2016年秋季学期概率论与数理统计期末考试题答案

一．1. $\frac{7}{15}$ 2. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^{-1}<y<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 3. 0.5 4.（19.5617，20.4383）5. 5

（3分/题，总共15分）

二．1.D 2.B 3.A 4. C 5.B

（3分/题，总共15分）

三．解：设 A=“先取出的为一等品”，

B=“后取出的为一等品”，C_i =”取出的为第 i 箱”，i=1,2.

（1）$P(A)=P(A|C_1)P(C_1)+P(A|C_2)P(C_2)=\frac{1}{2}(\frac{10}{50}+\frac{18}{30})=\frac{2}{5}$，6分

（2）

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB(C_1+C_2))}{P(A)}=\frac{P(C_1AB)+P(C_2AB)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(C_1)P(A|C_1)P(B|AC_1)+P(C_2)P(A|C_2)P(B|AC_2)}{P(A)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29})/\frac{2}{5}=\frac{690}{1421}=0.48557,$$ 3分

四．解(1)总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta-1}, & 1\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{x-1}{\theta-1}, & 1\le x\le\theta\\ 1, & x>\theta\end{cases}$，

$X_{(n)}$ 的分布函数为：$F_{X_{(n)}}(x)=[F(x)]^n$

故 $f_{X_{(n)}}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}, & 1\le x\le\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 6分

(2) $EX_{(n)}=\int_1^\theta x\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}dx=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\int_1^\theta(x-1)^n dx+\int_1^\theta(x-1)^{n-1}dx]$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\frac{(\theta-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(\theta-1)^n}{n}]=\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}$$

$$EX_{(n)}^2=\int_1^\theta x^2\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}dx$$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\int_1^\theta (x-1)^{n+1}dx+\int_1^\theta 2(x-1)^{n-1+1}dx+\int_1^\theta (x-1)^{n-1}dx]]$$

$$=\frac{n}{(\theta-1)^n}[\frac{(\theta-1)^{n+2}}{n+2}]+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1$$

$$DX_{(n)}^2=EX_{(n)}^2-(EX_{(n)})^2=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}+\frac{2n(\theta-1)}{n+1}+1-(\frac{n(\theta-1)}{n+1}+1)^2$$

$$=\frac{n(\theta-1)^2}{n+2}-\frac{n^2(\theta-1)^2}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}(\theta-1)^2$$ 3 分

五．解：（1）因 $\max(X,Y)=Y$

故 $f_M(y)=f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y xe^{-y}dx, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}y^2e^{-y} & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$,

令解: 令 M 的分布函数 $F_M(z)$，

$F_M(z)=P(\max(X,Y)\le z)$

当 $z\le 0$ 时， $F_M(z)=0$，

当 $z>0$ 时， $F_M(z)=P(X\le z,Y\le z)=\int_0^z(\int_x^z xe^{-y}dy)dx=1-e^{-z}-ze^{-z}-z^2e^{-z}/2$.

故 $f_M(z)=F_M'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z} & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$ 4 分

（2）因 $Z=\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$

故 $f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

使 $f(x,z-x)$ 不为 0 的区域为：$0<x<z-x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ z>2x\end{cases}$.

当 $z\le 0$ 时， $f_z(z)=0$，

当 $z>0$ 时， $f_z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}xe^{-(z-x)}dx=e^{-z}+\frac{z}{2}e^{-z/2}-e^{-z/2}$

故 $f_z(z)=\begin{cases} e^{-z}+(\dfrac{z}{2}-1)e^{-z/2} & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$ 　　2 分

令解：$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$，不为零的区域 $0<z-y<y \Rightarrow \begin{cases} z>y \\ z<2y \end{cases}$；

(3) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}xe^{-y}dy=1-e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1}$. 　　3 分

六．解：（1）矩估计：两次分部积分可得

$EX=\int_0^{\infty}\lambda^2x^2e^{-\lambda x}dx$

$=\int_0^{\infty}-\lambda x^2de^{-\lambda x}=-\lambda x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+2\lambda\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx=2\int_0^{\infty}-xde^{-\lambda x}=2(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}))=\frac{2}{\lambda}$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{EX}$

故参数λ的矩估计量为：$\widehat{\lambda}_1=\dfrac{2}{\overline{X}}$； 　　4 分

（2）最大似然估计：

似然函数为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^n\lambda^2x_ie^{-\lambda x_i},x_i>0$

$$=\lambda^{2n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\prod_{i=1}^n x_i$$

对数似然：

$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^n x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\lambda}=\dfrac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i=0$，

故参数 λ 的最大似然估计量 $\widehat{\lambda}_2=\dfrac{2}{\overline{X}}$ 　　5 分

七．解：(1)设 X 的分布函数为 $F_X(x)$，即 $F_X(x)=P(X\le x)$，则

当 $x\le 0$ 时，$F_X(x)=0$，

当 $x>0$ 时，

$F_X(x)=P(X\le x)=1-P(X>x)=1-P(N(x)=0)=1-\dfrac{(\lambda x)^0}{0!}e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda x}$, 故 X

的分布函数为：$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 其概率密度函数为：$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

即 X 服从参数为 λ 的指数分布. 　　2 分

(2) $P(X>2\,|\,X>1)=P(X>1)=1-F_X(1)=e^{-\lambda}$ 2 分（**据指数分布具有后效性特点**）