

# 离散数学

陈建文

May 17, 2019



# 第一章 集合

习题1.1. 设 $A, B, C$ 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

习题1.2. 设 $A, B, C, D$ 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。



## 第 二 章 映 射

**习题2.1.** 设 $f$ 是从实数集 $\mathbb{R}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射,  $f(x) = x^2$ ,  $A = \{-1, 0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $f(A \cap B) = \underline{\hspace{1cm}}$ ,  $f(A) \cap f(B) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

**习题2.2.** 设 $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。



## 第三章 关系

**习题3.1.** 判断下列二元关系是否是自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的和传递的。

1. 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X$  上的二元关系  $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
2. 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X$  上的二元关系  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
3. 设集合  $X = \{0, 1\}$ ,  $2^X$  上的二元关系  $\subseteq$
4. 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X$  上的二元关系  $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
5. 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X$  上的二元关系  $R = \{(2, 3)\}$
6. 设集合  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X$  上的恒等关系  $I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

**习题3.2.** 设  $R$  与  $S$  为集合  $X$  上的任意两个二元关系, 下列哪些命题为真?

1. 如果  $R$  与  $S$  为自反的, 则  $R \cup S$  为自反的。
2. 如果  $R$  与  $S$  为反自反的, 则  $R \cup S$  为反自反的。
3. 如果  $R$  与  $S$  为对称的, 则  $R \cup S$  为对称的。
4. 如果  $R$  与  $S$  为反对称的, 则  $R \cup S$  为反对称的。
5. 如果  $R$  与  $S$  为传递的, 则  $R \cup S$  为传递的。
6. 如果  $R$  与  $S$  为自反的, 则  $R \cap S$  为自反的。
7. 如果  $R$  与  $S$  为反自反的, 则  $R \cap S$  为反自反的。
8. 如果  $R$  与  $S$  为对称的, 则  $R \cap S$  为对称的。
9. 如果  $R$  与  $S$  为反对称的, 则  $R \cap S$  为反对称的。
10. 如果  $R$  与  $S$  为传递的, 则  $R \cap S$  为传递的。
11. 如果  $R$  与  $S$  为自反的, 则  $R \setminus S$  为自反的。
12. 如果  $R$  与  $S$  为反自反的, 则  $R \setminus S$  为反自反的。

13. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \setminus S$ 为对称的。
14. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \setminus S$ 为反对称的。
15. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \setminus S$ 为传递的。
16. 如果 $R$ 与 $S$ 为自反的, 则 $R \circ S$ 为自反的。
17. 如果 $R$ 与 $S$ 为反自反的, 则 $R \circ S$ 为反自反的。
18. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \circ S$ 为对称的。
19. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \circ S$ 为反对称的。
20. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \circ S$ 为传递的。



## 第 四 章 有穷集合的基数

**习题4.1.** 设 $S(n, k)$ 表示 $S_n$ 中的恰有 $k$ 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。  
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$



## 第 五 章 无穷集合及其基数



## 第 六 章 图的基本概念

**习题6.1.** 设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图,  $p \times p$ 矩阵 $A$ 为 $G$ 的邻接矩阵, 求证 $G$ 中 $v_i$ 与 $v_j$ 间长为 $l$ 的通道的条数等于 $A^l$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素的值。



