HIT
CS&E

第六章
Tree Searching Strategies

高宏
计算机科学与技术学院

HIT
CS&E

参考资料

R.C.T.Lee, S.S.Tseng, R.C.Chang, and Y.T.Tsai,

Introduction to
the Design and Analysis of Algorithms

Chapter 5

Page 157~219

HIT
CS&E

提要

HIT
CS&E

6.1 Motivation of Tree Searching

很多问题的解可以表示成为树.
解为树的节点或路径.
求解这些问题可以转化为树搜索问题

HIT
CS&E

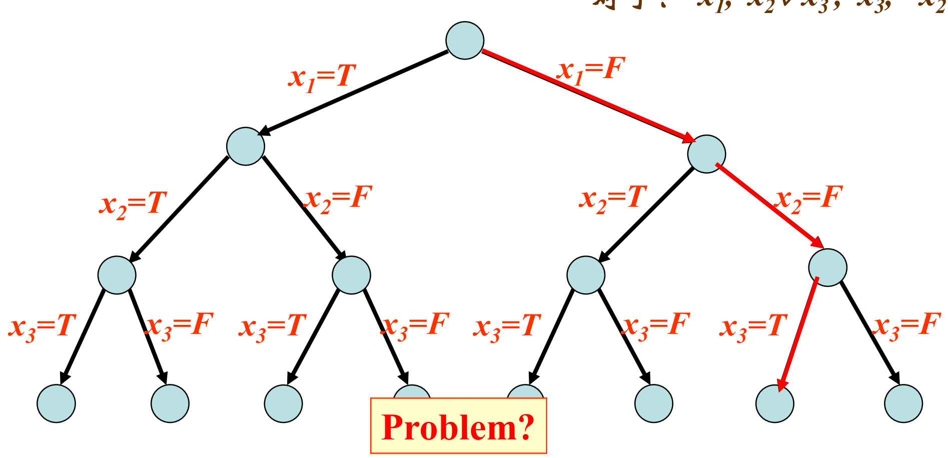
布尔表达式可满足性问题

- 问题的定义
  - 输入：n个布尔变量$x_1, x_2, \ldots., x_n$
    关于$x_1, x_2, \ldots., x_n$的k个析取式
  - 输出：是否存在$x_1, x_2, \ldots., x_n$的一种赋值
    使得所有k个析取式皆为真

例如：$-x_1$, $x_2 \vee x_3$, x_3, $-x_2$

- 把问题的解表示为树
  - 通过不断地为赋值集合分类来建立树
  (以x_1, x_2, x_3为例)

对于：$-x_1$, $x_2 \vee x_3$, x_3, $-x_2$



问题的解是由根到叶的一条路径

HIT
CS&E

8-Puzzle问题

- 问题的定义
  - 输入：具有8个编号小方块的魔方

2	3	
5	1	4
6	8	7

  - 输出：移动系列，经过这些移动，魔方到达如下状态

1	2	3
8		4
7	6	5

如何构造树？

HIT
CS&E

- 转换为树搜索问题

2	3	
5	1	4
6	8	7

问题的解是树上的一个节点

2		3
5	1	4
6	8	7

2	3	4
5	1	
6	8	7

HIT
CS&E

6.2 Optimal Tree Searching Strategies

- Hill Climbing
- Best-First Search Strategy
- Branch-and-Bound Strategy

HIT
CS&E

Hill Climbing

- 基本思想
  - 在深度优先搜索过程中，我们经常遇到多个节点可以扩展的情况，首先扩展哪个?
  - 爬山策略使用贪心方法确定搜索的方向，是优化的深度优先搜索策略
  - 爬山策略使用启发式测度来排序节点扩展的顺序
    - 使用什么启发式测度与问题本身相关

HIT
CS&E

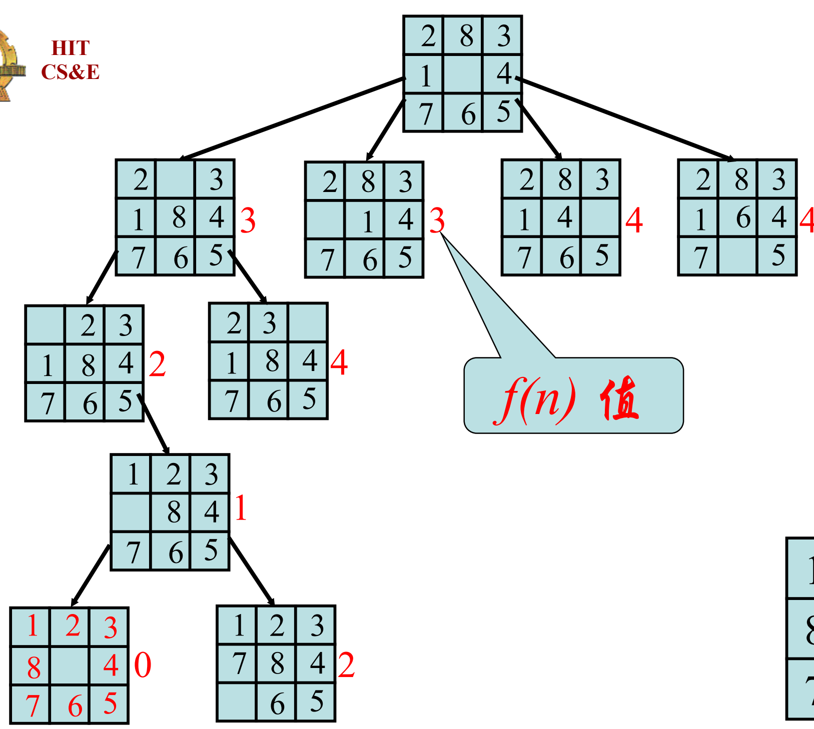
1	2	3
8		4
7	6	5

- **用8-Puzzle问题来说明爬山策略的思想**
  - **启发式测度函数:**
    - $f(n)=W(n)$, $W(n)$**是节点**n**中处于错误位置的方块数.**
  - **例如, 如果节点**n**如下:**

2	8	3
1		4
7	6	5

- **则**$f(n)=3$**, 因为方块1、2、8处于错误位置.**

HIT
CS&E



1	2	3
8		4
7	6	5

HIT
CS&E

- **Hill Climbing算法**

  1. 构造由根组成的单元素栈*S*;
  2. If *Top(S)*是目标节点 Then 停止;
  3. Pop(*S*);
  4. *S*的子节点按照其启发测度由大到小的顺序压入*S*;
  5. If *S*空 Then 失败 Else *goto* 2.

HIT
CS&E

Best-First Search Strategy

- **基本思想(也称最少代价优先，Least-cost-first)**
  - 结合深度优先和广度优先的优点于一个方法
  - 根据一个评价函数,在目前产生的所有节点中选择具有最小评价函数值的节点进行扩展.
  - 具有全局优化观念,而爬山策略仅具有局部优化观念.

HIT
CS&E

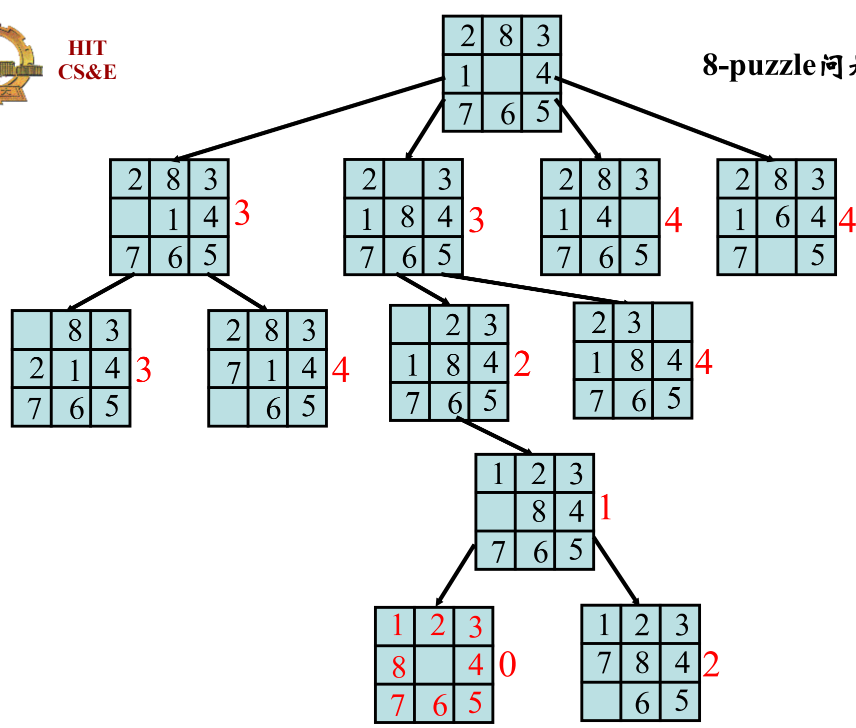
- **Best-First Search算法**

  1. 使用评价函数构造一个堆*H*, 首先构造由根组成的单元素堆;
  2. If *H*的根*r*是目标节点 Then 停止;
  3. 从*H*中删除*r*, 把*r*的子节点插入*H*;
  4. If *H*空 Then 失败 Else *goto* 2.

