近世代数课后习题作业 3

1．设a和b是群G的两个元素。如果$(ab)^2=a^2b^2$，试证：$ab=ba$

2．设G是群。如果$\forall a\in G$，$a^2=e$，试证：G是交换群。

3．证明四阶群是交换群。

4．证明：在任一阶大于 2 的非交换群里必有两个非单位元a和b，使得$ab=ba$。

5．有限群里阶大于 2 的元素的个数必为偶数。

6．证明：偶数阶群里阶为 2 的元素的个数必为奇数。

7．偶数阶群里至少有一个阶为 2 的元素。

8．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n阶群G中的n个元素（它们不一定各不相同）。证明：存在整数p和q（$1\le p\le q\le n$），使得$a_pa_{p+1}\cdots a_q=e$

9．设G_1和G_2是群G的两个真子群。证明：$G_1\cup G_2$是G的子群的充分必要条件是$G_1\subseteq G_2$或$G_2\subseteq G_1$。

10．设$(G_1,\circ)$和$(G_2,*)$都是群，$\varphi:G_1\to G_2$，φ是满射且$\forall a,b\in G_1$有：

$$\varphi(a,b)=\varphi(a)*\varphi(b)$$

证明：$\varphi^{-1}(e_2)$是G_1的子群，其中e_2为G_2的单位元素。

$//\varphi^{-1}(e_2)=\{x|x\in G_1\wedge\varphi(x)=e_2\}$

11. 设$(Z,+)$为整数的加法群，令$S_1=\{5,7\}$，$S_2=\{6,9\}$，请分别给出(S_1)与(S_2)。