

## 第二章映射

陈建文

# 1. 映射

## 定义1.1

设 $X$ 和 $Y$ 是两个非空集合。一个从 $X$ 到 $Y$ 的映射是一个满足以下两个条件的 $X \times Y$ 的子集 $f$ :

1. 对 $X$ 的每一个元素 $x$ , 存在一个 $y \in Y$ , 使得 $(x, y) \in f$ ;
2. 若 $(x, y) \in f$ ,  $(x, y') \in f$ , 则 $y = y'$ 。

$(x, y) \in f$ 记为 $y = f(x)$ ,  $y$ 称为 $x$ 在 $f$ 下的象, 而 $x$ 称为 $y$ 的原象。 $X$ 称为 $f$ 的定义域; 集合 $\{f(x) | x \in X\}$ 称为 $f$ 的值域, 记为 $Im(f)$ 。

# 1. 映射

## 定义1.2

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  是  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

# 1. 映射

## 定义1.2

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  是  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.3

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  是  $X$  上的一个**部分映射**。

# 1. 映射

## 定义1.2

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  是  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.3

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  是  $X$  上的一个**部分映射**。

## 定义1.4

两个映射  $f$  与  $g$  称为是**相等**的当且仅当  $f$  和  $g$  都是  $X$  到  $Y$  的映射, 并且  $\forall x \in X$  总有  $f(x) = g(x)$ 。

# 1. 映射

## 定义1.2

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 当把  $f$  的定义域限制在  $A$  上时, 就得到了一个  $\phi: A \rightarrow Y$ ,  $\forall x \in A, \phi(x) = f(x)$ 。  $\phi$  称为  $f$  在  $A$  上的**限制**, 并且常用  $f|A$  来表示  $\phi$ 。反过来, 我们也称  $f$  是  $\phi$  在  $X$  上的**扩张**。

## 定义1.3

设  $f: A \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ , 则称  $f$  是  $X$  上的一个**部分映射**。

## 定义1.4

两个映射  $f$  与  $g$  称为是**相等**的当且仅当  $f$  和  $g$  都是  $X$  到  $Y$  的映射, 并且  $\forall x \in X$  总有  $f(x) = g(x)$ 。

## 定义1.5

设  $f: X \rightarrow Y$ , 如果  $\forall x \in X, f(x) = x$ , 则称  $f$  为  $X$  上的恒等映射。  $X$  上的恒等映射常记为  $I_X$ 。

## 2. 鸽笼原理

### 定理2.1 (鸽笼原理)

如果把 $n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

## 2. 鸽笼原理

### 定理2.1 (鸽笼原理)

如果把 $n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子里，则必有一个盒子里至少放了两个物体。

例：

已知 $m$ 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ ，试证：存在两个整数 $k, l$ ， $0 \leq k < l \leq m$ ，使得 $a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_l$ 能被 $m$ 整除。



## 2. 鸽笼原理

### 定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设  $q_1, q_2, \dots, q_n$  为  $n$  个正整数。如果把  $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$  个物体放到  $n$  个盒子中，则或者第一个盒子中至少含有  $q_1$  个物体，或者第二个盒子中至少含有  $q_2$  个物体， $\dots$ ，或者第  $n$  个盒子中至少含有  $q_n$  个物体。

## 2. 鸽笼原理

### 定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为 $n$ 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 $q_1$ 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 $q_2$ 个物体,  $\dots$ , 或者第 $n$ 个盒子中至少含有 $q_n$ 个物体。

### 推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 $r$ 个物体。

## 2. 鸽笼原理

### 定理2.2 (鸽笼原理的强形式)

设 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 为 $n$ 个正整数。如果把 $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ 个物体放到 $n$ 个盒子中, 则或者第一个盒子中至少含有 $q_1$ 个物体, 或者第二个盒子中至少含有 $q_2$ 个物体,  $\dots$ , 或者第 $n$ 个盒子中至少含有 $q_n$ 个物体。

