HIT
CS&E

第七章
Amortized Analysis

高宏
计算机科学与技术学院

HIT
CS&E

提要

HIT
CS&E

参考资料

Chapter 17 Amortized Analysid

Pages 405 - 430

HIT
CS&E

7.1 平摊分析基本原理

- Amortized Analysis的基本思想
- Amortized Analysis方法

HIT
CS&E

关注一系列**数据结构上**操作的时间复杂度:

考虑操作序列: $OP_1, OP_2, \ldots, OP_m$

想确定这个操作序列可能花费的最长时间

一个可能的想法:考察每种操作OP_i的最坏情况时间复杂度t_i,

由此,上述操作序列可能的最长时间就是:

每种操作OP_i的最坏时间t_i之和

不一定正确!

操作之间实际上是相互关联的,
不能假设它们是相互独立的!

HIT
CS&E

例如:

- 普通栈操作及其时间代价
  - Push(S, x): 将对象x压入栈S
  - Pop(S) : 弹出并返回S的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为1
  - n个Push和Pop操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

HIT
CS&E

- 新的栈操作及其时间代价
  - Multipop(S, k):

    去掉S的k个栈顶对象，当$|S|<k$时弹出整个栈
  - 实现算法

    Multipop(S, k)
    1 While not STACK-EMPTY(S) and $k \neq 0$ Do
    2 Pop(S);
    3 $k \leftarrow k-1$.
  - Multipop(S, k)的实际代价 (设Pop的代价为1)
    - Multipop的代价为$min(|S|, k)$

HIT
CS&E

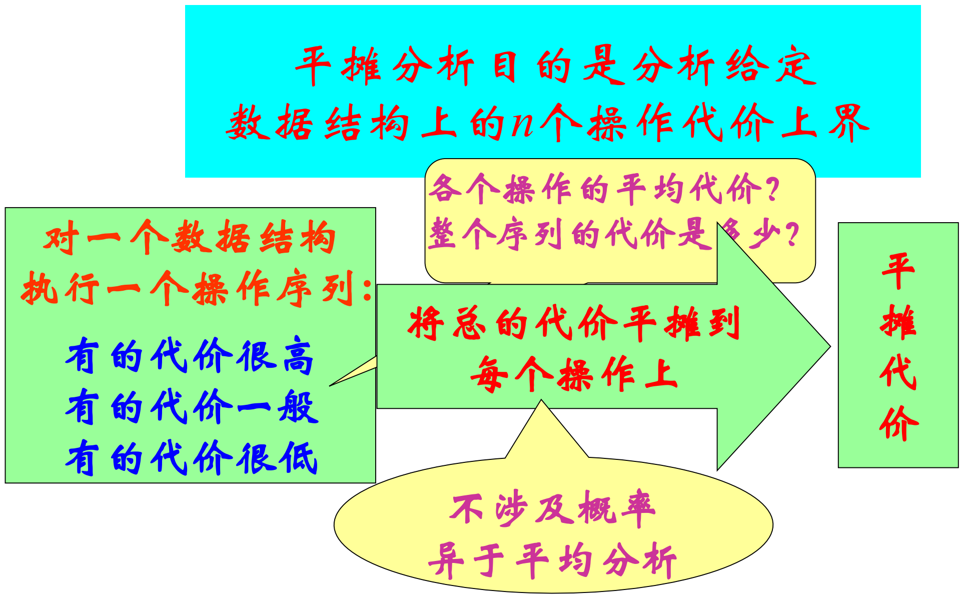
- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 栈的大小至多为n
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n) = O(n^2)$

分析过于粗糙，不够紧确！

原因：只关注于操作，忽略了数据结构！

HIT CS&E

Amortized Analysis的基本思想



HIT CS&E

Amortized Analysis的基本思想

- Aggregate Analysis方法（每个操作的代价）
  – 确定n个操作的上界$T(n)$，每个操作平摊$T(n)/n$
- Accounting方法（整个操作序列的代价）
  – 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  – 某些操作在数据结构的特殊对象上“预付”代价
- Potential方法（整个操作序列的代价）
  – 不同类型操作赋予不同的平摊代价
  – “预付”的代价作为整个数据结构的“能量”

HIT
CS&E

7.2 Aggregate Analysis

- 聚集方法的原理
- 聚集方法的实例之一
- 聚集方法的实例之二

HIT
CS&E

聚集方法实例之一：栈操作系列

- 普通栈操作及其时间代价
  - Push(S, x): 将对象x压入栈S
  - Pop(S)： 弹出并返回S的顶端元素
  - 两个操作的运行时间都是$O(1)$
  - 可把每个操作的实际代价视为1
  - n个Push和Pop操作系列的总代价是n
  - n个操作的实际运行时间为$\theta(n)$

