

增强的 HP 滤波器

陈阳、史震涛 (王珏瑛翻译)

2022 年 7 月 30 日



Illustration of bHP, by Iris Shi

```
library(bHP)
library(magrittr)
```

前言

我们在这里扼要地介绍 HP 滤波器, 增强的 (boosted) HP 滤波器以及相应的 R 包 **bHP** 的使用方法。Hodrick-Prescott 滤波器 (简称 HP 滤波器; Hodrick and Prescott (1997)) 是宏观经济数据分析中的基本统计工具之一。它简单易用, 已被广泛用于实证宏观经济学研究。作为一种算法, 它的优劣已被人们争论了几十年。近年来, 由于世界宏观经济的波动, 学术界开始重新关注研究其性质并对其进行扩展。尽管 Hamilton (2018) 反对使用 HP 滤波器, Phillips and Shi (2021) 提出了对原始 HP 滤波器的增强 (boosting), 称为增强 HP 滤波器 (简称 bHP), 并在理论上证明了其在一定条件下的相合性。

HP 滤波器

给定一个时间序列 $(x_t)_{t=1}^n$, HP 方法将其分解为两个相加的分量: 趋势 (trend) 分量 f_t , 和周期 (cycle) 分量 c_t 。趋势用最小化问题来估计:

$$(\hat{f}_t^{\text{HP}}) = \arg \min_{(f_t)} \left\{ \sum_{t=1}^n (x_t - f_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^n (\Delta^2 f_t)^2 \right\},$$

其中二阶差分 $\Delta^2 f_t = \Delta f_t - \Delta f_{t-1} = f_t - 2f_{t-1} + f_{t-2}$, 并且 $\lambda \geq 0$ 是一个控制惩罚水平的调谐参数。对应的周期是:

$$(\hat{c}_t^{\text{HP}}) = (x_t - \hat{f}_t^{\text{HP}}).$$

该二次优化问题有封闭解。估计出来的趋势可以写为

$$\hat{f}^{\text{HP}} = Sx,$$

其中 S 是非随机的 $n \times n$ 矩阵, 而 $x = (x_1, \dots, x_n)'$ 表示时间序列样本数据。估计出来的周期可以写为

$$\hat{c}^{\text{HP}} = (I_n - S)x,$$

其中 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵。 S 的显式形式可以在 Phillips and Shi (2021) 中找到。

调谐参数对于 HP 滤波器的表现至关重要。在实践中, Hodrick and Prescott (1997) 建议对季度数据使用 $\lambda = 1600$, 该数字及其采样频率调整版本 (Ravn and Uhlig 2002) 被广泛使用。然而, 最年的研究 (Phillips and Jin 2021) (Hamilton 2018) 发现这个“黄金标准”对于宏观经济研究中经常使用的时间序列长度来说过于僵化。

增强的 HP 滤波器

如果周期性分量 \hat{c}_t^{HP} 在经过 HP 过滤后仍表现出趋势行为，我们可以继续将 HP 滤波器应用于 \hat{c}^{HP} 以去除剩余的趋势。在第二次拟合后，周期分量可以被写为：

$$\hat{c}^{(2)} = (I_n - S) \hat{c}^{\text{HP}} = (I_n - S)^2 x,$$

其中上标“(2)”表示 HP 滤波器被使用了两次。对应的趋势分量变为：

$$\hat{f}^{(2)} = x - \hat{c}^{(2)} = (I_n - (I_n - S)^2) x.$$

如果 $\hat{c}^{(2)}$ 再次表现出趋势行为，滤波过程可以进行第三次或更多次数。在重复使用滤波器 m 次以后，周期分量和趋势分量分别为：

$$\begin{aligned}\hat{c}^{(m)} &= (I_n - S) \hat{c}^{(m-1)} = (I_n - S)^m x \\ \hat{f}^{(m)} &= x - \hat{c}^{(m)}.\end{aligned}$$

迭代次数 m 是 bHP 中的一个附加调谐参数。在实践中，我们建议根据惯例来选择 λ ，例如，处理季度数据是我们设定 $\lambda = 1600$ ，然后随着迭代的进行来选择一个停止标准 (stopping criterion)。Phillips and Shi (2021) 建议使用 ADF 检验或者贝叶斯信息准则 (BIC) 来停止迭代。

用法

为了将使用 bHP 方法的过程自动化，我们在 R 当中开发了 bHP 软件包。该软件包的主函数为 `BoostedHP`，其中用户需要自选两个函数变量，`lambda` 为 λ (默认值为 `lambda=1600`)，`stopping` 为停止标准。`stopping` 有三个选项可用：

