2023～2024 学年第一学期

《高等数学（ A）》（上）期末考试试卷(B 卷)解答 (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院　　　　专业班级 ____________

学号 ____________　　　　姓名 ____________

考试日期: 2024-03-　　　　考试时间: 8：30-11：00 AM

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	16	20	24	16	24	100
得分						

得　分	
评卷人	

一. 选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 关于黎曼函数 $R(x)$，下列说法**正确**的是（ D　　）.

A. $R(x)$存在第二类间断点　　B. $R(x)$存在可导点

C. $R(x)$不存在极值点　　D. $R(x)$在$[0,1]$上黎曼可积

2. 设 f 为定义在$(-1,1)$上有定义的函数，且$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则（　C　）.

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{|x|}$存在，则 $f(x)$在$x=0$ 处可导　　B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$存在，则$f(x)$在$x=0$ 处可导

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$存在，则 $f(x)$在$x=0$ 处可导　　D. 若 $f(x)$在$x=0$ 处可导，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$存在

3. 若 $\mathrm{F}(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)\,\mathrm{d}x$, 其中$f(x)$ 在$(-1,1)$上二阶可导且$f'(x)>0$，则（　C　）.

A. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 必在$x=0$ 处取得极大值

B. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 必在$x=0$ 处取得极小值

C. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 在$x=0$ 处没有极值，但点$(0,\mathrm{F}(0))$为曲线$y=\mathrm{F}(x)$的拐点

D. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 在$x=0$ 处没有极值，点$(0,\mathrm{F}(0))$也不是曲线$y=\mathrm{F}(x)$的拐点

4. 设 $f(x)$，$g(x)$是$[0,+\infty)$上的一致连续函数，则下列说法错误的是（ C ）.

A. 函数$|f(x)|$必在$[0,+\infty)$上一致连续　　B. 函数$kg(x)$(k 为常数)必在$[0,+\infty)$上一致连续

C. 函数$f(x)g(x)$必在$[0,+\infty)$上一致连续　　D. 函数$f(x)-g(x)$必在$[0,+\infty)$上一致连续

得　分	
评卷人	

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

5. 设 $E=\{\frac{1}{(n^2-2024)^2}|n=1,2,\cdots\}$, 则 $\sup E=1$, $\inf E=0$.

6. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的全部渐近有 x=0,y=0,y=x.

7.若反常积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{(1+x)x^p}\mathrm{d}x$收敛，则 p的取值范围为 p<2.

8. 微分方程 $y'+y\sin x=xe^{\cos x}$通解为$y=Ce^{\cos x}+\frac{x^2}{2}e^{\cos x}$.

9. $\sin(\sin x)$的 5 阶带 Peano 余项的 Maclaurin 展开式为 $\sin(\sin x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{120}x^5+o(x^5)$.

得　分	
评卷人	

三. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}-x}{1-\cos x}$.

解法 1：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}-x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^{x^2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{x^2}+4x^2\mathrm{e}^{x^2}}{\cos x}=-1$(每个等式 2 分，共 6 分).

解法 2：由泰勒公式：$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, $\mathrm{e}^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$,(3 分）

代入可得：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}-x}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}=-1$.（6 分）

11. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x(2+3\sin x+4\sin^3 x)\mathrm{d}x$.

解：由定积分偶倍奇零的性质及 Wallis 公式有：

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x(2+3\sin x+4\sin^3 x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^4 x\mathrm{d}x \quad （2 分）$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\mathrm{d}x \quad （ 3 分）$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}. \quad （ 6 分）$$

12. 求微分方程 $y''-ay=0$ 的通解.

解：特征方程为：$r^2-a=0$,

$a=0$ 时，$r=0$(2 重),方程的通解为：$y=C_1+C_2x$; (2 分）

$a>0$ 时，$r=\pm\sqrt{a}$,方程的通解为：$\mathrm{y}=\mathrm{C}_1e^{\sqrt{a}x}+\mathrm{C}_2e^{-\sqrt{a}x}$; (4 分）

$a<0$ 时，$r=\pm i\sqrt{-a}$,方程的通解为：$\mathrm{y}=\mathrm{C}_1\cos\sqrt{-a}x+\mathrm{C}_2\sin\sqrt{-a}x$. (6 分）

13. 求由曲线 $y=\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$和直线 $x=-1,x=1,y=0$ 所围成的区域为D绕 y轴旋转一周所得旋转体的体积.

