2011 转专业数学

1.证明：若对任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$有$|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$，则对每个$n\in N$，$\forall a,b\in(-\infty,+\infty),|f(a)-f(b)|\le\frac{1}{n}(a-b)^2$

2.设$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

3.求极限$\lim\limits_{x\to0^+}(\frac{\ln(x+1)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$

4.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0)=1,g(x)=\int_0^{\sin x}f(tx^2)dt$，求$g'(x)$并求$g'(0)$

5.设$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，对任意$x,y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=f(x)f(y)$，且$f'(1)=n>0$，求$f(x)$

6. 计算不定积分$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

7. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=1$，又$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是满足$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$的正数。证明：在$(0,1)$中存在互不相同的数$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$满足$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

8.证明：若$f(x)$在$[0,1]$上可微，$f(0)=0,0\le f'(x)\le1$，则$\left(\int_0^1f(x)dx\right)^2\ge\int_0^1f^3(x)dx$

9.证明：对任意正整数 n，有$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

参考答案

1. 取$\lim \Delta x=0, y=x+\Delta x$，可得$|f(x)-f(x+\Delta x)|=(\Delta x)^2$，$f(x)$连续；

$\dfrac{|f(x)-f(x+\Delta x)|}{|\Delta x|}=\Delta x$，进行分类讨论可知$f(x)$可导。注意到此题

$f'(x)=0 \Rightarrow f(x)\equiv C.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a}(1\text{-a})(1\text{+a})(1\text{+a}^2)\text{L}\ \ (1+a^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}})=\dfrac{1}{1-a}$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x+o(x)}}=e^{\frac{-1}{2}}$

4. $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{x^2\sin x} f(tx^2)d(tx^2)$

$$g'(x)=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x} f(tx^2)d(tx^2)+\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(x^2\cos x+2x\sin x)$$

$$g'(0)=\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2\sin x} f(tx^2)d(tx^2)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2\sin x)(x^2\cos x+2x\sin x)}{3x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2\sin x)(x^2\cos x+2x\sin x)}{3x^2}=f(0)\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\cos x+2x\sin x)}{3x^2}=1$$

5. 取$y=\dfrac{x+\Delta x}{x}$，$\lim\Delta x=0$，则有$f(x\cdot y)=f\left(x\cdot\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)\left[1-f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]$，由题条件易得$f(1)=1$，则

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\frac{f(1)-f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=f(x)\frac{f'(1)}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x}\Rightarrow(\ln(f(x)))'=n(\ln x)'\Rightarrow f(x)=x^n\ \ (f(1)=1.)$$

6. $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\frac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

7. 设$y_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$，由介值定理，$\exists x_k, y_k=f(x_k)$，令$x_0=0, x_n=1$

由中值定理，$\exists\beta_i, \dfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=f'(\beta_i), \therefore \dfrac{y_{i+1}-y_i}{f'(\beta_i)}=x_{i+1}-x_i$

令$i=0,1,\cdots n-1$并累加得证

8. **证明　方法1**　因为$0<f'(x)\leqslant 1$，$f(0)=0$，则$f(x)>f(0)=0$.

令$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x$，$t\in[0,1]$. 则$F(0)=0$，且

$$F'(t)=f(t)\left(2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-[f(t)]^2\right)\triangleq f(t)G(t)$$

其中$G(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-[f(t)]^2$，　则$G(0)=0$和$G'(t)=2f(t)[1-f'(t)]\geqslant 0$，

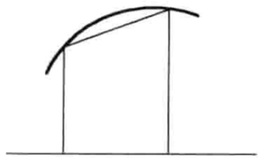
因此$G(t)\geqslant 0$，于是$F'(t)=f(t)G(t)\geqslant 0$，所以$F(t)\geqslant 0$，特别$F(1)\geqslant 0$. 所以原不等式成立.

9. **18. 证明**　对于正整数K及$K-1\leqslant x<K$，我们有$\sqrt{K}>\sqrt{x}$，所以$\sqrt{K}>\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\mathrm{d}x$，相加则得

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}n^{3/2}$.

因为$\sqrt{x}$为严格上凸函数，则对应于区间$[K-1, K]$上的曲边梯形面积大于对应弦的梯形面积（附图2.5），即

$$\frac{1}{2}(\sqrt{K-1}+\sqrt{K})<\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\mathrm{d}x$$



附图 2.5

所以

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}=\frac{1}{2}(\sqrt{0}+\sqrt{1})+\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$<\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sqrt{n}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

2012年转专业试题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$。

1.注意斯特林公式(*Stirling's approximation*)：

$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$,可得答案1。

2.利用夹挤准(考虑n^n的放缩)

3.对于α^β进行求解，利用取对数换成$e^{\beta\ln\alpha}$,此题研究分子的变化，可以

用*Stolz*定理求解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln(n-1)!}{n^2-(n-1)^2}=0$

2.证明：对任意$x,y\in R$有$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^2$则对每个

$n\in N,\forall a,b\in R$,有：$|f(a)-f(b)|\leqslant\frac{1}{n}|a-b|^2$。

取$\lim\Delta x=0,y=x+\Delta x$,可得$|f(x)-f(x+\Delta x)|=(\Delta x)^2$,$f(x)$连续;

