

# 第六章图的基本概念

陈建文

## 6.1 图论的产生与发展史概述



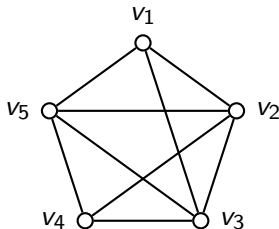
## 6.2 基本定义

设 $V$ 为一个集合， $V$ 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}。$$

### 定义2.1

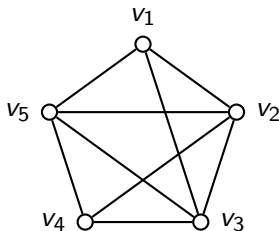
设 $V$ 为一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 $V$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**顶点**， $V$ 为**顶点集**； $E$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**边**， $E$ 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 $G$ 为一个 $(p, q)$ 图，即 $G$ 是一个具有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。



## 6.2 基本定义

### 定义2.2

在图  $G = (V, E)$  中, 如果  $\{u, v\} \in E$ , 则称顶点  $u$  与  $v$  邻接; 若  $x$  与  $y$  是图  $G$  的两条边, 并且仅有一个公共端点, 即  $|x \cap y| = 1$ , 则称边  $x$  与  $y$  邻接; 如果  $x = \{u, v\}$  是图  $G$  的一条边, 则称  $u$  与  $x$  互相关联, 同样的, 称  $v$  与  $x$  互相关联。



## 6.2 基本定义

### 定义2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在，则称为**多重图**，这些边称为**多重边**；如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在，则称为**带环图**，这些边称为**环**；允许有环或多重边存在的图，称之为**伪图**。

## 6.2 基本定义

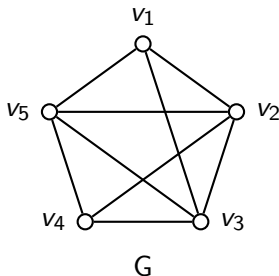
### 定义2.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $E = \Phi$ , 则称 $G$ 为**零图**;  $(1, 0)$ 图称为**平凡图**。

## 6.2 基本定义

### 定义2.5

设 $v$ 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， $G$ 中与 $v$ 关联的边的数目称为顶点 $v$ 的度，记为 $\deg v$ 。



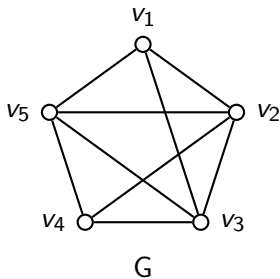




## 6.2 基本定义

### 定理2.2

在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。

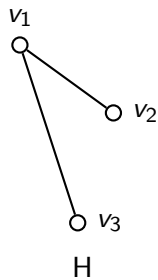
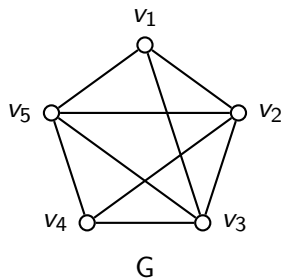


## 6.2 基本定义

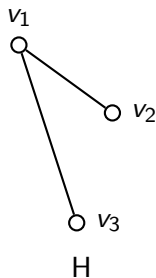
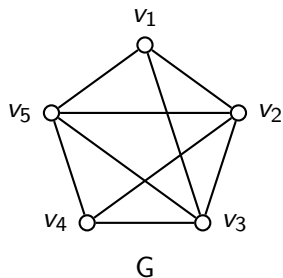
### 定义2.6

图 $G$ 称为 $r$ 度正则图，如果 $G$ 的每个顶点的度都等于 $r$ 。3度正则图也叫三次图。一个具有 $p$ 个顶点的 $p-1$ 度正则图称为包含 $p$ 个顶点的完全图，记为 $K_p$ 。

