概率论与数理统计
计数原理

华中科技大学物理学院
赵淦

2024 年 4 月 30 日

目录

1 两个原理

定理 1 (加法原理)**.** 若 $\{A_i|i=1,2,\dots n\}$ 是两两不相交的有限集的有限族，则：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

定理 2 (乘法原理)**.** 若 $\{A_i|i=1,2,\dots n\}$ 是两两不相交的有限集的有限族，则笛卡尔积 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_n$ 的计数：

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

例 1. 从 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 中选出 5 个数组成新的集合，使五个数中任意两数之和不等于 11，这样的集合有多少种？

解： 对于这道题，如果贸然分类，会使问题变得十分棘手. 我们秉承能分步不分类的原则，观察题目的结构，发现：选 1 不能选 10，选 2 不能选 9 ...... 于是，我们可以把事情分成两步：

首先，对 $\{1,2,3,4,5\}$ 中的元素是否选取进行讨论，有 2^5 种情况；然后，根据 $\{1,2,3,4,5\}$ 中某元素的选取情况，可以唯一地判断 $\{6,7,8,9,10\}$ 中对应元素的选取情况

故这样的集合共有 2^5 种

2 排列与组合

定义 1 (排列)**.** 从 n 个元素中取 $m(m \le n)$ 不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列的个数记作 A_n^m，且：

$$\mathrm{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

定义 2 (组合)**.** 从 n 个元素中取 $m(m \le n)$ 不同元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 从 n 个不同元素中取出 m 个元

素的组合的个数记作 C_n^m，且：

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

定义 3 (圆排列)**.** 将 n 个不同元素不分首尾排成一圈，称为 n 个相异元素的圆排列，其种数为 $(n-1)!$

证明. 假设 n 个元素已经排在一环形纸带上，在其中任意一个元素前把纸带剪断，展平，就得到 n 个元素的一个排列. 故 n 个元素的一个圆排列对应它们的 n 个排列. 所以，圆排列的数目为:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

■

2.1 科学分类原则

在计数时，需要我们科学合理地分类和分步，做到不重不漏，并尽可能地使问题得到简化

例 2. 甲、乙等 5 名同学参加志愿者服务，分别到三个路口疏导交通，每个路口有 1 或 2 名志愿者，若甲、乙不在同一路口，且另外 3 名同学均不在同一路口，共有多少种安排方法？

解: 甲、乙为特殊元素，应当优先考虑，从三个路口中选取两个安置甲、乙，有 A_3^2 种情况

丙、丁、戊 3 名同学都不在同一路口，故其中必有一位同学独自站在一个路口，从丙、丁、戊中选出一个独自站在剩下的一个路口，有 C_3^1 种情况

最后，将丁、戊排在第一步中选取的两个路口，有 A_2^2 种情况

故共有 $\mathrm{A}_3^2\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_2^2 = 36$ 种情况

例 3. 首位为 1，且恰有两个数字相同的四位数有多少个？

解: 这样的四位数要么有两个 1，要么有一个 1，依此进行分类:

1. 含有两个 1：

   首先，把 1 放在首位，有 1 种放法；其次，从除 1 外的 9 个数字中选两个，有 C_9^2 种选法；最后，把所选的两个数字与 1 随机放在个、十、百位，有 A_3^3 种排法

2. 含有一个 1：

   首先，把 1 放在首位，有 1 种放法；其次，从除 1 外的九个数字种选两个，有 C_9^2 种选法；然后，从上一步选出的两个数中选出一个，作为重复数码，有 C_2^1 种选法；最后，考虑不重复数码与重复数码的位置关系，有 3 种情况

综上，共有 $\mathrm{C}_9^2\mathrm{A}_3^3+\mathrm{C}_9^2\mathrm{C}_2^1\cdot 3=432$ 个这样的四位数

