§1.3 子半群、子幺半群、理想

引言：

认识事物可以采用从整体到局部，也可以由局部到整体的方法。在代数系统的讨论中，类似集合论中的子集的概念、线性代数中子空间的概念，也引入了子代数的概念。

在进行（幺）半群的研究中，我们也常常需要了解其某些子集的性质，尤其是此类子集按“父”集的运算仍构成（幺）半群的。从而引入了子（幺）半群的概念。

[本节主要内容]

1）子（幺）半群的基本定义相关性质定理；

2）生成子（幺）半群；

3）循环（幺）半群的基本定义。

定义1 子半群：设$(S, \circ)$为一个半群，B是S的一个非空子集，若对$\forall a, b \in B$，均有$a \circ b \in B$，则称代数系$(B, \circ)$为$(S, \circ)$的一个子半群。简称B是S的子半群。

注：显然S的非空子集B是子半群当且仅当$B \circ B \subseteq B$(即子集上的封闭性)

定义2 子幺半群：设$(S, \circ, e)$是一个幺半群，P ⊆ S 若$e \in P$，且P是S的子半群，则称P是S的子幺半群。

注：显然S的非空子集P是子幺半群当且仅当$e \in P$ 且 $P \circ P \subseteq P$

定理 1 一个幺半群的任意多个子幺半群的交集仍是子幺半群。

定理 2 设 $(S,\circ)$ 为一个半群，A是S的一个非空子集，则S的一切包含A的子半群的交集Q也是子半群

定义3 设A为半群 $(S,\circ)$ 的一个非空子集，由S的包含A的所有子半群的交所形成的子半群称为由A生成的子半群，记为（A）。

同理：A为 $(M,\circ,e)$ 的非空子集，则包含A的所有子幺半群的交成为由A生成的子幺半群。

注：根据集合交的性质知道由A生成的子（幺）半群（A）是包含A的所有子（幺）半群中最小的，即对任意包含A的子（幺）半群 A_α 有：$(A) \subseteq A_\alpha$

定义4 左（右）理想：半群 $(S,\circ)$ 的一个非空子集A为S的一个左（右）理想，若有$SA\subseteq A(AS\subseteq A)$

若A既是S的左理想又是S的右理想，则称A是S的理想。

注：S的左（右）理想可能不唯一，只需满足上述条件即可。

由A生成的左（右）理想：S的所有包含A的左（右）理想的交；

由A生成的理想：S的所有包含A的理想的交；

注：同上具有“最小性”

定理3 设A是半群$(S,\circ)$的一个非空子集，则：

1) 由A生成的左理想是：$A\cup SA$

2) 由A生成的右理想是：$A\cup AS$

3) 由A生成的理想是：$A\cup SA\cup AS\cup SAS$

定理4 设A是幺半群$(M,\circ,e)$的一个非空子集，则：

1) 由A生成的M的左理想是：MA

2) 由A生成的M的右理想是：AM

3) 由A生成的M的理想是：MAM

定义5 循环半群（循环幺半群）： 若一个半群（幺半群）是由其中的某个元素生成的半群（幺半群）。如由a生成的循环半群记为（a）

例： 1）（N，＋）是由1生成的循环半群，无单位元。(N为自然数集)

2）（Zn,⊕）生成元为[1]，

Zn为模n同余等价类所构成集合。

定理5 循环半群（循环幺半群）必是可交换半群（幺半群）.

思考题

循环（幺）半群中的生成元是否唯一？

例 设：

$$M=(a)=\left\{e,a,a^2,a^3,a^4\right\}$$

且 $a^5=e$