

# 面向缪子成像的计算神经动力学算法

刘梅<sup>1</sup>, 任永杰<sup>1</sup>, 金龙<sup>1</sup>, 刘军涛<sup>2</sup>

1. 兰州大学 信息科学与工程学院, 兰州 730000

2. 兰州大学 核科学与技术学院, 兰州 730000

**摘要:** 基于缪子成像中需考虑被测物体密度的双端约束以及噪声对探测数据的影响, 提出了一个面向缪子成像的计算神经动力学算法, 可以保证结果处于约束范围内. 理论分析表明, 在无噪声或恒定噪声的情况下, 该算法全局收敛于缪子成像的理论解, 并能有效抑制随机噪声. 仿真与对比结果表明, 该算法在求解缪子成像问题时具有有效性和优越性.

**关键词:** 计算神经动力学算法; 缪子成像; 双端约束; 反演

中图分类号: TP3-05 文献标识码: A 文章编号:

DOI:

## Computational Neural Dynamics Algorithm for Solution of Muon

### Radiography

Liu Mei<sup>1</sup>, Ren Yong-jie<sup>1</sup>, Jin Long<sup>1</sup>, Liu Jun-tao<sup>2</sup>

1. School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

2. School of Unclear Science and Technology, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China

**Abstract:** Based on the double bound limits of the density of the measured object and the influence of noise on the measurement data, a computational neural dynamics algorithm for muon imaging is proposed, which can ensure that the results are within the constraint range. Theoretical analysis shows that, under the condition of no noise or constant noise, the algorithm converges globally to the theoretical solution of muon radiography, and can effectively suppress random noise. Simulation and comparison results show that the algorithm is effective and superior in solving the inversion problem.

**Key Words:** Computational Neural Dynamics Algorithm; Cosmic Ray Muon Radiography; Double Bound Limits; Inversion

收稿日期: xxx 修回日期: xxx

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(No.62176109); 甘肃省自然科学基金杰出青年项目(No.21JR7RA531); 中央引导地方科技发展资金项目(No.YDZX20216200001297)

作者简介: 刘梅(1988-), 女, 湖北荆州人, 硕士, 工程师, e-mail: mliu@lzu.edu.cn, 研究方向为智能机器人与智能计算; 金龙(1988-), 男, 甘肃兰州人, 教授, 博士, 博士研究生导师, e-mail: jinlongsysu@foxmail.com, 研究方向为神经动力学与智能计算, 通信联系人; 刘军涛(1989-), 男, 山东安丘人, 副教授, 博士, e-mail: ljt@lzu.edu.cn, 研究方向为人工智能在地球科学和核技术领域的应用, 通信联系人.

神经动力学是一种新兴的神经计算方法，通常被构建为常微分方程系统、递归神经网络<sup>[1]</sup>或对应的离散系统。由于神经动力学具有易于并行处理与硬件实现等优势，已被广泛应用于图像处理<sup>[2]</sup>、混沌系统的跟踪控制<sup>[3]</sup>、数值计算<sup>[4]</sup>等领域。

宇宙射线缪子成像是一种新型的极具应用潜力的绿色成像技术。利用宇宙射线缪子能域宽和穿透能力强的特点，通过探测穿透被测物体的缪子通量、角分布等信息实现对被测物体的成像<sup>[5-6]</sup>。缪子源主要分为加速器缪子和宇宙射线缪子，后者是由来自外太空的高能宇宙射线与地球大气相互作用产生的次级粒子<sup>[7-8]</sup>。基于缪子在穿过物体时发生能量损失和多重库伦散射两种机理，缪子成像技术可分为透射成像和散射成像<sup>[9]</sup>。透射成像利用缪子穿透物质时能量损失率与穿透路径长度有关的特性对物体的密度结构成像。宇宙射线缪子相比其它粒子具有能域宽和穿透能力强的特点，因此缪子透射成像技术可以对尺度达千米量级的物体成像。散射成像是以库伦相互作用为基础实现的，其利用缪子穿透物质时发生的多重库伦散射的散射角大小与材料原子序数有关的特性，适用于对高原子序数物体的成像<sup>[10]</sup>。宇宙射线缪子成像技术已经被应用到诸多领域，如废弃的核燃料桶和反应堆监测、国家安全、地层断面成像<sup>[11]</sup>。三维透射成像需从多个方向联合探测被测物体，通过测量缪子穿过物体后的通量，进而使用反演得到物体的密度分布<sup>[12]</sup>。常见的反演算法有共轭梯度法<sup>[13]</sup>、模拟退火法<sup>[14]</sup>、遗传算法<sup>[15]</sup>等。

本文提出一个用于求解缪子成像问题且具有抗噪能力的计算神经动力学算法。理论分析和仿真结果表明，该算法能够很好地还原出被测物体。图1展示了本文的研究路线，通过引入一个非负向量，将双端约束转化为非线性方程组，进而通过构造误差函数得到面向缪子成像的计算神经动力学算法。