例 4. 由 0，1，2，3，4，5 这六个数字可以组成多少无重复数码的五位偶数？

解： 个位特殊，先对它分类：

1. 个位为 0，从剩下的 1，2，3，4，5 中选取四个排在十、百、千、万位，有 A_5^4 种排法

2. 个位为 2，则万位特殊，从它开始分步：

   (a) 从除 0 和 2 外的四个数字中选出一个排在万位，有 A_4^1 种排法

   (b) 从剩下的四个数码中选出三个随机排在十、百、千位，有 A_4^3 种排法

3. 个位为 4，也是如此

综上，共有 $\mathrm{A}_5^4+\mathrm{C}_4^1\mathrm{A}_4^3+\mathrm{C}_4^1+\mathrm{A}_4^3=312$ 种这样的偶数

例 5. 给正四棱锥的顶点染色，同一条棱上的两个端点不同色，如果只有 5 种颜色可供选择，那么不同染色方法有多少种？

解： 侧面三角形的三个顶点颜色不同，故最少用 3 种颜色

1. 使用 5 种颜色时. 先从 5 种颜色中取 1 颜色染上顶点，有 C_5^1 种取法；其余 4 色染底面 4 个顶点，即为 4 种不同颜色的圆排列，有 3! 种排法

2. 使用 4 种颜色时，从 5 种颜色中取 4 种，有 C_5^4 种取法. 先从 4 种颜色中取 1 颜色染上顶点，有 C_4^1 种取法；再用 3 种颜色染 4 个下顶点，必有一对顶点同色，从 3 种颜色中取 1 种颜色染对顶点，有 C_3^1 种取法；剩下 2 种颜色染剩下 2 个顶点，有 1 种染法

3. 使用 3 种颜色时，从 5 种颜色中取 3 种，有 C_5^3 种取法. 先从 3 种颜色中取 1 颜色染上顶点，有 C_3^1 种取法；剩下 2 种颜色染 4 个下顶点，有 1 种染法

所以，总共有 $\mathrm{C}_5^1 \cdot 3! + \mathrm{C}_5^4\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1 \cdot 1 + \mathrm{C}_5^3\mathrm{C}_3^1 \cdot 1$ 种染色方法

2.2 站队问题

例 6. 三个女生和五个男生排成一排，女生全部排在一起，有多少种排法？

解： 先对三个女生排序，有 A_3^3 种排法；然后，将女生视为一个整体，和五个男生一起排在六个位置，有 A_6^6 种排法，故共有 $\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_6^6$ 种排法

例 7. 三个男生和五个女生排成一排，女生互不相邻，有多少种排法？

解: 先对五个男生排序，有 A_5^5 种排法；于是，产生四个间隙以及两端，共六个空位，从六个空位中选三个排女生，有 A_6^3 种排法，故共有 $\mathrm{A}_5^3\mathrm{A}_6^3 = 14400$ 种排法

例 8. 三个男生和五个女生排成一排，女生不站两端，有多少种排法？

解 1： 站两端的不是女生，则一定是男生，从五个男生中选两个排在两端，有 A_5^2 种排法；其余六人随机排在中间六个位置，有 A_6^6 种排法，故共有 $\mathrm{A}_5^2\mathrm{A}_6^6 = 14400$ 种排法

解 2： 女生不站两端，则一定站中间，从六个位置中选出三个排女生，有 A_6^3 种排法；其余五人随机排列在五个位置，有 A_5^5 种排法，故共有 $\mathrm{A}_6^3\mathrm{A}_5^5 = 14400$ 种排法

解 3: 八个人排八个位置，有 A_8^8 种排法若队首排女生，则先从三个女生中选出一个排在队首，剩下七个人排在七个位置，共 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_7^7$ 种排法；若队尾排女生，亦是如此若队首队尾都排女生，则先从三个女生中选两个排在队首和队尾，剩下六个随机排列，有 $\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_6^6$ 种排法由容斥定理，共有 $\mathrm{A}_8^8-(2\mathrm{C}_3^1\mathrm{A}_7^7-\mathrm{A}_3^2\mathrm{A}_6^6)=14400$ 种排法

2.3 射击问题与成双问题

例 9. 射出八颗子弹，射中三发，恰有两发连中，有几种情况？

解: 将连中的两发子弹视为一个整体，因为射击本身有次序，无需排序；从六个位置中选两个置放连中的两发和独立的一发，有 $\mathrm{A}_6^2=30$ 种情况

例 10. 从 10 双鞋中抽取 4 只，若 4 只均不成双，有多少种情况？若只有 2 只成双，有多少种情况？若成 2 双，有多少种情况？

解:

