形式语言与自动机理论

正则表达式

王春宇

计算机科学与技术学院
哈尔滨工业大学

- 正则表达式
  - 语言的运算
  - 正则表达式的递归定义
  - 运算符的优先级
  - 正则表达式示例
- 有穷自动机和正则表达式
- 正则表达式的代数定律

正则表达式

- 有穷自动机
  - 通过机器装置描述正则语言
  - 用计算机编写相应算法，易于实现
- 正则表达式
  - 通过表达式描述正则语言，代数表示方法，使用方便
  - 应用广泛 awk, sed
    - grep 工具 (Global Regular Expression and Print)
    - Emacs / Vim 文本编辑器
    - lex / flex 词法分析器
    - 各种程序设计语言 Python / Perl / Haskull / $\cdots$

语言的运算

设 L 和 M 是两个语言，那么

并 $$L \cup M = \{w \mid w \in L \text{ 或 } w \in M\}$$

连接 $$L \cdot M = \{w \mid w = xy,\ x \in L \text{ 且 } y \in M\}$$

幂 $$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$L^1 = L$$
$$L^n = L^{n-1} \cdot L$$

克林闭包 $$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

例 1. 若有语言 $L = \{0, 11\}$ 和 $M = \{\varepsilon, 001\}$, 那么

$$L \cup M = \{0, 11, \varepsilon, 001\} \qquad L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$LM = \{0, 0001, 11, 11001\} \qquad L^1 = \{0, 11\}$$

$$ML = \{0, 11, 0010, 00111\} \qquad L^2 = \{0, 11\}\{0, 11\}$$

$$= \{00, 011, 110, 1111\}$$

例 2. 对于空语言 $\emptyset$

$$\emptyset^0 =$$

$$\forall n \geq 1, \quad \emptyset^n =$$

$$\emptyset^* =$$

四则运算表达式的**递归定义**:

1. 任何数都是四则运算表达式;
2. 如果 a 和 b 是四则运算表达式, 那么

$$a+b,\ a-b,\ a\times b,\ a\div b \text{和} (a)$$

都是四则运算表达式.

$$3+6\times(5-2)$$

正则表达式的递归定义

定义

如果 Σ 为字母表，则 Σ 上的正则表达式递归定义为：

❶ $\emptyset$ 是一个正则表达式，表示空语言；
ε 是一个正则表达式，表示语言 $\{\varepsilon\}$；
$\forall a \in \Sigma$, $\mathbf{a}$ 是一个正则表达式，表示语言 $\{a\}$；

❷ 如果正则表达式 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 分别表示语言 R 和 S，那么

$$\mathbf{r}+\mathbf{s},\ \mathbf{rs},\ \mathbf{r}^*\ 和\ (\mathbf{r})$$

都是正则表达式，分别表示语言

$$R \cup S,\ R \cdot S,\ R^*\ 和\ R.$$

$\emptyset$

$a \quad L(a)=\{a\}$

$aa = \{a\}\{a\} = \{aa\}$

$(a+b) = \{a\} \cup \{b\}$
$= \{a, b\}$

$a+a = \{a\} \cup \{a\}$
$= \{a\} = a$

$a^* = \{a\}^*$
$= \{\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$(a+b)^* = \{a, b\}^* = \Sigma^*$

$a^*b^* = \{ \quad \}$

运算符的优先级

正则表达式中三种运算以及括号的优先级:

1. 首先，“括号”优先级最高;
2. 其次，“星”运算: $\mathbf{r}^*$;
3. 然后，“连接”运算: $\mathbf{rs}$, $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$;
4. 最后，“加”最低: $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, $\mathbf{r}\cup\mathbf{s}$;

例 3.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}+\mathbf{01}^* &= \mathbf{1}+(\mathbf{0}(\mathbf{1}^*)) \\
&\neq \mathbf{1}+(\mathbf{01})^* \\
&\neq (\mathbf{1}+\mathbf{01})^* \\
&\neq (\mathbf{1}+\mathbf{0})\mathbf{1}^* = \{1,0\}\{\varepsilon,1,11,111\} \\
&=
\end{aligned}
$$

例 4.

$1 \quad 1+0 \quad 1^* \quad 11010 \quad (1+0)^*$

E	$\mathbf{L}(E)$
$\mathbf{a}+\mathbf{b}$	$\mathbf{L}(\mathbf{a}) \cup \mathbf{L}(\mathbf{b}) = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
$\mathbf{bb}$	$\mathbf{L}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{L}(\mathbf{b}) = \{b\} \cdot \{b\} = \{bb\}$
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (a+b)^2 =$	$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^*(\mathbf{a}+\mathbf{bb})$	$\{a, b\}^*\{a, bb\} = \{a, b\}^*\{a\} \cup \{a, b\}^*\{bb\} =$ $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ 仅以 a 或 bb 结尾.$\}$
$\mathbf{1}+(\mathbf{01})^*$	$\{1, \varepsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$
$(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{01}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$	$\{x01y \mid x, y \in \{0, 1\}^*\}$

例 5. 给出正则表达式 $(\mathbf{aa})^*(\mathbf{bb})^*\mathbf{b}$ 定义的语言.

$$(aa)^* = (aa)^n \quad n \geq 0$$

$$= a^{2n} \quad n \geq 0$$

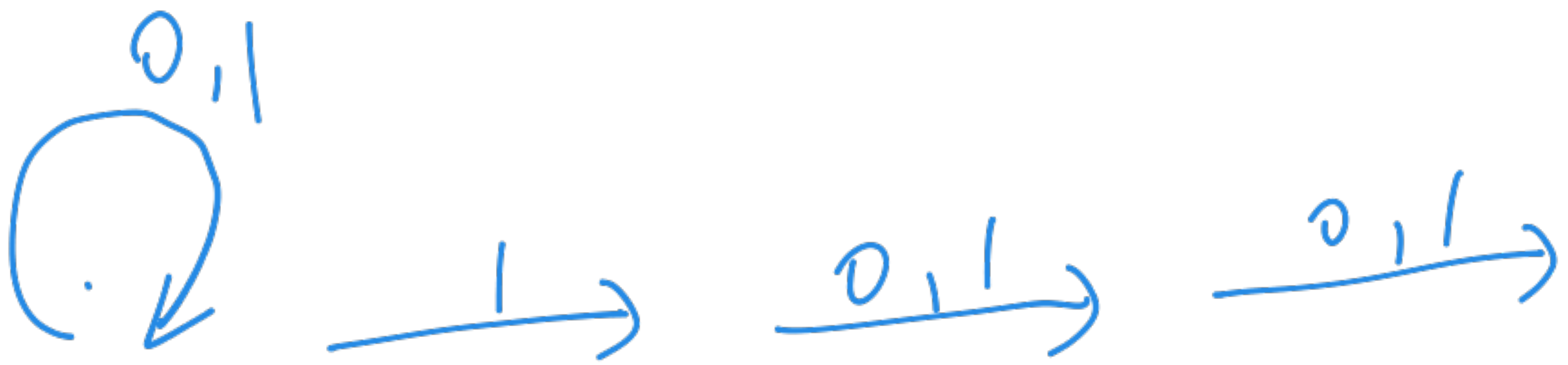
$$(bb)^*b = b^{2m+1} \quad m \geq 0$$

$$\{a^{2n} b^{2m+1} \mid n \geq 0 \quad m \geq 0\}$$

例 6. Design regular expression for $L = \{w \mid w$ consists of 0's and 1's, and the third symbol from the right end is 1.$\}$

$$(0+1)^*1(0+1)(0+1)$$

$$(0+1)^*1(0+1)(0+1)$$



例 7. Design regular expression for

$L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ and } w \text{ has no pair of consecutive 0's.}\}$

$1^*(011^*)^*(0+\varepsilon)$ 或 $(1+01)^*(0+\varepsilon)$

$1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1$

$\Sigma^* = (0+1)^*$

$\Sigma^* = (0^*1^*)^*$

$(1+01)^*(0+\varepsilon)$

$(01^+)^*(0+\varepsilon)$

$(011^*)^*(0+\varepsilon)$

ξ

$0\,1\,0$

例. Write a regular expression for the set of strings that consist of alternating 0's and 1's.

例. Design regular expression for $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ and } w \text{ contains } 01\}$.

例. Write a regular expression for $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid 0 \text{ and } 1 \text{ alternate in } w\}$.

例. Find a regular expression for the set $\{a^n b^m \mid (n+m) \text{ is odd }\}$.

例. Give regular expression for the complement of $L = \{a^n b^m \mid n \geq 3, m \leq 4\}$.

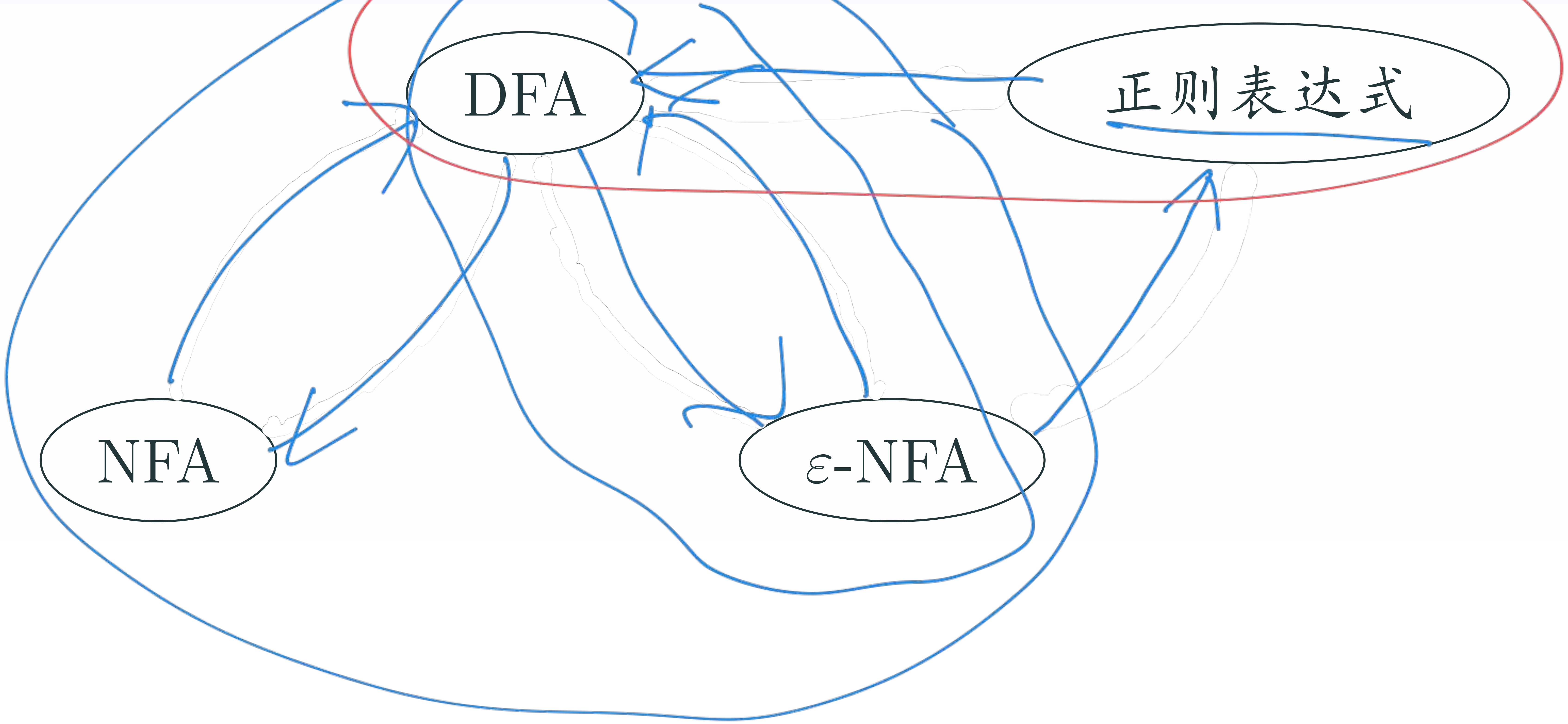
例. Write a regular expression for the set of all C real numbers.

