2015 年哈工大概率统计试题

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设 $P(A)+P(B)=0.7$，且 A,B 只发生一个的概率为 0.5，则 A,B 都发生的概率为 ________ .

2．设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$，则随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度为

$f_Y(y)=$

________________ .

3．设随机变量 X，Y 的相关系数为 0.5，$EX=EY=0, EX^2=EY^2=2$，则

$E(X+Y)^2=$ ________.

4．生产一个零件所需时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，观察 25 个零件的生产时间得 $\overline{x}=5.5$ 秒，样本标准差 $s=1.73$ 秒，则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为________________.

5．设随机变量 X，Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则

$$P\{\max(X,Y)\le 1\}= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

注：可选用的部分数值：$t_{0.05}(24)=1.7109$, $t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.025}(25)=2.0595$,

Φ（1.96）$=0.975$，Φ（1.645）$=0.95$.

二、选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1．设 $0<P(B)<1,\ P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid \overline{B})=1$，则

（A） A,B 互不相容 .　　（B） A,B 互为对立事件.

（C） A,B 相互独立 .　　（D） A,B 不独立.　　【　　】

2．下列函数可作为随机变量的分布函数的是

（A） $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$.　　（B） $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

（C） $F(x)=e^{-x},-\infty<x<\infty$.　　（D） $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x,-\infty<x<\infty$.　　【　　】

3．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(1,2^2)$ 的一个样本， 其中 $\overline{X}$ 为样本均值，则下列结论中正确的是

（A）$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-1\right)^2 \sim \chi^2\left(n\right)$.　　　（B）$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-1\right)^2 \sim F(n,1)$.

（C）$\frac{\overline{X}-1}{\sqrt{2}/\sqrt{n}} \sim N\left(0,1\right)$.　　　（D）$\frac{\overline{X}-1}{2/\sqrt{n}} \sim t(n)$.　　　【　　】

4．设随机变量 $X \sim U[0,\ 6]$，$Y \sim B(12,\ \frac{1}{4})$，且 X,Y 相互独立，则根据切比雪夫不等式有 $P(X-3<Y<X+3) \geq$ ________.

（A）$\frac{1}{4}$.　　（B）$\frac{3}{5}$.　　（C）$\frac{3}{4}$.　　（D）$\frac{5}{12}$.　　【　　】

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\ \sigma^2)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 与 S^2 分别为其样本均值和样本方差，则下列结论正确的是

（A）$2X_2-X_1 \sim N(\mu,\sigma^2)$.　　　（B）$\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$.

（C）$\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(n-1\right)$.　　　（D）$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n-1} \sim t(n-1)$.　　【　　】

三、（9 分）某人外出可以乘坐飞机，火车，轮船，汽车四种交通工具，其概率依次为 $0.05, 0.15, 0.30, 0.5$，而乘坐这几种交通工具能如期到达的概率依次为 $0.80, 0.70, 0.60, 0.90$，求：

（1）该人如期到达的概率；（2）已知该人误期到达，求他是乘坐火车的概率。

四、（9 分）设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})}, & x\geq 0, y\geq 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，

求：（1）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$，并问 X,Y 是否相互独立？ 为什么？

（2）$Z=X+Y$ 的概率密度.

五、（9 分）设随机向量 (X,Y) 服从区域 $G=\{(x,y)|0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 2\}$ 上二维均匀分布，$U=|X-Y|$，求（1）U 的概率密度 $f_U(u)$；（2）U 的期望 EU 和方差 DU.

六、（9 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。求：

（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和最大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；（2）讨论 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$ 无偏性。

七、(4 分)设某商店每月销售某种商品的数量服从参数为 6 的泊松分布，问在月初要库存多少此种商品才能保证当月不脱销的概率为 0.99117？ (泊松分布表见下图表)

m \ λ	4	5	6	7	8
11	0.00284	0.01370	0.04362	0.09852	0.018411
12	0.00092	0.00545	0.02009	0.05335	0.11192
13	0.00027	0.00202	0.00883	0.02700	0.06380

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

2015年哈工大概率统计试题及答案

一、填空题：（15分）

1. 0.1　　2. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \dfrac{1}{y^2}, & y>1\end{cases}$　　3. 6　4. (4.786, 6.214).　　5. $\dfrac{1}{9}$

二、选择题：（15分）

1C　2B　3A　4D　5B

三、解：（1）设A_1,A_2,A_3,A_4分别表示乘坐飞机，火车，轮船，汽车四种交通工具，B表示如期到达事件。

利用全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.05\times0.80+0.15\times0.7+0.3\times0.6+0.5\times0.9=0.775$$

