1 示例

习题 1. 设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

设V为一个非空有限集合，$E \subseteq \{\{u, v\} | u \in V, v \in V, u \neq v\}$， 二元组$G = (V, E)$称为一个**无向图**。$V$中的元素称为无向图$G$的**顶点**，$V$为**顶点集**；$E$中的元素称为无向图$G$的**边**， E为**边集**。无向图简称**图**。如果$|V| = p$，$|E| = q$，则称G 为一个(p, q)图，即G是一个具有p个顶点q条边的图。

设$G = (V, E)$为一个图。G的一条**通道**是G的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \ldots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中$x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \ldots, n$。这样的通道常称为$v_0 - v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2 \ldots v_n$。当$v_0 = v_n$时，则称此通道为**闭通道**。

如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**。

设$G = (V, E)$为一个图，如果G中任意两个不同顶点间至少有一条路联结，则称G为一个**连通图**。

连通且无圈的无向图称为无向树，简称**树**。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k + 1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假 设，$q - 1 = k - 1$， 从而$q = (k + 1) - 1$， 即当$p = k + 1$时结论也成立。 □

习题1′. 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$。

习题 2. 设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$,结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉T中任意一条边， 得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此是树。设T_1有p_1个顶点， k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。 □

习题2′. 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

2 答案

习题1′. 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则 $p - q + f = 2$。

图G称为被嵌入平面S内，如果G的图解已画在S上，而且任何两条边均不相交（除可能在端点相交外）。 已嵌入平面内的图称为**平面图**。如果一个图可以嵌入平面，则称此图是**可平面**的。

平面图G把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为G的**面**，其中无界的那个连通区域称为G的**外部面**，其余的连通区域称为G的**内部面**。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f = 1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q = p - 1$,$p - q + f = 2$成立。

（2）假设当$f = k$时结论成立，往证当$f = k + 1$时结论也成立。假设G有$k + 1$个面， $k \geq 1$。此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G - x$就是一个有p个顶点，$q - 1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G - x$结论成立，即

$$p - (q - 1) + k = 2$$

因此，

$$p - q + (k + 1) = 2$$

即当$f = k + 1$时结论也成立。 □

习题2′. 设$G = ((V_1, V_2), E)$为偶图，存在G的一个完全匹配Y且$|Y| = |V_1|$的充分必要条件是对V_1的任意子集A， $|N(A)| \geq |A|$，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

设$G = (V, E)$为一个图,如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$，使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，则称G为**偶图**，记为 $G = ((V_1, V_2), E)$。

设$G = (V, E)$为一个图，一个边的集合M称为G的一个**匹配**，如果M中的任意两条边都没有公共顶点。

设$G = ((V_1, V_2), E)$为一个偶图,如果存在G的一个匹配Y使得 $|Y| = min\{|V_1|, |V_2|\}$，则称$Y$为偶图$G$的一个**完全匹配**。

证明.

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，如果存在G的一个完全匹配Y且$|Y|=|V_1|$，则显然对 V_1的任意子集A， $|N(A)|\geq|A|$。

设$G=((V_1,V_2),E)$为偶图，对V_1的任意子集A， $|N(A)|\geq|A|$，以下用数学归纳法证明存在G的一个完全匹配Y使得$|Y|=|V_1|$，施归纳于$|V_1|$。

(1)当$|V_1|=1$时，设V_1中唯一的一个元素为u，由$|N(V_1)|\geq|V_1|$知 $N(V_1)$中至少含有一个元素v，则$\{\{u,v\}\}$构成了G的一个满足条件的完全匹配。

(2)假设当$|V_1|<k$时结论成立，往证当$|V_1|=k$时结论也成立。 设$|V_1|=k$，分以下两种情况讨论:

（i）对V_1的任意真子集A，$|N(A)|>|A|+1$。取V_1中的任意一个元素u，由于$|N(\{u\})|\geq 1$， 可取 $N(\{u\})$中的一个元素v使得$uv\in E$。 考虑偶图$G-\{u,v\}$，对任意的 $V_1\setminus\{u\}$的子集B， $|N(B)|\geq|B|$。由归纳假设，偶图$G-\{u,v\}$ 有一个完全匹配Y'且$|Y'|=|V_1\setminus\{u\}|$。$Y'\cup\{\{u,v\}\}$即为G的 一个完全匹配，且$|Y'\cup\{\{u,v\}\}|=|V_1|$。

（ii）存在V_1的真子集A，$|N(A)|=|A|$。

考虑图G中由$A\cup N(A)$导出的子图G_1以及由$(V_1\setminus A)\cup N(V_1\setminus A)$导出的子图$G_2$。 G_1为偶图，且在G_1中对A的任意子集B，$|N(B)|\geq|B|$。 G_2为偶图，且在G_2中对集合$V_1\setminus A$的任意子集C， $|N(C)|\geq|C|$， 这是因为如果$|N(C)|<|C|$, 则$|N(C\cup A)|<|C\cup A|$， 与前提条件矛盾。由归纳假设，G_1有完全匹配M_1，$|M_1|=|A|$，G_2有完全匹配M_2，$|M_2|=|V_1\setminus A|$。于是$M_1\cup M_2$构成了G的完全匹配，且$|M_1\cup M_2|=|V_1|$。

□