

## Prosta i płaszczyzna

### Płaszczyzna

- Zad 1.** Dane są punkty  $A = (1, -5, 4)$  i  $B = (-4, 3, 7)$ . Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A$  i prostopadłej do wektora  $\overrightarrow{AB}$ .
- Zad 2.** Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A = (0, 2, 1)$  i  $B = (-1, 0, 1)$  i prostopadłej do płaszczyzny  $x + y - z = 0$ .
- Zad 3.** Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A = (2, -1, 3)$  i  $B = (3, 1, 2)$  i równoległej do wektora  $\vec{a} = [-3, 1, 4]$ .
- Zad 4.** Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A = (4, 0, 1)$ ,  $B = (0, 0, 2)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ .
- Zad 5.** Dla jakiej wartości parametrów  $m$  i  $k$  płaszczyzny  $4x - 3y + 6kz - 8 = 0$  i  $2mx + y - 4z = 0$  są równoległe?
- Zad 6.** Dla jakiej wartości parametru  $m$  płaszczyzny  $7x - 2y - z - 8 = 0$  i  $mx + y - 3z = 0$  są prostopadłe?
- Zad 7.** Obliczyć kąt między płaszczyznami  $x - \sqrt{2}y + z = 1$  i  $x + \sqrt{2}y - z = -3$ .
- Zad 8.** Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A = (2, -1, 4)$ ,  $B = (1, -1, 5)$  i prostopadłej do płaszczyzny  $x - 2y + z = 1$ .
- Zad 9.** Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A = (3, -2, 5)$  i równoległej do płaszczyzny  $0yz$ .
- Zad 10.** Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty  $A = (1, 5, -2)$  i przez oś  $0y$ .
- Zad 11.** Napisać równanie płaszczyzny odcinającej na osi  $0x$  odcinek  $a = 5$ , na osi  $0z$  odcinek  $c = 5$  i przechodzącej przez punkt  $M = (-1, 2, 4)$ .
- Zad 12.** Znaleźć kąty jakie normalna do płaszczyzny  $x - y - \sqrt{2}z = -5$  tworzy z osią  $0z$ .
- Zad 13.** Znaleźć odległość punkty  $P$  od płaszczyzny  $\pi$ :
- (a)  $P = (5, 1, -1)$      $\pi: x - 2y - 2z = -4$ ;  
(b)  $P = (3, 1, -1)$      $\pi: 22x + 4y - 10z = 45$ .
- Zad 14.** Znaleźć odległości między płaszczyznami  $30x - 32y + 24z = 74$  i  $15x - 16y + 12z = 25$ .

### Prosta

- Zad 1.** Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (2, 1, 1)$ .
- Zad 2.** Wyznaczyć prostą przechodzącą przez punkt  $A = (2, 1, -3)$  i równoległą do prostej  $x = 1 - t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 1 + t$ .
- Zad 3.** Napisać równanie prostych przechodzących przez punkty przecięcia płaszczyzny  $3x - 2y + 6z = 6$  z osiami układu współrzędnych.
- Zad 4.** Przedstawić prostą  $l$  w postaci parametrycznej:
- (a)  $l: \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$  ;    (b)  $l: \begin{cases} 6x + 2y - z = -1 \\ 2x - 3y + 2z = -5 \end{cases}$  ;
- Zad 5.** Jakie kąty tworzy prosta  $l: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$  z osiami układu współrzędnych?
- Zad 6.** Znaleźć punkty przecięcia prostej  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$  z płaszczyznami układu współrzędnych?
- Zad 7.** Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $A = (2, -1, 1)$  i prostopadłej do prostej  $l: \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ .
- Zad 8.** Wyznaczyć kąt między prostymi:  $l_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$  i  $l_2: \begin{cases} x - 6y - 6z = -2 \\ 2x + y + 9z = 1 \end{cases}$ .

**Zad 9.** Zbadać wzajemne położenie prostych:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad l_1: \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad l_2: \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{(b)} \quad l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \text{i} \quad l_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -11 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \\ \text{(c)} \quad l_1: \begin{cases} x = 9t \\ y = 5t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \text{i} \quad l_2: \begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ 2x - 3y - 3z = 9 \end{cases} \quad ; \quad \text{(d)} \quad l_1: \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \quad \text{i} \quad l_2: \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}. \end{aligned}$$

**Zad 10.** Znaleźć punkt przecięcia prostych:  $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$  i  $l_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -11 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ .

**Zad 11.** Znaleźć punkt przecięcia płaszczyzny  $2x + 3y + z = 1$  z prostą  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ .

**Zad 12.** Dany jest punkt  $A = (2, -1, 3)$  i prosta  $l: \frac{x}{3} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-2}{2}$ . Znaleźć

- (a) rzut punktu  $A$  na prostą  $l$ ;
- (b) odległość punktu  $A$  od prostej  $l$ ;
- (c) punkty symetryczny do punktu  $A$  względem prostej  $l$ .

**Zad 13.** Dany jest punkt  $A = (4, 3, 10)$  i prosta  $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$ . Znaleźć

- (a) rzut punktu  $A$  na prostą  $l$ ;
- (b) odległość punktu  $A$  od prostej  $l$ ;
- (c) punkty symetryczny do punktu  $A$  względem prostej  $l$ .

