高等数学(上)期中试题解答（20—21学年第一学期）20-11-7

一、（48分）1. $x^2+2,2x$；　2. $\frac{1}{12}$；　3. $a=1, b=-2$；　4. $-2e^2$；

5. $\sin 2(x-1)\cdot e^{\sin^2(1-x)}\,dx$；　6. -3；　7. $[0,+\infty)$；　8. 2；

9. 0；　10. $(-1)^n n!\,(1-\frac{1}{2^{n+1}})$；　11. 2；　12. $\frac{1}{4}$.

二、（20分）1. B;　2.C;　3.A;　4.D;　5.B.

三、1．解　当 $x\neq 0$ 时，$x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$（3分）

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$I=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}$（$x\neq 0$），　（5分）

当 $x=0$ 时，$I=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，

故 $I=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$　（6分）

2．解　$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}$　（2分）$=\pi\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{1}=-\frac{\pi}{2}$　（5分）

$I=\lim\limits_{x\to 0^+}y=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y}=e^{-\frac{\pi}{2}}$　（6分）

3．解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$　（2分）

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})=\frac{d}{dt}(\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t})\cdot/\frac{dx}{dt}$　（4分）

$$=\frac{-(\sin t+\cos t)^2-(\cos t-\sin t)^2}{(\sin t+\cos t)^2}\cdot\frac{1}{e^x(\sin t+\cos t)}=\frac{-2}{e^x(\sin t+\cos t)^3}$$ （6 分）

四、解　定义域为：$(-\infty,+\infty)$. $y'=\dfrac{1-3x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$. （2 分）

令 $y'=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{3}$；导数不存在的点为：$x=0$ 及 $x=1$. （3 分）

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	不存在	+	0	−	不存在	+
y	↗		↗	极大	↘	极小	↗

（6 分）

单调增加开区间：$(-\infty,\frac{1}{3}),(1,+\infty)$，单调减少开区间：$(\frac{1}{3},1)$

极大值 $f(\frac{1}{3})=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$，极小值 $f(1)=0$. （9 分）

五、证　令 $F(x)=f(x)-x$，要证 $F'(\xi)=0$. （2 分）

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0$.

下证：存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$. （3 分）

$F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续，$F(1)=-1<0$，$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$，

由零点定理，存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使 $F(\eta)=0$.即 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理条件，

故存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$. （5 分）