华中科技大学转专业数学考试

重制版

目录

转专业数学考试指南

首先老生常谈地强调一遍，转专业数学统考虽然名字上叫微积分，实际上更偏向于数学分析，计算题偏少而证明题偏多，难度也非常之高，更具体地可以去群文件翻看历年的转专业数学考试真题，就会有大概的了解了。另外转专业数学统考为小众考试，没有考试大纲，全凭数院老师随性出题，考试范围每年都不一定，基本和工科微积分（即微积分一）的进度持平，大概是到不定积分为止，学习数学分析的同学务必要加快进度自行预习。另外着重强调的是务必要把历年真题吃透，早年数院老师偷懒，原题隔几年反复出（群文件没有 16 年数学题的原因就是这样，题目在其他年份试卷（包括之后的）里全部出现了，因此没有整理），现在不像以前那么懒了，但是也会有对原题微改的“新题”，因而真题务必掌握技巧，转专业数学考试为选拔性考试，难度高是显而易见的，需要尽可能多拿这些易得的分。

此外，大家没有必要去打印店找所谓转专业真题了，他们很多卷子就是本群整理然后流出的，直接下载群文件去打印就足够了，答案也是学长学姐一个一个找+自己做的，没必要多花冤枉钱了。

后面贴一手早年飞神的数学考试准备指南和我的总结，大家参考即可

关于用哪本书的问题
首先声明，裴砖指的是裴礼文编著的《数学分析中的典型问题与方法》，看好多人都在问。
然后，关于哪本书好，比如裴砖，蒲和平，陈兆斗，这三本书哪本好，这种问题统一回答一下：没有更好这么一说。这三本书你只要吃透一本，数学竞赛都不在话下，何况这转专业考试。如果是抱着哪本书上有原题这种想法建议放弃，只能说18年之前的题大部分能在裴砖上找到，蒲和平陈兆斗相对少一些。但19年就考的都是之前的老题，所以想做参考书碰原题是不太现实的，原题还是做往年真题为好，题库没有谁说得准一定是哪些题。
顺便说一下，这三本书，都是习题类型的书，上面对概念定理等的讲解不够详细，建议还是先看同济的高等数学或者启明的一元分析看定理概念这些细节(觉得自己有能力的数学分析也可以)。把概念定理细节弄清楚了再看习题效果更好。转专业考试改卷会比较注重细节的。
同济的高等数学见群文件。

（BY wsy）

数学考试准备参考资料（基础与进阶）：

华中科技大学《微积分学》上册 + 华中科技大学《微积分学习辅导》

同济《高等数学》

华中科技大学《一元分析学》(较难)

往年原题（必看，群文件 - 转专业统一数学考试真题及参考答案）

裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》(较难)

周民强《数学分析习题演练 第一册》

数学考试准备提示：转专业考试偏重数学分析（推理证明），在基础部分选择一份教材学习基本知识后，推荐继续使用进阶资料刷题学习，不必在此处推荐的不同教材间纠结，完成度比较重要。

(by 🐬jj)

2021 转专业数学考试真题

1、填空题

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)=$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\tan x}\right)}{2^x-1}=8$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$

(3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^4}+2\sqrt[n]{n^2}-3}{\sqrt[n]{n^2}-3\sqrt[n]{n}+2}=$

(4) 设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), g(x)=$

(5) 求 $x=a\cos t+b\sin t, y=a\sin t-b\cos t$，则 $\dfrac{d^m x}{dt^m}\cdot\dfrac{d^n y}{dt^n}-\dfrac{d^n x}{dt^n}\cdot\dfrac{d^m y}{dt^m}=$

2、设 $\{\theta_n\}\neq 0$，且满足 $\theta_n^{\ 2}-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1(n=1,2,3\cdots)$，证明存在一个实数 ，使得对所有 $n\geq 1$，有 $\theta_{n+1}=\lambda\theta_n-\theta_{n-1}$.

3、设 $f(x)$ 定义在 $x=0$ 的某个邻域上，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x}=0$，证明： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

4. 已 知 函 数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内 有 二 阶 导 数 ，$f(0)=f^{'}(0)=0,\left|f^{''}(x)\right|\leq f(x)|+|f^{'}(x)|$，证明：存在 $\delta>0$，使得在 $(-\delta,\delta)$ 内 $f(x)\equiv 0$.

5、设可微函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调减少，如果当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $0<|f(x)|<\left|f^{'}(x)\right|$ 成立，证明：当 $x\in(0,1)$ 时，必有 $x\cdot f(x)>\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2021 年转专业数学试题参考答案

1（1）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}[\arctan(k+1)-\arctan k]=\lim_{n\to\infty}[\arctan(n+1)-\arctan 0]=\frac{\pi}{2}$$

（2）

上式易化为：$\dfrac{f(x)}{\ln 2\cdot x^2}=8$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=8\ln 2$

（3）

$$\sqrt[n]{n}=t\to 1(n\to\infty),\text{原式}=\lim_{t\to 1}\frac{t^4+2t^2-3}{t^2-3t+2}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^2-1\right)\left(t^2+3\right)}{(t-1)(t-2)}=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)\left(t^2+3\right)}{t-2}=-8$$

（4）

由 $g(x)+g(y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，令 $x=y=0$，可得 $g(0)=0$ 再令 $y=0$，可得 $g(x)=g(|x|)$ 可得偶函数. 下面考虑 $x,y>0$ 的情况:

$g\left(\sqrt{x^2}\right)+g\left(\sqrt{y^2}\right)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，令 $h(x)=g(\sqrt{x})(x>0)$

$h\left(x^2\right)+h\left(y^2\right)=h\left(x^2+y^2\right)$，令 $x'=x^2,y'=y^2$

则 $h\left(x'\right)+h\left(y'\right)=h\left(x'+y'\right)\to h\left(x'\right)=kx'$ ， 即 $h(x)=kx$.

$g(\sqrt{x})=kx\to g(x)=kx^2(x>0)$.

由偶函数可知，$g(x)=kx^2(x\in\mathbb{R})$. 其中 $k=g(1)$.

（5）

令 $x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\alpha)$,

同理令 $y=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(t-\alpha)$.

