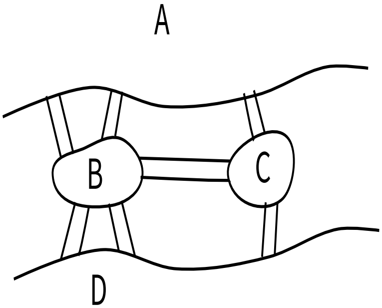
第六章图的基本概念

陈建文

6.1 图论的产生与发展史概述



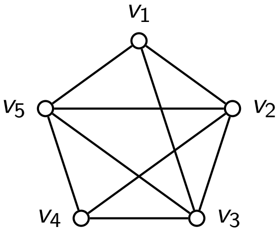
6.2 基本定义

设V为一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V 且 |A| = 2\}。$$

定义2.1

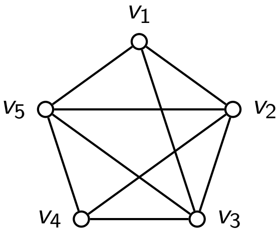
设V为一个非空有限集合，$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$是一个具有$p$个顶点$q$条边的图。



6.2 基本定义

定义2.2

在图$G=(V,E)$中，如果$\{u,v\}\in E$,则称顶点u与v邻接;若x与y是图G的两条边，并且仅有一个公共端点，即$|x\cap y|=1$,则称边x与y邻接;如果$x=\{u,v\}$是图G的一条边，则称u与x互相关联，同样的，称v与x互相关联。



6.2 基本定义

定义2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环;允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

6.2 基本定义

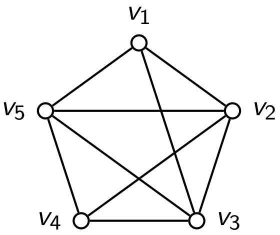
定义2.4

设$G = (V, E)$为一个图，如果$E = \Phi$,则称G为零图; $(1, 0)$图称为平凡图。

6.2 基本定义

定义2.5

设v为图$G=(V,E)$的任意一个顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为$\deg x$。



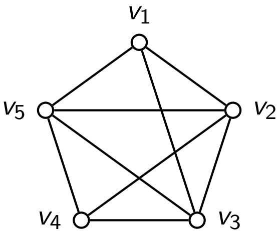
G

6.2 基本定义

定理2.1

设$G=(V,E)$为一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

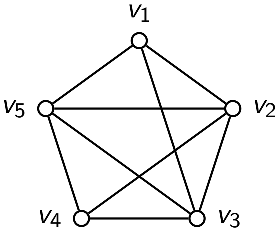


G

6.2 基本定义

定理2.2

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。



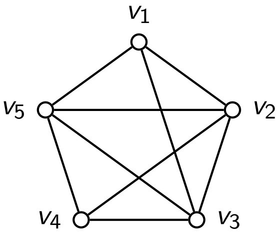
G

6.2 基本定义

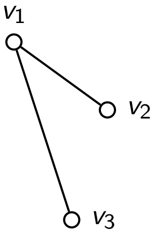
定义2.6

图G称为r度正则图，如果G的每个顶点的度都等于r。3 度正则图也叫三次图。一个具有p个顶点的$p-1$度正则图称为包含p个顶点的完全图，记为K_p。

6.2 基本定义

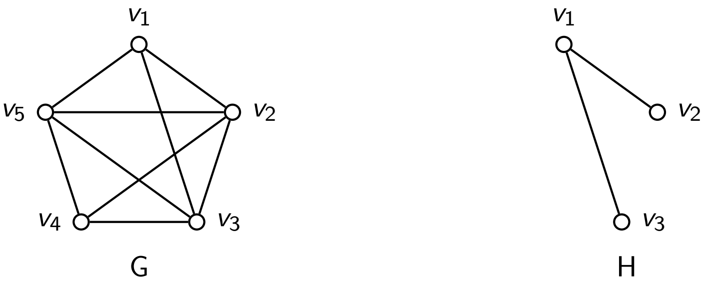


G



H

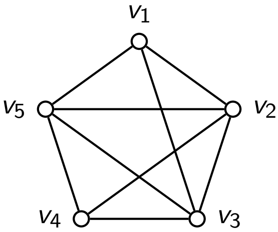
6.2 基本定义



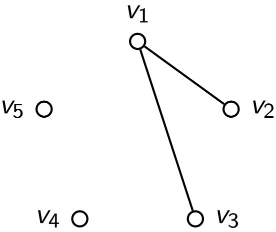
定义2.7

设$G=(V,E)$为一个图，图$H=(V_1,E_1)$称为G的一个子图，当且仅当V_1为V的非空子集且E_1为E的子集。如果$H\neq G$，则称H为G的真子图。

