

# 上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY



课程：预测控制

学生姓名： 汪旭鸿

学生学号： 017032910027

专    业： 控制科学与工程

年    级： 直博一年级

# 多变量动态矩阵预测控制(DMC)

## 摘 要:

随着现代工业的发展, 工业现场对控制的要求越来越高, 但是许多复杂的工业生产过程精确的数学模型常常难以得到, 以往那些基于过程精确数学模型的传统控制方法已经无法适应目前的工业过程。传统的基于参数模型的控制方法, 在过程结构和参数辨识上耗费大量精力, 为克服理论与应用之间的不协调, 人们开始打破传统控制方法的约束, 寻找利用阶跃响应、脉冲响应这类非参数模型分析问题的方法, 预测控制正是在这种情况下产生的。本文建立了一个两入两出的系统, 给出了各个输出对应输入的阶跃响应。本文还编写了 DMC 方法, 并进行了参数整定, 试图使用 DMC 方法得到良好的控制曲线。

**关键词:** 多变量 预测控制 动态矩阵控制 阶跃响应

## 目录

1	引言.....	3
2	多变量 DMC 原理分析 .....	4
2.1	预测模型 .....	4
2.2	滚动优化 .....	6
2.3	反馈校正 .....	7
3	多变量 DMC 算法实现 .....	10
4	实验结果和参数整定 .....	11
4.1	系统建立 .....	11
4.2	参数选定 .....	12
4.3	控制结果 .....	13
5	总结 .....	14

# 1 引言

众所周知，上世纪 60 年代初形成的现代控制理论在航空、航天等领域取得了辉煌的成果。然而人们不久就发现在完美的理论与控制之间还存在着巨大的鸿沟。主要表现在以下几个方面：

1.现代控制理论的基点是对象精确的数学模型，而在工业过程中所涉及的对象往往是多输入、多输出的高维复杂系统其数学模型很难精确建立，即使建立了模型从工程应用的角度来说往往需要简化从而很难保证对象精确的模型。

2.工业对象的结构、参数和环境都有很大的不确定性。由于这些不确定性的存在按照理想模型得到的最优控制在实际上往往不能保证最优有时甚至引起控制品质的严重下降。在工业环境中人们更关注的是控制系统在不确定性影响下保持良好性能的能力，即所谓鲁棒性而不能只是追求理想的最优性。

3.工业控制中必须考虑到控制手段的经济性。对工业计算机的要求不能太高。因此控制算法必须简易以满足实时性的要求。而现代控制理论的许多算法往往过于复杂难以用低性能的计算机实现。

为了克服理论与实际应用之间的不协调，预测控制就是在这种背景下发展起来的。动态矩阵控制 DMC 是一种基于计算机控制的技术，它是一种增量算法，并基于系统的阶跃响应。它直接以对象的阶跃响应离散系数为模型，采用多步预估技术，能有效解决时延过程问题。按使预估输出与给定值偏差最小的二次性能指标实施控制。

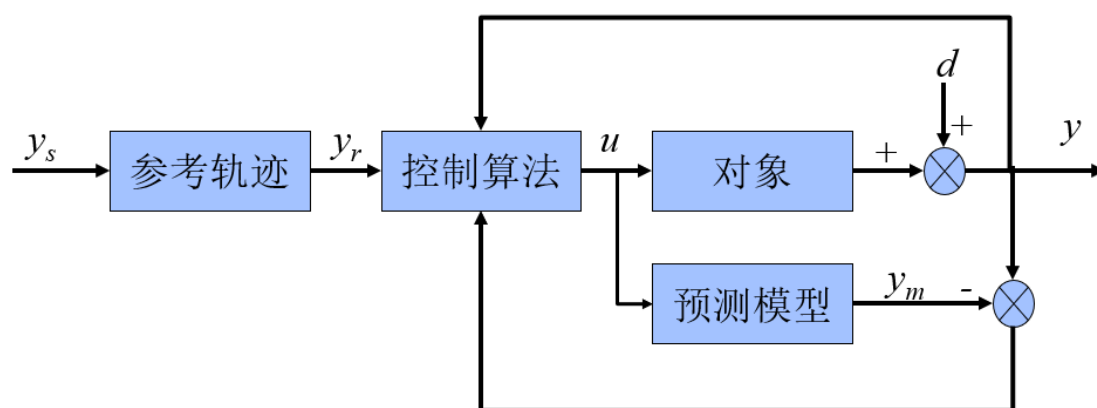


图 1 DMC 算法的控制结构

## 2 多变量 DMC 原理分析

DMC算法分为三部分:预测模型、滚动优化和反馈校正。

设被控对象有  $m$  个控制输入,  $p$  个输出, 假定已测得每一输出  $y_i$  对每一输入  $u_j$  的单位阶跃相应  $a_{ij}(t)$ , 则可由阶跃响应都在采样点上的值组成模型向量

$$\mathbf{a}_{ij} = [a_{ij}(1) \dots a_{ij}(N)]^T, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m$$

