华 中 科 技 大 学 考 试 试 卷 答 案

教师填写	2024–2025 学年度第 1 学期 课程名称：线性代数 授课教师：Sukuna 考试时间：2024 年 1 月 2 日 14:30-17:00	**课程类别** 必修 [✓] 选修 [ ] **考试方式** 开卷 [ ] 闭卷 [✓] **试卷类别** (A,B,C) [A] 共 4 页
考生填写	______学院______专业______班(级) 姓名______学号______ **期中 [ ] 期末 [✓]**	

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得　分									
评阅人									

一、**判断题**（共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

1. 设 n 阶方阵的行、列向量组不等价，则 |A| = 0。…………[✓]

2. 若齐次线性方程组中方程的个数大于未知量的个数，则该方程组只有零解。[×]

3. 相似的矩阵有相同的特征值，从而有相同的特征向量。…………[×]

4. 正交矩阵 A 有一个特征值 λ，那么 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A 的特征值。…………[✓] 答案为错

5. 设 A,B 为 n 阶方阵，I 为 n 阶单位阵，假设 $B+AB=I$，那么 $AB+B=I$ · [✓]

6. 如果一个方阵 A 不能相似对角化，那么不存在矩阵 P,V 使得 $A=P^{-1}VP$ · [×]

7. 若 A,B 为 n 阶方阵，那么 $r(AB)=r(BA)$…………[×]

8. 设矩阵 A 是一个实对称矩阵，方程组 $AX=0$ 有非零解，则 A 不是正定矩阵。[✓]

二、**填空题**（共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

1. $A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，而且满足 $ABA^*=2BA^*+I$，则 $|B|=$ $\underline{\frac{1}{9}}$

2. 设 A 为 n 阶行列式不为 0 的矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+I$ 必有特征值 $\underline{(\frac{|A|}{\lambda})^2+1}$

3. 有 $A^2+A-9I=0$，则 $(A-I)^{-1}=$ $\frac{1}{2}(A+2I)$ 分母改为7

4. λ_1,λ_2 是矩阵 A 的特征值，对应的特征向量向量 α_1,α_2，$\alpha_1,A(\alpha_1,\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\lambda_2\neq 0$

5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换 $x=Py$ 变换成 $y=6y_1^2$，那么 $a=$ 2

三、求下面行列式的值（8 分）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

解. 按第四行展开，可以有：$-a^4M_{41}+b^4M_{42}-c^4M_{43}+d^4M_{44}$ ……4 分

按照范德蒙德行列式进行展开，有 $-a^4(d-b)(d-c)(c-b)+b^4(d-a)(d-c)(c-a)-c^4(d-a)(d-b)(b-a)+d^4(c-a)(c-b)(b-a)$ ……8 分

四、讨论下面齐次线性方程组的可解性（10 分）

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0 \end{cases}$$

解. $a=0$ 时候，通解为 $k_2\alpha_2+k_2\alpha_2+\ldots k_n\alpha_n$，$\alpha_2=(-1,1,0,\ldots,0)^T,\ldots,a_n=(-1,0,\ldots,1)^T$ ……4 分

$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时候，通解为 $k(1,2,\ldots,n)^T$ ……9 分

当 a 不为上面的值时候，只能有零解。……10 分

五、已知三阶方阵 A 和向量 x（10 分）

x,Ax,A^2x 线性无关，并且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$

(1) $P=(x,Ax,A^2x)$，求矩阵 B 使得 $PBP^{-1}=A$

(2) 计算行列式 $|A+I|$

解. $(1)A(x,Ax,A^2x)=(Ax,A^2x,A^3x)=(Ax,A^2x,3Ax-2A^2x)=(x,Ax,A^2x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ ……4 分

也就是说 $AP=PB$，$PBP^{-1}=A$ ……6 分

（2）A 和 B 相似，那么 $|A+I|=|B+I|=-4$ ……10 分

六、已知二次型 f 的秩为 2（12 分）

$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$

（1）求 a

（2）求正交变换 $x=Qy$ 让 f 转化成标准型

（3）求 $f=0$ 的解。

解.（1）令 $r(A)=2$，解得 $a=1$ ……2 分

（2）特征值为 $2,2,0$ ……4 分

对于 $\lambda=2,\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$ ……6 分

对于 $\lambda=0,\alpha_3=(1,-1,0)^T$ ……7 分

那么 $Q=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ……9 分

标准型 $f=2y_1^2+2y_2^2$ ……10 分

（3）$f=(x_1+x_2)^2+x_3=0$，那么解是 $k(-1,1,0)^T$ ……12 分

七、A 是可逆矩阵，B 是 A 第 i 行和第 j 行进行交换所得的矩阵。（8 分）

（1）讨论 B 的可逆性。

（2）求 AB^{-1}

解.（1）$B=E(i,j)A$，其中 $E(i,j)$ 代表做初等变换的矩阵。那么 $|B|=|E(i,j)||A|=-|A|\neq 0$ ……4 分

（2）$AB^{-1}=AA^{-1}E^{-1}(i,j)=E(i,j)$ ……8 分

八、证明题（16 分）

1. 证明 Sylvester 秩不等式：

A 和 B 分别为 $s\times n$，$n\times m$ 的矩阵，求证 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$（7 分）

证. 构建 $\begin{vmatrix} AB & O \\ O & I \end{vmatrix}$，对其做初等变换，有 $\begin{vmatrix} A & I \\ O & B \end{vmatrix}$ ……3 分

则有 $r(\begin{vmatrix} AB & O \\ O & I \end{vmatrix})=r(\begin{vmatrix} A & I \\ O & B \end{vmatrix})=r(AB)+n\geq r(\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix})=r(A)+r(B)$ ……7 分

2. 证明：任一 n 阶方阵可以表示成一个数量矩阵（具有 KI 形式的矩阵）与一个迹为 0 的矩阵之和。（9 分）

证. $A=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}}{n}I+\begin{bmatrix} a_{11}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}}{n} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}}{n} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}}{n} \end{bmatrix}=kI+B$ ……7 分

tr(B) = 元素之和 = 0 ……9 分

详见考完试的板书