Heapsort方法见Intro. to Algo. 第II部分 第6章

HIT
CS&E

8-puzzle问题实例



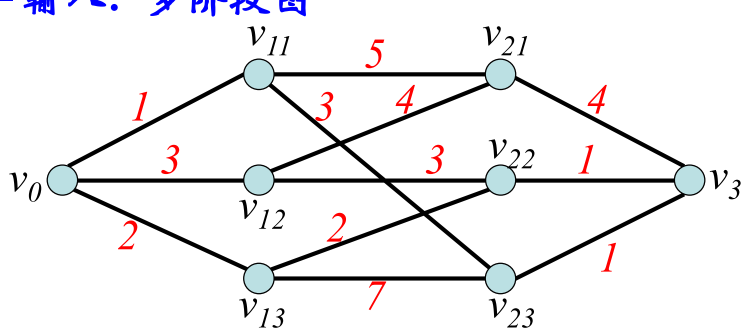
HIT
CS&E

Branch-and-Bound Strategy

- 上述方法很难用于求解优化问题
- 分支界限策略可以有效地求解组合优化问题
- 分支界限基本思想
  - 迅速找到一个可行解
  - 将该可行解作为优化解的一个界限
  - 利用界限裁剪解空间，提高求解的效率

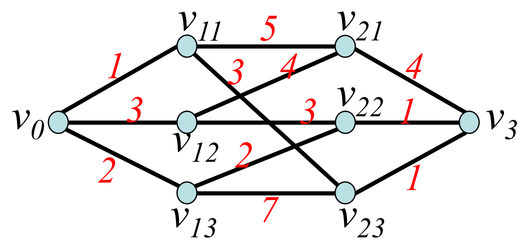
HIT
CS&E

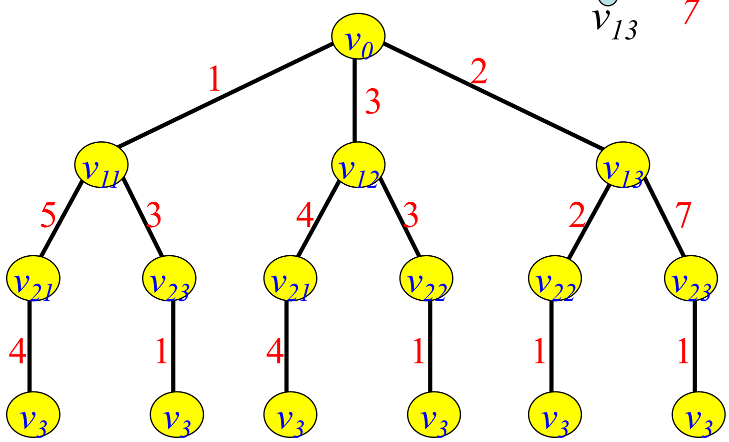
- 多阶段图搜索问题
  - 输入：多阶段图



  - 输出：从v_0到v_3的最短路径

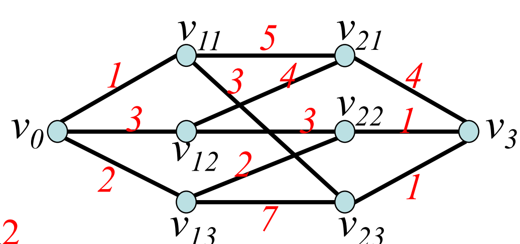
- 问题的树表示

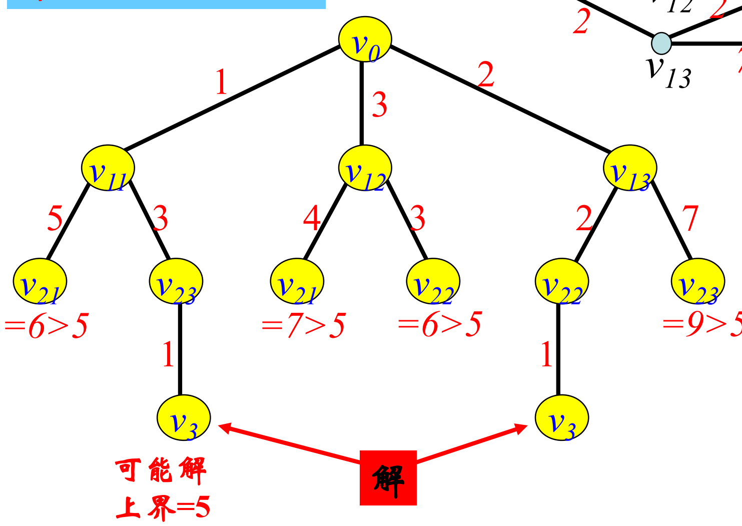




- 使用爬山策略进行分支界限搜索

评价函数：路径和





HIT
CS&E

- 分支界限策略的原理
  - 产生分支的机制(使用前面的任意一种策略)
    - 爬山法
    - Best-First
  - 产生一个界限(可以通过发现可能解)
  - 进行分支界限搜索,即剪除不可能产生优化解的分支.

HIT
CS&E

6.3 Personnel Assignment Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 求解问题的分支界限搜索算法

HIT
CS&E

问题的定义

- 输入
  - 人的有序集合$P=\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, $P_1<P_2< \ldots<P_n$
  - 工作的集合$J=\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, J是偏序集合
  - 矩阵$[C_{ij}]$, C_{ij}是P_i被分配工作J_j的代价
- 输出
  - 矩阵$[X_{ij}]$, $X_{ij}=1$表示P_i被分配J_j，$\sum_{i,j} C_{ij}X_{ij}$最小
    - 不同人分配不同工作
    - 每个人被分配一种工作,
    - f: $P\rightarrow J$是工作分配函数, 满足:

      如果$f(P_i)\leq f(P_j)$, 则$P_i \leq P_j$,

      如果$i\neq j$， $f(P_i)\neq f(P_j)$.

HIT
CS&E

问题的定义

例. 给定P=$\{P_1, P_2, P_3\}$, $J=\{J_1, J_2, J_3\}$, $J_1\leq J_3$, $J_2\leq J_3$.
$P_1\rightarrow J_1$、$P_2\rightarrow J_2$、$P_3\rightarrow J_3$是否为可能的解?

$P_1\rightarrow J_1$、$P_2\rightarrow J_3$、$P_3\rightarrow J_2$是否为可能的解?

HIT CS&E

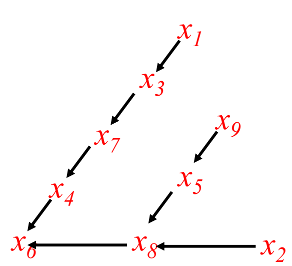
求解问题的思想

- 问题转化为树搜索问题
  - $J=\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$的每个拓扑序列对应一个解
  - 用一个拓扑序列树把所有拓扑序列安排在一个树中，每个路径对应一个拓扑序列
  - 问题成为在树中搜索最小路径问题
- 构造拓扑序列树
- 使用分支界限法搜索拓扑序列树求解问题
- 改拓扑序列树构造算法为分支界限求解算法

HIT CS&E

转换为树搜索问题

- 拓扑排序
  - 输入：偏序集合$(S, \leq)$
  - 输出：S的拓扑序列是$<s_1, s_2, \ldots, s_n>$，
    满足：如果$s_i \leq s_j$，则s_i排在s_j的前面.
  - 例



$x \rightarrow y$表示$x \leq y$

拓扑排序：

$x_1\ x_3\ x_7\ x_4\ x_9\ x_5\ x_2\ x_8\ x_6$

$x_2\ x_9\ x_5\ x_1\ x_3\ x_7\ x_4\ x_8\ x_6$

- **问题的解空间**

命题1. $P_1 \to J_{k1}$、$P_2 \to J_{k2}$、…、$P_n \to J_{kn}$是一个可能解，当且仅当J_{k1}、J_{k2}、…、J_{kn}是一个拓扑排序的序列.

