



§ 3.2 无零因子环的特征数

问题：在环中研究非零元素对加法的阶的问题，即 $na=0$ 的问题。

例1 设 p 是一个素数，则模 p 同余类环

$(\mathbb{Z}_p, \oplus, \bullet)$ 是一个有限域。

1) $[1] \neq [0]$ 但 $p[1] = [p] = [0]$

2) 对 $\forall [i] \in Z_p$ 均有 $p[i] = [pi] = [0]$

如令 $p = 7$ 则有:

$$7[1] = 7[2] = 7[3] = 7[4] = 7[5] = 7[6] = [0]$$

3) 若 p 不为素数, 如令 $p = 6$ 则有

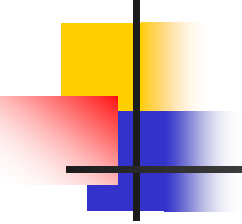
$$6[1] = [6] = [0] \quad 2[3] = 3[2] = [6] = [0]$$

$$3[4] = [12] = [0] \quad 6[5] = [30] = [0]$$



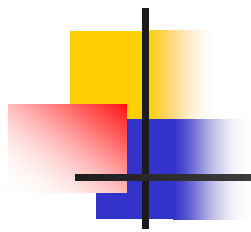
定理1 在无零因子环中每个非零元素对加法的阶均相同。

推论1 体和域中每个非零元素对加法的阶均相同。



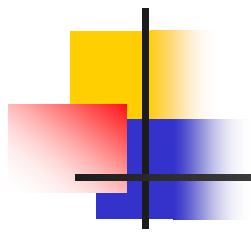
定义1 特征数（特征）： 无零因子环中非零元素对加法的阶称为该环的特征数。

域（体）中非零元素对加法的阶称为域（体）的特征数。



定理2 若无零因子环 S 的特征数为正整数 p ，则 p 是素数。

推论2 整环（可交换无零因子环）、体、域的特征数或是无穷大，或是一个素数。



定理3 在特征为有限数 p 的域中:

$$(a + b)^p = a^p + b^p$$

$$(a - b)^p = a^p - b^p$$