



华中科技大学2023 ~ 2024学年第一学期

《高等数学（A）（上）》期中考试

考试方式:闭卷 考试日期:2023/11/11 考试时间: 2:30–5:00 PM

院系: _____ 班级: _____

学号: _____ 姓名: _____

题号	一	二	三	四	总分
分数					

阅卷人	
得分	

一、填空题(每题4分, 共28分)

- 集合 $E = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n = 1, 2, \dots\}$, 则 $\sup E = 2$; $\inf E = 0$.
- 用 ε 语言写出 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 的定义: $\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N, |a_n| \geq \varepsilon$.
- 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$
- 已知 $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x} \sim ax^c$ ($x \rightarrow 0$), 其中 a, c 为常数, 则 $ax^c = \frac{1}{4}x^3$.
- $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 指出 $f(x)$ 的间断点和间断点的类型: 间断点为非整点, 第二类间断点.
- 设方程 $x^4 + y^4 = a^4$, ($a > 0$ 为常数) 在 $y \neq 0$ 时确定一个隐函数 $y(x)$, 则 $y' = -\frac{x^3}{y^3}$.
- 叙述海涅(Heine)定理: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 对任一数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) 且 $x_n \neq x_0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

阅卷人	
得分	

二、计算(每题6分,共24分)

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(7) = \frac{1}{17}$ 且 $f'(7) = 17$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 7} [\frac{f(x)}{f(7)}]^{\frac{1}{\ln \frac{x}{7}}}.$

解: 取对数得 $g(x) = \frac{1}{\ln \frac{x}{7}} \cdot \ln [\frac{f(x)}{f(7)}] = \frac{\ln f(x) - \ln f(7)}{\ln x - \ln 7}$, 由 $f'(7)$ 存在得 $(\ln f(x))'$ 在 $x=7$ 处可导且 $(\ln f(x))'(7) = \frac{f'(7)}{f(7)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln f(x) - \ln f(7)}{x - 7}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln x - \ln 7}{x - 7} = \frac{1}{7}$. 因此 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln f(x) - \ln f(7)}{\ln x - \ln 7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\ln f(x) - \ln f(7)}{x - 7} \cdot \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{\ln x - \ln 7} = \frac{f'(7)}{f(7)} \cdot 7 = 2023$. 于是原极限 $= e^{2023}$

9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [(1+x)^{\frac{1}{x}} - e]$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{\frac{1}{x}} - e)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} \cdot \frac{\frac{1}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \\ &= e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - \ln(1+x)}{3x^2 + 2x} = e \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x + 3x^2} = -\frac{e}{2} \end{aligned}$$

10. 圆的渐开线的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, 其中 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos t - \cos t + t \cdot \sin t}{-\sin t + \sin t + t \cdot \cos t} = \tan t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(tan t)'}{x'(t)} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{t \cdot \cos t} = \frac{1}{t \cdot \cos^3 t}$$

11. 设 $f(x) = (x^2 + x)e^{3x}$, 求 $f^{(2023)}(x)$

$$\begin{aligned}
 f^{(2023)}(x) &= \sum_{k=0}^{2023} C_{2023}^k \cdot (x^2+x)^{(k)} \cdot (e^{3x})^{(2023-k)} \\
 &= (x^2+x) \cdot 3^{2023} \cdot e^{3x} + C_{2023}^1 \cdot (2x+1) \cdot 3^{2022} \cdot e^{3x} + C_{2023}^2 \cdot 2 \cdot 3^{2021} \cdot e^{3x} \\
 &= 3^{2021} \cdot e^{3x} \cdot (9x^2 + 9x + 2023 \cdot 3 \cdot (2x+1) + C_{2023}^2 \cdot 2) \\
 &= 3^{2021} \cdot e^{3x} \cdot (9x^2 + (2023 \times 6 + 9)x + 2023 \times 3 + 2023 \times 2022)
 \end{aligned}$$

阅卷人	
得分	

四、证明题 (每题 7 分, 共 28 分)

12. 用 ε 语言证明:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x} = \frac{2}{3}.$$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\varepsilon \right\}$ (注: 取法不唯一) 4'
则 $\forall x \in U^o(1, \delta)$, 有

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x^2+1}{2x^2+x} - \frac{2}{3} \right| &= \left| \frac{3x^2+3-4x^2-2x}{3(2x^2+x)} \right| = \frac{|2-2x|+|1-x^2|}{3|2x^2+x|} \\
 &\leq \frac{|2-2x|+|1-x^2|}{3|2x^2+x|}, \text{ 由 } |x-1| < \frac{1}{2} \text{ 得 } x > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{则上式} < \frac{2\delta+2\delta}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3}\delta \leq \varepsilon \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{2x^2+x} = \frac{2}{3} \quad 3'$$

13. 设 f 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 满足 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(2x) = f(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

证明: $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) = 0$.

