离散数学

陈建文

June 4, 2019

第 一 章　集合

习题1.1. 设A，B，C是集合，证明$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。

习题1.2. 设A，B，C，D是任意四个集合，证明$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$。

第 二 章　映射

习题2.1. 设f是从实数集合$\mathbb{R}$到实数集合$\mathbb{R}$的映射，$f(x)=x^2$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1\}$，$f(A\cap B)=$____，　$f(A)\cap f(B)=$____。

习题2.2. 设f是从集合A到集合B的映射，求证$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

第 三 章　关系

习题3.1. 判断下列二元关系是否是自反的，反自反的，对称的，反对称的和传递的。

1. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$, X上的二元关系$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$, X上的二元关系$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 设集合$X = \{0, 1\}$, 2^X上的二元关系$\subseteq$
4. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，X上的二元关系$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
5. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，X上的二元关系$R = \{(2, 3)\}$
6. 设集合$X = \{1, 2, 3, 4\}$，X上的恒等关系$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

习题3.2. 设R与S为集合X上的任意两个二元关系，下列哪些命题为真?

1. 如果R与S为自反的，则$R \cup S$为自反的。
2. 如果R与S为反自反的，则$R \cup S$为反自反的。
3. 如果R与S为对称的，则$R \cup S$为对称的。
4. 如果R与S为反对称的，则$R \cup S$为反对称的。
5. 如果R与S为传递的，则$R \cup S$为传递的。
6. 如果R与S为自反的，则$R \cap S$为自反的。
7. 如果R与S为反自反的，则$R \cap S$为反自反的。
8. 如果R与S为对称的，则$R \cap S$为对称的。
9. 如果R与S为反对称的，则$R \cap S$为反对称的。
10. 如果R与S为传递的，则$R \cap S$为传递的。
11. 如果R与S为自反的，则$R \setminus S$为自反的。
12. 如果R与S为反自反的，则$R \setminus S$为反自反的。

13. 如果R与S为对称的，则$R \setminus S$为对称的。
14. 如果R与S为反对称的，则$R \setminus S$为反对称的。
15. 如果R与S为传递的，则$R \setminus S$为传递的。
16. 如果R与S为自反的，则$R \circ S$为自反的。
17. 如果R与S为反自反的，则$R \circ S$为反自反的。
18. 如果R与S为对称的，则$R \circ S$为对称的。
19. 如果R与S为反对称的，则$R \circ S$为反对称的。
20. 如果R与S为传递的，则$R \circ S$为传递的。

第 四 章　有穷集合的基数

习题4.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

第 五 章　无穷集合及其基数

第 六 章　图的基本概念

习题6.1. 设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，求证G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

习题6.2. 设G是一个(p,q)图，证明：
(a)若$q\geq p$，　则G中有圈；
(b)若$q\geq p+4$，　则G中有两个边不重的圈。

第 七 章　欧拉图

定义7.1. 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

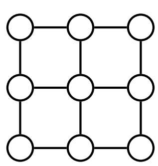
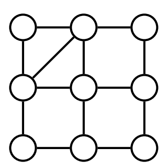
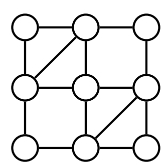
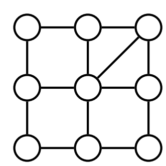
定义7.2. 包含图的所有顶点和边的迹称为**欧拉迹**。

习题7.1. 图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度是偶数。

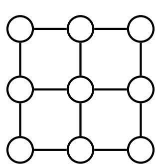
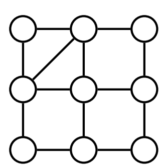
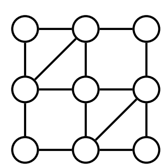
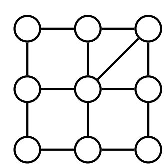
习题7.2. 图G有一条欧拉开迹当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点。

习题7.3. 设G是连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，证明G的全部边可以排成n 条开迹，且不能排成少于n条开迹。