## 6.2 基本定义



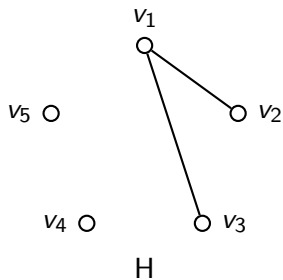
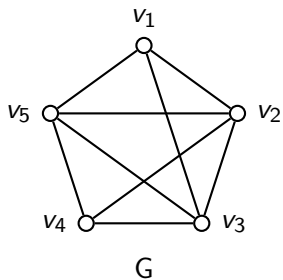
## 6.2 基本定义



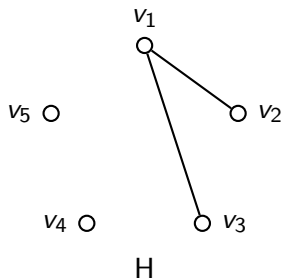
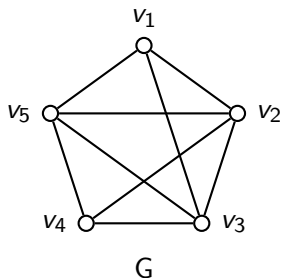
### 定义2.7

设  $G = (V, E)$  为一个图，图  $H = (V_1, E_1)$  称为  $G$  的一个子图，当且仅当  $V_1$  为  $G$  的非空子集且  $E_1$  为  $E$  的子集。如果  $H \neq G$ ，则称  $H$  为  $G$  的**真子图**。

## 6.2 基本定义



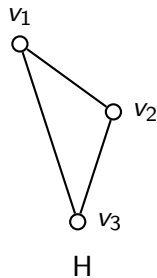
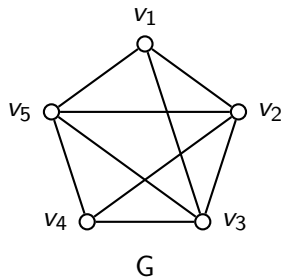
## 6.2 基本定义



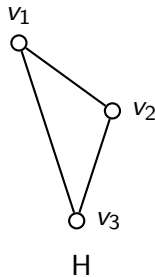
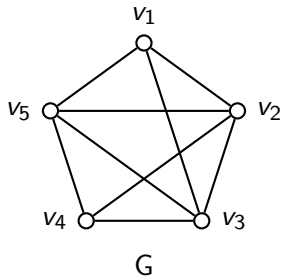
### 定义2.8

设  $G = (V, E)$  为一个图，如果  $F \subseteq E$ ，则称  $G$  的子图  $H = (V, F)$  为  $G$  的一个生成子图。

## 6.2 基本定义



## 6.2 基本定义

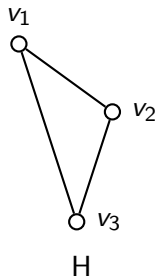
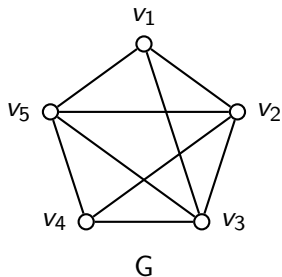


### 定义2.9

设 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质，若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图，则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。



## 6.2 基本定义



### 定义2.9

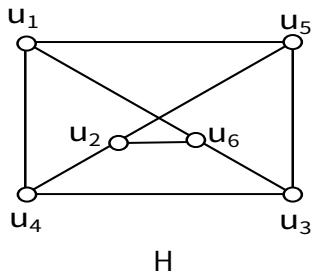
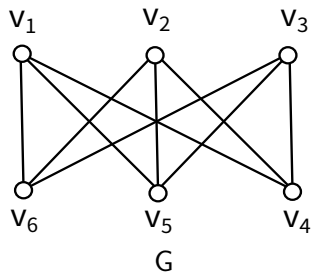
设 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质，若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图，则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。