证: $\forall x \in (0, +\infty)$, 记 $a_n = f(2^n x)$.

由 $f(2x) = f(x)$ 得 a_n 为常值数列.

由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 及 Heine 定理 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\therefore \forall n$, $a_n = 0$, 即 $a_0 = f(x) = 0$.

14. 设 f 在区间 I 上可导且导函数 $f'(x)$ 有界, 证明: f 在区间 I 上一致连续.

证: 不妨设 $\forall x \in I, |f'(x)| < M$, M 为固定实数.

则 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$

$\forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $\exists \xi$ 介于 x_1, x_2 之间

$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < M \cdot \delta \leq \varepsilon$ 微分中值定理, 4'

~~$\leq M \cdot \delta \leq \varepsilon$~~ $\therefore f$ 在 I 上一致连续 3'

15. 设 $f(x)$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $\forall x \in [a, b], f(x) \neq 0$.

证明: 存在常数 $m > 0$, 满足 $\forall x \in [a, b], |f(x)| \geq m$.

证: 设 $f(a) > 0$, 由介值定理可得 $\forall x \in [a, b], f(x) > 0$.

由最值定理, f 在 $[a, b]$ 上有最大值 $f(x_0) > 0$.

取 $m = f(x_0)$ 即可

证法②: f 连续 $\Rightarrow |f|$ 连续.

即 $|f|$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 故存在最小值 $f(x_0)$

取 $m = |f(x_0)|$ 即可

证法③: 假设命题不成立, 即 $\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists x_n \in [a, b]$,

$|f(x_n)| < \frac{1}{n}$, 由致密性定理, $\{x_n\}$ 有收敛子列,

记为 $x_{n_k} \rightarrow x_0$ ($k \rightarrow \infty$), 由保号性, $x_0 \in [a, b]$.

而 f 在 x_0 处连续, 得 $f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = 0$ (收敛性)

与题设矛盾!

第4页, 共6页
 \therefore 原命题成立

阅卷人	
得分	

三、解答题(每题 10 分, 共 20 分)

16. 设 f 是定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $a > 0$ 是常数, 分别求 a 的范围使得下面命题成立.

(1) f 在 0 处可导并求 $f'(0)$.

(2) $f'(x)$ 在 0 处连续.

(3) f 在 0 处二阶可导.

解: (1) f 在 0 处可导 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 存在,
即 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{a-1} \sin \frac{1}{x}$ 存在, 此时 $a > 1$. $f'(0) = 0$

(2). $x \neq 0$ 时, $f'(x) = a \cdot x^{a-1} \sin \frac{1}{x} - x^{a-2} \cos \frac{1}{x}$.

欲使 $f'(x)$ 在 0 处连续, 需 $f'(0)$ 存在, 且

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 即 $a > 1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} (a \cdot x^{a-1} \sin \frac{1}{x} - x^{a-2} \cos \frac{1}{x}) = 0$
 $\Rightarrow a > 2$

(3) 设 $a > 2$, f 在 0 处二阶可导 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ 存在
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (a \cdot x^{a-2} \sin \frac{1}{x} - x^{a-3} \cos \frac{1}{x})$ 存在,

因此 $a > 3$

17. 设 $\{x_n\}$ 为数列,若存在常数 M ,满足对 $\forall n = 1, 2, \dots$,都成立

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq M,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 为有界变差数列.

(1) 设 $x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,验证 $\{x_n\}$ 是否为有界变差数列.

(2) 证明:有界变差数列一定是收敛数列.

(3) 举例说明收敛数列不一定是有界变差数列.

$$\begin{aligned} (1) \quad & |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ & \leq 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right) \\ & = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < 4 \quad \text{取} M = 4 \text{ 即可. } 4' \\ & \text{则 } \{x_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\} \text{ 是有界变差数列} \end{aligned}$$

(2) 证: 记 $a_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n+1} - x_n|, \forall n \geq 1$

则 a_n 单增,且由条件知 a_n 有界,因此 $\{a_n\}$ 收敛,再由Cauchy准则

得 a_n 为Cauchy数列. 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall p \in N$,

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. 对上述的 n, p 有

$$\begin{aligned} |x_{n+p+1} - x_{n+1}| & \leq |x_{n+p+1} - x_{n+p}| + |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+2} - x_{n+1}| \\ & = a_{n+p} - a_n < \varepsilon. \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 也是Cauchy数列,

从而有界变差数列 $\{x_n\}$ 是收敛数列

3'

(3) 取 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, 则不收敛,但

$$\begin{aligned} & |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ & = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 不是有界变差数列