

第七章树和割集

陈建文

1. 树及其性质

定义1.1

连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。

1. 树及其性质

定义1.1

连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称森林。

1. 树及其性质

定理1.1

设 $G = (V, E)$ 是一个 (p, q) 图, 则下列各命题等价:

- (1) G 是树;
- (2) G 的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结;
- (3) G 是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图;
- (4) G 是连通的且 $q = p - 1$;
- (5) G 中无圈且 $q = p - 1$;
- (6) G 中无圈且 G 中任两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

2. 生成树

定义2.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图, G 的一个生成子图 $T = (V, F)$ 如果是树, 则称 T 为 G 的生成树。

2. 生成树

定义2.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图， G 的一个生成子图 $T = (V, F)$ 如果是树，则称 T 为 G 的生成树。

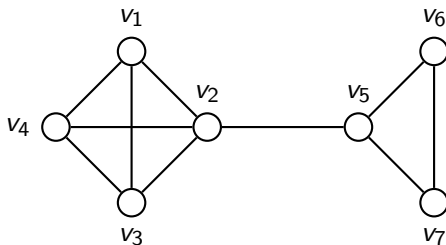
定理2.1

图 G 有生成树的充分必要条件是 G 为一个连通图。

3. 割点、桥和割集

定义3.1

设 v 是图 G 的一个顶点，如果 $G - v$ 的支数大于 G 的支数，则称顶点 v 为图 G 的一个割点。

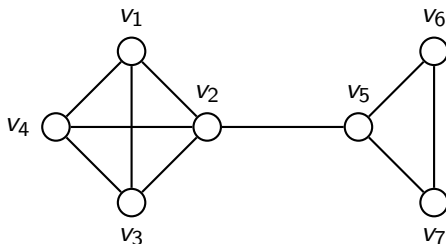


3. 割点、桥和割集

定理3.1

设 v 是连通图 $G = (V, E)$ 的一个割点，则下列命题等价：

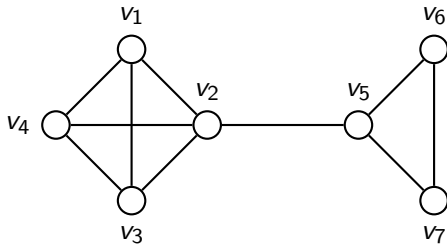
- (1) v 是图 G 的一个割点；
- (2) 集合 $V \setminus \{v\}$ 有一个二划分 $\{U, W\}$ ，使得 $\forall u \in U, w \in W$ ， v 在联结 u 和 w 的每条路上；
- (3) 存在与 v 不同的两个顶点 u 和 w ，使得 v 在每一条 u 与 w 间的路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.2

图 G 的一条边 x 称为 G 的一座桥，如果 $G - x$ 的支数大于 G 的支数。

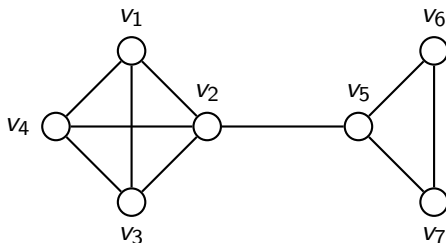


3. 割点、桥和割集

定理3.2

设 x 是连通图 $G = (V, E)$ 的一条边，则下列命题等价：

- (1) x 是 G 的桥；
- (2) x 不在 G 的任一圈上；
- (3) 存在 V 的一个划分 $\{U, W\}$ ，使得 $\forall u \in U, \forall w \in W$ ， x 在每一条连接 u 与 w 的路上；
- (4) 存在 G 的不同顶点 u 和 v ，使得边 x 在联结 u 和 v 的每条路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.3

设 $G = (V, E)$ 是图， $S \subseteq E$ 。如果从 G 中去掉 S 中的所有边得到的图 $G - S$ 的支数大于 G 的支数，而去掉 S 的任一真子集中的边得到的图的支数不大于 G 的支数，则称 S 为 G 的一个**割集**。

