

第八章 连通度和匹配

陈建文

1. 顶点连通度和边连通度

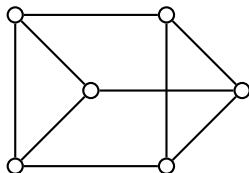
定义 1.1

图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

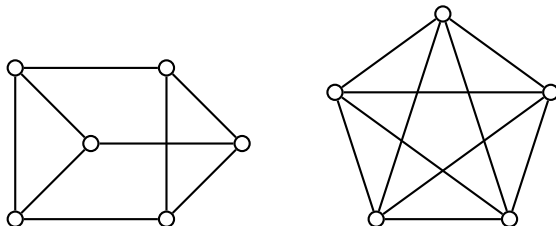
图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。



1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。



1. 顶点连通度和边连通度

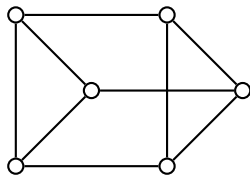
定义 1.2

图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

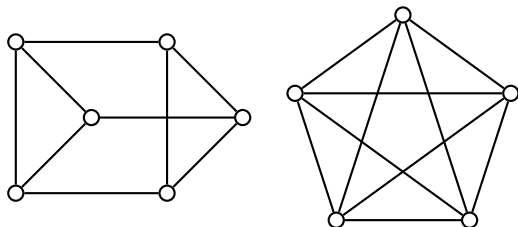
图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

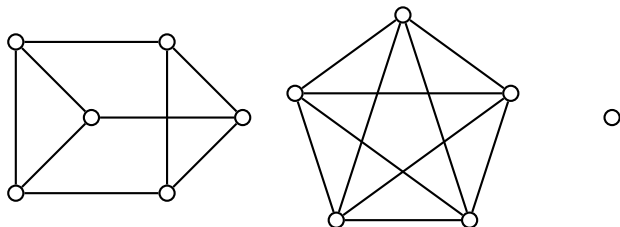
图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要
从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

► $\delta(G) = 0$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

▶ $\delta(G) = 0$

▶ $\delta(G) > 0$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

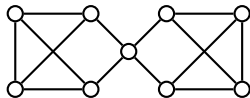
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

► $\delta(G) = 0$

► $\delta(G) > 0$



1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

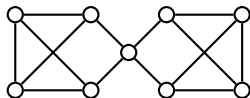
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

► $\delta(G) = 0$

► $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

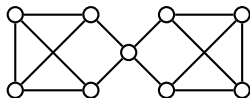
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

▶ $\delta(G) = 0$

▶ $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

▶ G 为完全图

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

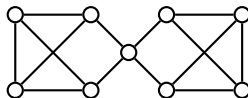
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

▶ $\delta(G) = 0$

▶ $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

▶ G 为完全图

▶ G 不连通

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

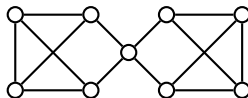
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

▶ $\delta(G) = 0$

▶ $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

▶ G 为完全图

▶ G 不连通

▶ G 为连通的非完全图

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

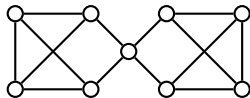
对任一图 G , 有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

▶ $\delta(G) = 0$

▶ $\delta(G) > 0$

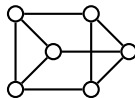


(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

▶ G 为完全图

▶ G 不连通

▶ G 为连通的非完全图



1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任一顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任一顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$;

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任一顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$; v 与 A 中的 y 个顶点邻接, 而这 y 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_2 , 则 $F_2 \subseteq F$ 并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

设 $G = (V, E)$ 有 p 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, 所以 G 是连通的。由 G 是连通的知 $\lambda(G) > 0$, 从而存在 V 的真子集 A 使得 G 中联结 A 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 F 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, A 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 A 中的某个顶点 u 只与 A 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$, 矛盾。

设 v 为 A 中的任一顶点, v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 与 A 中的 y 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。 v 与 $V \setminus A$ 中的 x 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_1 , 则 $F_1 \subseteq F$; v 与 A 中的 y 个顶点邻接, 而这 y 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 F_2 , 则 $F_2 \subseteq F$ 并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, 从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| \geq x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.3

设 G 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 是 n -顶点连通的, 简称 n -连通; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 是 n -边连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 是有 p 个顶点的图, $p \geq 3$, 则 G 是 2-连通的, 当且仅当 G 的任意两个不同的顶点在 G 的同一个圈上。

3. 匹配、霍尔定理

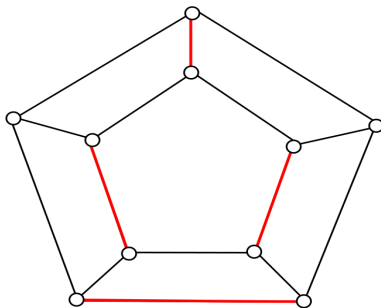
定义 3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图, G 的任两条不邻接的边 x 与 y 称为互相独立的。 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个匹配, 如果 Y 中任意两条边都是互相独立的。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图, G 的任两条不邻接的边 x 与 y 称为互相独立的。 G 的边集 E 的子集 Y 称为 G 的一个匹配, 如果 Y 中任意两条边都是互相独立的。



3. 匹配、霍尔定理

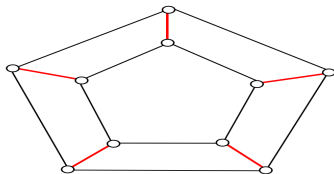
定义 3.2

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.2

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$, 则称 Y 为 G 的一个完美匹配。



3. 匹配、霍尔定理

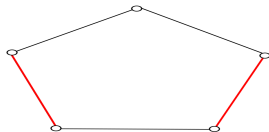
定义 3.3

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果对于 G 的任一匹配 Y' , 恒有 $|Y'| \leq |Y|$, 则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.3

设 Y 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 G 的任一匹配 Y' ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 Y 为 G 的一个**最大匹配**。



3. 匹配、霍尔定理

定义 3.4

设 $G = (V, E)$ 是一个偶图且 $V = V_1 \cup V_2$, $\forall x \in E$, x 是联结 V_1 的一个顶点与 V_2 的一个顶点的边。如果存在 G 的一个匹配 Y 使得 $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$, 则称 Y 是偶图 G 的一个完全匹配。