1. 不成双的 4 只鞋中的任一只必与这 4 只鞋之外的某一只鞋成双，故事件可分两步完成：首先，从 10 双鞋中抽取 4 双，有 C_{10}^4 种抽法；从 4 双鞋中的每一双鞋中取一只，有 2^4 种取法. 故共有 $\mathrm{C}_{10}^4 2^4$ 种情况

2. 首先，从 10 双鞋中抽取 1 双，有 C_{10}^1 种取法；然后，从余下的 9 双鞋中抽取 2 双，每双中抽取一只鞋，有 $\mathrm{C}_9^2 2^2$ 种取法. 故共有 $\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_9^2 2^2$ 种情况

3. 显然有 C_{10}^2 种情况

2.4 台阶问题

例 11. 沿如图所示的格线从左下角走到右上角，有多少种最短路径？

解: 最短路径共 8 步，其中 4 步向右，4 步向上于是问题转化为从 8 步中抽取 4 步向上，剩下的 4 步向右，共 $\mathrm{C}_8^4 = 70$ 种情况

例 12. 8 步上 14 级台阶，每步只能跨 1 或 2 级台阶，有几种走法？

解: 如果 8 步全跨 1 级台阶，只能走 8 级台阶，还差 6 级. 故 8 步中有 6 步跨 2 级，2 步跨 1 级. 于是问题转化为从 8 步中抽取 6 步跨 2 级，剩余 2 步跨 1 级. 共 $\mathrm{C}_8^2 = 28$ 种情况

3 可重排列与组合

定义 4 (可重排列)**.** 从 n 个不同元素中选取 m 个元素，同一元素允许重复取出，按照一定的顺序排成一列，叫从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的可重排列的数目为 n^m.

定义 5 (可重组合)**.** 从 n 个不同元素中选取 m 个元素并成一组，同一元素允许重复取出，叫从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重组合. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的可重组合的数目为 C_{m+n-1}^m.

证明. 用 $1, 2, \ldots, n$ 表示 n 个不同元素，这时从这 n 个不同元素中取出取出 m 个元素的可重组合具有以下形式：

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}(1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n)$$

将上述每个组合从左到右依次加上 $0, 1, 2, \ldots, m-1$，得到

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$$

其中 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le m-1$，这恰是从 $n+m-1$ 个不同元素 $1,2,\cdots,n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合. 所以从 n 个不同元素中取出 m 个元素的可重组合的数目为 C_{m+n-1}^{m}. ■

例 13. 从银行中取出伍角、壹元、伍元、拾元、贰拾元、伍拾元、壹百元的纸币共十张，共有多少种不同的取法？

解: 本题即为从 7 种不同纸币中抽 10 张的可重组合数，即:

$$\mathrm{C}_{16}^{6} = 8008$$

例 14. 不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n(m,n \in \mathbb{N}_+)$ 有多少组自然数解？多少组正整数解？

解: 设有 m 个不同元素，记作 $1,2\ldots,m$，从 m 个不同元素中选取 n 个元素并成一组，同一元素允许重复取出. 记选取元素 i 的数目为 $x_i(x_i \in \mathbb{N})$，则:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

故不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n(m,n \in \mathbb{N}_+)$ 的自然数解数目与从 m 个不同元素中取出 n 个元素的可重组合的数目相同，为 C_{m+n-1}^{n}

不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n(m,n \in \mathbb{N}_+)$ 的正整数解与不定方程 $(x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_m+1) = n(m,n \in \mathbb{N}_+)$ 的自然数解一一对应，其数目为 C_{n-1}^{m-1}

例 15 (2020 高联)**.** 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x \le y \le z$ 的正整数解有多少组？

解: $x+y+z=2010$ 的正整数解有 C_{2009}^{2} 个

1. $x=y=z$ 时，有 1 组

2. x,y,z 中有两个相等且满足 $x \le y \le z$ 时，

$$(x,y,z) \in \{(x,x,2010-2x) | 1 \le x \le 669\}$$

或

$$(x,y,z)\in\{(2010-2x,x,x)|671\le x\le 1009\}$$

有 1003 组

3. $x<y<z$ 时，设有 k 组，则：

$$1+\mathrm{C}_3^1\cdot 1003+\mathrm{A}_3^3k=\mathrm{C}_2^{2009}$$

解得 $k=335671$

故方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解有 $1+1003+335671=336675$ 组