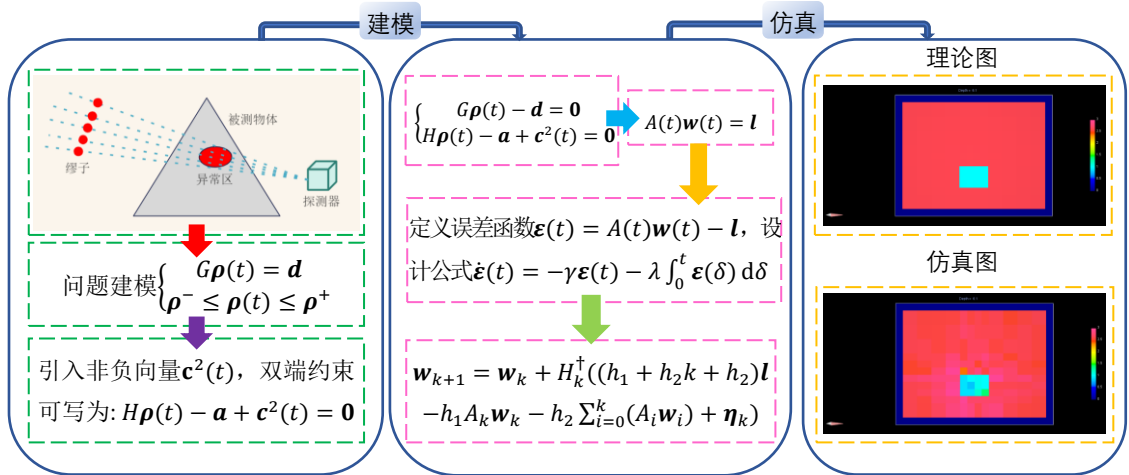


图1 本文的研究路线

Fig. 1 Research route of this paper

## 1 问题描述

令 $h_i$ 为第 $i$ 条缪子射线穿过被测物体的等效长度，它与第 $i$ 条射线的路径 $p_i$ 以及对应的密度 $\rho(l)$ 的关系为

$$\mathbf{h}_i = \int_{p_i} \rho(l) dl. \quad (1)$$

将被测物体划分为 $n$ 个体素，上式可离散为

$$\mathbf{h}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \rho_j, \quad (2)$$

其中 $A_{ij}$ 是第 $i$ 条射线穿过编号为 $j$ 的体素的真实几何长度， $\rho_j$ 是编号为 $j$ 的体素的密度。

考虑所有的 $m$ 条射线，上式可被写为如下形式：

$$A\boldsymbol{\rho} = \mathbf{h}, \quad (3)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示射线穿过体素的真实长度， $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为体素的密度， $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ 表示射线穿过被测物体的等效长度。同时，考虑到计算值与理论值的偏离程度以及相邻体素的密度平滑性，构建如下公式：

$$\alpha_s(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\text{ref}}) + \alpha_x(\boldsymbol{\rho} - M_x \boldsymbol{\rho}) + \alpha_y(\boldsymbol{\rho} - M_y \boldsymbol{\rho}) + \alpha_z(\boldsymbol{\rho} - M_z \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

其中 $\alpha_s$ ， $\alpha_x$ ， $\alpha_y$ ， $\alpha_z$ 为权重参数； $\boldsymbol{\rho}_{\text{ref}}$ 为密度参考值； $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $M_y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $M_z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 依次为x、y、z方向的密度平滑性矩阵。将(4)式化简得

$$D\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q}, \quad (5)$$

其中 $D = \alpha_s(I - M_x) + \alpha_y(I - M_y) + \alpha_z(I - M_z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ；单位矩阵 $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ； $\mathbf{q} = \alpha_s \boldsymbol{\rho}_{\text{ref}} \in \mathbb{R}^n$ 。将(3)式与(5)式组合得

$$G\boldsymbol{\rho} = \mathbf{d}, \quad (6)$$

其中 $G = [A; D] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times n}$ ； $\mathbf{d} = [\mathbf{h}; \mathbf{q}] \in \mathbb{R}^{m+n}$ 。对于单个体素密度 $\rho_j$ 的双端约束，有如下情况：

$$[\rho_{\min}, \rho_{\max}] = \begin{cases} [\rho_j - \sigma, \rho_j + \sigma], & \rho_j \text{ 已知}, \\ [0, \rho_{\max}], & \rho_j \text{ 未知}, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\rho_{\min}$ 为密度最小值， $\rho_{\max}$ 为密度最大值， $\sigma$ 为趋近于0的非负值。根据上述描述，构建如下方程组：

$$\begin{cases} G\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{d}, \\ \boldsymbol{\rho}^- \leq \boldsymbol{\rho}(t) \leq \boldsymbol{\rho}^+, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{\rho}(t) \in \mathbb{R}^n$ 表示体素的密度； $\boldsymbol{\rho}^-$ 和 $\boldsymbol{\rho}^+$ 分别表示 $\boldsymbol{\rho}(t)$ 的下界和上界。上式中的约束可被重写为 $H\boldsymbol{\rho}(t) \leq \mathbf{a}$ ，其中 $H = [-I; I] \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ ； $\mathbf{a} = [-\boldsymbol{\rho}^-; \boldsymbol{\rho}^+] \in \mathbb{R}^{2n}$ 。

