HIT CS&E

第三章 分治算法

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

大纲

HIT CS&E

3.1 分治算法原理

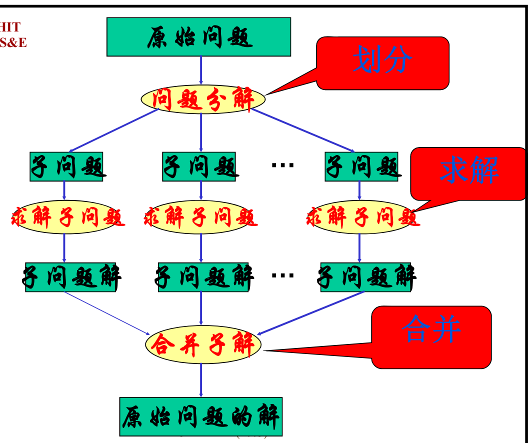
- 分治算法的设计
- 分治算法的分析

HIT CS&E

分治算法的设计

- 设计过程分为三个阶段
  - 划分：整个问题划分为多个子问题
  - 求解：求解各子问题
    - 递归调用正设计的算法
  - 合并：合并子问题的解，形成原始问题的解

HIT CS&E



HIT CS&E

分治算法的分析

- 分析过程
  - 建立递归方程
  - 求解
- 递归方程的建立方法
  - 设输入大小为n, $T(n)$为时间复杂性
  - 当$n<c$, $T(n)=\theta(1)$

HIT CS&E

– 划分阶段的时间复杂性
  • 划分问题为*a*个子问题。
  • 每个子问题大小为*n/b*。
  • 划分时间可直接得到=$D(n)$
– 递归求解阶段的时间复杂性
  • 递归调用
  • 求解时间= $aT(n/b)$
– 合并阶段的时间复杂性
  • 时间可以直接得到=$C(n)$

HIT CS&E

– 总之
  • $T(n)=\theta(1)$ if n<c
  • $T(n)=aT(n/b)+D(n)+C(n)$ if $n\geq c$
– 求解递归方程$T(n)$
  • 使用第二章的方法

HIT CS&E

3.2 大整数乘法

HIT CS&E

问题定义

输入：*n*位二进制整数*X*和*Y*
输出：$X*Y$
通常，计算$X*Y$时间复杂性位$O(n^2)$，我们给出一个复杂性为$O(n^{1.59})$的算法。

HIT CS&E

简单分治算法

	n/2位	n/2位
X=	A	B

	n/2位	n/2位
Y=	C	D

$$XY = (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D)$$
$$= AC2^n + (AD+BC)2^{n/2} + BD$$

算法

1. 划分产生A,B,C,D;
2. 计算n/2位乘法AC、AD、BC、BD;
3. 计算AD+BC;
4. AC左移n位，(AD+BC)左移n/2位;
5. 计算XY。

时间复杂性

$T(n)=4T(n/2)+\theta(n)$ $T(n)=\theta(n^2)$

HIT CS&E

算法的数学基础

	n/2位	n/2位
X=	A	B

	n/2位	n/2位
Y=	C	D

$$XY = (A2^{n/2} + B)(C2^{n/2} + D)$$
$$= AC2^n + (AD+BC)2^{n/2} + BD$$
$$AD+BC=(B-A)(C-D)+AC+BD$$

算法

1. 划分产生A,B,C,D;
2. 计算B-A和C-D;
3. 计算*n*/2位乘法AC、BD、(B-A)(C-D);
4. 计算(B-A)(C-D)+AC+BD;
5. AC左移*n*位，((B-A)(C-D)+AC+BD)左移*n*/2位;
6. 计算XY

算法的分析

- 建立递归方程

  $T(n)=\theta(1)$ if $n=1$

  $T(n)=3T(n/2)+O(n)$ if $n>1$

- 使用Master定理

  $T(n)=O(n^{\log 3})=O(n^{1.59})$

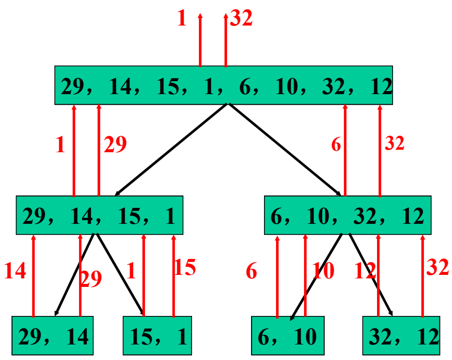
3.3 最大值和最小值

问题定义

输入：数组$A[1,\ldots,n]$
输出：A中的max和min

通常，直接扫面需要$2n$-2次比较操作
我们给出一个仅需⌈$3n/2$-2⌉次比较操作的算法。

基本思想



算法

算法MaxMin(A)
输入: 数组$A[i,\ldots,j]$
输出:数组$A[i,\ldots,j]$中的max和min

1. If j-i+1 =1 Then 输出$A[i]$,$A[i]$,算法结束
2. If j-i+1 =2 Then
3. If $A[i]$< $A[j]$ Then输出$A[i]$,$A[j]$;算法结束
4. $k\leftarrow(j-i+1)/2$
5. $m_1,M_1 \leftarrow$MaxMin($A[i:k]$);
6. $m_2,M_2 \leftarrow$MaxMin($A[k+1:j]$);
7. $m \leftarrow \min(m_1,m_2)$;
8. $M \leftarrow \max(M_1,M_2)$;
9. 输出m,M

算法复杂性

$T(1)=0$
$T(2)=1$
$T(n)=2T(n/2)+2$
$=2^2T(n/2^2)+2^2+2$
$= \ldots$
$=2^{k-1}T(2)+2^{k-1}+2^{k-2}+\ldots+2^2+2$ $\qquad n=2^k$
$=2^{k-1}+2^k-2$
$=n/2+n-2$
$=3n/2-2$

HIT CS&E

3.4 矩阵乘法

HIT CS&E

矩阵乘法

输入：两个$n\times n$矩阵A和B
输出：A和B的积

通常，计算AB的时间复杂性位$O(n^3)$，
我们给出一个复杂性为$O(n^{2.81})$的算法

HIT CS&E

算法的数学基础

- 把$C=AB$中每个矩阵分成大小相同的4个子矩阵
  每个子矩阵都是一个$n/2\times n/2$矩阵
- 于是 $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$

$C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}$
$C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$
$C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}$
$C_{11}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$

需要求解8个$n/2\times n/2$子问题
$T(n)=8T(n/2)+O(n^2)$
$T(n)=\Theta(n^3)$
分治中子问题个数能否减少？

HIT CS&E

算法

- 计算n/2×n/2矩阵的10个加减和7个乘法

$M_1 = A_{11}(B_{12} - B_{22})$
$M_2 = (A_{11} + A_{12}) B_{22}$
$M_3 = (A_{21} + A_{22}) B_{11}$
$M_4 = A_{22}(B_{21} - B_{11})$
$M_5 = (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22})$
$M_6 = (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22})$
$M_7 = (A_{11} - A_{12})(B_{11} + B_{12})$

HIT CS&E

- 计算n/2×n/2矩阵的8个加减

$C_{11} = M_5 + M_4 - M_2 + M_6$
$C_{12} = M_1 + M_2$
$C_{21} = M_3 + M_4$
$C_{22} = M_5 + M_1 - M_3 - M_7$

HIT CS&E

算法复杂性分析

- 18个$n/2\times n/2$矩阵加减法，每个需$O(n^2)$
- 7个$n/2\times n/2$矩阵乘法
- 建立递归方程
  $T(n)=O(1)$ $\quad n=2$
  $T(n)=7T(n/2)+O(n^2)$ $\quad n>2$
- 使用Master定理求解$T(n)$
  $T(n) = O(n^{\log 7}) \approx O(n^{2.81})$

3.5 快速傅里叶变换

问题定义

输入：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$，　$n=2^k$, a_i是实数，$(0\le i\le n-1)$

输出：$A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}$

$$A_j=\sum_{k=0}^{n} a_k e^{\frac{2jk\pi}{n}i}$$

，其中$j=0,1,,\ldots,n-1$，

e是自然对数的底数，i是虚数单位

蛮力法

利用定义计算每个A_j

时间复杂度为$\Theta(n^2)$

令 $\beta_n=e^{\frac{2\pi}{n}i}$ $\Rightarrow (\beta_n)^2=\beta_{n/2}$

算法的数学基础

令 $\beta_n=e^{\frac{2\pi}{n}i}$ $\Rightarrow (\beta_n)^2=\beta_{n/2}$

$$A_j=a_0+a_1\beta_n^{\,j}+a_2\beta_n^{\,2j}+\ldots+a_{n-1}\beta_n^{\,(n-1)j}$$

$$=[a_0+a_2\beta_n^{\,2j}+a_4\beta_n^{\,4j}\ldots+a_{n-2}\beta_n^{\,(n-2)j}]+[a_1+a_3\beta_n^{\,2j}+a_5\beta_n^{\,4j}\ldots+a_{n-1}\beta_n^{\,(n-2)j}]\,\beta_n^{\,j}$$

$$=\left[a_0+a_2\beta_{n/2}^{j}+a_4\beta_{n/2}^{2j}+\ldots+a_{n-2}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j}\right]+\left[a_1+a_3\beta_{n/2}^{j}+a_5\beta_{n/2}^{2j}+\ldots+a_{n-1}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j}\right]\beta_n^{j}$$

第一项内形如$a_0,a_2,a_4,\ldots,a_{n-2}$的离散傅里叶变换

第二项内形如$a_1,a_3,a_5,\ldots,a_{n-1}$的离散傅里叶变换

令 $\beta_n=e^{\frac{2\pi}{n}i}$

$$A_j=a_0+a_1\beta_n^{\,j}+a_2\beta_n^{\,2j}+\ldots+a_{n-1}\beta_n^{\,(n-1)j}\qquad 0\le j\le n-1$$

$$=\left[a_0+a_2\beta_{n/2}^{j}+a_4\beta_{n/2}^{2j}+\ldots+a_{n-2}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j}\right]+\left[a_1+a_3\beta_{n/2}^{j}+a_5\beta_{n/2}^{2j}+\ldots+a_{n-1}\beta_{n/2}^{\frac{n-2}{2}j}\right]\beta_n^{j}$$

$$B_j=a_0+a_2\beta_{n/2}^{\,j}+a_4\beta_{n/2}^{\,2j}+\ldots+a_{n-2}\beta_{n/2}^{\,((n-2)/2)j}\qquad 0\le j\le (n-2)/2$$

$$C_j=a_1+a_3\beta_{n/2}^{\,j}+a_5\beta_{n/2}^{\,2j}+\ldots+a_{n-1}\beta_{n/2}^{\,((n-2)/2)j}\qquad 0\le j\le (n-2)/2$$

$$\beta_{n/2}^{kj}=e^{\frac{2\pi i}{n/2}kj}=e^{\frac{2\pi i}{n/2}kj-2k\pi i}=e^{\frac{2\pi i}{n/2}k(j-n/2)}=\beta_{n/2}^{k(j-n/2)}$$

分治算法过程

划分：将输入拆分成$a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}$和$a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}$.

