



# 四足机器人腿部建模及控制

李显涵	12013001	机械与能源工程系
赵瑞州	12011622	机械与能源工程系
刘宗尧	12011903	机械与能源工程系
赵睿涵	12011921	机械与能源工程系
苏兆文	12012204	机械与能源工程系
	指导老师	贾振中

## 摘要

在此次课程项目中，我们完成了对两款并联机构腿部和一款串联机构腿部的机械结构设计以及运动学建模，并在 webots 仿真软件中实现了四足机器人两种不同步态的行走以及各种功能。本报告主要展示了我们机械设计、运动学建模、四足运动控制和 webots 仿真几项工作，并就探究并联和串联这两种机构的腿的差异与联系的问题，联系实际项目工作，给出了相应的结论。

## 目录

<b>1 研究的动机与背景</b>	<b>3</b>
1.1 足式机器人优势	3
1.2 联机构四足机器人优势	3
1.3 课题组研究背景	3
<b>2 机械设计</b>	<b>4</b>
2.1 并联连杆机构	4
2.1.1 连接键设计	4
2.1.2 平行四边形连杆机构	6
2.1.3 30 度 Bennett 连杆机构	6
2.2 串联连杆机构	8
2.2.1 连接键设计	8
2.2.2 整体机构设计	8
<b>3 四足运动学的建模</b>	<b>9</b>
3.1 并联机构运动学建模	9
3.1.1 平行四边形连杆机构	9

3.1.2 Bennett 连杆机构	12
3.2 串联机构建模	14
3.2.1 机器人正运动学	14
3.2.2 机器人逆运动学	16
<b>4 四足机器人运动控制</b>	<b>18</b>
4.1 足尖轨迹规划	18
4.2 基础步态	19
4.2.1 Walk 步态	19
4.2.2 Trot 步态	20
4.3 基于 Trot 步伐的半径转弯设计	21
4.4 基于 trot 步伐的原地转弯设计	22
4.5 平坦斜面平衡	22
<b>5 基于 Webots 的四足机器人运动学仿真</b>	<b>23</b>
5.1 并联机构 webots 模型构建	23
5.2 串联机构 webots 模型构建	23
5.3 仿真情况简述	24
<b>6 探究结论</b>	<b>25</b>
<b>7 小组成员工作及贡献比</b>	<b>25</b>
<b>8 致谢</b>	<b>25</b>

# 1 研究的动机与背景

## 1.1 足式机器人优势

目前的机器人主要有两种行走机构：足式和轮式。轮式机器人可以非常高效地实现快速运动，但是它仅限于在平地和坡地上实现运动，并且地面必须能够提供足够的摩擦力使其前进。而足式机器人虽然运动效率较低，但能适应不同的地形，可以在很多复杂的环境中实现其行走功能。足式机器人按足的多少能划分为两足、四足和六足等，按照腿部机构特点划分能分为串联机构和并联机构。

## 1.2 联机构四足机器人优势

采用并联机构的腿部相比于串联机构有负重比大和刚度大的优点：并联机构的每条运动链都要承受载荷，因此，在相同的自重情况下，并联机构较串联机构具有更大的承载能力；并联机构的每条运动链可以分享载荷，同时大多数情况下可以设计其只承受拉成仅受拉力与压力载荷。高的刚度使得每条运动链上的变形都极小，确保了并联机构上末端执行器的位置精度。同时并联机构可以将腿部的驱动全部集中在髋部，从而实现腿部的轻小。MIT 的 Cheetah 四足机器人和斯坦福大学的 Stanford Doggo 都运用了并联机构。

## 1.3 课题组研究背景

本项目是基于宋超阳组的“玲珑”系列仿龙虾过约束四足机器人的改型。课题组的机器人是腿部基于 Bennett 机构设计的以龙虾的生物特性为灵感的四足机器人。其每条腿有三个自由度，由一个三电机模块控制，其中一个电机控制髋关节的转角，另外两个电机控制两条并联的腿部连杆。课题组曾经发表了关于 Bennett 机构腿部连杆的论文，介绍了关于 Bennett 腿模块的设计、建模和优化，以及基于 Bennett 腿模块设计重构的先进机器人。

考虑到经费、时间和知识储备等问题，我们打算利用课题组已有的其中一代模型的机身和舵机单元，通过自己分别设计串联、并联结构的腿部并进行建模，针对并联机构进行平衡及步态规划的仿真，并将运动仿真拓展到串联机构，探究并联和串联这两种机构的腿的差异与联系。

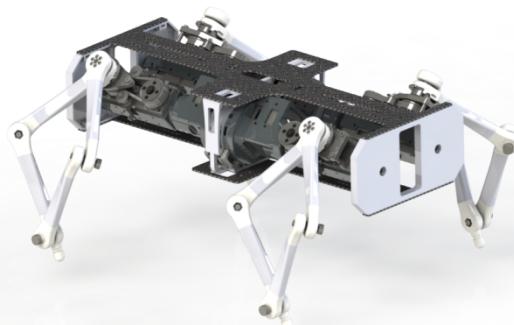


图 1：课题组原版机器人

## 2 机械设计

### 2.1 并联连杆机构

#### 2.1.1 连接键设计

我们现有资料的模型中，机器人腿部的每一根连杆都是一体的零件，并不能在不同的腿部构型中重复使用连接键。为了使连杆和舵机转轴，以及连杆与连杆之间相配合的模块能在不同构型的腿上能重复使用，根据现有的模型和相关资料，我们打算单独设计连杆与舵机舵盘、连杆与连杆之间的连接键。

我们所用的髋部三舵机单元结构，其中两个控制腿部连杆的舵机中，有一个通过皮带传动，将实际输出轴转换到了与另一个电机输出轴重合的位置。因此该轴上有上下两个法兰盘，可以将两根连杆固定在这里。

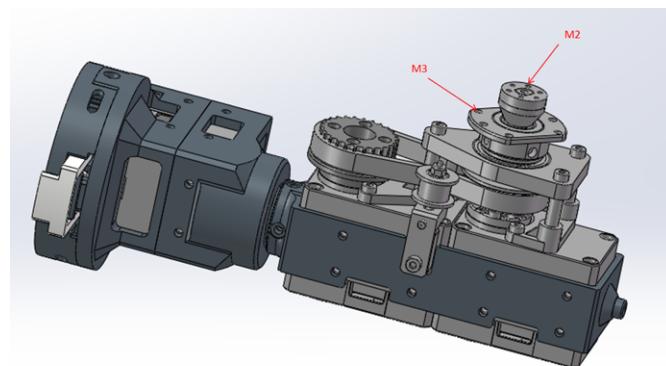


图 2: 三舵机单元结构

下面是这两个连接键的模型图。外侧的连接键直接由六枚 M2 螺钉固定在外侧法兰盘上。而内侧的连接键则是利用法兰盘的形状卡紧腿部连杆，只用三枚 M3 的螺钉固定。

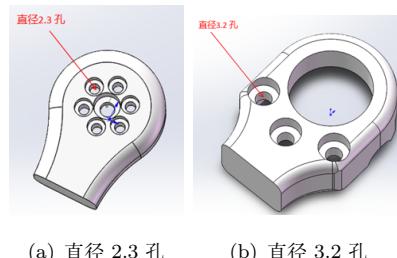


图 3: 舵机输出轴连接键

如下是腿部连杆与连杆之间的关节连接键。由于不需要定位，只需要固定转轴，我们只需要一枚塞打  $6 \times 20 \times M5$  的螺钉、M5 的螺母以及垫片即可。其中有一些连接键可能需要设计足尖结构。

