Geometria analityczna

Wektory

Zad 1. Dane są wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Znaleźć długość wektora $\vec{x}$.

(a) $\vec{a} = [1, 0, -2]$, $\vec{b} = [0, 2, -3]$, $\vec{c} = [1, -1, 2]$, $\quad \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$;
(b) $\vec{a} = [2, -1, 1]$, $\vec{b} = [1, 1, -2]$, $\vec{c} = [0, 1, 3]$, $\quad \vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$;

Zad 2. Dla jakich wartości α i β wektory $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ i $\vec{b} = \beta\vec{i} + 9\vec{j} - 2\vec{k}$ są kolinearne?

Zad 3. Dane są punty $A = (1, 3, -2)$, $B = (-5, 2, 1)$, $C = (7, 2, -6)$. Na płaszczyźnie OXY znaleźć taki punkt D aby wektor $\overrightarrow{CD}$ był kolinearny z wektorem $\overrightarrow{AB}$.

Zad 4. Znaleźć wersor wektora:

(a) $\vec{a} = [-3, 1, -2]$; (b) $\vec{a} = [2, -2, -1]$;

Zad 5. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektora:

(a) $\vec{a} = [1, -1, 2]$; (b) $\vec{a} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$;

Zad 6. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ oraz kąt między wektorami $\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Zad 7. Obliczyć długość przekątnych równoległoboku zbudowanego wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ jeżeli:

(a) $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są jednostkowymi wektorami tworzącymi kąt $\frac{\pi}{3}$;
(b) $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, jeżeli wiadomo, że $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$, $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.

Zad 8. Dany jest wektor $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, gdzie $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}$. Obliczyć $\measuredangle(\vec{a}, \vec{p})$ oraz $\measuredangle(\vec{a}, \vec{q})$.

Zad 9. Znaleźć kąt między przekątnymi równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Zad 10. Wykazać, że trójkąt ABC o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (3, 2)$, $C = (2, -5)$ jest prostokątny.

Zad 11. Znaleźć kąty trójkąta o wierzchołkach:

(a) $A = (2, -1)$, $B = (1, 3)$, $C = (-1, 1)$; (b) $A = (2, -1, 5)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (0, 0, 5)$.

Zad 12. Wykazać, że czworokąt $A = (-3, 5, 6)$, $B = (1, -5, 7)$, $C = (8, -3, -1)$, $D = (4, 7, -2)$ jest kwadratem.

Zad 13. Znaleźć rzut wektora $\vec{a}$ na oś o kierunku wektora $\vec{b}$, jeżeli:

(a) $\vec{a} = [2, 1, -1]$, $\vec{b} = [1, 2, 1]$; (b) $\vec{a} = [3, 1, 0]$, $\vec{b} = [-2, 3, 3]$.

Zad 14. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (2, 0)$, $B = (1, 3)$, $C = (-5, 1)$. Znaleźć wektor dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku B.

Zad 15. Znaleźć wektor jednostkowy prostopadły jednocześnie do wektora $\vec{a} = [3, 6, 8]$ i do osi OX.

Zad 16. Dla jakiej wartości parametru α wektory $\vec{a} = [2, 3, -1]$, $\vec{b} = [\alpha, -7, 1 + \alpha]$ są wzajemnie prostopadłe?

Zad 17. Znaleźć wektor $\vec{x}$ prostopadły do wektorów $\vec{a} = [1, -2, 3]$, $\vec{b} = [2, 3, 1]$ i spełniający warunek $\vec{x} \cdot [2, -1, 1] = -6$.

Zad 18. Uprość wyrażenia:

(a) $\vec{p} \times (2\vec{q} - \vec{r} + \vec{p}) + (2\vec{r} + \vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{r})$; (b) $\vec{i} \times \left(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\right) + \left(\vec{i} + \vec{k}\right) + \left(\vec{i} + \vec{k}\right) \times \left(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$;
(c) $(3\vec{p} - \vec{r}) \times (2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r})$, gdzie $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1$, $\vec{p} \perp \vec{q} \perp \vec{r}$, $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ –zgodnie zorientowane z przestrzenią.

Zad 19. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ jeżeli:

(a) $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$, gdzie $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ i $\vec{p} \perp \vec{q}$;

(b) $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$, gdzie $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$ i $\measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

(c) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Zad 20. Wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{p}$ i $\vec{q}$ jest równe 2 obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ i $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q}$.

Zad 21. Obliczyć pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{p}$ i $\vec{q}$ wiedząc, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ jest równe 12.

Zad 22. Wyznacz wektor $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, jeżeli $\vec{a} = [3, -1, -2]$, $\vec{b} = [1, 2, -1]$, $\vec{c} = [-3, 1, 2]$.

Zad 23. Oblicz długość wektora $\vec{a} = (2\vec{p} + \vec{q} - 4\vec{r}) \times (\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r})$, gdzie $\vec{p} \perp \vec{q} \perp \vec{r}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1$.

