

离散数学

陈建文

February 4, 2019

第一章 集合

习题1.1. 设 A, B, C 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

习题1.2. 设 A, B, C, D 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

第 二 章 映 射

习题2.1. 设 f 是从实数集 \mathbb{R} 到实数集 \mathbb{R} 的映射, $f(x) = x^2$, $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(A \cap B) = \underline{\hspace{1cm}}$, $f(A) \cap f(B) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

习题2.2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。

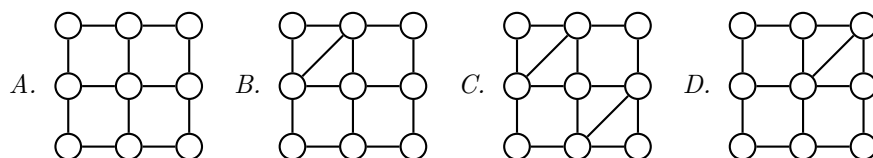
第 三 章 有穷集合的基数

习题3.1. 设 $S(n, k)$ 表示 S_n 中的恰有 k 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。
证明：

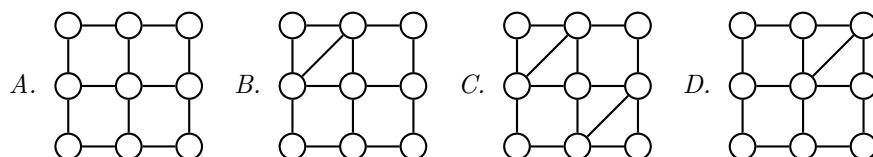
$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

第四章 欧拉图

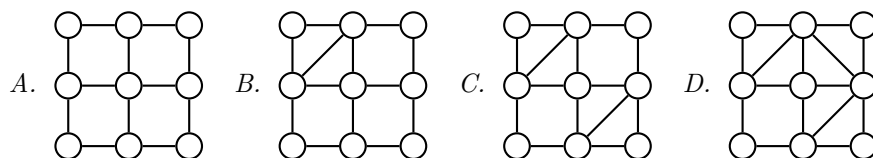
习题4.1. 以下4个图中，存在欧拉闭迹的是_____。



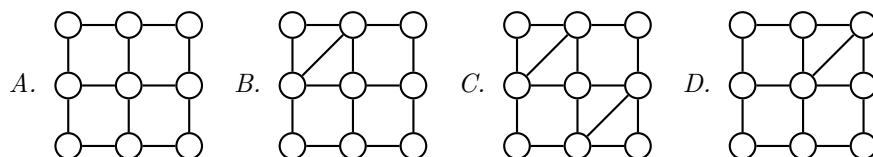
习题4.2. 以下4个图中，存在一条欧拉开迹的是_____。



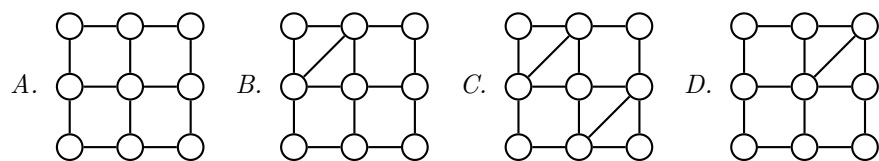
习题4.3. 以下4个图中，不可以一笔画成的是_____。



习题4.4. 以下4个图中，至少需要两笔才能画成的是_____。



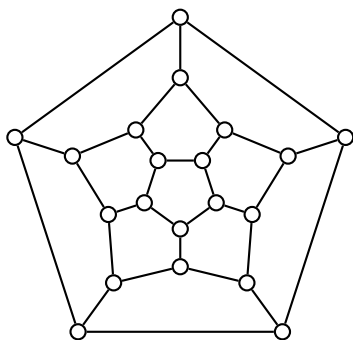
习题4.5. 以下4个图中，至少需要三笔才能画成的是_____。



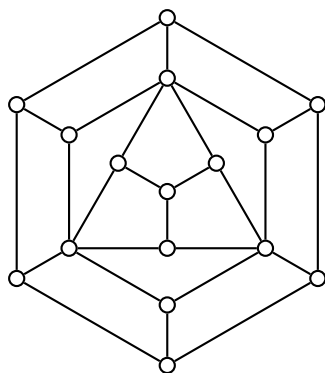
第五章 哈密顿图

若图 G 含有一条包含所有结点的路，则将其称之为图 G 的一条**哈密顿路**。若图 G 含有一个包含所有结点的圈，则将其称之为图 G 的一个**哈密顿圈**。包含哈密顿圈的图称之为**哈密顿图**。

