

第六章 图的基本概念

6.1 图论的产生与发展史概述



6.2 基本定义

设 V 是一个集合， V 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}。$$

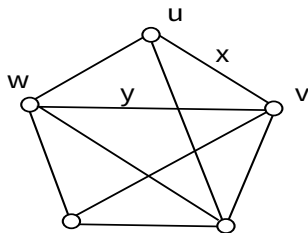
定义6.2.1

设 V 是一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 V 中的元素称为无向图 G 的**顶点**， V 为**顶点集**； E 中的元素称为无向图 G 的**边**， E 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 G 为一个 (p, q) 图，即 G 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图。

6.2 基本定义

定义6.2.2

在图 $G = (V, E)$ 中, 如果 $\{u, v\} \in E$, 则称**顶点 u 与 v 邻接**; 若 x 与 y 是图 G 的两条边, 并且仅有一个公共端点, 即 $|x \cap y| = 1$, 则称**边 x 与 y 邻接**; 如果 $x = \{u, v\}$ 是图 G 的一条边, 则称 **u 与 x 互相关联**, 同样的, 称 **v 与 x 互相关联**。



6.2 基本定义

定义6.2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为**多重图**，这些边称为**多重边**；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为**带环图**，这些边称为**环**；允许有环或多重边存在的图，称之为**伪图**。

6.2 基本定义

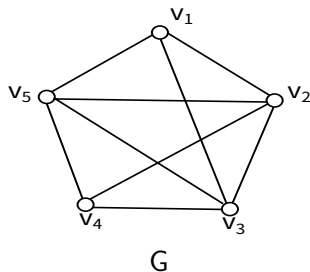
定义6.2.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $E = \Phi$, 则称 G 为**零图**; $(1, 0)$ 图称为**平凡图**。

6.2 基本定义

定义6.2.5

设 v 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， G 中与 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度，记为 $\deg v$ 。

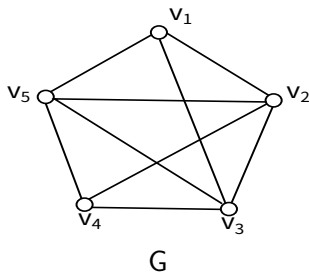


6.2 基本定义

定理6.2.1

设 $G = (V, E)$ 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图, 则 G 中各顶点度的和等于边的条数 q 的两倍, 即

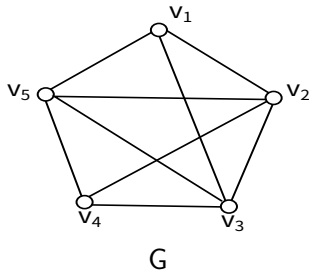
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$



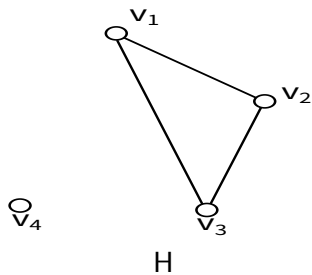
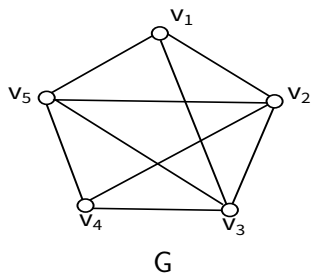
6.2 基本定义

推论6.2.1

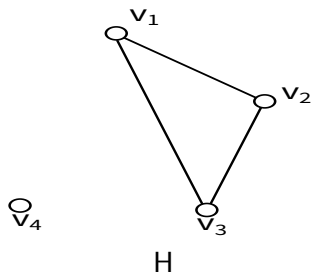
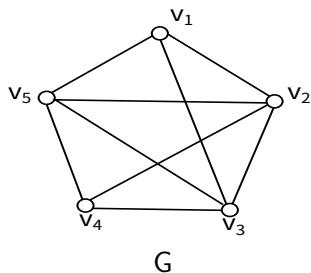
在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。