递归求解：递归计算$a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}$的变换$B_0,B_1,\ldots,B_{n/2-1}$

递归计算$a_1,a_3\ldots,a_{n-1}$的变换$C_0,C_1,\ldots,C_{n/2-1}$

合并：$A_j=B_j+C_j\cdot\beta_n^{\,j}$　　$(j<n/2)$

$A_j=B_{j-n/2}+C_{j-n/2}\cdot\beta_n^{\,j}$　　$(n/2\le j<n-1)$

HIT CS&E

算法

算法FFT

输入：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$，$n=2^k$

输出：$a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$的傅里叶变换$A_0,\ldots,A_{n-1}$

1. $\beta \leftarrow \exp(2\pi i/n)$;
2. If (n=2) Then
3. $A_0 \leftarrow a_0+a_1$;
4. $A_1 \leftarrow a_0-a_1$;
5. 输出A_0,A_1,算法结束；
6. $B_0,B_1,\ldots,B_{n/2-1} \leftarrow$ FFT($a_0,a_2,\ldots,a_{n-2}$, $n/2$);
7. $C_0,C_1,\ldots,C_{n/2-1} \leftarrow$ FFT($a_1,a_3,\ldots,a_{n-1}$, $n/2$);
8. For j=0 To $n/2-1$
9. $A_j \leftarrow B_j+C_j \cdot \beta^j$;
10. $A_{j+n/2} \leftarrow B_j+C_j \cdot \beta^{j+n/2}$;
11. 输出$A_0,A_1,\ldots,A_{n-1}$,算法结束；

HIT CS&E

算法分析

$T(n)=\Theta(1)$ If $n=2$

$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ If $n>2$

$T(n)=\Theta(n \log n)$

HIT CS&E

3.6 中位数的线性时间选择算法

HIT CS&E

问题定义

Input: 由n个数构成的多重集合X

Output: $x \in X$使得 $-1 \le |\{y \in X \mid y<x\}|-|\{y \in X \mid y>x\}| \le 1$

HIT CS&E

中位数选取问题的复杂度

[Blum et al. *STOC*'72 & *JCSS*'73]

- A "shining" paper by five authors:
  - Manuel Blum (Turing Award 1995)
  - Robert W. Floyd (Turing Award 1978)
  - Vaughan R. Pratt
  - Ronald L. Rivest (Turing Award 2002)
  - Robert E. Tarjan (Turing Award 1986)
- 从n个数中选取中位数需要的比较操作的次数介于 $1.5n$到 $5.43n$之间

HIT CS&E

比较操作次数的上下界

- **上界**
  - $3n + o(n)$ by Schonhage, Paterson, and Pippenger (*JCSS* 1975).
  - $2.95n$ by Dor and Zwick (*SODA* 1995, *SIAM Journal on Computing* 1999).
- **下界**
  - $2n+o(n)$ by Bent and John (*STOC* 1985)
  - $(2+2^{-80})n$ by Dor and Zwick (*FOCS* 1996, *SIAM Journal on Discrete Math* 2001).

HIT CS&E

线性时间选择

–本节讨论如何在$O(n)$时间内从n个不同的数中选取第i大的元素

–中位数问题也就解决了，因为选取中位数即选择第$n/2$-大的元素

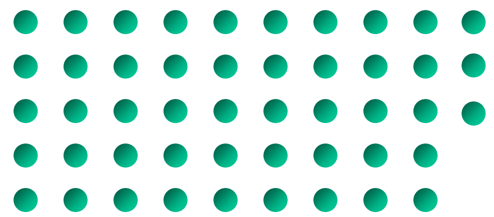
Input: n个(不同)数构成的集合X,整数i,其中$1 \le i \le n$

Output: $x \in X$使得X中恰有$i-1$个元素小于x

HIT CS&E

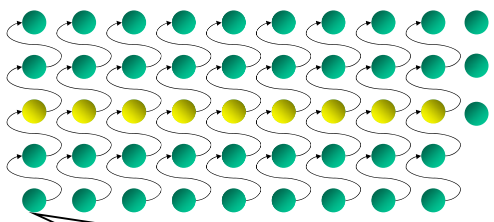
求解步骤

第一步： 分组，每组5个数
最后一组可能少于5个数



HIT CS&E

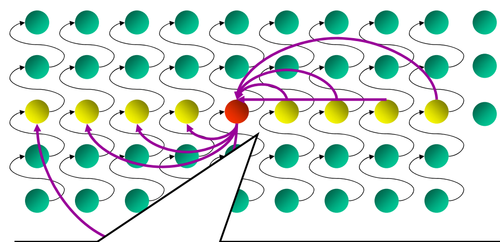
第二步： 将每组数分别用InsertionSort排序
选出每组元素的中位数



排序每组数时，比较操作的次数为5(5-1)/2=10次
总共需要$10*\lceil n/5 \rceil$次比较操作

HIT CS&E

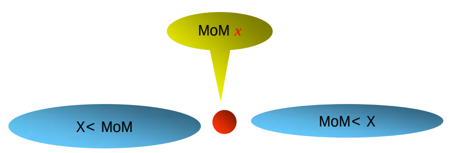
第三步：递归调用算法求得这些中位数的中位数(MoM)



时间复杂性：$T(\lfloor n/5 \rfloor)$

HIT CS&E

第四步：用 MoM完成划分



调用quickSort中的划分过程

时间复杂性$O(n)$

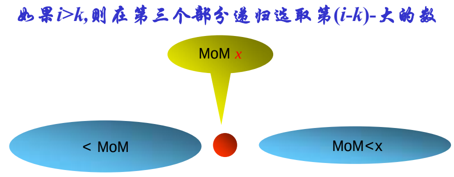
第五步：递归

设x是中位数的中位数(MoM),划分完成后其下标为k

如果$i=k$,则返回x

如果$i<k$,则在第一个部分递归选取第i-大的数

如果$i>k$,则在第三个部分递归选取第$(i-k)$-大的数



算法Select(A,i)

Input: 数组 $A[1:n]$, $1\le i \le n$

Output: $A[1:n]$中的第i-大的数

for $j\leftarrow 1$ to $n/5$ ——第一步
InsertSort(A[(j-1)*5+1 : (j-1)*5+5]);
swap(A[j], A[[(j-1)*5+3]); ——第二步
$x\leftarrow$Select(A[1: n/5], n/10); ——第三步
$k\leftarrow$partition(A[1:n], x); ——第四步
if k=i then return x;
else if k>i then retrun Select(A[1:k-1],i);
else retrun Select(A[k+1:n],i-k); ——第五步

算法Select(A,i) 算法分析

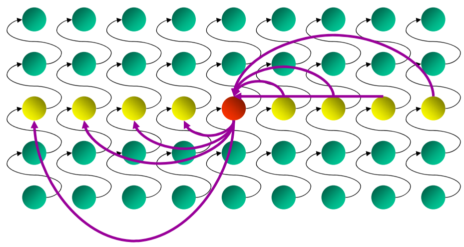
Input: 数组 $A[1:n]$, $1\le i \le n$

Output: $A[1:n]$中的第i-大的数

for $j\leftarrow 1$ to $n/5$
InsertSort(A[(j-1)*5+1 : (j-1)*5+5]);
swap(A[j], A[[(j-1)*5+3]); —— $O(n)$
$x\leftarrow$Select(A[1: n/5], n/10); —— $T(\lfloor n/5\rfloor)$
$k\leftarrow$partition(A[1:n], x); —— $O(n)$
if k=i then return x;
else if k>i then retrun Select(A[1:k-1],i);
else retrun Select(A[k+1:n],i-k); —— ???

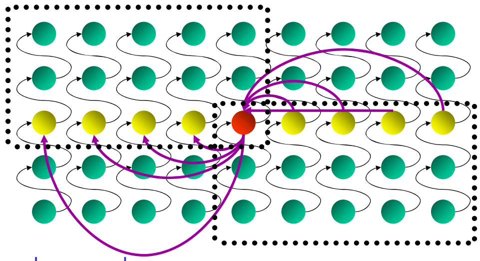
HIT CS&E

观察第五步的处理过程



HIT CS&E

第五步至少删除了$\lfloor 3n/10\rfloor$个数



$n-\lfloor 3n/10\rfloor\le 7n/10+6$

如果时间复杂度是输入规模的递增函数

则第五步的时间开销不超过$T(7n/10+6)$

HIT CS&E

$$T(n)\le\begin{cases}\Theta(1) & \text{if } n\le C\\ T\lfloor n/5\rfloor+T(7n/10+6)+\Theta(n) & \text{if } n>C\end{cases}$$

$T(n)=O(n)$

HIT CS&E

3.7 最邻近点对

问题定义

输入：Euclidean空间上的n个点的集合Q

输出：$P_1, P_2 \in Q$,

$Dis(P_1, P_2)=Min\{Dis(X, Y) \mid X, Y \in Q\}$

Dis(X, Y)是Euclidean距离:

如果$X=(x_1, x_2)$, $Y=(y_1, y_2)$，则

$$Dis(X,Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

一维空间算法

- 利用排序的算法
  - 算法
    - 把Q中的点排序
    - 通过排序集合的线性扫描找出最近点对
  - 时间复杂性
    - $T(n)=O(n\log n)$

一维空间算法(续)

- Divide-and-conquer算法

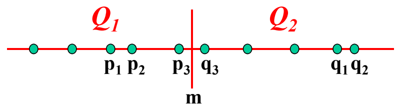
Preprocessing:

1. 如果Q中仅包含2个点，则返回这个点对；
2. 求Q中点的中位数m。

Divide:

1. 用Q中点坐标中位数m把Q划分为两个大小相等的子集合

$Q_1 = \{x \in Q \mid x \le m\}$, $Q_2 = \{x \in Q \mid x > m\}$



Conquer:

1. 递归地在Q_1和Q_2中找出最接近点对

(p_1, p_2)和(q_1, q_2)

Merge:

2. 在(p_1, p_2)、(q_1, q_2)和某个(p_3, q_3)之间选择最接近点对(x, y)，其中p_3是Q_1中最大点，q_3是Q_2中最小点，(x, y)是Q中最接近点。

- 时间复杂性
  - Divide阶段需要$O(n)$时间
  - Conquer阶段需要$2T(n/2)$时间
  - Merge阶段需要$O(n)$时间
  - 递归方程

$$T(n)= O(1) \qquad n = 2$$
$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) \qquad n \ge 3$$

  - 用Master定理求解$T(n)$

$$T(n) = O(n\log n)$$

HIT CS&E

二维空间算法

- Divide-and-conquer算法

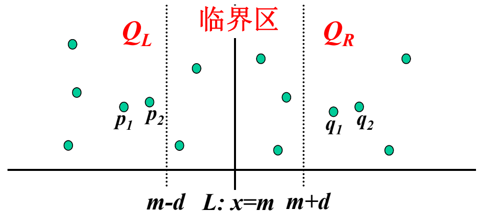
Preprocessing:

1. 如果Q中仅包含一个点，则算法结束；
2. 把Q中点分别按x-坐标值和y-坐标值排序.

Divide:

1. 计算Q中各点x-坐标的中位数m；
2. 用垂线L:$x=m$把Q划分成两个大小相等的子集合Q_L 和 Q_R， Q_L中点在L左边, Q_R 中点在L右边.

