Ejercicios

Tomás Felipe Garzón Gómez - 1001200959

February 2023

Introducción

De acuerdo a los ejercicios propuestos durante clase, se propone una demostración acorde a estos.

¿Es la operación propuesta por la siguiente tabla asociativa?

Multiplicación				
*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

A partir de la tabla se infiere que lo primero que se debe hacer es que la asociatividad se cumpla en cada caso.

$$\begin{aligned} (ab)c &= a(bc) \\ bc &= ad \\ d &= d \end{aligned} \tag{1}$$

Por el momento la ecuación 1 si es asociativa.

$$\begin{aligned} (bc)d &= b(cd) \\ dd &= bc \\ b &= d \end{aligned} \tag{2}$$

Sin embargo, en este caso se demuestra que para este caso en particular, que es la ecuación 2. No para todo los casos es asociatia, por lo tanto no es asociativa está operación en este caso en particular.

¿Es la multiplicación de matrices 2x2 asociativa?

Suponga que existen tres matricez distintas cada una llamadas **A,B y C**. Definidas de la siguiente manera:
La primera corresponde a la matriz **A**.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La segunda corresponde a la matriz **B**.

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

La tercera corresponde a la matriz **C**.

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Ahora bien, ¿es **(AB)C=A(BC)**?
Lo primero que hice fue verificar la primera parte es decir **AB**.

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Después se opera con la matriz **C**.

$$\begin{bmatrix} c_1a_1b_1 + c_1a_2b_3 + c_3a_1b_2 + c_3a_2b_4 & c_2a_1b_1 + c_2a_2b_3 + c_4a_1b_2 + c_4a_2b_4 \\ c_1a_3b_1 + c_3a_4b_3 + c_3a_3b_2 + c_3a_4b_4 & c_2a_3b_1 + c_2a_4b_3 + c_4a_3b_2 + c_4a_4b_4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

De la misma forma pero ahora con la operación de las matrices **BC**.

$$\begin{bmatrix} b_1c_1 + b_2c_3 & b_1c_2 + b_2c_4 \\ b_3c_1 + b_4c_3 & b_3c_2 + b_4c_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Después operar el resultado 8 con la matriz **A**.

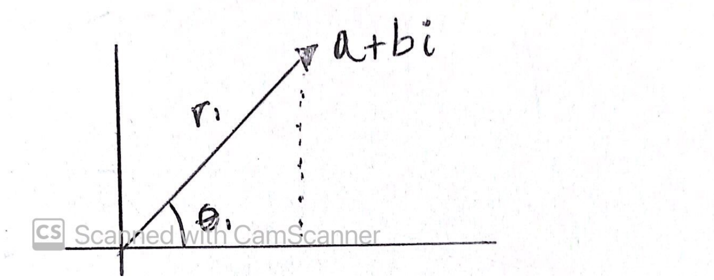
$$\begin{bmatrix} c_1a_1b_1 + c_1a_2b_3 + c_3a_1b_2 + c_3a_2b_4 & c_2a_1b_1 + c_2a_2b_3 + c_4a_1b_2 + c_4a_2b_4 \\ c_1a_3b_1 + c_3a_4b_3 + c_3a_3b_2 + c_3a_4b_4 & c_2a_3b_1 + c_2a_4b_3 + c_4a_3b_2 + c_4a_4b_4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Por consiguiente, al comparar las matrices 7 con la matriz 9 se puede concluir que son las mismas. Dando la certeza de que la multiplicación de matrices 2x2 es asociativa.

¿La multiplicación de números complejos es asociativa?

Cada número complejo tiene una parte real y una compleja. Por lo tanto para facilitar la demostración de que corresponde a una operación asociativa se trabajo con cordenadas polares, por medio de la siguiente ecuación.

$$r_1e^{i\theta_1} = r_1cos\theta_1 + risen\theta_1 \tag{10}$$

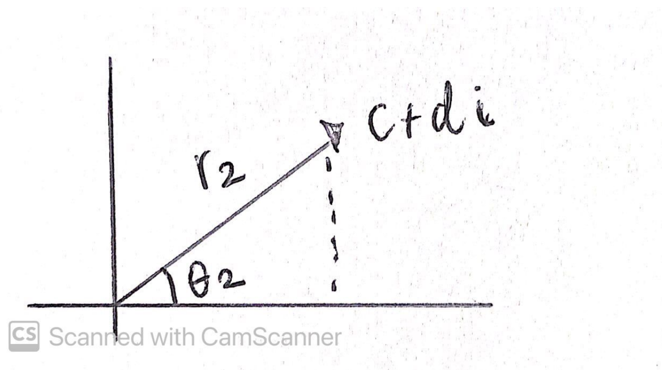


A partir de la gráfica 1 se infiere las siguientes afirmaciones.

$$a = r_1cos\theta_1$$
$$b = r_1icos\theta_1$$
$$r_1e^{i\theta_1} = a + b$$

Se le asigna el nombre de F_1 de la siguiente manera.

$$r_1e^{i\theta_1} = F_1 \tag{11}$$

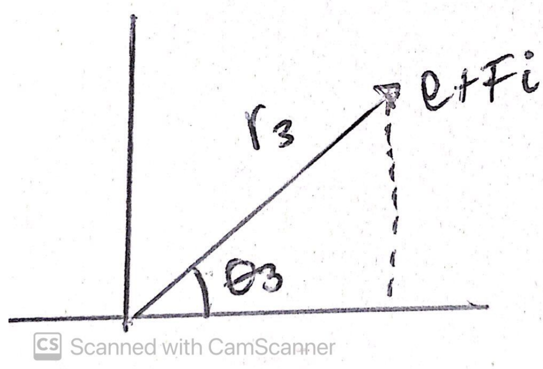


A partir de la gráfica 2 se infiere las siguientes afirmaciones.

$$c = r_2 cos\theta_2$$
$$d = r_2 i cos\theta_2$$
$$r_2 e^{i\theta_2} = c + d$$

Se le asigna el nombre de F_2 de la siguiente manera.

$$r_2 e^{i\theta_2} = F_2 \tag{12}$$



A partir de la gráfica 2 se infiere las siguientes afirmaciones.

$$\begin{gathered} e = r_3 cos\theta_3 \\ f = r_3 icos\theta_3 \\ r_3 e^{i\theta_3} = e + f \end{gathered}$$

Se le asigna el nombre de F_3 de la siguiente manera.

$$r_3 e^{i\theta_3} = F_3 \tag{13}$$

¿Es el producto $F_1 F_2 F_3$ asociativo?

$$\begin{aligned} (F_1 F_2) F_3 &= F_1 (F_2 F_3) \\ (r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}) r_3 e^{i\theta_3} &= r_1 e^{i\theta_1} (r_2 e^{i\theta_2} r_3 e^{i\theta_3}) \\ (r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) r_3 e^{i\theta_3} &= r_1 e^{i\theta_1} (r_2 r_3 e^{i\theta_2} e^{i\theta_3}) \\ (r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2}) r_3 e^{i\theta_3} &= r_1 e^{i\theta_1} (r_2 r_3 e^{i\theta_2 + i\theta_3}) \\ r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_1 + i\theta_2} e^{i\theta_3} &= r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_2 + i\theta_3} e^{i\theta_1} \\ r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_1 + i\theta_2 + i\theta_3} &= r_1 r_2 r_3 e^{i\theta_2 + i\theta_3 + i\theta_1} \end{aligned} \tag{14}$$

Es razonable concluir que el producto de complejos es asociativo, como se propone en la solución planteada 14.