华中科技大学 2023-2024 学年 第 一 学期
微积分 B 答案 试卷（模拟卷）

院 (系) ________ 班级 ________ 姓名 ________ 学号 ________

试卷卷面成绩								课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	小计			
得分										

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

一、**单项选择题** (共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+2023}=$ (　　)

(A) $+\infty$　　(B) 0　　(C) e　　(D) $\dfrac{1}{e}$

答案：D

依题意, 计算

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2023}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2023}}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{(n+2023)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\
&\because \text{ 当}n\to\infty\text{ 时, 有}\\
&\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim-\frac{1}{n}\\
&\therefore\lim_{n\to\infty}e^{(n+2023)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{n+2023}{n}}\\
&=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1+\frac{2023}{n}}{1}}\\
&=e^{-\frac{1+0}{1}}\\
&=e^{-1}
\end{aligned}
$$

2. 下列函数中:

(1) $x\sin\dfrac{1}{x}$　(2) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$　(3) $\dfrac{\sin x}{x}$　(4) $x\sin x$

在 $(0,+\infty)$ 上有界的有几个（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

答案：B

解：(1): 在 $x\to+\infty$ 时无界

(2): 在 $x\to 0$ 时无界

(3): 有界 (4): 在 $x\to+\infty$ 时无界

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ (　　)

(A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

答案：D

解：解法 1：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$, 由极限的局部保号性可知, 存在 $x=0$ 的某个去心领域, 在此去心领域内 $\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$. 又 $1-\cos x>0$, 则 $f(x)>0$. 而 $f(0)=0$, 则 $f(x)>f(0)$, 由极值定义可知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取得极小值.

解法 2：排除法. 取 $f(x)=x^2$, 显然 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$. 又 $f(0)=0, f(x)$ 连续, 即 $f(x)$ 符合题设条件. 显然 (A), (B), (C) 均不能选, 故应选 (D).

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且导函数 $f'(x)$ 连续。在下列四个结论中:

(1) $\displaystyle\int_0^x [\cos(2f(t))+5f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 为奇函数;

(2) $\displaystyle\int_0^x [\cos(2f(t))+\sin(5f'(t))]\,\mathrm{d}t$ 为偶函数;

(3) $\displaystyle\int_0^x [\cos(5f'(t))+2f(t)]\,\mathrm{d}t$ 为奇函数;

(4) $\displaystyle\int_0^x [\cos(5f'(t))+\sin(2f(t))]\,\mathrm{d}t$ 为偶函数;

正确结论的个数为 (　　)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

答案：B

解：令所求函数为 $g(x)$

(1):$g'(x)=\cos(2f(x))+5f'(x)$

则 $g'(-x)=\cos(2f(-x))+5f'(-x)$, 由于 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数，所以 $g'(-x)=g'(x)$, $\displaystyle\int_0^x g'(-x)dx=\int_0^x g'(x)dx$

由 $g(0)=0$ 得，$g(-x)=-g(x)$(1) 正确;

(2)(3)(4) 均可以仿照 (1) 的方法得：(2) 为奇函数，(3) 既不是奇函数也不是偶函数，(4) 是奇函数

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

二、**填空题** (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.)

5. 设 $y=\arcsin\sqrt{x^2-1}$, 则 y 的微分 $dy=$ _________

$$dy=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)}}d\sqrt{(x^2-1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2-1)}}\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}d\left(x^2-1\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

6. $x\to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 的高阶无穷小, $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 的高阶无穷小，则正整数 $n=$ _________

答案：2

解：当 $x\to 0$ 时,

$$(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)\sim\frac{1}{2}x^4$$
$$x\sin x^n\sim x^{n+1}\quad e^{x^2}-1\sim x^2$$

根据题意可知:

$$2<n+1<4$$

得: $1<n<3$, 由于 n 为正整数, 所以 n = 2

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2a(x-2))}{x-2}, & x<2\\ 3, & x=2\\ \dfrac{b(\sqrt{1+x}-\sqrt{3})}{x-2}, & x>2\end{cases}$ 为连续函数

则 $a=$ _________, $b=$ _________

答案：$a=\dfrac{3}{2}, b=6\sqrt{3}$

解：由连续函数定义，$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)=3$

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=2a$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\left.\frac{[b(\sqrt{1+x}-\sqrt{3})]'}{(x-2)'}\right|_{x=2}=\left.\frac{b}{2\sqrt{1+x}}\right|_{x=2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}b$$

$\therefore 2a=3, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}b=3$

解得：$a=\dfrac{3}{2}, b=6\sqrt{3}$

8. 设 $y=\dfrac{3x-1}{x^2-1}$， $y^{(2024)}(0)=$ ______________

答案：2024!

$$y=\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$$
$$y^n(x)=(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+(-1)^n n!\frac{2}{(x+1)^{n+1}}$$

所以 $y^{(2024)}(0)=2024!$

9. 一点先向正东方向移动 a 米, 然后左拐弯移动 aq 米 (其中 $0<q<1$), 如此不断重复左拐弯, 使得后一段移动的距离为前一段的 q 倍, 这样该点有一极限位置, 则该极限位置与原出发点相距 ________ 米?