例 16. 6 名女生和 15 名男生围成一圈，要求每两名女生之间至少要有两名男生，有多少种不同的排法？

解： 把同学分成 6 组，每组有 1 名女生站在最左端和至少 2 名男生. 设第 $i(i=1,2,\ldots 6)$ 名女生与 $x_i(x_i\ge 2)$ 名男生在同一组，则：

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=15$$

令 $y_i=x_i-2$，则 $y_i\ge 0$ 且：

$$y_1+y_2+\cdots+y_6=3$$

此方程解的数目即为排法的数目，为 C_8^5
然后，将这 6 组排成一圈，有 5! 种排法
故共有 $\mathrm{C}_8^5\cdot 5!$ 种排法

例 17. 甲、乙两队各抽出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋赛，双方先由 1 号队员比赛，负者被淘汰，胜方再与负方 2 号队员比赛. 以此类推，直到一方队员全被淘汰，求所有比赛过程种数.

解： 若甲队赢，设甲队第 i 名队员赢 $x_i(x_i\in\mathbb{N})$ 场，则：

$$x_1+x_2+\cdots+x_7=7$$

此方程解的数目即为甲队赢对应的比赛过程的种数，为 C_{15}^6
若乙队赢，亦然. 故所有比赛过程种数为 $2\mathrm{C}_{15}^6$

4 多组组合

定义 6 (多组组合)**.** 把 n 个相异元素分到 k 个按一定顺序排列的组中，其中第 i 组有 n_i 个元素 $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$，则不同的分法的种数为

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

证明. 从 n 个元素中取 n_1 个元素并成一组，有 $\mathrm{C}_n^{n_1}$ 种取法，从剩下的 $n-n_1$ 个元素取 n_2 个元素并成一组，有 $\mathrm{C}_{n-n_1}^{n_2}$，以此类推，由乘法原理，不同的分组方法的种数为:

$$\mathrm{C}_n^{n_1}\mathrm{C}_{n-n_1}^{n_2}\mathrm{C}_{n-n_1-n_2}^{n_3}\cdots\mathrm{C}_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

■

例 18. 从 $n(n \geq 6)$ 名乒乓球选手中选拔出 3 对选手参加双打比赛，有多少种不同的选法？

解: 从 n 名选手中选 6 名，有 C_n^6 种选法；若将 6 名选手分为定序的 3 组，每组 2 人，有 $\binom{6}{2\ 2\ 2}$ 种分法，而三组不定序，应乘以 $\frac{1}{\mathrm{A}_3^3}$.

故共有 $\mathrm{C}_n^6\frac{\binom{6}{2\ 2\ 2}}{\mathrm{A}_3^3}$ 种不同的选法

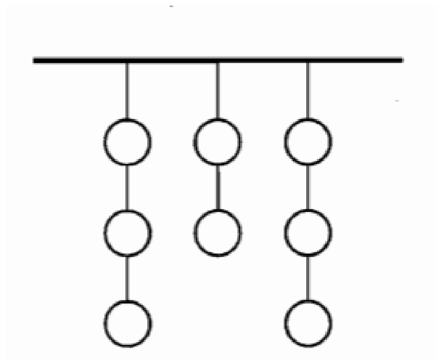
例 19. 把 5 本不同的书分给甲、乙、丙三人，其中甲分 4 本，乙分 1 本，丙分 1 本，有多少种情况？分成三组，一组 4 本，一组 1 本，一组 1 本，有多少种情况？分给三人，两人分 1 本，一人分 4 本，有多少种情况？

解:

1. 有 $\binom{6}{4\ 4\ 1} = \mathrm{C}_6^4\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_1^1 = 30$ 种情况
2. 含 1 本书的两个组不用排序，故有 $\frac{30}{\mathrm{A}_2^2} = 15$ 种情况
3. 把 (2) 中的三个组分给甲、乙、丙三个人，有 A_3^3 种分配方法，故有 $15\mathrm{A}_3^3 = 90$ 种情况

