HIT CS&E

第四章 动态规划技术

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提要

HIT CS&E

3.1 动态规划技术的基本要素

Why?
What?
How?

HIT CS&E

Why?

- 分治技术的问题
  - 子问题是相互独立的
  - 如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低
- 例如，计算斐波那契数列的第n项
  - $F(0)=F(1)=1$
  - $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$

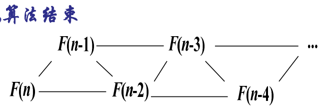
HIT CS&E

Why?

- 分治技术的问题
  - 子问题是相互独立的
  - 如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低
- 分治算法

算法$F(n)$
输入:非负整数n
输出:斐波那契数列第n项
1. If n=0 或1 Then 输出1,算法结束
2. $f_1 \leftarrow F(n-1)$;
3. $f_2 \leftarrow F(n-2)$;
4. 输出f_1+f_2;

时间复杂性
$T(1)=T(0)=1$
$T(n)=T(n-1)+T(n-2)$
$T(n)$不是多项式有界的



HIT CS&E

Why?

- 提高效率的方法
  - 从规模最小的子问题开始计算
  - 用恰当数据结构存储子问题的解，供以后查询
  - 确保每个子问题只求解一次
- 算法

算法$F(n)$
输入:非负整数n
输出:斐波那契数列第n项
1. $A[0] \leftarrow 1$; $A[1] \leftarrow 1$;
2. For i=2 To n
3. $\quad A[i] \leftarrow A[i-1]+A[i-2]$;
4. 输出$A[n]$;

时间复杂性
$T(n)=\Theta(n) = \Theta(2^{\log n})$

存在$\Theta(\log n)$的分治算法

$$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(n-1) \\ F(n-2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

HIT CS&E

Why?

- 分治技术的问题
  - 子问题是相互独立的
  - 如果子问题不是相互独立的，分治方法将重复计算公共子问题，效率很低
- 优化问题
  - 给定一组约束条件和一个代价函数，在解空间中搜索具有最小或最大代价的优化解
  - 很多优化问题可分为多个子问题，子问题相互关联，子问题的解被重复使用

HIT CS&E

What?

- 动态规划算法特点
  - 把原始问题划分成一系列子问题
  - 求解每个子问题仅一次，并将其结果保存在一个表中，以后用到时直接存取，不重复计算，节省计算时间
  - 自底向上地计算
- 适用范围
  - 一类优化问题：可分为多个相关子问题，子问题的解被重复使用

HIT CS&E

How?

- 使用Dynamic Programming的条件
  - Optimal substructure（优化子结构）
    - 当一个问题的优化解包含了子问题的优化解时，我们说这个问题具有优化子结构。
    - 缩小子问题集合，只需那些优化问题中包含的子问题，减低实现复杂性
    - 优化子结构使得我们能自下而上地完成求解过程
  - Subteties（重叠子问题）
    - 在问题的求解过程中，很多子问题的解将被多次使用

HIT CS&E

- 动态规划算法的设计步骤
  - 分析优化解的结构
  - 递归地定义最优解的代价
  - 自底向上地计算优化解的代价保存之，并获取构造最优解的信息
  - 根据构造最优解的信息构造优化解

HIT CS&E

4.2 Longest Common Susequence

- 问题的定义
- 最长公共子序列 (LCS) 结构分析
- 建立求解LCS长度的递归方程
- 自底向上LCS长度的计算
- 构造优化解

HIT CS&E

问题的定义

- 子序列
  - $X=(A, B, C, B, D, B)$
  - $Z=(B, C, D, B)$是X的子序例
  - $W=(B, D, A)$不是X的子序例
- 公共子序列
  - Z是序列X与Y的公共子序列如果Z是X的子序也是Y的子序列。

HIT CS&E

最长公共子序列（LCS）问题

输入：$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\ldots y_m)$
输出：$Z=X$与Y的最长公共子序列

蛮力法
- 枚举X的每个子序列Z
- 检查Z是否为Y的子序列
- $T(n)=O(m2^n)$

HIT CS&E

最长公共子序列结构分析

- 第i前缀
  - 设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是一个序列，$X$的第$i$前缀$X_i$是一个序列，定义为$X_i=(x_1, \ldots, x_i)$

例．$X=(A, B, D, C, A)$, $X_1=(A)$, $X_2=(A, B)$, $X_3=(A, B, D)$

HIT CS&E

- 优化子结构

定理1（优化子结构）设$X=(x_1, \ldots, x_m)$、$Y=(y_1, \ldots, y_n)$是两个序列，$Z=(z_1, \ldots, z_k)$是X与Y的LCS，我们有：

(1) 如果$x_m=y_n$, 则$z_k=x_m=y_n$, Z_{k-1}是X_{m-1}和Y_{n-1}的LCS，即，$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+<x_m=y_n>$.

