HIT
CS&E

第一章

算法设计与分析概述

程思瑶
计算机科学与技术学院

HIT
CS&E

提要

1.1 在计算机科学中算法的重要性

1.2 算法的概念

1.3 算法分析

1.4 算法设计

1.1 在计算机科学中算法的重要性

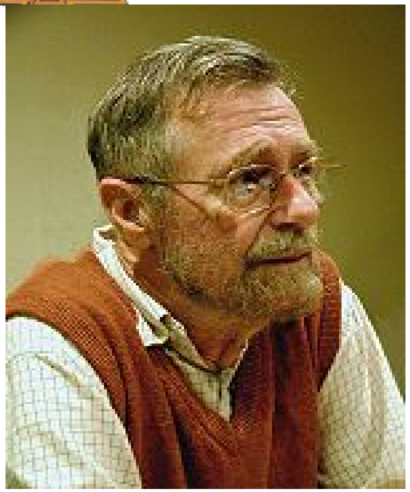
- 算法是计算机科学的重要主题
- 影响算法领域的重要学者
- 计算机科学体系及算法设计分析的地位

算法是计算机科学的重要主题

- 70年代前
  - 计算机科学基础的主题没有被清楚地认清
- 70年代
  - Knuth出版了《The Art of Computer Programming》
    - 1968，1969，1973
  - 以算法研究为主线确立了算法为计算机科学基础的重要主题
  - 因具有划时代意义的这本书，1974年获得图灵奖
- 70年代后
  - 算法作为计算机科学核心推动了计算机科学技术飞速发展

HIT
CS&E

影响算法世界的重要学者



美国Texas大学
计算机和
数学教授

1972年获得图灵奖
for ALGOL60编译器

Edsger W. Dijkstra

斯坦福大学教授

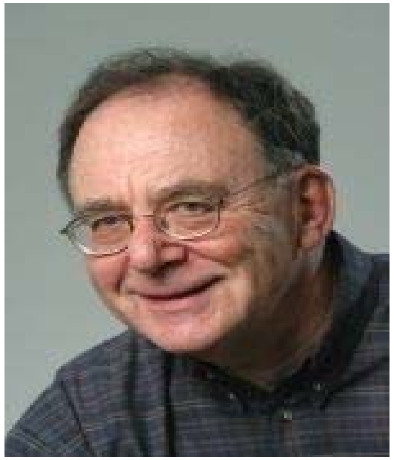
获1974年图灵奖 for
《The Art of Computer
Programming》
and algorithm
design & analysis

Donald Ervin Knuth

Toronto大学教授

1982年获得图灵奖
for a famous paper:
"The Complexity of
Theorem Proving
Procedures" 奠定了
NP-完全理论基础

Stephen Arthur Cook



UC Berkely("三栖学者")

1985年获得图灵奖for
在算法理论特别是
NP-completeness理论
方面连续不断的贡献

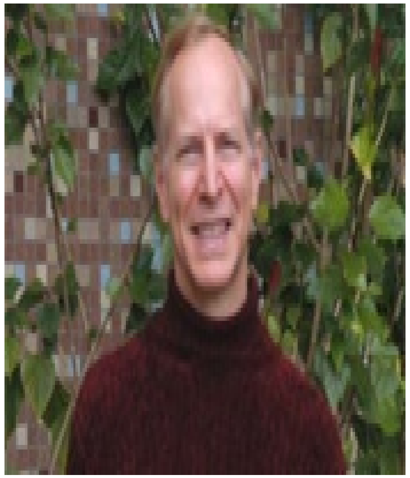
Richard M. Karp

HIT
CS&E

斯坦福大学教授

著名公式"算法+数据结构=程序"
获1984年图灵奖 for
开发了一系列计算机
语言

Niklaus Wirth



Cornell University

1986年获得图灵奖
在算法及数据结构设
计和分析方面的基础
性成就,

Robert E. Tarjan

Cornell University

1986年获得图灵奖
在算法及数据结构设
计和分析方面的基础
性成就,

John Hopcroft

HIT
CS&E

Richard Edwin Stearns

University at Albany
(奥尔巴尼)

1993年获得图灵奖
for a the paper:
“On the Computational Complexity of Algorithms” published in 1965
奠定了算法计算复杂性的理论基础

计算复杂性理论的主要奠基人

卡内基梅隆

1995年获得图灵奖
for在计算复杂性理论及其在密码学方面的应用.

Manuel Blum

普林斯顿大学,
清华大学

2000年获得图灵奖
for在计算理论方面的贡献.

Andrew Yao（姚期智）

计算机科学技术的体系

- 解决一个计算问题的过程

可计算否	可计算理论
能行可计算否	计算复杂性理论
设计与分析算法	算法设计与分析
用计算机语言实现算法	数据结构与程序设计
软件系统	编译、OS、...

