

**定理 1.** 设树 $T$ 有 $p$ 个顶点,  $q$ 条边, 则 $q = p - 1$ 。(数学归纳法I, 数学归纳法II)

**定理 2.** 如果有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的平面连通图 $G$ 有 $f$ 个面, 则 $p - q + f = 2$ 。(数学归纳法I)

**定理 3.** 若 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的可平面图,  $p \geq 3$ , 则 $q \leq 3p - 6$ 。(直接证明法)

**定理 4.**  $K_5$ 不是可平面图。(反证法)

**定理 5.** 每个可平面图 $G$ 中顶点度的最小值不超过5, 即 $\delta(G) \leq 5$ 。(直接证明法, 反证法)

**定理 6.** 每个可平面图是5-可着色的。(数学归纳法II)

**定理 1.** 设树 $T$ 有 $p$ 个顶点,  $q$ 条边, 则 $q = p - 1$ 。

证明 (证法一) .

用数学归纳法证明, 施归纳于顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时,  $q = 0$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $p = k$ 时结论成立, 往证当 $p = k + 1$ 时结论也成立。设 $T$ 有 $k + 1$ 个顶点。 $T$ 中一定存在一个度为1的顶点, 这是因为, 设 $P$ 为 $T$ 中的一条最长路,  $v$ 为 $P$ 的一个端点, 则 $v$ 除了 $P$ 上与其关联的边之外, 由 $T$ 中无圈知 $v$ 不能再有其他的与 $P$ 上的顶点相关联的边, 同时由 $P$ 为一条最长路知 $v$ 不能再有与 $P$ 外的顶点相关联的边, 因此 $v$ 的度必为1。去掉 $T$ 中一个度为1的顶点及其与之关联的边, 得到的图 $T'$ 连通且无圈, 则 $T'$ 是树。 $T'$ 有 $k$ 个顶点,  $q - 1$ 条边, 由归纳假设,  $q - 1 = k - 1$ , 从而 $q = (k + 1) - 1$ , 即当 $p = k + 1$ 时结论也成立。□

证明 (证法二) .

用数学归纳法证明, 施归纳于边数 $q$ 。

(1) 当 $q = 0$ 时,  $p = 1$ , 结论显然成立。

(2) 假设当 $q < k$ 时结论成立, 往证当 $q = k$ 时结论也成立。设 $T$ 有 $k$ 条边。去掉 $T$ 中的任意一条边, 得到两个支 $T_1$ 和 $T_2$ , 它们均连通无圈, 因此是树。设 $T_1$ 有 $p_1$ 个顶点,  $k_1$ 条边,  $T_2$ 有 $p_2$ 个顶点,  $k_2$ 条边, 由归纳假设,

$$k_1 = p_1 - 1$$

$$k_2 = p_2 - 1$$

以上两式相加, 两边再同时加1, 得

$$k_1 + k_2 + 1 = p_1 + p_2 - 1$$

从而

$$k = p - 1$$

即当 $q = k$ 时结论也成立。□

**定理 2.** 如果有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的平面连通图 $G$ 有 $f$ 个面, 则 $p - q + f = 2$ 。

证明.

用数学归纳法证明, 施归纳于面数 $f$ 。

(1) 当 $f = 1$ 时,  $G$ 中无圈, 又因为 $G$ 是连通的, 所以 $G$ 是树。从而  $q = p - 1, p - q + f = 2$ 成立。

(2) 假设当 $f = k$ 时结论成立, 往证当 $f = k + 1$ 时结论也成立。假设 $G$ 有 $k + 1$ 个面,  $k \geq 1$ 。此时 $G$ 至少有一个内部面, 从而有一个圈。从这个圈上去掉一条边 $x$ , 则 $G - x$ 就是一个有 $p$ 个顶点,  $q - 1$ 条边,  $k$ 个面的平面连通图。由归纳假设, 对 $G - x$ 结论成立, 即

$$p - (q - 1) + k = 2$$

因此,

$$p - q + (k + 1) = 2$$

即当 $f = k + 1$ 时结论也成立。  $\square$

**定理 3.** 若 $G$ 为一个有 $p$ 个顶点 $q$ 条边的可平面图,  $p \geq 3$ , 则 $q \leq 3p - 6$ 。

证明. 不妨设 $G$ 为连通的平面图, 否则可以加边使之变成连通的。由于每个面至少含有3条边, 因此

$$2q \geq 3f$$

即

$$\frac{2q}{3} \geq f$$

因此, 根据欧拉公式

$$p - q + f = 2$$

得

$$p - q + \frac{2q}{3} \geq 2$$

化简得:

$$q \leq 3p - 6$$

$\square$

**定理 4.**  $K_5$ 不是可平面图。

证明. 用反证法。假设 $K_5$ 是可平面图, 其顶点数 $p = 5$ , 边数 $q = 10$ , 此时

$$q \leq 3p - 6$$

即

$$10 \leq 3 \times 5 - 6 = 9$$

矛盾。因此 $K_5$ 不是可平面图。  $\square$

**定理 5.** 每个可平面图 $G$ 中顶点度的最小值不超过5, 即 $\delta \leq 5$ 。

证明（证法一）. 当图 $G$ 的顶点数 $p = 1, 2$ 时, 结论显然成立。当 $p \geq 3$ 时, 设可平面图 $G$ 有 $q$ 个顶点, 则

$$\delta p \leq 2q$$

由 $G$ 为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$\delta p \leq 6p - 12$$

两边同时除以 $p$ , 得:

$$\delta \leq 6 - \frac{12}{p}$$

即

$$\delta \leq 5$$

□

证明（证法二）. 当图 $G$ 的顶点数 $p = 1, 2$ 时, 结论显然成立。当 $p \geq 3$ 时, 用反证法证明结论也成立。假设 $\delta \geq 6$ , 则

$$6p \leq 2q$$

由 $G$ 为可平面图知

$$q \leq 3p - 6$$

从而

$$6p \leq 6p - 12$$

矛盾。

□

**定理 6.** 每个可平面图是5-可着色的。

证明. 用数学归纳法证明, 施归纳于图的顶点数 $p$ 。

(1) 当 $p = 1$ 时, 结论显然成立。

(2) 假设当 $p < k$ 时结论成立, 往证当 $p = k$ 时结论也成立。设可平面图 $G$ 有 $k$ 个顶点, 则图 $G$ 中一定有一个顶点 $v$ 使得 $\deg v \leq 5$ 。于是,  $G - v$ 是一个有 $k - 1$ 个顶点的可平面图, 由归纳假设,  $G - v$ 是5-可着色的。假设用至多5种颜色对 $G - v$ 进行了着色。

如果 $\deg v \leq 4$ , 则在 $G - v$ 中用至多5种颜色进行顶点着色时, 在 $G$ 中与 $v$ 邻接的顶点至多用了4种颜色, 用另外一种不同的颜色对顶点 $v$ 进行着色, 这样用至多5种颜色就可以对 $G$ 的顶点进行着色, 从而图 $G$ 是5-可着色的。

如果 $\deg v = 5$ , 与 $v$ 邻接的5个顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 在 $G - v$ 中用 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  5种颜色进行了着色。如果 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 中有两种颜色是相同的, 则 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 中至多有4种颜色, 用另一种颜色对顶点 $v$ 进行着色, 这样用至多5种颜色就可以对 $G$ 的顶点进行着色。以下考虑 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ 中的各种颜色互不相同的情况。在图 $G$ 中, 与顶点 $v$ 邻接的5个顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 中一定有两个顶点是不邻接的, 否则图 $G$ 中将有一个子图 $K_5$ , 这与图 $G$ 为可平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点 $v_i$ 和 $v_j$ , 在 $G - v$ 中, 将顶点 $v_i$ 和顶点 $v_j$ 视为同一个顶点 $w$ , 即去掉顶点 $v_i$ 和 $v_j$ , 添加一个新的顶点 $w$ , 原来与顶点 $v_i$ 和顶点 $v_j$ 相关联的边变为

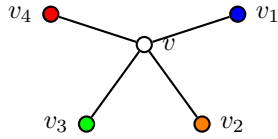


图 1:  $\deg v \leq 4$ 的情况

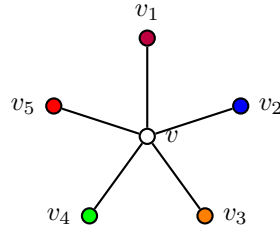


图 2:  $\deg v = 5$ 的情况

与顶点 $w$ 相关联的边，得到的新的图记为  $G'$ ，则 $G'$ 仍然是可平面图。由归纳假设， $G'$ 是5-可着色的。设用至多5种颜色对 $G'$ 进行了顶点着色。在 $G - v$ 中，顶点 $v_i$ 和顶点 $v_j$ 都着与 $w$ 相同的颜色，其他的顶点均与 $G'$ 中相对应的顶点着相同的颜色，这样 $G - v$ 用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，在 $G$ 中与顶点 $v$ 邻接的五个顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ 中用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点 $v$ 着色，这样用至多5种颜色就可以对 $G$ 的顶点进行着色，从而图 $G$ 是5-可着色的。

□