**Zad 14.** Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu  $P$  względem płaszczyzny  $\pi$ .

- (a)  $P = (1, 0, -1)$ ,  $\pi: x + 2y + 3z - 5 = 0$ ;
- (b)  $P = (1, 2, -1)$ ,  $\pi: x + y - 3z + 5 = 0$ .
- (c)  $P = (2, 3, -1)$ ,  $\pi: 2x - y + z = 6 = 0$ .

**Zad 15.** Wyznaczyć punkt symetryczny do punktu  $P$  względem prostej  $l$ .

- (a)  $P = (1, -2, 7)$ ,  $l: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$  gdzie  $t \in \mathbb{R}$  ;
- (b)  $P = (1, 1, -4)$ ,  $l: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$  ;
- (c)  $P = (2, -1, 3)$ ,  $l: \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ .

**Zad 16.** Znaleźć odległość między prostymi:

- (a)  $l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$  i  $l_2: \frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ ;
- (b)  $l_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1}$  i  $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ ;
- (c)  $l_1: \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$  i  $l_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$ ;
- (d)  $l_1: \frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$  i  $l_2: \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}$ ;

**Zad 17.** Pokazać, że prosta  $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - 2z = -1 \end{cases}$  leży w płaszczyźnie  $3x - 2y + 4z = 6$ .

**Zad 18.** Znaleźć rzut prostej  $l$  na płaszczyznę  $\pi$ , jeżeli:

- (a)  $l: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$  i  $\pi: x + y = -2$ ;
- (b)  $l: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{1}$  i  $\pi: 2x - 2y + 3z = 5$ ;
- (c)  $l: \frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{6} = \frac{z-6}{8}$  i  $\pi: z = 0$ ;

**Zad 19.** Dane są dwie proste skośne:  $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  i  $l_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Znaleźć rzut prostej  $l_1$  na płaszczyznę  $\pi$  poprowadzoną przez prostą  $l_2$  i równoległą do prostej  $l_1$ .

**Zad 20.** Znaleźć równanie płaszczyzny w której leżą proste  $l_1$  i  $l_2$ :

- (a)  $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$  i  $l_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ ;
- (b)  $l_1: x = y = z$  i  $l_2: 2x = y = -z$ ;
- (c)  $l_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-2}$  i  $l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{-2}$ ;

---

## Prosta i płaszczyzna - odpowiedzi

### Płaszczyzna

- Zad 1.**  $5x - 8y - 3z - 33 = 0$ ;    **Zad 2.**  $2x - y + z + 1 = 0$ ;    **Zad 3.**  $9x - y + 7z = 40$ ;    **Zad 4.**  $x - 2y + 4z = 8$ ;  
**Zad 5.**  $m = -\frac{2}{3}, k = 2$ ;    **Zad 6.**  $m = -\frac{1}{7}$ ;    **Zad 7.**  $\frac{\pi}{3}$ ;    **Zad 8.**  $x + y + z = 5$ ;  
**Zad 9.**  $x = 3$ ;    **Zad 10.**  $2x + z = 0$ ;    **Zad 11.**  $3x - y + 5z = 15$     **Zad 12.**  $\frac{3\pi}{4}$ ;  
**Zad 13.** (a) 3; (b)  $\frac{3}{2}$ ;    **Zad 14.** 0, 5;

### Prosta

- Zad 1.** ;    **Zad 2.** ;    **Zad 3.**  $l_1: x = 2 + 2t, y = 3t, z = 0$ ;  $l_2: x = 0, y = -3 + t, z = 1$ ;  $l_3: x = 2, y = 0, z = 1 - t$ ;  
**Zad 4.** ;    **Zad 5.**  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{35}}, \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{35}}, \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{35}}$ ;    **Zad 6.**  $(-9, -22, 0), (2, 0, \frac{11}{2}), (0, -4, \frac{9}{2})$ ;  
**Zad 7.**  $x + 2y + 3z = 3$ ;    **Zad 8.** ;    **Zad 9.** (a) równoległe; (b) przecinają się; (c) pokrywają się; (d) skośne;  
**Zad 10.** ;    **Zad 11.** ;    **Zad 12.** (a)  $A' = (-2, -7, 0)$ ; (b) ; (c) ;  
**Zad 13.** (a)  $A' = (2, 9, 6)$ ; (b) ; (c) ;    **Zad 14.** (a)  $A' = (1, 1, -7)$ ; (b) ; (c) ;  
**Zad 15.** (a)  $A' = (1, 4, -7)$ ; (b) ; (c) ;  
**Zad 16.** (a)  $\frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{29}}$ ; (b) ;    **Zad 17.**    **Zad 18.** (a) 7; (b) 13;    **Zad 19.** ;  
**Zad 20.** (a)  $x - z = 1, x + y = -2$ ; (b)  $5x - 13y - 12z = -20, 2x - 2y + 3z = 5$ ; (c)  $6x + 5y = 38, z = 0$ ;  
**Zad 21.** ;    **Zad 22.** (a)  $5x + 3y - 2 = 1$ ; (b)  $3x - 7y + 5z = -3$ ; (c)  $4x - 3y = 2$ ;