离散数学

陈建文

December 27, 2018

第 一 章　集合

习题1.1 (课本第8页第3题).

写出方程

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

的根构成的集合。

第 二 章　置换

习题2.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

第 三 章 综合题

习题3.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p > q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做？

第 一 章　集合

习题1.1 (课本第8页第3题).

写出方程

$$x^2+2x+1=0$$

的根构成的集合。

证明. $\{-1\}$ □

第 二 章　置换

习题2.1. 设$S(n,k)$表示S_n中的恰有k个循环的（包括1−循环）的置换的个数。证明：

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \tag{2.1}$$

证明. 记式(2.1)右边展开之后x^k的系数为$S'(n,k)$，以下证明$S'(n,k)=S(n,k)$。

首先来看$S'(n,k)$的递推关系式。

显然

$$\begin{aligned} S'(n,0)&=0 \\ S'(n,n)&=1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

式(2.1)右边按照最后一项展开，得

$$\begin{aligned} &x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \\ =&x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)x \\ +&x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-2)(n-1) \end{aligned} \tag{2.3}$$

展开后所得到的第一项中x^k的系数为$S'(n-1,k-1)$，第二项中x^k的系数为$(n-1)S'(n-1,k)$，于是得到

$$S'(n,k) = S'(n-1,k-1) + (n-1)S'(n-1,k) \quad (1 \le k \le n-1) \tag{2.4}$$

接下来看$S(n,k)$的递推关系式。

因为包含$n(n \ge 1)$个元素的置换至少含有 1 个循环，所以

$$S(n,0) = 0 \tag{2.5}$$

又因为如果一个包含$n(n \ge 1)$个元素的置换含有n个循环，则每个循环由一个元素构成，这样的置换只有一个，所以

$$S(n,n) = 1 \tag{2.6}$$

包含k个循环的集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$的一个置换可以划分为两种类型：（１）元素n自身构成一个循环置换，这样的置换有$S(n-1,k-1)$个；（２）元素n至少与其他一个元素位于同一个循环置换中，这样的置换可以由分解为k个循环

的集合$\{1,2,\cdots,n-1\}$的置换在每个元素$1,2,\cdots,n-1$的左侧添加元素n得到，于是这样的置换共有$(n-1)S(n-1,k)$个。于是得到

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + (n-1)S(n-1,k) \quad (1 \le k \le n-1) \tag{2.7}$$

由此，我们得到$S(n,k)$和$S'(n,k)$的递推关系式是一致的，因此$S(n,k) = S'(n,k)$。

$\square$

第 三 章　综合题

习题3.1. 珍珠四颗，有真有假，不能用眼鉴别。真珍珠重量相同且为p，假珍珠重量也相同且为q，$p > q$。用秤（不是天平）仅称三次，称出真假，应该怎样做?

解. 设四颗珍珠分别为p_1，p_2，p_3，p_4，其重量分别为x_1，x_2，x_3，x_4。第一次将p_1和p_2放在一起称，设得到的重量为a；第二次将p_1和p_3 放在一起称，设得到的重量为b；第三次将p_2，p_3和p_4放在一起称，设得到的重量为c。于是可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_3 = b \\ x_2 + x_3 + x_4 = c \end{cases} \tag{3.1}$$

令$y_1 = \frac{x_1 - q}{p - q}$，$y_2 = \frac{x_2 - q}{p - q}$，$y_3 = \frac{x_3 - q}{p - q}$，$y_4 = \frac{x_4 - q}{p - q}$，可以得到

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{a-2q}{p-q} \\ y_1 + y_3 = \frac{b-2q}{p-q} \\ y_2 + y_3 + y_4 = \frac{c-3q}{p-q} \end{cases} \tag{3.2}$$

以上三个式子相加，可得

$$2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4 = \frac{a - 2q}{p - q} + \frac{b - 2q}{p - q} + \frac{c - 3q}{p - q} \tag{3.3}$$

根据上式右端为偶数或奇数，可得y_4为0或1。带入方程组(3.2)可得y_1，y_2，y_3的值为0或1，从而相应的可以判断x_1，x_2，x_3，x_4的值为p或q。 □