

## 第六章 图的基本概念

## 6.1 图论的产生与发展史概述



## 6.2 基本定义

设 $V$ 是一个集合， $V$ 的一切二元子集之集合记为 $\mathcal{P}_2(V)$ ，即

$$\mathcal{P}_2(V) = \{A | A \subseteq V \text{ 且 } |A| = 2\}.$$

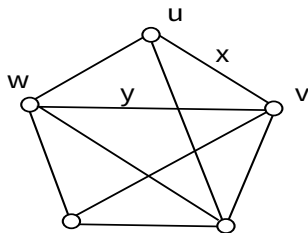
### 定义6.2.1

设 $V$ 是一个非空有限集合， $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ ，二元组 $G = (V, E)$ 称为一个**无向图**。 $V$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**顶点**， $V$ 为**顶点集**； $E$ 中的元素称为无向图 $G$ 的**边**， $E$ 为**边集**。无向图简称**图**。如果 $|V| = p$ ， $|E| = q$ ，则称 $G$ 为一个 $(p, q)$ 图，即 $G$ 是一个具有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。

## 6.2 基本定义

### 定义6.2.2

在图 $G = (V, E)$ 中, 如果 $\{u, v\} \in E$ , 则称**顶点 $u$ 与 $v$ 邻接**; 若 $x$ 与 $y$ 是图 $G$ 的两条边, 并且仅有一个公共端点, 即 $|x \cap y| = 1$ , 则称**边 $x$ 与 $y$ 邻接**; 如果 $x = \{u, v\}$ 是图 $G$ 的一条边, 则称 **$u$ 与 $x$ 互相关联**, 同样的, 称 **$v$ 与 $x$ 互相关联**。



## 6.2 基本定义

### 定义6.2.3

如果一个图中两个顶点间允许有多于一条边存在, 则称为**多重图**, 这些边称为**多重边**; 如果一个图中允许联结一个顶点与其自身的边存在, 则称为**带环图**, 这些边称为**环**; 允许有环或多重边存在的图, 称之为**伪图**。

## 6.2 基本定义

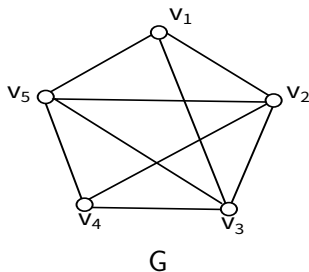
### 定义6.2.4

设 $G = (V, E)$ 为一个图, 如果 $E = \Phi$ , 则称 $G$ 为**零图**;  $(1, 0)$ 图称为**平凡图**。

## 6.2 基本定义

### 定义6.2.5

设 $v$ 为图 $G = (V, E)$ 的任意一个顶点， $G$ 中与 $v$ 关联的边的数目称为顶点 $v$ 的度，记为 $\deg v$ 。



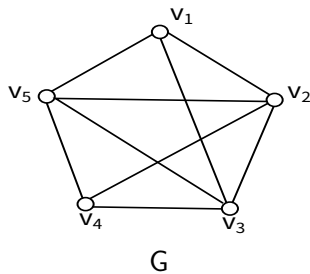




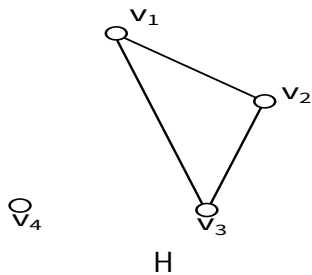
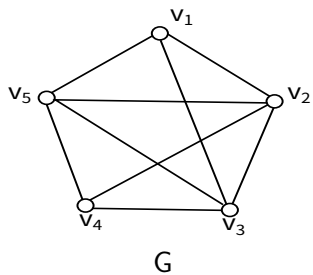
## 6.2 基本定义

