§1.4 同构、同态

引言：不同的代数系统表面上看起来元素不同，运算也不同，但是通过在他们之间建立一个一一对应关系，并且这种对应关系还能保持元素之间的运算关系，这样借助此种一一对应关系，我们就可以把在一个代数系统中所证明的结论相应翻译为另一个代数系统的结论，从而不必在该系统中再证一遍。换言之，此种不同的代数系统之间差别仅是元素和运算符号的差异，本质上是一致的，可以认为他们具有相同的结构。

[本节主要内容]

1）（幺）半群的同构、同态的定义及相关性质定理；

2）变换幺半群的定义及其Cayley定理；

3）自然同态及幺半群同态基本定理。

定义1 同构：$(S,\circ)$与$(T,*)$为两个半群，$\varphi: S \to T$的一一映射，若对$\forall a, b \in S$有：$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$，则称半群$(S,\circ)$与$(T,*)$同构，记为$(S,\circ) \cong (T,*)$，简记为$S \cong T$，称$\varphi$为S到T的同构。

定义2 设$(M_1, \circ, e_1)$与$(M_2, *, e_2)$是两个幺半群，$\varphi: M_1 \to M_2$ 的一一映射，且对$\forall x, y \in M_1$，有 $\varphi(e_1) = e_2, \varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ 则称$(M_1, \circ, e_1)$与$(M_2, *, e_2)$同构，记为$(M_1, \circ, e_1) \cong (M_2, *, e_2)$或 $M_1 \cong M_2$

注：可以证明 $\varphi(e_1)$为M_2的单位元，故此处可省去该条件

例： 1）X＝{1, 2, 3, 4}，$f: X \to X$ 的映射

$$f = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle\}$$

（为一循环置换r＝4）

记 $F = (f) = \{f^0, f^1, f^2, f^3\}$

则 $(F, \circ)$ 可交换幺半群。

其运算如下：

$\circ$	f^0	f^1	f^2	f^3
f^0	f^0	f^1	f^2	f^3
f^1	f^1	f^2	f^3	f^0
f^2	f^2	f^3	f^0	f^1
f^3	f^3	f^0	f^1	f^2

2) $Z_4=\{[0],[1],[2],[3]\}$

即模4同余的等价类集合

$[i]\oplus[j]=[i+j]$ 则 $(Z_4,\oplus)$

为可交换半群，$[0]$为单位元

其乘法表如下：

⊕	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

运算对应表：

$\oplus$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$\circ$	f^0	f^1	f^2	f^3
f^0	f^0	f^1	f^2	f^3
f^1	f^1	f^2	f^3	f^0
f^2	f^2	f^3	f^0	f^1
f^3	f^3	f^0	f^1	f^2

定义：$\varphi: \mathrm{F} \to \mathrm{Z}_4$ $\varphi\left(f^{j}\right)=[j],\ j=0,1,2,3$

显然 $\varphi\left(f^{i} \circ f^{j}\right)=\varphi\left(f^{i}\right) \oplus \varphi\left(f^{j}\right)$

注：此两个代数系统在结构上没有差别，不同的只是元素的名字和运算的符号而已。

定义3 变换半群

$(S,*)$是半群，ρ_a: $S\to S$ 的映射，$a\in S$，对$\forall x\in S$，$\rho_a(x)=a*x$ （ρ_a为由a确定的S上的左变换），令$L(S)=\{\rho_a|a\in S,\forall x\in S,\rho_a(x)=a*x\}$

则$L(S)$对映射的合成运算“$\circ$”构成一个半群$(L(S),\circ)$称为变换半群。

注：1)主要是证封闭性，关于映射的合成（复合）运算结合律显然成立。

2)类似可得变换幺半群。

引理1

设 $(S,*)$ 是半群，$\varphi: \mathrm{S} \to \mathrm{L}(S)$ 的映射，对 $\forall a \in S$ 有 $\varphi(a) = \rho_a$ 若对 $\forall x \in S$ $a * x = b * x$ 则a＝b，则 φ 为同构。

注：主要是要说明 φ 为一一映射。

定理1（幺半群的Cayley定理）

任何幺半群$(M,*,e)$同构于变换幺半群$(L(M),\circ,I_M)$

定义4 同态

设 $(S,\circ)$ 与 $(T,*)$ 为两个半群 $\varphi: S \to T$ 的映射，若对 $\forall a, b \in S$ 有 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 则称半群 $(S,\circ)$ 与 $(T,*)$ 同态，$\varphi(S)$ 称为同态象