(2) 如果$x_m\neq y_n$，且$z_k\neq x_m$，则Z是X_{m-1}和Y的LCS，即$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y}$

(3) 如果$x_m\neq y_n$,且$z_k\neq y_n$,则Z是X与Y_{n-1}的LCS，即$LCS_{XY}=LCS_{XY_{n-1}}$

证明：

(1). $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, x_m>$，则
$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+<x_m=y_n>$.

设$z_k\neq x_m$，则可加$x_m=y_n$到Z，得到一个长为$k+1$的X与Y的公共序列，与Z是X和Y的LCS矛盾。于是$z_k=x_m=y_n$。

现在证明Z_{k-1}是X_{m-1}与Y_{n-1}的LCS。显然Z_{k-1}是X_{m-1}与Y_{n-1}的公共子序列。我们需要证明Z_{k-1}是LCS。

设不然，则存在X_{m-1}与Y_{n-1}的公共子序列W，W的长大于k-1。增加$x_m=y_n$到W，我们得到一个长大于k的X与Y的公共序列，与Z是LCS矛盾。于是，Z_{k-1}是X_{m-1}与Y_{n-1}的LCS.

HIT CS&E

(2) $X=<x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m>$, $Y=<y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n>$，
$x_m\neq y_n$，$z_k\neq x_m$，则 $LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y}$

由于$z_k\neq x_m$，Z是X_{m-1}与Y的公共子序列。我们来证Z是X_{m-1}与Y的LCS。设X_{m-1}与Y有一个公共子序列W，W的长大于k，则W也是X与Y的公共子序列，与Z是LCS矛盾。

(3) 同(2)可证。

HIT CS&E

X和Y的LCS的优化解结构为

$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y_{n-1}}+<x_m=y_n>$ if $x_m=y_n$
$LCS_{XY}=LCS_{X_{m-1}Y}$ if $x_m\neq y_n$, $z_k\neq x_m$
$LCS_{XY}=LCS_{XY_{n-1}}$ if $x_m\neq y_n$, $z_k\neq y_n$

分治算法

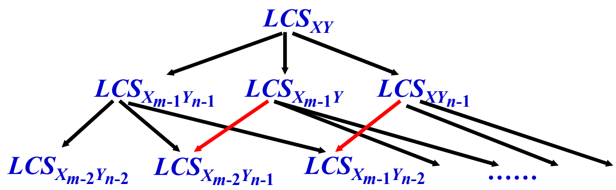
- 算法SimpleLCS(X,Y)

  输入： $X=(x_1,x_2,...,x_n)$， $Y=(y_1,y_2,...y_m)$

  输出： X,Y的最长公共子序列

  1. If m=0 或 n=0 Then 输出空串,算法结束;
  2. If $x_n=y_m$ Then
  3. 输出SimpleLCS(X_{n-1},Y_{m-1})+<x_n>;
  4. Else
  5. Z_1←SimpleLCS(X_{n-1},Y);
  6. Z_2←SimpleLCS(X,Y_{m-1});
  7. 输出Z_1,Z_2中较长者;

- 子问题重叠性



LCS问题具有子问题重叠性

建立LCS长度的递归方程

- $C[i,j]$ = X_i与 Y_j 的LCS的长度
- LCS长度的递归方程

$C[i,j]=0$ if i=0 或 j=0

$C[i,j]=C[i-1,j-1]+1$ if i,j>0 and $x_i=y_j$

$C[i,j]=Max(C[i,j-1],C[i-1,j])$ if i,j>0 and $x_i\neq y_j$

自底向上计算LCS的长度

- 基本思想

$C[i-1,j-1]$	$C[i-1,j]$
$C[i,j-1]$	$C[i,j]$

- 计算过程

C[0,0]	C[0,1]	C[0,2]	C[0,3]	C[0,4]
C[1,0]	C[1,1]	C[1,2]	C[1,3]	C[1,4]
C[2,0]	C[2,1]	C[2,2]	C[2,3]	C[2,4]
C[3,0]	C[3,1]	C[3,2]	C[3,3]	C[3,4]

