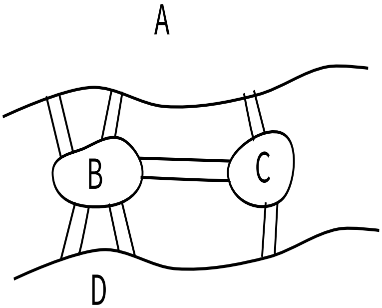
第六章 图的基本概念

6.1 图论的产生与发展史概述



6.2 基本定义

设V是一个集合，V的一切二元子集之集合记为$\mathcal{P}_2(V)$，即

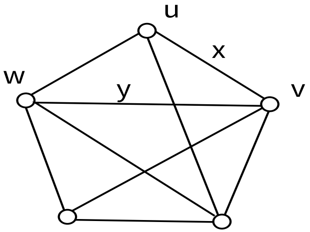
$$\mathcal{P}_2(V) = \{A|A \subseteq V \text{且} |A| = 2\}。$$

定义6.2.1
设V是一个非空有限集合，$E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$，二元组$G = (V, E)$称为一个无向图。$V$中的元素称为无向图$G$的顶点，$V$为顶点集；$E$中的元素称为无向图$G$的边，$E$为边集。无向图简称图。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称$G$为一个$(p, q)$图，即$G$是一个具有$p$个顶点$q$条边的图。

6.2 基本定义

定义6.2.2

在图$G=(V,E)$中，如果$\{u,v\}\in E$,则称顶点u与v邻接;若x与y是图G的两条边，并且仅有一个公共端点，即$|x\cap y|=1$,则称边x与y邻接;如果$x=\{u,v\}$是图G的一条边，则称u与x互相关联，同样的，称v与x互相关联。



定义6.2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为多重图，这些边称为多重边; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为带环图，这些边称为环;允许有环或多重边存在的图，称之为伪图。

6.2 基本定义

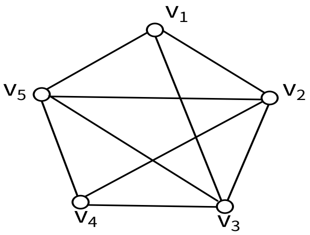
定义6.2.4

设$G=(V,E)$为一个图，如果$E=\Phi$,则称G为零图; $(1,0)$图称为平凡图。

6.2 基本定义

定义6.2.5

设v为图$G=(V,E)$的任意一个顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为$\deg x$。

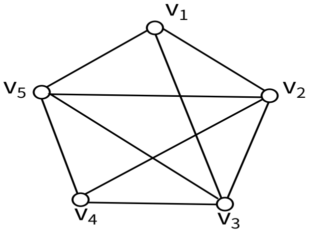


G

6.2 基本定义

定理6.2.1

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

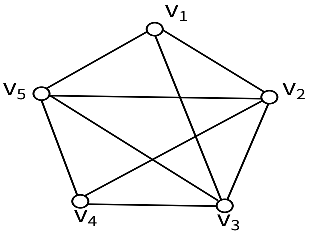


G

定理6.2.2

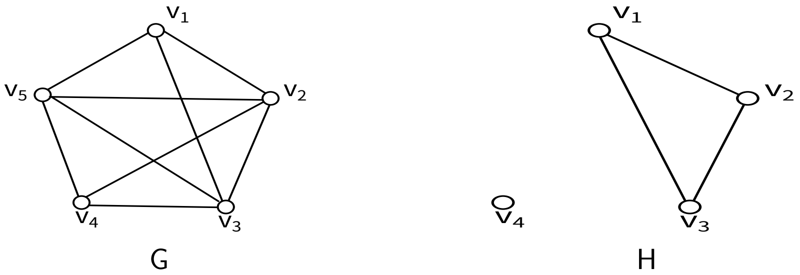
设$G = (V, E)$是一个具有p个顶点q条边的图，则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍，即

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$

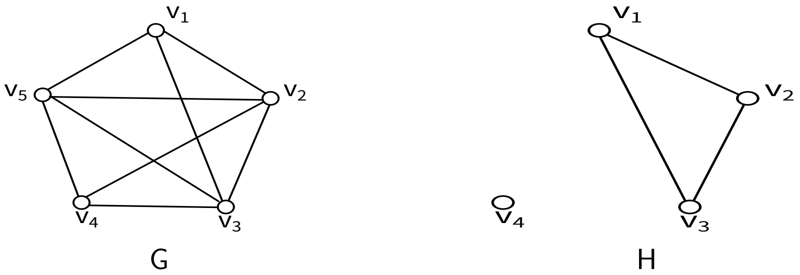


G

6.2 基本定义



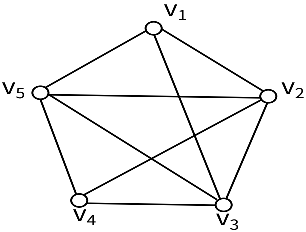
6.2 基本定义



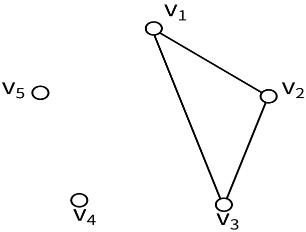
定义6.2.6

设$G = (V, E)$是一个图，如果V_1是V的非空子集，E_1是E的非空子集并且E_1中每条边的顶点都在V_1中，则称图$H = (V_1, E_1)$ 为G的一个子图。 如果$H \neq G$，则称H为G的真子图。

