HIT
CS&E

第四章

Dynamic Programming Algorithms

高宏
计算机科学与技术学院

HIT
CS&E

提要

HIT
CS&E

参考资料

Introduction to Algorithms
第15章
15.2, 15.3, 15.4, 15.5

HIT
CS&E

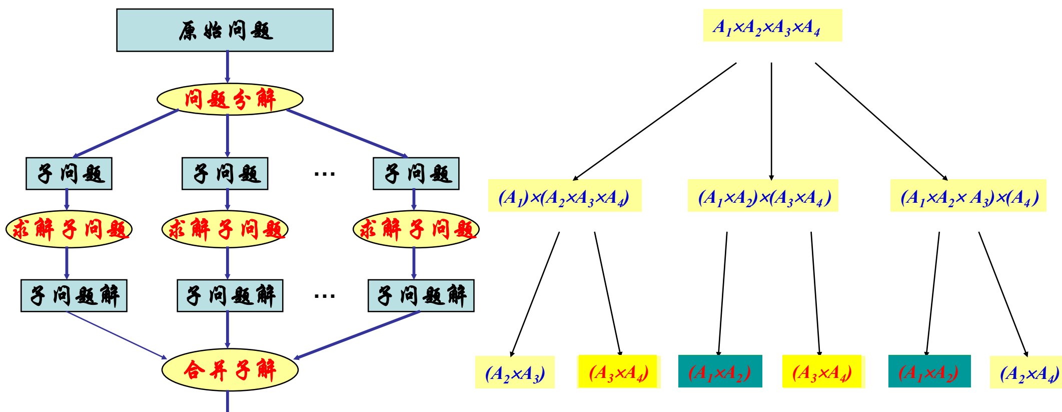
4.1 Elements of Dynamic Programming

Why?
What?
How?

HIT
CS&E

Why?

- Divide-and-Conquer方法的问题



问题：如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低

HIT
CS&E

Why?

- 优化问题
  - 问题可能有很多解，每个可能的解都对应有一个值，这个值通常称为代价
  - 优化问题是要在该问题所有可能的解中找到具有最优值(最大/最小)的解，即问题的一个最优解
  - 一个问题的最优解不一定是唯一的
  - 举例：最短路径，旅行商、任务调度等问题
  - 因此我们也可以说：优化问题就是给定一个代价函数，在问题的解空间中搜索具有最小或最大代价的优化解

动态规划是解决优化问题的一种常见方法

HIT
CS&E

What?

- Dynamic Programming
  - 把原始问题划分成一系列子问题
  - 求解每个子问题仅一次，并将其结果保存在一个表中，以后用到时直接存取，不重复计算，节省计算时间
  - 自底向上地求解子问题
- 适用范围
  - 一类优化问题：可分为多个相关子问题，子问题的解被重复使用

HIT
CS&E

How?

- 使用Dynamic Programming的条件
  - 优化子结构
    - 当一个问题的优化解包含了子问题的优化解时，我们说这个问题具有优化子结构。
  - 重叠子问题
    - 在问题的求解过程中，很多子问题的解将被多次使用

How?

- Dynamic Programming算法的设计步骤
  - 分析优化解的结构
  - 递归地定义最优解的代价
  - 递归地划分子问题，直至不可分
  - 自底向上地求解各个子问题
    - 计算优化解的代价并保存之
    - 获取构造最优解的信息
  - 根据构造最优解的信息构造优化解

4.2 Matrix-chain Multiplication

HIT
CS&E

问题的定义

- 输入：$<A_1, A_2, ..., A_n>$，A_i是$p_{i-1}\times p_i$矩阵
- 输出：计算$A_1\times A_2\times...\times A_n$的最小代价方法

矩阵乘法的代价/复杂性：乘法的次数

若A是$p\times q$矩阵，B是$q\times r$矩阵，则$A\times B$的代价是$O(pqr)$

HIT
CS&E

Motivation

- 矩阵链乘法
  - 矩阵乘法满足结合率。
  - 计算一个矩阵链的乘法可有多种方法：

例如，$(A_1\times A_2\times A_3\times A_4)$
$= (A_1\times(A_2\times(A_3\times A_4)))$
$= ((A_1\times A_2)\times(A_3\times A_4))$
....
$= ((A_1\times A_2)\times A_3)\times A_4)$

HIT
CS&E

- 矩阵链乘法的代价与计算顺序的关系
  - 设A_1=10×100矩阵, A_2=100×5矩阵, A_3=5×50矩阵

    T((A1×A2)×A3)=10×100×5+10×5×50 =7500

    T(A1×(A2×A3))=100×5×50+10×100×50 =75000

结论：不同计算顺序有不同的代价

HIT
CS&E

- 矩阵链乘法优化问题的解空间
  - 设$p(n)$=计算n个矩阵乘积的方法数
  - $p(n)$的递归方程

$$(A_1 \times\ldots\times A_k)\times(A_{k+1}\times\ldots\times A_{n-1}\times A_n)$$

$$p(k) \qquad\qquad p(n-k)$$

$$p(n)=1 \qquad \text{if } n=1$$

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n-1} p(k)p(n-k) \qquad \text{if } n>1$$

$$p(n)=\frac{1}{n}C_{2(n-1)}^{n-1} = \Omega(4^n/n^{3/2})$$

$$(A_1) \qquad \times(A_2\times\ldots\times A_n)$$
$$(A_1\times A_2) \qquad \times(A_3\times\ldots\times A_n)$$
$$\ldots.$$
$$(A_1\times\ldots\times A_k) \qquad \times(A_{k+1}\times\ldots\times A_n)$$
$$\ldots$$
$$(A_1\times\ldots\times A_{n-1})\times(A_n)$$

如此之大的解空间是无法用枚举方法
求出最优解的！

HIT
CS&E

下边开始设计求解矩阵链乘法问题的Dynamic Programming算法

- 分析优化解的结构
- 递归地定义最优解的代价
- 递归地划分子问题，直至不可分
- 自底向上地求解各个子问题
  - 计算优化解的代价并保存之
  - 获取构造最优解的信息
- 根据构造最优解的信息构造优化解

HIT
CS&E

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) & \times(A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) & \times(A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. & \\ (A_1 \times \ldots \times A_k\ ) & \times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots & \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) & \times(A_n) \end{cases}$$