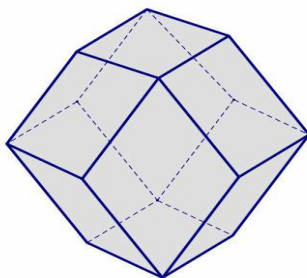
习题5.1. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



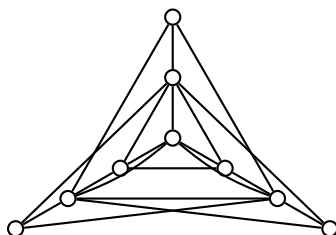
习题5.2. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



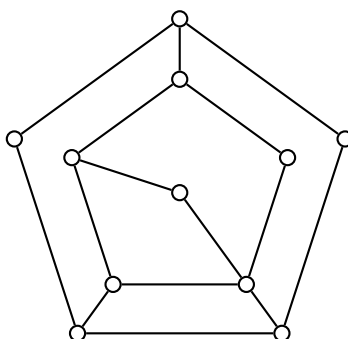
习题5.3. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



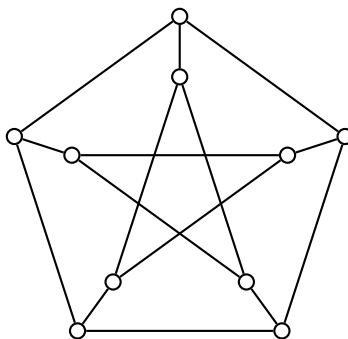
习题5.4. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



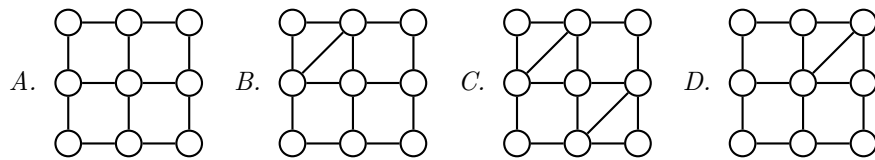
习题5.5. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



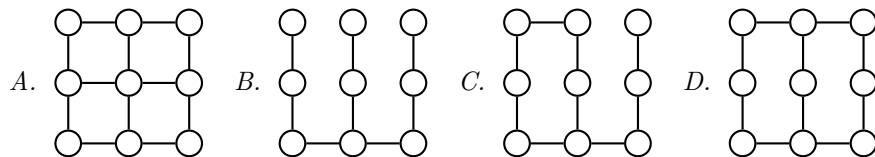
习题5.6. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



习题5.7. 以下4个图中, 存在一个哈密顿圈的是_____。

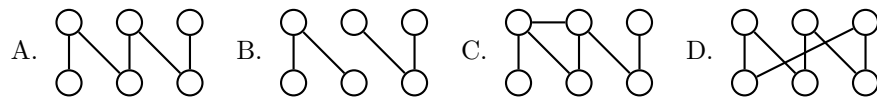


习题5.8. 以下4个图中, 不存在哈密顿路的是_____。

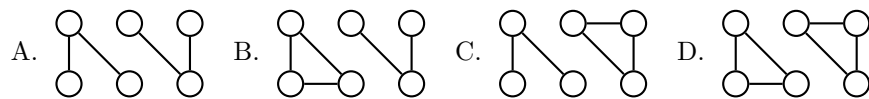


第六章 树

习题6.1. 下列图为树的是_____。



习题6.2. 下列图为森林的是_____。



第七章 连通度

定义7.1. 图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

定义7.2. 图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

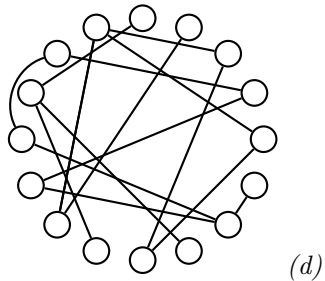
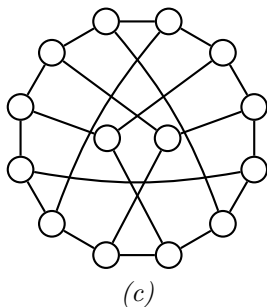
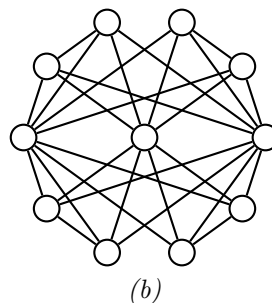
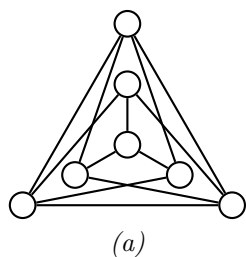
定义7.3. 设 G 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -顶点连通**的, 简称 **n -连通**;如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -边连通**的。

