

# 第三章关系

陈建文

# 1. 关系的概念

## 定义1.1

设 $A$ 与 $B$ 是两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

# 1. 关系的概念

## 定义1.1

设 $A$ 与 $B$ 是两个集合。一个从 $A \times B$ 到 $\{T, F\}$ 的映射 $R$ ，称为从 $A$ 到 $B$ 的一个**二元关系**。 $\forall (a, b) \in A \times B$ ，如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $T$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b)$ 在 $R$ 下的象为 $F$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

## 定义1.2

设 $A$ 与 $B$ 为两个集合。 $A \times B$ 的任一子集 $R$ 称为从 $A$ 到 $B$ 的一个**二元关系**。如果 $(a, b) \in R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 符合关系 $R$ ，记为 $aRb$ ；如果 $(a, b) \notin R$ ，则称 $a$ 与 $b$ 不符合关系 $R$ ，并记为 $a \not R b$ 。如果 $A = B$ ，则称 $R$ 为 $A$ 上的二元关系。

# 1. 关系的概念

## 例1.1

自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系" $\leq$ "是 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

# 1. 关系的概念

## 例1.1

自然数集 $\mathbb{N}$ 上的小于等于关系“ $\leq$ ”是 $\mathbb{N}$ 上的一个二元关系。

## 例1.2

设 $n$ 为任一给定的自然数。对任意的两个整数 $m, k$ ，如果 $m - k$ 能被 $n$ 整除，则称 $m$ 与 $k$ 为模 $n$ 同余，并记为 $m \equiv k \pmod{n}$ 。显然， $m \equiv k \pmod{n}$ 当且仅当 $m$ 被 $n$ 除所得到的余数与 $k$ 被 $n$ 除所得到的余数相等。模 $n$ 同余是 $\mathbb{Z}$ 上的一个二元关系。

# 1. 关系的概念

## 定义1.3

设 $R \subseteq A \times B$ , 集合

$$\{x \in A | \exists y \in B \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的**定义域**, 记为 $\text{dom}(R)$ ; 集合

$$\{y \in B | \exists x \in A \text{ 使得 } (x, y) \in R\}$$

称为 $R$ 的**值域**, 记为 $\text{ran}(R)$ 。

# 1. 关系的概念

## 定义1.4

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n$ 个集合, 一个 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的子集 $R$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 间的一个 $n$ 元关系, 每个 $A_i$ 称为 $R$ 的一个域。

## 2. 关系的性质

### 定义2.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**自反**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $xRx$ 。



## 2. 关系的性质

### 定义2.2

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为反自反的, 如果对 $X$ 的任意元素 $x$ 都有 $(x, x) \notin R$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.3

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**对称**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ，只要 $xRy$ 就有 $yRx$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.4

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**反对称**的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y$ ， $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ 。

## 2. 关系的性质

### 定义2.5

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为传递的，如果对 $X$ 的任意元素 $x, y, z$ ，只要 $xRy$ 且 $yRz$ ，就有 $xRz$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定义3.1

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系， $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.1

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ 的二元关系， $R$ 的逆 $R^{-1}$ 定义为从集合 $B$ 到集合 $A$ 的二元关系

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

#### 定理3.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则 $R$ 是对称的当且仅当 $R = R^{-1}$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ,  $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ， $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 定理3.2

设 $R_1$ ， $R_2$ ， $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ ，从集合 $B$ 到集合 $C$ ，从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$



### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ， $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 定理3.2

设 $R_1$ ， $R_2$ ， $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ ，从集合 $B$ 到集合 $C$ ，从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

#### 定理3.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

### 3. 关系的运算

#### 定义3.2

设 $R$ 为从集合 $A$ 到集合 $B$ ， $S$ 为从集合 $B$ 到集合 $C$ 的二元关系。 $R$ 与 $S$ 的合成 $R \circ S$ 定义为从集合 $A$ 到集合 $C$ 的一个二元关系

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \text{ 使得 } xRy \text{ 且 } ySz\}$$

#### 定理3.2

设 $R_1$ ， $R_2$ ， $R_3$ 分别为从集合 $A$ 到集合 $B$ ，从集合 $B$ 到集合 $C$ ，从集合 $C$ 到集合 $D$ 的二元关系，则

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

#### 定理3.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则 $R$ 是传递的当且仅当 $R \circ R \subseteq R$ 。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.1

设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  为一个包含  $m$  个元素的集合,  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  为一个包含  $n$  个元素的集合。令  $R$  是从  $X$  到  $Y$  的一个二元关系。由  $R$  定义一个  $m \times n$  矩阵  $B = (b_{ij})$  如下:  $\forall (x_i, y_j) \in X \times Y$ ,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x_i R y_j \\ 0, & \text{如果 } x_i \not R y_j \end{cases}$$

则矩阵  $B$  称为关系  $R$  的矩阵。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.1

设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d, e\}$ , 从  $X$  到  $Y$  的关系  $S = \{(1, a), (2, b), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, d), (3, e), (4, c), (4, d)\}$ , 则  $S$  的关系矩阵为?

