2019年华中科技大学启明考试

--Double 2019/09

1.37，23，19，5.....以此类推，第五个数：____.

$\underbrace{37\quad 23}_{14}$，$\underbrace{19\quad 5}_{14}$注意到$23-19=5-a_5$.则$a_5=1$

注意：这种题其实可以说没有答案

2.今天星期六，则3^{1998}天后是星期几.

$$3^{1998}=(27)^{666}=(28-1)^{666}=1+\sum_{k=0}^{665}C_{666}^{k}(28)^{666-k}(-1)^{k}=7N+1$$

3.若x满足$x+x^{-1}=-1$,求$x^{2019}+x^{-2019}$.

$x^2+x+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}i^2$($i$是复数)，则$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}$.

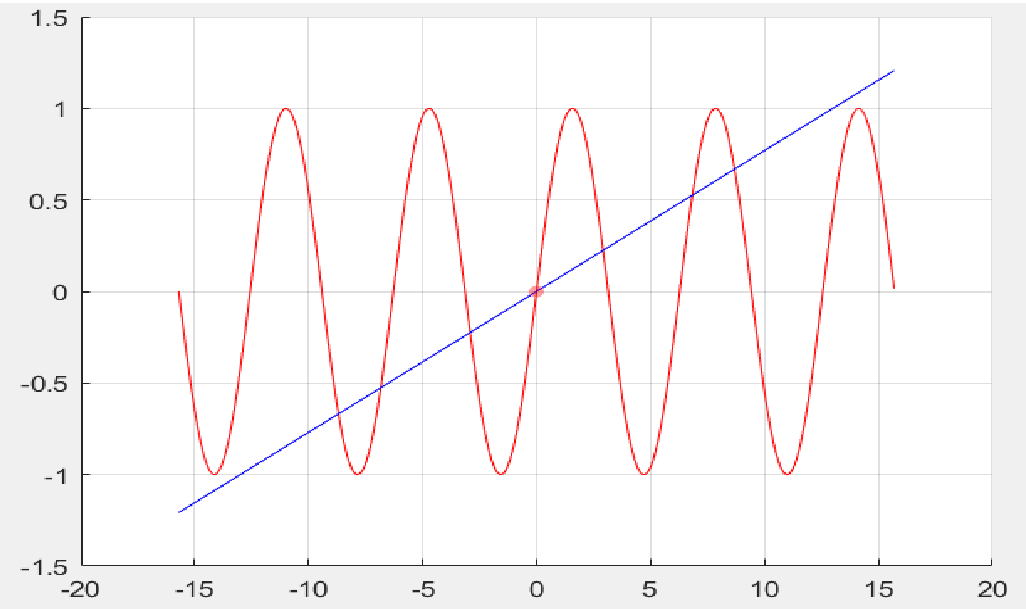
$x=e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}$注意到:$(e^{ix})^{n}=\cos nx+i\sin nx$

$$x^{2019}=e^{\pm\frac{2\times2019\pi}{3}i}=\cos(\pm1046\pi)+i\sin(\pm1046\pi)=1$$

$$x^{-2019}=e^{\mp\frac{2\times2019\pi}{3}i}=\cos(\mp1046\pi)+i\sin(\mp1046\pi)=1$$

4.求方程$13\sin x=x$的根.

高中试题，没有难度。



5.设整数数列$a_1,a_2,\ldots a_{10}$满足$a_{10}=3a_1,a_2+a_8=2a_5$.且$a_{i+1}\in\{1+a_i,2+a_i\}$其中$i=1,2,3\ldots9$.求这样的数列有多少个.

$b_i = a_{i+1} - a_i \in \{1, 2\}\ (i = 1, 2, 3 \ldots 9)$,则

$$2a_1 = a_{10} - a_1 = \sum_{k=1}^{9} b_k \qquad (1)$$

$$b_2 + b_3 + b_4 = a_5 - a_2 = a_8 - a_5 = b_5 + b_6 + b_7 \qquad (2)$$

用t表示b_2, b_3, b_4中值为2的项数，从(2)得t也是b_5, b_6, b_7中值为2的项数，确定$b_2, \ldots b_7$后，b_8, b_9有2^2种

由(1)可知，$b_1 \in \{1, 2\}$使得$\sum_{k=1}^{9} b_k$为偶数,因此b取法唯一，a_1也确定，则

最后得到：$20 \times 2^2 = 80$

6.求$n^3 + 100$能被$n + 10$整除的最大整数.

$$= \frac{n^3 + 1000}{n + 10} - \frac{900}{n + 10}$$

$$= n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n + 10}$$

7.x, y, z为非负整数，且$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 3z = 30 \end{cases}$，求$x + 5y + 3z$的取值范围.