## 2 求解建模

通过引入一个非负向量将上式转化为一个带有双端约束的方程组<sup>[16]</sup>：

$$\begin{cases} G\boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{d} = \mathbf{0}, \\ H\boldsymbol{\rho}(t) - \mathbf{a} + \mathbf{c}^2(t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{c}^2(t) = [c_1^2(t), \dots, c_{2n}^2(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ ，上标<sup>T</sup>表示矩阵或向量的转置， $\mathbf{c}^2(t) \geq 0$ 未知。设计一个系统如下：

$$A(t)\mathbf{w}(t) = \mathbf{l}, \quad (10)$$

其中矩阵  $A(t) = [G, 0; H, D(t)] \in \mathbb{R}^{(m+3n) \times 3n}$ ;  $\mathbf{w}(t) = [\boldsymbol{\rho}(t); \mathbf{c}(t)] \in \mathbb{R}^{3n}$ ;  $\mathbf{l} = [\mathbf{d}; \mathbf{a}] \in \mathbb{R}^{m+3n}$ ; 对角矩阵  $D(t) = \text{diag}\{c_1(t), \dots, c_{2n}(t)\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ; 未知项  $c_r(t)$  的值是前一次计算得到的数值解的第  $n$  到  $3n$  个值, 其中  $r \in \{1, \dots, 2n\}$ 。为求解(10)式, 定义误差函数  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = A(t)\mathbf{w}(t) - \mathbf{l}$ 。为使  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  收敛至零, 设计公式  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = -\gamma\boldsymbol{\varepsilon}(t) - \lambda \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(\delta) d\delta$ , 其中  $\gamma > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  是  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  的导数, 将  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  代入得

$$A(t)\dot{\mathbf{w}}(t) = -\dot{A}(t)\mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{l}} - \gamma(A(t)\mathbf{w}(t) - \mathbf{l}) - \lambda \int_0^t (A(\delta)\mathbf{w}(\delta) - \mathbf{l}) d\delta. \quad (11)$$

为了便于后续处理, 将上式变形得

$$H(t)\dot{\mathbf{w}}(t) = V\mathbf{w}(t) + \dot{\mathbf{l}} - \gamma(A(t)\mathbf{w}(t) - \mathbf{l}) - \lambda \int_0^t (A(\delta)\mathbf{w}(\delta) - \mathbf{l}) d\delta, \quad (12)$$

其中  $H(t) = [G, 0; H, 2D(t)] \in \mathbb{R}^{(m+3n) \times 3n}$ ;  $V = [-\dot{G}, 0; 0, 0] \in \mathbb{R}^{(m+3n) \times 3n}$ ,  $\dot{\mathbf{w}}(t)$  和  $\dot{\mathbf{l}}$  分别表示为  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{l}$  的导数。考虑到  $G$  和  $\mathbf{l}$  是定值, 上式可被写为

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = H^\dagger(t)(-\gamma(A(t)\mathbf{w}(t) - \mathbf{l}) - \lambda \int_0^t (A(\delta)\mathbf{w}(\delta) - \mathbf{l}) d\delta), \quad (13)$$

其中  $^\dagger$  表示伪逆操作。令  $t = \tau k$ ,  $\tau$  为采样间隔, 将上式离散并合并常数项  $\mathbf{l}$  为

$$\dot{\mathbf{w}}_k = H_k^\dagger((\gamma + \lambda k + \lambda)\mathbf{l} - \gamma A_k \mathbf{w}_k - \tau \lambda \sum_{i=0}^k (A_i \mathbf{w}_i)), \quad (14)$$

其中  $H_k$  和  $\mathbf{w}_k$  是  $H(t)$  和  $\mathbf{w}(t)$  的离散形式。使用欧拉前向差分公式来近似  $\dot{\mathbf{w}}_k = (\mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{w}_k)/\tau$ , 进而将  $\dot{\mathbf{w}}_k$  代入(14)式可得<sup>[17]</sup>:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + H_k^\dagger((h_1 + h_2 k + h_2)\mathbf{l} - h_1 A_k \mathbf{w}_k - h_2 \sum_{i=0}^k (A_i \mathbf{w}_i)), \quad (15)$$

其中  $h_1 = \tau\gamma$ ,  $h_2 = \tau^2\lambda$ 。上式即为本文所提的面向缪子成像的计算神经动力学算法。该算法的求解步骤如下:

步骤 1 给定参数  $\psi$ 、 $v$ 、 $\tau$ 、 $\gamma$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha_s$ 、 $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_z$ , 初始化  $A$ 、 $H$ 、 $\mathbf{w}$ ;

步骤 2  $i = i + 1$ , 如果  $i > \psi$ , 执行步骤 6, 否则执行步骤 3;

步骤 3  $j = j + 1$ , 如果  $j > v$ , 执行步骤 5, 否则执行步骤 4;

步骤 4  $k = (i - 1) * n + (j - 1)$ , 代入(15)求解, 执行步骤 3;

步骤 5 根据(15)式的解更新  $A_k$  和  $H_k$ , 执行步骤 2;

步骤 6 循环结束, 输出所有体素的密度。

为研究(15)式的抗噪性<sup>[18-19]</sup>, 给出如下公式:

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + H_k^\dagger((h_1 + h_2 k + h_2)\mathbf{l} - h_1 A_k \mathbf{w}_k - h_2 \sum_{i=0}^k (A_i \mathbf{w}_i) + \boldsymbol{\eta}_k), \quad (16)$$

其中  $\boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{R}^{3n}$  表示噪声。

### 3 理论分析

本节给出面向缪子成像的计算神经动力学算法的相关理论。为方便分析, 将(11)式变形得

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + A_k^\dagger(-(A_k - A_{k-1})\mathbf{w}_k - h_1(A_k \mathbf{w}_k - \mathbf{l}) - h_2 \sum_{i=0}^k (A_i \mathbf{w}_i - \mathbf{l})), \quad (17)$$