$\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9, E, \cdot\}$

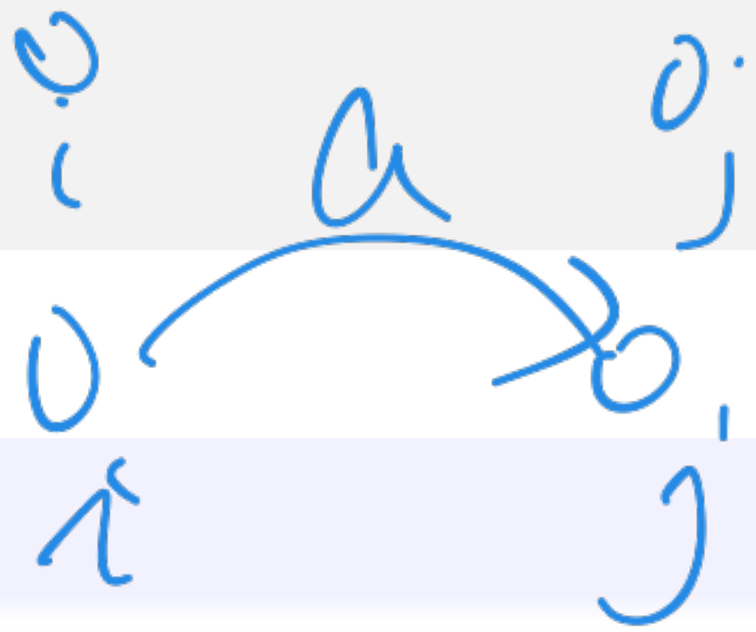
正则表达式

- 正则表达式
- 有穷自动机和正则表达式
  - 由 DFA 到正则表达式, 递归表达式法
  - 由 DFA 到正则表达式, 状态消除法
  - 由正则表达式到 ε-NFA
- 正则表达式的代数定律

DFA, NFA, ε-NFA 和正则表达式的等价性



由 DFA 到正则表达式，递归表达式法

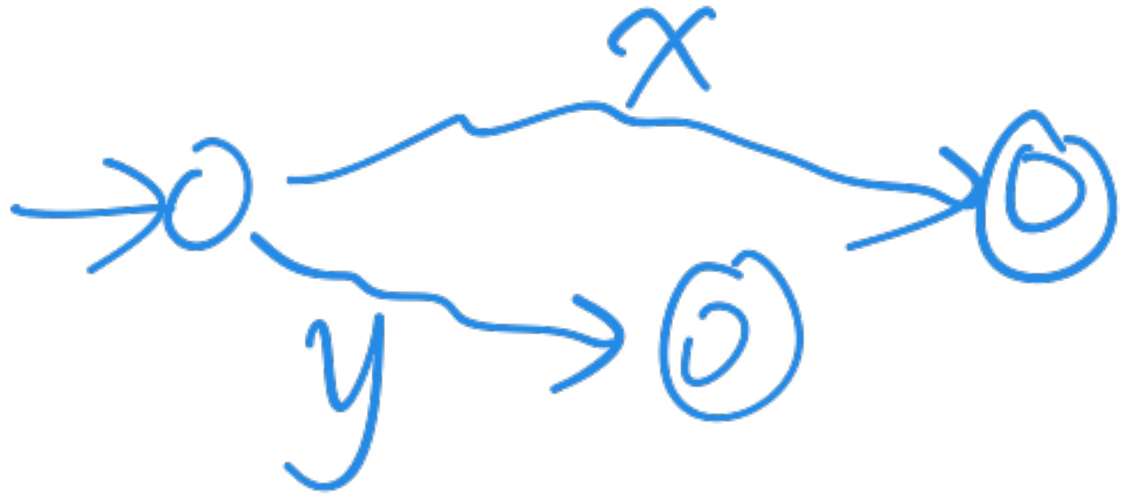


$R_{ij} = \emptyset$

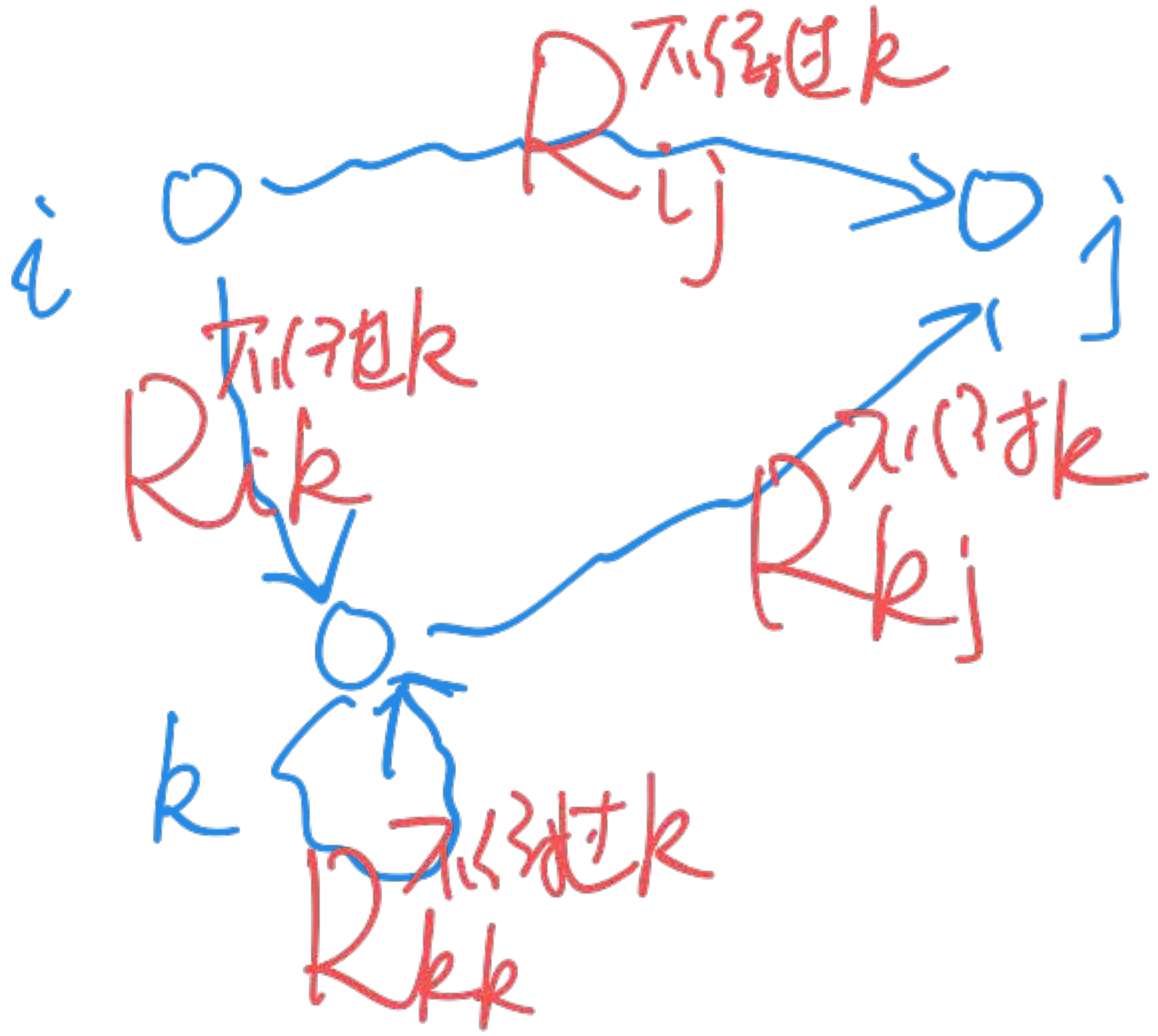
$R_{ij} = a$

定理 1

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 DFA A 的语言，那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.



$R = x + y$



$$\underline{R_{ij}} = \underline{R_{ij}^{不经过k}} + \underline{R_{ik}^{不经过k}}\left(\underline{R_{kk}^{不经过k}}\right)^{*}\underline{R_{kj}^{不经过k}}$$

由 DFA 到正则表达式，递归表达式法

定理 1

若 $L = \mathbf{L}(A)$ 是某 *DFA* A 的语言，那么存在正则表达式 R 满足 $L = \mathbf{L}(R)$.

证明：对 DFA A 的状态编号，令 1 为开始状态，即

$$A = (\{1, 2, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F),$$

设正则表达式 $R_{ij}^{(k)}$ 表示从 i 到 j 但中间节点不超过 k 全部路径的字符串集：

$$R_{ij}^{(k)} = \{x \mid \hat{\delta}(i, x) = j, x \text{ 经过的状态除两端外都不超过 } k\}.$$

那么与 $A = (\{1, 2, \ldots, n\}, \Sigma, \delta, 1, F)$ 等价的正则表达式为

$$\bigcup_{j \in F} R_{1j}^{(n)}$$

且递归式为

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

下面对 k 归纳, 证明可用以上递归式求得 $R_{ij}^{(k)}$.

归纳基础：当 $i \neq j, k = 0$ 时，即 i 到 j 没经过任何中间节点

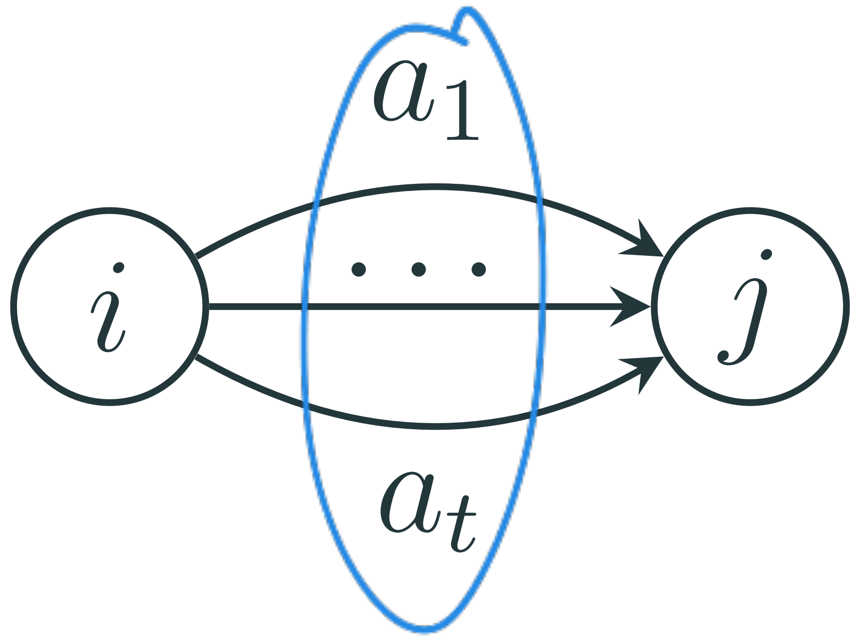
- 没有 i 到 j 的状态转移

$$R_{ij}^{(0)} = \emptyset$$

- 有一个 i 到 j 的状态转移

$$R_{ij}^{(0)} = a$$

- 有多个 i 到 j 的状态转移



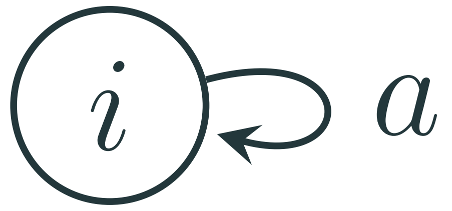
$$R_{ij}^{(0)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