HIT CS&E



求解:

1. 递归地在Q_L、Q_R中找出最接近点对:
   $(p_1, p_2)\in Q_L$, $(q_1, q_2)\in Q_R$
2. $d=\min\{Dis(p_1, p_2), Dis(q_1, q_2)\}$;

HIT CS&E

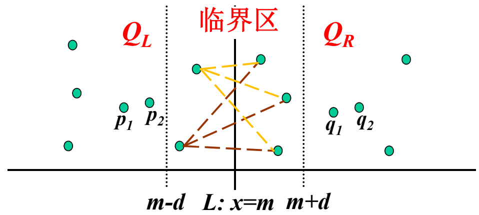
Merge:

1. 在临界区查找距离小于d的点对(p_l, q_r), $p_l\in Q_L$, $q_r\in Q_R$;
2. 如果找到，则(p_l, q_r)是Q中最接近点对，否则(p_1, p_2)和(q_1, q_2) 中距离最小者为Q中最接近点对.

关键是(p_l, q_r)的搜索方法及其搜索时间

(p_l, q_r)的直接搜索方法:

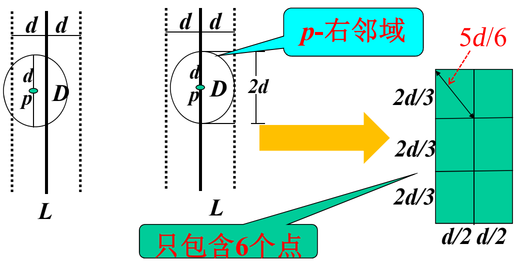
- $\forall p\in Q_L$, $\forall q\in Q_R$
  如果$dis(p, q)<d$，则更新d并记录(p, q)



- 合并的开销$\Theta(n^2)$
- $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n^2)$
- $T(n)=\Theta(n^2)$

(p_l, q_r)的搜索方法:

- 如果(p, q)是最接近点对而且$p\in Q_L$, $q\in Q_R$, 则$dis(p, q)<d$，(p, q)只能在下图的区域D.
- 若p在分割线L上，包含(p, q)的区域D最大，嵌于$d\times 2d$的矩形(p-右邻域)中，如下图所示.



HIT CS&E

- 对于任意p, 我们只需在p-右邻域中点q, 最多6个.
- 算法
  1. 把临界区中所有点集合投影到分割线L上;
  2. 对于左临界区的每个点p，考察p-右临界区的每个点(这样的点共有6个) q，如果$Dis(p, q)<d$，则令 $d=Dis(p, q)$;
  3. 如果d发生过变化,与最后的d对应的点对即为(p_l, q_r)，否则不存在(p_l, q_r).

HIT
CS&E

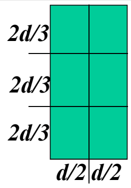
- 时间复杂性
  - Divide阶段需要$O(n)$时间
  - Conquer阶段需要$2T(n/2)$时间
  - Merge阶段需要$O(n)$时间
  - 递归方程

    $T(n) = O(1)$ $\quad n = 2$

    $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ $\quad n \geq 3$
  - 用Master定理求解$T(n)$

    $T(n) = O(n\log n)$

HIT
CS&E



- 正确性分析

定理1. 对于左临界区中的每个点p, p-右邻域中仅包含6个点。

证明：把p-右邻域划分为6个$(d/2)\times(2d/3)$的矩形。若p-右邻域中点数大于6,由鸽巢原理，至少有一个矩形中有两个点，设为u、v. $(x_u-x_v)^2+(y_u-y_v)^2 \leq (d/2)^2+(2d/3)^2=25d^2/36$

即$Dis(u, v)\leq 5d/6<d$, 与d的定义矛盾。

HIT
CS&E

3.8 凸包问题

HIT
CS&E

问题定义

输入：平面上的n个点的集合Q
输出： CH(Q): Q的convex hull

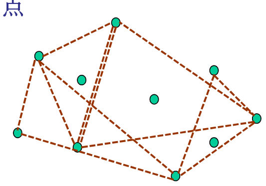
Q的convex hull是一个凸多边形P, Q的点或者在P上或者在P内

凸多边形P是具有如下性质多边形：连接P内任意两点的边都在P内

HIT
CS&E

蛮力算法

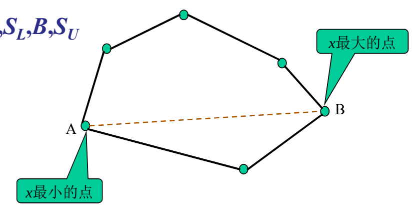
命题1:给定平面点集S，如果$P,P_i,P_j,P_k\in S$是四个不同的点，且P位于三角形$DP_iP_jP_k$的内部或边界上，则P不是S的凸包顶点



HIT
CS&E

蛮力算法处理剩余点

- A是横坐标最小的点
- B是横坐标最大的点
- AB上方的点按横坐标递减排序得S_U
- AB下方的点按横坐标递增排序S_L
- 顺序输出A,S_L,B,S_U

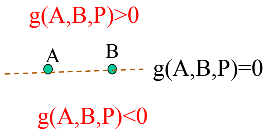


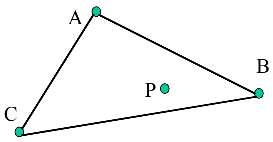
HIT CS&E

蛮力算法基本操作

直线AB划分平面
- $g(A,B,P)=0$
- $g(A,B,P)<0$
- $g(A,B,P)>0$

$P\in\Delta ABC$
- $g(A,B,P)\cdot g(A,B,C)\ge 0$
- $g(A,C,P)\cdot g(A,C,B)\ge 0$
- $g(B,C,P)\cdot g(B,C,A)\ge 0$





- **算法 BruteForceCH(Q)**

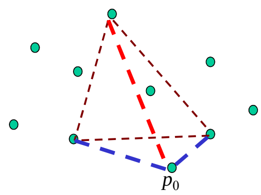
1. **For** $\forall A,B,C,D\in Q$ **Do** /*4层循环*/
2. **If** 其中一点位于其他三点构成的三角形内 **Then**
3. 从Q中删除该点
4. A←Q中横坐标最大的点;
5. B←Q中横坐标最小的点;
6. $S_L\leftarrow\{P\mid P\in Q$且$g(A,B,P)<0\}$;
7. $S_U\leftarrow\{P\mid P\in Q$且$g(A,B,P)>0\}$;
8. 排序S_L,S_U
9. 输出A,S_L,B,逆序S_U;

$T(n)=\theta(n^4)$

HIT CS&E

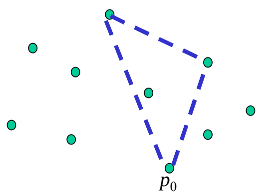
更佳的枚举方式

设P_0是凸包边界上的一个点
若$P\in\Delta ABC$
P_0ABC是凸四边形
则必有$P\in\Delta P_0BC$或$P\in\Delta P_0AB$



HIT CS&E

设P_0是凸包边界上的一个点
每次只枚举三个点，P,A,B
若$P\in\Delta P_0AB$，则删除P
$T(n)=O(n^3)$

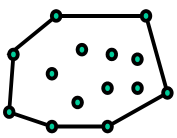


是否存在更佳的枚举次序?

HIT CS&E

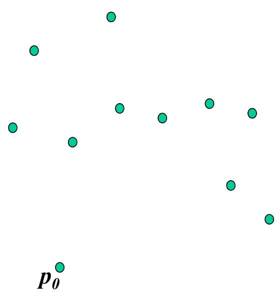
Graham-Scan算法

- 基本思想
  - 当沿着Convex hull逆时针漫游时，总是向左转
  - 在极坐标系下按照极角大小排列，然后逆时针 方向漫游点集，去除非Convex hull顶点(非左转点)。



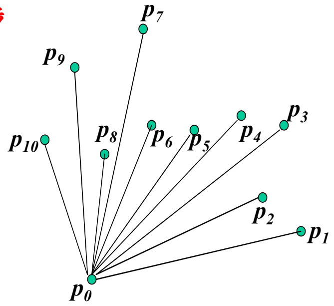
HIT CS&E

第1步



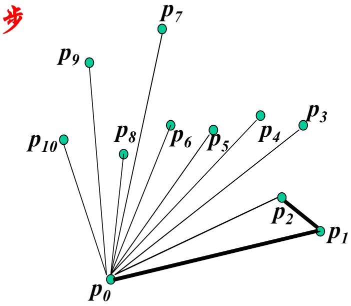
HIT CS&E

第2步



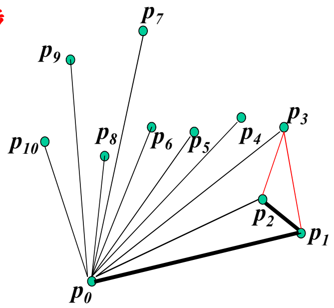
HIT CS&E

第3步



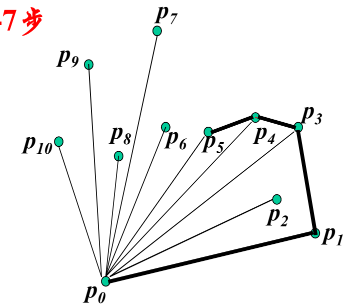
HIT CS&E

第3步



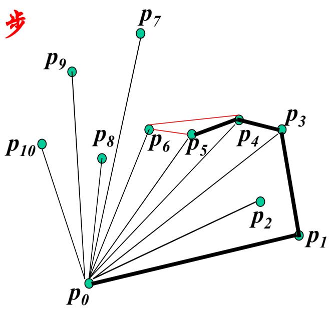
HIT CS&E

第4-7步



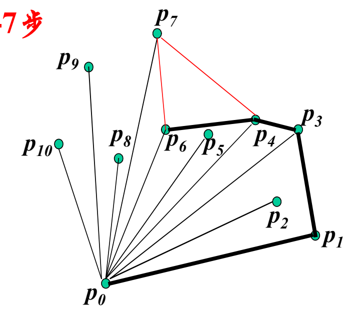
HIT CS&E

第4-7步

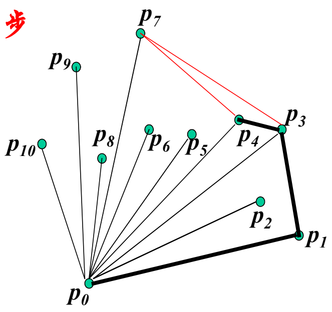


HIT CS&E

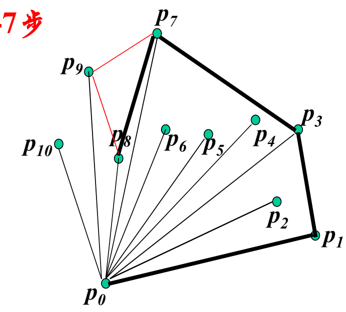
第4-7步



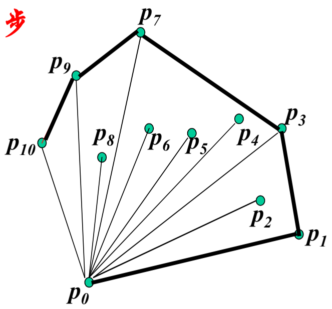
第4-7步



第4-7步



第4-7步



- 算法**Graham-Scan(*Q*)**

/* 栈S从底到顶存储按逆时针方向排列的CH(Q)顶点 */

1. 求Q中y-坐标值最小的点p_0;

