§2.3 子群、生成子群

[本节主要内容]

1）子群的定义；
2）介绍几个子群的性质定理；
3）给出几个子群的判定定理；
4）概念：生成子群、群的中心、
换位子、换位子群；

定义1 设$(G,\circ)$为群，S是G的非空子集若“$\circ$”在S中封闭且S对此乘法也构成一个群，则称S是G的一个子群。

定理1 设G_1为群G的子群，则G_1的单位元必是G的单位元；G_1的元素a在G_1中逆元素也是a在G中的逆元素。

定理2 群G的任意多个子群的交还是G的子群。

定理3 任一群不能是其两个真子群的并。

例1 求 S_3 的真子群。

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}=\{e,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$$

解： $a_1{}^{-1}=a_1 \quad a_2{}^{-1}=a_2 \quad a_3{}^{-1}=a_3 \quad a_4{}^{-1}=a_5$

$$G_1=\{e\} \quad G_2=\{e,a_1\} \quad G_3=\{e,a_2\}$$

$$G_4=\{e,a_3\} \quad G_5=\{e,a_4,a_5\}$$

定理4 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是：

1） $\forall a, b \in S, ab \in S$

2） $\forall a \in S, a^{-1} \in S$

定理5 群G的非空子集S是G的子群的充分必要条件是：

对$\forall a,b\in S$

总有：

$$ab^{-1}\in S$$

定理6 群G的**有限**非空子集F是G的子群的充分必要条件是 $FF \subseteq F$

即：

$$\forall a, b \in F, ab \in F$$

定义2 设M是群G的非空子集，则G的包含M的所有子群的交称为由M生成的子群，记为（M）

注： 设 $(G, \circ)$ 为群，M为G的非空子集，则由M扩充为G的子群 M' 方法：

1）$M' = M \cup \left\{ a^{-1} \middle| \forall\, a \in M \right\}$

2）对 M' 中的任意两个元素作乘积放入 M'，如此反复。

例2 在 S_3 中求由 a_1, a_2 生成的子群。

$$A = (a_1, a_2) = S_3$$

例3 设G是一个群，$a \in G$ 则

$$(a) = \{\cdots, a^{-n}, \cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a^{1}, a^{2}, \cdots, a^{n}, \cdots\}$$

定义3 中心元素：设 $(G,\circ)$为群，$a\in G$，对 $\forall x\in G$ 有 $ax=xa$ 则称a为G的中心元素。由G的中心元素所构成的集合C 称为G的中心，即：

$$C=\{a\mid\forall x\in G, ax=xa, a\in G\}$$

定理7 群G的中心C是G的可交换子群。

定义4　设 $(G,\circ)$ 为群，对 $\forall\, a, b \in G$

$aba^{-1}b^{-1}$ 称为a与b的换位子。

换位子群：G的所有换位子的集合所生成的子群。