$\frac{|f(x)-f(x+\Delta x)|}{|\Delta x|}=\Delta x$,进行分类讨论可知$f(x)$可导。注意到此题

$f'(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv C.$

3.设$a_n>0,b_n>0$,若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$

证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$存在。

(此题略微超纲，涉及级数相关的知识)

网页搜索：库默尔判别法。

---

4. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$。

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x+o(x)}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

5.$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，对于任意$x,y\in(0,+\infty)$

有：$f(xy)=f(x)f(y),f'(1)=n>0$,求$f(x)$。

取$y=\dfrac{x+\Delta x}{x}$,$\lim\Delta x=0$,则有$f(x\cdot y)=f\left(x\cdot\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)\left[1-f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]$,由题条件易得$f(1)=1$,则

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\frac{f(1)-f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=f(x)\frac{f'(1)}{x}$$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{n}{x}\Rightarrow(\ln(f(x)))'=n(\ln x)'\Rightarrow f(x)=x^n$ （$f(1)=1$.）

6.求最小正数a,使得：$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}>e(x>0)$。

取对数：$\alpha>\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$,令$x=\dfrac{1}{t}$,$f(t)=\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}$.

利用$f(t)$单调性得出$f(t)<f(0)=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}\right]=\dfrac{1}{2}$

7.计算不定积分$\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$。

分部换元就好了，不定积分没意思。

8.设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$,$f(1)=1$.又有$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$,且$\alpha_k>0$。这么：在$(0,1)$中存在互不相同的数$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$使得：

$$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\ldots+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}=1$$

$y_0=0,y_i=\displaystyle\sum_{k=1}^{i}\alpha_i$, $0=y_0<y_1<\ldots<y_n=1$.$t_0=0,t_n=1$在$[0,1]$

上对$f(x)$介值定理得到$f(t_1)=y_1$以及$[t_1,1]$上介值定理，……

最后得到$f(t_i)=y_i$,在任意一个区间上$[t_{i-1},t_i]$上有拉格朗日中值：

$\dfrac{y_i-y_{i-1}}{f'(\beta_i)}=t_i-t_i$求和得到答案。

2013 转专业数学

1.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

2.求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{cos\sqrt{x}}$

3.设$a_n>0,b_n>0$，若$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$存在

4.证明：若函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，存在数列$\{x_n\},x_n\in[a,b]$

$g(x_n)=f(x_{n+1})\ n=1,2\cdots$ ，则$f(x)=g(x)$在$[a,b]$上有解

5.设函数$y=y(x)$由方程$\begin{cases}x=\ln\cos t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$确定，求$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$

6.求最小正数α，使得$(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}>e\quad(x>0)$

7.设$f(x)$在$[0,1]$上连续在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,f(1)=1$，又$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是满足$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$的正数。证明：在$(0,1)$中存在互不相同的数$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$满足$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

参考答案

1． $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1})$

$=\sin^2\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1})$

$=1$

2. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{2}+o(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

3. **七、证明** （1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}，\text{即}\ a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

于是
$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N}$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. **33．证明** 反证法. 如果结论不成立，则连续函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒不为零. 于是 $F(x)$ 恒大于零或恒小于零. 不妨设恒有 $F(x)>0$，则它在 $[a,b]$ 上的最小值 $m>0$. 由

$$f(x_{n+1})=g(x_n)=g(x_n)-f(x_n)+g(x_{n-1})$$

继续递推得到

$$f(x_{n+1})=g(x_n)=[g(x_n)-f(x_n)]+[g(x_{n-1})-f(x_{n-1})]+\cdots+[g(x_2)-f(x_2)]+g(x_1)$$

因此

$$\begin{aligned}g(x_1)-f(x_{n+1})&=[f(x_n)-g(x_n)]+[f(x_{n-1})-g(x_{n-1})]+\cdots+[f(x_2)-g(x_2)]\\&=F(x_n)+F(x_{n-1})+\cdots+F(x_2)\geqslant(n-1)m\end{aligned}$$

可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，这与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界矛盾.

5. $\dfrac{dy}{dx}=-t\cos t,\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi$

6. 取对数：$\alpha > \dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x$, 令 $x = \dfrac{1}{t}$, $f(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}$.

