1) $a+b=544$ $GCD = 11$.

$11a + 11b = 544$
$11(a+b) = 544$
$a+b = 544/11$
$a+b = 49{,}45$. $\Rightarrow$ No existen números enteros que cumplan $a+b=544$ y su GCD es 11.

2) • DIVISIBILIDAD POR 8:

Si se tiene un número lo suficientemente "grande", entonces si los últimos 3 dígitos son divisibles por 8 entonces el número lo es. Ej: 48640 $\Rightarrow$ $640/8=80$

• DIVISIBILIDAD POR 16:

Por una de las propiedades de divisibilidad como 16 es un factor de 8, com $8 \times 2 = 16$; por lo tanto si es divisible por 8; es por consiguiente divisible por 16.

4) $19^{19} \equiv ? \pmod 5$ 5 Es un número primo y 19 no es múltiplo de 5.

$19 \equiv 4 \pmod 5$
$19^{19} \equiv 4^{19} \pmod 5$
$\equiv 4 \cancel{4^4} \cancel{4^4} \cancel{4^4} \cancel{4^4} \, 4^3 \pmod 5$
$\equiv 4^2 \cdot 4 \pmod 5$
$\equiv 16 \cdot 4 \pmod 5$
$\equiv 64 \pmod 5$
$\equiv 4 \pmod 5$ Su resto es 4.

5)
$7^0 = 1$
$7^1 = 7$
$7^2 = 49$ Se repite cada 4 veces.
(-1.) $7^3 = 343$
$7^4 = 2401$
$7^5 = 16807$

$\Rightarrow$ $7 \equiv \bmod 4$
$7 \equiv -1 \bmod 4$ [4·2=8]

$\Rightarrow$ $7-(-1) = k \cdot 4$
$8 = 2 \cdot 4$.

$(7)^7 \equiv (-1)^7 \pmod 4$
$7^7 \equiv -1 \pmod 4$
$3 \equiv -1 \bmod 4$.
$3-(-1) = x\,4$
$4 = 1 \cdot 4$.

El resto es 3, por lo tanto sus últimos 2 dígitos son 43.

3) $(a)^2 \equiv (b)^2 \pmod{p}$ $\quad$ p Es primo.

$a \equiv b \pmod{p}$

$a^2 - b^2 = kp$

$(a^2 - b^2)$

$(a-b)(a+b) = kp$

$\frac{p}{(a-b)}$ ó $\frac{p}{(a+b)}$ $\Rightarrow \pm b.$ $(a)^2 \equiv \pm(b)^2 \pmod{p}$

Asumiendo que $(a-b)$ ó $(a+b)$ pueda ser p o 1 debido a que es primo.

6) $\phi(35) = (5 \cdot 7)$ → Se uso algoritmo ejercicio 2

$= (5-1)(7-1)$

$= 4 \cdot 6$

$= 24.$ → #Generadores.

$\phi(100) = (2^2)(5^2)$

$= (2^2 - 2)(5^2 - 5)$

$= (2)(20)$

$= 40$ → # Generadores.

$\phi(51200) = (2^{11})(5^2)$

$= (2^{11} - 2^{10})(5^2 - 5)$

$= (2^{11} - 2^{10})(20)$

$= 20480.$

7) $(48879)_{16} = 4 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 7 \cdot 16 + 9 \cdot 16^0.$

$= (297081)_{10}$

16	48879	15	→ F
16	3054	14	→ E
16	190	14	→ E
16	11	11	→ B
	0		

BEEF. Se le tiene que dar de comer.

8) 65 319 638 792 $\quad$ $24 = 3 \times 8$ → coprimos

$6+5+3+1+9+6+3+8+7+9+2 = 54$

$5+4=9$ $\quad$ 3 ✓ Si es divisible por 3

$792 \% 8 = 9$ $\quad$ 8 ✓ Si es divisible por 8.

Se tiene que 24 esta dado por los coprimos 3 y 8. Además que el número es divisible por 3 y 8. Por propiedades de divisibilidad si es divisible por los Factores es divisible por 24.

9) $n^p - n$ Divisible por p si p es un número primo.

Suponga que es correcto $\Rightarrow$

$p(1) = 1^p - 1 = 0$ Es verdadero, debido a que es divisible por p.

(1) Asuma que $p(n)$ es cierto $\Rightarrow p(n+1)$

$(n+1)^p - (n+1) = n^p + p\,n^{(p-1)} \cdot C.1.. C_r\, p \cdot n^{(p-r)} + ... + 1 - (n+1)$ tq $C_0 = P_i$; $C = P_{i-i}$

P es primo $\Rightarrow r < p$ ó $r = p = 0$. y $p - r < p$. $r = i$

Es divisible por p.

$\Rightarrow (n+1)^p - (n+1) = n^p + k \cdot p + \cancel{1} - n - \cancel{1}$
$= n^p + k \cdot p + n$.