6.2 基本定义

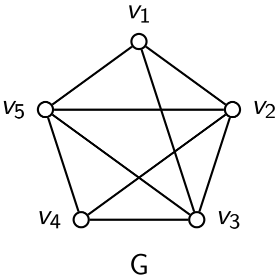


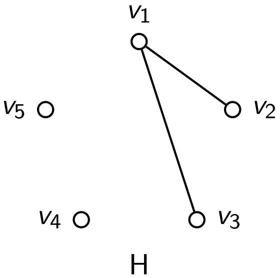
G



H

6.2 基本定义

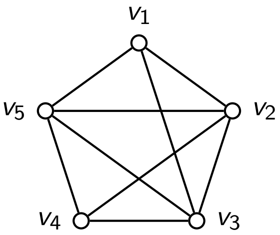




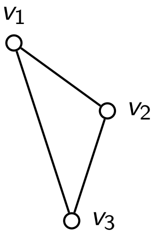
定义2.8

设$G=(V,E)$为一个图，如果$F\subseteq E$，则称G的子图$H=(V,F)$为G的一个生成子图。

6.2 基本定义

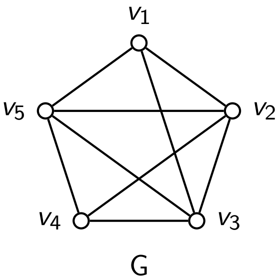


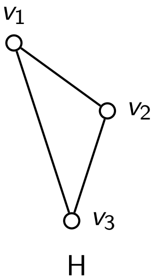
G



H

6.2 基本定义

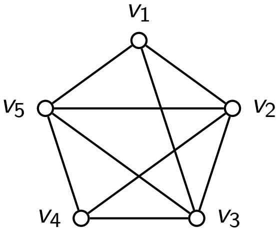




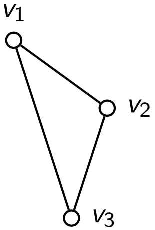
定义2.9

设G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H是具有此性质的极大子图。

6.2 基本定义



G



H

定义2.9

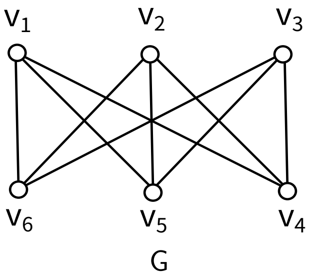
设G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的子图，则称H是具有此性质的**极大子图**。

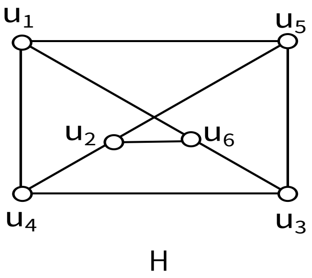
定义2.10

设S为图$G=(V,E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S\rangle$。形式的，

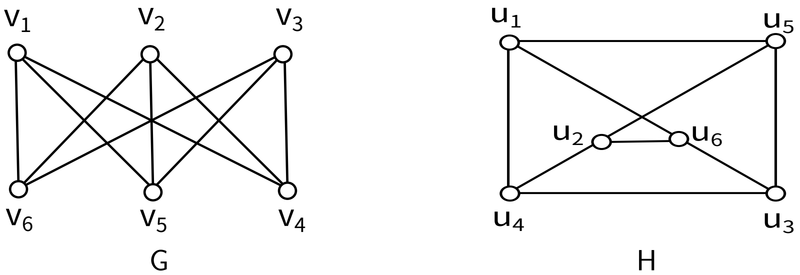
$$\langle S\rangle=(S,\mathcal{P}_2(S)\cap E)$$

6.2 基本定义





6.2 基本定义



定义2.11

设$G = (V, E)$，$H = (U, F)$为两个图，如果存在一个一一对应$\phi : V \to U$，使得$\{u, v\} \in E$当且仅当$\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$,则称$G$与$H$同构。

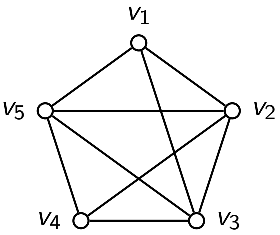
6.3 路、圈、连通图

定义3.1

设$G=(V,E)$为一个图。G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。$n$称为通道的长。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道，并简记为$v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时，则称此通道为闭通道。

