习题. 每个可平面图是5−可着色的。

证明. 用数学归纳法证明，施归纳于图的顶点数p。

（1）当$p = 1$时，结论显然成立。

（2）假设当$p < k$时结论成立，往证当$p = k$结论也成立。设可平面图G有k个顶 点，则图G中一定有一个顶点v使得$\deg v \leq 5$。于是，$G - v$是一个有$k - 1$个顶 点的可平面图，由归纳假设，$G - v$是5−可着色的。假设用至多5种颜色对$G - v$进行了着色。

如果$\deg v \leq 4$，则在$G - v$中用至多 5 种颜色进行顶点着色时，在G中与v邻接 的顶点至多用了4种颜色，用另外一种颜色对顶点v进行着色，这样用至多5种颜色就可 以对G的顶点进行着色，从而图G是5−可着色的。

如果$\deg v = 5$，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5在$G-v$中用 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 5种颜色进行了着色。如果c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中有两种颜色是相同的，则c_1，c_2，c_3，c_4，c_5中至多有4种颜色，用另一种颜色对v进行着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色。以下考虑c_1, c_2, c_3, c_4, c_5中的各种颜色互不相同的情况。在图G中，与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中一定有两个顶点是不邻接的，否则G中将有一个子图$K5$，这与G为可平面图相矛盾。取其中不邻接的两个顶点v_i和v_j，在$G - v$中，将v_i和v_j视为同一个顶点w，即去掉顶点v_i和v_j，添加一个新的顶点w，原来与v_i和v_j相关联的边变为与w相关联的边，得到的新的图记为G'，则G'仍然是可平面图。由归纳假设，G'是5−可着色的。 设用至多5种颜色对G'进行了顶点着色。在$G - v$中，v_i和v_j都着与w相同的颜色，其他的顶点均与G'中相对应的顶点着相同的颜色，这样$G - v$用至多5种颜色就可以进行顶点着色。在这里，在G中与v邻接的五个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5中用了4种颜色，用另外一种颜色对v中着色，这样用至多5种颜色就可以对G的顶点进行着色，从而图G是5−可着色的。

□