HIT CS&E

聚集方法的原理

目的是分析n个操作系列中每个操作的复杂性上界

数据结构上共有n个操作，最坏情况下：

操作1：Cost=t_1
操作2：Cost=t_2
.
.
.
操作n：Cost=t_n

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

平摊代价：$T(n)/n$

每个操作被赋予相同代价，不管操作类型

HIT CS&E

- 初始栈为空的n个栈操作序列的分析
  - n个栈操作序列由Push、Pop和Multipop组成
  - 粗略分析
    - 最坏情况下，每个操作都是Multipop
    - 每个Multipop的代价最坏是$O(n)$
    - 操作系列的最坏代价为$T(n)=O(n^2)$
    - 平摊代价为$T(n)/n=O(n)$

分析太粗糙！！！

  - 精细分析
    - 一个对象在每次被压入栈后至多被弹出一次
    - 在非空栈上调用Pop的次数(包括在Multipop内的调用)至多为Push执行的次数，即至多为n
    - 最坏情况下操作序列的代价为$T(n)\leq 2n=O(n)$
    - 平摊代价=$T(n)/n=O(1)$

n-1个push
1个multipop

HIT CS&E

聚集方法实例之二：二进制计数器

- 问题定义：由0开始计数的k位二进制计数器

  输入：k位二进制变量x，初始值为0

  输出：$x+1 \bmod 2^k$

  数据结构：

  $A[0..k\text{-}1]$作为计数器，存储x

  x的最低位在$A[0]$中，最高位在$A[k\text{-}1]$中

  $$x = \sum_{i=0}^{k-1} A[i] \cdot 2^i$$

HIT CS&E

- 计数器加1算法

  输入：$A[0..k\text{-}1]$，存储二进制数x

  输出：$A[0..k\text{-}1]$，存储二进制数$x+1 \bmod 2^k$

```
INCREMENT(A)
    i←0
    while  i<k and A[i]=1  Do
        A[i]←0;
        i←i+1;
    If  i<length[A]  Then  A[i]←1
```

- 初始为零的计数器上n个INCREMENT操作分析

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	每个操作 Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

HIT
CS&E

- 粗略分析
  - 每个Increment的时间代价最多$O(k)$
  - n个Increment序列的时间代价最多$O(kn)$
  - n个Increment平摊代价为$O(k)$
  - 例如上例中：$k*n=8*16=128$
- 精细分析

HIT CS&E

操作Cost = O(发生改变的位数)

Counter Value N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Total Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	0	1	0	0	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1	8
6	0	0	0	0	0	1	1	0	10
7	0	0	0	0	0	1	1	1	11
8	0	0	0	0	1	0	0	0	15
9	0	0	0	0	1	0	0	1	16
10	0	0	0	0	1	0	1	0	18
11	0	0	0	0	1	0	1	1	19
12	0	0	0	0	1	1	0	0	22
13	0	0	0	0	1	1	0	1	23
14	0	0	0	0	1	1	1	0	25
15	0	0	0	0	1	1	1	1	26
16	0	0	0	1	0	0	0	0	31

HIT CS&E

- 精细分析
  - $A[0]$每次操作发生一次改变，总次数为n
  - $A[1]$每两次操作发生一次改变，总次数为$n/2$
  - $A[2]$每四次操作发生一次改变，总次数为$n/4$
  - 一般地
    - 对于i=0, 1, …., lg$n$, $A[i]$改变次数为$n/2^i$
    - 对于i>lg$n$, $A[i]$不发生改变

      (因为n个操作结果为n，仅涉及$A[0]$至$A[\lg n]$位)
  - $T(n)= \Sigma_{0\le i \le \lg n}\, n/2^i < n\, \Sigma_{0\le i \le \infty} 1/2^i = O(n)$
  - 每个Increment操作的平摊代价为$O(1)$

HIT
CS&E

7.3 The Accounting Method

- Accounting方法的原理
- Accounting方法的实例之一
- Accoutning方法的实例之二

HIT
CS&E

Accounting方法的原理

- Accounting方法
  - 目的是分析n个操作序列的复杂性上界
  - 一个操作序列中有不同类型的操作
  - 不同类型的操作的操作代价各不相同
  - 于是我们为每种操作分配不同的平摊代价
    - 平摊代价可能比实际代价大，也可能比实际代价小

数据结构中存储的Credit在任何时候都必须非负，即$\sum_{1\le i\le n}\alpha_i - \sum_{1\le i\le n}c_i \ge 0$永远成立

支付实际代价

  - 平摊代价的选择规则：
    - 设c_i和α_i是操作i的实际代价和平摊代价
    - $\sum_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \sum_{1\le i\le n}c_i$ 必须对于任意n个操作序列都成立

HIT CS&E

栈操作序列的分析

- 各栈操作的实际代价
  - Cost(PUSH)=*1*
  - Cost(POP)=*1*
  - Cost(MULTIPOP)=$min\{k, s\}$
- 各栈操作的平摊代价
  - Cost(PUSH)=*2*
    - 一个*1*用来支付PUSH的开销，
    - 另一个*1*存储在压入栈的元素上，预支POP的开销
  - Cost(POP)=*0*
  - Cost(MULTIPOP)=*0*
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i - \Sigma_{1\le i\le n} c_i \ge 0$ 对于任意n个操作序列都成立
    - 因为栈中的对象数≥0
- n个栈操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