### 定义2.10

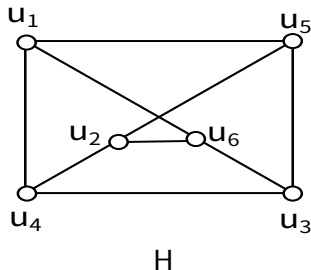
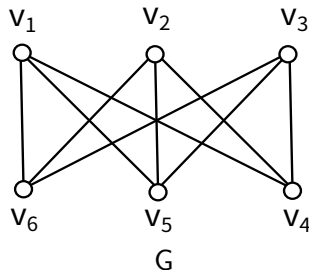
设 $S$ 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 $V$ 的非空子集，则 $G$ 的以 $S$ 为顶点集的极大子图称为由 $S$ 导出的子图，记为 $\langle S \rangle$ 。形式的，

$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$

## 6.2 基本定义



## 6.2 基本定义



### 定义2.11

设  $G = (V, E)$ ,  $H = (U, F)$  为两个图, 如果存在一个一一对应  $\phi: V \rightarrow U$ , 使得  $\{u, v\} \in E$  当且仅当  $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$ , 则称  $G$  与  $H$  同构。

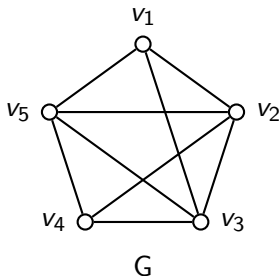
### 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.1

设  $G = (V, E)$  为一个图。 $G$  的一条通道是  $G$  的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

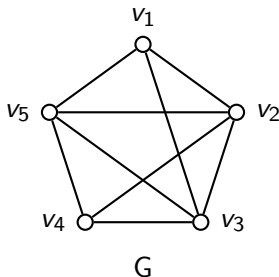
其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。  $n$ 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.2

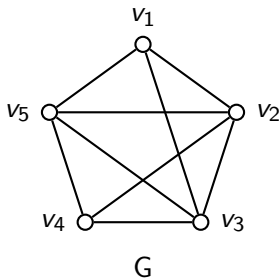
如果图中一条通道上的各边互不相同，则称此通道为图的迹。如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.3

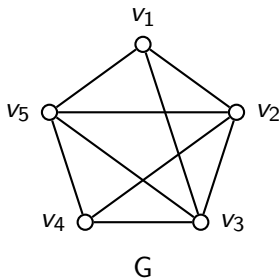
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**，或**回路**。



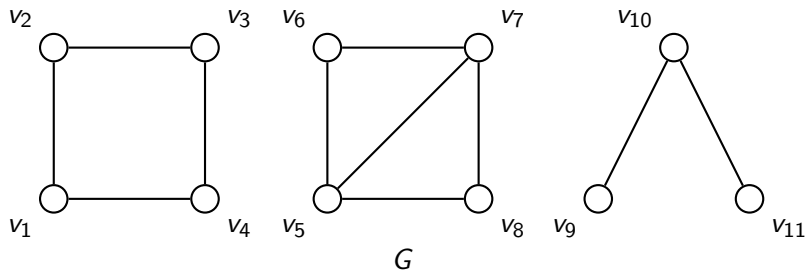
## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图，如果 $G$ 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 $G$ 为一个**连通图**。

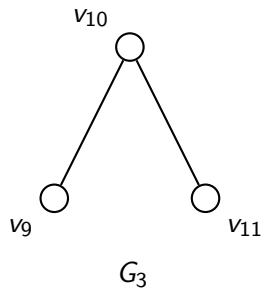
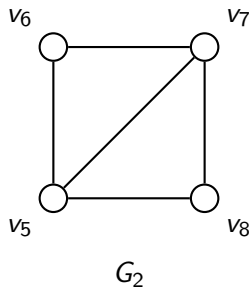
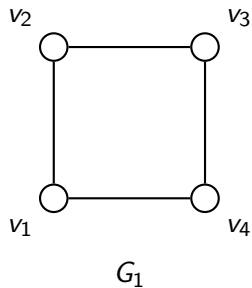