6.2 基本定义



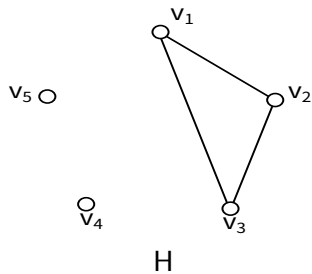
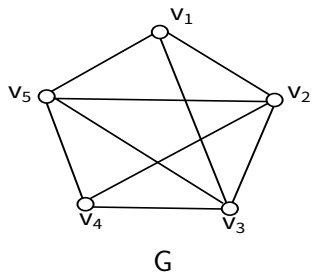
6.2 基本定义



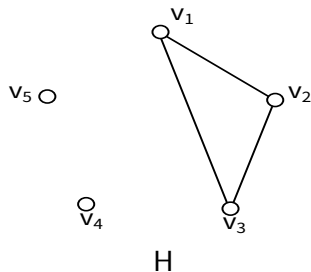
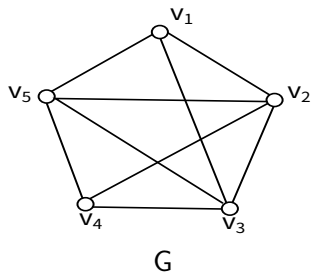
定义6.2.6

设 $G = (V, E)$ 是一个图，如果 V_1 是 V 的非空子集， E_1 是 E 的非空子集并且 E_1 中每条边的顶点都在 V_1 中，则称图 $H = (V_1, E_1)$ 为 G 的一个子图。如果 $H \neq G$ ，则称 H 为 G 的真子图。

6.2 基本定义



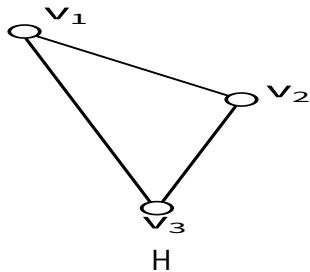
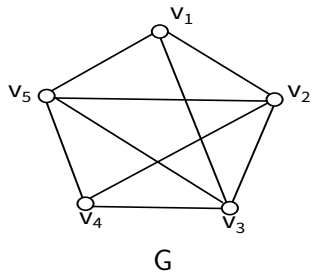
6.2 基本定义



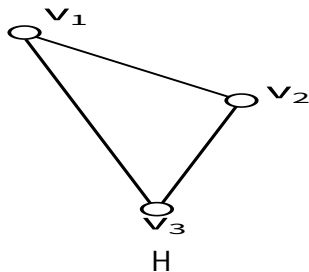
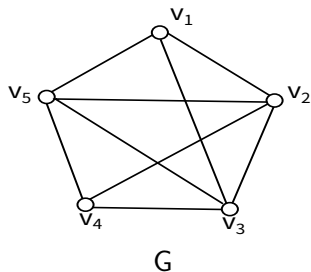
定义6.2.7

设 $G = (V, E)$ 是一个图，如果 $F \subseteq E$ ，则称 G 的子图 $H = (V, F)$ 为 G 的一个生成子图。

6.2 基本定义



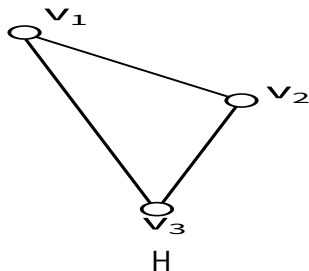
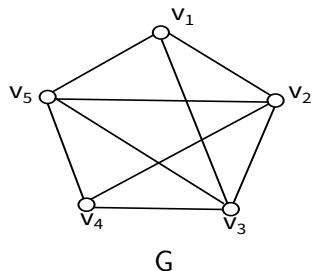
6.2 基本定义



定义6.2.8

设 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图，则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

6.2 基本定义



定义6.2.8

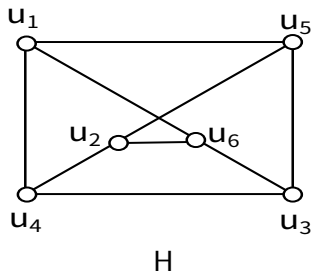
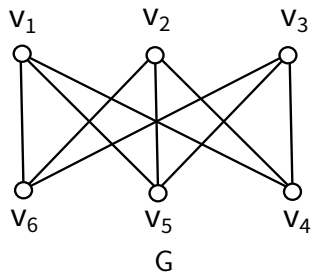
设 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图，则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

