离散数学

陈建文

March 28, 2019

第 一 章　集合

习题1.1. 设A，B，C是集合，证明$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。

习题1.2. 设A，B，C，D是任意四个集合，证明$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$。

第 二 章　映射

习题2.1. 设f是从实数集合$\mathbb{R}$到实数集合$\mathbb{R}$的映射，$f(x) = x^2$，$A = \{-1, 0\}$，$B = \{0, 1\}$，$f(A \cap B) =$ ____，　$f(A) \cap f(B) =$ ____。

习题2.2. 设f是从集合A到集合B的映射，求证$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$。

第 三 章　关系

习题3.1. 判断下列二元关系是否是自反的，反自反的，对称的，反对称的和传递的。

1. 设集合$X=\{1,2,3,4\}$, X上的二元关系$R=\{(1,2),(1,3),(1,4).(2,3),(2,4).(3,4)\}$
2. 设集合$X=\{1,2,3,4\}$, X上的二元关系$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4).(2,2),(2,4).(3,3),(4,4)\}$
3. 设集合$X=\{0,1\}$, 2^X上的二元关系$\subseteq$
4. 设集合$X=\{1,2,3,4\}$，X上的二元关系$R=\{(1,1),(2,3),(3,2)\}$
5. 设集合$X=\{1,2,3,4\}$，X上的二元关系$R=\{(2,3)\}$
6. 设集合$X=\{1,2,3,4\}$，X上的恒等关系$I_X=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

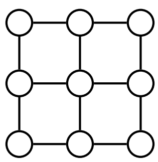
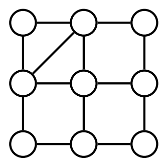
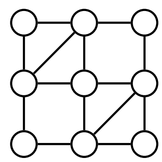
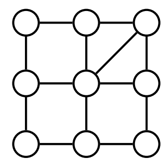
第 四 章　有穷集合的基数

习题4.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

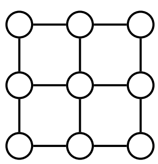
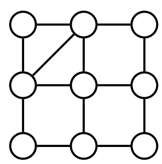
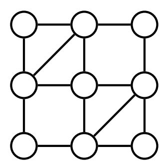
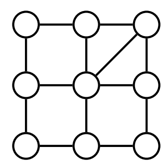
$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

第五章　欧拉图

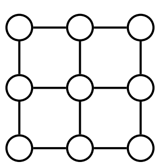
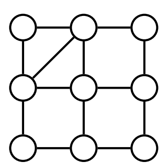
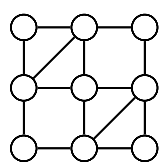
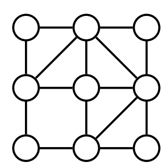
习题5.1. 以下4个图中，存在欧拉闭迹的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

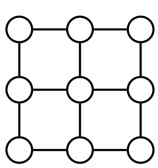
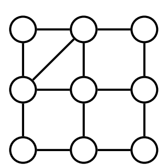
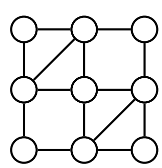
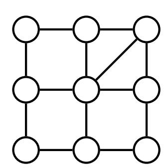
习题5.2. 以下4个图中，存在一条欧拉开迹的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

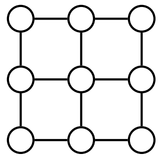
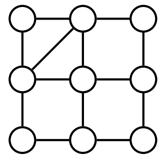
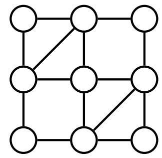
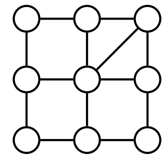
习题5.3. 以下4个图中，不可以一笔画成的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

习题5.4. 以下4个图中，至少需要两笔才能画成的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

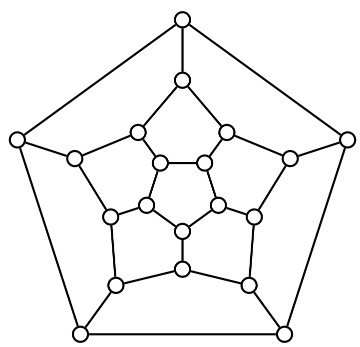
习题5.5. 以下4个图中，至少需要三笔才能画成的是____。

A.  *B.*  *C.*  *D.* 

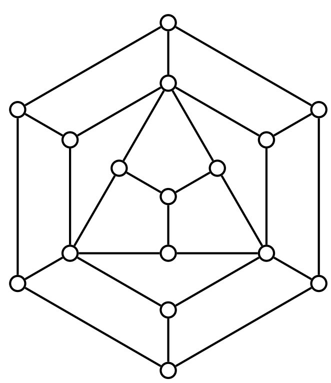
第 六 章　哈密顿图

若图G含有一条包含所有结点的路，则将其称之为图G的一条**哈密顿路**。若图G含有一个包含所有结点的圈，则将其称之为图G的一个**哈密顿圈**。包含哈密顿圈的图称之为**哈密顿图**。