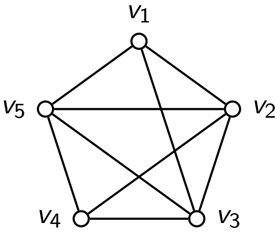


G

6.3 路、圈、连通图

定义3.2

如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

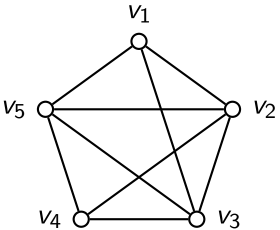


G

6.3 路、圈、连通图

定义3.3

如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。

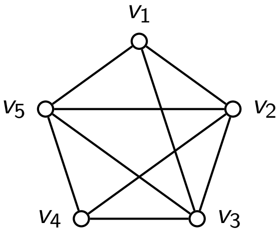


G

6.3 路、圈、连通图

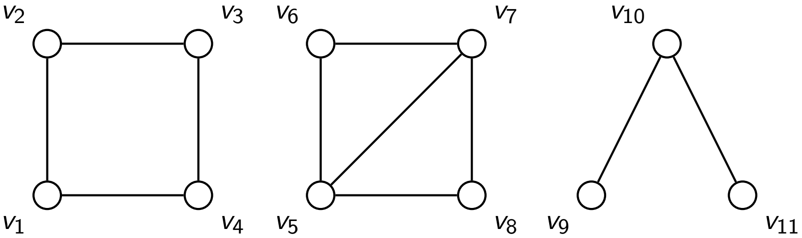
定义3.4

设$G=(V,E)$为一个图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个连通图。



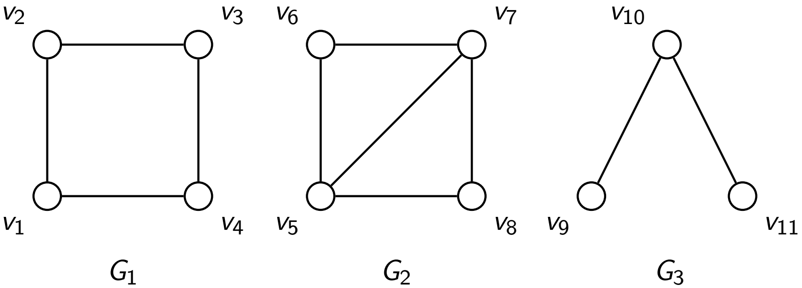
G

6.3 路、圈、连通图



G

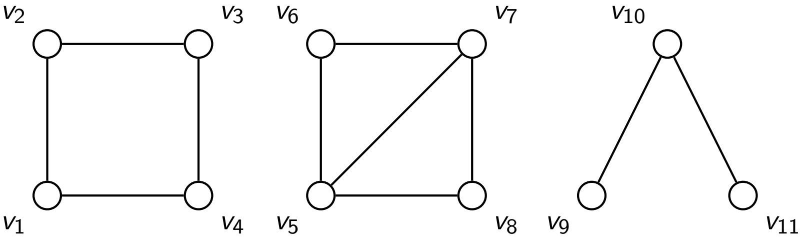
6.3 路、圈、连通图



6.3 路、圈、连通图

定义3.5

图G的极大连通子图称为G的一个支。



G_1 G_2 G_3

6.3 路、圈、连通图

定理3.1

设$G=(V,E)$是一个图。在V上定义二元关系$\cong$如下：

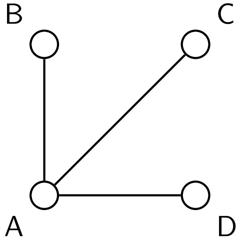
$$\forall u,v\in V, u\cong v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路},$$