利用 $f(t)$ 单调性得出 $f(t) < f(0) = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(1+t)} - \dfrac{1}{t}\right] = \dfrac{1}{2}$

7.设 $y_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ ，由介值定理，$\exists x_k, y_k = f(x_k)$ ，令 $x_0=0, x_n = 1$

由中值定理，$\exists \beta_i, \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(\beta_i), \therefore \dfrac{y_{i+1} - y_i}{f'(\beta_i)} = x_{i+1} - x_i$

令 $i = 0,1,\cdots n-1$ 并累加得证

2014 年转专业考试试卷

2019 年 8 月 25 日

1. 证明：若对 $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$，有 $|f(x) - f(y)| = |x - y|$，且 $f(0) = 0$，则 $f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in (-\infty, +\infty)$

2. 用三种方法计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})^n$$

3. 设 n 是正整数，$f(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$ 计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内有连续的一阶导数，且 $f'(0) = 0, f''(0)$ 存在，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(\ln(1+x))}{x^3}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有定义，对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x)f(y)$ 且 $f'(1) = n > 0$，求 $f(x)$

6. 计算不定积分

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

7 计算不定积分

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

8. 设 $\mu \in (0, \frac{1}{2})$，$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负，且 $f''(x) \leqslant 0, x \in [0, 1]$，证明：$f(t) \geqslant \mu f(s),\ \forall t \in [\mu, 1-\mu],\ \forall s \in [0, 1]$

解答：

1. 带入 $f(0)=0$ 可知 $|f(x)|=|x|$。注意到 f 为单射，这两个条件蕴含着 $f(x)=\pm x$

假设 $f(1)=1$，则 $|f(x)-f(1)|=|f(x)-1|$，现考虑 $x>0$。如果有一个 $f(x_0)<0$，则 $f(x_0)=-x_0$，则 $|f(x_0)-f(1)|=|-x_0-1|=|x_0-1|$。此方程只有唯一解 $x_0=0$，矛盾。因此 $f(x)>0,\ x>0$。此时由于单射，$f(x)<0,\ x<0$。综上即可知有 $f(x)=x$;

当 $f(1)=-1$，类似可证 $f(x)=-x$, 于是最终有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

5.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x(1+\dfrac{\Delta x}{x}))-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}\\
&= f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}\\
&= \frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}\\
&= \frac{f(x)}{x}f'(1)=n\frac{f(x)}{x}
\end{aligned}$$

解得 $f(x)=x^n(x>0)$

8. 令 $m=\dfrac{t-\mu s}{1-\mu}$，则易得（自己证去）$m\in(0,1)$。可知 f 连续，故：

$$f''(x)\leqslant 0\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in[0,1],\ \forall\lambda\in(0,1)\text{ 有:}f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

带入可知：

$$f(t)=f(\mu s+(1-\mu)m)\geqslant\mu f(s)+(1-\mu)f(m)\geqslant\mu f(s)$$

2015 转专业数学

1. 不要跟错题过不去

2. 用三种方法计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3. 设 n∈N^*，$f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$，计算$f(1)$、$f(-1)$

4. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续导函数$f'(x)$，对(a,b)内任意α，是否可找到$x_1,x_2\ (x_1<\alpha<x_2)$，使得$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\alpha)$成立。若成立证明，若不成立请举出反例。

5. 设$f(x)$在$x=0$的某领域内有连续的一阶导数,且$f'(0)=0$，$f''(0)$存在,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x)}{x^3}$

6. 计算不定积分$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$

7. 计算不定积分$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

8. 设$f_n(x)=\cos x+cos^2\mathrm{x}+\cdots+cos^n\mathrm{x}$，求证：

   (1)对任意自然数 n，方程$f_n(x)=1$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$内有唯一根；

   (2)设$x_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$是$f_n(x)=1$的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

参考答案

2.法一：泰勒展开

法二：夹挤准则$\frac{1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}$

法三：$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$作指数

3.$(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$，莱布尼兹公式

4.$x^3,\sin x$在 0 处均为反例

5. 由微分中值定理，存在$\ln(1+x)<t<x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(t)(x-\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(\frac{f'(t)-f'(0)}{t}\times\frac{t}{x})=\frac{1}{2}f''(0)$$

（$\lim_{x\to 0}\frac{t}{x}$由夹挤准则可得为 1）

6. $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})+C$

7. $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\frac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

8. (1) $f'_n(x)<0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x_n}{1-\cos x_n}=1,\lim_{n\to\infty}\cos x_n=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

2017 转专业数学

Note:本文为个人所写，若有错误请见谅，请勿随意传播，谢谢。

1.证明数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$……存在极限（不可用单调有界必有极限的结论来证），且求出该极限。

2.给定一个数列$\{x_n\}$(n=1,2,⋯)且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n-x_{n-1})}{n}=0$。

3.设 g(x)=$\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ f'(0), x=0\end{cases}$，$f(0)=0$，$f(x)$在 R 上存在二阶导，问 g(x)在 R 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由。

4.设$f(x):I\to R$是任一函数，$x_0\in I$，证明：$f(x)$在x_0处可导的充要条件是：存在一个函数$g(x):I\to R$，使：

(1) $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0), \forall x\in I$

(2) $\varphi(x)$在x_0处连续且$f'(x_0)=g(x_0)$

5.设$f(x)$在$\mathrm{x}=0$的某领域内有连续的一阶导数，且$\mathrm{f}'(0)=0$，$\mathrm{f}''(0)$存在，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

