

# 离散数学

陈建文

December 28, 2018



# 第 一 章 集 合

习题1.1. 设 $A, B, C$ 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。



## 第二章 映射

**习题2.1.** 设 $f$ 是从实数集 $\mathbb{R}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射,  $f(x) = x^2$ ,  $A = \{-1, 0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $f(A \cap B) = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $f(A) \cap f(B) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

**习题2.2.** 设 $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。



## 第 三 章 置 换

**习题3.1.** 设 $S(n, k)$ 表示 $S_n$ 中的恰有 $k$ 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。  
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$





## 第 四 章 综 合 题

**习题4.1.** 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 $p$ ，假珍珠重量也相同且为 $q$ ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？



# 第一章 集合

习题1.1. 设 $A, B, C$ 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \in A \wedge x \in B \triangle C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

□



## 第二章 映射

**习题2.1.** 设 $f$ 是从实数集 $\mathbb{R}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射,  $f(x) = x^2$ ,  $A = \{-1, 0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $f(A \cap B) = \underline{\{0\}}$ ,  $f(A) \cap f(B) = \underline{\{0, 1\}}$ 。

**习题2.2.** 设 $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。



## 第三章 置换

**习题3.1.** 设 $S(n, k)$ 表示 $S_n$ 中的恰有 $k$ 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。  
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad (3.1)$$

证明. 记式(3.1)右边展开之后 $x^k$ 的系数为 $S'(n, k)$ ，以下证明 $S'(n, k) = S(n, k)$ 。  
首先来看 $S'(n, k)$ 的递推关系式。  
显然

$$\begin{aligned} S'(n, 0) &= 0 \\ S'(n, n) &= 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

式(3.1)右边按照最后一项展开，得

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ & \quad + x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

展开后所得到的第一项中 $x^k$ 的系数为 $S'(n-1, k-1)$ ，第二项中 $x^k$ 的系数为 $(n-1)S'(n-1, k)$ ，于是得到

$$S'(n, k) = S'(n-1, k-1) + (n-1)S'(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3.4)$$

接下来看 $S(n, k)$ 的递推关系式。

因为包含 $n$  ( $n \geq 1$ ) 个元素的置换至少含有 1 个循环，所以

$$S(n, 0) = 0 \quad (3.5)$$

又因为如果一个包含 $n$  ( $n \geq 1$ ) 个元素的置换含有 $n$ 个循环，则每个循环由一个元素构成，这样的置换只有一个，所以

$$S(n, n) = 1 \quad (3.6)$$

包含 $k$ 个循环的集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个置换可以划分为两种类型：（1）元素 $n$ 自身构成一个循环置换，这样的置换有 $S(n-1, k-1)$ 个；（2）元素 $n$ 至少与其他一个元素位于同一个循环置换中，这样的置换可以由分解为 $k$ 个循环

的集合  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  的置换在每个元素  $1, 2, \dots, n-1$  的左侧添加元素  $n$  得到, 于是这样的置换共有  $(n-1)S(n-1, k)$  个。于是得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3.7)$$

由此, 我们得到  $S(n, k)$  和  $S'(n, k)$  的递推关系式是一致的, 因此  $S(n, k) = S'(n, k)$ 。  
 $\square$



## 第四章 综合题

**习题4.1.** 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 $p$ ，假珍珠重量也相同且为 $q$ ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

解. 设四颗珍珠分别为 $p_1, p_2, p_3, p_4$ ，其重量分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 。第一次将 $p_1$ 和 $p_2$ 放在一起称，设得到的重量为 $a$ ；第二次将 $p_1$ 和 $p_3$ 放在一起称，设得到的重量为 $b$ ；第三次将 $p_2, p_3$ 和 $p_4$ 放在一起称，设得到的重量为 $c$ 。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \quad (4.1)$$

令 $y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$ ， $y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$ ， $y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$ ， $y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$ ，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a - 2q}{p - q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b - 2q}{p - q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c - 3q}{p - q} \end{cases} \quad (4.2)$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \quad (4.3)$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得 $y_4$ 为0或1。带入方程组(4.2)可得 $y_1, y_2, y_3$ 的值为0或1，从而相应的可以判断 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 的值为 $p$ 或 $q$ 。□