用 Leibniz 公式可得答案：$\left(a^2+b^2\right)\sin\dfrac{n-m}{2}\pi$

2. 证明: 由题 $\theta_{n+1}{}^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=1,\theta_n^2-\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}=1$,

做差得: $\theta_{n+1}^2+\theta_{n-1}\cdot\theta_{n+1}-\theta_n^2-\theta_n\cdot\theta_{n+2}=0\to\theta_{n+1}\left(\theta_{n-1}+\theta_{n+1}\right)=\theta_n\left(\theta_n+\theta_{n+2}\right)$

$\to\dfrac{\theta_{n+1}}{\theta_n+\theta_{n+2}}=\dfrac{\theta_n}{\theta_{n-1}+\theta_{n+1}}=\lambda=\dfrac{\theta_1}{\theta_0+\theta_2}$

3. 证明: 已知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 时, 有 $\left|\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 亦即

$-\dfrac{\varepsilon}{3}|x|<f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)<\dfrac{\varepsilon}{3}|x|$

将 x 替换为 $\dfrac{x}{2^k}$, 得

$-\dfrac{\varepsilon}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}|x|<f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^{k+1}}\right)<\dfrac{\varepsilon}{3}\cdot\dfrac{1}{2^k}|x|(k=0,1,2,\cdots,n).$

相加(注意到 $\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^{k+1}}\right)\right]=f(x)-f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\Bigg)$ 得

$-\dfrac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}|x|<f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)<\dfrac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}|x|.$

令 $n\to\infty$, 取极限得 $-\dfrac{2\varepsilon}{3}|x|\le f(x)\le\dfrac{2\varepsilon}{3}|x|$ (因 $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}=2$), 故

$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\dfrac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon$

4. 法一: 证明: 考察区间 $\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$ 上的函数 $|f(x)|+\left|f'(x)\right|$, 并假定它

在 $x_0\in\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right]$ 处取到最大值 M.

$f\left(x_0\right)=f''\left(\xi_0\right)\dfrac{x_0}{2},f'\left(x_0\right)=f''\left(\eta_0\right)x_0$, 其中$\xi_0,\eta_0$ 位于 x_0 和0之间. 从而有

$M=\left|f\left(x_0\right)\right|+\left|f'\left(x_0\right)\right|=\left|f''\left(\xi_0\right)\right|\dfrac{x_0^2}{2}+\left|f''\left(\eta_0\right)x_0\right|$

$\le \dfrac{\left|f''\left(\xi_0\right)\right|+\left|f''\left(\eta_0\right)\right|}{4}$

$\le \dfrac{\left|f\left(\xi_0\right)\right|+\left|f'\left(\xi_0\right)\right|+\left|f\left(\eta_0\right)\right|+\left|f'\left(\eta_0\right)\right|}{4}$

$\le \dfrac{M}{2}$

故 $M=0$，得证.

法二：取 $\delta=\dfrac{1}{2}, \because f(x), f'(x) \in C\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$，由闭区间连续函数的有界性可知：$\exists M_1, M_2>0$, s.t.

$|f(x)|<M_1,\left|f'(x)\right|<M_2, \therefore\left|f''(x)\right| \leq|f(x)|+\left|f'(x)\right|<M_1+M_2$，即 $|f''(x)|$ 有上界.

由确界原理可知，$\left|f''(x)\right|$ 有上确界，记为 $S(S \geq 0)$.

由上确界的定义可知：$\exists x_1 \in\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, s.t. $\left|f''\left(x_1\right)\right|>S-\varepsilon,(\forall \varepsilon>0)$.

下面用反证法说明 $S>0$ 不成立：若 $S>0$，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{8} S>0$，则

$| f''\left(x_1\right)>\dfrac{7}{8} S$,

$\because f\left(x_1\right)$ （Taylor） $=$ $f(0)+f'(0) x_1+\dfrac{1}{2} f''(\xi) x_1^2, \xi \in\left(0, x_r\right)$,

$f'\left(x_1\right)$ （Lagrange） $=$ $f'(0)+x_1 f''(\eta), \eta \in\left(0, x_{\mathrm{r}}\right)$

故 $\dfrac{7}{8} S<\left|f''\left(x_1\right)\right| \leq\left|f\left(x_1\right)\right|+\left|f'\left(x_1\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|f''(\xi)\right| x_1^2+\left|x_1\right|\left|f''(\eta)\right| \leq \dfrac{5}{8} S \Rightarrow S<0$，与假设相悖，不可能，舍去.

$\because S \geq 0, \therefore S=0$

即 $\left|f''(x)\right|=0, \therefore f''(x)=0, \therefore f'(x) \equiv f'(0)=0 \Rightarrow f(x) \equiv f(0)=0, x \in\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

错解：考虑区间 $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，在该区间上有 $\left|f''(x)\right| \leq|f(x)|+\left|f'(x)\right|, x \in\{0, \dfrac{1}{2})$,

则 $\left|f'(x)\right|=\left|\int_0^x f''(t) d t\right| \leq \int_0^x\left|f''(t)\right| d t \leq \int_0^x\left(|f(t)|+\left|f'(t)\right|\right) d t$

又因 $|f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\le\int_0^x\left|f'(t)\right|dt,\int_0^x|f(t)|dt+\int_0^x\left|f'(t)\right|dt=|f(\theta)|x+\int_0^x\left|f'(t)\right|dt$

(积分中值定理)

$=x\int_0^\theta\left|f'(t)\right|dt+\int_0^x\left|f'(t)\right|dt\le x\int_0^x\left|f'(t)\right|dt+\int_0^x\left|f'(t)\right|dt=(x+1)\int_0^x\left|f'(t)\right|dt$

记 $f'(x)$ 在 $(0,x)$ 上最大值点为 ε

$,\left|f'(\varepsilon)\right|\le(\varepsilon+1)\int_0^\varepsilon\left|f'(t)\right|dt\le(\varepsilon+1)\varepsilon\,|f'(\varepsilon)|\le\frac{3}{4}|f'(\varepsilon)|$

$\left|f'(\varepsilon)\right|=0,\left|f'(x)\right|=0,x\in(0,\frac{1}{2}),f(x)=0$，同理可将此情况推广到 $(-1,1)$ 上.

