离散数学

陈建文

February 12, 2020

第 一 章　集合及其运算

定义1.1. 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合A和一个元素a，用$a \in A$表示a是A的一个元素，用$a \notin A$表示a不是A的一个元素。

有两种方法表示一个集合:

1. 把构成集合的那些元素全部列出来
   - $A = \{1, 2, 3\}$
   - $C = \{a, b, c, \ldots, z\}$
2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合$\{x|P(x)\}$
   - $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$,这里$\wedge$表示“并且”，$E$还可以等价的表示为$E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为Φ。

定理1.1. 空集为任一个集合的子集且空集是唯一的。

定义1.2. 设A，B为两个集合，如果A中的每个元素都是B中的元素，则称A为B的子集，记为$A \subseteq B$; 如果$A \subseteq B$且存在$x \in B$使得$x \notin A$,则称A为B的真子集，记为$A \subset B$。

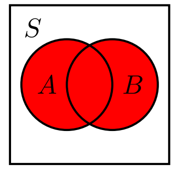
- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

定义1.3. 设A，B为两个集合，如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则称A与B相等，并记为$A = B$。

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R}|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

定义1.4. 集合S的所有子集构成的集合称为S的幂集，记为2^S或者$\mathcal{P}(S)$。

例. 设$S = \{1, 2, 3\}$，则$2^s = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$。

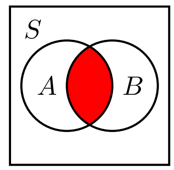


定义1.5. 设A, B为任意的两个集合，至少属于集合A与集合B之一的那些元素构成的集合称为A与B的并集，记为$A \cup B$。

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

（这里$\vee$表示“或者”）

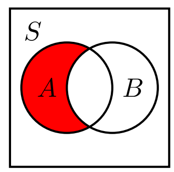
例. $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$



定义1.6. 设A, B为任意的两个集合，由既属于集合A又属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的交集，记为$A \cap B$。

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

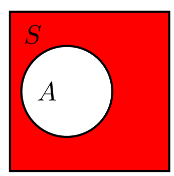
例. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$



定义1.7. 设A, B为任意的两个集合，由属于集合A但不属于集合B的所有元素构成的集合称为A与B的差集，记为$A \setminus B$。

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

例. $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$



定义1.8. 在许多实际问题中，常以某个集合S为出发点，而所涉及的集合都是S的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合S，称为该问题的全集。如果A为S的子集，则差集$S \setminus A$称为集合A对集合S的余集，记为A^c。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$

例. $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$, 则$A^c = \{1\}$

定理1.2. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
5. $A \cup S = S$, $A \cap S = A$.
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $A \cup A^c = S$, $A \cap A^c = \emptyset$.
8. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$, $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
8'. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

以下只证明结论 6 的第一条，其他结论的证明留给读者自己完成。
首先在草稿纸上做如下的分析。

$$
\begin{aligned}
&\forall x, x \in A \cap (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

然后将上面的分析转化为证明如下：

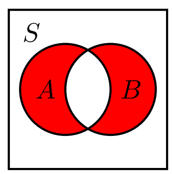
证明. 先证$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

对任意的x，如果$x \in A \cap (B \cup C)$，则$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，从而$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，因此，$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，即，$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，于是，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

再证$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$。

对任意的x，如果$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，则$x \in A \cap B$ 或者$x \in A \cap C$，从而$x \in A$并且$x \in B$，或者$x \in A$并且$x \in C$，因此，$x \in A$，并且$x \in B$或者$x \in C$，即，$x \in A$并且$x \in (B \cup C)$，于是，$x \in A \cap (B \cup C)$。 □

定义1.9. 设A, B为任意的两个集合，$A \setminus B$与$B \setminus A$的并集称为A与B的对称差，记为$A \triangle B$。



$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

例. $\{1,2\} \triangle \{2,3\} = \{1,3\}$

定理1.3. 设S为全集，$A \in 2^S$，$B \in 2^S$，则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.4. 设S为全集，$\emptyset$为空集，A,B,C为S的子集，则
1. $A \triangle B = B \triangle A$.
2. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. $\emptyset \triangle A = A$.
4. $A \triangle A = \emptyset$.
5. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

证明. 以下证明结论 2 ，其他结论留给读者思考。

因为

$$x \in A \triangle B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B), \tag{1.1}$$