- "BIC" 为 BIC 停止标准
- "adf" 为 ADF 停止标准 (默认 p -value 5%)
- "nonstop" 保持迭代直到达到 `Max_iter` (默认值为 100 次迭代)。

默认选项的基本用法如下：

```
BoostedHP(x, lambda = 1600, iter= TRUE, stopping = "BIC", Max_iter = 100)
```

运行上面这一行代码，将会产生了一个名叫 `bHP` 的类 (class)。我们可以通过 `$trend` 提取趋势，通过 `$cycle` 提取周期。每次迭代的趋势序列储存在 `$trend_hist` 中，而 `$iter_num` 记录迭代次数。原始的 HP 滤波器也可以通过设置 `iter = FALSE` 和 `lambda` 来实现。

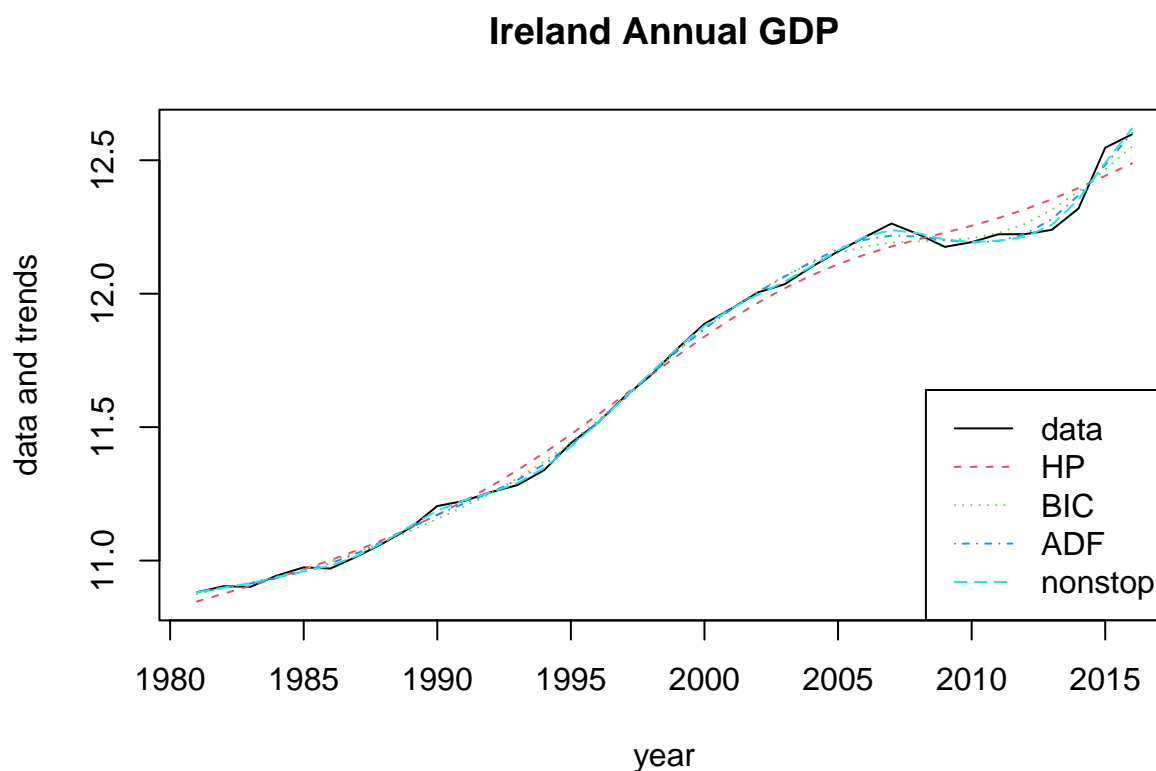
例子

Phillips and Shi (2021) 中的一个实际数据应用是关于奥肯定律 (Okun's law) 的国际比较。我们在这里使用爱尔兰的年度 GDP 进行演示。

```
lam <- 100 # tuning parameter for the annual data
data(IRE) # load the data 'IRE'

bx_HP <- BoostedHP(IRE, lambda = lam, iter= FALSE)$trend
bx_BIC <- BoostedHP(IRE, lambda = lam, stopping = "BIC")$trend
bx_ADF <- BoostedHP(IRE, lambda = lam, stopping = "adf")$trend
bx_nonstop <- BoostedHP(IRE, lambda = lam, iter= TRUE,
                        stopping = "nonstop") %>% predict( )
# use the generic method `predict` is an alternative way to get the trend

matplot( y = cbind(IRE, bx_HP, bx_BIC, bx_ADF, bx_nonstop),
         type = "l", x = 1981:2016, ylab = "data and trends",
         xlab = "year", main = "Ireland Annual GDP")
legend("bottomright", legend = c("data", "HP", "BIC", "ADF", "nonstop"),
       col = 1:5, lty = 1:5)
```



