



§ 2.7 正规子群、商群

[本节主要内容]

- 1) 正规子群的定义;
- 2) 正规子群的判定定理;
- 3) 商群及与正规子群的关系;



定义1 群子集： 设 G 为群，对任意的集合 A ，满足 $A \subseteq G$
称 A 为群子集。记为：

$$2^G = \{A \mid A \text{ 为 } G \text{ 的群子集}\}$$



群子集上的乘法：对 $\forall A, B \in 2^G$

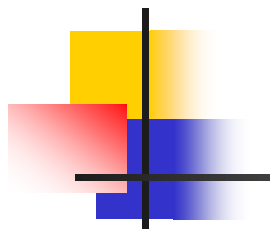
$$A \bullet B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

则为 2^G 上的二元代数运算

对 $\forall A \in 2^G$ ，记 $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

显然若 A 为 G 的子群，则：

$$A^{-1} = A$$



定理1 设 G 为群, 则对 $\forall A, B, C \in G$ 有 $(AB)C = A(BC)$, 若 H 是 G 的子群 则: $HH = H, H^{-1} = H, HH^{-1} = H$

定理2 设 A, B 为群 G 的子群, 则 AB 是 G 的子群的充要条件是 $AB=BA$ 。

例1 在 S_3 中 $N = \{(1), (123), (132)\}$ 为其子群

$$(1)N = N(1) = N$$

$$(12)N = N(12) = \{(12), (23), (13)\}$$

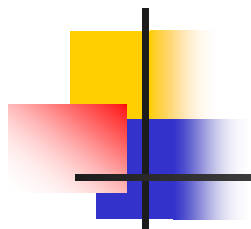
$$(13)N = N(13) = \{(12), (13), (23)\}$$

$$(23)N = N(23) = \{(12), (23), (13)\}$$

$$(123)N = N(123) = N$$

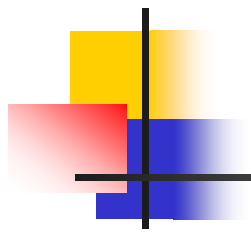
$$(132)N = N(132) = N$$

即对 $\forall a \in S_3$ 均有 $aN = Na$



定义2 设 H 为群 G 的子群，若对 $\forall a \in G$ 有 $aH = Ha$ ，则称 H 是 G 的正规子群。

例2 交换群的子群；
 $\{e\}$ 均为正规子群；



定理3 设 H 为群 G 的子群，则下列三命题等价：

1) H 是 G 的正规子群(即 $aH = Ha$)

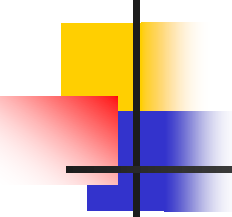
2) $\forall a \in G, aHa^{-1} = H$

3) $\forall a \in G, aHa^{-1} \subseteq H$



定理3的应用举例:

例3 (M_n, \bullet) 表示所有 $n \times n$ 的可逆实矩阵关于矩阵乘法运算构成群。 H 是 M_n 中全体行列式为1的矩阵集合，则 H 是 M_n 的正规子群。



定理4 设 H 为 G 的正规子群， H 的所有左陪集构成的集族 S_l 对群子集乘法形成一个群。

定义3 群 G 的正规子群 H 的所有左陪集构成的集族，对群子集乘法构成的群称为 G 对 H 的商群，记为 G/H



例4 在 S_3 中

$N = \{(1), (123), (132)\}$ 为其正规子群

$$S_3 / N = \{N, (12)N\}$$

$$|S_3 / N| = 2$$