Zad 24. Obliczyć $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, jeżeli $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{k} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{j}$.

Zad 25. Obliczyć sinus kąta między wektorami $\vec{a} = [0, 1, -1]$, $\vec{b} = [2, 1, 1]$.

Zad 26. Obliczyć tangens kąta między wektorami $\vec{a} = [0, 1, 2]$, $\vec{b} = [2, -1, 0]$.

Zad 27. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (3, 4, -3)$, $B = (6, 2, 3)$, $C = (0, -1, 5)$.

Zad 28. Dane są wierzchołki $A = (-3, 1, -1)$, $B = (6, -2, -5)$, $C = (1, -2, -1)$. Obliczyć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka B.

Zad 29. Znaleźć wektor jednostkowy $\vec{m}$ prostopadły do wektorów $\vec{a} = [2, -1, 1]$, $\vec{b} = [1, 2, -1]$.

Zad 30. Wiedząc, że wektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ nie są komplanarne, sprawdzić komplanarność wektorów:

(a) $\vec{a} = -3\vec{p} + 2\vec{q} - 2\vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - 4\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{c} = 4\vec{p} + 2\vec{q} - 6\vec{r}$;

(b) $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r}$, $\vec{c} = 3\vec{p} + 8\vec{q} - 7\vec{r}$.

Zad 31. Obliczyć pole powierzchni i objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeżeli:

(a) $\vec{a} = [2, -1, 1]$, $\vec{b} = [0, 3, 1]$, $\vec{c} = [1, 1, 0]$;

(b) $\vec{a} = [0, 1, 2]$, $\vec{b} = [1, 0, 2]$, $\vec{c} = [-2, 1, -1]$.

Zad 32. Obliczyć objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jeżeli:

(a) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, gdzie $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = 1$ i $\vec{p} \perp \vec{q} \perp \vec{r}$;

(b) $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n}$, gdzie $|\vec{m}| = \frac{1}{2}$, $|\vec{n}| = 3$ i $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{3\pi}{4}$.

Zad 33. Objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jest równa 3. Obliczyć objętość czworościanu zbudowanego na wektorach $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} - 3\vec{r}$.

Zad 34. Sprawdzić komplanarność wektorów $\vec{a} = [3, -2, 1]$, $\vec{b} = [2, 1, 2]$, $\vec{c} = [3, -1, -2]$.

Zad 35. Wykazać, że punkty $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 5)$, $C = (-1, 2, 1)$, $D = (2, 1, 3)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Zad 36. Dany jest czworościan o wierzchołkach w punktach $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 4, 1)$, $C = (1, 1, 7)$, $D = (3, 4, 9)$. Oblicz jego objętość oraz wysokość poprowadzoną z wierzchołka D.

Zad 37. Objętość czworościanu $ABCD$ o trzech wierzchołkach $A = (2, 0, -1)$, $B = (3, -1, 1)$, $C = (2, -2, 3)$ jest równa 5. Znaleźć współrzędne czwartego wierzchołka wiedząc, że leży on na osi OY.

Wektory - odpowiedzi

Zad 1. **(a)** $|\vec{x}| = 5\sqrt{5}$; **(b)** $|\vec{x}| = \sqrt{290}$.

Zad 2. $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = -15$.

Zad 3. $D = (-5, 0, 0)$.

Zad 4. **(a)** $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left[\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right]$; **(b)** $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left[\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right]$.

Zad 5. **(a)** $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right]$; **(b)** $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

Zad 6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

Zad 7. **(a)** $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$; **(b)** 15, $\sqrt{593}$.

Zad 8.

Zad 9. $\frac{\pi}{2}$.

Zad 10.

Zad 11. **(a)** **(b)**

Zad 12.

Zad 13. **(a)** **(b)**

Zad 14.

Zad 15. $\left[0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right]$, $\left[0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Zad 16. $\alpha = 22$.

Zad 17. $\vec{x} = [-3, 3, 3]$.

Zad 18. **(a)** **(b)** **(c)**

Zad 19. **(a)** $P = 3$; **(b)** $P = 24\sqrt{3}$; **(c)** $P = 5\sqrt{3}$.

Zad 20. $P = 16$;

Zad 21. $P = 2$;

Zad 22.

Zad 23.

Zad 24.

Zad 25. $\sin\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$.

Zad 26. $\operatorname{tg}\measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -2\sqrt{6}$.

Zad 27. $P = 24,5$.

Zad 28. $h = 5$.

Zad 29. $\left[\frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}\right]$.

Zad 30. **(a)** Nie są komplanarne, **(b)** są komplanarne.

Zad 31.

Zad 32. **(a)** $V = 25$; **(b)** $V = 0$.

Zad 33. $V = 1.5$;

Zad 34. Nie są komplanarne.

Zad 35.

Zad 36. $V = 14$, $h = \sqrt{14}$.

Zad 37. $D_1 = (0, -8, 0)$, $D_2 = (0, 7, 0)$.