错误原因在于使用牛顿一莱布尼茨公式时要求 $f''(t)$ 在 $t\in(0,x)$ 上连续，此处由已知条件无法得出.

5. 首先我们给出 $f(x)<0$ 的证明，（由介值定理，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不变号)

$$g(x)\triangleq xf(x)-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),g'(x)=xf'(x)+f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$$

$g(x)>g(1)=0$，原命题成立。

下面给出 $f(x)>0$ 的证明:

$\Leftrightarrow$ 证明: $x\in(0,1),\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<x^2$ 或 $\ln\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<2\ln x$. 因 $f(x)$ 严格递减,

$f'(x)<0$，有 $f'(x)=-\left|f'(x)\right|$,

$$\ln\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}=\ln f\left(\frac{1}{x}\right)-\ln f(x)\overset{\text{Lagrange定理}}{=\!=\!=}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\left(\frac{1}{x}-x\right).$$

注意到 $0<f(x)<\left|f'(x)\right|=-f'(x),\dfrac{f'(x)}{f(x)}<-1,\dfrac{1}{x}-x>0(0<x<1)$.

接下来只需证: $x-\dfrac{1}{x}<2\ln x(0<x<1)$.【求导，显然】

故 $\ln\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}<x-\frac{1}{x}<2\ln x(0<x<1)$.

错解：由题可知，$f'(x)<0,0<f(x)<-f'(x)$，故 $\frac{-f'(x)}{f(x)}>1$，所以

$$\ln\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=-\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{f'(t)}{f(t)}dt>\int_x^{\frac{1}{x}}dt=\frac{1}{x}-x,x\in(0,1)$$

故 $\frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}>e^{\frac{1}{x}-x}$，又 $e^{\frac{1}{x}-x}>\frac{1}{x^2}$

可得 $x\cdot f(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right),x\in(0,1)$.

错误原因在于使用牛顿一莱布尼茨公式时要求 $\frac{f'(t)}{f(t)}$ 在 $t\in\left(x,\frac{1}{x}\right)$ 上连续，此处由已知条件无法得出.

2020 转专业数学考试真题

1.设 $f(x)$ 是 R 上的有界实函数,且 $f\left(x+\frac{1}{11}\right)+f\left(x+\frac{1}{12}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{23}{132}\right)$ $(\forall x\in R)$，求证： $f(x)$ 是周期函数。

2.设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a_n-a_{n-1}\right)=0$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

3.求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]$

4.求在 R 上满足方程 $f(2020x)+f(2019x)=2022x+2021$ 的连续解 $f(x)$

5.讨论 $f(x)=[x]\sin\pi x$ 的连续性与可导性（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

6.计算 $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}$ （n 是任意正整数）

（注：原题没有 $x=0$,但那样无法正常求解，怀疑打印错误，此处加上，后会附上不考虑此条件的解法）

7.设 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求证：在 $(0,1)$ 内存在不同的 ξ,η，使 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

8.设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，证明：$f''(0)=4$

2020 转专业数学试题参考答案

1.设 $F(x)=f\left(x+\frac{1}{11}\right)-f(x)$,则 $F\left(x+\frac{1}{12}\right)=F(x)$,故 $F(x)$ 以 $\frac{1}{12}$ 为周期,也以 1 为周期,$\therefore F(x+1)=F(x)$,即 $f\left(x+\frac{1}{11}\right)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f(x+1)$

$f(x+1)-f(x)=f\left(x+\frac{12}{11}\right)-f\left(x+\frac{1}{11}\right)$, $f(x+1)-f(x)$ 以 $\frac{1}{11}$ 为周期, 也以 1 为周期,可得 $f(x+n)-f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x+i+1)-f(x+i)\right]=(n-1)\left[f(x+1)-f(x)\right]$

$f(x+1)-f(x)=\dfrac{f(x+n)-f(x)}{n-1}$,令 $n\to\infty$,$\because$ $f(x)$ 有界, $f(x+1)-f(x)=0$

$\therefore$ $f(x)$ 以 1 为周期

2.$S_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}a_i=na_n-\sum_{i=2}^{n}i\left(a_i-a_{i-1}\right)-a_1$ (Abel 变换)

$a_n=\dfrac{S_{n-1}}{n}+\dfrac{\sum_{i=2}^{n}i\left(a_i-a_{i-1}\right)+a_1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{n-1}}{n-1}=A$,由 *stolz* 定理,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=2}^{n}i\left(a_i-a_{i-1}\right)+a_1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(a_n-a_{n-1}\right)=0$, $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

3.原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{2}{3}\frac{1}{x}-\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{4}{3}$

4.考虑 $f(\alpha x)+f(\beta x)=ax+b$

$\alpha>\beta$, 则由 $f(x)+f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)=ax\frac{1}{\alpha}+b$ 可知

$$f(x)=ax\frac{1}{\alpha}+b-f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right)$$
$$=ax\frac{1}{\alpha}+b-\left[ax\frac{\beta}{\alpha^2}+b-f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)\right]$$
$$=ax\frac{1}{\alpha}-ax\frac{\beta}{\alpha^2}+f\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}x\right)=\cdots=\frac{ax}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\cdots\pm\frac{\beta^{2n}}{\alpha^{2n}}\right)+b-f\left(\frac{\beta^{2n+1}}{\alpha^{2n+1}}x\right).$$

令 $n\to\infty$，我们有 $f(x)=\frac{ax}{\alpha}\frac{1}{1+\beta/\alpha}+\frac{b}{2}=\frac{a}{\alpha+\beta}x+b.$

5.用定义，在 R 上连续，在 $x=n$ 处不可导，其余地方可导

6.方法 1:由泰勒公式 $\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n=\frac{1}{a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{2n}}x^{2n}$

再由泰勒展开的唯一性，故当 n 为奇数，$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=0$

当 n 为偶数，$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)\Big|_{x=0}=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{a^{n+1}}n!$

方法 2:$\left(a^2+x^2\right)y=1$,由莱布尼兹：$\left(x^2+a^2\right)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$

