2022-2 期中试题

一、基本计算题(每小题 6 分，共 60 分)

1. 已知 $y_1 = x + \cos x$, $y_2 = x + \sin x$, $y_3 = x$ 是某个二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解，求该微分方程及其通解.

2. 已知单位矢量 $\overrightarrow{OA}$ 与三个坐标轴正向的夹角相等，$\overrightarrow{OA}$ 的方向余弦为正，点 B 是点 $M(1,-2,2)$ 关于点 $N(-1,2,1)$ 的对称点，求以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的面积.

3. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{y}$ （a 为常数）

4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线在 $(3,4,5)$ 处切线与法平面方程.

5. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x = x+2y$ 确定，求 $\mathrm{d}z|_{(1,2)}$.

6. 设 $u=f(x,y,z), \varphi(x^2,e^y,z)=0, y=\cos x$, 其中 f,φ 具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0,$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{4}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$f(x,y)$ 为区域 D 上的连续函数, 求 $f(x,y)$.

8. 求积分 $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$.

9. 设函数 $z=f(x^2-y,\varphi(xy))$, 其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续的偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

10. 设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\ge 2y, x^2+y^2\ge -2y, x\ge 0\}$，求二重积分 $I=\iint\limits_D (y^3+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

二. 综合题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(x)$ 的表达式.

2. 求直线$L:\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ 2x+y+4z-2=0 \end{cases}$在曲面$xy+z=0$的点$P_0(2,1,-2)$处切平面上的投影直线的方程.

3. 设曲面Σ为曲线$\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转一周得到的旋转曲面，求函数$u=z^4-3xz+x^2+y^2$沿$\Sigma$上点$P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的法向量方向的方向导数.

4. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$在原点$(0,0)$的连续性、偏导数存在性及可微性.

5. 设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为光滑曲面S:$\varphi(x,y,z)=0$外的一固定点，$P(x,y,z)$为S上任意一点. 证明：若$\left|\overrightarrow{P_0P}\right|$最短，则$\overrightarrow{P_0P}$必是曲面S在点$P$处的法向量.