第一章集合及其运算

1. 集合的概念

定义1.1

通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n | n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$
   - $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

1. 集合的概念

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为Φ。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，并且B中的每个元素都是A中的元素,则称A与B相等，并记为$A = B$。

2. 子集、集合的相等

定义2.1

设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，并且B中的每个元素都是A中的元素,则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.1
设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，并且B中的每个元素都是A中的元素,则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R} | x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$并且$A \neq B$,则称A 是B的真子集，记为$A \subset B$。

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$并且$A \neq B$,则称A 是B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 子集、集合的相等

定义2.2

设A，B是两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$并且$A \neq B$,则称A 是B的真子集，记为$A \subset B$。

- $\{1,2,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$
- $\{1,2,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

2. 子集、集合的相等

定理2.1

空集是任一个集合的子集且空集是唯一的。

2. 子集、集合的相等

定义2.3

集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

2. 子集、集合的相等

定义2.3
集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例：
设$S=\{1,2,3\}$，
则$2^s=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

3. 集合的基本运算

定义3.1
设A, B是任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B 的并集，记为$A \cup B$。

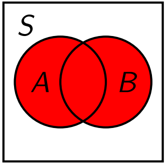
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.1

设A, B是任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B 的并集，记为$A \cup B$。

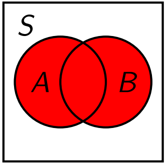
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



3. 集合的基本运算

定义3.1

设A, B是任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B 的并集，记为$A \cup B$。



$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

例:

$\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

3. 集合的基本运算

定义3.2

设A, B是任意的两个集合，由既属于集合A与又属于集合B 的所有元素构成的集合称为A 与B 的交集，记为$A \cap B$。

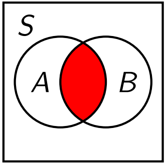
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.2

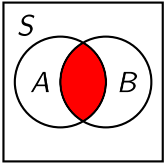
设A, B是任意的两个集合，由既属于集合A与又属于集合B 的所有元素构成的集合称为A 与B 的交集，记为$A \cap B$。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



3. 集合的基本运算

定义3.2
设A, B是任意的两个集合，由既属于集合A与又属于集合B 的所有元素构成的集合称为A 与B 的交集，记为$A \cap B$。



$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

例：
$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

3. 集合的基本运算

定义3.3

设A, B是任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B 的差集，记为$A \setminus B$。

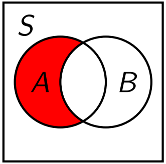
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.3

设A, B是任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B 的差集，记为$A \setminus B$。

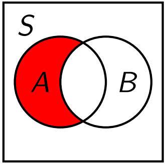
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



3. 集合的基本运算

定义3.3

设A, B是任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B 的差集，记为$A \setminus B$。



$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例:

$\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

3. 集合的基本运算

定义3.4

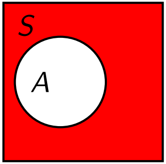
在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A是S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A是S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

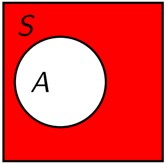


$$A^c = \{x | x \in S \land x \notin A\}$$

3. 集合的基本运算

定义3.4

在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A是S的子集，则差集$S\setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。



$$A^c=\{x|x\in S\wedge x\notin A\}$$

例:

$S=\{0,1\},A=\{0\},$ 则$A^c=\{1\}$

3. 集合的基本运算

定理3.1

设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则

1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. $A\cup A=A$,$A\cap A=A$.
4. $(A\cup B)\cap A=A$,$(A\cap B)\cup A=A$.
5. $A\cup\emptyset=A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$.
6. $A\cup S=S$, $A\cap S=A$.
7. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
8. $A\cup A^c=S$, $A\cap A^c=\emptyset$.
9. $C\setminus(A\cup B)=(C\setminus A)\cap(C\setminus B)$,
$C\setminus(A\cap B)=(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.

9'. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

3. 集合的基本运算

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\neg p$
T	F
F	T

3. 集合的基本运算

p	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	¬ p
T	F
F	T

x	y	x ∧ y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

x	y	x ∨ y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

3. 集合的基本运算

定义3.5

设B是一个集合，在其上定义了一个一元运算$^{-}$，两个二元运算$\vee$和$\wedge$，以及两个特定的元素0和1，使得对B中的任何元素x，y，z，满足以下条件，则称$(B, {}^{-}, \vee, \wedge, 0, 1)$为一个布尔代数。

1.$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$

2.$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

3.$x \vee 0 = x$

4.$x \wedge 1 = x$

5.$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

6.$x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设A, B是两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$ 的并集合称为A 与B 的**对称差**，记为$A \triangle B$。

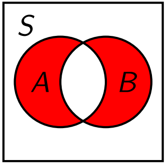
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设A, B是两个集合，$A\setminus B$与$B\setminus A$ 的并集合称为A 与B 的对称差，记为$A\bigtriangleup B$。

$$A\bigtriangleup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

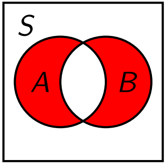


3. 集合的基本运算

定义3.6

设A, B是两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$ 的并集合称为A 与B 的对称差，记为$A \triangle B$。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



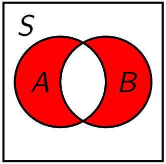
例：

$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

3. 集合的基本运算

定义3.6

设A, B是两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$ 的并集合称为A 与B 的对称差，记为$A \triangle B$。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例：

$\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

定理3.2

设S为全集，$A \in 2^S$，$B \in 2^S$，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

3. 集合的基本运算

定理3.3

设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则

1. $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$.
2. $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$.
3. $\emptyset \bigtriangleup A = A$.
4. $A \bigtriangleup A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$.

