自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

华中科技大学 2023-2024 学年　第 一 学期

微积分 A　试卷（模拟卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩						
题 号	一	二	三	四	五	小 计
得 分						

得分

一、**单项选择题** (共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$=(　　)

(A) 2　(B) 3　(C) 6　(D) 36

2. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，则下列说法正确的是（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n = a \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{a_n} - e^{b_n}) = 0$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sin a_n - \sin b_n) = 0$

3. 若 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件为（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

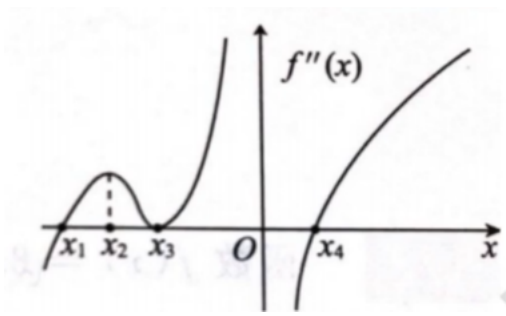
4. 设 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，其二阶导数如图所示，则 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4



5. 设 $f(x)$ 可积，则下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = A$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$

得分

二、**填空题** (共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分.)

6. 利用定积分定义求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2023^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2023^{\frac{i}{n}} \sin 2023^{\frac{2i+1}{2n}} =$ ________.

7. $a =$ ________ $b =$ ________ 时, $f(x) = \ln(1-ax) + \dfrac{x}{1+bx}$ 在 $x \to 0$ 关于 x 的无穷小的阶数最高.

8. 设函数 $f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1) =$ ________

9. 心脏线 $r = 1 + \cos\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 的全长为 ________

10. 设函数列 $f_n(x) = \int_0^x \sin^n t dt, n = 1, 2, \ldots,$ 则 $\sum\limits_{k=1}^{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_k(x) \cos x dx =$ ________

得分

三、**计算题** (共 5 小题，每小题 7 分，共 35 分)

11. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} dx$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

12. 求函数 $y=(x-1)e^{\arctan x+\frac{\pi}{2}}$ 的渐近线.

13. 设 $y=y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=1+te^{y} \end{cases}$ 确定的隐函数，求 y 关于 x 在 $(0,1)$ 这一点的导数值 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

14. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} dx$

15. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $f(0)=0, f'(0)=0, f''(0)>0$. 在曲线 $y=f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))(x \neq 0)$ 作曲线的切线, 此切线在 x 轴上的截距记作 μ, 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(\mu)}{\mu f(x)}$

得分

四、综合应用题 (共 2 小题，每小题 7 分，共 14 分)

16、$f(x)=\begin{cases} x^a\sin\left(\dfrac{1}{x^3}\right), & x>0, a\in\mathbf{N}_+ \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$,

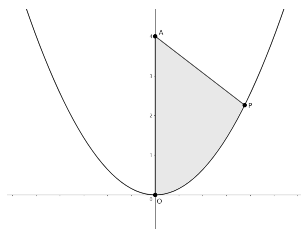
(1) $f(x)$ 处处可导, 求 a 的最小值;

(2) $f(x)$ 连续可导且 $f'(x)$ 处处连续, 求 a 的最小值.

17. 给定曲线 $L: y=4x^2, x\geqslant 0$, 点 $O(0,0), A(0,4)$. 设质点 P 在 $t=0$ 时刻从 O 点开始沿着曲线 L 做变速运动, t 时刻的坐标为 $(x(t),y(t))$, D 表示直线 OA 、直线 AP 及曲线 L 所围图形, $S(t)$ 表示 t 时刻 D 的面积。

(1) 当 P 点运动到 $(1,4)$ 时，求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得立体的体积

(2) 若 P 经过点 $(2,16)$ 时沿 x 轴正方向的速度 $x'(t)$ 为 5, 求该时刻 S 关于时间 t 的变化率 $\left.\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{x=2}$



得分

五、综合解答题 (共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

18. 证明：对每个正整数 n，方程 $x^{n+2}-2x^n-1=0$ 只有唯一正根.

19. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导，且存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)\neq 0$.

(1) 若 $f'(\xi)=0$，试证明：在区间 (a,b) 中可以找出两个不同的点 x_1 和 x_2 满足

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$$

(2) 若 $f'(\xi)\neq 0$，第一问的结论是否还正确，证明你的答案.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上可积，且满足

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}$$

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x dx$ 的最大值和最小值.