

# 华中科技大学 2024~2025 学年第一学期

## “微积分（B）卷” 考试试卷

学数华科

2025 年 1 月 16 日

### 一、单项选择题（每小题 3 分）

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  是【】.  
A. 无界的但不是无穷大量      B. 无穷大量  
C. 有界的但不是无穷小量      D. 无穷小量
2. 设  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  均为非负数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ , 则【】.  
A. 对任意正整数  $n$ , 有  $a_n < b_n$       B. 对任意正整数  $n$ , 有  $b_n < c_n$   
C. 数列  $\{a_n \cdot c_n\}$  发散      D. 数列  $\{b_n \cdot c_n\}$  发散
3. 设  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$ , 则【】.  
A.  $f'(x_0)$  是  $f'(x)$  的极大值      B.  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极大值  
C.  $f(x_0)$  是  $f(x)$  的极小值      D.  $(x_0, f(x_0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点
4. 若  $f'(2x) = e^{-x}$ , 且  $f(0) = 1$ , 则  $\int f(x)dx =$  【】.  
A.  $3x - e^{-\frac{x}{2}} + C$       B.  $3x - 2e^{-\frac{x}{2}} + C$   
C.  $3x + 4e^{-\frac{x}{2}} + C$       D.  $3x - 4e^{-\frac{x}{2}} + C$
5. 设函数  $f(x)$  二阶可导, 且  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ , 则【】.  
A.  $f(2) < 2f(1)$       B.  $f(2) > 2f(1)$   
C.  $2f(2) < f(1)$       D.  $2f(2) > f(1)$

6. 下列反常积分收敛的是【】.

A.  $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

C.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

B.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

D.  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

二、填空题（每小题 4 分）

7. 设函数  $y = f(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$  确定，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ f\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3 \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 设函数  $f(x) = \int_0^{3x} e^{-t^2} dt + 2$ ,  $g(x)$  是  $f(x)$  的反函数，则  $g'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

9. 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$ , 则  $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ .

10. 连续曲线段  $y = \int_0^x \sqrt{\sin t} dt (0 \leq x \leq \pi)$  的弧长为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、计算题（每小题 7 分）

11. 求曲线  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$  ( $x > 1$ ) 的渐近线.

12. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2n + \frac{4}{n}} + \dots + \frac{1}{2n + \frac{n^2}{n}} \right).$

13. 设方程  $e^{xy} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^y \sqrt{4-t^2} dt = 1$  可确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ .

14. 求方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$  的积分曲线  $y = y(x)$ , 使其在点  $(0, 1)$  处的切线与曲线

$y = x^2 - 3x + 1$  在该点处的切线重合.

15. 设  $f(x) = \int_0^x e^{-t^2+2t} dt$ , 求  $I = \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$ .

16. 设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^3 - x^3| dt (0 \leq x \leq 1)$ , 求  $f(x)$  的最值.

四、综合题（每小题 7 分）

17. 设  $f(x)$  连续,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \tan x}{x} = 1$ ,  $F(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 求  $F'(x)$ , 并讨论  $F'(x)$  的连续性.

18. 设曲线  $y = y(x)$  是第一象限内的连续曲线, 点  $A(0, 1), B(1, 0)$  分别为曲线与  $y$  轴及  $x$  轴的交点, 点  $M(x, y)$  为曲线  $AB$  上的任意一点, 过  $M(x, y)$  作  $x$  轴的垂线, 与  $x$  轴交于点  $C$ ,  $O$  为坐标原点, 设梯形  $OCMA$  的面积与曲边三角形  $CBM$  的面积和为  $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}$ , <sup>1</sup>求  $y = y(x)$  与  $y$  轴及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $y$  轴旋转一周所得的旋转体的体积.

五、证明题（每小题 5 分）

19. 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} = 0$ ,  $f(2) = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ ,  
证明:  $\exists \xi \in (0, 2)$ , 使得  $f''(\xi) = 0$ .

20. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的二阶导数, 且  $|f''(x)| \leq 1$ , 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}.$$

<sup>1</sup>注: 此处有错误, 应将  $\frac{1}{2}$  改为  $\frac{1}{3}$  才正确