c} \quad (2.4-4)$$

$u(k)$  为系统的输入;  $y(k)$  为输出;  $\varepsilon(k)$  是均值为零的白噪声序列;  $q^{-1}$  表示单位延迟,例如  $q^{-1}y(k) = y(k-1)$ ,  $q^{-2}y(k) = y(k-2)$ ;  $d$  表示控制对输出的传输延迟。要求估计  $a_1, \cdots, a_{n_a}$ ,  $b_0, \cdots, b_{n_b}$ ,  $c_1, \cdots, c_{n_c}$  等系数。设

$$\xi(k) = C(q^{-1})\varepsilon(k) \quad (2.4-5)$$

当  $C(q^{-1}) = 1$  时,  $\xi(k)$  为白噪声序列。当  $C(q^{-1}) \neq 1$  时,  $\xi(k)$  为相关序列(有色噪声)。

现分别测出  $n_a + N$  对输出值和输入值:  $y(1), y(2), \cdots, y(n_a + N)$  及  $u(1), u(2), \cdots,$

$u(n_a + N)$ 。则可写出下列  $N$  个方程

[illegible]

将上述  $N$  个方程写成下列的向量—矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y(n_a + 1) \\ y(n_a + 2) \\ \dots \\ y(n_a + N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n_a) & -y(n_a - 1) & \dots & -y(1) \\ -y(n_a + 1) & -y(n_a) & \dots & -y(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(n_a + N - 1) & -y(n_a + N - 2) & \dots & -y(N) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u(n_a + 1 - d) & u(n_a + 1 - d - 1) & \dots & u(n_a + 1 - d - n_b) \\ u(n_a + 2 - d) & u(n_a + 2 - d - 1) & \dots & u(n_a + 2 - d - n_b) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(n_a + N - d) & u(n_a + N - d - 1) & \dots & (n_a + N - d - n_b) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{n_a} \\ b_0 \\ \dots \\ b_{n_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(n_a + 1) \\ \xi(n_a + 2) \\ \dots \\ \xi(n_a + N) \end{bmatrix} \quad (2.4-6)$$

设

$$Y = \begin{bmatrix} y(n_a + 1) \\ y(n_a + 2) \\ \dots \\ y(n_a + N) \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ \dots \\ a_{n_a} \\ b \\ \dots \\ b_{b_b} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi(n_a + 1) \\ \xi(n_a + 2) \\ \dots \\ \xi(n_a + N) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n_a) & -y(n_a - 1) & \dots & -y(1) \\ -y(n_a - 1) & -y(n_a) & \dots & -y(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(n_a + N - 1) & -y(n_a + N - 2) & \dots & -y(N) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(n_a + 1 - d) & u(n_a + 1 - d - 1) & u(n_a + 1 - d - n_b) \\ u(n_a + 2 - d) & u(n_a + 2 - d - 1) & u(n_a + 2 - d - n_b) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u(n_a + N - d) & u(n_a + N - d - 1) & u(n_a + N - d - n_b) \end{bmatrix}$$

则式(2.4-6)可写成下列向量—矩阵方程

$$Y = \Phi \theta + \xi \quad (2.4-7)$$

式中  $\theta$  为  $n + m + 1$  维参数向量,  $Y$  为  $N$  个输出值组成的向量,  $\Phi$  为  $N \times (n_a + n_b + 1)$  维矩阵,  $\xi$  为  $N$  维噪声向量。式(2.4-7)是一个含有  $n_a + n_b + 1$  个未知参数,由  $N$  个方程组成的联立方程组。如果  $N < (n_a + n_b + 1)$ , 方程数小于未知数数目,则方程组是不定的,不能唯一地确定参数向量。如果  $N = (n_a + n_b + 1)$ , 方程数正好与未知数数目相等,当噪声  $\xi = 0$  时,就能按下式准确地解出

$$\theta = \Phi^{-1} Y \quad (2.4-8)$$

如果噪声不为零,则

$$\theta = \Phi^{-1} Y - \Phi^{-1} \xi \quad (2.4-9)$$

从上式可看出噪声  $\xi$  对参数估计有影响,为了尽量减小噪声  $\xi$  对  $\theta$  估值的影响,应取  $N \geq (n_a + n_b + 1)$ , 即方程数大于未知数数目。在这种情况下,不能用解方程的办法来求  $\theta$ ,而要采用数理统计的办法,这样可减小噪声对  $\theta$  估值的影响。在给定输出向量  $Y$  和矩阵  $\Phi$  的条件下,求系统参数的估值,这就是系统参数估计问题。可用最小二乘法或其他方法来求  $\theta$  的估值。下面先讨论最小二乘法估计。

设  $\hat{\theta}$  表示  $\theta$  的最优估计,  $\hat{Y}$  表示  $Y$  的最优估值,则有

$$\hat{Y} = \Phi \hat{\theta} \quad (2.4-10)$$

式中

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} Y(n_a + 1) \\ Y(n_a + 2) \\ \cdots \\ Y(n_a + N) \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \cdots \\ \hat{b}_{n_a} \\ \hat{b}_0 \\ \cdots \\ \hat{b}_{n_b} \end{bmatrix} \quad (2.4-11)$$

写出式(2.4-10)的某一行

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) = & -\hat{a}_1 y(k-1) - \hat{a}_2 y(k-2) - \cdots - \hat{a}_{n_a} y(k-n_a) + \\ & \hat{b}_0 u(k-d) + \hat{b}_1 u(k-d-1) + \cdots + \hat{b}_{n_b} u(k-d-n_b) \\ & (k = n_a + 1, n_a + 2, \cdots, n_a + N) \end{aligned} \quad (2.4-12)$$

设  $e(k)$  表示  $y(k)$  与  $\hat{y}(k)$  之差

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (2.4-13)$$

$$\begin{aligned} y(k) = \hat{y}(k) + e(k) = & -\hat{a}_1 y(k-1) - \hat{a}_2 y(k-2) - \cdots - \hat{a}_{n_a} y(k-n_a) + \\ & \hat{b}_0 u(k-d) + \hat{b}_1 u(k-d-1) + \cdots + \hat{b}_{n_b} u(k-d-n_b) + e(k) \end{aligned} \quad (2.4-14)$$

把  $k = n_a + 1, n_a + 2, \cdots, n_a + N$  分别代入式(2.4-13),可得残差  $e(n_a + 1), e(n_a + 2), \cdots, e(n_a + N), \cdots, e(n_a + N)$ ,把这些残差写成向量形式

$$e = \begin{bmatrix} e(n_a + 1) \\ e(n_a + 2) \\ \dots \\ e(n_a + N) \end{bmatrix} = Y - \Phi \theta \quad (2.4-15)$$

最小二乘法估计要求残差的平方和为最小,即按照指标函数

$$J = e^T e = (Y - \Phi \theta)^T (Y - \Phi \theta) \quad (2.4-16)$$

最小来确定  $\theta$ 。令  $\frac{J}{\theta} = 0$ , 可求出  $\theta$ 。

$$\frac{J}{\theta} = -2\Phi^T (Y - \Phi \theta) = 0 \quad (2.4-17)$$

$$\Phi^T Y - \Phi^T \Phi \theta = 0$$

或

$$\Phi^T \Phi \theta = \Phi^T Y$$

在上式等号两边左乘  $[\Phi^T \Phi]^{-1}$ , 可得  $\theta$  的最小二乘估计

$$\theta = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y \quad (2.4-18)$$

$J$  为极小值的充分条件是

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} = \Phi^T \Phi > 0 \quad (2.4-19)$$

即  $[\Phi^T \Phi]$  为正定矩阵。当矩阵  $[\Phi^T \Phi]$  有逆时, 式(2.4-18)才有解。一般说来, 如果  $u(k)$  是随机序列, 矩阵  $[\Phi^T \Phi]$  是非奇异的, 即  $[\Phi^T \Phi]^{-1}$  存在, 式(2.4-18)有解。当  $u(k)$  为有色随机信号时, 如果相关函数  $R_{uu}(0) > R_{uu}(1) > \dots > R_{uu}(n)$ , ( $n \rightarrow \infty$ ), 或者  $u(k)$  为白噪声序列, 则  $[\Phi^T \Phi]$  为正定矩阵,  $\theta$  为最优估计。

下面讨论另一个重要的问题, 即估计的一致性和无偏性。先讨论估值  $\theta$  是否无偏的问题。因输出  $Y$  是随机的, 因此  $\theta$  是随机的, 但要注意到  $\theta$  不是随机的。如果

$$E[\theta] = E[\theta] = \theta \quad (2.4-20)$$

则称  $\theta$  是  $\theta$  的无偏估计。

如果  $\xi(k)$  是不相关随机序列, 且其均值为零(实际上  $\xi(k)$  往往是相关随机序列, 对这种情况在后面专门讨论), 则  $y(k)$  只与  $\xi(k)$  及其以前的  $\xi(k-1), \xi(k-2), \dots$  等有关, 而与  $\xi(k+1)$  及其以后的  $\xi(k+2), \dots$  等无关。设序列  $u(k)$  与  $\xi(k)$  不相关。从下列关系式可看出  $\Phi$  与  $\xi$  不相关。

$$\Phi^T \xi = \begin{bmatrix} -y(n_a) & -y(n_a + 1) & \dots & -y(n_a + N - 1) \\ -y(n_a - 1) & -y(n_a) & \dots & -y(n_a + N - 2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(1) & -y(2) & \dots & -y(N) \\ u(n_a + 1 - d) & u(n_a + 2 - d) & \dots & u(n_a + N - d) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(n_a + 1 - d - n_b) & u(n_a + 2 - d - n_b) & \dots & u(n_a + N - d - n_b) \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \xi(n_a + 1) \\ \xi(n_a + 2) \\ \dots \\ \xi(n_a + N) \end{bmatrix} \quad (2.4-21)$$

由于  $\Phi$  与  $\xi$  不相关, 式(2.4-18) 给出的估值  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计。把式(2.4-7) 代入式(2.4-18) 得

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T [\Phi \theta + \xi] = \theta + [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \xi \quad (2.4-22)$$

对上式等号两边取数学期望得

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}] &= E[\theta] + E\{[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \xi\} \\ E[\hat{\theta}] &= \theta + E\{[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T\} E[\xi] = \theta \end{aligned} \quad (2.4-23)$$

上式表明  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计。

下面来求估计误差的方差阵。由式(2.4-22) 得估计误差为

$$\theta - \hat{\theta} = -[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \xi \quad (2.4-24)$$

前面已假定  $\xi(k)$  是不相关随机序列, 可设

$$E[\xi \xi^T] = \sigma^2 I_N \quad (I_N \text{ 为 } N \times N \text{ 单位阵})$$

则估计误差的方差阵为

$$\text{Var } \theta = E[\theta \theta^T] = E\{[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T [\xi \xi^T] \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1}\}$$

对于  $\Phi$  与  $\xi$  不相关的这一特殊情况

$$\begin{aligned} \text{Var } \theta &= [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T E[\xi \xi^T] \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} = \\ &= [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \sigma^2 I_N \Phi [\Phi^T \Phi]^{-1} = \sigma^2 [\Phi^T \Phi]^{-1} \end{aligned} \quad (2.4-25)$$

考虑到  $\Phi^T \Phi$  的具体计算公式, 可把式(2.4-25) 写成

$$\text{Var } \theta = \frac{\sigma^2}{N} \left[ \frac{1}{N} \Phi^T \Phi \right]^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \begin{bmatrix} R_y & -R_{uy} \\ -R_{uy}^T & R_u \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} R^{-1}$$

$R$  为定值, 当  $N$  增大时, 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var } \theta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{N} R^{-1} = 0 \quad (2.4-26)$$

上式表明, 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\theta}$  以概率 1 趋近于  $\theta$ 。因此当  $\xi(k)$  为不相关随机序列时, 最小二乘估计具有一致性和无偏性。如果系统的参数估值有这种特性, 就说系统具有可辨识性。

在上面假定  $\xi(k)$  是零均值的不相关随机序列, 并且要求  $\{\xi(k)\}$  与  $\{u(k)\}$  无关, 则  $\xi$  与  $\Phi$  无关。这是最小二乘估计为无偏估计的充分条件, 但不是必要条件。必要条件为

$$E\{[\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T \xi\} = 0 \quad (2.4-27)$$

在实际问题中,  $\xi(k)$  可能是相关序列, 因此最小二乘估计可能是有偏估计, 下面用简单例子来说明这一问题。设系统的差分方程为

$$y(k+1) = -ay(k) + bu(k) + \varepsilon(k) + a\varepsilon(k-1)$$

或

$$y(k+1) = -ay(k) + bu(k) + \xi(k+1)$$

式中

$$\xi(k+1) = \varepsilon(k) + a\varepsilon(k-1)$$

$\{\varepsilon(k)\}$  是均值为零的白噪声序列。 $\{\xi(k)\}$  为相关随机序列, 其相关函数为

$$R_{\xi\xi}(1) = E\{\xi(k+1)\xi(k)\} = E\{[\varepsilon(k) + a\varepsilon(k-1)][\varepsilon(k-1) + a\varepsilon(k-2)]\} = aE\{\varepsilon^2(k)\} = a\sigma^2(k)$$

在这个例子中,  $y(k)$  与  $\xi(k+1)$  是相关的。

$$E[y(k)\xi(k+1)] = aE[\varepsilon^2(k)] = a\sigma^2(k)$$

由于  $y(k)$  与  $\xi(k+1)$  相关,从式(2.4-21)可看出,  $\Phi$  与  $\xi$  相关,在这种情况下最小二乘估计是有偏估计。下面看看  $a$  和  $b$  的最小二乘估计是否为有偏估计。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \dots \\ y(n+N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -y(n) & u(n) \\ -y(n+1) & u(n+1) \\ \dots & \dots \\ -y(n+N-1) & u(n+N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n+1) & \dots & -y(n+N-1) \\ u(n) & u(n+1) & \dots & u(n+N-1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} -y(n) & u(n) \\ -y(n+1) & u(n+1) \\ \dots & \dots \\ -y(n+N-1) & u(n+N-1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n+1) & \dots & -y(n+N-1) \\ u(n) & u(n+1) & \dots & u(n+N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \dots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} y^2(n+i) & -\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)u(n+i) \\ -\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)u(n+i) & \sum_{i=0}^{N-1} u^2(n+i) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)y(n+i+1) \\ \sum_{i=0}^{N-1} u(n+i)y(n+i+1) \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y^2(n+i) & -\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)y(n+i+1) \\ -\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)u(n+i) & \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u^2(n+i) \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} y(n+i)y(n+i+1) \\ \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u(n+i)y(n+i+1) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{概率}} \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & -R_{uy}(0) \\ -R_{uy}(0) & R_{uu}(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -R_{yy}(1) \\ R_{uy}(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

或

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{概率}} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & -R_{uy}(0) \\ -R_{uy}(0) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R_{yy}(1) \\ R_{uy}(1) \end{bmatrix} \quad (2.4-28)$$

式中

$$\Delta = R_{yy}(0)R_{uu}(0) - R_{uy}^2(0)$$

经过推导可得

$$R_{yy}(1) = E[y(k)y(k+1)] = -aR_{yy}(0) + bR_{uy}(0) + R_{\xi\xi}(1)$$

$$R_{\xi\xi}(1) = E[\xi(k)\xi(k+1)] = \sigma^2(k)$$

$$R_{uy}(1) = E[y(k+1)u(k)] = -aR_{uy}(0) + bR_{uu}(0)$$

将上述各式代入式(2.4-28)得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{概率}} \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uy}(0) \\ R_{uy}(0) & R_{yy}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aR_{yy}(0) - bR_{uy}(0) - R_{\xi\xi}(1) \\ -aR_{uy}(0) + bR_{uu}(0) \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{R_{yy}(0)R_{uu}(0) - R_{uy}^2(0)} \begin{bmatrix} a[R_{yy}(0)R_{uu}(0) - R_{uy}^2(0)] - R_{uu}(0)R_{\xi\xi}(1) \\ b[R_{yy}(0)R_{uu}(0) - R_{uy}^2(0)] - R_{uy}(0)R_{\xi\xi}(1) \end{bmatrix} \\ & \hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{概率}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(1)R_{uu}(0) \\ R_{\xi\xi}(1)R_{uy}(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从这一例子可看出,当  $\xi(k)$  为相关序列时,  $\hat{\theta}$  是有偏估计,只有  $\xi(k)$  不相关时,即  $R_{\xi\xi}(1) = 0$  时,  $\hat{\theta}$  才是无偏估计。在实际中,  $\xi(k)$  往往是相关序列,在这种情况下最小二乘估计不是无偏估计。当  $\xi(k)$  不大时,估计的偏值比较小,可用最小二乘法估计。为了克服  $\xi(k)$  为有色噪声时最小二乘法的有偏估计问题,可采用广义最小二乘法、随机逼近法、增广矩阵法和辅助变量法等方法。后面将要介绍其中的一些方法。下面先介绍在线估计的递推最小二乘法。

## 二、递推最小二乘法

上面讨论的最小二乘法是成批处理观测数据,这种估计方法称为离线估计。这种估计方法的优点是估计精度比较高,缺点是要求计算机的存贮量比较大。下面介绍递推最小二乘法,这种方法对计算机的存贮量要求不大,估计精度随着观测次数的增大而提高。

设已得的观测数据长度为  $N$ ,把式(2.4-7)中的  $Y$ ,  $\Phi$  和  $\xi$  分别用  $Y_N$ ,  $\Phi_N$  和  $\xi_N$  来表示,即

$$Y_N = \Phi_N \theta + \xi_N \quad (2.4-29)$$

用  $\hat{\theta}_N$  表示此时  $\theta$  的最小二乘估计,则

$$\hat{\theta}_N = [\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T Y_N \quad (2.4-30)$$

估计误差为

$$\theta_N = \theta - \hat{\theta}_N = -[\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} \Phi_N^T \xi_N \quad (2.4-31)$$

由式(2.4-25)可得估计误差  $\theta_N$  的方差阵为

$$\text{Var } \theta_N = \sigma^2 [\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} = \sigma^2 P_N \quad (2.4-32)$$

式中

$$P_N = [\Phi_N^T \Phi_N]^{-1} \quad (2.4-33)$$

于是

$$\theta_N = P_N \Phi_N^T Y_N \quad (2.4-34)$$

如果再获得一组新的观测值  $u(n_a + N + 1)$  和  $y(n_a + N + 1)$ , 则又增加一个方程

$$y_{N+1} = \Phi_{N+1}^T \theta + \xi_{N+1} \quad (2.4-35)$$

式中

$$\begin{aligned} y_{N+1} &= y(n_a + N + 1), \quad \xi_{N+1} = \xi(n_a + N + 1) \\ \Phi_{N+1}^T &= [-y(n_a + N), -y(n_a + N - 1), \dots, -y(n_a + 1), \\ &\quad u(n_a + N + 1 - d), \dots, u(n_a + N + 1 - d - n_b)] \end{aligned}$$

将式(2.4-29)和式(2.4-35)合并,并写成分块矩阵的形式,可得

$$\begin{bmatrix} Y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} \xi_N \\ \xi_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.4-36)$$

由上式给出新的参数估值

$$\begin{aligned} \theta_{N+1} &= \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = \\ &P_{N+1} \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_N \\ y_{N+1} \end{bmatrix} = P_{N+1} [\Phi_N^T Y_N + \Phi_{N+1}^T y_{N+1}] \end{aligned} \quad (2.4-37)$$

式中

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi_N \\ \Phi_{N+1}^T \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \\ &[\Phi_N^T \Phi_N + \Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1}]^{-1} = [P_N^{-1} + \Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1}]^{-1} \end{aligned} \quad (2.4-38)$$

应用矩阵求逆引理,可得  $P_{N+1}$  与  $P_N$  的递推关系式。下面先介绍矩阵求逆引理。

矩阵求逆引理:设  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $B$  和  $C$  为  $n \times m$  矩阵。设  $A$ ,  $[A + B C^T]$  和  $[I + C^T A^{-1} B]$  都是非奇异矩阵,则有矩阵恒等式

$$[A + B C^T]^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [I + C^T A^{-1} B]^{-1} C^T A^{-1} \quad (2.4-39)$$

证明: 用  $[A + B C^T]$  左乘上式等号两边得

$$\begin{aligned} \text{左边} &= [A + B C^T] [A + B C^T]^{-1} = I \\ \text{右边} &= [A + B C^T] [A^{-1} - A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1}] = \\ &I + B C^T A^{-1} - B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} - \\ &B C^T A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} = \\ &I + B C^T A^{-1} - B (I + C^T A^{-1} B) (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} = \\ &I + B C^T A^{-1} - B C^T A^{-1} = I \end{aligned}$$

因此

$$[A + B C^T]^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B [I + C^T A^{-1} B]^{-1} C^T A^{-1}$$

现在再来讨论式(2.4-38)。在式(2.4-39)中,设

$$A = P_N^{-1}, \quad B = \Phi_{N+1}, \quad C^T = \Phi_{N+1}^T$$

则

$$[P_N^{-1} + \Phi_{N+1}^T \Phi_{N+1}]^{-1} = P_N - P_N \Phi_{N+1} [I + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1}]^{-1} \Phi_{N+1}^T P_N$$

于是得到  $P_{N+1}$  与  $P_N$  的递推关系式



$$P_{N+1} = P_N - P_N \Phi_{N+1} [I + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1}]^{-1} \Phi_{N+1} P_N \quad (2.4-40)$$

由于  $\Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1}$  为标量, 因此

$$P_{N+1} = P_N - P_N \Phi_{N+1} (1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})^{-1} \Phi_{N+1} P_N \quad (2.4-41)$$

应用矩阵求逆引理之后, 我们把求  $(n+m+1) \times (n+m+1)$  矩阵  $[P_N^{-1} + \Phi_{N+1} \Phi_{N+1}^T]$  的逆阵转变为求标量  $(1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})$  的倒数, 则可大大减小计算量, 同时又得到  $P_{N+1}$  与  $P_N$  的简便递推关系式。

由式(2.4-38) 和式(2.4-30) 得

$$\begin{aligned} \theta_{N+1} &= P_{N+1} [\Phi_N^T Y_N + \Phi_{N+1} y_{N+1}] = \\ &P_{N+1} [(\Phi_N^T \Phi_N)(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y_N + \Phi_{N+1} y_{N+1}] = \\ &P_{N+1} [P_N^{-1} \theta_N + \Phi_{N+1} y_{N+1}] \end{aligned}$$

把式(2.4-41) 代入上式, 经过推导可得

$$\theta_{N+1} = \theta_N + P_N \Phi_{N+1} (1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})^{-1} [y_{N+1} - \Phi_{N+1}^T \theta_N]$$

令

$$K_{N+1} = P_N \Phi_{N+1} (1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})^{-1} \quad (2.4-42)$$

则可得  $\theta_{N+1}$  与  $\theta_N$  的递推关系式

$$\theta_{N+1} = \theta_N + K_{N+1} (y_{N+1} - \Phi_{N+1}^T \theta_N) \quad (2.4-43)$$

把式(2.4-41)、式(2.4-42) 和式(2.4-43) 三式集合在一起, 得到一组递推最小二乘法的计算公式

$$\theta_{N+1} = \theta_N + K_{N+1} (y_{N+1} - \Phi_{N+1}^T \theta_N) \quad (2.4-43)$$

$$K_{N+1} = P_N \Phi_{N+1} (1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})^{-1} \quad (2.4-42)$$

$$P_{N+1} = P_N - P_N \Phi_{N+1} (1 + \Phi_{N+1}^T P_N \Phi_{N+1})^{-1} \Phi_{N+1}^T P_N \quad (2.4-41)$$

上述方程组也可写成下列形式

$$\theta(k+1) = \theta(k) + K(k+1) [y(k+1) - \Phi^T(k+1) \theta(k)] \quad (2.4-44)$$

$$K(k+1) = P(k) \Phi(k+1) [1 + \Phi^T(k+1) P(k) \Phi(k+1)]^{-1} \quad (2.4-45)$$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= P(k) - P(k) \Phi(k+1) [1 + \Phi^T(k+1) P(k) \Phi(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times \Phi^T(k+1) P(k) \end{aligned} \quad (2.4-46)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi^T(k) &= [-y(k-1), -y(k-2), \dots, -y(k-n_a), \\ &\quad u(k-d), \dots, u(k-d-n_b)] \end{aligned}$$

为了进行递推计算, 需给出  $K(k)$  和  $P(k)$  的初值  $K(0)$  和  $P(0)$ 。

### 三、增广矩阵法

如前所述, 单输入-单输出线性定常系统的差分方程为

$$A(q^{-1}) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (2.4-1)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (2.4-2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (2.4-3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c} \quad (2.4-4)$$

$\varepsilon(k)$  为白噪声序列, 当  $C(q^{-1}) \neq 1$  时,  $\xi(k)$  为有色噪声序列。为了克服估计的有偏性, 也为了估

计参数  $a, \dots$ , 和  $a_c$ , 提出增广矩阵法。

先扩充被估参数的维数, 再用递推最小二乘法来估计系统和噪声的参数。设

$$\theta^T = [a \ a \ \cdots \ a_{n_a} \ b_0 \ b \ \cdots \ b_{n_b} \ c_1 \ c \ \cdots \ c_{n_c}] \quad (2.4-47)$$

$$\Phi^T(k) = [-y(k-1) \ \cdots \ -y(k-n_a) \ u(k-d) \ \cdots \ u(k-d-n_b) \\ \varepsilon(k-1) \ \cdots \ \varepsilon(k-n_c)] \quad (2.4-48)$$

$$y(k) = \Phi^T(k) \theta + \varepsilon(k) \quad (2.4-49)$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \Phi^T(k) \theta \quad (2.4-50)$$

由于  $\varepsilon(k)$  是未知的, 为了克服这一困难, 可用  $\Phi(k)$  代替  $\Phi(k)$ , 其中  $\Phi(k)$  定义为

$$\Phi^T(k) = [-y(k-1) \ \cdots \ -y(k-n_a) \ u(k-d) \ \cdots \ u(k-d-n_b) \\ \hat{\varepsilon}(k-1) \ \cdots \ \hat{\varepsilon}(k-n_c)] \quad (2.4-51)$$

式中

$$\hat{\varepsilon}(k) = y(k) - \Phi^T(k) \hat{\theta}(k-1) \quad (2.4-52)$$

按递推最小二乘法, 给出增广矩阵法递推公式

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K(k+1)[y(k+1) - \Phi^T(k+1)\hat{\theta}(k)] \quad (2.4-53)$$

$$K(k+1) = P(k)\Phi(k+1)[1 + \Phi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)]^{-1} \quad (2.4-54)$$

$$P(k+1) = P(k) - P(k)\Phi(k+1)[1 + \Phi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)]^{-1} \times \\ \Phi^T(k+1)P(k) \quad (2.4-55)$$

#### 四、随机逼近法

设系统差分方程为式(2.4-1),  $C(q^{-1}) \neq 1$ ,  $\xi(k)$  为有色噪声。对于这种情况也可用比较简便的随机逼近法。先对系统方程作适当变换, 令

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1}) + [C(q^{-1}) - A(q^{-1})] = A(q^{-1}) + q^{-1}G(q^{-1}) \quad (2.4-56)$$

式中

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{s-1} q^{-(s-1)} \quad (2.4-57)$$

$$s = \max(n_a, n_c)$$

$$g_0 = c_1 - a_1, \quad g_1 = c_2 - a_2, \quad \cdots \quad (2.4-58)$$

由式(2.4-56)得

$$A(q^{-1}) = C(q^{-1}) - q^{-1}G(q^{-1})$$

将上式代入式(2.4-1)得

$$[C(q^{-1}) - q^{-1}G(q^{-1})]y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})\varepsilon(k)$$

经过整理可得

$$C(q^{-1})[y(k) - \varepsilon(k)] = G(q^{-1})y(k-1) + q^{-d}B(q^{-1})u(k) \quad (2.4-59)$$

在式(2.4-59)等号两边减去  $C(q^{-1})\hat{y}(k)$  得

$$C(q^{-1})[y(k) - \hat{y}(k) - \varepsilon(k)] = G(q^{-1})y(k-1) + \\ q^{-d}B(q^{-1})u(k) - C(q^{-1})\hat{y}(k)$$

式中设  $\hat{y}(k)$  为输出  $y(k)$  的某种预测估计, 再设  $\hat{\varepsilon}(k) = y(k) - \hat{y}(k)$  为预测误差, 则上式变成

$$C(q^{-1})[y(k) - \varepsilon(k)] = G(q^{-1})y(k-1) + \\ q^{-d}B(q^{-1})u(k) - C(q^{-1})\hat{y}(k) \quad (2.4-60)$$

因  $\varepsilon(k)$  为白色序列, 若  $y(k) = \varepsilon(k)$ , 则  $\hat{y}(k)$  是  $y(k)$  的最优预测, 将式(2.4-60)右边写成展

开形式

$$\begin{aligned} C(q^{-1})[y(k) - \varepsilon(k)] = & g_0 y(k-1) + g_1 y(k-2) + \cdots + \\ & g_{s-1} y(k-s) + b_0 u(k-d) + \cdots + b_{n_b} u(k-d-n_b) - \\ & a_1 \hat{y}(k-1) - a_2 \hat{y}(k-2) - \cdots - a_{n_a} \hat{y}(k-n_a) - \hat{y}(k) \end{aligned} \quad (2.4-61)$$

设需要辨识的参数向量为

$$\theta^T = [g_0 \cdots g_{s-1} \quad b_0 \cdots b_{n_b} \quad a_1 \cdots a_{n_a}] \quad (2.4-62)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T(k) = & [y(k-1) \cdots y(k-s) \quad u(k-d) \cdots u(k-d-n_b) - \\ & \hat{y}(k-1) \cdots - \hat{y}(k-n_a)] \end{aligned} \quad (2.4-63)$$

则式(2.4-61)可写成

$$C(q^{-1})[y(k) - \varepsilon(k)] = \Phi^T(k) \theta_0^T - \hat{y}(k) \quad (2.4-64)$$

当  $\hat{y}(k) = \varepsilon(k)$ ,  $\hat{y}(k)$  是  $y(k)$  的最优预测, 则  $\hat{y}(k)$  为

$$\hat{y}(k) = \Phi^T(k) \theta_0^T \quad (2.4-65)$$

下面给出  $\theta_0$  的随机逼近递推算法

$$\theta_0(k+1) = \theta_0(k) + \frac{\alpha \phi(k+1)}{r(k+1)} [y(k+1) - \Phi^T(k+1) \theta_0(k)] \quad (2.4-66)$$

$$r(k+1) = r(k) + \Phi^T(k+1) \Phi(k+1) \quad (2.4-67)$$

式中  $r(k)$  为标量,  $r(0) = 1$ ,  $\alpha$  为选定的递减序列。从估值  $\theta_0(k)$  和式(2.4-58)可得  $a_1, \cdots, a_{n_a}$ ,  $b_0, \cdots, b_{n_b}$ ,  $a_1, \cdots, a_{n_a}$ 。这一方法计算比较简单, 但收敛速度慢一些。

## 五、投影算法

单输入-单输出线性定常系统方程为

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d} B(q^{-1})u(k) \quad (2.4-68)$$

式中

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned}$$

设参数向量  $\theta$  及  $\Phi(k)$  为

$$\begin{aligned} \theta^T &= [a_1 \cdots a_{n_a} \quad b_0 \quad b_1 \cdots b_{n_b}] \\ \Phi^T(k-1) &= [-y(k-1) - y(k-2) \cdots - y(k-n_a) \quad u(k-d) \\ &\quad u(k-d-1) \cdots u(k-d-n_b)] \\ y(k) &= \Phi^T(k-1) \theta \end{aligned}$$

投影算法是使指标函数

$$J = \frac{1}{2} \|\theta(k) - \theta(k-1)\|^2$$

为最小。

利用拉格朗日乘子法将指标函数  $J$  扩展, 则有

$$J_c = \frac{1}{2} \|\theta(k) - \theta(k-1)\|^2 + \lambda[y(k) - \Phi^T(k-1)\theta(k)] \quad (2.4-69)$$

$J_c$  为极小值的条件为

$$\frac{\partial J_c}{\partial \theta(k)} = 0$$

$$\frac{J_c}{\lambda} = 0$$

由上二式可得

$$\theta(k) - \theta(k-1) - \lambda \Phi(k-1) = 0 \quad (2.4-70)$$

$$y(k) - \Phi^T(k-1)\theta(k) = 0$$

从上二式中消去  $\theta(k)$ , 得

$$y(k) - \Phi^T(k-1)[\theta(k-1) + \lambda \Phi(k-1)] = 0$$

则

$$\lambda = \frac{y(k) - \Phi^T(k-1)\theta(k-1)}{\Phi^T(k-1)\Phi(k-1)} \quad (2.4-71)$$

将式(2.4-71)代入式(2.4-70), 得

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \frac{\Phi(k-1)}{\Phi^T(k-1)\Phi(k-1)}[y(k) - \Phi^T(k-1)\theta(k-1)] \quad (2.4-72)$$

式(2.4-72)中的分母可能为零或接近于零, 为了避免这一情况, 对该算法作些修改, 即

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \frac{a\Phi(k-1)}{c + \Phi^T(k-1)\Phi(k-1)}[y(k) - \Phi^T(k-1)\theta(k-1)] \quad (2.4-73)$$

式中  $c > 0$ ,  $0 < a < 2$

投影算法的计算量小, 收敛速度慢。

## 六、衰减记忆递推算法

上面的递推最小二乘法适用于常参数的估计, 如果用来估计时变参数, 应作适当修正。对于时变参数来说, 新数据应比老数据起更大的作用。因此在计算程序上应减小老数据对估计的影响。衰减记忆递推最小二乘法就是按照这一想法提出来的。参数估计的指标函数为

$$J_{k+1}(\theta) = \alpha J_k(\theta) + [y(k+1) - \Phi^T(k)\theta]^2 \quad (2.4-74)$$

式中  $0 < \alpha < 1$ , 当  $\alpha = 1$  时, 给出标准的递推最小二乘法计算公式。应用数学归纳法可推导出下列三个公式

$$\theta(k+1) = \theta(k) + K(k+1)[y(k+1) - \Phi^T(k+1)\theta(k)] \quad (2.4-75)$$

$$K(k+1) = P(k)\Phi(k+1)[\alpha + \Phi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)]^{-1} \quad (2.4-76)$$

$$P(k+1) = \frac{P(k)}{\alpha} - \frac{P(k)}{\alpha}\Phi(k+1)[\alpha + \Phi^T(k+1)P(k)\Phi(k+1)]^{-1} \times \Phi^T(k+1)P(k) \quad (2.4-77)$$

在这里介绍一些在自适应控制中经常用到的参数估计方法, 对于其他的一些参数估计方法可参考有关书籍。

## § 2.5 闭环系统的辨识

在 § 2.4 讨论参数辨识方法时, 假定辨识对象是在开环条件下工作的, 因此这些方法适用于开环系统的辨识。实际上很多系统都是在闭环条件下工作的。如图 2.5-1 所示。

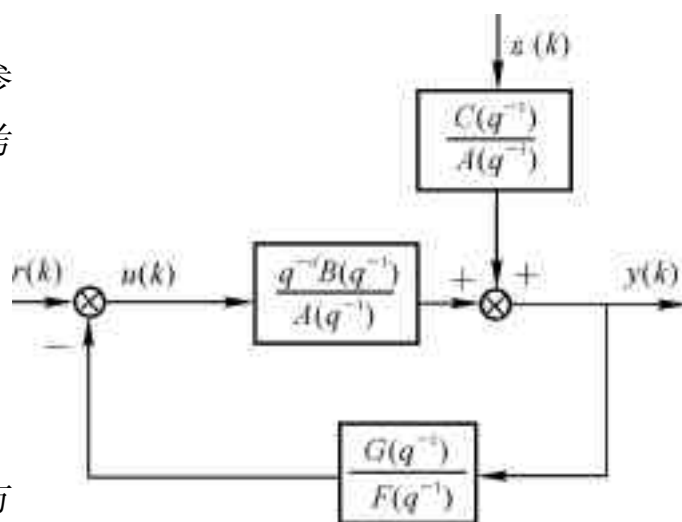


图 2.5-1 闭环系统方块图

图中  $u(k)$  为控制量,  $y(k)$  为系统输出,  $r(k)$  为外部参考输入,  $\varepsilon(k)$  为白噪声。要求辨识  $A(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  的参数。

对于自校正控制系统来说,要求在闭环控制条件下,辨识控制对象的参数,因此必须研究闭环系统的参数辨识问题。有的闭环系统可以辨识,而有的则不能辨识,在此着重讨论闭环系统的可辨识条件。

### 一、闭环系统的可辨识性概念

有些闭环系统可辨识,而另一些闭环系统不可辨识,下面用一个简单例子来说明。

设有一反馈系统,控制对象和控制器的差分方程为

$$y(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) + \varepsilon(k)$$

和

$$u(k) = -dy(k)$$

式中  $a$  和  $b$  为未知参数,  $\{\varepsilon(k)\}$  是均值为零的白噪声序列。现在看看用最小二乘法能否估计出未知参数  $a$  和  $b$ 。设

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y(1+1) \\ y(1+2) \\ \dots \\ y(1+N) \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(1+1) \\ \varepsilon(1+2) \\ \dots \\ \varepsilon(1+N) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & u(1) \\ -y(2) & u(2) \\ \dots & \dots \\ -y(N) & u(N) \end{bmatrix}$$

则

$$Y = \Phi\theta + e$$

$\theta$  的估值为

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y$$

因  $u(k) = -dy(k)$ , 则

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & -dy(1) \\ -y(2) & -dy(2) \\ \dots & \dots \\ -y(N) & -dy(N) \end{bmatrix}$$

$\Phi$  的两列元素线性相关, 则  $\Phi$  不是满秩, 故  $[\Phi^T \Phi]$  是奇异矩阵。因此用最小二乘法得不到参数  $a$  和  $b$  的估值, 系统不可辨识。如果把控制器方程改成

$$u(k) = -dy(k-1)$$

则

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & -dy(0) \\ -y(2) & -dy(1) \\ \dots & \dots \\ -y(N) & -dy(N-1) \end{bmatrix}$$

在  $\Phi$  中两列元素线性独立,  $\Phi$  满秩,  $[\Phi^T \Phi]$  为非奇异矩阵, 可得  $a$  和  $b$  的估值, 系统成为可辨识的。

从这一简单例子可看出, 闭环系统的可辨识性与控制器的结构和阶次有关。究竟控制器满足什么条件, 被控对象参数  $\theta$  才是可辨识的, 将在后面讨论。

在闭环系统辨识中, 必须事先知道系统的阶, 因为系统的阶不能通过闭环试验得到。下面用一个具体例子来说明问题。

设系统差分方程为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \quad (2.5-1)$$

控制器(反馈部分) 差分方程为

$$F(q^{-1})u(k) = -G(q^{-1})y(k) \quad (2.5-2)$$

如用任意多项式  $H(q^{-1})$  与式(2.5-2) 相乘, 并与式(2.5-1) 相加后可得

$$[A(q^{-1}) + H(q^{-1})G(q^{-1})]y(k) = [B(q^{-1}) + H(q^{-1})F(q^{-1})]u(k) + \varepsilon(k) \quad (2.5-3)$$

比较式(2.5-2) 与式(2.5-3) 可知, 在相同的  $u(k)$ ,  $y(k)$  和  $\varepsilon(k)$  的情况下, 可以对应于不同阶数的前向通道数学模型。因此, 一般不可能通过闭环试验来估计控制对象的数学模型的阶数。所以对于闭环系统辨识, 应当事先知道控制对象数学模型的阶数。闭环系统的辨识可分为无外部参数输入信号的闭环系统辨识和有外部参考输入信号的闭环系统辨识。闭环系统辨识又可分为直接辨识和间接辨识。如果利用控制对象的输入  $u(k)$  和输出  $y(k)$  辨识控制对象的参数, 则称为闭环系统的直接辨识。如果先辨识整个闭环系统的参数, 而后再求出控制对象的参数, 则称为间接辨识。

## 二、无外部输入信号时单输入-单输出闭环系统的直接辨识

设一具有反馈的单输入-单输出离散系统, 无外部参考输入信号。控制对象的差分方程为

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \quad (2.5-4)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (2.5-5)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (2.5-6)$$

式中  $u(k)$  为控制量,  $y(k)$  为输出量,  $\varepsilon(k)$  是均值为零的白噪声序列。 $d$  为控制对输出的传输延迟。外部参考输入信号  $r(k) = 0$ 。

把式(2.5-4) 写成展开式

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-d) + \cdots + b_{n_b} u(k-d-n_b) + \varepsilon(k) \quad (2.5-7)$$

反馈通道的差分方程为

$$F(q^{-1})u(k) = -G(q^{-1})y(k) \quad (2.5-8)$$

式中

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f} \quad (2.5-9)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{n_g} q^{-n_g} \quad (2.5-10)$$

$$u(k) = -f_1 u(k-1) - f_2 u(k-2) - \cdots - f_{n_f} u(k-n_f) - g_0 y(k) - g_1 y(k-1) - \cdots - g_{n_g} y(k-n_g) \quad (2.5-11)$$

下面讨论控制对象的参数能直接辨识的条件。需要辨识的参数向量为

$$\theta^T = [a_1 \cdots a_{n_a} \quad b_0 \quad b_1 \cdots b_{n_b}] \quad (2.5-12)$$

设

$$\Phi^T(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \cdots -y(k-n_a) \\ u(k-d) \cdots u(k-d-n_b)] \quad (2.5-13)$$

则式(2.5-7)可写成

$$y(k) = \Phi^T(k) \theta + \varepsilon(k)$$

设已得到  $u(k)$  和  $y(k)$  的  $N$  对观测值 ( $N > n_a + n_b + 1$ ), 则有

$$Y = \Phi \theta + \varepsilon \quad (2.5-14)$$

式中

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \cdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \cdots \\ \varepsilon(N) \end{bmatrix}$$

$\Phi$  为  $N \times (n_a + n_b + 1)$  矩阵, 矩阵的第  $k$  行为  $\Phi^T(k)$ 。

应用最小二乘法可得  $\theta$  的估值

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y \quad (2.5-15)$$

为了能得到估值  $\hat{\theta}$ , 要求  $[\Phi^T \Phi]^{-1}$  存在, 即要求  $\Phi$  为满秩矩阵。下面讨论  $\Phi$  矩阵为满秩的条件。

$\Phi$  矩阵可用下式表示

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & \cdots & -y(k-n_a) \\ -y(k) & -y(k-1) & \cdots & -y(k+1-n_a) \\ -y(k+1) & -y(k) & \cdots & -y(k+2-n_a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -y(k+N-1) & -y(k+N-2) & \cdots & -y(k+N-n_a) \\ u(k-d) & \cdots & u(k-d-n_b) \\ u(k-d+1) & \cdots & u(k-d-n_b+1) \\ u(k-d+2) & \cdots & u(k-d-n_b+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u(k-d+N) & \cdots & u(k-d-n_b+N) \end{bmatrix} \quad (2.5-16)$$

从式(2.5-11)和式(2.5-16)来判别  $\Phi$  在什么条件下是满秩的。从式(2.5-11)可看到  $u(k)$  是  $u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-n_f), y(k), \cdots, y(k-n_g)$  的线性函数。 $u(k-d)$  是  $u(k-d-1), u(k-d-2), \cdots, u(k-d-n_f), y(k-d), y(k-d-1), \cdots, y(k-d-n_g)$  的线性函数等等。为了  $\Phi$  满秩,  $\Phi$  的各列应线性独立。例如为了使  $u(k-d)$  与  $u(k-d-1), \cdots, u(k-d-n_b), y(k-1), y(k-2), \cdots, y(k-n_a)$  线性独立, 要求在矩阵  $\Phi$  中, 从  $u(k-d-1)$  至  $u(k-d-n_b)$  的项数小于式(2.5-11)中  $u$  的项数  $n_f$ , 即

$$k-d-1-(k-d-n_b)+1 < n_f$$

则

$$n_f > n_b \quad (2.5-17)$$

就是说当  $F(g^{-1})$  的阶数  $n_f$  大于  $B(g^{-1})$  的阶数  $n_b$  时,  $\Phi$  满秩, 闭环系统中控制对象的参数可

直接辨识。另外,还可要求矩阵  $\Phi$  中  $y(k - n_a)$  项的  $k - n_a$  大于  $y(k - d - n_g)$  中的  $k - d - n_g$ , 也能得到闭环系统可辨识条件,如果

$$k - n_a > k - d - n_g$$

则

$$n_g > n_a - d \quad (2.5-18)$$

也能使  $u(k - d)$  与  $y(k - d), \dots, y(k - d - n_g)$  线性独立,闭环系统可直接辨识,也就是说当  $G(q^{-1})$  的阶数  $n_g$  大于  $n_a - d$  时,  $\Phi$  满秩,闭环系统也可直接辨识。

在上面得到了无外部参考输入信号时,闭环系统可直接辨识的条件为式(2.5-17)或式(2.5-18)。就是说,当反馈调节器分母  $F(q^{-1})$  的阶数  $n_f > n_b$  时,闭环系统可直接辨识;当反馈调节器分子  $G(q^{-1})$  的阶数  $n_g > n_a - d$  时,闭环系统也可直接辨识。

当无外部输入信号时,如果反馈调节器的参数已知的话,也可用间接辨识方法。

## 二、无外部输入信号时单输入-单输出闭环系统的间接辨识

间接辨识方法就是先辨识闭环系统的传递函数,而后根据已知的调节器参数和辨识得到的闭环系统传递函数的参数,用解代数方程的方法求出控制对象的参数。

系统的方块图如图(2.5-1)所示,令  $r(k) = 0$ 。为了便于讨论问题,先设控制对象的方程为

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n} \quad (2.5-19)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n} \quad (2.5-20)$$

式中  $a, \dots, a_n, b, \dots, b_n$  为  $2n$  个待估参数。

调节器方程为

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_m q^{-m} \quad (2.5-21)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_m q^{-m} \quad (2.5-22)$$

式中  $f_1, \dots, f_m, g_0, \dots, g_m$  都为给定值。

噪声方程为

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n} \quad (2.5-23)$$

式中  $a, \dots, c_n$  也为待估参数。

以  $\varepsilon(k)$  为输入,  $y(k)$  为输出的闭环系统方程为

$$[A(q^{-1})F(q^{-1}) + B(q^{-1})G(q^{-1})]y(k) = F(q^{-1})C(q^{-1})\varepsilon(k) \quad (2.5-24)$$

或

$$P(q^{-1})y(k) = R(q^{-1})\varepsilon(k) \quad (2.5-25)$$

式中

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + B(q^{-1})G(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + \dots + p_{n+m} q^{-n-m} \quad (2.5-26)$$

$$R(q^{-1}) = F(q^{-1})C(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{n+m} q^{-n-m} \quad (2.5-27)$$

先以式(2.5-25)为数学模型,用最小二乘法或别的方法求出  $P(q^{-1})$  的估计量  $\hat{P}(q^{-1})$  和  $R(q^{-1})$  的估计量  $\hat{R}(q^{-1})$ 。根据  $\hat{P}(q^{-1})$  可求出  $A(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  中的参数。根据  $\hat{R}(q^{-1})$  可求出  $C(q^{-1})$  中的参数。

把  $A(q^{-1}), B(q^{-1}), F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  等多项式代入  $P(q^{-1})$  的表达式(2.5-26)中,其中



$P(q^{-1})$  用估值  $\hat{P}(q^{-1})$  代入, 可得

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n})(1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_m q^{-m}) + \\ & (b_1 q^{-1} + \cdots + b_n q^{-n})(g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_m q^{-m}) = \\ & 1 + \hat{P}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{P}_{n+m} q^{-n-m} \end{aligned} \quad (2.5-28)$$

比较上式等号两边  $q^{-1}$  的同次项的系数, 可得下列方程组

$$\left. \begin{aligned} a_1 & + b_1 g_0 & = \hat{P}_1 - f_1 \\ a_1 f_1 + a_2 & + b_1 g_1 + b_2 g_0 & = \hat{P}_2 - f_2 \\ a_1 f_2 + a_2 f_1 + a_3 & + b_1 g_2 + b_2 g_1 + b_3 g_0 & = \hat{P}_3 - f_3 \\ \cdots \cdots & \cdots \cdots & \cdots \cdots \\ a_1 f_{m-1} + \cdots + a_m & + b_1 g_{m-1} + \cdots + b_m g_0 & = \hat{P}_m - f_m \\ \cdots \cdots & \cdots \cdots & \cdots \cdots \\ a_n f_m & + b_n g_m & = \hat{P}_{n+m} \end{aligned} \right\} \quad (2.5-29)$$

可将上述方程组写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & f_2 & f_1 & \cdots & \cdots \\ f_m & \cdots & f_2 & \cdots & 1 \\ 0 & f_m & \cdots & \cdots & f_1 \\ 0 & 0 & f_m & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & g_2 & g_1 & \cdots & \cdots \\ g_m & \cdots & g_2 & \cdots & g_0 \\ 0 & g_m & \cdots & \cdots & g_1 \\ 0 & 0 & g_m & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 - f_1 \\ \hat{P}_2 - f_2 \\ \cdots \\ \hat{P}_m - f_m \\ \hat{P}_{m+1} \\ \cdots \\ \hat{P}_{m+n} \end{bmatrix} \quad (2.5-30)$$

令上述方程和系数矩阵为  $S$ , 被估参数向量为  $\theta$ , 方程的右边向量为  $P$ , 则可得

$$S\theta = P \quad (2.5-31)$$

当矩阵  $S$  的秩为  $2n$  时,  $\theta$  有唯一的最小二乘估计

$$\hat{\theta} = [S^T S]^{-1} S^T P \quad (2.5-32)$$

下面讨论在什么情况下  $S$  的秩为  $2n$ 。从式(2.5-30) 可看出, 被估参数为  $2n$  个, 因此矩阵  $S$  有  $2n$  列, 为了使  $S$  矩阵的秩为  $2n$ , 矩阵  $S$  的行数应等于或大于  $2n$ 。从式(2.5-30) 可看出, 矩阵  $S$  的行数为  $m+1+n-1 = m+n$ , 当  $m+n \geq 2n$  时,  $S$  的秩为  $2n$ , 参数可辨识, 因此可辨识的条件为

$$m \geq n \quad (2.5-33)$$

也就是说要求多项式  $F(q^{-1})$  或  $G(q^{-1})$  的阶数要等于或大于控制对象的阶数。

按上述分析方法, 可分析  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  有不同阶时的可辨识条件。

现在看看  $a, \cdots, a_n$  可辨识条件。在式(2.5-27) 中,  $R(q^{-1})$  用估值  $\hat{R}(q^{-1})$  代入, 可得

$$\begin{aligned} & (1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_m q^{-m})(1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n}) = \\ & 1 + (f_1 + a_1)q^{-1} + (a_1 f_1 + f_2 + a_2)q^{-2} + \cdots + f_m a_n q^{-m-n} = \\ & 1 + \hat{A}_1 q^{-1} + \cdots + \hat{A}_{m+n} q^{-m-n} \end{aligned} \quad (2.5-34)$$

比较上式等号两边  $q^{-1}$  的同次项的系数, 可得下列矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & f_2 & f_1 & \cdots & \cdots \\ f_m & \cdots & f_2 & \cdots & 1 \\ 0 & f_m & \cdots & \cdots & f_1 \\ 0 & 0 & f_m & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \theta \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_1 - f_1 \\ \hat{f}_2 - f_2 \\ \cdots \\ \hat{f}_m - f_m \\ \hat{f}_{m+1} \\ \cdots \\ \hat{f}_{m+n} \end{bmatrix} \quad (2.5-35)$$

令上述方程的系数矩阵为  $Q$ , 被估参数向量为  $\theta_c$ , 方程的右边向量为  $\hat{f}$ , 则可得

$$Q \theta_c = \hat{f} \quad (2.5-36)$$

当矩阵  $Q$  的秩为  $n$  时,  $\theta_c$  有惟一的最小二乘估计

$$\theta_c = [Q^T Q]^{-1} Q^T \hat{f} \quad (2.5-37)$$

矩阵  $Q$  有  $n$  列,  $n+m$  行, 不论  $F(q^{-1})$  的阶数为何值,  $Q$  的秩都为  $n$ ,  $\theta_c$  可辨识。因此  $\theta_c$  的可辨识性对调节器的阶数没有要求。

现在再来讨论  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  有不同阶时的可辨识条件。一般的系统方程可用下式来表示

$$A(q^{-1}) y(k) = q^{-d} B(q^{-1}) u(k) + C(q^{-1}) \varepsilon(k) \quad (2.5-38)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a} \quad (2.5-39)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b} \quad (2.5-40)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c} \quad (2.5-41)$$

调节器的方程为

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f} \quad (2.5-42)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{n_g} q^{-n_g} \quad (2.5-43)$$

将  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$ ,  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  代入闭环系统方程式 (2.5-24), 考虑到式 (2.5-38), 可得

$$\begin{aligned} & (1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a})(1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}) + \\ & q^{-d} (b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b})(g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{n_g} q^{-n_g}) = \\ & 1 + p_1 q^{-1} + \cdots + p_{n_p} q^{-n_p} \end{aligned} \quad (2.5-44)$$

$P(q^{-1})$  的阶数  $n_p$  为

$$n_p = \max(n_a + n_f, n_b + d + n_g)$$

根据式 (2.5-39) 和式 (2.5-40), 需估计的参数为  $n_a + n_b + 1$  个。参照式 (2.5-28), 式 (2.5-29) 和式 (2.5-30), 可得与式 (2.5-31) 类似的方程

$$S\theta = P \quad (2.5-45)$$

$S$  矩阵也由  $f_1, \cdots, f_{n_f}, g_0, \cdots, g_{n_g}$  等项组成。 $S$  左半矩阵由  $f_1, \cdots, f_{n_f}$  组成, 有  $n_a$  列,  $n_a + n_f$  行。 $S$  右半矩阵由  $g_0, \cdots, g_{n_g}$  组成, 有  $n_b + 1$  列,  $n_g + d + n_b$  行。 $S$  矩阵的行数为  $\max(n_a + n_f, n_b + d + n_g)$ 。只要  $S$  的行数等于或大于被估参数数目  $n_a + n_b + 1$ ,  $S$  的秩为  $n_a + n_b + 1$ ,  $\theta$  有惟一的最小二乘估计

$$\hat{\theta} = [S^T S]^{-1} S^T P \quad (2.5-46)$$

因此可辨识的条件为

$$\max(n_a + n_f, n_b + n_g + d) \geq n_a + n_b + 1 \quad (2.5-47)$$

在式(2.5-47)中,如果  $n_a + n_f$  为最大,则得可辨识条件

$$n_a + n_f \geq n_a + n_b + 1$$

或

$$n_f \geq n_b + 1 \quad (2.5-48)$$

因  $n_f$  和  $n_b$  都为整数,上式又可写成

$$n_f > n_b \quad (2.5-49)$$

在式(2.5-47)中,如果  $n_b + n_g + d$  为最大,则得又一可辨识条件

$$n_b + n_g + d \geq n_a + n_b + 1$$

或

$$n_g \geq n_a - d + 1 \quad (2.5-50)$$

因  $n_g$  和  $n_a$  都为整数,上式又可写成

$$n_g > n_a - d \quad (2.5-51)$$

比较式(2.5-17)、式(2.5-18)和式(2.5-49)、式(2.5-51)可知,二者是一样的。因此直接辨识和间接辨识的辨识条件是相同的。

若反馈调节器阶数低,不能满足辨识条件,可在调节器中加入一个延迟,以提高调节器的阶数。计算结果表明,直接辨识计算精度比间接辨识高,计算量也比较小。

### 三、有外部输入信号时单输入-单输出闭环系统的直接辨识

系统的方块图如图2.5-1所示,  $r(k)$  为外部输入信号。 $u(k)$  由两部分组成,第一部是由反馈控制器给出的反馈信号,第二部分是输入信号  $r(k)$ 。如设  $C(q^{-1}) = 1$ ,则控制对象的方程为

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \quad (2.5-52)$$

控制信号  $u(k)$  为

$$u(k) = -\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}y(k) + r(k) \quad (2.5-53)$$

式(2.5-53)可写成

$$F(q^{-1})u(k) = -G(q^{-1})y(k) + F(q^{-1})r(k) \quad (2.5-54)$$

$$u(k) = -f_1 u(k-1) - \cdots - f_{n_f} u(k-n_f) - g_0 y(k) - \cdots - g_{n_g} y(k-n_g) + r(k) + f_1 r(k-1) + \cdots + f_{n_f} r(k-n_f) \quad (2.5-55)$$

讨论可辨识条件的方法与前面的无输入信号闭环系统的直接辨识方法相类似。应用最小二乘法辨识,可得式(2.5-16)和式(2.5-15)。为了能得到估值  $\hat{\theta}$ ,要求  $[\Phi^T \Phi]^{-1}$  存在,即要求  $\Phi$  满秩,也就是要求式(2.5-16)中  $\Phi$  的各列应线性独立。由于存在外部输入信号  $r(k)$ ,在式(2.5-55)  $u(k)$  中有  $r(k), r(k-1), \cdots, r(k-n_f)$  等项,不论  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  的阶数  $n_f$  和  $n_g$  为何值,  $\Phi$  矩阵中的各列不成线性关系,  $\Phi$  满秩,系统可直接辨识。因此只要外部输入信号  $r(k)$  有足够的激励特性,系统可直接辨识。

因直接辨识比间接辨识简单,当外部输入信号  $r(k)$  有足够的激励特性时,系统已可直接辨识,就没有必要讨论间接辨识了。

本章简要地介绍了李雅普诺夫稳定性理论、正性动态系统、超稳定性理论、系统参数估计方法和闭环系统辨识,为学习自适应控制准备了必要的理论基础。

## 习 题

1. 应用李雅普诺夫稳定性方法确定下列系统的原点稳定性

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

$$(3) \quad \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

2. 检验下列传递函数的正实性和严格正实性

$$(1) \quad \frac{K(1 + T_1 s)}{1 + T_2 s}$$

$$(2) \quad \frac{K(1 + T_1 s)}{(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}$$

$$(3) \quad \frac{K}{s}$$

$$(4) \quad \frac{K}{s(1 + T_1 s)}$$

$$(5) \quad \frac{K}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$(6) \quad \frac{Ks}{1 + a_1 s + a_2 s^2}$$

3. 分析由两个严格正实传递函数串联、并联或反馈所得传递函数的正实性。

## 参考文献

- 1 Landau I D .Adaptive Control-Model Reference Approach MARCEL DEKKER, INC, 1979
- 2 Brian D O Anderson, Sumeth Vongpanitlerd .Network Analysis and Synthesis .PRENTICE HALL, 1973
- 3 冯纯伯,史维 .非线性控制系统分析与设计 .南京:东南大学出版社,1990
- 4 黄家英 .自动控制原理(下册) .南京:东南大学出版社,1991
- 5 韩光文 .系统辨识 .武汉:华中理工大学出版社,1988
- 6 吴广玉主编 .系统辨识与自适应控制 .哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1987
- 7 Popov V M .Hyperstability of control systems .Springer Verlag, 1973
- 8 Wellstead P E .Edmunds J M .Least Squares Identification of closed-Loop systems .Int J of control, 1975(21)

# 第三章 模型参考自适应控制

本章介绍模型参考自适应控制的基本概念和设计方法。主要内容为应用局部参数优化理论、李雅普诺夫稳定性理论和超稳定性理论来设计模型参考自适应控制系统,离散模型参考自适应系统及模型参考自适应控制的鲁棒性。

## § 3.1 用局部参数优化理论设计模型参考自适应系统

用局部参数优化理论来设计模型参考自适应系统是最早的一种设计方法。应用这一方法时,要求系统参数的变化速度比系统过渡过程进行速度缓慢得多。假定在系统前向回路和反馈回路中有若干个可调参数。当被控对象的参数发生变化时,自适应机构对这些可调参数进行调整,以补偿系统参数变化对控制性能的影响,使得控制系统的输出特性与参考模型的输出特性相一致。为此,用被控对象与参考模型之间的广义误差  $\varepsilon$  构成性能指标函数  $J$ ,按  $J$  最小来确定自适应规律。 $J$  是广义误差  $\varepsilon$  的直接函数,间接地也是系统可调参数  $\theta$  的函数,即  $J = J(\theta)$ 。用局部参数优化理论来推导自适应控制规律。下面用梯度法来求模型参考自适应系统控制规律。

先介绍梯度法的基本概念。可将性能指标  $J(\theta)$  看作参数空间中的一个超曲面,如图 3.1-1 所示。

在图中用闭环曲线表示  $J(\theta)$  的等位面曲面,实箭头表示  $J(\theta)$  在参数空间变化率最大的方向,称  $J(\theta)$  的梯度,用  $\text{grad}(J)$  表示。使  $J$  下降的方向是负梯度方向,如图中虚箭头所示。用梯度法来调整参数时,其调整方向如图中虚线箭头所示。调整量可用下式来表示

$$\Delta\theta = -\lambda \text{grad}(J), \quad \lambda > 0 \quad (3.1-1)$$

式中  $\lambda$  为调整步长。以式(3.1-1)为基础,可推导出调整参数的自适应规律。下面讨论具有可调增益的模型参考自适应系统。

设理想模型的传递函数为

$$G_M(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} \quad (3.1-2)$$

被控对象的传递函数为

$$G_P(s) = \frac{K_v N(s)}{D(s)} \quad (3.1-3)$$

系统的方块图如图 3.1-2 所示。图中的自适应机构根据误差  $\varepsilon$  的大小,不断调整  $K_c$ ,使得  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,控制对象的输出  $y_p$  趋近于参考模型的输出  $y_m$ 。

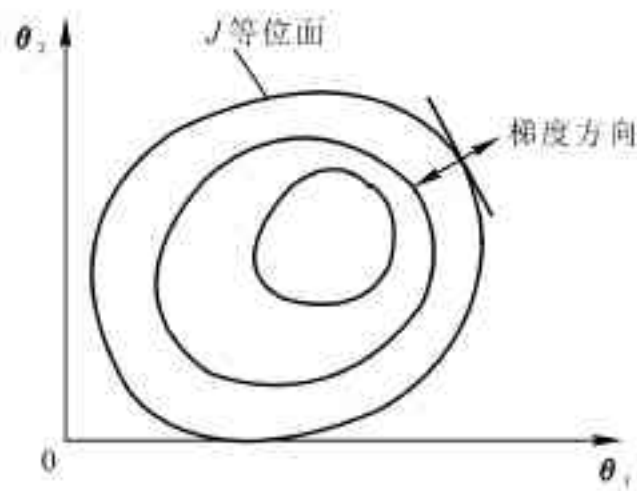


图 3.1-1 性能指标  $J(\theta)$  的等位面图

被控对象与理想模型的传递函数的基本部分相同,理想模型的增益  $K$  是常值,被控对象中增益  $K_v$  随周围环境或其他干扰的影响而变。用自适应机构来调整  $K_c$ ,使得  $K_c K_v$  与模型的增益相一致。

设广义误差为

$$\varepsilon = y_m - y_p \quad (3.1-4)$$

式中  $y_m$  为模型输出,  $y_p$  为被控对象的输出,广义误差  $\varepsilon$  表示输入信号为  $r(t)$  时,被控对象的响应与模型的响应之间的偏差。

设性能指标泛函为

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \varepsilon^2(\tau) d\tau \quad (3.1-5)$$

现用梯度寻优法调整  $K_c$ ,使得  $J$  为最小,首先求出  $J$  对  $K_c$  的梯度

$$-\frac{J}{K_c} = \int_{t_0}^t \varepsilon \frac{\varepsilon}{K_c} d\tau \quad (3.1-6)$$

根据梯度法的性质可知,使  $J$  下降的方向是负梯度方向,因此参数  $K_c$  的修正量为

$$\Delta K_c = -\lambda \frac{J}{K_c}, \quad \lambda > 0 \quad (3.1-7)$$

则调整后的  $K_c$  为

$$K_c = \Delta K_c + K_{c0} = -\lambda \frac{J}{K_c} + K_{c0} = -\lambda \int_{t_0}^t \varepsilon \frac{\varepsilon}{K_c} d\tau + K_{c0} \quad (3.1-8)$$

式中  $K_{c0}$  为  $K_c$  调整前的初始值。将式(3.1-8)两边对时间  $t$  求导得

$$\dot{K}_c = -\lambda \varepsilon \frac{\varepsilon}{K_c} \quad (3.1-9)$$

上式表示可调增益  $K_c$  的随时间变化规律。为了求出  $K_c$ ,必须计算  $\frac{\varepsilon}{K_c}$ 。求式(3.1-4)对  $K_c$  的偏导数,并考虑到  $y_m$  与  $K_c$  无关,可得

$$\frac{\varepsilon}{K_c} = \frac{y_m}{K_c} - \frac{y_p}{K_c} = -\frac{y_p}{K_c} \quad (3.1-10)$$

把式(2-10)代入式(3.1-9)得

$$\dot{K}_c = \lambda \varepsilon \frac{y_p}{K_c} \quad (3.1-11)$$

式中  $\frac{y_p}{K_c}$  称为被控系统对可调参数的敏感函数。由于  $\frac{y_p}{K_c}$  不易得到,故要寻找与  $\frac{y_p}{K_c}$  等效的,而又容易获得的数值。由图 3.1-2 可看出,系统的开环传递函数为

$$\frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = (K - K_v K_c) \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1-12)$$

把上式转化为微分方程的时域算子的形式

$$D(p) \varepsilon(t) = (K - K_v K_c) N(p) r(t) \quad (3.1-13)$$

式中  $p = \frac{d}{dt}$ 。求上式对  $K_c$  的偏导数得

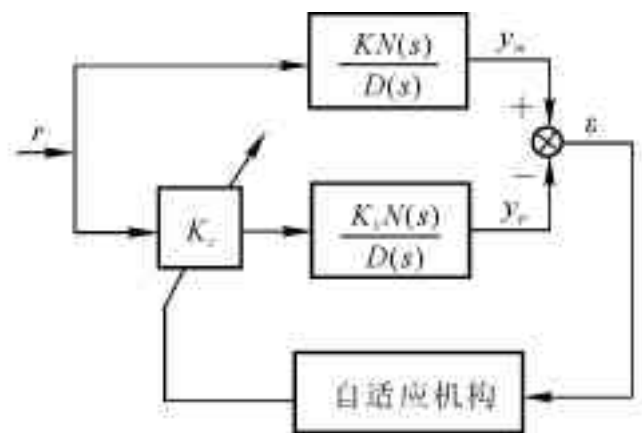


图 3.1-2 自适应系统方块图

$$D(p) \frac{\varepsilon(t)}{K_c} = -K_v N(p) r(t) \quad (3.1-14)$$

考虑到式(3.1-10),得

$$D(p) \frac{y_p}{K_c} = K_v N(p) r(t) \quad (3.1-15)$$

模型微分方程的时域算子形式为

$$D(p) y_m(t) = K N(p) r(t) \quad (3.1-16)$$

比较式(3.1-15)和式(3.1-16)可得

$$\frac{y_p(t)}{K_c} = \frac{K_v}{K} y_m(t) \quad (3.1-17)$$

将式(3.1-17)代入式(3.1-11)得

$$K_c = \lambda \frac{K_v}{K} \varepsilon y_m = \mu \varepsilon y_m \quad (3.1-18)$$

式中

$$\mu = \lambda \frac{K_v}{K}$$

式(3.1-18)为可调增益  $K_c$  的调节规律,即系统的自适应规律。整个自适应系统可用图 3.1-3 来表示。这个自适应方案最早由美国麻省理工学院 MIT 的怀特克提出的,因此称为 MIT 的自适应方案,它由一个乘法器和一个积分器所组成,如图 3.1-3 所示。

用 MIT 规则设计自适应系统时,没有考虑到自适应系统的稳定性问题,这是此方法的一个缺点。在求得自适应规律之后,还需要进行稳定性的检验,以保证广义误差  $\varepsilon$  收敛于某一允许的值。从图 3.1-3 可看出 MIT 自适应控制方案是非线性时变系统,一般说来检验其稳定性是比较困难的。因此这一方法的应用受到一定的限制。

例 3.1-1 设控制对象的传递函数为  $\frac{K_v}{Ts+1}$ ,参考模型的传递函数为  $\frac{K}{Ts+1}$ ,试用 MIT 规则设计自适应系统。

设计结果如图 3.1-4 所示。

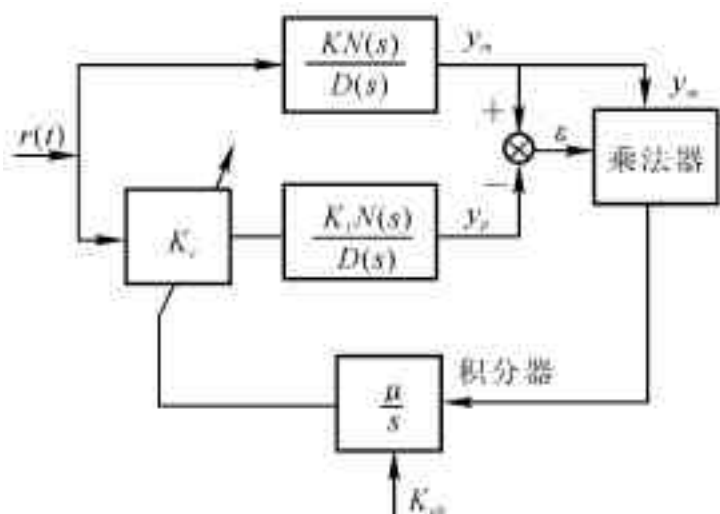


图 3.1-3 MIT 自适应控制方案

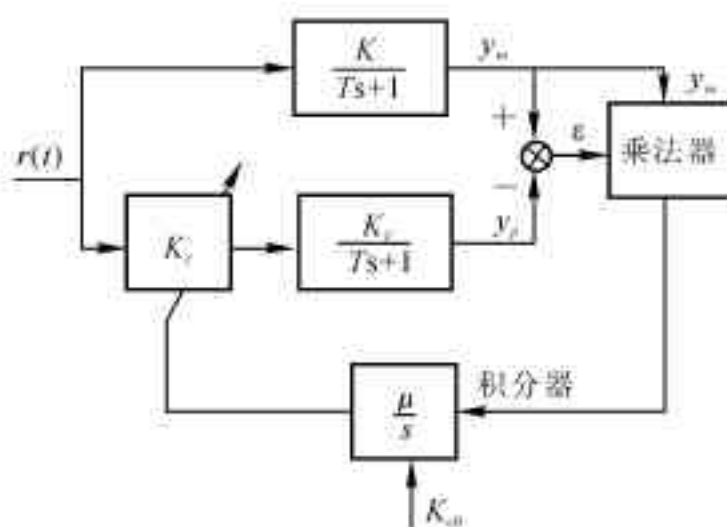


图 3.1-4 自适应控制图

对自适应系统,当  $t \rightarrow \infty$  时,要求  $\varepsilon \rightarrow 0$ 。本例对有的输入信号,系统可能会不稳定。例如对

简单的输入信号  $r(t) = R\sin\omega t$ , 可能会出现不稳定的情况, 计算结果如图 3.1-5 所示<sup>[4]</sup>。

例 3.1-2 设控制对象的微分算子方程为

$$(a_2 p^2 + a_1 p + 1) y_p(t) = K_v r(t)$$

参考模型的微分算子方程为

$$(a_2 p^2 + a_1 p + 1) y_m(t) = K r(t)$$

试按 MIT 规则, 求自适应规律。

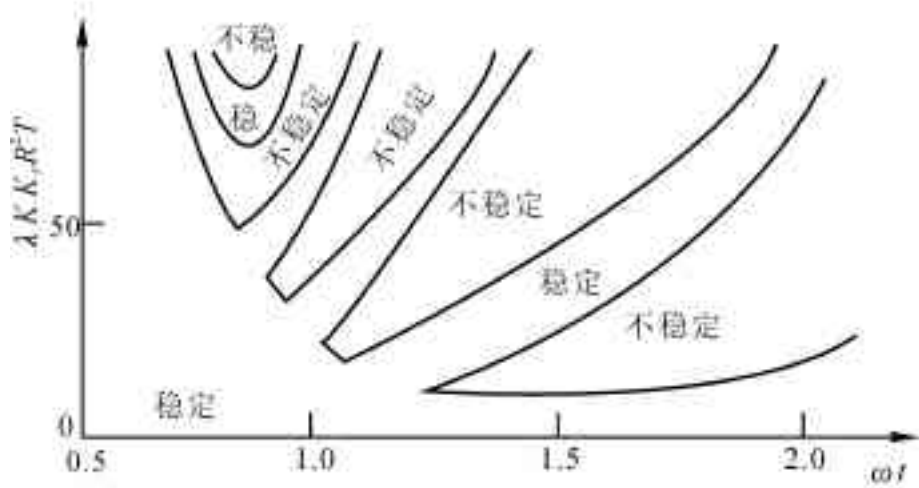


图 3.1-5 自适应系统稳定区域图

自适应可调增益为  $K_c$ , 按 MIT 规则可得

$$a_2 \ddot{y}_m + a_1 \dot{y}_m + y_m = K r(t)$$

$$a_2 \ddot{y}_p + a_1 \dot{y}_p + y_p = K_c K_v r(t)$$

上述二式相减可得

$$a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + \varepsilon = (K - K_c K_v) r(t)$$

$$K_c = \mu \varepsilon y_m$$

整个自适应控制框图如图 3.1-6 所示。

为了检验本例自适应系统的稳定性, 求出闭环自适应回路的广义误差  $\varepsilon$  的动态方程。假定  $r(t)$  为阶跃信号,  $r(t) = R$ , 并设系统的过渡过程很短,  $K_v$  变化缓慢, 在  $\varepsilon(t)$  的调节过程中,  $y_m(t)$  已达到稳定值  $y_m$ ,  $K_v \approx 0$ ,  $r(t) \approx 0$ , 对  $a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + \varepsilon = (K - K_c K_v) r(t)$  求导, 可得

$$a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + \varepsilon = -K_v K_c r(t)$$

将  $K_c$  的式子代入上式得

$$a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + \varepsilon = -K_v \mu y_m r \varepsilon \tag{3.1-19}$$

参考模型是稳定的, 当  $t$  较大时,  $y_m \rightarrow Kr$ , 则式(3.1-19) 变成

$$a_2 \ddot{\varepsilon} + a_1 \dot{\varepsilon} + \varepsilon + K_v \mu K r^2 \varepsilon = 0 \tag{3.1-20}$$

根据古尔维茨稳定性判据, 上述方程满足稳定性的充要条件是

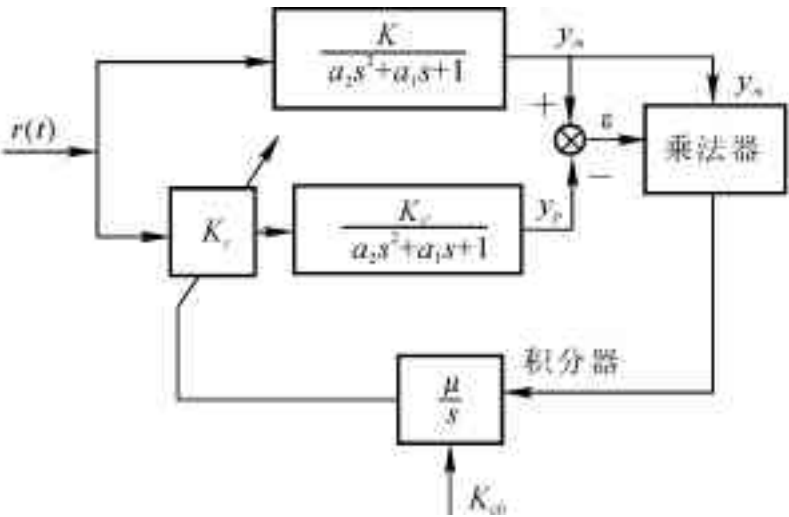


图 3.1-6 自适应控制图



$$a_1 > a_2 K_v K \mu r^2$$

从上式可看出,如果输入  $r$  或自适应增益  $\mu$  较大时,系统可能不稳定,因此必须对输入信号加以限制,自适应增益也不能选得太大。

对于具有可调系数的控制对象也可用局部参数优化方程法来建立自适应控制规律,在此因篇幅所限,不进行讨论。

用参数优化理论来设计自适应系统的主要缺点是没有考虑到自适应系统的稳定性,最后必须对自适应系统的稳定性进行检验,这是比较困难的工作。所以本书着重讨论以稳定性理论为基础的自适应控制系统的设计方法。在这一章主要讨论以李雅普诺夫稳定性理论为基础的设计方法和以超稳定性理论为基础的设计方法,用这些方法设计出来的系统肯定是稳定的。

用局部参数优化理论设计自适应控制,虽不能保证系统一定稳定,但这种方法设计简单,易于实现,所以在个别地方仍得到应用。

## § 3.2 用李雅普诺夫稳定性理论设计模型参考自适应系统

在上一节已讲过,用局部参数优化方法设计出来的模型参考自适应系统不一定稳定。为了克服上述缺点,在 1966 年德国学者帕克斯(P. C Parks)提出采用李雅普诺夫第二法来推导模型参考自适应系统的控制规律<sup>[2]</sup>,保证在系统全局渐近稳定下的自适应控制。

控制系统可用状态方程或传递函数来描述。控制系统用状态方程来表示时,可用系统的状态变量来构成自适应控制规律。控制系统用传递函数来表示时,可用系统的输入输出来构成自适应控制规律。下面按这两种情况讨论。

### 一、用系统状态变量构成自适应控制规律

假定系统的各状态变量都可直接得到。控制对象的参数一般是不能直接调整的。

设控制对象的状态方程为

$$\dot{X}_p = A_p(t) X_p + B_p u(t) \quad (3.2-1)$$

式中  $X_p$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $m$  维控制向量,  $A_p$  为  $n \times n$  矩阵,  $B_p$  为  $n \times m$  矩阵。一般,控制对象的状态矩阵  $A_p$  和控制矩阵  $B_p$  是不便于调整的。如要改变控制对象的动态特性,只能用前馈控制和反馈控制,如图 3.2-1 所示。

控制信号  $u$  由前馈信号  $K(t)r$  和反馈信号  $F(t)X_p$  所组成

$$u(t) = K(t)r + F(t)X_p \quad (3.2-2)$$

式中  $K(t)$  为  $m \times m$  阵,  $F(t)$  为  $m \times n$  阵。将式(3.2-2)代入式(3.2-1)得

$$\begin{aligned} \dot{X}_p &= A_p(t) X_p + B_p(t) [K(t)r + F(t)X_p] \\ &= X_p [A_p(t) + B_p(t)F(t)] + B_p(t)K(t)r \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

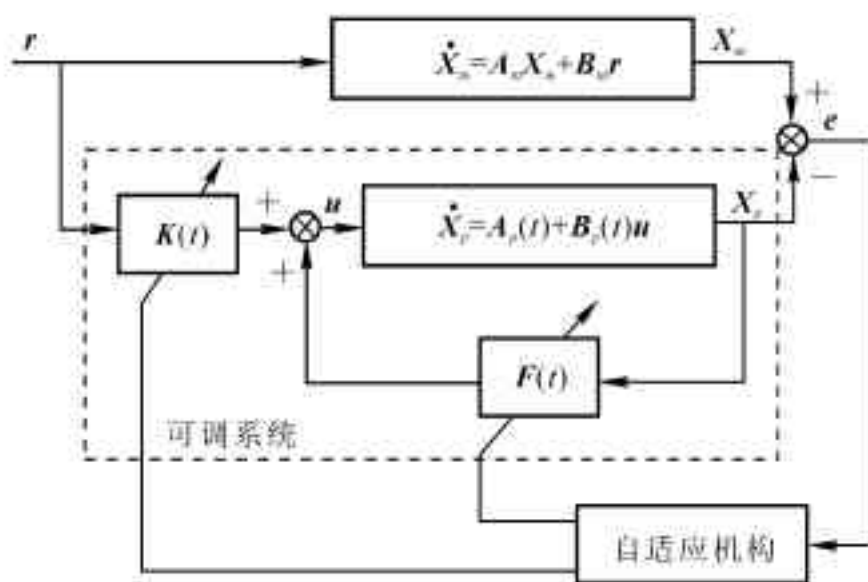


图 3.2-1 用状态变量构成自适应控制规律

式(3.2-3)叫做可调系统。矩阵  $A_p(t)$  和  $B_p(t)$  的元素都是时变参数,它们随系统的工作环境和受干扰的情况而变。我们不能对  $A_p(t)$  和  $B_p(t)$  进行直接调整。

选定参考模型的状态方程为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m r \quad (3.2-4)$$

参考模型与被控对象同维数,  $X_m$  为  $n$  维状态向量,  $r$  为  $m$  维输入向量, 矩阵  $A_m$  为  $n \times n$  矩阵,  $B_m$  为  $n \times m$  矩阵,  $A_m$  和  $B_m$  都为常数矩阵。

为了使控制对象的动态特性与参考模型的动态特性相一致,可按照自适应的要求,调整前馈增益矩阵  $K(t)$  和反馈增益矩阵  $F(t)$ ,使自适应闭环回路的特性接近于参考模型的特性。

设系统的广义状态误差向量为

$$e = X_m - X_p \quad (3.2-5)$$

由式(3.2-4)和式(3.2-3)可得

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A_p - B_p F) X_p + (B_m - B_p K) r \quad (3.2-6)$$

在理想情况时,上式右边后二项应等于零,设  $F$  和  $K$  的理想值分别为  $F$  和  $K$ 。当  $F = F, K = K$ , 且  $|K| \neq 0$ , 有

$$A_p + B_p F = A_m, \quad B_p K = B_m, \quad B_p = B_m K^{-1} \quad (3.2-7)$$

及

$$A_m - A_p = B_p F$$

式(3.2-6)可写成

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + B_m K^{-1} (F - F) X_p + B_m K^{-1} (K - K) r \\ \dot{e} &= A_m e + B_m K^{-1} \Phi X_p + B_m K^{-1} \Psi r \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

式中  $\Phi = F - F$  为  $m \times n$  矩阵,  $\Psi = K - K$  为  $m \times m$  矩阵。 $\Phi$  和  $\Psi$  称为可调参数误差。

我们以广义误差向量  $e$ , 可调参数误差  $\Phi$  和  $\Psi$  组成增广状态空间 ( $e \in R^n, \Phi \in R^{m \times n}, \Psi \in R^{m \times m}$ )。在增广状态空间定义一个李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} [e^T P e + \text{tr}(\Phi^T \Gamma_1^{-1} \Phi + \Psi^T \Gamma_2^{-1} \Psi)] \quad (3.2-9)$$

式中  $P, \Gamma_1^{-1}$  及  $\Gamma_2^{-1}$  都为正定矩阵。

求式(3.2-9)对时间  $t$  的导数得

$$\dot{V} = \frac{1}{2} [e^T \dot{P} e + e^T P \dot{e} + \text{tr}(\Phi^T \dot{\Gamma}_1^{-1} \Phi + \Phi^T \Gamma_1^{-1} \dot{\Phi} + \Psi^T \dot{\Gamma}_2^{-1} \Psi + \Psi^T \Gamma_2^{-1} \dot{\Psi})]$$

将式(3.2-8)代入上式得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T (PA_m + A_m^T P) e + e^T PB_m K^{-1} \Phi X_p + e^T PB_m K^{-1} \Psi r + \\ &\quad \frac{1}{2} \text{tr}(\Phi^T \dot{\Gamma}_1^{-1} \Phi + \Phi^T \Gamma_1^{-1} \dot{\Phi} + \Psi^T \dot{\Gamma}_2^{-1} \Psi + \Psi^T \Gamma_2^{-1} \dot{\Psi}) \end{aligned} \quad (3.2-10)$$

因  $e^T PB_m K^{-1} \Phi$  为  $n$  维行向量,  $X_p$  为  $n$  维列向量,  $e^T PB_m K^{-1} \Psi$  为  $m$  维行向量,  $r$  为  $m$  维列向量, 则

$$\begin{aligned} e^T PB_m K^{-1} \Phi X_p &= \text{tr}(X_p e^T PB_m K^{-1} \Phi) \\ e^T PB_m K^{-1} \Psi r &= \text{tr}(r e^T PB_m K^{-1} \Psi) \end{aligned}$$

又有

$$\text{tr}(\Phi^T \dot{\Gamma}_1^{-1} \Phi) = \text{tr}(\dot{\Phi}^T \Gamma_1^{-1} \Phi)$$

$$\text{tr}(\Phi^T \Gamma_1^{-1} \Psi) = \text{tr}(\Psi^T \Gamma_1^{-1} \Phi)$$

于是

$$V = \frac{1}{2} e^T (PA_m + \Phi_m^T P) e + \text{tr}(\Phi^T \Gamma_1^{-1} \Phi + X_p e^T PB_m K^{-1} \Phi) + \text{tr}(\Psi^T \Gamma_2^{-1} \Psi + r e^T PB_m K^{-1} \Psi) \quad (3.2-11)$$

因为  $A_m$  为稳定矩阵,则可选定对称正定阵  $Q$ ,使得  $PA_m + A_m^T P = -Q$  成立。对任意  $e \neq 0$ , 方程式(3.2-11) 中右边第一项是负定的。如果式(3.2-11) 右边后二项都为零,是  $V$  为负定。为此选

$$\Phi = -\Gamma_1 [B_m \quad K^{-1}]^T P e X_p^T \quad (3.2-12)$$

$$\Psi = -\Gamma_2 [B_m \quad K^{-1}]^T P e r^T \quad (3.2-13)$$

则式(3.2-11) 中的后二项都为零。

当  $A_p$  和  $B_p$  为常值或缓慢变化时,可设

$$\overset{H}{F} \approx 0, \quad \overset{H}{K} \approx 0$$

则可得自适应调节器规律

$$F = \overset{H}{F} - \Phi = -\Phi = \Gamma_1 [B_m \quad K^{-1}]^T P e X_p^T \quad (3.2-14)$$

$$F(t) = \int_0^t \Gamma_1 [B_m \quad K^{-1}]^T P e X_p^T d\tau + F(0) \quad (3.2-15)$$

及

$$K = \overset{H}{K} - \Psi = \Gamma_2 [B_m \quad K^{-1}]^T P e r^T \quad (3.2-16)$$

$$K(t) = \int_0^t \Gamma_2 [B_m \quad K^{-1}]^T P e r^T d\tau + K(0) \quad (3.2-17)$$

方程式(3.2-15) 和式(3.2-17) 分别为  $F(t)$  和  $K(t)$  的自适应变化规律。

所设计的自适应规律对任意分段连续输入向量函数  $r$  能够保证模型参考自适应系统是全局渐近稳定的,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

由  $e(t) = 0$ ,意味着  $F = \overset{H}{F}, K = \overset{H}{K}$ 。且由式(3.2-7) 可得

$$B_m K^{-1} \Phi X_p + B_m K^{-1} \Psi r = 0$$

由上式可得

$$\Phi X_p + \Psi r \equiv 0 \quad (3.2-18)$$

使恒等式(3.2-18) 对任何  $t$  能够成立的条件为

- (1)  $X_p$  和  $r$  为线性相关,并且  $\Phi$  和  $\Psi \neq 0$ ;
- (2)  $X_p$  和  $r$  恒为零,或者;
- (3)  $X_p$  和  $r$  为线性独立,并且  $\Phi = 0, \Psi = 0$ 。

因此只有第三种情况能导致参数收敛,所以要求  $X_p$  与  $r$  线性独立。 $X_p$  与  $r$  线性独立的条件为: $r(t)$  采用具有一定频率的方波信号或为  $q$  个不同频率的正弦信号组成的分段连续信号,其中  $q > \frac{n}{2}$  (或  $\frac{n-1}{2}$ )。在这种情况下  $X_p$  与  $r$  不恒等于零,且彼此线性独立。这样可保证误差矩阵  $\Phi(t)$  和  $\Psi(t)$  逐步收敛,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$$

例 3.2-1 设控制对象方程为

$$X_p = -\frac{1}{T}X_p + \frac{b_p}{T}r$$

式中  $b_p$  未知。

参考模型方程为

$$X_m = -\frac{1}{T}X_m + \frac{b_m}{T}r$$

用李雅普诺夫函数法求自适应控制规律。

$$e = -\frac{1}{T}e + \left[ \frac{b_m}{T} - \frac{b_p}{T}K \right] r, e = X_m - X_p = \varepsilon$$

$$b_m = b_p K, \quad K = \frac{b_m}{b_p}, \quad K^{-1} = \frac{b_p}{b_m}$$

$$\Psi = -\Gamma_1 \left[ \frac{b_m}{T} K^{-1} \right]^T Per^T = -\mu \varepsilon r$$

$$\mu = \Gamma_2 \left[ \frac{b_m}{T_p} K^{-1} \right]^T P, \quad e = \varepsilon$$

$$K = {}^H K - \Psi = \mu \varepsilon r$$

$$K = \int_0^t \mu \varepsilon r d\tau + K_0$$

自适应控制如图 3.2-2 所示。

本例与例 3.1-1 相同,由于设计自适应规律的方法不同,比较图 3.2-2 与图 3.1-4 就可发现两种自适应规律的差异。图 3.2-2 的自适应控制方案肯定是稳定的。

例 3.2-2 设控制对象状态方程为

$$X_p = -\alpha_0 X_p + b_p u$$

式中  $\alpha_0$  和  $b_p$  未知。

参考模型状态方程为

$$X_m = -\alpha X_m + b_m r$$

用李雅普诺夫函数法求自适应控制规律。

$$e = -\alpha_0 e + (\alpha_0 - \alpha_0 - b_p F) X_p + (b_m - b_p K) r$$

$$F = {}^H F - \Phi = -\Phi = \Gamma_1 [b_m K^{-1}]^T Pe X_p = \mu_1 \varepsilon X_p$$

$$(e = X_m - X_p = \varepsilon, \quad \mu_1 = \Gamma_1 [b_m K^{-1}]^T P)$$

$$F = \int_0^t \mu_1 \varepsilon X_p d\tau + F_0$$

$$K = {}^H F - \Psi = -\Psi = \Gamma_2 [b_m K^{-1}]^T Per = \mu_2 \varepsilon r$$

$$(\mu_2 = \Gamma_2 [b_m K^{-1}]^T P)$$

$$K = \int_0^t \mu_2 \varepsilon r d\tau + K_0$$

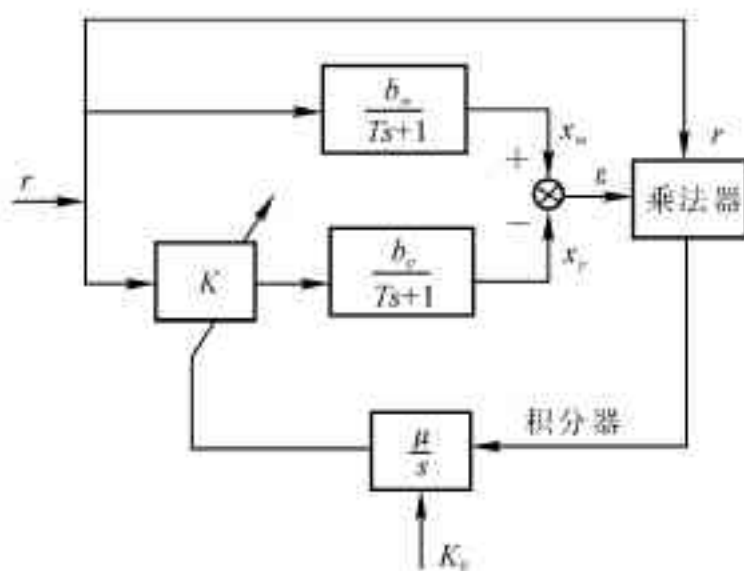


图 3.2-2 具有可调增益的自适应系统

自适应控制方块图如图 3.2-3 所示。

例 3.2-3 设系统的参考模型方程为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m r$$

式中

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X_m = \begin{bmatrix} X_{m1} \\ X_{m2} \end{bmatrix}$$

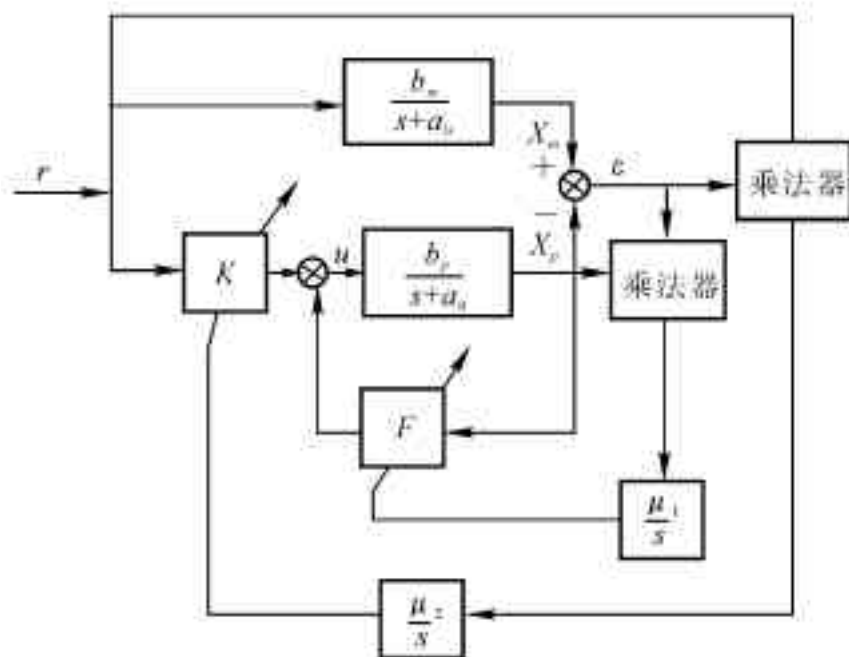


图 3.2-3 一阶自适应系统

控制对象方程为

$$\dot{X}_p = A_p X_p + B_p u$$

式中

$$X_p = \begin{bmatrix} X_{p1} \\ X_{p2} \end{bmatrix}, \quad A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

在自适应中引入前馈增益阵  $K$  和反馈增益阵  $F$ , 则可调系统方程为

$$\dot{X}_p = [A_p + B_p F] X_p + B_p K r$$

求自适应规律, 按式(3.2-7) 得

$$B_m K^{-1} = B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{选 } P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$$

将上述值代入自适应规律式(3.2-15) 和式(3.2-17) 得

$$F(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{p1} & X_{p2} \end{bmatrix} d\tau + F(0) =$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} (4e_1 + 4e_2) X_{p1} & (4e_1 + 4e_2) X_{p2} \end{bmatrix} d\tau + F(0)$$

$$K(t) = \int_0^t (4e_1 + 4e_2) r d\tau + K(0)$$

式中

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{m1} - X_{p1} \\ X_{m2} - X_{p2} \end{bmatrix}$$

## 二、用被控对象的输入输出构成自适应控制规律

在前面讨论了用控制对象的状态变量构成自适应控制规律,要用到全部状态变量。但对许多实际控制对象往往不能获得全部状态变量,因此提出利用被控对象的输入输出来构成自适应控制规律。

根据被控对象的输入输出设计出一个自适应控制规律,调节某一特定结构控制器的可调参数,使得由控制器和被控对象组成的可调系统的传递函数与参考模型的传递函数相匹配。下面先讨论单输入单输出系统的自适应规律。

### (一) 单输入单输出系统的自适应规律

设被控对象为二阶系统,其微分方程为

$$\ddot{y}_p + \alpha_1 y_p + \alpha_0 y_p = \beta r \quad (3.2-19)$$

参考模型的微分方程为

$$\ddot{y}_m + a_1 y_m + a_0 y_m = b r \quad (3.2-20)$$

式中  $y_p$  和  $y_m$  分别为被控对象和参考模型的输出,  $r$  为输入。被控对象微分方程的系数  $\alpha_1, \alpha_0$  和  $\beta$  随工作环境而变。设  $e = y_m - y_p$  为广义误差。

由方程式(3.2-19)和式(3.2-20),可得误差方程

$$\ddot{e} + a_1 e + a_0 e = \delta_1 y_p + \delta_0 y_p + \sigma r \quad (3.2-21)$$

式中

$$\delta_1 = \alpha_1 - a_1, \quad \delta_0 = \alpha_0 - a_0, \quad \sigma = b - \beta \quad (3.2-22)$$

设参数误差向量  $\Phi$  和广义误差向量  $\varepsilon$  为

$$\Phi^T = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \sigma], \quad \varepsilon^T = [e \quad \dot{e}] \quad (3.2-23)$$

选李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} [\varepsilon^T P \varepsilon + \Phi^T \Gamma \Phi] \quad (3.2-24)$$

式中  $P$  为 2 维对称正定阵,  $\Gamma$  为 3 维对角线正定阵

$$\Gamma = \text{diag}[\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \mu] \quad (3.2-25)$$

将误差方程写成向量微分方程的形式

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + \Delta_a + \Delta_b \quad (3.2-26)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta_a = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_0 y_p + \delta_1 y_p \end{bmatrix}, \quad \Delta_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma r \end{bmatrix} \quad (3.2-27)$$

求  $V$  对时间的导数得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \varepsilon^T (PA + A^T P) \varepsilon + \delta_0 [\lambda_0 \delta_0 + (ep_{12} + ep_{22}) y_p] + \\ & \delta_1 [\lambda_1 \delta_1 + (ep_{12} + ep_{22}) y_p] + \sigma [\mu \sigma + (ep_{12} + ep_{22}) r] \end{aligned} \quad (3.2-28)$$

选定正定对称阵  $Q$ , 使

$$PA + A^T P = -Q$$

则可选择自适应规律为

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= - \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_0} \\ \delta_1 &= - \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_1} \\ \sigma &= - \frac{(ep_{12} + ep_{22}) r}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (3.2-29)$$

则  $V$  为负定。

选择前馈增益  $K$  的自适应规律为

$$K = \frac{\sigma}{K_v} = \frac{(ep_{12} + ep_{22}) r}{\mu K_v}$$

则

$$K = K_0 + \int_0^t \frac{(ep_{12} + ep_{22}) r}{\mu K_v} d\tau \quad (3.2-30)$$

选择反馈增益系数  $f_0$  和  $f_1$  的自适应规律为

$$\begin{aligned} f_0 &= - \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_0 K_v} \\ f_1 &= - \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_1 K_v} \end{aligned}$$

则

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= f(0) - \int_0^t \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_0 K_v} d\tau \\ f_1 &= f_1(0) - \int_0^t \frac{(ep_{12} + ep_{22}) y_p}{\lambda_1 K_v} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.2-31)$$

整个自适应控制系统的框图如图 3.2-4 所示。

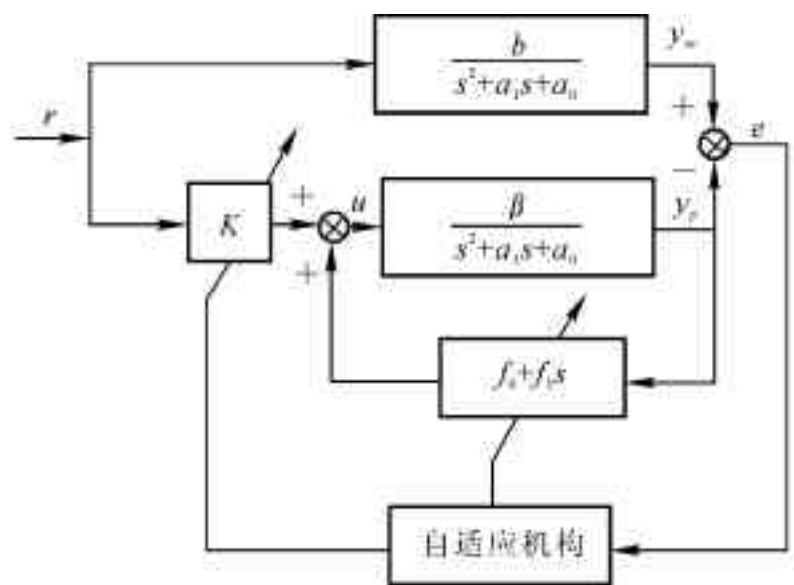


图 3.2-4 二阶系统自适应控制框图

按图 3.2-4 可得由被控对象和前馈及反馈所组成的可调系统方程

$$\begin{aligned} \ddot{y}_p + a_1 \dot{y}_p + a_0 y_p &= \beta (Kr + f_0 y_p + f_1 \dot{y}_p) \\ \ddot{y}_p + (a_1 - f_1) \dot{y}_p + (a_0 - f_0) y_p &= \beta Kr \end{aligned}$$

按自适应调节规律式(3.2-30),式(3.2-31)调节  $K$ ,  $f_0$  和  $f_1$ , 使得  $a_1 - f_1 \rightarrow a$ ,  $a_0 - f_0 \rightarrow a$ ,  $\beta K \rightarrow b$  及  $y_p \rightarrow y_m$ 。

从上面可看出,利用输入输出构成自适应控制规律,要用到被控对象输出和广义误差的各阶导数。因而要求在自适应机构中设置微分器,这就降低了自适应机构的抗干扰能力。为了避免这一缺点,纳朗特兰(K.S. Narendra)提出稳定自适应控制器的设计<sup>[3,4]</sup>,莫诺波利(R.V. Monopoli)提出具有增广误差信号的自适应控制<sup>[5]</sup>。在这些方案中都不需要被控对象输出和广义误差的导数。在此讨论纳朗特兰所提出的方案。

## (二) 纳朗特兰的自适应控制方案

### 1. 问题的提法

设被控对象的状态方程和输出方程为

$$X_p = A_p X_p + b_p u \quad (3.2-32)$$

$$y_p = h^T X_p \quad (3.2-33)$$

被控对象的传递函数为

$$W_p(s) = h^T (sI - A_p)^{-1} b_p = \frac{K_p Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (3.2-34)$$

式中  $Z_p(s)$  是  $m$  阶首一化(首项系数为 1) 古尔维茨多项式(稳定的),  $R_p(s)$  是  $n$  阶首一化古尔维茨多项式。对于  $W_p(s)$  来说  $m$  和  $n$  为已知, 其参数值是未知的变化量。

设参考模型的状态方程为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + b_m r \quad (3.2-35)$$

参考模型的输出为

$$y_m = h^T X_m \quad (3.2-36)$$

参考模型的传递函数为

$$W_m(s) = \frac{K_m Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (3.2-37)$$

式中  $Z_m(s)$  和  $R_m(s)$  都是首一化古尔维茨多项式, 其阶数分别为  $m$  和  $n$ 。

设广义输出误差为

$$e = y_p - y_m \quad (3.2-38)$$

自适应控制问题的提法为: 已知参考模型输入  $r$  为分段连续一致有界的, 输出为  $y_m(t)$ 。求控制对象的综合信号  $u(t)$ , 使得被控对象的输出与参考模型的输出相匹配, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = 0$$

## 2. 控制器的结构

为了实现可调系统与参考模型的完全匹配, 自适应控制器必须具有足够多的可调参数。设被控对象传递函数的分母为  $n$  阶, 分子为  $m$  阶, 加上放大系统  $K_p$ , 最多可调参数为  $n + m + 1$  个。因此自适应机构也应有  $n + m + 1$  个可调参数与之对应。我们先讨论  $n - m = 1$  情况, 尔后讨论  $n - m > 1$  的情况。 $n - m = 1$  情况的纳朗特兰自适应控制方案如图 3.2-5 所示。

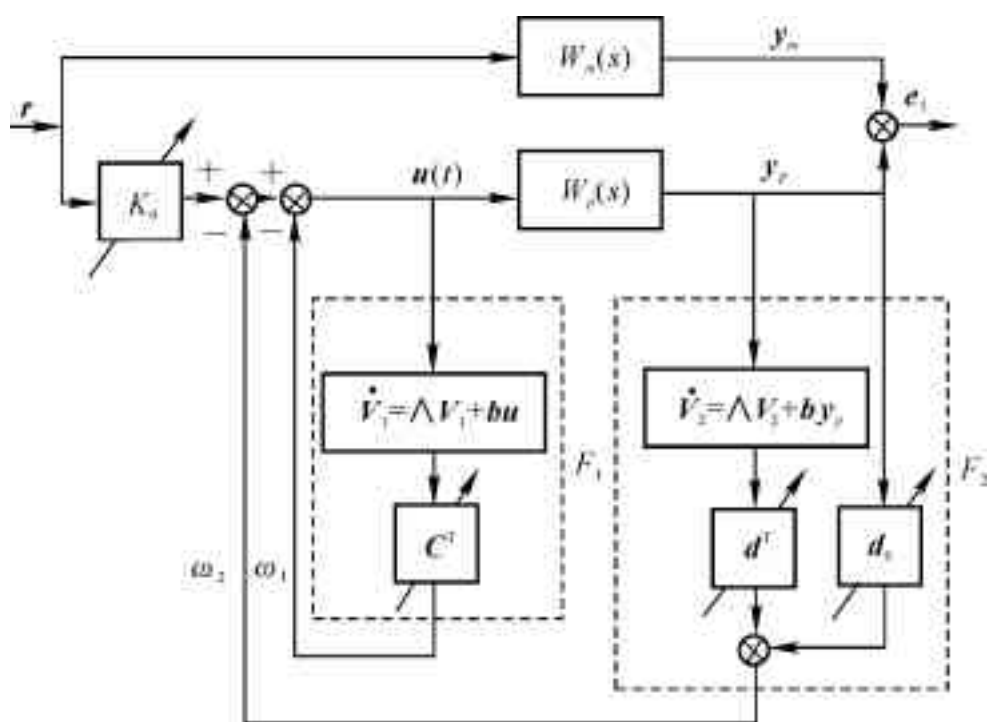


图 3.2-5  $n - m = 1$  的纳朗特兰方案



从图 3.2-5 可看出,参考输入为  $r(t)$ ,参考模型输出为  $y_m(t)$ ,被控对象输入为  $u(t)$ ,输出为  $y_p(t)$ 。控制器中有两个辅助信号发生器  $F_1$  和  $F_2$ 。 $F_1$  接在被控对象的输入端,输入信号为  $u(t)$ ,输出信号为  $\omega_1$ , $F_1$  有  $(n-1)$  个可调参数  $c_i (i=1,2,\dots,n-1)$ 。 $F_2$  接在被控对象的输出端,输入信号为  $y_p(t)$ , $F_2$  有  $n$  个可调参数  $d_i (i=0,1,\dots,n-1)$ 。 $F_1$  和  $F_2$  的可调参数,再加上可调增益  $K_0$ ,整个控制系统共有  $2n$  个可调参数。 $F_1$  和  $F_2$  的输出信号  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ,再加上可调增益  $K_0 r(t)$ ,组成被控对象的输入信号  $u(t)$ ,控制着被控对象的输出  $y_p(t)$ ,使之与参考模型的输出相一致。

辅助信号发生器  $F_1$  和  $F_2$  都是  $(n-1)$  阶的稳定动态系统。 $F_1$  的状态方程和传递函数为

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_1 &= \Lambda V_1 + bu \\ \omega_1 &= c^T V_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2-39)$$

$$W_1(s) = C^T [sI - \Lambda]^{-1} b = \frac{C(s)}{N(s)} \quad (3.2-40)$$

式中  $V_1$  为  $(n-1)$  维向量, $\Lambda$  为  $(n-1)(n-1)$  矩阵, $C$  为  $(n-1)$  维向量。

辅助信号发生器  $F_2$  的状态方程和传递函数为

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_2 &= \Lambda V_2 + by_p \\ \omega_2 &= d^T V_2 + d_0 y_p \end{aligned} \right\} \quad (3.2-41)$$

$$W_2(s) = d_0 + d^T [sI - \Lambda]^{-1} b = \frac{D(s)}{N(s)} + d_0 \quad (3.2-42)$$

式中  $V_2$  为  $(n-1)$  维向量, $d$  为  $(n-1)$  维向量。在式(3.2-39)和式(3.2-41)中, $\Lambda$  和  $b$  都相同,可用下式来表示

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ -l_1 & \cdots & -l_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b^T = [0 \quad \cdots \quad 1]$$

$$C^T = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{n-1}]$$

$$d^T = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_{n-1}]$$

传递函数  $W_1(s)$  和  $W_2(s)$  中的分母  $N(s)$  是  $(n-1)$  阶首一化古尔维茨多项式,分子  $C(s)$  和  $D(s)$  是  $(n-2)$  阶多项式,它们的系数  $C^T$  和  $d^T$  就是可调参数。这两个辅助信号发生器与被控对象一起组成了如图 3.2-6 所示的可调系统。

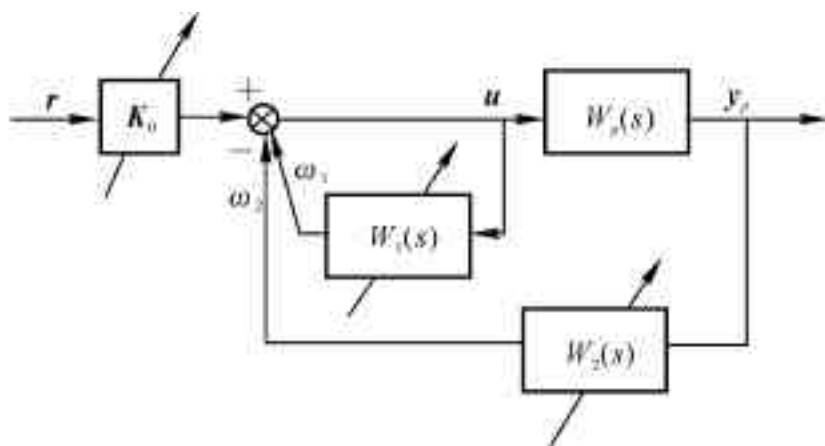


图 3.2-6 可调系统图

按图 3.2-6 可得可调系统的传递函数

$$W(s) = \frac{y_p(s)}{r(s)} = \frac{K_0 W_p(s)}{1 + W_1(s) + W_2(s) W_p(s)} = \frac{K_0 K_p Z_p(s) N(s)}{[N(s) + C(s)] R_p(s) + K_p Z_p(s) [d_0 N(s) + D(s)]} \quad (3.2-43)$$

自适应控制的作用是使可调系统的传递函数与参考模型的传递函数相一致,即

$$W(s) = \frac{K_0 K_p Z_p(s) N(s)}{[N(s) + C(s)] R_p(s) + K_p Z_p(s) [d_0 N(s) + D(s)]} = \frac{K_m Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (3.2-44)$$

要求下列各式成立

$$(a) \quad K_0 = \frac{K_m}{K_p} \quad (3.2-45)$$

$$(b) \quad N(s) = Z_m(s) \quad (3.2-46)$$

$$(3) \quad [N(s) + C(s)] R_p(s) + K_p Z_p(s) [d_0 N(s) + D(s)] = R_m(s) Z_p(s) \quad (3.2-47)$$

式(3.2-45)和式(3.2-46)容易实现,但要实现式(3.2-47)就比较难一些。从式(3.2-44)可看出,  $W(s)$  有  $(2n-1)$  个极点和  $(2n-2)$  个零点,其中的  $(n-1)$  个极点和  $(n-1)$  个零点应该是公因子。按式(3.2-44),希望  $W(s)$  的零点与参考模型的零点相一致,因此选择  $N(s) = Z_m(s)$ 。因  $N(s)$  是辅助信号发生器传递函数的分母多项式,所以要求  $N(s)$  是稳定多项式,  $Z_m(s)$  也应该是稳定多项式。为了式(3.2-47)成立,必须满足下列两点要求:

(1) 要求被控对象传递函数的分子多项式  $Z_p(s)$  和分母多项式  $R_p(s)$  是两个互质多项式,这样只要适当选择  $[N(s) + C(s)]$  和  $[d_0 N(s) + D(s)]$  就能使式(3.2-47)的左右两边相等。

(2) 要求被控对象传递函数的分子多项式  $Z_p(s)$  是稳定多项式。如果  $Z_p(s)$  不是稳定多项式,就不能实现式(3.2-47)两边  $Z_p(s)$  的相消,也就是不能实现  $W(s)$  中的零极点相消。

## 2. 自适应规律设计

为了应用李雅普诺夫稳定性理论来设计自适应规律,要把可调系统和参考模型用状态方程来表达,找出两者状态偏差的动态方程和输出偏差的动态方程。设计出的自适应规律应使被控对象与参考模型的输出偏差渐近稳定。

设  $\omega(t)$  表示可调系统中的信号向量,即

$$\omega^T(t) = [r(t) \quad V_1^T(t) \quad y_p(t) \quad V_2^T(t)] \quad (3.2-48)$$

式中,  $\omega(t)$  为  $2n$  维向量。

设  $\theta^T(t)$  表示可调系统中的可调参数向量,即

$$\theta^T(t) = [K_0(t) \quad C^T(t) \quad d_0(t) \quad d^T(t)] \quad (3.2-49)$$

$\theta(t)$  为  $2n$  维向量。被控对象的综合输入信号  $u(t)$  可写成

$$u(t) = \theta^T(t) \omega(t) \quad (3.2-50)$$

整个可调系统可用下面的状态方程来表示

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_p &= A_p X_p + b_p u \\ \dot{V}_1 &= \Lambda V_1 + b u \\ \dot{V}_2 &= \Lambda V_2 + b h^T X_p \end{aligned} \right\} \quad (3.2-51)$$

$$y_p = h^T X_p \quad (3.2-52)$$

或写成

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ b h^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \theta^T \omega \quad (3.2-53)$$

设  $\theta(t) = \theta + \Psi(t)$ , 式中  $\theta$  表示可调系统与参考模型完全匹配时的一组参数,  $\Psi(t)$  表示参数向量  $\theta(t)$  与参考模型参数的失配部分。如果可调系统与参考模型完全匹配,  $\Psi(t) = 0$ , 则  $K_0 = K_0$ ,  $C = C$ ,  $d_0 = d_0$ ,  $d = d_0$ ,  $u(t)$  可写成

$$\begin{aligned} u(t) &= \theta^T(t) \omega(t) = [\theta + \Psi(t)]^T \omega(t) = \\ &K_0 r + C^T V_1 + d_0 h^T X_p + d^T V_2 + \Psi^T(t) \omega(t) \end{aligned} \quad (3.2-54)$$

将式(3.2-54)代入式(3.2-53),经过整理可得增广状态方程

$$\dot{X} = A_c X + b_c [K_0 r + \psi^T(t) \omega(t)] \quad (3.2-55)$$

式中

$$X^T = [X_p^T \quad V_1^T \quad V_2^T]$$

$$A_c = \begin{bmatrix} A_p + d_0 b_p h^T & b_p C^T & b_p d^T \\ b_p d_0 h^T & \Lambda + b C^T & b d^T \\ b h^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_p \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

当  $\psi(t) = 0$  时, 可调系统与参考模型相匹配。因此, 令式(3.2-55) 中  $\psi(t) = 0$ , 可得参考模型的增广状态方程。设  $X_{mc}$  表示参考模型的增广状态向量, 即

$$X_{mc}^T = [X_m^T \quad V_{m1}^T \quad V_{m2}^T] \quad (3.2-56)$$

$X$  为  $(3n-2)$  维向量,  $X_{mc}$  也为  $(3n-2)$  维向量, 则参考模型的状态方程可写成

$$\dot{X}_{mc} = A_c X_{mc} + b_c K_0 r \quad (3.2-57)$$

$$y_m = h_c^T X_{mc} = h^T X_m \quad (3.2-58)$$

式中,  $h_c^T = [h^T \quad 0 \quad 0]$ 。

参考模型的传递函数为

$$W_m(s) = h_c^T [sI - A_c]^{-1} b_c K_0 \quad (3.2-59)$$

由于被控对象的参数是未知的, 即  $A_c$  和  $b_c$  未知, 因而不能利用式(3.2-57) 来建立参考模型的状态方程。但可利用式(3.2-57) 和式(3.2-55) 推导出增广状态误差方程

$$\dot{e} = A_c e + b_c [\psi^T(t) \omega(t)] \quad (3.2-60)$$

式中

$$e = [x - X_{mc}] = \begin{bmatrix} X_p - X_m \\ V_1 - V_{m1} \\ V_2 - V_{m2} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} b_p \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

设被控对象输出与模型输出间的误差为  $e$ , 即

$$e = y_p - y_m = h_c^T [X - X_{mc}] = h_c^T e \quad (3.2-61)$$

式中,  $h_c^T = [h^T \quad 0 \quad 0]$ 。

如果把  $\psi^T(t) \omega(t)$  看成误差模型的输入, 把  $e$  看成误差模型的输出, 则误差模型输入输出之间的传递函数为

$$W_e(s) = h_c^T [sI - A_c]^{-1} b_c \quad (3.2-62)$$

把式(3.2-62) 与式(3.2-59) 相比较, 考虑到  $K_0 K_p = K_m$ , 可得

$$W_m(s) = W_e(s) K_0$$

$$W_e(s) = \frac{K_p}{K_m} W_m(s) \quad (3.2-63)$$

因此

$$e = \frac{K_p}{K_m} W_m(s) \psi^T(t) \omega(t) \quad (3.2-64)$$

图 3.2-7 表示误差模型图。

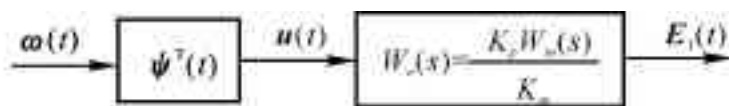


图 3.2-7 误差模型方块图

下面讨论如何设计可调参数  $\psi(t)$  的自适应规律,使误差模型全局渐近稳定。由于误差模型的状态  $e$  不能直接获得,不能利用它来构成自适应规律。误差模型的输入  $\omega(t) = [r(t) \ V_1(t) \ y_p(t)$

$V_2(t)]^T$  和输出  $e(t)$  都可直接获得,可利用这些信号来设计自适应规律。

选李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} [e^T P e + \psi^T \Gamma^{-1} \psi] \quad (3.2-65)$$

式中  $P$  和  $\Gamma$  都是正定对称阵。求  $V$  对时间的偏导数(考虑到  $\dot{\omega}^T \psi = \psi^T \dot{\omega}$ ),得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T [P A_c + A_c^T P] e + \psi^T \omega b_c^T P e + \psi^T \Gamma^{-1} \dot{\psi} = \\ &= \frac{1}{2} e^T [P A_c + A_c^T P] e + \psi^T (\omega b_c^T P e + \Gamma^{-1} \dot{\psi}) \end{aligned} \quad (3.2-66)$$

自适应规律选为

$$\dot{\psi} = -\Gamma \omega b_c^T P e \quad (3.2-67)$$

则

$$\dot{V} = \frac{1}{2} e^T [P A_c + A_c^T P] e \quad (3.2-68)$$

式中的  $P$  阵由下式确定

$$P A_c + A_c^T P = -Q \quad (3.2-69)$$

式中  $Q$  为选定的正定对称阵,只要  $A_c$  为稳定矩阵,总能找到正定对称阵  $Q$  和  $P$ 。

根据李雅普诺夫稳定性理论,由式(3.2-67)所表示的自适应规律,能保证自适应系统的全局渐近稳定。

为了在自适应规律中仅取输出广义误差项  $e$ ,在式(3.2-67)中,使

$$b_c^T P = h_c^T \quad (3.2-70)$$

则由式(3.2-61)和式(3.2-67)可得自适应规律为

$$\dot{\psi} = -\Gamma \omega e_1 \quad (3.2-71)$$

当系统参数为常值或缓慢变化时,可设

$$\dot{\theta} \approx 0$$

即

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}^H + \dot{\psi} = \dot{\psi} \quad (3.2-72)$$

则自适应控制律为

$$\dot{\theta} = -\Gamma \omega e_1 \quad (3.2-73)$$

从上面可看出,误差传递函数矩阵式(3.2-62)中  $A_c$ ,  $b_c$  和  $h_c^T$  必须满足式(3.2-69)和式(3.2-70),且式中  $P$  和  $Q$  都是正定对称阵。根据卡尔曼-雅库鲍维奇-波波夫正实引理可知,要使(3.2-69)式和(3.2-70)式成立的误差传递函数  $W_e(s)$  一定是严格正实的。反之,若  $W_e(s) = h_c^T [sI - A_c]^{-1} b_c$  是严格正实的,一定存在正定对称阵,使得式(3.2-69)和式(3.2-70)成立。由式(3.2-63)可知,误差传递函数  $W_e(s)$  与参考模型传递函数  $W_m(s)$  相同,只是放大系数有差

别。因此式(3.2-69)和式(3.2-70)能否成立,取决于 $W_m(s)$ 是否严格正实。这就要求 $W_m(s)$ 的分子和分母都为稳定多项式,而且它们的阶差 $n - m$ 不大于1。对于 $n - m > 1$ 的情况将在后面讨论。