## 第七章 欧拉图

**定义7.1.** 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

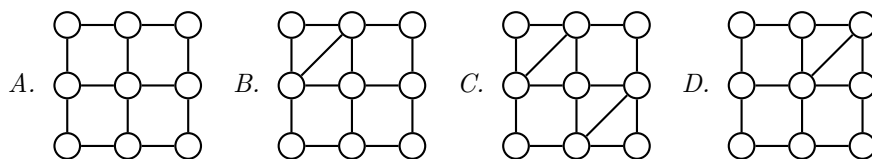
**定义7.2.** 包含图的所有顶点和边的迹称为**欧拉迹**。

**习题7.1.** 图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且每个顶点的度是偶数。

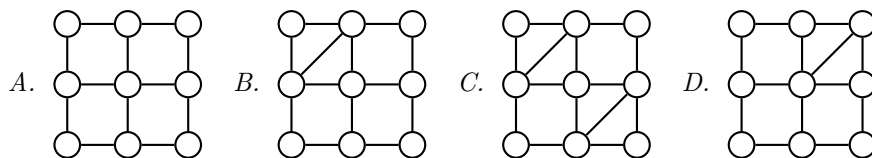
**习题7.2.** 图 $G$ 有一条欧拉开迹当且仅当 $G$ 是连通的且恰有两个奇度顶点。

**习题7.3.** 设 $G$ 是连通图， $G$ 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，证明 $G$ 的全部边可以排成 $n$ 条开迹，且不能排成少于 $n$ 条开迹。

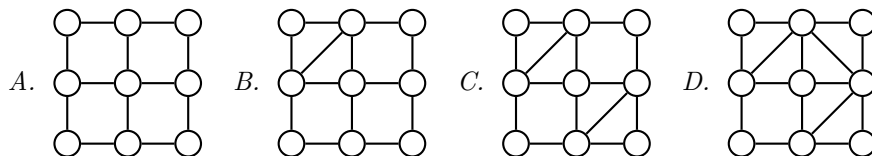
**习题7.4.** 以下4个图中，存在欧拉闭迹的是\_\_\_\_\_。



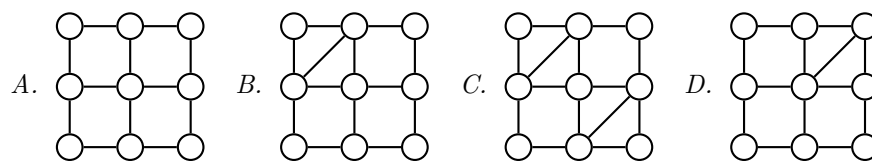
**习题7.5.** 以下4个图中，存在一条欧拉开迹的是\_\_\_\_\_。



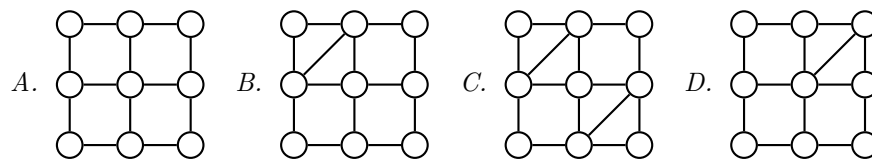
**习题7.6.** 以下4个图中，不可以一笔画成的是\_\_\_\_\_。



**习题7.7.** 以下4个图中，至少需要两笔才能画成的是\_\_\_\_\_。



习题7.8. 以下4个图中，至少需要三笔才能画成的是\_\_\_\_\_。





## 第八章 哈密顿图

若图 $G$ 含有一条包含所有结点的路，则将其称之为图 $G$ 的一条**哈密顿路**。若图 $G$ 含有一个包含所有结点的圈，则将其称之为图 $G$ 的一个**哈密顿圈**。包含哈密顿圈的图称之为**哈密顿图**。

**习题8.1.** 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 $V$ 的每个非空子集 $S$ ，均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

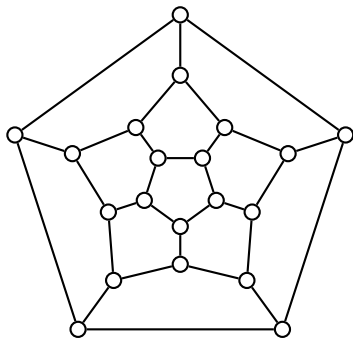
其中 $G - S$ 是从 $G$ 中去掉 $S$ 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