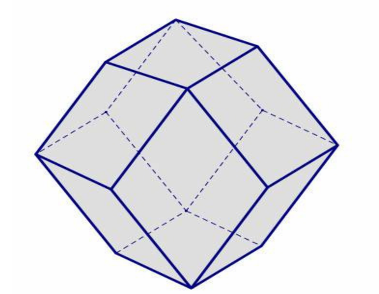
习题6.1. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



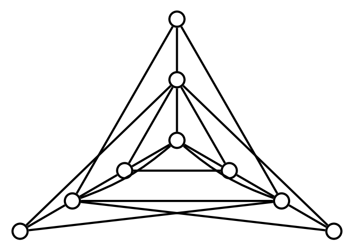
习题6.2. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



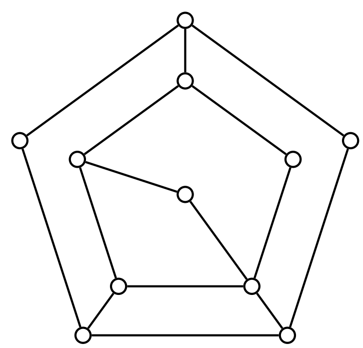
习题6.3. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



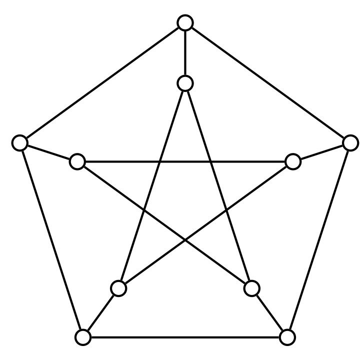
习题6.4. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



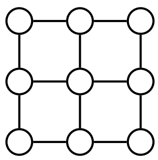
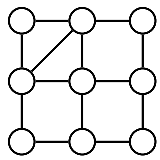
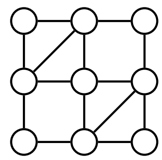
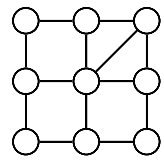
习题6.5. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



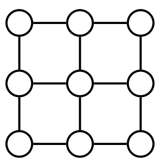
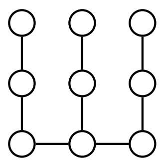
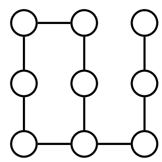
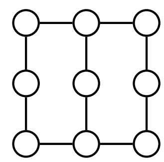
习题6.6. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



习题6.7. 以下4个图中，存在一个哈密顿圈的是____。

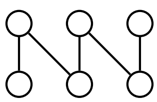
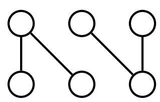
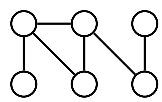
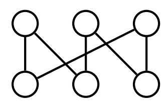
$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

习题6.8. 以下4个图中，不存在哈密顿路的是____。

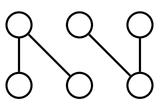
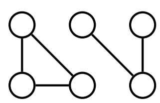
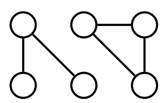
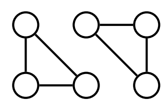
$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

第 七 章　树

习题7.1. 下列图为树的是____。

A.  B.  C.  D. 

习题7.2. 下列图为森林的是____。

A.  B.  C.  D. 

第 八 章　连通度

定义8.1. 图G的顶**点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

定义8.2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

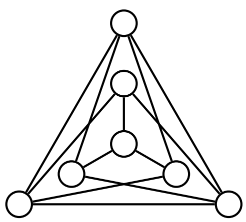
定义8.3. 设G是一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G是n-**顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G是n-**边连通**的。

习题8.1. 构造一个图G，使得$\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$。

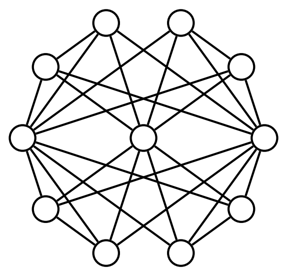
第 九 章　平面图

第 十 章　综合题

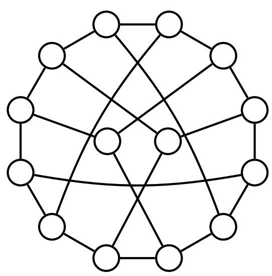
习题10.1. 给出以下四个图的顶点最小度、顶点连通度、边连通度、色数，并说明它们是否为连通图、偶图、欧拉图、哈密顿图、可平面图。



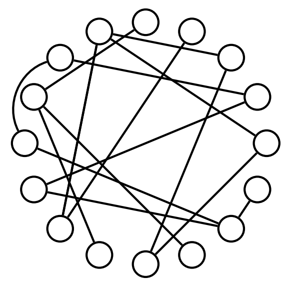
(a)



(b)



(c)



(d)

习题10.2. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p > q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做?