例 3.2-4 设 $W_p(s)$ 和 $W_m(s)$ 分别为

$$W_p(s) = \frac{s+1}{s^2 - 5s + 6}, \quad W_m(s) = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 6}$$

$$y_p = W_p(s)u, \quad y_m = W_m(s)r$$

则

$$R_p(s) = s^2 - 5s + 6, \quad Z_p(s) = s + 1, \quad K_p = 1$$

$$R_m(s) = s^2 + 3s + 6, \quad Z_m(s) = s + 2, \quad K_m = 1$$

$$V_1 = -lV_1 + u, \quad \omega_1 = CV_1, \quad W_1(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{C}{s+l}$$

$$V_2 = -lV_2 + y_p, \quad \omega_2 = d_0 y_p + dV_2, \quad W_2(s) = d_0 + \frac{D(s)}{N(s)} = d_0 + \frac{d}{s+l}$$

$$e = y_p - y_m$$

$$\theta^T = [K_0 \quad C \quad d_0 \quad d]$$

将上述有关式子代入式(3.2-44),可得

$$W(s) = \frac{K_0(s+1)(s+l)}{(s+l+C)(s^2-5s+6) + (s+1)[d_0(s+l) + d]} = \frac{K_m Z_m(s)}{R_m(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 6}$$

要求 $N(s) = s+l = Z_m(s) = s+2$ , 则 $l = 2$ 。

在 $W(s)$ 式子中要求分子分母有公因子 $(s+1)$ ,可求出 $s+l+C = s+1$ ,得 $C = -1$ 。在 $W(s)$ 的分子分母中消去 $(s+1)$ ,而后令等号两边的分母相等,可得

$$K_0 = 1, \quad d_0 = 8, \quad d = -6$$

在式(3.2-72)中,设 $\Gamma$ 为单位阵,可得自适应规律

$$K_0 = -re_1, \quad C = -V_1 e, \quad d_0 = -y_p e_1, \quad d = -V_2 e$$

下面讨论 $n - m = 2$ 的情况:

这种情况相当于控制对象的传递函数为

$$W_p(s) = \frac{\beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

或

$$W_p(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

对应的参考模型传递函数为

$$W_m(s) = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

或

$$W_m(s) = \frac{b s + b_0}{s^3 + a s^2 + a s + a}$$

在这种情况下, $W_m(s)$ 不是严格正实的。如果引入 $L(s) = s + a$ ,只要适当选择 $a$ ,可使

$W_m(s)L(s)$  为严格正实。这时要把误差模型修改成如图 3.2-8 所示的形式。

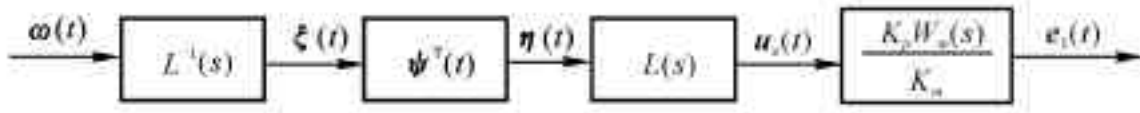


图 3.2-8 修改后的误差模型图

修改后的误差模型的输入为

$$u_e(t) = L(s) \Psi^T(t) L^{-1}(s) \omega(t) = P_L(\Psi^T) \omega(t) \quad (3.2-74)$$

式中  $P_L(\Psi^T) = L(s) \Psi^T(t) L^{-1}(s)$  称为综合算子。 $\omega(t)$  为  $2n$  维向量, 式(3.2-74) 可表示成

$$u_e(t) = \sum_{i=1}^{2n} P_L(\Psi_i) \omega_i(t) \quad (3.2-75)$$

增广状态误差方程为

$$\dot{e} = A_c e + b_c \left[ \sum_{i=1}^{2n} P_L(\Psi_i) \omega_i(t) \right] \quad (3.2-76)$$

当  $L(s) = s + a$  时, 可把  $P_L(\Psi_i)$  表示成

$$P_L(\Psi) = \Psi + \Psi L^{-1} \quad (3.2-77)$$

上式可推导如下, 由图 3.2-9 可得

$$\begin{aligned} \xi + a\xi &= \omega \\ \eta &= \Psi^T \xi \\ u_e &= \eta + a\eta = \Psi^T \xi + \Psi^T \xi + a\Psi^T \xi = \Psi^T \xi + \Psi^T (\xi + a\xi) = \\ &= \Psi^T \xi + \Psi^T \omega = \Psi^T \omega + \frac{1}{s+a} \Psi^T \omega \\ u_e &= (\Psi^T + \Psi^T L^{-1}) \omega \end{aligned} \quad (3.2-78)$$

比较式(3.2-78) 与式(3.2-74) 得

$$P_L(\Psi^T) = \Psi^T + \Psi^T L^{-1}$$

把式(3.2-77) 代入式(3.2-76) 得

$$\dot{e} = A_c e + b_c \left[ \sum_{i=1}^{2n} (\Psi_i + \Psi_i L^{-1}) \omega_i(t) \right] \quad (3.2-79)$$

$$a = h_c^T e \quad (3.2-80)$$

这样可得  $n - m = 2$  时的自适应系统结构图, 如图 3.2-9 所示。

在图 3.2-9 中, 辅助信号发生器  $F_1$  输出  $\omega_i$  和  $\xi_i$ , 其中  $i = 2, \dots, n$ 。辅助信号发生器  $F_2$  输出  $\omega_i$  和  $\xi_i$ , 其中  $i = n+1, \dots, 2n$ 。 $\xi(t) = L^{-1}(s) \omega(t)$ 。在图 3.2-9 中,  $L(s)W_m(s)$  为等效参考模型,  $\xi(t)$  相当于输入。等效参考模型为

$$W_{m1}(s) = [h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c] L(s) = W_m(s)(s + a) \quad (3.2-81)$$

当  $W_{m1}(s)$  为严格正实传递函数时, 一定存在正定对称阵  $P$  和  $Q$ , 使得下列条件满足

$$PA_c + A_c^T P = -Q$$

$$Pb_c = h_c$$



递函数。再在此基础上确定自适应控制规律。

可用状态变量设计模型参考自适应系统,也可用输入输出设计模型参考自适应系统,下面分别讨论之。

### 一、用状态变量设计模型参考自适应控制律

设模型的状态方程为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m r \tag{3.3-1}$$

式中  $X_m$  为  $n$  维状态向量,  $r$  为  $m$  维输入向量,  $A_m$  为  $n \times n$  稳定矩阵,  $B_m$  为  $n \times m$  矩阵。

控制对象的状态方程为

$$\dot{X}_p = A_p(t) X_p + B_p(t) u \tag{3.3-2}$$

式中  $X_p$  为  $n$  维状态向量,  $u$  为  $m$  维控制向量,  $A_p(t)$  为  $n \times n$  矩阵,  $B_p(t)$  为  $n \times m$  矩阵。

一般自适应控制系统采用如图 3.3-1 所示的前馈控制加反馈控制。

从图 3.3-1 可得

$$u = K(t) r + F(t) X_p \tag{3.3-3}$$

将式(3.3-3)代入式(3.3-2)得

$$\begin{aligned} \dot{X}_p &= [A_p(t) + B_p(t) F(t)] X_p + \\ &\quad B_p(t) K(t) r \end{aligned} \tag{3.3-4}$$

设

$$\begin{aligned} A_p(t) + B_p(t) F(t) &= A_s(t) \\ B_p(t) K(t) &= B_s(t) \end{aligned} \tag{3.3-5}$$

因  $F(t)$  与  $K(t)$  都是误差  $e$  的函数。因此  $A_s(t)$  和  $B_s(t)$  也与误差  $e$  有关,则  $A_s(t)$  和  $B_s(t)$  可表示成

$$A_s(t) = A_s(e, t), \quad B_s(t) = B_s(e, t) \tag{3.3-6}$$

则式(3.3-4)可表示成

$$\dot{X}_p = A_s(e, t) X_p + B_s(e, t) r$$

在上式中  $X_p$  用  $X_s$  表示,则

$$\dot{X}_s = A_s(e, t) X_s + B_s(e, t) r \tag{3.3-7}$$

式(3.3-7)为可调系统,  $X_s$  就是可调系统的状态向量。  $A_s(e, t)$  和  $B_s(e, t)$  按照自适应规律进行调整。系统如图 3.3-2 所示。

按照超稳定性理论设计模型参考自适应系统的步骤如下：

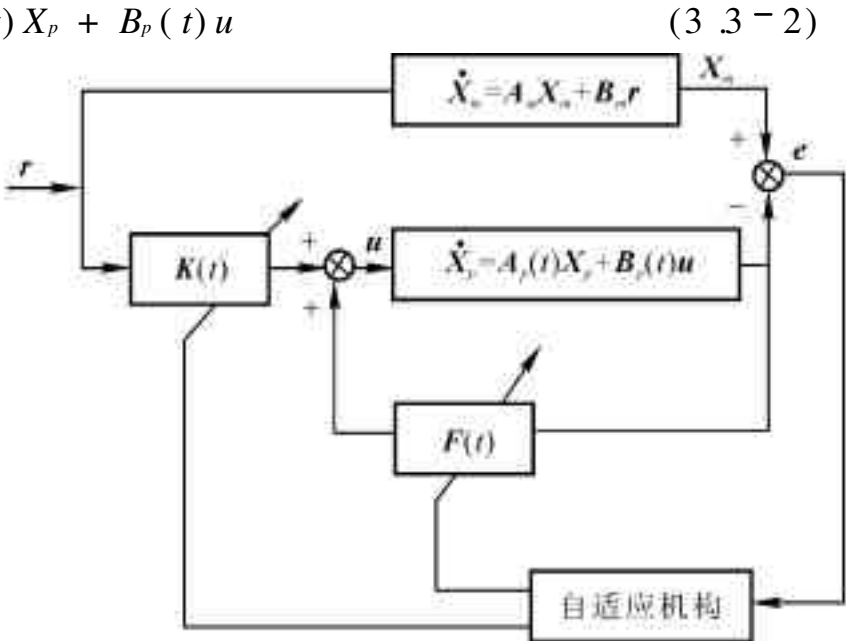


图 3.3-1 模型参考自适应控制图

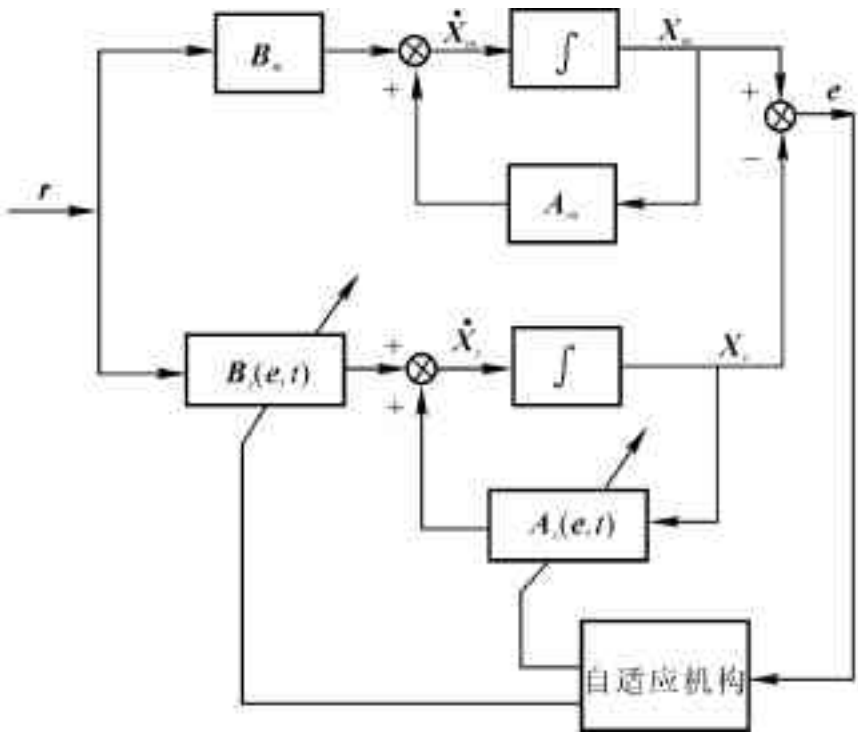


图 3.3-2 用状态方程描述的模型参考自适应系统



第一步 求出等价的非线性时变反馈系统。设广义误差向量为

$$e = X_m - X_s \quad (3.3-8)$$

由式(3.3-1)和式(3.3-2)可得

$$e = X_m - X_s = A_m e + [A_m - A_s(e, t)] X_s + [B_m - B_s(e, t)] r \quad (3.3-9)$$

等价的非线性时变反馈系统,由对象和模型所组成的前向方块和具有非线性时变特性的自适应机构的等价反馈方块所组成。按照超稳定性理论,要求等价反馈方块满足波波夫积分不等式,同时还要求等价前向方块严格正实。为了使前向方块严格正实,要求前向方块的传递函数分子和分母的阶数差不大于1,如果阶数差大于1,要引入补偿器

$$V = De \quad (3.3-10)$$

使原来的前向方块和补偿器串联后合成的前向方块分子和分母的阶差不大于1,即保证合成后的前向方块严格正实。

由于自适应机构的输入为 $V$ ,则在式(3.3-6)中的 $A_s(e, t)$ 和 $B_s(e, t)$ 变为 $V$ 和 $t$ 的函数,因此

$$A_s(e, t) = A_s(V, t), \quad B_s(e, t) = B_s(V, t) \quad (3.3-11)$$

$A_s(V, t)$ 和 $B_s(V, t)$ 是受系统工作环境的影响而变的参数,同时它们又受自适应机构的调节。自适应机构的作用就是力图使 $A_s(V, t)$ 和 $B_s(V, t)$ 接近 $A_m$ 和 $B_m$ 。自适应规律是补偿器输出 $V$ 的时变非线性函数,为了使得在 $V(t) = 0$ 时仍能保持调节作用,则在自适应规律中应包含有记忆功能的积分规律,一般可采用比例加积分的调节规律

$$A_s(V, t) = \int_0^t \Phi_1(V, t, \tau) d\tau + \Phi_2(V, t) + A_{s0} \quad (3.3-12)$$

$$B_s(V, t) = \int_0^t \Psi_1(V, t, \tau) d\tau + \Psi_2(V, t) + B_{s0} \quad (3.3-13)$$

式中 $\Phi_1, \Phi_2$ 和 $\Psi_1, \Psi_2$ 分别是 $n \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵。

把方程式(3.3-6)和式(3.3-7)代入式(3.3-4)可得

$$e = A_m e + I W_1 \quad (3.3-14)$$

式中

$$W = -W_1 = \left[ \int_0^t \Phi_1(V, t, \tau) d\tau + \Phi_2(V, t) + A_{s0} - A_m \right] X_m + \left[ \int_0^t \Psi_1(V, t, \tau) d\tau + \Psi_2(V, t) + B_{s0} - B_m \right] r \quad (3.3-15)$$

由式(3.3-8)和式(3.3-5)组成自适应系统,如图3.3-3所示。

第二步 使等价反馈方框满足波波夫积分不等式

寻找 $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1$ 和 $\Psi_2$ 的解,使得等价反馈方框满足波波夫积分不等式

$$\eta(0, t) = \int_0^t V^T W dt \geq -\eta_0^2 \quad (3.3-16)$$

式中 $\eta_0^2$ 是一个任意的正值有限常数。将式(3.3-15)代入式(3.3-16)得

$$\eta(0, t) = \int_0^t V^T \left[ \int_0^t \Phi_1(V, t, \tau) d\tau + \Phi_2(V, t) + A_{s0} - A_m \right] X_s dt + \int_0^t V^T \left[ \int_0^t \Psi_1(V, t, \tau) d\tau + \Psi_2(V, t) + B_{s0} - B_m \right] r dt \geq -\eta_0^2 \quad (3.3-17)$$

如果式(3.3-17)左边两项分别满足同样形式的不等式,则式(3.3-17)一定成立。设

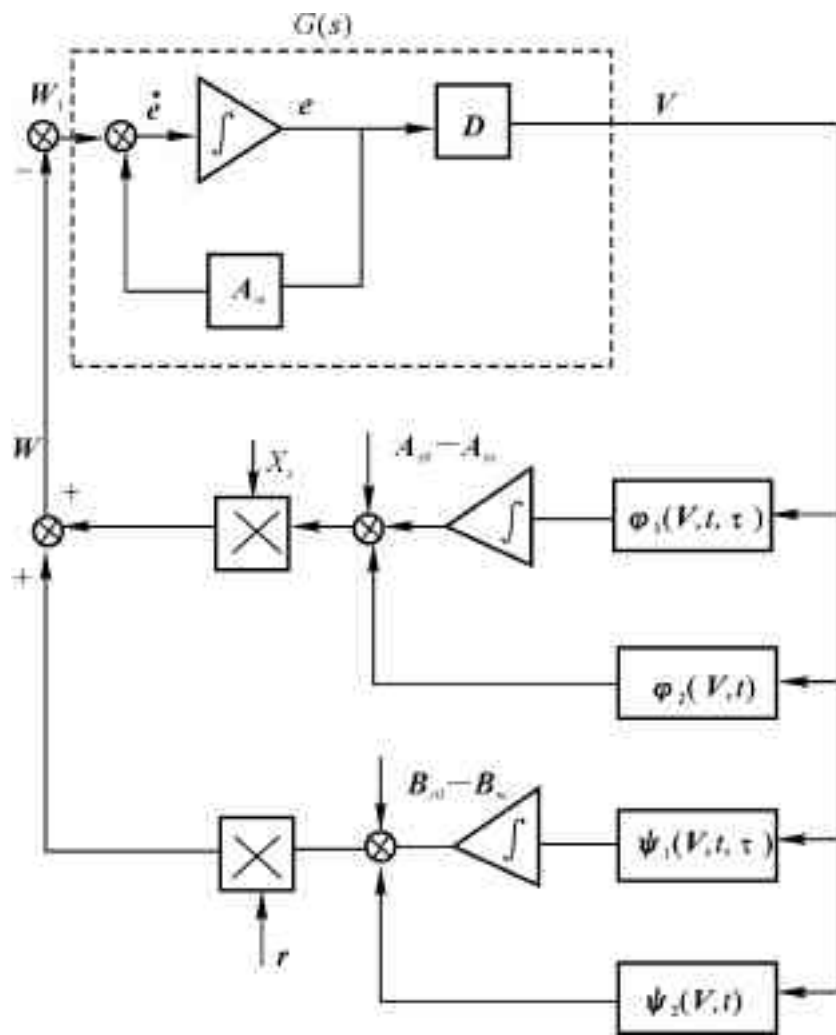


图 3.3-3 模型参考自适应系统的等价系统图

$$\eta(0, t) = \eta_\Phi(0, t) + \eta_\Psi(0, t)$$

式中

$$\eta_\Phi(0, t) = \int_0^{t_1} V^T \left[ \int_0^t \Phi_1(V, t, \tau) d\tau + \Phi_2(V, t) + A_{s0} - A_m \right] X_s dt \geq -r_\Phi^2 \quad (3.3-18)$$

$$\eta_\Psi(0, t) = \int_0^{t_1} V^T \left[ \int_0^t \Psi_1(V, t, \tau) d\tau + \Psi_2(V, t) + B_{s0} - B_m \right] r dt \geq -r_\Psi^2 \quad (3.3-19)$$

式中  $r_\Phi^2 \geq 0$ ,  $r_\Psi^2 \geq 0$ 。

式(3.3-18)和式(3.3-19)在形式上相同,因此只要求出式(3.3-18)的解,就可类推出式(3.3-19)的解。为了求解  $\Phi_1(V, t, \tau)$  和  $\Phi_2(V, t)$ , 再将式(3.3-18)分解成二个不等式  $\eta_{\Phi 1}(0, t)$  和  $\eta_{\Phi 2}(0, t)$ 。

$$\eta_{\Phi 1}(0, t) = \int_0^{t_1} V^T \left[ \int_0^t \Phi_1(V, t, \tau) d\tau + A_{s0} - A_m \right] X_s dt \geq -r_\Phi^2 \quad (3.3-20)$$

$$\eta_{\Phi 2}(0, t) = \int_0^{t_1} V^T \Phi_2(V, t) X_s dt \geq -r_{\Phi 2}^2 \quad (3.3-21)$$

式中  $r_{\Phi 1}^2 \geq 0$ ,  $r_{\Phi 2}^2 \geq 0$ 。

将二个  $n \times n$  矩阵  $\Phi(V, t, \tau)$  和  $[A_{s0} - A_m]$  分解为列向量

$$\Phi_1(V, t, \tau) = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_n] \quad (3.3-22)$$

$$[A_{s0} - A_m] = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \quad (3.3-23)$$

式中

$$\Phi_i = [\Phi_{i1} \quad \Phi_{i2} \quad \cdots \quad \Phi_{in}] \quad (3.3-24)$$

$$a_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}] \quad (3.3-25)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

考虑到  $X_s = [x_{s1} \quad x_{s2} \quad \cdots \quad x_{sn}]$ , 可把  $\eta_{\Phi_1}(0, t_1)$  表示成

$$\eta_{\Phi_1}(0, t_1) = \sum_{i=1}^n \eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) \quad (3.3-26)$$

式中

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) = \int_0^{t_1} x_{si} V^T \left[ \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + a_i \right] dt \quad (3.3-27)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

因式(3.3-26) 满足波波夫积分不等式的充分条件为该式左边每一项都满足波波夫积分不等式, 即

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) \geq -\dot{n}_i^2, \quad \dot{n}_i^2 \geq 0 \quad (3.3-28)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

也就是

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) = \int_0^{t_1} x_{si} V^T \left[ \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + a_i \right] dt \geq -\dot{n}_i^2$$

$$\dot{n}_i^2 \geq 0 \quad (3.3-29)$$

为了求不等式(3.3-29) 的解, 先讨论正定积分核的定义及性质。

正定积分核的定义: 一个方阵  $K(t, \tau)$ , 如果在任意时间区间上, 对该区面中的所有分段连续的向量函数  $f(t)$ , 下列式子成立

$$\eta(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^T(t) \left[ \int_{t_0}^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau \right] dt \geq 0 \quad (3.3-30)$$

则称  $K(t, \tau)$  为正定积分核。

积分  $\int_{t_0}^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau$  可看作输入为  $f(t)$  的某个系统的输出, 因此  $\eta(t_0, t_1)$  可解释为输入与输出内积的积分, 使这个内积的积分大于或等于零的  $K(t, \tau)$  就称为正定积分核。

若  $K(t, \tau) = K(t - \tau)$ , 且它的元素都一致有界, 则  $K(t - \tau)$  的拉氏变换

$$G(s) = \int_0^\infty K(t) e^{-st} dt \quad (3.3-31)$$

使  $K(t - \tau)$  为正定积分核的充要条件是  $G(s)$  为正实传递函数。 $G(s)$  在  $s = 0$  处有单极点。

下面来求式(3.3-29) 的解, 经过证明可求得满足式(3.3-29) 的  $\Phi$  为

$$\Phi_i(V, t, \tau) = K_A(t - \tau) V(\tau) x_{si}(\tau) \quad (3.3-32)$$

式中  $K_A(t - \tau)$  是正定积分核。

下面进行证明, 将式(3.3-32) 代入式(3.3-29)

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) = \int_0^{t_1} x_{si} V^T \left[ \int_0^t K_A(t - \tau) V(\tau) x_{si}(\tau) d\tau + a_i \right] dt \quad (3.3-33)$$

在上式中令  $V(\tau) x_{si}(\tau) = f_i(\tau)$ , 则可把式(3.3-33) 写成

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) = \int_0^{t_1} f_i^T(t) \left[ \int_0^t K_A(t - \tau) f_i(\tau) d\tau \right] dt + \int_0^{t_1} f_i^T(t) a_i dt \quad (3.3-34)$$

因  $K_A(t - \tau)$  是正定积分核, 式(3.3-33) 右边第一项为

$$\int_0^{t_1} f_i^T(t) \left[ \int_0^t K_A(t - \tau) f_i(\tau) d\tau \right] dt \geq 0 \quad (3.3-35)$$

对于  $a_i \neq 0$ , 可把  $a_i$  看作由积分核  $K_A(t - \tau)$  所表征的系统在  $t = 0$  时的输出, 其输入量为  $f_i(-t_0)$ 。由于  $K_A(t - \tau)$  的拉氏变换在  $s = 0$  处有一极点, 即有一积分环节, 因此存在  $t_0 < \infty$  及有限输入  $f_i(-t_0)$ , 使得

$$a_i = \int_{-t_0}^0 K_A(t - \tau) f_i(-t_0) d\tau \quad (3.3-36)$$

$$t_0 < \infty, \quad \|f_i(-t_0)\| < \infty$$

引进符号

$$f_i(t) = \begin{cases} f_i(t), & t \geq 0 \\ f_i(-t_0), & -t_0 \leq t < 0 \end{cases} \quad (3.3-37)$$

则

$$\begin{aligned} \eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) &= \int_0^{t_1} f_i^T(t) \left[ \int_{-t_0}^t K_A(t - \tau) f_i(\tau) d\tau \right] dt = \\ &= \int_{-t_0}^t f_i^T(t) \left[ \int_{-t_0}^t K_A(t - \tau) f_i(\tau) d\tau \right] dt - \\ &= \int_{-t_0}^0 f_i^T(-t_0) \left[ \int_{-t_0}^t K_A(t - \tau) f_i(-t_0) d\tau \right] dt \end{aligned} \quad (3.3-38)$$

在上式中,  $K_A(t - \tau)$  是一个正定积分核, 相应的传递函数阵是一个稳定的传递函数矩阵, 它的元素都是有界的。因此式(3.3-38) 右边第一项大于或等于零。设  $K_A(t - \tau)$  元素上界为  $m_i$ , 又因  $\|f_i(-t_0)\| < \infty$ , 则式(3.3-38) 右边第二项为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-t_0}^0 f_i^T(-t_0) \left[ \int_{-t_0}^t K_A(t - \tau) f_i(-t_0) d\tau \right] dt \leq \\ &= \int_{-t_0}^0 \int_{-t_0}^t m_i \|f_i(-t_0)\|^2 d\tau dt = \frac{1}{2} m_i \|f_i(-t_0)\|^2 t_0 = \frac{1}{2} m_i t_0^2 \end{aligned} \quad (3.3-39)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), \quad 0 \leq m_i < \infty$$

将式(3.3-39) 的结果代入式(3.3-38), 可得

$$\eta_{\Phi_1 i}(0, t_1) \geq -\frac{1}{2} m_i \|f_i(-t_0)\|^2 t_0^2 = -\frac{1}{2} m_i t_0^2 \quad (3.3-40)$$

从上面的证明可看到, 选择  $\Phi_i(V, t, \tau) = K_A(t - \tau) V(\tau) X_i(\tau)$  是合适的, 将  $\Phi_i(V, t, \tau)$  代入  $\Phi(V, t, \tau)$  公式得

$$\begin{aligned} \Phi_1(V, t, \tau) &= [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_n] = \\ &= [K_A(t - \tau) V x_{s1} \quad K_A(t - \tau) V x_{s2} \quad \dots \quad K_A(t - \tau) V x_{sn}] = \\ &= K_A(t - \tau) V [x_{s1} \quad x_{s2} \quad \dots \quad x_{sn}] = K_A(t - \tau) V(\tau) X_s^T(\tau) \end{aligned} \quad (3.3-41)$$

因此所选的  $\Phi_1(V, t, \tau)$  能满足式(3.3-20)。

为了使不等式(3.3-21) 成立, 选

$$\Phi_2(V, t) = K_A'(t) V(t) X_s^T(t) \quad (3.3-42)$$

式中,  $K_A'(t) \geq 0$ , 并令  $r_{\Phi_2}^2 = 0$ , 则

$$\eta_{\Phi_2}(0, t_1) = \int_0^{t_1} V^T K_A'(t) V X_s^T dt \geq 0 \quad (3.3-43)$$

成立

由于式(3.3-20) 和式(3.3-21) 成立, 则式(3.3-19) 也必能满足。

按同样推导方法, 如果选择

$$\Psi_1(V, t, \tau) = K_B(t - \tau)V(\tau)r^T(\tau), \quad \tau \leq t \quad (3.3-44)$$

$$\Psi_2(t) = K_B'(t)V(t)r^T(t) \quad (3.3-45)$$

也可使式(3.3-19)满足。由上述方式得到的等价反馈方块,其特征满足波波夫积分不等式,因而系统也就成为超稳定的了。

第三步 根据等价前向方块正实性要求,确定线性补偿器  $D(s)$

在反馈方块满足波波夫积分不等式之后,要使系统为渐近超稳定系统,要求由式(3.3-14)和式(3.3-10)所形成的系统式(3.3-14)和式(3.3-10)的等价前向方块的传递函数阵

$$Z(s) = D[sI - A_m]^{-1}I \quad (3.3-46)$$

必须是严格正实的。式中  $D$  可根据正实引理求得。当参考模型为渐近稳定时,总可以找到对称正定阵  $P$  和  $Q$  使得下列方程

$$PA_m + A_m^T P = -Q \quad (3.3-47)$$

$$PI = D \quad (3.3-48)$$

成立。

按上述二式求出的  $D$  必能使式(3.3-46)的传递函数阵  $Z(s)$  为严格正实。由此得到并联模型参考自适应系统也必是全局渐近稳定的,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

第四步 在确定  $K_A(t)$ ,  $K_B(t)$  和  $D(s)$  之后,就可作出自适应系统的结构图,如图 3.3-4 所示。

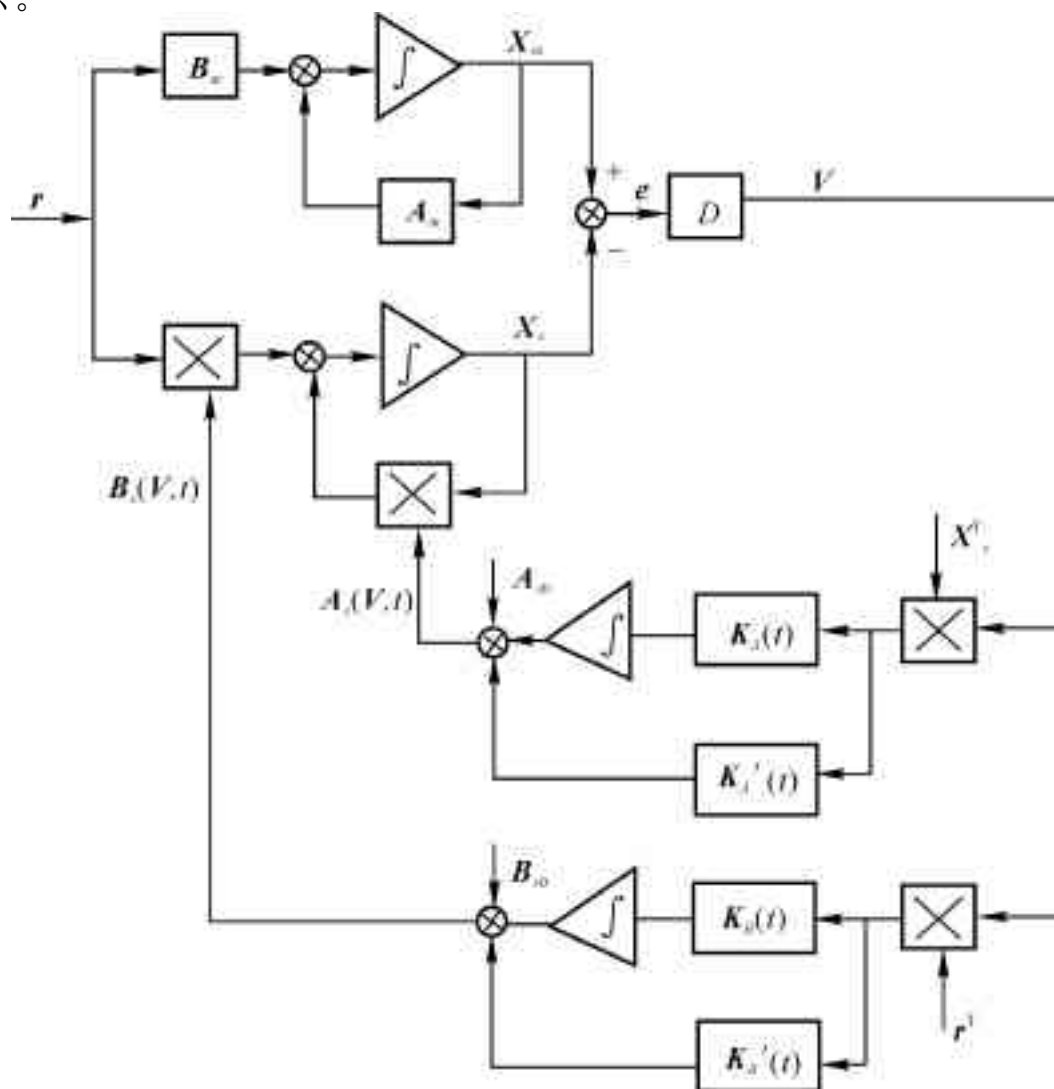


图 3.3-4 模型参考自适应系统结构图

下面讨论矩阵  $K_A, K_B, K_A'$  和  $K_B'$  的选取问题。由于选取的方法不同,我们可得不同类型的自适应规律,例如比例式自适应控制,继电式自适应控制。只要所选得的  $F_A, K_A', K_B$  和  $K_B'$  满足非负定条件,就能使式(3.3-18)和式(3.3-19)得到满足。 $K_A, K_A', K_B$  和  $K_B'$  有很多种选法,这样可得很多种自适应控制规律。例如

### (1) 比例 + 积分自适应规律

选取

$$\left. \begin{aligned} K_A(t - \tau) &= K_A > 0, & K_B(t - \tau) &= K_B > 0, & \tau &\leq t \\ K_A'(t) &= K_A' \geq 0, & K_B'(t) &= K_B \geq 0, & t &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3-49)$$

### (2) 继电式自适应规律

选取

$$\left. \begin{aligned} K_A(t - \tau) &= K_A > 0, & K_B(t - \tau) &= K_B > 0, & \tau &\leq t \\ K_A'(t) &= K_B' = K_2 \operatorname{diag} \left[ \frac{1}{|V_i|} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.3-50)$$

则

$$\Phi_2(V, t) = K_2 X_s^T \operatorname{sign}(V)$$

$$\Psi_2(V, t) = K_2 r^T \operatorname{sign}(V)$$

下面讨论参数收敛问题:按上述方法设计的模型参考自适应系统,能保证被控对象的状态收敛于参考模型的状态。如要实现参数收敛,由式(3.3-9)可知,必须要求输入控制向量  $r$  和状态向量  $X_s$  线性独立。为了满足这一条件,要求

#### (1) 参考模型完全可控;

#### (2) $r$ 的每个分量线性独立,而且都要求包含有多于 $\frac{n}{2}$ 个不同频率的正弦信号所组成。

## 二、用系统输入输出值设计模型参考自适应系统

在上面采用状态变量来构成自适应控制规律。在许多实际系统中往往不能得到全部状态变量,为此提出用输入输出的测量值来构成自适应规律。但用输入输出测量值来构成自适应规律时,在自适应规律中不仅包含输入输出本身,还包含它们的各阶导数,因而在自适应机构中要引入微分器,这就降低了自适应控制的抗干扰能力。为了避免这一缺点,可以在系统中引入状态变量滤波器,由它提出相应的滤波导数,来构成自适应控制规律。下面以单输入单输出并联模型参考自适应系统为例进行讨论。分无状态变量滤波器和有状态变量滤波器等几种情况来讨论。

### (一) 无状态变量滤波器

无状态变量滤波器情况的并联模型参考自适应系统如图 3.3-5 所示。

参考模型方程为

$$(p^2 + a_{m1}p + a_{m0})y_m = (b_{m1}p + b_{m0})r \quad (3.3-51)$$

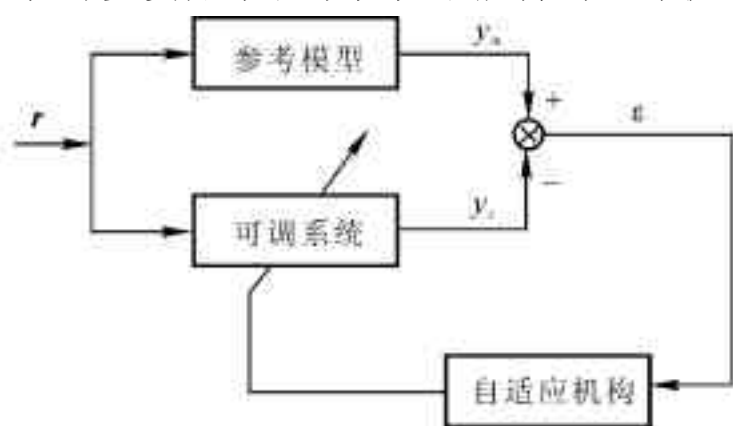


图 3.3-5 无状态变量滤波器的并联模型参考自适应系统

式中  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $r$  为模型的输入,  $y_m$  为模型输出。可调系统方程为

$$(p^2 + a_{s1} p + a_{s0}) y_s = (b_{s1} p + b_{s0}) r \quad (3.3-52)$$

式中  $y_s$  为控制对象输出。

广义输出误差为

$$\varepsilon = y_m - y_s \quad (3.3-53)$$

串联补偿器  $D(p)$  为

$$V = D \varepsilon = (d_1 p + d_0) \varepsilon \quad (3.3-54)$$

自适应规律为

$$a_{si}(V, t) = \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + \Phi_i(V, t) + a_{si}(0) \quad (3.3-55)$$

$$i = 0, 1$$

$$b_{si}(V, t) = \int_0^t \Psi_i(V, t, \tau) d\tau + \Psi_i(V, t) + b_{si}(0) \quad (3.3-56)$$

$$i = 0, 1$$

要求当  $t$  很大时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_m - y_s) = 0$$

由方程式(3.3-51), 式(3.3-52) 和式(3.3-53) 可得

$$(p^2 + a_{m1} p + a_{m0}) \varepsilon = [(a_{m1} - a_{s1}) p + a_{m0} - a_{s0}] y_s + [(b_{m1} - b_{s1}) p + b_{m0} - b_{s0}] r \quad (3.3-57)$$

令

$$[(a_{m1} - a_{s1}) p + a_{m0} - a_{s0}] y_s + [(b_{m1} - b_{s1}) p + b_{m0} - b_{s0}] r = \omega \quad (3.3-58)$$

则式(3.3-57) 成为

$$(p^2 + a_{m1} p + a_{m0}) \varepsilon = \omega \quad (3.3-59)$$

把式(3.3-55) 和式(3.3-57) 代入式(3.3-58) 可得

$$\omega = - \omega = - \left\{ \sum_{i=0}^1 \left[ \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + \Phi_i(V, t) + a_{si}(0) - a_{mi} \right] p^i y_s + \sum_{i=0}^1 \left[ \int_0^t \Psi_i(V, t, \tau) d\tau + \Psi_i(V, t) + b_{si}(0) - b_{mi} \right] p^i r \right\} \quad (3.3-60)$$

$V = D(p) \varepsilon$  和  $\omega$  为等价反馈方块的要求。根据超稳定性理论对等价反馈方块的要求

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} V^T \omega dt \geq -\eta_0^2, \quad t_1 > 0$$

可得

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= -K_{ai}(t - \tau) V(\tau) p^i y_s(\tau) \\ \Phi_i &= -K_{ai}'(t) V(t) p^i y_s(t) \\ \Psi_i &= K_{bi}(t - \tau) V(\tau) p^i r(\tau) \\ \Psi_i &= K_{bi}'(t) V(t) p^i r(t) \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1) \quad (3.3-61)$$

等价前向方块的传递函数为

$$h(s) = \frac{d_1 s + d_0}{s^2 + a_{m1} s + a_{m0}} \quad (3.3-62)$$

要使自适应系统为超稳定性系统, 等价的前向方块传递函数  $h(s)$  应当严格正实。从式 (3.3-61) 可看出, 有自适应律中包含输入输出的导数, 实现起来有困难, 同时抗干扰能力也差。因此须要采用状态变量滤波器。

## (二) 具有状态变量滤波器的并联模型参考自适应系统

状态变量滤波器可放在可调系统之前, 也可放在可调系统之后, 下面分别讨论。

### (1) 状态变量滤波器放在可调系统的输入端及参考模型的输出端

对这种情况, 系统的结构图如图 3.3-6 所示。

一般说来, 控制对象的参数是不能任意调节的。图 3.3-6 所示的系统结构图常用于自适应辨识, 参考模型为辨识对象, 可调系统为并联估计模型。当自适应机构能很好工作时, 可调系统的参数就是辨识对象的参数。如果为了参数辨识, 则可调系统的结构可以人为地安排, 系统方程如下:

参考模型方程

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{mi} p^i \right] y_m = \left[ \sum_{i=0}^m b_{mi} p^i \right] r, \quad a_{mn} = 1$$

(3.3-63)

接在模型输出端的状态滤波器的方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} C_i p^i \right] y_{mf} = y_m, \quad C_{n-1} = 1 \quad (3.3-64)$$

按在可调系统输入端的状态变量滤波器方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} C_i p^i \right] r_f = r, \quad C_{n-1} = 1 \quad (3.3-65)$$

可调系统方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{si}(V, t) p^i \right] y_{sf} = \left[ \sum_{i=0}^m b_{si}(V, t) p^i \right] r_f$$

$$a_{sn}(V, t) = 1 \quad (3.3-66)$$

广义输出误差为

$$\varepsilon_f = y_{mf} - y_{sf} \quad (3.3-67)$$

自适应机构方程为

$$V = D(p) \varepsilon_f = \left[ \sum_{i=0}^{n-1} d_i p^i \right] \varepsilon_f \quad (3.3-68)$$

自适应规律取下列形式

$$a_{si}(V, t) = \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + \Phi_i(V, t) + a_{si}(0) \quad (3.3-69)$$

$$i = 0, \dots, n-1$$

$$b_{si}(V, t) = \int_0^t \Psi_i(V, t, \tau) d\tau + \Psi_i(V, t) + b_{si}(0) \quad (3.3-70)$$

$$i = 0, \dots, m$$

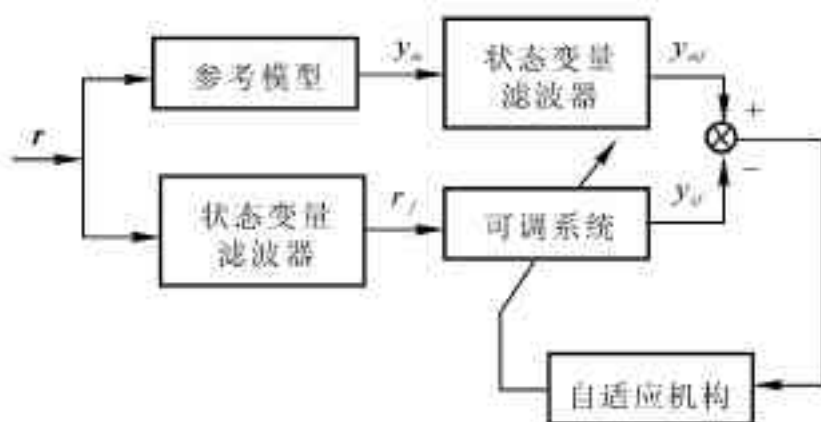


图 3.3-6 状态变量滤波器放在可调系统之前的模型参考自适应控制



在这种情况下设计目标是:对于任意初始误差  $\varepsilon_f(0)$ ,  $a_{mi} - a_{si}(0)$ ,  $b_{mi} - b_{si}(0)$  和任意分段连续的输入  $r$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f = \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{mf} - y_{sf}) = 0 \quad (3.3-71)$$

下面推导自适应公式。因为参考模型和状态变量过滤器都是线性定常的,在图 3.3-6 中如参考模型和状态变量过滤器互换位置,可得相同的  $y_{mf}$ , 则可得

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{mi} p^i \right] y_{mf} = \left[ \sum_{i=0}^m b_{mi} p^i \right] r_f \quad (3.3-72)$$

由方程式(3.3-66)和式(3.3-72)得

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{mi} p^i \right] (y_{mf} - y_{sf}) = \left[ \sum_{i=0}^m (b_{mi} - b_{si}) p^i \right] r_f + \left[ \sum_{i=0}^n (a_{si} - a_{mi}) p^i \right] y_{sf}$$

考虑到式(3.3-67)得

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_i p^i \right] \varepsilon_f = \left[ \sum_{i=0}^n (a_{si} - a_{mi}) p^i \right] y_{sf} + \left[ \sum_{i=0}^m (b_{mi} - b_{si}) p^i \right] r_f \quad (3.3-73)$$

令

$$\omega_i = \left[ \sum_{i=0}^n (a_{si} - a_{mi}) p^i \right] y_{sf} + \left[ \sum_{i=0}^m (b_{mi} - b_{si}) p^i \right] r_f \quad (3.3-74)$$

则式(3.3-73)可写成

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{mi} p^i \right] \varepsilon_f = \omega_i \quad (3.3-75)$$

把式(3.3-69),式(3.3-70)代入式(3.3-74)得

$$\begin{aligned} \omega = -\dot{\omega} = - \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_0^t \phi_{1i}(V, t, \tau) d\tau + \phi_{2i}(V, t) + a_{si}(0) - a_{mi} \right] p^i \right\} y_{sf} + \\ \left\{ \sum_{i=0}^m \left[ \int_0^t \psi_{1i}(V, t, \tau) d\tau + \psi_{2i}(V, t) + b_{si}(0) - b_{mi} \right] p^i \right\} r_f \end{aligned} \quad (3.3-76)$$

由式(3.3-75),式(3.3-68)和式(3.3-76)所构成的方程组描述了等价的时变非线性反馈系统。在这里线性正向方块由方程式(3.3-75)和式(3.3-68)所描述,以  $\omega_i$  为输入,  $V$  为输出。时变非线性反馈方块由方程式(3.3-76)所描述,其输入为  $V$ , 输出为  $\omega$ 。反馈系统必须满足波波夫积分不等式

$$\eta(0, t_1) = \int_0^{t_1} V^T \omega dt \geq -r_0^2, \quad t_1 \geq 0$$

由此可得自适应规律

$$\phi_{1i} = -K_{ai}(t - \tau) V(\tau) p^i y_{sf}(\tau), \quad \tau \leq t \quad (3.3-77)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\phi_{2i} = -K_{ai}'(t) V(t) p^i y_{sf}(t) \quad (3.3-78)$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\psi_{1i} = K_{bi}(t - \tau) V(\tau) p^i r_f(\tau), \quad \tau \leq t \quad (3.3-79)$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

$$\psi_{2i} = K_{bi}'(t) V(t) p^i r_f(t) \quad (3.3-80)$$

$$i = 0, 1, \dots, m$$

式中  $K_{ai}(t - \tau)$  和  $K_{bi}(t - \tau)$  是正定标量积分核,  $K_{ai}'$  和  $K_{bi}'$  在  $t \geq 0$  时为时变非负增益。

系统的等价前向方块的传递函数为

$$h(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} d_i s^i}{s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{mi} s^i} \quad (3.3-81)$$

要使自适应系统成为渐近超稳定系统,等价的前向方块的传递函数  $h(s)$  必须是严格正实的。

例 3.3-1 设有二阶系统,其参考模型方程为

$$(p^2 + a_{m1} p + a_{m0}) y_m = (b_{m1} p + b_{m0}) r$$

接在模型输出端的状态变量滤波器方程为

$$(p + C_0) y_{mf} = y_m$$

并联可调系统方程为

$$[p^2 + a_{s1}(V, t)p + a_{s0}(V, t)] y_{sf} = [b_{s1}(V, t)p + b_{s0}(V, t)] r$$

接在可调系统输入端的状态变量滤波器的方程为

$$(p + C_0) r_f = r$$

广义输出误差为

$$\varepsilon_f = y_{mf} - y_{sf}$$

自适应机构方程为

$$V = D(p) \varepsilon_f = (d_1 p + d_0) \varepsilon_f$$

自适应规律为

$$a_{si}(V, t) = \int_0^t \phi_{1i}(V, t, \tau) d\tau + \phi_{2i}(V, t) + a_{si}(0)$$

$$i = 0, 1$$

$$b_{si}(V, t) = \int_0^t \psi_{1i}(V, t, \tau) d\tau + \psi_{2i}(V, t) + b_{si}(0)$$

$$i = 0, 1$$

根据超稳定性理论可得

$$\phi_{11} = -K_{a1}(t - \tau) V(\tau) p y_{sf}(\tau), \quad \tau \leq t$$

$$\phi_{10} = -K_{a0}(t - \tau) V(\tau) y_{sf}(\tau), \quad \tau \leq t$$

$$\phi_{21} = -K_{a1}'(t) V(t) p y_{sf}(t)$$

$$\phi_{20} = -K_{a0}'(t) V(t) y_{sf}(t)$$

$$\psi_{11} = K_{b1}(t - \tau) V(\tau) p r_f(\tau), \quad \tau \leq t$$

$$\psi_{10} = K_{b0}(t - \tau) V(\tau) r_f(\tau), \quad \tau \leq t$$

$$\psi_{21} = K_{b1}'(t) V(t) p r_f(t)$$

$$\psi_{20} = K_{b0}'(t) V(t) r_f(t)$$

系统的等价前向线性方块传递函数为

$$h(s) = \frac{d_1 s + d_0}{s^2 + a_{m1} s + a_{m0}}$$

为了确定  $h(s)$  为严格正实,把等价前向线性方块用状态空间表达式表示

$$\dot{e} = A_m e + b \omega_1$$

$$V = d^T e$$

式中

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_{m_0} & -a_{m_1} \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

如要求  $h(s)$  是一个严格正实传递函数,则必定存在一个对称正定阵  $P$  和一个对称正定阵  $Q$ ,使下列方程

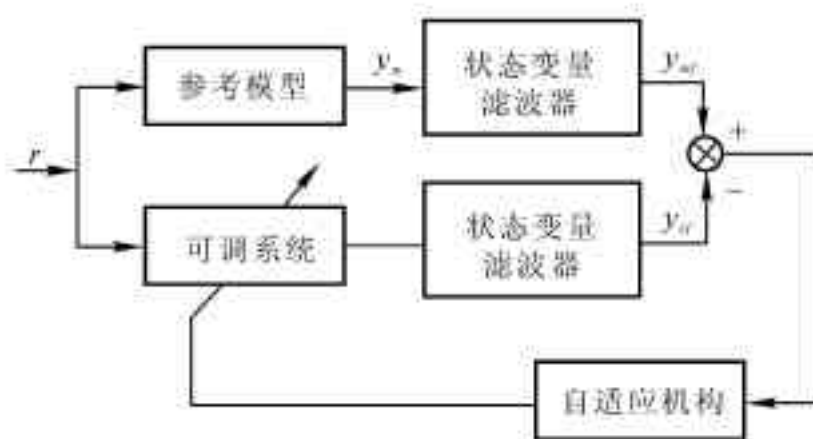
$$\begin{aligned} PA + A^T P &= -Q \\ Pb &= d \end{aligned}$$

成立,则可解得

$$d_0 > 0, \quad \frac{d_1}{d_0} > \frac{1}{a_{m_1}}$$

根据方程式可作出自适应系统原理图。

(2) 状态变量滤波器放在参考模型和可调系统输出端  
这种情况的自适应系统如图 3.3-7 所示。



3.3-7 状态变量滤波器放在可调系统之后的模型参考自适应控制

这种结构形式的自适应系统,适用于自适应式模型随控制系统,也适用于适应式状态观测器。图 3.3-7 与图 3.3-6 相比较,在于把状态变量观测器从可调系统的输入端移到了输出端。为了应用上面讨论过的结果,描述  $y_{mf}$  的微分方程与描述  $y_{sf}$  的微分方程应该相同。为了达到这一目的,在可调系统中尚需引入附加输入信号  $u_a(V, t)$  和  $u_b(V, t)$ ,下面给出自适应规律。

设参考模型的方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{mi} p^i \right] y_m = \left[ \sum_{i=0}^m b_{mi} p^i \right] r, \quad a_{mn} = 1 \quad (3.3-82)$$

把参考模型方程写成可控标准形状状态方程

$$X_m = \begin{bmatrix} -a_{m,n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m,1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{m,0} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X_m + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ b_m \\ \cdots \\ b \end{bmatrix} r = A_m X_m + B_m r \quad (3.3-83)$$

$$y_m = C^T X = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] X_m = X_{m_1} \quad (3.3-84)$$

状态变量滤波器方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} c_i p^i \right] y_{mf} = y_m, \quad c_{n-1} = 1 \quad (3.3-85)$$

可调系统方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_{si} p^i \right] y_s = \left[ \sum_{i=0}^m b_{si} p^i \right] r \quad (3.3-86)$$

把可调系统写成可测标准形状方程

$$X_s = \begin{bmatrix} -a_{s, n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{s1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{s0} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X_s + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ b_{sm} \\ \cdots \\ b_{s0} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ u_{n-2, a} \\ \cdots \\ u_{0, a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ u_{m-2, b} \\ \cdots \\ u_{0, b} \end{bmatrix} \quad (3.3-87)$$

$$y_s = c^T X_s = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] X_s = X_{s1} \quad (3.3-88)$$

连接于可调系统的状态变量过滤器方程为

$$\left[ \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \right] y_{sf} = y_s, \quad c_{n-1} = 1 \quad (3.3-89)$$

过滤后的广义输出误差为

$$\varepsilon_f = y_{mf} - y_{sf} \quad (3.3-90)$$

自适应机构方程为

$$V = D(p) \varepsilon_f = \left[ \sum_{i=0}^{n-1} d_i p^i \right] \varepsilon_f \quad (3.3-91)$$

$$a_{si}(V, t) = \int_0^t \Phi_i(V, t, \tau) d\tau + a_i(0) \quad (3.3-92)$$

$$b_{si}(V, t) = \int_0^t \Psi_i(V, t, \tau) d\tau + b_i(0) \quad (3.3-93)$$

$$u_{ja} = \Phi_{ja}(V, t, y_{sf}), \quad j = 0, 1, \cdots, n-2 \quad (3.3-94)$$

$$u_{jb} = \Psi_{jb}(V, t, r_f), \quad j = 0, 1, \cdots, n-2 \quad (3.3-95)$$

我们的目标是使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f = 0$ ,  $\varepsilon_f$  是以  $\varepsilon = y_m - y_s$  作为输入的状态变量过滤器的输出。如果状态变量过滤器是渐近稳定的, 那末  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_f = 0$ , 也就表明  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$ 。在稳定情况下,  $\lim_{t \rightarrow \infty} u_a(V, t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} u_b(V, t) = 0$ 。

### § 3.4 离散模型参考自适应系统

在上面几节讨论了连续系统的模型参考自适应控制, 纳朗特兰和朗道都提出了相应的离散系统模型参考自适应控制方案<sup>[11], [12]</sup>, 设计与连续系统大同小异。哥德温 (Goodwin) 提出的离散模型参考自适应控制方案不需要辅助信号, 是把预测误差控制和参数估计结合起来, 使控制对象的输出跟踪参考序列或参考模型的输出<sup>[12], [13]</sup>。这种方案结构比较简单, 容易推广到多输入多输出系统, 有严格的稳定性和收敛性证明。

#### 一、系统输出跟踪参考序列

设控制对象的离散模型为

$$A(\bar{q}^{-1}) y(t) = \bar{q}^{-d} B(\bar{q}^{-1}) u(t) \quad (3.4-1)$$

$$A(\bar{q}^{-1}) = 1 + a_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + a_n \bar{q}^{-n} \quad (3.4-2)$$

$$B(\bar{q}^{-1}) = b_0 + b_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + B_m \bar{q}^{-m} \quad (3.4-3)$$

式中  $\bar{q}^{-1}$  表示单位延迟, 例如  $\bar{q}^{-1} y(t) = y(t-1)$ ,  $t$  表示采样顺序。 $u(t)$  为系统输入,  $y(t)$  为系统输出。 $d$  表示系统的延迟,  $d$  为采样间隔的整倍数, 表示系统中信号的传递存在着  $d$  步的延迟。要求  $A(\bar{q}^{-1})$  和  $B(\bar{q}^{-1})$  都稳定。

设有参考序列  $y_r(t)$ , 要求  $y(t)$  准确地跟踪  $y_r(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - y_r(t)] = 0$ 。

先将  $y(t)$  转换成下列预测模型

$$y(t+d) = \alpha(\bar{q}^{-1}) y(t) + \beta(\bar{q}^{-1}) u(t) \quad (3.4-4)$$

式中

$$\alpha(\bar{q}^{-1}) = G(\bar{q}^{-1}), \quad \beta(\bar{q}^{-1}) = F(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) \quad (3.4-5)$$

$F(\bar{q}^{-1})$  和  $G(\bar{q}^{-1})$  是下列多项式的唯一解

$$1 = F(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-d} G(\bar{q}^{-1}) \quad (3.4-6)$$

式中

$$F(\bar{q}^{-1}) = 1 + f_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + f_{d-1} \bar{q}^{-d+1} \quad (3.4-7)$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + g_{n-1} \bar{q}^{-n+1} \quad (3.4-8)$$

证明: 以  $F(\bar{q}^{-1})$  乘式(3.4-1) 两边得

$$F(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) y(t) = F(\bar{q}^{-1}) \bar{q}^{-d} B(\bar{q}^{-1}) u(t) \quad (3.4-9)$$

由式(3.4-6) 得

$$F(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) = 1 - \bar{q}^{-d} G(\bar{q}^{-1})$$

则可求式(3.4-4) 和式(3.4-5) 如下:

$$\begin{aligned} [1 - \bar{q}^{-d} G(\bar{q}^{-1})] y(t) &= \bar{q}^{-d} F(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) u(t) \\ y(t) &= \bar{q}^{-d} G(\bar{q}^{-1}) y(t) + \bar{q}^{-d} F(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) u(t) \\ y(t+d) &= G(\bar{q}^{-1}) y(t) + F(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) u(t) = \\ &\alpha(\bar{q}^{-1}) y(t) + \beta(\bar{q}^{-1}) u(t) \end{aligned}$$

式中

$$\alpha(\bar{q}^{-1}) = G(\bar{q}^{-1}), \quad \beta(\bar{q}^{-1}) = F(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1})$$

$\alpha(\bar{q}^{-1})$  和  $\beta(\bar{q}^{-1})$  可用下列二式表示

$$\alpha(\bar{q}^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \bar{q}^{-n+1} \quad (3.4-10)$$

$$\beta(\bar{q}^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_{m+d-1} \bar{q}^{-m-d+1} \quad (3.4-11)$$

于是被控对象可用式(3.4-4) 表示。定义参数向量  $\theta_0$  和输入输出值向量  $\Phi$  如下:

$$\theta_0^T = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{m+d-1}] \quad (3.4-12)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T(t) &= [y(t) \quad y(t-1) \quad \cdots \quad y(t-n+1) \quad u(t) \quad u(t-1) \cdots \\ &\quad u(t-m-d+1)] \end{aligned} \quad (3.4-13)$$

则式(3.4-4) 可用下式表示

$$y(t+d) = \Phi^T(t) \theta_0 \quad (3.4-14)$$

系统的输出误差为

$$e(t+d) = y(t+d) - y_r(t+d) = \Phi^T(t) \theta_0 - y_r(t+d) \quad (3.4-15)$$

如果  $\theta_0$  是已知参数向量, 可使输出误差为零的控制规律为

$$u(t) = \frac{1}{\beta} [y_r(t+d) - \Phi^T(t)\theta] \quad (3.4-16)$$

式中,  $\Phi(t)$  和  $\theta$  分别是缺少  $u(t)$  和  $\beta$  项的向量  $\Phi(t)$  和  $\theta_0$ 。

在自适应控制中,  $\theta$  是未知的, 可用参数估值  $\hat{\theta}(t)$  来代替  $\theta_0$ 。应用投影算法可得

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t)\Phi(t-d)[y(t) - \Phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1)]}{1 + \Phi^T(t-d)\Phi(t-d)} \quad (3.4-17)$$

估计误差  $\theta(t) = \hat{\theta}(t) - \theta_0$ 。

则得自适应控制规律

$$u(t) = \frac{1}{\beta(t)} [y_r(t+d) - \Phi^T(t)\hat{\theta}(t)] \quad (3.4-19)$$

$$y_r(t+d) = \Phi^T(t)\hat{\theta}(t) \quad (3.4-20)$$

为了避免  $\beta(t)$  近似为零时, 导致无限量控制, 在式(3.4-17) 中选择  $a(t)$  如下:

$$a(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a(t) = 1 \text{ 时的估值 } \beta \neq 0 \\ r, & \text{当 } a(t) = 1 \text{ 时的估值 } \beta = 0 \text{ 或接近于 } 0 \end{cases}$$

式中  $\varepsilon < r < 2 - \varepsilon$ ,  $r \neq 1$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ 。

自适应控制计算步骤如下(已知参考序列  $y_r(t)$ ):

- (1) 读取  $y(t)$  和  $y_r(t)$ ;
- (2) 组成  $\Phi(t+d)$ ;
- (3) 按式(3.4-17) 计算  $\hat{\theta}(t)$ , 需给出初值  $\hat{\theta}(0)$ ;
- (4) 按式(3.4-19) 计算自适应信号  $u(t)$ ;
- (5) 返回(1)。

关于算法收敛性的证明, 可参阅文献<sup>[11], [12]</sup>。

## 二、离散模型参考自适应控制

控制对象的离散方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) \quad (3.4-21)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n} \quad (3.4-22)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \cdots + b_mq^{-m} \quad (3.4-23)$$

参考模型的离散方程为

$$E(q^{-1})y_m(t) = q^{-d}gH(q^{-1})r(t) \quad (3.4-24)$$

式中

$$E(q^{-1}) = 1 + e_1q^{-1} + \cdots + eq^{-l} \quad (3.4-25)$$

$$H(q^{-1}) = 1 + h_1q^{-1} + \cdots + h_lq^{-l} \quad (3.4-26)$$

$E(q^{-1})$  稳定。设

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-d}gH(q^{-1})}{E(q^{-1})}$$

要求控制对象的输出  $y(t)$  跟踪参考模型的输出  $y_m(t)$ 。系统如图 3.4-1 所示。

先将式(3.4-21) 变换成下列预测形式

$$E(q^{-1})y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (3.4-27)$$

式中

$$\alpha(\bar{q}^{-1}) = G(\bar{q}^{-1}), \quad \beta(\bar{q}^{-1}) = F(\bar{q}^{-1})B(\bar{q}^{-1})$$

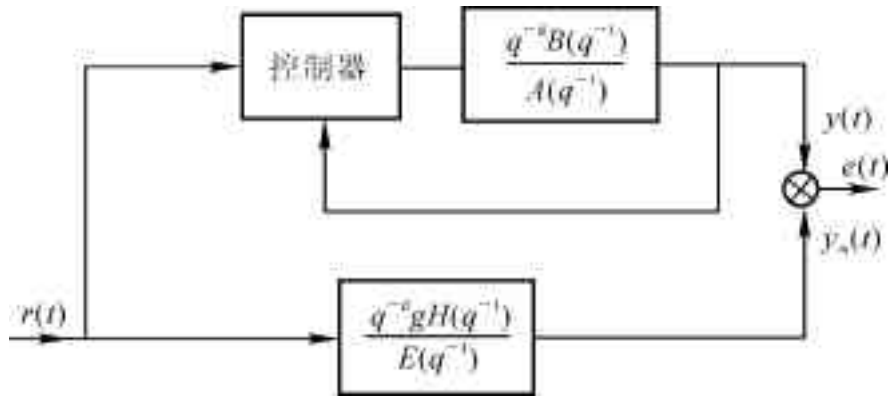


图 3.4-1 离散模型参考自适应控制

$F(\bar{q}^{-1})$  和  $G(\bar{q}^{-1})$  是下列多项式的惟一解

$$E(\bar{q}^{-1}) = F(\bar{q}^{-1})A(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-d}G(\bar{q}^{-1}) \quad (3.4-28)$$

式中

$$F(\bar{q}^{-1}) = 1 + f_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + f_{d-1} \bar{q}^{-d+1} \quad (3.4-29)$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + g_{n-1} \bar{q}^{-n+1} \quad (3.4-30)$$

以  $F(\bar{q}^{-1})$  乘式(3.4-21) 两边得

$$F(\bar{q}^{-1})A(\bar{q}^{-1})y(t) = F(\bar{q}^{-1})\bar{q}^{-d}B(\bar{q}^{-1})u(t) \quad (3.4-31)$$

由式(3.4-28) 得

$$F(\bar{q}^{-1})A(\bar{q}^{-1}) = E(\bar{q}^{-1}) - \bar{q}^{-d}G(\bar{q}^{-1}) \quad (3.4-32)$$

将上式代入式(3.4-31), 经整理可得

$$\begin{aligned} E(\bar{q}^{-1})y(t+d) &= G(\bar{q}^{-1})y(t) + F(\bar{q}^{-1})B(\bar{q}^{-1})u(t) = \\ &\alpha(\bar{q}^{-1})y(t) + \beta(\bar{q}^{-1})u(t) \end{aligned} \quad (3.4-27)$$

如果按照下式来选择控制  $u(t)$

$$\alpha(\bar{q}^{-1})y(t) + \beta(\bar{q}^{-1})u(t) = gH(\bar{q}^{-1})r(t) \quad (3.4-33)$$

则控制对象的闭环方程为

$$E(\bar{q}^{-1})y(t+d) = gH(\bar{q}^{-1})r(t) \quad (3.4-34)$$

现按式(3.4-33) 来确定控制  $u(t)$ , 为了使式(3.4-33) 中  $u(t)$  的系数为 1, 以  $\beta$  除式(3.4-33) 的等号两边, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}\alpha(\bar{q}^{-1})y(t) + \frac{1}{\beta}\beta(\bar{q}^{-1})u(t) &= \frac{1}{\beta}gH(\bar{q}^{-1})r(t) \\ \alpha'(\bar{q}^{-1})y(t) + [\beta'(\bar{q}^{-1}) + 1]u(t) &= \frac{1}{\beta}gH(\bar{q}^{-1})r(t) \end{aligned} \quad (3.4-35)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha'(\bar{q}^{-1}) &= \frac{\alpha_0}{\beta_0} + \frac{\alpha_1}{\beta_0}\bar{q}^{-1} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_0}\bar{q}^{-n+1} = \\ &\alpha'_0 + \alpha'_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha'_{n-1}\bar{q}^{-n+1} \end{aligned} \quad (3.4-36)$$

$$\beta'(\bar{q}^{-1}) = \beta'_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \beta'_{m+d+1}\bar{q}^{-m-d+1} \quad (3.4-37)$$

式(3.4-35) 可写成

$$u(t) = \Phi^T(t) \theta \quad (3.4-38)$$

式中

$$\theta^T = [\alpha_0' \cdots \alpha_{n-1}' \beta_1' \cdots \beta_{m+d-1}' \frac{1}{\beta}] \quad (3.4-39)$$

$$\begin{aligned} \Phi^T(t) = [ & -y(t) \quad \cdots \quad -y(t-n+1) \quad -u(t-1) \quad \cdots \\ & -u(t-m-d+1) \quad r_a(t) ] \end{aligned} \quad (3.4-40)$$

式中

$$r_a(t) = gH(q^{-1})r(t) \quad (3.4-41)$$

参数  $\theta$  的估计方程为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Phi(t-1)}{c + \Phi^T(t-1)\Phi(t-1)} [u(t-1) - \Phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)] \\ (3.4-42) \end{aligned}$$

为了算法收敛,要求  $\frac{1}{\beta} \neq 0$ 。

### § 3.5 模型参考自适应控制的鲁棒性

在上面讨论模型参考自适应控制时,我们假定控制对象和参考模型是同阶次的、控制对象不受外界干扰,且无量测噪声。这些假定在许多实际系统中可能不成立。因此在自适应控制中应该研究这些假定不成立时对系统的影响。

控制对象的模型阶次往往比较高,为了设计方便,对系统进行降阶。借助“主导极点”概念,保留系统的主导极点和零点部分(低频部分),舍弃系统的非主导极点和零点部分(高频部分),得到一个阶次比较低的数学模型。设有一系统的传递函数为

$$W_0(s) = \frac{2}{s+1} \times \frac{229}{s^2 + 30s + 229}$$

其降阶模型的传递函数为

$$W(s) = \frac{2}{s+1}$$

如果控制对象选用降阶模型,参考模型与降阶模型匹配,而与系统原模型不匹配,自适应系统的全局稳定性得不到保证。

对于线性系统,在设计中允许采用简化模型,使系统的高频部分在剪切频率之上,并且有足够的稳定余度,系统即使受到高频干扰,也能正常工作。自适应系统是非线性系统,低频输入信号也可能产生高频振荡,使系统被忽略的高频部分激励起来。因此在设计模型参考自适应控制时,应当考虑简化模型和噪声对系统的影响,这就提出模型参考自适应系统的鲁棒性问题。

所谓控制系统的鲁棒性,就是系统在外界环境或系统本身发生变化时,能保持原有性能的能力,特别是保持稳定性的能力。

对于自适应控制来说,控制对象的不确定性可分为两类,第一类为参数或结构不确定性,即传递函数的零极点位置不准确。第二类为模型简化,即高频动态特性被忽略了,这类不确定性称为未建模动态。对象具有未建模动态时的数学模型可用下列式子来表示



$$W_0(s) = W(s) + \mu \Delta_1(s) \quad (3.5-1)$$

$$W_0(s) = W(s) [1 + \mu \Delta_2(s)] \quad (3.5-2)$$

式中  $W_0(s)$  为控制对象的传递函数,  $W(s)$  是对象已建模部分的传递函数, 即简化传递函数。在式(3.5-1)中,  $\mu \Delta_1(s)$  表示对象的相加未建模动态, 在式(3.5-2)中,  $\mu \Delta_2(s)$  表示对象的相乘未建模动态。下面以 Rohrs 的例子<sup>[14]</sup> 来说明在存在不大的未建模动态和干扰的情况下, 模型参考自适应系统的稳定性。Rohrs 例子的系统结构和参数如图 3.5-1 所示(注意: 图中输出反馈画成正反馈, 实际应为负反馈, 因此  $d_0$  为负值)。

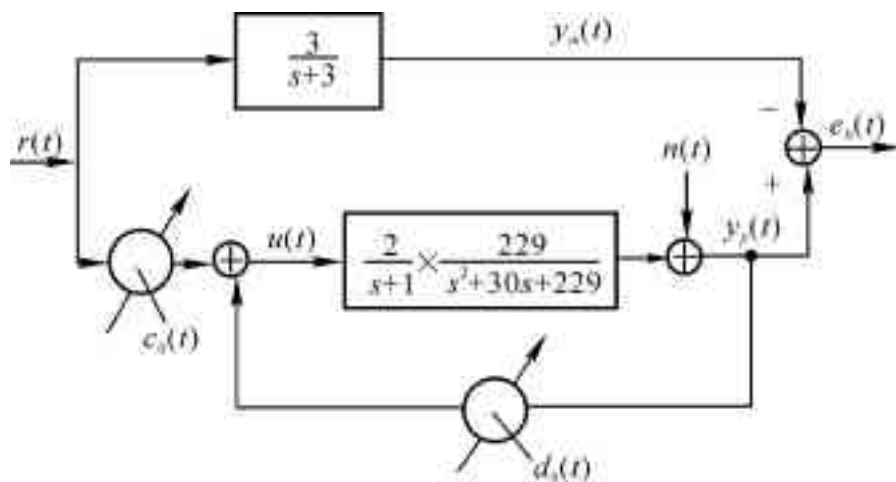


图 3.5-1 Rohrs 例中自适应控制结构图

控制对象的传递函数为

$$W_0(s) = \frac{2}{s+1} \times \frac{229}{s^2+30s+229}$$

在设计自适应控制时, 取对象传递函数的简化模型为

$$W(s) = \frac{k_p}{s+a_p} = \frac{2}{s+1}$$

参考模型的传递函数为

$$W_m(s) = \frac{k_m}{s+a_m} = \frac{3}{s+3}$$

输出误差自适应控制用下列方程组描述

$$u = \omega r + d_0 y_p$$

$$\omega = y_p - y_m$$

$$\dot{\omega} = -g_{e0} r$$

$$\dot{d}_0 = -g_{e0} y_p$$

控制器参数的标定值为

$$c_0 = \frac{k_m}{k_p} = 1.5$$

$$d_0 = \frac{a_p - a_m}{k_p} = -1$$

对象的未建模动态为  $\frac{229}{s^2 + 30s + 229}$ , 其极点位于  $-15 \pm j2$ 。在本例中,  $y_p$  的量测值包含有量测噪声  $n(t)$ 。

在 Rohrs 的例子中, 对象的实际模型和简化模型都在稳定区域内, 而且未建模动态是充分阻尼的和稳定的。仿真结果表明, 在无量测噪声和未建模动态时, 自适应控制系统是稳定的, 输出误差收敛到零。

当考虑到未建模动态时, 出现下列几类不稳定现象:

(1) 具有较大的常值参考输入, 没有量测噪声。图 3.5-2 和图 3.5-3 表示  $r(t) = 4.3$ ,  $n(t) = 0$ ,  $\omega(0) = 1.14$ ,  $d_0(0) = -0.65$ ,  $y_p(0) = 0$  时,  $y_p(t)$ ,  $\omega(t)$  和  $d_0(t)$  的仿真结果。输出误差开始收敛到零, 最后发散到无穷大, 参数  $\omega$  和  $d_0$  也发散。

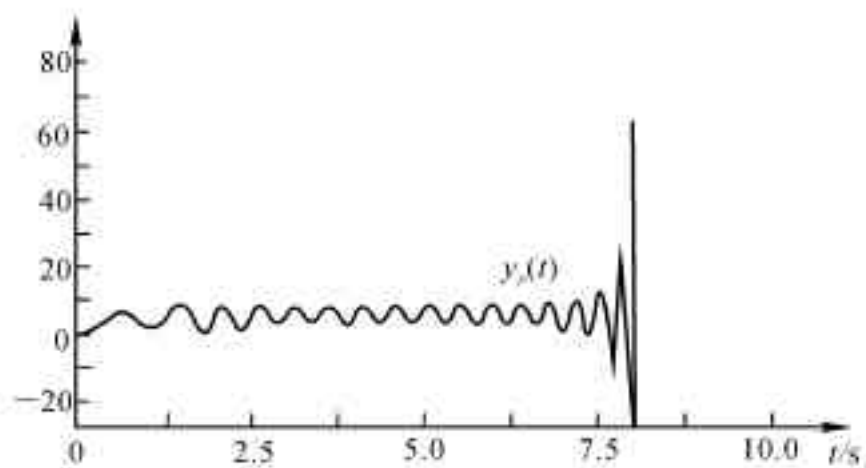


图 3.5-2 对象输出发散情况 ( $r = 4.3$ ,  $n = 0$ ) 图

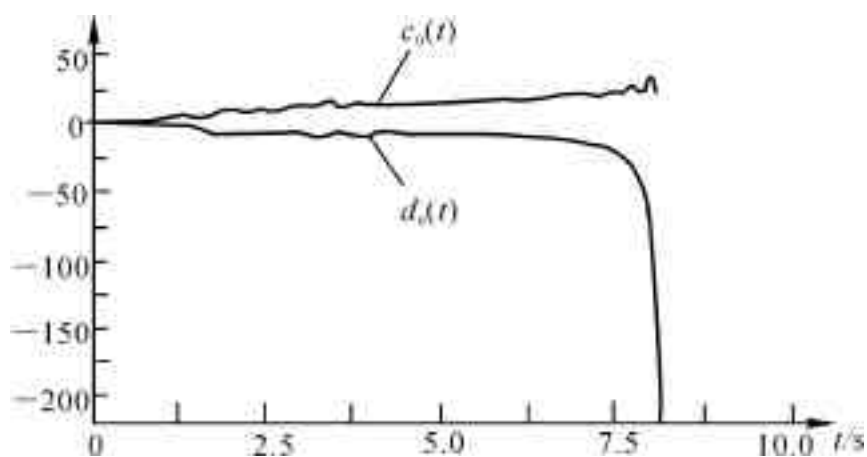


图 3.5-3 控制参数发散情况 ( $r = 4.3$ ,  $n = 0$ ) 图

(2) 参考输入由一较小的常值和一个较大的高频分量组成, 即  $r(t) = 0.3 + 1.85 \sin 16.1 t$ 。图 3.5-4 和图 3.5-5 表示初始条件为:  $\omega(0) = 1.14$ ,  $d_0(0) = -0.65$  和  $y_p(0) = 0$ , 输出和控制参数的发散情况。输出误差开始慢慢发散, 然后发散到无穷, 参数  $\omega$  和  $d_0$  也随之发散。

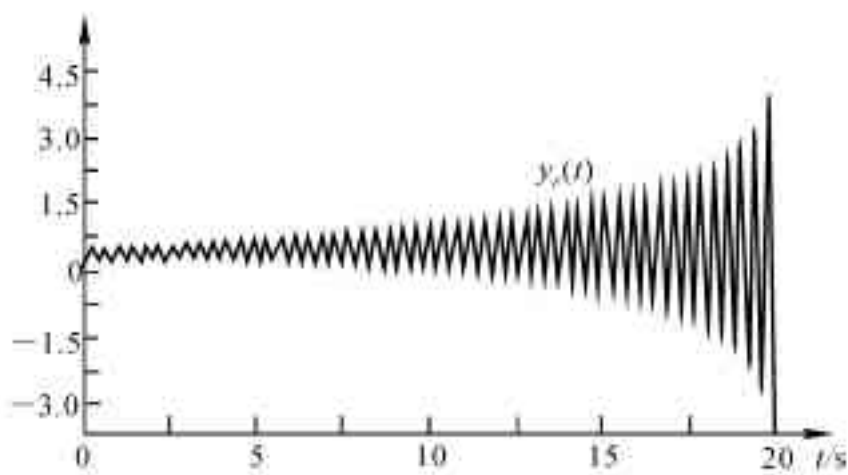


图 3.5-4 对象输出发散情况 ( $r = 0.3 + 1.85 \sin 16.4 t, n = 0$ ) 图

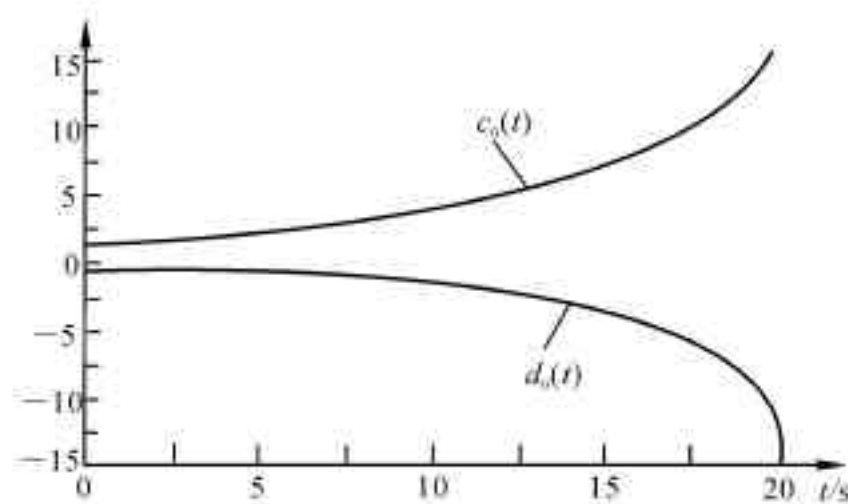


图 3.5-5 控制参数发散情况 ( $r = 0.3 + 1.85 \sin 16.1 t, n = 0$ ) 图

(3) 中等参考输入  $r(t) = 2$ , 小量测噪声  $n(t) = 0.5 \sin 16.1 t$ 。图 3.5-6 和 3.5-7 表示初始条件为:  $\omega(0) = 1.14$ ,  $d_0 = -0.65$  和  $y_p(0) = 0$ , 输出和控制参数的发散情况。输出误差开始收敛到零, 然后在零附近停留一段时间, 再发散到无穷。控制器参数  $\omega$  和  $d_0$  以常速率漂移, 然后突然发散。

从 Rohrs 的例子可看出, 当系统存在未建模动态、外界干扰和量测噪声时, 模型参考自适应系统会产生不稳定现象。我们希望所设计的模型参考自适应系统在上述不确定情况下, 仍能保持稳定, 这种系统称为具有稳定鲁棒性的系统。

自适应系统已很复杂, 自适应稳定鲁棒性系统更为复杂。对系统存在未建模动态、外界干扰和量测噪声, 目前已有一些稳定鲁棒算法, 如混合自适应算法、带有死区的自适应算法和  $\sigma$  修正算法等等。这些算法将在本书第六章、第七章和第八章中介绍。

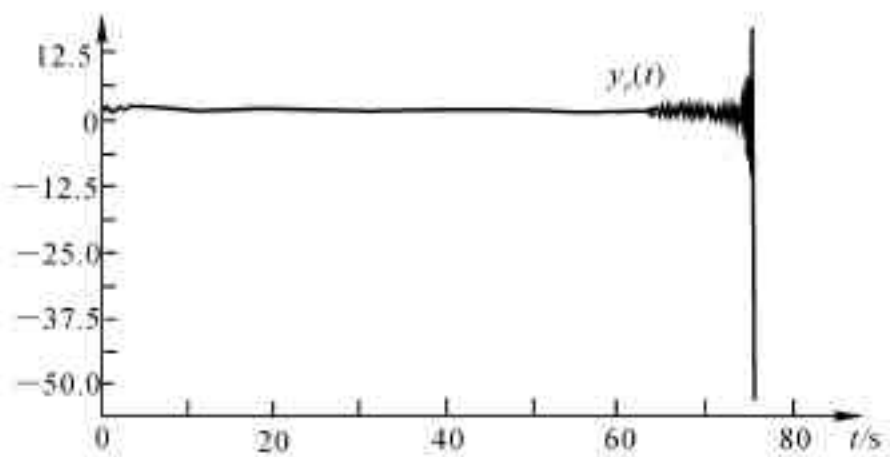


图 3.5-6 对象输出发散情况 ( $r = 2$ ,  
 $n = 0.5 \sin 16.1 t$ ) 图

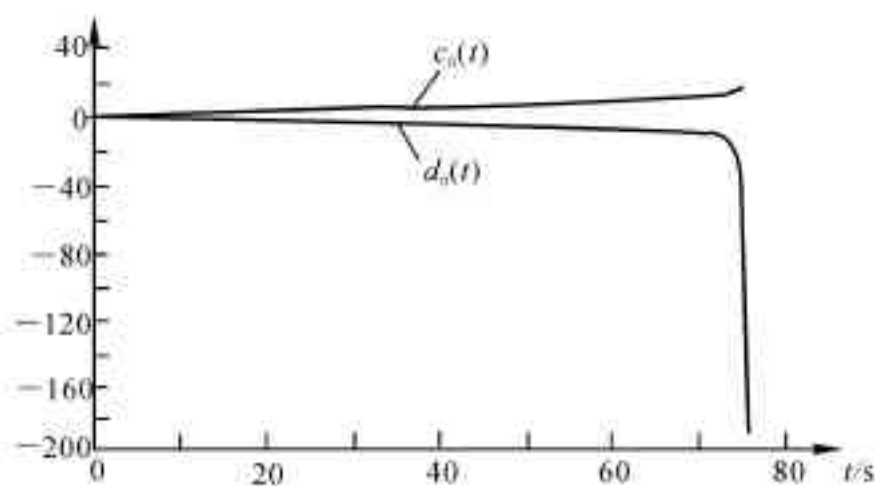


图 3.5-7 控制参数发散情况 ( $r = 2$ ,  
 $n = 0.5 \sin 16.1 t$ ) 图

## 习 题

1. 设有三阶系统, 参考模型的微分算子方程为

$$(\alpha p^3 + \alpha p^2 + \alpha p + 1) y_m(t) = K r(t)$$

并联可调增益系统的微分算子方程为

$$(\alpha p^3 + \alpha p^2 + \alpha_1 p + 1) y_p(t) = K_c K_v r(t)$$

其中  $K_v$  是受环境影响的参数。试用局部参数优化方法设计可调增益  $K_c$  的自适应规律, 并确定使系统稳定所需参数条件。

2. 设被控对象的微分算子方程为

$$(a_{p2} p^2 + a_{p1} p + 1) y_p(t) = (b_{p1} p + b_{p0}) r(t)$$

选定参考模型

$$(a_{m2} p^2 + a_{m1} p + 1) y_m(t) = (b_{m1} p + b_{m0}) r(t)$$

设  $a_{pi}$  和  $b_{pi}$  ( $i = 0, 1$  或  $2$ ) 为可调参数, 试用局部参数优化方法设计可调参数规律。

3. 设参考模型方程为

$$(p^2 + a_{m1} p + a_{m0}) y_m(t) = b_{m0} r(t)$$

可调系统方程为

$$(p^2 + a_{s1} p + a_{s0}) y_s(t) = b_{s0} u(t)$$

式中  $a_{s0} = a_{m0}$  为固定参数, 试用李雅普诺夫稳定性理论设计  $a_{s1}$  和  $b_{s0}$  的自适应规律。

4. 设控制对象的状态方程为

$$\dot{X}_p = A_p(t) X_p + B_p(t) u$$

参考模型状态方程为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m r$$

设

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}, \quad b_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}, \quad b_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

试用李雅普诺夫稳定性理论设计自适应规律。

5. 设控制对象的传递函数为

$$W_p(s) = \frac{s+1}{s^2 + 8s + 20}$$

参考模型的传递函数为

$$W_m(s) = \frac{6(s+5)}{s^2 + 13s + 40}$$

试用纳朗特兰方案设计模型参考自适应系统, 并进行数字仿真, 比较输入为阶跃信号和方波信号时, 系统的输出误差和可调参数的变化过程。

6. 设控制对象的传递函数为

$$W_p(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 2 T_1 \xi_1 s + 1}$$

参数  $K_1$ ,  $T_1$  和  $\xi_1$  随时间而变

$$K(t) = 1.12 - 0.008t, \quad T_1 = 0.036 + 0.004t$$

$$\xi_1(t) = 0.8 - 0.01t$$

设参考模型的传递函数为

$$W_m(s) = \frac{1}{0.08^2 s^2 + 2 \times 0.08 \times 0.75 s + 1}$$

用超稳定性理论设计模型参考自适应系统。假定系统参考输入为: (1)  $r(t)$  是方波信号, 周期为 4 秒, 振幅为  $\pm 2$ , (2)  $r(t) = 0.5 + 0.04t$ 。设计自适应规律, 给出仿真结果。

## 参考文献

- 1 Landau I D . Adaptive Control-Model Reference Approach .MARCEL DEKKER INC,1979
- 2 Parks P C .Liapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems .IEEE, Tr .AC-11,1966
- 3 Narendra K S, Valavani L S . Stable Adaptive Controller Design-Direct Control IEEE .Tr .AC-23, No 4, 1978

- 4 Narendra K S, Lin Y H . Valavani L S . Stable Adaptive Controller Design, Part II : Proof of Stability . IEEE .Tr .AC -25, No 3, 1980
- 5 Monopoli R V . Model Reference Adaptive Control With an Augmented Error Signal IEEE ,Tr .AC - 19, 1974
- 6 Narendra K S, Lin Y H . Stable Discrete Adaptive Control IEEE, Tr .AC - 25, No 3, 1980
- 7 Narendra K S, Annaswamy A M . Stable Adaptive Systems .PRENTICE HALL, 1989
- 8 冯纯伯,史维 .自适应控制 .北京:电子工业出版社,1986
- 9 李清泉 .自适应控制系统理论、设计与应用,北京:科学出版社,1990
- 10 韩曾晋 .自适应控制 .北京:清华大学出版社,1996
- 11 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E . Discrete-Time Multivariable Adaptive Control IEEE ,Tr .AC - 25, No 3, 1980
- 12 Goodwin G C, Sin K S . Adaptive Filtering Prediction and Control .PRENTICE-HALL, INC, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984
- 13 Landau I D, Courtiol B . Design of Multivariable Adaptive Model following Control systems .Automatica, 1974, 10
- 14 Shankar Sastry, Marc Bodson .Adaptive Control-stability, Convergence and Robustness . PRENTICE-HALL, 1989
- 15 Harris C J, Billings S A . Self-Tuning And Adaptive Control-Theory and Applications .Peter Peregrinus Ltd, 1981 C J 哈里斯, S .A .比斯林著 .自校正和自适应控制,李清泉译 .北京:科学出版社,1986
- 16 陈宗基 .自适应技术的理论及应用 .北京:北京航空航天大学出版社,1991

## 第四章 自校正控制

在飞行器控制和许多工业过程控制中,控制对象的参数往往随工作环境的改变而变化,用常规的比例—积分—微分(PID)控制器来控制这一类控制对象,往往难以收到良好的控制效果。这是因为(PID)控制器很难适应参数随时间变化的情况。自校正控制适用于结构已知但参数未知而恒定的随机系统,也适用于结构已知但参数缓慢变化的随机系统。自校正控制既能完成调节任务,也能完成伺服跟踪任务。典型的自校正调节器的方框图如图4.1-1所示,由三部分组成:控制对象、参数估计器和调节器。参数估计器根据对象输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 的观测序列来估计被控对象的参数 $\theta$ ,将得到的参数估值 $\hat{\theta}$ 送到调节器,调节器按事先已经选好的系统性能指标函数及送来的参数估值 $\hat{\theta}$ ,对调节器的参数进行调整,保证系统运行的性能指标达到最优或接近最优状态。

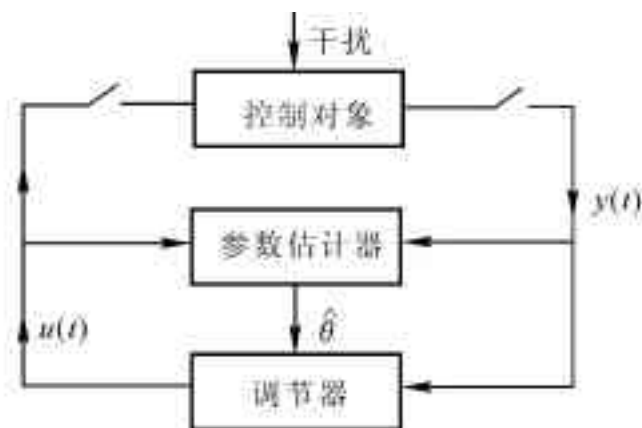


图 4.1-1 自校正调节器方框图

自校正控制系统的性能指标,根据控制系统的性质和对控制系统的要求,可有各种不同的形式,用得最

普遍的为最小方差控制和极点配置控制。最小方差控制的目标函数为误差二次型的,自校正控制的目的是保证这个二次型目标函数达到极小值,因此这种控制策略称为最小方差控制。极点配置自校正控制性能指标不是用目标函数的形式来表示,而是把预期的闭环系统的行为用一组期望传递函数的零极点的位置加以规定。自校正控制策略就是保证实际的闭环系统的零极点收敛于这一组期望的零极点,因此这种控制策略称为极点配置自校正控制。

自校正控制可用在线辨识的方法,估计被控对象的参数,然后计算出最优控制信号,使系统处于最优的工作状态。整个自校正控制过程算法比较简单,可用微处理机来实现。由于微处理机的功能越来越强,价格越来越便宜,因此自校正控制有广阔的发展前途。

本章主要介绍最小方差自校正调节器,最小方差自校正控制器,极点配置自校正调节器,极点配置自校正控制器,加权最小方差自校正控制器的极点配置,多变量最小方差自校正控制及多变量极点配置自校正控制。

### § 4.1 最小方差自校正调节器

自校正调节器最早是由 K J Åström 和 B Wittenmark 于 1973 年首先提出来的。自校正调节器的方框如图4.1-1所示,用递推最小二乘法估计系统的参数,以输出方差最小作为调节指标,在自校正调节过程中,使系统的输出方差达到最小。当被估计的参数收敛时,根据估计模型所得到的输出方差最小调节,将收敛于受控系统参数已知时的输出方差最小调节,这种调节就是渐渐最优的。目前最小方差自校正调节器已在造纸等许多不同的工业过程控制中得到

成功的应用。

一般控制系统的差分方程可用下式来表示

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.1-1)$$

式中  $q^{-1}$  表示单位延迟,例如  $q^{-1}y(t) = y(t-1)$ 。 $t$  表示前面差分方程中的  $k$ 。

$$\left. \begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_m q^{-m} \\ C(q^{-1}) &= c_0 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_c q^{-c} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-2)$$

$y(t)$  为控制对象的输出,  $u(t)$  为其输入,  $\varepsilon(t)$  是均值为零的白噪声序列,  $d$  表示系统的延迟,  $d$  为采样间隔的整倍数。就是说在系统中信号的传递存在着  $d$  步的延迟,使得现时的控制作用  $u(t)$  要滞后  $d$  个采样周期才能对输出产生影响。因此要获得输出方差最小,就必须对输出量提前  $d$  步进行预测,根据预测值来调整控制作用  $u(t)$ ,以补偿由于随机扰动在  $(t+d)$  时刻对输出的影响。这样,自校正调节就是不断地进行预测和调节,使系统输出量的方差为最小。因此实现最小方差的自校正调节,关键问题是确定预测模型和建立最小方差调节律。

最小方差自校正调节器二次型指标函数为

$$J = E[y^2(t+d)] = \min \quad (4.1-3)$$

式中

$$y(t+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}\varepsilon(t+d) \quad (4.1-4)$$

$y(t+d)$  为  $y(t)$  的  $d$  步预测,  $J$  为预测值的方差。

要使最小方差自校正调节器的解存在,必须满足下列假设

- (1) 受控系统的时延  $d$  及时延算子多项式  $A$ ,  $B$  和  $C$  的阶次及系数都是已知的;
- (2) 多项式  $B(q^{-1})$  的所有零点都位于  $q^{-1}$  复平面单位圆外;
- (3) 多项式  $C(q^{-1})$  的所有零点都位于  $q^{-1}$  复平面单位圆外;
- (4)  $\varepsilon(t)$  为白噪声序列,  $E[\varepsilon^2(t)] = \sigma^2$ 。

如果  $B(q^{-1})$  的零点全在  $q^{-1}$  复平面单位圆外,则称该系统为最小相位系统,否则为非最小相位系统。有时称  $B(q^{-1})$  的零点全在  $q^{-1}$  复平面单位圆外的系统为逆稳定系统,否则为逆不稳定系统。为什么要求  $B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  的零点全在单位圆外,这与闭环系统的稳定性有关,这一问题将在后面讨论。现在来讨论使指标函数  $J$  为最小的最优控制  $u(t)$ 。在上面已提到,对于自校正控制需要一边估计参数,一边修正控制规律参数。下面采用参数估计和求控制作用  $u(t)$  的分离原则,先假定参数已知,求出最优控制  $u(t)$ 。由上面得

$$y(t+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}\varepsilon(t+d) \quad (4.1-4)$$

可将  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$  展开成  $q^{-1}$  的无穷级数,也可将  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}\varepsilon(t+d)$  展开成  $\varepsilon(t+d), \varepsilon(t+d-1), \varepsilon(t+d-2), \cdots, \varepsilon(t+1), \varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \cdots$  等项的线性组合,其中随机序列  $\varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \cdots$  与系统输出值  $Y^k = [y(t) \ y(t-1) \ \cdots]$  相关,但随机序列  $\varepsilon(t+d), \varepsilon(t+d-1), \cdots, \varepsilon(t+1)$  与  $Y^k$  不相关。我们要把  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}\varepsilon(t+d)$  分解成与  $Y^k$  相关与不相关两个部分。令

$$\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} = F(q^{-1}) + \frac{q^{-d}G(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (4.1-5)$$



式中

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{d-1} q^{-d+1} \quad (4.1-6)$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{na-1} q^{-na+1} \quad (4.1-7)$$

$F(q^{-1})$  是  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$  的商式,  $q^{-d}G(q^{-1})$  是  $\frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$  的余式, 我们要求  $F(q^{-1})\varepsilon(t+d)$  相当于  $Y^k$  的独立部分, 则  $F(q^{-1})$  的阶次应当是  $(d-1)$ , 而  $G(q^{-1})$  的阶次应当是  $(na-1)$ ,  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  可用长除法来求, 也可用下面的方法来求。

以  $A(q^{-1})$  乘式(4.1-4) 等号两边得

$$C(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (4.1-8)$$

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc} &= [1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{na} q^{-na}] \times \\ &[f_0 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{d-1} q^{-d+1}] + q^{-d}[g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{na-1} q^{-na+1}] \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

比较上式等号两边  $q^{-1}$  的同次项的系数, 可得下列一组代数方程

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= f_0 \\ c_1 &= a_1 + f_1 \\ &\dots\dots\dots \\ c_{d-1} &= a_{d-1} + a_{d-2}f_1 + a_{d-3}f_2 + \cdots + a_1f_{d-2} + f_{d-1} \\ c_d &= a_d + a_{d-1}f_1 + a_{d-2}f_2 + \cdots + a_1f_{d-1} + g_0 \\ c_{d+1} &= a_{d+1} + a_d f_1 + a_{d-1}f_2 + \cdots + a_2f_{d-1} + g_1 \\ &\dots\dots\dots \\ c_{nc} &= a_{nc} + a_{nc-1}f_1 + a_{nc-2}f_2 + \cdots + a_{nc-d+1}f_{d-1} + g_{nc-d} \\ 0 &= a_{nc+1} + a_{nc}f_1 + a_{nc-1}f_2 + \cdots + a_{nc-d+2}f_{d-1} + g_{nc-d+1} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= a_{na}f_{d-1} + g_{na-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.1-10)$$

在式(4.1-10)中, 有  $(d+na)$  个方程,  $(d+na)$  个未知数, 因此方程可解。实际上不必联立求解上述方程组, 只要从第一式开始, 可按顺序比较快地求出  $f_0, f_1, \cdots, f_{d-1}, g_0, g_1, \cdots, g_{na-1}$ 。

把式(4.1-8) 代入式(4.1-4), 可得  $y(t+d)$  的表达式

$$y(t+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + F(q^{-1})\varepsilon(t+d) + \frac{G(q^{-1})}{A(q^{-1})}\varepsilon(t) \quad (4.1-11)$$

上式右边第二项为

$$F(q^{-1})\varepsilon(t+d) = f_0\varepsilon(t+d) + f_1\varepsilon(t+d-1) + \cdots + f_{d-1}\varepsilon(t+1)$$

式中的  $\varepsilon(t+1), \varepsilon(t+2), \cdots, \varepsilon(t+d)$  与已得到测量值  $y(t), y(t-1), \cdots$  和  $u(t), u(t-1), \cdots$  不相关。

在式(4.1-11)中右边第三项是  $\varepsilon(t), \varepsilon(t-1), \cdots$  的线性函数, 可用已得的测量值  $y(t), y(t-1), \cdots$  和  $u(t), u(t-1), \cdots$  来计算。因此, 在式(4.1-11)中, 把干扰分成两部分, 式中右边第二项表示未来干扰, 与已得的测量值不相关, 第三项与已得的测量值相关。由式(4.1-1) 可解出  $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) - \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}q^{-d}u(t) \quad (4.1-12)$$

把式(4.1-12) 代入式(4.1-11) 得

$$y(t+d) = F(q^{-1})\varepsilon(t+d) + \left[ \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} - \frac{q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} \right] u(t) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t)$$

利用式(4.1-8),可将上式右边第三项简化,从而可得

$$y(t+d) = F(q^{-1})\varepsilon(t+d) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) \quad (4.1-13)$$

输出  $y(t+d)$  的方差为

$$\begin{aligned} J = E[y^2(t+d)] &= E\left\{ \left[ F(q^{-1})\varepsilon(t+d) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) \right]^2 \right\} \\ J &= E\{ [F(q^{-1})\varepsilon(t+d)]^2 \} + E\left\{ \left[ \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right]^2 \right\} + \\ &\quad E\left\{ F(q^{-1})\varepsilon(t+d) \left[ \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.1-14)$$

由于  $\varepsilon(t+1), \varepsilon(t+2), \dots, \varepsilon(t+d)$  与  $y(t), y(t-1), \dots$  和  $u(t), u(t-1), \dots$  互不相关,因而上式右边最后一项应等于零,则

$$E[y^2(t+d)] = E\{ [F(q^{-1})\varepsilon(t+d)]^2 \} + E\left\{ \left[ \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) \right]^2 \right\} \quad (4.1-15)$$

上式右边第二项为非负项,因此

$$E[y^2(t+d)] \geq E\{ [F(q^{-1})\varepsilon(t+d)]^2 \} \quad (4.1-16)$$

如果在任何时刻令

$$\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) = 0 \quad (4.1-17)$$

则

$$E[y^2(t+d)] = E\{ [F(q^{-1})\varepsilon(t+d)]^2 \} = \min \quad (4.1-18)$$

即当  $u(t)$  满足式(4.1-17)时,输出  $y(t+d)$  的方差为最小。由式(4.1-17)可得最优控制

$$u(t) = - \frac{G(q^{-1})}{B(q^{-1})F(q^{-1})} y(t) \quad (4.1-19)$$

如果  $\varepsilon(t+1), \varepsilon(t+2), \dots, \varepsilon(t+d)$  的方差都为  $\sigma^2$ , 则输出  $y(t+d)$  的最小方差为

$$\begin{aligned} \min J &= E\{ [F(q^{-1})\varepsilon(t+d)]^2 \} = \\ &= (f_0 + f_1 + \dots + f_{d-1}) \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.1-20)$$

自校正调节器如图 4.1-2 所示。

下面首先讨论前面提到过的预测模型问题,而后讨论最小方差自校正调节器的算法,闭环系统的稳定性及收敛性等问题

### (一) 预测模型及最优预测估值

预测模型为

$$y(t+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(t) + F(q^{-1})\varepsilon(t+d) \quad (4.1-13)$$

下面来求最优预测估值  $\hat{y}(t+d|t)$ ,  $\hat{y}(t+d|t)$  为  $y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots$  的

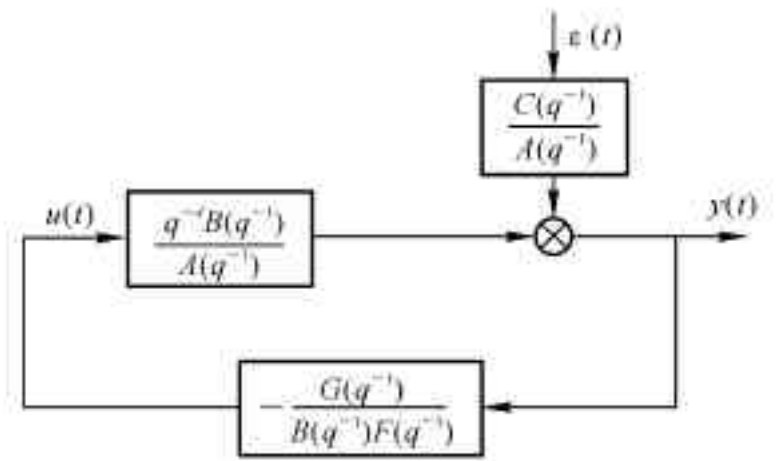


图 4.1-2 自校正调节器方块图

线性组合,估计误差为

$$y(t+d|t) = y(t+d) - \hat{y}(t+d|t) \quad (4.1-21)$$

要求估计误差的方差为最小,即

$$\begin{aligned} J' &= E[y^2(t+d|t)] = E\{[y(t+d) - \hat{y}(t+d|t)]^2\} = \min \quad (4.1-22) \\ J' &= E\left\{\left[\frac{G(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}y(t) + \frac{B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}u(t) + F(\bar{q}^{-1})\varepsilon(t+d) - \hat{y}(t+d|t)\right]^2\right\} = \\ &E\left\{\left[\frac{G(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}y(t) + \frac{B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}u(t) - \hat{y}(t+d|t)\right]^2\right\} + E\{[F(\bar{q}^{-1})\varepsilon(t+d)]^2\} \end{aligned}$$

在上式中等号右边第一项为非负项,如果令这一项为零,即

$$\frac{G(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}y(t) + \frac{B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}u(t) - \hat{y}(t+d|t) = 0$$

$J'$  为最小,即

$$J' = E\{[F(\bar{q}^{-1})\varepsilon(t+d)]^2\} = \min$$

因此  $y(t+d)$  的最优预测估值为

$$\hat{y}(t+d|t) = \frac{G(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}y(t) + \frac{B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})}{C(\bar{q}^{-1})}u(t) \quad (4.1-23)$$

由式(4.1-17)可知,当  $\hat{y}(t+d|t) = 0$  时,可得最优控制  $u(t)$ 。从这里可看出,对于最小方差调节器,可按输出最优预测值为零,求得最优  $u(t)$ 。

## (二) 最小方差自校正调节器的算法

由于参数估计模型选得不同,可分为显式或隐式最小方差自校调节器。

(1) 显式最小方差自校正调节器 在上面推导最优控制时,假定差分方程式(4.1-1)中的参数都是已知的,而在实现控制时,这些参数往往是未知的。我们可利用  $y(t)$  的观测值和  $u(t)$  值来估计这些参数。获得参数估值后,按式(4.1-8)求出  $F(\bar{q}^{-1})$  和  $G(\bar{q}^{-1})$  的系统,再按式(4.1-19)求出最优控制  $u(t)$ 。这一方法称为显式最小方差自校正调节器算法,计算步骤如下:

第一步 采样读取新的观测值  $y(t)$  和  $u(t)$ 。

第二步 按递推最小二乘法或其他递推方法估计控制对象的参数  $a, \dots, a_{n_a}, b, \dots, b_{n_b}, c, \dots, c_{n_c}$ 。在这里假定  $\omega = 1$ 。下面给出最小二乘法递推公式。

$$\begin{aligned} \theta^T &= [a \ a_2 \ \dots \ a_{n_a} \ b \ b_2 \ \dots \ b_{n_b} \ c \ c_2 \ \dots \ c_{n_c}] \\ \Phi^T(t-1) &= [-y(t-1) \ -y(t-2) \ \dots \ -y(t-n_a) \\ &\quad u(t-d) \ \dots \ u(t-n_b) \ \varepsilon(t-1) \ \dots \ \varepsilon(t-n_c)] \\ \varepsilon(t) &= y(t) - \Phi^T(t-1)\theta(t-1) \\ \theta(t) &= \theta(t-1) + K(t)[y(t) - \Phi^T(t-1)\theta(t-1)] \\ K(t) &= P(t-1)\Phi(t-1)[1 + \Phi^T(t-1)P(t-1)\Phi(t-1)]^{-1} \\ P(t) &= P(t-1) - P(t-1)\Phi(t-1) \times \\ &\quad [1 + \Phi^T(t-1)P(t-1)\Phi(t-1)]^{-1} \times \Phi^T(t-1)P(t-1) \end{aligned} \quad (4.1-24)$$

在第一次计算时,需要给出初值  $\theta(0) = \theta_0, P(0) = \alpha^2 I$ 。

第三步 按式(4.1-8)计算  $F(\bar{q}^{-1})$  和  $G(\bar{q}^{-1})$  的系数;

第四步 按式(4.1-19)计算最优控制  $u(t)$ 。

当采样次数加 1,即将  $t \rightarrow t+1$ ,重复上述计算步骤。

显式自校正调节器计算比较复杂。因为自校正调节器是闭环控制,还要检验反馈通道的阶数是否符合闭环辨识的要求。

(2) 隐式最小方差自校正调节器 我们可不必辨识控制对象的参数,而可直接辨识调节器的参数,使计算手续大为简化。

从式(4.1-17)出发,讨论调节器的参数估计问题

$$\frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) = 0 \quad (4.1-17)$$

设

$$\left. \begin{aligned} \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})} &= \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \cdots + \alpha_{n_a-1} q^{-n_a-1} = A_a(q^{-1}) \\ \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})} &= \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \cdots + \beta_{n_b+d-1} q^{-n_b-d+1} = B_b(q^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.1-25)$$

则式(4.2-17)变成

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \cdots + \alpha_{n_a-1} y(t-n_a+1) + \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \cdots + \beta_{n_b+d-1} u(t-n_b-d+1) = 0 \quad (4.1-26)$$

在上式中待估参数为  $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n_a-1}, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{n_b+d-1}$ ,但按式(4.1-26)不能进行辨识。可利用式(4.1-13)进行参数辨识

$$y(t+d) = \frac{G(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + \frac{B(q^{-1})F(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t) + F(q^{-1})\varepsilon(t+d) \quad (4.1-13)$$

将式(4.1-25)代入上式,并设  $F(q^{-1})\varepsilon(t+d) = e(t+d)$ ,得参数辨识模型

$$y(t+d) = \alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \cdots + \alpha_{n_a-1} y(t-n_a+1) + \beta_0 u(t) + \beta_1 u(t-1) + \cdots + \beta_{n_b+d-1} u(t-n_b-d+1) + e(t+d) \quad (4.1-27)$$

为了保证调节器参数的便于辨识,应尽量减少被估参数数目,可凭经验给出  $\beta_0$ ,则

$$\theta^T = [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_{n_a-1} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n_b+d-1}]$$

$$\Phi^T(t) = [y(t) \ y(t-1) \ \cdots \ y(t-n_a+1) \ u(t-1) \ \cdots \ u(t-n_b-d+1)]$$

则式(4.1-27)可写成

$$y(t+d) - \beta_0 u(t) = \Phi^T(t)\theta(t) + \xi(t+d) \quad (4.1-28)$$

递推最小二乘法参数估计公式如下

$$\theta(t+1) = \theta(t) + K(t)[y(t+d) - \beta_0 u(t) - \Phi^T(t)\theta(t)] \quad (4.1-29)$$

$$K(t) = P(t-1)\Phi(t-1)[1 + \Phi^T(t-1)P(t-1)\Phi(t-1)]^{-1} \quad (4.1-30)$$

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\Phi(t-1)[1 + \Phi^T(t-1)P(t-1)\Phi(t-1)]^{-1}\Phi^T(t-1)P(t-1) \quad (4.1-31)$$

最优控制为

$$u(t) = -\frac{1}{\beta_0}[\alpha_0 y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \cdots + \alpha_{n_a-1} y(t-n_a+1) + \beta_1 u(t-1) + \cdots + \beta_{n_b+d-1} u(t-n_b-d+1)] \quad (4.1-32)$$

隐式最小方差自校正调节器计算步骤如下:

第一步 采样读取新的观测值  $y(t+d)$ ;

第二步 按式(4.1-29),式(4.1-30)及式(4.1-31)估计  $\theta(t)$ ;

第三步 按式(4.1-32) 计算最佳控制  $u(t)$ 。

当采样时刻从  $t + d \rightarrow t + d + 1$ , 重复上述步骤。

### (三) 最小方差自校正调节器的稳定性问题

把式(4.1-19) 或式(4.1-32) 代入式(4.1-1), 可得以  $y(t)$  为输出,  $\varepsilon(t)$  为输入的闭环系统方程

$$B(q^{-1})[A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})]y(t) = B(q^{-1})F(q^{-1})C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.1-33)$$

考虑到式(4.1-8), 上式可写成

$$B(q^{-1})C(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})F(q^{-1})C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.1-34)$$

闭环系统的特征方程为

$$B(q^{-1})C(q^{-1}) = 0 \quad (4.1-35)$$

为了使闭环系统稳定,  $B$  和  $C$  的零点必须在单位圆外。如果  $B$  的零点在单位圆外, 则由下式

$$A(q^{-1})y(t+d) = B(q^{-1})u(t)C(q^{-1})\varepsilon(t+d)$$

或

$$B(q^{-1})u(t) = A(q^{-1})y(t+d) - C(q^{-1})\varepsilon(t+d)$$

可知, 在  $y(t+d)$  有界时, 能保证序列  $\{u(t)\}$  有界。如  $B(q^{-1})$  的零点不在单位圆外, 则  $y(t+d)$  有界不能保证  $u(t)$  有界, 这就是说最小方差自校正调节器只适用于  $B(q^{-1})$  的零点在单位圆外系统。

例 4.1-1 设有下列系统

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

$d$  为系统的延迟时间

(1)  $d = 1$ , 根据等式(4.1-8) 得

$$1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2} = (1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2})f_0 + q^{-1}(g_0 + g_1q^{-1})$$

比较上式等号两边  $q^{-1}$  同次项的系数可得

$$f_0 = 1, \quad g_0 = 3.2, \quad g_1 = 0.2$$

最小方差自校正调节信号为

$$u(t) = -\frac{3.2 + 0.2q^{-1}}{1 + 0.5q^{-1}}y(t)$$

或

$$u(t) = -0.5u(t-1) - 3.2y(t) - 0.2y(t-1)$$

输出误差为

$$\varepsilon(t) = y(t), \quad E[y(t)] = \sigma^2$$

(2)  $d = 2$ , 表明系统延迟增大, 性能变差, 根据等式(4.1-8) 得

$$1 + 1.5q^{-1} + 0.9q^{-2} = (f_0 + f_1q^{-1})(1 - 1.7q^{-1} + 0.7q^{-2}) + q^{-2}(g_0 + g_1q^{-1})$$

比较上式等号两边  $q^{-1}$  的同次项可得

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 3.2, \quad g_0 = 5.64, \quad g_1 = -2.24$$

最小方差调节信号为

$$u(t) = -5.6y(t) + 2.24y(t-1) - 3.7u(t-1) - 1.6u(t-2)$$

输出误差为

$$y(t) = f_0 \varepsilon(t) + f_1 \varepsilon(t-1) = \varepsilon(t) + 3.2\varepsilon(t-1)$$

输出误差方差为

$$E[y(t)] = (1 + 3.2)\sigma^2 = 4.2\sigma^2$$

由于系统延迟增大,故输出误差的方差就增大。

## § 4.2 最小方差自校正控制器

在讨论自校正调节器时,认为参考输入为零,性能指标为输出的方差最小,对控制信号没有加以限制。经常会遇到跟踪问题,希望系统的输出  $y(t)$  能很好地跟踪参考输入  $y_r(t)$ 。另一方面,希望对控制信号加以一定的限制。因此提出最小方差自校正控制问题。最小方差自校正控制是 D.W.Clarke 和 P.I.Gawthrop 于 1975 年提出的,仍采用二次型指标函数,但在指标函数中引入参考输入项和控制作用的加权项。下面先求系统参数已知的最小方差控制。由式 (4.1-1) 得

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t)$$

自校正最小方差控制的指标函数为

$$J = E\{[\Gamma(q^{-1})y(t+d) - \Psi(q^{-1})y_r(t)]^2 + [\Lambda'(q^{-1})u(t)]^2\} \quad (4.2-1)$$

寻求使  $J$  为最小的  $u(t)$ 。式中  $\Gamma(q^{-1})$ ,  $\Psi(q^{-1})$  和  $\Lambda'(q^{-1})$  分别为加权多项式。 $\Gamma$ ,  $\Psi$  和  $\Lambda'$  的选取按跟踪精度和对  $u(t)$  的限制而定。

$$\Gamma(q^{-1}) = 1 + \Gamma_1 q^{-1} + \cdots + \Gamma_{n_r} q^{-n_r} \quad (4.2-2)$$

$$\Psi(q^{-1}) = \Psi_0 + \Psi_1 q^{-1} + \cdots + \Psi_{n_\Psi} q^{-n_\Psi} \quad (4.2-3)$$

$$\Lambda'(q^{-1}) = \lambda'_0 + \lambda'_1 q^{-1} + \cdots + \lambda'_{n_\lambda} q^{-n_\lambda} \quad (4.2-4)$$

根据式(4.1-13) 可得

$$y(t+d) = \frac{G}{C}y(t) + \frac{BF}{C}u(t) + F\varepsilon(t+d) \quad (4.2-5)$$

将式(4.2-5) 代入式(4.2-1), 可得

$$J = E\left\{\left[\Gamma \frac{G}{C}y(t) + \Gamma \frac{BF}{C}u(t) + \Gamma F\varepsilon(t+d) - \Psi y_r(t)\right]^2 + [\Lambda' u(t)]^2\right\} \quad (4.2-6)$$

因  $F\varepsilon(t+d)$  与  $y(t)$ ,  $u(t)$  和  $y_r(t)$  不相关, 则

$$J = E\left\{\left[\frac{\Gamma G}{C}y(t) + \frac{\Gamma BF}{C}u(t) - \Psi y_r(t)\right]^2 + [\Lambda' u(t)]^2\right\} + E\{[\Gamma F\varepsilon(t+d)]^2\} \quad (4.2-7)$$

求  $J$  关于  $u(t)$  的偏导数, 令其等于零, 可得

$$\begin{aligned} \frac{J}{u(t)} = E\left\{2\left[\frac{\Gamma G}{C}y(t) + \frac{\Gamma BF}{C}u(t) - \Psi y_r(t)\right] \frac{1}{u(t)}\left[\frac{\Gamma BF}{C}u(t)\right] + \right. \\ \left. 2\Lambda' u(t) \frac{1}{u(t)}[\Lambda' u(t)]\right\} \end{aligned} \quad (4.2-8)$$

下面先求式(4.2-8) 中的二个偏导数

$$\frac{\Gamma BF}{C} u(t)(1 + \Gamma_1 q^{-1} + \cdots)(b + b_1 q^{-1} + \cdots)$$

$$(f_0 + f_1 q^{-1} + \cdots) \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{a}{\omega} q^{-1} + \cdots \right] u(t) =$$

$$\frac{1}{\omega} [b f_0 + (\Gamma_1 b f_0 + b f_0 + b f_1 - b f_0 a) q^{-1} + \cdots] u(t) \quad (4.2-9)$$

$$\frac{1}{u(t)} \left[ \frac{\Gamma B F}{C} u(t) \right] = \frac{b f_0}{\omega} \quad (4.2-10)$$

考虑到  $f_0 = \omega$ , 则式(4.2-10) 为

$$\frac{1}{u(t)} \left[ \frac{\Gamma B F}{C} u(t) \right] = b \quad (4.2-11)$$

$$\Lambda' u(t) = [\lambda'_0 + \lambda'_1 q^{-1} + \cdots] u(t)$$

$$\frac{1}{u(t)} [\Lambda' u(t)] = \lambda'_0 \quad (4.2-12)$$

将式(4.2-11) 和式(4.2-12) 代入式(4.2-8), 经整理后得

$$\frac{J}{u(t)} = E \left\{ 2 \left[ \frac{\Gamma G}{C} y(t) + \frac{\Gamma B F}{C} u(t) - \Psi y_r(t) \right] b + 2 \lambda'_0 \Lambda' u(t) \right\} = 0 \quad (4.2-13)$$

以  $\frac{C}{b}$  乘上式等号两边, 经整理后, 可得

$$E \{ [\Gamma G y(t) + \Gamma B F u(t) - \Psi C y_r(t) + C \Lambda u(t)] \} = 0 \quad (4.2-14)$$

在上式中

$$\Lambda = \frac{\lambda'_0}{b_0} \Lambda' \quad (4.2-15)$$

令式(4.2-14) 大括弧中的多项式为零, 可得

$$\Gamma G y(t) + \Gamma B F u(t) - \Psi C y_r(t) + C \Lambda u(t) = 0 \quad (4.2-16)$$

由上式可得最优控制

$$u(t) = \frac{C \Psi y_r(t) - \Gamma G y(t)}{C \Lambda + \Gamma B F} \quad (4.2-17)$$

按式(4.1-1) 和式(4.1-17) 可得最小方差自校正控制方块图, 如图 4.2-1 所示。

使指标函数  $J$  为最小的充分条件为

$$\frac{J}{u(t)} \left[ \frac{J}{u(t)} \right] = b_0^2 + \lambda_0'^2 > 0 \quad (4.2-18)$$

由于式(4.2-18) 总能成立, 所以由式(4.2-17) 所表示的控制规律总能使指标函数  $J$  为最小。

式(4.2-1) 表示的指标函数又称为广义最小方差准则, 因此这里所讨论的最小方差控制 又称为广义最小方差自校正控制。

上面用直接法推导广义最小方差自校正控制规律, 比较直观易懂。克拉克 (Clarke) 提出引入一个辅助系统的设计方法, 可得同样结果。

如果用随机线性二次型理论来求最优

控制问题, 需要求解黎卡提方程, 计算比较麻烦。用最小方差自校正控制, 计算比较简单一些。

下面讨论自校正控制的算法及闭环系统的稳定性问题。

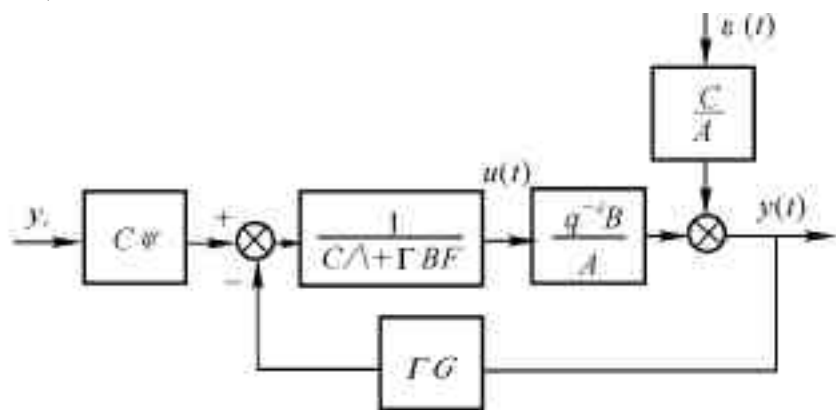


图 4.2-1 最小方差自校正控制方块图

## (一) 最小方差自校正控制的算法

由于参数估计模型选得不同,可分为显式和隐式最小方差自校正控制。

### (1) 显式最小方差自校正控制

在上面推导最优控制方程时,假定差分方程式(4.1-1)的参数都是已知的,而在实现控制时,这些参数往往是未知的。我们可利用  $y(t)$  的观测值和  $u(t)$  来估计系统模型的参数,而后再计算控制器的参数。显式自校正控制的算法如下:

第一步 采样读取  $y(t)$  的观测值和  $u(t)$  值。

第二步 按递推最小二乘法或别的递推算法估计系统模型参数  $\theta$ 。

第三步 按式(4.1-8)计算  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  的系数。

第四步 按式(4.2-17)计算最优控制  $u(t)$ 。

当采样次数加1,即  $t \rightarrow t+1$ ,重复上述计算步骤。

显式自校正控制计算比较复杂。

### (2) 隐式最小方差自校正控制

可不必辨识控制对象的参数,而直接辨识控制器的参数,使计算简化。

最小方差自校正控制为

$$u(t) = \frac{C\Psi y_r(t) - \Gamma G y(t)}{C\Lambda + \Gamma B F}$$

$$(C\Lambda + \Gamma B F) u(t) = C\Psi y_r(t) - \Gamma G y(t) \quad (4.2-19)$$

按上式无法进行辨识,下面寻求控制器参数的辨识模型。设

$$r(t+d) = \Gamma y(t+d) - \Psi y_r(t) + \Lambda u(t) \quad (4.2-20)$$

可按读得  $y(t)$ ,  $y_r(t)$  和  $u(t)$  值,计算  $r(t+d)$  值。

由式(4.1-13)可得

$$\Gamma y(t+d) = \frac{\Gamma G}{C} y(t) + \frac{\Gamma B F}{C} u(t) + \Gamma F \varepsilon(t+d)$$

$$\Gamma y(t+d) = \frac{\Gamma G}{C} y(t) + \frac{\Gamma B F}{C} u(t) + e(t+d) \quad (4.2-21)$$

将式(4.2-21)代入式(4.2-20),可得

$$r(t+d) = \frac{\Gamma G}{C} y(t) + \frac{\Gamma B F}{C} u(t) - \Psi y_r(t) + \Lambda u(t) + e(t+d) \quad (4.2-22)$$

$$C r(t+d) = \Gamma G y(t) + (\Gamma B F + C\Lambda) u(t) - C\Psi y_r(t) + C e(t+d)$$

$$C r(t+d) = L y(t) + H u(t) - M y_r(t) + C e(t+d) \quad (4.2-23)$$

式中

$$L = L(q^{-1}) = \Gamma(q^{-1}) G(q^{-1}) = l_0 + l_1 q^{-1} + \cdots + l_{n_l} q^{-n_l}$$

$$H = H(q^{-1}) = C(q^{-1}) \Lambda(q^{-1}) + \Gamma(q^{-1}) B(q^{-1}) F(q^{-1}) =$$

$$h_0 + h_1 q^{-1} + \cdots + h_{n_h} q^{-n_h}$$

$$M = M(q^{-1}) = C(q^{-1}) \Psi(q^{-1}) = m_0 + m_1 q^{-1} + \cdots + m_{n_m} q^{-n_m}$$

式中  $L$ ,  $H$  和  $M$  中的参数恰好是控制器式(4.2-17)的参数。对于最简单情况,当  $C=1$  时,  $r(t+d)$  的预测值  $\hat{r}(t+d|t)$  可用下式表示

$$\hat{r}(t+d|t) = L y(t) + H u(t) - M y_r(t) = \Phi^T(t) \theta \quad (4.2-24)$$

在上式中  $M(q^{-1})$  的系数就是  $\Psi(q^{-1})$  的系数。在式(4.2-24)中



$$\begin{aligned}\theta^T &= [b \ h \ \cdots \ l_{n_l} \ h_0 \ h_1 \ \cdots \ h_{n_h} \ m_0 \ m_1 \ \cdots \ m_{n_m}] \\ \Phi^T(t) &= [y(t) \ y(t-1) \ \cdots \ y(t-n_l) \ u(t) \ u(t-1) \ \cdots \ u(t-n_h) \\ &\quad - y_r(t) \ - y_r(t-1) \ \cdots \ - y_r(t-n_m)]\end{aligned}$$

因

$$r(t+d) = \hat{r}(t+d|t) + e(t+d)$$

则

$$\begin{aligned}r(t+d) &= Ly(t) + Hu(t) - C\Psi y_r(t) + e(t+d) \\ r(t+d) &= \Phi^T(t)\theta + e(t+d)\end{aligned}\quad (4.2-25)$$

$r(t+d)$  可按式(4.2-20) 算出来, 式(4.2-25) 是可辨识的, 可得自校正控制器参数的估值。 $\theta$  可按下列递推公式计算

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)[r(t+d) - \Phi^T(t)\hat{\theta}(t)] \quad (4.2-26)$$

$$K(t+1) = P(t)\Phi(t)[1 + \Phi^T(t)P(t)\Phi(t)]^{-1} \quad (4.2-27)$$

$$\begin{aligned}P(t) &= P(t-1) - P(t-1)\Phi(t-1)[1 + \Phi^T(t-1)P(t-1) \times \\ &\quad \Phi(t-1)]^{-1}\Phi^T(t-1)P(t-1)\end{aligned}\quad (4.2-28)$$

隐式自校正控制算法如下:

第一步 读取输出数据  $y(t)$ ,  $u(t)$  和伺服输入  $y_r(t)$ ;

第二步 组成新观测数据向量  $\Phi^T(t)$ ;

第三步 计算  $r(t+d)$ ,

$$r(t+d) = \Gamma y(t+d) - \Psi y_r(t) + \Lambda u(t) \quad (4.2-20)$$

第四步 按递推最小二乘法公式式(4.2-26) ~ 式(4.2-28) 计算  $\hat{\theta}$ ;

第五步 按式(4.2-17) 计算自校正控制规律。

当采样次数加 1, 即  $t \rightarrow t+1$  时, 继续循环。

如果  $C \neq 1$ , 式(4.2-24) 可写成

$$\hat{r}(t+d|t) = \Phi^T(t)\theta + (1-C)\hat{r}(t+d|t) \quad (4.2-29)$$

则

$$r(t+d) = \Phi^T(t)\theta + (1-C)\hat{r}(t+d|t) + e(t+d) \quad (4.2-30)$$

如用最小二乘法估计, 估值是有偏的。但是加权最小方差控制可将最优预测  $\hat{r}(t+d|t)$  校正到零。这样按式(4.2-30) 进行最小二乘估计, 仍可得无偏估计。

(二) 最小方差自校正控制闭环系统的稳定性

由图 4.2-1 可得  $y_r(t)$  为输入,  $y(t)$  为输出的闭环系统方程

$$C(A\Lambda + \Gamma B)y(t) = q^{-d}BC\Psi y_r(t) + (C\Lambda + \Gamma BF)C\varepsilon(t) \quad (4.2-31)$$

闭环系统的特征方程为

$$CT = C(A\Lambda + \Gamma B) = 0 \quad (4.2-32)$$

在特征方程中权因子  $\Lambda$  和  $\Gamma$  的选择, 对系统的稳定性起着重大的作用, 选择合适的  $\Lambda$  和  $\Gamma$  可获得希望的闭环特征方程。从式(4.2-32) 可看出,  $C$  的零点成为闭环特征方程的根, 因此要求  $C$  的零点在  $q^{-1}$  复平面的单位圆外, 以保证闭环系统稳定。当  $\Lambda = 0$  时, 对控制  $u(t)$  不加约束, 特征方程为

$$CT = \Gamma BC = 0$$

从上式可看出,  $B$  的零点成为闭环系统特征方程的根, 当控制对象为非逆稳定时, 闭环系统就

不稳定了。因此要合理地选择权因子。

在式(4.2-1)的指标函数  $J$  中, 当  $\Lambda = 0$  时, 广义最小方差控制退化为最小方差控制, 再令  $\Psi = 0$  或  $y_r(t) = 0$ , 就退化为最小方差自校正调节器。

例 4.2-1 设系统差分方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.3q^{-1} + 0.6q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$$

$$d = 1$$

要求系统的输出  $y(t)$  跟踪输入  $y_r(t)$ , 指标函数为

$$J = E \{ [y(t+d) - y_r(t)]^2 + 0.5u^2(t) \}$$

对照指标函数式(4.2-1), 得

$$\Gamma = 1, \Psi = 1, \Lambda' = \lambda'_0 = \sqrt{0.5}, b = 1, \Lambda = \frac{\lambda'_0}{b_0} \Lambda' = 0.5$$

按式(4.1-8) 求  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$

$$1 - 0.5q^{-1} = f_0(1 - 1.3q^{-1} + 0.6q^{-2}) + q^{-1}(g_0 + g_1q^{-1})$$

解之得

$$f_0 = 1, g_0 = 0.8, g_1 = -0.6$$

由上面可得最优控制

$$u(t) = \frac{(1 - 0.5q^{-1})y_r(t) - (0.8 - 0.6q^{-1})y(t)}{1.5 + 0.25q^{-1}}$$

或

$$u(t) = \frac{0.8y(t) - 0.6y(t-1) + 0.25u(t-1) - y_r(t) + 0.5y_r(t-1)}{1.5}$$

例 4.2-2 设有逆不稳定系统

$$y(t) = 0.95y(t-1) + u(t-2) + 1.2u(t-3) + \varepsilon(t) - 0.7\varepsilon(t-1)$$

指标函数为

$$J = E \{ [y(t+2) - y_r(t)]^2 + [\Lambda' u(t)]^2 \}$$

要求确定  $\Lambda'$  及控制规律  $u(t)$

$$A = 1 + 0.95q^{-1}$$

$$B = 1 + 1.2q^{-1}$$

$$C = 1 - 0.7q^{-1}$$

$$d = 2, \Gamma = 1, \Psi = 1$$

由于控制对象为逆不稳定系统, 需要根据稳定的特征方程来确定权因子  $\Lambda$ , 闭环特征方程为

$$T = (1 - 0.95q^{-1})\Lambda + 1 + 1.2q^{-1} = 0$$

$$q^{-1} = \frac{\Lambda + 1}{1.2 - 0.95\Lambda}$$

当特征方程的根大于 1 时, 闭环系统稳定, 因此要求

$$\left| \frac{\Lambda + 1}{1.2 - 0.95\Lambda} \right| > 1$$

由此求得

$$\Lambda > 0.102 \quad \text{或} \quad \Lambda' > \sqrt{0.102} = 0.32$$

利用恒等式

$$C = AF + q^{-d}G$$

可得

$$F = 1 + 0.25q^{-1}$$

$$G = g_0 = 0.24$$

$$BF = 1 + 1.45q^{-1} + 0.3q^{-2}$$

按式(4.2-17)可得控制规律

$$u(t) = \frac{1}{1.1} [y_r(t) - 0.7y_r(t-1) - 1.38u(t-1) - 0.3u(t-2) - 0.24y(t)]$$

### § 4.3 极点配置自校正调节器与控制器

在前面已谈到,最小方差自校正调节器的闭环特征方程为式(4.1-35)

$$B(q^{-1})C(q^{-1}) = 0$$

$B(q^{-1})$  的零点为闭环系统的极点。如果控制对象为逆稳定系统,  $B(q^{-1})$  的零点在  $q^{-1}$  复平面的单位圆内, 则闭环系统稳定。如果控制对象为逆不稳定系统,  $B(q^{-1})$  有零点在  $q^{-1}$  复平面的单位圆外, 则闭环系统不稳定。因此最小方差自校正调节方法不适合于逆不稳定系统, 即不适合于非最小相位系统。

在连续系统中, 很少遇到非最小相位系统, 但在离散系统中可能会较多地遇到非最小相位系统。有的连续系统虽然是最小相位系统, 由于采样间隔选得不同, 其离散系统可能是非最小相位系统。由于最小方差控制不适合于非最小相位系统, 需要寻求适合于非最小相位系统的控制方法。用极点配置

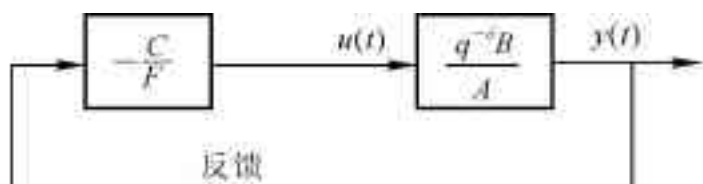


图 4.3-1 极点配置自校正调节器

法可以任意安排闭环系统的极点, 这一方法既适用于最小相位系统, 也适用于非最小相位系统。

下面分别讨论极点配置自校正调节器和控制器, 最小方差自校正控制器的极点配置。

#### (一) 极点配置自校正调节器

设系统的差分方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.1-1)$$

式中  $y(t)$  为系统的输出,  $\varepsilon(t)$  为系统的输入,  $\varepsilon(t)$  是均值为零的白噪声序列。设反馈规律为

$$u(t) = -\frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})}y(t) \quad (4.3-1)$$

极点配置自校正调节器的方块图如图 4.3-1 所示。

在式(4.3-1)中

$$F(\bar{q}^{-1}) = 1 + f_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + f_{n_f} \bar{q}^{-n_f} \quad (4.3-2)$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + g_{n_g} \bar{q}^{-n_g} \quad (4.3-3)$$

闭环系统方程为

$$(AF + \bar{q}^{-d} BG) y(t) = CF \varepsilon(t) \quad (4.3-4)$$

设闭环系统的期望特征多项式为  $C(\bar{q}^{-1})T(\bar{q}^{-1})$ , 式中

$$T(\bar{q}^{-1}) = \prod_{i=1}^{n_t} (1 - \alpha_i \bar{q}^{-1}) \quad (4.3-5)$$

式中  $\alpha_i$  为相应的稳定极点。

如果  $A, B, C$  的参数已知, 可按下式确定  $F$  和  $G$

$$AF + \bar{q}^{-d} BG = CT \quad (4.3-6)$$

闭环系统方程和  $u(t)$  方程分别为

$$y(t) = \frac{F(\bar{q}^{-1})}{T(\bar{q}^{-1})} \varepsilon(t) \quad (4.3-7)$$

$$u(t) = - \frac{G(\bar{q}^{-1})}{F(\bar{q}^{-1})} y(t) \quad (4.3-8)$$

为了式(4.3-6)有解, 要求  $AF$  与  $\bar{q}^{-d} BG$  的阶次相同, 即要求

$$\left. \begin{aligned} n_g &= n_a - 1 \\ n_f &= n_b + d - 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.3-9)$$

闭环系统的极点数  $n$  必须满足  $CT$  的阶次低于  $AF + \bar{q}^{-d} BG$  的阶次, 即

$$n < n_a + n_b + d - 1 \quad (4.3-10)$$

由于  $B$  不是闭环特征方程的因子, 因此极点配置自校正调节器适用于逆不稳定控制对象。

例 4.3-1 设有不稳定, 且逆不稳定系统

$$(1 - \bar{q}^{-1}) y(t) = \bar{q}^{-2} (0.5 + \bar{q}^{-1}) u(t) + (1 + 0.4 \bar{q}^{-1}) \varepsilon(t)$$

$$n_a = 1, \quad n_b = 1, \quad d = 2, \quad n_g = n_a - 1 = 0, \quad n_f = n_b + d - 1 = 2$$

设  $T(\bar{q}^{-1})$  为

$$T(\bar{q}^{-1}) = 1 - 0.5 \bar{q}^{-1}$$

即期望闭环极点为 0.5, 按式(4.3-6)得

$$(1 - \bar{q}^{-1})(1 + f_1 \bar{q}^{-1} + f_2 \bar{q}^{-2}) + \bar{q}^{-2} (0.5 + \bar{q}^{-1}) g_0 = (1 + 0.4 \bar{q}^{-1})(1 - 0.5 \bar{q}^{-1})$$

解之得

$$g_0 = 0.47, \quad f_1 = 0.9, \quad f_2 = 0.47$$

于是

$$u(t) = - \frac{0.47}{1 + 0.9 \bar{q}^{-1} + 0.47 \bar{q}^{-2}} y(t)$$

$$y(t) = - \frac{1 + 0.9 \bar{q}^{-1} + 0.47 \bar{q}^{-2}}{1 - 0.5 \bar{q}^{-1}} \varepsilon(t)$$

从这一例子可看出极点配置自校正调节器既适用于逆不稳定的控制对象, 也适用于不稳定控制对象。

下面讨论极点配置自校正调节器的算法。参数  $\theta$  的估计公式在最小方差自校正调节器的算法中已列出, 参看式(4.1-24)。整个计算步骤如下:

(1) 设置闭环期望极点方程  $T(\bar{q}^{-1})$ ;

(2) 读取新的观测数据  $y(t)$ ;

(3) 用递推最小二乘法公式(4.1-24) 求出参数向量  $\theta$  的估值  $\hat{\theta}$ (即  $A, B, C$ );

(4) 按式(4.3-6) 可得计算多项式  $F(q^{-1})$  和  $G(q^{-1})$  的公式

$$AF + q^{-d}BG = CT \quad (4.3-11)$$

算出  $F$  和  $G$ ;

(5) 按式(4.3-8) 可得调节器公式

$$\hat{u}(t) = - \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(t) \quad (4.3-12)$$

求出  $\hat{u}(t)$ 。

当  $t \rightarrow t+1$  时,继续重复上述计算步骤。

最小方差自校正调节器具有渐近性。讨论极点配置自校正调节器规律时,假定受控对象的参数是已知的。当参数估计收敛时,极点配置自校正调节规律将收敛于参数已知的极点配置调节规律。这种性质称为极点配置自校正调节器的渐近性。

(二) 极点配置自校正控制器

设控制系统无噪声,其方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) \quad (4.3-13)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n_a}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_m q^{-n_b}$$

$A$  与  $B$  互质。

设系统的参考输入为  $y_r(t)$ ,要求设计一个控制器,使系统输出  $y(t)$  与参考输入  $y_r(t)$  之间的传递函数为

$$G_m(q^{-1}) = q^{-d} \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (4.3-14)$$

$G_m(q^{-1})$  为期望传递函数,设  $A_m(q^{-1})$  与

$B_m(q^{-1})$  互质。一般,控制信号  $u(t)$  可用参考输入  $y_r(t)$  和系统输出  $y(t)$  的线性函数来表示,如图 4.3-2 所示。

由图 4.3-2 可得控制信号  $u(t)$

$$u(t) = \frac{H(q^{-1})}{F(q^{-1})} y_r(t) - \frac{G(q^{-1})}{F(q^{-1})} y(t) \quad (4.3-15)$$

系统输出  $y(t)$  与输入  $y_r(t)$  之间的方程为

$$y(t) = \frac{q^{-d}HB}{AF + q^{-d}BG} y_r(t) \quad (4.3-16)$$

$y(t)$  与  $y_r(t)$  之间的传递函数为

$$G_p(q^{-1}) = \frac{q^{-d}H(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})G(q^{-1})} \quad (4.3-17)$$

极点配置的任务就是寻求多项式  $F(q^{-1})$ ,  $G(q^{-1})$  和  $H(q^{-1})$ , 使闭环系统的传递函数  $G_p(q^{-1})$  等于期望的传递闭函数  $G_m(q^{-1})$ , 即

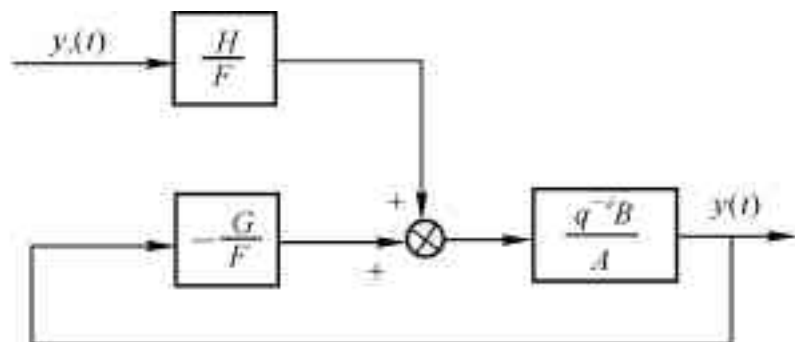


图 4.3-2 极点配置自校正控制图

$$\frac{\bar{q}^d H(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1})}{A(\bar{q}^{-1}) F(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^d B(\bar{q}^{-1}) G(\bar{q}^{-1})} = \frac{\bar{q}^d B_m(\bar{q}^{-1})}{A_m(\bar{q}^{-1})} \quad (4.3-18)$$

$A_m$  与  $B_m$  互质。 $A_m(\bar{q}^{-1})$  的极点应选在阻尼特性较好的区域。 $A(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^d B(\bar{q}^{-1})G(\bar{q}^{-1})$  是闭环特征多项式。

从式(4.3-18)可看到,闭环系统传递函数分子的阶次都高于期望传递函数分子分母的阶次。如果要使闭环系统传递函数的阶次与期望传递函数的阶次相同,闭环系统传递函数的分子分母必须进行零极点相消。零极点相消只能消掉稳定因子,不能消掉不稳定因子。如果  $B(\bar{q}^{-1})$  的根都在阻尼特性较好的区域,问题比较简单。如果  $B(\bar{q}^{-1})$  的根有在不稳定或阻尼特性差的区域,问题就比较复杂。把  $B(\bar{q}^{-1})$  分解成二部分,即

$$B(\bar{q}^{-1}) = B^+(\bar{q}^{-1}) B^-(\bar{q}^{-1}) \quad (4.3-19)$$

式中  $B^+(\bar{q}^{-1})$  的根处于阻尼特性较好的区域,  $B^-(\bar{q}^{-1})$  的根处于不稳定或阻尼特性差的区域,可规定  $B^+(\bar{q}^{-1})$  为首一多项式。为了保证闭环稳定,不能对消  $B^-(\bar{q}^{-1})$  的任何一个零点,因此  $B_m(\bar{q}^{-1})$  必须包含因子  $B^-(\bar{q}^{-1})$ ,即设

$$B_m(\bar{q}^{-1}) = B_{m1}(\bar{q}^{-1}) B^-(\bar{q}^{-1}) \quad (4.3-20)$$

于是式(4.3-18)变成

$$\frac{\bar{q}^d H B^+ B^-}{A F + \bar{q}^d B^- B^+ G} = \frac{\bar{q}^d B_{m1} B^-}{A_m} \quad (4.3-21)$$

因  $A$  与  $B$  互质,  $B^+$  也应是  $F$  的因子,设

$$F(\bar{q}^{-1}) = F_1(\bar{q}^{-1}) B^+(\bar{q}^{-1}) \quad (4.3-22)$$

将式(4.3-22)代入式(4.3-21)得

$$\frac{\bar{q}^d H B^-}{A F_1 + \bar{q}^d B^- G} = \frac{\bar{q}^d B_{m1} B^-}{A_m} \quad (4.3-23)$$

或者

$$\frac{\bar{q}^d H}{A F_1 + \bar{q}^d B^- G} = \frac{\bar{q}^d B_{m1}}{A_m} \quad (4.3-24)$$

因  $A F_1 + \bar{q}^d B^- G$  的阶次比  $A_m$  的阶次高,因此  $A F_1 + \bar{q}^d B^- G$  与  $H$  之间有公因子,设公因子为  $A_0(\bar{q}^{-1})$ 。 $A_0$  可任意选择,  $A_0$  的根应在阻尼特性较好的区域。在有噪声的情况下,  $A_0$  应选为与噪声有关的  $C(\bar{q}^{-1})$ 。如在式(4.3-24)右边的分子和分母都乘  $A_0$ ,可得

$$H = B_{m1} A_0 \quad (4.3-25)$$

$$A F_1 + \bar{q}^d B^- G = A_m A_0 \quad (4.3-26)$$

如果  $B_{m1}$  和  $A_0$  已给定,则可从式(4.3-25)算出  $H(\bar{q}^{-1})$ 。下一步主要工作就是利用式(4.3-26)来求  $F$  和  $G$ 。为了问题有惟一解,要求各多项式的阶次满足下列各式

$$\deg G = \deg A - 1$$

$$\deg F_1 = \deg B^- + d - 1$$

$$\deg A_m + \deg A_0 \leq \deg A + \deg B^- + d - 1$$

在极点配置自校正控制器设计的每一循环计算中,都要求先辨识控制对象的参数  $A$  和  $B$ ,在获得参数估值  $\hat{A}$  和  $\hat{B}$  之后,按下列步骤设计控制器

第一步 按式(4.3-26)求出  $F_1$  和  $G$ ;

第二步 按式(4.3-22)和式(4.3-25)计算

$$F = F_1 B^+$$

$$H = B_m A_0$$

将求得的  $F, G$  和  $H$  代入式(4.3-15), 可得控制  $u(t)$ 。

下面讨论二种特殊情况

(1) 过程零点全部消去 受控对象为逆稳定系统。在这种情况下,  $B(q^{-1})$  的零点全部稳定,  $B(q^{-1})$  是  $F(q^{-1})$  的因子。这时式(4.3-22)、式(4.3-25) 和式(4.3-26) 变成

$$\begin{aligned} F &= F_1 B, & H &= B_m A_0 \\ AF_1 + q^{-d} G &= A_m A_0 \end{aligned} \quad (4.3-27)$$

为了  $F_1$  和  $G$  有惟一解, 要求

$$\begin{aligned} \deg G &= \deg A - 1 \\ \deg F_1 &= d - 1 \\ \deg A_m + \deg A_0 &\leq \deg A + d - 1 \end{aligned}$$

(2) 过程零点没有一个消掉 受控对象为逆不稳定。在这种情况下受控对象的零点全不稳定或在阻尼特性轻差的区域, 这时  $B(q^{-1})$  与  $F(q^{-1})$  无公因子, 而且

$$B_m = \alpha B, \quad H = \alpha A_0$$

$\alpha$  为常数, 在跟踪控制中, 希望闭环传递函数低频段增益为 1,  $\alpha$  根据  $B_m(1) = A_m(1)$  来选择。

在这里式(4.3-26) 变为

$$AF + q^{-d} BG = A_m A_0 \quad (4.3-28)$$

为了  $F$  和  $G$  有惟一解, 要求

$$\begin{aligned} \deg G &= \deg A - 1 \\ \deg F &= \deg B + d - 1 \\ \deg A_m + \deg A_0 &\leq \deg A + \deg B + d - 1 \end{aligned}$$

极点配置方法的优点是适用于对象稳定的系统, 也适用于对象不稳定和逆不稳定系统, 缺点是计算比较复杂。极点配置自校正控制实际上也是一种模型参考自适应系统。

例 4.3-2 设有不稳定系统

$$(1 - q^{-1})y(t) = q^{-2}(1 + 0.9q^{-1})u(t)$$

求极点配置控制器, 参考输入为  $y_r(t)$ , 期望传递函数为

$$G_m(p) = \frac{q^{-2}(1 - 0.6q^{-1})}{1 - 0.5q^{-1}}$$

本例属过程零点全部消去的特殊情况。在题中  $A(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ ,  $B(q^{-1}) = 1 + 0.9q^{-1}$ 。设  $A_0(q^{-1}) = 1 - 0.7q^{-1}$ , 则  $H(q^{-1}) = B_m A_0 = (1 - 0.6q^{-1})(1 - 0.7q^{-1})$ 。  $B(q^{-1})$  为  $F(q^{-1})$  的因子,  $F(q^{-1}) = F_1(q^{-1})B(q^{-1})$ 。  $\deg A = 1$ ,  $\deg G = \deg A - 1 = 0$ ,  $\deg F_1 = d - 1 = 1$ , 则  $G(q^{-1}) = g_0$ ,  $F_1(q^{-1}) = f_0 + f_1 q^{-1}$ 。将上面有关项代入(4.3-28) 式, 得

$$\begin{aligned} (1 - q^{-1})(f_0 + f_1 q^{-1}) + g_0 q^{-2} &= (1 - 0.5q^{-1})(1 - 0.78q^{-1}) = \\ &= 1 - 1.2q^{-1} + 0.35q^{-2} \end{aligned}$$

解之可得  $f_0 = 1$ ,  $f_1 = -0.2$ ,  $g_0 = 0.15$ , 即  $G(q^{-1}) = 0.15$ ,  $F_1(q^{-1}) = 1 - 0.2q^{-1}$ ,  $F(q^{-1}) = (1 - 0.2q^{-1})(1 + 0.9q^{-1})$ 。  $u(t)$  为

$$u(t) = \frac{(1 - 0.6q^{-1})(1 - 0.7q^{-1})}{(1 - 0.2q^{-1})(1 + 0.9q^{-1})} y_r(t) - \frac{0.15}{(1 - 0.2q^{-1})(1 + 0.9q^{-1})} y(t)$$

将  $A, B, F, G$  和  $H$  代入式(4.3-17), 可得系统闭环传递函数

$$G_p(q^{-1}) = \frac{q^{-2}(1 - 0.6q^{-1})}{1 - 0.5q^{-1}} = G_m(q^{-1})$$

经过极点配置后的闭环系统为稳定的。

### (三) 最小方差自校正控制器的极点配置

在上面讨论极点配置自校正控制时, 没有考虑系统对噪声的抑制问题。在实际中, 要求系统输出  $y(t)$  准确地跟踪输入  $y_r(t)$ , 又能抑制随机干扰的影响。在前面已讨论过最小方差自校正控制器, 系统方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.1-1)$$

自校正最小方差控制的指标函数为

$$J = E \{ [\Gamma(q^{-1})y(t+d) - \Psi(q^{-1})y_r(t)]^2 + [\Lambda'(q^{-1})u(t)]^2 \} \quad (4.2-1)$$

经过推导已得到最小方差自校正控制

$$u(t) = \frac{C\Psi y_r(t) - \Gamma G y(t)}{C\Lambda + \Gamma B F} \quad (4.2-17)$$

闭环系统的特征方程为

$$CT = C(A\Lambda + \Gamma B) = 0 \quad (4.2-32)$$

式中  $C$  的零点在  $q^{-1}$  复平面的单位圆外, 从极点配置的观点来看, 就是使上述特征方程中  $A\Lambda + \Gamma B$  等价于闭环特征方程  $T$ , 即满足

$$A\Lambda + \Gamma B = T = 0 \quad (4.3-29)$$

式中闭环特征多项式  $T(q^{-1})$  是期望的特征多项式, 根据对系统的要求而给定的。需要求出多项式  $\Lambda(q^{-1})$  和  $\Gamma(q^{-1})$ 。通常为了保证伺服跟踪精度, 选择指标函数式(4.2-1)中的  $\Gamma$  与  $\Psi$  相等, 即

$$\Gamma(q^{-1}) = \Psi(q^{-1}) \quad (4.3-30)$$

为了使式(4.3-29)有惟一解, 对多项式  $\Lambda(q^{-1})$  和  $\Gamma(q^{-1})$  的阶次作如下的规定

$$\deg \Lambda = \deg B - 1$$

$$\deg \Gamma = \deg A - 1$$

$$\deg T \leq \deg A + \deg B - 1$$

闭环系统方程为

$$y(t) = \frac{q^{-d}B\Psi}{T}y_r(t) + \frac{C\Lambda + BF}{T}\varepsilon(t) \quad (4.3-31)$$

这样系统就达到期望极点的目的。

例 4.3-3 设系统方程为

$$y(t) - y(t-1) = u(t-2) + 0.8u(t-3) + \varepsilon(t) - 0.2\varepsilon(t-1)$$

求最小方差自校正控制极点配置

$$A(q^{-1}) = 1 - q^{-1}, \quad B(q^{-1}) = 1 + 0.8q^{-2}, \quad C = 1 - 0.2q^{-1}$$

$$d = 2, \quad \deg \Lambda = \deg B - 1 = 0, \quad \Lambda = \lambda_0$$

设

$$\Gamma = \Psi = 1, \quad T(q^{-1}) = K(1 - 0.5q^{-1})$$

则

$$A\Lambda + \Gamma B = (1 - q^{-1})\lambda_0 + (1 + 0.8q^{-1}) = T = K(1 - 0.5q^{-1})$$



解之得

$$K = 3.6, \quad \lambda_0 = 2.6 \text{ 或 } \Lambda = 2.6$$

由式  $(1 - 0.2q^{-1}) = (1 + f_1 q^{-1})(1 - q^{-1}) + g_0 q^{-2}$  得  $f_1 = 0.8$ ,  $g_0 = 0.8$ 。将  $B, C, \Gamma, \Psi, \Lambda$  和  $F$  代入式(4.2-17) 可得

$$u(t) = \frac{0.277 y_r(t) - 0.055 y_r(t-1) - 0.222 y(t)}{1 + 0.3q^{-1} + 0.17q^{-2}}$$

## § 4.4 多变量最小方差自校正调节器

设有  $m$  维输入和  $m$  维输出的多变量系统

$$A(q^{-1})Y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.4-1)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A(q^{-1}) &= I + A_1 q^{-1} + \cdots + A_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= B_0 + B_1 q^{-1} + \cdots + B_{n_b} q^{-n_b} \\ C(q^{-1}) &= I + C_1 q^{-1} + \cdots + C_{n_c} q^{-n_c} \end{aligned} \right\} \quad (4.4-2)$$

$$E[\varepsilon(t)] = 0$$

$$E[\varepsilon(t_i)\varepsilon(t_j)] = \begin{cases} R, & t_i = t_j \\ 0, & t_i \neq t_j \end{cases} \quad (4.4-3)$$

$A(q^{-1}), B(q^{-1})$  和  $C(q^{-1})$  均为  $m \times m$  矩阵,  $R$  为  $m \times m$  正定协方差阵。假定  $C(q^{-1})$  是非奇异的古尔维茨多项式矩阵,  $\det C(q^{-1})$  的所有零点都位于  $q^{-1}$  复平面的单位圆外。 $B(q^{-1})$  是非奇异的古尔维茨多项式矩阵,  $B_0$  非奇异。

自校正调节器的指标函数是

$$J = E[Y^T(t+d)Y(t+d)] \quad (4.4-4)$$

为最小

把单输入单输出自校正调节器方法推广到多输入多输出情况, 所遇到的主要障碍是多项式矩阵不能互换。换句话说, 必须考虑表达式中出现的矩阵顺序, 这方面的主要关系是“伪互换性”, 其形式为

$$G(q^{-1})F(q^{-1}) = F(q^{-1})G(q^{-1}) \quad (4.4-5)$$

在上式中, 用“互换”对  $G(q^{-1})F(q^{-1})$  代替  $F(q^{-1})G(q^{-1})$  对, 这些多项式矩阵必定存在, 但未必惟一。

由式(4.1-19) 得

$$G(q^{-1})Y(t) + F(q^{-1})B(q^{-1})u(t) = 0 \quad (4.4-6)$$

上式中“伪互换”关系的互换对为

$$F(q^{-1})G(q^{-1}) = G(q^{-1})F(q^{-1}) \quad (4.4-7)$$

另外,  $F, G, F$  和  $G$  满足下列关系式

$$\left. \begin{aligned} C(q^{-1}) &= A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \\ C(q^{-1}) &= F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4.4-8)$$

$$\left. \begin{aligned} F(q^{-1}) &= I + F_1 q^{-1} + \cdots + F_{d-1} q^{-d+1} \\ F(q^{-1}) &= I + F_1 q^{-1} + \cdots + F_{d-1} q^{-d+1} \end{aligned} \right\} \quad (4.4-9)$$

$$\left. \begin{aligned} G(\bar{q}^{-1}) &= G_0 + G_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + G_{n_a-1} \bar{q}^{-n_a+1} \\ G(\bar{q}^{-1}) &= G_0 + G_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + G_{n_a-1} \bar{q}^{-n_a+1} \end{aligned} \right\} \quad (4.4-10)$$

$$\left. \begin{aligned} \det F(\bar{q}^{-1}) &= \det F(\bar{q}^{-1}), F(0) = I \\ \det G(\bar{q}^{-1}) &= \det G(\bar{q}^{-1}), G(0) = I \end{aligned} \right\} \quad (4.4-11)$$

闭环系统输出为

$$Y(t) = F(\bar{q}^{-1}) \varepsilon(t) \quad (4.4-12)$$

对上面的关系式可证明如下,先用  $F$  左乘式(4.4-8)的第一式,得

$$FC = FAF + \bar{q}^d FG \quad (4.4-13)$$

再用  $F$  右乘式(4.4-8)的第二式,得

$$CF = FAF + \bar{q}^d GF \quad (4.4-14)$$

比较式(4.4-13)和式(4.4-14),并考虑到式(4.4-5),可得

$$CF = FC \quad (4.4-15)$$

利用式(4.4-7)和式(4.4-11)的关系,可得

$$\det C = \det C \quad (4.4-16)$$

因  $C(\bar{q}^{-1})$  是稳定多项式矩阵,则  $C(\bar{q}^{-1})$  也为稳定多项式矩阵。式(4.4-1)可表示成

$$AY(t+d) = Bu(t) + C\varepsilon(t+d) \quad (4.4-17)$$

用  $F$  左乘上式两边

$$FAY(t+d) = FBu(t) + FC\varepsilon(t+d) \quad (4.4-18)$$

由式(4.4-8),得

$$FA = C - \bar{q}^d G \quad (4.4-19)$$

$$(C - \bar{q}^d G)Y(t+d) = FBu(t) + FC\varepsilon(t+d)$$

由上式可得

$$CY(t+d) = GY(t) + FBu(t) + CF\varepsilon(t+d) \quad (4.4-20)$$

进一步可得

$$Y(t+d) = F\varepsilon(t+d) + C^{-1} [GY(t) + FBu(t)] \quad (4.4-21)$$

上式右边第一项与后两项不相关,因而有

$$\begin{aligned} J &= E \{ [F\varepsilon(t+d)]^T [F\varepsilon(t+d)] \} + \\ &E \{ [C^{-1}GY(t) + C^{-1}FBu(t)]^T [C^{-1}GY(t) + C^{-1}FBu(t)] \} \end{aligned} \quad (4.4-22)$$

如果上式右边最后一项为零,则  $J$  为最小,因而使  $J$  最小的最优控制策略为

$$C^{-1} [GY(t) + FBu(t)] = 0$$

即得

$$GY(t) + FBu(t) = 0 \quad (4.4-23)$$

$$u(t) = -B^{-1}F^{-1}GY(t) \quad (4.4-24)$$

系统的闭环特征方程为

$$\det \begin{bmatrix} A & -\bar{q}^d B \\ G & FB \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4-25)$$

如果式(4.4-24)的全部零点都位于  $\bar{q}^{-1}$  平面的单位圆外,闭环系统稳定,否则就不稳定。

$$\det \begin{bmatrix} A & -q^{-d}B \\ G & FB \end{bmatrix} = \det A \det [FB + q^{-d}GA^{-1}B] =$$

$$\det A \det [(FA + q^{-d}G)A^{-1}B] = \det A \det [CA^{-1}B] = (4.4-26)$$

$$\det A \det C \det (A^{-1}B) = \det C \det (AA^{-1}B) = \det C \det B =$$

$$\det B \det C = 0$$

若要闭环系统稳定,  $\det B$  和  $\det C$  的零点必须位于  $q^{-1}$  平面的单位圆外。

多变量最小方差调节器算法也可分为显式算法和隐式算法。

#### (一) 显式算法

第一步 读取  $Y(t)$  和  $u(t)$ ;

第二步 辨识  $A, B$  和  $C$  的参数;

第三步 按式(4.4-8) 解出  $F$  和  $G$ ;

第四步 利用伪逆互换式(4.4-7) 求出  $F$  和  $G$ ;

第五步 按式(4.4-23) 求出  $u(t)$ 。

当采样次数加 1, 即  $t \rightarrow t+1$  时, 继续重复上述步骤。

#### (二) 隐式算法

可选式(4.4-21) 作为参数辨识模型, 设  $C = I, G^{-1} = I$ , 则式(4.4-21) 成为

$$Y(t+d) = GY(t) + F'u(t) + e(t+d) \quad (4.4-27)$$

式中

$$F' = FB, \quad e(t+d) = F\varepsilon(t+d)$$

第一步 读取  $Y(t), u(t)$ ;

第二步 辨识  $G$  和  $F'$  的参数;

第三步 按式(4.4-23) 计算  $u(t)$ 。

当采样次数加 1, 即  $t \rightarrow t+1$  时, 重复上述步骤。

例 4.4-1 设有开环不稳定的双输入双输出系统( $m=2$ )

$$Y(t) + AY(t-1) = u(t-2) + \varepsilon(t) + G\varepsilon(t-1)$$

式

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

则

$$A(q^{-1}) = I + A_1 q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.9 & 0.5 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix} q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C(q^{-1}) = I + G q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & -0.4 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix} q^{-1}$$

$$n_a = 1, \quad n_b = 0, \quad d = 2, \quad n_c = 1$$

解:

$$F(q^{-1}) = I + F_1(q^{-1})$$

$$G(q^{-1}) = G_0$$

按式(4.4-8), 可得

$$I + G \bar{q}^{-1} = (I + A_1 \bar{q}^{-1})(I + F_1 \bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-1} G_0 = \\ I + (A_1 + F_1) \bar{q}^{-1} + (A_1 F_1 + G_0) \bar{q}^{-2}$$

由  $\bar{q}^{-1}$  的同次幂对应系数相等,解得

$$F_1 = G - A_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.9 \\ -0.3 & -0.6 \end{bmatrix} \\ G_0 = -A_1 F_1 = \begin{bmatrix} 0.78 & -0.51 \\ -0.41 & 0.33 \end{bmatrix}$$

取  $G_0 = G_0$ , 则

$$F_1 = G_0 F_1 G_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1.4143 & 0.98571 \\ -1.1857 & -1.3143 \end{bmatrix}$$

最小方差调节律式(4.4-23)改写成

$$F B u(t) = -G Y(t)$$

将  $F$ 、 $B$  和  $G$  代入上式可得

$$u(t) = - \begin{bmatrix} 1.4143 & 0.98571 \\ -1.1857 & -1.3143 \end{bmatrix} u(t-1) - \begin{bmatrix} 0.78 & -0.51 \\ -0.41 & 0.33 \end{bmatrix} Y(t)$$

## § 4.5 多变量最小方差自校正控制器

设有  $m$  维输入和  $m$  维输出的多变量系统

$$A(\bar{q}^{-1})Y(t) = \bar{q}^{-d}B(\bar{q}^{-1})u(t) + C(\bar{q}^{-1})\varepsilon(t) \quad (4.5-1)$$

系统的参考输入为  $Y_r(t)$ , 指标函数为

$$J = E \{ [\Gamma(\bar{q}^{-1})Y(t+d) - \Psi(\bar{q}^{-1})Y_r(t)]^T \\ [\Gamma(\bar{q}^{-1})Y(t+d) - \Psi(\bar{q}^{-1})Y_r(t)] + \\ [\Lambda'(\bar{q}^{-1})u(t)]^T [\Lambda'(\bar{q}^{-1})u(t)] \} \quad (4.5-2)$$

式中  $\Gamma(\bar{q}^{-1})$  为  $\bar{q}^{-1}$  的首一多项式,  $\Psi(\bar{q}^{-1})$  和  $\Lambda'(\bar{q}^{-1})$  为  $\bar{q}^{-1}$  的多项式矩阵。参照式(4.4-21), 得

$$Y(t+d) = C^{-1} [G Y(t) + F B u(t)] + F \varepsilon(t+d) \quad (4.5-3)$$

将上式代入式(4.5-2)得

$$J = \{ [C^{-1} G \Gamma Y(t) + C^{-1} F B \Gamma u(t) + F \Gamma \varepsilon(t+d) - \Psi Y_r(t)]^T \\ [C^{-1} G \Gamma Y(t) + C^{-1} F B \Gamma u(t) + F \Gamma \varepsilon(t+d) - \Psi Y_r(t)] + \\ [\Lambda' u(t)]^T [\Lambda' u(t)] \}$$

由于  $Y(t)$ ,  $u(t)$  与  $\varepsilon(t+d)$  不相关, 则有

$$J = E \{ [C^{-1} G \Gamma Y(t) + C^{-1} F B \Gamma u(t) - \Psi Y_r(t)]^T \\ [C^{-1} G \Gamma Y(t) + C^{-1} F B \Gamma u(t) - \Psi Y_r(t)] + \\ [F \Gamma \varepsilon(t+d)]^T [F \Gamma \varepsilon(t+d)] + [\Lambda' u(t)]^T [\Lambda' u(t)] \} \quad (4.5-4)$$

$$\frac{J}{u(t)} = 2 \frac{1}{u(t)} [C^{-1} F B \Gamma u(t)]^T [C^{-1} G \Gamma y(t) + C^{-1} F B \Gamma u(t) - \Psi Y_r(t)] +$$

$$2 \frac{1}{u(t)} [\Lambda' u(t)]^T [\Lambda' u(t)] \quad (4.5-5)$$

式中

$$\frac{1}{u(t)} [C^{-1} FB \Gamma u(t)]^T = B_0^T \quad (4.5-6)$$

$$\frac{1}{u(t)} [\Lambda' u(t)]^T = \Lambda_0'^T \quad (4.5-7)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{J}{u(t)} &= 2B_0^T [C^{-1} G^T Y(t) + C^{-1} FB \Gamma u(t) - \Psi Y_r(t)] + \\ &2\Lambda_0'^T \Lambda' u(t) = 0 \end{aligned} \quad (4.5-8)$$

$$\begin{aligned} G^T Y(t) + [C\Lambda + FB\Gamma] u(t) - C\Psi Y_r(t) &= 0 \\ [C\Lambda + FB\Gamma] u(t) &= C\Psi Y_r(t) - G^T Y(t) \end{aligned} \quad (4.5-9)$$

式中

$$\Lambda = (B_0^T)^{-1} \Lambda_0'^T \Lambda' \quad (4.5-10)$$

系统的闭环特性由

$$\det T = \det \begin{bmatrix} A & -q^{-d} B \\ G^T & C\Lambda + FB\Gamma \end{bmatrix} = 0$$

的零点决定,若上式的零点都位于  $q^{-1}$  平面的单位圆外,闭环系统是稳定的。

$$\begin{aligned} \det T &= \det A \det [C\Lambda + (F + q^{-d} GA^{-1}) \Gamma B] = \\ &\det A \det [C\Lambda + (FA + q^{-d} G) A^{-1} \Gamma B] = \\ &\det A \det [C\Lambda + CA^{-1} \Gamma B] = \det A \det C \det [\Lambda + A^{-1} \Gamma B] = \\ &\det C \det [A\Lambda + \Gamma B] = \det C \det [A\Lambda + \Gamma B] = 0 \end{aligned} \quad (4.5-11)$$

下面讨论两种情况

(1) 当  $\Lambda = 0$ ,即在指标函数中,  $u(t)$  的加权矩阵为零时

$$\det T = \Gamma \det B \det C = 0 \quad (4.5-12)$$

如系统逆不稳定,则闭环系统不稳定。

(2) 当  $\Lambda = \mu I$ ,且  $\mu$  足够大时

$$\begin{aligned} \det T &= \det C \det [A\mu + \Gamma B] = \mu \det C \det [A + \frac{1}{\mu} \Gamma B] = \\ &\mu \det C \det A = \mu \det C \det A = 0 \end{aligned} \quad (4.5-13)$$

从式(4.5-13)可知,当系统开环是稳定而非逆稳定时,只要  $\mu$  选得足够大,就可使闭环系统稳定。当系统既不是开环稳定,又不是逆不稳定时,如能选择适当的  $\mu$  值,也能使闭环系统稳定。下面讨论多变量最小方差自校正控制算法。参照式(4.5-20),得

$$r(t+d) = \Gamma Y(t+d) - \Psi Y_r(t) + \Lambda u(t) \quad (4.5-14)$$

因已知  $\Gamma, \Psi$  和  $\Lambda$ ,若  $C = I$ ,参照式(4.5-21)得

$$r(t+d) = \Gamma G Y(t) + [\Gamma FB + \Lambda] u(t) - \Psi Y_r(t) + \Gamma F \varepsilon(t) \quad (4.5-15)$$

设  $\Gamma G = L$ ,  $\Gamma FB + \Lambda = H$ ,  $\Psi = M$ ,  $\Gamma F \varepsilon(t) = e(t+d)$ ,

$$\text{则} \quad r(t+d) = LY(t) + Hu(t) - MY_r(t) + e(t+d) \quad (4.5-16)$$

按上式可辨识参数矩阵  $L, H$  和  $M$ 。算法如下:

第一步 读取  $Y(t), Y_r(t)$  和  $u(t)$ ;

第二步 按式(4.5-14) 计算  $r(t+d)$ ;

第三步 按式(4.5-16) 辨识  $L, H$  和  $M$ ;

第四步 按式(4.5-9) 计算  $u(t)$ 。

当采样次数加 1,  $t \rightarrow t+1$  继续重复上述步骤。

本章讨论了自校正控制的基本内容:最小方差自校正调节器,最小方差自校正控制器,极点配置自校正调节器和控制器,多变量最小方差自校正调节器和控制器。这些设计方法已在工业过程控制和其它方面得到应用。

## 习 题

1. 设受控对象的差分方程为

$$(1 - 1.3q^{-1} + 0.4q^{-2})y(t) = q^{-2}(1 + 0.5q^{-1})u(t) + (1 - 0.65q^{-1} + 0.1q^{-2})\varepsilon(t)$$

式中  $\varepsilon(t)$  是零均值方差为 0.1 的白噪声。设计最小方差自校正调节器。

2. 设受控对象的差分方程为

$$(1 - 1.2q^{-1} + 0.35q^{-2})y(t) = (0.5q^{-2} - 0.8q^{-3})u(t) + (1 - 0.95q^{-1})\varepsilon(t)$$

式中  $\varepsilon(t)$  是均值为零方差为 0.2 的白噪声。性能指标为

$$J = E\{[y(t+d) - y_r(t)]^2 + [\Lambda u(t)]^2\}$$

设计最小方差控制器。按闭环系统稳定性的要求,确定  $\Lambda$  的范围。

3. 设受控对象的差分方程为

$$(1 - 1.1q^{-1} + 0.3q^{-2})y(t) = q^{-2}(1 + 1.6q^{-1})u(t) + (1 - 0.65q^{-1})\varepsilon(t)$$

设闭环特征方程  $T(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$ ,设计极点配置自校正调节器。

4. 设受控对象的差分方程为

$$(1 - 1.2q^{-1} + 0.4q^{-2})y(t) = q^{-1}(1 + 1.5q^{-1})u(t) + (1 - 0.65q^{-1} + 0.2q^{-2})\varepsilon(t)$$

$\varepsilon(t)$  是零均值方差为 0.1 的白噪声,设计最小方差自校正控制的极点配置。

5. 设有一多变量系统

$$Y(t) + A_1 Y(t-1) = B_0 u(t-1) + B_1 u(t-2) + \varepsilon(t)$$

式中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.5 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E[\varepsilon(t)\varepsilon^T(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

指标函数为

$$J = E\{[Y(t+d) - Y_r(t)]^T [Y(t+d) - Y_r(t)] + q\Lambda' u(t)^T [\Lambda' u(t)]\}$$

选择指标函数中的加权矩阵  $\Lambda'$ ,使得闭环系统稳定,求出最小方差控制器。

## 参考文献

- 1 Åström K J .on Self-Tuning Regulators .Automatica .1973, 9
- 2 Clarke D W . Gawtherop P J .Self-Tuning Controller .Proceeding IEE, 1975, 12(9)
- 3 Åström K J, Witenmark B .Adaptive Control .Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- 4 Goodwin G C, Sin K S .Adaptive Filtering Prediction and Control .PRENTICE-HALL, 1984
- 5 冯纯伯, 史维 .自适应控制 .北京: 电子工业出版社, 1986
- 6 李清泉 .自适应控制系统理论、设计与应用 .北京: 科学出版社, 1990
- 7 陈宗基 .自适应技术的理论及应用 .北京: 北京航空航天大学出版社, 1991
- 8 赵国良, 姜仁锋 .自适应控制技术与应用 .北京: 人民交通出版社, 1991
- 9 须田信英等著 .曹长修等译 .自动控制中的矩阵理论 .北京: 科学出版社, 1979

## 第五章 变结构控制

变结构控制是 60 年代由前苏联学者首先提出并研究的,直到 70 年代,这一控制理论才传入西方国家。在短短 30 多年的时间里,变结构控制理论迅速地发展并完善起来,产生了大量理论和应用研究成果,逐步形成了一个控制理论分支。

变结构控制就是当系统状态穿越状态空间不同区域时,反馈控制器的结构按照一定的规律发生变化,使得控制系统对被控对象的内在参数变化和外环境扰动等因素具有一定的适应能力,保证系统性能达到期望的指标要求。它是一类非线性控制。由此可见,变结构控制具有自适应控制的基本特点,所以它可以看作是一类广义的自适应控制。

### § 5.1 变结构控制基本原理

#### 一、变结构控制的基本概念

为了充分理解变结构控制的基本概念,首先我们考察三种情况下的二阶系统。

情况 I: 假设二阶控制系统为

$$\ddot{x} = u, \quad u = -\Psi x \quad (5.1-1)$$

它有两种状态反馈结构,分别由  $\Psi = \alpha_1^2$  和  $\alpha_2^2$  定义,而且  $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$ 。于是,这两种反馈结构形成的闭环系统状态轨迹分别对应于图 5.1-1(a),(b) 所示一簇“立式”和“卧式”的椭圆。显然这两种反馈控系统都仅仅是李雅普诺夫意义下稳定而非渐近稳定的。但是如果将系统的两种反馈结构沿状态平面的坐标轴按照如下逻辑进行切换组合:

$$\Psi = \begin{cases} \alpha_1^2, & \text{若 } x \dot{x} > 0 \\ \alpha_2^2, & \text{若 } x \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (5.1-2)$$

那么组合系统状态轨迹如图 5.1-1(c),是渐近稳定的。

情况 II: 假设二阶控制系统为

$$\ddot{x} - \xi x = u, \quad u = -\Psi x, \quad \xi > 0 \quad (5.1-3)$$

它的两种可能的状态反馈结构为  $\Psi = \alpha$  和  $\Psi = -\alpha$ ,其中  $\alpha > 0$ ,即前者为负反馈,后者为正反馈,闭环控制系统就为

$$\ddot{x} - \xi x + \Psi x = 0, \quad \xi > 0 \quad (5.1-4)$$

当  $\Psi = \alpha$  时,系统有两个带正实部的复根,并有对应于图 5.1-2(b) 的状态轨迹;当  $\Psi = -\alpha$  时,系统有正、负实根各一个,即  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,且  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ ,状态轨迹如图 5.1-2(a) 所示,可见,这两种反馈结构形成的闭环控制系统在一般情况下均不稳定,仅当  $\Psi = -\alpha$  且系统初始状态落在状态平面中的直线

$$-\lambda_2 x + \dot{x} = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\xi}{2} - \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha} \quad (5.1-5)$$



上时,系统相对于原点渐近稳定。然而,如果将两种反馈结构沿着直线(5.1-5)和  $x = 0$  按下式描述的逻辑加以切换组合

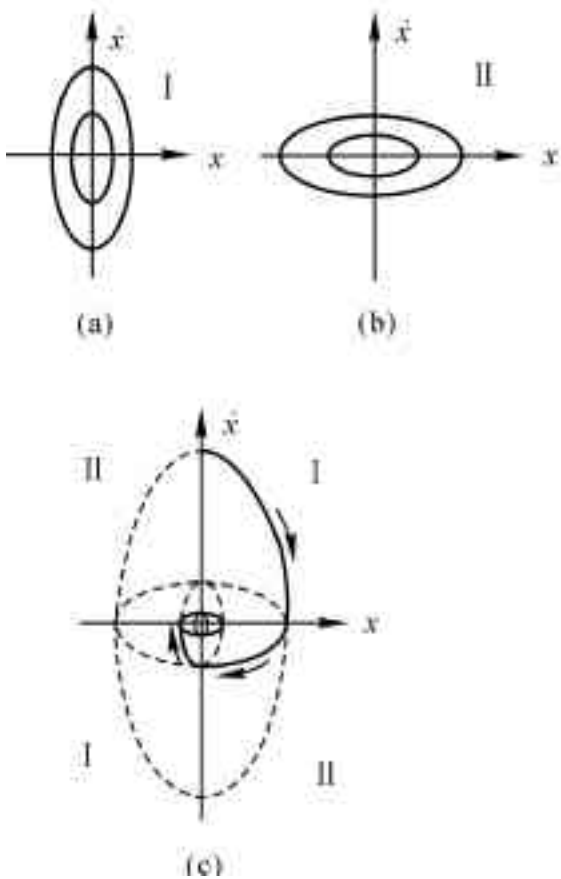


图 5.1-1 两个稳定控制系统组合成的渐近稳定控制系统

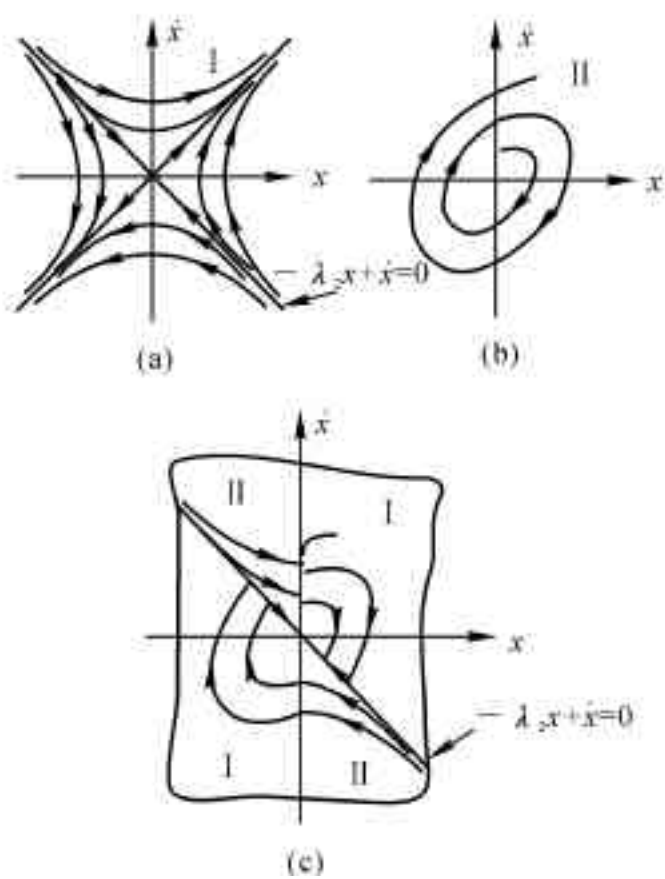


图 5.1-2 两个不稳定控制系统组合成的渐近稳定控制系统

$$\Psi = \begin{cases} \alpha, & \text{若 } xs > 0 \\ -\alpha, & \text{若 } xs < 0 \end{cases}, \quad s = -\lambda_2 x + \dot{x} \tag{5.1-6}$$

则组合系统状态轨迹如图 5.1-2(c) 所示。也是渐近稳定的。

情况 III： 在情况 II 中,若把式(5.1-6)描述的切换逻辑改变为：

$$\Psi = \begin{cases} \alpha, & \text{若 } xs > 0 \\ -\alpha, & \text{若 } xs < 0 \end{cases}$$

$$s = gx + \dot{x}, \quad 0 < g < -\lambda_2 = -\frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \alpha} \tag{5.1-7}$$

那么组合系统依然渐近稳定,但其状态轨迹却较情况 II 中的有所不同,见图 5.1-3。

分析以上两个二阶系统的三种情况知道,它们的共同点在于组合系统是由不同结构的反馈控制系统按一定逻辑切换变化得到的,并且具备了原来各反馈控制系统并不具备的渐近稳定性。我们称这类组合系统为变结构系统(VSS)或变结构控制系统(VSCS)。

变结构系统中所谓“变结构”本质上是指系统内部的反馈控制器结构,包括反馈极性和系

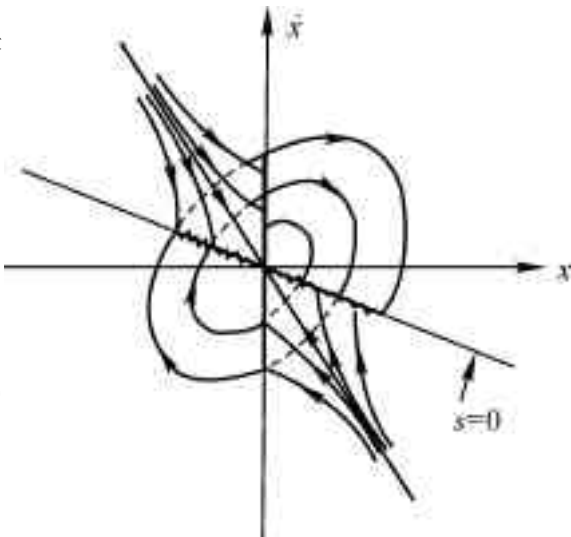


图 5.1-3 二阶变结构系统的滑动模态

数,所发生的不连续非线性切变。这种切变并非任意,必须遵从一套由设计者按照系统性能指标要求而制定的切换逻辑。对应于每一种反馈控制结构,闭环系统对外显示出一种相应的结构和特性,称为子系统。变结构系统正是这些不同结构的子系统按照切换逻辑的有机组合。其目的在于充分利用各子系统的优良特性,甚至有可能获得超越所有子系统特性的新特性。

此外,分析前面的三种情况结果还表明,随着子系统组合方式的不同,即系统反馈结构切换的逻辑不同,变结构系统将显示出两种截然不同的形式和系统特性:

形式一:变结构系统的运动是各子系统部分有益运动的“精心拼补”。例如,在情况 I 和情况 II 中,变结构系统的状态轨迹完全是各子系统状态轨迹的一段段拼接。无论各子系统运动的稳定性如何,拼接出的组合运动都能保证渐近稳定性。这一形式的变结构系统在大大提高了稳定性的同时,各子系统所承受的参数、扰动等不确定性因素的影响并未得到消除,而是随着各子系统的运动被带入变结构系统,并影响其动态特性和稳态品质。

形式二:变结构系统的运动不同于任一子系统的运动。例如在情况 III 中,变结构系统状态轨迹  $s = g x + \dot{x} = 0$  是各种反馈结构的子系统根本不存在的“新生”状态轨迹,见图 5.1-3。所以这类变结构系统就可能具有独立于各子系统特性和不确定性因素影响的优良新特性。

比较这两种变结构系统,在保证渐近稳定性前提下,后者较前者具有更强的鲁棒性。目前人们在变结构控制理论中主要研究的就是这一类,一般称图 5.1-3 中  $s = g x + \dot{x} = 0$  所描述的状态域为滑动模态域,而将形式二的变结构系统称为滑动模态变结构控制系统。今后,本章若不加特殊说明,均指滑动模态变结构控制系统。

滑动模态是变结构控制系统的主要特征之一。在图 5.1-3 中,  $s = 0$  是针对一个单变二阶系统的滑动模态域。分析该图发现,在  $s = 0$  附近,系统的状态轨迹均指向它,这意味着系统的状态点一旦进入  $s = 0$  便只能沿其运动而不能再离开。这一例子实质上揭示了滑动模态的一个最重要的普遍特性,从中可归结出变结构控制系统滑动模态的一般定义:

对于一个  $n$  阶系统,  $X \in R^n$  为系统状态向量,  $S$  是  $n$  维状态空间中状态域  $S(X) = 0$  上的一个子域。如果对于每个  $\varepsilon > 0$ , 总有一个  $\delta > 0$  存在,使得任何源于  $S$  的  $n$  维  $\delta$  领域的系统运动若要离开  $S$  的  $n$  维  $\varepsilon$  领域,只能穿过  $S$  边界的  $n$  维  $\varepsilon$  领域,那么  $S$  就是一个滑动模态域。系统在滑动模态域中的运动就称为滑动运动,这种特殊运动形式即称为滑动模态。

## 二、变结构控制系统的性质

考虑  $n$  阶多变量系统,其状态方程为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + DF(t) \quad (5.1-8)$$

式中系统状态  $X \in R^n$ , 控制向量  $U \in R^m$ , 扰动向量  $F \in R^l$ 。在  $n$  维状态空间中设计  $m$  个切换超平面:

$$s_i = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + \cdots + g_{in} x_n = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad (5.1-9)$$

定义它们的交集为系统的滑动模态域:

$$S = [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m]^T = GX = 0, \quad S \in R^m \quad (5.1-10)$$

式中  $G \in R^{m \times n}$  称为滑动模态参数矩阵,  $g_{ij}$  称为滑动模态参数,  $G = [g_{ij}]_{m \times n}$ 。

由于滑动运动是变结构控制系统特有的运动,因此首先分析这一运动赋予系统的特性。根据滑动模态定义,一旦系统状态  $X$  进入滑动模态域将只能沿其运动,并且滑动运动满足

$$S = GX \equiv 0 \quad (5.1-11)$$

即

$$S = GX = 0 \quad (5.1-12)$$

将系统状态方程(5.1-8)代入上式得

$$GAX + GBU + GDF = 0$$

如果滑动模态的设计保证矩阵  $GB$  非奇异,那么由上式可解出满足式(5.1-12)的  $U$  的一个解:

$$U_{eq} = - (GB)^{-1} G(AX + DF) \quad (5.1-13)$$

它被称为变结构控制系统的等效控制。其物理意义在于,若系统初始状态  $X(0)$  在滑动模态域上,即满足  $GX(0) = 0$ ,则在等效控制  $U_{eq}$  的作用下,系统将沿着滑动模态域运动。

把等效控制代入状态方程(5.1-8)得

$$\dot{X} = [I - B(GB)^{-1}G](AX + DF) \quad (5.1-14)$$

这里  $I$  是  $m \times m$  的单位阵。该方程描述了系统在滑动模态下的运动情况,称为滑动模态方程或等价系统方程。该方程所描述的系统实质上就是变结构控制系统进入滑动模态域后的闭环控制系统,称为变结构控制系统在滑动模态下的等价系统。

方程式(5.1-14)是原系统式(5.1-8)在  $m$  个约束式(5.1-10)下得到的,因此等价系统状态  $X$  属于  $n$  维状态空间中  $n - m$  维子空间,等价系统呈现  $n - m$  阶降价系统的特性,至多只有  $n - m$  个非零特征值。这是变结构闭环系统的一个特点。进一步分析等价系统方程可知,式(5.1-14)中仅有滑动模态参数矩阵  $G$  可以人为设计,其它均为被控对象参数,不可改变。我们能够证明(详见 § 5.2),通过矩阵  $G$  的选择,可以对等价系统的特征值进行任意配置。这意味着适当地设计滑动模态域式(5.1-10)便能够获得任意期望的闭环系统性能。

由式(5.1-14)还容易看出,原系统所承受的扰动  $F$  依然作用于闭环等价系统。但是当

$$[I - B(GB)^{-1}G]DF = 0 \quad (5.1-15)$$

成立时,滑动模态方程即变为

$$\dot{X} = [I - B(GB)^{-1}G]AX \quad (5.1-16)$$

显然,扰动  $F$  不再出现在方程中,等价系统此时完全独立于  $F$ ,其特性不受  $F$  的影响。将式(5.1-15)写成如下形式:

$$DF = B(GB)^{-1}GDF \triangleq BM \quad (5.1-17)$$

$$M = (GB)^{-1}GDF$$

由于对于任意的扰动  $F$  上式均需成立,所以式(5.1-15)成立的充分条件就是

$$\text{rank } [B \ D] = \text{rank } B \quad (5.1-18)$$

即当原系统(5.1-8)的扰动矩阵  $D$  的所有列均是输入矩阵  $B$  各列的线性组合时,变结构闭环等价系统对扰动具有不变性。于是称式(5.1-18)为变结构控制系统的扰动不变性条件。

另外,就一个实际系统而言,除了受到外加扰动的作用外,它本身的结构参数也往往具有不确定性。例如参数在标称值附近摄动和参数在一定范围内发生变化等情况。此时系统的参数矩阵  $A$  可以表示为

$$A = A_0 + \Delta A \quad (5.1-19)$$

式中  $\Delta A$  矩阵包含了  $A$  中所有可以发生变化并对系统特性有内在影响的参数,矩阵  $A_0$  则包含  $A$  中剩余的参数;或者  $A_0$  为  $A$  的标称矩阵,  $\Delta A$  则是  $A$  相对于  $A_0$  的摄动矩阵。那么相应的滑动模态方程式(5.1-14)就可表示为

$$\dot{X} = [I - B(GB)^{-1}G][A_0 X + \Delta A X + DF] \quad (5.1-20)$$

类似地,当

$$[I - B(GB)^{-1}G]\Delta AX = 0 \quad (5.1-21)$$

时,系统的参数变化将对等价系统没有影响。

由式(5.1-21)有

$$\Delta AX = B(GB)^{-1}G\Delta AX, \quad X \in E^{n-m} \quad (5.1-22)$$

取状态子空间  $E^{n-m}$  中任一组基向量作为列组成矩阵  $T \in R^{n \times (n-m)}$ , 则状态  $X$  能由其线性表示:

$$X = TX^*$$

$X^* \in R^{n-m}$ 。代入式(5.1-22)得

$$TX^* = B(GB)^{-1}G\Delta ATX^*$$

该方程与式(5.1-17)在形式上完全相同,所以它及式(5.1-21)成立的充分条件就是

$$\text{rank} [B \quad \Delta AT] = \text{rank} B \quad (5.1-23)$$

这表明,原系统式(5.1-8)中所有满足条件式(5.1-23)的参数变化或摄动对变结构闭环等价系统的特性均无影响,故称式(5.1-23)为变结构控制系统的参数不变性条件。

特殊地,式(5.1-23)也可写为

$$\text{rank} [B \quad \Delta A] = \text{rank} B \quad (5.1-24)$$

与系统参数矩阵  $A$  的不确定性情况相似,输入矩阵  $B$  往往也存在着不确定性因素:

$$B = B_0 + \Delta B \quad (5.1-25)$$

这里  $B_0$  为  $B$  的标称矩阵,  $\Delta B$  为  $B$  相对于  $B_0$  的摄动矩阵。可以证明,当条件

$$\text{rank} [B_0 \quad \Delta B] = \text{rank} B_0 \quad (5.1-26)$$

满足时,变结构闭环等价系统对输入矩阵参数的摄动或变化具有不变性,其特性也不受  $\Delta B$  的影响。

在变结构控制理论中,条件式(5.1-18)、式(5.1-23)或式(5.1-24)和式(5.1-26)统称为不变性条件。正是当这些条件满足时,变结构控制系统对于参数摄动或变化以及外加扰动具有不变性,从而显示出很强的对不确定性因素的鲁棒性。也正是这些不变性性质使得变结构控制系统受到了人们的广泛重视和研究。

### 三、变结构控制系统的设计

应当强调的是,以上讨论的变结构控制系统的各种特性都是在式(5.1-11)成立的前提下才具备的,即系统沿滑动模态域运动。然而在一般情况下,系统的初始状态点处于状态空间的任意位置,并不一定是落在滑动模态域中。此时就需要设法将系统状态由初始位置“导引”到滑动模态域中去。由此可见,变结构控制系统的运动分为两个阶段:

第一阶段,系统状态由任意初始位置向滑动模态域运动,直到进入。这一阶段称为变结构控制系统的能达阶段,所经历的时间称为能达时间。该阶段中,  $S \neq 0$ 。

第二阶段,就是系统状态进入滑动模态并沿其运动的阶段,称为变结构控制系统的滑动阶段。该阶段中,  $S \equiv 0$ 。

图5.1-4以二阶系统为例显示了变结构控制系统运

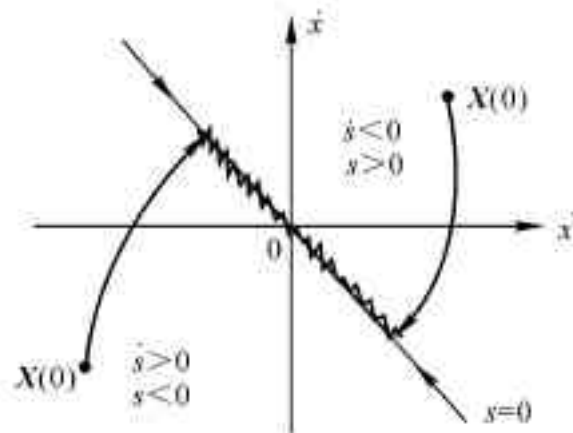


图5.1-4 变结构控制系统的运动

动过程中的两个阶段。对应于运动的两个阶段,变结构控制系统的设计也分为两部分进行,以分别保证各阶段运动目的的实现。

### 1. 滑动模态域设计

滑动模态域设计对应于变结构控制系统的滑动阶段。当系统满足参数和扰动不变性条件时,滑动模态方程式(5.1-14)就可写成

$$\dot{X} = [I - B_0 (GB_0)^{-1} G] A_0 X + A_{eq} X \quad (5.1-27)$$

显然,变结构闭环等价系统是一个完全独立于参数和扰动不确定性因素的自治系统,全部特性仅依赖于原系统的标称或不变参数以及滑动模态参数  $G$ 。我们已经知道,对于给定的  $A_0$  和  $B_0$ ,  $G$  能够任意配置系统式(5.1-27)的极点,所以滑动模态域的设计便成为变结构控制系统设计中至关重要的一步。

滑动模态域设计的目的在于,保证式(5.1-27)描述的等价系统的稳定性和满足性能指标要求的动态特性,保证系统状态一旦进入滑动模态域便能沿其稳定地趋向状态原点。总之,就是保证变结构控制系统第二阶段滑动运动的稳定性和动态特性。

### 2. 变结构控制律设计

变结构控制律设计对应于变结构控制系统的能达阶段运动。它的根本目的在于能将位于状态空间任意位置的系统初始状态可靠地导引进入滑动模态域,并且一旦进入便保持在其上。不难理解,这就要求滑动模态域周围的状态轨迹均指向滑动模态域。由图(5.1-4)可见,滑动模态域  $s = 0$  将二阶系统的状态平面分为两半。当系统状态位于  $s < 0$  时,控制律必须保证  $s > 0$  才能使系统最终实现  $s = 0$ ;反之,当状态位于  $s > 0$  时,必须有  $s < 0$ 。总之,该二阶系统最终能到达滑动模态域的条件就是

$$s \dot{s} < 0 \quad (5.1-28)$$

这一结论对于单变量系统具有一般性,我们称(5.1-28)式单变量变结构控制系统的能达条件。

对于多变量系统而言,式(5.1-28)可以很容易地加以推广。针对滑动模态域式(5.1-10),式(5.1-28)就变为

$$s_i \dot{s}_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.1-29)$$

但是这一推广结果并不能完全解决多变量情况下的能达条件问题,因为多变量情况有其特殊性。限于篇幅,这里不加证明地直接给出较式(5.1-29)更具一般性的多变量变结构控制系统能达条件:

$$\frac{d}{dt}(S^T Q S) < 0, \quad Q > 0, \quad S \in R^m \quad (5.1-30)$$

特殊地,若取  $Q = I_{m \times m}$ ,则上式变为

$$\frac{d}{dt} \|S\|^2 < 0, \quad \text{或} \quad S^T \dot{S} < 0 \quad (5.1-31)$$

很明显,式(5.1-29)为上式的特殊情况。

滑动模态能达条件式(5.1-28) ~ 式(5.1-31)是变结构控制律设计必须满足的根本条件,也只有满足这些条件,变结构控制律才能保证系统最终进入滑动模态,由能达阶段的运动转入滑动阶段运动。但是从理论上讲,满足式(5.1-28) ~ 式(5.1-31)不等式条件的控制律形式可以有无限多种。目前人们最常用最典型简单的变结构控制律形式主要有以下四种:

$$U = LX + U^N = LX + [u_1^N \ u_2^N \ \cdots \ u_m^N]^T, \quad L \in R^{m \times n} \quad (5.1-32)$$

$$(a) \quad u_i^N = m_i \operatorname{sgn}(s_i), \quad m_i > 0 \quad (5.1-33)$$

$$(b) \quad u_i^N = m_i(X) \operatorname{sgn}(s_i), \quad m_i(X) > 0 \quad (5.1-34)$$

$$(c) \quad U^N = \Phi X, \quad \Phi = [\Phi_{ij}]_{m \times n}, \quad \Phi_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & s_i x_j > 0 \\ \beta_{ij}, & s_i x_j < 0 \end{cases} \quad (5.1-35)$$

$$(d) \quad U^N = \frac{\rho}{\|S\|} S, \quad \rho > 0 \quad (5.1-36)$$

式中各控制律参数  $m_i, m_i(X), \alpha_{ij}, \beta_{ij}$  和  $\rho$  等都根据能达条件来设计,  $LX$  为控制律  $U$  的线性部分。

分析式(5.1-32) ~ 式(5.1-36) 描述的变结构控制律可知, 它们都是在  $s_i = 0$  或  $S = 0$  上不连续的非线性控制律。在理论上它们能以无限快的速度准确地在  $s = 0$  或  $S = 0$  上切换, 从而将系统状态保持在滑动模态域上。但在实际工程中, 由于任何物理系统频带宽度均有限, 控制律切换均需时间, 加之各种其它非理想因素的存在, 不连续的非线性变结构控制律不可避免地会产生系统高频微幅颤振, 这是变结构控制系统的一个固有缺陷。为了消除系统的颤振, 人们的基本思想是采用连续控制律在一定程度上近似不连续控制律。例如引入微小量  $\delta, \delta_i > 0$ , 并对控制律式(5.1-32) ~ 式(5.1-36) 中的非连续因素进行下面修正:

$$\operatorname{sgn}(s) \approx \frac{s_i}{|s_i| + \delta_i} \quad (5.1-37)$$

或

$$\operatorname{sgn}(s) \approx \operatorname{sat}\left[\frac{s}{\delta_i}\right] = \begin{cases} \operatorname{sgn}(s_i), & |s_i| > \delta_i \\ \frac{s_i}{\delta_i}, & |s_i| \leq \delta_i \end{cases} \quad (5.1-38)$$

$$\frac{S}{\|S\|} \approx \frac{S}{\|S\| + \delta} \quad (5.1-39)$$

实践证明, 它们是十分有效的。

针对变结构控制系统运动分为两个阶段的情况, 其稳定性分析也需要由两部分来考虑。对于第一阶段即能达阶段, 定义李雅普诺夫函数:

$$V(X) = \frac{1}{2} S^T S = \frac{1}{2} \|S\|^2 > 0, \quad S \neq 0$$

对时间  $t$  求导得

$$\dot{V}(X) = \frac{1}{2} \times \frac{d}{dt} \|S\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S^T S) = S^T \dot{S}, \quad S \neq 0$$

由于变结构控制律的设计确保能达条件式(5.1-29) 或式(5.1-31) 成立, 故  $V(X) < 0$ 。所以系统在能达阶段( $S \neq 0$ ) 是稳定的, 最终一定达到  $S = 0$  即滑动模态域。其次对于第二阶段即滑动阶段,  $S = 0$ 。若滑动模态域的设计保证等价系统式(5.1-14) 或式(5.1-27) 的特征值均位于复平面左半平面, 滑动运动必定渐近稳定。所以系统整个运动过程具有渐近稳定性。

总之, 尽管变结构控制系统属于非线性控制系统, 但是其稳定性分析却十分方便。因为系统的滑动模态域和控制律两部分设计均基于稳定性理论, 这一点与前面几章介绍的其它自适应控制方法是相似的。

## § 5.2 变结构调节器控制

在上一节中已经从概念上阐述了变结构控制系统的设计分为滑动模态域设计和控制律设计两部分。本节首先通过单变量能控规范型系统的调节器问题介绍变结构控制律的具体设计方法,然后针对一般的线性多变量系统着重讨论一种基于极点配置技术的滑动模态域设计方法。

### 一、单变量变结构控制系统

考虑一个能控规范型的单变量系统,其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = - \sum_{i=1}^n a_i x_i + bu \end{cases} \quad (5.2-1)$$

式中  $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $b$  均不确定性时变或摄动,但它们的上下界已知,为

$$\underline{a}_i^0 - \Delta a_i^0 \leq a_i \leq \bar{a}_i^0 + \Delta a_i^0, \quad 0 < \underline{b}^0 - \Delta b^0 \leq b \leq \bar{b}^0 + \Delta b^0 \quad (5.2-2)$$

这里  $\bar{a}_i^0$  和  $\bar{b}^0$ ,  $\Delta a_i^0 \geq 0$  和  $\Delta b^0 \geq 0$  分别为  $a_i$  和  $b$  的标称值与最大变化量。将式(5.2-1)写成矩阵形式则有

$$\dot{X} = AX + Bu \quad (5.2-3)$$

式中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

若令  $A = A_0 + \Delta A$ ,  $B = B_0 + \Delta B$ , 其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{a}_1^0 & -\bar{a}_2^0 & -\bar{a}_3^0 & \dots & -\bar{a}_n^0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_1^0 - a_1 & \bar{a}_2^0 - a_2 & \dots & \bar{a}_n^0 - a_n \end{bmatrix}$$

$$B_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \bar{b}^0]^T, \quad \Delta B = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b - \bar{b}^0]^T$$

很容易验证式(5.1-24)和式(5.1-26)成立,所以该系统的变结构闭环等价系统将具有对参数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  及  $b$  不确定性变化或摄动的不变性。

在  $n$  维状态空间中首先定义系统的滑动模态域,对于单变量系统而言,滑动模态域就是一个超平面:

$$s = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_{n-1} x_{n-1} + x_n = GX = 0 \quad (5.2-4)$$

$$G \in [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{n-1} \ 1]$$

式中  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  是常数, 设计滑动模态域便是适当地选择这些常数。

将  $A_0, \Delta A, B$  和  $G$  代入式(5.1-20), 推导可得原系统式(5.1-3) 沿  $s = 0$  滑动时的  $n - 1$  阶等阶系统为

$$\begin{cases} g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_{n-1} x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_i = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (5.2-5)$$

显然, 该系统是完全独立于参数  $a$  和  $b$  的定常自治系统, 它的  $n - 1$  个特征值由滑动模态  $n - 1$  个参数  $g_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$  惟一确定并可任意配置。所以等价系统式(5.2-5) 的特性完全取决于滑动模态域式(5.2-4) 的设计, 这正是不变性条件带来的特点。

特殊地, 当  $n = 2$  时, 式(5.2-5) 简化为

$$g_1 x_1 + x_1 = 0 \quad (5.2-6)$$

其解为

$$x_1 = H_0 e^{-g_1 t}$$

$H_0$  与初始条件有关。可见, 单变量二阶能控规范型系统的变结构等价系统为一阶系统, 且滑动模态参数为等价系统的时间常数  $T$  的倒数:

$$T = \frac{1}{g_1} \quad \text{或} \quad g_1 = \frac{1}{T} \quad (5.2-7)$$

当  $n = 3$  时, 式(5.2-5) 变为

$$\ddot{x}_1 + g_2 x_1 + g_1 x_1 = 0 \quad (5.2-8)$$

等价系统呈现二阶自治系统的性质。相应地, 滑动模态参数  $g_1$  和  $g_2$  决定了其自然频率  $\omega_n$  和阻尼系数  $\xi$ :

$$\omega_n = \sqrt{g_1}, \quad \xi = \frac{g_2}{2\sqrt{g_1}} \quad (5.2-9)$$

或

$$g_1 = \omega_n^2, \quad g_2 = 2\xi\omega_n \quad (5.2-10)$$

很明显, 在以上两种特殊情况中, 滑动模态参数均容易根据闭环系统的动态特性指标确定, 而且它们的物理意义十分明确。而对于一般的单变量  $n$  阶系统, 变结构闭环等价系统式(5.2-5) 实质上就是

$$x_1^{(n-1)} + g_{n-1} x_1^{(n-2)} + \dots + g_2 x_1 + g_1 x_1 = 0 \quad (5.2-11)$$

特征方程即为

$$s^{n-1} + g_{n-1} s^{n-2} + \dots + g_2 s + g_1 = 0 \quad (5.2-12)$$

若根据系统性能要求确定的闭环系统理想极点分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ , 则由下式可求出保证等价系统性能达到指标要求的滑动模态参数:

$$s^{n-1} + g_{n-1} s^{n-2} + \dots + g_2 s + g_1 = \prod_{i=1}^{n-1} (s - \lambda_i) \quad (5.2-13)$$

其次, 为了保证系统式(5.2-1) 的状态  $X$  能从  $n$  维状态空间任意初始位置最终进入滑动模态域  $s = 0$ , 并沿其滑动, 从而体现滑动模态确定的理想等价系统特性, 我们设计变结构控制  $u$  是系统的状态反馈形式

$$u = - \sum_{i=1}^m k_i x_i, \quad 1 \leq m \leq n-1 \quad (5.2-14)$$



式中  $k_i$  的大小或符号关于滑动模态域是不连续切换的。于是控制  $u$  的设计便转化为  $k_i$  反馈系统的设计。

当系统尚未进入滑动模态域,即处于能达阶段时,  $s = GX \neq 0$ 。对该式求导,并把原系统状态方程式(5.2-1) 和控制式(5.2-14) 代入得

$$s = GX = GAX + GBu = \begin{bmatrix} -a_1 & g_1 - a & \cdots & g_{n-1} - a_n \end{bmatrix} X - b \sum_{i=1}^m k_i x_i = \sum_{i=1}^n (g_{i-1} - a_i) x_i - b \sum_{i=1}^m k_i x_i \quad (5.2-15)$$

式中  $g_0 = 0$ 。考虑到

$$x_n = s - \sum_{i=1}^{n-1} g_i x_i \quad (5.2-16)$$

所以

$$s = \sum_{i=1}^{n-1} (g_{i-1} - a_i) x_i - (g_{n-1} - a_n) \left[ \sum_{i=1}^{n-1} g_i x_i \right] - b \sum_{i=1}^m k_i x_i + (g_{n-1} - a_n) s = \sum_{i=1}^m (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i - b k_i) x_i + \sum_{i=m+1}^{n-1} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i) x_i + (g_{n-1} - a_n) s \quad (5.2-17)$$

两边同乘  $s$ , 有

$$s s = \sum_{i=1}^m (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i - b k_i) x_i s - i s + \sum_{i=m+1}^{n-1} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i) x_i s + (g_{n-1} - a_n) s^2 \quad (5.2-18)$$

那么上式满足单变量变结构控制系统滑动模态能达条件式(5.1-28) 的充分条件就是

$$\begin{aligned} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i - b k_i) x_i s &< 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i) x_i s &= 0, \quad (i = m+1, m+2, \cdots, n-1) \\ (g_{n-1} - a_n) s^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

这里  $g_0 = 0$ 。所以控制律反馈系数  $k_i$  为

$$k_i = \begin{cases} \alpha_i \geq \frac{1}{b} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i), & x_i s > 0 \\ \beta_i \leq \frac{1}{b} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i), & x_i s < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \quad (5.2-19)$$

且

$$g_{i-1} - a_i = g_i (g_{n-1} - a_n), \quad (i = m+1, m+2, \cdots, n-1) \quad (5.2-20)$$

$$g_{n-1} - a_n \leq 0, \quad g_0 = 0 \quad (5.2-21)$$

显然式(5.2-14) 和式(5.2-19) 描述的变结构控制律正是式(5.1-35) 的典型形式。

对于许多实际系统,尽管我们不能确知  $a, a, \cdots, a_n$  及  $b$  的准确值,但这些参数的上下界总能知道,如式(5.2-3)。将这些参数变化或摄动的界代入式(5.2-19) 便能求出合适的  $\alpha_i$  和  $\beta_i$ ,它们按式(5.2-14) 和式(5.2-19) 确定的变结构控制律  $u$ ,一方面完全取决于参数的界而与其值无关,所以无须对系统进行辨识;另一方面能保证系统进入滑动模态域,使系统性能不受参数不确定性变化或摄动的影响。由此可见,变结构控制系统具有对参数变化或摄动的强鲁棒

性和自适应功能。

另外,若考虑系统具有外部扰动的情况,原系统式(5.2-1)应描述为

$$\begin{cases} x_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_n = -\sum_{i=1}^n a_i x_i + bu + df \end{cases} \quad (5.2-22)$$

式中,不失一般性,令  $d > 0$ ,  $f$  为不确定性扰动,其上下界已知,为

$$f_{\min} \leq f \leq f_{\max} \quad (5.2-23)$$

于是系统式(5.2-22)的矩阵形式相应变化为

$$\dot{X} = AX + Bu + Df \quad (5.2-24)$$

其中  $X, A, B$  与前相同,  $D = [0 \ 0 \ \dots \ d]^T$ ,  $D \in R^{n \times 1}$ 。我们容易验证式(5.1-18)成立,所以变结构闭环等价系统将具有对扰动  $f$  的不变性。

在存在外部扰动的情况下,变结构控制系统滑动模态域的设计过程和结果与前面介绍的完全相同,这里不再重复,而控制律的设计略有差别。

设计变结构控制  $u$  具有如下形式:

$$u = -\sum_{i=1}^m k_i x_i + u_f \quad (5.2-25)$$

所以与式(5.2-15)和式(5.2-17)类似地,

$$\begin{aligned} s = GX &= GAX + GBu + G Df = \\ &= \sum_{i=1}^n (g_{i-1} - a_i) x_i - b \sum_{i=1}^m k_i x_i + bu_f + df \end{aligned} \quad (5.2-26)$$

所以

$$\begin{aligned} s \dot{s} &= \sum_{i=1}^m (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i - b k_i) x_i s + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{n-1} (g_{i-1} - a_i - g_{n-1} g_i + a_n g_i) x_i s + (g_{n-1} - a_n) \dot{s}^2 + (b u_f + df) s \end{aligned} \quad (5.2-27)$$

显然,上式  $s \dot{s} < 0$  的充分条件为式(5.2-19) ~ 式(5.2-21)成立,且

$$(b u_f + df) s \leq 0$$

即

$$u_f = \begin{cases} u_{f1} \geq -\frac{d}{b} f, & s < 0 \\ u_{f2} \leq -\frac{d}{b} f, & s > 0 \end{cases} \quad (5.2-28)$$

这样,式(5.2-25)、式(5.2-19)和式(5.2-28)就构成了存在外部扰动情况下的变结构控制律。当系统无扰动即  $f = 0$  时,由式(5.2-28)取  $u_f = 0$ ,则该控制律便退化为前面介绍的控制律。当已知  $f$  的上下界时,代入式(5.2-28),变结构控制律与  $f$  的真值无关,从而也无需对干扰进行测量或估计,简化了系统。此外,  $f$  存在时,变结构闭环等价系统依然由式(5.2-5)描述,其特性不受扰动的影响,所以变结构控制系统也具有对外部扰动很强的抵抗能力和适应性。

## 二、多变量变结构控制系统

一般线性多变量系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX + BU \quad (5.2-29)$$

式中  $X \in R^n, U \in R^m$ ; 参数矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ , 输入矩阵  $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ 。考虑到实际系统结构, 不失一般性, 我们可以假设:

(5. I)  $n > m$ ;

(5. II) 输入矩阵列满秩, 即  $\text{rank } B = m$ ;

(5. III)  $(A, B)$  为完全可控对。

线性多变量被控对象的变结构控制系统设计依然分为滑动模态域设计和控制律设计两部分, 但设计过程较单变量情况复杂, 不能完全由单变量情况简单地推广得到。

首先, 针对  $n$  阶  $m$  变量系统式(5.2-29) 在  $n$  维状态空间中定义  $m$  个切换超平面:

$$s_i = g_{i1}x_1 + g_{i2}x_2 + \cdots + g_{in}x_n \quad \text{或} \quad g_i X = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad (5.2-30)$$

$g_i \in R^{1 \times n}$ 。那么对多变量系统而言, 滑动模态域就为

$$S = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]^T = GX = 0, \quad S \in R^m \quad (5.2-31)$$

式中滑动模态参数矩阵  $G \in R^{m \times n}$  为常数矩阵:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix}, \quad |GB| \neq 0 \quad (5.2-32)$$

由式(5.1-14) 可知,  $G$  的确定直接关系到变结构闭环等价系统的性能, 但是要直接适当地选择其中的  $m \times n$  个滑动模态参数  $g_{ij}$  又十分困难。因此必须寻找一种滑动模态域的一般性规范化设计方法, 这是多变量变结构控制系统设计的关键之一。下面介绍一种基于线性系统极点配置技术的滑动模态域设计方法。

由假设(5. II) 知  $B$  矩阵列满秩, 所以总存在满秩状态变换

$$Y = TX \quad (5.2-33)$$

式中  $T \in R^{n \times n}$ ,  $\text{rank } T = n$ , 使得

$$TB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (5.2-34)$$

式中  $B_2$  是  $m \times m$  阶的非奇异矩阵, 即  $\text{rank } B_2 = m$ 。于是经状态变换后, 原系统式(5.2-29) 变为

$$\dot{Y} = TAT^{-1}Y + TBU \quad (5.2-35)$$

而滑动模态域式(5.2-31) 则变换为

$$S = GT^{-1}Y = 0 \quad (5.2-36)$$

现将变换后的状态  $Y$  分为如下两部分:

$$Y^T = [Y_1^T \ Y_2^T]^T, \quad Y_1 \in R^{n-m}, \quad Y_2 \in R^m \quad (5.2-37)$$

并将矩阵  $TAT^{-1}$  和  $GT^{-1}$  相应分块:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad GT^{-1} = [G_1 \ G_2] \quad (5.2-38)$$

那么系统式(5.2-35) 可表示为

$$\dot{Y}_1 = A_{11}Y_1 + A_{12}Y_2 \quad (5.2-39)$$

$$\dot{Y}_2 = A_{21}Y_1 + A_{22}Y_2 + B_2U \quad (5.2-40)$$

滑动模态域(5.2-31) 可表示为

$$S = G_1 Y_1 + G_2 Y_2 = 0 \quad (5.2-41)$$

特别强调  $G_1 \in R^{m \times (n-m)}$ ,  $G_2 \in R^{m \times m}$ 。注意到

$$\det G_2 \det B_2 = \det (G_2 B_2) = \det (GT^{-1} TB) = \det B \neq 0$$

且  $\det B_2 \neq 0$ , 所以  $\det G_2 \neq 0$ , 即矩阵  $G_2$  满秩,  $G_2^{-1}$  存在。

当系统进入滑动模态域并沿其滑动时,  $S \equiv 0$ 。于是由式(5.2-41) 得

$$Y_2 \equiv -G_2^{-1} G_1 Y_1 \triangleq -K Y_1 \quad (5.2-42)$$

这里  $K \in R^{m \times (n-m)}$ 。上式表明, 系统在滑动模态域中运动时, 只有  $Y_1$  中包含的  $n-m$  个独立状态变量, 而  $Y_2$  中的  $m$  个状态变量均能由前者线性表示。这又一次说明变结构闭环等价系统呈现出  $n-m$  阶降阶系统的特性。

对滑动模态方程式(5.1-16) 进行状态变换, 并利用式(5.2-34) 和式(5.2-38), 可推导得变结构闭环等价系统就是

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = A_{11} Y_1 + A_{12} Y_2 \\ \dot{Y}_2 = -K Y_1 \end{cases} \quad (5.2-43)$$

即

$$\dot{Y}_1 = (A_{11} - A_{12} K) Y_1, \quad Y_1 \in R^{n-m} \quad (5.2-44)$$

该  $n-m$  阶系统的  $n-m$  个特征值完全确定了等价系统的特性。

若将式(5.2-43) 中  $Y_1$  视作状态,  $Y_2$  视作状态反馈控制,  $K$  为反馈系统矩阵, 那么式(5.2-44) 则是式(5.2-43) 的闭环形式。于是, 多变量变结构控制系统滑动模态域(即  $G$ ) 的设计经式(5.2-36)、式(5.2-41) 和式(5.2-42) 最终转化为线性状态反馈(即  $K$ ) 的设计问题。用线性系统理论中极点配置技术解决这一问题的方法是成熟的。

可以证明, 如果原系统式(5.2-29) 中  $(A, B)$  是完全可控对, 对么等价系统式(5.2-43) 中  $(A_{11}, A_{12})$  也是完全可控对。因此变结构闭环等价系统的  $n-m$  个特征值或极点可以由  $K$  任意配置。另一方面, 当已知满足性能指标要求的闭环系统理想极点位置时, 必能求出相应的  $K$ 。由于式(5.2-42) 中  $K$  不能惟一确定  $G_1$  和  $G_2$ , 所以最简单的方法就是令  $G_2 = I_{m \times m}$ , 则根据式(5.2-38) 和式(5.2-41) 得

$$GT^{-1} = [K \quad I_{m \times m}] \quad (5.2-45)$$

从而系统的滑动模态参数矩阵为

$$G = [K \quad I_{m \times m}] T \quad (5.2-46)$$

相应的滑动模态域式(5.2-31) 设计便完成了。

以上多变量变结构控制系统滑动模态域设计过程规范并具有一般性, 特别当  $m=1$  时, 该方法适用于单变量高阶系统滑动模态域的设计。同时该设计过程也构造性地证明了滑动模态域能够任意配置变结构闭环等价系统极点, 从而确定其特性的一般性命题。

例 5.2-1 某飞机的线性化数学模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0506 & 0.0000 & -1.0000 & 0.2380 \\ -0.7374 & -1.3345 & 0.3696 & 0.0000 \\ 0.0100 & 0.1047 & -0.3320 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0.0409 & 0.0000 \\ 1.2714 & -20.3106 \\ -2.0625 & 1.3350 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

其中状态变量  $x_1$  至  $x_4$  分别是飞机的侧滑角、滚动角速度、偏航角速度和倾斜角；两个控制输入  $u_1$  和  $u_2$  分别是舵偏角和副翼偏角。

容易验证  $(A, B)$  完全可控,且  $B$  满秩。取满秩变换阵  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.9980 & 0.0014 & 0.0207 & 0.0000 \\ 0.0120 & -0.8513 & -0.5245 & 0.0000 \\ -0.0169 & -0.5247 & 0.8511 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad \text{使 } TB = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 16.5902 \\ -2.4232 & 11.7932 \end{bmatrix}$$

于是

$$TAT^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0.0000 & 0.0014 & -0.8513 & -0.5247 \\ 0.2375 & -0.0722 & 0.5559 & -0.8542 \\ \hline 0.0029 & 0.6212 & -0.8317 & -0.7068 \\ -0.0040 & 0.3884 & -0.4280 & -0.8132 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

根据飞机动态特性要求,期望其变结构闭环等价系统的极点配置在  $-0.9 \pm 2.0i$  位置上,即  $A_{11} - A_{12}K$  的两个极点均位于左半复平面。计算得

$$K = \begin{bmatrix} 98.9266 & 0.9549 \\ -160.4030 & -1.5623 \end{bmatrix}$$

最终设计出系统的滑动模态参数矩阵为

$$G = [K \quad I_{2 \times 2}]T = \begin{bmatrix} 0.9650 & -0.8500 & -0.5048 & 98.9266 \\ -1.5162 & -0.5267 & 0.8201 & -160.4030 \end{bmatrix}$$

当然,变结构控制系统滑动模态域还有其它的设计方法,如最优二次型设计方法或特征向量配置设计方法等,这里不再介绍,可参考有关文献。下面介绍多变量变结构控制律的设计。

考虑  $n$  阶  $m$  变量的不确定性系统

$$\dot{X} = AX + BU + DF \quad (5.2-47)$$

式中参数矩阵  $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$  的各元素均不确定性时变或摄动,但它们的上下界已知:

$$a_{ij}^0 - \Delta a_{ij}^0 \leq a_{ij} \leq a_{ij}^0 + \Delta a_{ij}^0 \quad (5.2-48)$$

这里  $a_{ij}^0$  为  $a_{ij}$  的标称值,  $\Delta a_{ij}^0 \geq 0$  为最大变化量。 $F = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_l]^T \in R^l$  为系统承受的有界不确定性外部扰动向量,其中  $f_i$  界已知:

$$f_{i\min} \leq f_i \leq f_{i\max}, \quad i = 1, 2, \cdots, l \quad (5.2-49)$$

扰动矩阵  $D \in R^{n \times l}$  和输入矩阵  $B \in R^{n \times m}$  已知,并且整个系统式(5.2-47)满足假设(5. I) ~ (5. III)。

基于滑动模态域式(5.2-30) ~ 式(5.2-32),我们设计多变量变结构控制  $U \in R^m$  具有如下形式:

$$U = -(GB)^{-1}(KX + U_f) \quad (5.2-50)$$

式中  $K = [k_{ij}]_{m \times n}$ ,  $U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T$ ,  $U_f = [u_{f1} \ u_{f2} \ \cdots \ u_{fm}]^T$ 。所以在系统运动的能达阶段有

$$S = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]^T = GAX + GDF - KX - U_f \quad (5.2-51)$$

所以

$$\begin{aligned} s_i &= \left[ g_i A X - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \right] + (g_i DF - u_{fi}) = \\ &\sum_{j=1}^n \left[ -k_{ij} + \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj} \right] x_j + (g_i DF - u_{fi}) \end{aligned} \quad (5.2-52)$$

上式两边同乘  $s_i$ , 有

$$s_i s_i = \sum_{j=1}^n \left[ -k_{ij} + \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj} \right] x_j s_i + (g_i DF - u_{fi}) s_i \quad (5.2-53)$$

根据该式知道, 多变量变结构控制系统滑动模态能达条件式(5.1-29):  $s_i s_i < 0$  得以满足的充分条件是

$$\begin{aligned} \left[ -k_{ij} + \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj} \right] x_j s_i &< 0 \\ (g_i DF - u_{fi}) s_i &< 0 \end{aligned}$$

由此得到

$$k_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij} > \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}, & x_j s_i > 0 \\ \beta_{ij} < \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}, & x_j s_i < 0 \end{cases} \quad (5.2-54)$$

$$u_{fi} = \begin{cases} u_{fi}^{(1)} > g_i DF, & s_i > 0 \\ u_{fi}^{(2)} < g_i DF, & s_i < 0 \end{cases} \quad (5.2-55)$$

至此, 式(5.2-50)、式(5.2-54) 和式(5.2-55) 就构成了一种完整的多变量变结构控制律。若将式(5.2-48) 和式(5.2-49) 描述的参数和扰动不确定性因素的上下界代入该控制律, 便可求出合适的  $\alpha_{ij}$  和  $\beta_{ij}$ ,  $u_{fi}^{(1)}$  和  $u_{fi}^{(2)}$  保证系统无论其参数和扰动在已知范围内如何变化均能最终进入滑动模态域, 并沿其滑动。这就避免了系统参数辨识和扰动测量估计等环节引入系统, 至少可大大降低对辨识和测量精度的要求, 从而使系统简化并具有较广泛的自适应性。

### § 5.3 变结构模型跟踪控制

在工程实践中, 控制系统的设计不仅仅表现为调节器设计, 要求被控对象状态渐近稳定的收敛于状态空间原点; 很多情况下还表现为跟随器的设计, 要求被控对象的状态跟踪复现某一预定的理想状态轨迹, 输出跟踪复现输入或期望输出。模型跟踪是实现该控制目的的有效形式, 人们通过迫使被控对象跟踪特性理想的参考模型来获得期望的闭环系统动态特性和稳态品质。这一控制形式在变结构控制理论中也得到了深入的研究。

仍考虑  $n$  阶  $m$  变量的不确定性被控制对象

$$\dot{X} = AX + BU + DF \quad (5.3-1)$$

式中  $X \in R^n, U \in R^m, F \in R^l$ ;  $A = A_0 + \Delta A, B = B_0 + \Delta B, A_0$  和  $B_0$  分别为  $A$  和  $B$  的标称矩阵或不变元素组成的矩阵,  $\Delta A$  和  $\Delta B$  分别为  $A$  和  $B$  的摄动矩阵或时变元素组成的矩阵;  $D \in R^{n \times l}$  为已知,  $F$  为作用于系统的外部扰动向量。我们仍已知  $A, B$  和  $F$  等各不确定性因素的标称值和变化的上下界, 即

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad A_0 = [a_{ij}^0]_{n \times n}, \quad a_{ij}^0 - \Delta a_{ij}^0 \leq a_{ij} \leq a_{ij}^0 + \Delta a_{ij}^0 \quad (5.3-2)$$

$$B = [b_{ij}]_{n \times m}, \quad B_0 = [b_{ij}^0]_{n \times m}, \quad b_{ij}^0 - \Delta b_{ij}^0 \leq b_{ij} \leq b_{ij}^0 + \Delta b_{ij}^0 \quad (5.3-3)$$

$$F = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_l]^T, \quad f_{\min} \leq f_i \leq f_{\max} \quad (5.3-4)$$

于是,系统式(5.3-1)可描述为

$$\dot{X} = A_0 X + \Delta A X + B_0 U + \Delta B U + D F \quad (5.3-5)$$

针对该系统设计参考模型为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m \quad (5.3-6)$$

式中  $X_m \in R^n$ ,  $U_m = [u_{m1} \ u_{m2} \ \cdots \ u_{mk}]^T \in R^k$ ,  $k \leq m$ ;  $A_m = [a_{ij}^m]_{n \times n}$ ,  $B_m = [b_{ij}^m]_{n \times k}$ , 并且该参考模型满足以下三个条件:

- (1) 具有满足性能指标设计要求的理想特征结构,即  $A_m$  具有理想的特征值或极点配置;
- (2) 具有适当的数学形式,与被控对象式(5.3-1)的标称模型  $(A_0, B_0)$  满足完全模型跟踪条件:

$$\text{rank } B_0 = \text{rank } [B_0 \ A_m - A_0] = \text{rank } [B_0 \ B_m] \quad (5.3-7)$$

- (3)  $(A_m, B_m)$  完全可控,  $A_m$  满秩,  $B_m$  列满秩。

定义系统的状态误差向量  $e \in R^n$

$$e = X_m - X = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \cdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (5.3-8)$$

则由式(5.3-6)减式(5.3-5)得误差系统方程为

$$\dot{e} = X_m - \dot{X} = A_m e + (A_m - A_0) X + B_m U_m - \Delta A X - B_0 U - \Delta B_0 U - D F \quad (5.3-9)$$

那么模型跟踪控制系统的设计目的即为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$$

与调节器设计情况下的滑动模态域式(5.2-31)相对应,我们针对误差方程式(5.3-9)设计变结构模型跟踪控制系统的滑动模态域为

$$S = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]^T = G e = 0 \quad (5.3-10)$$

式中  $S \in R^m$ , 并且各切换超平面

$$s_i = g_{i1} e_1 + g_{i2} e_2 + \cdots + g_{in} e_n \quad g_i e = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \quad (5.3-11)$$

显然,常值矩阵

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ g_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} = [g_{ij}]_{m \times n} \quad (5.3-12)$$

并要求矩阵  $(GB)$  和  $(GB_0)$  非奇异。

当误差系统式(5.3-9)沿滑动模态域式(5.3-10)运动时,  $S \equiv 0$ , 所以

$$S = G e = G[A_m e + (A_m - A_0) X + B_m U_m - \Delta A X - D F] - G B U = 0 \quad (5.3-13)$$

由上式在形式上求解出等效控制  $U_{eq}$  为

$$U_{eq} = (GB)^{-1} G[A_m e + (A_m - A_0) X + B_m U_m - \Delta A X - D F] \quad (5.3-14)$$

代入误差方程式(5.3-9) 便得到变结构模型跟踪控制系统在滑动模态下的闭环等价系统为

$$e = [I - B(GB)^{-1}G][A_m e + (A_m - A_0)X - B_m U_m - \Delta A X - DF] \quad (5.3-15)$$

容易证明,当原系统式(5.3-5) 中,输入矩阵  $B$  的参数摄动或变化满足条件

$$\text{rank}[B_0 \quad \Delta B] = \text{rank } B_0 \quad (5.3-16)$$

时,变结构闭环等价系统能够简化为

$$e = [I - B_0(GB_0)^{-1}G][A_m e + (A_m - A_0)X + B_m U_m - \Delta A X - DF] \quad (5.3-17)$$

很明显,该式完全独立于  $\Delta B$ ,所以误差  $e$  收敛特性相对于原系统输入矩阵  $B$  中包含的不确定性因素具有不变性。

另外,与式(5.1-15) ~ 式(5.1-18) 和式(5.1-21) ~ 式(5.1-24) 两个推导过程分别相同,可以推证,当被控对象式(5.3-1) 或式(5.3-5) 的扰动矩阵  $D$  和参数摄动或变化矩阵  $\Delta A$  满足条件

$$\text{rank } B_0 = \text{rank}[B_0 \quad D] \quad (5.3-18)$$

$$\text{rank } B_0 = \text{rank}[B_0 \quad \Delta A] \quad (5.3-19)$$

时,并考虑到参考模型  $(A_m, B_m)$  的设计满足完全模型跟踪条件式(5.3-7),则有

$$[I - B_0(G B_0)^{-1}G]DF = 0 \quad (5.3-20)$$

$$[I - B_0(G B_0)^{-1}G]\Delta A X = 0 \quad (5.3-21)$$

$$[I - B_0(G B_0)^{-1}G]B_m U_m = 0 \quad (5.3-22)$$

$$[I - B_0(G B_0)^{-1}G](A_m - A_0)X = 0 \quad (5.3-23)$$

此时,变结构闭环等价系统即为

$$e = [I - B_0(G B_0)^{-1}G]A_m e \dot{=} A_{eq} e \quad (5.3-24)$$

是一个完全独立于原被控对象各种不确定性因素的自治系统。由于式中  $B_0$  为被控对象模型,不可改变,  $A_m$  为参考模型已经给定,所以该等价系统特性完全取决于矩阵  $G$  的选择,也就是完全取决于滑动模态域式(5.3-10) 的设计。

变结构模型跟踪控制系统的滑动模态域是针对误差系统设计的。设计方法与上一节介绍的变结构调节器滑动模态域的一般性规范化设计方法完全相同,并且滑动模态参数矩阵  $G$  能对变结构闭环等价系统式(5.3-24) 的极点或特征值进行任意配置的结论依然成立,这里不再重复。当且仅当适当的滑动模态域设计将等价系统的极点全部配置在复平面左半平面,即

$$\text{Re } \lambda_i \{ [I - B_0(GB_0)^{-1}G]A_m \} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m \quad (5.3-25)$$

时,变结构模型跟踪控制系统的设计目的  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$  得以实现,被控对象最终将无误差地跟踪复现参考模型,从而获得参考模型的理想特性。

需要注意的是,在变结构模型跟踪控制系统的闭环等价系统式(5.3-24) 中,  $A_{eq}$  的特征结构确定的是系统误差  $e$  的收敛特性( $e \neq 0$ );而  $A_m$  的特征结构确定的是误差  $e$  收敛后被控对象输出对输入的响应特性。两者在概念上是不同的,不能混淆。

接下来,我们讨论变结构模型跟踪控制系统控制律的设计问题,仅考虑被控对象式(5.3-5) 中  $B = B_0$  即  $\Delta B = 0$  的情况。此时误差系统式(5.3-9) 就变为

$$e = A_m e + (A_m - A_0)X + B_m U_m - \Delta A X - BU - DF \quad (5.3-26)$$

针对该误差系统设计多变量变结构控制  $U \in R^m$  为如下形式:

$$U = (GB)^{-1}(K_e e + K_s X + K_u U_m + U_f) \quad (5.3-27)$$

其中  $K_e = [k_{ij}^e]_{m \times n}$ ,  $K_s = [k_{ij}^s]_{m \times n}$ ,  $K_u = [k_{ij}^u]_{m \times k}$ ;  $U_f = [u_{f1} \ u_{f2} \ \dots \ u_{fm}]^T$ 。那么在系统运动的



能达阶段,有  $S \neq 0$  且

$$\begin{aligned} S &= [s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m] = G e = \\ &G[A_m e + (A_m - A_0) X + B_m U_m - \Delta A X - DF] - GBU = \\ &G[A_m e + (A_m - A_0) X + B_m U_m - \Delta A X - DF] - \\ &K_e e - K_s X - K_u U_m - U_f \end{aligned} \quad (5.3-28)$$

考虑到式(5.3-12)的滑动模态参数矩阵  $G$  的具体形式,则

$$\begin{aligned} s_i &= \left[ g_i A_m e - \sum_{j=1}^n k_{ij}^e e_j \right] + \left[ g_i (A_m - A_0 - \Delta A) X - \sum_{j=1}^n k_{ij}^s x_j \right] + \\ &\left[ g_i B_m U_m - \sum_{j=1}^k k_{ij}^u u_{mj} \right] + (g_i DF - u_{fi}) \end{aligned} \quad (5.3-29)$$

给上式两边同乘  $s_i$  得

$$\begin{aligned} s_i s_i &= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}^m - k_{ij}^e \right] e_j s_i + \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{l=1}^n g_{il} b_{lj}^m - k_{ij}^u \right] u_{mj} s_i + \\ &\sum_{j=1}^n \left[ \sum_{l=1}^n g_{il} (a_{lj}^m - a_{lj}) - k_{ij}^s \right] x_j s_i + (g_i DF - u_{fi}) s_i \end{aligned} \quad (5.3-30)$$

所以,变结构模型跟踪控制系统滑动模态能达条件  $s(e)s_i(e) < 0$  得以满足的充分条件就是式(5.3-30)中逐项小于等于零。即

$$\left[ \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}^m - k_{ij}^e \right] e_j s_i \leq 0 \quad (5.3-31)$$

$$\left[ \sum_{l=1}^n g_{il} b_{lj}^m - k_{ij}^u \right] u_{mj} s_i \leq 0 \quad (5.3-32)$$

$$\left[ \sum_{l=1}^n g_{il} (a_{lj}^m - a_{lj}) - k_{ij}^s \right] x_j s_i < 0 \quad (5.3-33)$$

$$(g_i DF - u_{fi}) s_i < 0 \quad (5.3-34)$$

从中解出控制律参数为

$$k_{ij}^e = \begin{cases} \alpha_{ij}^e \geq \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}^m, & e_j s_i > 0 \\ \beta_{ij}^e \leq \sum_{l=1}^n g_{il} a_{lj}^m, & e_j s_i < 0 \end{cases} \quad (5.3-35)$$

$$k_{ij}^u = \begin{cases} \alpha_{ij}^u \geq \sum_{l=1}^n g_{il} b_{lj}^m, & u_{mj} s_i > 0 \\ \beta_{ij}^u \leq \sum_{l=1}^n g_{il} b_{lj}^m, & u_{mj} s_i < 0 \end{cases} \quad (5.3-36)$$

$$k_{ij}^s = \begin{cases} \alpha_{ij}^s > \sum_{l=1}^n g_{il} (a_{lj}^m - a_{lj}), & x_j s_i > 0 \\ \beta_{ij}^s < \sum_{l=1}^n g_{il} (a_{lj}^m - a_{lj}), & x_j s_i < 0 \end{cases} \quad (5.3-37)$$

$$u_{fi} = \begin{cases} u_{fi}^{(1)} > g_i DF, & s_i > 0 \\ u_{fi}^{(2)} < g_i DF, & s_i < 0 \end{cases} \quad (5.3-38)$$

其中包含不确定性因素的系统参数  $a_{ij}$  和外部扰动  $F$  可将式(5.3-2)和式(5.3-4)描述的上下界代入以确定  $k_{ij}^s$  和  $u_{fi}$ 。这样,式(5.3-27)和式(5.3-35)~式(5.3-38)就形成了一种完整的变结构模型跟踪控制律方案。

特殊地,若考虑到参考模型的参数  $A_m = [a_{ij}^m]_{n \times n}$  和  $B_m = [b_{ij}^m]_{n \times k}$  是确定的,滑动模态参数  $G = [g_{ij}]_{m \times n}$  已经设计给定,那么不等式(5.3-31)和式(5.3-32)均可取等号,仍能保证滑动模态能达条件成立。相应地,描述控制律参数  $k_{ij}^e$  和  $k_{ij}^u$  的不等式(5.3-35)和式(5.3-36)也取等号,于是有

$$K_e = [k_{ij}^e]_{m \times n} = G A_m \tag{5.3-39}$$

$$K_u = [k_{ij}^u]_{m \times k} = G B_m \tag{5.3-40}$$

从而变结构模型跟踪控制律便可简化为

$$U = (GB)^{-1} (GA - me + GB_m U_m + K_s X + U_f) \tag{5.3-41}$$

式中  $K_s$  和  $U_f$  仍由式(5.3-37)和式(5.3-38)确定。

至此,通过滑动模态域和控制律两部分的设计,已经完成了多变量不确定性被控对象的整个变结构模型跟踪控制系统的设计,控制系统结构如图5.3-1所示。分析该图知道,若将变结构控制律中式(5.3-35)~式(5.3-38)视作参数自适应规律,则图中虚线框内的结构即为自适应机构。那么很容易看出,变结构模型跟踪控制系统的结构与本书前面几章中介绍的模型参考自适应控制系统结构是一致的。这也从一个侧面说明变结构控制是一类广义的自适应控制。

另外,变结构模型跟踪控制系统是一种变结构跟随器系统,与本章上一节介绍的变结构调节器系统相比较会发现,两者无论在设计过程还是在控制律形式等方面均有许多相似之处。它们的最大差异在于,变结构调节器系统的滑动模态域和控制律等设计环节是直接针对被控对象进行的,而变结构模型跟踪控制系统的则是针对被控对象与参考模型的误差系统进行。所以若将误差系统式(5.3-26)写成

$$e = A_m e + BU + DF, \quad D = I_{n \times n} \tag{5.3-42}$$

$$F = (A_m - A_0)X + B_m U_m - \Delta AX - DF \tag{5.3-43}$$

即将系统状态  $X$ 、参考输入  $U_m$  和外部扰动  $F$  等对系统误差  $e$  的作用均归入  $F \in R^n$ ,并当作对误差系统  $(A_m, B)$  的广义扰动向量,那么变结构模型跟踪控制系统这类跟随器设计问题实际上就可以视作针对误差系统式(5.3-26)或式(5.3-42)的变结构调节器设计问题。从这个角度来看,这两类变结构控制系统的设计存在着一致性。

例5.3-1 亚音速飞机C-131B的三自由度纵向线性化状态方程为

$$\dot{X} = AX + BU$$

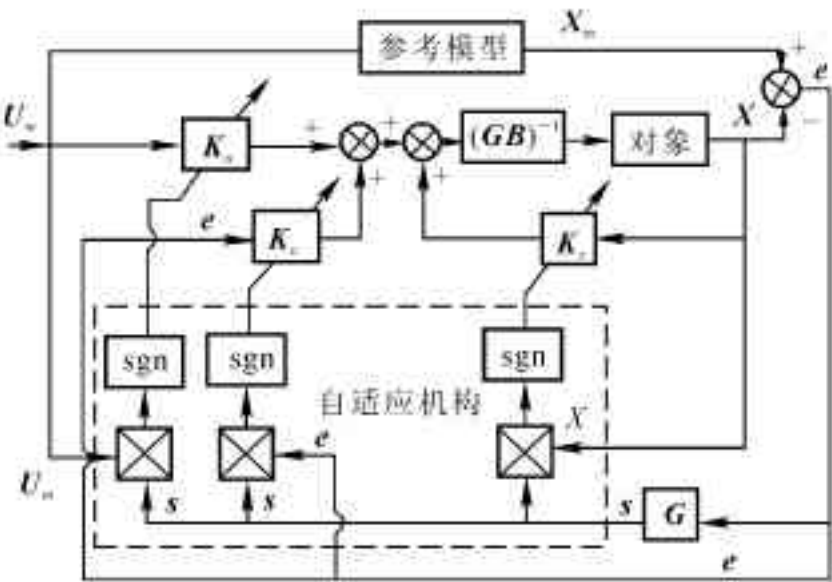


图 5.3-1 变结构模型跟踪控制系统结构

$$A = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.401E-4 & \sigma & -1.9513 & 0.0133 \\ -2.505E-4 & 1.0000 & -1.3239 & -0.0238 \\ -0.561 & 0.0000 & 0.3580 & -0.0279 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -5.3307 & 6.447E-3 & -0.2669 \\ -0.1600 & -1.155E-2 & -0.2511 \\ 0.0000 & 0.1060 & 0.0862 \end{bmatrix}$$

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T, \quad U = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$$

其中系统状态变量  $x_1, x_2, x_3$  和  $x_4$  分别为飞机的俯仰角、俯仰角速度、攻角和飞行速度;输入  $u_1, u_2$  和  $u_3$  分别为飞机的升降舵偏角、油门控制量以及襟翼偏角;该数学模型中仅有一个参数  $\sigma$  不确定性变化,其标称值为  $\sigma_0 = -2.038$ ,变化范围为  $-0.558 \sim -3.558$ ;外部扰动  $F = 0$  暂不考虑。下面我们来设计飞机的变结构模型跟踪控制系统。

首先确定满足性能指标要求的参考模型为

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m U_m$$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 5.318E-7 & -0.4179 & -0.1202 & 2.319E-3 \\ -4.619E-9 & 1.0000 & -0.7523 & -2.387E-2 \\ -0.5614 & 0.0000 & 0.3002 & -1.743E-2 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ -0.1717 & 7.451E-6 \\ -0.0238 & -7.783E-5 \\ 0.0000 & 3.685E-3 \end{bmatrix}$$

$$X_m = [x_{m1} \quad x_{m2} \quad x_{m3} \quad x_{m4}]^T, \quad U_m = [u_{m1} \quad u_{m2}]^T$$

