Guía de ejercicios # 5
Sistemas Enteros

Organización de Computadoras 2017

UNQ

Representación de Enteros

Además de representar los números naturales, también podemos representar los números enteros.

Existen 3 sistemas que nos permiten representar números enteros:

- Sistema Signo Magnitud (de ahora en más **SM**)
- Sistema Complemento a 2 (de ahora en más **CA2**)
- Sistema Exceso (de ahora en más **Ex**)

1 Sistema Signo Magnitud

El sistema más sencillo de representación de números enteros es el sistema **Signo Magnitud**. En un sistema de signo magnitud, el bit más significativo de la cadena es el **signo** y los bits restantes representan la **magnitud** del entero.

Si deamos analizar la cadena 1101 tenemos...

Signo	Magnitud		
1	1	0	1

1.1 Interpretación en SM

Veamos la interpretación en SM con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1) Interpretemos esta cadena **1**00101 en SM(6):

$$I_{SM(6)}(\mathbf{1}00101) = \mathbf{-}(1*2^0+1*2^2) = \mathbf{-}(1+4) = \mathbf{-}5$$

Como vimos, las cadenas que tienen el bit de signo con el valor 1, son cadenas negativas. Por eso el resultado fue un número negativo.

Ejemplo 2) Interpretemos esta cadena **0**01111 en SM(6):

$$I_{SM(6)}(\mathbf{0}01111) = (1*2^0+1*2^1+1*2^2+1*2^3) = 15$$

También vimos, que las cadenas que tienen el bit de signo con valor 0, son cadenas positivas. Por eso el resultado fue un número positivo.

Ejercicios

Ahora estamos listos para empezar a ejercitar la interpretación SM.

1.1.1 Interpretar en SM(8)

(a) 10001111
(b) 10000000
(c) 01001001
(d) 01011111

1.1.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) Si interpretamos la cadena 1011 en SM(4) nos da el valor 3.
(b) Signo Magnitud es el único sistema que nos permite representar números enteros.
(c) Si tengo un sistema SM(4) la distribución de los bits sería: magnitud y signo, osea los 3 bits más significativos son la magnitud y el bit menos significativo es el signo.
(d) Si interpretamos la cadena 0110 en BSS(4) y en SM(4) nos devuelve ambas interpretaciones el valor 6.

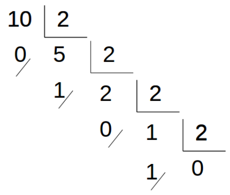
1.2 Representación en SM

Veamos la representación en SM con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1) Representar un valor negativo:
Representar el -10 en SM(5).
Lo primero que tenemos que hacer es definir el signo, y como en este caso el número es negativo el valor del bit de signo que va a tener la cadena resultante es **1**.

Luego tomamos el valor positivo del número (en vez de -10 vamos a representar el número 10) y procedemos a representarlo como en BSS(**4**):

$$R_{SM(5)}(\mathbf{-}10)$$
$$\downarrow$$
(tomando el valor absoluto del número:)
$$R_{BSS(4)}(10)$$
$$\downarrow$$



La cadena resultante en BSS(4): $R_{BSS(4)}(10) = 1010$
La cadena final en SM(5):$R_{SM(5)}$(**-**10) = **1**1010

Ejemplo 2) Representar un valor positivo:
Representar el 12 en SM(5)

$$_{SM(5)}(12)$$
$$\downarrow$$
Ahora representamos el número en la magnitud de la cadena
$$R_{BSS(4)}(12)$$

La cadena resultante en BSS(4): $R_{BSS(4)}(12) = 1100$
La cadena final en SM(5): $R_{SM(5)}(12)$ = **0**1100

Observación: Si un número no se puede representar en la magnitud del sistema, esto quiere decir que, dicho numero esta fuera del rango del sistema.