取z为自由变量，则$\begin{cases} z = -\dfrac{y - 20}{2} \\ z = x + 10 \end{cases}, \dfrac{x + 10}{1} = -\dfrac{y - 20}{2} = \dfrac{z}{1} = t$

t的范围自己找一下就好了（这是初中试题，不用这么复杂，只是想扩展一下平面的知识。(这个题有问题)

8.若$f(x) = (1 - x^2)(x^2 + ax + b)$关于$x = -2$对称，求$f(x)_{\max}$.

本质上$f(x) = f(-4 - x)$,计算的时候存在简算技巧啦。

$f(x) = (1 - x)(1 + x)(1 + 3x)(1 + 5x)$

$\Rightarrow f(x)_{\max} = 16$

9.若α, β满足$\begin{cases} x\sin\beta + y\cos\alpha = \sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\beta = \sin\beta \end{cases}$,求$x^2 - y^2$.

这个题注意求解思路即可，不需要刻意追求答案

(1) $[x\ y]\begin{bmatrix}\sin\beta & \cos\alpha\\ \sin\alpha & \cos\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ \sin\beta\end{bmatrix}\Rightarrow [x\ y]A=B$

$1.\beta-\alpha=k\pi(k\in Z)$

(自己解)

$2.\beta-\alpha\neq k\pi(k\in Z)$，则$A$是可逆矩阵

$\Rightarrow [x\ y]=BA^{-1}$

$x-y=[x\ y]\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},x+y=[x\ y]\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$x^2-y^2=[x\ y]\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}[x\ y]\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=BA^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}BA^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\left(\text{注意：}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}\right)$

(此题系数流传出来时不对 但是注意方法就好了)

(2) $\begin{cases}y\cos\alpha=\sin\alpha-x\sin\beta\\ y\cos\beta=\sin\beta-x\sin\alpha\end{cases}$

$(y\cos\alpha)^2-(y\cos\beta)^2=y^2(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)$

$(y^2+1-x^2)(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)=0$

进行分类讨论

10.$A(3,2)$是平面上一点，F是抛物线$y^2=2x$上的一点，抛物线上一点M，则$|MF|+|MA|$取最小值的时M的坐标.

这是一个高中的老题目！！！

(注意到抛物线上一点到抛物线焦点和准线距离相同即可)

然后两点之间线段最短

11.$\forall x,y\in R$,函数$f(x)$满足$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$且$f(x)\neq 0$，证明：$f^2(x)+f^2(y)=f(x+y)f(x-y)+1$

$1°x=y=0\quad\Rightarrow f(0)=0;$

$2°x=y\quad\quad\Rightarrow 2f^2(x)=f(2x)+1$

$3°$对换$x,y\quad\Rightarrow f(x)=f(-x)$

$so:2f(x-y)f(x+y)\overset{3°}{=\!=}f(2x)+f(2y)\overset{2°}{=\!=}2f^2(x)+2f^2(y)-2$

12.数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$,且$a_{505}=2019$.求$\max a_5$.

$$b_n=a_{n+1}-a_n\Rightarrow a_n=\sum_{k=1}^{n-1}b_k+a_1\Rightarrow a_5=\sum_{n=1}^{4}b_n+3\quad(1)$$

$$2019=a_{505}=a_{504}+a_{503}+\ldots+a_5\quad(2)$$

$$a_n\leqslant\frac{1}{2}(a_n+a_{n+2})\Rightarrow b_n\leqslant b_{n+1}$$

$$\begin{cases}\text{由}(1)\ a_5\leqslant 4b_5+3\\ \text{由}(2)\ a_5\leqslant 2019-500b_5\end{cases}\Rightarrow a_5\leqslant\frac{2019+3\times125}{126}=19(\text{自己判断取等号~})$$

13.$f(x)$是R上的偶函数，函数图像关于$x=1$对称。对任意的$x,y\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,

有$f(x+y)=f(x)f(y)$,且$f(1)=\beta>0$.

(1)求$f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{4}\right)$的值.

(2)证明：$f(x)$是周期函数.

(3)记$\beta(n)=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\beta(n)$.

$$(1)\begin{cases}f(x)=f(-x)\\ f(1+x)=f(1-x)\end{cases},\ \text{则}x,y\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\text{取}x=y,f(2x)=f^2(x)$$

$$\text{可知}\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\beta}\\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{\beta}\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}f(x)=f(-x)\\ f(1+x)=f(1-x)\end{cases}\Rightarrow f(x)=f(1-(x+1))=f(x+2)\Rightarrow\text{周期是}2$$

$$(3)\sqrt{\beta}=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\right)=\ldots=f^n\left(\frac{1}{2n}\right)f(0)$$

$$\text{而}f(0)=f^2(0)\text{且}f\left(\frac{1}{2}+0\right)=f(0)f\left(\frac{1}{2}\right)>0\Rightarrow f(0)=1$$

$$f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)=\left(\frac{\sqrt{\beta}}{f(0)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\beta(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\beta}{2n}=0$$

此为学数华科那群人悄悄背出来的，希望可以帮助大家！！！

特别鸣谢：梧桐叶落(以及其他学数华科的同学)

2019/09/08 10:00