定义6.2.9

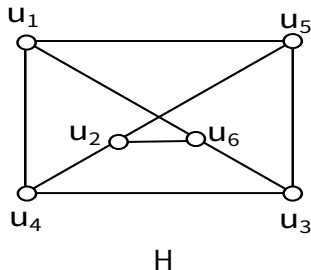
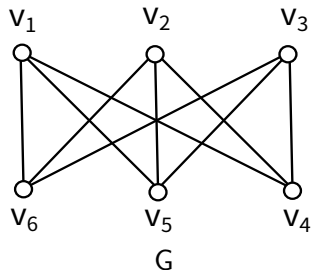
设 S 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 的非空子集，则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图，记为 $\langle S \rangle$ 。形式的，

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

6.2 基本定义



6.2 基本定义



定义6.2.10

设 $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ 是两个图, 如果存在一个一一对应 $\phi: V \rightarrow U$, 使得 $\{u, v\} \in E$ 当且仅当 $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$, 则称 G 与 H 同构。

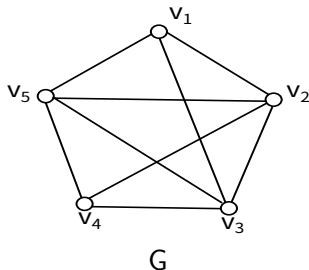
6.3 路、圈、连通图

定义6.3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。 G 的一条通道是 G 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

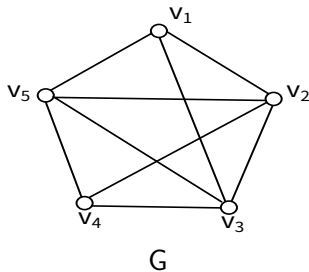
其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。



6.3 路、圈、连通图

定义6.3.2

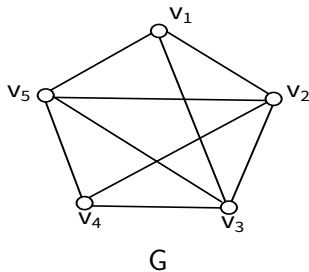
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。



6.3 路、圈、连通图

定义6.3.3

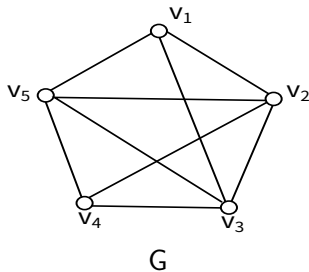
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**，或回路。



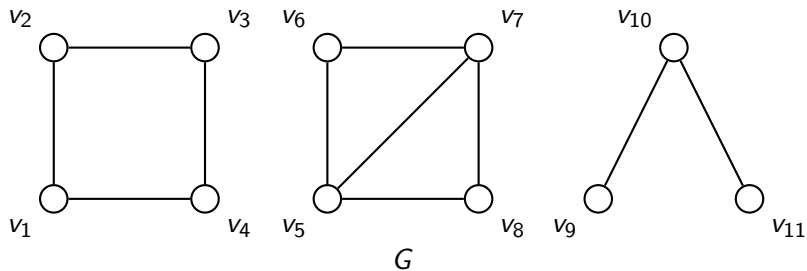
6.3 路、圈、连通图

定义6.3.4

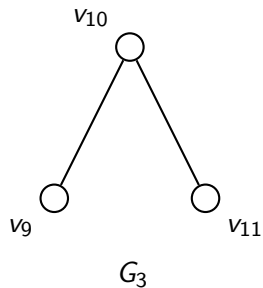
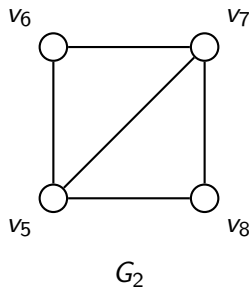
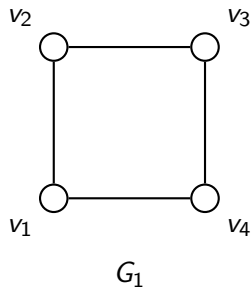
设 $G = (V, E)$ 为图，如果 G 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 G 是一个连通图。