**习题8.2.** 设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

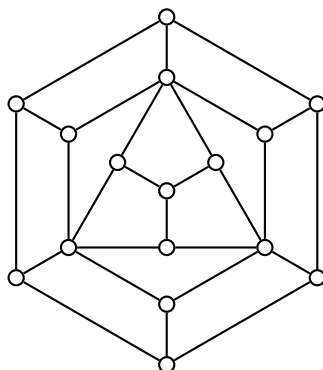
$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 是连通的。

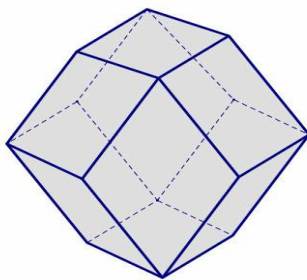
**习题8.3.** 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



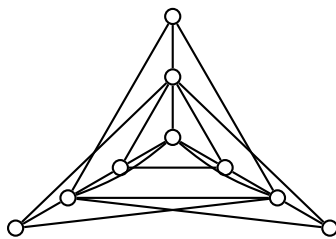
**习题8.4.** 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



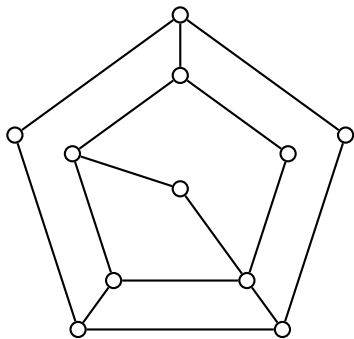
习题8.5. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



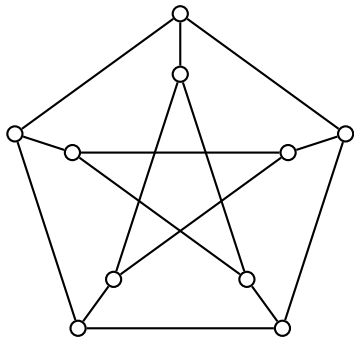
习题8.6. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



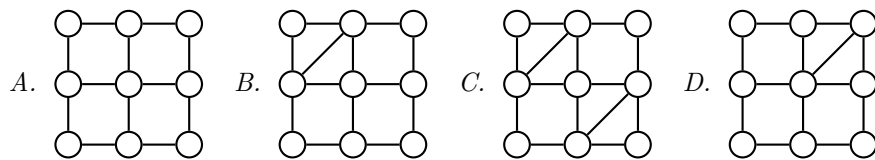
习题8.7. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



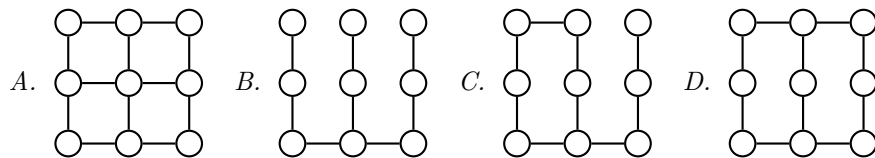
习题8.8. 下图是否是哈密顿图？若是，找出一个哈密顿圈？若不是，说明理由。



习题8.9. 以下4个图中，存在一个哈密顿圈的是\_\_\_\_\_。



习题8.10. 以下4个图中，不存在哈密顿路的是\_\_\_\_\_。





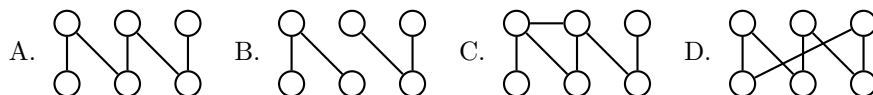
# 第九章 树

**定义9.1.** 连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称**森林**。

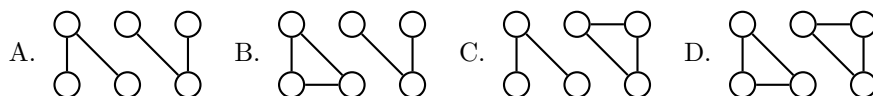
**习题9.1.** 设 $G = (V, E)$ 是一个 $(p, q)$ 图，试证下列各命题等价：

