



§ 3.3 同态、理想子环

类似群的讨论，环也有同态、同构的问题。并借助同构的概念来讨论环、体、域从抽象的角度来看是否相同。

定义1 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes) 为两个环(体、域), 若存在 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的双射, 且对 $\forall a, b \in S_1$ 有:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b) \quad (*)$$

则称 φ 为 $S_1 \rightarrow S_2$ 的同构, 记为:

$$S_1 \cong S_2$$

定理1 设 $(S_1, +, \circ)$ 为环（体、域）

(S_2, \oplus, \otimes) 为具有两个二元代数运算

的代数系，若存在 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$

的满射，使 $(*)$ 式成立，则

(S_2, \oplus, \otimes) 为环（体、域）。

定义2 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes) 为两个环，若存在 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的映射，且对 $\forall a, b \in S_1$ 有：

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b)$$

则称 φ 为 $S_1 \rightarrow S_2$ 的同态。若 φ 为满射，则称为满同态，记为 $S_1 \sim S_2$

例1 设 $(\mathbb{Z}, +, *)$ 为整数环。

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$ 为模 n 的剩余类环。

$$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \text{ 对 } \forall a \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(a) = [a]$$

显然 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ 为满射，且有：

$$\varphi(a + b) = [a + b] = [a] \oplus [b]$$

$$\varphi(a * b) = [a * b] = [a] \otimes [b]$$



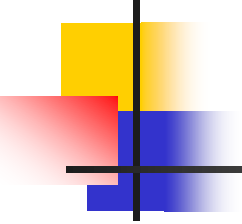
定理2 设 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的环满同态, 则:

1) 若 $0_1, 0_2$ 分别为 S_1, S_2 的零元素,
则:

$$0_2 = \varphi(0_1)$$

2) 若 e_1, e_2 分别为 S_1, S_2 的单位元素
则:

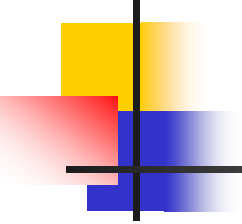
$$e_2 = \varphi(e_1)$$



3) $\forall a \in S_1, \varphi(-a) = -\varphi(a)$

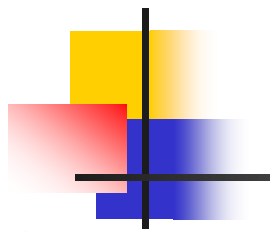
4) 对 $\forall a \in S_1$, 若 a 有逆元素 a^{-1}
则:

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$$



5) 若 T_1 是 S_1 的一个子环, 则 $\varphi(T_1)$ 是 S_2 的子环。

6) 若 T_2 是 S_2 的一个子环, 则 $\varphi^{-1}(T_2)$ 是 S_1 的子环。



问题：类似于在群中引入正规子群的概念，从而得到商群的概念，那么在环中是否也能够由子环的概念得到类似正规子群的概念，从而也引入**商环**的概念？

商环：1) 商集；

2) 在其上定义两个二元代数运算

1) 设 N 为环 $(S, +, \circ)$ 的子环, 则
 N 是Abel群 $(S, +)$ 的正规子群
(交换群的子群显然为正规子群), 从而可以得到关于加法的陪集: $a + N$
(类似于群的陪集 aH), $\forall a \in S$ 。称为模 N 的同余类, 记为 $[a]$ 。并将 N 的所有不同陪集构成的集合记为 S/N ,



且在 S/N 上定义加法运算“ \oplus ”如下：
 $[a] \oplus [b] = [a+b], \forall a, b \in S$

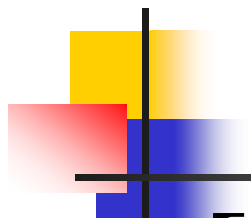
则 $(S/N, \oplus)$ 构成一个加法群

(封闭性、结合律、单位元、逆元)。

2) 如何在 S/N 上定义乘法使得 S/N 关于该乘法构成半群, 从而使得 S/N 构成环。对 $\forall [a], [b] \in S/N$ 定义乘法 “ \bullet ” 如下:

$$[a] \bullet [b] = [a \circ b]$$

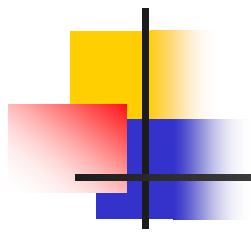
为使 $(S/N, \bullet)$ 为半群, 只需证明上述乘法运算与代表元的选取无关 (结合律显然)。为此需要讨论在满足什么条件下上述乘法运算与代表元无关?



