

算法设计与分析作业 01

正心 44

Prof. Hong Gao

TA: 郭环宇

发布日期: 2019/03/06

截止日期: 2019/03/13

作业提交 PDF 版本, 发送至邮箱 DBLB_2019algorithm163.com

Exercise 1. (6)

解释为什么“算法 A 的运行时间至少是 $O(n^2)$ ”这句话是无意义的.

Exercise 2. (12)

假定 $flip(\rho)$ 是一个返回一次伯努利试验结果的程序 (伯努利试验成功概率为 ρ), 意思是以 ρ 的概率返回 1, 以 $1 - \rho$ 的概率返回 0, 每次调用程序都是独立的伯努利试验, 思考下面两个函数:

```
iterativeF(n,p):
    tot = 0
    for i = 1 to n:
        tot = tot + flip(p)
    return tot

recursiveF(n,p):
    if n <= 1:
        return flip(p)
    return 2*recursiveF(n/2,p)
```

假设有两个输入 $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ 和合理的概率 $\rho \in [0, 1]$

- (a) 函数 $iterativeF(n,p)$ 的期望是?
- (b) 函数 $recursiveF(n,p)$ 的期望是?
- (c) 函数 $iterativeF(n,p)$ 的方差?
- (d) 函数 $recursiveF(n,p)$ 的方差?
- (e) 函数 $recursiveF(n,p)$ 哪项度量值与函数 $iterativeF(n,p)$ 不同? 如果 $recursiveF(n,p)$ 函数中, 我们用 $recursiveF(n/2,p) + recursiveF(n/2,p)$ 代替 $2*recursiveF(n/2,p)$, 以上度量值会发生什么变化?

Exercise 3. (14)

对于以下函数, 证明函数的阶 $f(n)$ 属于低阶、同阶或高阶函数 (i) $O(g(n))$ (ii) $\Omega(g(n))$ (iii) $\Theta(g(n))$ 中的哪一个

如果你认为 $f(n) = O(g(n))$, 列出常数 c 和 n_0 , 使得 $f(n) \leq c \cdot g(n)$, 对于所有 $n \geq n_0$ 成立, 类似的如果你认为 $f(n) = \Omega(g(n))$, 列出常数 c 和 n_0 , 使得 $f(n) \geq c \cdot g(n)$, 对于所有 $n \geq n_0$ 成立 (所有 \log 函数以 2 为底)

(a) $f(n) = 3n^2$	$g(n) = n^2$
(b) $f(n) = 2n^4 - 3n^2 + 7$	$g(n) = n^5$
(c) $f(n) = \frac{\log n}{n}$	$g(n) = \frac{1}{n}$
(d) $f(n) = \log n$	$g(n) = \log n + \frac{1}{n}$
(e) $f(n) = 2^{k \log n}$	$g(n) = n^k$
(f) $f(n) = 2^n$	$g(n) = 2^{2n}$
(g) $f(n) = \begin{cases} 4^n & \text{if } n < 2^{1000} \\ 2^{1000} n^2 & \text{if } n \geq 2^{1000} \end{cases}$	$g(n) = \frac{n^2}{2^{1000}}$

Exercise 4. (10)

求解以下递归方程，并给出简短的证明

(a) $T(n) = 2T(n/2) + 3$
(b) $T(n) = 3T(n/4) + \sqrt{n}$
(c) $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$
(d) $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{4}) + n \cdot (\log n)^2$
(e) $T(n) = 161^2 \cdot T(\sqrt[161]{n}) + 161 \cdot (\log n)^2$