HIT CS&E

二进制计数器Increment操作序列分析

- Increment操作的平摊代价
  - 每次一位被置*1*时，付*2*美元
    - *1*美元用于置*1*的开销
    - *1*美元存储在该“*1*”位上，用于支付其被置*0*时的开销
    - 置*0*操作无需再付款
  - Cost(Increment)=*2*
- 平摊代价满足
  - $\Sigma_{1\le i\le n}\alpha_i \ge \Sigma_{1\le i\le n} c_i$ 对于任意n个操作序列都成立，即任何时刻，计数器上的Credit非负
- n个Increment操作序列的总平摊代价
  - $O(n)$

- 初始为零的计数器上n个INCREMENT操作分析

Counter Value / **每个操作 Cost**

N	A[7]	A[6]	A[5]	A[4]	A[3]	A[2]	A[1]	A[0]	Cost
0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0	3
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	0	2
7	0	0	0	0	0	1	1	1	1
8	0	0	0	0	1	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	1	0	1	0	2
11	0	0	0	0	1	0	1	1	1
12	0	0	0	0	1	1	0	0	3
13	0	0	0	0	1	1	0	1	1
14	0	0	0	0	1	1	1	0	2
15	0	0	0	0	1	1	1	1	1
16	0	0	0	1	0	0	0	0	5

HIT
CS&E

7.4 The Potential Method

- Potential方法的原理
- Potential方法的实例之一
- Potential方法的实例之二

HIT CS&E

Potential方法的原理

- Potential方法
  - 目的是分析n个操作系列的复杂性上界
  - 在会计方法中，如果操作的平摊代价比实际代价大，我们将余额与数据结构的数据对象相关联
  - Potential方法把Credit余额与整个数据结构关联，所有的这样的余额之和，构成数据结构的势能
    - 如果操作的平摊代价大于操作的实际代价，势能增加
    - 如果操作的平摊代价小于操作的实际代价，要用数据结构的势能来支付实际代价，势能减少

- 数据结构势能的定义
  - 考虑在初始数据结构D_0上执行n个操作
  - 对于操作i
    - 操作i的实际代价为c_i
    - 操作i将数据结构D_{i-1}变为D_i
    - 数据结构D_i的势能是一个实数$\phi(D_i)$，ϕ是一个正函数
    - 操作i的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1})$
  - n个操作的总平摊代价（必须是实际代价的上界）

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i + \phi(D_n) - \phi(D_0)$$

  - 关键是ϕ的定义
    - 保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$，使总平摊代价是总实际代价的上界
    - 如果对于所有i，$\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$，可以保证$\phi(D_n) \geq \phi(D_0)$
    - 实际可以定义$\phi(D_0) = 0$，$\phi(D_i) \geq 0$（由具体问题确定）

HIT CS&E

栈操作序列的分析

- 栈的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为栈D_m中对象的个数，于是
    - $\phi(D_0) = 0$，D_0是空栈
    - $\phi(D_i)\geq 0 = \phi(D_0)$，因为栈中对象个数不会小于0
    - n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - 栈操作的平摊代价（设栈D_{i-1}中具有s个对象）
    - PUSH: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s+1)-s=2$
    - POP: $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=1+(s-1)-s=0$
    - MULTIPOP(S, k): 设$k' = min(k,s)$

      $\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=k'+(s-k')-s=k'-k'=0$
  - n个栈操作序列的平摊代价是$O(n)$

HIT CS&E

二进制计数器操作序列分析

- 计数器的势能定义
  - $\phi(D_m)$定义为第m个操作后计数器中1的个数b_m
    - $\phi(D_0) = 0$，D_0是空栈
    - $\phi(D_i)\geq 0 = \phi(D_0)$，因为计数器中$1$的个数不会小于0
    - 于是，n个操作的总平摊代价是实际代价的上界
  - INCREMENT操作的平摊代价
    - 第i个INCREMENT操作把 t_i个位置成0, 实际代价为$c_i=t_i+1$
    - 计算操作i的平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})$
      - If $b_i = 0$, 操作i把所有k位置0, 所以$b_{i-1}=k$, $t_i=k$
      - If $b_i>0$, 则$b_i = b_{i-1}-t_i+1$
      - 于是 $b_i \leq b_{i-1}-t_i+1$

        $\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})=b_i-b_{i-1} \leq b_{i-1}-t_i+1-b_{i-1}=1-t_i$
      - 平摊代价$\alpha_i=c_i+\phi(D_i)-\phi(D_{i-1})\leq(t_i+1)+(1-t_i)=2$
  - n个操作序列的总平摊代价是$O(n)$

HIT CS&E

7.5 动态表性能平摊分析

- 动态表的概念
- 动态表的扩张与收缩
- 仅含扩张操作的动态表平摊分析
- 一般的动态表平摊分析

HIT CS&E

动态表—基本概念

- 动态表
- 动态表支持的操作
  - TABLE-INSERT:将某一元素插入表中
  - TABLE-DELETE:将一个元素从表中删除
- 数据结构:用一个(一组)数组来实现动态表
- 非空表T的装载因子$\alpha(T)= T$存储的对象数/表大小
  - 空表的大小为0，装载因子为1
  - 如果动态表的装载因子以一个常数为下界，则表中未使用的空间就始终不会超过整个空间的一个常数部分

