

第九章 平面图和图的着色

陈建文

第九章 平面图和图的着色

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图

在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图

在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。

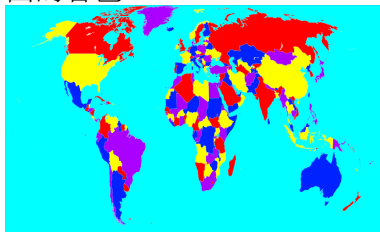
2. 图的着色

第九章 平面图和图的着色

1. 平面图

在印刷电路的布线中，人们感兴趣的是要知道一个特定的电网络是否可以嵌入平面上。

2. 图的着色



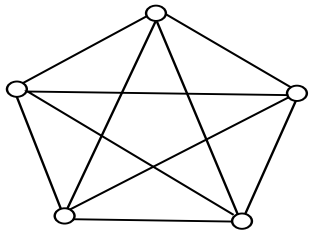
9.1 平面图及其欧拉公式

9.1 平面图及其欧拉公式

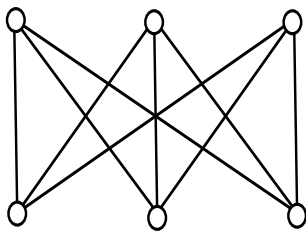
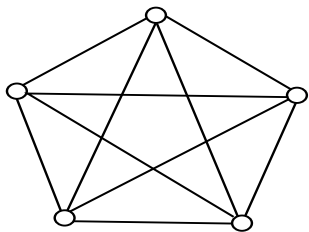
定义9.1.1

图 G 称为被嵌入平（曲）面 S 内，如果 G 的图解已画在 S 上，而且任何两条边均不相交（除可能在端点相交外）。已嵌入平面内的图称**平面图**。如果一个图可以嵌入平面，则称此图是**可平面**的。

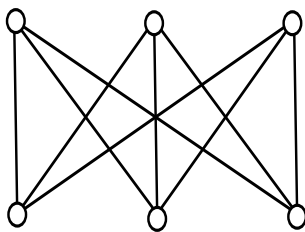
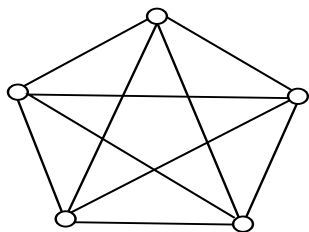
9.1 平面图及其欧拉公式



9.1 平面图及其欧拉公式



9.1 平面图及其欧拉公式

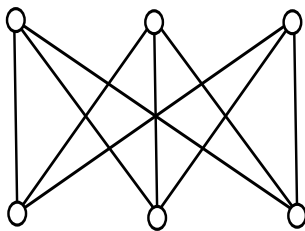
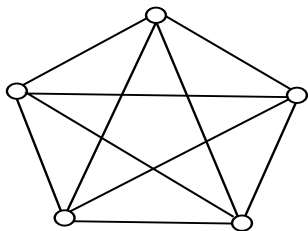


J. Hopcroft and R. Tarjan.

Efficient planarity testing.

Journal of the Association for Computing Machinery,
21(4):549-568, 1974.

9.1 平面图及其欧拉公式



J. Hopcroft and R. Tarjan.

Efficient planarity testing.

Journal of the Association for Computing Machinery,
21(4):549-568, 1974.



J. Boyer and W. Myrvold.

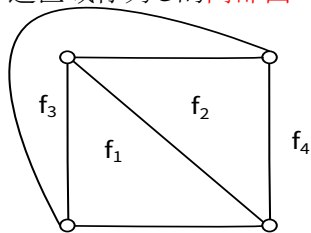
On the Cutting Edge: Simplified $O(n)$ Planarity by Edge
Addition.

Journal of Graph algorithms and Applications, 8(3):241-273,
2004.

9.1 平面图及其欧拉公式

定义9.1.2

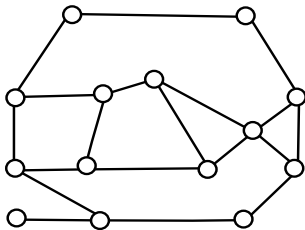
平面图 G 把平面分成了若干个区域，这些区域都是连通的，称之为 G 的**面**，其中无界的那个连通区域称为 G 的**外部面**，其余的连通区域称为 G 的**内部面**。



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

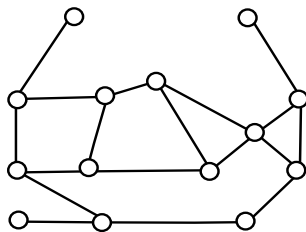
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

