

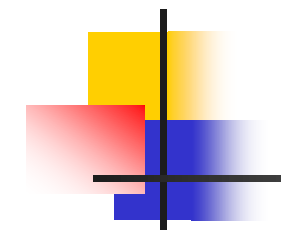


## § 2.8 同态基本定理

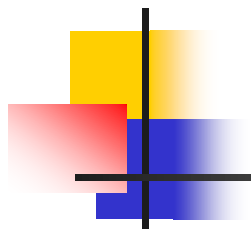
---

### [本节主要内容]

- 1) 群的同态的定义;
- 2) 群的同态的性质定理;
- 3) 群的同态基本定理;



**定义1 同态:** 设  $(G_1, \circ)$  与  $(G_2, *)$  为群  
若存在映射  $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  , 使得  
对  $\forall a, b \in G_1$  有  $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$   
则称  $\varphi$  为  $G_1$  到  $G_2$  上的一个同态。



满同态: 若  $\varphi$  为满射, 记为  $G_1 \sim G_2$

单同态: 若  $\varphi$  为单射

同构: 若  $\varphi$  既为满射又为单射

例1 设  $(\mathbb{Z}, +)$  为整数加法群,

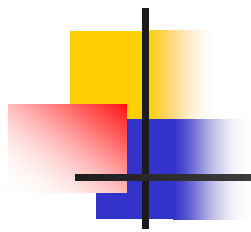
$S = \{1, -1\}$  关于通常乘法构成群  $(S, *)$

$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow S$  对  $\forall a \in \mathbb{Z}$  有:

$$\varphi(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{if } a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

则对  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$  有:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

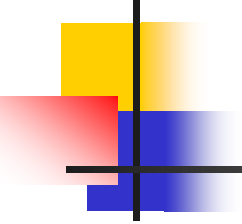


**定理1** 设  $(G_1, \circ)$  与  $(G_2, *)$  为群,

$\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  的同态, 则对  $\forall a \in G_1$   
有:

1)  $\varphi(e_1) = e_2$

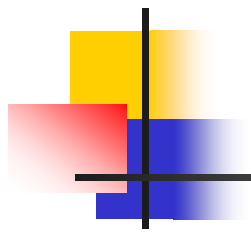
2)  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$



**定理2** 设  $(G_1, \circ)$  为群,  $(G_2, *)$  是一个具有二元代数运算的代数系,  
 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  的满射, 且对  $\forall a, b \in G_1$

有 
$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$$

则为  $(G_2, *)$  群。

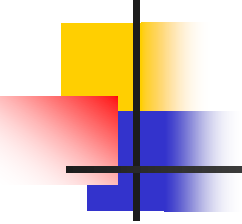


**定理3** 设  $(G_1, \circ)$  与  $(G_2, *)$  为群,

$\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  的满同态,

则  $\varphi^{-1}(e_2) = \{x \mid \varphi(x) = e_2, x \in G_1\}$

是  $G_1$  的一个正规子群。



**定义2** 设 $(G_1, \circ)$ 与 $(G_2, *)$ 为群,  
 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  的满同态, 则  $G_1$  的正规  
子群  $\varphi^{-1}(e_2)$  称为同态  $\varphi$  的核,  
记为 $\text{Ker } \varphi$ .  $\varphi(G_1)$ 称为在  $\varphi$  下  $G_1$   
的同态象.



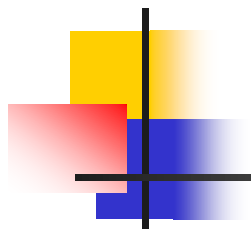
**定理4** 设  $(G_1, \circ)$  与  $(G_2, *)$  为群,

$\varphi: G_1 \rightarrow G_2$  的满同态, 则:

- 1) 若  $H$  是  $G_1$  子群, 则  $\varphi(H)$  是  $G_2$  的子群;
- 2) 若  $N$  是  $G_1$  的正规子群, 则  $\varphi(N)$  是  $G_2$  的正规子群;

3) 若  $\overline{H}$  是  $G_2$  子群, 则  $\varphi^{-1}(\overline{H})$  是  $G_1$  的子群;

4) 若  $\overline{N}$  是  $G_2$  的正规子群,  
则  $\varphi^{-1}(\overline{N})$  是  $G_1$  的正规子群;



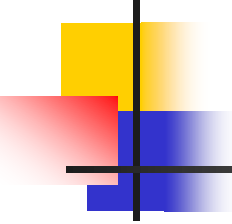
**定理5** 设 $N$ 是 $G$ 的正规子群，则有：  
 $G \sim G/N$  (自然同态)。若  $\varphi$  是  
 $G$ 到 $G/N$ 的同态，则 $\text{Ker } \varphi = N$



## 定理6 群的同态基本定理:

设  $\varphi$  为群  $G_1$  到  $G_2$  的满同态,  
 $E = \text{Ker } \varphi$  , 则:

$$G_1 / E \cong G_2$$



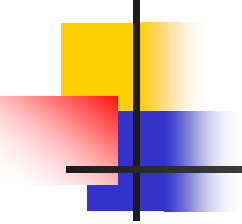
例2 对例1中的满同态运用同态基本定理可得：

$$E = \text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(1) = \{a \mid a = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}/E = \{E, F\} \text{ 其中 } F = \{a \mid a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

则同构映射为  $\alpha: \mathbb{Z}/E \rightarrow S$  且有：

$$\alpha(E) = 1, \alpha(F) = -1$$



---

**定理7** 群 $G$ 的任一满同态  $\varphi$  均可分解成一个自然同态  $\gamma$  与一个同构  $f$  的合成。即  $\varphi = f \circ \gamma$   
并且  $f$  是唯一的。

**例** 设群  $G = \{e, x, y, z\}$

$G$  上的乘法  $\circ$  由右表给出:

$\circ$	$e$	$x$	$y$	$z$
$e$	$e$	$x$	$y$	$z$
$x$	$x$	$e$	$z$	$y$
$y$	$y$	$z$	$e$	$x$
$z$	$z$	$y$	$x$	$e$

1) 构造出与其同构的置换群;

2) 若  $G_1 = \{e_1, a\}$ ,  $G_1$  中的乘法  $*$  定义如下:

$$e_1 * e_1 = e_1, e_1 * a = a * e_1 = a, a * a = e_1$$

证明  $(G_1, *)$  是一个群, 若  $\varphi: G \rightarrow G_1$ , 使得

$$\varphi(e) = \varphi(x) = e_1, \varphi(y) = \varphi(z) = a$$

则  $\varphi$  是一个同态, 并且指出同态基本定理

中的映射  $\gamma$  和  $\overline{\varphi}$