第四章无穷集合及其基数

陈建文

定义1.1

如果从集合X到集合Y存在一个双射,则称X与Y对等,记为 $X \sim Y$ 。

定义1.1

如果从集合X到集合Y存在一个双射,则称X与Y对等,记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集N到集合X存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \to X$,则称集合X为可数无穷集合,简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合,则称X为不可数无穷集合,简称不可数集。

定义1.1

如果从集合X到集合Y存在一个双射,则称X与Y对等,记为 $X \sim Y$ 。

定义1.2

如果从自然数集N到集合X存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \to X$,则称集合X为可数无穷集合,简称可数集或可列集。如果X不是可数集且X不是有穷集合,则称X为不可数无穷集合,简称不可数集。

定理1.1

集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$$

因此,A可写成 $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots \}$ 。

定理1.2

设A为可数集合, B为有穷集合, 则A∪B为可数集。

定理1.3

设A与B为两个可数集,则 $A \cup B$ 为可数集。

定理1.4

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为可数集合的一个无穷序列,则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集。即可数多个可数集之并是可数集。

定理1.5

设A与B为两个可数集,则 $A \times B$ 为可数集。

定理1.6 全体有理数之集Q是可数集。

定理2.1

区间[0,1]中的所有实数构成的集合是不可数集。

定义2.1

凡与集合[0,1]存在一个一一对应的集合称为具有"连续统的势"的集合,简称连续统。

定理2.2 无穷集合必包含有可数子集。

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设M是一个无穷集合,A是至多可数集合,则 $M \sim M \cup A$ 。

定理2.2

无穷集合必包含有可数子集。

定理2.3

设M是一个无穷集合,A是至多可数集合,则 $M \sim M \cup A$ 。

定理2.4

设M为无穷集合,A为M的至多可数子集, $M \setminus A$ 为无穷集合,则 $M \sim M \setminus A$ 。

定理2.5

设 A_1, A_2, \cdots, A_n 为n个两两不相交的连续统,则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统。

定理2.6

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0,1], k = 1, 2, \cdots, 则$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim [0,1]$$

推论2.1

全体实数之集是一个连续统。

推论2.2

全体无理数之集是一个连续统。

K(P)

- 1 **if** H(P, P) == 1
- 2 return
- 3 **else** Loop forever

定义3.1

集合A的基数是一个符号,凡与A对等的集合都赋以同一个记号。集合A的基数记为|A|。

定义3.2

所有与集合A对等的集合构成的集族称为A的基数。

定义3.3

集合A的基数与集合B的基数称为是相等的,当且仅当 $A \sim B$ 。

定义3.4

设 α , β 为任意两个基数,A,B为分别以 α , β 为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等,但A却不能与B对等,则称基数 α 小于基数 β ,记为 α < β 。

定义3.4

设 α , β 为任意两个基数,A,B为分别以 α , β 为其基数的集合。如果A与B的一个真子集对等,但A却不能与B对等,则称基数 α 小于基数 β ,记为 α < β 。

显然,

 $\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

 $\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \to B$ 且不存在A到B的双射。

定理3.1 (康托) 对任一集合M, $|M| < |2^M|$ 。

4康托-伯恩斯坦定理

定理4.1 (康托-伯恩斯坦)

设A, B为两个集合。如果存在单射 $f:A\to B$ 与单

射 $g: B \rightarrow A$,则A与B的基数相等。

公理5.1 (外延公理)

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

公理5.2 (空集公理)

$$\exists \phi \forall x (x \notin \phi)$$

公理5.3 (对公理)

$$\forall u \forall v \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x = u \lor x = v)$$

公理5.4 (并集公理)

$$\forall A \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow (\exists b \in A) x \in b)$$

公理5.5 (幂集公理)

$$\forall a \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \subseteq a)$$

公理5.6 (子集公理)

$$\forall c \exists B \forall x (x \in B \leftrightarrow x \in c \land \varphi(x))$$

公理5.7 (无穷公理)

$$\exists A(\phi \in A \land (\forall a \in A)a^+ \in A)$$

公理5.8 (代换公理)

$$\forall A((\forall x \in A) \forall y_1 \forall y_2 (\varphi(x, y_1) \land \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$$

$$\rightarrow \exists B \forall y (y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A) \varphi(x, y)))$$

公理5.9 (正则公理)

$$(\forall A \neq \phi)(\exists m \in A)m \cap A = \phi$$

公理5.10 (选择公理)

 $(\forall relation R)(\exists function F)(F \subseteq R \land dom F = dom R)$



- 1. $0 \in \mathbb{N}$;
- 2. $n \in \mathbb{N} \to n++\in \mathbb{N}$;
- 3. $\forall n \in \mathbb{N} n + + \neq 0$;
- 4. $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} n \neq m \rightarrow n + + \neq m + +;$
- 5. $(P(0) \land \forall n \in \mathbb{N}p(n) \rightarrow p(n++)) \rightarrow \forall np(n) \circ$

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$,则

1.
$$x + y = y + x$$

2.
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

3.
$$0 + x = x + 0 = x$$

4.
$$(-x) + x = x + (-x) = 0$$

5.
$$x * y = y * x$$

6.
$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

7.
$$1 * x = x * 1 = x$$

8.
$$\forall x \in \mathbb{R} x \neq 0 \to x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$$

9.
$$x*(y+z) = x*y+x*z$$

10.
$$(y + z) * x = y * x + z * x$$

- 1. x < x
- 2. $x \le y \land y \le x \rightarrow x = y$
- 3. $x \le y \land y \le z \rightarrow x \le z$
- **4**. $x \le y \lor y \le x$
- 5. $x > y \to x + z > y + z$
- 6. $x > y \land z > 0 \rightarrow x * z > y * z$
- 7. $\forall A \subseteq \mathbb{R} (A \neq \phi \land \exists x \in \mathbb{R} (\forall y \in A(y \leq x)) \rightarrow \exists z \in R((\forall y \in A(y \leq z)) \land (\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in A(y \leq x) \rightarrow z \leq x))))$