6.2 基本定义

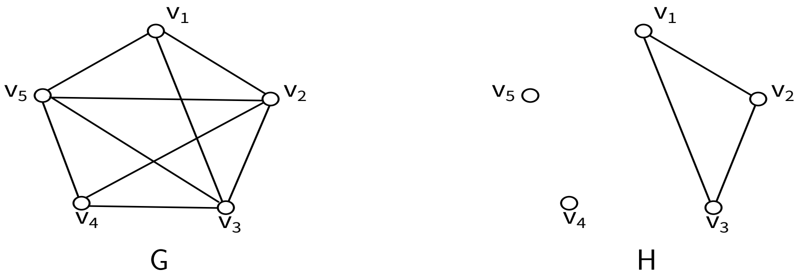


G



H

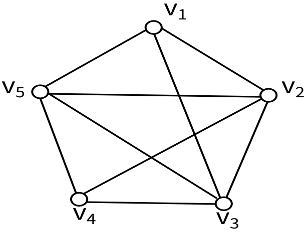
6.2 基本定义



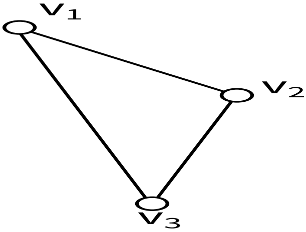
定义6.2.7

设$G = (V, E)$是一个图，如果$F \subseteq E$，则称G的子图$H = (V, F)$为G的一个生成子图。

6.2 基本定义

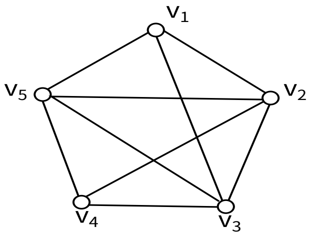


G

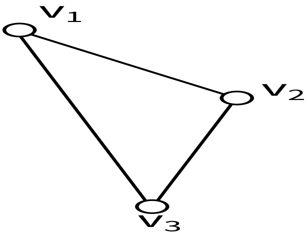


H

6.2 基本定义



G

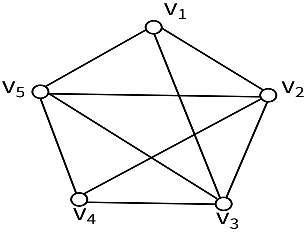


H

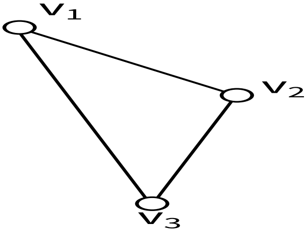
定义6.2.8

设G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的真子图，则称H是具有此性质的极大子图。

6.2 基本定义



G



H

定义6.2.8

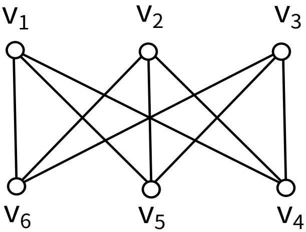
设G的子图H具有某种性质，若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的真子图，则称H是具有此性质的极大子图。

定义6.2.9

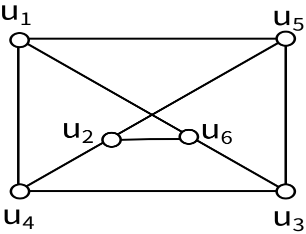
设S为图$G = (V, E)$的顶点集V的非空子集，则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图，记为$\langle S\rangle$。 形式的，

$$\langle S\rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

6.2 基本定义

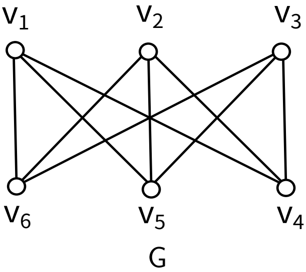


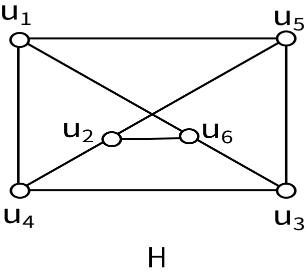
G



H

6.2 基本定义





定义6.2.10

设$G = (V, E)$，$H = (U, F)$是两个图，如果存在一个一一对应$\phi : V \to U$，使得$\{u, v\} \in E$当且仅当$\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$,则称$G$与$H$同构。

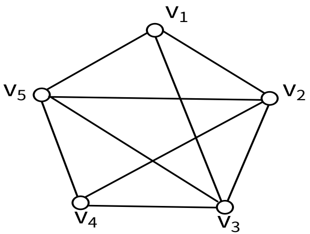
6.3 路、圈、连通图

定义6.3.1

设$G=(V,E)$是一个图。G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。$n$称为通道的长。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2\ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时，则称此通道为闭通道。