为研究上式的抗噪性，给出如下公式：

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + A_k^\dagger (-(A_k - A_{k-1})\mathbf{w}_k - h_1(A_k\mathbf{w}_k - \mathbf{l}) - h_2 \sum_{i=0}^k (A_i\mathbf{w}_i - \mathbf{l}) + \boldsymbol{\eta}_k). \quad (18)$$

定理一：在所提算法(16)中，令  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = A_k\mathbf{w}_k - \mathbf{l}$ ，(17)式等价于  $(1 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{O}(\tau^2) = \mathbf{0}$ ，其中  $\mathbf{O}(\tau^2)$  代表由  $\mathbf{O}(\tau^2)$  构成的截断误差向量。

证明：(17)式能被简化为

$$A_k\mathbf{w}_{k+1} = A_{k-1}\mathbf{w}_k - h_1\boldsymbol{\varepsilon}_k - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (19)$$

对  $\mathbf{w}_{k+1}$  和  $\mathbf{w}_k$  泰勒展开得  $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k + \tau\dot{\mathbf{w}}_k + \mathbf{O}(\tau^2)$  和  $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}_{k-1} + \tau\dot{\mathbf{w}}_k + \mathbf{O}(\tau^2)$ 。将二者代入(19)式化简得

$$A_k\mathbf{w}_k - \mathbf{l} + \tau A_k\dot{\mathbf{w}}_k + \mathbf{O}(\tau^2) = A_{k-1}\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{l} + \tau A_{k-1}\dot{\mathbf{w}}_k - h_1\boldsymbol{\varepsilon}_k - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (20)$$

将  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = A_k\mathbf{w}_k - \mathbf{l}$  代入上式得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tau A_k\dot{\mathbf{w}}_k + \mathbf{O}(\tau^2) = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \tau A_{k-1}\dot{\mathbf{w}}_k - h_1\boldsymbol{\varepsilon}_k - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (21)$$

对  $A_k$  泰勒展开得  $A_k = A_{k-1} + \tau\dot{A}_{k-1} + \mathbf{O}(\tau^2)$ ，其中  $\mathbf{O}(\tau^2)$  代表由  $\mathbf{O}(\tau^2)$  构成的截断误差矩阵。将其代入(21)式得

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tau(A_{k-1} + \tau\dot{A}_{k-1} + \mathbf{O}(\tau^2))\dot{\mathbf{w}}_k + \mathbf{O}(\tau^2) = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \tau A_{k-1}\dot{\mathbf{w}}_k - h_1\boldsymbol{\varepsilon}_k - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i. \quad (22)$$

化简上式得

$$(1 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_k - \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{O}(\tau^2) = \mathbf{0}. \quad (23)$$

定理一证明完毕。

接下来对所提算法的收敛性进行理论分析。定理二在定理一的基础上证明了所提算法收敛到缪子成像的理论解。

定理二：当本文所提算法(16)应用于缪子成像时，其稳态误差  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2 = \mathbf{O}(\tau^2)$ ，其中  $\|\cdot\|_2$  是向量的二范数。

证明：由(23)式得

$$(1 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_k + h_2 \sum_{i=0}^{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \mathbf{O}(\tau^2) = \mathbf{0}. \quad (24)$$

令  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^j$ ， $j \in \{1, \dots, m\}$  为  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  的第  $j$  个元素，用(24)式的第  $j$  个元素减去(23)式的第  $j$  个元素可得

$$(1 + h_1 + h_2)\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^j = (2 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_k^j - \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^j + \mathbf{O}(\tau^2). \quad (25)$$

令  $\boldsymbol{\chi}_{k+1}^j = [\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^j, \boldsymbol{\varepsilon}_k^j]^T$ ，上式可写为

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1}^j = P\boldsymbol{\chi}_k^j + \mathbf{O}(\tau^2), \quad (26)$$

其中  $P = [(2 + h_1)/(1 + h_1 + h_2), (-1)/(1 + h_1 + h_2); 1, 0]$ 。

迭代(26)式可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k+1}^j &= P\boldsymbol{\chi}_k^j + \mathbf{O}(\tau^2) \\ &= P(P\boldsymbol{\chi}_{k-1}^j + \mathbf{O}(\tau^2)) + \mathbf{O}(\tau^2) \\ &= P^2\boldsymbol{\chi}_{k-1}^j + \mathbf{O}(\tau^2) \\ &\vdots \\ &= P^k\boldsymbol{\chi}_1^j + \mathbf{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (27)$$

$P$  的特征值可以表示为  $m_1$  和  $m_2$ ，其中  $m_1 = (h_1 - \sqrt{h_1 - 4h_2 + 2})/(2h_1 + 2h_2 + 2)$ ， $m_2 =$

$$(h_1 + \sqrt{h_1 - 4h_2} + 2)/(2h_1 + 2h_2 + 2)。$$

1) 对于 $m_1$ ，分为以下两点讨论。

1) 容易证明  $(h_1 + 2)^2 > (\sqrt{h_1^2 - 4h_2})^2$ ，即  $(h_1 + 2) > (\sqrt{h_1^2 - 4h_2})$ ，移项得  $(h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4h_2} + 2) > 0$ ，因此可得  $m_1 = (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4h_2} + 2)/(2h_1 + 2h_2 + 2) > 0$ 。

