



华中科技大学 2023~2024 学年第二学期

“ 微积分学（一） ” 期中考试试卷

考试方式：闭卷 考试日期：2024.4.13 考试时长：150 分钟

院（系）：_____ 专业班级：_____

学 号：_____ 姓 名：_____

题号	一	二	总分
分数			

分 数	
评卷人	

一、基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $a \times (b \times a) = b - 2a$, 且 $|a| = 1, |b| = 4$, 求 $|b + a|$.

2. 已知单位矢量 \overrightarrow{OA} 与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 与 y 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 且在 z 轴上的坐标是负的, $\overrightarrow{OB} = \{1, -\sqrt{2}, -1\}$, 求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

3. 求圆锥面 $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ 与旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的交线在 $P(1,1,2)$ 处的切线与法平面方程.

4. 设 $u = f(x, y, z)$ 具有连续的偏导数, $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 确定的隐函数, 其中 $5z^2 - 4xz + 3y \neq 0$, 又 $f'_1(0,0,1) = 2, f'_2(0,0,1) = 4, f'_3(0,0,1) = 1$, 求 $du|_{(0,0)}$.

5. 设 $z = yf(x^2 - y^2)$, 其中 f 可导, 求 $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y$.

6. 求积分 $I = \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$.

7. 设平面区域 $D = \{(x, y) | -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, 求二重积分

$$I = \iint_D (y \cos x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy .$$

8. 设有直线 $L: \begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$, 平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$, 求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

9. 将空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 化为参数方程..

10. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz$ ，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x + y + z = 1$ 所围的四面体.

分 数	
评卷人	

二、综合题(每小题 8 分，共 40 分)

1. 若函数 $u = az^4 - bxz + x^2 + y^2$ 在点 $P(1,1,1)$ 沿方向 $l = \{2,1,2\}$ 的方向导数最大, 求 a, b 的值, 并求出最大方向导数.

2. 已知函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x + y)^2 + 2$, D 是由 $x + y = 3, x = 0, y = 0$ 所围成的平面区域, 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

3. 设 $z(x, y) = x^y + \int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,0)}$.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$ 讨论函数 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 的连续性、偏导数存在性

及可微性.

5. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[0, b]$ 上连续且单调增加, 其中 $b > 0$, 用二重积分证明:

$$b \int_0^b f(x)g(x)dx \geq \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx.$$