# 华中科技大学 2023-2024 学年第二学期“微积分（一）”考试试卷（A 卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\dfrac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{3}$，则这两直线的位置关系是【　】.

A. 相交　B. 平行　C. 重合　D. 异面

**答案：A**

**解析：**

由于两直线的方向矢量分别为 $\tau_1:\{1,1,2\}$ 和 $\tau_2:\{1,3,3\}$，显然不平行，故两直线不可能平行，更不可能重合，所以答案 B，C 错误.

在两直线上分别取点 $M_1:(-1,0,1)$，和 $M_2:(0,-1,2)$，所以 $\overrightarrow{M_1M_2}:\{1,-1,1\}$，从而混合积

$[\tau_1,\tau_2,\overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&3&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$，故两直线共面，所以两直线相交. 故选 A.

2. 设函数 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$ 在点 $P(0,1,1)$ 附近满足方程 $F(x,y,z)=0$，则下列说法**错误**的是【　】.

A. $F(x,y,z)$ 在 $P$ 点可微　B. $\dfrac{\partial y}{\partial z}(P)=0$　C. $\dfrac{\partial y}{\partial x}(P)=-2$　D. $\dfrac{\partial x}{\partial y}(P)=\dfrac{1}{2}$

**答案：C**

**解析：**

由于 $F_x(x,y,z)=y+z\mathrm{e}^{xz}$，$F_y(x,y,z)=x-\dfrac{z}{y}$，$F_z(x,y,z)=-\ln y+x\mathrm{e}^{xz}$ 处处连续，故 $F(x,y,z)$ 在 $P$ 点可微；且 $F_x(P)=2$，$F_y(P)=-1$，$F_z(P)=0$；所以

$$\frac{\partial y}{\partial z}(P)=-\frac{F_z(P)}{F_y(P)}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}(P)=-\frac{F_x(P)}{F_y(P)}=2,\quad \frac{\partial x}{\partial y}(P)=-\frac{F_y(P)}{F_x(P)}=\frac{1}{2}.$$

所以 C 是错误的，故选 C.

3. 设 $D$ 是 $xy$ 面上以点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，$D_1$ 是 $D$ 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=$【　】.

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$　B. $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}\sigma$　C. $\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma$　D. 0

**答案：A**

**解析：**因为区域 $D$ 可以可以分为以 $x$ 轴对称的区域和以 $y$ 轴对称的区域的并，故考虑二重积分的偶倍奇零.

由于 $xy$ 既是 $x$ 的奇函数，又是 $y$ 的奇函数，所以 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=0$；

而 $\cos x\sin y$ 是 $x$ 的偶函数，而是 $y$ 的奇函数，所以 $\iint\limits_D\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma$；

从而由积分的分项性质可知

$$\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}\sigma .$$

所以 A 选项正确.

4. 已知函数 $f(x)=1-x\,(0\le x\le\pi)$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$（$n=1,2,\cdots$），则 $S(-\dfrac{\pi}{2})=$【　】.

A. $-\dfrac{\pi}{2}-1$ B. $-\dfrac{\pi}{2}+1$ C. $\dfrac{\pi}{2}-1$　　D. $\dfrac{\pi}{2}+1$

答案：C

解析：

由于 $S(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的奇函数，所以 $S(-\dfrac{\pi}{2})=-S(\dfrac{\pi}{2})=-(1-\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}-1$ .

5. 设 $\Gamma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_{\Gamma}(y+2z)\mathrm{d}s=$【　】.

A. $\pi$ B. $2\pi$ C. $-\pi$　　D. 0

答案：D

解析：

由轮换对称性可知 $\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}z\mathrm{d}s$，以及等量代换得

$$\oint_{\Gamma}(y+2z)\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s=0 .$$

6. 关于级数的描述，下列命题中正确的是【　】.

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛.

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$ 收敛.

答案：D

解析：

A 错误，反例：$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$；B 错误，反例为 $u_n=\dfrac{1}{n}$；C 错误，反例为 $u_n=\dfrac{1}{n},v_n=-\dfrac{1}{n}$；

D 正确，因为 $\dfrac{|a_n|}{n}\le\dfrac{1}{2}(a_n{}^2+\dfrac{1}{n^2})$，故由正项级数的比较审敛法可知结论成立.