## 4. 关系矩阵和关系图

### 例4.1

设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{a, b, c, d, e\}$ , 从  $X$  到  $Y$  的关系  $S = \{(1, a), (2, b), (2, d), (2, e), (3, a), (3, b), (3, d), (3, e), (4, c), (4, d)\}$ , 则  $S$  的关系矩阵为?

### 例4.2

设  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$ , 则  $R$  的关系矩阵为?

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.1

设 $B$ 为集合 $X$ 上二元关系 $R$ 的矩阵, 则

- (1)  $R$ 是自反的, 当且仅当 $B$ 的对角线上的全部元素都为1;
- (2)  $R$ 是反自反的, 当且仅当 $B$ 的对角线上的全部元素都为0;
- (3)  $R$ 是对称的, 当且仅当 $B$ 是对称矩阵;
- (4)  $R$ 是反对称的, 当且仅当 $i \neq j$ 时 $b_{ij}$ 与 $b_{ji}$ 不同时为1;
- (5)  $R$ 是传递的, 当且仅当如果 $b_{ij} = 1$ 且 $b_{jk} = 1$ , 则 $b_{ik} = 1$ 。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的二元关系，则

- (1)  $R$ 是自反的，当且仅当 $R$ 的图的每个顶点均有一个环；
- (2)  $R$ 是反自反的，当且仅当 $R$ 的图中没有环；
- (3)  $R$ 是对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则必有两条方向相反的矢线；
- (4)  $R$ 是反对称的，当且仅当 $R$ 的图中任意两个不同顶点间有矢线，则不能有两方向相反的矢线；
- (5)  $R$ 是传递的，当且仅当如果从某顶点沿矢线经两条矢线可到另一顶点，则从该顶点到另一顶点有一条矢线。

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定理4.3

设 $B$ 为集合 $X$ 上二元关系 $R$ 的矩阵, 则 $R^{-1}$ 的矩阵为 $B^T$ 。



## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.2

设 $B$ ,  $C$ 是两个布尔矩阵,  $B$ 与 $C$ 的逻辑乘是 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑乘, 所得到的布尔矩阵记为 $B \wedge C$ , 即

$$B \wedge C = (b_{ij} \wedge c_{ij})$$

$B$ 与 $C$ 的逻辑加是 $B$ 与 $C$ 的对应元素进行逻辑加, 所得到的布尔矩阵记为 $B \vee C$ , 即

$$B \vee C = (b_{ij} \vee c_{ij})$$

### 定理4.4

设 $R$ ,  $S$ 为从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的二元关系, 其矩阵分别为 $B_R$ 和 $B_S$ 。  $R \cup S$  与  $R \cap S$  的矩阵分别为 $B_{R \cup S}$ ,  $B_{R \cap S}$ , 则

$$B_{R \cup S} = B_R \vee B_S, B_{R \cap S} = B_R \wedge B_S$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.3

设 $A$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵,  $B$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵,  $A$ 与 $B$ 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

## 4. 关系矩阵和关系图

### 定义4.3

设 $A$ 为 $m \times p$ 布尔矩阵,  $B$ 为 $p \times n$ 布尔矩阵,  $A$ 与 $B$ 的布尔乘积 $A \circ B$ 定义为矩阵 $C$ , 其元素计算如下

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \cdots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}), \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$$

### 定理4.5

设 $X, Y, Z$ 为有穷集合,  $|X| = m, |Y| = p, |Z| = n$ 。  $R$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的二元关系,  $S$ 是从 $Y$ 到 $Z$ 的二元关系,  $R, S, R \circ S$ 的矩阵分别为 $B_R, B_S, B_{R \circ S}$ , 则 $B_{R \circ S} = B_R \circ B_S$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定义5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。 $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包，用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

## 5. 关系的闭包

### 定义5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系。 $X$ 上的一切包含 $R$ 的传递关系的交称为 $R$ 的传递闭包，用 $R^+$ 表示。即

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R' \text{ 且 } R' \text{ 是传递的}} R'$$

### 定理5.1

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系，则关系 $R$ 的传递闭包 $R^+$ 是包含 $R$ 的传递关系。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ ,  
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ ,  
则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得  
 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x) \in R$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.2