- 计算LCS长度的算法
  - 数据结构

  $C[0:m,0:n]$: $C[i,j]$是X_i与Y_j的LCS的长度

  $B[1:m,1:n]$: $B[i,j]$是指针，指向计算$C[i,j]$时所选择的子问题的优化解所对应的C表的表项

LCS-length(X, Y)

m←length(X); n←length(Y);

For i←1 To m Do $C[i,0]$←0;

For j←1 To n Do $C[0,j]$←0;

For i←1 To m Do

For j←1 To n Do

If $x_i = y_j$

Then $C[i,j]$←$C[i\text{-}1,j\text{-}1]$+1; $B[i,j]$←"↖";

Else If $C[i\text{-}1,j] \geq C[i,j\text{-}1]$ Then

$C[i,j]$←$C[i\text{-}1,j]$; $B[i,j]$←"↑";

Else $C[i,j]$←$C[i,j\text{-}1]$; $B[i,j]$←"←";

Return C and B.

HIT CS&E

构造优化解

- 基本思想
  - 从$B[m, n]$开始按指针搜索
  - 若$B[i, j]$="↖"，则x_i=y_j是LCS的一个元素
  - 如此找到的"LCS"是X与Y的LCS的Inverse

HIT CS&E

Print-LCS(B, X, i, j)

IF i=0 or j=0 THEN Return;

IF $B[i, j]$="↖"

THEN Print-LCS(B, X, i-1, j-1); Print x_i;

ELSE If $B[i, j]$="↑"

THEN Print-LCS(B, X, i-1, j);

ELSE Print-LCS(B, X, i, j-1).

Print-LCS(B, X, length(X), length(Y))

可打印出X与Y的LCS。

HIT CS&E

4.3 矩阵链乘法

HIT CS&E

问题的定义

- 输入：$<A_1, A_2, ..., A_n>$，A_i是矩阵
- 输出：计算$A_1 \times A_2 \times .. \times A_n$的最小代价方法

矩阵乘法的代价/复杂性：乘法的次数

若A是$p \times q$矩阵，B是$q \times r$矩阵，则$A \times B$的代价是$O(pqr)$

HIT CS&E

Motivation

- 矩阵链乘法的实现
  - 矩阵乘法满足结合率。
  - 计算一个矩阵链的乘法可有多种方法：

例如，$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4)$

$= (A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4)))$

$= ((A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4))$

....

$= (((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4)$

HIT CS&E

- 矩阵链乘法的代价与计算顺序的关系
  - 设A_1=10×100矩阵, A_2=100×5矩阵, A_3=5×50矩阵

    $T((A_1 \times A_2) \times A_3) = 10\times100\times5 + 10\times5\times50 = 7500$

    $T(A_1 \times (A_2 \times A_3)) = 100\times5\times50 + 10\times100\times50 = 75000$

结论：不同计算顺序有不同的代价

HIT CS&E

- 矩阵链乘法优化问题的解空间
  - 设$p(n)$=计算n个矩阵乘积的方法数
  - $p(n)$的递归方程

如此之大的解空间是无法用枚举方法求出最优解的！

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n-1} p(k)\,p(n-k) \qquad \text{if } n>1$$

$$p(n)=C(n-1)=\text{Catalan数}=\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}=\Omega(4^n/n^{3/2})$$

HIT CS&E

下边开始设计求解矩阵链乘法问题的 Dynamic Programming算法

- 分析优化解的结构
- 递归地定义最优解的代价
- 自底向上地计算优化解的代价保存之，并获取构造最优解的信息
- 根据构造最优解的信息构造优化解

HIT CS&E

分析优化解的结构

- 两个记号
  - $A_{i\text{-}j}=A_i \times A_{i+1} \times \ldots \times A_j$
  - $cost(A_{i\text{-}j})$=计算$A_{i\text{-}j}$的代价
- 优化解的结构

