

2023 年线性代数试题回忆版

学数华科

2024 年 1 月 13 日

一、判断题 (共 16 分, 每题 2 分)

1. 若 A, B 为满足 $BA = 0$ 的任意两个非零矩阵, 则 A 的行向量形成的向量组线性相关。
2. 向量组 $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]$ 可由向量组 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t]$ 线性表出, 则 $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s]) \leq r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t])$
3. 2023 个 2024 维向量可以生成至多 2023 维的空间, 2024 个 2023 维实向量也可以生成至多 2023 维的空间。
4. 设 A 为 n 阶方阵, 则 A^{2023}, A 的伴随矩阵 A^* 的特征向量都与 A 的特征向量相同。
5. 若齐次线性方程组 $AX = 0$ 有唯一解, 则非其次线性方程组 $AX = b$ 有唯一解。
6. 设 A, B 均为 n 阶实矩阵, 对任意的 n 维向量 X 都有 $X^T AX = X^T BX$, 则 $A = B$ 。
7. 设 A 是 2024 阶实对称阵, $AB + B^T A$ 是正定矩阵, 则矩阵 B 可逆。
8. 任意两个 2023 阶的正定矩阵必等价。

二、填空题 (共 20 分, 每题 4 分)

1. 设 $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2024 \end{pmatrix}$ 是 2024 阶上三角行列式, 则 D 所有元素的代数余子式之和为

2. 设 A, B 均为 2023 阶方阵, 且 $|A| = 2023, |B| = 2024, |A^{-1} + B| = 2024$, 则 $|A + B^{-1}| =$
3. 设 A 为 2024 阶方阵 A 的每行元素之和均为 2024, 则 A^{2023} 全部元素的和 =
4. 设向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, 当 k 满足条件 () 时, $\beta_1 = 2\alpha_1 - 2k\alpha_3, \beta_2 = 2\alpha_2, \beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ 也为 \mathbb{R}^3 的一组基
5. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a+1)x_3^2 + 2x_1x_2$ 的规范型为 $f = y_1^2 + y_2^2$, 则 $a =$

三、(10 分)

设 n 阶方阵 A 的行列式 $|A| = a$, 将 A 的每一列减去 A 的其余所有各列得到方阵 B , 求 $|B|$ 。

四、(10 分)

设 $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $f(A), [f(A)]^{-1}$

五、(12 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ b & -2 \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 则矩阵方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程

六、(12 分)

已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 在正交变换 $X = QY$ 下的标准型为 $-y_1^2 - y_2^2$, 且 Q 的第三列为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T$

(1) 求矩阵 A

(2) 证明: $A + 2I$ 为正定矩阵, 其中 I 为单位阵

七、(10 分)

已知 $\alpha_1 = [1, 0, 1]^T, \alpha_2 = [1, 1, 1]^T, \alpha_3 = [1, 0, 0]^T$ 为 3 阶方阵 A 的特征向量, 对应特征值分别为 $1, -1, -1$

(1) 证明: 方阵 A 可相似对角化

(2) 设向量 $\beta = [1, 0, -1]^T$, 求 $A\beta$ 在基 $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ 下的坐标

八、(10 分)

设向量组 $a_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}], j = 1, 2, \dots, n$ 满足

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|, i = 1, 2, \dots, n$$

证明：向量组 $[a_j, j = 1, 2, \dots, n]$ 线性无关