### 推论6.2.1

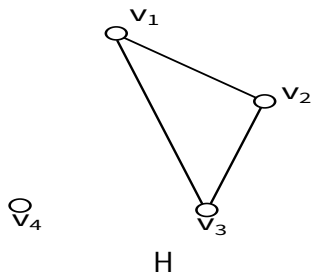
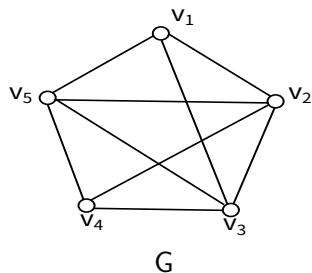
在任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数。



## 6.2 基本定义



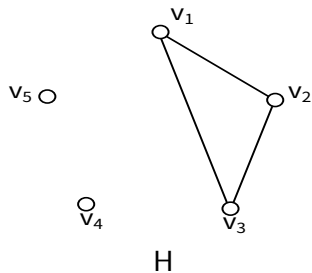
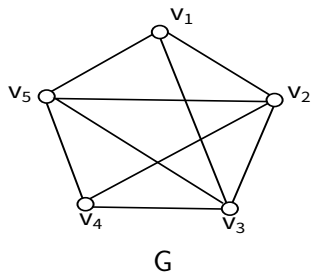
## 6.2 基本定义



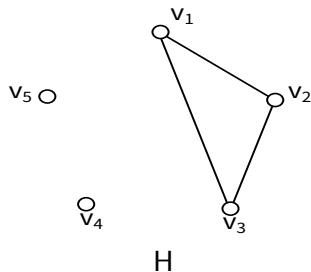
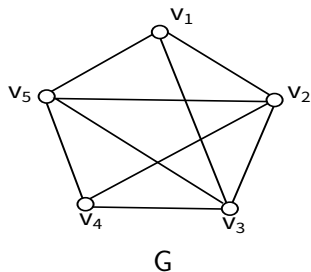
### 定义6.2.6

设  $G = (V, E)$  是一个图，如果  $V_1$  是  $V$  的非空子集， $E_1$  是  $E$  的非空子集并且  $E_1$  中每条边的顶点都在  $V_1$  中，则称图  $H = (V_1, E_1)$  为  $G$  的一个子图。如果  $H \neq G$ ，则称  $H$  为  $G$  的真子图。

## 6.2 基本定义



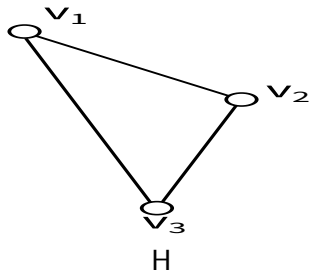
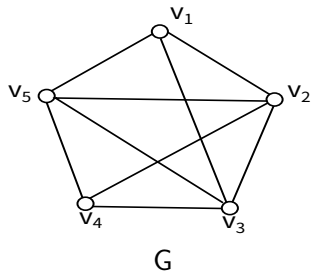
## 6.2 基本定义



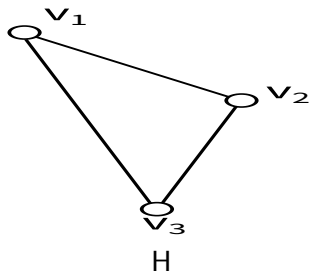
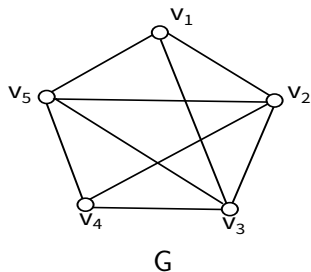
### 定义6.2.7

设  $G = (V, E)$  是一个图, 如果  $F \subseteq E$ , 则称  $G$  的子图  $H = (V, F)$  为  $G$  的一个生成子图。

