2016-2 期中试题解答

1. 因 $e^x - x, e^{3x} - x$ 是 $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ 的解， 且不成比例，

所以，原微分方程的通解为 $y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{3x} - x) + x$.

将 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 代入上式，得到 $C_1 = C_2 = 1$，

所以所求特解为 $y = e^x + e^{3x} - x$.

2. 令 $p(x) = y'$，则原方程化为 $p' = p^2 + 1, p|_{x=0} = 0$，

分离变量，得 $\dfrac{dp}{1+p^2} = dx$；

积分，得 $\arctan p = x + C$，由初始条件 $C = 0$，所以 $p = y'(x) = \tan x$，

再积分，并代入 $y|_{x=0} = 0$，得 $y(x) = -\ln(\cos x)$，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$.

3. 过 $M(2,-2,3)$ 与直线 $L_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-4}{0}$ 垂直的平面方程为 $(x-2) + 2(y+2) = 0$，

将 L_1 的参数式方程 $x = -1+t, y = 2+2t, z = 4$ 代入平面方程，得 $t = -1$，从而得交点 $P(-2,0,4)$；

所求的直线就是过点 M 和点 P 的直线，其方程为 $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

4. 令 $F(x,y,z) = x + y - z - 1, G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$，

$$\nabla F = \{1,1,-1\},\ \nabla G = 2\{x,y,z\}\Big|_{(1,1,1)} = 2\{1,1,1\}，\quad .$$

切线的方向矢量为 $\boldsymbol{s} = \{1,1,-1\} \times \{1,1,1\} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\{1,-1,0\}$，

所以所求的切线方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{0}$， 法平面方程为: $x - y = 0$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^y f'(x\mathrm{e}^y)$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y) = \mathrm{e}^y f'(0) = 2\mathrm{e}^y$

由于 $\dfrac{d}{dy}(\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,y)) = 2e^y$，所以由偏导定义知 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) = 2e$.

6. $z_x = f_1 + f_2 + yf_3$,

$$z_{xy} = f_{12} + xf_{13} + f_{22} + xf_{23} + f_3 + yf_{32} + xyf_{33}$$

$$= f_{12} + xf_{13} + f_{22} + (x+y)f_{23} + f_3 + xyf_{33}.$$

7. 交换积分次序得 $I = \int_0^1 e^{x^2} dx \int_{x^3}^{x} dy = \int_0^1 e^{x^2}(x - x^3)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t (1-t)dt = \frac{e-2}{2}$

8. 利用对称性以及极坐标，得

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\pi} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

9. $I = \iint_D dxdy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz$ （D 是由直线 $x=0, x=1, y=x, y=1$ 围成的区域）

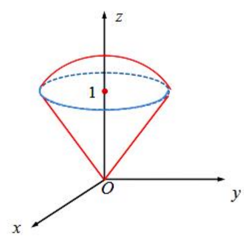
$$= \frac{1}{4}\iint_D x^5 y^6 dxdy = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_x^1 x^5 y^6 dy$$

$$= \frac{1}{28}\int_0^1 (x^5 - x^{12})dx = \frac{1}{28}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{13}\right) = \frac{1}{4\cdot 6\cdot 13}$$

10. 区域 V 如右图所示. 利用奇偶性及柱面坐标，有

$$I = \iiint_V zdv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} zdz$$

$$= \pi\int_0^1 (2 - 2r^2)rdr = \frac{\pi}{2}.$$



2016-2（期中）-10 图

11. 视 x, z 为因变量，方程组两边对 y 求导：

$$\begin{cases} F_1\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 1\right) + F_2\left(1 - \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \left(x + y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)f' \end{cases},$$

于是 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \dfrac{f'[(x-y)F_1 - yF_2]}{F_1 - yf'F_2}$ $(F_1 - yf'F_2 \neq 0)$.

12. 设所求点为 $M(x,y,z)$，$\nabla f(M) = \{2x, 2y, -1\}$，$\boldsymbol{n}^\circ = \frac{1}{\sqrt{14}}\{1, -2, 3\}$，

$f(x,y,z)$ 在点 $M(x,y,z)$ 处的方向导数为 $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \boldsymbol{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(2x - 4y - 3)$.

构造拉格朗日函数$L(x,y,z,\lambda)=(2x-4y-3)+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-1)$，

令$\begin{cases} L_x=2+2\lambda x=0, \\ L_y=-4+4\lambda y=0, \\ L_z=4\lambda z=0, \\ L_\lambda=x^2+2y^2+2z^2-1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow x=-y, z=0$，

代入最后一个方程，得$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, y=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}, z=0$，

即受检点为$M_1(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$， $M_2(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$.

因$\dfrac{\partial f(M_1)}{\partial \vec{n}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{14}}$， $\dfrac{\partial f(M_2)}{\partial \vec{n}}=\dfrac{-2\sqrt{3}-3}{\sqrt{14}}$，

所以$M_1(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$为所求.

13．设函数$f(x)$满足$f'(x)+3f(x)+2x\int_0^1 f(xt)dt=e^{-x}$，且$f(0)=1$，求$f(x)$.

令$u=tx$，则$x\int_0^1 f(tx)dt=\int_0^1 f(u)(du)$，

从而 $f'(x)+3f(x)+2\int_0^x f(u)du=e^{-x}$.

求导得 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=-e^{-x}$. （*）

特征方程$r^2+3r+2=0$由相异实根$r=-2, r=-1$，

所以，对应齐次方程的通解为$Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$， 且可设$y^*=Axe^{-x}$，代入方程（*），

得$A=-1$ 所以$y=f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}-xe^{-x}$.

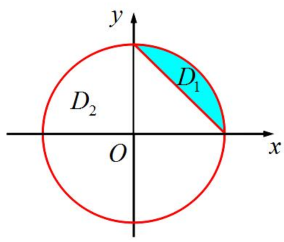
将$f'(0)=-2$，$f(0)=1$代入，得$C_1=0, C_2=1$，

故$y=f(x)=(1-x)e^{-x}$.

14． 用$x+y=1$ 将区域D分成$D_1=D\bigcap\{(x,y)\,|\,x+y\ge 1\}$和$D_2=D\setminus D_1$两部分.

记$f=x+y-1$.

$$I=\iint_{D_1} f\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2} f\mathrm{d}\sigma$$



$$=\iint_{D_1} f\mathrm{d}\sigma-[\iint_{D} f\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1} f\mathrm{d}\sigma]=2\iint_{D_1} f\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D} f\,\mathrm{d}\sigma.$$

因为$\iint_{D} f\mathrm{d}\sigma=\iint_{x^2+y^2\le 1}(x+y-1)\mathrm{d}\sigma=-\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}\sigma=-\pi$；

$$\iint_{D_1} f\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}(x+y-1)\mathrm{d}y$$

2016-2（期中）-14 图

$$=\int_0^1[1-x-\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}]\mathrm{d}x=\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4},$$

所以 $I=2\iint_{D_1} f\mathrm{d}\sigma-\iint_{D} f\mathrm{d}\sigma=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$.

15．（1）由于$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$为初等函数，且在全平面有定义，所以$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

（2）因为$f(x,0)=0$，所以$f_x(0,0)=0$；同理$f_y(0,0)=0$.

（3）因为$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy^2|^{1/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}$极限不存在，

所以$f(x,y)$在原点不可微 .

（4）利用方向导数的定义，得

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{n}}=\lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0^+}\cos^{1/3}\alpha\sin^{2/3}\alpha=\cos^{1/3}\alpha\sin^{2/3}\alpha$$