近世代数课后习题作业 2

1.设 $(S,\circ,*)$ 是一个具有两个二元代数运算"$\circ$"和"$*$"的代数系。如果对"$\circ$"和"$*$"分别有单位元素 e_1 和 e_2，并且"$\circ$"对"$*$"以及"$*$"对"$\circ$"分别都满足左、右分配律。

证明：对 $\forall x \in S$ 都有 $x \circ x = x$， $x * x = x$

2.设 A 是半群 $(S\ ,\circ)$ 的非空子集，(A) 为由 A 生成的子半群，证明：

$$(A)=\{x|\exists a_1,a_2,\cdots,a_n \in A\text{使}x=a_1a_2\cdots a_n,n\geq 1\}$$

3.设 $(M\ ,\circ\ ,e)$ 是一个幺半群，$a \in M$ 称为幂等元，如果 $a \circ a = a$。证明：如果 M 是可交换的幺半群，则 M 的所有幂等元之集是 M 的一个子幺半群。

4.循环幺半群的子幺半群是否还是循环幺半群？请举例说明你的结论。

5.设 $(M_1\ ,\circ\ ,e_1)$ 与 $(M_2\ ,*，\mathrm{e}_2)$ 是两个幺半群，$\varphi\colon \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ 的同态。证明：$\varphi^{-1}(e_2)$ 是 M_1 的一个子幺半群。$\varphi^{-1}(e_2)$ 是否是 M_1 的理想？

$$//\varphi^{-1}(e_2)=\{x|x \in M_1 \wedge \varphi(x)=e_2\}$$

6.试证：两个同态的合成还是同态。

7.设 R 为实数集， $S=\{(a,b)|a \neq 0,a,b \in R\}$。在 S 上利用通常的加法和乘法定义二元运算"$\circ$"如下：$\forall (a,b),(c,d) \in S$， $(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

验证：$(S,\circ)$ 是群。

8.n 次方程 $x^n=1$ 的根称为 n 次单位根，所有 n 次单位根之集记为 U_n。证明：U_n 对通常的复数乘法构成一个群。

9.设

$$G=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

试证：G 对矩阵乘法构成一个群。