

第六章图的基本概念

陈建文

6.1 图论的产生与发展史概述



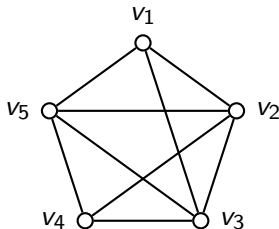
6.2 基本定义

设 V 为一个集合， V 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}。$$

定义2.1

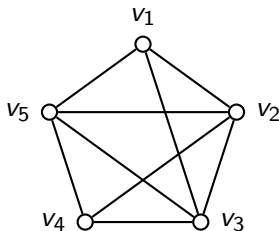
设 V 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 V 中的元素称为无向图 G 的**顶点**， V 为**顶点集**； E 中的元素称为无向图 G 的**边**， E 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 G 为一个 (p, q) 图，即 G 是一个具有 p 个顶点 q 条边的图。



6.2 基本定义

定义2.2

在图 $G = (V, E)$ 中, 如果 $\{u, v\} \in E$, 则称顶点 u 与 v 邻接; 若 x 与 y 是图 G 的两条边, 并且仅有一个公共端点, 即 $|x \cap y| = 1$, 则称边 x 与 y 邻接; 如果 $x = \{u, v\}$ 是图 G 的一条边, 则称 u 与 x 互相关联, 同样的, 称 v 与 x 互相关联。



6.2 基本定义

定义2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为**多重图**，这些边称为**多重边**；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为**带环图**，这些边称为**环**；允许有环或多重边存在的图，称之为**伪图**。

6.2 基本定义

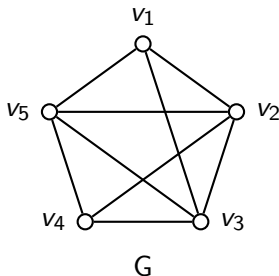
定义2.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $E = \Phi$, 则称 G 为 **零图**; $(1, 0)$ 图称为 **平凡图**。

6.2 基本定义

定义2.5

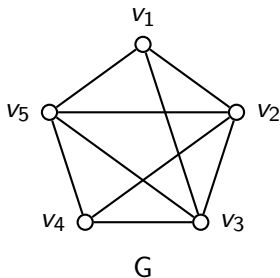
设 v 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， G 中与 v 关联的边的数目称为顶点 v 的度，记为 $\deg v$ 。



6.2 基本定义

定理2.2

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

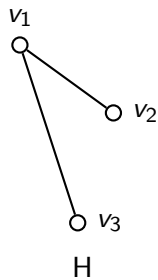
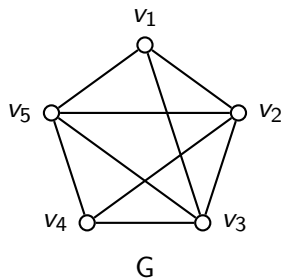


6.2 基本定义

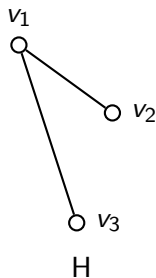
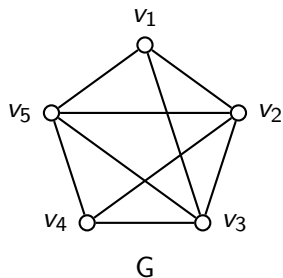
定义2.6

图 G 称为 r 度正则图，如果 G 的每个顶点的度都等于 r 。3度正则图也叫三次图。一个具有 p 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 p 个顶点的完全图，记为 K_p 。

6.2 基本定义



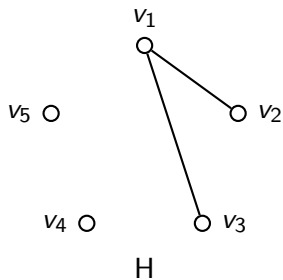
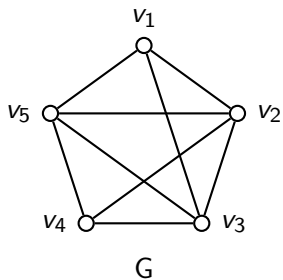
6.2 基本定义



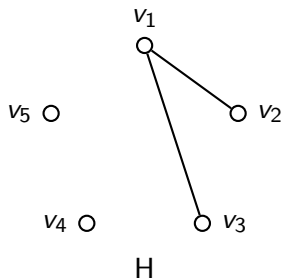
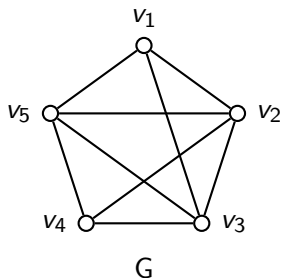
定义2.7