例．$P=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$, J的偏序如下

$$\begin{tikzcd} J_1 \arrow[d] \arrow[dr] & J_2 \arrow[d] \\ J_3 & J_4 \end{tikzcd}$$

则J所有的拓扑排序序列有：(J_1, J_2, J_3, J_4)、(J_1, J_2, J_4, J_3)、(J_1, J_3, J_2, J_4)、(J_2, J_1, J_3, J_4)、(J_2, J_1, J_4, J_3).

(J_1, J_2, J_4, J_3)对应于$P_1 \to J_1$、$P_2 \to J_2$、$P_3 \to J_4$、$P_4 \to J_3$

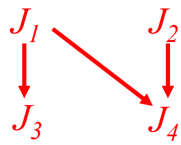
- **问题的解空间**

命题1. $P_1 \to J_{k1}$、$P_2 \to J_{k2}$、…、$P_n \to J_{kn}$是一个可能解，当且仅当J_{k1}、J_{k2}、…、J_{kn}是一个拓扑排序的序列.

例．$P=\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $J=\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$, J的偏序如下

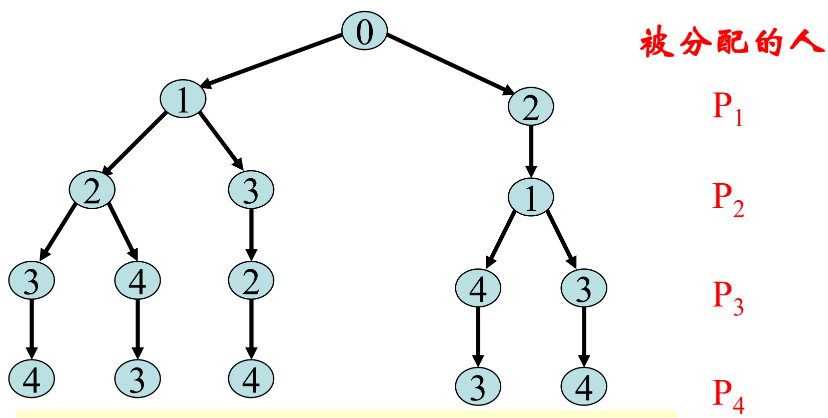
$$\begin{tikzcd} J_1 \arrow[d] \arrow[dr] & J_2 \arrow[d] \\ J_3 & J_4 \end{tikzcd}$$

解空间是工作集合所有拓扑排序的序列集合，每个序列对应于一个可能的解



(J_1, J_2, J_3, J_4)、(J_1, J_2, J_4, J_3)、(J_1, J_3, J_2, J_4)、
(J_2, J_1, J_3, J_4)、(J_2, J_1, J_4, J_3)

- **问题的树表示(即用树表示所有拓扑排序序列)**

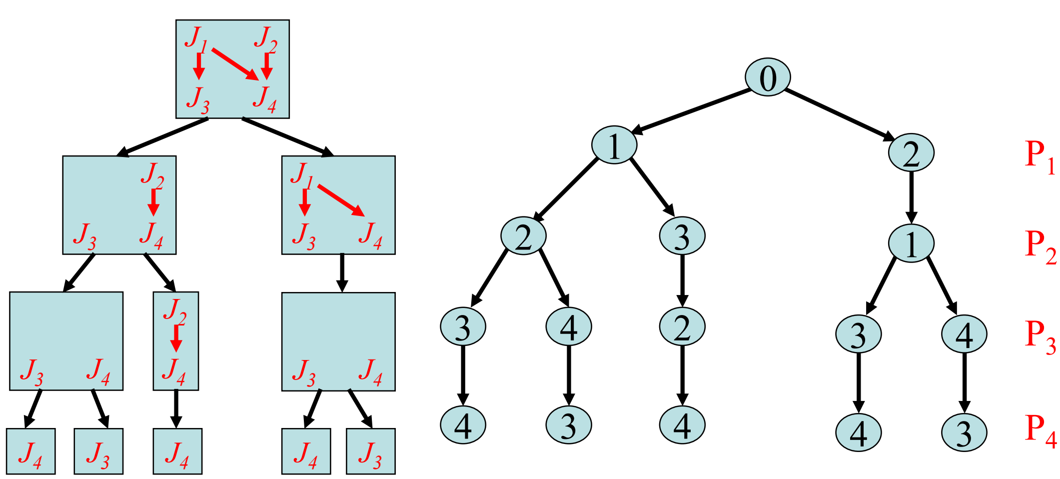


如何由偏序关系直接生成拓扑序列树呢

HIT
CS&E

(J_1, J_2, J_3, J_4)、(J_1, J_2, J_4, J_3)、(J_1, J_3, J_2, J_4)、
(J_2, J_1, J_3, J_4)、(J_2, J_1, J_4, J_3)

- **拓扑序列树的生成算法的基本思想**



HIT
CS&E

- **拓扑序列树的生成算法**

输入：偏序集合*S*, 树根*root*.

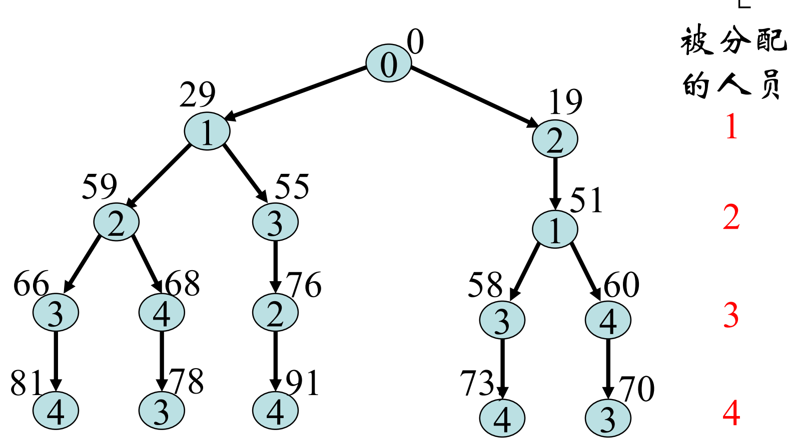
输出：由*S*的所有拓扑排序序列构成的树.

1. **生成树根*root*;**
2. **选择偏序集中没有前序元素的所有元素, 作为*root*的子结点;**
3. **For *root*的每个子结点*v* Do**
4. **$S=S-\{v\}$;**
5. **把*v*作为根, 递归地处理*S*.**

HIT
CS&E

•解空间的加权树表示

$$
\begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 29 & 19 & 17 & 12 \\ 32 & 30 & 26 & 28 \\ 3 & 21 & 7 & 9 \\ 18 & 13 & 10 & 15 \end{bmatrix}
\end{array}
$$



裁剪效果不好，搜索代价高！！

如何改进?

HIT CS&E

求解问题的分支界限搜索算法

- 计算解的代价的下界

例.