如果等式右端所有子问题的最优乘法方案的代价均已知，则根据等式右端组合子问题的解，取组合方案代价的最小值即可获得解

HIT CS&E

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \qquad \times(A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \qquad \times(A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1})\times(A_n) \end{cases}$$

$$cost_{1\sim n} = Min \begin{cases} cost_{1\sim 1} + cost_{2\sim n} + p_0p_1p_n \\ cost_{1\sim 2} + cost_{3\sim n} + p_0p_2p_n \\ \ldots. \\ cost_{1\sim k} + cost_{k+1\sim n} + p_0p_kp_n \\ \ldots \\ cost_{1\sim n-1} + cost_{n\sim n} + p_0p_{n-1}p_n \end{cases}$$

其中A_i是$p_{i-1} \times p_i$矩阵

HIT CS&E

分析优化解的结构

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \qquad \times(A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \qquad \times(A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots. \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1})\times(A_n) \end{cases}$$

优化子结构：

如果红色方案是代价最小的方案，则该方案中
计算$A_1 \times \ldots \times A_k$的方案必须是代价最小的方案
计算$A_{k+1} \times \ldots \times A_n$的方案必须是代价最小的方案

下面用$A_{i\sim j}$表示矩阵链$A_i \times \ldots \times A_j$相乘

分析优化解的结构

- 优化解的结构
  - 若计算$A_{1\sim n}$的优化顺序在k处断开矩阵链, 即$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$, 则在$A_{1\sim n}$的优化顺序中, 对应于子问题$A_{1\sim k}$的解必须是$A_{1\sim k}$的优化解, 对应于子问题$A_{k+1\sim n}$的解必须是$A_{k+1\sim n}$的优化解.

$$(A_1 \times\ldots\times A_k)\times(A_{k+1}\times\ldots\times A_{n-1}\times A_n)$$

$$((A_1 \times\ldots A_i)\times(A_{i+1}\times\ldots\times A_k))\times((A_{k+1}\times\ldots A_j)\times(A_{j+1}\times\ldots\times A_n))$$

  - 否则,若优化解中给出的子问题$A_{1\sim k}$的计算顺序不是$A_{1\sim k}$的优化顺序, 则一定存在$A_{1\sim k}$的一个计算代价更小的优化顺序:

$$((A_1 \times\ldots A_r)\times(A_{r+1}\times\ldots\times A_k))$$

  - 用其替代$A_{1\sim n}$的优化解中$A_{1\sim k}$的计算顺序, 将会得到一个计算代价更小的解, 则与$A_{1\sim n}=A_{1\sim k}\times A_{k+1\sim n}$是优化顺序相矛盾了。
  - 对子问题$A_{k+1\sim n}$亦同理。

- 子问题重叠性

$A_1\times A_2\times A_3\times A_4$

$(A_1)\times(A_2\times A_3\times A_4)$ $(A_1\times A_2)\times(A_3\times A_4)$ $(A_1\times A_2\times A_3)\times(A_4)$

$(A_2\times A_3)$ $(A_3\times A_4)$ $(A_1\times A_2)$ $(A_3\times A_4)$ $(A_1\times A_2)$ $(A_2\times A_3)$

具有子问题重叠性

HIT CS&E

递归地定义最优解的代价

- 递归求解过程
  - 计算子链的最优乘法方案

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \begin{cases} (A_1) \times (A_2 \times \ldots \times A_n) \\ (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \ldots \times A_n) \\ \ldots\ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_n) \\ \ldots \\ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1})\times(A_n) \end{cases}$$

  - 一般化表示：即计算$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优乘法方案

HIT CS&E

递归地定义最优解的代价

$$A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j = \begin{cases} (A_i) \times (A_{i+1} \times \ldots \times A_j) \\ (A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots\ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_k)\times(A_{k+1} \times \ldots \times A_j) \\ \ldots \\ (A_i \times \ldots \times A_{j-1})\times(A_j) \end{cases}$$

$$cost_{i\sim j} = Min_{i\le k\le j-1} \begin{cases} cost_{i\sim i} + cost_{i+1\sim j} + p_{i-1}p_i p_j \\ cost_{i\sim i+1} + cost_{i+2\sim j} + p_{i-1}p_{i+1}p_j \\ \ldots\ldots \\ Cost_{i\sim k} + cost_{k+1\sim j} + p_{i-1}p_k p_j \\ \ldots \\ cost_{i\sim j-1} + cost_{j\sim j} + p_{i-1}p_{j-1}p_j \end{cases}$$

其中A_r是$p_{r-1}\times p_r$矩阵

HIT
CS&E

递归地定义最优解的代价

- 假设
  - $m[i, j]$ = 计算$A_{i\sim j}$的最小乘法数
  - $m[1, n]$ = 计算$A_{1\sim n}$的最小乘法数

$$(A_i \ldots A_k)(A_{k+1} \ldots A_j)$$

考虑到所有的k，优化解的代价方程为

$m[i, j]= 0$ if $i=j$

$m[i, j]= \min_{i\leq k<j}\{ m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j\}$ if $i<j$

HIT
CS&E

递归地划分子问题

$$m[i, j]= \min_{i\leq k<j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j \}$$

m[i,i]	**m[i,i+1]**	**……**	**m[i,j-1]**	**m[i,j]**
				m[i+1,j]
				m[i+2,j]
				……
				m[j, j]

HIT
CS&E

递归地划分子问题

$$m[i, j]= \min_{i \le k < j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_k p_j \}$$

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

HIT
CS&E

自底向上计算优化解的代价

$m[i, j]= 0$ if $i=j$

$$m[i, j]= \min_{i \le k < j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_k p_j \}$$

m[1,1]	m[1,2]	m[1,3]	m[1,4]	m[1,5]
	m[2,2]	m[2,3]	m[2,4]	m[2,5]
		m[3,3]	m[3,4]	m[3,5]
			m[4,4]	m[4,5]
				m[5,5]

```
Matrix-Chain-Order(n)
FOR i=1 TO n DO
    m[i, i]=0;
FOR l=2 TO n DO /* 计算l对角线 */
    FOR i=1 TO n-l+1 DO
        j=i+l-1;
        m[i, j]=∞;
        FOR k←i To j-1 DO /* 计算m[i,j] */
            q=m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j
            IF q<m[i, j] THEN m[i,j]=q;
Return m.
```

$m[1,1]$	$m[1,2]$	$m[1,3]$	$m[1,4]$	$m[1,5]$
	$m[2,2]$	$m[2,3]$	$m[2,4]$	$m[2,5]$
		$m[3,3]$	$m[3,4]$	$m[3,5]$
			$m[4,4]$	$m[4,5]$
				$m[5,5]$

$m[i, j]= 0$ if $i=j$

$m[i, j]= \min_{i \le k<j}\{ m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j\}$ if $i<j$

HIT
CS&E

算法描述

$$m[i, j]= \min_{i\le k <j}\{ m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j \}$$

- Matrix-Chain-Order(p)
- n=length(p)-1;
- FOR $i=1$ TO n DO
- $m[i, i]=0$;
- FOR $l=2$ TO n DO
- FOR $i=1$ TO $n-l+1$ DO
- $j=i+l-1$;
- $m[i, j]=\infty$;
- FOR $k\leftarrow i$ To $j-1$ DO
- $q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}\times p_k\times p_j$
- IF $q<m[i, j]$ THEN $m[i,j]=q$;
- Return m and s.