$x=0$,$a^2y^{(n)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0$,由递推可得答案。

当没有 $x=0$ 时，此时只能引入复数做

$$\frac{1}{x^2+a^2}=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)$$

原式 $=\frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ai}-\frac{1}{x+ai}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\left[\frac{1}{(x-ai)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ai)^{n+1}}\right]=\frac{(-1)^n n!}{2ai}\frac{(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$

考虑：$x+ai=\sqrt{a^2+x^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{ai}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta},\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\Rightarrow(x\pm ai)^{n+1}=r^{n+1}e^{\pm i(n+1)\theta}\left(r=\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\frac{(x+ai)^{n+1}-(x-ai)^{n+1}}{2ai}=\frac{r^{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}\right]}{2ai}=\frac{r^{n+1}\sin(n+1)\theta}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{a}\frac{\sin(n+1)\theta}{\left[\sqrt{a^2+x^2}\right]^{n+1}}$$

7. 分析 (1) 只需将 $[0,1]$ 分成两个区间，使 $f(x)$ 在两个区间各用一次微分中值定理，设分点为 $x_0\in(0,1)$，由

$f\left(x_0\right)-f(0)=f'(\xi)\left(x_0-0\right),f(1)-f\left(x_0\right)=f'(\eta)\left(1-x_0\right)\left(0<\xi<x_0<\eta<1\right)$，得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(x_0\right)-f(0)}{x_0-0},f'(\eta)=\frac{1-f\left(x_0\right)}{1-x_0}$$

则 $f'(\xi)f'(\eta)=1\Leftrightarrow\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}\cdot\dfrac{1-f\left(x_0\right)}{1-x_0}=1.\Leftrightarrow x_0$ 是方程 $f(x)[1-f(x)]=\ x(1-x)$ 的根. 所以取 x_0 是方程 $f(x)=1-x$ 的根即可.

证明 (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1<0,F(1)=1>0$，由介值定理知，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F\left(x_0\right)=0$，即 $f\left(x_0\right)=1-x_0$.在 $\left[0,x_0\right]$ 和 $\left[x_0,1\right]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\xi\in\left(0,x_0\right)$，$\eta\in\left(x_0,1\right)$，使得

$f'(\xi)=\dfrac{f\left(x_0\right)-f(0)}{x_0-0},f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f\left(x_0\right)}{1-x_0}$. 于是

$$f'(\xi)f'(\eta)=\frac{f\left(x_0\right)}{x_0}\cdot\frac{1-f\left(x_0\right)}{1-x_0}=\frac{1-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{1-x_0}=1.$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3,\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=3$,即$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$

由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+o\left(x^2\right)$,

$\therefore f(0)=f'(0)=0$ ， $f''(0)=4$

2019 转专业数学考试真题

1.设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像关于 $x=2019,x=2020$ 均对称，请判断函数 $y=f(x)$ 是什么性质的函数，并说明你的判断

2.设 $a_n>0,b_n>0$ ，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$ ，证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在

3.计算不定积分（1） $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$ （2） $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

4.（1）设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a),f(b)=g(b)$ 。证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导且 $f(a)=f(b)=0$

证明： $\exists\alpha\in(a,b)$ 使得 $f'(\alpha)+\alpha f(\alpha)=0$

5.设 n∈N^*， $f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$，计算 $f(1)$、 $f(-1)$

6. $f(x)$ 有连续导数且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$，问 $f(0)$ 为何值时，$f(0)$ 为 $f(x)$ 的极值，并说明它是极大值还是极小值

7.设 $f(x):I\to R$ 是任一函数,$x_0\in I$,证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数$g(x):I\to R$，使:

(1) $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0),\forall x\in I$

(2) $\varphi(x)$ 在 x_0 处连续且 $f'(x_0)=g(x_0)$

2019 转专业数学试题参考答案

1.周期函数，T=2，偶函数，对称轴为 $x=k$（我觉得这个题说出周期就可以了）

2. 证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant N$ 时，有：

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>\delta\Rightarrow\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$， 即 $a_{n+1}<\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$

于是：$\sum\limits_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{\delta}\sum\limits_{n=N}^{m}\left(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{a_N}{b_N}-\dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\dfrac{1}{\delta}\dfrac{a_N}{b_N}$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

（2013 转专业考试原题）

3. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})+C$

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\frac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$$
$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

4.(1) 当同时取最大值时,有 $f(x_0)=g(x_0)$.不同时取最大值,设 $f(x_1),g(x_2)$ 最大，由介值定理 $(f(x_1)-g(x_1))(f(x_2)-g(x_2))<0$，$\exists x_3, f(x_3)=g(x_3)$。三个零点用三次罗尔定理可得.

⑵ $h(x)=e^{\frac{1}{2}x^2}f(x)$，对用罗尔定理。学过微分方程一眼就够了。

5. 解：因 $\left(x^2-1\right)^n=(x-1)^n(x+1)^n$，令 $u(x)=(x-1)^n,v(x)=(x+1)^n$，则

$u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(n-1)}(1)=0,u^{(n)}(1)=n!,v(1)=2^n$;

$v(-1)=v'(-1)=\cdots=v^{(n-1)}(-1)=0,v^{(n)}(-1)=n!,u(-1)=(-1)^n 2^n$,

所以，$f(1)=\frac{1}{2^n n!}\left[v^{(n)}(1)u(1)+nv^{(n-1)}(1)u'(1)+\cdots+v(1)u^{(n)}(1)\right]\quad =\frac{1}{2^n n!}\cdot 2^n\cdot n!=1$

$f(-1)=\frac{1}{2^n n!}\left[u^{(n)}(-1)v(-1)+nu^{(n-1)}(-1)v'(-1)+\cdots+u(-1)v^{(n)}(-1)\right]$

$=\frac{1}{2^n n!}\cdot(-1)^n 2^n\cdot n!=(-1)^n$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^x\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x f(x))'}{1-e^{-x}}=1$

由洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{1-e^{-x}}=1$

$f(0)=0$,由极限保号性，$(e^x f(x))'>0, x>0; (e^x f(x))'<0, x<0$

$e^x f(x)>f(0)=0$，故是极小值

7. 证 必要性.已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$ 存在 表明函数

$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{当 } x\neq x_0 \text{ 时,}\\ A, & \text{当 } x=x_0 \text{ 时}\end{cases}$ 在 $x=x_0$ 处连续，(1) 式成立，

$f'(x_0)=g(x_0)$.