幺半群同态：

设 $(M_1, \circ, e_1)$ 与 $(M_2, *, \mathrm{e}_2)$ 是两个幺半群，φ: $\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 的映射，且对 $\forall x, y \in M_1$ 有：$\varphi(e_1) = e_2$，$\varphi(x \circ y) = \varphi(x) * \varphi(y)$

则称 $(M_1, \circ, e_1)$ 与 $(M_2, *, \mathrm{e}_2)$ 同态。

若 φ 为满的，则称为满同态，

记为S～T，或 $M_1 \sim M_2$

定理2

设$(S,\circ)$为半群，$(T,*)$为一个具有二元代数运算“$*$”的代数系。

若存在满射φ：$\mathrm{S}\to\mathrm{T}$，若对$\forall \mathrm{x}, y\in\mathrm{S}$有$\varphi(\mathrm{x}\circ\mathrm{y})=\varphi(\mathrm{x})*\varphi(y)$

则$(T,*)$为半群。

定理3

设$(S,\circ,e)$ 为幺半群，$(T,*)$ 是半群，φ：$\mathrm{S}\to\mathrm{T}$ 的满半群同态，则 $\varphi(e)$ 是T的单位元，从而 $(T,*,\varphi(e))$ 是幺半群。

定理4

设 $(M,\circ,e_1)$ 与 $(T,*,e_2)$

为两个幺半群，$\varphi : M \to T$ 同态，

则M的可逆元素a的象元 $\varphi(a)$

也可逆，且 $(\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1})$

定理5

设 $\varphi_1 : (S_1, \otimes) \to (S_2, *)$ 半群同态

$\varphi_2 : (S_2, *) \to (S_3, \bullet)$ 半群同态

则 $\varphi_2 \circ \varphi_1 : (S_1, \otimes) \to (S_3, \bullet)$ 半群同态。

回顾定义1：设 $f: X \to Y$ 在X上

定义二元关系 E_f 如下：$\forall a,b \in X$

$$aE_f b \text{当且仅当} f(a) = f(b)$$

则称 E_f 为由 f 导出的关系。

且为等价关系。

回顾定义2：设 E 是X上的一个等价关系，$\gamma : X \to X/E$ 其定义为：

$$\gamma(a) = [a], \forall a \in X$$

其中[a]为a关于 E 的等价类。

称 γ 为 $X \to X/E$ 自然映射。

显然为满映射。

回顾定义3：设 $f: X \to Y$ 则 f 可分解为 $X \to X/E$ 的自然映射 γ 与 $X/E \to Y$ 的某个单射 $\bar{f}$ 的合成

$$f = \bar{f} \circ \gamma$$

定义5

设 $(S,\circ)$ 与 $(T,*)$ 为两个半群，φ: S $\to$ T的同态，则由φ确定了S上的一个等价关系 $E_\varphi:\forall x,y\in S,\ xE_\varphi y$ 当且仅当 $\varphi(x)=\varphi(y)$

（接上）

在 S/E_φ （商集，由 E_φ 所得到的等价类组成）上定义一个二元运算“$\bullet$ ”如下：$[a]\bullet[b]=[a\circ b]$

则为 $\left(S/E_\varphi,\bullet\right)$ 半群（商半群）

同理：可得商幺半群：

设 $(M_1, \circ, e_1)$ 与 $(M_2, *, e_2)$ 是两个幺半群，φ: $M_1 \to M_2$ 的同态，M_1 / E_φ 为商集，则 $\left(M_1 / E_\varphi , \bullet, [e_1] \right)$ 称为商幺半群。

注：只需要说明 $[e_1]$ 为其单位元。

定义6 自然同态: 设 $(S, \circ)$ 与 $(T, *)$ 为两个半群, $\varphi: S \to T$ 的同态, 半群 $\left(S/E_{\varphi}, \bullet\right)$ 为商半群。令 $\gamma: S \to S/E_{\varphi}$, 对 $\forall a \in S, \gamma(a) = [a]$, 则称

$$\gamma: S \to S/E_{\varphi}$$

为自然同态。

定理6 幺半群的同态基本定理：

设 $(M_1, \circ, e_1)$ 与 $(M_2, *, e_2)$ 是两个幺半群，$\varphi: M_1 \to M_2$ 的同态，则：

1）同态象 $\varphi(M_1)$ 是 M_2 的一个子幺半群

2）由 φ 确定的等价关系 E_φ为同余关系，即若 $a\ E_\varphi\ a'$ 且 $b\ E_\varphi\ b'$ ，则 $a \circ b\ E_\varphi\ a' \circ b'$，于是：

