第九章 平面图和图的着色

陈建文

第九章 平面图和图的着色

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图

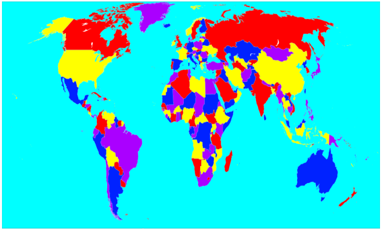
第九章 平面图和图的着色

1. 平面图
   在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图
   在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。
2. 图的着色

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图
   在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。
2. 图的着色
   

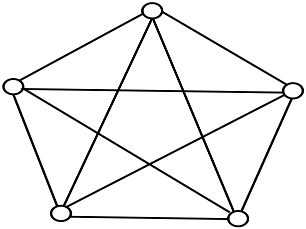
9.1 平面图及其欧拉公式

9.1 平面图及其欧拉公式

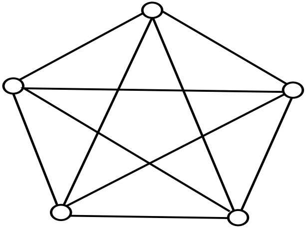
定义9.1.1

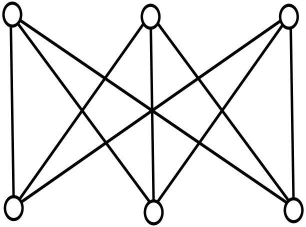
图G称为被嵌入平（曲）面S内，如果G的图解已画在S上，而且任何两条边均不相交（除可能在端点相交外）。已嵌入平面内的图称平面图。如果一个图可以嵌入平面，则称此图是可平面的。

9.1 平面图及其欧拉公式

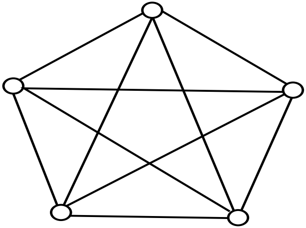


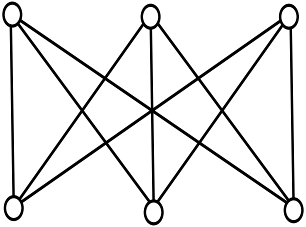
9.1 平面图及其欧拉公式





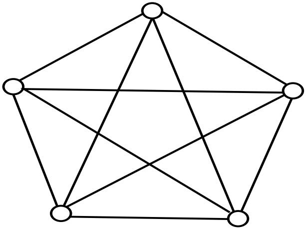
9.1 平面图及其欧拉公式

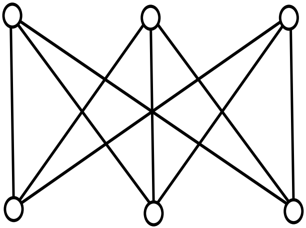




J. Hopcroft and R. Tarjan.
Efficient planarity testing.
Journal of the Association for Computing Machinery, 21(4):549-568, 1974.

9.1 平面图及其欧拉公式





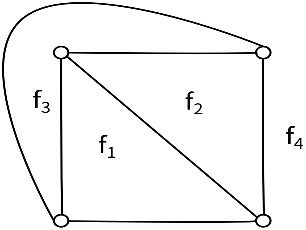
J. Hopcroft and R. Tarjan.
Efficient planarity testing.
Journal of the Association for Computing Machinery, 21(4):549-568, 1974.

J. Boyer and W. Myrvold.
On the Cutting Edge: Simplified O(n) Planarity by Edge Addition.
Journal of Grah algorithms and Applications, 8(3):241-273, 2004.

9.1 平面图及其欧拉公式

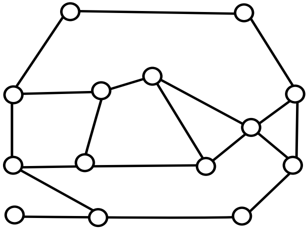
定义9.1.2

平面图G把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为G的面，其中无界的那个连通区域称为G的外部面，其余的连通区域称为G的内部面。



9.1 平面图及其欧拉公式

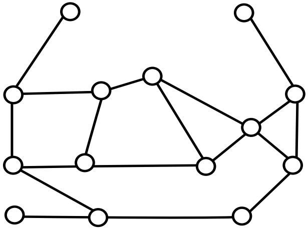
定理9.1.1（欧拉公式）
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1（欧拉公式）

