

第三章关系

陈建文

1. 关系的概念

定义1.1

设 A 与 B 是两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 R ，称为从 A 到 B 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 (a, b) 在 R 下的象为 T ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 (a, b) 在 R 下的象为 F ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

1. 关系的概念

定义1.1

设 A 与 B 是两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 R ，称为从 A 到 B 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 (a, b) 在 R 下的象为 T ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 (a, b) 在 R 下的象为 F ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

定义1.2

设 A 与 B 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 R 称为从 A 到 B 的一个**二元关系**。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 a 与 b 符合关系 R ，记为 aRb ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 a 与 b 不符合关系 R ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 R 为 A 上的二元关系。

1. 关系的概念

例1.1

自然数集 \mathbb{N} 上的小于等于关系" \leq "是 \mathbb{N} 上的一个二元关系。

1. 关系的概念

例1.1

自然数集 \mathbb{N} 上的小于等于关系“ \leq ”是 \mathbb{N} 上的一个二元关系。

例1.2

设 n 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 m, k ，如果 $m - k$ 能被 n 整除，则称 m 与 k 为模 n 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 m 被 n 除所得到的余数与 k 被 n 除所得到的余数相等。模 n 同余是 \mathbb{Z} 上的一个二元关系。

1. 关系的概念

定义1.3

设 $R \subseteq A \times B$, 集合

$$\{x \in A \mid \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的**定义域**, 记为 $\text{dom}(R)$; 集合

$$\{y \in B \mid \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 R 的**值域**, 记为 $\text{ran}(R)$ 。

1. 关系的概念

定义1.4

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 R 称为 A_1, A_2, \dots, A_n 间的一个 n 元关系, 每个 A_i 称为 R 的一个域。

2. 关系的性质

定义2.1

集合 X 上的二元关系 R 称为**自反**的，如果对 X 的任意元素 x 都有 xRx 。

2. 关系的性质

定义2.2

集合 X 上的二元关系 R 称为反自反的, 如果对 X 的任意元素 x 都有 $(x, x) \notin R$ 。

2. 关系的性质

定义2.3

集合 X 上的二元关系 R 称为**对称**的，如果对 X 的任意元素 x, y ，只要 xRy 就有 yRx 。

2. 关系的性质

定义2.4

集合 X 上的二元关系 R 称为**反对称**的，如果对 X 的任意元素 x, y ， xRy 且 yRx ，则 $x = y$ 。

2. 关系的性质

定义2.5

集合 X 上的二元关系 R 称为传递的，如果对 X 的任意元素 x, y, z ，只要 xRy 且 yRz ，就有 xRz 。

3. 关系的运算

定义3.1

设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系, R 的逆 R^{-1} 定义为从集合 B 到集合 A 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

3. 关系的运算

定义3.1

设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系， R 的逆 R^{-1} 定义为从集合 B 到集合 A 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

定理3.1

设 R 为集合 X 上的二元关系，则 R 是对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

3. 关系的运算

定义3.2

设 R 为从集合 A 到集合 B ， S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

3. 关系的运算

定义3.2

设 R 为从集合 A 到集合 B ， S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

定理3.2

设 R_1 ， R_2 ， R_3 分别为从集合 A 到集合 B ，从集合 B 到集合 C ，从集合 C 到集合 D 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

3. 关系的运算

定义3.2

设 R 为从集合 A 到集合 B ， S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

定理3.2

设 R_1 ， R_2 ， R_3 分别为从集合 A 到集合 B ，从集合 B 到集合 C ，从集合 C 到集合 D 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.3

设 R 为集合 X 上的一个二元关系，则 R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

3. 关系的运算

定义3.2

设 R 为从集合 A 到集合 B ， S 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。 R 与 S 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 A 到集合 C 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

定理3.2

设 R_1 ， R_2 ， R_3 分别为从集合 A 到集合 B ，从集合 B 到集合 C ，从集合 C 到集合 D 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

定理3.3

设 R 为集合 X 上的一个二元关系，则 R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

4. 关系矩阵和关系图

定义4.1

设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个包含 m 个元素的集合, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为一个包含 n 个元素的集合。令 R 是从 X 到 Y 的一个二元关系。由 R 定义一个 $m \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})$ 如下: $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵 B 称为关系 R 的矩阵。

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, 从 X 到 Y 的关系 $S = \{(1, a), (2, b), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, d), (3, e), (4, c), (4, d)\}$, 则 S 的关系矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

例4.1

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$, 从 X 到 Y 的关系 $S = \{(1, a), (2, b), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, d), (3, e), (4, c), (4, d)\}$, 则 S 的关系矩阵为?