具有优化子结构：问题的优化解包括子问题优化解

即 …… 应于子问题$A_{1\sim k}$的解必须是$A_{1\text{-}k}$的优化解，对应于子问题$A_{k+1\sim n}$的解必须是$A_{k+1\sim n}$的优化解

- 子问题重叠性

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$

$(A_1)\times(A_2 \times A_3 \times A_4)$ $(A_1 \times A_2)\times(A_3 \times A_4)$ $(A_1 \times A_2 \times A_3)\times(A_4)$

$(A_2 \times A_3)$ $(A_3 \times A_4)$ $(A_1 \times A_2)$ $(A_3 \times A_4)$ $(A_1 \times A_2)$ $(A_2 \times A_3)$

具有子问题重叠性

HIT CS&E

递归地定义最优解的代价

- 假设
  - $m[i, j]$ = 计算$A_{i\sim j}$的最小乘法数
  - $m[1, n]$ = 计算$A_{1\sim n}$的最小乘法数
  - $A_1 \ldots A_k A_{k+1} \ldots A_n$ 是优化解(k实际上是不可预知)
- 代价方程

  $m[i, i]$ = 计算$A_{i\sim i}$的最小乘法数= 0

  $m[i, j] = m[i, k] + m[k+1, j] + p_{i-1}p_kp_j$

  其中，$p_{i-1}p_kp_j$是计算$A_{i\sim k} \times A_{k+1\sim j}$所需乘法数，$A_{i\sim k}$和$A_{k+1\sim j}$分别是$p_{i-1} \times p_k$和$p_k \times p_j$矩阵.

HIT CS&E

考虑到所有的k，优化解的代价方程为

$m[i,j]=0$ if $i=j$

$m[i,j]=\min_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j\}$ if $i<j$

HIT CS&E

自底向上计算优化解的代价

$m[i,j]=\min_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_0p_kp_5\}$

$m[1,1]$	$m[1,2]$	$m[1,3]$	$m[1,4]$	$m[1,5]$
	$m[2,2]$	$m[2,3]$	$m[2,4]$	$m[2,5]$
		$m[3,3]$	$m[3,4]$	$m[3,5]$
			$m[4,4]$	$m[4,5]$
				$m[5,5]$

$$m[2,4]=\min\left\{\begin{matrix}m[2,2]+m[3,4]\\ m[2,3]+m[4,4]\end{matrix}\right.$$

HIT CS&E

$m[i,j]=\min_{i\le k<j}\{m[i,k]+m[k+1,j]+p_{i-1}p_kp_j\}$

$m[1,1]$	$m[1,2]$	$m[1,3]$	$m[1,4]$	$m[1,5]$
	$m[2,2]$	$m[2,3]$	$m[2,4]$	$m[2,5]$
		$m[3,3]$	$m[3,4]$	$m[3,5]$
			$m[4,4]$	$m[4,5]$
				$m[5,5]$

```
Matrix-Chain-Order(p)
n=length(p)-1;
FOR i=1 TO n DO
    m[i, i]=0;
FOR l=2 TO n DO /* 计算地l对角线 */
    FOR i=1 TO n-l+1 DO
        j=i+l-1;
        m[i, j]=∞;
        FOR k←i To j-1 DO /* 计算m[i,j] */
            q=m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j
            IF q<m[i, j] THEN m[i,j]=q;
Return m.
```

HIT CS&E

获取构造最优解的信

```
Matrix-Chain-Order(p)
n=length(p)-1;
FOR i=1 TO n DO
    m[i, i]=0;
FOR l=2 TO n DO
    FOR i=1 TO n-l+1 DO
        j=i+l-1;
        m[i, j]=∞;
        FOR k←i To j-1 DO
            q = m[i, k]+m[k+1, j]+p_{i-1}p_kp_j
            IF q<m[i, j] THEN m[i,j]=q, s[i,j]=k;
Return m and s.
```

$S[i,j]$记录$A_iA_{i+1}\ldots A_j$的最优划分处在A_k与A_{k+1}之间

HIT CS&E

构造最优解

```
Print-Optimal-Parens(s, i, j)
IF j=i
THEN Print "A"i;
ELSE Print "("
     Print-Optimal-Parens(s, i, s[i, j])
     Print-Optimal-Parens(s, s[i, j]+1, j)
     Print ")"
```

$S[i,j]$记录$A_i\ldots A_j$的最优划分处；

$S[i,S[i,j]]$记录$A_i\ldots A_{s[i,j]}$的最优划分处；

$S[S[i,j]+1,j]$记录$A_{s[i,j]+1}\ldots A_j$的最优划分处.