设 $G = (V, E)$ 为一个图，图 $H = (V_1, E_1)$ 称为 G 的一个子图，当且仅当 V_1 为 V 的非空子集且 E_1 为 E 的子集。如果 $H \neq G$ ，则称 H 为 G 的**真子图**。

6.2 基本定义



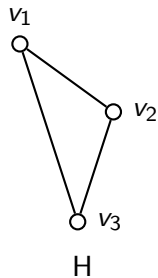
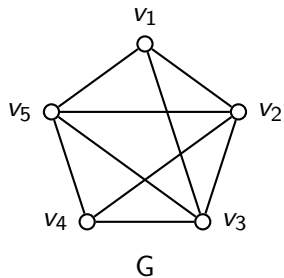
6.2 基本定义



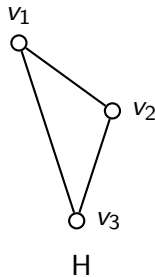
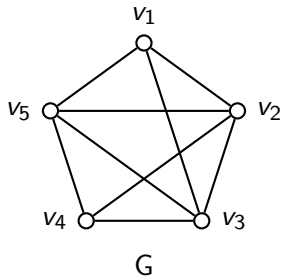
定义2.8

设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $F \subseteq E$ ，则称 G 的子图 $H = (V, F)$ 为 G 的一个生成子图。

6.2 基本定义



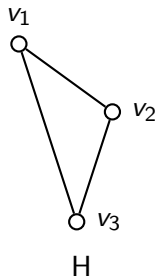
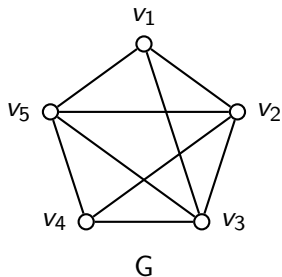
6.2 基本定义



定义2.9

设 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图，则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

6.2 基本定义



定义2.9

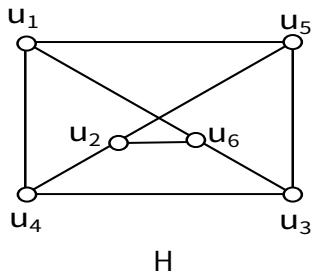
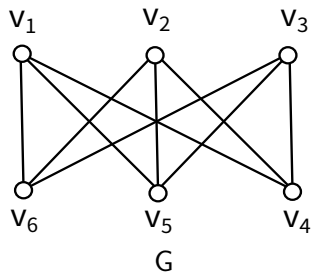
设 G 的子图 H 具有某种性质，若 G 中不存在与 H 不同的具有此性质且包含 H 的子图，则称 H 是具有此性质的**极大子图**。

定义2.10

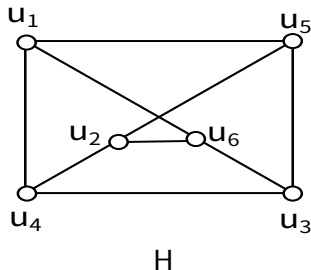
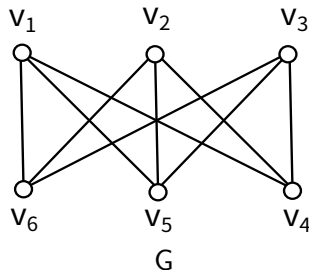
设 S 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 的非空子集，则 G 的以 S 为顶点集的极大子图称为由 S 导出的子图，记为 $\langle S \rangle$ 。形式的，

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

6.2 基本定义



6.2 基本定义



定义2.11

设 $G = (V, E)$, $H = (U, F)$ 为两个图, 如果存在一个一一对应 $\phi: V \rightarrow U$, 使得 $\{u, v\} \in E$ 当且仅当 $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$, 则称 G 与 H 同构。

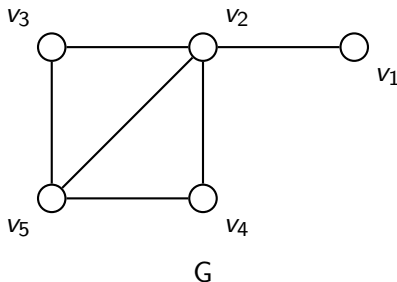
6.3 路、圈、连通图

定义3.1

设 $G = (V, E)$ 为一个图。 G 的一条通道是 G 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