归纳基础 (续): 当 $i = j$, $k = 0$ 时, 即从 i 到自身没经过任何中间节点

- 状态 i 没有到自己的转移

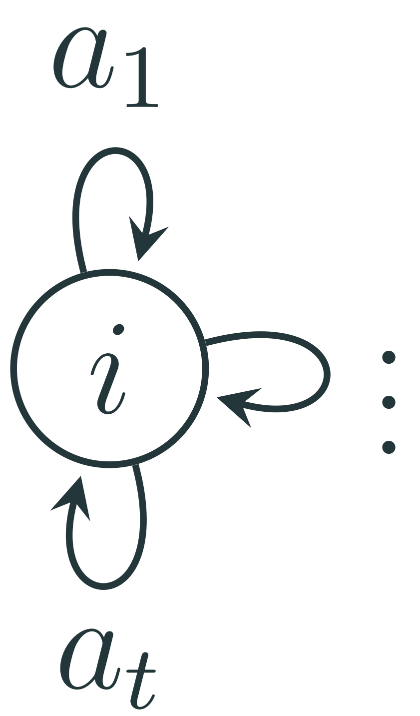
$$R_{ii}^{(0)} = \emptyset + \varepsilon = \varepsilon$$

- 状态 i 有一个到自身的转移



$$R_{ii}^{(0)} = a + \varepsilon$$

- 状态 i 有多个到自身的转移

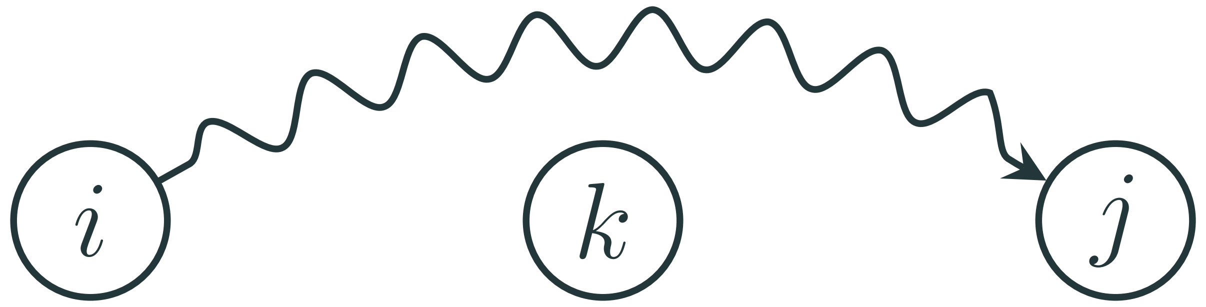


$$R_{ii}^{(0)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_t + \varepsilon$$

归纳假设: 已知 $R_{ij}^{(k-1)}$ 是从 i 到 j 但中间节点不超过 $k-1$ 的全部路径, 同理已知 $R_{ik}^{(k-1)}$, $R_{kk}^{(k-1)}$ 和 $R_{kj}^{(k-1)}$.

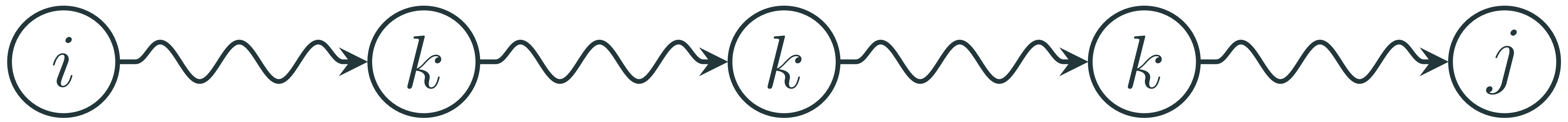
归纳递推: 那么 $R_{ij}^{(k)}$ 中全部路径, 可用节点 k 分为两部分

- 从 i 到 j 不经过 k 的



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)}$$

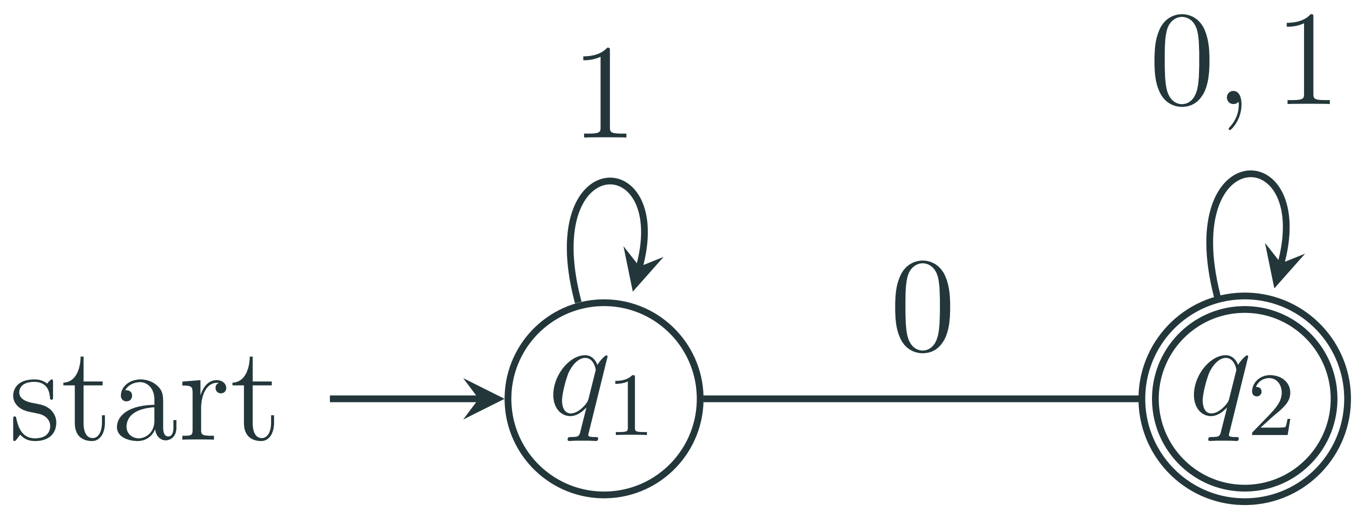
- 从 i 到 j 经过 k 的



$$R_{ij}^{(k)} = R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^{*}R_{kj}^{(k-1)}$$

因此 $R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^{*}R_{kj}^{(k-1)}$.

例 8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



$R_{ij}^{(2)}$

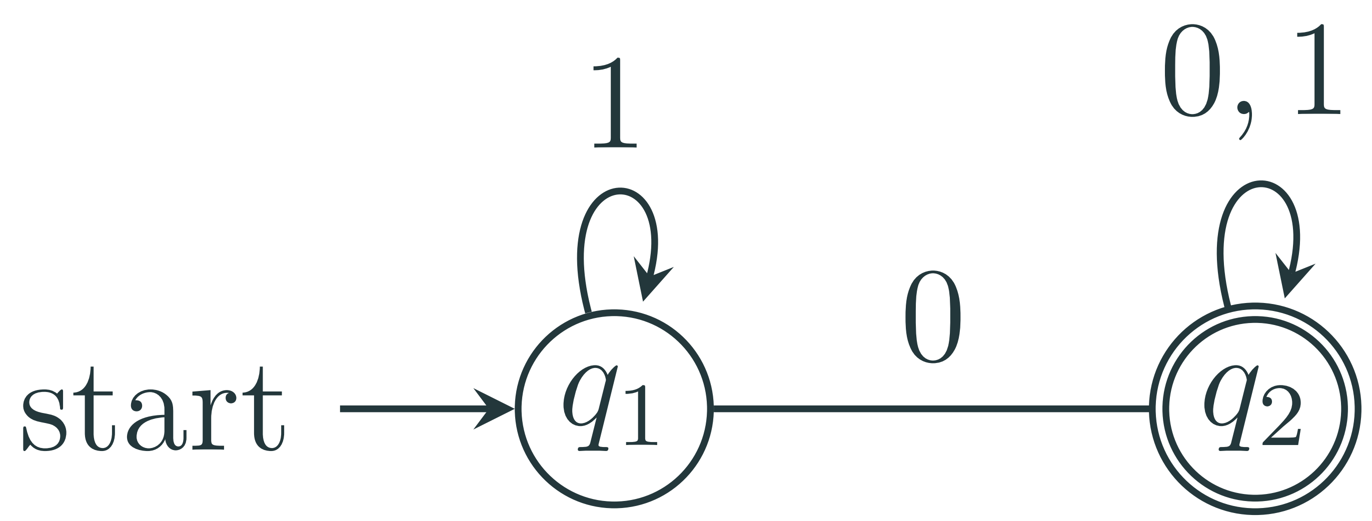
$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

R_{ij}^{k}	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$1+\varepsilon$
R_{12}^{0}	0
R_{21}^{0}	$\emptyset$
R_{22}^{0}	$0+1+\varepsilon$

例 8. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



- 计算 $R_{ij}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 0$
$R_{11}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\boldsymbol{\emptyset}$
$R_{22}^{(0)}$	$\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} + R_{ik}^{(k-1)}(R_{kk}^{(k-1)})^* R_{kj}^{(k-1)}$$

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & i = j \end{cases}$$

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{1j}^{(0)}$

$$R_{12}^{1} = R_{11}^{0} + R_{1j}^{0}(R_{11}^{0})^* R_{12}^{0}$$

$$= (\varepsilon + 1)$$

$R_{ij}^{(k)}$	$k = 0$
$R_{11}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$
R_{11}^{1}	$(\varepsilon+1) + (\varepsilon+1)(\varepsilon+1)^*(\varepsilon+1)$
R_{12}^{1}	$(\varepsilon+1) + (\varepsilon+1)(\varepsilon+1)^* 0$
R_{21}^{1}	
R_{22}^{1}	

- 计算 $R_{ij}^{(1)} = R_{ij}^{(0)} + R_{i1}^{(0)}(R_{11}^{(0)})^* R_{1j}^{(0)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=0$
$R_{11}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{1}$
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{21}^{(0)}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(0)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$
$R_{11}^{(1)}$	$(\varepsilon + \mathbf{1}) + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0} + (\varepsilon + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset + \emptyset(\varepsilon + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{1})$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + \emptyset(\varepsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$