6.求最小正数α，使得：$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}\ \ (x>0)$

参考答案

1. 记方程$x^2+x-1=0$的根为$x_0(x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$$

$$\left|x_{n+1}-x_0\right|=\left|\frac{1}{1+x_n}-x_0\right|=\left|\frac{{x_0}^2+x_0}{1+x_n}-x_0\right|=\left|\frac{x_0}{1+x_n}\right|\left|x_n-x_0\right|$$

$$\text{Q}\, x_n>0,\therefore\left|\frac{x_0}{1+x_n}\right|<x_0$$

$$\therefore\left|x_n-x_0\right|<{x_0}^{n-1}\left|x_1-x_0\right|\to 0$$

2. 任给$\varepsilon>0$，则存在自然数N，使$n>N$时，有$|x_n-x_{n-2}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}=&[(x_n-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})]+[(x_{n-2}-x_{n-4})-(x_{n-3}-x_{n-5})]+\cdots\\&+[(x_{N+1}-x_{N-1})-(x_N-x_{N-1})]\end{aligned}$$

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant(n-N)\frac{\varepsilon}{2}+|x_N-x_{N-1}|$$

令$n\to\infty$，则有$\dfrac{|x_n-x_{n-1}|}{n}\to 0$，从而得证.

（本题也可用$stolz$公式解）

3. 连续，证明如下

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},x\neq 0$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f'(0)x+\dfrac{f''(0)x^2}{2}+o(x^2)}{x}-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(f'(0)+f''(0)x+o(x))-(f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)x^2}{2}+o(x)^2)}{x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$\therefore g(x)$ 在 0 处也连续， $g(x)$ 连续

4. **证** 必要性.已知

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\text{ 存在}$$

表明函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{当 } x\neq x_0\text{时},\\ A, & \text{当 } x=x_0\text{时}\end{cases}$

在 $x=x_0$ 处连续,(1)式成立,$f'(x_0)=g(x_0)$.

充分性.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{式(1)}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}g(x)\overset{g\text{在}x_0\text{连续}}{=\!=\!=\!=\!=}g(x_0),$$

故 $f'(x_0)$存在.

5. 由微分中值定理，存在 $\ln(1+x)<t<x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(t)(x-\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f'(t)-f'(0)}{t}\times\frac{t}{x}\right)=\frac{1}{2}f''(0)$$

（$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t}{x}$ 由夹挤准则可得为 1）

6. 取对数：$\alpha>\dfrac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$, 令$x=\dfrac{1}{t}$, $f(t)=\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}$.

利用$f(t)$单调性得出$f(t)<f(0)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}\right]=\dfrac{1}{2}$

2018 转专业数学

Note:本文为个人所写，若有错误请见谅，请勿随意传播，谢谢。

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+b^n+2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}}$ $(b>0)$

2. 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{cos\sqrt{x}}$

3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}$

4. 已知 f(x)、g(x)为（-∞, +∞）上的非常值连续可微函数，

$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),\ g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

且 $f'(0)=0$。求证：$f(x)^2+g(x)^2=1$。

5. 设 f(x)在$[a,b]$上可微，试证：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<|h|<\delta,\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$，对一切 $x\in[a,b]$成立。

6. 设$f_n(x)=\cos x+cos^2x+\cdots+cos^nx$，求证：

（1）对任意自然数 n，方程$f_n(x)=1$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$内有唯一根；

（2）设$x_n\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$是$f_n(x)=1$的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

参考答案

1. 当 0<b<1,原式=1

当 b=1,原式=1

当 1<b<2,原式=$b\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{-n}+\left(\frac{b}{2}\right)^{n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=b$

当 b=2,原式=2

当 b>2,原式=$\frac{b^{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^{-n}b^{-2n}+2^{-n}b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{b^{2}}{2}$

($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n}+b^{n}+c^{n}}=\max\{a,b,c\}$)

2. 原式=$\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

3. 对于 $n\geqslant1$，有 $\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+2}=\arctan\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}=\arctan\frac{2}{(n+1)^{2}}$

$$\sum_{k=2}^{n}\arctan\frac{2}{k^{2}}=\sum_{k=1}^{n-1}\arctan\frac{2}{(k+1)^{2}}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\arctan\frac{1}{k}-\arctan\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\arctan1+\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$$

令 $n\to\infty$ 便得 $$\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^{2}}=\arctan1+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{2}$$

所以 $$S=\frac{\pi}{4}+\arctan2+\arctan\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$$

4. $f(x)=f(x)f(0)-g(x)g(0)\quad g(x)=f(x)g(0)+g(x)f(0)$

$f(x)+g(x)=f(x)(f(0)+g(0))+g(x)(f(0)-g(0))$

$f(x)(1-f(0)-g(0))=g(x)(f(0)-g(0)-1)$

因为 f(x)、g(x)为非常值函数，所以$f(0)+g(0)=1 \quad f(0)-g(0)=1$

$f(0)=1 \quad g(0)=0$

$$f'(x) \begin{aligned} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x)(f(t)-f(0))}{t} - \frac{g(x)(g(t)-g(0))}{t}\right) \\ &= -g'(0)g(x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = g'(0)f(x)$$