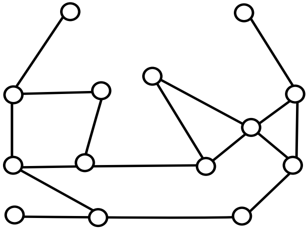
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1（欧拉公式）

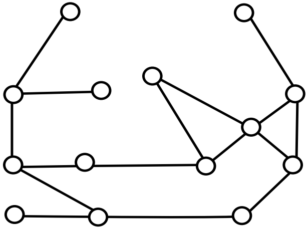
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

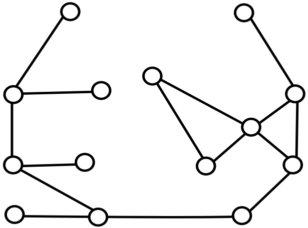
定理9.1.1（欧拉公式）

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

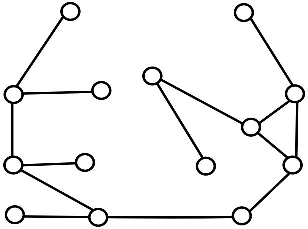
定理9.1.1（欧拉公式）
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1（欧拉公式）

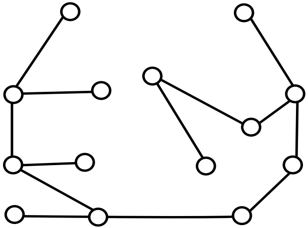
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

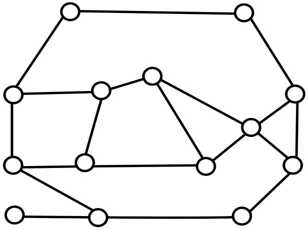
定理9.1.1（欧拉公式）

如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1（欧拉公式）
如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p-q+f=2$



推论9.1.1

若平面图G有p个顶点q条边且每个面都是由长为n的圈围成的，则

$$q = n(p-2)/(n-2)$$

9.1 平面图及其欧拉公式

一个**最大可平面图**是一个可平面图，对此可平面图中不能再加入边而不破坏可平面性。

推论9.1.2
设G是一个有p个顶点q条边的最大可平面图，$p \geq 3$，则G的每个面都是三角形，而且$q = 3p - 6$。

推论9.1.3

设G是一个(p, q)可平面连通图，而且G的每个面都是一个长为4的圈围成的，则$q = 2p - 4$。

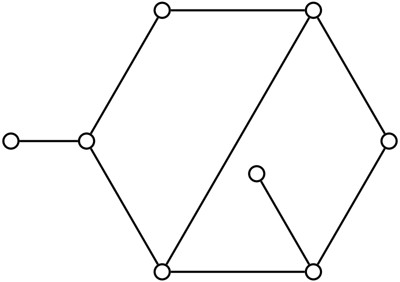
推论9.1.4

若G是一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p-6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p-4$。

9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.4

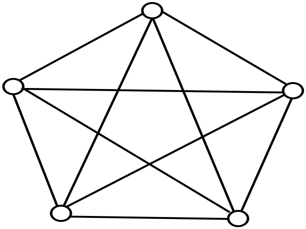
若G是一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p-6$；进一步，若G中没有三角形，则$q \leq 2p-4$。

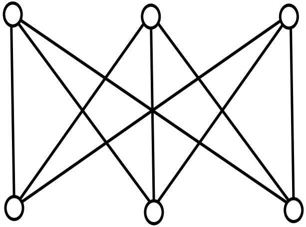


9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.5

K_5和$K_{3,3}$都不是可平面图。





9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.6

每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \leq 5$。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题1

设G是一个有p个顶点的平面图，$p \geq 4$。证明：G中有4个度不超过5的顶点。

习题2

设G是一个有k个支的平面图。若G的顶点数、边数、面数分别为p，q和f，试证:

$$p - q + f = k + 1$$

习题3

若G是顶点数$p > 11$的平面图，试证G^c不是平面图。

习题4

设$S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 是平面上n个顶点的集合，$n\geq 3$， 其中任两个顶点的距离至少是*1*。证明：S中至多有$3n-6$对顶点，其距离为*1*。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题5

