

离散数学

陈建文

February 11, 2020

第一章 集合

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 A 和一个元素 a ，用 $a \in A$ 表示 a 是 A 的一个元素，用 $a \notin A$ 表示 a 不是 A 的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathbb{Z} \wedge n \text{ is even}\}$
- $E = \{n \in \mathbb{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 Φ 。

定义1.2. 设 A, B 为两个集合，如果 A 中的每个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

定义1.3. 设 A, B 为两个集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，并记为 $A = B$ 。

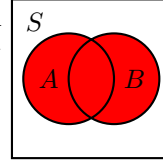
- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathbb{R}|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定义1.4. 集合 S 的所有子集构成的集合称为 S 的幂集，记为 2^S 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

例. 设 $S = \{1, 2, 3\}$ ，则 $2^S = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

定义1.5. 设 A, B 为任意的两个集合, 至少属于集合 A 与集合 B 之一的那些元素构成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

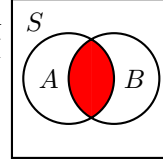
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



例. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

定义1.6. 设 A, B 为任意的两个集合, 由既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

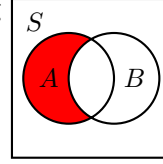
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



例. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

定义1.7. 设 A, B 为任意的两个集合, 由属于集合 A 但不属于集合 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$ 。

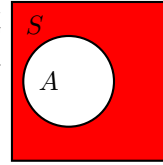
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



例. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

定义1.8. 在许多实际问题中, 常以某个集合 S 为出发点, 而所涉及的集合都是 S 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 S , 称为该问题的全集。如果 A 是 S 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 A 对集合 S 的余集, 记为 A^c 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$



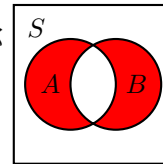
例. $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则 $A^c = \{1\}$

定理1.1. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cup S = S, A \cap S = A$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$.
8. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
- 8'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

定义1.9. 设 A, B 为两个集合, $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集称为 A 与 B 的对称差, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例. $\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

定理1.2. 设 S 为全集, $A \in 2^S$, $B \in 2^S$, 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.3. 设 S 为全集, \emptyset 为空集, A, B, C 为 S 的子集, 则

1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果 I 为任意一个集合, 对 I 中每个元素 α 都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为 A_α , 那么所有这些 A_α 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示, 其中 I 称为标号集。

定义1.11. 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$, 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = ?, \bigcap_{x \in I} A_x = ?$$

定理1.4. 设 A 为任意集合, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

1. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$
2. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为 a , 第二个对象为 b , 则该有序对记为 (a, b) 。 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 并且 $b = d$ 。

定义1.13. 设 A 与 B 为任意两个集合, 则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积, 记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

例. 如果 $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4, 5\}$, 那么 $X \times Y = ?$, $Y \times X = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \\ Y \times X &= \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\} \end{aligned}$$

定义1.14. n 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 n 元组。如果第一个对象为 a_1 , 第二个对象为 a_2 , ..., 第 n 个对象为 a_n , 则该 n 元组记为 (a_1, a_2, \dots, a_n) 。
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

定义1.15. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为任意 n 个集合, 则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 A_1, A_2, \dots, A_n 的笛卡尔乘积, 记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, 简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

例. 如果 $X = \{a_1, b_1\}$, $Y = \{a_2, b_2\}$, $Z = \{a_3, b_3\}$ 那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, b_3), (a_1, b_2, a_3), (a_1, b_2, b_3), \\ &\quad (b_1, a_2, a_3), (b_1, a_2, b_3), (b_1, b_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\} \end{aligned}$$

定义1.16. 设 X 和 Y 为两个非空集合。一个从 X 到 Y 的映射 f 为一个法则, 根据 f , 对 X 中的每个元素 x 都有 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应。从 X 到 Y 的映射 f 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

定义1.17. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 X 到 Y 的单射。

定义1.18. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 X 到 Y 的满射。

定义1.19. 设 $f: X \rightarrow Y$, 如果 f 既是单射又是满射, 则称 f 为从 X 到 Y 的双射, 或者称 f 为从 X 到 Y 的一一对应。

