华中科技大学2023～2024学年第二学期

“ 微积分（一） ”考试试卷(A卷)

考试方式 闭卷 考试时间 2024年6月24日上午 考试时长 150 分钟

院（系）：____________ 专业班级：____________

学 号：____________ 姓 名：____________

装 订 线

一、单项选择题(每小题3分，6个小题共18分，将结果涂在答题卡上.)

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\frac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$，则这两直线的位置关系为【 】.

A. 相交 B. 平行 C. 重合 D. 异面

2. 设函数 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$ 在点 $P(0,1,1)$ 附近满足方程 $F(x,y,z)=0$，则下列说法**错误**的是【 】.

A. $F(x,y,z)$ 在点 $P(0,1,1)$ 可微 B. $\left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_P=0$ C. $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_P=-2$ D. $\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_P=\frac{1}{2}$.

3. 设 D 是 xoy 平面上以点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=$【 】.

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$ B. $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$ C. $\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$ D. 0

4. 已知函数 $f(x)=1-x(0\le x\le\pi)$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx(n=1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{\pi}{2})=$【 】.

A. $-\frac{\pi}{2}-1$ B. $-\frac{\pi}{2}+1$ C. $\frac{\pi}{2}-1$ D. $\frac{\pi}{2}+1$

5. 设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_{\Gamma}(y+2z)\mathrm{d}s=$【 】.

A. π B. 2π C. $-\pi$ D. 0

6. 关于级数的描述，下列命题中正确的是【 】.

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛　　B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛　　D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上．）

7. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (R>0)$，则 $\iint\limits_{S} (\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})dS=$ ____.

8. 曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ 2x^2+2y^2-z^2=0 \end{cases}$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 的法平面方程为____.

9. 设 $\{x^{2023}+2xy^3, ax^2y^2-y^{2024}\}$ 在整个 xoy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的梯度，则 $a=$____.

10. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} x^{2n+1}$ 的和函数为____.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 一直线过点 $B(1,2,3)$ 且与矢量 $\vec{s}=\{6,6,7\}$ 平行，求点 $A(3,4,2)$ 到此直线的距离 d.

12. 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{x}{y}}$，求 dz，$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}$.

13. 求曲线积分 $I=\int_L (y^2-\cos y)dx+x\sin y dy$，其中有向曲线 L 为沿着正弦曲线 $y=\sin x$，由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$.

14. 求由曲面 $2z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体 Ω 的体积 V.

15. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}(R>0)$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的闭曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 外法线的方向余弦，求积分

$$I=\iint\limits_{S}\left[(x^3+z^2)\cos\alpha+(y^3+x^2)\cos\beta+(z^3+y^2)\cos\gamma\right]dS.$$

16. 设 $f(x)=\frac{1}{(4-x)^2}$，将 $f(x)$ 展开成关于 x 的幂级数，并求 $f^{(20)}(0)$.

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 设函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，空间曲线 $L: x=t, y=2t^2, z=-2t^4$，$P_0(1,2,-2)$ 为曲线 L 上的一点，求 u 在点 P_0 处沿曲线 L 的切矢量方向（t 增大的方向）$\vec{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{P_0}$，并求函数 u 在点 $P_0(1,2,-2)$ 处的最大变化率.

18. 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=(2ax+by)dx+(2by+ax)dy(a,b$ 为常数)，且 $f(0,0)=-3, f_x'(1,1)=3$，求点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值.

装

订

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

线

19. 设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，证明：$1\le \iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\sqrt{2}$

20. 设 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}(n=2,3,\cdots)$，证明：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.