2018-2 期中试题解答

1. 设 $y' = p(y)$，原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$.

根据初始条件舍去 $p = 0$. 解一阶方程得到 $p = \dfrac{C_1}{y}$. 代入初始条件得到 $C_1 = \dfrac{1}{2}$.

于是有 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$. 解得 $x = y^2 + C_2$. 再利用初始条件得 $y = \sqrt{1+x}$.

另解 由 $yy'' + (y')^2 = 0$ 得 $(yy')^2 = 0$，所以 $yy' = C_1$， $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 得 $C_1 = \dfrac{1}{2}$；分离变量 $ydy = \dfrac{1}{2}dx$ 或 $2ydy = dx$，因此 $y^2 = x + C$，由 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$，所以 $y = \sqrt{1+x}$.

2.直接观察到特征根 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$，所以特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$.

于是，所求微分方程为 $y'' - 2y' + 5y = 0$.

3. 易得 $\overrightarrow{AM} = \{0,3,3\}, \overrightarrow{OM} = \{3,0,4\}$.

单位化以后得到 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \dfrac{4}{5}$.

4. 由已知得到点 $P_1(-1,2,4), P_2(1,-3,6)$，以及 $\boldsymbol{s}_1 = \{2,-1,3\}, \boldsymbol{s}_2 = \{1,2,5\}$.

从而得到

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

因此两条直线为异面直线.

5. 极限不存在.

取路径 $y = 0$，极限为0.

取路径 $x = -y + y^3$，极限为 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^3 + y^5}{y^3} = -1$. 因此二重极限不存在.

6. 设 $f(x,y) = x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3$. 则

$$\nabla f=\left\{2x+\frac{1}{x+y},3y^2+\frac{1}{x+y}\right\}.$$

法线方向矢量为 $\boldsymbol{n}=\nabla f(2,-1)=\{5,4\}$.

所求的法线方程为 $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{4}$，即 $4x-5y-13=0$.

7. 根据隐函数求导得到

$$z_x=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v},z_y=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$$

代入即得 $az_x+bz_y=c$.

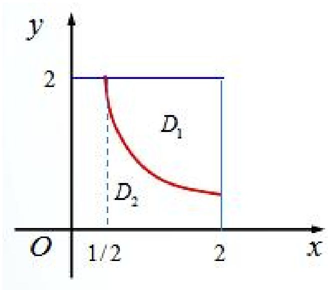
8. 由题设知积分区域为正方形区域 $0\le x\le 2,0\le y\le 2$.

用 $xy=1$ 将区域分成 D_1 与 D_2（如图所示），则

$$I=\iint\limits_{D_1}xyd\sigma+\iint\limits_{D_2}d\sigma$$

$$=\int_{1/2}^{2}xdx\int_{1/x}^{2}ydy+1+\int_{1/2}^{2}dx\int_{0}^{1/x}dy$$

$$=\frac{19}{4}+\ln 2.$$



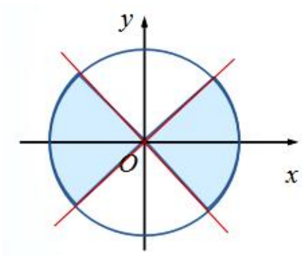
2018-2（期中）-8 图

9. 区域包含两个部分.根据对称性，采用极坐标得到

$$I=4\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^2 r\cos r^2dr$$

积分得

$$I=4\frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^2=\frac{\pi\sin 4}{2}.$$

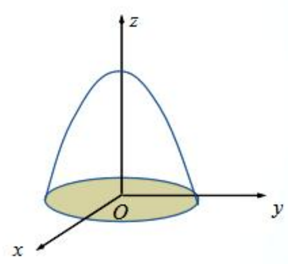


2018-2（期中）-9 图

10. 用柱面坐标

$$I=\iint\limits_{D}dxdy\int_0^{4-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2(4-r^2)dr=\frac{128\pi}{15}.$$



2018-2（期中）-10 图

11.方程的特征方程为$r^2-3r+2=0$．解得特征根$r_1=1,r_2=2$．

所以对应齐次方程的通解为$Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$．

分别求解非齐次项e^{2x},e^{3x}所对应的特解.

设e^{3x}对应的特解为$y_1=Ae^{3x}$，解得$A=1/2$．

设e^{2x}对应的特解为$y_2=Bxe^{2x}$，解得$B=1$．所求微分方程通解为

$$y=Y+y_1+y_2=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}+xe^{2x}.$$

12. 在点$(1,-1,-1)$处椭球面的外法线方向为$\boldsymbol{n}=\left\{2x,4y,6z\right\}\Big|_{(1,-1,-1)}=\left\{2,-4,-6\right\}$．

单位化得到$\boldsymbol{n}^0=\dfrac{\left\{1,-2,-3\right\}}{\sqrt{14}}$.

在点$(1,-1,-1)$处$\nabla u(1,-1,-1)=\left\{2,2,1\right\}$.

故所求方向导数为$\dfrac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot\boldsymbol{n}^0=-\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

13. 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+3z+\lambda(x+2y-3z-2)+\mu(x^2+y^2-2).$$

令$\begin{cases}L_x=1+\lambda+2\mu x=0,\\ L_y=2\lambda+2\mu y=0,\\ L_z=3-3\lambda=0,\\ L_\lambda=x+2y-3z-2=0,\\ L_\mu=x^2+y^2-2=0.\end{cases}$

解得两个驻点$\lambda_1=1,\mu_1=1,x_1=-1,y_1=-1,z_1=-\dfrac{5}{3}$以及

$\lambda_2=1,\mu_2=-1,x_2=1,y_2=1,z_2=\dfrac{1}{3}$.

比较得到最大值为2，最小值为-6．

14 $I=\displaystyle\iiint_V x^2dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho^4\sin^3\varphi\cos^2\theta d\rho$

$$=\frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^5\varphi d\varphi=\frac{32\pi}{5}\cdot\frac{1}{24}=\frac{4\pi}{15}.$$

15（1）根据偏导数定义求得$z_x(0,0)=0,z_y(0,0)=0$．

因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin^3\theta = 0$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

(2) 当 $(x,y)\neq(0,0)$， $z_x = \dfrac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$.

所以 $z_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{z_x(0,y) - z_x(0,0)}{y} = 1$.