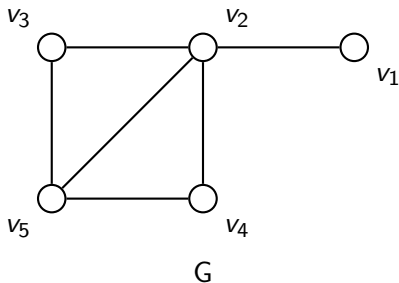
其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。 n 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为闭通道。



6.3 路、圈、连通图

定义3.2

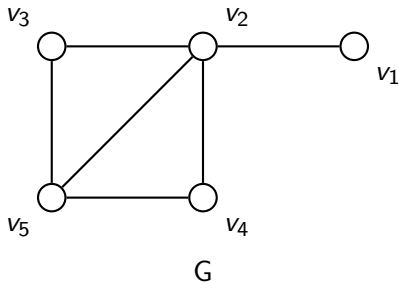
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。



6.3 路、圈、连通图

定义3.3

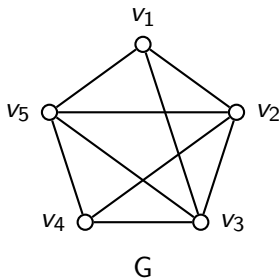
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上除终点外各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**，或**回路**。



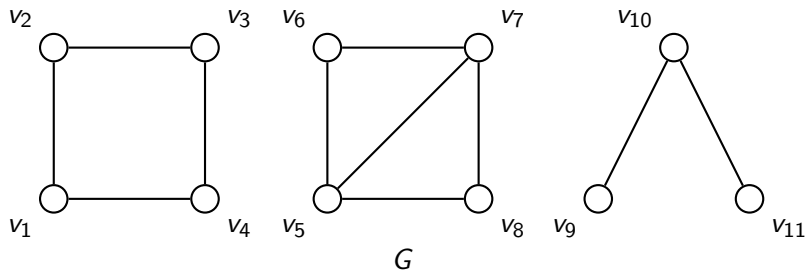
6.3 路、圈、连通图

定义3.4

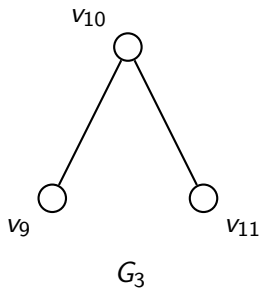
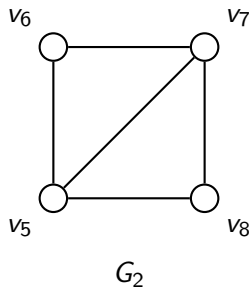
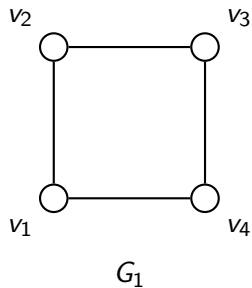
设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 G 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 G 为一个**连通图**。



6.3 路、圈、连通图



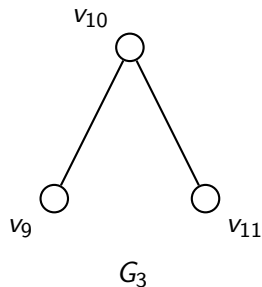
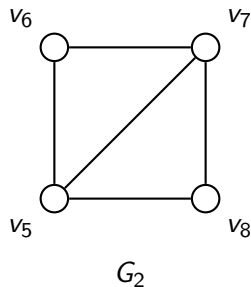
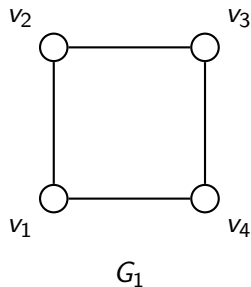
6.3 路、圈、连通图



6.3 路、圈、连通图

定义3.5

图 G 的极大连通子图称为 G 的一个支。



6.3 路、圈、连通图

定理3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 V 上定义二元关系 \cong 如下:

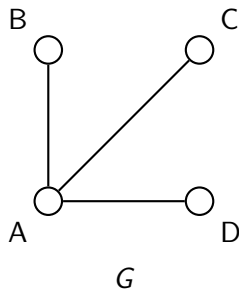
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 \cong 为 V 上的等价关系, G 的支就是关于 \cong 的每个等价类的导出子图。

