近世代数课后习题作业 2 参考解答

1.

证明： 先证 $x\circ x=x$

由已知得：对 $\forall x\in S$ 有 $x\circ e_1=e_1\circ x=x$， $x*e_2=e_2*x=x$

则有 $x\circ x=(x*e_2)\circ(x*e_2)=x*(e_2\circ e_2)$，下证 $e_2\circ e_2=e_2$

因为 $e_2=e_1\circ e_2=(e_1*e_2)\circ e_2=(e_1\circ e_2)*(e_2\circ e_2)=e_2*(e_2\circ e_2)=e_2\circ e_2$

所以 $x\circ x=x*e_2=x$

再证 $x*x=x$

$x*x=(x\circ e_1)*(x\circ e_1)=x\circ(e_1*e_1)$，下证 $e_1*e_1=e_1$

因为 $e_1=e_2*e_1=(e_1\circ e_2)*e_1=(e_1*e_1)\circ(e_2*e_1)=(e_1*e_1)\circ e_1=e_1*e_1$

所以 $x*x=x\circ e_1=x$。

////////////////////////

2.

证明： 记 $H=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n\in A 使 x=a_1a_2\cdots a_n, n\geq 1\}$，下证 $(A)=H$

1）先证 H 为包含 A 的子半群。

显然 $A\subseteq H$（令 $n=1$ 即可），且"$\circ$"在 H 上的运算封闭，故 H 为包含 A 的子半群。

2）下证 H 的“最小性”。

设 P 为任意包含 A 的子半群，下证 $H\subseteq P$。

对 $\forall x\in H$， $\exists a_1,a_2,\cdots,a_i\in A$ 使得 $x=a_1a_2\cdots a_i$， 又 $A\subseteq P$， 所以 $a_1,a_2,\cdots,a_i\in P$，故有 $a_1a_2\cdots a_i\in P$，即 $x\in P$，所以 $H\subseteq P$。

////////////////////////

3.

证明： 令 $P=\{a|a\circ a=a, a\in M\}$

① 显然有 $e\in P$，故 $P\neq\phi$，且 $P\subseteq M$；

② 下证封闭性：对 $\forall a,b\in P$，下证 $a\circ b\in P$

因为 $(a\circ b)\circ(a\circ b)=a\circ(b\circ a)\circ b=a\circ(a\circ b)\circ b=(a\circ a)\circ(b\circ b)=a\circ b$， 故

$a \circ b \in P$。

////////////////////////

4.

解：不一定。设$G=(a)=\{e,a^1,a^2,a^3,\cdots\}$，$\{e,a^2,a^3,\cdots\}$为$G$的子幺半群，但不是循环幺半群。//成立的正例请大家自己给出。

//

5.

证明：记$S=\varphi^{-1}(e_2)$，则$S=\{x|\varphi(x)=e_2,x\in M_1\}$，显然有$S\subseteq M_1$

①S非空：由$\varphi(e_1)=e_2$知$e_1\in S$。

②封闭性：对$\forall x,y\in S$有：$\varphi(x)=e_2$，$\varphi(y)=e_2$，

则$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)=e_2*e_2=e_2$，所以$x\circ y\in S$

故S是M_1的一个子幺半群。

若S是M_1的理想，则有$SM_1\subseteq S$，$M_1S\subseteq S$

对$\forall x\in S$，$\forall y\in M_1$，$\varphi(x\circ y)=\varphi(x)*\varphi(y)=e_2*\varphi(y)=\varphi(y)$

同理$\varphi(y\circ x)=\varphi(y)*\varphi(x)=\varphi(y)*e_2=\varphi(y)$

所以如果$\varphi(y)=e_2$，则$x\circ y(y\circ x)\in S$，此时S是M_1的理想，否则不是。

////////////////////////

6.

证明：设$\varphi:(S_1,*)\to(S_2,\bullet)$同态，$\psi:(S_2,\bullet)\to(S_3,\Delta)$同态，记$f=\psi\circ\varphi$，由映射的符合知$f$为$S_1\to S_3$的映射。又对$\forall x,y\in S_1$：

$$f(x*y)=\psi\circ\varphi(x*y)=\psi(\varphi(x*y))=\psi(\varphi(x)\bullet\varphi(y))=\psi(\varphi(x))\Delta\psi(\varphi(y))$$

$$=\psi\circ\varphi(x)\Delta\psi\circ\varphi(y)=f(x)\Delta f(y)$$

所以$f=\psi\circ\varphi$为$S_1\to S_3$的同态，即两个同态的合成还是同态。

////////////////////////

7.

证明：由二元运算"$\circ$"的定义知其为$(S,\circ)$上的二元代数运算。

1）结合律：显然；

2）单位元： $e=(1,0)$ ；

3）逆元：对 $\forall(a,b)\in S$ ， $(a,b)\circ(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})\circ(a,b)=(1,0)$

综上 $(S,\circ)$ 是群。

////////////////////////

8.

证明：

1）封闭性： $(x_i x_j)^n=1$

2）结合律：显然；//复数的乘法。

3）单位元： $e=1$；

4）逆元： $x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ ， $x_k^{-1}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$

////////////////////////

9.

证明：此题中由$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix}$，其中 $ac=\pm1, bd=\pm1$，故 G 对矩阵乘法封闭性显然满足，故构成一个代数系。

1）结合律：矩阵乘法满足结合律；

2）单位元： $e=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；

逆元： $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$