2022-2 期中试题解答

一. 基本计算题

1. 由题意知 $y_1-y_3=\cos x, y_2-y_3=\sin x$ 是对应的齐次线性微分方程的解，且线性无关，

从而特征方程的特征根为 $r_1=i, r_2=-i$ ，特征方程为 $r^2+1=0$.

对应齐次方程为 $y''+y=0$.

设非齐次线性微分方程为 $y''+y=f(x)$，则 $f(x)=y_3''+y_3=x$.

故方程为 $y''+y=x$ ，通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$（C_1, C_2 为任意常数）.

2. 由题设知 $\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha\}$ ， 因 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

所以 $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，又 $\overrightarrow{OA}$ 的方向余弦为正，所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

因而 $\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha\}=\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$.

设点 B 的坐标为 (x,y,z), 则有 $-1=\dfrac{x+1}{2}, 2=\dfrac{y-2}{2}, 1=\dfrac{z+2}{2}$, 解得 $x=-3, y=6, z=0$,

所以 $\overrightarrow{OB}=\{-3,6,0\}$.

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 6 & 0 \end{vmatrix}=\sqrt{3}\{-2,-1,3\},$$

故所求平行四边形面积为 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{42}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot x=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}x=1\cdot a=a$.

4. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50$ ， $G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ ，

$\mathbf{grad}F=\{2x,2y,2z\}=2\{x,y,z\}, \mathbf{grad}G=\{2x,2y,-2z\}=2\{x,y,-z\}$ ，

则取两个曲面的法矢量分别为 $\boldsymbol{n}_F=\{x,y,z\}_{(3,4,5)}=\{3,4,5\}$ ， $\boldsymbol{n}_G=\{x,y,-z\}_{(3,4,5)}=\{3,4,-5\}$ ，

$$\boldsymbol{n}_F\times\boldsymbol{n}_G=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}=10\{-4,3,0\},$$

取切矢量 $\boldsymbol{\tau}=\{-4,3,0\}$ 故曲线在该点的切线方程为： $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{0}$,

法平面方程为： $-4(x-3)+3(y-4)+0\cdot(z-5)=0$ ，即 $4x-3y=0$.

注意：切线方程写为 $\dfrac{x-3}{-160}=\dfrac{y-4}{120}=\dfrac{z-5}{0}$ 或 $\begin{cases}3x+4y-25=0\\ z=5\end{cases}$ 都是对的.

5. 解法 1 由 $x=1,y=2$ 得 $z=3$.

设 $F(x,y,z)=(z+y)^x-x-2y$，则

$F_x=(z+y)^x\ln(z+y)-1$，$F_y=x(z+y)^{x-1}-2$，$F_z=x(z+y)^{x-1}$，

它们均在 $P(1,2,3)$ 的某邻域内连续，且 $F_z(P)=1\neq 0$，又 $F_x(P)=5\ln 5-1$，$F_y(P)=-1$，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=-\dfrac{F_x(P)}{F_z(P)}=1-5\ln 5$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}=-\dfrac{F_x(P)}{F_z(P)}=1$，

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}y=(1-5\ln 5)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

解法 2 由 $x=1,y=2$ 得 $z=3$.

方程变形为 $x\ln(z+y)=\ln(x+2y)$.

两边关于 x 求导得 $\ln(z+y)+x\cdot\dfrac{z_x}{z+y}=\dfrac{1}{x+2y}$,

将 $x=1,y=2$ 代入得 $\ln 5+\dfrac{1}{5}z_x(1,2)=\dfrac{1}{5}$,

从而得 $z_x(1,2)=1-5\ln 5$.

同理可得 $z_y(1,2)=1$.

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,2)}\mathrm{d}y=(1-5\ln 5)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

解法 3 由 $x=1,y=2$ 得 $z=3$.

方程变形为 $x\ln(z+y)=\ln(x+2y)$.