证明：不存在7条棱的凸多面体。

9.2 非哈密顿平面图

定理9.2.1

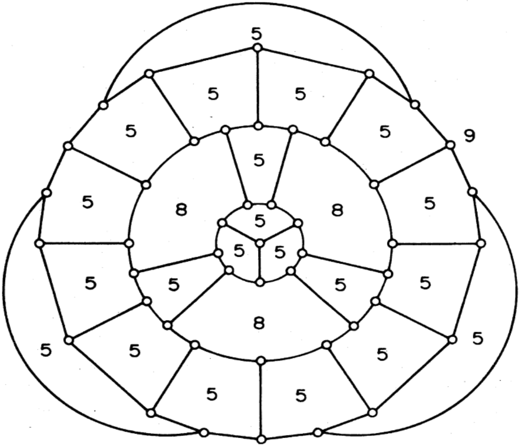
设$G=(V,E)$是一个(p,q)平面哈密顿图， C是G的哈密顿圈。令f_i为C的内部由i条边围成的面的个数， g_i为C的外部i条边围成的面的个数，则

$$1\cdot f_3+2\cdot f_4+3\cdot f_5+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)f_i=p-2; \tag{1}$$

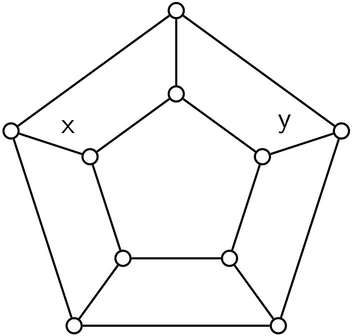
$$1\cdot g_3+2\cdot g_4+3\cdot g_5+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)g_i=p-2; \tag{2}$$

$$1\cdot(f_3-g_3)+2\cdot(f_4-g_4)+3\cdot(f_5-g_5)+\cdots=\sum_{i=3}^{p}(i-2)(f_i-g_i)=0 \tag{3}$$

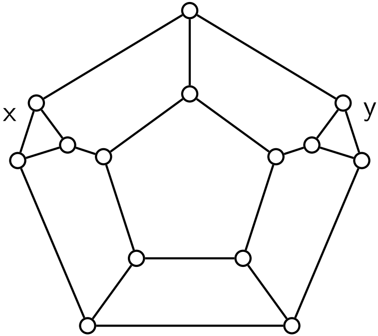
9.2 非哈密顿平面图



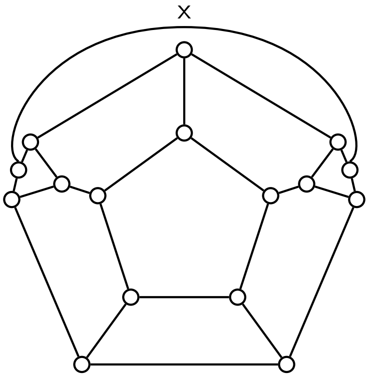
9.2 非哈密顿平面图



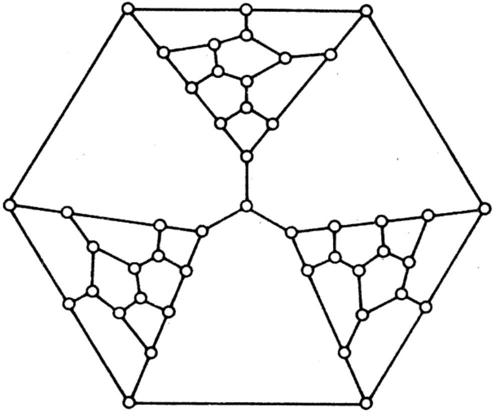
9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.1
设$x = uv$是图$G = (V, E)$的一条边，又w不是G的顶点，则当用边uw和wv代替边x时，就称x被细分。如果G的某些条边被细分，产生的图称为G的细分图。

定义9.3.2
两个图称为同胚的，如果它们都可以从同一个图通过一系列的边细分得到。

定理9.3.1
一个图是可平面的充分必要条件是它没有同胚于K_5或$K_{3,3}$的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.3

一个图G的一个初等收缩由等同两个临接的顶点u和v得到，即从G中 去掉u和v，然后再加上一个新顶点w，使得w临接于所有临接 于u或v的顶点。一个图G可以收缩到图H，如果H可以从G经过一系列的初等收缩得到。

定理9.3.2

一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.4

设$G=(V,E)$是一个平面图，由G按照如下方法构造一个图G^*，G^*称为G的对偶图：对G的每个面f对应地有G^*的一个顶点f^*;对G的每条边e对应地有G^*的一条边e^*：G^*的两个顶点f^*与g^*由边e^*联结，当且仅当G中与顶点f^*与g^*对应的面f与g有公共边e，如果某条边x仅在一个面中出现而不是两个面的公共边，则在G^*中这个面对应的顶点有一个环。

9.4 图的顶点着色

- A fights with B and E;
- B fights with A and C;
- C fights with B, E and F;
- D fights with E;
- E fights with A, C and D;
- F fights with C.

