



华中科技大学 2023~2024 学年第二学期  
“微积分学（一）”期中考试试卷

考试方式: 闭卷 考试日期: 2024.4.13 考试时长: 150 分钟

院(系): \_\_\_\_\_ 专业班级: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

| 题号 | 一 | 二 | 总分 |
|----|---|---|----|
| 分数 |   |   |    |

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

一、基本计算题(每小题 6 分, 共 60 分)

- 已知  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ , 且  $|\mathbf{a}|=1, |\mathbf{b}|=4$ , 求  $|\mathbf{b} + \mathbf{a}|$ .
- 已知单位矢量  $\overrightarrow{OA}$  与  $x$  轴正向的夹角为  $\frac{\pi}{3}$  与  $y$  轴正向的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ , 且在  $z$  轴上的坐标是负的,  $\overrightarrow{OB} = \{1, -\sqrt{2}, -1\}$ , 求  $\angle AOB$  的角平分线上的单位向量.

3. 求圆锥面  $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$  与旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  的交线在  $P(1,1,2)$  处的切线与法平面方程.

4. 设  $u = f(x, y, z)$  具有连续的偏导数,  $z = z(x, y)$  是由方程  $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$  确定的隐函数, 其中  $5z^2 - 4xz + 3y \neq 0$ , 又  $f'_1(0, 0, 1) = 2, f'_2(0, 0, 1) = 4, f'_3(0, 0, 1) = 1$ , 求  $du|_{(0,0)}$ .

5. 设  $z = yf(x^2 - y^2)$ , 其中  $f$  可导, 求  $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y$ .

6. 求积分  $I = \int_1^3 dx \int_{x-1}^2 \sin y^2 dy$ .

7. 设平面区域  $D = \{(x, y) \mid -2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , 求二重积分

$$I = \iint_D (y \cos x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy.$$

8. 设有直线  $L: \begin{cases} x+5y+z=0, \\ x-z+4=0 \end{cases}$ , 平面  $\pi: x-4y-8z+12=0$ , 求直线  $L$  在平面  $\pi$  上的投影直线的方程.

9. 将空间曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$  化为参数方程..

10. 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} e^{1-z} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是三坐标面与平面  $x+y+z=1$  所围的四面体.

|     |  |
|-----|--|
| 分 数 |  |
| 评卷人 |  |

二、综合题(每小题 8 分, 共 40 分)

1. 若函数  $u = az^4 - bxz + x^2 + y^2$  在点  $P(1,1,1)$  沿方向  $\mathbf{l} = \{2,1,2\}$  的方向导数最大, 求  $a,b$  的值,  
并求出最大方向导数.

2. 已知函数  $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x+y)^2 + 2$ ,  $D$  是由  $x+y=3, x=0, y=0$  所围成的平面区域,  
求  $f(x, y)$  在  $D$  上的最大值与最小值.

3. 设  $z(x, y) = x^y + \int_0^x x e^{-(y+t)^2} dt$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)}$ .

4. 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$  讨论函数  $f(x, y)$  在原点  $(0, 0)$  的连续性、偏导数存在性及可微性.

5. 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[0, b]$  上连续且单调增加, 其中  $b > 0$ , 用二重积分证明:

$$b \int_0^b f(x)g(x)dx \geq \int_0^b f(x)dx \int_0^b g(x)dx.$$