HIT
CS&E

- 可计算理论
  - 计算模型
  - 可计算问题/不可计算问题
  - 计算模型的等价性--图灵/Church命题
- 计算复杂性理论
  - 在给定的计算模型下研究问题的复杂性
    - 固有复杂性
    - 复杂性上、下界
    - 平均复杂性
    - 复杂性问题的分类: P=NP?
    - 公理复杂性理论：抽象复杂性研究

HIT
CS&E

- 算法设计和分析
  - 解决可计算问题的算法的设计与分析
  - 设计算法的理论、方法和技术
  - 分析算法的理论、方法和技术
- 计算机软件
  - 系统软件
  - 工具软件
  - 应用软件

1.2 算法的概念

- 算法的定义
- 问题的定义
- 算法的实例

算法的定义

定义1 (计算) 可由一个给定计算模型机械地执行的规则或计算步骤序列称为该计算模型的一个计算.

- 注意
  - 一个计算机程序是一个计算（计算模型是计算机）
  - 计算可能永远不停止——不是算法

HIT
CS&E

定义2(算法)算法是一个满足下列条件的计算：

终止性：有限步内必须停止（有穷性），
确定性：每步都是严格定义和确定的动作，
能行性：每个动作都能被精确地机械执行，
输　入：具有满足给定约束条件的输入，
输　出：产生满足给定约束条件的结果.

算法的目的是求解问题。
什么是问题？

定义3 (问题) 设*Input*和*Output*是两个集合. 一个问题是一个关系$P\subseteq Input\times Output$，*Input*称为问题$P$的输入集合，*Input*的每个元素称为$P$的一个输入，*Output*称为问题$P$的输出或结果集合，*Output*的每个元素称为$P$的一个结果.

- 注意
  - 问题定义了输入和输出的关系

例. SORT问题定义如下

输入: $Input=\{<a_1,\ldots,a_n>|a_i\text{是整数}\}$

输出: $Output=\{<b_1,\ldots,b_n>|b_i\text{是整数}, b_1\leq\ldots\leq b_n\}$

问题: $SORT=\{(<a_1,\ldots,a_n>,<b_1,\ldots,b_n>)|$

$$<a_1,\ldots,a_n>\in Input,$$

$$<b_1,\ldots, b_n>\in Output,$$

$$\{a_1, \ldots, a_n\}=\{b_1, \ldots, b_n\}\}$$

$SORT=\{(<3,2,1,5,4,6>,<1,2,3,4,5,6>), (<6,8,4>,<4,6,8>), (<9,6,7,3>,<3,6,7,9>), \ldots\ldots\}$

SORT={(<3,2,1,5,4,6>,<1,2,3,4,5,6>), (<6,8,4>,<4,6,8>), (<9,6,7,3>,<3,6,7,9>), ……}

定义4(问题实例). 问题P的一个实例是P的一个二元组.

二元组(<9,6,7,3>,<3,6,7,9>)是SORT问题的一个实例

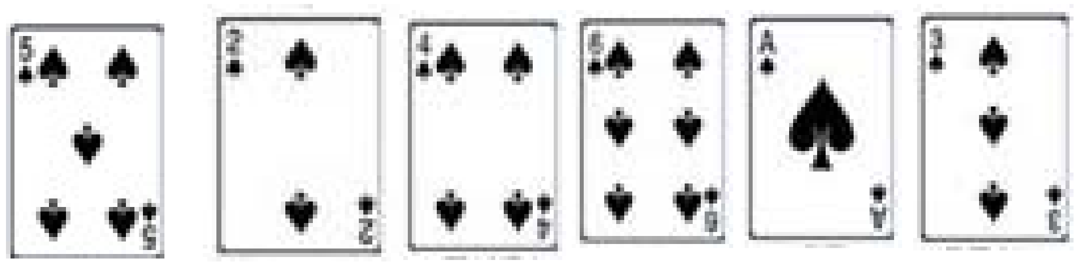
– 注意

- 问题是一个二元组集合，问题实例是一个二元组.
- 一个算法求解一个完整的问题，而不是仅求解一个问题的一个或几个实例.

算法示例

- 问题定义
  - $Input=\{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \mid a_i$是整数$\}$
  - $output=\{\langle b_1,\ldots,b_n\rangle \mid b_i$是整数,且$b_1\leq\ldots\leq b_n\}$
  - $P=\{(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle,\langle b_1,\ldots,b_n\rangle) \mid \langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in Input,$
    $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle\in output, \{a_1,\ldots,a_n\}=\{b_1,\ldots,b_n\}\}$
- 算法的思想
  - 扑克牌游戏

抓牌过程： **5 2 4 6 1 3**



HIT
CS&E

- 算法描述

```
Insertion-sort(A)
Input:  A[1,.....,n]=n个数
output: A[1,.....,n]=n个sorted数
FOR j=2  To n  Do
    key←A[j];
    i←j-1
    WHILE i>0 AND A[i]>key  Do
       A[i+1]←A[i];
       i←i-1;
    A[i+1]←key;
```

j

2	**4**	**5**	**6**	**1**	**3**	**8**

i

Key=A[4]=6

Question:

If input is *n* sorted number,

how many comparisons do we need to do?

