

2019
哈尔滨工业大学 学年 春季学期
2020
高级算法设计与分析 试 题(三)

主管领导审核签字

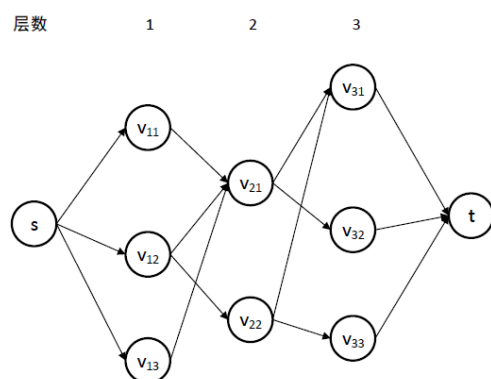
注意行为规范 遵守考场纪律

一、(20 分) 数学基础

- (5 分) 证明对于任意正整数 k , $\log^k(n) = o(n)$.
- (5 分) 求解递归式 $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$.
- (5 分) 求解递归式 $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4} + 3\right) + \frac{n}{3}$.
- (5 分) 解递归方程 $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{8}\right) + n$.

二、(20 分) 动态规划算法设计题

给定一个有向层次图, s 为起点, 并存在指向第一层每个节点的有向边。 t 为终点, 最后一层每个节点均存在指向 t 的有向边。每一层的每个节点与下一层若干个节点之间有一个有向边。除了 s 和 t 的所有节点上均有一个非负的权重(下图显示了一个例子)。求 s 到 t 的一条路径, 使得这条路径上最大的节点权重值最小化。设第 i 层第 j 个节点为 V_{ij} , 其权重为 W_{ij} , V_{ij} 的可选上一跳节点集合为 L_{ij} 。设计一个动态规划算法, 要求写出递推方程和算法伪代码, 并分析时间空间复杂度。



三、(20 分) 分治算法设计题: 假设供电系统由 n 个核电厂构成。将军派出了 n 名间谍去破坏该供电系统, 只要破坏一个核电厂就达到破坏系统的目的。但是 n 名间谍降落后发现他们的位置和预期位置不符。现在希望找到最近的间谍和核电站的位置。输入: n 个核电站的位置和 n 个间谍的位置。输出: 一个核电站和一个间谍使其距离最小。你的答案应包括: (1) 算法基本思想; (2) 写出伪代码; (4) 简要分析算法的正确性并分析算法时间复杂度。

四、(20 分) 河的右岸有三个修士和三个野人, 要用一条可载两人的船把这六个人都送到左岸。修士为了保证自身安全, 要求在任意时刻, 左岸、右岸、船上任意一个地方, 要么没有修士, 要么修士的人数至少和野人相等, 并且船不能空载。现在请用 A* 算法, 用最少的行动次数使得所有人过河。请首先给出 $g(n), h^*(n), h(n), f(n)$ 的定义, 并用画图的方式说明每一步的执行过程。【提示: 用 x 表示右岸修士数目, 用 y 表示右岸野人数目, 用 z 表示右岸船的数量。于是状态可以用三元组 (x, y, z) 唯一表示。然后将 $h(n)$ 表示为 x, y, z 的函数。】

五、(10 分) 假设 A 是一个 Yes-no 型的蒙特卡罗算法。当问题的答案为 Yes 时, A 总输出 Yes。但是, 当问题的答案是 no 时, $\Pr[A \text{ 输出 no}] \geq 0.05$ 。重复运行算法 A , 可以降低算法犯错误的概率。试问, 为确保算法犯错的概率不高于 0.1, 需要重复运行算法多少遍? (请写清楚计算过程)。

六、(10 分) 子集比率问题定义如下: 给定 n 个正整数 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 找出两个不相交的非空子集 S_1 和 S_2 。满足 $\sum_{i \in S_1} a_i \geq \sum_{i \in S_2} a_i$, 且使得这两个子集的比率 $\frac{\sum_{i \in S_1} a_i}{\sum_{i \in S_2} a_i}$ 达到最小。该问题可以如下求解:

/* ϵ 是给定的误差参数*/

1. 降序排列所有数字
2. 令 $m = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor$
3. 暴力求出前 m 个数字的最优解 A' 和 B'
4. 令 $A = A'$, $B = B'$
5. 对于从 $m+1$ 到 n 的数字 a_i
6. 如果 $\text{sum}(A) \leq \text{sum}(B)$, 则令 $A = A \cup \{a_i\}$
7. 否则, 令 $B = B \cup \{a_i\}$
8. 将 A 、 B 中和较大的集合赋给 S_1 , 较小的给 S_2

证明: 该算法是一个多项式时间近似模式。