所以

$$
\begin{aligned}
x \notin A \triangle B &\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

于是

$$\begin{aligned}
&x \in (A \triangle B) \triangle C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \triangle B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \triangle B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)) \wedge x \notin C) \\
&\vee (((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)) \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
&x \in A \triangle (B \triangle C) \\
&\Leftrightarrow x \in (B \triangle C) \triangle A \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C) \vee (x \notin A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \\
&\vee (x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \in C) \vee (x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

其中(1.4)式的第二行由对称差运算的交换律得到，(1.4)式的第三行由与(1.3)式的对称性得到。

由(1.3)式和(1.4)式可得$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$。 □

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果I为任意一个集合，对I中每个元素α都有一个唯一的集合与之对应，这个集合记为A_α，那么所有这些A_α形成的集族可以用$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$表示，其中$I$称为标号集。

定义1.11. 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$中所有集合的并集$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I 使得 x \in A_\alpha\}$$

集族$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$中所有集合的交集$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 设$I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \le 1\}$，$\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$，则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = ?, \bigcap_{x \in I} A_x = ?$$

定理1.5. 设A为任意集合，$\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$为任意一个集族，则

1. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$
2. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
3. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
4. $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为a ，第二个对象为b ，则该有序对记为(a,b)。$(a,b)=(c,d)$ 当且仅当$a=c$ 并且$b=d$。

定义1.13. 设A与B为任意两个集合，则称集合$\{(a,b)|a\in A$且$b\in B\}$ 为A与B的笛卡尔乘积，记为$A\times B$。即

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A\text{且}b\in B\}$$

例. 如果$X=\{1,2\}$，$Y=\{3,4,5\}$，那么$X\times Y=?$，$Y\times X=?$

$$X\times Y=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$
$$Y\times X=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$$

定义1.14. n个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个n元组。如果第一个对象为a_1，第二个对象为a_2，...，第n个对象为a_n，则该n元组记为$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$。$(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$当且仅当$a_1=b_1$,$a_2=b_2$，...，$a_n=b_n$。

定义1.15. 设A_1, A_2，...，A_n为任意n个集合，则称集合

$$\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\ldots,n\}$$

为$A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的笛卡尔乘积，记为$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，简记为$\prod_{i=1}^{n}A_i$。即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

例. 如果$X=\{a_1,b_1\}$，$Y=\{a_2,b_2\}$，$Z=\{a_3,b_3\}$ 那么$X\times Y\times Z=?$

$$\begin{aligned}X\times Y\times Z=&\{(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_2,b_3),(a_1,b_2,a_3),(a_1,b_2,b_3),\\&(b_1,a_2,a_3),(b_1,a_2,b_3),(b_1,b_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\}\end{aligned}$$

定义1.16. 设X和Y为两个非空集合。一个从X到Y的映射f为一个法则，根据f，对X中的每个元素x都有Y中唯一确定的元素y与之对应。从X到Y的映射f常记为$f:X\to Y$。

定义1.17. 设$f:X\to Y$，如果$\forall x_1,x_2\in X$，只要$x_1\neq x_2$，就有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为从X到Y的单射。

定义1.18. 设$f:X\to Y$，如果$\forall y\in Y$，$\exists x\in X$使得$f(x)=y$，则称f为从X到Y的满射。

定义1.19. 设$f:X\to Y$，如果f既是单射又是满射，则称f为从X到Y的双射，或者称f为从X到Y的一一对应。

定义1.20. 设A为一个集合，如果$A=\Phi$，其基数定义为0;如果$A\neq\Phi$且存在一个自然数n使得A与集合$\{1,2,\ldots,n\}$之间存在一个一一对应，则定义A的基数为n。A的基数记为$|A|$。如果$|A|$为0或某个自然数n，则称A为有穷集;如果A不是有穷集，则称A为无穷集。

定理1.6. 设A, B为两个不相交的有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理1.7. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个两两不相交的有穷集，则

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

定理1.8. 设A, B为有穷集，则$|A \times B| = |A| \cdot |B|$。

定理1.9. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$

定理1.10. 设S为有穷集，$A \subseteq S$，则$|A^c| = |S| - |A|$。

定理1.11. 设A, B为有穷集，则$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。

定理1.12. 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有穷集，则

$$\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
=&\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
-&\ldots \\
+&(-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于n:

当$n = 1$时，结论显然成立。

假设定理的结论对$n \geq 1$个有穷集合成立，往证对$n+1$个有穷集合定理的结论也成立。实际上，

$$\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
=&|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| \\
=&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|
\end{aligned} \tag{1.5}$$

由归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n|
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&|(A_1\cap A_{n+1})\cup(A_2\cap A_{n+1})\cup\dots\cup(A_n\cap A_{n+1})| \\
=&\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n}|(A_i\cap A_{n+1})\cap(A_j\cap A_{n+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<k\le n}|(A_i\cap A_{n+1})\cap(A_j\cap A_{n+1})\cap(A_k\cap A_{n+1})| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{n+1}|(A_1\cap A_{n+1})\cap(A_2\cap A_{n+1})\cap\dots\cap(A_n\cap A_{n+1})| \qquad (1.7)\\
=&\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n}|(A_i\cap A_j\cap A_{n+1})| \\
&+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_{n+1}| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n\cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

将(1.6)和(1.7)代入(1.5)得

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i| \\
&=\sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n+1}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n+1}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\
&-\dots \\
&+(-1)^{n+1+1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n+1}|
\end{aligned}
$$

□

例. 在*1000*名大学毕业生的调查中，每个人至少掌握了一门外语，其中*804*人掌握了英语，*205*人掌握了日语，*190*人掌握了俄语，*125* 人既掌握了英语又掌握了日语，*57*人既掌握了日语又掌握了俄语，*85*人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这*1000*名大学生，英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

练习1.1. 设集合$S=\{\phi,\{\phi\}\}$，则$2^S=$______。

练习1.2. 下列命题中哪个是假的?
A. 对每个集合A，$\phi\in 2^A$。
B. 对每个集合A，$\phi\subseteq 2^A$。
C. 对每个集合A，$A\in 2^A$。
D. 对每个集合A，$A\subseteq 2^A$。

练习1.3. 设集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则$A\cup B=$______，$A\cap B=$______，$A\setminus B=$______，$A\triangle B=$______，$A\times B=$______。

练习1.4. 设A，B，C为集合，证明：$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

证明. 先证$(A\cup B)\setminus C\subseteq(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

对任意的x，如果$x\in(A\cup B)\setminus C$，则$x\in(A\cup B)$并且$x\notin C$， 从而$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\notin C$，即$x\in A$并且$x\notin C$成立，或者$x\in B$并且$x\notin C$成立。于是，$x\in A\setminus C$或者$x\in B\setminus C$，因此，$x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$。

再证$(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\subseteq(A\cup B)\setminus C$。

对任意的x，如果$x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$，则$x\in A\setminus C$或者$x\in B\setminus C$，从而$x\in A$并且$x\notin C$成立，或者$x\in B$并且$x\notin C$成立，即$x\in A$或者$x\in B$，并且$x\notin C$，于是$x\in(A\cup B)$并且$x\notin C$, 因此$x\in(A\cup B)\setminus C$。 □

练习1.5. 下列等式是否成立：$(A\cup B)\setminus C=A\cup(B\setminus C)$?

解. 该等式不成立。举反例如下：设$A=\{1\},B=\{1\},C=\{1\}$， 则$(A\cup B)\setminus C=\phi$，而$A\cup(B\setminus C)=\{1\}$， 此时$(A\cup B)\setminus C\neq A\cup(B\setminus C)$。 □

练习1.6. 下列命题中哪个是真的?
A. 对任何集合A，B，$2^{A\cup B}=2^A\cup 2^B$。
B. 对任何集合A，B，$2^{A\cap B}=2^A\cap 2^B$。
C. 对任何集合A，B，$2^{A\setminus B}=2^A\setminus 2^B$。
D. 对任何集合A，B，$2^{A\triangle B}=2^A\triangle 2^B$。

练习1.7. 设A，B，C为集合，并且$A\cup B=A\cup C$，则下列哪个断言成立?
A. $B=C$
B. $A\cap B=A\cap C$
C. $A\cap B^c=A\cap C^c$
D. $A^c\cap B=A^c\cap C$

练习1.8. 设A，B，C，D为任意四个集合，证明
$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

练习1.9. 设A，B，C为集合，化简
$(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$

练习1.10. 证明
1) $A\triangle B=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$
2) $(A\triangle B)^c=(A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$
3) $(A\triangle B)^c=(A^c\cup B)\cap(A\cup B^c)$

第 二 章