其中  $X_m$  分别为  $X$  的期望值,  $u_{m1}$  和  $u_{m2}$  分别为升降舵指令和油门指令。容易验证,参考模型与被控对象之间满足完全模型跟踪条件式(5.3-7):

$$\text{rank } B = \text{rank} [B \quad A_m - A] = \text{rank} [B \quad B_m] = 3$$

并且  $\Delta A$  中仅包含一个非零元素  $\sigma$ ,显然有

$$\text{rank } B = \text{rank} [B \quad \Delta A] = 3$$

定义系统状态  $X$  与期望值  $X_m$  之间的偏差量  $e = X_m - X$ ,误差系统为式(5.3-26),滑动模态域即为

$$S = [s \quad \dot{s} \quad \ddot{s}]^T = G e = 0$$

那么变结构闭环等价系统为

$$\dot{e} = [I - B(GB)^{-1}G]A_m e$$

完全独立于参数  $\sigma$  的摄动变化,并且仅有一个特征值。经判断,误差系统  $(A_m, B)$  完全可控,所以该特征值可由  $G$  任意配置。根据误差收敛特性的设计要求,我们确定该特征值为  $-10.0$ ,于是利用 § 5.2 节的滑动模态域设计方法(这里不再重复)可计算出滑动模态参数矩阵  $G$  为

$$G = \begin{bmatrix} 10.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

利用式(5.3-41)描述的控制律形式,并考虑到  $F = 0$ ,经过运算得到

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0200 & -1.6418 & -0.1304 & -0.0063 \\ -5.5128 & 2.4806 & 0.3409 & -0.2545 \\ 0.2663 & -3.0504 & 3.0634 & 0.1108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \ddot{e} \\ e^{(3)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0281 & 0.0001 \\ -0.0649 & 0.0359 \\ 0.0798 & -0.0014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1942 & 0.2186 & 0.0356 \\ -0.1045 & 3.4821 & 9.8197 \\ 0.1285 & -4.2819 & -0.4744 \end{bmatrix} K_s \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.3-44)$$

式中  $K_s = [k_{ij}^s]_{m \times n}$ ,  $k_{ij}^s$  按式(5.3-37)的规律分别在矩阵  $\alpha^s = [\alpha_{ij}^s]_{m \times n}$  和  $\beta^s = [\beta_{ij}^s]_{m \times n}$  中取值:

$$\alpha^s = \begin{bmatrix} 0.0100 & 10.0000 & 3.0000 & 0.1000 \\ 0.0100 & 0.1000 & 3.0000 & 0.0100 \\ 0.0010 & 0.1000 & 1.0000 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

$$\beta^s = \begin{bmatrix} -0.0100 & -5.0000 & -2.0000 & -0.2000 \\ -0.0050 & -0.1000 & -1.5000 & -0.1000 \\ -0.0100 & -0.1000 & -1.0000 & -0.1000 \end{bmatrix}$$

若令  $v_{ij}^s \geq \max\{|\alpha_{ij}^s|, |\beta_{ij}^s|\} \geq 0$ , 则基于矩阵  $\alpha^s$  和  $\beta^s$  可定另一矩阵

$$v^s = [v_{ij}^s]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0.0100 & 10.0000 & 3.0000 & 0.2000 \\ 0.0100 & 0.1000 & 3.0000 & 0.1000 \\ 0.0100 & 0.1000 & 1.0000 & 0.1000 \end{bmatrix}$$

使得式(5.3-44)中状态反馈矩阵  $K_s$  得到简化:

$$k_{ij}^s = v_{ij}^s \operatorname{sgn}(x_j s_i)$$

这样,我们便完成了C-131B亚音速飞机纵向通道的变结构模型跟踪控制系统设计,给出了一套控制系统参数。

## § 5.4 变结构模型参考自适应控制

被控对象全状态可测量或仅输入输出可测量两种情况下的控制,一直是自适应控制理论研究中的重要问题。当被控对象全部状态变量均能够测量时,系统可以实现全状态反馈。对此,本章上节介绍的变结构模型跟踪控制方法是十分有效的控制手段之一。它能保证被控对象存在有界不确定性参数变化和有界外部扰动时实现对参考模型的稳定跟踪,从而获得理想的系统性能。当被控对象仅输入输出可测量时,系统全状态反馈不能简单实现。对此,本书前几章也详细地介绍了几种基于输入输出滤波器的自适应控制方案,如 Narendra 方案等。本节将在此基础上引入变结构控制,针对单输入单输出系统,着重介绍仅输入输出可测量情况下的两种变结构模型参考自适应控制方案。这两种方案的共同特点在于采用不连续的自适应规律获得好

的系统特性。

## 一、变结构信号综合自适应控制方案

考虑单输入单输出线性不确定性系统

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (5.4-1)$$

式中  $p$  是微分算子  $\frac{d}{dt}$ , 且

$$A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i \quad (5.4-2)$$

$$B(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^i \quad (5.4-3)$$

假设  $B(p)$  是古尔维茨多项式; 系统阶次  $m$  和  $n$  已知且  $m < n$ ; 系统参数  $a_i$  和  $b_i$  不确定性变化或摄动, 它们的上下界已知, 即

$$a_i^0 - \Delta a_i^0 \leq a_i \leq a_i^0 + \Delta a_i^0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.4-4)$$

$$b_i^0 - \Delta b_i^0 \leq b_i \leq b_i^0 + \Delta b_i^0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (5.4-5)$$

针对该系统设计参考模型为

$$A_m(p)y_m(t) = B_m(p)r(t) \quad (5.4-6)$$

式中

$$A_m(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^m p^i \quad (5.4-7)$$

$$B_m(p) = \sum_{i=0}^{m_1} b_i^m p^i \quad (5.4-8)$$

并且  $A_m(p)$  为  $n$  阶古尔维茨多项式,  $B_m(p)$  为  $m_1$  阶古尔维茨多项式,  $m_1 < m$ 。  $r(t)$  是分段连续的一致有界参考输入信号。

为了使被控对象式(5.4-1)的输出  $y(t)$  跟踪参考模型式(5.4-6)的输出  $y_m(t)$ , 我们确定控制律的形式为

$$u(t) = \frac{B_m(p)}{F(p)} r(t) - w(t) \quad (5.4-9)$$

这里,

$$F(p) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i p^i \quad (5.4-10)$$

是任意的  $n-1$  阶古尔维茨多项式,  $w(t)$  是待设计的自适应综合信号。

定义输出误差信号

$$e(t) = y_m(t) - y(t) \quad (5.4-11)$$

用式(5.4-6)减去式(5.4-2)并利用式(5.4-9)推导得系统的误差方程为

$$A_m(p)e(t) = [A(p) - A_m(p)]y(t) + [F(p) - B(p)]u(t) + F(p)w(t) \quad (5.4-12)$$

引入滤波变量  $e_F$ ,  $u_F$  和  $y_F$  分别为

$$F(p)e_F(t) = e(t) \quad (5.4-13)$$

$$F(p)u_F(t) = u(t) \quad (5.4-14)$$

$$F(p)y_F(t) = y(t) \quad (5.4-15)$$

用  $F(p)$  除式(5.4-12) 两边, 并利用以上三式便得到系统的滤波误差方程

$$A_m(p)e_F(t) = [A(p) - A_m(p)]y_F(t) + [F(p) - B(p)]u_F(t) + w(t) \quad (5.4-16)$$

将上式写成状态方程形式有

$$\varepsilon = A\varepsilon + D\Phi + E\theta + bw \quad (5.4-17)$$

式中

$$\begin{aligned} \varepsilon^T &= [e_F \quad pe_F \cdots p^{n-1} e_F] \\ \Phi^T &= [u_F \quad pu_F \cdots p^{n-1} u_F] \\ \theta^T &= [y_F \quad py_F \cdots p^{n-1} y_F] \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0^m & -a_1^m & -a_2^m & \cdots & -a_{n-1}^m \end{bmatrix}_{n \times n} \\ D &= \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ f_0 - b_0 & \cdots & f_m - b_m & f_{m+1} & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n} \\ E &= \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ a_0 - a_0^m & a_1 - a_1^m & \cdots & a_{n-1} - a_{n-1}^m \end{bmatrix}_{n \times n} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1} \end{aligned}$$

应当注意到, 该状态方程中的信号向量  $\varepsilon, \Phi, \theta$  是分别由被控对象可直接测量的误差信号  $e$ 、输出信号  $y$  和输入信号  $u$  经过具有  $n-1$  个积分器的低通滤波器  $F(p)$  产生, 所以它们在工程中都是能够实际获得的可用信号。由于状态变量  $\varepsilon$  均为滤波变量, 因此通常称这些滤波器为状态变量滤波器。这样, 我们便将一个仅输入输出可测量的被控对象由微分方程描述转化成为全部状态变量均可获得和单变量状态方程形式, 从而本章前几节介绍的基于状态方程和全状态反馈的各种变结构控制系统设计方法就可以直接应用了。

针对单变量状态方程式(5.4-17) 设计滑动模态域为

$$s(\varepsilon) = G\varepsilon = g_1 e_F + g_2 pe_F + \cdots + g_{n-1} p^{n-2} e_F + p^{n-1} e_F = 0 \quad (5.4-18)$$

$$G = [g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_{n-1} \quad 1] \in R^{1 \times n} \quad (5.4-19)$$

为滑动模态参数矩阵。

当系统沿滑动模态域滑动时,  $s(\varepsilon) \equiv 0$ , 所以

$$s(\varepsilon) = G\varepsilon = G(A\varepsilon + D\Phi + E\theta) + Gbw = 0 \quad (5.4-20)$$

由此可解出系统的等效控制  $w_{eq}(t)$ , 并将各矩阵  $A, D, E, b$  和  $G$  的具体形式代入得

$$\begin{aligned} w_{eq}(t) &= -(Gb)^{-1} G(A\varepsilon + D\Phi + E\theta) = \\ &= [A_m(p) - p\Gamma(p)]e_F(t) - [F(p) - B(p)]u_F(t) - \\ &= [A(p) - A_m(p)]y_F(t) \end{aligned} \quad (5.4-21)$$

式中

$$\Gamma(p) = p^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} g_{i+1} p^i \quad (5.4-22)$$

把等效控制代入控制律(5.4-9)有

$$u(t) = \frac{B_m(p)}{B(p)} r(t) - \frac{A_m(p) - p\Gamma(p)}{B(p)} e(t) + \frac{A(p) - A_m(p)}{B(p)} y(t) \quad (5.4-23)$$

由于  $B(p)$  是古尔维茨多项式,  $m < n$ , 且多项式  $A_m(p) - p\Gamma(p)$  和  $A(p) - A_m(p)$  的阶次均小于等于  $m$ , 所以系统控制信号  $u(t)$  为有界信号。

进一步将式(5.4-23)代入原系统微分方程式(5.4-1), 经推导得变结构闭环等价系统是

$$\Gamma(p)e_F = g_1 e_F + g_2 p e_F + \cdots + g_{n-1} p^{n-2} e_F + p^{n-1} e_F = G\varepsilon = 0 \quad (5.4-24)$$

显然, 该等价系统的特性完全独立于被控对象的全部不确定性参数, 仅取决于滑动模态参数  $G$ , 这也与状态方程式(5.4-17)满足变结构控制系统不变性条件

$$\text{rank } \begin{bmatrix} b & A & D & E \end{bmatrix}$$

相一致。所以, 适当地设计滑动模态域式(5.4-18)就能保证等价系统的稳定性, 并获得期望的误差收敛特性。

当误差系统式(5.4-16)或式(5.4-17)在能达运动阶段时,  $s(\varepsilon) \neq 0$ , 有

$$\begin{aligned} s(\varepsilon) &= G(A\varepsilon + D\Phi + E\theta) + Gbw = \\ &= [f_0 - b \quad \cdots \quad f_m - b_m \quad f_{m+1} \quad \cdots \quad f_{n-1}] \Phi + \\ &= [a \quad a_1 - g_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} - g_{n-1}] \theta + \\ &= [-a^m \quad g_1 - a_1^m \quad \cdots \quad g_{n-1} - a_{n-1}^m] \theta_m + w \end{aligned} \quad (5.4-25)$$

式中

$$\begin{aligned} \theta_m &= [y_{mF} \quad py_{mF} \quad \cdots \quad p^{n-1} y_{mF}]^T = \varepsilon + \theta = \\ &= [e_F \quad pe_F \quad \cdots \quad p^{n-1} e_F]^T + [y_F \quad py_F \quad \cdots \quad p^{n-1} y_F]^T \end{aligned} \quad (5.4-26)$$

取综合信号  $w(t)$  的具体变结构控制律形式为

$$\begin{aligned} w(t) &= -\beta_\Phi^T \Phi(t) - \beta_\theta^T \theta(t) + \beta_{\theta_m}^T \theta_m(t) - \\ &= (\alpha_\Phi^T |\Phi(t)| + \alpha_\theta^T |\theta(t)| + \alpha_{\theta_m}^T |\theta_m(t)|) \text{sgn}(s) \end{aligned} \quad (5.4-27)$$

由于变结构控制律必须保证滑动模态能达条件

$$s(\varepsilon)s(\varepsilon) < 0 \quad (5.4-28)$$

成立, 所以把式(5.4-27)代入式(5.4-25), 然后两边同乘以  $s(\varepsilon)$  应得

$$\begin{aligned} &\{ [f_0 - b \quad \cdots \quad f_m - b_m \quad f_{m+1} \quad \cdots \quad f_{n-1}] \Phi + [a \quad a_1 - g_1 \quad \cdots \quad a_{n-1} - g_{n-1}] \theta + \\ &[-a^m \quad g_1 - a_1^m \quad \cdots \quad g_{n-1} - a_{n-1}^m] \theta_m - \beta_\Phi^T \Phi - \beta_\theta^T \theta - \beta_{\theta_m}^T \theta_m - \\ &(\alpha_\Phi |\Phi| + \alpha_\theta |\theta| + \alpha_{\theta_m} |\theta_m|) \text{sgn}(s) \} < 0 \end{aligned} \quad (5.4-29)$$

若选取综合信号  $w(t)$  中的参数

$$\beta_\Phi^T = [f_0 - b^0 \quad \cdots \quad f_m - b_m^0 \quad f_{m+1} \quad \cdots \quad f_{n-1} + \eta] \quad (5.4-30)$$

$$\beta_\theta^T = [a^0 \quad a_1^0 - g_1 \quad \cdots \quad a_{n-1}^0 - g_{n-1}] \quad (5.4-31)$$

$$\beta_{\theta_m}^T = [-a^m \quad g_1 - a_1^m \quad \cdots \quad g_{n-1} - a_{n-1}^m] \quad (5.4-32)$$

那么要保证式(5.4-29)即式(5.4-28)成立, 必须取

$$\alpha_\Phi^T = [\Delta b^0 \quad \cdots \quad \Delta b_m^0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \eta] \quad (5.4-33)$$

$$\alpha_\theta^T > [\Delta a_0^0 \quad \cdots \quad \Delta a_{n-1}^0] \quad (5.4-34)$$

$$\alpha_{0m}^T = 0 \quad (5.4-35)$$

其中  $\eta$  为任意小的正常数, 以保证变结构控制器的可实现性。

总之, 式(5.4-18) 确定了变结构控制系统的滑动模态域, 式(5.4-27) 和式(5.4-30) ~ 式(5.4-35) 完整地确定了自适应综合信号  $w(t)$  的完全基于被控对象不确定性参数标称值和上下界的变结构规律, 这两者确保误差滤波变量  $e_F$  渐近稳定地收敛于零。由于式(5.4-13) 中  $F(p)$  是古尔维茨多项式, 所以被控对象与参考模型之间的输出误差  $e(t)$  也渐近稳定地收敛于零。

例 5.4-1 一个参数未知的二阶被控对象的微分方程是

$$(p^2 + 0.75p + 2.25)y(t) = 4.5u(t), \quad n = 2, m = 0$$

已知各参数的上下界分别为

$$1.2 \leq a_0 \leq 2.4, \quad 0.7 \leq a_1 \leq 1.1, \quad 2.0 \leq b \leq 5.0$$

参考模型是

$$(p^2 + 1.2p + 1)y_m(t) = r(t)$$

试设计变结构自适应控制系统, 使被控对象的输出跟踪参考模型输出。

首先, 由参数上下界得

$$a_0^0 = 1.8, \Delta a_0 = 0.6; \quad a_1^0 = 0.9, \Delta a_1 = 0.2; \quad b^0 = 3.5, \Delta b = 1.5$$

定义  $n-1$  阶状态变量滤波器  $F(p) = p+2$ , 所以

$$(p+2)e_F = e = y_m - y$$

设计稳定的滑动模态域为

$$s = (p+1)e_F = \Gamma(p)e_F = 0$$

若取常数  $\eta = 0.1$ , 那么自适应综合信号  $w(t)$  中的各参数就分别为

$$\beta_\Phi^T = [-1.5 \quad 1.1], \quad \beta_0^T = [1.8 \quad -0.1], \quad \beta_m^T = [-1 \quad -0.2];$$

$$\alpha_\Phi^T = [1.5 \quad 0.1], \quad \alpha_0^T > [0.6 \quad 0.2] \text{ 取 } \alpha_0^T = [0.7 \quad 0.3], \quad \alpha_m^T = [0.0 \quad 0.0]$$

所以, 被控对象的输入信号  $u(t)$  就为

$$u(t) = \frac{1}{p+2}r(t) + w(t)$$

## 二、变结构参数自适应控制方案

考察单输入单输出线性被控对象

$$\begin{cases} X = AX + bu \\ Y = h^T X, \quad h^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{cases} \quad (5.4-36)$$

其传递函数为严格正实的

$$W(s) = K \frac{Z(s)}{R(s)} \quad (5.4-37)$$

已知  $R(s)$  是  $n$  阶首一古尔维茨多项式,  $Z(s)$  是  $m = n-1$  阶首一古尔维茨多项式,  $R(s)$  与  $Z(s)$  互质,  $K > 0$ 。被控对象的参数是未知量。

假设参考模型输入  $r(t)$  输出  $y_m(t)$  之间的传递函数也是严格正实的

$$W_m(s) = K_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (5.4-38)$$



其中  $Z_m(s)$  和  $R_m(s)$  均为首一古尔维茨多项式, 阶数也分别为  $m$  和  $n$ , 并且两多项式互质,  $K_m > 0$ 。

定义系统的输出误差为

$$e = y - y_m \quad (5.4-39)$$

那么自适应控制目的就可以表述为: 已知参考模型输入  $r(t)$  为分段连续且一致有界的, 输出为  $y_m(t)$ , 求被控对象的控制信号  $u(t)$ , 使得被控对象输出跟踪参考模型的输出:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_m) = 0 \quad (5.4-40)$$

在本书第三章已经详细介绍了这一自适应控制问题的 Narendra 方案。在此基础上, 这里引入变结构控制进行系统综合。同样, 由于被控对象仅输入输出可测量, 分别采用输入输出滤波器, 也可称为状态变量滤波器,

$$u_1 = \Lambda u_1 + du, \quad \omega_1 = g_1^T u_1 \quad (5.4-41)$$

$$u_2 = \Lambda u_2 + dy, \quad \omega_2 = g_2^T u_2 + g_0 y \quad (5.4-42)$$

以获得输入输出的滤波信号。式中  $u_1, u_2 \in R^{n-1}$ , 并且  $Z_m(s) = \det(sI - \Lambda)$ ;  $g_1 \in R^{n-1}$ ,  $g_2 \in R^{n-1}$ ,  $g_0$  均为可调参数。

定义可调系统的信号向量为

$$\omega^T = [u_1^T \quad y \quad u_2^T \quad r] \in R^{2n} \quad (5.4-43)$$

可调参数向量为

$$\theta^T(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \cdots \quad \theta_{2n}(t)] \in R^{2n} \quad (5.4-44)$$

那么, 被控对象的综合输入信号  $u(t)$  即可写成

$$u(t) = \theta^T(t) \omega(t) \quad (5.4-45)$$

众所周知, 对于该自适应控制问题总存在惟一的常数向量  $\theta^* \in R^{2n}$ , 当  $\theta(t) = \theta^*$  时, 被控对象与参考模型完全匹配。也就是说当  $u = \theta^* \omega$  时, 被控对象由  $r(t)$  到  $y(t)$  的闭环传递函数恰好是  $W_m(s)$ 。考虑到  $W(s)$  参数未知, 因此  $\theta^*$  实际上也未知。但是在输入信号  $r(t)$  充分激励的情况下, 自适应控制系统在不断调节  $\theta(t)$  保证式(5.4-40)成立的同时,  $\theta(t)$  本身也将趋近并收敛于  $\theta^*$ 。第三章已介绍过一种典型的参数自适应规律为

$$\dot{\theta} = -\Gamma e_1 \omega, \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (5.4-45)$$

将式(5.4-36)、式(5.4-41)和式(5.4-42)联立得整个可调系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{u} \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ dh^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ u \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \theta^T \omega \quad (5.4-46)$$

式中  $X^T = [X^T \quad u^T \quad u_2^T] \in R^{3n-2}$  为增广状态向量。若设

$$\theta(t) = \theta^* + \theta(t), \quad \theta^* = [g_1^{*T} \quad g_0^* \quad g_2^{*T} \quad K_0^*] \quad (5.4-47)$$

式中  $\theta_{2n}^* = K_0^* = K_m / K > 0$ 。把式(5.4-47)与式(5.4-45)一齐代入可调系统状态方程式(5.4-46), 并推导合并得

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + b(u - \theta^{*T} \omega) + Br \\ y = h^T X \end{cases} \quad (5.4-48)$$

式中  $B = \theta_{2n}^* b$ , 且

$$A = \begin{bmatrix} A + g_0^* b h^T & b g_1^{*T} & b g_2^{*T} \\ g_0^* b h^T & \Lambda + d g_1^{*T} & d g_2^{*T} \\ b h^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b \\ d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

很明显,当  $u - \theta^{*T} \omega = 0$ , 即  $\theta(t) = \theta^*$  时,  $(A, B, h^T)$  是参考模型  $W_m(s)$  的非最小实现。所以参考模型的增广状态方程即为

$$\begin{cases} \dot{X}_m = A X_m + B r \\ y_m = h^T X_m \end{cases} \quad (5.4-49)$$

式中  $X_m \in R^{3n-2}$  为参考模型增广状态向量。

定义系统的增广误差向量

$$\varepsilon = X - X_m$$

则从式(5.4-48) 减去式(5.4-49) 就得到自适应控制系统的增广误差模型:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = A \varepsilon + B(u - \theta^{*T} \omega) \\ e = h^T \varepsilon \end{cases} \quad (5.4-50)$$

根据系统的设计目的式(5.4-40), 并考虑到参考模型中  $A$  的不确知, 故设计系统的滑动模态域为

$$s(\varepsilon) = h^T \varepsilon = e = 0 \quad (5.4-51)$$

显然当系统进入滑动模态域后必有  $y - y_m = 0$ 。

为了保证滑动模态能达性, 并且系统进入滑动模态域后的稳定性, 控制  $u(t) = \theta^T \omega(t)$  必须保证  $\|\varepsilon\|$  渐近收敛于原点。由于  $W_m(s)$  是严格正实的, 所以根据卡尔曼-雅库鲍维奇-波波夫引理, 必定存在矩阵  $P = P^T > 0$  和  $Q = Q^T > 0$  使得

$$A^T P + P A = -2Q, \quad P B = h \quad (5.4-52)$$

成立。于是, 我们选取李雅普诺夫函数为

$$V(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^T P \varepsilon > 0 \quad (5.4-53)$$

对时间  $t$  求导, 再将误差方程式(5.4-50) 代入, 并考虑到  $\theta_{2n}^* = K_0^* > 0$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= -\varepsilon^T Q \varepsilon + (\theta_{2n}^*)^{-1} (u - \theta^{*T} \omega) e = \\ &= -\varepsilon^T Q \varepsilon + (\theta_{2n}^*)^{-1} \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i - \theta_i^*) \omega_i e \end{aligned} \quad (5.4-54)$$

现在, 我们设计控制  $u(t) = \theta^T \omega(t)$  中各可调参数  $\theta_i$  的自适应规律不再是式(5.4-45), 而是如下典型的变结构控制律形式:

$$\dot{\theta}_i = -\theta_i \operatorname{sgn}(\omega_i e) = -\theta_i \operatorname{sgn}(\omega_i e) \quad (5.4-55)$$

式中  $\theta_i > |\theta_i^*|$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ 。代入式(5.4-54) 得

$$\dot{V} = -\varepsilon^T Q \varepsilon - (\theta_{2n}^*)^{-1} \sum_{i=1}^{2n} (|\theta_i| |\omega_i e| + \theta_i^* \omega_i e) < -\varepsilon^T Q \varepsilon < 0 \quad (5.4-56)$$

这表明, 式(5.4-55) 确定的参数自适应规律能保证整个系统的渐近稳定性, 特别由式(5.4-53) 和式(5.4-56) 知,  $\|\varepsilon\|$  至少以指数衰减。

那么式(5.4-55) 与式(5.4-45) 所确定的变结构自适应控制规律能否保证系统在有限时间内进入滑动模态域, 即实现  $e = 0$  呢? 下面首先进一步分析滑动模态能达条件

$$s(\varepsilon)s(\varepsilon) = e e < 0 \quad (5.4-57)$$

是否成立。

由式(5.4-50) 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\dot{e}^2}{dt} = s(\varepsilon)s(\varepsilon) = e e = e h^T A \varepsilon + e h^T B(u - \theta^{*T} \omega) \leq \\ |e| [k_1 \|\varepsilon\| - h^T B \sum_{i=1}^{2n} (\theta_i^* - |\theta_i^*|) |\omega_i|] \leq \\ |e| [k_1 \|\varepsilon\| - k_2 \|\omega\|] \end{aligned} \quad (5.4-58)$$

式中  $k_1$  和  $k_2 > 0$  均为存在的适当正常数。由于  $\|\varepsilon\|$  以指数衰减于零, 因此如果对于任意小的正常数  $\delta > 0$ ,  $\|\omega\|$  满足(一般均满足)

$$\|\omega\| > \delta > 0, \quad " t \geq t_0 \quad (5.4-59)$$

那么必然存在一个有限时间  $T \geq t_0$ , 使得

$$\|\varepsilon\| < \frac{k_2}{2k_1} \delta$$

所以

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{e}^2}{dt} = e e = s(\varepsilon)s(\varepsilon) < -\frac{1}{2} k_2 \delta |e| < 0, \quad " t \geq T \text{ 且 } e \neq 0 \quad (5.4-60)$$

即有限时间后滑动模态能达条件一定成立。此外, 对式(5.4-60) 两边取绝对值, 则有

$$|e e| = |e| |e| > \frac{1}{2} k_2 \delta |e|$$

所以

$$|e| > \frac{1}{2} k_2 \delta, \quad " t > T \text{ 且 } e \neq 0 \quad (5.4-61)$$

于是, 综合式(5.4-60) 与式(5.4-61) 表明, 系统在有限时间内一定能够达到滑动模态域, 实现  $e = 0$ 。

总而言之, 由式(5.4-55) 与式(5.4-45) 描述的变结构参数自适应规律不仅能确保整个自适应控制系统的渐近稳定性, 而且能保证被控对象输出在有限时间内实现对参考模型输出的无误差跟踪。另外值得重视的是, 与常规的模型参考自适应控制系统相比较, 这里介绍的变结构模型参考自适应控制系统的  $\|\varepsilon\|$  指数渐近稳定性的获得与证明完全独立于系统输入信号  $r(t)$  的激励程度。也就是说, 该变结构模型参考自适应控制系统不再要求输入信号充分或持续激励的条件。这一点具有优越性。

例 5.4-2 线性二阶被控对象

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [6 \quad 1] X$$

所以

$$W(s) = \frac{s+6}{(s+1)^2}$$

选择其参考模型为

$$X_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r, \quad y_m = [1.5 \quad 1] X_m$$

所以

$$W_m(s) = \frac{s+1.5}{(s+1)(s+2)}$$

经验证,被控对象和参考模型满足严格正实条件,且传递函数分子分母互质。 $n = 2$ ,  $m = 1$ 。系统误差定义为

$$e = y - y_m$$

状态变量滤波器设计为

$$\dot{v}_1 = -1.5v_1 + u$$

$$\dot{v}_2 = -1.5v_2 + y$$

于是,变结构模型参考自适应控制为

$$u = \theta_1 v_1 + \theta_2 y + \theta_3 v_2 + \theta_4 r$$

$$\dot{\theta}_1 = -\theta_1 \operatorname{sgn}(v_1 e)$$

$$\dot{\theta}_2 = -\theta_2 \operatorname{sgn}(ye)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\theta_3 \operatorname{sgn}(v_2 e)$$

$$\dot{\theta}_4 = -\theta_4 \operatorname{sgn}(re)$$

式中 $\theta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 取足够大的正常数。

最后值得指出的是,本节介绍的两种变结构模型参考自适应控制方案在设计方法和过程上均不尽相同,其目的在于显示变结构模型参考自适应控制方案的多样性。实际上,目前人们研究出的方案还有许多,感兴趣的读者可查阅有关文献资料,进行深入研究。

## 习 题

1. 已知一被控对象的状态方程为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

若期望其变结构闭环等价系统的理想特征值为  $-4 \pm 2j$ , 设计该系统的滑动模态域, 并求出等价系统方程。

2. 已知不确定性被控对象的状态方程具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 + 2u + 0.5f \end{cases}$$

式中不确定性参数  $a_0, a_1, a_2$ , 以及外部扰动  $f$  的上下界分别为

$$1.0 \leq a_0 \leq 2.0, \quad -2.0 \leq a_1 \leq -1.0, \quad 1.0 \leq a_2 \leq 3.0, \\ -2.0 \leq f \leq 2.0$$

若系统的理想极点为  $\lambda_1 = -1.0$ ,  $\lambda_2 = -2.0$ , 试设计变结构控制系统。

3. 已知二阶被控对象为

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1.5 & 2.0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f$$

式中扰动  $f$  满足  $|f| \leq 1.0$ 。参考模型为

$$\dot{X}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X_m + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_m$$

设计变结构模型跟踪控制系统,并要求系统误差在滑动模态下以  $e^{-4}$  的速度衰减。

4. 一个参数未知的二阶被控对象的微分方程是

$$\ddot{y}(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t) = b u(t)$$

已知各参数的上下界分别为

$$1.0 \leq a_0 \leq 3.0, \quad 0.5 \leq a_1 \leq 1.5, \quad 2.5 \leq b \leq 6.5$$

参考模型是

$$\ddot{y}_m(t) + 3.0 y_m(t) + 2.0 y_m(t) = r(t)$$

试设计变结构自适应控制系统,使被控对象的输出跟踪参考模型的输出。

5. 线性二阶被控对象的传递函数为

$$W(s) = \frac{(s+3)}{(s+0.5)(s+1)}$$

确定其参考模型为

$$W_m(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

试设计变结构自适应控制系统,并绘出系统结构图。

### 参 考 文 献

- 1 Utkin V I . Variable Structure Systems with Sliding Modes .IEEE Transactions on Automatic Control, 1977,22(2)
- 2 Drazenovic B . The Invariance Conditions in Variable Structure . Systems Automatica,1969,5
- 3 Burton J A,Zinober A S I .Continuous Approximation of Variable Structure Control Int J System Sci, 1986,17(6)
- 4 Dorlings C M,Zinober A S I .Two Approaches to Hyperplanes Design in Multivariable Variable Structure Control Systems .Int J Control, 1986,44(1)
- 5 Young K K D .Design of Variable Structure Model-Following Control Systems IEEE Transactions on Automatic Control,1978,23(6)
- 6 Zinober A S I .El-Ghezawi O M E,Billings S A .Multivariable Variable-Structure Adaptive Model-Following Control Systems IEE Proc, ptD, 1982,129(1)
- 7 Ambrosino G,Celentano G, Garofalo F .Variable Structure Model Reference Adaptive Control Systems,Int J Control,1984,39(6)
- 8 Liu Hsu, Costa R R .Variable Structure Model Reference Adaptive Control Using Only Input and Output Measurements .Int J Control,1989,49(2)
- 9 Narendra K S,Boskovic J D .A Combined Direct,Indirect,and Variable Structure Method for Robust Adaptive Control,IEEE Transactions on Automatic Control,1992,37(2)
- 10 周军 .不确定性系统的变结构自适应控制理论及其应用:[博士学位论文] .西安:西北工业大学,1993
- 11 朗道 I D 著 .吴百凡译 .自适应控制—模型参考方法 .北京:国防工业出版社,1985
- 12 周军,陈新海 .大型柔性空间结构的变结构模型参考自适应控制 .航空学报,1992,13(4)
- 13 周军,周凤岐,陈新海 .非线性不确定性系统的变结构控制策略研究 .西安:西北工业大学学报,1995,13(4)
- 14 周凤岐,强文鑫,阙志宏 .现代控制理论及其应用 .成都:电子科技大学出版社,1994

## 第六章 混合自适应控制

在前面各章我们分别研究了各类连续时间系统和离散时间系统。在具体工程问题中,由于大多数实际对象本身是连续时间系统,因而用连续时间方程来描述这些实际对象比用离散时间方程更接近于事物的本质。但是,连续时间算法的实现不太适合现代数字计算技术,而且调整速度较慢,在系统存在干扰或未建模动态的情况下,常常使系统不能满足技术条件要求。

离散时间算法可以很好地利用现代数字计算技术,但由于它们的设计建立在把实际连续对象作为离散系统的基础上,因而这种设计可能无法与实际对象紧密耦合,综合出的系统可能是不理想的。最明显的一个例子就是零点全部在左平面的连续系统在离散化之后在  $Z$  平面上可能具有单位圆之外的零点,而且一个可控的连续系统,当其离散化后并不一定能保持其可控性。此外,当采用离散时间最小方差控制或离散模型参考自适应控制时,采样间隔内的系统性能可能与采样点处的性能明显不同,尤其是对于那些小阻尼系统更为明显。这就意味着某些在离散情况下性能良好的自适应系统,如果考察其连续时间响应,有可能是很差的。

基于上述原因,一些学者建议在设计自适应控制器时采用离散与连续相结合的方法,建立混合自适应控制系统。

1980 年 Gawthrop 等人首先提出了一种混合自校正控制方案,由于当时控制理论发展水平限制,文中未能给出全部的稳定性证明,只是用仿真结果表明了所提出方案的可行性。此后, Elliott (1982), 铃木 (1983), Narendra (1985) 等人都提出过一些适用于理想系统,即系统中不存在任何干扰或未建模动态情况下的混合自适应控制方案。尽管一些学者曾预言将来最有前途的一种控制就是混合自适应控制,而且一些数字模拟结果也表明混合控制具有连续控制和离散控制两者的优点,在主要性能方面,混合自适应控制系统优于全连续和全离散自适应控制系统,但由于混合控制涉及连续和离散相互交错,给系统稳定性的严格证明带来不少困难,因而对于混合自适应控制理论的研究与其它各种自适应方法的研究相比,进展是相当缓慢的。

本章将分别介绍一些典型的混合自适应控制器设计方法。

### § 6.1 基于 Narendra 方案的显式模型参考混合自适应控制

#### 1. 对象及自适应系统的误差模型

考虑单输入-单输出系统的误差模型

$$\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t) \quad (6.1-1a)$$

$$y(t) = h^T X(t) \quad (6.1-1b)$$

式中  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $h$  和  $b$  为  $n$  维向量,  $X(t)$  为  $n$  维状态向量。对象的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = h^T (sI - A)^{-1} b = \frac{K_p Z_p(s)}{R_p(s)} \quad (6.1-2)$$

式中  $W(s)$  是严格真的,  $Z_p(s)$  为首一  $m$  次 Hurwitz 多项式,  $R_p(s)$  为首一  $n$  次多项式, 且  $m \leq n$

$n - 1$ ;  $K_p$  为常数增益。假定对象模型的阶次  $n$  和相对阶次  $n^* = n - m$  以及  $K_p$  的符号是已知的,不失一般性,假设  $K_p > 0$ 。

所选取的参考模型为

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = \frac{K_m Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (6.1-3)$$

式中  $y_m$  为参考模型的输出,  $r$  为一致有界参考输入信号,  $Z_m(s)$  为首一  $m$  次多项式,  $R_m(s)$  为首一  $n$  次 Hurwitz 多项式,  $K_m$  为一常数。

自适应控制的目的就是设计一个不使用微分器的自适应控制器以产生控制信号  $u(t)$ , 使得对象的输出  $y(t)$  尽可能紧密地跟踪参考模型的输出  $y_m(t)$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_m(t)| = 0 \quad (6.1-4)$$

为达到上述目的,与前面各章方法不同,这里采用混合自适应控制。在这种控制系统中,对象和控制信号都保持连续时间状态,而控制参数的估计和调整是离散的,整个系统是连续和离散混合组成的闭环自适应系统。

对象的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  用来产生  $(n - 1)$  维辅助向量  $\omega_1, \omega_2$  及  $(2n - 1)$  维辅助向量  $\omega$ :

$$\omega_1(t) = F\omega_1(t) + qu(t) \quad (6.1-5a)$$

$$\omega_2(t) = F\omega_2(t) + qy(t) \quad (6.1-5b)$$

$$\omega^T(t) = [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y] \quad (6.1-5c)$$

式中  $F$  是  $(n - 1) \times (n - 1)$  稳定矩阵,  $q$  是  $(n - 1)$  维向量,  $(F, q)$  为可控对。

取对象的输入为

$$u(t) = \theta_k^T \omega_1(t) + \theta_k^T \omega_2(t) + \theta_k y(t) + c_k r(t) \quad (6.1-6a)$$

或

$$u(t) = \theta_k^T \omega(t) + \alpha r(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in N \quad (6.1-6b)$$

式中  $\theta_k^T = [\theta_{1k}^T \quad \theta_{2k}^T \quad \theta_{3k}]$  是  $(2n - 1)$  维控制参数向量,  $c_k$  是标量前馈参数。在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上,  $\theta_k$  和  $c_k$  皆为常值,参数  $\theta_k$  和  $c_k$  仅仅在离散时刻  $t_k (k \in N)$  进行调整。

容易证明,存在着常值参数  $\theta^*$  和  $c^*$ ,使得当  $\theta_k \equiv \theta^*$  和  $c_k \equiv c^*$  时,对象与控制器所构成的闭环系统的传递函数恰好等于参考模型的传递函数。因而有

$$W_m(s) = \frac{W(s)}{1 - F_1(s) - F_2(s)W(s)} \quad (6.1-7)$$

式中

$$F_1(s) = \theta_1^{*T} (sI - F)^{-1} q, \quad F_2(s) = \theta_3^* + \theta_2^{*T} (sI - F)^{-1} q \quad (6.1-8)$$

对象式(6.1-2)可以表示为

$$y = \frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + \alpha r) - \frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + c_k r) + W(s) u \quad (6.1-9)$$

式中  $\Phi_k = \theta_k - \theta^*$ 。

由于  $\frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + c_k r) = \frac{W(s)}{1 - F_1(s) - F_2(s)W(s)} (u - \theta_1^{*T} \omega) =$   
 $\frac{W(s)}{1 - F_1(s) - F_2(s)W(s)} [u - \theta_1^{*T} (sI - F)^{-1} \times$   
 $qu - \theta_2^{*T} (sI - F)^{-1} qy - \theta_3^* y] =$

$$\frac{W(s)}{1 - F_1(s) - F_2(s)W(s)} \{ 1 - \theta_1^{*T} (sI - F)^{-1} q - [\theta_3^* + \theta_2^{*T} (sI - F)^{-1} q] W(s) \} u = W(s) u \quad (6.1-10)$$

因而

$$e = y - y_m = \frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + \tilde{c} r) \quad (6.1-11)$$

式中  $\tilde{c} = c_k - c^*$ 。

为使叙述简单明了,先来研究  $K_p$  已知时的情况。当  $K_p$  已知时,不失一般性,可假设  $K_p = K_m = 1$ , 则  $\tilde{c} = 0$ , 并且

$$e = W_m(s) \Phi_k^T \omega \quad (6.1-12)$$

引入辅助信号  $y_a(t)$

$$y_a = -\theta_k^T W_m(s) \omega + W_m(s) \theta_k^T \omega \quad (6.1-13)$$

并且令  $\zeta = W_m(s) \omega$ , 则可得增广误差

$$e_1(t) = e(t) - y_a(t) = \Phi_k^T \zeta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in N \quad (6.1-14)$$

## 2. 混合自适应律

在误差模型式(6.1-14)中,变量  $e_1(t)$  和  $\zeta(t)$  在任意时刻  $t$  都是可以观测的,但  $\Phi_k (k \in N)$  是未知的。由于  $\Phi_{k+1} - \Phi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$ , 在选定有界的  $\theta_0$  之后,若能确定  $\Delta\Phi_k = \Phi_{k+1} - \Phi_k$ , 就可以确定在  $t = t_{k+1}$  时刻的  $\theta_{k+1}$  值,从而对控制参数在  $t_{k+1}$  时刻进行调整。本节的目的就是介绍如何利用可观测变量  $e_1(t)$  和  $\zeta(t)$  来确定序列  $\{\Delta\Phi_k\}$  的自适应律,从而使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。

### (1) 固定增益方案

$$\Delta\Phi_k = -\frac{1}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{e_1(\tau) \zeta(\tau)}{1 + \zeta^T(\tau) \zeta(\tau)} d\tau \quad (6.1-15)$$

式中  $T_k = t_{k+1} - t_k, k \in N, N$  为自然数集。

### (2) 自适应增益方案

$$\Delta\Phi_k = -\frac{\Gamma_k}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{e_1(\tau) \zeta(\tau)}{1 + \zeta^T(\tau) \zeta(\tau)} d\tau \quad (6.1-16a)$$

$$\Gamma_{k+1}^{-1} = \Gamma_k^{-1} + R_k, \quad \Gamma_0 = I \quad (6.1-16b)$$

$$R_k = \frac{1}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(\tau) \zeta^T(\tau)}{1 + \zeta^T(\tau) \zeta(\tau)} d\tau \quad (6.1-16c)$$

式中  $T_k = t_{k+1} - t_k, k \in N$ 。

### (3) 梯度法

将误差方程式(6.1-14)等号两边先乘以  $e_1(t)$ , 然后在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上进行积分,可得

$$\Phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_1(\tau) \zeta(\tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_1^2(\tau) d\tau \quad (6.1-17)$$

令

$$\zeta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_1(\tau) \zeta(\tau) d\tau, \quad \varepsilon_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e_1^2(\tau) d\tau \quad (6.1-18)$$

则可得离散形式误差方程

$$\Phi_k^T \zeta_k = \varepsilon_k \quad (6.1-19)$$

根据式(6.1-19)可选用最简单的梯度法获得  $\Phi_k$  的估值:



$$\Delta\Phi_k = - \frac{\varepsilon_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (6.1-20)$$

整个混合自适应控制系统的结构如图 6.1-1 所示。

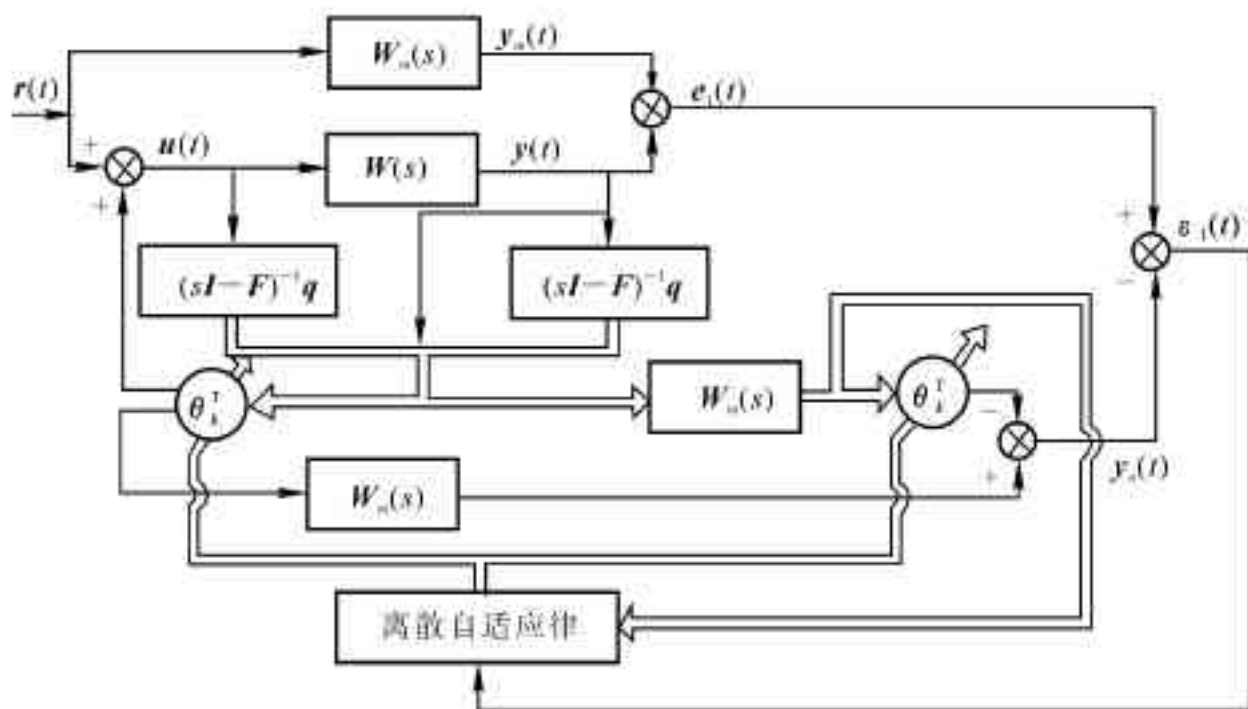


图 6.1-1 混合自适应控制系统结构图

### 3. $K_p$ 未知时的混合自适应律

上面讨论了  $K_p$  已知并假设  $K_p = K_m = 1$  时的情况。当  $K_p$  未知时，则有

$$y = \frac{1}{c^*} W_m(s) [\Phi_k^T \omega + (c^* + c_k) r] \quad (6.1-21)$$

$$a = \rho_0 W_m(s) (\Phi_k^T \omega + c_k r) \quad (6.1-22)$$

式中  $\rho_0 = 1/c^*$  是未知常数。

令  $\Phi_k^T = [\Phi_k^T \quad c_k]$ ,  $\omega^T = [\omega^T \quad r]$ , 则式(6.1-22) 可以表示为

$$a = \rho_0 W_m(s) \Phi_k^T \omega \quad (6.1-23)$$

引入辅助信号

$$y_a = \rho_k [-\omega_k^T W_m(s) + W_m(s) \omega_k^T] \quad (6.1-24)$$

式中  $\omega_k = [\omega_k^T \quad c_k]$ ,  $\rho_k = \rho_0 + \psi_k$ ,  $\theta_k$  和  $\rho_k$  分别为控制参数向量  $\theta^* = [\theta^{*T} \quad c^*]$  和  $\rho_0$  在  $t_k$  时刻的估值。系统的增广误差为

$$\varepsilon_1(t) = a(t) - y_a(t) \quad (6.1-25)$$

在式(6.1-23) 和式(6.1-24) 中, 令

$$L_k = \rho_0 \omega_k^T, \quad \xi_k = W_m(s) \omega_k^T \quad (6.1-26)$$

$$\xi = W_m(s) \omega - W_m(s) \omega_k \quad (6.1-27)$$

并且设

$$\omega_k = [L_k^T \quad \psi_k], \quad \omega(t) = [\omega(t) \quad \xi(t)] \quad (6.1-28)$$

则式(6.1-25) 可以表示为

$$\varepsilon_1(t) = \omega(t)^T \omega(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), k \in N \quad (6.1-29)$$

方程式(6.1-29) 与方程式(6.1-14) 相似, 因而  $K_p$  未知时的混合自适应律与  $K_p$  已知时

相类似。

## § 6 2 Elliott 隐式模型参考混合自适应控制方案

在上一节中介绍了基于 Narendra 方案的模型参考混合自适应控制。Narendra 方案是一种显式模型参考自适应方案,所采用的参数调整周期  $T_k = t_{k+1} - t_k$  为固定周期,当然也可以采用随机周期或自适应周期以改善暂态性能,但对系统的稳定性没有影响。本节将介绍 Elliott 等人所提出的一种隐式模型参考混合自适应控制方案,这种方案采用了随机采样方法以保证闭环自适应控制系统的稳定性。

### 1. 控制器结构

设单输入-单输出对象

$$R_p(s)x(t) = u(t) \quad (6.2-1a)$$

$$y(t) = K_p Z_p(s)x(t) \quad (6.2-1b)$$

式中  $u(t)$  和  $y(t)$  分别为对象的输入和输出信号,  $x(t)$  为状态变量,  $s \frac{d}{dt}$  为微分算子。为了方便起见,本章中将微分算子和传递函数算子用同一符号  $s$  表示,在具体的方程中,这是容易区别的。与式(6.2-1)相对应的对象传递函数  $W(s)$  及已知条件,均与上一节相同,但这里只要知道对象阶数  $n$  的上界  $n_s$ 。

控制的目的是使对象的输出  $y(t)$  跟踪隐式参考模型

$$R_m(s)y_m(t) = K_m Z_m(s)r(t) \quad (6.2-2)$$

的输出  $y_m(t)$ , 式中  $r(t)$  是一致有界的外参考输入信号,  $R_m(s)$  和  $Z_m(s)$  是次数分别为  $n_m$  和  $m_m$  的首一多项式,其相对次数  $n_m^* = n_m - m_m \geq n^*$ , 并且假设  $R_m(s)$  是可以分解为

$$R_m(s) = R_{m1}(s)R_{m2}(s) \quad (6.2-3)$$

的 Hurwitz 多项式,式中  $R_{m1}(s)$  的次数等于对象的相对阶次  $n^*$ 。

为达到上述控制目的,采用如图

6.2-1 所示混合自适应系统结构。

在这种控制系统中,对象始终保持连续状态,用一个连续时间可调控制器去控制连续时间对象,而用离散自适应机构对滤波后的可测连续时间变量进行采样,并根据所获得的信息离散地对可调控制器进行校正,产生控制信号,从而控制对象的输出  $y(t)$ ,使其尽可能紧密地跟踪隐式参考模型的输出  $y_m(t)$ 。

所采用的理想控制律为

$$R_{m2}(s)r(t) = K_m Z_m(s)r(t) \quad (6.2-4a)$$

$$q(s)S(t) = K^*(s)u(t) + h^*(s)y(t) \quad (6.2-4b)$$

$$u(t) = S(t) + g^*r(t) \quad (6.2-4c)$$

式中  $q(s)$  为由设计者选择的  $(n_s - 1)$  次 Hurwitz 多项式,  $h^*(s)$  和  $K^*(s)$  满足多项式方程

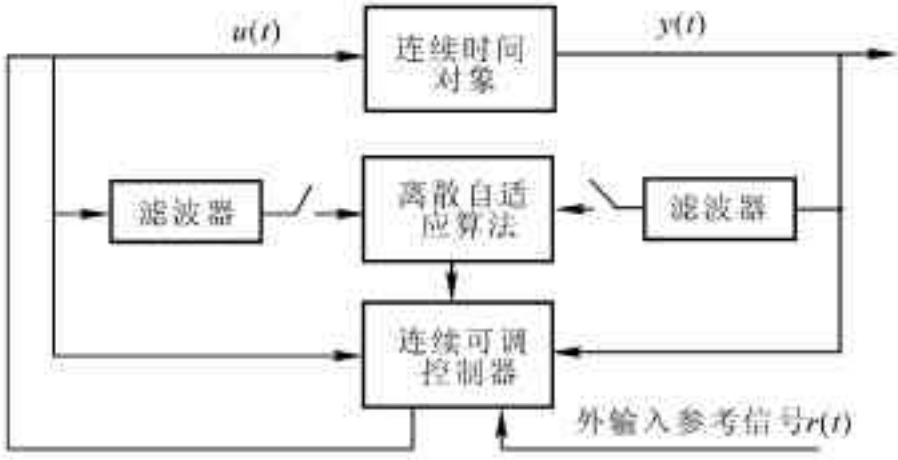


图 6.2-1 系统结构图

$$h^*(s) K_p Z_p(s) + K^*(s) R_p(s) = q(s) [R_p(s) - R_{m1}(s) Z_p(s)] \quad (6.2-5)$$

并且

$$h^*(s) = \sum_{i=0}^{n_s-1} h_i^* s^i, \quad K^*(s) = \sum_{i=0}^{n_s-2} k_i^* s^i \quad (6.2-6)$$

若  $n_s = n$ , 则方程(6.2-5) 的解  $h^*(s)$ ,  $K^*(s)$  存在并且是惟一的; 若  $n_s > n$ , 则方程式(6.2-5) 的解  $h^*(s)$ ,  $K^*(s)$  存在, 但不是惟一的。当方程式(6.2-5) 成立时, 控制律式(6.2-4) 表示输入动态式(6.2-4a) 和 Luenberger 观测器式(6.2-4b) 的组合, 这种 Luenberger 观测器将产生与稳定多项式  $q(s) R_{m1}(s) Z_p(s)$  的零点相对应的闭环极点, 而  $q(s)$  的零点则表示不可控观测器极点。在这种情况下, 若式(6.2-4c) 中的  $g^*$  等于  $1/K_p$ , 则  $y(t)$  将指数收敛于  $y_m(t)$ 。因而, 利用能够收敛于式(6.2-4) 的控制律, 则可以完成自适应模型匹配。现采用参数自适应控制律

$$q(s) u(t) = u(t) \quad (6.2-7a)$$

$$q(s) y(t) = y(t) \quad (6.2-7b)$$

$$R_{m2}(s) r(t) = K_m Z_m(s) r(t) \quad (6.2-7c)$$

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n_s-1} h_i(t) s^i (t) + \sum_{i=0}^{n_s-2} k_i(t) s^i u(t) + g(t) r(t) \quad (6.2-7d)$$

若

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = h_i^* \quad i = 0, 1, \dots, n_s - 1 \quad (6.2-8a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_i(t) = k_i^* \quad i = 0, 1, \dots, n_s - 2 \quad (6.2-8b)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g^* = 1/K_p \quad (6.2-8c)$$

则式(6.2-7) 收敛于式(6.2-4)。下面将导出一种估计参数  $h_i(t)$ ,  $k_i(t)$  和  $g(t)$  的方法。

## 2. 自适应方程

方程式(6.2-5) 可以表示为

$$h^*(s) K_p Z_p(s) + K^*(s) R_p(s) = q(s) [R_p(s) - g^* R_{m1}(s) K_p Z_p(s)] \quad (6.2-9)$$

当  $g^* \neq 1/K_p$  时, 方程式(6.2-9) 右边的次数将高于左边的次数, 当且仅当  $g^* = 1/K_p$  并且  $h^*(s)$  和  $K^*(s)$  满足式(6.2-5) 时, 方程式(6.2-9) 成立。

令

$$\theta^{*T} = [k_0^* \quad k_1^* \quad \dots \quad k_{n_s-2}^* \quad h_0^* \quad h_1^* \quad \dots \quad h_{n_s-1}^* \quad g^*] \quad (6.2-10)$$

以及

$$d(s) y(t) = y(t) \quad (6.2-11a)$$

$$d(s) u(t) = u(t) \quad (6.2-11b)$$

$$d(s) x(t) = x(t) \quad (6.2-11c)$$

$$Z^T(t) = [u(t) \quad s^{-1} u(t) \quad \dots \quad s^{n_s-2} u(t) \quad y(t) \quad sy(t) \quad \dots \quad s^{n_s-1} y(t) \quad R_{m1}(s) q(s) y(t)] \quad (6.2-11d)$$

式中  $d(s)$  为由设计者选择的  $n_d = n_s + n^* - 1$  次 Hurwitz 多项式, 且对象式(6.2-1) 可以表示为

$$R_p(s) x(t) = y(t) + \delta(t) \quad (6.2-12a)$$

$$y(t) = K_p Z_p(s) x(t) + \delta(t) \quad (6.2-12b)$$

式中  $\delta(t)$  为指数衰减项,并且具有下述定理。

定理: 若  $x(t)$  及其 1 至  $(2n_s - 1)$  阶导数在某一时间区域  $\tau$  上是线性无关的,则当且仅当  $\theta^*$  在区间  $\tau$  上满足方程

$$\theta^{*T} Z(t) = q(s) x(t) + \delta(t) \quad (6.2-13)$$

时,方程式(6.2-9)成立。

证明: 将方程式(6.2-9)乘以  $x(t)$  得

$$\{ h^*(s) K_p Z_p(s) + K^*(s) R_p(s) - q(s) [R_p(s) - g^* R_{m1}(s) K_p Z_p(s)] \} x(t) = \alpha(s) x(t) = 0 \quad (6.2-14)$$

因为  $\alpha(s)$  的最高次数  $2n_s - 1$ , 如果  $x(t)$  满足线性无关条件,则当且仅当式(6.2-14)成立时,式(6.2-9)成立。利用式(6.2-12)和式(6.2-14)可得

$$h^*(s) y(t) + K^*(s) u(t) + g^* R_{m1}(s) q(s) y(t) = q(s) u(t) + \delta(t) \quad (6.2-15)$$

由式(6.2-15)可直接写出式(6.2-13),证明完毕。

令

$$\theta^T(t) = [h_0(t) \ h_1(t) \ \cdots \ h_{n_s-1}(t) \ k_0(t) \ k_1(t) \ \cdots \ k_{n_s-2}(t) \ g(t)] \quad (6.2-16)$$

为式(6.2-7)中的可调控制器参数向量,定义参数误差测度  $\varepsilon(t)$  为

$$\varepsilon(t) = \theta^T(t) Z(t) - q(s) u(t) \quad (6.2-17)$$

由于式(6.2-17)是  $\theta(t)$  的线性方程,因而估计  $\theta(t)$  的问题就是一个线性的参数估计问题。

为了实现混合自适应控制,将采用下述方案对  $q(s)u(t)$  和  $Z(t)$  进行采样以及对  $\theta(t)$  进行修正。设时刻  $\tau_k$ , 时间区间  $I_k$ ,  $I_{2k}$  和  $I_k$  之间的关系式为

$$\tau_k = k(T_1 + T_2) \quad (6.2-18a)$$

$$I_{1k} = (\tau_k, \tau_k + T_1) \quad (6.2-18b)$$

$$I_{2k} = (\tau_k + T_1, \tau_{k+1}) \quad (6.2-18c)$$

$$I_k = (\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (6.2-18d)$$

式中  $T_2 > 0$  为完成与参数修正有关的全部计算所需要的时间,  $T_1 > 0$  是任意选取的常数。设  $\{\psi_k\}_0^\infty$  为均匀分布在区间  $[0, T_1)$  上的独立随机变量序列所构成的随机过程,并且定义采样时刻  $\{t_k\}_0^\infty$  为

$$t_k = \tau_k + \psi_k \quad (6.2-18e)$$

设  $Z(t)$  和  $q(s)u(t)$  采样后的离散序列为  $Z_k = Z(t_k)$ ,  $u_k = [q(s)u(t)]_{t=t_k}$ , 可调控制器参数向量  $\theta(t)$  的离散估值为  $\theta_k$ , 并且

$$\theta(t) = \theta_k, \quad t \in I_k \quad (6.2-19)$$

其采样和修正过程为(i) 在时刻  $t_{k-1} \in I_{1,k-1}$  对  $\varepsilon(t)$  和  $Z(t)$  进行采样,并且利用所得到的采样值计算  $\theta_k$ ; (ii) 在区间  $I_{2,k-1}$  内完成计算,并且在时刻  $\tau_k$  对  $\theta(t)$  进行修正,使其等于  $\theta_k$ 。

定义  $\varepsilon(t)$  的离散估值  $\varepsilon_k$  为

$$\varepsilon_k = \varepsilon(t_k) = \theta_k^T Z_k - u_k \quad (6.2-20)$$

为了获得  $\theta_k$ ,可采用下述经过改进的梯度法和最小二乘法进行参数估计。

(1) 梯度法

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \frac{\lambda \varepsilon_{k-1} Z_{k-1}}{1 + Z_{k-1}^T Z_{k-1}} + F_{k-1} \quad (6.2-21a)$$

$$F_k = \max(0, g^l - g^k + \frac{\lambda \varepsilon_k (Z_k)_{2n}}{1 + Z_k^T Z_k}) [0 \cdots 0 \ 1]^T \quad (6.2-21b)$$

$g^k = \theta_k$  的第  $2n$  个分量;

$(Z_k)_{2n} = Z_k$  的第  $2n$  个分量;

$g^l = g^*$  的下界;

$0 < \lambda < 1$ 。

这种算法与普通算法的不同处在于: (i)  $F_k$  项的增加可保证对所有的  $k > 0$  均有  $g_k > g^l$ ; (ii)  $\lambda$  被限制于 0 至 1 之间, 普通算法  $\lambda$  位于 0 至 2 之间。这种对  $\lambda$  加严的限制是出于对指数衰减序列  $\delta_k = \delta_{t_k}$  影响的考虑, 因为与式 (6.2-13) 相对应的离散关系式为

$$\theta^{*T} Z_k = u_k + \delta_k \quad (6.2-22)$$

## (2) 最小二乘法

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \frac{\varepsilon_{k-1} P_{k-2} Z_{k-1}}{1 + Z_{k-1}^T P_{k-2} Z_{k-1}} + H_{k-1} \quad (6.2-23a)$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} Z_k Z_k^T P_{k-1}}{1 + Z_k^T P_{k-1} Z_k} \quad (6.2-23b)$$

$$H_k = \max(0, g^l - g^k + \frac{\varepsilon_k (P_{k-1} Z_k)_{2n}}{1 + Z_k^T P_{k-1} Z_k}) P_k [0 \cdots 0 \ \rho_k]^T \quad (6.2-23c)$$

$(P_{k-1} Z_k)_{2n} = P_{k-1} Z_k$  的第  $2n$  个分量;

$\rho_k = [(P_k)_{2n, 2n}]^{-1}$ ,  $P_{-1}$  正定。

这种最小二乘法与普通最小二乘法的不同处在于增加了  $H_k$  项, 以保证对于所有的  $k > 0$  均有  $g_k \geq g^l$ 。可以证明, 若  $P_{-1}$  是正定的, 则对于所有有限的  $k > 0$ ,  $P_k$  是正定的。这就意味着对于所有有限的  $k > 0$ ,  $P_k$  的第  $(2n, 2n)$  个分量  $(P_k)_{2n, 2n} > 0$ , 因而总能保证  $\rho_k > 0$ 。

上述两种算法均具有下列性质:

(i) 存在着有限常数  $a > 0$ , 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k^2}{1 + a Z_k^T Z_k} = 0 \quad (6.2-24)$$

$$(ii) \quad \|\theta_k\| \leq a \|\theta_0\| + a \quad (6.2-25)$$

式中  $a > 0$ ,  $a > 0$  均为有限常数。

$$(iii) \quad \text{对于 } k > 0, g_k \geq g^l \quad (6.2-26)$$

$$(iv) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (a_k > \theta_k - \theta_{k-1}) = 0 \quad (6.2-27)$$

由于采用随机采样方案, 因而当  $\varepsilon(t)$  是无界增长时,  $\varepsilon(t)$  的动态利用采样值  $\{\varepsilon_k\}_0^\infty$  是几乎肯定(或称以概率 1)可以观测的。因而, 如果采样序列  $\{\varepsilon_k\}$  收敛至零, 则  $\varepsilon(t)$  也收敛至零。

## § 6.3 玲木模型参考混合自适应控制方案

### 1. 问题的叙述

设单输入-单输出对象为

$$A(s) y(x) = B(s) u(t) \quad (6.3-1a)$$

$$A(s) = s^n + a s^{n-1} + \cdots + a_n \quad (6.3-1b)$$

$$B(s) = b s^m + b s^{m-1} + \cdots + b_m \quad (6.3-1c)$$

式中  $u(t)$  和  $y(t)$  分别为对象的输入和输出信号,  $s \in \mathcal{D}$  为微分算子, 并且假设: (i)  $n, m$  已知,  $n > m$ ; (ii)  $A(s)$  和  $B(s)$  互质; (iii)  $B(s)$  渐近稳定。

所选取的参考模型为

$$A_m(s) y_m(t) = B_m(s) r(t) \quad (6.3-2a)$$

$$A_m(s) = s^m + a_{m1}s^{m-1} + \cdots + a_{mm} \quad (6.3-2b)$$

$$B_m(s) = b_{m0}s^m + b_{m1}s^{m-1} + \cdots + b_{mm} \quad (6.3-2c)$$

式中  $y_m(t)$  为参考模型输出,  $r(t)$  为一致有界参考输入信号。

选取滤波器  $\bar{q}^{-1} = 1/(1 + \tau s)$ , 式中  $\tau > 0$  为设计参数, 利用  $\bar{q}^{-1}$  分别对方程(6.3-1) 和式(6.3-2) 进行变换, 可得到相应的等价形式方程

$$A'(\bar{q}^{-1}) y(t) = \bar{q}^{-d} B'(\bar{q}^{-1}) u(t) \quad (6.3-3a)$$

$$A'(\bar{q}^{-1}) = 1 + \alpha_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha_n \bar{q}^{-n} \quad (6.3-3b)$$

$$B'(\bar{q}^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_m \bar{q}^{-m} \quad (6.3-3c)$$

式中  $d = n - m$

$$A'_m(\bar{q}^{-1}) y_m(t) = \bar{q}^{-d_m} B'_m(\bar{q}^{-1}) r(t) \quad (6.3-4a)$$

$$A'_m(\bar{q}^{-1}) = 1 + \alpha_{m1} \bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha_{mn} \bar{q}^{-m_n} \quad (6.3-4b)$$

$$B'_m(\bar{q}^{-1}) = \beta_{m0} + \beta_{m1} \bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_{mn} \bar{q}^{-m_n} \quad (6.3-4c)$$

式中  $d_m = n_m - m_m \geq d$ 。

## 2. 控制器结构

选择渐近稳定的多项式

$$C(\bar{q}^{-1}) = 1 + c_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + c_{n_c} \bar{q}^{-n_c} \quad (6.3-5)$$

式中  $n_c \leq 2n - m - 1 = n + d - 1$ 。

设多项式  $R(\bar{q}^{-1})$  和  $S(\bar{q}^{-1})$  为

$$R(\bar{q}^{-1}) = 1 + r_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + r_{d-1} \bar{q}^{-(d-1)} \quad (6.3-6a)$$

$$S(\bar{q}^{-1}) = s_0 + s_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + s_{n-1} \bar{q}^{-(n-1)} \quad (6.3-6b)$$

并且满足多项式方程

$$C(\bar{q}^{-1}) = A'(\bar{q}^{-1}) R(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-d} S(\bar{q}^{-1}) \quad (6.3-7)$$

将上式乘以  $y(t)$  可得

$$C(\bar{q}^{-1}) y(t) = A'(\bar{q}^{-1}) R(\bar{q}^{-1}) y(t) + \bar{q}^{-d} S(\bar{q}^{-1}) y(t) \quad (6.3-8)$$

利用式(6.3-3a), 可将式(6.3-8) 表示为

$$C(\bar{q}^{-1}) y(t) = \bar{q}^{-d} [B'(\bar{q}^{-1}) R(\bar{q}^{-1}) u(t) + S(\bar{q}^{-1}) y(t)] \quad (6.3-9)$$

设

$$\bar{q}^{-(d+i-1)} u(t) = \zeta_i(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (6.3-10a)$$

$$\bar{q}^{-(d+i-1)} y(t) = \zeta_{n+i}(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (6.3-10b)$$

$$C(\bar{q}^{-1}) y(t) = y'(t) \quad (6.3-10c)$$

$$\theta^T = [\beta_0 \quad \cdots \quad \beta_m r_{d-1} \quad s_0 \quad \cdots \quad s_{n-1}] = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \cdots \quad \theta_n] \quad (6.3-10d)$$

$$\zeta^T(t) = [\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t) \quad \cdots \quad \zeta_n(t)] \quad (6.3-10e)$$

则方程式(6.3-9) 可以表示为

$$y'(t) = \theta^T \zeta(t) \quad (6.3-11)$$

选取自适应控制策略为

$$C(\bar{q}^{-1})y(t) - C(\bar{q}^{-1})y_m(t) = 0 \quad (6.3-12)$$

则有

$$C(\bar{q}^{-1})y_m(t) = \theta^T \zeta(t) \quad (6.3-13)$$

从而可导出自适应控制律

$$u(t) = \frac{C(\bar{q}^{-1})y_m(t) - \sum_{i=2}^{2n} \theta_i(t) \zeta_i(t)}{\bar{q}^{-d} \theta_1(t)} \quad (6.3-14)$$

或写为

$$u(t) = \frac{\bar{q}^d C(\bar{q}^{-1})y_m(t) - \sum_{i=2}^{2n} \theta_i(t) z_i(t)}{\theta_1(t)} \quad (6.3-15)$$

式中

$$z_i(t) = \bar{q}^d \zeta_i(t) = \begin{cases} \bar{q}^{-(i-1)} u(t), & i = 2, 3, \dots, n \\ \bar{q}^{-(i-1)} y(t), & i = n+1, \dots, 2n \end{cases} \quad (6.3-16)$$

$$\bar{q}^d C(\bar{q}^{-1})y_m(t) = \frac{\bar{q}^{-(d_m-d)} C(\bar{q}^{-1}) B_m'(\bar{q}^{-1})}{A_m'(\bar{q}^{-1})} r(t) \quad (6.3-17)$$

当采用混合自适应控制方案时,自适应控制规律式(6.3-15)可以表示为

$$u(t) = \frac{\bar{q}^d C(\bar{q}^{-1})y_m(t) - \sum_{i=2}^{2n} \theta_i(k) z_i(t)}{\theta_1(k)} \quad (6.3-18)$$

式中  $k = 0, 1, \dots$  表示时刻  $t_k$ , 当  $t \in [t_k, t_{k+1})$  时,  $\theta_i(k) (i = 1, 2, \dots, 2n)$  为常数。

### 3. 控制器参数的调整

为了实现混合自适应控制,需要对式(6.3-18)中的未知参数  $\theta_i(k) (i = 1, 2, \dots, 2n; k = 0, 1, \dots)$  进行估计,这就需要对连续信号  $y'(t)$  和  $\zeta(t)$  按周期  $T_s$  进行采样,然后根据所获得的采样值利用离散辨识算法估计控制参数,从而对控制器参数进行离散式调整。

对  $y'(t)$  和  $\zeta(t)$  进行采样,可得与方程式(6.3-11)相对应的离散时间方程

$$y'(k) = \theta^T \zeta(k) \quad (6.3-19)$$

定义辨识误差为

$$\varepsilon(k) = \hat{y}'(k) - y'(k) = \hat{\theta}^T(k+1) \zeta(k) - \theta^T \zeta(k) = [\hat{\theta}(k+1) - \theta]^T \zeta(k) \quad (6.3-20)$$

可采用下列固定迹算法进行参数估计:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \Gamma(k) \zeta(k) \varepsilon(k) \quad (6.3-21a)$$

$$\Gamma(k+1) = \frac{1}{\lambda(k)} \left[ \Gamma(k) - \frac{\Gamma(k) \zeta(k) \zeta^T(k) \Gamma(k)}{1 + \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k)} \right], \quad \Gamma(0) > 0 \quad (6.3-21b)$$

$$\lambda(k) = 1 - \frac{\|\Gamma(k) \zeta(k)\|^2}{1 + \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k)} \frac{1}{\Gamma(0)} \quad (6.3-21c)$$

整个自适应控制系统的结构图如图6.3-1所示。在这种自适应控制系统中,控制器和滤波器采用的是模拟结构,而参数的估计和调整则采的是离散装置,即  $\theta(t) = \theta(k), t \in [t_k, t_{k+1})$ , 整个系统为混合自适应控制系统。

### 4. 系统渐近稳定性及采样周期的选定

由式(6.3-20)和式(6.3-21a)可得

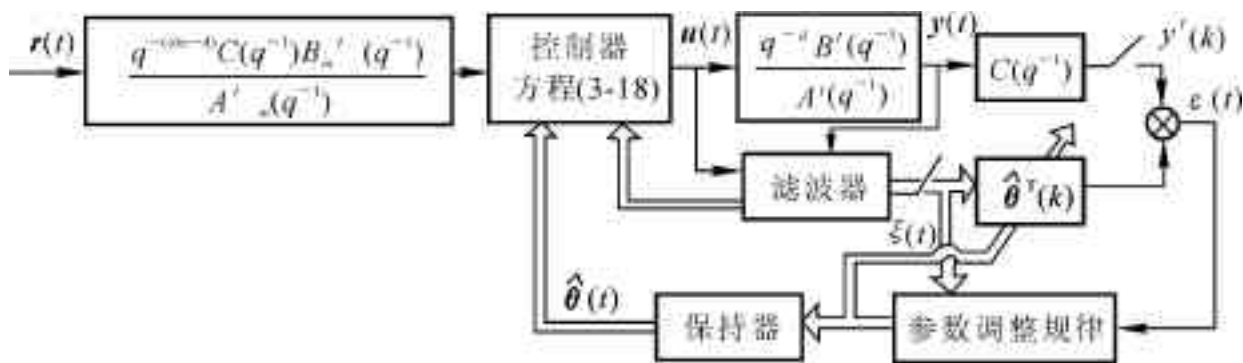


图 6.3-1 自适应控制系统结构图

$$\begin{aligned} \varepsilon(k) &= [\theta(k) - \Gamma(k) \zeta(k) \varepsilon(k) - \theta]^T \zeta(k) = \\ &[\theta(k) - \theta]^T \zeta(k) - \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k) \varepsilon(k) \end{aligned} \quad (6.3-22)$$

以及

$$\varepsilon(k) = \frac{\theta^T(k) \zeta(k) - y'(k)}{1 + \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k)} \quad (6.3-23)$$

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \frac{\Gamma(k) \zeta(k) [\theta^T(k) \zeta(k) - y'(k)]}{1 + \zeta^T(k) \Gamma(k) \zeta(k)} \quad (6.3-24)$$

与普通最小二乘法证明过程相似,可以证明,算法式(6.3-21)可以保证当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ ,  $\theta(k) \rightarrow \theta^* = \text{常数}$ ; 当  $\zeta(k)$  的分量线性无关时,可保证  $\theta^* = \theta$ ,  $y'(k) = \theta^{*T} \zeta(k) = \theta^T \zeta(k)$ 。

对于混合自适应控制系统来说,系统稳定性证明中的最大困难就在于当关系式  $\theta^{*T} \zeta(k) = \theta^T \zeta(k)$  成立时,如何保证对于采样点以外的任何时刻  $t$ ,关系式  $\theta^{*T} \zeta(t) = \theta^T \zeta(t)$  也成立。对此,有下述的定义和定理:

定义 1( $\mu$  个元素持续独立信号):  $\zeta(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , 为  $v$  维连续时间向量信号, 设存在着时刻  $t_1$ , 在  $[t_1, +\infty)$  的所有区间内 ( $t > t_1$ ),  $\zeta(t)$  的  $\mu$  个分量  $\zeta_i(t)$  持续保持线性无关, 并且存在  $s > 0$ , 在  $[t_1, t_1 + s]$ ,  $t_1 \geq t_1$ ,  $s < \infty$  的所有区间内, 该  $\mu$  个分量保持线性无关时, 则称  $\zeta(t)$  为  $\mu$  个元素持续独立信号。

若  $\zeta(t)$  为  $\mu$  个元素持续独立信号, 则在  $[kTs, (k+N-1)Ts]$  ( $(N-1)Ts \geq s$ ) 内的所有时间点上的向量  $\zeta(t)$  组成一个  $\mu$  维向量空间。

定义 2(维数不变):  $v$  维向量信号  $\zeta(t)$  为  $\mu$  个元素持续独立信号, 若存在  $N < \infty$ , 使  $\zeta(t)$  的采样值形成的向量集合  $\{\zeta(k) \zeta(k+1) \cdots \zeta(k+N-1)\}$ , 其中  $k \geq t_1/Ts$ , 对于所有  $k$  构成了张有  $\mu$  维空间的  $\zeta(t)$  的基, 则称采样值  $\zeta(k)$  对于  $\zeta(t)$  维数不变。

定理 1 若采样值  $\zeta(k)$  对于连续时间信号  $\zeta(t)$  维数不变时, 则  $\theta^{*T} \zeta(k) = \theta^T \zeta(k)$  的成立意味着  $\theta^{*T} \zeta(t) = \theta^T \zeta(t)$  成立。

证明:  $\zeta(k)$  对于  $\zeta(t)$  维数不变, 则  $\zeta(t)$ ,  $t \in [kTs, (k+N-1)Ts]$ , 可用向量集合  $\{\zeta(k) \zeta(k+1) \cdots \zeta(k+N-1)\}$  的线性组合表示, 即

$$\zeta(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \zeta(k+j), \quad t \in [kTs, (k+N-1)Ts], \quad |\alpha_j| < \infty \quad (6.3-25)$$

由于  $\theta^{*T} \zeta(k) = \theta^T \zeta(k)$ , 因而可得



$$\begin{aligned}
(\theta^* - \theta)^T \zeta(t) &= (\theta^* - \theta)^T \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \zeta(k+j) = \\
\sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j (\theta^* - \theta)^T \zeta(k+j) &= 0
\end{aligned} \quad (6.3-26)$$

证毕。

在定理1中,一个很重要的条件就是要求采样值  $\zeta(k)$  对于连续时间信号  $\zeta(t)$  的维数不变,如何保证这一条件成立,对于混合自适应控制来说,是一个很重要的问题。在信号  $\zeta(t)$  的带宽受到一定限制的情况下,下述定理叙述了采样值  $\zeta(k)$  维数不变与采样周期  $T$  之间的关系。

**定理2** 若  $v$  维向量信号  $\zeta(t)$  的各分量  $\zeta_i(t)$  为不含  $f_m$  (Hz) 以上高频分量的受频带约束信号,当采样频率  $f_s = 1/T$  选得高于  $2f_m$  时,采样值  $\zeta(k)$  为维数不变。

**证明:** 设  $\zeta(t), t \in (-\infty, +\infty)$ , 为  $v$  维  $\mu$  元素持续独立信号,不失一般性,假定  $\zeta(t)$  的前  $\mu$  个分量是持续线性无关的,即对于任意的  $t$  来说,只有在  $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, \mu)$  时关系式

$$\alpha_1 \zeta_1(t) + \alpha_2 \zeta_2(t) + \dots + \alpha_\mu \zeta_\mu(t) = 0 \quad (6.3-27)$$

才能成立。若选取采样频率  $f_s > 2f_m$ , 根据采样定理,信号  $\zeta_i(t)$  可用采样值  $\zeta_i(k)$  表示为

$$\zeta_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(f_s t - k) \zeta_i(k) \quad (6.3-28)$$

式中

$$\text{sinc} t = \frac{\sin \pi t}{\pi t} \quad (6.3-29)$$

因而式(6.3-27)可以表示为

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(f_s t - k) [\alpha_1 \zeta_1(k) + \alpha_2 \zeta_2(k) + \dots + \alpha_\mu \zeta_\mu(k)] = 0 \quad (6.3-30)$$

式中  $\text{sinc}(f_s t - k), k = 0, \pm 1, \dots$ , 为线性无关的函数,

因而式(6.3-30)意味着

$$\alpha_1 \zeta_1(k) + \alpha_2 \zeta_2(k) + \dots + \alpha_\mu \zeta_\mu(k) = 0, \quad \forall k \quad (6.3-31)$$

由于式(6.3-30)只有在  $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, \mu)$  时才成立,且式(6.3-31)与式(6.3-30)是等价方程,这就意味着只有当  $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, \mu)$  时,方程式(6.3-31)才成立,因而  $\mu$  个采样值  $\zeta_i(k) (i = 1, 2, \dots, \mu)$  线性无关。

当  $\{\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_\mu(t)\}$  为持续独立信号时,采样值在无限区间线性无关意味着在有限区间线性无关,即存在着任意  $k$ , 对于  $k' = k, k+1, \dots, k+N-1, N < \infty$  来说,只有当  $\alpha_i = 0 (i = 1, 2, \dots, \mu)$  时,关系式

$$\alpha_1 \zeta_1(k') + \alpha_2 \zeta_2(k') + \dots + \alpha_\mu \zeta_\mu(k') = 0 \quad (6.3-32)$$

才能成立。

方程式(6.3-32)意味着向量集合  $\{\zeta(k), \zeta(k+1), \dots, \zeta(k+N-1)\}$  张有  $\mu$  维向量空间,即采样值  $\zeta(k)$  维数不变,证明完毕。

**MRACS** 内部信号  $\zeta(t)$  的分量  $\zeta_i(t)$  是否具有频带约束,是一个值得进一步讨论的问题。当系统的参考输入信号  $r(t)$  为矩形波时,包括无限多个频率分量,  $y(t)$  和  $u(t)$  将含有同样多个频率分量。由于  $u(t)$  和  $y(t)$  在构成  $\zeta_i(t) (i = 1, 2, \dots, 2n)$  时至少要经过滤波器  $\bar{q}^d, \bar{q}^d$  的截止频率  $f_c$  通常取增益 -3 dB 以下对应的频率(实际上可为其几倍),故  $\zeta_i(t)$  实际上是频带有上界的信号,此上界  $f_m$  可看作  $f_c$ ,可选取采样频率  $f_s \geq 2f_c$ 。当然,在选取  $f_s$  时要同时考虑有关

参数的变化速度及在采样周期内常要完成的更新计算。

例题 设对象和参考模型分别为

$$(s^2 + s + 2)y(t) = u(t) \quad (6.3-33)$$

$$(s^2 + 1.4s + 1)y_m(t) = r(t) \quad (6.3-34)$$

参考模型增益 -3 dB 以下所对应的截止频率为  $1/2\pi$  Hz, 将滤波器  $q^{-1} = (1 + \tau s)^{-1}$  的截止频率选为参考模型截止频率的 2 倍, 即  $1/\pi$  Hz, 由此可求得  $\tau = 0.5$ ,  $q = 1 + 0.5s$ 。利用  $q^{-1}$  可将对象方程式(6.3-33)变换为等价方程

$$(1 - 1.5q^{-1} + q^{-2})y(t) = 0.25q^{-2}u(t) \quad (6.3-35)$$

选择  $C(q^{-1}) = 1$ ,  $R(q^{-1}) = 1 + nq^{-1}$ ,  $S(q^{-1}) = S_0 + S_1q^{-1}$ , 则有方程

$$(1 - 1.5q^{-1} + q^{-2})(1 + nq^{-1}) + q^{-2}(S_0 + S_1q^{-1}) = 1 \quad (6.3-36)$$

令方程式(6.3-36)等号两边  $q$  的同次幂的系数相等, 可求得  $n = 1.5$ ,  $S_0 = 1.5$ ,  $S_1 = 1.5$ , 因而有

$$\theta^T = [0.25 \quad 0.325 \quad 1.25 \quad -1.5] \quad (6.3-37a)$$

$$\zeta^T(t) = [q^{-2}u(t) \quad q^{-3}u(t) \quad q^{-2}y(t) \quad q^{-3}y(t)] \quad (6.3-37b)$$

$$y(t) = \theta^T \zeta(t) \quad (6.3-37c)$$

$$u(t) = \frac{q^2 y_m(t) - \sum_{i=2}^4 \theta_i(k) Z_i(t)}{\theta_1(k)} \quad (6.3-38)$$

式中  $t \in [kTs, (k+1)Ts]$ ,  $Z_2(t) = q^{-1}u(t)$ ,  $Z_3(t) = y(t)$ ,  $Z_4(t) = q^{-1}y(t)$ 。

由于滤波器  $q^{-2}$  在 -3 dB 以下的截止频率  $f_c = 0.2$  Hz, 因此选取采样频率  $f_s = 1$  Hz。将混合 MRACS 与连续 MRACS 的性能进行比较, 其计算结果为:

(i)  $\theta(t)$  收敛于真值  $\theta$  的时间

混合自适应: 4 s;

连续自适应: 30 s。

(ii)  $y(t)$  收敛于  $y_m(t)$  的时间

混合自适应: 6 s;

连续自适应: 不满足要求。

由此可见, 混合模型参考自适应控制系统对于参考模型的跟踪性能优于全连续模型参考自适应控制系统。

## § 6.4 随机系统混合自适应控制

在前面三节中介绍了三种适合于理想确定性系统, 即系统中不含任何干扰及未建模动态时的混合自适应控制器设计方法。本节将介绍随机系统的混合自适应控制器设计方法。

近些年来, 出现了两种重要的随机系统稳定性分析方法: ODE 法和鞅收敛理论, 后者又称之为“随机李亚普诺夫理论”。两种方法都可用于递推参数估计和自适应闭环随机系统的稳定性分析。本节中将利用鞅收敛理论及维数不变原理对混合自适应闭环随机系统进行稳定性分析, 并且证明, 当连续时间随机对象的随机干扰经滤波后的离散值为鞅差序列时, 这种混合自适应控制器可保证闭环系统中的所有信号有界, 并且对象输出与参考信号间的平方跟踪误差

数学期望的平均值以概率 1 等于鞅差序列的方差。

### 1. 对象模型与控制目的

考虑单输入-单输出连续时间随机对象

$$A'(s)y(t) = B'(s)u(t) + \xi(t) \tag{6.4-1a}$$

$$A'(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n \tag{6.4-1b}$$

$$B'(s) = b_0s^{n-1} + b_1s^{n-2} + \cdots + b_{n-1} \tag{6.4-1c}$$

式中  $s = \frac{d}{dt}$  为微分算子,  $\xi(t)$  为有界随机干扰, 并且假设: (i) 阶次  $n$  已知, 但系数  $a_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 和  $b_j$  ( $j = 0, 1, \cdots, n - 1$ ) 是未知的常数; (ii)  $A'(s)$  和  $B'(s)$  互质, 且  $B'(s)$  为 Hurwitz 多项式。

控制的目的是利用所设计的混合自适应控制器, 使得闭环系统中的所有信号有界, 并且系统的输出  $y(t)$  尽可能紧密地跟踪一致连续有界并分段可微的参考信号  $y^*(t)$ 。

### 2. 控制器结构

为了达到上述控制目的, 我们采用图 6.4-1 所示混合自适应控制系统结构。

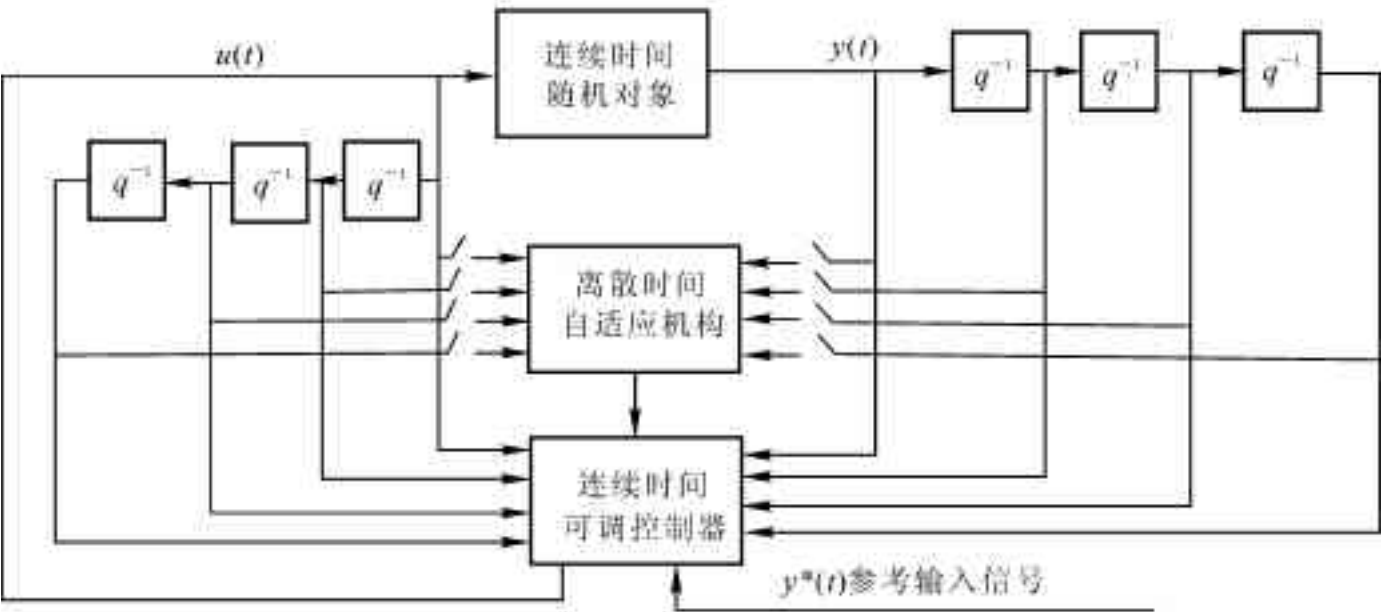


图 6.4-1 系统结构图

在这种控制方案中, 用一个连续时间可调控制器去控制连续时间对象, 而用离散时间自适应机构对可测连续时间变量进行采样, 并根据所获得的信息离散地对可调控制器进行校正, 产生控制信号, 从而控制对象的输出, 使其尽可能紧密地跟踪参考信号  $y^*(t)$ 。

选取

$$\bar{q}^{-1} = 1/(1 + \tau s) \tag{6.4-2}$$

式中  $\tau > 0$  为设计常数。利用  $\bar{q}^{-1}$  可将对象方程式(6.4-1) 变换为等价形式

$$A(\bar{q}^{-1})y(t) = \bar{q}^{-1}B(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n}\xi(t) \tag{6.4-3a}$$

$$A(\bar{q}^{-1}) = 1 + \alpha_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha_n\bar{q}^{-n} \tag{6.4-3b}$$

$$B(\bar{q}^{-1}) = \beta_0 + \beta_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_{n-1}\bar{q}^{-(n-1)} \tag{6.4-3c}$$

令

$$\theta^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n \ \beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{n-1}] \quad (6.4-4a)$$

$$\zeta^T(t) = [-q^{-1}y(t) \ \cdots \ -q^{-n}y(t) \ q^{-1}u(t) \ \cdots \ q^{-n}u(t)] \quad (6.4-4b)$$

则方程式(6.4-3a) 可以表示为

$$y(t) = \theta^T \zeta(t) + v(t) \quad (6.4-5)$$

式中  $v(t) = q^{-n}\xi(t)$ , 为对象输出经滤波器滤波后的残余噪声。

对  $y(t)$  和  $\zeta(t)$  进行采样, 可得到方程式(6.4-5) 的相应离散形式方程

$$y(k) = \theta^T \zeta(k) + v(k) \quad (6.4-6)$$

要准确描述  $v(k)$  是困难的, 仿照目前研究全离散系统所通常采用的方法, 假定  $v(k)$  为对  $\{F_k\}$  的鞅并且具有下述统计特性:

$$E\{v(k) \mid F_s\} = 0 \quad \text{a.s.} \quad " s \leq k \quad (6.4-7a)$$

$$E\{v^2(k) \mid F_s\} = \sigma^2 \quad \text{a.s.} \quad " s \leq k \quad (6.4-7b)$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v^2(k) < \infty \quad \text{a.s.} \quad (6.4-7c)$$

式中  $F_s = F_s$  是  $\sigma$  代数  $F_t$  的离散形式, 符号 a.s. 为英文 almost surely 的缩写。

根据式(6.4-6), 可选择各种辨识方法估计参数向量  $\theta$ 。由于本节的目的不在于全面研究辨识方法, 故在此仅举一例进行说明, 可参考文献[5]。我们选用随机近似法:

$$\theta(k) = \theta(k-1) + \frac{a}{R(k-1)} \zeta(k-1) [y(k-1) - \theta^T(k-1) \zeta(k-1)],$$

$$0 < a < 1 \quad (6.4-8a)$$

$$R(k-1) = R(k-2) + \zeta^T(k-1) \zeta(k-1), \quad R(0) = 1 \quad (6.4-8b)$$

选取反馈控制  $u(t)$  满足关系式

$$\theta^T(k) \zeta(t) = y^*(t) \quad (6.4-9)$$

则混合自适应反馈控制律可用显式表示为

$$u(t) = \frac{1}{\beta(k)} [qy^*(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(k) q^{-(i-1)} y(t) - \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(k) q^{-j} u(t)] \quad (6.4-10)$$

### 3. 稳定性分析

整个混合自适应闭环随机系统的稳定性分析可归结为下述定理的证明。

**定理** 若连续时间随机对象式(6.4-1) 满足假设条件(i) 和(ii), 则对于任何有界初始条件, 由关系式(6.4-2) ~ 式(6.4-10) 所组成的混合自适应控制器可保证闭环随机系统中的所有信号有界, 并且关系式

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{[y(t) - y^*(t)]^2\} dt = \sigma^2 \quad (6.4-11)$$

以概率 1 成立。

**证明:** 定义

$$e(t) = y(t) - y^*(t) = y(t) - \theta^T(k) \zeta(k) \quad (6.4-12)$$

令  $\bar{\theta}(k) = \theta(k) - \theta$ , 利用式(6.4-5) 和式(6.4-9) 可得

$$e(t) = -\bar{\theta}^T(k) \zeta(t) + v(t) \quad (6.4-13)$$

其相应的离散时间方程为

$$e(k) = -\bar{\theta}^T(k) \zeta(k) + v(k) \quad (6.4-14)$$

由式(6.4-8a) 得

$$v(k+1) = v(k) + \frac{1}{R(k)} \zeta(k) e(k) \quad (6.4-15)$$

参考文献[5], 设  $V(k) = v^T(k) v(k)$ , 则

$$\begin{aligned} V(k+1) = & V(k) + \frac{2a}{R(k)} v(k) \zeta(k) [e(k) - v(k)] + \\ & \frac{a^2}{R^2(k)} v(k) \zeta(k) v(k) + \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \times \\ & \{ [e(k) - v(k)]^2 + 2v(k) [e(k) - v(k)] + v^2(k) \} \end{aligned} \quad (6.4-16)$$

并且

$$\begin{aligned} E\{V(k+1) | F_k\} = & V(k) + \frac{2a}{R(k)} v(k) \zeta(k) [e(k) - v(k)] + \\ & \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) [e(k) - v(k)]^2 + \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (6.4-17)$$

令

$$b(k) = -v(k) \zeta(k), \quad z(k) = e(k) - v(k) \quad (6.4-18)$$

相应的离散时间方程为

$$b(k) = -v(k) \zeta(k), \quad z(k) = e(k) - v(k) \quad (6.4-19)$$

则方程式(6.4-17) 可以表示为

$$\begin{aligned} E\{V(k+1) | F_k\} = & V(k) - \frac{2a}{R(k)} b(k) z(k) + \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) z^2(k) + \\ & \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (6.4-20)$$

由于  $\frac{\zeta^T(k) \zeta(k)}{R(k)} \leq 1$ , 因而可得

$$\begin{aligned} E\{V(k+1) | F_k\} \leq & V_k - \frac{2a}{R(k)} [b(k) - \frac{a}{2} z(k)] z(k) + \\ & \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (6.4-21)$$

由式(6.4-14) 和式(6.4-19) 知

$$z(k) = -v(k) \zeta(k) = b(k) \quad (6.4-22)$$

所以方程式(6.4-21) 又可写为

$$\begin{aligned} E\{V(k+1) | F_k\} \leq & V_k - \frac{2a}{R(k)} [1 - \frac{a}{2}] z^2(k) + \\ & \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (6.4-23)$$

因为  $0 < a < 1$ , 则

$$E\{V(k+1) | F_k\} \leq V(k) - \frac{a}{R(k)} z^2(k) + \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-24)$$

根据式(6.4-8b) 有

$$\frac{\zeta^T(k) \zeta(k)}{R^2(k)} \leq \frac{\zeta^T(k) \zeta(k)}{R(k) R(k-1)} = \frac{R(k) - R(k-1)}{R(k) R(k-1)} =$$

$$\frac{1}{R(k-1)} - \frac{1}{R(k)} \quad (6.4-25)$$

以及

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^T(k) \zeta(k)}{R^2(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R(k-1)} - \frac{1}{R(k)} \right] = \frac{1}{R(0)} < \infty \quad (6.4-26)$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2}{R^2(k)} \zeta^T(k) \zeta(k) \sigma^2 < \infty \quad (6.4-27)$$

根据鞅收敛定理则有

$$V(k) \rightarrow V \quad \text{a.s.} \quad (6.4-28)$$

并且

$$E\{V\} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{R(k)} z^2(k) < \infty \quad (6.4-29)$$

由于  $a > 0$ , 因而  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2(k)}{R(k)} < \infty$ , 于是应用 Krontector 引理可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{R(k)} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\infty} z^2(k) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-30)$$

根据  $e(k)$  的定义有

$$z(k) = e(k) - v(k) = y(k) - y^*(k) - v(k) \quad (6.4-31)$$

$$y(k) = z(k) + y^*(k) + v(k) \quad (6.4-32)$$

设  $|y^*(k)| < M < \infty$ , 则

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) + M_1 + \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N v^2(k) \quad (6.4-33)$$

式中  $M_1 = 3M^2$  为有限随机变量。

根据式(6.4-7c) 知存在一正整数  $N_0$  使得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \leq \frac{3}{N} \sum_{k=1}^N z^2(k) + M_2 \quad " N \geq N_0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-34)$$

式中  $0 < M_2 < \infty$ 。

由式(6.4-6) 知  $\theta^T \zeta(k) = y(k) - v(k)$ , 故而

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \theta^T \theta \zeta^T(k) \zeta(k) \leq \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) + M_3 \quad " N \geq N_0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-35)$$

式中  $M_3$  为有限随机变量。

由假设(i) 知  $0 < \theta^T \theta < \infty$ , 则由式(6.4-35) 可得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta^T(k) \zeta(k) \leq \frac{c_1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) + M_4 \quad " N \geq N_0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-36)$$

式中  $c_1 > 0$  为常数,  $M_4$  为有限随机变量。

根据式(6.4-8b) 有

$$\frac{R(N)}{N} \leq \frac{c_1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) + M_5 \quad " N \geq N_0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-37)$$

式中  $0 < M_5 < \infty$ , 则由式(6.4-34) 和式(6.4-37) 得

$$\frac{R(N)}{N} \leq \frac{\mathfrak{G}}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(k) + M_6 \quad " N \geq N_0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-38)$$

式中  $0 < \mathfrak{G} < \infty, 0 < M_6 < \infty$ 。

下面利用反证法证明  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta^T(k) \zeta(k)$  有界。首先假设  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta^T(k) \zeta(k)$  是无界的, 则由式 (6.4-38) 可得

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N} = \infty \quad (6.4-39)$$

利用式 (6.4-38) 有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(k) = \infty \quad (6.4-40)$$

令  $\mathfrak{R}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(k)$ , 由式 (6.4-38) 得

$$\left[ \frac{R(N)}{N} \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(k) = \left[ \frac{R(N)}{N} \right]^{-1} z(N) \geq \frac{z(N)}{\mathfrak{G} z(N) + M_6} \quad \text{a.s.} \quad (6.4-41)$$

由于  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{R}(N) = \infty$ , 则存在一子序列  $\{N_l\}$ , 使得

$$\lim_{N_l \rightarrow \infty} z(N_l) = \infty \quad (6.4-42)$$

并且

$$\liminf_{N_l \rightarrow \infty} \left[ \frac{R(N_l)}{N_l} \right]^{-1} \frac{1}{N_l} \sum_{k=1}^{N_l} \dot{z}^2(k) \geq \frac{1}{\mathfrak{G}} \quad \text{a.s.} \quad (6.4-43)$$

与式 (6.4-30) 相矛盾。这就说明原来假设  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta^T(k) \zeta(k)$  无界是错误的,  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \zeta^T(k) \zeta(k)$  是有界的, 并且

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{R(N)}{N} < \infty \quad (6.4-44)$$

因而

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N}{R(N)} \right] \geq \frac{1}{k_1} > 0 \quad (6.4-45)$$

式中  $0 < k_1 < \infty$ 。

根据式 (6.4-30) 及式 (6.4-34) 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(k) = 0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-46)$$

根据 §6.3 中的维数不变原理及有关定理可知, 若  $z(t)$  为不含  $f_m$  以上高频分量的受频带约束信号, 当选取采样频率  $f_s = 1/\tau$ , 高于  $2f_m$  时, 则采样值  $z(k)$  对于连续时间信号  $z(t)$  维数不变, 因而  $z(k) = 0$  成立包含着  $z(t) = 0$  成立。

由于  $z(t) = -\Phi^T(k) \zeta(t) + \theta^T \zeta(t)$ , 可以通过滤波器  $q^{-1}$  的设计限制  $z(t)$  的频带, 所以由式 (6.4-46) 可得关系式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{z}^2(t) = 0 \quad " t \in [t_k, t_{k+1}) \quad \text{a.s.} \quad (6.4-47)$$

设采样周期  $\tau = t_{k+1} - t_k$  并且  $T = N\tau$ , 则

$$\frac{1}{T} \int_0^T E\{\dot{z}^2(t)\} dt = \frac{1}{N\tau} \sum_{k=1}^N \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\{\dot{z}^2(t)\} dt =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E\{\dot{z}^2(t)\} \Big|_{t=t_{k\bar{s}}}, \quad t_{k\bar{s}} \in [t_k, t_{k+1}) \quad (6.4-48)$$

因而根据式(6.4-47) 和式(6.4-48) 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E\{\dot{z}^2(t)\} dt = 0 \quad \text{a.s.} \quad (6.4-49)$$

由式(6.4-49) 可直接导出关系式(6.4-11), 由式(6.4-47) 利用反证法可证明  $y(t)$  有界, 从而可证明闭环系统中的所有信号有界。

## 参 考 文 献

- 1 Gawthrop P J, Phil D . Hybrid Self-Tuning Control . IEE Proceedings , 1980, 1(127):229-236
- 2 Narendra K S, Khalifa I H, Annaswamy A M . Error Model for Stable Hybrid Adaptive Systems . IEEE Trans . on Ac, 1985, 30(3):339-347
- 3 Elliott E . Hybrid Adaptive Control of Continuous Time Systems . IEEE Trans . on Ac . 1982:27:419-426
- 4 铃木,隆 新中新二 金森春夫 モデル 规范适应制御系 フハイブリッド 构成法, 计测自动制御学会论文集, 1983, 9(10)
- 5 Goodwin G C, Ramadge P J, Cains P E . Discrete Time Stochastic Adaptive Control . SIAM J . Control and Optimization, 1981, 1(19): 829-853
- 6 李言俊, 陈新海。一种新的随机系统混合自适应控制器设计方法。西北工业大学学报, 1990, 8(3)



# 第七章 对象具有未建模动态时的混合自适应控制

随着科学技术的发展,所研究的受控对象变得越来越复杂。例如,大型航空航天器的数学模型用状态方程表示时,其状态变量可达数百个甚至上千个,当考虑系统结构的弹性时,其维数又有可能成倍地增加。对于这样复杂的系统,建模时不可能不进行简化,势必有些环节未被建模。当系统中存在高频寄生时,这些未建模环节的动态特性可能对系统产生很大的影响,这就是所谓的未建模动态(unmodeled dynamics)问题。

近些年来,不少学者都在致力于分析在有界干扰和未建模动态影响下的自适应控制算法的鲁棒特性。事实证明,对于这种未建模动态,即使是很小的有界干扰,都可以使原有的大多数自适应算法变得不稳定。对于这种不稳定情况的研究结果表明,为了消除不稳定性和改善鲁棒特性,原有的大多数自适应控制器都需要进行修正或重新设计。

在上一章中,我们研究的主要是理想系统,即系统中不含任何干扰或未建模动态。当系统中含有干扰或未建模动态时,根据理想系统所导出的那些自适应算法并不能保证系统的稳定性。本章中,我们将研究适合于对象具有未建模动态情况的混合自适应算法,并且对系统的鲁棒稳定性进行分析。至于有界干扰下的混合自适应控制问题,一般情况下都可作为对象具有未建模动态的一种特殊情况进行处理。

## § 7.1 连续对象具有未建模动态时的混合自适应控制器

### 1. 对象模型及控制目的

考虑单输入-单输出对象

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_0(s)[1 + \mu\Delta_2(s)] + \mu\Delta_1(s) \quad (7.1-1)$$

式中  $G_0(s) = K_p Z_0(s)/R_0(s)$  是对象已建模部分的传递函数。 $G(s)$  是严格真的,  $\mu\Delta_1(s)$  和  $\mu\Delta_2(s)$  分别是对象的相加和相乘未建模动态,标量参数  $\mu > 0$  表示其变化率。 $Z_0(s)$  是首一  $m$  阶 Hurwitz 多项式,  $R_0(s)$  是首一  $n$  阶多项式,  $n > m$ ,  $K_p > 0$ 。对于对象的未建模动态,假定: (i)  $\Delta_1(s)$  是严格真稳定传递函数; (ii)  $\Delta_2(s)$  是稳定传递函数; (iii) 使  $\Delta_1(s-p)$  和  $\Delta_2(s-p)$  的极点稳定的稳定余度  $p > 0$  的下界  $p_0$  是已知的。

从上述的假设中可以看出,小的  $\mu$  值保证了  $|\mu\Delta_2(j\omega)|$  在低频范围内是小的。但是,因为当  $n^* = n - m > 1$  时  $\Delta_2(s)$  允许是非真的,则在高频处,  $|\mu\Delta_2(j\omega)|$  可能很大,也就是说,尽管  $\mu$  非常小,若  $|\omega| \rightarrow \infty$ , 则  $|\mu\Delta_2(j\omega)| \rightarrow \infty$ 。

要求对象的输出  $y(t)$  跟踪参考模型

$$y_m(s) = W_m(s)r(s) = K_m \frac{1}{D_m(s)}r(s) \quad (7.1-2)$$

的输出  $y_m(t)$ , 式中  $D_m(s)$  是首项系数为 1、阶数  $n^* = n - m$  的 Hurwitz 多项式,  $r(t)$  是一致有界的参考输入信号。

本节的目的是, 设计一个自适应控制器, 使得对于某一  $\mu^* > 0$  和任意的  $\mu \in [0, \mu^*]$  以及  $\Delta_1(s), \Delta_2(s)$  满足假设(i) ~ (iii) 的任何可能干扰, 最终的闭环系统是稳定的, 并且对象输出  $y(t)$  尽可能紧密地跟踪参考模型输出  $y_m(t)$ 。

## 2. 自适应系统的误差模型

对象的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  将用来产生  $(n - 1)$  维辅助向量  $\omega_1, \omega_2$  及  $(2n - 1)$  维辅助向量  $\omega$

$$\omega_1(t) = F\omega_1(t) + qu(t) \quad (7.1-3a)$$

$$\omega_2(t) = F\omega_2(t) + qy(t) \quad (7.1-3b)$$

$$\omega^T(t) = [\omega_1^T(t) \quad \omega_2^T(t) \quad y(t)] \quad (7.1-3c)$$

式中  $F$  是  $(n - 1) \times (n - 1)$  稳定矩阵,  $(F, q)$  是可控对。

取对象的输入(即控制律)为

$$u(t) = \theta_k^T \omega_1(t) + \theta_{2k}^T \omega_2(t) + \theta_{3k} y(t) + c_k r(t) \quad (7.1-4a)$$

或

$$u(t) = \theta_k^T \omega(t) + \alpha r(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1-4b)$$

式中  $\theta_k^T = [\theta_{1k}^T \quad \theta_{2k}^T \quad \theta_{3k}]$  是  $(2n - 1)$  维控制参数向量,  $c_k$  是标量前馈参数。在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上,  $\theta_k$  和  $c_k$  皆为常数, 参数  $\theta_k$  和  $c_k$  仅仅在离散时刻  $t_k (k = 0, 1, 2, \dots)$  进行调整。

可以证明, 当  $\mu = 0$  时, 存在着常值参数  $\theta^*$  和  $c^*$  使得  $\theta_k \equiv \theta^*, \alpha \equiv c^*$  时, 对象与控制器所构成的系统传递函数恰好等于参数模型的传递函数, 因而可得关系式

$$W_m(s) = \frac{c^* G_0(s)}{1 - F_1(s) - F_2(s) G_0(s)} \quad (7.1-5)$$

式中  $F_1(s) = \theta^{*T} (sI - F)^{-1} q$ ,  $F_2(s) = \theta_3^* + \theta_2^{*T} (sI - F)^{-1} q$ 。

利用式(7.1-1)、式(7.1-4) 和式(7.1-5) 可以导出

$$y = \frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + \alpha r) + \mu \Delta(s) u \quad (7.1-6)$$

式中  $\Phi_k = \theta_k - \theta^*$ ,

$$\Delta(s) = \Delta_1(s) + \frac{1}{c^*} W_m(s) F_2(s) \Delta_1(s) + \frac{1}{c^*} W_m(s) \Delta_2(s) [1 - F_1(s)]$$

令  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ , 则

$$e = \frac{1}{c^*} W_m(s) (\Phi_k^T \omega + \tilde{\alpha} r) + \mu \Delta(s) u \quad (7.1-7)$$

式中  $\tilde{\alpha} = c_k - c^*$ 。

为使叙述简洁明了, 现假定  $K_p = K_m = 1$ , 则  $\tilde{\alpha} = 0$ , 并且

$$e = W_m(s) \Phi_k^T \omega + \mu \Delta(s) u \quad (7.1-8)$$

引入辅助信号  $y_a(t)$

$$y_a = -\theta_k^T W_m(s) \omega + W_m(s) \theta_k^T \omega \quad (7.1-9)$$

并且令  $\zeta = W_m(s) \omega$ ,  $\eta = \Delta(s) u$ , 则增广误差

$$\varepsilon_1(t) \triangleq e(t) - y_a(t) = \Phi_k^T \zeta(t) + \mu \eta(t) \quad (7.1-10)$$

## 3. 混合自适应律

由式(7.1-10)可得

$$\varepsilon(t) = \Phi_k^T Z(t) + \mu \eta(t) / m(t) \quad (7.1-11)$$

式中  $\varepsilon(t) = e_1(t) / m(t)$ ,  $Z(t) = \zeta(t) / m(t)$ ,  $m(t)$  称之为规范信号, 它满足微分方程

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1 (|u| + |y| + 1), \quad m(0) > \delta_0 / \delta_1 \quad (7.1-12)$$

式中  $\delta_0$  和  $\delta_1$  是正的设计常数, 选择时须使其满足不等式

$$\delta_0 + \delta_2 \leq \min[\rho_0, \varphi], \quad \delta_2 \in R^+ \quad (7.1-13)$$

式中  $\varphi > 0$  是使  $W_m(s - \varphi)$  的极点和  $F + \varphi I$  的特征值稳定的常数,  $R^+$  为有界正实数集。

可以证明, 对于任意的  $t \geq t_0$ ,  $\varepsilon(t)$ ,  $Z(t)$ ,  $|\eta(t)| / m(t)$ ,  $\|\omega(t)\| / m(t)$ ,  $|y(t)| / m(t)$  都是有界的。

定义集合  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  为

$$\Omega_1 = \{t \mid |\varepsilon(t)| \leq v_0\}, \quad \Omega_2 = \{t \mid |\varepsilon(t)| > v_0\} \quad (7.1-14)$$

式中  $v_0 > 0$  为常数, 选择其满足不等式

$$2\mu |\eta(t)| / m(t) \leq v_0 \leq \mu \rho_0 \quad (7.1-15)$$

式中  $\rho_0$  为正的常数。选择混合自适应律

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{1}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\sigma \varepsilon(t) Z(t)}{1 + Z^T(t) Z(t)} dt \quad (7.1-16a)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \in \Omega_1 \\ 1, & \text{若 } t \in \Omega_2 \end{cases} \quad (7.1-16b)$$

$$T_k = t_{k+1} - t_k \quad (7.1-16c)$$

这种混合自适应控制系统的结构如图 7.1-1 所示。

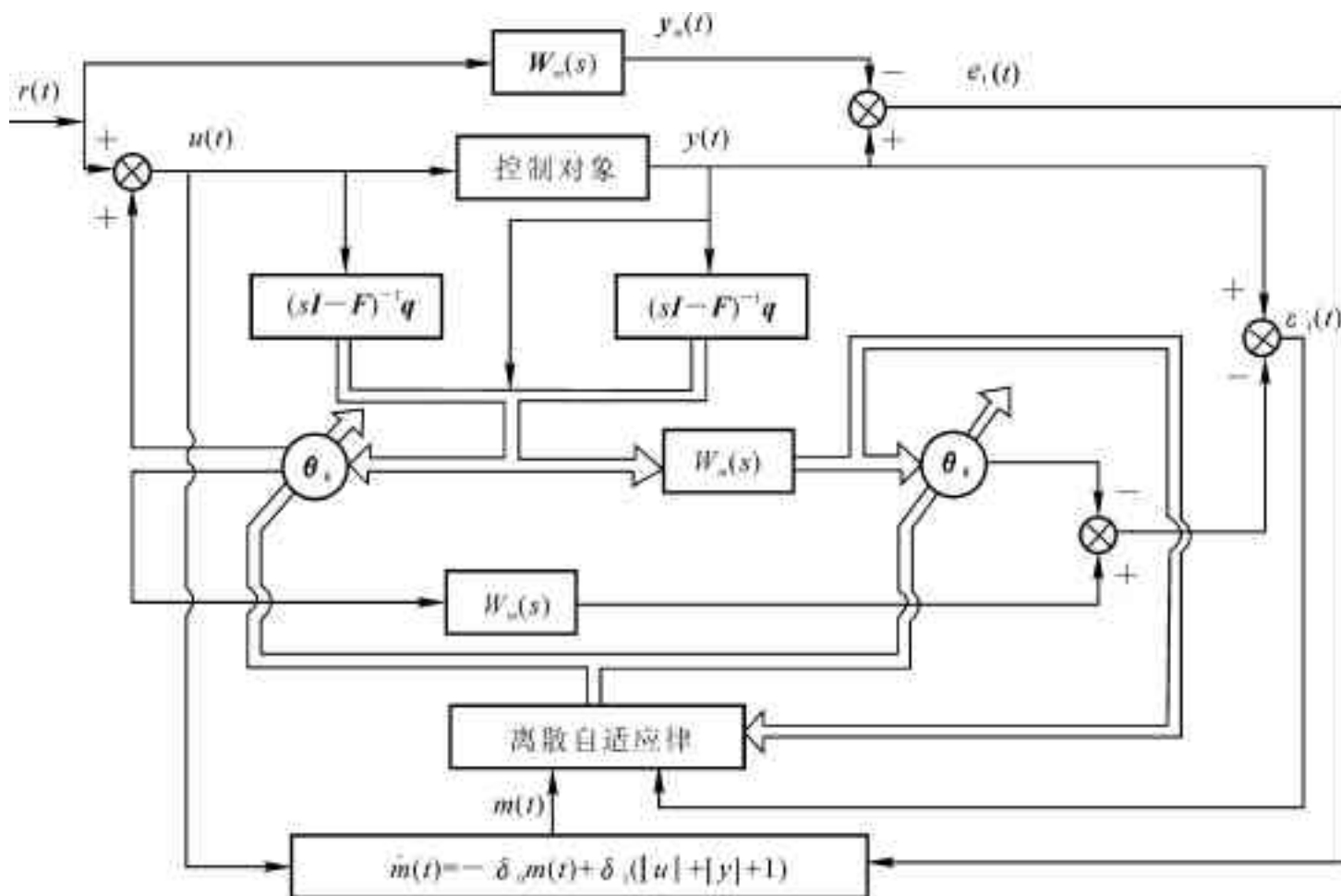


图 7.1-1 混合自适应控制系统结构图

#### 4. 稳定性分析

引理1: 对于控制对象(7.1-1)和控制形式(7.1-4),混合自适应律式(7.1-16)具有下述性质:

$$(i) \quad \|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\| \leq \|\theta_0 - \theta^*\| \quad (7.1-17)$$

(ii) 对于任意的  $t \geq t_0$  和  $T > 0$ , 不等式

$$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{(\Phi_k^T \zeta(t))^2}{m^2(t)} dt \leq \frac{g_0}{T} + \mu g_1 \quad (7.1-18)$$

成立, 式中  $g_0, g_1 \in R^+$ 。

证明: 取二次型函数

$$V_k = \frac{1}{2} \Phi_k^T \Phi_k \quad (7.1-19)$$

则有

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k = [\Phi_k + \frac{\Delta \Phi_k}{2}]^T \frac{\Delta \Phi_k}{2} \quad (7.1-20)$$

将自适应律式(7.1-16)代入式(7.1-20)可得

$$\Delta V_k = -\frac{1}{2} \Phi_k^T [2I - R_k] R_k \Phi_k \quad (7.1-21)$$

式中

$$R_k = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\sigma[Z(t) + \mu \eta^*(t)/m(t)] Z(t)}{1 + Z^T(t) Z(t)} dt \quad (7.1-22)$$

式中  $\eta^*(t)$  满足关系式

$$\Phi_k^T \eta^*(t)/m(t) = \eta(t)/m(t) \quad (7.1-23)$$

根据式(7.1-14)、式(7.1-15)和式(7.1-16)可知

$$\mu \|\eta^*(t)/m(t)\| \leq \|Z(t)\| \quad (7.1-24)$$

以及

$$0 \leq R_k < 2I \quad (7.1-25)$$

因而可得

$$\Delta V_k \leq 0 \quad (7.1-26)$$

并且对于任意的正整数  $M$  有

$$\sum_{k=k_0}^{k_0+M-1} \Phi_k^T R_k \Phi_k < \infty \quad (7.1-27)$$

式(7.1-26)意味着性质(i)成立, 式(7.1-27)意味着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Phi_k^T [Z(t) + \mu \eta^*(t)/m(t)] Z^T(t) \Phi_k}{1 + Z^T(t) Z(t)} dt = 0 \quad (7.1-28)$$

以及

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\Phi_k^T \zeta(t))^2}{m^2(t)} dt \leq \mu g_1 (t_{k+1} - t_k) \quad (7.1-29)$$

式中  $g_1 \in R^+$ , 性质(ii)可以从式(7.1-29)直接导出。

引理2: 对于任意的  $t \geq t_0$ ,  $T > 0$  以及有界的  $\Phi_k$ , 若不等式

$$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{(\Phi_k^T \zeta(t))^2}{m^2(t)} dt \leq \frac{g_0}{T} + \mu g_1 \quad (7.1-30)$$

成立,则有

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \frac{|\Phi_k^T \omega(t)|}{m(t)} dt \leq \frac{r_3}{\varepsilon_0^2} + (\mu \frac{r_4}{\varepsilon_0^2} + r_5 \varepsilon_0^{\rho}) T \quad (7.1-31)$$

式中  $\rho = 2^{-(n^*+1)}$ ,  $r_3, r_4, r_5$  为正常数,  $\varepsilon_0 \in (0, 1]$  是一任意常数。

此引理的证明过程较长,受篇幅限制,此处省略。

定理: 存在着一个正数  $\mu^*$ , 对于任意的  $\mu \in [0, \mu^*]$  和任何初始条件, 由式(7.1-1), 式(7.1-4) 和式(7.1-16) 所构成的自适应闭环系统中的所有信号有界, 并且系统的跟踪误差属于残差集

$$D_e = \left\{ e : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |e(t)| dt \leq \mu r_1 + \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad T > 0 \right\} \quad (7.1-32)$$

式中  $r_1 \in R^+$ , 为一小的常数。

证明: 首先证明规范信号  $m(t)$  有界。对象式(7.1-1) 可以表示为

$$y = G_0(s)u + \mu G_0(s)q(s) \frac{\Delta_2(s)}{q(s)}u + \mu \Delta_1(s)u \quad (7.1-33)$$

式中  $q(s)$  是任意的能保证  $q(s-p_0)$  的根是稳定的  $(n^*-1)$  次多项式。由于  $G_0(s)\Delta_2(s)$  是严格真的, 因而可知  $G_0(s)q(s)$  是严格真的, 并且  $\Delta_2(s) = \Delta_2(s)/q(s)$  是真的。根据假设(iii) 可知,  $\Delta_2(s-p_0)$  的极点是稳定的。由式(7.1-33) 可写出状态表达式

$$\dot{X} = Ax + bu + \mu b\eta_1 \quad (7.1-34a)$$

$$y = h^T x + \mu \eta_1 \quad (7.1-34b)$$

式中  $\eta_1 = \Delta_1(s)u$ ,  $\eta_2 = \Delta_2(s)u$ ,  $b = bq(s)$ ,  $(A, b, h^T)$  是  $G_0(s)$  的最小状态表达式。输入  $u(t)$  可以被表示为

$$u = \Phi_k^T \omega + \alpha r + \theta_1^{*T} \omega_1 + \theta_2^{*T} \omega_2 + \theta_3^* h^T X + \mu \theta_3^* \eta_2 \quad (7.1-35)$$