HIT CS&E

获取构造最优解的信息

$m[i,j] = \min_{i \le k < j} \{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_kp_j \}$

- **Matrix-Chain-Order(*p*)**
- ***n*=length(*p*)-1;**
- **FOR *i=1* TO *n* DO**
- **$m[i, i]=0$;**
- **FOR *l=2* TO *n* DO**
- **FOR *i=1* TO *n-l+1* DO**
- **$j=i+l-1$;**
- **$m[i, j]=\infty$;**
- **FOR $k \leftarrow i$ To *j-1* DO**
- **$q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1} \times p_k \times p_j$**
- **IF $q<m[i, j]$ THEN $m[i,j]=q$，$s[i,j]=k$;**
- **Return *m* and *s*.**

$S[i,j]=k$记录$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优划分处在A_k与A_{k+1}之间

时间复杂性：$O(n^3)$

29

HIT CS&E

构造最优解

```
Print-Optimal-Parens(s, i, j)
IF j=i
THEN  Print "A"i;
ELSE  Print "("
          Print-Optimal-Parens(s, i, s[i, j])
          Print-Optimal-Parens(s, s[i, j]+1, j)
          Print  ")"
```

$S[i, j]$记录$A_i \ldots A_j$的最优划分处；
$S[i, S[i,j]]$记录$A_i \ldots A_{s[i,j]}$的最优划分处；
$S[S[i,j]+1, j]$记录$A_{s[i,j]+1} \ldots A_j$的最优划分处.

调用Print-Optimal-Parens(*s*, *1*, *n*)
即可输出$A_{1\sim n}$的优化计算顺序

2019/3/13

30

HIT
CS&E

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - (l, i, k)三层循环，每层至多n-1步
    - $O(n^3)$
  - 构造最优解的时间：$O(n)$
  - 总时间复杂性为：$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 使用数组m和S
  - 需要空间$O(n^2)$

Hu, TC; Shing, MT (1982). "Computation of Matrix Chain Products, Part I"
Hu, TC; Shing, MT (1984). "Computation of Matrix Chain Products, Part II"

HIT
CS&E

4.3 Longest Common Susequence

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解的代价递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

HIT
CS&E

问题的定义

- 子序列
  - $X=(A, B, C, B, D, B)$
  - $W=(B, D, A)$是X的子序列？
  - $Z=(B, C, D, B)$是X的子序列？
- 公共子序列
  - Z是序列X与Y的公共子序列如果Z是X的子序列也是Y的子序列。

HIT
CS&E

最长公共子序列（LCS）问题

输入：$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$，$Y=(y_1,y_2,\ldots y_n)$
输出：X与Y的最长公共子序列
$Z=(z_1, z_2, \ldots, z_k)$

HIT CS&E

优化子结构分析

- 第i前缀
  - 设$X=(x_1, x_2, ..., x_n)$是一个序列
    则$X_i=(x_1, ..., x_i)$是X的第i前缀

例. $X=(A, B, D, C, A)$, $X_1=(A)$, $X_2=(A, B)$, $X_3=(A, B, D)$

HIT CS&E

$X = (x_1,x_2,...,x_m)$
$Y = (y_1,y_2,...y_n)$

- 优化子结构的猜想

X和Y的LCS为$LCS_{XY}=(z_1, ..., z_k)$

If $x_m=y_n$ 则 $z_k=x_m=y_n$

$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+ <x_m=y_n>$

If $x_m \neq y_n$,

$$\left.\begin{array}{l} z_k \neq x_m \quad LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y} \\ z_k \neq y_n \quad LCS_{XY}=LCS_{XY_{n-1}} \end{array}\right\} LCS_{XY}=\max\{LCS_{X_{m-1}Y}, LCS_{XY_{n-1}}\}$$

HIT
CS&E

- 优化子结构

定理1（优化子结构）设$X=(x_1, ..., x_m)$、$Y=(y_1, ..., y_n)$是两个序列，$LCS_{XY}=(z_1, ..., z_k)$是X与Y的LCS，我们有：

(1) 如果$x_m=y_n$, 则$z_k=x_m=y_n$, $LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>$,
$LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}$是X_{m-1}和Y_{n-1}的LCS.

(2) 如果$x_m \neq y_n$，且$z_k \neq x_m$，则LCS_{XY}是X_{m-1}和Y的LCS，即
$LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y}$

(3) 如果$x_m \neq y_n$,且$z_k \neq y_n$,则LCS_{XY}是X与Y_{n-1}的LCS，即
$LCS_{XY} = LCS_{XY_{n-1}}$

HIT
CS&E

证明：

(1). $X=<x_1, ..., x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, ..., y_{n-1}, x_m>$，则
$z_k=x_m=y_n$ 且 $LCS_{XY} = LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>$.

设$z_k \neq x_m$，则可加$x_m=y_n$到Z，得到一个长为$k+1$的X与Y的公共序列，与Z是X和Y的LCS矛盾。于是，$z_k=x_m=y_n$。

设存在X_{m-1}与Y_{n-1}的非最长公共子序列 Z_{k-1}，使得

$$LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>,$$

则由于$|Z_{k-1}|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}|$,

$$|LCS_{XY} = Z_{k-1} + <x_m=y_n>|<|LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}} + <x_m=y_n>|,$$

与LCS_{XY}是LCS矛盾。

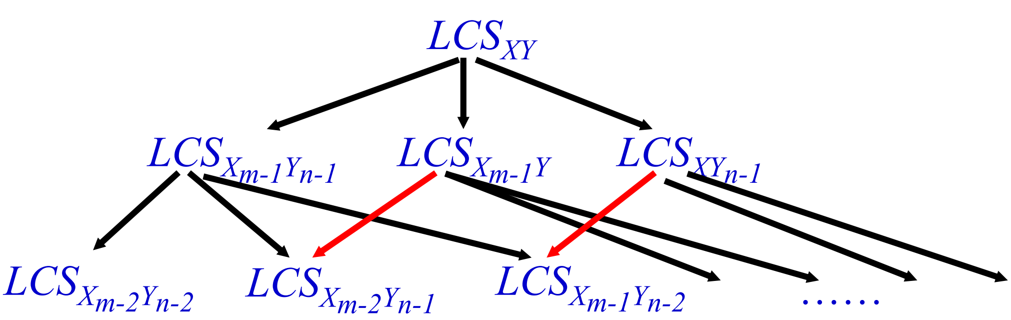
(2) $X=<x_1, …, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, …, y_{n-1}, y_n>$，