HIT CS&E

动态表——基本概念

- 虽然插入和删除操作可能会引起表的扩张和收缩，从而具有较高的实际代价
- 但是，利用平摊分析能够证明，插入和删除操作的平摊代价为O(1)
- 同时保证动态表中未用的空间始终不超过整个空间的一部分。

HIT CS&E

动态表的表示

设T表示一个动态表:

- *table*[T]是一个指向表示表的存储块的指针
- *num*[T]包含了表中的项数
- *size*[T]是T的大小
- 开始时，$num[T]=size[T]=0$

HIT
CS&E

扩张算法

```
算法：TABLE—INSERT(T, x)                    /*复杂的插入操作*/
    If  size[T]=0 Then                      /*开销为常数*/
        获取一个大小为1的表 table[T];
        size[T]←1;
    If  num[T]=size[T] Then                 /*开销取决于size[T]*/
        获取一个大小为 2×size[T]的新表new-table;
        将 table[T]中元素插入new-table;     /*简单插入操作*/
        释放 table[T];
        table[T]←new-table;
        size[T]←2×size[T];
    将 x插入table[T];
    num[T]←num[T]+1
```

HIT
CS&E

动态表的扩张

- 插入一个数组元素时,完成的操作包括
  - 分配一个包含比原表更多的槽的新表
  - 再将原表中的各项复制到新表中去
- 常用的启发式技术是分配一个比原表大一倍的新表,
  - 只对表执行插入操作,则表的装载因子总是至少为1/2
  - 浪费掉的空间就始终不会超过表总空间的一半

HIT CS&E

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

聚集分析-粗略分析

- 考察第i次操作的代价C_i
  - 如果i=1, C_i=1;
  - 如果$num[T]<size[T]$, C_i=1;
  - 如果$num[T] = size[T]$, C_i=i;
- 共有n次操作
  - 最坏情况下,每次进行n次操作,总的代价上界为n^2
- 这个界不精确
  - n次TABLE—INSERT操作并不常常包括扩张表的代价
  - 仅当i-1为2的整数幂时第i次操作才会引起一次表的扩张

聚集分析-精细分析

- 第i次操作的代价C_i
  - 如果$i=2^m$, C_i=i； 否则C_i=1
- n次TABLE—INSERT操作的总代价为$\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^j < n + 2n = 3n$

★每一操作的平摊代价为$3n/n=3$

HIT CS&E

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

会计方法

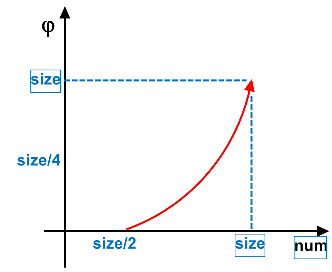
- 每次执行TABLE—INSERT平摊代价为3
  - 1支付第10步中的基本插入操作的实际代价
  - 1作为自身的存款
  - 1存入表中第一个没有存款的数据上
- 当发生表的扩张时，数据的复制的代价由数据上的存款来支付
- 任何时候，存款总和非负
- 初始为空的表上n次TABLE-INSERT操作的平摊代价总和为$3n$

HIT
CS&E

初始为空的表上n次插入操作的代价分析

势能法分析

势怎么定义才能使得表满发生扩张时势能能支付扩张的代价?



- 如果势能函数满足
  - 刚扩充完,$\phi(T)=0$
  - 表满时 $\phi(T)=size(T)$
- 定义$\phi(T)=2*num[T]-size[T]$
  - 由于 $num[T]\geq size[T]/2$，故$\phi(T)\geq 0$
  - 因此，n次TABLE－INSERT操作的总的平摊代价是总的实际代价的一个上界
- 第i次操作的平摊代价
  - 如果未发生扩张, $\alpha_i=3$
  - 如果发生扩张,$\alpha_i=3$

Why???

- 初始为空的表上n次插入操作的代价的上界为$3n$

HIT
CS&E

动态表的扩张与收缩

- 表的扩张
- 表的收缩

  理想情况下，我们希望：
  - 表具有一定的丰满度
  - 表的操作序列的复杂度是线性的
- 表的收缩策略
  - 表的装载因子小于1/2时，收缩表为原表的一半
  - $n=2^k$,考察下面的一个长度为n的操作序列：
    - 前$n/2$个操作是插入，后跟I D D I I D D I I…
    - 每次扩张和收缩的代价为O(n)，共有O(n)扩张或收缩
    - 总代价为$O(n^2)$，而每一次操作的平摊代价为$O(n)$--每个操作的平摊代价太高

HIT
CS&E

动态表的扩张与收缩

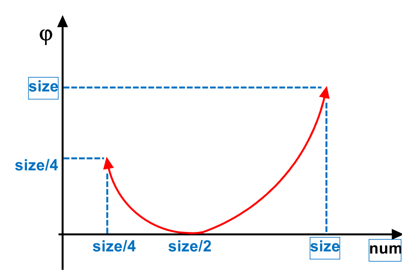
- 改进的收缩策略(允许装载因子低于1/2)
  - 满表中插入数据项时，将表扩大一倍
  - 删除数据项引起表不足1/4满时，将表缩小为原表的一半
  - 扩张和收缩过程都使得表的装载因子变为1/2
  - 表的装载因子的下界是1/4

