

2023 年启明考试综合试题回忆版

转专业交流群整理

June 2024

1 优化与建模

一、封闭曲线 A 中有一条长为 1 的弦，弦上一点 P 将其分为两段，长度分别为 $x, 1-x$ 。该弦在曲线上转过一周， P 随弦同时转过，形成一条封闭曲线 B 。曲线 A 围成的面积与曲线 B 围成的面积之差为 $S(x)$ 。由 Pappus-Guldin 原理 (?) 可知， $S(x)$ 与曲线 A, B 形状无关，仅与 P 点位置 (即 x 大小) 有关。求 $S(x)$ 取最大值为多少 (10)，以及此时的 x 取值 (10)

二、一商店老板的称量天平损坏，其左臂比右臂长了 10% 20%，一客人前来购买 2kg 的物品，老板以左物右码和右物左码分别称量了 1kg 物品。最终是老板还是客人的利益损失？(10) 损失比的范围是什么？(10)

2 信息熵

三、信息熵 (information entropy) 是信息论的基本概念。描述信息源各可能事件发生的不确定性。20 世纪 40 年代，香农 (C. E. Shannon) 借鉴了热力学的概念，把信息中排除了冗余后的平均信息量称为“信息熵”，并给出了计算信息熵的数学表达式。信息熵的提出解决了对信息的量化度量问题。(摘自百度百科) 给出信息熵定义式

$$H(x) = \sum_{i=1}^n -p(x_i) \log_a p(x_i)$$

$n = 2$ 时，我们可以将上式改写为

$$H(p, q) = -p \log_a p - q \log_a q$$

容易看出，当 $p = q = 0.5$ 时，上式取极值，解决下面的问题

1. 比特 (BIT, Binary digit), 计算机专业术语，是信息量单位，是由英文 BIT 音译而来。同时也是二进制数字中的位，信息量的度量单位，为信息量的最小单位。在需要作出不同选择的情况下把备选的刺激数量减少半所必需的信息。(摘自百度百科) 假如抛硬

币时，正面与反面朝上的概率都是 $\frac{1}{2}$ ，根据公式可算出信息量为 1bit，那么此时的底数 a 为多少？求： a 取什么值最好，并给出合理解释

- 有人提出，根据统计知识对于相互独立的两个变量 X 和 Y 应有 $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$ 设想 X 和 Y 均服从参数为 p 的两点分布，由高中知识我们知道， $Z = X + Y$ 应服从参数为 2 和 p 的两点分布，求证 $H(Z) = 2H(X)$ 是否正确
- 根据琴生不等式求证 $H(X)$ 有最大值

提示： $f(x)$ 为凸函数时，

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n)$$

，其中 $\sum_{k=1}^n a_k = 1$

- 现有 2023 个小球 (标号为 $\{1, 2, \dots, 2023\}$) 和一个足够大的称量天平，有一个劣质小球较轻了一些。试求出至少多少次称量才能找出该球

3 产量分配

四、某公司拟使用 t 万元采购原料，原料的定价分别为 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ，采购原料的总量为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 。生产产品的总量为 $\min \{q_1x_1, q_2x_2, q_3x_3, \dots, q_nx_n\}$ 。以尽量扩大生产为前提，该公司应以什么策略进行购物 (10)。若预算翻倍，哪一种原料增加购买的数量最多 (10)。