- 几个基本的化简规则

  如果 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 是两个正则表达式

$$(\varepsilon+\mathbf{r})^* = \mathbf{r}^*$$

$$(\varepsilon+\mathbf{r})\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*$$

$$\mathbf{r}+\mathbf{rs}^* = \mathbf{rs}^* = r\{\varepsilon, s, s^2, s^3 \cdots\} = \{r, rs, rs^2 \cdots\}$$

$$\emptyset\mathbf{r} = \mathbf{r}\emptyset = \emptyset \qquad \text{(零元)}$$

$$\emptyset+\mathbf{r} = \mathbf{r}+\emptyset = \mathbf{r} \qquad \text{(单位元)}$$

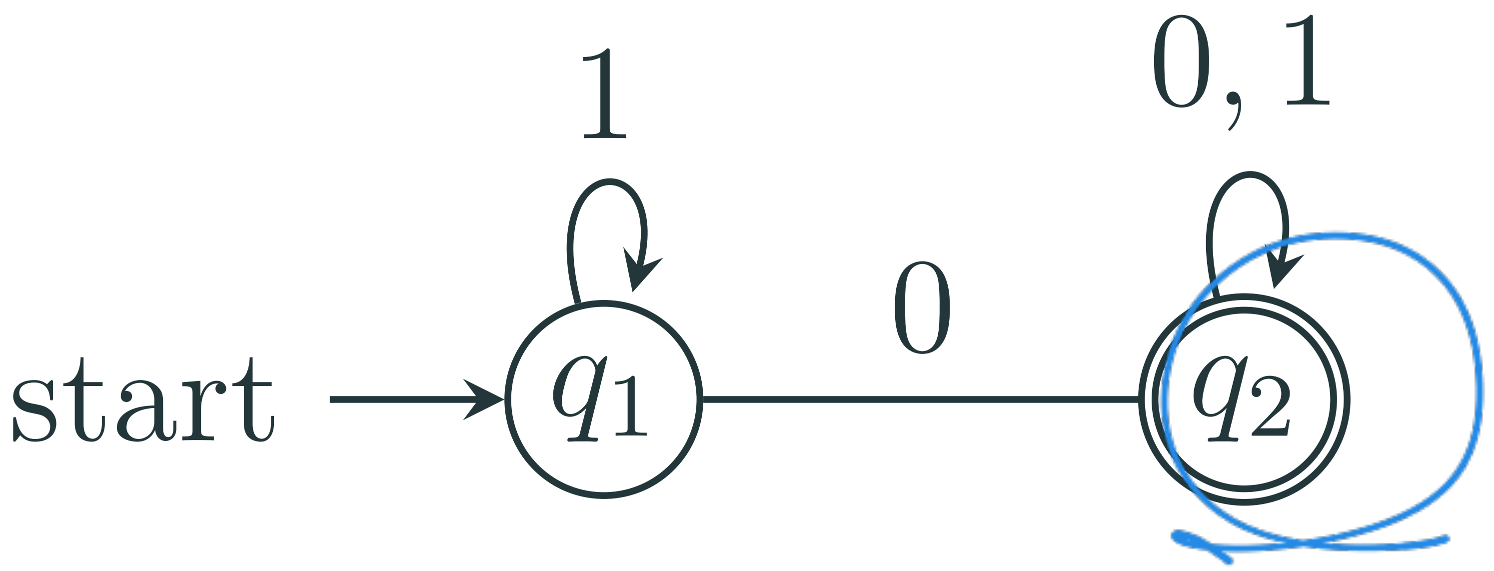
- 化简 $R_{ij}^{(1)}$

$\emptyset + 1^*0 = 1^*0$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	化简
$R_{11}^{(1)}$	$(\varepsilon+\mathbf{1})+(\varepsilon+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}+(\varepsilon+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset+\emptyset(\varepsilon+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{1})$	$\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1}+\emptyset(\varepsilon+\mathbf{1})^*\mathbf{0}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1}$

- 计算 $R_{ij}^{(2)} = R_{ij}^{(1)} + R_{i2}^{(1)}(R_{22}^{(1)})^* R_{2j}^{(1)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=1$	$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$
$R_{11}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*$	$R_{11}^{(2)}$	$\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}$	$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})$
$R_{21}^{(1)}$	$\emptyset$	$R_{21}^{(2)}$	$\emptyset + (\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\emptyset$
$R_{22}^{(1)}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$R_{22}^{(2)}$	$\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1} + (\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})^*(\varepsilon+\mathbf{0}+\mathbf{1})$



$R_{ij}^{(n)}$

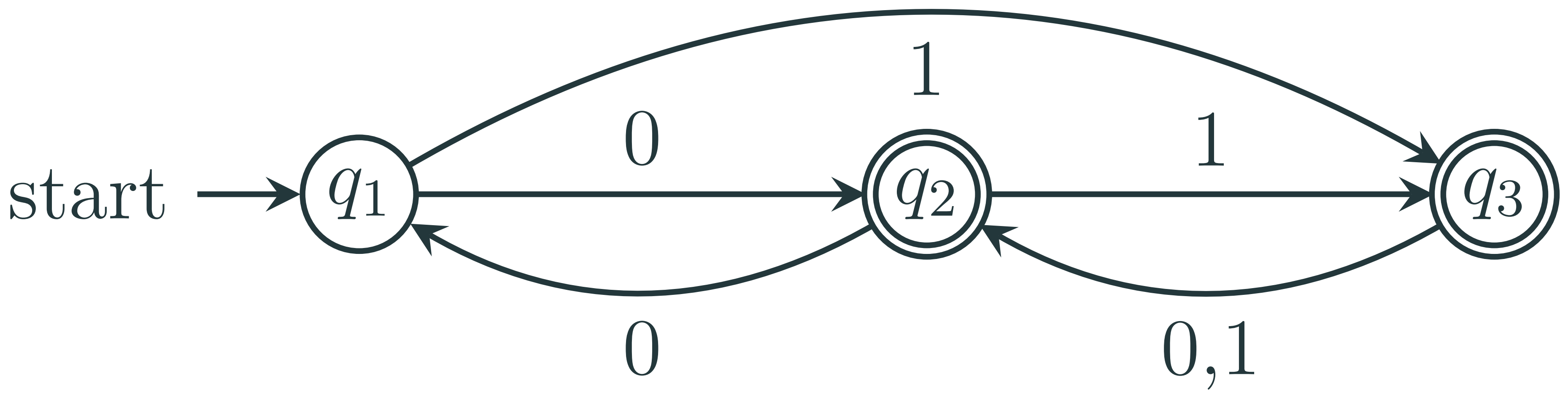
- 化简 $R_{ij}^{(2)}$

$R_{ij}^{(k)}$	$k=2$	化简
$R_{11}^{(2)}$	$\cancel{\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset}$	$\mathbf{1}^*$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$
$R_{21}^{(2)}$	$\cancel{\emptyset + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset}$	$\emptyset$
$R_{22}^{(2)}$	$\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1} + (\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\varepsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$	$(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$

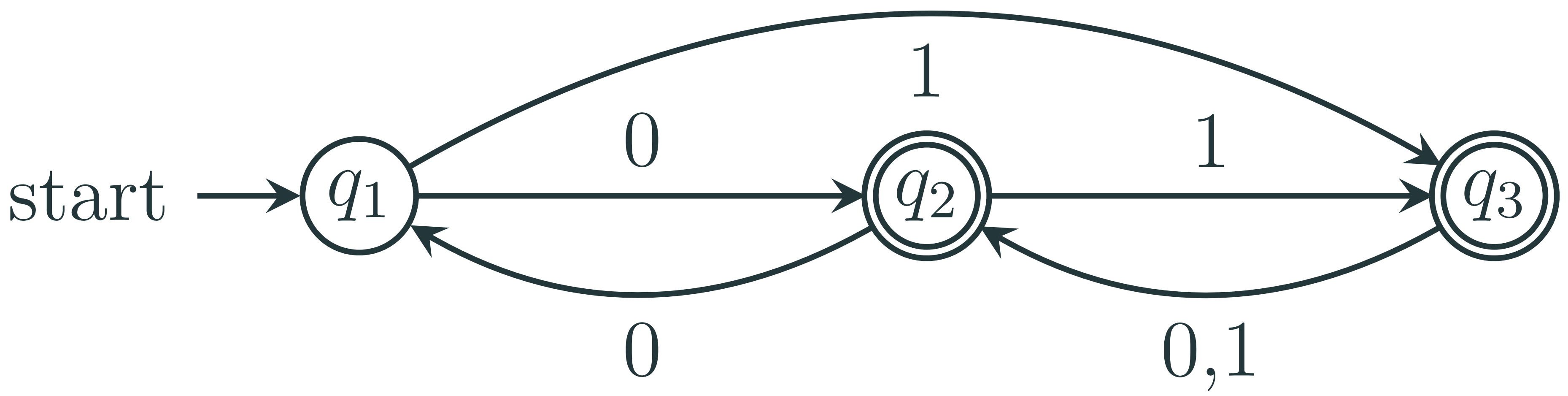
- 因只有 q_2 是接受状态, 所以该 DFA 正则表达式为

$$R_{12}^{(2)} = \underline{\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*}.$$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.

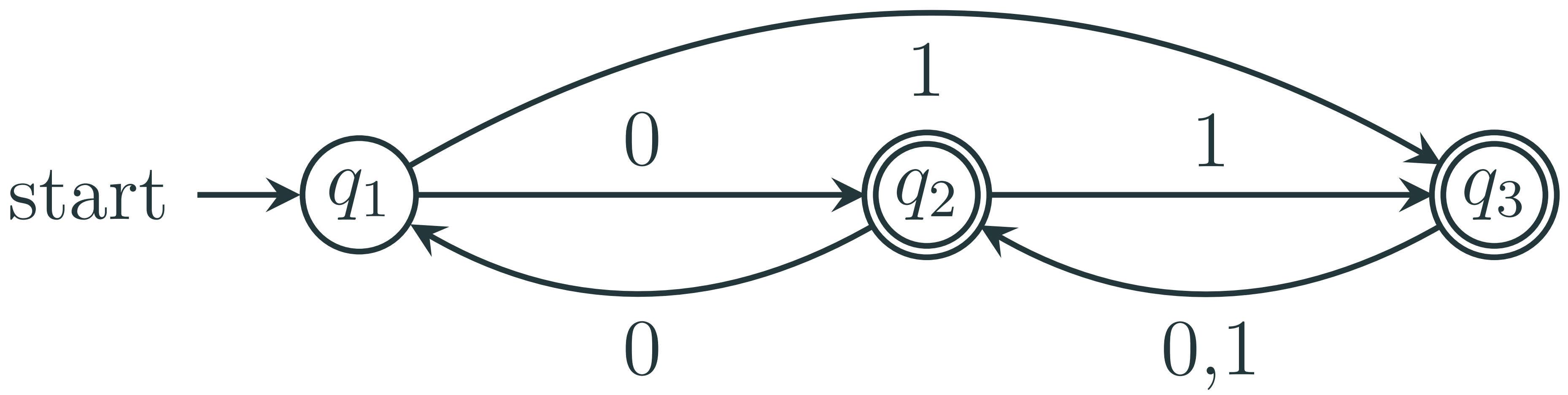


例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$R_{11}^{(k)}$	ε	ε	$(\mathbf{00})^*$
$R_{12}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{13}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{21}^{(k)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{22}^{(k)}$	ε	$\varepsilon+\mathbf{00}$	$(\mathbf{00})^*$
$R_{23}^{(k)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}+\mathbf{01}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{31}^{(k)}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*\mathbf{0}$
$R_{32}^{(k)}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$\mathbf{0}+\mathbf{1}$	$(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*$
$R_{33}^{(k)}$	ε	ε	$\varepsilon+(\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1}$

例 9. 将如图 DFA 转换为正则表达式.



