

### 三维旋转

李群

$SO(3)$

$$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1$$

李代数

$\mathfrak{so}(3)$

$$\phi \in \mathbb{R}^3$$

$$\phi^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\theta \mathbf{a}^\wedge) = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \sin \theta \mathbf{a}^\wedge \quad \text{指数映射}$$

对数映射

$$\theta = \arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

### 三维变换

李群

$SE(3)$

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

李代数

$\mathfrak{se}(3)$

$$\xi = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

$$\xi^\wedge = \begin{bmatrix} \phi^\wedge & \rho \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$\exp(\xi^\wedge) = \begin{bmatrix} \exp(\phi^\wedge) & J\rho \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{I} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \mathbf{a}^\wedge$$

指数映射

对数映射

$$\theta = \arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \mathbf{t} = \mathbf{J}\rho$$