1.3 算法分析

- 算法的正确性分析
- 算法的复杂性分析

算法的正确性分析

定义5 (算法正确性). 一个算法是正确的，如果它对于每一个输入都最终停止，而且产生正确的输出.

- 什么算法是不正确算法？
  ①在一个或多个输入上不停止
  ②对所有输入都停止，但对一个或多个输入产生不正确结果
- 什么是近似算法/随机算法的正确性？
  ①对所有输入都停止
  ②产生近似正确的解/产生不多的不正确解

HIT
CS&E

- 为什么要进行正确性证明?
  - 调试程序=程序正确性证明?

    程序调试只能证明程序有错!

    不能证明程序无错误!!
- 如何证明算法的正确性?
  - 证明算法对所有输入都停止
  - 证明对每个输入都产生正确结果
- 近似算法/随机算法的正确性分析?
  - 证明算法对所有输入都停止
  - 分析算法的误差/获得正确解的概率

HIT CS&E

算法的复杂性分析

- 目的
  - 分析算法对不同输入所需资源量
- 复杂性测度：
  - 时间、空间、I/O等
  - 是输入大小的函数
- 用途：
  - 为求解一个问题选择最佳算法、最佳设备
- 需要的数学基础
  - 离散数学、组合数学、概率论、代数等
- 需要的数学能力
  - 建立算法复杂性的数学模型
  - 数学模型化简

定义6 (输入的大小). 设*Input*是问题*P*的输入集合，*P*的输入大小是一个函数 F：$Input \to N$，N是正整数集合.

- $size(\alpha)$表示输入$\alpha \in Input$的大小
- 示例：
  - 排序问题的输入大小?
  - 矩阵问题的输入大小?
  - 图论问题的输入大小?

定义7 (实例时间复杂性). 一个算法对特定输入的时间复杂性是该算法对该输入产生结果需要的原子操作数.

- 注意
  - 时间复杂性是输入大小的函数$T(n)$
  - 我们假设每一步的执行需要常数时间, 实际上每步需要的时间量可能不同.

定义8 (实例空间复杂性). 一个算法对**特定输入**的空间复杂性是该算法对该输入产生结果所需要的存储空间大小.

- 注意
  - 空间复杂性是输入大小的函数$S(n)$

定义9 (算法最坏复杂性). 设*Input*是问题*P*的输入集合，*Complexity(Size(x))*是求解*P*的实例*x*的算法*A*的复杂性函数，*A*的最坏复杂性是

$$Max\{Complexity(size(x)) \mid x \in Input\}$$

定义10 (算法最小复杂性).

$$Min\{Complexity(size(x)) \mid x \in Input\}$$

定义11 (算法平均复杂性). 设$x \in Input$, x作为算法*A*的输入出现的概率是p_x, *A*的平均复杂性为

$$\sum_{x \in Input} p_x \times \mathrm{complexity}(\mathrm{size}(x))$$

1.4 算法设计

- 算法的设计方法
- 算法的分析方法

- Divide-and-Conquer
- Dynamic Programming
- Greedy Algorithms
- Tree Searching Strategies
- Genetic Algorithms
- Annealing
- Approximation Algorithms
- Randomlized Algorithms
- On-Line Algorithms
- Parellel Algorithms

算法的分析方法

- 不同的设计方法有不同的分析方法

References

1. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms,* The MIT Press, Second Edition, 2002.
2. R.C.T.Lee, S.S.Tseng, R.C.Chang, and Y.T.Tsai, *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms*, McGraw-Hill, 2007.
3. Vijay V. Vazirani, *Approximation Algorithms*, Springer-Verlag, 2001.
4. Motwan R. and Raghaven P., *Randomized Algorithms*, Cambridge University Press, 1995.
5. D. E. Knuth, *Art of the Computer Programming*, *Vol. 3, Addison-Wesley, 1973*.
6. A.V.Aho, J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, 1974.

Important Journals

1. Algorithmica
2. Acta Informatica
3. BIT
4. Journal of Algorithms
5. Journal of Computer and System Sciences
6. Journal of the ACM

Important Journals

7. Information and Control
8. Information Processing Letters
9. SIAM Journal on Computing
10. Mathematics of Computation
11. Theoretical Computer Science

HIT
CS&E

Important Conferences

1. STOC: ACM Symp on Theory of Computing
2. FOCS: IEEE Symp on Foundations of Computer Science
3. SCG: ACM Symp on Computational Geometry
4. SODA: ACM/SIAM Symp on Discrete Algorithms
5. SPAA: ACM Symp on Parallel Algorithms and Architectures
6. PODC: ACM Symp on Principles of Distributed Computing
7. ISSAC: Intl. Symp on Symbolic and Algebraic Computation