Ejercicios

1.2.1 Representar en SM(7)

(a) -15
(b) 28
(c) -64
(d) -56

1.2.2 Comprobar los resultados obtenidos en el ejercicio anterior mediante la interpretación de las cadenas.

1.2.3 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas.

(a) Cuando represento en SM tengo que prestar atención al signo y luego representar su valor positivo en los bits de la magnitud.
(b) Al representar el número 3 en SM(4) la cadena resultante es igual a la que se obtiene en BSS(4).
(c) El 10 es representable en el sistema SM(4).
(d) La representación de -4 en SM(4) es 1100.

1.3 Rango en SM

Al igual que con el sistema $BSS()$ desarrollado en las primeras prácticas, para *Signo-Magnitud* es importante analizar el rango de representación.
Rango es el intervalo de números representables dentro del sistema.

Por ejemplo, calcular el rango de SM(4):

$$Negativos = \begin{cases} 1111 = -7 \\ 1110 = -6 \\ 1101 = -5 \\ 1100 = -4 \\ 1011 = -3 \\ 1010 = -2 \\ 1001 = -1 \\ 1000 = 0 \end{cases} \quad Positivos = \begin{cases} 0000 = 0 \\ 0001 = 1 \\ 0010 = 2 \\ 0011 = 3 \\ 0100 = 4 \\ 0101 = 5 \\ 0011 = 6 \\ 0111 = 7 \end{cases}$$

Como antes, para calcular el rango de un sistema es necesario buscar el mínimo y máximo número representable dentro del sistema.

Mínimo Para calcular el mínimo tenemos que buscar la cadena más chica de los negativos. En este caso la cadena más chica seria: **1111 = -7**

Máximo Para calcular el máximo tenemos que buscar la cadena más grande dentro de los positivos. En este caso la cadena más grande sería: **0111 = 7**

El Rango en **SM(4): [-7; 7]**

Generalizar para n bits

Ahora estamos listos para generalizar el análisis anterior considerando una cantidad **n** de bits, esto es: el sistema $SM(n)$:

Mínimo Para calcular el mínimo número representable: $-(2^{n-1} - 1)$

Máximo Para calcular el máximo número representable: $2^{n-1} - 1$

Veamos que lo anterior se aplica en el ejemplo visto antes, SM(4). El mínimo número representable es $-(2^{4-1} - 1)$ (el valor n, fue reemplazado por 4), entonces $min = -(2^3 - 1) = -(8 - 1) = -7$

Del mismo modo, el máximo número representable es $2^{4-1} - 1$ (n reemplazado por 4), entonces $max = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

El Rango en SM(4): $[-(2^{4-1} - 1); 2^{4-1} - 1] = [-7; 7]$

Ejercicios

1.3.1 Calcular el Rango de los siguientes sistemas:

(a) SM(7)
(b) SM(12)
(c) SM(16)

1.3.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas.

(a) En SM hay doble representación del 0.
(b) El número 31 se encuentra dentro del rango de SM(4).
(c) Con SM(6) puedo representar los números desde el -63 hasta 63.

1.4 Aritmética en SM: Suma y Resta

Para realizar una resta o una suma en signo magnitud lo primero que tenemos que observar son los signos de las cadenas, esto nos va a permitir identificar en qué casos de la suma o de la resta estamos.

Casos de la Suma

Cuando observemos los signos de las cadenas que se van a sumar, puede haber 2 casos posibles:

1. Que los signos sean iguales, en cuyo caso el bit de signo de la cadena resultante debe ser ese mismo, y solo deben sumarse las magnitudes como en BSS.

   Ejemplo en SM(4):

   $$\begin{array}{r} 1010 \\ +\ 1001 \\ \hline 1011 \end{array}$$

2. Que los signos sean distintos, en cuyo caso el signo será aquel de la cadena de mayor magnitud. Y la magnitud resultante la construimos a partir de una resta auxiliar: poniendo como minuendo (operando de *arriba*) la de mayor magnitud y como sustraendo (operando de *abajo*) la de menor magnitud.

