Modelu effaith brechiadau gyda hafaliadau differol

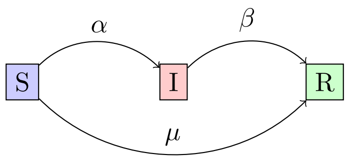
Vince Knight

1 Cyflwyniad

Mae Sefydliad Iechyd y Byd yn amcangyfrif bod y brechiad ar gyfer y frech goch wedi arbed dros 17 miliwn o fywydau ers 2000 [1]. Mae'n bosib modelu effaith y brechiadau gan ddefnyddio hafaliadau differol. Fe elwir y model a ystyriwn yn fodel SIR sy'n fodel rhannol o bobl heintiedig all fod mewn un o 3 cyflwr:

- Tueddol (S): aelodau o'r boblogaeth a all cael eu heintio;
- Heintiedig (I): aelodau heintiedig o'r boblogaeth y bydd yn adfer o'r afiechyd;
- Wedi'u Hadfer (R): aelodau o'r boblogaeth sydd wedi adfer o'r afiechyd, nodwch fan hyn mae marwolaeth yn fathemategol yn gyfath i adferiad.

Mae Darlun 1 yn dangos hwn fel diagram.



Darlun 1: Y model SIR

Parametrau'r model a ddangosir yn Darlun 1 yw:

- α y gyfradd heinti;
- β y gyfradd adfer;
- μ y canran brechu;

Fe ellir mynegi hwn yn fathemategol:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha IS - \mu S \tag{1}$$
$$\frac{dI}{dt} = \alpha IS - \beta I \tag{2}$$
$$\frac{dR}{dt} = \mu S + \beta I \tag{3}$$

Yn yr adran nesaf defnyddiwn Sympy i geisio datrys yr hafaliadau hyn yn analytig.

2 (Dim yn) canfod datrysiad union

Mae'n bosib defnyddio Sympy i ddatrys systemau o hafaliadau differol, ond wrth geisio ei wneud fan hyn mae i'w weld i fethu:

```
>>> import sympy as sym
>>> S, I, R = sym.Function("S"), sym.Function("I"), sym.Function("V")
>>> N, mu, alpha, beta, t = sym.symbols("N, mu, alpha, beta, t")
>>> eq1 = sym.Derivative(S(t), t) - (- alpha * S(t) * I(t) - mu * R(t))
>>> eq2 = sym.Derivative(I(t), t) - (alpha * I(t) * S(t) / N  - beta * I(t))
```

```
>>> eq3 = sym.Derivative(R(t), t) - (beta * I(t) + mu * R(t))
>>> sym.dsolve((eq1, eq2, eq3))
NotImplementedError                       Traceback (most recent call last)
...
```

Credaf fod hyn oherwydd cymhlethdod yr hafaliadau differol ac nid yw Sympy yn gallu ei thrin yn analytig. Cafwyd datrysiad union heb ddefnyddio brechiadau yn [2]. Serch hynny, yn yr adran nesaf byddwn yn eu datrys yn rhifiadol.

3 Datrys yr hafaliadau yn rhifiadol ac effaith y cyfradd brechu

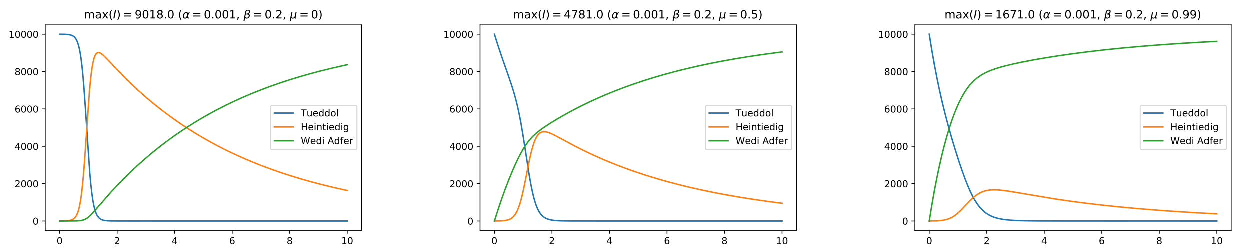
Gallwn ddefnyddio techneg integru rifiadol er mwyn datrys yr hafaliadau yn rhifiadol. Disgrifir yr algorithm penodol a defnyddiwyd yn y cyhoeddiad technegol [3].