1.  $G$ 是树；
2.  $G$ 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；
3.  $G$ 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图；
4.  $G$ 是连通的且 $q = p - 1$ ；
5.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ ；
6.  $G$ 中无圈且 $G$ 中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

**习题9.2.** 下列图为树的是\_\_\_\_\_。



**习题9.3.** 下列图为森林的是\_\_\_\_\_。





## 第 十 章 连通度

**定义10.1.** 图 $G$ 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 $G$ 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

**定义10.2.** 图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

**定义10.3.** 设 $G$ 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 **$n$ -顶点连通**的, 简称 **$n$ -连通**;如果 $\lambda(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 **$n$ -边连通**的。

**习题10.1.** 构造一个图 $G$ , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。





# 第 十 一 章 匹 配



## 第 十二 章 平面图



## 第 十三 章 图的着色



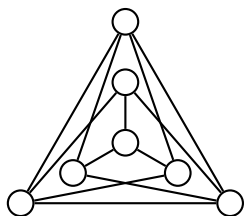
# 第 十四 章 有向图



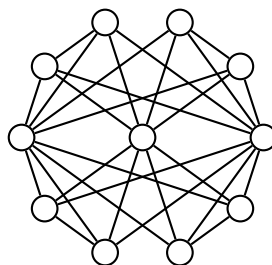


## 第 十 五 章 综 合 题

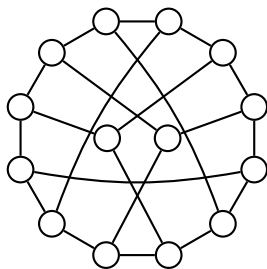
**习题15.1.** 给出以下四个图的顶点最小度、顶点连通度、边连通度、色数，并说明它们是否为连通图、偶图、欧拉图、哈密顿图、可平面图。



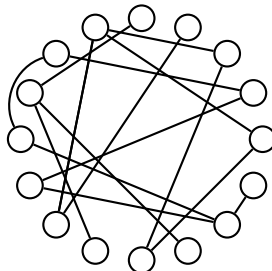
(a)



(b)



(c)



(d)

**习题15.2.** 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 $p$ ，假珍珠重量也相同且为 $q$ ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？



# 第一章 集合

**习题1.1.** 设 $A, B, C$ 是集合, 证明 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。

证明. 因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \quad (1.1)$$

所以

$$\begin{aligned} x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} \quad (1.2)$$

于是

$$\begin{aligned} x \in (A \triangle B) \triangle C &\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\ &\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} x \in A \triangle (B \triangle C) &\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\ &\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到, (1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得 $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 。  $\square$

**习题1.2.** 设 $A, B, C, D$ 是任意四个集合, 证明 $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ 。

证明.

$$\begin{aligned} & (x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B \text{ 且 } y \in C \cap D \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow & x \in A \text{ 且 } y \in C \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } y \in D \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in A \times C \text{ 且 } (x, y) \in B \times D \\ \Leftrightarrow & (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D) \end{aligned}$$

□

## 第 二 章 映 射

习题2.1. 设 $f$ 是从实数集 $\mathbb{R}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的映射,  $f(x) = x^2$ ,  $A = \{-1, 0\}$ ,  $B = \{0, 1\}$ ,  $f(A \cap B) = \underline{\{0\}}$ ,  $f(A) \cap f(B) = \underline{\{0, 1\}}$ 。

习题2.2. 设 $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射, 求证 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ 。



## 第三章 关系

习题3.1. 设 $R$ 与 $S$ 为集合 $X$ 上的任意两个二元关系, 下列哪些命题为真?