其中,  $N$ 称为模型时域长度, 为了方便计算和编程, 对不同的输入输出间的阶跃响应采用相同的模型时域长度  $N$ 。

对于渐进稳定的对象, 阶跃响应在某一  $t_N = NT$ , 后将趋于平稳, 以至  $a_i(i > N)$  与  $a_N$  的误差和量化误差及测量误差有相同的数量级, 因而可认为,  $a_N$  已近似等于阶跃响应的稳态值  $a_s = a(\infty)$ 。

这样, 对象的动态信息就可以近似用有限集合  $\mathbf{a}_{ij} = [a_{ij}(1) \dots a_{ij}(N)]^T$  加以描述, 向量  $\mathbf{a}_{ij}$  称为模型向量。这就是DMC的控制出发点, 通过对模型的阶跃响应的计算进行控制。

### 2.1 预测模型

虽然阶跃响应是一种非参数模型, 但由于线性系统具有比例和叠加性质, 故利用这组模型参数  $\{a_i\}$ , 已足以预测在任意输入作用下系统在未来时刻的输出值。在  $t=kT$  时刻, 假如控制量不再变化时系统在未来  $N$  个时刻的输出值为  $\tilde{y}_0(k+1|k), \tilde{y}_0(k+2|k), \dots, \tilde{y}_0(k+N|k)$ , 那么, 在控制增量  $\Delta u(k)$  作用后系统的输出可由

$$\tilde{y}_{N1}(k) = \tilde{y}_{N0}(k) + a\Delta u(k) \quad (2-1)$$

预测，其中  $\tilde{y}_{N0}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_0(k+N|k) \end{bmatrix}$  表示在  $t=kT$  时刻预测的尚无  $\Delta u(k)$  作用时未来

$N$  个时刻的系统输出。  $\tilde{y}_{N1}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_1(k+N|k) \end{bmatrix}$  表示在  $t=kT$  时刻预测的有控制增量

$\Delta u(k)$  作用时未来  $N$  个时刻的系统输出。  $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$  为阶跃响应模型向量，其元素

为描述系统动态特性的  $N$  个阶跃响应系数。式中，上标  $\sim$  表示预测， $k+i|k$  表示在  $t=kT$  时刻预测  $t=(k+i)T$  时刻。

同样，如果考虑到现在和未来  $M$  个时刻控制增量的变化，在  $t=kT$  时刻预测在控制增量  $\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+M-1)$  作用下系统在未来  $P$  个时刻的输出为

$$\tilde{y}_{PM}(k) = \tilde{y}_{P0}(k) + A\Delta u_M(k) \quad (2-2)$$

式中  $\tilde{y}_{P0}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_0(k+P|k) \end{bmatrix}$  为  $t=kT$  时刻预测的无控制增量时未来  $P$  个时刻的系统

输出。  $\tilde{y}_{PM}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_M(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_M(k+P|k) \end{bmatrix}$  为  $t=kT$  时刻预测的有  $M$  个控制增量  $\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+M-1)$  时未来  $P$  个时刻的系统输出。

$\Delta u(k+M-1)$  时未来  $P$  个时刻的系统输出。  $\Delta u_M(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+M-1) \end{bmatrix}$  为从现在起

$M$  个时刻的控制增量。  $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_p & a_{p-1} & \cdots & a_{p-M+1} \end{bmatrix}$  称为动态矩阵，其元素为描述系统

动态特性的阶跃响应系数。

## 2.2 滚动优化

DMC是一种以优化确定控制策略的算法。在采样时刻 $t=kT$ 的优化性能指标可取为

$$\min J(k) = \sum_{i=1}^P q_i [\omega(k+i) - \tilde{y}_M(k+i|k)]^2 + \sum_{j=1}^M r_j \Delta u^2(k+j-1) \quad (2-3)$$