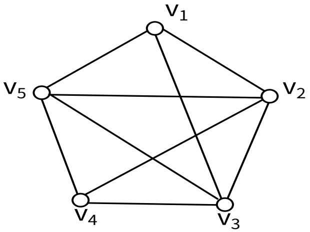


G

6.3 路、圈、连通图

定义6.3.2

如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

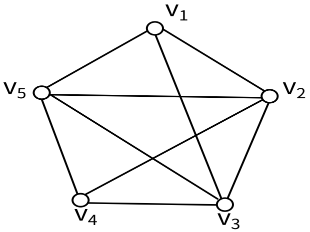


G

6.3 路、圈、连通图

定义6.3.3

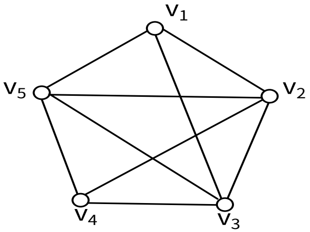
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。



G

6.3 路、圈、连通图

定义6.3.4
设$G = (V, E)$为图，如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G是一个联通图。



G

定义6.3.5

图G的极大连通子图称为G的一个支。

6.3 路、圈、连通图

定理6.3.1
设$G=(V,E)$是一个图。在V上定义二元关系$\simeq$如下：

$$\forall u,v\in V,u\simeq v\text{当且仅当}u\text{与}v\text{间有一条路},$$

则$\simeq$是V上的等价关系，G的支就是关于$\simeq$的每个等价类的导出子图。

6.4 补图、偶图

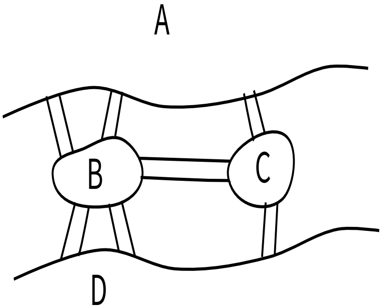
定义6.4.1

设$G=(V,E)$是一个图，图$G^c=(V,\mathcal{P}_2(V)\setminus E)$称为$G$的补图。如果$G$与$G^c$同构，则称$G$是自补图。

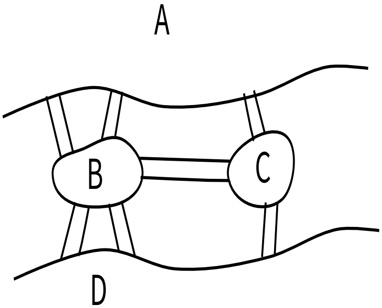
定义6.4.2

设$G=(V,E)$是一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1,V_2\}$，使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为偶图。如果$\forall u \in V_1, v \in V_2$均有$uv \in E$，则称$G$为完全偶图，记为$K_{m,n}$，其中$|V_1|=m, |V_2|=n$。

6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



定义6.5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹。存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

6.5 欧拉图

定理6.5.1
图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度是偶数。

6.5 欧拉图

定义6.5.2
包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

6.5 欧拉图

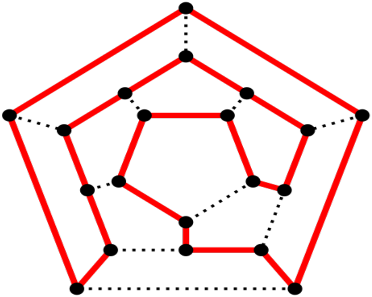
定理6.5.2

图G有一条欧拉迹当且仅当G是连通的且恰有两个奇度顶点。

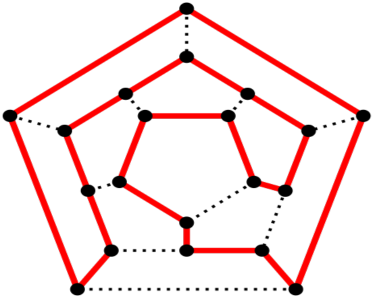
定理6.5.3

设G是连通图，G恰有$2n$个奇度顶点，$n \geq 1$，则G的全部边可以排成n条开迹，而且至少有n条开迹。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图



定义6.6.1

图G的一条包含所有顶点的路称为G的一条哈密顿路;图G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

6.6 哈密顿图

定理6.6.1

设G是有$p(p \geq 3)$个顶点的图。如果对G的任一对不邻接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则G是一个哈密顿图。

6.6 哈密顿图

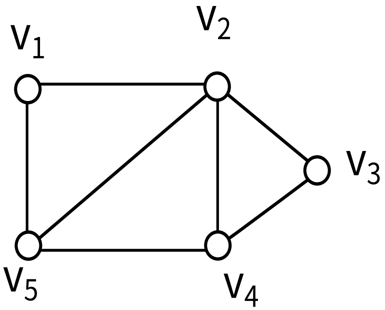
定理6.6.2

设G是一个有p个顶点的图，如果对G的每一对不临接的顶点u和v，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则G有哈密顿路。

6.7 图的邻接矩阵



6.8 带权图与最短路问题