**算法设计与分析网络学习第九次课程学习指南**

**时间**：2020年3月24日(星期二)上午10:00（3-4节）

**课堂安排**： 10:00-11:00观看视频，做练习题和思考题

**（**<https://mooc.study.163.com/learn/1000005000?tid=1000005001#/learn/content>**）**

11:00-11:45 强调知识点、答疑、讨论

(腾讯会议号码：876 124 151；密码：090603)

**学习内容**：图上的动态规划

**本次课程习题助教**：苏佳轩

**1. 授课视频**

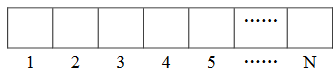
算法设计与分析(进阶篇) 3.1- 3.3

**2. 阅读**

算法导论(第三版) 15.5，第25章

**3. 练习题**

**3.1** 乌龟棋：乌龟棋的棋盘是一行N个格子，每个格子上一个分数（非负整数）。棋盘第1格是唯一的起点，第N格是终点，游戏要求玩家控制一个乌龟棋子从起点出发走到终点。



乌龟棋中M张爬行卡片，分成4种不同的类型（M张卡片中不一定包含所有4种类型 的卡片，见样例），每种类型的卡片上分别标有1、2、3、4四个数字之一，表示使用这种卡 片后，乌龟棋子将向前爬行相应的格子数。游戏中，玩家每次需要从所有的爬行卡片中选择 一张之前没有使用过的爬行卡片，控制乌龟棋子前进相应的格子数，每张卡片只能使用一次。 游戏中，乌龟棋子自动获得起点格子的分数，并且在后续的爬行中每到达一个格子，就得到 该格子相应的分数。玩家最终游戏得分就是乌龟棋子从起点到终点过程中到过的所有格子的分数总和。很明显，用不同的爬行卡片使用顺序会使得最终游戏的得分不同。现已知棋盘上每个格子的分数和所有的爬行卡片，求得一种卡片使用顺序使得最终游戏得分最多。

例：有9个格子上的分数分别为6 10 14 2 8 8 18 5 17，有卡片1 1 1 2 3，则使用爬行卡片顺序为1,1,3,1,2,得到的分数为6+10+14+8+18+17=73。注意，由于起点是11，所以自动获得第11格的分数6。

**3.2** 天灾狼群：来自东方王国的冒险家马特（Matt）遇到了了天灾狼群。有连续的N匹狼（从左到右从1到N编号）排成一排。马特必须击杀所有狼才能生存。每匹狼（第i匹狼）拥有两种属性：自身的攻击力（记作Ai），和光环攻击力（记作Bi）。一匹狼的实际攻击力是其自身的攻击力Ai加上与其相邻的两匹狼为其提供的攻击力加成（即Ai+Bi-1+Bi+1）。马特每次只能击杀一匹狼，并且在击杀时会受到等同于这匹狼实际攻击力的伤害。击杀一匹狼后，狼之间的相邻关系会发生变化，被击杀的狼相邻的两匹狼成为新的相邻关系。求得一种击杀顺序使得马特受到的总伤害最低。

例如，假设连续有3匹狼，它们的基本攻击力Ai分别为（3、5、7）。他们的光环攻击力分别是（8，2，0）。它们当前的攻击是（5，13，9）。如果马特首先击败第二只狼，他将受到13点伤害，而活着的两匹狼变得相邻，其当前的攻击力变为（3，15）。

**3.3** Flappy Bird：Flappy Bird是一款风靡一时的休闲手机游戏。玩家需要不断控制点击手机屏幕的频率来调节小鸟的飞行高度，让小鸟顺利通过画面右方的管道缝隙。如果小鸟一不小心撞到了水管或者掉在地上的话，便宣告失败。为了简化问题，我们对游戏规则进行了简化和改编：

(1) 游戏界面是一个长为n，高为m的二维平面，其中有k个管道（忽略管道的宽度）。

(2) 小鸟始终在游戏界面内移动。小鸟从游戏界面最左边任意整数高度位置出发，到达游戏界面最右边时，游戏完成。

(3) 小鸟每个单位时间沿横坐标方向右移的距离为1，竖直移动的距离由玩家控制。如果点击屏幕，小鸟就会上升一定高度X，每个单位时间可以点击多次，效果叠加；如果不点击屏幕，小鸟就会下降一定高度Y。小鸟位于横坐标方向不同位置时，上升的高度X和下降的高度Y可能互不相同。