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 设球面 $S:x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$，则 $\oiint\limits_{S}(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})\mathrm{d}S=$____________.

答案：$\dfrac{13}{9}\pi R^4$.

解析：由轮换对称性知 $\oiint\limits_{S}x^2\mathrm{d}S=\oiint\limits_{S}y^2\mathrm{d}S=\oiint\limits_{S}z^2\mathrm{d}S$，

和等量代换，有

$$\oiint\limits_{S}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4})\mathrm{d}S=\frac{13}{36}\oiint\limits_{S}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{13}{36}R^2\cdot4\pi R^2.$$

8. 曲线$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$在点$P_0(1,1,2)$的法平面方程为__________.

答案：$y = x$

解析：

已知曲线的切矢量为$\{2,2,-1\} \times \{1,1,-1\} = \{-1,1,0\}$，故所求法平面为

$-(x-1)+(y-1)=0$，化简为$y = x$.

9. 设矢量函数$\{x^{2023} + 2xy^3, ax^2y^2 - y^{2024}\}$在整个$xoy$平面内是某一函数的梯度，则$a =$__________.

答案：$a = 3$

解析：根据已知，可得

$\frac{\partial}{\partial y}(x^{2023} + 2xy^3) = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2 - y^{2024})$，即$6xy^2 = 2axy^2$，所以$a = 3$.

10. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1}$的和函数为__________.

答案：$x\mathrm{e}^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty$

解析：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\frac{-x^2}{2})^n = x\mathrm{e}^{-x^2/2}, -\infty < x < \infty .$$

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程.）

11. 一直线过点$B(1,2,3)$且与矢量$\vec{s}(6,6,7)$平行，求点$A(3,4,2)$到此直线的距离$d$.

解 1 $\overrightarrow{AB} = \{2,2,-1\}$，所求距离为

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|} = \frac{1}{11}\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 6 & 7 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{11}|\{20,-20,0\}| = \frac{20\sqrt{2}}{11}.$$

解 2 此直线的参数方程为

$$x = 1+6t, y = 2+6t, z = 3+7t,\ -\infty < t < +\infty;$$

则 B 到直线上的任一一点点的距离的平方为

$$d(t)^2 = (2-6t)^2 + (2-6t)^2 + (-1-7t)^2 = 121t^2 - 34t + 9 = 121(t - \frac{17}{121})^2 + \frac{800}{121} \geq \frac{800}{121},$$

故根据点到直线的距离的定义可知，所求距离为

$$d = \min d(t) = \sqrt{\frac{800}{121}} = \frac{20\sqrt{2}}{11}.$$

12. 设二元函数$z = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}$，求$\mathrm{d}z$以及$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0,1)}$.

解 因为偏导数 $z_x = 2x\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}} - (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}\dfrac{1/y}{1+(x/y)^2} = (2x-y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}$,

和 $z_y = 2y\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}} - (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}\dfrac{-x/y^2}{1+(x/y)^2} = (2y+x)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}$ 处处连续，所以函数处处可微，且

$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}[(2x-y)\mathrm{d}x + (2y+x)\mathrm{d}y]$ .

其次，有 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)} = \lim\limits_{y\to1}\dfrac{z_x(0,y)-z_x(0,1)}{y} = \lim\limits_{y\to1}\dfrac{-y+1}{y-1} = -1$ .

或者

由 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \mathrm{e}^{-\arctan\frac{x}{y}}[-1-(2x-y)\dfrac{-x}{x^2+y^2}]$，可得 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)} = -1$.

13. 求曲线积分 $I = \int_L (y^2-\cos y)\mathrm{d}x + x\sin y\mathrm{d}y$ ，其中有向曲线 $L$ 为沿着正弦曲线 $y=\sin x$ ，由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$ .

解 1（凑微分法） 因为 $I = \int_L (y^2-\cos y)\mathrm{d}x + x\sin y\mathrm{d}y = \int_L y^2\mathrm{d}x - \int_L \mathrm{d}(x\cos y)$ ，

$\int_L y^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$， $\int_L \mathrm{d}(x\cos y) = \left(x\cos y\right)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)} = \pi$，

所以 $I = -\dfrac{\pi}{2}$.

