

离散数学

陈建文

December 14, 2019

第一章 集合

习题1.1. 设 A, B, C 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

习题1.2. 设 A, B, C, D 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

第 二 章 映 射

习题2.1. 设 f 是从实数集 \mathbb{R} 到实数集 \mathbb{R} 的映射, $f(x) = x^2$, $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(A \cap B) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(A) \cap f(B) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

习题2.2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。

第三章 关系

习题3.1. 判断下列二元关系是否是自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的和传递的。

1. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, X 上的二元关系 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, X 上的二元关系 $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
4. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, X 上的二元关系 $R = \{(2, 3)\}$
5. 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, X 上的恒等关系 $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
6. 设集合 $X = \{0, 1\}$, 2^X 上的二元关系 \subseteq

习题3.2. 设 R 与 S 为集合 X 上的任意两个二元关系, 下列哪些命题为真?

1. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \cup S$ 为自反的。
2. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \cup S$ 为反自反的。
3. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \cup S$ 为对称的。
4. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \cup S$ 为反对称的。
5. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \cup S$ 为传递的。
6. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \cap S$ 为自反的。
7. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \cap S$ 为反自反的。
8. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \cap S$ 为对称的。
9. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \cap S$ 为反对称的。
10. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \cap S$ 为传递的。
11. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \setminus S$ 为自反的。
12. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \setminus S$ 为反自反的。

13. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \setminus S$ 为对称的。
14. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \setminus S$ 为反对称的。
15. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \setminus S$ 为传递的。
16. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \circ S$ 为自反的。
17. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \circ S$ 为反自反的。
18. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \circ S$ 为对称的。
19. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \circ S$ 为反对称的。
20. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \circ S$ 为传递的。

习题3.3. 设 X 为一个集合,

$$\mathbb{R} = \{ \cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{为集合 } X \text{ 上的一个等价关系} \},$$

$$\mathbb{A} = \{ \mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{为集合 } X \text{ 的一个划分} \},$$

$$f = \{ (\cong, \{ [x]_{\cong} \mid x \in X \}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{ y \in X \mid x \cong y \} \}$$

$$g = \{ (\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A} \}$$

则 f 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{A} 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

第 四 章 有穷集合的基数

习题4.1. 设 $S(n, k)$ 表示 S_n 中的恰有 k 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

第 五 章 无穷集合及其基数

第 六 章 图的基本概念

习题6.1. 设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 求证 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

习题6.2. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明:

- (a) 若 $q \geq p$, 则 G 中有圈;
- (b) 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

习题6.3. 在一个有 n 个人的宴会上, 每个人至少有 m 个朋友 ($2 \leq m \leq n$)。试证: 有不少于 $m + 1$ 个人, 使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左右均是他的朋友。

第 七 章 欧拉图

定义7.1. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

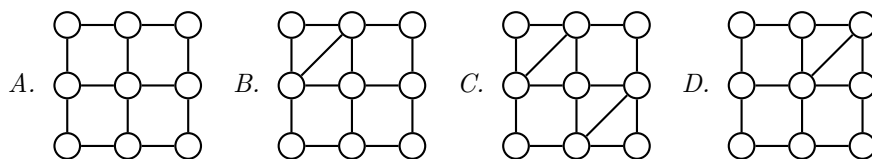
定义7.2. 包含图的所有顶点和边的迹称为**欧拉迹**。

习题7.1. 图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度是偶数。

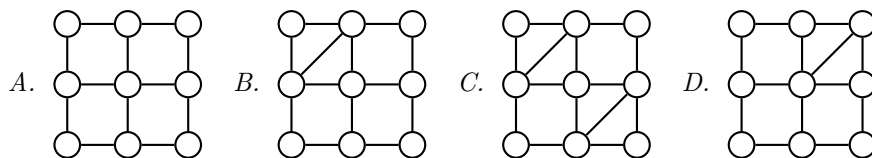
习题7.2. 图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点。

习题7.3. 设 G 是连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，证明 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