调用Print-Optimal-Parens(s, 1, n)
即可输出$A_{1\sim n}$的优化计算顺序

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - (l, i, k)三层循环，每层至多n-1步
    - $O(n^3)$
  - 构造最优解的时间：$O(n)$
  - 总时间复杂性为：$O(n^3)$
- 空降复杂性
  - 使用数组m和S
  - 需要空间$O(n^2)$

4.4 0/1 背包问题

问题的定义

给定n种物品和一个背包，物品i的重量是w_i，价值v_i，背包承重为C，问如何选择装入背包的物品，使装入背包中的物品的总价值最大？

对于每种物品只能选择完全装入或不装入，一个物品至多装入一次。

- 输入：$C>0$, $w_i>0$, $v_i>0$, $1\le i\le n$
- 输出：$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i\in\{0, 1\}$, 满足
  $\Sigma_{1\le i\le n} w_i x_i \le C$, $\Sigma_{1\le i\le n} v_i x_i$ 最大

等价的整数规划问题

$$\max \Sigma_{1\le i\le n} v_i x_i$$
$$\Sigma_{1\le i\le n} w_i x_i \le C$$
$$x_i\in\{0, 1\},\ 1\le i\le n$$

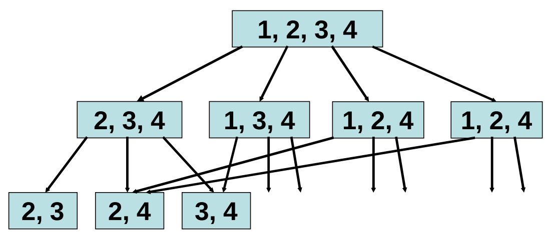
优化解结构的分析

定理(优化子结构) 如果$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$是0-1背包问题的优化解，则$(y_2, \ldots, y_n)$是如下子问题的优化解：

$$\max \Sigma_{2\le i\le n} v_i x_i$$
$$\Sigma_{2\le i\le n} w_i x_i \le C - w_1 y_1$$
$$x_i\in\{0, 1\},\ 2\le i\le n$$

证明：如果$(y_2, \ldots, y_n)$不是子问题优化解，则存在$(z_2, \ldots, z_n)$是子问题更优的解。于是，$(y_1, z_2, \ldots, z_n)$是原问题比$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$更优解，矛盾。

子问题重叠性



HIT CS&E

建立优化解代价的递归方程

- $m(i, j)$：
  背包容量为j，可选物品为$x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$时，问题的最优解的代价是$m(i, j)$.
- 形式地

问题 $\max \sum_{i\leq k\leq n} v_k x_k$

$\sum_{i\leq k\leq n} w_k x_k \leq j$

$x_k \in \{0, 1\},\ i \leq k \leq n$

的最优解代价为$m(i, j)$.

HIT CS&E

- 递归方程

$m(i, j) = m(i+1, j)$ $\quad 0 \leq j < w_i$

$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\}$ $\quad j \geq w_i$

$m(n, j) = 0$ $\quad 0 \leq j < w_n$

$m(n, j) = v_n$ $\quad j \geq w_n$

HIT CS&E

自底向上计算优化解的代价

$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0\leq j < w_i$

$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \geq w_i$

$m(n, j) = 0,\quad 0 \leq j < w_n$

$m(n, j) = v_n,\quad j \geq w_n$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j)$