### 推论2.1

如果把 $n(r-1) + 1$ 个物体放入 $n$ 个盒子里, 则至少有一个盒子里放了不少于 $r$ 个物体。

### 推论2.2

如果把 $n$ 个正整数 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 的平均值

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} > r - 1,$$

则 $m_1, m_2, \dots, m_n$ 中至少有一个正整数不小于 $r$ 。

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $A$  在  $f$  下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $A$  在  $f$  下的象定义为

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

例:

设  $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(\{-1, 0\}) = ?$

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $B$  在  $f$  下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

### 3. 映射的一般性质

#### 定义3.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $B \subseteq Y$ ,  $B$  在  $f$  下的原象定义为

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

例:

设  $f : \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f^{-1}(\{-1, 0\}) = ?$

### 3. 映射的一般性质

#### 定理3.1

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq Y$ ,  $B \subseteq Y$ , 则

- (1)  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- (2)  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- (3)  $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$
- (4)  $f^{-1}(A \triangle B) = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B)$

#### 定理3.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq X$ , 则

- (1)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (2)  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- (3)  $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$



## 4. 映射的合成

### 定义4.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  为映射, 映射  $f$  与  $g$  的合成  $g \circ f: X \rightarrow Z$  定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

## 4. 映射的合成

### 定义4.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  为映射, 映射  $f$  与  $g$  的合成  $g \circ f: X \rightarrow Z$  定义为

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

### 定理4.1

设  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $h: Z \rightarrow W$  为映射, 则

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

## 5. 逆映射

### 定义5.1

设  $f : X \rightarrow Y$  为双射,  $f$  的逆映射  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  定义为: 对任意的  $y \in Y$ , 存在唯一的  $x$  使得  $f(x) = y$ , 则  $f^{-1}(y) = x$ 。

## 5. 逆映射

### 定义5.1

设 $f : X \rightarrow Y$ 为双射， $f$ 的逆映射 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 定义为：对任意的 $y \in Y$ ，存在唯一的 $x$ 使得 $f(x) = y$ ，则 $f^{-1}(y) = x$ 。

### 定义5.1'

设 $f : X \rightarrow Y$ 为一个映射。如果存在一个映射 $g : Y \rightarrow X$ 使得

$$f \circ g = I_Y \text{ 且 } g \circ f = I_X,$$

则称映射 $f$ 是可逆的，而 $g$ 称为 $f$ 的逆映射。

## 5. 逆映射

### 定理5.1

设  $f : X \rightarrow Y$  为可逆映射，则  $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

## 5. 逆映射

### 定理5.1

设  $f : X \rightarrow Y$  为可逆映射，则  $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

### 定理5.2

设  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  都是可逆映射，则  $g \circ f$  也是可逆映射并且  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

## 5. 逆映射

### 定义5.2

设  $f: X \rightarrow Y$  为一个映射，如果存在一个映射  $g: Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f = I_X$ ，则称  $f$  是左可逆的， $g$  称为  $f$  的左逆映射；如果存在一个映射  $h: Y \rightarrow X$  使得  $f \circ h = I_Y$ ，则称  $f$  是右可逆的， $h$  称为  $f$  的右逆映射。

## 5. 逆映射

### 定义5.2

设  $f: X \rightarrow Y$  为一个映射，如果存在一个映射  $g: Y \rightarrow X$  使得  $g \circ f = I_X$ ，则称  $f$  是左可逆的， $g$  称为  $f$  的左逆映射；如果存在一个映射  $h: Y \rightarrow X$  使得  $f \circ h = I_Y$ ，则称  $f$  是右可逆的， $h$  称为  $f$  的右逆映射。