1. 如果 $R$ 与 $S$ 为自反的, 则 $R \cup S$ 为自反的。(真)
2. 如果 $R$ 与 $S$ 为反自反的, 则 $R \cup S$ 为反自反的。(真)
3. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \cup S$ 为对称的。(真)
4. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \cup S$ 为反对称的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $R = \{(1, 2)\}$ ,  $S = \{(2, 1)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是反对称的, 但 $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 不是反对称的。

5. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \cup S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $R = \{(1, 2)\}$ ,  $S = \{(2, 1)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是传递的, 但 $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 不是传递的。

6. 如果 $R$ 与 $S$ 为自反的, 则 $R \cap S$ 为自反的。(真)
7. 如果 $R$ 与 $S$ 为反自反的, 则 $R \cap S$ 为反自反的。(真)
8. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \cap S$ 为对称的。(真)
9. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \cap S$ 为反对称的。(真)

10. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \cap S$ 为传递的。(真)

11. 如果 $R$ 与 $S$ 为自反的, 则 $R \setminus S$ 为自反的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ ,  $S = \{(1, 1), (2, 2)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是自反的, 但 $R \setminus S = \{(1, 2)\}$ 不是自反的。

12. 如果 $R$ 与 $S$ 为反自反的, 则 $R \setminus S$ 为反自反的。(真)

13. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \setminus S$ 为对称的。(真)

证明. 对任意的 $x \in X$ ,  $y \in X$ , 如果 $(x, y) \in R \setminus S$ , 则 $(x, y) \in R$ ,  $(x, y) \notin S$ 。由于关系 $R$ 是对称的, 所以 $(y, x) \in R$ 。又由于关系 $S$ 是对称的, 所以 $(y, x) \notin S$ 。所以 $(y, x) \in R \setminus S$ 。这证明了 $R \setminus S$ 是对称的。□

14. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \setminus S$ 为反对称的。(真)

15. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \setminus S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ ,  $S = \{(1, 3)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是传递的, 但 $R \setminus S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ 不是传递的。

16. 如果 $R$ 与 $S$ 为自反的, 则 $R \circ S$ 为自反的。(真)

17. 如果 $R$ 与 $S$ 为反自反的, 则 $R \circ S$ 为反自反的。(假)

设 $X = \{1, 2\}$ ,  $R = \{(1, 2)\}$ ,  $S = \{(2, 1)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是反自反的, 但 $R \circ S = \{(1, 1)\}$ 不是反自反的。

18. 如果 $R$ 与 $S$ 为对称的, 则 $R \circ S$ 为对称的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是对称的, 但 $R \circ S = \{(1, 3)\}$ 不是对称的。

19. 如果 $R$ 与 $S$ 为反对称的, 则 $R \circ S$ 为反对称的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ ,  $S = \{(2, 3), (4, 1)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是反对称的, 但 $R \circ S = \{(1, 3), (3, 1)\}$ 不是反对称的。

20. 如果 $R$ 与 $S$ 为传递的, 则 $R \circ S$ 为传递的。(假)

设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ ,  $S = \{(2, 3), (4, 1)\}$ , 则 $R$ 与 $S$ 都是传递的, 但 $R \circ S = \{(1, 3), (3, 1)\}$ 不是传递的。



## 第 四 章 有穷集合的基数

**习题4.1.** 设 $S(n, k)$ 表示 $S_n$ 中的恰有 $k$ 个循环的（包括1-循环）的置换的个数。  
证明：

$$\sum_{k=1}^n S(n, k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \quad (4.1)$$

证明. 记式(4.1)右边展开之后 $x^k$ 的系数为 $S'(n, k)$ , 以下证明 $S'(n, k) = S(n, k)$ 。  
首先来看 $S'(n, k)$ 的递推关系式。  
显然

$$\begin{aligned} S'(n, 0) &= 0 \\ S'(n, n) &= 1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

式(4.1)右边按照最后一项展开, 得

$$\begin{aligned} & x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ &= x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ &+ x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \quad (4.3)$$