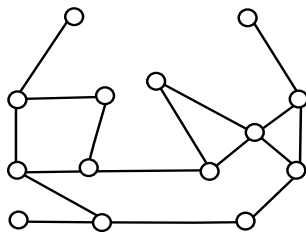
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

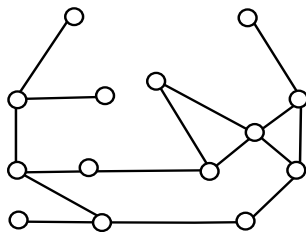
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

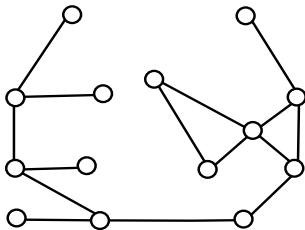
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

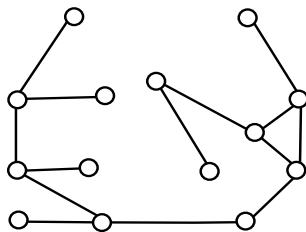
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

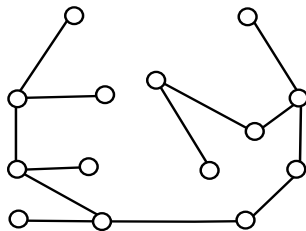
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

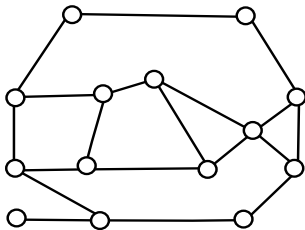
如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面，则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

定理9.1.1 (欧拉公式)

如果有 p 个顶点 q 条边的平面连通图 G 有 f 个面, 则 $p - q + f = 2$



9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.1

若平面图 G 有 p 个顶点 q 条边且每个面都是由长为 n 的圈围成的, 则

$$q = n(p - 2)/(n - 2)$$

9.1 平面图及其欧拉公式

一个最大可平面图是一个可平面图，对此可平面图中不能再加入边而不破坏可平面性。

推论9.1.2

设 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的最大可平面图， $p \geq 3$ ，则 G 的每个面都是三角形，而且 $q = 3p - 6$ 。

9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.3

设 G 是一个 (p, q) 可平面连通图，而且 G 的每个面都是一个长为4的圈围成的，则 $q = 2p - 4$ 。

9.1 平面图及其欧拉公式

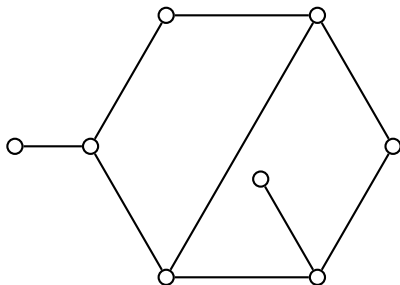
推论9.1.4

若 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的可平面图, $p \geq 3$, 则 $q \leq 3p - 6$;
进一步, 若 G 中没有三角形, 则 $q \leq 2p - 4$ 。

9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.4

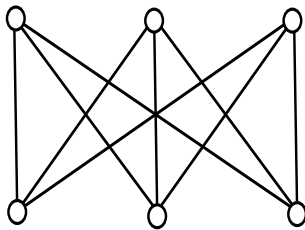
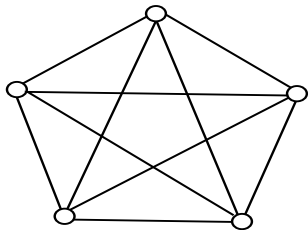
若 G 是一个有 p 个顶点 q 条边的可平面图, $p \geq 3$, 则 $q \leq 3p - 6$;
进一步, 若 G 中没有三角形, 则 $q \leq 2p - 4$ 。



9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.5

K_5 和 $K_{3,3}$ 都不是可平面图。



9.1 平面图及其欧拉公式

推论9.1.6

每个可平面图 G 中顶点度的最小值不超过5,即 $\delta(G) \leq 5$ 。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题1

设 G 是一个有 p 个顶点的平面图, $p \geq 4$ 。证明: G 中有4个度不超过5的顶点。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题2

设 G 是一个有 k 个支的平面图。若 G 的顶点数、边数、面数分别为 p , q 和 f , 试证:

$$p - q + f = k + 1$$

9.1 平面图及其欧拉公式

习题3

若 G 是顶点数 $p > 11$ 的平面图，试证 G^c 不是平面图。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题4

