

第一章集合及其运算

陈建文

1. 集合的概念

定义1.1

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个**集合**。构成集合的每个东西叫做集合的**元素**。给定一个集合**A**和一个元素**a**，用 $a \in A$ 表示**a**是**A**的一个元素，用 $a \notin A$ 表示**a**不是**A**的一个元素。

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

▶ $A = \{1, 2, 3\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$

- ▶ $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$

- ▶ $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$

- ▶ $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- ▶ $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$

- ▶ $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- ▶ $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$

- ▶ $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 Φ 。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设 A , B 是两个集合, 如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素, 并且 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 则称 A 与 B 相等, 并记为 $A = B$ 。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设 A , B 是两个集合, 如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素, 并且 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 则称 A 与 B 相等, 并记为 $A = B$ 。

► $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设 A , B 是两个集合, 如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素, 并且 B 中的每个元素都是 A 中的元素, 则称 A 与 B 相等, 并记为 $A = B$ 。

- ▶ $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- ▶ $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设 A , B 是两个集合, 如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记为 $A \subseteq B$; 如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$ 。

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设 A , B 是两个集合, 如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记为 $A \subseteq B$; 如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记为 $A \subset B$ 。

► $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设 A, B 是两个集合，如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 并且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$ 。

- ▶ $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定理2.1

空集是任一个集合的子集且空集是唯一的。

2. 子集、集合的相等

定义2.3

集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集，记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

2. 子集、集合的相等

定义2.3

集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集，记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

例：

设 $S = \{1, 2, 3\}$,

则 $2^S = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

3. 集合的基本运算

定义3.1

设 A, B 是任意的两个集合，至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$ 。

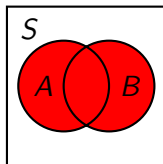
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.1

设 A, B 是任意的两个集合，至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

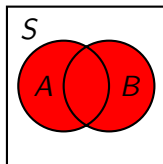


3. 集合的基本运算

定义3.1

设 A, B 是任意的两个集合，至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$ 。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



例：

$$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.2

设 A, B 是任意的两个集合，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$ 。

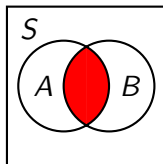
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.2

设 A, B 是任意的两个集合，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

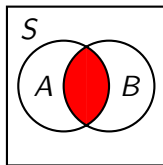


3. 集合的基本运算

定义3.2

设 A, B 是任意的两个集合，由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$ 。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



例：

$$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.3

设 A, B 是任意的两个集合，由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$ 。

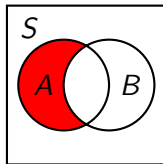
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.3

设 A, B 是任意的两个集合，由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A \setminus B$ 。

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

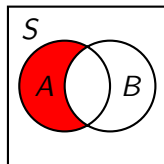


3. 集合的基本运算

定义3.3

设 A, B 是任意的两个集合，由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记为 $A \setminus B$ 。

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



例：

$$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

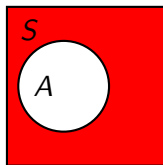
在许多实际问题中，常以某个集合 S 为出发点，而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S ，称为该问题的全集。如果 A 是 S 的子集，则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的余集，记为 A^c 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合 S 为出发点，而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S ，称为该问题的全集。如果 A 是 S 的子集，则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的余集，记为 A^c 。

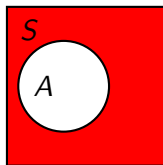


$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合 S 为出发点，而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S ，称为该问题的**全集**。如果 A 是 S 的子集，则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的**余集**，记为 A^c 。



$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例：

$S = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$, 则 $A^c = \{1\}$

3. 集合的基本运算

定理3.1

设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$
3. $A \cup A = A, A \cap A = A.$
4. $(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A.$
5. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$
6. $A \cup S = S, A \cap S = A.$
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
8. $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset.$
9. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B),$
 $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$
- 9'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$

3. 集合的基本运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

3. 集合的基本运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	\bar{x}
1	0
0	1

3. 集合的基本运算

定义3.5

设 B 是一个集合，在其上定义了一个一元运算 $-$ ，两个二元运算 \vee 和 \wedge ，以及两个特定的元素 0 和 1 ，使得对 B 中的任何元素 x, y, z ，满足以下条件，则称 $(B, -, \vee, \wedge, 0, 1)$ 为一个布尔代数。

$$1. x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$$

$$2. (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

$$3. x \vee 0 = x$$

$$4. x \wedge 1 = x$$

$$5. x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$6. x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0$$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设 A, B 是两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集合称为 A 与 B 的**对称差**, 记为 $A \triangle B$ 。

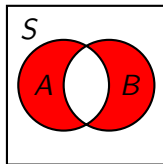
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设 A, B 是两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集合称为 A 与 B 的**对称差**, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

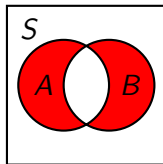


3. 集合的基本运算

定义3.6

设 A, B 是两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集合称为 A 与 B 的**对称差**, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例:

