



## § 1.3 子半群、子么半群、理想

---

### 引言：

认识事物可以采用从整体到局部，也可以由局部到整体的方法。在代数系统的讨论中，类似集合论中的子集的概念、线性代数中子空间的概念，也引入了子代数的概念。

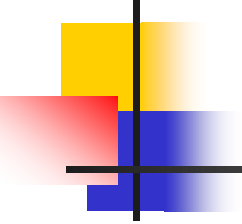
在进行（么）半群的研究中，我们也常常需要了解其某些子集的性质，尤其是此类子集按“父”集的运算仍构成（么）半群的。从而引入了子（么）半群的概念。



---

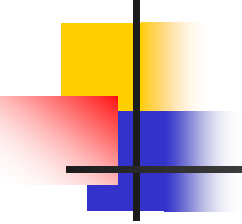
## [本节主要内容]

- 1)** 子（幺）半群的基本定义相关性质定理；
- 2)** 生成子（幺）半群；
- 3)** 循环（幺）半群的基本定义。



**定义1 子半群：** 设 $(S, \circ)$ 为一个半群， $B$ 是 $S$ 的一个非空子集，若对 $\forall a, b \in B$ ，均有 $a \circ b \in B$ ，则称代数系 $(B, \circ)$ 为 $(S, \circ)$ 的一个子半群。简称 $B$ 是 $S$ 的子半群。

**注：** 显然 $S$ 的非空子集 $B$ 是子半群当且仅当  $B \circ B \subseteq B$  (即子集上的封闭性)



**定义2 子么半群：** 设  $(S, \circ, e)$  是一个么半群， $P \subseteq S$  若  $e \in P$ ，且  $P$  是  $S$  的子半群，则称  $P$  是  $S$  的子么半群。

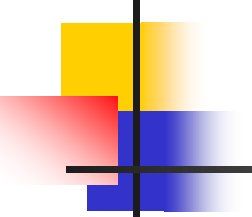
**注：** 显然  $S$  的非空子集  $P$  是子么半群当且仅当  $e \in P$  且  $P \circ P \subseteq P$



---

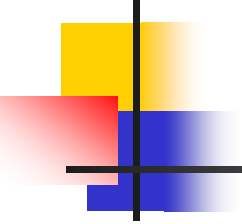
**定理 1** 一个么半群的任意多个子么半群的交集仍是子么半群。

**定理 2** 设  $(S, \circ)$  为一个半群,  $A$  是  $S$  的一个非空子集, 则  $S$  的一切包含  $A$  的子半群的交集  $Q$  也是子半群



**定义3** 设 $A$ 为半群  $(S, \circ)$  的一个非空子集，由 $S$ 的包含 $A$ 的所有子半群的交所形成的子半群称为由 $A$ 生成的子半群，记为  $\langle A \rangle$ 。

同理： $A$ 为  $(M, \circ, e)$  的非空子集，则包含 $A$ 的所有子么半群的交成为由 $A$ 生成的子么半群。



---

注：根据集合交的性质知道  
由A生成的子（幺）半群  $(A)$   
是包含A的所有子（幺）半群  
中最小的，即对任意包含A的  
子（幺）半群  $A_\alpha$  有：  $(A) \subseteq A_\alpha$

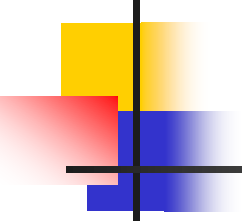
**定义4** 左（右）理想：半群  $(S, \circ)$

的一个非空子集  $A$  为  $S$  的一个左（右）理想，若有  $SA \subseteq A$  ( $AS \subseteq A$ )

若  $A$  既是  $S$  的左理想又是  $S$  的右理想，则称  $A$  是  $S$  的理想。

**注：**  $S$  的左（右）理想可能不唯一，只需满足上述条件即可。





---

由A生成的左（右）理想：S  
的所有包含A的左（右）理想的  
交；

由A生成的理想：S的所有包  
含A的理想的交；

注：同上具有“最小性”



**定理3** 设 $A$ 是半群 $(S, \circ)$ 的一个

非空子集, 则:

- 1) 由 $A$ 生成的左理想是:  $A \cup SA$
- 2) 由 $A$ 生成的右理想是:  $A \cup AS$
- 3) 由 $A$ 生成的理想是:  $A \cup SA \cup AS \cup SAS$

**定理4** 设A是么半群 $(M, \circ, e)$ 的一个非空子集，则：

1) 由A生成的M的左理想是： $MA$

2) 由A生成的M的右理想是： $AM$

3) 由A生成的M的理想是： $MAM$

**定义5** 循环半群（循环幺半群）：

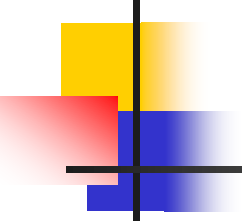
若一个半群（幺半群）是由其中的某个元素生成的半群（幺半群）。

如由 $a$ 生成的循环半群记为  $\langle a \rangle$

**例：**1)  $(\mathbb{N}, +)$  是由1生成的循环半群，无单位元。（ $\mathbb{N}$ 为自然数集）

2)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  生成元为 $[1]$ ,

$\mathbb{Z}_n$ 为模 $n$ 同余等价类所构成集合。



---

**定理5** 循环半群（循环幺半群）必  
是可交换半群（幺半群）.



**思考题**

循环（幺）半群中的生成元是否唯一？



---

例 设：

$$M = (a) = \{e, a, a^2, a^3, a^4\}$$

且  $a^5 = e$