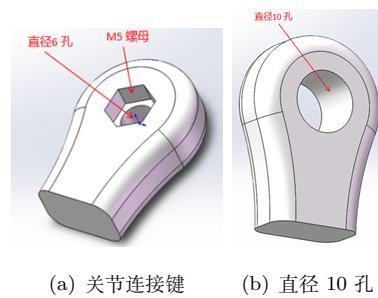


图 4: 腿部关节连接键

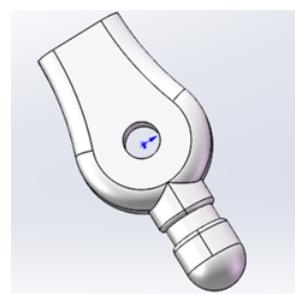


图 5: 带足尖的腿部关节连接键

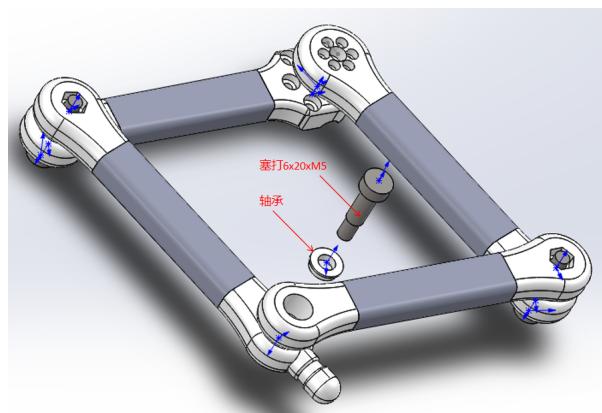


图 6: 关节装配图

注意，装配的时候连接键之间不能直接挨紧，而要留出两毫米的间距来放置垫片、预留加工误差等。

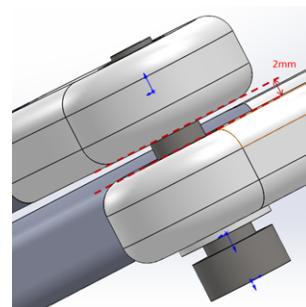


图 7: 预留间隙

### 2.1.2 平行四边形连杆机构

平行四边形机构是一种五连杆机构，为了适应该型号机器人髋部电机布局而将第五根连杆的长度设置为 0。在这里，我们让除第五根连杆以外的其余连杆长度均为 100mm，得到的机器人腿部连杆结构就是一个边长相等的平行四边形。

在设计和装配中，由于连杆均为直连杆，相邻两根连杆不能在同一水平面上，而要错开一个厚度，才可以最大程度降低关节限位的影响，同时确保腿部连杆结构简洁。而电机输出轴的内外结构先让 1 号和 4 号连杆错开了一个厚度，只需要 1 号和 2 号，4 号和 3 号连杆往同一个方向（内侧）装配，2 号连杆和 3 号连杆也可以保持错开一个厚度能够顺利装配起来。值得注意的是，除了一些我们无需达到的奇异位型，这一套连杆几乎没有关节限位。

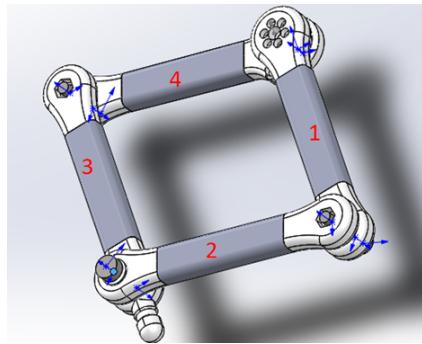


图 8: 平行四边形腿部装配结构及连杆标号



图 9: 平行四边形连杆机构整机

### 2.1.3 30 度 Bennett 连杆机构

这款连杆和我们现有模型的腿部结构类似，但不同的地方是我们每根连杆所连接的两个转轴所成锐角角度为 30 度（图中 Twist angle = 150°），而原模型则是 45 度。同时，为了使每个转轴上的连接键配合良好，我们选择先确定所有连杆关节连接键的装配关系，再按照装配关系补出连杆结构。在确定装配关系时，应保持每一个关节的上下两个连接键的中间位置是我们理论模型中两根相邻连杆连接到转轴的点。在 Solidworks 里面我们可以先在两个基准面内绘制出连杆截面草图，再通过放样绘制出连杆主体部分，再构建装配体与连接键装配构成一根完整的连杆。要注意我们的连杆长度

每根都是 100mm。

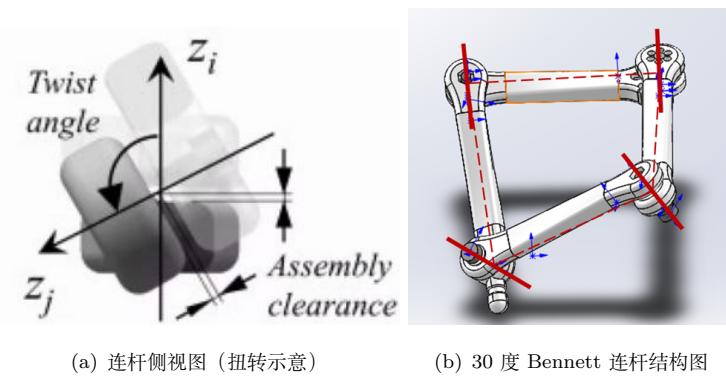


图 10: Bennett 连杆结构

例如图 10 就展示了 4 号连杆是如何在 Solidworks 中被画出来的。

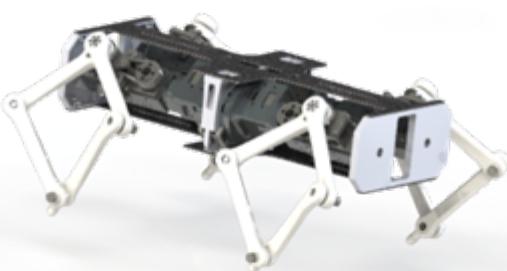
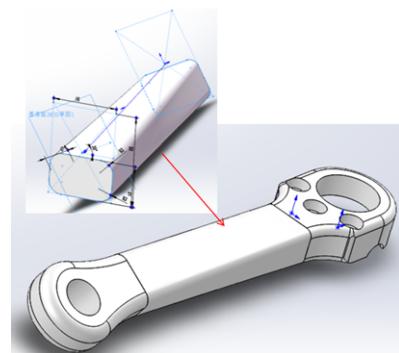


图 12: 30 度 Bennett 连杆机构整机

## 2.2 串联连杆机构

### 2.2.1 连接键设计

串联机构采用与并联机构相同的舵机输出轴连接键，100mm 直连杆，部分腿部关节连接键。重新设计了用于四杆机构的腿部关节连接键与足尖。

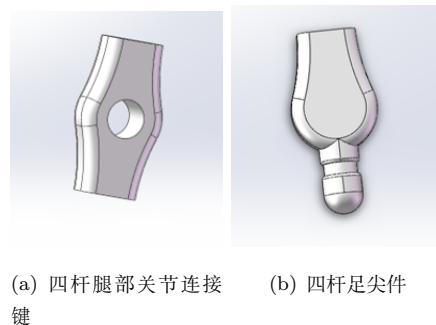


图 13: 腿部关节连接键与足尖

### 2.2.2 整体机构设计

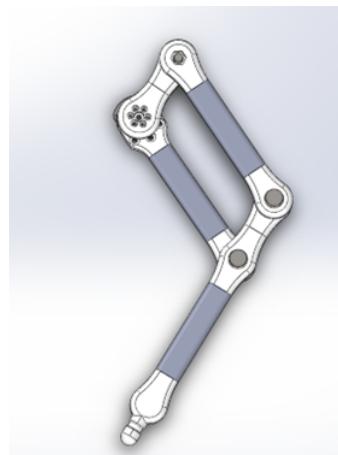


图 14: 串联腿部机构

串联腿部具有两个自由度，使用三舵机单元结构，两个控制腿部的电机输出轴重合，通过法兰与 1、2 连杆固定。与 1 号连杆相连的电机控制大腿位姿，与 2 号连杆相连的电机通过平行四杆机构控制小腿（连杆 4）的位姿。由于采用平行四杆机构，连杆 1 与连杆 3、连杆 2 与连杆 5 的长度相等，且连杆 4、连杆 5 采用刚性连接，舵机对连杆 2 的输出角度直接等效于对连杆 4 的输出角度。