## 6.2 基本定义



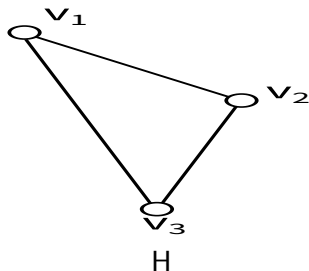
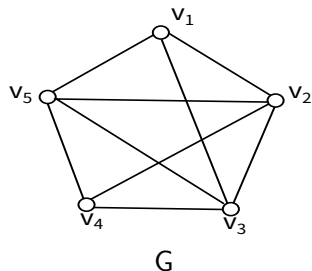
## 6.2 基本定义



### 定义6.2.8

设 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质，若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图，则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。

## 6.2 基本定义



### 定义6.2.8

设 $G$ 的子图 $H$ 具有某种性质，若 $G$ 中不存在与 $H$ 不同的具有此性质且包含 $H$ 的子图，则称 $H$ 是具有此性质的**极大子图**。

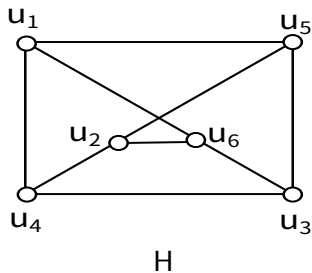
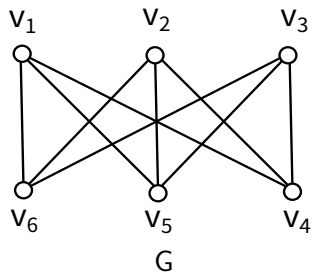
### 定义6.2.9

设 $S$ 为图 $G = (V, E)$ 的顶点集 $V$ 的非空子集，则 $G$ 的以 $S$ 为顶点集的极大子图称为由 $S$ 导出的子图，记为 $\langle S \rangle$ 。形式的，

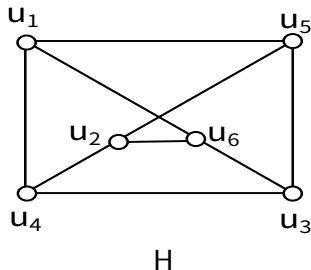
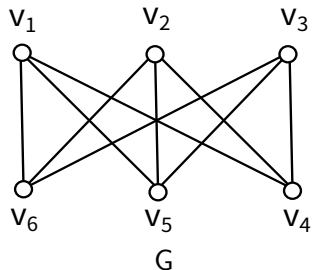
$$\langle S \rangle = (S, \mathcal{P}_2(S) \cap E)$$



## 6.2 基本定义



## 6.2 基本定义



### 定义6.2.10

设  $G = (V, E)$ ,  $H = (U, F)$  是两个图, 如果存在一个一一对应  $\phi: V \rightarrow U$ , 使得  $\{u, v\} \in E$  当且仅当  $\{\phi(u), \phi(v)\} \in F$ , 则称  $G$  与  $H$  同构。

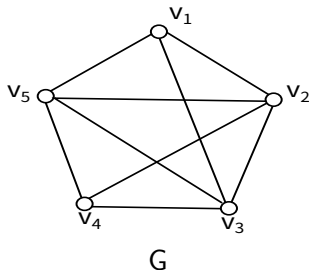
### 6.3 路、圈、连通图

### 定义6.3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。 $G$ 的一条通道是 $G$ 的顶点和边的一个交错序列

$$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, \dots, v_{n-1}, x_n, v_n$$

其中 $x_i = v_{i-1}v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 。  $n$ 称为通道的长。这样的通道常称为 $v_0 - v_n$ 通道，并简记为 $v_0v_1v_2 \dots v_n$ 。当 $v_0 = v_n$ 时，则称此通道为**闭通道**。

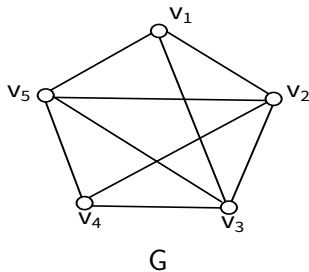




## 6.3 路、圈、连通图

### 定义6.3.3

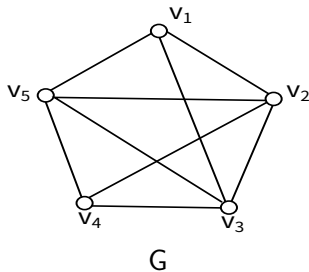
如果一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为**路**。如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为**圈**，或**回路**。