2) 用 $m_1$ 的分母减去分子得到  $h_1 + 2h_2 + \sqrt{h_1^2 - 4h_2}$ ，其明显大于 0。对前式变形得  $(2h_1 + 2h_2 + 2) > (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4h_2} + 2)$ ，即  $m_1 = (h_1 - \sqrt{h_1^2 - 4h_2} + 2)/(2h_1 + 2h_2 + 2) < 1$ 。

2) 对于 $m_2$ ，类似于 $m_1$ 的讨论，可得  $0 < m_2 < 1$ 。

结合上述两种情况，得出特征值的绝对值小于 1 的结论，因此  $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = 0$ 。进而由 (27) 式可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{X}_{k+1}^j = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k \mathcal{X}_1^j + \mathbf{O}(\tau^2) = \mathbf{O}(\tau^2)$ ，故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}_{k+1}^j\| = \mathbf{O}(\tau^2)。 \quad (28)$$

根据 $\mathcal{X}_{k+1}^j$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_k^j$ 的定义，可得  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2 = \mathbf{O}(\tau^2)$ ，定理二证明完毕。

定理二证明了算法在无噪声时全局收敛于缪子成像问题的理论解，接下来对算法在恒定噪声下的全局收敛性进行证明。

定理三：当本文所提算法(16)应用于缪子成像时，对于未知幅值的恒定噪声 $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\varpi}$ ，该算法的稳态计算误差  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2 = \mathbf{O}(\tau^2)$ 。

证明：因为(18)式是一个线性系统，因此分别考虑恒定噪声 $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\varpi}$ 和截断误差向量 $\mathbf{O}(\tau^2)$ ，(18)式可等价于(23)式和以下公式的组合：

$$(1 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varpi}。 \quad (29)$$

在定理二中已经证明了(23)式的稳态计算误差为 $\mathbf{O}(\tau^2)$ 。(29)式可被进一步写为

$$(1 + h_1 + h_2)\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_k - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varpi}， \quad (30)$$

其第 $j$ 个元素为

$$(1 + h_1 + h_2)\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^j = \boldsymbol{\varepsilon}_k^j - h_2 \sum_{i=0}^k \boldsymbol{\varepsilon}_i^j + \boldsymbol{\varpi}^j。 \quad (31)$$

使用 Z 变换得

$$(1 + h_1 + h_2)(z\boldsymbol{\varepsilon}^j(z) - z\boldsymbol{\varepsilon}^j(0)) = \boldsymbol{\varepsilon}^j(z) - h_2 \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^j(z)}{1-z^{-1}} + \frac{z\boldsymbol{\varpi}^j}{z-1}， \quad (32)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}^j(0)$ 表示 $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ 的初始值，上式可变形为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^j(z) = \frac{(1+h_1+h_2)z(z-1)\boldsymbol{\varepsilon}^j(0)+z\boldsymbol{\varpi}^j}{(1+h_1+h_2)z(z-1)-(z-1)+zh_2}， \quad (33)$$

其中极点  $z_{1,2} = (h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - 4h_2} + 2)/(2h_1 + 2h_2 + 2)$ 。显然这两个极点位于单位圆内，表明上式是稳定的。进而，根据终值定理可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}_k^j = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\boldsymbol{\varepsilon}^j(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)((1+h_1+h_2)z(z-1)\boldsymbol{\varepsilon}^j(0)+z\boldsymbol{\varpi}^j)}{(1+h_1+h_2)z(z-1)-(z-1)+zh_2} = 0。 \quad (34)$$

因此(29)式的稳态计算误差  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2 = 0$ 。考虑到(23)式的误差，可得出结论：对于未

知幅值的恒定噪声 $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\varpi}$ ，本文所提算法(16)的稳态计算误差 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2$ 恒为 $O(\tau^2)$ 。定理三证明完毕。

定理四：所提算法(16)在随机噪声 $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\sigma}$ 下的稳态计算误差 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2$ 是收敛的，其值小于 $2mM/(1 - \|R\|_2) + O(\tau^2)$ ，其中 $M$ 为在 $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m$ 条件下 $|\sigma_i^j|$ 的最大值。

证明：正如定理三所述，分别考虑随机噪声 $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\sigma}$ 和截断误差向量 $\boldsymbol{O}(\tau^2)$ 。基于定理二，仅考虑随机噪声的影响，得到公式如下：

$$(1 + h_1 + h_2)\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^j = (2 + h_1)\boldsymbol{\varepsilon}_k^j - \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^j + \boldsymbol{\sigma}_k^j - \boldsymbol{\sigma}_{k-1}^j. \quad (35)$$

令 $\boldsymbol{u}_k^j = [\boldsymbol{\sigma}_k^j - \boldsymbol{\sigma}_{k-1}^j, 0]^T$ ，上述公式能被写为

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1}^j = P\boldsymbol{\chi}_k^j + \boldsymbol{u}_k^j. \quad (36)$$

