

# 第四章无穷集合及其基数

陈建文

# 1. 可数集

## 定义1.1

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射，则称 $X$ 与 $Y$ 对等，记为 $X \sim Y$ 。

# 1. 可数集

## 定义1.1

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射, 则称 $X$ 与 $Y$ 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

## 定义1.2

如果从自然数集 $\mathbb{N}$ 到集合 $X$ 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 则称集合 $X$ 是可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 $X$ 不是可数集且 $X$ 不是有穷集合, 则称 $X$ 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

# 1. 可数集

## 定义1.1

如果从集合 $X$ 到集合 $Y$ 存在一个双射, 则称 $X$ 与 $Y$ 对等, 记为 $X \sim Y$ 。

## 定义1.2

如果从自然数集 $\mathbb{N}$ 到集合 $X$ 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ , 则称集合 $X$ 是可数无穷集合, 简称可数集或可列集。如果 $X$ 不是可数集且 $X$ 不是有穷集合, 则称 $X$ 为不可数无穷集合, 简称不可数集。

## 定理1.1

集合 $A$ 为可数集的充分必要条件是 $A$ 的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

因此,  $A$ 可写成 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 。

# 1. 可数集

## 定理1.2

设 $A$ 为可数集合， $B$ 为有穷集合，则 $A \cup B$ 为可数集。

# 1. 可数集

## 定理1.3

设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集，则 $A \cup B$ 为可数集。

# 1. 可数集

## 定理1.4

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

# 1. 可数集

## 定理1.5

设 $A$ 与 $B$ 为两个可数集，则 $A \times B$ 为可数集。



# 1. 可数集

## 定理1.6

全体有理数之集 $\mathbb{Q}$ 是可数集。

## 2 连续统集

### 定理2.1

区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合是不可数集。

## 2 连续统集

### 定义2.1

凡与集合 $[0, 1]$ 存在一个一一对应的集合称为具有“连续统的势”的集合，简称连续统。

## 2 连续统集

### 定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

## 2 连续统集

### 定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

### 定理2.3

设 $M$ 是一个无穷集合， $A$ 是至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

## 2 连续统集

### 定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

### 定理2.3

设 $M$ 是一个无穷集合， $A$ 是至多可数集合，则 $M \sim M \cup A$ 。

### 定理2.4

设 $M$ 为无穷集合， $A$ 为 $M$ 的至多可数子集， $M \setminus A$ 为无穷集合，则 $M \sim M \setminus A$ 。

## 2 连续统集

### 定理2.5

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 $n$ 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

## 2 连续统集

### 定理2.6

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1], k = 1, 2, \dots$ , 则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0, 1]$$

### 推论2.1

全体实数之集是一个连续统。

### 推论2.2

全体无理数之集是一个连续统。



## 2 连续统集

$K(P)$

```
1  if  $H(P, P) == 1$   
2      return  
3  else Loop forever
```

### 3 基数及其比较

#### 定义3.1

集合 $A$ 的基数是一个符号，凡与 $A$ 对等的集合都赋以同一个记号。集合 $A$ 的基数记为 $|A|$ 。

#### 定义3.2

所有与集合 $A$ 对等的集合构成的集族称为 $A$ 的基数。

#### 定义3.3

集合 $A$ 的基数与集合 $B$ 的基数称为是相等的，当且仅当 $A \sim B$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定义3.4

$\alpha, \beta$ 是任意两个基数,  $A, B$ 是分别以 $\alpha, \beta$ 为其基数的集合。如果 $A$ 与 $B$ 的一个真子集对等, 但 $A$ 却不能与 $B$ 对等, 则称 $\alpha$ 小于基数 $\beta$ , 记为 $\alpha < \beta$ 。

### 3 基数及其比较

#### 定义3.4

$\alpha, \beta$ 是任意两个基数,  $A, B$ 是分别以 $\alpha, \beta$ 为其基数的集合。如果 $A$ 与 $B$ 的一个真子集对等, 但 $A$ 却不能与 $B$ 对等, 则称 $\alpha$ 小于基数 $\beta$ , 记为 $\alpha < \beta$ 。

显然,

$\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

$\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 但不存在 $A$ 到 $B$ 的双射。

### 3 基数及其比较

#### 定理3.1 (康托)

对任一集合 $M$ ,  $|M| < |2^M|$ 。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理4.1 (康托-伯恩斯坦)

设 $A, B$ 是两个集合。如果存在单射 $f: A \rightarrow B$ 与单射 $g: B \rightarrow A$ ，则 $A$ 与 $B$ 的基数相等。

## 4 康托-伯恩斯坦定理

### 定理4.2 (塔斯基不动点定理)

设 $(A, \leq)$ 为一个完备格( $A$ 的任一非空子集均有上确界和下确界),  $f: A \rightarrow A$ 为单调函数( $\forall x, y \in A, x \leq y \rightarrow f(x) \leq f(y)$ ), 则 $\exists z \in A$ , 使得 $f(z) = z$ 。

### 定理4.3 (巴拿赫映射分解定理)

设 $A, B$ 为任意两个集合,  $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的映射,  $g$ 为从 $B$ 到 $A$ 的映射, 则存在 $A$ 的划分 $\{A_1, A_2\}$ 和 $B$ 的 $\{B_1, B_2\}$ , 使得

$$f(A_1) = B_1, g(A_2) = B_2.$$

## 5 公理集合论

### 公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

### 公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

### 公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x = u \vee x = v)$$

### 公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$



## 5 公理集合论

### 公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

### 公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \wedge \varphi(x))$$

### 公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A (\phi \in A \wedge (\forall a \in A) a^+ \in A)$$

## 5 公理集合论

### 公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1) \wedge \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \\ \rightarrow \exists B\forall y(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y)))$$

### 公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

### 公理5.10 (选择公理)

$$(\forall \text{relation } R)(\exists \text{function } F)(F \subseteq R \wedge \text{dom } F = \text{dom } R)$$

## 5 公理集合论

1.  $0 \in \mathbb{N}$ ;
2.  $n \in \mathbb{N} \rightarrow n++ \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\forall n \in \mathbb{N} n++ \neq 0$ ;
4.  $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \rightarrow n++ \neq m++$ ;
5.  $(P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} p(n) \rightarrow p(n++)) \rightarrow \forall n p(n)$ 。

## 5 公理集合论

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 5 公理集合论

1.  $x \leq x$
2.  $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$
3.  $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
4.  $x \leq y \vee y \leq x$
5.  $x > y \rightarrow x + z > y + z$
6.  $x > y \wedge z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
7.  $\forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \emptyset \wedge \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R ((\forall y \in A (y \leq z)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A (y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$