$\begin{array}{r} 0011 \\ +\ 1001 \\ \hline \end{array}$ Suma en SM(4)	$\begin{array}{r} 011 \\ -\ 001 \\ \hline 010 \end{array}$ Resta auxiliar sobre las magnitudes	$\begin{array}{r} 0011 \\ +\ 1001 \\ \hline 0010 \end{array}$ Resultado final

Casos de la Resta

El cálculo de una resta puede simplificarse con la siguiente equivalencia:

$$A - B = A + (-B)$$

dado que $-B$ es el inverso de B y es posible construirlo simplemente invirtiendo el bit de signo sobre B.

Finalmente, la operación se traduce en una suma y se deben analizar los casos que describimos antes.

Ejercicios

1.4.1 Realizar las siguientes operaciones en SM(6).

(a) 001100 + 110011
(b) 101010 + 110101
(c) 111010 + 001101
(d) 000111 + 010110
(e) 111101 - 100100
(f) 101101 - 010101
(g) 011010 - 011110
(h) 001011 - 110111

1.4.2 Interpretar los operandos y el resultado del ejercicio anterior¿Hay algún resultado incorrecto?

2 Sistema Complemento a 2

En CA2, el bit más significativo es útil para determinar el signo del número representado (aunque no se trata de un bit de signo), facilitando la comprobación de si el entero es positivo o negativo. En CA2, la interpretación de cadenas y la aritmética son diferentes a SM. Además, en CA2 tenemos un número más dentro de los números representables, ya que este sistema aprovecha la cadena que se desperdicia en SM, porque como ya vimos el cero tiene 2 representación en dicho sistema.

2.1 Interpretación en CA2

La interpretación en CA2 consiste en ver el bit más significativo (el de más a la izquierda) para determinar si es un entero negativo o positivo. Si es cero (positivo), la interpretación se realiza en BSS. En cambio, si es uno (negativo), tenemos que hacer varios pasos:

1. Complementar la cadena.
   (intercambiar los 0's por 1's y viceversa)
2. Sumarle 1.
3. Interpretar la cadena resultante en BSS.
4. Teniendo en cuenta que la cadena representa una cadena negativa, por lo tanto el número es negativo.

Ejemplo: Interpretemos la cadena **1**010 en CA2(4). Como comienza con 1, se realizan los pasos anteriores:

1010 $\rightarrow$ 0101 Se complementa la cadena	$\begin{array}{r} 0101 \\ +\ 1 \\ \hline 0110 \end{array}$ Se le suma 1	$I_{BSS(4)}(0110) = 6$ Se interpreta en BSS(4)

Por lo tanto la interpretación en este sistema quedaría:

$$I_{CA2(4)}(\mathbf{1}010) = \mathbf{-}(I_{BSS(4)}(0110)) = \mathbf{-}6$$

Ejercicios

2.1.1 Interpretar en CA2(6)

(a) 101111
(b) 001001
(c) 100000
(d) 010101

2.1.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) Una de las ventajas de $CA2()$ es que la aritmetica se lleva a cabo como en $SM()$.
(b) Si interpretamos la cadena 1000 en $CA2(4)$ y en $SM(4)$ obtenemos el valor 0.

(c) Si tenemos que interpretar una cadena negativa el primer paso consiste en sumarle 1, el segundo paso en complementar la cadena y el ultimo paso en interpretar en $BSS()$.

2.2 Representación en CA2

El mecanismo de representación en $CA2()$ es diferente para los numeros positivos y para los negativos.

Número positivo Se representa como en $BSS()$

Número negativo Se quiere representar el valor $x < 0$

1. Representar su valor absoluto ($|x|$) en $BSS()$.
2. Complementar la cadena (invertir 0s por 1s y viceversa).
3. Sumarle 1.