6.4 补图、偶图

定义4.1

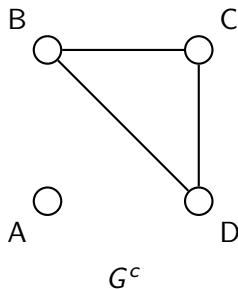
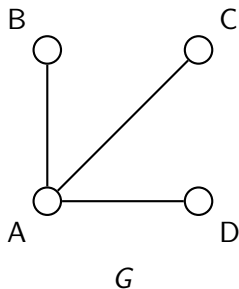
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义4.1

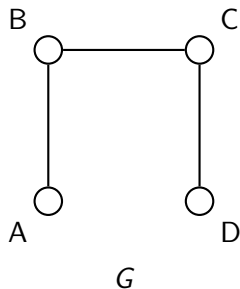
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义4.2

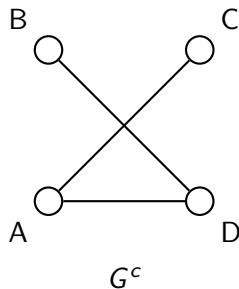
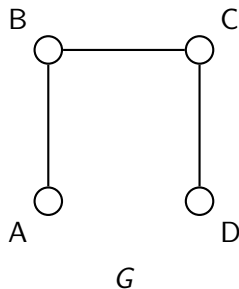
设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。
如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定义4.2

设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 G 的补图。
如果 G 与 G^c 同构，则称 G 是自补图。



6.4 补图、偶图

定理4.1

对任一有6个顶点的图 G , G 中或 G^c 中有一个三角形。

证明.

设图 G 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, 考虑顶点 v_1 。

- ▶ 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 相邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点相邻接。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点都不邻接。
- ▶ 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 v_1 不邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 v_2, v_3, v_4 。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 存在两个顶点不邻接。
 - 在顶点 v_2, v_3, v_4 中, 任意两个顶点互相邻接。



6.4 补图、偶图

定义4.3

对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$, 求一个最小的正整数 $r(m, n)$, 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 G 中一定含有一个 K_m 或者图 G^c 中一定含有一个 K_n , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

6.4 补图、偶图

定义4.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图,如果 G 的顶点集 V 有一个二划分 $\{V_1, V_2\}$,使得 G 的任一条边的两个端点一个在 V_1 中,另一个在 V_2 中,则称 G 为**偶图**。如果 $\forall u \in V_1, v \in V_2$ 均有 $uv \in E$,则称 G 为**完全偶图**,记为 $K_{m,n}$,其中 $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

6.4 补图、偶图

定义4.5

设 $G = (V, E)$ 是一个图, u 和 v 是 G 的顶点。联结 u 和 v 的最短路的长称为 u 与 v 之间的**距离**, 并记为 $d(u, v)$ 。如果 u 与 v 间在 G 中没有路, 则定义 $d(u, v) = \infty$ 。

6.4 补图、偶图

定理4.2

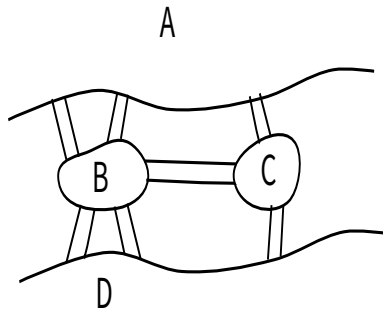
图 G 为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

6.4 补图、偶图

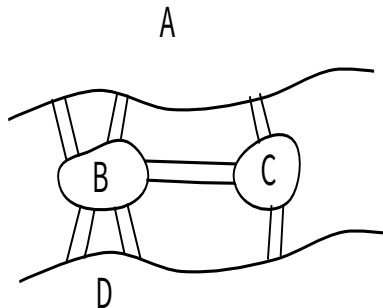
定理4.3

所有具有 p 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。

6.5 欧拉图



6.5 欧拉图



定义5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

6.5 欧拉图

定理5.1

图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且每个顶点的度是偶数。

6.5 欧拉图

定义5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

6.5 欧拉图

定理5.2

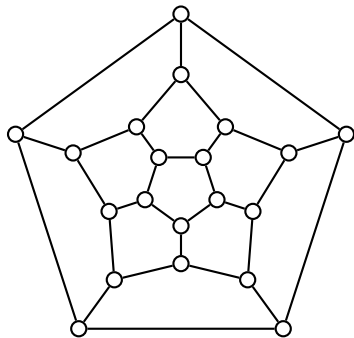
图 G 有一条欧拉开迹当且仅当 G 是连通的且恰有两个奇度顶点。

6.5 欧拉图

定理5.3

设 G 是连通图， G 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 G 的全部边可以排成 n 条开迹，且不能排成少于 n 条开迹。

