第2章 群

引言：群论的起源

群的概念在数学史上出现是在19世纪的上半叶，到了19世纪后期才正式出现，不久就成为现代数学的基础之一。

18世纪末在试图求解高次代数方程的代数解法时，由于研究方程诸根之间的置换而注意到了群的概念。基于这种思想，阿贝尔（**Abel**）证明了5次以上的一般的代数方程没有根式解。但是置换群与代数方程之间的关系的完全描述是由伽洛瓦（**Galois**）完成的，他用群论的方法彻底解决了代数方程可用根式求解的条件。置换群是最终形成抽象群的第一个重要来源。并在19世纪末数学家们终于成功地概括出了抽象群论的公理系统。

[本章主要内容]

1）群、子群及相关性质；
2）置换群、循环群；
3）子群的陪集、正规子群；
4）群的同态；

§2.1 群的定义

[本节内容]

1）群的定义；
2）群的两种定义的等价性；

定义1　群

设G为一非空集合，“ $\circ$ ”为G上的二元代数运算，称为乘法，且满足：

1）结合律：对$\forall\, a, b, c \in G$ 有：

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

2）有左单位元e：即对$\forall\, a \in G, e \circ a = a$

3）有左逆元素：即对$\forall\, a \in G, \exists\, b \in G$ 使得$b \circ a = e$（e为上述左单位元）

则称$(G, \circ)$为群。

注：该定义与“每个元素均有逆元素的幺半群称为群”的定义等价

定义2 **交换群（可换群）**：设 $(G,\circ)$ 为群，乘法“ $\circ$ ”满足交换律，即对 $\forall a,b\in G$ 有：$a\circ b=b\circ a$

则 $(G,\circ)$ 称为**交换群（可换群）**

或称为**阿贝尔群（Abel群）**

定义3 有限群：设$(G,\circ)$ 为群，且G是有限集，则称 $(G,\circ)$ 为有限群，此时称G的基数|G|为G的阶。

无限群：若G含有无穷多个元素.

例1 n次单位根之集 U_n 对复数的乘法构成交换群：

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\ ,\ k=0,1,\cdots\cdots,n-1$$

$$x_k^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\quad ,\quad x_e=1$$

例2 设非空集合G＝{a，b，c，d}其上定义乘法“○”如下：

○	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

1）找左单位元$e_{左}$：即表中应有一行与表头相同，故至少有一个

$$e_{左}=a$$

2）找左逆元：

即对$\forall\ x\in G,\ x'\circ x=e_{左}$

若所有元素均有左单位元，则此乘法表中每一列中均应出现该左单位元$e_{左}$，即此处a应在每一列出现。

3）交换律：由矩阵A＝A^T知

满足交换律

4）结合律：检验对$\forall x, y, z \in G$

是否有成立：

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$