Matemática II. Recuperatorio 2do Parcial. TPI. UNQ. 05 / 07/ 12

NOMBRE Y APELLIDO	
TEMA	**I**
CALIFICACIÓN	

Ejercicio N º 1
Responder a lo pedido en cada caso en forma justificada:

a) ¿Verdadero o falso?

1. si en A = {a, b, c}se da la situación a * b = a * c = b, entonces (A, *) no es grupo.

2-(P({2, 3}), $\cup$) es grupo

3. el sistema: $\begin{cases} \bar{2}.x + \bar{8}.y = \bar{1} \\ x + \bar{7}.y = \bar{5} \end{cases}$ tiene solución en Z_{11}

b) Analizar si $A = \left\{ f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, h : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es subgrupo del grupo simètrico (S_3, o).

c) Dada la función: f: (R^2, +) $\rightarrow$ (R, +) / f ((a, b)) = a + b:

1. Probar que f es un homomorfismo de grupos

2. Analizar si f es epimorfismo

3. Determinar el núcleo de f

Ejercicio N º 2
Analizar si:

a) Dado el conjunto **A =** $\{ (x_1 \ ; x_2 \ ; x_3 \ ; x_4) \in \mathbf{R}^4 \ / \sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \wedge x_1 = x_3 \}$

1. Demostrar que **A** es subespacio de $\mathbf{R}^4$

2. Hallar una base y la dimensión de **A**

b) Dado el conjunto A = {x^2 + k.x -1, 2.x^2- 2.x, 1}$\subseteq P_2$

1. Hallar k $\in$ R / A resulte ser ligado.

2. Para dicho valor de k, hallar el espacio generado por A, una base y su dimensión.

c) Dado el subespacio de $\mathbf{R}^{2x2}$: $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \in R^{2x2} \right\}$

1. hallar una base de S.

2. determinar las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ en la base hallada

RESOLUCIÓN

EJERCICIO Nº 1

a) 1:

$*$	a	b	c
a	–	b	b
b	–	–	–
c	–	–	–

VERDADERO

$a * x = b$ tendría al menos dos soluciones → contradice propiedad de grupos

2)

$\cup$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{2,3\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{2,3\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	$\{2,3\}$
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$

FALSA

si bien
- $\cup$: operación binaria en $P(\{2,3\})$.
- $\cup$: op asociativa
- neutro: $\emptyset$
- sólo admite simétrico: $\emptyset$

3) VERDADERO

$$\begin{cases} \bar{2}\cdot x + \bar{8}y = \bar{1} & (1) \\ x + \bar{7}\cdot y = \bar{5} & (2) \end{cases}$$

En (2) sumo a ambos miembros: $\bar{4}\cdot y \to x = \bar{5} + \bar{4}\cdot y$

En (1):

$\bar{10} + \bar{8}\cdot y + \bar{8}y = \bar{1}$

$\bar{10} + \bar{5}\cdot y = \bar{1}$

$(+\bar{1})$ $\bar{5}\cdot y = \bar{2} \Rightarrow y = \bar{7}$

$x = \bar{5} + \bar{6}$; $x = \bar{0}$

$$\boxed{S = \{(\bar{0}, \bar{7})\}}$$

b) efectúo todas las composiciones.

$f\circ g: \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \\ 1&3&2 \end{pmatrix} : g$; $f\circ h: \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \\ 3&2&1 \end{pmatrix} : h$; $g\circ h: \begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \\ 2&3&1 \end{pmatrix} \notin A$.

De donde $(A,\circ)$ no es subgrupo de $(S_3,\circ) \to$ '$\circ$' no es op. binaria en A

c) 1. $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$: $f((a,b)+(c,d)) = f((a+c,b+d)) = (a+c)+(b+d)$
$= (a+b)+(c+d) = f((a,b)) + f((c,d))$

2. f es epimorfismo: $\forall\, k \in \mathbb{R}: \exists\, (a,b) = (k,0) \in \mathbb{R}^2 / f(a,b) = f((k,0)) = k+0 = k$ (2)

3. $\boxed{N(f)} \rightarrow f((a,b)) = a+b = 0 \Rightarrow b = -a$

$$\boxed{N(f) = \{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 / b = -a \}}$$

EJERCICIO Nº 2

a) 1. $(x_1,x_2,x_3,x_4); (x'_1,x'_2,x'_3,x'_4) \in A \Rightarrow (x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3, x_4+x'_4) \in A.$

i) $(x_1+x'_1)+(x_2+x'_2)+(x_3+x'_3)+(x_4+x'_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4)+(x'_1+x'_2+x'_3+x'_4) \overset{H}{=} 0+0=0$ ✓

ii) $x_1+x'_1 \overset{H}{=} x_3+x'_3$ ✓

2. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \rightarrow x_4 = -x_1-x_2-x_3 ; \; x_4 = -x_2-2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

$A = \{ (x_3, x_2, x_3, -x_2-2x_3) \in \mathbb{R}^4 \}$

$x_2(0,1,0,-1) + x_3(1,0,1,-2)$ $\in A$

generan A y son lin. indep. $\rightarrow (0,1,0,-1) = \alpha(1,0,1,-2)$ sin solución.

$$\boxed{\dim A = 2 \quad y \quad B_A = \{(0,1,0,-1);(1,0,1,-2)\}}$$

b) 1. $\alpha.(x^2+k.x-1)+\beta(2x^2-2x)+\gamma.1=0$ sii $k \neq -1$

sii $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ k.\alpha - 2\beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ k & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2-2k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-2-2k} \cdot F_2$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

DE DONDE: $\boxed{\text{A } l.\text{ depend. sii } k = -1}$

2. $A=\{\underbrace{x^2-x-1}_{p};\ \underbrace{2x^2-2x}_{q},\ \underbrace{1}_{r}\}$ y como $q=2p+2r$.

$Gen(A)=gen\{x^2-x-1,\ 1\}$

$$\alpha(x^2-x-1)+\beta\cdot 1=ax^2+bx+c \text{ sii}$$

sii $\begin{cases}\alpha=a\\-\alpha=b\\-\alpha+\beta=c\end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\-1&0&b\\-1&1&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&a\\0&0&a+b\\0&1&a+c\end{array}\right)$

compatible sii $a+b=0$ sii $b=-a$.

$$\boxed{gen(A)=\{ax^2-ax+c\in P_2\}}$$

$$a\underbrace{(x^2-x)+c.(1)}_{\in\ gen(A)}$$

Generan A y son lin. indep $\rightarrow \underbrace{x^2-x=\alpha.1}_{\text{sin solución}}$

$$\boxed{dim\ gen(A)=2 \text{ y } B_{gen(A)}=\{x^2-x,1\}}$$

c) 1. $$\begin{pmatrix}a&b\\-b&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ \in S$$

Son lin. indep.

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\boxed{\alpha=0}\\\boxed{\beta=0}\\-\beta=0\\\boxed{\gamma=0}\end{cases}$$

$$\boxed{dim\ S=3 \text{ y } B_S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}}$$

2. $$\begin{pmatrix}5&2\\-2&3\end{pmatrix}=\alpha.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\boxed{\alpha=5}\\\boxed{\beta=2}\\-\beta=-2\\\boxed{\gamma=3}\end{cases}$$

$$\boxed{coord_B\begin{pmatrix}5&2\\-2&3\end{pmatrix}:\ 5,2,3}$$