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & \\
\hline
P_1 & 29 & 19 & 17 & 12 & -12 \\
P_2 & 32 & 30 & 26 & 28 & -26 \\
P_3 & 3 & 21 & 7 & 9 & -3 \\
P_4 & 18 & 13 & 10 & 15 & -10
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc}
J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\
\end{array}
\begin{bmatrix} 17 & 7 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{array}{cccc}
J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\
\end{array}
\begin{bmatrix} 17 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
$$

-3

$$
\begin{tikzcd}
J_1 \arrow[d] \arrow[dr] & J_2 \arrow[d] \\
J_3 & J_4
\end{tikzcd}
$$

得到一个具有最小代价12+26+3+10+3=54的任务分配方案：

$P_1 \rightarrow J_4$、$P_2 \rightarrow J_3$、$P_3 \rightarrow J_1$、$P_4 \rightarrow J_2$

它不满足偏序约束，故不是可行解

由此得到可行解的代价下界=54

HIT CS&E

求解问题的分支界限搜索算法

- 计算解的代价的下界

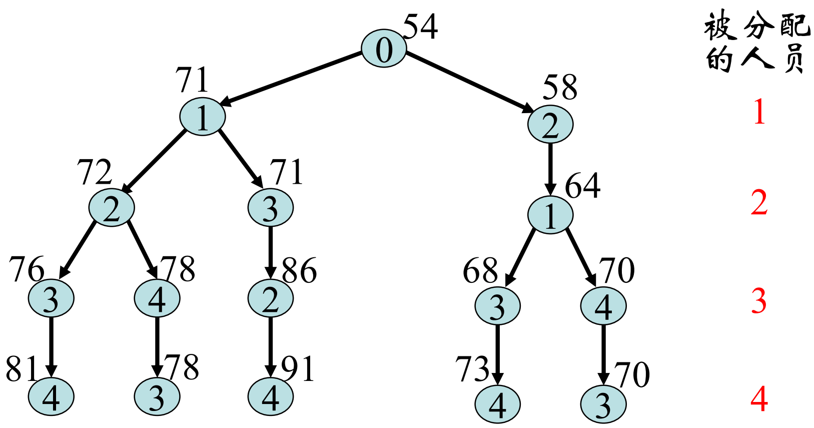
命题2： 把代价矩阵每行(列)各元素减去同一个数，不影响优化解的求解.

- 代价矩阵每行(列)减去该行(列)的最小数，使得每行和每列至少有一个零，其余各元素非零
- 如此简化代价矩阵对解无影响
  (因为每个解代价都减去了一个相同的数)
- 每行和列减去的数的总和是解的下界.

HIT
CS&E

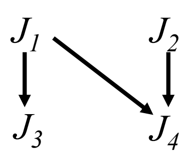
$$\begin{array}{c|cccc} & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \hline P_1 & 17 & 4 & 5 & 0 \\ P_2 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ P_3 & 0 & 15 & 4 & 6 \\ P_4 & 8 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

- 改进后解空间的加权树表示

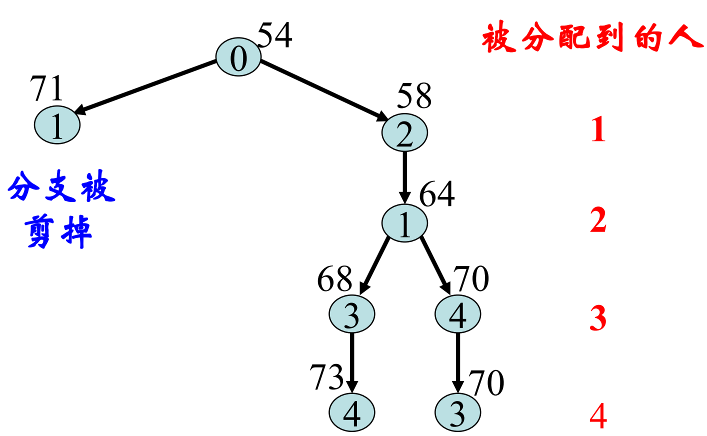


算法的思想(用爬山法)

$\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$



$$\begin{array}{c|cccc} & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \hline P_1 & 17 & 4 & 5 & 0 \\ P_2 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ P_3 & 0 & 15 & 4 & 6 \\ P_4 & 8 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$



HIT
CS&E

- 分支界限搜索(使用爬山法)算法
  1. 建立根结点，其权值为解代价下界;
  2. 使用爬山法，类似于拓扑排序序列树生成算法求解问题，每产生一个结点，其权值为加工后的代价矩阵对应元素加其父结点权值;
  3. 一旦发现一个可能解，将其代价作为界限，循环地进行分支界限搜索：剪掉不能导致优化解的子解，使用爬山法继续扩展新增节点，直至发现优化解.

修改拓扑排序算法，可以写出严格的分支界限搜索算法

HIT
CS&E

6.4 Traveling Salesperson Problem

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法

HIT
CS&E

问题的定义

输入： 无向连通图$G=(V, E)$,
- 每个结点都没有到自身的边,
- 每对结点间都有一条非负加权边(由代价矩阵表示)

输出： 一条由任意一个结点开始，
经过每个结点一次，
最后返回开始结点的路径,
该路径的代价(即权值之和)最小.

HIT
CS&E

转换为树搜索问题

- 所有解集合作为树根，由代价矩阵计算所有解的代价的下界;
- 用爬山法**递归地**划分解空间，得到二叉树
- 划分过程：
  - 选择图上的边(i, j)，满足
    使左子树代价下界不变，
    使右子树代价下界增加最大
  - 所有包含(i, j)的解集合作为左子树
  - 所有不包含(i, j)的解集合作为右子树
  - 计算出左右子树的代价下界

HIT
CS&E

分支界限搜索算法

- 在上述二叉树建立算法中增加如下策略:
  - 发现优化解的上界α;
  - 如果一个子节点的代价下界超过α, 则终止该节点的扩展.
- 下边我们用一个例子来说明算法

- 设代价矩阵如下

$$
\begin{array}{c}
 \\ i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 \\
0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 \\
29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 \\
32 & 83 & 66 & \infty & 49 & 0 & 80 \\
3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 \\
0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc} & & -7 & -1 & & & -4 \end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
 \\ -3 \\ -4 \\ -16 \\ -7 \\ -25 \\ -3 \\ -26 \\ \\
\end{array}
$$

- 构造根节点
  - 根结点为所有解的集合
  - 计算根结点的代价下界
    =3+4+16+7+25+3+26+7+1+4=96

为什么?

➢ 得到如下根结点及其代价下界

所有解的集合 L.B=96

划分边（i, j）满足：
- $Cost(i, j) = 0$
- 右子树代价下界增加最大

- 构造根结点的两个子结点
  - ➢ 选择使右子树代价下界增加最大的划分边(4, 6)
  - ➢ 建立根结点的子结点：
    - ✓ 左子结点为包括边(4, 6)的所有解集合
    - ✓ 右子结点为不包括边(4, 6)的所有解集合

$$
\begin{bmatrix}
\infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 \\
0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 \\
29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 \\
32 & 83 & 66 & \infty & 49 & 0 & 80 \\
3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 \\
0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 \\
18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty
\end{bmatrix}
$$

Cost-R(1,2)=6+0=6
Cost-R(2,1)=12+0=12
Cost-R(3,5)=1+17=18
Cost-R(4,6)=32+0=32
Cost-R(5,6)=3+0=3
Cost-R(6,1)=0+0=0
Cost-R(6,7)=0+5=5
Cost-R(7,2)=0+0=0
Cost-R(7,3)=0+8=8
Cost-R(7,4)=0+7=7

所有解的集合 L.B=96

包括边(4, 6)的所有解集合

不包括边(4, 6)的所有解集合

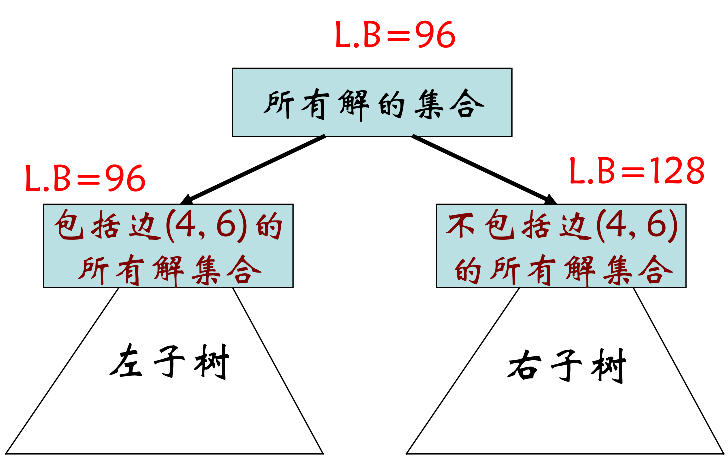
HIT
CS&E

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 \\ 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 \\ 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 \\ 32 & 83 & 66 & \infty & 49 & 0 & 80 \\ 3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 \\ 0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty \end{bmatrix}$$

- **计算左右子结点的代价下界**
  - ✓ (4, 6)的代价为0, 所以左结点代价下界仍为96.
  - ✓ 我们来计算右结点的代价下界:
    - 如果一个解不包含(4, 6), 它必包含一条从4出发的边和 进入结点6的边.
    - 由变换后的代价矩阵可知, 具有最小代价由4出发的边为(4, 1), 代价为32.
    - 由变换后的代价矩阵可知, 具有最小代价进入6的边为(5, 6), 代价为0.
    - 于是, 右结点代价下界为: 96+32+0=128.

