华中科技大学 2023 级本科生转专业联合考试（笔试）：微积分

参考答案

学数华科

2023 年 12 月 9 日

一、填空题(每题 8 分，共 48 分)

1. 若 $\beta \neq k\pi (k = 0, 1, 2, ...)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan(\frac{\beta}{2^k}) =$

解. 注意到 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$，则：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan(\frac{\beta}{2^k}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left(\cot \frac{\beta}{2^k} - 2\cot \frac{\beta}{2^{k-1}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \cot \frac{\beta}{2^n} - \cot \beta \\
&= \frac{1}{\beta} - \cot \beta
\end{aligned}$$

■

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] =$

解. 置 $t = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to 0$，则：

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} \left[(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}} \right] &= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t^3)^{\frac{2}{3}} - (1-t^3)^{\frac{2}{3}}}{t^3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

■

3. 设 $0 < a_1 < \pi, a_{n+1} = \sin a_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n =$

解. 用数学归纳法容易证明 $a_n \in (0, \pi)$ 恒成立，且 $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$，故 $\{a_n\}$ 收敛. 易见其收敛于 0.

由Stolz定理：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} na_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{a_n^2}-\frac{1}{a_{n-1}^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2-a_n^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^x}{x^2-\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(x+\sin x)(x-\sin x)} \\
&= 3
\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$. ■

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$, 则 $f''(0)=$

解. 提示：反复运用 L'Hopital 法则即可. ■

5. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, 则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)=$

解. 计算题，略. ■

6. 设 $\alpha\neq\beta$ 是两个实常数，则 $\frac{e^\beta-e^\alpha}{\beta-\alpha}$ 与 $\frac{e^\beta+e^\alpha}{2}$ 最大值为

解. 根据 A-L-G 不等式：

$$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_1}<\frac{x_1+x_2}{2}$$

立得. ■

二、(9 分)已知数列 $\{\theta_n\}$ 满足: $\theta_1=1,\theta_2=2,\theta_{n+1}=\theta_n-\frac{1}{n+1}\theta_{n-1}(n=2,3,\cdots)$, 证明: 对所有 $n\geq 3$ 有 $0<n\theta_n-3<\frac{6}{n-1}$.

解. 由 $\theta_{n+1}=\theta_n-\frac{1}{n+1}\theta_{n-1}$ 可得 $(n+1)\theta_{n+1}-n\theta_n=\theta_n-\theta_{n-1}$. 累加可得 $(n+1)\theta_{n+1}-4=\theta_n-1$，即$(n+1)\theta_n+3=\theta_{n-1}(\forall n\geq 3)$.

于是，只需证明 $\theta_n>\frac{3}{n}(\forall n\geq 3)$ 及 $\theta_n<\frac{6}{n}(\forall n\geq 2)$.

容易验证 $n=2$ 时 $\theta_n<\frac{6}{n}$ 成立，$n=3$ 时 $\theta_n\in\left(\frac{3}{n},\frac{6}{n}\right)$.

假定 $\theta_k\in\left(\frac{3}{k},\frac{6}{k}\right)$，则 $\theta_{k+1}\in\left(\frac{\frac{3}{k}+3}{k+1},\frac{\frac{6}{k}+3}{k+1}\right)\in\left(\frac{3}{k+1},\frac{6}{k+1}\right)$ ■

三、(9 分)设正整数 $n\geqslant 2$, 证明: 方程 $\left(1-x^2\right)^n=1-x,x\in(0,1)$ 恰有一个解.

解. 令 $f(x)=(1-x^2)^n+x-1$，则$f(1)=f(0)=0$，且 $f'(x)=n(1-x^2)^{n-1}(-2x)+1$.

注意到 $f'(0)=f'(1)=1>0$，可知在 0 的某个右邻域内 $f(x)>0$，1 的某个左邻域内 $f(x)<0$，有零点存在性定理，$f(x)$ 在$(0,1)$上至少有一根，下证唯一性.

设 x_1,x_2 为 $f(x)$ 的两个零点，则 $f(0)=f(x_1)=f(x_2)=f(1)$，由 Rolle 定理可知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有三个零点. 考察单调性可知 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上至多有两个零点，矛盾! ■

四、(9 分)设函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数$f'(x)$，对(a,b)内任意一点ξ，可否在 (a,b) 找到不同的两点 x_1 和x_2，使得 $\frac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}=f'(\xi),x_1<\xi<x_2$ 成立? 试证明你的结论或举反例.

解. 答案是否定的. 可构造反例为 $[0,1]$ 上的 $f(x)=x^3$.

$f'(0)=0$ 但对任意 $x_1<0<x_2$ 均有 $\dfrac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}>0$. ■

五、(9 分)设函数 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$上三阶可导，且 $f'''(x)>0$ ，证明:

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)<\frac{h}{2}\left[f'(\alpha)+f'(\alpha+h)\right],(\alpha<a+h<\beta)$$

.

解. 构造 $g(h)=f(\alpha+h)-f(\alpha)-\dfrac{h}{2}\left[f'(\alpha)+f'(\alpha+h)\right]$，则 $g(0)=0$ 且 $g'(h)=f'(\alpha+h)-\dfrac{1}{2}\left[f'(\alpha)+f'(\alpha+h)\right]-\dfrac{h}{2}f''(\alpha+h)$.

由 Taylor 定理：

$$f'(\alpha)=f'(\alpha+h)-f''(\alpha+h)h+f'''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

由于 $f'''(x)>0$，所以 $f'(\alpha)-f'(\alpha)-f''(\alpha+h)h<0$，故 $g'(h)<0$，在 $(0,\beta-\alpha)$ 上 $g(h)$ 单调减少，故 $g(h)<0$，原不等式成立. ■

六、(16 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，用两种方法证明: 存在 $\exists\xi\in(a,b)$ 满足

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

.

解. （方法一）令 $F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{x+a}{2}\right)+f(a)\,,G(x)=\dfrac{1}{4}(x-a)^2$，则 $F(a)=G(a)=0$.

由 Cauthy 中值定理：

$$\begin{aligned}\frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} \\ &= \frac{F'(\eta)}{G'(\eta)} \\ &= \frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}}\end{aligned}$$

其中 $\eta \in (a,b)$.

由 Lagrange 中值定理：

$$\begin{aligned}\frac{f'(\eta)-f'\left(\frac{\eta+a}{2}\right)}{\frac{\eta-a}{2}} &= f''(\xi)\frac{\eta-\frac{\eta+a}{2}}{\frac{\eta-a}{2}} \\ &= f''(\xi)\end{aligned}$$

其中 $\xi \in \left(a, \dfrac{a+\xi}{2}\right)$. 得证. ■

解. （方法二）由 Taylor 定理：

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

是故 $f(a)+f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{8}$.

由 Darboux 定理，$\exists \xi$ 使得 $f''(\xi) = \dfrac{\xi_1+\xi_2}{2}$，即证. ■