考试日期：2022-06-27 8：30-11：00

2021~2022 学年第二学期《微积分（一）》课程考试试卷（A 卷）

一．单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的待定特解形式可设为【A】.

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$　　B. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$　　C. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$　　D. $y^*=ax^2+bx+c+B\cos x$

答案解析：齐次方程特征根为 $\pm i$，非齐次项为 $f_1=x^2+1$ 的方程特解形式为 $y_1^*=ax^2+bx+c$，非齐次项为 $f_2=\sin x$ 的方程特解形式为 $y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$，由线性方程解的叠加原理可知 A 为原方程的特解形式.

2. 在下列极限结果中，正确的是【B】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$　　B. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$　　C. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x+y}=0$　　D. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x+y}=0$

答案解析：A $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$，即不同直线路径极限不同；

B 因为 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|x|}{2}\to0,(x,y)\to(0,0)$，由夹挤原理知结论正确；

C $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to-x+kx^2}}\dfrac{xy}{x+y}=-\dfrac{1}{k}(k\ne0)$，即不同抛物线路径极限不同；

D $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to-x+kx^3}}\dfrac{x^2y}{x+y}=-\dfrac{1}{k}(k\ne0)$，即不同立方曲线极限不同；

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$【B】.

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

答案解析：积分换序后 $F(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\int_1^x\mathrm{d}y=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$，故 $F'(2)=f(2)$.

4. 设曲线 $L: f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续导数），过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，T 为 L 上点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是【C】.

A. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s$　　B. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x$　　C. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

答案解析：用等量代换可知 A $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s=T$ 的弧长，一定大于零；

B. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x=\int_T \mathrm{d}x=x_N-x_M>0$；

C. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y=\int_T \mathrm{d}x=y_N-y_M<0$；

D. $\int_T f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y=\int_T \mathrm{d}f(x,y)=0$（因为 $f(x,y)=1,\mathrm{d}f(x,y)=0.$）

5. 设 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=0\end{cases}$ 为连续函数，则 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=$【D】.

A. 0　　B. $2\pi a^3$　　C. $\frac{1}{3}\pi a^2$　　D. $\frac{2}{3}\pi a^3$

答案解析：用轮换对称性，可知 $\oint_L x^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a$.

6. 设两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$，则下列结论正确的是【C】.

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛　　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛　　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散

答案解析：A 的反例为：$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$；B 的反例为 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$；

C $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$，再加条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ 可知两数列有界，故 $a_n^2b_n^2\le M|b_n|$，从而由正项级数的审敛法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛.

D 的正例为 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},b_n=\sqrt{n}$，$a_n^2b_n^2=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散；

反例为 $a_n=\frac{1}{n^2},b_n=\sqrt{n}$，$a_n^2b_n^2=\frac{1}{n^3}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛.

二．填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将结果涂在答题卡上。）

7. 经过点 $A(1,-2,3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为________.

答案： $3y+2z=0$.

8. 设矢量场 $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=$________.

答案：$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & yz & zx \end{vmatrix}=\{-y,-z,0\}$.

9. $u=x\mathrm{e}^{y}z^{3}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分为________.

答案：$\mathrm{e}\mathrm{d}x+\mathrm{e}\mathrm{d}y+3\mathrm{e}\mathrm{d}z$.

10. 若将函数 $f(x)=\pi-x\ (0\le x\le\pi)$ 展开正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n\sin nx$，则系数 $b_4=$________.

答案：$b_4=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin 4x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

三．计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 设方程组 $\begin{cases} u+v=x, \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 确定隐函数为 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，且 $u\ne v$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解：对方程组两边关于 x 求导：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=1, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$ （*）

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{v}{u-v},\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{-u}{u-v}$.

12. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $S:z=x^2+y^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处指向上侧的法矢量，求函数 $u=xz^3-3yz$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处沿着 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$.

解 因为 $u_x=z^3,u_y=-3z,u_z=3xz^2-3y$ 处处连续，故函数 $u=xz^3-3yz$ 处处可微.

$\nabla u\big|_{P_0}=\{z^3,-3z,3xz^2-3y\}\big|_{P_0}=\{8,-6,9\}$.

令 $F=z-(x^2+y^2)$，$\nabla F(P_0)=\{-2x,-2y,1\}\big|_{P_0}=\{-2,-2,1\}$，故可取法矢量 $\boldsymbol{n}=\{-2,-2,1\}$，其单位化矢量为 $\boldsymbol{n}^{\circ}=\{-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\}$；

所求方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}(P_0)=\dfrac{5}{3}$.

13. 计算 $I=\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是正方形区域 $0\le x\le 2.0\le y\le 2$.