### 定理5.3

设  $f: X \rightarrow Y$  为一个映射，则

1.  $f$  左可逆当且仅当  $f$  为单射；
2.  $f$  右可逆当且仅当  $f$  为满射。



## 6. 置换

### 定义6.1

有限集合 $S$ 到自身的一一对应称为 $S$ 上的一个置换。如果 $|S| = n$ , 则 $S$ 上的置换就说成是 $n$ 次置换。

## 6. 置换

### 定义6.1

有限集合 $S$ 到自身的一一对应称为 $S$ 上的一个置换。如果 $|S| = n$ , 则 $S$ 上的置换就说成是 $n$ 次置换。

若 $\alpha$ 与 $\beta$ 是两个 $n$ 次置换, 当把 $\beta$ 的表示式中的上一行按 $\alpha$ 的下一行的顺序写出时, 则 $\alpha\beta$ 的下一行就是 $\beta$ 的新表示式中的下一行。

## 6. 置换

### 定义6.2

设 $\sigma$ 是 $S$ 上的一个 $n$ 次置换,

若 $i_1\sigma = i_2, i_2\sigma = i_3, \dots, i_{k-1}\sigma = i_k, i_k\sigma = i_1$ ,

而 $\forall i \in S \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i\sigma = i$ , 则称 $\sigma$ 为一个 $k$ 循环置换, 记为 $(i_1 i_2 \cdots i_k)$ 。2-循环置换称为对换。

## 6. 置换

### 定理6.1

每个置换都能被分解成若干个没有共同数字的循环置换的乘积。如果不计这些循环置换的顺序以及略去的1-循环置换，这个分解是唯一的。

## 6. 置换

### 定理6.2

当 $n \geq 2$ 时，每个 $n$ 次置换都能被分解成若干个对换的乘积。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

### 定义6.3

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

## 6. 置换

### 定理6.3

如果把置换分解成若干个对换的乘积，则对换个数的奇偶性是不变的。

### 定义6.3

能被分解为偶数个对换的乘积的置换称为**偶置换**；能被分解为奇数个对换的乘积的置换称为**奇置换**。

### 定理6.4

当 $n \geq 2$ 时， $n$ 次奇置换的个数与 $n$ 次偶置换的个数相等，都等于 $\frac{n!}{2}$ 。



## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.1

设 $X, Y, Z$ 为任意三个非空集合。一个从 $X \times Y$ 到 $Z$ 的映射 $\phi$ 称为 $X$ 与 $Y$ 到 $Z$ 的一个二元(代数)运算。当 $X = Y = Z$ 时, 则称 $\phi$ 为 $X$ 上的二元(代数)运算。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.2

从集合 $X$ 到 $Y$ 的任一映射称为从 $X$ 到 $Y$ 的**一元(代数)运算**。如果 $X = Y$ , 则从 $X$ 到 $X$ 的映射称为 $X$ 上的**一元(代数)运算**。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.3

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, D$ 为非空集合。一个从 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 到 $D$ 的映射 $\phi$ 称为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 到 $D$ 的一个 $n$ 元（代数）运算。如果 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = D = A$ , 则称 $\phi$ 为 $A$ 上的 $n$ 元代数运算。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.4

设“ $\circ$ ”是集合 $X$ 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b \in X$ , 恒有 $a \circ b = b \circ a$ , 则称二元代数运算“ $\circ$ ”满足**交换律**。



## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.5

设“ $\circ$ ”是集合 $X$ 上的一个二元代数运算。如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ , 则称二元代数运算“ $\circ$ ”满足**结合律**。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.6

设“+”与“ $\circ$ ”是集合 $X$ 上的两个二元代数运算。

如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c,$$

则称二元代数运算“ $\circ$ ”对“+”满足**左分配律**。

如果 $\forall a, b, c \in X$ , 恒有

$$(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a,$$

则称二元代数运算“ $\circ$ ”对“+”满足**右分配律**。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.7

设 $(X, \circ)$ 为一个代数系。如果存在一个元素 $e \in X$ 使得对任意的 $x \in X$ 恒有 $e \circ x = x \circ e = x$ , 则称 $e$ 为“ $\circ$ ”的**单位元素**。