定义增广状态变量  $Y_c^T = [X^T \quad \omega_1^T \quad \omega_2^T]$ , 由式(7.1-34)、式(7.1-35) 和式(7.1-3) 可导出方程式

$$\dot{Y}_c = A_c Y_c + b_c (\Phi_k^T \omega + \alpha r) + \mu b_{c1} \eta_1 + \mu b_{c2} \eta_2 \quad (7.1-36a)$$

$$y = h_c^T Y_c + \mu \eta_1 \quad (7.1-36b)$$

式中  $b_{c1}^T = [b^T \quad \theta_3^* q^T \quad \theta_3^* q^T]$ ,  $b_{c2}^T = [b^T \quad 0 \quad 0]$ ,  $A_c$  是稳定矩阵。由于  $h_c^T (sI - A_c)^{-1} b_c = \frac{1}{c^*} W_m(s)$ , 因而可写出  $W_m(s)$  的非最小状态表达式

$$\dot{X}_m = A_c X_m + b_c c^* r, \quad y_m = h_c^T X_m \quad (7.1-37)$$

式中  $X_m^T = [X_m^T \quad \omega_{1m}^T \quad \omega_{2m}^T]$ 。定义状态误差  $e = Y_c - X_m$ , 则

$$\dot{e} = A_c e + b_c (\Phi_k^T \omega + \alpha r) + \mu b_{c1} \eta_1 + \mu b_{c2} \eta_2 \quad (7.1-38a)$$

$$e = h_c^T e + \mu \eta_1 \quad (7.1-38b)$$

为了分析式(7.1-38), 现考查正定函数

$$W = K_1 e^T P e + \frac{m^2}{2} \quad (7.1-39)$$

式中  $K_1 > 0$  是供选择的任意常数,  $P = P^T > 0$  满足方程

$$PA_c + A_c^T P = -I \quad (7.1-40)$$

将  $W$  对时间求导并利用式(7.1-38) 和式(7.1-12) 可得

$$W = -K_1 \|e\|^2 + 2K_1 \dot{e}^T P b_c \Phi_k^T \omega + 2\mu K_1 \dot{e}^T P(b_{c1} \eta + b_{c2} \eta_1) - \delta_0 m^2 + \delta_1 (\|u\| + \|y\| + 1) \quad (7.1-41)$$

因为  $\Phi_k$  和  $\theta_k$  有界, 利用式(7.1-35) ~ 式(7.1-38) 可以证明

$$\|u\| + \|y\| \leq r_1 \|e\| + r_2 + \mu r_3 \|\eta\| \quad (7.1-42)$$

式中  $r_1, r_2$  和  $r_3$  是与  $\|\theta_k\|, \|y_m\|$  和  $\|X_m\|$  的界有关的一些正常数。可以证明,  $\|\eta\|/m$  和  $\|\eta_1\|/m$  是有界的, 因而式(7.1-41) 可以表示为

$$W \leq -K_1 \|e\|^2 + K_1 n_0 \|e\| \|\Phi_k^T \omega\| - \delta_0 m^2 + \beta_0 m + \beta_1 \|e\| m + \mu K_1 n_1 \|e\| m + \mu \delta_1 r_3 m^2 \quad (7.1-43)$$

式中  $n_0 = 2\|P b_c\|$ ,  $\beta_0 = \delta_1(1 + r_2)$ ,  $\beta_1 = r_1 \delta_1$ ,  $r_3 = r_3 n$ ,  $n_1 = 2\|P\|(\|b_{c1}\| r_1 + \|b_{c2}\| r_2)$ ,  $n$  和  $r_2$  分别是  $\|\eta\|/m$  和  $\|\eta_1\|/m$  的上界。

由于

$$K_1 n_0 \frac{\|e\|}{\sqrt{W}} \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{\sqrt{W}} \leq \sqrt{K_1} \beta_1 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m} W \quad (7.1-44)$$

式中  $\beta_1 = n_0^2 [\lambda \min(p)]^{-1}$ , 式(7.1-43) 可以表示为

$$\begin{aligned} W \leq & -\frac{K_1}{2} \|e\|^2 - \frac{\delta_0}{2} m^2 + \sqrt{K_1} \beta_1 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m} W - \\ & \frac{\|e\|^2}{2} \left[ K_1 - \frac{4\beta_1^2}{\delta_0} - \frac{4\mu^2 K_1^2 n_1^2}{\delta_0} \right] - \\ & \frac{\delta_0}{8} \left[ \left( m - \frac{4\beta_0}{\delta_0} \right)^2 + \left( m - \frac{4\beta_1}{\delta_0} \|e\| \right)^2 - \left( m - \frac{4\mu K_1 n_1 \|e\|}{\delta_0} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left( 1 - \frac{8\mu \delta_1 r_3}{\delta_0} \right) m^2 \right] + \frac{2\beta_0^2}{\delta_0} \end{aligned} \quad (7.1-45)$$

因而

$$\begin{aligned} W \leq & \sqrt{K_1} \beta_1 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m} W + \frac{2\beta_0^2}{\delta_0} - K_1 \|e\|^2 \left[ 1 - \frac{2\beta_1^2}{K_1 \delta_0} - \frac{2K_1 \mu^2 n_1^2}{\delta_0} \right] - \\ & \frac{\delta_0}{2} m^2 - \frac{\delta_0}{8} \left( 1 - \frac{8\mu \delta_1 r_3}{\delta_0} \right) m^2 \end{aligned} \quad (7.1-46)$$

选取  $K_1 = 8\beta_1^2/\delta_0$ ,  $\mu = \min(\frac{\delta_0}{8\beta_1 n_1}, \frac{\delta_0}{8\delta_1 r_3})$ , 并且在式(7.1-46) 的右边加减  $\beta W$  项, 则对于任意  $\mu \in [0, \mu]$  可得

$$\begin{aligned} W \leq & -\beta W + \sqrt{K_1} \beta_1 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m} W + \frac{2\beta_0^2}{\delta_0} - \\ & K_1 \|e\|^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \|P\| - \frac{m^2}{2} (\delta_0 - \beta) \right) \end{aligned} \quad (7.1-47)$$

若选取  $\beta = \min(\frac{1}{2\|P\|}, \delta_0)$  并且令  $\beta_2 = \sqrt{K_1} \beta_1$ ,  $\beta_3 = \frac{2\beta_0^2}{\delta_0}$ , 则

$$W \leq -(\beta - \beta_2 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m}) W + \beta_3 \quad (7.1-48)$$

为了分析式(7.1-48) 的稳定性, 让我们先来研究方程

$$W_0 = -(\beta - \beta_2 \frac{\|\Phi_k^T \omega\|}{m}) W_0 + \beta_3 \quad (7.1-49)$$

式(7.1-49)的齐次方程部分为

$$\dot{w}_0 = -(\beta - \beta_3 \frac{|\Phi_k^T \omega|}{m}) w_0 \quad (7.1-50)$$

因而对于任意  $t \in [t_k, t_{k+1})$  可得

$$W_0(t) = W_0(t_k) \exp \left[ - \int_{t_k}^t (\beta - \beta_3 \frac{|\Phi_k^T \omega|}{m}) d\tau \right] \quad (7.1-51)$$

根据引理式(7.1-2)有

$$\int_{t_k}^t \frac{|\Phi_k^T \omega(\tau)|}{m(\tau)} d\tau \leq \frac{r_3}{\varepsilon_0^2} + [\mu \frac{r_4}{\varepsilon_0^2} + r_5 \varepsilon_0^p] (t - t_k) \quad (7.1-52)$$

将式(7.1-52)代入式(7.1-51)可知,若  $\beta > \beta_3 (\mu \frac{r_4}{\varepsilon^2}$

$$\frac{r_3}{\varepsilon_0^2})^{1/p}, 1] \quad (7.1-53)$$

并且取  $\mu^* = \min(\frac{\beta}{4r_4 \beta_3} \varepsilon_0^2, \mu_0)$ , 则对于任意  $\mu \in [0, \mu^*]$  有

$$w_0(t) \leq w_0(t_k) \exp(\frac{\beta_3 r_3}{\varepsilon_0^2}) \exp[-\frac{\beta}{4}(t - t_k)], \quad t \geq t_k \quad (7.1-54)$$

由此可见,  $w_0(t)$  是指数稳定的, 因而  $W_0(t)$  是有界的, 根据比较定理可知  $W(t)$  是有界的, 这就说明  $m(t)$  和  $e(t)$  是有界的。由于  $\varepsilon(t), Z(t), |\eta(t)|/m(t), \|\omega(t)\|/m(t), |u(t)|/m(t)$  和  $|y(t)|/m(t)$  有界, 则  $m(t)$  有界意味着自适应闭环系统中的所有信号有界。下面进一步推导残余跟踪误差界。

式(7.1-8)的最小状态表达式可以写为

$$\dot{e} = A_m e + b_m \Phi_k^T \omega \quad (7.1-55a)$$

$$\dot{a} = h_m^T e + \mu \eta \quad (7.1-55b)$$

式中  $e \in R^n$ ,  $A_m$  是稳定矩阵,  $h_m^T (sI - A_m)^{-1} b_m = W_m(s)$ 。由式(7.1-55)可以导出

$$|a(t)| \leq \beta_3 \|e(t)\| \exp[-q_1(t - t_1)] + \beta_3 \int_{t_1}^t |\Phi_{k_{\max}}^T \omega(\tau)| \exp[-q_1(t - \tau)] d\tau + \mu \beta_7 \quad (7.1-56)$$

式中  $q_1, \beta_3, \beta_6 \in R^+$ ,  $\Phi_{k_{\max}} = \max\{\Phi_k, t_k \in [t_1, t_1 + T]\}$ ,  $\beta_7 > 0$  是  $|\eta|$  的上界, 因而

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |a(t)| dt &\leq \frac{1}{T} \beta_3 \|e(t_1)\| \int_{t_1}^{t_1+T} \exp[-q_1(t - t_1)] dt + \\ &\quad \frac{1}{T} \beta_6 \int_{t_1}^{t_1+T} \left( \int_{t_1}^t |\Phi_{k_{\max}}^T \omega(\tau)| \exp[-q_1(t - \tau)] d\tau \right) dt + \mu \beta_7 \end{aligned} \quad (7.1-57)$$

由于  $1/m(t)$  是有界的, 从式(7.1-31)可知

$$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |\Phi_{k_{\max}}^T \omega(\tau)| d\tau \leq \frac{q}{T} + \mu q_3 + \quad (7.1-58)$$

式中  $q, q$  和  $\mu$  是与常数  $r_3 \sim r_5, \varepsilon_0, \rho$  以及  $1/m(t)$  的界有关的正常数, 当  $\varepsilon$  较小时,  $\mu$  也较小。

将式(7.1-58)代入式(7.1-57)进行积分并且令  $T \rightarrow \infty$  可得

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |a(t)| dt \leq \mu r_1 +$$

$$t \geq t_0, \quad T > 0 \quad (7.1-59)$$

式中  $\alpha$  和  $n$  是正常数, 并且当  $\varepsilon_0$  较小时,  $\frac{\beta_0}{q}$  也较小。式(7.1-59) 意味着式(7.1-32) 成立。证明完毕。

由式(7.1-32) 可以看出, 如果在选取  $\varepsilon_0$  时使  $\varepsilon_0$  尽可能地小, 则可达到小的均值残余跟踪误差。

## § 7.2 $\sigma$ 校正混合自适应律

上一节介绍了连续对象具有未建模动态时的混合自适应控制器设计方法, 这是常用的一种最基本的方法。以下各节所采用的控制器结构与上一节完全相同, 只是采用了不同的自适应律。混合自适应律的设计是混合自适应控制器设计的关键部分。本节将介绍另一种混合自适应律—— $\sigma$ 校正混合自适应律。这种混合自适应律与上一节中的混合自适应律的不同之处就在于在混合自适应律中引入了  $\sigma$  校正, 加快了控制参数的自适应调整速度, 也更进一步增强了闭环系统的鲁棒稳定性。

为了实现系统的自适应控制, 根据式(7.1-11) 可采用下述  $\sigma$  校正混合自适应律离散地获得控制参数估值  $\theta_k$ :

$$\theta_{k+1} = (1 - \sigma) \theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \quad (7.2-1a)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \|\theta_k\| < M_0 \\ \alpha \left( \frac{\|\theta_k\|}{M_0} - 1 \right), & M_0 \leq \|\theta_k\| \leq 2M_0 \\ \alpha, & \|\theta_k\| > 2M_0 \end{cases} \quad (7.2-1b)$$

$$\Gamma = \begin{cases} 0, & t \in \Omega_1 \\ 1, & t \in \Omega_2 \end{cases} \quad (7.2-1c)$$

式中  $\alpha$ ,  $M_0$  和  $a$  为正的设计常数, 取  $M_0 \geq 2\|\theta^*\|$ ,  $\|\cdot\|$  表示欧几里德范数,  $\alpha < \frac{1}{4}$ , 公式中其余所有符号的意义都与上一节完全相同。

对于上述  $\sigma$  校正混合自适应律, 存在着与上一节相类似的定理, 整个闭环自适应系统的稳定性分析, 可以归结为下述定理的证明。

定理: 存在着常数  $\mu^* > 0$ , 对于  $\mu \in [0, \mu^*]$  和任何有界初始条件, 由方程式(7.1-1) ~ 式(7.1-15) 和式(7.2-1) 所构成的混合自适应闭环系统中的所有信号有界, 并且系统的跟踪误差  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  属于残差集

$$D_e = \left\{ e: \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |e(t)| dt \leq \mu n, \quad t_1 \geq 0 \right\} \quad (7.2-2)$$

式中  $n \in R^+$ ,  $R^+$  为有界正实数集  $\mu$  为小的正常数。

证明: 式(7.2-1a) 又可写成

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \sigma \theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \quad (7.2-3)$$

令  $V_k = \Phi_k^T \Phi_k$ , 则

$$\Delta V_k = V_{k+1} - V_k = -2\sigma \Phi_k^T \theta_k + \sigma^2 (\theta^* + \Phi_k)^T \theta_k -$$



$$\begin{aligned} & \frac{2\Gamma a}{T_k} \Phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau + \frac{2\Gamma \sigma a}{T_k} (\theta^* + \Phi_k)^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau + \\ & \frac{\Gamma^2 a^2}{T_k^2} \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]^T \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right] \end{aligned} \quad (7.2-4)$$

取  $\sigma \leq \frac{1}{4}$ ,  $M_0 \geq 2 \|\theta^*\|$ , 当  $\|\theta_k\| \geq M_0$  时, 则  $\|\Phi_k\| \geq \|\theta^*\|$ , 并且

$$\begin{aligned} \Delta V_k \leq & -\frac{3}{2} \sigma \Phi_k^T \theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\Phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau) m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau + \\ & \frac{\Gamma^2 a^2}{T_k^2} \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\Phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau) m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]^T \times \\ & \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\Phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau) m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right] \end{aligned} \quad (7.2-5)$$

令  $\Phi_k^T \eta^*(t) = \eta(t)$ , 则有

$$\Delta V_k \leq -\frac{3}{2} \sigma \Phi_k^T \theta_k - \Phi_k^T [I - R_k] R_k^T \Phi_k \quad (7.2-6)$$

式中

$$R_k = \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[Z(\tau) + \mu \eta^*(\tau) m(\tau)] Z^T(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau$$

由于  $\sigma \Phi_k^T \theta_k \geq 0$ , 若选取  $|2\mu \eta(t)| \leq \nu_0 \leq \mu \rho_0$ ,  $a \leq \frac{1}{2}$ , 则有  $0 \leq R_k \leq I$ , 因而  $\Delta V_k \leq 0$ ,

这就意味着  $\Phi_k$  和  $\theta_k$  有界, 并且当  $\|\theta_k\| \geq M_0$  时,  $\|\Phi_k\|$  逐渐减小。

当  $\|\Phi_k\|$  减小到使  $\|\theta_k\| < M$  时,  $\sigma = 0$ , 则有

$$\Delta V_k \leq -\Phi_k^T R_k^T \Phi_k \leq 0 \quad (7.2-7)$$

利用式(7.2-6)和式(7.2-7)可得

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k^T R_k^T \Phi_k \leq \sum_{k=k_0}^{k_0+N} \left( \frac{3}{2} \sigma \Phi_k^T \theta_k \right) + V_{\infty} - V_{k_0} \quad (7.2-8)$$

式中  $k_0 > 0$ ,  $N$  为有限正整数。式(7.2-8)又可写为

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \Phi_k^T R_k^T \Phi_k < \infty \quad (7.2-9)$$

这就意味着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\Phi_k^T [Z(\tau) + \mu \eta^*(\tau) m(\tau)] Z^T(\tau) \Phi_k}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau = 0 \quad (7.2-10)$$

以及

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\Phi_k^T \zeta(\tau))^2}{m^2(\tau)} d\tau \leq \mu g_2(t_{k+1} - t_k) \quad (7.2-11)$$

式中  $g_2 \in R^+$ 。

证明的其余部分与上一节中的证明相类似, 在此不再重述。

由式(7.2-5)或式(7.2-6)可以看出, 在混合自适应律式(7.2-1)中也可以不用死区法式(7.2-1c), 即令  $\nu_0 = 0$ 。在这种情况下, 当  $\|\Phi_k\|$  较大时,  $\Delta V_k < 0$ , 自适应控制律使  $\|\Phi_k\|$  逐渐减少。当  $\|\Phi_k\|$  减小到一定程度时,  $\|\Phi_k\|$  又开始增大, 而当  $\|\Phi_k\|$  增大到一定程度时又开始减小。由于系统存在未建模动态干扰, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|\Phi_k\|$  将在一个很小的范围内变

动。这就是说,对于任何有界初始条件  $\theta_0$ ,  $\Phi_k$  和  $\theta_k$  都是有界的。

对于设计常数  $\alpha$ ,  $\nu$  和  $a$ , 为了进行数学证明, 文中给出了极为保守的选择范围。在实际工程问题中, 这些参数的选择是相当灵活的, 也是容易选择的。当然, 这些设计常数选择得合理与否将关系到系统暂态品质的优劣, 对于具体问题可通过数字仿真合理选取这些设计常数。

大量的数字仿真结果表明, 本节中的  $\sigma$  校正混合自适应律优于上一节中的混合自适应律, 更优于相类似的全连续或全离散自适应控制律。关于这种混合自适应控制律优于相类似的全连续或全离散自适应控制律的理论分析, 受篇幅限制, 此处不可能作详尽阐述, 但其基本原理可简单归纳为:

(1) 在对象含有高频寄生时, 混合自适应控制律与全连续自适应控制律相比, 有利于消除系统非线性影响;

(2) 由于  $\sigma$  校正混合自适应控制律在估计参数时采用的是有关信号在小时间区间内的积分平均值, 减小了这些信号中的零均值随机干扰的影响, 而  $\sigma$  项的引入加快了系统的调整速度;

(3) 混合自适应控制律是在对象仍保持连续本质的情况下导出的, 它比离散自适应控制律更能够与实际对象紧密耦合。

例题: 设被控对象为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s-1)}(1 - \mu s) \quad (7.2-12)$$

参考模型为

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (7.2-13)$$

所取参数为  $F = -1$ ,  $q = 1$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\delta_1 = 1$ ,  $m(0) = 2$ ,  $\mu = 0.02$ 。图 7.2-1 示出了  $\theta^T = [-1 \ 1 \ -2.5]$ ,  $r(t) = 10 \sin 0.5t + 5 \sin 0.2t$  时的系统跟踪误差曲线。可以验证,  $\theta^T = [-1 \ 1 \ -2.5]$  使闭环系统处于不稳定初始状态, 大量的计算结果表明, 其它的自适应控制都很难将闭环系统由不稳定初始状态调整到渐近稳定状态, 但  $\sigma$  校正混合自适应控制律可以做到这一点。这表明在对象具有未建模动态情况下,  $\sigma$  校正混合自适应控制律使闭环系统具有鲁棒稳定性。

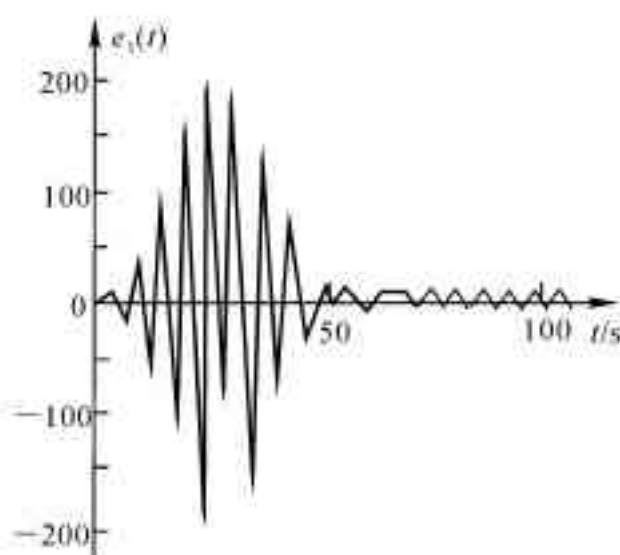


图 7.2-1 系统跟踪误差曲线

## § 7.3 积分式混合自适应律

由式(7.1-10) 可得

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(\tau)}{m(\tau)} d\tau = \Phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(\tau)}{m(\tau)} d\tau + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\eta(\tau)}{m(\tau)} d\tau \quad (7.3-1)$$

式中所有符号的定义均与 § 7.1 相同。

令

$$\varepsilon_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \quad \zeta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \quad \eta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\eta(\tau)}{m(\tau)} d\tau$$

则式(7.3-1) 可以表示为

$$\varepsilon_k = \Phi_k^T \zeta_k + \mu \eta_k \quad (7.3-2)$$

可以证明,对于任意  $t_k \in (0, \infty)$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\zeta_k$  和  $\eta_k$  是有界的,因而可用下列算法估计控制参数向量:

#### (1) $\sigma$ 校正法

$$\theta_{k+1} = (1 - \sigma_k) \theta_k - \frac{a \varepsilon_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-3a)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \|\theta_k\| < M_0 \\ \sigma_0, & \|\theta_k\| \geq M_0 \end{cases} \quad (7.3-3b)$$

式中  $\sigma_0$ ,  $M_0$  和  $a$  是由设计者选定的正设计常数,并且

$$a + 2\sigma_0 < 1, \quad M_0 \geq 2 \|\theta^*\| \quad (7.3-3c)$$

$\|\cdot\|$  表示欧几里德范数,  $\theta^*$  为理想控制参数。

#### (2) 梯度法加死区

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{a_k \zeta_k \varepsilon_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-4a)$$

$$a_k = \begin{cases} a, & |\varepsilon_k| > 2\rho \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7.3-4b)$$

式中  $a$ ,  $c$  和  $\rho$  为正设计常数,  $a \leq 1$ , 并且  $\rho$  满足不等式

$$\sup_k \mu |\eta_k| \leq \rho \leq \mu \rho_0, \quad \rho_0 \in R^+ \quad (7.3-4c)$$

#### (3) 最小二乘法加死区

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{a_k P_{k-1} \zeta_k \varepsilon_k}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \quad (7.3-5a)$$

$$P_{k-1} = P_{k-2} - \frac{a_{k-1} P_{k-2} \zeta_{k-1} \zeta_{k-1}^T P_{k-2}}{1 + a_{k-1} \zeta_{k-1}^T P_{k-2} \zeta_{k-1}} \quad (7.3-5b)$$

$$a_k = \begin{cases} a, & \frac{\varepsilon_k^2}{1 + \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} > \rho^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7.3-5c)$$

式中  $0 < a \leq 1$  为设计常数,  $\rho$  的定义如式(7.3-4c)。

#### (4) 梯度法加相对死区

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{\tau c_1 \zeta_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} f(\rho, \varepsilon_k) \quad (7.3-6a)$$

$$f(\rho, \varepsilon_k) = \begin{cases} \varepsilon_k - \rho, & \varepsilon_k \geq \rho \\ 0, & |\varepsilon_k| < \rho \\ \varepsilon_k + \rho, & \varepsilon_k \leq -\rho \end{cases} \quad (7.3-6b)$$

式中  $c > 0$ ,  $0 < a < 1$ ,  $\tau$ ,  $\tau = t_{k+1} - t_k$ ,  $\rho$  的定义如式(7.3-4c)。

因为  $\eta_k$  是有界的并且  $\mu$  值很小, 在应用中容易选取常数  $\rho$ 。由于系统的残余跟踪误差与参数  $\rho$  有关, 在具体工程应用中应尽可能选取较小的  $\rho$  值。

#### (5) 改进最小二乘法

$$\theta_{k+1} = \theta_k - P_k \frac{\varepsilon_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-7a)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_{k+1} - f_{k+1} \quad (7.3-7b)$$

$$P_k = P_{k-1} - \frac{\lambda P_{k-1} \zeta_{k-1} \zeta_{k-1}^T P_{k-1}}{\lambda_0 (1 + \zeta_{k-1}^T \zeta_{k-1}) + \lambda \zeta_{k-1}^T P_{k-1} \zeta_{k-1}} \quad (7.3-7c)$$

$$P_k = (1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1}) P_k + P_0 \quad (7.3-7d)$$

式中  $\alpha_0, \alpha_1, \lambda_0$  和  $\lambda_1$  为正设计常数,  $P_0 = P_0^T > 0$  为常数矩阵并且  $0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < 1, \alpha_0 \leq \|P_0\| \leq \alpha_1, f_{k+1}$  为修正项。为了保证自适应律的鲁棒稳定性,修正项  $f_{k+1}$  需要满足一定条件。选择不同的  $f_{k+1}$  可以导出不同的自适应律,现给出几个例子以供参考,实际上还可以导出更多的自适应算法(自适应律)。

(i) 算法 1(收缩法)

$$f_{k+1} = \min \left\{ 0, \left( \frac{c}{\| \theta_{k+1} - \theta_0 \|} - 1 \right) \right\} (\theta_{k+1} - \theta_0) \quad (7.3-8)$$

式中  $c$  为常数,选择  $c$  时须使  $c > \|\theta^* - \theta_0\|$  和  $c > \alpha_1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$ 。

(ii) 算法 2(死区法)

$$f_{k+1} = P_k \frac{\zeta_k \sigma_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-9a)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & |\varepsilon_k| \geq \rho (1 + \zeta_k^T \zeta_k)^{\frac{1}{2}} \\ -\varepsilon_k, & |\varepsilon_k| < \rho (1 + \zeta_k^T \zeta_k)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (7.3-9b)$$

式中  $\rho > 0$  为设计常数。当  $|\varepsilon_k| < \rho (1 + \zeta_k^T \zeta_k)^{\frac{1}{2}}$  时,式(7.3-7c)和式(7.3-7d)中的  $P$  与  $\lambda$  要相应地修改为  $P_0 = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} P_k, \lambda = 0$ 。

(iii) 算法 3(固定  $\sigma$  校正法)

$$f_{k+1} = - \left( \sigma + \frac{\omega_0}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \right) P_k \theta_k \quad (7.3-10)$$

式中  $\sigma, \omega_0$  为正的设计常数,要求  $\omega_0 < \frac{\delta_1}{4\alpha_1(1 - \delta_0)^2}, \sigma \in [0, \sigma^*), 0 < \sigma^* < \frac{1}{4\alpha_1}, (1 + \frac{\lambda}{\lambda_0}) \frac{3\alpha_1}{2} \leq 1$ 。

(iv) 算法 4(开关  $\sigma$  校正法)

$$f_{k+1} = -\sigma_k P_k \theta_k \quad (7.3-11a)$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & \|\theta_k\| < M_0 \\ \alpha_0, & \|\theta_k\| \geq M_0 \end{cases} \quad (7.3-11b)$$

式中  $\alpha_0$  和  $M_0$  为正的设计常数,要求  $M_0 \geq 2\|\theta^*\|$  和  $(1 + \frac{\lambda}{\lambda_0})\alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_1^2 \frac{\lambda}{\lambda_0}) \frac{\alpha_0}{2} \leq \frac{1}{2}$ 。

在式(7.3-7)中,若选择  $\lambda = 0$  和  $\alpha_0 = \alpha_1$ ,则  $P_k$  为一常数矩阵,由式(7.3-7)所表示的改进最小二乘法变为梯度法,与式(7.3-8)~式(7.3-11)相结合,可构成四种不同的梯度法。利用类似方法,可导出多种自适应算法。

众所周知,基于牛顿法所产生的标准自适应算法有两个缺点:(i) 由于牛顿法应用了纯积分作用,因而在对象具有未建模动态或有界干扰时,标准自适应算法可能会使参数估计偏差趋于无穷大;(ii) 在标准最小二乘法中的协方差矩阵  $P_k$  是单调减的,因而有可能在参数误差还很大的时候,  $P_k$  就已经趋近于零而使自适应算法不再起作用。

本节中所介绍的自适应算法都采用了规范化技术,并对标准(或称之为普通)自适应算法进行了某些修改,例如在自适应律(5)中,协方差矩阵  $P_k$  满足关系式

$$0 < \alpha_0 \leq \lambda_{\min}(P_k) \leq \lambda_{\max}(P_k) \leq \alpha < \infty \quad (7.3-12)$$

这就消除了上述标准自适应算法的缺点(ii)。在对象具有未建模动态或有界干扰时,这种规范化技术的应用以及对标准自适应算法所做的一些修改,对于保证参数估计的收敛和整个自适应系统的稳定性都起着重要作用。

上述公式中所给出的设计常数选择范围是为了进行严格的数学证明所给出的最保守的取值范围。大量的数字仿真结果表明,在实际工程问题中,这些设计常数的选择是相当灵活的,也是很容易选取的。

整个混合自适应闭环系统的稳定性分析可以归结为下述引理和定理的证明。

引理 1: 考虑对象式(7.1-1),当采用控制律式(7.1-4)和控制参数误差测度序列式(7.3-2)时,算法式(7.3-3)具有下列性质:

(i) 对于有界初始条件  $\theta_0$  及任意  $k > 0$ ,  $\theta_k$  和  $\Phi_k$  是有界的;

$$(ii) \frac{1}{N\tau} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} (\Phi_k^T \zeta_k)^2 \leq \frac{g_0}{N\tau} + \mu^2 g_1 \quad (7.3-13)$$

式中  $g_0, g_1 \in R^+$ ,  $\tau$  为控制参数调整周期,  $\Phi_k = \theta_k - \theta^*$ 。

证明: 由式(7.3-2)及式(7.3-3a)可得

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - a \frac{\theta_k^T \zeta_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} - \sigma_k \theta_k - \mu a \frac{\eta_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-14)$$

考虑正定函数  $V_k = \Phi_k^T \Phi_k$ , 根据参考文献[1]的结果有

$$V_{k+1} - V_k \leq - \frac{a}{2} \frac{(\Phi_k^T \zeta_k)^2}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} - \frac{1}{4} \sigma_k \theta_k^T \Phi_k + \mu^2 \beta \quad (7.3-15)$$

式中  $\beta \in R^+$ 。

由于对于任意  $k > 0$ ,  $\sigma_k \theta_k^T \Phi_k \geq 0$ , 式(7.3-15)意味着当  $V_k \geq V_0$ ,  $V_0$  为一有限正常数时,  $V_{k+1} - V_k \leq 0$ 。这就说明对于有界初始条件  $\theta_0$  和任意  $k > 0$ ,  $\Phi_k$  和  $\theta_k$  是有界的。考虑到  $(1 + \zeta_k^T \zeta_k)$  的有界性, 式(7.3-13)可直接由式(7.3-15)导出。

引理 2: 考虑对象式(7.1-1),当采用控制律式(7.1-4)和控制参数误差测度序列式(7.3-2)时,则算法式(7.3-4)具有下列性质:

$$(i) \|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\| \leq \|\theta_0 - \theta^*\|, \quad "k \geq 1 \quad (7.3-16a)$$

$$(ii) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \frac{a_k (\varepsilon_k^2 - 4\rho^2)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} < \infty \quad (7.3-16b)$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k (\varepsilon_k^2 - 4\rho^2)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} = 0 \quad (7.3-16c)$$

$$(iv) \limsup_{k \rightarrow \infty} \limsup_{k \geq 1} \|\theta_k - \theta_{k-1}\| \leq \frac{2\rho}{\sqrt{c}} \quad (7.3-16d)$$

$$(v) \limsup_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_k| \leq 2\rho \quad (7.3-16e)$$

证明: 由式(7.3-4a)和式(7.3-2)可得

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{a_k \zeta_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} (\Phi_k^T \zeta_k + \mu \eta_k) \quad (7.3-17)$$

考虑到  $\alpha \leq 1$ , 可得

$$\begin{aligned} \|\Phi_{k+1}\|^2 &= \|\Phi_k\|^2 - \frac{2a_k(\varepsilon_k - \mu\eta_k)\varepsilon_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} + \frac{a_k^2 \zeta_k^T \zeta_k \varepsilon_k^2}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} \leq \\ &\|\Phi_k\|^2 + \frac{2a_k \mu \eta_k \varepsilon_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} - \frac{a_k \varepsilon_k^2}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \end{aligned} \quad (7.3-18)$$

利用不等式  $2ab \leq La^2 + b^2/L$ , 式中  $L$  为任意常数, 则有

$$\begin{aligned} \|\Phi_{k+1}\|^2 &\leq \|\Phi_k\|^2 + \frac{a_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \left[ \frac{\varepsilon_k^2}{2} + 2(\mu\eta_k)^2 \right] - \frac{a_k \varepsilon_k^2}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \leq \\ &\|\Phi_k\|^2 - \frac{1}{2} \frac{a_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} (\varepsilon_k^2 - 4\rho^2) \end{aligned} \quad (7.3-19)$$

由式(7.3-19) 和式(7.3-4b) 知  $\{\|\Phi_k\|^2\}$  为非增序列, 因而性质(i) 成立。  
由于

$$\|\Phi_{k+1}\|^2 - \|\Phi_k\|^2 \leq -\frac{1}{2} \frac{a_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} (\varepsilon_k^2 - 4\rho^2) \quad (7.3-20)$$

对式(7.3-20) 两边求和可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{a_k (\varepsilon_k^2 - 4\rho^2)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \right\} < \infty \quad (7.3-21)$$

这就意味着性质(ii) 成立。

由于  $\varepsilon_k^2 - 4\rho^2 \geq 0$ , 由性质(ii) 可直接导出性质(iii)。

由式(7.3-4a) 可得

$$\theta_{k+1} - \theta_k = -\frac{a_k \zeta_k \varepsilon_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-22)$$

及

$$\|\theta_{k+1} - \theta_k\|^2 = \frac{a_k^2 \zeta_k^T \zeta_k \varepsilon_k^2}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} \quad (7.3-23)$$

由于  $\alpha \leq 1$ , 由式(7.3-23) 可得

$$\|\theta_{k+1} - \theta_k\|^2 \leq \frac{\varepsilon_k^2}{c} \quad (7.3-24)$$

由性质(iii) 知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon_k^2) \leq 4\rho^2 \quad (7.3-25)$$

因而性质(iv) 和(v) 成立。

引理 3: 考虑对象式(7.1-1), 当采用控制律式(7.1-4) 和控制参数误差测度序列式(7.3-2) 时, 则算法式(7.3-5) 具有下列性质:

$$(i) \quad \|\theta_k - \theta^*\|^2 \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\|^2 \leq K_1 \|\theta_0 - \theta^*\|^2, \quad "k \geq 1 \quad (7.3-26a)$$

$$(ii) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} a_k \left\{ \frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} - \rho^2 \right\} < \infty \quad (7.3-26b)$$

$$(iii) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} - \rho^2 \right) = 0 \quad (7.3-26c)$$

$$(iv) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\theta_k - \theta_{k-1}\| \leq K_2 \rho \quad (7.3-26d)$$

$$(v) \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} |\varepsilon_k| \leq K_3 \rho \quad (7.3-26e)$$

式中  $K_1 = \frac{\lambda_{\max} [P_0^{-1}]}{\lambda_{\min} [P_0^{-1}]}$ ,  $K_2, K_3 \in R^+$ 。

证明：由式(7.3-5a) 可得

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{a_k P_{k-1} \zeta_k \zeta_k^T}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \quad (7.3-27)$$

利用矩阵求逆引理由式(7.3-5b) 知

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + a_k \zeta_k^T \zeta_k \quad (7.3-28)$$

定义非负定序列

$$V_k = \Phi_k^T P_{k-1} \Phi_k \quad (7.3-29)$$

方程式(7.3-27) 和式(7.3-28) 意味着

$$\Phi_{k+1}^T P_k^{-1} \Phi_{k+1} = \Phi_k^T P_k^{-1} \Phi_k - \frac{a_k \varepsilon_k \zeta_k^T P_{k-1} P_k^{-1}}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \quad (7.3-30)$$

以及

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}^T P_k^{-1} \Phi_{k+1} &= [\Phi_k^T (P_{k-1}^{-1} + a_k \zeta_k \zeta_k^T) - \\ &\quad \frac{a_k \varepsilon_k \zeta_k^T P_{k-1} (P_{k-1}^{-1} + a_k \zeta_k \zeta_k^T)}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k}] [\Phi_k - \frac{a_k P_{k-1} \zeta_k \varepsilon_k}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k}] = \\ &\quad \Phi_k^T P_{k-1}^{-1} \Phi_k + a_k \Phi_k^T \zeta_k \zeta_k^T \Phi_k - 2 a_k \varepsilon_k \Phi_k^T \zeta_k + \frac{a_k^2 \varepsilon_k^2 \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \end{aligned} \quad (7.3-31)$$

由式(7.3-2) 得

$$\Phi_k^T \zeta_k = \varepsilon_k - \mu \eta_k \quad (7.3-32)$$

则式(7.3-31) 又可表示为

$$\begin{aligned} V_{k+1} - V_k &\leq a_k (\varepsilon_k - \mu \eta_k)^2 - 2 a_k \varepsilon_k (\varepsilon_k - \mu \eta_k) + \\ &\quad \frac{a_k^2 \varepsilon_k^2 \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \leq a_k \rho^2 - \frac{a_k \varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \leq \\ &\quad - a_k \left[ \frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} - \rho^2 \right] \end{aligned} \quad (7.3-33)$$

因为  $a_k \leq 1$ ,  $\frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \geq \frac{\varepsilon_k^2}{1 + \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k}$ , 根据式(7.3-5c) 知  $V_{k+1} - V_k \leq 0$ , 因而

$$\|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\| \quad (7.3-34)$$

并且

$$\Phi_{k+1}^T P_k^{-1} \Phi_{k+1} \leq \Phi_0^T P_0^{-1} \Phi_0 \quad (7.3-35)$$

由式(7.3-28) 知

$$\lambda_{\min} (P_k^{-1}) \geq \lambda_{\min} (P_{k-1}^{-1}) \geq \lambda_{\min} (P_0^{-1}) \quad (7.3-36)$$

这就意味着

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} (P_0^{-1}) \|\Phi_k\|^2 &\leq \lambda_{\min} (P_{k-1}^{-1}) \|\Phi_k\|^2 \leq \Phi_k^T P_{k-1}^{-1} \Phi_k \leq \\ &\quad \Phi_k^T P_0^{-1} \Phi_k \leq \lambda_{\max} (P_0^{-1}) \|\Phi_0\|^2 \end{aligned} \quad (7.3-37)$$

这就确定了性质(i)。

对式(7.3-33) 由  $k_0$  到  $k_0 + N - 1$  求和, 可得性质(ii)。由于  $a_k \leq 1$ ,  $\frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} - \rho^2 \geq 0$ , 由性质(ii) 可直接得出性质(iii)。考虑到  $a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k$  的有界性, 则性质(v) 是性质(iii) 的直接结果。

由式(7.3-5) 知

$$\theta_{k+1} - \theta_k = - \frac{a_k P_{k-1} \zeta_k \varepsilon_k}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \quad (7.3-38)$$

及

$$\|\theta_{k+1} - \theta_k\|^2 \leq \frac{a_k^2 \|P_{k-1}\| \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k \varepsilon_k^2}{(1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k)^2} \leq \frac{\|P_{k-1}\| \varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \quad (7.3-39)$$

由性质(iii) 知

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_k^2}{1 + a_k \zeta_k^T P_{k-1} \zeta_k} \leq \rho^2 \quad (7.3-40)$$

利用式(7.3-39) 和式(7.3-40) 及  $\|P_{k-1}\|$  的有界性,可导出性质(iv)。

引理 4: 考虑对象式(7.1-1),若采用控制律式(7.1-4) 式和控制参数误差测度序列式(7.3-2),则算法式(7.3-6) 具有下列性质:

$$(i) \text{ 对于所有 } k \geq 1, \|\theta_k - \theta^*\| \leq \|\theta_{k-1} - \theta^*\| \quad (7.3-41a)$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\theta_k - \theta_{k-1}\| = 0 \quad (7.3-41b)$$

$$(iii) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f^2(\rho, \varepsilon_k)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} = 0 \quad (7.3-41c)$$

证明: 由式(7.3-6a) 可得

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - \frac{\tau_{C1} \zeta_k f(\rho, \varepsilon_k)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-42)$$

因而

$$\|\Phi_{k+1}\|^2 - \|\Phi_k\|^2 = \tau_{C1} \left\{ - \frac{2\Phi_k^T \zeta_k f(\rho, \varepsilon_k)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} + \frac{\tau_{C1} \zeta_k^T \zeta_k}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} f^2(\rho, \varepsilon_k) \right\} \quad (7.3-43)$$

利用式(7.3-6b) 可知

$$f(\rho, \varepsilon_k) \Phi_k^T \zeta_k = f(\rho, \varepsilon_k)(\varepsilon - \mu \eta_k) \geq f^2(\rho, \varepsilon_k) \quad (7.3-44)$$

及

$$- \Phi_k^T \zeta_k f(\rho, \varepsilon_k) \leq - f^2(\rho, \varepsilon_k) \quad (7.3-45)$$

因而

$$\|\Phi_{k+1}\|^2 - \|\Phi_k\|^2 \leq \tau_{C1} \left( -2 + \frac{\tau_{C1} \zeta_k^T \zeta_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \right) \frac{f^2(\rho, \varepsilon_k)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.3-46)$$

考虑到  $0 < a < \frac{1}{\tau}$ ,  $0 < \tau_{C1} < 1$  以及  $-2 + \frac{\tau_{C1} \zeta_k^T \zeta_k}{c + \zeta_k^T \zeta_k} < 0$ , 则由式(7.3-46) 可得

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq \|\Phi_k\| \quad (7.3-47)$$

这就意味着性质(i) 成立。因而对于任意  $k \geq 1$ ,  $\Phi_k$  和  $\theta_k$  是有界的,并且由式(3-46) 可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \frac{f^2(\rho, \varepsilon_k)}{c + \zeta_k^T \zeta_k} < \infty \quad (7.3-48)$$

由式(7.3-48) 知性质(iii) 成立,并且

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} \frac{\zeta_k^T \zeta_k f^2(\rho, \varepsilon_k)}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} < \infty \quad (7.3-49)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\zeta_k^T \zeta_k f^2(\rho, \varepsilon_k)}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} = 0 \quad (7.3-50)$$

由式(7.3-42) 得



$$\| \Phi_{k+1} - \Phi_k \|^2 = \frac{(\tau_{C1})^2 \zeta_k^T \zeta_k f^2(\rho, \varepsilon_k)}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} \leq \frac{\zeta_k^T \zeta_k f^2(\rho, \varepsilon_k)}{(c + \zeta_k^T \zeta_k)^2} \quad (7.3-51)$$

由于  $\theta_{k+1} - \theta_k = \Phi_{k+1} - \Phi_k$ , 性质(ii) 可由式(7.3-50) 和式(7.3-51) 导出。

算法(5) 具有与算法(1) 相类似的性质, 由于证明过程冗长复杂, 此处略去其证明。

引理 5: 考虑对象式(7.1-1) 及 § 7.1 中的混合自适应控制系统结构, 若采用自适应算法(1) ~ (5), 则对于任意  $T > 0$ , 存在着非负常数  $g_2$ ,  $g_3$  和  $g_4$ , 使得

$$\frac{1}{T} \int_{t_{k0}}^{t_{k0}+T} \frac{|\Phi_k^T \omega(\tau)|}{m(\tau)} d\tau \leq \frac{g_2}{T} + \mu g_3 + \mu^2 g_4 \quad (7.3-52)$$

式中

$$\omega^T(t) = [\omega_1^T(t) \quad \omega_2^T(t) \quad y(t)] \quad (7.3-53)$$

证明: 由于  $\|\zeta_k\|$ ,  $\|\omega(t)\|/m(t)$ ,  $\|\theta_k\|$  和  $\|\Phi_k\|$  是有界的, 对于自适应算法(1), 若适当选取  $[t_k, t_{k+1})$  使在区间  $[t_{k0}, t_{k0} + T)$  内绝大多数  $\zeta_k$  不为零, 则由式(7.3-13) 可直接导出式(7.3-52)。对于自适应算法(2) 和(3), 关系式(7.3-52) 可分别由式(7.3-16e) 和式(7.3-26e) 直接导出。下面来讨论自适应算法(4)。

根据  $f(\rho, \varepsilon_k)$  的定义可得

$$f^2(\rho, \varepsilon_k) = \begin{cases} \varepsilon_k^2 \pm 2\varepsilon_k \rho + \rho^2, & |\varepsilon_k| > 0 \\ 0, & |\varepsilon_k| \leq \rho \end{cases} \quad (7.3-54)$$

由于  $\|\zeta_k\|$  和  $|\varepsilon(k)|$  是有界的, 由式(7.3-41a) 知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^2(\rho, \varepsilon_k) = 0 \quad (7.3-55)$$

因而

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k^2 \leq K_4 \rho + \rho^2, \quad K_4 \in R^+ \quad (7.3-56)$$

故存在一时刻  $k_e \geq k_0$ , 使得对于所有  $k \geq k_e$ , 有

$$\varepsilon_k^2 \leq K_5 \rho + K_6 \rho^2 \quad (7.3-57)$$

式中  $K_5, K_6 \in R^+$ 。

利用式(7.3-2)、式(7.3-6) 和式(7.3-4c) 及  $\|\zeta_k\|$  的有界性, 由式(7.3-57) 可得

$$\frac{1}{N} \sum_{k=k_e}^{k_e+N-1} (\Phi_k^T \zeta_k)^2 \leq \mu K_7 + \mu^2 K_8 \quad (7.3-58)$$

以及

$$\frac{1}{N} \sum_{k=k_e}^{k_e+N-1} \|\Phi_k\|^2 \leq \mu K_9 + \mu^2 K_{10} \quad (7.3-59)$$

式中  $K_7 \sim K_{10} \in R^+$ 。

令  $T = N\tau$ , 注意到  $\|\Phi_k\|$  和  $\|\omega(t)\|/m(t)$  的有界性, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_{k0}}^{t_{k0}+T} \frac{|\Phi_k^T \omega(\tau)|}{m(\tau)} d\tau &= \frac{1}{T} \int_{t_{k0}}^{t_{ke}} \frac{|\Phi_k^T \omega(\tau)|}{m(\tau)} d\tau + \frac{1}{T} \int_{t_{ke}}^{t_{ke}+T} \frac{|\Phi_k \omega(\tau)|}{m(\tau)} d\tau \leq \\ &\frac{1}{T} K_{11} + \frac{1}{T} \sum_{k=k_e}^{k_e+N-1} \|\Phi_k\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\|\omega(\tau)\|}{m(\tau)} d\tau \leq \\ &\frac{K_{11}}{T} + \frac{1}{N} K_{12} \sum_{k=k_e}^{k_e+N-1} \|\Phi_k\| \end{aligned} \quad (7.3-60)$$

式中  $K_{11}, K_{12} \in R^+$ 。

将式(7.3-60)与式(7.3-59)相结合,并且令  $g_2 = K_{11}$ ,  $g_3 = K_9 K_{12}$ ,  $g_4 = K_{10} K_{12}$ ,则可导出式(7.3-52)。证明完毕。

在导出关系式(7.3-52)之后,稳定性分析的其余部分便可归结为与 §7.1 中的定理极为相似的下述定理的证明。

定理: 存在  $\mu^* > 0$ , 对于任意的  $\mu \in [0, \mu^*]$  和任何有界初始条件, 由式(7.1-1)、式(7.1-3)、式(7.1-4)、式(7.3-1)和式(7.3-2)及自适应算法(1)~(5)所构成的闭环自适应系统中的所有信号有界, 并且系统的跟踪误差属于残差集

$$D_e = \left\{ e : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \|e(t)\| dt \leq \mu n_1 + \mu^2 n_2 \right\} \quad (7.3-61)$$

式中  $n_1, n_2 \in R^+$ , 对于自适应算法(2)~(4),  $n_1$  和  $n_2$  与所选择的参数  $\rho$  有关。

该定理可以采用与 §7.1 中的定理完全相同的方法进行证明, 在此不再重述。需要指出的是, 在 §7.1 定理的证明中, 一开始我们应用了跟踪误差方程式(7.1-8)的非最小状态表达式(7.1-38), 如果一开始就应用跟踪误差方程(7.1-8)的最小状态表达式, 也可以取得同样的结果。现将此证明过程作一简述。

式(7.1-8)的最小状态表达式可以写为

$$\dot{e} = A_m e + b_m \Phi_k^T \omega \quad (7.3-62a)$$

$$a = h_m^T e + \mu \eta \quad (7.3-62b)$$

式中  $A_m$  是一稳定阵, 并且  $h_m^T (sI - A_m)^{-1} b_m = W_m(s)$ 。

定义正定函数

$$W = K_1 e^T P e + \frac{1}{2} m^2 \quad (7.3-63)$$

则可求出

$$\dot{W} \leq -K_1 \|e\|^2 + 2K_1 e^T P b_m \Phi_k^T \omega - \delta_0 m^2 + \delta_1 m(\|u\| + \|y\| + 1) \quad (7.3-64)$$

因为  $\|y_m(t)\|$  是有界的, 由式(7.3-62)可得

$$\|y\| \leq \alpha \|e\| + \alpha + \mu \|\eta\| \quad (7.3-65)$$

式中  $\alpha, \alpha \in R^+$ 。

由于  $\|y\|/m$  和  $\|u\|/m$  有界, 因而对于任意  $c \in R^+$ ,  $\|u\|/(c + \|y\|)$  有界, 并且

$$\|u\| + \|y\| + 1 \leq \beta_3 \|e\| + \beta_4 + \mu \beta_5 \|\eta\| \quad (7.3-66)$$

式中  $\beta_3, \beta_4, \beta_5 \in R^+$ 。

将式(7.3-66)代入式(7.3-64)得

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -K_1 \|e\|^2 + K_1 \beta_3 \|e\| \|\Phi_k^T \omega\| - \delta_2 m^2 + \beta_6 m + \\ & \beta_7 \|e\| m + \mu \beta_2 m^2 \end{aligned} \quad (7.3-67)$$

式中  $\beta_6 = 2 \|P b_m\|$ ,  $\beta_7 = \delta_1 \beta_4$ ,  $\beta_8 = \delta_1 \beta_5$ ,  $\beta_9 = \beta_3 \delta_1 \|\eta\|/m$ 。

接下去采用与 §7.1 中的定理证明过程完全相同的方法进行配方、化简、解微分方程等, 便可导出定理中的式(7.3-62)。

## §7.4 基于 Narendra 方案的混合自适应修正方案

受 §6.1 中 Narendra 方案的启发, 我们还可以采用与 §7.3 中的方案不同的另一种方案: 将式(7.1-10)等号两边先乘以  $\varepsilon_1(t)$ , 再除以  $m^2(t)$ , 然后在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上积分, 则有

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon^2(t)}{m^2(t)} dt = \Phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \zeta(t)}{m^2(t)} dt + \mu \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \eta(t)}{m^2(t)} dt \quad (7.4-1)$$

令

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1^2(t)}{m^2(t)} dt, & \zeta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \zeta(t)}{m^2(t)} dt, \\ \eta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \eta(t)}{m^2(t)} dt \end{aligned} \quad (7.4-2)$$

则方程式(7.4-1)可写为

$$\varepsilon_k = \Phi_k^T \zeta_k + \mu \eta_k \quad (7.4-3)$$

根据方程式(7.4-3)便可采用 § 7.3 中的自适应算法(1) ~ (5) 中的任何一种算法去离散地估计控制参数。

但是,在对关系式(7.4-3)及自适应算法(1) ~ (5)作进一步分析时可以看到,上述方案中所采用的控制参数误差测度序列 $\{\varepsilon_k \zeta_k\}$ 实际上相当于 $\varepsilon_1(t)$ 的三次方序列。当 $|\varepsilon_1(t)|$ 大于1时,这种方案对控制参数误差相当敏感,参数估计的收敛速度较快。但是,当 $|\varepsilon_1(t)|$ 小于或等于1时,这种方案对控制参数误差的灵敏度变得极差,参数估计的收敛速度变得极其缓慢,甚至无法接近理想控制参数,这种方案的这一缺点在进行数字仿真时显得十分突出。为了利用这一方案的优点并弥补其不足,可以将本节中由式(7.4-1) ~ 式(7.4-3)所表示的误差模型与 § 7.3 中由式(7.3-1)和式(7.3-2)所表示的误差模型交替使用,构成一种变换误差模型方案,即

$$\varepsilon_k = \Phi_k^T \zeta_k + \mu \eta_k \quad (7.4-4)$$

当 $|\varepsilon_1(t)| > b$ 时,取

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1^2(t)}{m^2(t)} dt, & \zeta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \zeta(t)}{m^2(t)} dt, \\ \eta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t) \eta(t)}{m^2(t)} dt \end{aligned} \quad (7.4-5)$$

当 $|\varepsilon_1(t)| \leq b$ 时,取

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(t)}{m(t)} dt, & \zeta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(t)}{m(t)} dt, \\ \eta_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\eta(t)}{m(t)} dt \end{aligned} \quad (7.4-6)$$

式中 $b$ 为由设计者选择的常数。当采用自适应算法

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{\varepsilon_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.4-7)$$

及其相类似的自适应算法时, $b$ 可取1.1 ~ 1.3,但收敛速度较慢。为了改善自适应算法的收敛速度,可增加设计参数 $a_k$ ,构成自适应算法

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \frac{a_k \varepsilon_k \zeta_k}{1 + \zeta_k^T \zeta_k} \quad (7.4-8)$$

式中设计参数 $a_k$ 可以选为常数,也可根据需要选为变量。在具体应用时, $b$ 的取值应与 $a_k$ 的取值综合进行考虑,建议用数字仿真的方法来选取 $a_k$ 和 $b$ 的最佳值。

利用由式(7.4-4) ~ 式(7.4-6)所表示的变换误差模型方案也可以采用 § 7.3 的自适应算法(1) ~ (5) 中任何一种算法去估计控制参数,但无论采用何种算法都会遇到类似问题,需

要对  $b$  和  $a_k$  的选取进行综合考虑。

大量的数字仿真结果表明,当系统跟踪误差较大时,参数的调整速度很快,而在系统跟踪误差调整到较小值之后,这种变换误差模型方案仍在进行自适应调整。由于采用了积分器,系统的跟踪误差可以逐渐调整到零。

上述变换误差模型方案显然是利用了混合自适应控制系统的控制参数误差向量  $\Phi_k$  在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上为常数这一特点,并结合开关原理所构成的。仿照此方案,再利用线性系统的叠加原理可以构造出多种误差模型方案,这也是混合自适应控制系统的优点之一,而对于全连续或全离散系统来说,则无法做到这一点。

例题:设对象的传递函数为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s-1)}(1 - \mu s) \quad (7.4-9)$$

式中  $0 < \mu < 1$ ,对象已建模部分的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad (7.4-10)$$

为具有不稳定极点的非最小相位系统,对象的未建模部分用  $-\frac{1}{s(s-1)}\mu s$  表示。所选取的参考模型为

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (7.4-11)$$

选用的规范信号  $m(t)$  满足微分方程

$$\dot{m}(t) = -0.7m(t) + |u(t)| + |y(t)| + 1, \quad m(0) = 2 \quad (7.4-12)$$

为了便于方案间的相互比较,计算时都采用了自适应算法式(7.4-8)。

为了便于叙述,我们将 § 6.1 中的方案称为 Narendra 方案,将本节中由式(7.4-11)~式(7.4-3)所表示的方案称为修正方案,式(7.4-4)~式(7.4-6)所表示的方案称为变换误差模型方案,计算时主要是对这三种方案进行了比较。

计算结果表明,当闭环系统中不含高频信号时,尽管对象具有建模误差,但只要这种建模误差在低频段的影响较小,则 Narendra 方案仍具有良好的跟踪性能。

但是,当外参考输入信号  $r(t)$  为方波信号时,由于方波中含有高频谐波,则 Narendra 方案的跟踪性能变得很差。图 7.4-1,图 7.4-2,图 7.4-3 分别示出了 Narendra 方案、修正方案和变换误差模型方案在  $r(t)$  是方波信号时的仿真曲线。可以看出,Narendra 方案无法使对象的输出  $y(t)$  跟踪参考模型的输出  $y_m(t)$ ,修正方案有较好的跟踪能力,但有一定的跟踪误差。变换误差模型方案在初始段有较大的跟踪误差,但经过一段时间的调整之后,跟踪误差变得很小。

图 7.4-4、图 7.4-5 和图 7.4-6 分别示出了当  $r(t)$  为正弦信号时三种方案的跟踪误差曲线。在相同的条件下,Narendra 方案很快就发散。修正方案虽然没有发散,但当跟踪误差  $|e(t)|$  小于 1 时收敛速度很慢,尽管适当加大  $a_k$  值使收敛速度加快了一点,但在调整时间长达 500 s 时,系统的最大跟踪误差仍大于 0.7。而变换误差模型方案在 45 s 时就已经使跟踪误差减小到一个很小的范围,而在 45 s 后仍在继续进行调整,由于采用了积分器,系统的跟踪误差可以逐渐趋于零。

当然,任何一种方案都有一定的适用范围,因而我们不能只凭在一定范围内的研究成果就

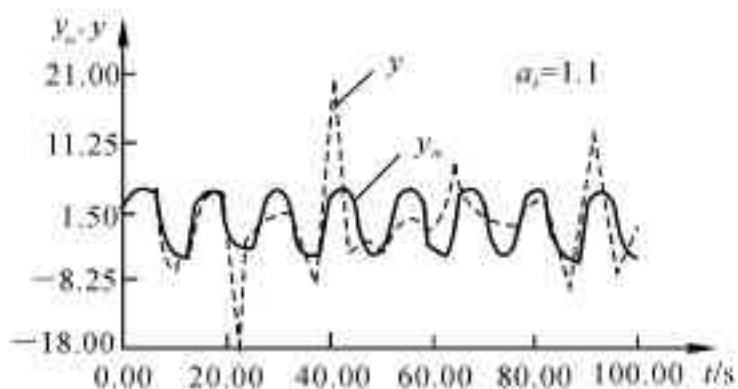


图 7.4-1  $r(t)$  为方波信号时, Narendra 方案跟踪曲线

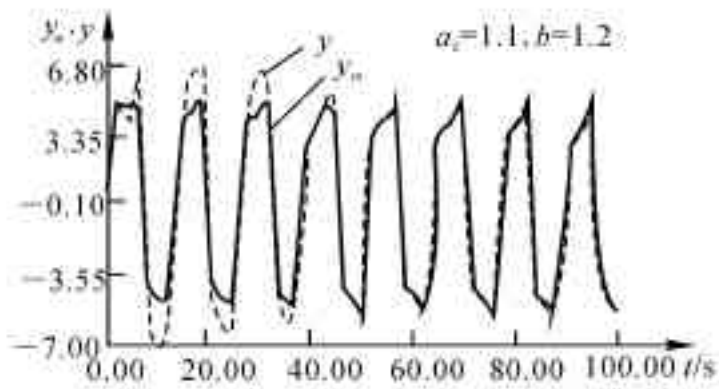


图 7.4-2  $r(t)$  为方波信号时, 修正方案跟踪曲线

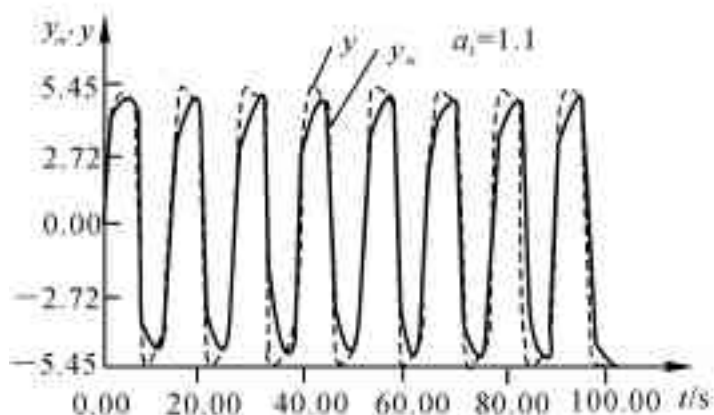


图 7.4-3  $r(t)$  为方波信号时, 变换误差模型方案跟踪曲线

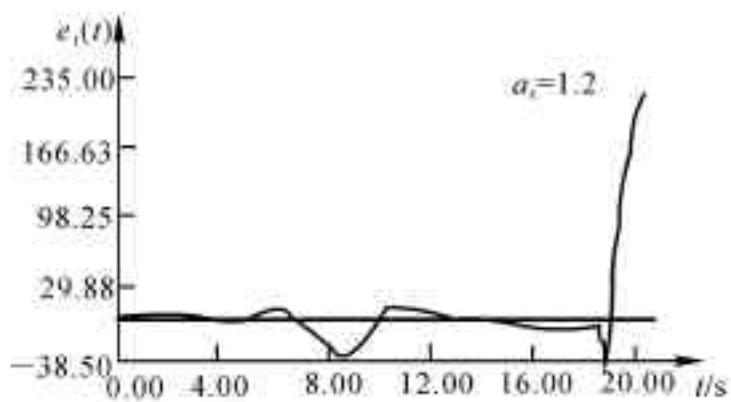


图 7.4-4  $r(t)$  为方波信号时, Narendra 方案跟踪误差曲线

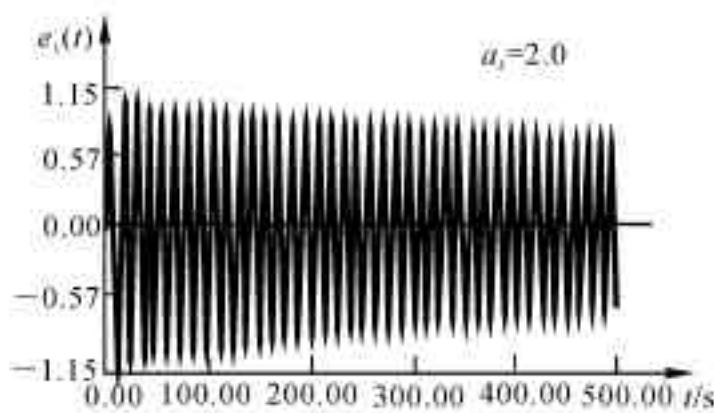


图 7.4-5  $r(t)$  为方波信号时, 修正方案跟踪误差曲线

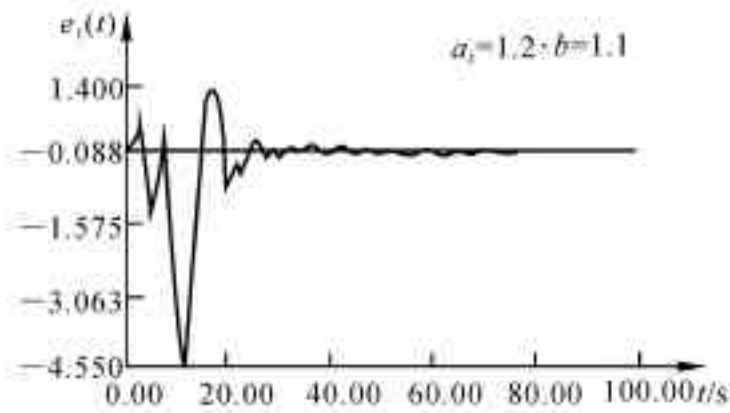


图 7.4-6  $r(t)$  为方波信号时, 变换误差曲线

作出结论说哪一种方案最好或哪一种方案最差, 因为各有各的特点。例如, 对于理想对象, 在三种方案中 Narendra 方案也许是最好的一种方案。但当对象具有未建模动态时, 本节中的两种方案对于系统的跟踪性能都有很大改进。当系统存在未建模动态且要求跟踪精度高, 但对初始段的过渡过程要求又不太严格时, 采用变换误差模型方案较好。而当系统存在未建模动态时, 若对系统的跟踪精度要求不高, 但对系统的超调量有较严格的要求, 则可选择本节中的修正

方案。

## § 7.5 对象具有未建模动态时的间接式 混合自适应极点配置方案

考虑单输入-单输出对象

$$y(t) = G(s)u(t) = \{G(s)[1 + \mu\Delta_m(s)] + \mu\Delta_a(s)\}u(t) \quad (7.5-1)$$

式中  $G(s) = Z_p(s)/R_p(s)$  是对象已建模部分传递函数,  $G(s)$  严格真,  $\mu\Delta_a(s), \mu\Delta_m(s)$  分别是对象的相加和相乘未建模动态,  $\mu > 0$  表示其变化率。 $R_p(s)$  为  $n$  阶首一多项式,  $Z_p(s)$  为  $n-1$  阶 Hurwitz 多项式,  $R_p(s), Z_p(s)$  互质。对于未建模动态, 假设: (i)  $\Delta_a(s)$  为严格真稳定传递函数; (ii)  $\Delta_m(s)$  为稳定传递函数; (iii) 使  $\Delta_a(s-p)$  和  $\Delta_m(s-p)$  的极点稳定的稳定域  $P > 0$  的下界  $P_0$  已知。

选取控制策略

$$q(s)u(t) = K(t, s)u(t) + H(t, s)y(t) + q(s)r(t) \quad (7.5-2)$$

式中  $q(s)$  为任选的  $n-1$  阶 Hurwitz 多项式,  $K(t, s), H(t, s)$  为  $n-1$  阶多项式,  $r(t)$  为一致有界参考输入。

控制目的是在未建模动态满足假设(i) ~ (iii) 的条件下, 利用所设计的混合自适应控制器, 使得对于某一  $\mu^* > 0$  和任意的  $\mu \in [0, \mu^*)$ , 闭环系统的极点趋于  $n$  阶 Hurwitz 多项式  $R_m(s)$  的相应零点, 输出  $y(t)$  尽可能紧密地跟踪隐参考模型

$$R_m(s)y_m(t) = Z_p(s)r(t) \quad (7.5-3)$$

的输出  $y_m(t)$ 。

定义滤波信号

$$y(t) \leftarrow \frac{1}{f(s)}y(t), \quad u(t) \leftarrow \frac{1}{f(s)}u(t)$$

式中  $f(s)$  为任选的至少为  $n$  阶的 Hurwitz 多项式, 则式(7.5-1) 可写为

$$s^n y(t) = \theta^{*T} \Phi(t) + \mu \eta(t) \quad (7.5-4)$$

式中  $\theta^*$  为  $G(s)$  的系数向量,  $\Phi(t)$  为信号向量,  $\eta(t)$  为未建模动态引起的干扰项。

选取参数辨识采样时间序列

$$t_{k+1} - t_k = N\tau_k, \quad t_k^i = t_k + i\tau_k, \quad 0 \leq i \leq N \quad (7.5-5)$$

(7.5-6)

引入规范信号  $m(t)$ ,  $m(t)$  满足微分方程

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1 (|u(t)| + |y(t)| + 1), \quad m(0) \geq \delta_0 / \delta_1 \quad (7.5-7)$$

式中  $\delta_0$  和  $\delta_1$  为设计常数, 其选择方法可参考 § 7.1。

令  $\varepsilon_k^i = e^{i\delta_0 t_k} m(t_k)$ ,  $\Phi_n(t_k^i) = \Phi(t_k^i) / m(t_k^i)$ , 则可采用下述带遗忘因子的协方差重置递推最小二乘法获得对象参数  $\theta^*$  的估值序列  $\theta_k^i$

$$\theta_k^i = \theta_k^{i-1} + \frac{p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1})}{1 + \Phi_n^T(t_k^{i-1}) p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1})} \varepsilon_k^{i-1} \quad (7.5-8a)$$

$$p_k^{i-1} = \frac{1}{\lambda_k^{i-1}} \left[ p_k^{i-2} - \frac{p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1}) \Phi_n^T(t_k^{i-1}) p_k^{i-2}}{1 + \Phi_n^T(t_k^{i-1}) p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1})} \right] \quad (7.5-8b)$$

$$\lambda_k^{i-1} = 1 - \frac{\Phi_k^T(t_k^{i-1}) p_k^{i-2} p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1})}{\text{tr } p_0 [1 + \Phi_n^T(t_k^{i-1}) p_k^{i-2} \Phi_n(t_k^{i-1})]} \quad (7.5-8c)$$

$$p_k^{-1} = p_{k-1}^{N-1} = \frac{1}{\alpha_0} I > 0, \quad \theta_k^0 = \theta_{k-1}^N = \theta_k, \quad \theta_{-1}^N = \theta_0 \text{ (任选)} \quad (7.5-8d)$$

控制器增益在  $t_k$  时刻的估值可以通过求解 Diophantine 方程

$$H_k(s) Z_{p,k-1}(s) + K_k(s) R_{p,k-1}(s) = q(s) [R_{p,k-1}(s) - R_m(s)] \quad (7.5-9)$$

来确定,式中  $R_{p,k-1}(s)$  和  $Z_{p,k-1}(s)$  分别是  $R_p(s)$  和  $Z_p(s)$  在  $t_k$  时刻的估值。

整个混合自适应控制系统的稳定性分析,可归结为下述定理的证明。

定理: 存在一个标量  $\mu^* > 0$ , 使得对于任意的  $\mu \in [0, \mu^*)$  以及任何有界初始条件, 由方程式(7.5-1)、式(7.5-2)、式(7.5-8)和式(7.5-9)所组成的自适应闭环系统所有信号有界, 并且系统跟踪误差  $e(t) = y(t) - y_m(t)$  属于残差集

$$D_e = \left\{ e : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |e(\tau)| d\tau \leq \mu q_2, \quad \forall t_1 > 0, T > 0 \right\} \quad (7.5-10)$$

式中  $q$  为一正常数。

有关此定理的证明可参考 § 7.1 及 § 7.3。

例题: 设控制对象为

$$y(t) = \frac{1}{s^2 + 4s + 26} \left( 1 + 0.1 \frac{1}{s + 20} \right) u(t) \quad (7.5-11)$$

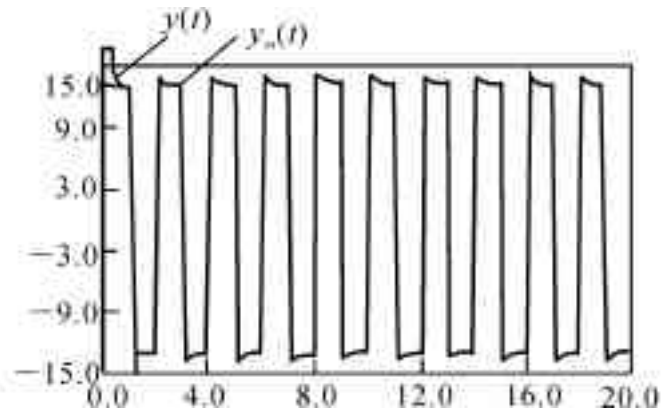


图 7.5-1 混合自适应系统的跟踪曲线

选取  $R_m(s) = s^2 + 40s + 800$ 。图 7.5-1 示出了系统的跟踪曲线, 可见本节中的方案在对象具有未建模动态时跟踪性能良好。

## § 7.6 对象具有未建模动态时的混合自适应控制系统的持续激励问题

系统的持续激励问题一直是国外学者所热心研究的内容之一, 我国的航天基础性研究基金选题指南中, 也曾将系统持续激励问题的研究作为一项课题列入, 这表明在国内这一问题的研究也引起了人们的重视。

在前面几节中, 我们介绍了几种对象具有未建模动态时混合自适应控制器的设计方法, 也谈到过系统的持续激励问题, 其中有的控制算法直接要求系统是持续激励的, 有的虽然不要求系统必须持续激励, 但数字仿真结果表明, 当系统满足持续激励条件时, 可以明显改善系统的跟踪性能。所以, 系统的持续激励问题也是与混合自适应控制有密切关系的一个重大内容, 虽然国外对全连续和全离散系统的持续激励问题研究较多, 但关于混合自适应控制系统持续激励问题的研究却很少见到。

在混合自适应控制系统稳定性分析中, 最困难的一个问题就是在证明了离散量收敛之后, 如何保证相应的连续量也是收敛的。在 § 6.3、§ 6.4 中, 曾用维数不变原理解决了这一问题。对理想系统来说, 为了保证采样值  $\zeta(k)$  对于连续时间信号  $\zeta(t)$  的维数不变, 可以通过选取采样频率达到这一目的。但是, 当系统存在干扰和未建模动态时, 仅仅通过选择采样频率并不一

定能够保证采样值对于连续信号的维数不变,因为干扰或未建模动态有可能降低系统的持续激励度。在系统激励度较低的情况下,由于干扰或未建模动态的影响, $\mu$ 个元素持续激励独立信号经采样后有可能变成 $L$ 个( $L < \mu$ )元素持续激励独立信号。为了避免这种情况的出现,一个较妥善的解决方法是使系统的已建模部分,即系统的主体部分的信号是充分富裕的,即保持高水平的激励,这就要引入“主富输入”概念。

所谓“主富输入”问题,就是研究在对象存在干扰或未建模动态情况下,如何通过选择系统的外参考输入信号的幅值和频率来保证系统主导部分的有关信号具有较高水平的持续激励。

本节将较详细地研究对象具有未建模动态时混合自适应控制系统的持续激励问题,给出保证闭环混合自适应控制系统持续激励的一种方法。

定义1(频谱线):对于有界函数  $x(t): [0, \infty) \rightarrow R^n$  来说,若关系式

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} x(t) \exp(-j\omega t) dt = X(\omega), \quad s \geq 0 \quad (7.6-1)$$

成立,并且  $X(\omega) \neq 0$ ,则称  $x(t)$  在频率  $\omega$  处具有一条幅值为  $X(\omega)$  的频谱线。

定义2(激励度或激励水平):对于有界函数  $x(t): [0, \infty) \rightarrow R^n$  来说,若存在  $\delta, \beta \in R^+$  ( $R^+$  表示有界正实数集),使得

$$\int_s^{s+\delta} x(t) x^T(t) dt \geq \beta \delta I, \quad s \geq 0 \quad (7.6-2)$$

则称  $x(t)$  是持续激励的,其激励度或激励水平为  $\beta$ 。

定义3:对于函数  $f(x)$  的自变量  $x \in R$  的任意确定值  $x_1 \in x$ ,若存在  $c \in R^+$  使得  $\|f(x_1)\| = c|x_1|$ ,则称函数  $f(x)$  是  $o(x)$ 。

定义4(主富输入):对于具有未建模动态的对象

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_0(s)[1 + \mu\Delta_2(s)] + \mu\Delta_1(s) \quad (7.6-3)$$

式中  $G_0(s)$  是对象已建模部分的传递函数, $G(s)$  严格真, $\mu\Delta_1(s)$  和  $\mu\Delta_2(s)$  分别是对对象的相加和相乘未建模动态,正标量参数  $\mu$  表示其变化率, $\Delta_1(s)$  是严格真稳定传递函数, $\Delta_2(s)$  是稳定传递函数,当对象的相对阶次  $n^* > 2$  时, $\Delta_2(s)$  允许是非真的。设向量信号

$$\zeta = [W_m(s)(sI - F)^{-1}qu \quad W_m(s)(sI - F)^{-1}qy \quad W_m(s)y]^T \quad (7.6-4)$$

式中  $s, F$  和  $q$  为自适应控制系统中的辅助变量设计参数, $W_m(s)$  为参考模型

$$y_m = W_m(s)r \quad (7.6-5)$$

的传递函数, $r(t)$  和  $y_m(t)$  分别为参考模型的输入和输出,具体的混合自适应控制方案可参看 §7.1 ~ §7.5。若向量信号  $\zeta(t)$  是持续激励的,并且激励度  $\beta > o(\mu^2)$ ,则称外参考输入信号  $r(t)$  是主富输入。

定义5( $\mu$ 小均值):对于有界分段连续函数  $x(t): [t_0, t_0 + T] \rightarrow R^n$  来说,若存在常数  $c \in R^+$  使得

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|x(t)\| dt \leq \mu + \frac{c}{T} \quad (7.6-6)$$

式中  $T > 0, t_0 > 0$ ,则称  $x(t)$  具有  $\mu$  小均值。

分析 §7.1 ~ §7.5 中的混合自适应控制方案可以看出,尽管其形式各不相同,但可归纳为下列统一形式的表达式



$$y_m = W_m(s) r \quad (7.6-7)$$

$$u = \theta_{1k}^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y + \theta_{2k}^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u + r \quad (7.6-8)$$

$$\zeta = \left[ \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} u \right]^T \quad (7.6-9)$$

$$H(s) = \left[ \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} \quad \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} G_0^{-1}(s) \right]^T W_m(s) \quad (7.6-10)$$

$$\zeta_m = \left[ \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} y_m \quad \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} u_m \right]^T \quad (7.6-11)$$

$$u_m = \theta^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_m + \theta^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_m + r \quad (7.6-12)$$

$$\alpha^T(s) = [1 \quad s \quad \cdots \quad s^{n-1}] \quad (7.6-13)$$

式中  $\Lambda(s)$  为 Hurwitz 多项式,  $\theta_{1k}$  和  $\theta_{2k}$  为控制参数向量, 在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上  $\theta_{1k}$  和  $\theta_{2k}$  为常值向量,  $\theta_1^*$  和  $\theta_2^*$  是使关系式

$$y_m = G_0(s) u_m \quad (7.6-14)$$

成立的理想控制参数向量。

引理 1: 令

$$\zeta_m = H(s) r \quad (7.6-15)$$

则对于所有  $\mu \in [0, \mu^*]$ ,  $(\zeta - \zeta_m)$  是  $n_2(\mu + \varepsilon)$  小均值, 且  $n_2 \in R^+$ ,  $\mu^*$  和  $\varepsilon$  为小的常数。

证明: 利用式(7.6-3)和式(7.6-14)可得

$$u - u_m = [G_0^{-1}(s)(y - y_m) - \mu[\Delta_2(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_1(s)]u] \quad (7.6-16)$$

根据式(7.6-9)、式(7.6-11)和式(7.6-16)有

$$\begin{aligned} \zeta - \zeta_m &= \left[ \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)}(y - y_m) - \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)}(u - u_m) \right]^T = \\ &= H_1(s)(y - y_m) + \mu H_2(s)u \end{aligned} \quad (7.6-17)$$

式中

$$H_1(s) = \left[ \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} \quad \frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)} G_0^{-1}(s) \right]^T \quad (7.6-18)$$

$$H_2(s) = [0 \quad -\frac{\alpha^T(s)}{\Lambda(s)}(\Delta_2(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_1(s))]^T \quad (7.6-19)$$

并且  $H_1(s)$  和  $H_2(s)$  都是严格真稳定传递函数矩阵。

令  $h(t)$  为  $H_1(s)$  的脉冲响应函数。由于  $H_1(s)$  为严格真稳定传递函数矩阵, 故  $h(t) \in L^1$ 。又因为  $H_2(s)$  为严格真稳定传递函数矩阵并且  $u(t)$  有界, 则  $H_2(s)u(t)$  有界,  $\|\mu H_2(s)u(t)\| \leq K_0 \mu$ ,  $K_0 \in R^+$ 。因而有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \|\zeta(t) - \zeta_m(t)\| dt &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} |y(t) - y_m(t)| dt \left[ \int_0^\infty \|h(t)\| dt \right] + \\ &K_0 \mu T + G_0 \leq K_1 \left[ \int_{t_0}^{t_0+T} |y(t) - y_m(t)| dt \right] + K_0 \mu T + G_0 \end{aligned} \quad (7.6-20)$$

式中  $G_0, K_0 \in R^+$ 。

对于任意  $T > 0$  和  $t_0 \geq 0$  有

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |y(t) - y_m(t)| dt \leq n_1(\mu + \varepsilon) + \frac{c}{T} \quad (7.6-21)$$

式中  $\varepsilon > 0$  为一小的常数,  $c \in R^+$ 。

由式(7.6-20) 和式(7.6-21) 可得

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \|\zeta(t) - \zeta_m(t)\| dt \leq K_1 n(\mu + \varepsilon) + K_0 \mu + \frac{K_1 C + C_0}{T} \quad (7.6-22)$$

令  $n_2 = K_1 n + K_0$ , 则证明完毕。

引理 2: 若参考输入信号  $r(t)$  在频率  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  ( $N \geq 2n$ ) 具有频谱线  $\{\omega_i, R(\omega_i)\} \in \Omega$ ,

$$\Omega = \{\omega \in R, R(\omega) \in C: |\omega| < o(1), |R(\omega)| > o(\mu)\} \quad (7.6-23)$$

并且当  $i \neq j$  时,  $|\omega_i - \omega_j| > o(\mu)$ , 则  $\zeta_m(t)$  是持续激励的, 并且激励度  $\beta_m > o(\mu^2)$ 。

证明: 根据参考文献[11] 知, 若  $r(t)$  在  $\omega$  具有幅值为  $R(\omega)$  的频谱线, 则  $\zeta_m(t)$  在  $\omega$  处频谱线的幅值为

$$Z_m(\omega) = H(j\omega) R(\omega) \quad (7.6-24)$$

并且

$$\int_s^{s+\delta} \zeta_m(t) \zeta_m^T(t) dt \geq \delta \|\mathfrak{s}^{-1}\|^{-2} I \quad (7.6-25)$$

式中  $\delta > 0$  为任意常数,

$$\mathfrak{s} = [Z_m(\omega_1) \quad Z_m(\omega_2) \quad \dots \quad Z_m(\omega_N)]^T \quad (7.6-26)$$

对于本章中所研究的闭环系统, 根据式(7.6-10) 有

$$H(j\omega) = Q(j\omega) W_m(j\omega) \quad (7.6-27)$$

其中

$$Q(j\omega) = \left[ \frac{\alpha^T(j\omega)}{\Lambda(j\omega)} \quad \frac{\alpha^T(j\omega)}{\Lambda(j\omega)} G^{-1}(j\omega) \right]^T \quad (7.6-28)$$

由式(7.6-24)、式(7.6-26)、式(7.6-27) 和式(7.6-28) 可得

$$\mathfrak{s}^{-1} = AB \quad (7.6-29)$$

$$A = ([Q(j\omega_1) R(\omega_1) \quad Q(j\omega_2) R(\omega_2) \quad \dots \quad Q(j\omega_N) R(\omega_N)]^T)^{-1} \quad (7.6-30)$$

$$B = \text{diag}[W_m^{-1}(j\omega_1) \quad W_m^{-1}(j\omega_2) \quad \dots \quad W_m^{-1}(j\omega_N)] \quad (7.6-31)$$

由于  $Q(s)$  的最大相对阶次为  $2n-1$ ,  $W_m(s)$  的相对阶次为  $n^* > 0$ , 故对于  $\{\omega_i, R(\omega_i)\} \in \Omega$ ,  $|\omega_i - \omega_j| > o(\mu)$ ,  $i \neq j$ , 存在着  $K_1, K_2 \in R^+$  使得

$$\|A\| \leq K_1 (\min_i R(\omega_i))^{-1} \max_i |\omega_i|^{2n-1} \quad (7.6-32)$$

$$\|B\| \leq K_2 \max_i |\omega_i|^{n^*} \quad (7.6-33)$$

因而

$$\|\mathfrak{s}^{-1}\|^{-2} \geq \frac{K_3 \min_i R^2(\omega_i)}{\max_i |\omega_i|^{4n+2n^*-2}}, \quad K_3 \in R^+ \quad (7.6-34)$$

由于  $\{\omega_i, R(\omega_i)\} \in \Omega$ , 即  $\max_i |\omega_i| < o(1)$ ,  $\min_i |R(\omega_i)| > o(\mu)$ , 令  $\beta_m = \|\mathfrak{s}^{-1}\|^{-2}$ , 则  $\beta_m > o(\mu^2)$ , 由式(7.6-25) 及激励度定义可知,  $\zeta_m(t)$  是激励度为  $\beta_m$  的持续激励信号, 证毕。

引理 3: 若信号  $x(t), x_m(t): [0, \infty) \rightarrow R^r$  是一致有界的, 并且  $(x(t) - x_m(t))$  具有  $\mu_c$  小均值, 则存在  $\mu_c^* > 0$  使得对于  $\mu_c \in [0, \mu_c^*]$ , 当且仅当  $x_m(t)$  是激励度为  $\beta_m$  的持续激励信号时,  $x(t)$  是持续激励的, 并且激励度  $\beta > o(\mu^2)$ 。

证明: 由于引理叙述的对称性, 现只证明充分条件。

设  $x_m(t)$  持续激励并且激励度  $\beta_{m1} > o(\mu^2)$ , 则存在  $\delta > 0$  使得

$$\int_s^{s+\delta} x_m(t) x_m^T(t) dt \geq \beta_{m1} \delta I, \quad " s \geq 0 \quad (7.6-35)$$

设  $P$  为一任意的正整数, 则有

$$\int_s^{s+P\delta} x_m(t) x_m^T(t) dt \geq P\beta_{m1} \delta I, \quad " s \geq 0 \quad (7.6-36)$$

因而对于  $" V \in R^n$  有

$$V^T \left( \int_s^{s+P\delta} x_m(t) x_m^T(t) dt \right) V \geq V^T V P \beta_{m1} \delta, \quad " s \geq 0 \quad (7.6-37)$$

因为

$$\begin{aligned} (V^T x(t))^2 - (V^T x_m(t))^2 &= V^T (x(t) - x_m(t)) V^T (x(t) + x_m(t)) \leq \\ &2 K_4 V^T V \| x(t) - x_m(t) \| \end{aligned} \quad (7.6-38)$$

式中  $K_4$  是  $x(t)$  和  $x_m(t)$  的上界。

参照引理 1 证明过程可以证明,  $(x(t) - x_m(t))$  具有  $\mu_c$  小均值, 因而有

$$V^T \left( \int_s^{s+P\delta} x(t) x^T(t) dt \right) V \geq V^T V [P\beta_{m1} \delta - 2 K_4 (P\delta\mu_c + c)] \quad (7.6-39)$$

式中  $c \in R^+$ 。

令  $\mu_c^* = \frac{\beta_{m1}}{6 K_4}$ ,  $P > \frac{6 K_4 c}{\beta_{m1}}$ , 则对于  $" \mu_c \in [0, \mu_c^*]$  有

$$V^T \left( \int_s^{s+P\delta} x(t) x^T(t) dt \right) V \geq \frac{1}{3} V^T V P \beta_{m1} \delta \quad (7.6-40)$$

这就意味着  $x(t)$  是持续激励的, 并且激励度  $\beta = \frac{1}{3} \beta_{m1} \geq o(\mu^2)$ , 证毕。

定理 1: 若参考输入信号  $r(t)$  在频率  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N - N$ ,  $N \geq 2n$ , 具有频谱线  $\{\omega_i, R(\omega_i)\} \in \Omega$ , 并且当  $i \neq j$  时,  $|\omega_i - \omega_j| > o(\mu)$ , 则存在  $\mu_0^* > 0$ , 使得对于  $" \mu \in [0, \mu_0^*]$  以及由对象式(7.6-3)和形如式(7.6-7) ~ 式(7.6-10) 的模型参考混合自适应控制器所构成的闭环系统来说,  $r(t)$  是主富输入。

证明: 根据引理 2 知, 当  $r(t)$  满足引理 2 中的条件时,  $\zeta_m(t)$  是持续激励的并且激励度  $\beta_m > o(\mu^2)$ 。又由引理 1 知,  $(\zeta(t) - \zeta_m(t))$  具有  $\mu_c = n(\mu + \varepsilon)$  小均值, 因而根据引理 3 知, 存在  $\mu_0^*$  且满足关系式  $0 < \mu_0^* \leq \mu^*$ , 使得对于  $" \mu \in [0, \mu_0^*]$ ,  $\zeta(t)$  是持续激励的并且激励度  $\beta > o(\mu^2)$ , 从而得知  $r(t)$  为闭环混合自适应系统的主富输入, 证毕。

定理 2: 设  $r(t)$  在频率  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  具有  $2n$  条频谱线, 如果其中任一条频谱线  $\{\omega_i, R(\omega_i)\} \in \Omega$ , 则  $r(t)$  不一定是混合自适应闭环系统的主富输入。

证明: 要证明定理 2, 只需证明对于  $r(t)$  的任何  $|\omega_l| > o(1)$  或  $|R(\omega_l)| < o(\mu)$ , 则  $\zeta(t)$  的激励度不一定能保证  $\beta > o(\mu^2)$  即可。现分两种情况进行讨论。

(1)  $|R(\omega_l)| < o(\mu)$ ,  $|\omega_l| < o(1)$ ,  $l = \{i: 1, 2, \dots, 2n\}$

令

$$R_{\zeta_m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} \zeta_m(t) \zeta_m^T(t) dt, \quad " s \geq 0 \quad (7.6-41)$$

因为  $\zeta_m(t)$  具有  $2n$  条频谱线, 根据文献[12] 知  $R_{\zeta_m}$  存在并且

$$R_{\zeta_m} = \sum_{i=1}^{2n} \|R(\omega_i)\|^2 \|W_m(j\omega_i)\|^2 Q(j\omega_i) Q^T(-j\omega_i) \quad (7.6-42)$$

由于  $R_{\zeta_m} \in R^{2n \times 2n}$  由  $2n$  个并矢(dyad) 组成, 根据文献[13] 知, 对于任意正整数  $l, 0 < l \leq 2n$ , 和所有  $k = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, 2n$ , 则存在着  $Z \in R^{2n}$  且  $Z_l \neq 0$ , 使得

$$Z_l^T Q(j\omega_k) = 0 \quad (7.6-43)$$

因此有

$$Z^T R_{\zeta_m} Z_l = \|R(\omega_l)\|^2 \|W_m(j\omega_l)\|^2 \|Z_l^T Q(j\omega_l)\|^2 \quad (7.6-44)$$

因为  $W_m(s)$  和  $Q(s)$  是严格真稳定传递函数矩阵, 这就意味着  $\|W_m(j\omega_l)\|^2$  和  $\|Z_l^T Q(j\omega_l)\|^2$  一致有界。因而当  $\|R(\omega_l)\| < o(\mu)$  时有

$$Z_l^T R_{\zeta_m} Z_l \leq Z_l^T Z_l o(\mu^2) \quad (7.6-45)$$

若  $\zeta_m$  是持续激励的并且激励度  $\beta_m > o(\mu^2)$ , 则有

$$Z^T \left[ \frac{1}{N} \int_s^{s+N\delta} \zeta_m(t) \zeta_m^T(t) dt \right] Z \geq \beta_m Z^T Z \quad (7.6-46)$$

式中  $Z \neq 0, N \geq 1$ 。令  $N \rightarrow \infty$ , 则有

$$Z^T R_{\zeta_m} Z \geq \beta_m Z^T Z, \quad " Z \in R^{2n} \quad (7.6-47)$$

在式(7.6-47) 中若取  $Z = Z_l$ , 则由式(7.6-45) 和式(7.6-47) 可得

$$\beta_m \leq o(\mu^2) \quad (7.6-48)$$

因而由引理 3 知  $\zeta(t)$  不可能达到激励度  $\beta > o(\mu^2)$  的持续激励。所以, 当  $\|R(\omega_l)\| < o(\mu)$  时,  $r(t)$  对于闭环混合自适应系统来说, 不是主富输入。

(2)  $\|R(\omega_l)\| > o(\mu), \|\omega_l\| > o(1)$

频率  $\omega_l$  对闭环系统持续激励的影响, 不像  $\|R(\omega_l)\| < o(\mu)$  时那样明显, 但由式(7.6-34) 可以看出, 当  $\|\omega_l\| > o(1)$  时, 将不一定能够保证  $\beta_m > o(\mu^2)$ , 因而也无法保证  $r(t)$  是闭环混合自适应系统的主富输入。证毕。

上述定理给出了十分有用的结论。定理 1 表明, 在对象具有未建模动态时, 完全可以通过选择外输入参考信号来保证闭环混合自适应系统是持续激励的。对于 § 7.1 ~ § 7.5 所研究的混合自适应系统, 均可以选择形式为

$$r(t) = \sum_{i=1}^n R_i \sin \omega_i(t) \quad (7.6-49)$$

的外输入参考信号, 只要满足条件  $\|R_i\| > o(\mu), \|\omega_i\| < o(1)$ , 并且当  $i \neq j$  时,  $\|\omega_i - \omega_j\| > o(\mu)$ , 则可保证闭环混合自适应系统是持续激励的, 并且  $\zeta(t)$  的激励度  $\beta_m > o(\mu^2)$ 。

定理 2 告诉我们, 在选择形如式(7.6-49) 的外输入参考信号时, 一定不要使幅值  $R_i$  太小, 也不要使频率  $\omega_i$  过大, 否则不可能保证系统满足持续激励条件。在外输入参考信号含有高频分量时, 除尽可能增大外输入参考信号的幅值外, 滤除其高频分量完全必要。§ 7.1 ~ § 7.5 中的混合自适应控制器都具有一定的滤波功能, 在设计控制器时, 通过选择合适的设计参数, 完全可以达到比较理想的滤波目的。

## 参 考 文 献

- 1 Ioannou P, Tsakalis K. A Robust Direct Adaptive Controller. California: University of Southern California, 1985

- 2 Ioannou P, Sun I . Theory and Design of Robust Direct and Indirect Adaptive Control Schemes . California: University of Southern California, 1986
- 3 Ioannou P, Tsakalis K . Robust Discrete-time Adaptive Control . California: University of Southern California, 1985
- 4 Ioannou P, Sun I . The Robust Adaptive Control of the Discrete-time System . California: University of Southern California, 1986
- 5 李言俊 . 连续对象具有未建模动态时的一种鲁棒混合自适应控制器 . 西北工业大学学报, 1989, 7(1)
- 6 李言俊, 张安华, 陈新海 .  $\sigma$ 校正混合自适应控制律 . 自动化学报, 1991, 17(3)
- 7 李言俊, 陈新海 . 一种积分式混合自适应控制器 . 控制与决策, 1990, (6)
- 8 李言俊, 江勇, 朱志刚 . 两种基于 Narendra 方案的混合自适应修正方案 . 控制理论与应用, 1993, 10(5)
- 9 朱志刚, 李言俊, 强文鑫 . 一种对象具有未建模动态时的间接式混合自适应极点配置方案 . 自动化学报, 1993, 19(3)
- 10 宋凯, 李言俊 . 混合自适应控制系统持续激励问题研究 . 空军工程学院学报, 1991, 11(2)
- 11 Boyd S . On Parameter Convergency in Adaptive Control . System and Control Letters, 1983, 3(6)
- 12 Boyd S . Necessary and Sufficient Conditions for Parameter Convergence in Adaptive Control . Automatica, 1986, 22(6) .
- 13 Strang G . Linear Algebra and Its Applications . New York: Academic Press, 1976

## 第八章 非线性控制对象的自适应控制

研究非线性系统,最原始的方法是首先将研究对象的模型线性化,然后应用线性理论去设计控制器。这种方法很难或不可能适应目前世界上早已有的许多复杂(强非线性)系统的分析与控制。例如,飞机的大攻角运动及机动飞行,空间飞行器的姿态控制等。

在过去的十多年中,人们应用微分几何中的一些结果,在理解非线性系统的性质,如可控性、可观测性、左右可逆性等方面,取得了一定的进展,同时还初步解决了诸如干扰解耦、输入输出解耦以及反馈线性化的控制问题,但其理论和应用都处于发展阶段,有许多未解决的问题。

非线性系统的复杂性与困难性,要求我们发展各种方向和方法,微分几何控制只是有发展前途的方法之一。但鉴于微分几何方法基础知识的复杂性,且其理论仍在发展之中,在此不作介绍,只是选择了一些在非线性自适应控制问题研究中较为成熟的方法,以供进行此类课题研究时作为参考。

### § 8.1 非线性系统的自适应线性控制

线性自适应控制理论适用于线性慢时变系统的控制问题。这些线性时变系统也可以认为产生于非线性系统围绕某一轨迹的非准确线性化。因而自适应线性控制也可以看作是设计非线性动态控制器的一种方法。非线性系统可以认为由两部分组成,一部分是具有未知参数的线性时变部分,另一部分则是在线性设计方法中被忽略的高阶项。本节中将根据这一思路来研究非线性控制问题,将适用于线性时变系统的一些算法进行改进,使其适用于线性化模型含有高阶非线性项的系统,并且不需要预先知道系统线性化的标称轨迹,只要求知道标称轨迹的界。

#### 1. 非线性控制问题的描述

设所研究的非线性系统的差分方程为

$$y(t) = f(y(t-1), \dots, y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-n), d(t-1), \dots, d(t-p)) \quad (8.1-1)$$

式中  $y, u, d$  分别为系统的输出、输入和干扰信号,并且  $n$  为已知的正整数。

为书写方便,将方程式(8.1-1)改写为

$$y(t) = f(v(t-1), \omega(t-1)) \quad (8.1-2)$$

式中

$$\begin{aligned} v(t-1) &= [y(t-1) \cdots y(t-n) \ u(t-1) \cdots u(t-n)] \\ \omega(t-1) &= [d(t-1) \cdots d(t-p)] \end{aligned}$$

并且用  $v_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$  和  $\omega_i (i = 1, 2, \dots, p)$  分别表示向量  $v, \omega$  的分量。

对于任意的函数  $f: R^{2n} \times R^p \rightarrow R$  和信号  $u, d$ , 当给定初始条件  $v(0), \omega(0)$  时, 方程(8.1-2) 具有惟一解  $y$ 。

控制的目的是围绕所给定的理想输出信号  $y^*$  进行调节。在许多应用中,函数  $f$  是复杂的,但至少应该近似知道。否则,就应该对系统的行为有充分了解,知道其标称轨迹。

假设 1:对于所给定的  $y^*$  和  $d$ ,存在输入信号  $u^*$ ,使得

$$y^*(t) = f(v^*(t-1), \omega(t-1)) \quad (8.1-3)$$

式中  $v^*$  由  $(u^*, y^*)$  导出。假定已知  $u$  使得对所有  $i$  均有

$$\left[ \sum_{t=i}^{n+i} (u(t) - u^*(t))^2 \right]^{1/2} \leq U \quad (8.1-4)$$

式中  $U$  为一常数。

为了方便,引入与标称值的偏差

$$\Delta u(t) = u(t) - u^*(t), \quad \Delta y(t) = y(t) - y^* \quad (8.1-5)$$

上述公式精确描述了在非线性实域内如何实现线性控制问题。为了更清楚地说明这一点,让我们看一下图 8.1-1 所示方案。非线性对象式 (8.1-2) 由两个环进行控制,其中高水准控制确定了标称轨迹。例如,在电力系统中它表示人的操作所产生的较慢的控制动作,在飞机控制中它表示驾驶员的动作等。这个环所检测的是系统状态  $x$ 。如果所实施的动作成功的话,则在  $u$  的作用下  $y$  将接近于  $y^*$ 。当然,  $u$  和  $y^*$  是已知的,因而  $\Delta u$  和  $\Delta y$  是可测的。图 8.1-1 中的另一个环是间接式参数自适应控制器,用来改善系统的快速性能。在电力系统中,它表示自适应交流电压调节回路。这里所关心的是在什么条件下这个自适应环是稳定的。

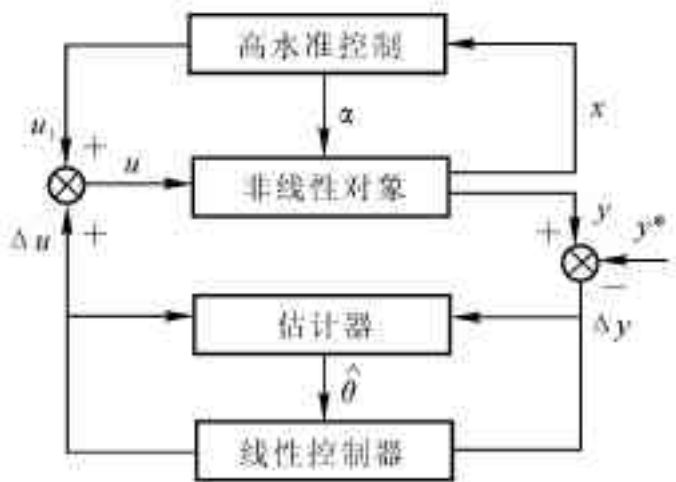


图 8.1-1 自适应线性控制方案

## 2. 模型变换

对于式 (8.1-2) 所示对象,围绕某一标称轨迹进行台劳级数展开,使线性化模型与非线性误差项相分离。

假设 2: 偏导数  $f_{v_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$  存在,并且对于  $v$  和  $\omega$  是局部 Lipschitz 的。

这一假设意味着对假设 1 中的函数  $f$  增加了函数是局部光滑的要求。

令  $B(x_0, r) = \{x | \|x - x_0\| \leq r\}$ , 其中  $\| \cdot \|$  表示欧几里德范数,并且令  $B_r = B(0, r)$ 。为了方便起见,将信号向量  $(y^*, u)$  用  $\varphi$  表示,由假设 2 知系统可以围绕  $\varphi$  进行线性化。因而有

$$\Delta y(t) = y(t) - y^*(t) = f(v(t-1), \omega(t-1)) - f(v^*(t-1), \omega(t-1)) = \Phi^T(t-1)\theta(t-1) + R(t) \quad (8.1-6)$$

式中

$$\begin{aligned} \theta^T(t) &= [\theta_1(t) \quad \cdots \quad \theta_{2n}(t)] \\ \Phi^T(t-1) &= [\Delta y(t-1) \quad \cdots \quad \Delta y(t-n) \quad \Delta u(t-1) \quad \cdots \quad \Delta u(t-n)] \\ \theta_i(t) &= f_{v_i}(v_1(t), \omega(t)), \quad i = 1, 2, \dots, 2n \end{aligned} \quad (8.1-7)$$

$R(t)$  为余项,由两部分组成,即

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t)$$

$$R_1(t) = f(v(t-1), \omega(t-1)) - f(\bar{v}(t-1), \omega(t-1)) - \Phi^T(t-1)\theta(t-1) \quad (8.1-8a)$$

$$R_2(t) = f(\bar{v}(t-1), \omega(t-1)) - f(v^*(t-1), \omega(t-1)) \quad (8.1-8b)$$

$R_1(t)$  称为非线性误差,  $R_2(t)$  称为参考解误差。由于式(8.1-6)具有参数估计算法中常采用的回归形式, 故将  $\theta$  和  $\Phi$  分别称为参数向量和回归向量。

假设 3: 参考信号、干扰和导数  $f_{v_i}$  使得 "  $t$  有  $\theta(t) \in b$ , 其中  $b \subset R^n$  是一已知的紧凸域。

这一假设将  $f$  沿  $\Phi$  的斜率限制在有限的极限内, 因而有

$$\|\theta_1 - \theta_2\| \leq K_c, \quad \|\theta\| \leq K_\theta, \quad \theta, \theta_1, \theta_2 \in b \quad (8.1-9)$$

式中  $K_c, K_\theta$  是与  $b$  的大小有关的常数。

定理 1:  $\forall \varepsilon_r, l \in R^+$  使得

$$|R(t)| \leq \varepsilon_r \|\Phi(t-1)\| + l, \quad \Phi(t-1) \in Br \quad (8.1-10)$$

证明: 由假设 2 并对式(8.1-8a) 运用中值定理可得

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \left[ \frac{f}{v} \Big|_{v_2} \right] \lambda + T(v(t-1) - \bar{v}(t-1)) - \left[ \frac{f}{v} \Big|_{v_1} \right]^T \Phi(t-1) = \\ &= \left[ \left[ \frac{f}{v} \Big|_{v_2} - \frac{f}{v} \Big|_{v_1} \right]^T \Phi(t-1) \right] \end{aligned} \quad (8.1-11)$$

式中  $\lambda = \lambda v(t-1) + (1-\lambda)\bar{v}(t-1), \lambda \in (0,1)$ 。

令

$$\varepsilon_r = \sup_{\substack{2^{s,1} \\ \|v_2 - v_1\| \leq r}} \left\| \frac{f}{v} \Big|_{v_2} - \frac{f}{v} \Big|_{v_1} \right\| \quad (8.1-12)$$

显然有

$$|R_1(t)| \leq \varepsilon_r \|\Phi(t-1)\|, \quad \Phi(t-1) \in Br \quad (8.1-13)$$

同样, 由式(8.1-4) 可得

$$|R_2(t)| \leq LU \quad (8.1-14)$$

式中  $L$  为一常数, 其界可由  $f$  的任一 Lipschitz 常数确定。取  $l = LU$ , 则式(8.1-10) 得证:

评注 1:

(1) 式(8.1-12) 将式(8.1-10) 中  $R(t)$  的界与偏导数  $\frac{f}{v}$  在球  $B_r$  中的变化联系起来, 参数  $\varepsilon_r$  的值反映了对象的非线性程度。也就是说, 对于较小的  $r$  值, 对象的非线性程度越强, 则  $\varepsilon_r$  越大。

(2) 不必知道  $\varepsilon_r$  或  $l$  值, 只要知道这种值存在即可。

(3) 在使用非线性模型时, 具有非结构性扰动的系统可以明显地描述出与信号  $(0, u^*)$  的关系。在自适应控制的设计中, 将隐含地利用  $u = 0$  来近似  $u^*$ 。常数  $U$  的值可能是很大的。

现在进一步作一些假设来限制信号  $u, y^*$  和  $d$  的变化速率。

假设 4:  $\forall \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R^+$  使得  $y^*, d, u$  满足

$$|y^*(t) - y^*(t-1)| \leq \delta_1, \quad \forall t \quad (8.1-15a)$$

$$|d(t) - d(t-1)| \leq \delta_2, \quad \forall t \quad (8.1-15b)$$

$$|u(t) - u(t-1)| \leq \delta_3, \quad \forall t \quad (8.1-15c)$$

实际上, 假设 1 已保证了式(8.1-15c) 的成立, 为了方便, 这里明确列出了式(8.1-15c)。



由假设 4 容易作出结论:存在  $\delta_v, \delta_\omega > 0$  使得

$$\|v(t) - v(t-1)\| \leq \delta_v, \quad \forall t \quad (8.1-16a)$$

$$\|\omega(t) - \omega(t-1)\| \leq \delta_\omega, \quad \forall t \quad (8.1-16b)$$

由假设 2 知  $f_{v_i}$  是局部 Lipschitz 的, 具体说, 存在  $F_1, F_2$  和  $\delta_v, \delta_\omega$  使得对于所给定的  $\omega$ ,  $(v-1) \in B_{\delta_v}$  有

$$\|f_{v_i}(v, \omega) - f_{v_i}(v-1, \omega)\| \leq F_1 \|v - v-1\|, \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (8.1-17a)$$

$$\|f_{v_i}(v, \omega) - f_{v_i}(v, \omega-1)\| \leq F_2 \|\omega - \omega-1\| \quad (8.1-17b)$$

假设 5: 假设 4 中的信号变化缓慢得足以保证  $\delta_v \geq \delta_v, \delta_\omega \geq \delta_\omega$ 。

将不等式(8.1-16)与式(8.1-17)相结合便给出了对参数向量  $\theta(t)$  时变速率的约束, 即

$$\begin{aligned} \|\theta_i(t) - \theta_i(t-1)\| &= \|f_{v_i}(v(t), \omega(t)) - f_{v_i}(v(t-1), \omega(t-1))\| \leq \\ &\|f_{v_i}(v(t), \omega(t)) - f_{v_i}(v(t-1), \omega(t))\| + \\ &\|f_{v_i}(v(t-1), \omega(t)) - f_{v_i}(v(t-1), \omega(t-1))\| \leq F_1 \delta_v + F_2 \delta_\omega \end{aligned} \quad (8.1-18)$$

因而可知存在  $\varepsilon_0 > 0$  使得

$$\|\theta(t) - \theta(t-1)\| \leq \varepsilon_0, \quad \forall t \quad (8.1-19)$$

评注 2:

式(8.1-2)中非线性的基本参数是  $r, \varepsilon_r$  和  $\varepsilon_0$ , 显然它们是相互关联的, 而对式(8.1-10)和式(8.1-19)中的界来说,  $r$  越大, 则  $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_0$  越大。

### 3. 自适应控制方案

现采用一种与简单梯度方案相类似的参数估计算法

$$\hat{\theta}(t) = P \left\{ \hat{\theta}(t-1) + \frac{\Phi(t-1)e(t)}{1 + \Phi^T(t-1)\Phi(t-1)} \right\} \quad (8.1-20)$$

式中  $\hat{\theta}(t)$  为  $\theta(t)$  的估值,  $P$  表示保证使  $\hat{\theta}(t) \in b(\cdot, t)$  的映射算子, 且

$$e(t) = \Delta y(t) - \Phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1) \quad (8.1-21)$$

$e(t)$  为预测误差。假定  $r > r_0 \in R^+$  使得  $\frac{L}{r_0} \leq \delta_0$ 。

引理 2: 用于系统式(8.1-3)或式(8.1-6)的估计算法式(8.1-20)和式(8.1-21)具有下列性质:

(1) 若  $\Phi(t-1) \in B_r$ , 则  $\forall k \in R^+$  使得

$$\|\hat{\theta}(t)\| \leq k \quad (8.1-22)$$

式中

$$k(t) = e(t) / (1 + \|\Phi(t-1)\|^2)^{1/2} \quad (8.1-23)$$

(2)  $\|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\| \leq \|e(t)\|, \quad \forall t \quad (8.1-24)$

(3) 若  $\Phi(i) \in B_r$  并且  $\|\Phi(i)\| > r, i = t_0, t_0+1, \dots, t-1$ , 则

$$\sum_{i=t_0+1}^t e(i) \leq \alpha_1 + \alpha_2(t - t_0) + \alpha_3(t - t_0) \quad (8.1-25)$$

式中

$$\alpha_1 = K_c^2, \quad \alpha_2 = 0(\varepsilon_r, \varepsilon_0), \quad \alpha_3 = 0(\delta) \quad (8.1-26)$$

引理 2 可用标准的步骤进行证明,受篇幅限制,这里不再详述,有兴趣者可参考文献[6]。

评注 3:

式(8.1-25)的特点就在于利用减小  $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_\theta$  可以使  $\alpha_2$  任意小。

将系统中的参数  $\theta(t)$  用其估计值代替,考虑极点配置方法

$$\mathbf{L}(t-1)\Delta u(t) = -\mathbf{P}(t-1)\Delta y(t) \quad (8.1-27)$$

式中  $\mathbf{L}, \mathbf{P}$  满足方程

$$\mathbf{A}(t-1)\mathbf{L}(t-1) + \mathbf{B}(t-1)\mathbf{P}(t-1) = \mathbf{A}^* \quad (8.1-28)$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = 1 - \theta_1(t)q^{-1} - \cdots - \theta_n(t)q^{-n} \quad (8.1-29a)$$

$$\mathbf{B}(t) = \theta_{n+1}(t)q^{-1} + \cdots + \theta_{2n}(t)q^{-n} \quad (8.1-29b)$$

$\mathbf{A}^*$  为给定的  $2n$  阶首一多项式,  $q^{-1}$  为时延算子。因而  $\mathbf{L}$  和  $\mathbf{P}$  给出了一个严格正实调节器, 设

$$\mathbf{L}(t) = 1 + l_0(t)q^{-1} + \cdots + l_{n-1}(t)q^{-n} \quad (8.1-30a)$$

$$\mathbf{P}(t) = p_0(t)q^{-1} + \cdots + p_{n-1}(t)q^{-n} \quad (8.1-30b)$$

假定 6: 多项式  $z^{2n}\mathbf{A}^*$  是离散严格 Hurwitz 的。

正如所有的间接式自适应控制一样, 这里所遇到的一个技术上的困难是解方程式(8.1-28)。我们要求  $\|\mathbf{L}\|, \|\mathbf{P}\|$  是有界的, 其中  $\|\cdot\|$  为多项式系数向量的范数。现需要对系统模型作进一步限制。

假设 7: 对于所有的  $\theta \in b$ , 线性系统模型是一致稳定的。

评注 4:

这里在假设 3 中的凸域  $b$  的基础上又增加了一个假设, 这一假设明显地对非线性对象提出了可控性要求。由于任意大的参数空间域都可以由多个凸域所覆盖, 因而下面的分析方法可以扩展到任意的参数空间域。

#### 4. 稳定性分析

稳定性分析的主要结果是确定整个系统中的所有变量偏离标称轨迹  $y^*$  的偏差量是局部有界的。

将方程式(8.1-21) 与式(8.1-27) 相结合可得闭环系统方程

$$\Phi(t+1) = \mathbf{A}(t)\Phi(t) + b e(t+1) \quad (8.1-31)$$

式中

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) & \cdots & \theta_{n-1}(t) & \theta_n(t) & \theta_{n+1}(t) & \cdots & \theta_{2n-1}(t) & \theta_{2n}(t) \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\mathbf{P}_0(t) & \cdots & -\mathbf{P}_{n-2}(t) & -\mathbf{P}_{n-1}(t) & -l_0(t) & \cdots & -l_{n-2}(t) & -l_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.1-32a)$$

$$b^T = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (8.1-32b)$$

引理 3: 对于线性时变系统

$$X(t+1) = A(t)X(t) \quad (8.1-33)$$

假定:

(1)  $A(t)$  是有界的。

(2) 对于  $t > t_0$ , 有

$$\sum_{\tau=t_0+1}^t \|A(\tau) - A(\tau-1)\|^2 \leq k_0 + k_1(t - t_0) \quad (8.1-34)$$

式中  $k_0, k_1$  为正的常数, 并且  $k_1$  足够小。

(3) 对于所有  $t$ ,  $|\lambda_i(A(t))| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

则系统式(8.1-33)的转移矩阵  $\Psi(t, \tau)$  满足关系式

$$\|\Psi(t, \tau)\| \leq \alpha \mu^{t-\tau}, \quad t \geq \tau \quad (8.1-35)$$

式中  $\mu \in (0, 1)$ ,  $\alpha$  为正的常数。

引理 3 的证明可参考文献[7]、[8]。

定理 1: 对于由对象式(8.1-2)、估计器式(8.1-20)、式(8.1-21)和调节器式(8.1-27)~式(8.1-30)所构成的自适应方案, 在上述假设条件下, 存在  $r^*, \varepsilon_r^*, \varepsilon_0^*$  和  $n_0$  使得  $r \geq r^*, \varepsilon_r \geq \varepsilon_r^*, \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^*$ , 并且当  $\Phi(0) \in B_{n_0}$  时, 保证  $\Phi(t) \in B_r$  对于任意的  $t$  皆成立。具体说, 就是控制信号  $\Delta u(t)$  和跟踪误差  $\Delta y(t)$  对任意的  $t$  均有界。

证明: 将时间序列  $z^+$  分为两个子序列

$$z_1 = \{t \in z^+ \mid \|\Phi(t)\| > n\}, \quad z_2 = \{t \in z^+ \mid \|\Phi(t)\| \leq n\} \quad (8.1-36)$$

由于  $r > n$ , 显然只需证明对于  $\tau \in z_1$  有  $\|\Phi(\tau)\| < r$  即可。同样, 也假设初始条件满足不等式  $\|\Phi(0)\| \leq n$ 。

利用归纳法进行证明。假设  $\|\Phi(\tau)\| \leq M, \tau = 0, 1, \dots, t-1$ , 选取  $t_0$  使得  $t_0 - 1 \in z_2, t_0, t_0 + 1, \dots, t-1 \in z_1$ 。由引理 8.1-2 容易看出, 若对于  $\tau = 0, 1, \dots, t-1$  有  $\Phi(\tau) \in B_r$ , 则式(8.1-32a)所示矩阵  $A(t)$  满足引理 8.1-3 中的所有条件。在条件 2 中, 有  $k_1 = k(\alpha_2 + \alpha_3)$ , 式中  $k$  是一独立的常数。于是对于线性时变系统

$$\Phi(t+1) = A(t)\Phi(t) \quad (8.1-37)$$

若对于  $t \geq \tau, \tau = 0, 1, 2, \dots, t-1$ , 均有  $\alpha \leq \bar{\alpha}, n \geq \bar{n}, \Phi(\tau) \in B_r$ , 则转移矩阵  $\Phi(t, \tau)$  满足关系式

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \alpha \sigma^{t-\tau} \quad (8.1-38)$$

式中  $\bar{\alpha}$  是一充分小的常数,  $\bar{n}$  是一充分大的常数,  $\sigma \in (0, 1)$ 。

方程式(8.1-31)的通解为

$$\Phi(t) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \Phi(t, \tau)b e(\tau+1) \quad (8.1-39)$$

利用式(8.1-38)和 Schwarz 不等式可得

$$\sigma^{-t} \|\Phi(t)\|^2 \leq \bar{s}^2(t) + \alpha \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sigma^{-\tau} \|\Phi(\tau)\|^2 + |e(t+1)|^2 \quad (8.1-40)$$

式中

$$\bar{s}^2(t) = 2\bar{c}^2 \sigma^t \|\Phi(t_0)\|^2 + \alpha \quad (8.1-41)$$

对式(8.1-41)利用离散 Grownwall 定理[2]及算术和几何中值定理[2]以及引理 2, 对于  $\alpha \leq \bar{\alpha}$  和  $n \geq \bar{n}$ , 可得

$$\|\Phi(t)\|^2 \leq 2c^2(\alpha_c^*)^t(1+kt)(\|\Phi(t_0)\| + c) \quad (8.1-42)$$

式中  $\sigma < \alpha_c^* < 1$ ,  $\alpha_c^*$  是一小的常数,  $n^*$  是一充分大的常数。

由方程式(8.1-42)得

$$\|\Phi(t)\|^2 \leq a \|\Phi(t_0)\|^2 + c \quad (8.1-43)$$

因而当  $r^2 > c$  并且

$$\|\Phi(t_0)\|^2 \leq \frac{r^2 - c}{a} \quad (8.1-44)$$

时,则有

$$\|\Phi(t)\|^2 \leq r^2 \quad (8.1-45)$$

即  $\Phi(t) \in B_r$ , 归纳证明完毕。

剩下的问题是验证定理叙述中的常数。已有  $r^* = \max\{n, \sqrt{c}\}$ ,  $n^2 = \max\{n^*, n^*, \frac{r^2 - c}{a}\}$ , 现在令  $\alpha_2^* = \min\{\alpha_1^*, \alpha_c^*\}$ , 可以选择  $\varepsilon_0^*$  和  $\varepsilon_r^*$  使得式(8.1-26)给出的  $\alpha_2 \leq \alpha_2^*$ 。

评注 5:

(1) 可以看到,  $\varepsilon_r, \varepsilon_0$  有界并且  $r > r^*$  是对这一类非线性的最简单的约束;

(2) 由有界问题进一步所导出的定性结果将涉及  $A^*$  的稳定度。较小的  $\sigma$  值允许  $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_0$  有较大的值, 也就是允许有较严重的非线性。若  $R(t)$  的界在  $\varepsilon_r$ ,  $l$  与  $r$  相独立的意义上是全局有界的, 则容易导出下面定理 2 的结论。

定理 2: 假设定理 1 的条件改变为  $f(\cdot, \omega)$  是全局 Lipschitz, 则  $\forall \varepsilon_r^*$  和  $\varepsilon_0^*$  使得  $\varepsilon_r \leq \varepsilon_r^*$  和  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_0^*$  可保证系统围绕标称轨迹是 BIBS 稳定的。

综上所述可以看到, 自适应线性控制对于离散时间非线性系统是一种好的设计方法, 稳定性条件本质上是限制了由差分方程所描述的函数的梯度, 对于全局稳定, 要求这一函数是全局 Lipschitz 的。目前基于归纳法的离散系统证明方法还不能直接应用于相对应的连续系统, 然而可以推测, 对于相应的连续系统仍会有相类似的结果。

## § 8.2 非线性一阶系统的鲁棒自适应控制

在前面所进行的线性 SISO 系统模型参考自适应控制问题的研究中可以看到, 那些在理想情况下所设计的自适应控制算法, 当考虑到系统的干扰和未建模动态时可能无法保证系统的稳定性。为了解决这一问题, 人们提出了许多方法, 这些方法可以归纳为两类: 一类是对现有自适应方法进行修正, 产生了死区法、 $\sigma$  校正法、 $a$  校正法等; 另一类则是增加参考输入信号的丰富性, 以保证系统的持续激励。

本节中, 我们将死区法引入非线性一阶系统的控制器设计, 介绍这类控制器的结构、自适应控制律及其性质。

### 1. 鲁棒控制器结构设计

研究一类非线性系统

$$\dot{x} = -\theta^T f(x) - bu + W_1(t) + g(x) \quad (8.2-1)$$

$$\dot{x} = x + W_2(t) \quad (8.2-2)$$

式中  $u, x, \hat{x} \in R$  分别为系统的输入、状态和状态测量值, 并且

(i)  $\theta \in R^p, b \in R$  为系统的未知参数;

(ii)  $f(x) \in R^p$  为系统的已知向量函数,  $g(x)$  为未知的标量函数, 表示系统的未建模动态;

