

# 离散数学

陈建文

February 12, 2020



# 第一章 集合

**定义1.1.** 通常把一些互不相同的东西放在一起所形成的整体叫做一个集合。构成集合的每个东西叫做集合的元素。给定一个集合 $A$ 和一个元素 $a$ ，用 $a \in A$ 表示 $a$ 是 $A$ 的一个元素，用 $a \notin A$ 表示 $a$ 不是 $A$ 的一个元素。

有两种方法表示一个集合：

1. 把构成集合的那些元素全部列出来

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $C = \{a, b, c, \dots, z\}$

2. 用概括集合中各元素的属性来表示集合 $\{x|P(x)\}$

- $E = \{n|n \in \mathcal{Z} \wedge n \text{ is even}\}$ , 这里 $\wedge$ 表示“并且”， $E$ 还可以等价的表示为 $E = \{n \in \mathcal{Z}|n \text{ is even}\}$

存在一个集合，该集合中不包含任何元素，称为空集，记为 $\Phi$ 。

**定义1.2.** 设 $A, B$ 为两个集合，如果 $A$ 中的每个元素都是 $B$ 中的元素，则称 $A$ 为 $B$ 的子集，记为 $A \subseteq B$ ；如果 $A \subseteq B$ 且存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$ ，则称 $A$ 为 $B$ 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

- $\{1, 2, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**定义1.3.** 设 $A, B$ 为两个集合，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ ，则称 $A$ 与 $B$ 相等，并记为 $A = B$ 。

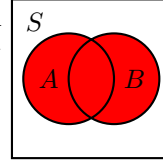
- $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 2, 1, 5\}$
- $\{x \in \mathcal{R}|x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$

**定义1.4.** 集合 $S$ 的所有子集构成的集合称为 $S$ 的幂集，记为 $2^S$ 或者 $\mathcal{P}(S)$ 。

**例.** 设 $S = \{1, 2, 3\}$ ，则 $2^S = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。

**定义1.5.** 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 至少属于集合 $A$ 与集合 $B$ 之一的那些元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的并集, 记为 $A \cup B$ 。

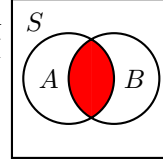
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$



例.  $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

**定义1.6.** 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 由既属于集合 $A$ 又属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的交集, 记为 $A \cap B$ 。

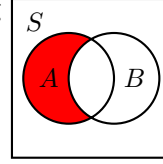
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$



例.  $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

**定义1.7.** 设 $A, B$ 为任意的两个集合, 由属于集合 $A$ 但不属于集合 $B$ 的所有元素构成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差集, 记为 $A \setminus B$ 。

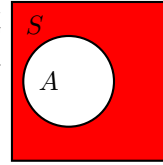
$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



例.  $\{1, 2\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$

**定义1.8.** 在许多实际问题中, 常以某个集合 $S$ 为出发点, 而所涉及的集合都是 $S$ 的子集。这个包含所考虑的所有集合的集合 $S$ , 称为该问题的全集。如果 $A$ 是 $S$ 的子集, 则差集 $S \setminus A$ 称为集合 $A$ 对集合 $S$ 的余集, 记为 $A^c$ 。

$$A^c = \{x | x \in S \wedge x \notin A\}$$



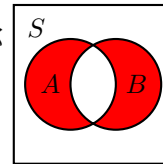
例.  $S = \{0, 1\}, A = \{0\}$ , 则 $A^c = \{1\}$

**定理1.1.** 设 $S$ 为全集,  $\emptyset$ 为空集,  $A, B, C$ 为 $S$ 的子集, 则

1.  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ .
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .
3.  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$ .
4.  $A \cup S = S, A \cap S = A$ .
5.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
6.  $A \cup A^c = S, A \cap A^c = \emptyset$ .
7.  $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .
- 8'.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

**定义1.9.** 设 $A, B$ 为两个集合,  $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的并集称为 $A$ 与 $B$ 的对称差, 记为 $A \triangle B$ 。

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



例.  $\{1, 2\} \triangle \{2, 3\} = \{1, 3\}$

定理1.2. 设 $S$ 为全集,  $A \in 2^S$ ,  $B \in 2^S$ , 则

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

定理1.3. 设 $S$ 为全集,  $\emptyset$ 为空集,  $A, B, C$ 为 $S$ 的子集, 则

1.  $A \triangle B = B \triangle A$ .
2.  $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ .
3.  $\emptyset \triangle A = A$ .
4.  $A \triangle A = \emptyset$ .
5.  $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ .