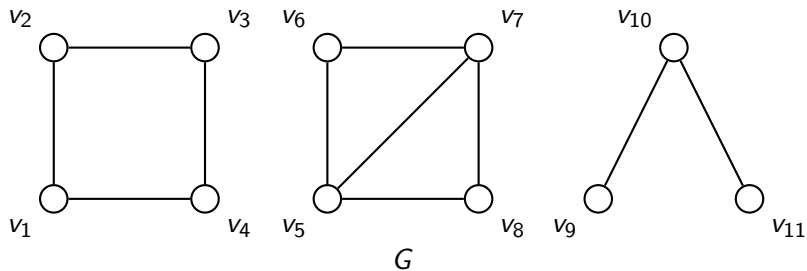
## 6.3 路、圈、连通图

### 定义6.3.4

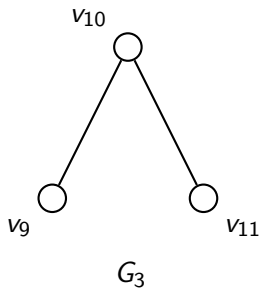
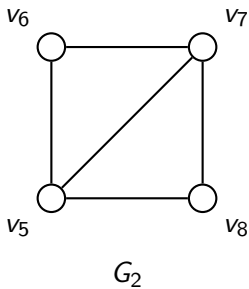
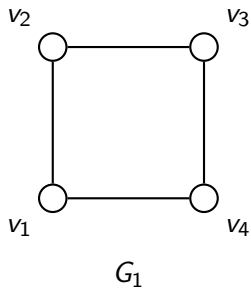
设 $G = (V, E)$ 为图，如果 $G$ 中任两个不同顶点间至少有一条路联结，则称 $G$ 是一个连通图。



## 6.3 路、圈、连通图



## 6.3 路、圈、连通图

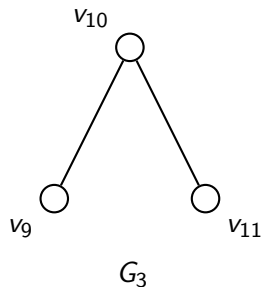
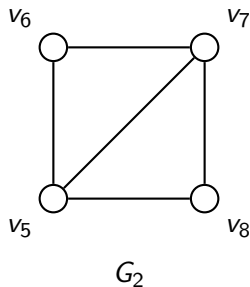
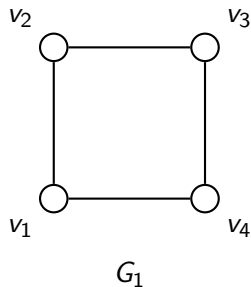




## 6.3 路、圈、连通图

### 定义6.3.5

图 $G$ 的极大连通子图称为 $G$ 的一个支。



## 6.3 路、圈、连通图

### 定理6.3.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图。在 $V$ 上定义二元关系 $\cong$ 如下:

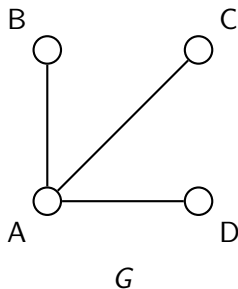
$$\forall u, v \in V, u \cong v \text{ 当且仅当 } u \text{ 与 } v \text{ 间有一条路,}$$