(4) 小鸟高度等于0或者小鸟碰到管道时，游 戏 失 败 。小 鸟 高 度 为m时，无法再上升。

现在，请你判断是否可以完成游戏。如果可以，求解能够完成游戏的最少点击屏幕数；否则，求解小鸟最多可以通过多少个管道缝隙。

**3.4** 阿鲁高的阴谋：银溪镇的追随者们为阿鲁高制造了一个船，用于在海岸上扩张。在漫长的旅途中，阿鲁高必须消耗法力创造结界以存储燃料。在途中每一天，阿鲁高都可以驶到一个联盟港口骗取燃料，代价是消耗法力维持幻象。阿鲁高的目标要航行T天才能到达。由于天气和海域的不同，每天航行所需的燃料消耗也不同。每天都可以到达一个联盟港口，骗取一些燃料（也可以不去，从结界中取得燃料补充所需；注意，每天的消耗必须被满足），骗取每个单位燃料需要一定的法力消耗。如果骗取的燃料除供这一天消耗外还有剩余，则必须把它存到法力结界中，但是限于结界规模，只能把不超过V的燃料存储到结界中。在结界中存储的每个单位的燃料每天会消耗掉阿鲁高的W点法力值。为了留有足够多的法力，阿鲁高必须尽量地减少法力消耗。请你算出阿鲁高到达目标最少的法力消耗是多少。

例：总天数T==2，结界的最大存储量V==5，每个港口的库存A==10，结界中每存储一单位燃料一天的法力消耗==5。第一天消耗燃料5，骗取每单位消耗20法力；第二天消耗燃料3，骗取每单位消耗30法力。则最优解为在第一天骗取8单位燃料，5点消耗于当天的行程，3点存储到结界中。总法力消耗为160+15==175。

**3.5** 正整数n 可以拆分成若干个正整数之和，考虑拆分方案的个数。

(1) 令g(i,j)表示拆分整数i时最大加数不超过j的方案个数， 证明：g(i,j)=g(i,j-1)+g(i-j,j)。

(2)根据(1)设计动态规划算法计算整数n的拆分方案个数，要求算法的时间复杂度为O(n2)

**3.6** 设R(X)表示将整数X 的各个数位取逆序后得到的整数，如R(123)=321, R(120)=21。现输入正整数N，试设计一个动态规划算法计算方程R(X)+X=N的解的个数，分析算法的时间复杂度。

**3.7** 输入数组A[0:n]和正实数d,试设计一个动态规划算法输出A[0:n]的一个最长子序列，使得子序列中相继元素之差的绝对值不超过d。分析算法的时间复杂度。

**3.8** 给定一个整数序列a1,…,an。相邻两个整数可以合并，合并两个整数的代价是这两个整数之和。通过不断合并最终可以将整个序列合并成一个整数，整个过程的总代价是每次合并操作代价之和。试设计一个动态规划算法给出a1,…,an 的一个合并方案使得该方案的总代价最大。你的答案应包括：（1）用简明的语言表述这个问题的优化子结构；（2）根据优化子结构写出代价方程；（3）根据代价方程写出动态规划算法（伪代码）并分析算法的时间复杂性。

**3.9** 输入表达式a1O1 a2 O2......On-1 an，其中ai 是整数(1<=i<=n),Oj∈{+,-,×}(1<=i<=n-1)。

(1)试设计一个动态规划算法，输出一个带括号的表达式（不改变操作数和操作符的次序），使得表达式的值达到最大，分析算法的时间复杂性。

(2)令Oj∈{+,-,×,÷},重新完成(1)规定各项任务。

**3.10** 输入平面上n个点，点与点之间的距离定义为欧几里得距离。试设计一个动态规划算法输出一条先从左到右再从右到左的一条最短路径，使得每个输入点恰好被访问一次。

**3.11** 输入凸n边形p1,p2,…pn，其中顶点按凸多边形边界的逆时针序给出，多边形中不相邻顶点间的连线称为弦。试设计一个动态规划算法，将凸边形p1,p2,…pn 剖分成一些无公共区域的三角形，使得所有三角形的周长之和最小。

**3.12** 输入一棵加权树T,其中每条边的权值均是实数，试设计一个动态规划算法输出权值最大的子树。

**4. 思考题**

动态规划还有什么其他的子问题结构？