1-1. $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的$(*)$条件.

A.充分不必要　B.必要不充分　C.充分必要　D.既不充分也不必要

$solution: B.$

1-2.如果$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$是比$\dfrac{1}{x+1}$高阶的无穷小,则a,b,c应满足$(*)$.

$A.a=0,b=1,c=1$　$B.a\neq 0,b=1,c$为任意常数　$C.a\neq 0,b,c$为任意常数　$D.a,b,c$为任意常数

$$solution:\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{ax^2+bx+c}}{\dfrac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{ax^2+bx+c}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2ax+b}=0\Rightarrow a\neq 0,\ \text{选择}C.$$

1-3.函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x-1},x\neq 1\\ 1,x=1\end{cases}$的连续区间为$(*)$.

$A.(-\infty,+\infty)$　$B.(-\infty,1)$与$[1,+\infty)$　$C.(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$　$D.(-\infty,1]$与$(1,+\infty)$

$$solution:\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1,\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,\text{选择}B.$$

1-4.下列正确的命题是$(*)$.

(1):初等函数在其定义域内连续;

(2):设函数定义在一个区间上,若函数在区间内一点连续,则它在该点的某邻域内连续;

(3):若函数在区间I上连续,则函数在I上有界;

(4):若函数在区间I上连续,则函数在I上有最大值;

$A.(1)(2)(3)$　$B.(2)(3)(4)$　$C.(2)(4)$　D.都不真

$solution$:(1):基本初等函数在其定义域内连续,初等函数在其定义区间内连续,

(2):例如$f(x)=xD(x),D(x)$是$Dirichlet$函数,可以验证$f(x)$仅在$x=0$处连续;

(3)(4)闭区间上连续函数具有最值定理以及有界性,选择D.

1-5.已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导,且$f(x)<0$,则$(*)$.

$A.f(-x)>0$　$B.f'(-x)<0$　$C.\lim\limits_{x\to 0}f(-x)<0$　$D.\lim\limits_{x\to 0}f(-x)>0$

$$solution:f(-x)<0,\text{而}f(x)\text{可导}\Rightarrow f(x)\text{在}x=0\text{连续},\lim_{x\to 0}f(-x)\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to 0}f(y)=f(0)<0,\text{选择}C.$$

1-6.设函数$y=f(x)$具有二阶导数,且$f'(x)>0,f''(x)<0,\Delta x$为自变量$x$在$x_0$的增量,$\Delta y$与$dy$分别为$f(x)$在$x_0$对应的增量和微分.若$\Delta x>0$,则$(*)$.

$A.0<\Delta y<dy$　$B.0<dy<\Delta y$　$C.\Delta y<dy<0$　$D.dy<\Delta y<0$

$$solution:\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\overset{taylor}{=}f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2,\xi\in(x,x+\Delta x),$$

依题意,$\Delta y<f'(x)\Delta x$,而$dy=f'(x)dx=f'(x)\Delta x$,故$\Delta y<dy$,

而:$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\overset{taylor}{=}f'(\eta)\Delta x>0,\eta\in(x,x+\Delta x)$,则$0<\Delta y<dy$,选择$A$.

$1-7.$已知$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=t^2\end{cases}$所确定,$\varphi''(t)$存在,则$\frac{d^2x}{dy^2}=(*)$.

$A.\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}$ $B.\frac{t\varphi''(t)+\varphi'(t)}{4t^3}$ $C.\frac{\varphi''(t)-t\varphi'(t)}{4t^3}$ $D.\frac{t\varphi''(t)-\varphi(t)}{4t^3}$

$solution:\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{\varphi'(t)}{2t},\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dy}{dt}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{t\varphi''(t)-\varphi'(t)}{4t^3}$,选择$A$.

$1-8.y=\sin^4x-\cos^4x$,则$y^{(n)}=(*)$.

$A.2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ $B.2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ $C.-2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$ $D.-2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$

$solution:y=\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x-\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)=-\cos 2x,$

$y^{(n)}(x)=-2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$,选择$C$.

$1-9.$设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{\frac{k}{n}}}{n}$,则$\lim_{n\to\infty}x_n=(*)$.

