2021-2 期中试题

一. 基本计算题(每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求微分方程 $y''+9y=x\cos 3x$ 对应齐次方程的通解，并写出非齐次特解的待定特解形式.

2. 设二阶线性微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=x$， $y_2=x+2e^x$，

$y_3=x+(2+3x)e^x$，求其通解.

3. 已知两直线 $L_1:\begin{cases} x-3y+z=0, \\ 2x-4y+z=-1 \end{cases}$ 和 $L_2: x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{4}$，求 L_1 与 L_2 之间的距离 d.

4. 设由方程 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$， F 有连续偏导且

$F_2'-F_3'\neq 0$，求 $\mathrm{d}z$.

5. 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 在点 $P(1,1,\sqrt{2})$ 处的法平面方程.

6. 求椭圆曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 上距离原点最近的点.

7. 计算 $I=\iint\limits_D (x^2y^2+x\sin(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 $|x|+|y|\leq 1$.

8. 设平面区域 D 由直线 $y=x,$ 圆弧 $y=1+\sqrt{1-x^2}$ 及 y 轴所围成，计算 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$.

9. 求二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$

10. 求 $I=\iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

二. 综合题(每小题 8 分, 共 40 分)

11. 设 z 具有二阶连续偏导数，变换 $\begin{cases} u=x-2\sqrt{y} \\ v=x+2\sqrt{y} \end{cases}$ 把方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 化为以

u,v 为自变量的方程，求新方程形式.

12. 讨论二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处

（1） 连续性；（2）偏导数是否存在；（3）是否可微.

13. 求常数 a,b,c 的值，使函数 $f(x,y,z)=axy^2+byz+cx^3z^2$ 在点 $M(1,2,-1)$ 处沿 x 轴正向的方向导数取得最大值 64.

14. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的区域.

15. 曲面 $x^2+y^2+z=4$，将球体 $x^2+y^2+z^2\le 4z$ 分为两部分，求这两部分的体积比.