展开后所得到的第一项中 $x^k$ 的系数为 $S'(n-1, k-1)$ , 第二项中 $x^k$ 的系数为 $(n-1)S'(n-1, k)$ , 于是得到

$$S'(n, k) = S'(n-1, k-1) + (n-1)S'(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (4.4)$$

接下来看 $S(n, k)$ 的递推关系式。

因为包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换至少含有1个循环, 所以

$$S(n, 0) = 0 \quad (4.5)$$

又因为如果一个包含 $n(n \geq 1)$ 个元素的置换含有 $n$ 个循环, 则每个循环由一个元素构成, 这样的置换只有一个, 所以

$$S(n, n) = 1 \quad (4.6)$$

包含 $k$ 个循环的集合 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个置换可以划分为两种类型: (1) 元素 $n$ 自身构成一个循环置换, 这样的置换有 $S(n-1, k-1)$ 个; (2) 元素 $n$ 至少与其他一个元素位于同一个循环置换中, 这样的置换可以由分解为 $k$ 个循环

的集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的置换在每个元素 $1, 2, \dots, n-1$ 的左侧添加元素 $n$ 得到, 于是这样的置换共有 $(n-1)S(n-1, k)$ 个。于是得到

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + (n-1)S(n-1, k) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (4.7)$$

由此, 我们得到 $S(n, k)$ 和 $S'(n, k)$ 的递推关系式是一致的, 因此 $S(n, k) = S'(n, k)$ 。□

## 第 五 章 无穷集合及其基数



## 第 六 章 图的基本概念

**习题6.1.** 设 $G = (V, E)$ 为一个 $(p, q)$ 图,  $p \times p$ 矩阵 $A$ 为 $G$ 的邻接矩阵, 求证 $G$ 中 $v_i$ 与 $v_j$ 间长为 $l$ 的通道的条数等于 $A^l$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素的值。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $l$ 。

当 $l = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $l = k$ 时结论成立, 往证当 $l = k + 1$ 时结论也成立。由矩阵乘法的计算规则知:

$$(A^{k+1})_{ij} = (A^k A)_{ij} = \sum_{h=1}^p (A^k)_{ih} A_{hj}$$

由归纳假设,  $(A^k)_{ih}$ 为从顶点 $v_i$ 到顶点 $v_h$ 长度为 $k$ 的通道的条数。

由从顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 长度为 $k + 1$ 的通道的条数为从顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 长度为 $k + 1$ 且倒数第二个顶点依次为 $v_1, v_2, \dots, v_p$ 的通道的条数之和知 $(A^{k+1})_{ij}$ 为从顶点 $v_i$ 到顶点 $v_j$ 长度为 $k + 1$ 的通道的条数。□



## 第七章 欧拉图

**习题7.1.** 图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且每个顶点的度是偶数。

**习题7.2.** 图 $G$ 有一条欧拉开迹当且仅当 $G$ 是连通的且恰有两个奇度顶点。

证明. 设图 $G$ 有一条欧拉开迹 $Z: v_0, x_1, v_1, \dots, x_n, v_n$ , 其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。显然, 图 $G$ 是连通的。顶点 $v_0$ 在 $Z$ 中除了其首次出现与一条边相关联外, 其余的每次出现均与两条边相关联, 因此顶点 $v_0$ 的度为奇数; 同理,  $v_n$ 的度为奇数。除了 $v_0$ 和 $v_n$ 之外其余的每个顶点在 $Z$ 中的每次出现均与两条边相关联, 因此其度为偶数。这证明了图 $G$ 恰有两个奇度顶点。

设图 $G$ 是连通的, 且恰有两个奇度顶点 $u$ 和 $v$ 。在顶点 $u$ 和 $v$ 之间加一条边, 得到图 $G'$ 。则图 $G'$ 是连通的且每个顶点的度为偶数, 因此有一条欧拉闭迹。在该欧拉闭迹上去掉新加的顶点 $u$ 与顶点 $v$ 之间的边, 便得到了图 $G$ 的一条欧拉开迹。□