HIT

动态表上n次(插入、删除)操作的代价分析

势能函数的定义

- 操作序列过程,势能总是非负的
  - 保证一系列操作的总平摊代价即为其实际代价的一个上界
- 表的扩张和收缩过程要消耗大量的势
- 势能函数应满足
  - $num(T)=size(T)/2$时，势最小
  - 当$num(T)$减小时，势增加直到收缩
  - 当$num(T)$增加时，势增加直到扩充
- 势能函数特征的细化
  - 当装载因子为1/2时，势为0
  - 装载因子为1时，有$num[T]=size[T]$，即$\phi(T)=num[T]$。这样当因插入一项而引起一次扩张时，就可用势来支付其代价
  - 当装载因子为1/4时，$size[T]=4\cdot num[T]$。即$\phi(T)=num[T]$。因而当删除某项引起一次收缩时就可用势来支付其代价



$$\Phi(T)=\begin{cases}2\cdot num[T]-size[T] & \alpha(T)\ge 1/2\\ size[T]/2-num[T] & \alpha(T)<1/2\end{cases}$$

HIT
CS&E

平摊代价的计算

- 第i次操作的平摊代价：$\alpha_i = c_i + \phi(T_i)\text{-}\phi(T_i\text{-}1)$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT：未扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—INSERT：扩张 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE：未收缩 $\alpha_i \leq 3$
  - 第i次操作是TABLE—DELETE：收缩 $\alpha_i \leq 3$
- 动态表上的n个操作的实际时间为$O(n)$

HIT
CS&E

7.6并查集性能平摊分析

- 并查集的概念和基本操作
- 并查集的线性链表实现
- 并查集的森林实现
- 并查集性能的平摊分析

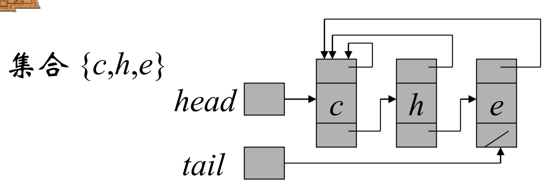
HIT
CS&E

并查集

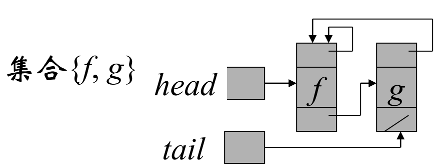
- 目的：管理n个不相交的集合$C=\{S_1,\ldots,S_n\}$
  - 每个集合S_i维护一个代表元素x_i
- 支持的操作
  - MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的集合.
  - UNION(x,y)　：合并代表元素分别x和y的集合
  - FIND-SET(x)：返回x所在集合的代表元素
- 目标：使得如下操作序列的代价尽可能低
  - n个MAKE-SET 操作 (开始阶段执行).
  - m个MAKE-SET, UNION, FIND-SET操作(后续)
  - $m\geq n$,UNION操作至多执行 n-1次
- 典型应用（管理图的连通分支）
  - 找出图的连通分支
  - Krusal算法中维护生成树产生过程中的连通分支

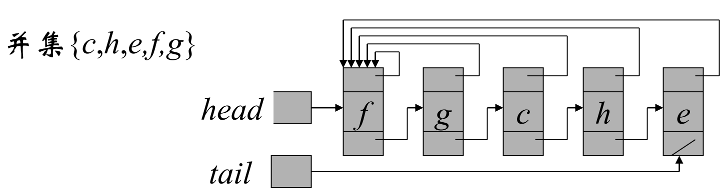
HIT
CS&E

并查集的直接实现为链表



每个集合维护为一个链表
- •head: 链表头指针
- •tail　:链表尾指针
- •rep　:指向代表元素
- •Make-Set:　O(1)
- •Find(x)　:　O(1)
- •Union(x,y): O($|s_x|$)





HIT CS&E

并查集链表实现的性能分析

考虑并查集上如下特定的操作序列的代价

- 开始阶段执行n个MAKE-SET操作的总代价$O(n)$
- 后跟n-1个UNION操作的总代价$O(n^2)$

Union(x_1,x_2)　　代价O(1)
Union(x_2,x_3)　　代价O(2)
Union(x_3,x_4)　　代价O(3)
...
Union(x_{n-1},x_n)　　代价O(n-1)

- 总共执行执行2n-1次操作的总代价为$O(n^2)$
- 从平摊效果看，每个操作的开销为$O(n)$

说明链表实现方式是很“蹩脚”，如何提高效率？

HIT CS&E

并查集链表实现的一种简单改进

考虑并查集链表实现的如下改进，效果会怎么样？

- 每个链表表头记录集合（或）链表中元素的个数
- Union操作时将较短链表链接到较长链表

结果

在改进后的并查集上执行由Make_set, Find和Union操作构成的长度为$m+n$的操作序列（其中Make_Set操作有m个），则该操作序列的时间复杂度为$O(m+n\log n)$