$A.\frac{4}{\ln 3}$ $B.\frac{2}{\ln 3}$ $C.\frac{3}{\ln 3}$ $D.\frac{3}{\ln 2}$

$solution:\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1=\frac{2}{\ln 3}$,选择$B$.

$1-10.f(x)=\frac{x^3}{x^2-9}$全部的渐近线为$(*)$.

$A.x=\pm 3,y=x$ $B.x=\pm 3,y=2x$ $C.x=\pm 3,y=-x$ $D.x=\pm 3,y=3x$

$solution:$垂直渐近线$:x^2-9=0\Rightarrow x=\pm 3$,斜渐近线$:k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-9}=1,$

$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-9}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9x}{x^2-9}\right)=0$,故斜渐近线$y=x$,无水平渐近线,选择$A$.

$2-1.$已知$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+3,f^{-1}(x)<x-2$成立,求$x$的范围

$solution:\log_{\frac{1}{2}}x+3=y\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}x=y-3\Rightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-3},$

故$:f^{-1}(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}<x-2$,记$g(x)=x-2-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3},g'(x)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}\ln 2>0,$

$g(3)=0$,故$:g(x)>0\Rightarrow x\in(3,+\infty)$.

$2-2.$设$x>1$,则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}}$.

$solution:\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}x^3\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x^3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)}{n}}=x^3\cdot\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n\cdot x^{2n}}}=x^3.$

$2-3.$计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)$.

$solution:\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sin x\right)\overset{\text{四则运算}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=1-0=1.$

$2-4.$计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}$.

$solution:\left(\arcsin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x+\frac{1}{2\cdot 3}(2x)^3\right)-2\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3\right)+o\left(x^3\right)}{x^3}=1.$$

$2-5.$求出函数$f(x)=x^4$在$[1,2]$上满足$lagrange$中值定理中的ξ的值.

$solution:f(2)-f(1)=15\overset{lagrange}{=}f'(\xi)(2-1)=4\xi^3\left(\xi\in(1,2)\right)\Rightarrow\xi=\sqrt[3]{\frac{15}{4}}.$

$2-6.$函数$f(x)=xe^{-x}$的递增区间为$(*)$.

$solution:f'(x)=(1-x)e^{-x}>0\Rightarrow x\in(-\infty,1)$, 递增区间为$(-\infty,1)$(或$(-\infty,1]$).

$2-7.$若$f(x)=x^3\ln(2+x)$, 则$f^{(6)}(0)$.

$solution:f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\Rightarrow f^{(6)}(0)=6!\cdot a_6,$

下面计算$a_n:f(x)=x^3\ln(2+x)=x^3\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\ln 2\cdot x^3=x^3\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ln 2\cdot x^3,$

则$:a_6=\frac{1}{2^3\cdot 3}=\frac{1}{24}\Rightarrow f^{(6)}(0)=30.$

$2-8.$设$f(x)$具有任意阶导数, $f'(x)=f^2(x)$, 则n阶导数$f^{(n)}(x)=(*)$.

$solution:\left(\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-a)^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}\right)$

$y'=y^2\Rightarrow\left(-\frac{1}{y}\right)'=1\Rightarrow y=\frac{1}{c-x}$, 故: $f^{(n)}(x)=\frac{n!\cdot(1)^n}{(c-x)^{n+1}}=\frac{n!}{(c-x)^{n+1}}.$

$2-9.$设$k>0$, 则$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$在$(0,+\infty)$内的零点的个数为$(*)$.

$solution:k=\frac{x}{e}-\ln x$, 记$t(x)=\frac{x}{e}-\ln x, t'(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}, t(x)$在$(0,e)$单调减, 在$(e,+\infty)$单调增,

$t(0^+)=t(+\infty)=+\infty, t(e)=0$, 故$f(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有1个零点$x=e$, 作图知共有2个零点.

$2-10.$设$y=y(x)$由$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$确定,则$y=y(x)$的极小值点为$(*)$.