设 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是平面上 n 个顶点的集合, $n \geq 3$, 其中任两个顶点的距离至少是 1。证明: S 中至多有 $3n - 6$ 对顶点, 其距离为 1。

9.1 平面图及其欧拉公式

习题5

证明：不存在7条棱的凸多面体。

9.2 非哈密顿平面图

定理9.2.1

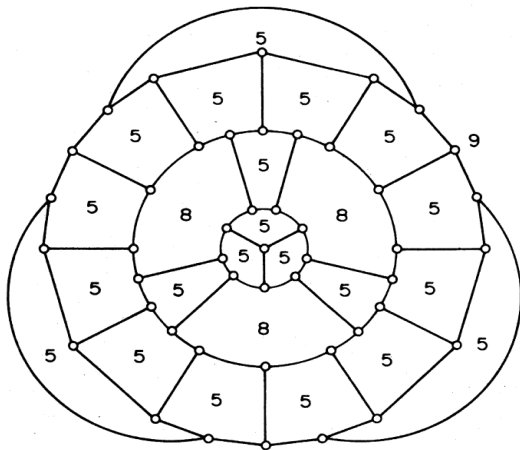
设 $G = (V, E)$ 是一个 (p, q) 平面哈密顿图, C 是 G 的哈密顿圈。
令 f_i 为 C 的内部由 i 条边围成的面的个数, g_i 为 C 的外部 i 条边围成的面的个数, 则

$$1 \cdot f_3 + 2 \cdot f_4 + 3 \cdot f_5 + \cdots = \sum_{i=3}^p (i-2)f_i = p-2; \quad (1)$$

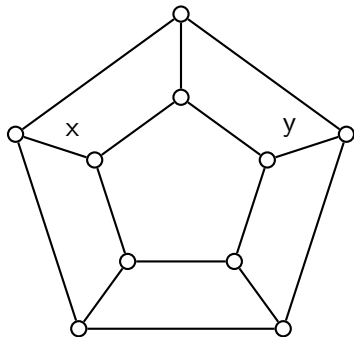
$$1 \cdot g_3 + 2 \cdot g_4 + 3 \cdot g_5 + \cdots = \sum_{i=3}^p (i-2)g_i = p-2; \quad (2)$$

$$1 \cdot (f_3 - g_3) + 2 \cdot (f_4 - g_4) + 3 \cdot (f_5 - g_5) + \cdots = \sum_{i=3}^p (i-2)(f_i - g_i) = 0 \quad (3)$$

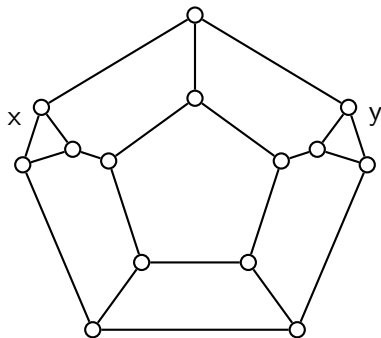
9.2 非哈密顿平面图



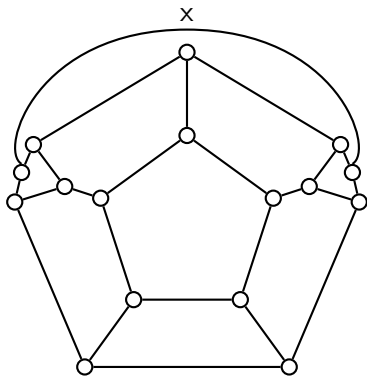
9.2 非哈密顿平面图



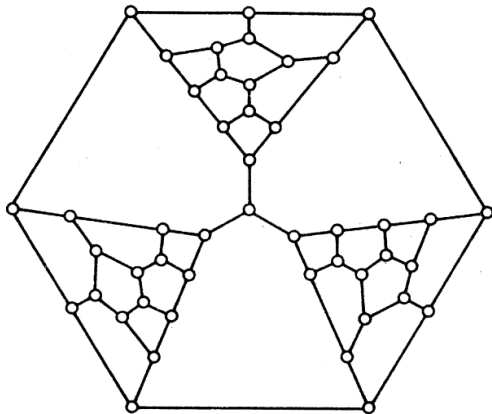
9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.2 非哈密顿平面图



9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.1

设 $x = uv$ 是图 $G = (V, E)$ 的一条边，又 w 不是 G 的顶点，则当用边 uw 和 wv 代替边 x 时，就称 x 被细分。如果 G 的某些条边被细分，产生的图称为 G 的细分图。