定义1.10. 以集合为元素的集合称为集族。如果 $I$ 为任意一个集合, 对 $I$ 中每个元素 $\alpha$ 都有一个唯一的集合与之对应, 这个集合记为 $A_\alpha$ , 那么所有这些 $A_\alpha$ 形成的集族可以用 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示, 其中 $I$ 称为标号集。

定义1.11. 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中所有集合的交集 $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

例. 设 $I = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, A_x = \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < x\}$ , 则

$$\bigcup_{x \in I} A_x = ?, \bigcap_{x \in I} A_x = ?$$

定理1.4. 设 $A$ 为任意集合,  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为任意一个集族, 则

1.  $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$
2.  $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
3.  $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
4.  $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

定义1.12. 两个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个有序对。如果第一个对象为 $a$ , 第二个对象为 $b$ , 则该有序对记为 $(a, b)$ 。  $(a, b) = (c, d)$  当且仅当  $a = c$  并且  $b = d$ 。

定义1.13. 设 $A$ 与 $B$ 为任意两个集合, 则称集合 $\{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$  为 $A$ 与 $B$ 的笛卡尔乘积, 记为 $A \times B$ 。即

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

**例.** 如果  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$ , 那么  $X \times Y = ?$ ,  $Y \times X = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\} \\ Y \times X &= \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\} \end{aligned}$$

**定义1.14.**  $n$ 个对象按照一定的顺序排列构成的整体称为一个 $n$ 元组。如果第一个对象为 $a_1$ , 第二个对象为 $a_2$ , ..., 第 $n$ 个对象为 $a_n$ , 则该 $n$ 元组记为 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。  
 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ 。

**定义1.15.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为任意 $n$ 个集合, 则称集合

$$\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡尔乘积, 记为 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , 简记为 $\prod_{i=1}^n A_i$ 。即

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

**例.** 如果 $X = \{a_1, b_1\}$ ,  $Y = \{a_2, b_2\}$ ,  $Z = \{a_3, b_3\}$  那么 $X \times Y \times Z = ?$

$$\begin{aligned} X \times Y \times Z &= \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, b_3), (a_1, b_2, a_3), (a_1, b_2, b_3), \\ &\quad (b_1, a_2, a_3), (b_1, a_2, b_3), (b_1, b_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\} \end{aligned}$$

**定义1.16.** 设 $X$ 和 $Y$ 为两个非空集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 为一个法则, 根据 $f$ , 对 $X$ 中的每个元素 $x$ 都有 $Y$ 中唯一确定的元素 $y$ 与之对应。从 $X$ 到 $Y$ 的映射 $f$ 常记为 $f: X \rightarrow Y$ 。

**定义1.17.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$ , 只要 $x_1 \neq x_2$ , 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的单射。

**定义1.18.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $f(x) = y$ , 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的满射。

**定义1.19.** 设 $f: X \rightarrow Y$ , 如果 $f$ 既是单射又是满射, 则称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的双射, 或者称 $f$ 为从 $X$ 到 $Y$ 的一一对应。

**定义1.20.** 设 $A$ 为一个集合, 如果 $A = \Phi$ , 其基数定义为0; 如果 $A \neq \Phi$ 且存在一个自然数 $n$ 使得 $A$ 与集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 之间存在一个一一对应, 则定义 $A$ 的基数为 $n$ 。 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。如果 $|A|$ 为0或某个自然数 $n$ , 则称 $A$ 为有穷集; 如果 $A$ 不是有穷集, 则称 $A$ 为无穷集。

**定理1.5.** 设 $A, B$ 为两个不相交的有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B|$ 。

**定理1.6.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个两两不相交的有穷集, 则

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

**定理1.7.** 设 $A, B$ 为有穷集, 则 $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ 。

**定理1.8.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个有穷集, 则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

**定理1.9.** 设 $S$ 为有穷集,  $A \subseteq S$ , 则 $|A^c| = |S| - |A|$ 。

**定理1.10.** 设 $A, B$ 为有穷集, 则 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 。

**定理1.11.** 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个有穷集, 则

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \cdots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 1$ 时, 结论显然成立。

假设定理的结论对 $n \geq 1$ 个有穷集合成立, 往证对 $n + 1$ 个有穷集合定理的结论也成立。实际上,

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\ &= \left| \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cup A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - \left| \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \end{aligned} \tag{1.1}$$

