Exercise 1. (b).

解：$T(n) = O(n^2)$ 的含义是：$\exists c>0$，n_0，$\forall n > n_0$，$T(n) \le cn^2$
即 n^2 是 $T(n)$ 的上界，而"至少"这个词又包含"≥"的含义，故二者矛盾，
"算法A的运行时间至少是 $O(n^2)$"这句话是无意义的。

Exercise 2. (1).

解：(a). 由题意，iterativeF(n, p) 函数内部循环 n 次。
且每次 flip(p) 的期望 $E(flip) = p$
$\therefore E(tot) = np = 2^k p$
函数 iterativeF(n, p) 的期望为 np (或 $2^k p$)

(b) 分析函数 recursiveF (n, p) 知。
其为递归，递归终点 $E_{end} = p$.
$\therefore E_{总} = 2^k \cdot p$
函数 recursive F (n, p) 的期望为 $2^k p$.

(c) 由题意 对单个 flip(p) 的方差
$D(flip) = p(1-p)$ 且每个 flip(p) 间相互独立
由方差性质 $D(tot) = np(1-p) = 2^k p(1-p)$
函数 iterativeF(n, p) 的期望为 $2^k p(1-p)$

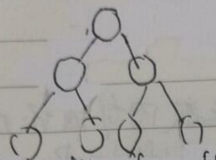
(d). 分析得 $D_{总} = D(2^k \cdot flip)$
由方差性质 $= 2^{2k} \cdot D(flip)$
$= 4^k p(1-p)$

(e) 二者的方差不同

期望 E 不变，仍为 $2^k \cdot p$

方差 D_* 改变

修改后递归如同先序遍历 一二叉树，等价于叶结点中各个相互独立事件之和



flip₁ flip₂ flip₃ flip₄

$$\text{故 } D_* = D(flip_1 + flip_2 + \cdots + flip_n)$$
$$= n \cdot D(flip)$$
$$= 2^k \cdot p(1-p)$$

Exercise 3.(14)

(a) $f(n) = \Theta(g(n))$

(b) $f(n) = O(g(n))$

当 $c=1$，$n_0=2$ 时 $\forall n > n_0$，$2n^4 - 3n^2 + 7 \le n^5$，故 $f(n) = O(g(n))$

(c) $f(n) = \Omega(g(n))$

当 $c=1$，$n_0=2$ 时 $\forall n > n_0$，$\frac{\log n}{n} \ge \frac{\log 2}{n} \ge \frac{1}{n}$，故 $f(n) = \Omega(g(n))$

(d) $f(n) = \Theta(g(n))$

当 $c_1=1$，$c_2=2$，$n_0=2$ 时 $\forall n > n_0$ $c_1 \log n \le \log n + \frac{1}{n} \le c_2 \log n$ 故 $f(n) = \Theta(g(n))$

(e) $f(n) = \Theta(g(n))$

$f(n) = (2^{\log n})^k = n^k$ 故 $f(n) = \Theta(g(n))$

(f). $f(n) = O(g(n))$

当 $c=1$，$n_0=1$ 时 $\forall n > n_0$，$2^n < 2^{2n}$，故 $f(n) = O(g(n))$

(g). $f(n) = \Theta(g(n))$

当 $c_1 = 2^{2001}$，$c_2 = 1$，$n_0 = 2^{1000}$ 时. $\forall n > n_0$

$c_2 \cdot g(n) \le f(n) \le c_1 g(n)$. 故 $f(n) = \Theta(g(n))$

Exercise 4.(1)

(a) $T(n) = \theta(n)$

本题中 $a=2>1$，$b=2>1$，$f(n)=3$ 非负

故由master方法 $\because f(n) = O(n^{\log_2 2-\varepsilon})$ $\varepsilon=1$是常数

$\therefore T(n) = \theta(n)$

(b) $T(n) = \theta(n^{\log_4 3})$

本题中 $a=3>1$ $b=4>1$，$f(n)=\sqrt{n}$ 非负

故由master方法 $f(n) = O(n^{\log_4 3-\varepsilon})$ $\varepsilon=0.292$是常数

$\therefore T(n) = \theta(n^{\log_4 3})$

(c) $T(n) = \theta(n^2(\log n)^2)$

本题中 $a=4>1$，$b=2>1$，$f(n) = n^2\log n$ 非负

故由扩展master定理知：$f(n)=\theta(n^{\log_2 4}\cdot(\log n))$

$\therefore T(n)=\theta(n^2\log^2 n)$

(d) $T(n) = \theta(n\cdot\log^3 n)$

本题中 $a=4>1$ $b=4>1$ $f(n) = n(\log n)^2$ 非负

故由扩展的master定理知：$f(n) = \theta(n^{\log_4 4}\cdot\log^2 n)$

$\therefore T(n) = \theta(n\log^3 n)$

(e) $T(n) = \theta[\log^2 n\cdot\log(\log n)]$

令 $m=\log n$ 则 $n=2^m$

$T(2^m) = 161^2\cdot T(2^{\frac{m}{161}}) + 161m^2$

令 $S(m) = T(2^m)$

得 $S(m) = 161^2\cdot S(\frac{m}{161}) + 161m^2$

由master定理 $f(m) = 161m^2 = \theta(m^{\log_{161}161^2})$

$\therefore S(m) = \theta(m^2\log m)$

$\therefore T(2^m) = \theta(m^2\log m)$

$\therefore T(n) = \theta[(\log n)^2\cdot\log(\log n)]$