迭代上式得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k+1}^j &= P\boldsymbol{\chi}_k^j + \boldsymbol{u}_k^j \\ &= P(P\boldsymbol{\chi}_{k-1}^j + \boldsymbol{u}_{k-1}^j) + \boldsymbol{u}_k^j \\ &= P^2\boldsymbol{\chi}_{k-1}^j + P\boldsymbol{u}_{k-1}^j + \boldsymbol{u}_k^j \\ &\vdots \\ &= P^k\boldsymbol{\chi}_1^j + \sum_{i=0}^{k-1} P^i\boldsymbol{u}_{k-i}^j. \end{aligned} \quad (37)$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\chi}_{k+1}^j\|_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k\boldsymbol{\chi}_1^j + \sum_{i=0}^{k-1} P^i\boldsymbol{u}_{k-i}^j\|_2 \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|P^k\boldsymbol{\chi}_1^j\|_2 + \|\sum_{i=0}^{k-1} P^i\boldsymbol{u}_{k-i}^j\|_2 \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|P^i\|_2 \max_{1 \leq i \leq k} \|\boldsymbol{u}_i^j\|_2 \\ &= (1 - \|P\|_2^k) / (1 - \|P\|_2) \max_{1 \leq i \leq k} \|\boldsymbol{u}_i^j\|_2 \\ &< \max_{1 \leq i \leq k} \|\boldsymbol{u}_i^j\|_2 / (1 - \|P\|_2) \\ &< 2 \max_{1 \leq i \leq k} |\sigma_i^j| / (1 - \|P\|_2). \end{aligned} \quad (38)$$

最后考虑到 $\boldsymbol{O}(\tau^2)$ 的误差，可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_k\|_2 < 2m \sup_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m} |\sigma_i^j| / (1 - \|P\|_2) + O(\tau^2). \quad (39)$$

定理四证明完毕。

## 4 仿真实验

本仿真实验的被测物体是一个 $15 \text{ m} \times 20 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ 的长方体，内部含有一个 $3 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ 的密度异常区。本仿真数据通过正演获得<sup>1</sup>。对被测物体划分体素时，非异常区

<sup>1</sup><https://github.com/1176534577/simulationData.git>

的体素划分较大，异常区划分较小，这种不均匀划分的方法可以在不增大计算量的前提下提升结果的精确性。在本实验中，体素密度最小值为  $0 \text{ g/cm}^3$ ，最大值为  $3 \text{ g/cm}^3$ ，其密度参考值为  $2.65 \text{ g/cm}^3$ ， $\gamma$ 、 $\lambda$ 、 $\alpha_s$ 、 $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\alpha_z$  的值分别为 1、10、0.5、0.05、0.05、0.25。

图 2-图 4 为本文所提算法在无噪声、恒定噪声  $\eta_k = [10, 10, \dots, 10]^T \in \mathbb{R}^{3n}$  和随机噪声  $\eta_k \in [-0.5, 0.5]^{3n} \in \mathbb{R}^{3n}$  环境下的结果展示。图 2 可看出，恒定噪声和随机噪声的仿真结果与无噪声仿真结果几乎相同，这表明所提算法在抗噪方面优越性；图 3 显示密度基本分布在参考值两侧，在低密度区分布的值对应的是异常区的密度，符合预期结果；图 4 表明随着迭代次数的增加，误差逐渐收敛并保持稳定，从实验角度验证了所提算法具有全局收敛性。