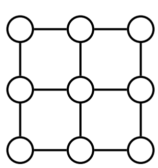
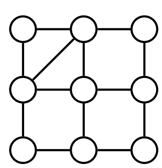
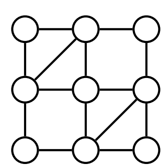
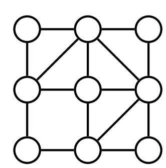
习题7.4. 以下4个图中，存在欧拉闭迹的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

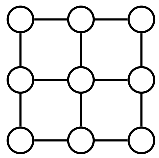
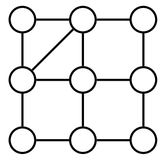
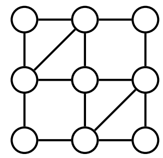
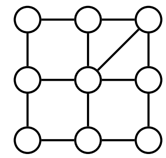
习题7.5. 以下4个图中，存在一条欧拉开迹的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

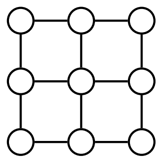
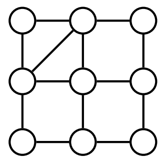
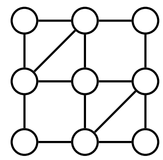
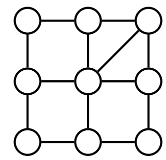
习题7.6. 以下4个图中，不可以一笔画成的是____。

$A.$  $B.$  $C.$  $D.$ 

习题7.7. 以下4个图中，至少需要两笔才能画成的是____。

A.  *B.*  *C.*  *D.* 

习题7.8. 以下4个图中，至少需要三笔才能画成的是____。

A.  *B.*  *C.*  *D.* 

第 八 章　哈密顿图

若图G含有一条包含所有结点的路，则将其称之为图G的一条**哈密顿路**。若图G含有一个包含所有结点的圈，则将其称之为图G的一个**哈密顿圈**。包含哈密顿圈的图称之为**哈密顿图**。

习题8.1. 设$G=(V,E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

$$\omega(G-S)\leq |S|$$

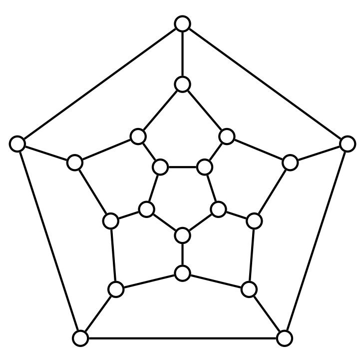
其中$G-S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G-S)$是图$G-S$的支数。

习题8.2. 设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

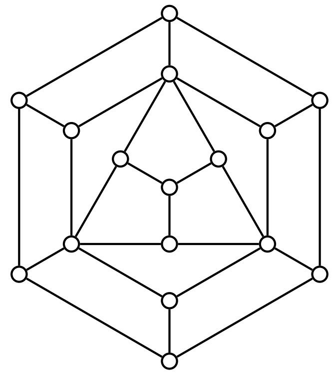
$$\deg u+\deg v\geq p-1,$$

则G是连通的。

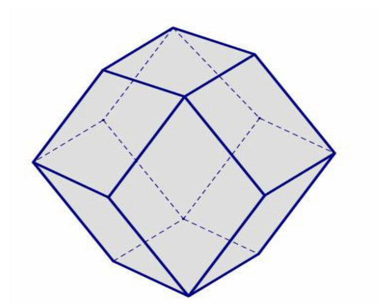
习题8.3. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



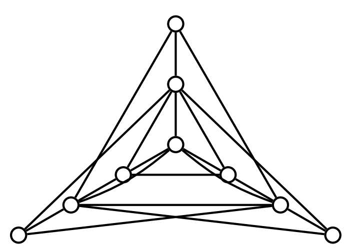
习题8.4. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



