第八章 连通度和匹配

陈建文

1. 顶点连通度和边连通度

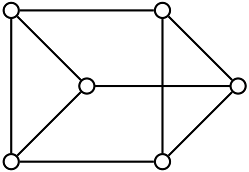
定义 1.1

图G的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

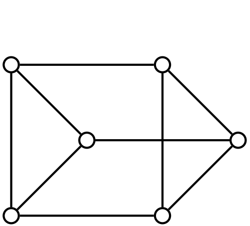
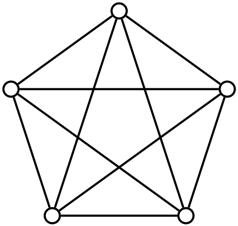
图G的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。



1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.1

图G的顶点连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点数目，记为$\kappa(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

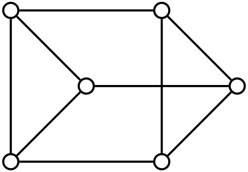
定义 1.2

图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

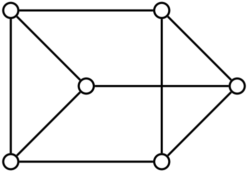
图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

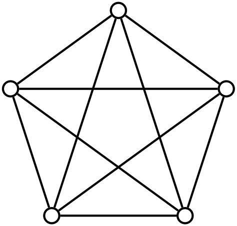


1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。

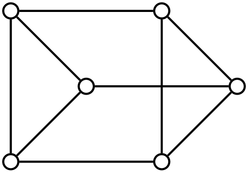


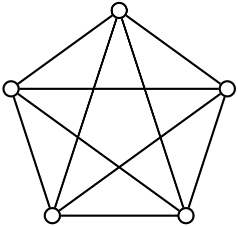


1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.2

图G的边连通度是指为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边的数目，记为$\lambda(G)$。





1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.
- $\delta(G) = 0$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$

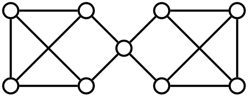
1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



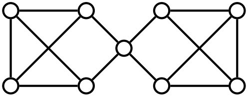
1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

1. 顶点连通度和边连通度

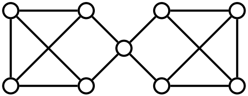
定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

- G为完全图

1. 顶点连通度和边连通度

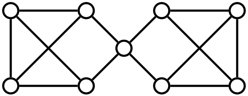
定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

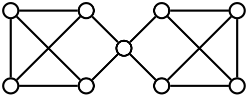
- G为完全图
- G不连通

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.1
对任一图G，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$。

证明.

(1) 先证$\lambda(G) \le \delta(G)$.
- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \le \lambda(G)$.
- G为完全图
- G不连通
- G为连通的非完全图

1. 顶点连通度和边连通度

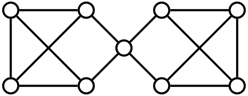
定理 1.1

对任一图G，有 $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$。

证明.

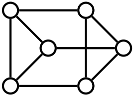
(1) 先证$\lambda(G) \leq \delta(G)$.

- $\delta(G) = 0$
- $\delta(G) > 0$



(2) 再证$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

- G为完全图
- G不连通
- G为连通的非完全图



$\square$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.2

对任何整数a, b, c，$0 < a \le b \le c$，存在一个图G使得

$$\kappa(G) = a, \lambda(G) = b, \delta(G) = c$$

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G = (V, E)$有p个顶点且$\delta(G) \geq [\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G) = \delta(G)$。

证明.

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的
真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰
有$\lambda(G)$条。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为F。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为F。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为F。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任一顶点， v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的
真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰
有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为F。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨
设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个
顶点邻接。否则，如果A中的某个顶点u只与A中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任一顶点， v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点
邻接，则$\deg v=x+y$。 v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集
合记为F_1，则$F_1\subseteq F$；

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果$G$不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在$V$的真子集$A$使得$G$中联结$A$中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为$F$。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任一顶点， v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。 v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_1，则$F_1\subseteq F$； v与A中的y个顶点邻接，而这y个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_2，则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.3

设$G=(V,E)$有p个顶点且$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，则$\lambda(G)=\delta(G)$。

证明.