为什么？

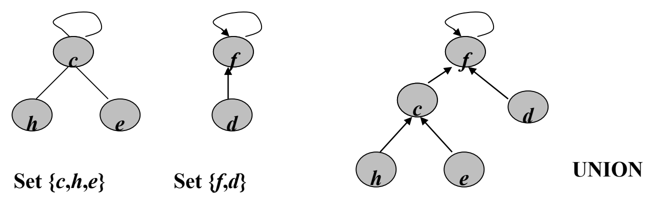
- 考虑每个元素的rep指针被修改的次数（总共n个元素）
- 每个元素至多参与log$n$次并，因为并操作使链表长度至少倍增
- 所有Union操作一起至多$n$log$n$次修改rep指针

HIT
CS&E

并查集的森林实现

并查集三种操作

- 每个集合表示为一棵有根树
- 树根是代表元素
- 每个结点的指针指向其父结点，根结点指向自身

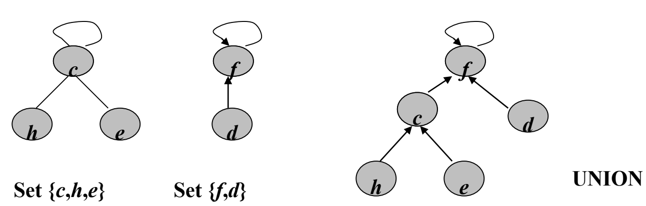


HIT
CS&E

并查集的直接森林实现

并查集可以实现为森林

- MAKE-SET(x): 创建仅含元素x的一棵树 $O(1)$
- UNION(x,y) ：将x作为y的孩子 $O(1)$
- FIND(x) ：从结点x沿父指针访问直到树根 $O(T_x)$
- n次合并操作可能得到深度为n的树（简单路径）
- 在此极端情况下，Find(x)的最坏时间复杂性为$O(n)$
- n次Find操作的时间复杂度可能达到$O(n^2)$

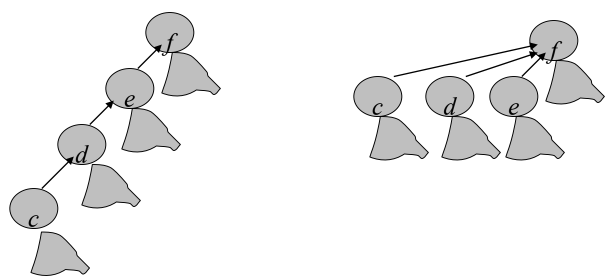


HIT
CS&E

改进策略之路径压缩

执行Find(x)时

- 修改x到根结点r的路径上的所有结点的指针，使其指向根结点r
- 路径压缩增加了执行单次Find操作的时间开销
- 树中的路径长度大幅度降低，为后续Find操作节省了时间



HIT
CS&E

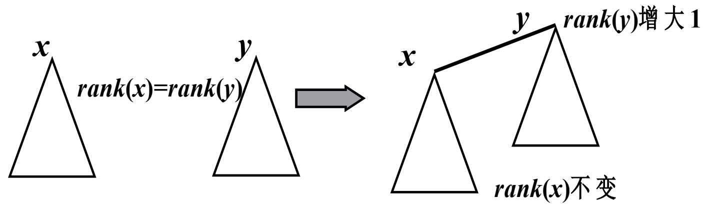
改进策略之按秩合并

根据以下规则，维护每个结点的秩

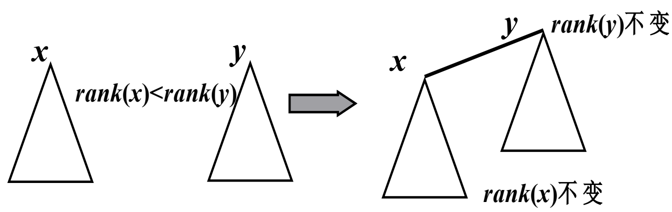
- MakeSet(x)操作执行时定义结点x的秩为0
- Find操作不改变任意顶点的秩
- Union(x,y) 分两种情况修改结点的秩：
  - 情形a：rank(x)=rank(y)。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，rank(y)增加1，rank(x)不变（其他结点的秩也保持不变）
  - 情形b：rank(x)<rank(y)。此时，令x指向y且y是并集的代表元素，rank(y)和rank(x)保持不变（其他结点的秩也保持不变）

HIT
CS&E

情形a



情形b



HIT
CS&E

并查集操作算法

UNION(x,y)

1. LINK(FIND(x),FIND(y))

MAKE-SET(x)

1. rank[x]$\leftarrow$0
2. p[x]$\leftarrow x$

FIND(x)

1. Q$\leftarrow\varnothing$
2. While $x\neq$ p[x] Do
3. 将x插入Q;
4. $x\leftarrow p[x]$;
5. For $\forall y\in Q$ do
6. $p[y]\leftarrow x$;
7. 输出x

LINK(x,y)

1. if rank[x]>rank[y] then
2. $p[y]\leftarrow x$
3. else $p[x]\leftarrow y$
4. if rank[x]=rank[y] then
5. rank[y] $\leftarrow$ rank[y] +1

