

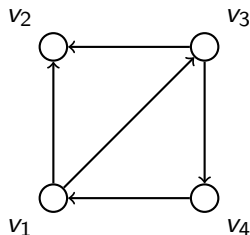
第十章有向图

陈建文

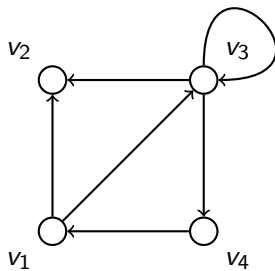
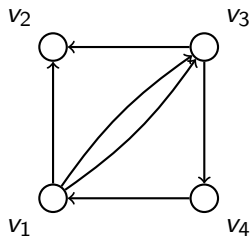
1. 有向图的概念

定义1.1

设 V 是一个有穷非空集合, $A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$, 二元组 $D = (V, A)$ 称为一个有向图。 V 称为有向图 D 的顶点集, V 中的元素称为 D 的顶点。 A 称为 D 的弧集或有向边集, A 中的元素称为 D 的弧或有向边。如果 $x = (u, v) \in A$, 则 u 称为弧 x 的起点, v 称为弧 x 的终点。



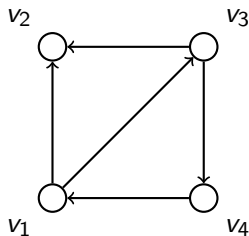
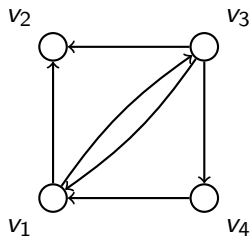
1. 有向图的概念



1. 有向图的概念

定义1.2

如果 (u, v) 和 (v, u) 都是有向图 D 的弧，则称 (u, v) 与 (v, u) 是 D 的**对称弧**。如果 D 中不含对称弧，则称 D 是**定向图**。

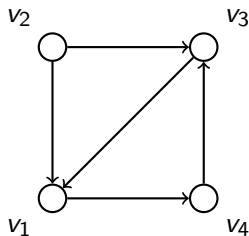
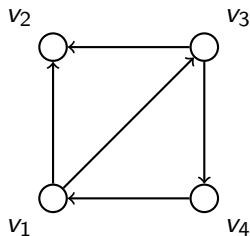


1. 有向图的概念

定义1.3

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图, D 的**反向图**是有向图 $D^T = (V, A^T)$, 其中

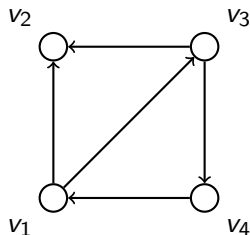
$$A^T = \{(u, v) | (v, u) \in A\}$$



1. 有向图的概念

定义1.4

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图， v 是 D 的任一顶点，以 v 为终点的弧称为 v 的入弧；以 v 为始点的弧称为 v 的出弧。顶点 v 的入弧的条数称为 v 的入度，记为 $id(v)$ ；顶点 v 的出弧的条数称为 v 的出度，记为 $od(v)$ 。



1. 有向图的概念

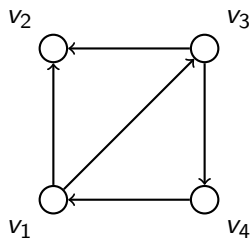
定理1.1

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图, $|A| = q$, 则

$$\sum_{v \in V} id(v) = \sum_{v \in V} od(v) = q$$

从而

$$\sum_{v \in V} (id(v) + od(v)) = 2q$$

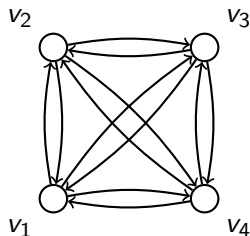


1. 有向图的概念

定义1.5

有向图 $D = (V, A)$ 称为**完全有向图**，如果

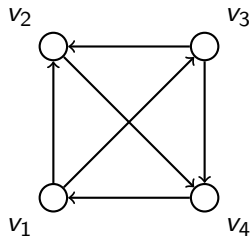
$$A = V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}$$



1. 有向图的概念

定义1.6

一个**比赛图**是一个定向完全图，即任两个不同顶点间有且仅有一条弧。

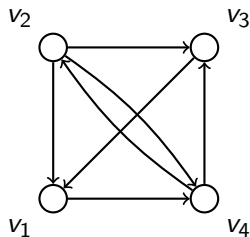
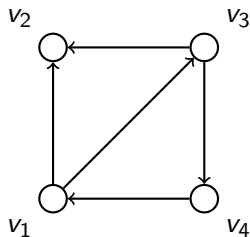


1. 有向图的概念

定义1.7

有向图 $D = (V, A)$ 的补图定义为 $D^c = (V, A^c)$, 其中

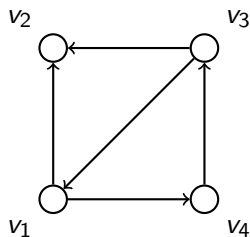
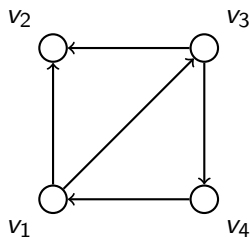
$$A^c = (V \times V \setminus \{(v, v) | v \in V\}) \setminus A$$



