

2022 ~2023 学年第 一 学期

《微积分 (一)》课程期中试题解答

一. 基本计算题(每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求极限 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解 设 $x_n = \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}}$, 则

$$n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2+n}} = \pi,$$

所以 $l = \pi$. (6 分)

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

$$\text{解 } l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (5 \text{ 分})$$

$$= -\frac{1}{6} \quad (6 \text{ 分})$$

3. 求当 $x \rightarrow 0$ 时, 无穷小量 $x - \arctan x$ 的主部与阶数.

解 设 $x \rightarrow 0$, $x - \arctan x$ 的主部为 cx^k , 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{kx^{k-3}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{kx^{k-3}} = c \quad k=3, c=\frac{1}{3} \quad (4 \text{ 分})$$

故主部为 $\frac{1}{3}x^3$, 阶数是 3. (6 分)

4. 设 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \cos x - 2}{\tan x}$ 为常数, 求 a, b .

解 由 b 是常数, $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ 知, $\lim_{x \rightarrow 0} (x + a \cos x - 2) = 0$, 于是 $a = 2$, (3 分)

进而 $b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2(\cos x - 1)}{x} = 1$, 即 $a = 2, b = 1$. (6分)

5. 设函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|} \sin x$, 求 $f(x)$ 的间断点并判断类型.

解 当 $x = 0, x = 1$ 时, $f(x)$ 无定义, 故 $x = 0, x = 1$ 是 $f(x)$ 的间断点. (2分)

$$\text{因 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \cdot \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = 0$$

类似可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, 所以 $x = 0$ 是可去间断点. (4分)

$$(\text{或 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| \cdot \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0)$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} \sin x = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} \sin x = \sin 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\ln x}{x-1} \sin x = -\sin 1, \text{ 所以 } x = 1 \text{ 是跳跃间断点. (6分)}$$

6. 设 $y(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} (x \neq 0, x \neq \pm 1)$, 求 $y'(x)$.

$$\text{解 化简得 } y(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}. \quad (2分)$$

$$y'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (1 - \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}. \quad (6分)$$

7. 设二阶可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + xe^y$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

解 由题设有 $x = 0, y = 1$, 方程两边关于 x 求导得

$$(1 - xe^y)y' = e^y \quad (*)$$

$$y'(0) = e \quad (3分)$$

方程(*)两边再关于 x 求导得

$$(1 - xe^y)y'' = 2y'e^y + x \cdot (y')^2 \cdot e^y \quad (5分)$$

$$\therefore y''(0) = 2e^2, \text{ 即 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 2e^2. \quad (6分)$$

8. 设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 求 dy .

解 因 $\ln y = \sin x \ln(1+x^2)$ (2分)

所以 $\frac{1}{y} y' = \cos x \ln(1+x^2) + \sin x \cdot \frac{2x}{1+x^2}$

即 $y' = (\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2}) y = (1+x^2)^{\sin x} (\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2})$ (5分)

$dy = (1+x^2)^{\sin x} (\cos x \ln(1+x^2) + \frac{2x \sin x}{1+x^2}) dx$ (6分)

9. 已知 $f(x) = x^3 \ln(1+x)$, 求 $f^{(10)}(0)$.

解 取 $v(x) = x^3$, 它的四阶以上的导数为零, (1分)

$$u^{(k)}(x) = (\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+x)^k}, k=1, 2, \dots, \quad (3分)$$

用莱布尼茨公式: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$,

$$f^{(10)}(x) = x^3 \frac{(-1)^9 9!}{(1+x)^{10}} + 30x^2 \frac{(-1)^8 8!}{(1+x)^9} + 3 \times 10 \times 9x \frac{(-1)^7 7!}{(1+x)^8} + 10 \cdot 9 \cdot 8 \frac{(-1)^6 6!}{(1+x)^7}.$$

所以 $f^{(10)}(0) = \frac{10!}{7}$ (6分)

10. 求曲线 $r = 1 - \cos \theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解 曲线的参数方程为 $x = (1 - \cos \theta) \cos \theta, y = (1 - \cos \theta) \sin \theta$. (2分)

于是得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) \cos \theta}{2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta}. \quad (4分)$$

代入 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得到 $\frac{dy}{dx} = -1$, $x = 0, y = 1$, 因此切线方程为 $y = -x + 1$. (6分)

二. 综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 研究函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性.