HIT
CS&E

- **目前的树为**



- 递归地构造左右子树根的代价矩阵
  - 构造左子树根对应的代价矩阵
    - ✓ 左子结点为包括边(4, 6)的所有解集合，所以矩阵的第4行和第6列应该被删除
    - ✓ 由于边(4, 6)被使用，边(6, 4)不能再使用，所以代价矩阵的元素$C[6, 4]$应该设置为∞.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 7 \end{array}\\
\begin{array}{c} i=1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 0 & 83 & 9 & 30 & & 50\\
0 & \infty & 66 & 37 & 17 & & 26\\
29 & 1 & \infty & 19 & 0 & & 5\\
 & & & & & & \\
3 & 21 & 56 & 7 & \infty & & 28\\
0 & 85 & 8 & \infty & 89 & & 0\\
18 & 0 & 0 & 0 & 58 & & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}$$

- 修改左子树根的代价下界
  - ✓ 矩阵的第5行不包含0
  - ✓ 第5行元素减3
  - ✓ 左子树根代价下界为：96+3=99

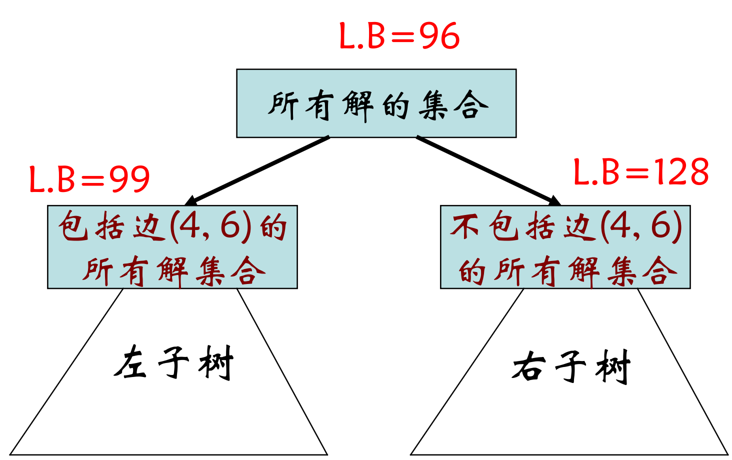
$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 7 \end{array} & \\
\begin{array}{c} i=1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\infty & 0 & 83 & 9 & 30 & & 50\\
0 & \infty & 66 & 37 & 17 & & 26\\
29 & 1 & \infty & 19 & 0 & & 5\\
 & & & & & & \\
0 & 18 & 53 & 4 & \infty & & 25\\
0 & 85 & 8 & \infty & 89 & & 0\\
18 & 0 & 0 & 0 & 58 & & \infty
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ -3\\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

- 构造右子树根对应的代价矩阵
  - ✓ 右子结点为不包括边(4, 6)的所有解集合，只需要把 $C[4, 6]$设置为∞
  - ✓ 结果矩阵如下

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & j=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\
\hline
i=1 & \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 6 & 50 & \\
2 & 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 12 & 26 & \\
3 & 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 12 & 5 & \\
4 & 0 & 51 & 34 & \infty & 17 & \infty & 48 & -32 \\
5 & 3 & 21 & 56 & 7 & \infty & 0 & 28 & \\
6 & 0 & 85 & 8 & 42 & 89 & \infty & 0 & \\
7 & 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & 13 & \infty &
\end{array}
$$

HIT
CS&E

- 目前的树为



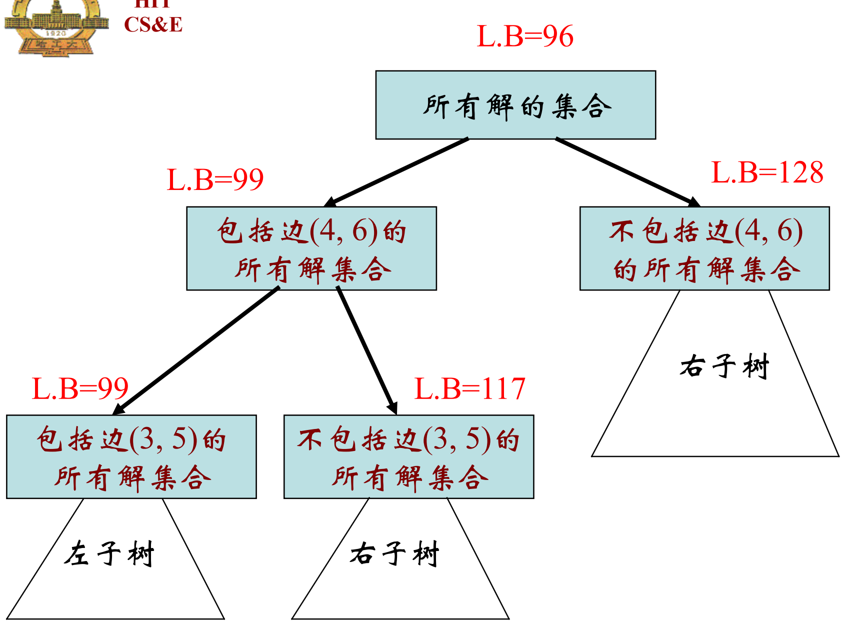
HIT
CS&E

左子树根的代价矩阵

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 50 \\ 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 26 \\ 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 5 \\ 0 & 18 & 53 & 4 & \infty & 25 \\ 0 & 85 & 8 & \infty & 89 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & \infty \end{bmatrix}$$

- **使用爬山策略扩展左子树根(因为其代价下界小)**
  - ✓ 选择(3, 5)作为划分边，因其右子结点代价的下界增加最大
  - ✓ 左子结点为包括边(3, 5)的所有解集合
  - ✓ 右子结点为不包括边(3, 5)的所有解集合
  - ✓ 计算左、右子结点的代价下界: 99和117(99+1+17)
- **目前树扩展为:**

HIT
CS&E



HIT
CS&E

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 50 \\ 0 & \infty & 66 & 37 & 17 & 26 \\ 29 & 1 & \infty & 19 & 0 & 5 \\ 0 & 18 & 53 & 4 & \infty & 25 \\ 0 & 85 & 8 & \infty & 89 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & \infty \end{bmatrix}$$

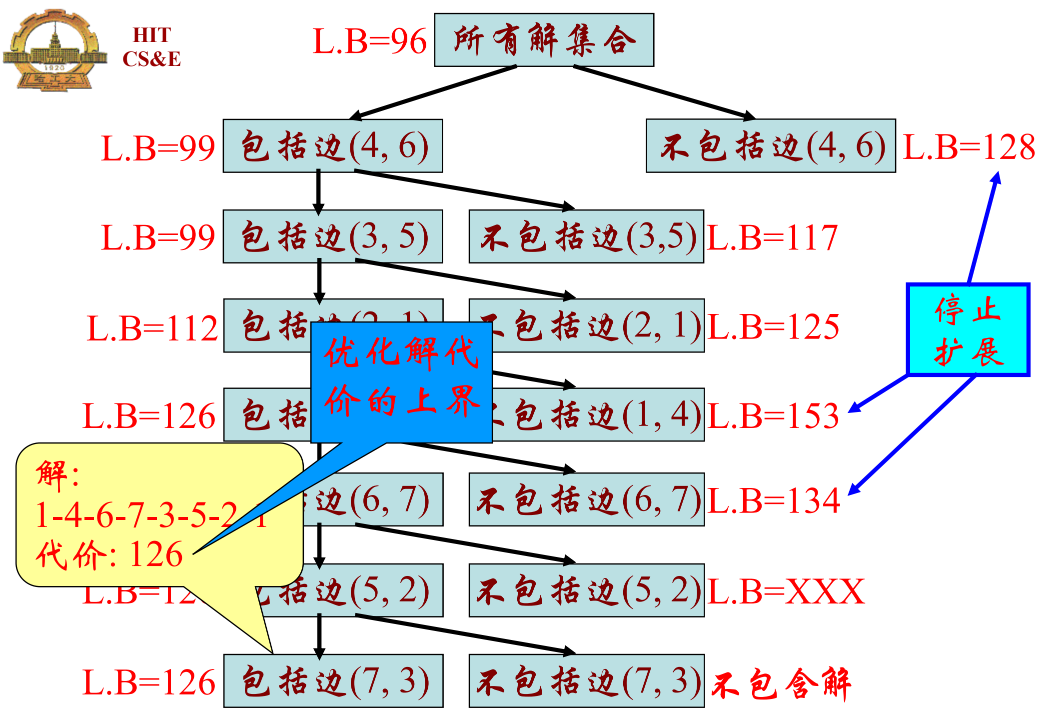
左子结点代价矩阵

$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 83 & 9 & 50 \\ 0 & \infty & 66 & 37 & 26 \\ 0 & 18 & \infty & 4 & 25 \\ 0 & 85 & 8 & \infty & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix}$$