第 一 章　集合

习题1.1. 设A，B，C是集合，证明$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \tag{1.2}$$

于是

$$\begin{aligned} &x \in (A \triangle B) \triangle C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &x \in A \triangle (B \triangle C) \\ &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

习题1.2. 设A，B，C，D是任意四个集合，证明$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$。

证明.

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\
\Leftrightarrow & x \in A \cap B \text{且} y \in C \cap D \\
\Leftrightarrow & x \in A \text{且} x \in B \text{且} y \in C \text{且} y \in D \\
\Leftrightarrow & x \in A \text{且} y \in C \text{且} x \in B \text{且} y \in D \\
\Leftrightarrow & (x,y) \in A \times C \text{且} (x,y) \in B \times D \\
\Leftrightarrow & (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}
$$

□

第 二 章　映射

习题2.1. 设f是从实数集合$\mathbb{R}$到实数集合$\mathbb{R}$的映射，$f(x)=x^2$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1\}$，$f(A\cap B)=\underline{\{0\}}$，　$f(A)\cap f(B)=\underline{\{0,1\}}$。

习题2.2. 设f是从集合A到集合B的映射，求证$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

第 三 章　有穷集合的基数

习题3.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \tag{3.1}$$

证明. 记式(3.1)右边展开之后x^k的系数为$S'(n,k)$，以下证明$S'(n,k)=S(n,k)$。

首先来看$S'(n,k)$的递推关系式。

显然

$$\begin{aligned} S'(n,0) &= 0 \\ S'(n,n) &= 1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

式(3.1)右边按照最后一项展开，得

$$\begin{aligned} &x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ =&x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ +&x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

展开后所得到的第一项中x^k的系数为$S'(n-1,k-1)$，第二项中x^k的系数为$(n-1)S'(n-1,k)$，于是得到

$$S'(n,k) = S'(n-1,k-1) + (n-1)S'(n-1,k) \quad (1 \le k \le n-1) \tag{3.4}$$

接下来看$S(n,k)$的递推关系式。

因为包含$n(n\ge 1)$个元素的置换至少含有 1 个循环，所以

$$S(n,0) = 0 \tag{3.5}$$

又因为如果一个包含$n(n\ge 1)$个元素的置换含有n个循环，则每个循环由一个元素构成，这样的置换只有一个，所以

$$S(n,n) = 1 \tag{3.6}$$

包含k个循环的集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的一个置换可以划分为两种类型：（1）元素n自身构成一个循环置换，这样的置换有$S(n-1,k-1)$个；（2）元素n至少与其他一个元素位于同一个循环置换中，这样的置换可以由分解为k个循环

的集合$\{1, 2, \cdots, n-1\}$的置换在每个元素$1, 2, \cdots, n-1$的左侧添加元素n得到，于是这样的置换共有$(n-1)S(n-1, k)$个。于是得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \tag{3.7}$$

由此，我们得到$S(n, k)$和$S'(n, k)$的递推关系式是一致的，因此$S(n, k) = S'(n, k)$。

$\square$

第 四 章　连通度

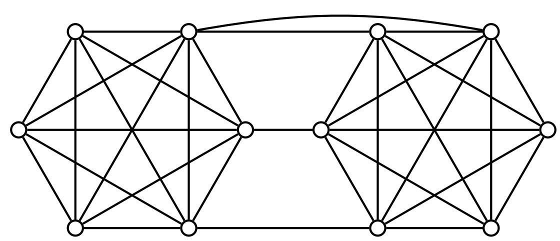
定义4.1. 图G的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

定义4.2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

定义4.3. 设G是一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G是n**-顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G是n**-边连通**的。

习题4.1. 构造一个图G，使得$\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$。

解.



□

第 五 章　综合题

习题5.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p>q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做?

解. 设四颗珍珠分别为p_1，p_2，p_3，p_4，其重量分别为x_1，x_2，x_3，x_4。第一次将p_1和p_2放在一起称，设得到的重量为a；第二次将p_1和p_3 放在一起称，设得到的重量为b；第三次将p_2，p_3和p_4放在一起称，设得到的重量为c。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1+x_2=a \\ x_1+x_3=b \\ x_2+x_3+x_4=c \end{cases} \tag{5.1}$$

令$y_1=\frac{x_1-q}{p-q}$，$y_2=\frac{x_2-q}{p-q}$，$y_3=\frac{x_3-q}{p-q}$，$y_4=\frac{x_4-q}{p-q}$，可以得到

$$\begin{cases} y_1+y_2=\frac{a-2q}{p-q} \\ y_1+y_3=\frac{b-2q}{p-q} \\ y_2+y_3+y_4=\frac{c-3q}{p-q} \end{cases} \tag{5.2}$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1+y_2+y_3)+y_4=\frac{a-2q}{p-q}+\frac{b-2q}{p-q}+\frac{c-3q}{p-q} \tag{5.3}$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得y_4为0或1。带入方程组(5.2)可得y_1，y_2，y_3的值为0或1，从而相应的可以判断x_1，x_2，x_3，x_4的值为p或q。 □