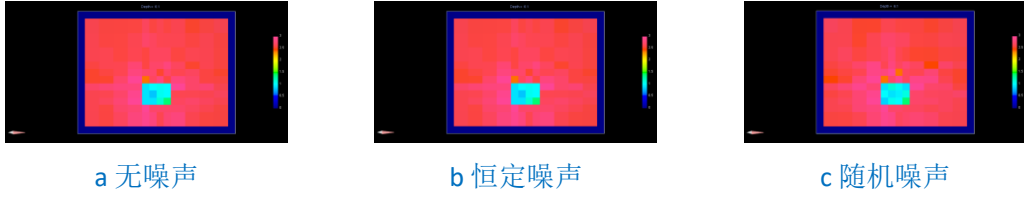


图 2 结果可视化

Fig. 2 Results visualization

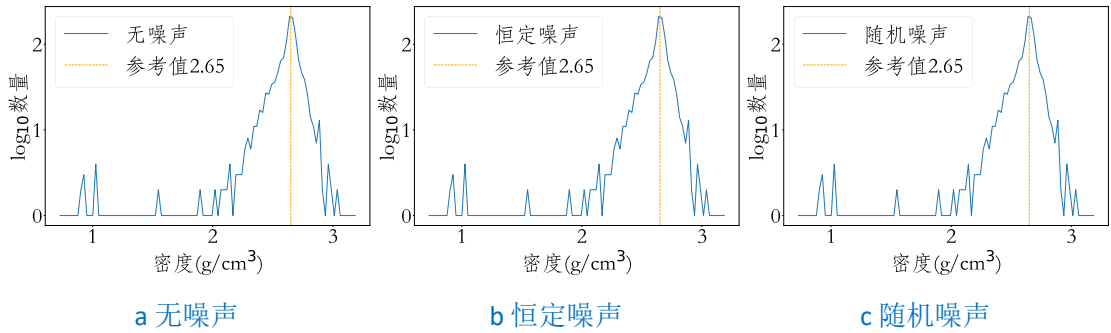


图 3 密度与数量的折线图

Fig. 3 Line chart of density and quantity

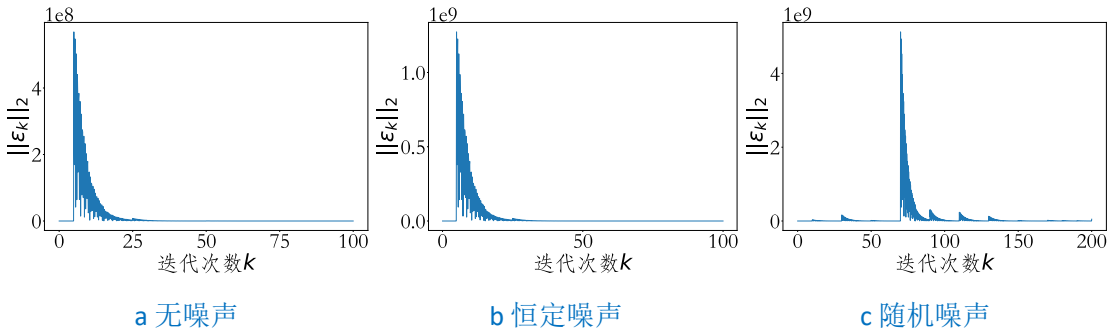


图 4 误差与迭代次数的折线图

Fig. 4 Line chart of error and iteration times

图5为本实验的理论结果与基于各算法的仿真结果，在图形显示时将密度限定在同一区间内以便于更直观地比较各个结果。从图5 (j)-(l)可看出，模拟退火法异常区轮廓明显，但非异常区的密度起伏较大，没有良好的平滑性；从图5 (m)-(o)可观察到遗传算法难以分辨异



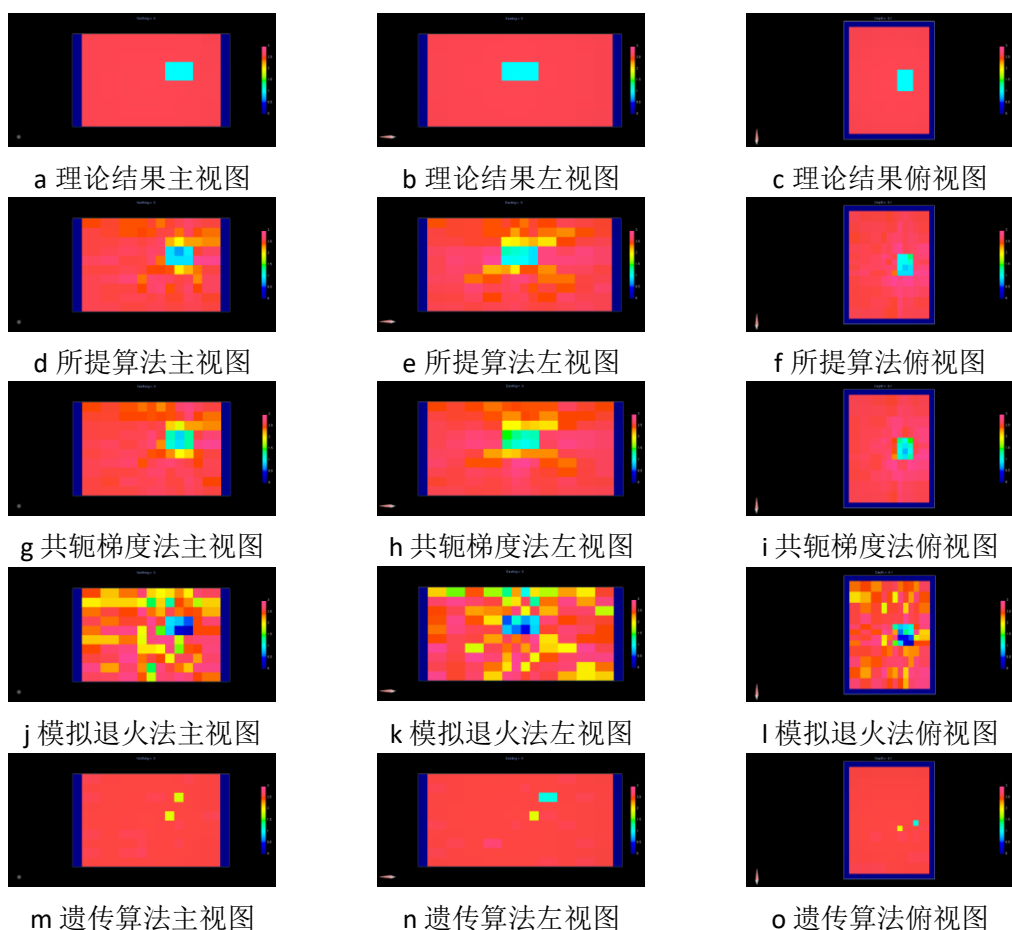


图 5 理论结果与基于各算法的仿真结果

Fig. 5 Theoretical results and simulation results based on various algorithms

表 1 各算法的定性和定量对比

Table 1 Qualitative and quantitative comparison of each algorithm

算法	收敛性能	双端约束 <sup>a</sup>	抗噪能力	异常区误差 <sup>b</sup>	非异常区误差 <sup>b</sup>
本文算法	是	有	有	1.037	5.181
共轭梯度法 <sup>[13]</sup>	是	无	无	1.264	5.087
模拟退火法 <sup>[14]</sup>	是	无	无	2.203	12.34
遗传算法 <sup>[15]</sup>	是	有	无	7.916	2.818