则 $\cong$ 是 $V$ 上的等价关系,  $G$ 的支就是关于 $\cong$ 的每个等价类的导出子图。

## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.1

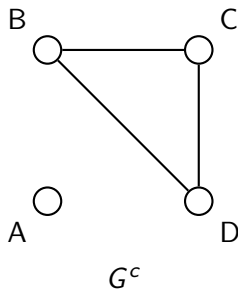
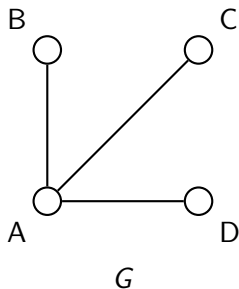
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.1

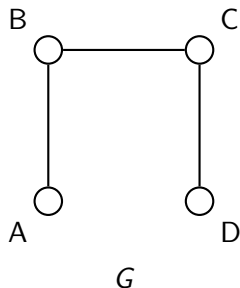
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.1

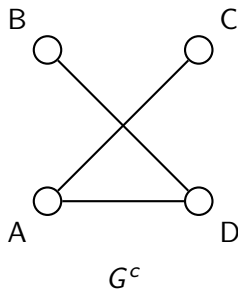
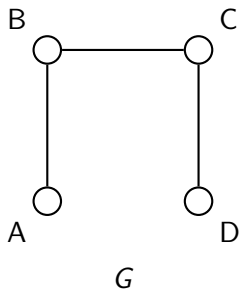
设  $G = (V, E)$  是一个图，图  $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$  称为  $G$  的补图。如果  $G$  与  $G^c$  同构，则称  $G$  是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.1

设 $G = (V, E)$ 是一个图，图 $G^c = (V, \mathcal{P}_2(V) \setminus E)$ 称为 $G$ 的补图。如果 $G$ 与 $G^c$ 同构，则称 $G$ 是自补图。



## 6.4 补图、偶图

### 定理6.4.1

对任一有6个顶点的图 $G$ ， $G$ 中或 $G^c$ 中有一个三角形。

## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.2

对任意的正整数 $m, n, m \geq 2, n \geq 2$ , 求一个最小的正整数 $r(m, n)$ , 使得任何有 $r(m, n)$ 个顶点的图 $G$ 中一定含有一个 $K_m$ 或者图 $G^c$ 中一定含有一个 $K_n$ , 这里的数 $r(m, n)$ 称为拉姆齐数。



## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.2

设  $G = (V, E)$  是一个图, 如果  $G$  的顶点集  $V$  有一个二划分  $\{V_1, V_2\}$ , 使得  $G$  的任一条边的两个端点一个在  $V_1$  中, 另一个在  $V_2$  中, 则称  $G$  为偶图。如果  $\forall u \in V_1, v \in V_2$  均有  $uv \in E$ , 则称  $G$  为完全偶图, 记为  $K_{m,n}$ , 其中  $|V_1| = m, |V_2| = n$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定义6.4.3

设  $G = (V, E)$  是一个图， $u$  和  $v$  是  $G$  的顶点。联结  $u$  和  $v$  的最短路的长称为  $u$  与  $v$  之间的**距离**，并记为  $d(u, v)$ 。如果  $u$  与  $v$  间在  $G$  中没有路，则定义  $d(u, v) = \infty$ 。

## 6.4 补图、偶图

### 定理6.4.2

图 $G$ 为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长。

# 匹配

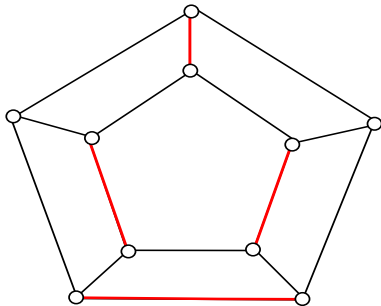
## 定义6.4.4

设  $G = (V, E)$  是一个图,  $G$  的任两条不邻接的边  $x$  与  $y$  称为互相独立的。 $G$  的边集  $E$  的子集  $Y$  称为  $G$  的一个匹配, 如果  $Y$  中任意两条边都是互相独立的。