解：$V=2\pi\int_0^1 x\,\mathrm{ch}x dx=\pi\int_0^1 x\,(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})dx$ (3 分）

$=\pi x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})-\pi(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})|_0^1=2\pi(1-\mathrm{e}^{-1})$. (6 分）

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

14. 设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, x<0,\\ \ln(1+x), x\geq 0,\end{cases}$ 当a,b,c为何值时 $f''(\mathbf{0})$ 存在.

解：因为 $f''(\mathbf{0})$ 存在，所以$f(x)$在 0 点连续，一阶可导，故有

$$\lim_{x\to 0^-}(ax^2+bx+c)=c=\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)=0, \quad (2 分）$$

又因为$f'(x)=\begin{cases}2ax+b, x<0,\\ \frac{1}{1+x}, x\geq 0,\end{cases}$故有

$\lim\limits_{x\to 0^-}(2ax+b)=b=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1,$ （4 分）

$$f''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=2a=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1,$$

因此，$a=-\frac{1}{2}, b=1, c=0.$ （6 分）

15. (1) 判断反常积分$\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$的收敛性, 若收敛则求其值, 若发散, 请说明理由.

(2) 确定 p 的范围, 使反常积分 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，并说明理由.

解: (1)因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{x^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos x x^{\frac{3}{2}}}{\sin x}=0.$

同理可证$\lim\limits_{x\to \pi^-}\sqrt{(\pi-x)}\ln\sin(\pi-x)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\ln\sin t}{t^{-\frac{1}{2}}}=0.$

由 Cauchy 判别法得 $\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$ 收敛. (2 分)

令$A=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x$, 则

$$A=2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}A.$ 故得 $A=-\pi\ln 2.$ (4 分)

（2）$\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}\right)\sim\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}-1\sim\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^2}(x\to+\infty)$, (6 分)

因为$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，故当$p>1$ 时 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，$p\leq$时 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 发散.

(8 分)

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分, 共 24 分）

16．设函数 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a]$ 上连续的偶函数，(1) 证明：$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$；（2）求

$$\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(1+x^2)(1+e^x)}\,dx.$$

证明：（1）$\because\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_{-a}^{a}\frac{f(-u)}{1+e^{u}}du=\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx$，(2 分)

$\therefore\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{f(x)}{1+e^{-x}}+\frac{f(x)}{1+e^{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$. (4 分)

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{e^x}{(1+x^2)(1+e^x)}\,dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$ (8 分)

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的二阶导函数连续，且 $f(\frac{1}{2})=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 带拉格朗日余项的泰勒公式;

(2) 证明：$\int_0^1 f(x)dx\le\frac{M}{24}$，其中 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$.

解：（1）$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2}{2!}=f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2}{2!}$,

其中 ξ 夹在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. (4 分)

(2) 由（1）式可知,

$$\int_0^1 f(x)dx=f'(\frac{1}{2})\int_0^1(x-\frac{1}{2})dx+\frac{1}{2!}\int_0^1 f''(\xi)(x-\frac{1}{2})^2dx \quad (6\text{ 分})$$

$$\le 0+\frac{M}{2}\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx=\frac{M}{24}. \quad (8\text{ 分})$$

18. 设 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数, 则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(\xi)}{\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x}-\frac{g(\xi)}{\int_{\xi}^{b}g(x)\mathrm{d}x}=1$.

证：令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\int_x^b g(t)\mathrm{d}t$,则 $F(a)=F(b)=0$, （4 分）

由 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，（6 分）

由 Roll 定理可知，$\xi\in(a,b)$ 存在,使得

$$F'(\xi)=-\mathrm{e}^{-\xi}\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-\xi}g(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0,$$ 即

$$\frac{f(\xi)}{\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x}-\frac{g(\xi)}{\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x}=1.$$ （8 分）