**MATEMÁTICA II. 2do Parcial. TPI. UNQ. 28 / 06/ 12**

| | |
|---|---|
| **NOMBRE Y APELLIDO** | |
| **TEMA** | **I** |
| **CALIFICACIÓN** | |

**Ejercicio N º 1**
**Responder a lo pedido en cada caso en forma justificada:**

**a)** Mediante la estrategia de completar cuadrados <u>resolver</u> en $Z_8$ la ecuación: $\overline{3}.x^2 + \overline{6}.x + \overline{7} = 0$

**b)** <u>Analizar</u> si
(A, +) es subgrupo del grupo (R, +) con A = {x/ x $\in$ R $\wedge$ ent (x) = 0}.

**c)** <u>Analizar</u> si la función: f: $(P_2, +) \rightarrow (R^{2x2}, +)$ / $f(a + b.\ t + c.\ t^2) = \begin{pmatrix} c+2.a & c+2.a \\ 0 & b \end{pmatrix}$
es homomorfismo de grupos. En caso afirmativo hallar Núcleo e imagen y en función de lo obtenido decir si es o no monomorfismo – epimorfismo.

**d)** Teniendo en cuenta que los únicos subgrupos propios (no trivales) de un grupo de orden n, tienen orden m con m | n. <u>hallar</u> los subgrupos propios de
$Z_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$.

**Ejercicio N º 2**
**Analizar si:**

**a)** dados $S_1 = \{(x, y, z)\ \varepsilon\ R^3 / x + y = 0\}$ y $S_2 =$ gen {(0, 1, 1); (3, 0, 1)} subespacios vectoriales de $R^3$, $S_1 \cap S_2$ es un subespacio y en caso afirmativo hallar una base y su dimensión. Interpretar geométricamente el resultado.

**b)** se puede asegurar que el conjunto formado por los vectores {**a + c** , **b + a**, **c**} es libre a sabiendas de que el conjunto formado por los vectores {**a** , **b** , **c**} es libre.

**c)** En caso de ser posible, <u>extraer una base o bien extender a una base</u> del espacio indicado según corresponda:
A = {(1, -2, 0), (2, -1, 5)} $\subseteq$ V con V = $R^3$
B = $\{3- t + 3.t^3, 2 + t^2, 5 + t, 4 – 2.t +3.\ t^2 + 3.t^3, 3\} \subseteq$ V con V = $P_3$

RESOLUCIÓN



EJERCICIO Nº 1

a) $\bar{3}x^2+\bar{6}x+\bar{7}=\bar{0}$ sii $\bar{3}.(x^2+\bar{2}x)+\bar{7}=\bar{0}$ sii (completo cuadrados)

en $\mathbb{Z}_8$

sii $\bar{3}\left[(x+\bar{1})^2+\bar{7}\right]+\bar{7}=\bar{0}$ sii (distribuyo)

sii $\bar{3}.(x+\bar{1})^2+\bar{5}+\bar{7}=\bar{0}$ sii (asocio y sumo en $\mathbb{Z}_8$)

sii $\bar{3}.(x+\bar{1})^2+\bar{4}=\bar{0}$ (sumo $\bar{4}$ a ambos miembros)

sii $\bar{3}.(x+\bar{1})^2=\bar{4}$ (multiplico por $\bar{3}$ ambos m.)

sii $(x+\bar{1})^2=\bar{4}$ sii (busco en tabla de $\mathbb{Z}_8$)

sii $x+\bar{1}=\bar{2} \vee x+\bar{1}=\bar{6}$ sii

sii $x=\bar{1} \vee x=\bar{5}$

b) $\boxed{(A,+) \text{ no es subgrupo del grupo } (\mathbb{R},+)}$

i) $A\subseteq\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$

$0\in A$

ii) '+': no es una operación cerrada en A:

por ejemplo $0{,}9\in A$, $0{,}1\in A$ pero $0{,}9+0{,}1=1\notin A$.

c) $\boxed{f \text{ es homomorfismo entre los grupos indicados.}}$

D/ $f\left((a+bt+ct^2)+(d+et+f.t^2)\right)=f\left((a+d)+(b+e).t+(c+f)t^2\right)=$

$=\begin{pmatrix}(c+f)+2(a+d) & (c+f)+2(a+d)\\ 0 & b+e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+2a & c+2a\\ 0 & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}f+2d & f+2d\\ 0 & e\end{pmatrix}=$

$=f(a+bt+ct^2)+f(d+et+f.t^2)$ ✓

$\boxed{N(f)}\rightarrow f(a+bt+ct^2)=\begin{pmatrix}c+2a & c+2a\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ sii

$\begin{cases}c+2a=0 \rightarrow c=-2a\\ b=0\end{cases}$

$\boxed{N(f)=\{a+bt+ct^2\in P_2 / b=0,\ c=-2a\}}$

DE DONDE $\boxed{f: \text{no es monomorfismo}}$

$\boxed{I(f)}$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & m \end{pmatrix} \in I(f)$ sii $\exists\, a+bt+ct^2 \in P_2 : f(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & m \end{pmatrix}$ ② 

$= \begin{pmatrix} c+2a & c+2a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

sii $S: \begin{cases} c+2a = x \\ c+2a = y \\ 0 = z \\ b = m \end{cases}$ es compatible sii $y-x=0 \wedge z=0$

sii $\underline{y = x \wedge z = 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & m \end{array}\right) \overset{F_2-F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & m \end{array}\right)$$

$$\boxed{I(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} / y = x ; z = 0 \right\} \neq \mathbb{R}^{2\times 2}.}$$

De donde: $\boxed{f: \text{no es epimorfismo}}$

d). Dado que orden$(\mathbb{Z}_6) = 6$ y los divisores naturales de 6 son: 1, 2, 3, 6.