# 匹配

## 定义6.4.4

设 $G = (V, E)$ 是一个图， $G$ 的任两条不邻接的边 $x$ 与 $y$ 称为互相独立的。 $G$ 的边集 $E$ 的子集 $Y$ 称为 $G$ 的一个匹配，如果 $Y$ 中任意两条边都是互相独立的。



# 匹配

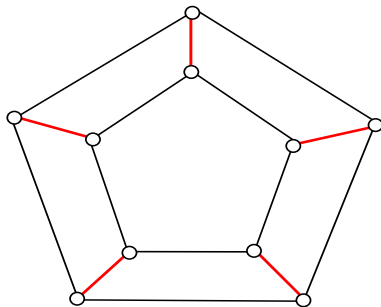
## 定义6.4.5

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$ , 则称 $Y$ 为 $G$ 的一个完美匹配。

# 匹配

## 定义6.4.5

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配, 如果 $2|Y| = |V|$ , 则称 $Y$ 为 $G$ 的一个完美匹配。



# 匹配

## 定义6.4.6

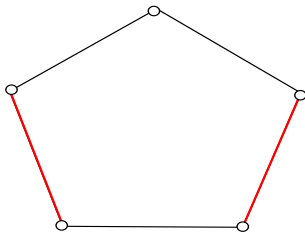
设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 $G$ 的任一匹配 $Y'$ ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 $Y$ 为 $G$ 的一个**最大匹配**。



# 匹配

## 定义6.4.6

设 $Y$ 是图 $G = (V, E)$ 的一个匹配，如果对于 $G$ 的任一匹配 $Y'$ ，恒有 $|Y'| \leq |Y|$ ，则称 $Y$ 为 $G$ 的一个**最大匹配**。



# 匹配

## 定义6.4.7

设  $G = ((V_1, V_2), E)$  是一个偶图, 如果存在  $G$  的一个匹配  $Y$  使得  $|Y| = \min\{|V_1|, |V_2|\}$ , 则称  $Y$  是偶图  $G$  的一个完全匹配。

# 匹配

## 定理6.4.3

设 $G = ((V_1, V_2), E)$ 为偶图，存在 $G$ 的一个完全匹配 $Y$ 且 $|Y| = |V_1|$ 的充分必要条件是对 $V_1$ 的任意子集 $A$ ， $|N(A)| \geq |A|$ ，其中

$$N(A) = \{y \in V_2 | \exists x \in A \{x, y\} \in E\}$$

。

# Stable Matching

## Problem Statement

*A certain community consists of  $n$  men and  $n$  women. Each person ranks those of the opposite sex in accordance with his or her preferences for a marriage partner. We seek a satisfactory way of marrying off all members of the community. We call a set of marriages unstable if under it there are a man and a woman who are not married to each other but prefer each other to their actual mates. For any pattern of preferences is it possible to find a stable set of marriages?*

# Stable Matching

GALE-SHAPLEY(*manPref*, *womanPref*)

Initially all  $m \in M$  and  $w \in W$  are free

**while** there is a man  $m$  who is free

    Choose such a man  $m$

$w$  = the highest-ranked woman in  $m$ 's preference list  
    to whom  $m$  has not yet proposed

**if**  $w$  is free then

$(m, w)$  become engaged

**else**

$w$  is currently engaged to  $m'$

**if**  $w$  prefers  $m'$  to  $m$

$m$  remains free

**else**

$(m, w)$  become engaged

$m'$  becomes free

**return**  $S$

# Stable Matching

## Theorem1

*The G-S algorithm terminates.*

# Stable Matching

## Theorem2

*The G-S algorithm returns a stable matching.*

# Stable Matching

## Theorem3

*In the stable matching returned from the G-S algorithm, each man is paired with his best valid partner.*