$\therefore (f^2(x)+g^2(x))'=0$, $f^2(x)+g^2(x)=C$, $f^2(0)+g^2(0)=1$

$\therefore f^2(x)+g^2(x)=1$

5. **证** 1° 必要性. 因 $f'(x)$在$[a,b]$上连续,因此一致连续,即 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$,当 $x', x''\in[a,b]$ $|x'-x''|<\delta$ 时,便有 $|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 由此 $0<|h|<\delta$ 时,任何 $x\in[a,b]$,有

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right| \\ &= |f'(\xi)-f'(x)| \ (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+h \text{ 之间}) \\ &< \varepsilon. \quad (\text{因为} |\xi-x|<h<\delta) \end{aligned}$$

2° 充分性. 已知 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|h|<\delta$ 时, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$, $(\forall x\in[a,b])$. 因此, $\forall x_0\in[a,b]$, $0<|h|<\delta$ 时,只要 $x_0+h\in[a,b]$,便有

$$\begin{aligned} &|f'(x_0+h)-f'(x_0)| \\ &= \left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right| \\ &\leqslant \left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h-h)-f(x_0+h)}{-h}\right| \\ &\quad + \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$在 x_0处连续. 由 x_0的任意性,知 $f'(x)$在$[a,b]$上连续.

6.(1) $f'_n(x)<0$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos x_n}{1-\cos x_n}=1, \lim_{n\to\infty}\cos x_n=\frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

2019 转专业数学

1.设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像关于 $x=2019, x=2020$ 均对称，请判断函数 $y=f(x)$ 是什么性质的函数，并说明你的判断

2.设 $a_n>0, b_n>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在

3.计算不定积分（1）$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$ （2）$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

4.（1）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$。证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)=0$

证明：$\exists\alpha\in(a,b)$ 使得 $f'(\alpha)+\alpha f(\alpha)=0$

5.设 n∈N^*，$f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$，计算 $f(1)$、$f(-1)$

6.$f(x)$ 有连续导数且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$，问 $f(0)$ 为何值时，$f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，并说明它是极大值还是极小值

7.设 $f(x):I\to R$ 是任一函数，$x_0\in I$，证明：$f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数 $g(x):I\to R$，使：

(1) $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0), \forall x\in I$

(2) $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续且 $f'(x_0)=g(x_0)$

参考答案

1.周期函数，T=2，偶函数，对称轴为$x=k$（我觉得这个题说出周期就可以了）

2. **七、证明** （1）设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在$N\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N$时，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\ \text{即}\ a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$$

于是

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N}$$

因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有上界，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

3. $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})+C$

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\frac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$$
$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

4.(1) 当同时取最大值时，有$f(x_0)=g(x_0)$．不同时取最大值，设$f(x_1),g(x_2)$最大，由介值定理$(f(x_1)-g(x_1))(f(x_2)-g(x_2))<0$，$\exists x_3,f(x_3)=g(x_3)$。三个零点用三次罗尔定理可得.

(2) $h(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)$，对用罗尔定理。学过微分方程一眼就够了。

5. 解：因$(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$，令$u(x)=(x-1)^n,v(x)=(x+1)^n$，则

$u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(n-1)}(1)=0,u^{(n)}(1)=n!,v(1)=2^n$；

$v(-1)=v'(-1)=\cdots=v^{(n-1)}(-1)=0,v^{(n)}(-1)=n!,u(-1)=(-1)^n2^n$，

所以，
$$f(1)=\frac{1}{2^nn!}[v^{(n)}(1)u(1)+nv^{(n-1)}(1)u'(1)+\cdots+v(1)u^{(n)}(1)]$$
$$=\frac{1}{2^nn!}\cdot2^n\cdot n!=1\text{；}$$
$$f(-1)=\frac{1}{2^nn!}[u^{(n)}(-1)v(-1)+nu^{(n-1)}(-1)v'(-1)+\cdots+u(-1)v^{(n)}(-1)]$$
$$=\frac{1}{2^nn!}\cdot(-1)^n2^n\cdot n!=(-1)^n.$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x}f(x))'}{1-e^{-x}}=1$

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}f(x)}{\frac{1}{2}x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$

$f(0)=0$,由极限保号性，$(e^{x}f(x))'>0,x>0;(e^{x}f(x))'<0,x<0$

$e^{x}f(x)>f(0)=0$，故是极小值

7. **证** 必要性.已知

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A\ 存在$$

表明函数 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & 当\ x\neq x_0时,\\ A, & 当\ x=x_0时\end{cases}$

在 $x=x_0$ 处连续,(1)式成立,$f'(x_0)=g(x_0)$.

充分性.

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{式(1)}\lim_{x\to x_0}g(x)\xlongequal{g在x_0连续}g(x_0),$$

故 $f'(x_0)$存在.