方程两边微分得 $\ln(z+y)\mathrm{d}x+\dfrac{x}{z+y}(\mathrm{d}z+\mathrm{d}y)=\dfrac{\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y}{x+2y}$,

将 $x=1,y=2$，$z=3$ 代入得 $\ln 5\mathrm{d}x+\dfrac{1}{5}(\mathrm{d}z+\mathrm{d}y)=\dfrac{\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y}{5}$,

因此 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=(1-5\ln 5)\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$

6. 对方程组 $\begin{cases}\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,\\ y=\cos x\end{cases}$ 两边关于 x 求导，得

$$\begin{cases}\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot \mathrm{e}^y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\varphi_3'\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin x\end{cases},\text{解得}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\varphi_3'}(-2x\varphi_1'+\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\varphi_2')\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\sin x\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot(-\sin x)+f_3'\cdot\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'-\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\varphi_2')$$

$$=f_1'-\sin xf_2'+\frac{f_3'}{\varphi_3'}(-2x\varphi_1'+\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\varphi_2')\ .$$

7. 令 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$, 则 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{4}{\pi}A$，

所以 $\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{4}{\pi}A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，

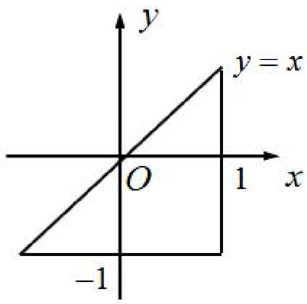
即 $\iint\limits_D(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D\dfrac{4}{\pi}A\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$.

由于 D 关于直线 $y=x$ 对称，由二重积分的轮换对称性得

$$\iint\limits_D(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{12}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{5}{24}\pi\ ,$$

所以 $\dfrac{5\pi}{24}-\dfrac{4}{\pi}A\cdot\pi=A$，解得 $A=\dfrac{\pi}{24}$，于是 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{1}{6}$.

8. 积分区域如右图.



由所给积分次序，积分困难，交换积分次序

$$I=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_y^1 x\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-1}^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=y}^{x=1}\mathrm{d}y\quad=\frac{1}{3}\int_{-1}^1(1-|y|^3)\mathrm{d}y$$

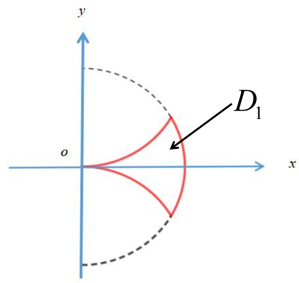
$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-y^3)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}(y-\frac{1}{4}y^4)\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\varphi' f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x(-f_{11}''+x\varphi' f_{12}'')+\varphi' f_2'+xy\varphi'' f_2'+y\varphi'(-f_{21}''+x\varphi' f_{22}'')$$

$$=-2xf_{11}''+(2x^2-y)\varphi' f_{12}''+(\varphi'+xy\varphi'')f_2'+xy(\varphi')^2 f_{22}''$$

10. 平面区域如右图



$$I=\iint_D y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{1}r\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-8\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{9}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta$$

$$=\frac{\pi}{9}+2\sqrt{3}-\frac{32}{9}$$

二. 综合题

1. 设 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，则

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)[\mathrm{e}^x\cos y]^2+f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)\mathrm{e}^x\sin y$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)[-\mathrm{e}^x\sin y]^2-f'(u)\mathrm{e}^x\cos y$，

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$ 可得 $f''(u)\mathrm{e}^{2x}=(4f(u)+u)\mathrm{e}^{2x}$，即 $f(u)$ 满足微分方程

$$f''(u)=4f(u)+u, \qquad (*)$$

其特征方程 $r^2-4=0$ 有解 $r_{1,2}=\pm 2$，所以对应的齐次方程的通解为 $C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}$.

设特解为 $t^*=Au$，代入方程得 $t^*=-\frac{1}{4}u$ ，所以(*)的通解为

$$f(u)=C_1\mathrm{e}^{2u}+C_2\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u .$$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$，得 $\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，解得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$，故

$f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2u}-\frac{1}{16}\mathrm{e}^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

2. 解法 1 令 $F(x,y,z)=xy+z$, 则 $\mathbf{grad}F\,|_{(2,1,-2)}=\{y,x,1\}|_{(2,1,-2)}=\{1,2,1\}$，

曲面 $xy+z=0$ 在点 $P_0(2,1,-2)$ 处切平面方程为：

$$(x-2)+2(y-1)+(z+2)=0 \qquad \text{即 } x+2y+z-2=0$$

设过直线 $L:\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x+y+4z-2=0 \end{cases}$ 的平面束方程为：