即通过选择该时刻起 $M$ 个时刻的控制增量 $\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+M-1)$ ，使系统在未来 $P(N \geq P \geq M)$ 个时刻的输出值 $\tilde{y}_M(k+1|k), \dots, \tilde{y}_M(k+P|k)$ 尽可能接近其期望值 $\omega(k+1), \dots, \omega(k+P)$ 。性能指标中的第二项是对控制增量的约束，即不允许控制量的变化过于剧烈。式中， $q_i, r_j$ 为权系数， $P$ 和 $M$ 分别称为优化时域长度和控制时域长度。

显然，在不同时刻，优化性能指标是不同的，但其相对形式却是一致的，都具有类似于(2-1)的形式，所谓“滚动优化”，就是指优化时域随时间不断地向前推移。

引入向量和矩阵记号

$$\omega_p(k) = \begin{bmatrix} \omega(k+1) \\ \vdots \\ \omega(k+P) \end{bmatrix}, \quad Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_P), \quad R = \text{diag}(r_1, \dots, r_M)$$

则优化性能指标式(2-1)可改写为：

$$\min J(k) = \|\omega_p(k) - \tilde{y}_{PM}(k)\|_Q^2 + \|\Delta u_M(k)\|_R^2 \quad (2-4)$$

式中， $Q, R$ 分别称为误差权矩阵和控制权矩阵。

在不考虑输入输出约束的情况下，在 $t=kT$ 时刻， $\omega_p(k), y_{p0}(k)$ 均为已知，使 $J(k)$ 。

取最小的 $\Delta u_M(k)$ 可通过极值必要条件 $\frac{dJ(k)}{d\Delta u_M(k)}$ 求得

$$\Delta u_M(k) = (A^T Q A + R)^{-1} A^T Q (\omega_p(k) - \tilde{y}_{p0}(k)) \quad (2-5)$$

这就是 $t=kT$ 时刻解得的最优控制增量序列。由于这一最优解完全是基于预测模型求得的因而是开环最优解。

## 2.3 反馈校正

由于模型误差、弱非线性特性及其它在实际过程中存在的不确定因素，按预测模型式(2-2)得到的开环最优控制规律式(2-5)不一定能导致系统输出紧密地跟随期望值，它也不能顾及对象受到的扰动。为了纠正模型预测与实际的不一致，必须及时地利用过程的误差信息对输出预测值进行修正，而不应等到这 $M$ 个控制增量都实施后再作校正。为此，在 $t=kT$ 时刻首先实施 $\Delta u_M(k)$ 中的第一个控制作用

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= c^T \Delta u_M(k) = \\ & c^T (A^T Q A + R)^{-1} A^T Q [\omega_p(k) - \tilde{y}_{p0}(k)] = \\ & d^T [\omega_p(k) - \tilde{y}_{p0}(k)]\end{aligned}\quad (2-6)$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (2-7)$$

其中

$$c^T = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$$

$$d^T = c^T (A^T Q A + R)^{-1} A^T Q = (d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_p) \quad (2-8)$$

由于 $\Delta u(k)$ 已作用于对象，对系统未来输出的预测便要叠加上 $\Delta u(k)$ 产生的影响，即由式(2-1)算出 $\tilde{y}_{N1}(k)$ 。到下一个采样时刻 $t=(k+1)T$ ，不是继续实施最优解 $\Delta u_M(k)$ 中的第二个分量 $\Delta u(k+1)$ ，而是检测系统的实际输出 $y(k+1)$ ，并与按模型预测算得的该时刻输出，即 $\tilde{y}_{N1}(k)$ 中的第一个分量 $\tilde{y}_1(k+1|k)$ 进行比较，构成预测误差。

$$e(k+1) = y(k+1) - \tilde{y}_1(k+1|k) \quad (2-9)$$



这一误差反映了模型中未包含的各种不确定因素，如模型失配、干扰等。由于预测误差的存在，以后各时刻输出值的预测也应在模型预测的基础上加以校正，这些未来误差的预测，可通过对现时误差 $e(k+1)$ 加权系数 $h_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 得到

$$\tilde{y}_{cor}(k+1) = \tilde{y}_{N1}(k) + he(k+1) \quad (2-10)$$

式中  $\tilde{y}_{cor}(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{cor}(k+1|k+1) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{cor}(k+N|k+1) \end{bmatrix}$  为 $t=(k+1)T$ 时刻经误差校正后所预测的系统