HIT CS&E

并查集的性能

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$

- n是Make_Set操作的个数
- $\alpha(n)\le 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的

欲得上述结果，需要

- 讨论一个增长缓慢的函数-阿克曼函数的逆函数
- 讨论秩的性质
- 证明上述时间复杂度

HIT CS&E

阿克曼函数

阿克曼函数是定义在$k\ge 0, j\ge 1$上的递归函数

$$A_k(j)=\begin{cases} j+1 & \text{如果}k=0 \\ A_{k-1}^{(j+1)}(j) & \text{如果}k\ge 1 \end{cases}$$

利用数学归纳法，不难验证欲得上述结果，需要

- $A_1(j)=2j+1$
- $A_2(j)=2^{j+1}(j+1)-1$
- $A_k(j)$是一个"急速"增长的函数

$A_0(1)=1+1=2$

$A_1(1)= 2*1+1=3$

$A_2(1)= 2^{1+1}(1+1)-1= 7$

$A_3(1)=A_2^{(1+1)}(1)=A_2^{(2)}(1)=A_2(A_2(1))=A_2(7)=2^{7+1}(7+1)-1=2047$

$A_4(1)=A_3^{(2)}(1)=A_3(A_3(1)) =A_3(2047)=A_2^{(2048)}(2047)$

$>> A_2(2047) =2^{2048}.2048-1 >2^{2048} =(2^4)^{512} =(16)^{512}>10^{80}$

阿克曼函数的逆函数

阿克曼函数的逆函数定义定义为

$$\alpha(n)=min\ \{k \mid A_k(1)\geq n\}$$

由于阿克曼函数急速增长，需要$\alpha(n)$缓慢增长

$\alpha(n)\leq 4$在人类实践认知范围总成立

n	$0\leq n\leq 2$	$n=3$	$4\leq n\leq 7$	$8\leq n\leq 2047$	$2048\leq n\leq A_4(1)$	...
$\alpha(n)$	0	1	2	3	4	...

秩的性质

引理1.对于含有n个结点的并查集，秩具有如下性质:

(1) 如果$x\neq p(x)$，则$rank(x) < rank(p(x))$

(2) $rank(x)$的初始值为0，逐步递增直到x不再是集合的代表元素，此后保持不变

(3)对于任意x, $rank(p(x))$是在操作过程中单调递增

(4)$rank(x)\leq n$-1对任意结点成立

证明.根据秩的定义和并查集上的操作算法可得

HIT
CS&E

并查集性能的平摊分析

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \ge A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) \quad = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \le rank(p(x))\}$$

- 直观上
  - $Level(x)$是阿克曼函数的最大级,使得该函数在自变量$rank(x)$上的函数值不超过$rank(p(x))$；
  - $Iter(x)$是$Level(x)$级阿克曼函数在$rank(x)$上迭代的最大次数，使得迭代结果不超过$rank(p(x))$

HIT
CS&E

并查集性能的平摊分析(1)

对并查集中的每个结点x,定义

$$Level(x) = \max\{k \mid rank(p(x)) \ge A_k(rank(x))\}$$

$$Iter(x) \quad = \max\{i \mid A^{(i)}_{Level(x)}(rank(x)) \le rank(p(x))\}$$

- $0 \le Level(x) < \alpha(n)$, 且$Level(x)$随时间递增
  - $0 \le Level(x)$，因为$rank(p(x)) \ge rank(x)+1 = A_0(rank(x))$
  - $Level(x) < \alpha(n)$，因为$A_{\alpha(n)}(rank(x)) \ge A_{\alpha(n)}(1) \ge n > rank(p(x))$
- $1 \le Iter(x) \le rank(x)$, 且只要$Level(x)$不变则Iter$(x)$不变或增大
  - $1 \le Iter(x)$，因为$rank(p(x)) \ge A_{\text{Level}(x)}(rank(x)) = A^{(1)}_{Level(x)}(rank(x))$
  - $Iter(x) \le rank(x)$，因为 $A^{(rank(x)+1)}_{Level(x)}(rank(x)) = A_{Level(x)+1}(rank(x)) > \text{rank}(\text{p}(x))$
  - 由于rank(p[x])随时间单调递增，仅当Level(x)增大时Iter(x)减小
  - 换言之，只要$Level(x)$不变则Iter(x)不变或增大

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(2)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- $0\leq\phi_q(x)\leq\alpha(n)\mathrm{rank}(x)$
  - 若x是树根，显然
  - 若x不是树根，则
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)-Level(x)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{Iter}(x)$
    $\geq[\alpha(n)-(\alpha(n)-1)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{rank}(x)$
    $=0$
  - $\phi_q(x)=[\alpha(n)-Level(x)]\mathrm{rank}(x)-\mathrm{Iter}(x)$
    $\leq[\alpha(n)-(0)]\mathrm{rank}(x)-0$
    $=\alpha(n)\mathrm{rank}(x)$

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(3)

定义并查集上q个操作之后结点x的势能$\phi_q(x)$为

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & 若x是树根或rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & 若x不是树根且rank(x)\geq 1\end{cases}$$