例 20. 在一次射击比赛中，有 8 个靶子挂成如图所示的 3 列，一名神枪手每一枪按照下面的规则打靶子：

1. 选择一列；
2. 打中所选一列最下面没有打过的靶子



打中这 8 个靶子共有多少种不同的顺序？

解： 用 $1,2,...,8$ 表示 8 次枪击. 同一列，从下到上，枪击的编号是定序的，可以看成一个组. 把 8 个元素分为 3 组，有 $\binom{8}{3\ 2\ 3}$ 种排法

5 容斥原理

定理 3 (容斥原理)**.** 若 $\{A_i|i=1,2,...n\}$ 是两两不相交的有限集的有限族，则：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n|$$

证明. 设 $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, 并设 $a \in A_{i_1}, A_{i_2} \ldots A_{i_k}$, 而不属于 $\{A_i|1 \le i \le n\}$

中其它集合则 a 在等式左端被计算了 1 次，在等式右端被计算的次数为：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\mathrm{C}_k^i &= \mathrm{C}_k^0-\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\mathrm{C}_k^i \\ &= 1-(1-1)^k \\ &= 1\end{aligned}$$

若 $a\notin\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，则 a 在等式左右两端都被计算 0 次

从而该定理成立 ■

定理 4 (逐步淘汰原理)**.** 若 $\{A_i|i=1,2,\ldots n\}$ 是两两不相交的有限集的有限族，$\overline{A_i}=\complement_S A_i$ 则：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=|S|-\sum_{i=1}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|$$

例 21 (Bernoulli 错装信信笺问题)**.** 有 n 封不同的信和 n 个配套的信封，记 D_n 为 n 封信全部没有装入正确的信封的套法的数目，求 D_n.

解： 设 S 为所有套法的集合，A_i 为第 $i(i=1,2,\ldots n)$ 为第 n 封信套对的集合，则 $D_n=\left|\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|$，且：

$$|S|=n!$$

$$|A_i|=(n-1)!(1\le i\le n)$$

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!\,(1\le i<j\le n)$$

$$\cdots$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|=0!$$

由逐步淘汰原理：

$$\begin{aligned}D_n &= n!-\mathrm{C}_n^1(n-1)!+\mathrm{C}_n^2(n-2)!+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n 0! \\ &= n!\left[1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]\end{aligned}$$

例 22. 把 m 本不同的书分放在按一定顺序排列的 n 个书架上，每个书架上至少放一本，则共有多少种放法？

解： 设 S 为所有放法的集合，$A_i(i=1,2,\dots,n)$ 为第 i 个书架上不摆书的放法的集合，则 $E_n=\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|$，且：

$$|S|=n^m$$

$$|A_i|=(n-1)^m(1\le i\le n)$$

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)^m\,(1\le i<j\le n)$$

$$\cdots$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|=0$$

由逐步淘汰原理：

$$D_n \quad = \quad n^m-\mathrm{C}_n^1(n-1)^m+\mathrm{C}_n^2(n-2)^m+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n 0$$

例 23. 从全体正整数中划去 3 和 4 的倍数，但其中凡是 5 的倍数都保留. 划去后，将剩下的数按从小到大的顺序排成一个数列 $\{a_n\}$，求 a_{2011} 的值.

解 1： 设 $a_{2011}=n$，令 $S=\{1,2,3,\dots n\}$，$A_i=\{k|k\in S\ \ i\mid k\}$，于是 S 中没有被划去的数的集合为：

$$\left(\complement_S A_3\cap\complement_S A_2\cap\complement_S A_5\right)\cup A_5$$

由逐步淘汰原理：

$$\begin{aligned}
& 2011\\
= \ & |\left(\complement_S A_3\cap\complement_S A_2\cap\complement_S A_5\right)\cup A_5|\\
= \ & \left(\complement_S A_3\cap\complement_S A_2\cap\complement_S A_5\right)||A_5|\\
= \ & n-\left(\lfloor\frac{n}{3}\rfloor+\lfloor\frac{n}{4}\rfloor+\lfloor\frac{n}{5}\rfloor\right)+\left(\lfloor\frac{n}{12}\rfloor+\lfloor\frac{n}{15}\rfloor+\lfloor\frac{n}{20}\rfloor\right)-\lfloor\frac{n}{60}\rfloor+\lfloor\frac{n}{5}\rfloor
\end{aligned}$$

