# Using Python to measure the expected wait in a queue with two waiting rooms

Michalis Panayides

June 16, 2021

#### About me



# THIS.

#### Queues



# Queues



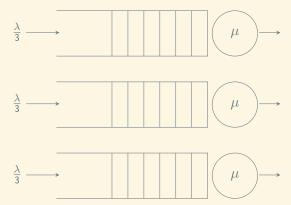
# Queues



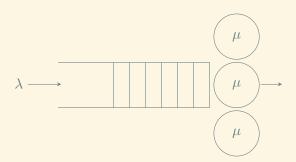
#### Discrete Event Simulation



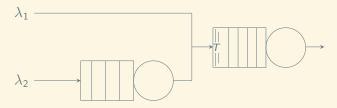
#### Discrete Event Simulation



#### Discrete Event Simulation



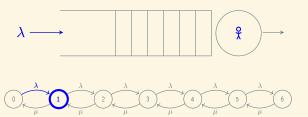
# Custom Queue with two waiting spaces



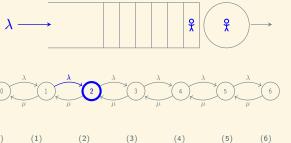




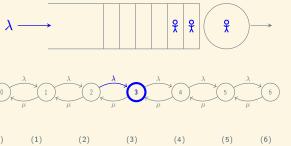
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu & 0 & 6 \end{pmatrix}$$



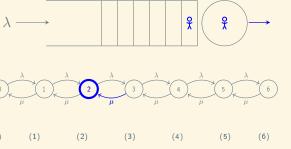
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5) & (6) & 0 & 0 & 0 \\ (1) & (2) & (2) & (3) & (2) & (2) \\ (2) & (3) & (2) & (3) & (4) & (2) \\ (2) & (3) & (2) & (3) & (4) & (2) & (2) \\ (3) & (4) & (2) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (4) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (5) & (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (1) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (5) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (2) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (3) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2) \\ (4) & (2) & (2)$$



$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5) & (6) & 0 & 0 & 0 \\ (1) & (2) & (2) & (3) & (2) & (3) \\ (2) & (3) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (2) & (3) & (4) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) \\ (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (5) & (6) & (6) & (6) & (6) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (5) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (6) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) \\ (9) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1)$$



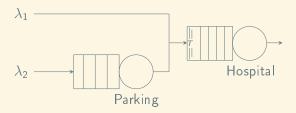
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5) & (6) & 0 & 0 & 0 \\ (1) & (2) & (2) & (3) & (2) & (3) \\ (2) & (3) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (2) & (3) & (4) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) \\ (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (5) & (6) & (6) & (6) & (6) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (5) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (6) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) \\ (9) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1)$$

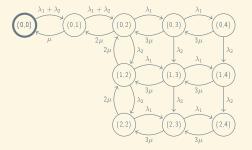


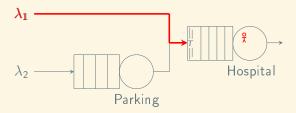
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (5) & (6) & 0 & 0 & 0 \\ (1) & (2) & (2) & (3) & (2) & (3) \\ (2) & (3) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (2) & (3) & (4) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ (3) & (4) & (5) & (6) & (6) \\ (4) & (5) & (6) & (6) & (6) \\ (5) & (6) & (6) & (6) & (6) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (4) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (5) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (6) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (3) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) & (1) \\ (9) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) & (1) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1) \\ (6) & (1) & (1) \\ (7) & (1) & (1) \\ (8) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (1) & (1) & (1) \\ (2) & (1) \\ (3) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (4) & (1) & (1) \\ (5) & (1) & (1)$$

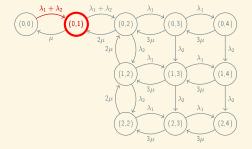


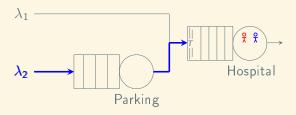
$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (6) \\ (6) \\ (6) \\ (6) \end{pmatrix}$$

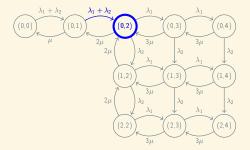


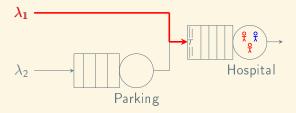


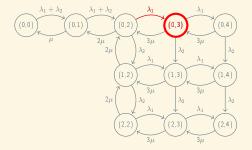


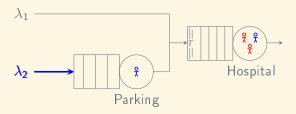


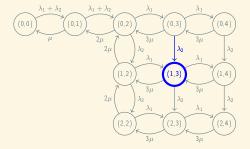


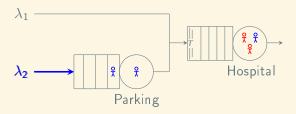


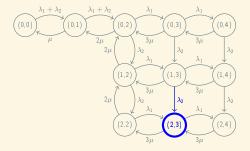


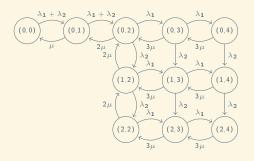






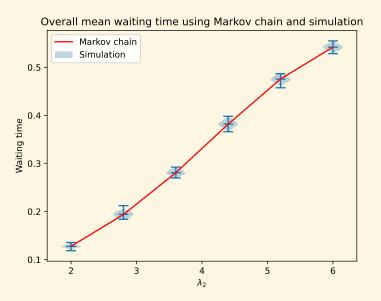






$$Q = \begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (2,3) & (2,4) \\ -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - \lambda_1 - \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_1 - 3\mu & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3\mu & -3\mu \end{pmatrix}$$
(2,3)

# Performance Measures - Waiting time



# Performance Measures - Blocking time