解 2 （Green 法） 补曲线 $L_1: y=0, x:\pi\to0$ . 记 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\sin x, 0\le x\le\pi\}$，则利用格林公式有

$$\begin{aligned} I &= \int_{L+L_1}(y^2-\cos y)\mathrm{d}x + x\sin y\mathrm{d}y - \int_{L_1}(y^2-\cos y)\mathrm{d}x + x\sin y\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D(-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{L_1}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}2y\mathrm{d}y - \int_0^{\pi}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

解 3 （参数化） 因为 $I = \int_0^{\pi}[\sin^2 x - \cos(\sin x) + x\sin(\sin x))\cos x]\mathrm{d}x$ ，

$\int_0^{\pi}x\sin(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = -x\cos(\sin x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(\sin x)\mathrm{d}x = -\pi + \int_0^{\pi}\cos(\sin x)\mathrm{d}x$ ，

$\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$，

所以 $I = -\dfrac{\pi}{2}$.

14. 求由曲面 $2z = x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体区域 $\Omega$ 的体积 $V$ .

解 1（投影法或先一后二法）

$V$ 在 $xy$ 面的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid 0\le x^2+y^2\le 4\}$，则 $V:(x,y)\in D,\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$，故

$$V=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z=\iint\limits_D[\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_0^2\left(r-\frac{1}{2}r^2\right)r\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}.$$

解 2（截面法或先二后一法）

$$V=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^2\left(2z-z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}.$$

解 3 （柱面坐标 1，先 z 后 r）

因为 $V:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 2,\frac{1}{2}r^2\le z\le r$，所以

$$V=2\pi\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_{\frac{1}{2}r^2}^{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2\left(r-\frac{1}{2}r^2\right)r\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3}.$$

解 4 （柱面坐标 1，先 r 后 z）

因为 $V:0\le\theta\le 2\pi,0\le z\le 2,z\le r\le\sqrt{2z}$，所以

$$V=2\pi\int_0^2\mathrm{d}z\int_z^{\sqrt{2z}}r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^2\left(z-\frac{1}{2}z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}.$$

15. 设 $S$ 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的闭曲面的外侧。$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $S$ 外法线的方向余弦，求积分

$$I=\iint\limits_S[(x^3+z^2)\cos\alpha+(y^3+x^2)\cos\beta+(z^3+y^2)\cos\gamma]\mathrm{d}S.$$

解 记 $S$ 围成的区域为 $\Omega$. 则

$$I=\oiint\limits_S(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （转化为 II 型曲面积分）

$$=3\iiint\limits_\Omega(x^3+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ （Gauss 公式转化为三重积分）

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho$$ （球面坐标系下积分）

$$=3\cdot 2\pi\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{1}{5}=\frac{3(2-\sqrt{2})}{5}\pi.$$ （计算）

16. 将函数 $f(x)=\frac{1}{(4-x)^2}$ 展开成关于 $x$ 的幂级数，并求 $f^{(20)}(0)$.

**解** 因为 $f(x)=\left(\frac{1}{4-x}\right)'$，和 $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-x/4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}}$，$|x|<4$，（公式）

故 $f(x)=\left(\frac{1}{4-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{4^{n+2}}$，$|x|<4$. （逐项求导）

进而有 $f^{(20)}(0)=20!\cdot\frac{21}{4^{22}}=\frac{21!}{4^{22}}$.　　　　　（注意公式 $f^{(n)}(0)=n!a_n$）

注意：如果直接展开幂级数，需要证明余项趋于零，否则扣 2 分；没有收敛域扣 1 分.

四、综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程.）

17. 设函数 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，空间曲线 $L: x=t, y=2t^2, z=-2t^4$，$P_0(1,2,-2)$ 为曲线 $L$ 上的一点，求 $u$ 在点 $P_0$ 处沿着曲线 $L$ 的切矢量方向（增大的方向）$\vec{l}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}$，并求函数 $u$ 在点 $P_0$ 处的最大变化率.

解 注意 $P_0(1,2,-2)$ 对应的 $t_0=1$，此时 $\vec{l}=\{1,4,-8\}$ 且 $\vec{l}^{\circ}=\frac{1}{9}\{1,4,-8\}$.