由归纳假设

$$\begin{aligned} & \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & \quad - \cdots \\ & \quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
& |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |(A_i \cap A_{n+1}) \cap (A_j \cap A_{n+1}) \cap (A_k \cap A_{n+1})| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} |(A_1 \cap A_{n+1}) \cap (A_2 \cap A_{n+1}) \cap \cdots \cap (A_n \cap A_{n+1})| \quad (1.3) \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |(A_i \cap A_j \cap A_{n+1})| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|
\end{aligned}$$

将(1.2)和(1.3)代入(1.1)得

$$\begin{aligned}
& \left| \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad - \cdots \\
&\quad + (-1)^{n+1+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}$$

□

**例.** 在1000名大学毕业生的调查中, 每个人至少掌握了一门外语, 其中804人掌握了英语, 205人掌握了日语, 190人掌握了俄语, 125人既掌握了英语又掌握了日语, 57人既掌握了日语又掌握了俄语, 85人既掌握了英语又掌握了俄语。试求这1000名大学生, 英语、日语、俄语全掌握的有多少人?

**练习1.1.** 设集合  $S = \{\phi, \{\phi\}\}$ , 则  $2^S =$  \_\_\_\_\_。

**练习1.2.** 下列命题中哪个是假的?

- A. 对每个集合  $A$ ,  $\phi \in 2^A$ 。
- B. 对每个集合  $A$ ,  $\phi \subseteq 2^A$ 。
- C. 对每个集合  $A$ ,  $A \in 2^A$ 。
- D. 对每个集合  $A$ ,  $A \subseteq 2^A$ 。

**练习1.3.** 设集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_,  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_,  $A \setminus B =$  \_\_\_\_\_,  $A \triangle B =$  \_\_\_\_\_,  $A \times B =$  \_\_\_\_\_。



**练习1.4.** 设 $A, B, C$ 为集合, 证明:  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

证明. 先证 $(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

对任意的 $x$ , 如果 $x \in (A \cup B) \setminus C$ , 则 $x \in (A \cup B)$ 并且 $x \notin C$ , 从而 $x \in A$ 或者 $x \in B$ , 并且 $x \notin C$ , 即 $x \in A$ 并且 $x \notin C$ 成立, 或者 $x \in B$ 并且 $x \notin C$ 成立。于是,  $x \in A \setminus C$ 或者 $x \in B \setminus C$ , 因此,  $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ 。

再证 $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C$ 。

对任意的 $x$ , 如果 $x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ , 则 $x \in A \setminus C$ 或者 $x \in B \setminus C$ , 从而 $x \in A$ 并且 $x \notin C$ 成立, 或者 $x \in B$ 并且 $x \notin C$ 成立, 即 $x \in A$ 或者 $x \in B$ , 并且 $x \notin C$ , 于是 $x \in (A \cup B)$ 并且 $x \notin C$ , 因此 $x \in (A \cup B) \setminus C$ 。□

**练习1.5.** 下列等式是否成立:  $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ ?

解. 该等式不成立。举反例如下: 设 $A = \{1\}, B = \{1\}, C = \{1\}$ , 则 $(A \cup B) \setminus C = \emptyset$ , 而 $A \cup (B \setminus C) = \{1\}$ , 此时 $(A \cup B) \setminus C \neq A \cup (B \setminus C)$ 。□

**练习1.6.** 下列命题中哪个是真的?

- A. 对任何集合 $A, B$ ,  $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$ 。
- B. 对任何集合 $A, B$ ,  $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$ 。
- C. 对任何集合 $A, B$ ,  $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$ 。
- D. 对任何集合 $A, B$ ,  $2^{A \Delta B} = 2^A \Delta 2^B$ 。

**练习1.7.** 设 $A, B, C$ 为集合, 并且 $A \cup B = A \cup C$ , 则下列哪个断言成立?

- A.  $B = C$
- B.  $A \cap B = A \cap C$
- C.  $A \cap B^c = A \cap C^c$
- D.  $A^c \cap B = A^c \cap C$

**练习1.8.** 设 $A, B, C, D$ 为任意四个集合, 证明

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

**练习1.9.** 设 $A, B, C$ 为集合, 化简

$$(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$$

**练习1.10.** 证明

- 1)  $A \Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$
- 2)  $(A \Delta B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$
- 3)  $(A \Delta B)^c = (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$



## 第 二 章