

华中科技大学 2023-2024 学年 第 一 学期
微积分 B 试卷（模拟卷）

院 (系) _____ 班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____

试卷卷面成绩								课程考 核成绩 占 %	平时成 绩占 %	课程考 核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	小计			
得分										

得分

一、单项选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2023} = (\quad)$

- (A) $+\infty$ (B) 0 (C) e (D) $\frac{1}{e}$

2. 下列函数中: (1) $x \sin \frac{1}{x}$ (2) $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ (3) $\frac{\sin x}{x}$ (4) $x \sin x$
在 $(0, +\infty)$ 上有界的有几个 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$
()

- (A) 不可导 (B) 可导且 $f'(0) \neq 0$
(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且导函数 $f'(x)$ 连续。在下列四个结论中:

- (1) $\int_0^x [\cos(2f(t)) + 5f'(t)] dt$ 为奇函数;
(2) $\int_0^x [\cos(2f(t)) + \sin(5f'(t))] dt$ 为偶函数;
(3) $\int_0^x [\cos(5f'(t)) + 2f(t)] dt$ 为奇函数;
(4) $\int_0^x [\cos(5f'(t)) + \sin(2f(t))] dt$ 为偶函数;

正确结论的个数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.)

5. 设 $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$, 则 y 的微分 $dy =$ _____6. $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 的高阶无穷小, $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 的高阶无穷小, 则正整数 $n =$ _____7. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2a(x-2))}{x-2}, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \frac{b(\sqrt{1+x} - \sqrt{3})}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$ 为连续函数则 $a =$ _____, $b =$ _____8. 设 $y = \frac{3x-1}{x^2-1}$, $y^{(2024)}(0) =$ _____9. 一点先向正东方向移动 a 米, 然后左拐弯移动 aq 米 (其中 $0 < q < 1$), 如此不断重复左拐弯, 使得后一段移动的距离为前一段的 q 倍, 这样该点有一极限位置, 则该极限位置与原出发点相距 _____ 米? (结果用 a, q 来表示)

得分

三、计算题 (共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

10. 求不定积分 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx$

11. 设 $\int_1^{y-x^2} e^{t^2} dt = \int_0^x \cos t^2 dt$ 确定的 y 为 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$

12. 计算定积分 $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

四、必做应用题 (共 2 大题, 每小题 8 分, 共 16 分)

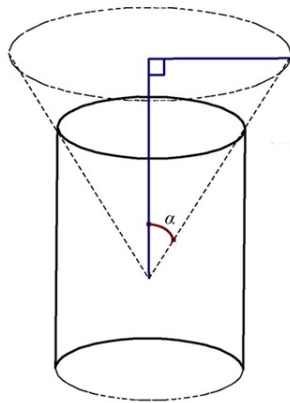
13. 由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, 及 $x = 0, y = 0$ 围成的平面区域的面积.

14. 曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$ 与 $y = 1 - x^2$ 交于点 A , 过原点 O 和点 A 的直线与 $y = ax^2$ 围成平面区域, 问 a 为何值时, 该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大?

得分

五、选做应用题 (从下面两道题中选择一道题作为必做, 共 7 分)

15. 如图, 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时, 其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少 cm/min?



16. 在 $t=0$ 时 (单位: 分钟), 两只桶内各装 10L 的盐水, 盐的浓度均为 15g/L, 用管子以 2L/min 的速度将净水输入到第一只桶内, 搅拌均匀 (假设搅拌均匀不需要时间) 后的混合液又同时通过管子以 2L/min 的速度被输送到第二只桶内, 再将混合液搅拌均匀, 然后用 1L/min 的速度输出液体. 设 t 时刻第一个桶内盐水浓度为 $x(t)$ g/L, 第二个桶内盐水浓度为 $y(t)$ g/L.

(1) 求 x 关于 t 的表达式 $x(t)$.

(2) 求 $t=5$ 时第二个桶内盐水浓度.

得分

六、综合解答题 (共 2 大题, 每小题 8 分, 共 16 分)

17. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可微, $f(a) = f(b) = 0$, 且在某点 $c \in (a, b)$ 处有 $f(c) > 0$
证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f''(\xi) < 0$.

18. 设当 $1 \leq x < +\infty$ 时, $f'(x)$ 连续, 且 $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$
证明: 数列 $x_n = f(n)$ 的极限存在.

你能做的, 岂止如此