Deall y gwahaniaeth rhwng graddio'r we a fectorau eigen

Vince Knight

1 Cyflwyniad: Tarddiau'r algorithm 'Page Rank'

Yn yr 1990au cynyddodd boblogaidd y we ac roedd angen ffordd o chwilio am **a chanfod** tudalennau we yn effeithlon. Yn [2] disgrifiodd Larry Paige, Sergey Brin a Terry Winograf dull a'i helwir yn 'Page Rank'. Daeth hwn yn sail y cwmni llwyddiannus Google.

Yn y gwaith hwn, byddwn yn disgrifio'r broblem o raddio gwefannau gydag enghraifft, yna mynd ati i ddisgrifio sylfaen yr algorithm 'Page Rank' cyn esbonio sut y mae'n perthyn â gwerthoedd eigen matrics.

2 Graddio Gwefannau

Gallwn feddwl am y we fel gwrthrych mathemategol o'r enw graff [1].

Gallwn ddefnyddio numpy i eneradu hap-matrics cyfagosrwydd A lle:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{os yw } (i, j) \text{ yn ymyl} \\ 0, & \text{fel arall} \end{cases}$$

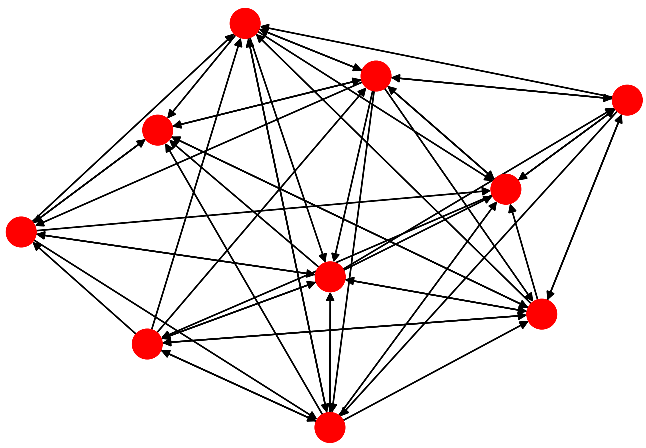
```
>>> maint = 10
>>> np.random.seed(0)
>>> A = np.random.choice((0, 1), size=(maint, maint))
>>> A
array([[0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1],
       [1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],
       [0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0],
       [1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0],
       [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1],
       [0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1],
       [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
       [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0],
       [0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0],
       [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]])
```

Mae pob rhes a cholofn o A yn cyfateb i wefan (felly yn ein henghraifft fan hyn mae gan y we 10 wefan yn unig). Gwelwn fod y wefan gyntaf (rhes gyntaf A) yn cysylltu i bob gwefan arall heblaw am y pedwerydd.

Mae gan Python llyfrgell ar gyfer astudio rhwydweithiau o'r enw networkx. Gallwn ei ddefnyddio i greu delweddau:

```
>>> G = nx.from_numpy_array(A, create_using=nx.DiGraph())
>>> plt.figure()
>>> nx.draw(G)
```

Mae Darlun 2 yn dangos y rhwydwaith cyfatebol.



Mae'r algorithm 'Page Rank' yn tybio bod defnyddwyr yn mynd i bori'r we ar hap lle byddant yr un mor debygol o fynd o un wefan i unrhyw wefan arall y mae'r wefan bresennol wedi'u cysylltu iddynt. Mae'r sgôr wrth ymyl pob gwefan yn cyfateb â'r tebygolrwydd o fod ar y wefan honno:

```
>>> nx.pagerank(G, alpha=1)
{0: 0.11988980099060496,
 1: 0.11337734639341283,
 2: 0.09229073511280955,
 3: 0.08488079369061019,
 4: 0.12554165518523688,
 5: 0.09448445809607922,
 6: 0.09608526108105925,
 7: 0.09314704994034195,
 8: 0.09384213164925923,
 9: 0.08646076786058658}
```

3 Defnyddio algebra llinol

Byddwn yn normaleiddio A i greu matrics newydd M fel bod pob rhes yn symio i un (fel bod pob rhes yn rhoi'r tebygolrwydd o fynd i'r wefan nesaf):

```
>>> symiau_rhes = A.sum(axis=1)
>>> M = A / symiau_rhes[:, np.newaxis]
>>> np.round(M, 2)
array([[0.  , 0.12, 0.12, 0.  , 0.12, 0.12, 0.12, 0.12, 0.12, 0.12],
       [0.33, 0.  , 0.  , 0.33, 0.  , 0.  , 0.  , 0.  , 0.  , 0.33],
       [0.  , 0.17, 0.17, 0.  , 0.  , 0.17, 0.17, 0.17, 0.17, 0.  ],
```

```
       [0.17, 0.  , 0.17, 0.  , 0.17, 0.17, 0.  , 0.17, 0.17, 0.  ],
       [0.  , 0.14, 0.  , 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.  , 0.14],
       [0.  , 0.17, 0.17, 0.17, 0.17, 0.  , 0.17, 0.  , 0.  , 0.17],
       [0.33, 0.  , 0.33, 0.  , 0.33, 0.  , 0.  , 0.  , 0.  , 0.  ],
       [0.2 , 0.2 , 0.  , 0.  , 0.  , 0.2 , 0.2 , 0.  , 0.2 , 0.  ],
       [0.  , 0.14, 0.  , 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.14, 0.  ],
       [0.2 , 0.2 , 0.  , 0.  , 0.2 , 0.  , 0.  , 0.2 , 0.2 , 0.  ]])
```

Gan ddefnyddio hwn, gallwn godi M i bŵer mawr iawn i weld y tebygolrwyddau rhediad hur yn dechrau ar unrhyw dudalen a rhoddir.

```
>>> np.round(np.linalg.matrix_power(M, 2000000), 2)
array([[0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09],
       [0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09]])
```

Gwelwn fod holl resi $M^{2000000}$ yn hafal ac maent yn cyfateb â'r gwerthoedd a chyfrifon trwy ddefnyddio 'Page Rank' networkx.

Yn ddiddorol, gall cael y set o debygolrwyddau hyn trwy ganfod fector eigen de M^T:

```
>>> gwerthoedd_e, fectorau_e = np.linalg.eig(M.T)
>>> np.real(np.round(fectorau_e[:,0] / sum(fectorau_e[:,0]), 2))
array([0.12, 0.11, 0.09, 0.08, 0.13, 0.09, 0.1 , 0.09, 0.09, 0.09])
```

4 Casgliad

Roedd fersiwn cyntaf chwilotodd we Google yn seiliedig ar sylfeini algebra llinol a theori graffiau. Roedd angen gwneud rhai newidiadau i ddeilio gyda'r ffaith nid yw'r we trwy'r amser yn gysylltiedig yn gyfan gwbl, mae hyn yn cyfateb â'r ddadl `alpha` yn y ffwythiant networkx uchod.

Cyfeiriadau

[1] Reinhard Diestel. *Graph theory (Graduate texts in mathematics)*, volume 173. Springer Heidelberg, 2005.

[2] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani, and Terry Winograd. The pagerank citation ranking: Bringing order to the web. Technical report, Stanford InfoLab, 1999.