

近世代数课后习题作业 4

1. 设 R 是全体实数之集, $G = \{f | f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b, \forall x \in R, a \neq 0, b \in R\}$ 。
试证: G 是一个变换群。
2. 设 R^+ 是一切正实数之集, R 为一切实数之集。 (R^+, \times) , $(R, +)$ 是群。令
 $\varphi: R^+ \rightarrow R, \forall x \in R^+, \varphi(x) = \log_p x$, 其中 p 是正数。证明: φ 是同构。
3. 证明: n 次单位根之集对复数的乘法构成一个循环群。
4. 找出模 12 的同余类加群的所有真子群。
5. 设 $G = \langle a \rangle$ 是一个 n 阶循环群。证明: 如果 $(r, n) = 1$, 则 $\langle a^r \rangle = G$ 。
6. 假定群 G 的元素 a 的阶为 n , $(r, n) = d$, 证明: a^r 的阶为 n/d 。
7. 证明: 六阶群里必有一个三阶子群。
8. 设 p 是一个素数。证明: 在阶为 p^m 的群里一定含有一个 p 阶子群, 其中 $m \geq 1$ 。
9. 在三次对称群 S_3 中, 找一个子群 H , 使得 H 的左陪集不等于 H 的右陪集。
10. 设 H 是 G 的一个子群, 如果左陪集 aH 等于右陪集 Ha , 即 $aH = Ha$, 则
 $\forall h \in H, ah = ha$ 一定成立吗?
11. 证明讲义文件 2-6 中的定理 6。