充分性.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$,

故 $f'(x_0)$ 存在. （2014 转专业数学原题）

2018 转专业数学考试真题

1.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+b^n+2^{-n}b^{2n})^{\frac{1}{n}}(b>0)$

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{cos\sqrt{x}}$

3.求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\frac{2}{k^2}$

4.已知 f(x)、g(x)为（-∞,+∞）上的非常值连续可微函数，

$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$, $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$

且 $f'(0)=0$。求证：$f(x)^2+g(x)^2=1$。

5.设 f(x)在$[a,b]$上可微，试证：$f'(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,0<|h|<\delta,\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon$，对一切 x$\in[a,b]$

成立。

6.设$f_n(x)=\cos x+cos^2x+\cdots+cos^nx$，求证：

（1）对任意自然数 n，方程$f_n(x)=1$在$[0,\frac{\pi}{3})$内有唯一根；

（2）设$x_n\in[0,\frac{\pi}{3})$是$f_n(x)=1$的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

2018 转专业数学试题参考答案

1．当 0<b<1,原式=1

当 b=1,原式=1

当 1<b<2,原式=$b\lim\limits_{n\to\infty}\left(b^{-n}+\left(\frac{b}{2}\right)^{n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=b$

当 b=2,原式=2

当 b>2,原式=$\frac{b^{2}}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^{-n}b^{-2n}+2^{-n}b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{b^{2}}{2}$

（$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{n}+b^{n}+c^{n}}=\max\{a,b,c\}$）

2.原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-\frac{x}{2}+o(x)}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

3. 对于$n\geqslant1$, 有 $\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+2}=\arctan\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}=\arctan\frac{2}{(n+1)^{2}}$

$$\sum_{k=2}^{n}\arctan\frac{2}{k^{2}}=\sum_{k=1}^{n-1}\arctan\frac{2}{(k+1)^{2}}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\arctan\frac{1}{k}-\arctan\frac{2}{k+1}\right)$$

$$=\arctan1+\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$$

令 $n\to\infty$ 便得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^{2}}=\arctan1+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{2}$$

故$S=\frac{\pi}{4}+\arctan2+\arctan\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$

.

4. $f(x)=f(x)f(0)-g(x)g(0)\quad g(x)=f(x)g(0)+g(x)f(0)$

$f(x)+g(x)=f(x)(f(0)+g(0))+g(x)(f(0)-g(0))$

$f(x)(1-f(0)-g(0))=g(x)(f(0)-g(0)-1)$

因为 f(x)、g(x)为非常值函数，所以 $f(0)+g(0)=1\quad f(0)-g(0)=1$

$f(0)=1\quad g(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x)(f(t)-f(0))}{t}-\frac{g(x)(g(t)-g(0))}{t}\right)$$
$=-g'(0)g(x)$

$g'(x)=g'(0)f(x)$

$\therefore (f^2(x)+g^2(x))'=0$, $f^2(x)+g^2(x)=C$, $f^2(0)+g^2(0)=1$

$\therefore\ f^2(x)+g^2(x)=1$

5.证 明 1° 必要性. 因 $f'(x)$ 在 [a, b]上连续，因此一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]\left|x'-x''\right|<\delta$ 时，便有 $|f'(x')$ $-f''(x'')|<\varepsilon$. 由此 $0<|h|<\delta$ 时，任何 $x\in[a,b]$，有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|=\left|f'(\xi)-f'(x)\right|(\xi\in(x,x+h))<\varepsilon$$

(因为 $|\xi-x|<h<\delta$)

2° 充分性. 已知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ，当 $0<|h|<\delta$ 时，$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon,(\forall x\in[a,b])$. 因 此，$\forall x_0\in[a,b],0<|h|<\delta$ 时，只要 $x_0+h\in[a,b]$，便有

$$\left|f'(x_0+h)-f'(x_0)\right|=\left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|$$
$$\leqslant\left|f'(x_0+h)-\frac{f(x_0+h-h)-f(x_0+h)}{-h}\right|+\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\right|<2\varepsilon.$$

所以 $f'(x)$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性, 知 $f'(x)$ 在 [a, b] 上连续。

6.(1) $f'_n(x)<0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos x_n}{1-\cos x_n}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\dfrac{1}{2}, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$

2017 转专业数学考试真题

1.证明数列1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{8}{13}$……存在极限（不可用单调有界必有极限的结论来证），且求出该极限。

2.给定一个数列$\{x_n\}$(n=1,2,⋯)且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x_n-x_{n-1})}{n}=0$。

3.设 g(x)=$\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, x\neq 0\\ f'(0), x=0\end{cases}$$, f(0)=0, f(x)$在 R 上存在二阶导，问 g(x)在 R 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由。

4.设 $f(x):I\to R$ 是任一函数, $x_0\in I$,证明: $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是：存在一个函数 $g(x):I\to R$ ，使:

(1) $f(x)-f(x_0)=g(x)(x-x_0),\forall x\in I$

(2) $\varphi(x)$在x_0处连续且$f'(x_0)=g(x_0)$

5.设$f(x)$在$\mathrm{x}=0$的某领域内有连续的一阶导数，且$\mathrm{f}'(0)=0$，

$\mathrm{f}''(0)$存在,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

6.求最小正数，使得:$(1+\frac{1}{x})^{(x+\alpha)}>e(x>0)$

2017 转专业数学参考答案

1.记方程$x^2+x-1=0$的根为$x_0(x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2})$

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$$

$$|x_{n+1}-x_0|=\left|\frac{1}{1+x_n}-x_0\right|=\left|\frac{{x_0}^2+x_0}{1+x_n}-x_0\right|=\left|\frac{x_0}{1+x_n}\right||x_n-x_0|$$

$$\because x_n>0,\therefore\left|\frac{x_0}{1+x_n}\right|<x_0$$

$$\therefore|x_n-x_0|<{x_0}^{n-1}|x_1-x_0|\to 0$$

2.任给 $\varepsilon>0$，则存在自然数 N，使 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$x_n-x_{n-1}=\left[(x_n-x_{n-2})-(x_{n-1}-x_{n-3})\right]+\left[(x_{n-2}-x_{n-4})-(x_{n-3}-x_{n-5})\right]+\cdots+\left[(x_{N+1}-x_{N-1})-(x_N-x_{N-1})\right]|x_n-x_{n-1}|$$

$$\leqslant(n-N)\frac{\varepsilon}{2}+|x_N-x_{N-1}|$$

令 $n\to\infty$，则有 $\frac{|x_n-x_{n-1}|}{n}\to 0$，从而得证.

