

# 第八章 连通度和匹配

陈建文

# 1. 顶点连通度和边连通度

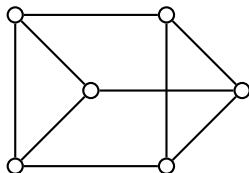
## 定义 1.1

图 $G$ 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.1

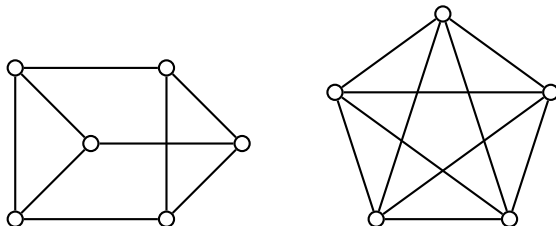
图 $G$ 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.1

图 $G$ 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

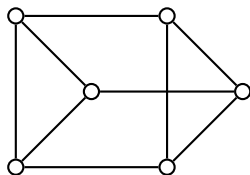
## 定义 1.2

图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.2

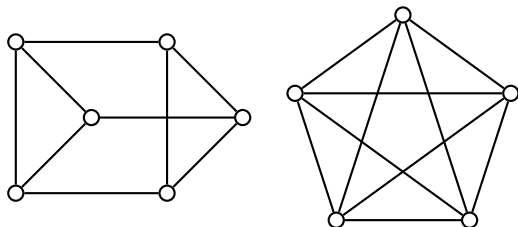
图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.2

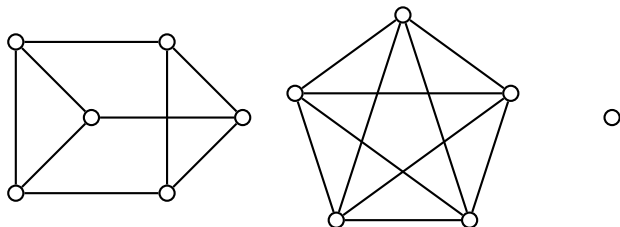
图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.2

图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要  
从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。





# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

►  $\delta(G) = 0$

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

▶  $\delta(G) = 0$

▶  $\delta(G) > 0$

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

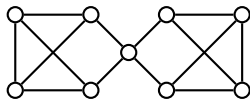
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

►  $\delta(G) = 0$

►  $\delta(G) > 0$



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

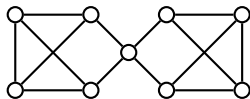
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

►  $\delta(G) = 0$

►  $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

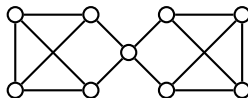
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

▶  $\delta(G) = 0$

▶  $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

▶  $G$ 为完全图



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

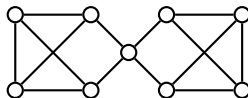
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

▶  $\delta(G) = 0$

▶  $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

▶  $G$ 为完全图

▶  $G$ 不连通

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

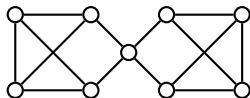
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

▶  $\delta(G) = 0$

▶  $\delta(G) > 0$



(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

▶  $G$ 为完全图

▶  $G$ 不连通

▶  $G$ 为连通的非完全图

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.1

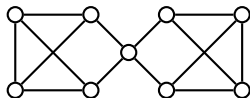
对任一图 $G$ , 有  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ 。

证明.

(1) 先证 $\lambda(G) \leq \delta(G)$ .

▶  $\delta(G) = 0$

▶  $\delta(G) > 0$

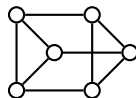


(2) 再证 $\kappa(G) \leq \lambda(G)$ .

▶  $G$ 为完全图

▶  $G$ 不连通

▶  $G$ 为连通的非完全图



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.2

对任何整数  $a, b, c$ ,  $0 < a \leq b \leq c$ , 存在一个图  $G$  使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设  $G = (V, E)$  有  $p$  个顶点且  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则  $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立,

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设  $G = (V, E)$  有  $p$  个顶点且  $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则  $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$  显然成立, 只需要证明  $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor p/2 \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 $A$ 中的某个顶点 $u$ 只与 $A$ 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$ , 矛盾。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 $A$ 中的某个顶点 $u$ 只与 $A$ 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$ , 矛盾。

设 $v$ 为 $A$ 中的任一顶点,  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。



# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 $A$ 中的某个顶点 $u$ 只与 $A$ 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$ , 矛盾。

设 $v$ 为 $A$ 中的任一顶点,  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 $F_1$ , 则 $F_1 \subseteq F$ ;

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 $A$ 中的某个顶点 $u$ 只与 $A$ 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$ , 矛盾。

设 $v$ 为 $A$ 中的任一顶点,  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 $F_1$ , 则 $F_1 \subseteq F$ ;  $v$ 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 而这 $y$ 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 $F_2$ , 则 $F_2 \subseteq F$  并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ,

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.3

设 $G = (V, E)$ 有 $p$ 个顶点且 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 则 $\lambda(G) = \delta(G)$ 。

证明.