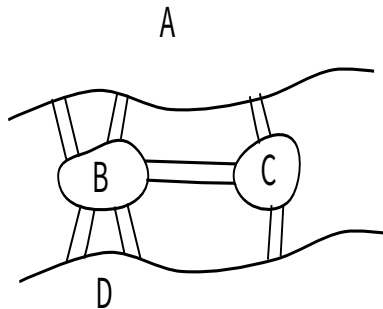


# Stable Matching

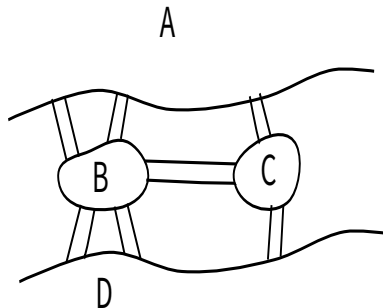
## Theorem4

*In the stable matching returned from the G-S algorithm, each woman is paired with her worst valid partner.*

## 6.5 欧拉图



## 6.5 欧拉图



### 定义6.5.1

包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为**欧拉闭迹**。存在一条欧拉闭迹的图称为**欧拉图**。

## 6.5 欧拉图

### 定理6.5.1

图 $G$ 是欧拉图当且仅当 $G$ 是连通的且每个顶点的度是偶数。

## 6.5 欧拉图

### 定义6.5.2

包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹。

## 6.5 欧拉图

### 定理6.5.2

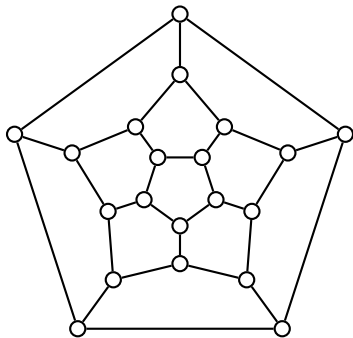
图 $G$ 有一条欧拉迹当且仅当 $G$ 是连通的且恰有两个奇度顶点。

## 6.5 欧拉图

### 定理6.5.3

设 $G$ 是连通图， $G$ 恰有 $2n$ 个奇度顶点， $n \geq 1$ ，则 $G$ 的全部边可以排成 $n$ 条开迹，而且至少有 $n$ 条开迹。

## 6.6 哈密顿图



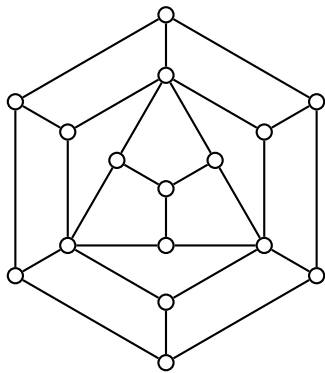


## 6.6 哈密顿图

### 定义6.6.1

图 $G$ 的一条包含所有顶点的路称为 $G$ 的一条哈密顿路;图 $G$ 的一个包含所有顶点的圈称为 $G$ 的一个哈密顿圈。具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。

## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

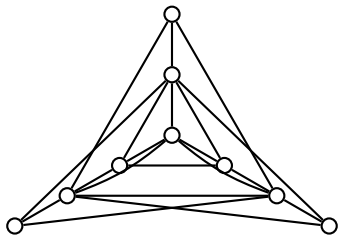
### 定理6.6.1

设 $G = (V, E)$ 是哈密顿图，则对 $V$ 的每个非空子集 $S$ ，均有

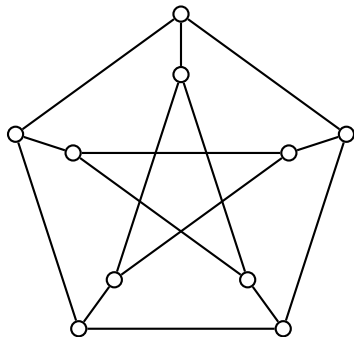
$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $G - S$ 是从 $G$ 中去掉 $S$ 中那些顶点后所得到的图， $\omega(G - S)$ 是图 $G - S$ 的支数。

## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图



## 6.6 哈密顿图

### 定理6.6.2

设 $G$ 是有 $p(p \geq 3)$ 个顶点的图。如果对 $G$ 的任一对不邻接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p,$$

