

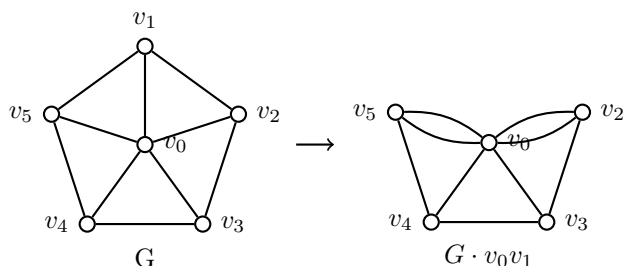
习题. 设在一个长为 n 的圈外再加一个新的顶点，并且新顶点与圈上每个顶点联结一条边，所得到的图称为轮，新加的边称为轮的辐。在有 n 条辐的轮中，给出一个求生成树棵数的公式。

解. 我们利用 c 图的生成树棵数的一个递推公式推导出轮的生成树棵数的计算公式。设 G 为一个图（允许有环和多重边）， e 为 G 的任意一条不为环的边，则 G 的生成树的棵数 $\tau(G)$ 可以计算如下：

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e) \quad (1)$$

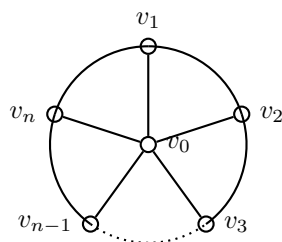
其中 $G - e$ 表示从图 G 中去掉边 e 所得到的图。 $G \cdot e$ 表示从图 G 中去掉边 e 并将 e 的两个端点视为同一个顶点所得到的图，这个过程称为从图 G 中收缩掉边 e 。

下图给出了从一个图 G 中收缩掉一条边的过程。



公式(1)可以推导如下：图 G 中不包含边 e 的生成树的棵数为 $\tau(G - e)$ ，包含边 e 的生成树的棵数为 $\tau(G \cdot e)$ ，从而图 G 中所有生成树的棵数可以用公式 (1) 计算。

有 n 条辐的轮如下图所示：



有 n 条辐的轮中生成树的棵数记为 w_n ，以下应用公式(1)推导出 w_n 的递推关系式如下：

$$\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 5 \\ w_3 = 16 \\ w_n = 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + w_{n-3} (n \geq 4) \end{cases} \quad (2)$$

为了简洁，在这里，图中生成树的棵数用图本身表示。 w_n 的推导过程如下：

$$w_n = \begin{array}{c} v_1 \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_n \quad v_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} = \begin{array}{c} v_1 \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_n \quad v_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} + \begin{array}{c} v_n \quad v_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad v_0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array}$$

其中

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} v_1 \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_n \quad v_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} &= w_{n-1} + \begin{array}{c} v_n \quad v_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \quad v_0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} \\ &= 2w_{n-1} - \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} \\ &= 2w_{n-1} - w_{n-2} - \begin{array}{c} v_0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} \\ &= 2w_{n-1} - 2w_{n-2} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad v_0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ v_{n-1} \quad v_3 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} v_n \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} \\
= & \begin{array}{c} v_n \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} \\
= & \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + 2 \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} \\
= & \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + 2(w_{n-1} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array}) \\
= & \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + \begin{array}{c} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} \\
& + 2w_{n-1} - 2(\begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + w_{n-2}) \\
= & 2w_{n-1} - 2w_{n-2} - \begin{array}{c} v_2 \\ \text{---} \text{---} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} + \begin{array}{c} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array} \\
= & 2w_{n-1} - 2w_{n-2} - \begin{array}{c} v_0 \\ \text{---} \text{---} v_{n-1} \text{---} \text{---} v_3 \end{array}
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
w_n &= (2w_{n-1} - 2w_{n-2} + \text{Diagram 1}) \\
&+ (2w_{n-1} - 2w_{n-2} - \text{Diagram 2}) \\
&= 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\
&= 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + (w_{n-3} + \text{Diagram 5}) - \text{Diagram 6} \\
&= 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + w_{n-3}
\end{aligned}$$

Diagram 1: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A large circle is drawn with v_{n-1} and v_3 on its circumference, and v_0 is inside the circle. A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

Diagram 2: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

Diagram 3: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A large circle is drawn with v_{n-1} and v_3 on its circumference, and v_0 is inside the circle. A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

Diagram 4: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

Diagram 5: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

Diagram 6: A graph with a central vertex v_0 connected to v_{n-1} and v_3 . A dotted line connects v_{n-1} and v_3 .

w_n 可以计算如下:

$$w_n = -2 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (3)$$

这是因为设方程

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0 \quad (4)$$

的任意一个根为 λ , 则 $w_n = \lambda^n$ 满足递推关系式:

$$w_n = 4w_{n-1} - 4w_{n-2} + w_{n-3} (n \geq 4) \quad (5)$$

方程(4)可以化为

$$(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right)\left(\lambda - \frac{3 + \sqrt{5}}{3}\right) = 0$$

其三个根为

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{3} \\ \lambda_3 &= \frac{3 + \sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

则

$$w_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_3 \lambda_3^n \quad (6)$$

满足递推关系式(5)。

将 $w_1 = 1$, $w_2 = 5$, $w_3 = 16$ 代入(6)得:

$$\begin{cases} 1 &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3 \\ 5 &= C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + C_3 \lambda_3^2 \\ 16 &= C_1 \lambda_1^3 + C_2 \lambda_2^3 + C_3 \lambda_3^3 \end{cases}$$

解得 $C_1 = -2, C_2 = 1, C_3 = 1$, 代入(6)便可得(3)。

□