§2.8 同态基本定理

[本节主要内容]

1）群的同态的定义；
2）群的同态的性质定理；
3）群的同态基本定理；

定义1 **同态：** 设 $(G_1,\circ)$ 与 $(G_2,*)$ 为群

若存在映射 $\varphi: \mathrm{G}_1 \to G_2$ ，使得

对 $\forall\, a,b \in G_1$ 有 $\varphi(a\circ b)=\varphi(a)*\varphi(b)$

则称 φ 为 G_1 到 G_2 上的一个同态。

满同态：若φ为满射，记为 $G_1 \sim G_2$

单同态：若 φ 为单射

同构：若φ既为满射又为单射

例1 设$(Z,+)$为整数加法群，

$S=\{1,-1\}$关于通常乘法构成群$(S,*)$

$\varphi: Z \to S$ 对$\forall a \in Z$有：

$$\varphi(a)=\begin{cases} 1 \ \ if \ \ a=2k, k \in Z \\ -1 \ \ if \ \ a=2k+1, k \in Z \end{cases}$$

则对 $\forall a,b \in Z$ 有：

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)*\varphi(b)$$

定理1 设 $(G_1, \circ)$ 与 $(G_2, *)$ 为群，

$\varphi: \mathrm{G}_1 \to G_2$ 的同态，则对 $\forall a \in G_1$ 有：

1） $\varphi(e_1) = e_2$

2） $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

定理2 设 $(G_1, \circ)$ 为群，$(G_2, *)$ 是一个具有二元代数运算的代数系，$\varphi: \mathrm{G}_1 \to G_2$ 的满射，且对$\forall\ a, b \in G_1$

有 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

则为 $(G_2, *)$ 群。

定理3 设 $\left(G_1, \circ\right)$ 与 $\left(G_2, *\right)$ 为群，

$\varphi : \mathrm{G}_1 \to G_2$ 的满同态，

则 $\varphi^{-1}\left(e_2\right) = \left\{x \mid \varphi\left(x\right) = e_2, x \in G_1\right\}$

是 G_1 的一个正规子群。

定义2 设$(G_1,\circ)$与$(G_2,*)$为群，$\varphi: G_1 \to G_2$的满同态，则G_1的正规子群$\varphi^{-1}(e_2)$称为同态φ的核，记为Kerφ．$\varphi(G_1)$称为在φ下G_1的同态象.

定理4 设$(G_1, \circ)$与$(G_2, *)$为群，

$\varphi: \mathrm{G}_1 \to G_2$ 的满同态，则：

1）若 H 是 G_1子群，则 $\varphi(H)$是G_2的子群；

2）若 N 是G_1的正规子群，则$\varphi(N)$是G_2的正规子群；

3）若 $\overline{H}$ 是 G_2 子群，则 $\varphi^{-1}\left(\overline{H}\right)$ 是 G_1 的子群；

4）若 $\overline{N}$ 是 G_2 的正规子群，

则 $\varphi^{-1}\left(\overline{N}\right)$ 是 G_1 的正规子群；

定理5 设N是G的正规子群，则有：

$G \sim G/N$（自然同态）。若 φ 是G到G/N的同态，则Ker φ ＝N

定理6 群的同态基本定理：

设 φ 为群 G_1 到 G_2 的满同态，E＝Ker φ ，则：

$$G_1/E \cong G_2$$

例2 对例1中的满同态运用同态基本定理可得:

$$E = Ker\,\varphi = \varphi^{-1}(1) = \{a \mid a = 2k, k \in Z\}$$

$Z/E = \{E, F\}$其中$F = \{a \mid a = 2k+1, k \in Z\}$

则同构映射为$\alpha : Z/E \to S$且有:

$$\alpha(E) = 1, \alpha(F) = -1$$

定理7 群G的任一满同态 φ 均可分解成一个自然同态 γ 与一个同构 f 的合成。即 $\varphi = f \circ \gamma$
并且 f 是唯一的。

例 设群 $G=\{e,x,y,z\}$，

∘	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	z	y
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

G上的乘法∘由右表给出：

1) 构造出与其同构的置换群；

2) 若 $G_1=\{e_1,a\}$，G_1中的乘法 $*$ 定义如下：

$$e_1*e_1=e_1, e_1*a=a*e_1=a, a*a=e_1$$

证明 $(G_1,*)$是一个群，若 $\varphi:G\to G_1$，使得

$$\varphi(e)=\varphi(x)=e_1, \varphi(y)=\varphi(z)=a$$

则φ是一个同态，并且指出同态基本定理中的映射 γ 和 $\overline{\varphi}$