

2016-2 期中试题

一、基本计算题（每题 6 分，共 60 分）

1. 已知微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, $f(x) \neq 0$ 有三个解 $y_1 = x, y_2 = e^x, y_3 = e^{3x}$,

求此微分方程满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解.

2. 设 $y = y(x)$ 在区间 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 满足微分方程 $y'' - (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$, 求特解.

3. 求过点 $M(2, -2, 3)$ 与直线 $L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{0}$ 垂直相交的直线 L 方程.

4. 设 $\begin{cases} x + y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$, 求其在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线方程和法平面方程.

5. 设 $z = f(xe^y)$, 其中 f 有一阶导数, $f'(0) = 2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 1)$.

6. 设函数 $f(u, v, w)$ 有二阶偏导连续, $z = f(x, x+y, xy)$, 求混合偏导函数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 计算 $I = \int_0^1 dy \int_y^{y^{1/3}} e^{x^2} dx$.

8. 计算二重积分 $I = \iint_D (x^3 \sin y + (x+y)^2) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 2y$.

9. 计算三重积分 $I = \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 V 位于第一卦限, 由曲面 $z = 0, z = xy, y = x, y = 1$ 围成.

10. 计算三重积分 $I = \iiint_V (x+z) dv$, 其中 $V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$.

二、综合计算题（每题 8 分，共 40 分）

11. 设方程组 $\begin{cases} F(x+y, y-z) = 0, \\ z = f(xy) \end{cases}$, 其中 F, f 具有连续的一阶偏导, 且 $F_1 - yf' F_2 \neq 0$,

求 $\frac{dz}{dy}$.

12. 在椭球面 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ 上求一点, 使函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ 在该点处沿方向

$n = \{1, -2, 3\}$ 的方向导数最大.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) + 3f(x) + 2x \int_0^1 f(xt) dt = e^{-x}$, 且 $f(0) = 1$, 求 $f(x)$.
14. 计算 $I = \iint_D |x + y - 1| dx dy$, 其中 D 是圆域: $D: x^2 + y^2 \leq 1$.
15. 设 $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ 讨论 $f(x, y)$ 在原点 $(0, 0)$ 处的 (1) 连续性, (2) 偏导数存在性, (3) 可微性, (4) 沿方向 $\boldsymbol{n} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ 的方向导数的存在性, 对存在情形计算出结果.