华中科技大学 2021～2022 学年第二学期

“ 微积分（一） ”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭卷　考试日期：2022.06.27　考试时长：150 分钟

一、单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.)

1. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的待定特解形式可设为【　】.

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$　B. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$

C. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$　D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

2. 在下列极限结果中，正确的是【　】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$　B. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$　C. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=0$　D. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x+y}=0$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于【　】.

A. $2f(2)$　B. $f(2)$　C. $-f(2)$　D. 0

4. 设曲线 $L: f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数），过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是【　】.

A. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s$　B. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x$　C. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y$　D. $\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$，则 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=$【　】.

A. 0　B. $2\pi a^3$　C. $\dfrac{1}{3}\pi a^2$　D. $\dfrac{2}{3}\pi a^3$

6. 设两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则【　】.

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 经过点 $A(1,-2,3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为 ______.

8. 设矢量场 $A = x^2 i + yzj + zxk$，则 $\mathrm{rot}\, A\big|_{(1,1,2)} =$ ________.

9. $u = xe^y z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}u =$ ________.

10. 若将函数 $f(x) = \pi - x\ (0 \le x \le \pi)$ 展开成正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，则系数 b_4 的值为 ___.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 设方程组 $\begin{cases} u+v=x \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，且 $u \ne v$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

12. 设 n 是曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处指向上侧的法矢量，求函数 $u = xz^3 - 3yz$ 在点 P_0 处沿方向 n 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

13. 计算 $I = \iint\limits_D \max\{xy, 1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是正方形区域 $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.

14. 计算 $I = \iint\limits_\Sigma (xy + yz + zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

15. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$（$R > 0$）的外侧，求 $I = \oiint\limits_S x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

16. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域并求其和函数 $S(x)$.

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$，求非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解.

18. 求 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

19. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$ 是条件收敛的.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有向分段光滑曲线，其始点为 (a,b)，终点为 (c,d)．记 $I = \int_L \dfrac{1}{y}\left[1 + y^2 f(xy)\right]\mathrm{d}x + \dfrac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy) - 1\right]\mathrm{d}y$，(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关．(2) 当 $ab = cd$ 时，求 I 的值.