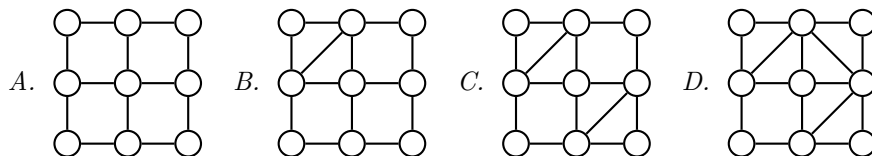
习题7.4. 以下4个图中，存在欧拉闭迹的是_____。



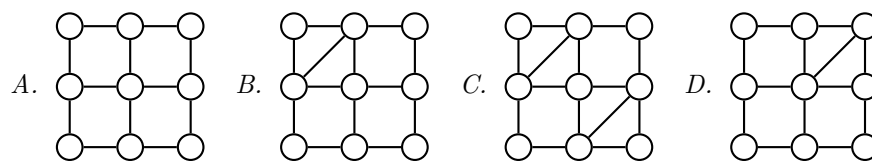
习题7.5. 以下4个图中，存在一条欧拉开迹的是_____。



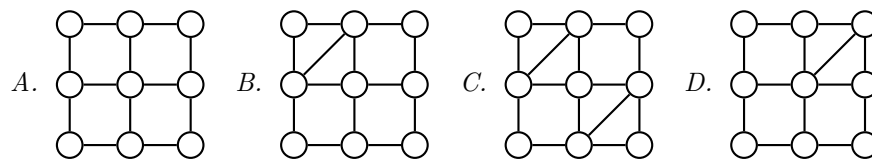
习题7.6. 以下4个图中，不可以一笔画成的是_____。



习题7.7. 以下4个图中，至少需要两笔才能画成的是_____。



习题7.8. 以下4个图中，至少需要三笔才能画成的是_____。



第八章 哈密顿图

若图 G 含有一条包含所有结点的路，则将其称之为图 G 的一条**哈密顿路**。若图 G 含有一个包含所有结点的圈，则将其称之为图 G 的一个**哈密顿圈**。包含哈密顿圈的图称之为**哈密顿图**。

习题8.1. 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 V 的每个非空子集 S ，均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

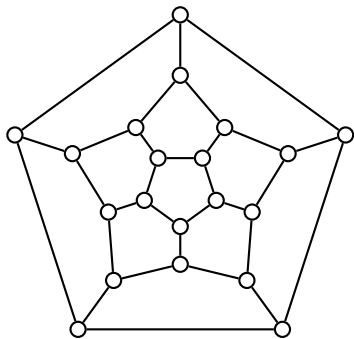
其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

习题8.2. 设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

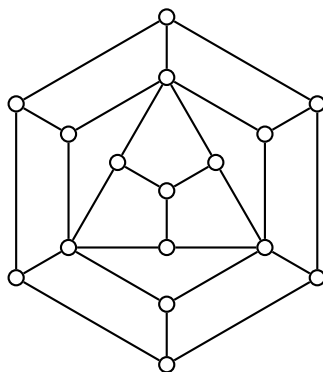
$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 是连通的。

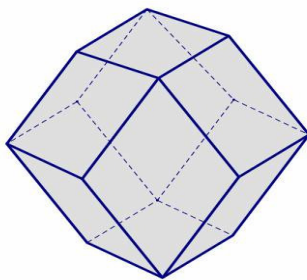
习题8.3. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



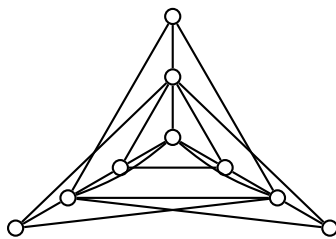
习题8.4. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



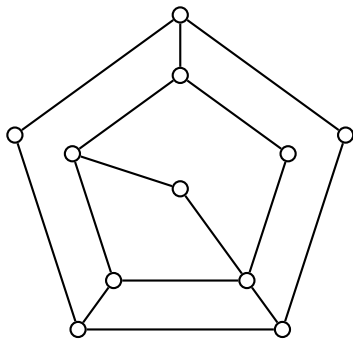
习题8.5. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



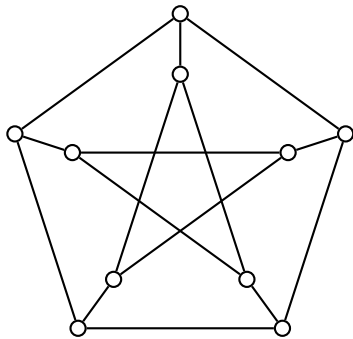
习题8.6. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