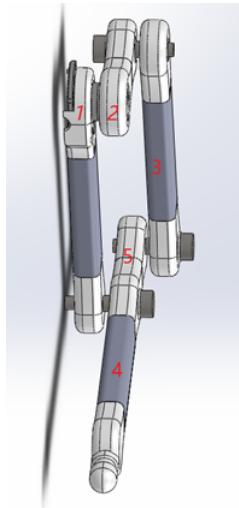


图 15: 串联腿部机构侧面

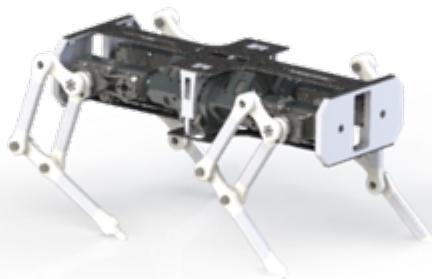


图 16: 串联机构整机

### 3 四足运动学的建模

#### 3.1 并联机构运动学建模

##### 3.1.1 平行四边形连杆机构

腿式机器人的成功广泛采用平面四杆机构及其变体，其中电机的同轴排列成为工程设计的主要选择，在紧凑的外形因素下具有可靠的性能 (Arm et al., 2019; Kenneally et al., 2016; Kau et al., 2019)。同轴电机范围一般有两种配置。一种是分离的电机布置，两个独立的驱动器都安装在机器人底盘上，输出法兰彼此相对地布置，如 Ghost robotics Minitaur(Kenneally et al., 2016) and ETH's SpaceBok (Arm et al., 2019)。另一种设计是使用皮带传动将两个驱动器重新定位在同一侧，以实现紧凑的设计 (Kau et al., 2019; Feng et al., 2021)。还有一种结构是耦合电机布置，实现耦合驱动，其中一个驱动器安装在固定在机器人上的另一个驱动器的法兰上底盘，如 MIT Cheetah3 (Bledt

et al., 2018)。这是一个流行的设计，有很大的改进的形式因素，但需要耦合驱动。

考虑到过约束机构与平面机构之间的运动学相似性，我们建议使用类似的同轴电机装置来驱动过约束机构作为机器人四肢的机构。下图所示为设计对比回顾，以解耦电机布置为例，演示不同的连杆附件。在这种情况下，立即连接到固定轴的两个连杆都是独立的驱动连杆，可以连接两个独立的电机进行旋转输入。对于平面四连杆机构，这种同轴电机解耦机构可以在运动学上解释为具有零长度地连杆的五连杆平面机构。然而，当涉及到过约束机构时，这种构型的运动学解释应该概括为具有旋转底座或具有固定轴的四杆机构（见图 1）。因为当将过约束机构扩展到 5R 和 6R 情况时，它们仍然是一自由度机构，与它们的平面机构不同。

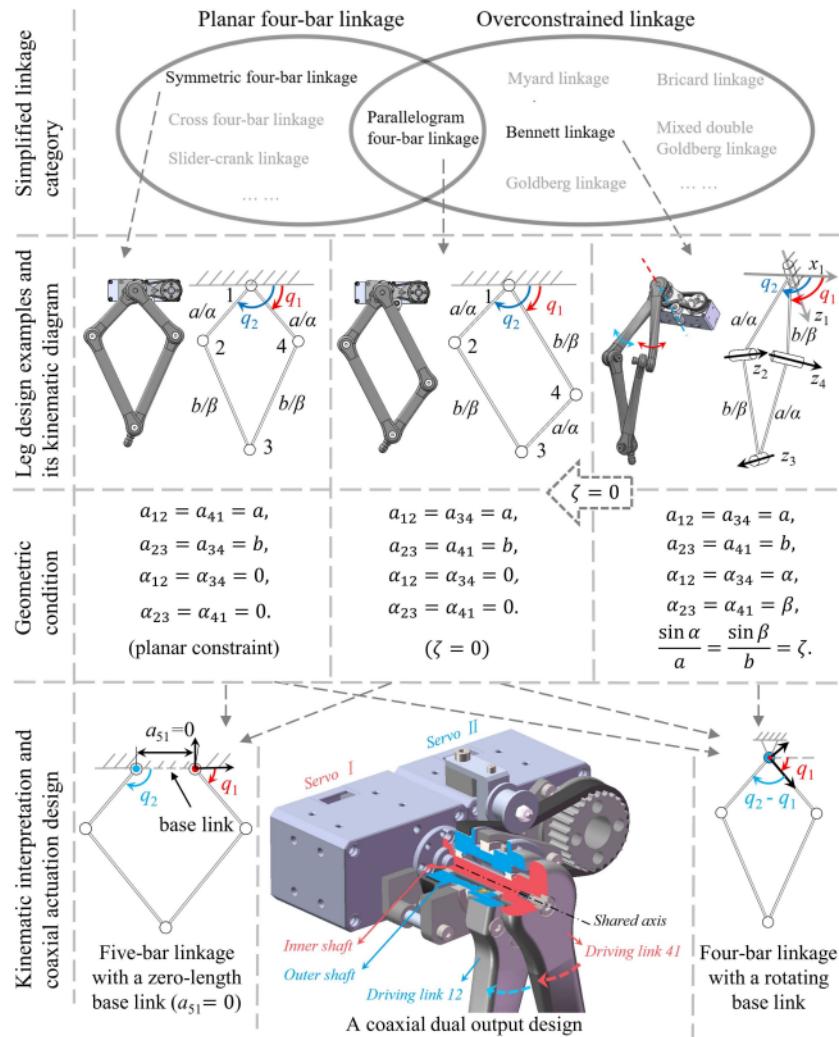


图 17：同轴布置致动器的机械腿机构综述。请注意，平面四杆机构设计在运动学上等同于平面五杆机构用零长度的基链接。本文提出的空间四杆腿设计采用另一种解释是将同轴排列视为四杆连杆旋转底座。

我们首先考虑平面结构，分别对本文设计的四足机器人的平面腿进行了正运动学分析和逆运动学分析。

通过对平行腿机构建模，建立以两髋关节所在直线为 x 轴，以两髋关节中点为原点的笛卡尔基坐标系，得到关节坐标示意图如图 6 所示。其中，关节 A, B, C, D 的定义与图 2 相同，构成一个五杆机构。定义 AE、AB、DE、BC、CD 的长度为  $l, l_1, l_2, l_3, l_4$ 。每个连杆与 x 轴的夹角记为

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ (范围从 0 到 180 度), 如图 2 所示。脚端点 C 的坐标表示为。

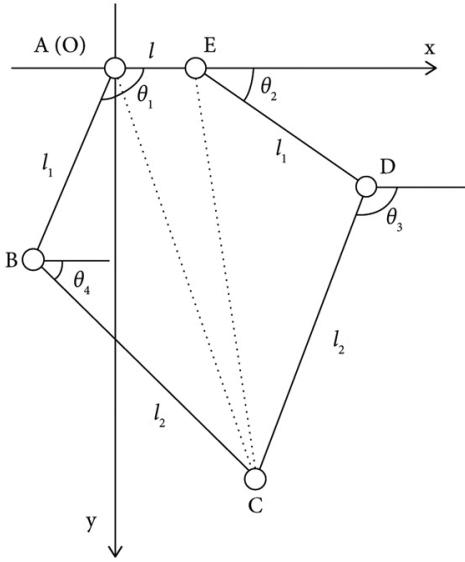


图 18: 平面腿的结构简图

首先, 采用矩阵法进行运动学分析。分别计算  $x$  和  $y$  方向上的投影长度, 我们可以得到方程组为

$$\begin{cases} l + l_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \theta_3 = l_2 \cos \theta_4 + l_1 \cos \theta_1 \\ l_1 \sin \theta_2 + l_2 \sin \theta_3 = l_2 \sin \theta_4 + l_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

