CHAPTER 1

2024 年转专业考试真题

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\dfrac{2}{k^2}=$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数，且 $f'(0)=0, f''(0)$ 存在，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=$

4. $f(x)=(\arcsin x)^2$, 求 $f^{2024}(0)=$

5. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$\forall x,y\in(0,+\infty), f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f'(1)=2024$，则 $f(x)=$

6. $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=$

2 (10 分)

已知 $\beta>0, x_n$ 有 $x_1=\ln\beta, x_{n+1}=x_1+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(\beta-x_i)$, 证明 x_n 收敛并求极限。

3 (10 分)

证明: 若函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, f 单调, 存在数列 $\{x_n\}, x_n \in [a,b]$, $g(x_n) = f(x_{n+1}), n = 1, 2\cdots$, 则 $f(x) = g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有解。

4 (10 分)

设 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, x \neq 0 \\ f'(0), x = 0 \end{cases}$, $f(0) = 0, f(x)$ 在 R 上存在二阶导，问 $g(x)$ 在 R 上是否存在连续导数，存在请证明，不存在请说明理由。

5 (10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内二阶可导, $f(0) = 0, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}, f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f''(\xi) = \dfrac{\xi}{1-\xi^2} f'(\xi)$。

CHAPTER 2

2024 年转专业考试真题参考答案

1 填空题 (每题 10 分，共 60 分)

1. **Solution**.

$$\arctan\frac{2}{k^2}=\arctan(k+1)-\arctan(k-1)$$

2. **Solution**.

$$LHS=e^{\frac{ln(\cos\sqrt{x})}{x}}=e^{\frac{-\frac{x}{2}}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

3. **Solution**.

反复洛必达即可，填空题不用考虑严谨性（手动狗头）

4. **Solution**.

两边平方

$$(1-x^2)f'^2(x)=4f(x)$$

求导

$$-2xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=4$$

求 n 次导

$$-2C_n^0xf^{(n+1)}(x)-2C_n^1f^{(n)}(x)+2f^{(n+2)}(x)-2C_n^0x^2f^{(n+2)}(x)-4C_n^1xf^{(n+1)}(x)-4C_n^2f^{(n)}(x)=0$$

再令 x=0

$$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$$

5. **Solution**.

$$
\begin{aligned}
f(0)=0, f(1)&=1,\\
x\frac{f(xy)-f(x)}{xy}&=f(x)\frac{f(y)-1}{y},\\
\lim_{y\to1^+}\text{LHS}=xf'(x),\ \lim_{y\to1^+}&\text{RHS}=2024f(x),\\
xf'(x)&=2024f(x).
\end{aligned}
$$

6. **Solution**. 本题展示一种不用凑微分的暴力解法 (狗头保命)，其他解法可参考往年文件。

$$
\begin{aligned}
\text{LHS}&=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}\,dx,\\
\int\sqrt{e^x-1}\,dx&=2\int\sqrt{1-e^{-x}}\,de^{\frac{x}{2}}\\
&\overset{\text{t=e}^{\frac{x}{2}}}{=}2\int\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\,dt\\
&\overset{\text{t=}\cosh\theta}{=}2\int\left(\cosh\theta-\frac{1}{\cosh\theta}\right)d\theta\\
&=2\left(\sinh\theta-\arctan(\sinh\theta)\right).
\end{aligned}
$$

附

$$
\int\frac{1}{ch\theta}d\theta=\int\frac{1}{1+sh^2\theta}dsh\theta=\arctan sh\theta
$$

2 (10 分)

Proof. 可见 $x_{n+1}=x_n+\ln(\beta-x_n)$，于是 $x_{n+1}-\beta+1=x_n+\ln(\beta-x_n)-\beta+1<0$，于是 $\beta-1$ 是 $\{x_n\}$ 的上界. 则 $x_{n+1}-x_n=\ln(\beta-x_n)>0$，于是 $\{x_n\}$ 单调增加. 由单调有界原理，$\{x_n\}$ 必然收敛，显然其极限为 $\beta-1$.

3 (10 分)

Proof 若 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$ 出现变号，设是 $[f(x_n)-g(x_n)]\cdot[f(x_{n-1})-g(x_{n-1})]<0$，则存在介于 x_{n-1} 和 x_n 的 ξ 使得 $f(\xi)-g(\xi)=0$.

若不然，不失一般性地设 $\{f(x_n)-g(x_n)\}$ 恒为正，则 $f(x_n)-f(x_{n-1})=g(x_{n-1})-f(x_{n-1})<0$ 恒成立，故 $\{f(x_n)\}$ 单调递减，由 f 的单调性可知 $\{x_n\}$ 亦单调，而 $\{x_n\}$ 有下界 a，故 $\{x_n\}$ 有极限 x_0. 在 $f(x_{n+1})=g(x_n)$ 中取 $n\to\infty$，并由 f 和 g 的连续性，即得 $g(x_0)=f(x_0)$.

4 (10 分)

Proof 对于 $x\neq0$，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.

对于 $x=0$，$g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$，应用一次 L'Hospital 法则，得 $g'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}$. 因为 $f(x)$ 二阶可导，$g'(0)=\dfrac{f''(0)}{2}$.

$g'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处的连续性显然. 下面求

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{xf'(0)-f(x)}{x^2} \equiv A+B$$

由导数定义, $A = f''(0)$. 对 B 运用 L'Hospital 法则, 再运用一次导数定义, 可知 $B = -\dfrac{f''(0)}{2}$. 是故 $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{f''(0)}{2}$，即证 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

5 (10 分)

Proof 构造 $g(x) = f(x) - \arcsin x$，则 $g(0) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = g(1)$，由 Rolle 定理可知，存在 $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \beta \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$，使得 $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$，即 $f'(\alpha) - \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = f'(\beta) - \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$. 构造 $h(x) = f'(x)\sqrt{1-x^2}$，则 $h(\alpha) = h(\beta) = 1$，由 Rolle 定理，存在 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得 $h'(\xi) = 0$，此即 $\sqrt{1-\xi^2} f''(\xi) - \dfrac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} f'(\xi) = 0$，立得.