考试日期：2022-06-19 8：30-11：00

2022~2023 学年第二学期《微积分（一）》课程考试试卷（A 卷）

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 在空间直角坐标系中，方程 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 表示【D】.

A. 半球面　　B. 柱面　　C. 锥面　　D. 单叶双曲面

答案：D

解析：方程可整理为标准形式 $x^2+y^2-z^2=1$，是单叶双曲面.

2. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处有 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，则必有【C】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}} f(x,y)$ 存在　　B. $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

C. $\lim\limits_{x\to1} f(x,1)$ 以及 $\lim\limits_{y\to1} f(1,y)$ 存在

D. $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数存在

答案：C

解析：设 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x-1)(y-1)=0,\\ 0, & (x-1)(y-1)\neq0.\end{cases}$，则 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，

但函数在 $(1,1)$ 处不连续.

由于 $\lim\limits_{\substack{x\to1,\\y=x}} f(x,y)=0, \lim\limits_{\substack{x\to1,\\y=1}} f(x,y)=2$, 故 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}} f(x,y)$ 不存在；故 A 错误；

函数由于不连续也不可微，故 B 错误；

当 $\theta\neq0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 时 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数不存在，故 D 错误；

根据偏导的定义，以及一元函数的可导必连续，则可知一元函数

$f(x,1), f(1,y)$ 在点 $(1,1)$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to1} f(x,1)=f(1,1)$，

$\lim\limits_{x\to1} f(x,1)=f(1,1)$，故 C 正确.

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$【 D】.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　　　B. 不是 $f(x,y)$ 的驻点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

答案：D

解析：$f_x(x,\mathrm{y})=2x, f_y(x,y)=3y$，则点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点；

且 $A=f_x(0,0)=2, B=f_{xy}(0,0)=0, C=f_{yy}(0,0)=3$，则

$AC-B^2=6>0, A>0$，

所以由极值的充分条件可知点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的空间区域，将 $\mathrm{I}=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为柱面坐标系下的累次积分，下列结果正确的是【 B】.

A. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$　　　　B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

C. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$　　　　D. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$

答案：B

解析：在柱面坐标系下可表示为 $\Omega: 0\le\theta\le2\pi, 0\le r\le z, 0\le z\le1$，体积微元为 $\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$，故累次积分为

$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z rf(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z rf(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$，故 D 错误.

在柱面坐标系下可表示为 $\Omega: 0\le\theta\le2\pi, r\le z\le1, 0\le r\le1$，体积微元为

$\mathrm{d}v = r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta$，故累次积分为

$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$，故 A、C 错误，B 正确.

5. 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0, R>0), abc\neq 0$，则 $I=\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S=$ 【C】.

A. $c\pi R^2$　　B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$　　C. $c\pi R^3$　　D. $(a+b+c)\pi R^2$

答案：C

解析：由偶倍奇零，可知 $I=\iint\limits_S cz\mathrm{d}S$.

向 xy 面投影，$\mathrm{d}S=\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，所以有 $I=c\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\pi R^3$.

6. 下列命题中，正确的是【A】.

A．若 $a_n\leq b_n\leq c_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

B．若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

C．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散

D．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

答案：A

解析：

A 正确，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 收敛，又因为

$0 \le b_n - a_n \le c_n - a_n$，由正项级数的比较性质知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$收敛；而

$b_n = (b_n - a_n) + a_n$，由线性性质知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

B 错误，反例：取$a_n = \dfrac{1}{n}$，且$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，但调和级数发散.

C 错误，反例：取$u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

发散.

D 错误，反例：取$a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散.

二．填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将结果涂在答题卡上。）

7. 设曲线$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$则$\int_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z)\mathrm{d}s =$__________.

答案：2π.

解析：由轮换对称性可知$\int_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} z^2 \mathrm{d}s$，和

$\int_{\Gamma} x\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} y\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} z\mathrm{d}s$，所以

$\int_{\Gamma} (x^2 + 2y^2 + 3z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s + \int_{\Gamma} (x + y + z)\mathrm{d}s$，

由等量代换知，$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \mathrm{d}s = 2\pi$，$\int_{\Gamma} (x + y + z)\mathrm{d}s = 0$.

从而答案为2π.

8. $z = x + 3y + \ln(1 + x^2 + y^2)$在点$(0,0,0)$的切平面方程为____________.

答案：$z = x + 3y$.

解析：点$(0,0,0)$的法矢量为$\{1,3,-1\}$，故切平面为$z = x + 3y$.

9. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(\mathbf{grad}u)\big|_{(1,-2,2)}=$______________.

答案：$\frac{1}{9}$.

解析：记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{r^2}$，

所以 $div(\mathbf{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^2}\right)=\frac{1}{r^2}$，故答案为 $\frac{1}{9}$.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 1, & x=0,\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$，将 $f(x)$ 展成以 2π 为周期的傅里叶级数，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x=-3\pi$ 处的值为__________.

答案：$\frac{\pi}{2}$

解析：$S(-3\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}[-\pi+2\pi]=\frac{\pi}{2}$.

三．计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求过点 $P(2,1,3)$ 且与 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程，并求该平面与 L_1 的交点.

