§2.4 变换群、同构

[本节主要内容]

1）群的同构定义；
2）对称群、变换群、置换群定义；
3）群的同构的Cayley定理；
4）群的自同构。

定义1 设 $(G_1,\circ)$与 $(G_2,*)$为群，若存在一一映射$\varphi: \mathrm{G}_1 \to G_2$ 使得对$\forall\, a,b \in G_1$ 有 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

则称 G_1 与 G_2 同构，记为 $G_1 \cong G_2$

称 φ 为 G_1 到 G_2 上的一个同构。

例1 设 $(G_1,\circ)$ 与 $(G_2,\oplus)$ 为群，

$$G_1=\{a,b,c,d\} \qquad G_2=\{0,1,2,3\}$$

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\varphi: G_1 \to G_2 \quad \varphi(a)=0,\ \varphi(b)=1,\ \varphi(c)=2,\ \varphi(d)=3$

注：同构的两个群，除了在元素和代数运算的表示符号不同外，他们的性质完全一样，抽象地看是一样的。

同构的性质：

1） $G_1 \cong G_1$

2）若 $G_1 \cong G_2$，则 $G_2 \cong G_1$

3）若 $G_1 \cong G_2, G_2 \cong G_3$ 则 $G_1 \cong G_3$

定义2 对称群：

设S为非空集合，$f:S\to S$ 的一一映射

记Sym（S）＝$\{f \mid f:S\to S\}$

则Sym（S）关于映射的合成运算构成一个群，称为S上的对称群。

当S＝{ 1, 2, 3, …, n }时，

则Sym（S）＝Sn为所有n次置换之集，称为n次对称群。

定义3 变换群：Sym（S）的任一子群称为S上的一个变换群。

置换群：Sn的任一子群称为置换群。

置换群是变换群的一种特例，是群论中非常重要的一类群，而且也是研究几何体的对称、晶体的结构等所不可缺少的工具。

群论最早就是从研究置换群开始的，为了解决**5**次及**5**次以上方程的根式求解问题，伽罗瓦将多项式的根的变换（置换）构成集合，这个集合对于变换的乘法构成代数系统，伽罗瓦最开始称为群，即现在的置换群。他证明一个方程可用根式求解的充要条件是它的伽罗瓦群是可解群。

定理1 群的Cayley同构定理：

任何一个群同构于某个变换群。

推论1 任一n阶有限群同构于n次对称群Sn的一个n阶子群。即有限群同构于某个置换群。

例 一、4次单位根之集 U_4 对复数的乘法*构成群（U_4，*）

$$U_4=\{1,\ -1,\ \mathrm{i},\ -\mathrm{i}\}$$

二、构造变换群：

$$L(U_4)=\{f_a \mid f_a: U_4\to U_4,\ \forall x\in U_4,\ f_a(x)=a*x,\quad a\in U_4\}$$

即：

$$L(U_4)=\{f_1,\ f_{-1},\ f_i,\ f_{-i}\}$$

其中：$$f_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i\\ 1 & -1 & i & -i\end{pmatrix}$$

$$f_{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i\\ -1 & 1 & -i & i\end{pmatrix}$$

$$f_i=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i\\ i & -i & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$f_{-i}=\begin{pmatrix}1 & -1 & i & -i\\ -i & i & 1 & -1\end{pmatrix}$$

相应乘法表：

$(U_4, *)$

*	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

$(L(U_4), \circ)$

$\circ$	f_1	f_{-1}	f_i	f_{-i}
f_1	f_1	f_{-1}	f_i	f_{-i}
f_{-1}	f_{-1}	f_1	f_{-i}	f_i
f_i	f_i	f_{-i}	f_{-1}	f_1
f_{-i}	f_{-i}	f_i	f_1	f_{-1}

建立双射：$\varphi : U_4 \to L(U_4)$

$$\varphi(\text{a}) = f_a, \forall a \in U_4$$

定义4 设 $(G,\circ)$为群，$\varphi: G \to G$ 上的一一映射，且对 $\forall\, a, b \in G$

有 $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

则称 φ 为 G 的一个自同构。

定理2 设$(G,*)$为群，则 G 的所有自同构之集 $A(G)$ 对映射的合成运算构成一个群，称为**G的自同构群**。

定义5 内自同构：群G的由其元素a确定的自同构 $\varphi(x) = a\,x\,a^{-1}, \forall\, x \in G$ 称为G的内自同构。

外自同构：G的其他自同构称为外自同构。

定理3 群G所有内自同构之集是G的自同构群的一个子群，称为**内自同构群**。