例4.2

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$, 则 R 的关系矩阵为?

4. 关系矩阵和关系图

定理4.1

设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则

- (1) R 是自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为1;
- (2) R 是反自反的, 当且仅当 B 的对角线上的全部元素都为0;
- (3) R 是对称的, 当且仅当 B 是对称矩阵;
- (4) R 是反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 b_{ij} 与 b_{ji} 不同时为1;
- (5) R 是传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$, 则 $b_{ik} = 1$ 。

4. 关系矩阵和关系图

定理4.2

设 R 为集合 X 上的二元关系，则

- (1) R 是自反的，当且仅当 R 的图的每个顶点均有一个环；
- (2) R 是反自反的，当且仅当 R 的图中没有环；
- (3) R 是对称的，当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
- (4) R 是反对称的，当且仅当 R 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两方向相反的矢线；
- (5) R 是传递的，当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

4. 关系矩阵和关系图

定理4.3

设 B 为集合 X 上二元关系 R 的矩阵, 则 R^{-1} 的矩阵为 B^T 。

4. 关系矩阵和关系图

定义4.2

设 B , C 是两个布尔矩阵, B 与 C 的逻辑乘是 B 与 C 的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为 $B \wedge C$, 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

B 与 C 的逻辑加是 B 与 C 的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为 $B \vee C$, 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

定理4.4

设 R , S 为从集合 X 到集合 Y 的二元关系, 其矩阵分别为 B_R 和 B_S 。 $R \cup S$ 与 $R \cap S$ 的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$, $B_{R \cap S}$, 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.3

设 A 为 $m \times p$ 布尔矩阵, B 为 $p \times n$ 布尔矩阵, A 与 B 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 C , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

4. 关系矩阵和关系图

定义4.3

设 A 为 $m \times p$ 布尔矩阵, B 为 $p \times n$ 布尔矩阵, A 与 B 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 C , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

定理4.5

设 X, Y, Z 为有穷集合, $|X| = m$, $|Y| = p$, $|Z| = n$ 。 R 是从 X 到 Y 的二元关系, S 是从 Y 到 Z 的二元关系, $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$, 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

5. 关系的闭包

定义5.1

设 R 为集合 X 上的一个二元关系。 X 上的一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包，用 R^+ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

5. 关系的闭包

定义5.1

设 R 为集合 X 上的一个二元关系。 X 上的一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包，用 R^+ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

定理5.1

设 R 为集合 X 上的一个二元关系，则关系 R 的传递闭包 R^+ 是包含 R 的传递关系。

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$,
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$,
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设, $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{k-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{k-1}, x) \in R$ 。

5. 关系的闭包

定理5.2

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $a \in X$, $b \in X$, $n \geq 2$, 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{n-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$, 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设, $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{k-1} \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$, 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, \dots , $x_{k-1} \in X$, $x_k \in X$, 使得 $(a, x_1) \in R$, $(x_1, x_2) \in R$, \dots , $(x_{k-1}, x_k) \in R$, $(x_k, b) \in R$ 。 □

5. 关系的闭包

定理5.3

设 R 为集合 X 上的一个二元关系，则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$, 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$,

所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$,

所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$,

所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$, 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以, $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

5. 关系的闭包

定理5.4

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$, 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$, 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$, $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 X 中的 k 个元素, 而 X 中仅有 n 个元素, $n < k$,

所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$, 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k-(j-i) < k$ 。若 $p_1 = k-(j-i) > n$, 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以, $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此, $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

5. 关系的闭包

定理5.5

设 R 为集合 X 上的一个二元关系, $|X| = n$, B 为 R 的关系矩阵, B_{R^+} 为 R^+ 的关系矩阵, 简记为 B^+ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

5. 关系的闭包

TRANSITIVE-CLOSURE(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

1 $M = B$

2 $A = M$

3 **for** $i = 2$ **to** n

4 $M = M \circ B$

5 $A = A \vee M$

6 **return** A // A is the zero-one matrix for R^+

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

1 $A = B$

2 **for** $k = 1$ **to** n

3 **for** $i = 1$ **to** n

4 **for** $j = 1$ **to** n

5 $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return** A // A is the zero-one matrix for R^+

5. 关系的闭包

WARSHALL(B)

// B is the zero-one $n \times n$ matrix for relation R

1 $A = B$

2 **for** $k = 1$ **to** n

3 **for** $i = 1$ **to** n

4 **if** $a_{ik} == 1$

5 **for** $j = 1$ **to** n

6 $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

7 **return** A // A is the zero-one matrix for R^+

6. 等价关系与集合的划分

定义6.1

集合 X 上的二元关系称为**等价关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

- (1) R 是自反的，即对 X 中的任意元素 x ， xRx ；
- (2) R 是对称的，即对 X 中的任意元素 x, y ，如果 xRy ，则 yRx ；
- (3) R 是传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z ，如果 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集 \mathbb{Z} 上的模 n 同余关系是 \mathbb{Z} 上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