**习题7.3.** 设 $G$ 是连通图,  $G$ 恰有 $2n$ 个奇度顶点,  $n \geq 1$ , 证明 $G$ 的全部边可以排成 $n$ 条开迹, 且不能排成少于 $n$ 条开迹。

证明. 设连通图 $G$ 有 $2n$ 个奇度顶点 $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$ 。在 $G$ 中加入 $n$ 条边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ , 得到图 $G'$ 。则 $G'$ 是连通的, 且每个顶点的度为偶数, 因此存在一条欧拉闭迹 $Z$ 。在 $Z$ 中去掉新加入的边 $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_nv_n$ , 则得到图 $G$ 的 $n$ 条开迹。

假设图 $G$ 的所有边能排成 $m$ 条开迹,  $m < n$ 。则只有这 $m$ 条开迹的端点可能为奇度顶点, 因此图 $G$ 至多有 $2m$ 个奇度顶点, 这与图 $G$ 有 $2n$ 个奇度顶点矛盾。□





## 第八章 哈密顿图

习题8.1. 设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图, 则对 $V$ 的每个非空子集 $S$ , 均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 $G$ 中去掉 $S$ 中那些顶点后所得到的图,  $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

习题8.2. 设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图, 如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ , 均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 是连通的。

证明. 用反证法。假设图 $G$ 不连通, 则至少有两个支。设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 是其中的一个支, 其他各支构成的子图为 $G_2 = (V_2, E_2)$ 。取 $V_1$ 中的一个顶点 $v_1$ 和 $V_2$ 中的一个顶点 $v_2$ , 则

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) = (|V_1| + |V_2|) - 2 = p - 2$$

矛盾。

□



## 第九章 树

习题9.1. 设 $G = (V, E)$ 是一个 $(p, q)$ 图, 试证下列各命题等价:

1.  $G$ 是树;
2.  $G$ 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结;
3.  $G$ 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图;
4.  $G$ 是连通的且 $q = p - 1$ ;
5.  $G$ 中无圈且 $q = p - 1$ ;
6.  $G$ 中无圈且 $G$ 中任意两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

证明.  $1 \Rightarrow 2$

用反证法。假设图 $G$ 中存在两个顶点 $u$ 和 $v$ , 在它们之间存在两条不同的路 $P_1$ 和 $P_2$ 。由于 $P_1 \neq P_2$ ,  $P_1$ 上存在一条边 $x = u_1v_1$ 不在 $P_2$ 上。由 $P_1$ 和 $P_2$ 上所有的顶点和边构成的 $G$ 的子图记为 $P_1 \cup P_2$ , 则 $(P_1 \cup P_2) - x$ 是连通的。于是,  $(P_1 \cup P_2) - x$ 中存在一条 $u_1 - v_1$ 路 $P$ ,  $P + x$ 为 $G$ 的一个圈, 矛盾。

$2 \Rightarrow 3$

显然, 图 $G$ 是连通的。设 $uv$ 是图 $G$ 的任意一条联结顶点 $u$ 和 $v$ 的边, 则 $uv$ 是联结顶点 $u$ 和 $v$ 的唯一的一条路, 从图 $G$ 中去掉边 $uv$ 之后, 顶点 $u$ 和顶点 $v$ 之间没有路, 于是得到了一个不连通的图。

$3 \Rightarrow 4$

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。由图 $G$ 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图知图 $G$ 中一定存在一个度为1的顶点 $v$ 。在图 $G$ 中去掉顶点 $v$ 及其与之关联的边, 得到图 $G'$ 。则图 $G'$ 是连通的且去掉任意一条边会得到一个不连通的图, 由归纳假设, 图 $G'$ 中有 $k - 1$ 条边, 于是图 $G$ 中有 $k$ 条边,  $q = p - 1$ 成立, 定理得证。