6.3 路、圈、连通图



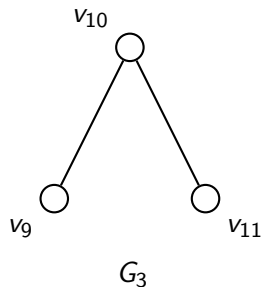
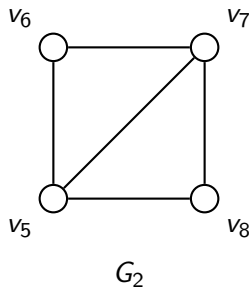
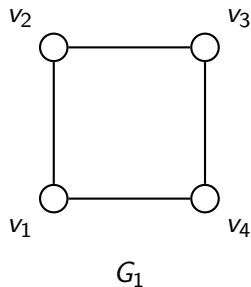
6.3 路、圈、连通图



6.3 路、圈、连通图

定义6.3.5

图 G 的极大连通子图称为 G 的一个支。



6.3 路、圈、连通图

定理6.3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

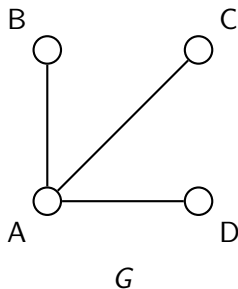
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 \cong 是 V 上的等价关系， G 的支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。

6.4 补图、偶图

定义6.4.1

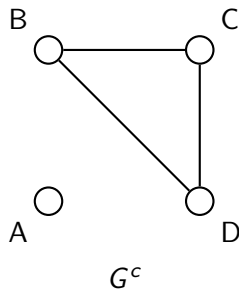
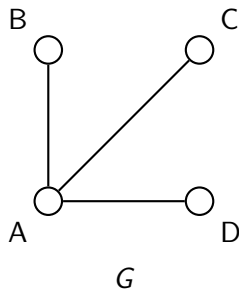
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义6.4.1

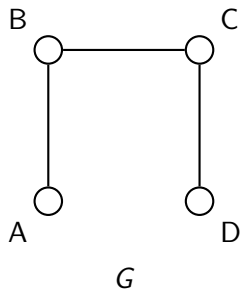
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义6.4.1

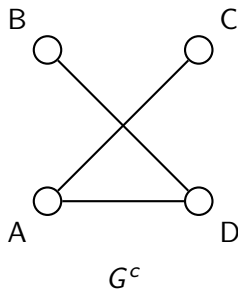
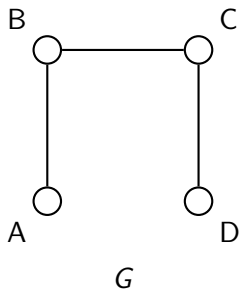
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义6.4.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定理6.4.1

对任一有6个顶点的图 G ， G 中或 G^c 中有一个三角形。

6.4 补图、偶图

定义6.4.2

对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$, 求一个最小的正整数 $r(m, n)$, 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 G 中一定含有一个 K_m 或者图 G^c 中含有 K_n , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

6.4 补图、偶图

定义6.4.2

设 $G = (V, E)$ 是一个图, 如果 G 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1, V_2\}$, 使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中, 另一个在 V_2 中, 则称 G 为偶图。如果 $\forall u \in V_1, v \in V_2$ 均有 $uv \in E$, 则称 G 为完全偶图, 记为 $K_{m,n}$, 其中 $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

6.4 补图、偶图

定义6.4.3

设 $G = (V, E)$ 是一个图， u 和 v 是 G 的顶点。联结 u 和 v 的最短路的长称为 u 与 v 之间的距离，并记为 $d(u, v)$ 。如果 u 与 v 间在 G 中没有路，则定义 $d(u, v) = \infty$ 。

6.4 补图、偶图

定理6.4.2

图 G 为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

匹配

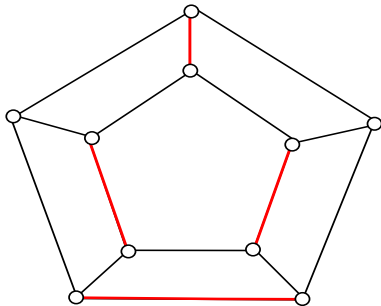
定义6.4.4

设 $G = (V, E)$ 是一个图, G 的任两条不邻接的边 x 与 y 称为互相独立的。 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个匹配, 如果 Y 中任意两条边都是互相独立的。

