

平时作业 1

1160300314 朱明彦

November 11, 2019

1 作业要求

在第一步中，如果初始化 U 、 V 矩阵的元素为一个相同的数，那么这个数设置多少，可以最小化例子矩阵的 RMSE?

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & ? & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \\ u_{41} & u_{42} \\ u_{51} & u_{52} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} \end{bmatrix}$$

Figure 1: 作业要求

2 作业解答

设原始矩阵为 M ，分解后的矩阵为 U, V ，则 RMSE 的计算公式如下：

$$RMSE(M, U, V) = \sum_i^n \sum_j^m \sum_{M_{ij} \neq 0} \left(M_{ij} - \sum_k^d (U_{ik} \times V_{kj}) \right)^2$$

由于 U, V 均被初始化为同一值，所以设其为 x ，又有 $d = 2$ ，可以有

$$RMSE(M, U, V) = \sum_i^n \sum_j^m \sum_{M_{ij} \neq 0} (M_{ij} - 2x^2)^2$$

为了计算的简便，设 $y = 2x^2$ ，则有

$$RMSE(M, U, V) = \sum_i^n \sum_j^m \sum_{M_{ij} \neq 0} (M_{ij} - y)^2$$

对 $RMSE$ 求导有

$$\frac{dRMSE}{dy} = \sum_i^n \sum_j^m \sum_{M_{ij} \neq 0} (2y - 2M_{ij})$$

令 $\frac{dRMSE}{dy} = 0$, 将原始矩阵中的值带入后有

$$y = \frac{75}{23}$$

从而

$$x = \pm\sqrt{\frac{75}{46}}$$

所以当 $x = \pm\sqrt{\frac{75}{46}}$ 时, RMSE 取最小值.