6.6 哈密顿图

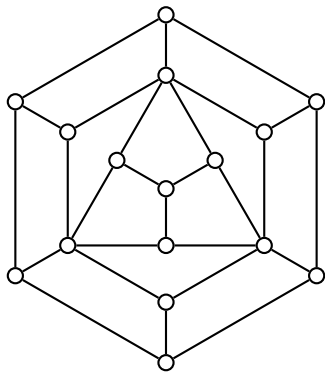


6.6 哈密顿图

定义6.1

图 G 的一条包含所有顶点的路称为 G 的一条哈密顿路;图 G 的一个包含所有顶点的圈称为 G 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

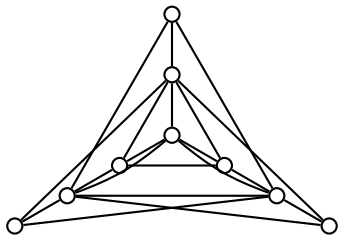
定理6.1

设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 V 的每个非空子集 S ，均有

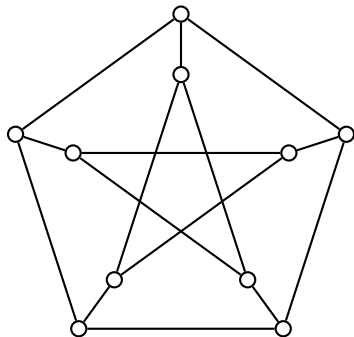
$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 G 中去掉 S 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图



6.6 哈密顿图

定理6.2

设 G 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 G 的任一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 G 是一个哈密顿图。

6.6 哈密顿图

定理6.3

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 是连通的。

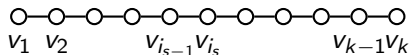
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$,

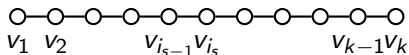
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

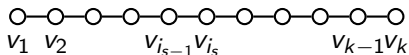
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。

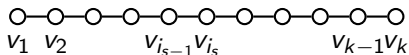
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

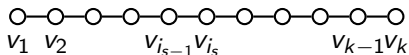
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不临接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈；

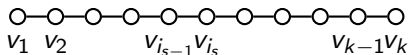
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 为一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明.

设 G 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k = p$ 。

用反证法，假设 $k < p$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 v_1 与 v_k 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 G 中的一个圈；
- ▶ 如果 v_1 与 v_k 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 v_1, v_k 只能与 v_2, v_3, \dots, v_{k-1} 中的顶点邻接。

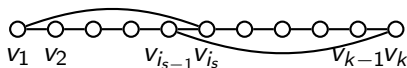
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。



证明 (续上页) .

设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 v_1 邻接, $2 = i_1 < i_2 < \dots < i_r < k$, 则 v_k 必与某个 v_{i_s-1} 邻接, $2 \leq s \leq r$ 。否则, v_k 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_k \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 < p - 1$$

矛盾。于是, $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 G 中的一个圈。总之, v_1, v_2, \dots, v_k 在 G 的同一个圈 C 上。

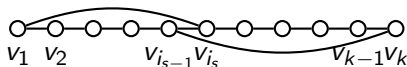
6.6 哈密顿图

定理6.4

设 G 是一个有 p 个顶点的图，如果对 G 的每一对不邻接的顶点 u 和 v ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 G 有哈密顿路。

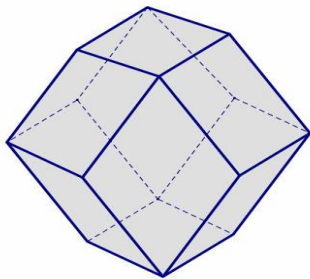


证明（续上页）.

由于 G 是连通的， $k < p$ ，所有 G 必有某个顶点 v ， v 不在 C 上，但与 C 上某个顶点 v_i 邻接。于是得到 G 的一条更长的路，这就出现了矛盾。



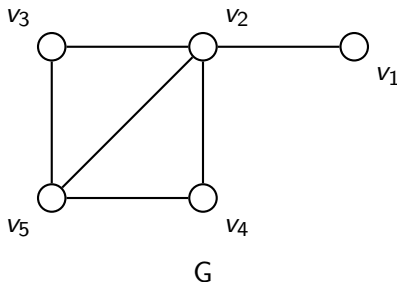
6.6 哈密顿图



6.7 图的邻接矩阵

定理7.1

设 $G = (V, E)$ 为一个 (p, q) 图, $p \times p$ 矩阵 A 为 G 的邻接矩阵, 则 G 中 v_i 与 v_j 间长为 l 的通道条数等于 A^l 的第 i 行第 j 列元素的值。



习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明.

