

华中科技大学 2021-2022 转专业数学回忆版

1、填空题

(1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [\arctan(k+1) - \arctan k]$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\arctan(n+1) - \arctan 0]$

$= \frac{\pi}{2}$

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{\tan x})}{2^x - 1} = 8$, 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 上式易化为: $\frac{f(x)}{\ln 2 \cdot x^2} = 8$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8 \ln 2$.

(3) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4} + 2\sqrt[n]{n^2} - 3}{\sqrt[n]{n^2} - 3\sqrt[n]{n} + 2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: $\sqrt[n]{n} = t, (t \rightarrow 1), LHS = \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^2 - 3t + 2} = \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 3)}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{(t+1)(t^2 + 3)}{t-2} = -8(t \rightarrow 1)$

(4) 设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且满足方程 $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 由 $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, 令 $x = y = 0$, 可得 $g(0) = 0$. 再令 $y = 0$, 可得 $g(x) = g(|x|)$. 可得偶函数.

下面考虑 $x, y > 0$ 的情况:

$g(\sqrt{x^2}) + g(\sqrt{y^2}) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, 令 $h(x) = g(\sqrt{x}) (x > 0)$

$h(x^2) + h(y^2) = h(x^2 + y^2)$, 令 $x' = x^2, y' = y^2$

则 $h(x') + h(y') = h(x' + y') \rightarrow h(x') = kx'$, 即 $h(x) = kx$.

$g(\sqrt{x}) = kx \rightarrow g(x) = kx^2 (x > 0)$.

由偶函数可知, $g(x) = kx^2 (x \in \mathbb{R})$. 其中 $k = g(1)$.

(5) 求 $x = a \cos t + b \sin t, y = a \sin t - b \cos t$, 则 $\frac{d^m x}{dt^m} \cdot \frac{d^n y}{dt^n} - \frac{d^n x}{dt^n} \cdot \frac{d^m y}{dt^m} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解: 令 $x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \alpha)$,

同理令 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - \alpha)$.

用 Leibniz 公式可得答案: $(a^2 + b^2) \sin \frac{n-m}{2} \pi$.

2、设 $\{\theta_n\} \neq 0$, 且满足 $\theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1 (n=1, 2, 3 \dots)$, 证明存在一个实数 λ , 使得对所有 $n \geq 1$, 有 $\theta_{n+1} = \lambda \theta_n - \theta_{n-1}$.

证明: 依题意, $\theta_{n+1}^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 1, \theta_n^2 - \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} = 1$,

作差得: $\theta_{n+1}^2 + \theta_{n-1} \cdot \theta_{n+1} - \theta_n^2 - \theta_n \cdot \theta_{n+2} = 0$, 即 $\theta_{n+1}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = \theta_n(\theta_n + \theta_{n+2})$

由于 $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \neq 0$, 故: $\frac{\theta_n + \theta_{n+2}}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_{n-1} + \theta_{n+1}}{\theta_n} = const$, 即: $\frac{\theta_n + \theta_{n+2}}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_0 + \theta_2}{\theta_1} \stackrel{\Delta}{=} \lambda$,

故: $\frac{\theta_{n-1} + \theta_{n+1}}{\theta_n} = \lambda \Rightarrow \theta_{n+1} = \lambda \theta_n - \theta_{n-1}$. \square

3、设 $f(x)$ 定义在 $x=0$ 的某个邻域上, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

证明: 已知 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时, 有 $\left| \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$. 亦即

$$-\frac{\varepsilon}{3} |x| < f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{3} |x|.$$

将 x 替换为 $\frac{x}{2^k}$, 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k} |x| < f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^k} |x| (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

相加 (注意到 $\sum_{k=0}^n [f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)] = f(x) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$) 得

$$-\frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} |x| < f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} |x|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 取极限得 $-\frac{2\varepsilon}{3} |x| \leq f(x) \leq \frac{2\varepsilon}{3} |x|$ (因 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$), 故 $|\frac{f(x)}{x}| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

4、已知函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0) = 0, |f''(x)| \leq f(x) + |f'(x)|$, 证明: 存在 $\delta > 0$, 使得在 $(-\delta, \delta)$ 内 $f(x) \equiv 0$.

法一：证明：考察区间 $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 上的函数 $|f(x)| + |f'(x)|$ ，并假定它在 $x_0 \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ 处取到最大值 M .

$$f(x_0) = f''(\xi_0) \frac{x_0^2}{2}, \quad f'(x_0) = f''(\eta_0) x_0, \quad \text{其中 } \xi_0, \eta_0 \text{ 位于 } x_0 \text{ 和 } 0 \text{ 之间. 从而有:}$$

$$\begin{aligned} M &= |f(x_0)| + |f'(x_0)| = |f''(\xi_0)| \frac{x_0^2}{2} + |f''(\eta_0)| x_0 \\ &\leq \frac{|f''(\xi_0)| + |f''(\eta_0)|}{4} \\ &\leq \frac{|f(\xi_0)| + |f'(\xi_0)| + |f(\eta_0)| + |f'(\eta_0)|}{4} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{2}$$

故 $M = 0$, 得证.

