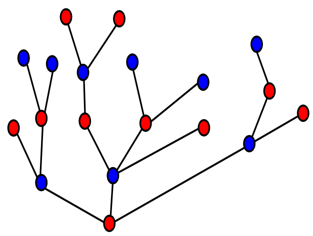

Figure 1: 着色过程示意图

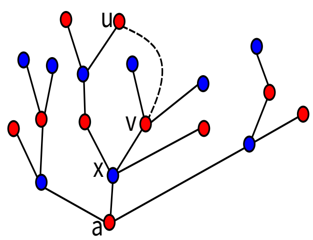

Figure 2: u和v的着色发生冲突的情况

习题. 一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

证明. 设图G为可双色的，则显然图G没有奇数长的圈。这是因为假设图G有奇数长的圈C， 则C是3色的，从而$\chi(G) \geq 3$，与G是可双色的矛盾。

设图G没有奇数长的圈，以下给出一种用两种颜色对G的顶点进行着色的算法，从而证 明图G是可双色的。不妨设图G是连通的，否则可以对图G的每个连通分量分别进行 着色。任取G的一个顶点a，对其着红色，然后 对与顶点a邻接的顶点着蓝色，接下来对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着红色，这 样依次下去，每次都对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色。该算法结束时用至多两种颜色对G的顶点进行了着色，如图1所示。

以下证明每次对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色时， 不会产生相邻的两个顶点着以相同颜色的情况，从而保证前面的算法是正确的。用反证法。 假设对顶点u进行着色时，不妨设对其着红色，已经有一个与之相邻的顶点v着了红色, 如图2所示。 从着色的过程知，从顶点a到顶点u之间有一条路P_1，其上的顶点依次着了红色和蓝色， 从顶点a到顶点v之间也有一条路P_2，其上的顶点依次着了红色和蓝色。 取P_1和P_2的最后一个公共的顶点x，则P_1上从顶点u到顶点x的路与P_2上从顶 点x到顶点v的路和边vu一起构成一个圈，该圈上u和v着相同的颜色，其他各顶点依次着不同的颜色，因此其长度为奇数，与G中没有奇数长的圈矛盾。

□