

华中科技大学 2024~2025 学年第一学期

“微积分（B）卷”考试试卷

学数华科

2025 年 1 月 16 日

一、单项选择题（每小题 3 分）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是【 】.
A. 无界的但不是无穷大量
B. 无穷大量
C. 有界的但不是无穷小量
D. 无穷小量
2. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$, 则【 】.
A. 对任意正整数 n , 有 $a_n < b_n$
B. 对任意正整数 n , 有 $b_n < c_n$
C. 数列 $\{a_n \cdot c_n\}$ 发散
D. 数列 $\{b_n \cdot c_n\}$ 发散
3. 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$, 则【 】.
A. $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值
B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值
C. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值
D. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
4. 若 $f'(2x) = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 则 $\int f(x) dx =$ 【 】.
A. $3x - e^{-\frac{x}{2}} + C$
B. $3x - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$
C. $3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$
D. $3x - 4e^{-\frac{x}{2}} + C$
5. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$, 则【 】.
A. $f(2) < 2f(1)$
B. $f(2) > 2f(1)$
C. $2f(2) < f(1)$
D. $2f(2) > f(1)$

6. 下列反常积分收敛的是【 】.

A. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

B. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

C. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

D. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^2} dx$

二、填空题（每小题 4 分）

7. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] =$ _____.

8. 设函数 $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$, $g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数, 则 $g'(2) =$ _____.

9. 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$, 则 $\int_0^1 f(x) dx =$ _____.

10. 连续曲线段 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$ 的弧长为 _____.

三、计算题（每小题 7 分）

11. 求曲线 $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} (x > 1)$ 的渐近线.

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right)$.

13. 设方程 $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$ 可确定函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$.

14. 求方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ 的积分曲线 $y = y(x)$, 使其在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - 3x + 1$ 在该点处的切线重合.

15. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$, 求 $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt (0 \leq x \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的最值.

四、综合题（每小题 7 分）

17. 设 $f(x)$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$, $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性.

18. 设曲线 $y = y(x)$ 是第一象限内的连续曲线, 点 $A(0, 1), B(1, 0)$ 分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点, 点 $M(x, y)$ 为曲线 AB 上的任意一点, 过 $M(x, y)$ 作 x 轴的垂线, 与 x 轴交于点 C , O 为坐标原点, 设梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$,¹ 求 $y = y(x)$ 与 y 轴及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

五、证明题（每小题 5 分）

19. 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$, $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$,
证明: $\exists \xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的二阶导数, 且 $|f''(x)| \leq 1$, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

¹注: 此处有错误, 应将 $\frac{1}{2}$ 改为 $\frac{1}{3}$ 才正确