右子结点代价矩阵

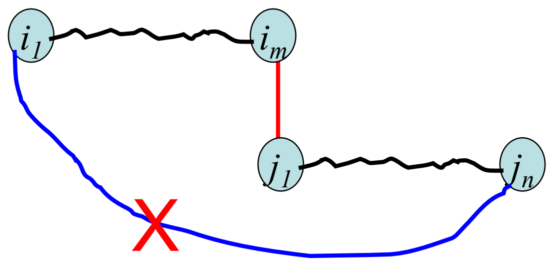
$$\begin{bmatrix} \infty & 0 & 83 & 9 & 30 & 50 \\ 0 & \infty & 66 & 37 & 0 & 26 \\ 29 & 0 & \infty & 19 & \infty & 5 \\ 0 & 18 & 53 & 4 & \infty & 25 \\ 0 & 85 & 8 & \infty & 89 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 0 & 58 & \infty \end{bmatrix}$$

HIT
CS&E



注 意

如果i_1-i_2-…-i_m和j_1-j_2-…-j_n已被包含在一个正在构造的路径中,(i_m, j_1)被加入,则必须避免j_n到 i_1的路径被加入. 否则出现环.



HIT
CS&E

- 算法概要
  1. 根节点为所有解集合;
  2. 使用代价矩阵, 计算根节点表示的解集合的代价下界;
  3. 使用爬山策略扩展当前的树节点α直至找到一个解:
     - 选择满足下列条件的边(x,y):
       - 使右子树代价下界增加最大,
       - 使左子树代价下界不变.
     - 构造α的左右子树:
       - 左子树为包括边(x,y)的所有解集合;
       - 右子树为不包括边(x,y)的所有解集合;
       - 计算左右子树解代价下界;
       - 构造左右子树的代价矩阵, 修改其解代价下界;
  4. 用找到解的代价进行剪枝爬山搜索, 直到找到最优解.

HIT
CS&E

6.5 0/1 Knapsack

- 问题的定义
- 转换为树搜索问题
- 分支界限搜索算法

HIT
CS&E

问题的定义

给定n种物品和一个背包，物品i的重量是w_i，价值v_i，背包承重为C，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

输入：$C>0, w_i>0, v_i>0, 1\leq i\leq n$

输出：$(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i\in\{0, 1\}$，满足：

(1) $\Sigma_{1\leq i\leq n} w_i x_i \leq C$,

(2) $\Sigma_{1\leq i\leq n} v_i x_i$ 最大.

HIT
CS&E

转换为树搜索问题

- 按照“价值重量比”降序排列n个物品
- 空包为根；
- 用爬山法或Best-First递归地划分解空间，得到二叉树
  - 树中第i层的每个节点都代表了n个物品中所有符合以下特征的子集：
    - 每个子集对应于序列中前i个物品的一个特定选择
    - 这个特定选择是根据从根到该节点的一条路径确定的
      - 向左的分支表示包含下一个物品
      - 向右的分支表示不包含下一个物品
  - 每个节点中记录如下信息
    - 当前装入背包物品的总重量w及总价值v
    - 此时背包能够容纳的物品价值上界UB

HIT
CS&E

分支界限搜索算法

- 计算节点代价的上界UB：
  - $UB=v+(C-w)\times(v_{i+1}/w_{i+1})$，或者
  - $UB=v+UB'$
    - UB'是部分背包算法在子问题$(\{i+1, i+2,\ldots,n\}, C-w)$上的最优解代价
- 0/1背包问题的优化解与部分背包问题优化解之间的关系？
  - 0/1背包问题的优化解是部分背包问题的可行解
  - 部分背包问题的优化解是0/1背包问题优化解上界

HIT
CS&E

分支界限搜索算法

- 计算节点代价的上界UB：
  - $UB=v+(C-w)\times(v_{i+1}/w_{i+1})$，或者
  - $UB=v+UB'$
    - UB'是部分背包算法在子问题$(\{i+1, i+2,\ldots,n\}, C-w)$上的最优解代价
- 0/1背包问题的优化解与部分背包问题优化解之间的关系？
  - 0/1背包问题的优化解是部分背包问题的可行解
  - 部分背包问题的优化解是0/1背包问题优化解上界

HIT
CS&E

- 根节点及其代价上界

$w=0, v=0$

$UB=v+(C-w)\times v_1/w_1$
$= C\times v_1/w_1$

HIT
CS&E

- **第i层节点的搜索及其代价上界**

w, v, UB

$x_{i+1}=1$ | $x_{i+1}=0$

$w'=w+w_{i+1}$
$v'=v+v_{i+1}$

w, v

$UB=v'+(C-w')\times v_{i+2}/w_{i+2}$

$UB=v+(C-w)\times v_{i+2}/w_{i+2}$

根据左右儿子节点的代价的上界，确定下一次待搜索的节点

HIT
CS&E

- **第i层节点的搜索及其代价上界**

w, v, UB

$x_{i+1}=1$ | $x_{i+1}=0$

$w'=w+w_{i+1}$
$v'=v+v_{i+1}$

$w'=w$
$v'=v$

$UB=v'+(C-w')\times v_{i+2}/w_{i+2}$

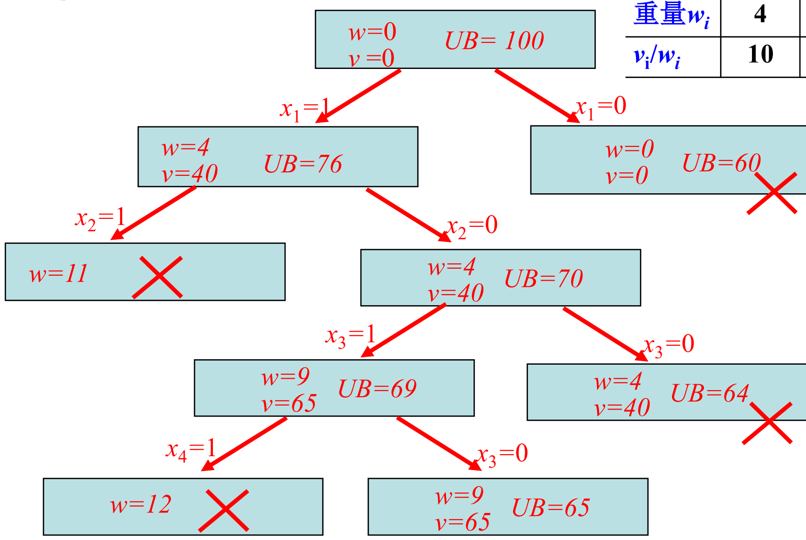
$UB=v+(C-w)\times v_{i+2}/w_{i+2}$

- **对于i+1层节点：**
  - 若$w'>C$，停止搜索，由根到该节点对应路径不是可行解一部分
  - 若其UB小于当前优化解下界，则由根到该节点对应的路径一定不会产生最优解，停止搜索
  - 否则，优先选择UB较大的节点，继续爬山法搜索

HIT CS&E

- **举例** C=50

编号i	1	2	3	4
价值v_i	40	42	25	12
重量w_i	4	7	5	3
v_i/w_i	10	6	5	4



最优解！

HIT CS&E

6.6 The A* Algorithm

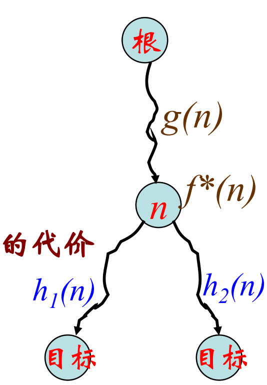
- A*算法的基本思想
- A*算法的规则
- 应用A*算法求解最短路径问题

HIT
CS&E

A*算法的基本思想

- 基本思想
  - A*算法使用Best-first策略进行搜索
  - 在某些情况下，我们一旦得到了一个解，它一定是优化解，于是算法可以停止
  - 无需搜索整个解空间
- 与分支界限策略的不同
  - 分支界限策略是为了剪掉不能达到优化解的分支
  - 分支界限策略的关键是“界限”

