

# Układy równań

**Zad 1.** Rozwiązać układ równań Cramera:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{cases} 3x+2y=-1; \\ 2x-3y=-5; \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x+y+2z=-1; \\ 2x-y+2z=-4; \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1; \\ 2x+y+3z=11 \end{cases} \\
 \text{(d)} \begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 4x+3y-z=7; \\ x-y+z=2 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} 2x+3y-z+5t=0 \\ 3x-y+2z-7t=0; \\ 4x+y-3z+6t=0; \\ x-2y+4z-7t=0 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} x+2y+3z-4t=4 \\ y-z+t=-3; \\ x+3y-3t=1; \\ -7y+3z+t=-3 \end{cases}
 \end{array}$$

**Zad 2.** Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań w zależności od parametru  $a$ . Podaj postać rozwiązania.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{cases} ax+2ay=a+1; \\ 2ax+ay=0 \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} (a-1)x+(3a-4)y=a+1; \\ 2x+(a+2)y=4 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} (a-1)x+(3a-4)y=a+1; \\ ax+(a+2)y=4 \end{cases} \\
 \text{(d)} \begin{cases} ax+y=a+1; \\ ax+ay=1 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} (a-1)x+(3-a)y=5; \\ 2x+ay=5a \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} ax+3ay=a+2; \\ ax+ay=0 \end{cases} \\
 \text{(g)} \begin{cases} ax+3y+az=0 \\ -ax+2z=3; \\ x+2y+az=a \end{cases} & \text{(h)} \begin{cases} 2ax+4y-az=4 \\ 2x+y+az=1; \\ (4+2a)x+6y+az=3 \end{cases} & \text{(i)} \begin{cases} x-y-z-t=ax \\ -x+y-z-t=ay; \\ -x-y+z-t=az; \\ -x-y-z+t=at \end{cases} \\
 \text{(j)} \begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1; \\ ax+y+z=1 \end{cases} & \text{(k)} \begin{cases} (3-2a)x+(2-a)y+z=a \\ (2-a)x+(2-a)y+z=1; \\ x+y+(2-a)z=1 \end{cases} & \text{(l)} \begin{cases} 2x+ay+az+at=1 \\ 2x+2y+az+at=2; \\ 2x+2y+2z+at=3; \\ 2x+2y+2z+2t=4 \end{cases}
 \end{array}$$

**Zad 3.** Rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \begin{cases} 3x-y+z=2; \\ 6x-2y+2z=1; \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x+2y-3z=2; \\ 5x-y+z=1; \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x-2y+z+t=1 \\ x-2y+z-t=-1; \\ x-2y+z+5t=5 \end{cases} \\
 \text{(d)} \begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1; \\ x+y+z=3; \\ x+2y-3z=1 \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} x-2y+3z=-7 \\ 3x+y+4z=5; \\ 2x+5y+z=18 \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} 2x-3y=8 \\ x+y=-1; \\ 5x-y=7 \end{cases} \\
 \text{(g)} \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ x+3y+z=5; \\ 2x+3y-3z=14; \\ x+y+5z=-7 \end{cases} & \text{(h)} \begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x+y-2z=1; \\ x+y+z=3; \\ x+2y-3z=1 \end{cases} & \text{(i)} \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 2x-y+z=2; \\ 5x-y+3z=3; \\ 7x-2y+4z=5 \end{cases} \\
 \text{(j)} \begin{cases} 5x-3y-z=3 \\ 2x+y-z=1; \\ 3x-2y+2z=-4; \\ x-y-2z=-2 \end{cases} & \text{(k)} \begin{cases} x-2y+z-5t=1 \\ -2x+4y-2z+t=2; \\ -x+2y-z-4t=4 \end{cases} & \text{(l)} \begin{cases} 6x+4y+5z+2t+3u=1 \\ 3x+2y+4z+t+2u=3; \\ 3x+2y-2z+t=-7; \\ 9x+6y+z+3t+2u=2 \end{cases} \\
 \text{(m)} \begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 4x+8y-7z+t=1; \\ x+2y-z+t=1; \\ -x+y+4z+6t=0 \end{cases} & \text{(n)} \begin{cases} x-3y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 5x-y-z=2; \\ x-10y+4z=-1 \\ x+y+2z=1 \end{cases} & \text{(o)} \begin{cases} y+z+3t=0 \\ 2x+y-z-3t=2; \\ x-2y+z+2t=-1; \\ 2x+3y+z+3t=1 \end{cases} \\
 \text{(p)} \begin{cases} x-y+2z+t=1 \\ 3x+y+z-t=2; \\ 5x-y+5z+t=4 \end{cases} & \text{(q)} \begin{cases} 2x-4y+3z=5 \\ 3x+2y-4z=4; \\ -x+10y-10z=-6 \end{cases} & \text{(r)} \begin{cases} 2x-y+4z=5 \\ -2x+4y-2z=-4; \\ 4x+y+10z=11 \end{cases} \\
 \text{(s)} \begin{cases} -7y+3z+t=-3 \\ x+3y-3t=1 \\ x+2y+3z-4t=4 \\ y-z+t=-3 \end{cases} & & 
 \end{array}$$

**Zad 4.** Rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(c) X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X;$$

$$(e) X \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$(g) 3X - 2X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};$$

# Układy równań - odpowiedzi

## Zad 1.

$$(a) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x = -8 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = -3 \end{cases}$$