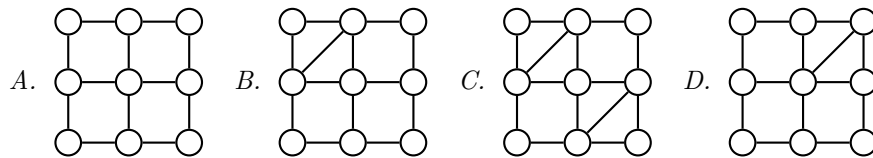
习题8.7. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



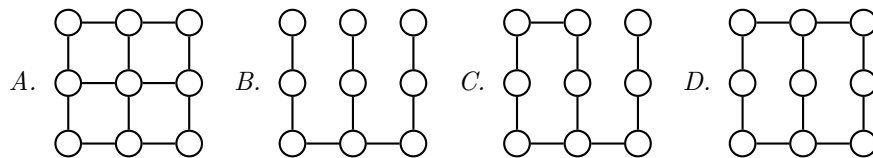
习题8.8. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



习题8.9. 以下4个图中，存在一个哈密顿圈的是_____。



习题8.10. 以下4个图中，不存在哈密顿路的是_____。



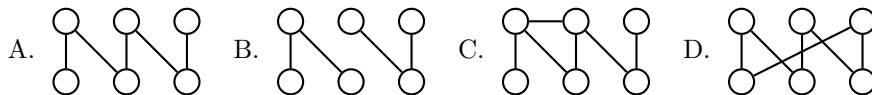
第九章 树

定义9.1. 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

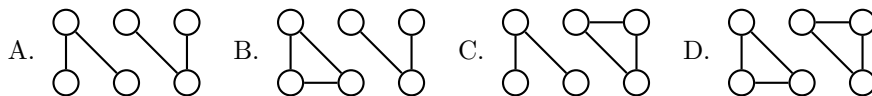
习题9.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个 (p, q) 图，试证下列各命题等价：

1. G 是树；
2. G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；
3. G 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图；
4. G 是连通的且 $q = p - 1$ ；
5. G 中无圈且 $q = p - 1$ ；
6. G 中无圈且 G 中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

习题9.2. 下列图为树的是_____。



习题9.3. 下列图为森林的是_____。



第 十 章 连通度

定义10.1. 图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

定义10.2. 图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

定义10.3. 设 G 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -顶点连通**的, 简称 **n -连通**;如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -边连通**的。

习题10.1. 构造一个图 G , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。

第十一章 匹配

习题11.1. 设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

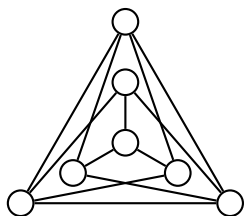
第 十二 章 平面图

第 十三 章 图的着色

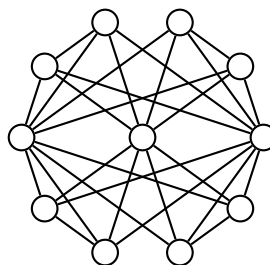
第 十四 章 有向图

第 十 五 章 综 合 题

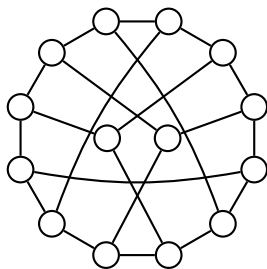
习题15.1. 给出以下四个图的顶点最小度、顶点连通度、边连通度、色数，并说明它们是否为连通图、偶图、欧拉图、哈密顿图、可平面图。



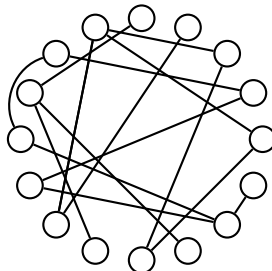
(a)



(b)



(c)



(d)

习题15.2. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 p ，假珍珠重量也相同且为 q ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

第一章 集合

习题1.1. 设 A, B, C 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。 \square

习题1.2. 设 A, B, C, D 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

证明.

$$\begin{aligned} & (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B \text{ 且 } y \in C \cap D \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in A \times C \text{ 且 } (x, y) \in B \times D \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \end{aligned}$$

□

第二章 映射

习题2.1. 设 f 是从实数集 \mathbb{R} 到实数集 \mathbb{R} 的映射, $f(x) = x^2$, $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(A \cap B) = \underline{\{0\}}$, $f(A) \cap f(B) = \underline{\{0, 1\}}$ 。

习题2.2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。

第三章 关系

习题3.1. 设 R 与 S 为集合 X 上的任意两个二元关系, 下列哪些命题为真?

1. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \cup S$ 为自反的。(真)
2. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \cup S$ 为反自反的。(真)
3. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \cup S$ 为对称的。(真)
4. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \cup S$ 为反对称的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$, 则 R 与 S 都是反对称的, 但 $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 不是反对称的。

5. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \cup S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$, 则 R 与 S 都是传递的, 但 $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 不是传递的。

6. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \cap S$ 为自反的。(真)
7. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \cap S$ 为反自反的。(真)
8. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \cap S$ 为对称的。(真)
9. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \cap S$ 为反对称的。(真)

10. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \cap S$ 为传递的。(真)

11. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \setminus S$ 为自反的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$, $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$, 则 R 与 S 都是自反的, 但 $R \setminus S = \{(1, 2)\}$ 不是自反的。

12. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \setminus S$ 为反自反的。(真)

13. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \setminus S$ 为对称的。(真)

证明. 对任意的 $x \in X$, $y \in X$, 如果 $(x, y) \in R \setminus S$, 则 $(x, y) \in R$, $(x, y) \notin S$ 。由于关系 R 是对称的, 所以 $(y, x) \in R$ 。又由于关系 S 是对称的, 所以 $(y, x) \notin S$ 。所以 $(y, x) \in R \setminus S$ 。这证明了 $R \setminus S$ 是对称的。□

14. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \setminus S$ 为反对称的。(真)

15. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \setminus S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $S = \{(1, 3)\}$, 则 R 与 S 都是传递的, 但 $R \setminus S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ 不是传递的。

16. 如果 R 与 S 为自反的, 则 $R \circ S$ 为自反的。(真)

17. 如果 R 与 S 为反自反的, 则 $R \circ S$ 为反自反的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$, 则 R 与 S 都是反自反的, 但 $R \circ S = \{(1, 1)\}$ 不是反自反的。

18. 如果 R 与 S 为对称的, 则 $R \circ S$ 为对称的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$, 则 R 与 S 都是对称的, 但 $R \circ S = \{(1, 3)\}$ 不是对称的。

19. 如果 R 与 S 为反对称的, 则 $R \circ S$ 为反对称的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $S = \{(2, 3), (4, 1)\}$, 则 R 与 S 都是反对称的, 但 $R \circ S = \{(1, 3), (3, 1)\}$ 不是反对称的。

20. 如果 R 与 S 为传递的, 则 $R \circ S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$, $S = \{(2, 3), (4, 1)\}$, 则 R 与 S 都是传递的, 但 $R \circ S = \{(1, 3), (3, 1)\}$ 不是传递的。

习题3.2. 设 X 为一个集合,

$\mathbb{R} = \{\cong \subseteq X \times X \mid \cong \text{为集合 } X \text{ 上的一个等价关系}\},$

$\mathbb{A} = \{\mathcal{A} \subseteq 2^X \mid \mathcal{A} \text{为集合 } X \text{ 的一个划分}\},$

$f = \{(\cong, \{[x]_{\cong} \mid x \in X\}) \mid \cong \in \mathbb{R}, [x]_{\cong} = \{y \in X \mid x \cong y\}\}$

$g = \{(\mathcal{A}, \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A) \mid \mathcal{A} \in \mathbb{A}\}$

则 f 为从 \mathbb{R} 到 \mathbb{A} 的双射, 且 $f^{-1} = g$ 。

证明. 1. 证明 f 为映射。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong , $\{[x]_{\cong} \mid x \in X\}$ 为集合 X 的一个划分。