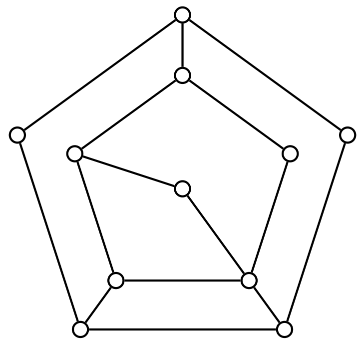
习题8.5. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



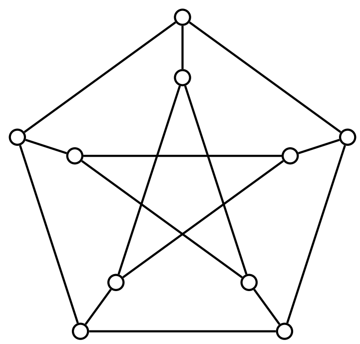
习题8.6. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



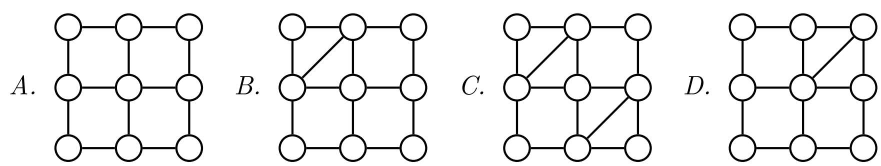
习题8.7. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



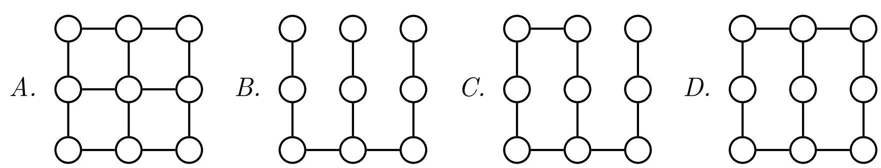
习题8.8. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



习题8.9. 以下4个图中，存在一个哈密顿圈的是____。



习题8.10. 以下4个图中，不存在哈密顿路的是____。



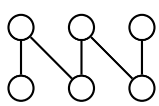
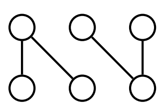
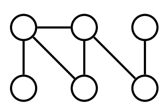
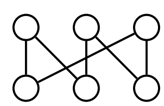
第九章　树

定义9.1. 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

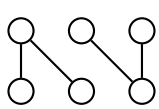
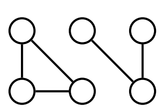
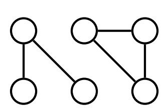
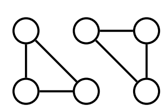
习题9.1. 设$G=(V,E)$是一个(p,q)图，试证下列各命题等价：

1. G是树；
2. G的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；
3. G是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图；
4. G是连通的且$q=p-1$；
5. G中无圈且$q=p-1$；
6. G中无圈且G中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

习题9.2. 下列图为树的是____。

A.  B.  C.  D. 

习题9.3. 下列图为森林的是____。

A.  B.  C.  D. 

第十章 连通度

定义10.1. 图G的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

定义10.2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

定义10.3. 设G是一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G是n**-顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G是n**-边连通**的。