当 $q > p + 4$ 时, 可以在 G 中任意去掉一些边, 使得剩余的边数恰好比顶点数多4。如果此时得到的新图中有两个边不重的圈, 则原来的图 G 中也一定有两个边不重的圈。因此, 以下只需证

当 $q = p + 4$ 时, 图 G 中有两个边不重的圈。

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 p 。

(1) 当 $p \leq 4$ 时, 图 G 最多有 $p(p-1)/2$ 条边, 易验证此

时 $q = p + 4$ 不可能成立。当 $p = 5$ 时, $q = 9$ 。设此时图 G 的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 除了 v_1 和 v_5 之间没有边关联之外, 其余的任意两个顶点之间均有边关联, 则此时 $v_1 v_2 v_3 v_1$ 和 $v_3 v_4 v_5 v_3$ 就是图 G 中两个边不重的圈。



习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设图 G 有 $k + 1$ 个顶点。分以下四种情况进行验证:

(i) 当 $\delta(G) = 0$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为0的顶点和任意一条边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。

(ii) 当 $\delta(G) = 1$ 时, 去掉图 G 中任意一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边, 则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设, 图 G' 中有两个边不重的圈, 它们也是图 G 中两个边不重的圈。



习题

设 G 是一个 (p, q) 图，证明：若 $q \geq p + 4$ ，则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iii) 当 $\delta(G) = 2$ 时，设 u 为图 G 中度为2的顶点，与之邻接的两个顶点为 v 和 w 。分两种情况讨论。在第一种情况下， v 和 w 之间没有边关联，去掉顶点 u 及其与之关联的两条边 uv 和 uw ，添加一条边 vw ，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边，则 $q' = p' + 4$ 。由归纳假设，图 G' 中有两个边不重的圈。如果新添加的边 vw 不在这两个圈上，则这两个圈就是图 G 中两个边不重的圈；如果新添加的边 vw 在其中的一个圈上，将其替换为图 G 中的两条边 vu 和 uw ，则所得到的圈与另一个圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。在第二种情况下， v 和 w 之间有边关联，此时 $uvwu$ 构成图 G 中的一个圈，去掉该圈上的三条边，得到的图 G' 中有 p' 个顶点， q' 条边。此时 $q' = p' + 1$ ，因此图 G' 中必定有一个圈，与原来图 G 中的圈 $uvwu$ 构成图 G 中两个边不重的圈。 \square

习题

设 G 是一个 (p, q) 图, 证明: 若 $q \geq p + 4$, 则 G 中有两个边不重的圈。

证明(续上页).

(iii) 当 $\delta(G) \geq 3$ 时, $2q \geq 3p$, 即 $2(p + 4) \geq 3p$, 可以得到 $p \leq 8$ 。此时若图 G 中有长度小于等于4的圈, 将其上的4条边去掉, 得到的图 G' 中有 p' 个顶点, q' 条边。则 $q' \geq p'$, 图 G' 中必定有一个圈, 与原来图 G 中去掉的边所构成的圈一起构成图 G 中两个边不重的圈。若图 G 中所有圈的长度至少为5, 设 C 为其中长度最短的一个圈。由 $\delta(G) \geq 3$ 知圈 C 上的每个顶点至少与圈外的一个顶点相邻接, 而其中任意两个不同的顶点不能同时与圈外同一个顶点相邻接, 否则将产生一个长度更小的圈。由圈 C 上至少有5个顶点知图 G 中至少有10个顶点, 与 $p \leq 8$ 矛盾。这说明图 G 中所有圈的长度至少为5的情况不可能出现。 □

习题

习题1

在一个有 n 个人的宴会上，每个人至少有 m 个朋友
($2 \leq m \leq n$)。试证：有不少于 $m+1$ 个人，使得它们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

习题2

设 G 是图。证明：若 $\delta(G) \geq 2$ ，则 G 包含长至少是 $\delta(G) + 1$ 的圈。

习题3

若 G 是一个 (p, q) 图， $q > \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ ，试证 G 是连通图。