

# 华中科技大学 2023-2024 学年 第一学期

## 微积分 B 试卷 (模拟卷)

院(系) \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 学号 \_\_\_\_\_

试卷卷面成绩								课程考核成绩占 %	平时成绩占 %	课程考核成绩
题号	一	二	三	四	五	六	小计			
得分										

得分
----

### 一、单项选择题 (共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

 自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊  
 装订线内不要答题

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2023} = (\quad)$ 
  - (A)  $+\infty$
  - (B) 0
  - (C)  $e$
  - (D)  $\frac{1}{e}$
2. 下列函数中: (1)  $x \sin \frac{1}{x}$  (2)  $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  (3)  $\frac{\sin x}{x}$  (4)  $x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  上有界的有几个 ( )
  - (A) 0
  - (B) 1
  - (C) 2
  - (D) 3
3. 设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域内连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$ , 则在点  $x = 0$  处  $f(x)$  ( )
  - (A) 不可导
  - (B) 可导且  $f'(0) \neq 0$
  - (C) 取得极大值
  - (D) 取得极小值
4. 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且导函数  $f'(x)$  连续。在下列四个结论中:
  - (1)  $\int_0^x [\cos(2f(t)) + 5f'(t)] dt$  为奇函数;
  - (2)  $\int_0^x [\cos(2f(t)) + \sin(5f'(t))] dt$  为偶函数;
  - (3)  $\int_0^x [\cos(5f'(t)) + 2f(t)] dt$  为奇函数;
  - (4)  $\int_0^x [\cos(5f'(t)) + \sin(2f(t))] dt$  为偶函数;
 正确结论的个数为 ( )
  - (A) 0
  - (B) 1
  - (C) 2
  - (D) 3

得分

## 二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.)

5. 设  $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 1}$ , 则  $y$  的微分  $dy = \underline{\hspace{2cm}}$ 6.  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$  是比  $x \sin x^n$  的高阶无穷小,  $x \sin x^n$  是比  $e^{x^2} - 1$  的高阶无穷小, 则正整数  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 

7. 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2a(x-2))}{x-2}, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \frac{b(\sqrt{1+x} - \sqrt{3})}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$  为连续函数  
 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$

8. 设  $y = \frac{3x-1}{x^2-1}$ ,  $y^{(2024)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 9. 一点先向正东方向移动  $a$  米, 然后左拐弯移动  $aq$  米 (其中  $0 < q < 1$  ), 如此不断重复左拐弯, 使得后一段移动的距离为前一段的  $q$  倍, 这样该点有一极限位置, 则该极限位置与原出发点相距  $\underline{\hspace{2cm}}$  米?(结果用  $a, q$  来表示)

得分

## 三、计算题 (共 3 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

10. 求不定积分  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx$

11. 设  $\int_1^{y-x^2} e^{t^2} dt = \int_0^x \cos t^2 dt$  确定的 y 为 x 的函数，求  $\frac{dy}{dx}$

12. 计算定积分  $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx$

自觉遵守考试规则，诚信考试，绝不作弊

装订线内不要答题

得分

四、必做应用题 (共 2 大题, 每小题 8 分, 共 16 分)

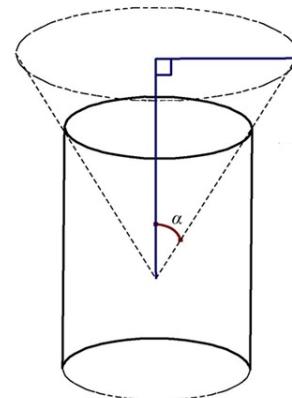
13. 由曲线  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ , 及  $x = 0, y = 0$  围成的平面区域的面积.

14. 曲线  $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$  与  $y = 1 - x^2$  交于点  $A$ , 过原点  $O$  和点  $A$  的直线与  $y = ax^2$  围成平面区域, 问  $a$  为何值时, 该平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得的旋转体体积最大?

得分

## 五、选做应用题 (从下面两道题中选择一道题作为必做, 共 7 分)

15. 如图, 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时, 其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少 cm/min?



自觉遵守考试规则, 诚信考试, 绝不作弊

装订线内不要答题

16. 在  $t=0$  时 (单位: 分钟), 两只桶内各装 10L 的盐水, 盐的浓度均为 15g/L, 用管子以  $2\text{L}/\text{min}$  的速度将净水输入到第一只桶内, 搅拌均匀 (假设搅拌均匀不需要时间) 后的混合液又同时通过管子以  $2\text{L}/\text{min}$  的速度被输送到第二只桶内, 再将混合液搅拌均匀, 然后用  $1\text{L}/\text{min}$  的速度输出液体. 设  $t$  时刻第一个桶内盐水浓度为  $x(t)\text{g}/\text{L}$ , 第二个桶内盐水浓度为  $y(t)\text{g}/\text{L}$ .
- 求  $x$  关于  $t$  的表达式  $x(t)$ .
  - 求  $t = 5$  时第二个桶内盐水浓度.

得分

六、综合解答题 (共 2 大题, 每小题 8 分, 共 16 分)

17. 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且在某点  $c \in (a, b)$  处有  $f(c) > 0$   
证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) < 0$ .

18. 设当  $1 \leq x < +\infty$  时,  $f'(x)$  连续, 且  $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$   
证明: 数列  $x_n = f(n)$  的极限存在.