

近世代数课后习题作业 1

1. 找一个半群，它有限个左（右）单位元素。
2. 找一个半群，它无限个左（右）单位元素。
3. 设 (S, \circ) 是一个半群， $a \in S$ 称为左消去元素，如果 $\forall x, y \in S$ ，有 $a \circ x = a \circ y$ ，

则一定有 $x = y$ 。试证：如果 a 和 b 均为左消去元，则 $a \circ b$ 也是左消去元。

4. 设 Z 为整数集合， $M = Z \times Z$ 。在 M 上定义二元运算 " \circ " 如下：

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in M, (x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

试证：

- 1) M 对上述定义的代数运算构成一个幺半群。
 - 2) 若 $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ，则 (x_1, x_2) 是左消去元。
 - 3) 运算 " \circ " 满足交换律。
5. 在半群 (S, \circ) 中：若有 $x^n = x^k$ ($n > k, x \in S$)，则有： $x^{n-k} x^k = x^k$

$$\Rightarrow x^{2(n-k)} x^k = x^{n-k} x^k = x^n$$

$$\Rightarrow x^{2(n-k)} = x^{n-k} \Rightarrow x^{(n-k)} x^{(n-k)} = x^{n-k}$$

请问上述推理有无错误之处？

6. 证明：有限半群中一定有一个元素 a 使得 $a \circ a = a$
7. 设 (M, \circ, e) 是一个幺半群， $m \in M$ 是 M 的一个特定元素。在 M 上定义一个新的乘法运算 " $*$ " 如下： $\forall a, b \in M$ ， $a * b = a \circ m \circ b$ 。试证： $(M, *)$ 是一个半群，问 m 满足什么条件时半群 $(M, *)$ 是一个幺半群？
8. 设 S 是一个非空集合。试证： S 的幂集 2^S 对集合的对称差运算 " Δ " 构成一个群。
9. 在所有 3 次置换构成的集合 S_3 对置换的乘法构成半群 (S_3, \circ) 中，令 $A = \{(12), (23)\}$ ，请给出由 S_3 的子集 A 所生成的子半群 $\langle A \rangle$ 。

10. 设 S 是一个非空集合。在 S 上定义乘法 " \circ " 如下： $\forall x, y \in S$ ， $x \circ y = y$ 。

证明： S 对乘法 " \circ " 构成一个半群。