2023 ～2024 学年第 二 学期

《 微积分（一）》课程期中试题解答

一. 基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=4,$ 求 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|$.

解：由题意可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\right)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2,$$

另一方面 $\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\right)=0$，

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$.

因 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16+1+4=21$，

所以 $|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}|=\sqrt{21}$.

2. 已知单位矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正向的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 与 y 轴正向的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，且在 z 轴上的坐标是负的, $\overrightarrow{OB}=\{1,-\sqrt{2},-1\}$，求 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量.

解：由题设知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2},\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 因 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$

所以 $\cos\gamma=\pm\dfrac{1}{2}$，又 $\overrightarrow{OA}$ 在 z 轴上的坐标为负的，所以 $\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$，

因而 $\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\}$.

因为菱形的对角线即为角平分线，

$\overrightarrow{OB^0}=\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\}$， $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB^0}=\{1,0,-1\}$，所以 $\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB^0}}{|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB^0}|}=\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\}$

即所求的 $\angle AOB$ 的角平分线上的单位向量为 $\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\}$.

3. 求圆锥面 $2x^2+2y^2-z^2=0$ 与旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在 $P(1,1,2)$ 处的切线与法平面方程.

解一：因 $\begin{vmatrix}4y & -2z\\ 2y & -1\end{vmatrix}_P=-4y+2yz\big|_P=4\neq0$，故方程组 $\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=0,\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 确定 $y=y(x)$，

$z=z(x)$。方程组$\begin{cases}2x^2+2y^2-z^2=0,\\ z=x^2+y^2\end{cases}$两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}4x+4y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{cases}，\quad 解得\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y},\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}，从而\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_P=-1,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}|_P=0\end{cases}$$

从而切线的方向向量为$\{1,-1,0\}$，

切线的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$，

法平面方程为$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-2)=0$，即 $x-y=0$

解二 令 $F(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2$，$G(x,y,z)=x^2+y^2-z$，

$\mathbf{grad}F=\{4x,4y,-2z\}=2\{2x,2y,-z\},\mathbf{grad}G=\{2x,2y,-1\}=\{2x,2y,-1\}$,

则取两个曲面的法矢量分别为

$\boldsymbol{n}_F=\{2x,2y,-z\}_P=\{2,2,-2\}=2\{1,1,-1\}$，$\boldsymbol{n}_G=\{2x,2y,-1\}_P=\{2,2,-1\}$，

$$\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&-2\\2&2&-1\end{vmatrix}=2\{1,-1,0\}，\quad 取切矢量\quad \boldsymbol{\tau}=\{1,-1,0\}，$$

故曲线在该点的切线方程为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{0}$

法平面方程为：$1\cdot(x-1)-1\cdot(y-1)+0\cdot(z-2)=0$，即 $x-y=0$.

注意：切线方程写为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{0}$ 或$\begin{cases}x+y-2=0,\\ z=2\end{cases}$都是对的。

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数，其中 $5z^2-4xz+3y\neq0$，又 $f_1'(0,0,1)=2, f_2'(0,0,1)=4, f_3'(0,0,1)=1$，求 $\mathrm{d}u\big|_{(0,0)}$.

解：$x=0,y=0$ 时，$z=1$.

对方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 两边求微分，得

$$5z^4\mathrm{d}z-z^4\mathrm{d}x-4xz^3\mathrm{d}z+z^3\mathrm{d}y+3yz^2\mathrm{d}z=0，$$

即
$$\mathrm{d}z=\frac{z^2}{5z^2-4xz+3y}\mathrm{d}x-\frac{z}{5z^2-4xz+3y}\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}u=f_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}y+f_3'\mathrm{d}z$$

$$=f_1'\mathrm{d}x+f_2'\mathrm{d}y+f_3'\left(\frac{z^2}{5z^2-4xz+3y}\mathrm{d}x-\frac{z}{5z^2-4xz+3y}\mathrm{d}y\right)$$

$$= f_3'\left(f_1'+\frac{z^2}{5z^2-4xz+3y}\right)\mathrm{d}x + f_3'\left(f_2'-\frac{z}{5z^2-4xz+3y}\right)\mathrm{d}y$$

所以　$$\mathrm{d}u\big|_{(0,0)} = f_3'(0,0,1)\left(f_1'(0,0,1)+\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x + f_3'(0,0,1)\left(f_2'(0,0,1)-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{11}{5}\mathrm{d}x+\frac{19}{5}\mathrm{d}y.$$

5. 设 $z = yf(x^2-y^2)$，其中 f 可导，求 $\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y$.