令w_i=整数, $n=4$

$m(1,C)$

$m(2,C-w_1)$ … $m(2,C)$

$m(3, C-w_1-w_2)$ … $m(3,C-w_1)$ … $m(3,C)$

… $m(4, C-w_1-w_2-w_3)$ … $m(4, C-w_1-w_2)$ … $m(4,C-w_1)$ … $m(4, C)$

$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0\leq j < w_i$

$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \geq w_i$

$m(n, j) = 0,\quad 0 \leq j < w_n$

$m(n, j) = v_n,\quad j \geq w_n$

	$m(i, j)$
$m(i+1, j-w_i)$	$m(i+1, j$

令w_i=整数,
$n=4$

$m(1,C)$

$m(2, 0)$ … $m(2,w_2-1)$ $m(2, w_2)$ … $m(2,C-1)$ $m(2,C)$

$m(3, 0)$ … $m(3,w_3-1)$ $m(3, w_3)$ … $m(3,C-1)$ $m(3,C)$

$m(4, 0)$ … $m(4,w_4-1)$ $m(4, w_4)$ … $m(4,C-1)$ $m(4,C)$

- 算法

$m(i, j) = m(i+1, j),\ 0\leq j < w_i$

$m(i, j) = \max\{m(i+1, j), m(i+1, j-w_i)+v_i\},\ j \geq w_i$

$m(n, j) = 0,\quad 0 \leq j < w_n$

$m(n, j) = v_n,\quad j \geq w_n$

```
For j=0 To min(w_n-1, C) Do
    m[n, j] = 0;
For j=w_n To C Do
    m[n, j] = v_n;
For i=n-1 To 2 Do
    For j=0 To min(w_i-1, C) Do
        m[i, j] = m[i+1, j];
    For j=w_i To C Do
        m[i, j]=max{m[i+1, j], m[i+1, j-w_i]+v_i};
If C<w_1
Then m[1, C]=m[2, C];
Else m[1, C]=max{m[2, C], m[2, C-w_1]+v_1};
```

HIT CS&E

构造优化解

1. $m(1, C)$是最优解代价值，相应解计算如下:
   If $m(1, C) = m(2, C)$
   Then $x_1 = 0$;
   Else $x_1 = 1$;
2. 如果 x_1=0, 由$m(2, C)$继续构造最优解;
3. 如果 x_1=1, 由$m(2, C-w_1)$继续构造最优解.

HIT CS&E

算法复杂性

- 时间复杂性
  - 计算代价的时间
    - $O(Cn)$
  - 构造最优解的时间: $O(Cn)$
  - 总时间复杂性为: $O(n)$
- 空降复杂性
  - 使用数组m
  - 需要空间$O(Cn)$

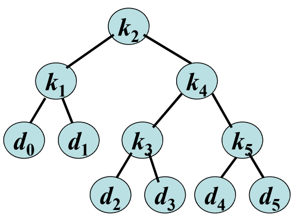
HIT CS&E

4.5 最优二叉搜索树

HIT CS&E

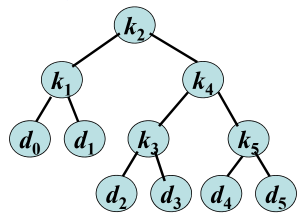
问题的定义

- 二叉搜索树T
  - 结点
    - $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$
    - $D=\{d_0, d_1, \ldots, d_n\}$
    - d_i对应区间(k_i, k_{i+1})
      d_0对应区间$(-\infty, k_1)$
      d_n对应区间$(k_n, +\infty)$
  - 附加信息
    - 搜索k_i的概率为p_i
    - 搜索d_i的概率为q_i
    $\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{j=0}^{n} q_j = 1$



HIT CS&E

- 搜索树的期望代价



$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

HIT CS&E

- 问题的定义

输入: $K=\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, $k_1<k_2<\ldots<k_n$,
$P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, p_i为搜索k_i的概率
$Q=\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, q_i为搜索值d_i的概率

输出: 构造K的二叉搜索树T, 使得

$$E(T)=\sum_{i=1}^{n}(DEP_T(k_i)+1)p_i+\sum_{j=0}^{n}(DEP_T(d_i)+1)q_i$$

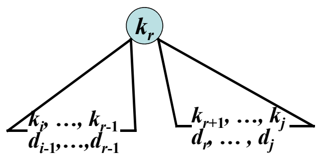
最小

HIT CS&E

优化二叉搜索树结构的分析

- 划分子问题

$K=\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的优化解的根必为$K$中某个$k_r$



如果$r=i$, 左子树$\{k_i, \ldots, k_{i-1}\}$仅包含d_{i-1}
如果$r=j$, 右子树$\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$仅包含d_j

- **优化子结构**

定理. 如果优化二叉搜索树T具有包含关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子树$T'$，则$T'$是关于关键字集合$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的子问题的优化解.