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $a \in X$ ,  $b \in X$ ,  $n \geq 2$ , 则 $(a, b) \in R^n$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{n-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{n-1}, b) \in R$ 。

### 证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于 $n$ :

当 $n = 2$ 时, 由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^2$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ 使得 $(a, x_1) \in R$ 且 $(x_1, b) \in R$ , 结论成立。

假设当 $n = k$ 时定理的结论成立, 往证当 $n = k + 1$ 时定理的结论也成立。由关系合成运算的定义知 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x \in X$ 使得 $(a, x) \in R^k$ 且 $(x, b) \in R$ 。由归纳假设,  $(a, x) \in R^k$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x) \in R$ 。记 $x_k = x$ , 则 $(a, b) \in R^{k+1}$ 当且仅当存在 $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $\dots$ ,  $x_{k-1} \in X$ ,  $x_k \in X$ , 使得 $(a, x_1) \in R$ ,  $(x_1, x_2) \in R$ ,  $\dots$ ,  $(x_{k-1}, x_k) \in R$ ,  $(x_k, b) \in R$ 。 □

## 5. 关系的闭包

### 定理5.3

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系, 则

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$$

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。



## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j, 1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}, p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.4

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ , 则

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$$

。

### 证明.

只须证明对任一自然数 $k > n$ , 有 $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。为此, 设 $(a, b) \in R^k$ , 则存在 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in X$ 使得 $(a, b_1) \in R$ ,  $(b_1, b_2) \in R, \dots, (b_{k-2}, b_{k-1}) \in R, (b_{k-1}, b) \in R$ 。记 $b_0 = a, b_k = b$ 。  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 是 $X$ 中的 $k$ 个元素, 而 $X$ 中仅有 $n$ 个元素,  $n < k$ , 所以 $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, b$ 中必有两个相等的元素。设 $b_i = b_j$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ 。于是, 我们有 $(a, b_1) \in R, \dots, (b_{i-1}, b_i) \in R, (b_j, b_{j+1}) \in R, \dots, (b_{k-1}, b) \in R$ , 故 $(a, b) \in R^{k-(j-i)}$ ,  $p_1 = k - (j - i) < k$ 。若 $p_1 = k - (j - i) > n$ , 则重复上述过程又有 $p_2 < p_1$ 使得 $(a, b) \in R^{p_2}$ 。如此进行下去, 必有 $m \leq n$ 使得 $(a, b) \in R^m$ 。所以,  $R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。因此,  $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

## 5. 关系的闭包

### 定理5.5

设 $R$ 为集合 $X$ 上的一个二元关系,  $|X| = n$ ,  $B$ 为 $R$ 的关系矩阵,  $B_{R^+}$ 为 $R^+$ 的关系矩阵, 简记为 $B^+$ , 则

$$B^+ = B \vee B^{(2)} \vee \dots \vee B^{(n)}$$

## 5. 关系的闭包

TRANSITIVE-CLOSURE( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $M = B$

2  $A = M$

3 **for**  $i = 2$  **to**  $n$

4      $M = M \circ B$

5      $A = A \vee M$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **for**  $j = 1$  **to**  $n$

5              $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

6 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$

## 5. 关系的闭包

WARSHALL( $B$ )

//  $B$  is the zero-one  $n \times n$  matrix for relation  $R$

1  $A = B$

2 **for**  $k = 1$  **to**  $n$

3     **for**  $i = 1$  **to**  $n$

4         **if**  $a_{ik} == 1$

5             **for**  $j = 1$  **to**  $n$

6                  $a_{ij} = a_{ij} \vee (a_{ik} \wedge a_{kj})$

7 **return**  $A$  //  $A$  is the zero-one matrix for  $R^+$



## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**等价关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ ，则 $yRx$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 例6.1

整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 例6.1

整数集 $\mathbb{Z}$ 上的模 $n$ 同余关系是 $\mathbb{Z}$ 上的等价关系。

### 例6.2

设集合 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ 上的关系 $R$ 定义如下：

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (c, e), (d, b), \\ (d, d), (e, a), (e, c), (e, e), (f, f)\},$$

则 $R$ 为 $X$ 上的等价关系。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.2

设 $\cong$ 为集合 $X$ 上的一个等价关系,  $x \in X$ ,  $X$ 的子集

$$E_x = \{y \in X | x \cong y\}$$

称为 $x$ 关于 $\cong$ 的等价类, 记为 $[x]$ , 即

$$[x] = \{y \in X | x \cong y\}$$

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定义6.3

设 $X$ 为集合,  $X$ 的一些非空子集形成的集族 $\mathbf{A}$ 称为 $X$ 的一个划分, 如果 $\mathbf{A}$ 具有性质

1.  $\forall A, B \in \mathbf{A}$ , 如果 $A \neq B$ , 则 $A \cap B = \phi$ ;
2.  $\bigcup_{A \in \mathbf{A}} A = X$

