2024 年启明考试综合试题回忆版

转专业交流群整理

2024 年 9 月 7 日

1　第一题

我们考虑一个生产商和零售商的定价问题。生产成本为 c，最高售价为 a，销量为 $a-p$（p 为实际售价）。

合作情况（π_0）：生产商和零售商合作，共同决定零售价 p. $\pi_0 = \max\limits_{p}(p-c)(a-p)$, 其中 $p \in [c,a]$

非合作情况 (π_1): 生产商先定批发价 $\tilde{w}$, 零售商再定零售价 p。$\pi^r(\tilde{w}) = \max\limits_{p}(p-\tilde{w})(a-p)$, 其中 $p \in [\tilde{w},a]$, $\pi^s = \max\limits_{\tilde{w}}(\tilde{w}-c)(a-p_{\tilde{w}})$, 其中 $\tilde{w} \in [c,a]$, $\pi_1 = \pi^r(\tilde{w}) + \pi^s$ 其中，$\pi^r(\tilde{w})$ 是零售商的最大利润，π^s 是生产商的最大利润。

问题目标：求 $\rho = \dfrac{\pi_1}{\pi_0}$ 的值

2　第二题

仓储系统中，设有 n 件不同物品每天货位（货位指货物在仓库中前后位置，越靠前出货越快）参数 $a_i(a_1 < a_2 < ... < a_n)$，出货频次 $x_i(x_1 < x_2 < ... < x_n)$，则出货时间 $Tj = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$

1) 将上述处理实践问题转化为最优化问题

2) 证明: 出货频率越高的货物放在前面，才能使总出货时间最短 (技巧: 逐步替换)

3) 证明: 出货频率越高的货物放在后面，才能使出货时间最大 (技巧: 同上一步)

3　第三题

工业生产中经常需要按批次制备原料，将其维持在特定状态，再按特定速率连续加入制备反应釜中，假设每制备一批原料的成本为 k (与数量无关)，将单位数量原料维持单位时间的成本为 h 原料从 0 时刻开始到 t 时刻的累积消耗量为 $D_t = t^{\frac{1}{n}}$。其中累积生产时长 $t \leq 1$,

参数 $n \geq 1$，表明原料消耗速率随反应时长不变或递减，(例如 $n=1$ 时 $Dt=t$, 匀速消耗原料)。

Question 1. 给出函数 $y=D_t$ 在 $t \in [0,1]$ 上的示意图，合理展示该曲线的趋势特点。

在保证持续生产和避免浪费的前提下，为了尽可能的减少成本，有必要选择合理的原料制备方案，如果整个过程中只制备一次，那么显然应在 0 时刻制备 D_1 数量的原料, 令其逐渐消耗至 $t=1$ 时刻，因此单次制备方案的成本为 $k+hI$，其中 I 表示处于线段 $y=D_1$ 和曲线 $y=D_t$ 之间的面积。

Question 2. 如果在 0 和 t 时刻制备一次，这两张应分别制备多少？使总成本最少？

当批次制备时刻和批量都可以灵活调节时，直观上如果 k 相对 h 较小，应采用小批量，多批次的方式，而当 k 相较于 h 较大时，应利用大批量少批次的方式。甚至只制备一次。

Question 3. 已知当且仅当 $k < A_n h$ 时，两批次方案严格优于单批次方案。请给出 A_n 的具体表达式

提示: 函数 $x\left(c - x^{\frac{1}{n}}\right)$ 在 $x \in [0, c^n]$ 上的最大值为 $\dfrac{(cn)^n}{(n+1)^{n+1}}$

Question 4. 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时，两批次方案严格优于三批次方案的充要条件是什么？