首先, 对任意的 $x \in X$, $x \in [x]_{\cong}$, 这说明 $[x]_{\cong}$ 为非空集合。

其次, 对任意的 $x \in X$, 对任意的 $y \in X$, 如果 $[x]_{\cong} \neq [y]_{\cong}$, 则 $[x]_{\cong} \cap [y]_{\cong} = \emptyset$ 。最后, 由对任意的 $x \in X$, $x \in [x]_{\cong}$ 知 $X = \bigcup_{x \in X} [x]_{\cong}$ 成立。

以上证明了对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong , $\{[x]_{\cong} \mid x \in X\}$ 为集合 X 的一个划分。

2. 证明 g 为映射。这就是要证明对于集合 X 的任意一个划分 \mathcal{A} , $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 为集合 X 上的一个等价关系。

3. 证明 $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个等价关系 \cong , $\bigcup_{x \in X} [x]_{\cong} \times [x]_{\cong} = \cong$ 。
4. 证明 $f \circ g = I_{\mathbb{A}}$ 。这就是要证明对于集合 X 上的任意一个划分 \mathcal{A} , 等价关系 $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 所对应的等价类的集合就是 \mathcal{A} 。

□

第 四 章 有穷集合的基数

习题4.1. 设 $S(n, k)$ 表示 S_n 中的恰有 k 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad (4.1)$$

证明. 记式(4.1)右边展开之后 x^k 的系数为 $S'(n, k)$, 以下证明 $S'(n, k) = S(n, k)$ 。
首先来看 $S'(n, k)$ 的递推关系式。
显然

$$\begin{aligned} S'(n, 0) &= 0 \\ S'(n, n) &= 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

式(4.1)右边按照最后一项展开, 得

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ &+ x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

展开后所得到的第一项中 x^k 的系数为 $S'(n-1, k-1)$, 第二项中 x^k 的系数为 $(n-1)S'(n-1, k)$, 于是得到

$$S'(n, k) = S'(n-1, k-1) + (n-1)S'(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (4.4)$$

接下来看 $S(n, k)$ 的递推关系式。

因为包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换至少含有1个循环, 所以

$$S(n, 0) = 0 \quad (4.5)$$

又因为如果一个包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换含有 n 个循环, 则每个循环由一个元素构成, 这样的置换只有一个, 所以

$$S(n, n) = 1 \quad (4.6)$$

包含 k 个循环的集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个置换可以划分为两种类型: (1) 元素 n 自身构成一个循环置换, 这样的置换有 $S(n-1, k-1)$ 个; (2) 元素 n 至少与其他一个元素位于同一个循环置换中, 这样的置换可以由分解为 k 个循环

的集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的置换在每个元素 $1, 2, \dots, n-1$ 的左侧添加元素 n 得到, 于是这样的置换共有 $(n-1)S(n-1, k)$ 个。于是得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (4.7)$$

由此, 我们得到 $S(n, k)$ 和 $S'(n, k)$ 的递推关系式是一致的, 因此 $S(n, k) = S'(n, k)$ 。
□

第 五 章 无穷集合及其基数

第 六 章 图的基本概念

习题6.1. 设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 求证 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道的条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 l 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设, $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_h 长度为 k 的通道的条数。

由从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 且倒数第二个顶点依次为 v_1, v_2, \dots, v_p 的通道的条数之和知 $(A^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 v_i 到顶点 v_j 长度为 $k + 1$ 的通道的条数。□

习题6.2. 设 G 是一个 (p, q) 图, 证明:

(a) 若 $q \geq p$, 则 G 中有圈;

(b) 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明. (b) 当 $q > p + 4$ 时, 可以在 G 中任意去掉一些边, 使得剩余的边数恰好比顶点数多 4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈, 则原来的图 G 中也一定有两个边不重的圈。因此, 以下只需证当 $q = p + 4$ 时, 图 G 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时, 图 G 最多有 $p(p - 1)/2$ 条边, 易验证此时 $q = p + 4$ 不可能成立。当 $p = 5$ 时, $q = 9$ 。设此时图 G 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 除了 v_1 和 v_5 之间没有边关联之外, 其余的任意两个顶点之间均有边关联, 则此时 $v_1 v_2 v_3 v_1$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_3$ 就是图 G 中两个边不重的圈。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 G 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证:

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为 0 的顶点和任意一条边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为 1 的顶点及其与之关联的边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时, 设 u 为图 G 中度为 2 的顶点, 与之邻接的两个顶点为 v 和 w 。分两种情况讨论。在第一种情况下, v 和 w 之间没有边关联, 去掉顶点 u 及其与之关联的两条边 uv 和 uw , 添加一条边 vw , 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 vw 不在这两个圈上, 则这两个圈就是图 G 中两个边不重的圈; 如果新添加的边 vw 在其中的一个圈上, 将其替换为图 G 中的两条边 vu 和 uw , 则所得到的圈与另一个圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。在第二种情况下, v 和 w 之间有边关联, 此时 uvw 构成图 G 中的一个圈, 去掉该圈上的三条边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边。此时 $q' = p' + 1$, 因此图 G' 中必定有一个圈, 与原来图 G 中的圈 uvw 构成图 G 中两个边不重的圈。

(iii) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时, $2q \geq 3p$, 即 $2(p+4) \geq 3p$, 可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 G 中有长度小于等于 4 的圈, 将其上的 4 条边去掉, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边。则 $q' \geq p'$, 图 G' 中必定有一个圈, 与原来图 G 中去掉的边所构成的圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。若图 G 中所有圈的长度至少为 5, 设 C 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 C 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接, 而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接, 否则将产生一个长度更小的圈。由圈 C 上至少有 5 个顶点知图 G 中至少有 10 个顶点, 与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 G 中所有圈的长度至少为 5 的情况不可能出现。 \square

习题 6.3. 在一个有 n 个人的宴会上, 每个人至少有 m 个朋友 ($2 \leq m \leq n$)。试证: 有不少于 $m+1$ 个人, 使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁, 每人的左右均是他的朋友。

证明. 每个人用一个顶点表示。如果两个人为朋友, 则在与他们对应的顶点之间连一条边, 得到一个图 G 。由每个人至少有 m 个朋友知, $\delta(G) \geq m$, 以下证明 G 中必有一个长度至少为 $m+1$ 的圈。设 $v_0 v_1 \dots v_n$ 为一条 G 的一条最长路, 则 v_0 只能与 v_1, v_2, \dots, v_n 中的顶点相关联。设 v_t 为 v_1, v_2, \dots, v_n 中与 v_0 相关联的下标最大的顶点, 则由 $\delta(v_0) \geq m$ 知 $t \geq m$, 于是 $v_0, v_1, \dots, v_t, v_0$ 构成一个长度至少为 $m+1$ 的圈。

\square

第七章 欧拉图

习题7.1. 图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度是偶数。

证明. 首先, 假设图 G 是欧拉图, 往证 G 是连通的且每个顶点的度是偶数。

由图 G 为欧拉图知 G 中有一条包含所有边和所有顶点的闭迹 $T: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $v_n = v_0$ 。显然 G 是连通的。顶点 v_0 在 T 中的第一次出现与一条边相关联, 最后一次出现与一条边相关联, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。除 v_0 之外的其他顶点在 T 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度也为偶数。

其次, 假设 G 是连通的且每个顶点的度是偶数, 往证 G 是欧拉图。

设 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹, 记为 Z , 则 Z 为闭迹。否则, $v_n \neq v_0$, v_n 在迹 Z 中的最后一次出现与一条边相关联, 其他的每次出现均与两条边相关联, 由 v_n 的度为偶数知, v_n 在 G 中还有一条与之关联的边没有在 Z 中出现, 记为 $x_{n+1} = v_n v_{n+1}$ 。则 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n, x_{n+1}, v_{n+1}$ 构成了图 G 的一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。接下来证明 Z 包含了图 G 的所有边。若不然, 则图 G 中有一条边 x 不在 Z 中出现, 并且 x 有一个端点在 Z 中出现。在图 G 中去掉 Z 中的所有边, 得到图 G' 。取图 G' 中一条包含 x 的最长的迹 Z' , 由图 G' 中所有顶点的度均为偶数易知 Z' 为闭迹(与前面证明 Z 为闭迹的过程相类似)。于是 Z 和 Z' 可以联结成一条更长的迹, 这与 $v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ 为图 G 的一条最长的迹矛盾。□

