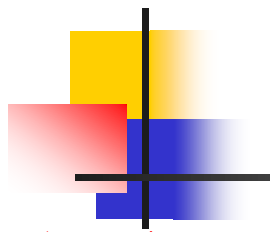




§ 2.4 变换群、同构

[本节主要内容]

- 1) 群的同构定义;
- 2) 对称群、变换群、置换群定义;
- 3) 群的同构的Cayley定理;
- 4) 群的自同构。



定义1 设 (G_1, \circ) 与 $(G_2, *)$ 为群, 若存在一一映射 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ 使得对 $\forall a, b \in G_1$ 有 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ 则称 G_1 与 G_2 同构, 记为 $G_1 \cong G_2$ 称 φ 为 G_1 到 G_2 上的一个同构。

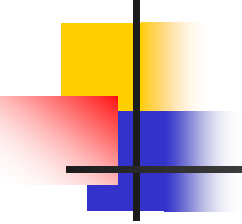
例1 设 (G_1, \circ) 与 (G_2, \oplus) 为群,

$$G_1 = \{a, b, c, d\} \quad G_2 = \{0, 1, 2, 3\}$$

\circ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$\varphi: G_1 \rightarrow G_2 \quad \varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 1, \quad \varphi(c) = 2, \quad \varphi(d) = 3$$



注：同构的两个群，除了在元素和代数运算的表示符号不同外，他们的性质完全一样，抽象地看是一样的。



同构的性质:

1) $G_1 \cong G_1$

2) 若 $G_1 \cong G_2$, 则 $G_2 \cong G_1$

3) 若 $G_1 \cong G_2$, $G_2 \cong G_3$ 则 $G_1 \cong G_3$



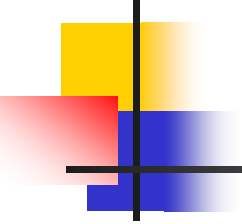
定义2 对称群:

设 S 为非空集合, $f: S \rightarrow S$ 的一一映射
记 $\text{Sym}(S) = \{ f \mid f: S \rightarrow S \}$

则 $\text{Sym}(S)$ 关于映射的合成运算构成
一个群, 称为 S 上的**对称群**。

当 $S = \{ 1, 2, 3, \dots, n \}$ 时,

则 $\text{Sym}(S) = S_n$ 为所有 n 次置换之集,
称为 **n 次对称群**。

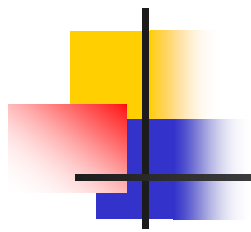


定义3 变换群： $\text{Sym}(S)$ 的任一子群称为 S 上的一个变换群。

置换群： S_n 的任一子群称为置换群。

置换群是**变换群**的一种特例，是群论中非常重要的一类群，而且也是研究几何体的对称、晶体的结构等所不可缺少的工具。

群论最早就是从研究置换群开始的，为了解决**5次及5次以上**方程的根式求解问题，伽罗瓦将多项式的根的变换（置换）构成集合，这个集合对于变换的乘法构成代数系统，伽罗瓦最开始称为群，即现在的置换群。他证明一个方程可用根式求解的充要条件是它的伽罗瓦群是可解群。



定理1 群的Cayley同构定理:

任何一个群同构于某个变换群。

推论1 任一 n 阶有限群同构于 n 次对称群 S_n 的一个 n 阶子群。即有限群同构于某个置换群。

例 一、4次单位根之集 U_4 对复数的乘法*
构成群 $(U_4, *)$

$$U_4 = \{1, -1, i, -i\}$$

二、构造变换群:

$$L(U_4) = \left\{ f_a \mid f_a : U_4 \rightarrow U_4, \forall x \in U_4, \right. \\ \left. f_a(x) = a * x, \quad a \in U_4 \right\}$$

即:

$$L(U_4) = \{ f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i} \}$$

其中: $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}$

$$f_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

$$f_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{-i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -i & i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

相应乘法表:

$(U_4, *)$

*	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

$(L(U_4), \circ)$

\circ	f_1	f_{-1}	f_i	f_{-i}
f_1	f_1	f_{-1}	f_i	f_{-i}
f_{-1}	f_{-1}	f_1	f_{-i}	f_i
f_i	f_i	f_{-i}	f_{-1}	f_1
f_{-i}	f_{-i}	f_i	f_1	f_{-1}

建立双射: $\varphi: U_4 \rightarrow L(U_4)$

$$\varphi(a) = f_a, \forall a \in U_4$$



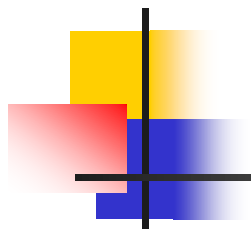
定义4 设 (G, \circ) 为群, $\varphi: G \rightarrow G$ 上的一一映射, 且对 $\forall a, b \in G$

$$\text{有 } \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$$

则称 φ 为 G 的一个自同构。

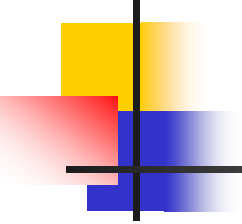


定理2 设 $(G, *)$ 为群，则 G 的所有自同构之集 $A(G)$ 对映射的合成运算构成一个群，称为 G 的自同构群。



定义5 内自同构：群G的由其元素a确定的自同构 $\varphi(x) = a x a^{-1}, \forall x \in G$ 称为G的内自同构。

外自同构：G的其他自同构称为外自同构。



定理3 群 G 所有内自同构之集
是 G 的自同构群的一个
子群，称为内自同构群。