2020 转专业数学

Note:本文为个人所写，若有错误请见谅，请勿随意传播，谢谢。

1.设 $f(x)$ 是 R 上的有界实函数,且 $f\left(x+\frac{1}{11}\right)+f\left(x+\frac{1}{12}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{23}{132}\right)$

$(\forall x\in R)$，求证：$f(x)$ 是周期函数。

2.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

4.求在 R 上满足方程 $f(2020x)+f(2019x)=2022x+2021$ 的连续解 $f(x)$

5.讨论 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 的连续性与可导性（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

6.计算 $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}$ （n 是任意正整数）

（注：原题没有 $x=0$,但那样无法正常求解，怀疑打印错误，此处加上，后会附上不考虑此条件的解法）

7.设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$,求证:在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η,使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

8.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，证明: $f''(0)=4$

参考答案

1.设$F(x)=f\left(x+\frac{1}{11}\right)-f(x)$,则$F\left(x+\frac{1}{12}\right)=F(x)$,故$F(x)$以$\frac{1}{12}$为周期,也以1为周期,$\therefore F(x+1)=F(x)$,即$f\left(x+\frac{1}{11}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f(x+1)$

$f(x+1)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f\left(x+\frac{1}{11}\right)$,$f(x+1)-f(x)$以$\frac{1}{11}$为周期，也以1为周期,可得

$$f(x+n)-f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x+i+1)-f(x+i)\right]=(n-1)\left[f(x+1)-f(x)\right]$$

$f(x+1)-f(x)=\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n-1}$,令$n\to\infty$,$\because f(x)$有界,$f(x+1)-f(x)=0$

$\therefore f(x)$以1为周期

2.$S_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_i=na_n-\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})-a_1$（Abel 变换）

$a_n=\dfrac{S_{n-1}}{n}+\dfrac{\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})+a_1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=A$,由*stolz*定理,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=2}^{n}i(a_i-a_{i-1})+a_1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

3.原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{4}{3}$

4.考虑$f(\alpha x)+f(\beta x)=ax+b$

$\alpha>\beta$,则由 $f(x)+f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)=ax\frac{1}{\alpha}+b$ 可知

$$\begin{aligned}f(x)&=ax\frac{1}{\alpha}+b-f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)\\&=ax\frac{1}{\alpha}+b-\left[ax\frac{\beta}{\alpha^2}+b-f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right]\\&=ax\frac{1}{\alpha}-ax\frac{\beta}{\alpha^2}+f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)=\cdots\\&=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\cdots\pm\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}\right)+b-f\left(\frac{\beta^{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}x\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,我们有

$$f(x)=\frac{ax}{\alpha}\frac{1}{1+\beta/\alpha}+\frac{b}{2}=\frac{a}{\alpha+\beta}x+b.$$

5.用定义，在 R 上连续，在 $x=n$ 处不可导，其余地方可导

6.方法 1:由泰勒公式 $\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{2n}}x^{2n}$

再由泰勒展开的唯一性，故当 n 为奇数，$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=0$

当 n 为偶数，$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{a^{n+1}}n!$

方法 2:$\left(a^2+x^2\right)y=1$,由莱布尼兹:$\left(x^2+a^2\right)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$

$x=0$,$a^2y^{(n)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$,由递推可得答案

当没有 $x=0$ 时，此时只能引入复数做

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)$$

$$原式=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\frac{(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

考虑：$x+ai=\sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{ai}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta},\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow(x\pm ai)^{n+1}=r^{n+1}e^{\pm i(n+1)\theta}\left(r=\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\frac{(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}}{2ai}=\frac{r^{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right]}{2ai}=\frac{r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{a}\frac{\sin(n+1)\theta}{\left[\sqrt{a^2+x^2}\right]^{n+1}}$$

7. **分析** （1）只需将[0,1]分成两个区间，使 $f(x)$ 在两个区间各用一次微分中值定理，设分点为 $x_0\in(0,1)$，由 $f(x_0)-f(0)=f'(\xi)(x_0-0)$，$f(1)-f(x_0)=f'(\eta)(1-x_0)$ $(0<\xi<x_0<\eta<1)$，得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)}{x_0}$，$f'(\eta)=\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}$，则 $f'(\xi)f'(\eta)=1\Leftrightarrow\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=1$．$\Leftrightarrow x_0$ 是方程 $f(x)[1-f(x)]=x(1-x)$ 的根. 所以取 x_0 是方程 $f(x)=1-x$ 的根即可.

证明 （1）令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$在[0, 1]上连续，且 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$，由介值定理知，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=1-x_0$.

在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上对 $f(x)$分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\xi\in(0,x_0)$，$\eta\in(x_0,1)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}$，$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}$. 于是

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{1-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}=1.$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=3,\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)=3$,即$\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=2$

由泰勒公式$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2),\therefore f(0)=f'(0)=0$

$f''(0)=4$

华中科技大学 2021-2022 转专业数学回忆版

1、填空题

（1）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\arctan(\dfrac{1}{k^2+k+1})=$ ________.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}[\arctan(k+1)-\arctan k]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 0]$

$=\dfrac{\pi}{2}$

（2）已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{\tan x})}{2^x-1}=8$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________.

解：上式易化为：$\dfrac{f(x)}{\ln 2\cdot x^2}=8$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=8\ln 2.$

（3）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}=$ ________.