习题7.2. 图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图 G 有一条欧拉开迹 $Z: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$, 其中 $x_i = v_{i-1} v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 G 是连通的。顶点 v_0 在 Z 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 v_0 的度为奇数; 同理, v_n 的度为奇数。除了 v_0 和 v_n 之外其余的每个顶点在 Z 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 G 恰有两个奇度顶点。

设图 G 是连通的, 且恰有两个奇度顶点 u 和 v 。在顶点 u 和 v 之间加一条边, 得到图 G' 。则图 G' 是连通的且每个顶点的度为偶数, 因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 u 与顶点 v 之间的边, 便得到了图 G 的一条欧拉开迹。□

习题7.3. 设 G 是连通图, G 恰有 $2n$ 个奇度顶点, $n \geq 1$, 证明 G 的全部边可以排成 n 条开迹, 且不能排成少于 n 条开迹。

证明. 设连通图 G 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 G 中加入 n 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 得到图 G' 。则 G' 是连通的, 且每个顶点的度为偶数, 因此存在一条欧拉闭迹 Z 。在 Z 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$, 则得到图 G 的 n 条开迹。

假设图 G 的所有边能排成 m 条开迹, $m < n$ 。则只有这 m 条开迹的端点可能为奇度顶点, 因此图 G 至多有 $2m$ 个奇度顶点, 这与图 G 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。 \square

第八章 哈密顿图

习题8.1. 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图, 则对 V 的每个非空子集 S , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图, $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

习题8.2. 设 G 是一个有 p 个顶点的图, 如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 是连通的。

证明. 用反证法。假设图 G 不连通, 则至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 是其中的一个支, 其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 V_1 中的一个顶点 v_1 和 V_2 中的一个顶点 v_2 , 则

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = (|V_1| + |V_2|) - 2 = p - 2$$

矛盾。

□

第九章 树

习题9.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个 (p, q) 图, 试证下列各命题等价:

1. G 是树;
2. G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结;
3. G 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图;
4. G 是连通的且 $q = p - 1$;
5. G 中无圈且 $q = p - 1$;
6. G 中无圈且 G 中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

证明. $1 \Rightarrow 2$

用反证法。假设图 G 中存在两个顶点 u 和 v , 在它们之间存在两条不同的路 P_1 和 P_2 。由于 $P_1 \neq P_2$, P_1 上存在一条边 $x = u_1v_1$ 不在 P_2 上。由 P_1 和 P_2 上所有的顶点和边构成的 G 的子图记为 $P_1 \cup P_2$, 则 $(P_1 \cup P_2) - x$ 是连通的。于是, $(P_1 \cup P_2) - x$ 中存在一条 $u_1 - v_1$ 路 P , $P + x$ 为 G 的一个圈, 矛盾。

$2 \Rightarrow 3$

显然, 图 G 是连通的。设 uv 是图 G 的任意一条联结顶点 u 和 v 的边, 则 uv 是联结顶点 u 和 v 的唯一的一条路, 从图 G 中去掉边 uv 之后, 顶点 u 和顶点 v 之间没有路, 于是得到了一个不连通的图。

$3 \Rightarrow 4$

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。由图 G 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图知图 G 中一定存在一个度为1的顶点 v 。在图 G 中去掉顶点 v 及其与之关联的边, 得到图 G' 。则图 G' 是连通的且去掉任意一条边会得到一个不连通的图, 由归纳假设, 图 G' 中有 $k - 1$ 条边, 于是图 G 中有 k 条边, $q = p - 1$ 成立, 定理得证。

$4 \Rightarrow 5$

用反证法。假设图 G 中有圈, 则去掉圈上的一条边, 得到的图仍然是连通的。如果新得到的图仍然有圈, 在圈上再去掉一条边, 又会得到一个新的连通的图。如此继续下去, 最终会得到一个连通的没有圈的图。由从1到4的证明知最后到的图中有 $p - 1$ 条边, 这与去掉边之前图 G 中的边数 $q = p - 1$ 矛盾。