趋势和周期也可以分别通过通用方法 `predict` 和 `residuals` 提取。

```

bx <- BoostedHP(IRE, lambda = lam, stopping = "BIC")
IRE_trend <- predict(bx)
#> Retrun the trend component of BIC criterion.
#> Number of iterations: 5
IRE_cycle <- residuals(bx)
#> Retrun the trend component of BIC criterion.
#> Number of iterations: 5

print(cbind(IRE, IRE_trend, IRE_cycle))
#>      IRE IRE_trend  IRE_cycle
#> [1,] 10.88125 10.87503 6.222754e-03
#> [2,] 10.90383 10.89586 7.965210e-03
#> [3,] 10.90138 10.91736 -1.598235e-02
#> [4,] 10.94399 10.94083 3.166098e-03
#> [5,] 10.97439 10.96690 7.482396e-03
#> [6,] 10.97009 10.99643 -2.633615e-02
#> [7,] 11.01567 11.03061 -1.493163e-02
#> [8,] 11.06653 11.06926 -2.733287e-03
#> [9,] 11.12305 11.11142 1.162566e-02
#> [10,] 11.20432 11.15593 4.839320e-02
#> [11,] 11.22343 11.20215 2.128295e-02
#> [12,] 11.25632 11.25178 4.539423e-03
#> [13,] 11.28288 11.30737 -2.448389e-02
#> [14,] 11.33885 11.37133 -3.248557e-02
#> [15,] 11.44013 11.44436 -4.230495e-03
#> [16,] 11.51532 11.52495 -9.628087e-03
#> [17,] 11.61327 11.61086 2.412113e-03
#> [18,] 11.69486 11.69893 -4.071238e-03
#> [19,] 11.79576 11.78590 9.862369e-03
#> [20,] 11.88707 11.86831 1.875117e-02
#> [21,] 11.94348 11.94343 4.871659e-05
#> [22,] 12.00466 12.00991 -5.251742e-03
#> [23,] 12.03538 12.06704 -3.166219e-02
#> [24,] 12.10006 12.11459 -1.452946e-02
#> [25,] 12.15838 12.15154 6.845395e-03
#> [26,] 12.21213 12.17699 3.513720e-02
#> [27,] 12.26291 12.19115 7.175465e-02
#> [28,] 12.22275 12.19657 2.618048e-02
#> [29,] 12.17538 12.19968 -2.430345e-02
#> [30,] 12.19324 12.20806 -1.482862e-02
#> [31,] 12.22265 12.22750 -4.845947e-03
#> [32,] 12.22302 12.26202 -3.900556e-02
#> [33,] 12.23928 12.31428 -7.500469e-02
#> [34,] 12.31927 12.38380 -6.453218e-02

```

```
#> [35,] 12.54686 12.46557 8.129472e-02
#> [36,] 12.59700 12.55112 4.588203e-02
```

版本

目前我们在 `github` 上发布的第一个 R 包，标为 1.0 版本。主函数 `BoostedHP` 和相关方法 `predict`、`residuals` 和 `BIC` 相对完整，且有文档可供查阅。此软件包还发布了针对 `bHP` 类的通用方法 `print`、`plot` 和 `summary`；这些方法还在实验阶段，可用但仍比较初步。

References

- Hamilton, James D. 2018. “Why You Should Never Use the Hodrick-Prescott Filter.” *Review of Economics and Statistics* 100 (5): 831–43.
- Hodrick, Robert J, and Edward C Prescott. 1997. “Postwar US Business Cycles: An Empirical Investigation.” *Journal of Money, Credit, and Banking*, 1–16.
- Phillips, Peter C B, and Sainan Jin. 2021. “Business Cycles, Trend Elimination, and the HP Filter.” *International Economic Review* 62 (2): 469–520.
- Phillips, Peter C B, and Zhentao Shi. 2021. “Boosting: Why You Can Use the HP Filter.” *International Economic Review* 62 (2): 521–70.
- Ravn, Morten O, and Harald Uhlig. 2002. “On Adjusting the Hodrick-Prescott Filter for the Frequency of Observations.” *Review of Economics and Statistics* 84 (2): 371–76.