根据表 1, 我们已经知道了  $l, l_1$  和  $l_2$  的确切值。另外,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  角为活动关节, 因此未知变量为  $\theta_3$  和  $\theta_4$ 。通过将未知变量放在等号的左边, 上式变成

$$\begin{cases} l_2 \cos \theta_3 - l_2 \cos \theta_4 = l_1 \cos \theta_1 - l_1 \cos \theta_2 - l, \\ l_2 \sin \theta_3 - l_2 \sin \theta_4 = l_1 \sin \theta_1 - l_1 \sin \theta_2. \end{cases}.$$

通过计算机软件, 如 MATLAB 求解, 我们可以计算关节  $\theta_3$  和  $\theta_4$  的值。因此, 脚端点 C 的坐标可解为

$$x : l + l_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \theta_3 \text{ or } l_2 \cos \theta_4 + l_1 \cos \theta_1,$$

$$y : l_1 \sin \theta_2 + l_2 \sin \theta_3 \text{ or } l_2 \sin \theta_4 + l_1 \sin \theta_1.$$

计算其对时间的一阶导数可得到关节角速度的关系为

$$l_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & \sin \theta_4 \\ \cos \theta_3 & -\cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = l_1 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix},$$

其中符号  $\omega_1 \sim \omega_4$  表示  $\theta_1 \sim \theta_4$  的角速度。根据速度函数, 可以进一步推导出加速度函数为

$$\begin{aligned} l_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & \sin \theta_4 \\ \cos \theta_3 & -\cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} &= -l_2 \begin{bmatrix} -\omega_3 \cos \theta_3 & \omega_4 \cos \theta_4 \\ -\omega_3 \sin \theta_3 & \omega_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} \\ &\quad + l_1 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 & \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 & -\cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + l_1 \begin{bmatrix} -\omega_1 \cos \theta_1 & \omega_2 \cos \theta_2 \\ -\omega_1 \sin \theta_1 & \omega_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中符号  $\alpha_1 \sim \alpha_4$  是  $\theta_1 \sim \theta_4$  的角加速度。因此，通过求解上式函数，我们可以得到角速度  $\omega_3 \omega_4$  和角加速度  $\alpha_3 \alpha_4$

然后，对其进行了运动学逆分析。所谓逆运动学，就是在了解足端相对于腿底坐标系的坐标的基础上，求出各个执行机构的旋转角度。利用运动学逆算法，可以确定脚端位置与执行机构角度之间的映射关系，从而达到脚端位置控制的目的。本节对本文设计的新型并联腿机构进行了运动学逆分析，得到了适用于我们的四足机器人的腿逆运动学算法。根据代数方法，各关节角度求解如下：

$$l_{AC} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$l_{EC} = \sqrt{(x - l)^2 + y^2}.$$

那么根据余弦定理，我们可以推断出  $AE$ ,  $EA$ ,  $AC$ ,  $ED$  的值，即：

$$\angle CAE = \cos^{-1} \frac{l^2 + l_{AC}^2 - l_{EC}^2}{4l_{AC}l},$$

$$\angle CEA = \cos^{-1} \frac{l^2 + l_{EC}^2 - l_{AC}^2}{4l_{EC}l},$$

$$\angle BAC = \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_{AC}^2 - l_2^2}{2l_1l_{AC}},$$

$$\angle CED = \cos^{-1} \frac{l_1^2 + l_{EC}^2 - l_2^2}{2l_1l_{EC}}.$$

最后，通过组合前式，我们可以得到  $\theta_1$  和  $\theta_2$  为：

$$\theta_1 = \angle CAE + \angle BAC,$$

$$\theta_2 = \pi - \angle CEA - \angle CED.$$

以上为本文设计的新型并联腿机构的逆运动学算法。

但是我们对此平面做出了简化， $AE(OE)$  实际上等于 0，AB 和 DE 它们为同轴的两根连杆，此时  $AC = CE$ ，我们的计算结果可以得到较大的化简，这在后面的仿真分析中可以简化相应的代码和计算的复杂度。

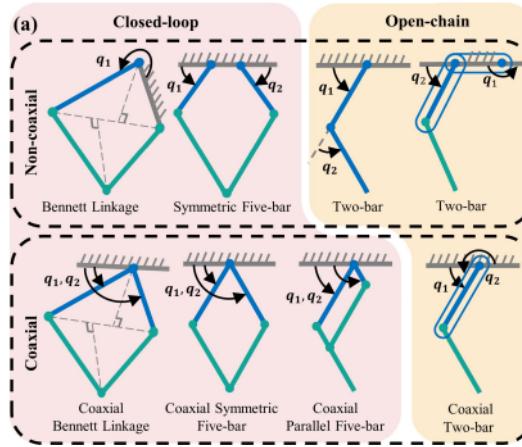


图 19：结构简图

### 3.1.2 Bennett 连杆机构

Bennett 结构 [1] 的几何定义由下式表示， $a_{ij}$  表示  $ij$  的关节长度， $\alpha_{ij}$  表示连杆  $ij$  的扭环， $R_i$  表示关节  $i$  的偏移量。

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= a_{34} = a, a_{23} = a_{41} = b \\
 \alpha_{12} &= \alpha_{34} = \alpha, \alpha_{23} = \alpha_{41} = \beta \\
 \frac{\sin \alpha}{a} &= \frac{\sin \beta}{b} \\
 R_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \tag{1}$$

以  $\theta_i$  为关节  $i$  的转动变量 [2], 得到 Bennett 连杆区域的显式闭包方程。可见, 当关节轴平行时, Bennett 机构就变成平面四杆机构。

$$\begin{aligned}
 \theta_1 + \theta_3 &= 2\pi \\
 \theta_2 + \theta_4 &= 2\pi \\
 \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} &= \frac{\sin \frac{\beta+\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta-\alpha}{2}} = K
 \end{aligned} \tag{2}$$

典型的机构运动学分析假设一个固定在地面上的基础连杆, 并附加一个参考系。例如, 许多现代机器人腿采用五连杆机构, 其底座连杆固定在机器人本体上, 具有两个自由度。基座连杆的两个关节轴上可附加两个执行器, 以充分控制腿部运动。为了实现紧凑的外形因素, 通常将五连杆机构的基连杆长度减少到零, 从而使两个执行机构同轴布置。从另一个角度看, 这种方法可以看作是一种旋转底座连杆方法, 即将参考架附加到平面四杆机构的固定关节轴上, 然后在两个相邻连杆上添加两个执行机构。

我们可以将相同的方法应用于同轴布置的 Bennett 连杆机构, 使其成为腿机构。通过检查 Eq.(2) 中的闭合方程, 很明显合成腿将在仅由两个执行器驱动的 3D 空间中表现出耦合的空间轨迹, 这与使用平面机构作为机械腿的 2D 轨迹不同。值得注意的是, 人们还可以方便地用其他过约束连杆代替 Bennett 连杆, 以实现具有耦合空间运动的新型腿设计。

为了便于从过约束连杆到机械腿的运动学分析, 可以将同轴驱动 Bennett 连杆等效为具有耦合运动的串行两自由度连杆, 如图 2 所示。在图 2(a) 中,  $a$  和  $b$  分别为连杆 12 和 23 的长度,  $\alpha$  和  $\beta$  分别为连杆 12 和 23 的扭角。 $\sigma$  为外展角, 在三自由度腿部设计中, 外展角一般由髋关节驱动。