习题7.1. 构造一个图 G , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。

第 八 章 平面图

第九章 综合题

习题9.1. 给出以下四个图的顶点最小度、顶点连通度、边连通度、色数，并说明它们是否为连通图、偶图、欧拉图、哈密顿图、可平面图。



习题9.2. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 p ，假珍珠重量也相同且为 q ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

第一章 集合

习题1.1. 设 A, B, C 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \triangle C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \triangle C) \vee (x \in A \wedge x \in B \triangle C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。 \square

习题1.2. 设 A, B, C, D 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

证明.

$$\begin{aligned}(x, y) &\in (A \cap B) \times (C \cap D) \\ \Leftrightarrow x &\in A \cap B \text{ 且 } y \in C \cap D \\ \Leftrightarrow x &\in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow x &\in A \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow (x, y) &\in A \times C \text{ 且 } (x, y) \in B \times D \\ \Leftrightarrow (x, y) &\in (A \times C) \cap (B \times D)\end{aligned}$$

□

第 二 章 映 射

习题2.1. 设 f 是从实数集 \mathbb{R} 到实数集 \mathbb{R} 的映射, $f(x) = x^2$, $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1\}$, $f(A \cap B) = \underline{\{0\}}$, $f(A) \cap f(B) = \underline{\{0, 1\}}$ 。

习题2.2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。

第 三 章 有穷集合的基数

习题3.1. 设 $S(n, k)$ 表示 S_n 中的恰有 k 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad (3.1)$$

证明. 记式(3.1)右边展开之后 x^k 的系数为 $S'(n, k)$, 以下证明 $S'(n, k) = S(n, k)$ 。
首先来看 $S'(n, k)$ 的递推关系式。
显然

$$\begin{aligned} S'(n, 0) &= 0 \\ S'(n, n) &= 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

式(3.1)右边按照最后一项展开, 得

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ &+ x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

展开后所得到的第一项中 x^k 的系数为 $S'(n-1, k-1)$, 第二项中 x^k 的系数为 $(n-1)S'(n-1, k)$, 于是得到

$$S'(n, k) = S'(n-1, k-1) + (n-1)S'(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3.4)$$

接下来看 $S(n, k)$ 的递推关系式。

因为包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换至少含有1个循环, 所以

$$S(n, 0) = 0 \quad (3.5)$$

又因为如果一个包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换含有 n 个循环, 则每个循环由一个元素构成, 这样的置换只有一个, 所以

$$S(n, n) = 1 \quad (3.6)$$

包含 k 个循环的集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的一个置换可以划分为两种类型: (1) 元素 n 自身构成一个循环置换, 这样的置换有 $S(n-1, k-1)$ 个; (2) 元素 n 至少与其他一个元素位于同一个循环置换中, 这样的置换可以由分解为 k 个循环

的集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的置换在每个元素 $1, 2, \dots, n-1$ 的左侧添加元素 n 得到, 于是这样的置换共有 $(n-1)S(n-1, k)$ 个。于是得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (3.7)$$

由此, 我们得到 $S(n, k)$ 和 $S'(n, k)$ 的递推关系式是一致的, 因此 $S(n, k) = S'(n, k)$ 。
□

第四章 连通度

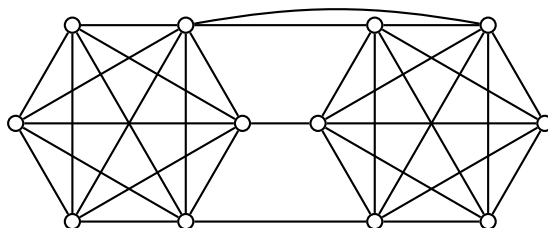
定义4.1. 图 G 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

定义4.2. 图 G 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 G 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

定义4.3. 设 G 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -顶点连通**的, 简称 **n -连通**; 如果 $\lambda(G) \geq n$, 则称 G 是 **n -边连通**的。

习题4.1. 构造一个图 G , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。

解.



□

第五章 综合题

习题5.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 p ，假珍珠重量也相同且为 q ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

解. 设四颗珍珠分别为 p_1, p_2, p_3, p_4 ，其重量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 。第一次将 p_1 和 p_2 放在一起称，设得到的重量为 a ；第二次将 p_1 和 p_3 放在一起称，设得到的重量为 b ；第三次将 p_2, p_3 和 p_4 放在一起称，设得到的重量为 c 。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \quad (5.1)$$

令 $y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$ ， $y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$ ， $y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$ ， $y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$ ，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a - 2q}{p - q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b - 2q}{p - q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c - 3q}{p - q} \end{cases} \quad (5.2)$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \quad (5.3)$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得 y_4 为0或1。带入方程组(5.2)可得 y_1, y_2, y_3 的值为0或1，从而相应的可以判断 x_1, x_2, x_3, x_4 的值为 p 或 q 。□