- 若x不是树根，第$q+1$个操作是Union或Find，则$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)$
  - rank(x)和$\alpha(n)$不变
  - 若rank(x)=0, 由Iter(x)≤rank(x)可知，论断成立
  - 若rank(x)≥1，（Level(x)单调递增）
    - $Level(x)$保持不变，Iter(x)增大，$\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)-1$
    - $Level(x)$增大，Iter(x)不变或减小，
      $[\alpha(n)-Level(x)]\mathrm{rank}(x)$至少减小$rank(x)$
      Iter(x)至多减小rank(x)-1，因为Iter(x)<rank(x)
      $\phi_{q+1}(x)\leq\phi_q(x)-1$

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(4)

定义并查集在q个操作之后的势能ϕ_q为

$$\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$$

- $\phi_q \geq 0$恒成立，因为$0 \leq \phi_q(x) \leq \alpha(n)\text{rank}(x)$对任意$x$成立
- 并查集上任意操作序列的总平摊代价≥总实际代价

HIT CS&E

并查集性能的平摊分析(5)

势能$\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n) \cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x) = 0 \\ [\alpha(n) - Level(x)] \cdot rank(x) - Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x) \geq 1 \end{cases}$$

Make_Set操作的平摊代价为$O(1)$

Make_Set(y)：

- 实际代价为$O(1)$
- 势能的增量为0
  - 新增一棵以y为树根的树，y的势能为0
  - 不改变其他树的结构和rank，其他结点的势能不变

并查集性能的平摊分析(6)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Union(y,z)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(1)$
- 势能增量为$\Theta(\alpha(n))$
  - 不妨设合并后，y是z的父结点
  - 操作仅可能改变rank(y)
  - 势能发生变化的结点只能是y，z和操作之前y的子结点w
    - w不是树根，必有$\phi_{q+1}(w)\le\phi_q(w)$（参照前面的性质）
    - z的势能不会增加

      操作前，z是树根，故$\phi_q(z)=\alpha(n)\text{rank}(z)$

      操作后，rank(z)不变，且$0\le\phi_{q+1}(z)\le\alpha(n)\text{rank}(z)$
    - y的势能至多增大$\alpha(n)$

      操作前，y是树根，故$\phi_q(y)=\alpha(n)\text{rank}(y)$

      操作时，rank(y)增大1或保持不变

      操作后，y仍是树根，$\phi_{q+1}(y)\le\phi_q(y)+\alpha(n)$

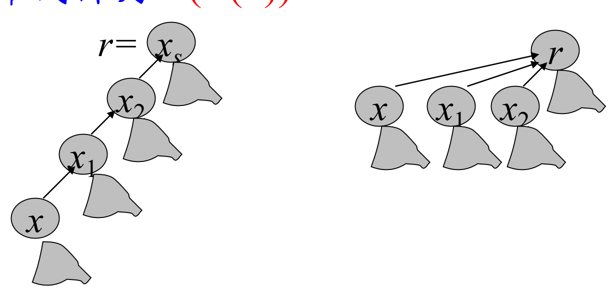
并查集性能的平摊分析(7)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x)=\begin{cases}\alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0\\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\ge 1\end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- $x=x_0,x_1,\ldots,x_{s-1}$的势能不会增加

  因为它们不是树根，故$\phi_{q+1}(x_i)\le\phi_q(x_i)$（前面的结论）
- 树根r的势能不会发生变化

  rank(r)未发生变化

HIT CS&E

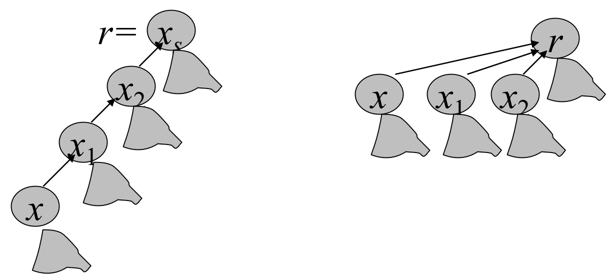
并查集性能的平摊分析(8)

势能 $\phi_q = \Sigma_x \phi_q(x)$

$$\phi_q(x) = \begin{cases} \alpha(n)\cdot rank(x) & \text{若}x\text{是树根或}rank(x)=0 \\ [\alpha(n)-Level(x)]\cdot rank(x)-Iter(x) & \text{若}x\text{不是树根且}rank(x)\geq 1 \end{cases}$$

Find(x)操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

- 实际代价为$\Theta(s)$



- 平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$

  路径$x, x_1, \ldots, x_s$上至少有s-[$\alpha(n)$+2]个结点的势能至少减小1（参见讲义）

HIT CS&E

结论

在并查集上执行m个操作的时间复杂度为O($m\alpha(n)$)

- Make_Set操作的平摊代价为$O(1)$
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- Union操作的平摊代价为$\Theta(\alpha(n))$
- n是Make_Set操作的个数，亦即并查集管理的数据对象的个数
- $\alpha(n)\leq 4$，对于绝大多数应用成立
- 近似地看，并查集上的操作序列的时间复杂度几乎是线性的