第七章树和割集

陈建文

1. 树及其性质

定义1.1
连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。

1. 树及其性质

定义1.1

连通且无圈的无向图称为无向树，简称树。一个没有圈的无向图称为无向森林，简称森林。

1. 树及其性质

定理1.1

设$G=(V,E)$是一个(p,q)图，则下列各命题等价：

(1) G是树；

(2) G的任两个不同顶点间有唯一的一条路联结；

(3) G是连通的且去掉任意一条边则得到一个不连通的图；

(4) G是连通的且$q=p-1$；

(5) G中无圈且$q=p-1$；

(6) G中无圈且G中任两个不邻接的顶点间加一条边则得到一个含有圈的图。

2. 生成树

定义2.1

设$G = (V, E)$是一个图，G的一个生成子图$T = (V, F)$如果是树，则称T为G的生成树。

2. 生成树

定义2.1

设$G = (V, E)$是一个图，G的一个生成子图$T = (V, F)$如果是树，则称T为G的生成树。

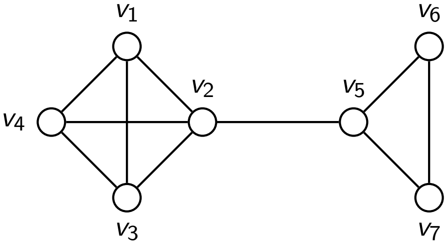
定理2.1

图G有生成树的充分必要条件是G为一个连通图。

3. 割点、桥和割集

定义3.1

设v是图G的一个顶点，如果$G-v$的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个割点。



3. 割点、桥和割集

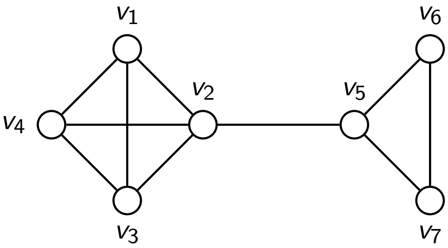
定理3.1

设v是连通图$G=(V,E)$的一个割点，则下列命题等价：

(1) v是图G的一个割点；

(2) 集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U,W\}$，使得$\forall u\in U$，$w\in W$，v在联结u和w的每条路上；

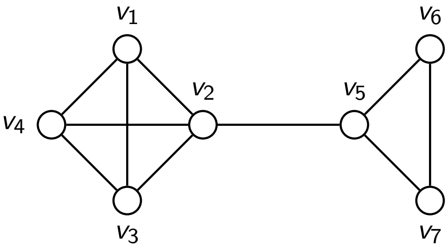
(3) 存在与v不同的两个顶点u和w，使得v在每一条u与w间的路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.2

图G的一条边x称为G的一座桥，如果$G-x$的支数大于G的支数。



3. 割点、桥和割集

定理3.2

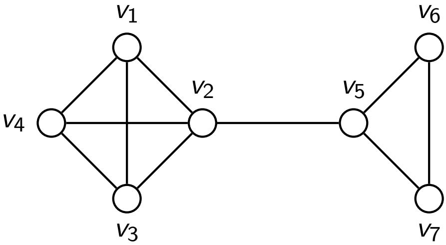
设x是连通图$G=(V,E)$的一条边，则下列命题等价：

(1) x是G的桥；

(2) x不在G的任一圈上；

(3) 存在V的一个划分$\{U,W\}$，使得$\forall u\in U,\forall w\in W$，$x$在每一条连接$u$与$w$的路上；

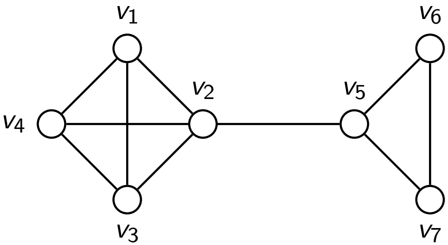
(4) 存在G的不同顶点u和v，使得边x在联结u和v的每条路上。



3. 割点、桥和割集

定义3.3

设$G=(V,E)$是图，$S\subseteq E$。如果从G中去掉S中的所有边得到的图$G-S$的支数大于G的支数，而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数，则称S为G的一个割集。



习题

习题1

分别画出具有4、5、6、7个顶点的所有树（同构的只算一个）。

习题2

令G为一个有p个顶点，k个支的森林。证明：G有$p-k$条边。

习题3

设a_1，a_2，$\cdots$，a_p为p个正整数，$p \geq 2$，并且$\sum_{i=1}^{p} a_i = 2(p-1)$。证明：存在一个具有$p$个顶点的树，它的各个顶点的度分别为$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_p$。