解 曲线 $xy=1$ 将 D 分割为左右两个部分，分别记为 D_1,D_2，其中

$D_2=\{(x,y)\,|\,1/x\le y\le 2, 1/2\le x\le 2\}$，则

$$I=\iint_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4+\int_{1/2}^{2}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}(xy-1)\mathrm{d}y=\frac{19}{4}+\ln 2\,.$$

14. 计算 $I=\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 Σ 向 xy 面投影区域为 $D: x^2+y^2\le 2ax$，$\mathrm{d}S=\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

故偶倍奇零得

$$I=\sqrt{2}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4\,.$$

15. 设 $S: x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 的外侧，求 $I=\oiint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 设 $V: x^2+y^2+z^2\le R^2$，用高斯公式得

$$I=\iiint_V(3x^2+2y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi\int_0^R\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{4\pi R^5}{5}\,.$$

16. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域，并求其和函数 $S(x)$.

解 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{1-x}-1-\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right),-1<x<1,x\ne 0,$$

当 $S(0)=0$.

故 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}\ln(1-x), -1<x<1, x\ne 0,\\ 0, \qquad\qquad x=0.\end{cases}$

四．应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，求非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解.

解： 由二阶常系数线性齐次微分方程特征值方法可知 特征值为 $r_1=r_2=1$，故特征方程为 $(r-1)^2=r^2-2r+1=0$，所以微分方程应为 $y''-2y'+y=0$，即 $a=-2, b=1$.

非齐次方程 $y''-2y'+y=x$ 的一个特解为 $y^*=x+2$；其通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2$，

代入 $y(0)=2, y'(0)=0$ 可确定 $C_1=0, C_2=-1$，

所以所求的特解为 $y=(-x)\mathrm{e}^x+x+2$.

18. 求 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解 由 $f_x=2x-2xy^2=0, f_y=4y-2x^2y=0$ 解得区域 D 内部的驻点为 $M_{1,2}(\pm\sqrt{2},1)$.

当 $y=0,|x|<2$ 时，$f(x,0)=x^2$ 有唯一驻点 $M_3(0,0)$；

当 $x^2+y^2=4,|x|<2$ 时，$f(x,y)=x^2+(2-x^2)(4-x^2)$ 有驻点 $M_{4,5}(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}})$.

比较 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$，$f(0,0)=0$，$f(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}})=\dfrac{3}{2}$，$f(\pm 2,0)=4$，得最大值为 4，最小值为 0.

五．综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$ 是条件收敛的.

解 1 $\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}+\dfrac{1}{n^2-1}$，$\sum\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}$ 收敛，$\sum\dfrac{1}{n^2-1}$ 收敛，故原级数收敛；

但 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|\sim\dfrac{1}{n}$，由 $\sum\dfrac{1}{n}$ 发散，和正项级数的比阶审敛法可知 $\sum\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|$ 发散；

所以原级数条件收敛.

解 2 $\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot\dfrac{1}{1-(-1)^n/n}=\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot(1+\dfrac{(-1)^n}{n}+\mathrm{o}(\dfrac{1}{n}))=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$，

由莱布尼兹判别法，交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

因为 $\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\sim\dfrac{1}{n^2}(n\to+\infty)$，$\sum\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，由正项级数的比阶审敛法，$\sum\left(\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\right)$ 收敛；

故 $\sum\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}=\sum[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})]$ 收敛；

但 $\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|\sim\dfrac{1}{n}$，由 $\sum\dfrac{1}{n}$ 发散，和正项级数的比阶审敛法可知 $\sum\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|$ 发散；

进而原级数条件收敛.

解 3 由于$\dfrac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)-(-1)^{2k-1}}+\dfrac{(-1)^{2k}}{2k-(-1)^{2k}}=\dfrac{1}{2k(2k-1)}\sim\dfrac{1}{4k^2}$，所以

设原级数的部分和为S_n，则$S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{2k(2k-1)}$收敛，记$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=S$；

对两边$S_{2n+1}=S_{2n}+\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+(-1)^{2n+1}}$取极限得$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n+1}=S$，

所以原级数收敛；

但$\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|\sim\dfrac{1}{n}$，由$\sum\dfrac{1}{n}$发散，和正项级数的比阶审敛法可知$\sum\left|\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}\right|$发散；

进而原级数条件收敛.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其始点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记 $I=\int_L\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$.

（i）证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

（ii）当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

解 1 （i）令 $P=\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)],Q=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$，则 $P_y=Q_x=f(xy)+xyf'(xy)-\dfrac{1}{y^2}$，故曲线积分 I 与路径 L 无关；

（ii）由于积分与路径无关，将路径换为 $xy=ab$，则

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(ab)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(ab)-1]\mathrm{d}y=\left(f(ab)xy+\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

解 2 （i）由于 $\dfrac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left[F(xy)+\dfrac{x}{y}\right]$，（其中 $F'(t)=f(t)$）所以积分与路径无关；

（ii）$\displaystyle\int_{(a,b)}^{(c,d)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y=\left[F(xy)+\frac{x}{y}\right]_{(a,b)}^{(c,d)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.