在 $t=(k+i)T$  ( $i=1, \dots, N$ ) 时刻的输出.  $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$  为误差校正向量，其中， $h_1$

$=1$ 。

经校正后的 $\tilde{y}_{cor}(k+1)$ 的各分量中。除第一项外。其余各项分别是 $t=(k+1)T$ 时刻在尚无 $\Delta u(k+1)$ 等未来控制增量作用时对输出在 $t=(k+2)T, \dots, (k+N)T$ 时刻的预测值，它们可作为 $t=(k+1)T$ 时刻 $\tilde{y}_{N0}(k+1)$ 的前 $N-1$ 个分量，即

$$\tilde{y}_0(k+1+i|k+1) = \tilde{y}_{cor}(k+1+i|k+1), i=1, \dots, N-1$$

而 $\tilde{y}_{N0}(k+1)$ 中的最后一个分量。即 $t=(k+1)T$ 时刻对 $t=(k+1+N)T$ 输出的预测，可由 $\tilde{y}_0(k+N|k+1)$ 来近似，即 $\tilde{y}_0(k+N|k+1) = \tilde{y}_{cor}(k+N|k+1)$ ，上述关系可用向量形式表示

$$\tilde{y}_{N0}(k+1) = S \cdot \tilde{y}_{cor}(k+1) \quad (2-11)$$

其中 $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$  为移位矩阵。

在 $t=(k+1)T$ 时刻，有了 $\tilde{y}_{N_0}(k+1)$ ，就又可以像上面所述 $t=kT$ 时刻那样进行新的预测优化，整个控制就是在这样推移的过程中滚动进行。

由此可以看到，整个动态矩阵控制算法是由预测、控制、校正三部分组成的，该算法结构可用图2-1加以描述。图中粗箭头表示向量流，细箭头表示纯量流。在每一个采样时刻未来 $P$ 个时刻的期望输出与预测输出所构成的偏差向量按式(2-6)与动态向量 $d^T$ 点乘。得到该时刻的控制增量 $\Delta u(k)$ 。这一控制增量一方面通过数字积分(累加)运算求出控制量 $u(k)$ 作用于对象；另一方面与阶跃响应向量 $a$ 相乘，并按式(2-1)计算出在其作用后所预测的系统输出 $\tilde{y}_{N_1}(k)$ 。到了下一个采样时刻，首先测定系统的实际输出 $y(k+1)$ ，并与原来预测的该时刻的值相比较。按(2-9)算出预测误差 $e(k+1)$ 。这一误差与校正向量 $h$ 相乘后，再按式(2-10)校正预测的输出值。由于时间的推移，经校正的预测输出 $\tilde{y}_{cor}(k+1)$ 将按式(2-11)移位，并置定为该时刻的预测初值 $\tilde{y}_{N_0}(k+1)$ 。图中的 $z^{-1}$ ，表示时移算子，如果把新的时刻重新定义为 $k$ 时刻，则预测初值 $\tilde{y}_{N_0}(k)$ 的前 $P$ 个分量将与期望输出一起，参与新时刻控制增量的计算。如此循环，整个过程将反复在线进行。

DMC算法是一种增量算法。可以证明，不管有否模型误差，它总能将系统输出调节到期望值而不产生静差。对于作用在对象输入端的阶跃形式的扰动，该算法也总能使系统输出回复到原来的设定状态。

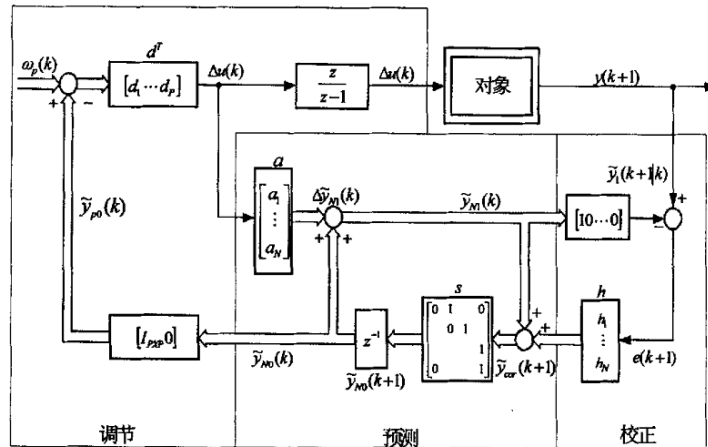


图 2 DMC 算法结构

### 3 多变量 DMC 算法实现

MATLAB（矩阵实验室，MATRIX LABORATORY）程序设计语言是美国 The MathWorks 公司于 20 世纪 80 年代中期推出的高性能数值计算软件。

