定理 1. 设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。（数学归纳法I，数学归纳法II）

定理 2. 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则$p - q + f = 2$。（数学归纳法I）

定理 3. 若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p \geq 3$，则$q \leq 3p - 6$。（直接证明法）

定理 4. K_5不是可平面图。（反证法）

定理 5. 每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta(G) \leq 5$。（直接证明法，反证法）

定理 6. 每个可平面图是$5-$可着色的。（数学归纳法II）

定理 1. 设树T有p个顶点，q条边，则$q = p - 1$。

证明（证法一）.

用数学归纳法证明，施归纳于顶点数p。

（1）当$p = 1$时，$q = 0$,结论显然成立。

（2）假设当$p = k$时结论成立，往证当$p = k + 1$时结论也成立。设T有$k + 1$个顶点。T中一定存在一个度为1的顶点，这是因为，设P为T中的一条最长路，v为P的一个端点，则v除了P上与其关联的边之外，由T中无圈知v不能再有其他的与P上的顶点相关联的边，同时由P为一条最长路知v不能再有与P外的顶点相关联的边，因此v的度必为１。去掉T中一个度为１的顶点及其与之关联的边，得到的图T'连通且无圈，则T'是树。T'有k个顶点，$q - 1$条边，由归纳假设，$q - 1 = k - 1$，　从而$q = (k + 1) - 1$，　即当$p = k + 1$时结论也成立。 □

证明（证法二）.

用数学归纳法证明，施归纳于边数q。

（1）当$q = 0$时，$p = 1$,结论显然成立。

（2）假设当$q < k$时结论成立，往证当$q = k$时结论也成立。设T有k条边。去掉 T中的任意一条边， 得到两个支T_1和T_2，它们均连通无圈，因此是树。设T_1有p_1个顶点， k_1条边，T_2有p_2个顶点，k_2条边，由归纳假设，

$$k_1 = p_1 - 1$$
$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加,两边再同时加１，得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当$q = k$时结论也成立。 □

定理 2. 如果有p个顶点q条边的平面连通图G有f个面，则$p - q + f = 2$。

证明.

用数学归纳法证明，施归纳于面数f。

（1）当$f=1$时，G中无圈，又因为G是连通的，所以G是树。从而 $q=p-1$,$p-q+f=2$成立。

（2）假设当$f=k$时结论成立，往证当$f=k+1$时结论也成立。假设G有$k+1$个面， $k\geq 1$。此时G至少有一个内部面，从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边x，则 $G-x$就是一个有p个顶点，$q-1$条边，k个面的平面连通图。由归纳假设，对 $G-x$结论成立，即

$$p-(q-1)+k=2$$

因此，

$$p-q+(k+1)=2$$

即当$f=k+1$时结论也成立。 □

定理 3. 若G为一个有p个顶点q条边的可平面图，$p\geq 3$，则$q\leq 3p-6$。

证明. 不妨设G为连通的可平面图，否则可以加边使之变成连通的。由于每个面至少含有3条边，因此

$$2q\geq 3f$$

即

$$\frac{2q}{3}\geq f$$

因此，根据欧拉公式

$$p-q+f=2$$

得

$$p-q+\frac{2q}{3}\geq 2$$

化简得:

$$q\leq 3p-6$$

□

定理 4. K_5不是可平面图。

证明. 用反证法。假设K_5是可平面图，其顶点数$p=5$, 边数$q=10$，此时

$$q\leq 3p-6$$

即

$$10\leq 3\times 5-6=9$$

矛盾。因此K_5不是可平面图。 □

定理 5. 每个可平面图G中顶点度的最小值不超过5,即$\delta\leq 5$。

证明（证法一）．当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。当$p \geq 3$时， 设可平面图G有q个顶点，则

$$\delta p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$\delta p \leq 6p - 12$$

两边同时除以p，得：

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{p}$$

即

$$\delta \leq 5$$

□

证明（证法二）．当图G的顶点数$p = 1, 2$时，结论显然成立。 当$p \geq 3$时，用反证法证明结论也成立。假设$\delta \geq 6$，则

$$6p \leq 2q$$

由G为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$6p \leq 6p - 12$$

矛盾。 □

定理 6. 每个可平面图是5−可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$时结论也成立。设可平面图G有k个顶点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶点的可平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。

如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多 5 种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接 的顶点至多用了4种颜色，用另外一种不同的颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G是5−可着色的。

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G-v$中用c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与顶点v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则图G中将有一个子图K_5，这与图G为可平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将顶点v_i和顶点v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与顶点v_i和顶点v_j相关联的边变为

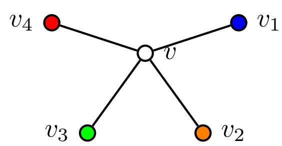

图 1: $\deg v \leq 4$的情况

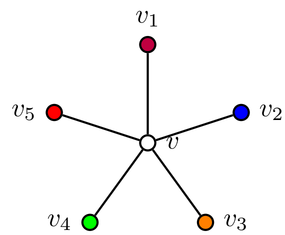

图 2: $\deg v = 5$的情况

与顶点w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然是可平面图。由归纳假设，G'是5−可着色的。 设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G-v$中，顶点v_i和顶点v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G-v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，在G中与顶点v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G是5−可着色的。

$\square$