(iii) 假定  $W_1(t), W_2(t), f(x), g(x)$  是标准光滑有界的, 以保证微分方程解的存在。

控制的目的是使上述的非线性控制对象与线性一阶参考模型

$$\dot{x}_m = a_m x_m + r \quad (8.2-3)$$

渐近耦合, 式中  $r \in R$  为参考信号,  $a_m < 0$ 。

首先, 我们利用状态测量值将方程式(8.2-1) 改写为

$$\dot{x}^H = x + W_2 = -\theta^T f(x) + \theta^T \Delta f(x, W_2) - bu + W_2 + W_1 + g(x) \quad (8.2-4)$$

式中  $\Delta f(x, W_2) = f(x) - f(x)$ 。

由方程式(8.2-3) 和式(8.3-4) 可导出误差方程

$$e = x^H - x_m = a_m e + b \left[ -u + \frac{W_2}{b} + \frac{W_1}{b} + \frac{1}{b} \theta^T \Delta f(x, W_2) + \frac{g(x)}{b} \right] \quad (8.2-5)$$

式中

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_m}{b} & \frac{\theta^T}{b} & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \quad (8.2-6)$$

$$= \begin{bmatrix} x & f^T(x) & r \end{bmatrix} \quad (8.2-7)$$

假设:

(1)  $b$  是未知的, 但其符号是已知的, 不失一般性, 假定  $b > 0$ ;

(2) 存在一个适当的未知参数  $W_m > 0$  和已知的连续时间函数  $h(x) > 0$ , 使得

$$\frac{1}{b} |W_2 + W_1 + \theta^T \Delta f(x, W_2) + g(x)| \leq W_m h(x) \quad (8.2-8)$$

由于  $e$  和  $f$  是可测量的, 因而可用其构成控制律。为达到控制目的, 可采用控制律

$$u = -\theta^T f + \frac{e |e| h(x)}{\varepsilon_0(e)} W_m \quad (8.2-9)$$

式中  $\theta \in R^{p+2}$  表示未知参数向量  $\theta$  的估计向量,  $\varepsilon_0(e)$  是一合适的跟踪误差函数,  $\hat{W}_m$  为一辅助参数估计, 对此后面还要进一步给出。

为了证明由方程式(8.2-1) 和式(8.2-9) 所组成的闭环系统的稳定性, 选取正定函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \quad (8.2-10)$$

式中  $\hat{\theta} = \theta - \theta$ ,  $\hat{W}_m = W_m - W_m$ 。

将  $V(t)$  沿闭环系统的轨迹取导数, 并考虑到式(8.2-5) 和式(8.2-9), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & e \left\{ a_m e + b \left[ -f - \frac{e |e|}{\varepsilon_0(e)} h(x) W_m + \frac{W_2}{b} + \frac{W_1}{b} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{b} \theta^T \Delta f(x, W_2) + \frac{g(x)}{b} \right] \right\} + \end{aligned} \quad (8.2-11)$$

由式(8.2-8) 和式(8.2-11) 得

$$V(t) \leq a_m e^2 + b \left[ -\frac{e^2 |e|}{\varepsilon_0(e)} h(x) W_m + |e| W_m h(x) \right] + \quad (8.2-12)$$

因为  $\theta$  和  $W_m$  是未知的定常参数, 故  $\theta = \theta_0$ ,  $W_m = W_{m0}$ , 现选取

$$W_m = \begin{cases} |e| \frac{e^2}{\varepsilon_0(e)} h(x), & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-13)$$

$$\theta = \begin{cases} - & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-14)$$

式中  $\varepsilon_1$  为所选定的死区范围。将式(8.2-13)和式(8.2-14)引入式(8.2-12), 对于  $|e| \geq \varepsilon_1$  则有

$$V(t) \leq a_m e^2 + b |e| W_m \left[1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0(e)}\right] h \quad (8.2-15)$$

若选取  $\varepsilon_0(e)$  使得对于所有的  $e$  和  $|e| \geq \varepsilon_1$  均有

$$|e| \geq [\varepsilon_0(e)]^{1/2} \quad (8.2-16)$$

则可得

$$V(t) \leq a_m e^2 \leq a_m \varepsilon_1^2, \quad |e| \geq \varepsilon_1 \quad (8.2-17)$$

因而当  $e, \theta, W_m$  初始值有界时,  $V(t)$  是逐渐减小的, 直到  $|e|$  达到死区边界, 即  $|e| = \varepsilon_1$  时为止。

令  $\Omega_1 = \{t \mid |e| \leq \varepsilon_1\}$ ,  $\Omega_2 = \{t \mid |e| > \varepsilon_1\}$ , 对于  $\tau \in \Omega_1$ ,  $\theta$  和  $W_m$  为常数。假定对于  $t = t_0 \in \Omega_1$ ,  $|e(t_0)| = \varepsilon_1$ , 即轨迹位于  $\Omega_1$  的边界上, 并假定  $|e|$  在  $t_0$  时离开  $\Omega_1$ , 则存在  $t_1 > t_0$ , 使得  $t_1 \in \Omega_2$ 。由方程式(8.2-17)可知区间  $(t_0, t_1)$  的长度必定是有限的, 因而存在一时刻  $t_2 > t_1$ , 使得  $|e(t_2)| = \varepsilon_1$ 。由于  $e^2(t_2) = e^2(t_1)$ , 并且对于  $t \in \Omega_2$ ,  $V(t)$  是严格递减的, 因而可以导出

$$(8.2-18)$$

每当跟踪误差离开并且再入死区时, 参数向量的欧几里德范数严格递减。这就可以得出结论:  $\Omega_2$  具有有限测度, 即跟踪误差在死区外的总时间区间具有有限测度。

值得注意的是, 若下述三个不等式成立, 则假设(2)中的不等式(8.2-8)成立:

$$\frac{1}{b} |W_2 + W_1| \leq W_{m1} \quad (8.2-19a)$$

$$\frac{1}{b} |\theta^T \Delta f(x, W_2)| \leq W_{m2} h_2 \quad (8.2-19b)$$

$$\frac{1}{b} |g(x)| \leq W_{m3} h_3 \quad (8.2-19c)$$

式中  $W_{mi}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是未知的正常数,  $h_i(x)$  ( $i = 2, 3$ ) 是已知的正常数。上述三个不等式的意义就在于外干扰、敏感项  $\Delta f$  以及未建模动态可以分开进行处理, 而且若  $f$  和  $g$  是全局 Lipschitz, 则可令  $h_1(x) \equiv 1$ ,  $h_2(x) = 1$ ,  $h_3(x) = 1$ 。在这种情况下可以看到, 无论是在上述三个不等式中还是在不等式(8.2-8)中, 都不要预先知道它们的上确界。

## 2. 死区大小的选择

上面已证明, 当选取函数  $\varepsilon_0(e)$  使得式(8.2-16)成立时, 利用控制律式(8.2-9)、式(8.2-13)和式(8.2-14), 可以使系统式(8.2-1)、式(8.2-2)全局稳定。下面介绍选取  $\varepsilon_0(e)$  的三种不同方法。

$$(1) \quad \varepsilon_0(e) = e^2, \quad \varepsilon_1 = 0 \quad (8.2-20)$$

在这种情况下可得

$$W_m = |e| h(x) \quad (8.2-21)$$

$$\theta = -ef \quad (8.2-22)$$

$$u = -\theta^T f + \operatorname{sgn}(e) W_m h(x) \quad (8.2-23)$$

式中  $\operatorname{sgn}$  表示符号函数。

由式(8.2-20)、式(8.2-21)可知,当到达滑动面  $e = 0$  时,参数被冻结。但在实际中是不可能遇到这种情况的,因为实际的转换开关只能提供一种近似的符号函数。如果采用数字实现,则跟踪误差中的舍入误差可能会破坏  $e = 0$  邻域内的符号信息。根据理论观点,在  $e = 0$  的邻域内,控制律式(8.2-20)、式(8.2-21)和式(8.2-22)将会导出一种左侧不连续的误差方程,就不存在通常意义下的解。

$$(2) \quad \varepsilon_0(e) = \begin{cases} e^2, & |e| \geq \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 |e|, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-24)$$

式中  $\varepsilon_1 > 0$  是一任意标量。容易验证,这样选取  $\varepsilon_0(e)$  可以满足稳定条件式(8.2-16),并且在这种情况下可得

$$W_m = \begin{cases} |e| h(x), & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-25)$$

$$\theta = \begin{cases} -ef, & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-26)$$

$$u = -\theta^T f + \operatorname{sat}(e/\varepsilon_1) W_m h(x) \quad (8.2-27)$$

式中的饱和函数  $\operatorname{sat}(e/\varepsilon_1)$  如图 8.2-1 所示。可以看出,只要  $e$  位于死区之外,式(8.2-25)、式(8.2-26)、式(8.2-27)与式(8.2-21)、式(8.2-22)、式(8.2-23)是等效的。如果  $e$  位于死区之内,则式(8.2-25)、式(8.2-26)中的参数被冻结,式(8.2-28)中的输入是跟踪误差的线性连续函数。如果  $\varepsilon_1$  定义一个以  $e = 0$  为原点的充分大的邻域,则可避免利用式(8.2-20)选取  $\varepsilon_0$  时所遇到的难题。

$$(3) \quad \varepsilon_0(e) = \varepsilon_1^2 + \alpha(e^2 - \varepsilon_1^2) \quad (8.2-28)$$

式中  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  均为任意标量。容易证明,这样选取  $\varepsilon_0(e)$

可以满足式(8.2-16)稳定条件。由式(8.2-13)、式(8.2-14)可得

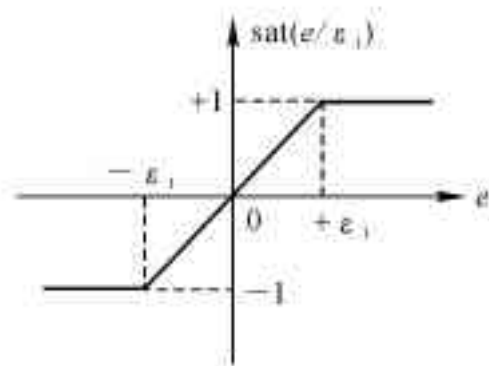


图 8.2-1 控制律中的饱和函数

$$W_m = \begin{cases} \frac{|e| e^2}{\varepsilon_1^2 + \alpha(e^2 - \varepsilon_1^2)} h(x), & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-29)$$

$$\theta = \begin{cases} -ef, & |e| \geq \varepsilon_1 \\ 0, & |e| < \varepsilon_1 \end{cases} \quad (8.2-30)$$

$$u = -\theta^T f + \frac{e |e|}{\varepsilon_1^2 + \alpha(e^2 - \varepsilon_1^2)} W_m h(x) \quad (8.2-31)$$

可以看到,对于  $\varepsilon_1$  的某一固定值,若  $\alpha$  趋近于 1,则  $\varepsilon_0(e)$  趋近于  $e^2$ ,式(8.2-31)中的  $u$  将趋近于式(8.2-23)中所确定的不连续输入,因而必须选取  $\alpha$  小于 1。利用  $\alpha$  的自由选取可以改善系

统的暂态特性。如果  $e$  位于死区之内,则参数被冻结,控制输入是一个非线性连续函数,这同样可避免利用式(8.2-20)中选取  $\varepsilon_0(e)$  时所遇到的困难。

例题：非线性控制对象方程为

$$x = \sum_{n=0}^4 \frac{1}{(n+1)^2} \cos(nx) + u + W_1 \tag{8.2-32a}$$

$$\dot{x} = x + W_2 \tag{8.2-32b}$$

所选取的参考模型为

$$\dot{x}_m = -x_m + r \tag{8.2-33}$$

参考输入  $r$  是幅值为 1、宽度和间隔均为  $T = 8\text{ s}$  的周期性正的方波信号,  $h(x) = 1, g(x) = 0$ , 选取  $\varepsilon_1 = 0.01, \alpha = 0.1$ , 仿真结果如图 8.2-2 所示。

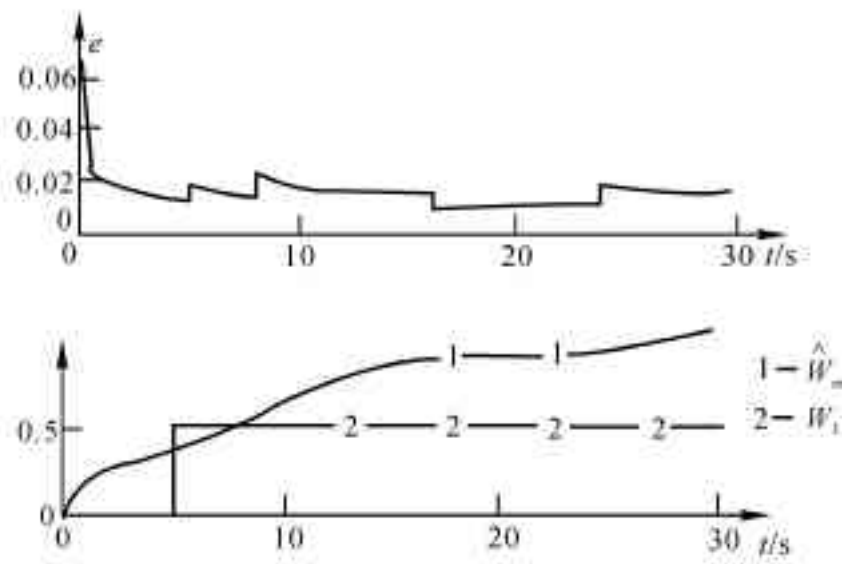


图 8.2-2 例题仿真结果 ( $W_2 = 0$ )

### § 8.3 可补非时变非线性系统的自适应控制

进行非线性系统的控制器设计时,若非线性因素对整个系统特性的影响较小时,可将其视为线性系统的不确定性因素,由设计裕度保证设计结果的有效性,否则,就要视其为系统的确定性因素,进行有效的补偿和设计。

#### 1. 非时变非线性可补性概念

非时变非线性可以划分为可补的和非可补的两类。例如,对于饱和特性等,就无法补偿其输入信号使其输出与输入信号成线性关系。而对于死区或间隙非线性等,就可以做到这一点。这就涉及非时变非线性的可补性概念问题。

定义(可补性)：若存在非时变非线性  $g(x) \equiv g(x, x, x_0)$ , 使得非时变非线性  $f(x) \equiv f(x, x, x_0)$  有

$$f(x, g(x)) = Kx \tag{8.3-1}$$

其中  $Kx$  为  $f(x)$  补偿后的线性化结果,则称  $f(x)$  具有可补性,  $g(x)$  为  $f(x)$  的补函数,简称为补。

显然,对于死区、间隙等非线性的补函数是容易找到的,例如死区的补为理想继电器,间隙的补为微分环节和理想继电器串联组成的环节。但并非所有的非时变非线性均可补,例如饱



和、理想继电器等非线性就是不可补的。可补的非时变非线性具有如下性质：

性质 1：非时变非线性可补的充分必要条件是对任意输入  $x$ , 存在  $y(x) \equiv y(x, x, x_0)$  使得  $f(y) = Kx$ 。

性质 2：可补的非时变非线性必须是无界的。

性质 3：对非时变非线性  $f(x)$ , 其线性化结果为  $Kx$ , 若方程

$$f(x + y) = Kx \tag{8.3-2}$$

有实数解  $y = g(x)$ , 则  $g(x)$  为  $f(x)$  的补函数。

性质 3 给出了求解补函数的方法, 即对方程式(8.3-2) 求得  $y$  对  $x$  的表达式。对于具有可补性的非时变非线性  $f(x)$ , 可硬件补偿为线性系统, 如图 8.3-1 所示。对其作等效结构变换, 注意保持非线性环节的等效性, 即有图 8.3-2 所示结构。其中  $P_c(s) \rightarrow g(x) \rightarrow P^{-1}(s)$  称为逆前馈补偿通道。虚框内为控制器结构, 其中包含非线性补偿通道, 其复杂程度取决于  $P(s)$  和  $f(x)$ 。

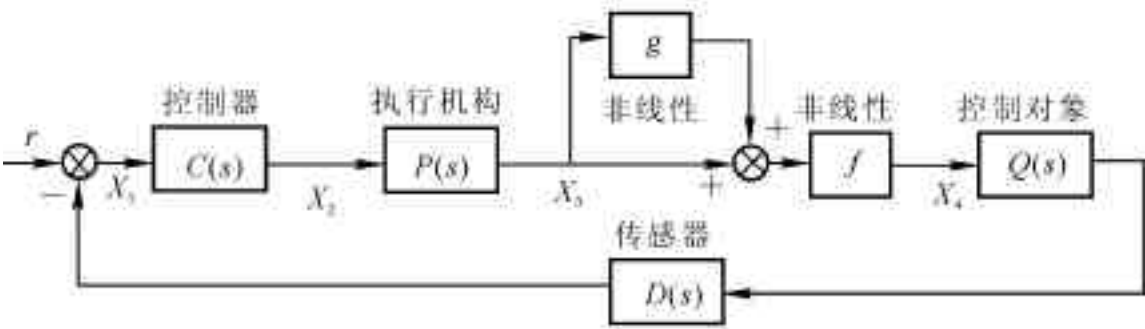


图 8.3-1 可补非时变非线性系统补偿线性化结构

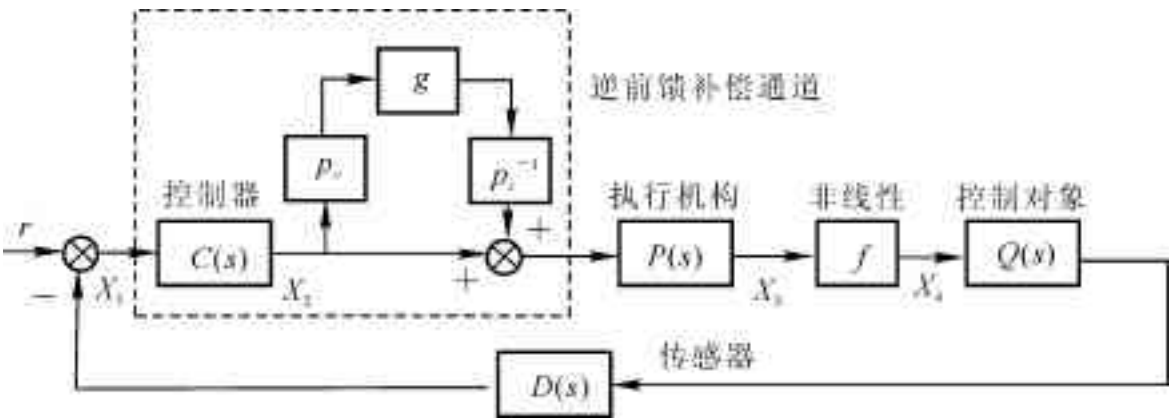


图 8.3-2 系统等效结构变换后的补偿线性化结构

为了控制器的实现, 可将  $P(s)$  分解为最小相位环节  $P_{-}(s)$  和非最小相位环节  $P_{+}(s)$ , 即

$$P(s) = P_{-}(s) + P_{+}(s) \tag{8.3-3}$$

同时取  $P_{+}(0) = 1$ , 即希望在稳态时能实现全补偿, 将  $P_{-}(s)$  作为  $P_c(s)$  的一部分。同时, 引入低通滤波器

$$F_P(s) = 1/(Ts + 1)^n \tag{8.3-4}$$

式中  $T > 0$  为滤波时间常数,  $n$  为  $P_{-}(s)$  的极、零点个数之差。所以有

$$P_c = P_{-}(s) E_P(s) \tag{8.3-5}$$

由于增加了低通滤波器  $F_P(s)$ , 不再出现求高阶导数的问题。又由于  $P_c$  由最小相位环节组成, 初

值的影响在闭环系统稳定下将逐渐消失。

虽然上述方案使控制器变得复杂一些,但由于逆前馈通道的补函数补偿了系统已知的非线性,从而在设计中可降低对稳定裕度的要求。也就是说,在同样的稳定储备下,利用补函数补偿后的系统能克服更大的不确定性或干扰的影响,使系统具有更好的鲁棒稳定性。具体实现时,可考虑  $P(s)$  的主要模态或高阶  $P(s)$  的低阶等效环节。

## 2. 可补非时变非线性系统的自适应算法

考虑 SISO 可补非时变非线性系统

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})W(t) \quad (8.3-6)$$

$$u(t) = f(u(t)) \equiv f(u(t), u(t), u(0)) \quad (8.3-7)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^n a_k q^{-k}, \quad B(q^{-1}) = \sum_{k=0}^m b_k q^{-k}, \quad C(q^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^l c_k q^{-k} \quad (8.3-8)$$

式中  $\{y(t)\}, \{u(t)\}, \{W(t)\}$  分别为系统线性部分输出、输入和噪声序列,  $\{u(t)\}$  是系统的输入序列,  $q^{-1}$  是单位时延算子,  $q^{-d}$  是系统时延。噪声序列  $\{W(t)\}$  是定义在概率空间  $\{\Omega, F, P\}$  的实随机序列,且

$$\begin{aligned} E\{W(t) \mid F_{t-1}\} &= 0 \quad \text{a.s.} \quad E\{W^2(t) \mid F_{t-1}\} = \sigma^2 \quad \text{a.s.} \\ \sup_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N W^2(t) &= \sigma^2 \quad \text{a.s.} \end{aligned} \quad (8.3-9)$$

式中  $\{F_t\}$  为  $\{y(t)\}$  和  $\{u(t)\}$  序列产生的  $\sigma$  代数递增序列 ( $F_0$  包含了初始条件的所有信息)。同时假定:

- (1)  $n, m$  和  $l$  的上界已知;
- (2) 时延  $d$  和  $f(u)$  已知;
- (3)  $C(q^{-1})$  和  $B(q^{-1})$  是稳定的多项式;
- (4)  $f(u)$  的初始状态已知,或与系统状态同时处于零状态。

取指标函数  $J = E\{[y(t+d) - y_r]^2\}$ , 其中  $y_r$  是已知的有界参考输出。

设可补非时变非线性  $f(u)$  的补函数为  $g(u)$ , 且  $f(u + g(u)) = K_P u$ ,  $K_P$  为比例系数,不失一般性,可令  $K_P = 1$ , 则对系统  $u(t)$  的输入修正为

$$u_c(t) = u(t) + g(u) \quad (8.3-10)$$

从而可知系统线性部分的输入

$$\begin{aligned} u(t) &= f(u_c) = f(u(t) + g(u)) = \\ &K_P u(t) = u(t) \end{aligned} \quad (8.3-11)$$

由此可知修正后的系统已是线性系统,其结构如图 8.3-3 所示,因而可采用线性系统的自适应控制算法。

下面分别对  $C(q^{-1}) = 0$  和  $C(q^{-1}) \neq 0$  两种情况进行讨论。

### A. $C(q^{-1}) = 0$

当  $C(q^{-1}) = 0$  时,方程式(8.3-6)变为

$$\begin{aligned} A(q^{-1})y(t) &= q^{-d}B(q^{-1})u(t) \\ A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n} \end{aligned} \quad (8.3-12)$$

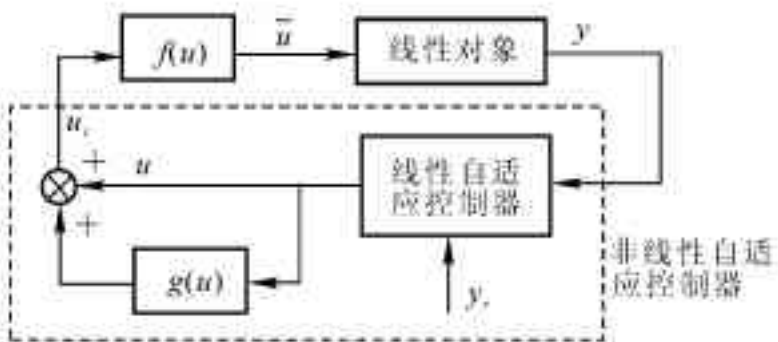


图 8.3-3 修正后的自适应系统结构图

$$B(\bar{q}^{-1}) = b + b\bar{q}^{-1} + \cdots + b_m\bar{q}^{-m}, \quad b \neq 0$$

逐次代换,方程式(8.3-12)可表示为

$$y(t+d) = \alpha(\bar{q}^{-1})y(t) + \beta(\bar{q}^{-1})u(t) \quad (8.3-12)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{q}^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\bar{q}^{-n+1} \\ \beta(\bar{q}^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1\bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_{m+d-1}\bar{q}^{-m-d+1}, \quad \beta_0 \neq 0 \end{aligned}$$

令  $\theta_0$  为系统参数向量,

$$\theta_0^T = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \quad \beta_0 \quad \cdots \quad \beta_{m+d-1}] \quad (8.3-14)$$

则式(8.3-13)可以写为

$$y(t+d) = \Phi^T(t)\theta_0 \quad (8.3-15)$$

$$\theta^T(t) = [y(t) \quad y(t-1) \quad \cdots \quad y(t-n+1) \quad u(t) \quad \cdots \quad u(t-m-d+1)]$$

定义输出跟踪误差为

$$e(t+d) = y(t+d) - y_r(t+d) = \theta^T(t)\theta_0 - y_r(t+d) \quad (8.3-16)$$

若选取  $\{u(t)\}$  满足

$$\theta^T(t)\theta_0 = y_r(t+d) \quad (8.3-17)$$

则跟踪误差显然恒等于零。但由于  $\theta_0$  未知,选取下列的自适应算法得到  $\theta_0$  的估值:

算法 1:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + a(t)\Phi(t-d)[1 + \Phi^T(t-d)\Phi(t-d)]^{-1} \times \\ &\quad [y(t) - \Phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1)] \end{aligned} \quad (8.3-18)$$

$$\Phi^T(t)\hat{\theta}(t) = y_r(t+d) \quad (8.3-19)$$

式中  $a(t)$  为增益常数,若利用  $a(t) = 1$  所计算出的  $\hat{\theta}(t)$  第  $(n+1)$  个分量不为零,则选取  $a(t) = 1$ ; 否则,选取  $a(t) = r, r \neq 1$ , 为在区间  $(\varepsilon, 2 - \varepsilon)$  内选取的常数,  $0 < \varepsilon < 1$ 。这样选取增益常数可以防止式(8.3-19)中  $u(t)$  的系数为零。

算法 2:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t)P(t-2)\Phi(t-d)}{1 + a(t)\Phi^T(t-d)P(t-2)\Phi(t-d)} \times \\ &\quad [y(t) - \Phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-1)] \end{aligned} \quad (8.3-20)$$

$$P(t) = [I - \frac{a(t+1)P(t-1)\Phi^T(t-d)\Phi(t-d)}{1 + a(t+1)\Phi^T(t-d)P(t-1)\Phi(t-d)}]P(t-1) \quad (8.3-21)$$

$$\Phi^T(t)\hat{\theta}(t) = y_r(t+d) \quad (8.3-22)$$

式中  $P(t)$  的初始矩阵  $P(-1)$  可选为任一正定矩阵。序列  $\{a(t)\}$  可以按照算法 1 中的方法进行选取,对标量  $a(t)$  的主要要求是在利用式(8.3-20)计算  $\hat{\theta}(t)$  时避免第  $(n+1)$  个分量为零,这样在利用式(8.3-22)计算  $u(t)$  时就可避免被零除。

定理 1 对于由式(8.3-6),式(8.3-7) ( $C(\bar{q}^{-1}) = 0$ ),式(8.3-10),式(8.3-11)与式(8.3-18),式(8.3-19)或式(8.3-20) ~ 式(8.3-22)所构成的闭环系统,若上述假定(1) ~ (4)成立,则

(i)  $\{u(t)\}, \{y(t)\}$  都是有界序列;

(ii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{y(t) - y_r(t)\} = 0$ 。

该定理的证明过程与参考文献[9]中的证明相类似,此处不再详述。

B.  $C(q^{-1}) \neq 0$

当  $C(q^{-1}) \neq 0$  时, 系统式(8.3-6) 为随机系统, 进行系统的稳定性分析时须采用鞅收敛理论, 这就要求噪声序列  $\{W(t)\}$  必须满足式(8.3-9)。

式(8.3-6) 的  $d$  步超前预测形式可表示为

$$C(q^{-1})[y(t+d) - v(t+d)] = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (8.3-23)$$

式中

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1} q^{-n+1} \\ \beta(q^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \cdots + \beta_{m-1} q^{-m+1}, \quad \beta_0 \neq 0 \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_l q^{-l} \end{aligned}$$

$y(t+d) - v(t+d)$  为  $y(t+d)$  的最优线性  $d$  步超前预测,  $v(t+d)$  是由干扰所驱动的  $d-1$  阶移动平均模型

$$v(t+d) = \sum_{i=0}^{d-1} f_i W(t+d-i) \quad (8.3-24)$$

于是

$$E\{v(t+d) \mid F_t\} = 0 \quad \text{a.s.} \quad (8.3-25)$$

$$E\{v^2(t+d) \mid F_t\} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{d-1} f_i^2 \quad \text{a.s.} \quad (8.3-26)$$

从式(8.3-23) 两边减去  $C(q^{-1})y_r(t+d)$  可得

$$\begin{aligned} C(q^{-1})[y(t+d) - y_r(t+d) - v(t+d)] &= \\ \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) - c(q^{-1})y_r(t+d) \end{aligned} \quad (8.3-27)$$

令  $e(t+d) = y(t+d) - y_r(t+d)$ , 则式(8.3-27) 可写为

$$C(q^{-1})[e(t+d) - v(t+d)] = \Phi^T(t)\theta - y_r(t+d) \quad (8.3-28)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi^T(t) &= [y(t) \cdots y(t-n+1) \quad u(t) \cdots u(t-m+1) - \\ &\quad y_r(t+d-1) \cdots - y_r(t+d-l)] \\ \theta^T &= [\alpha_0 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \quad \beta_0 \quad \cdots \quad \beta_{m-1} \quad c_1 \quad \cdots \quad c_l] \end{aligned}$$

显然, 若  $\theta$  已知, 采用反馈规律  $\Phi^T(t)\theta = y_r(t+d)$ , 跟踪误差  $e(t+d)$  可以达到最优值  $v(t+d)$ 。但由于  $\theta$  未知, 将采用下列的自适应递推算法获得  $\theta$  的估值  $\hat{\theta}(t)$ :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-d) + \frac{a}{r(t-d)} \Phi(t-d)[y(t) - \Phi^T(t-d)\hat{\theta}(t-d)], \quad a > 0 \quad (8.3-29)$$

$$r(t-d) = r(t-d-1) + \Phi^T(t-d)\Phi(t-d), \quad r(0) = 1 \quad (8.3-30)$$

$$\Phi^T(t)\hat{\theta}(t) = y_r(t+d) \quad (8.3-31)$$

定理 2: 对于系统式(8.3-6) 和式(8.3-7), 若式(8.3-9) 及假定(1) ~ (4) 成立, 且  $[C(q) - \frac{\epsilon}{2}]$  严格正实, 由式(8.3-10) 和式(8.3-11) 并采用自适应算法式(8.3-29) ~ 式(8.3-31), 则有

$$(i) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) < \infty \quad \text{a.s.}$$

$$(ii) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) < \infty \quad a.s.$$

$$(iii) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t) < \infty \quad a.s.$$

$$(iv) \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E\{[y(t) - y_r(t)]^2 \mid F_{t-d}\} = \Gamma^2 \quad a.s.$$

式中  $\Gamma^2$  是利用线性反馈所可能达到的最小均方控制误差。

此定理的证明可参考文献[10]。

## § 8.4 对象具有未知死区时的自适应控制

死区特性是在许多控制系统部件都存在的一种物理现象。在上一节研究可补非时变非线性系统的自适应控制问题时,曾介绍过适用于已知非时变死区的自适应控制器设计方法。而在实际工程问题中,死区特性往往难以预先确定,而且有可能是时变的。因而在设计自适应控制器时,除了考虑对象线性部分的不确定性之外,还往往要求所设计的控制器能够适应死区的不确定性。本节将介绍适用于对象具有未知死区时的模型参考自适应控制器设计方案,这种方案可以保证闭环系统的所有信号有界,并且具有小的跟踪误差。

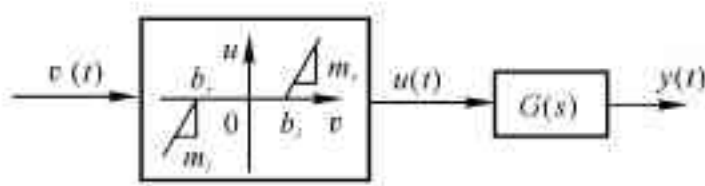


图 8.4-1 对象模型

### 1. 问题的描述

输入为  $v(t)$ 、输出为  $u(t)$  的死区如图 8.4-1 所示,其数学描述为

$$u(t) = D(v(t)) = \begin{cases} m_r(v(t) - b_r), & v(t) \geq b_r \\ 0, & b_l < v(t) < b_r \\ m_l(v(t) - b_l), & v(t) \leq b_l \end{cases} \quad (8.4-1)$$

本节中所研究的控制问题的主要特点是:

- (1) 死区输出  $u(t)$  是不可测量的;
- (2) 死区参数  $b_r, b_l, m_r, m_l$  是未知的,但它们的符号是已知的,  $b_r > 0, b_l < 0, m_r > 0, m_l < 0$ 。

研究图 8.4-1 所示对象,其中

$$y(t) = G(s)[u](t), \quad u(t) = D(v(t)), \quad G(s) = K_P \frac{Z(s)}{R(s)} \quad (8.4-2)$$

对于对象的线性部分  $G(s)$ ,假定:

- (1)  $G(s)$  是最小相位的,  $Z(s)$  和  $R(s)$  为首一多项式;
- (2)  $G(s)$  的分母多项式与分子多项式阶数之差  $n^*$  是已知的;
- (3) 多项式  $R(s)$  的阶数  $n$  的上界  $\bar{n}$  是已知的;
- (4) 增益  $K_P$  的符号已知,不失一般性,假设  $K_P > 0$ 。

控制的目的是设计一种反馈控制,使得闭环系统的所有信号有界,并且对象的输出  $y(t)$  能够跟踪参考模型

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t) \quad (8.4-3)$$

的输出  $y_m(t)$ , 其中  $W_m(s)$  为稳定传递函数,  $r(t)$  为一有界分段连续信号。为了方便, 假定  $n = n^*$ , 并且不失一般性, 假定  $W_m(s) = R_m^{-1}(s)$ ,  $R_m(s)$  是一阶数为  $n^*$  的 Hurwitz 多项式。

本节所采用的方法是构造一个死区逆(或称死区补)来抵消死区, 使得由线性模型参考控制器所产生的理想控制可适用于对象式(8.4-2)。由于死区是未知的, 它的逆也只有利用其参数的估值才能实现。为了对死区逆进行线性参数化, 将利用  $m_r b_r, m_r, m_l b_l, m_l$  的估值  $\hat{m}_r b_r, \hat{m}_r, \hat{m}_l b_l, \hat{m}_l$ , 而  $b_r$  和  $b_l$  的估值则由  $\hat{b}_r = \hat{m}_r b_r / \hat{m}_r$  和  $\hat{b}_l = \hat{m}_l b_l / \hat{m}_l$  求得。在控制过程中, 将利用鲁棒自适应律不断修正这些估值。

令  $u_d(t)$  为对象无死区时能达到控制目的的线性控制信号,  $v(t)$  为根据图 8.4-2 所示确定性等价死区逆所产生的控制信号,  $v(t)$  可表示为

$$v(t) = \hat{DI}(u_d(t)) = \begin{cases} \frac{u_d(t) + \hat{m}_r b_r}{\hat{m}_r}, & u_d(t) \geq 0 \\ \frac{u_d(t) + \hat{m}_l b_l}{\hat{m}_l}, & u_d(t) < 0 \end{cases} \quad (8.4-4)$$

为了保证(8.4-4)式是可实现的, 即保证对所有  $t \geq 0$  有  $\hat{m}_r(t) \neq 0, \hat{m}_l(t) \neq 0$ , 需要假定: 死区斜率  $m_r, m_l$  具有下界  $m_r^0, m_l^0$ , 使得  $0 < m_r^0 \leq m_r, 0 < m_l^0 \leq m_l$ , 其中  $m_r^0, m_l^0$  为常数。

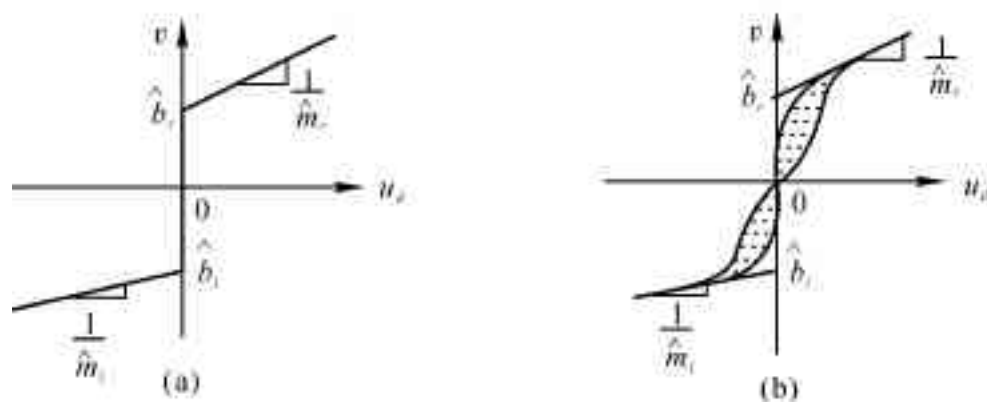


图 8.4-2 自适应死区逆  
(a) 硬死区逆 (b) 软死区逆

就像在图 8.4-2(a) 所示硬死区逆上附加有软变化一样, 我们可以利用图 8.4-2(b) 中的阴影区内的任何一条光滑曲线。这种软死区逆避免了在  $u_d = 0$  处的不连续性, 但在消除死区影响时会产生误差。如果  $\hat{b}_r, \hat{b}_l$  有界, 则所产生的误差有界。在自适应控制时, 利用死区参数上界的先验知识进行预测, 可以保证这种有界性。

下面我们将研究硬、软死区逆对一类简单自适应控制系统动态性能的影响问题。

## 2. 自适应死区逆系统的动态特性

死区逆具有继电器型的不连续性, 当死区逆精确时, 可以与死区相抵消。但是, 每当间断点估值  $\hat{b}_r, \hat{b}_l$  大于真实值  $b_r, b_l$  时, 这种不连续性就会出现, 相应的微分方程就会具有在滑动模态理论中所研究的形式。为了更清楚说明这一点, 现详细分析一类具有对称死区的一阶不稳定对象

$$G(s) = \frac{1}{s-1} \quad (8.4-5)$$

其对称死区为

$$u(t) = \begin{cases} v(t) - b, & v(t) \geq b \\ 0, & -b < v(t) < b \\ v(t) + b, & v(t) \leq -b \end{cases} \quad (8.4-6)$$

式中的间断点  $b > 0$  是唯一的未知参数。对于定常值  $r > 0$ , 对象和理想控制为

$$\dot{y} = y + u, \quad u_d = -2y + r \quad (8.4-7)$$

在不存在死区的情况下,  $v(t) = u_d(t)$  将导致  $\dot{y} = -y + r$ , 因而当  $t \rightarrow \infty$  时,  $y(t) \rightarrow r$ 。当存在式(8.4-6)所示死区时, 为了达到同样的跟踪结果, 选取自适应死区逆为

$$v(t) = u_d(t) + b(t) \operatorname{sgn}(u_d(t)) \quad (8.4-8)$$

式中  $b(t)$  为  $b$  的估值, 其误差为  $\Phi(t) = b(t) - b$ 。由于  $v$  既可以在死区内, 也可以在死区外, 因而跟踪误差  $e(t) = y(t) - r$  的方程具有两种形式:

$$e = -e - u_d, \quad -b < v(t) < b \quad (8.4-9a)$$

$$e = -e + \Phi \operatorname{sgn}(u_d), \quad v(t) \leq -b \text{ 或 } v(t) > b \quad (8.4-9b)$$

对于式(8.4-9b)的形式可以利用李亚普诺夫型的自适应修正律对  $b(t) > 0$  进行估计, 即

$$\Phi = \dot{b} = \begin{cases} -e \operatorname{sgn}(u_d), & b > 0 \\ 0, & b = 0 \text{ 且 } -e \operatorname{sgn}(u_d) < 0 \end{cases} \quad (8.4-10)$$

最终的自适应系统既可以用式(8.4-9a)和式(8.4-10)表示, 也可以用式(8.4-9b)和式(8.4-10)来表示。在两种情况下, 在  $u_d = 0$ , 即  $e = -\frac{r}{2}$  处, 均不连续。若线  $e = -\frac{r}{2}$  任一边的向量场指向这条线, 即当  $u_d > 0$  以及  $u_d < 0$  时,  $u_d u_d < 0$ , 则会出现滑态。对式(8.4-9a)进行考查表明, 正如所预料的一样, 当  $v(t)$  位于死区内时, 不会出现滑态。对于位于死区外的系统式(8.4-9b)和式(8.4-10), 不论  $u_d$  是正还是负, 都有

$$u_d u_d = 2(e u_d - \Phi |u_d|) < 0, \quad \Phi > \frac{r}{2} \quad (8.4-11)$$

这表明只是沿半直线  $e = -\frac{r}{2}, \Phi > \frac{r}{2}$  才会出现滑态, 其滑态解由下式求出

$$e = 0, \quad e(t) = -\frac{r}{2} \quad (8.4-12)$$

$$\Phi = -\frac{\dot{e}^2}{\Phi} = -\frac{r^2}{4\Phi}, \quad \Phi(t) > \frac{r}{2} \quad (8.4-13)$$

因此, 对于  $\Phi(0) > \frac{r}{2}$ , 式(8.4-13)的解  $\Phi(t)$  在有限时间内可以到达滑态的终端  $\Phi = \frac{r}{2}$ 。在滑态之外, 自适应系统具有通常意义下的解。系统的解是连续的, 只是其导数在  $u_d = 0$  处不连续。

现在证明  $(e, \Phi) = (0, 0)$  是自适应系统的全局渐近稳定平衡点。若对式(8.4-9b)和式(8.4-10)选取  $V(e, \Phi) = \frac{1}{2}(\dot{e}^2 + \Phi^2)$ , 则对死区外的所有解, 包括出现滑态的那些解, 均有  $V = -\dot{e}^2$ 。这就表明, 那些在死区外开始并且保持在死区外的所有解都收敛至  $(e, \Phi) = (0, 0)$ 。对于死区内的解, 利用式(8.4-9a)和式(8.4-10)可得

$$V = -\dot{e}^2 - e(u_d + \Phi \operatorname{sgn}(u_d)) = e(e + r - \Phi \operatorname{sgn}(u_d)) \quad (8.4-14)$$

因为  $\operatorname{sgn}(u_d) = \operatorname{sgn}(v)$ , 我们需要在  $u_d > 0, 0 < v < b$  和  $u_d < 0, -b < v < 0$  两种情况下考

查  $V$ 。在第一种情况下,  $e < -\frac{r}{2} < 0$  且  $-e < e + r - \Phi$ , 因而  $V < -\dot{e}^2$ 。在第二种情况下, 由于  $u_d - \Phi > 0$ , 只要  $e \geq 0$ , 则  $V \leq \dot{e}^2$ 。同样, 对于  $-\frac{r}{2} < e < 0$  和  $e + r + \Phi > 0$  均有  $V < 0$ 。而在区域  $-\frac{r}{2} < e < 0$  和  $e + r + \Phi \leq 0$  内则有  $V \geq 0$ , 我们必须证明状态在有限时间内会离开这一区域。因为  $-b \leq \Phi$ , 这一区域是紧的, 可以证明由式(8.4-9a)所定义的  $e(t)$  在有限时间内可以变成正的, 这一结论可以由  $\dot{e} = -e - u_d = e + r > \frac{r}{2}$  直接得出。因而  $(e, \Phi) = (0, 0)$  是全局渐近稳定的这一结论得证。在这种情况下, 既可以保证渐近跟踪, 也可以做到使参数收敛。

具有硬自适应死区逆式(8.4-8)的自适应系统的  $\Phi - e$  关系图如图 8.4-3 所示, 计算时取  $b = 3, r = 2$ , 使得  $u_d = 0$  不连续点位于  $e = -1$ 。而滑动端点位于  $(\Phi, 3) = (0, -1)$ , 对于同一系统具有软自适应死区逆的  $\Phi - e$  关系图如图 8.4-4 所示。软死区逆的具体形式为可微函数

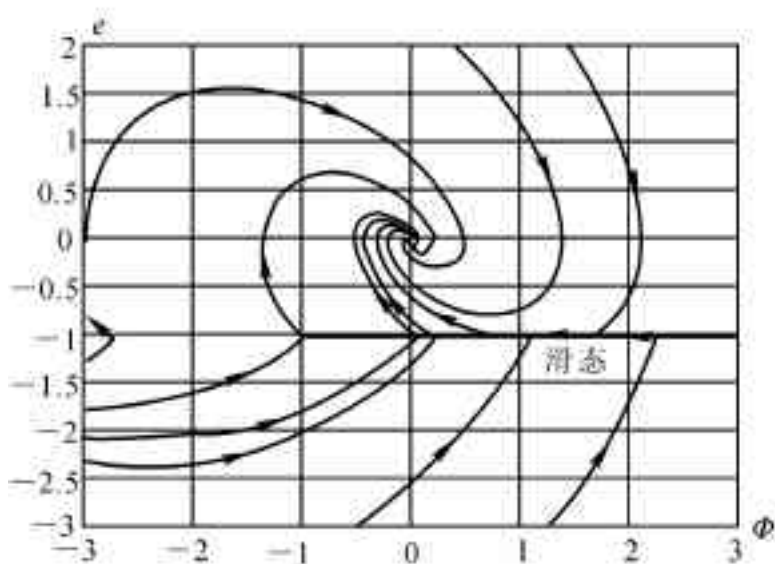


图 8.4-3 具有硬死区逆的自适应系统  $\Phi - e$  关系曲线

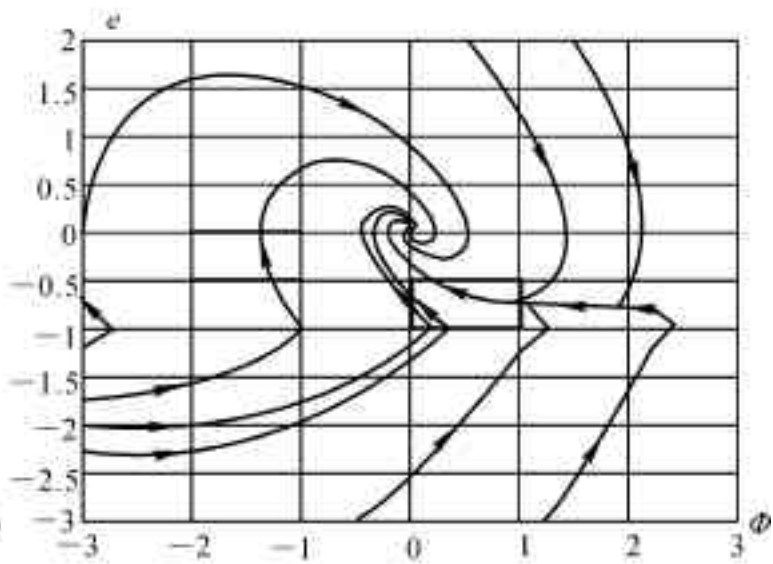


图 8.4-4 具有软死区逆的自适应系统  $\Phi - e$  关系曲线

$$v = u_d + b(1 - e^{-10 u_d^2}) \operatorname{sgn}(u_d) \quad (8.4-15)$$

两种图形间的惟一定性差别就在于图 8.4-4 中的图形消除了滑态, 沿着一个引力簇运动。在渐近跟踪和参数收敛方面, 二者是相同的。一般说来, 使用软死区逆可以避免滑动模态, 而对跟踪性能的影响可以忽略不计。

### 3. 自适应死区逆的设计

为了介绍适用于高阶对象的自适应逆的设计方法, 我们先选择下述基本的线性控制器结构

$$u_d(t) = \theta_1^T \omega_1(t) + \theta_2^T \omega_2(t) + \theta_3 r(t) \quad (8.4-16)$$

式中  $\omega_1(t) = (a(s)/\Lambda(s))[u_d](t)$ ,  $\omega_2(t) = (a(s)/\Lambda(s))[y](t)$ ,  $a(s) = [1 \ s \cdots s^{n-1}]^T$ ,  $\Lambda(s)$  是一任意的  $n$  阶 Hurwitz 多项式,  $\theta_1, \theta_2 \in R^n$ ,  $\theta_3 \in R$ 。

解决标准的模型参考控制问题(即不存在死区并且  $v(t) = u_d(t)$ ) 时, 是令控制器的参数  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  在取值  $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*$  时满足关系式

$$\theta_1^{*T} a(s) R(s) + \theta_2^{*T} a(s) K_P Z(s) =$$



$$\Lambda(s) (R(s) - K_p \theta_3^* Z(s) R_m(s)), \quad \theta_3^* = K_p^{-1} \quad (8.4-17)$$

当对象中存在的死区式(8.4-1)为已知时,则上述的线性控制器与精确的死区逆式(8.4-

4) 相串联,并且  $\hat{m}_r b_r = m_r b_r, \hat{m}_l - r = m_r, \hat{m}_l b_l = m_l b_l, \hat{m}_l = m_l$ , 整个闭环系统具有信号有界和渐近跟踪等理想特性。然而,在本节所研究的控制问题中,死区是未知的,因而需要寻找一种自适应死区逆,使得在死区未知的情况下仍可以达到理想系统的特性。

在着手进行自适应死区逆设计之前,先来考查一下不采用自适应死区逆时可能达到的控制目标。当利用一些不精确的常数估值  $\hat{m}_r b_r, \hat{m}_l b_l, \hat{m}_r, \hat{m}_l$  实现固定的死区逆时,具有这种不匹配死区逆的对象式(8.4-2)可表示为

$$y(t) = \frac{Z(s)}{R(s)} [K(u_d + d_u)](t) \quad (8.4-18)$$

式中

$$d_u(t) = \begin{cases} \hat{m}_r b_r - \hat{m}_r b_r, & v(t) \geq b \\ \hat{m}_r b_r - \hat{m}_r v(t), & 0 \leq v(t) < b \\ \hat{m}_l b_l - \hat{m}_l b_l, & b \geq v(t) \\ \hat{m}_l b_l - \hat{m}_l v(t), & b < v(t) < 0 \end{cases} \quad (8.4-19a)$$

$$K(t) = \begin{cases} K_p m_l / \hat{m}_r, & v(t) \geq 0 \\ K_p m_l / \hat{m}_l, & v(t) < 0 \end{cases} \quad (8.4-19b)$$

由于只有当  $b < v(t) < b$  时,  $d_u(t)$  才与  $v(t)$  有关,并且当且仅当  $b_r \in \frac{\hat{m}_r b_r}{\hat{m}_r} = b, b_l \in \frac{\hat{m}_l b_l}{\hat{m}_l} = b_l - l$  时,  $d_u(t) = 0$ , 因而对于所有  $v(t)$ ,  $d_u(t)$  是有界的。 $K(t)$  是在两个未知的有界常数值之间转换,  $\text{sign}(K(t)) = \text{sign}(K_p)$ 。此外,如果图 8.4-2(b) 所示软死区逆得以实现,则  $d_u(t)$  将包含一项附加误差,这一附加误差也是有界的。

当  $G(s)$  已知时,可以解方程式(8.4-17) 求出  $\theta_1^*, \theta_2^*$  及  $\theta_3^*$ , 利用  $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*$  实现固定的线性控制器

$$u_d(t) = \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [u_d](t) + \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y](t) + \theta_3^* r(t) \quad (8.4-20)$$

将这一控制器应用于对象式(8.4-18),若  $|\hat{m}_r - m_r|, |\hat{m}_l - m_l|$  较小时,所有的信号可以保持有界。然而,当  $|\hat{m}_r - m_r|, |\hat{m}_l - m_l|$  较大时,闭环系统可能变得不稳定。

当  $G(s)$  未知时,可以将固定死区逆与控制器式(8.4-16) 的鲁棒自适应修正律同时使用。在等斜率情况下,即  $m_r = m_l = m$ ,可以将式(8.4-18) 改写为

$$y(t) = G(s) / (m \hat{m}) [u_d + d_u](t) \quad (8.4-21)$$

式中  $\hat{m}$  是斜率  $m$  的固定估值。利用  $\theta^T(t) = [\theta_1^T(t) \quad \theta_2^T(t) \quad \theta_3(t)]$  作为  $\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^* \quad \theta_3^*]$  的估值,并且将式(8.4-17) 中的  $K_p$  用  $K_p(\hat{m}/m)$  代替,再利用回归向量  $\omega^T(t) = [\omega_1^T(t) \quad \omega_2^T(t) \quad r(t)]$ , 则最终的跟踪误差方程可写为

$$e(t) = y(t) - y_m(t) = \theta_3^{*-1} W_m(s) [(\theta - \theta^*)^T \Phi^T \omega](t) + \theta_3^{*-1} [1 - \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}] W_m(s) [d_y](t) \quad (8.4-22)$$

利用参考文献[5]中的鲁棒自适应控制理论可以证明,对于任意大的误差( $\hat{m} - m$ ),系统的所有信号有界。这就意味着在存在适用于对象线性部分的鲁棒自适应控制器的情况下,固定的不匹配的死区逆不会引起信号无界。然而,不使用自适应死区逆就不能达到渐近跟踪,这是因为不匹配的间断点估值  $\hat{b}_r \neq b_r, \hat{b}_l \neq b$  将会导致非零干扰  $d_u(t)$ 。

可以作出结论:使用固定的不匹配的死区逆不可能消除跟踪误差。为了达到改善跟踪性能这一最终目标,可以在假定未知斜率相等,即  $m_r = m_l = m$  的情况下,设计死区逆参数的自适应修正律。仿真结果表明,即使在斜率不相等的情况下,即  $m_r \neq m_l$ ,跟踪误差仍可以收敛至零。但对此难以给出分析证明。

对于等斜率死区,真实的死区参数、参数估值和参数估值误差分别表示为

$$\theta_0^* = [m \quad mb_r \quad mb_l]^T, \quad \hat{\theta}_0(t) = [\hat{m}(t) \quad \hat{mb}_r(t) \quad \hat{mb}_l(t)]^T, \quad \Phi_0(t) = \hat{\theta}_0(t) \quad (8.4-23)$$

相应的回归向量为

$$\omega_0(t) = [-v(t) \quad x(t) \quad 1 - x(t)]^T \quad (8.4-24)$$

式中

$$x(t) = \begin{cases} 1, & u_d(t) > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (8.4-25)$$

利用死区逆式(8.4-14)和式(8.4-16)中的符号,则死区输出  $u(t)$ ,即对象线性部分的输入,可表示为

$$u(t) = u_d(t) + \Phi_0^T(t) \omega_0(t) + d(t) \quad (8.4-26)$$

在系统稳定性分析时通常要确定控制误差( $u(t) - u_d(t)$ )的表达式,其中不可参数化部分为

$$d(t) = m_r \Delta_r(t) [v(t) - b_r] + m_l \Delta_l(t) [v(t) - b] \quad (8.4-27)$$

式中

$$\Delta_r(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq v(t) < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (8.4-28a)$$

$$\Delta_l(t) = \begin{cases} -1, & b \leq v(t) < 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (8.4-28b)$$

从这些表达式可以明显看出,扰动项  $d(t)$  是有界的。当  $m_r \neq m_l$  时,式(8.4-27)和式(8.4-28)仍然成立,这一点对于后面所提出的自适应控制方案是十分有用的。

在研究自适应控制方案时,我们仍然是研究  $G(s)$  已知和  $G(s)$  未知两种情况。在第一种情况下,自适应死区逆和固定的线性控制器组合,而在第二种情况下,则对于死区逆和线性控制器都要进行自适应调节。

#### A. 自适应死区逆与固定的线性控制器组合

当  $G(s)$  已知时,模型匹配方程式(8.4-17)要求  $u(t)$  和  $y(t)$  满足关系式

$$u(t) = \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [u](t) + \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y](t) + \theta_3^* W_m^{-1}(s) [y](t) \quad (8.4-29)$$

如图8.4-5所示,控制信号  $u_d(t)$  由线性控制器式(8.4-20)得到,将其代入式(8.4-26)可得到信号  $u(t)$ 。由这些表达式可知,由死区参数估计误差  $\Phi_0(t)$  引起的跟踪误差为

$$e(t) = H(s) [\Phi_0^T \omega_0 + d](t) \quad (8.4-30)$$

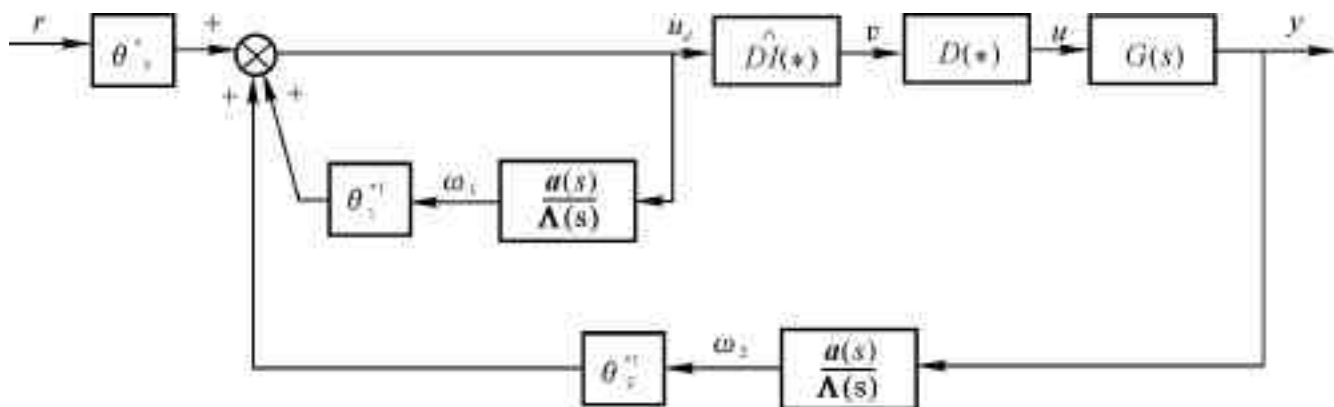


图 8.4-5  $G(s)$  已知时的控制器结构

式中  $H(s) = \theta_3^{*-1} W_m(s) [1 - \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}]$  是已知的严格真稳定传递函数。对于与跟踪误差方程式(8.4-30) 相似的一类方程, 建议采用下列的修正律来估计死区参数:

$$\theta_0(t) = - \frac{\Gamma \zeta(t) \varepsilon(t)}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} - \Gamma \sigma(\theta_0(t)) \theta_0(t) \quad (8.4-31)$$

式中  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , 并且

$$\varepsilon(t) = e(t) + \xi(t) \quad (8.4-32)$$

$$\xi(t) = \theta_0^T(t) \zeta(t) - H(s) [\theta_0^T \omega_0](t) \quad (8.4-33)$$

$$\zeta(t) = H(s) [\omega_0](t) \quad (8.4-34)$$

$$\sigma(\theta_0(t)) = \begin{cases} 0, & \|\theta_0(t)\| < M_0 \\ \alpha \left( \frac{\|\theta_0(t)\|}{M_0} - 1 \right), & M_0 \leq \|\theta_0(t)\| < 2M_0 \\ \alpha, & \|\theta_0(t)\| > 2M_0 \end{cases} \quad (8.4-35)$$

式中  $\alpha > 0$  为一设计参数,  $M_0$  根据  $\|\theta_0^*\|$  上界的先验知识确定, 即  $\|\theta_0^*\| < M_0$ 。

尽管在式(8.4-31) 中没有明示, 但根据前面死区斜率  $m_r, m_l$  具有下界的假定, 则利用式(8.4-31) 所得到的  $\theta_0(t)$  估计值将可保证  $m(t) \geq m^0 > 0$  ( $m^0$  为常数), 也保证了  $\hat{m} b_r(t) \geq 0$  和  $\hat{m} b_l \leq 0$ 。

式(8.4-30) 中的干扰项  $d(t)$  具有对自适应设计有利的三个重要性质:

- (1) 当  $b_r \geq b_r$  且  $b_l \leq b_l$  时,  $d(t) = 0$ , 这就是说, 当间断点  $b$  和  $b_l$  估计过大时,  $d(t)$  消失;
- (2) 当  $v(t) \geq b$  或  $v(t) \leq b$ , 即  $u(t)$  和  $v(t)$  在死区外时,  $d(t) = 0$ ;
- (3)  $d(t)$  依赖于自适应修正的估值  $\hat{b}_r, \hat{m}$  和  $\hat{b}_l$ 。

为了避免涉及  $u_d(t) = 0$  处的不连续性问题, 我们采用一种软死区逆, 但  $d(t)$  会包含一项附加误差。当参数的估值有界时, 附加误差有界。

下面的引理确定了自适应修正律式(8.4-31) 的有界性质。

引理 1: 自适应修正律式(8.4-31) 可保证:

- (1)  $\theta_0(t), \theta_0(t), \varepsilon(t) \sqrt{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} \in L_\infty$  (8.4-36)
- (2) 对于某些  $\alpha, \alpha > 0$  和所有的  $t > t_0 \geq 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\theta_0(t)\|^2 dt \leq \alpha + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\omega}{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)} dt \quad (8.4-37)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)} dt \leq \alpha + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\omega}{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)} dt \quad (8.4-38)$$

证明：将式(8.4-30)代入式(8.4-32)并设  $d(t) = H(s)[d_0](t)$ , 则估计误差可写为

$$\varepsilon(t) = \Phi_0^T(t)\zeta(t) + d(t) \quad (8.4-39)$$

可以导出, 正定函数  $V_0(\Phi_0(t)) = \frac{1}{2}\Phi_0^T(t)\Gamma^{-1}\Phi_0(t)$  沿式(8.4-31)轨迹的导数满足不等式

$$V_0(\Phi_0(t)) \leq \frac{\varepsilon^2(t)}{2(1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t))} + \frac{d^2(t)}{2(1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t))} - \sigma(\Phi_0(t))\Phi_0^T(t)\Phi_0(t) \quad (8.4-40)$$

这就证明了  $\Phi_0(t) \in L_\infty$ , 并且  $\varepsilon(t)/\sqrt{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)}, \Phi_0(t) \in L_\infty$ 。注意到对于某些  $K_1 > 0$ ,  $\sigma(\Phi_0(t))$  具有性质

$$2\sigma^2(\Phi_0(t))\|\Phi_0(t)\|^2\|\Gamma\|^2 \leq K_1\sigma(\Phi_0(t))\|\Phi_0(t)\|(\|\Phi_0(t)\| - \|\Phi_0^*\|) \leq K_1\sigma(\Phi_0(t))\Phi_0^T(t)\Phi_0(t) \quad (8.4-41)$$

则引理的性质(2)得证。证毕。

下面的定理说明闭环系统的所有信号有界。

定理 1: 由自适应死区逆和固定线性控制器式(8.4-1) ~ 式(8.4-4), 式(8.4-20), 式(8.4-31)组合所构成的闭环系统所有信号有界, 并且对于某些  $\alpha, \alpha > 0$  和任意  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ , 跟踪误差  $e(t)$  满足关系式

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \leq \alpha + \alpha \int_{t_1}^{t_2} d_0(t) dt \quad (8.4-42)$$

证明：由于  $\Phi_0(t) \in L_\infty$ , 并且式(8.4-31)可保证  $\hat{m}(t) > m^0 > 0$ , 因而有

$$u(t) = \frac{m}{\hat{m}(t)}u_d(t) + d(t) \quad (8.4-43)$$

式中  $d(t)$  为有界信号。定义两个假设信号  $z_0(t), z_1(t)$  和两个假设滤波器  $K_1(s), K(s)$  为

$$z_0(t) = \frac{1}{s + a}[u](t), \quad z_1(t) = \frac{1}{s + a}[y](t), \quad a > 0 \quad (8.4-44)$$

$$sK_1(s) = 1 - K(s), \quad K(s) = \frac{a^{n*}}{(s + a)^{n*}}, \quad a > 0 \quad (8.4-45)$$

则有

$$z_0(t) + aK_1(s)[z_0](t) - K(s)[u](t) = K(s)G^{-1}(s)[z](t) \quad (8.4-46)$$

利用式(8.4-20), 式(8.4-43)和式(8.4-44)可得

$$u(t) = \frac{m}{\hat{m}(t)}\theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} (s + a)[z_0](t) + \frac{m}{\hat{m}(t)}\theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a)[z](t) + \frac{m}{\hat{m}(t)}\theta_3^* r(t) + (1 - \frac{m}{\hat{m}(t)}\theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m})[d](t) \quad (8.4-47)$$

将上式代入式(8.4-46)可得  $z(t)$  与  $z_0(t)$  间的关系式

$$\left\{ 1 + K_1(s) \left[ a_0 - \frac{m}{\hat{m}(\cdot)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} (s + a_0) \right] \right\} [\mathcal{Z}](t) =$$

$$[K(s)G^{-1}(s) + K_1(s) \frac{m}{\hat{m}(\cdot)} \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0)] [\mathcal{Z}](t) +$$

$$K_1(s) \left[ -\theta_3^{*T} r \right](t) + K_1(s) \left[ 1 - \frac{m}{\hat{m}(\cdot)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} \right] [d_2](t) \quad (8.4-48)$$

根据  $\hat{m}(t), \hat{m}(t) \in L_\infty$  以及

$$\frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} (s + a_0) [\mathcal{Z}](t) =$$

$$\frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \left\{ s \left[ \frac{\hat{m}}{m} \mathcal{Z}_0 \right] - \mathcal{Z}_0 s \left[ \frac{\hat{m}}{m} \right] + a_0 \frac{\hat{m}}{m} \mathcal{Z}_0 \right\} (t) \quad (8.4-49)$$

可知  $\frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} (s + a_0)$  是稳定的真有理式算子。

$K_1(s)$  的脉冲响应函数  $K_1(t)$  满足关系式

$$\int_0^\infty |K_1(t)| dt = n^*/a \quad (8.4-50)$$

因而存在  $a^0 > 0$  使得对于任意有限的  $a > a^0$ , 算子

$$T_0(s, t) \triangleq \left\{ 1 + K_1(s) \left[ a_0 - \frac{m}{\hat{m}(\cdot)} \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} \frac{\hat{m}(\cdot)}{m} (s + a_0) \right] \right\}^{-1} \quad (8.4-51)$$

是稳定的真有理式。对于任一固定的  $a > a^0$ , 式(8.4-48)意味着

$$\mathcal{Z}(t) = T_1(s, \cdot) [z]t + b(t) \quad (8.4-52)$$

式中  $T_1(s, t)$  是一稳定的真有理式算子,  $b(t)$  是与  $r(t), d(t)$  有关的有界信号。

令  $(A, B, C)$  为  $H(s)$  的最小实现, 定义  $W_c(s) = C(sI - A)^{-1}$ ,  $W_b(s) = (sI - A)^{-1}B$ , 则  $\xi(t)$  的表达式为

$$\xi(t) = W_c(s) [W_b(s)(s + a_0) \frac{1}{s + a_0} \omega_0^T \theta_0] (t) \quad (8.4-53)$$

应用  $\omega(t), \mathcal{Z}(t)$  的定义式(8.4-24), 式(8.4-44), 则有

$$\frac{1}{s + a_0} \omega(t) = \frac{1}{m} [Z(t) \quad 0 \quad 0]^T + d(t) \quad (8.4-54)$$

式中  $d(t)$  为包含有界余项的向量信号。

将式(8.4-32) 等号两边用  $1/(s + a_0)$  进行滤波, 并再次利用式(8.4-44), 可得

$$z(t) = \frac{1}{s + a_0} [y_m](t) + \frac{1}{s + a_0} [\varepsilon - \xi](t) \quad (8.4-55)$$

不等式

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{|\varepsilon(t)|}{\sqrt{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)}} (1 + \|\zeta(t)\| + |\xi(t)|) \quad (8.4-56)$$

以及式(8.4-52) ~ 式(8.4-55) 意味着

$$\|z(t)\| \leq x_0(t) + T_2(s, \cdot) [x_1 T_3(s, \cdot)] [\|z\|](t) \quad (8.4-57)$$

式中  $x_0(t) \in L_\infty$ ,  $x_1(t) \in L_\infty$ , 并且对于某些  $\alpha, \alpha > 0$  和任意的  $t \geq t_1 \geq 0$  有

$$\int_{t_1}^{t_2} x_1^2(t) dt \leq \alpha + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha}{1 + \zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)} dt \quad (8.4-58)$$

算子  $T_2(s, t)$  是稳定的严格真有理式, 而算子  $T_3(s, t)$  是稳定的真有理式并且具有非负的脉冲响应。

若  $\zeta(t), \xi(t)$  有界, 则由引理和式(8.4-34)知  $\varepsilon(t), y(t)$  有界, 由式(8.4-44), 式(8.4-52)知  $z(t), \varphi(t)$  有界, 由式(8.4-43), 式(8.4-20), 式(8.4-4)知  $u_d(t), u(t)$  有界。于是, 闭环系统的所有信号有界。反之, 若  $\zeta(t), \xi(t)$  无界, 则  $\zeta^T(t)\zeta(t) + \xi^2(t)$  无限增大, 由式(8.4-58)知  $x_1(t)$  变小, 导致式(8.4-57)式中的  $z(t)$  有界, 这又意味着式(8.4-52)中的  $\varphi(t)$  有界, 因而式(8.4-47)中的  $u(t)$ , 式(8.4-43)式中的  $u_d(t)$ , 式(8.4-24)中的  $\omega(t)$ , 式(8.4-33)中的  $\xi(t)$  以及式(8.4-32)中的  $y(t)$  均有界。因而可以得出结论: 闭环系统中的所有信号有界。利用式(8.4-33) ~ 式(8.4-41), 式(8.4-53)可得式(8.4-42), 证毕。

总之, 跟踪误差  $(u(t) - u_d(t))$  的表达式(8.4-26)和跟踪误差方程式(8.4-30)使得我们可以采用自适应律式(8.4-31)来估计死区参数, 并且证明了闭环系统所有信号有界。若  $d_0(t)$  较小, 则跟踪误差在式(8.4-42)的意义上也较小。当  $b_r(t) \geq b_r$  且  $b_l \leq b$ , 或者  $v(t) \geq b_r$ , 或  $v(t) \leq b$  时,  $d_0(t) = 0$ 。当  $\theta_0(t)$  的估值接近  $\theta_0^*$  时,  $d_0(t)$  很小。因而本节中的自适应方案可以保证较小的跟踪误差。

### B. 自适应死区逆与自适应线性控制器的组合

当死区和  $G(s)$  均未知时, 需要设计一种自适应方案去修正二者参数的估值。首先需要开发一种修正的线性控制器结构, 这自然会使我们想到跟踪误差方程的类似形式。但仔细考查表明, 线性控制器式(8.4-16)在这种情况下是不适用的, 因为  $\theta_1^T \omega(t)$  需要重新参数化。当利用真实参数的死区逆表达式时,  $u_d(t) = -\theta_0^{*T} \omega(t)$ , 根据式(8.4-20)这一项的固定形式可以写为

$$\theta_1^{*T} \omega_1(t) = -\theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [\theta_0^{*T} \omega](t) \quad (8.4-59)$$

这启发我们引入新的参数向量  $\theta_4^* \in R^{3n}$  作为  $-\theta_1^*$  与  $\theta_0^*$  的 Kronecker 积, 即  $\theta_4^* = -\theta_1^* \otimes \theta_0^*$ 。定义新的回归向量  $\omega_4(t)$  使得

$$\theta_4^{*T} \omega_4(t) = -\theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [\theta_0^{*T} \omega](t) \quad (8.4-60)$$

由此可知回归向量  $\omega_4(t)$  可以通过将  $\omega(t)$  进行滤波来得到, 即

$$\omega_4(t) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)} [\omega](t) \quad (8.4-61)$$

式中  $A(s) = [I \quad sI_3 \quad \cdots \quad s^{n-1}I]^T$ ,  $I$  是  $3 \times 3$  的单位阵。为进行自适应调节, 这里我们所采用的线性控制器结构是将式(8.4-16)中的  $\theta_1^T \omega_1(t)$  用  $\theta_4^T \omega_4(t)$  来代替, 即

$$u_d(t) = \theta_2^T \omega_2(t) + \theta_3 r(t) + \theta_4^T \omega_4(t) \quad (8.4-62)$$

这种控制器如图 8.4-6 所示, 其中  $\omega(t)$  由实现式(8.4-24)的逻辑块  $L$  得到。

利用这种控制器结构可以得到跟踪误差方程的理想形式

$$e(t) = \rho^* W_m(s) [\Phi^T \omega](t) + d(t) \quad (8.4-63)$$

式中  $\rho^* = \theta_3^{*-1}$ ,  $\Phi(t) = \theta(t) - \theta^*$ ,  $\theta(t) = [\theta_2^T(t) \quad \theta_3(t) \quad \theta_4^T(t) \quad \theta_5^T(t)]^T$ ,  $\theta^* =$

$$[\theta_2^{*T} \quad \theta_3^* \quad \theta_4^{*T} \quad \theta_0^{*T}]^T, \quad \omega(t) = [\omega_2^T(t) \quad r(t) \quad \omega_4^T(t) \quad \omega_0^T(t)]^T,$$

$$d(t) = \theta_3^{*-1} W_m(s) (1 - \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}) [d_0](t) \quad (8.4-64)$$

$\theta^*$  满足式(8.4-17)。

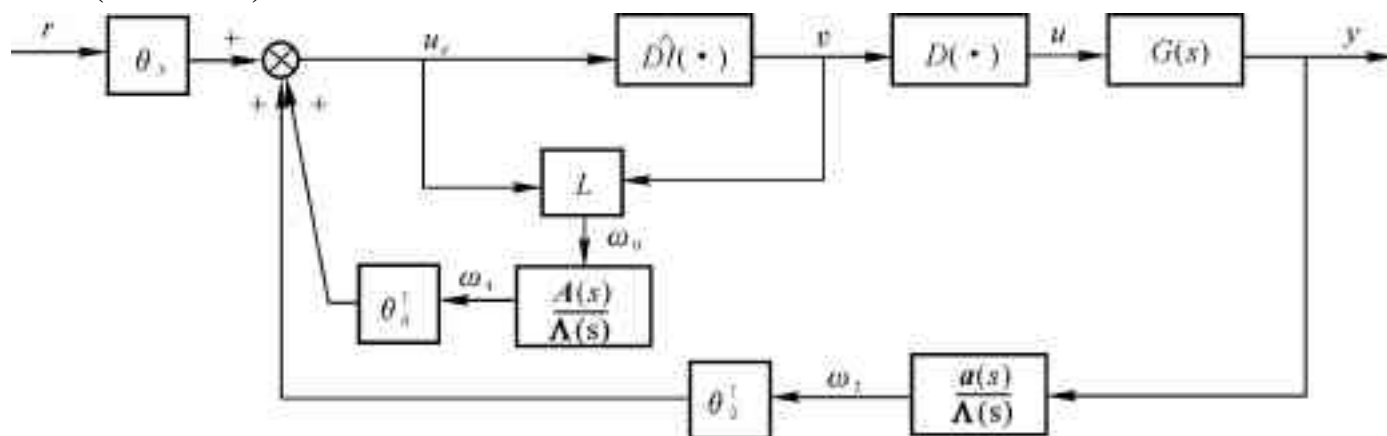


图 8.4-6  $G(s)$  未知,  $m \setminus - r = m_l$  时的控制器结构

为了证明式(8.4-63),我们用  $u_d(t) = -\theta_0^T(t) \omega_0(t)$  来表示自适应死区逆的特性,并且将

$$u(t) = u_d(t) + \Phi_0^T(t) \omega_0(t) + d(t) = -\theta_0^{*T} \omega_0(t) + d(t) \quad (8.4-65)$$

代入模型匹配方程式(8.4-29),利用式(8.4-60),可得

$$u_d(t) + \Phi_0^T(t) \omega_0(t) + d(t) = \theta_2^{*T} \omega_2(t) + \theta_3^* r(t) + \theta_3^* W_m^{-1}(s) [y - y_m](t) + \theta_4^{*T} \omega_4(t) + \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [d_0](t) \quad (8.4-66)$$

最后,将式(8.4-20)代入式(8.4-66)即可得到跟踪误差式(8.4-63)。

根据跟踪误差方程的形式建议对  $\theta(t)$  和  $\rho(t)$  采用下列修正律

$$\theta(t) = -\frac{\text{sgn}(K_p) \Gamma \zeta(t) \varepsilon(t)}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} - \Gamma \sigma(\theta(t)) \theta(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \quad (8.4-67)$$

$$\rho(t) = \frac{\beta \xi(t) \varepsilon(t)}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} - \beta \sigma(\rho(t)) \rho(t), \quad \beta > 0 \quad (8.4-68)$$

式中  $\rho(t)$  为  $\rho^*$  的估值,  $\sigma(\theta(t))$  和  $\sigma(\rho(t))$  与式(8.4-35)所定义的  $\sigma(\theta_0(t))$  相类似,并且

$$\varepsilon(t) = e(t) + \rho(t) \xi(t) \quad (8.4-69)$$

$$\xi(t) = \theta^T(t) \zeta(t) - W_m(s) [\theta^T \omega](t) \quad (8.4-70)$$

$$\zeta(t) = W_m(s) [\omega](t) \quad (8.4-71)$$

自适应修正律式(8.4-67) ~ 式(8.4-71)的有界性质可归结为下述引理。

引理 2: 自适应律式(8.4-67) ~ 式(8.4-71)可以保证

(1)  $\theta(t), \theta(t), \rho(t), \rho(t), \varepsilon(t) / \sqrt{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} \in L_\infty$ ;

(2) 对于某些  $\alpha, \beta > 0$  和所有的  $t > t_0 \geq 0$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\theta(t)\|^2 dt \leq \alpha + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} dt \quad (8.4-72)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\varepsilon^2(t)}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} dt \leq \alpha + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta}{1 + \zeta^T(t) \zeta(t) + \xi^2(t)} dt \quad (8.4-73)$$

引理 2 的证明与引理 1 的证明相似,但此处所选择的正定函数为

$$V(\Phi, \Psi) = \frac{1}{2} (\|\rho^* - \rho(t)\|^2 + \Phi^T \Gamma^{-1} \Phi + \beta^{-1} \Psi^2), \quad \Psi(t) = \rho(t) - \rho^* \quad (8.4-74)$$

应用上述的修正律,将自适应控制器式(8.4-62)应用于具有等斜率未知死区的控制对象,可以保证闭环系统的下述性质:

定理 2: 闭环系统式(8.4-1) ~ 式(8.4-4),式(8.4-62),式(8.4-67) ~ 式(8.4-71) 的所有信号有界,并且对于某些  $\omega, \alpha_0 > 0$  和任意的  $t \geq t_1 > 0$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt \leq \omega + \alpha_0 \int_{t_1}^{t_2} d^2(t) dt \quad (8.4-75)$$

证明: 根据式(8.4-44),式(8.4-54),式(8.4-61),对于某些  $\alpha_0 > 0$ ,有界  $\theta_a(t) \in R^n$  和有界信号  $b(t)$ ,有

$$\theta_a^T(t) \omega_a(t) = \theta_a^T(t) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + \alpha_0) [z](t) + b(t) \quad (8.4-76)$$

利用式(8.4-43)、式(8.4-62)、式(8.4-76) 可得

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_a^T(t) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + \alpha_0) [z](t) + \\ & \frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_2^T(t) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + \alpha_0) [z](t) + \\ & \frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_3(t) r(t) + \frac{m}{\hat{m}(t)} b(t) + d(t) \end{aligned} \quad (8.4-77)$$

由式(8.4-46),式(8.4-77) 可导出

$$\begin{aligned} \{1 + K_1(s) [\omega - \frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_a^T(t) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + \alpha_0)]\} [z](t) = \\ \{K(s) G^{-1}(s) + K_1(s) \frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_2^T(t) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + \alpha_0)\} [z](t) + \\ + K_1(s) [\frac{m}{\hat{m}(t)} \theta_3 r](t) + K_1(s) [d](t) + K_1(s) [\frac{m}{\hat{m}(t)} b](t) \end{aligned} \quad (8.4-78)$$

由此遵循与定理 1 的证明相类似的过程即可完成定理 2 的证明。

新的控制器结构是自适应控制器设计的关键一步,由此可导出跟踪误差方程式(8.4-63)。该方程是线性的,但其中的对象参数未知,因而不可能具有不用修正的控制器结构式(8.4-16)。也幸亏这种线性的参数化方法,才使得线性自适应理论能够应用于具有死区的对象的自适应控制。式(8.4-63)的另一个关键性质是它的不可参数化部分(即扰动  $d(t)$ )的有界性。这一性质使人们可以利用现有的鲁棒自适应修正律。式(8.4-26)及  $d(t)$  的有界性对确定  $d(t)$  的有界性是很重要的。而  $d(t)$  与自适应估值  $\hat{\theta}_r, \hat{m}, \hat{b}$  有关,并且当  $\theta(t)$  收敛至  $\theta^*$  时,  $d(t)$  收敛至零。

自适应律式(8.4-67) ~ 式(8.4-71) 是根据误差模型式(8.4-63) 进行选取的。当然,其它的一些鲁棒自适应律也可用来保证闭环系统信号的有界性。而开关  $\sigma$  校正律的优点就在于当自适应死区逆收敛至精确值时,跟踪误差是渐近收敛的,也就是说,当  $t$  较大时,  $d(t)$  的作用将从式(8.4-75) 中消失。

#### 4. 仿真结果



前面所得到的分析结果需要在两个方面进行扩展:一是关于死区未知斜率相等这一假设常常是不现实的,应当去掉;二是即使在斜率相等的情况下,也仍然缺乏跟踪性能的解析特征。这两个问题都是需要研究的课题,我们借助于大量数字仿真结果来讨论这两个问题。在所有的仿真中采用的自适应律都不要死区的斜率相等。

#### A. 不等斜率时的修正律

一般说来,有四种死区参数  $m_r, m_l, b_r, b_l$ , 并且  $m_r \neq m_l, b_r \neq b_l$ , 而从实践的观点来看,不失一般性,可假定  $m_r > 0, m_l > 0, b_r > 0, b_l < 0$ 。在自适应死区逆中,四种参数的估值为  $\hat{m}_r(t), \hat{m}_l(t), \hat{b}_r(t), \hat{b}_l(t)$ , 或者用向量表示为

$$\theta_0^* = [m_r \quad m_r b_r \quad m_l \quad m_l b_l]^T$$

$$\theta_0(t) = [\hat{m}_r(t) \quad \hat{m}_r \hat{b}_r(t) \quad \hat{m}_l(t) \quad \hat{m}_l \hat{b}_l(t)]^T$$

$$\Phi_0(t) = \theta_0(t) - \theta_0^*$$

利用式(8.4-25)所定义的  $x(t)$ , 相应的回归向量可表示为

$$\omega_0(t) = [-x(t)v(t)x(t) - (1-x(t))v(t)1-x(t)]^T \quad (8.4-79)$$

则死区可描述为

$$u(t) = u_d(t) = \Phi_0^T(t)\omega_0(t) + d_0(t) \quad (8.4-80)$$

式中  $d_0(t)$  如式(8.4-27)所示,是有界的。在前面的讨论中,  $\theta_0^*, \theta_0(t), \omega_0(t) \in R^3$ , 而现在它们属于  $R^4$ , 因而需要对前面的修正律进行修正。而  $H(s), e(t), \varepsilon(t), \zeta(t), \xi(t), \omega(t)$  等在形式上都与前面相同。例如

$$\omega_4(t) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}[\omega_0](t) \quad (8.4-81)$$

具有与前面相同的形式,但  $A(s) = [I_4 \quad sI_4 \quad \cdots \quad s^{n-1}I_4]$ , 其中  $I_4$  为  $4 \times 4$  单位阵,而前面  $A(s)$  中包含的是  $3 \times 3$  单位阵  $I_3$ 。线性控制器式(8.4-62)相应修改为

$$u_d(t) = \theta_2^T \omega_2(t) + \theta_3 r(t) + \theta_4^T \omega_4(t) \quad (8.4-82)$$

其中  $\theta_4 \in R^{4n}$ , 其维数增大。由式(8.4-81)所定义的信号向量  $\omega_4(t)$  则是由测量信号  $v(t)$ ,  $u_d(t)$  得到。

在  $G(s)$  已知的情况下,  $\theta_0(t)$  的修正律与式(8.4-31)形式相同,而在  $G(s)$  未知的情况下,将按照形如式(8.4-67),式(8.4-68)的修正律来修正所有的参数估值。在这两种情况下,相应的参数估值和回归向量的维数都比以前要高。而目前还难以对这种普通形式进行稳定性证明。

#### B. 跟踪性能

为了考察本节所提出的自适应死区方案的有效性,仿真时选取不稳定对象  $G(s) = -2/(s^2 - s - 6)$ , 未知死区  $u(t) = D(v(t))$  中  $b = 0.25, b = 0.3$ , 不等斜率  $m_r = 1.0, m_l = 1.25$ 。选取  $W_m(s) = 1/(s^2 + 4s + 4)$ , 线性控制器式(8.4-16)的结构为

$$u_d(t) = (\theta_{11} + \theta_{12}s) \frac{1}{(s+1)^2} [u_d](t) + (\theta_{21} + \theta_{22}s) \frac{1}{(s+1)^2} [y](t) + \theta_3 r(t) \quad (8.4-83)$$

满足式(8.4-17)的参数值  $\theta_{11}^* = -25, \theta_{12}^* = -5, \theta_{21}^* = 80, \theta_{22}^* = 40, \theta_3^* = -0.5$ 。

当控制器采用固定死区逆与  $G(s)$  未知时的线性控制器式(8.4-83)相组合时,虽然对线性控制器的参数进行自适应调整,但整个控制器仍导致在较长的区段内存在大的跟踪误差,其跟踪误差曲线如图8.4-7(a)所示,  $b_r = 2b, b_l = 1.43b_l, \hat{m}_r = 1.25m_r, \hat{m}_l = 1.3m_l$ 。这种控制器的自适应作用是十分明显的,因为利用那样一种不匹配的死区逆,即使在  $G(s)$  已知的情况下,固定的线性控制器也会导致系统的不稳定。尽管自适应线性控制器可以导致信号有界,如图8.4-7所示,但由于死区参数估值误差很大,系统的响应是很糟的,甚至可能是无界的,这说明采用固定死区逆的控制器不适用于斜率明显不同的死区( $m_r \neq m_l$ )。

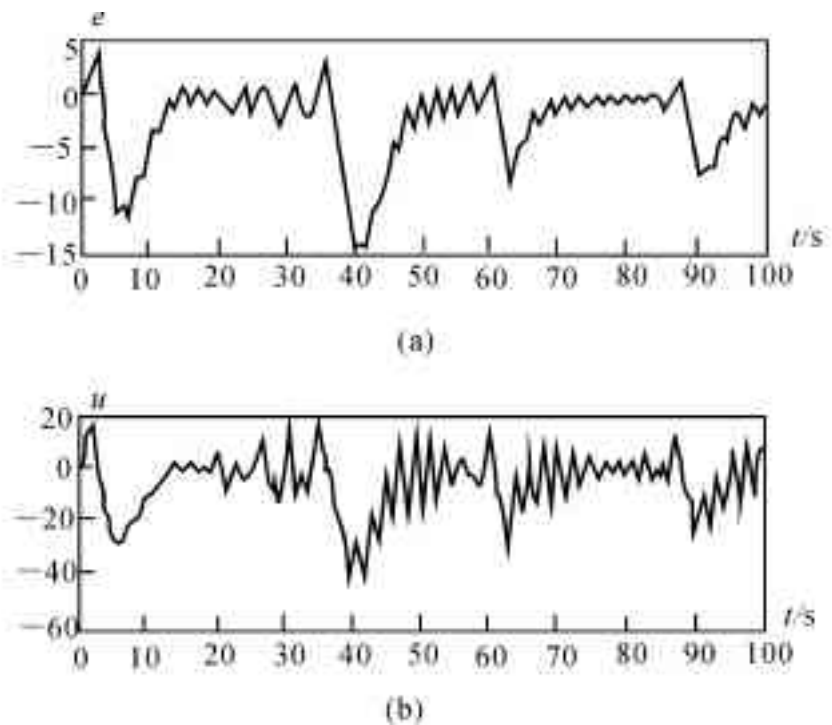


图 8.4-7 具有固定死区逆时的系统响应曲线  
(a) 跟踪误差曲线; (b) 控制曲线

当采用自适应死区逆时,情况会有明显改善。当  $G(s)$  已知时,自适应控制器只是修正自适应死区逆的参数,所采用的线性控制器式(8.4-83)具有固定的参数  $\theta_{11}^*, \theta_{12}^*, \theta_{21}^*, \theta_{22}^*, \theta_3^*$ 。当  $G(s)$  未知时,死区逆和线性控制器式(8.4-82)的参数都要修正。大量的仿真证明,自适应死区逆控制器可以允许斜率  $m_r, m_l$  和间断点  $b_r, b$  有很大差异。图8.4-8所示为  $G(s)$  已知时具有自适应死区逆和固定线性控制器的系统的典型响应曲线。图8.4-9所示为  $G(s)$  未知时具有自适应死区逆和自适应线性控制器的系统的典型响应曲线。这些图形表明,跟踪误差在经过短时间暂态过程后都收敛至很小的值。其它一些仿真结果也表明,对于大的死区参数初始误差,采用固定死区逆控制器将导致系统响应无界,而采用自适应死区逆控制器可以保证信号有界和小的跟踪误差。这表明自适应死区逆明显改善了系统的性能。

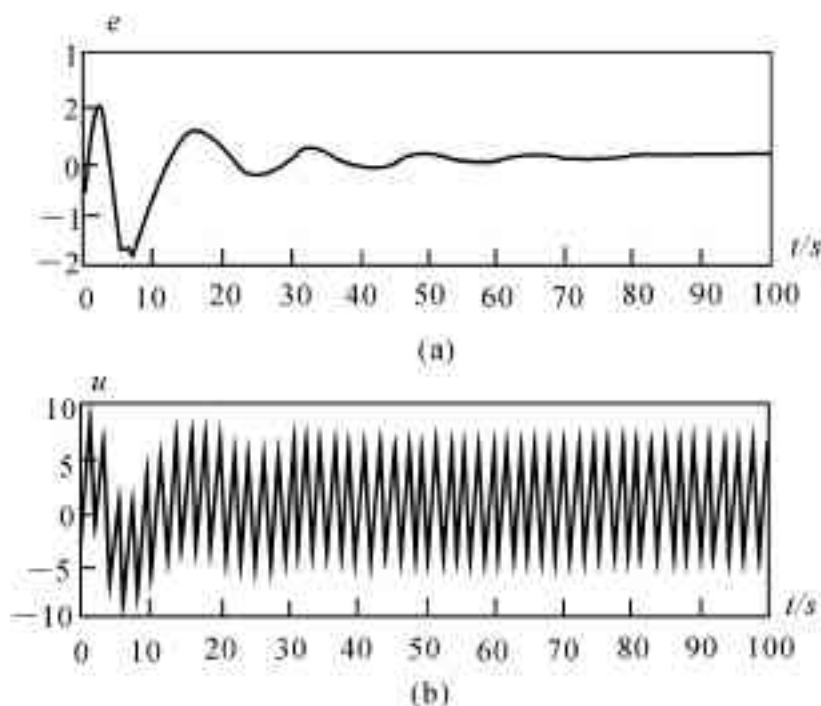


图 8.4-8  $G(s)$  已知,具有自适应死区逆时的系统响应曲线

(a) 跟踪误差曲线; (b) 控制曲线

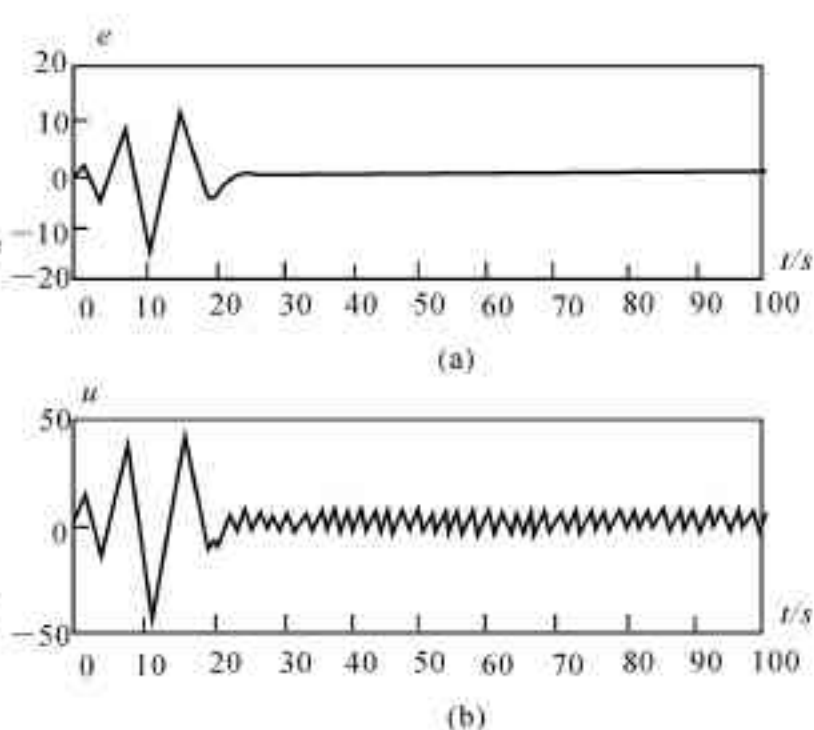


图 8.4-9  $G(s)$  未知,具有自适应死区逆时的系统响应曲线

(a) 跟踪误差曲线; (b) 控制曲线

## 参 考 文 献

- 1 Chang yun Wen, David J Hill . Adaptive linear control of nonlinear systems . IEEE Trans . on Ac, 1990, 35(11)
- 2 Hardy G H, Littlewood J E, Polya G . Inequalities . London: Cambridge University Press, 1952
- 3 Bernard Brogliato, Alexandre Trofino-Neto, Rogelio Lozano . Robust adaptive control of a class of nonlinear first order systems . Automatica, 1992, 28(4):795~801
- 4 Gang Tao, Kokotovic Peter V . Adaptive control of plants with unkown dead-zones . IEEE Trans . on AC, 1994, 39(1)
- 5 Ioannou P A, Tsakalis K . A robust direct adaptive controller . IEEE Trans . on AC, 1986,31(11)
- 6 Wen C, Hill D J . Robustness of adaptive control without dead-zones, data normalization or persistence of excitation . Automatica, 1989, 25(6):943~948
- 7 Wen C, Hill D J . Adaptive linear control of nonlinear systems . New South Wales, Australia: 1988
- 8 Middleton R H, Goodwin G C . Adaptive control of time Varying linear systems . IEEE Trans . on AC, 1988,33:150~155
- 9 Goodwin G C, Ramadge P J, Caines P E . Discrete-time multivariable adaptive control . IEEE Trans . on AC, 1980,25(3)
- 10 Goodwin, G C, Kwai Sangsin, Saluja K K . Stochastic adaptive control and prediction-The general delay-Colored noise case . IEEE Trans . on AC, 1980,25(5)
- 11 邱晓红,高金源 . 可补的非时变非线性系统的自适应控制算法 . 控制与决策,1994,9(4)

## 第九章 模糊自适应控制

模糊自适应控制理论是模糊控制理论与自适应控制理论相互交叉、相互渗透而形成的一个研究领域。模糊控制是运用模糊集合理论,总体考虑系统因素,协调控制作用的一种控制方法。它以模糊控制命题表示一组控制规律,将指标函数与控制量联系起来,经模糊推理决定控制量,而不管系统本身的内在方式或直接变化方式。因而模糊控制特别适用于那些参数和结构存在很大不确定性因素或未知时的控制对象,而自适应控制的目的就是在系统出现这些不确定性因素时仍能使系统保持既定的特性,所以将模糊控制与自适应控制相结合,组成模糊自适应控制系统,将会是一种比较理想的控制方法。由于模糊自适应控制系统对参数变化和环境变化不灵敏,能用于非线性和多变量复杂对象,而且收敛速度快、鲁棒性好,并且可以在运行过程中不断修正自己的控制规则来改善控制性能,因而受到了控制界的广泛重视。本章将介绍模糊控制的基本概念和几种模糊自适应控制器设计方法。

### § 9.1 模糊控制的基本概念

#### 1. 模糊集合及隶属函数

在普通集合的概念中,其论域中的任一元素,要么属于某个集合,要么不属于该集合,不允许有含混不清的说法。因而普通集合适用于描述“非此即彼”的清晰概念。例如,“所有大于1的实数”,是一个清晰概念,可用普通集合

$$\overline{A} = \{x \mid 1 < x < \infty\}$$

来表示。它表明,凡大于1的实数都是集合 $\overline{A}$ 的元素,尽管这些元素无法一一例举,但其范围是完全可以确定的。

然而,现实生活中却充满了模糊事物和模糊概念。例如,若将上述清晰概念改为“所有比1大得多的实数”,则变成了模糊概念。在这种情况下,只能说某数属于“比1大得多的实数”的程度高,另一数属于它的程度低,无法划出一个明确的界限,使得在此界限内都属于“比1大得多的实数”,而在界限外都不属于“比1大得多的实数”。又如,“胖子”集合,“高个子”集合等,都没有明确的边界,这类边界不明确的集合即是模糊集合。

由于对模糊概念不能像对清晰概念那样用“属于”或“不属于”来描述,故对模糊集合也不能像对普通集合那样用特征函数来表征,而必须通过某元素 $x$ 属于模糊集合 $A$ 的程度的隶属函数 $\mu_A$ 来表征。

定义1: 设给定论域 $X$ ,  $x$ 是 $X$ 的元素通名,  $X$ 到闭区间 $[0, 1]$ 的任一映射 $\mu_A$

$$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow \mu_A(x)$$

都确定 $X$ 的一个模糊子集 $A$ ,  $\mu_A$ 称为模糊子集 $A$ 的隶属函数,  $\mu_A(x)$ 称为 $x$ 对于 $A$ 的隶属度。隶属度也可记为 $A(x)$ 。在不混淆的情况下,模糊子集也称模糊集合。

上述定义表明,论域  $X$  上的模糊子集  $A$  由隶属函数  $\mu_A$  来表征,  $\mu_A(x)$  的取值范围为闭区间  $(0, 1]$ ,  $\mu_A(x)$  的大小反映了  $x$  对模糊子集  $A$  的从属程度的高低。 $\mu_A(x)$  的值接近于 1, 表示  $x$  从属于  $A$  的程度很高;  $\mu_A(x)$  的值接近于 0, 表示  $x$  从属于  $A$  的程度很低。可见, 模糊子集完全由隶属函数所描述。当  $\mu_A$  的值域仅取闭区间  $[0, 1]$  的两个端值时, 模糊子集(模糊集合)就退化为经典集合论中的普通子集(普通集合)。

## 2. 模糊集合的表达方式

(1) 当  $X$  为有限集  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  时, 通常有以下三种表达方式:

(a) Zadeh 表示法

$$A = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \quad (9.1-1)$$

式中  $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$  并不表示“分数”, 而是表示论域  $X$  中的元素  $x_i$  与其隶属度  $\mu_A(x_i)$  之间的对应关系, “+”也不表示“求和”, 而是表示模糊集合  $A$  在论域  $X$  上的整体。

(b) 序偶表示法

将论域  $X$  中的元素  $x_i$  与其隶属度  $\mu_A(x_i)$  构成序偶来表示  $A$ , 即

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))\} \quad (9.1-2)$$

(c) 向量表示法

$$A = [\mu_A(x_1) \mu_A(x_2) \dots \mu_A(x_n)] \quad (9.1-3)$$

(3) 当  $X$  是有限连续时, Zadeh 表示法为

$$A = \int_x \frac{\mu_A(x)}{x} dx \quad (9.1-4)$$

式中  $\frac{\mu_A(x)}{x}$  表示论域  $X$  上的元素  $x$  与隶属度  $\mu_A(x)$  之间的对应关系, 符号“ $\int$ ”表示论域  $X$  上的无限多个元素  $x$  与相应隶属度  $\mu_A(x)$  对应关系的一个总括。

例如, Zadeh 曾以年龄作论域, 取  $X = [0, 200]$  给出了“年老” $O$  和“年青” $Y$  两个模糊集合的隶属函数

$$\mu_O(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 50 \\ [1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}, & 50 < x \leq 200 \end{cases} \quad (9.1-5)$$

$$\mu_Y(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 25 \\ [1 + (\frac{x-25}{5})^2]^{-1}, & 25 < x \leq 200 \end{cases} \quad (9.1-6)$$

采用 Zadeh 法, “年老” $O$  和“年青” $Y$  两个模糊集合可表示为

$$O = \int_{0 \leq x \leq 50} \frac{0}{x} dx + \int_{50 < x \leq 200} \frac{[1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x} dx = \int_{50 < x \leq 200} \frac{[1 + (\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x} dx \quad (9.1-7)$$

$$Y = \int_{0 \leq x \leq 25} \frac{1}{x} dx + \int_{25 < x \leq 200} \frac{[1 + (\frac{x-25}{5})^2]^{-1}}{x} dx$$

在给定论域  $X$  上可以有多个模糊子集, 由所有这些模糊子集组成的模糊集合的全体为  $F(X)$ , 即

$$F(X) = \{A \mid A: X \rightarrow [0, 1]\} \quad (9.1-8)$$

$F(X)$  称为  $X$  上的模糊幂集。

### 3. 常见的几种隶属函数

#### (1) 正态型

$$\mu(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, \quad b > 0 \quad (9.1-9)$$

#### (2) 哥西型

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + a(x - c)^b}, \quad a > 0, b \text{ 为正偶数} \quad (9.1-10)$$

#### (3) $\Gamma$ 型

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{x}{\lambda v}\right)^v e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (9.1-11)$$

式中  $\lambda > 0, v > 0$ 。

#### (4) 戒上型

##### (i) 降半正态型

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, & x > a, b > 0 \end{cases} \quad (9.1-12)$$

##### (iii) 降半哥西型

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ \frac{1}{1 + a(x - c)^b}, & x > c, a > 0, b > 0 \end{cases} \quad (9.1-13)$$

#### (5) 戒下型

##### (i) 升半正态型

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}, & x > a, b > 0 \end{cases} \quad (9.1-14)$$

##### (ii) 升半哥西型

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \frac{1}{1 + a(x - c)^b}, & x > c, a > 0, b < 0 \end{cases} \quad (9.1-15)$$

### 4. 模糊集合的基本运算

设  $A, B$  是论域  $X$  上的两个模糊子集, 规定  $A$  与  $B$  “并”运算  $(A \cup B)$ , “交”运算  $(A \cap B)$  及“补”运算  $(\bar{A}, \bar{B})$  的隶属函数分别为  $\mu_{A \cup B}, \mu_{A \cap B}, \mu_{\bar{A}}$  及  $\mu_{\bar{B}}$ , 则对于 “ $x \in X$ ” 有

$$\mu_{A \cup B}(x) \dot{=} \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad "x \in X \quad (9.1-16)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) \dot{=} \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], \quad "x \in X \quad (9.1-17)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) \dot{=} 1 - \mu_A(x), \quad "x \in X \quad (9.1-18)$$

$$\mu_{\bar{B}}(x) \dot{=} 1 - \mu_B(x), \quad "x \in X \quad (9.1-19)$$

式中符号  $\vee$  表示取大运算, 即取两个隶属度中的较大者作为运算结果; 符号  $\wedge$  表示取小运

算,即取两个隶属度中的较小者作为运算结果。模糊集合的并、交运算可以推广到任意个模糊集合。

设  $A$  和  $B$  分别是论域  $X$  和  $Y$  上的子集,则  $A \times B$  称为模糊集合  $A$  和  $B$  的直积,  $A \cap B$  称为模糊集合  $A$  和  $B$  的代数积,  $A + B$  称为模糊集合  $A$  和  $B$  的代数和,  $A \cup B$  称为模糊集合  $A$  和  $B$  的环和,它们的隶属函数分别为

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)], \quad (x, y) \in X \times Y \quad (9.1-20)$$

$$\mu_{A \cap B}(x, y) = \mu_A(x) \mu_B(y) \quad (9.1-21)$$

$$\mu_{A+B}(x, y) = \begin{cases} \mu_A(x) + \mu_B(y), & \mu_A(x) + \mu_B(y) \leq 1 \\ 1, & \mu_A(x) + \mu_B(y) > 1 \end{cases} \quad (9.1-22)$$

$$\mu_{A \cup B}(x, y) = \mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_{A \cap B}(x, y) \quad (9.1-23)$$

## 5. 模糊关系和模糊变量

关系是描述客观事物之间联系的重要概念,模糊关系是普通关系的推广。普通关系描述元素之间有无关联,而模糊关系则是描述元素之间关联程度的多少。

定义 2: 设  $X, Y$  是两个非空集合,则直积

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} \quad (9.1-24)$$

中的一个模糊子集  $R$  称为从  $X$  到  $Y$  的一个模糊关系,其隶属函数为

$$\mu_R: X \times Y \rightarrow [0, 1] \quad (9.1-25)$$

序偶  $(x, y)$  的隶属度为  $\mu_R(x, y)$ 。当  $X = Y$  时,  $R$  称为  $X$  上的模糊关系。

上面定义的模糊关系又称二元模糊关系。当论域为  $n$  个集合的直积

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

时,所对应的为  $n$  元模糊关系  $R$ 。通常所说的模糊关系  $R$ ,一般是指二元模糊关系。

当论域  $X, Y$  都是有限集时,模糊关系可用模糊矩阵表示。例如,当  $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}, Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$  时,模糊矩阵  $R$  的元素  $r_{ij}$  表示论域  $X$  中的第  $i$  个元素  $x_i$  与论域  $Y$  中的第  $j$  个元素  $y_j$  对于模糊关系  $R$  的隶属程度,即  $\mu_R(x_i, y_j) = r_{i,j}$ 。

当一个变量用论域  $X$  中的一个模糊子集进行赋值时,称为模糊变量。

## 6. 模糊命题与模糊逻辑

具有模糊概念的陈述句称为模糊命题。例如,“这个房间温度太高”、“电动机的转速稍偏低”等陈述句中的“太高”、“稍偏低”都是模糊概念,给出的界限都是不分明的,无法用传统的命题真值概念来判断它们是真是假。普通命题只取真、假二值,用 1 和 0 表示,所以又称二值逻辑。而模糊命题则在闭区间  $[0, 1]$  上取连续值,用以表示模糊命题真或假的程度。

研究模糊命题的逻辑称为连续值逻辑,也称模糊逻辑,它是二值逻辑的推广,是对经典的二值逻辑的模糊化。

模糊逻辑是建立在模糊集合和二值逻辑概念基础上的,可以把它看作为一类特殊的多值逻辑。研究二值逻辑运算规律的数学工具是布尔代数,或称逻辑代数;而研究模糊逻辑的运算规则的数学工具是 De-Morgan 代数(德摩根代数),或称模糊代数。

## 7. 模糊逻辑系统

模糊逻辑系统是指那些与模糊概念和模糊逻辑有直接关系的系统,由模糊规则库、模糊推理机、模糊化和非模糊化四部分组成,如图 9.1-1 所示。

模糊系统的工作过程就是将一数值向量  $X$  经模糊化变成模糊变量  $X_i$ ,这种模糊变量调用

模糊规则库中的有关规则经模糊推理机得到模糊响应  $Y_1$  ,再将这种模糊响应经非模糊化转变成系统的实际响应  $Y$ 。将模糊逻辑系统应用于控制问题则为模糊控制器。在模糊控制器中,  $X$  为精确的输入量,  $X_1$  为模糊输入,  $Y_1$  为模糊输出,  $Y$  为精确的控制量。



图 9.1-1 模糊逻辑系统的基本组成

模糊规则库和模糊推理机是模糊逻辑系统的关键部分。模糊规则来源于专家对系统变化过程的认识与经验总结,模糊规则库中模糊规则的完善程度及准确度将直接确定整个系统作用效果的好坏。模糊规则库由具有多输入单输出形式的若干条模糊规则“**If-then**”(如果-则)的总和所组成,即

$$R^{(j)}: \text{ If } x_{11} \text{ is } F_1^j \text{ and } \cdots \text{ and } x_{1n} \text{ is } F_n^j, \text{ then } Y_1 \text{ is } G^j \tag{9.1-26}$$

式中  $F_i^j (i = 1, 2, \cdots, n)$  和  $G^j$  为模糊论域,  $X_1 = [x_{11} \ x_{12} \ \cdots \ x_{1n}]^T$  和  $Y_1$  为模糊变量,分别是模糊逻辑系统的多输入和单输出。设  $m$  为规则库中所包含的模糊规则“**If-then**”的总数,则在式(9.1-26)中  $j = 1, 2, \cdots, m$ 。

模糊化的作用是将精确的输入  $X$  进行模糊化,从而产生模糊变量  $X_1$ 。目前常采用的模糊化方法有:

(i) 独立模糊化

设  $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$ ,  $A'$  为在  $X$  上的模糊函数,  $X_i$  为某一模糊论域的中心点,则有

当  $X' = X_i$  时,  $\mu_{A'}(X') = 1$

当  $X' \neq X_i$  时,  $\mu_{A'}(X') = 0$

(ii) 非独立模糊化

$\mu_{A'}(X_1) = 1$ ,  $\mu_{A'}(X')$  的大小决定于  $X'$  离开  $X_1$  的距离,即

$$\mu_{A'}(X') = \exp\left[-\frac{(X_i - X')^T (X_i - X')}{\sigma^2}\right] \tag{9.1-27}$$

式中  $\sigma^2$  称为模糊度。

从上面两种模糊化方法的数学表达式可以看出,独立模糊化是一种离散的模糊化方法,而非独立模糊化则是一种连续的模糊化方法。由于独立模糊化方法简单,所以过去常采用这种方法。但非独立模糊化更科学,因为这种方法中所采用的正态分布更符合人们的思维规律,而且正态分布比较容易收敛。

非模糊化是将模糊响应转化为精确响应的过程,其作用是利用模糊决策将模糊变量转化为非模糊变量。设模糊响应为  $U = (\mu(u_1)/u_1, \mu(u_2)/u_2, \cdots, \mu(u_n)/u_n)$ ,它表示当隶属函数  $\mu(u_i)$  时的精确响应为  $u_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 。非模糊化过程可采用的模糊决策方法很多,常用的模糊决策方法有:

(1) 最大值法 这种方法是将模糊集合  $U$  中隶属度最大的元素作为精确响应量。例如,若

$$\mu_{\max}(u) = \max(\mu(u_1), \mu(u_2), \cdots, \mu(u_n)) \tag{9.1-28}$$



则精确响应量就是  $\mu_{\max}(u)$  所对应的响应量  $u^0$ 。

(2) 最大值平均法 设  $u_i'$  是隶属函数  $\mu$  取最大值时  $u_i$  的数值,  $m$  是  $u_i'$  的个数, 则可用最大值平均法

$$u^0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i' \quad (9.1-29)$$

确定精确响应  $u^0$ 。

当  $m$  为无限值时, 可用最大值中点法求得精确响应  $u^0$ 。

(3) 最大值中点法 设  $u'$  和  $u''$  是  $\mu(u)$  取最大值时  $u$  的最小值和最大值, 则精确响应

$$u^0 = \frac{1}{2}(u' + u'') \quad (9.1-30)$$

(4) 加权平均法 取  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的加权平均值。若令  $u_i$  的加权系数为  $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则精确响应量为

$$u^0 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i u_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (9.1-31)$$

(5) 面积等分法 将面积  $\int \mu(u) du$  等分为二的点  $u^0$  作为精确响应, 即  $u^0$  满足关系式

$$\int_{u < u^0} \mu(u) du = \int_{u > u^0} \mu(u) du \quad (9.1-32)$$

(6) 重心法

$$u^0 = \frac{\int \mu(u) u du}{\int \mu(u) du} \quad (9.1-33)$$

(7) 阈值重心法 给定阈值  $\alpha (0 \leq \alpha < 1)$ , 则

$$u^0 = \frac{\int_{u(\alpha)} \mu(u) u du}{\int_{u(\alpha)} \mu(u) du} \quad (9.1-34)$$

其中  $u(\alpha)$  为由下式定义的集合

$$u(\alpha) = \{u \mid \mu(u) \geq \alpha\} \quad (9.1-35)$$

阈值重心法忽略了隶属函数中小于阈值  $\alpha$  的部分对  $u^0$  的影响。当  $\alpha = 0$  时, 阈值重心法与重心法完全相同。

在上述决策方法中, 最大值法最为简单, 但利用的信息太少。重心法和面积法利用了较多的信息, 但增加了计算量。阈值重心法比重心法减少了一定的计算量, 但增加了阈值的选取问题。加权平均法的关键在于加权系数的选取, 而选取加权系数需要一定的经验和技巧。实际应用中需视具体情况选用合适的决策方法。

## 8. 模糊控制

将模糊逻辑系统作为控制器用的系统称为模糊控制系统。模糊控制中常用的模糊条件语句有

$$\text{If } A \text{ then } B \quad (9.1-36)$$

读作“若  $A$  则  $B$ ”。例如, “若水位高则排水”。

$$\text{If } A \text{ then } B \text{ else } C \quad (9.1-37)$$

读作“若  $A$  则  $B$  否则  $C$ ”，例如，“若水已热则停止加煤，否则继续加煤”。

$$\text{If } A \text{ then if } B \text{ then } C \quad \text{或} \quad \text{If } A \text{ and } B \text{ then } C \quad (9.1-38)$$

读作“若  $A$  且  $B$  则  $C$ ”或“若  $A$  则若  $B$  则  $C$ ”。例如，“若水温偏高且温度继续上升则多加一些冷水”。

所有模糊控制器的基本结构都具有形式

$$\text{If (过程量) then (控制量)}$$

这里过程量和控制量表示基本变量的一些命题，即模糊语言变量。由上述结构形式可以看到，模糊控制器实质上是一个将过程状态映射到控制作用的非线性增益控制器。

模糊控制的特点是受控对象的动态特性很难用常规的微分、差分或状态方程描述，而且控制规则只能用模糊语义进行定性描述。因而在设计模糊控制器时必须解决模糊控制算法设计、语言变量赋值、控制输入的判定计算三个问题。

(1) 模糊控制算法设计 现在研究一个单输入单输出系统的模糊控制问题，控制目标是消除输出对设定值的偏差。因此，有关的模糊变量是输出误差  $E$ 、误差变化率  $E$  和控制输入  $U$ ，它们分别对应于  $X, Y, Z$  三个论域。根据工程控制经验，可通过这三个量的关系组成一系列的控制规则。例如：

若  $E$  正小，且  $E$  为零，则  $U$  负中；

若  $E$  负大，且  $E$  正小，则  $U$  负中；

如此，等等。

上述控制规则所对应的模糊条件语句属于句型式(9.1-38)，即

$$\text{If } E \text{ is } A_i \text{ then if } E \text{ is } B_j \text{ then } U \text{ is } C_k \quad (9.1-39a)$$

或写为

$$\text{If } E \text{ is } A_i \text{ and } E \text{ is } B_j \text{ then } U \text{ is } C_k \quad (9.1-39b)$$

式中  $A_i, B_j$  和  $C_k$  分别为论域  $X, Y$  和  $Z$  的模糊子集。式(9.1-39)中的每条控制规则表示了一个模糊关系

$$R_i = A_i \times B_j \times C_k \quad (9.1-40a)$$

或

$$\mu_{R_i}(x, y, z) = \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_j}(y) \wedge \mu_{C_k}(z) \quad (9.1-40b)$$

由全部控制规则导出的总的模糊关系为

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n = \bigcup_{i=1}^n R_i \quad (9.1-41)$$

习惯上，常把模糊语言变量分为 8 级，它们是正大( $PB$ )、正中( $PM$ )、正小( $PS$ )、正零( $P0$ )、负零( $N0$ )、负小( $NS$ )、负中( $NM$ )和负大( $NB$ )。对于根据输出误差和误差变化率来消除偏差的模糊控制器，一种可能的控制规则如表 9.1-1 所示，由表 9.1-1 可导出所需的总的模糊关系。不同受控对象，甚至同一对象，也可能会因各自的经验不同而导出不同的控制规则。

(2) 语言变量的赋值 在实际控制问题中，误差  $e$ 、误差变化率  $e$  和控制  $u$  常常是连续变化的，因而必须建立确切量与模糊量之间的转换关系。为了减小  $R$  的维数并占用较少的存贮空间，可把连续量分为几个等级。例如，若  $e$  在闭区间  $[-6, 6]$  上变化，可把它分为 8 个等级，这时可用表 9.1-2 作为精确量与模糊量之间转换关系，然后再利用工程经验，针对具体对象对语言

变量赋值,表 9 .1 - 3 是一个具体的赋值例子,赋值表中的数字代表对应元素的隶属度。与此相似,可导出  $E$  和  $U$  的赋值表。

表 9 .1 - 1 消除偏差的控制规则  $U$

<div></div>	$NB$	$NM$	$NS$	0	$PS$	$PM$	$PB$
$NB$	0	0	0	$PM$	$PM$	$PB$	$PB$
$NM$	0	0	0	$PM$	$PM$	$PB$	$PB$
$NS$	$NM$	$PS$	$PS$	$PM$	$PB$	$PB$	$PB$
$N0$	$NM$	$NS$	$NS$	$PS$	$PM$	$PM$	$PB$
$P0$	$PB$	$PS$	$PS$	$NS$	$NM$	$NM$	$NM$
$PS$	$PB$	$NS$	$NS$	$NM$	$NM$	$NB$	$NB$
$PM$	$PS$	$NM$	$NM$	$NB$	$NB$	$NB$	$NB$
$PB$	0	$NS$	$NS$	$NS$	$NS$	$NB$	$NB$

表 9 .1 - 2 精确量与模糊量间的转换关系

$e$	$\approx - 6$	$\approx - 4$	$\approx - 2$	$\leq 0$	$\geq 0$	$\approx 2$	$\approx 4$	$\approx 6$
$E$	$NB$	$NM$	$NS$	$N0$	$P0$	$PS$	$PM$	$PB$

表 9 .1 - 3  $E$  的赋值表

	- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5	6
$PB$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.4	0.7	0.8	1
$PM$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.2	0.7	1	0.7	0.2
$PS$	0	0	0	0	0	0	0.3	0.8	1	0.7	0.5	0.4	0.2
$P0$	0	0	0	0	0	0	1	0.6	0.1	0	0	0	0
$N0$	0	0	0	0	0.1	0.6	1	0	0	0	0	0	0
$NS$	0.2	0.4	0.5	0.7	1	0.8	0.3	0	0	0	0	0	0
$NM$	0.2	0.7	1	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
$NB$	1	0.8	0.7	0.4	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0

(3) 控制输入的判定计算 模糊控制器的输出是一个模糊子集,它反映的是控制语言的不同取值的一种组合,因此必须从这个模糊子集中判定出一个精确的控制输入量(亦称确切量),以便加到实际对象的输入端。因此,控制输入的判定计算即是前面所述的非模糊化过程,可采用前面所述的任何一种模糊决策方法来进行控制决策,计算出精确的控制输入量。

由于在线计算精确控制输入量  $u^0$  比较费时,针对具体工程控制问题,人们常事先算好控制表,在进行实时控制时,可由每次采得的  $e$  和算得或采得的  $e$ ,由表直接得到  $u^0$ 。表 9 .1 - 4 是

控制表的一个例子,可以看出,它是非线性的。

表 9 .1 - 4 模糊控制表

		趋向设定值							离开设定值						
		- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	
低于 设定值	- 6	0	0	0	0	0	6	6	4	4	4	6	6	6	
	- 5	0	0	0	0	0	6	6	6	2	6	6	6	6	
	- 4	0	0	0	0	0	6	6	4	4	4	6	6	6	
	- 3	- 4	- 1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	6	
	- 2	- 4	- 1	2	2	2	3	4	5	6	6	5	6	6	
	- 1	- 3	- 1	0	- 1	0	1	3	6	6	5	3	3	6	
	- 0	- 4	- 3	- 2	- 1	- 1	- 1	3	6	6	4	1	6	6	
高于 设定值	+ 0	6	3	1	1	1	2	- 3	- 6	- 6	- 6	- 4	- 4	- 4	
	+ 1	6	2	2	1	- 1	0	- 3	- 6	- 6	- 6	- 6	- 4	- 4	
	+ 2	5	1	- 2	- 2	- 3	- 3	- 4	- 5	- 5	- 5	- 4	- 6	- 4	
	+ 3	4	1	- 3	- 3	- 3	- 3	- 3	- 6	- 6	- 5	- 5	- 6	- 5	
	+ 4	2	0	- 4	- 3	- 4	- 5	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 5	- 5	
	+ 5	0	- 2	- 3	- 3	- 5	- 3	- 3	- 2	- 2	- 2	- 6	- 5	- 6	
	+ 6	0	- 1	- 2	- 2	0	- 2	- 2	- 3	- 3	- 6	- 6	- 5	- 5	