$r=($~~0+1+10~~$)$

$s=$

r^*ss+

仅状态 2 和 3 是接受状态:

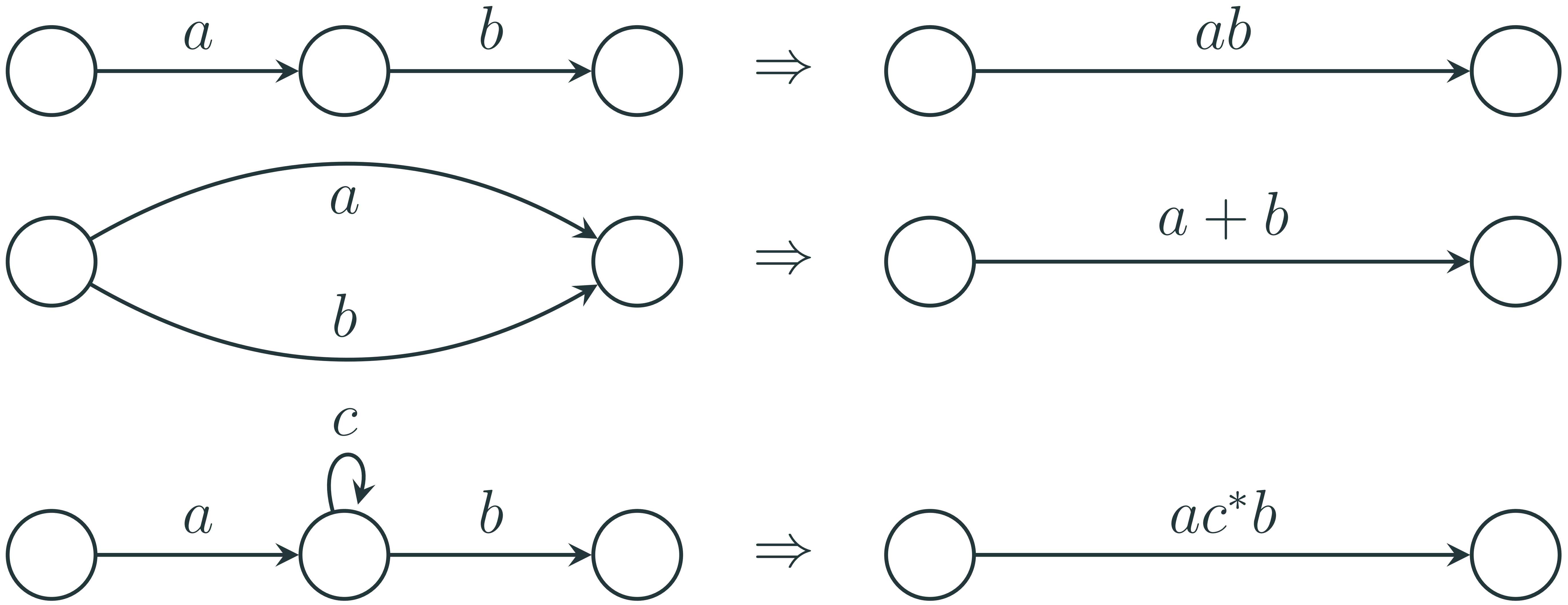
$$
\begin{aligned}
R_{12}^{(3)} &= R_{12}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{32}^{(2)} \\
&= \mathbf{0}(\mathbf{00})^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\varepsilon + (\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^* \\
&= \mathbf{0}(\mathbf{00})^* + \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{13}^{(3)} &= R_{13}^{(2)} + R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{33}^{(2)} \\
&= \mathbf{0}^*\mathbf{1} + \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\varepsilon + (\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\varepsilon + (\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1}) \\
&= \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*
\end{aligned}
$$

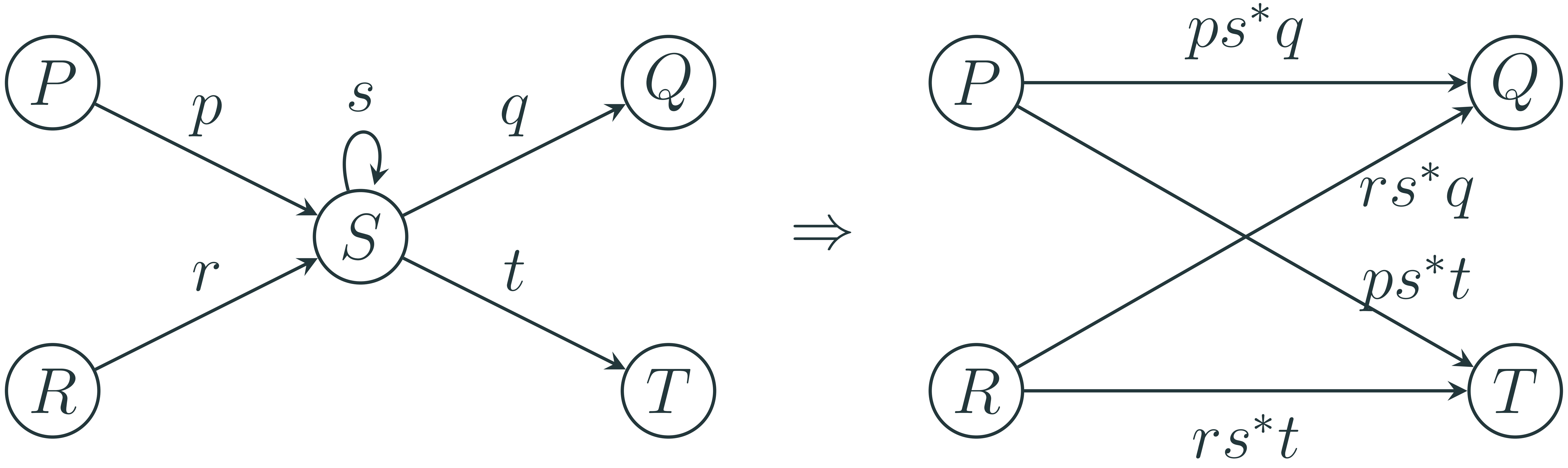
$$
R_{12}^{(3)} + R_{13}^{(3)} = \mathbf{0}^*\mathbf{1}((\mathbf{0}+\mathbf{1})\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*(\varepsilon + (\mathbf{0}+\mathbf{1})(\mathbf{00})^*) + \mathbf{0}(\mathbf{00})^*.
$$

由 DFA 到正则表达式, 状态消除法

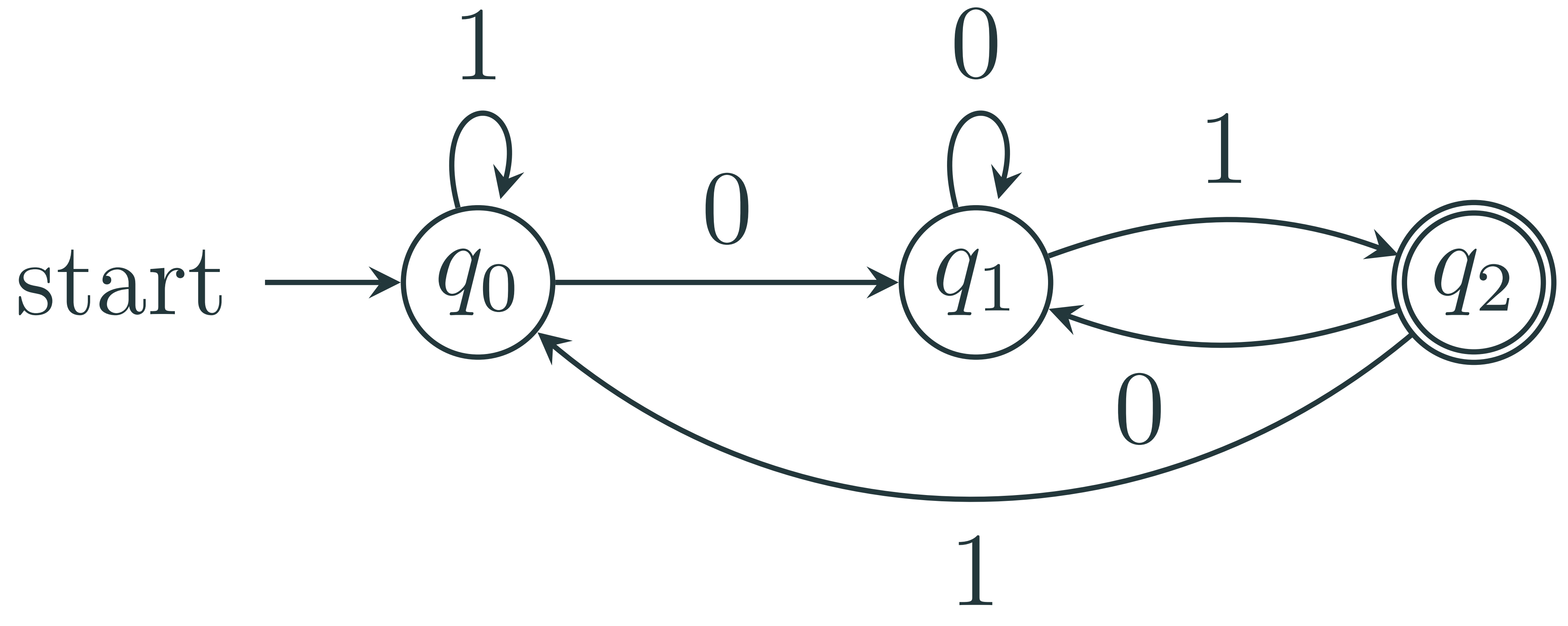
- 从 DFA 中逐个删除状态
- 用标记了正则表达式的新路径替换被删掉的路径
- 保持“自动机”等价.