9.4 图的顶点着色

定义9.4.1

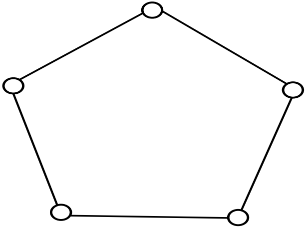
图的一种着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点有同一种颜色。图G的一个$n-$着色是用n种颜色对G的着色。

定义9.4.2

图G的色数是使G为$n-$着色的数n的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$。若$\chi(G) \le n$，则称G是$n-$可着色的。若$\chi(G) = n$，则称G是n色的。

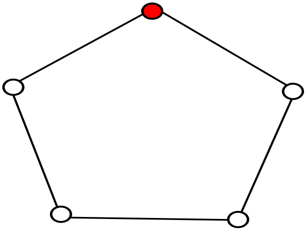
9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

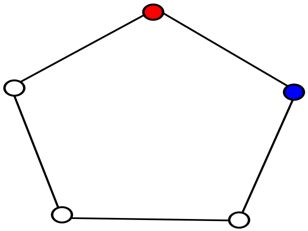
定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

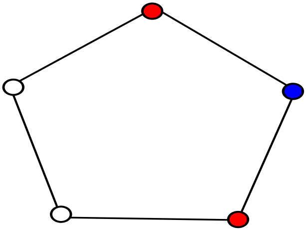
定理9.4.1

一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



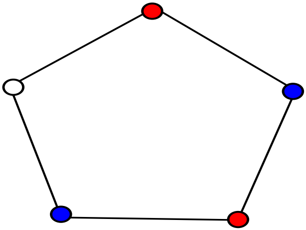
9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



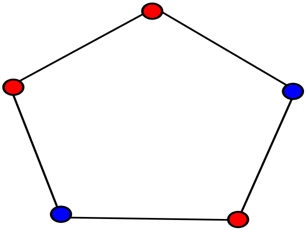
9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

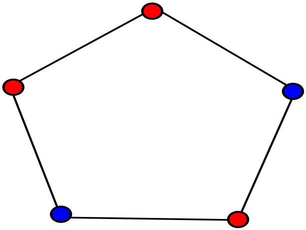
定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

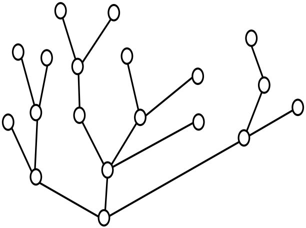


9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

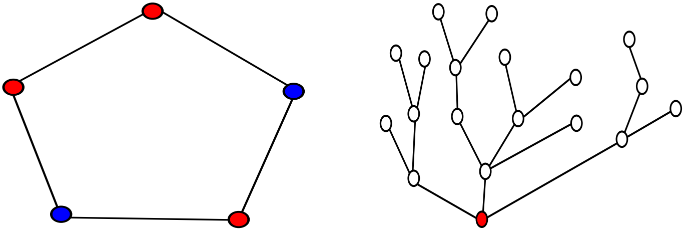
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。





9.4 图的顶点着色

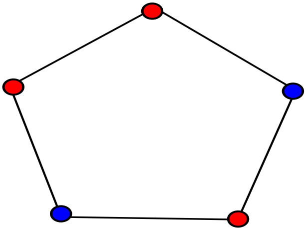
定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

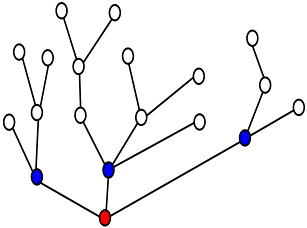


9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

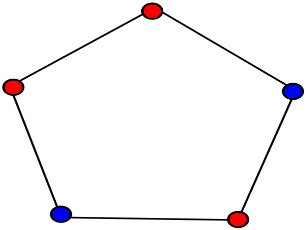


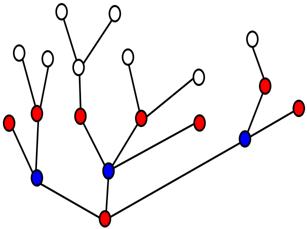


9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

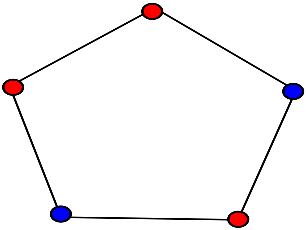
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

