

华中科技大学 2023-2024 学年 第一学期
微积分 A 答案 试卷 (模拟卷)

院(系)_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

试卷卷面成绩						
题号	一	二	三	四	五	小计
得分						

得分

一、单项选择题 (共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{2}{x}} = (\quad)$$

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 36

答案：C

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2^x + 3^x}{2} \right]^{\frac{2}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{2}{x} \ln \frac{2^x + 3^x}{2} \right) \\
 &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln \frac{2^x + 3^x}{2}}{x} \right) \\
 &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(2^x \ln 2 + 3^x \ln 3)}{2^x + 3^x} \right) \\
 &= \exp((\ln 2 + \ln 3)) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

2. 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 则下列说法正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \neq 0$

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{a_n} - e^{b_n}) = 0$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin a_n - \sin b_n) = 0$

答案： D

对于 A, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \neq 0$, 可举 $a_n = n, b_n = \frac{1}{n}$ 即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 故 A 错;

对于 B , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$, 可举 $a_n = n, b_n = \frac{1}{n^2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 故 B 错;

对于 C , 取 $a_n = \ln(n+1), b_n = \ln(n)$ 易得, C 错;

对于 D , 由 Lagrange 中值定理, 在 a_n 与 b_n 之间存在 ξ s.t. $\sin(a_n) - \sin(b_n) = \cos \xi (a_n - b_n) \rightarrow 0(n \rightarrow +\infty)$, 故 D 正确。

答案： B

解：令 $1 - e^h = t$, 则 $h = \ln(1 - t)$, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $t \rightarrow 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\ln(1-t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \cdot \frac{t}{\ln(1-t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \cdot (-1), \end{aligned}$$

由导数的定义知, 应选 (B). 关于其他三个选项的排除, 可用反例说明. 取 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导, 但

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos h|}{h^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h - \sin h|}{h^2} = 0,$$

故排除 (A) 和 (C). 又取 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 从而 $f'(0)$ 不存在. 但

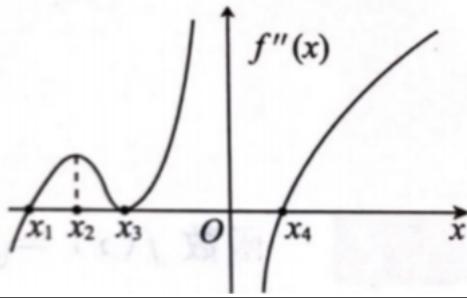
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0^*} \frac{1}{h} (1 - 1) = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (0 - 0) = 0.$$

即 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[f(2h) - f(h)]$ 存在, 故排除 (D).

4. 设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 其二阶导数如图所示, 则 $y = f(x)$ 的拐点个数为 ()

- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4



答案: C

解: 只须考察 $f''(x) = 0$ 的点与 $f''(x)$ 不存在的点. $f''(x_1) = f''(x_4) = 0$, 在 $x = x_1, x_4$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 故凹凸性相反, $\Rightarrow (x_1, f(x_1)), (x_4, f(x_4))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. $x = 0$ 处 $f''(0)$ 不存在, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 在 $x = 0$ 两侧 $f''(x)$ 变号, 因此 $(0, f(0))$ 也是 $y = f(x)$ 的拐点.

虽然 $f''(x_3) = 0$, 但在 $x = x_3$ 两侧 $f''(x) > 0, y = f(x)$ 是凹的. $(x_3, f(x_3))$ 不是 $y = f(x)$ 的拐点. 因此总共有三个拐点. 选 (C).

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

5. 设 $f(x)$ 可积, 则下列结论正确的是 ()

- (A) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$
 (B) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$
 (C) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$
 (D) 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt = A$

答案: D

解: A: 令 $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), x_n = \frac{1}{n\pi}$, A 错;

B: 令 $x_n \equiv 0, f$ 在 0 处有跳跃间断点, B 错;

C: 令 f 在所有整数处取 1, 其余取 0, C 错;

D: $\int_0^{[x]} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt \leq \int_0^x \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt \leq \int_0^{[x]+1} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt$, 根据夹逼定理得, D 正确。

得分

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.)

