近世代数课后习题作业 6

1．设G为m阶循环群，$\overline{G}$为n阶循环群。试证：$G \sim \overline{G}$当且仅当$n \mid m$。

2．设G是一个循环群，H是G的子群，试证：G/H也是循环群。

3．设$Z(\sqrt{2})=\{m+n\sqrt{2} \mid m,n\in Z\}$，其中$Z$是整数的全体之集。

试证：$Z(\sqrt{2})$对数的通常加法和乘法构成一个环。

4．设$Z(i)=\{m+ni \mid m,n\in Z\}$，其中$Z$是整数的全体之集。

试证：$Z(i)$对复数的加法和乘法构成一个环。

5．设$Q(\sqrt[3]{2})=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b\in Q\}$，其中$Q$是全体有理数之集。

试证：$Q(\sqrt[3]{2})$对数的通常加法和乘法不构成一个环。

6．设$Q(\sqrt[3]{2}\,,\sqrt[3]{4})=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c\in Q\}$，其中$Q$是全体有理数之集。

试证：$Q(\sqrt[3]{2}\,,\sqrt[3]{4})$对数的加法和乘法构成一个域。

7．设e是环R的唯一左单位元。试证：e是R的单位元。

8．设$(R,+,\circ)$是一个有单位元 1 的环，如果R中的元素a,b及$ab-1$均有逆元素，

试证：$a-b^{-1}$及$(a-b^{-1})^{-1}-a^{-1}$也有逆元素，且$((a-b^{-1})^{-1}-a^{-1})^{-1}=aba-a$

9．证明：有单位元素的环R中零因子没有逆元素。

10. 证明：在交换环中二项式定理成立，即有：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n$$

11. 设R是一个无零因子环。如果R中的元素a有左逆元，证明a必有右逆元，从而a有逆元。

12. 设R是一个环，$a,b\in R$，$ab=ba$。试证：a与$-b$，a与$-ab$可交换。如果

a与b,c可交换，试证：a与$b+c$，$a+c$也可交换。

13. 设F是一个域，它仅有四个元素。证明：

1）F的特征数是 2。

2）F中任一非零元和单位元e均满足方程$x^2=x+e$

3）列出F的加法表和乘法表。

14.如果p不是素数，Z_p是一个域吗？为什么？

15. 设域F的特征为有限数p，a与b及a_i均在F里。证明：

$$(a \pm b)^{p^n} = a^{p^n} \pm b^{p^n}$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$$

16. 假设E是一切偶数之集。证明：

1） E是Z的一个子环。

2） $N = \{4r \mid r \in E\}$是的E理想。

3） $N = (4)$吗？为什么？

17. 设Z是整数环。证明：$(3,7) = Z$。又$(13,10) = ?$

18. 设$(R,+,\circ)$是一个环，S和T是R的两个非空子集。定义S与T的和$S+T$为：

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$$

证明：如果N和H是R的理想，则$N+H$也是R的理想。