定义9.3.2

两个图称为同胚的，如果它们都可以从同一个图通过一系列的边细分得到。

定理9.3.1

一个图是可平面的充分必要条件是它没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.3

一个图 G 的一个初等收缩由等同两个临接的顶点 u 和 v 得到，即从 G 中 去掉 u 和 v ，然后再加上一个新顶点 w ，使得 w 临接于所有临接 于 u 或 v 的顶点。一个图 G 可以收缩到图 H ，如果 H 可以从 G 经过一系列的初等收缩得到。

定理9.3.2

一个图是可平面的当且仅当它没有一个可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

定义9.3.4

设 $G = (V, E)$ 是一个平面图，由 G 按照如下方法构造一个图 G^* ， G^* 称为 G 的对偶图：对 G 的每个面 f 对应地有 G^* 的一个顶点 f^* ；对 G 的每条边 e 对应地有 G^* 的一条边 e^* ： G^* 的两个顶点 f^* 与 g^* 由边 e^* 联结，当且仅当 G 中与顶点 f^* 与 g^* 对应的面 f 与 g 有公共边 e ，如果某条边 x 仅在一个面中出现而不是两个面的公共边，则在 G^* 中这个面对应的顶点有一个环。

9.4 图的顶点着色

- ▶ A fights with B and E;
- ▶ B fights with A and C;
- ▶ C fights with B, E and F;
- ▶ D fights with E;
- ▶ E fights with A, C and D;
- ▶ F fights with C.

9.4 图的顶点着色

定义9.4.1

图的一种着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个临接的顶点有同一种颜色。图 G 的一个 n -着色是用 n 种颜色对 G 的着色。

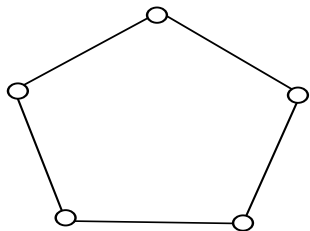
定义9.4.2

图 G 的色数是使 G 为 n -着色的数 n 的最小值，图 G 的色数记为 $\chi(G)$ 。若 $\chi(G) \leq n$ ，则称 G 是 n -可着色的。若 $\chi(G) = n$ ，则称 G 是 n 色的。

9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

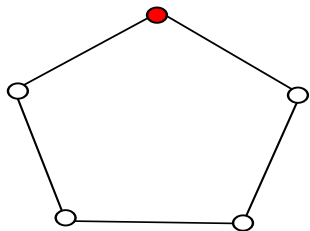
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

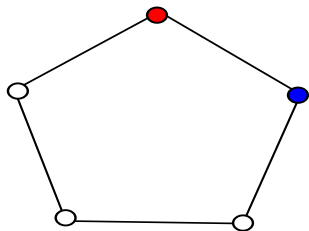
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

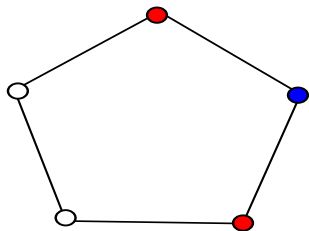
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

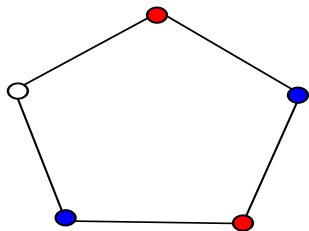
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

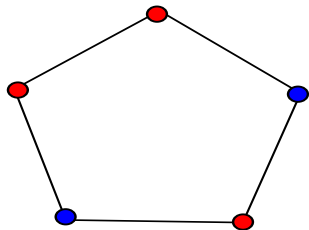
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

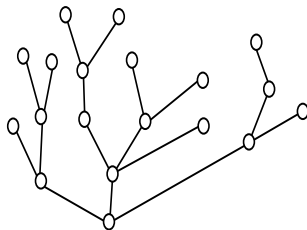
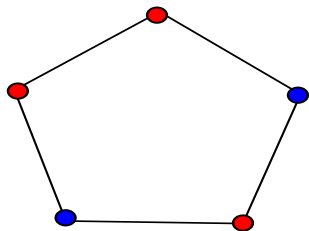
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