## Zad 2.

(a) Dla  $a = 0$  układ sprzeczny, dla  $a \neq 0$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = -\frac{a+1}{3a} \\ y = \frac{2(a+1)}{3a} \end{cases}$  ;

(b) Dla  $a = 2$  układ sprzeczny, dla  $a = 3$  układ nieoznaczony, zależny od jednego parametru:  $\begin{cases} x = 2 - \frac{5y}{2} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla

$a \notin \{2, 3\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = -\frac{6-a}{a-2} \\ y = \frac{2}{a-2} \end{cases}$  ;

(c) Dla  $a \in \{\frac{1}{2}, 2\}$  układ sprzeczny, dla  $a \notin \{\frac{1}{2}, 2\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = -\frac{(a-6)(a-3)}{(a-2)(2a-1)} \\ y = -\frac{-a^2+3a-4}{(a-2)(2a-1)} \end{cases}$  ;

(d) Dla  $a \in \{0, 1\}$  układ sprzeczny, dla  $a \notin \{0, 1\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = \frac{a^2+a-1}{(a-1)a} \\ y = -\frac{a}{a-1} \end{cases}$  ;

(e) Dla  $a = -3$  układ sprzeczny, dla  $a = 2$  układ nieoznaczony zależny od jednego parametru:  $\begin{cases} x = 5 - y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla

$a \notin \{-3, 2\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = \frac{5a}{a+3} \\ y = \frac{5(a+1)}{a+3} \end{cases}$  ;

(f) Dla  $a = 0$  układ sprzeczny. Dla  $a \neq 0$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = -\frac{a+2}{2a} \\ y = \frac{a+2}{2a} \end{cases}$  ;

(g) Dla  $a \in \mathbb{R}$  układ oznaczony :  $\begin{cases} x = \frac{3a}{a^2-4a+6} \\ y = -\frac{a^3-a^2+3a}{a^2-4a+6} \\ z = \frac{3(a^2-2a+3)}{a^2-4a+6} \end{cases}$  ;

(h) Dla  $a \in \mathbb{R}$  układ sprzeczny.

(i) Dla  $a = -2$  układ nieoznaczony, zależny od jednego parametru:  $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla  $a = 2$  układ nieoznaczony, zależny

od trzech parametrów:  $\begin{cases} x = -t - y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla  $a \notin \{-2, 2\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$  ;

(j) Dla  $a = -2$  układ sprzeczny, dla  $a = 1$  układ nieoznaczony, zależny od dwóch parametrów:  $\begin{cases} x = 1 - y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla

$a \notin \{-2, 1\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = \frac{1}{a+2} \\ y = \frac{1}{a+2} \\ z = \frac{1}{a+2} \end{cases}$  ;

(k) Dla  $a = 3$  układ sprzeczny, dla  $a = 1$  układ nieoznaczony, zależny od dwóch parametrów:  $\begin{cases} x = 1 - y - z \\ y \in \mathbb{R} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$  , dla

$a \notin \{1, 3\}$  układ oznaczony:  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{4-a}{a-3} \\ z = -\frac{1}{a-3} \end{cases}$  ;

(l) Dla  $a = 2$  układ sprzeczny, dla  $a \neq 2$  układ oznaczony: 
$$\begin{cases} x = -\frac{1-2a}{a-2} \\ y = -\frac{1}{a-2} \\ z = -\frac{1}{a-2} \\ t = -\frac{1}{a-2} \end{cases};$$

**Zad 3.**

(a) Układ sprzeczny      (b)  $\begin{cases} x = \frac{1}{11}k + \frac{4}{11} \\ y = \frac{16}{11}k + \frac{9}{11} \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$       (c)  $\begin{cases} x = 2k_1 - k_2 \\ y = k_1 \in \mathbb{R} \\ z = k_2 \in \mathbb{R} \\ t = 1 \end{cases}$       (d) Układ sprzeczny

(e)  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$       (f)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$       (g)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$       (h) Układ sprzeczny

(i)  $\begin{cases} x = -\frac{2k-1}{3} \\ y = -\frac{k+4}{3} \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$       (j) Układ sprzeczny      (k) Układ sprzeczny      (l)  $\begin{cases} x = -\frac{k_2+2k_1-19}{3} \\ y = k_1 \in \mathbb{R} \\ z = 13 \\ t = k_2 \in \mathbb{R} \\ u = -34 \end{cases}$

(m)  $\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$       (n)  $\begin{cases} x = \frac{9}{19} \\ y = \frac{4}{19} \\ z = \frac{3}{19} \end{cases}$       (o) Układ sprzeczny      (p)  $\begin{cases} x = -\frac{3k_1-3}{4} \\ y = \frac{5k_1+4k_2-1}{4} \\ z = k_1 \in \mathbb{R} \\ t = k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

(q)  $\begin{cases} x = \frac{5k+13}{8} \\ y = \frac{17k-7}{16} \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$       (r)  $\begin{cases} x = -\frac{7k-8}{3} \\ y = -\frac{2k-1}{3} \\ z = k \in \mathbb{R} \end{cases}$       (s)  $\begin{cases} x = -8 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = -3 \in \mathbb{R} \end{cases}$

**Zad 4.**

(a) Brak rozwiązań;      (b) ;      (c)  $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$       (d) ;      (e) ;