



2022 ~ 2023 学年第一学期

《高等数学(A)》(上) 期末考试试卷 A 卷 (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

考试日期: 2023-2-15

考试时间: 8:30 -11:00AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分	20	12	30	14	24	100

得 分	
评卷人	

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1. $\sup \left\{ \arctan \frac{1}{1-x} : x > 1 \right\} = \underline{0}$, $\inf \left\{ \arctan \frac{1}{1-x} : x > 1 \right\} = \underline{-\frac{\pi}{2}}$.

2. 设 $[x]$ 为取整函数, $a > 0, b > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nb]}{[na]} = \underline{\frac{b}{a}}$.

3. 函数 $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{3}}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $\underline{2}$.

4. 曲线 $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ 的渐近线有 $x=1, y=\frac{1}{2}x+1$.

5. 微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的通解是 $\underline{y = C_1 e^{C_2 x}}$.

得 分	
评卷人	

二. 单项选择题(每小题 4 分, 共 12 分)

6. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{1+x^2}, & x > 0 \end{cases}$ 的一个原函数为 (D).

A. $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0, \\ \arctan x, & x > 0; \end{cases}$

B. $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x}, & x > 0; \end{cases}$

C. $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0, \\ -\operatorname{arccot} x, & x > 0; \end{cases}$

D. $F(x) = \begin{cases} x^2 + x - \frac{\pi}{2}, & x \leq 0, \\ -\arctan \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续, $I = \int_{-a}^a x^3 [f(-x) + f(x)] dx$, 则 I 的值 (B).

- A. 大于 0;
- B. 等于 0;
- C. 小于 0;
- D. 不能确定.

8. 设函数 $f(x) = \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{1}{t \ln^{x+1} t} dt$ ($x > 0$) 在 $x = x_0$ 处取得最小值, 则 $x_0 =$ (A).

- A. $\frac{1}{\ln 2}$;
- B. $\ln 2$;
- C. $2 \ln 2$;
- D. $\frac{1}{2 \ln 2}$.

得 分	
评卷人	

三. 计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

9. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{n}{n^2 + 1} \right) \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}}$.

$$\text{解: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 x e^x dx \quad 3 \text{分}$$

$$= (x-1)e^x \Big|_0^1 = . \quad 1 \text{分}$$

$$\text{故原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sin \frac{n}{n^2 + 1} \right) = +\infty. \quad 2 \text{分}$$

10. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (x^{\frac{1}{x}} - 1)$.

解:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (e^{\frac{1}{x} \ln x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \frac{\ln x}{x} \quad 3 \text{分}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = 0. \quad 3 \text{分}$$

11. 计算 $\int \frac{2x+5}{x^2 + 2x + 4} dx$.

$$\text{解: 原式} = \int \frac{2x+2+3}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} + \int \frac{3}{(x+1)^2 + 3} dx \quad 2 \text{分}$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 4) + \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \quad 2 \text{分}$$

$$= \ln(x^2 + 2x + 4) + \sqrt{3} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad 2 \text{分}$$

12. 设 $x = t + e^t$, $y = \int_0^t e^{u^2} du$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^{t^2}}{1+e^t}, \quad 3 \text{分}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{t^2}}{1+e^t} \right) = \frac{2te^{t^2}(1+e^t) - e^{t^2}e^t}{(1+e^t)^3} = \frac{(2t-1)e^{t^2+t} + 2te^{t^2}}{(1+e^t)^3}. \quad 3 \text{分}$$

13. 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$) 的面积和全长.

$$\text{解: 周长 } L = 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a. \quad 3 \text{分 (公式对2分)}$$

面积

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}) d\theta \\ &= a^2 \left(\frac{3\theta}{2} + 2 \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^\pi = \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned} \quad (3 \text{分, 公式对2分})$$

得 分	
评卷人	

四. 解答题 (每小题 7 分, 共 14 分)