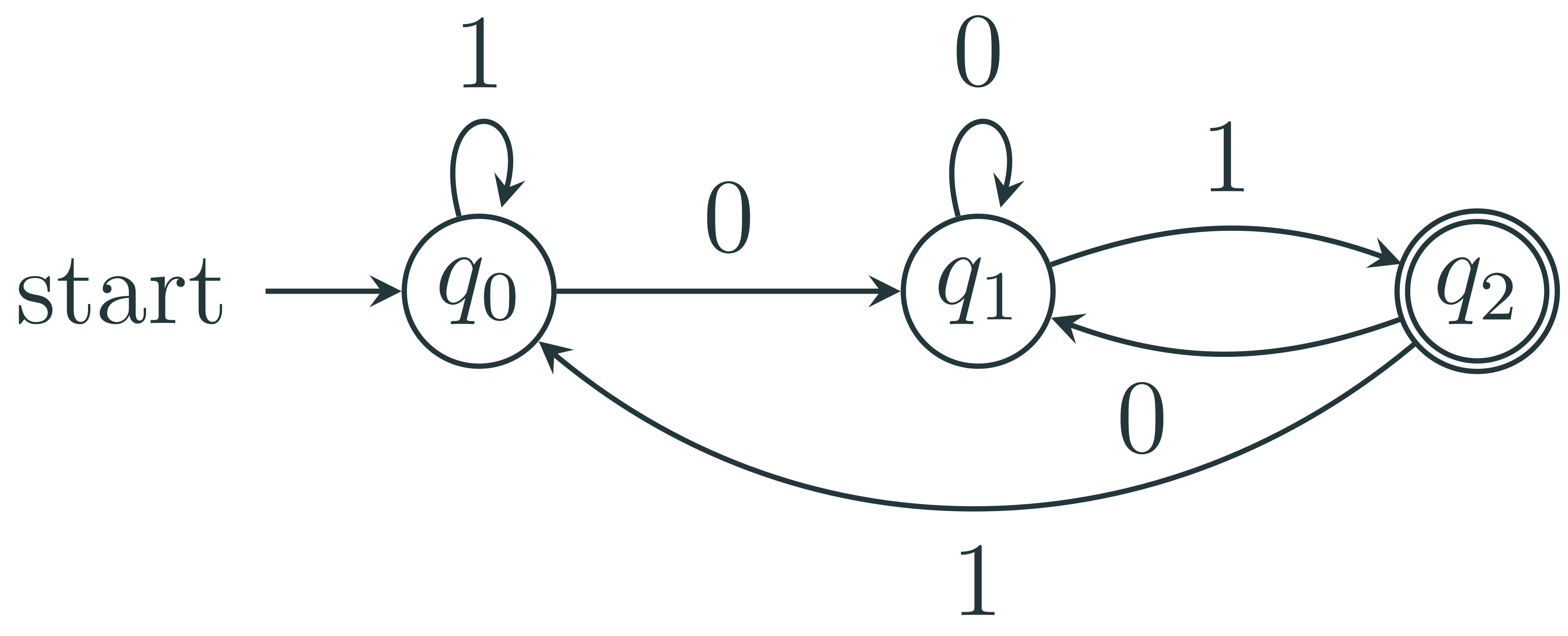
- 更一般的情况如图
- 若要删除状态 S, 需添加相应路径



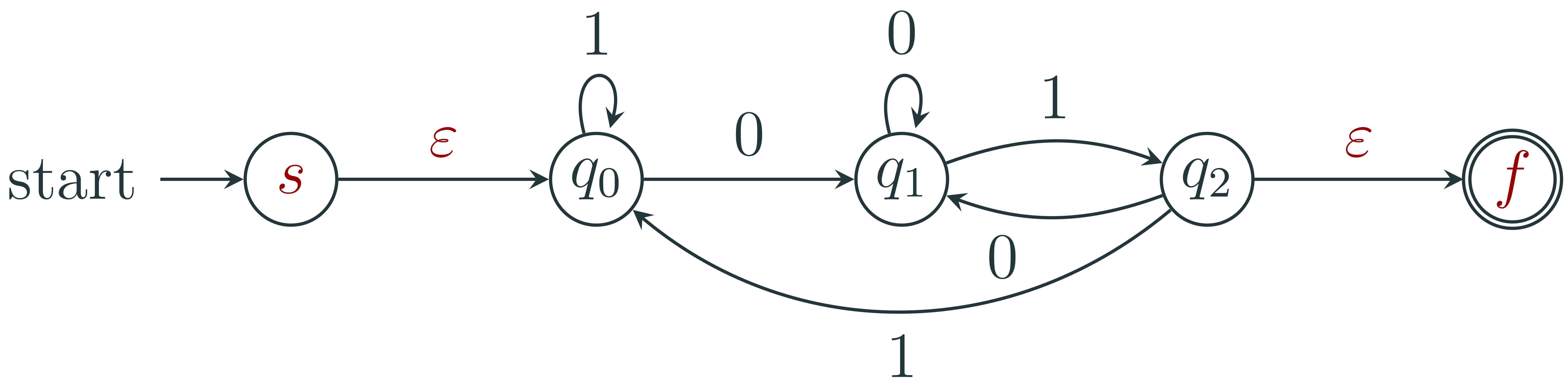
例 10. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.



例 10. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

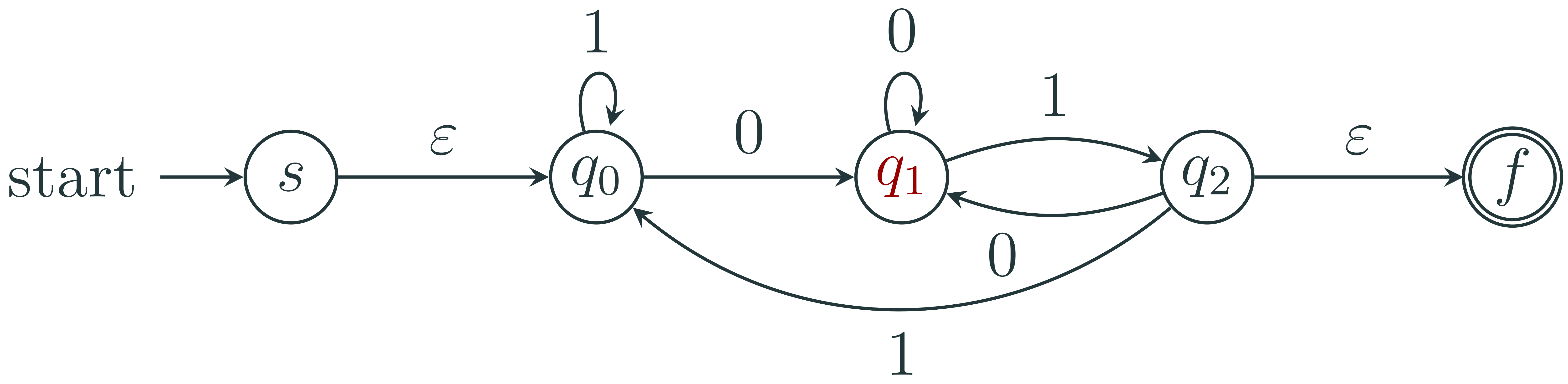


❶ 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f:

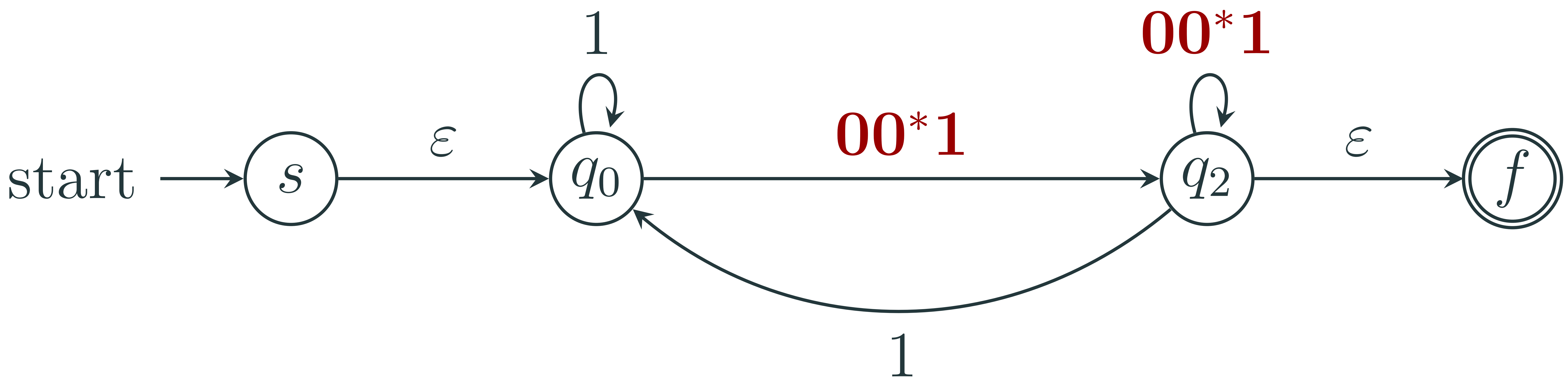


例 10. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

❶ 利用空转移, 添加新的开始 s 和结束状态 f:

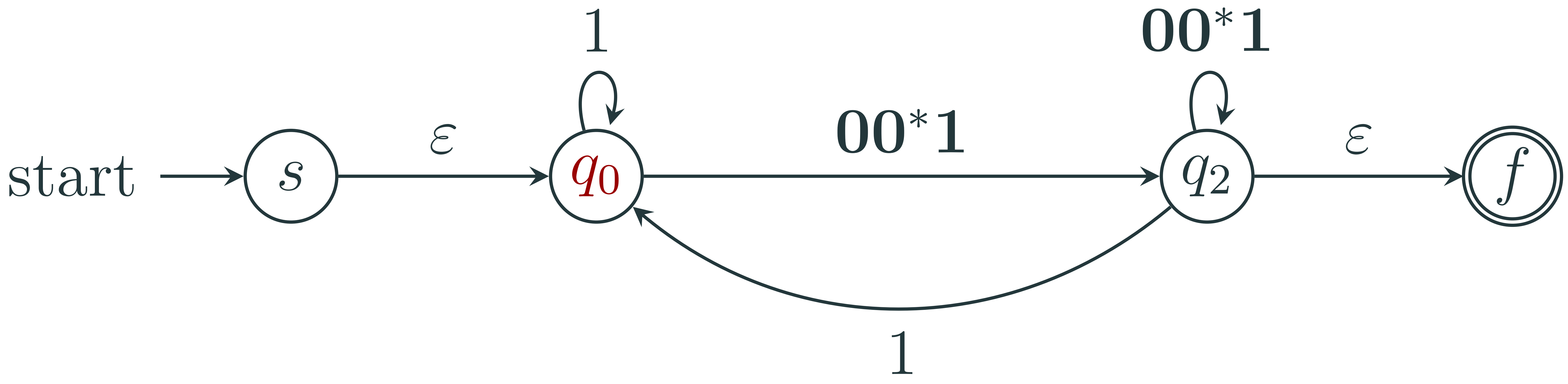


❷ 消除状态 q_1, 添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

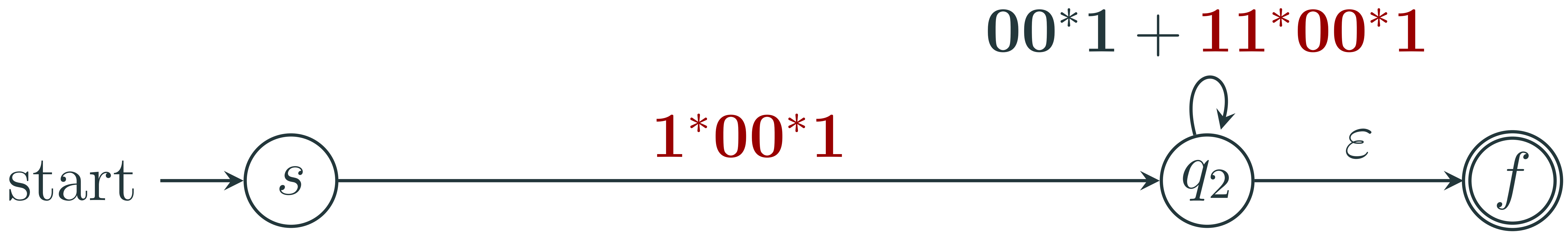


例 10. 利用状态消除法，构造下图自动机的正则表达式.