在我们的设计中,  $\sigma$  是一个常数, 用于调整尖端的地面接触姿态。因此, 我们可以用指数乘积公式写出从基架  $\omega$  到脚架 3 的两杆机构的齐次变换矩阵作为:

$${}_3^w T = e^{[S_1]\varphi_1} e^{[S_2]\varphi_2} M \tag{3}$$

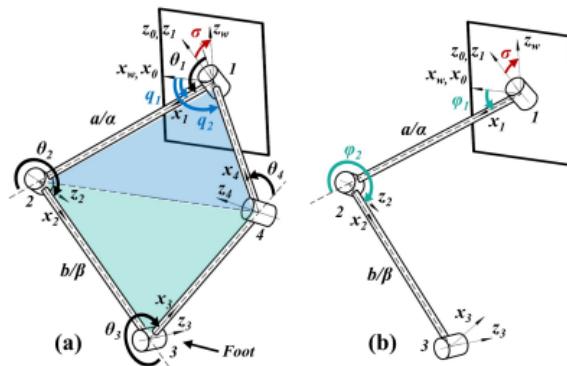


图 20: 过约束机构的运动学图 Bennet 的腿。(a) 同轴 Bennett 连杆。红色箭头代表髋关节俯仰角。  
蓝色箭头描述驱动器角度 ( $q_1 q_2$ )(b) 串联两连杆机构。绿色箭头表示关节角 ( $\varphi_1 \varphi_2$ )。

其中  $S_1$  和  $S_2$  为螺杆轴,  $M$  为所有关节角均为零时框架 3 的位置和方向。当表示为  $\omega$  时, 我们可以写:

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s\sigma \\ c\sigma \end{bmatrix}, \mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -ac(\alpha - \sigma) \\ -as(\alpha - \sigma) \\ 0 \\ -s(\alpha - \sigma) \\ c(\alpha - \sigma) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(\alpha + \beta - \sigma) & -s(\alpha + \beta - \sigma) & 0 \\ 0 & s(\alpha + \beta - \sigma) & c(\alpha + \beta - \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

相对应的, 其中  $s\sigma$  和  $c\sigma$  分别表示  $\sin\sigma$  和  $\cos\sigma$ 。

由(23), 执行器角  $(q_1, q_2)$  与两杆机构模型关节角  $(\varphi_1, \varphi_2)$  的变换如下:

$$\varphi_1 = q_1 \quad (6)$$

$$\varphi_2 = \arctan \left( K \tan \left( \frac{q_2 - q_1}{2} \right) \right) \quad (7)$$

其中  $K = \frac{\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}$  是一个基于(23)的常数。(6)和(7)的微分可以表示为

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -H & H \end{bmatrix} \dot{q} \quad (8)$$

其中  $H = [K \sec^2(\frac{q_2 - q_1}{2})] / [1 + K^2 \tan^2(\frac{q_2 - q_1}{2})]$ 。因此, 执行器速率向量  $\dot{q} \in \mathbb{R}^2$  与空间扭曲  $\mathcal{V}_s$  之间的雅可比矩阵  $J_s(q) \in \mathbb{R}^{6 \times 2}$  的映射可计算为

$$\mathcal{V}_s = J_s(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} J_{s1} - HJ_{s2} & HJ_{s2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中  $J_{s1} = \mathcal{S}_1, J_{s2} = \left[ Ad_{e^{[\mathcal{S}_1]\varphi_1}} \right] \mathcal{S}_2$ 。 $[ad_t]$  表示基于齐次变换矩阵的伴随矩阵。

与双杆串联机构类似, 当连杆轴共线 ( $q_2 - q_1 = 0/\pi$ ) 时, Bennett 连杆机构也具有边界奇点。然而, 过约束机构很难像平面机构那样实现全周期旋转。因此, 通过连杆的机械设计实际上可以避免奇点。

## 3.2 串联机构建模

### 3.2.1 机器人正运动学

串联四足机器人可以简单的看成是由机体和四条腿构成的, 每条腿都是由侧摆、大腿和小腿三部分组成, 每条步行腿均可以看成是一个串联的开式运动链, 机体与侧摆 (侧摆关节)、侧摆与大腿 (髓关节)、大腿与小腿 (膝关节) 之间是由三个转动关节来联接, 每个关节都有一个自由度, 各个关节、连杆通过转动副串联在一起。结构简图如图所示:

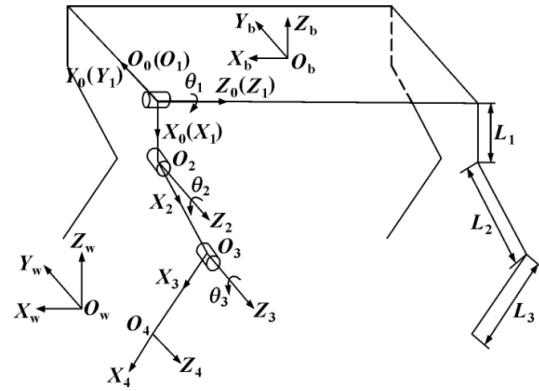
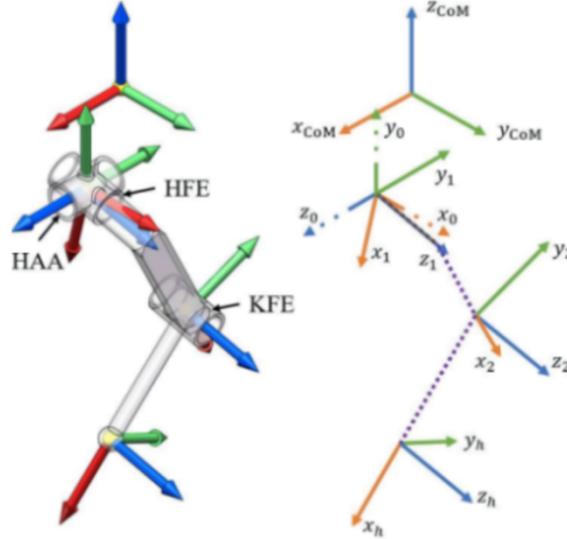


图 21: 结构简图

机器人的腿部结构组成上面已经分析而腿机构正运动学是四足机器人的误差分析、受力分析以及步态规划的重要基础和前提。我们将建立机器人腿部各个关节的 D-H 坐标系，机器人之间各关节坐标系之间的几何关系，有了 D-H 参数表就可以在机构各关节之间实现坐标转换：

Link	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	180°	0	$\theta_1$
2	$l_1$	90°	0	$\theta_2$
3	$l_2$	0	0	$\theta_3$
4	$l_3$	-90°	0	0



把表中对应的各个参数值带入到齐次变换矩阵中即可获得坐标转换矩阵：

$$H_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} H_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

所以:

$$\begin{aligned} H_2^0 &= H_1^0 H_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 & l_1 c_1 \\ -s_1 c_2 & s_1 s_2 & c_1 & -l_1 s_1 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ H_3^1 &= H_2^1 H_3^2 = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & l_2 c_2 + l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ H_3^0 &= H_1^0 H_2^1 H_3^2 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & l_2 c_1 c_2 + l_1 c_1 \\ -s_1 c_{23} & s_1 s_{23} & c_1 & -l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10) \\ H_4^1 &= H_3^1 H_4^3 = \begin{bmatrix} c_{23} & 0 & -s_{23} & l_3 c_{23} + l_2 c_2 + l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ H_4^0 &= H_3^0 H_4^3 = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -s_1 & -c_1 s_{23} & l_3 c_1 c_{23} + l_2 c_1 c_2 + l_1 c_1 \\ -s_1 c_{23} & -c_1 & s_1 c_{23} & -l_3 s_1 c_{23} - l_2 s_1 c_2 - l_1 c_1 \\ -s_{23} & 0 & -c_{23} & -l_3 s_{23} - l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中:

$$c_1 = \cos \theta_1, s_1 = \sin \theta_1, c_{23} = \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$s_{23} = \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \sin \theta_3$$

### 3.2.2 机器人逆运动学

该机器人腿部的运动学方程为:

$$H_4^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_1^0 H_2^1 H_3^2 H_4^3$$

在方程两边同时左乘  $H_1^{0-1}$ , 可以得到:

$$(H_1^0)^{-1} H_4^0 = (H_1^0)^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_2^1 H_3^2 H_4^3 = H_4^1$$