Por ejemplo: Representemos el -6 en $CA2(4)$:

1. $R_{bss(4)}(6) = 0110$
2. Complementar la cadena:1001
3. Sumarle 1 : 1001 + 1 = 1010

Por lo tanto: $R_{CA2(4)}(-6) = 1010$

Para validar que es correcto el resultado, es posible interpretar la cadena como se explicó en la sección 2.1. En el caso de ejemplo:

$$I_{ca2(4)}(1010) = -I_{bss(4)}(0101 + 1) = -I_{bss(4)}(0110) = -6$$

Ejercicios

2.2.1 Representar en CA2(6)

(a) 14

(b) -64

(c) 43

(d) -1

2.2.2 Comprobar las respuestas obtenidas en el ejercicio anterior mediante la interpretación de las cadenas.

2.2.3 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) La representación del número -16 en $CA2(5)$ es 10000.

(b) Con el sistema $CA2(5)$ puedo representar el número 32.

(c) Si tenemos que representar un número positivo, la representación se realiza en BSS.

2.3 Rango en CA2

El rango en este sistema similar al de SM, salvo el conjunto de los numeros negativos, ya que en este sistema se aprovecha la cadena que se desperdicia en SM, es decir, que tenemos un número más dentro de los negativos.

Por ejemplo, calcular el rango de CA2(4):

Mínimo La cadena que representa el valor más chico seria `1000`. Entonces $I_{ca2}(1000) = -I_{bss}(0111 + 1) = -I_{bss}(1000) = -8$

Máximo La cadena que representa al valor más grande sería:`0111`. Entonces $I_{ca2}(0111) = I_{bss}(0111) = 7$

El Rango en **CA2(4): [-8; 7]**

Generalizar para n bits

Ahora estamos listos para generalizar lo anterior considerando una cantidad **n** de bits, es decir el sistema $CA2(n)$. El rango de $CA2(n)$ es:

$$[-(2^{n-1}); 2^{n-1} - 1]$$

Veamos que si lo aplicamos al ejemplo de arriba ($CA2(4)$), obtenemos lo mismo:

$$[-(2^{4-1}); 2^{4-1} - 1] = [-8; 7]$$

Ejercicios

2.3.1 Calcular el Rango de los siguientes sistemas:

(a) CA2(6)

(b) CA2(16)

(c) CA2(8)

2.3.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) En $CA2(7)$ la cadena que representa al valor mas pequeño es `1111111`.

(b) El -32 es un numero representable más chico en $CA2(6)$.

(c) El numero representable más grande en $CA2(5)$ es 16.

2.4 Aritmética en CA2

Una de las ventajas que tiene este sistema es que tanto la suma como la resta, se realizan como en BSS. Esto permite usar el circuito Full Adder que se utilizaba para sumar en $BSS()$ para sumar cadenas en $CA2()$

Nota: En la aritmética de este sistema el bit más significativo se toma en cuenta para hacer las cuentas, ya que no se trata de un bit de signo, sino que es parte de la magnitud. Es decir, que si nos toca realizar sumas o restas en $CA2(3)$, las hacemos en $BSS(3)$.

Ejercicios

2.4.1 Realizar las siguientes operaciones en CA2(6). Interpretar los operandos y el resultado:

(a) 101010 + 110101

(b) 111010 + 001101

(c) 000111 + 010110

(d) 101101 - 010101

(e) 011010 - 011110

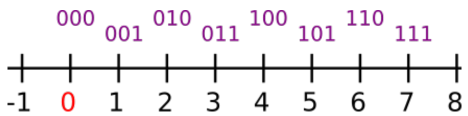
(f) 001011 - 110111

2.4.2 ¿Hay algún resultado incorrecto? Para responderlo, interpretá los operandos y resultado en cada caso.

