姓名____________ 座位号______________________________

**（在此卷上答题无效）**

**绝密 ★ 启用前**

# 2024-2025 学年度第一学期华中科技大学期末考试模拟试卷

# 线性代数

本试卷共 2 页，19 题。全卷满分 100 分。考试用时 150 分钟。

**注意事项**：

1. 作答选择题时，选出每小题答案后，在答题卡上的指定区域写上答案。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

2. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

3. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将答题卡交回。试卷可以自己留存。

4. 出题人：Sukuna（sukunahust.moe）

**一、判断题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。判断下面说法的正确与错误。**

1. 设 n 阶方阵的行、列向量组不等价，则 |A| = 0。（　　）
2. 若齐次线性方程组中方程的个数大于未知量的个数，则该方程组只有零解。（　　）
3. 相似的矩阵有相同的特征值，从而有相同的特征向量。（　　）
4. 一个矩阵左乘行满秩矩阵或右乘列满秩矩阵，原矩阵的秩不变（　　）
5. 设 $A, B$ 为 n 阶方阵，$I$ 为 n 阶单位阵，假设 $B + AB = I$，那么 $AB + B = I$（　　）
6. 如果一个方阵 $A$ 不能相似对角化，那么不存在矩阵 $P, V$ 使得 $A = P^{-1}VP$（　　）
7. 若 $A, B$ 为 n 阶方阵，那么 $r(AB) = r(BA)$（　　）
8. 设矩阵 $A$ 是一个实对称矩阵，方程组 $AX = 0$ 有非零解，则 $A$ 不是正定矩阵。（　　）

**二、填空题：本题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。**

9. $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，而且满足 $ABA^* = 2BA^* + I$，则 $|B| =$ ▲

10. 设 $A$ 为 $n$ 阶行列式不为 0 的矩阵，$A^*$ 是 $A$ 的伴随矩阵，A 有特征值 $\lambda$，则 $(A^*)^2 + I$ 必有特征值 ▲

11. 有 $A^2 + A - 9I = 0$，则 $(A - I)^{-1} =$ ▲

12. $\lambda_1, \lambda_2$ 是矩阵 A 的特征值，对应的特征向量向量 $\alpha_1, \alpha_2$，$\alpha_1, A(\alpha_1, \alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 ▲

13. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 经过正交变换 $x = Py$ 变换成 $f = 6y_1^2$，那么 $a =$ ▲



**三、解答题：本题共 6 小题，共 64 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

14.（10 分）求下面行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

15.（10 分）讨论下面线性方程组的可解性：

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases}$$

16.（10 分）

已知三阶方阵 $A$ 和向量 $x$，$x, Ax, A^2x$ 线性无关，并且满足 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$

（1）$P = (x, Ax, A^2x)$，求矩阵 B 使得 $PBP^{-1} = A$

（2）计算行列式 $|A + I|$

17.（10 分）$A$ 是可逆矩阵，$B$ 是 $A$ 第 i 行和第 j 行进行交换所得的矩阵。

（1）讨论 $B$ 的可逆性。

（2）求 $AB^{-1}$

18.（12 分）已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2

（1）求 $a$

（2）求正交变换 $x = Qy$ 让 $f$ 转化成标准型

（3）求 $f = 0$ 的解。

19.（12 分）若 n 阶方阵 $A, B$ 满足 $AB = BA$，证明 $A, B$ 一定有公共的特征向量。