

分治作业

2020 年 3 月 13 日

1. 设 $X[1:n]$ 和 $Y[1:n]$ 是两个数组，每个数组内的 n 个元素已经由小到大排列，试设计一个 $O(\log n)$ 的分治算法，找出 X 和 Y 中 $2n$ 个数字的中位数，并进行复杂性分析。如 $X = [1, 3, 5]$, $Y = [2, 4, 6]$ ，那么 X 和 Y 的 6 个数的中位数是 3.5。
2. 对于一些正整数 N ，如果数组 A 是整数 $1, 2, \dots, N$ 的一个排列，且满足对于任意的 $1 \leq i < j \leq N$ ，都不存在 $k, i < k < j$ ，使得 $A[k] * 2 = A[i] + A[j]$ ，那么我们称数组 A 是漂亮数组。比如， $N = 4$ ，漂亮数组是 $[2, 1, 4, 3]$ 。请设计一个分治算法，当给定 N 时，算法返回对应的漂亮数组（假设存在）。
3. 给定平面上 n 个点坐标 (x, y) 构成的集合 $S = [p_1, p_2, \dots, p_n]$, $p_i = (x_i, y_i)$, $n \geq 3$ ，试设计一个分治算法，输出 S 中的三个点，使得以这三个点为定点的三角形周长达到最小，并分析时间复杂度。
4. 输入含有 n 个顶点的加权二叉树 T 和正数 τ ，树 T 上每条边的权值都非负，树中顶点 x, y 的距离 $dis(x, y)$ 定义为从 x 到 y 的各边权值之和。试设计一个分治算法输出满足 $dis(x, y) \leq \tau$ 的顶点对个数，并分析时间复杂度。
5. 设 $A[1:n]$ 是由不同实数组成的数组，如果 $i < j$ 且 $A[i] > A[j]$ ，则称实数对 $(A[i], A[j])$ 是该实数组的一个反序。如，若 $A = [3, 5, 2, 4]$ ，则该数组存在 3 个反序 $(3, 2)$, $(5, 2)$ 和 $(5, 4)$ 。反序的个数可以用来衡量一个数组的无序程度。试设计一个时间复杂度严格低阶于 n^2 的分治算法，计算给定数组的反序个数，并分析时间复杂度。