Como $P(n) = n^p - n$ es verdadero ya que lo asumimos en el instante 1.

$n^p + n \Rightarrow$ Divisible por p
$k \cdot p \Rightarrow$ Divisible por p.

Si $P(1)$ es cierto $\Rightarrow P(n)$ se asume cierto $\Leftrightarrow P(n+1)$ es cierto.

10) $319x + 159y = 1$.

$314 = 159 \cdot 1 + 155$
$159 = 1 \cdot 155 + 4$
$155 = 38 \cdot 4 + 3$
$4 = 3 \cdot 1 + 1 \longrightarrow$ MCD. Si es posible.
$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$\Rightarrow 155 = 314 - 159(1)$
$4 = 159 - 155 \cdot 1$
$3 = 155 - 38 \cdot 4$
$1 = 4 - 3 \cdot 1$

$\Rightarrow$
$1 = 4 - 3 \cdot 1$
$1 = 4 - (155 - 38 \cdot 4)$
$1 = 39 \cdot 4 - 155$
$1 = 39(159 - 155 \cdot 1) - 155$
$1 = 39(159) - 40(155)$
$1 = 39(159) - 40(314 - 159)$
$1 = 79\,159 - (40)(319)$

$314(-40) + 159(79) = 1$.

11) $a^2 \equiv b^2 \pmod m$

$\Rightarrow a^2 - b^2 = km$

$a^2 - b^2 = km$

$(a+b)(a-b) = km$

$\Rightarrow \dfrac{m}{a+b}$ ó $\dfrac{m}{a-b}$

Por lo tanto puede que si existe $a^2 \equiv b^2 \bmod m$ tq $a \equiv b \bmod m$ ó $a \equiv -b \bmod m$

12) $1066 \equiv 1776 \pmod m$

$1066 - 1776 = km$

$-710 = km$

$710 = km$

[1, 2, 5, 10, 71, 142, 355, 710] Se uso python programa 12

13) Suponga que se tienen 2 enteros de tal manera

$(x+1)^3$ y $x^3 \Rightarrow (x+1)^3 - x^3 = k5$

$\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1 - \cancel{x^3} \equiv 0 \pmod 5$

$3x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod 5$

$3x(x+1) + 1 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow x(x+1) \equiv 3 \bmod 5$

Ahora se sabe que $x^3 = 3$ No es posible usando enteros; por lo tanto no es posible.

$0^3 = 0$

$1^3 = 1$

$2^3 = 8 = 3$

$3^3 = 9 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 2$

$4^3 = 1 \cdot 4 = 4$

$5^3 = 0$

$6^3 = 1 \cdot 1 = 1$

$\vdots$

$\Rightarrow$ Notese que no existen cubos consecutivos modulo 5 que pruebe

$x^3 \equiv y^3 \pmod 5$

14) $n \equiv 0 \pmod 9$
$n \equiv -1 \pmod{16}$
$n \equiv -2 \pmod{25}$

$m = 9 \cdot 16 \cdot 25 = 3600$

Se uso el algoritmo IN mult.

$M_1 : \frac{3600}{9} = 400$ $\qquad x400 \equiv 4 \bmod 9 = 1$
$M_2 : 3600/16 = 225$ $\qquad x225 \equiv -1 \bmod 16 = 15$
$M_3 : 3600/25 = 144.$ $\qquad x144 \equiv -2 \bmod 25 = 17.$

$n = \cancel{0 \cdot 400 \cdot 1} + -1 \cdot 225 \cdot 15 + -2 \cdot 144 \cdot 17$

$n = -8271 \bmod 3600 = 2529$ NO SIRVE.
$-1071 \rightarrow$ Si Funciona

$$\begin{array}{r} 10800 \\ -\ 8271 \\ \hline = 2529 \end{array}$$

$\Rightarrow$ El entero positivo es 1071, aunque para $n \equiv -2 \pmod{25}$ no da. con un desfase de 2.

15) 7^{355}

$7^0 = 1$
$7^1 = 7$
$7^2 = 49$
$7^3 = 343$
$7^4 = 2401$
$7^5 = 16807$

$335 = 83 \times 4 + 3. = \underbrace{01}$

$7^{335} \equiv 3^{335} \pmod{4}$
$7^{335} \equiv 7^{83 \times 4 + 3}$
$\equiv 01 \cdot 7^3 \pmod 4$
$\equiv 3 \bmod 4.$

$\Rightarrow$ Los ultimos 2 digitos son 43.

16) $3k+4$ y $4k+5$

$(3k+4)x + (4k+5)y = 1.$

$4k+5 = 1(3k+4) + (1k+1)$
$3k+4 = (1k+1)3 + (k+1)$
$k+1 = k+1 + 0.$

$\Rightarrow$ No tiene un Factor más grande que 1.