$$\forall [a],[b] \in M_1/E_\varphi, [a] \bullet [b] = [a \circ b]$$

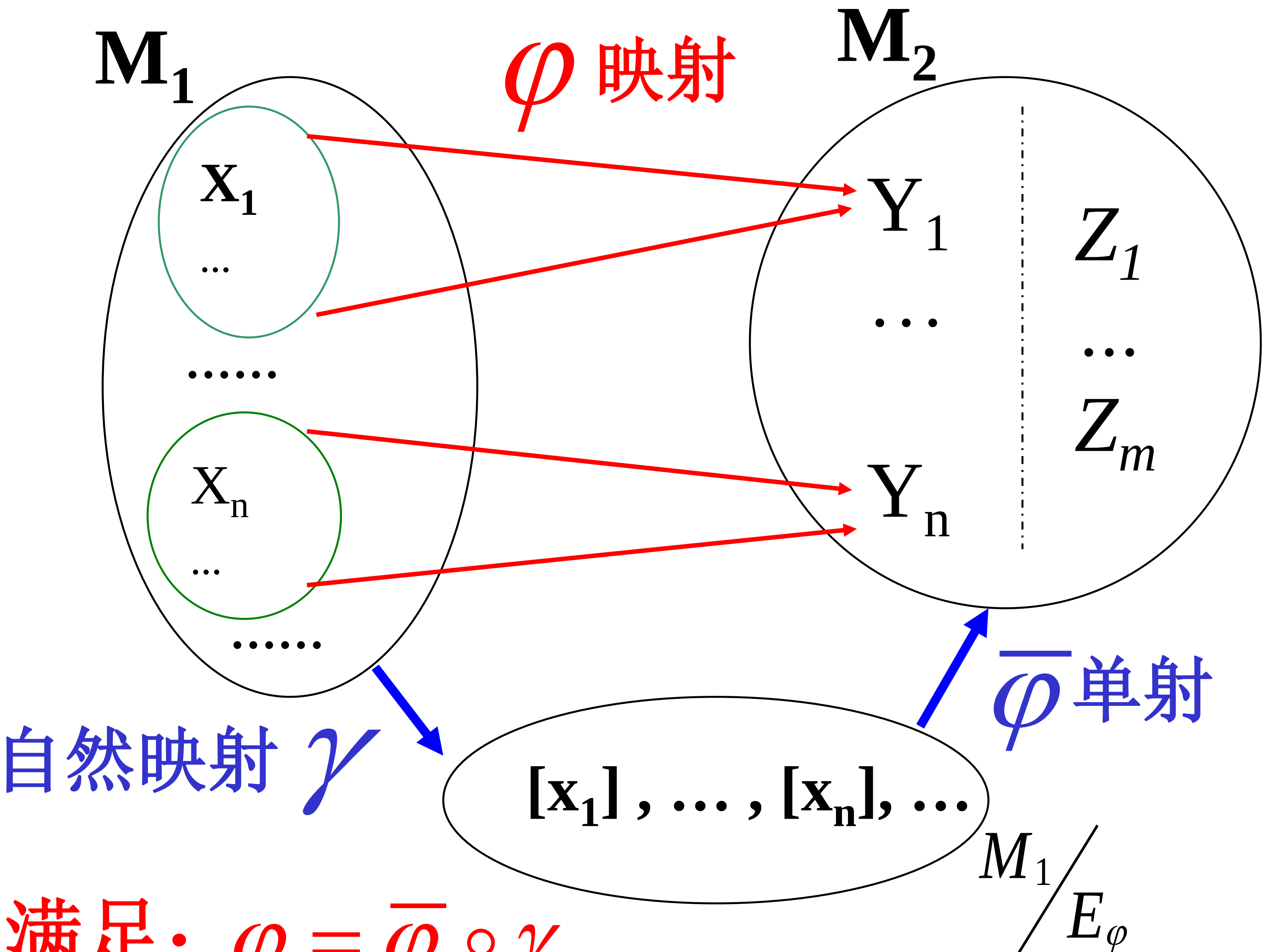
是 M_1/E_φ 上二元代数运算，

$\left(M_1/E_\varphi, \bullet, [e_1]\right)$ 是幺半群（商幺半群）

