§3.4 环的同态的基本定理

问题引入：基于理想子环的概念得到商环的概念，类似由正规子群得到商群的概念从而引入群的同态基本定理。在环中也有类似的结果：环的同态的基本定理。

定理1 设$(S_1, +, \circ)$与$(S_2, \oplus, \otimes)$为两个环，$\varphi: S_1 \to S_2$的满同态，若0_2为 S_2 的零元素，则$\varphi^{-1}(0_2)$是S_1是的一个理想子环。

定义1 设 $(S_1,+,\circ)$ 与 $(S_2,\oplus,\otimes)$ 为两个环, $\varphi: S_1 \to S_2$ 的满同态，若 0_2 为 S_2 的零元素，则称 S_1 的理想子环 $\varphi^{-1}(0_2)$ 为同态 φ 的核, 记为:

$Ker\ \varphi$,即 $Ker\ \varphi = \varphi^{-1}(0_2)$

例1 设 $(Z,+,*)$ 为整数环。

$(Z_n,\oplus,\otimes)$ 为模 n 的剩余类环。

$\varphi: Z \to Z_n$ 对 $\forall a \in Z$，$\varphi(a)=[a]$

显然 $\varphi: Z \to Z_n$ 为满同态，且有：

$$\varphi(0_1)=\varphi(0)=[0]=0_2$$

$$\varphi^{-1}(0_2)=\left\{a \middle| \varphi(a)=0_2=[0]\right\}$$

$$=\left\{a \middle| a=k\cdot n, k\in Z\right\}$$

显然为的理想子环。

思考题

设 $S = Z \times Z = \{(a,b) \mid a,b \in Z\}$

规定其中的两个运算如下：

$$\forall (a,b),(c,d) \in S: (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \otimes (c,d) = (a*c, b*d)$$

定义 $\varphi: S \to Z$，$\forall (a,b) \in S$, $\varphi((a,b)) = a$

则 $\varphi: S \to Z$ 为满同态，并求 $\varphi^{-1}(0_2)$

定理2 若N为环 $(S, +, \circ)$ 的理想子环，则 $S \sim S/N$，且N是这个同态的核。

该满同态称为环的自然同态。

(类似群中的自然同态定理)

定理3 环的同态基本定理：

设$(S_1, +, \circ)$与$(S_2, \oplus, \otimes)$为两个环，$\varphi : S_1 \to S_2$的满同态，则：

$$S_1 / Ker\ \varphi \cong S_2$$

上述定理的重要意义：若假设环 S_1 的性质已比较清楚，而环 S_2 的性质尚不大清楚，只知道 S_1 与 S_2 之间有满同态的关系。但是由该定理知 S_2 同构于 $S_1/Ker\,\varphi$ 即：$S_1/Ker\,\varphi \cong S_2$ 所以对 S_2 的性质研究可以转化为对 $S_1/Ker\,\varphi$ 的研究. 而该商环上的运算性质又是借助环 S_1 上的加法和乘法来得到的，所以问题最终转化为对 S_1 的性质讨论。

另外，由上述定理2、3知：

$\varphi: S_1 \to S_2$ 的满同态从映射的角度

来看可以分解为如下两个映射的复合：

$\bar{\varphi}: S_1/Ker\ \varphi \to S_2$ （同构, 所以为双射）

$\gamma: S_1 \to S_1/\ker\varphi$ (满同态, 所以为满射)

即： $\varphi = \bar{\varphi} \circ \gamma$

环的同态基本定理的应用：

定理4 设 $(S_1,+,\circ)$ 与 $(S_2,\oplus,\otimes)$ 为两个环，$\varphi: S_1 \to S_2$ 的满同态，$\overline{H}$ 是 S_2 的理想子环，则 $H=\varphi^{-1}(\overline{H})$ 是 S_1 的理想子环，且有：

$$S_1/H \cong S_2/\overline{H}$$