解：$\sqrt[n]{n}=t,(t\to 1),LHS=\dfrac{t^4+2t^2-3}{t^2-3t+2}=\dfrac{(t^2-1)(t^2+3)}{(t-1)(t-2)}=\dfrac{(t+1)(t^2+3)}{t-2}=-8(t\to 1)$

（4）设$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且满足方程 $g(x)+g(y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$，$g(x)=$ ________.

解：由$g(x)+g(y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$, 令$x=y=0$, 可得$g(0)=0$, 再令$y=0$,可得 $g(x)=g(|x|)$,可得偶函数.

下面考虑$x,y>0$的情况：

$g(\sqrt{x^2})+g(\sqrt{y^2})=g(\sqrt{x^2+y^2})$, 令$h(x)=g(\sqrt{x})\ (x>0)$

$h(x^2)+h(y^2)=h(x^2+y^2)$, 令$x'=x^2,y'=y^2$

则$h(x')+h(y')=h(x'+y')\to h(x')=kx'$, 即 $h(x)=kx$.

$g(\sqrt{x})=kx\to g(x)=kx^2(x>0)$.

由偶函数可知, $g(x)=kx^2(x\in\mathbb{R})$.其中$k=g(1)$.

（5）求 $x=a\cos t+b\sin t$，$y=a\sin t-b\cos t$，则$\dfrac{d^mx}{dt^m}\cdot\dfrac{d^ny}{dt^n}-\dfrac{d^nx}{dt^n}\cdot\dfrac{d^my}{dt^m}=$ ________.

解：令$x=\sqrt{a^2+b^2}(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\alpha)$,

同理令$y=\sqrt{a^2+b^2}(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-\alpha)$.

用$Leibniz$公式可得答案：$(a^2+b^2)\sin\dfrac{n-m}{2}\pi.$

2、设$\{\theta_n\}\neq 0$，且满足$\theta_n^{\ 2}-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1(n=1,2,3\cdots)$，证明存在一个实数$\lambda$，使得对所有$n\geq 1$，有$\theta_{n+1}=\lambda\theta_n-\theta_{n-1.}$

证明：由题$\theta_{n+1}^{\ 2}-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=1$，$\theta_n^{\ 2}-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1$，

作差得：$\theta_{n+1}^{\ 2}+\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}-\theta_n^{\ 2}-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=0\to\theta_{n+1}(\theta_{n-1}+\theta_{n+1})=\theta_n(\theta_n+\theta_{n+2})$

$\to\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n+\theta_{n+2}}=\dfrac{\theta_n}{\theta_{n-1}+\theta_{n+1}}=\lambda=\dfrac{\theta_1}{\theta_0+\theta_2}.$

3、设$f(x)$定义在$x=0$的某个邻域上，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}=0$, 证明$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0.$

证明：已知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x|<\delta$时，有$\left|\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.亦即

$-\dfrac{\varepsilon}{3}|x|<f(x)-f(\dfrac{x}{2})<\dfrac{\varepsilon}{3}|x|.$

将x替换为$\dfrac{x}{2^k}$,得

$-\dfrac{\varepsilon}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}|x|<f(\dfrac{x}{2^k})-f(\dfrac{x}{2^{k+1}})<\dfrac{\varepsilon}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}|x|(k=0,1,2,\cdots,n).$

相加（注意到$\sum\limits_{k=0}^{n}[f(\dfrac{x}{2^k})-f(\dfrac{x}{2^{k+1}})]=f(x)-f(\dfrac{x}{2^{n+1}})$）得

$-\dfrac{\varepsilon}{3}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}|x|<f(\dfrac{x}{2^k})-f(\dfrac{x}{2^{n+1}})<\dfrac{\varepsilon}{3}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}|x|.$

令$n\to\infty$,取极限得 $-\dfrac{2\varepsilon}{3}|x|\leq f(x)\leq\dfrac{2\varepsilon}{3}|x|$(因$\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}=2$)，故$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$

4、已知函数$f(x)$在$(-1,1)$内有二阶导数，且$f(0)=f'(0)=0$,$|f''(x)|\leq|f(x)|+|f'(x)|$，证明：存在$\delta>0$，使得在$(-\delta,\delta)$内$f(x)\equiv 0$.

法一：证明：考察区间$[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$上的函数$|f(x)|+|f'(x)|$，并假定它在$x_0\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$处取到最大值$M$.

$f(x_0)=f''(\xi_0)\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}$，$f'(x_0)=f''(\eta_0)x_0$，其中$\xi_0$，$\eta_0$位于$x_0$和0之间. 从而有：

$M=|f(x_0)|+|f'(x_0)|=|f''(\xi_0)|\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}+|f''(\eta_0)x_0|$

$\leq\dfrac{|f''(\xi_0)|+|f''(\eta_0)|}{4}$

$\leq\dfrac{|f(\xi_0)|+|f'(\xi_0)|+|f(\eta_0)|+|f'(\eta_0)|}{4}$

$\leq\dfrac{M}{2}$

故$M=0$，得证.