2. 按照与p_0极角(逆时针方向)大小排序Q中其余点，结果为<$p_1, p_2, \ldots, p_m$>;

3. Push(p_0, S); Push(p_1, S); Push(p_2, S);

4. FOR i=3 TO *m* DO

5. While NextToTop(S),Top(S)和p_i形成非左移动 Do

6. Pop(S);

7. Push(p_i, S);

8. Rerurn *S*.

- 时间复杂性
  - 第1步需要$O(1)$时间
  - 第2步需要$O(n\log n)$时间
  - 第3步需要$O(1)$时间
  - 第4-7步需要$O(n)$时间
  - 总时间复杂性$T(n)= O(n\log n)$

- 正确性分析

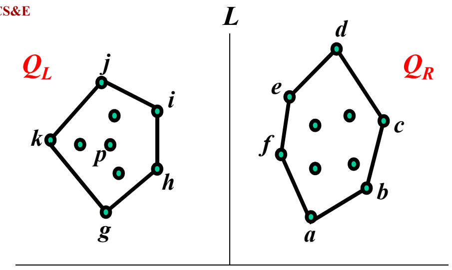
定理. 设n个二维点的集合Q是Graham-Scan算法的输入，$|Q|\geq 3$，算法结束时，栈S中自底到顶存储CH(Q)的顶点（按照逆时针顺序）.

证明: 用归纳法证明：在第i次(i始于3) for循环结束时，栈S中自底到顶存储CH(Q_i)的顶点(按照逆时针顺序), Q_i={$p_0, p_1, \ldots p_i$}.

Divide-and-conquer算法

Preprocess: (时间复杂性为$O(1)$)
1. 如果|Q|<3, 算法停止;
2. 如果|Q|=3, 按照逆时针方向输出CH(Q)的顶点;

Divide:(时间复杂性为$O(n)$)
1. 选择一个垂直于*x*-轴的直线把Q划分为基本相等的两个集合Q_L和Q_R, Q_L在Q_R的左边;

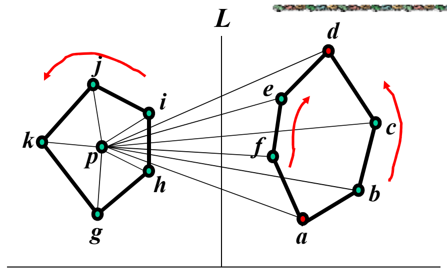


Conquer: (时间复杂性为$2T(n/2)$)
1. 递归地为Q_L和Q_R构造CH(Q_L)和CH(Q_R);

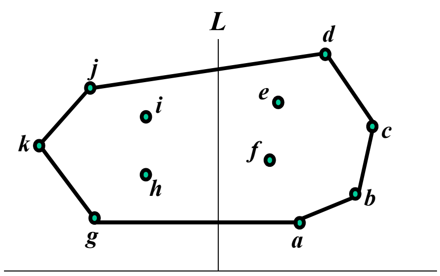
Merge:

我们先通过一个例子来看Merge的思想

Merge实例



3个序列：*<g, h, i, j, k>*, *<a, b, c, d>*, *<f, e>*
合并以后：*<g, h, a, b, f, c, e, d, i, j, k>*



Graham-Scan

Merge:(时间复杂性为$O(n)$)
1. 找一个Q_L的内点*p*;
2. 在CH(Q_R)中找与p的极角最大和最小顶点*u*和*v*;
3. 构造如下三个点序列:
   (1) 按逆时针方向排列的CH(Q_L)的所有顶点,
   (2) 按逆时针方向排列的CH(Q_R)从*u*到*v*的顶点,
   (3) 按顺时针方向排列的CH(Q_R)从*u*到*v*的顶点;
4. 合并上述三个序列;
5. 在合并的序列上应用Graham-Scan.

HIT CS&E

时间复杂性

- **Preprocessing阶段**
  - $O(1)$
- **Divide阶段**
  - $O(n)$
- **Conquer阶段**
  - $2T(n/2)$
- **Merge阶段**
  - $O(n)$

HIT CS&E

时间复杂性

- 总的时间复杂性

  $T(n)=2T(n/2)+O(n)$
- 使用**Master**定理

  $T(n)= O(n\log n)$

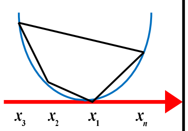
HIT CS&E

凸包问题的时间复杂度下界

定理:凸包问题不存在$o(n\log n)$时间的算法.

证明：(反证法)

- 排序问题的输入$x_1,x_2,\ldots,x_n$
- 转换成凸包问题的输入$(x_1,x_1^2),\ldots,(x_n,x_n^2)$
- 如果凸包问题存在$o(n\log n)$时间算法A,则A可以在$o(n\log n)$时间内从横坐标最小的点开始以逆时针顺序输出凸包$(y_1,y_1^2),\ldots,(y_n,y_n^2)$
- $y_1,y_2,\ldots,y_n$即是$x_1,x_2,\ldots,x_n$排序的结果
- 导致排序问题在$o(n\log n)$时间内求解



HIT CS&E

3.9 数据剪除方法（Prune and search）

- 剪除与问题求解无关的数据,
- 剪除输入规模的αn个数据, $0<\alpha<1$
  - 剪枝的代价记为$P(n)$
- 对剩下的数据递归调用
  - $T(n)=T((1-\alpha)n)+P(n)$
- 利用第二章的技术分析算法复杂性

HIT CS&E

在有序数组中查找元素x

$A[1],A[2],\ldots,A[k-1],\ A[k],A[k+1]\ldots\ldots,A[n]$

x

- 将数组分为三个部分，$A[1{:}k-1]$,$A[k]$,$A[k+1{:}n]$
- 通过比较$x=?A[k]$,删除其中两个部分
- 为使任何情况下均至少删除一半以上的元素
  - 取$k=n/2$
- $T(n)=T(n/2)+1$　　　　$T(n)=O(\log n)$

HIT CS&E

3.9.1 二元线性规划

问题定义

min $ax+by$

s.t. $a_1x+b_1y \ge c_1$

$a_2x+b_2y \ge c_2$

$a_3x+b_3y \ge c_3$

……

$a_nx+b_ny \ge c_n$

输入：实数a,b，实数数组$A[1:n],B[1:n]$和$C[1:n]$

输出：x^*,y^*使得 $A[i]x^*+B[i]y^* \ge C[i]$对$i=1,2,\ldots,n$成立且ax^*+by^*达到最大值

问题的特殊形式

min y

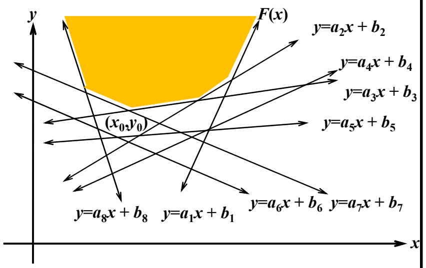
s.t. $y \ge a_1x+b_1$

$y \ge a_2x+b_2$

$y \ge a_3x+b_3$

……

$y \ge a_nx+b_n$



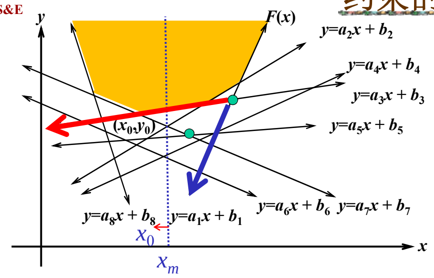
边界函数$F(x)$:

$$F(x) = \max_{1\le i\le n}\{a_ix+b_i\}$$

最优解x_0:

$$y_0=F(x_0) = \min_{-\infty<x<\infty} F(x)$$

约束的剪除



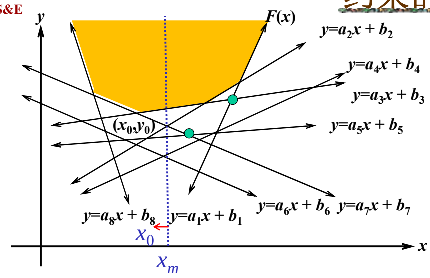
给定一个x_m,且已知$x_0<x_m$

你能判断哪些约束有用，哪些约束无用吗？

由于$a_1x+b_1< a_3x+b_3$在$x_0<x_m$恒成立

约束$y \ge a_1x+b_1$对求解问题无用

约束的剪除



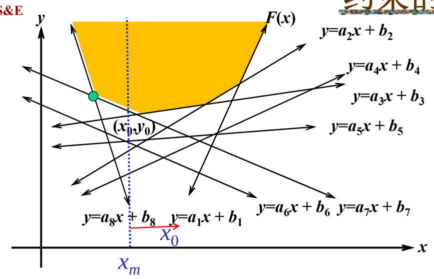
给定一个x_m,且已知$x_0<x_m$

对右侧的每个交点，均能剪除斜率大的约束

例如：$y \ge a_1x+b_1$可剪除

$y \ge a_5x+b_5$可剪除

约束的剪除



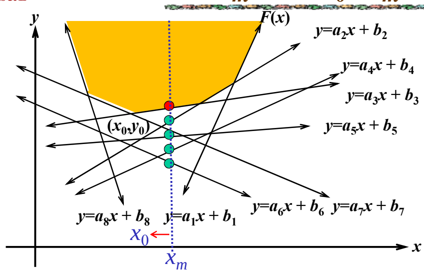
同理：给定一个x_m,且已知$x_m < x_0$

对左侧的每个交点，均能剪除斜率小的约束

例如：$y \ge a_8x+b_8$可剪除

$y \ge a_6x+b_6$可剪除

已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$



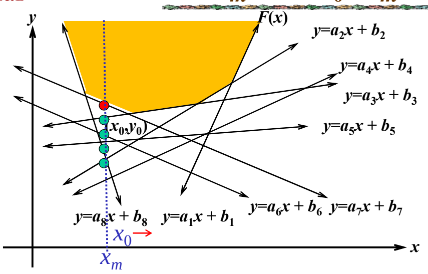
令 $y_m=F(x_m)= \max_{1\le i\le n}\{a_ix_m+b_i\}$

情形1：$y_m=a_kx_m+b_k$仅在一个约束上取到

若$a_k>0$,则$x_0<x_m$

若$a_k<0$,则$x_0>x_m$

已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$



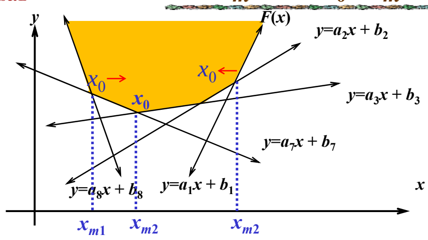
令 $y_m=F(x_m)=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i x_m+b_i\}$

