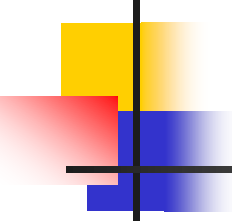




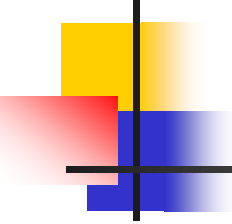
§ 1.2 半群与么半群的概念

定义1 设“ \circ ”是非空集合 S 上的一个二元代数运算，称为乘法。若对 $\forall a, b, c \in S$ 有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 则称集合 S 对乘法“ \circ ”形成一个半群，记为 (S, \circ) 即半群就是满足结合律的二元代数运算的代数系。



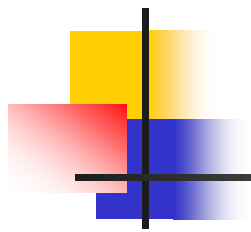
定义2 交换半群： 设 (S, \circ) 为半群，若乘法“ \circ ”还满足交换律，则称为交换半群，或称为可换半群。

定义3 有限半群： 只含有有限个元素的半群称为有限半群， 否则称为无限半群。



例 $(\mathbf{Z}, +)$ 、 $(\mathbf{R}, +)$ 、 $(\mathbf{R}, *)$
均为无限可换半群。

例 (M_n, \bullet) 表示 $n \times n$ 的实矩阵上的
矩阵乘法运算，为不可交换半群。



例 所有 n 次置换构成的集合 S_n 对置换的乘法形成半群 (S_n, \circ) 为不可交换有限半群。

$$|S_n| = n!$$

例 设 n 为正整数，则 (Z_n, \oplus) 为半群，
其中 Z_n 为整数集 Z 上的模 n 的同余关系
下等价类之集，即：

$$[i] = \{m \mid m \in Z \text{ 且 } m \equiv i \pmod{n}\}$$
$$Z_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

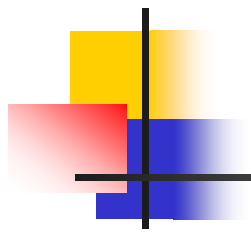
在 Z_n 上定义加法 \oplus 如下：

$$[i] \oplus [j] = [i + j]$$

例 全体偶数之集**E**对通常的乘法构成一个可交换半群，无单位元。

例 设**S**为一切形如： $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in N$

的 2×2 矩阵之集。**S**对矩阵的乘法构成一个不可交换半群。且有无穷多个左单位元元素 $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 但是无右单位元。



定理1 如果半群 (S, \circ) 中既有左单位元又有右单位元，则左单位元与右单位元相等，从而有单位元素且单位元素是唯一的。



思考题

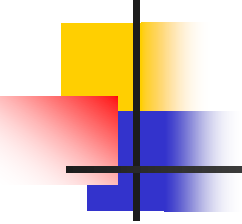
1. 如果半群有两个不同的右幺元，
问：该半群有多少个左幺元？



定义4 有单位元素的半群 (S, \circ)

称为幺半群。其单位元素记为 e ,

幺半群记为 (S, \circ, e) 。若 S 为有限集,
则称为有限幺半群。把 S 的基数称为
幺半群 (S, \circ, e) 的阶。



例 $(2^S, \cup, \phi)$, $(2^S, \cap, S)$

定理2 有限半群 (S, \circ) 为一个有限么半群
当且仅当 $\exists s, t \in S$ 使 $sS = S$, $St = S$

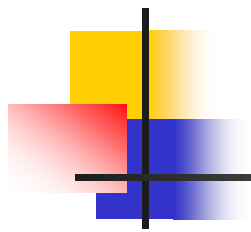
定理3 设 (S, \circ, e) 是一个么半群,
 m, n 是任意的任意的非负整数, 则

$$\forall a \in S \text{ 有: } a^m \circ a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

如果 (S, \circ, e) 是可交换的, 则对 $\forall a, b \in S$
有 $(a \circ b)^n = a^n \circ b^n$

$$\text{其中: } a^0 = e, a^{n+1} = a^n \circ a, n \geq 0$$

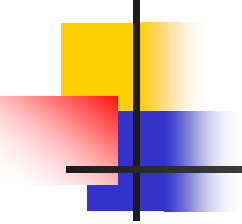


此时用加号“+”表示该二元运算，单位元记为“0”，则 (S, \circ, e) 记为

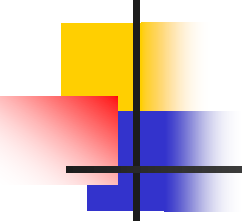
$(S, +, 0)$, a^n 记为 na , 即 $0a=0$,

$1a=a, na=(n-1)a+a$

定义5 设 (S, \circ, e) 是一个么半群, 元素 $a \in S$ 如果存在一个元素 $a_l \in S$ 使 $a_l \circ a = e$, 则称 a_l 为 a 的左逆元素; 如果存在一个元素 $a_r \in S$ 使得 $\forall a \in S$ 有 $a \circ a_r = e$ 则称 a_r 为 a 的右逆元素; 如果存在一个元素 $b \in S$ 使得 $\forall a \in S$ 有: $b \circ a = a \circ b = e$ 则称 b 为 a 的逆元素。



定理4 么半群 (S, \circ, e) 中元素 a 若有
左逆元素 a_l 又有右逆元素 a_r
则 $a_l = a_r$ 于是 a 有逆元素且 a 的
逆元素唯一，记为 a^{-1}



定义6 每个元素都有逆元素的么半群称为群。

定理5 有限半群 (S, \circ) 是一个群的充要条件是 $\forall s \in S$ 有 $sS = S$ 且 $\exists t \in S$ 使得 $St = S$



思考题

2. 设 $S = \{a, b, c\}$ 在 S 上定义代数运算 " \circ ", 使得:

$$a \circ a = b, b \circ b = c, c \circ c = a$$

问代数系 (S, \circ) 能够构成一个半群?