法二：取$\delta=\frac{1}{2}$，$\because f(x), f'(x)\in C\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，由闭区间连续函数的有界性可知：$\exists M_1, M_2>0$，

$s.t.\ |f(x)|<M_1, |f'(x)|<M_2, \therefore |f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|<M_1+M_2$，即$|f''(x)|$有上界.
由确界原理可知，$|f''(x)|$有上确界，记为S（$S\ge 0$）.

由上确界的定义可知：$\exists x_1\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right], s.t.\ |f''(x_1)|>S-\varepsilon, (\forall\varepsilon>0)$.

下面用反证法说明$S>0$不成立：若$S>0$，取$\varepsilon=\frac{1}{8}S>0$，则$|f''(x_1)|>\frac{7}{8}S$，

$\because f(x_1)\underline{\underline{Taylor}}f(0)+f'(0)x_1+\frac{1}{2}f''(\xi)x_1^2$，$\xi$介于0，$x_1$之间，

$f'(x_1)\underline{\underline{Lagrange}}f'(0)+x_1f''(\eta)$，$\eta$介于0，$x_1$之间，

故$\frac{7}{8}S<|f''(x_1)|\le|f(x_1)|+|f'(x_1)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)|x_1^2+|x_1||f''(\eta)|\le\frac{5}{8}S\Rightarrow S<0$，与假设相悖，不可能，舍去.

$\because S\ge 0, \therefore S=0$即$|f''(x)|=0, \therefore f''(x)=0, \therefore f'(x)\equiv f'(0)=0\Rightarrow f(x)\equiv f(0)=0, x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

错解：考虑区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，在该区间上有$|f''(x)|\le|f(x)|+|f'(x)|, x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

则$|f'(x)|=|\int_0^x f''(t)dt|\le\int_0^x|f''(t)|dt\le\int_0^x(|f(t)|+|f'(t)|)dt$

又因为$|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\le\int_0^x|f'(t)|dt, \int_0^x|f(t)|dt+\int_0^x|f'(t)|dt=|f(\theta)|x+\int_0^x|f'(t)|dt$（积分中值定理）

$=x\int_0^\theta|f'(t)|dt+\int_0^x|f'(t)|dt\le x\int_0^x|f'(t)|dt+\int_0^x|f'(t)|dt=(x+1)\int_0^x|f'(t)|dt$

记$f'(x)$在$(0, x)$上的最大值点为ε，$|f'(\varepsilon)|\le(\varepsilon+1)\int_0^\varepsilon|f'(t)|dt\le(\varepsilon+1)\varepsilon|f'(\varepsilon)|\le\frac{3}{4}|f'(\varepsilon)|$

$|f'(\varepsilon)|=0, |f'(x)|=0, (x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)), f(x)=0$，同理可将此情况推广 $(-1,1)$上.

错误原因在于使用牛顿—莱布尼茨公式时要求$f''(t)$在$t\in(0, x)$上连续，此处由已知条件无法得出.

5、设可微函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上严格单调减少，如果当$x\in(0,+\infty)$时$0<|f(x)|<|f'(x)|$成立，

证明：当$x\in(0,1)$时，必有$x\cdot f(x)>\frac{1}{x}f(\frac{1}{x})$.

首先我们给出$f(x)<0$的证明，（由介值定理，$f(x)$在$(0,+\infty)$上不变号）

$g(x)\triangleq xf(x)-\frac{1}{x}f(\frac{1}{x}), g'(x)=xf'(x)+f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^3}f'(\frac{1}{x})<0$

$g(x)>g(1)=0$，原命题成立。

下面给出$f(x)>0$的证明：

$\Leftrightarrow$ 证明：$x\in(0,1), \frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}<x^2$ 或 $\ln\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}<2\ln x$.

因$f(x)$严格递减，$f'(x)<0$，有$f'(x)=-|f'(x)|$，

$$\ln\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}=\ln f(\frac{1}{x})-\ln f(x)\xlongequal{Lagrange定理}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(\frac{1}{x}-x).$$

注意到$0<f(x)<|f'(x)|=-f'(x),\frac{f'(x)}{f(x)}<-1,\frac{1}{x}-x>0(0<x<1).$

接下来只需证：$x-\frac{1}{x}<2\ln x(0<x<1)$.【求导，显然】

故$\ln\frac{f(\frac{1}{x})}{f(x)}<x-\frac{1}{x}<2\ln x(0<x<1).$

错解：由题可知，$f'(x)<0,0<f(x)<-f'(x)$，故$\frac{-f'(x)}{f(x)}>1$，所以

$$\ln\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})}=-\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}dt>\int_x^{\frac{1}{x}}dt=\frac{1}{x}-x,x\in(0,1)$$

故$\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})}>e^{\frac{1}{x}-x}$，又$e^{\frac{1}{x}-x}>\frac{1}{x^2}$

可得$x\cdot f(x)>\frac{1}{x}f(\frac{1}{x}),x\in(0,1).$

错误原因在于使用牛顿—莱布尼茨公式时要求$\frac{f'(t)}{f(t)}$在$t\in\left(x,\frac{1}{x}\right)$上连续，此处由已知条件无法得出.