习题10.1. 构造一个图G，使得$\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$。

第 十一 章　匹配

习题11.1. 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A\{x, y\} \in E\}$$

。

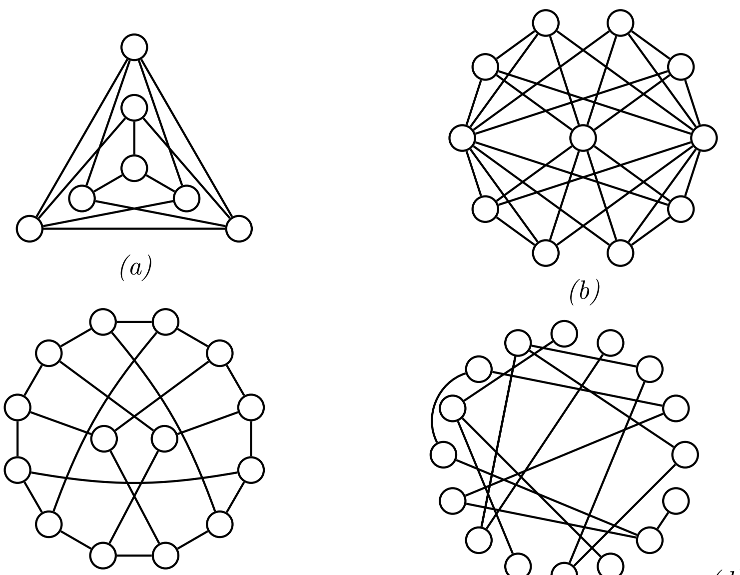
第 十二 章　平面图

第 十三 章　图的着色

第 十四 章　有向图

第 十五 章　综合题

习题15.1. 给出以下四个图的顶点最小度、顶点连通度、边连通度、色数，并说明它们是否为连通图、偶图、欧拉图、哈密顿图、可平面图。



(a)　*(b)*　*(c)*　*(d)*

习题15.2. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p > q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做?

第 一 章　集合

习题1.1. 设A，B，C是集合，证明$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \tag{1.2}$$

于是

$$\begin{aligned} & x \in (A \triangle B) \triangle C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ & \vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ & \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} & x \in A \triangle (B \triangle C) \\ & \Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ & \vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

习题1.2. 设A，B，C，D是任意四个集合，证明$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$。

证明.

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\
\Leftrightarrow & x \in A \cap B \text{且} y \in C \cap D \\
\Leftrightarrow & x \in A \text{且} x \in B \text{且} y \in C \text{且} y \in D \\
\Leftrightarrow & x \in A \text{且} y \in C \text{且} x \in B \text{且} y \in D \\
\Leftrightarrow & (x,y) \in A \times C \text{且} (x,y) \in B \times D \\
\Leftrightarrow & (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}
$$

□

第 二 章 映射

习题2.1. 设f是从实数集合$\mathbb{R}$到实数集合$\mathbb{R}$的映射，$f(x)=x^2$，$A=\{-1,0\}$，$B=\{0,1\}$，$f(A\cap B)=\underline{\{0\}}$，　$f(A)\cap f(B)=\underline{\{0,1\}}$。

习题2.2. 设f是从集合A到集合B的映射，求证$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$。

第 三 章　关系

习题3.1. 设R与S为集合X上的任意两个二元关系，下列哪些命题为真?

1. 如果R与S为自反的，则$R \cup S$为自反的。*(真)*
2. 如果R与S为反自反的，则$R \cup S$为反自反的。（真）
3. 如果R与S为对称的，则$R \cup S$为对称的。（真）
4. 如果R与S为反对称的，则$R \cup S$为反对称的。（假）

   设$X = \{1,2\}$，$R = \{(1,2)\}$，$S = \{(2,1)\}$，则R与S都是反对称的，但$R \cup S = \{(1,2),(2,1)\}$不是反对称的。
5. 如果R与S为传递的，则$R \cup S$为传递的。（假）

   设$X = \{1,2\}$，$R = \{(1,2)\}$，$S = \{(2,1)\}$，则R与S都是传递的，但$R \cup S = \{(1,2),(2,1)\}$不是传递的。
6. 如果R与S为自反的，则$R \cap S$为自反的。（真）
7. 如果R与S为反自反的，则$R \cap S$为反自反的。（真）
8. 如果R与S为对称的，则$R \cap S$为对称的。（真）
9. 如果R与S为反对称的，则$R \cap S$为反对称的。（真）
10. 如果R与S为传递的，则$R \cap S$为传递的。（真）
11. 如果R与S为自反的，则$R \setminus S$为自反的。（假）

    设$X = \{1,2\}$，$R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$，$S = \{(1,1),(2,2)\}$，则$R$与$S$都是自反的，但$R \setminus S = \{(1,2)\}$不是自反的。
12. 如果R与S为反自反的，则$R \setminus S$为反自反的。（真）
13. 如果R与S为对称的，则$R \setminus S$为对称的。（真）

