近世代数课后习题作业 1 部分参考解答

3.

证明：只须证：对$\forall x, y \in S$，若有$(a \circ b) \circ x = (a \circ b) \circ y$，则必有$x = y$。

由结合律知$(a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x)$，$(a \circ b) \circ y = a \circ (b \circ y)$，从而$a \circ (b \circ x) = a \circ (b \circ y)$，又$a$为左消去元，故有$b \circ x = b \circ y$，而$b$也为左消去元，所以有$x = y$。

//////////////////////////////////////

4.

证明：由普通加法和乘法满足交换律知所定义的二元运算$"\circ"$满足交换律。

1）证$(M, \circ)$为幺半群

①由定义知二元运算$"\circ"$显然为M上的一个二元代数运算，即$(M, \circ)$为一代数系；

②又对$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in M$有：

$((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3))$，即满足结合律。

③单位元：对$\forall (x, y) \in M$有$(1,0) \circ (x, y) = (x, y) \circ (1,0) = (x, y)$

2）左消去元

由$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$(x_1, x_2) \circ (z_1, z_2) = (x_1 z_1 + 2x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1)$

若$(x_1 y_1 + 2x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_1 z_1 + 2x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1)$，则：

$x_1(y_1 - z_1) + 2x_2(y_2 - z_2) = 0$

$x_1(y_2 - z_2) + x_2(y_1 - z_1) = 0$

可得：$2{x_2}^2(y_2 - z_2) = {x_1}^2(y_2 - z_2)$，即$({x_1}^2 - 2{x_2}^2)(y_2 - z_2) = 0$

因为${x_1}^2 - 2{x_2}^2 \neq 0$所以$y_2 - z_2 = 0$，从而$y_1 - z_1 = 0$

///

5.

推理不正确：由 $x^{2(n-k)}x^k = x^n$ 推不出 $x^{2(n-k)} = x^{n-k}$，这里看不出满足右消去律。

////////////////////////////

6.

证明：设 $(S,\circ)$ 为有限半群，且 $|S| = n$。设 $b \in S$，则可得：$b^1, b^2, \cdots, b^n, b^{n+1} \in S$

则由 S 的有限性知，$\exists i, j \in [1, n+1]$ 使得 $b^j = b^i$，不妨设 $j > i$，即 $j = i + k$，$k > 0$。

从而有：$b^i \circ b^k = b^i$，则两边同时连续左乘 b 可得 $b^p \circ b^k = b^p$，且满足 $p = q \cdot k$，

从而运用递归调用可得 $b^p = b^p \circ b^{2k} = \cdots = b^p \circ b^{qk}$，即 $b^p \circ b^p = b^p$，令 $a = b^p$ 即可。

/////////////////////////////

7.

证明：

I. 证 $(M,*)$ 为半群：

1）由"$*$"定义知满足封闭性；
2）显然"$*$"满足结合律。

II. 设 e' 为 $(M,*)$ 的单位元，则对 $\forall a \in M$，有 $a * e' = e' * a = a$，即 $a \circ m \circ e' = a$，

$e' \circ m \circ a = a$，由结合律：$a \circ (m \circ e') = a$，$(e' \circ m) \circ a = a$，由 a 的任意性知 $m \circ e'$

与 $e' \circ m$ 为 M 关于"$\circ$"运算的左右单位元，而 $(M,\circ,e)$ 为幺半群，故有 $m \circ e' = e$，

$e' \circ m = e$，则由逆元素的定义知 e' 为 m 关于"$\circ$"运算的逆元素，即为 m 满足的条件。

//////////////////////////////////

8.

证明：

1）结合律：由集合论知识知集合的对称差运算"Δ"满足结合律，故 $(2^S, \Delta)$ 为半群；//这里结合律可以直接调用，不用再验证。

2）单位元：对 $\forall A \in 2^S$ 有 $\phi \Delta A = A \Delta \phi = A$；

3）逆元：对 $\forall A \in 2^S$ 有 $A \Delta A = A \Delta A = \phi$，即为自身。

故 $(2^S, \Delta)$ 为群。

9.

在所有3次置换构成的集合S_3对置换的乘法构成半群$(S_3,\circ)$中，令$A=\{(12),(23)\}$，

请给出由S_3的子集A所生成的子半群(A)。

解：直接对A根据生成迭代算法可得$(A)=S_3$，即包含A的子半群只能是S_3。

//这里关于置换的复合运算也就是有限集合上的双射复合运算，请大家查阅前面集合论的内容，这个复合运算后面我们经常用到。//

//////////////////////////////////

10.

证明：主要验证一下结合律，显然。