## 6.3 路、圈、连通图





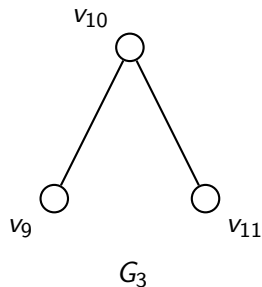
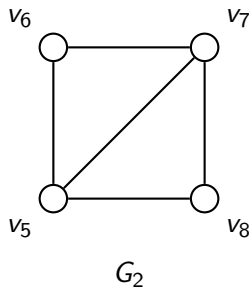
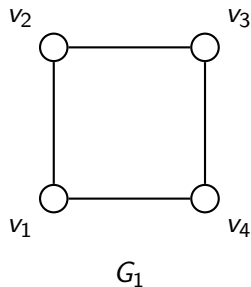
## 6.3 路、圈、连通图



## 6.3 路、圈、连通图

### 定义3.5

图 $G$ 的极大连通子图称为 $G$ 的一个支。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定理3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 $V$ 上定义二元关系 $\cong$ 如下:

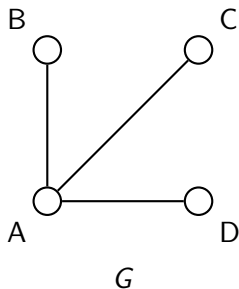
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 $\cong$ 为 $V$ 上的等价关系,  $G$ 的支就是关于 $\cong$ 的每个等价类的导出子图。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.1

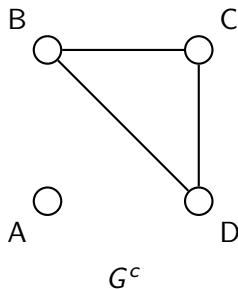
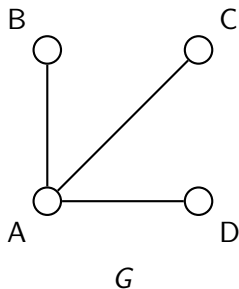
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.1

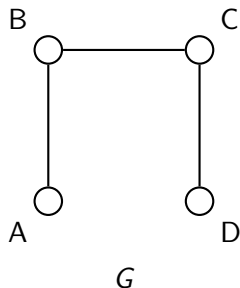
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.2

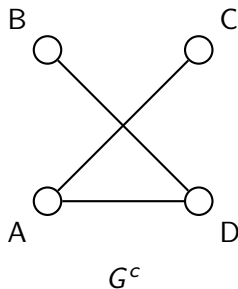
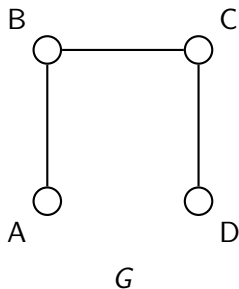
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。  
如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义4.2

设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。  
如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定理4.1

对任一有6个顶点的图 $G$ ,  $G$ 中或 $G^c$ 中有一个三角形。

证明.

设图 $G$ 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , 考虑顶点 $v_1$ 。

- ▶ 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 $v_1$ 相邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 $v_2, v_3, v_4$ 。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中, 存在两个顶点相邻接。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中, 任意两个顶点都不邻接。
- ▶ 存在三个顶点, 其中的每个顶点都与顶点 $v_1$ 不邻接。不失一般性, 不妨设这个三个顶点为 $v_2, v_3, v_4$ 。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中, 存在两个顶点不邻接。
  - 在顶点 $v_2, v_3, v_4$ 中, 任意两个顶点互相邻接。





## 6.4 补图、偶图

### 定义4.3

对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$ , 求一个最小的正整数 $r(m, n)$ , 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 $G$ 中一定含有一个 $K_m$ 或者图 $G^c$ 中一定含有一个 $K_n$ , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.4