    证明. 对任意的$x \in X$，$y \in X$，　如果$(x,y) \in R \backslash S$，则$(x,y) \in R$，$(x,y) \notin S$。由于关系R是对称的，所以$(y,x) \in R$。又由于关系S是对称的，所以$(y,x) \notin S$。所以$(y,x) \in R \setminus S$。这证明了$R \setminus S$是对称的。　□

14. 如果R与S为反对称的，则$R \setminus S$为反对称的。（真）

15. 如果R与S为传递的，则$R \setminus S$为传递的。（假）

    设$X = \{1,2,3\}$，$R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$，$S = \{(1,3)\}$，则$R$与$S$都是传递的，但$R \setminus S = \{(1,2),(2,3)\}$不是传递的。

16. 如果R与S为自反的，则$R \circ S$为自反的。（真）

17. 如果R与S为反自反的，则$R \circ S$为反自反的。（假）

    设$X = \{1,2\}$，$R = \{(1,2)\}$，$S = \{(2,1)\}$，则R与S都是反自反的，但$R \circ S = \{(1,1)\}$不是反自反的。

18. 如果R与S为对称的，则$R \circ S$为对称的。（假）

    设$X = \{1,2,3\}$，$R = \{(1,2),(2,1)\}$，$S = \{(2,3),(3,2)\}$，则R与S都是对称的，但$R \circ S = \{(1,3)\}$不是对称的。

19. 如果R与S为反对称的，则$R \circ S$为反对称的。（假）

    设$X = \{1,2,3,4\}$，$R = \{(1,2),(3,4)\}$，$S = \{(2,3),(4,1)\}$，则R与S 都是反对称的，但$R \circ S = \{(1,3),(3,1)\}$不是反对称的。

20. 如果R与S为传递的，则$R \circ S$为传递的。（假）

    设$X = \{1,2,3,4\}$，$R = \{(1,2),(3,4)\}$，$S = \{(2,3),(4,1)\}$，则R与S 都是传递的，但$R \circ S = \{(1,3),(3,1)\}$不是传递的。

第 四 章　有穷集合的基数

习题4.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \tag{4.1}$$

证明. 记式(4.1)右边展开之后x^k的系数为$S'(n,k)$，以下证明$S'(n,k)=S(n,k)$。

首先来看$S'(n,k)$的递推关系式。

显然

$$\begin{aligned} S'(n,0) &= 0 \\ S'(n,n) &= 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

式(4.1)右边按照最后一项展开，得

$$\begin{aligned} &x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ =&x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ &+x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

展开后所得到的第一项中x^k的系数为$S'(n-1,k-1)$，第二项中x^k的系数为$(n-1)S'(n-1,k)$，于是得到

$$S'(n,k) = S'(n-1,k-1) + (n-1)S'(n-1,k) \quad (1 \le k \le n-1) \tag{4.4}$$

接下来看$S(n,k)$的递推关系式。

因为包含$n(n\ge 1)$个元素的置换至少含有 1 个循环，所以

$$S(n,0) = 0 \tag{4.5}$$

又因为如果一个包含$n(n\ge 1)$个元素的置换含有n个循环，则每个循环由一个元素构成，这样的置换只有一个，所以

$$S(n,n) = 1 \tag{4.6}$$

包含k个循环的集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的一个置换可以划分为两种类型：（1）元素n自身构成一个循环置换，这样的置换有$S(n-1,k-1)$个；（2）元素n至少与其他一个元素位于同一个循环置换中，这样的置换可以由分解为k个循环

的集合$\{1,2,\cdots,n-1\}$的置换在每个元素$1,2,\cdots,n-1$的左侧添加元素n得到，于是这样的置换共有$(n-1)S(n-1,k)$个。于是得到

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+(n-1)S(n-1,k)\quad(1\leq k\leq n-1)\tag{4.7}$$