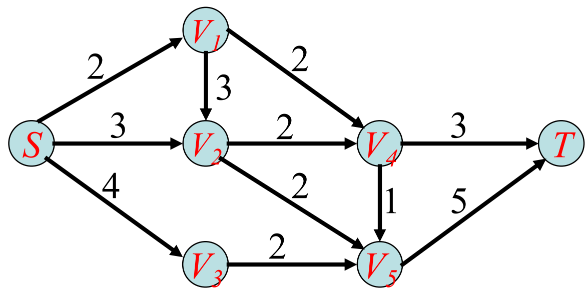
- A*算法关键—代价函数
  - 对于任意节点n
    - $g(n)$ = 从树根到n的代价
    - $h^*(n)$ = 从n到目标结点的优化路径的代价
    - $f^*(n) = g(n) + h^*(n)$是经过结点n到达目标结点的代价
  - $h^*(n) = ?$
    - 不知道！
    - 于是，$f^*(n)$也不知道
  - 估计$h^*(n)$
    - 使用任何方法去估计$h^*(n)$，用$h(n)$表示$h^*(n)$的估计
    - $h(n) \le h^*(n)$总为真
    - $f(n)=g(n)+h(n) \le g(n)+h^*(n)=f^*(n)$定义为$n$的代价



$h^*(n)=min\{h_1(n), h_2(n)\}$

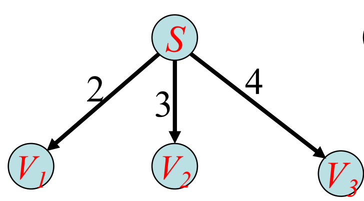
例1. 最短路径问题:

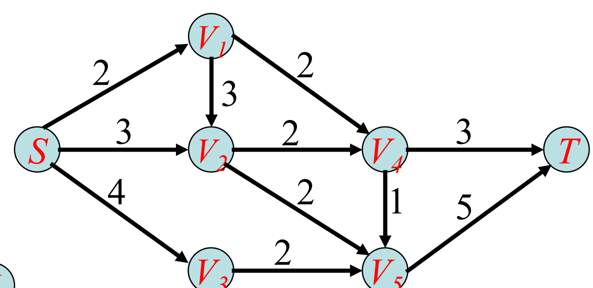
- **输入:**



- **输出: 发现一个从*S*到*T*的最短路径**

- **求解树的第一阶段**





$g(V_1)=2,\ \ g(V_2)=3,\ \ g(V_3)=4$

$\cancel{h^*(V_1)=5,\ \ f^*(V_1)=g(V_1)+h^*(V_1)=7}$

- **估计$h^*(V_1)$**
  - **从V_1出发有两种可能: 代价分别为2和3, 最小者为2**
  - **$2 \le h^*(V_1)$, 选择$h(V_1)=2$为$h^*(V_1)$的估计值, 满足**
    - **$h(V_1) \le h^*(V_1)$**
  - **$f(V_1)=g(V_1)+h(V_1)=4$为V_1的代价**

HIT
CS&E

A*算法规则

(1). 使用Best-first搜索策略;

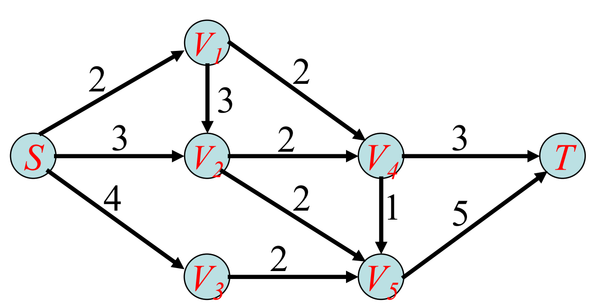
(2). 算法中代价函数$f(n)$定义为$g(n)+h(n)$, $g(n)$是从根到n的路径代价, $h(n)$是$h^*(n)$的估计值, 且对于所有n, $h(n) \le h^*(n)$;

(3). 当选择到的结点是目标结点时, 算法停止, 该目标结点即为优化解.

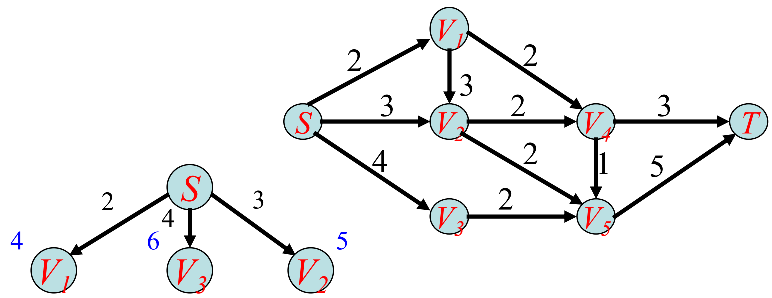
HIT
CS&E

应用A*算法求解最短路径问题

- 问题的输入:



Step 1

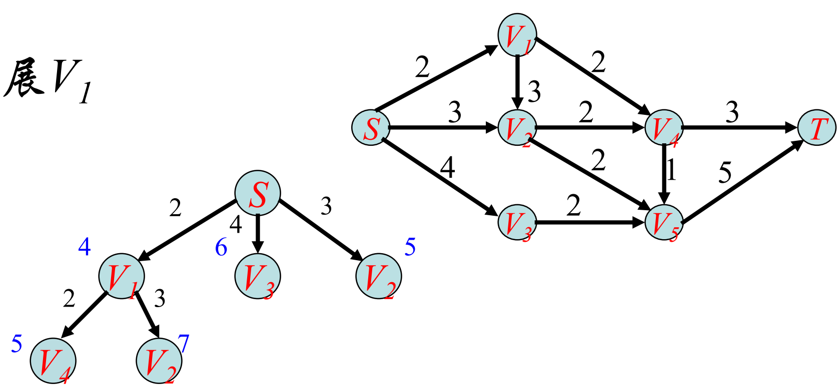


$g(V_1)=2 \qquad h(V_1)=min\{2,3\}=2 \qquad f(V_1)=2+2=4$

$g(V_3)=4 \qquad h(V_3)=min\{2\}=2 \qquad f(V_3)=4+2=6$

$g(V_2)=3 \qquad h(V_2)=min\{2,2\}=2 \qquad f(V_2)=2+2=5$

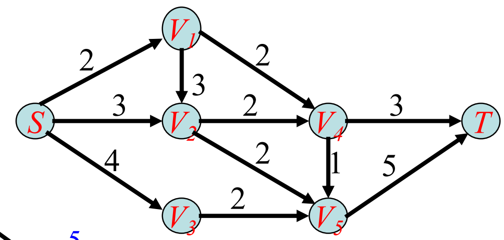
Step 2. 扩展 V_1

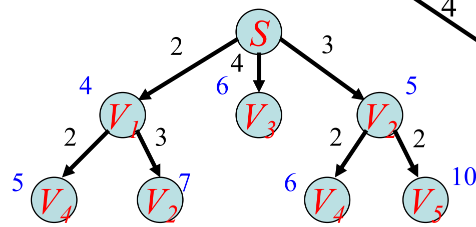


$g(V_4)=2+2=4 \qquad h(V_4)=min\{3,1\}=1 \qquad f(V_4)=4+1=5$

$g(V_2)=2+3=5 \qquad h(V_2)=min\{2, 2\}=2 \qquad f(V_2)=5+2=7$

Step 3. 扩展 V_2

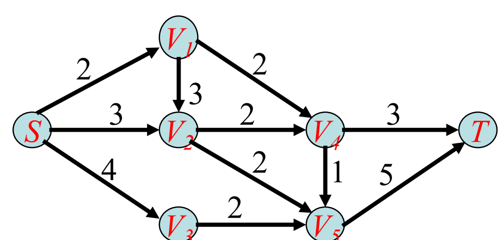


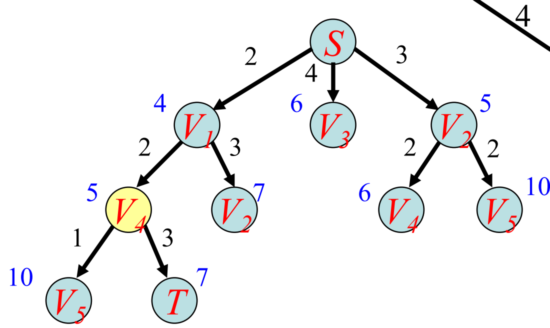


$g(V_4)=3+2=5 \quad h(V_4)=min\{3,1\}=1 \quad f(V_4)=5+1=6$

$g(V_5)=3+2=5 \quad h(V_5)=min\{5\}=5 \quad f(V_5)=5+5=10$

Step 4. 扩展 V_4

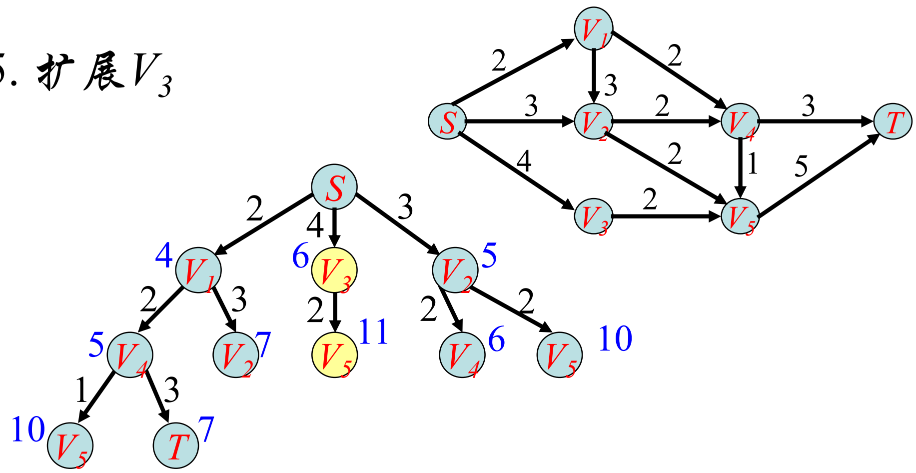




$g(V_5)=2+2+1=5 \quad h(V_5)=min\{5\}=5 \quad f(V_5)=5+5=10$

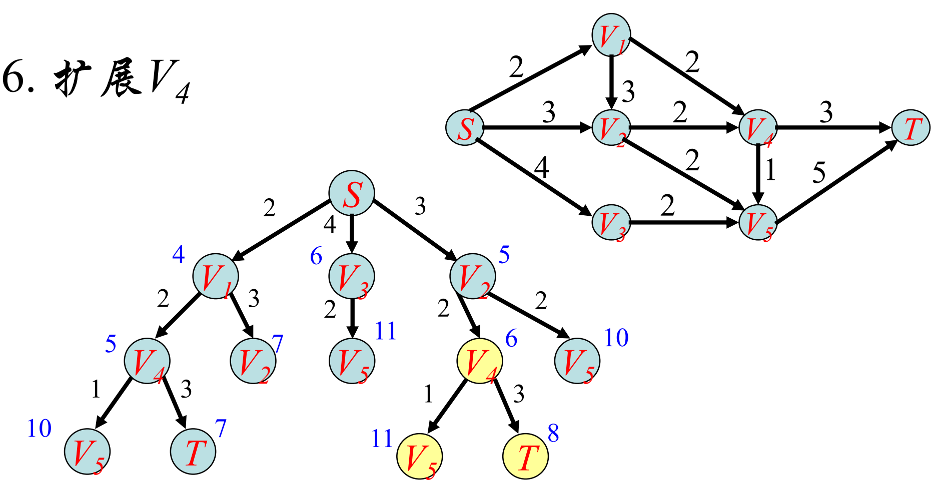
$g(T)=2+2+3=7 \quad h(T)=0 \quad f(T)=7+0=7$

Step 5. 扩展V_3



$g(V_5)=4+2=6$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=6+5=11$

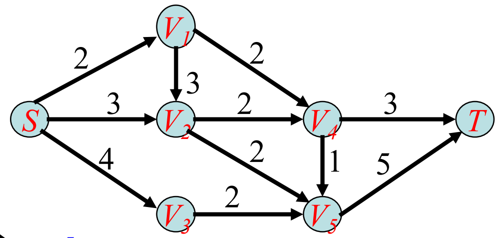
Step 6. 扩展V_4

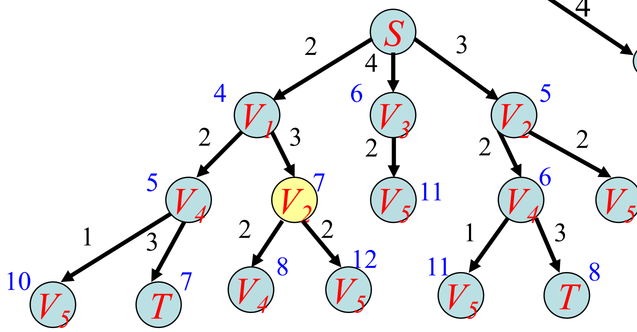


$g(V_5)=3+2+1=6$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=6+5=11$

$g(T)=3+2+3=8$ $h(T)=0$ $f(T)=8+0=8$

Step 7. 扩展 V_2

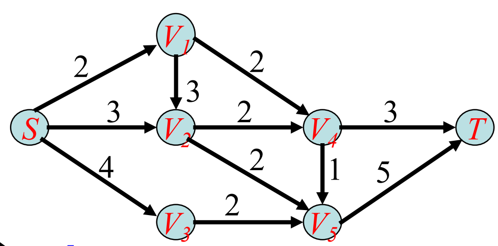


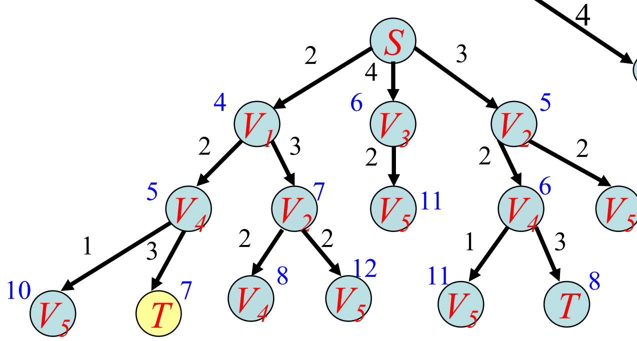


$g(V_4)=3+2+2=7$ $h(V_4)=min\{3,1\}=1$ $f(V_4)=7+1=8$

$g(V_5)=3+2+2=7$ $h(V_5)=min\{5\}=5$ $f(V_5)=7+5=12$

Step 8. 扩展 T





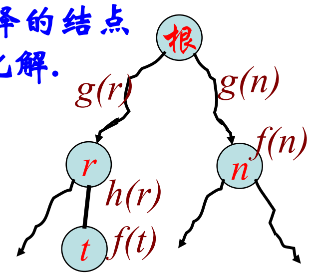
因为T是目标结点，所以我们得到解:

$S \rightarrow V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow T$

该解即为最优解

- **A*算法的正确性**

定理1. 使用Best-first策略搜索树，如果A*选择的结点是目标结点，则该结点表示的解是优化解.



证明.

令t是选中的目标结点，r是t父结点

n是任意已扩展到的结点.

往证$f(t)=g(t)=g(r)+h(r)$是优化解代价.

(1). A*算法使用Best-first策略，$f(t)\le f(n)$. 目标点

(2). A*算法使用$h(n)\le h^*(n)$估计规则，$f(t)\le f(n)\le f^*(n)$.

(3). $\{f^*(n)$（包括$f^*(t)$）$\}$中必有一个为优化解的代价，令其为$f^*(s)$. 我们有$f(t)\le f^*(s)$.

($f^*(n)=g(n)+h^*(n)$是经过n的可能解的最小代价).

(4). t是目标节点，$h(t)=0$，所以$f(t)=g(t)+h(t)=f^*(t)$是t对应可能解的代价，$f(t)\ge f^*(s)$，即$f(t)=f^*(s)$.