设  $G = (V, E)$  为一个图, 如果  $G$  的顶点集  $V$  有一个二划分  $\{V_1, V_2\}$ , 使得  $G$  的任一条边的两个端点一个在  $V_1$  中, 另一个在  $V_2$  中, 则称  $G$  为**偶图**。如果  $\forall u \in V_1, v \in V_2$  均有  $uv \in E$ , 则称  $G$  为**完全偶图**, 记为  $K_{m,n}$ , 其中  $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定义4.5

设  $G = (V, E)$  是一个图,  $u$  和  $v$  是  $G$  的顶点。联结  $u$  和  $v$  的最短路的长称为  $u$  与  $v$  之间的距离, 并记为  $d(u, v)$ 。如果  $u$  与  $v$  间在  $G$  中没有路, 则定义  $d(u, v) = \infty$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定理4.2

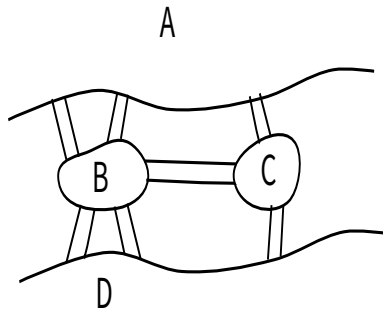
图 $G$ 为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

## 6.4 补图、偶图

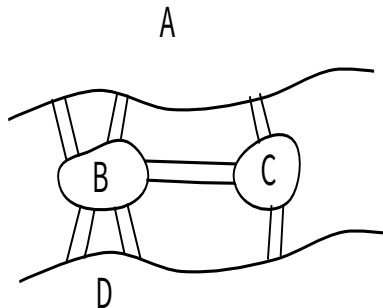
### 定理4.3

所有具有 $p$ 个顶点而没有三角形的图中最多有 $\lfloor p^2/4 \rfloor$ 条边。

## 6.5 欧拉图



## 6.5 欧拉图



### 定义5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

## 6.5 欧拉图

### 定理5.1

图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且每个顶点的度是偶数。



## 6.5 欧拉图

### 定义5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

## 6.5 欧拉图

### 定理5.2

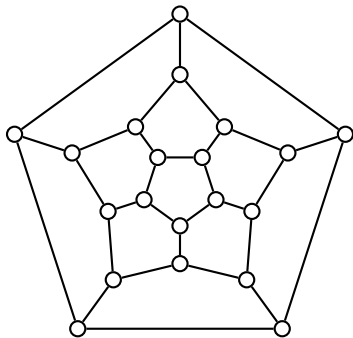
图 $G$ 有一条欧拉迹当且仅当 $G$ 是连通的且恰有两个奇度顶点。

## 6.5 欧拉图

### 定理5.3

设 $G$ 是连通图， $G$ 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 $G$ 的全部边可以排成 $n$ 条开迹，而且至少有 $n$ 条开迹。

## 6.6 哈密顿图

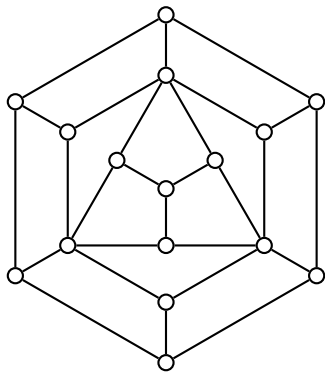


## 6.6 哈密顿图

### 定义6.1

图 $G$ 的一条包含所有顶点的路称为 $G$ 的一条哈密顿路;图 $G$ 的一个包含所有顶点的圈称为 $G$ 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