$x_m \neq y_n$，$z_k \neq x_m$，则 $LCS_{XY}= LCS_{X_{m-1}Y}$

由于$z_k \neq x_m$， $Z = LCS_{XY}$是X_{m-1}与Y的公共子序列。我们来证Z是X_{m-1}与Y的LCS。设X_{m-1}与Y有一个公共子序列W，W的长大于k, 则W也是X与Y 的公共子序列，与Z是LCS矛盾。

(3) 证明同(2)。

- 子问题重叠性



LCS问题具有子问题重叠性

建立LCS长度的递归方程

- $C[i, j] = X_i$与Y_j的LCS的长度
- LCS长度的递归方程

$C[i, j] = 0$ if $i=0$ 或 $j=0$

$C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$ if $i, j>0$ and $x_i = y_j$

$C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$ if $i, j>0$ and $x_i \neq y_j$

递归划分与自底向上求解

- 基本思想

$C[i, j] = 0$, if $i=0$ 或 $j=0$

$C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$ if $i, j>0$ and $x_i = y_j$

$C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$ if $i, j>0$ and $x_i \neq y_j$

	$C[i-1, j-1]$	$C[i-1,j]$	
	$C[i, j-1]$	$C[i, j]$	

C[i-1, j-1]	*C[i-1,j]*
C[i, j-1]	*C[i, j]*

自底向上计算优化解代价

- 递归划分子问题与自底向上求解过程

C[0,0]	*C[0,1]*	*C[0,2]*	*C[0,3]*	*C[0,4]*
C[1,0]	*C[1,1]*	*C[1,2]*	*C[1,3]*	*C[1,4]*
C[2,0]	*C[2,1]*	*C[2,2]*	*C[2,3]*	*C[2,4]*
C[3,0]	*C[3,1]*	*C[3,2]*	*C[3,3]*	*C[3,4]*

- $C[i, j] = 0$, $i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$, $x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j])$, $x_i \neq y_j$

	y_j		B	D	C	A	B	A
$i=0$	x_i	0	0	0	0	0	0	0
	A	0	0	0	0	1	1	1
	B	0	1	1	1	1	2	2
	C	0	1	1	2	2	2	2
	B	0	1	1	2	2	3	3
	D	0	1	2	2	2	3	3
	A	0	1	2	2	3	3	4
	B	0	1	2	2	3	4	4
		$j=0$						

HIT
CS&E

- 计算*LCS*长度的算法
  - 数据结构

    $C[0{:}m,0{:}n]$: $C[i,j]$是X_i与Y_j的LCS的长度

    $B[1{:}m,1{:}n]$: $B[i,j]$记录优化解的信息

记录优化解信息

- $C[i, j] = 0,\ i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1,\ x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j-1], C[i-1, j]),\ x_i \neq y_j$

	y_j	B	D	C	A	B	A
$i=0$ x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

$j=0$

LCS-length(X, Y)
m←length(X); n←length(Y);
For i←0 To m Do
    $C[i,0]$←0;
For j←1 To n Do
    $C[0,j]$←0;
For i←1 To m Do
    For j←1 To n Do
        If $x_i = y_j$
        Then $C[i,j]$←$C[i\text{-}1,j\text{-}1]+1$;
            $B[i,j]$←"↖";
        Else If $C[i\text{-}1,j] \ge C[i,j\text{-}1]$
            Then $C[i,j]$←$C[i\text{-}1,j]$;
                $B[i,j]$←"↑";
            Else $C[i,j]$←$C[i,j\text{-}1]$;
                $B[i,j]$←"←";
Return C and B.

- $C[i, j] = 0$, $i=0$ 或 $j=0$
- $C[i, j] = C[i\text{-}1, j\text{-}1] + 1$, $x_i = y_j$
- $C[i, j] = Max(C[i, j\text{-}1], C[i\text{-}1, j])$, $x_i \neq y_j$

~~C[0,0]~~	~~C[0,1]~~	~~C[0,2]~~	~~C[0,3]~~	~~C[0,4]~~
C[1,0]	~~C[1,1]~~	~~C[1,2]~~	~~C[1,3]~~	~~C[1,4]~~
C[2,0]	~~C[2,1]~~	~~C[2,2]~~	~~C[2,3]~~	~~C[2,4]~~
C[3,0]	~~C[3,1]~~	~~C[3,2]~~	~~C[3,3]~~	~~C[3,4]~~

	y_j	B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

构造优化解

- 基本思想
  - 从$B[m, n]$开始按指针搜索
  - 若$B[i, j]$="↖"，则$x_i=y_j$是LCS的一个元素
  - 如此找到的"LCS"是X与Y的LCS的$Inverse$

HIT
CS&E

	y_j	B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

```
Print-LCS(B, X, i, j)
If i=0 or j=0 Then Return;
If B[i, j]="↖"
Then Print-LCS(B, X, i-1, j-1); Print x_i;
Else
   If B[i, j]="↑"
   Then Print-LCS(B, X, i-1, j);
   Else Print-LCS(B, X, i, j-1).
```

Print-LCS(B, X, n, m)
可打印出X与Y的LCS
n=length(X)
m=length(Y)

```
LCS-length(X, Y)
m←length(X); n←length(Y);
For i←0 To m Do
     C[i,0]←0;
For j←1 To n Do
     C[0,j]←0;
For i←1 To m Do
   For j←1 To n Do
     If x_i = y_j
     Then C[i,j]←C[i-1,j-1]+1;
          B[i,j]←"↖";
     Else If C[i-1,j]≥C[i,j-1]
          Then C[i,j]←C[i-1,j];
               B[i,j]←"↑";
          Else C[i,j]←C[i,j-1];
               B[i,j]←"←";
 Return C and B.
```

	y_j	B	D	C	A	B	A
x_i	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - *(i, j)*两层循环
    - *O(mn)*
  - 构造最优解的时间：*O(m+n)*
  - 总时间复杂性为：*O(mn)*
- 空间复杂性
  - 使用数组*C*和*B*
  - 需要空间*O(mn)*

50

HIT
CS&E

4.4 0/1 Knapsack Problem

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

HIT
CS&E

问题的定义

给定n种物品和一个背包，物品i的重量是w_i，价值v_i，背包承重为C，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