例6.1

整数集 \mathbb{Z} 上的模 n 同余关系是 \mathbb{Z} 上的等价关系。

例6.2

设集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 上的关系 R 定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, e), (d, b), \\ (d, d), (e, a), (e, c), (e, e), (f, f)\},$$

则 R 为 X 上的等价关系。

6. 等价关系与集合的划分

定义6.2

设 \cong 为集合 X 上的一个等价关系, $x \in X$, X 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 x 关于 \cong 的等价类, 记为 $[x]$, 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

6. 等价关系与集合的划分

定义6.3

设 X 为集合, X 的一些非空子集形成的集族 \mathbf{A} 称为 X 的一个划分, 如果 \mathbf{A} 具有性质

1. $\forall A, B \in \mathbf{A}$, 如果 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \phi$;
2. $\bigcup_{A \in \mathbf{A}} A = X$

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设 \cong 为 X 上的一个等价关系，则 \cong 的所有等价类的集合构成 X 的一个划分。

6. 等价关系与集合的划分

定理6.1

设 \cong 为 X 上的一个等价关系，则 \cong 的所有等价类的集合构成 X 的一个划分。

定理6.2

设 \mathbf{A} 为集合 X 的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} A \times A$$

则 \cong 是 X 上的一个等价关系且 \mathbf{A} 就是 \cong 的等价类之集。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1

集合 X 上的二元关系称为**偏序关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

- (1) R 是自反的，即对 X 中的任意元素 x ， xRx ；
- (2) R 是反对称的，即对 X 中的任意元素 x, y ，如果 xRy 且 yRx ，则 $x = y$ ；
- (3) R 是传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z ，如果 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.1

集合 X 上的二元关系称为**偏序关系**，如果 R 同时满足以下三个性质：

- (1) R 是自反的，即对 X 中的任意元素 x ， xRx ；
- (2) R 是反对称的，即对 X 中的任意元素 x, y ，如果 xRy 且 yRx ，则 $x = y$ ；
- (3) R 是传递的，即对 X 中的任意元素 x, y, z ，如果 xRy 且 yRz ，则 xRz 。

定义7.2

设 \leq 是 X 上的一个偏序关系，则称二元组 (X, \leq) 为**偏序集**。

7. 偏序关系与偏序集

例7.1

实数集 \mathbb{R} 上通常的“小于等于”关系 \leq 是偏序关系，所以 (\mathbb{R}, \leq) 为偏序集。

例7.2

设 S 是一个集合， S 的子集间的包含关系 \subseteq 是 2^S 上的偏序关系，所以 (S, \subseteq) 为偏序集。

7. 偏序关系与偏序集

例7.3

设集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 上的关系 R 定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则 R 为 X 上的偏序关系。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.3

设 \leq 为集合 X 上的偏序关系，如果 $\forall x, y \in X$ ， $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立，则称 \leq 为 X 上的**全序关系**。相应的，二元组 (X, \leq) 称为**全序集**。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.4

设 (X, \leq) 是一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$, 则称 s 为 A 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的**最小元素**。

定义7.5

设 (X, \leq) 是一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$, 在 A 中没有元素 x 使得 $s < x$, 则称 s 为 A 的**极大元素**; 如果存在一个元素 t , 在 A 中没有元素 x 使得 $x < t$, 则称 t 为 A 的**极小元素**。

7. 偏序关系与偏序集

定义7.6

设 (X, \leq) 是一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$, 则称 s 为 A 的一个上界; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$, 则称 t 为 A 的一个下界。

定义7.7

设 (X, \leq) 是一个偏序集, $A \subseteq X$ 。如果 A 有上界且 A 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 A 的上确界, 记为 $\sup A$; 如果 A 有下界且 A 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 A 的下确界, 记为 $\inf A$ 。

7. 偏序关系与偏序集

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

7. 偏序关系与偏序集

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4. $x \leq y \vee y \leq x$
5. $x > y \rightarrow x + z > y + z$
6. $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
7. $\forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R ((\forall y \in A (y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$

习题

1. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 \cong 是 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

2. 设 X, Y, S 同习题1。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 \cong 是 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。

3. 设 X, Y, S 同习题1。 S 上的二元关系 \cong 定义如下: $\forall f, g \in S$, $f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 \cong 是 S 上的等价关系, 并求出等价类之集。