Całki oznaczone

Zad 1. Oblicz całkę oznaczoną:

(a) $\int\limits_1^e x\ln x\,dx$; **(b)** $\int\limits_\pi^{2\pi} \left(\sin x+\cos^2 x\right) dx$; **(c)** $\int\limits_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$; **(d)** $\int\limits_0^1 x\sqrt{x+1}dx$; **(e)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$;

(f) $\int\limits_{e^{-1}}^e |\ln x|dx$; **(g)** $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos(2x)}dx$; **(h)** $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; **(i)** $\int\limits_0^1 \sqrt{3x+1}dx$; **(j)** $\int\limits_0^1 \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$;

(k) $\int\limits_{-1}^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$; **(l)** $\int\limits_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$; **(m)** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; **(n)** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx$; **(o)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

(p) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}dx$; **(q)** $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **(r)** $\int\limits_4^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$; **(s)** $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-5}}$; **(t)** $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$;

(u) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx$; **(v)** $\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos x}\,dx$;

Zad 2. Wykorzystując odpowiednie własności całek oznaczonych uprość wyrażenie:

(a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$; **(b)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^5}{\sqrt{3-x^2}}dx$; **(c)** $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{x^2+1}\cos x$;

Zad 3. Oblicz całkę niewłaściwą I-go rodzaju:

(a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}dx$; **(b)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$; **(c)** $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$; **(d)** $\int\limits_3^{\infty} \frac{dx}{x^2}$; **(e)** $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}$; **(f)** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{2x^2+4}$;

(g) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+13}$; **(h)** $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1}$; **(i)** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; **(j)** $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+10)^2}$; **(k)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; **(l)** $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$;

(m) $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$; **(n)** $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$; **(o)** $\int\limits_0^{\infty} \frac{(7x+2)}{x^3-5x^2+12x-60}dx$; **(p)** $\int\limits_1^{\infty} xe^{-x}dx$; **(q)** $\int\limits_4^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+3}$;

Zad 4. Oblicz całkę niewłaściwą II-go rodzaju:

(a) $\int\limits_0^1 \frac{x}{1-x}dx$; **(b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; **(c)** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$; **(d)** $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; **(e)** $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{4x^3}}$; **(f)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$;

(g) $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; **(h)** $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$; **(i)** $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}dx$; **(j)** $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; **(k)** $\int\limits_{-2}^0 \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$;

(l) $\int\limits_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$; **(m)** $\int\limits_0^6 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}dx$; **(n)** $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; **(o)** $\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{x}{x-1}}dx$; **(p)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(2x)}$; **(q)** $\int\limits_2^3 \frac{4x-6}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx$;

Zad 5. Oblicz wartość średnią zadanej funkcji we wskazanym przedziale:

(a) $f(x)=x^2$; $x\in[0,1]$; **(b)** $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$; $x\in[0,2\pi]$; **(c)** $f(x)=e^x$; $x\in[-2,2]$;

(d) $f(x)=\sin^3 x$; $x\in[0,\pi]$; **(e)** $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; $x\in[0,2]$; **(f)** $f(x)=\cos x$; $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

(g) $f(x)=x\sin x$; $x\in[0,\pi]$; **(h)** $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$; $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$;

Zad 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi:

(a) $y=x^2,\ x=a,\ y=0$; **(b)** $y=x^2,\ y^2=x$; **(c)** $y^2=x,\ x^2=8y$; **(d)** $y=x^3,\ y=4x$;

(e) $y=2x^3,\ y^2=4x$; **(f)** $y=x^3,\ y^2=x$; **(g)** $y=x^2-x-6,\ y=-x^2+5x+14$;

(h) $y=2x-x^2,\ x+y=0$; **(i)** $xy=4,\ x+y=5$; **(j)** $y=-x^2+x+6,\ y=-2x^2-5x+13$;

(k) $y=xe^{-2x},\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ y=0$; **(l)** $(x-6)^2+y^2=36,\ y^2=6x$;

(m) $y=x^2,\ y=2x^2,\ y=8,\ (x\geqslant 0)$; **(n)** $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$;

(o) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+7,\ y=\frac{4}{x}$; **(p)** $y=-x^2+2x+2,\ y=\frac{3}{x}$;

(q) $y=x+3,\ y=x^3+3x^2$; **(r☠)** $y=-\frac{4}{x},\ y=x^3+\frac{15}{2}x^2+\frac{35}{2}x+15$;

(s☠) $y=\frac{4}{x},\ y=-x^4+\frac{13}{2}x^3-10x^2-\frac{5}{2}x+11$; **(t☠)** $y=-\frac{4}{x},\ y=x^4-\frac{17}{2}x^3+25x^2+\frac{65}{2}x+19$;

Zad 7. Obliczyć długość łuku krzywej na zadanym przedziale:

(a) $y = x^2; \quad x \in [0, 2];$ **(b)** $y^2 = 4x^3; \quad y > 0,\ x \in \left[0, \frac{8}{9}\right];$ **(c)** $9y^2 = x^3; \quad x \in [0, 12];$
(d) $y^2 = 2x - x^2; \quad x \in [0, 1];$ **(e)** $y = \ln \sin x; \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right];$ **(f)** $y = \ln\left(1 - x^2\right); \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$
(g) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}; \quad x \in [-1, 1];$

Zad 8. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $f(x)$ wokół osi Ox na zadanym przedziale:

(a) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi];$ **(b)** $f(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, 1];$ **(c)** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-\infty, \infty];$

Zad 9. Obliczyć objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $f(x)$ wokół osi Oy na zadanym przedziale:

(a) $f(x) = e^{-x}, \quad x \in [0, 1];$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, 4];$ **(c)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}, \quad x \in [0, \sqrt{5}];$

Zad 10. Obliczyć pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $f(x)$ wokół osi Ox na zadanym przedziale:

(a) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi];$ **(b)** $f(x) = \sqrt{4 + x}, \quad x \in [-4, 2];$

Zad 11. Obliczyć pole powierzchni bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $f(x)$ wokół osi Oy na zadanym przedziale:

(a) $f(x) = \ln x, \quad x \in [1, \sqrt{3}];$ **(b)** $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, \sqrt{3}];$ **(c)** $f(x) = 2\sqrt{x}, \quad x \in [0, 1];$

Całki oznaczone - odpowiedzi

Zad 1.

(a) $\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$; **(b)** $\frac{\pi}{2}-2$; **(c)** $\frac{9\pi}{4}$; **(d)** $\frac{4}{15}\left(\sqrt{2}+1\right)$; **(e)** $\frac{e^\pi-2}{5}$; **(f)** $2-\frac{2}{e}$; **(g)** $200\sqrt{2}$; **(h)** $\frac{1}{2}$;
(i) $\frac{14}{9}$; **(j)** $\frac{\pi^3}{192}$; **(k)** ; **(l)** $\frac{29}{3}$; **(m)** $2-\ln 2$; **(n)** 2π; **(o)** $\frac{\pi}{6}$; **(p)** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;
(q) $\frac{1}{64}\left(\pi^2-4\pi+8\right)$; **(r)** $\ln 3$; **(s)** $\frac{\pi}{3}$; **(t)** $\frac{7}{4}$; **(u)** $\frac{1}{2}\ln 2$; **(v)** $4\sqrt{2}$;

Zad 2.

(a) 0; **(b)** 0; **(c)** $2\int\limits_0^4 \sqrt{x^2+1}\cos x$;

Zad 3.

(a) π; **(b)** $\frac{\pi^3}{12}$; **(c)** $\frac{\pi}{9}$; **(d)** $\frac{1}{3}$; **(e)** 1; **(f)** $\frac{\pi}{8}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$; **(g)** $\frac{3\pi}{8}$;
(h) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$; **(i)** π; **(j)** $-\frac{1}{2}+\ln 2$; **(k)** $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$; **(l)** $\frac{1}{2}$; **(m)** $e-1$; **(n)** $\frac{1}{2}$; **(o)** $\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{12}$;

Zad 4.

(a) ∞; **(b)** $\frac{3}{2}$; **(c)** ∞; **(d)** 8; **(e)** $4\sqrt{2}$; **(f)** $\frac{5}{2}$; **(g)** $\frac{\pi}{2}$; **(h)** π; **(i)** $\frac{\pi}{12}$; **(j)** 1; **(k)** $-\frac{9}{64}$;
(l) $\sqrt{5}$; **(m)** $9\sqrt[3]{4}$; **(n)** $-\frac{\pi}{3}$; **(o)** $\frac{\pi}{2}$; **(p)** ∞;

Zad 5.

(a) $\frac{1}{3}$; **(b)** ; **(c)** ; **(d)** $\frac{4}{3\pi}$; **(e)** $\frac{1}{4}\ln 5$; **(f)** $\frac{2}{\pi}$; **(g)** 1; **(h)** $\frac{2}{3}\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$;

Zad 6.

(a) $\frac{1}{3}a^3$; **(b)** $\frac{1}{3}$; **(c)** $\frac{8}{3}$; **(d)** 8; **(e)** ; **(f)** ; **(g)** $114\frac{1}{3}$; **(h)** ; **(i)** ; **(j)** ; **(k)** ; **(l)** ; **(m)** ;

Zad 7.

(a) $\sqrt{17}+\frac{1}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)$; **(b)** $\frac{52}{27}$; **(c)** $\frac{56}{3}$; **(d)** $\frac{\pi}{2}$; **(e)** $\frac{\ln 3}{2}$; **(f)** $\ln 3-\frac{1}{2}$; **(g)** 4;

Zad 8.

(a) ; **(b)** ; **(c)** ;

Zad 9.

(a) ; **(b)** 4π; **(c)** ;

Zad 10.

(a) ; **(b)** $\frac{62}{3}\pi$; **(c)** ;

Zad 11.

(a) $\pi\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right)$; **(b)** $\frac{14}{3}\pi$; **(c)** $\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)\right)$;