

一、填空题，共 8 题，每题 9 分

1. $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $[\beta^{12}] = \underline{\hspace{2cm}}$

2. $\beta_1 = 3\beta_{n+1} = \beta_n^2 - 3\beta_n + 4 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\beta_i - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. $\sin x \cos x + x - 1 = 0$, $2 \cos y - 2y + \pi + 4 = 0$, $\sin(2x - y) =$

4. $a^2 + b = 5, 2a + 3b$ 的最大值为

5. $f(1) = 2022, \sum_{i=1}^n f(i) = n^2 f(n), f(2022) =$

6. $A = \{z | z^{18} = 1, z \in C\}, B = \{w | w^{48} = 1, w \in C\}, \{zw | z \in A, w \in B\}$ 元素个数为

7. 凸四边形 ABCD 内有点 P, 使得三角形 PAB, PBC, PCD, PAD 面积相等, 若三角形 ABC 面积是 ACD 的 α 倍, 则 $\alpha =$

8. 若某三位数的任意两位数码之和都能被第三个数码整除, 则这样的三位数有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个

二. (12 分) 用三种方法证明: $\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^3 \geq \alpha\beta\gamma$

三. (16 分) $f(x) = \beta x - \ln x - 1$

1. 若 $f(x) \geq 0$, 则 β 的取值范围为 (5 分)

2. 证明: $\frac{1}{xe^x} + x + \ln x + 1 \geq 0$ (5 分)

3. 若 $\alpha(e^{-x} + x^2) \geq x - x \ln x$ 则 α 的取值范围为 (6 分)