匹配

定义6.4.4

设 $G = (V, E)$ 是一个图， G 的任两条不邻接的边 x 与 y 称为互相独立的。 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个匹配，如果 Y 中任意两条边都是互相独立的。



匹配

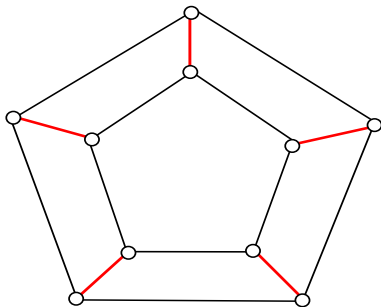
定义6.4.5

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。

匹配

定义6.4.5

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。



匹配

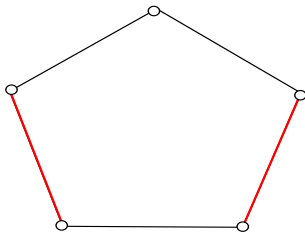
定义6.4.6

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 G 的任一匹配 Y' ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。

匹配

定义6.4.6

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 G 的任一匹配 Y' ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。



匹配

定义6.4.7

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 是一个偶图, 如果存在 G 的一个匹配 Y 使得 $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$, 则称 Y 是偶图 G 的一个完全匹配。

匹配

定理6.4.3

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图，存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A ， $|N(A)| \geq |A|$ ，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

Stable Matching

Problem Statement

A certain community consists of n men and n women. Each person ranks those of the opposite sex in accordance with his or her preferences for a marriage partner. We seek a satisfactory way of marrying off all members of the community. We call a set of marriages unstable if under it there are a man and a woman who are not married to each other but prefer each other to their actual mates. For any pattern of preferences is it possible to find a stable set of marriages?

Stable Matching

GALE-SHAPLEY(*manPref*, *womanPref*)

Initially all $m \in M$ and $w \in W$ are free

while there is a man m who is free

 Choose such a man m

w = the highest-ranked woman in m 's preference list
 to whom m has not yet proposed

if w is free then

(m, w) become engaged

else

w is currently engaged to m'

if w prefers m' to m

m remains free

else

(m, w) become engaged

m' becomes free

return S

Stable Matching

Theorem1

The G-S algorithm terminates.

Stable Matching

Theorem2

The G-S algorithm returns a stable matching.

Stable Matching

Theorem3

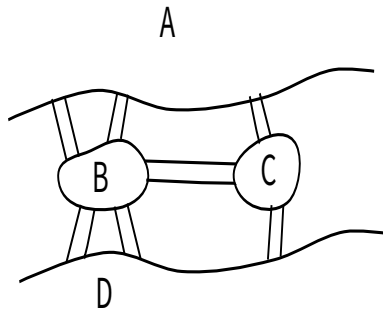
In the stable matching returned from the G-S algorithm, each man is paired with his best valid partner.

Stable Matching

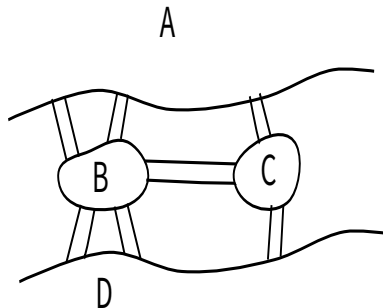
Theorem4

In the stable matching returned from the G-S algorithm, each woman is paired with her worst valid partner.

6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



定义6.5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

6.5 欧拉图

定理6.5.1

图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度是偶数。

6.5 欧拉图

定义6.5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

6.5 欧拉图

定理6.5.2

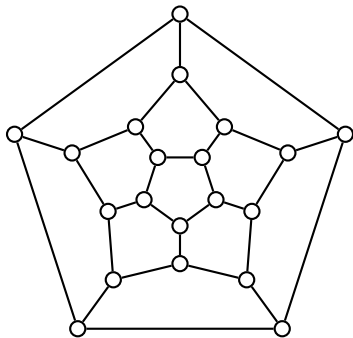
图 G 有一条欧拉迹当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点。