解 (1) 当 $x > 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x^2$;

(2) 当 $x < 0$ 时, $e^{nx} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = x$;

(3) 当 $x = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} = 0$,

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$ (4分)

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = x^2$ 及 $f(x) = x$ 均为幂函数, 连续;

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, 且 $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处连续. (6分)

12. 设 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, $f(1) = 2, f'(1) = -4$, 求 $y = g(1+x^2)$ 在 $x = 1$ 的导数.

解 由题意得 $g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$, (2分)

$$y' = g'(1+x^2) \cdot 2x = 2xg'(1+x^2), \quad (4分)$$

$$y'(1) = [2xg'(1+x^2)]|_{x=1} = 2g'(2) = -\frac{1}{2} \quad (6分)$$

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处二阶可导, 且 $f'(1) = 0, f''(1) = 0, y = f^2(x)$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=1}$.

解 $y'(x) = 2f(x)f'(x)$ (3分)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y'(x) - y'(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)f'(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)(f'(x) - f'(1))}{x - 1} \\ &= 2f(1)f''(1) = 0 \end{aligned} \quad (6分)$$

14. 设函数 $g(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 可导, 求 $F(x) = f(g(x))$ 的导数.

$$\text{解 } F(x) = \begin{cases} f(x^3 \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时, $F'(x) = f'(x^3 \sin \frac{1}{x})(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x})$, (3分)

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = 0, \quad F'(0) = f'(g(0)) \cdot g'(0) = f'(0) \cdot 0 = 0. \quad (6 \text{ 分})$$

15. 将水以 $4\text{m}^3/\text{min}$ 的速率注入一个圆锥形容器中, 容器顶朝下倒立, 它的高度为 8 米, 底半径为 4 米, 当容器内的水深达 5 米时, 水面升高的速率是多少?

解 设时刻 t 容器中水的体积为 $V\text{m}^3$, 水的高度为 $h\text{m}$, 水面半径为 r , 则

$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}, \text{ 即 } r = \frac{h}{2}, \text{ 因而 } V = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{于是 } \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{当 } h=5\text{m}, \frac{dV}{dt}=4(\text{m}^3/\text{min}) \text{ 时, } \frac{dh}{dt} = \frac{4}{25\pi} \cdot 4 = \frac{16}{25\pi} (\text{m/min}),$$

$$\text{即水面升高的速率是 } \frac{16}{25\pi} \text{m/min} \quad (6 \text{ 分})$$

三. 证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 设 $x_n > 0$, $x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4 (n=1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求其值.

$$\text{证 由均值不等式 } \sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} \leq \frac{x_{n+1} + \frac{4}{x_n}}{2} \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{及 } x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4, \text{ 得 } \sqrt{x_{n+1} \cdot \frac{4}{x_n}} < 2 \text{ 即 } \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1, \text{ 故 } \{x_n\} \text{ 单调递减.} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{或 } x_{n+1} - x_n < 4 - \frac{4}{x_n} - x_n = -\left(\sqrt{x_n} - \frac{2}{\sqrt{x_n}}\right)^2 \leq 0 \text{ 得到 } \{x_n\} \text{ 单调递减.}$$

$$\text{又 } x_n > 0, \text{ 由单调有界准则知 } \{x_n\} \text{ 收敛, 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 存在,} \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 则 } A > 0. \text{ 由 } x_{n+1} + \frac{4}{x_n} < 4 \text{ 得, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_{n+1} + \frac{4}{x_n}\right) \leq 4$$

$$\text{即 } A + \frac{4}{A} \leq 4, \text{ 由此得 } (A-2)^2 \leq 0, \text{ 故 } A=2 \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2. \quad (5 \text{ 分})$$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, b]$ 上具有二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq M, f(x)$ 在 $(0, b)$ 上取得最大值,

试证: $|f'(0)| + |f'(b)| \leq Mb$.

证 设 $f(x)$ 在 $x_0 \in (0, b)$ 点取得最大值, 则 $f'(x_0) = 0$. (1 分)

函数 $f'(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上分别应用拉格朗日中值定理

$$f'(x_0) - f'(0) = f''(\eta)x_0, \quad \exists \eta \in (0, x_0)$$

$$f'(b) - f'(x_0) = f''(\xi)(b - x_0), \quad \exists \xi \in (x_0, b) \quad (3 \text{ 分})$$

$$|f'(0)| + |f'(b)| = |f''(\eta)|x_0 + |f''(\xi)|(b - x_0) \leq Mx_0 + M(b - x_0) = Mb. \quad (5 \text{ 分})$$