2020 级《微积分（一）下》第二学期期末考试解答

一．单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上）

1. 微分方程 $y''-3y'+2y=2x-2\mathrm{e}^x$ 的特解 y^* 的形式是【D】

A. $y^*=(Ax+B)\mathrm{e}^x$　　B. $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$

C. $y^*=Ax+B+C\mathrm{e}^x$　　D. $y^*=Ax+B+Cx\mathrm{e}^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ z+y+z=0 \end{cases}$，点 $M(1,-1,0)$ 则在点处下列说法***不正确***的是【B】

A. 切矢量为 $\{-2,-2,4\}$　　B. 切矢量为 $\{-2,2,4\}$

C. 切线方程为 $x-1=y+1=-\dfrac{z}{2}$　　D. 法平面方程为 $x+y-2z=0$

3. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处【C】

A. 可微　　B. 偏导数存在　　C. 连续　　D. 不连续

4. 已知函数 f 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r =$【C】

A. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z+y+z=0 \end{cases}$，$I=\oint\limits_\Gamma x\mathrm{d}s, J=\oint\limits_\Gamma y\mathrm{d}s, K=\oint\limits_\Gamma z^2\mathrm{d}s$. 以下说法中正确的是【B】

A. $K=0$　B. I,J,K 中有两个等于 0　C. I,J,K 都等于 0　D. I,J,K 全都不等于 0

6. 设曲线 $f(x)$ 以 2π 为周期的周期函数，且 $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ \pi-x, & 0\le x<\pi \end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，以下说法正确的是【C】

A. $S(x)$ 处处连续　　B. $S(x)\equiv f(x)$　　C. $S(-1)=0$　　D. $S(0)=\pi$

二．填空题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将计算结果涂在答题卡上）

7. 直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $x-y+2z+4=0$ 的夹角是______。

解 直线的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{2,1,1\}$，平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$. 记夹角为 φ，则

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\{2,1,1\}\cdot\{1,-1,2\}}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \quad 所以\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

8. 设 $P_0(1,1,-1), P_1(2,-1,0)$ 在，则 $u=x+y^2+z^3$ 在点 P_0 处沿着 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为__。

解 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,-2,1\}$，$\nabla u(P_0)=\{1,2y,3z^2\}_{P_0}=\{1,2,3\}$，

所以 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1-4+3)=0$.

9. 若 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 所确定，则 $z_x(0,0)=$______。

解 当 $x=0, y=0$ 时，$z=0$. 设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz-1$，则

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}+yz}{3\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xy}，所以 z_x(0,0)=-\frac{1}{3}.$$

10. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为______。

解 $\cos x$ （注：有个别学生写 $\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$，给分）

11. 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解.

解 令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分 $\ln u-1=Cx$，

故原方程的解为 $\ln\frac{y}{x}=Cx+1$.

11. 已知函数 $z=f(xy, yg(x))$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 可导，求 z_x, z_{xy}.

解 $z_x=yf_1'+yg'(x)f_2'=y[f_1'+g'(x)f_2']$；

$$z_{xy}=[f_1'+g'(x)f_2']+y[xf_{11}''+g(x)f_{12}''+g'(x)(xf_{12}''+g(x)f_{22}'')].$$

12. 计算二次积分 $I=\int_1^3 dx\int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$.

解 交换积分顺序 $I=\int_0^2 dy\int_1^{1+y}\sin y^2 dx=\int_0^2 y\sin y^2 dy=\frac{1}{2}(1-\cos 4)$.

13. 求三重积分 $I=\iiint\limits_V (x^3+y^2+z)dv$ ，其中 $V: x^2+y^2+z^2\le a^2, a>0$.

解 $I=\iiint\limits_V y^2 dv=\frac{1}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dv=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^a \rho^4 d\rho=\frac{4\pi}{15}a^5$.

15. 求 $I=\iint\limits_S (z^2+x)dydz-zdxdy$ ，其中 $S: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 2)$ 下侧.