$4 \Rightarrow 5$

用反证法。假设图 $G$ 中有圈, 则去掉圈上的一条边, 得到的图仍然是连通的。如果新得到的图仍然有圈, 在圈上再去掉一条边, 又会得到一个新的连通的图。如此继续下去, 最终会得到一个连通的没有圈的图。由从1到4的证明知最后到的图中有 $p - 1$ 条边, 这与去掉边之前图 $G$ 中的边数 $q = p - 1$ 矛盾。

$5 \Rightarrow 6$

设图 $G$ 有 $k$ 个支, 则图 $G$ 中的每个支连通且没有圈。设第 $i$ 个支中含有 $p_i$ 个顶点,  $q_i$ 条边。由1到4的证明知在第 $i$ 个支中 $q_i = p_i - 1$ 。将所有支的边数和顶点数相加, 可得 $q = p - k$ 。于是 $k = 1$ , 从而 $G$ 是连通的。设 $u$ 与 $v$ 为图 $G$ 的任意两个不邻接的顶点, 则 $u$ 与 $v$ 之间存在一条路, 再在 $u$ 与 $v$ 之间加一条边, 则得到一个圈。

$6 \Rightarrow 1$

设 $u$ 和 $v$ 为图 $G$ 的任意两个顶点。如果 $u$ 和 $v$ 邻接, 则 $u$ 和 $v$ 之间有一条路。如果 $u$ 和 $v$ 之间不邻接, 则在 $u$ 和 $v$ 之间加一条边, 会得到一个圈。在该圈上将边 $uv$ 去掉, 则得到 $u$ 与 $v$ 之间的一条路。这证明了 $G$ 是连通的。  $\square$

## 第十章 连通度

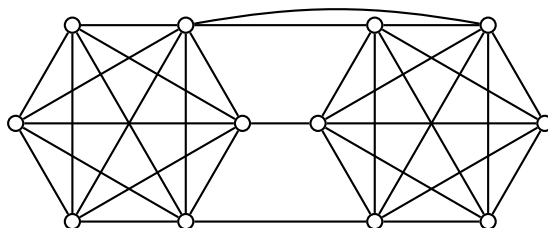
**定义10.1.** 图 $G$ 的**顶点连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 $G$ 中去掉的最少顶点数目, 记为 $\kappa(G)$ 。

**定义10.2.** 图 $G$ 的**边连通度**是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从 $G$ 中去掉的最少边的数目, 记为 $\lambda(G)$ 。

**定义10.3.** 设 $G$ 是一个图, 如果 $\kappa(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 **$n$ -顶点连通的**, 简称 **$n$ -连通**; 如果 $\lambda(G) \geq n$ , 则称 $G$ 是 **$n$ -边连通的**。

**习题10.1.** 构造一个图 $G$ , 使得 $\kappa(G) = 3, \lambda(G) = 4, \delta(G) = 5$ 。

解.



□



## 第十一章 综合题

**习题11.1.** 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为 $p$ ，假珍珠重量也相同且为 $q$ ， $p > q$ 。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

解. 设四颗珍珠分别为 $p_1, p_2, p_3, p_4$ ，其重量分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 。第一次将 $p_1$ 和 $p_2$ 放在一起称，设得到的重量为 $a$ ；第二次将 $p_1$ 和 $p_3$ 放在一起称，设得到的重量为 $b$ ；第三次将 $p_2, p_3$ 和 $p_4$ 放在一起称，设得到的重量为 $c$ 。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \quad (11.1)$$

令 $y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$ ， $y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$ ， $y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$ ， $y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$ ，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a - 2q}{p - q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b - 2q}{p - q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c - 3q}{p - q} \end{cases} \quad (11.2)$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \quad (11.3)$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得 $y_4$ 为0或1。带入方程组(11.2)可得 $y_1, y_2, y_3$ 的值为0或1，从而相应的可以判断 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 的值为 $p$ 或 $q$ 。□