2023～2024 学年第一学期

《高等数学（ A）》（上）期末考试试卷(B 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院　　　　专业班级 ____________

学号 ____________　　　　姓名 ____________

考试日期: 2024-03-　　　　**考试时间:** 8：30-11：00 AM

题号	一	二	三	四	五	总分
满分	16	20	24	16	24	100
得分						

得　分	
评卷人	

一. 选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 关于黎曼函数 $R(x)$，下列说法**正确**的是（　　）.

A. $R(x)$存在第二类间断点　　B. $R(x)$存在可导点

C. $R(x)$不存在极值点　　D. $R(x)$在[0,1] 上黎曼可积

2. 设 f 为定义在$(-1,1)$上有定义的函数，且$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$,则（　　）.

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{|x|}$存在，则 $f(x)$在$x=0$ 处可导　　B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$存在，则$f(x)$在$x=0$ 处可导

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$存在，则 $f(x)$在$x=0$ 处可导　　D. 若 $f(x)$在$x=0$ 处可导，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}$存在

3. 若 $\mathrm{F}(x)=\int_0^x (2t-x)f(t)\,\mathrm{d}x$, 其中$f(x)$ 在$(-1,1)$上二阶可导且$f'(x)>0$，则（　　）.

A. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 必在$x=0$ 处取得极大值

B. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 必在$x=0$ 处取得极小值

C. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 在$x=0$ 处没有极值，但点$(0,\mathrm{F}(0))$为曲线$y=\mathrm{F}(x)$的拐点

D. 函数 $\mathrm{F}(x)$ 在$x=0$ 处没有极值，点$(0,\mathrm{F}(0))$也不是曲线$y=\mathrm{F}(x)$的拐点

4. 设 $f(x)$，$g(x)$是$[0,+\infty)$上的一致连续函数，则下列说法错误的是（　　）.

A. 函数$|f(x)|$必在$[0,+\infty)$上一致连续　　B. 函数$kg(x)$(k 为常数)必在$[0,+\infty)$上一致连续

C. 函数$f(x)g(x)$必在$[0,+\infty)$上一致连续　　D. 函数$f(x)-g(x)$必在$[0,+\infty)$上一致连续

得　分	
评卷人	

二. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

5. 设 $E=\{\frac{1}{(n^2-2024)^2}|n=1,2,\cdots\}$, 则 $\sup E=$ ____________, $\inf E=$ ________________________.

6. 曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$的全部渐近有 ____.

7.若反常积分$\int_0^1\frac{\sin x}{(1+x)x^p}\mathrm{d}x$收敛，则 p的取值范围为____.

8. 微分方程 $y'+y\sin x=xe^{\cos x}$通解为____.

9. sin(sin$x$)的 5 阶带 Peano 余项的 Maclaurin 展开式为____.

得　分	
评卷人	

三. 计算题(每小题 6 分，共 24 分)

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x^2}-x}{1-\cos x}$.

11. 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x(2+3\sin x+4\sin^3 x)\mathrm{d}x$.

12. 求微分方程 $y''-ay'=0$ 的通解.

13. 求由曲线 $y=\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$和直线 $x=-1, x=1, y=0$ 所围成的区域为D绕 y轴旋转一周所得旋转体的体积.

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

14. 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, x<0, \\ \ln(1+x), x\geq 0, \end{cases}$ 当a,b,c为何值时 $f''(\mathbf{0})$ 存在.

15. (1) 判断反常积分$\int_0^{\pi}\ln(\sin x)\mathrm{d}x$的收敛性, 若收敛则求其值, 若发散, 请说明理由.

(2) 确定 p 的范围, 使反常积分 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^p}\right)\mathrm{d}x$ 收敛，并说明理由.

得　分	
评卷人	

五. 证明题（每小题 8 分，共 24 分）

16．设函数 $f(x)$ 是在区间 $[-a,a]$ 上连续的偶函数，(1) 证明：$\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)\,dx$；（2）求 $\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}}{(1+x^{2})(1+e^{x})}dx$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的二阶导函数连续，且 $f(\frac{1}{2})=0$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}$ 带拉格朗日余项的泰勒公式;

(2) 证明: $\int_{0}^{1}f(x)dx\le\frac{M}{24}$，其中 $M=\max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$.

18. 设 $f(x),g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数, 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(\xi)}{\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x}-\dfrac{g(\xi)}{\int_{\xi}^{b} g(x)\mathrm{d}x}=1$.