情形1：$y_m=a_k x_m+b_k$仅在一个约束上取到

若$a_k>0$,则$x_0<x_m$

若$a_k<0$,则$x_0>x_m$

已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$



令 $y_m=F(x_m)=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i x_m+b_i\}$

情形2：y_m在多个约束上取到, 令$g_{min}=\min\{a_k \mid y_m=a_k x_m+b_k\}$

$g_{max}=\max\{a_k \mid y_m=a_k x_m+b_k\}$

(1) 若$g_{min}<0$, $g_{max}<0$, 则$x_0>x_m$

(2)若$g_{min}<0$, $g_{max}>0$, 则$x_0=x_m$

(3)若$g_{min}>0$, $g_{max}>0$, 则$x_0<x_m$

确定x_m

一旦确定了x_m

- 可以判定最优解$x_0<x_m$还是$x_0>x_m$
- 如果$x_0<x_m$,则右侧每个交点可剪除一个约束
- 如果$x_0>x_m$,则左侧每个交点可剪除一个约束

问题：如何选择x_m，总能剪除一定比例约束？

如果确定了x_m,

- 使其左侧和右侧均至少有$n/4$个交点
- 如果$x_0<x_m$,则可剪除$n/4$个约束
- 如果$x_0>x_m$,则可剪除$n/4$个约束

算法

算法SpecTwoLinear($A[1:n]$,$B[1:n]$)

输入：实数数组$A[1:n]$,$B[1:n]$

输出：x_0,y_0使$y_0\ge A[i]x_0+B[i]$ (i=1,…,n)且ax_0+by_0达到最大值

1. If n=2 Then 输出 $y=A[1]x+B[1]$和$y=A[2]x+B[2]$的交点,结束
2. 求$y=A[i]x+B[i]$和$y=A[i+1]x+B[i+1]$的交点(x_i,y_i)，i=1,3,5,…
3. 求交点横坐标的中位数x_m
4. y_m=F(x_m)=max{A[i]x_m+B[i] | 1≤ i≤ n}

   $g_{min}=\min\{A[k] \mid y_m=A[k]x_m+B[k]\}$

   $g_{max}=\max\{A[k] \mid y_m=A[k]x_m+B[k]\}$
5. If $g_{min}\cdot g_{max}<0$ Then 输出x_m,y_m，算法结束
6. Else If $g_{min}<0$, $g_{max}<0$ Then /*$x_0>x_m$*/

   利用 满足$x_i<x_m$的每个交点，剪除一个斜率较小的约束
7. Else /*$g_{min}>0$, $g_{max}>0$，$x_0<x_m$*/

   利用 满足$x_i>x_m$的每个交点，剪除一个斜率较大的约束
8. SpecTwoLinear($A[1:3n/4]$,$B[1:3n/4]$) /*剪除后剩下的约束*/

时间复杂性

$T(n)=\theta(1)$

$T(n)=T(3n/4)+\theta(n)$

$T(n)=\theta(n)$

一般的二元线性规划

min $ax+by$

s.t. $a_1x+b_1y\ge c_1$

$a_2x+b_2y\ge c_2$

……

$a_nx+b_ny\ge c_n$

$L\le x\le U$

$\xrightarrow[y'=ax+by]{x'=x}$

min y'

s.t.

$[a_1-ab_1/b]x'+(b_1/b)y'\ge c_1$

……

$[a_n-ab_n/b]x'+(b_n/b)y'\ge c_n$

$L\le x'\le U$

min y'

s.t.

$(b_1/b)y'\ge[ab_1/b-a_1]x'+c_1$

……

$(b_n/b)y'\ge[ab_n/b-a_n]x'+c_n$

$L\le x'\le U$

min y'

s.t.

$y'\ge[a-a_ib/b_i]x'+c_ib/b_i$ $i\in$I

$y'\le[a-a_jb/b_j]x'+c_jb/b_j$ $j\in$J

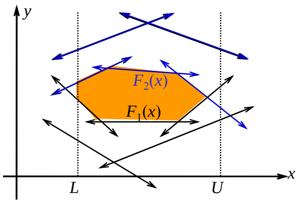
$L\le x'\le U$

问题转换

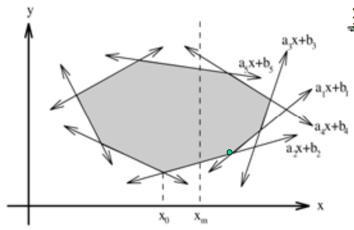
min y
s.t. $y \geq a_i x + b_i \quad i \in I$
$y \leq a_j x + b_j \quad j \in J$
$L \leq x \leq U$

令 $F_1(x) = \max\{a_i x + b_i, i \in I\}$
$F_2(x) = \min\{a_j x + b_j, j \in J\}$
$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$

min $F_1(x)$
s.t. $F_1(x) \leq F_2(x)$
$L \leq x \leq U$



约束的剪除



若已知 $x_0 < x_m$, 则$a_1x + b_1$可被剪除
$a_1x + b_1 < a_2x + b_2$ 在 $x < x_m$时恒成立

定义

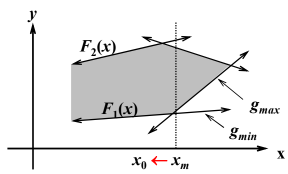
- $g_{min} = \min\{a_i \mid i \in I, a_i x_m + b_i = F_1(x_m)\}$, 最小斜率
- $g_{max} = \max\{a_i \mid i \in I, a_i x_m + b_i = F_1(x_m)\}$, 最大斜率
- $h_{min} = \min\{a_i \mid i \in J, a_i x_m + b_i = F_2(x_m)\}$, 最小斜率
- $h_{max} = \max\{a_i \mid i \in J, a_i x_m + b_i = F_2(x_m)\}$, 最大斜率

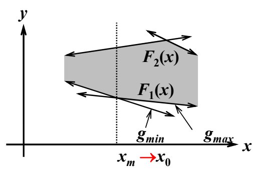
已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$

情形1：x_m是可行解，即$F(x_m)=F_1(x_m)-F_2(x_m)\leq 0$

(1)如果$g_{min}>0, g_{max}>0$，
则$x_0<x_m$

(2)如果$g_{min}<0, g_{max}<0$，
则$x_0>x_m$





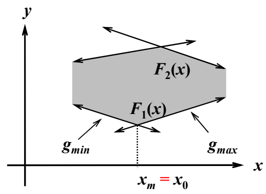
已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$

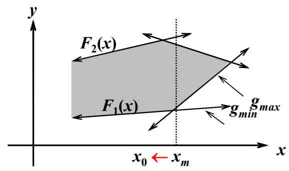
情形1：x_m是可行解，即$F(x_m)=F_1(x_m)-F_2(x_m)\leq 0$

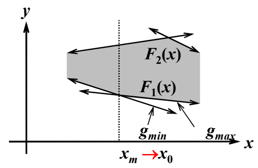
(1)如果$g_{min}>0, g_{max}>0$，
则$x_0<x_m$

(2)如果$g_{min}<0, g_{max}<0$，
则$x_0>x_m$

(3)如果$g_{min}<0, g_{max}>0$，
则$x_0=x_m$







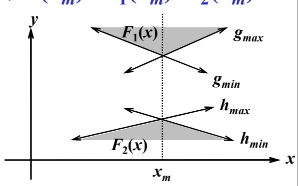
已知x_m判断$x_0<x_m$或$x_0>x_m$

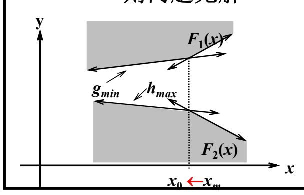
情形2：x_m不是可行解，即$F(x_m)=F_1(x_m)-F_2(x_m)>0$

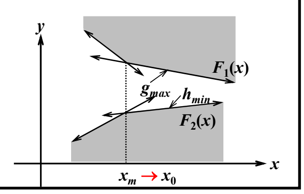
(1)如果$h_{max}<g_{min}$，
则$x_0<x_m$

(2)如果$g_{max}<h_{min}$，
则$x_0>x_m$

(3)如果$g_{min}\leq h_{max}$且 $g_{max}\geq h_{min}$
则问题无解







二元线性规划剪枝算法

算法TwoLinear(A[1:n],B[1:n],n_1)
输入：实数数组A[1:n],B[1:n]，n_1 /*$i \in I$ ($i \leq I$) $i \in J$ ($i > n_1$)*/
输出：x_0, y_0使$y_0 \geq (\leq) A[i]x_0 + B[i]$ ($i \leq n_1$, $i > n_1$)且$ax_0 + by_0$达到最大值

1. If |I|=2 且|J|=2 Then 用蛮力法求解,算法结束
2. 将I中约束两两配对，不同的对无公共约束
3. 将J中约束两两配对，不同的对无公共约束
4. 求$n/2$对约束的交点横坐标的中位数x_m
5. 如果对应优化解，则输出x_m, y_m，算法结束
6. 如果由x_m知问题无解，则算法结束
7. 根据最优解在x_m的左侧还是右侧，剪除每对约束中的一个约束
共剪除$n/4$个约束得到A[1:3n/4], B[1:3n/4], n'
8. TwoLinear(A[1:3n/4],B[1:3n/4],n');

$T(n)=T(3n/4)+\theta(n)$
$=\theta(n)$

HIT CS&E

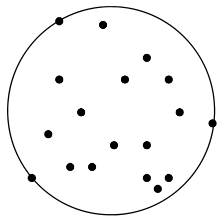
3.9.2 1圆心问题

HIT CS&E

问题定义

输入:平面上n个点

输出:一个半径最小的圆使其包含所有输入点



HIT CS&E

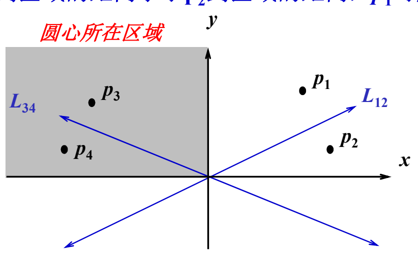
剪枝策略

L_{12}: p_1,p_2的垂直平分线

L_{34}: p_3,p_4的垂直平分线

L_{12},L_{34}交点到p_1,p_2,p_3,p_4的距离决定圆心所在区域

如果p_1到区域的距离小于p_2到区域的距离，p_1可删除

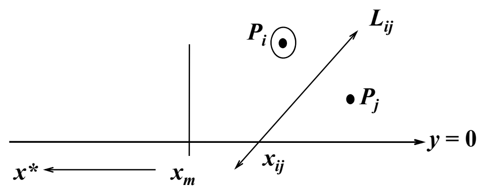


HIT CS&E

受限1-圆心问题

输入：平面上n个点和一条直线$y=y'$

输出：圆心位于$y=y'$上的半径最小的圆包含所有点



HIT CS&E

受限1-圆心算法

算法Constraint1Center($P[1:n],y'$)

输入：平面上n个点和一条直线$y=y'$

输出：圆心在$y=y'$上的半径最小的圆包含所有点

1. If $n\leq 2$ Then 用蛮力法求解圆心，算法结束
2. 输入点配对$(p_1,p_2),(p_3,p_4),\ldots,(p_{n-1},p_n)$;如果$n$是奇数，则最后一个点对为$(p_n,p_1)$
3. 计算(p_i,p_j)中垂线与y=y'的交点横坐标$x_{i,i+1}$ (i =1,3,..,n/2)
4. 计算$x_{i,i+1}$ (i =1,3,..,n/2)的中位数x_m
5. 计算距离(x_m,y')最远的输入点(x_j,y_j)。

