§2.7 正规子群、商群

［本节主要内容］

1）正规子群的定义；
2）正规子群的判定定理；
3）商群及与正规子群的关系；

定义1 群子集：设G为群 ，对任意的集合A，满足 $A \subseteq G$ 称A为群子集。记为 ：

$$2^{G}=\left\{A \mid A\text{为}G\text{的群子集}\right\}$$

群子集上的乘法：对 ∀ A，$B \in 2^G$

$$A \bullet B = \left\{ a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B \right\}$$

则为 2^G 上的二元代数运算

对 $\forall A \in 2^G$ ，记 $A^{-1} = \left\{ a^{-1} \mid a \in A \right\}$

显然若A为G的子群，则：

$$A^{-1} = A$$

定理1 设G为群，则对 $\forall A, B, C \in G$ 有（AB）C＝A（BC），若H是G的子群则：$HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$

定理2 设A，B为群G的子群，则AB是G的子群的充要条件是AB=BA。

例1 在 S_3中 $N=\{(1),(123),(132)\}$为其子群

$$(1)N=N(1)=N$$

$$(12)N=N(12)=\{(12),(23),(13)\}$$

$$(13)N=N(13)=\{(12),(13),(23)\}$$

$$(23)N=N(23)=\{(12),(23),(13)\}$$

$$(123)N=N(123)=N$$

$$(132)N=N(132)=N$$

即对 $\forall a\in S_3$ 均有 $aN=Na$

定义2 设H为群G的子群，若对 $\forall a \in G$ 有aH＝Ha，则称H是G的正规子群。

例2 交换群的子群；

$\{e\}$均为正规子群；

定理3 设H为群G的子群，则下列三命题等价：

1）H是G的正规子群(即 $aH = Ha$)

2）$\forall a \in G, aHa^{-1} = H$

3）$\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$

定理3的应用举例:

例3 $(M_n,\bullet)$表示所有n×n的可逆实矩阵关于矩阵乘法运算构成群。H是 M_n 中全体行列式为1的矩阵集合，则 H是 M_n 的正规子群。

定理4 设H为G的正规子群，H的所有左陪集构成的集族 S_l 对群子集乘法形成一个群。

定义3 群G的正规子群H的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为G对H的商群，记为G/H

例4 在 S_3 中

$N = \{(1),(123),(132)\}$ 为其正规子群

$$S_3 / N = \{N, (12)N\}$$

$$|S_3/N| = 2$$