则 $G$ 是一个哈密顿图。

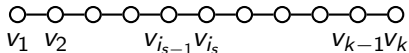
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.6.3

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。



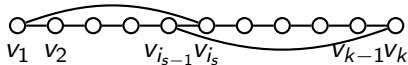
## 6.6 哈密顿图

### 定理6.6.3

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 有哈密顿路。





## 6.6 哈密顿图

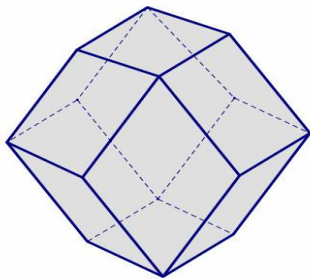
### 引理6.6.1

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点的图，如果对 $G$ 的每一对不临接的顶点 $u$ 和 $v$ ，均有

$$\deg u + \deg v \geq p - 1,$$

则 $G$ 是连通的。

## 6.6 哈密顿图

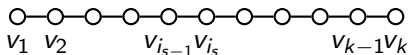


## 6.6 哈密顿图

### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

## 6.6 哈密顿图



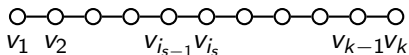
### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ,

## 6.6 哈密顿图



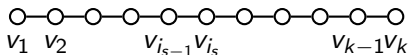
### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

## 6.6 哈密顿图



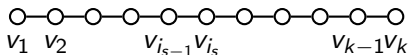
### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。  
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。

## 6.6 哈密顿图



### 习题

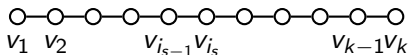
设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

## 6.6 哈密顿图



### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

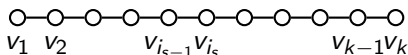
### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。  
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈；



## 6.6 哈密顿图



### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

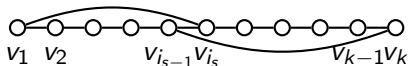
### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈；
- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 $v_1, v_k$ 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。

## 6.6 哈密顿图



### 习题

设 $G$ 是一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的图。证明：如果 $p > 2\delta(G)$ ，则有长至少为 $2\delta(G)$ 的路。

### 证明.

设 $G$ 中的最长路为 $v_1 v_2 \cdots v_k$ ，只需证明 $k \geq 2\delta(G) + 1$ 。

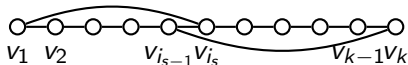
用反证法，假设 $k \leq 2\delta(G)$ 。以下证明 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 必在同一个圈上。

- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 邻接，则 $v_1 v_2 \cdots v_k v_1$ 构成 $G$ 中的一个圈；
- ▶ 如果 $v_1$ 与 $v_k$ 不邻接，由 $v_1 v_2 \cdots v_k$ 为最长路知 $v_1, v_k$ 只能与 $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ 中的顶点邻接。设 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}$ 与 $v_1$ 邻接， $2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_r < k$ ，则 $v_k$ 必与某个 $v_{i_s-1}$ 邻接， $2 \leq s \leq r$ 。否则， $v_k$ 至多与最长路上其余的顶点邻接，所以

$$\deg v_1 + \deg v_2 \leq r + ((k-1) - r) = k-1 \leq 2\delta(G) - 1$$

矛盾。于是， $v_1 v_2 \cdots v_{i_s-1} v_k v_{k-1} \cdots v_{i_s} v_1$ 是 $G$ 中的一个圈。总之， $v_1, v_2, \dots, v_k$ 在 $G$ 的同一个圈 $C$ 上。

## 6.6 哈密顿图



证明（续上页）.

由于 $G$ 是连通的,  $p > 2\delta(G)$ , 所有 $G$ 必有某个顶点 $v$ ,  $v$ 不在 $C$ 上, 但与 $C$ 上某个顶点 $v_i$ 邻接。于是得到 $G$ 的一条更长的路, 这就出现了矛盾。



## 6.7 图的邻接矩阵

