§2.2 群的简单性质

定理1 设为 $(G,\circ)$ 群，则对 $\forall\, a \in G$ a的左逆元也是a的右逆元。

定理2 设为 $(G,\circ)$ 群，则G的左单位元也是右单位元。

定理3 设为 $(G,\circ)$ 群，则对 $\forall\, a,b \in G$ 有：$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a,\ (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

定理4 设为$(G,\circ)$群，则对$\forall a,b\in G$
方程：

$$\begin{cases} ax = b \\ ya = b \end{cases}$$

关于未知量x与y均有唯一解。

定理5

设G为非空集合，“○”为G上的二元代数运算，则$(G,\circ)$为群的充要条件为：1）“○”满足结合律；

2）对$\forall a,b\in G$，方程$\begin{cases} ax=b \\ ya=b \end{cases}$在G中有解。

注：可看作群的另一个等价定义或判定定理

定理6

设$(G,\circ)$为群，则G关于乘法“○”满足消去律，即对$\forall x,y,a\in G$ 有:

1）若ax=ay，则x＝y

（称为左消去律）

2）若xa=ya，则x＝y

（称为右消去律）

定理7

设G为非空有限集合，“∘”为G上的二元代数运算，则$(G,\circ)$为群的充要条件

1）“∘”满足结合律；

2）“∘”满足左右消去律。

注：1）可看作有限群的一个定义或判定定理

2）“有限”的条件很重要

例 设 $K_4=\{e,a,b,c\}$ **乘法运算表为：**

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

证明：K_4 是一个4阶交换群

记号：对 $\forall a \in G$

1）$a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n \circ a, n \geq 1$

2） $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n, n \geq 1$

3） $\forall m, n \in Z, a^m \circ a^n = a^{m+n}$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

4）对交换群，此时其代数运算常用“＋”表示，称为加法，同时上述幂运算常用倍乘表示，即：

$$\theta a = 0(e)\,,\, 1a = a\,,\, (n+1)a = na + a$$

$$(-1)a = -a\,,\, -na = n(-a)\,,\, n \geq 1$$

对 $\forall m, n \in Z$， $(mn)a = m(na)$

$$ma + na = (m+n)a$$

$$n(a+b) = na + nb$$

（由 $(ab)^n = a^n b^n$ 改写）

定义1 设$(G,\circ)$为群，$a\in G$，使$a^n=e$的最小正整数n称为a的阶，反之则称a的阶为无穷大。

注：若a的阶为无穷大，则不可能有

$a^n=a^k\,(n>k)$

思考题

1) 设a的阶为n，且有正整数m使得$a^m=e$则是否一定有m＝n?

2) 设a的阶为n, 则 a^{-1} 的阶是否也一定为n?

3) 若G不一定为交换群，则是否一定有ab的阶和ba的阶相同?($a,b\in G$)

定理8 有限群的每个元素的阶不超过该有限群的阶。

注：当然也就有每个元素的阶一定有限。