❷ 消除状态 q_1，添加路径 $q_0 \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

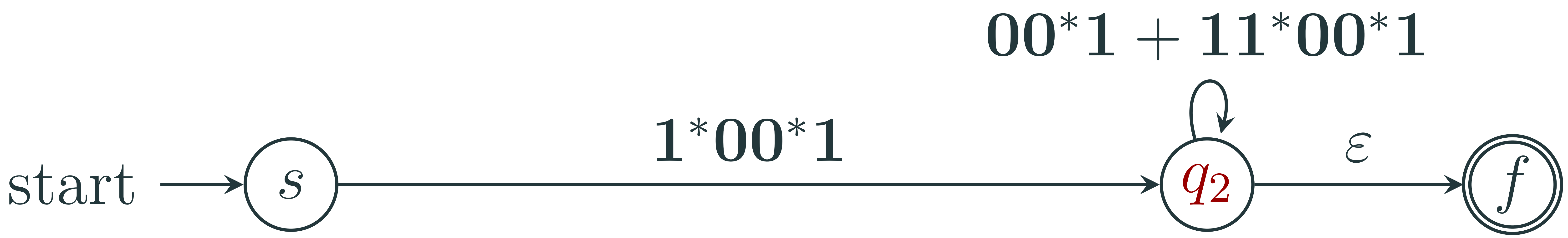


❸ 消除状态 q_0，添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

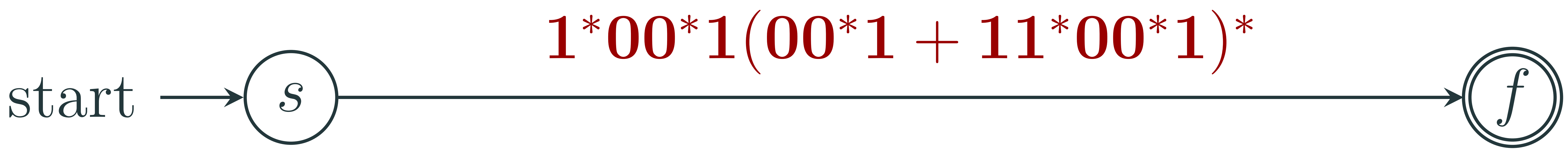


例 10. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

❸ 消除状态 q_0, 添加路径 $s \to q_2$ 和 $q_2 \to q_2$:

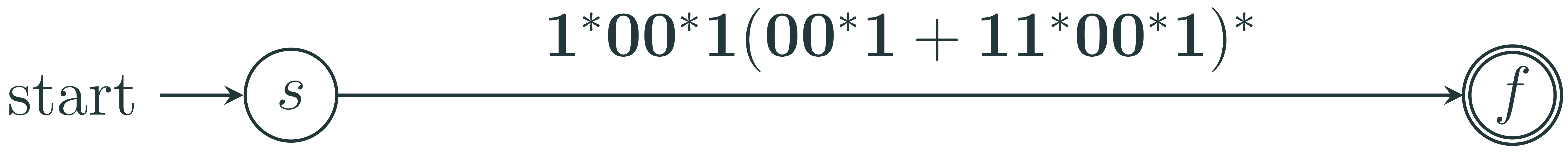


❹ 消除状态 q_2, 添加路径 $s \to f$:



例 10. 利用状态消除法, 构造下图自动机的正则表达式.

❹ 消除状态 q_2, 添加路径 $s \to f$:



❺ 因此该自动机的正则表达式为

$$\mathbf{1^*00^*1(00^*1+11^*00^*1)^*}.$$

由正则表达式到有穷自动机

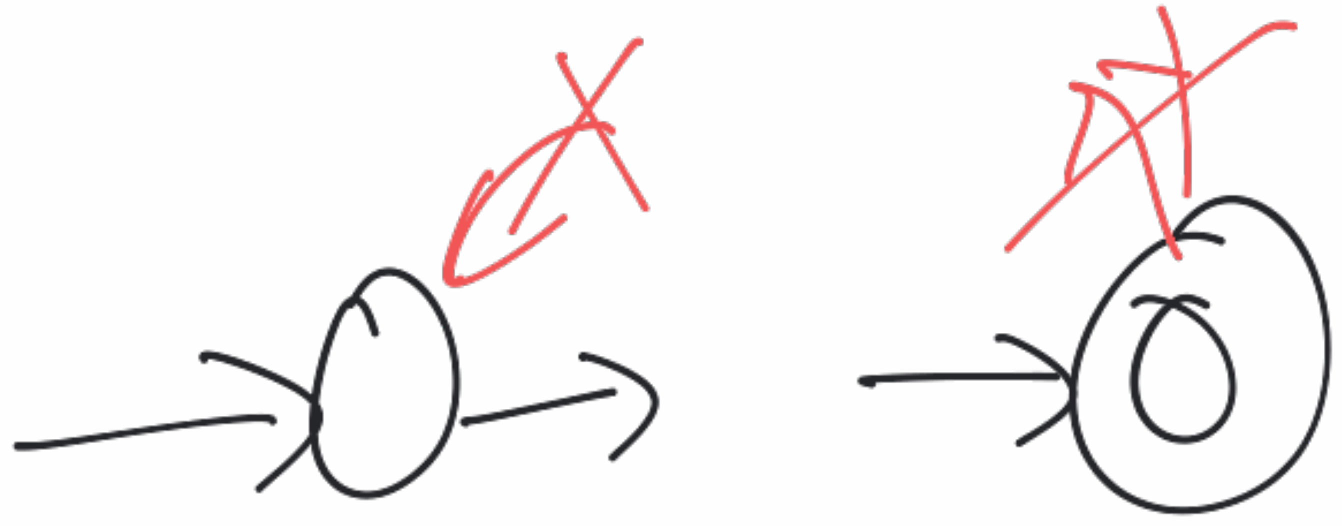
定理 2

正则表达式定义的语言，都可被有穷自动机识别.

由正则表达式构造 ε-NFA

任何正则表达式 $\mathbf{e}$，都存在与其等价的 ε-NFA A，
即 $\mathbf{L}(A) = \mathbf{L}(\mathbf{e})$，并且 A 满足：

1. 仅有一个接收状态；
2. 没有进入开始状态的边；
3. 没有离开接受状态的边.

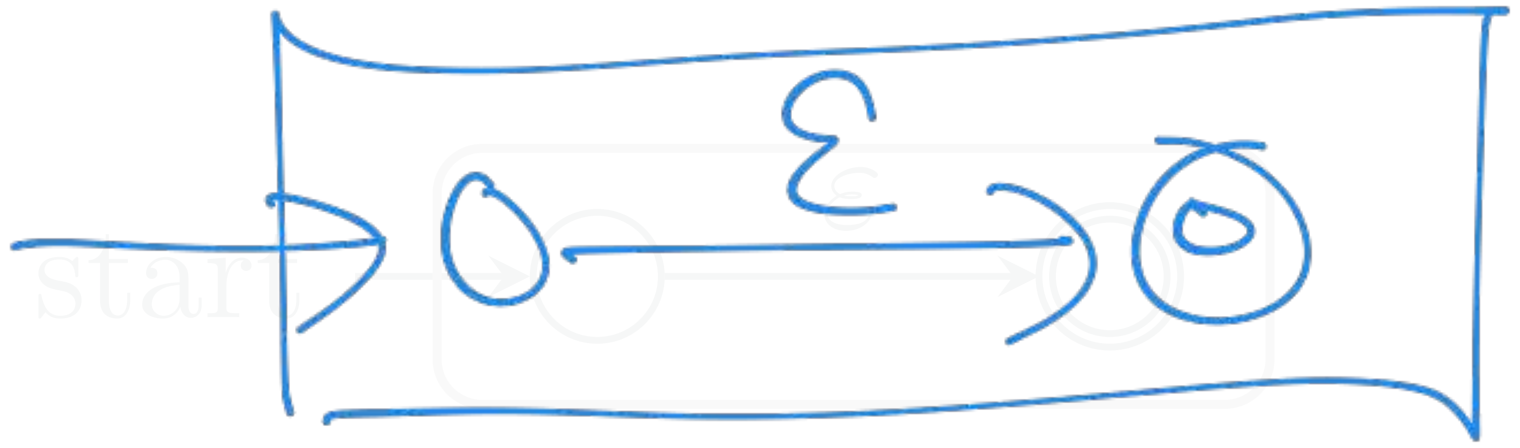


归纳基础:

❶ 对于 $\emptyset$, 有 ε-NFA:

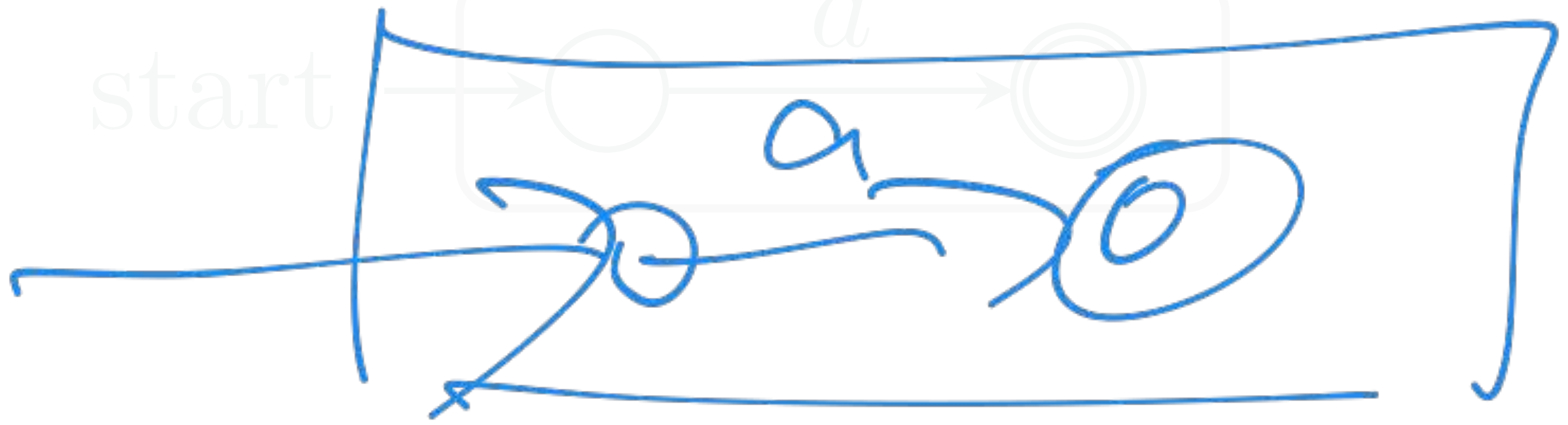
ε-NFA

❷ 对于 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 有 ε-NFA:



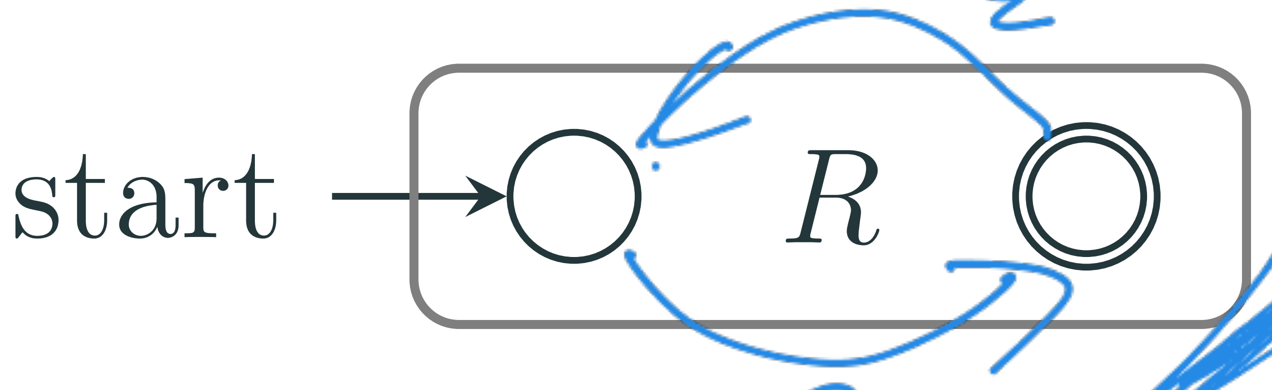
ε-NFA

❸ $\forall a \in \Sigma$, 对于 $\mathbf{a}$, 有 ε-NFA:

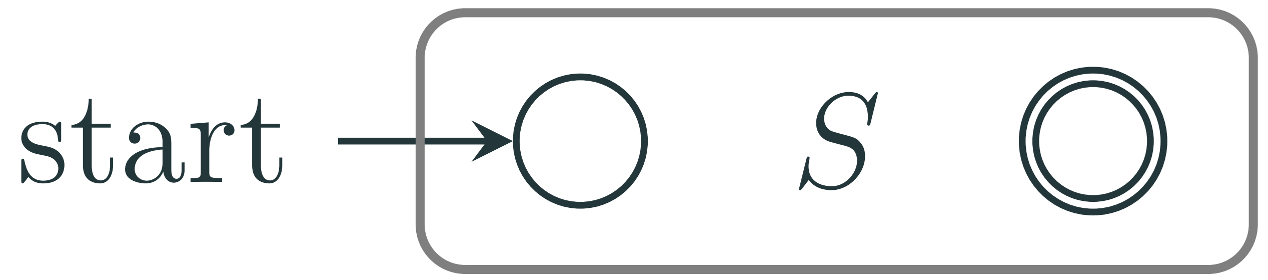


ε-NFA

归纳递推：若 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$ 为正则表达式，则它们对应的 ε-NFA 分别为 R 和 S

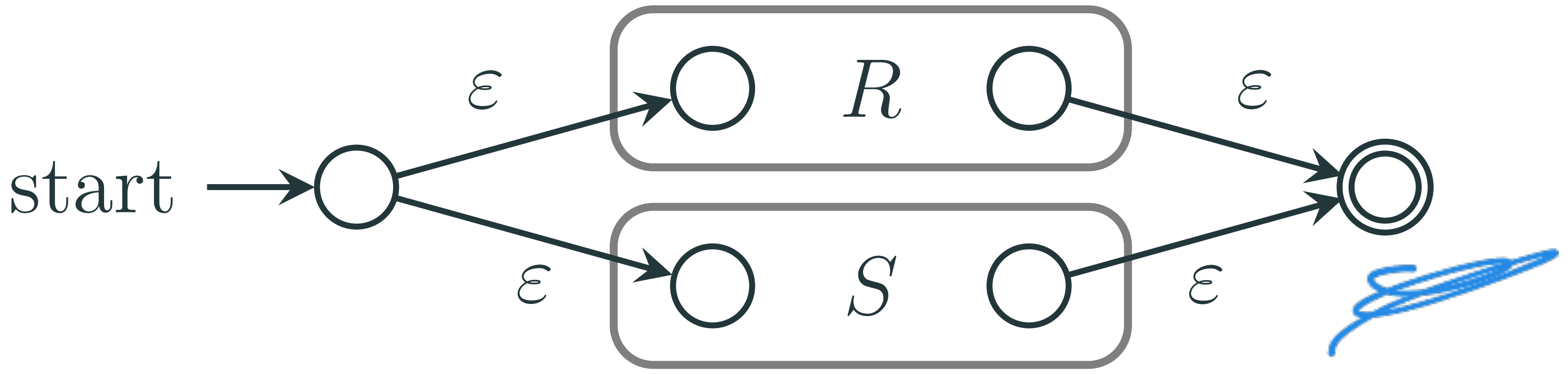


和

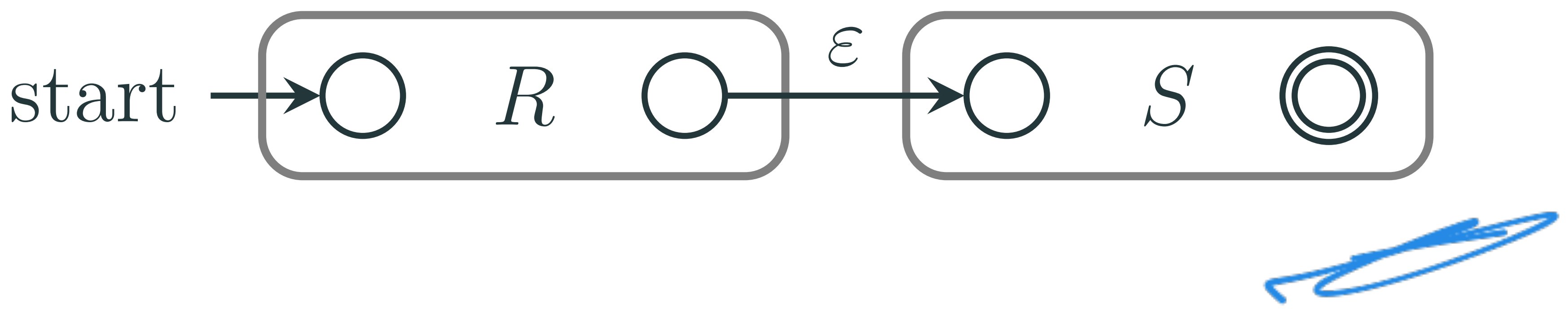


则正则表达式 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$, $\mathbf{rs}$ 和 $\mathbf{r}^*$，可由 R 和 S 分别构造如下：

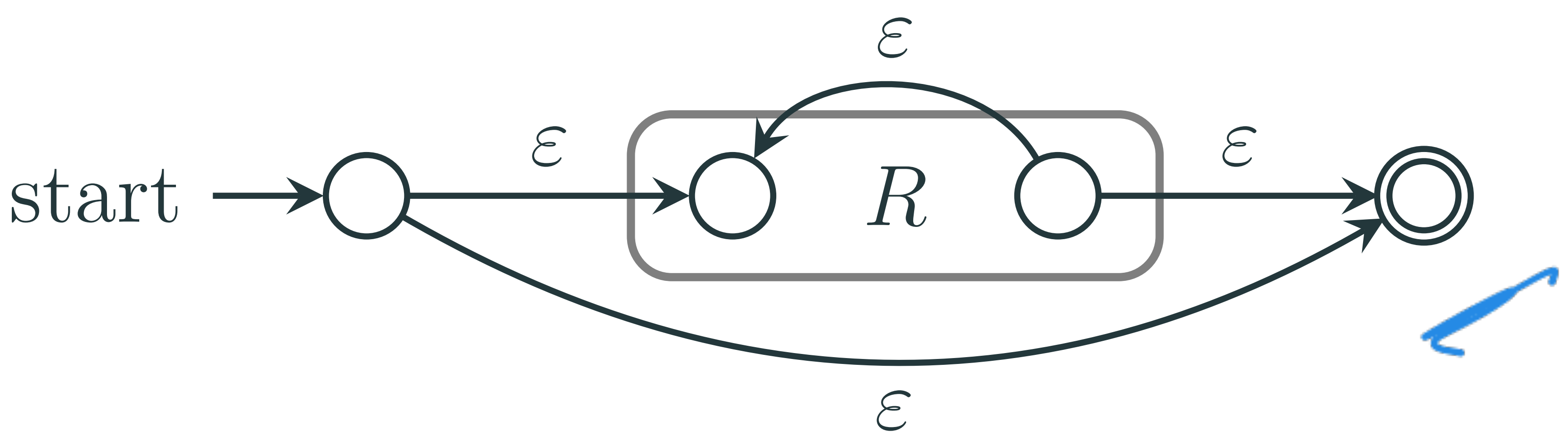
❶ 对于 $\mathbf{r}+\mathbf{s}$，有 ε-NFA：



❷ 对于 $\mathbf{rs}$，有 ε-NFA：



❸ 对于 $\mathbf{r}^*$，有 ε-NFA：



因此任何结构的正则表达式，都可递归构造出等价的 ε-NFA.

例 11. 正则表达式 $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\mathbf{1}(\mathbf{0}+\mathbf{1})$ 构造为 ε-NFA.

思考题

正则表达式到 ε-NFA 构造方法中的 3 个限制条件，都有必要吗？

正则表达式

- 正则表达式
- 有穷自动机和正则表达式
- 正则表达式的代数定律
    - 基本的代数定律
    - 发现与验证代数定律

正则表达式的代数定律

定义

含有变量的两个正则表达式，如果以任意语言替换其变量，二者所表示的语言仍然相同，则称这两个正则表达式**等价**. 在这样的意义下，正则表达式满足一些**代数定律**.

Σ^*

- 并运算

$$
\begin{aligned}
(L+M)+N &= L+(M+N) && \text{(结合律)}\\
L+M &= M+L && \text{(交换律)}\\
L+L &= L && \text{(幂等律)}\\
\emptyset+L = L+\emptyset &= L && \text{(单位元}\ \emptyset\text{)}
\end{aligned}
$$

正则表达式的代数定律

- 连接运算

$$(LM)N = L(MN) \quad \text{(结合律)}$$
$$\varepsilon L = L\varepsilon = L \quad \text{(单位元 } \varepsilon\text{)}$$
$$\emptyset L = L\emptyset = \emptyset \quad \text{(零元 } \emptyset\text{)}$$
$$LM \neq ML$$

- 分配率

$$L(M+N) = LM + LN \quad \text{(左分配律)}$$
$$(M+N)L = ML + NL \quad \text{(右分配律)}$$

- 闭包运算

$$
\begin{aligned}
(L^*)^* &= L^* \\
\emptyset^* &= \varepsilon \\
\varepsilon^* &= \varepsilon \\
L^* &= L^+ + \varepsilon \\
(\varepsilon + L)^* &= L^*
\end{aligned}
$$

发现与验证正则表达式的代数定律

检验方法

要判断表达式 E 和 F 是否等价，其中变量为 $L_1, \ldots, L_n$:

1. 将变量替换为具体表达式，得正则表达式 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{s}$，例如，替换 L_i 为 $\mathbf{a}_i$;
2. 判断 $\mathbf{L}(\mathbf{r}) \stackrel{?}{=} \mathbf{L}(\mathbf{s})$，如果相等则 $E = F$，否则 $E \neq F$.

例 12. 判断 $(L+M)^* = (L^*M^*)^*$.

❶ 将 L 和 M 替换为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$;

❷ $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* \stackrel{?}{=} (\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*)^*$;

❸ 因为 $\mathbf{L}((\mathbf{a}+\mathbf{b})^*) = \mathbf{L}((\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*)^*)$;

❹ 所以 $(L+M)^* = (L^*M^*)^*$.

例 13. 判断 $L + ML = (L + M)L$.

❶ 将 L 和 M 替换为 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$;

❷ 判断 $\mathbf{a} + \mathbf{ba} \stackrel{?}{=} (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}$;

❸ 因为 $aa \notin \mathbf{a} + \mathbf{ba}$ 而 $aa \in (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}$;

❹ 所以 $\mathbf{a} + \mathbf{ba} \neq (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a}$;

❺ 即 $L + ML \neq (L + M)L$.

注意

这种方法**仅限于**判断正则表达式, 否则可能会发生错误.

例 14. 若用此方法判断 $L \cap M \cap N \stackrel{?}{=} L \cap M$, 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 替换 L, M, N, 有

$$\{a\} \cap \{b\} \cap \{c\} = \emptyset = \{a\} \cap \{b\},$$

而显然

$$L \cap M \cap N \neq L \cap M.$$