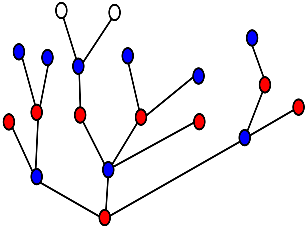




9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

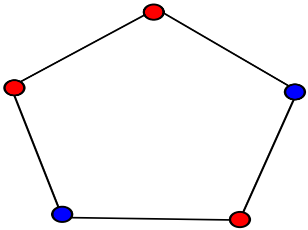


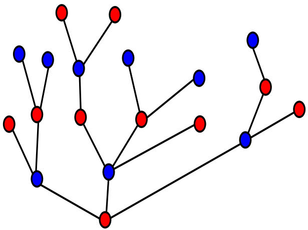


9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

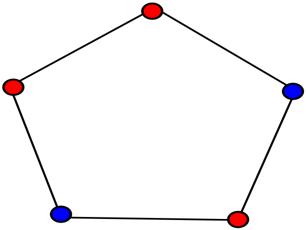
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

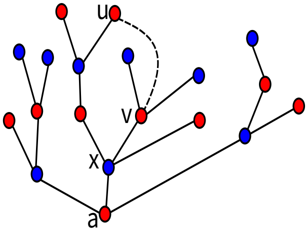




9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。





定理9.4.1

一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

证明.

设图G为可双色的，则显然图G没有奇数长的圈。这是因为假设图G有奇数长的圈C， 则C是3色的，从而$\chi(G) \geq 3$，与G是可双色的矛盾。 $\square$

9.4 图的顶点着色

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

证明（续上页）.
设图G没有奇数长的圈，以下给出一种用两种颜色对G的顶点进行着色的算法，从而证明图G是可双色的。不妨设图G是连通的，否则可以对图G的每个连通分量分别进行着色。任取G的一个顶点a，对其着红色，然后对与顶点a邻接的顶点着蓝色，接下来对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着红色，这样依次下去，每次都对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色。该算法结束时用至多两种颜色对G的顶点进行了着色。

□

定理9.4.1
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。

证明(续上页).
以下证明每次对所有与已经着色的顶点相邻接的顶点着与前一次的着色不同的另一种颜色时， 不会产生相邻的两个顶点着以相同颜色的情况，从而保证前面的算法是正确的。用反证法。 假设对顶点u进行着色时，不妨设对其着红色，已经有一个与之相邻的顶点v着了红色。 从着色的过程知，从顶点a到顶点u之间有一条路P_1，其上的顶点依次着了红色和蓝色， 从顶点a到顶点v之间也有一条路P_2，其上的顶点依次着了红色和蓝色。取P_1和P_2的最后一个公共的顶点x，则P_1上从顶点u到顶点x的路与P_2上从顶点x到顶点v的路和边vu一起构成一个圈，该圈上u和v着相同的颜色，其他各顶点依次着不同的颜色，因此其长度为奇数，与G中没有奇数长的圈矛盾。 $\square$

定理9.4.2

设$\Delta = \Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G是$(\Delta + 1)-$可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理9.4.3

如果G是一个连通图且不是完全图也不是奇数长的圈，则G是$\Delta(G)-$可着色的。

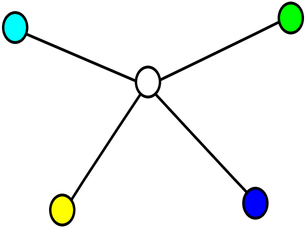
9.4 图的顶点着色

定理9.4.4

每个平面图是6−可着色的。

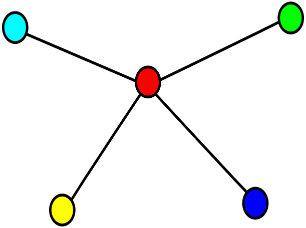
定理9.4.5

每个平面图是5−可着色的。



9.4 图的顶点着色

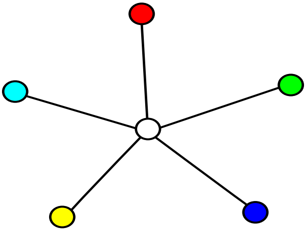
定理9.4.5
每个平面图是5−可着色的。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.5

每个平面图是5−可着色的。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.6
每个平面图是4–可着色的。

习题

习题

证明：若G的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，则$\chi(G) \leq 5$。