§3.3 同态、理想子环

类似群的讨论，环也有同态、同构的问题。并借助同构的概念来讨论环、体、域从抽象的角度来看是否相同。

定义1 设 $(S_1,+,\circ)$ 与 $(S_2,\oplus,\otimes)$ 为两个环(体、域)，若存在 $\varphi: S_1 \to S_2$ 的双射，且对 $\forall\, a, b \in S_1$ 有：

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b) \qquad (*)$$

则称 φ 为 $S_1 \to S_2$ 的同构，记为：

$$S_1 \cong S_2$$

定理1 设$(S_1, +, \circ)$为环（体、域）

$(S_2, \oplus, \otimes)$为具有两个二元代数运算

的代数系，若存在$\varphi: S_1 \to S_2$
的满射，使（*）式成立，则
$(S_2, \oplus, \otimes)$为环（体、域）。

定义2 设 $(S_1, +, \circ)$ 与 $(S_2, \oplus, \otimes)$ 为两个环，若存在 $\varphi: S_1 \to S_2$ 的映射，且对 $\forall\, a, b \in S_1$ 有：

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b)$$

则称 φ 为 $S_1 \to S_2$ 的同态。若 φ 为满射，则称为满同态，记为 $S_1 \sim S_2$

例1 设 $(Z,+,*)$ 为整数环。

$(Z_n,\oplus,\otimes)$ 为模n 的剩余类环。

$\varphi: Z \to Z_n$ 对 $\forall a \in Z$

$$\varphi(a)=[a]$$

显然 $\varphi: Z \to Z_n$ 为满射，且有：

$$\varphi(a+b)=[a+b]=[a]\oplus[b]$$

$$\varphi(a*b)=[a*b]=[a]\otimes[b]$$

定理2 设$\varphi: S_1 \to S_2$的环满同态，则：

1) 若 0_1，0_2分别为S_1，S_2的零元素，

则：
$$0_2 = \varphi(0_1)$$

2) 若e_1，e_2分别为S_1，S_2的单位元素

则：
$$e_2 = \varphi(e_1)$$

3) $\forall a \in S_1, \varphi(-a) = -\varphi(a)$

4) 对$\forall a \in S_1$，若a有逆元素 a^{-1}
则：

$$\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$$

5) 若 T_1 是 S_1 的一个子环，则 $\varphi(T_1)$ 是 S_2 的子环。

6) 若 T_2 是 S_2 的一个子环，则 $\varphi^{-1}(T_2)$ 是 S_1 的子环。

问题：类似于在群中引入正规子群的概念，从而得到商群的概念，那么在环中是否也能够由子环的概念得到类似正规子群的概念，从而也引入商环的概念？

商环：1）商集；

2）在其上定义两个二元代数运算

1）设N为环$(S,+,\circ)$的子环，则
N是Abel群$(S,+)$的正规子群
(交换群的子群显然为正规子群)，从而可以得到关于加法的陪集：a＋N
(类似于群的陪集aH),$\forall a \in S$。称为模N的同余类，记为[a]。并将N的所有不同培集构成的集合记为S/N,

且在S/N上定义加法运算“$\oplus$ ”如下：

$[a]\oplus[b]=[a+b]$, $\forall\, a, b \in S$

则（S/N ，$\oplus$）构成一个加法群

(封闭性、结合律、单位元、逆元)。

2）如何在S/N上定义乘法使得S/N关于该乘法构成半群，从而使得S/N构成环。对$\forall [a],[b]\in S/N$定义乘法“●”如下：

$$[a]\bullet[b]=[a\circ b]$$

为使（S/N ,●）为半群，只需证明上述乘法运算与代表元的选取无关（结合律显然）。为此需要讨论在满足什么条件下上述乘法运算与代表元无关?

设 $[a'] = [a], [b'] = [b]$，则需要证明 $[a' \circ b'] = [a \circ b]$

由 $a' \in [a'] = [a] \Rightarrow \exists n_1 \in N$ 使得:

$$a' = a + n_1$$

同理 $\exists n_2 \in N$，使得: $b' = b + n_2$

从而：

$$a'\circ b'=(a+n_1)\circ(b+n_2)$$

$$=a\circ b+(a\circ n_2+n_1\circ b+n_1\circ n_2)$$

要使 $[a'\circ b']=[a\circ b]$,

即 $a'\circ b'\in[a\circ b]$，则应满足：

$$a'\circ b'=a\circ b+n,\exists n\in N$$

故应有:

$$a\circ n_2+n_1\circ b+n_1\circ n_2\in N\Rightarrow$$

$$a\circ n_2+n_1\circ b\in N$$

又由a，b的任意性，则应满足：

对 $\forall r \in S$ ，有：

$$rN \subseteq N \text{ , } Nr \subseteq N$$

则在满足此条件下（S/N ,●）为半群

3）由1）、2）得到（S/N ，$\oplus$ ，●）为环，**称为商环。**

定义3 左（右）理想子环：

设N为环S的子环，若对 $\forall r \in S$ ，均有：

$$rN \subseteq N \left(Nr \subseteq N\right)$$

简称为左（右）理想.

理想：若N既为S的左理想又为右理想。

注：

1）若S为可换环，则左右理想一致；

2）任一非零环S至少有两个理想：一个是S本身，另一个是零环{0}。除此之外的理想称为S的真理想。

推论： 环S的非空子集N是S的一个理想（理想子环）的充要条件是：

1）$\forall n_1, n_2 \in N, (n_1 - n_2) \in N$

2）$\forall r \in S, n \in N, rn \in N, nr \in N$

（交换环时只需考虑一半即可）

例1（Z，+，。），设 $N=\{2n \mid n\in Z\}$
则N为Z的理想。

例2 设（S,+,。）为交换环，$a\in S$
则S中一切形如：

$$r\circ a+na\left(r\in S,n\in Z\right)$$

的元素构成的集合是S的一个理想子环
记为（a），称为由a生成的理想子环

定理3 设 $\{H_j\}_{j\in I}$ 是环S的一些理想构成的集族，则 $\bigcap_{j\in I} H_j$ 是S的理想。

定义4 设A为环S的非空子集，S中包含A的一切理想的交称为由A生成的理想。记为（A）。

若A＝{a}, 则（A）＝（a）；

若 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

则（A）$=\left(a_1, a_2, \cdots, a_n\right)$

主理想： 环S中的由一个元素a生成的理想（a）称为**S的主理想。**

例3 若S为有单位元的可换环，$a \in S$
则：

$$(a)=\{ra+na \mid r \in S, n \in Z\}$$

$$=\{ra \mid r \in S\}$$

特别地，若S中有单位元e，则有：

$$(e)=\{re \mid r \in S\}=\{r \mid r \in S\}=S$$

推广：对于可换环S中，根据上述例2，由n个元素生成的理想为：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \middle| r_i \in S, k_i \in Z \right\}$$

特别地，若可换环S中有单位元e，则有：

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i a_i \middle| r_i \in S, i = 1, \cdots, n \right\}$$

定理4 体和域只有两个理想，分别为零理想$\{0\}$及体和域自身。