记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则　$u_x=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$，$u_y=-\frac{xy}{r^3}$，$u_z=-\frac{xz}{r^3}$.

由于函数 $u(x,y,z)$ 的一阶偏导在 $P_0(1,2,-2)$ 点处连续，所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0}=\frac{1}{9}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(P_0)\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial y}(P_0)\cdot 4+\frac{\partial u}{\partial z}(P_0)\cdot(-8)\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{8}{27}+\frac{(-2)}{27}\cdot 4+\frac{2}{27}\cdot(-8)\right)=-\frac{16}{243}.$$

函数 $u$ 在点 $P_0$ 处的最大变化率为 $|\nabla u(P_0)|=\sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^2+\left(\frac{(-2)}{27}\right)^2+\left(\frac{2}{27}\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}}{27}$.

18. 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}f(x,y)=(2ax+by)\mathrm{d}x+(2by+ax)\mathrm{d}y$（$a,b$ 为常数），且 $f(0,0)=-3$，$f_x(1,1)=3$，求点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值.

分析：前半部分积分域路径无关，求解全微分方程；后半部分求条件极值.

解　由题意可知

$$f_x(x,y)=2ax+by, f_y(x,y)=2by+ax,$$

所以 $f_{xy}(x,y)=2a=f_{yx}(x,y)=2b$，即 $a=b$；

再由条件 $f_x(1,1)=3$，可知 $2a+b=3$，从而 $a=b=1$.

进而 $f_x(x,y)=2x+y, f_y(x,y)=x+2y$，$\mathrm{d}f(x,y)=(2x+y)\mathrm{d}x+(2y+x)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2+xy+y^2)$，

也就是

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+C.$$ 将 $f(0,0)=-3$ 代入，可得 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3$.

点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值的转化为函数 $d^2(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$ 在条件 $f(x,y)=0$ 下的条件极值.

设 $L(x,y,\lambda)=(x+1)^2+(y+1)^2+\lambda(x^2+xy+y^2)$，令 $\nabla L(x,y,\lambda)=\vec{0}$，即

$$\begin{cases} L_x = 2(x+1) + 2\lambda x + \lambda y = 0, \\ L_y = 2(y+1) + 2\lambda y + \lambda x = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 + xy - 3 = 0. \end{cases}$$

可解得驻点为$(1,1)$，$(-1,-1)$，$(-1,2)$，$(2,-1)$，代入有$d^2(1,1)=8$，$d^2(-1,-1)=0$，$d^2(2,-1)=d^2(-1,2)=9$，

比较后可知所求距离的最大值为$d(2,-1)=d(-1,2)=3$.

五、证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程.）

19. 设$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，证明：$1\le \iint\limits_D (\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \sqrt{2}$.

证法 1 由轮换对称性，可知

$$\iint\limits_D (\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D (\cos y^2+\sin x^2+\cos x^2+\sin y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ;$$

由于$1\le \sin x^2+\cos x^2 = \sqrt{2}\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，$1\le \sin y^2+\cos y^2\le\sqrt{2}$，

所以由积分的比较性质知，$1=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D (\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}$.

证法二

$$I=\iint\limits_D (\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \cos y^2 \mathrm{d}y + \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\cos x^2+\sin x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^1 \sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x \ ,$$

当$0\le x\le 1$时, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le \sin(x^2+\dfrac{\pi}{4})\le 1$

所以 $1\le I\le\sqrt{2}$ .

20. 设$a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\ (n=2,3,\cdots)$，证明：$\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 由于$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+o(x),\quad x\to 0$，所以当$n\to\infty$时，有

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n/n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

由交错级数的 Leibniz 审敛法可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛；

又由于$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}-o(\dfrac{1}{n^{3/2}})\sim\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}$，且$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$收敛，可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n^{3/2}}-o(\dfrac{1}{n^{3/2}})\right)$收敛，

故由级数的线性性质知，$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

**证法二** $S_{2n}=\sum_{k=2}^{2n+1} a_k=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)<0,$$

又 $S_{2n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递减有下界，故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在 .

因为 $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+2}$，而 $\lim_{n\to\infty} a_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=0$， 所以 $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ ，

因而 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.