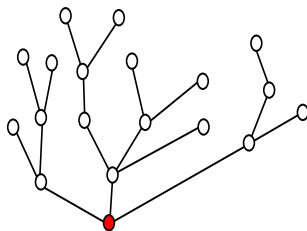
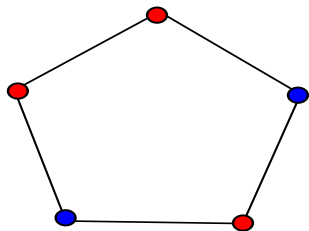
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

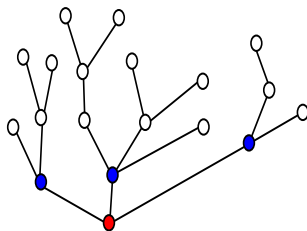
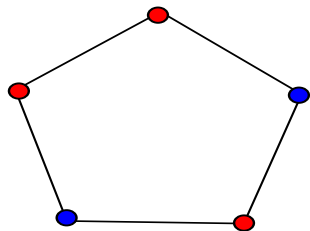
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

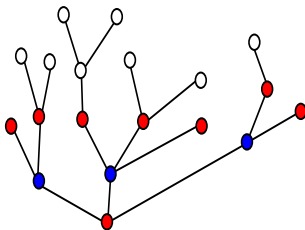
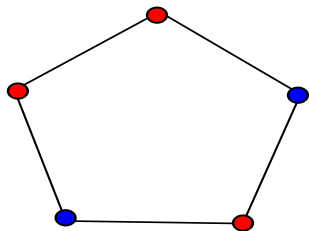
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

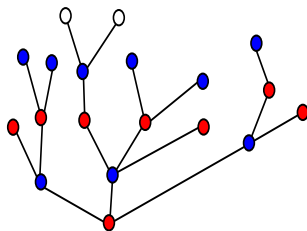
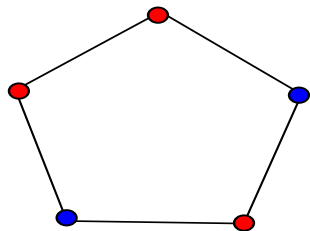
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

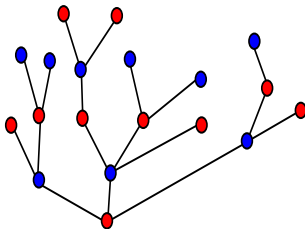
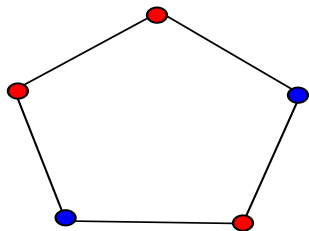
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

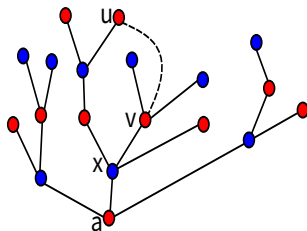
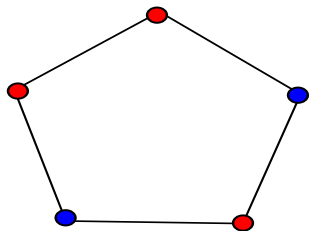
一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.1

一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.2

设 $\Delta = \Delta(G)$ 为图 G 的顶点度的最大值，则 G 是 $(\Delta + 1)$ -可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理9.4.3

如果 G 是一个连通图且不是完全图也不是奇数长的圈, 则 G 是 $\Delta(G)$ -可着色的。

9.4 图的顶点着色

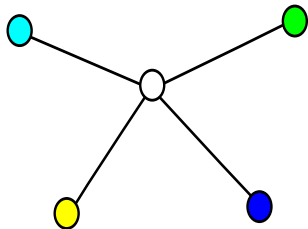
定理9.4.4

每个平面图是6-可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理9.4.5

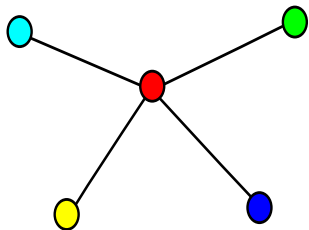
每个平面图是5-可着色的。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.5

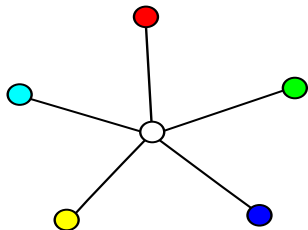
每个平面图是5-可着色的。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.5

每个平面图是5-可着色的。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.6

每个平面图是4-可着色的。

习题

习题

证明：若 G 的任两个奇数长的圈都有一个公共顶点，
则 $\chi(G) \leq 5$ 。