$\lambda(x+y+z-1)+\mu(2x+y+4z-2)=0$，

即 $(\lambda+2\mu)x+(\lambda+\mu)y+(\lambda+4\mu)z-\lambda-2\mu=0$，

由 $(\lambda+2\mu)\cdot 1+(\lambda+\mu)\cdot 2+(\lambda+4\mu)\cdot 1=0$ 得 $\lambda=-2\mu$

代入平面束方程并化简得 $y-2z=0$

故所求投影直线的方程为 $\begin{cases} y-2z=0, \\ x+2y+z-2=0. \end{cases}$

解法 2 令 $F(x,y,z)=xy+z$, 则 $\mathbf{grad}F|_{(2,1,-2)}=\{y,x,1\}|_{(2,1,-2)}=\{1,2,1\}$，

曲面 $xy+z=0$ 在点 $P_0(2,1,-2)$ 处切平面方程为：

$$(x-2)+2(y-1)+(z+2)=0 \qquad \text{即 } x+2y+z-2=0.$$

记过直线 L 且与切平面垂直的平面为 π，设它的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$，

则 $\boldsymbol{s}=\{1,1,1\}\times\{2,1,4\}=\{3,-2,-1\}$，且 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}\perp\{1,2,1\}$

取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\{1,2,1\}=\{3,-2,-1\}\times\{1,2,1\}=\{0,-4,8\}$

在直线 L 取点 $(1,0,0)$, 则 π 的方程为 $y-2z=0$

故所求投影直线的方程为 $\begin{cases} y-2z=0, \\ x+2y+z-2=0. \end{cases}$

3. 根据题意可得旋转曲面 Σ 的方程为：$3(x^2+z^2)+2y^2=12$.

令 $F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12$, 则

$$\mathbf{grad}F|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\{6x,4y,6z\}|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=2\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}.$$

该旋转曲面在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的外矢量可取为 $\boldsymbol{n}=\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}$，

单位外法矢量 $\boldsymbol{n}^{\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$ ，

$$\mathbf{grad}u|_p=\{2x-3z,2y,4z^3-3x\}|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\{-3\sqrt{2},2\sqrt{3},8\sqrt{2}\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}|_P=\mathbf{grad}u|_p\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}=\{-3\sqrt{2},2\sqrt{3},8\sqrt{2}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}=2\sqrt{30}$$

4. 因 $0\le\left|\dfrac{\sqrt{|xy|}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right|\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$，而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}=0$

由夹逼准则知$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$, 又 $f(0,0)=0$，

所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 连续 .

因 $f(x,0)=0, f(0,y)=0$，所以 $f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\frac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y=k\Delta x}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sqrt{|k(\Delta x)^2|}}{\sqrt{(k^2+1)(\Delta x)^2}}=\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{k^2+1}}$随着$k$ 的变化而变化，

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 不存在，又 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1$，

因此 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\cdot\dfrac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$不存在，更不可能等于 0，

故 $f(x,y)$ 在在原点 $(0,0)$ 不可微.

5. $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, 此问题转化为

$u=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 在$\varphi(x,y,z)=0$ 约束下的最小值.

设$F(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda\varphi(x,y,z)$，

若 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|$最短，则 $\left|\overrightarrow{P_0P}\right|^2$最短，且在极值点处必有

$$\begin{cases}F_x(x,y,z,\lambda)=0\\F_y(x,y,z,\lambda)=0,\\F_z(x,y,z,\lambda)=0\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}2(x-x_0)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0\\2(y-y_0)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0,\\2(z-z_0)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0\end{cases}$$

从而有$\dfrac{x-x_0}{\varphi_x(x,y,z)}=\dfrac{y-y_0}{\varphi_y(x,y,z)}=\dfrac{z-z_0}{\varphi_z(x,y,z)}=-\dfrac{1}{2}\lambda$

故得$\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}\parallel\{\varphi_x(x,y,z),\varphi_y(x,y,z),\varphi_z(x,y,z)\}$，

而曲面 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量$\boldsymbol{n}=\{\varphi_x(x,y,z),\varphi_y(x,y,z),\varphi_z(x,y,z)\}$，

从而有$\overrightarrow{P_0P}\parallel\boldsymbol{n}$，因此$\overrightarrow{P_0P}$ 为曲面 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量.