$5 \Rightarrow 6$

设图 G 有 k 个支, 则图 G 中的每个支连通且没有圈。设第 i 个支中含有 p_i 个顶点, q_i 条边。由1到4的证明知在第 i 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。于是 $k = 1$, 从而 G 是连通的。设 u 与 v 为图 G 的任意两个不邻接的顶点, 则 u 与 v 之间存在一条路, 再在 u 与 v 之间加一条边, 则得到一个圈。

$6 \Rightarrow 1$

设 u 和 v 为图 G 的任意两个顶点。如果 u 和 v 邻接, 则 u 和 v 之间有一条路。如果 u 和 v 之间不邻接, 则在 u 和 v 之间加一条边, 会得到一个圈。在该圈上将边 uv 去掉, 则得到 u 与 v 之间的一条路。这证明了 G 是连通的。 \square

第十章 连通度

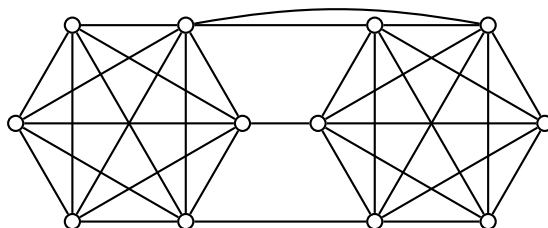
定义10.1. 图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

定义10.2. 图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

定义10.3. 设 G 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -顶点连通的**, 简称 **n -连通**; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -边连通的**。

习题10.1. 构造一个图 G , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。

解.



□

第十一章 匹配

习题11.1. 设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图, 存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

证明. 如果存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $Y=V_1$, 显然对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$ 。

设对 V_1 的任意子集 A , $|N(A)| \geq |A|$, 以下用数学归纳法证明存在 G 的一个完全匹配 Y 且 $|Y| = |V_1|$ 。施归纳于 $|V_1|$ 。

(1) 当 $|V_1| = 1$ 时, $|N(V_1)| \geq 1$, 结论显然成立。

(2) 假设当 $|V_1| < k$ 时结论成立, 往证当 $|V_1| = k$ 时结论也成立。分两种情况讨论:

(i) 对于 V_1 的任意子集 A , 如果 $|A| < k$, 则 $|N(A)| > |A|$ 。任取 V_1 的一个元素 u , 在 $N(\{u\})$ 中任意取一个元素 v 。 $G - \{u, v\}$ 仍满足归纳假设的条件, 因此存在完全匹配 M 且 $|M| = k - 1$, 则 $M \cup \{uv\}$ 即为 G 的一个完全匹配且 $|M \cup \{uv\}| = |V_1|$ 。

(ii) 存在 V_1 的子集 A , $|A| < k$ 且 $|N(A)| = |A|$ 。则图 G 中 $A \cup N(A)$ 的导出子图 G_1 满足归纳假设的条件, 存在匹配 M_1 且 $|M_1| = |A|$; 图 G 中 $(V_1 \setminus A) \cup (V_2 \setminus N(A))$ 的导出子图 G_2 也满足归纳假设的条件, 这是因为如果存在 $V_1 \setminus A$ 的一个子集 B 使得 $|N(B)| < |B|$, 则在 G 中 $|N(B \cup A)| < |B \cup A|$, 矛盾, 因此, 存在匹配 M_2 且 $|M_2| = |V_1 \setminus A|$ 。于是 $M_1 \cup M_2$ 就是 G 的一个完全匹配, 且 $|M_1 \cup M_2| = |V_1|$ 。

□

第十二章 综合题

习题12.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 p ，假珍珠重量也相同且为 q ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

解. 设四颗珍珠分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 ，其重量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 。第一次将 p_1 和 p_2 放在一起称，设得到的重量为 a ；第二次将 p_1 和 p_3 放在一起称，设得到的重量为 b ；第三次将 p_2, p_3 和 p_4 放在一起称，设得到的重量为 c 。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \quad (12.1)$$

令 $y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$ ， $y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$ ， $y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$ ， $y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$ ，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a - 2q}{p - q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b - 2q}{p - q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c - 3q}{p - q} \end{cases} \quad (12.2)$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \quad (12.3)$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得 y_4 为0或1。带入方程组(12.2)可得 y_1, y_2, y_3 的值为0或1，从而相应的可以判断 x_1, x_2, x_3, x_4 的值为 p 或 q 。□