则$\cong$为V上的等价关系，G的支就是关于$\cong$的每个等价类的导出子图。

6.4 补图、偶图

定义4.1

设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。
如果G与G^c同构，则称G是自补图。

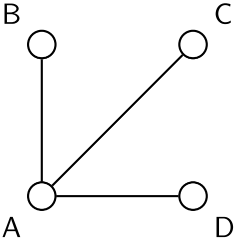


G

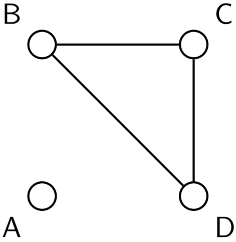
6.4 补图、偶图

定义4.1

设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$是自补图。



G

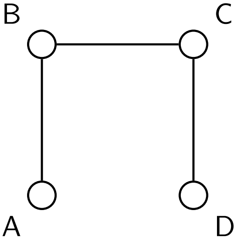


G^c

6.4 补图、偶图

定义4.2

设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。
如果G与G^c同构，则称G是自补图。

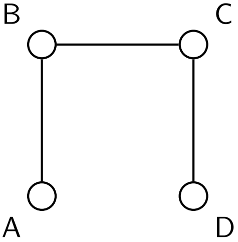


G

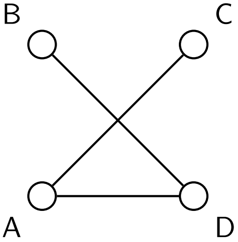
6.4 补图、偶图

定义4.2

设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$是自补图。



G



G^c

6.4 补图、偶图

定理4.1
对任一有6个顶点的图G，G中或G^c中有一个三角形。

证明.
设图G的顶点集为$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$,考虑顶点$v_1$。

- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1相邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点相邻接。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点都不邻接。
- 存在三个顶点，其中的每个顶点都与顶点v_1不邻接。不失一般性，不妨设这个三个顶点为v_2,v_3,v_4。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，存在两个顶点不邻接。
  - 在顶点v_2,v_3,v_4中，任意两个顶点互相邻接。

□

定义4.3

对任意的正整数m，n，$m \geq 2$，$n \geq 2$，求一个最小的正整数$r(m,n)$，使得任何有$r(m,n)$个顶点的图G中一定含有一个K_m或者图G^c中一定含有一个K_n，这里的数$r(m,n)$称为拉姆齐数。

6.4 补图、偶图

定义4.4

设$G = (V, E)$为一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$，使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为偶图。如果$\forall u \in V_1, v \in V_2$均有$uv \in E$，则称$G$为完全偶图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1| = m, |V_2| = n$。

定义4.5

设$G=(V,E)$是一个图，u和v是G的顶点。联结u和v的最短路的长称为u与v之间的距离，并记为$d(u,v)$。如果u与v间在G中没有路，则定义$d(u,v)=\infty$。

6.4 补图、偶图

定理4.2

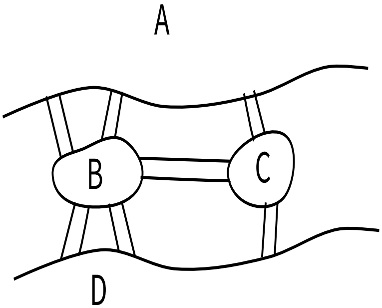
图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

6.4 补图、偶图

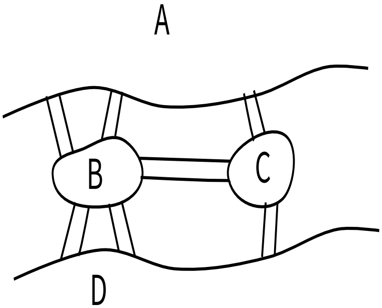
定理4.3

所有具有p个顶点而没有三角形的图中最多有$\lfloor p^2/4 \rfloor$条边。

6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



定义5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

6.5 欧拉图

定理5.1

图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度是偶数。

6.5 欧拉图

定义5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

6.5 欧拉图

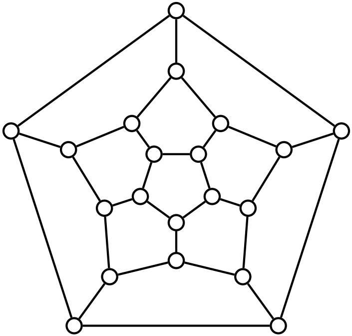
定理5.2

图G有一条欧拉开迹当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点。

定理5.3

设G是连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，则G的全部边可以排成n条开迹，且不能排成少于n条开迹。