HIT CS&E

问题的定义

- 输入：$C>0, w_i>0, v_i>0, 1\leq i \leq n$
- 输出：$(x_1, x_2, ..., x_n), x_i\in\{0, 1\}$, 满足 $\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i x_i \leq C$, $\Sigma_{1\leq i\leq n} v_i x_i$ 最大

Naïve方法：

每个物品有两种选择：1(装)或0(不装)

n个物品共2^n个装取方案

每个装取方案的计算代价为n

总计算代价为$O(n2^n)$

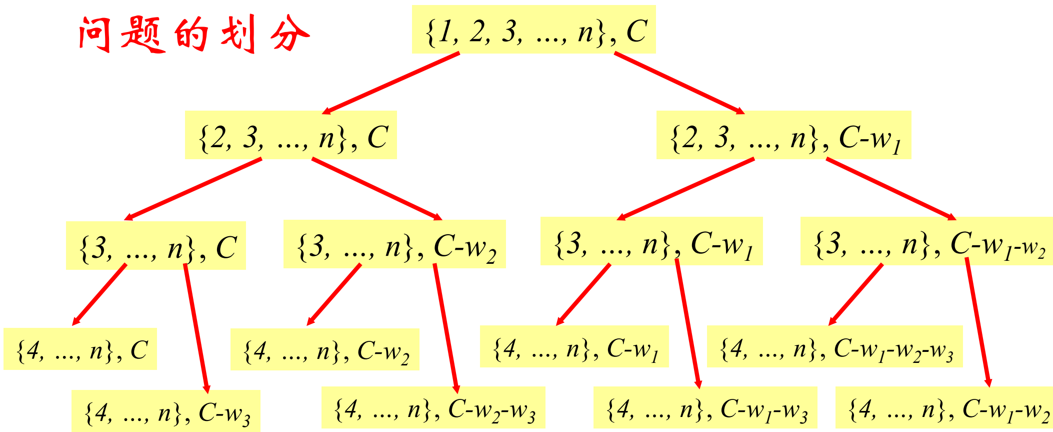
HIT CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HIT
CS&E

子问题重叠性

问题的划分



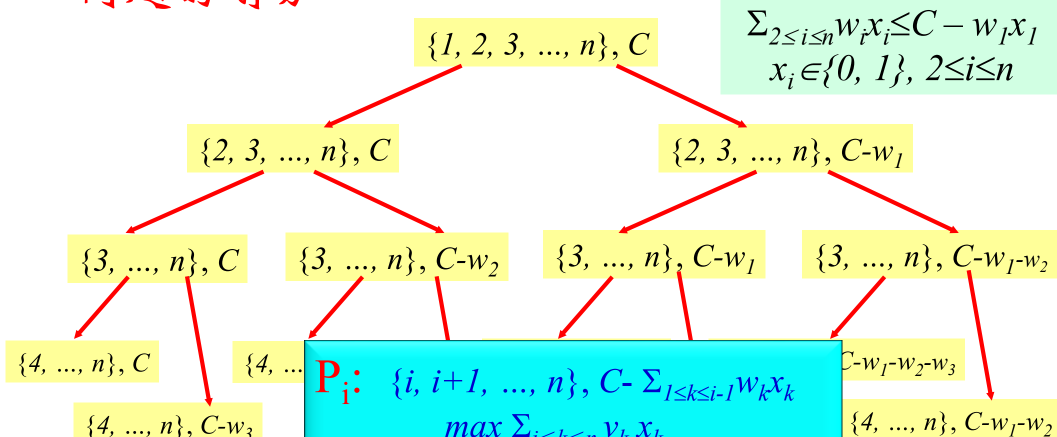
当w_i皆为1时，存在大量重叠子问题

HIT
CS&E

问题优化子结构

问题的划分

P_2: $max\ \Sigma_{2\le i\le n} v_i x_i$
$\Sigma_{2\le i\le n} w_i x_i \le C - w_1 x_1$
$x_i \in \{0, 1\}$, $2\le i\le n$



P_i: $\{i, i+1, \ldots, n\}$, $C - \Sigma_{1\le k\le i-1} w_k x_k$
$max\ \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k$
$\Sigma_{i\le k\le n} w_k x_k \le C_i = C - \Sigma_{1\le k\le i-1} w_k x_k$
$x_k \in \{0, 1\}$, $i \le k \le n$

HIT
CS&E

优化解结构的分析

定理 如果$S_i=(y_i, y_{i+1}, ..., y_n)$是0-1背包子问题$P_i=[\{i, i+1, ..., n\}, C_i=C-\sum_{1\le k\le i-1} w_k y_k]$的优化解，则$(y_{i+1}, ..., y_n)$是如下子问题$P_{i+1}$的优化解：

$$\max \sum_{i+1\le k\le n} v_k x_k$$
$$\sum_{i+1\le k\le n} w_k x_k \le C_i - w_i y_i$$
$$x_k \in \{0, 1\},\ \ i+1\le k \le n$$

证明： 如果$S_{i+1}=(y_{i+1}, ..., y_n)$不是子问题$P_{i+1}$的优化解，则存在$S'_{i+1}=(z_{i+1}, ..., z_n)$是$P_{i+1}$的更优解。$S'_i=(y_i, z_{i+1}, ..., z_n)$是问题$P_i$之比$S_i$更优的解，与$S_i$优化矛盾。

HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- **建立优化解代价的递归方程**
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

- 定义代价矩阵$\boldsymbol{m}$

  矩阵元素$m(i, j)$表示子问题$[(i, i+1, \ldots, n), j]$的优化解$(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$的代价，$\mathbf{m(i, j)= \Sigma_{i\le k\le n} v_k x_k}$

- 形式地

  问题 $\quad max\ \Sigma_{i\le k\le n} v_k\, x_k$

  $\Sigma_{i\le k\le n} w_k x_k \le j$

  $x_k \in \{0, 1\},\ \ i\le k \le n$

  的最优解代价为$m(i, j)=\Sigma_{i\le k\le n} v_k\, x_k$.