$\lambda(G) \leq \delta(G)$ 显然成立, 只需要证明 $\lambda(G) \geq \delta(G)$ 。

因为 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ , 所以 $G$ 是连通的。如果 $G$ 为平凡图, 则 $\lambda(G) = \delta(G) = 0$ 。如果 $G$ 不是平凡图, 则 $\lambda(G) > 0$ , 从而存在 $V$ 的真子集 $A$ 使得 $G$ 中联结 $A$ 中的一个顶点与 $V \setminus A$ 中的一个顶点的边恰有 $\lambda(G)$ 条。所有这些边的集合记为 $F$ 。

由 $|A| + |V \setminus A| = p$ 知必有 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 或者 $|V \setminus A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。不妨设 $|A| \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。由于 $\delta(G) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ,  $A$ 中的每个顶点至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接。否则, 如果 $A$ 中的某个顶点 $u$ 只与 $A$ 中的顶点邻接, 则 $\deg u \leq |A| - 1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1 < \delta(G)$ , 矛盾。

设 $v$ 为 $A$ 中的任一顶点,  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 则 $\deg v = x + y$ 。  $v$ 与 $V \setminus A$ 中的 $x$ 个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 $F_1$ , 则 $F_1 \subseteq F$ ;  $v$ 与 $A$ 中的 $y$ 个顶点邻接, 而这 $y$ 个顶点中的每个顶点都至少与 $V \setminus A$ 中的一个顶点邻接, 所对应的边的集合记为 $F_2$ , 则 $F_2 \subseteq F$  并且 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , 从而

$$\lambda(G) \geq |F_1| + |F_2| \geq x + y = \deg v \geq \delta(G)$$

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定义 1.3

设 $G$ 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 $n$ -顶点连通的, 简称 $n$ -连通; 如果 $\lambda(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 $n$ -边连通的。

# 1. 顶点连通度和边连通度

## 定理 1.4

设  $G = (V, E)$  是有  $p$  个顶点的图,  $p \geq 3$ , 则  $G$  是 2-连通的, 当且仅当  $G$  的任意两个不同的顶点在  $G$  的同一个圈上。

### 3. 匹配、霍尔定理

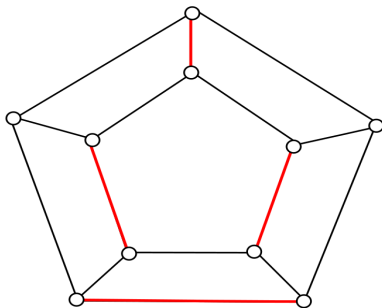
#### 定义 3.1

设  $G = (V, E)$  是一个图,  $G$  的任两条不邻接的边  $x$  与  $y$  称为互相独立的。 $G$  的边集  $E$  的子集  $Y$  称为  $G$  的一个匹配, 如果  $Y$  中任意两条边都是互相独立的。

### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.1

设  $G = (V, E)$  是一个图， $G$  的任两条不邻接的边  $x$  与  $y$  称为互相独立的。 $G$  的边集  $E$  的子集  $Y$  称为  $G$  的一个匹配，如果  $Y$  中任意两条边都是互相独立的。



### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.2

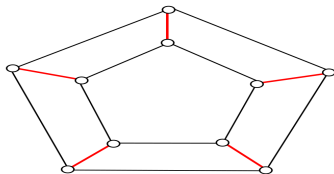
设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$ , 则称 $Y$ 为 $G$ 的一个完美匹配。



### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.2

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$ , 则称 $Y$ 为 $G$ 的一个完美匹配。



### 3. 匹配、霍尔定理

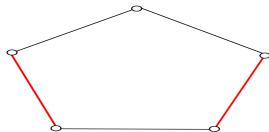
#### 定义 3.3

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果对于 $G$ 的任一匹配 $Y'$ , 恒有 $|Y'| \leq |Y|$ , 则称 $Y$ 为 $G$ 的一个**最大匹配**。

### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.3

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 $G$ 的任一匹配 $Y'$ ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 $Y$ 为 $G$ 的一个**最大匹配**。



### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.4

设  $G = (V, E)$  为一个偶图且  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $\forall x \in E$ ,  $x$  为联结  $V_1$  的一个顶点与  $V_2$  的一个顶点的边。如果存在  $G$  的一个匹配  $Y$  使得  $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$ , 则称  $Y$  是偶图  $G$  的一个完全匹配。

### 3. 匹配、霍尔定理

#### 定义 3.5

设 $X$ 为一个有穷集合,  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $X$ 的子集的一个序列, 由 $X$ 的互不相同的元素构成的序列 $s_1, s_2, \dots, s_n$ 称为系统

$$T : A_1, A_2, \dots, A_n$$

的相异代表系, 如果 $s_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。

# 匹配

## 定理 3.1

设  $G = ((V_1, V_2), E)$  为偶图, 存在  $G$  的一个完全匹配  $Y$  且  $|Y| = |V_1|$  的充分必要条件是对  $V_1$  的任意子集  $A$ ,  $|N(A)| \geq |A|$ , 其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

# 匹配

证明.

设  $G = ((V_1, V_2), E)$  为偶图, 如果存在  $G$  的一个完全匹配  $Y$  且  $|Y| = |V_1|$ , 则显然对  $V_1$  的任意子集  $A$ ,  $|N(A)| \geq |A|$ 。

设  $G = ((V_1, V_2), E)$  为偶图, 对  $V_1$  的任意子集  $A$ ,  $|N(A)| \geq |A|$ , 以下用数学归纳法证明存在  $G$  的一个完全匹配  $Y$  使得  $|Y| = |V_1|$ , 施归纳于  $|V_1|$ 。

(1) 当  $|V_1| = 1$  时, 设  $V_1$  中唯一的一个元素为  $u$ , 由  $|N(V_1)| \geq |V_1|$  知  $N(V_1)$  中至少含有一个元素  $v$ , 则  $\{\{u, v\}\}$  构成了  $G$  的一个满足条件的完全匹配。

(2) 假设当  $|V_1| < k$  时结论成立, 往证当  $|V_1| = k$  时结论也成立。设  $|V_1| = k$ , 分以下两种情况讨论:

(i) 对  $V_1$  的任意真子集  $A$ ,  $|N(A)| > |A| + 1$ 。取  $V_1$  中的任意一个元素  $u$ , 由于  $|N(\{u\})| \geq 1$ , 可取  $N(\{u\})$  中的一个元素  $v$  使得  $uv \in E$ 。考虑偶图  $G - \{u, v\}$ , 对任意的  $V_1 \setminus \{u\}$  的子集  $B$ ,

$|N(B)| \geq |B|$ 。由归纳假设, 偶图  $G - \{u, v\}$  有一个完全匹配  $Y'$  且  $|Y'| = |V_1 \setminus \{u\}|$ 。  $Y' \cup \{\{u, v\}\}$  即为  $G$  的一个完全匹配, 且  $|Y' \cup \{\{u, v\}\}| = |V_1|$ 。



# 匹配

证明(续上页).

(ii) 存在 $V_1$ 的真子集 $A$ ,  $|N(A)| = |A|$ 。

考虑图 $G$ 中由 $A \cup N(A)$ 导出的子图 $G_1$ 以及由 $(V_1 \setminus A) \cup N(V_1 \setminus A)$ 导出的子图 $G_2$ 。  $G_1$ 为偶图, 且在 $G_1$ 中对 $A$ 的任意子集 $B$ ,  $|N(B)| \geq |B|$ 。  $G_2$ 为偶图, 且在 $G_2$ 中对集合 $V_1 \setminus A$ 的任意子集 $C$ ,  $|N(C)| \geq |C|$ , 这是因为如果  $|N(C)| < |C|$ , 则  $|N(C \cup A)| < |C \cup A|$ , 与前提条件矛盾。由归纳假设,  $G_1$ 有完全匹配 $M_1$ ,  $|M_1| = |A|$ ,  $G_2$ 有完全匹配 $M_2$ ,  $|M_2| = |V_1 \setminus A|$ 。于是  $M_1 \cup M_2$ 构成了 $G$ 的完全匹配, 且  $|M_1 \cup M_2| = |V_1|$ 。





# 参考文献



D. Gale and L. S. Shapley.

College Admissions and the Stability of Marriage.

The American Mathematical Monthly, 1962.