已知:

$$(T_B^A) = \begin{bmatrix} R_B^A & \vdots & P_B^A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (T_B^A)^{-1} = T_A^B = \begin{bmatrix} (R_B^A)^T & \vdots & -(R_B^A)^T P_{B0}^A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

其中:

$R_B^A$  是坐标系 B 到坐标系 A 的旋转矩阵;

$P_{(B0)}^A$  是坐标系 B 的原点  $O$  在坐标系 A 中的坐标;

所以把变换矩阵代入上式可以得到:

$$\begin{aligned} (H_1^0)^{-1} &= H_0^1 = \begin{bmatrix} (R_1^0)^T & \vdots & -(R_1^0)^T P_{10}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (H_1^0)^{-1} H_4^0 &= \begin{bmatrix} c_1 n_x - s_1 n_y & c_1 o_x - s_1 o_y & c_1 a_x - s_1 a_y & c_1 p_x - s_1 p_y \\ -s_1 n_x - c_1 n_y & -s_1 o_x - c_1 o_y & -s_1 a_x - c_1 a_y & -s_1 p_x - c_1 p_y \\ -n_z & -o_z & -a_z & -p_z \end{bmatrix} \\ &= H_4^1 = \begin{bmatrix} c_{23} & 0 & -s_{23} & l_3 c_{23} + l_2 c_2 + l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_3 s_{23} + l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

(1) 求  $\theta_1$  (本文中所有  $\text{atan} 2(y, x) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \in [-\pi, \pi]$ ) 取矩阵中的 (2, 4) 元素 (即第二行、第四列元素, 下同), 可得:

$$-s_1 p_x - c_1 p_y = 0$$

利用三角变换, 设  $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ ,  $\phi = \text{atan} 2(p_x, p_y)$ , 可得:

$$\begin{cases} p_x = \rho \cos \phi \\ p_y = \rho \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \text{atan} 2(0, \pm 1) - \text{atan} 2(p_y, p_x)$$

式中正负号代表可能存在两个解。

(2) 求  $\theta_3$  取矩阵中的 (1, 4) 元素和 (3, 4) 元素, 可得方程组:

$$\begin{cases} c_1 p_x - s_1 p_y = l_3 c_{23} + l_2 c_2 + l_1 \\ -p_z = l_3 s_{23} + l_2 s_2 \end{cases}$$

又因为

$$\begin{cases} (s_1 p_x + c_1 p_y)^2 + (c_1 p_x - s_1 p_y)^2 = p_x^2 + p_y^2 \\ s_1 p_x + c_1 p_y = 0 \end{cases}$$

令  $r = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ , 方程可简化为:

$$\begin{cases} (\pm r - l_1)^2 = l_3^2 c_{23}^2 + 2l_2 l_3 c_2 c_{23} + l_2^2 c_2^2 \\ p_z^2 = l_3^2 s_{23}^2 + 2l_2 l_3 s_2 s_{23} + l_2^2 s_2^2 \\ \Rightarrow (\pm r - l_1)^2 + p_z^2 = l_3^2 + 2l_2 l_3 c_3 + l_3^2 \end{cases} \quad (12)$$

所以解出:

$$c_3 = \frac{(\pm r - l_1)^2 + p_z^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_2 l_3}$$

令

$$s = \frac{(\pm r - l_1)^2 + p_z^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_2 l_3} \Rightarrow \theta_3 = \text{atan} 2(\pm \sqrt{1 - s^2}, s)$$

(3) 求  $\theta_2$  将矩阵中的 (1, 4) 元素和 (3, 4) 元素组成的方程组变形:

$$\begin{cases} r - l_1 - l_2 c_2 = l_3 c_{23} \\ -p_z - l_2 s_2 = l_3 c_{23} \end{cases}$$

左右两边平方相加, 整理可得:

$$(r - l_1) c_2 - p_z s_2 = \frac{(r - l_1)^2 + p_z^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2}$$

令  $k = (r - l_1), \rho = \sqrt{k^2 + p_z^2}, \Phi = \text{atan} 2(p_z, k)$ , 利用三角变换设:

$$\begin{cases} k = \rho \cos \phi \\ p_z = \rho \sin \phi \\ \Rightarrow \cos(\phi + \theta_2) = \frac{(r - l_1)^2 + p_z^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2 \rho} \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} t &= \frac{(r - l_1)^2 + p_z^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2 \rho} \\ \Rightarrow \theta_2 &= \text{atan} 2(\pm \sqrt{1 - t^2}, t) - \text{atan} 2(p_z, k) \end{aligned}$$

综合上述三段计算步骤, 机器人单腿的逆运动学分析已经完成, 现将计算结果整理如下:

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{atan} 2(0, \pm 1) - \text{atan} 2(p_y, p_x) \\ \theta_2 = \text{atan} 2(\pm \sqrt{1 - t^2}, t) - \text{atan} 2(p_z, k) \\ \theta_3 = \text{atan} 2(\pm \sqrt{1 - s^2}, s) \\ t = \frac{(r - l_1)^2 + p_z^2 + l_2^2 - l_3^2}{2l_2 \rho}, \quad \rho = \sqrt{k^2 + p_z^2} \\ s = \frac{(\pm r - l_1)^2 + p_z^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_2 l_3}, \quad k = (r - l_1) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} - l_1 \end{cases}$$

## 4 四足机器人运动控制

### 4.1 足尖轨迹规划

四足机器人在行走时, 每一足的足尖均将执行一个指定的步态循环。其分为两部分: 保持与地面接触, 由 B 点移动至 A 点; 离开地面, 由 A 点返回 B 点。其中, 我们希望在第一部分时足尖移动保持平缓, 而第二部分足尖尽量快地离开地面。因此我们使用了下面列出的步态循环。

下图为四足机器人：

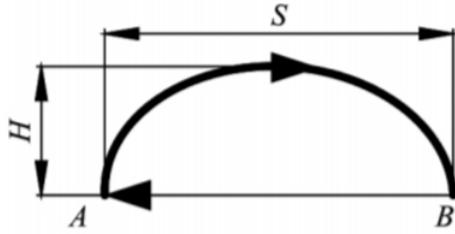


图 22: 步态

$P_c(x_c, y_c, z_c)$  当前坐标;  $P_s(x_s, y_s, z_s)$  起始坐标;  $P_e(x_e, y_e, z_e)$  终点坐标;  $S_c$  当前时间;  $S_t$  曲线总时间。

抬腿曲线：

$$\begin{aligned}\sigma &= 2 * \pi * S_c / S_t \\ x_c &= (x_e - x_s) * (\sigma - \sin(\sigma)) / (2 * \pi) + x_s \\ y_c &= (y_e - y_s) * (\sigma - \sin(\sigma)) / (2 * \pi) + y_s \\ -h * (1 - \cos(\sigma)) / (2 * \pi) + z_s\end{aligned}$$

行走曲线：

$$P_c = (P_e - P_s) * S_c / S_t + P_s$$

该步态循环的 B→A 行走曲线采用线性差值的方式，使该过程保持匀速。A→B 抬腿部分采用三角函数，使足尖在起始与末端竖直抬起与放下，并在其中间平缓运动。

## 4.2 基础步态

步态规划是四足动物机器人研究的重要组成部分。四足动物机器人的步态一般分为静态步态和动态步态。任何时候至少有两条腿的步态称为静态步态，少于两条腿的步态称为动态步态。我们这次项目既实现了静态的“walk”步态，又实现了动态的“trot”步态。

### 4.2.1 Walk 步态

Walk 步态是一种静态步态，即在运动过程中始终有三条腿处于支撑相，至多只有一条腿处于摆动相，四足动物在 walk 步态中四条腿最常见的轮换顺序为 1→3→4→2→1。