- 递归方程：

总结：

$m(n, j) = 0, \quad 0 \le j < w_n$

$m(n, j) = v_n, \quad j \ge w_n$

$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0\le j< w_i$

$m(i, j) = max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ \ j\ge w_i$

HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HIT
CS&E

$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0 \le j < w_i$
$m(i, j) = \max\{m(i+1, j),\ m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$
$m(n, j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$
$m(n, j) = v_n,\quad j \ge w_n$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

令n=4，w_i=整数

$m(1,C)$

$m(2,C-w_1)$ … $m(2,C)$

… $m(3, C-w_1-w_2)$ … $m(3,C-w_1)$ … $m(3,C-w_2)$ … $m(3,C)$

… $m(4, C-w_2-w_3)$ … $m(4,C-w_2)$ … $m(4,C-w_3)$ … $m(4,C)$

HIT CS&E

$m(i,j) = m(i+1,j),\ 0 \le j < w_i$

$m(i,j) = \max\{m(i+1,j),\ m(i+1,j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$

$m(n,j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$

$m(n,j) = v_n,\quad j \ge w_n$

	$m(i,j)$
$m(i+1,j-w_i)$	$m(i+1,j)$

令n=4, w_i=整数

						$m(1,C)$
$m(2,0)$	…	$m(2,w_2-1)$	$m(2,w_2)$	…	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3,0)$	…	$m(3,w_3-1)$	$m(3,w_3)$	…	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4,0)$	…	$m(4,w_4-1)$	$m(4,w_4)$	…	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

HIT CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- **自底向上计算优化解的代价记录优化解的构造信息**
- 构造优化解

HIT CS&E

$$m(i,j) = m(i+1,j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i,j) = \max\{m(i+1,j),\ m(i+1,j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$$
$$m(n,j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n,j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

令w_i=整数, $n=4$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

						$m(1,C)$
$m(2, 0)$	…	$m(2,w_2-1)$	$m(2, w_2)$	…	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3, 0)$	…	$m(3,w_3-1)$	$m(3, w_3)$	…	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4, 0)$	…	$m(4,w_4-1)$	$m(4, w_4)$	…	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

• 算法
(设 w_i-1<C)

$$m(i,j) = m(i+1,j),\ 0 \le j < w_i$$
$$m(i,j) = \max\{m(i+1,j),\ m(i+1,j-w_i)+v_i\},\ j \ge w_i$$
$$m(n,j) = 0,\quad 0 \le j < w_n$$
$$m(n,j) = v_n,\quad j \ge w_n$$

```
For  j=0  To  w_n-1  Do
        m[n, j] = 0;
For  j=w_n  To  C  Do
        m[n, j] = v_n;
For  i=n-1  To  2  Do
     For  j=0  To  w_i-1  Do
        m[i, j] = m[i+1, j];
     For  j=w_i  To  C  Do
        m[i, j]=max{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i};
If  C<w_1  Then  m[1, C]=m[2, C];
          Else  m[1, C]=max{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1};
```

						$m(1,C)$
$m(2, 0)$	…	$m(2,w_2-1)$	$m(2, w_2)$	…	$m(2,C-1)$	$m(2,C)$
$m(3, 0)$	…	$m(3,w_3-1)$	$m(3, w_3)$	…	$m(3,C-1)$	$m(3,C)$
$m(4, 0)$	…	$m(4,w_4-1)$	$m(4, w_4)$	…	$m(4,C-1)$	$m(4,C)$

For $j=0$ To min(w_n-1, C) Do
    $m[n, j] = 0$;
For $j=w_n$ To C Do
    $m[n, j] = v_n$;
For $i=n-1$ To 2 Do
    For $j=0$ To min(w_i-1, C) Do
        $m[i, j] = m[i+1, j]$;
    For $j=w_i$ To C Do
        $m[i, j]=\max\{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i\}$;
If $C<w_1$ Then $m[1, C]=m[2, C]$;
    Else $m[1, C]=\max\{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1\}$;

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- **构造优化解**

HIT CS&E

构造优化解

1. $m(1, C)$是最优解代价值，相应解计算如下：

If $m(1, C) = m(2, C)$

Then $x_1 = 0$;

Else $x_1 = 1$;

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

2. 如果 $x_1=0$, 由$m(2, C)$继续构造最优解;
3. 如果 $x_1=1$, 由$m(2, C-w_1)$继续构造最优解.

$m(1,C)$

Homework: 给出构造最优解的详细精确算法

$m(3, C-w_1-w_2)$ $m(3,C-w_1)$ $m(3,C-w_2)$ … $m(3,C)$

… $m(4, C-w_2-w_3)$ … $m(4,C-w_2)$ $m(4,C-w_3)$ $m(4,C)$

HIT CS&E

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价时间
    - $O(Cn)$
  - 构造最优解时间：$O(Cn)$
  - 总时间复杂性为：$O(Cn)$
- 空间复杂性
  - 使用数组m
  - 需要空间$O(Cn)$

For $j=0$ To $\min(w_n-1, C)$ Do

$m[n, j] = 0$;

For $j=w_n$ To C Do

$m[n, j] = vn$;

For $i=n-1$ To 2 Do

For $j=0$ To $\min(w_i-1, C)$ Do

$m[i, j] = m[i+1, j]$;

… $_i]+v_i\}$;

If … $C-w_1]+v_1\}$;

这是一个伪多项式算法！

当$C=2^n$时：

$T(n)=O(n2^n)$

当w_i不限定为正整数时：

$T(n)=O(2^n)$

… x_2;

3. If $x_1=1$, 由$m(2, C-w_1)$继续构造x_2;

……

HIT
CS&E

部分背包问题?

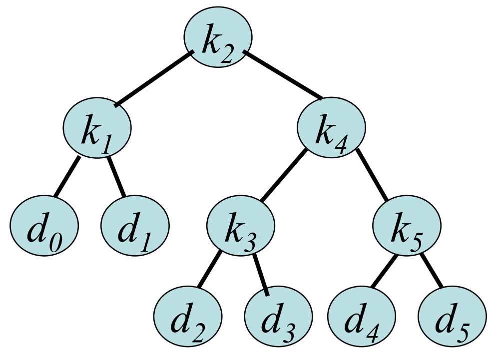
HIT
CS&E

4.5 The Optimal Binary Search Trees

- 问题定义
- 问题求解
  - 优化解的结构分析
  - 建立优化解代价的递归方程
  - 递归地划分子问题
  - 自底向上计算优化解的代价
    记录优化解的构造信息
  - 构造优化解

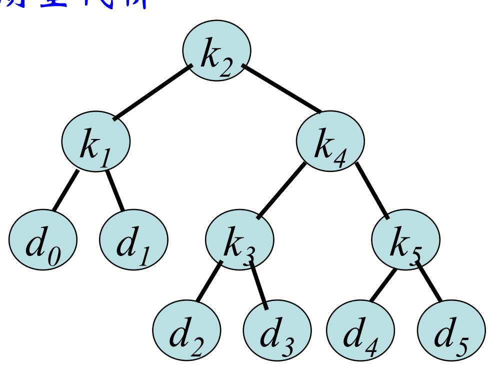
问题的定义

- 二叉搜索树T
  - 结点
    - $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$
    - $D=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$
    - d_i对应区间(k_i, k_{i+1})
      d_0对应区间$(-\infty, k_1)$
      d_n对应区间$(k_n, +\infty)$
  - 附加信息
    - 搜索k_i的概率为p_i
    - 搜索d_i的概率为q_i