   /*$x_j<x_m$,则圆心在x_m左侧,即$x^*<x_m$;否则,$x^*>x_m$*/
6. If $x^*<x_m$ Then对$x_{i,i+1}>x_m$的(p_i,p_{i+1})剪除距(x_m,y')较近点

   Else 对$x_{i,i+1}<x_m$的(p_i,p_{i+1})剪除距(x_m,y')较近点
7. 对剩余输入点和直线$y=y'$递归调用算法

HIT CS&E

算法的复杂度

$T(n) = \theta(1)$

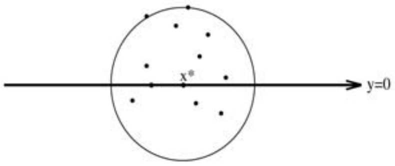
$T(n) = T(3n/4) +\theta(n)$

由此解得

$T(n)= \theta(n)$

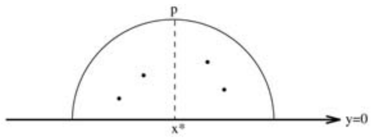
一般情况的处理

- 用受限1圆心算法, 可以计算出直线y=0上的圆心 $(x^*,0)$.
- 而且，用受限1圆心算法还可以
  - 令 (x_s, y_s)表示最优解的圆心.
  - 我们可以判定 $y_s > 0, y_s < 0$ 还是 $y_s = 0$.
  - 类似地，我们可以判定$x_s > 0, x_s < 0$ 还是 $x_s = 0$



y_s的符号

- 令$(x^*,0)$是直线y=0上的最小圆圆心
- I是距离$(x^*,0)$最远的输入点构成的集合
- 情形1: $|I|=1$，$I=\{p\}$，则y_s与y_p符号相同



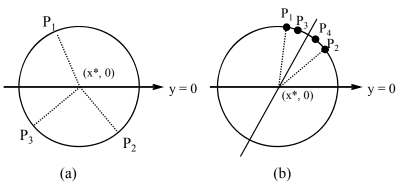
- 情形2: $|I|>1$

找出I中输入点张成的最小圆弧

圆弧端点记为为 $p_1=(x_1,y_1)$,$p_2=(x_2,y_2)$

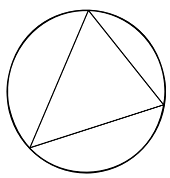
(a)如果圆弧>180°, 则$y_s=0$

(b)如果圆弧≤180 °, 则y_s与 $(y_1+y_2)/2$同符号

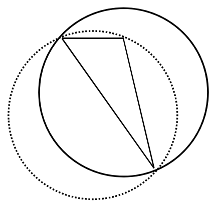


最优性判定

- 锐角三角形:
- 钝角三角形:

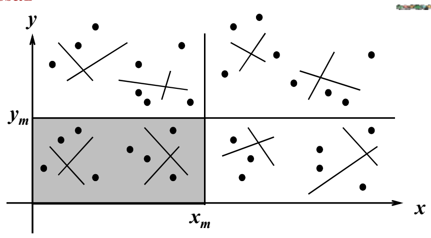


最优圆.



非最优圆.

例子



$x_s > x_m, y_s > y_m$,

阴影区域$n/8$个点对，每对可剪除一个点$n/4$

共可剪除n/16个点

其他情况类似

算法

算法OneCenter(S)

输入: 含n个点的平面点集$S = \{p_1, p_2, …, p_n\}$

输出: 覆盖S的最小圆圆心.

1. If $|S|\le 16$ Then 用蛮力法求解得到圆心，算法结束.
2. 将n点配对$(p_1, p_2), (p_3, p_4), …,(p_{n-1}, p_n)$.
   计算(p_{i-1}, p_i)垂直平分线$L_{i/2}$及其斜率$s_{i/2}$, $i=2,4, …,n$
3. 计算$\{s_k | k=1,2,…,n/2\}$ 的中位数s_m
4. 旋转坐标轴使得x-轴与直线$y=s_m x$重合
   $I^+ = \{L_i | s_i > 0\}$ $I^- = \{L_i | s_i < 0\}$ /* $|I^+| \approx |I^-| \approx n/4$ */
5. 构造直线对(L_i, l_i),$L_i \in I^+$,$l_i \in I^-$， $i=1,…,n/4$, 无公共直线
   计算L_i和l_i的交点(a_i,b_i)，计算$b_1,…,b_{n/4}$的中位数y^*
6. $(x', y^*) \leftarrow$Constraint1Center($S[1:n]$,y^*);
7. 如果(x', y^*) 是优化解，返回，算法终止;
8. 否则，记录$y_s < y^*$还是$y > y^*$

9. 计算$a_1, a_2, \ldots, a_{n/4}$的中位数$x^*$
10. $(x', y^*) \leftarrow$ Constraint1Center(S[1:n],x=x^*);
11.如果(x^*,y') 是优化解，返回，算法终止；
12.否则，记录x_s<x^*还是x>x^*
13.根据四种情况删除S中n/16个点

情形1： $x_s<x^*$且$y_s<y^*$

对每个满足$a_j>x^*$ 且$b_j>y^*$的交点(a_j, b_j)，设它是 $L_i \in I^+$ 和$l_i \in I^-$ 的交点而l_j是(p_j,p_k)的中垂线，则从S中删除 p_j和p_k中距离 (x^*, y^*)更近的顶点.

情形2： $x_s<x^*$且$y_s>y^*$, 类似地处理

情形3： $x_s>x^*$且$y_s>y^*$, 类似地处理

情形4： $x_s>x^*$且$y_s<y^*$, 类似地处理

14.输出OneCenter(S) /*递归调用*/

HIT CS&E

时间复杂性

$T(n) = \theta(1)$ $n<16$

$T(n) = T(15n/16) + \theta(n)$ $n \ge 16$

由此解得

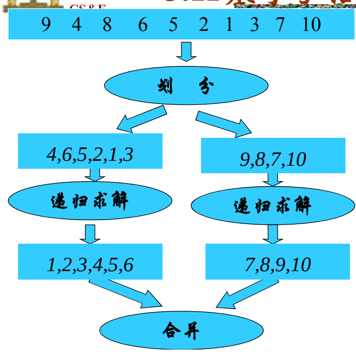
$T(n) = \theta(n)$

HIT CS&E

补充阅读材料
•算法导论
✓第4章
✓第6-9章

HIT CS&E

3.11 基于分治思想的排序算法



划分的策略

1. 选择一个位置将数组 划分成两个部分mergesort

2. 选择一个划分标准x根据元素与x的大小关系来划分 quicksort

合并策略

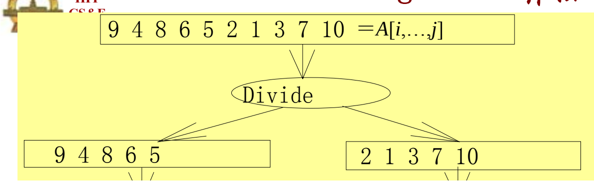
不同的划分策略对应不同的合并策略

由于分治思想涉及到递归调用，需要关心子问题的最一般形式

在排序问题中，子问题一般形式就是将A[i,…,j]中的元素排序

HIT CS&E

3.10.1 Merge-sort算法



Divide:

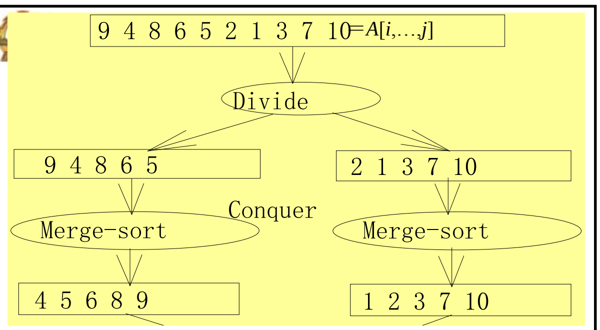
本质上仅需产生划分位置k

第一个子问题是A[i,…,k]

第二个子问题是A[k+1,…,j]

为使得两个问题的大小大致相当，k可以如下产生

k=(i+j)/2



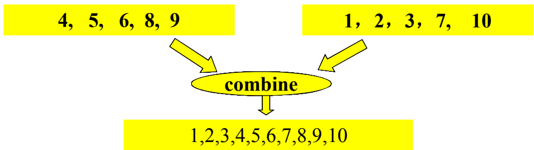
Conquer: 递归求解就是算法的递归调用

Mergesort(A,i,k); //求解第一个子问题

Mergesort(A,k+1,j); //求解第二个子问题

combine: 将两个有序序列合并成一个有序序列

1. $l \leftarrow i$; $h \leftarrow k+1$; $t=i$ //设置指针
2. While $l \le k$ & $h<j$ Do
   IF $A[l] < A[h]$ THEN $B[t] \leftarrow A[l]$; $l \leftarrow l+1$; $t \leftarrow t+1$;
   ELSE $B[t] \leftarrow A[h]$; $h \leftarrow h+1$; $t \leftarrow t+1$;
3. IF $l<k$ THEH //第一个子问题有剩余元素
   For $v \leftarrow l$ To k Do
   $B[t] \leftarrow A[v]$; $t \leftarrow t+1$;
4. IF $h<j$ THEN //第二个子问题有剩余元素
   For $v \leftarrow h$ To j Do
   $B[t] \leftarrow A[v]$; $t \leftarrow t+1$;



Mergesort算法

MergeSort(A,i,j)
Input: $A[i,\dots,j]$
Output: 排序后的$A[i,\dots,j]$

$T(n)=2T(n/2)+O(n)$
$T(n)=O(n\log n)$

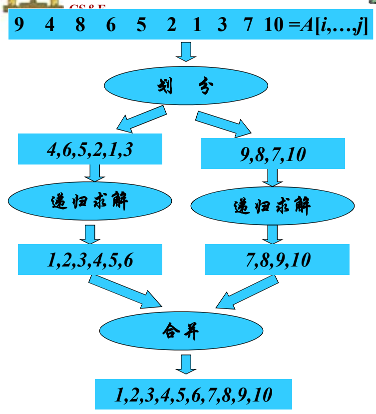
1. $k \leftarrow (i+j)/2$;
2. MergeSort(A,i,k);
3. MergeSort($A,k+1,j$);
4. $l \leftarrow i$; $h \leftarrow k+1$; $t=i$ //设置指针
5. While $l \le k$ & $h<j$ Do
6. IF $A[l] < A[h]$ THEN $B[t] \leftarrow A[l]$; $l \leftarrow l+1$; $t \leftarrow t+1$;
7. ELSE $B[t] \leftarrow A[h]$; $h \leftarrow h+1$; $t \leftarrow t+1$;
8. IF $l<k$ THEH //第一个子问题有剩余元素
9. For $v \leftarrow l$ To k Do
10. $B[t] \leftarrow A[v]$; $t \leftarrow t+1$;
11. IF $h<j$ THEN //第二个子问题有剩余元素
12. For $v \leftarrow h$ To j Do
13. $B[t] \leftarrow A[v]$; $t \leftarrow t+1$;
14. For $v \leftarrow i$ To j Do //将归并后的数据复制到A中
15. $A[v] \leftarrow B[v]$;