法二：取 $\delta = \frac{1}{2}$, $\because f(x), f'(x) \in C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 由闭区间连续函数的有界性可知: $\exists M_1, M_2 > 0$,

$$\text{s.t. } |f(x)| < M_1, |f'(x)| < M_2, \therefore |f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| < M_1 + M_2 \text{ 即 } |f''(x)| \text{ 有上界.}$$

由确界原理可知, $|f''(x)|$ 有上确界, 记为 S ($S \geq 0$) .

$$\text{由上确界的定义可知: } \exists x_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{s.t. } |f''(x_1)| > S - \varepsilon, (\forall \varepsilon > 0).$$

下面用反证法说明 $S > 0$ 不成立: 若 $S > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{8}S > 0$, 则 $|f''(x_1)| > \frac{7}{8}S$,

$$\because f(x_1) \underset{\text{Taylor}}{=} f(0) + f'(0)x_1 + \frac{1}{2}f''(\xi)x_1^2, \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 和 } x_1 \text{ 之间,}$$

$$f'(x_1) \underset{\text{Lagrange}}{=} f'(0) + x_1 f''(\eta), \eta \text{ 介于 } 0 \text{ 和 } x_1 \text{ 之间,}$$

$$\text{故 } \frac{7}{8}S < |f''(x_1)| \leq |f(x_1)| + |f'(x_1)| = \frac{1}{2}|f''(\xi)|x_1^2 + |x_1||f''(\eta)| \leq \frac{5}{8}S \Rightarrow S < 0, \text{ 与假设相悖, 不可能, 舍去.}$$

$$\because S \geq 0, \therefore S = 0 \text{ 即 } |f''(x)| = 0, \therefore f''(x) = 0, \therefore f'(x) \equiv f'(0) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv f(0) = 0, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

错解: 考虑区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 在该区间上有 $|f''(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)|, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

$$\text{则 } |f'(x)| = \left| \int_0^x f''(t) dt \right| \leq \int_0^x |f''(t)| dt \leq \int_0^x (|f(t)| + |f'(t)|) dt$$

$$\text{又因为 } |f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt, \int_0^x |f(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt = |f(\theta)|x + \int_0^x |f'(t)| dt \text{ (积分中值定理)}$$

$$= x \int_0^\theta |f'(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt \leq x \int_0^x |f'(t)| dt + \int_0^x |f'(t)| dt = (x+1) \int_0^x |f'(t)| dt$$

$$\text{记 } f'(x) \text{ 在 } (0, x) \text{ 上的最大值点为 } \varepsilon, |f'(\varepsilon)| \leq (\varepsilon+1) \int_0^\varepsilon |f'(t)| dt \leq (\varepsilon+1)\varepsilon |f'(\varepsilon)| \leq \frac{3}{4} |f'(\varepsilon)|$$

$$|f'(\varepsilon)| = 0, |f'(x)| = 0, (x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)), f(x) = 0, \text{ 同理可将此情况推广到 } (-1, 1) \text{ 上.}$$

错误原因在于使用牛顿—莱布尼茨公式时要求 $f''(t)$ 在 $t \in (0, x)$ 上连续, 此处由已知条件无法得出.

5、设可微函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调减少, 如果当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $0 < f(x) < |f'(x)|$ 成立,

证明: 当 $x \in (0, 1)$ 时, 必有 $x \cdot f(x) > \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$.

首先我们给出 $f(x) < 0$ 的证明，（由介值定理， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不变号）

$$g(x) \triangleq xf(x) - \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), g'(x) = xf'(x) + f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$g(x) > g(1) = 0$, 原命题成立。

下面给出 $f(x) > 0$ 的证明：

$$\Leftrightarrow \text{证明: } x \in (0, 1), \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < x^2 \text{ 或 } \ln \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < 2 \ln x.$$

因 $f(x)$ 严格递减， $f'(x) < 0$, 有 $f'(x) = -|f'(x)|$,

$$\ln \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} = \ln f\left(\frac{1}{x}\right) - \ln f(x) \xrightarrow{\text{Lagrange定理}} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} \left(\frac{1}{x} - x\right).$$

注意到 $0 < f(x) < |f'(x)| = -f'(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)} < -1, \frac{1}{x} - x > 0 (0 < x < 1)$.

接下来只需证： $x - \frac{1}{x} < 2 \ln x (0 < x < 1)$. 【求导，显然】

故 $\ln \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)} < x - \frac{1}{x} < 2 \ln x (0 < x < 1)$.

错解：由题可知， $f'(x) < 0, 0 < f(x) < -f'(x)$, 故 $\frac{-f'(x)}{f(x)} > 1$, 所以

$$\ln \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = - \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)} dt > \int_x^{\frac{1}{x}} dt = \frac{1}{x} - x, x \in (0, 1)$$

$$\text{故 } \frac{f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} > e^{\frac{1}{x}-x}, \text{ 又 } e^{\frac{1}{x}-x} > \frac{1}{x^2}$$

$$\text{可得 } x \cdot f(x) > \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, 1).$$

错误原因在于使用牛顿—莱布尼茨公式时要求 $\frac{f'(t)}{f(t)}$ 在 $t \in \left(x, \frac{1}{x}\right)$ 上连续，此处由已知条件无法得出。

参考文章：

1. 华中科技大学2021转专业数学最后一题 – 我咋知道啊的文章 – 知乎

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/584854446>

2. Bellman–Gronwall不等式的推广命题 – 两只猫的文章 – 知乎

<https://zhuanlan.zhihu.com/p/545806108>