上述单输入单输出模糊控制系统的结构如图 9 .1 - 2 所示。

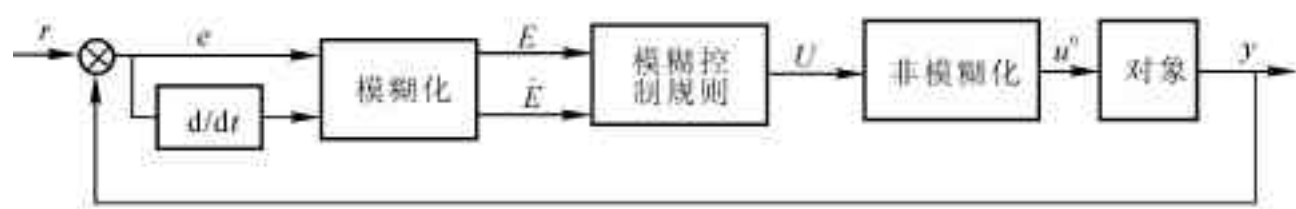


图 9 .1 - 2 基本的模糊控制系统

由于模糊控制器的结构是一种语言表达式,而语言表达式的方式是多种多样的,推理方法亦有多种,从而可以形成各种形式的模糊控制器。图 9 .1 - 2 是一种最基本的典型模糊控制系统,它是根据所描述的过程状态变量与控制量的对应关系并针对该过程状态变量提出控制要求的一种直接的最简单的控制方法,其控制规则和控制要求都是事先确定的,控制过程中无需对其进行变换或改动。在这种模糊控制系统中,输入模糊逻辑系统的  $e$  和  $\dot{e}$  是连续变化的,经过相应的比例规则整定后,得到  $E$  和  $\bar{E}$  的控制等级,查找出各自的隶属度赋值表,找到对应于该控制等级的隶属度不为零的所有语言变量,找出这些语言变量的隶属函数和有关的条件控制语句,再运用模糊运算规则进行计算与合成,得到有关的模糊关系,根据模糊输入,经模糊推理得到模糊控制量,最后采用模糊决策中的一种方法进行决策,可得到作用于被控对象的实际控制量。

上述过程就是典型模糊控制的工作原理。以这种典型模糊控制为基础,产生了模糊-线性复合控制、模糊 PI 控制、模糊自适应控制等改进方法。

模糊控制的优点是:

- (i) 设计系统时不需要建立被控对象的数学模型,只要求掌握现场操作人员或有关专家的经验、知识或操作数据;
- (ii) 模糊控制也可用于模型确定的对象;
- (iii) 系统的鲁棒性强,尤其适用于非线性时变、滞后系统的控制;
- (iv) 由过程的定性认识出发,较易建立语言变量控制规则;
- (v) 模糊控制方法可与经典控制方法相结合,因而灵活多变、形式多样。

但是,模糊控制,尤其是基本模糊控制,也存在一定的局限性:

- (i) 虽然模糊控制系统的动态品质对于对象参数的变化不敏感,但其稳态品质对于对象参数的变化却是比较敏感的,系统可能产生相应的稳态误差或自激振荡;
- (ii) 基本模糊控制只利用误差和误差的变化率,且控制论域等级是固定的,因而它不但无法使整个系统的稳态误差降到最小极限,而且系统的动态品质受到限制;
- (iii) 误差和误差变化率的动态范围需要反复整定;
- (iv) 对于较为复杂的系统,很难得到较为完善的控制规则;
- (v) 模糊控制是一种仿人的操作过程,一般不会出现不稳定,但其稳定性没有严格的理论根据。

在这种情况下,模糊控制的应用,特别是在静、动态品质要求较高的领域中的应用,受到了极大的限制。为了保持模糊控制的优点而弥补其不足,人们将模糊控制与现代控制理论相结合,产生了许多好的控制方法。下面所介绍的模糊自适应控制,就是将模糊控制与自适应控制相结合所导出的控制方法。

## § 9 2 模糊自适应控制器<sup>[7]</sup>

对于复杂的非线性多变量系统,要想凭实际工程经验一次性构造出一个满意的控制表是十分困难的。为了解决这一问题,可采用自适应控制策略。实际上,在常规模糊控制系统中,附加上性能量度和比较、控制校正量赋值及修正算法三个功能块,就可构成模糊自适应控制系统。

### 1. 性能量度和比较

为了改善控制策略,自适应控制器应能够评价自身的性能。为此首先应有一个性能量度。常用的性能量度可分为两大类:一类是全局性的,它能度量系统的整体性能;另一类是局部性的,只能度量系统一部分状态的性能。由于后者比前者简单,而且局部性能的改善也有益于提高整体性能,所以后者应用较多。实际的性能量度多是根据工程要求规定一个希望的闭环响应特性,再把它分解为一系列单样本性能指标。

每次采样的实际响应可通过监测  $e(kT)$  和  $\dot{e}(kT)$  得出,这里  $kT$  为采样时刻,  $T$  为采样周期。把实际响应与希望响应相比较,就可度量控制器的性能,能大概表明需要校正的输出量。

具体实现时,性能量度可以从判定表查出,这种表是根据  $e(kT)$  和  $\dot{e}(kT)$  的知识制定出来的。表 9.2-1 是性能量度判定表的一个例子,其中  $E$  和  $\dot{E}$  的论域都是  $[-6,6]$ ,表中的全部数值

给出了希望响应集合,零元表示该状态不需要校正,非零元的值不仅考虑了偏离设定值的距离,而且还考虑了趋向设定值或离开设定值的速度。与小误差和大误差变化率相比,小误差和小误差变化率更可取,因为后者可能无超调。在实时控制时,每次采样都要调用一次性能量度判定表,以便获取当前实际输出偏离希望轨迹的量度。

表 9.2-1 性能量度判定表

		趋向设定值							离开设定值						
		- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	
低于 设定值	- 6	0	0	0	0	0	0	6	6	6	6	6	6	6	
	- 5	0	0	0	2	2	3	6	6	6	6	6	6	6	
	- 4	0	0	0	2	4	5	6	6	6	6	6	6	6	
	- 3	0	0	0	2	2	3	4	4	4	4	5	5	6	
	- 2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	3	4	5	6	
	- 1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	4	5	
	- 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	
高于 设定值	+ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	- 2	- 3	- 4	
	+ 1	0	0	0	0	0	0	- 1	- 1	- 1	- 2	- 3	- 4	- 5	
	+ 2	0	0	0	0	0	0	- 2	- 2	- 2	- 3	- 4	- 5	- 6	
	+ 3	0	0	0	- 2	- 2	- 3	- 4	- 4	- 4	- 4	- 5	- 5	- 6	
	+ 4	0	0	0	- 2	- 4	- 5	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	
	+ 5	0	0	0	- 2	- 2	- 3	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	
	+ 6	0	0	0	0	0	0	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	- 6	

在多变量情况下,为了对各个输出规定不同的性能量度,可先对每个控制器变量选出一个适当的比例因子,再调用性能量度判定表。

2. 控制输入校正量的赋值

为了把从性能量度判定表得到的需要校正的输出量变换为控制输入校正量,需要解决三个问题:

- (1) 如何由输出变差知识算出控制输入校正量;
- (2) 对于多输入多输出对象应校正哪些控制输入以及校正量如何确定;
- (3) 使当前性能变差是哪些先前控制作用。

有了对象的输入输出关系及时滞特性,则上述问题容易解决,因而最好是建立对象的模型。但与非自适应控制不同,这里不需要建立精确的对象模型,有一个增量模型就能满足要求,而建立这样的模型是比较容易的。

考虑由状态空间方程

$$\begin{cases} x_1 = f( x_1 , u_1 , u_2 ) \\ x_2 = g( x_2 , u_1 , u_2 ) \end{cases} \tag{9.2-1}$$

描述的双输入双输出对象,微小的输入变化引起的输出导数的变化为

$$\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} \quad (9.2-2)$$

式中  $J$  为系统的 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (9.2-3)$$

在经历一个采样周期后,输入变化  $\Delta u_1$  和  $\Delta u_2$  引起的输出变化  $\Delta x_1$  和  $\Delta x_2$  可近似表示为

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} T \delta x_1 \\ T \delta x_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} \quad (9.2-4)$$

式中对象的增量模型  $M$  为

$$M = TJ \quad (9.2-5)$$

是对象状态的函数。

一般地,设  $\Delta x(kT)$  为输出校正量,  $\Delta u(kT)$  为输入校正量,则由上述推证过程可导出

$$\Delta u(kT) = M^{-1} \Delta x(kT) \quad (9.2-6)$$

该方程已用标度因子定标,所以是一个归一化方程。在获取增量模型  $M$  时,未对受控对象加以任何限制,所以式(9.2-6)具有普遍意义。此外,在模糊自适应控制中,对  $M$  的精确性要求不高,只要开始时有一个粗略的控制策略,便可通过在线学习得到改进,这就缓解了获取 Jacobian 矩阵时精确求解偏导数的困难。

在确定控制作用时,还需要考虑对象的动力学性质。一个大时滞的高阶对象,需要更多的先前的控制作用,才能克服时滞的影响。一个时滞小的低阶对象,只需要当前的控制作用就够了。因此,控制作用可根据设计者对受控对象的判断来设置,这就意味着把时滞特性纳入对象模型。

### 3. 修正算法

修正算法的目的是利用所得的控制输入校正量来修改已有的控制规则,以改善控制性能。

假设在前  $d$  次采样中使当前的系统性能变差,那时的误差、误差变化率和控制输入分别为  $e((k-d)T)$ ,  $e((k-d)T)$  和  $u((k-d)T)$ 。根据控制输入校正量的计算结果,控制输入应当取为  $\{u((k-d)T) + \Delta u(kT)\}$ 。

为了得到修正策略,针对相应论域中的这些量,构造模糊子集:

$$E((k-d)T) = F\{e((k-d)T)\} \quad (9.2-7)$$

$$E((k-d)T) = F\{e((k-d)T)\} \quad (9.2-8)$$

$$U((k-d)T) = F\{u((k-d)T)\} \quad (9.2-9)$$

$$V((k-d)T) = F\{u((k-d)T) + \Delta u(kT)\} \quad (9.2-10)$$

式中  $F$  代表环绕单点的模糊过程。用新的蕴涵

$$E((k-d)T) \rightarrow E((k-d)T) \rightarrow V((k-d)T) \quad (9.2-11)$$

代替先前的蕴涵

$$E((k-d)T) \rightarrow E((k-d)T) \rightarrow U((k-d)T) \quad (9.2-12)$$

这两个蕴涵构成的模糊关系分别为

$$R_U(kT) = E((k-d)T) \times E((k-d)T) \times U((k-d)T) \quad (9.2-13)$$

$$R_V(kT) = E((k-d)T) \times E((k-d)T) \times V((k-d)T) \quad (9.2-14)$$

因此,上述两个蕴涵可用下列模糊语句实现:

$$R((k+1)T) = \{R(kT) \text{ but not } R_U(kT)\} \text{ else } R_V(kT) \quad (2-15a)$$

或

$$R((k+1)T) = [R(kT) \cap \overline{R_U(kT)}] \cup R_V(kT) \quad (9.2-15b)$$

式中  $R(kT)$  是当前控制器的模糊关系矩阵,  $R((k+1)T)$  是新的修正矩阵。

修正算法式(9.2-15)不是惟一的,还可构造另外的模糊语句来实现蕴涵式(9.2-11)代替蕴涵式(9.2-12)。此外,在实际应用中,为了减少存贮量,常存贮控制规则而不存贮关系矩阵。

## § 9.3 模糊自校正控制

本节所介绍的模糊自校正调节器设计方法,是参考文献[8]在参考文献[11][12]的基础上提出的,可用于非线性、慢时变、时滞系统的自校正控制。

### 1. 模糊模型结构

设单输入单输出被控过程的模糊模型为

$$y(t) = [u(t-k) \times y(t-l)]R + e(t) \quad (9.3-1)$$

式中  $y(t)$ ,  $y(t-l)$  分别表示在时刻  $t$ ,  $(t-l)$  上被控过程的输出,  $u(t-k)$  表示在时刻  $(t-k)$  上被控过程的输入,  $R$  为直积  $u(t-k) \times y(t-l)$  上的模糊关系,即

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.3-2)$$

式中  $u_1, u_2, \cdots, u_m$  为输入论域  $U$  中的元素,  $y_1, y_2, \cdots, y_n$  为输出论域  $Y$  中的元素,  $y_{ij}$  ( $i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n$ ) 是对应  $u(t-k)$  第  $i$  级、 $y(t-l)$  第  $j$  级时的  $y(t)$  值,  $e(t)$  为作用于被控过程上的零均值白噪声,符号“+”代表普通加法运算。

### 2. 模糊模型辨识及在线修正

假设输入论域  $U$  中的任何  $u_i$  ( $i=1, 2, \cdots, m$ ) 都不为零,并且输出论域  $Y$  中的任何  $y_j$  ( $j=1, 2, \cdots, n$ ) 也都不为零。当被控过程满足上述假设时,模糊关系  $R$  可作如下等价变换:

$$R' = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (9.3-3)$$

式中

$$r_{ij} = \frac{y_{ij}}{u_i y_j}, \quad i=1, 2, \cdots, m; \quad j=1, 2, \cdots, n \quad (9.3-4)$$

考虑到式(9.3-4),则式(9.3-1)可化为



$$y(t) = u(t-k)y(t-l)r_{ij} \quad (9.3-5)$$

式中  $r_{ij}$  为对应  $u(t-k)$  和  $y(t-l)$  分别属于第  $i$  级和第  $j$  级时  $R'$  中的相应元素。应用最小二乘法可导出  $r_{ij}$  的在线递推公式

$$r_{ij}(t) = r_{ij}(t-1) + P(t-l)\Phi(t-l)[y(t) - \Phi(t-l)r_{ij}(t-1)] \quad (9.3-6)$$

$$P(t-l) = \frac{1}{\lambda} \left[ P(t-l-1) - \frac{P^2(t-l-1)\Phi^2(t-l)}{1 + P(t-l-1)\Phi^2(t-l)} \right] \quad (9.3-7)$$

$$\Phi(t-l) = u(t-k)y(t-l) \quad (9.3-8)$$

$$P(t-l-1) > 0, 0 < \lambda \leq 1 \quad (9.3-9)$$

式中  $\lambda$  为遗忘因子。

在自校正调节过程中,每当对输出  $y(t)$  采样一次,都按式(9.3-6) ~ 式(9.3-8) 对原模型做一次修正。

### 3. 模糊自校正调节器设计

考虑带有白噪声干扰的被控过程的模糊模型为

$$y(t) = [u(t-k) \times y(t-l)]R' + e(t) \quad (9.3-10)$$

设白噪声  $e(t)$  的方差为有限值  $\sigma^2$ , 即

$$E[\dot{e}^2(t)] = \sigma^2 < +\infty \quad (9.3-11)$$

由式(9.3-10) 求得

$$y(t+l) = [u(t+l-k) \times y(t)]R' + e(t+l) \quad (9.3-12)$$

设由时刻  $t$  以前的信息对  $y(t+l)$  的最佳预测为  $\hat{y}(t+l|t)$ , 则取指标泛函

$$J = E[y(t+l) - \hat{y}(t+l|t)]^2 \quad (9.3-13)$$

在  $J = \min$  的情况下,求得

$$\hat{y}(t+l|t) = [u(t+l-k) \times y(t)]R' \quad (9.3-14)$$

这时

$$J = E[\dot{e}^2(t+l)] = \sigma^2 \quad (9.3-15)$$

设被控过程在时刻  $(t+l)$  上的理想输出为  $y^*(t+l)$ , 则在令  $\hat{y}(t+l|t) = y^*(t+l)$  的情况下,由式(9.3-14) 得

$$[u(t+l-k) \times y(t)]R' = y^*(t+l) \quad (9.3-16)$$

于是,由给定  $y^*(t+l)$  及  $y(t)$  和最新修正过的  $R'$ ,利用式(9.3-16) 按无解型模糊关系方程的迭代法求解,可反解出控制作用  $u(t+l-k)$ ,从而实现被控过程的模糊自校正调节。

应当指出,对于具有严重非线性、慢时变和时滞的被控过程,目前尚无为其建立精确数学模型的通用方法,本节所介绍的模糊自校正调节器设计方法为解决这类被控过程的控制问题提供了一种较为通用的方法。试验结果表明,本节介绍的模糊自校正调节算法在有白噪声干扰和无噪声干扰两种情况下都是收敛的,并在相当范围之内过程是稳定的,其控制精度满足一般工程要求。

## § 9.4 神经网络模糊自适应控制

模糊自适应控制是 90 年代提出的一种控制方法,目前常用的模型参考模糊自适应控制系统的结构如图 9.4-1,图 9.4-2,图 9.4-3 所示。

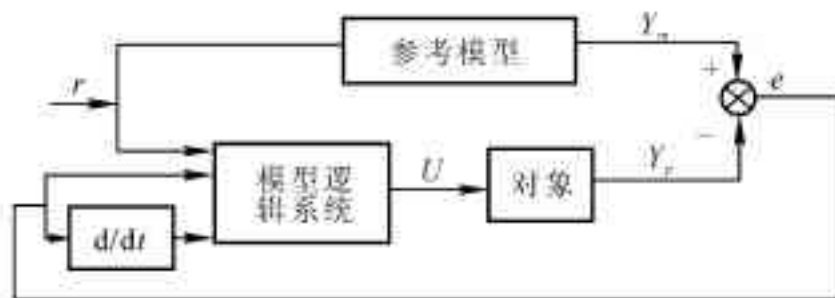


图 9.4-1 模糊自适应控制系统结构 1

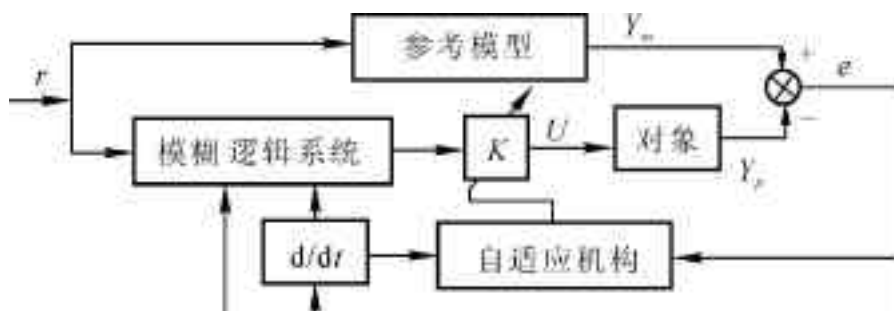


图 9.4-2 模糊自适应控制系统结构 2

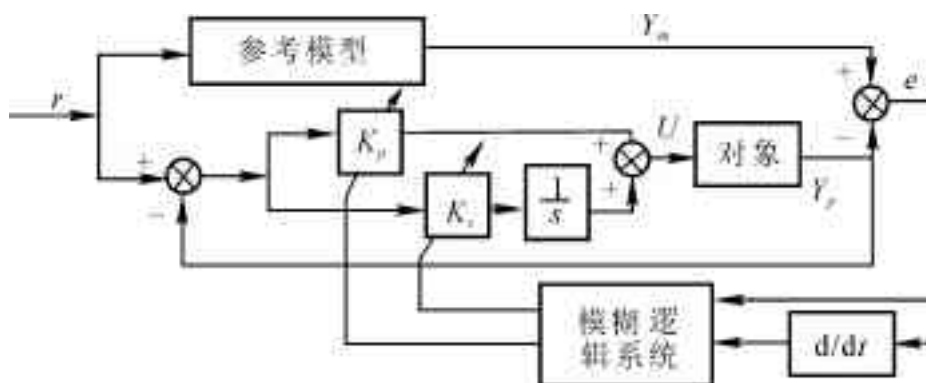


图 9.4-3 模糊自适应控制系统结构 3

在神经网络理论发展日益成熟之后,人们又将神经网络理论应用于模糊逻辑系统中的参数调节,构成神经网络模糊逻辑系统,进而与自适应控制相结合,组成神经网络模糊自适应控制系统,其结构图如图 9.4-4 所示。

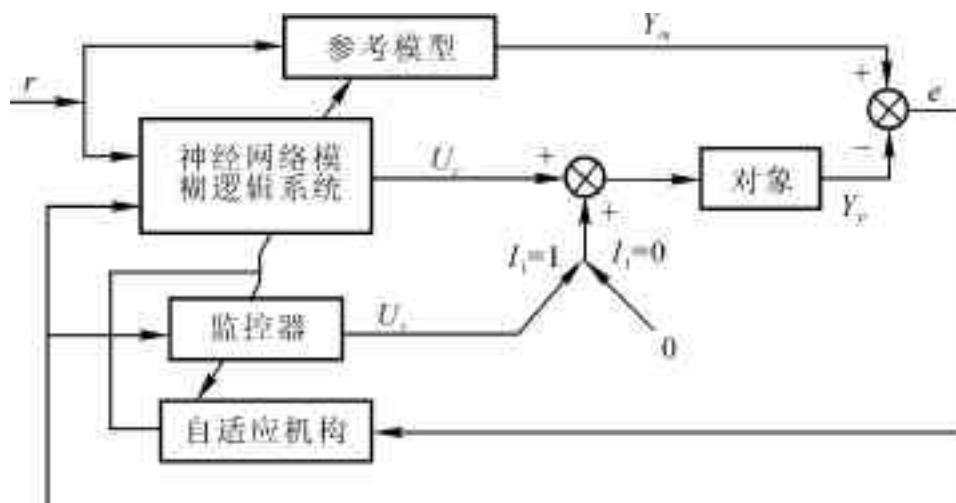


图 9.4-4 神经网络模糊自适应控制系统

可以看到,神经网络模糊自适应控制系统与模糊自适应控制系统的区别仅在于模糊规则“**If-then**”的实现方法不同。在模糊自适应控制系统中,模糊规则的参数是预先确定的,是固定不变的。而在神经网络自适应控制系统中,模糊规则“**If-then**”则是通过神经网络来实现的,其参数在线可调,因而可以在给定精度上逼近任意的非线性函数,从而取得更好的控制效果。

假设模糊逻辑系统采用非独立模糊化方法和加权平均决策,则可得模糊逻辑系统

$$U_c(e) = \frac{\sum_{l=1}^m \alpha^l [\prod_{i=1}^n \exp(-(\frac{e_i - eI_i^l}{\sigma_i^l})^2)]}{\sum_{l=1}^m [\prod_{i=1}^n \exp(-(\frac{e_i - eI_i^l}{\sigma_i^l})^2)]} \tag{9.4-1}$$

式中  $e = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n]^T$  为输入量,  $l = 1, 2, \cdots, m$  表示有  $m$  条“**If-then**”规则,  $\alpha^l, eI_i^l, \sigma_i^l$  ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ) 为第  $l$  条“**If-then**”规则的参数,这些参数是可调的。式(9.4-1) 利用一个三层的前馈网络来实现,如图 9.4-5 所示,其中各参数的意义为

$$\mu = \exp[-(\frac{e_i - eI_i^l}{\sigma_i^l})^2], \quad i = 1, 2, \cdots, n; \quad l = 1, 2, \cdots, m \tag{9.4-2a}$$

$$f = d \ b \tag{9.4-2b}$$

$$z^l = \prod_{i=1}^n \exp[-(\frac{e_i - eI_i^l}{\sigma_i^l})^2], \quad l = 1, 2, \cdots, m \tag{9.4-2c}$$

$$a = \sum_{l=1}^m \alpha^l z^l \tag{9.4-2d}$$

$$b = \sum_{l=1}^m z^l \tag{9.4-2e}$$

表示乘,   表示加, @ 表示乘以  $\alpha^l$ 。

用图 9.4-5 所示三层前馈网络实现模糊逻辑系统的基本工作原理: 先把专家的经验归纳成“**If-then**”规则, 再在应用过程中用输入输出数据在线修正这些规则, 也就是对  $\alpha^l, eI_i^l, \sigma_i^l$  三个参数进行在线训练学习。目前这种训练学习的方法有 **BP** 法, 即反馈学习算法, 正交最小二乘学习算法及中心点训练学习算法等。由于在神经网络理论中 **BP** 算法最为成熟, 所以在神经网络逻辑系统中常采用 **BP** 算法。

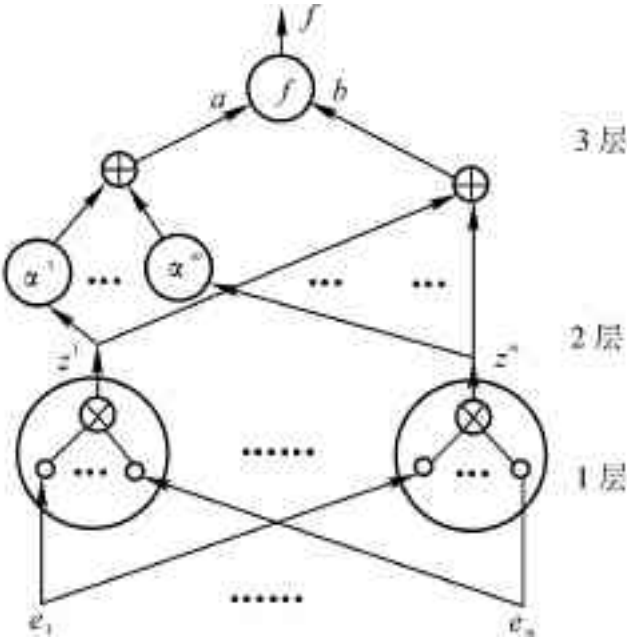


图 9.4-5 实现模糊逻辑系统的网络

对于自适应控制器的设计来说,无论是模糊自适应控制系统还是神经网络模糊自适应控制系统,其设计方法都是相同的。这里介绍两种常用的基于李雅普诺夫稳定性理论的模糊自适应控制器设计方法。

### 1. 间接式模糊自适应控制

间接式模糊自适应控制是以模糊逻辑系统充当模型构造控制器,其结构图如图 9.4-4 所示。设被控对象的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ \dots \dots \dots \\ x_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n) u \\ y_p &= x_1 \end{aligned} \right\} \quad (9.4-3)$$

$$\begin{aligned} x_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n) u \\ y_p &= x_1 \end{aligned} \quad (9.4-4)$$

即

$$\begin{aligned} y_p^{(n)} &= x_1^{(n)} = f(x_1, x_1, \dots, x_1^{(n-1)}) + \\ &g(x_1, x_1, \dots, x_1^{(n-1)}) u_c = f(x) + g(x) u_c \end{aligned} \quad (9.4-5)$$

式中  $f, g$  为未知的连续函数,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  是可控和可观测的。

系统的控制目的是使对象的输出  $y_p(t)$  能跟踪参考模型的输出  $y_m(t)$ , 不失一般性, 假设  $g(x) > 0$  且所有信号有界, 则控制系统的设计目标为: 基于神经网络模糊逻辑系统, 设计一个自适应反馈控制系统, 使得: (1) 当所有变量有界时, 即  $\|x(t)\| \leq M_x < \infty$ ,  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta < \infty$ ,  $|u| \leq M_u < \infty$ , 则闭环系统必定是一致稳定的, 其中  $M_x, M_\theta, M_u$  为设计者根据性能指标所选择的设计参数; (2) 跟踪误差  $e = y_m - y_p$  尽可能快的收敛。

设  $E = [e \ e \ \dots \ e^{(n-1)}]^T$ ,  $K = [k_n \ k_{n-1} \ \dots \ k_1]$  且方程

$$s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_{n-1} s + k_n = 0 \quad (9.4-6)$$

的所有根都处于左半复平面。若  $f, g$  已知, 选取控制律为

$$u_c = [-f(x) + y_m^{(n)} + K^T E] / g(x) \quad (9.4-7)$$

代入式(9.4-5) 可得

$$e^{(n)} + K^T E = e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} e + k_n e = 0 \quad (9.4-8)$$

由式(9.2-6) 知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (9.4-9)$$

即系统是一致稳定的且跟踪误差趋于零。

但在工程实际问题中所遇到的对象往往是  $f(x)$  和  $g(x)$  未知或不能精确表示, 因而只好用模糊逻辑系统来充当模型。选取形如式(9.4-1) 的模糊逻辑系统

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{l=1}^m \alpha^l [\prod_{i=1}^n \exp(-(\frac{x_i - xI_i^l}{\sigma_i^l})^2)]}{\sum_{l=1}^m [\prod_{i=1}^n \exp(-(\frac{x_i - xI_i^l}{\sigma_i^l})^2)]} \quad (9.4-10)$$

给出  $\hat{f}(x | \theta_f)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g)$  的调节参数, 使  $\hat{f}(x | \theta_f), \hat{g}(x | \theta_g)$  分别逼近  $f(x), g(x)$ , 进而用  $\hat{f}(x | \theta_f)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g)$  代替式(9.4-7) 式中的  $f(x)$  和  $g(x)$ , 构成实际的控制律, 其中  $\theta_f = [\alpha_f \ xI_f \ \sigma_f]^T$ ,  $\theta_g = [\alpha_g \ xI_g \ \sigma_g]^T$  为模糊逻辑系统的可调参数。

用  $\hat{f}(x | \theta_f)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g)$  代换式(9.4-7) 中的  $f(x)$  和  $g(x)$  可得

$$u_c = [-\hat{f}(x | \theta_f) + y_m^{(n)} + K^T E] / \hat{g}(x | \theta_g) \quad (9.4-11)$$

则误差方程为

$$\begin{aligned} e^{(n)} &= y_m^{(n)} - y_p^{(n)} = -K^T E + \hat{f}(x | \theta_f) - \\ &f(x) + [\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)] u_c \end{aligned} \quad (9.4-12)$$

即

$$E = K_c E + B_c [\hat{f}(x | \theta_f) - f(x) + (\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)) u_c] \quad (9.4-13)$$

式中

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1]$$

因而必定存在  $n \times n$  正定对称矩阵  $P$  满足李雅普诺夫方程

$$K_c^T P + P K_c = Q \quad (9.4-14)$$

式中  $Q$  为  $n \times n$  正定阵。

选取李雅普诺夫函数为  $V_e = \frac{1}{2} E^T P E$ , 则有

$$V_e = \frac{1}{2} E^T P E + \frac{1}{2} E^T P E \quad (9.4-15)$$

利用式(9.4-13), 式(9.4-14) 可得

$$V_e = -\frac{1}{2} E^T Q E + E^T P B_c [f(x | \theta_f) - f(x) + (\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)) u_c] \quad (9.4-16)$$

根据李雅普诺夫稳定性定理知, 若能保证  $V_e \leq 0$ , 则  $E = 0$  是渐近稳定的, 即闭环系统是渐近稳定的。

如图 9.4-4 所示, 将控制量分为两部分, 即

$$u = u_s + u_c \quad (9.4-17)$$

式中  $u_s$  称为监控量, 其作用是当  $V_e \geq V_{\max}$  时保证  $V_e \leq 0$ 。于是有

$$E = K_c E + B_c [f(x | \theta_f) - f(x) + (\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)) u_c - g(x) u_s] \quad (9.4-18)$$

将上式代入式(9.4-15) 可得

$$\begin{aligned} V_e = & -\frac{1}{2} E^T Q E + E^T P B_c [f(x | \theta_f) - \\ & f(x) + (\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)) u_c - g(x) u_s] \leq \\ & \frac{1}{2} E^T Q E + |E^T P B_c| [|f(x | \theta_f)| + |f(x)| + \\ & |\hat{g}(x | \theta_g) u_c| + |g(x) u_c|] - E^T P B_c g(x) u_s \end{aligned} \quad (9.4-19)$$

欲使系统稳定, 需要选取  $u_s$  使上式非正。

定义函数  $f^U(x)$ ,  $g^U(x)$ ,  $g_L(x)$  使得  $|f(x)| \leq f^U(x)$ ,  $0 < g_L(x) \leq g(x) \leq g^U(x)$ , 由式(9.4-19) 可得

$$u_s = I_1 \operatorname{sgn}(E^T P B_c) \frac{|f(x | \theta_f)| + f^U(x) + |\hat{g}(x | \theta_g) u_c| + |g^U(x) u_c|}{g_L(x)} \quad (9.4-20)$$

式中

$$I_1 = \begin{cases} 1, & V_e \geq V_{\max} \\ 0, & V_e \leq V_{\max} \end{cases} \quad (9.4-21)$$

式中  $V_{\max}$  是可以允许的  $V_e$  的最大值。这样选取  $u_s$  可以保证当  $V_e \geq V_{\max}$  时,  $V_e \leq 0$ , 从而保证

了  $E$  有界。

现在进一步来确定系统的自适应律。

定义

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \omega_f} [\sup_{x \in U_c} |f(x | \theta) - f(x)|] \quad (9.4-22)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \omega_g} [\sup_{x \in U_s} |\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)|] \quad (9.4-23)$$

式中  $\omega_f, \omega_g$  分别是  $\theta_f, \theta_g$  的集合,

$$\omega_f = \{\theta_f : \|\theta_f\| \leq M_f, \sigma_i' \geq \sigma\} \quad (9.4-24)$$

$$\omega_g = \{\theta_g : \|\theta_g\| \leq M_g, \alpha' \geq \varepsilon, \sigma_i' \geq \sigma\} \quad (9.4-25)$$

式中  $M_f, M_g, \varepsilon, \sigma$  为设计常数。

定义

$$\omega = f(x | \theta_f) - f(x) + [\hat{g}(x | \theta_g) - g(x)] u_c \quad (9.4-26)$$

则有

$$E = K_c E - B_c [f(x | \theta_f) - f(x | \theta_f^*) + (\hat{g}(x | \theta_g) - \hat{g}(x | \theta_g^*)) u_c + \omega] \quad (9.4-27)$$

将  $f(x | \theta_f^*)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g^*)$  在  $\theta_f$  和  $\theta_g$  点展开为台劳级数则有

$$\Phi_f = \theta_f^* - \theta_f, \quad \Phi_g = \theta_g^* - \theta_g \quad (9.4-28)$$

$$f(x | \theta_f) - f(x | \theta_f^*) = \Phi_f^T \left( -\frac{f(x | \theta_f)}{\theta_f} \right) + O(\|\Phi_f\|^2) \quad (9.4-29)$$

$$\hat{g}(x | \theta_g) - \hat{g}(x | \theta_g^*) = \Phi_g^T \left( -\frac{\hat{g}(x | \theta_g)}{\theta_g} \right) + O(\|\Phi_g\|^2) \quad (9.4-30)$$

式中  $O(\|\Phi_g\|^2), O(\|\Phi_f\|^2)$  为高阶余项。这种情况下的误差方程为

$$E = K_c E - B_c g(x) u_s + B_c v + B_c \left[ \Phi_f^T \left( -\frac{f(x | \theta_f)}{\theta_f} \right) + \Phi_g^T \left( -\frac{\hat{g}(x | \theta_g)}{\theta_g} \right) u_c \right] \quad (9.4-31)$$

$$v = \omega + O(\|\Phi_f\|^2) + O(\|\Phi_g\|^2) u_c \quad (9.4-32)$$

设计中式(9.4-32)一般忽略不计。因而系统的自适应调节律为

$$\begin{aligned} f(x | \theta_f) - f(x | \theta_f^*) &= \Phi_f^T \left( -\frac{f(x | \theta_f)}{\theta_f} \right) \\ \hat{g}(x | \theta_g) - \hat{g}(x | \theta_g^*) &= \Phi_g^T \left( -\frac{\hat{g}(x | \theta_g)}{\theta_g} \right) \end{aligned} \quad (9.4-33)$$

将被控对象、控制律与自适应调节律相结合,可得闭环反馈控制系统。

## 2. 直接式模糊自适应控制

直接式模糊自适应控制是以模糊逻辑系统充当控制器,其模糊逻辑系统的在线调节是非线性的。直接式模糊自适应控制和间接式模糊自适应控制的系统结构均如图9.4-4所示,区别之处仅在于模糊逻辑系统的功能不同。间接式模糊自适应控制是以形如式(9.4-10)的模糊逻辑系统给出  $f(x | \theta_f)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g)$ ,然后用  $f(x | \theta_f)$  和  $\hat{g}(x | \theta_g)$  代替  $f(x)$  和  $g(x)$  来构造控制器  $u_c$ 。而直接式模糊自适应控制则是用形如式(9.4-10)的模糊逻辑系统直接充当控制器  $u_c$ 。

设被控对象为

$$x_1^{(n)} = f(x_1, x_1, \dots, x_1^{(n-1)}) + bu, \quad y_p = x_1 \quad (9.4-34)$$

并设

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T = [x_1 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_1^{(n-1)}]^T$$

$$E = [e \quad e \quad \cdots \quad e^{(n-1)}]^T, \quad K = [k_n \quad k_{n-1} \quad \cdots \quad k_1]^T$$

式中向量  $K$  的取值必须满足方程

$$s^n + k_1 s^{n-1} + \cdots + k_{n-1} s + k_n = 0 \quad (9.4-35)$$

控制量  $u$  由基本控制量  $u_c(x|\theta)$  和监控量  $u_s(x)$  组成, 即

$$u = u_c(x|\theta) + u_s(x) \quad (9.4-36)$$

式中  $u_c(x|\theta)$  为形如式(9.4-10) 的模糊逻辑系统,

$$\theta = [\alpha^l \quad x I_i^l \quad \sigma_i^l]^T \quad (9.4-37)$$

将式(9.4-36) 代入式(9.4-34) 得

$$y^{(n)} = f(x) + b[u_c(x|\theta) + u_s(x)] \quad (9.4-38)$$

若  $f(x)$  和  $b$  已知, 则由式(9.4-7) 可知

$$u^* = \frac{-f(x) + y_m^{(n)} + K^T E}{b} \quad (9.4-39)$$

式中  $y_m$  为参考模型输出。将式(9.4-39) 代入式(9.4-38) 可得闭环系统误差方程

$$e^{(n)} = y_m^{(n)} - y_p^{(n)} = -K^T E + b[u^* - u_c(x|\theta) - u_s(x)] \quad (9.4-40)$$

即

$$E = K_c E + B_c [u^* - u_c(x|\theta) - u_s(x)] \quad (9.4-41)$$

$$B_c = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad b]^T$$

$$K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \cdots & -k_2 & -k_1 \end{bmatrix} \quad (9.4-42)$$

选取李雅普诺夫函数  $V_e = \frac{1}{2} E^T P E$ , 其中  $P$  是对称正定阵且满足李雅普诺夫方程

$$K_c^T P + P K_c = -Q \quad (9.4-43)$$

式中  $Q$  为对称正定阵。定义  $|f(x)| \leq f^U(x)$ ,  $0 \leq b \leq b$ , 分别以  $f^U(x)$  和  $b$  代替  $|f(x)|$  和  $b$ , 则参照式(9.4-20) 可得

$$u_s = I \operatorname{sgn}(E^T P B_c) \left[ |u_c| + \frac{f^U(x) + |y_m^{(n)}| + |K^T E|}{b} \right] \quad (9.4-44)$$

式中  $I$  的定义与式(9.4-21) 相同。

定义最优参数向量

$$\theta^* = \arg \min_{|\theta| \leq M_\theta} [\sup_{|x| \leq M_x} |u_c(x|\theta) - u^*|] \quad (9.4-45)$$

式中  $M_\theta, M_x$  为设计参数, 则自适律为

$$\Phi = \theta^* - \theta \quad (9.4-46)$$

$$u_c(x|\theta^*) - u_c(x|\theta) = \Phi^T \frac{u_c(x|\theta)}{\theta} \quad (9.4-47)$$

## § 9.5 基于模糊聚类算法的模糊自适应控制

模糊逻辑系统的一个重要用途就是可以作为非线性系统的数学模型。利用

Stone-Weierstrass 定理可以证明, 式(9.4-10) 所示模糊逻辑系统能够在任意精度上一致逼近任何定义在一个致密集上的非线性函数。模糊逻辑系统所具有的这种逼近性, 为建立非线性动态系统的模型提供了理论依据。如何使模糊逻辑系统以任意精度收敛于非线性动态系统, 可以在辨识算法中解决。本节将介绍常用的一种辨识算法——模糊聚类学习算法。下面将首先推导这种非线性动态系统辨识算法, 然后利用李雅普诺夫稳定性理论设计模型参考模糊自适应控制系统。

### 1. 模糊聚类学习算法

设有  $N$  对输入输出样本数据对  $(x^j, y^j)$ ,  $x^j \in U \subset R^n$ ,  $y^j \in V \subset R$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , 且  $N$  较小。我们的目的是利用模糊逻辑系统

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^N y^j \left[ \prod_{i=1}^n \exp(- (x_i - x_i^j)^2 / \delta^2) \right]}{\sum_{j=1}^N \left[ \prod_{i=1}^n \exp(- (x_i - x_i^j)^2 / \delta^2) \right]} \quad (9.5-1)$$

通过适当选择  $\delta$ , 将所有  $N$  对输入输出数据拟合到任意给定的精度, 即对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 保证对所有的  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) 均有

$$|f(x^j) - y^j| < \varepsilon \quad (9.5-2)$$

定义

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T, \quad x^j = [x_1^j \ x_2^j \ \dots \ x_n^j]^T$$

则可推得

$$\prod_{i=1}^n \exp(- (x_i - x_i^j)^2 / \delta^2) = \exp(- \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^j|^2}{\delta^2}) = \exp(- |x - x^j|^2 / \delta^2) \quad (9.5-3)$$

式中

$$|x - x^j|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^j|^2 \quad (9.5-4)$$

将式(9.5-3) 代入式(9.5-1), 可得模糊逻辑系统的另一种形式

$$f(x) = \frac{\sum_{j=1}^N y^j \exp(- |x - x^j|^2 / \delta^2)}{\sum_{j=1}^N \exp(- |x - x^j|^2 / \delta^2)} \quad (9.5-5)$$

可以证明, 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 一定存在一个  $\delta^* > 0$ , 使模糊逻辑系统式(9.5-1) 或式(9.5-5) 在  $\delta = \delta^*$  时, 使不等式(9.5-2) 对于所有  $j = 1, 2, \dots, N$  都成立。在这种意义上来说, 式(9.5-1) 或式(9.5-5) 为最优模糊逻辑系统。

在式(9.5-5) 中,  $\delta$  是一平滑参数。 $\delta$  越小, 则拟合误差  $|f(x^j) - y^j|$  就越小, 但  $f(x)$  越不平滑, 从而导致  $f(x)$  对样本集合外的数据点不具有一般性。所以在选择  $\delta$  时必须折衷考虑, 以维持拟合性与一般性之间的平衡。由于  $\delta$  是一维参数, 因而在实际问题中不难找到一个合适的  $\delta$  来, 有时通过几次试验和误差信息就可以确定出满意的  $\delta$  值。

式(9.5-1) 或式(9.5-5) 所示最优模糊逻辑系统只是对小样本数据对能以任意精度进行拟合, 即系统中的每一规则对应于小样本集合中的一个输入输出数据对。如果样本数据对的数



目远远大于  $N$  时此系统仍要以任意精度拟合这些数据对的话,其规则数目就会剧增而导致系统没有实际使用价值。对于这样的大样本问题,可采用最近邻聚类方法对数据进行分组,使每一组数据对应于模糊逻辑系统的一条规则,从而减少系统的规则数目,使系统仍能以任意精度拟合样本数据对。

下面介绍模糊聚类方法的一些概念和具体算法。

设每一有序对  $(x, x^j)$  ( $x, x^j \in X$ ,  $X$  为一集合) 之间的距离为

$$d(x, x^j) = |x - x^j| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - x_i^j|^2 \right)^{1/2} \quad (9.5-6)$$

由于  $d(x, x^j)$  满足条件

(i)  $d(x, x^j) > 0$ , 并且当  $x = x^j$  时,  $d(x, x^j) = 0$ ;

(ii)  $d(x, x^j) = d(x^j, x)$ ;

(iii) 对于任何  $z \in X$ ,  $d(x, x^j) \leq d(x, z) + d(z, x^j)$ 。所以集合  $X$  为度量空间,而函数  $d(x, x^j)$  为度量。

对于度量空间  $X$  的每一点  $x^j$  及每一个正数  $r$ , 考虑满足  $d(x, x^j) \leq r$  的所有  $x \in X$  的集合, 称这个集合是以  $x^j$  为中心、 $r$  为半径的球, 以  $V_r$  来表示。

由于在样本集合数据对中,  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in U \subset R^n$  是有界的, 因而集合  $U$  必是度量空间  $X$  内的紧集。又紧集是闭的且是有界的, 所以有限个  $V_r$  就可以覆盖住  $U$ , 即覆盖住这个空间。故在考虑样本集合中的  $x$  是否在以  $x^j$  为中心、 $r$  为半径的球内, 即是否以半径  $r$  聚类于  $x^j$  点, 可利用式 (9.5-6) 所定义的距离函数  $d(x, x^j)$  来度量。具体方法如下:

对于样本数据对  $(x^k, y^k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 从第一个数据对  $(x^1, y^1)$  开始, 在  $x^1$  上建立一个聚类中心点  $cx^1$ , 即让  $cx^1 = x^1$ 。而且设  $A^1(1) = y^1$ ,  $B^1(1) = 1$ , 选择聚类半径为  $r$ 。

假设在第  $k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ) 对数据对时已存在  $M$  个聚类, 其中心点分别为  $cx^1, cx^2, \dots, cx^M$ , 则  $x^k$  到这  $M$  个聚类中心的距离为

$$d(x^k, cx^j) = |x^k - cx^j| \quad (9.5-7)$$

式中  $j = 1, 2, \dots, M$ 。设  $d(x^k, cx^{jk}) = |x^k - cx^{jk}|$  为这  $M$  个距离中的最小距离, 即  $cx^{jk}$  为  $x^k$  的最近邻聚类。如果  $d(x^k, cx^{jk}) \leq r$ , 则在第  $k$  数据对时, 聚类的中心点为  $cx^{jk}$ , 并且

$$A^{jk}(k) = A^{jk}(k-1) + y^k \quad (9.5-8)$$

$$B^{jk}(k) = B^{jk}(k-1) + 1 \quad (9.5-9)$$

其余  $j \neq j_k$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) 的聚类中心点  $cx^j$  不变,

$$A^j(k) = A^j(k-1) \quad (9.5-10)$$

$$B^j(k) = B^j(k-1) \quad (9.5-11)$$

这样, 第  $k$  时刻的模糊逻辑系统在  $x^k$  不需建立一个新聚类点。此时, 可由式 (9.5-5) 推导出如下的最优模糊逻辑系统来拟合样本

$$f(x^k) = \frac{\sum_{j=1}^M A^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \sigma^2)}{\sum_{j=1}^M B^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \sigma^2)} \quad (9.5-12)$$

如果  $d(x^k, cx^{jk}) > r$ , 则在第  $k$  数据对时需要建立一个新的聚类中心点  $cx^{M+1} = x^k$ , 此时聚类中心点的数目由  $M$  变成  $M+1$ , 同时式 (9.5-12) 中的  $M$  也变成  $M+1$ , 并且

$$A^{M+1}(k) = y^k \quad (9.5-13)$$

$$B^{M+1}(k) = 1 \quad (9.5-14)$$

其余  $M$  个聚类中心点  $cx^j (j = 1, 2, \dots, M)$  仍保持不变。

模糊逻辑系统式(9.5-12) 按上述聚类方法进行学习以后,可得到全部聚类中心点。由于聚类点集合覆盖了整个  $x$  取值区间,因而对于任意一组样本数据对  $(x^k, y^k)$ ,当其归于且只归于一个聚类  $j$  时(假设  $j$  聚类中心点为  $cx^j$ ,且有  $n$  个样本数据对聚类于  $j$  点),由式(9.5-12) 计算样本  $y^k$  的拟合值  $f(x^k)$  为

$$f(x^k) = \frac{A^j(k) + \sum_{j=1, j \neq j}^M A^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \delta^2)}{B^j(k) + \sum_{j=1, j \neq j}^M B^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \delta^2)} \quad (9.5-15)$$

只要适当选择  $\delta$ ,就可以不考虑其它聚类点对  $f(x^k)$  的影响,即

$$\sum_{j=1, j \neq j}^M A^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \delta^2) \approx 0 \quad (9.5-16)$$

$$\sum_{j=1, j \neq j}^M B^j(k) \exp(-|x^k - cx^j|^2 / \delta^2) \approx 0 \quad (9.5-17)$$

于是式(9.5-15) 变为

$$f(x^k) = A^j(k) / B^j(k) \quad (9.5-18)$$

式中  $A^j(k), B^j(k)$  均按聚类方法获得,

$$A^j(k) = \sum_{k'=1}^n y^{k'}, \quad B^j(k) = n \quad (9.5-19)$$

将上式代入(9.5-18) 式可得

$$f(x^k) = \frac{1}{n} \sum_{k'=1}^n y^{k'} = c^j \quad (9.5-20)$$

式中  $c^j$  为一常数。

又假设在样本学习过程中,聚类于  $j$  点的  $n$  个样本数据对为  $(x^k, y^k) (k = 1, 2, \dots, n)$ 。根据最小二乘原理,希望  $c^j$  的取值能保证准则函数

$$E = \sum_{k'=1}^n (y^{k'} - c^j)^2 \quad (9.5-21)$$

为最小。由此不难求得,只有当

$$c^j = \frac{1}{n} \sum_{k'=1}^n y^{k'} \quad (9.5-22)$$

即  $c^j$  为  $y^k (k = 1, 2, \dots, n)$  的均值时,  $E$  为最小。

由式(9.5-20) 和式(9.5-22) 可以看到,用聚类算法对样本数据对进行拟合是符合最小二乘原理的,从而解释了基于式(9.5-12) 的模糊逻辑系统使用本节所讨论的聚类算法的合理性。

半径  $r$  的大小决定了式(9.5-12) 模糊逻辑系统  $f(x)$  的复杂程度。当  $r$  取值较小时,所得到的聚类数目就会较多,从而导致  $f(x^k)$  拟合样本集合  $(x^k, y^k)$  的程度较好,但同时会产生较复杂的非线性回归过程,计算量也会增大。由于  $r$  是一个一维参数,对于某一具体问题,一般都可以通过试验和误差信息找到一个适当的  $r$ ,使模糊逻辑系统  $f(x)$  以较高的精度拟合样本集合。

此外,由于使用聚类算法会使每一个输入输出数据对样本可能产生一个新的聚类,所以式(9 5-12)所示的模糊逻辑系统  $f(x)$  同时在进行着参数和结构两个过程的自适应调整,即在某种意义上说,聚类算法也是一种变结构调整方法。

### 2. 模型参考模糊自适应控制系统设计

在本节中,我们只分析、讨论基于模糊逻辑系统的模型参考模糊自适应控制系统的设计方法,其基本结构如图 9 5-1 所示。在这种控制系统中,模糊控制器与被控对象一起组成参数可调的闭环系统,简称可调系统。控制器采用间接控制方法,即先利用模糊逻辑系统为被控对象建模,然后再产生所需要的控制作用。这里对控制器参数调整实际上就是对模糊逻辑系统可调参数的调整,即通过调整模糊逻辑系统的可调参数达到逼近被控对象的目的,从而使可调系统的输出在一定条件下,能以任意精度跟踪参考模型的输出。

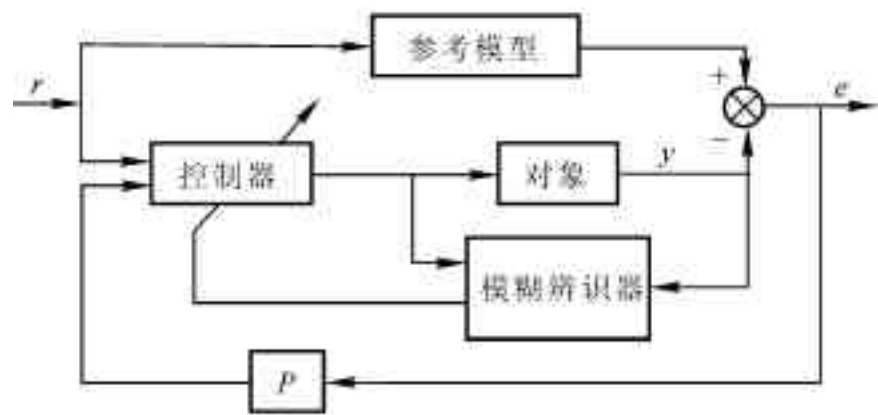


图 9 5-1 模型参考模糊自适应控制系统

考虑非线性离散系统

$$y(t+1) = g(t) + h(t)u(t) \tag{9 5-23}$$

式中

$$g(t) = g(y(t), y(t-1), \dots, y(t-n_1+1), u(t), u(t-1), \dots, u(t-n_2+1)) \tag{9 5-24}$$

$$h(t) = h(y(t), y(t-1), \dots, y(t-m_1+1), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m_2+1)) \tag{9 5-25}$$

$g(\cdot), h(\cdot)$  均为未知的非线性连续函数,其中  $k \geq n_1, n_2, m_1, m_2, u(t) \in R$  和  $y(t) \in R$  分别为系统的输入和输出。

假设  $g(t)$  和  $h(t)$  可通过某种手段小样本量测或者估计出来,且有  $h(t) \neq 0(t = 0, 1, 2, \dots)$  成立。控制任务就是要迫使被控系统的输出  $y(t+1)$  跟踪一个给定的有界参考信号  $y_m(t+1)$ ,其约束条件是所有信号必须是有界的。为明确起见,下面进一步给出控制任务定义。

控制任务:基于模糊逻辑系统求出一个反馈控制  $u(t)$  和一个可调参数向量  $W(t)$  的自适应律,使得

(i) 在所有变量  $W(t)$  和  $u(t)$  一致有界的意义下,系统输出误差

$$e(t+1) = y_m(t+1) - y(t+1) \tag{9 5-26}$$

应尽可能小;

(ii) 在满足一定条件下,可调系统一定具有全局渐近稳定性。

下面将讨论如何构造一个稳定的模型参考模糊自适应控制系统来完成上述的控制任务。

对于式(9.5-23)所示非线性离散系统,如果函数  $g(t)$  和  $h(t)$  为已知,取控制律为

$$u_c(t) = \frac{1}{h(t)} [-g(t) + y_m(t+1) + pe(t)] \quad (9.5-27)$$

式中  $p < 0$  为反馈增益,则系统的输出误差为

$$\begin{aligned} e(t+1) &= y_m(t+1) - y(t+1) = y_m(t+1) - [g(t) + h(t)u_c(t)] = \\ &= y_m(t+1) - [g(t) + h(t)\frac{1}{h(t)}(-g(t) + y_m(t+1) + pe(t))] = \\ &= y_m(t+1) - y_m(t+1) - pe(t) = -pe(t) \end{aligned} \quad (9.5-28)$$

即当  $|p| < 1$  时,可调系统输出能渐近跟踪参考模型输出  $y_m(t+1)$ 。

然而,由于  $g(t)$  和  $h(t)$  是未知的连续函数,如果用模糊逻辑系统  $\hat{g}(t)$  和  $\hat{h}(t)$  分别代替  $g(t)$  和  $h(t)$ ,取控制律为

$$u_c(t) = \frac{1}{\hat{h}(t)} [-\hat{g}(t) + y_m(t+1) + pe(t)] \quad (9.5-29)$$

则有

$$y(t+1) = g(t) + h(t)\frac{1}{\hat{h}(t)} [-\hat{g}(t) + y_m(t+1) + pe(t)] \quad (9.5-30)$$

等式两边同乘  $\hat{h}(t)$  并同加  $-\hat{h}(t)y_m(t+1)$ ,可得

$$\begin{aligned} \hat{h}(t)y(t+1) - \hat{h}(t)y_m(t+1) &= \hat{h}(t)g(t) - \hat{h}(t)y_m(t+1) - \\ &= h(t)\hat{g}(t) + h(t)y_m(t+1) + ph(t)e(t) \end{aligned} \quad (9.5-31)$$

等式两边合并整理得

$$\begin{aligned} -\hat{h}(t)[y_m(t+1) - y(t+1)] &= \hat{h}(t)[g(t) - \hat{g}(t)] - \hat{h}(t)[- \hat{g}(t) + \\ &= y_m(t+1)] + h(t)[- \hat{g}(t) + y_m(t+1)] + ph(t)e(t) \end{aligned} \quad (9.5-32)$$

根据式(9.5-29)有

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{1}{\hat{h}(t)} [-\hat{g}(t) + y_m(t+1)] + \frac{1}{\hat{h}(t)} pe(t) = \\ &= u'_c(t) + \frac{p}{\hat{h}(t)} e(t) \end{aligned} \quad (9.5-33)$$

式中

$$u'_c(t) = \frac{1}{\hat{h}(t)} [-\hat{g}(t) + y_m(t+1)] \quad (9.5-34)$$

上式两边同乘  $\hat{h}(t)$  得

$$\hat{h}(t)u'_c(t) = -\hat{g}(t) + y_m(t+1) \quad (9.5-35)$$

将式(9.5-35)与式(9.5-26)代入式(9.5-32)可导出系统误差

$$\begin{aligned} e(t+1) &= -[g(t) - \hat{g}(t)] + \hat{h}(t)u'_c(t) - h(t)u'_c(t) - \\ &= p\frac{h(t)}{\hat{h}(t)}e(t) = \hat{g}(t) - g(t) + [\hat{h}(t) - h(t)]u'_c(t) - p\frac{h(t)}{\hat{h}(t)}e(t) \end{aligned} \quad (9.5-36)$$

令

$$\Delta g(t) = \hat{g}(t) - g(t) \quad (9.5-37)$$

$$\Delta h(t) = \hat{h}(t) - h(t) \quad (9.5-38)$$

则有

$$e(t+1) = \Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t) - p \frac{h(t)}{\hat{h}(t)} e(t) \quad (9.5-39)$$

式中  $\Delta g(t)$  和  $\Delta h(t)$  分别为未知函数  $g(t)$  和  $h(t)$  的辨识误差。

为了设计全局渐近稳定的模型参考模糊自适应控制系统,有必要首先依据离散时间系统的李雅普诺夫稳定性定理选取二次型函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^2(t) \quad (9.5-40)$$

为李雅普诺夫函数。为使系统输出误差渐近收敛,必须使

$$\Delta V(t) = V(t+1) - V(t) < 0 \quad (9.5-41)$$

由式(9.5-40)可推得

$$\Delta V(t) = \frac{1}{2} e^2(t+1) - \frac{1}{2} e^2(t) = \frac{1}{2} \Delta e(t) [e(t+1) + e(t)] \quad (9.5-42)$$

式中  $\Delta e(t) = e(t+1) - e(t)$ 。上式又可写为

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= \frac{1}{2} \Delta e(t) [\Delta e(t) + 2e(t)] = \frac{1}{2} (\Delta e(t))^2 + \Delta e(t) e(t) = \\ &= \frac{1}{2} (\Delta e(t))^2 + [e(t+1) - e(t)] e(t) \end{aligned} \quad (9.5-43)$$

从上式知,要使  $\Delta V(t) < 0$ ,就必须使

$$[e(t+1) - e(t)] e(t) < 0 \quad (9.5-44)$$

然而,这一条件仅仅是使式(9.5-39)所示系统输出误差渐近收敛于零的必要条件,而不是充分条件。事实上,式(9.5-44)不能保证系统输出误差收敛于原点,有可能导致系统输出误差在原点附近以逐渐增大的幅度颤振,即导致可调系统不稳定。为此,根据式(9.5-44)可提出一个充分必要条件

$$|e(t+1)| < |e(t)| \quad (9.5-45)$$

满足式(9.5-45)的自适应控制  $u_c(t)$  将会使式(9.5-39)的系统输出误差逐渐收敛,也就是能够使

$$\Delta V(t) = V(t+1) - V(t) < 0$$

一定成立,从而使可调系统是大范围渐近稳定的。为便于分析,将式(9.5-45)分解为以下两个不等式

$$(e(t+1) - e(t)) \operatorname{sgn}(e(t)) < 0 \quad (9.5-46)$$

$$(e(t+1) + e(t)) \operatorname{sgn}(e(t)) > 0 \quad (9.5-47)$$

这里,称式(9.5-46)和式(9.5-47)为式(9.5-39)所示系统输出误差的收敛条件。

对于式(9.5-39)的系统输出误差,要使其渐近收敛,即  $\Delta V(t) < 0$ ,根据式(9.5-46)、式(9.5-47)的收敛条件可知,当  $e(t) > 0$  时,应当保证

$$e(t+1) - e(t) < 0 \quad (9.5-48)$$

$$e(t+1) + e(t) > 0 \quad (9.5-49)$$

同时成立。将式(9.5-39)代入式(9.5-48)和式(9.5-49)得

$$\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t) - p \frac{h(t)}{h(t)} e(t) - e(t) < 0 \quad (9.5-50)$$

$$\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t) - p \frac{h(t)}{h(t)} e(t) + e(t) > 0 \quad (9.5-51)$$

整理后有

$$e(t) > \frac{\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t)}{1 + p \frac{h(t)}{h(t)}} \quad (9.5-52)$$

$$e(t) > - \frac{\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t)}{1 - p \frac{h(t)}{h(t)}} \quad (9.5-53)$$

假设在非线性离散系统式(9.5-23)中,未知函数  $g(t)$  和  $h(t)$  的最大辨识误差分别为  $\max |\Delta g(t)|$  和  $\max |\Delta h(t)|$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ )。令

$$a(t) = \max |\Delta g(t)| + \max |\Delta h(t)| |u'(t)| \quad (9.5-54)$$

并假设辨识后  $h(t)$  能以任意小  $\varepsilon > 0$  的精度逼近  $h(t)$ , 则

$$|p| (1 - \varepsilon) \leq |p| \frac{h(t)}{h(t)} \leq |p| (1 + \varepsilon) \quad (9.5-55)$$

又假设

$$1 - |p| \frac{h(t)}{h(t)} \geq \sigma \quad (9.5-56)$$

式中  $0 < \sigma \leq 1$ 。结合式(9.5-56),可令

$$1 - |p| (1 - \varepsilon) \geq \sigma \quad (9.5-57)$$

即

$$|p| \leq \frac{1 - \sigma}{1 - \varepsilon} \quad (9.5-58)$$

使得当

$$e(t) \geq \frac{a(t)}{\sigma} \quad (9.5-59)$$

时,可保证式(9.5-52)与式(9.5-53)同时成立。也就是说,若取控制律式(9.5-29),则系统的输出误差式(9.5-39)是渐近收敛的。

类似地,当系统输出误差  $e(t) < 0$  时,根据收敛条件式(9.5-46)与式(9.5-47)可知,应当保证

$$e(t+1) - e(t) > 0 \quad (9.5-60)$$

$$e(t+1) + e(t) < 0 \quad (9.5-61)$$

同时成立。将式(9.5-39)代入式(9.5-60)和式(9.5-61)得

$$\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t) - p \frac{h(t)}{h(t)} e(t) - e(t) > 0 \quad (9.5-62)$$

$$\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t) - p \frac{h(t)}{h(t)} e(t) + e(t) < 0 \quad (9.5-63)$$

整理后有

$$e(t) < \frac{\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t)}{1 + p \frac{h(t)}{h(t)}} \quad (9.5-64)$$

$$e(t) < - \frac{\Delta g(t) + \Delta h(t) u'(t)}{1 - p \frac{h(t)}{h(t)}} \quad (9.5-65)$$

同样,当取

$$|p| \leq \frac{1 - \sigma}{1 - \varepsilon} \quad (9.5-66)$$

使得

$$e(t) \leq - \frac{a(t)}{\sigma} \quad (9.5-67)$$

时,可保证式(9.5-64)与式(9.5-65)同时成立。也就是当取控制律式(9.5-29)时,系统输出误差式(9.5-39)仍是渐近收敛的。

从上面的分析可知,当  $t \rightarrow \infty$  时,假设未知系统的最大辨识误差

$$\max |\Delta g(t)| \rightarrow 0, \quad \max |\Delta h(t)| \rightarrow 0 \quad (9.5-68)$$

即  $a(t) \rightarrow 0$ ,根据式(9.5-59)和式(9.5-67)知  $e(t) \rightarrow 0$ ,可调系统处于全局渐近稳定状态。

从理论上讲,使用非线性动态系统的模糊聚类辨识方法,在一定条件下,随着辨识过程的增加,系统的辨识结果能以任意精度逼近真实的非线性系统,即当  $t \rightarrow \infty$  时,系统辨识误差能够趋于零,使得  $a(t) \rightarrow 0$ 。因而在这种意义上来说,这里所设计的可调系统是全局渐近稳定的。

但实际上由于模糊聚类辨识算法的原因,辨识误差只能是趋于零,而不会等于零,即使得  $a(t) \neq 0$ ,导致可调系统不能处于全局渐近稳定状态而处于李雅普诺夫意义上的稳定,即式(9.5-39)所示系统输出误差只能渐近收敛于区间  $(-a(t)/\sigma, a(t)/\sigma)$  的点集。

由式(9.5-54)可知,  $a(t)$  的大小只取决于对可调系统中未知函数  $g(t)$  和  $h(t)$  的辨识精度,因而采用上面所推导出的模糊辨识学习算法,能极大地减小辨识误差,虽不能保证可调系统全局渐近稳定,但可以控制系统跟踪误差的范围  $(-a(t)/\sigma, a(t)/\sigma)$ ,从而使可调系统的输出  $y(t+1)$  能以很高的精度跟踪参考模型的输出  $y_m(t+1)$ 。

由上面的分析讨论可知,系统输出误差的大小仅与未知函数  $g(t)$  和  $h(t)$  的辨识误差有关。因而对系统控制律的设计,实质上是对  $\hat{g}(t)$  和  $\hat{h}(t)$  辨识过程(即可调参数调节律)的设计。

根据式(9.5-12)选取  $\hat{g}(t)$  和  $\hat{h}(t)$  的模糊逻辑系统

$$\hat{g}(t) = \hat{g}(x^t | \theta_g) = \frac{\sum_{j=1}^M A_g^j(t) \exp(-|x^t - cx_g^j|^2 / \delta^2)}{\sum_{j=1}^M B_g^j(t) \exp(-|x^t - cx_g^j|^2 / \delta^2)} \quad (9.5-69)$$

$$\hat{h}(t) = \hat{h}(x^t | \theta_h) = \frac{\sum_{j=1}^M A_h^j(t) \exp(-|x^t - cx_h^j|^2 / \delta^2)}{\sum_{j=1}^M B_h^j(t) \exp(-|x^t - cx_h^j|^2 / \delta^2)} \quad (9.5-70)$$

式中  $\theta_g$  定义为可调参数  $A_g^j$ ,  $B_g^j$  和  $Cx_g^j$  的总和,  $\theta_h$  定义为可调参数  $A_h^j$ ,  $B_h^j$  和  $Cx_h^j$  的总和。

采用所导出的模糊聚类算法式(9.5-8)~式(9.5-11),式(9.5-13)~式(9.5-14)对可调参数  $\theta_g$  和  $\theta_h$  分别进行调节,从而使得  $\hat{g}(t)$  和  $\hat{h}(t)$  在一定条件下能以任意精度收敛于未知非线性函数  $g(t)$  和  $h(t)$ 。

由于模糊聚类算法是以最优模糊逻辑系统为依据而推导出来的,所以在使用这种算法对未知函数进行辨识时,可保证在一定条件下式(9.5-69)和式(9.5-70)能以任意精度收敛于未知函数  $g(t)$  和  $h(t)$ ,使得可调系统输出能以任意精度跟踪参考模型输出。

例题:对于非线性被控系统

$$y(t+1) = g(y(t), y(t-1)) + u(t) \quad (9.5-71)$$

式中未知函数

$$g(y(t), y(t-1)) = \frac{y(t)y(t-1)(y(t)+2.5)}{1+y^2(t)+y^2(t-1)} \quad (9.5-72)$$

控制的目的是基于模糊自适应系统求出控制律  $u(t)$ , 使得可调系统的输出  $y(t+1)$  能跟踪参考模型

$$y_m(t+1) = 0.6y_m(t) + 0.2y_m(t-1) + r(t) \quad (9.5-73)$$

的输出  $y_m(t+1)$ 。

根据前面所讨论的模型参考模糊自适应控制系统设计方法, 设计自适应控制律为

$$u(t) = -\hat{g}(y(t), y(t-1)) + y_m(t+1) + pe(t) \quad (9.5-74)$$

式中  $\hat{g}(\cdot)$  为模糊逻辑系统式(9.5-69)。

将式(9.5-73)代入式(9.5-74)得

$$u(t) = -\hat{g}(y(t), y(t-1)) + 0.6y_m(t) + 0.2y_m(t-1) + r(t) + pe(t) \quad (9.5-75)$$

将式(9.5-75)代入式(9.5-71), 便可用非线性差分方程

$$y(t+1) = g(y(t), y(t-1)) - \hat{g}(y(t), y(t+1)) + 0.6y_m(t) + 0.2y_m(t-1) + r(t) + pe(t) \quad (9.5-76)$$

来描述模型参考模糊自适应控制系统的特性。整个系统的结构如图 9.5-1 所示。

从图 9.5-1 可以看出, 所设计的模糊自适应控制器由两部分组成, 一部分是辨识器, 另一部分是控制器。辨识器采用模糊逻辑系统  $\hat{g}(t)$  为被控系统未知非线性函数  $g(t)$  建模, 然后再将所辨识出的模型  $\hat{g}(t)$  运用于控制器。

根据前面所推导的模糊聚类学习算法, 取  $\delta = 0.3$ ,  $r(t) = \sin(2\pi t/250)$ , 聚类半径  $r = 0.3$ , 辨识从  $t = 1$  开始进行, 图 9.5-2, 图 9.5-3 分别为辨识学习过程终止于  $t = 500$  时, 可调系统输出与参考模型输出曲线以及系统输出误差曲线。

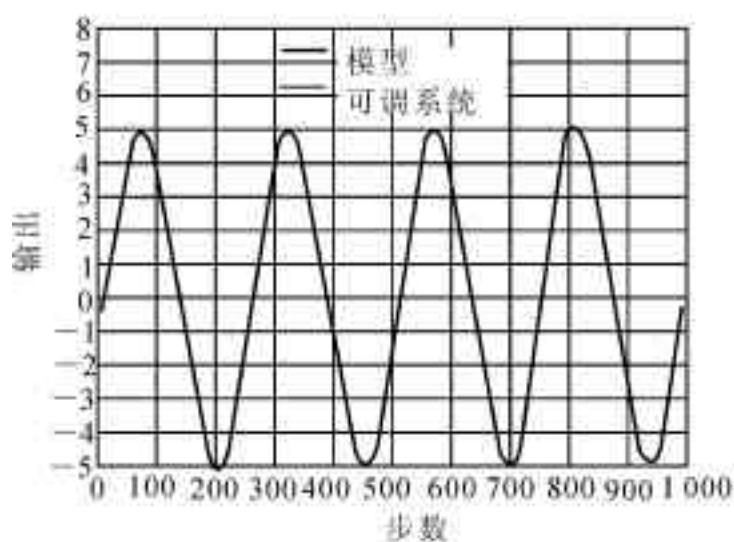


图 9.5-2 系统输出与参考模型输出曲线

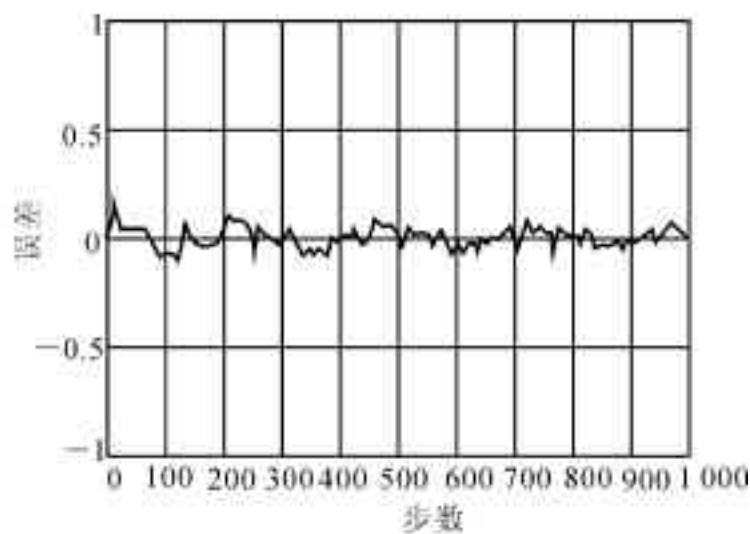


图 9.5-3 系统输出误差曲线

从图中的曲线可以看出, 辨识器采用模糊聚类算法能使可调系统输出较好地跟踪参考模型输出, 即系统的自适应控制效果相当理想。此外, 通过大量的计算还可知道, 适当地增加辨识学习过程, 系统的自适应控制性能可以得到进一步改善。



## 参 考 文 献

- 1 Wang L X . Adaptive Fuzzy Systems and Control, PRT Prentice Hall, 1994
- 2 Wang L X . Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems, Proc . 31st IEEE Conf . on Decision and Control . Tucson, 1992
- 3 贺剑锋,陈晖,黄石生 . 模糊控制的新进展 . 控制理论及应用,1994,11(2)
- 4 樊战旗 . 模糊自适应理论在航空发动机控制中的应用:[学位论文]. 西安:西北工业大学,1996
- 5 李学锋 . 自适应模糊控制理论与应用研究:[学位论文]. 西安:西北工业大学,1996
- 6 陈建勤,吕剑虹,陈来九 . 模糊控制系统的闭环模型及稳定性分析 . 自动化学报,1994,20(1):1 ~ 9
- 7 李清泉编著 . 自适应控制系统理论、设计与应用 . 北京:科学出版社,1990
- 8 李友善,李军编著 . 模糊控制理论及其在过程控制中的应用 . 北京:国防工业出版社 . 1993
- 9 李士勇编著 . 模糊控制 . 神经控制和智能控制论 . 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1996
- 10 赵振宇,徐用懋著 . 模糊理论和神经网络的基础与应用 . 清华大学出版社与广西科学技术出版社联合出版,1996
- 11 李宝绶,刘志俊 . 用模糊集合理论测辨系统的模型 . 信息与控制,1980(3)
- 12 徐征明,扬振野 . 基于模糊模型设计自校正调节器的研究 . 自动化学报,1987,13(3)

# 第十章 自适应控制的应用

## § 10.1 战术导弹的自校正控制

战术导弹在整个飞行过程中,由于飞行速度和高度的变化,使弹体参数剧烈变化,严重地影响了控制性能。当用经典控制理论设计自动驾驶仪时,一般采用舵回路、阻尼回路和加速度回路来减弱参数变化对系统的影响,但用这种方法不能完全消除参数变化对系统的影响。为了进一步提高导弹的控制性能,有必要采用自适应控制。

自校正控制是自适应控制的一种,它适用于结构已知,但参数未知而恒定或参数缓慢变化的系统。采用自校正控制需要辨识被控系统的参数,并自动校正控制作用,达到预期的控制效果。用自校正控制技术设计自动驾驶仪,能够使被控系统适应参数变化,保持较好的性能。

### 1. 对象模型

本节所讨论的被控对象为战术导弹的自动驾驶仪回路,其典型方块图如图 10.1-1 所示。对图 10.1-1 进行化简,可得图 10.1-2。

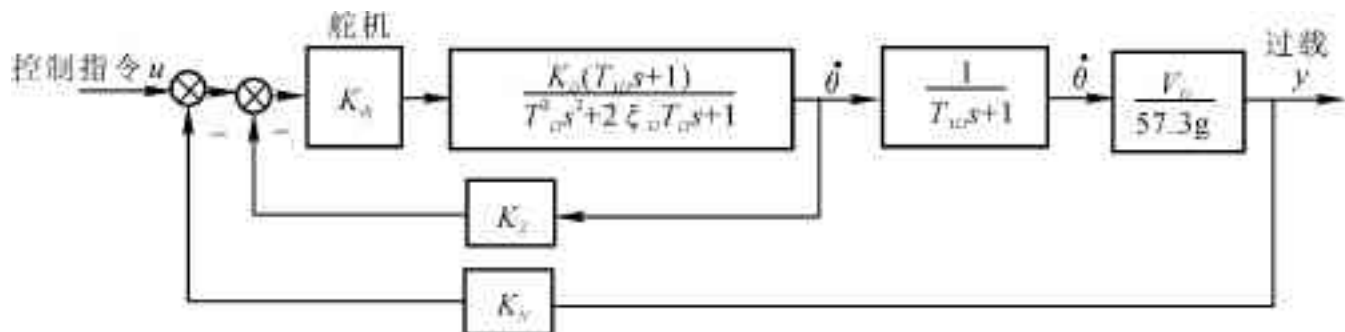


图 10.1-1 自动驾驶仪典型方块图

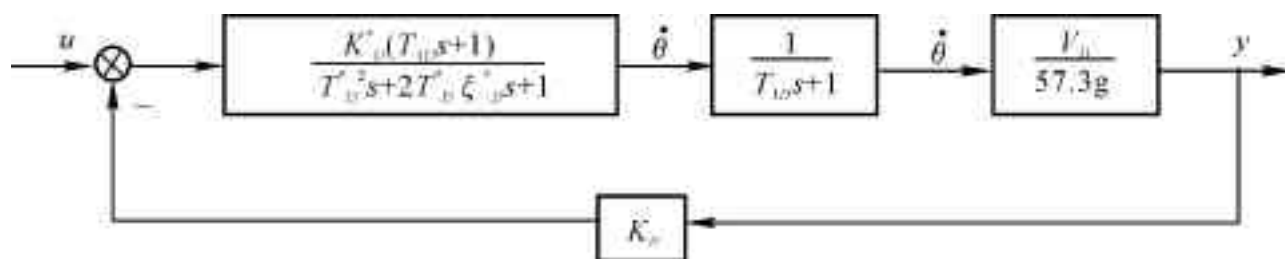


图 10.1-2 自动驾驶仪回路简化方块图

阻尼回路传递函数为

$$\Phi_b(s) = \frac{K_D^* (T_{1D}s + 1)}{T_D^{*2} s^2 + 2 T_D^* \xi_D^* s + 1} \quad (10.1-1)$$

式中

$$K_D^* = \frac{K_{dj} K_D}{1 + K_{dj} K_D K_Z} \tag{10.1-2a}$$

$$T_D^* = \frac{T_D}{\sqrt{1 + K_{dj} K_D K_Z}} \tag{10.1-2b}$$

$$\xi_D^* = \frac{\xi_D + \frac{K_D K_{dj} K_Z T_{1D}}{2 T_D}}{\sqrt{1 + K_{dj} K_D K_Z}} \tag{10.1-2c}$$

加速度回路传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 2 T_1 \xi_1 s + 1} \tag{10.1-3}$$

式中

$$K_1 = \frac{K_D^* V_D}{57.3 g + K_D^* V_D K_N} \tag{10.1-4a}$$

$$T_1 = \frac{T_D^*}{\sqrt{1 + \frac{K_N K_D^* V_D}{57.3 g}}} \tag{10.1-4b}$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_D^*}{\sqrt{1 + \frac{K_N K_D^* V_D}{57.3 g}}} \tag{10.1-4c}$$

表 10.1-1 给出了一条弹道上的导弹自动驾驶仪参数。

表 10.1-1 导弹自动驾驶仪弹道参数

$t/s$	6	14	22	30	38	44.924
$V_D$	547.67	600.67	682.29	804.08	978.81	1163.3
$K_D$	0.503	0.415	0.3118	0.2102	0.1239	0.0695
$T_D$	0.0844	0.0906	0.1014	0.1294	0.189	0.290
$\xi_D$	0.126	0.1077	0.0868	0.0672	0.0471	0.0333
$T_{1D}$	1.00	1.16	1.45	2.15	3.95	7.57
$K_{dj}$	12.32	12.20	12.104	12.16	12.784	13.12
$K_D^*$	4.785	4.079	3.199	2.278	1.475	0.875
$T_D^*$	0.0741	0.0813	0.0933	0.1221	0.183	0.284
$\xi_D^*$	1.645	1.481	1.262	1.0178	0.810	0.588
$K_1$	1.130	1.112	1.078	1.024	0.944	0.818
$T_1$	0.0364	0.0410	0.0491	0.068	0.1109	0.190
$\xi_1$	0.807	0.747	0.664	0.5699	0.490	0.395

对  $G(s)$  进行带零阶保持器的  $Z$  变换(见图 10.1-3) 得

$$G(q^{-1}) = Z[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s)] = \frac{\bar{q}^{-1} (b + b \bar{q}^{-1})}{1 + a \bar{q}^{-1} + a \bar{q}^{-2}} \tag{10.1-5}$$

式中  $T$  为采样周期,

$$a_1 = -2e^{-\sigma T} \cos \omega T, \quad a_2 = e^{-2\sigma T} \quad (10.1-6a)$$

$$b = K_1 [1 - e^{-\sigma T} (\cos \omega T + r \sin \omega T)] \quad (10.1-6b)$$

$$b = K_1 e^{-\sigma T} (e^{-\sigma T} + r \sin \omega T - \cos \omega T) \quad (10.1-6c)$$

$$\sigma = \xi / T_1, \quad \omega = \sqrt{1 - \xi^2} / T_1, \quad r = \xi / \sqrt{1 - \xi^2} \quad (10.1-6d)$$

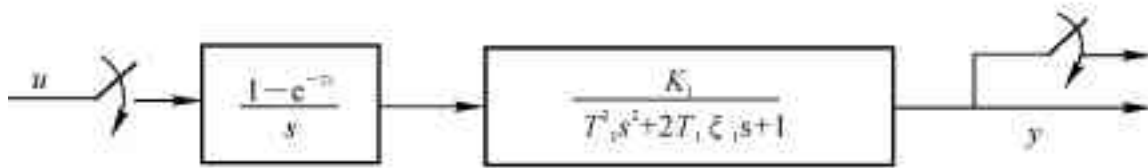


图 10.1-3 带零阶保持器的采样系统

如考虑被控系统所受到的噪声干扰,则其离散数学模型为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (10.1-7)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} \quad (10.1-8a)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} \quad (10.1-8b)$$

$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} \quad (10.1-8c)$$

式中  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  的系数  $a_1, a_2, b_0, b_1$  随时间变化,  $C(q^{-1})$  的系数  $c_0, c_1, c_2$  则取决于噪声特性,在导弹自动驾驶仪自校正控制系统的实时控制中,这些都是需要辨识的参数。

## 2. 自校正控制方案

设被控对象的差分方程为

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (10.1-9)$$

式中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n} \quad (10.1-10a)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_m q^{-m} \quad (10.1-10b)$$

$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_l q^{-l} \quad (10.1-10c)$$

$d$  为输出延迟。

研究中采用了最小方差自校正、极点配置自校正和渐近最小方差自校正三种方案。

(1) 最小方差自校正控制器 最小方差自校正控制器要求系统的输出  $y(t)$  在噪声干扰和参数变化的情况下,能很好地跟踪参考输入  $y_r(t)$ 。

采用最小方差准则,并考虑对控制信号  $u(t)$  加以限制,可得到最小方差自校正控制器的性能指标

$$J = E \{ [y(t+d) - K'y_r(t)]^2 + \lambda u^2(t) \} \quad (10.1-11)$$

式中  $K'$  为比例系数,  $\lambda$  为控制加权系数。

由最小方差控制理论,可得最小方差自校正控制器的控制规律

$$u(t) = \frac{K'b_0 C(q^{-1})y_r(t) - b_0 G(q^{-1})y(t)}{b_0 B(q^{-1})F(q^{-1}) + \lambda C(q^{-1})} \quad (10.1-12)$$

式中

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})F(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1}) \quad (10.1-13)$$

$$F(\bar{q}^{-1}) = f_0 + f_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + f_{d-1} \bar{q}^{-(d-1)} \quad (10.1-14a)$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + g_{n-1} \bar{q}^{-(n-1)} \quad (10.1-14b)$$

(2) 极点配置自校正控制器——辅助输出法 极点配置自校正控制不用指标函数,而将预期的闭环系统特性用一组希望的极点位置加以规定。自校正控制的目的是使实际闭环系统的极点收敛于希望的极点,而辅助输出法则是用极点配置的方法来实现具有二次型性能指标的一种自校正控制技术。

设  $C(\bar{q}^{-1})$  稳定,  $\{\varepsilon(t)\}$  是均值为零的不相关随机序列,则使指标函数

$$J = E \{ [\Gamma(\bar{q}^{-1}) y(t+d) - \Psi(\bar{q}^{-1}) y_r(t)]^2 + [\Lambda(\bar{q}^{-1}) u(t)]^2 \} \quad (10.1-15)$$

达到极小的自校正控制规律为

$$u(t) = \frac{H(\bar{q}^{-1}) y_r(t) - G(\bar{q}^{-1}) y(t)}{F(\bar{q}^{-1})} \quad (10.1-16)$$

式中

$$H(\bar{q}^{-1}) = C(\bar{q}^{-1}) \Psi(\bar{q}^{-1}) \quad (10.1-17a)$$

$$F(\bar{q}^{-1}) = F_d(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) + \Lambda(\bar{q}^{-1}) C(\bar{q}^{-1}) \quad (10.1-17b)$$

$$\Gamma(\bar{q}^{-1}) C(\bar{q}^{-1}) = A(\bar{q}^{-1}) F_d(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-d} G(\bar{q}^{-1}) \quad (10.1-17c)$$

此时,闭环系统方程为

$$y(t) = \frac{\bar{q}^{-d} B(\bar{q}^{-1}) \Psi(\bar{q}^{-1})}{\Lambda(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) + \Gamma(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1})} y_r(t) + \frac{F(\bar{q}^{-1})}{\Lambda(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) + \Gamma(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1})} \varepsilon(t) \quad (10.1-18)$$

采用极点配置,就是对事先规定的一个期望极点多项式  $T(\bar{q}^{-1})$  求出多项式  $\Lambda(\bar{q}^{-1})$  和  $\Gamma(\bar{q}^{-1})$ ,从而实现对于被控系统式(10.1-9)的控制规律式(10.1-16),使闭环极点移到由多项式  $T(\bar{q}^{-1})$  的零点所规定的位置,即满足方程

$$\Lambda(\bar{q}^{-1}) A(\bar{q}^{-1}) + \Gamma(\bar{q}^{-1}) B(\bar{q}^{-1}) = T(\bar{q}^{-1}) \quad (10.1-19)$$

式中  $T(\bar{q}^{-1})$  为首一多项式。

为了由式(10.1-19)得到惟一的  $\Lambda(\bar{q}^{-1})$  和  $\Gamma(\bar{q}^{-1})$ ,对各多项式的阶次作如下约束:

$$\deg \Lambda(\bar{q}^{-1}) = \deg B(\bar{q}^{-1}) - 1 \quad (10.1-20a)$$

$$\deg \Gamma(\bar{q}^{-1}) = \deg A(\bar{q}^{-1}) - 1 \quad (10.1-20b)$$

$$\deg T(\bar{q}^{-1}) \leq \deg A(\bar{q}^{-1}) + \deg B(\bar{q}^{-1}) - 1 \quad (10.1-20c)$$

$$\deg G(\bar{q}^{-1}) = \deg A(\bar{q}^{-1}) - 1, \quad \deg F_d(\bar{q}^{-1}) = d - 1 \quad (10.1-20d)$$

利用式(10.1-19),则式(10.1-18)可以表示为

$$y(t) = \frac{\bar{q}^{-d} B(\bar{q}^{-1}) \Psi(\bar{q}^{-1})}{T(\bar{q}^{-1})} y_r(t) + \frac{F(\bar{q}^{-1})}{T(\bar{q}^{-1})} \varepsilon(t) \quad (10.1-21)$$

这样就达到了极点配置的目的。

(3) 渐近最小方差自校正控制器 这种方法是通过设计自校正控制器的极点和可调增益使控制器稳定,并能兼顾闭环系统的动态特性,也可使输出方差趋于最小,具有在线校正控制器参数的优点。这种方法并非某一确定指标下的最优解,但设计的灵活性能使系统具有良好的综合性能。

对于被控制系统的差分方程式(10.1-9)来讨论跟踪问题  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_r(t)$ 。设控制器形式为

$$u(t) = \frac{Hy_r(t) - KQ(q^{-1})y(t)}{T_n(q^{-1})} \quad (10.1-22)$$

式中  $T_n(q^{-1})$  和  $Q(q^{-1})$  为  $q^{-1}$  的实系数多项式,  $H$  和  $K$  为可调增益。将式(10.1-22)代入式(10.1-9),经整理可得

$$A_n(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})Hy_r(t) + T_n(q^{-1})\varepsilon(t) \quad (10.1-23)$$

式中

$$A_n(q^{-1}) = A(q^{-1})T_n(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})KQ(q^{-1}) \quad (10.1-24)$$

为闭环系统的特征多项式。

由式(10.1-24)可知,设计  $T_n(q^{-1})$  和  $Q(q^{-1})$  可以任意配置闭环系统的极点,但同时要求  $T_n(q^{-1})$  稳定。

考虑到闭环系统的可辨识条件,令

$$T_n(q^{-1}) = 1 + t_1'q^{-1} + \cdots + t_{n+d-1}'q^{-(n+d-1)} \quad (10.1-25a)$$

$$Q(q^{-1}) = q + q_1q^{-1} + \cdots + q_\mu q^{-\mu}, \quad \mu \geq n-1 \quad (10.1-25b)$$

下面讨论三种特殊情况:

(i) 由式(10.1-12)知最小方差自校正控制器为

$$(10.1-26)$$

式中

$$C(q^{-1}) = K'b_0C(q^{-1}), \quad G(q^{-1}) = b_0G(q^{-1}) \quad (10.1-27a)$$

$$F(q^{-1}) = b_0B(q^{-1})F(q^{-1}) + \lambda C(q^{-1}) \quad (10.1-27b)$$

若使控制器式(10.1-22)在稳定时趋于最小方差控制器式(10.1-26),则应有

$$H = \frac{C(1)T_n(1)}{F(1)}, \quad K = \frac{T_n(1)G(1)}{Q(1)F(1)} \quad (10.1-28)$$

(ii) 若令  $Q(q^{-1}) = G(q^{-1})$ ,则式(10.1-22)变为

$$u(t) = \frac{Hy_r(t) - K(q^{-1})y(t)}{T_n(q^{-1})} \quad (10.1-29)$$

当式(10.1-29)具有渐近最小方差特性时,应有

$$H = \frac{C(1)T_n(1)}{F(1)}, \quad K = \frac{T_n(1)}{F(1)} \quad (10.1-30)$$

(iii) 若  $A(q^{-1})$  稳定,则可令  $Q(q^{-1}) = A(q^{-1})$ ,式(10.1-22)变为

$$u(t) = \frac{Hy_r(t) - KA(q^{-1})y(t)}{T_n(q^{-1})} \quad (10.1-31)$$

若

$$H = \frac{(1)T_n(1)}{F(1)}, \quad K = \frac{T_n(1)G(1)}{A(1)F(1)} \quad (10.1-32)$$

则式(10.1-31)具有渐近最小方差特性。

### 3. 参数辨识方法

为了实现自校正控制,必须选用一种合适的在线辨识方法来估计对象的参数。可用的在线辨识方法很多,每种方法都各有其特点,当与自校正控制相结合时,就存在一个适用性问题。所谓适用性是指辨识精度、收敛速度、运算量、内存占用量及结合自校正控制后的效果等能否满

足工程技术要求。本节研究中所选用的在线辨识方法有：

(1) 带遗忘因子的递推最小二乘法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(t+1) = & \boldsymbol{\theta}(t) + r(t+1) P(t) Z(t+1) \times \\ & [y(t+1) - Z^T(t+1) \boldsymbol{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (10.1-33a)$$

$$P(t+1) = \frac{1}{\lambda_t} [P(t) - r(t+1) P(t) Z(t+1) Z^T(t+1) P(t)] \quad (10.1-33b)$$

$$r(t+1) = 1 / [\lambda_t + Z^T(t+1) P(t) Z(t+1)] \quad (10.1-33c)$$

式中  $\boldsymbol{\theta}(t)$  为参数向量估值,  $P(t)$  为估计误差方差阵,  $\lambda_t$  为实时估计遗忘因子,  $Z(t)$  为观测向量,  $y(t)$  为被估系统输出。以下各估计方法中的符号意义相同, 不再加以说明。

(2) 平方根法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(t+1) = & \boldsymbol{\theta}(t) + r(t+1) s(t) s^T(t) Z(t+1) \times \\ & [y(t+1) - Z^T(t+1) \boldsymbol{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (10.1-34a)$$

$$r(t+1) = 1 / [\lambda_t + Z^T(t+1) s(t) s^T(t) Z(t+1)] \quad (10.1-34b)$$

$$\alpha(t+1) = 1 / \sqrt{1 \pm r(t+1)} \quad (10.1-34c)$$

$$\begin{aligned} s(t+1) = & \frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} s(t) [I - \alpha(t+1) r(t+1) s^T(t) Z(t+1) Z^T(t+1) s(t)] \\ & (10.1-34d) \end{aligned}$$

(3) 卡尔曼滤波法

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}(t+1) = & \boldsymbol{\theta}(t) + r(t+1) P(t) Z(t+1) \times \\ & [y(t+1) - Z^T(t+1) \boldsymbol{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (10.1-35a)$$

$$P(t+1) = P(t) - r(t+1) P(t) Z(t+1) Z^T(t+1) P(t) + R_1(t+1) \quad (10.1-35b)$$

$$r(t+1) = 1 / [1 + Z^T(t+1) P(t) Z(t+1)] \quad (10.1-35c)$$

式中  $R_1(t) = E[\varepsilon(t) \varepsilon^T(t)]$ 。

(4) 随机逼近法

$$\boldsymbol{\theta}(t+1) = \boldsymbol{\theta}(t) + r_t Z(t+1) [y(t+1) - Z^T(t+1) \boldsymbol{\theta}(t)] \quad (10.1-36a)$$

$\{r_t\}$  是一事先给定的序列, 且满足

$$\sum_{t=1}^{\infty} r_t = \infty, \quad \sum_{t=1}^{\infty} r_t^P < \infty, \quad " P > 1 \quad (10.1-36b)$$

(5) 递推极大似然法

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}(t-1) - R^{-1}(t | *, \lambda_t) U(t | t-1) e(t | t-1) \quad (10.1-37a)$$

$$\begin{aligned} R^{-1}(t | *, \lambda_t) = & R^{-1}(t | *, \lambda_t) [I - W(t | t-1) e(t | t-1) R^{-1}(t | *, \lambda_t)] \\ & (10.1-37b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{-1}(t | *, \lambda_t) = & \frac{1}{\lambda_t} R^{-1}(t-1 | *, \lambda_t) - \\ & \frac{R^{-1}(t-1 | *, \lambda_t) U(t | t-1) R^{-1}(t-1 | *, \lambda_t)}{\lambda_t + U^T(t | t-1) R^{-1}(t-1 | *, \lambda_t) U(t | t-1)} \end{aligned} \quad (10.1-37c)$$

式中

$$U(t | t-1) = \frac{e(t | t-1)}{\boldsymbol{\theta}^T(t-1)}, \quad W(t | t-1) = \frac{e(t | t-1)}{\boldsymbol{\theta}^2(t-1)} \quad (10.1-37d)$$

$e(t | t-1)$  为根据  $\boldsymbol{\theta}(t-1)$  计算出的预测误差。

将以上各种在线辨识方法结合本节中的对象模型和最小方差自校正控制进行计算, 计算结果表明, 递推最小二乘法对时变参数具有较强的跟踪能力, 且有一定的抗干扰性。平方根法目的是为了克服因计算舍入误差等因素而引起的估计发散, 其基本思想与递推最小二乘法相似, 当计算设备条件较好时, 其计算结果与递推最小二乘法相同, 但计算量较大。卡尔曼滤波法的辨识精度与递推最小二乘法相近, 但从控制效果上看, 却比递推最小二乘法差。采用递推最小二乘法时, 自校正自动驾驶仪系统对方波信号的跟踪曲线较为平滑, 而采用卡尔曼滤波法时则系统跟踪曲线振荡较严重。随机逼近法虽然具有计算简单、占用内存少等优点, 但由于它把递推最小二乘法中的增益项  $r(t+1)P(t)$  不进行递推, 而用一事先选定的序列来代替, 因而不适于辨识时变参数。极大似然法具有可处理有色噪声的优点, 但计算量大、占用内存多, 若进行简化处理, 则与最小二乘法基本相似。就本节中所采用的五种辨识方法来看, 带遗忘因子的递推最小二乘法比较适合于本节中的自校正控制系统。

#### 4. 自校正自动驾驶仪数字仿真

对于战术导弹自动驾驶仪的数学模型式(10.1-7)和式(10.1-8)来说,  $d=1, n=2, m=1$ , 可得三种自校正方案的具体控制规律:

##### (1) 最小方差自校正控制

假定系统的噪声为白噪声序列, 即  $C(q^{-1}) = 1$ , 则导弹自校正自动驾驶仪的控制规律为

$$u(t) = \frac{K' y_r(t) + a_1 y(t) + a_2 y(t-1) - b u(t-1)}{b + \frac{\lambda}{b_0}} \quad (10.1-38)$$

需辨识的参数为  $\theta^T = [a_1 \quad a_2 \quad b \quad b_0]$ 。

当系统噪声为有色噪声时, 若假定  $C(q^{-1}) = \alpha + a q^{-1}$ , 则

$$u(t) = \frac{K' c_0 y_r(t) + K' c_1 y_r(t-1) - (\alpha - a_1 \alpha) y(t)}{b \alpha + \frac{\lambda c_0^2}{b}} + \frac{a_2 \alpha y(t-1) - (\alpha b + \frac{\lambda c_0 a}{b}) u(t-1)}{b \alpha + \frac{\lambda c_0^2}{b}} \quad (10.1-39)$$

需辨识的参数为  $\theta^T = [a_1 \quad a_2 \quad b \quad b_0 \quad \alpha \quad a]$ 。

从式(10.1-38)和式(10.1-39)可以看到, 自校正控制信号  $u(t)$  是输出  $y(t)$  和参考信号  $y_r(t)$  的函数。 $u(t)$  与指标函数式(10.1-11)中的系数  $K'$  和  $\lambda$  有关。在指标函数式(10.1-11)中, 引入  $\lambda u^2(t)$  项是为了限制  $u(t)$  不要太大。 $u(t)$  的大小与  $\lambda$  有很大关系, 当  $\lambda$  大时,  $u(t)$  比较小, 反之  $u(t)$  比较大。系统的稳态误差与  $K'$  有关, 系统的快速性与  $K'$  和  $\lambda$  有关。因此, 应按对系统过渡过程、跟踪精度、稳态误差及控制信号幅值等要求, 合理选择  $K'$  和  $\lambda$ 。

##### (2) 极点配置自校正控制 —— 辅助输出法

假定系统的噪声为白噪声序列, 即  $C(q^{-1}) = 1$ , 则

$$u(t) = \frac{y_r(t) + n y_r(t-1) + (a - n) y(t) + a y(t-1) - b u(t-1)}{b + \lambda_0} \quad (10.1-40)$$



$$\lambda_0 = \frac{b_0^2 t_1 + b_1^2 - b_0 b_1 t_1}{a_0 b_0 + b_1 t_1 - (b_0 t_1 + a_1 b_1)} \quad (10.1-41a)$$

$$n = \frac{b_0 t_2 + b_1 t_1 a_2 - (a_0 b_0 + a_1 b_1 t_1)}{a_0 b_0 + b_1 t_1 - (b_0 t_1 + a_1 b_1)} \quad (10.1-41b)$$

需辨识的参数  $\theta^T = [a_1 \quad a_0 \quad b_1 \quad b_0]$ ,  $t_1, t_2$  为系统所期望的闭环多项式  $T(z^{-1})$  的系数。 $t_1, t_2$  需要根据系统的稳定性、超调量、振荡次数、过渡过程时间和通频带等性能指标的要求来选取。

### (3) 渐近最小方差自校正控制

设系统噪声为白噪声序列,  $C(q^{-1}) = 1$ , 并选取  $Q(q^{-1}) = G(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1}$ , 则

$$u(t) = K[K'y_r(t) + a_1 y(t) + a_0 y(t-1)] - t_1 u(t-1) - t_2 u(t-2) \quad (10.1-42)$$

式中

$$K = \frac{1 + t_1' + t_2'}{b_0 + b_1 + \frac{\lambda}{b_0}} \quad (10.1-43)$$

需要辨识的参数  $\theta^T = [a_1 \quad a_0 \quad b_1 \quad b_0]$ ,  $K'$  和  $\lambda$  的选择原则与最小方差自校正控制相同, 应考虑过渡过程特征、稳定性及跟踪误差等因素。 $t_1', t_2'$  为控制器多项式  $T_n(q^{-1})$  的系数, 选择时要保证控制器稳定。

对上述三种自校正控制方案进行数字仿真, 所采用的参数辨识方法是带遗忘因子的递推最小二乘法。假定系统噪声干扰是均值为零、方差  $\sigma_1^2 = 0.1$  的白噪声序列, 参数估计中选取遗忘因子  $\lambda = 0.985$ , 初值  $P_0 = 10^4 I_4$ ,  $\theta^T = [-1 \quad 0.5 \quad 0.1 \quad 0.1]$ 。仿真时间为  $6 \sim 28$  s, 取采样周期  $T = 0.01$  s, 利用式(10.1-6) 计算得到的弹道特征点处的参数  $a_1, a_0, b_1, b_0$  作为系统的真实参数, 利用式(10.1-7) 求得相应的  $y(t)$  值并附加上白噪声作为输出  $y(t)$  的测量值。在弹道特征点之间的  $a_1, a_0, b_1, b_0$  参数值则利用线性插值方法得到。仿真中取控制加权系数  $\lambda = 0.01$ , 极点配置自校正控制系统的期望闭环极点多项式系数  $t_1 = -1, t_2 = 0.29$ , 渐近最小方差自校正控制器多项式系数  $t_1' = -1, t_2' = 0.25$ 。参考输入信号分别采用周期为 4 s、幅值为 1.0 的方波信号和随机误差信号。

当参考输入为方波信号时, 系统在经典控制作用下的输出如图 10.1-4 所示, 采用最小方差和极点配置两种不同自校正控制时的系统输出分别如图 10.1-5 和图 10.1-6 所示。

当参考输入为随机信号时, 系统在经典控制作用下的输出如图 10.1-7 所示, 采用最小方差、极点配置和渐近最小方差三种不同自校正控制时的系统输出分别如图 10.1-8, 图 10.1-9 和图 10.1-10 所示。

比较图 10.1-4 和图 10.1-5, 图 10.1-6 及图 10.1-7 和图 10.1-8, 图 10.1-9, 图 10.1-10, 可以看到, 加入自校正控制以后, 系统对干扰的抑制作用明显加强, 跟踪输入信号的能力有较大提高, 快速性能也有改善。

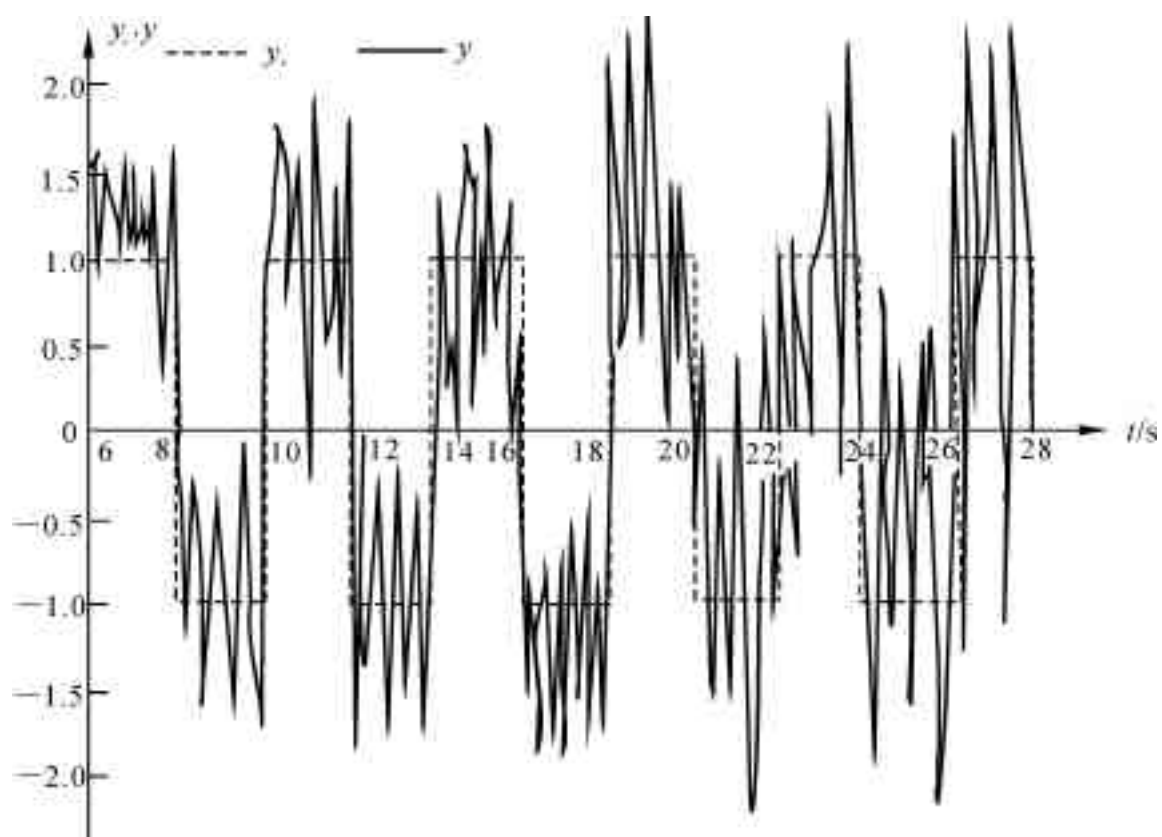


图 10.1-4 系统在经典控制作用下的输出(参考输入为方波)

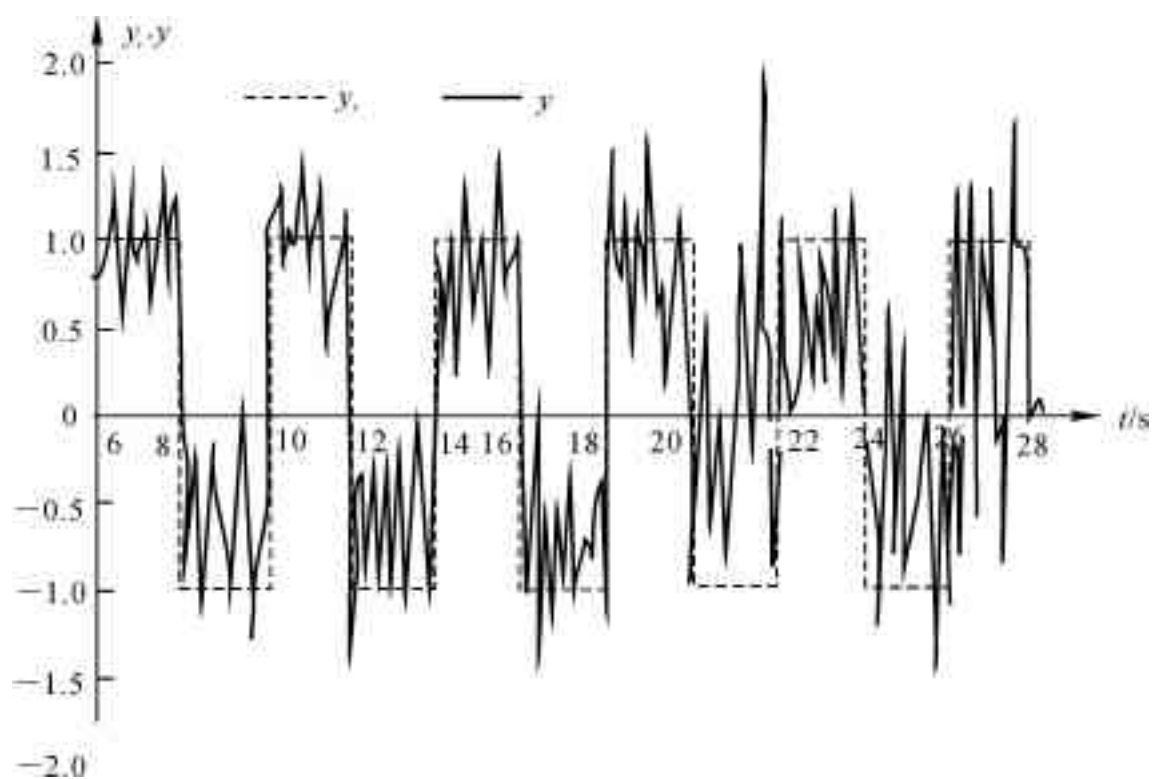


图 10.1-5 最小方差自校正控制系统输出(参考输入为方波)

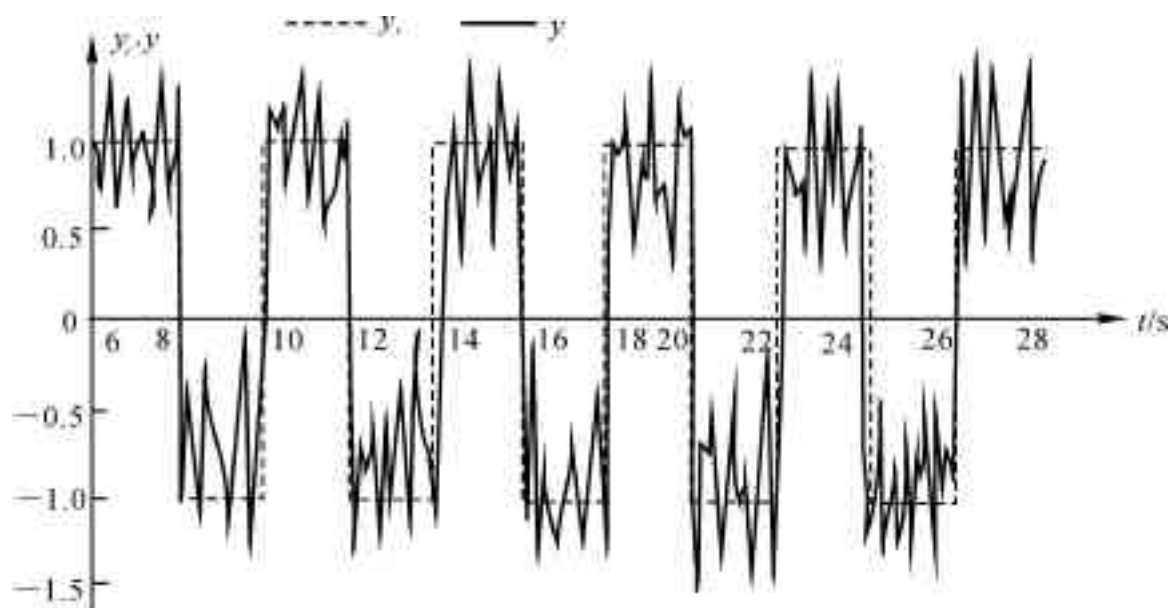
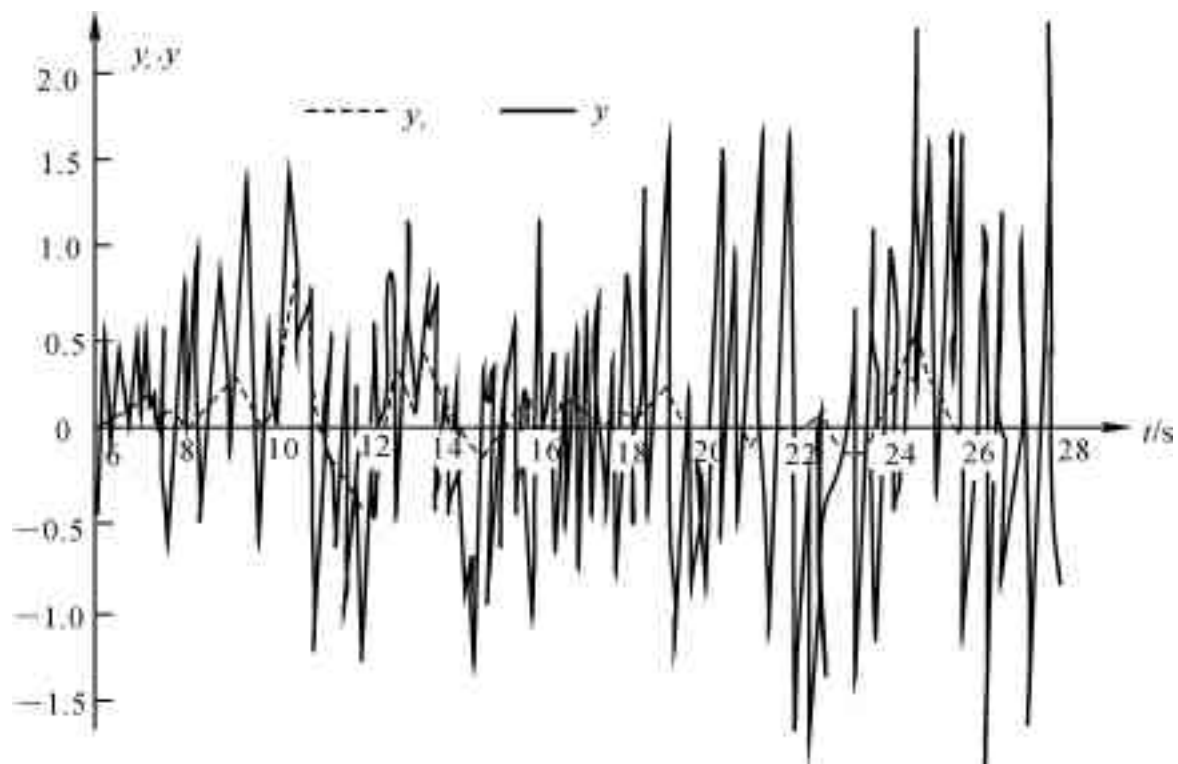


图 10.1-6 极点配置自校正控制系统输出(参考输入为方波)



10.1-7 系统在经典控制作用下的输出(参考输入为随机误差信号)

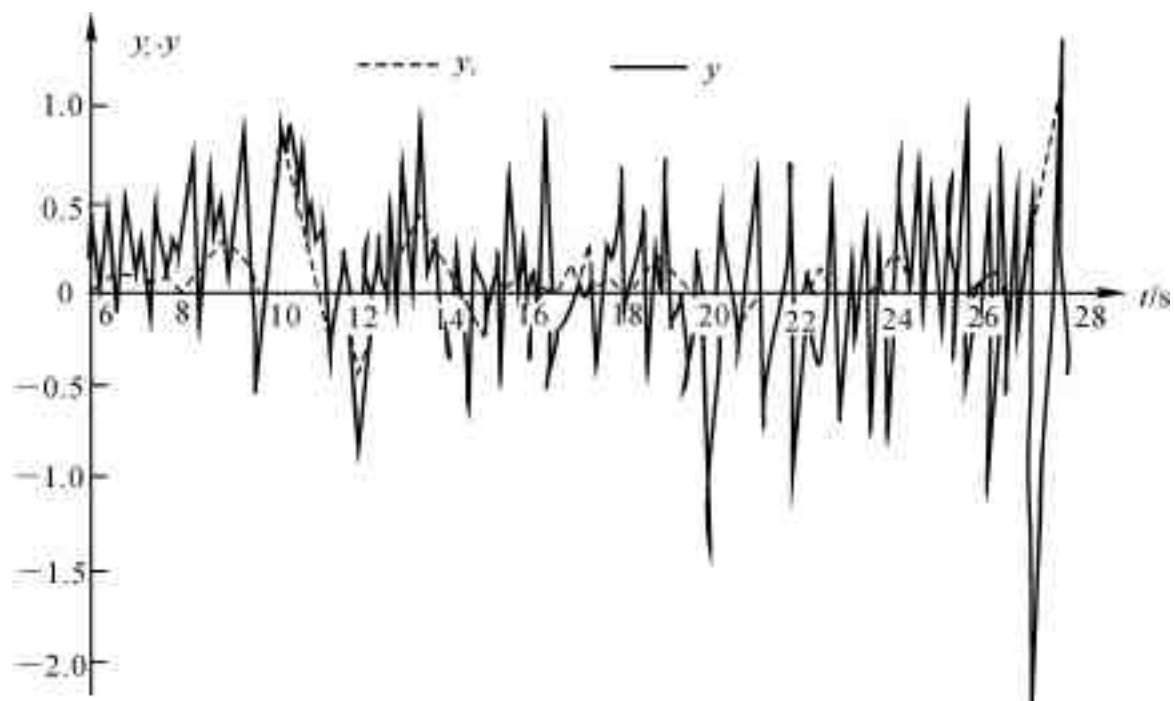
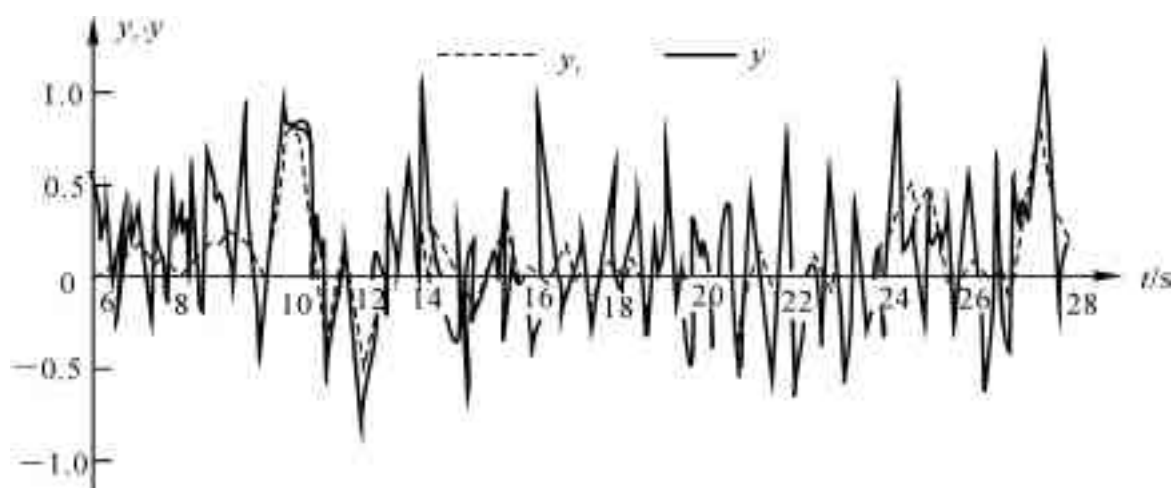
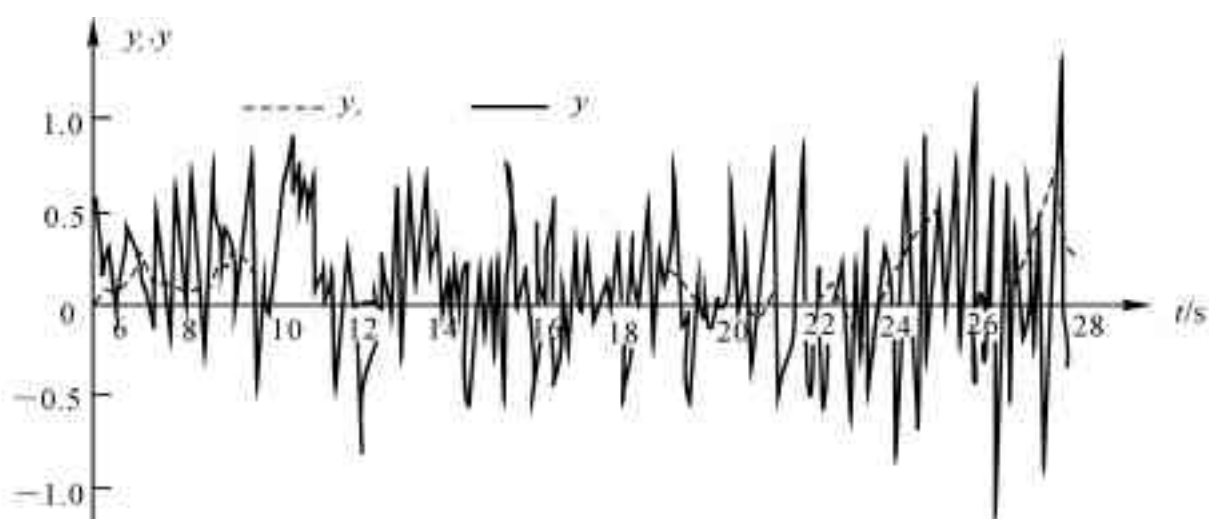


图 10.1-8 最小方差自校正控制系统输出(参考输入为随机误差信号)



10.1-9 极点配置自校正控制系统输出(参考输入为随机误差信号)



10.1-10 渐近最小方差自校正控制系统输出(参考输入为随机误差信号)