解 平面的法矢量为 $\{2,1,-1\}$，故所求平面方程为

$$2(x-2)+(y-1)-(z-3)=2x+y-z-2=0.$$

将 L_1 的参数方程 $x=1+2t,y=2+t,z=2-t$ 代入平面方程解得 $t=0$，故

所求交点为 $P(2,1,3)$.

12. 设 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{y}{x}$，求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\pi)}, \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(2,\pi)}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cos\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\cos\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{y\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}$，

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\pi)}=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(2,\pi)}=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

13. 求曲面 $z=xy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内那部分面积 S.

解 $\mathrm{d}S=\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，记 $D:x^2+y^2\le 1$，

所以 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

14. 求 $I=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由曲线 $\begin{cases} y^2+\dfrac{z^2}{2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体.

解：$\Omega:x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}\le 1$.

由对称性和截面法得 $I=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}z^2(1-\dfrac{z^2}{2})\mathrm{d}z=\dfrac{8\pi}{15}\sqrt{2}$.

15. S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$，取上侧，求 $I=\iint\limits_S\dfrac{(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解 1 用等量代换，有 $I=\frac{1}{R}\iint\limits_{S}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由于 $z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，记 $D:x^2+y^2\le R^2$，用投影法得，

$$I=\frac{1}{R}\iint\limits_{D}\left[(x^2+y)\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R}\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{R}\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}R^2.$$

解 2 用等量代换，有 $I=\frac{1}{R}\iint\limits_{S}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

记曲面 $S_1:x^2+y^2\le R^2$，取下侧.

$$I=\iint\limits_{S+S_1}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{V}(2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0$$
$$=\frac{2\pi}{3}R^2.$$

16. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

解 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+3}{(n+1)!}x^{2n+2}}{\frac{2n+1}{n!}x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(2n+1)}x^2=0$，故收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=2x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}-1，\ x\in(-\infty,+\infty).$$

四．应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 设 L 是 xy 面上任意的光滑曲线， $f(x)$ 具有二阶连续的导数，且

$f(0)=4, f'(0)=3$**，若曲线积分**

$\int_L(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ **与路径无关，求** $f(x)$.

解 由于曲线积分与路径无关，则 $\frac{\partial}{\partial y}(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y=\frac{\partial}{\partial x}f(x)$，即

$f''(x)-f'(x)=x\mathrm{e}^x$.

求齐次方程 $f''(x)-f'(x)=0$ 的通解为 $\overline{f}=C_1+C_2\mathrm{e}^x$；

非齐次的特解形式为 $f^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x$ ，代入方程解得 $a=-\frac{1}{2},b=-1$.

故特解为 $f^*=(-\frac{x^2}{2}-x)\mathrm{e}^x$；

所以非齐次方程的通解为

$$f=C_1+C_2\mathrm{e}^x-(\frac{x^2}{2}+x)\mathrm{e}^x.$$

将初始条件 $f(0)=4, f'(0)=3$ 代入上面函数，则有 $C_1=0,C_2=4$.

故所求的 $f=4\mathrm{e}^x-(\frac{x^2}{2}+x)\mathrm{e}^x$.

18. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D:4x^2+y^2\le 4$ 上的最大值和最小值.

解 1 由 $f_x(x,y)=2x=0, f_y(x,y)=2y=0$ 解得唯一驻点 $(0,0)$.

在区域 D 的边界上有

$f(x,y)=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2(-1\le x\le 1)$，

此时解边界上的最大值为 3，最小值为 -2.

与 $f(0,0)=2$ 比较，得到所求的最大值为 3，最小值为−2.

解 2 由 $f_x(x,y)=2x=0, f_y(x,y)=2y=0$ 解得唯一驻点 $(0,0)$.

在边界上，令 $L(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(4x^2+y^2-4)$，由

$$\begin{cases} L_x=2x+8\lambda x=0, \\ L_y=-2y+\dfrac{\lambda}{2}y=0, \\ L_\lambda=4x^2+y^2-4=0 \end{cases}$$

解得四个可能的极值点 $(0,\pm 2),(\pm 1,0)$.

比较 $f(0,\pm 2)=-2, f(\pm 1,0)=3, f(0,0)=2$，得到所求的最大值为 3，最小值为−2.

五．综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$. 证明

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{A^2}{2}.$$

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(1)=A$， $F(0)=0$.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x=\frac{A^2}{2}.$$

20. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, 2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^{\ 2}+u_n}$，其中$u_n>0$，$\{a_n\}$有上界，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证 1 根据条件得 $a_{n+1}>a_n>\cdots a_1>1$，再由$\{a_n\}$有上界，可知$\{a_n\}$有极限.

由$4a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)=u_n$，则$4(a_{n+1}-a_n)<u_n<4(a_{n+1}^{\ \ 2}-a_n^{\ 2})$，

则$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\le 4\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}^{\ \ 2}-a_k^{\ 2})=4(a_{n+1}^{\ \ 2}-1)$，由$\{a_n\}$有上界，则$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$有上界，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证 **2** 根据条件得 $a_{n+1}>a_n>\cdots a_1>1$，再由$\{a_n\}$有上界，可知$\{a_n\}$有极限.

则存在$M>0$，使得$1\le a_n<M$.

故$\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\le M\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=M(a_{n+1}-1)\le M^2$，

由正项级数的部分和有界可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.