3 Sistema Exceso

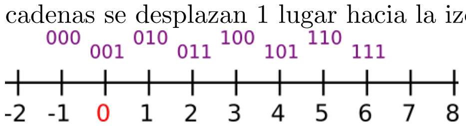
La idea que atraviesa el sistema **exceso** es la de desplazar las cadenas sobre la recta numérica, con respecto a un sistema de base que es el $BSS()$. Este desplazamiento lo llamamos exceso.

Tenemos la recta númerica donde se muestra la distribución de las cadenas de $BSS(3)$:

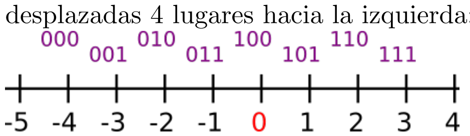


Veamos 2 ejemplos de dos sistemas excedidos:

Exceso=1 un sistema con **exceso de 1**, entonces las cadenas se desplazan 1 lugar hacia la izquierda:



Exceso=4 un sistema con exceso de 4 tiene las cadenas desplazadas 4 lugares hacia la izquierda:



Los sistemas anteriores se denotan $Ex(3,1)$ y $Ex(3,4)$ donde **3** es la cantidad de bit del sistema y los valores 1 y 4 representan los desplazamientos de cada caso.

Entonces lo que ocurre es que la cadena 000, en lugar de representar al valor 0, en el sistema $Ex(3,1)$ representa al valor -1.

3.1 Interpretación en Exceso

La interpretación en exceso consiste en extraer el exceso de la cadena para poder encontrar el valor real que representa dicha cadena. Para hacer esto tenemos que:

1. **interpretar** la cadena en BSS
2. **restar** el exceso al valor que se obtuvo

Por ejemplo interpretemos la cadena 0110 en $Ex(4,4)$:

1. Procedemos a interpretarla en BSS: $\mathrm{I}_{BSS(4)}(0110) = 6$
2. Al valor resultante le restamos el exceso: $6 - 4 = 2$

Por lo tanto: $I_{Ex(4,4)}(0110) = 2$

Ejercicios

3.1.1 Interpretar en $Ex(8,128)$

(a) 10001111

(b) 01001001

(c) 11110101

(d) 01010101

(e) 00000000

(f) 10000000

3.1.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) En exceso el bit más significativo representa el signo.

(b) Para interpretar una cadena en exceso con solo interpretarla en BSS, averiguo el valor que representa esa cadena.

(c) Si interpretamos la cadena 11010 en Ex(5,2^4) el resultado es 32.

(d) El valor de la cadena 0000 en Ex(4,2^3) es -4.

3.2 Representación en Exceso

La representación en exceso consiste en:

1. **desplazar** (sumar el exceso a) el número que se quiere representar
2. luego **representarlo** en BSS.

Por ejemplo, representemos el -2 en $Ex(4,4)$:

1. desplazar el número -2: $-2 + 4 = 2$
2. representarlo en $BSS(4)$: $R_{bss(4)}(2) = 0010$

Entonces: $\mathrm{R}_{ex(4,4)}(-2) = 0010$

Ejercicios

3.2.1 Representar en $Ex(8,128)$

(a) 26

(b) -127

(c) 30

(d) -15

(e) 42

(f) -64

3.2.2 Comprobar que las respuestas al ejercicio anterior son correctas interpretando las cadenas obtenidas

3.2.3 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) el número 128 se puede representar en sistema Ex(8,2^7).

(b) Si representamos el número 7 en CA2(4) y en Ex(4,2^2) nos da la misma cadena.

(c) En Ex para representar un número tenemos que sumarle el exceso y luego representar el valor resultante en BSS.

3.3 Rango en Exceso

El rango en este sistema se calcula interpretando la primera y la ultima cadena. Es importante notar que el exceso **puede ser un número negativo**.