$\lambda(G)\leq\delta(G)$显然成立，只需要证明$\lambda(G)\geq\delta(G)$。
因为$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，所以$G$是连通的。如果$G$为平凡图，
则$\lambda(G)=\delta(G)=0$。如果G不是平凡图，则$\lambda(G)>0$，从而存在V的真子集A使得G中联结A中的一个顶点与$V\setminus A$中的一个顶点的边恰有$\lambda(G)$条。所有这些边的集合记为F。
由$|A|+|V\setminus A|=p$知必有$|A|\leq[\frac{p}{2}]$或者$|V\setminus A|\leq[p/2]$。不妨设$|A|\leq[\frac{p}{2}]$。 由于$\delta(G)\geq[\frac{p}{2}]$，$A$中的每个顶点至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接。否则，如果$A$中的某个顶点$u$只与$A$中的顶点邻接，
则$\deg u\leq|A|-1\leq[\frac{p}{2}]-1<\delta(G)$，矛盾。
设v为A中的任一顶点， v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，与A中的y个顶点邻接，则$\deg v=x+y$。 v与$V\setminus A$中的x个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_1，则$F_1\subseteq F$； v与A中的y个顶点邻接，而这y个顶点中的每个顶点都至少与$V\setminus A$中的一个顶点邻接，所对应的边的集合记为F_2，则$F_2\subseteq F$ 并且$F_1\cap F_2=\phi$，从而

$$\lambda(G)\geq|F_1|+|F_2|\geq x+y=\deg v\geq\delta(G)$$

1. 顶点连通度和边连通度

定义 1.3

设G是一个图，如果$\kappa(G) \geq n$，则称G是n-顶点连通的，简称n-连通;如果$\lambda(G) \geq n$，则称G是n-边连通的。

1. 顶点连通度和边连通度

定理 1.4

设$G=(V,E)$是有p个顶点的图，$p\geq 3$，则G是2-连通的，当且仅当G的任意两个不同的顶点在G的同一个圈上。

3. 匹配、霍尔定理

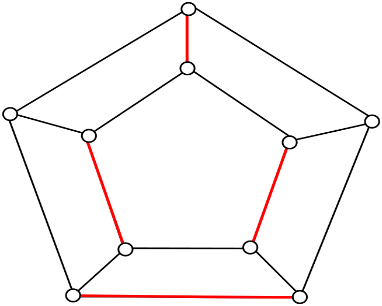
定义 3.1

设$G=(V,E)$是一个图，G的任两条不邻接的边x与y称为互相独立的。G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条边都是互相独立的。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.1

设$G=(V,E)$是一个图，G的任两条不邻接的边x与y称为互相独立的。G的边集E的子集Y称为G的一个匹配，如果Y中任意两条边都是互相独立的。



3. 匹配、霍尔定理

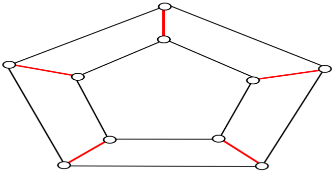
定义 3.2

设Y是图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.2

设Y是图$G=(V,E)$的一个匹配，如果$2|Y|=|V|$，则称Y为G的一个完美匹配。



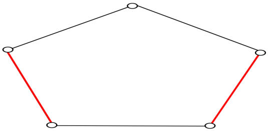
3. 匹配、霍尔定理

定义 3.3

设Y是图$G=(V,E)$的一个匹配，如果对于G的任一匹配Y'，恒有$|Y'|\leq|Y|$，则称Y为G的一个最大匹配。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.3
设Y是图$G=(V,E)$的一个匹配，如果对于G的任一匹配Y'，恒有$|Y'|\le|Y|$, 则称Y为G的一个最大匹配。



定义 3.4

设$G=(V,E)$是一个偶图且$V=V_1\cup V_2,\forall x\in E$，$x$是联结$V_1$的一个顶点与$V_2$的一个顶点的边。如果存在$G$的一 个匹配$Y$使得$|Y|=min\{|V_1|,|V_2|\}$，则称$Y$是偶图$G$的一个完全匹配。

3. 匹配、霍尔定理

定义 3.5

设X为一个有穷集合，$A_1, A_2, \ldots, A_n$为X的子集的一个序列，由X的互不 相同的元素构成的序列$s_1, s_2, \ldots, s_n$称为系统

$$T : A_1, A_2, \ldots, A_n$$

的相异代表系，如果$s_i \in A_i$，$i = 1, 2, \ldots, n$。

匹配

定理 3.1

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A，$|N(A)|\geq|A|$，其中

$$N(A)=\{y\in V_2|\exists x\in A\{x,y\}\in E\}$$

。

参考文献

D. Gale and L. S. Shapley.
College Admissions and the Stability of Marriage.
The American Mathematical Monthly, 1962.