

算法设计与分析作业 02

正心 44

Prof. Hong Gao

TA: 郭环宇

发布日期: 2019/03/18

截止日期: 2019/03/25

作业提交 PDF 版本, 发送至邮箱 DBLB_2019algorithm@163.com

Exercise 1. (15)

点集 Q 的凸包 (convex hull) 是一个最小的凸多边形 P : Q 中的每个点或在 P 的边界上或在 P 的内部, 我们用 $CH(Q)$ 表示点集 Q 的凸包。

问题定义:

输入: 平面上的点集 Q

输出: Q 的凸包 $CH(Q)$

(a) 请给出一种算法计算 $CH(Q)$, 叙述基本思想并写出伪代码;(6)

(b) 分析算法时间复杂度;(3)

(c) 分析算法的正确性;(6)

Exercise 2. (9)

(快速幂) 计算 $a^n \% b$, 其中 a , b 和 n 都是 32 位的非负整数。

例子:

Example: $2^{31} \% 3 = 2$

$100^{1000} \% 1000 = 0$

问题描述:

输入: a 、 b 、 n

输出: 快速幂结果

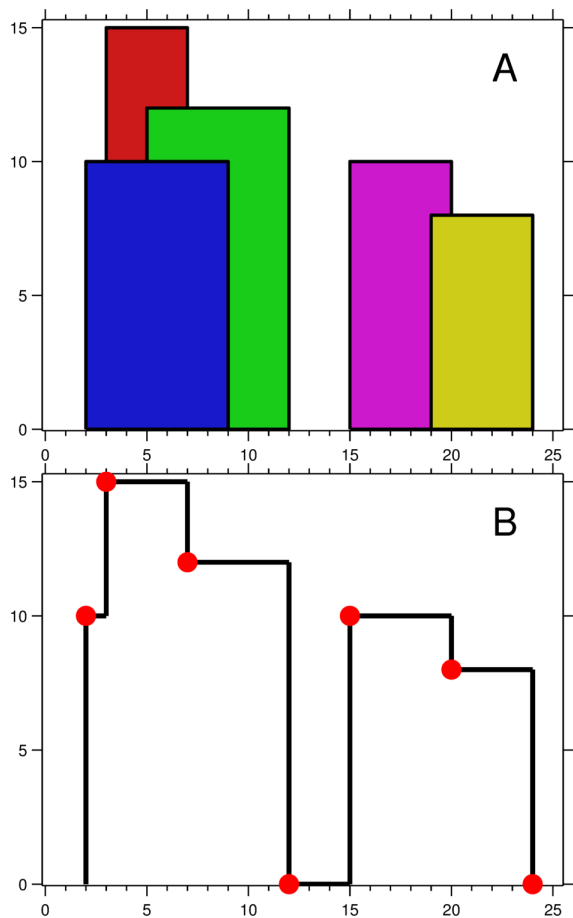
(a) 请给出一种算法求解快速幂问题, 叙述基本思想并写出伪代码;(6)

(b) 分析算法时间复杂度;(3)

Exercise 3. (9)

(The Skyline Problem/轮廓问题) 如下图 A 所示, 已知多个矩形建筑物的左右边界位置以及高度 (建筑物都是贴地的) $[l_i, h_i, r_i]$; 由此可见多个矩形建筑物在二维的平面上存在重叠的可能, 我们需要求得重叠后的建筑轮廓:

为了表示重叠后的建筑的轮廓的结果, 在这里我们只需要存储轮廓每个横向线段的最左边的点即可 (如下图 B 的轮廓, 红色的点即为储存点), 最后还需要取得轮廓的最右边的结束点, 即一个形式为 $(x_n, 0)$ 的点, 表示轮廓结束



问题定义:

输入: n 个建筑物的 x 轴坐标和高度 $(l_1, h_1, r_1), (l_2, h_2, r_2), \dots, (l_n, h_n, r_n)$

输出: 如上图 B 输出建筑群的轮廓点 $x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$

(a) 请给出一种算法求解轮廓问题, 叙述基本思想并写出伪代码;(6)

(b) 分析算法时间复杂度;(3)

Exercise 4. (8)

(集合划分) 集合 X 的划分是 X 的非空子集的集合, 使得每个 X 的元素 x 都只包含在这些子集的其中一个内。

等价的, 说, X 的子集的集合 P 是 X 的划分, 如果:

(1) P 的元素都不是空集。(注: 某些定义不需要这个要求)

(2) P 的元素的并集等于 X 。(我们称 P 的元素覆盖 X 。)

(3) P 的任何两个元素的交集为空。(我们称 P 的元素是两两不相交。)

例子: 集合 $\{1, 2, 3\}$ 有五个划分。

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$

$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$

$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$

$\{\{1, 2, 3\}\}$

问题描述:

给定正整数 n 和 $m, n, m \in \mathbb{N}$, 计算 n 个元素组成的集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 可以划分为多少个不同的由 m 个非空子集组成的集合, 例: $n=4, m=3$, 输出 6

请给出一种算法求解集合划分问题, 叙述基本思想并写出伪代码;