2014 年华中科技大学理科实验班选拔试题-数学

兰琦

2017 年 3 月 1 日

一、填空题（本题共 **5** 小题，每小题 **8** 分，共 **40** 分）

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 n 重复合函数 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))=$________.

   解析 $\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

2. 设多项式 $p(x)$ 满足 $p\left(x^2+1\right)=(p(x))^2+1$ 和 $p(0)=0$，则 $p(x)=$________.

   解析 x .

   方程 $p(x)-x=0$ 有无数个零点，于是 $p(x)=x$.

3. 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6^k}{\left(3^{k+1}-2^{k+1}\right)\left(3^k-2^k\right)}$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$________.

   解析 2 .

   裂项为 $\dfrac{2^k}{3^k-2^k}-\dfrac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}$.

4. 对 $x>0$，函数 $f(x)=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\dfrac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)}$ 的最小值为________.

   解析 6 .

   函数 $f(x)=3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

5. 假设 20 名学生中的每一名学生可从提供的六门课程中选学一门至六门，也可以一门都不选. 试判断下列命题是否正确：存在 5 名学生和两门课程，使得这 5 名学生都选了这两门课，或者都没选，选填“正确”或“否”________.

   解析 否 .

   可以构造：6 门课中选 3 门共有 $C_6^3=20$ 种不同的组合，让每个同学分别选一种组合，那么任何两门课同时选和同时不选的同学数均为 4 .

二、（本题共 14 分）

1、若 a 为正整数而 $\sqrt{a}$ 不为整数，证明：$\sqrt{a}$ 为无理数.

2、试证：除 $0,0,0$ 外，没有其他整数 m,n,p 使得

$$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0.$$

解析　略

提示：均用反证法.

三、（本题共 16 分）

设 a,b,c 为三角形三边之长，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$，r 为内切圆半径，证明：

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

解析　因为 $S=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}&=\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{(p-a)(p-b)(p-c)}\\&=\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)},\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{1}{(p-a)^2}+\dfrac{1}{(p-b)^2}\geqslant\dfrac{2}{(p-a)(p-b)}$，故

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}.$$

注　亦可由排序不等式得到

$$\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{(p-a)(p-b)}+\frac{1}{(p-b)(p-c)}+\frac{1}{(p-c)(p-a)}=\frac{1}{r^2}.$$

四、（本题共 12 分）

证明：设 m 是任一正整数，则 $a_m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2^m}$ 不是整数.

解析　略.

提示：设右边的公分母为

$$[2,3,4,\cdots,2^m]=2^m\cdot p,$$

其中 p 是一个奇数，两边同时乘以公分母，则左边是偶数，而右边为奇数.

注一　利用这个方法可以证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$，其中 $n\in\mathcal{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ 均不是整数. 另外，这个方法中从 2 的方幂出发也不是必须的.

注二　也可以两边同时乘以 $\dfrac{[2,3,\cdots,2^m]}{p}$，其中 p 为右边各分母分解质因数后的最大奇素数因子，根据伯特兰-切比雪夫定理，含 p 的项唯一，进而即得.

五、（本题共 18 分）

下图是 2013 年恒大足球俱乐部策划的主场与首尔 FC 足球队的亚冠决赛海报，左边是恒大队，右边是首尔队，该海报的寓意是什么？要求简单推导海报中两个数学式子的结果. 一个数学式子是 $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$（拉马努金式子），另一个是 $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+1$（已知欧拉公式 $\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$）.

解析　$3:0$.

提示：拉马努金恒等式，注意到

$$n=\sqrt{1+(n-1)(n+1)},$$

于是

$$3=\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}}=\cdots.$$