<sup>a</sup> 不包括在代码中使用条件判断语句以达到双端约束的目的。

<sup>b</sup> 求解缪子成像问题时的实际解与理论解的误差= $\|\text{实际解} - \text{理论解}\|_2$ 。

常区轮廓，失真严重；图5 (d)-(f)和图5 (g)-(i)展示在所提算法和共轭梯度法均可清晰地看到异常区轮廓，非异常区的密度起伏不大且大多集中在异常区附近。因此，与模拟退火法和遗传算法相比，所提算法和共轭梯度法的还原度更高，更符合理论结果。所提算法的结果与理论结果相比，二者在密度异常区的颜色不同即密度不同，原因在于缪子技术成像的数据会受到探测器和环境等因素的影响且无法避免，这使得算法求解的结果与理论结果存在偏差。

表1为所提算法与常见反演算法的定性和定量对比。常见的大部分算法在遇到双端约束的情况时需采用可行方向法或者惩罚函数法等方法,处理过程较繁杂,同时并未考虑噪声的影响。因此,所提算法与常见算法相比更具有优势。虽然图5 (d)-(f)和图5 (g)-(i)难以比较所提算法和共轭梯度法的优劣性,但是结合表1,可以看到所提算法的异常区误差明显小于共轭梯度法。在缪子成像中,异常区误差经常作为评判算法优劣的重要指标。因此,所提算法较共轭梯度法在缪子成像中更具有优越性。

## 5 结论

本文提出了一个面向宇宙射线缪子成像的计算神经动力学算法,能够确保被测物体的密度结果处于给定的约束范围内。理论分析表明该算法在无噪声的情况下全局收敛于理论解,在恒定噪声和随机噪声的情况下具有较高的精度和较强的鲁棒性。不同噪声下的仿真结果表明该算法在求解缪子成像问题时具有有效性,与其它算法的仿真结果对比验证了该算法的优越性。在缪子成像问题中,某些体素会被单条射线或多条夹角较小的射线穿过,这造成体素的密度可信度不高,因此如何减小正交性带来的影响值得进一步的研究。

## 参考文献

- [1] 周开鹏, 黄萌, 樊旭, 等. 基于逐步回归和神经网络的北京市能见度预报对比[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2020, 56(4): 522-526.
- [2] LiuFu Ying, Jin Long, Xu Jing-qiang, et al. Reformative noise-immune neural network for equality-constrained optimization applied to image target detection[J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing, 2022, 10(2): 973-984.
- [3] Jin Long, Zhang Yu-nong, Qiao Tian-jian, et al. Tracking control of modified Lorenz nonlinear system using ZG neural dynamics with additive input or mixed inputs[J]. Neurocomputing, 2016, 196: 82-94.
- [4] Katsikis V N, Stanimirović P S, Mourtas S D, et al. Zeroing neural network with fuzzy parameter for computing pseudoinverse of arbitrary matrix[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2021, 30(9): 3426-3435.
- [5] Bonechi L, D'Alessandro R, Giammanco A. Atmospheric muons as an imaging tool[J]. Reviews in Physics, 2020, 5: 100038.
- [6] Cimmino L. Principles and Perspectives of Radiographic Imaging with Muons[J]. Journal of Imaging, 2021, 7(12): 253.
- [7] Zhai Jia-jia, Tang Hao-hui, Huang Xian-chao, et al. A high-position-resolution trajectory detector system for cosmic ray muon tomography: Monte Carlo simulation[J]. Radiation Detection Technology and Methods, 2022, 6(2): 244-253.
- [8] Lesparre N, Gibert D, Marteau J, et al. Geophysical muon imaging: feasibility and limits[J]. Geophysical Journal International, 2010, 183(3): 1348-1361.
- [9] 霍勇刚, 严江余, 张全虎. 缪子多模态成像图像质量分析[J]. 物理学报, 2022, 71(2): 38-47.
- [10] Park C, Baek M K, Kang I, et al. Design and characterization of a Muon tomography system for spent nuclear fuel monitoring[J]. Nuclear Engineering and Technology, 2022, 54(2): 601-607.
- [11] Gómez H. Muon tomography using micromegas detectors: From Archaeology to nuclear safety applications[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2019, 936: 14-17.

- [12] Procureur S. Muon imaging: Principles, technologies and applications[J]. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2018, 878: 169-179.
- [13] Abubakar A B, Kumam P, Malik M, et al. A hybrid conjugate gradient based approach for solving unconstrained optimization and motion control problems[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2022, 201: 640-657.
- [14] 封京梅, 刘三阳. 基于模式搜索的粒子群算法求解绝对值方程[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2017, 53(5): 701-705.
- [15] 潘钰华, 何振学, 王克俭. 基于改进烟花算法的 MPRM 逻辑电路面积优化[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2021, 57(3): 416-422.
- [16] Lu Hui-yan, Jin Long, Luo Xin, et al. RNN for solving perturbed time-varying underdetermined linear system with double bound limits on residual errors and state variables[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(11): 5931-5942.
- [17] Jin Long, Li Shuai, Hu Bin, et al. A noise-suppressing neural algorithm for solving the time-varying system of linear equations: A control-based approach[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2018, 15(1): 236-246.
- [18] 夏子涵, 何永利, 季飞, 等. 全球变暖背景下海洋热浪事件的变化特征分析[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2022, 58(4): 560-568.
- [19] 李宁洲, 卫晓娟, 丁旺才, 等. 车轮转速信号混合噪声的非线性 Volterra 滤波方法[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2017, 53(2): 279-284.