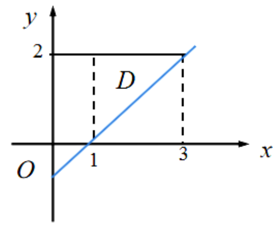
解 $z_x = y\,f'(x^2-y^2)\cdot 2x$，

$z_y = f(x^2-y^2)+y\,f'(x^2-y^2)\cdot(-2y)$，

于是 $$\frac{1}{x}z_x+\frac{1}{y}z_y = 2yf'(x^2-y^2)+\frac{f(x^2-y^2)}{y}-2yf'(x^2-y^2)=\frac{f(x^2-y^2)}{y}.$$

6. 求积分 $I=\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2\sin y^2\mathrm{d}y$

解：交换积分顺序

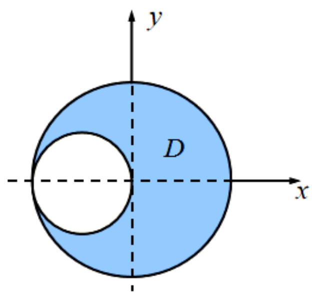


$$I=\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2\sin y^2\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{y+1}\sin y^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2 y\sin y^2\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\cos y^2\Big|_0^2=\frac{1}{2}(1-\cos 4)$$

7. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,-2x\le x^2+y^2\le 4\}$，求二重积分

$$I=\iint\limits_D (y\cos x+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



解：因 D 关于 x 轴对称，所以 $\iint\limits_D y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

记 $D_1=\{(x,y)\,|\,-2x\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ ，则

$$I=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2\mathrm{d}r\right)$$

$$=\frac{8}{3}\pi+\frac{16}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\pi-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

8. 设有直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$，平面 $\pi: x-4y-8z+12=0$，求直线 L 在平面 π 上的投影直线的方程.

解： 因平面 $x-z+4=0$ 不与 $\pi: x-4y-8z+12=0$ 垂直，故

设过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 的平面束方程为：

$$(x+5y+z)+\lambda(x-z+4)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$。

因所求平面与平面 π 垂直，故 $(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)=0$，

解得 $\lambda=3$，从而与 π 垂直的平面为 $4x+5y-2z+12=0$，

投影直线的方程为 $\begin{cases} x-4y-8z+12=0, \\ 4x+5y-2z+12=0. \end{cases}$

另解 设过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 的平面束方程为：

$$\lambda(x+5y+z)+\mu(x-z+4)=0,$$

即 $(\lambda+\mu)x+5\lambda y+(\lambda-\mu)z+4\mu=0$,

由 $(\lambda+\mu)\cdot 1+5\lambda\cdot(-4)+(\lambda-\mu)\cdot(-8)=0$ 得 $\mu=3\lambda$

代入平面束方程并化简得 $4x+5y-2z+12=0$，

故所求投影直线的方程为 $\begin{cases} x-4y-8z+12=0, \\ 4x+5y-2z+12=0. \end{cases}$

9. 将空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 化为参数方程.

解：在 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 中消 y，得

$$x+z=1，即 z=1-x。$$

代入 $x^2+y^2+z^2=1$ 得曲线在 xoy 面上的投影柱面方程为

$$2x^2-2x+y^2=0，\quad 即 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

令 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\theta, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \quad (0\le\theta\le 2\pi)$，

即 $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \qquad (0\le\theta\le 2\pi)$

代入 $z=1-x$ 得　$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\theta$

故曲线的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\theta \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \qquad (0\le\theta\le 2\pi) \\ x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\theta \end{cases}$

10. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} e^{1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围的四面体.

解　$I=\int_0^1 e^{1-z}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1(1-z)^2e^{1-z}\mathrm{d}z$

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 z^2e^z\mathrm{d}z=\dfrac{1}{2}(e-2)$

二．综合题　（每小题 8 分，共 40 分）

1. 若函数 $u=az^4-bxz+x^2+y^2$ 在点 $P(1,1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=\{2,1,2\}$ 的方向导数最大，求 a,b 的值，并求出最大方向导数.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-bz+2x, \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y, \dfrac{\partial u}{\partial z}=4az^3-bx$