（本题也可用 *stolz* 公式解）

3 连续，证明如下

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},x\neq 0$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2}+o(x^2)}{x}-f'(0)}{x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(f'(0)+f''(0)x+o(x))-(f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2}+o(x)^2)}{x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$\therefore g(x)$在 0 处也连续，$g(x)$连续

4 证 必要性.已知 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$ 存在，表明函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}, & \text{当 } x\neq x_0 \text{ 时,}\\ A, & \text{当 } x=x_0 \text{ 时}\end{cases}$$ 在 $x=x_0$ 处连续，(1) 式成立，

$f^{'}\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$.

充分性.

$$f^{'}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=(\text{式(1)})\lim_{x\to x_0}g(x)=(\text{g在x}_0\text{连续})g(x_0),$$

故 $f^{'}\left(x_0\right)$ 存在.

5 由微分中值定理，存在 $\ln(1+x)<t<x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f\,'(t)(x-\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{f\,'(t)-f\,'(0)}{t}\times\frac{t}{x}\right)=\frac{1}{2}f\,''(0)$$

（$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{t}{x}$ 由夹挤准则可得为 1）

6．取对数: $\alpha>\dfrac{1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}-x$，令 $x=\dfrac{1}{t}, f(t)=\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}$. 利用 $f(t)$ 单调性得出 $f(t)<f(0)=\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(1+t)}-\dfrac{1}{t}\right]=\dfrac{1}{2}$ （2013 转专业考试原题）

2015 转专业数学考试真题

1.不要跟错题过不去

2,用三种方法计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3.设 $n\in N^*$， $f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}$， 计算 $f(1)$、 $f(-1)$

4.设函数 $f(x)$ 在$\left[a,b\right]$上有连续导函数 $f'(x)$， 对$\left(a,b\right)$内任意 α，是否可找到 x_1,x_2 $(x_1<\alpha<x_2)$，使得$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\alpha)$成立。若成立证明，若不成立请举出反例。

5.设$f(x)$在$\mathrm{x}=0$的某领域内有连续的一阶导数，且$\mathrm{f}'(0)=0$，$\mathrm{f}''(0)$存在,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

6.计算不定积分$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$

7．计算不定积分$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

8.设$f_n(x)=\cos x+cos^2\mathrm{x}+\cdots+cos^n\mathrm{x}$，求证：

（1）对任意自然数 n，方程$f_n(x)=1$在$[0,\frac{\pi}{3})$内有唯一根;

（2）设$x_n\in[0,\frac{\pi}{3})$是$f_n(x)=1$的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

2015 转专业数学试题参考答案

2.法一：泰勒展开

法二：夹挤准则 $\frac{1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}$

法三：$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ 作指数

3. $(x^2-1)^n=(x+1)^n(x-1)^n$，莱布尼兹公式

4. $x^3,\sin x$ 在 0 处均为反例

5. 由微分中值定理，存在 $\ln(1+x)<t<x$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f'(t)(x-\ln(1+x))}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}(\frac{f'(t)-f'(0)}{t}.\frac{t}{x})=\frac{1}{2}f''(0)$$

（$\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{x}$ 由夹挤准则可得为 1）

6. $\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})+C$

7. $\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\frac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\frac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

8. (1) $f'_n(x)<0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos x_n}{1-\cos x_n}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n=\frac{1}{2},\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{3}$

2014 转专业数学考试真题

1.证明：若对 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$，且 $f(0)=0$，则 $f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$

2. 用三种方法计算极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$

3.设 n 是正整数，$f(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n\left(x^2-1\right)^n}{\mathrm{d}x^n}$ 计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的一阶导数，且 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}$

5. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有定义，对任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有 $f(xy)=f(x)f(y)$ 且 $f'(1)=n>0$，求 $f(x)$

6. 计算不定积分$\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$

7 计算不定积分$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

8. 设 $\mu\in\left(0,\frac{1}{2}\right), f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负，且 $f''(x)\leqslant 0, x\in[0,1]$，证明:

$f(t)\geqslant\mu f(s),\forall t\in[\mu,1-\mu],\forall s\in[0,1]$

2014 转专业数学参考答案

1. 带入 $f(0)=0$ 可知 $|f(x)|=|x|$ 。注意到 f 为单射，这两个条件蕴含着 $f(x)=\pm x$ 假设 $f(1)=1$，则 $|f(x)-f(1)|=|f(x)-1|$，现考虑 $x>0$ 。如果有一个 $f\left(x_0\right)<0$，则 $f\left(x_0\right)=-x_0$，则 $\left|f\left(x_0\right)-f(1)\right|=\left|-x_0-1\right|=\left|x_0-1\right|$ 。此方程只有唯一解 $x_0=0$，矛盾。因此 $f(x)>0, x>0$ 。此时由于单射，$f(x)<0, x<0$ 。综上即可知有 $f(x)=x$；当 $f(1)=-1$，类似可证 $f(x)=-x$，于是最终有

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

5.

$$f^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-1}{\Delta x}=\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{f(x)}{x}f^{'}(1)=n\frac{f(x)}{x}$$

解得 $f(x)=x^n(x>0)$

8. 令 $m=\dfrac{t-\mu s}{1-\mu}$，则易得（自己证去） $m\in(0,1)$ 。可知 f 连续，故:

$f^{''}(x)\leqslant 0\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in[0,1],\forall\lambda\in(0,1)$ 有: $f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\geqslant\lambda f\left(x_1\right)+(1-\lambda)f\left(x_2\right)$