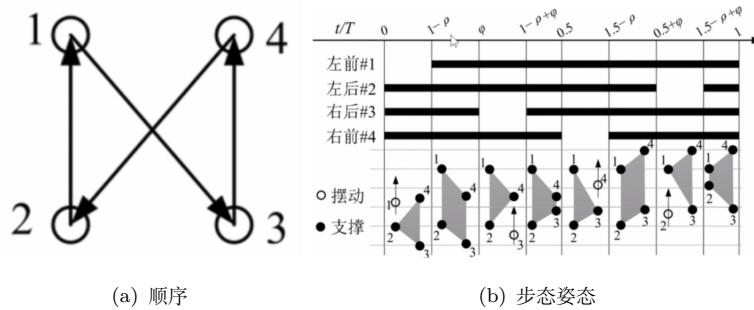


图 23: Walk 步态

walk 步态的一种临界形态是  $\rho = 0.75$  且  $\phi = 0.25$  即不存在明显的四足支撑相，任意时刻均只有三条腿处于支撑相。这种 walk 步态是静态步态中速度最快的步态（理论上  $\rho$  越小，能够实现的速度越快），因此四足机器人的 walk 步态经常按照这种临界形式进行规划 [3]。在此项目中，我们的机器人 walk 步态就是按照这种配置来规划的。

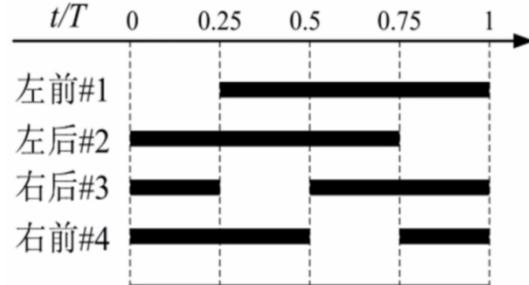


图 24:  $\rho = 0.75$  且  $\phi = 0.25$  时 walk 步态

#### 4.2.2 Trot 步态

Trot 是一种动态步态。它适用于中低速跑动，并具有比较大的运动速度范围。此外，在中等速度下的 Trot 步态具有最高的能量效率。这些优点使得 Trot 步态成为最常用的四足步态。

Trot 步态的特征是对角的两条腿成对运动，即腿 1 和腿 3 运动一致，腿 2 和腿 4 运动一致，理想情况下对角腿同时抬起并同时着地。Trot 步态同样具有左右对称性，各腿的相位差为： $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = 0.5$ ,  $\phi_3 = 0$ ,  $\phi_4 = 0.5$ 。 $1 - \rho$  为处于摆动相的时间，但是  $1 - \rho$  一定要小于  $\phi$ ，因为只有这样，Trot 步态才成立 [3]。

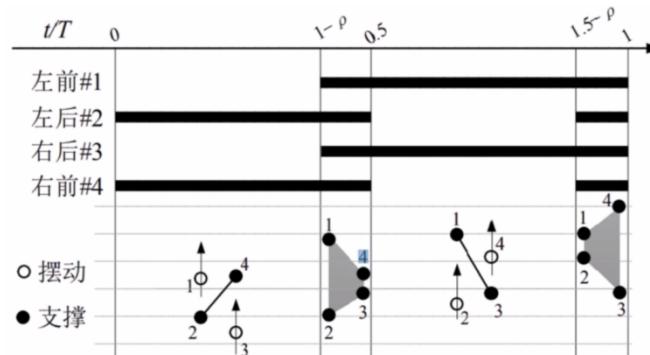
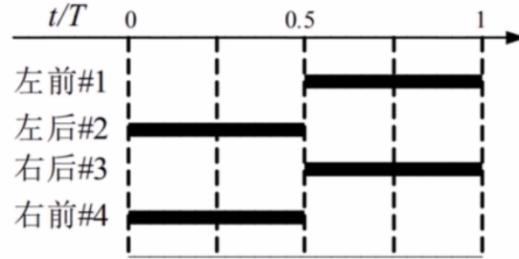


图 25: Trot 步态

当  $\rho = 0.5$  时，同 walk 步态出现不存在明显四足支撑相的情况。我们的项目中用的也是这种配置。

图 26:  $\rho = 0.5$  时 trot 步态

### 4.3 基于 Trot 步伐的半径转弯设计

半径转弯过程，即机体中心在一个指定的曲率圆上按照一定的速度移动的过程。在该移动过程中，机体前进方向与曲率圆保持垂直。该设定使得机体的四条腿分为两组分别沿着两个圆行动：靠近圆心一侧的两条腿在较小的圆上移动，远离圆心的一侧的两条腿在较大的圆上移动。此处设计一种基于 trot 步伐的单步半径转弯步伐。其分为两小步：伸腿平移与收齐并拢。

$$R_{0.5} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & -\sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设左前、左后、右前、右后脚坐标为  $A_0, B_0, C_0, D_0$  转换后在  $O_0$  坐标系下的坐标为  $A_1, B_1, C_1, D_1$  则有：

$$\begin{aligned} A_1 &= R_{0.5}(-1) * A_0 \\ B_1 &= R_{0.5}(-1) * B_0 \\ C_1 &= R_{0.5}(-1) * C_0 \\ D_1 &= R_{0.5}(-1) * D_0 \\ A_{(-1)} &= R_{0.5} * A_0 \\ B_{(-1)} &= R_{0.5} * B_0 \\ C_{(-1)} &= R_{0.5} * C_0 \\ D_{(-1)} &= R_{0.5} * D_0 \end{aligned}$$

注意到 Trot 步伐是相对的两条腿同时行动，故在第一小步时我们令左前、右后腿抬腿并移动至  $A_1 C_1$  点后落脚，为了完成移动，使左后、右前保持地面接触并移动至  $B_{(-1)} D_{(-1)}$  坐标。此时，机体转动经过  $\theta/2$ ，左前、右后腿已达到目标坐标，左后、右前腿保持在原坐标。第二小步时，左后、右前腿抬腿并移动至  $B_0 D_0$  点后落脚，左前、右后腿接触并移动至  $B_0 D_0$  坐标。此时，机体站立并完成单步半径转弯。

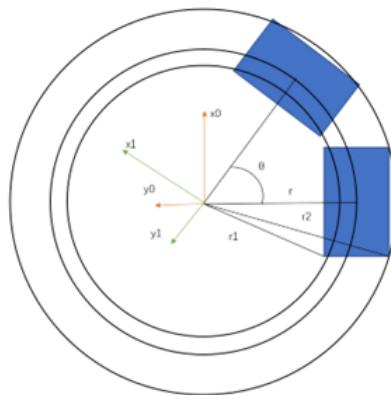


图 27: 半径转弯示意图

#### 4.4 基于 trot 步伐的原地转弯设计

原地转弯过程，即机体保持中心位置不变、绕中心位置转过  $\theta$  角的过程。该过程与半径转弯类似，除转弯半径为 0，四只脚均在同一圆上运动外，其余参数与运动过程均相同。

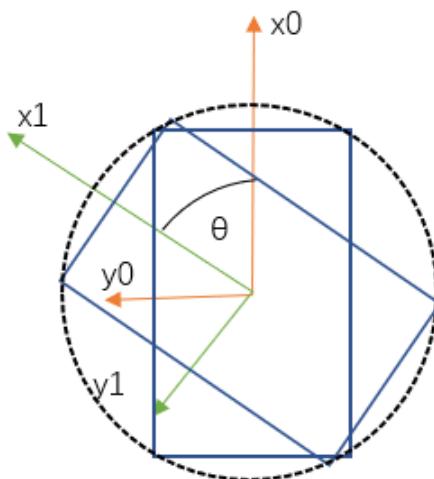


图 28: 原地转弯示意图

#### 4.5 平坦斜面平衡

当前实现方法：由正运动学结算得到各腿位置，计算得到腿末端平面的倾斜情况。由 IMU 得到机体当前倾斜情况。由这两个倾斜情况求出所需实际腿末端平面。

朴素的假设：当开始计算平衡的时候，机体处于一个理想的平面上，且四只脚末端均与地面接触。

在起始状态时，我们有以下已知信息：

左右腿距离  $h$ , 前后腿距离  $v$ .