6. 利用定积分定义求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2023^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sum_{i=0}^{n-1} 2023^{\frac{i}{n}} \sin 2023^{\frac{2i+1}{2n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\cos 1 - \cos 2023$

解

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sin 2023^{\frac{2i+1}{2n}} \right) \left(2023^{\frac{i+1}{n}} - 2023^{\frac{i}{n}} \right).$$

这里的和式, 可看成函数 $\sin x$ 在 $[1, 2023]$ 上按分划

$$1 = 2023^{\frac{0}{n}} < 2023^{\frac{1}{n}} < 2023^{\frac{2}{n}} < \cdots < 2023^{\frac{n}{n}} = 2023$$

所作的积分和. 其中 $\Delta x_i = 2023^{\frac{i+1}{n}} - 2023^{\frac{i}{n}}$ 为小区间 $\left[2023^{\frac{i}{n}}, 2023^{\frac{i+1}{n}}\right]$ 的长度. 最大区间长度

$$\lambda : 0 \leq \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \leq 2023 \left(2023^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= 2023^{\frac{2i+1}{2n}} \in \left[2023^{\frac{i}{n}}, 2023^{\frac{i+1}{n}} \right] \text{ 为小区间二端点的比例中项. 因此原极限} \\ &= \int_1^{2023} \sin x \, dx = \cos 1 - \cos 2023. \end{aligned}$$

7. $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $f(x) = \ln(1 - ax) + \frac{x}{1 + bx}$ 在 $x \rightarrow 0$ 关于 x 的无穷小的阶数最高.

答案: $a = 1, b = -\frac{1}{2}$

解: 应用麦克劳林公式, 有

$$\begin{aligned} \ln(1 - ax) &= -ax - \frac{1}{2}(ax)^2 - \frac{1}{3}(ax)^3 + o(x^3), \\ \frac{1}{1 + bx} &= 1 - bx + (bx)^2 - (bx)^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &= -ax - \frac{1}{2}(ax)^2 - \frac{1}{3}(ax)^3 + x - bx^2 + b^2 x^3 + o(x^3) \\ &= (1 - a)x - \left(\frac{a^2}{2} + b \right) x^2 + \left(b^2 - \frac{1}{3}a^3 \right) x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} 1 - a = 0, \\ \frac{a^2}{2} + b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = 1, b = -\frac{1}{2}$, 此时 $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$. 所以 $a = 1, b = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的无穷小阶数最高 (3 阶). 应填 $1, -\frac{1}{2}$.

8. 设函数 $f(x) = (x + 1)^n e^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

答案: $n!e^{-1}$

解: 根据莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(-1) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left\{ [(x+1)^n]^{(k)} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-k)} \right\} \Big|_{x=-1} \\ &= C_n^n \left\{ [(x+1)^n]^{(n)} \left(e^{-x^2}\right)^{(n-n)} \right\} \Big|_{x=-1} \\ &= n!e^{-1} \end{aligned}$$

9. 心脏线 $r = 1 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的全长为 _____

答案: 8 解: 由对称性, 只需考虑对应 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的一段

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8. \end{aligned}$$

10. 设函数列 $f_n(x) = \int_0^x \sin^n t dt, n = 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{k=1}^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f_k(x) dx = _____$

解:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f_k(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_k(x) d(\sin x) \\ &= f_k(x) \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'_k(x) dx \\ &= f_k\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f_k(x) dx &= \sum_{k=1}^5 \left(f_k\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) - f_6\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{5}{32}\pi \end{aligned}$$

得分

三、计算题 (共 5 小题, 每小题 7 分, 共 35 分)

11. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} dx$

解: 因为

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{(x^2+x)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{1+x} dx - \int \frac{1}{1+x+x^2} dx \\ &= \ln|x| - \ln|1+x| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

12. 求函数 $y = (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}$ 的渐近线

解: 已知函数 $y = (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} = \infty,$$

所以没有水平渐近线;

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} = 0,$$

所以没有垂直渐近线; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)}{x} e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - x$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1) - e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - 1)}{\frac{1}{x}} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{-1} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \\ &= -1 - 1 = -2,\end{aligned}$$

则有斜渐近线 $y = x - 2$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)}{x} e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} = e^\pi \\ \text{则 } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - e^\pi x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - e^\pi x] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - e^\pi) - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}} - e^\pi)}{\frac{1}{x}} - e^\pi \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2} - e^\pi \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}}{-1} \cdot \frac{x^2}{1+x^2} - e^\pi \\ &= -e^\pi - e^\pi = -2e^\pi \end{aligned}$$

则有斜渐近线 $y = e^\pi x - 2e^\pi = e^\pi(x-2)$. 综上所述: 函数 $y = (x-1)e^{\arctan x + \frac{\pi}{2}}$ 的渐近线为 $y = x - 2, y = e^\pi(x - 2)$.