## § 10.2 具有多输入和扰动作用的空—空导弹滚动通道的前馈/反馈自适应控制器

中程空—空导弹滚动回路的任务,一方面要求滚动角  $\gamma$  按线性比例关系响应装定信号  $U_k$ ,一方面要求抗干扰性能良好,即在等效干扰舵偏角  $\delta_r$  作用下滚动角应尽可能小。从回路设计的角度来说,该回路相当于一个双输入系统,对不同输入有不同要求。由于作战空域宽,弹体参数变化范围很大,经典自动驾驶仪回路不能满足多方面的要求。经多种方案的对比研究,采用本节所述的模型参考自适应控制方案,既能精确跟踪装定信号,又能很好地抑制干扰的影响,具有比经典自动驾驶仪系统明显优良的性能。

本方案选取了三组自适应参数,第一组主要消除输入信号  $U_k$  幅值变化对系统性能的影响,第二组主要消除弹体参数变化对系统性能的影响,第三组主要消除气动干扰等效舵偏角对系统性能的影响。本方案在结构上的特点是:(i) 保留了部分经典校正网络,但其参数不必换挡,且省掉了积分保持电路;(ii) 自适应控制器的算法简单可行,便于工程实现。

### 1. 原经典回路性能简介

为了保证载机的安全,在刚发射后的归零段(0— $t_1$ ) s,不希望导弹有很强的抗干扰能力,此时的校正网络 1 使整个回路呈弱阻尼状态。当受到大的干扰时, $\gamma$ 角有很大的偏差,对于我们所研究的这种中程空—空导弹,中低空时  $\Delta r_{r1}$  约  $12^\circ$ ,高空约  $27^\circ$ ,此时转过的  $\gamma$ 角用积分保持电路记忆下来。在主动段( $t_1 - t_2$ ) s,装定电压  $U_0$  和积分保持电压  $U_{1F}$  同时起作用,改用校正网络 2,整个回路的稳定和控制性能变好。由于高度和速度的变化,弹体环节放大系数的变化约 10 倍,时间常数变化约 22 倍,因而采用了比较麻烦的参数换档办法,但性能仍不能令人满意,中低空时  $\Delta r_{r2}$  约  $8^\circ$ ,高空时约  $12^\circ$ 。在被动段( $t_2 - t_3$ ) s,此时装定电压已完成任务,横滚系统只起稳定作用,由于只有角速度反馈,所以中低空时  $\Delta r_{r3}$  仍较大,在  $10^\circ$  左右,高空时在  $16^\circ$  左右。上述数据说明,经典自动驾驶仪回路抗干扰性能差,非常需要引入自适应控制器。

## 2. 自适应控制规律推导

在推导自适应控制规律时将经典校正网络简化为  $K_v$ ,将舵机简化为  $K_c$ ,保留速率陀螺反馈  $K_{oc}$ ,推导自适应控制规律时所采用的结构图如图 10.2-1 所示。

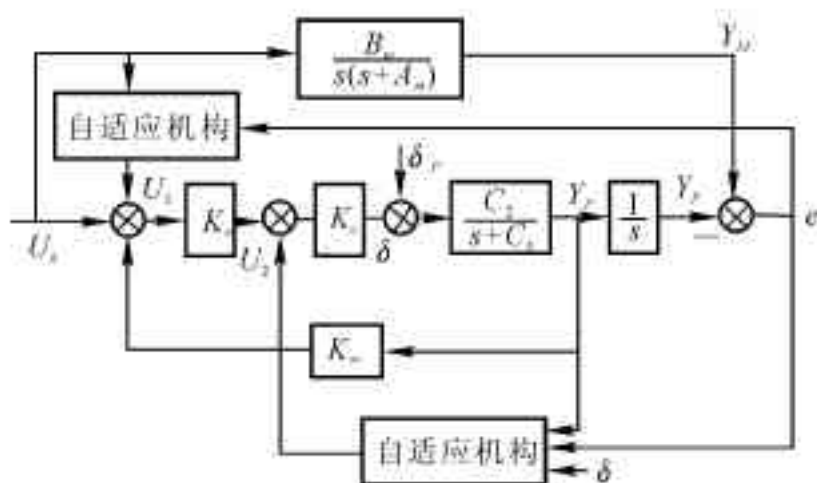


图 10.2-1 推导自适应控制规律时所采用的结构图

自适应控制规律推导如下：

参考模型方程

$$\ddot{Y}_M + A_M \dot{Y}_M = B_M U_k \quad (10.2-1) \quad \text{被控对象方程}$$

$$\ddot{Y}_p + G \dot{Y}_p = G_2 \{ \delta_F [(U_k + U_1 - K_{oc} Y_p) K_v + U_2] K_c \} \quad (10.2-2)$$

广义误差方程

$$e = Y_m - Y_p \quad (10.2-3)$$

由上述方程可得广义误差微分方程

$$\ddot{e} + A_M \dot{e} = (B_M - G_2 K_v K_c) U_k - G_2 K_v K_c U_1 + (-A_M + G + K_{oc} K_v K_c G_2) Y_p - G_2 \delta_F - G_2 K_c U_2 \quad (10.2-4)$$

为了使广义误差  $e$  趋于零,选择自适应补偿信号

$$U_1 = K_{p1} U_k, \quad U_2 = K_{p2} Y_p + K_{p3} \delta_F \quad (10.2-5)$$

于是广义误差微分方程可写为

$$\ddot{e} + A_M \dot{e} = \sum_{i=1}^3 X_i T_i \quad (10.2-6)$$

式中

$$X_1 = B_M - G_2 K_v K_c - G_2 K_v K_c K_{p1} \quad (10.2-7)$$

$$T_1 = U_k \quad (10.2-8)$$

$$X_2 = -A_M + G + G_2 K_{oc} K_v K_c - G_2 K_c K_{p2} \quad (10.2-9)$$

$$T_2 = Y_p \quad (10.2-10)$$

$$X_3 = -G_2 - G_2 K_c K_{p3} \quad (10.2-11)$$

$$T_3 = \delta_F \quad (10.2-12)$$

选择正定的李雅普诺夫函数为

$$V(X, t) = e^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} (X_i + B_i e T_i)^2 \tag{10.2-13}$$

对时间求导,得

$$\begin{aligned} V(x, t) = & 2\ddot{e}e + 2\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} (X_i + B_i e T_i) [X_i + B_i \frac{d}{dt}(eT_i)] = \\ & -2A_m e^2 + 2e\sum_{i=1}^3 X_i T_i + 2\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} (X_i + B_i e T_i) \times \\ & [X_i + B_i \frac{d}{dt}(eT_i)] \end{aligned} \tag{10.2-14}$$

为了保证李雅普诺夫导函数  $V(X, t)$  负定,可选择调节参数的自适应规律为

$$X_i = -\lambda_i e T_i - B_i \frac{d}{dt}(eT_i) \tag{10.2-15}$$

将式(10.2-15) 代入式(10.2-14),可得

$$V(x, t) = -2A_m e^2 - 2\sum_{i=1}^3 B_i e^2 T_i^2 \tag{10.2-16}$$

显然,  $V(x, t)$  负定。

由式(10.2-15) 可得自适应规律

$$K_{p1} = \lambda_1 \int_0^t e U_k dt + B_1 e U_k + A_1 \tag{10.2-17a}$$

$$K_{p2} = \lambda_2 \int_0^t e Y_p dt + B_2 e Y_p + A_2 \tag{10.2-17b}$$

$$K_{p3} = \lambda_3 \int_0^t e \delta_F dt + B_e e \delta_F + A_3 \tag{10.2-17c}$$

式中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  为积分常数;  $B_1, B_2, B_3$  为比例常数;  $A_1, A_2, A_3$  为经典最佳值。

3. 数字仿真结果

数字仿真时,对各种不同飞行高度,分别计算了采用经典自动驾驶仪和自适应自动驾驶仪时的典型弹道,其计算结果如表 10.2-1 所示。

表 10.2-1 经典驾驶仪回路和自适应驾驶仪性能对照表

驾驶仪	飞行高度 km	干扰 $\delta_F$ (°)	装定信号 $U_k$ V	$\Delta Y_{t1}$	$\Delta Y_{t2}$	$\Delta Y_B$	附注
古典	10	0.2	2	11.410	7.751	8.951	$U_{IF} \neq 0$
自适应	10	0.2	2	7.453	0.362	0.020	以下 $U_{IF} = 0$
古典	1	0.14	2	8.723	9.099	10.634	
自适应	1	0.14	2	3.867	0.219	0.006	
古典	10 ~ 0	0.14	2	9.766	8.092	10.628	
自适应	10 ~ 0	0.14	2	3.343	0.207	0.006	
古典	18	0.4	2	27.557	14.141	16.540	
自适应	18	0.4	2	20.568	0.628	0.025	
古典	10 ~ 20	0.4	2	24.963	13.382	15.775	
自适应	10 ~ 20	0.4	2	19.612	0.609	0.022	

比较同一高度的自适应弹道和经典弹道可知,  $\Delta Y_{t1}$  减小了  $4^\circ \sim 7^\circ$ , 自适应弹道的  $\Delta Y_{t2}$  只有

$0.2^\circ \sim 0.6^\circ$ ,  $\Delta\gamma_B$  只有  $0.006^\circ \sim 0.025^\circ$ , 最大稳态误差为  $0.46\%$ , 自适应弹道性能良好。

图 10.2-2 为  $0 \sim 10 \text{ km}$  高度、加方波干扰时经典弹道与自适应弹道的比较曲线。对其它飞行高度亦进行了同样计算。结果表明, 经典弹道的振荡平均值和理想稳态值相差较大, 低空时为  $4.2^\circ$ , 中空时为  $6^\circ$ , 高空时为  $12^\circ$ , 而自适应弹道的平均值和理想稳态值完全重合。经典弹道的振荡幅度比较大, 低空为  $8^\circ$ , 中空为  $4^\circ$ , 高空为  $6^\circ$ , 而自适应弹道的振幅比较小, 低空为  $0.8^\circ$ , 中空为  $1^\circ$ , 高空为  $2.3^\circ$ 。

经典弹道始终未能进入  $5\%$  公差带, 所以无法计算调节时间。自适应弹道在中低空时调节时间  $t_s \leq 0.6 \text{ s}$ , 高空时  $t_s \leq 0.9 \text{ s}$ 。

若视随机干扰为白噪声, 取速率陀螺随机干扰均值为  $0$ 、方差为  $0.5\%$ , 随机风均值为  $0$ 、方差为  $0.15^\circ$ , 则经典弹道均方差为  $14\%$ , 自适应弹道均方差为  $1.6\%$ 。

仿真结果表明, 自适应回路对装定角有很好的响应特性, 抗干扰能力有很大提高, 系统性能得到明显改善, 滚动角  $\gamma$  可以很好地稳定在装定角上, 这样就保证了俯仰偏航回路的控制精度, 从而保证了整个武器系统命中概率的提高。

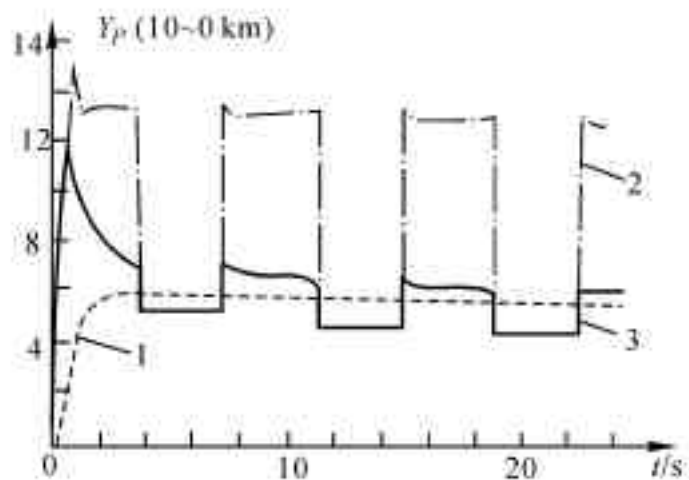


图 10.2-2 方波干扰时的古典弹道和自适应弹道

曲线 1: 只加装定信号时的响应曲线

曲线 2: 加装定信号和方波干扰时的古典回路的响应曲线

曲线 3: 加装定信号和方波干扰时自适应回路的响应曲线

## § 10.3 广义预测自适应控制器在导弹控制系统设计中的应用

现有的自适应控制算法对数学模型的精度有一定要求, 被控对象在下列情况下的控制效果欠佳:

(1) 时延不确定系统。例如, 最小方差控制对时延就很灵敏, 时延估计不准, 自适应控制精度将大大下降。

(2) 阶次不确定系统。实际系统的阶次往往是未知的, 如果系统阶次估计不正确, 则极点配置和 LQG 算法将不能使用。

(3) 非最小相位系统。许多连续时间的最小相位系统, 离散化后所获得的可能是非最小相位系统。

(4) 开环不稳定或具有容易引起不稳定的极点的系统, 如弹性飞行器和机器人等。

(5) 时变系统。像导弹这类控制系统是快速时变系统, 而且工作在复杂的环境下, 易受各类随机干扰, 当考虑弹体的弹性时, 还具有未建模动态和容易引起开环不稳定的极点存在。因此, 建立精确的数学模型相当困难, 许多现有的自适应控制算法都不适用于这类控制系统。因而希望寻找各种对数学模型要求低、鲁棒性强的自适应控制算法。广义预测自适应控制便是满足这种要求的一种自适应控制算法。

广义预测自适应控制将远程预测控制与自适应控制相结合, 对系统的时延、阶次和采样周期变化具有很强的鲁棒性, 适用于非最小相位系统和开环不稳定系统, 并已开始应用于过程控制。

## 1. 鲁棒广义预测自适应控制

考虑由下列 GCARMA 模型给出的系统

$$\bar{A}(\bar{q}^{-1})y(t) = B(\bar{q}^{-1})v(t-1) + C(\bar{q}^{-1})e(t) \quad (10.3-1)$$

$$v(t-1) = D(\bar{q}^{-1})u(t-1) \quad (10.3-2)$$

$$\bar{A}(\bar{q}^{-1}) = A(\bar{q}^{-1})D(\bar{z}^{-1}) \quad (10.3-3)$$

式中  $y(t)$  和  $u(t)$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) 分别表示系统的输出和输入,  $v(t)$  表示辅助输入,  $e(t)$  是均值为零、方差为  $\sigma^2$  的白噪声。多项式  $A(\bar{q}^{-1})$ ,  $B(\bar{q}^{-1})$ ,  $C(\bar{q}^{-1})$  和  $D(\bar{q}^{-1})$  分别为

$$A(\bar{q}^{-1}) = 1 + a_1 \bar{q}^{-1} + \dots + a_{n_a} \bar{q}^{-n_a} \quad (10.3-4a)$$

$$B(\bar{q}^{-1}) = b_0 + b_1 \bar{q}^{-1} + \dots + b_{n_b} \bar{q}^{-n_b} \quad (10.3-4b)$$

$$C(\bar{q}^{-1}) = 1 + c_1 \bar{q}^{-1} + \dots + c_{n_c} \bar{q}^{-n_c} \quad (10.3-4c)$$

$$D(\bar{q}^{-1}) = 1 + d_1 \bar{q}^{-1} + \dots + d_{n_d} \bar{q}^{-n_d} \quad (10.3-4d)$$

式中  $D(\bar{q}^{-1})$  为参考输入和干扰的内模多项式。假设  $\bar{A}(\bar{q}^{-1})$  和  $B(\bar{q}^{-1})$  可稳,  $C(\bar{q}^{-1})$  的全部零点在  $Z$  平面的单位圆内, 可观测性指数  $n = \max(n_a, n_b)$  已知。

目标函数取为

$$J = E \left\{ \sum_{j=1}^N [P(\bar{q}^{-1})y(t+j) - R(\bar{q}^{-1})y_r(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^N \hat{v}^2(t+j-1) \right\} \quad (10.3-5)$$

式中  $P(\bar{q}^{-1})$  和  $R(\bar{q}^{-1})$  为加权多项式, 满足  $P(1) = R(1)$ ;  $\lambda$  是控制权系数,  $N$  是输出时域,  $y_r(t+j)$  是有界参考轨迹。 $y_r(t+j)$  由下列参考模型产生。

$$y_r(t) = y(t) \quad (10.3-6a)$$

$$y_r(t+j) = \alpha y_r(t+j-1) + (1-\alpha)r(t), \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (10.3-6b)$$

式中  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $r(t)$  是指令信号。

控制约束取为

$$D(\bar{q}^{-1})u(t+j) = 0, \quad j \geq N_u \quad (10.3-7)$$

式中  $N_u$  为控制时域。

若  $u(t)$  的允许控制是  $y(t)$ ,  $y(t-1)$ ,  $\dots$  和  $u(t-1)$ ,  $u(t-2)$ ,  $\dots$  的线性函数, 则广义预测控制问题可以描述为在模型约束式(10.3-1)和控制约束式(10.3-7)的条件下, 求出使目标函数式(10.3-5)极小的允许控制律。

引入多项式分解

$$P(\bar{q}^{-1})C(\bar{q}^{-1}) = \bar{A}(\bar{q}^{-1})E_j(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-j}F_j(\bar{q}^{-1}) \quad (10.3-8)$$

$$B(\bar{q}^{-1})E(\bar{q}^{-1}) = G_j(\bar{q}^{-1})C_j(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-j}\Gamma_j(\bar{q}^{-1}) \quad (10.3-9)$$

式中  $E_j(\bar{q}^{-1})$ ,  $F_j(\bar{q}^{-1})$ ,  $G_j(\bar{q}^{-1})$  和  $\Gamma_j(\bar{q}^{-1})$  是待求的多项式, 阶次分别是  $\deg E_j(\bar{q}^{-1}) = j-1$ ,  $\deg F_j(\bar{q}^{-1}) = \max(n_p + n_c - j, n_a + n_d - 1)$ ,  $\deg G_j(\bar{q}^{-1}) = j-1$ ,  $\deg \Gamma_j(\bar{q}^{-1}) = \max(n_b - 1, n_c - 1)$ , 其中  $n_p = \deg P(\bar{q}^{-1})$ 。由式(10.3-1)、式(10.3-8)和式(10.3-9)可将辅助输出

$$\Phi(t+j) = P(\bar{q}^{-1})y(t+j) \quad (10.3-10)$$

分解为

$$\begin{aligned} \Phi(t+j) = & G_j(\bar{q}^{-1})v(t+j-1) + \Gamma_j(\bar{q}^{-1})v_f(t-1) + \\ & F_j(\bar{q}^{-1})y_f(t) + E_j(\bar{q}^{-1})e(t+j) \end{aligned} \quad (10.3-11)$$



式中滤波输出  $y_f(t)$  和滤波输入信号  $v_f(t)$  定义为

$$C(q^{-1})y_f(t) = y(t) \quad (10.3-12)$$

$$C(q^{-1})v_f(t) = v(t) \quad (10.3-13)$$

这里引入控制器观测多项式  $C(q^{-1})$  的作用是增强控制器的鲁棒性和抗干扰能力。

若  $u(t), u(t+1), \dots, u(t+N-1)$  是现时  $t$  可测的, 则辅助输出  $\Phi(t+j)$  的最优预测为

$$\Phi(t+j|t) = G_j(q^{-1})v(t+j-1) + \Phi(t+j|t) \quad (10.3-14)$$

式中

$$\Phi(t+j|t) = \Gamma_j(q^{-1})v_f(t-1) + F_j(q^{-1})y_f(t) \quad (10.3-15)$$

在式(10.3-14)中, 令  $j = 1, 2, \dots, N$ , 并考虑控制时域的假设, 可以获得辅助输出大范围预测模型

$$\Phi(t) = GV(t) + \Phi_0(t) \quad (10.3-16)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= [\Phi(t+1|t) \quad \Phi(t+2|t) \quad \cdots \quad \Phi(t+N|t)]^T \\ V(t) &= [v(t) \quad v(t+1) \quad \cdots \quad v(t+N_u-1)]^T \\ \Phi_0(t) &= [\Phi_0(t+1|t) \quad \Phi_0(t+2|t) \quad \cdots \quad \Phi_0(t+N|t)]^T \end{aligned}$$

$G$  是  $N \times N_u$  矩阵

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & g_{N-N_u} \end{bmatrix} \quad (10.3-17)$$

式中  $g_j (j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$  是  $P(q^{-1})\overline{A}^{-1}(q^{-1})B(q^{-1})$  的前  $N$  个脉冲响应系数

$$G_j(q^{-1}) = g_0 + g_1 q^{-1} + \cdots + g_{j-1} q^{-(j-1)} \quad (10.3-18)$$

目标函数式(10.3-5) 可以表示为

$$J = E \{ [\Phi(t) - Y_r(t)]^T [\Phi(t) - Y_r(t)] + \lambda V^T(t)V(t) \} \quad (10.3-19)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= [\Phi(t+1) \quad \Phi(t+2) \quad \cdots \quad \Phi(t+N)]^T \\ Y_r(t) &= [R(q^{-1})y_r(t) \quad R(q^{-1})y_r(t+1) \quad \cdots \quad R(q^{-1})y_r(t+N)]^T \end{aligned}$$

将式(10.3-19) 极小化可得最优控制律

$$V(t) = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T [Y_r(t) - \Phi_0(t)] \quad (10.3-20)$$

式中  $I$  是  $N_u \times N_u$  的单位矩阵。

采用滚动优化控制律加以实施

$$v(t) = H^T [Y_r(t) - \Phi(t)] \quad (10.3-21)$$

式中  $H^T$  是矩阵  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$  的第一行。故广义预测控制律为

$$u(t) = v(t)/D(q^{-1}) \quad (10.3-22)$$

下面建立式(10.3-22) 的自适应算法。

采用间接自适应控制算法。参数估计模型为

$$y^f(t) = [1 - \overline{A}(q^{-1})]y^f(t) + B(q^{-1})v^f(t-1) + e(t) \quad (10.3-23)$$

式中滤波输出  $y^f(t)$  和滤波输入信号  $v^f(t)$  定义为

$$T(\bar{q}^{-1}) y^f(t) = y(t) \quad (10.3-24)$$

$$T(\bar{q}^{-1}) v^f(t) = v(t) \quad (10.3-25)$$

式中估计器滤波多项式  $T(\bar{q}^{-1})$  的作用是使参数估计器有合适的带宽,并减少计算量。

根据确定性等价原理建立自适应控制算法的步骤如下:

- (a) 设置初值:  $N, N_u, \lambda, \alpha, n_a, n_b, n_c, n_d, n_p, P(\bar{q}^{-1}), R(\bar{q}^{-1}), C(\bar{q}^{-1}), T(\bar{q}^{-1}), D(\bar{q}^{-1})$ ;
- (b) 采用参数估计模型式(10.3-23),用带遗忘因子的最小二乘法估计  $\bar{A}(\bar{q}^{-1}), \bar{B}(\bar{q}^{-1})$  中的参数;
- (c) 递推求解方程式(10.3-8)和式(10.3-9);
- (d) 由式(10.3-6)计算参考轨迹向量  $Y_r(t)$ ;
- (e) 由式(10.3-15)计算零输入辅助输出预测向量  $\Phi(t)$ ,并由式(10.3-14)计算  $\Phi(t)$ ;
- (f) 由  $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$  计算增益向量  $H^T$ ;
- (g) 由式(10.3-21)计算辅助输入  $v(t)$ ,并由式(10.3-22)计算广义预测控制律  $u(t)$  作为系统输入;
- (h) 每个采样周期重复步骤(b) ~ (g)。

对于闭环系统的稳定性和鲁棒性有下述结论:如果开环系统可稳,则适当选取  $N, N_u, \lambda$ ,可确保闭环系统稳定,并且具有内在的鲁棒性。

## 2. 被控对象描述

某型战术导弹自动驾驶仪传递函数方块图如图 10.3-1 所示。

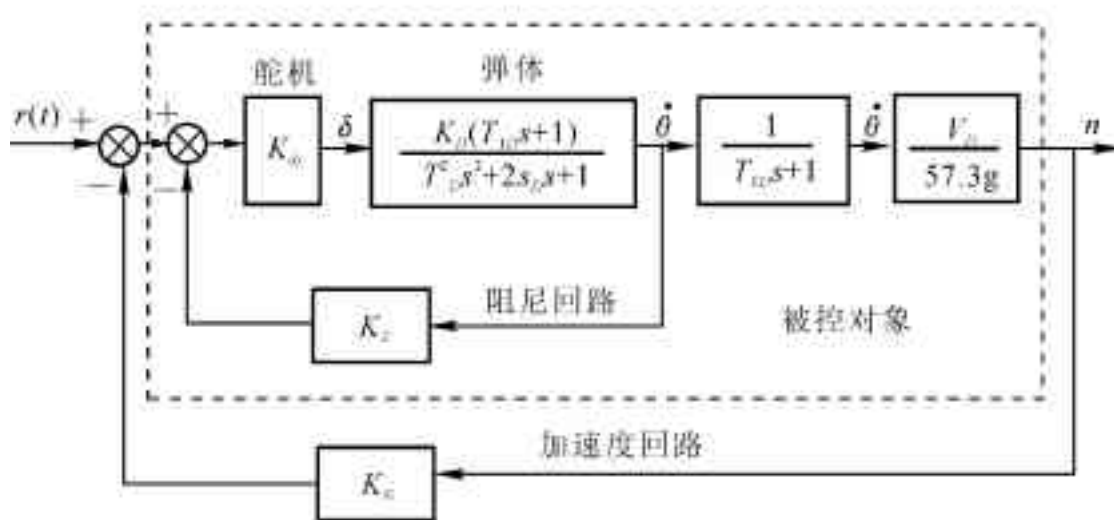


图 10.3-1 自动驾驶仪方框图

表 10.3-1 某条特征弹道参数

$t/s$	$K_{dj}$	$K_D$	$T_{1D}$	$T_D$	$\xi_D$	$V_D$	$K_1$	$T_1$	$\xi_1$
6	12.320	0.503 0	1.00	0.084 4	0.126 0	547.67	4.667	0.074 1	1.645
14	12.200	0.415 0	1.16	0.090 6	0.107 7	600.67	4.363	0.081 3	1.481
22	12.104	0.311 8	1.45	0.101 4	0.086 8	682.29	3.887	0.093 3	1.262
30	12.160	0.210 2	2.15	0.129 4	0.067 2	804.08	3.262	0.122 1	1.017 8
38	12.784	0.123 9	3.95	0.189 0	0.047 1	978.81	2.571	0.183 0	0.810
45	13.120	0.069 5	7.57	0.290 0	0.033 3	1163.3	1.813	0.284 0	0.588

在图 10 3-1 中,  $r(t)$  表示导弹所接收到的由地面站发出的控制指令信号, 参数  $K_{dj}$ ,  $K_D$ ,  $T_{1D}$ ,  $T_D$ ,  $\xi_D$  和  $V_D$  均随导弹的飞行高度和大气环境等而变化, 某一条特征弹道参数如表 10 3-1 所示。可见导弹从低空到高空飞向目标的攻击过程中, 表现为一个参数变化较快的系统。

一般情况下, 设计自适应自动驾驶仪时以参数变化较缓慢的加速度闭环回路作为被控对象。本节中断开加速度回路, 取图 10 3-1 中虚框内的阻尼回路作为被控对象, 这样会使对象参数变化更为剧烈, 更能考验广义预测自适应控制的有效性。

控制的目的是使系统的输出迅速准确地跟踪控制指令信号, 希望导弹过载  $n$  与指令信号  $r(t)$  成一定的正比关系, 要求这一关系不随导弹的飞行速度和飞行高度而变化。

被控对象的传递函数为

$$\Phi_n(s) = \frac{K_1}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1} \tag{10 3-26}$$

式中

$$K_1 = \frac{K_{dj} K_D V_D}{57.3 g(1 + K_{dj} K_D K_Z)}, \quad T_1 = \frac{T_D}{\sqrt{1 + K_{dj} K_D K_Z}},$$

$$\xi_1 = \frac{2\xi_D T_D + K_{dj} K_D K_Z T_{1D}}{2 T_D \sqrt{1 + K_{dj} K_D K_Z}}$$

设阻尼反馈系数  $K_Z = 0.0476$ , 参数  $K_1$ ,  $T_1$  和  $\xi_1$  的计算结果如表 10 3-1 所示。

### 3. 数字仿真研究

将连续的被控对象式(10 3-26) 连同零阶保持器一起离散化, 可得对象的脉冲传递函数

$$G(q^{-1}) = \frac{\bar{q}^{-1} (b + \bar{a} \bar{q}^{-1})}{1 + a \bar{q}^{-1} + \alpha \bar{q}^{-2}} \tag{10 3-27}$$

式中  $a$ ,  $\alpha$ ,  $b$  和  $\bar{a}$  是  $K_1$ ,  $T_1$  和  $\xi_1$  及采样周期  $T$  的函数。考虑干扰  $e(t)$  和误差  $d$  时, 被控对象的数学模型可以取为

$$y(t) = \frac{\bar{q}^{-1} (b + \bar{a} \bar{q}^{-1})}{1 + a \bar{q}^{-1} + \alpha \bar{q}^{-2}} u(t) + e(t) + d \tag{10 3-28}$$

导弹自动驾驶仪广义预测自适应控制系统结构图如图 10 3-2 所示。

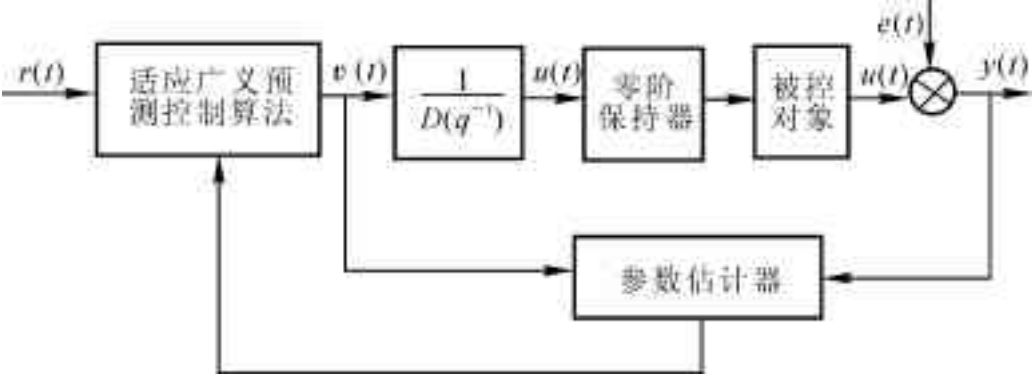


图 10 3-2 广义预测自适应控制系统结构图

#### (1) 数字仿真结果

仿真时, 时变对象的仿真以不同飞行时刻弹道特征点上的动力系数作为时变参数, 所选特征点以外时间的动力系数数值由线性插值获得。

选取加权多项式  $P(q^{-1}) = R(q^{-1}) = I$ , 内模多项式  $D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$ , 设计多项式  $C(q^{-1}) = T(q^{-1}) = I$ , 系统可观测性指数  $n = \max(n_a, n_b) = 2$ , 采样周期  $T = 0.05\text{ s}$ , 可调参数  $N =$

10,  $N_u = 5, \lambda = \alpha = 0$ , 随机干扰噪声强度  $\sigma = 0.1$ , 确定性干扰  $d = 1.0$ , 指令信号是周期为 9.0 s、幅值为 3.0 的方波, 仿真结果如图 10.3-3 所示。由所选参数可以看出, 这是一种原始的自适应算法。虽然被控对象输出能迅速跟踪指令信号, 但自适应控制信号过大(尤其是在高空), 具有强烈的振荡性, 稳态跟踪精度欠佳, 说明系统抗干扰能力差, 缺乏鲁棒性。

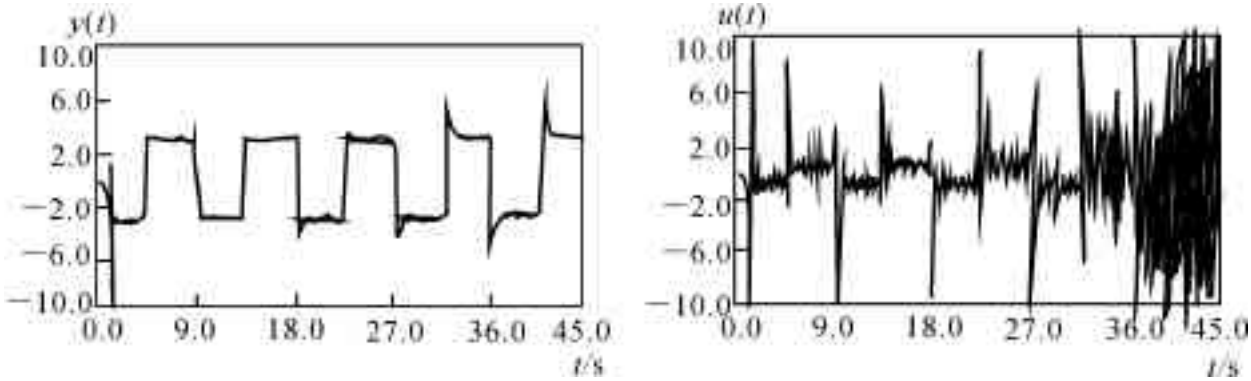


图 10.3-3 原始算法的对象输出和自适应信号

参考文献[3] 提出了一种克服控制信号振荡性和饱和性的方法, 其实质是用加权控制律代替一步控制律, 使实际控制输入信号具有滤波作用。本节所采用的方法是在参考文献[3] 的基础上直接引入控制器观测多项式  $C(q^{-1})$  和估计器滤波多项式  $T(q^{-1})$ , 以增强系统的鲁棒性和抗干扰能力, 从而减少自适应控制信号的振荡性和饱和性。

若选取  $C(q^{-1}) = T(q^{-1})$  且

$$C(q^{-1}) = (1 - \alpha q^{-1})^{n_a} \tag{10.3-29}$$

式中  $\alpha = 0.8, n_a = n = 2$ , 仿真结果如图 10.3-4 所示。从图 10.3-4 中的曲线可看出, 引入  $C(q^{-1})$  和  $T(q^{-1})$  对自适应控制信号起到了明显的改进作用, 减小了输出方差, 改善了系统输出跟踪性能。

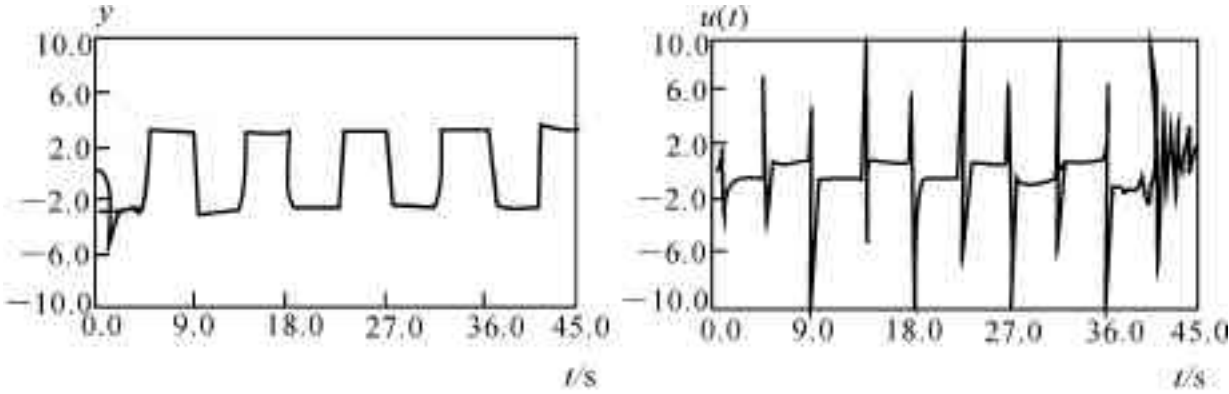


图 10.3-4 观测多项式和滤波多项式的作用

### (2) 设计参数对控制系统性能的影响

#### (i) 输出时域 $N$

一般说来,  $N$  确定了预测范围, 应与系统上升时间  $t_r$  或调节时间  $t_s$  相当, 即

$$t_r = NT \text{ 或 } t_s = NT \tag{10.3-30}$$

从而保证预测范围能包含对象的主要动态特性。本节被控对象  $t_r$  或  $t_s$  大约为 0.5 s, 若选择采样周期  $T = 0.05$  s, 则  $N = 10$ 。  $N$  增大, 对系统性能影响不大;  $N$  减小, 输出跟踪速度变快, 控制量变化增大。因而  $N$  值不能过小, 否则控制性能变坏, 容易引起不稳定。一般可取  $N > n$ 。

(ii) 控制时域  $N_u$

$N_u$  增大, 允许控制量变化大, 输出跟踪速度快;  $N_u$  减小, 允许控制量变化小, 输出跟踪速度慢。一般可选取  $N_u$  大于对象不稳定或容易引起开环不稳定的极点数。图 10 3-5 为取  $N_u = 1$  时的仿真曲线。

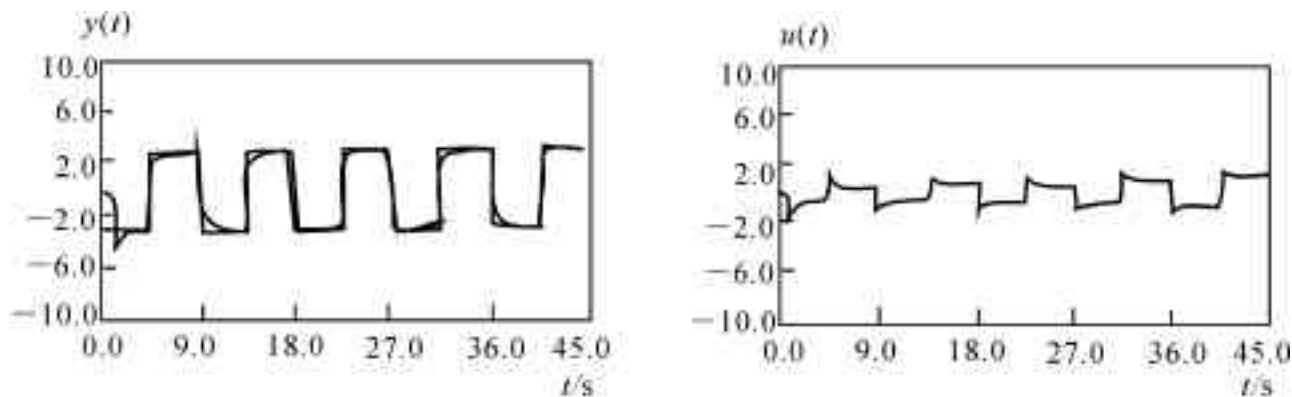


图 10 3-5 控制时域对控制系统性能的影响

(iii) 控制权系数  $\lambda$

控制权系数  $\lambda$  一般用来处理开环不稳定或非最小相位等复杂对象,  $\lambda$  对系统性能的影响与  $N_u$  情况类似。这里应指出的是,  $\lambda$  的大小对常值偏差没有影响, 采用 GCARMA 模型可以自动消除常值偏差。

(iv) 加权多项式  $P(q^{-1})$  和参考模型式(10 3-6)

引入多项式  $P(q^{-1})$  和参考模型式(10 3-6), 使输出具有模型跟踪性能, 输出响应变慢, 控制信号平稳。图 10 3-6(a)(b) 为  $P(q^{-1}) = 6 - 5q^{-1}$ ,  $R(q^{-1}) = 1$ ,  $\lambda = \alpha = 0$  时的仿真曲线, (c)(d) 为  $P(q^{-1}) = R(q^{-1}) = I$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\alpha = 0.9$  时的仿真曲线。

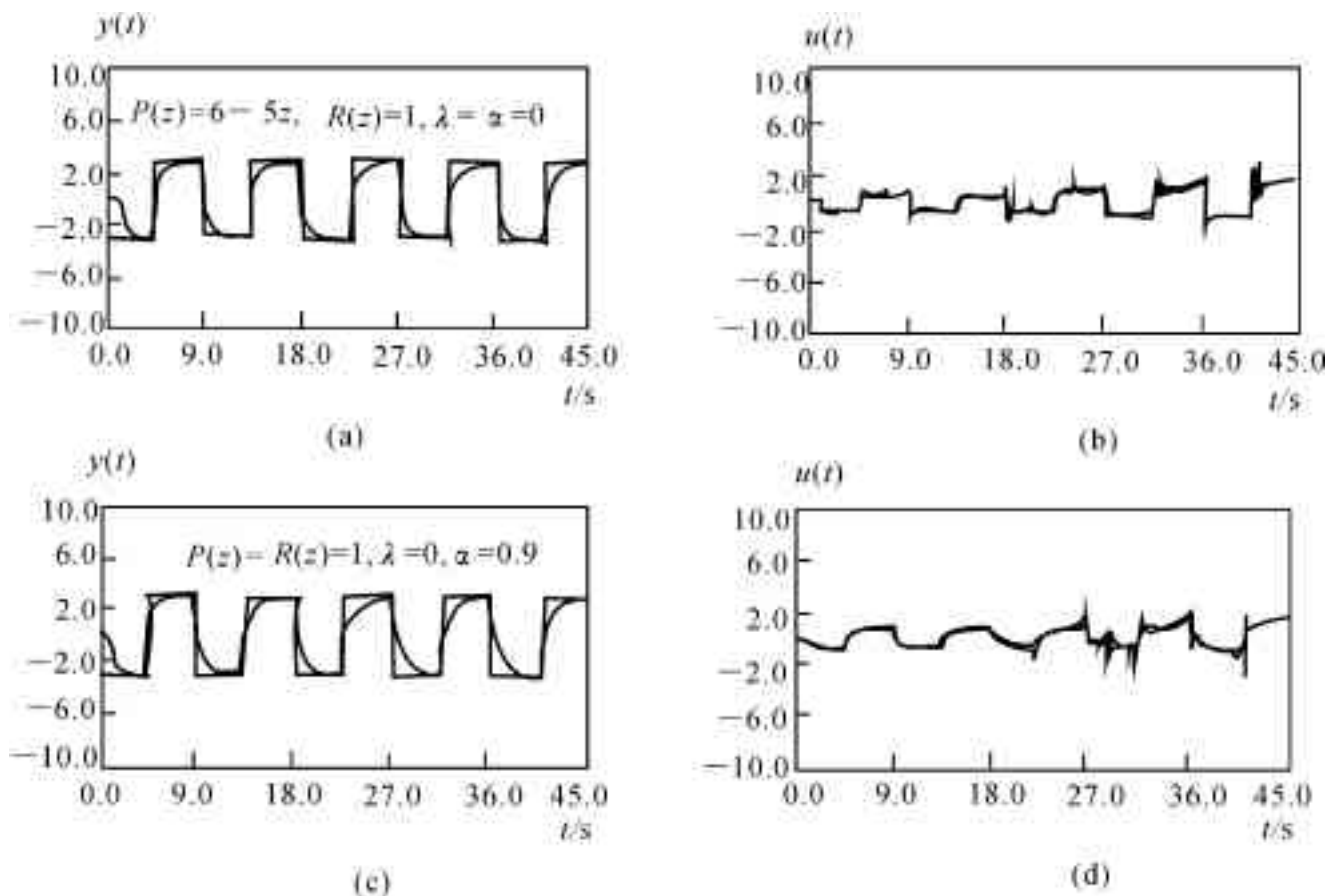


图 10 3-6 加权多项式和参考模型对系统性能的影响

(v) 对象阶次  $n_a, n_b$

为了考察控制系统对被控阶次变化的鲁棒性,控制器设计中令  $n = n_a = n_b = 1$ (具有未建模动态) 和  $n = n_a = n_b = 3$ (具有过建模动态) 分别进行数字仿真,仿真结果分别如图 10.3-7 中的(a)(b)和(c)(d)所示。由仿真曲线可以看出;对象阶次变化对系统性能几乎没有影响,说明系统具有很强的鲁棒性。

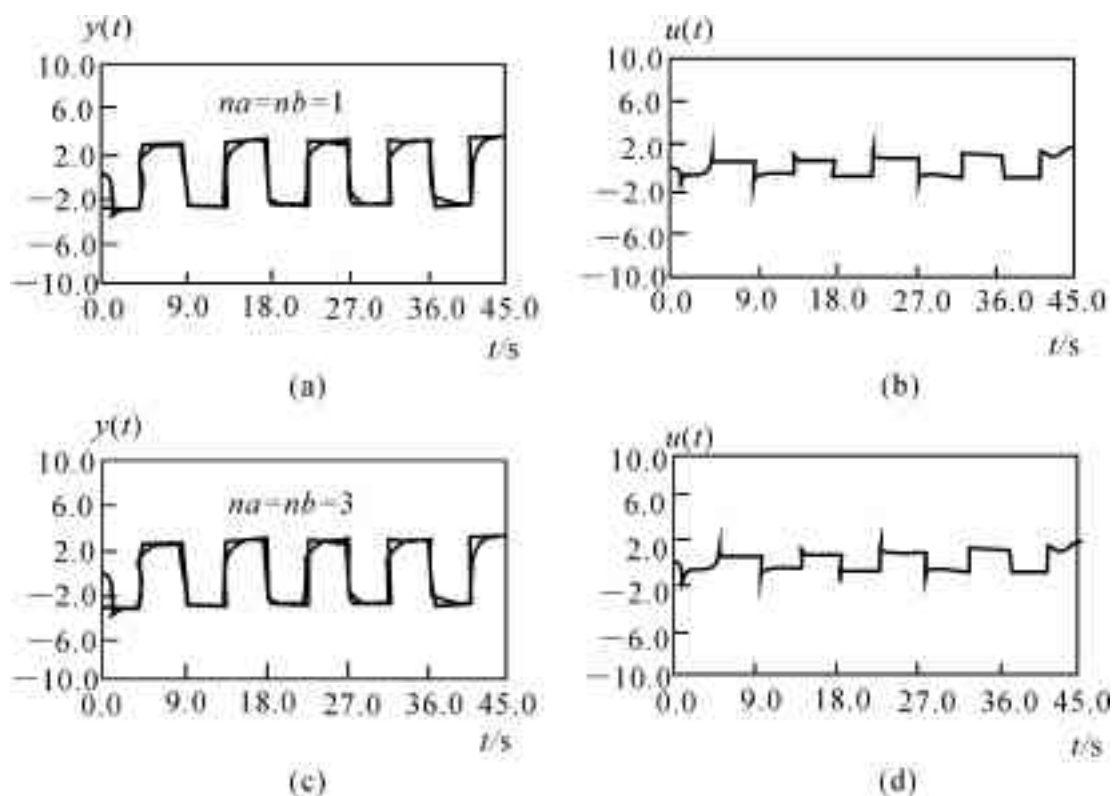


图 10.3-7 被控对象阶次变化对系统性能的影响

## § 10.4 导弹控制系统的随机混合自适应控制方案

本节针对战术导弹工程实践中所遇到的一些问题,介绍一种连续时间随机对象最小方差混合自校正控制器设计方法。利用这种方法设计自适应控制律时,不需要人为地将连续时间对象离散化,而是始终保持连续时间状态,但控制参数的估计和调整是离散的,整个系统为混合自适应控制系统。由于这种系统具有连续系统和离散系统二者的优点,因而是一种很有前途的控制系统。文中利用地-空导弹自动驾驶仪作为例子进行了数字仿真,仿真结果表明,这类混合系统的跟踪性能优于相类似的全离散系统,当系统具有小阻尼比时,即在导弹飞行的高空段,这一优点显得尤为突出。

### 1. 最优控制律推导

设单输入-单输出连续时间对象为

$$A'(s)y(t) = B'(s)u(t) + C'(s)\xi(t) \quad (10.4-1a)$$

$$A'(s) = s^n + a'_1 s^{n-1} + \cdots + a'_n \quad (10.4-1b)$$

$$B'(s) = b'_1 s^m + b'_2 s^{m-1} + \cdots + b'_m \quad (10.4-1c)$$

$$C'(s) = s^n + c'_1 s^{n-1} + \cdots + c'_n \quad (10.4-1d)$$

式中  $s = d/dt$  为微分算子,  $\xi(t)$  为高频随机干扰。 $B'(s)$  和  $C'(s)$  为 Hurwitz 多项式,  $A'(s)$  和  $B'(s)$  互质, 并且  $n^* = n - m \geq 2$ 。

设  $\bar{q}^{-1} = \frac{1}{1 + \tau s}$ ,  $\tau > 0$  为设计常数, 则方程(10.4-1) 可以表示为等价形式方程

$$A(\bar{q}^{-1})y(t) = \bar{q}^{-n*} B(\bar{q}^{-1})u(t) + C(\bar{q}^{-1})\xi(t) \quad (10.4-2a)$$

$$A(\bar{q}^{-1}) = 1 + a_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + a_n \bar{q}^{-n} \quad (10.4-2b)$$

$$B(\bar{q}^{-1}) = b_0 + b_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + b_m \bar{q}^{-m} \quad (10.4-2c)$$

$$C(\bar{q}^{-1}) = 1 + c_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + c_n \bar{q}^{-n} \quad (10.4-2d)$$

方程式(10.4-2) 具有与离散时间系数相类似的形式, 但本质却完全不同。在离散时间系统中,  $\bar{q}^{-1}$  表示时间延迟, 而方程式(10.4-2) 则是连续时间系统,  $\bar{q}^{-1}$  表示一级滤波器。由于方程式(10.4-2) 在形式上与离散系统相似, 可以参考现有的处理离散系统的方法进行公式推导。但由于两者存在本质差别, 因而这里不能直接利用离散系统的推导结果。在进行具体公式推导时, 需特别注意这些本质区别。

本节的目的是在对象具有随机干扰的情况下设计最小方差混合自校正控制器, 使随机干扰对系统输出的影响最小, 也就是使系统的输出  $y(t)$  尽可能紧密地跟踪参考输入信号  $r(t)$ , 同时希望对控制  $u(t)$  加以限制, 使所需要的控制信号不致过大。

为达到上述目的, 选取目标函数

$$J = E\{[C(\bar{q}^{-1})y(t) - K(\bar{q}^{-1})r(t)]^2 + \lambda[\bar{q}^{-n*} u(t)]^2\} \quad (10.4-3)$$

式中  $C(\bar{q}^{-1})$  为由设计者选择的多项式

$$C(\bar{q}^{-1}) = 1 + c_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + c_n \bar{q}^{-n} \quad (10.4-4)$$

并且  $C(\bar{q}^{-1})$  乘以  $\bar{q}^n$  所得到的  $n$  次微分多项式  $C(s)$  是 Hurwitz 多项式。

现在根据目标函数式(10.4-3) 来推导最优控制律。

设计滤波器  $\bar{q}^{-1}$ , 并假设高频随机干扰  $\xi(t)$  经过一级以上的滤波器滤波后基本被滤除, 则在设计控制器时可以将方程式(10.4-2) 中的  $C(\bar{q}^{-1})$  近似为  $C(\bar{q}^{-1}) = 1$ 。根据某些战术导弹靶试纪录曲线以及导弹控制系统的实际工作情况, 考虑到方案的可行性, 我们认为这种假设是合理的。因而设多项式  $F(\bar{q}^{-1})$  和  $G(\bar{q}^{-1})$  满足关系式

$$C(\bar{q}^{-1}) = A(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1}) + \bar{q}^{-n*} G(\bar{q}^{-1}) \quad (10.4-5)$$

式中

$$F(\bar{q}^{-1}) = 1 + f_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + f_{n*-1} \bar{q}^{-(n*-1)} \quad (10.4-6)$$

$$G(\bar{q}^{-1}) = g_0 + g_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + g_{n-1} \bar{q}^{-(n-1)} \quad (10.4-7)$$

将式(10.4-5) 等号两边同乘以  $y(t)$  得

$$C(\bar{q}^{-1})y(t) = A(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})y(t) + \bar{q}^{-n*} G(\bar{q}^{-1})y(t) \quad (10.4-8)$$

利用式(10.4-2a) 可将关系式(10.4-8) 表示为

$$C(\bar{q}^{-1})y(t) = \bar{q}^{-n*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n*} G(\bar{q}^{-1})y(t) + F(\bar{q}^{-1})C(\bar{q}^{-1})\xi(t) \quad (10.4-9)$$

因而

$$J = E\{[\bar{q}^{-n*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n*} G(\bar{q}^{-1})y(t) + F(\bar{q}^{-1})C(\bar{q}^{-1})\xi(t) - K(\bar{q}^{-1})r(t)]^2 + \lambda[\bar{q}^{-n*} u(t)]^2\} \quad (10.4-10)$$

根据前面关于  $\xi(t)$  的假设, 考虑到滤波器  $\bar{q}^{-1}$  的滤波作用, 则  $\bar{q}^{-1}y(t), \bar{q}^{-2}y(t), \cdots, \bar{q}^{-(n+n*-1)}y(t), \bar{q}^{-1}u(t), \bar{q}^{-2}u(t), \cdots, \bar{q}^{-(n+n*-1)}u(t)$  均与  $\xi(t)$  是不相关的, 因而可得

$$J = E\{\xi^2(t)\} + E\{[\bar{q}^{-n*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n*} G(\bar{q}^{-1})y(t) -$$

$$KC(\bar{q}^{-1})r(t)]^2 + \lambda[\bar{q}^{-n^*} u(t)]^2\} \quad (10.4-11)$$

求  $J$  关于  $\bar{q}^{-n^*} u(t)$  的偏导数并令其为零可得

$$\frac{J}{[\bar{q}^{-n^*} u(t)]} = 2E\{[\bar{q}^{-n^*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n^*} G(\bar{q}^{-1})y(t) - KC(\bar{q}^{-1})r(t)]b_0 + \lambda\bar{q}^{-n^*} u(t)\} = 0 \quad (10.4-12)$$

若选择  $u(t)$  使得

$$[\bar{q}^{-n^*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n^*} G(\bar{q}^{-1})y(t) - K(\bar{q}^{-1})r(t)]b_0 + \lambda\bar{q}^{-n^*} u(t) = 0 \quad (10.4-13)$$

则  $J/[\bar{q}^{-n^*} u(t)]$  必为零,  $J$  为最小。因而可得最优控制律

$$u(t) = \frac{K(\bar{q}^{-1})\bar{q}^{n^*} r(t) - G(\bar{q}^{-1})y(t)}{B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1}) + \lambda_1} \quad (10.4-14)$$

式中  $\lambda_1 = \lambda b_0$  为由设计者选择的正常数。

## 2. 参数估计

为了实现由关系式(10.4-14)所表示的最优控制  $u(t)$ , 需要对式(10.2-14)中的未知参数进行估计。

### (i) 间接式参数估计

设

$$\theta^T = [a_0 \quad a_1 \cdots a_m \quad b_0 \quad b_1 \cdots b_m] \quad (10.4-15)$$

$$\zeta^T(t) = [-\bar{q}^{-1}y(t) \cdots -\bar{q}^{-n}y(t) \quad \bar{q}^{-n^*}u(t) \cdots \bar{q}^{-(n^*+m)}u(t)] \quad (10.4-16)$$

则式(10.4-2a)可表示为

$$y(t) = \theta^T \zeta(t) + \xi(t) \quad (10.4-17)$$

式中  $y(t)$  和  $\zeta(t)$  都是物理上可实现并且可以直接测量的变量。

对  $y(t)$  和  $\zeta(t)$  进行离散时间采样, 设  $\{t_k\}_0^\infty$  为时间序列, 可得与方程式(10.4-17)相对应的离散形式方程

$$y(k) = \theta^T \zeta(k) + \xi(k) \quad (10.4-18)$$

式中  $k$  表示采样时刻  $t_k$ 。

根据方程式(10.4-18), 利用所得到的采样值  $y(k)$  和  $\zeta(k)$ , 则可选取各种辨识方法得到对象参数在  $t_k$  时刻的估值  $\theta(k)$ , 进而利用方程式(10.4-5)去确定控制规律式(10.4-14)中的未知参数估值。由于向量  $\zeta(k)$  中的所有变量均与  $\xi(k)$  不相关, 因而利用递推最小二乘法可以得到  $\theta$  的一致无偏估计。

### (ii) 直接式参数估计

将式(10.4-5)等号两边同乘以  $y(t)$  并且利用式(10.4-2a)可得

$$C(\bar{q}^{-1})y(t) = \bar{q}^{-n^*} B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1})u(t) + \bar{q}^{-n^*} G(\bar{q}^{-1})y(t) + \xi(t) \quad (10.4-19)$$

令

$$B(\bar{q}^{-1})F(\bar{q}^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 \bar{q}^{-1} + \cdots + \beta_{m+n^*-1} \bar{q}^{-(m+n^*-1)} \quad (10.4-20)$$

$$\theta^T = [\beta_0 \quad \beta_1 \cdots \beta_{m+n^*-1} \quad g_0 \quad g_1 \cdots g_{n-1}] \quad (10.4-21)$$

$$\zeta^T(t) = [\bar{q}^{-n^*} u(t) \cdots \bar{q}^{-(m+2n^*-1)} u(t) \quad \bar{q}^{-n^*} y(t) \cdots \bar{q}^{-(n+n^*-1)} y(t)] \quad (10.4-22)$$

$$y'(t) = (C(\bar{q}^{-1})y(t)) = y(t) + C_1 \bar{q}^{-1} y(t) + \cdots + C_n \bar{q}^{-n} y(t) \quad (10.4-23)$$



则方程式(10.4-19) 可以表示为

$$y'(t) = \theta^T \zeta(t) + \xi(t) \quad (10.4-24)$$

式中  $y'(t)$  和  $\zeta(t)$  都是物理上可实现的变量。对  $y'(t)$  和  $\zeta(t)$  进行离散时间采样, 就可以根据式(10.4-24) 利用所获得的采样信息离散地估计控制参数。

当获得控制参数向量估值  $\theta(k)$  之后, 即可得到物理上可实现的混合自适应控制律

$$u(t) = \frac{1}{\beta_0(k) + \lambda_1} \left[ K \sum_{i=0}^n c_i q^{-(i-n^*)} r(t) - \sum_{j=0}^{n-1} g_j(k) q^{-j} y(t) - \sum_{l=1}^{m+n^*-1} \beta_l(k) q^{-l} u(t) \right] \quad (10.4-25)$$

式中  $\lambda_1 = 1$ , 在区间  $(t_k, t_{k+1})$  上  $\theta(k)$  为常数, 即控制参数是离散调整的, 而其它信号则保持连续状态。要求外参考输入信号  $r(t)$   $n^*$  阶可微, 通过合理选取  $r(t)$  完全可以做到这一点。

此类系统的稳定性分析不仅与对象中的随机干扰形式有关, 而且涉及  $\lambda_1$  的选择和具体的辨识算法。当滤波和采样后的对象干扰序列为鞅差序列时, 利用鞅收敛定理和维数不变性原理可以完成闭环系统的稳定性证明。当对象中的干扰为其它形式的有界随机干扰时, 若对象的输入输出信号有界, 则容易给出闭环系统的稳定性证明。关于这些问题的讨论, 可参看第六章和第七章有关内容, 此处不再详述。

值得注意的是, 在进行控制系统的稳定性分析时, 对象方程必须采用式(10.4-1) 而不能采用式(10.4-2), 因为式(10.4-1) 才是真实对象模型, 而式(10.4-2) 仅仅是为了设计混合自适应控制律所采用的一种等价形式方程。

### 3. 地-空导弹混合自校正控制系统设计

某型地-空导弹自动驾驶仪俯仰通道的简化方块图如图 10.1-1 或图 10.3-1 所示。

利用图 10.1-1 所示方块图可以求出地-空导弹自动驾驶仪俯仰通道的传递函数

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = A / (s^2 + Bs + C) \quad (10.4-26)$$

式中  $A = K_1 / T_1^2$ ,  $B = 2\xi_1 / T_1$ ,  $C = 1 / T_1^2$ , 其中  $K_1$ ,  $\xi_1$  和  $T_1$  的表达式如式(10.1-4) 所示。因而连续时间对象方程可以表示为

$$(s^2 + Bs + C) y(t) = Au(t) + (s^2 + ds + f) \xi(t) \quad (10.4-27)$$

式中  $\xi(t)$  为高频有界随机干扰。

选择  $q^{-1} = 1$ ,  $K = 1$ , 以及参考模型

$$(s^2 + 28s + 400) r(t) = 400s(t) \quad (10.4-28)$$

式中  $s(t)$  为方波指令信号,  $r(t)$  为参考模型的输出。

采用直接式参数估计, 取

$$\theta^T = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4] \quad (10.4-29)$$

$$\zeta^T(t) = [q^{-2} u(t) \quad q^{-3} u(t) \quad q^{-2} y(t) \quad q^{-3} y(t)] \quad (10.4-30)$$

所选用的辨识算法为

$$\theta(k) = \theta(T_i) + \theta_s(k)(k - T_i) \quad (10.4-31a)$$

$$\theta_s(k+1) = \theta_s(k) + K(k+1) \left[ \frac{y(k+1) - \theta^T(T_i) \zeta(k+1)}{k - T_i} - \theta_s^T(k) \zeta(k+1) \right] \quad (10.4-31b)$$

$$K(k+1) = P(k) \zeta(k+1) [1 + \zeta^T(k+1) P(k) \zeta(k+1)]^{-1} \quad (10.4-31c)$$

$$P(k) = P(k-1) - K(k)\zeta^T(k)P(k-1) \quad (10.4-31d)$$

为了避免当  $k \rightarrow \infty$  时协方差矩阵  $P(k) \rightarrow 0$ , 可采用协方差重置法, 即令

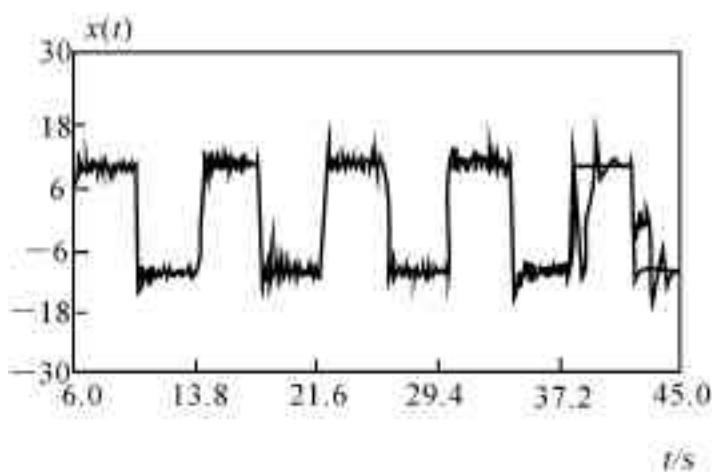
$$P(T_i) = c^2 I, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4-31e)$$

式中  $c$  为由设计者选择的常数。

系统混合最优控制律为

$$u(t) = \frac{1}{q(k)} [q^2 r(t) - \theta(k) q^{-1} u(t) - \theta(k) y(t) - \theta(k) q^{-1} y(t)] \quad (10.4-32)$$

进行参数估计时, 选取  $q^{-1} = 1/(1 + 0.05s)$ , 采样周期  $T_s = t_k - t_{k-1} = 0.02$  s,  $\theta^T(0) = [2.119 \quad 1.157 \quad 0.353 \quad 0.03]$ ,  $\zeta^T(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , 全弹道分 5 个时间区段,  $T_1 = 6$  s,  $T_2 = 14$  s,  $T_3 = 22$  s,  $T_4 = 30$  s,  $T_5 = 38$  s, 导弹发射后 6 s 开始实施控制, 具体的仿真结果如图 10.4-1、图 10.4-2 和图 10.4-3 所示。图 10.4-1 和图 10.4-2 所加入的随机干扰是均值为零、方差分别为 0.1 和 0.5 的白噪声序列。图 10.4-3 所加入的是高频有色噪声随机干扰。图 10.4-4 和图 10.4-5 分别示出了所加入的白噪声和有色噪声图形。图 10.4-6 和图 10.4-7 示出了在相同条件下, 采用全离散方法所得到的系统输出曲线。从图 10.4-1 和图 10.4-2 与图 10.4-6 和图 10.4-7 的相互对比可以看出, 混合自校正控制方案的跟踪性能优于相类似的全离散方案, 在导弹飞行的高空段, 混合自校正控制的这一优点尤为突出。



10.4-1 加入均值为零方差为 0.1 白噪声  
随机干扰时混合自校正控制系统  
输出曲线 (图中方波为指令信号)

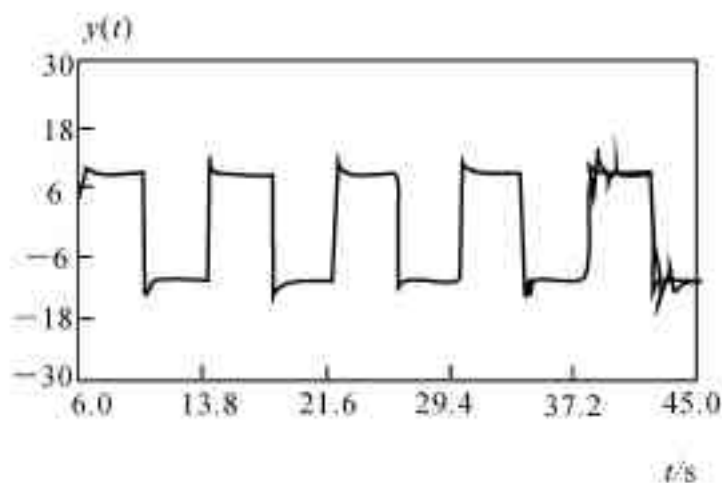


图 10.4-2 加入均值为零方差为 0.5 白噪声  
随机干扰时混合自校正控制系统  
输出曲线 (图中方波为指令信号)

本节中的控制方案和对对象中随机干扰噪声的假设是根据战术导弹的工程实践提出来的一种简化方法。对于战术导弹, 尤其是地空导弹, 解决在高空小阻尼情况下的指令信号的跟踪问题是主要目标, 而控制系统本身所存在的随机干扰影响不是主要问题。由于本节中的方案在参数辨识和控制信号形成时所采用的变量基本上都经过滤波, 因而这种方案对于抑制控制系统中干扰的影响是十分有利的, 足可以满足实际工程要求。至于由导弹制导部分所产生的诸如角闪烁之类的噪声, 建议在导引头的设计中用其它方法进行消除。

当然, 我们也可以象离散系统那样考虑更为一般的噪声模型并且直接对  $C(q^{-1})$  的系数进行辨识, 但由于  $\xi(t)$  是不可测的, 只能用相应的残差来代替  $\xi(t)$  进行辨识。在离散系统中, 由于  $q^{-1}$  表示时间延迟, 辨识  $C(q^{-1})$  的参数是可行的。但在混合控制系统中,  $q^{-1}$  为滤波器, 对于战术导弹控制系统来说, 滤波后的残差可能无法满足辨识所需的持续激励条件, 要准确辨识

$C(q^{-1})$  的参数是困难的。最主要的问题还在于  $C(q^{-1})$  的出现会使所导出的混合最优控制律变得十分复杂,使得工程上难以实现。当然,对于混合自适应控制理论的研究来说,这是一个值得进一步研究的问题,但已不属于本节的研究范围。

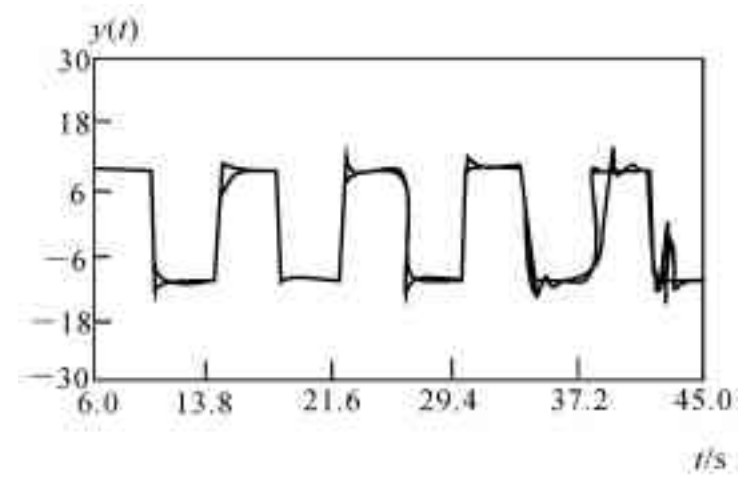


图 10.4-3 加入有色噪声随机干扰时混合自校正控制系统输出曲线(图中波为指令信号)

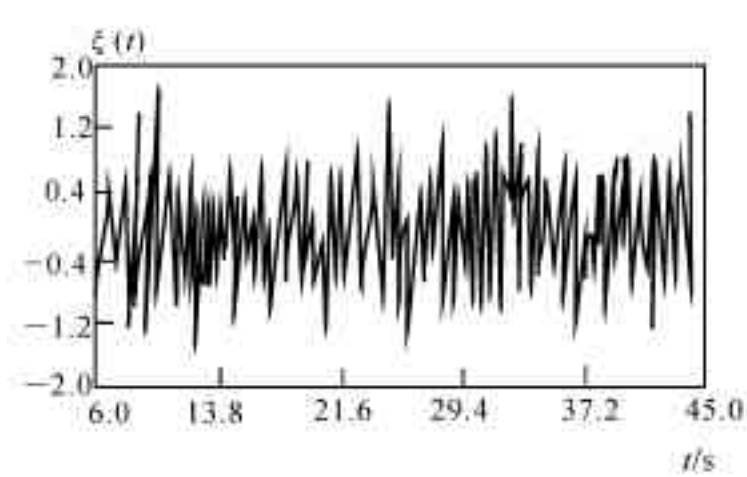


图 10.4-4 仿真时加入的均值为零方差为 0.5 白噪声随机干扰图形

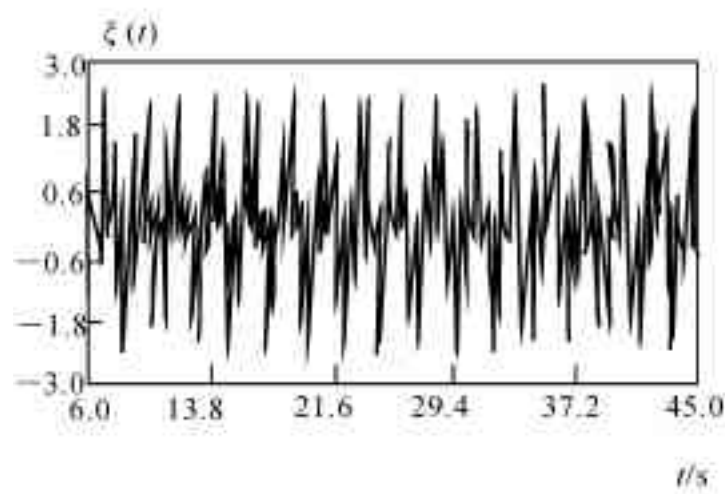


图 10.4-5 仿真时加入的有色噪声随机干扰图形

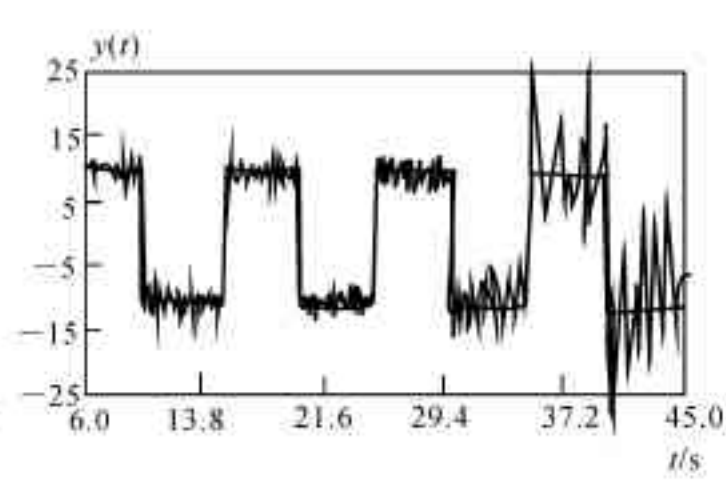


图 10.4-6 加入均值为零方差为 0.1 白噪声随机干扰时全离散自校正控制系统输出曲线(方波为指令信号)

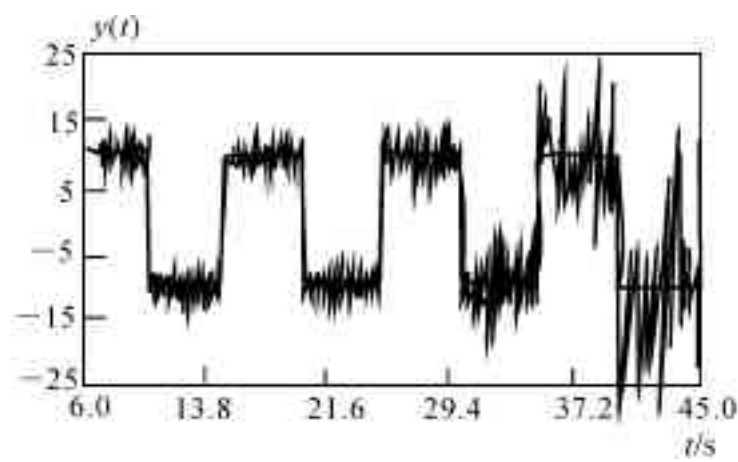


图 10.4-7 加入均值为零方差为 0.5 白噪声随机干扰时全离散自校正控制系统输出曲线(方波为指令信号)

## § 10.5 高精度激光跟踪系统的综合设计

激光跟踪系统是航空航天工程中的重要设备之一。要想建造高精度激光跟踪系统,除了提高有关部件的精度之外,系统的综合设计是一个关键步骤。对于这类系统的综合设计,目前都采用全连续或全离散控制方案,而且不考虑对象未建模动态和子系统间的耦合问题。

本节介绍利用混合自适应控制理论进行高精度激光跟踪系统综合设计的一种方法。这种方法将子系统间的耦合转换为对象的未建模动态进行处理,可以保证系统的跟踪误差趋于零。

### 1. 对象模型及简化

经简化后的某激光跟踪系统方案如图 10.5-1 所示。

由于系统中的两个通道是完全对称的,并且四个框架分别进行驱动,在此只研究方位通道中的内框架控制系统,介绍内框架混合自适应控制器设计方案。当然,外框架的运动对内框架是有影响的,这种内外框架间的耦合作用将作为一个重要因素加以考虑。

作为控制对象的激光跟踪系统内框架部分的方块图如图 10.5-2 所示。

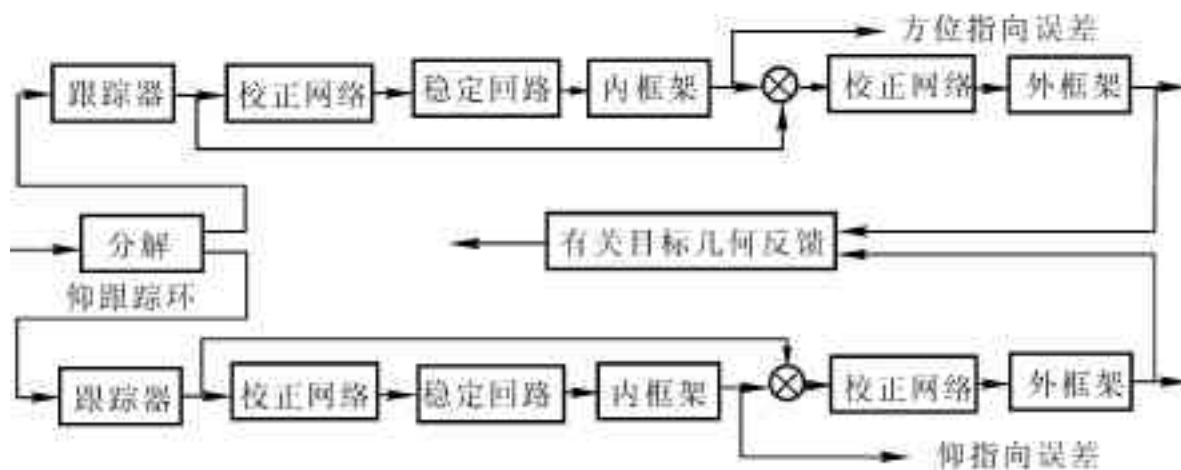


图 10.5-1 激光跟踪系统简化的结构图

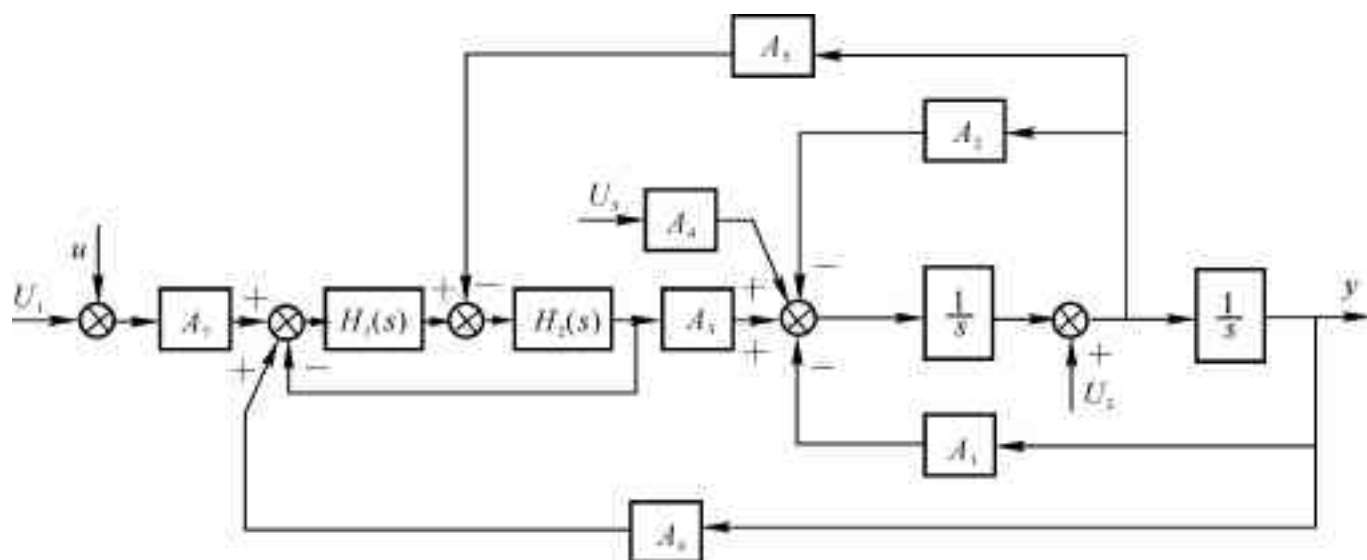


图 10.5-2 激光跟踪系统内框架部分方块图

图中各符号定义为:  $\frac{1}{s}$ : 积分环节, 两串联积分环节表示内框架;  $H_1(s)$ ,  $H_2(s)$ : 液压回路传递函数;  $u$ : 将要加入的自适应控制信号;  $U_1$ : 由稳定回路输入的指令性内框架矩;  $U_2$ : 外框架运动对内框架的耦合作用;  $U_3$ : 由于内框架的不平衡所引起的线性加速度干扰;  $A_1$ : 内框架弹性力增益;  $A_2$ : 内框架阻尼;  $A_3$ : 输入力矩转换器的液压;  $A_4$ : 加速度干扰力臂长度;  $A_5$ : 框架运动与液压组件之间的液压流动耦合增益;  $A_6$ : 弹性抵消项;  $A_7$ : 电子放大器增益;  $y$ : 系统输出。

对象中的具体参数为:  $A_3 = 0.0056$ ,  $A_7 = 178.27$ ,

$$H_1(s) = \frac{0.0024(5.414 \times 10^{-4}s + 1)}{5.88 \times 10^{-3}s + 1}, \quad H_2(s) = \frac{3333.3}{0.00379s + 1}$$

其它参数均无法准确测定, 其参考值分别为:  $A_1 = 353.64$ ,  $A_2 = 62.59$ ,  $A_4 = 1$ ,  $A_5 = 3.5$ ,  $A_6 = 56835.77$ 。为使系统增益与参考模型增益保持一致, 在对象的前向通路中需加接一增益为 461.4 的放大器, 则对象模型可简化为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W_p(s) = \frac{400}{s^2 + 8.2593s + 353.64} \quad (10.5-1)$$

在这种情况下,  $U_2$  和  $U_3$  与输出  $y$  之间的关系可分别表示为

$$\frac{y(s)}{U_2(s)} = \frac{s}{s^2 + 8.2593s + 353.64} \quad (10.5-2)$$

$$\frac{y(s)}{U_3(s)} = \frac{1}{s^2 + 8.2593s + 353.64} \quad (10.5-3)$$

在进行混合自适应控制器设计时, 将外框架对内框架的耦合作用  $U_2$  以及内框架不平衡所引起的加速度干扰  $U_3$  作为对象的未建模动态进行处理。

## 2. 混合自适应控制器设计

本节所采用的混合自适应控制器设计原理在第七章中已进行过详细的介绍并给出了控制方案的鲁棒稳定性证明。为了保持叙述的完整性, 现对与本节有直接关系的内容作一简要回顾。

考虑单输入单输出对象

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_0(s)[1 + \mu\Delta_2(s)] + \mu\Delta_1(s) \quad (10.5-4)$$

式中  $G_0(s) = K_p Z_0(s)/R_0(s)$  是对象已建模部分的传递函数。 $G(s)$  是严格真的,  $\mu\Delta_1(s)$  和  $\mu\Delta_2(s)$  分别是对象的相加和相乘未建模动态, 正标量参数  $\mu$  表示其变化率。 $Z_0(s)$  是首一  $m$  阶 Hurwitz 多项式,  $R_0(s)$  是首一  $n$  阶多项式,  $n > m$ ,  $K_p > 0$ 。对于对象的未建模动态, 假定: (i)  $\Delta_1(s)$  是严格真稳定传递函数; (ii)  $\Delta_2(s)$  是稳定传递函数; (iii) 使  $\Delta_1(s-p)$  和  $\Delta_2(s-p)$  的极点稳定的稳定余度  $p > 0$  的下界  $p_0$  是已知的。

利用对象的输入  $u(t)$  和输出  $y(t)$  产生  $(n-1)$  维辅助向量  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  及  $(2n-1)$  维辅助向量  $\omega$

$$\omega_1 = F\omega_1 + qu, \quad \omega_2 = F\omega_2 + qy, \quad \omega^T = [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y] \quad (10.5-5)$$

式中  $F$  是  $(n-1) \times (n-1)$  稳定矩阵,  $q$  为  $(n-1)$  维向量,  $(F, q)$  为可控对。

取对象的控制输入为

$$u(t) = \theta_k^T \omega(t) + c_k r(t), \quad k \in N \quad (10.5-6)$$

式中  $k$  表示时刻  $t_k$ ,  $\theta_k^T = [\theta_{1k}^T \quad \theta_{2k}^T \quad \theta_{3k}^T]$  是  $(2n-1)$  维控制参数向量,  $c_k$  是标量前馈增益。在区间  $[t_k, t_{k+1})$  上,  $\theta_k$  和  $c_k$  皆为常值, 控制参数  $\theta_k$  和  $c_k$  仅仅在离散时刻  $t_k$  进行调整。

选取参考模型

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = W_m(s) = \frac{K_m}{D_m(s)} \quad (10.5-7)$$

式中  $D_m(s)$  是首一  $n^*$  阶 Hurwitz 多项式,  $n^* = n - m$ ,  $r(t)$  是一致有界参考输入信号。

令  $e(t) = y(t) - y_m(t)$ , 当  $K_m = K_p = 1$  时, 则有

$$e = W_m(s) \Phi_k^T \omega + \mu \Delta(s) u \quad (10.5-8)$$

式中  $\Phi_k = \theta_k - \theta^*$ ,  $\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^*]$  为理想控制参数向量,

$$\Delta(s) = \Delta_1(s) + W_m(s) [\theta_3^* + \theta_2^{*T} (sI - F)^{-1}] q \Delta_1(s) + W_m(s) \Delta_1(s) [1 - \theta_1^{*T} (sI - F)^{-1} q]$$

引入辅助信号  $y_a(t)$

$$y_a = -\theta_k^T W_m(s) \omega + W_m(s) \theta_k^T \omega \quad (10.5-9)$$

并且令  $\zeta = W_m(s) \omega$ ,  $\eta = \Delta(s) u$ , 则增广误差

$$e_1(t) = e(t) - y_a(t) = \Phi_k^T \zeta(t) + \mu \eta(t) \quad (10.5-10)$$

在稳态情况下, 采用  $e_1(t)$  与  $e(t)$  没有什么区别, 但在暂态过程中, 采用  $e_1(t)$  有助于改善系统性能。

将方程式(10.5-10) 等号两边同除以  $m(t)$ , 然后在区间  $[t_k, t_{k+1}]$  上进行积分, 得

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{e_1(\tau)}{m(\tau)} d\tau = \Phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(\tau)}{m(\tau)} d\tau + \mu \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\eta(\tau)}{m(\tau)} d\tau \quad (10.5-11)$$

式中规范信号  $m(t)$  满足微分方程

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1 (|u(t)| + |y(t)| + 1), \quad m(0) \geq \delta_0 / \delta_1 \quad (10.5-12)$$

式中  $\delta_0$  和  $\delta_1$  为正的设计参数, 选择  $\delta_0$  满足不等式  $\delta_0 + \delta_2 \leq \min[p_0, q]$ ,  $\delta_2 \in R^+$ , 其中  $q > 0$  是使  $W_m(s - q)$  的极点和  $F + qI$  的特征值稳定的一个常数,  $p_0$  的定义已在前面给出。实际上, 这里所给出的参数选择原则纯粹是为了进行严格的系统稳定性证明, 在具体应用中, 这些参数的选择是相当灵活的, 也是很容易选取的。

令

$$\varepsilon_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{e_1(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \quad \zeta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\zeta(\tau)}{m(\tau)} d\tau, \quad \eta_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\eta(\tau)}{m(\tau)} d\tau$$

则式(10.5-11) 可以表示为

$$\varepsilon_k = \Phi_k^T \zeta_k + \mu \eta_k \quad (10.5-13)$$

根据式(10.5-13) 可以采用各种离散辨识算法对控制参数  $\theta_k$  进行实时估计, 从而实现式(10.5-6) 所示的控制律。

对于本节中的高精度激光跟踪系统来说,  $U_2$  和  $U_3$  的影响均作为  $\mu = 0.0028$  的相加未建模动态进行处理。

根据简化对象模型(10.5-1) 设计混合自适应控制器, 其方程为

$$(s + 20)u(t) = u(t), \quad (s + 20)y(t) = y(t) \quad (10.5-14)$$

$$u(t) = [h_0(k) + h(k)s]y(t) + K_0(k)u(t) + U_1(t) \quad (10.5-15)$$

选取参考模型

$$\frac{y_m(s)}{U_1(s)} = 400 / (s^2 + 28s + 400) \quad (10.5-16)$$

则有

$$(s^2 + 28s + 400)u(t) = u(t) \quad (10.5-17)$$

$$(s^2 + 28s + 400)y(t) = y(t) \quad (10.5-18)$$

$$\xi^T(t) = [y(t) \quad sy(t) \quad u(t)] \quad (10.5-19)$$

$$\varepsilon_i(t) = y(t) - y_m(t) \quad (10.5-20)$$

选取  $\delta_0 = 0.7$ ,  $m(0) = 2$ ,  $T_k = t_{k+1} - t_k = 0.2$  s, 采用最简单的梯度法进行参数辨识

$$\theta_{k+1} = \theta_k - a \zeta_k \varepsilon_k / (1 + \zeta_k^T \zeta_k) \quad (10.5-21)$$

式中  $a = 44225.0$ ,  $\theta_k^T = [h_0(k) \quad h_1(k) \quad K_0(k)]$ 。

### 3. 数字仿真结果

进行数字仿真时, 对象全部按图 10.5-2 所示方块图进行仿真, 并考虑了摩擦力的影响, 所加入的指令性信号为  $U_1(t) = 10\sin(0.5t)$ 。未加入自适应控制器时系统跟踪误差为一正弦曲线, 振幅约为 0.15, 始终无法使跟踪误差趋于零。而加入自适应控制器后的跟踪误差曲线如图 10.5-3 所示, 可以看到, 系统的跟踪误差

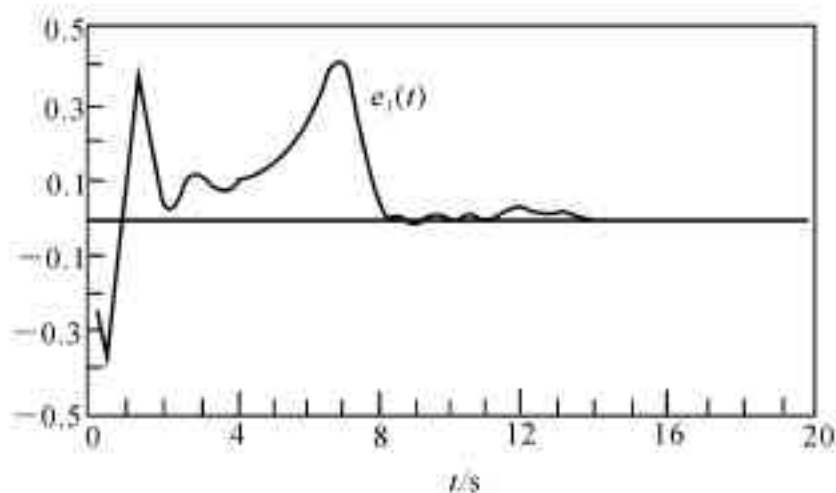


图 10.5-3 系统跟踪误差  $e_1(t)$  曲线

很快趋于零。在仿真时, 我们曾取控制参数向量初值  $\theta^T = [0 \ 0 \ 0]$ ,  $\theta^T = [15.039 \ -0.6697 \ -19.7]$  等, 均获得了理想的结果, 表明混合自适应控制能使系统实现高精度跟踪。

## § 10.6 空间站的混合自适应控制

空间站是大型空间结构, 具有柔性结构的特征, 例如, 它属于分布参数系统, 其阻尼系数和模态频率与空间站的运动和结构有关, 存在控制溢出和测量溢出等。此外, 当飞船与空间站对接时, 整个系统不仅要受到一个很大的冲击力作用, 而且其质量也同时发生很大变化。对于这样的系统, 一般的控制方法是难以保证空间站的性能要求。

参考文献[6] 利用有限元法建立了两板空间站在模态坐标下的状态方程, 研究了空间站的自适应控制问题。由于参考文献[6] 的所有算法都是连续时间算法, 不便于微机实现。参考文献[7] 在参考文献[6] 的基础上, 提出了一种便于微机实现的多变量极点配置混合自适应控制算法。本节所介绍的主要是文献参考[7] 所提出的空间站混合自适应控制方案。

### 1. 两板空间站数学模型

本节所研究的空间站具有两块太阳能帆板, 每块长 76.2 m, 宽 12.2 m, 地面重量为 1816 kg, 空间站总地面重量为 60836 kg。参考文献[6] 给出了两板空间站的有限元模型和有关参数(如图 10.6-1 所示)。根据这个有限元模型, 得到空间站的运动方程

$$MZ_p + KZ_p = f = Bu_p \quad (10.6-1a)$$

$$y_p = C(\alpha Z_p + Z_p) \quad (10.6-1b)$$

式中

$$Z_p = [\zeta_1 \quad \theta_1 \quad \zeta_2 \quad \theta_2 \quad \zeta_3 \quad \theta_3]^T$$

$$f = [F_1 \quad T_1 \quad F_2 \quad T_2 \quad F_3 \quad T_3]^T$$

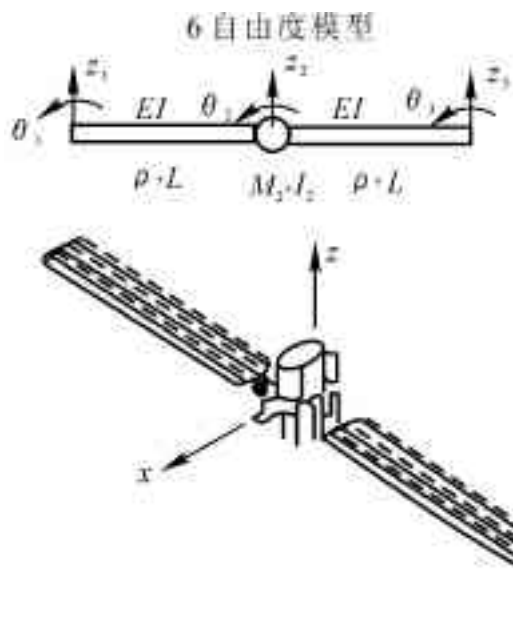


图 10.6-1 两板结构的有限元模型

太阳能板

$$(EI) = 3.998 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$L = 76.2 \text{ m}$$

$$\rho = 23.8 \text{ kg/m}$$

心站

$$M_2 = 5.699 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$I_2 = 3.918 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$M$ 为总的系统质量矩阵,  $K$ 为刚度矩阵,  $B$ 为  $6 \times m$  控制作用矩阵,  $C$ 为  $m \times 6$  测量分布矩阵,  $\alpha$ 为位置相对速率加权系数,  $u_p$  和  $y_p$  分别是  $m$  维的控制输入向量和输出向量,  $z_1$  和  $z_3$  为两块帆板顶端的位移量,  $\theta_1$  和  $\theta_3$  为帆板顶端的弯曲角,  $\theta_2$  和  $z_2$  分别为站心的转动角和位移量。  $F_1$ ,  $F_2$  和  $F_3$  分别为作用在三个点上的力,  $T_1$ ,  $T_2$  和  $T_3$  分别为作用在这三个点上的力矩。

为了得到空间站在模态坐标下的状态方程, 引入变换  $Z_p = \Phi \eta$ , 其中  $\eta$  为模态幅值向量,  $\Phi$  为规范特征向量矩阵, 且满足方程

$$\Phi^T M \Phi = I, \quad \Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (10.6-2)$$

式中  $I$  为单位阵,  $\Lambda$  为对角特征值矩阵, 即

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \cdots \quad \omega_6^2)$$

式中  $\omega_1$  到  $\omega_6$  为空间站的 6 个模态频率, 分别为 0 Hz, 0 Hz, 0.04 Hz, 0.0637 Hz, 0.3885 Hz 和 0.3947 Hz。由式(10.6-1) 及式(10.6-2) 得

$$\ddot{\eta} + \Lambda \eta = \Phi^T B u_p \quad (10.6-3a)$$

$$y_p = C \Phi (\alpha \dot{\eta} + \eta) \quad (10.6-3b)$$

考虑阻尼因素, 在上式中加入阻尼项得到

$$\ddot{\eta} + \text{diag}[2\xi_1 \omega_1 \quad \cdots \quad 2\xi_6 \omega_6] \dot{\eta} + \text{diag}[\omega_1^2 \quad \cdots \quad \omega_6^2] \eta = \Phi^T B u_p \quad (10.6-4a)$$

$$y_p = C \Phi (\alpha \dot{\eta} + \eta) \quad (10.6-4b)$$

式中  $\xi_1$  到  $\xi_6$  为与空间站 6 个模态相对应的阻尼系数。

下面推导空间站传递矩阵的左分解形式。首先, 选择控制输入向量

$$u_p = [u_{p1} \quad u_{p2} \quad u_{p3} \quad u_{p4}]^T = [T_1 \quad F_2 \quad T_2 \quad T_3]^T \quad (10.6-5)$$

和输出向量

$$y_p = [y_{p1} \quad y_{p2} \quad y_{p3} \quad y_{p4}]^T = \alpha [\theta_1 \quad z_2 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T + [\theta_1 \quad z_2 \quad \theta_2 \quad \theta_3] \quad (10.6-6)$$

假定传感器和执行机构是同位配置的, 则

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = B^T \quad (10.6-7)$$



由于空间站的后两个模态频率值是前四个的 5 倍以上,因而可将这后两个模态看作高频模态,而将前四个模态看作主模态。令

$$C \Phi = \begin{bmatrix} 4 \times 4 & 4 \times 2 \\ \Phi_{11} & \Phi_{12} \end{bmatrix}, \quad \Phi^T B = [\Phi_{11} \mid \Phi_{12}]^T \quad (10.6-8)$$

将式(10.6-8)代入式(10.6-4),并利用  $\Phi_{11}$  的可逆性,经整理得

$$A(s)y_p = B(s)u_p + e_p \quad (10.6-9)$$

式中

$$\begin{aligned} A(s) &= s^2 I + A_1 s + A_2, & B(s) &= B_1 s + B_2 \\ e_p &= (s + \alpha) A(s) \Phi_{12} W^{-1} \Phi_{12} u_p \\ A_1 &= \Phi_{11} \begin{bmatrix} 2\xi\omega & 0 \\ & w \\ 0 & 2\xi\omega_4 \end{bmatrix} \Phi_{11}^{-1}, & A_2 &= \Phi_{11} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ & w \\ 0 & \omega_4^2 \end{bmatrix} \Phi_{11}^{-1} \\ B_1 &= \Phi_{11} \Phi_{11}^T, & B_2 &= \alpha \Phi_{11} \Phi_{11}^T \\ W &= \text{diag}[s^2 + 2\xi_5 \omega_5 s + \omega_5^2 \quad s^2 + 2\xi_6 \omega_6 s + \omega_6^2] \end{aligned}$$

式(10.6-9)是空间站传递矩阵的左分解形式,也是降阶输入输出模型,包含一个由高频模态所产生的与输入向量有关的干扰向量  $e_p$ 。

## 2. 自适应控制器设计

假定不存在干扰项  $e_p$ , 则

$$A(s)y_p = B(s)u_p \quad (10.6-10)$$

选取控制律

$$u_p = F(s)E^{-1}(s)(r - y_p) \quad (10.6-11)$$

式中  $r$  为参考输入向量,  $F(s)$  和  $E(s)$  为待定的多项式矩阵。

将式(10.6-11)代入式(10.6-10)得系统的闭环方程

$$[A(s)E(s) + B(s)F(s)]E^{-1}(s)y_p = B(s)F(s)E^{-1}(s)r \quad (10.6-12)$$

控制器设计的目的是通过选择多项式  $E(s)$  和  $F(s)$  将系统的极点配置到期望的位置,即

$$A(s)E(s) + B(s)F(s) = T(s) \quad (10.6-13)$$

式中  $T(s)$  为所期望的闭环极点多项式矩阵。如果  $A(s)$  和  $B(s)$  右互质,则一定存在多项式矩阵  $E(s)$  和  $F(s)$  使式(10.6-13)成立,而且  $[E(s)]$  和  $[F(s)]$  都为 1,  $[\ ]$  表示取多项式矩阵的最高阶次。令

$$E(s) = sI + E_1, \quad F(s) = F_0 s + F_1 \quad (10.6-14a)$$

$$T(s) = s^3 I + T_1 s^2 + T_2 s + T_3 \quad (10.6-14b)$$

由式(10.6-13)可得关系式

$$A_1 + E_1 + B_1 F_0 = T_1 \quad (10.6-15a)$$

$$A_2 + A_1 E_1 + B_2 F_0 + B_1 F_1 = T_2 \quad (10.6-15b)$$

$$A_2 E_1 + B_2 F_1 = T_3 \quad (10.6-15c)$$

当  $A_1, A_2, B_1, B_2, T_1, T_2$  和  $T_3$  已知时,由上式可求出控制器的参数矩阵  $E_1, F_0$  和  $F_1$ ;当  $A_1, A_2, B_1$  和  $B_2$  未知时,就要先估计对象的这些参数矩阵,然后才能利用式(10.6-15)求解控制器的参数矩阵。

引入滤波器

$$J(s)y_f = y_p, \quad J(s)u_f = u_p, \quad J(s)e_f = e_p \quad (10.6-16)$$

式中  $J(s) = j(s)I = s^2 I + J_1 s + J_2$ , 这种形式的  $J(s)$  可与任意相同维数的方阵互换。在式 (10.6-9) 等号两边同时加上  $J(s)y_p$ , 经整理后得到

$$y_p = (J_1 - A_1)y_f + (J_2 - A_2)y_f + B_1 u_f + B_2 u_f + e_f \quad (10.6-17)$$

式中  $y_f, y_p, u_f$  和  $u_p$  都是滤波器的输出量, 可直接获取。式 (10.6-17) 可写成乘积形式

$$y_p = \theta^T z + e_f \quad (10.6-18)$$

式中

$$\theta = [J_1 - A_1 \quad J_2 - A_2 \quad B_1 \quad B_2]^T \quad (10.6-19a)$$

$$z = [y_f^T \quad y_f^T \quad u_f^T \quad u_f^T]^T \quad (10.6-19b)$$

设  $y_p$  的估值为  $\hat{y}_p$ , 且

$$\hat{y}_p = \theta_k^T z \quad (10.6-20)$$

式中  $\theta_k$  表示在  $kT$  时刻  $\theta$  的估值,  $T$  为采样间隔。则误差方程为

$$e_k = y_{pk} - \hat{y}_{pk} = y_{pk} - \theta_k^T z_k \quad (10.6-21)$$

式中下标  $k$  表示  $kT$  时刻。

当  $e_f$  为零或零均值白噪声向量时, 利用递推最小二乘法可得到  $\theta$  的一致性无偏估计。然而, 对于本节中的系统,  $e_f$  是由建模误差引起的非零干扰, 会引起参数估值漂移。为解决这一问题, 在标准递推最小二乘法中引入了死区函数, 即

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{D[e_k, d\rho_k]}{\rho_k + z_k^T P_k z_k} z_k^T P_k \quad (10.6-22a)$$

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k z_k z_k^T P_k}{\rho_k + z_k^T P_k z_k} \quad (10.6-22b)$$

$$\rho_k = \mu \rho_{k-1} + \max(\|z_k\|^2, \rho), \quad \rho > 0, \quad 1 > \mu > 0 \quad (10.6-22c)$$

$$D[e_k, d\rho_k] = \begin{cases} 0, & \text{若 } \|e_k\|^2 \leq d\rho_k \\ e_{ik} - \text{sign}(e_{ik})d\rho_k, & i = 1, 2, 3, 4 \text{ 其它} \end{cases} \quad (10.6-22d)$$

式中  $\rho_k$  为规范信号,  $D(\cdot, \cdot)$  为死区函数,  $d$  和  $\rho$  都是正常数,  $e_{ik}$  表示  $e_k$  的第  $i$  个分量。

### 3. 数字仿真结果

在进行空间站混合自适应控制系统数字仿真时, 主要是考虑了受初始干扰作用和与飞船对接两种情况。

#### (1) 受初始干扰作用

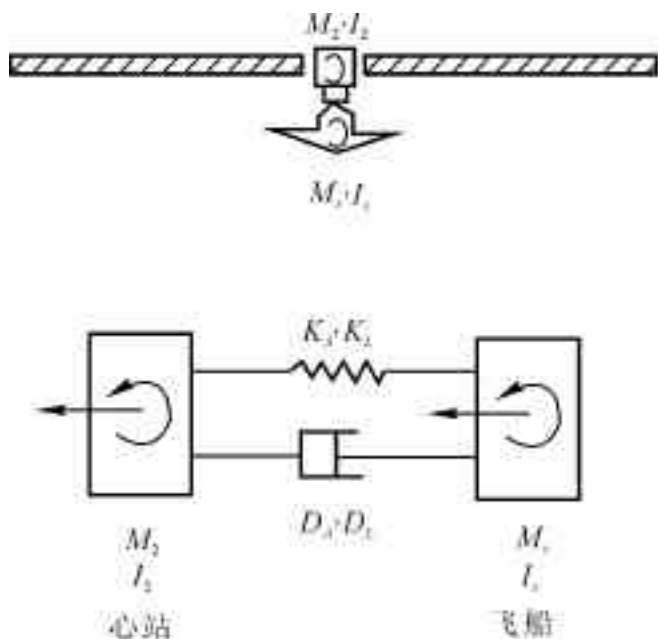
假定空间站各测量点的初始值为:  $z_1 = -1.127 \text{ m}$ ,  $z_2 = 0.105 \text{ m}$ ,  $z_3 = 1.241 \text{ m}$ ,  $\dot{z}_1 = -0.267 \text{ m/s}$ ,  $\dot{z}_2 = 0.011 \text{ m/s}$ ,  $\dot{z}_3 = 0.319 \text{ m/s}$ ,  $\theta_1 = 0.869^\circ$ ,  $\theta_2 = 0.937^\circ$ ,  $\theta_3 = 0.723^\circ$ ,  $\dot{\theta}_1 = 0.336^\circ/\text{s}$ ,  $\dot{\theta}_2 = 0.037^\circ/\text{s}$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0.387^\circ/\text{s}$ 。

#### (2) 与飞船对接

参考文献[6]所给出的飞船与空间站对接模型及有关参数如图 10.6-2 所示, 对接力  $F_d$  和对接力矩  $T_d$  满足关系式

$$F_d = D_L(z_s - z_2) + K_L(z_s - z_2) \quad (10.6-23a)$$

$$T_d = D_A(\theta_s - \theta_2) + K_A(\theta_s - \theta_2) \quad (10.6-23b)$$



对接系统参数

质量和惯量

$$I_s = 3.93 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = 1.02 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$M_2 = 5.72 \times 10^4 \text{ kg}$$

$$M_s = 1.14 \times 10^5 \text{ kg}$$

图 10.6-2 飞船对接示意图与系统参数

飞船的运动方程为

$$\ddot{z}_s = -F_d / M_s, \quad \ddot{\theta}_s = -T_d / I_s \quad (10.6-24)$$

式中  $z_s$  和  $\theta_s$  分别为飞船的位移与转动角,  $M_s$  和  $I_s$  分别为飞船的质量和转动惯量。对接时, 空间站不仅受到控制向量  $u_p$  的作用, 而且还受到对接力  $F_d$  和力矩  $T_d$  的作用, 实际作用到空间站的输入向量  $u_p$  为

$$u_p = u_p + [0 \quad F_d \quad T_d \quad 0]^T = [u_1 \quad u_2 + F_d \quad u_3 + T_d \quad u_4]^T \quad (10.6-25)$$

这使得空间站与飞船构成一个复合运动体。假设对接前飞船的残余速率为  $\dot{z}_s(0) = 0.015 \text{ m/s}$ ,  $\dot{\theta}_s(0) = 0.2^\circ/\text{s}$ , 空间站的所有初始状态都为零。对接参数  $D_L, K_L, D_A$  和  $K_A$  的取值为:  $D_L = 3.445 \times 10^3 \text{ kg/(m/s)}$ ,  $K_L = 1.531 \times 10^3 \text{ kg/m}$ ,  $D_A = 2.574 \times 10^6 \text{ (m/kg)/(rad/s)}$ ,  $K_A = 1.142 \times 10^7 \text{ m/kg/rad}$ 。

在以上两种情况的仿真中, 期望的闭环极点多项式矩阵选为  $T(s) = (s + 0.5)^3 I$ , 滤波器的多项式  $j(s) = (s + 1)^2$ , 调参间隔  $T = 0.1 \text{ s}$ , 输出向量定义为  $y_p = [\theta_1 \quad z \quad \theta_2 \quad \theta]^T$ 。  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , 估计参数个数为  $4 \times 12 = 48$ 。方程式(10.6-15)简化为

$$A_1 + E_1 = T_1 \quad (10.6-26a)$$

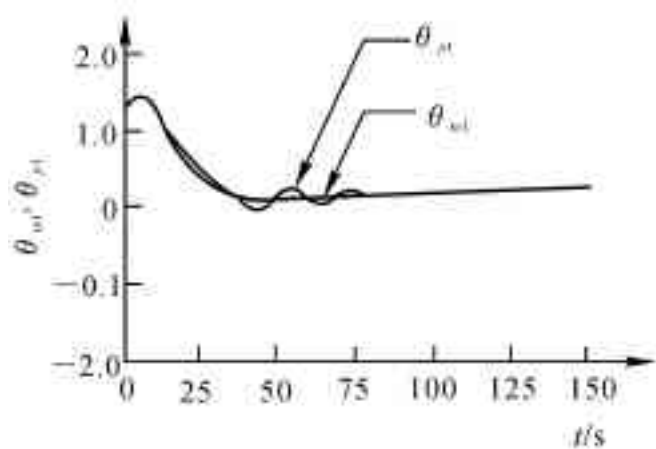
$$A_2 + A_1 E_1 + B_2 F_0 = T_2 \quad (10.6-26b)$$

$$A_2 E_1 + B_2 F_1 = T_3 \quad (10.6-26c)$$

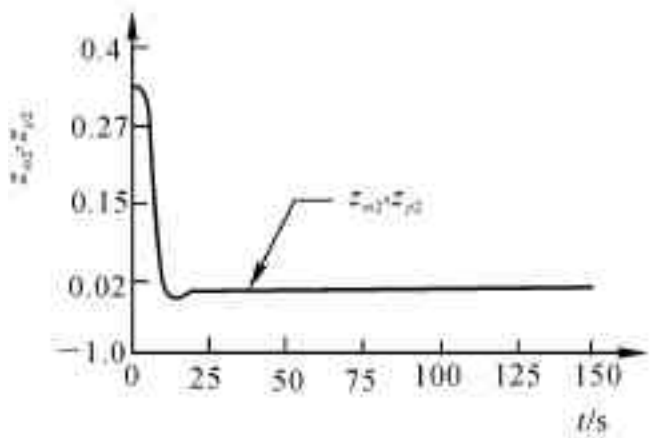
数字仿真结果如图 10.6-5 和图 10.6-6 所示。

由数字仿真结果可以看出: (i) 引入混合自适应控制后, 空间站能很快消除初始干扰的影响; (ii) 在对接情况下, 空间站的所有状态在 50 s 内都能收敛至零状态; (iii) 与飞船对接, 空间站需要较长时间才能稳定; (iv) 与参考文献[6]的结果(图 10.6-3 和图 10.6-4) 相比, 在相同的条件下, 本节所介绍的方案使空间站稳定所需要的调整时间短一些。可见本节所介绍的空间站多变量极点配置混合自适应控制系统设计方法是可行的, 能消除空间站的高频模态、飞船对接效应及初始状态干扰的影响, 可保证空间站的动态品质满足要求, 同时也便于工程实现。

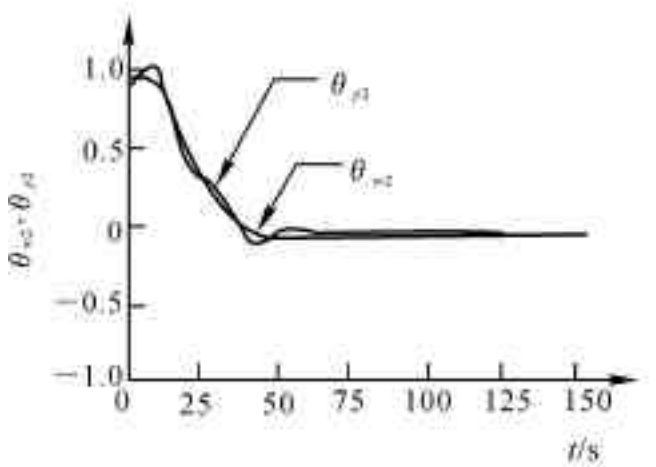
自适应控制在工业过程控制和其它方面有很多成功的应用例子, 可参阅有关文献资料。



(a)

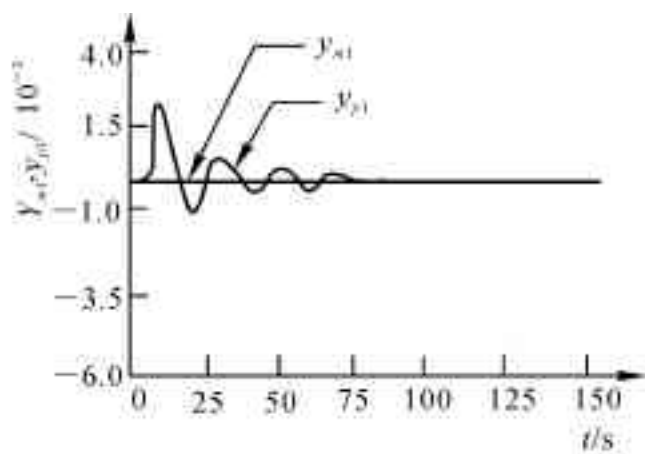


(b)

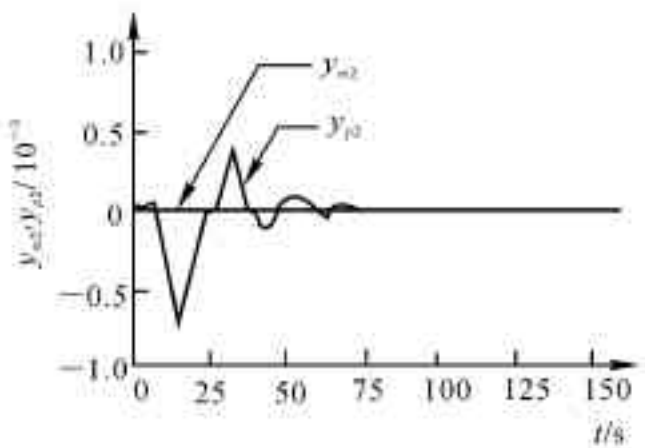


(c)

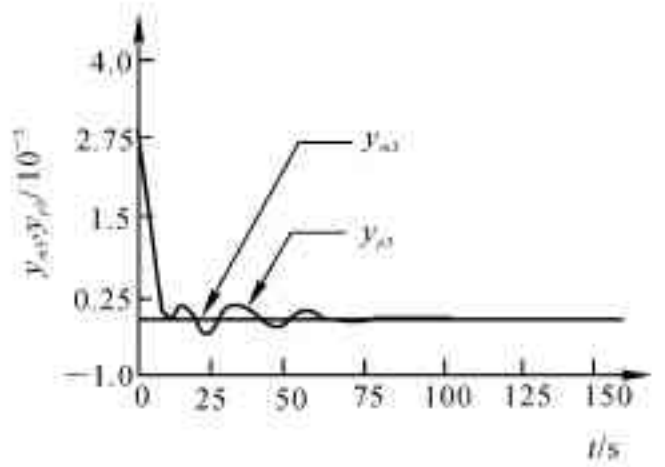
图 10.6-3 初始干扰作用下参考文献[6]的仿真结果



(a)

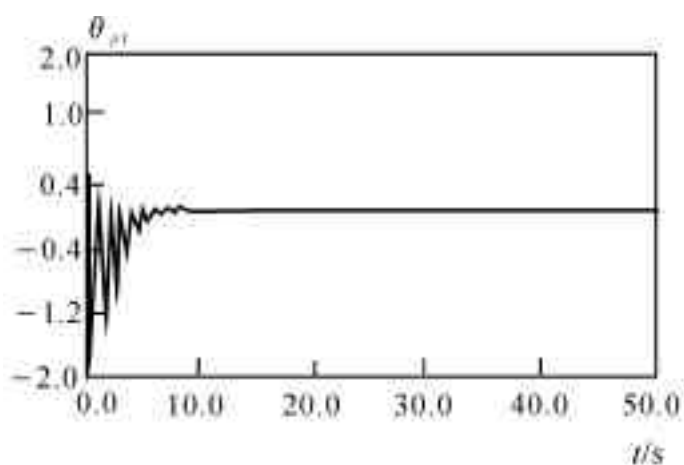


(b)

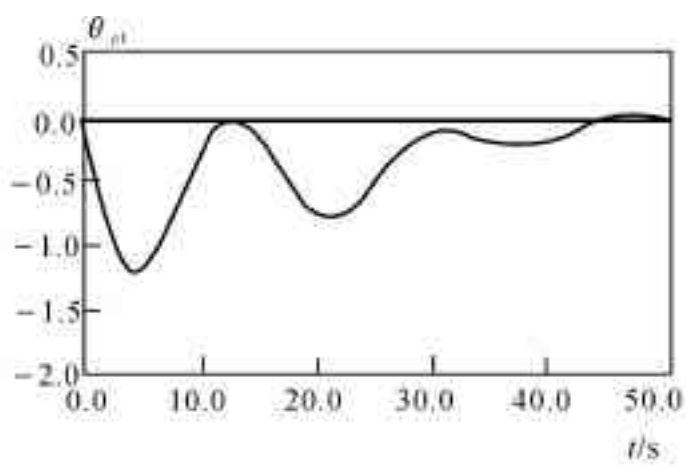


(c)

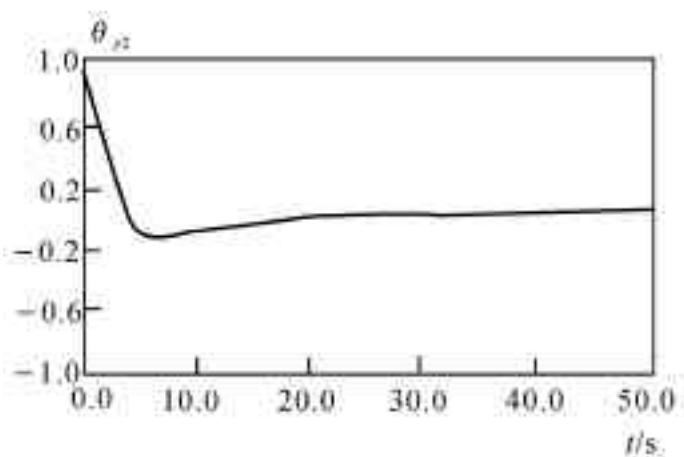
图 10.6-4 对接情况下参考文献[6]的仿真结果



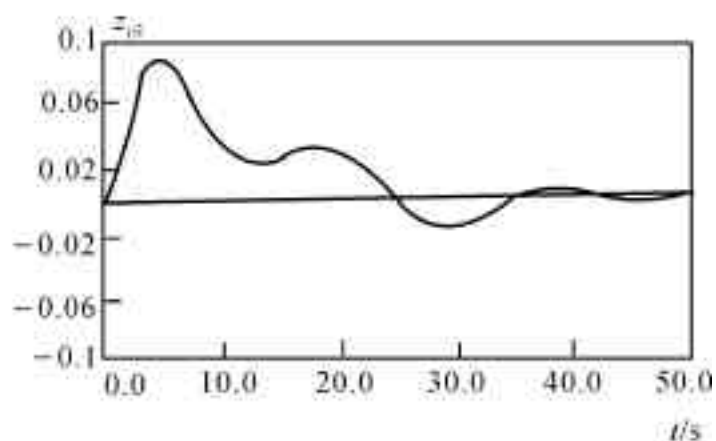
(a)



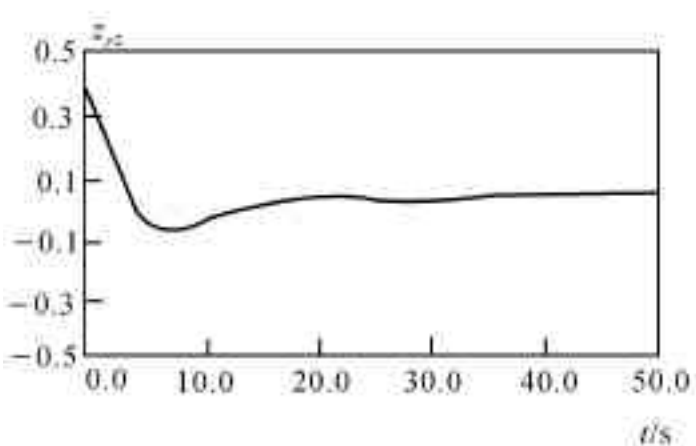
(a)



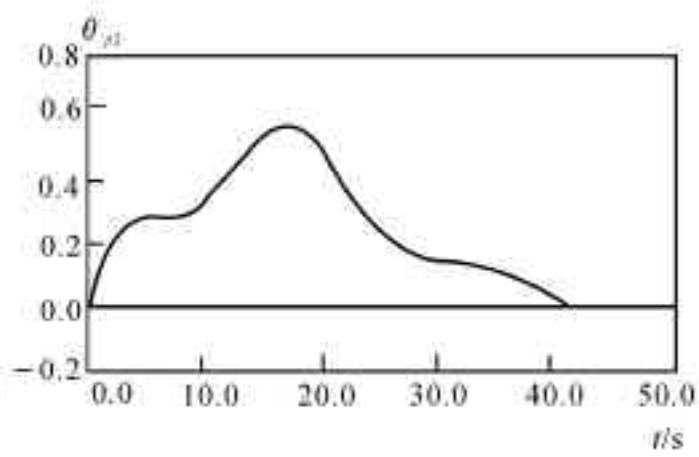
(b)



(b)



(c)



(c)

图 10.6-5 初始干扰作用下混合自适应控制仿真结果

图 10.6-6 对接情况下混合自适应控制仿真结果

### 参 考 文 献

- 1 欧阳玲. 具有多输入和扰动作用的空-空导弹滚动通道的前馈/反馈自适应控制器. 宇航学报, 1994 (2)
- 2 周德云, 佟明安, 陈新海. 广义预测自适应控制器在导弹控制系统设计中的应用. 航空学报, 1992 13 (4)
- 3 周德云, 陈新海. 采用加权控制率的自适应广义预测控制器. 控制与决策, 1991(1)
- 4 李言俊, 陈新海. 导弹控制系统的随机混合自适应方案研究. 宇航学报, 1991 (2)

- 5 李言俊,陈新海. 高精度激光跟踪系统的综合设计. 航空学报,1991,12(7)
- 6 IhC .- H .C, Wang S J, Leondes C T . An Investigation of Adaptive Control Techniques for Space Stations . Proc . 1985 Amer . Contr . Conf ., 1985
- 7 鲍平安,张钟俊. 空间站的混合自适应控制. 宇航学报,1991 (3)