由 IMU 得到：

Roll 角  $\alpha$ ;

Pitch 角  $\beta$ ;

脚末端坐标, 依左上左下右上右下次序命名为  $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3), D(x_4, y_4, z_4)$

运动目标为机体与地面平行, 且机体与地面距离为  $h$

故由当前 roll 角, pitch 角引起的机体偏差表现在脚上为:

$$K_h = \sin(\beta) * h / 2 \\ K_v = \sin(\alpha) * v / 2$$

由当前脚末端位置引起的机体偏差为:

$$P_v = (z_2 + z_4 - z_1 - z_3) / 4 \\ P_h = (z_1 + z_2 - z_3 - z_4) / 4$$

故计算得四脚末端目标坐标应为:

$$A'(x_1, y_1, h + P_h - P_v - K_h + K_v) \\ B'(x_2, y_2, h + P_h + P_v - K_h - K_v) \\ C'(x_3, y_3, h - P_h - P_v + K_h + K_v) \\ D'(x_4, y_4, h - P_h + P_v + K_v)$$

当四足末端处于  $A'B'C'D'$  时, 机器人将在倾斜平面上保持水平。

## 5 基于 Webots 的四足机器人运动学仿真

### 5.1 并联机构 webots 模型构建

由于原模型零件过于复杂且存在并联机构, 不便于导入 webots, 我们使用 webots 重新创建了一个以并联机构作为腿部的四足机器人简化模型。机身由一个长宽高分别为 0.3m、0.1m、0.06m 的长方体代替, 髋关节电机带动的转轴由一个底面半径为 0.01m 高为 0.04m 的圆柱体代替, 其余的腿部连杆都由截面为边长 0.01m 的正方形的细杆构成, 长度保持原来的 100mm。每个舵机的标号、零位和正方向如图所示。

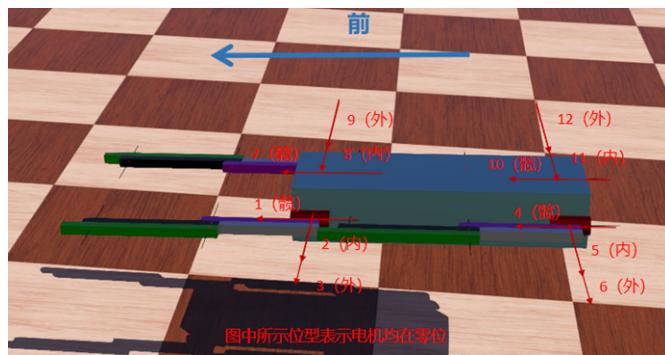


图 29: 并联连杆 webots 模型电机标号及正方向

### 5.2 串联机构 webots 模型构建

为了与并联机构四足机器人对比受力角度、运动范围、行进速度以及控制简便程度等问题, 我们在 webots 中还创建了一个以串联机构作为腿部的四足机器人简化模型。如图所示, 机身是一个长宽高分别为 0.3m、0.1m、0.06m 的长方体, 侧摆关节则是一个底面半径为 0.01m, 高为 0.04m 的圆柱体, 串联腿部连杆的长宽高则分别为 0.01m、0.01m 和 0.1m。

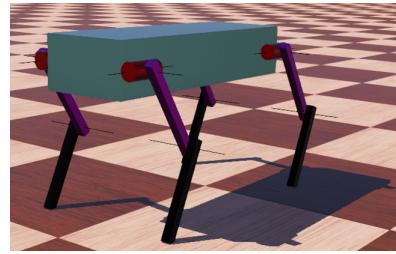


图 30: 串联连杆 webots 模型示意图

主流串联四足腿部机构主要有前膝后肘式、前肘后膝式、全膝式以及全肘式。全膝式在前进方向上最大移动距离较远，并且具有统一的关节形式，设计和控制上较为简单，因此我们采用全膝式布局。我们在 webots 仿真环境中设立的舵机标号、零位和正方向如图所示：



图 31: 串联连杆 webots 模型零位电机示意图

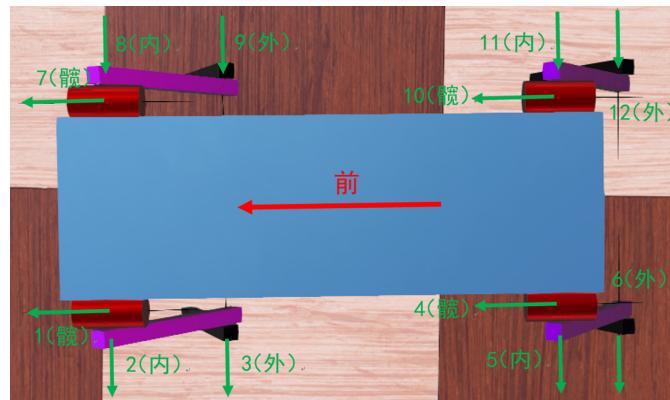


图 32: 串联连杆 webots 模型正方向

### 5.3 仿真情况简述

对于并联机构腿部的四足机器人，我们通过 webots 实现了平地行走、半径转弯、原地转弯和平坦斜面平衡这几项功能。

为了与并联机构的运动状态对比，我们在 webots 中对串联机构也进行了仿真，实现了除平衡外与并联机构相同的各项功能。具体实现情况可以观看我们的仿真结果视频。

## 6 探究结论

从仿真结果来看，两款机器人在 webots 中完成每种功能的情况相差都不是很大。在仿真软件中，我们电机所使用的控制方法均为简单的开环控制，因此不管是使用串联机构还是并联机构，机器人实际行走轨迹与理想情况之间有很大误差。

但是从现实的角度来分析，如果在实物中使用两种我们设计的两种腿部，考虑到关节限位，串联腿部足尖运动范围明显要小于使用并联机构的腿部，在实际控制中串联腿部远没有并联的灵活。此外，实际应用中，并联机构的腿部相比串联机构可以使机器人承载更大的重量。

## 7 小组成员工作及贡献比

李显涵 (21%): 并联机构连杆机械设计、并联机构 Webots 模型搭建、walk 及 trot 基础步态；  
赵瑞州 (20%): 项目调研及开源资料收集、并联机构正逆运动学建模、Latex 报告整合；  
刘宗尧 (22%): 单腿足尖轨迹规划、半径转弯、原地转弯、平坦斜面平衡；  
赵睿涵 (17%): 串联机构连杆机械设计、串联机构 Webots 模型搭建；  
苏兆文 (20%): 串联机构正逆运动学建模、串联机构机器人运动仿真拓展、仿真视频剪辑。

## 8 致谢

本研究内容“四足机器人腿部建模及控制”是 2022 秋季学期《机器人建模与控制》课程的课程项目。特别感谢贾振中老师对该项目的学术指导。我们在《机器人建模与控制》课程中学习到了机器人的正逆运动学、速度运动学、轨迹与路径规划、关节控制和动力学，获益匪浅。在课程中我们较为详细的了解了运动的数学建模和相关代码的编写，给四足项目的推进和完成带来了较大的帮助。感谢贾老师在这门课程中带给我们丰富的知识，这为我们后续更加深入地学习机器人领域的相关知识奠定了一定的基础。同时感谢宋超阳老师课题组的帮助，本项目为基于宋老师课题组“玲珑”系列过约束机器人做的改型。我们相信通过该课程的学习和本项目的历练，我们在未来的机器人领域学习中会取得更多的进展。

## 参考文献

- [1] G. T. Bennett, “A new mechanism,” Engineering., vol. 76, pp. 777–778, 1903.
- [2] C. Song and Y. Chen, “A spatial 6r linkage derived from subtractive goldberg 5r linkages,” Mechanism and machine theory, vol. 46, no. 8, pp. 1097–1106, 2011.
- [3] 童年吹梦. (2022). 四足机器人步态规划 (walk and trot) . 四足机器人控制与仿真入门. CSDN.  
引用于 2023-1-11, [https://blog.csdn.net/qq\\_46304090/article/details/126451270](https://blog.csdn.net/qq_46304090/article/details/126451270)