13. 设 $y = y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 1 + te^y \end{cases}$ 确定的隐函数, 求 y 关于 x 在 $(0, 1)$

这一点的导数值 $\frac{dy}{dx}$

解: $(0, 1)$ 处, 参数 $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} = 1$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dte^y}{dt} = e^y + te^y \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y}{1-te^y} = e$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e$$

14. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx$

解:

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 x - 1) + 1}{1 + \sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) + \frac{1}{1 + \sin x} dx \\
&= (-\cos x - x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx \\
&= 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx
\end{aligned}$$

令: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ 则 $dt = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{t}{2}\right) dx$ 使用半角公式 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

积分的限制随着代换而改变: 当 $x = 0, t = 0$ 当 $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$ 在新的变量 t 下, 积分变成了:

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} dt = 1$$

因此, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx = 1$

因此, 原式 $= 2 - \frac{\pi}{2}$

15. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$. 在曲线 $y = f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x)) (x \neq 0)$ 作曲线的切线, 此切线在 x 轴上的截距记作 μ , 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\mu)}{\mu f(x)}$

解: 过点 $(x, f(x))$ 的曲线 $y = f(x)$ 的切线方程为: $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$, 注意到: 由于 $f'(0) = 0, f''(0) > 0$, 所以当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) \neq 0$ 。因此, 此直线在 x 轴上的截距为

$$\mu = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow 0} \mu = \lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

利用泰勒公式将 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点处展开, 得到 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2 = \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2$, ξ_1 在 0 与 x 之间; 类似可得: $f(\mu) = \frac{1}{2}f''(\xi_2)\mu^2$, ξ_2

在 0 与 μ 之间。代入得

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(\mu)}{\mu f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{2}} f''(\xi_2) \mu^2}{\mu^{\frac{1}{2}} f''(\xi_1) x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi_2)}{f''(\xi_1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\mu}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f'(x) - f(x)}{x f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f''(x)}{f'(x) + x f''(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\frac{f'(x)}{x} + f''(x)} = \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

得分

四、综合应用题 (共 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

16. $f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), & x > 0, a \in \mathbf{N}_+, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

- (1) $f(x)$ 处处可导, 求 a 的最小值;
 (2) $f(x)$ 连续可导且 $f'(x)$ 处处连续, 求 a 的最小值.

解: (1) 显然 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处可导且 $f'(x)$ 在 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上连续. 注意到

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x > 0.$$

为了使 f 在 0 处可导. 我们需要 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ 不存在并且 $\left|\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| \leq 1$, 为了使 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, 我们需要 $a \geq 2$. 因此 $a_{\min} = 2$.

(2). 根据 (1), 我们只考虑 $a \geq 2$. 注意到

$$f'(x) = ax^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) - 3x^{a-4} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x > 0$$

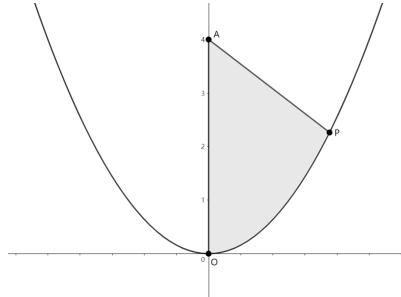
为了使 f' 连续, 我们需要 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{a-1} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$, 我们需要

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-4} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

为了使结论成立, $a_{\min} = 5$.

17. 给定曲线 $L : y = 4x^2, x \geq 0$, 点 $O(0, 0), A(0, 4)$. 设质点 P 在 $t = 0$ 时刻从 O 点开始沿着曲线 L 做变速运动, t 时刻的坐标为 $(x(t), y(t))$, D 表示直线 OA 、直线 AP 及曲线 L 所围图形, $S(t)$ 表示 t 时刻 D 的面积。

- (1) 当 P 点运动到 $(1, 4)$ 时, 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得立体的体积
- (2) 若 P 经过点 $(2, 16)$ 时沿 x 轴正方向的速度 $x'(t)$ 为 5, 求该时刻 S 关于时间 t 的变化率 $\frac{dS}{dt} \Big|_{x=2}$