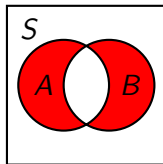
$$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设 A, B 是两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集合称为 A 与 B 的**对称差**, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例:

$$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$$

定理3.2

设 S 为全集, $A \in 2^S$, $B \in 2^S$, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

3. 集合的基本运算

定理3.3

设 S 为全集， \emptyset 为空集， A, B, C 为 S 的子集，则

1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

3. 集合的基本运算

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3. 集合的基本运算

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. 集合的基本运算

定义3.7

设 $(B, \neg, \vee, \wedge, 0, 1)$ 为一个布尔代数, $x \in B, y \in B$, 定义 x 与 y 的对称差为 $x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$ 。

定理3.4

设 $(B, \neg, \vee, \wedge, 0, 1)$ 为一个布尔代数, $x \in B, y \in B, z \in B$ 。则

1. $x \oplus y = y \oplus x$.
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
3. $0 \oplus x = x$.
4. $x \oplus x = 0$.
5. $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

3. 集合的基本运算

定义3.8

以集合为元素的集合称为**集族**。如果 I 为任意一个集合，对 I 中每个元素 α 都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为 A_α ，那么所有这些 A_α 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示，其中 I 称为**标号集**。

定义3.9

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

3. 集合的基本运算

例:

设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$, 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = ?, \bigcap_{x \in I} A_x = ?$$

3. 集合的基本运算

定理3.5

设 A 为任意集合, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

1. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$
2. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。
 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义3.11

设 A 与 B 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义3.11

设 A 与 B 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

例：

如果 $X = \{1, 2\}$ ， $Y = \{3, 4, 5\}$ ，那么 $X \times Y = ?$ ， $Y \times X = ?$

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个**有序对**。如果第一对象为 a ，第二个对象为 b ，则该有序对记为 (a, b) 。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义3.11

设 A 与 B 为任意两个集合，则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 为 A 与 B 的**笛卡尔乘积**，记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

例：

如果 $X = \{1, 2\}$ ， $Y = \{3, 4, 5\}$ ，那么 $X \times Y = ?$ ， $Y \times X = ?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

3. 集合的运算

定义3.12

n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ， \dots ，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

3. 集合的运算

定义3.12

n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ， \dots ，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义3.13

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积，记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

3. 集合的运算

定义3.12

n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ， \dots ，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义3.13

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积，记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

例：

如果 $X = \{a_1, b_1\}$ ， $Y = \{a_2, b_2\}$ ， $Z = \{a_3, b_3\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

3. 集合的运算

定义3.12

n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 ，第二个对象为 a_2 ， \dots ，第 n 个对象为 a_n ，则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义3.13

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积，记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ，简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

例：

如果 $X = \{a_1, b_1\}$ ， $Y = \{a_2, b_2\}$ ， $Z = \{a_3, b_3\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

6. 有穷集合的基数

定义6.1

设 X 和 Y 是两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 是一个法则，根据 f ，对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f : X \rightarrow Y$ 。

定义6.2

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ ，只要 $x_1 \neq x_2$ ，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的单射。

定义6.3

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 $\forall y \in Y$ ， $\exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ ，则称 f 为从 X 到 Y 的满射。

定义6.4

设 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为从 X 到 Y 的双射，或者称 f 为从 X 到 Y 的一一对应。

6. 有穷集合的基数

定义6.5

设 A 为一个集合, 如果 $A = \Phi$, 其**基数**定义为0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 n 使得 A 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 A 的**基数**为 n 。 A 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 n , 则称 A 为**有穷集**; 如果 A 不是有穷集, 则称 A 为**无穷集**。

6. 有穷集合的基数

定理6.1

设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

6. 有穷集合的基数

定理6.1

设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

定理6.2

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

定理6.4

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.5

设 S 为有穷集, $A \subseteq S$, 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明.

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设定理的结论对 $n \geq 1$ 个有穷集合成立, 往证对 $n + 1$ 个有穷集合定理的结论也成立。实际上,

6. 有穷集合的基数

$$\begin{aligned}& \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\&= \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1} \right| \\&= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right| \\&= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\&\hspace{20em} (1)\end{aligned}$$

6. 有穷集合的基数

由归纳假设

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \quad (2) \\ & - \dots \\ & + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

6. 有穷集合的基数

$$\begin{aligned}& |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| \\&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| \\&\quad - \cdots \\&\quad + (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \quad (3) \\&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})| \\&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\&\quad - \cdots \\&\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}| \end{aligned}$$

6. 有穷集合的基数

将(2)和(3)代入(1)得

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \dots \\ & \quad + (-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}| \end{aligned}$$

6. 有穷集合的基数

定理6.8

设 S 为全集, A_1, A_2, \dots, A_n 都是有穷集 S 的子集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcap_{i=1}^n A_i^c \right| \\ &= |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

6. 有穷集合的基数

例:

在1000名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中804人掌握了英语，205人掌握了日语，190人掌握了俄语，125人既掌握了英语又掌握了日语，57人既掌握了日语又掌握了俄语，85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生，英语、日语、俄语全掌握的有多少人。