5分

（2） 利用Bayes公式：

$$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{0.15\times(1-0.7)}{1-0.775}=\frac{0.045}{0.225}=0.2$$

4分

四、解：（1）（1）当$x\ge 0$时，$f_X(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dy=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$，所以

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

当$y\ge 0$时$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{6}e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}dx=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}$，所以$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

由于$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X与Y相互独立.　　5分

（2）由于X与Y相互独立，故可利用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}\int_0^z \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{3}e^{-\frac{z-x}{3}}dx, & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}-e^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0\\ 0 & z<0\end{cases}$$ 4 分

五、 解：（1）令 U 之 $d\cdot f\ F(U)$

$\forall u\in R$，$F(U)=P(U\le u)=P(|X-Y|\le u)$

当 $U\le 0$ 时 $F(U)=0$　$U\ge 2$ 时 $F(\mathrm{u})=1$

$(X,Y)pdf$ 为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 当$0<u<2$时

$$F(u)=P(|X-Y|\le u)=\frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right]$$

$$\therefore f(u)=F'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 5 分

（2）$EU=\int_0^2 u\times\frac{1}{2}(2-u)du=\frac{1}{2}[u^2-\frac{1}{3}u^3]\big|_0^2=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{3}\times 8)=\frac{2}{3}$

$EU^2=\int_0^2 u^2\times\frac{1}{2}(2-u)du=\frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4]\big|_0^2=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\times 8-\frac{1}{4}\times 16)=\frac{2}{3}$

$DU=EU^2-(EU)^2=2/3-(2/3)^2=2/9$ 4 分

六、解：（1）1）矩估计：$EX=\int_0^1\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\big|_0^1=\frac{1+\theta}{2}$

令 $\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$，

所以θ的矩估计为：$\hat{\theta}_1 = 2\overline{X} - 1$ 2 分

2)极大似然估计：

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, \theta \le x_i \le 1 \\ 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-\theta)^n}, \theta \le x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)} \le 1 \\ 0, \end{cases} ,$$

利用极大似然估计的定义可得：

所以θ的极大似然估计为$\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \cdots, X_n)$

3 分

（2）因为$E\hat{\theta}_1 = E(2\overline{X} - 1) = 2E\overline{X} - 1 = 2 \times \dfrac{1+\theta}{2} - 1 = \theta$

所以$\hat{\theta}_1$是θ的无偏估计。

令总体X的分布函数$F_X(z) = \begin{cases} 0, z \le \theta \\ \dfrac{z-\theta}{1-\theta}, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$

而$\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \cdots, X_n) = X_{(1)}$的分布函数为$F_{X_{(1)}}(z)$

则有：因为$X_1, \cdots, X_n$相互独立且与总体X同分布

$$所以 F_{X_{(1)}}(z) = 1 - (1 - F_X(z))^n = \begin{cases} 0, z \le 0 \\ 1- \quad (1 - \dfrac{z-\theta}{1-\theta})^n, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$

$$F_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} 0, z \le 0 \\ 1- \quad (\dfrac{1-z}{1-\theta})^n, \theta < z < 1 \\ 1, z \ge 1 \end{cases}$$

则其概率密度为

$$f_{X_{(1)}}(z) = \begin{cases} n\dfrac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}, \theta < z < 1 \\ 0,, \text{其他} \end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_2=\int_\theta^1 z\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}dz=\int_\theta^1(1+z-1)\times n\times\frac{1}{(1-\theta)^n}(1-z)^{n-1}dz$$

$$=n\int_\theta^1\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n-1}dz-\int_\theta^1 n\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n dz$$

$$=\frac{n}{n-1+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^n\Big|_\theta^1-\frac{n}{n+1}\times\frac{-1}{(1-\theta)^n}\times(1-z)^{n+1}\Big|_\theta^1$$

$$=1-\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{(1-\theta)^n}\times(1-\theta)^{n+1}=1-\frac{n}{n+1}\times(1-\theta)$$

$$=\frac{n}{n+1}\theta+1-\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n+1}\theta+\frac{1}{n+1}\neq\theta$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 不是无偏估计，但为渐进无偏估计。 4 分

七. 解：令月初可储存此种商品为 m 件。

由题设可得 $P(X\le m)=0.99117$

于是有：$1-P(X>m)=0.99117$

即 $P(X\ge m+1)=0.00883$

于是查表可得 $m+1=13$

所以 $m=12$ 即月初可储存此种商品 12 件即可。 4 分