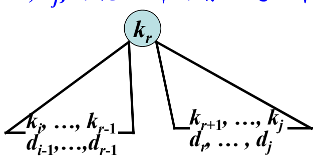
证明: 若不然，必有关键字集$\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$子树$T''$，$T''$的期望搜索代价低于$T'$.

用T''替换T中的T'，可以得到一个期望搜索代价比T小的原始问题的二叉搜索树。

与T是最优解矛盾.

- **用优化子结构从子问题优化解构造优化解**

$K=\{k_i, k_{i+1}, \ldots, k_j\}$的优化解的根必为$K$中某个$k_r$

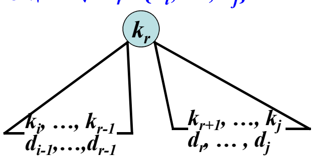


只要对于每个$k_r \in K$，确定$\{k_i, \ldots, k_{r-1}\}$和$\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$的优化解，我们就可以求出K的优化解.

如果$r=i$，左子树$\{k_i, \ldots, k_{i-1}\}$仅包含d_{i-1}
如果$r=j$，右子树$\{k_{r+1}, \ldots, k_j\}$仅包含d_j

建立优化解的搜索代价递归方程

- 令$E(i, j)$为$\{k_i, \ldots, k_j\}$的优化解T_{ij}的期望搜索代价
  - 当$j=i-1$时，T_{ij}中只有叶结点d_{i-1}，$E(i, i-1)=q_{i-1}$
  - 当$j \geq i$时，选择一个$k_r \in \{k_i, \ldots, k_j\}$:



当把左右优化子树放进T_{ij}时，每个结点的深度增加1

$E(i, j)=P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$

- **计算$W(i, r-1)$和$W(r+1, j)$**

由 $E(LT+1)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{\text{左}}(k_l)+2)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{\text{左}}(d_l)+2)q_l$

$E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}(DEP_{\text{左}}(k_l)+1)p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}(DEP_{\text{左}}(d_l)+1)q_l$

知 $W(i,r-1)=E(LT+1)-E(LT)=\sum_{l=i}^{r-1}p_l+\sum_{l=i-1}^{r-1}q_l$

同理，$W(r+1,j)=\sum_{l=r+1}^{j}p_l+\sum_{l=r}^{j}q_l$

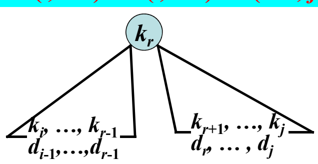
令 $W(i, j)=W(i, r-1) + W(r+1, j) + p_r=\sum_{l=i}^{j}p_l+\sum_{l=i-1}^{j}q_l$

$=W(i, j-1)+p_j+q_j$

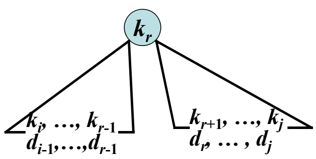
$W(i, i-1)=q_{i-1}$

$W(i, j)=W(i, r-1) + W(r+1, j) + p_r =W(i, j-1)+p_j+q_j$

$E(i, j)=P_r + E(i, r-1) + W(i, r-1) + E(r+1, j) + W(r+1, j)$



$E(i, j) = E(i, r-1) + E(r+1, j) + W(i, j)$



In Summary

$E(i, j)=q_{i-1}$ *If* $j=i-1$

$E(i, j)=\min_{i\leq r\leq j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$ *If* $j\geq i$

$W(i, i-1) = q_{i-1}$,

$W(i, j) = W(i, j-1) + p_j + q_j$

自下而上计算优化解的搜索代价

$E(i, j)=q_{i-1}$　　If $j=i-1$

$E(i, j)=min_{i\leq r\leq j}\{E(i,r-1)+E(r+1,j)+W(i, j)\}$　If $j\geq i$

q_0 =	$E(1,0)$	$E(1,1)$	$E(1,2)$	$E(1,3)$	$E(1,4)$
	q_1 =	$E(2,1)$	$E(2,2)$	$E(2,3)$	$E(2,4)$
		q_2 =	$E(3,2)$	$E(3,3)$	$E(3,4)$
			q_3 =	$E(4,3)$	$E(4,4)$
				q_4 =	$E(5,4)$