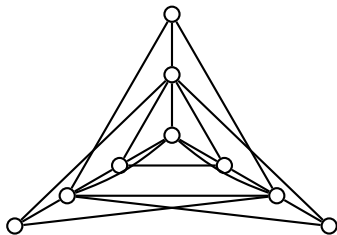
### 定理6.1

设 $G = (V, E)$ 为哈密顿图，则对 $V$ 的每个非空子集 $S$ ，均有

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

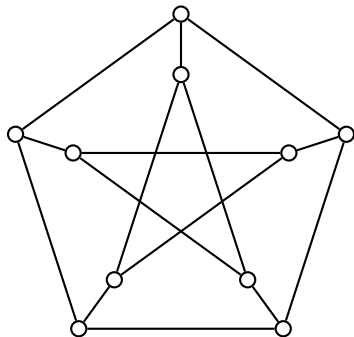
其中 $G - S$ 是从 $G$ 中去掉 $S$ 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

## 6.6 哈密顿图





## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

### 定理6.2

设 $G$ 为有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 $G$ 的任一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 $G$ 是一个哈密顿图。

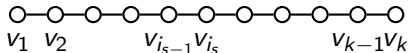
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.3

设 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



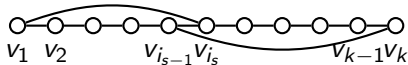
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.4

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



## 6.6 哈密顿图

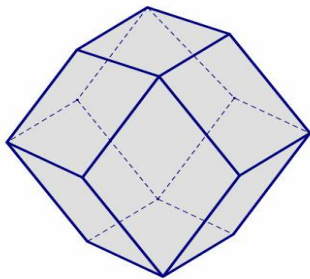
### 定理6.5

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 是连通的。

## 6.6 哈密顿图

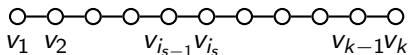


## 6.6 哈密顿图

例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

## 6.6 哈密顿图



例:

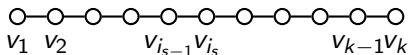
设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ,



## 6.6 哈密顿图



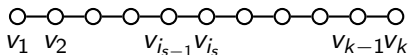
例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

## 6.6 哈密顿图



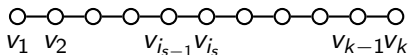
例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。  
用反证法, 假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。

## 6.6 哈密顿图



例:

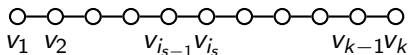
设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法, 假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

## 6.6 哈密顿图



例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

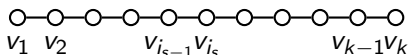
证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法, 假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接, 则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈;

## 6.6 哈密顿图



例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

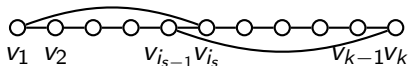
证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法, 假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接, 则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈;
- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 不邻接, 由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 $v_1, v_k$ 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。

## 6.6 哈密顿图



例:

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明: 如果 $p > 2\delta(G)$ , 则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ , 只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

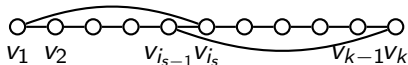
用反证法, 假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接, 则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈;
- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 不邻接, 由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 $v_1, v_k$ 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 $v_1$ 邻接,  $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$ , 则 $v_k$ 必与某个 $v_{i_s-1}$ 邻接,  $2 \leq s \leq r$ 。否则,  $v_k$ 至多与最长路上其余的顶点邻接, 所以

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq r + ((k-1) - r) = k - 1 \leq 2\delta(G) - 1$$

矛盾。于是,  $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 $G$ 中的一个圈。总之,  $v_1, v_2, \dots, v_k$ 在 $G$ 的同一个圈 $C$ 上。

## 6.6 哈密顿图



证明（续上页）.

由于 $G$ 是连通的,  $p > 2\delta(G)$ , 所有 $G$ 必有某个顶点 $v$ ,  $v$ 不在 $C$ 上, 但与 $C$ 上某个顶点 $v_i$ 邻接。于是得到 $G$ 的一条更长的路, 这就出现了矛盾。



## 6.7 图的邻接矩阵