动态矩阵控制算法的基本编程原理：

- ①建立系统的阶跃响应序列模型 $\{a_{ij}(t)\}, t = 1, 2, \dots, N$ ;
- ②选取预测步数  $p$ ，构造  $S$ ，求出  $S^T$ ， $S^T S$ ， $(S^T S + \lambda I)^{-1}$  以及  $(S^T S + \lambda I)^{-1} S^T$  的第一行；
- ③ $t$  时刻采样得到  $y_t$ ，做预测，求  $Y^1 = (\hat{y}_{t+k|t}^1 \quad \hat{y}_{t+k+1|t}^1 \quad \dots \quad \hat{y}_{t+k+p-1|t}^1)^T$ ；
- ④设定值的柔化，选取柔化因子  $\alpha$ ，求柔化设定值序列  $W$ ；
- ⑤求即时控制量  $u_t = u_{t-1} + \bar{S}^T (W - Y^1)$ ；
- ⑥输出  $u_t, t = t+1$ ，若  $\lambda$  为恒值，转③；否则转②。
- ⑦多变量预测控制问题，针对每个输入输出分别进行一次②至⑥

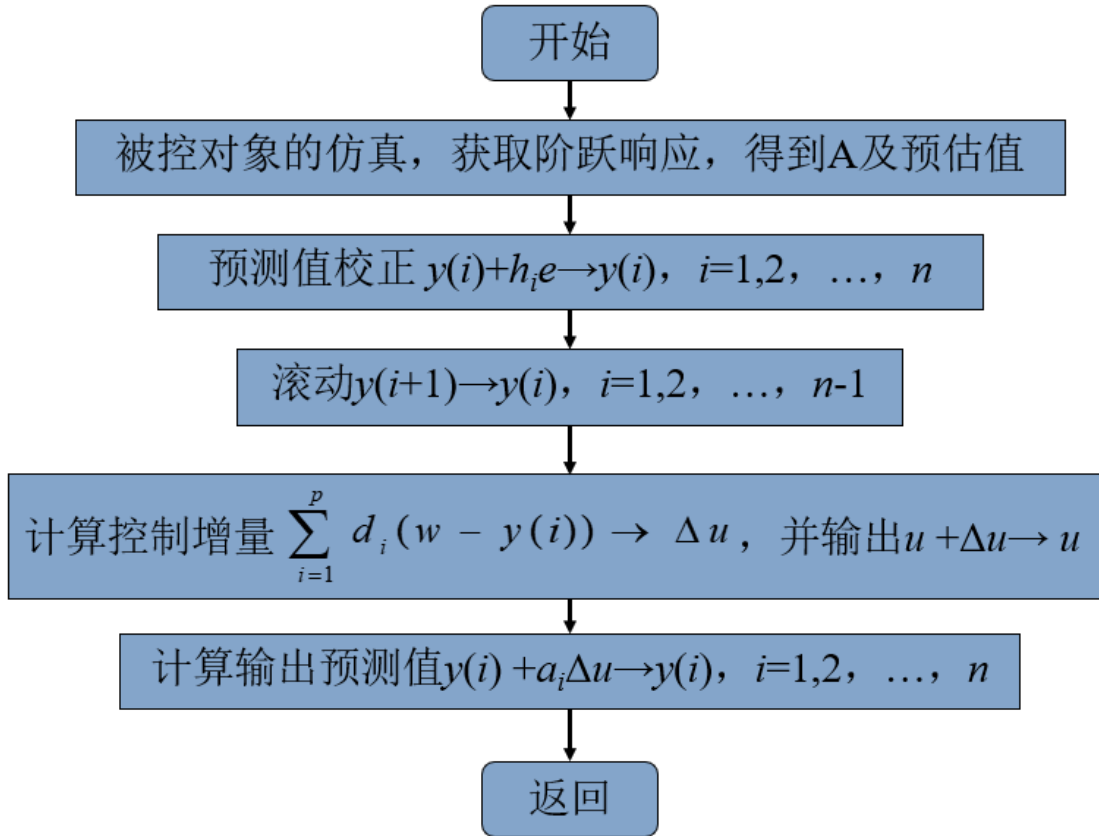


图 3 算法流程

## 4 实验结果和参数整定

### 4.1 系统建立

本文建立了一个两输入两输出的多变量系统，其系统的输入输出关系如下：

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{cases}$$

换算成矩阵表示，可写为：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

其中，称  $G = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$  为该系统的传递函数矩阵，对于本次设计的系统，传递函数矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} \frac{5}{3s^2 + s + 3} & \frac{3}{s^2 + 2s + 5} \\ \frac{5}{2s^2 + s + 7} & \frac{5}{2s^2 + 3s + 6} \end{bmatrix}$$

其阶跃响应如下图 4：

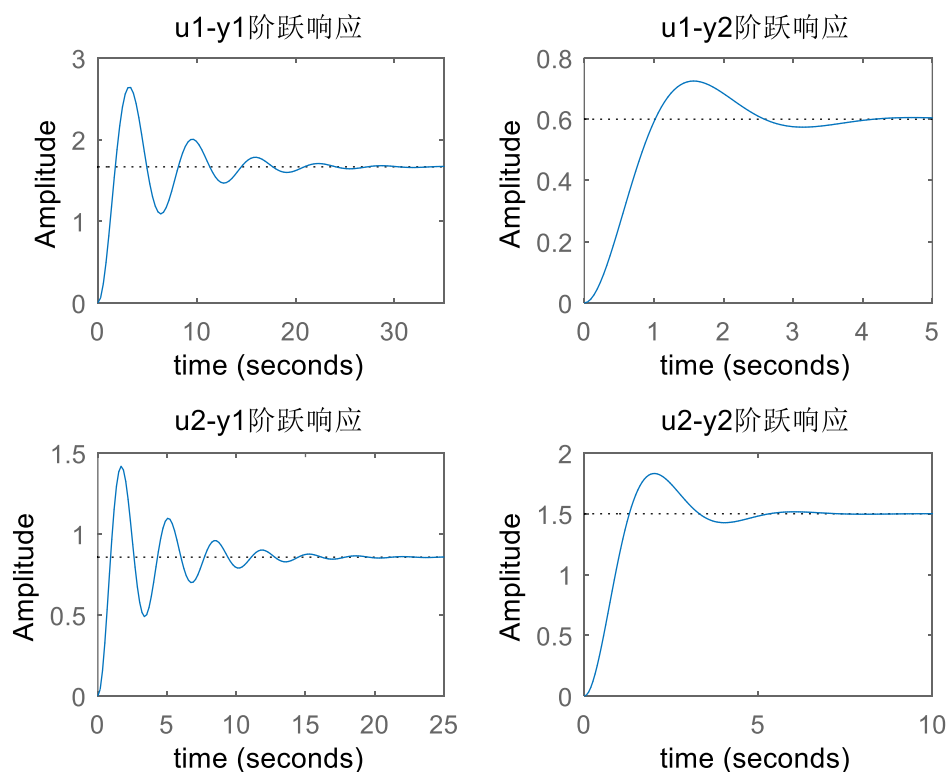


图 4 模型阶跃响应

## 4.2 参数选定

### 1. 建模时域 N

根据模型的四个阶跃响应，因为采样周期为  $T=0.5s$ ，所以取建模时域  $N=40$ ，以使  $a_N$  近似得达到阶跃响应的稳态值  $a_\infty$ 。

### 2. 优化时域 P

优化时域 P 的选取至少要使所有输入的阶跃响应的震荡经历一个周期，通过观察阶跃响应，在  $T=6s$  时，阶跃响应的主要动态部分已经展现完毕，因此，取  $P=12$ ，即可达到要求。

### 3. 控制时域 M

该系统是一个包含了振荡的比较复杂的对象，根据经验，取  $M=6$ 。

### 4. 误差权矩阵 Q

经过反复调参，最终确定误差权矩阵 Q 的值如下：

$$Q = \text{block} - \text{diag}(Q_1, Q_2)$$

$$Q_1 = 3I_P$$

$$Q_2 = I_P$$

### 5. 控制权矩阵 R

经过反复调参，最终确定误差权矩阵 Q 的值如下：

$$R = \text{block} - \text{diag}(R_1, R_2)$$

$$R_1 = 400I_M$$

$$R_2 = 300I_M$$

### 6. 校正参数矩阵 H

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{40 \times 2}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{40 \times 2}$$