解: (1)

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(4^2 - y^2) dx \\ &= \int_0^1 \pi(16 - 16x^4) dx = \frac{64}{5}\pi \end{aligned}$$

(2) 设 $S_1 = S_{\Delta OAP}, S_2 = S - S_1$

$$\begin{aligned} S(t) &= S_1(t) + S_2(t) \\ &= \frac{1}{2}x(t) * 4 + \int_0^t \left(\frac{y(t)}{x(t)}x(u) - 4x^2(u) \right) du \\ &= 2x(t) + \int_0^t (4x(t)x(u) - 4x^2(u)) du \\ &= 2x(t) + 4x(t) \int_0^t x(u) du - 4 \int_0^t x^2(u) du \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} S'(t) &= 2x'(t) + 4x'(t) \int_0^t x(u) du + 4x^2(t) - 4x^2(t) \\ &= 2x'(t) + 4x'(t) \int_0^t x(u) du \\ &= 2 \times 5 + 4 \times 5 \times 2 \\ &= 50 \end{aligned}$$

得分

五、综合解答题 (共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

18. 证明: 对每个正整数 n , 方程 $x^{n+2} - 2x^n - 1 = 0$ 只有唯一正根.

证：当 $k > 4$ 时, $4 - k < 0$, 最小值点 $(1, 4 - k)$ 在 x 轴下方, 曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴有两个交点, $g(x) = 0$ 有两个实根, 分别位于 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$. 设 $f(x) = x^{n+2} - 2x^n - 1$, 则有

$$f(0) = f(\sqrt{2}) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(\lambda) = (n+2)\lambda^{n-1} \left(\lambda^2 - \frac{2n}{2n+2} \right) \begin{cases} < 0 & \left(\lambda < \sqrt{\frac{2n}{2n+2}} \right), \\ = 0 & \left(\lambda = \sqrt{\frac{2n}{2n+2}} \right), \\ > 0 & \left(\lambda > \sqrt{\frac{2n}{2n+2}} \right), \end{cases}$$

及 $\sqrt{\frac{2n}{2n+2}} < \sqrt{2} \therefore$ 只有唯一正根

19. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导, 且存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) \neq 0$.

(1) 若 $f'(\xi) = 0$, 试证明: 在区间 (a, b) 中可以找出两个值 x_1 和 x_2 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 第一问的结论是否还正确, 证明你的答案.

分析: 所欲证的结论形似拉格朗日中值定理的反问题. 需由 $f'(\xi)$ 找 x_1, x_2 . 证: 不妨设 $f''(\xi) > 0$. (1) 若 $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$, 知 ξ 为 $f(x)$ 的极小值点. 由于 $f(x)$ 二阶可导, 必定存在 $\delta > 0$, 在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta] \subset (a, b)$ 内函数 $f(x)$ 在 ξ 左侧单调减少, 在 ξ 的右侧单调增加.

如果 $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$, 取 $x_1 = -\delta + \xi, x_2 = \xi + \delta$. 则可知满足欲证的等式. 如果 $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$, 取 $x_1 = -\delta + \xi$, 在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上有 $f(\xi) < f(x_1) < f(\xi + \delta)$.

由闭区间上连续函数的介值定理可知存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$, 使

$$f(x_2) = f(x_1).$$

从而欲证的等式成立. 如果 $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$, 可仿上法证明. (2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 设 $F(x) = f(x) - f'(\xi)x$. 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(\xi), F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

$$F''(x) = f''(x).$$

由于 $F'(\xi) = 0, F''(\xi) = f''(\xi) > 0$, 对 $F(x)$ 利用 (1) 的推证方法, 可知必定存在 x_1, x_2 , 使 $F(x_1) = F(x_2)$. 因此有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

可解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上可积, 且满足

$$0 \leq f(x) \leq 1, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{4}$$

求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx$ 的最大值和最小值

解:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - 1) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \sin \xi_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \sin \xi_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - 1) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \sin \xi_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \sin \xi_2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sin \xi_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx - \sin \xi_2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= (\sin \xi_1 - \sin \xi_2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

此时可取

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - 1) \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&= \sin \xi_1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (f(x) - 1) dx + \sin \xi_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx \\
&= \sin \xi_1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \xi_2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\sin \xi_1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \sin \xi_2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= (\sin \xi_2 - \sin \xi_1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

此时可取

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$