又因为 $\alpha-1\le\lfloor\alpha\rfloor\le\alpha$，所以：

$$\frac{3}{5}n-3<2011<\frac{3}{5}n+3$$

解得：

$$3346\frac{2}{3} < n < 3356\frac{2}{3}$$

经检验，只有 $n = 3350$ 符合题意，故 $n = 3350$

解 2： 因为 $3,4,5$ 的最小公倍数为 60，考虑 $S_0 = \{1,2,\dots,60\}$，令 $B_i = \{k | k \in S_0 \ \ i \mid k\}$

则 S_0 中未被划去的数有 $\left|\left(\complement_{S_0}B_3 \cap \complement_{S_0}B_4 \cap \complement_{S_0}B_5\right) \cup B_5\right| = 36$ 个

记 $P = \{a_1, a_2, \dots, a_{36}\}$，令 $a_n = 60k + r(k \geq 0, 1 \leq r \leq 60)$

若 $\gcd(a_n, 12) = \gcd(60k + r, 12) = 1$，则 $\gcd(r, 12) = 1$，$r \in P$

若 $\gcd(a_n, 12) = \gcd(60k + r, 12) \neq 1$，则 $\gcd(r, 12) \neq 1$，但由 $5 \mid a_n$ 知 $5 \mid r$，也有 $r \in P$

反之，对形如 $i = 60k + r(r \in P)$ 的数，若 $\gcd(r, 12) = 1$，则 $i \in \{a_n\}$；若 $\gcd(r, 12) \neq 1$，则 $5 \mid r \Rightarrow 5 \mid i \Rightarrow i \in \{a_n\}$

综上所述，$\{a_n\}$ 中的项由且仅由形如 $60k + r(r \in P)$ 形式的数组成

因为 $2011 = 36 \times 55 + 31$，所以 $a_{2011} = 60 \times 55 + a_{31} = 60 \times 55 + 50 = 3350$

6 递推

例 24. 走 n 级台阶，每步只能跨 1 或 2 级台阶，求所有走法总数.

解： 当有 i 级台阶时，我们把最后一步跨一级台阶的走法的集合记为 A_i，把最后一步跨两级台阶的走法的集合记为 B_i，所有走法的集合记为 S_i. 设有 n 级台阶，若最后一步跨一级台阶，每一种走法都对应着走 $n-1$ 级台阶的一种走法；若最后一步跨两级台阶，每一种走法都对应着走 $n-2$ 级台阶的一种走法. 于是：

$$|S_i| = |A_i| + |B_i| = |S_{i-1}| + |S_{i-2}|$$

这恰是斐波那契数列的递推公式.

又 $|S_1| = 1, |S_2| = 2$，故 $|S_k| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

7 习题

习题 1. 设 n 为正整数. 把男女乒乓球选手各 $3n$ 人配成男双、女双、混双各 n 对，每名选手均不兼项. 则配对方式总数为多少？

习题 2. 用 4 种颜色给正方体的 8 个顶点染色，相邻点不同色. 求不同的染色方法总数.

习题 3. 若自然数 a 的各位数字之和为 7，则称 a 为“吉祥数”，将所有吉祥数从小到大排成一列 $a_1, a_2, \ldots$，若 $a_n = 2005$，求 a_{5n}.

习题 4. n 对夫妻排成一行，求没有任何一对夫妻相邻的排法总数.

习题 5. 给定集合 $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$，称双射 $\varphi : X \to X$ 为 X 上的置换. 若 $\varphi(i) = i$，称 i 为置换 φ 的不动点. 设 $X = \{1, 2, 3 \ldots, n\}$，将 X 上没有不动点的置换数记为 f_n，恰有 1 个不动点的置换数记为 g_n，求证：$|f_n - g_n| = 1$.

习题 6. 将与 105 互质的正整数从小到大排成数列 $\{a_n\}$，求 a_{1000}.

习题 7. 求 *Bernoulli* 错装信笺问题中 D_n 的递推公式.