答案：$\dfrac{a}{\sqrt{1+q^2}}$

解：设出发点为 (x_0,y_0), 前四点位置为

$$\begin{aligned}&(x_0,y_0)\to(x_0+a,y_0)\to(x_0+a,y_0+aq)\to\left(x_0+a\left(1-q^2\right),y_0+aq\right)\\&\qquad\to\left(x_0+a\left(1-q^2\right),y_0+a\left(1-q^2\right)q\right)\end{aligned}$$

用 $x_0+a\left(1-q^2\right), y_0+a\left(1-q^2\right)q, aq^4$, 分别代替 x_0,y_0,a, 就可得后四点坐标, 从而经过 $4k$ 段路后到达 (x_{4k},y_{4k}), 有

$$\begin{aligned}&x_{4k}=x_0+a\left(1-q^2\right)+a\left(1-q^2\right)q^4+\cdots+a\left(1-q^2\right)q^{4(k-1)}\\&y_{4k}=y_0+aq\left(1-q^2\right)+aq\left(1-q^2\right)q^4+\cdots+aq\left(1-q^2\right)q^{4(k-1)}\\&x_{4k}-x_0=a\left(1-q^2\right)\left[1+q^4+\cdots+q^{4(k-1)}\right]\\&\to a\left(1-q^2\right)\frac{1}{1-q^4}=\frac{a}{1+q^2},(k\to\infty)\\&y_{4k}-y_0\to\frac{aq}{1+q^2},(k\to\infty)\end{aligned}$$

$\therefore$ 极限位置和出发点的距离 $d=\dfrac{a}{\sqrt{1+q^2}}$

得分

三、**计算题** (共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分)

10. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

解:

$$\text{原式}=\int \frac{\cos x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sqrt{3}\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C.$$

11. 设 $\int_1^{y-x^2} e^{t^2}dt=\int_0^x \cos t^2 dt$ 确定的 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$

解: 方程两边同时对 x 求导, 可得:

$$\left(\frac{dy}{dx}-2x\right)e^{\left(y-x^2\right)^2}=\cos x^2$$

又 $\because e^{\left(y-x^2\right)^2}>0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x^2}{e^{(y-x^2)^2}}+2x$$

12. 计算定积分 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx$

解：根据 $(\sin x)'=\cos x,(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 可得

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=2\int_0^{\pi^2}xd(\sin\sqrt{x})$$

进行分部积分可得

$$2\int_0^{\pi^2}xd(\sin\sqrt{x})=2\left(x\sin\sqrt{x}-\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}dx\right)$$

$$=2\left(0-\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}dx\right)$$

令$t=\sqrt{x},x=t^2$

$$\int_0^{\pi}\sin td\left(t^2\right)=\int_0^{\pi}2t\sin td(t)$$

$$=-2\int_0^{\pi}td(\cos t)=-2\left(t\cos t-\int_0^{\pi}\cos tdt\right)$$

$$=-2(-\pi-0)=2\pi$$

代入上式得

$$2\left(0-\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}dx\right)=2(0-2\pi)=-4\pi$$

故此题答案为 $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=-4\pi$

得分

四、必做应用题 (共 2 大题，每小题 8 分，共 16 分)

13. 由曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, 及 $x=0,y=0$ 围成的平面区域的面积

分析: 这道题是基础问题, 只需要知道定积分的值即为平面区域的面积即可。
解: 由于 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\Longrightarrow\sqrt{y}=1-\sqrt{x}\Longrightarrow y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)dx=x-2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1\\&=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{6}{6}-\frac{8}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

注: 也可以 y 为自变量对 x 求积分: $\int_0^1(1-2\sqrt{y}+y)dy=\frac{1}{6}$

14. 曲线 $y=ax^2(a>0,x\geqslant0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A, 过原点 O 和点 A 的直线与 $y=ax^2$ 围成平面区域，问 a 为何值时，该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大?

解两曲线所围图形如图 8-6 所示. 因 $x\geqslant0$ 时, 曲线 $y=ax^2$ 与 $y=1-x^2$ 的交点为 $A\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$, 所以直线 OA 的方程是 $y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x$, 故所求旋转体体积为图 8-6

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\pi\left[\frac{a^2}{1+a}x^2-a^2x^4\right]\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{\sqrt{(1+a)^5}}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{\pi\left(4a-a^2\right)}{15\sqrt{(1+a)^7}}=0$ 可得 $a=4$, 故当 $a=4$ 时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最大.