6.6 哈密顿图

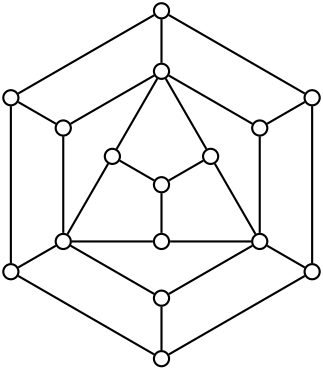


6.6 哈密顿图

定义6.1

图G的一条包含所有顶点的路称为G的一条哈密顿路;图G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

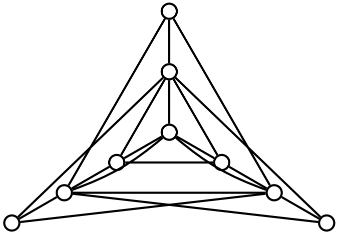
定理6.1

设$G=(V,E)$为哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有

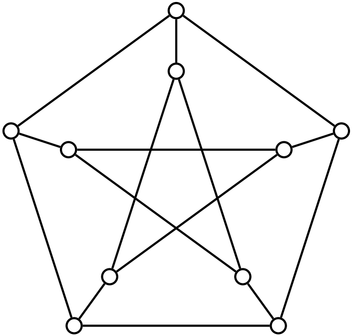
$$\omega(G-S)\le |S|$$

其中$G-S$是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，$\omega(G-S)$是图$G-S$的支数。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

定理6.2

设G为有$p(p \geq 3)$个顶点的图。如果对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则G是一个哈密顿图。

定理6.3

设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G是连通的。

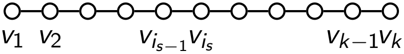
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，

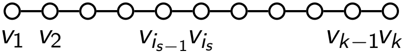
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，只需证明$k = p$。

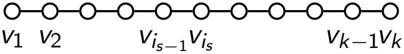
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，只需证明$k = p$。
用反证法，假设$k < p$。

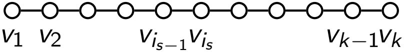
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，只需证明$k = p$。
用反证法，假设$k < p$。以下证明$v_1 v_2 \cdots v_k$必在同一个圈上。

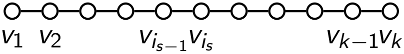
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，只需证明$k = p$。
用反证法，假设$k < p$。以下证明$v_1 v_2 \cdots v_k$必在同一个圈上。

- 如果v_1与v_k邻接，则$v_1 v_2 \cdots v_k v_1$构成G中的一个圈；

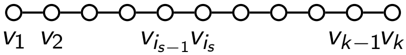
6.6 哈密顿图

定理6.4

设G为一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明.

设G中的最长路为$v_1 v_2 \cdots v_k$，只需证明$k = p$。
用反证法，假设$k < p$。以下证明$v_1 v_2 \cdots v_k$必在同一个圈上。

- 如果v_1与v_k邻接，则$v_1 v_2 \cdots v_k v_1$构成G中的一个圈；
- 如果v_1与v_k不邻接，由$v_1 v_2 \cdots v_k$为最长路知v_1, v_k只能与$v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$中的顶点邻接。

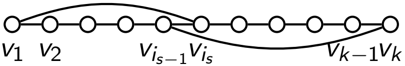
6.6 哈密顿图

定理6.3

设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。



证明（续上页）.

设$v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$与$v_1$邻接，$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$，则$v_k$必与某个$v_{i_s-1}$邻接，$2 \leq s \leq r$。否则，$v_k$至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是，$v_1 v_2 \cdots v_{i_{s-1}} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$是$G$中的一个圈。总之，$v_1, v_2, \cdots, v_k$在$G$的同一个圈$C$上。

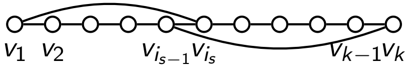
6.6 哈密顿图

定理6.3

设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则G有哈密顿路。

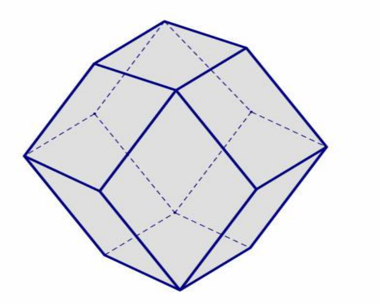


证明（续上页）.

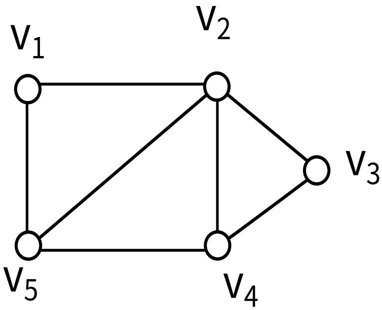
由于G是连通的，$k < p$，所有G必有某个顶点v，v不在C上，但与C上某个顶点v_i邻接。于是得到G的一条更长的路，这就出现了矛盾。

□

6.6 哈密顿图



6.7 图的邻接矩阵



6.7 图的邻接矩阵

定理7.1
设$G=(V,E)$为一个(p,q)图，$p\times p$矩阵A为G的邻接矩阵，则G中v_i与v_j间长为l的通道的条数等于A^l的第i行第j列元素的值。