带入可知:

$f(t)=f(\mu s+(1-\mu)m)\geqslant\mu f(s)+(1-\mu)f(m)\geqslant\mu f(s)$

2013 转专业数学考试真题

1.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{cos\sqrt{x}}$

3.设$a_n>0,b_n>0$，若$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，证明：极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$存在

4.证明：若函数$f(x),g(x)$在$\left[a,b\right]$上连续，存在数列$\left\{x_n\right\},x_n\in\left[a,b\right]$

$g(x_n)=f(x_{n+1})$ $n=1,2\cdots$，则$f(x)=g(x)$在$\left[a,b\right]$上有解

5 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}$

6.求最小正数α，使得 $(1+\frac{1}{x})^{x+\alpha}>e \quad (x>0)$

7.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$，又 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 是满足 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数。证明：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$ 满足 $\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

2013 转专业数学试题参考答案

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1})=\sin^2\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\pi}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1})=1$

2. 原式$=\lim\limits_{x\to0}\left(1\text{-}\dfrac{\mathrm{x}}{2}+o(x)\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\left(1\text{-}\frac{\mathrm{x}}{2}+o(x)\right)}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{-\frac{\mathrm{x}}{2}+o(x)}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

3. 证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当$n\geqslant N$ 时，有：

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>\delta\Rightarrow\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$， 即 $a_{n+1}<\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$

于是：$\sum\limits_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{\delta}\sum\limits_{n=N}^{m}\left(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{a_N}{b_N}-\dfrac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\dfrac{1}{\delta}\dfrac{a_N}{b_N}$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有上界，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

4. 证：反证法. 如果结论不成立，则连续函数$F(x)=f(x)-g(x)$ 在[a, b]上恒不为零. 于是 $F(x)$ 恒大于零或恒小于零. 不妨设恒有 $F(x)>0$，则它在[a, b]上的最小值 $m>0$．由

$f\left(x_{n+1}\right)=g\left(x_n\right)=g\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)+g\left(x_{n-1}\right)$

继续递推得到

$f\left(x_{n+1}\right)=g\left(x_n\right)=\left[g\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)\right]+\left[g\left(x_{n-1}\right)-f\left(x_{n-1}\right)\right]+\cdots+\left[g\left(x_2\right)-f\left(x_2\right)\right]+g\left(x_1\right)$

因此

$f\left(x_1\right)-f\left(x_{n+1}\right)=\left[f\left(x_n\right)-g\left(x_n\right)\right]+\left[f\left(x_{n-1}\right)-g\left(x_{n-1}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(x_2\right)-g\left(x_2\right)\right]$
$=F\left(x_n\right)+F\left(x_{n-1}\right)+\cdots+F\left(x_2\right)\geqslant(n-1)m$

$

可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)=\infty$，这与 $f(x)$ 在[a, b]上有界矛盾.

5. $\frac{dy}{dx}$=-tcost，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

6. 取对数: $\alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$，令 $x=\frac{1}{t}, f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}$. 利用 $f(t)$ 单调

性得出 $f(t)<f(0)=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right]=\frac{1}{2}$

7.设 $y_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$，由介值定理，$\exists x_k, y_k=f(x_k)$，令 $x_0=0, x_n=1$

由中值定理，$\exists\beta_i, \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=f'(\beta_i), \therefore \frac{y_{i+1}-y_i}{f'(\beta_i)}=x_{i+1}-x_i$

令 $i=0,1,\cdots n-1$ 并累加得证

2012 转专业数学考试真题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$

2. 证明：对任意 $x,y\in R$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|^2$ 则对每个 $n\in N,\forall a,b\in R$，有：$|f(a)-f(b)|\leqslant\frac{1}{n}|a-b|^2$ 。

3. 设 $a_n>0,b_n>0$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$ 证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)e^{\frac{1}{x-1}}$ 。

5. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，对于任意 $x,y\in(0,+\infty)$ 有：$f(xy)=f(x)f(y), f^{'}(1)=n>0$，求 $f(x)$ 。

6．求最小正数 a，使得：$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}>e(x>0)$ 。

7. 计算不定积分 $\int\dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$ 。

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$ $f(1)=1$．又有 $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$，且 $\alpha_k>0$ 。这么：在 $(0,1)$ 中存在互不相同的数 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 使得：

$$\frac{\alpha_1}{f^{'}(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f^{'}(\beta_2)}+\ldots+\frac{\alpha_2}{f^{'}(\beta_2)}=1$$

2012 转专业数学试题参考答案

1.

法一.注意斯特林公式 (Stirling's approximation):

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，可得答案 1 。

法二. 利用夹挤准 (考虑 n^n 的放缩)

法三 . 对于 α^β 进行求解，利用取对数换成 $e^{\beta\ln\alpha}$，此题研究分了的

变化，可以 用 Stolz 定理求解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln(n-1)!}{n^2-(n-1)^2}=0$

2.

取 $\lim\Delta x=0, y=x+\Delta x$，可得 $|f(x)-f(x+\Delta x)|=(\Delta x)^2, f(x)$ 连续;

$\frac{|f(x)-f(x+\Delta x)|}{|\Delta x|}=\Delta x$，进行分类讨论可知 $f(x)$ 可导。注意到此题

$f'(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv C$.

3.

(此题略微超纲，涉及级数相关的知识)

网页搜索：库默尔判别法。

4.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x+o(x)}}=e^{\frac{-1}{2}}$$

5.

取 $y=\frac{x+\Delta x}{x},\lim\Delta x=0$，则有 $f(x\cdot y)=f\left(x\cdot\frac{x+\Delta x}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)\left[1-f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]$$，由题条件易得 $f(1)=1$，则

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\frac{f(1)-f\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=f(x)\frac{f'(1)}{x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x}\Rightarrow(\ln(f(x)))'=n(\ln x)'\Rightarrow f(x)=x^n\quad(f(1)=1.).$$

6.