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.1

设 $\cong$ 为 $X$ 上的一个等价关系，则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成 $X$ 的一个划分。

## 6. 等价关系与集合的划分

### 定理6.1

设 $\cong$ 为 $X$ 上的一个等价关系，则 $\cong$ 的所有等价类的集合构成 $X$ 的一个划分。

### 定理6.2

设 $\mathbf{A}$ 为集合 $X$ 的一个划分。令

$$\cong = \bigcup_{A \in \mathbf{A}} A \times A$$

则 $\cong$ 是 $X$ 上的一个等价关系且 $\mathbf{A}$ 就是 $\cong$ 的等价类之集。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**偏序关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是反对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。



## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.1

集合 $X$ 上的二元关系 $R$ 称为**偏序关系**，如果 $R$ 同时满足以下三个性质：

- (1)  $R$ 是自反的，即对 $X$ 中的任意元素 $x$ ， $xRx$ ；
- (2)  $R$ 是反对称的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y$ ，如果 $xRy$ 且 $yRx$ ，则 $x = y$ ；
- (3)  $R$ 是传递的，即对 $X$ 中的任意元素 $x, y, z$ ，如果 $xRy$ 且 $yRz$ ，则 $xRz$ 。

### 定义7.2

设 $\leq$ 是 $X$ 上的一个偏序关系，则称二元组 $(X, \leq)$ 为**偏序集**。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 例7.1

实数集 $\mathbb{R}$ 上通常的“小于等于”关系 $\leq$ 是偏序关系，所以 $(\mathbb{R}, \leq)$ 为偏序集。

### 例7.2

设 $S$ 为一个集合， $S$ 的子集间的包含关系 $\subseteq$ 是 $2^S$ 上的偏序关系，所以 $(S, \subseteq)$ 为偏序集。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 例7.3

设集合  $X = \{a, b, c, d\}$  上的关系  $R$  定义如下:

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c), (c, d), (d, d)\}$$

则  $R$  为  $X$  上的偏序关系。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.3

设 $\leq$ 为集合 $X$ 上的偏序关系，如果 $\forall x, y \in X$ ， $x \leq y$ 与 $y \leq x$ 至少有一个成立，则称 $\leq$ 为 $X$ 上的**全序关系**。相应的，二元组 $(X, \leq)$ 称为**全序集**。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.4

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**最大元素**; 如果存在一个元素 $t \in A$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**最小元素**。

### 定义7.5

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in A$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $s < x$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的**极大元素**; 如果存在一个元素 $t$ , 在 $A$ 中没有元素 $x$ 使得 $x < t$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的**极小元素**。

## 7. 偏序关系与偏序集

### 定义7.6

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果存在一个元素 $s \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $x \leq s$ , 则称 $s$ 为 $A$ 的一个上界; 如果存在一个元素 $t \in X$ 使得 $\forall x \in A$ 有 $t \leq x$ , 则称 $t$ 为 $A$ 的一个下界。

### 定义7.7

设 $(X, \leq)$ 为一个偏序集,  $A \subseteq X$ 。如果 $A$ 有上界且 $A$ 的一切上界之集有最小元素, 则这个最小上界称为 $A$ 的上确界, 记为 $\sup A$ ; 如果 $A$ 有下界且 $A$ 的一切下界之集有最大元素, 则这个最大下界称为 $A$ 的下确界, 记为 $\inf A$ 。

## 7. 偏序关系与偏序集

设  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = x + (-x) = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 偏序关系与偏序集

1.  $x \leq x$
2.  $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3.  $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4.  $x \leq y \vee y \leq x$
5.  $x > y \rightarrow x + z > y + z$
6.  $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
7.  $\forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \phi \wedge \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R ((\forall y \in A (y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$



## 习题

1. 设 $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{1, 2\}$ ,  $S = \{f | f : X \rightarrow Y\}$ 。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$I_m(f) = I_m(g)$$

证明 $\cong$ 是 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

2. 设 $X, Y, S$ 同习题1。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$f(1) + f(2) + f(3) = g(1) + g(2) + g(3)$$

证明 $\cong$ 是 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。

3. 设 $X, Y, S$ 同习题1。  $S$ 上的二元关系 $\cong$ 定义如下:  $\forall f, g \in S$ ,  $f \cong g$ 当且仅当

$$\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\} = \{g^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$$

证明 $\cong$ 是 $S$ 上的等价关系, 并求出等价类之集。