$\mathbf{grad}u|_P=\{-bz+2x,2y,4az^3-bx\}|_{(1,1,1)}=\{-b+2,2,4a-b\}$

因函数沿梯度方向的方向导数最大，故有

$$\frac{-b+2}{2}=\frac{2}{1}=\frac{4a-b}{2}$$

解得　$a=1/2, b=-2$

故 $\mathbf{grad}u|_P=\{4,2,4\}$，最大方向导数为 $|\mathbf{grad}u|_P|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$

2. 已知函数 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+2$，D 是由 $x+y=3, x=0, y=0$ 所围成的平面区域，求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

解：步 1 先求区域内驻点

令$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 2(x+y) = 0, \\ f_y = 3y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}, \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$，区域内的驻点为$(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})$，

且 $f(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}) = (\dfrac{4}{3})^3 + (\dfrac{4}{3})^3 - (\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3})^2 + 2 = -\dfrac{10}{27}$

步 2 求区域边界上函数的最值

在边界 $y = 0 (0 \le x \le 3)$ 上，$z = f(x,0) = x^3 - x^2 + 2$；

在边界 $x = 0 (0 \le y \le 3)$ 上，$z = f(0,y) = y^3 - y^2 + 2$；

在边界 $x + y = 3 (0 \le x \le 3)$ 上，$z = x^3 + (3-x)^3 - 7$；

$x \in (0,3)$，令 $\left(x^3 - x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 2x = 0,$ 得 $x = \dfrac{2}{3}$；

令 $\left(x^3 + (3-x)^3 - 7\right)' = 3x^2 - 3(3-x)^2$ 得 $x = \dfrac{3}{2}$；

比较

$$f(0,0) = 2, f(\frac{2}{3},0) = f(0,\frac{2}{3}) = \frac{50}{27}, f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{-1}{4}, f(3,0) = f(0,3) = 20$$

得边界上最大值为20，最小值为$-\dfrac{1}{4}$.

步 3　比较得函数在区域上的最大值为 20，最小值为$-\dfrac{10}{27}$.

3. 设$z(x,y) = x^y + \int_0^x x e^{-(y+t)^2} \mathrm{d}t$, 求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)}$.

解：令$u = y + t$, 则$\int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt = x\int_y^{x+y} e^{-u^2} du$

$$\therefore z(x,y) = x^y + x\int_y^{x+y} e^{-u^2} du$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \int_y^{y+x} e^{-t^2} dt + xe^{-(y+x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x + e^{-(y+x)^2} - e^{-y^2} - 2x(y+x)e^{-(y+x)^2}$$

$$= x^{y-1}\left(1 + y\ln x\right) - e^{-y^2} + \left(1 - 2x(y+x)\right)e^{-(y+x)^2}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(1,0)} = -e^{-1}$$

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, x^4+y^2\neq 0,\\ 0, \qquad x^4+y^2=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的连续性、偏导数存在性及可微性.

解：因 $0\le\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\le|x|\cdot\dfrac{1}{x^4+y^2}\cdot\dfrac{x^4+y^2}{2}=\dfrac{|x|}{2}\to 0(x\to 0,y\to 0)$，

由夹逼准则知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}=0$，又 $f(0,0)=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 连续 .

又　$f(x,0)=0, f(0,y)=0$，

所以　$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{(\Delta x)^4+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{\left((\Delta x)^4+(\Delta y)^2\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=(\Delta x)^2}}\dfrac{(\Delta x)^3\Delta y}{\left((\Delta x)^4+(\Delta y)^2\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^5}{\left((\Delta x)^4+(\Delta x)^4\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^4}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}}=\frac{1}{2},\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}}=-\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{(\Delta x)^2+1}}$ 不存在，从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=(\Delta x)^2}}\dfrac{(\Delta x)^3\Delta y}{\left((\Delta x)^4+(\Delta y)^2\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，

因此 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{(\Delta x)^3\Delta y}{\left((\Delta x)^4+(\Delta y)^2\right)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，更不可能等于 0

故 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 不可微.

5. 设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,b]$ 上连续且单调增加，其中 $b>0$，用**二重积分**证明：

$$b\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明：记 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le b,0\le y\le b\}$，$I=b\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x$，则

$$I=\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x)(g(x)-g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

区域具有轮换对称性，故可得

$$I=\frac{1}{2}[\iint_D f(x)(g(x)-g(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D f(y)(g(y)-g(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad ,$$

又函数 $f(x),g(x)$ 在 $[0,b]$ 上单调增加，因而有

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)\ge 0\,.$$

由二重积分的非负性得　$I\ge 0$，即

$$b\int_0^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\int_0^b g(x)\mathrm{d}x\,.$$