§1.2 半群与幺半群的概念

定义1 设“$\circ$”是非空集合S上的一个二元代数运算，称为乘法。若对$\forall a,b,c \in S$有$(a \circ b)\circ c = a \circ (b \circ c)$ 则称集合S对乘法“$\circ$”形成一个半群，记为$(S,\circ)$

即半群就是满足结合律的二元代数运算的代数系。

定义2 交换半群：设$(S,\circ)$为半群，若乘法“$\circ$”还满足交换律，则称为交换半群，或称为可换半群。

定义3 有限半群：只含有有限个元素的半群称为有限半群，否则称为无限半群。

例 （Z，＋）、（R，＋）、（R，*）均为无限可换半群。

例 $(M_n, \bullet)$表示n×n的实矩阵上的矩阵乘法运算，为不可交换半群。

例 所有n次置换构成的集合 S_n 对置换的乘法形成半群 $(S_n,\circ)$ 为不可交换有限半群。

$|S_n| = n!$

例 设n为正整数，则$(Z_n, \oplus)$为半群，其中Z_n为整数集Z上的模n的同余关系下等价类之集，即：

$$[i]=\{m \mid m\in Z 且 m\equiv i(\bmod n)\}$$

$$Z_n=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$$

在Z_n上定义的加法$\oplus$如下：

$$[i]\oplus[j]=[i+j]$$

例 全体偶数之集E对通常的乘法构成一个可交换半群，无单位元。

例 设S为一切形如: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in N$ 的2×2矩阵之集。S对矩阵的乘法构成一个不可交换半群。且有无穷多个左单位元素 $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 但是无右单位元.

定理1 如果半群$(S,\circ)$中既有左单位元又有右单位元，则左单位元与右单位元相等，从而有单位元素且单位元素是唯一的。

思考题

1.如果半群有两个不同的右幺元，问：该半群有多少个左幺元?

定义4 有单位元素的半群$(S,\circ)$称为幺半群。其单位元素记为e，幺半群记为$(S,\circ,\ e)$。若S为有限集，则称为有限幺半群。把S的基数称为幺半群$(S,\circ,\ e)$的阶。

例 $(2^S, \cup, \phi)$, $(2^S, \cap, S)$

定理2 有限半群$(S, \circ)$为一个有限幺半群当且仅当$\exists s, t \in S$使$sS = S$, $St = S$

定理3 设$(S,\circ, e)$是一个幺半群，m,n是任意的任意的非负整数，则$\forall a\in S$有：$a^m \circ a^n = a^{m+n}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

如果$(S,\circ, e)$是可交换的，则对$\forall a,b\in S$有 $(a\circ b)^n = a^n \circ b^n$

其中：$a^0 = e, a^{n+1} = a^n \circ a, n \geq 0$

此时用加号“＋”表示该二元运算，单位元记为“0”，则$(S,\circ,e)$记为

$(S,+,0)$，a^n记为na，即0a=0,

1a=a,na=(n-1)a+a

定义5设$(S,\circ,\ e)$是一个幺半群，元素

$a \in S$ 如果存在一个元素 $a_l \in S$

使 $a_l \circ a = e$，则称a_l为a的左逆元素；

如果存在一个元素$a_r \in S$使得$\forall a \in S$

有$a \circ a_r = e$则称 a_r 为a的右逆元素；

如果存在一个元素$b \in S$ 使得$\forall a \in S$

有：$b \circ a = a \circ b = e$

则称b为a的逆元素。

定理4 幺半群$(S, \circ, e)$中元素a若有左逆元素 a_l 又有右逆元素 a_r 则 $a_l = a_r$ 于是a有逆元素且a的逆元素唯一，记为a^{-1}

定义6 每个元素都有逆元素的幺半群称为群。

定理5 有限半群$(S,\circ)$是一个群的充要条件是$\forall s \in S$有$sS = S$且$\exists t \in S$使得 $St = S$

思考题

2.设$S=\{a,b,c\}$在S上定义代数运算"$\circ$"，使得：

$$a\circ a=b,b\circ b=c,c\circ c=a$$

问代数系$(S,\circ)$能够构成一个半群？