Por ejemplo, calculemos el rango de Ex(5,6):

Mínimo La cadena que representa el valor mas chico es `00000`, entonces $I_{Ex(5,6)}(00000) = 0 - 6 = -6$

Máximo La cadena que representa el valor mas grande es `11111`, entonces $I_{Ex(5,6)}(11111) = 31 - 6 = 25$

El Rango en $Ex(5,6)$**: [-6; 25]**

Ahora estamos listos para **generalizar** lo anterior, es decir: para cualquier exceso (e) y cualquier cantidad de bits(n). Esto es, si tenemos el sistema Ex(n, e):

El Rango en $Ex(n,e)$:

$$[-e; (2^n - 1) - e]$$

Si aplicamos lo anterior al sistema $Ex(5,6)$:

$$[-6; (2^5 - 1) - 6] = [-8; 31 - 6] = [-8; 25]$$

Ejercicios

3.3.1 Calcular el Rango de los siguientes sistemas:

(a) Ex(8,2^6)

(b) Ex(6,2^4)

(c) Ex(5,2^1)

(d) Ex(4,2^2)

(e) Ex(8,-10)

(f) Ex(6,0)

3.3.2 Indicar si son V o F. Justificar las respuestas Falsas

(a) El 7 es parte del rango del sistema Ex(4,2^3).

(b) la cadena 10101 es la cadena que representa el número más chico del sistema Ex(5,2^4).

(c) La cantidad de números representables en el sistema Ex(7,2^6) es 128.

4 Ejercicios integradores

4.1 El Correo Argentino necesita definir un sistema de numeración que les permita representar los códigos postales en su aplicación de seguimiento de envíos, que son valores mayores al 1000. ¿Es posible utilizar $SM()$? ¿Que ótro sistema puede utilizarse?

4.2 Estamos trabajando en el diseño de una nueva ALU que se utilizará en las terminales de las cajas de un banco para registrar movimientos en las cajas de ahorro de los clientes. Esos valores pueden ser positivos como negativos. ¿Cuál es la principal desventaja de utilizar un sistema $SM()$ en comparación a $CA2()$?

4.3 Para manejar los saldos de las tarjetas SUBE se necesita un sistema de numeración que utilice 10 bits, considerando que el saldo es siempre un valor entre $-20 y $1000

4.4 Para un concierto se necesita un sistema de numeración que nos permita indicar el tiempo (reloj) que falta para que se habilite la compra de las entradas desde su pagina web.
Un ejemplo de reloj, seria:
$-24 : 07 : 57$
Dicho reloj esta dividido en tres partes: horas, minutos y segundos, cabe aclarar que solamente las horas tienen valores negativos, los minutos y segundos son valores positivos. Indique que sistema es el más conveniente para cada parte, tratando de minimizar la cantidad de bits de dicho sistema.

4.5 Para que una bomba no explote se necesita realizar dos cuentas: una resta: $156 - (-142)$
y una suma: $257 + (-205)$
Determinar cual de los dos sistemas que vimos, nos permitirian hacer las cuentas sin tener ningun error, tratando de minimizar la cantidad de bits del sistema elegido. Cabe aclarar que se tienen que representar cada operando en dicho sistema y realizar la cuenta.

4.6 Un científico necesita un sistema de numeración que le permita representar la temperatura que toma un cuerpo con el cual esta experimentando. Cabe aclarar que vamos a representar la parte entera de la temperatura ya que sabemos que las temperaturas en general se expresan con coma. El rango de temperatura que se le aplica al cuerpo en los experimentos van desde -100°C hasta 250°C. Determine cual de los sistemas es el más conveniente para este pedido.

4.7 Se tiene un circuito cuyas entradas son 2 cadenas de 16 bits (32 en total) y la salida es 1 si ambas cadenas representan el mismo valor en BSS. Se necesita un circuito que permita comparar dos cadenas de 16 bits en SM, ¿es posible utilizar el mismo circuito sin realizarle cambios? Justifique.

References

[1] Williams Stallings, *Computer Organization and Architecture*, octava edición, Editorial Prentice Hall, 2010. **Capitulos 9.2 y 9.3**