Yn gyntaf crëwn ffwythiant sy'n rhoi mynegiadau ar gyfer y deilliadau ar gyfer unrhyw bwynt mewn amser:

```
>>> def dx(x, t, alpha, beta, mu):
...     return (- alpha * x[1] * x[0] - mu * x[0],
...             alpha * x[1] * x[0]  - beta * x[1],
...             beta * x[1] + mu * x[0])
```

Yna gallwn blotio nifer o senarios gwahanol fel y dangosir yn Ddarlun 2. Dyma'r cod sy'n cyfateb â'r plot cyntaf:

```
>>> alpha = 1 / 1000  # Mae pob 1000 rhyngweithrediadu yn arwain at haint
>>> beta = 1 / 5  # Mae'n cymryd 5 uned amser i adfer o'r afiechyd
>>> N = 10 ** 4  # Poblogaeth o 10 mil o bobl
>>> mu = 0  # 0 canran brechu
>>> ts = np.linspace(0, 10, 5000)
>>> xs = integrate.odeint(func=dx, y0=np.array([N - 1, 1, 0]), t=ts, args=(alpha, beta, mu))
>>> S, I, R = xs.T
>>> plt.figure()
>>> plt.plot(ts, S, label="Tueddol")
>>> plt.plot(ts, I, label="Heintiedig")
>>> plt.plot(ts, R, label="Wedi Adfer")
>>> plt.legend()
>>> plt.title(f"$\max(I)={round(max(I))}$ ($\\alpha={alpha}$, $\\beta={beta}$, $\mu={mu}$)")
>>> plt.savefig("base_scenario.pdf");
```

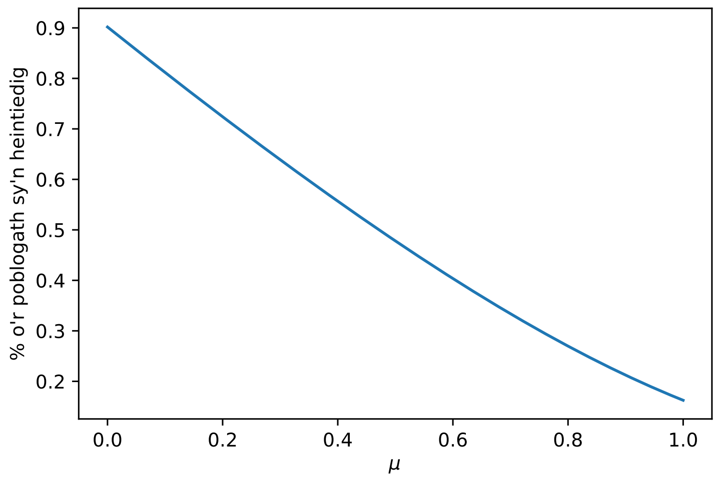


Darlun 2: Esblygiad y boblogaeth ar gyfer canrannau gwahanol ar gyfer brechiadau

Mae hefyd yn bosib cyfrifo uchafswm y canran heintio fel ffwythiant o'r gyfradd brechu:

```
>>> vaccination_rates = np.linspace(0, 1, 500)
>>> max_percent_of_infected = []
>>> for mu in vaccination_rates:
...     xs = integrate.odeint(func=dx, y0=np.array([N - 1, 1, 0]), t=ts, args=(alpha, beta, mu))
...     S, I, R = xs.T
...     max_percent_of_infected.append(max(I) / N)
>>> plt.figure()
>>> plt.plot(vaccination_rates, max_percent_of_infected)
>>> plt.xlabel("$\mu$")
>>> plt.ylabel("% o'r poblogath sy'n heintiedig")
>>> plt.savefig("effect_of_vaccination_rate.pdf");
```

Dangosir hwn yn Ddarlun 3.



Darlun 3: Effaith y cyfradd brechu ar uchafswm y canran heintio

4 Casgliad

Gwelwn yn ein model bod angen cyfradd brechu mawr er mwyn sicrhau lefel uchel o imiwnedd (hy lefel macsimwm isel o gyfanswm heintio). Mae'r fath yma o ddull yn defnyddio hafaliadau differol i fodelu rhyngweithiadau unigolion a lledaeniad afiechyd, yn olaf datryswn ni'r hafaliadau hyn gan ddefnyddio technegau o ddadansoddi rhifiadol.

Cyfeiriadau

[1] Measles vaccination has saved an estimated 17.1 million lives since 2000. `http://www.who.int/news-room/detail/12-11-2015-measles-vaccination-has-saved-an-estimated-17-1-million-lives-since-2000`. Accessed: 2018-09-04.

[2] Tiberiu Harko, Francisco SN Lobo, and MK Mak. Exact analytical solutions of the susceptible-infected-recovered (sir) epidemic model and of the sir model with equal death and birth rates. *Applied Mathematics and Computation*, 236:184–194, 2014.

[3] Krishnan Radhakrishnan and Alan C Hindmarsh. Description and use of lsode, the livermore solver for ordinary differential equations. 1993.