HIT
CS&E

3.10.2 Quick Sort

HIT
CS&E

Partition sort



基本思想

Divide:

确定一个划分标准x，将数组中小于x的元素放到数组的前面部分，大于x的元素放到数组的后面部分，并返回一个划分k；

Conquer:

递归调用算法将$A[i,\dots,k]$和$A[k+1,\dots,j]$求解。

Combine:

无操作

HIT
CS&E

PartitionSort算法框架

PartitionSort(A,i,j)

Input: $A[i,\dots,j]$, x

Output: 排序后的$A[i,\dots,j]$

1. 选择划分元素x;
2. k=partition(A,i,j,x); //用x完成划分
3. partitionSort(A,i,k); //递归求解子问题
4. partitionSort($A,k+1,j$);

//无需额外的合并操作

HIT
CS&E

Divide

$x=7$

```
9 4 8 6 5 2 1 3 7 10 =A[i,…,j]
9 4 8 6 5 2 1 3 7 10 =A[i,…,j]
3 4 8 6 5 2 1 9 7 10 =A[i,…,j]
3 4 1 6 5 2 8 9 7 10 =A[i,…,j]
3 4 1 6 5 2 8 9 7 10 =A[i,…,j]
3 4 1 6 5 2=A[i,…,high]    8 9 7 10=A[high+1,…,j]
```

指针low从低区中找出应放到x之后的第一个元素

指针high从高区中找出应放到x之前的第一个元素

如果确实应该交low和high标记的两个元素的位置，则交换

否则划分位置就是high

Divide过程的算法描述

Partition(A,i,j,x)
Input: $A[i,\ldots,j]$, x
Output: 划分位置k使得$A[i,\ldots,k]$中的元素均小于x且$A[k+1,\ldots,j]$中的元素均大于等于x

1. $low \leftarrow i$; $high \leftarrow j$;
2. While($low < high$) Do
3. swap($A[low]$, $A[high]$);
4. While($A[low] < x$) Do
5. $low \leftarrow low+1$;
6. While($A[low] < x$) Do
7. $high \leftarrow high-1$;
8. return($high$)

PartitionSort算法

PartitionSort(A,i,j)
Input: $A[i,\ldots,j]$, x
Output: 排序后的$A[i,\ldots,j]$

1. $x \leftarrow A[i]$; //以确定的策略选择x
2. k=partition(A,i,j,x); //用x完成划分
3. partitionSort(A,i,k); //递归求解子问题
4. partitionSort($A,k+1,j$);

Partition(A,i,j,x)
1. $low \leftarrow i$; $high \leftarrow j$;
2. While($low < high$) Do
3. swap($A[low]$, $A[high]$);
4. While($A[low] < x$) Do
5. $low \leftarrow low+1$;
6. While($A[low] < x$) Do
7. $high \leftarrow high-1$;
8. return($high$)

时间复杂度分析

- 最好时间复杂度
  - 每次划分都很均匀
  - $T(n)=2T(n/2)+n$
  - $T(1)=1$
  - $T(n)=O(n \log n)$
- 最坏时间复杂度
  - 每次划分均产生1个元素和n-1个元素
  - $T(n)=T(1)+T(n-1)+n$
  - $T(1)=1$
  - $T(n)=O(n^2)$

QuickSort算法

QuickSort(A,i,j)
Input: $A[i,\ldots,j]$, x
Output: 排序后的$A[i,\ldots,j]$

1. $temp \leftarrow$rand(i,j); //产生i，j之间的随机数
2. $x \leftarrow A[temp]$; //以确定的策略选择x
3. k=partition(A,i,j,x); //用x完成划分
4. QuickSort(A,i,k); //递归求解子问题
5. QuickSort($A,k+1,j$);

Partition(A,i,j,x)
1. $low \leftarrow i$; $high \leftarrow j$;
2. While($low < high$) Do
3. swap($A[low]$, $A[high]$);
4. While($A[low] < x$) Do
5. $low \leftarrow low+1$;
6. While($A[low] < x$) Do
7. $high \leftarrow high-1$;
8. return($high$)

算法性能的分析

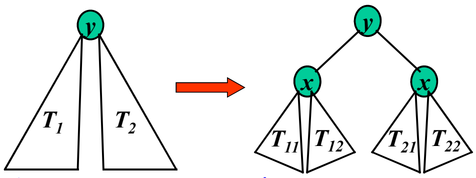
- 基本概念
  - $S_{(i)}$表示S中阶为i的元素
    例如，$S_{(1)}$和$S_{(n)}$分别是最小和最大元素
  - 随机变量X_{ij}定义如下：
    $X_{ij}=1$如果$S_{(i)}$和$S_{(j)}$在运行中被比较，否则为0
  - X_{ij}是$S_{(i)}$和$S_{(j)}$的比较次数
  - 算法的比较次数为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} X_{ij}$
  - 算法的平均复杂性为$E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} E[X_{ij}]$

- 计算$E[X_{ij}]$
  - 设p_{ij}为$S_{(i)}$和$S_{(j)}$在运行中比较的概率，则

$$E[X_{ij}]=p_{ij}\times 1+(1-p_{ij})\times 0=p_{ij}$$

关键问题成为求解p_{ij}

- 求解P_{ij}
  - 我们可以用树表示算法的计算过程



  - 我们可以观察到如下事实:
    - 一个子树的根必须与其子树的所有节点比较
    - 不同子树中的节点不可能比较
    - 任意两个节点至多比较一次

HIT CS&E

- 当$S_{(i)}, S_{(i+1)}, \ldots, S_{(j)}$在同一子树时，$S_{(i)}$和$S_{(j)}$才可能比较
- 由随机算法的特点，$S_{(i)}, S_{(i+1)}, \ldots, S_{(j)}$在同一子树的概率为1
- 只有$S_{(i)}$或$S_{(j)}$被选为划分点时，$S_{(i)}$和$S_{(j)}$才可能比较
- $S_{(i)}, S_{(i+1)}, \ldots, S_{(j)}$等可能地被选为划分点，所以$S_{(i)}$和$S_{(j)}$进行比较的概率是：$2/(j-i+1)$，即

$$p_{ij}=2/(j-i+1)$$

HIT CS&E

- 现在我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}E[X_{ij}]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}p_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\frac{2}{j-i+1}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-i+1}\frac{2}{k}\le 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=2nH_n=O(n\log n)$$

定理. 随机排序算法的期望时间复杂性为O($n\log n$)

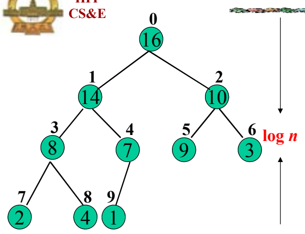
HIT CS&E

3.10.3 堆排序

堆
堆排序
堆排序算法的时间复杂度分析

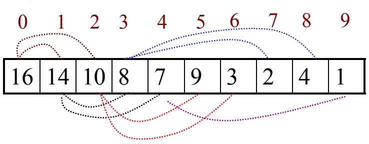
HIT CS&E

堆



- 二叉树
- 任意节点的值均大(小)于其所有后代
- 如果第i号节点缺孩子，则$j(>i)$无孩子

堆的数组实现

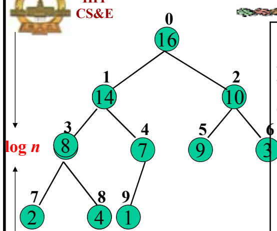


0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

Len(A) 数组大小
HSize 堆大小
Parent(i) =$\lfloor(i-1)/2\rfloor$
Left(i) =$2i+1$
Right(i) =$2i+2$

HIT CS&E

堆性质的维护



问题
- 在堆节点i, 堆性质不成立
- 如何调整以维护堆性质

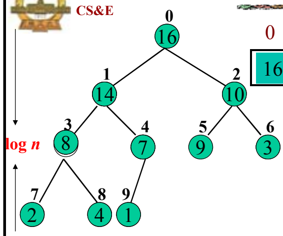
算法Max_Heapify(A,i)
Input: 堆A,位置i,堆性质在i不成立
Output:满足堆性质的堆A

1. $l\leftarrow Left(i)$, $r\leftarrow Right(i)$;
2. if $l\le HSize(A)$ && $A[l]>A[i]$ then
   $max\leftarrow l$;
   else $max\leftarrow i$;
3. if $r\le HSize(A)$ && $A[r]>A[max]$
   $max\leftarrow r$;
4. if $max\ne i$ then
   swap(A,i,max);
   Max_Heapify(A, max);

所需比较操作的次数为i到叶子层的最长路径长度的2倍
时间复杂度为$O(\log n)$

HIT CS&E

堆的建立



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1

算法 Build_max_heap(A)

Input: 数组A

Output: 堆A

1. HSize←Len(A);
2. For i ←⌊Len(A)/2⌋-1 to 0
3. Max_Heapify(A,i);

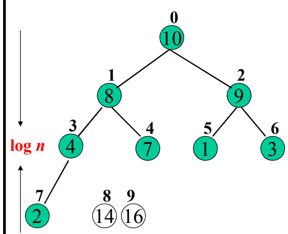
时间复杂性

$$\sum_{h=0}^{\lfloor \log n\rfloor}\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}}\right\rceil 2h \le \sum_{h=0}^{\lfloor \log n\rfloor}\left(\frac{n}{2^{h+1}}+1\right)2h = n\sum_{h=0}^{\lfloor \log n\rfloor}\frac{h}{2^{h}}+\sum_{h=0}^{\lfloor \log n\rfloor}2h = O(n)$$

HIT CS&E

堆排序

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	8	9	4	7	1	3	2	14	16



算法 Heap_sort(A)

Input: 数组A

Output: 排序后的A

1. Build_max_heap(A);
2. For i ←Len(A)-1 to 1
3. Swap(A,1,i);
4. HSize=HSize-1;
5. Max_Heapify(A,1);

时间复杂性 $O(n \log n)$

第1步 $O(n)$次比较操作

第2步循环 n-1遍 每遍至多log n次比较操作

HIT CS&E

3.10.4 基于比较操作的排序算法的时间复杂度下界

HIT CS&E

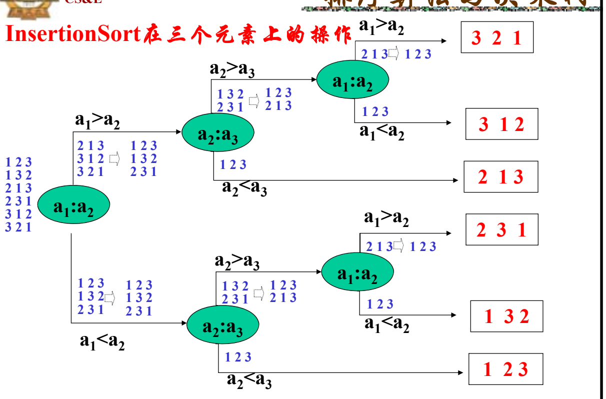
Motivation

- 排序操作是一个基本操作，也是很多应用中面临的公共问题
- 有些算法(MergeSort, HeapSort, QuickSort)的时间复杂度为 $O(n\log n)$，有的算法(InsertionSort, BubbleSort,SelectionSort)的时间复杂度为 $O(n^2)$
- 从渐近的角度讲，$O(n\log n)$是不是最优的排序时间？
- 或者说，能否找到 基于比较的复杂度为$O(n)$的排序算法？
- 多种尝试的失败，促使人们证明不存在基于比较的复杂度更低的排序算法 。

