



§ 2.6 子群的陪集

定义1 设 H 为群 G 的子群, a 为 G 的任一元素, 集合 aH 称为子群 H 的一个左陪集, Ha 称为 H 的一个右陪集。

例1 在 S_3 中求 $H = \{(1), (12)\}$ 的左、右陪集

解：左陪集：

$$(1)H = (12)H = H$$

$$(13)H = (132)H = \{(13), (132)\}$$

$$(23)H = (123)H = \{(23), (123)\}$$

右陪集：

$$H(1) = H(12) = H$$

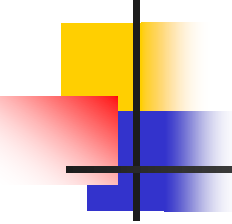
$$H(13) = H(123) = \{(13), (123)\}$$

$$H(23) = H(132) = \{(23), (132)\}$$

定理1 设 H 为群 G 的子群, $a \in G$,
则 $aH=H$ 的充要条件是 $a \in H$

例2 在 S_3 中, $H = \{ (1), (12) \}$

则 $(1)H = (12)H = \{ (1), (12) \}$



定理2 设 H 是群 G 的子群, 则 $\forall a, b \in G$
 $aH=bH$ 当且仅当 $a^{-1}b \in H$

注: 上述定理显然对右陪集也成立



定理3 设 H 为群 G 的子群, 则 $\forall a, b \in G$
 $aH=bH$ 或 $aH \cap bH = \phi$

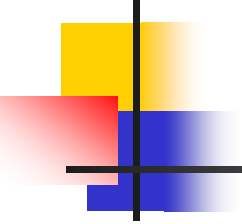
定理4 设 H 为群 G 的子群, 则 $\forall a, b \in G$
有 $|aH|=|bH|$

注: $|aH|=|H|$

定理5 设H为群G的子群，则H的所有左陪集构成的集族是G的一个划分。

定理6 设H为群G的子群， S_l 为H的所有左陪集构成的集族， S_r 为H所有右陪集构成的集族，则

$$|S_r| = |S_l|$$



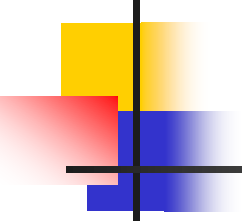
定义2 设 H 为群 G 的子群，若 H 的所有不同的左陪集的个数为有限数 j ，则称 j 为 H 在 G 中的**指数**，记为 $j = [G : H]$ 。否则说 H 在 G 中的**指数为无穷大**。



定理7 (Lagrange) 设 G 是一个阶为 N 的有限群, H 为 G 的一个 n 阶子群, 则

$$N = n \cdot [G:H]$$

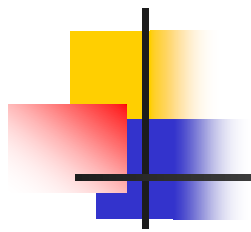
注: 有限群的阶能被其每个子群的阶整除



推论1 有限群中每个元素的阶能整除该有限群的阶。

推论2 若有限群G的阶P为素数，则G是个循环群。

推论3 设G是一个N阶群，则对G的每个元素a都有 $a^N = e$



例3 证明阶小于或等于5的群是交换群。



思考题

1. 设 G 是一个群， H 是 G 的子群，
且有 $[G: H]=2$ ，证明：
对任意的 $x \in G$ ，都有 $x^2 \in H$