- $W(i, i\text{-}1) = q_{i\text{-}1},\quad W(i, j) = W(i, j\text{-}1) + p_j + q_j$

q_0 =	$W(1,0)$	$W(1,1)$	$W(1,2)$	$W(1,3)$	$W(1,4)$
	q_1 =	$W(2,1)$	$W(2,2)$	$W(2,3)$	$W(2,4)$
		q_2 =	$W(3,2)$	$W(3,3)$	$W(3,4)$
			q_3 =	$W(4,3)$	$W(4,4)$
				q_4 =	$W(5,4)$

- 算法
  - 数据结构
    - $E[1{:}n+1;\ 0{:}n]$: 存储优化解搜索代价
    - $W[1{:}\ n+1;\ 0{:}n]$: 存储代价增量
    - $Root[1{:}n;\ 1{:}n]$: $Root(i, j)$记录子问题 $\{k_i, \ldots, k_j\}$优化解的根


```
Optimal-BST(p, q, n)
For i=1 To n+1 Do
    E(i, i-1) = q_{i-1};
    W(i, i-1) = q_{i-1};
For l=1 To n Do
    For i=1 To n-l+1 Do
        j=i+l-1;
        E(i, j)=∞;
        W(i, j)=W(i, j-1)+p_j+q_j;
        For r=i To j Do
            t=E(i, r-1)+E(r+1, j)+W(i, j);
            If t<E(i, j)
            Then E(i, j)=t; Root(i, j)=r;
Return E and Root
```


算法的复杂性

- 时间复杂性
  - (l, i, r)三层循环，每层循环至多n步
  - 时间复杂性为$O(n^3)$
- 空间复杂性
  - 二个$(n+1)\times(n+1)$数组，一个$n\times n$数组
  - $O(n^2)$

4.6 凸多边形的三角剖分

- 弦

  多边形P上的任意两个不相邻结点v_i、v_{i+1}所对应的线段v_iv_{i+1}称为弦

- 三角剖分

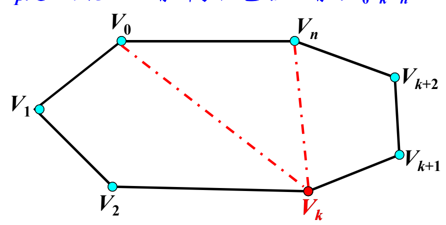
  一个多边形P的三角剖分是将P划分为不相交三角形的弦的集合

- 优化三角剖分问题
  - 输入：多边形P和代价函数W
  - 输出：求P的三角分T，使得代价$\sum_{s\in S_T} W(s)$最小，其中S_T是T所对应的三角形集合

HIT CS&E

优化解结构的分析

- 设
  - $P=(v_0,v_1,\ldots v_n)$是$n+1$个顶点的多边形
  - T_P是P的优化三角剖分，包含三角形$v_0v_kv_n$



  - $T_P=T(v_0, \ldots, v_k)\cup T(v_k, \ldots, v_n)\cup\{v_0v_k, v_kv_n\}$

HIT CS&E

优化三角剖分的代价函数

- 设 $t[i,j] = <v_{i-1},v_i,\ldots,v_j>$的优化三角剖分代价

$$t[i, i] = t[j, j] = 0$$

$$t[i, j] = min_{i\le k<j}\{t[i, k] + t[k+1, j] + w(\Delta_{v_{i-1}v_kv_j})\}$$

注意：
$t[i, k] = <v_{i-1}, v_i, \ldots, v_k>$的优化三角剖分代价
$t[k+1, j] = <v_k, v_i, \ldots, v_j>$的优化三角剖分代价

HIT CS&E

优化三角剖分动态编程算法

与矩阵链乘法问题一致，把算法

Matrix-chain-Order

Print-Optimal-Parens

略加修改即可计算$t[i,j]$并构造优化三角剖分解

HIT CS&E

Homework 1:
给出优化二元搜索树问题优化解的构造算法。

Homework 2:
给出求解下列问题的动态规划算法：
输入：平面上n个点：$v_1, \ldots, v_n$, x—坐标皆不同；
任意两点(v_i, v_j)之间的距离d_{ij}，$i\neq j$.
输出：找到一个最短bitonic tour：
从最左点出发，严格从左向右走到最右点；
再从最右点开始，严格从右向左回到开始点.