近似算法作业

1. 图匹配是指：给定图$G(V,E)$，如果边集M中任意两条边都没有公共顶点，那么称M是G的一个匹配；极大匹配是指：如果不存在G中的另一匹配M'，使得$M\subset M'$，那么称M是G的一个极大匹配。求G的极大匹配有多项式算法。利用求图中的极大匹配算法，给出顶点覆盖问题的一个近似比为2的近似算法。

2. 考虑下述场景。给定一个城市集合以及城市之间的距离，从中需要选出k个城市来设置仓库，使得各个城市距离它最近的仓库的距离中的最大者达到最小。这是经典的K-center问题，它的形式化定义如下：

   输入：平面上的点集P，欧式距离函数$d(\cdot,\cdot)$，以及参数k。

   输出：定义$S\subseteq P$的代价是$cost(S)=\max\limits_{p\in P}\min\limits_{s\in S}d(s,p)$。要求找到$S$，使得$cost(S)$最小。

   下面是一个求解K-center问题的基于贪心策略的近似算法，请证明它的近似比是2。

   Algorithm 1: K-center问题近似算法

   Input: 点集P，参数k

   Output: 点集S

   取P中任意一点s_1加入S中;
   while $|S|<k$ **do**
   　对$\forall p\in P$，计算$dist(p)=\min\limits_{s\in S}d(s,p)$;
   　设s'为$dist$最大的点，即$dist(s')=\max\limits_{p\in P}dist(p)$;
   　将s'加入S集合中;
   输出S;

3. 考虑多向割问题：给定加权图$G=(V,E)$以及一个终点集合$S=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}\subset V$，多向割是一个边集合，删除它后会使得$S$中的终点彼此互不连通。多向割问题就是寻找边权和最小的这种集合。设计一个近似算法并分析近似比。（提示：定义s_i的孤立割是一个边集，删除它会使得s_i与S中其他终点不连通。计算孤立割是一个P问题，通过求孤立割可以得到多向割）。

4. 已知对于给定的平面上的点集P，存在唯一确定的P的外接圆，即存在唯一确定的c_P,r_P，使得以c_P为圆心，r_P为半径的圆是包含P中所有点的最小的圆。给定任意的近似精度$0<\epsilon<1$，定义点集P的$1+\epsilon$近似外接圆，其圆心c'和半径r'需要满足两个条件：$r'\le(1+\epsilon)r_P$，并且对$\forall p\in P$有$d(p,c')\le r'$。其中$d(\cdot,\cdot)$为二维平面上的欧式距离。观察下面的算法。

Algorithm 2: 计算近似外接圆

Input: 平面上的点集P

Output: 近似外接圆圆心c'，近似外接圆半径r'

1 任意取$c_1 \in P$;

2 **for** $i \in [1, K-1]$ **do**

3   令p为P中距c_i最远的点;

4     $c_{i+1} \leftarrow c_i + (p - c_i) \cdot \frac{1}{i+1}$;

5 令$c' = c_K$;

6 令r'为P中的点与c'的最大距离;

7 输出(c', r');

已经证明了引理 ：对$\forall i$，有$d(c_i, c_P) \leq r_P/\sqrt{i}$。根据此引理确定算法第二行for循环的最小终止值$K$，使得算法可以求出$(1+\epsilon)-$近似外接圆，并说明此算法是一个完全多项式近似模式。

5. 考虑如下的启发式方法来解决顶点覆盖问题：重复选择度数最高的顶点，并去掉其所有邻接边。试举例证明这种启发式方法达不到近似比2.（提示：可以考虑一个二分图，其中左图中顶点的度数一样，而右图中顶点的度数不一样）。

6. 非二部图上的加权匹配问题的输入是图$G = (V, E)$，其中每条边$(i, j) \in E$具有非负的权值w_{ij}, 输出的是总权值最大的匹配M。考虑如下算法：维护一个边集子集M，初始化其为空集，重复地将权值最大且与M中的边无公共端点的边添加到M中，直到M中无法再添加新的边为止。记z是M中所有边的权值之和，$z*$是问题的优化解的代价。证明此贪心算法的近似比是2。