### 4.3 控制结果

在参数调节的过程中，我发现如果某一输出 $y_i$ 的响应过程特别慢，那么加大 $Q_i$ 中的元素，可以增大跟踪误差的权重，加快 $y_i$ 的动态过程；

如果某一输出 $y_i$ 的变化特别剧烈，那么加大 $R_j$ 中的元素，可以加强对变化的抑制，减缓 $y_i$ 的变化。

最终经过模型的参数整定，我获得了如图 5 所示的控制结果：

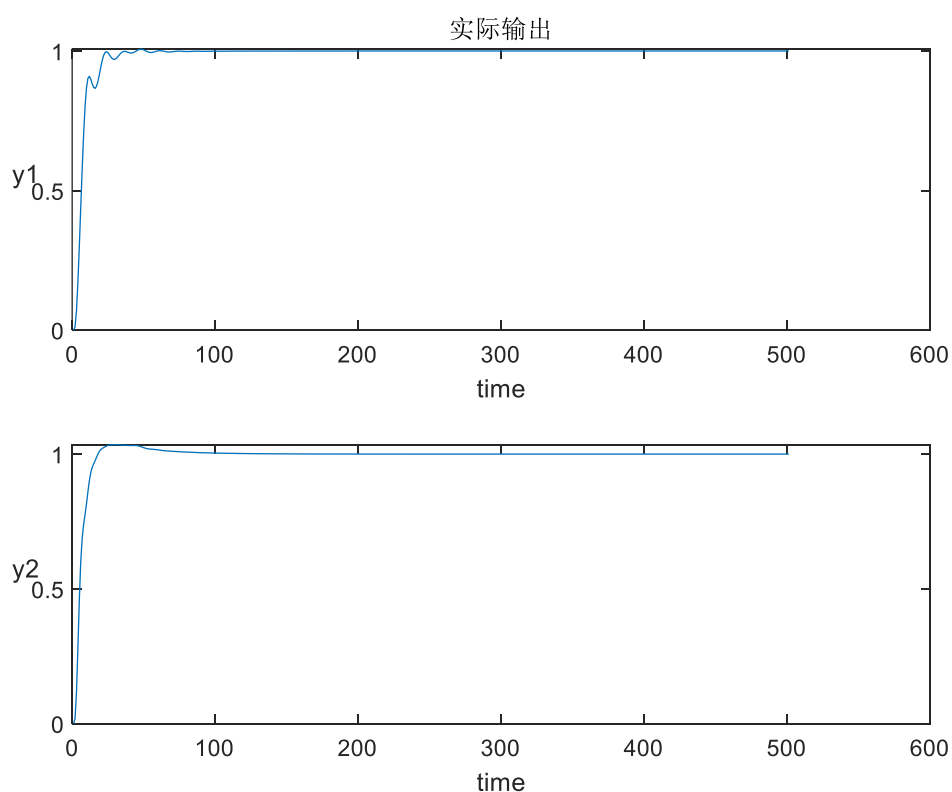


图 5 模型控制结果

如图 5 可以看出，模型的控制结果比较理想，基本能近似阶跃响应。输出  $y_1$  有抖动的情況存在，在尝试了多组  $Q$ 、 $R$  参数的选择之后，进行了最大程度得消除抖动。

## 5 总结

经过本次的课程设计，我掌握了多变量 DMC 预测控制算法的基本流程，体验了算法中的各项参数对 DMC 系统的影响并通过自己的努力寻找到了合适的控制参数，让系统的响应曲线的效果更好。

同时，我意识到了以下三点：模型的功能实现在于未来预测的输出值、控制器则决定了系统输出动态特性、校正器则只有当预测误差存在时才起作用。算是更加深入地了解 DMC 的本质特点。

总的来说，基于对象阶跃相应模型的动态矩阵控制是复杂工业控制系统优化和计算机技术飞速发展相结合的产物，由于该算法具有建立模型方便、采用滚动优化策略和采用模型误差反馈校正等优点因而在石油、化工、电力等工业过程控制领域得到了广泛应用。虽然 DMC 的研究在理论定量分析方面有许多困难，但它的应用状况和发展前景却是乐观的，因此，只要加强对 DMC 理论及其应用研究，就能推动 DMC 的不断发展。