近世代数课后习题作业 3 参考解答

2．**证明**：由 $\forall a \in G$，$a^2 = e \Rightarrow$ 对 $\forall a \in G$ 有 $a = a^{-1}$。从而对 $\forall a,b \in G$，$ab = (ab)^{-1}$

$= b^{-1}a^{-1} = ba$。

//

3．**证明**：设 $G = \{e,a,b,c\}$，$(G,\circ)$ 为群。其乘法表为：

$\bullet$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	aa	ab	ac
b	b	ba	bb	bc
c	c	ca	cb	cc

验证交换性只须验证乘法表中的矩阵的对称性即可，即只须验证：

1）ab 与 ba：显然 $ab \neq a,b$，故 $ab = e,c$

若 $ab = e$，即 a 与 b 互逆，则必有 $ba = e$，从而 ab=ba；

若 $ab = c$，则 $ba = c$，否则若 $ba = e$，则必有 $ab = e$，从而 $c = e$ 矛盾。

综上 ab=ba。

同理可得：ac=ca，bc=cb。

//

4．**证明**：设 $(G,\circ)$ 为非交换群，且 $|G| > 2$（注：不一定为有限群），只须找到元素 $a \in G$，且 $a^{-1} \neq a$ 即可。

即只须在 G 中找到一个元素，其阶大于 2 即可。若 G 中不存在这样的元素，即对 $\forall a \in G$ 均有 $a^2 = e$，则由前面 2 题的结论知 G 为交换群，矛盾。故 $\exists a \in G$，其阶大于 2，即 $a^{-1} \neq a$，从而令 $b = a^{-1}$，显然有 $b \neq a$，但 $ab = ba$。

//

5．**证明**：设 $(G,\circ)$ 为有限群，$|G| = n$，对 $\forall a \in G$，若 a 的阶为 r 且 $r > 2$，即 $a^r = e$，则 a^{-1} 的阶也为 r（参见课堂上的思考题结论），即 $(a^{-1})^r = e$，且 $a^{-1} \neq a$，从而阶大于 2 的元素成对出现，故阶大于 2 的元素个数必为偶数。

//

6．**证明**：设 $(G,\circ)$ 为有限群，$|G| = 2n$，设元素阶为 2 的个数为 m，元素阶大于 2 的个数为 $2k$，元素阶为 1 仅有单位元，则有：$1 + m + 2k = 2n$，所以 m 必为奇数。

7．**证明**：由上题结论即可知。

//

8．设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为n阶群G中的n个元素（它们不一定各不相同）。证明：存在整数p和q（$1\le p\le q\le n$），使得$a_p a_{p+1}\cdots a_q=e$

证明：考查元素序列：$e,a_1,a_1a_2,a_1a_2a_3,\cdots,a_1a_2\cdots a_n\in G$，而$|G|=n$，

故上述$n+1$个元素中至少有两个元素相同，若其中一个为e，则有：$a_1a_2\cdots a_i=e$

此时令$p=1,q=i$即可；若两个元素均不为e，则存在$i,j\in[1,n]$，不妨设$i<j$，使得$a_1a_2\cdots a_i=a_1a_2\cdots a_j=a_1a_2\cdots a_ia_{i+1}\cdots a_j$，由消去律得：$a_{i+1}\cdots a_j=e$，此时令$p=i+1,q=j$即可。

//

9．**证明**：

充分性$\Leftarrow$：由$G_1\subseteq G_2$或$G_2\subseteq G_1\Rightarrow G_1\cup G_2=G_1$或$G_1\cup G_2=G_2$是$G$的子群。

必要性$\Rightarrow$：假设不成立，则由$e\in G_1\cap G_2$知：

至少$\exists a\in G_1\wedge a\notin G_2$，$\exists b\in G_2\wedge b\notin G_1$。

由$a\in G_1\cup G_2$，$b\in G_1\cup G_2$及$G_1\cup G_2$为子群得：$ab\in G_1\cup G_2$，从而$ab\in G_1$或$ab\in G_2$。若$ab\in G_1$，则由$a^{-1}\in G_1$知$a^{-1}(ab)\in G_1\Rightarrow b\in G_1$矛盾；若$ab\in G_2$，则由$b^{-1}\in G_2$知$(ab)b^{-1}\in G_2\Rightarrow a\in G_2$矛盾，故假设不成立。

//

10．**证明**：记$S=\varphi^{-1}(e_2)$，则$S=\{x|\varphi(x)=e_2,x\in G_1\}$，显然$S\subseteq G_1$

1）S非空：对$\forall y\in G_2$，由φ为满射，则$\exists x\in G_1$，使得$y=\varphi(x)$，从而$\varphi(e_1)*y=\varphi(e_1)*\varphi(x)=\varphi(e_1\circ x)=\varphi(x)=y$，同理有$y*\varphi(e_1)=\varphi(x)=y$，即有：$\varphi(e_1)*y=y*\varphi(e_1)=y$，从而$\varphi(e_1)=e_2$，故有$e_1\in S$。

2）封闭性：对$\forall x,t\in S$，有$\varphi(x)=e_2$，$\varphi(t)=e_2$，则$\varphi(x\circ t)=\varphi(x)*\varphi(t)=e_2$，

所以 $x \circ t \in S$。

3）结合律：显然。

4）单位元：$e_1 \in S$。

5）逆元：对 $\forall x \in S$，有 $\varphi(x) = e_2$，则：$e_2 = \varphi(e_1) = \varphi(x \circ x^{-1}) = \varphi(x) * \varphi(x^{-1})$

$= e_2 * \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1})$，即 $\varphi(x^{-1}) = e_2$，所以 $x^{-1} \in S$。

//

11. **解**：$(S_1) = Z$，$(S_2) = \{3k | k \in Z\}$

//请大家自己对照生成算法给出生成过程。第一个由 5，7 很快能生成 Z 出的生成元“1”来。第二个由生成算法能很快看出其规律，新加入的元素为它们公因子 3 的倍数。//