$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=0}^{n} q_j = 1$$

- 搜索树的期望代价



$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

HIT
CS&E

- 问题的定义

输入：$K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $k_1< k_2< \ldots < k_n$,
$P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, p_i为搜索k_i的概率
$Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, q_i为搜索值d_i的概率

输出：构造K的二叉搜索树T, 最小化

$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i + \sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

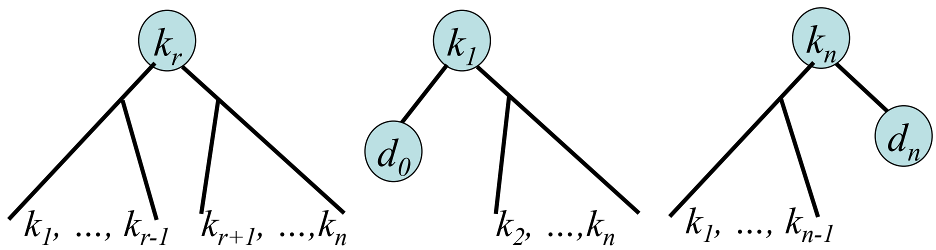
HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

优化二叉搜索树结构的分析

- 优化解的结构观察

$K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$的优化解的根必为$K$中某个$k_r$

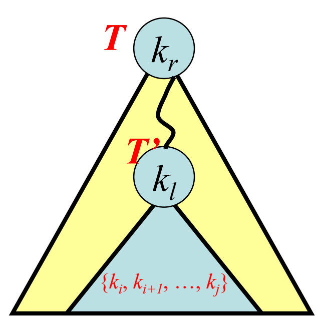


如果$r=1$, 左子树仅包含d_0

如果$r=n$, 右子树仅包含d_n

- 优化子结构

定理. 如果优化二叉搜索树T具有包含关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子树$T'$, 则$T'$是关于关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子问题的优化解.



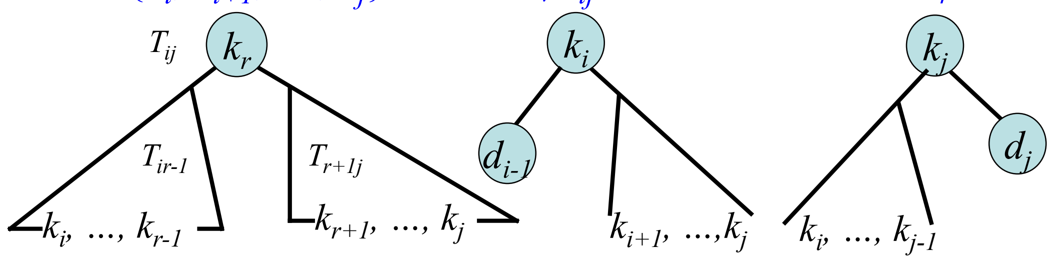
证明: 若不然, 必有关键字集$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$子树$T''$, T''的期望搜索代价低于T'.

用T''替换T中的T', 可以得到一个期望搜索代价比T小的原始问题的二叉搜索树。与T是最优解矛盾.

HIT
CS&E

- 用优化子结构从子问题优化解构造优化解

$K=\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的优化解$T_{ij}$的根必为$K$中某个$k_r$



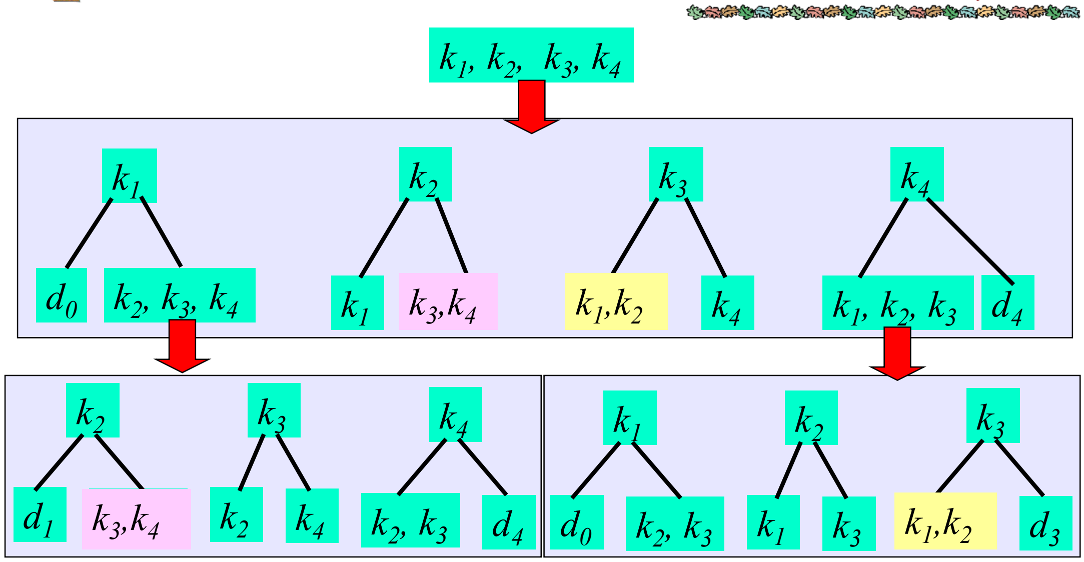
只要对于每个$k_r \in K$, 确定$\{k_i, \ldots, k_{r-1}\}$和$\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$的优化解, 我们就可以求出K的优化解.

如果$r=i$, 左子树$T_{ii-1}=\{k_i, \ldots, k_{i-1}\}$仅包含$d_{i-1}$

如果$r=j$, 右子树$T_{j+1j}=\{k_{j+1}, \ldots, k_j\}$仅包含$d_j$

HIT
CS&E

子问题重叠性



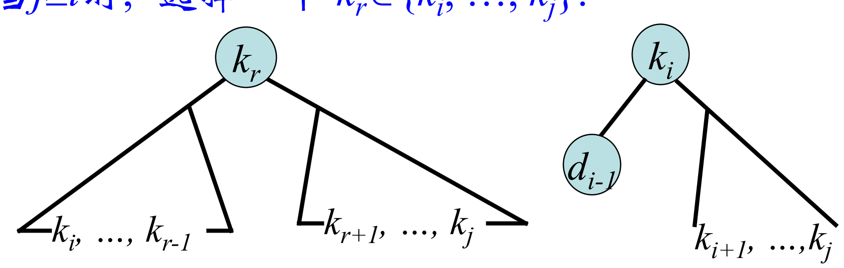
HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HIT
CS&E

