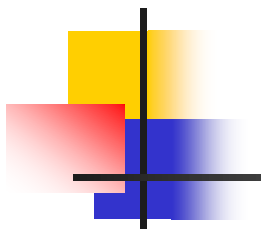




§ 2.3 子群、生成子群

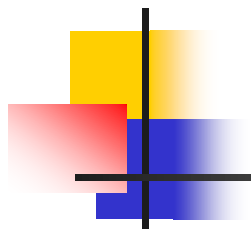
[本节主要内容]

- 1) 子群的定义;
- 2) 介绍几个子群的性质定理;
- 3) 给出几个子群的判定定理;
- 4) 概念: 生成子群、群的中心、换位子、换位子群;



定义1 设 (G, \circ) 为群， S 是 G 的非空子集。若 “ \circ ” 在 S 中封闭且 S 对此乘法也构成一个群，则称 S 是 G 的一个子群。

定理1 设 G_1 为群 G 的子群，则 G_1 的单位元必是 G 的单位元； G_1 的元素 a 在 G_1 中逆元素也是 a 在 G 中的逆元素。



定理2 群 G 的任意多个子群的交还是 G 的子群。

定理3 任一群不能是其两个真子群的并。

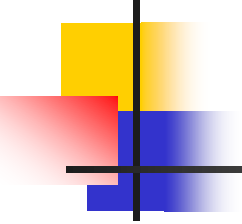
例1 求 S_3 的真子群。

$$\begin{aligned} S_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\} = \{e, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \end{aligned}$$

解: $a_1^{-1} = a_1 \quad a_2^{-1} = a_2 \quad a_3^{-1} = a_3 \quad a_4^{-1} = a_5$

$$G_1 = \{e\} \quad G_2 = \{e, a_1\} \quad G_3 = \{e, a_2\}$$

$$G_4 = \{e, a_3\} \quad G_5 = \{e, a_4, a_5\}$$



定理4 群G的非空子集S为G的子群的充分必要条件是：

1) $\forall a, b \in S, ab \in S$

2) $\forall a \in S, a^{-1} \in S$



定理5 群 G 的非空子集 S 是 G 的子群的充分必要条件是：

对 $\forall a, b \in S$
总有：

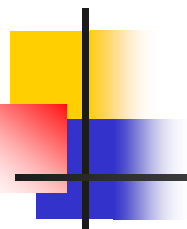
$$ab^{-1} \in S$$



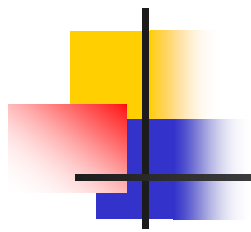
定理6 群G的**有限**非空子集F是G的子群的充分必要条件是 $FF \subseteq F$

即：

$$\forall a, b \in F, ab \in F$$



定义2 设 M 是群 G 的非空子集，则 G 的包含 M 的所有子群的交称为由 M 生成的子群，记为 $\langle M \rangle$



注： 设 (G, \circ) 为群， M 为 G 的非空子集，
则由 M 扩充为 G 的子群 M' 方法：

1)
$$M' = M \cup \{a^{-1} \mid \forall a \in M\}$$

2) 对 M' 中的任意两个元素作乘积放入 M' ，如此反复。



例2 在 S_3 中求由 a_1, a_2 生成的子群。

$$A = (a_1, a_2) = S_3$$

例3 设 G 是一个群, $a \in G$ 则

$$(a) = \{\cdots, a^{-n}, \cdots, a^{-2}, a^{-1}, e, a^1, a^2, \cdots, a^n, \cdots\}$$

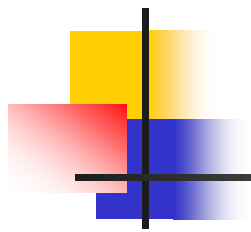
定义3 中心元素： 设 (G, \circ) 为群，

$a \in G$ ，对 $\forall x \in G$ 有 $ax = xa$

则称 a 为 G 的中心元素。由 G 的中心元素所构成的集合 C 称为 G 的中心，即：

$$C = \{a \mid \forall x \in G, ax = xa, a \in G\}$$

定理7 群 G 的中心 C 是 G 的可交换子群。



定义4 设 (G, \circ) 为群, 对 $\forall a, b \in G$

$aba^{-1}b^{-1}$ 称为 **a与b的换位子**。

换位子群: G 的所有换位子的集合 **所生成的** 子群。