6.5 欧拉图

定理6.5.3

设 G 是连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，而且至少有 n 条开迹。

6.6 哈密顿图

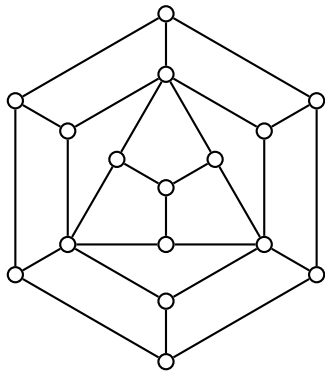


6.6 哈密顿图

定义6.6.1

图 G 的一条包含所有顶点的路称为 G 的一条哈密顿路;图 G 的一个包含所有顶点的圈称为 G 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

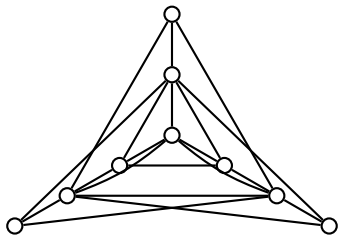
定理6.6.1

设 $G = (V, E)$ 是哈密顿图，则对 V 的每个非空子集 S ，均有

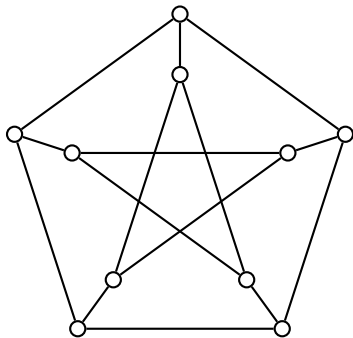
$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

定理6.6.2

设 G 是有 p ($p \geq 3$)个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。

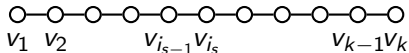
6.6 哈密顿图

定理6.6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



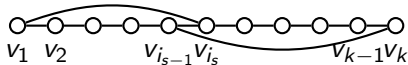
6.6 哈密顿图

定理6.6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



6.6 哈密顿图

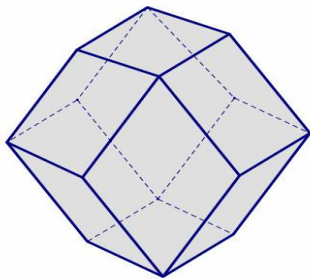
引理6.6.1

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 是连通的。

6.6 哈密顿图

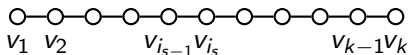


6.6 哈密顿图

习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

6.6 哈密顿图



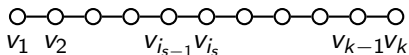
习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$,

6.6 哈密顿图



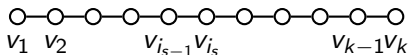
习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

6.6 哈密顿图



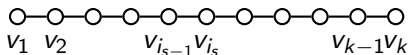
习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。

6.6 哈密顿图



习题

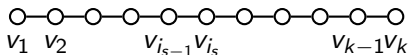
设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

6.6 哈密顿图



习题

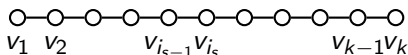
设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈；

6.6 哈密顿图



习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

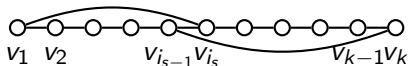
证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈；
- ▶ 如果 v_1 与 v_k 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1, v_k 只能与 v_2, v_3, \dots, v_{k-1} 中的顶点邻接。

6.6 哈密顿图



习题

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

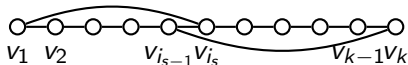
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈；
- ▶ 如果 v_1 与 v_k 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1, v_k 只能与 v_2, v_3, \dots, v_{k-1} 中的顶点邻接。设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接， $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$ ，则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接， $2 \leq s \leq r$ 。否则， v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq r + ((k-1) - r) = k-1 \leq 2\delta(G) - 1$$

矛盾。于是， $v_1 v_2 \cdots v_{i_{s-1}} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 G 中的一个圈。总之， v_1, v_2, \dots, v_k 在 G 的同一个圈 C 上。

6.6 哈密顿图



证明（续上页）.

由于 G 是连通的， $p > 2\delta(G)$ ，所有 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一个更长的路，这就出现了矛盾。



6.7 图的邻接矩阵