Como $\begin{cases} \text{orden} = 1 \to \text{corresponde al subgrupo trivial: } S_1 = \{\bar{0}\} \\ \text{orden} = 6 \to \quad " \quad " \quad " \quad " \quad : S_2 = \mathbb{Z}_6. \end{cases}$

Subgrupos no triviales tendrán orden '2' o bien '3'.

Teniendo en cuenta la tabla de $\mathbb{Z}_6$:

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |

resultan los subgrupos no triviales. $\begin{cases} S_3 = \{\bar{0}, \bar{3}\} \text{ de orden 2} \\ S_4 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \text{ de orden 3} \end{cases}$

En $S_3$ $\begin{cases} -\bar{0} = \bar{0} \\ -\bar{3} = \bar{3}. \end{cases}$ En $S_4$ $\begin{cases} -\bar{0} = \bar{0} \\ -\bar{2} = \bar{4} \\ -\bar{4} = \bar{2} \end{cases}$

<u>Ejercicio Nº 2</u>

a) <u>Dado $S_1 \cap S_2$</u>

Busco ecuación que caracteriza a $S_2$ (plano)

$\alpha(0,1,1) + \beta(3,0,1) = (x, y, z)$ sii $\begin{cases} 3\beta = x \to \beta = \frac{x}{3} \\ \alpha = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases} \to \underline{y + \frac{x}{3} = z}$

$\underline{S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 3z = 0\}}$

$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x+y=0 \to y=-x \\ x+3y-3z=0 \to x-3x-3z=0 \text{ sii } -2x-3z=0 \text{ sii } z=-\frac{2}{3}\cdot x \end{cases}$

$S_1 \cap S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ y=-x,\ z=-\frac{2}{3}\cdot x\}$ (Recta)

$\boxed{S_1 \cap S_2 : \text{subespacio de } \mathbb{R}^3}$

$S_1 \cap S_2 = \{\underbrace{(x, -x, -\frac{2}{3}\cdot x)}_{x\cdot(1,-1,-\frac{2}{3})} \in \mathbb{R}^3\} = \text{gen}\{(1,-1,-\frac{2}{3})\}$

Se ha probado que todo sistema finito de vectores genera un subespacio.

$\boxed{\dim(S_1 \cap S_2) = 1 \quad y \quad B_{S_1 \cap S_2} = \{(1,-1,-\frac{2}{3})\}}$

genera $S_1 \cap S_2$

libre: $\alpha(1,-1,-\frac{2}{3}) = (0,0,0)$ sii $\alpha = 0$ ✓

b) $\boxed{\{a,b,c\}: \text{libre} \Rightarrow \{a+c, b+a, c\}: \text{libre}}$

D/ $\alpha(a+c) + \beta(b+a) + \gamma.c = 0 \iff (\alpha+\beta).a + \beta.b + (\alpha+\gamma).c = 0$

$\overset{(*)}{\iff} \begin{cases} \alpha+\beta=0 \to \boxed{\alpha=0} \\ \boxed{\beta=0} \\ \alpha+\gamma=0 \to \boxed{\gamma=0} \end{cases}$

c)

i) Dado que A: libre ($(2,-1,5) = \alpha(1,-2,0)$ carece de solución) y $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, habrá que agregar una terna que no dependa de las dos ternas dadas.

Por ejemplo: $A' = \{(1,-2,0), (2,-1,5), (0,0,1)\} = B_{\mathbb{R}^3}$.

$\alpha(1,-2,0) + \beta(2,-1,5) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \to \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \\ -2\alpha-\beta=0 \\ 5\beta+\gamma=0 \end{cases}$ admite solo la solución nula.

ii) Dado que $\dim P_3 = 4$ y $|B| = 5$, habrá que ver si quitando un vector se obtiene un sistema libre

si $\begin{cases} 3-t+3t^3 = p \\ 2+t^2 = q \\ 5+t = r \\ 4-2t+3t^2+3t^3 = s \\ 3 = t \end{cases}$ resulta $s = p+3q-r$. Veremos ahora si $\{p,q,r,t\}$: libre.

tenemos la certeza que genera lo mismo que B

(4)

$\alpha(3-t+3t^3)+\beta(2+t^2)+\gamma(5+t)+\delta.3=0+0.t+0t^2+0t^3$

$\Downarrow$

$$S\begin{cases}3\alpha+2\beta+5\gamma+3\delta=0 & \longrightarrow 3\delta=0 \text{ sii } \boxed{\delta=0}\\ -\alpha+\gamma=0 & \longrightarrow \boxed{\gamma=0}\\ \boxed{\beta=0} & \\ 3\alpha=0 & \longrightarrow \boxed{\alpha=0}\end{cases}$$

como $\{p,q,r,t\}$: libre y tiene cardinal $=4 \rightarrow \boxed{\{p,q,r,t\}=B_{P_3}}$