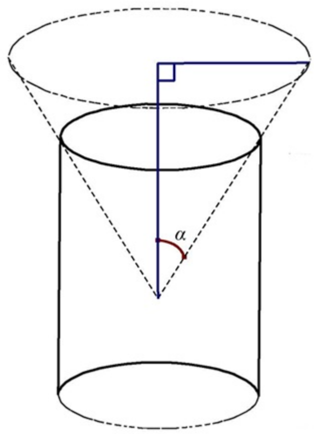
自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

五、选做应用题 (从下面两道题中选择一道题作为必做，共 7 分)

15. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆雉形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少 cm/min?



解设在 t 时刻漏斗在的水深为 y, 圆柱形筒中水深为 h. 于是有

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi r^2 y=5^2 h.$$

由 $\frac{r}{6}=\frac{y}{18}$, 得 $r=\frac{y}{3}$, 代入上式得

$$\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{3}\right)^2 y=5^2 h,$$

即 $\frac{1}{3}\cdot 6^2\pi\cdot 18-\frac{1}{3^3}y^3=5^2 h$. 两边对 t 求导得

$$-\frac{1}{3^2}y^2 y_t'=5^2 h'.$$

当 $y=12$ 时, $y_t'=-1$ 代入上式得

$$h_t'=\frac{-\frac{1}{3^2}\cdot 12^2\cdot(-1)}{5^2}=\frac{16}{25}\approx 0.64(\text{ cm/min})..$$

16. 在 t=0 时（单位：分钟），两只桶内各装 10L 的盐水，盐的浓度均为 15g/L，用管子以 2L/min 的速度将净水输入到第一只桶内，搅拌均匀后的混合液又同时通过管子以 2L/min 的速度被输送到第二只桶内，再将混合液搅拌均匀，然后用 1L/min 的速度输出液体. 设 t 时刻第一个桶内盐水浓度为 $x(t)$g/L, 第二个桶内盐水浓度为 $y(t)$g/L.

(1) 求 x 关于 t 的表达式 $x(t)$

(2) 求 $t=5$ 时第二个桶内盐水浓度

解：(1) 第一个桶在时间 t 到 $t+\Delta t$ 过程中，

$$x(t+\Delta t)=\frac{x(t)(10-2\Delta t)}{10}$$

因此

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=-\frac{1}{5}x(t)$$

令 $\Delta t\to 0$，既有

$$x'(t)=-\frac{1}{5}x(t),x(0)=15$$

由分离变量法解这个微分方程得 $x(t)=15e^{-\frac{1}{5}t}$

(2) 第二个桶在时间 t 到 $t+\Delta t$ 过程中，

$$y(t+\Delta t)=\frac{y(t)(10+2t-t)+x(t)2\Delta t-y(t)\Delta t}{10+2t-t}$$

因此

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{2}{10+t}x(t)-\frac{1}{10+t}y(t)$$

令 $\Delta t\to 0$，既有

$$y'(t)=\frac{2}{10+t}x(t)-\frac{1}{10+t}y(t),y(0)=15$$

带入第一问的结果有

$$y'(t)+\frac{1}{10+t}y(t)=\frac{30}{10+t}e^{-\frac{1}{5}t},y(0)=15$$

这是一个一阶线性微分方程，两边乘上 $10+t$ 得

$$\begin{aligned}y'(t)(10+t)+y(t)&=30e^{-\frac{1}{5}t}\\((10+t)y(t))'&=30e^{-\frac{1}{5}t}\\(10+t)y(t)-10y(0)&=\int_0^t 30e^{-\frac{1}{5}u}du\\(10+t)y(t)-150&=150(1-e^{-\frac{1}{5}u})\end{aligned}$$

解得

$$y(t)=\frac{150(2-e^{-\frac{1}{5}t})}{10+t}$$

因此 $y(5)=10(2-\frac{1}{e})$

得分

六、综合解答题 (共 2 大题，每小题 8 分，共 16 分)

17. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$, 且在某点 $c\in(a,b)$ 处有 $f(c)>0$
证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f''(\xi)<0$.

证：根据 Lagrange 中值定理，
$\exists\eta_1\in(a,c)\quad s.t\quad f'(\eta_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$
$\exists\eta_2\in(c,b)\quad s.t\quad f'(\eta_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$
再根据 Lagrange 中值定理：$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)\quad s.t\quad f''(\xi)=\dfrac{f'(\eta_2)-f'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}<0$

18. 设当 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$f'(x)$ 连续，且 $0<f'(x)<\dfrac{1}{x^2}$
证明：数列 $x_n=f(n)$ 的极限存在

证：设当 $1\leqslant x<+\infty$ 时, $f(x)$ 连续且

$$0<f'(x)<\frac{1}{x^2}$$

由定积分性质可得

$$0<\int_1^x f'(t)dt<\int_1^x\frac{1}{t^2}dt \text{ 即}$$
$$0<f(x)-f(1)<-\frac{1}{x}+1 \text{ 即}$$
$$f(x)<f(1)+1,$$

所以数列 $f(n)$ 有上界又 $f'(x)>0$, 所以数列 $f(n)$ 单调递增由单调有界收敛定理得数列 $x_n=f(n)$ 的极限存在, 证毕

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题