由此，我们得到$S(n,k)$和$S'(n,k)$的递推关系式是一致的，因此$S(n,k)=S'(n,k)$。

$\square$

第 五 章　无穷集合及其基数

第 六 章　图的基本概念

习题6.1. 设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，求证G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于l。

当$l=1$时，结论显然成立。

假设当$l=k$时结论成立，往证当$l=k+1$时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知：

$$(A^{k+1})_{ij}=(A^kA)_{ij}=\sum_{h=1}^{p}(A^k)_{ih}A_{hj}$$

由归纳假设，$(A^k)_{ih}$为从顶点v_i到顶点v_h长度为k的通道的条数。

由从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$且倒数第二个顶点依次为v_1，v_2，…，v_p的通道的条数之和知$(A^{k+1})_{ij}$为从顶点v_i到顶点v_j长度为$k+1$的通道的条数。 □

习题6.2. 设G是一个(p,q)图，证明：

*(a)*若$q\geq p$，　则G中有圈；

*(b)*若$q\geq p+4$，　则G中有两个边不重的圈。

证明. (b) 当$q>p+4$时，可以在G中任意去掉一些边，使得剩余的边数恰好比顶点数多4 。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈，则原来的图G中也一定有两个边不重的圈。因此，以下只需证当$q=p+4$时，图G中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

(1)当$p\leq 4$时，图G最多有$p(p-1)/2$条边，易验证此时$q=p+4$不可能成立。当$p=5$时，$q=9$。设此时图G的顶点集为$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，除了v_1和v_5之间没有边关联之外，其余的任意两个顶点之间均有边关联，则此时$v_1v_2v_3v_1$和$v_3v_4v_5v_3$就是图G中两个边不重的圈。

(2)假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。设图G有$k+1$个顶点。分以下四种情况进行验证：

(i)当$\delta(G)=0$时，去掉图G中任意一个度为0的顶点和任意一条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q'=p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。

(ii)当$\delta(G)=1$时，去掉图G中任意一个度为 1 的顶点及其与之关联的边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q'=p'+4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈，它们也是图G中两个边不重的圈。

(iii)当$\delta(G) = 2$时，设u为图G中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为v和w。分两种情况讨论。在第一种情况下，v和w之间没有边关联，去掉顶点u及其与之关联的两条边uv和uw，添加一条边vw，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边，则$q' = p' + 4$。由归纳假设，图G'中有两个边不重的圈。如果新添加的边vw不在这两个圈上，则这两个圈就是图G中两个边不重的圈；如果新添加的边vw在其中的一个圈上，将其替换为图G中的两条边vu 和uw，则所得到的圈与另一个圈一起构成图G中两个边不重的圈。在第二种情况下，v和w之间有边关联，此时$uvwu$构成图G中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边。此时$q' = p' + 1$，因此图G'中必定有一个圈，与原来图G中的圈$uvwu$构成图G中两个边不重的圈。

(iiii)当$\delta(G) \geq 3$时,$2q \geq 3p$，即$2(p+4) \geq 3p$， 可以得到$p \leq 8$。此时若图G中有长度小于等于4的圈，将其上的 4 条边去掉，得到的图G'中有p'个顶点，q'条边。则$q' \geq p'$，图G'中必定有一个圈，与原来图G中去掉的边所构成的圈一起构成图G中两个边不重的圈。若图G中所有圈的长度至少为5，设C为其中长度最短的一个圈。由$\delta(G) \geq 3$知圈C上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接，而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接，否则将产生一个长度更小的圈。由圈C上至少有 5 个顶点知图G中至少有10个顶点，与$p \leq 8$矛盾。这说明图G中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。 $\square$

第 七 章　欧拉图

习题7.1. 图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度是偶数。

习题7.2. 图G有一条欧拉开迹当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图G有一条欧拉开迹$Z : v_0, x_1, v_1, \ldots, x_n, v_n$，其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。显然，图$G$是连通的。顶点$v_0$在$Z$中除了其首次出现与一条边相关联外，其余的每次出现均与两条边相关联，因此顶点v_0的度为奇数；同理，v_n的度为奇数。除了v_0和v_n 之外其余的每个顶点在Z中的每次出现均与两条边相关联，因此其度为偶数。这证明了图G恰有两个奇度顶点。