取对数：$\alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$，令 $x=\frac{1}{t},f(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}$. 利用 $f(t)$ 单调性

得出 $f(t)<f(0)=\lim\limits_{t\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}\right]=\frac{1}{2}$

7. 分部换元就好了，不定积分没意思。

8. $y_0=0,y_i=\sum_{k=1}^{i}\alpha_i,0=y_0<y_1<\ldots<y_n=1.t_0=0,t_n=1$ 在 $[0,1]$ 上对 $f(x)$ 介值定理得到 $f(t_1)=y_1$ 以及 $[t_1,1]$ 上介值定理, ... 最后得到 $f(t_i)=y_i$

在任意一个区间上 $[t_{i-1},t_i]$ 上有拉格朗日中值: $\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(\beta_i)}=t_i-t_i$ 求和得到答案。

2011 转专业数学考试真题

1.证明：若对任意$x,y\in(-\infty,+\infty)$有$|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$，则对每个$n\in N$，$\forall a,b\in(-\infty,+\infty),|f(a)-f(b)|\le\frac{1}{n}(a-b)^2$

2.设$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

3.求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

4.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f(0)=1,g(x)=\int_0^{\sin x}f(tx^2)dt$，求$g'(x)$并求$g'(0)$

5.设$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，对任意$x,y\in(0,+\infty)$有$f(xy)=f(x)f(y)$，且$f'(1)=n>0$，求$f(x)$

6. 计算不定积分$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

7. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，又$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是满足$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$的正数。证明：在$(0,1)$中存在互不相同的数$\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n$满足$\frac{\alpha_1}{f'(\beta_1)}+\frac{\alpha_2}{f'(\beta_2)}+\cdots+\frac{\alpha_n}{f'(\beta_n)}=1$

8.证明：若$f(x)$在$[0,1]$上可微，$f(0)=0, 0\le f'(x)\le 1$，则$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$

9.证明：对任意正整数 n，有$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$

2011 转专业数学试题参考答案

1．取 $\lim \Delta x=0, y=x+\Delta x$，可得 $|f(x)-f(x+\Delta x)|=(\Delta x)^2, f(x)$ 连续:

$\dfrac{|f(x)-f(x+\Delta x)|}{|\Delta x|}=\Delta x$，进行分类讨论可知 $f(x)$ 可导。注意到此题

$f'(x)=0\Rightarrow f(x)\equiv C$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a}(1-a)(1+a)\left(1+\mathrm{a}^2\right)\mathrm{L}\left(1+a^{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-a}\left(1-a^{2^{n+1}}\right)=\dfrac{1}{1-a}$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)}{x+o(x)}}=e^{\frac{-1}{2}}$

4. $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x}f\left(tx^2\right)d\left(tx^2\right)$

$g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f\left(tx^2\right)d\left(tx^2\right)+\dfrac{1}{x^2}f\left(x^2\sin x\right)\left(x^2\cos x+2x\sin x\right)$

$g'(0)=\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2\sin x}f\left(tx^2\right)d\left(tx^2\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x^2\sin x\right)\left(x^2\cos x+2x\sin x\right)}{3x^2}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x^2\sin x\right)\left(x^2\cos x+2x\sin x\right)}{3x^2}=f(0)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x^2\cos x+2x\sin x\right)}{3x^2}=1$

5. 取 $y=\dfrac{x+\Delta x}{x},\lim\Delta x=0$，则有 $f(x\cdot y)=f\left(x\cdot\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=f(x)f\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)=f(x)\left[1-f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)\right]$，由题目条件易得 $f(1)=1$，则

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f(x)\dfrac{f(1)-f\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}\cdot x}=f(x)\dfrac{f'(1)}{x}$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{n}{x}\Rightarrow(\ln(f(x)))'=n(\ln x)'\Rightarrow f(x)=x^n\quad(f(1)=1.)$

6. $\int\dfrac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$

$=2x\sqrt{e^x-1}-4\int\dfrac{e^x-1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\int\dfrac{1}{e^x}d\sqrt{e^x-1}$

$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

7. 设 $y_k=\sum_{i=1}^{k}X_i$，由介值定理，$\exists x_k, y_k=f\left(x_k\right)$，令 $x_0=0,x_n=1$ 由中值定理，$\exists \beta_i,\dfrac{f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)}{x_{i+1}-x_i}=f'\left(\beta_i\right),\therefore \dfrac{y_{i+1}-y_i}{f'\left(\beta_i\right)}=x_{i+1}-x_i$ 令 $i=0,1,\ldots,n-1$ 并累加得证

8. 证明 因为 $0<f'(x)\leqslant 1, f(0)=0$，则 $f(x)>f(0)=0$.

令$F(t)=\left(\int_0^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^t f^3(x)\mathrm{d}x, t\in[0,1]$. 则 $F(0)=0$, 且

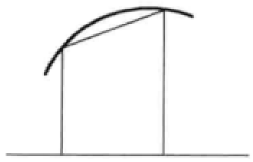
$$F'(t)=f(t)\left(2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-[f(t)]^2\right)\triangleq f(t)G(t)$$

其中 $G(t)=2\int_0^t f(x)\mathrm{d}x-[f(t)]^2$，则 $G(0)=0$ 和 $G'(t)=2f(t)\left[1-f'(t)\right]\geqslant 0$，因此 $G(t)\geqslant 0$．于是 $F'(t)=f(t)G(t)\geqslant 0$，所以 $F(t)\geqslant 0$，特别 $F(1)\geqslant 0$．所以原不等式成立.

9.证明 对于正整数 K 及 $K-1\leqslant x<K$，我们有 $\sqrt{K}>\sqrt{x}$，

所以 $\sqrt{K}>\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ ，相加则得

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\int_0^n\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}n^{3/2}$.


附图 2.5

因为 $\sqrt{x}$ 为严格上凸函数，则对应于区间 $[K-1,K]$ 上的曲边梯形面积 大于对应弦的梯形面积 (附图 2.5)，即

$\dfrac{1}{2}(\sqrt{K-1}+\sqrt{K})<\int_{K-1}^{K}\sqrt{x}\mathrm{d}x$

所以

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}=\frac{1}{2}(\sqrt{0}+\sqrt{1})+\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})+\frac{1}{2}\sqrt{n}$$
$$<\int_0^n\sqrt{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\sqrt{n}=\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$