第四章无穷集合及其基数

1. 可数集

定义1.1

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

1. 可数集

定义1.1
如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义1.2
如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一一对应$f:\mathbb{N} \to X$，则称集合X是可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

1. 可数集

定义1.1

如果从集合X到集合Y存在一个双射，则称X与Y对等，记为$X \sim Y$。

定义1.2

如果从自然数集$\mathbb{N}$到集合X存在一个一一对应$f : \mathbb{N} \to X$，则称集合X是可数无穷集合，简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合，则称X为不可数无穷集合，简称不可数集。

定理1.1

集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

因此，A可写成$A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$。

1. 可数集

定理1.2

设A为可数集合，B为有穷集合，则$A\cup B$为可数集。

1. 可数集

定理1.3

设A与B为两个可数集，则$A \cup B$为可数集。

1. 可数集

定理1.4

设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为可数集合的一个无穷序列，则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

1. 可数集

定理1.5

设A与B为两个可数集，则$A \times B$为可数集。

1. 可数集

定理1.6

全体有理数之集$\mathbb{Q}$是可数集。

2 连续统集

定理2.1
区间$[0,1]$中的所有实数构成的集合是不可数集。

2 连续统集

定义2.1

凡与集合$[0,1]$存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

2 连续统集

定理2.2
无穷集合必包含有可数子集。

2 连续统集

定理2.2
无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3
设M是一个无穷集合，A是至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

2 连续统集

定理2.2
无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3
设M是一个无穷集合，A是至多可数集合，则$M \sim M \cup A$。

定理2.4
设M为无穷集合，A为M的至多可数子集，$M \setminus A$为无穷集合，则$M \sim M \setminus A$。

2 连续统集

定理2.5

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个两两不相交的连续统，则$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$是连续统。

2 连续统集

定理2.6
设$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$为两两不相交的集序列。如果$A_k \sim [0,1], k=1,2,\cdots$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论2.1
全体实数之集是一个连续统。

推论2.2
全体无理数之集是一个连续统。

2 连续统集

$\mathrm{K}(P)$

```
if H(P, P) == 1
        return
else Loop forever
```

3 基数及其比较

定义3.1
集合A的基数是一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为$|A|$。

定义3.2
所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义3.3
集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当$A \sim B$。

定义3.4

α，β是任意两个基数，A,B是分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

3 基数及其比较

定义3.4

α，β是任意两个基数，A,B是分别以α，β为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称α小于基数β，记为$\alpha < \beta$。

显然，

$\alpha \leq \beta$当且仅当存在单射$f : A \to B$。

$\alpha < \beta$当且仅当存在单数$f : A \to B$且不存在A到B的双射。

3 基数及其比较

定理3.1 (康托)

对任一集合M，$|M| < |2^M|$。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理4.1 (康托-伯恩斯坦)

设A，B是两个集合。如果存在单射$f: A \to B$与单射$g: B \to A$，则A与B的基数相等。

4 康托-伯恩斯坦定理

定理4.2 (塔斯基不动点定理)

设$(A, \leq)$为一个完备格(A的任一非空子集均有上确界和下确界)，$f : A \to A$为单调函数($\forall x, y \in A, x \leq y \to f(x) \leq f(y)$)，则$\exists z \in A$，使得$f(z) = z$。

定理4.3 (巴拿赫映射分解定理)

设A, B为任意两个集合，f为从A到B的映射，g为从B到A的映射，则存在A的划分$\{A_1, A_2\}$和B的$\{B_1, B_2\}$，使得

$$f(A_1) = B_1, g(A_2) = B_2.$$

5 公理集合论

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

5 公理集合论

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^{+} \in A)$$

5 公理集合论

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B \forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

$$(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \wedge dom F = dom R)$$

5 公理集合论

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{N} \to n++ \in \mathbb{N}$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$;
4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \to n++ \neq m++$;
5. $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \to p(n++)) \to \forall n p(n)$。

5 公理集合论

设$x, y, z \in \mathbb{R}$，则

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $0 + x = x + 0 = x$
4. $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5. $x * y = y * x$
6. $(x * y) * z = x * (y * z)$
7. $1 * x = x * 1 = x$
8. $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9. $x * (y + z) = x * y + x * z$
10. $(y + z) * x = y * x + z * x$

5 公理集合论

1. $x \leq x$
2. $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3. $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4. $x \leq y \vee y \leq x$
5. $x > y \rightarrow x + z > y + z$
6. $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
7. $\forall A \subseteq \mathbb{R}(A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R((\forall y \in A(y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}(\forall y \in A(y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$