

## 一. (20 分)

1. 已知  $f(x)$  在节点 -3, 1, 2 的函数表

$x$	-3	1	2
$f(x)$	2	1	4

求  $f(x)$  的二次 *Lagrange* 基函数和二次 *Lagrange* 插值函数  $L_2(x)$ ; (8 分)2. 利用 1 中的数据, (1) 列出差商表, (2) 求二次牛顿插值多项式  $N_2(x)$ 。 (7 分)3. 利用二次牛顿插值多项式求出  $f(-1)$  的值, 若假设  $|f''(x)| \leq M$  ( $x \in [-3, 2]$ ), 估计出牛顿插值多项式在  $x = -1$  时的误差。 (5 分)

## 二. (15 分)

1. 简述连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的  $n$  次最佳平方逼近多项式的定义。 (5 分)2. 求出利用一次函数对  $f(x)$  进行最小二乘法拟合时的 Gram 矩阵, 其中  $f(x)$  在结点处的取值及权值如下表所示:

$x_i$	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	3	5	-2	4	1
$w_i$	1	2	2	3	1

## 三. (15 分)

1. 写出计算积分  $\int_0^3 f(x)dx$  的中矩形公式、梯形公式和辛普森求积公式; (3 分)
2. 求出下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高, 并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度. (12 分)

$$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(\frac{1}{3})$$

- 四. (15 分) 请写出下列方程组系数矩阵的 1 范数和无穷范数, 并利用 LU 分解法解下列方程组.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

五、(20 分) 写出求解线性方程组 
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$
 的雅可比迭代法格式和高斯-赛德尔迭代法格式，并分析雅可比方法求解该线性方程组的收敛性。

六、(15 分) 试讨论利用下述迭代方法求方程  $f(x) = x^3 - 2x - 6 = 0$  时的收敛性。迭代公式为

$x_{k+1} = (2x_k + 6)^{1/3}$ ，迭代区间为  $[2, 3]$