§2.6 子群的陪集

定义1 设H为群G的子群，a为G的任一元素，集合aH称为子群H的一个左陪集，Ha称为H的一个右陪集。

例1在 S_3中求$H=\{(1),(12)\}$的左、右陪集

解：左陪集：

$$(1)H=(12)H=H$$

$$(13)H=(132)H=\{(13),(132)\}$$

$$(23)H=(123)H=\{(23),(123)\}$$

右陪集：

$$H(1)=H(12)=H$$

$$H(13)=H(123)=\{(13),(123)\}$$

$$H(23)=H(132)=\{(23),(132)\}$$

定理1 设H为群G的子群，$a \in G$，
则aH＝H的充要条件是$a \in H$

例2 在S_3中，$H = \{ (1), (12) \}$

则$(1)H = (12)H = \{ (1), (12) \}$

定理2 设H是群G的子群，则 $\forall a,b\in G$ aH＝bH当且仅当 $a^{-1}b\in H$

注：上述定理显然对右陪集也成立

定理3 设H为群G的子群，则$\forall a,b\in G$
aH＝bH或 $aH\cap bH=\phi$

定理4 设H为群G的子群，则$\forall a,b\in G$
有$|aH|=|bH|$

注：$|aH|=|H|$

定理5 设H为群G的子群，则H的所有左陪集构成的集族是G的一个划分。

定理6 设H为群G的子群，S_l 为H的所有左陪集构成的集族，S_r 为H所有右陪集构成的集族，则

$$|S_r| = |S_l|$$

定义2 设H为群G的子群，若H的所有不同的左陪集的个数为有限数j，则称j为H在G中的指数，记为j＝[G：H]否则说H在G中的指数为无穷大。

定理7（Lagrange）设G是一个阶为N的有限群，H为G的一个n阶子群，则

$$N = n.[G:H]$$

注：有限群的阶能被其每个子群的阶整除

推论1 有限群中每个元素的阶能整除该有限群的阶。

推论2 若有限群G的阶P为素数，则G是个循环群。

推论3 设G是一个N阶群，则对G的每个元素a都有 $a^N = e$

例3 证明阶小于或等于5的群是交换群。

思考题

1. 设G是一个群，H是G的子群，且有[G：H]=2，证明：对任意的$x \in G$，都有$x^2 \in H$