设图G是连通的，且恰有两个奇度顶点u和v。在顶点u和v之间加一条边，得到图G'。则图G'是连通的且每个顶点的度为偶数，因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点u与顶点v之间的边，便得到了图G的一条欧拉开迹。 □

习题7.3. 设G是连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，证明G的全部边可以排成n 条开迹，且不能排成少于n条开迹。

证明. 设连通图G有$2n$个奇度顶点$u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$。在$G$中加入$n$条边$u_1v_1$，$u_2v_2$，…，$u_nv_n$，得到图$G'$。则$G'$是连通的，且每个顶点的度为偶数，因此存在一条欧拉闭迹Z。在Z中去掉新加入的边$u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n$，则得到图$G$的$n$条开迹。

假设图G的所有边能排成m条开迹，$m < n$。则只有这m条开迹的端点可能为奇度顶点，因此图G至多有$2m$个奇度顶点，这与图G有$2n$个奇度顶点矛盾。 □

第 八 章　哈密顿图

习题8.1. 设$G = (V, E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

$$\omega(G - S) \le |S|$$

其中$G - S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G - S)$是图$G - S$的支数。

习题8.2. 设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \ge p - 1,$$

则G是连通的。

证明. 用反证法。假设图G不连通，则至少有两个支。设$G_1 = (V_1, E_1)$是其中的一个支，其他各支构成的子图为$G_2 = (V_2, E_2)$。取V_1中的一个顶点v_1和V_2中的一个顶点v_2，则

$$\deg v_1 + \deg v_2 \le (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = (|V_1| + |V_2|) - 2 = p - 2$$

矛盾。 □

第九章 树

习题9.1. 设$G=(V,E)$是一个(p,q)图，试证下列各命题等价：

1. G是树；
2. G的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；
3. G是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图；
4. G是连通的且$q=p-1$；
5. G中无圈且$q=p-1$；
6. G中无圈且G中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

证明. $1\Rightarrow 2$

用反证法。假设图G中存在两个顶点u和v，在它们之间存在两条不同的路P_1和P_2。由于$P_1\neq P_2$，P_1上存在一条边$x=u_1v_1$不在P_2上。由P_1和P_2上所有的顶点和边构成的G的子图记为$P_1\cup P_2$, 则$(P_1\cup P_2)-x$ 是连通的。于是，$(P_1\cup P_2)-x$中存在一条u_1-v_1路P，$P+x$为G的一个圈，矛盾。

$2\Rightarrow 3$

显然，图G是连通的。设uv是图G的任意一条联结顶点u和v的边，则uv是联结顶点u和v的唯一的一条路，从图G中去掉边uv之后，顶点u和顶点v之间没有路，于是得到了一个不连通的图。

$3\Rightarrow 4$

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

当$p=1$时，结论显然成立。

假设当$p=k$时结论成立，往证当$p=k+1$时结论也成立。由图G是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图知图G中一定存在一个度为 1 的顶点v。在图G中去掉顶点v及其与之关联的边，得到图G'。则图G'是连通的且去掉任意一条边会得到一个不连通的图，由归纳假设，图G'中有$k-1$条边，于是图G中有k条边，$q=p-1$成立，定理得证。

$4\Rightarrow 5$

用反证法。假设图G中有圈，则去掉圈上的一条边，得到的图仍然是连通的。如果新得到的图仍然有圈，在圈上再去掉一条边，又会得到一个新的连通的图。如此继续下去，最终会得到一个连通的没有圈的图。由从1到4的证明知最后到的图中有$p-1$条边，这与去掉边之前图G中的边数$q=p-1$矛盾。

