《数学》考试

1.填空题（每小题 6 分，共 30 分）

(1) 某中学有三个课外兴趣小组：棋类、戏剧、合唱，学生人数依次为 40，30，25.已知五人同时参加三个小组，同时参加棋类和戏剧的有 10 人，同时参加棋类和合唱的有 5 人，同时参加戏剧和合唱的有 6 人。则这三个小组中共有不同学生的人数为（74）

(2) 已知两正数 a，b（a<b）。以点（0,0），（b,0）,(b,b),(0,b)为顶点作一边长为 b 的闭正方形。在此正方形内随机选择（x,y），则使|x-y|>a 的概率为（$\frac{(b-a)^2}{b^2}$）

(3) 设$b_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$(n 个根号)。已知$\lim_{n\to+\infty}b_n$存在，则$\lim_{n\to+\infty}b_n$=($\frac{1+\sqrt{3}}{2}$)

解析：当 n 趋于无穷的时候$\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}b_{n-1}$另其等于$b(b>1)$，则有$b=\sqrt{1+b}$，解得$b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$（$b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}<1$ 舍去）

(4) 在第一象限内，两条平面曲线$x^2+y^2=2$与$xy=9$之间的最短距离为（$2\sqrt{2}$）

解析：一条曲线到圆的最短具体等于该曲线到圆心的距离减去半径

(5) 可用正弦或者余弦曲线反映海水的潮汐。设某地的海水高潮出现在午夜 12 点，此时水高 3.01 米，然后逐渐降至低潮，水高 0.01 米。假定下一次高潮在 12 小时后出现，则该地水高y与时间t的关系为（$y=1.51+\cos\frac{\pi t}{6}$）

1. 已知：x_1,x_2,x_3是方程$x^3+ax^2+bx+c=0$的三个根，根与系数的关系是（无需证）

$$x_1+x_2+x_3=-a,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-b,\ x_1x_2x_3=-c$$

设方程的系数a,b,c满足$a^2-2b-2c=1$且相应三次方程的根x_1,x_2,x_3均为正实数。

1) 证明：$x_k\in(0,1)(k=1，2，3)$

2) 若再设$x_1=cosA,x_2=cosB,x_3=cosC$,A,B,C 均为锐角，证明：$A+B+C=\pi.$

解析：

1) 由$a^2-2b-2c=1$知$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^3+2x_1x_2x_3=1$

x_1,x_2,x_3均为正实数，所以$x_k{}^2<1,(k=1，2，3)$

所以$x_k\in(0,1)(k=1，2，3)$

2) $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^3+2x_1x_2x_3=1$

解出x_3舍去负值，得$x_3=\frac{-2x_1x_2+\sqrt{(2x_1x_2)^2-4(x_1{}^2+x_2{}^2-1)}}{2}=-2x_1x_2+\sqrt{1-x_1{}^2}\sqrt{1-x_2{}^2}$

带入$x_1=cosA,x_2=cosB,x_3=cosC$,得

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\cos A+B$$

因为 A,B,C 均为锐角，所以$A+B+C=\pi.$

2.(10′)古希腊的 Achilles 和乌龟赛跑，他跑得比乌龟快十倍，但乌龟的起点靠前 100 码。古希腊的哲学家 Zeno 辩解说 Achilles 永远也追不上乌龟，因为当他跑到乌龟的旗袍出时，乌龟到了 110 码处；当他到 110 码初时，乌龟到了 111 码；以此类推，Achilles 是逐渐逼近乌龟，当永远也追不上乌龟。这显然是一个有悖于常识的荒谬结论，请给出你对此问题的解释。

解析：Zeno 的辩解是在时间可以被无限分割的条件下得到的结论，但是根据量子学的观点，时间有最小的单位，不可再分割。另一方面，从级数的观点来看，不妨设 Achilles 的速度为 100 码/单位时间，则 Achilles 追上乌龟所用的时间为$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{10})^n$，改级数收敛，收敛到$\frac{10}{9}$，所以 Achilles 可以追上乌龟。

3.设a,b,c为常数且$a>0,b\geq 0$,函数$f(x)=ax^2+bx+c$当$|x|\leq 1$时满足条件$|f(x)|\leq 1$.证明：当$|x|\leq 1$ 时，有$|f'(x)|\leq 4$.

解析：分类讨论即可

4. 从悬链线$y=ch(x)$的顶点$(0,1)$作悬链线在点 $P(x_0,y_0)$的切线垂线L. 证明：L被两坐标所截的长度等于点P的纵坐标y_0

证明：切线方程$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

与x轴交点$(x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)},0)$，与$y$轴交点$(0,y_0-x_0f'(x_0))$

L被两坐标所截的长度$\sqrt{\left(x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2+(y_0-x_0f'(x_0))^2}$

整理得$\sqrt{\left(x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)}\right)^2+(y_0-x_0f'(x_0))^2}=y_0$

5.已知一函数$f(x),x\neq 0,-1,-2,\ldots$，满足$f(x+1)=xf(x)$，$N^+$为正整数集。

1) 证明：对$1<x<n+1$ 且$x\notin N^+,n\in N^+$,有$f(1-x)=\frac{f(n+1-x)}{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}$;

2) 若又已知对$0<x<1$有$f(x)f(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$,证明：

$$f\left(1+\frac{2012}{3}\right)f\left(1-\frac{2012}{3}\right)=\frac{2012\pi}{3\sin(\pi/3)}$$

解析：

1) 略

2) 由$f(x+1)=xf(x)$与$f(x)f(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$,知$f(x+1)f(1-x)=\frac{\pi x}{\sin(\pi x)}$

带入$x=\frac{2012\pi}{3}$得$f\left(1+\frac{2012}{3}\right)f\left(1-\frac{2012}{3}\right)=\frac{2012\pi}{3\sin(2012\pi/3)}=\frac{2012\pi}{3\sin(\pi/3)}$

综合部分

1.福特汽车的董事长福特曾说，“一个好的企业和一个伟大的企业的区别在于：一个好的企业能够给客户提供好的产品和服务，而一个伟大的企业不仅提供产品和服务，而且还竭尽全力使这个社会变得更加安全、和谐和美好。”请你结合自己的认识与理解，谈谈企业作为社会公民，应该履行的社会责任有哪些？（20分）

2.随着微博的快速兴起，企业微博已经成为企业与用户沟通的一个有效快速的平台。结合你的知识，谈谈相对于个人微博而言，企业微博在内容和管理上有什么特点？（20分）

3.“No news is good news”.这句话源自美国南北战争时期，参战的人阵亡后，家人会收到阵亡通知，所以人们很怕得到噩耗，相反，如果没有什么消息则证明还有活着的希望。现在，一些具有社会知名度的企业同样认为：“No news is good news”.对于这个现象你怎么理解？（20分）

4.数学已经成为管理学最重要的分析工具。如果没有数学，那么经济学和管理学就不可发展到现在的程度和水平。在你目前掌握和了解的数学知识中，有哪些可以用于企业的决策。（20分）

5.现代“管理学之父”彼得德鲁克说：“21 世纪企业之间的竞争不再是产品与产品之间的竞争，而是商业模式的竞争”。由此可见，商业模式对于企业发挥的重要作用。假设你作为一名即将创业的创业者，你认为一个完整的商业模式包含的要素有哪些？（20分）