近世代数课后习题作业 5 参考解答

1.

证明：设 $H = A\bigcap B$，则由定理知 H 仍为群 G 的子群，则由拉格朗日定理得：

$|B|=|H|\cdot[B:H]$，记 $j=[B:H]=\dfrac{|B|}{|H|}$，则 $B = Hb_1\bigcup Hb_2\bigcup\cdots\bigcup Hb_j$，

$b_i\in B(i=1,\cdots,j)$ 其中 $Hb_i(i=1,\cdots,j)$ 为互不相同的右陪集。则 $AB = AHb_1\bigcup AHb_2\bigcup\cdots\bigcup AHb_j$，又 $AH=A$，所以 $AB = Ab_1\bigcup Ab_2\bigcup\cdots\bigcup Ab_j$，

又 $Ab_i\bigcap Ab_l=\phi$，否则，若 $Ab_i\bigcap Ab_l\neq\phi$，则由陪集的性质得：$Ab_i = Ab_l$，从而 $b_ib_l^{-1}\in A$，又 $b_ib_l^{-1}\in B$，所以 $b_ib_l^{-1}\in A\bigcap B$，即 $b_ib_l^{-1}\in H$，所以 $Hb_i = Hb_l$，矛盾。因此根据容斥原理有：$|AB|=|Ab_1|+|Ab_2|+\cdots+|Ab_j|=j\cdot|A|$

即 $|AB|=\dfrac{|B|}{|H|}\cdot|A|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}$

2.

证明：假设不成立，则 $\exists a\in G$，使得 $a^{-1}Ha\bigcap H=\{e\}$，记 $P=a^{-1}Ha$，由 H 为 G 的子群易知 P 也为 G 的子群，且 $|P|=|H|=n$（由映射 $\varphi(h)=a^{-1}ha$ 为单射），则由 1 题的结论：$|PH|=\dfrac{|P||H|}{|P\bigcap H|}=\dfrac{n\cdot n}{1}=n^2$，又 $PH\subseteq G$，$|G=n^2$，所以 $PH=G$，则由教材中的例题结论知 $P\bigcap H=H\neq\{e\}$，矛盾。

3.

证明：由前面的习题结论知六阶群中一定有三阶子群，假设不唯一，设 A,B 为六阶群 G 两个不同的三阶子群。不妨设 $A=\{e,a,b\}$，$B=\{e,c,d\}$，则 $A\bigcap B=\{e\}$。从而 $|AB|=\dfrac{|A||B|}{|A\bigcap B|}=9>6$ 矛盾。

4.

证明：设 H 为群 G 的子群，且有 $[G:H]=2$，则其左陪集构成的划分为：H,aH $(a\notin H)$，其右陪集构成的划分为：$H,Ha(a\notin H)$，从而 $aH=G\setminus H$

$Ha=G\setminus H$，所以 $aH=Ha$。
5.
证明：设 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群，记 $H=H_1\bigcap H_2$。则对 $\forall a\in G,h\in H$，由 H_1,H_2 为群 G 的两个正规子群得：$aha^{-1}\in H_1$，$aha^{-1}\in H_2$，所以 $aha^{-1}\in H_1\bigcap H_2$，即 $aha^{-1}\in H$，故 H 是 G 的正规子群。
6.
证明：对 $\forall a,b\in NH$，则 $\exists n_1,n_2,h_1,h_2\in NH$，使得 $a=n_1h_1,b=n_2h_2$，则 $ab^{-1}=n_1h_1h_2^{-1}n_2^{-1}$。又由 N 是 G 的正规子群，则对 $\forall x\in G$，$xN=Nx$。故 $\exists n_3\in N$ 使得 $h_2^{-1}n_2^{-1}=n_3h_2^{-1}$，则 $ab^{-1}=n_1h_1n_3h_2^{-1}$，同理 $\exists n_4\in N$，使得 $h_1n_3=n_4h_1$，从而 $ab^{-1}=n_1n_4h_1h_2^{-1}=(n_1n_4)(h_1h_2^{-1})\in NH$，则由子群的判定定理知 NH 是 G 的子群。
7.
证明：设 G 为群且 $|G|=2n$，则由前面习题作业结论知偶数阶群 G 中一定存在一个阶为 2 元素，即 $\exists a\in G$，$a^2=e$，从而 $H=(a)=\{e,a\}$。由 G 为交换群，则对 $\forall x\in G$，$xH=Hx=\{x,ax\}=\{x,xa\}$，故 H 为群 G 的一个 2 阶正规子群，根据拉格朗日定理以及正规子群和商群的关系知 G 必有一个 n 阶商群。
8.
证明：
必要性 $\Rightarrow$：对 $\forall a,b\in G$，由 H 为 G 的正规子群可得：$aH\cdot bH=a(Hb)H=a(bH)H=abHH=abH$，仍为 H 的左陪集。
充分性 $\Leftarrow$：由已知可得：对 $\forall a\in G$，$aH\cdot a^{-1}H=cH$，因为 $e\in aH\cdot a^{-1}H$，从而 $e\in cH$，；又 $e\in H$，即 $e\in cH\bigcap H$，则由左陪集的性质得：$cH=H$，所以 $aH\cdot a^{-1}H=H$，则对 $\forall h\in H$，$\exists h_1,h_2\in H$，使得 $aha^{-1}h_1=h_2$ $\Rightarrow$ $aha^{-1}=h_2h_1^{-1}\in H$
9.
证明：由 H 是群 G 的 2 阶正规子群可设 $H=\{e,a\}$，且对 $\forall x\in G$，$xH=Hx$，即 $\{x,xa\}=\{x,ax\}$，所以 $xa=ax$，故 $a\in C$，从而 $H\subseteq C$