2020 ～2021 学年第一学期

《微积分（一）》（上）期末考试参考答案(A 卷) (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级___________ 学号____________ 姓名 孙牧

考试日期: 2021-1-10　　　　考试时间: AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得 分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数在 $f(x)=\left|2x^3-9x^2+12x\right|$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值是__5__，所有使函数取到最大值的自变量是 x=__1 和 5/2__.

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3+2x}{x^2+2x-3}$ 的垂直渐近线为__$x=-3$及$x=1$__，斜渐近线为__$y=x-2$__.

3. 曲线 $y=2021-e^{-x^{2020}}$ 的凸区间是 $\left(-\left(\dfrac{2019}{2020}\right)^{\frac{1}{2020}},\left(\dfrac{2019}{2020}\right)^{\frac{1}{2020}}\right)$，

   单调递增区间是__$[0,+\infty)$__.

4. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\displaystyle\int\frac{xf(\ln x)}{x^2+1}dx=$__$-\arctan x+C$__.

5. Dirichlet（狄利克雷）函数在区间 $[0,1]$ 上任取一个分割，则其上和为__1__，下和为__0__.

得 分	
评卷人	

二. 选择题(每小题 4 分，共 12 分)

1. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 x_0 __B__.

A. 取得极小值
B. 取得极大值
C. 某邻域内单调递增
D. 某邻域内单调递减

2. 已知 $\int_a^b f dx>0$，那么 __D__.

解答内容不得超过装订线

A. $\forall[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$\forall\mu>0$，$\exists\xi\in[\alpha,\beta]$，使得 $f(\xi)\geq\mu$

B. $\forall[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$\exists\mu>0$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，使得 $f(x)\geq\mu$

C. $\exists[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$\forall\mu>0$，$\exists\xi\in[\alpha,\beta]$，使得 $f(\xi)\geq\mu$

D. $\exists[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$\exists\mu>0$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$，使得 $f(x)\geq\mu$

3. 积分 $\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cdot\cos x dx$ 的值__A__.

A. 与 a 无关且恒为正
B. 与 a 无关且恒为负
C. 恒为零
D. 与 a 有关

得　分	
评卷人	

三. 计算题（每小题 7 分，共 28 分）

1. $\int\frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}$

解：$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，通分，取其分子，得：

$$\begin{aligned}1&=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)\\&=(A+2B)x^2+(B+2C)x+C+A.\end{aligned}$$

比较系数解得 $A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5}$.从而

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(1+2x)(1+x^2)}&=\frac{4}{5}\int\frac{dx}{1+2x}-\frac{1}{5}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{1}{5}\int\frac{1}{1+x^2}dx\\&=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C.\end{aligned}$$

2. 设 $G'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$G(0)=0$，求 $\int_0^1 G(x)dx$.

解：用分部积分，有

$$\int_0^1 G(x)dx = xG(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xG'(x)dx$$

$$= G(1) - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$$

$$= \int_0^1 \arcsin(x-1)^2 dx - \int_0^1 x\arcsin(x-1)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\arcsin(x-1)^2 dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin(x-1)^2 d(x-1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \arcsin y dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(y\arcsin y\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

3. $I_n = \int_0^\pi \cos^n x\cos nxdx$

$$I_n = \int_0^\pi \cos^n x\cos nxdx = \frac{\cos^n x\sin nx}{n}\Bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \sin nx\cos^{n-1} x\sin xdx$$

解： $= \int_0^\pi \sin nx\cos^{n-1} x\sin xdx = \int_0^\pi \cos^{n-1} x(\sin nx\sin x + \cos nx\cos x)dx - I_n$

$$= \int_0^\pi \cos^{n-1} x\cos(n-1)xdx - I_n$$

$$= I_{n-1} - I_n,$$

从而 $I_n = \frac{1}{2}I_{n-1}, I_0 = \int_0^\pi 1dx = \pi$, 故 $I_n = \frac{\pi}{2^n}$.

