华中科技大学 2023 级

本科生转专业联合笔试微积分试卷解析

一．填空题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 若 $\beta \neq k\pi\left(k=0,1,2,\cdots\right)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{\beta}{2^k}=$____________ .

分析 利用倍角公式 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，有 $\tan\theta=\cot\theta-2\cot 2\theta$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{\beta}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\cot\frac{\beta}{2^k}-2\cot\frac{\beta}{2^{k-1}}\right)=\left(\frac{1}{2^n}\cot\frac{\beta}{2^n}-\cot\beta\right)\to\frac{1}{\beta}-\cot\beta,$$

所以应填 $\dfrac{1}{\beta}-\cot\beta$.

注 裂项连锁消去求和是一个必备技能，各种选拔考试、竞赛都有考查.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]=$____________ .

分析 利用泰勒公式

$$\lim_{x\to\infty}x\left[(1+\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}-(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}\right]=\lim_{x\to\infty}x\left\{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})-\left[1-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{x})+o(\frac{1}{x})\right]\right\}=\frac{4}{3},$$

所以应填 $\dfrac{4}{3}$.

3. 设 $0<a_1<\pi$，$a_{n+1}=\sin a_n$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=$____________ .

分析 利用不等式 $\sin x<x,x>0$，单调有界准则知 $\left\{a_n\right\}$ 收敛，且 $a_n\to 0$.下面用 Stolz-Cesàro 公式求极限

$$\lim_{n\to\infty}na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_n^{-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{a_{n+1}^{-2}-a_n^{-2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^{-2}x-x^{-2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{\left(x+\sin x\right)\left(x-\sin x\right)}=3,$$

所以应填 $\sqrt{3}$.

注 用 Stolz-Cesàro 公式求数列极限在非数类数学竞赛中是必备技能！

4. 设函数 $f(x)$ 在的邻域内二阶可导，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0\,,$$

则 $f''(0)=$ ______________ .

分析 利用泰勒公式，条件变化为

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+f(0))x+f'(0)x^2+(-\frac{9}{2}+\frac{f''(0)}{2})x^3+o(x^3)}{x^3}=0\,,$$

所以 $f(0)=-3, f'(0)=0, f''(0)=9$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$，则 $f^{(n)}(x)=$ ______________ .

分析 $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)$，所以

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{4}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right).$$

6. 设 $\alpha\neq\beta$ 是两个实常数，则 $\dfrac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$ 与 $\dfrac{e^\beta+e^\alpha}{2}$ 两者之较大者为 ______________ .

分析 记 $a=e^\alpha>0, b=e^\beta>0$，利用 A-L-G 不等式（算术平均值、对数平均值、几何平均值）

$$\sqrt{ab}\le\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\le\frac{b+a}{2}\,,$$

所以应填 $\dfrac{e^\beta+e^\alpha}{2}$. 如果用实数 $0,1$ 试验，很遗憾这些知识点就考查不到了！

二（本题满分 9 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=1, a_2=2, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n+1}a_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)$$

证明: 对所有 $n\ge 3$，都有 $0<na_n-3<\dfrac{6}{n-1}$.

证 递推式变形为

$$(n+1)a_{n+1}-na_n=a_n-a_{n-1}\quad(n=2,3,\cdots)$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n}\left((k+1)a_{k+1}-ka_k\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(a_k-a_{k-1}\right)\quad(n\ge 2)$$

化简为

$$\boxed{na_n-3=a_{n-1},n\ge 3}.$$

下面归纳给出 $a_n\in(0,\frac{6}{n})\quad n\ge 2$.

事实上 $a_2=2\in(0,\frac{6}{2})$，若 $a_k\in(0,\frac{6}{k})$，$k\ge 2$，则

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+1}(a_k+3)\in\left(0,\quad\frac{\frac{6}{k}+3}{k+1}\right)，即 a_{k+1}\in\left(0,\quad\frac{6}{k+1}\right).$$

综上对所有 $n\ge 3$，都有 $0<na_n-3=a_{n-1}<\dfrac{6}{n-1}$.

注 利用 $na_n-3=a_{n-1},n\ge 3$ 还可归纳出 $a_n\in(\frac{3}{n},\frac{6}{n})\quad n\ge 2$.

三、（本题满分 9 分）设正整数 $n\ge 2$，证明方程

$$(1-x^2)^n=1-x\quad x\in(0,1)$$

恰有一解.

证法一 设 $f(x)=(1-x^2)^n-1+x$，则 $f(0)=f(1)=0$.

