Ejercicios

Tomás Felipe Garzón Gómez - 1001200959

2023

Introducción

El docente propuso ejercicios, que serán resueltos a lo largo de este documento.

Ejercicio 1

Teorema 1

Sea X un subconjunto del grupo G, entonces hay un subgrupo más pequeño S de G que contiene a X. Es decir si T es cualquier otro subgrupo que contiene X, $S \subseteq G$

Demostración

Suponga que X es un conjuno perteneciente al grupo G, y tenemos dos subgrupos S y T, donde ambos comparten la siguiente relación.

$$\begin{aligned} X &\subseteq S \\ X &\subseteq T \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto, es lógico a sumir que a partir de la ecuación 1 que el subconjunto X hace parte de ambos subgrupos. Ahora bien, se asume que S es el subgrupo más pequeño de G siendo este el generado por X. En otras palabras que a partir de dicho subconjunto es posible generar todo el grupo, por lo tanto está incluido en los demás subgrupos pertenecientes a G. Siendo así:

$$S \subseteq T \tag{2}$$

Ejercicio 2

Si $\theta\ G \rightarrow H$ es un homomorfismo, entonces demuestre que $kernel(\theta)$ y $Img(\theta)$ son subgrupos.

$$kernel(\theta) = x \in G : \theta = 1 \tag{3}$$

$$Img(\theta) = y \in H : \theta x = y \forall x \in G \tag{4}$$

Como ambos grupos tanto G y H son homomorfismos eso quiere decir que existe una relación que preserva hasta cierto grado la información. A partir del subconjunto $X \in G$, se tiene que el nucleo, coimagen y su imagen poseen una relación de congruencia. Debido a la función θ, existe la condición ya dada debido a que son homomorfismos se puede concluir que $\theta = 1$ ya que

$$\begin{aligned} \ni e \in G \\ x \in X \\ \theta = 1 \longrightarrow x * \theta * x^{-1} = e \\ x * 1 * x^{-1} \\ 1 * x * x^{-1} \\ x * x^{-1} \\ x * x^{-1} = e \end{aligned} \tag{5}$$

Entonces existe elemento neutro tanto en G y H. A demás de que es una operación cerrrada porque ambos son homomorfos, tanto así que hay una correspondencia con respecto al inverso y a la función θ.

Ejercicio 3

¿Qué problema estaba resolviendo lagrange cuando descubrio el teorema de Lagrange?

El problema principal que se enfretaban los matematicos de la epoca era que ecuaciones de grado 5 o superior, no tenián una solución a simple vista. Sin embargo, Lagrange buscaba resolver dichas ecuaciones por semejantes radicales.