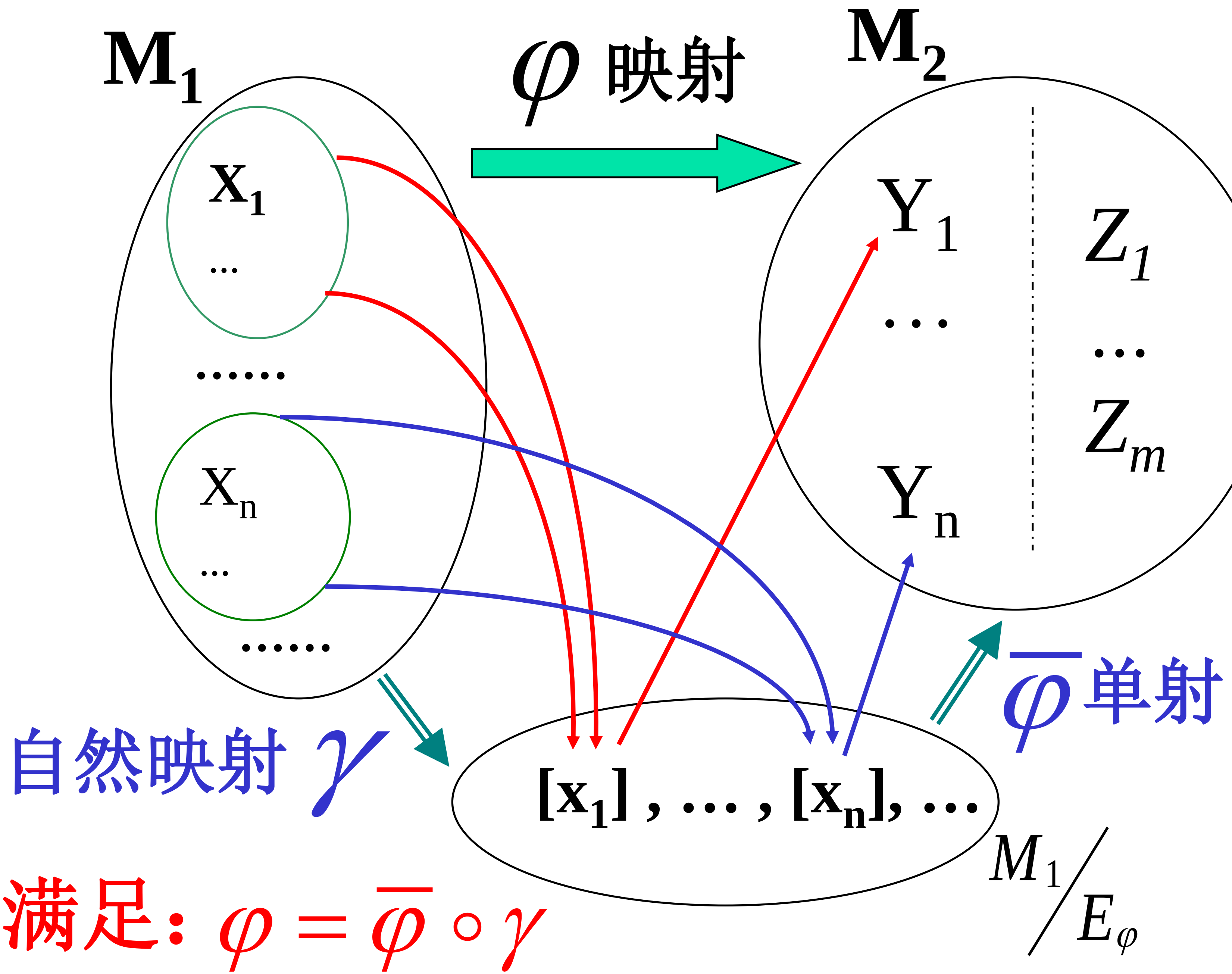
3）存在唯一的 ${}^{M_1}\!/\!{}_{E_\varphi}$ 到 M_2 的单（射）同态 $\overline{\varphi}$ 使 $\varphi = \overline{\varphi} \circ \gamma$

其中 γ 为 $M_1 \to {}^{M_1}\!/\!{}_{E_\varphi}$ 的自然同态;