因 $f'(x)=-2nx(1-x^2)^{n-1}+1$，有 $f'(0)=f'(1)=1$，由导数定义与极限比较性知存在 $x_1\in(0,\delta)\,(\delta<\frac{1}{2})$ 使 $\dfrac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0}>0$，存在 $x_2\in(1-\delta,1)$ 使 $\dfrac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}>0$，即 $f(x_1)>0,f(x_2)<0$，利用零点定理知存在 $\alpha\in(x_1,x_2)$，使 $f(\alpha)=0$.

又因 $f''(x)=2n(1-x^2)^{n-2}((2n-1)x^2-1)$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点，函数 f 在 $(0,1)$ 内不可能有不同于 α 的零点 β，否则由 $f(0)=f(1)=f(\alpha)=f(\beta)=0$ 及罗尔定理得 f'' 在 $(0,1)$ 内有两个零点矛盾！

证法二 方程 $(1-x^2)^n=1-x\quad x\in(0,1)$ 等价于

$$(1+x)^n=(1-x)^{1-n}\quad x\in(0,1) \text{ 或 } n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)=0\quad x\in(0,1)$$

设 $g(x)=n\ln(1+x)+(n-1)\ln(1-x)$，则 $g(0)=0,g(1^-)=-\infty$.

$$g'(x)=\frac{n}{1+x}-\frac{n-1}{1-x}=\frac{1-(2n-1)x}{1-x^2},$$

注意 $g(0)=0$，$g'(0)=1>0$，必有 $x_1\in(0,\delta)\,(\delta<\frac{1}{2n-1})$，使 $g(x_1)>0$. 利用零点定理知存在 $\alpha\in(x_1,1)$，使 $g(\alpha)=0$.

$g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2n-1})$ 内单增，在 $(\frac{1}{2n-1},1)$ 内单减，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内仅有一个零点.

四、（本题满分 9 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，对 $\left(a,b\right)$ 内任意一点 ξ，可否在 $\left(a,b\right)$ 内找到两点 α，$\beta,\xi\in(\alpha，\beta)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ 成立，试证明你的结论或举反例.

解 回答是否定的，反例为 $f(x)=x^3,x\in[-1,1]$。

考虑 $\xi=0$，对任意 α，$\beta,0\in(\alpha，\beta)\subset(-1,1)$，

$$f'(0)=0\neq\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2.$$

五、（本题满分 9 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导，且 $f'''(x)>0$，证明

$$f(a+h)-f(a)<\frac{h}{2}(f'(a)+f'(a+h))\quad(a<a+h<b)$$

证 令 $F(h)=f(a+h)-f(a)-\frac{h}{2}(f'(a)+f'(a+h))$，$F(0)=0$，

$F'(h)=\frac{1}{2}(f'(a+h)-f'(a))-\frac{h}{2}f''(a+h)$，$F'(0)=0$，

$F''(h)=-\frac{h}{2}f'''(a+h)<0$，

由单调性即得不等式.

六、（本题满分 18 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $\left(a,b\right)$ 内二阶可导，利用两种方法证明：存在 $\xi\in\left(a,b\right)$ 满足

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证法一 **（用泰勒公式）** 记 $c=\frac{a+b}{2}$，

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2 \quad a<\xi_1<c$$

$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2 \quad c<\xi_2<b$$

两式相加得

$$f(b)-2f(c)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$$

由 Darboux 定理知存在$\xi\in(a,b)$，使$f''(\xi)=\frac{1}{2}(f''(\xi_1)+f''(\xi_2))$，综上有

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

证法二 （**用柯西中值定理**）记$h(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$，

$$g(x)=\frac{b-a}{2}(x-a)$$

$$\frac{h(\frac{a+b}{2})-h(a)}{g(\frac{a+b}{2})-g(a)}=\frac{h'(\eta)}{g'(\eta)}, \quad a<\eta<\frac{a+b}{2}$$

即
$$\frac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}=\frac{f'(\frac{b-a}{2}+\eta)-f'(\eta)}{\frac{b-a}{2}}=f''(\xi),$$

其中
$$\xi\in(\eta,\eta+\frac{b-a}{2})\subset(a,b).$$

证法三 （**常数 K 值法**）记$K=\dfrac{f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{\frac{1}{4}(b-a)^2}$,令

$$F(x)=f(x)-2f(\frac{a+x}{2})+f(a)-\frac{(x-a)^2}{4}K,$$

则$F(a)=F(b)=0$，故存在$\eta\in(a,b)$，使$F'(\eta)=0$，即

$$f'(\eta)-f'(\frac{a+\eta}{2})-\frac{(\eta-a)}{2}K=0,$$

进一步存在$\xi\in(\frac{a+\eta}{2},\eta)\subset(a,b)$，使

$$f''(\xi)(\eta-\frac{a+\eta}{2})-\frac{(\eta-a)}{2}K=0,$$

化简得$f''(\xi)=K$.