3. 集合的基本运算

p	q	p $\oplus$ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

3. 集合的基本运算

p	q	p ⊕ q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

x	y	x ⊕ y
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3. 集合的基本运算

定义3.7

设$(B, ^{-}, \vee, \wedge, 0, 1)$为一个布尔代数，$x \in B, y \in B$，定义$x$与$y$的对称差为$x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$。

定理3.4

设$(B, ^{-}, \vee, \wedge, 0, 1)$为一个布尔代数，$x \in B, y \in B, z \in B$。则

1. $x \oplus y = y \oplus x$.
2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.
3. $0 \oplus x = x$.
4. $x \oplus x = 0$.
5. $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$.

3. 集合的基本运算

定义3.8

以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义3.9

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \exists\alpha\in I \text{使得} x\in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \{x | \forall\alpha\in I, x\in A_\alpha\}$$

3. 集合的基本运算

例：

设$I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$，$\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$，则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = ?, \bigcap_{x \in I} A_x = ?$$

3. 集合的基本运算

定理3.5

设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$为任意一个集族，则

1. $A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$
2. $A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。

$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当$a = c$ 并且$b = d$。

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a,b)。$(a,b)=(c,d)$ 当且仅当$a=c$ 并且$b=d$。

定义3.11

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a,b)|a\in A且b\in B\}$为A与B的笛卡尔乘积，记为$A\times B$。即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A且b\in B\}$$

3. 集合的运算

定义3.10

两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当$a = c$ 并且$b = d$。

定义3.11

设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b)|a \in A且b \in B\}$为$A$与$B$的笛卡尔乘积，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A且b \in B\}$$

例：

如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，那么$X \times Y =?$，$Y \times X =?$

3. 集合的运算

定义3.10
两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一对象为a，第二个对象为b，则该有序对记为(a, b)。
$(a, b) = (c, d)$ 当且仅当$a = c$ 并且$b = d$。

定义3.11
设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a, b)|a \in A$且$b \in B\}$
为A与B的笛卡尔乘积，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b)|a \in A \text{且} b \in B\}$$

例：
如果$X = \{1, 2\}$，$Y = \{3, 4, 5\}$，那么$X \times Y =?$，$Y \times X =?$

$$X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$
$$Y \times X = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$$

3. 集合的运算

定义3.12

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

3. 集合的运算

定义3.12

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

定义3.13

设A_1，A_2，...，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

3. 集合的运算

定义3.12

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，…，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，…，$a_n = b_n$。

定义3.13

设A_1, A_2，…，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

例:

如果$X = \{a_1, b_1\}$，$Y = \{a_2, b_2\}$，$Z = \{a_3, b_3\}$ 那么$X \times Y \times Z = ?$

3. 集合的运算

定义3.12

n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$。$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$当且仅当$a_1 = b_1$,$a_2 = b_2$，...，$a_n = b_n$。

定义3.13

设A_1, A_2，...，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

为$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$。即

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

例：

如果$X = \{a_1, b_1\}$，$Y = \{a_2, b_2\}$，$Z = \{a_3, b_3\}$ 那么$X \times Y \times Z = ?$

6. 有穷集合的基数

定义6.1

设X和Y是两个非空集合。一个从X到Y的映射f是一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素与之对应。从X到Y的映射f常记为$f: X \to Y$。

定义6.2

设$f: X \to Y$，如果$\forall x_1, x_2 \in X$，只要$x_1 \neq x_2$，就有$f(x_1) \neq f(x_2)$，则称f 为从X到Y的单射。

定义6.3

设$f: X \to Y$，如果$\forall y \in Y$，$\exists x \in X$使得$f(x) = y$，则称f为从X到Y的满射。

定义6.4

设$f: X \to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

6. 有穷集合的基数

定义6.5

设A为一个集合，如果$A=\Phi$，其基数定义为0;如果$A\neq\Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1,2,\ldots,n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为0或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

6. 有穷集合的基数

定理6.1
设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.1

设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理6.2

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.3

设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

定理6.4

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

6. 有穷集合的基数

定理6.5

设S为有穷集，$A \subseteq S$，则$|A^c| = |S| - |A|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.6

设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明.

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$
\begin{aligned}
& |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
& = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
& - \ldots \\
& + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&-\ldots \\
&+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 1$时，结论显然成立。

6. 有穷集合的基数

定理6.7

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于n:
当$n = 1$时，结论显然成立。
假设定理的结论对$n \ge 1$个有穷集合成立，往证对$n + 1$个有穷集合定理的结论也成立。实际上，

6. 有穷集合的基数

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
=&|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|
\end{aligned}
\tag{1}
$$

6. 有穷集合的基数

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \qquad (2) \\
&- \dots \\
&+(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

6. 有穷集合的基数

$$
\begin{aligned}
&|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \le i < j \le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| \\
&- \dots \\
&+ (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \qquad (3) \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \le i < j \le n} |(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})| \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
&- \dots \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

6. 有穷集合的基数

将(2)和(3)代入(1)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&- \dots \\
&+ (-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

6. 有穷集合的基数

定理6.8

设S为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$都是有穷集S的子集，则

$$
\begin{aligned}
&|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c| \\
=&|S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\
+&(-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}
$$

6. 有穷集合的基数

例：

在1000名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中804人掌握了英语，205人掌握了日语，190人掌握了俄语，125人既掌握了英语又掌握了日语，57人既掌握了日语又掌握了俄语，85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生，英语、日语、俄语全掌握的有多少人。