设 $[a'] = [a], [b'] = [b]$, 则需要证明 $[a' \circ b'] = [a \circ b]$

由 $a' \in [a'] = [a] \Rightarrow \exists n_1 \in N$
使得: $a' = a + n_1$

同理 $\exists n_2 \in N$, 使得: $b' = b + n_2$



从而：

$$\begin{aligned} a' \circ b' &= (a + n_1) \circ (b + n_2) \\ &= a \circ b + (a \circ n_2 + n_1 \circ b + n_1 \circ n_2) \end{aligned}$$

要使 $[a' \circ b'] = [a \circ b]$

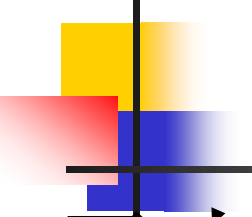
即 $a' \circ b' \in [a \circ b]$, 则应满足:

$$a' \circ b' = a \circ b + n, \exists n \in N$$

故应有:

$$a \circ n_2 + n_1 \circ b + n_1 \circ n_2 \in N \Rightarrow$$

$$a \circ n_2 + n_1 \circ b \in N$$



又由 a, b 的任意性, 则应满足:
对 $\forall r \in S$, 有:

$$rN \subseteq N, Nr \subseteq N$$

则在满足此条件下 $(S/N, \bullet)$ 为半群

3) 由1)、2) 得到 $(S/N, \oplus, \bullet)$
为环, 称为商环。



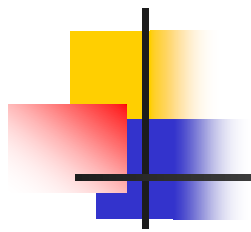
定义3 左（右）理想子环：

设 N 为环 S 的子环，若对 $\forall r \in S$ ，
均有：

$$rN \subseteq N \quad (Nr \subseteq N)$$

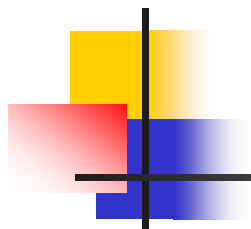
简称为左（右）理想。

理想：若 N 既为 S 的左理想又为
右理想。



注：

- 1) 若 S 为可换环，则左右理想一致；
- 2) 任一非零环 S 至少有两个理想：一个是 S 本身，另一个是零环 $\{0\}$ 。除此之外的理想称为 S 的真理想。

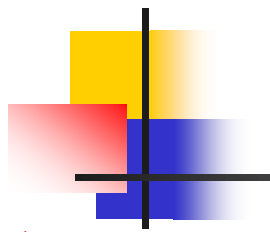


推论： 环 S 的非空子集 N 是 S 的一个理想
(理想子环) 的充要条件是：

$$1) \quad \forall n_1, n_2 \in N, (n_1 - n_2) \in N$$

$$2) \quad \forall r \in S, n \in N, rn \in N, nr \in N$$

(交换环时只需考虑一半即可)



例1 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, 设 $N = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
则 N 为 \mathbb{Z} 的理想。

例2 设 $(S, +, \cdot)$ 为交换环, $a \in S$
则 S 中一切形如:
$$r \cdot a + na \quad (r \in S, n \in \mathbb{Z})$$

的元素构成的集合是 S 的一个理想子环
记为 (a) , 称为由 a 生成的理想子环



定理3 设 $\{H_j\}_{j \in I}$ 是环S

的一些理想构成的集族，则 $\bigcap_{j \in I} H_j$

是S的理想。

定义4 设 A 为环 S 的非空子集, S 中包含 A 的一切理想的交称为由 A 生成的理想。记为 (A) 。

若 $A = \{a\}$, 则 $(A) = (a)$;

若 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

则 $(A) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

主理想: 环 S 中的由一个元素 a 生成的理想 (a) 称为 **S 的主理想**。

例3 若 S 为有单位元的可换环, $a \in S$
则:

$$\begin{aligned}(a) &= \{ra + na \mid r \in S, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{ra \mid r \in S\}\end{aligned}$$

特别地, 若 S 中有单位元 e , 则有:

$$(e) = \{re \mid r \in S\} = \{r \mid r \in S\} = S$$

推广：对于可换环S中，根据上述**例2**，由n个元素生成的理想为：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i + \sum_{i=1}^n k_i a_i \mid r_i \in S, k_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

特别地，若可换环S中有单位元e，则有：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid r_i \in S, i = 1, \cdots, n \right\}$$



定理4 体和域只有两个理想，分别为零理想 $\{0\}$ 及体和域自身。