$5 \Rightarrow 6$

设图G有k个支，则图G中的每个支连通且没有圈。设第i个支中含有p_i个顶点，q_i条边。由1到4的证明知在第i个支中$q_i = p_i - 1$。将所有支的边数和顶点数相加，可得$q = p - k$。于是$k = 1$，从而G是连通的。设u与v为图G的任意两个不邻接的顶点，则u与v之间存在一条路，再在u与v之间加一条边，则得到一个圈。

$6 \Rightarrow 1$

设u和v为图G的任意两个顶点。如果u和v邻接，则u和v之间有一条路。如果u和v之间不邻接，则在u和v之间加一条边，会得到一个圈。在该圈上将边uv去掉，则得到u与v之间的一条路。这证明了G是连通的。 $\square$

第 十 章　连通度

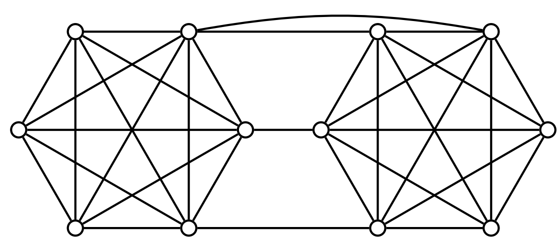
定义10.1. 图G的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目, 记为$\kappa(G)$。

定义10.2. 图G的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目, 记为$\lambda(G)$。

定义10.3. 设G是一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G是n-**顶点连通**的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G是n-**边连通**的。

习题10.1. 构造一个图G，使得$\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$。

解.



□

第 十一 章　匹配

习题11.1. 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A\{x, y\} \in E\}$$

。

证明. 如果存在G的一个完全匹配Y且Y=V_1，显然对V_1的任意子集A，$|N(A) \geq |A|$。

设对V_1的任意子集A，$|N(A)| \geq |A|$，以下用数学归纳法证明存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$。施归纳于$|V_1|$。

（1）当$|V_1| = 1$时，$|N(V_1)| \geq 1$，　结论显然成立。

（2）假设当$|V_1| < k$时结论成立，往证当$|V_1| = k$时结论也成立。分l两种情况讨论：

(i)对于V_1的任意子集A，如果$|A| < k$，　则$|N(A)| > |A|$。任取V_1的一个元素u，在$N(\{v\})$中任意取一个元素v。$G - \{u, v\}$仍满足归纳假设的条件，因此存在完全匹配M且$|M| = k - 1$，　则$M \cup \{uv\}$即为G的一个完全匹配且$|M \cup \{uv\}|\Gamma = \Gamma|V_1|$。

(ii)存在V_1的子集A，$|A| < k$且$|N(A)| = |A|$。则图G中$A \cup N(A)$的导出子图$G1$满足归纳假设的条件，存在匹配M_1且$|M_1| = |A|$;图G中$(V_1 \setminus A) \cup (V_2 \setminus N(A))$的导出子图$G_2$也满足归纳假设的条件，这是因为如果存在$V_1 \setminus A$的一个子集$B$ 使得$|N(B) < |B|$，　则在G中$|N(B \cup A)| < |B \cup A|$, 矛盾，因此，存在匹配$M_2$且$|M_2| = |V_1 \setminus A|$。于是$M_1 \cup M_2$就是$G$的一个一个完全匹配，且$|M_1 \cup M_2| = |V_1|$。

□

第 十二 章　综合题

习题12.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p > q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做?

解. 设四颗珍珠分别为p_1，p_2，p_3，p_4，其重量分别为x_1，x_2，x_3，x_4。第一次将p_1和p_2放在一起称，设得到的重量为a；第二次将p_1和p_3 放在一起称，设得到的重量为b；第三次将p_2，p_3和p_4放在一起称，设得到的重量为c。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \tag{12.1}$$

令$y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$，$y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$，$y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$，$y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a-2q}{p-q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b-2q}{p-q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c-3q}{p-q} \end{cases} \tag{12.2}$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \tag{12.3}$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得y_4为0或1。带入方程组(12.2)可得y_1，y_2，y_3的值为0或1，从而相应的可以判断x_1，x_2，x_3，x_4的值为p或q。 □