2014 年转专业考试试卷

2019 年 8 月 25 日

1. 证明：若对 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$，且 $f(0)=0$，则 $f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in(-\infty,+\infty)$

2. 用三种方法计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^n$$

3. 设 n 是正整数，$f(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}$ 计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的一阶导数，且 $f'(0)=0,f''(0)$ 存在，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$，求 $f(x)$

6. 计算不定积分

$$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

7 计算不定积分

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

8. 设 $\mu\in(0,\frac{1}{2})$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负，且 $f''(x)\leqslant 0,x\in[0,1]$，证明：
$f(t)\geqslant\mu f(s),\ \forall t\in[\mu,1-\mu],\ \forall s\in[0,1]$

解答：

1. 带入 $f(0)=0$ 可知 $|f(x)|=|x|$。注意到 f 为单射，这两个条件蕴含着 $f(x)=\pm x$
假设 $f(1)=1$，则 $|f(x)-f(1)|=|f(x)-1|$，现考虑 $x>0$。如果有一个 $f(x_0)<0$，则 $f(x_0)=-x_0$，则 $|f(x_0)-f(1)|=|-x_0-1|=|x_0-1|$。此方程只有唯一解 $x_0=0$，矛盾。因此 $f(x)>0,\ x>0$。此时由于单射，$f(x)<0,\ x<0$。综上即可知有 $f(x)=x$;
当 $f(1)=-1$，类似可证 $f(x)=-x$, 于是最终有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

5.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x(1+\dfrac{\Delta x}{x}))-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-f(x)}{\Delta x}\\
&= f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-1}{\Delta x}\\
&= \frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\dfrac{\Delta x}{x})-1}{\dfrac{\Delta x}{x}}\\
&= \frac{f(x)}{x}f'(1)=n\frac{f(x)}{x}
\end{aligned}
$$

解得 $f(x)=x^n(x>0)$

8. 令 $m=\dfrac{t-\mu s}{1-\mu}$，则易得（自己证去）$m\in(0,1)$。可知 f 连续，故：

$$f''(x)\leqslant 0\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in[0,1],\ \forall\lambda\in(0,1)\text{ 有:}f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

带入可知：

$$f(t)=f(\mu s+(1-\mu)m)\geqslant \mu f(s)+(1-\mu)f(m)\geqslant \mu f(s)$$