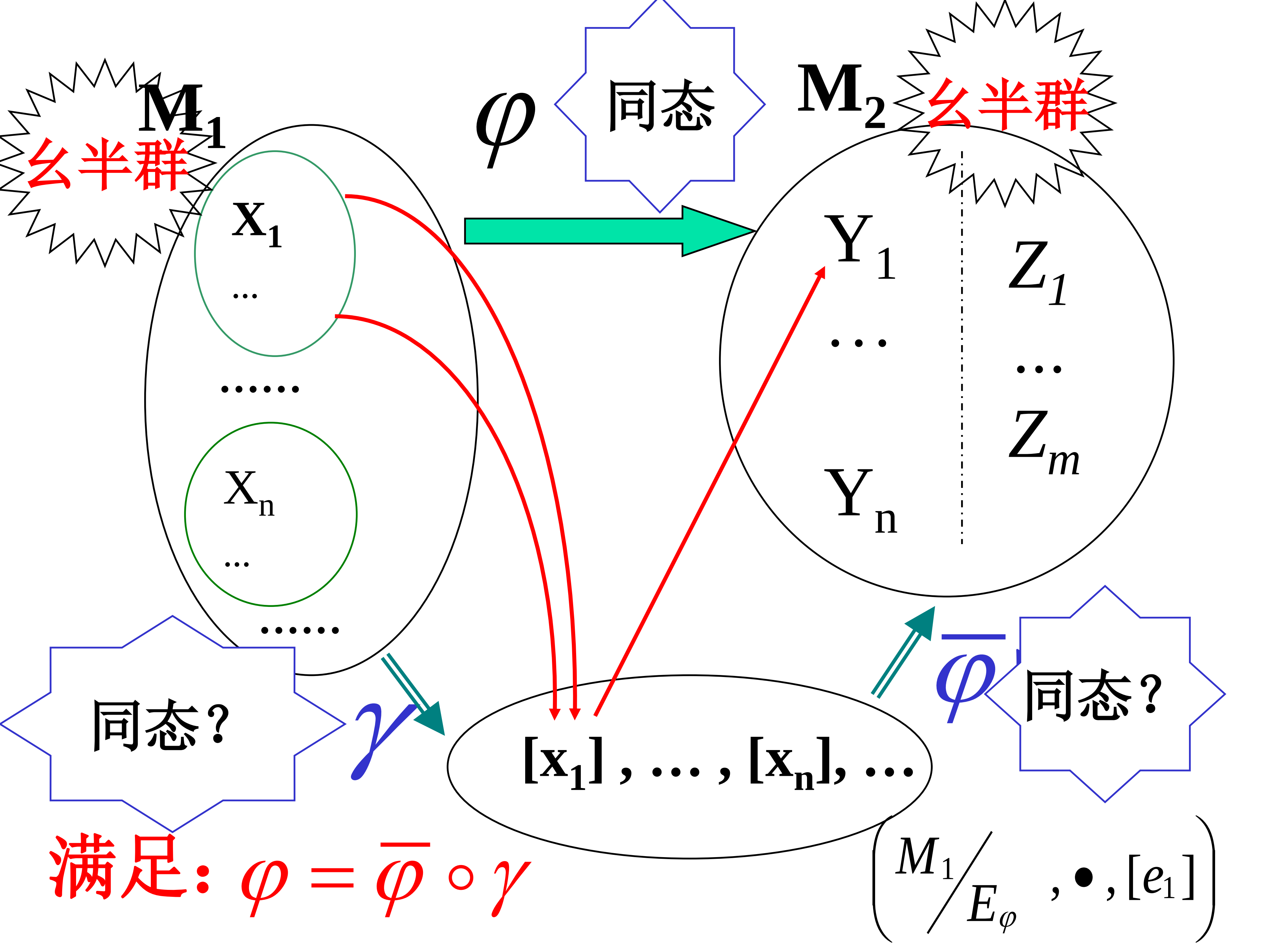
4）若 φ 是满同态，则 ${}^{M_1}\!/\!{}_{E_\varphi}$ 与 M_2 同构。



满足：$\varphi = \overline{\varphi} \circ \gamma$



M_1
φ 映射
M_2
x_1
…
……
X_n
…
……
Y_1
…
Y_n
Z_1
…
Z_m
自然映射 γ
$[x_1]$, … , $[x_n]$, …
$\overline{\varphi}$ 单射
M_1 / E_φ
满足：$\varphi = \overline{\varphi} \circ \gamma$


M1
幺半群
X1
...
......
Xn
...
......
同态?
γ
φ
同态
M2
幺半群
Y1
...
Yn
Z1
...
Zm
[x1] , … , [xn], …
φ̄
同态?
满足：$\varphi = \overline{\varphi} \circ \gamma$
$\left(M_1/E_\varphi, \bullet, [e_1]\right)$