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足方程 $\int_0^x (e^t - 2e^t) f(t) dt = e^x (x^2 - 2x)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

$$\text{解: 原方程可化为: } e^x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x e^t f(t) dt = e^x (x^2 - 2x), \quad 2 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } f(x) \text{ 连续, 两边可对 } x \text{ 求导, 得 } e^x \int_0^x f(t) dt + e^x f(x) - 2e^x f(x) = e^x (x^2 - 2),$$

或 $\int_0^x f(t)dt - f(x) = x^2 - 2, \Rightarrow f'(x) - f(x) = -2x, \text{ 且 } f(0) = 2.$ 3 分

解得

$$f(x) = e^{-\int (-1)dx} \left[\int (-2x)e^{\int (-1)dx} dx + C \right] = 2x + 2 + Ce^x,$$

由 $f(0) = 2$ 得 $C = 0$, 所以 $f(x) = 2x + 2.$ 2 分

15. 讨论积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^p} dx$ 的敛散性, 并说明理由.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-1} \cdot \frac{x \arctan x}{1+x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^{-p}} \arctan x = \frac{\pi}{2} > 0,$ 3 分

所以由比较判别法知, 当 $p-1 \leq 1$, 即 $p \leq 2$ 时, 积分发散; 2 分

当 $p-1 > 1$, 即 $p > 2$ 时, 积分收敛. 2 分

五. 证明题 (每小题 8 分, 共 24 分)

得 分	
评卷人	

16. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 对 $x \in (-\infty, +\infty), f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上必能取到最大值.

证: 因为 $f(x) > 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 所以 $\exists x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x_0) > 0.$ 1 分

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 所以对 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$, $\exists X > \max\{0, |x_0|\}$, 当 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0),$

即

$$0 < f(x) < \frac{1}{2}f(x_0), |x| > X. \quad 2 \text{ 分}$$

再由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可知, $f(x)$ 在 $[-X, X]$ 上连续, 从而在 $[-X, X]$ 上取到最大值 $M.$ 3 分

又 $M \geq \frac{1}{2}f(x_0)$, 且对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x) \leq M$, 即 M 是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最大值. 2 分

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)dx.$

证: $\because \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)dx = \int_0^{\pi} f(|\sin x|)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(|\sin x|)dx \quad 2 \text{ 分}$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\sin x|)dx = \int_0^{\pi} f(|\sin(\pi+t)|)dt = \int_0^{\pi} f(|\sin t|)dt,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)dx = 2 \int_0^{\pi} f(|\sin x|)dx. \quad (1) \quad 2 \text{ 分}$$

解答内容不得超过装订线

又

$$\int_0^\pi f(|\sin x|)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(|\sin x|)dx,$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(|\sin x|)dx \stackrel{x=\pi-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(|\sin(\pi-t)|)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin t|)dt,$$

2 分

$$\therefore \int_0^\pi f(|\sin x|)dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)dx. \quad (2)$$

由(1)(2)知原式成立.

2 分

18. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数, $f(a) = 0$, 证明: $\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$.

证法一: 令 $F(x) = \frac{(x-a)^2}{2} \int_a^x [f'(t)]^2 dt - \int_a^x f^2(t)dt$,
2 分

因为 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因此 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$F'(x) = (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt + \frac{(x-a)^2}{2} [f'(x)]^2 - f^2(x) \quad 2 \text{ 分}$$
$$\geq (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt - f^2(x)$$
$$\geq (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt - [\int_a^x 1 \cdot f'(t)dt]^2$$
$$\geq (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt - \int_a^x 1^2 dt \cdot \int_a^x [f'(t)]^2 dt = 0. \quad 2 \text{ 分}$$

因此 $F(b) \geq F(a) = 0$, 即 $\int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx$.
2 分

法二: $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$,
2 分

由柯西许瓦兹不等式, 有 $f^2(x) = [\int_a^x 1 \cdot f'(t)dt]^2 \leq \int_a^x 1^2 dt \cdot \int_a^x [f'(t)]^2 dt = (x-a) \int_a^x [f'(t)]^2 dt$,
3 分

两边积分可得

$$\int_a^b f^2(x)dx \leq \int_a^b \{(x-a) \int_a^b [f'(t)]^2 dt\} dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \quad 3 \text{ 分}$$