HIT CS&E

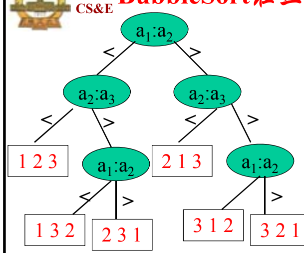
排序算法与决策树

InsertionSort在三个元素上的操作



HIT CS&E

BubbleSort在三个元素上的决策树



① 略去了元素交换操作

② 仅给出了二叉树节点和边

排序算法与二叉决策树

① 内节点：比较操作

② 叶节点：输入数据的大小关系

③ 边：<>分别标记左、右孩子

④ 算法在特定输入上的运行对应从根到叶的一条路径

⑤ 树的深度对应算法的最坏时间复杂度

⑥ 事实上，任意基于比较的排序算法均对应这样一棵决策树

HIT CS&E

寻找n个元素的最优排序算法

等价于

寻找$n!$种排列为所有叶节点的最优决策树

关于二叉树，我们知道

① 在叶子数量固定的所有二叉树中，平衡二叉树的深度最小

② 叶子数量为X的平衡二叉树的深度为$\lceil \log X \rceil$

基于比较的排序算法的时间复杂度下界为$\lceil \log n! \rceil$

注意: $\log n! = \Theta(n \log n)$

HIT CS&E

What lower bound tells us?

- First, it reassures us that widely used sorting algorithms are asymptotically optimal. Thus, one should not needlessly search for an $O(n)$ time algorithms (in the comparison-based class).
- Second, decision tree proof is one of the few non-trivial lower-bound proofs in computer science.
- Finally, knowing a lower bound for sorting also allows us to get lower bounds on other problems. Using a technique called **reduction**, any problem whose solution can indirectly lead to sorting must also have a lower bound of $\Omega(n \log n)$.

HIT CS&E

1. Straightforward application of decision tree method does not always give the best lower bound.
2. [**Closest Pair Problem:**] How many possible answers (or leaves) are there? At most $\binom{n}{2}$. This only gives a lower bound of $\Omega(\log n)$, which is very weak. Using more sophisticated methods, one can show a lower bound of $\Omega(n \log n)$.
3. [**Searching for a key in a sorted array:**] Number of leaves is $n + 1$. Lower bound on the height of the decision tree is $\Omega(\log n)$. Thus, binary search is optimal.

HIT CS&E

3.11 线性时间排序算法

- 基于比较的排序算法的时间复杂度下界为O($n$log$n$)
- 要突破这一下界——不能再基于比较
- 本节介绍三个线性时间排序算法

HIT CS&E

3.11.1 Counting Sort

- 排序小范围内的整数，线性时间复杂度
- 假设所有输入数据介于 0..k之间
- 使用辅助数组 C[0..k]，C[i]是原始输入中小于等于i ($0 \le i \le k$)数据的个数
- 由C[]和原始输入，可以确定排序结果
- 当$k = O(n)$时，算法复杂度为$\Theta(n)$.
- Counting sort 是稳定的，它保持相等的关键字值在排序前后的顺序

HIT CS&E

算法CountingSort(A,B,k)

输入：数组A[0:n-1]，$0 \le A[i] \le k$

输出：将A[]中数据排序后存入数组B[]

```
for i←0 to k
    C[i] ←0;
for  j←0 to Len(A)-1
    C[A[j]] ←C[A[j]]+1   //C[k]是A中k的个数
for i←1 to k
    C[i] ← C[i] +C[i-1] ; //C[k]是A中≤k的个数
for j←Len(A)-1 to 0
    B[C[A[j]]-1] ← A[j];
    C[A[j]] ←C[A[j]]-1;
```

时间复杂度O(n+k)=$O(n)$ if k=$O(n)$

HIT CS&E

例

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	5	3	0	2	3	0	3	4

	0	1	2	3	4	5
C	2	0	2	3	1	1

	0	1	2	3	4	5
C	0	2	2	4	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B	0	0	2	2	3	3	3	4	5

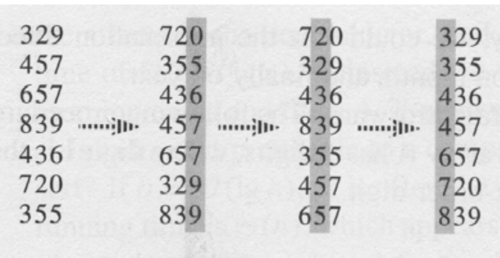
HIT CS&E

- 为什么不能总用counting sort来完成排序？
  - 因为其复杂性取决于输入元素的范围k
- 能用CountSort来排序32位的整数吗？为什么？
  - Answer: no, k too large (2^{32} = 4,294,967,296)

HIT CS&E

3.11.2 Radix Sort

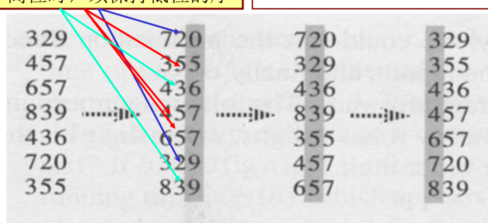
- 每个数字均由一些数值位构成
  - 每个数值位的取值均是有限的.
  - 在每个位上均可以用CountingSort排序



- 直观上，我们可以先排序最高位，再排序次最高位…
  - Problem: 最高位排序后，必须将输入数据依据最高位的取值分组，每组内再按次最高位排序….. 分组太多，太难伺候….
- 关键思想:先排序低位

RadixSort(A, d)
for i=1 to d
StableSort(A) on digit i

排序高位时，须保持低位的序



HIT CS&E

Radix Sort的正确性

- 对d（stableSort执行遍数）做归纳法：
  - d=1时，算法显然正确
  - 假设d<i时算法能给出正确的排序
  - 往证d=i时，算法能给出正确的排序
    - 如果两个数的第i位不同,则第i位上大小关系即为这两个数的大小关系 (低位的大小无关)
    - 如果两个数的第i位相同,则这两个数的低位数字已经按大小排序了。由于排序第i位时使用了稳定排序，故排序第i位后这两个数的先后次序即其低位的大小顺序

HIT CS&E

Radix Sort的时间复杂性

- CountingSort在排序 n个界于1..k之间的元素 .
  - 时间开销为: $O(n + k)$
- 对于d位的 n个数（每个位介于1…k之间）
  - RadixSort排序每个位即调用一次CountingSort，其时间开销为$O(n+k)$
  - 因此总时间开销为 $O(dn+dk)$
- 若 d 是常数且 k=$O(n)$, 时间复杂度为$O(n)$

HIT CS&E

用 Radix Sort排序大整数

- **Problem: 排序 1000,000个 64-位二进制整数**
  - Use 8-bit radix.
  - Each counting sort on 8-bit numbers ranges from 1 to 128.
  - Can be sorted in 64/8=8 passes by counting sort.
  - $O(8\ (n + 28))$.

HIT CS&E

- 一般而言,基于CountingSort的基数排序
  - 快
  - 渐进快 (i.e., $O(n)$)
  - 易于编码实现
  - 一个不错的选择
- 能用基数排序来排序浮点数?

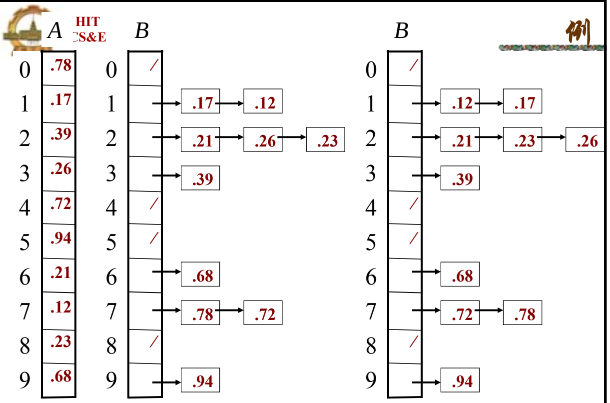
HIT CS&E

3.11.3 Bucket Sort

- 基本思想
  - 假设所有输入值均匀等可能地取自[0,1);
  - 初始化n个空桶，编号介于0到n-1之间;
  - 扫描输入，将数值$A[i]$放入编号为$\lfloor nA[i] \rfloor$的桶中;
  - 将各个桶内的数据各自排序
  - 依编号递增顺序输出各个桶内的数据
- 需要一系列桶,需要排序的值变换为桶的索引
  - 不需要比较操作

HIT CS&E

例



直观上，只要每个桶的数据不多，总时间可以是线性

HIT CS&E

Bucket Sort算法

算法BucketSort(A)

Input: 数组$A[0:n-1]$, $0 \le A[i] < 1$

Output: 排序后的数组A

```
for j ← 0 to m-1 do // 初始化 m个桶
    B[j] ← NULL;
for i ← 0 to n-1 do
    将元素A[i]插入桶 B[⌊nA[i]⌋]中     //链表维
for i ← 0 to n-1 do
    用InsertionSort排序桶B[i]内的数据
依编号递增顺序将各个桶内的数据回填到A中
```

HIT CS&E

时间复杂度分析

InsertionSort的时间复杂度为$O(n^2)$

$T(n)=\Theta(n)+\sum_{i=0,\ldots,n-1} O(n_i^2)$

n_i是落入$B[i]$中的数据的个数

对于含有n个数据的输入

- 具体的实例不一样，n_i的取值就不一样
- 如果将输入看成随机的，则n_i也是随机的
- $T(n)$也是随机的

由数学期望的线性性质和函数阶的性质得到

$E[T(n)]=\Theta(n)+\sum_{i=0,\ldots,n-1} O(E[n_i^2])$

- 下面证明$E[n_i^2]=2-1/n$，从而$E[T(n)]=\Theta(n)$

对于任意的i

令 $X_{ij}=1$　　如果算法运行时，$A[j]$落入$B[i]$

　$X_{ij}=0$　　如果算法运行时，$A[j]$未落入$B[i]$

显然，由于$A[j]$均匀取值于$[0,1)$, X_{ij}是随机变量

由桶的划分方式，知道 $P_r(X_{ij}=1) = 1/n$　　$P_r(X_{ij}=0) = 1-1/n$

$E(X^2_{ii})=1/n$　　$E(X_{ii}X_{ik})=1/n^2$　$(j \neq k)$

$$E(n_i^2) = E[(\sum_{j=0}^{n-1} X_{ij})^2]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} E(X_{ij}^2) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{0 \le k \le n-1 \\ k \neq j}} E(X_{ij} X_{ik})$$

$$= 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$