$solution: 2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$两边对$x$求导,$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$,

整理得$: y'\left(3y^2-2y+x\right)=x-y\,(*)$, 令$y'=0$, 得$x=y$, 代入原方程有$: 2x^3-x^2=1$,

此即$(x-1)\left(2x^2+x+1\right)=0\Rightarrow x=1$, 再对$(*)$式求导, 有$: y''\left(3y'-2y+x\right)+y'\dfrac{\partial}{\partial x}\left(3y^2-2y+x\right)=1-y'$,

代入$x=y=1, y'=0$得$: y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$, 故$x=1$是$y=y(x)$的极小值点

$3-1.$计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

$$solution:\text{注意到}:\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]}=e^{\frac{\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]-1}{x}}=e^{\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{\text{连续性}}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}\overset{taylor}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2-x+o\left(x^2\right)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

$3-2.$设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导,如果$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022$, 计算极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

$solution:$

$$\left(\begin{array}{l}
\text{先形式分析一阶微分方程}y+2\sqrt{x}y'=2022\Rightarrow\text{注意到}y=2022\text{是非齐次方程的一个特解,}\\
\text{由解的叠加性原理,只需计算}y+2\sqrt{x}y'=0\text{的解,}\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow y=ce^{-\sqrt{x}}\text{, 原方程的解为}\\
y=ce^{-\sqrt{x}}+2022\Rightarrow\left(\left(y-2022\right)e^{\sqrt{x}}\right)'=0\\
\text{令}g(x)=f(x)-2022\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}}\overset{\frac{*}{\infty}\text{型洛必达法则}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(g(x)e^{\sqrt{x}}\right)'}{\left(e^{\sqrt{x}}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+2\sqrt{x}g'(x)\right]=0\\
\text{此即}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-2022=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2022.
\end{array}\right)$$

$$\text{分两次计算}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}}:\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}}\overset{\frac{*}{\infty}\text{型洛必达法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+f'(x)\right]e^{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}}=$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right]=2022$,此即$:\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2022.$

$3-3.$对任意正实数β, 记函数$f\left(x\right)=\left|\lg x\right|$在$\left[\beta,+\infty\right)$上的最小值为$m_{\beta}$, 函数$g\left(x\right)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$在$\left[0,\beta\right]$上的最大值为$M_{\beta}$, 若$M_{\beta}-m_{\beta}=\dfrac{1}{2}$, 求$\beta$的所有可能值.

$solution:case1:0<\beta\le 1$时, $M_{\beta}=\sin\dfrac{\pi\beta}{2}$, 而$m_{\beta}=0$, 故: $\sin\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi\beta}{2}=\dfrac{\pi}{6}$, 即$\beta=\dfrac{1}{3}$,

$case2:\beta>1, M_{\beta}=1$, 而$m_{\beta}=\lg\beta$, 故: $1-\lg\beta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\beta=\sqrt{10}$, 故$\beta\in\left\{\dfrac{1}{3},\sqrt{10}\right\}$.

$3-4.$设$\alpha\in\mathbb{R}$, 函数$f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}}-\alpha$有两个不同的零点$x_1, x_2$,

(1): 证明: $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$;

(2): 证明: $\left|x_2-x_1\right|>2\sqrt{1-e\alpha}$.

$solution:(1):f\left(x\right)=0\Rightarrow\alpha=\dfrac{x}{e^{x}}$, 令$g\left(x\right)=\dfrac{x}{e^{x}}, g'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{e^{x}}$, 故$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$单调增,

$\left(1,+\infty\right)$单调减, $\lim\limits_{x\to-\infty}g\left(x\right)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}g\left(x\right)=0, g\left(1\right)=\dfrac{1}{e}$, 作图知: $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

$(2):\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=\alpha$, 故: $\ln\alpha=\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$, 此即$\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$,

由$A-L-G$不等式有: $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1\Rightarrow x_1+x_2>2$,

不妨设$x_2>x_1$, 则: $\left|x_2-x_1\right|=x_2-x_1=\left(x_2-1\right)+\left(1-x_1\right)$, 而: $x_2-1>1-x_1$,

下证: $1-x_1>\sqrt{1-e\alpha}$, 此即: $x_1^2-2x_1>-\dfrac{ex_1}{e^{x_1}}$, 即证: $2-x_1<e^{1-x_1}, x_1\in\left(0,1\right)$,

注意到: $e^{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n!}>1+x, x>0$, 则: $e^{1-x_1}>2-x_1$, 证毕!

参考文章:

1.关于解答题$3-2$的证法参考陈玄(中央财经大学)的文章

https://zhuanlan.zhihu.com/p/419589589.