建立优化解的搜索代价递归方程

- 令$E(i, j)$为$\{k_i, \ldots, k_j\}$的优化解T_{ij}的期望搜索代价
  - 当$j=i-1$时，T_{ij}中只有叶结点d_{i-1}, $E(i, i-1)=q_{i-1}$
  - 当$j\geq i$时，选择一个$k_r \in \{k_i, \ldots, k_j\}$:

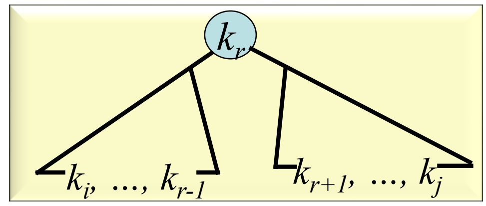


当把左右优化子树放进T_{ij}时，每个结点的深度增加1

$$E(i, j)=P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$$

HIT
CS&E

- 计算 $W(i, r\text{-}1)$ 和 $W(r+1, j)$



由 $E(LT+1)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+2)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+2)q_l$

$E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{左}(k_l)+1)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{左}(d_l)+1)q_l$

知 $W(i,r-1)=E(LT+1)-E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$

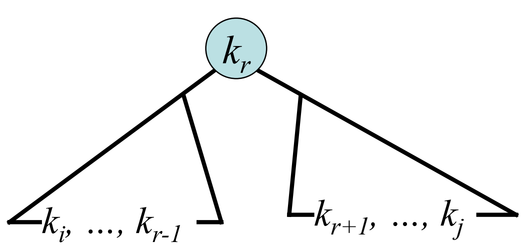
同理, $W(r+1,j)=\sum_{l=r+1}^{j}p_l+\sum_{l=r}^{j}q_l$

令 $W(i, j)=W(i, r\text{-}1) + W(r+1, j) + p_r=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l=W(i, j\text{-}1)+p_j+q_j$

由 $W(i,r-1)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$ ，　$W(i, i\text{-}1)=q_{i-1}$

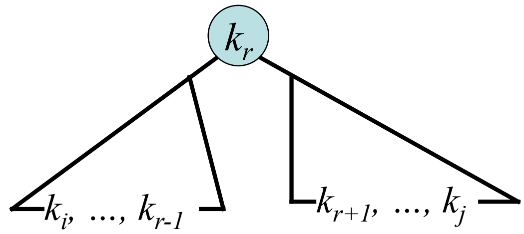
$W(i, i\text{-}1)=q_{i-1}$
$W(i, j)=W(i, r\text{-}1) + W(r+1, j) + p_r=W(i, j\text{-}1)+p_j+q_j$

$E(i, i\text{-}1)=q_{i-1}$
$E(i, j)=P_r+E(i, r\text{-}1)+W(i, r\text{-}1)+E(r+1, j)+W(r+1, j)$



$E(i, j) = E(i, r\text{-}1) + E(r+1, j) + W(i, j)$

HIT
CS&E



总之

$W(i, i\text{-}1) = q_{i\text{-}1},$

$W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$

$E(i, i\text{-}1)=q_{i\text{-}1}$

$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r\text{-}1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ If $j\ge i$

HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- **递归地划分子问题**
- 自底向上计算优化解的代价
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HIT
CS&E

递归划分子问题

$E(i, j)=q_{i-1}$　If $j=i-1$

$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$　If $j\ge i$

$E(i,i-1)$　$E(i,i)$　……　$E(i,j-1)$　$E(i, j)$

$E(i+1, j)$

$E(i+2, j)$

……

$E(j+1, j)$

HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- **自底向上计算优化解的代价**
  记录优化解的构造信息
- 构造优化解

HIT CS&E

自下而上计算优化解的代价

$E(i, j)=q_{i-1} \quad If\ j=i-1$

$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\} \quad If\ j\ge i$

q_0 =	E(1,0)	E(1,1)	E(1,2)	E(1,3)	E(1,4)
	q_1 =	E(2,1)	E(2,2)	E(2,3)	E(2,4)
		q_2 =	E(3,2)	E(3,3)	E(3,4)
			q_3 =	E(4,3)	E(4,4)
				q_4 =	E(5,4)

HIT CS&E

- $W(i, i\text{-}1) = q_{i-1},\quad W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$

W(i, j-1)	W(i, j)

q_0 =	W(1,0)	W(1,1)	W(1,2)	W(1,3)	W(1,4)
	q_1 =	W(2,1)	W(2,2)	W(2,3)	W(2,4)
		q_2 =	W(3,2)	W(3,3)	W(3,4)
			q_3 =	W(4,3)	W(4,4)
				q_4 =	W(5,4)

HIT
CS&E

- 算法
  - 数据结构
    - $E[1{:}n+1;\ 0{:}n]$: 存储优化解搜索代价
    - $W[1{:}\ n+1;\ 0{:}n]$: 存储代价增量
    - $Root[1{:}n;\ 1{:}n]$: $Root(i, j)$记录子问题 $\{k_i, \ldots, k_j\}$优化解的根

HIT
CS&E

$E(i, j)=q_{i-1}$ *If* $j=i-1$

$E(i, j)=\min_{i\le r\le j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ *If* $j\ge i$

$W(i, i-1) = q_{i-1},\quad W(i, j) = W(i, j-1) + p_j + q_j$

E(1,0)	E(1,1)	E(1,2)	E(1,3)	E(1,4)
	E(2,1)	E(2,2)	E(2,3)	E(2,4)
		E(3,2)	E(3,3)	E(3,4)
			E(4,3)	E(4,4)
				E(5,4)

```
Optimal-BST(p, q, n)
 For i=1 To n+1 Do
     E(i, i-1) = q_{i-1}; W(i, i-1) = q_{i-1};
 For l=1 To n Do
     For i=1 To n-l+1 Do
         j=i+l-1;
         E(i, j)=∞;
         W(i, j)=W(i, j-1)+p_j+q_j;
         For r=i To j Do
             t=E(i, r-1)+E(r+1, j)+W(i, j);
             If t<E(i, j)
             Then E(i, j)=t; Root(i, j)=r;
 Return E and Root
```

HIT
CS&E

算法的复杂性

- 时间复杂性
  - (l, i, r)三层循环，每层循环至多n步
  - 时间复杂性为$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 二个$(n+1)\times(n+1)$数组，一个$n\times n$数组
  - $O(n^2)$

2019/3/13

HIT
CS&E

- 优化解的结构分析
- 建立优化解代价的递归方程
- 递归地划分子问题
- 自底向上计算优化解的代价记录优化解的构造信息
- **构造优化解**

2019/3/13

HIT
CS&E

优化解的构造算法?