

## 近世代数课后习题作业 5

1. 设  $A$  和  $B$  是群  $G$  的两个有限子群。证明： $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$
2. 设  $G$  是一个  $n^2$  阶的群,  $H$  是  $G$  的一个  $n$  阶子群。证明:  $\forall x \in G, x^{-1}Hx \cap H \neq \{e\}$ 。
3. 利用 1 题的结论证明: 六阶群中有唯一的一个三阶子群。
4. 证明: 指数为 2 的子群是正规子群。
5. 证明: 两个正规子群的交还是正规子群。
6. 设  $H$  是群  $G$  的子群,  $N$  是  $G$  的正规子群。试证:  $NH$  是  $G$  的子群。
7. 设  $G$  是一个阶为  $2n$  的交换群, 试证  $G$  必有一个  $n$  阶商群。
8. 设  $H$  是群  $G$  的子群。证明:  $H$  是  $G$  的正规子群的充分必要条件是  $H$  的任两个左陪集的乘积还是  $H$  的一个左陪集。
9. 设  $H$  是群  $G$  的 2 阶正规子群, 试证  $G$  的中心  $C$  包含  $H$ 。