



## § 2.2 群的简单性质

**定理1** 设为  $(G, \circ)$  群, 则对  $\forall a \in G$   
a的左逆元也是a的右逆元。

**定理2** 设为  $(G, \circ)$  群, 则G的左单位元  
也是右单位元。

**定理3** 设为  $(G, \circ)$  群, 则对  $\forall a, b \in G$   
有:  $(a^{-1})^{-1} = a, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$



**定理4** 设为 $(G, \circ)$ 群, 则对 $\forall a, b \in G$

方程:

$$\begin{cases} ax = b \\ ya = b \end{cases}$$

关于未知量 $x$ 与 $y$ 均有唯一解。

## 定理5

设 $G$ 为非空集合，“ $\circ$ ”为 $G$ 上的

二元代数运算，则 $(G, \circ)$ 为群的充要条件为：

- 1) “ $\circ$ ”满足结合律；
- 2) 对 $\forall a, b \in G$ ，方程
$$\begin{cases} ax = b \\ ya = b \end{cases}$$
在 $G$ 中有解。

注：可看作群的另一个等价定义或判定定理



## 定理6

---

设  $(G, \circ)$  为群，则  $G$  关于乘法 “ $\circ$ ” 满足消去律，即对  $\forall x, y, a \in G$  有：

1) 若  $ax=ay$ ，则  $x=y$

(称为左消去律)

2) 若  $xa=ya$ ，则  $x=y$

(称为右消去律)



## 定理7

---

设 $G$ 为非空有限集合，“ $\circ$ ”为 $G$ 上的二元代数运算，则 $(G, \circ)$ 为群的充要条件

- 1) “ $\circ$ ”满足结合律;
- 2) “ $\circ$ ”满足左右消去律。

注：1) 可看作有限群的一个定义  
或判定定理

2) “有限”的条件很重要

例 设  $K_4 = \{e, a, b, c\}$  乘法运算表为:

$\bullet$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

证明:  $K_4$  是一个4阶交换群



记号：对  $\forall a \in G$

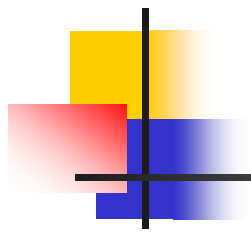
---

$$1) a^0 = e, a^1 = a, a^{n+1} = a^n \circ a, n \geq 1$$

$$2) a^{-n} = (a^{-1})^n, n \geq 1$$

$$3) \forall m, n \in \mathbb{Z}, a^m \circ a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$



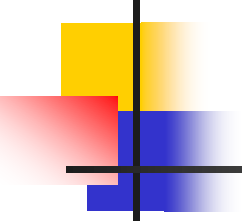
4) 对交换群, 此时其代数运算  
常用 “+” 表示, 称为加法,

同时上述幂运算常用倍乘表示, 即:

$$0a = 0(e), 1a = a, (n+1)a = na + a$$

$$(-1)a = -a, -na = n(-a), n \geq 1$$





---

对  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $(mn)a = m(na)$

$$ma + na = (m + n)a$$

$$n(a + b) = na + nb$$

(由  $(ab)^n = a^n b^n$  改写)



**定义1** 设  $(G, \circ)$  为群,  $a \in G$ ,  
使  $a^n = e$  的最小正整数  $n$  称为  $a$  的阶,  
反之则称  $a$  的阶为无穷大。

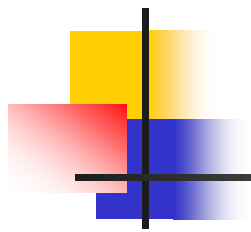
**注:** 若  $a$  的阶为无穷大, 则不可能有

$$a^n = a^k \quad (n > k)$$



## 思考题

- 1) 设 $a$ 的阶为 $n$ ，且有正整数 $m$ 使得 $a^m = e$ ，则是否一定有 $m = n$ ？
- 2) 设 $a$ 的阶为 $n$ ，则  $a^{-1}$  的阶是否也一定为 $n$ ？
- 3) 若 $G$ 不一定为交换群，则是否一定有 $ab$ 的阶和 $ba$ 的阶相同？(  $a, b \in G$  )



**定理8** 有限群的每个元素的阶不超过该有限群的阶。

**注：**当然也就有每个元素的阶一定有限。