定义1.20. 设 A 为一个集合, 如果 $A = \Phi$, 其基数定义为0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 n 使得 A 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 A 的基数为 n 。 A 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 n , 则称 A 为有穷集; 如果 A 不是有穷集, 则称 A 为无穷集。

定理1.5. 设 A, B 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

定理1.6. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

定理1.7. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

定理1.8. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

定理1.9. 设 S 为有穷集, $A \subseteq S$, 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

定理1.10. 设 A, B 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

定理1.11. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \cdots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 n :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设定理的结论对 $n \geq 1$ 个有穷集合成立, 往证对 $n + 1$ 个有穷集合定理的结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\ &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \end{aligned} \tag{1.1}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \cdots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
& |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \quad (1.3) \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|
\end{aligned}$$

将(1.2)和(1.3)代入(1.1)得

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}$$

□

例. 在1000名大学毕业生的调查中, 每个人至少掌握了一门外语, 其中804人掌握了英语, 205人掌握了日语, 190人掌握了俄语, 125人既掌握了英语又掌握了日语, 57人既掌握了日语又掌握了俄语, 85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生, 英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

练习1.1. 设集合 $S = \{\phi, \{\phi\}\}$, 则 $2^S =$ _____。

练习1.2. 下列命题中哪个是假的?

- A. 对每个集合 A , $\phi \in 2^A$ 。
- B. 对每个集合 A , $\phi \subseteq 2^A$ 。
- C. 对每个集合 A , $A \in 2^A$ 。
- D. 对每个集合 A , $A \subseteq 2^A$ 。

练习1.3. 设集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B =$ _____, $A \cap B =$ _____, $A \setminus B =$ _____, $A \triangle B =$ _____, $A \times B =$ _____。

练习1.4. 设 A, B, C 为集合, 证明: $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

证明. 先证 $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \cup B) \setminus C$, 则 $x \in (A \cup B)$ 并且 $x \notin C$, 从而 $x \in A$ 或者 $x \in B$, 并且 $x \notin C$, 即 $x \in A$ 并且 $x \notin C$ 成立, 或者 $x \in B$ 并且 $x \notin C$ 成立。于是, $x \in A \setminus C$ 或者 $x \in B \setminus C$, 因此, $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

再证 $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$ 。

对任意的 x , 如果 $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, 则 $x \in A \setminus C$ 或者 $x \in B \setminus C$, 从而 $x \in A$ 并且 $x \notin C$ 成立, 或者 $x \in B$ 并且 $x \notin C$ 成立, 即 $x \in A$ 或者 $x \in B$, 并且 $x \notin C$, 于是 $x \in (A \cup B)$ 并且 $x \notin C$, 因此 $x \in (A \cup B) \setminus C$ 。 \square

练习1.5. 下列等式是否成立: $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$?

解. 该等式不成立。举反例如下: 设 $A = \{1\}, B = \{1\}, C = \{1\}$, 则 $(A \cup B) \setminus C = \emptyset$, 而 $A \cup (B \setminus C) = \{1\}$, 此时 $(A \cup B) \setminus C \neq A \cup (B \setminus C)$ 。 \square

练习1.6. 下列命题中哪个是真的?

- A. 对任何集合 A, B , $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。
- B. 对任何集合 A, B , $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
- C. 对任何集合 A, B , $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。
- D. 对任何集合 A, B , $2^{A \Delta B} = 2^A \Delta 2^B$ 。

练习1.7. 设 A, B, C 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$, 则下列哪个断言成立?

- A. $B = C$
- B. $A \cap B = A \cap C$
- C. $A \cap B^c = A \cap C^c$
- D. $A^c \cap B = A^c \cap C$

练习1.8. 设 A, B, C, D 为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

练习1.9. 设 A, B, C 为集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

练习1.10. 证明

- 1) $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
- 2) $(A \Delta B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
- 3) $(A \Delta B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$

第 二 章