1. 有向图的概念

定义1.8

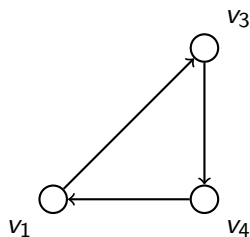
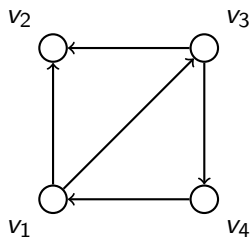
设 $D_1 = (V_1, A_1)$, $D_2 = (V_2, A_2)$ 都是有向图, 如果存在一个一一对应 $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, 使得 $\forall u, v \in V_1, (u, v) \in A_1$ 当且仅当 $(\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$, 则称 D_1 与 D_2 同构。



1. 有向图的概念

定义1.9

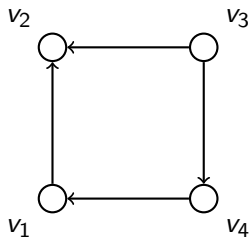
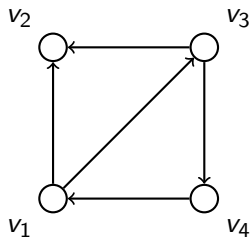
设 $D = (V, A)$ 是一个有向图，如果 V_1 是 V 的非空子集， A_1 是 A 的非空子集，并且 A_1 中每条弧的端点都在 V_1 中，则称图 $H = (V_1, A_1)$ 为 D 的一个子图。如果 $H \neq D$ ，则称 H 为 D 的真子图。



1. 有向图的概念

定义1.10

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图，如果 $F \subseteq A$ ，则称 D 的子图 $H = (V, F)$ 为 D 的一个生成子图。

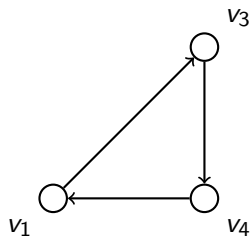
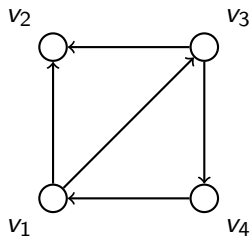


1. 有向图的概念

定义1.11

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图, 如果 $S \subseteq V$, 则 S 的导出子图定义为 $H = (S, F)$, 其中

$$F = \{(u, v) \in A \mid u \in S, v \in S\}$$



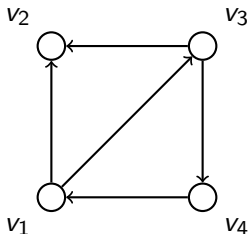
2. 有向路和有向圈

定义2.1

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图。 D 的顶点和弧的交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

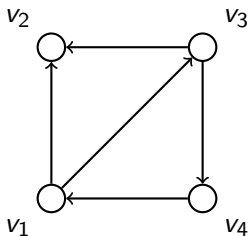
称为 D 的一个**有向通道**，如果 $x_i = (v_{i-1}, v_i)$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。
 n 称为该有向通道的长。如果 $v_0 = v_n$ ，则称它是**闭有向通道**。



2. 有向路和有向圈

定义2.2

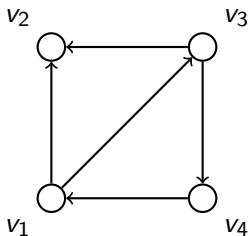
设 $D = (V, A)$ 是一个有向图， D 的一条有向迹是 D 的一条所有弧均不相同的有向通道。起点和终点相同的迹称为闭迹。迹上出现的弧的条数称为迹的长。



2. 有向路和有向圈

定义2.3

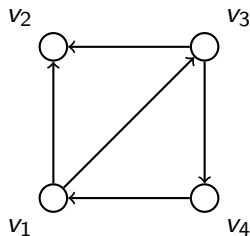
设 $D = (V, A)$ 是一个有向图， D 的一条不含重复顶点的有向通道称为 D 的一条**有向路**。有向路上弧的条数称为该有向路的长。一条至少含有两个不同顶点的闭有向通道称为一个**有向圈**，如果该闭有向通道上除起点和终点外各顶点互不相同。



2. 有向路和有向圈

定义2.4

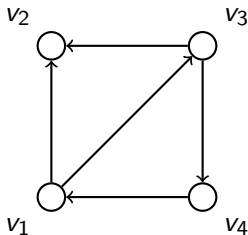
设 $D = (V, A)$ 是一个有向图， u 和 v 是 D 的顶点。如果在 D 中有一条从 u 到 v 的有向路，则称从 u 能达到 v ，或者 v 是从 u 可达的。



