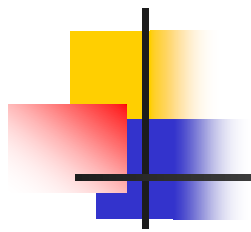




§ 3.4 环的同态的基本定理

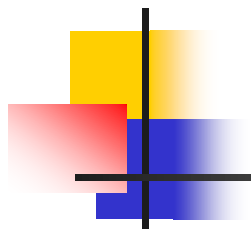
问题引入：基于理想子环的概念得到商环的概念，类似由正规子群得到商群的概念从而引入群的同态基本定理。在环中也有类似的结果：环的同态的基本定理。



定理1 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes)

为两个环, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的满同态, 若

0_2 为 S_2 的零元素, 则 $\varphi^{-1}(0_2)$ 是 S_1 是的一个理想子环。



定义1 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes) 为两个环, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的满同态, 若 0_2 为 S_2 的零元素, 则称 S_1 的理想子环 $\varphi^{-1}(0_2)$ 为同态 φ 的核, 记为:

$$\text{Ker } \varphi, \text{ 即 } \text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(0_2)$$

例1 设 $(\mathbb{Z}, +, *)$ 为整数环。

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$ 为模 n 的剩余类环。

$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ 对 $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\varphi(a) = [a]$

显然 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ 为满同态, 且有:

$$\varphi(0_1) = \varphi(0) = [0] = 0_2$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(0_2) &= \{a \mid \varphi(a) = 0_2 = [0]\} \\ &= \{a \mid a = k \cdot n, k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

显然为的理想子环。



思考题

设 $S = Z \times Z = \{(a, b) \mid a, b \in Z\}$

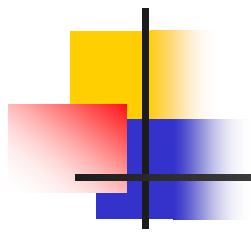
规定其中的两个运算如下：

$$\forall (a, b), (c, d) \in S : (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a * c, b * d)$$

定义 $\varphi: S \rightarrow Z$, $\forall (a, b) \in S$, $\varphi((a, b)) = a$

则 $\varphi: S \rightarrow Z$ 为满同态，并求 $\varphi^{-1}(0_2)$



定理2 若 N 为环 $(S, +, \circ)$ 的理想子环,

则 $S \sim S/N$, 且 N 是这个同态的核。

该满同态称为**环的自然同态**。

(类似群中的自然同态定理)



定理3 环的同态基本定理:

设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes) 为两个环, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的满同态, 则:

$$S_1 / \text{Ker } \varphi \cong S_2$$

上述定理的重要意义：若假设环 S_1 的性质已比较清楚，而环 S_2 的性质尚不大清楚，只知道 S_1 与 S_2 之间有满同态的关系。但是由该定理知 S_2 同构于 $S_1 / \text{Ker } \varphi$ 即： $S_1 / \text{Ker } \varphi \cong S_2$ 所以对 S_2 的性质研究可以转化为对 $S_1 / \text{Ker } \varphi$ 的研究。而该商环上的运算性质又是借助环 S_1 上的加法和乘法来得到的，所以问题最终转化为对 S_1 的性质讨论。

另外，由上述定理2、3知：

$\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ 的满同态从映射的角度来看可以分解为如下两个映射的复合：

$$\bar{\varphi} : S_1 / \text{Ker } \varphi \rightarrow S_2 \quad (\text{同构, 所以为双射})$$

$$\gamma : S_1 \rightarrow S_1 / \text{ker } \varphi \quad (\text{满同态, 所以为满射})$$

$$\text{即: } \varphi = \bar{\varphi} \circ \gamma$$

环的同态基本定理的应用：

定理4 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 (S_2, \oplus, \otimes)

为两个环， $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ 的满同态， \overline{H} 是 S_2 的理想子环，则 $H = \varphi^{-1}(\overline{H})$ 是 S_1 的理想子环，且有：

$$S_1 / H \cong S_2 / \overline{H}$$