

第2章 群

引言：群论的起源

群的概念在数学史上出现是在**19**世纪的上半叶，到了**19**世纪后期才正式出现，不久就成为现代数学的基础之一。

18世纪末在试图求解高次代数方程的代数解法时，由于研究方程诸根之间的置换而注意到了群的概念。基于这种思想，阿贝尔（**Abel**）证明了**5**次以上的一般的代数方程没有根式解。但是置换群与代数方程之间的关系的关系的完全描述是由伽洛瓦（**Galois**）完成的，他用群论的方法彻底解决了代数方程可用根式求解的条件。置换群是最终形成抽象群的第一个重要来源。并在**19**世纪末数学家们终于成功地概括出了抽象群论的公理系统。



[本章主要内容]

- 1) 群、子群及相关性质;**
- 2) 置换群、循环群;**
- 3) 子群的陪集、正规子群;**
- 4) 群的同态;**



§ 2.1 群的定义

[本节内容]

- 1) 群的定义;
- 2) 群的两种定义的等价性;

定义1 群

设 G 为一非空集合，“ \circ ”为 G 上的二元代数运算，称为乘法，且满足：

1) 结合律：对 $\forall a, b, c \in G$ 有：

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

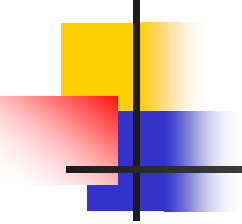
2) 有左单位元 e ：即对 $\forall a \in G, e \circ a = a$

3) 有左逆元素：即对 $\forall a \in G, \exists b \in G$ 使得 $b \circ a = e$ （ e 为上述左单位元）

则称 (G, \circ) 为群。

注：该定义与“每个元素均有逆元素的么半群称为群”的定义等价

定义2 交换群（可换群）：设 (G, \circ) 为群，乘法“ \circ ”满足交换律，即对 $\forall a, b \in G$ 有： $a \circ b = b \circ a$
则 (G, \circ) 称为**交换群（可换群）**
或称为**阿贝尔群（Abel群）**



定义3 有限群： 设 (G, \circ) 为群，
且 G 是有限集，则称 (G, \circ) 为有限群，
此时称 G 的基数 $|G|$ 为 G 的阶。

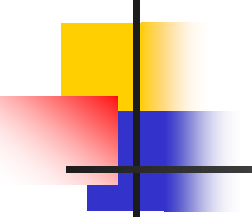
无限群： 若 G 含有无穷多个元素。



例1 n 次单位根之集 U_n 对复数的乘法构成**交换群**:

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$x_k^{-1} = \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad x_e = 1$$



例2 设非空集合 $G = \{a, b, c, d\}$
其上定义乘法“ \circ ”如下:

| \circ | a | b | c | d |
|---------|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

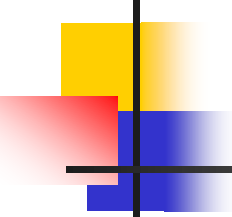
1) 找左单位元 $e_{\text{左}}$: 即表中应有一行与表头相同, 故至少有一个

$$e_{\text{左}} = a$$

2) 找左逆元:

即对 $\forall x \in G, x' \circ x = e_{\text{左}}$

若所有元素均有左单位元, 则此乘法表中每一列中均应出现该左单位元 $e_{\text{左}}$, 即此处 a 应在每一列出现。



3) 交换律: 由矩阵 $A=A^T$ 知

满足交换律

4) 结合律: 检验对 $\forall x, y, z \in G$

是否有成立:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$