2. 有向路和有向圈

定义2.5

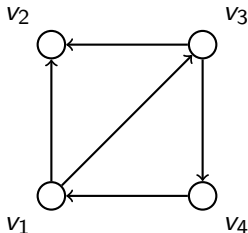
有向图 D 称为是**强连通**的，如果对 D 的任两个不同的顶点 u 和 v ， u 和 v 是互达的。



2. 有向路和有向圈

定义2.6

有向图 D 的极大强连通子图称为 D 的一个**强支**。



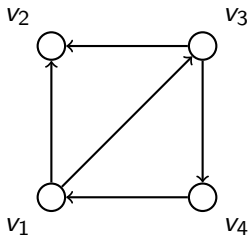
2. 有向路和有向圈

定理2.1

设 $D = (V, A)$ 是一个有向图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下：

$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 互达}$$

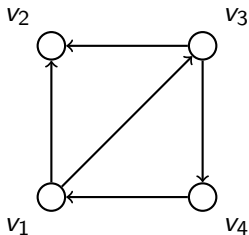
则 \cong 是 V 上的等价关系， D 的强支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。



2. 有向路和有向圈

定义2.7

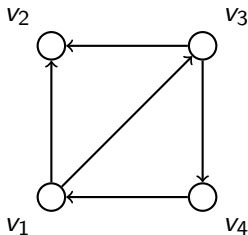
有向图 $D = (V, A)$ 称为**单向连通**的，如果对 D 的任两个不同顶点 u 和 v ，或从 u 可达到 v ，或从 v 可达到 u 。



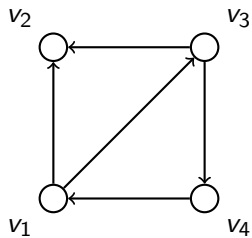
2. 有向路和有向圈

定义2.8

有向图 $D = (V, A)$ 为一个有向图，如果抹去 D 中所有弧的方向之后所得到的无向图是连通的，则称 D 为弱连通的，简称连通的。



4. 有向图的邻接矩阵



4. 有向图的邻接矩阵

定理4.1

设 B 是有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, 则从顶点 v_i 到顶点 v_j 的长为 l 的有向通道的条数等于 B^l 的第 i 行第 j 列元素 $(B^l)_{ij}$ 的值。

4. 有向图的邻接矩阵

定理4.2

设 $p \times p$ 矩阵 B 是有向图 $D = (V, A)$ 的邻接矩阵, 则 D 的可达矩阵

$$R = I \vee B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(p-1)}$$

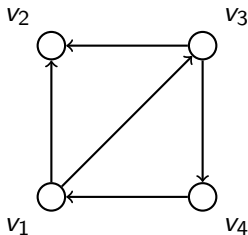
4. 有向图的邻接矩阵

定理4.3

设 $p \times p$ 矩阵 R 为有向图 $D = (V, A)$ 的可达矩阵,

$$C = R \wedge R^T,$$

C 的第 i 行上为1的元素 $c_{ij_1}, c_{ij_2}, \dots, c_{ij_k}$, 则 v_i 在由 $V_i = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$ 诱导出的 D 的子图- D 的强支中。



5. 有向树与有序树

定义5.1

一个有向图，如果抹去其所有弧的方向以后所得到的无向图是一棵无向树，则称该有向图为一棵**有向树**。

5. 有向树与有序树

定义5.2

有向树 D 称为**有根树**，如果 D 中恰有一个顶点的入度为0，而其余每个顶点的入度均为1。有根树中入度为0的顶点称为有根树的根，出度为0的顶点称为**叶子**，非叶顶点称为**分支点**或**内顶点**。

5. 有向树与有序树

定义5.3

设 $T = (V, A)$ 是一个有根树。如果 $(u, v) \in A$ ，则称 v 为 u 的**儿子**， u 为 v 的**父亲**。如果从顶点 u 能达到顶点 v ，则称 v 为 u 的**子孙**， u 为 v 的**祖先**。如果 u 是 v 的祖先且 $u \neq v$ ，则称 u 为 v 的**真祖先**， v 为 u 的**真子孙**。

5. 有向树与有序树

定义5.4

设 $T = (V, A)$ 是一个以 v_0 为根的有根树。从 v_0 到顶点 v 的有向路的长度称为 T 的顶点 v 的**深度**。从顶点 v 到 T 的叶子的最长的有向路的长度称为顶点 v 在 T 中的**高度**。根顶点 v_0 的高度称为树 T 的**高度**。

5. 有向树与有序树

定义5.5

设 $T = (V, A)$ 是一个有根树， v 是 T 的一个顶点，由 v 及其子孙所导出的 T 的子图称为 T 的以 v 为根的子树。

5. 有向树与有序树

定义5.6

设 $T = (V, A)$ 是一个有根树。如果 T 的每个顶点的各个儿子排定了次序，则称 T 为一个有序树。

5. 有向树与有序树

定义5.7

有序树 T 称为 **m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度 $\leq m$ 。一个 m 元有序树 T 称为 **正则 m 元有序树**，如果 T 的每个顶点的出度不是0就是 m 。