2022-2023 学年第一学期期末考试试卷参考答案

一、判断题(2 分×8=16 分)

1. 【正解】×

【解析】设 A 的特征值为 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，显然 $\lambda_i\neq 0$，因为 A 可逆，取多项式

$$P(x)=\boxed{\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)}$$

那么 $P(A)$ 的特征值为 $P(\lambda_i)$，显然有 0 特征值，那么也不可逆.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

2. 【正解】×

【解析】假设矩阵为 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc&ab+bd\\ac+cd&bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$；

则一定要有 $\begin{cases}a^2+bc=bc+d^2=0\\b(a+d)=1\\c(a+d)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a=d\\b=c\\a^2+b^2=0\end{cases}$ 且 $2ab=1$，不可能。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 4 矩阵的概念和基本运算

3. 【正解】×

【解析】由题意可知：$r(A)+r(A)\leqslant n\Longrightarrow r(A)\leqslant\dfrac{n}{2}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

4. 【正解】×

【解析】设 A 为 $m\times n$ 矩阵，由于 $AX=0$ 只有零解，因此 $r(A)=n$，因此 $m>n$，对于增广矩阵，$\overline{A}_{m\times(n+1)}$，$r(\overline{A})=n$ 不一定成立.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 17 非齐次线性方程组

5. 【正解】√

【解析】设 A 为 n 阶实矩阵，$A=(xE+A)+(-xE)$，行列式 $|(xE+A)|$ 是一个关于 x 的 n 次多项

式，它至多有 n 个实根，因此一定有非零实数x使得$|(xE+A)|$不为零，一定可以找到一个 x，使得

$|(-xE)|$不为 0，则$(xE+A)$，$(-xE)$均可逆。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

6. 【正解】×

【解析】不妨设$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15 向量空间

7. 【正解】√

【解析】必要性： A,B,AB 都是正定矩阵，那么根据定义 A,B,AB 一定是实对称矩阵，所以有

$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$，因而 A 与 B 是可交换的；

充分性： A,B 正定，那么根据定义 A 和 B 是对称矩阵，$A^T=A,B^T=B$，因为 AB=BA，那么

$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$，这就说明 AB 也是对称矩阵。由于 A 与 B 正定，所以存在可逆矩阵 P

和 Q 满足$A=P^TP$，$B=Q^TQ$所以$QABQ^{-1}=QP^TPQ^TQQ^{-1}=QP^TPQ^T=(PQ)^TPQ$，这说明对

称矩阵 AB 相似于正定矩阵$(PQ)^TPQ$，所以 AB 也是正定矩阵。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

8. 【正解】√

【解析】实对称矩阵一定可以对角化，那么存在正交矩阵T成立，$T^{-1}AT=\Lambda$，其中

$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$，那么

$$T^{-1}A^2T=T^{-1}T=E=\mathrm{diag}\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2\}$$

因此$\lambda_i^2=1$，由于A是正定矩阵，那么$\lambda_i=1$，因此$A=I$.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

二、填空题(4 分×5=20 分)

1. 【正解】1

【解析】对矩阵 A 进行行变换：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\\0&4&-1\end{pmatrix}$，$r(A)=3$，所以解空间为$n-r(A)=4-3$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 16 齐次线性方程组

2. 【正解】$\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ \frac{A}{2} & 0 \end{bmatrix}$

【解析】根据逆矩阵的定义：

$$\begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ (A^*)^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ \frac{A}{|A|} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ \frac{A}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 5 矩阵的逆

3. 【正解】$(3,4,4)$

【解析】

$\alpha = 2\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) - (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) + 3(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3)$

$3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 15 向量空间

4. 【正解】$\lambda = 0$，26

【解析】$A^3 - I = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$，特征值对应矩阵：$\begin{bmatrix} \lambda - 13 & -13 \\ -13 & \lambda - 13 \end{bmatrix}$，解得：$\lambda = 0$，26.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 19 特征值与特征向量

5. 【正解】$-2 < a < 1$

【解析】二次型对应矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$，顺序主子式：

$D_1 = 1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 > 0, D_3 = -4a^2 - 4a + 8 > 0$，解得 $-2 < a < 1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 24 正定二次型和正定矩阵

三、(10 分)

【解析】将行列式按第一行展开：$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$；

$D_n - D_{n-1} = 2(D_{n-1} - D_{n-2}) = \cdots = 2^{n-2}(D_2 - D_1)$；

$D_n = D_{n-1} + 2^{n-2}(D_2 - D_1) = D_{n-2} + 2^{n-3}(D_2 - D_1) + 2^{n-2}(D_2 - D_1) =$

$= D_1 + 2^0(D_2 - D_1) + \cdots + 2^{n-3}(D_2 - D_1) + 2^{n-2}(D_2 - D_1)$

$=D_1+(2^{n-1}-1)(D_2-D_1)$； $D_1=3, D_2=7$，所以

$D_n=3+4(2^{n-1}-1)=2^{n+1}-1$。

【考点延伸】《考试宝典》知识点 1 行列式的概念及其性质

四、(10 分)

【解析】(1)$(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}$，因为$\begin{vmatrix}3&2&0\\0&3&2\\0&0&3\end{vmatrix}=27\neq 0$

所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3)\begin{pmatrix}3&2&0\\0&3&2\\0&0&3\end{pmatrix}^{-1}$，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$能由$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$线性表出。

(2)有$(A-3I)\alpha_1=0$，$(A-3I)\alpha_2=2\alpha_1$，$(A-3I)\alpha_3=2\alpha_2$，不妨设α_1，α_2，α_3线性相关，则不妨存在一组不全为零的数k_1，k_2，k_3，满足

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0 \quad ①$$

则

$$(A-3I)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3)=2k_2\alpha_1+2k_3\alpha_2=0 \quad ②$$

$$(A-3I)(2k_2\alpha_1+2k_3\alpha_2)=4k_3\alpha_1=0$$

由于α_1非零，因此$k_3=0$，带入②中得到$k_2=0$，再带入①中，得到$k_1=0$，与α_1，α_2，α_3线性相关矛盾，因此α_1，α_2，α_3线性无关.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 13 等价向量组

五、【解析】方程组对应矩阵$A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{bmatrix}$，

$$|A|=\begin{vmatrix}a&0&1\\1&b-1&1\\1&2b-1&1\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b-1&1\\2b-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&b-1\\1&2b-1\end{vmatrix}=-ab+b;$$

当$b\neq 0$或$a\neq 1$时，方程组一定有解，根据克拉默法则，解为

特征向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$；

$\lambda=1$时，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}$，

$$C=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0&1&0\end{bmatrix}。$$

【考点延伸】《考试宝典》知识点 21 实对称矩阵的对角化

八、(10 分)

【解析】(1)当α，β有一个或均为 0 向量时，秩为 0，否则秩为 1。

(2)令$|A+s\alpha\beta^T|=\begin{vmatrix}A_1+s\alpha_1\beta^T\\A_2+s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_1\\A_2+s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s\alpha_1\beta^T\\A_2+s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_1\\s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s\alpha_1\beta^T\\A_2+s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\A_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}A_1\\s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}s\alpha_1\beta^T\\A_2+s\alpha_2\beta^T\\ \vdots\\A_n+s\alpha_n\beta^T\end{vmatrix}$

故令第一项为a，由于后面几项均为 s 的函数，故可令其为bs，所以存在$a,b\epsilon R$，使得$|A+s\alpha\beta^T|=a+bs$对任意的实数$s\epsilon R$都成立.

【考点延伸】《考试宝典》知识点 2 行列式的展开