解法一 补面 $S_1: z=2(x^2+y^2\le 4)$ 上侧，则 $S+S_1$ 为封闭曲面，且指向外侧，记其包围区域为 V . 则

$$I=\iint\limits_{S+S_1}(z^2+x)dydz-zdxdy-\iint\limits_{S_1}(z^2+x)dydz-zdxdy$$

$$=\iiint\limits_V 0dv+\iint\limits_{S_1}2dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}2dxdy=8\pi .$$

解法二 统一投影法. 向 xy 面投影.

$$I=\iint\limits_S (z^2+x)(-x)-zdxdy$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\{-x[\frac{1}{2}(x^2+y^2)]^2-x^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}dxdy=8\pi .$$

16. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 Marclaulin 级数，并求 $f^{(20)}(0), f^{(21)}(0)$.

解 因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x|<1$ ，所以

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x|<1 .$$

当 $|x|=1, \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 均收敛，故由和函数的连续性得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x|\le 1 .$$

$$f^{(20)}(0)=0, f^{(21)}(0)=21!\cdot\frac{(-1)^{10}}{21}=20! .$$

17. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

解 令 $f_x(x,y)=4x^3-2x-2y=0, f_y(x,y)=4y^3-2x-2y=0$ ，

解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,1),(0,0),(-1,-1)$.

又 $A=f_{xx}(x,y)=12x^2-2, B=f_{xy}(x,y)=-2, C=f_{yy}(x,y)=12y^2-2$ ，

所以

	A	B	C	$AC-B^2$	结论
$(1,1)$	10	-2	10	$96>0$	$f(1,1)=-2$ 为极小值
$(-1,-1)$	10	-2	10	$96>0$	$f(-1,-1)=-2$ 为极小值
$(0,0)$	-2	-2	-2	0	方法失效

由于 $f(0,0)=0$ ， $f(x,x)=2x^4-4x^2-2x^2(x^2-1)<0,(|x|<1)$ ，

$f(x,-x)=2x^4>0,(|x|<1)$ ，故 $f(0,0)$ 不是极值.

18. 已知曲线积分 $I=\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 与路径无关，

其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 和

$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 的值.

解 1 由积分与路径无关的等价条件知 $f'(x)-2x=f(x)$，这是一阶常微分线性方程，故通

解为 $f(x)=\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+C)$ ，

由 $f(0)=1$，解得 $C=3$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+3)$.

选择折线积分路径 $L_1: y=0, x:0\to 1$ 和 $L_2: x=1, y:0\to 1$，则

$I=\left(\int_{L_1}+\int_{L_2}\right)yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y=\int_0^1 0+\int_0^1[f(1)-1]\mathrm{d}y=3\mathrm{e}-5$.

解 2 由积分与路径无关的等价条件知 $f'(x)-2x=f(x)$，

这是一阶常微分线性方程，故通解为 $f(x)=\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+C)$ ，

由 $f(0)=1$，解得 $C=3$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+3)$.

进一步有 $f(1)=-4+3\mathrm{e}$.

注意到$I=\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y=\int_L \mathrm{d}[yf(x)]-\int_L x^2\mathrm{d}y$，

故$\int_L \mathrm{d}[yf(x)]=f(1)=-4+3\mathrm{e}$；

由积分与路径无关，选用折线路径可知$\int_L x^2\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y=1$；

所以$I=3\mathrm{e}-5$.

19. 设$D:x^2+y^2\le 1$，证明不等式$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{2}{5}\pi$.

证明 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r$，

因为当$t>0$，$\sin t<t$，因此$\mathrm{r}\sin r^3<r^4$，故$\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r\le\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{1}{5}$，

故 $\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{2}{5}\pi$.

20. 设$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(x)$在$(-1,1)$有界，证明：

当$\alpha>\frac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\frac{1}{n^\alpha})-1\right)$绝对收敛.

证 由泰勒公式 $f(x)=1+\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2,(\theta\in(0,1))$，可知

$\left|f(\frac{1}{n^\alpha})-1\right|=\frac{1}{2}\left|f''(\frac{\theta}{n^\alpha})\right|\frac{1}{n^{2\alpha}}\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}$，其中$|f''(x)|\le M,x\in(-1,1)$.

当$\alpha>\frac{1}{2}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$收敛 ，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\frac{1}{n^\alpha})-1\right)$绝对收敛.