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

## 7. 代数运算

### 定理7.1

设 $x, y, z \in \mathbb{R}$ , 则

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3.  $0 + x = x + 0 = x$
4.  $(-x) + x = (-x) + x = 0$
5.  $x * y = y * x$
6.  $(x * y) * z = x * (y * z)$
7.  $1 * x = x * 1 = x$
8.  $x^{-1} * x = x * x^{-1} = 1$
9.  $x * (y + z) = x * y + x * z$
10.  $(y + z) * x = y * x + z * x$

### 定义7.8

设 $(X, \circ)$ 为一个代数系, “ $\circ$ ”有单位元素 $e$ ,  $a \in X$ , 如果 $\exists b \in X$ 使得

$$a \circ b = b \circ a = e,$$

则称 $b$ 为 $a$ 的逆元素。



## 7. 代数运算

### 定义7.9

设 $(S, +)$ 与 $(T, \oplus)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$ , 使得 $\forall x, y \in S$ , 有

$$\phi(x + y) = \phi(x) \oplus \phi(y),$$

则称代数系 $(S, +)$ 与 $(T, \oplus)$ 同构, 并记为 $S \cong T$ ,  $\phi$ 称为这两个代数系之间的一个同构。

## 7. 代数运算

### 定义7.10

设 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ 为两个代数系。如果存在一个一一对应 $\phi: S \rightarrow T$ , 使得 $\forall x, y \in S$ , 有

$$\begin{aligned}\phi(x + y) &= \phi(x) \oplus \phi(y), \\ \phi(x \circ y) &= \phi(x) * \phi(y),\end{aligned}$$

则称代数系 $(S, +, \circ)$ 与 $(T, \oplus, *)$ **同构**, 并记为 $S \cong T$ ,  $\phi$ 称为这两个代数系之间的一个同构。

## 7. 代数运算

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| T | T | T            |
| T | F | F            |
| F | T | F            |
| F | F | F            |

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| T | T | T          |
| T | F | T          |
| F | T | T          |
| F | F | F          |

| p | $\neg p$ |
|---|----------|
| T | F        |
| F | T        |

## 7. 代数运算

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| T | T | T            |
| T | F | F            |
| F | T | F            |
| F | F | F            |

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| T | T | T          |
| T | F | T          |
| F | T | T          |
| F | F | F          |

| p | $\neg p$ |
|---|----------|
| T | F        |
| F | T        |

| x | y | $x \wedge y$ |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | 1            |
| 1 | 0 | 0            |
| 0 | 1 | 0            |
| 0 | 0 | 0            |

| x | y | $x \vee y$ |
|---|---|------------|
| 1 | 1 | 1          |
| 1 | 0 | 1          |
| 0 | 1 | 1          |
| 0 | 0 | 0          |

| x | $\bar{x}$ |
|---|-----------|
| 1 | 0         |
| 0 | 1         |

## 8. 集合的特征函数

### 定义8.1

设 $X$ 是一个集合,  $E \subseteq X$ 。  $E$ 的**特征函数**  $\chi_E : X \rightarrow \{0, 1\}$  定义为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in E, \\ 0 & \text{如果 } x \notin E. \end{cases}$$

## 8. 集合的特征函数

### 定义8.2

令  $Ch(X) = \{\chi | \chi : X \rightarrow \{0, 1\}\}$ 。  $\forall \chi, \chi' \in Ch(X)$  及  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned}(\chi \vee \chi')(x) &= \chi(x) \vee \chi'(x) \\(\chi \wedge \chi')(x) &= \chi(x) \wedge \chi'(x) \\ \bar{\chi}(x) &= \overline{\chi(x)}\end{aligned}\tag{1}$$

### 定理8.1

设  $X$  是一个集合, 则代数系  $(2^X, \cup, \cap, ^c)$  与  $(Ch(X), \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}})$  同构。