4. 求曲线 $y = \int_0^x \tan tdt$（$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$）的弧长.

解：由 $ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+\tan^2 x}dx = \frac{1}{\cos x}dx(0 \le x \le \frac{\pi}{4})$, 于是

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

四. 解答题（每小题 8 分，共 16 分）

1．判断下面反常积分的收敛性：如果收敛，请求出其值；如果发散，请给出理由.

得　分	
评卷人	

(1) $\int_0^1 \ln x dx$　　　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$

两个积分都是收敛的.

(1)

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x\Big|_{0+}^1 - \int_0^1 1dx = \lim_{x\to 0+} x\ln x - 1 = -1 .$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

2. 可积函数是否一定有原函数？请给出你的回答和相应的论证.

解答标准：有第一类间断点的函数可以是可积函数，但是由于导函数的介值性知导函数没有第一类间断点，所以可积函数未必有原函数，相关的解答中如果给出具体这样的例子，也可以认为是完全充分的论证.

五. 证明题（每小题 8 分, 共 24 分）

得　分	
评卷人	

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调减小，那么对 $0<\lambda<1$，有

$\lambda\int_0^1 f(x)dx < \int_0^\lambda f(x)dx$.

证明：此题可以有多种证法，此处提供换元的方法：

$$\int_0^\lambda f(x)dx = \int_0^1 f(\lambda t)\lambda dt = \lambda\int_0^1 f(\lambda t)dt > \lambda\int_0^1 f(t)dt,$$

其中的不等式是由于函数的严格单调和积分的基本性质.

□

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$，则方程 $f(x)$ =0 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个不同的根.

证明 1：由 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$ 和积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f(\xi)=0$. 下面用反证法，假设方程只有这一个根，则由 $\int_0^\pi f(x)dx = 0$ 知 $f(x)$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 上异号. 不妨设在 $(0,\xi)$ 上 $f(x)>0$，在 (ξ,π) 上 $f(x)<0$，而函数 $\cos x-\cos\xi$ 也在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 上异号，于是 $\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi)\neq 0$，这和 $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$ 矛盾.　　□

证明 2：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt = 0,$ 则有 $F(0)=0, F(\pi)=0.$

又
$$\begin{aligned}0 &= \int_0^\pi f(x)\cos xdx = \int_0^\pi \cos xdF(x) = \cos xF(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi F(x)\sin xdx \\ &= \pi F(\xi)\sin\xi, \quad \xi\in(0,\pi).\end{aligned}$$

最后一步应用了积分中值定理，此处 $\sin\xi\neq 0,$ 则 $F(\xi)=0.$

在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,\pi]$ 上用 Rolle 中值定理，从而 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$，

使得 $F'(\xi_1)=f(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=f(\xi_2)=0$.

□

3. 设函数 $f(x)$ 在任何有限区间上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=l$.

证明：由已知条件，$\forall\varepsilon>0,\exists M>0,x>M$ 时，有 $\left|f(x)-l\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-l\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{x}\int_0^x ldt\right|$$

$$=\frac{1}{x}\left|\int_0^M [f(t)-l]dt+\int_M^x [f(t)-l]dt\right|$$

从而

$$\le\frac{1}{x}\left\{\left|\int_0^M [f(t)-l]dt\right|+\left|\int_M^x [f(t)-l]dt\right|\right\}$$

$$<\frac{1}{x}\left\{\left|\int_0^M [f(t)-l]dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}\left(x-M\right)\right\}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{x}\left\{\left|\int_0^M [f(t)-l]dt\right|+\frac{\varepsilon}{2}M\right\},$$

对固定的 ε 和 M，存在 $M_0>M$，$x>M_0$ 时，有 $\dfrac{1}{x}\left\{\left|\int_0^M [f(t)-l]dt\right|+\dfrac{\varepsilon}{2}M\right\}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

所以 $\left|\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-l\right|<\varepsilon$，按极限定义知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=l$.

□